

**Gebietserkennung in der
elektrischen Impedanztomographie**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der

Universität Karlsruhe

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. techn. Martin Brühl

aus Wissen

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Januar 1999

Referent: Prof. Dr. Martin Hanke-Bourgeois

Korreferent: Prof. Dr. Andreas Kirsch

Ich will diese Gelegenheit nicht verstreichen lassen, all jenen meinen Dank auszudrücken, die mir während der letzten Jahre mit Rat und Tat zur Seite standen.

Insbesondere danke ich

- meinem Doktorvater Prof. Dr. Martin Hanke für die *brüderliche* Betreuung meiner Promotion,
- Prof. Dr. Andreas Kirsch, dessen Arbeit letztlich den Anstoß für diese Dissertation bildete, für die zahlreichen über die „bloße“ Übernahme des Korreferats hinausgehenden Diskussionen,
- meinem „Chef“, Prof. Dr. W. Niethammer, an dessen Institut ich in den letzten Jahren beschäftigt war, für die durch ihn erfahrene Förderung,
- Prof. Mike Pidcock für seine Gastfreundschaft bei meinem Besuch an der Oxford Brookes University und für den fruchtbaren Gedankenaustausch während seines Aufenthalts in Karlsruhe,
- allen Kollegen (auch den ehemaligen) des Instituts für Praktische Mathematik für manch anregendes Gespräch sowie für die angenehme Arbeitsatmosphäre,
- und nicht zuletzt meinen Eltern, die mich auf dem von mir eingeschlagenen Weg stets nach besten Kräften unterstützten.

Schließlich danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Förderung.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Das direkte Problem	7
2.1	Neumannsche Randwertaufgaben	7
2.2	Die Neumann-Dirichlet-Abbildung	9
2.3	Diffractionsprobleme	13
2.4	Beispiel: Radialsymmetrische Diffractionsprobleme	17
3	Das inverse Problem	23
3.1	Identifizierbarkeit	24
3.2	Schlechtgestelltheit	26
3.3	Rekonstruktionsverfahren	28
4	Charakterisierung von Inhomogenitäten	31
4.1	Darstellung der Hauptergebnisse	31
4.2	Beweis des Hauptresultats	34
4.2.1	Faktorisierung: $\Lambda_\sigma - \Lambda_{\mathbb{1}} = LFL'$	34
4.2.2	Der Bildraum von $ \tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}} ^{1/2}$	40
4.2.3	Der Bildraum von L	43
4.3	Verallgemeinerungen	46
4.3.1	Unterschiedliche Leitfähigkeitswerte, Isolatoren und perfekte Leiter	46
4.3.2	Nichtkonstante Inhomogenitäten	48
4.3.3	Andere Grundgebiete	49
4.3.4	Der dreidimensionale Fall	52
4.4	Beispiel: Der radialsymmetrische Fall	52

5 Numerische Ergebnisse	57
5.1 Zur Implementierung	57
5.2 Weitere numerische Beispiele	63
Zusammenfassung	69
Literaturverzeichnis	71

Kapitel 1

Einleitung

Kann die elektrische Leitfähigkeitsverteilung im Innern eines Körpers allein dadurch rekonstruiert werden, daß man Stromflüsse an der Körperoberfläche einspeist und dort die entstehenden Spannungsverteilungen mißt? Diese Frage steht im Mittelpunkt der *elektrischen Impedanztomographie* (EIT). Die mathematische Formulierung dieser Fragestellung geht auf Calderón [16] zurück, der im Jahr 1980 folgendes *inverse Randwertproblem* betrachtete: Ist die ortsabhängige Koeffizientenfunktion σ in der elliptischen Differentialgleichung

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \tag{1.1}$$

in einem Gebiet B durch die Neumann- und Dirichlet-Randwerte aller Lösungen u auf dem Rand ∂B eindeutig bestimmt, und, falls ja, wie kann man sie aus diesen Daten rekonstruieren? Im Gegensatz dazu versteht man in diesem Zusammenhang unter dem *direkten Problem* (oder *Vorwärtsproblem*) die Bestimmung des Potentials u bzw. seiner Dirichletrandwerte in Abhängigkeit von den Neumannrandwerten bei bekanntem Leitfähigkeitskoeffizienten σ . Die besonderen Schwierigkeiten bei diesem inversen Problem bestehen in der Nichtlinearität und der Schlechtgestellttheit, d.h. der inhärenten Empfindlichkeit der Leitfähigkeitsrekonstruktion gegenüber Datenstörungen.

Die anfangs angegebene physikalische Interpretation dieses Problems liegt nun auf der Hand, denn das stationäre elektrische Potential u in einem Körper B mit räumlich variierender Leitfähigkeit σ genügt der Differentialgleichung (1.1), während der Stromfluß durch den Rand gerade durch die Neumannrandwerte $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial B}$ und die Randspannung durch die Dirichletwerte $u|_{\partial B}$ dargestellt werden.

Anwendungsmöglichkeiten dieser Technologie wurden anfangs vor allem in der Medizin gesehen [12], weil Organe, Knochen, Fettgewebe, eingeatmete Luft usw. sehr unterschiedliche elektrische Leitfähigkeitswerte aufweisen, die man

mit einer einfachen, preiswerten und für den Organismus unschädlichen Technik abzubilden hoffte. So wurden bereits in der ersten Hälfte der achtziger Jahre Rekonstruktionsverfahren und Meßapparaturen entwickelt, noch bevor überhaupt die Identifizierbarkeit aus mathematischer Sicht geklärt war. In der Folgezeit wurden Fortschritte in vielerlei Hinsicht erzielt: Die Identifizierbarkeit konnte unter gewissen Voraussetzungen an σ geklärt werden und zahlreiche Rekonstruktionsalgorithmen wurden entworfen, wir berichten darüber in Kapitel 3 dieser Arbeit; aber auch die technischen Meßinstrumente wurden immer ausgereifter und neue Anwendungsmöglichkeiten innerhalb der Medizintechnik, aber auch außerhalb erschlossen. Letztere reichen von nichtdestruktiven Prüfmethoden zur Qualitätssicherung in der Produktion über geophysikalische Anwendungen bei der Suche nach Bodenschätzen oder bei der Schadstoffausbreitung im Erdreich, der Überwachung von Mehrphasenströmungen im Chemieingenieurwesen, bis hin zur Steuerung von industriellen Fertigungsprozessen, etwa in der Nahrungsmittelindustrie.

Bei vielen Anwendungen kommt es dabei gar nicht darauf an, die Leitfähigkeit in allen Einzelheiten zu rekonstruieren, da man lediglich an Abweichungen von einem Referenzzustand interessiert ist. Dieses spezielle Problem wird in vorliegender Arbeit behandelt, in der wir als Vergleichszustand eine homogene Leitfähigkeitsverteilung annehmen mit Unregelmäßigkeiten in der Form von *Einschlüssen* mit erhöhten oder erniedrigten Leitfähigkeitswerten, die es zu entdecken gilt.

Verwandt hiermit ist die Problemstellung in der inversen Streutheorie, wo versucht wird, aus dem Vergleich von an einem Hindernis gestreuten Wellen mit den ungestreuten Wellen das Hindernis zu rekonstruieren. Von Kirsch [46] wurde kürzlich eine Charakterisierung der Hindernisse angegeben: Danach liegt ein Testpunkt innerhalb oder außerhalb des Hindernisses, je nachdem, ob die sogenannten Fernfelddaten der Grundlösung bzgl. dieses Testpunktes im Bildraum eines sich aus den gemessenen Fernfelddaten ergebenden Operators enthalten sind. Dies kann in eine vom Prinzip her sehr einfache numerische Rekonstruktionsmethode umgesetzt werden.

In dieser Arbeit übertragen wir die Methode von Kirsch [46] auf das zuvor beschriebene Problem der Erkennung von Einschlüssen in der elektrischen Impedanztomographie. Dabei setzen wir voraus, daß die Einschlüsse im Vergleich zum Hintergrund alle eine niedrigere oder alle eine höhere Leitfähigkeit besitzen. Insbesondere schließt der erste Fall auch elektrisch isolierende und der zweite Fall perfekt leitende Einschlüsse ein. Wir betrachten nun die Randwerte einer Funktion mit einer Dipolsingularität in einem Testpunkt. Dieser Punkt liegt genau dann in einem Einschluß, wenn diese Randwerte im Bildraum eines Operators enthalten sind, der sich aus der *Neumann-Dirichlet-Abbildung* ergibt, also, physikalisch gesehen, der Zuordnung zwischen Randströmen und

gemessenen Randspannungen bei fester Leitfähigkeitsverteilung.

Aus unseren theoretischen Resultaten ergibt sich ein numerisches Verfahren, das gegenüber den existierenden Rekonstruktionsverfahren in der EIT erhebliche Vorteile in sich vereint. Obiges Vorgehen wird einfach auf ein Gitter von Testpunkten angewandt und vermittelt somit ein Bild von der Lage der Leitfähigkeitsinhomogenitäten. Als direktes, also nichtiteratives Verfahren erfordert es kein wiederholtes Lösen des Vorwärtsproblems, eine entsprechende Simulation des Meßvorgangs muß allenfalls zur Bestimmung der Vergleichsdaten für die homogene Referenzleitfähigkeit gelöst werden, sofern diese nicht analytisch oder ebenfalls aus Messungen zur Verfügung stehen. Dies sorgt für einen äußerst geringen Rechenaufwand. Darüberhinaus wird hier die Lösung des ursprünglichen nichtlinearen Problems rekonstruiert, anders als einige herkömmliche Verfahren, die mit linearen Näherungsproblemen arbeiten und so einen teilweisen Informationsverlust in Kauf nehmen.

Unabhängig von der vorliegenden Arbeit hat bereits Hähner [35] die Charakterisierung aus [46] auf das Impedanztomographieproblem übertragen können. Allerdings betrachtet er ausschließlich perfekt leitende Einschlüsse und setzt zudem voraus, daß diese elektrisch geerdet sind oder mathematisch ausgedrückt, daß dort das Potential u den Wert Null hat. Dieser Umstand läßt auch bei ihm wie bei Kirsch die Verwendung von Grundlösungen zu, im Gegensatz zu den von uns benötigten Dipolfunktionen. Wie schon erwähnt, ist unsere Methode aber bei wesentlich allgemeineren Leitfähigkeitsverteilungen anwendbar.

Bei der Herleitung und Darstellung der Resultate beschränken wir uns im folgenden auf den zweidimensionalen Fall; wir wollen aber schon hier klarstellen, daß fast alle Ergebnisse in naheliegender Weise auf den dreidimensionalen Fall übertragen werden können. Auf diesen Punkt gehen wir später noch kurz ein.

Untergliedert ist diese Arbeit wie folgt: Im zweiten Kapitel fassen wir einige bekannte Resultate über das Vorwärtsproblem zusammen und richten dabei unser Augenmerk besonders auf den hier interessierenden Fall stückweise glatter Leitfähigkeiten. Des weiteren wird die für die Formulierung des inversen Problems unerläßliche Neumann-Dirichlet-Abbildung eingeführt mitsamt einer Zusammenstellung ihrer wichtigsten Eigenschaften. Das inverse Problem steht im Mittelpunkt des dritten Kapitels, in dem wir eine Übersicht der in den letzten Jahren erzielten Fortschritte hinsichtlich Identifizierbarkeit und Rekonstruktionsalgorithmen geben. Unser theoretisches Hauptergebnis, die Charakterisierung von Inhomogenitäten anhand der Neumann-Dirichlet-Abbildung wird im für diese Arbeit zentralen vierten Kapitel hergeleitet. Im abschließenden fünften Kapitel beschreiben wir die numerische Implementierung und illustrieren anhand von Beispielen die Anwendbarkeit unseres Algorithmus.

Kapitel 2

Das direkte Problem

Bevor wir uns in den nächsten Kapiteln mit dem inversen Problem befassen, beschäftigen wir uns hier zunächst mit dem Vorwärtsproblem. Nach dem allgemeineren Zugang über die variationelle Form der Randwertaufgaben wird die für die Formulierung des inversen Problems benötigte Neumann-Dirichlet-Abbildung eingeführt und untersucht. Nachfolgend gehen wir auf den für das folgende wichtigen Spezialfall stückweise konstanter Leitfähigkeiten ein, und abschließend betrachten wir das noch speziellere Beispiel mit radialsymmetrischer, stückweise konstanter Leitfähigkeit im Einheitskreis, welches wir im Verlauf dieser Arbeit immer wieder aufgreifen, weil an ihm viele wesentliche Gesichtspunkte explizit veranschaulicht werden können.

Die in diesem Kapitel ohne Beweis zusammengefaßten Ergebnisse können in Standardwerken wie [30] oder [70] nachgelesen werden, denen auch die von uns verwendete Notation entnommen ist, soweit sie hier nicht explizit eingeführt wird.

2.1 Neumannsche Randwertaufgaben

Es sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit hinreichend glattem (etwa $C^{2+\alpha}$) Rand $T = \partial B$. Wir betrachten die Neumannsche Randwertaufgabe

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{in } B, \quad (2.1a)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{auf } T, \quad (2.1b)$$

dabei bezeichne ν den bzgl. B äußeren Normalenvektor auf T . Der Leitfähigkeitskoeffizient $\sigma(x)$ sei beschränkt und es sei

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in B} \sigma(x) > 0; \quad (2.2)$$

damit ist die Differentialgleichung (2.1a) in B elliptisch. Physikalisch bedeutet dies, daß elektrisch perfekt leitende sowie isolierende Gebiete ausgeschlossen sind, vgl. hierzu aber Bemerkung 2.2.

In dieser Arbeit wird, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, immer der schwache Lösungsbegriff verwendet. Damit können auch für unstetige Leitfähigkeiten σ und Stromflüsse f Lösungen des Randwertproblems (2.1) erklärt werden. Hierzu führen wir einige Bezeichnungen ein.

Mit $\langle \psi, \phi \rangle_{L^2(T)} = \oint_T \psi \phi \, ds$ wird das Innenprodukt in $L^2(T)$ bezeichnet, das sich als Bilinearform auf das Dualsystem $\langle H^{-1/2}(T), H^{1/2}(T) \rangle$ fortsetzen läßt; hierfür wird dieselbe Notation verwendet.

Es bezeichne $\mathbb{1}$ die konstante Funktion, $\mathbb{1}(x) = 1$ für alle $x \in T$; somit ist $L_\diamond^2(T) = \{\phi \in L^2(T) : \langle \phi, \mathbb{1} \rangle_{L^2(T)} = 0\}$ der abgeschlossene Unterraum von $L^2(T)$ derjenigen Funktionen mit verschwindendem Integralmittel über T . Entsprechend werden auch die Unterräume $H_\diamond^{\pm 1/2}(T)$ der Sobolevräume $H^{\pm 1/2}(T)$ definiert,

$$H_\diamond^{\pm 1/2}(T) = \{\phi \in H^{\pm 1/2}(T) : \langle \phi, \mathbb{1} \rangle_{L^2(T)} = 0\}.$$

Wir identifizieren $H_\diamond^{-1/2}(T)$ mit dem Dualraum $(H_\diamond^{1/2}(T))'$ von $H_\diamond^{1/2}(T)$ bzgl. der von $L^2(T)$ induzierten Topologie: Definitionsgemäß erhält man $(H_\diamond^{1/2}(T))'$ aus der Vervollständigung von $L_\diamond^2(T)$ bzgl. der dualen Norm

$$\|\cdot\|_{H^{-1/2}(T)} = \sup_{\phi \in H_\diamond^{1/2}(T)} \frac{\langle \cdot, \phi \rangle_{L^2(T)}}{\|\phi\|_{H^{1/2}(T)}},$$

was auf ein Gelfandtripel $H_\diamond^{1/2}(T) \hookrightarrow L_\diamond^2(T) \hookrightarrow (H_\diamond^{1/2}(T))'$ mit kompakten, injektiven Einbettungen und jeweils dichtem Bildraum führt.

Der Nullraum der Einbettung $H^{-1/2}(T) = (H^{1/2}(T))' \hookrightarrow (H_\diamond^{1/2}(T))'$ ist eindimensional und wird durch die Funktion $\mathbb{1}$ aufgespannt. Der Homomorphiesatz, angewandt auf diese Einbettung, liefert nun

$$(H_\diamond^{1/2}(T))' \cong H^{-1/2}(T) / \operatorname{span}\{\mathbb{1}\};$$

dies rechtfertigt die Identifikation von $(H_\diamond^{1/2}(T))'$ und $H_\diamond^{-1/2}(T)$. Die Definition dieser Räume auf anderen geschlossenen Kurven erfolgt analog.

Schließlich sei noch

$$H_\diamond^1(B) = \{\phi \in H^1(B) : \phi|_T \in H_\diamond^{1/2}(T) \subset L_\diamond^2(T)\};$$

aufgrund des Spursatzes ist $H_\diamond^1(B)$ wohldefiniert. Wegen der Poincaré-Ungleichung [67, Satz 28.3]

$$\|u\|_{H^1(B)}^2 \leq c \left(\left| \oint_T u \, ds \right|^2 + \int_B |\nabla u|^2 \, dx \right)$$

ist die Norm

$$\|u\|_{H_\diamond^1(B)}^2 := \int_B |\nabla u|^2 \, dx$$

in $H_\diamond^1(B)$ zur $H^1(B)$ -Norm äquivalent.

Die schwache Form der Randwertaufgabe (2.1) lautet nun:

$$\text{Bestimme } u \in H^1(B) : \quad \int_B \sigma \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \langle f, \phi \rangle_{L^2(T)} \quad \forall \phi \in H^1(B). \quad (2.3)$$

Dieses Problem ist für $f \in H^{-1/2}(T)$ genau dann lösbar, wenn $\langle f, \mathbb{1} \rangle_{L^2(T)} = 0$, und in diesem Fall ist die Lösung bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt, demzufolge existiert eine eindeutige Lösung $u \in H_\diamond^1(B)$. Der Lösungsoperator $f \mapsto u$ ist linear und stetig als Abbildung $H_\diamond^{-1/2}(T) \rightarrow H_\diamond^1(B)$.

2.2 Die Neumann-Dirichlet-Abbildung

In der elektrischen Impedanztomographie kann bei gegebener Leitfähigkeit σ das zugehörige Spannungspotential u_σ nur am Rand des Gebiets B gemessen werden, dies sind die Dirichletrandwerte von u_σ . Beobachtet wird also die sogenannte *Neumann-Dirichlet-Abbildung*

$$\Lambda_\sigma : \begin{cases} H_\diamond^{-1/2}(T) \longrightarrow H_\diamond^{1/2}(T), \\ f \longmapsto \Lambda_\sigma f = u_\sigma|_T. \end{cases} \quad (2.4)$$

Λ_σ erhält man aus der Verknüpfung des erwähnten Lösungsoperators $f \mapsto u_\sigma$ mit dem Spuroperator $u \mapsto u|_T$; letzterer ist stetig als Abbildung $H_\diamond^1(B) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(T)$, daher ist auch Λ_σ ein stetiger linearer Operator in der in (2.4) angegebenen Topologie.

Darüberhinaus ist $\Lambda_\sigma : H_\diamond^{-1/2}(T) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(T)$ sogar ein Isomorphismus. Denn einerseits ist das Dirichletproblem

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{in } B, \quad u = g \quad \text{auf } T,$$

eindeutig lösbar mit stetigen Lösungsoperator $H_\diamond^{1/2}(T) \rightarrow H_\diamond^1(B)$, $g \mapsto u_\sigma$. Andererseits liegt das Stromfeld $\sigma \nabla u_\sigma$ in $H(\operatorname{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2 : \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$ und wegen der Stetigkeit von

$$H(\operatorname{div}, B) \longrightarrow H_\diamond^{-1/2}(T), \quad \mathbf{v} \longmapsto (\nu \cdot \mathbf{v})|_T,$$

vgl. [31, Thm. 2.5], folgt für die Lösung u_σ eine Abschätzung

$$\left\| \sigma \frac{\partial u_\sigma}{\partial \nu} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c \cdot \|u_\sigma\|_{H_\diamond^1(B)}. \quad (2.5)$$

Insgesamt resultiert daraus die Beschränktheit der *Dirichlet-Neumann-Abbildung* $\Lambda_\sigma^{-1} : H_\diamond^{1/2}(T) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(T)$, $g \mapsto \sigma \frac{\partial u_\sigma}{\partial \nu}|_T$. Also ist Λ_σ stetig invertierbar.

Wir fassen weitere Eigenschaften von Λ_σ zusammen, siehe dazu auch z.B. [32].

Lemma 2.1. *Es seien $\sigma, \bar{\sigma}$ beschränkte Leitfähigkeiten, welche der Bedingung (2.2) genügen, und $0 \neq f, \hat{f} \in H_\diamond^{-1/2}(T)$. Dann gilt:*

- (a) $\langle f, \Lambda_\sigma \hat{f} \rangle_{L^2(T)} = \langle \hat{f}, \Lambda_\sigma f \rangle_{L^2(T)}$,
- (b) $\langle f, \Lambda_\sigma f \rangle_{L^2(T)} > 0$,
- (c) $\langle f, \Lambda_\sigma f \rangle_{L^2(T)} > \langle f, \Lambda_{\bar{\sigma}} f \rangle_{L^2(T)} \quad \text{für } \sigma \leq \bar{\sigma}, \sigma \neq \bar{\sigma}$,
- (d) $\langle f, \Lambda_{\lambda\sigma + (1-\lambda)\bar{\sigma}} f \rangle_{L^2(T)} < \lambda \langle f, \Lambda_\sigma f \rangle_{L^2(T)} + (1-\lambda) \langle f, \Lambda_{\bar{\sigma}} f \rangle_{L^2(T)}$
für $0 < \lambda < 1$ und $\sigma \neq \bar{\sigma}$.

Beweis. Seien $u_\sigma, \hat{u}_\sigma \in H_\diamond^1(B)$ die Lösungen von (2.3) für die Neumann-Randwerte f, \hat{f} . Einsetzen von \hat{u}_σ bzw. u_σ in die jeweilige schwache Formulierung liefert dann

$$\langle f, \Lambda_\sigma \hat{f} \rangle_{L^2(T)} = \int_B \sigma \nabla u_\sigma \cdot \nabla \hat{u}_\sigma \, dx = \langle \hat{f}, \Lambda_\sigma f \rangle_{L^2(T)},$$

also (a). Für $\hat{f} = f$ erhält man außerdem

$$\langle f, \Lambda_\sigma f \rangle_{L^2(T)} = \int_B \sigma |\nabla u_\sigma|^2 \, dx > 0$$

(letzteres, weil für nichtkonstantes f die Lösung u_σ nicht konstant sein kann), dies ist Behauptung (b).

Der Beweis von (c) und (d) beruht auf dem Dirichletprinzip für das Neumann-Problem (2.3), daß nämlich u_σ auch als eindeutige Lösung des Minimierungsproblems

$$\frac{1}{2} \int_B \sigma |\nabla u|^2 dx - \langle f, u \rangle_{L^2(T)} \longrightarrow \min_{u \in H_\diamond^1(B)} ! \quad (2.6)$$

charakterisiert werden kann; der Wert des Minimums ist dann $-\frac{1}{2} \langle f, u_\sigma \rangle_{L^2(T)} = -\frac{1}{2} \langle f, \Lambda_\sigma f \rangle_{L^2(T)}$. Wenden wir dies für u_σ und $u_{\bar{\sigma}}$ an, so ergibt sich für $\sigma \leq \bar{\sigma}$, $\sigma \neq \bar{\sigma}$, die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \langle f, \Lambda_\sigma f \rangle_{L^2(T)} &= \frac{1}{2} \int_B \sigma |\nabla u_\sigma|^2 dx - \langle f, u_\sigma \rangle_{L^2(T)} \\ &< \frac{1}{2} \int_B \sigma |\nabla u_{\bar{\sigma}}|^2 dx - \langle f, u_{\bar{\sigma}} \rangle_{L^2(T)} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_B \bar{\sigma} |\nabla u_{\bar{\sigma}}|^2 dx - \langle f, u_{\bar{\sigma}} \rangle_{L^2(T)} = -\frac{1}{2} \langle f, \Lambda_{\bar{\sigma}} f \rangle_{L^2(T)} \end{aligned}$$

(die erste, strikte Ungleichung folgt aus der eindeutigen Lösbarkeit von (2.6)), woraus (c) folgt. Ähnlich folgt Behauptung (d) aus

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \langle f, \Lambda_{\lambda\sigma + (1-\lambda)\bar{\sigma}} f \rangle_{L^2(T)} \\ &= \frac{1}{2} \int_B (\lambda\sigma + (1-\lambda)\bar{\sigma}) |\nabla u_{\lambda\sigma + (1-\lambda)\bar{\sigma}}|^2 dx - \langle f, u_{\lambda\sigma + (1-\lambda)\bar{\sigma}} \rangle_{L^2(T)} \\ &= \lambda \left(\frac{1}{2} \int_B \sigma |\nabla u_{\lambda\sigma + (1-\lambda)\bar{\sigma}}|^2 dx - \langle f, u_{\lambda\sigma + (1-\lambda)\bar{\sigma}} \rangle_{L^2(T)} \right) \\ &\quad + (1-\lambda) \left(\frac{1}{2} \int_B \bar{\sigma} |\nabla u_{\lambda\sigma + (1-\lambda)\bar{\sigma}}|^2 dx - \langle f, u_{\lambda\sigma + (1-\lambda)\bar{\sigma}} \rangle_{L^2(T)} \right) \\ &> \lambda \left(\frac{1}{2} \int_B \sigma |\nabla u_\sigma|^2 dx - \langle f, u_\sigma \rangle_{L^2(T)} \right) \\ &\quad + (1-\lambda) \left(\frac{1}{2} \int_B \bar{\sigma} |\nabla u_{\bar{\sigma}}|^2 dx - \langle f, u_{\bar{\sigma}} \rangle_{L^2(T)} \right) \\ &= \lambda \left(-\frac{1}{2} \langle f, \Lambda_\sigma f \rangle_{L^2(T)} \right) + (1-\lambda) \left(-\frac{1}{2} \langle f, \Lambda_{\bar{\sigma}} f \rangle_{L^2(T)} \right). \quad \square \end{aligned}$$

Schränken wir Λ_σ auf $L_\diamond^2(T)$ ein, dann kann die Neumann-Dirichlet-Abbildung auch als Operator $L_\diamond^2(T) \rightarrow L_\diamond^2(T)$ aufgefaßt werden; in dieser Topologie bezeichnen wir die Neumann-Dirichlet-Abbildung mit $\tilde{\Lambda}_\sigma$. Der formale Zusammenhang ist durch

$$\tilde{\Lambda}_\sigma = \iota \Lambda_\sigma \iota' \quad (2.7)$$

gegeben, wobei ι die (kompakte) Einbettung $H_\diamond^{1/2}(T) \hookrightarrow L_\diamond^2(T)$ und ι' als der zu ι duale Operator die (ebenfalls kompakte) Einbettung $L_\diamond^2(T) \hookrightarrow H_\diamond^{-1/2}(T)$ sei.

Aus Lemma 2.1(a),(b) folgt, daß $\tilde{\Lambda}_\sigma$ selbstadjungiert und positiv ist. Jedoch ist $\tilde{\Lambda}_\sigma$ nicht positiv definit, wie man aus der (aus (2.7) offensichtlichen) Kompaktheit von $\tilde{\Lambda}_\sigma$ unmittelbar schließt. Teile (c) und (d) von Lemma 2.1 besagen, daß $\tilde{\Lambda}_\sigma$ bzgl. der Leitfähigkeit σ streng monoton fallend und strikt konvex ist.

Über die Kompaktheit hinausgehend zeigt das nächste Lemma, daß $\tilde{\Lambda}_\sigma$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Wir erinnern daran, daß ein kompakter Operator $K : L_\diamond^2(T) \rightarrow L_\diamond^2(T)$ genau dann ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, wenn für eine (beliebige) Orthonormalbasis $\{f_j\}$ von $L_\diamond^2(T)$

$$\|K\|_{\text{HS}}^2 := \sum_j \|K f_j\|_{L_\diamond^2(T)}^2 < \infty$$

gilt [68]. Ist K selbstadjungiert, dann ist diese Bedingung äquivalent zur quadratischen Summierbarkeit der Eigenwerte $\{\lambda_j\}$ von K und es ist

$$\|K\|_{\text{HS}}^2 = \sum_j \lambda_j^2.$$

Lemma 2.2. $\tilde{\Lambda}_\sigma : L_\diamond^2(T) \rightarrow L_\diamond^2(T)$ ist ein Hilbert-Schmidt-Operator.

Beweis. Aus der Beschränktheit von $\Lambda_\sigma : H_\diamond^{-1/2}(T) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(T)$ folgt für $f \in L_\diamond^2(T)$

$$\begin{aligned} \langle f, \tilde{\Lambda}_\sigma f \rangle_{L^2(T)} &= \langle f, \Lambda_\sigma f \rangle_{L^2(T)} \leq c \|f\|_{H^{-1/2}(T)} \|\Lambda_\sigma f\|_{H^{1/2}(T)} \\ &\leq c \|\Lambda_\sigma\|_{H^{1/2}(T) \leftarrow H^{-1/2}(T)} \|f\|_{H^{-1/2}(T)}^2. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Norm in $H_\diamond^s(T)$ wird auf den Fall des Einheitskreises zurückgeführt, vgl. [51, Thm. 8.13]. So erhält man für die auf T nach der Bogenlänge τ parametrisierte Funktion $f(\tau) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(\frac{2\pi}{|T|} k\tau) + \beta_k \sin(\frac{2\pi}{|T|} k\tau))$ durch

$$\|f\|_{H_\diamond^s(T)} = \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k^{2s} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right)^{1/2}$$

eine Norm, die zu anderen Normen in $H_\diamond^s(T)$ äquivalent ist, siehe auch (2.25) in Abschnitt 2.4.

Nach diesen Vorbereitungen schätzen wir nun die Eigenwerte von $\tilde{\Lambda}_\sigma$ mit Hilfe des Minmaxprinzips (vgl. [51, Thm. 15.14]) ab:

$$\begin{aligned} \lambda_{2k+1} &\leq \sup \left\{ \frac{\langle f, \tilde{\Lambda}_1 f \rangle_{L^2(T)}}{\|f\|_{L^2(T)}^2} : f \perp \cos\left(\frac{2\pi}{|T|}l\tau\right), \sin\left(\frac{2\pi}{|T|}l\tau\right), \quad l = 1, \dots, k \right\} \\ &\leq \frac{c^2}{\sigma_{\min}} \sup \left\{ \frac{\|f\|_{H^{-1/2}(T)}^2}{\|f\|_{L^2(T)}^2} : f \perp \cos\left(\frac{2\pi}{|T|}l\tau\right), \sin\left(\frac{2\pi}{|T|}l\tau\right), \quad l = 1, \dots, k \right\} \\ &\leq C \sup \left\{ \frac{\sum_{l>k} \frac{1}{l} (\alpha_l^2 + \beta_l^2)}{\sum_{l>k} (\alpha_l^2 + \beta_l^2)} \right\} = \frac{C}{k+1}. \end{aligned}$$

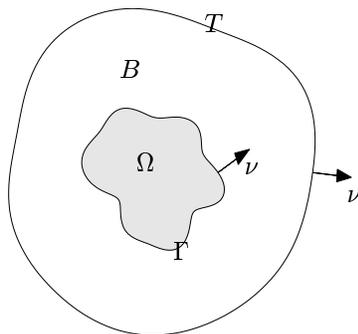
Somit ist $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, also $\tilde{\Lambda}_\sigma$ ein Hilbert-Schmidt-Operator. \square

2.3 Diffraktionsprobleme

In den restlichen Abschnitten dieses Kapitels betrachten wir den Spezialfall, daß die Leitfähigkeit stückweise konstant ist. Zur Vereinfachung der Darstellung gehen wir zunächst von folgenden Annahmen aus.

Es sei $\Omega \Subset B$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit hinreichend glattem (etwa $C^{2+\alpha}$) Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Mit ν wird auf T der bzgl. B äußere Normalenvektor bezeichnet, auf Γ sei ν die bzgl. Ω äußere Normale, vgl. nebenstehende Skizze. Der Leitfähigkeitskoeffizient σ sei von der Form

$$\sigma(x) = \begin{cases} \kappa & \text{für } x \in \Omega, \\ 1 & \text{für } x \in B \setminus \overline{\Omega}, \end{cases} \quad (2.8)$$



mit einer Konstanten $0 < \kappa \neq 1$.

Für das zugehörige Randwertproblem kann man auch eine starke Form angeben. Dazu beachten wir zunächst, daß u_σ in den beiden Teilgebieten Ω und $B \setminus \overline{\Omega}$ (nach dem Weylschen Lemma) harmonisch im klassischen Sinn ist. Ebenso läßt sich unter den angenommenen Glattheitsvoraussetzungen an die Randkurve Γ zeigen [52, § V.4], daß für $f \in C^{1+\alpha}(T)$ die Lösung u_σ zweimal stetig differenzierbar auf $\overline{\Omega}$ bzw. $B \setminus \Omega$ fortsetzbar ist.

Mit der Greenschen Formel (bzgl. Ω und $B \setminus \overline{\Omega}$) formen wir nun die linke

Seite von (2.3) um,

$$\begin{aligned} \int_B \sigma \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx &= - \int_{\Omega} \kappa \Delta u \phi \, dx - \int_{B \setminus \bar{\Omega}} \Delta u \phi \, dx \\ &+ \oint_{\Gamma} \kappa \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \phi \, ds - \oint_{\Gamma} \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \phi \, ds + \oint_T \frac{\partial u}{\partial \nu} \phi \, ds, \end{aligned} \quad (2.9)$$

wobei auf Γ mit u^- bzw. u^+ die Fortsetzungen von u aus den Gebieten Ω bzw. $B \setminus \bar{\Omega}$ auf den gemeinsamen Rand Γ bezeichnet werden, d.h. für $x \in \Gamma$ ist

$$u^{\pm}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} u(x \pm h\nu),$$

wobei ν die Normale im Punkt x sei. Entsprechend ist $\frac{\partial u^{\pm}}{\partial \nu}$ auf Γ definiert.

Da in Ω und $B \setminus \bar{\Omega}$ die Differentialgleichung im klassischen Sinn erfüllt ist, erhält man aus (2.3) unter Beachtung der Randwerte $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_T = f$ und (2.9) die Bedingung

$$\oint_{\Gamma} \kappa \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \phi \, ds = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \phi \, ds \quad \text{für alle } \phi \in H_{\diamond}^1(B).$$

Unter den angenommenen Glattheitsannahmen führt dies auf

$$\left[\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{\Gamma} := \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} - \kappa \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0,$$

d.h. der Fluß $\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}$ durch die Randkurve Γ ist stetig. Da $u \in H_{\diamond}^1(B)$, folgt aus dem Spursatz und der Regularität von u , daß u selbst stetig sein muß,

$$[u]_{\Gamma} := u^+ \Big|_{\Gamma} - u^- \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Insgesamt lautet die starke Formulierung des Randwertproblems (2.1) mit σ aus (2.8) damit wie folgt:

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B \setminus \Gamma, \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{auf } T, \quad (2.10b)$$

$$[u]_{\Gamma} = 0, \quad (2.10c)$$

$$\left[\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{\Gamma} = 0, \quad (2.10d)$$

$$\oint_T u \, ds = 0. \quad (2.10e)$$

Randwertprobleme dieser Art, bei denen die Koeffizienten stückweise glatt sind und an den Unstetigkeitskurven Sprungbedingungen der Art (2.10c) und (2.10d) gestellt werden, heißen *Diffraktionsprobleme* (oder *Transmissions-* bzw. *Refraktionsprobleme*).

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden auch Diffraktionsprobleme mit inhomogenen Sprungbedingungen benötigt, d.h. an die Stelle von (2.10c) und (2.10d) treten

$$[u]_{\Gamma} = \psi \quad \text{und} \quad \left[\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{\Gamma} = \varphi \quad (2.11)$$

mit $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ und $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Als Folgerung aus dem Spursatz ist für $\psi \neq 0$ die Lösung des Diffraktionsproblems dann nicht mehr in $H^1(B)$ enthalten. Daher reduzieren wir dieses inhomogene Problem zunächst auf ein Problem mit homogenen Sprungdaten, $[\cdot]_{\Gamma} = 0$. Sei dazu \hat{u} in Ω die Lösung des Dirichletproblems

$$\Delta \hat{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \hat{u} = -\psi \quad \text{auf } \Gamma,$$

und setze $\hat{u} = 0$ in $B \setminus \bar{\Omega}$. Dann ist $[\hat{u}]_{\Gamma} = \psi$ und $[\sigma \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu}]_{\Gamma} = -\kappa \frac{\partial \hat{u}^-}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}$. Für die Differenz $\tilde{u} = u - \hat{u}$ soll nun $[\tilde{u}]_{\Gamma} = 0$ und $[\sigma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}]_{\Gamma} = \tilde{\varphi} := \varphi + \kappa \frac{\partial \hat{u}^-}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}$ gelten. Aus (2.9) ergibt sich demnach folgendes Variationsproblem für \tilde{u} :

$$\int_B \sigma \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \phi \, dx = \langle f, \phi \rangle_{L^2(T)} - \langle \tilde{\varphi}, \phi \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } \phi \in H^1_{\diamond}(B). \quad (2.12)$$

Dieses Problem ist wieder eindeutig in $H^1_{\diamond}(B)$ lösbar, wenn $\langle f, \mathbb{1} \rangle_{L^2(T)} - \langle \tilde{\varphi}, \mathbb{1} \rangle_{L^2(\Gamma)} = 0$ ist. Da $\langle f, \mathbb{1} \rangle_{L^2(T)} = 0$ angenommen wurde und nach dem Divergenzsatz $\oint_T \kappa \frac{\partial \hat{u}^-}{\partial \nu} \, ds = 0$ ist, liegt also eindeutige Lösbarkeit von (2.12) genau für $\langle \varphi, \mathbb{1} \rangle_{L^2(\Gamma)} = 0$ vor.

Bemerkung 2.1. Diffraktionsprobleme mit mehr als einer Inhomogenität lassen sich völlig analog behandeln. Seien $\Omega_1, \dots, \Omega_N \Subset B$ einfach zusammenhängend mit $\bar{\Omega}_j \cap \bar{\Omega}_k = \emptyset$, und bezeichne Γ_j den Rand von Ω_j ; weiter sei $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$ und $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_N$. Die Leitfähigkeitsverteilung habe nun die Form

$$\sigma(x) = \begin{cases} \kappa_j & \text{für } x \in \Omega_j \quad (j = 1, \dots, N), \\ 1 & \text{für } x \in B \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (2.13)$$

mit Konstanten $0 < \kappa_j \neq 1$. Genau wie im Fall von nur einer Inhomogenität wird dann das Diffraktionsproblem (2.10) hergeleitet, wobei die Sprungbedingungen (2.10c) und (2.10d) auf jedem Randstück Γ_j gestellt werden,

$$[u]_{\Gamma_j} = 0 \quad \text{und} \quad \left[\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{\Gamma_j} = \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_j} - \kappa_j \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, N).$$

Bemerkung 2.2. Zwei Grenzfälle gilt es für Leitfähigkeiten der Form (2.8) zu betrachten, und zwar die Fälle von elektrisch isolierenden ($\kappa = 0$) bzw. perfekt leitenden ($\kappa = \infty$) Einschlüssen.

Beginnen wir mit dem Fall $\kappa = 0$. Dann kann in den Isolator Ω kein Strom fließen, d.h. $\frac{\partial u^+}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0$, was sich auch aus der Sprungbedingung (2.10d) für $\kappa = 0$ ergibt. Das Vorwärtsproblem besteht damit aus der Neumannschen Randwertaufgabe

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B \setminus \overline{\Omega}, \quad (2.14a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{auf } T, \quad (2.14b)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (2.14c)$$

$$\oint_T u \, ds = 0, \quad (2.14d)$$

oder in schwacher Formulierung: Bestimme $u \in H_{\diamond}^1(B \setminus \overline{\Omega})$ so, daß

$$\int_{B \setminus \overline{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \langle f, \phi \rangle_{L^2(T)} \quad \text{für alle } \phi \in H_{\diamond}^1(B \setminus \overline{\Omega}), \quad (2.15)$$

wobei $H_{\diamond}^1(B \setminus \overline{\Omega}) = \{\phi \in H^1(B \setminus \overline{\Omega}) : \langle \phi, \mathbb{1} \rangle_{L^2(T)} = 0\}$ sei. Die Norm $\|u\|_{H_{\diamond}^1(B \setminus \overline{\Omega})}^2 = \int_{B \setminus \overline{\Omega}} |\nabla u|^2 \, dx$ ist aufgrund der Ungleichung vom Poincaré-Friedrichs-Typ [67, § 28]

$$\|u\|_{H^1(B \setminus \overline{\Omega})}^2 \leq c \left(\left| \oint_T u \, ds \right|^2 + \int_{B \setminus \overline{\Omega}} |\nabla u|^2 \, dx \right)$$

in $H_{\diamond}^1(B \setminus \overline{\Omega})$ zur $H^1(B \setminus \overline{\Omega})$ -Norm äquivalent und der Lösungsoperator $f \mapsto u$ als Abbildung $H_{\diamond}^{-1/2}(T) \rightarrow H_{\diamond}^1(B \setminus \overline{\Omega})$ stetig.

Etwas anders ist die Situation im Fall $\kappa = \infty$ gelagert. In perfekt leitenden Einschlüssen Ω gleichen sich Potentialunterschiede sofort aus, d.h. in jedem Teilgebiet Ω_j ist $u \equiv \text{const}$. Somit kann auch hier das Vorwärtsproblem durch eine Randwertaufgabe im Restgebiet $B \setminus \overline{\Omega}$ beschrieben werden, vgl. [4]:

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B \setminus \overline{\Omega}, \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{auf } T, \quad (2.16b)$$

$$u = \text{const} \quad \text{auf } \Gamma_j \quad (j = 1, \dots, N), \quad (2.16c)$$

$$\oint_{\Gamma_j} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds = 0 \quad (j = 1, \dots, N), \quad (2.16d)$$

$$\oint_T u \, ds = 0. \quad (2.16e)$$

Die Potentialkonstanten auf den einzelnen Randstücken Γ_j auf der rechten Seite von (2.16c) sind implizit durch die Bedingungen (2.16d) und (2.16e) eindeutig bestimmt. Bei der schwachen Formulierung treten die dirichletartigen Randbedingungen (2.16c) als wesentliche Randbedingungen auf und finden als solche Eingang in den Ansatzraum. Die Variationsformulierung lautet hier wie folgt: Bestimme $u \in H_{\diamond, \Gamma}^1(B \setminus \bar{\Omega}) := \{\phi \in H_{\diamond}^1(B \setminus \bar{\Omega}) : \phi|_{\Gamma_j} = \text{const} \quad (j = 1, \dots, N)\}$ so, daß

$$\int_{B \setminus \bar{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \langle f, \phi \rangle_{L^2(T)} \quad \text{für alle } \phi \in H_{\diamond, \Gamma}^1(B \setminus \bar{\Omega}). \quad (2.17)$$

Auch in diesem Fall ist der Lösungsoperator $H_{\diamond}^{-1/2}(T) \rightarrow H_{\diamond}^1(B \setminus \bar{\Omega})$, $f \mapsto u$, stetig. Charakterisierungen für die Potentialkonstanten auf den einzelnen Randstücken Γ_j können übrigens ähnlich hergeleitet werden wie in [15] für das verwandte Problem mit perfekt leitenden Rissen.

Die Monotonieeigenschaft aus Lemma 2.1(c) kann auf die beiden Fälle $\kappa = 0$ und $\kappa = \infty$ ausgeweitet werden. Zum Beispiel ist $\tilde{\Lambda}_{\sigma} - \tilde{\Lambda}_{\perp}$ positiv für $\kappa = 0$ und negativ für $\kappa = \infty$. Dazu muß im Beweis lediglich das Dirichletprinzip (2.6) durch

$$\frac{1}{2} \int_{B \setminus \bar{\Omega}} |\nabla u|^2 \, dx - \langle f, u \rangle_{L^2(T)} \longrightarrow \min_u! \quad (2.18)$$

ersetzt werden, wobei sich das Minimum in (2.18) im Fall $\kappa = 0$ über $H_{\diamond}^1(B \setminus \bar{\Omega})$ und im Fall $\kappa = \infty$ über $H_{\diamond, \Gamma}^1(B \setminus \bar{\Omega})$ erstreckt, vgl. auch [28].

Mit geringfügigen Modifikationen läßt sich auch der Beweis der Hilbert-Schmidt-Eigenschaft von $\tilde{\Lambda}_{\sigma}$ auf die beiden Grenzfälle $\kappa = 0$ und $\kappa = \infty$ übertragen.

2.4 Beispiel: Radialsymmetrische Diffraktionsprobleme

Ist das Grundgebiet der Einheitskreis, $B = B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, und die Leitfähigkeitsinhomogenität ein Kreis um den Nullpunkt mit Radius ρ , $\Omega = B_{\rho} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \rho\}$, dann kann das zugehörige Diffraktionsproblem explizit gelöst werden. Wir werden später des öfteren hierauf zurückkommen, um anhand dessen allgemein formulierte Aussagen beispielhaft zu erläutern.

Die Leitfähigkeit sei jetzt also durch

$$\sigma(x) = \begin{cases} \kappa & \text{für } |x| < \rho, \\ 1 & \text{für } \rho < |x| < 1, \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung u des Diffraktionsproblems (2.10) harmonisch im Kreis B_ρ sowie im Kreisring $B_1 \setminus \overline{B_\rho}$, und ein Separationsansatz in Polarkoordinaten, $x = re^{i\xi}$, führt auf eine Lösungsdarstellung

$$u(r, \xi) = \begin{cases} a_0^- + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^- \cos k\xi + b_k^- \sin k\xi) r^k & \text{für } r < \rho, \\ a_0^+ + \sum_{|k|=1}^{\infty} (a_k^+ \cos k\xi + b_k^+ \sin k\xi) r^k & \text{für } \rho < r < 1, \end{cases} \quad (2.19)$$

mit gewissen Koeffizienten $a_k^\pm, b_k^\pm \in \mathbb{R}$. Die Normierung (2.10e) führt auf $a_0^+ = 0$. Die restlichen Koeffizienten bestimmen wir aus den Bedingungen (2.10b) bis (2.10d). Sei dazu

$$f(\xi) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\xi + \beta_k \sin k\xi) \quad (2.20)$$

die (formale) Fourierreihe der Neumann-Randwerte; wegen $\langle f, \mathbb{1} \rangle_{L^2(T)} = 0$ ist $\alpha_0 = 0$. Ein Koeffizientenvergleich von

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_T &= \frac{\partial u}{\partial r}(1, \xi) = \sum_{|k|=1}^{\infty} k (a_k^+ \cos k\xi + b_k^+ \sin k\xi) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k(a_k^+ - a_{-k}^+) \cos k\xi + k(b_k^+ + b_{-k}^+) \sin k\xi) \end{aligned}$$

mit (2.20) liefert

$$a_k^+ - a_{-k}^+ = \frac{\alpha_k}{k} \quad \text{und} \quad b_k^+ + b_{-k}^+ = \frac{\beta_k}{k} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

Ähnlich folgt aus

$$\begin{aligned} u^+ \Big|_\Gamma &= u(\rho^+, \xi) = \sum_{|k|=1}^{\infty} (a_k^+ \cos k\xi + b_k^+ \sin k\xi) \rho^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k^+ \rho^k + a_{-k}^+ \rho^{-k}) \cos k\xi + (b_k^+ \rho^k - b_{-k}^+ \rho^{-k}) \sin k\xi), \end{aligned}$$

und

$$u^- \Big|_\Gamma = u(\rho^-, \xi) = a_0^- + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^- \rho^k \cos k\xi + b_k^- \rho^k \sin k\xi)$$

sowie der Bedingung (2.10c), daß $a_0^- = 0$ und

$$a_k^+ + a_{-k}^+ \rho^{-2k} = a_k^- \quad \text{und} \quad b_k^+ - b_{-k}^+ \rho^{-2k} = b_k^- \quad \text{für } k = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Entsprechend geht man mit (2.10d) vor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} &= \frac{\partial u}{\partial r}(\rho^+, \xi) = \sum_{|k|=1}^{\infty} (a_k^+ \cos k\xi + b_k^+ \sin k\xi) k \rho^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k(a_k^+ \rho^{k-1} - a_{-k}^+ \rho^{-k-1}) \cos k\xi + k(b_k^+ \rho^{k-1} + b_{-k}^+ \rho^{-k-1}) \sin k\xi), \end{aligned}$$

und

$$\kappa \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \kappa \frac{\partial u}{\partial r}(\rho^-, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} (\kappa k a_k^- \rho^{k-1} \cos k\xi + \kappa k b_k^- \rho^{k-1} \sin k\xi)$$

führen auf

$$a_k^+ - a_{-k}^+ \rho^{-2k} = \kappa a_k^- \quad \text{und} \quad b_k^+ + b_{-k}^+ \rho^{-2k} = \kappa b_k^- \quad \text{für } k = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

Auflösen von (2.21), (2.22), (2.23) ergibt für $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_k^+ &= \left(1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^{-1} \frac{\alpha_k}{k}, & b_k^+ &= \left(1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^{-1} \frac{\beta_k}{k}, \\ a_{-k}^+ &= \frac{-(\kappa-1)\rho^{2k}}{(\kappa+1)+(\kappa-1)\rho^{2k}} \frac{\alpha_k}{k}, & b_{-k}^+ &= \frac{(\kappa-1)\rho^{2k}}{(\kappa+1)+(\kappa-1)\rho^{2k}} \frac{\beta_k}{k}, \\ a_k^- &= \left(\frac{\kappa+1}{2} + \frac{\kappa-1}{2}\rho^{2k}\right)^{-1} \frac{\alpha_k}{k}, & b_k^- &= \left(\frac{\kappa+1}{2} + \frac{\kappa-1}{2}\rho^{2k}\right)^{-1} \frac{\beta_k}{k}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Neumannrandwerte aus (2.20) als zugehörige Dirichletdaten

$$\begin{aligned} u|_T = u(1, \xi) &= \sum_{|k|=1}^{\infty} (a_k^+ \cos k\xi + b_k^+ \sin k\xi) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k^+ + a_{-k}^+) \cos k\xi + (b_k^+ - b_{-k}^+) \sin k\xi) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\kappa+1)-(\kappa-1)\rho^{2k}}{(\kappa+1)+(\kappa-1)\rho^{2k}} \frac{1}{k} (\alpha_k \cos k\xi + \beta_k \sin k\xi). \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man insbesondere, daß die trigonometrischen Grundfunktionen Eigenfunktionen von $\tilde{\Lambda}_\sigma$ sind,

$$\Lambda_\sigma : \begin{cases} \cos k\xi \\ \sin k\xi \end{cases} \mapsto \frac{1}{k} \frac{(\kappa + 1) - (\kappa - 1)\rho^{2k}}{(\kappa + 1) + (\kappa - 1)\rho^{2k}} \begin{cases} \cos k\xi \\ \sin k\xi \end{cases}. \quad (2.24)$$

Da die Fourierbasis $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos k\xi, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin k\xi\}_{k=1}^\infty$ eine Orthonormalbasis von $L^2_\diamond(T)$ bildet, kann man die Spektralzerlegung der (kompakten und selbstadjungierten) Neumann-Dirichlet-Abbildung $\tilde{\Lambda}_\sigma$ aus (2.24) ablesen.

Aus dieser Spektraldarstellung werden überdies die Abbildungseigenschaften von Λ_σ in den 2π -periodischen Sobolevräumen $H^s_\diamond(T)$ klar, die durch die Norm

$$\|\phi\|_{H^s_\diamond(T)} = \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^\infty k^{2s} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right)^{1/2} \quad (2.25)$$

für $\phi(\xi) \sim \sum_{k=1}^\infty (\alpha_k \cos k\xi + \beta_k \sin k\xi)$ definiert sind. Speziell für $s \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\|\phi\|_{H^s_\diamond(T)} = \|\phi^{(s)}\|_{L^2(T)}$$

und die Äquivalenz dieser Norm zu anderen Normen in $H^s_\diamond(\Gamma)$ findet man etwa in [51].

Nach (2.24) verhalten sich die Fourierkoeffizienten von $\Lambda_\sigma \phi$ asymptotisch wie $\frac{1}{k}(1 + o(1))\{\alpha_k, \beta_k\}$, d.h. aus $\phi \in H^s_\diamond(T)$ folgt $\Lambda_\sigma \phi \in H^{s+1}_\diamond(T)$ für jedes $s \in \mathbb{R}$. Dies weist in dem hier betrachteten Spezialfall die Abbildungseigenschaft $\Lambda_\sigma : H^{-1/2}_\diamond(T) \rightarrow H^{1/2}_\diamond(T)$ nach. Weiterhin erkennt man auch unmittelbar aus der Eigenwertasymptotik von (2.24), daß $\tilde{\Lambda}_\sigma$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Ebenso können die Eigenschaften von Λ_σ aus Lemma 2.1(b)–(d) hier auch aus der Darstellung (2.24) abgelesen werden.

Bemerkung 2.3. Die Vorgehensweise aus diesem Abschnitt läßt sich auf Leitfähigkeitsverteilungen verallgemeinern, die in Ringgebieten stückweise konstant sind, wenn also $\sigma(x) = \kappa_j$ für $\rho_j < |x| < \rho_{j-1}$ mit Radien $0 = \rho_N < \rho_{N-1} < \dots < \rho_1 < \rho_0 = 1$ und Leitfähigkeitskonstanten $\kappa_j > 0$, $j = 1, \dots, N$, gilt. Später benötigen wir nur den speziellen Fall

$$\sigma(x) = \begin{cases} \kappa & \text{für } \rho_2 < |x| < \rho_1, \\ 1 & \text{für } |x| < \rho_2 \text{ oder } \rho_1 < |x| < 1. \end{cases} \quad (2.26)$$

Die Neumann-Dirichlet-Abbildung ergibt sich dann zu

$$\Lambda_\sigma : \begin{cases} \cos k\xi \\ \sin k\xi \end{cases} \mapsto \frac{1}{k} \frac{1 - \mu^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{2k} - \mu(\rho_1^{2k} - \rho_2^{2k})}{1 - \mu^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{2k} + \mu(\rho_1^{2k} - \rho_2^{2k})} \begin{cases} \cos k\xi \\ \sin k\xi \end{cases}, \quad (2.27)$$

mit $\mu = \frac{\kappa-1}{\kappa+1}$, vgl. auch [19]. Das Vorgehen im Fall beliebig vieler Schichten wird in [58] beschrieben; daneben werden dort noch für weitere spezielle Leitfähigkeitsverteilungen analytische Lösungen angegeben; siehe auch [59] für dreidimensionale Probleme.

Kapitel 3

Das inverse Problem

Das dem direkten Problem aus dem vorigen Kapitel zugeordnete inverse Problem besteht aus der Rekonstruktion von Eigenschaften des Leitfähigkeitskoeffizienten σ aus den beobachteten Daten, hier also aus der Kenntnis der Neumann-Dirichlet-Abbildung Λ_σ . Im folgenden tragen wir diesbezüglich einige bekannte Resultate zusammen, wobei wir den Schwerpunkt auf die Identifikation von stückweise glatten Leitfähigkeiten legen, also insbesondere die in Abschnitt 2.3 beschriebenen.

Anschließend gehen wir auf die Schlechtgestelltheit des inversen Problems ein. Aus Standardabschätzungen für elliptische Randwertprobleme folgt demgegenüber, vgl. [66], daß das Vorwärtsproblem in folgendem Sinne gutgestellt ist,

$$\|\Lambda_{\sigma_1} - \Lambda_{\sigma_2}\|_{H^{-1/2}(T) \rightarrow H^{1/2}(T)} \leq C \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^\infty(B)},$$

d.h. die Neumann-Dirichlet-Abbildung hängt bzgl. dieser Normen stetig vom Leitfähigkeitskoeffizienten ab.

Der letzte Abschnitt enthält dann noch eine Übersicht der wichtigsten Rekonstruktionsverfahren, die zur numerischen Lösung des inversen Problems eingesetzt werden. Wir verzichten dabei auf eine Bewertung der Verfahren hinsichtlich Rekonstruktionsqualität, Rechenaufwand, Robustheit und praktischer Anwendbarkeit, sondern skizzieren nur die jeweils zugrundeliegenden Ideen.

Einen umfassenden Überblick über Eindeutigkeits- und Stabilitätsaussagen bietet das Buch von Isakov [41], worin auch viele verwandte Probleme behandelt werden. Dort wird auch kurz auf einige numerische Methoden eingegangen; ansonsten verweisen wir auf die Übersichtsartikel [17], [18], [21] und die darin enthaltenen Referenzen.

3.1 Identifizierbarkeit

Die eingangs zitierte Fragestellung von Calderón [16] nach der Rekonstruierbarkeit des Leitfähigkeitskoeffizienten σ aus der Neumann-Dirichlet-Abbildung ist formal nichts anderes als die Frage nach der Injektivität der Abbildung

$$\sigma \longmapsto \Lambda_\sigma, \quad (3.1)$$

wobei natürlich der Wahl der Funktionenklasse für die Leitfähigkeit eine wichtige Bedeutung zukommt.

Kohn und Vogelius [48] zeigten, daß die Neumann-Dirichlet-Abbildung die Funktionswerte und sämtliche Ableitungen von σ am Rand T eindeutig bestimmt, was sofort die Identifizierbarkeit von analytischen Leitfähigkeiten nach sich zieht. Im dreidimensionalen Fall wurde Identifizierbarkeit für $\sigma \in C^\infty(\overline{B})$ von Sylvester und Uhlmann [65] gezeigt; später konnte dieses Resultat auf Leitfähigkeiten mit weniger einschränkenden Glattheitsvoraussetzungen, nämlich auf $\sigma \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > 3/2$, ausgeweitet werden [55]. Im zweidimensionalen gelang Nachman [55] ein Eindeutigkeitsbeweis für $\sigma \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > 1$; von Brown und Uhlmann [13] wurde dies für $\sigma \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, verallgemeinert.*

Bis auf das letztgenannte Ergebnis sind die oben angegebenen Aussagen (nach den Sobolevschen Einbettungssätzen, siehe etwa [30]) auf stetige Leitfähigkeiten beschränkt. Für die in dieser Arbeit behandelten unstetigen, stückweise glatten Leitfähigkeiten liegen jedoch einige spezielle Eindeutigkeitsresultate vor, die wir hier gesondert erwähnen wollen. So konnten Kohn und Vogelius [49] ihr Identifizierbarkeitsresultat auf stückweise analytische Leitfähigkeiten mit stückweise analytischen Unstetigkeitskurven übertragen.

Isakov [40] (siehe auch [41, Thm. 5.7.1]) gab folgendes Resultat zur Identifikation von Einschlüssen an:

Satz 3.1. *Es seien σ_1, σ_2 zwei Leitfähigkeiten der Form*

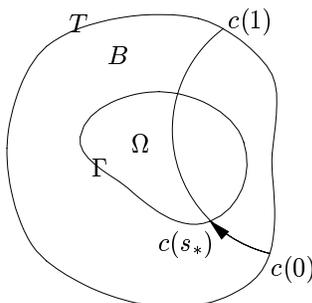
$$\sigma_j(x) = \begin{cases} \kappa_j(x) & \text{für } x \in \Omega_j, \\ \gamma(x) & \text{für } x \in B \setminus \overline{\Omega}_j, \end{cases}$$

mit $\gamma \in C^2(\overline{B})$, $\kappa_j \in C^2(\overline{\Omega}_j)$ und $\gamma(x) \neq \kappa_j(x)$ für $x \in \partial\Omega_j$. Das Grundgebiet B sei C^2 -berandet und die (nicht notwendigerweise zusammenhängenden) Mengen $\Omega_j \subset B$ haben Lipschitzrand und darüberhinaus seien $B \setminus \overline{\Omega}_j$ zusammenhängend ($j = 1, 2$). Aus $\Lambda_{\sigma_1} = \Lambda_{\sigma_2}$ folgt dann $\sigma_1 = \sigma_2$.

*Die Sobolevräume $W^{l,p}(\Omega)$ enthalten Funktionen, deren schwache Ableitungen bis zur Ordnung l in $L^p(\Omega)$ liegen.

Isakov formulierte diesen Satz sogar für lokalisierte Dirichlet-Neumann-Abbildungen[†], bei denen alle Dirichletdaten nur auf einem vorgegebenen Teil des Randes von Null verschieden sind und die Neumanndaten auch nur dort gemessen werden.

In einer neueren Arbeit gibt Ikehata [39] eine Charakterisierung von Einschlüssen an, die wir für den Fall einer konstanten Hintergrundleitfähigkeit $\gamma = \mathbb{1}$ kurz vorstellen wollen. Betrachtet werden stetige Kurven $c : [0, 1] \rightarrow \overline{B}$, deren Anfangs- und Endpunkte auf dem Rand von B liegen, d.h. $c(0), c(1) \in T$, vgl. nebenstehende Skizze. Für jede solche Kurve und jedes feste $t \in (0, 1)$ wird dann eine Folge von Dirichletproblemen



$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B, \quad (3.2a)$$

$$u = g_{t,n} \quad \text{auf } T, \quad (3.2b)$$

konstruiert, deren Lösungen $u_{t,n}$ in $H_{\text{loc}}^1(B \setminus c([0, t]))$ gegen $\frac{1}{2\pi} \log |\cdot - c(t)|$ konvergieren. Damit wird gezeigt, daß genau dann

$$\sup_{\substack{0 < t < s \\ n \in \mathbb{N}}} | \langle (\Lambda_\sigma^{-1} - \Lambda_{\mathbb{1}}^{-1}) g_{t,n}, g_{t,n} \rangle_{L^2(T)} | < \infty \quad (3.3)$$

gilt, wenn das Kurvenstück $c([0, s])$ in $B \setminus \overline{\Omega}$ liegt. Gibt es einen Wert s_* , so daß das Supremum in (3.3) nicht existiert, dann schneidet die Kurve c den Einschuß Ω , und das kleinste solche s_* gehört zu demjenigen Kurvenpunkt $c(s_*)$, wo c den Rand Γ erstmals durchdringt. Zu Einzelheiten über Regularitätsanforderungen an die Gebiete und die Leitfähigkeit verweisen wir auf die Originalarbeit.

Jedoch ist auch diese Charakterisierung letztlich nicht konstruktiv, da die Existenz der Dirichletrandwerte $g_{t,n}$ mittels der sogenannten Rungeapproximationseigenschaft nachgewiesen wird, die wiederum auf dem Satz von Hahn-Banach beruht. Nebenbei bemerkt verwenden auch die zuvor erwähnten Eindeutigkeitsätze von Kohn und Vogelius bzw. Isakov die Rungeapproximationseigenschaft. Die Charakterisierung von Einschlüssen, die wir in Kapitel 4 herleiten, stellt unseres Wissens damit insbesondere den ersten konstruktiven Eindeutigkeitsbeweis für dieses Problem dar.

Bei weiter eingeschränkten Funktionenklassen für die Leitfähigkeit genügt bisweilen schon ein einziges Experiment, d.h. die Messung von $\Lambda_\sigma f$ für lediglich

[†]Bei Dirichlet-Neumann-Abbildungen gibt man Dirichletwerte am Rand vor und ordnet diesen die Neumannwerte zu. Im nichtlokalisierten Fall ist die Dirichlet-Neumann-Abbildung nichts anderes als die Inverse der Neumann-Dirichlet-Abbildung.

ein Strommuster f , um Identifizierbarkeit beweisen zu können. Ist etwa die Leitfähigkeit von der Form

$$\sigma(x) = \begin{cases} \kappa & \text{für } x \in \Omega, \\ 1 & \text{für } x \in B \setminus \overline{\Omega}, \end{cases}$$

und ist die Konstante κ bekannt, dann reicht eine einzige Messung aus, um etwa Einschlüsse in der Form von Kreisen [42] oder konvexen Polygonen [27], [8] zu identifizieren. Ebenso lassen sich damit Abschätzungen über die Größe des Einschlusses Ω gewinnen [43], [5]. Für beliebige Polygonegebiete im \mathbb{R}^2 sind dagegen zwei Messungen hinreichend [62].

Für eine beliebige Anzahl isolierender oder perfekt leitender Einschlüsse, also $\kappa = 0$ oder $\kappa = \infty$, im \mathbb{R}^2 folgt die Identifizierbarkeit mit Hilfe von zwei Messungen aus einer Arbeit von Alessandrini und Diaz Valenzuela [4].

3.2 Schlechtgestellttheit

Die Injektivitätsaussagen des vorangegangenen Abschnitts geben noch keine Auskunft über die Stabilität der zu (3.1) inversen Abbildung, welche natürlich von den verwendeten Topologien für die Leitfähigkeit und die Neumann-Dirichlet-Abbildung abhängt. Bei Verwendung der Operatornorm $\|\cdot\|_{H^{-1/2}(T) \rightarrow H^{1/2}(T)}$ für die Neumann-Dirichlet-Abbildung konnte Alessandrini [1], [3] für Raumdimensionen größer als zwei eine Stabilitätsabschätzung der Art

$$\|\sigma_1 - \sigma_2\|_\infty \leq C \left| \log \|\Lambda_{\sigma_1} - \Lambda_{\sigma_2}\|_{H^{-1/2}(T) \rightarrow H^{1/2}(T)} \right|^{-\delta}$$

für ein $\delta \in (0, 1)$ beweisen, allerdings unter recht starken Glattheitsvoraussetzungen an die Leitfähigkeit.

Aus praktischer Sicht ist die Verwendung von $H^{\pm 1/2}(T)$ -Normen für die Daten jedoch problematisch, da diese nicht (stabil) gemessen werden können. Daher wollen wir nun die $L^2(T)$ -Norm zur Messung von Stromflüssen und Spannungen auf dem Rand heranziehen, d.h. wir untersuchen jetzt die Stabilität der Abbildung $\sigma \mapsto \tilde{\Lambda}_\sigma$.

Wir demonstrieren die Schlechtgestellttheit anhand des radialsymmetrischen Beispiels aus Abschnitt 2.4. Nach (2.24) ergibt sich die Spektralzerlegung der Differenz $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1$ aus der Darstellung

$$\Lambda_\sigma - \Lambda_1 : \begin{cases} \cos k\xi \\ \sin k\xi \end{cases} \mapsto \frac{2}{k} \frac{(1 - \kappa)\rho^{2k}}{(\kappa + 1) + (\kappa - 1)\rho^{2k}} \begin{cases} \cos k\xi \\ \sin k\xi \end{cases}, \quad (3.4)$$

mit deren Hilfe wir die Hilbert-Schmidt-Norm von $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}$ abschätzen können,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}\|_{\text{HS}}^2 &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k} \frac{(1-\kappa)\rho^{2k}}{(\kappa+1) + (\kappa-1)\rho^{2k}} \right)^2 \\ &\leq \frac{8|\kappa-1|^2\rho^4}{(|\kappa+1| - |\kappa-1|\rho^2)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{C\rho^4|\kappa-1|^2}{(|\kappa+1| - |\kappa-1|\rho^2)^2}. \end{aligned}$$

Für die Leitfähigkeitsdifferenz gilt

$$\|\sigma - \mathbb{1}\|_{L^p(B)}^2 = \begin{cases} \pi^{2/p}\rho^{4/p}|\kappa-1|^2 & \text{für } p < \infty, \\ |\kappa-1|^2 & \text{für } p = \infty, \end{cases}$$

und wir gelangen zu

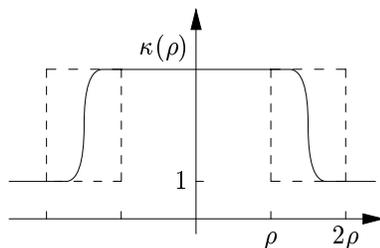
$$\|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}\|_{\text{HS}}^2 \leq \frac{C\rho^{4-4/p}}{(|\kappa+1| - |\kappa-1|\rho^2)^2} \|\sigma - \mathbb{1}\|_{L^p(B)}^2. \quad (3.5)$$

Betrachtet man nun speziell Leitfähigkeitswerte $\kappa = \kappa(\rho) = 1 + (\pi\rho^2)^{-1/p}$, dann ist $\|\sigma - \mathbb{1}\|_{L^p(B)} = 1$ für alle $\rho > 0$ und $\|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}\|_{\text{HS}} \rightarrow 0$ für $\rho \rightarrow 0$. Dieses Beispiel zeigt also, daß die Abbildung $\sigma \mapsto \tilde{\Lambda}_\sigma$ bzgl. dieser Normen nicht stetig invertierbar ist.

Dies überträgt sich natürlich auch auf schwächere Normen für die Neumann-Dirichlet-Abbildungen, etwa die Spektralnorm als Operatornorm von $\tilde{\Lambda}_\sigma : L_\diamond^2(T) \rightarrow L_\diamond^2(T)$.

Auch bei Verwendung von $W^{k,p}(B)$ -Sobolevnormen ($k \geq 0$) für die Leitfähigkeit ist die Abbildung nicht stetig invertierbar. Als Beispiel dazu dienen Leitfähigkeitsverteilungen $\hat{\sigma}(x) \in C^\infty(B)$ mit

$$\hat{\sigma}(x) = \begin{cases} \kappa(\rho) & \text{für } |x| < \rho, \\ 1 & \text{für } |x| > 2\rho, \end{cases}$$



und $1 \leq \hat{\sigma}(x) \leq \kappa(\rho)$ für $\rho < |x| < 2\rho$ mit $\kappa(\rho)$ wie oben, vgl. Skizze. Für diese Leitfähigkeiten gilt $\|\hat{\sigma} - \mathbb{1}\|_{W^{k,p}(B)} \geq \|\hat{\sigma} - \mathbb{1}\|_{L^p(B)} \geq \|\sigma - \mathbb{1}\|_{L^p(B)} = 1$ und, wie man mit der Monotonieeigenschaft aus Lemma 2.1(c) durch Abschätzung der Eigenwerte von $\tilde{\Lambda}_{\hat{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}$ folgert (vgl. (3.5)),

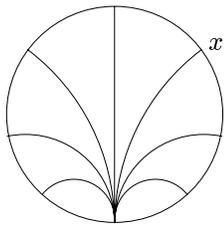
$$\|\tilde{\Lambda}_{\hat{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}\|_{\text{HS}}^2 \leq \frac{C(2\rho)^{4-4/p}}{(|\kappa(\rho)+1| - |\kappa(\rho)-1|(2\rho)^2)^2} \rightarrow 0 \quad \text{für } \rho \rightarrow 0,$$

was die Schlechtgestelltheit des Leitfähigkeitsrekonstruktionsproblems beweist.

In manchen Fällen mit stark eingeschränkter Zahl von Freiheitsgraden für die Leitfähigkeit liegen jedoch einige Stabilitätsaussagen (meist von lokaler Natur) vor, siehe etwa [26], [9], [2], [10], [43].

3.3 Rekonstruktionsverfahren

Bei der numerischen Leitfähigkeitsrekonstruktion bereiten vor allem die Nichtlinearität und die Schlechtgestelltheit des Problems Schwierigkeiten. Daher beruhen viele Rekonstruktionsalgorithmen auf einer sukzessiven Linearisierung des Problems, bzw. für das Näherungsverfahren wird von vornherein nur ein linearisiertes Problem betrachtet. Die Schlechtgestelltheit macht fast immer den Einsatz von Regularisierungstechniken notwendig, die für die verschiedenen Verfahren sehr unterschiedlich ausfallen können. Wir verzichten hier auf eine Beschreibung einzelner Regularisierungsverfahren und verweisen dazu auf die Originalarbeiten oder auf die Monographien [25] oder [45].



Die erste auch in der Praxis eingesetzte Rekonstruktionsmethode war der sogenannte *Backprojection-Algorithmus* von Barber und Brown [6], [7], der von einer Linearisierung um die homogene Hintergrundleitfähigkeit, $\Lambda_{\mathbb{1}+h} = \Lambda_{\mathbb{1}} + \Lambda'_{\mathbb{1}}[h]$, ausgeht. Der bei Einspeisung eines Dipolstrommusters (Neumanndaten) in einem Randpunkt x gemessene Spannungswert (Dirichletdaten) wird verwendet, um Information über die Leitfähigkeitskorrektur h entlang der durch x verlaufenden

Dipoläquipotentiallinie zu gewinnen. Eine mathematische Rechtfertigung für diese Näherungsmethode wurde später von Santosa und Vogelius [61] gegeben. Nachteil dieses Verfahrens ist vor allem seine mangelnde Flexibilität, da es nur Kreise als Grundgebiete (im zweidimensionalen Raum) und Linearisierungen um homogene Hintergrundleitfähigkeiten zulässt.

Am gebräuchlichsten sind derzeit wohl Verfahren, die auf einer Formulierung als Optimierungsproblem aufbauen, bei dem die zu rekonstruierende Leitfähigkeit ein geeignetes Funktional minimiert. Oft wird hier das sogenannte *Output-Least-Squares-Funktional*

$$F(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_j \|\tilde{g}_j - \Lambda_\sigma f_j\|^2$$

herangezogen, wobei \tilde{g}_j die zu den Stromflüssen f_j gemessenen Spannungswerte bezeichnen und als Norm $\|\cdot\|$ die $L^2(T)$ -Norm oder eine diskrete, die Messung über Elektroden berücksichtigende Norm verwendet wird. Wird die

$L^2(T)$ -Norm verwendet und bildet $\{f_j\}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(T)$, dann mißt dieses Funktional gerade die Differenz von Λ_σ zur gemessenen Neumann-Dirichlet-Abbildung in der Hilbert-Schmidt-Norm. Die Minimierung erfolgt dann iterativ mit bekannten Methoden aus der nichtlinearen Optimierung, etwa dem Levenberg-Marquardt-Verfahren, wobei in jedem Iterationsschritt die Neumann-Dirichlet-Abbildung um die aktuelle Iterierte linearisiert wird, siehe etwa [71], [57], [24]. Um den Rechenaufwand gering zu halten, wird manchmal nur ein einziger Iterationsschritt durchgeführt [20]; dies entspricht dann wieder einer Näherungslösung des linearisierten Problems.

Ein anderes Funktional wurde in [50], [47] gewählt. Das Stromfeld wird hier als unabhängige Variable eingeführt, $\mathbf{v} = \sigma \nabla u$, und damit das Randwertproblem (2.1) zusammen mit den gemessenen Dirichletranddaten als ein System geschrieben,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \sigma \nabla u \quad \text{in } B, \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nu = f \quad \text{und} \quad u = g \quad \text{auf } T. \quad (3.6b)$$

Hieraus folgt $\sigma^{1/2} \nabla u - \sigma^{-1/2} \mathbf{v} = 0$, und dies motiviert die Minimierung des Funktionals

$$F(\sigma, \{u_j\}, \{\mathbf{v}_j\}) = \frac{1}{2} \sum_j \int_B |\sigma^{1/2} \nabla u_j - \sigma^{-1/2} \mathbf{v}_j|^2 dx$$

unter den Nebenbedingungen

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{in } B, \quad \mathbf{v}_j \cdot \nu = f_j \quad \text{auf } T, \quad u_j = \tilde{g}_j \quad \text{auf } T,$$

wobei wieder $\{f_j\}$ die angelegten Strommuster und $\{\tilde{g}_j\}$ die zugehörigen gemessenen Spannungen bezeichnen. Ein ähnliches Funktional wurde zuvor schon in [69] betrachtet.

Mit einem direkten Verfahren für das nichtlineare inverse Problem hat man es beim sogenannten *Layerstripping* zu tun [63]. Die Idee dabei ist, die Leitfähigkeit schichtweise vom äußeren Gebietsrand her zu rekonstruieren. Mittels Spannungsmessungen, die zu stark oszillierenden Strommustern gehören, läßt sich die Leitfähigkeit auf dem Rand bestimmen, vgl. auch [54], und diese wird dann als Leitfähigkeitsnäherung in einer Randschicht verwendet. Danach wird die Randschicht „abgestreift“ und das Problem auf das verbleibende Gebiet reduziert. Mit Hilfe einer Operatordifferentialgleichung vom Riccati-Typ mit der Neumann-Dirichlet-Abbildung als Anfangswert erhält man dann die Neumann-Dirichlet-Abbildung für das verkleinerte Gebiet. Sukzessive gewinnt man so die Leitfähigkeitsverteilung im Innern. In der Praxis erweist sich diese Methode jedoch als extrem instabil.

Einige Verfahren sind auch speziell für das in dieser Arbeit behandelte Problem der Gebietsrekonstruktion entwickelt worden. Für stückweise konstante Leitfähigkeiten der Form (2.8) ist also (bei bekanntem Wert κ) die Inhomogenität Ω gesucht. Meist wird die Randkurve $\Gamma = \partial\Omega$ sternförmig als $x(\theta) = x_0 + \rho(\theta)e^{i\theta}$ angesetzt, um anschließend den Mittelpunkt x_0 und die Radiusfunktion $\rho(\theta)$ aus einer vorgegebenen Funktionenklasse mit wenigen Freiheitsgraden zu optimieren, siehe [14], [44], [37], [38]. Aufgrund der wenigen Parameter genügen für die Optimierung in der Regel schon sehr wenige Messungen, oft sogar eine einzige. Andererseits erfordern diese Verfahren natürlich einige Vorkenntnis über die Inhomogenität Ω , insbesondere, was die Zahl ihrer Zusammenhangskomponenten angeht. So sind numerische Ergebnisse bisher nur für den Fall einer Komponente veröffentlicht worden. Demgegenüber benötigt das Verfahren, das wir in dieser Arbeit entwickeln, keine Vorkenntnis über Anzahl und Gestalt von Zusammenhangskomponenten, allerdings auf Kosten erheblich zahlreicherer Messungen.

Kapitel 4

Charakterisierung von Inhomogenitäten

In diesem Kapitel kommen wir zum theoretischen Hauptresultat dieser Arbeit. Dies wird im ersten Abschnitt für den Einheitskreis als Grundgebiet formuliert und einige Folgerungen daraus gezogen. Der Beweis wird im zweiten Abschnitt geführt. Anschließend verallgemeinern wir unser Ergebnis in verschiedene Richtungen, unter anderen führen wir den Fall allgemeinerer Grundgebiete mit Hilfe konformer Abbildungen auf den Einheitskreis zurück. Im letzten Abschnitt wird das Gezeigte anhand des Beispiels aus Abschnitt 2.4 veranschaulicht.

4.1 Darstellung der Hauptergebnisse

Wir greifen wieder die Situation von Abschnitt 2.3 (bzw. Bemerkung 2.1) auf, wo die Leitfähigkeit von der Form

$$\sigma(x) = \begin{cases} \kappa & \text{für } x \in \Omega, \\ 1 & \text{für } x \in B \setminus \overline{\Omega}, \end{cases} \quad (4.1)$$

war. Dabei sind durchaus mehrere (einfach zusammenhängende) Komponenten für die Inhomogenität Ω zugelassen, jedoch hier zunächst alle mit ein und derselben Leitfähigkeitskonstanten κ ; Verallgemeinerungen werden in den Abschnitten 4.3.1 und 4.3.2 behandelt. Wesentlich ist hier, daß das Restgebiet $B \setminus \overline{\Omega}$ zusammenhängend ist. Mit $\tilde{\Lambda}_\sigma$ bzw. $\tilde{\Lambda}_1$ werden wieder die Neumann-Dirichlet-Abbildungen zu den Leitfähigkeiten σ aus (4.1) bzw. zur homogenen Leitfähigkeit, $\mathbb{1}(x) = 1$ für alle $x \in B$, bezeichnet.

Im Fall des Einheitskreises, $B = B_1$, ist unser Hauptresultat folgende Charakterisierung von Ω :

Satz 4.1. *Es sei $B = B_1$. Weiter sei für eine beliebige Richtung $d \in \mathbb{R}^2$, $|d| = 1$, und $z \in B_1$*

$$g_{z,d}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{(z-x) \cdot d}{|z-x|^2} \quad \text{für } x \in T = \partial B_1. \quad (4.2)$$

Dann gilt für $\kappa \neq 1$

$$g_{z,d} \in \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}|^{1/2}) \quad \text{genau dann, wenn } z \in \Omega. \quad (4.3)$$

Beweis. Der Beweis folgender Teilschritte wird in Abschnitt 4.2 geführt:

(a) Zunächst leiten wir in Abschnitt 4.2.1 eine Faktorisierung

$$\Lambda_\sigma - \Lambda_\mathbb{1} = LFL'$$

her, wobei $L : H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(T)$ geeignet gewählt werden wird, $L' : H_\diamond^{-1/2}(T) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$ der zu L duale Operator und $F : H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$ ein Isomorphismus ist, der mit seinem dualen Operator übereinstimmt, $F = F'$.

(b) Mit Hilfe von (a) weisen wir nach (Abschnitt 4.2.2), daß

$$\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}|^{1/2}) = \mathcal{R}(L).$$

(c) Schließlich zeigen wir (in Abschnitt 4.2.3) noch die Charakterisierung

$$g_{z,d} \in \mathcal{R}(L) \quad \text{genau dann, wenn } z \in \Omega.$$

Aus (b) und (c) folgt sofort die Behauptung des Satzes. \square

Für andere Grundgebiete verallgemeinern wir Satz 4.1 in Abschnitt 4.3, vgl. Satz 4.12. Die einzige vorzunehmende Änderung besteht in einer anderen Wahl der Testfunktionen $g_{z,d}$ zur Charakterisierung von Ω .

Nach Lemma 2.1 ist der kompakte Operator $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1} : L_\diamond^2(T) \rightarrow L_\diamond^2(T)$ selbstadjungiert und positiv (bzw. negativ), wenn $\kappa < 1$ (bzw. $\kappa > 1$). Daher besitzt $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}$ eine Spektralzerlegung

$$\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1} = \sum_j \lambda_j \langle \cdot, v_j \rangle_{L^2(T)} v_j \quad (4.4)$$

mit einer Orthonormalbasis von $L_\diamond^2(T)$ aus Eigenfunktionen v_j zu den Eigenwerten $\lambda_j < 0$ (bzw. $\lambda_j > 0$).

Korollar 4.2. *Es sei $B = B_1$. Besitzt $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1$ die Spektralzerlegung (4.4), dann gilt (für $\kappa \neq 1$)*

$$\sum_j \frac{\langle g_{z,d}, v_j \rangle_{L^2(T)}^2}{|\lambda_j|} < \infty \quad \text{genau dann, wenn } z \in \Omega.$$

Beweis. Für $|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}$ besteht die Spektralzerlegung

$$|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2} = \sum_j |\lambda_j|^{1/2} \langle \cdot, v_j \rangle_{L^2(T)} v_j.$$

Aufgrund der Selbstadjungiertheit und Injektivität (letztere folgt sofort aus der Positivität (bzw. Negativität)) von $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1$ liegt der Bildraum $\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2})$ dicht in $L_\diamond^2(T)$, denn

$$\overline{\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2})} = \mathcal{N}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2})^\perp = \mathcal{N}(\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1)^\perp = \{0\}^\perp.$$

In diesem Fall besagt das Picard-Kriterium, vgl. [25, Thm. 2.8], daß

$$g_{z,d} \in \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \sum_j \frac{\langle g_{z,d}, v_j \rangle_{L^2(T)}^2}{|\lambda_j|} < \infty.$$

Zusammen mit Satz 4.1 folgt damit das Korollar. \square

Wie Korollar 4.2 für ein numerisches Verfahren ausgenutzt werden kann, liegt auf der Hand: Es wird lediglich die Spektralzerlegung von $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1$ benötigt, um Ω zu bestimmen. Die numerische Umsetzung und dabei zu bewältigende Schwierigkeiten sind Gegenstand von Kapitel 5.

An dieser Stelle sei noch einmal ausdrücklich betont, daß der spezielle Leitfähigkeitswert κ in Ω für die Charakterisierung gemäß Satz 4.1 bzw. Korollar 4.2 keine Rolle spielt und insbesondere a priori keine Kenntnis davon erforderlich ist. Ist die Inhomogenität Ω erst einmal bestimmt worden, dann kann κ etwa durch Anwendung des Newtonverfahrens auf die Abbildung

$$\kappa \longmapsto \langle f, \Lambda_\sigma f \rangle_{L^2(T)} - \langle f, \Lambda_{\sigma_*} f \rangle_{L^2(T)} \quad (4.5)$$

für ein beliebiges Strommuster $f \in H_\diamond^{-1/2}(T)$ gewonnen werden; dabei bezeichnen $\langle f, \Lambda_{\sigma_*} f \rangle_{L^2(T)}$ den gemessenen, zum exakten Leitfähigkeitswert κ_* gehörenden Wert. Startet man die Newtoniteration mit $\kappa_0 < \kappa_*$, dann konvergieren die Iterierten des Newtonverfahrens wegen der Monotonie und Konvexität der Abbildung (4.5) (vgl. Lemma 2.1(c),(d)) monoton wachsend und quadratisch

gegen κ_* . Die Differenzierbarkeit der Abbildung (4.5) ist nicht schwer zu zeigen und in der Literatur schon lange bekannt [16], speziell für das hier behandelte Problem lautet die Ableitung (siehe z.B. [11])

$$\frac{d}{d\kappa} \langle f, \Lambda_\sigma f \rangle_{L^2(T)} = - \int_{\Omega} |\nabla u_\sigma|^2 dx.$$

Allerdings muß beim Newtonverfahren in jedem Iterationsschritt, um die Funktion (4.5) und ihre Ableitung auszuwerten, die Lösung eines Vorwärtsproblems, u_σ , berechnet werden.

4.2 Beweis des Hauptresultats

Es sei an dieser Stelle schon betont, daß der Beweis bis auf die spezielle Wahl der Funktion $g_{z,d}$ unabhängig vom Gebiet B durchgeführt werden kann. Daher formulieren wir die Ergebnisse in größerer Allgemeinheit und beschränken uns erst gegen Ende von Abschnitt 4.2.3 auf den Einheitskreis.

Auch wenn wir in diesem Abschnitt Randwertprobleme der Anschauung wegen immer in starker Form notieren, so wollen wir nichtsdestotrotz den Lösungsbegriff immer im schwachen Sinn verstanden wissen, wie er in Kapitel 2 eingeführt wurde.

4.2.1 Faktorisierung: $\Lambda_\sigma - \Lambda_{\mathbb{1}} = LFL'$

Wir beginnen mit der Definition des Operators L , der implizit über die Lösung folgenden Neumann-Randwertproblems erklärt ist:

$$\Delta v = 0 \quad \text{in } B \setminus \overline{\Omega}, \quad (4.6a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } T, \quad (4.6b)$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial \nu} = \phi \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.6c)$$

$$\oint_T v ds = 0. \quad (4.6d)$$

Für $\phi \in H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$ besitzt dieses Problem wieder eine eindeutige Lösung $v \in H_\diamond^1(B \setminus \overline{\Omega})$ und der Lösungsoperator $H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^1(B \setminus \overline{\Omega})$, $\phi \mapsto v$, ist linear und stetig. Die Stetigkeit des Spuoperators $H_\diamond^1(B \setminus \overline{\Omega}) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(T)$ impliziert dann, daß der durch

$$L : \begin{cases} H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H_\diamond^{1/2}(T), \\ \phi \longmapsto L\phi = v|_T, \end{cases} \quad (4.7)$$

erklärte lineare Operator L wohldefiniert und beschränkt ist. Darüberhinaus ist L noch injektiv, denn aus $L\phi = v|_T = 0$ folgt mit (4.6b), daß die harmonische Funktion v verschwindende Cauchydaten auf T hat, was wegen der Eindeutigkeit dieses Cauchyproblems (siehe [53, Thm. 19.II]) $v \equiv 0$ in $B \setminus \overline{\Omega}$ nach sich zieht, also insbesondere $\phi = \frac{\partial v^+}{\partial \nu}|_\Gamma = 0$.

Lemma 4.3. *Es sei $\kappa \neq 1$. Mit dem Operator L aus (4.6), (4.7) besteht dann eine Faktorisierung*

$$\Lambda_\sigma - \Lambda_\mathbb{1} = LFL'. \quad (4.8)$$

Dabei bezeichnet $L' : H_\diamond^{-1/2}(T) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$ den dualen Operator zu L und $F : H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$ ist ein Isomorphismus mit $F = F'$.

Beweis. (a) Für ein festes $f \in H_\diamond^{-1/2}(T)$ sei u_σ die Lösung des Vorwärtsproblems (2.10) und $u_\mathbb{1}$ die Lösung des entsprechenden homogenen Problems ($\kappa = 1$). Die Differenz $u_\sigma - u_\mathbb{1}$ ist harmonisch in $B \setminus \overline{\Omega}$, hat verschwindende Neumannrandwerte auf T , und aufgrund des Divergenzsatzes gilt

$$\left\langle \frac{\partial u_\sigma^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma, \mathbb{1} \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle f, \mathbb{1} \rangle_{L^2(T)} = 0 \quad \text{und analog} \quad \left\langle \frac{\partial u_\mathbb{1}^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma, \mathbb{1} \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = 0. \quad (4.9)$$

Daher löst $u_\sigma - u_\mathbb{1}$ für $\phi = \frac{\partial(u_\sigma - u_\mathbb{1})^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma$ das Randwertproblem (4.6) und infolgedessen gilt

$$L\left(\frac{\partial(u_\sigma - u_\mathbb{1})^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma\right) = (u_\sigma - u_\mathbb{1})|_T = (\Lambda_\sigma - \Lambda_\mathbb{1})f, \quad (4.10)$$

vgl. folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\Lambda_\sigma - \Lambda_\mathbb{1}} & (u_\sigma - u_\mathbb{1})|_T \\ & \searrow G & \nearrow L \\ & & \frac{\partial(u_\sigma - u_\mathbb{1})^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma \end{array}$$

Bezeichnen wir die Abbildung $f \mapsto \frac{\partial(u_\sigma - u_\mathbb{1})^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma$ mit G , dann haben wir in (4.10) eine Faktorisierung

$$\Lambda_\sigma - \Lambda_\mathbb{1} = LG \quad (4.11)$$

hergeleitet. Zu zeigen ist jetzt noch $G = FL'$.

(b) Aus Linearität und Stetigkeit des Lösungsoperators $H_\diamond^{-1/2}(T) \rightarrow H_\diamond^1(B)$,

$f \mapsto u_\sigma$, sowie des Operators $H_\diamond^1(\operatorname{div}, B \setminus \overline{\Omega}) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$, $\nabla u_\sigma \mapsto \frac{\partial u_\sigma^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma$, vgl. auch (2.5), folgt unter Beachtung von (4.9), daß

$$G_\sigma : \begin{cases} H_\diamond^{-1/2}(T) \longrightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma), \\ f \longmapsto G_\sigma f = \frac{\partial u_\sigma^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma, \end{cases} \quad (4.12)$$

ein wohldefinierter beschränkter linearer Operator ist. Der Operator in der Faktorisierung (4.11) ist somit durch $G := G_\sigma - G_\mathbb{1}$ gegeben.

Als nächstes wollen wir den dualen Operator G'_σ berechnen. Zu diesem Zweck betrachten wir das inhomogene Diffraktionsproblem

$$\Delta w = 0 \quad \text{in } B \setminus \Gamma, \quad (4.13a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } T, \quad (4.13b)$$

$$[w]_\Gamma = \psi, \quad (4.13c)$$

$$\left[\sigma \frac{\partial w}{\partial \nu} \right]_\Gamma = 0, \quad (4.13d)$$

$$\oint_T w \, ds = 0, \quad (4.13e)$$

für $\psi \in H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$ und bezeichnen seine Lösung mit w_σ . Anwenden der Green-schen Formel in Ω und in $B \setminus \overline{\Omega}$ ergibt

$$\begin{aligned} \langle G_\sigma f, \psi \rangle_{L^2(\Gamma)} &= \oint_\Gamma \underbrace{\frac{\partial u_\sigma^+}{\partial \nu}}_{=\kappa \frac{\partial u_\sigma^-}{\partial \nu}} (w_\sigma^+ - w_\sigma^-) \, ds = - \oint_\Gamma \kappa \frac{\partial u_\sigma^-}{\partial \nu} w_\sigma^- \, ds + \oint_\Gamma \frac{\partial u_\sigma^+}{\partial \nu} w_\sigma^+ \, ds \\ &= \underbrace{\oint_\Gamma \left(-\kappa \frac{\partial w_\sigma^-}{\partial \nu} u_\sigma^- + \frac{\partial w_\sigma^+}{\partial \nu} u_\sigma^+ \right) ds}_{=0, \text{ wegen } [u_\sigma]_\Gamma=0 \text{ und } \left[\sigma \frac{\partial w_\sigma}{\partial \nu} \right]_\Gamma=0} + \underbrace{\oint_T \left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial \nu} w_\sigma - \frac{\partial w_\sigma}{\partial \nu} u_\sigma \right) ds}_{\substack{=f \\ =0}} \\ &= \oint_T f w_\sigma \, ds = \langle w_\sigma, f \rangle_{L^2(T)}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß $G'_\sigma \psi = w_\sigma|_T$ mit der Lösung w_σ von (4.13) gilt und demnach

$$G' \psi = (G'_\sigma - G'_\mathbb{1}) \psi = (w_\sigma - w_\mathbb{1})|_T.$$

Nun löst aber die Einschränkung von w_σ auf $B \setminus \overline{\Omega}$ auch das Randwertproblem (4.6) für $\phi = \frac{\partial w_\sigma^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma$ und folgerichtig gilt $L\left(\frac{\partial w_\sigma^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma\right) = w_\sigma|_T = G'_\sigma \psi$ sowie

$$L\left(\frac{\partial(w_\sigma - w_\mathbb{1})^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma\right) = (w_\sigma - w_\mathbb{1})|_T = G'_\sigma \psi - G'_\mathbb{1} \psi = G' \psi. \quad (4.14)$$

Dies kann wie folgt skizziert werden:

$$\begin{array}{ccc}
 \psi & \xrightarrow{G'} & (w_\sigma - w_\mathbb{1})|_T \\
 & \searrow F & \nearrow L \\
 & & \frac{\partial(w_\sigma - w_\mathbb{1})^+}{\partial\nu}|_\Gamma
 \end{array}$$

Die Zuordnung $\psi \mapsto \frac{\partial(w_\sigma - w_\mathbb{1})^+}{\partial\nu}|_\Gamma$ definiert wiederum einen linearen Operator, den wir F nennen wollen, und mit dieser Bezeichnung kann (4.14) auch als $LF = G'$ geschrieben werden; Konjugation ergibt dann

$$G = F'L'. \quad (4.15)$$

(c) Wir zeigen noch, daß

$$F : \begin{cases} H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma), \\ \psi \longmapsto F\psi = \frac{\partial(w_\sigma - w_\mathbb{1})^+}{\partial\nu}|_\Gamma, \end{cases} \quad (4.16)$$

ein Isomorphismus mit $F = F'$ ist. Damit folgt aus (4.11) und (4.15) dann die Behauptung von Lemma 4.3.

Die Linearität und Stetigkeit von F erhält man wieder aus den entsprechenden Eigenschaften der Lösungsoperatoren für das Diffraktionsproblem (4.13) (für σ und für $\mathbb{1}$) und des Operators $H^1(\text{div}, B \setminus \bar{\Omega}) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$, $\nabla w_\sigma \mapsto \frac{\partial w_\sigma^+}{\partial\nu}|_\Gamma$, vgl. wieder (2.5). Außerdem wird noch benutzt, daß wegen des Divergenzsatzes $\langle \frac{\partial w_\sigma^+}{\partial\nu}|_\Gamma, \mathbb{1} \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle \frac{\partial w_\mathbb{1}^+}{\partial\nu}|_\Gamma, \mathbb{1} \rangle_{L^2(\Gamma)} = 0$ ist.

Zunächst betrachten wir mit $W := w_\sigma - w_\mathbb{1}$ die Differenz der Lösungen von (4.13) zu den Leitfähigkeiten σ und $\mathbb{1}$. Dann löst W folgendes Diffraktionsproblem:

$$\Delta W = 0 \quad \text{in } B \setminus \Gamma, \quad (4.17a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial\nu} = 0 \quad \text{auf } T, \quad (4.17b)$$

$$[W]_\Gamma = 0, \quad (4.17c)$$

$$\left[\sigma \frac{\partial W}{\partial\nu} \right]_\Gamma = (\kappa - 1) \frac{\partial w_\mathbb{1}^+}{\partial\nu}|_\Gamma, \quad (4.17d)$$

$$\oint_T W \, ds = 0. \quad (4.17e)$$

Wir fahren fort mit dem Nachweis der Surjektivität von F . Zu diesem Zweck geben wir uns ein beliebiges $\phi \in H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$ vor und konstruieren eine Funktion $\psi \in H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$ mit $F\psi = \frac{\partial W^+}{\partial\nu}|_\Gamma = \phi$. Dazu betrachten wir zunächst das

Neumannproblem im äußeren Gebiet $B \setminus \overline{\Omega}$,

$$\Delta W = 0 \quad \text{in } B \setminus \overline{\Omega}, \quad \frac{\partial W}{\partial \nu} \Big|_T = 0, \quad \frac{\partial W^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma = \phi, \quad \oint_T W \, ds = 0.$$

Wir bezeichnen mit $\omega := W^+|_\Gamma$ die Dirichletrandwerte der Lösung dieses Problems auf Γ und lösen damit das Dirichletproblem im inneren Gebiet Ω ,

$$\Delta W = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad W^- \Big|_\Gamma = \omega.$$

Mit der dadurch in den beiden Teilgebieten $B \setminus \overline{\Omega}$ und Ω definierten Funktion W setzen wir $\varphi := [\sigma \frac{\partial W}{\partial \nu}]_\Gamma = \phi - \kappa \frac{\partial W^-}{\partial \nu} \Big|_\Gamma$. Wegen des Divergenzsatzes ist $\langle \frac{\partial W^-}{\partial \nu}, \mathbb{1} \rangle_{L^2(\Gamma)} = 0$ und damit $\varphi \in H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$. Nun löst W das Diffraktionsproblem (4.17), falls dort $\frac{\partial w_\perp^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma = \frac{1}{\kappa-1} \varphi$ ist.

Im nächsten Schritt erklären wir w_\perp zuerst in $B \setminus \overline{\Omega}$ als Lösung des Neumannproblems

$$\Delta w_\perp = 0 \quad \text{in } B \setminus \overline{\Omega}, \quad \frac{\partial w_\perp}{\partial \nu} \Big|_T = 0, \quad \frac{\partial w_\perp^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma = \frac{1}{\kappa-1} \varphi, \quad \oint_T w_\perp \, ds = 0,$$

und weiter in Ω als Lösung von

$$\Delta w_\perp = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial w_\perp^-}{\partial \nu} \Big|_\Gamma = \frac{1}{\kappa-1} \varphi, \quad \oint_\Gamma w_\perp^- \, ds = \oint_\Gamma w_\perp^+ \, ds.$$

Setzen wir nun $\psi := [w_\perp]_\Gamma$, dann löst die so definierte Funktion w_\perp das Diffraktionsproblem (4.13) (für $\kappa = 1$). Die Normierungsbedingung für w_\perp^- sorgt hier für $\langle \mathbb{1}, \psi \rangle_{L^2(\Gamma)} = 0$, also $\psi \in H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$.

Somit sind also w_\perp bzw. $w_\sigma = w_\perp + W$ Lösungen von (4.13) (bei Leitfähigkeit $\mathbb{1}$ bzw. σ) mit der oben konstruierten Funktion ψ in der Sprungbedingung (4.13c). Demnach gilt $F\psi = \phi$ und es folgt die gewünschte Surjektivität.

Aus dem Beweis der Surjektivität wird im übrigen klar, daß die dort konstruierte Funktion ψ eindeutig bestimmt ist, d.h. F ist auch injektiv.

Der Operator $F : H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$ ist also stetig und bijektiv, nach dem Satz von der stetigen Inversen ist dann auch die Umkehrabbildung $F^{-1} : H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$ beschränkt.

Es verbleibt noch der Nachweis von $F = F'$. Hierzu untersuchen wir zunächst den Operator

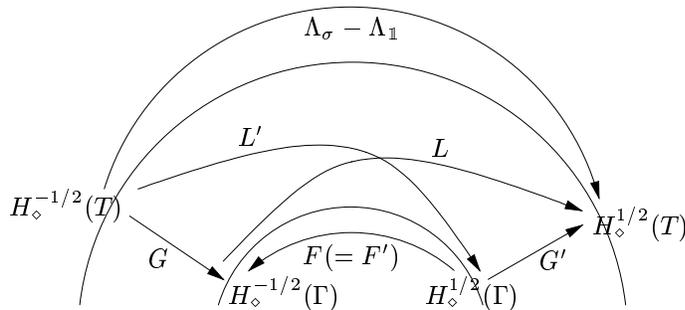
$$F_\sigma : \begin{cases} H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma), \\ \psi \longmapsto F_\sigma \psi = \frac{\partial w_\sigma^+}{\partial \nu} \Big|_\Gamma. \end{cases}$$

Seien $\psi_1, \psi_2 \in H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$ beliebig und w_1, w_2 die zugehörigen Lösungen der jeweiligen inhomogenen Diffraktionsprobleme (4.13). Mit der Greenschen Formel (angewendet in den Teilgebieten $B \setminus \overline{\Omega}$ und Ω) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle F_\sigma \psi_1, \psi_2 \rangle_{L^2(\Gamma)} &= \oint_\Gamma \underbrace{\frac{\partial w_1^+}{\partial \nu}}_{=\kappa \frac{\partial w_1^-}{\partial \nu}} \underbrace{\psi_2}_{=w_2^+ - w_2^-} ds = \oint_\Gamma \frac{\partial w_1^+}{\partial \nu} w_2^+ ds - \oint_\Gamma \kappa \frac{\partial w_1^-}{\partial \nu} w_2^- ds \\
&= \oint_T \underbrace{\left(\frac{\partial w_1}{\partial \nu} w_2 - w_1 \frac{\partial w_2}{\partial \nu} \right)}_{=0} ds + \oint_\Gamma \left(w_1^+ \frac{\partial w_2^+}{\partial \nu} - w_1^- \underbrace{\kappa \frac{\partial w_2^-}{\partial \nu}}_{=\frac{\partial w_2^+}{\partial \nu}} \right) ds \\
&= \oint_\Gamma \underbrace{(w_1^+ - w_1^-)}_{=\psi_1} \underbrace{\frac{\partial w_2^+}{\partial \nu}}_{=F_\sigma \psi_2} ds = \langle F_\sigma \psi_2, \psi_1 \rangle_{L^2(\Gamma)},
\end{aligned}$$

d.h. F_σ ist symmetrisch im Dualsystem $\langle H_\diamond^{-1/2}(\Gamma), H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \rangle$ und stimmt daher mit seinem dualen Operator überein, $F'_\sigma = F_\sigma$. Entsprechendes gilt natürlich auch für F_\perp und somit für $F = F_\sigma - F_\perp$. \square

Die Abbildungseigenschaften der im Beweis von Lemma 4.3 auftretenden Operatoren können durch folgendes Diagramm veranschaulicht werden:



Bemerkung 4.1. Der in der Faktorisierung (4.8) auftretende duale Operator L' wird im Beweis von Lemma 4.3 gar nicht in expliziter Form benötigt. Nichtsdestotrotz kann auch L' wieder über die Lösung eines Neumannproblems aus-

gedrückt werden, und zwar:

$$\begin{aligned} \Delta v' &= 0 \quad \text{in } B \setminus \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial v'}{\partial \nu} &= -\phi' \quad \text{auf } T, \\ \frac{\partial v'^+}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma, \\ \oint_T v' ds &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$L' : \begin{cases} H_\diamond^{-1/2}(T) \longrightarrow H_\diamond^{1/2}(\Gamma), \\ \phi' \longmapsto L'\phi' = (v')^+|_\Gamma, \end{cases}$$

der zu L duale Operator, wie man unter Zuhilfenahme der Greenschen Formel leicht verifiziert. Genau wie für L folgt aus der Eindeutigkeit für das Cauchyproblem, daß L' injektiv ist.

4.2.2 Der Bildraum von $|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\perp|^{1/2}$

In diesem Abschnitt sei $\kappa \neq 1$; wir wollen dann zeigen, daß die Bildräume von $|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\perp|^{1/2}$ und von L übereinstimmen. Dazu wird der Isomorphismus $F : H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$ als unbeschränkter Operator $\tilde{F} : \mathcal{D}(\tilde{F}) \subset L_\diamond^2(\Gamma) \rightarrow L_\diamond^2(\Gamma)$ aufgefaßt. Wir führen \tilde{F} über den Umweg über seine Inverse \tilde{F}^{-1} ein, die wir als Restriktion von F^{-1} auf $L_\diamond^2(\Gamma)$ definieren, d.h.

$$\tilde{F}^{-1} : L_\diamond^2(\Gamma) \longrightarrow L_\diamond^2(\Gamma), \quad \tilde{F}^{-1} := \iota F^{-1} \iota', \quad (4.18)$$

wobei ι hier die Einbettung $H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L_\diamond^2(\Gamma)$ bezeichnet und ι' die Einbettung $L_\diamond^2(\Gamma) \hookrightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$ ist.* Wegen der Injektivität von ι und ι' ist auch \tilde{F}^{-1} injektiv, daher können wir $\tilde{F} := (\tilde{F}^{-1})^{-1}$ setzen mit dem zugehörigen Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(\tilde{F}) = \mathcal{R}(\tilde{F}^{-1}) = \mathcal{R}(\iota F^{-1} \iota') = F^{-1}(L_\diamond^2(\Gamma)).$$

Lemma 4.4. *Der Operator $\tilde{F} : \mathcal{D}(\tilde{F}) \subset L_\diamond^2(\Gamma) \rightarrow L_\diamond^2(\Gamma)$ ist eine unbeschränkte und selbstadjungierte Einschränkung von F mit einem dicht in $L_\diamond^2(\Gamma)$ liegenden Definitionsbereich. Weiter ist \tilde{F} ein positiver Operator für $\kappa < 1$ und ein negativer Operator für $\kappa > 1$.*

*Die Bezeichnungen ι bzw. ι' werden sowohl für Einbettungsoperatoren auf Γ als auch auf T verwendet, vgl. (2.7). Welche Randkurve gemeint ist, ergibt sich jedoch immer unzweideutig aus dem Zusammenhang.

Beweis. Aus der Kompaktheit von \tilde{F}^{-1} , vgl. (4.18), folgt die Unbeschränktheit von \tilde{F} und wegen

$$\overline{\mathcal{D}(\tilde{F})}^\perp = \overline{\mathcal{R}(\iota F^{-1} \iota')}^\perp = \mathcal{N}((\iota F^{-1} \iota)') = \mathcal{N}(\tilde{F}^{-1}) = \{0\}$$

die Dichtheitsaussage für den Definitionsbereich. Die Symmetrie von \tilde{F} ist in Lemma 4.3 gezeigt worden, damit folgt auch die Selbstadjungiertheit [60, Thm. 13.11].

Für $0 \neq \psi \in \mathcal{R}(L') \subset H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$, $\psi = L'\phi$ mit $\phi \in H_\diamond^{-1/2}(T)$, gilt

$$\begin{aligned} \langle F\psi, \psi \rangle_{L^2(\Gamma)} &= \langle FL'\phi, L'\phi \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle LFL'\phi, \phi \rangle_{L^2(T)} \\ &= \langle (\Lambda_\sigma - \Lambda_{\mathbb{1}})\phi, \phi \rangle_{L^2(T)} \begin{cases} > 0 & \text{für } 0 < \kappa < 1, \\ < 0 & \text{für } \kappa > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei die Faktorisierung (4.8) und Lemma 2.1(c) verwendet wurde. Aufgrund der Injektivität von L ist aber

$$\overline{\mathcal{R}(L')} = \mathcal{N}(L)^\perp = \{0\}^\perp = H_\diamond^{1/2}(\Gamma),$$

wobei der Abschluß hier bzgl. der $H^{1/2}(\Gamma)$ -Norm und die „Orthogonalität“ im Sinne des $\langle H_\diamond^{1/2}(\Gamma), H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) \rangle$ -Dualsystems zu verstehen sind. Aus dieser Dichtheit folgt nun für alle $\psi \in H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$

$$\langle F\psi, \psi \rangle_{L^2(\Gamma)} \begin{cases} \geq 0 & \text{für } 0 < \kappa < 1, \\ \leq 0 & \text{für } \kappa > 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

Weil \tilde{F} aber eine Einschränkung von F ist, gilt (4.19) insbesondere für $\psi \in \mathcal{D}(\tilde{F})$, d.h. \tilde{F} ist selbstadjungiert und semidefinit. Da mit F natürlich auch \tilde{F} injektiv ist, kann das Gleichheitszeichen in (4.19) nur für $\psi = 0$ angenommen werden; also ist \tilde{F} positiv für $\kappa < 1$ und negativ für $\kappa > 1$. \square

Mit \tilde{F} ist auch \tilde{F}^{-1} selbstadjungiert und positiv (bzw. negativ), d.h.

$$|\tilde{F}^{-1}| = \begin{cases} \tilde{F}^{-1} & \text{für } 0 < \kappa < 1, \\ -\tilde{F}^{-1} & \text{für } \kappa > 1, \end{cases}$$

ist selbstadjungiert, positiv und $\mathcal{R}(|\tilde{F}^{-1}|) = \mathcal{R}(\tilde{F}^{-1})$. Damit besitzt $|\tilde{F}^{-1}|$ eine eindeutig bestimmte (ebenfalls selbstadjungierte und positive) Quadratwurzel [60, Thm. 13.31]

$$|\tilde{F}^{-1}|^{1/2} : L_\diamond^2(\Gamma) \longrightarrow L_\diamond^2(\Gamma), \quad |\tilde{F}^{-1}| = |\tilde{F}^{-1}|^{1/2} |\tilde{F}^{-1}|^{1/2},$$

und offenbar ist $\mathcal{R}(|\tilde{F}^{-1}|) \subset \mathcal{R}(|\tilde{F}^{-1}|^{1/2})$.

Wir benötigen noch ein Hilfsresultat:

Lemma 4.5. *Der Operator $K : L_\diamond^2(\Gamma) \rightarrow L_\diamond^2(\Gamma)$ sei selbstadjungiert, positiv und besitze eine Fortsetzung als Isomorphismus $H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$. Dann ist die (selbstadjungierte und positive) Quadratwurzel $K^{1/2}$ ein Isomorphismus $L_\diamond^2(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$ und besitzt eine Fortsetzung als Isomorphismus $H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow L_\diamond^2(\Gamma)$; diese beiden Isomorphismen sind zueinander dual.*

Beweis. Für $\psi \in L_\diamond^2(\Gamma)$ gilt

$$\begin{aligned} \|K^{1/2}\psi\|_{L_\diamond^2(\Gamma)}^2 &= \langle K^{1/2}\psi, K^{1/2}\psi \rangle_{L_\diamond^2(\Gamma)} = \langle \psi, K\psi \rangle_{L_\diamond^2(\Gamma)} \\ &\leq C \|\psi\|_{H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)} \|K\psi\|_{H_\diamond^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq C \|K\|_{H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \leftarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)} \|\psi\|_{H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)}^2, \end{aligned}$$

d.h. $K^{1/2}$ besitzt eine stetige Fortsetzung $H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow L_\diamond^2(\Gamma)$, die wir $K_1^{1/2}$ nennen wollen.

Aufgrund der Symmetrie von $K^{1/2}$ gilt für $\phi, \psi \in L_\diamond^2(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \langle \phi, (K_1^{1/2})' \psi \rangle_{L_\diamond^2(\Gamma)} &= \langle K_1^{1/2} \phi, \psi \rangle_{L_\diamond^2(\Gamma)} = \langle K^{1/2} \phi, \psi \rangle_{L_\diamond^2(\Gamma)} \\ &= \langle \phi, K^{1/2} \psi \rangle_{L_\diamond^2(\Gamma)} = \langle \phi, K_1^{1/2} \psi \rangle_{L_\diamond^2(\Gamma)}, \end{aligned}$$

und weil $L_\diamond^2(\Gamma)$ dicht in $H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$ liegt, stimmt somit der duale Operator $(K_1^{1/2})' : L_\diamond^2(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$ mit der Einschränkung $K_1^{1/2}|_{L_\diamond^2(\Gamma)}$ überein, d.h. mit $K^{1/2}$. Also ist $K^{1/2}$ auch als Operator $L_\diamond^2(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$ stetig.

Die Fortsetzung von K als Operator $H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$ können wir jetzt als $K = (K_1^{1/2})' K_1^{1/2}$ schreiben, und es gilt

$$\|K\psi\|_{H_\diamond^{1/2}(\Gamma)} \leq \|(K_1^{1/2})'\|_{H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \leftarrow L_\diamond^2(\Gamma)} \|K_1^{1/2}\psi\|_{L_\diamond^2(\Gamma)} \quad \text{für } \psi \in H_\diamond^{-1/2}(\Gamma).$$

Weiter folgt daraus

$$\begin{aligned} \|K_1^{1/2}\psi\|_{L_\diamond^2(\Gamma)} &\geq \frac{\|K\psi\|_{H_\diamond^{1/2}(\Gamma)}}{\|(K_1^{1/2})'\|_{H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \leftarrow L_\diamond^2(\Gamma)}} \\ &\geq \frac{\|\psi\|_{H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)}}{\|(K_1^{1/2})'\|_{H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \leftarrow L_\diamond^2(\Gamma)}} \cdot \frac{\|K\psi\|_{H_\diamond^{1/2}(\Gamma)}}{\|\psi\|_{H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)}} \\ &\geq \frac{1}{\|(K_1^{1/2})'\|_{H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \leftarrow L_\diamond^2(\Gamma)} \|K^{-1}\|_{H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) \leftarrow H_\diamond^{1/2}(\Gamma)}} \cdot \|\psi\|_{H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

für alle $0 \neq \psi \in H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$, d.h. die Inverse $K_1^{-1/2} : L_\diamond^2(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$ ist stetig, $K_1^{1/2} : H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow L_\diamond^2(\Gamma)$ ist also ein Isomorphismus. Demzufolge ist $(K_1^{1/2})' = K K_1^{-1/2} : L_\diamond^2(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$ ebenfalls ein Isomorphismus. \square

Wir wenden nun Lemma 4.5 für $K = |\tilde{F}^{-1}|$ an. Insbesondere gilt $\mathcal{R}(|\tilde{F}^{-1}|^{1/2}) = H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$ und $|\tilde{F}^{-1}|^{1/2}$ ist als Abbildung $L_\diamond^2(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{1/2}(\Gamma)$ ein Isomorphismus genau wie der duale Operator $(|\tilde{F}^{-1}|^{1/2})'$ in der Topologie $H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow L_\diamond^2(\Gamma)$.

Bezeichnen wir die Inversen dieser Isomorphismen mit $|F|^{1/2} : H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \rightarrow L_\diamond^2(\Gamma)$ bzw. $(|F|^{1/2})' : L_\diamond^2(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$, dann erhalten wir

$$|F| = (|F|^{1/2})'|F|^{1/2} : H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma). \quad (4.20)$$

Damit kommen wir zum letztendlichen Ziel dieses Abschnitts:

Lemma 4.6. *Es gilt $\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\perp|^{1/2}) = \mathcal{R}(L)$.*

Beweis. Mit der Faktorisierung (4.8) und (4.20) erhalten wir

$$|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\perp| = \iota L(|F|^{1/2})'|F|^{1/2} L' \iota' = A' A$$

mit $A = |F|^{1/2} L' \iota'$. Da A eine Abbildung $L_\diamond^2(T) \rightarrow L_\diamond^2(\Gamma)$ ist, ist A' der adjungierte Operator von A , d.h. $A' = A^*$. Bekanntlich gilt $\mathcal{R}((A^* A)^{1/2}) = \mathcal{R}(A^*)$, vgl. etwa [25, Prop. 2.18], und daraus schließen wir

$$\begin{aligned} g \in \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\perp|^{1/2}) &\iff g \in \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(\iota L(|F|^{1/2})') \\ &\iff \exists \phi \in L_\diamond^2(\Gamma) : g = \iota L(|F|^{1/2})' \phi \\ &\iff \exists \psi \in H_\diamond^{-1/2}(\Gamma) : g = \iota L \psi \\ &\iff g \in \mathcal{R}(\iota L) = \mathcal{R}(L) \subset H_\diamond^{1/2}(T). \end{aligned}$$

Hier wurde noch die Bijektivität von $(|F|^{1/2})' : L_\diamond^2(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$ benutzt. \square

4.2.3 Der Bildraum von L

Der Operator L (und damit auch L') aus der Faktorisierung (4.8) hängt nur vom Gebiet Ω , nicht jedoch vom dort vorherrschenden Leitfähigkeitswert κ ab. Gerade diese Tatsache ermöglicht nun zusammen mit der im vorigen Abschnitt gezeigten Gleichheit der Bildräume $\mathcal{R}(L)$ und $\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\perp|^{1/2})$ die Charakterisierung von Ω in Satz 4.1 ohne Vorkenntnis von κ .

Aus der Definition des Operators L in (4.6), (4.7) wird klar: Eine Funktion $g \in H_\diamond^{1/2}(T)$ liegt genau dann in $\mathcal{R}(L)$, wenn das Cauchyproblem

$$\Delta v = 0 \quad \text{in } B \setminus \bar{\Omega}, \quad (4.21a)$$

$$v = g \quad \text{auf } T, \quad (4.21b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } T, \quad (4.21c)$$

eine Lösung $v \in H^1_\diamond(B \setminus \overline{\Omega})$ besitzt, und in diesem Fall gilt $L(\frac{\partial v^+}{\partial \nu}|_\Gamma) = g$. Unser Ziel ist es nun, Funktionen g anzugeben, anhand derer man die Lösbarkeit von (4.21) sofort entscheiden kann.

Betrachten wir zunächst *Neumannsche Funktionen* für das Gebiet B . Diese sind durch $N(z, x) = \frac{1}{2\pi} \log|z - x| + n(z, x)$ definiert, wobei $n(z, \cdot)$ für jedes $z \in B$ das Neumannproblem

$$\begin{aligned} \Delta_x n(z, x) &= 0 \quad \text{in } B, \\ \frac{\partial n(z, x)}{\partial \nu_x} &= \beta(x) - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \log|z - x|}{\partial \nu_x} \quad \text{auf } T, \\ \oint_T \beta(x) n(z, x) ds_x &= -\frac{1}{2\pi} \oint_T \beta(x) \log|z - x| ds_x, \end{aligned}$$

mit einer Normierungsfunktion β , $\oint_T \beta(x) ds_x = 1$, löst. Für jedes $z \in B$ läßt sich N auch als Distributionenlösung des Neumannproblems

$$\Delta_x N(z, x) = \delta(x - z) \quad \text{in } B, \quad (4.22a)$$

$$\frac{\partial N(z, x)}{\partial \nu_x} = \beta(x) \quad \text{auf } T, \quad (4.22b)$$

$$\oint_T \beta(x) N(z, x) ds_x = 0, \quad (4.22c)$$

schreiben. In diesem Fall gilt $N(z, x) = N(x, z)$, siehe etwa [34, § 4.7]; insbesondere ist N auch in der als Parameter auftretenden Variablen z harmonisch und damit unendlich oft differenzierbar (für $z \neq x$). Differenzieren wir die Gleichungen (4.22) nach dem Parameter z in eine beliebige Richtung $d \in \mathbb{R}^2$, $|d| = 1$, so erhalten wir

$$\Delta_x \frac{\partial N(z, x)}{\partial_z d} = -(d \cdot \nabla \delta)(x - z) \quad \text{in } B, \quad (4.23a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{\partial N(z, x)}{\partial_z d} = 0 \quad \text{auf } T, \quad (4.23b)$$

$$\oint_T \beta(x) \frac{\partial N(z, x)}{\partial_z d} ds_x = 0. \quad (4.23c)$$

Die Funktion

$$\frac{\partial N(z, x)}{\partial_z d} = \frac{1}{2\pi} \frac{(z - x) \cdot d}{|z - x|^2} + \frac{\partial n(z, x)}{\partial_z d} \quad (4.24)$$

hat eine dipolartige Singularität in z mit Dipolachse d , während der zweite Term $\frac{\partial n}{\partial_z d}$ harmonisch ist und lediglich zum Erfüllen der Randbedingung (4.23b) und der Normierung (4.23c) benötigt wird.

Lemma 4.7. *Es sei N eine Neumannsche Funktion für B und $d \in \mathbb{R}^2$, $|d| = 1$, eine beliebige Richtung. Dann besitzt das Cauchyproblem (4.21) für $g(x) = \frac{\partial N(z, x)}{\partial_z d} - c(z)\mathbb{1}(x)$ mit $c(z) = \frac{1}{|T|} \oint_T \frac{\partial N}{\partial_z d}(z, x) ds_x$ genau dann eine Lösung $v \in H^1_\diamond(B \setminus \overline{\Omega})$, wenn $z \in \Omega$.*

Beweis. Aufgrund der Wahl von $c(z)$ gilt $\langle \mathbb{1}, g \rangle_{L^2(T)} = 0$, und wegen (4.23) ist $\frac{\partial N(z, \cdot)}{\partial_z d} - c(z)\mathbb{1}$ harmonisch in $B \setminus \{z\}$ und erfüllt die Cauchyrandbedingungen (4.21b) und (4.21c).

Für $z \in \Omega$ ist überdies $\frac{\partial N(z, \cdot)}{\partial_z d} - c(z)\mathbb{1} \in C^1(\overline{B} \setminus \Omega) \subset H^1(B \setminus \overline{\Omega})$, also löst $\frac{\partial N}{\partial_z d} - c(z)\mathbb{1}$ für $z \in \Omega$ das Cauchyproblem (4.21).

Kommen wir nun zum Fall $z \notin \Omega$ und nehmen an, daß eine Lösung v des Cauchyproblems (4.21) existiert. Aus der Eindeutigkeit für das Cauchyproblem schließen wir, daß $v = \frac{\partial N(z, \cdot)}{\partial_z d} - c(z)\mathbb{1}$ in $B \setminus (\overline{\Omega} \cup \{z\})$ gelten muß. Der zweite Term von $\frac{\partial N}{\partial_z d}$ in (4.24) ist glatt, und den Gradienten des ersten Terms berechnen wir zu

$$\frac{1}{2\pi} \nabla_x \frac{(z-x) \cdot d}{|z-x|^2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2(z-x) \cdot d}{|z-x|^4} (z-x) - \frac{d}{|z-x|^2} \right)$$

und erhalten

$$\left| \frac{1}{2\pi} \nabla_x \frac{(z-x) \cdot d}{|z-x|^2} \right|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{|d|^2}{|z-x|^4} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{|z-x|^4}.$$

Aber für $z \notin \Omega$ ist

$$\left| \frac{1}{2\pi} \nabla_x \frac{(z-x) \cdot d}{|z-x|^2} \right| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|z-x|^2} \notin L^2(B \setminus \overline{\Omega}),$$

also folgt $\frac{\partial N}{\partial_z d} - c(z)\mathbb{1} \notin H^1(B \setminus \overline{\Omega})$, d.h. das Cauchyproblem kann hier keine Lösung in $H^1_\diamond(B \setminus \overline{\Omega})$ besitzen. \square

Bislang waren alle Betrachtungen noch unabhängig vom speziellen Grundgebiet B . Für den Einheitskreis ist die Neumannsche Funktion zur Normierungsfunktion $\beta \equiv 1/2\pi$ jedoch explizit bekannt:

$$N(z, x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\log|z-x| + \log \left| \frac{z}{|z|} - |z|x \right| \right) & \text{für } z \neq 0, \\ \frac{1}{2\pi} \log|x| & \text{für } z = 0; \end{cases} \quad (4.25)$$

ihre Richtungsableitung lautet

$$\frac{\partial N(z, x)}{\partial_z d} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(z-x) \cdot d}{|z-x|^2} + \frac{(|x|^2 z - x) \cdot d}{\left| \frac{z}{|z|} - |z|x \right|^2} \right) & \text{für } z \neq 0, \\ \frac{-x \cdot d}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{|x|^2} \right) & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

Die in Lemma 4.7 auftretenden Randwerte haben hier die Form (vgl. (4.2))

$$g_{z,d}(x) = \frac{\partial N(z, x)}{\partial_z d} = \frac{1}{\pi} \frac{(z-x) \cdot d}{|z-x|^2}.$$

Korollar 4.8. *Im Fall des Einheitskreises, $B = B_1$, gilt $g_{z,d} \in \mathcal{R}(L)$ genau dann, wenn $z \in \Omega$.*

Beweis. Für $\beta \equiv 1/|T|$ ist $c(z) = 0$. Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus Lemma 4.7 und den vorangestellten Überlegungen. \square

Bemerkung 4.2. Die Wahl der Richtung d spielt in Lemma 4.7 und Korollar 4.8 nur eine untergeordnete Rolle. Im Fall des Einheitskreises, $B = B_1$, sei noch auf zwei Spezialfälle besonders hingewiesen (für $z \neq 0$):

- (a) Für $d = \frac{z}{|z|}$ ist $g_{z,d}(x) = \frac{1}{\pi|z|} \frac{|z|^2 - z \cdot x}{|z-x|^2} = \frac{1}{\pi} \frac{|z| - \cos \angle(x, z)}{1 + |z|^2 - 2|z| \cos \angle(x, z)}$ und
- (b) für $d = \frac{-z^\perp}{|z|}$ ist $g_{z,d}(x) = \frac{1}{\pi|z|} \frac{z^\perp \cdot x}{|z-x|^2} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \angle(x, z)}{1 + |z|^2 - 2|z| \cos \angle(x, z)}$.

Bemerkung 4.3. Anstelle von $\frac{\partial N}{\partial_z d}$ können auch höhere Ableitungen der Neumannschen Funktion N herangezogen werden, etwa

$$\frac{\partial^l N(z, x)}{\partial_z d_1 \cdots \partial_z d_l} \quad \text{für Richtungen } d_i \in \mathbb{R}^2, |d_i| = 1, i = 1, \dots, l.$$

Wenn $g_{z,d}$ die Randwerte dieser höheren Ableitungen bezeichnen, kann der Beweis von Lemma 4.7 unmittelbar übertragen werden. Dies liegt wieder in der (jetzt noch stärkeren) Singularität an der Stelle z begründet.

4.3 Verallgemeinerungen

4.3.1 Unterschiedliche Leitfähigkeitswerte, Isolatoren und perfekte Leiter

Satz 4.1 kann auch auf die in Bemerkung 2.1 angesprochene Situation übertragen werden, daß die Leitfähigkeitskonstanten κ_j in den einzelnen Einschlüssen Ω_j unterschiedlich sind, sofern nur das Vorzeichen von $\kappa_j - 1$ für alle Komponenten gleich ist. Hierzu muß lediglich eine Faktorisierung wie in Lemma 4.3 hergeleitet werden, denn daraus folgt zusammen mit der Definitheit von $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1$ dann Lemma 4.6, und der Bildraum von L ist ohnehin nur von Ω abhängig. Die vorzunehmenden Änderungen im Beweis von Lemma 4.3 sind nur geringfügig, wenn wir (mit den Bezeichnungen von Bemerkung 2.1) unter $H_\diamond^{\pm 1/2}(\Gamma)$

den Produktraum $H_{\diamond}^{\pm 1/2}(\Gamma_1) \times \dots \times H_{\diamond}^{\pm 1/2}(\Gamma_N)$ verstehen. Bei den auftretenden Diffraktionsproblemen sind die Sprungbedingungen für den Fluß auf jedem Randstück Γ_j mit dem jeweiligen Leitfähigkeitswert κ_j zu interpretieren.

Selbst für die beiden Grenzfälle $\kappa = 0$ und $\kappa = \infty$ behält die Charakterisierung der Leitfähigkeitshomogenität aus dem vorigen Abschnitt ihre Gültigkeit. Auch in diesem Fall ist $\tilde{\Lambda}_{\sigma} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}$ definit (vgl. Ende von Bemerkung 2.2) und es genügt somit der Nachweis einer Faktorisierung gemäß Lemma 4.3. Wir wollen die vorzunehmenden Änderungen hier nur kurz andeuten, weil der Beweis von Lemma 4.3 ansonsten fast wortwörtlich übernommen werden kann.

Zuerst behandeln wir den Fall $\kappa = 0$. Aufgrund der Randbedingung $\frac{\partial u_{\sigma}^+}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0$, vgl. (2.14c), ist $G_{\sigma} = 0$, vgl. (4.12), und damit $Gf = -G_{\mathbb{1}}f = -\frac{\partial u_{\mathbb{1}}^+}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}$. Dementsprechend erhält man auch $F_{\sigma} = 0$, d.h. $F\psi = -F_{\mathbb{1}}\psi = -\frac{\partial w_{\mathbb{1}}^+}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}$ mit $w_{\mathbb{1}}$ als Lösung von (4.13). Der Beweis der Isomorphie von $F : H_{\diamond}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{\diamond}^{-1/2}$ wird in diesem Fall sogar deutlich einfacher, weil beim Nachweis der Surjektivität die Konstruktion einer Lösung W von (4.17) schlichtweg entfällt.

Komplizierter verhält es sich im Fall $\kappa = \infty$. Zunächst muß zur Auswertung von $G'_{\sigma}\psi$ für $\psi \in H_{\diamond}^{1/2}(\Gamma)$ anstelle von (4.13) das Randwertproblem

$$\Delta w_{\sigma} = 0 \quad \text{in } B \setminus \overline{\Omega}, \quad (4.26a)$$

$$\frac{\partial w_{\sigma}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } T, \quad (4.26b)$$

$$w_{\sigma} = \psi + \text{const} \quad \text{auf } \Gamma_j \quad (j = 1, \dots, N), \quad (4.26c)$$

$$\oint_{\Gamma_j} \frac{\partial w}{\partial \nu} ds = 0 \quad (j = 1, \dots, N), \quad (4.26d)$$

$$\oint_T w_{\sigma} ds = 0, \quad (4.26e)$$

gelöst werden, es gilt dann $G'_{\sigma}\psi = w_{\sigma}|_T$. Die jeweiligen Konstanten auf der rechten Seite von (4.26c) sind ähnlich wie beim Vorwärtsproblem (2.16) durch (4.26d) und (4.26e) eindeutig festgelegt. Beim Beweis der Surjektivität von F wird die Funktion W genau wie zuvor bestimmt. Zu $\varphi := \left[\frac{\partial W}{\partial \nu}\right]_{\Gamma}$ sei dann w_{σ} in $B \setminus \overline{\Omega}$ die Lösung von

$$\Delta w_{\sigma} = 0 \quad \text{in } B \setminus \overline{\Omega}, \quad \frac{\partial w_{\sigma}}{\partial \nu} \Big|_T = 0, \quad \frac{\partial w_{\sigma}^+}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \varphi, \quad \oint_T w_{\sigma} ds = 0.$$

Mit den Konstanten $c_j = \frac{-1}{|\Gamma_j|} \oint_{\Gamma_j} w_{\sigma}^+ ds$ setzen wir schließlich $w_{\sigma} \equiv c_j$ in Ω_j und $\psi|_{\Gamma_j} := w_{\sigma}^+|_{\Gamma_j} + c_j$. Dann verifiziert man leicht, daß w_{σ} und $w_{\mathbb{1}} = w_{\sigma} - W$ das Gewünschte leisten, d.h. $F\psi = \phi$.

Die Verallgemeinerungen aus diesem Abschnitt können auch kombiniert werden. Wenn also zu Inhomogenitäten mit $\kappa_j < 1$ noch isolierende Gebiete hinzukommen, bleibt Satz 4.1 gültig. Entsprechendes gilt für $\kappa_j > 1$ und perfekt leitende Einschlüsse.

Eine Charakterisierung ähnlich der unsrigen im Fall geerdeter perfekt leitender Einschlüsse wurde von Hähner [35] unabhängig von dieser Arbeit angegeben. Die Erdung bewirkt dabei einen Potentialwert Null in allen Einschlüssen anstelle der durch die Quelfreiheit (2.16d) implizit festgelegten Potentialkonstanten in (2.16c). Der Verzicht auf die Quelfreiheit erlaubt bei ihm die Verwendung von Grundlösungen für die Testfunktionen $g_{z,d}$ anstatt der hier benötigten Dipolfunktionen, also der Ableitungen von Grundlösungen.

4.3.2 Nichtkonstante Inhomogenitäten

Unter gewissen Voraussetzungen können auch Einschlüsse mit nichtkonstanten Leitfähigkeitskoeffizienten durch Satz 4.1 bzw. Korollar 4.2 charakterisiert werden.

Satz 4.9. *Es sei $B = B_1$. Die Leitfähigkeit habe die Form*

$$\sigma(x) = \begin{cases} \kappa(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 1 & \text{für } x \in B \setminus \bar{\Omega}, \end{cases}$$

wobei entweder $\kappa(x) \geq 1 + \varepsilon$ oder $\kappa(x) \leq 1 - \varepsilon$ für $x \in \Omega$ und ein $\varepsilon > 0$ gelte. Auch dann gilt

$$g_{z,d} \in \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1|^{1/2}) \quad \text{genau dann, wenn } z \in \Omega.$$

Vor den Beweis dieses Satzes stellen wir noch ein Hilfsresultat.

Lemma 4.10. *Sei X ein Hilbertraum und $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ selbstadjungiert und injektiv. Dann gilt*

$$y \in \mathcal{R}(A) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\langle y, x \rangle}{\|Ax\|} < \infty.$$

Beweis. Wegen $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A) = \{0\}$ liegt $\mathcal{R}(A)$ dicht in X und $A^{-1} : \mathcal{D}(A^{-1}) \subset X \rightarrow X$ ist ebenfalls selbstadjungiert [68, Thm. 4.21] mit $\mathcal{D}(A^{-*}) = \mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$. Definitionsgemäß besteht aber $\mathcal{D}(A^{-*})$ aus denjenigen $y \in X$, für die das Funktional $z \mapsto \langle A^{-1}z, y \rangle$ in $\mathcal{D}(A^{-1})$ beschränkt ist [68, Sect. 4.4], oder mit anderen Worten: $y \in \mathcal{D}(A^{-*}) = \mathcal{R}(A)$ genau dann, wenn

$$\sup_{0 \neq z \in \mathcal{R}(A)} \frac{\langle A^{-1}z, y \rangle}{\|z\|} = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\langle x, y \rangle}{\|Ax\|} < \infty.$$

□

Beweis (von Satz 4.9). Wir beschränken uns hier auf den Fall $\kappa(x) \geq 1 + \varepsilon$ für $x \in \Omega$. Es sei

$$\underline{\sigma}(x) = \begin{cases} 1 + \varepsilon & \text{für } x \in \Omega, \\ 1 & \text{für } x \in B \setminus \overline{\Omega}, \end{cases} \quad \text{und} \quad \overline{\sigma}(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \in \Omega, \\ 1 & \text{für } x \in B \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Aus der Monotonieeigenschaft (Lemma 2.1(c), siehe auch Bemerkung 2.2) folgt dann

$$\tilde{\Lambda}_{\overline{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}} \leq \tilde{\Lambda}_{\sigma} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}} \leq \tilde{\Lambda}_{\underline{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}} \leq O,$$

und die drei Differenzen von Neumann-Dirichlet-Abbildungen sind jeweils injektiv. Mit dem schon zuvor erwähnten Lemma von Heinz (vgl. [68, Thm. 9.3]) ergibt sich

$$|\tilde{\Lambda}_{\overline{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}|^{1/2} \geq |\tilde{\Lambda}_{\sigma} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}|^{1/2} \geq |\tilde{\Lambda}_{\underline{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}|^{1/2} \geq O, \quad (4.27)$$

und die beteiligten Operatoren genügen den Voraussetzungen von Lemma 4.10 mit $X = L^2_{\diamond}(T)$.

Sei nun $y \in \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_{\sigma} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}|^{1/2})$. Wegen (4.27) und Lemma 4.10 ist

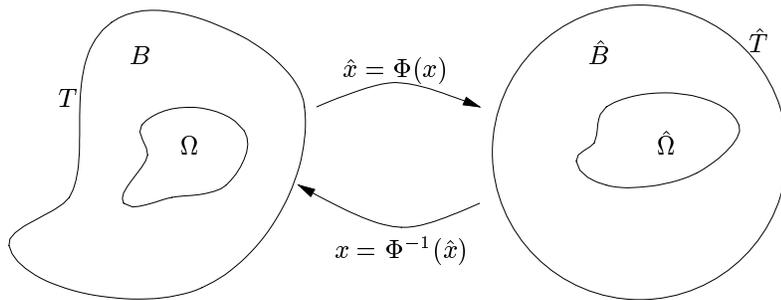
$$\sup_{0 \neq x \in L^2_{\diamond}(T)} \frac{\langle y, x \rangle_{L^2(T)}}{\| |\tilde{\Lambda}_{\overline{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}|^{1/2} x \|_{L^2_{\diamond}(T)}} \leq \sup_{0 \neq x \in L^2_{\diamond}(T)} \frac{\langle y, x \rangle_{L^2(T)}}{\| |\tilde{\Lambda}_{\sigma} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}|^{1/2} x \|_{L^2_{\diamond}(T)}} < \infty,$$

also $y \in \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_{\overline{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}|^{1/2})$ wiederum nach Lemma 4.10. Somit haben wir nachgewiesen, daß $\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_{\sigma} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}|^{1/2}) \subset \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_{\overline{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}|^{1/2})$, und ganz analog zeigt man $\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_{\underline{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}|^{1/2}) \subset \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_{\sigma} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}|^{1/2})$. Wegen $\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_{\sigma} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}|^{1/2}) = \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_{\underline{\sigma}} - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}|^{1/2}) = \mathcal{R}(L)$ stimmen alle Bildräume mit $\mathcal{R}(L)$ überein und die Behauptung folgt dann aus Korollar 4.8. \square

Übrigens kann die zu Beginn von Abschnitt 4.3.1 abgeleitete Verallgemeinerung nun auch unmittelbar aus Satz 4.9 gefolgert werden.

4.3.3 Andere Grundgebiete

Eine Möglichkeit, den Fall eines vom Einheitskreis abweichenden beschränkten einfach zusammenhängenden Gebiets $B \subset \mathbb{R}^2$ zu behandeln, ist dann gegeben, wenn man eine konforme Abbildung Φ kennt, die das Gebiet B (nach Identifikation $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$) auf den Einheitskreis \hat{B} abbildet.



Die Existenz solcher konformer Abbildungen ist nach dem Riemannschen Abbildungssatz gesichert, für ihre Eindeutigkeit, die jedoch hier nicht benötigt wird, müssen noch zusätzliche Bedingungen gestellt werden. Aufgrund unserer Glattheitsannahmen an den Rand T läßt sich Φ zu einem Homöomorphismus $\overline{B} \rightarrow \overline{\hat{B}}$ fortsetzen; ebenso kann die Ableitung $\Phi'(z)$ stetig auf den Rand fortgesetzt werden und dort ist $\Phi'(z) \neq 0$. Zusammengefaßt findet man diese Aussagen versehen mit Literaturhinweisen z.B. in [29, Anhang 4].

Lemma 4.11. *Es sei $\hat{N}(\hat{z}, \hat{x})$ eine Neumannsche Funktion zur Normierungsfunktion $\hat{\beta}$ für den Einheitskreis \hat{B} . Dann ist*

$$N(z, x) := \hat{N}(\Phi(z), \Phi(x)) \quad \text{für } z, x \in B$$

eine Neumannsche Funktion zur Normierungsfunktion $|\Phi'| \hat{\beta} \circ \Phi$ für das Gebiet B .

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} N(z, x) &= \frac{1}{2\pi} \log |\Phi(z) - \Phi(x)| + \hat{n}(\Phi(z), \Phi(x)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \log |z - x| + \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{\Phi(z) - \Phi(x)}{z - x} \right| + \hat{n}(\Phi(z), \Phi(x)) \\ &=: \frac{1}{2\pi} \log |z - x| + n(z, x) \end{aligned}$$

und damit

$$\Delta_x N(z, x) = \delta(x - z) \quad \text{für } x \in B,$$

denn, weil Φ injektiv ist und $\Phi'(z) \neq 0$, ist $\frac{\Phi(z) - \Phi(x)}{z - x}$ in B als Funktion von x holomorph und von Null verschieden, woraus wiederum folgt, daß $n(z, x)$ in B harmonisch ist. Weiter erfüllt N die Randbedingung

$$\frac{\partial N(z, x)}{\partial \nu_x} = |\Phi'(x)| \frac{\partial \hat{N}(\hat{z}, \hat{x})}{\partial \nu_{\hat{x}}} \Big|_{\substack{\hat{z} = \Phi(z) \\ \hat{x} = \Phi(x)}} = |\Phi'(x)| \hat{\beta}(\Phi(x))$$

und die Normierungsbedingung

$$\begin{aligned} \oint_T |\Phi'(x)| \hat{\beta}(\Phi(x)) N(z, x) ds_x &= \oint_T \hat{\beta}(\Phi(x)) \hat{N}(\Phi(z), \Phi(x)) |\Phi'(x)| ds_x \\ &= \oint_{\hat{T}} \hat{\beta}(\hat{x}) \hat{N}(\hat{z}, \hat{x}) ds_{\hat{x}} = 0. \end{aligned}$$

Wegen $\oint_T \hat{\beta}(\Phi(x)) |\Phi'(x)| ds_x = \oint_{\hat{T}} \hat{\beta}(\hat{x}) ds_{\hat{x}} = 1$ handelt es sich bei $|\Phi'| \hat{\beta} \circ \Phi$ auch tatsächlich um eine Normierungsfunktion für den Rand T . \square

Damit sind wir in der Lage, eine Verallgemeinerung von Satz 4.1 für beliebige einfach zusammenhängende Gebiete, welche den Glattheitsanforderungen von Abschnitt 2.1 an den Rand genügen, zu formulieren.

Satz 4.12. *Sei Φ eine konforme Abbildung von B auf den Einheitskreis \hat{B} . Weiter sei für eine beliebige Richtung $d \in \mathbb{R}^2$, $|d| = 1$, und $z \in B$*

$$\tilde{g}_{z,d}(x) = g_{\Phi(z),d}(\Phi(x)) - c(z) \mathbb{1}(x) \quad \text{für } x \in T = \partial B \quad (4.28)$$

mit $c(z) = \frac{1}{|T|} \oint_T g_{\Phi(z),d}(\Phi(x)) ds_x$. Dann gilt für $\kappa \neq 1$

$$\tilde{g}_{z,d} \in \mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}|^{1/2}) \quad \text{genau dann, wenn } z \in \Omega. \quad (4.29)$$

Beweis. Wir wenden Lemma 4.11 auf die Neumannfunktion \hat{N} aus (4.25) für den Einheitskreis an. Beachten wir dann noch, daß

$$\frac{\partial N(z, x)}{\partial_z d} = |\Phi'(z)| \frac{\partial \hat{N}(\hat{z}, \hat{x})}{\partial_z d} \Big|_{\substack{\hat{z}=\Phi(z) \\ \hat{x}=\Phi(x)}} = |\Phi'(z)| g_{\Phi(z),d}(\Phi(x))$$

und $\Phi'(z) \neq 0$, dann folgt die Behauptung wie im Fall des Einheitskreises aus Lemma 4.7. \square

Analog zu Korollar 4.2 gilt hier:

Korollar 4.13. *Es gelte die Spektralzerlegung $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1} = \sum_j \lambda_j \langle \cdot, v_j \rangle_{L^2(T)} v_j$ mit einer Orthonormalbasis $\{v_j\}$ von $L^2_\diamond(T)$. Dann gilt für $\kappa \neq 1$*

$$\sum_j \frac{\langle \tilde{g}_{z,d}, v_j \rangle_{L^2(T)}^2}{|\lambda_j|} < \infty \quad \text{genau dann, wenn } z \in \Omega.$$

4.3.4 Der dreidimensionale Fall

Die in diesem Kapitel hergeleitete Charakterisierung von Einschlüssen kann ohne größere Änderungen auch auf den dreidimensionalen Fall übertragen werden. Eine Faktorisierung $\Lambda_\sigma - \Lambda_{\mathbb{1}} = LFL'$ gemäß Lemma 4.3 besteht ebenso wie die Gleichheit der Bildräume $\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}|^{1/2}) = \mathcal{R}(L)$ nach Lemma 4.6. Auch Lemma 4.7 hat weiterhin Bestand, wenn dort die Neumannsche Funktion für das dreidimensionale Hintergrundgebiet B verwendet wird. Die Grundlösung für die Laplacegleichung im \mathbb{R}^3 lautet $-1/(4\pi|z-x|)$ und der daraus bezüglich der Dipolachse $d \in \mathbb{R}^3$, $|d|=1$, gebildete Dipol hat in z eine Singularität der Form $(z-x) \cdot d/(4\pi|z-x|^3)$. Für die Einheitskugel ist die Neumannsche Funktion wieder explizit bekannt [70, Aufg. 21.8],

$$N(z, x) = \frac{-1}{4\pi} \left(\frac{1}{|z-x|} + \frac{1}{\left| \frac{z}{|z|} - |z|x \right|} + \log \frac{2}{1 - |z \cdot x| + \left| \frac{z}{|z|} - |z|x \right|} \right) + \frac{1}{2\pi},$$

woraus sich die Dipolrandrandwerte $\frac{\partial N(z, x)}{\partial_z d}$ berechnen lassen. Anders als im zweidimensionalen Fall können beliebige Gebiete aber nun nicht mehr einfach mittels konformer Abbildungen auf die Einheitskugel zurückgeführt werden, da dieses Hilfsmittel im dreidimensionalen nicht zur Verfügung steht. Da die Neumannsche Funktion nur für wenige spezielle Gebiete explizit bekannt ist, muß diese bei einer praktischen Umsetzung numerisch berechnet werden, was allerdings einen enormen zusätzlichen Rechenaufwand erfordert.

Ähnliche Probleme treten — unabhängig von der Raumdimension — übrigens auch dann auf, wenn die Hintergrundleitfähigkeit nicht mehr als konstant, sondern lediglich als glatt[†] vorausgesetzt wird. Zwar kann die Faktorisierung in naheliegender Weise übertragen werden, aber selbst für den Einheitskreis wird man die Neumannsche Funktion nur in den wenigsten Fällen kennen.

4.4 Beispiel: Der radialsymmetrische Fall

Wir wollen nun die Ergebnisse dieses Kapitels für die radialsymmetrischen, stückweise konstanten Leitfähigkeiten aus Abschnitt 2.4 illustrieren. Dazu stellen wir die auftretenden Operatoren zunächst bezüglich der Fourierbasis dar.

Beginnen wir mit dem Operator L , also mit der Lösung des Randwertproblems (4.6). Ein Ansatz

$$v(r, \xi) = \sum_{|k|=1}^{\infty} (a_k \cos k\xi + b_k \sin k\xi) r^k \quad \text{für } \rho < r < 1$$

[†]Auf die genauen Glattheitsanforderungen gehen wir hier nicht weiter ein. Im wesentlichen muß die eindeutige Lösbarkeit des Cauchyproblems gewährleistet sein.

führt bei Neumannrandwerten auf dem inneren Kreisrand $\{z : |z| = \rho\}$

$$\phi(\xi) \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\xi + \beta_k \sin k\xi)$$

auf

$$a_k = a_{-k} = \frac{\rho^{k+1/2}}{\rho^{2k} - 1} \frac{\alpha_k}{k}, \quad b_k = -b_{-k} = \frac{\rho^{k+1/2}}{\rho^{2k} - 1} \frac{\beta_k}{k} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots$$

Demzufolge gilt

$$v|_T = v(1, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\rho^{k+1/2}}{\rho^{2k} - 1} \frac{1}{k} (\alpha_k \cos k\xi + \beta_k \sin k\xi)$$

und L wird durch

$$L : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cos k\xi \\ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sin k\xi \end{array} \right\} \mapsto \frac{1}{k} \frac{2\rho^{k+1/2}}{\rho^{2k} - 1} \left\{ \begin{array}{l} \cos k\xi \\ \sin k\xi \end{array} \right\} \quad (4.30)$$

vollständig beschrieben, da $\{\frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} \cos k\xi, \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} \sin k\xi\}_{k=1}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis von $L^2_{\diamond}(\Gamma)$ und $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos k\xi, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin k\xi\}_{k=1}^{\infty}$ eine ebensolche für $L^2_{\diamond}(T)$ bildet. Damit kann man L' sofort angeben:

$$L' : \left\{ \begin{array}{l} \cos k\xi \\ \sin k\xi \end{array} \right\} \mapsto \frac{1}{k} \frac{2\rho^{k+1/2}}{\rho^{2k} - 1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cos k\xi \\ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sin k\xi \end{array} \right\}; \quad (4.31)$$

alternativ kann dies auch durch Lösen des entsprechenden Randwertproblems (vgl. Bemerkung 4.1) hergeleitet werden.

Die Singulärwerte $\frac{1}{k} \frac{2\rho^{k+1/2}}{\rho^{2k} - 1}$ von L bzw. L' klingen schneller ab als jede Potenz von k . Die Funktionen im Bildraum von L (bzw. L') sind damit unendlich oft differenzierbar auf T (bzw. auf Γ). Dies illustriert auf der einen Seite den glättenden Charakter der Operatoren L bzw. L' und auf der anderen Seite die Unstetigkeit ihrer Inversen. Letzteres steht in unmittelbarem Zusammenhang mit der (aus dem Hadamard-Beispiel bekannten) Schlechtgestellttheit des Cauchyproblems für elliptische Gleichungen.

Als nächstes kommen wir zum Operator $F = F_{\sigma} - F_{\perp}$, wobei F_{σ} durch das Diffraktionsproblem (4.13) und die Abbildungsvorschrift $\psi \mapsto \frac{\partial w_{\sigma}^+}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}$ festgelegt ist. Die nun schon bekannte Vorgehensweise führt auf

$$F_{\sigma} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cos k\xi \\ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sin k\xi \end{array} \right\} \mapsto \frac{k}{\rho} \frac{\kappa(\rho^{2k} - 1)}{(\kappa + 1) + (\kappa - 1)\rho^{2k}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cos k\xi \\ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sin k\xi \end{array} \right\} \quad (4.32)$$

und weiter auf

$$F = F_\sigma - F_{\mathbb{1}} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cos k\xi \\ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sin k\xi \end{array} \right\} \mapsto \frac{k}{2\rho} \frac{(1-\kappa)(1-\rho^{2k})^2}{(\kappa+1) + (\kappa-1)\rho^{2k}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cos k\xi \\ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sin k\xi \end{array} \right\}. \quad (4.33)$$

Dieselbe Darstellung gewinnt man im übrigen auch aus der Faktorisierung (4.8) und den Spektralzerlegungen (4.30) und (4.31) von L und L' sowie derjenigen von $\Lambda_\sigma - \Lambda_{\mathbb{1}}$, vgl. (3.4). Man erkennt, daß sich sowohl die Eigenwerte von F_σ als auch diejenigen von $F_\sigma - F_{\mathbb{1}}$ asymptotisch wie $\text{const} \cdot k + o(k)$ für $k \rightarrow \infty$ verhalten, was die Abbildungseigenschaft $H_\diamond^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^{-1/2}(\Gamma)$ dieser beiden Operatoren nochmals verdeutlicht.

Nach diesen vorbereitenden Überlegungen fahren wir mit der Charakterisierung der Bildräume durch die Funktion $g_{z,d}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{(z-x) \cdot d}{|z-x|^2}$ fort. Benutzen wir Polarkoordinaten $z = |z|e^{i\zeta}$, $d = e^{i\vartheta}$, $x = e^{i\xi}$, dann besteht die Reihenentwicklung

$$g_{z,d}(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{|z| \cos(\vartheta - \zeta) - \cos(\xi - \vartheta)}{1 + |z|^2 - 2|z| \cos(\xi - \zeta)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-|z|^{k-1}}{\pi} \cos(k(\xi - \zeta) - (\vartheta - \zeta)), \quad (4.34)$$

wie man unter Zuhilfenahme von [33, Formel 1.447] leicht verifiziert.

Zunächst betrachten wir das Cauchyproblem (4.21) mit $g_{z,d}$ als rechter Seite. Mit Hilfe eines Separationsansatz erhalten wir als Lösung

$$\begin{aligned} v(r, \xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-|z|^{k-1}}{2\pi} (\cos(k\zeta + (\vartheta - \zeta)) \cos k\xi + \sin(k\zeta + (\vartheta - \zeta)) \sin k\xi) (r^k + r^{-k}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-|z|^{k-1}}{2\pi} \cos(k(\xi - \zeta) - (\vartheta - \zeta)) (r^k + r^{-k}) \end{aligned}$$

und daraus als radiale Ableitung auf dem Kreisring $\{z : |z| = \rho\}$

$$\frac{\partial v}{\partial r}(\rho, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-k|z|^{k-1}}{2\pi} \frac{\cos(k(\xi - \zeta) - (\vartheta - \zeta))}{\sqrt{\rho}} (\rho^{k-1/2} - \rho^{-k-1/2}).$$

Für die Sobolevnorm der Normalableitung bzgl. des Kreises B_ρ ergibt sich

demnach

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{H_\diamond^s(\partial B_\rho)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{2s} \frac{k^2 |z|^{2(k-1)}}{4\pi^2} (\rho^{k-1/2} - \rho^{-k-1/2})^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2s+2} |z|^{2k-2} (\rho^{2k-1} - 2\rho^{-1})}{4\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2 \rho^3} \sum_{k=1}^{\infty} k^{2s+2} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{2k-2}. \end{aligned}$$

Während die erste Summe für jedes $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, ist die zweite Summe für $\rho > |z|$ konvergent und für $\rho < |z|$ divergent, beides unabhängig von s . Für $|z| = \rho$ liegt Konvergenz genau für $s < -3/2$ vor, also ist $\frac{\partial v}{\partial \nu} \notin H_\diamond^{-1/2}(\partial B_{|z|})$. Dies zeigt, daß das Cauchyproblem eine Lösung im Kreisring $B_1 \setminus \overline{B_{|z|}}$ besitzt; genau dies ist die Aussage von Lemma 4.7 bzw. Korollar 4.8.

Anstatt das Gebiet Ω mit Hilfe des Bildraums von $\mathcal{R}(L)$ und der damit verbundenen Frage der Lösbarkeit des Cauchyproblems (4.21) zu charakterisieren, steht alternativ dazu noch die Möglichkeit über den Bildraum $\mathcal{R}(|\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}|^{1/2})$ zur Verfügung, vgl. Satz 4.1 und Korollar 4.2. Nach (3.4) treten die Eigenwerte von $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}$ immer paarweise auf, $\lambda_{2k-1} = \lambda_{2k} = \frac{2}{k} \frac{(1-\kappa)\rho^{2k}}{(\kappa+1)+(\kappa-1)\rho^{2k}}$, mit jeweiligen Eigenfunktionen $v_{2k-1} = \frac{\cos k\xi}{\sqrt{\pi}}$, $v_{2k} = \frac{\sin k\xi}{\sqrt{\pi}}$, $k = 1, 2, \dots$. Damit folgt aus (4.34) für $k = 1, 2, \dots$

$$\langle g_{z,d}, v_{2k-1} \rangle_{L^2(T)} = -\frac{|z|^{k-1}}{\sqrt{\pi}} \cos(k\zeta + (\vartheta - \zeta))$$

sowie

$$\langle g_{z,d}, v_{2k} \rangle_{L^2(T)} = -\frac{|z|^{k-1}}{\sqrt{\pi}} \sin(k\zeta + (\vartheta - \zeta)),$$

und wir erhalten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle g_{z,d}, v_k \rangle_{L^2(T)}^2}{|\lambda_k|} = \frac{1}{2\pi|1-\kappa|\rho^2} \sum_{k=1}^{\infty} k((\kappa+1) + (\kappa-1)\rho^{2k}) \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{2(k-1)}.$$

Diese Reihe konvergiert genau für $|z| < \rho$ in Übereinstimmung mit Korollar 4.2.

Bemerkung 4.4. Anhand eines Beispiels veranschaulichen wir noch die Notwendigkeit der Voraussetzung für unsere Charakterisierung, daß $B \setminus \overline{\Omega}$ zusammenhängend sein muß. Wir greifen dazu die ringförmige Inhomogenität (2.26) aus Bemerkung 2.3 auf. Aus (2.27) erhalten wir die Spektralzerlegung für $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}$,

$$\Lambda_\sigma - \Lambda_\mathbb{1} : \begin{cases} \cos k\xi \\ \sin k\xi \end{cases} \mapsto -\frac{2}{k} \frac{\mu(\rho_1^{2k} - \rho_2^{2k})}{1 - \mu^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{2k} + \mu(\rho_1^{2k} - \rho_2^{2k})} \begin{cases} \cos k\xi \\ \sin k\xi \end{cases} \quad (4.35)$$

mit $\mu = \frac{\kappa-1}{\kappa+1}$. Daraus ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle g_{z,d}, v_k \rangle_{L^2(T)}^2}{|\lambda_k|} = \frac{1}{2\pi\rho_1^2|\mu|} \sum_{k=1}^{\infty} k \left| \frac{1 - \mu^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{2k} + \mu(\rho_1^{2k} - \rho_2^{2k})}{1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{2k}} \right| \left(\frac{|z|}{\rho_1}\right)^{2(k-1)}$$

und diese Reihe konvergiert genau für $|z| < \rho_1$, d.h. der von der Inhomogenität eingeschlossene innere Kreis $\{z : |z| < \rho_2\}$ mit Leitfähigkeitswert Eins wird nicht erkannt.

Kapitel 5

Numerische Ergebnisse

In diesem abschließenden Kapitel wollen wir demonstrieren, wie die bis hierhin entwickelten Ergebnisse in ein effizientes numerisches Verfahren umgesetzt werden können. Wir geben zunächst einige Detailinformationen zu unserer Implementierung und belegen dann anhand numerischer Experimente die Leistungsfähigkeit des Algorithmus.

5.1 Zur Implementierung

Alle numerischen Beispiele in dieser Arbeit basieren auf synthetischen Daten, die wir bei Vorgabe einer stückweise konstanten Leitfähigkeitsverteilung der Form (2.13) dadurch erhalten, indem wir für verschiedene Strommuster f die zugehörige Neumannsche Randwertaufgabe numerisch lösen und die sich daraus ergebenden Dirichletdaten als Meßwerte verwenden.

Vorwärtsproblem

Die numerische Lösung der Vorwärtsprobleme erfolgt mit der Methode der finiten Elemente. Dazu approximieren wir die Randkurven des Grundgebiets B und der Einschlüsse Ω_j durch Polygone, wobei für den äußeren Rand T eine sehr viel feinere Auflösung (256 Knoten) als für die inneren Ränder Γ_j gewählt wird, um auch noch hochfrequente Neumanndaten f auf T vorschreiben zu können. Mit Hilfe von Vernetzungsroutinen der Matlab-PDE-Toolbox erzeugen wir dann eine Triangulierung von B , welche die Einschlüsse Ω_j als Teilgebiete enthält, vgl. Abb. 5.1(a). Den Ansatzraum für das Galerkinverfahren zur Variationsaufgabe (2.3) bilden die bezüglich dieser Triangulierung stückweise linearen Funktionen; bei isolierenden oder perfekt leitenden Einschlüssen schränken

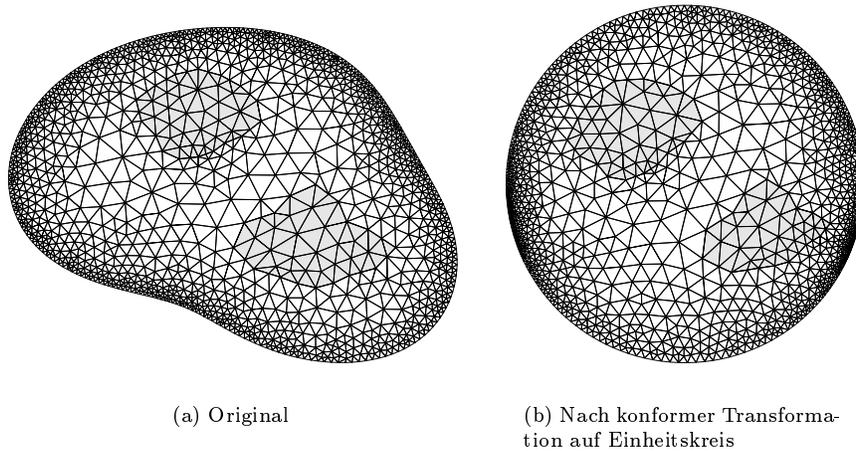


Abbildung 5.1: Triangulierung eines Gebiets

wir diesen Ansatzraum entsprechend (2.15) bzw. (2.17) auf $H_{\diamond}^1(B \setminus \overline{\Omega})$ bzw. $H_{\diamond, \Gamma}^1(B \setminus \overline{\Omega})$ ein.

Als Strommuster verwenden wir die bezüglich der Bogenlänge τ parametrisierten trigonometrischen Basisfunktionen von $L^2(T)$,

$$\left\{ \cos \frac{2\pi k\tau}{|T|} : k = 1, \dots, 128 \right\} \cup \left\{ \sin \frac{2\pi k\tau}{|T|} : k = 1, \dots, 127 \right\}, \quad (5.1)$$

wobei $|T|$ die Bogenlänge des Randpolygons T bezeichnet. Man beachte, daß aufgrund der Normierungsbedingung $\langle f, \mathbb{1} \rangle_{L^2(T)} = 0$ bei einer Randdiskretisierung durch 256 Knoten nur 255 linear unabhängige Strommuster angelegt werden können. Für diese Neumanndaten f berechnen wir dann die Integrale $\int_T f \phi ds$ für stückweise lineare Funktionen ϕ aus dem Ansatzraum analytisch. Als Randwerte der Galerkinnäherungslösung erhalten wir zunächst lineare Splines, die anschließend wieder $L^2(T)$ -orthogonal auf die trigonometrische Basis (5.1) projiziert werden.

Konforme Abbildungen

Um unser Verfahren auf zweidimensionale Gebiete wie das in Abb. 5.1(a) gezeigte anwenden zu können, müssen wir eine konforme Abbildung Φ dieses Gebiets auf den Einheitskreis berechnen, vgl. Satz 4.12. Dazu bedienen wir uns

einer z.B. in [29, Kap. I.2.2] und [36, Chapt. 16.7] beschriebenen Konstruktionsmethode. Aus der sogenannten *Gerschgorin-Integralgleichung* ergibt sich dabei zunächst die Randzuordnungsfunktion $\theta : [0, |T|] \rightarrow [0, 2\pi]$, die der nach der Bogenlänge parametrisierten Randkurve $z(\tau)$ von T die durch Φ induzierte Parametrisierung des Einheitskreisrandes, $e^{i\theta(\tau)}$, zuweist. Diese Integralgleichung lösen wir mit Hilfe einer einfachen Kollokationsmethode, vgl. [29, Kap. I.4.1]. Anschließend können wir $\Phi(z)$ für Punkte z aus dem Innern von B mittels der Cauchy-Integralformel berechnen,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_T \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{|T|} \frac{e^{i\theta(\tau)}}{\zeta(\tau) - z} \zeta'(\tau) d\tau.$$

Somit sind wir in der Lage, die transformierten Dipolrandwerte $\tilde{g}_{z,d}(x)$ in (4.28) für $z \in B$ und $x \in T$ auszuwerten. Abb. 5.1(b) veranschaulicht das Ergebnis der konformen Transformation für das Gebiet aus Abb. 5.1(a).

Picard-Test

Unsere numerische Lösung des inversen Problems stützt sich auf Korollar 4.13. Zunächst werden die Eigenwerte λ_j samt zugehöriger Eigenfunktionen v_j numerisch berechnet, um anschließend die Reihe

$$h(z) = \sum_j \frac{\langle \tilde{g}_{z,d}, v_j \rangle_{L^2(T)}^2}{|\lambda_j|} \quad (5.2)$$

auf Konvergenz hin zu überprüfen. Bei der praktischen Durchführung tritt hier das Problem auf, daß uns aufgrund der nur endlich vielen Strommuster höchstens ebensoviele Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrixdarstellung der Neumann-Dirichlet-Abbildung zur Verfügung stehen, und die endliche Reihe

$$h_J(z) = \sum_{j=1}^J \frac{\langle \tilde{g}_{z,d}, v_j \rangle_{L^2(T)}^2}{|\lambda_j|} \quad (5.3)$$

konvergiert trivialerweise. Außerdem wird man aus Eigenwerten und Entwicklungskoeffizienten nur dann nützliche Informationen beziehen können, solange nicht Rechenungenauigkeiten und Meßfehler (bzw. Diskretisierungsfehler bei unseren künstlich erzeugten Daten) ihren Informationsgehalt verwässern. Dieser Gesichtspunkt muß bei der Wahl von J ebenfalls berücksichtigt werden.

Wir wollen zunächst die Wahl des Abbruchindex J motivieren und verschaffen uns dazu einen Eindruck von der Genauigkeit unserer numerischen Lösung

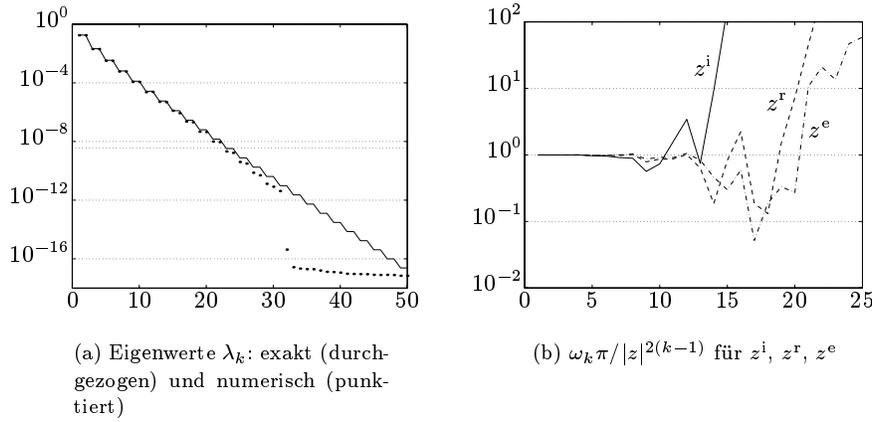


Abbildung 5.2: Vergleich von exakten und berechneten Größen beim radialsymmetrischen Beispiel

des Vorwärtsproblems. Zu diesem Zweck betrachten wir den speziellen radialsymmetrischen Fall mit $\rho = 1/2$ und $\kappa = 1/2$; die exakten Eigenwerte* von $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\perp$ sind hier

$$\lambda_{2k-1} = \lambda_{2k} = \frac{2}{k(3 \cdot 4^k - 1)}$$

und weiter ist

$$\omega_k := \langle \tilde{g}_{z,d}, v_{2k-1} \rangle_{L^2(T)}^2 + \langle \tilde{g}_{z,d}, v_{2k} \rangle_{L^2(T)}^2 = \frac{|z|^{2(k-1)}}{\pi}, \quad (5.4)$$

d.h. ω_k hängt nur vom Betrag des Testpunktes, $|z|$, ab und insbesondere nicht von der verwendeten Dipolrichtung. In Abb. 5.2(a) stellen wir den exakten Eigenwerten die numerisch berechneten gegenüber, und Abb. 5.2(b) zeigt die Quotienten $\omega_k \pi / |z|^{2(k-1)}$ für drei Testpunkte $z^i = 3/8 \in \Omega$, $z^r = 1/2 \in \Gamma$, $z^e = 5/8 \in B \setminus \bar{\Omega}$ und Dipolachse $d = 1$. Das Abklingverhalten der berechneten Eigenwerte folgt zunächst demjenigen der exakten Eigenwerte, bis eine Größenordnung von etwa 10^{-11} erreicht ist; weitere Eigenwerte können im Rahmen der Rechengenauigkeit und verwendeten Diskretisierung offenbar nicht mehr berechnet werden. Von den zugehörigen Entwicklungskoeffizienten scheinen etwa

*Im folgenden seien die Eigenwerte von $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_\perp$ immer betragsmäßig fallend angeordnet, also $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots > 0$.

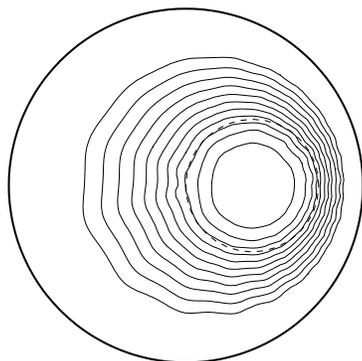


Abbildung 5.3: Niveaulinien von h_J zu den Niveaus $10^1, 10^{1.5}, 10^2, \dots, 10^6$ (von innen nach außen). Hier: $J = 20$. $B = B_1$ (Einheitskreis), $\Omega = B_{3/8}(3/8)$ (gestrichelt eingezeichnet), $\kappa = 1/2$

die ersten 11 Paare verwertbar zu sein, dies entspricht den ersten 22 Eigenwerten, die durch die zusätzliche horizontale Linie in Abb. 5.2(a) zur Abszisse $2 \cdot 10^{-8} |\lambda_1|$ abgetrennt worden sind. Motiviert durch diese Diskussion setzen wir

$$J = \max\{2j : |\lambda_{2j}| < \delta |\lambda_1|\} \quad \text{für } \delta = 2 \cdot 10^{-8} \quad (5.5)$$

und verwenden im folgenden immer nur die ersten J Eigenwerte und Entwicklungskoeffizienten. Wiederholt man diese numerischen Experimente für andere Parameter ρ und κ , so stellt sich eine ähnliche Situation zu der in Abb. 5.2 dargestellten ein, was die heuristische Wahl von J gemäß (5.5) untermauert. Auch in den noch folgenden numerischen Beispielen bewährt sich diese Festlegung.

Kommen wir zurück zum Problem der Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz der Reihe (5.2) anhand der endlichen Teilsumme (5.3). Man wird letztendlich erwarten, daß der Wert von $h_J(z)$ für $z \in \Omega$ kleiner ist als für $z \in B \setminus \overline{\Omega}$, jedenfalls für einen hinreichend großen Diskretisierungsparameter J . Dies legt es nahe, die Funktion $h_J(z)$ für eine Menge von Testpunkten auszuwerten, dann einen Schwellenwert M festzusetzen und schließlich die Inhomogenität Ω durch $\{z \in B : h_J(z) \leq M\}$ anzunähern. In Abb. 5.3 ist dies für ein Beispiel illustriert; hier wäre etwa $M = 10^2$ ein geeigneter Wert. Neben der Schwierigkeit einer geeigneten Wahl des Schwellenwerts M spricht noch ein weiteres Skalierungsargument gegen dieses Vorgehen. Die Aussage von Satz 4.12 und Korollar 4.13 bleibt nämlich richtig, wenn dort $\tilde{g}_{z,d}$ durch $c(z)\tilde{g}_{z,d}$ mit einer

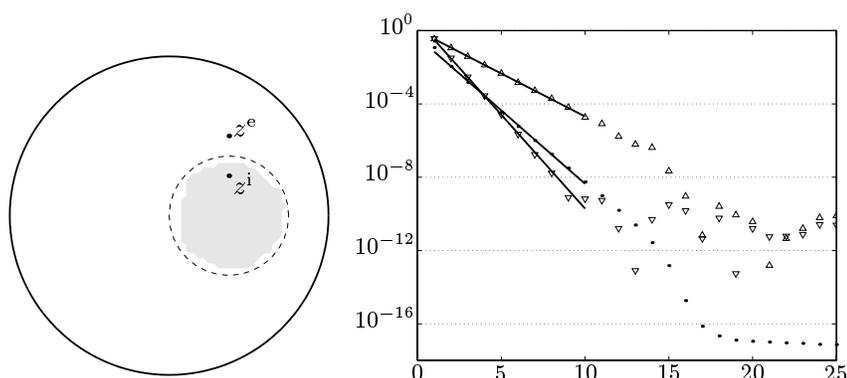
von Null verschiedenen Funktion $c(z)$ ersetzt wird. So würde etwa eine Wahl $c(z) = (h_J(z))^{-1/2}$ den endlichen Summenwert

$$\sum_{j=1}^J \frac{\langle c(z) \tilde{g}_{z,d}, v_j \rangle_{L^2(T)}^2}{|\lambda_j|} = 1 \quad \text{für alle } z \in B$$

liefern, also eine konstante Funktion ohne jegliche Aussagekraft. Die Wahl $c(z) = 1$ liefert zwar in numerischen Experimenten gute Ergebnisse, um dies begründen zu können, müßte man jedoch in der Lage sein, die „Divergenzgeschwindigkeit“ der Reihe (5.2) für $z \in B \setminus \overline{\Omega}$ abzuschätzen.

Wir schlagen hier eine andere Vorgehensweise vor. Die Reihe (5.2) konvergiert, wenn die Quadrate der Entwicklungskoeffizienten bzgl. der Eigenbasis von $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1$, $\langle \tilde{g}_{z,d}, v_k \rangle_{L^2(T)}^2$, „schneller“ abklingen als die Eigenwerte $|\lambda_k|$. Besonders motiviert wird dies durch das radialsymmetrische Beispiel in Abschnitt 4.4. Dort gilt $\langle \tilde{g}_{z,d}, v_{2k-1,2k} \rangle_{L^2(T)}^2 \sim |z|^{2k}$ und $|\lambda_{2k-1,2k}| \sim \rho^{2k}/k$, d.h. das Abklingverhalten ist im wesentlichen jeweils geometrisch und ein Vergleich der Abklingfaktoren filtert die Punkte $z \in \Omega$ heraus. Gestützt auf diese Beobachtung wollen wir dies auf den allgemeinen Fall übertragen. Als erstes fassen wir die quadrierten Entwicklungskoeffizienten wie in (5.4) immer paarweise zu ω_k zusammen, weil diese Koeffizienten im radialsymmetrischen Fall unabhängig von der Dipolrichtung und vom Argument von z sind. Außerdem erscheint uns dies auch im allgemeinen Fall gerechtfertigt, da die Strommuster immer in Sinus-Kosinus-Paaren zu den verschiedenen Frequenzen angelegt werden und somit eine gewisse Richtungsunabhängigkeit erzielt wird; zudem belegen numerische Experimente deutliche Vorteile bei diesem Vorgehen gegenüber der Betrachtung einzelner Entwicklungskoeffizienten. Entsprechend werden die Eigenwerte jeweils paarweise in geometrischen Mittelwerten $|\lambda_{2k-1} \lambda_{2k}|^{1/2}$ zusammengefaßt. Um nun die Abklingfaktoren einander gegenüberzustellen, passen wir eine Kleinste-Quadrate-Ausgleichsgerade an die führenden $J/2$ Werte von $\log |\lambda_{2k-1} \lambda_{2k}|^{1/2} = (\log |\lambda_{2k-1}| + \log |\lambda_{2k}|)/2$ und $\log \omega_k$ an, vgl. Abb. 5.4(b). Durch Vergleich der Geradensteigungen ermitteln wir als Näherung für die Inhomogenität Ω die Menge derjenigen $z \in B$, deren zugehörige Koeffizienten-Ausgleichsgerade ein stärkeres Gefälle vorweist als die Eigenwert-Ausgleichsgerade. Das Ergebnis dieses Vorgehens für dieses Beispiel ist in Abb. 5.4(a) zu sehen, das grau hinterlegte Gebiet zeigt die auf diese Weise entstandene Rekonstruktion.

Bemerkung 5.1. Bei unserer Charakterisierung gehen wir von einer vollständigen Kenntnis der Neumann-Dirichlet-Abbildung aus. Dieses Idealmodell ist in praktischen Anwendungen natürlich nicht zu verwirklichen. Auf der einen Seite stehen immer nur endlich viele Messungen zur Verfügung, die alle nur mit einer



(a) Testpunkte $z^i = (\frac{3}{8}, \frac{1}{4})$, $z^e = (\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$ und Rekonstruktion (grau schattiert)

(b) „●“: $|\lambda_{2k-1}\lambda_{2k}|^{1/2}$, „△“ bzw. „▽“: ω_k für z^e bzw. z^i . Dazu die Ausgleichsgeraden bzgl. der ersten $J/2 = 10$ Werte

Abbildung 5.4: Abklingverhalten von Eigenwerten und Entwicklungskoeffizienten und sich daraus ergebende Rekonstruktion

begrenzten Genauigkeit durchgeführt werden können. Dieses Problem tritt auch bei unseren numerischen Simulationen auf. Auf der anderen Seite müssen in der Praxis noch Erwägungen dahingehend mit einbezogen werden, daß die Induktion der Randströme und die Messung der resultierenden Randspannungen über Elektroden erfolgt. Die Anzahl der verwendeten Elektroden setzt einerseits eine natürliche Grenze für die möglichen Messungen, andererseits werden bei diesem Vorgehen die Randspannungen nur auf einem Teil des Randes, nämlich dem von den Elektroden bedeckten Teil gemessen. Darüberhinaus müssen die Elektroden bei einer numerischen Simulation der Messungen für den Referenzzustand (Λ_1) im Vorwärtsproblem geeignet modelliert werden [22], [64], [56]. Die Frage, wie sich diese Elektrodenmodelle in unsere Theorie und numerischen Verfahren einbinden lassen, ist bislang noch offen und bleibt in dieser Arbeit ausgespart.

5.2 Weitere numerische Beispiele

Beispiel 5.1. In diesem Beispiel betrachten wir eine drachenförmige Inhomogenität, wie sie bei inversen Streuproblemen oft als Modellobjekt dient, siehe Abb. 5.5; das Hintergrundgebiet ist weiterhin der Einheitskreis. Wir untersu-

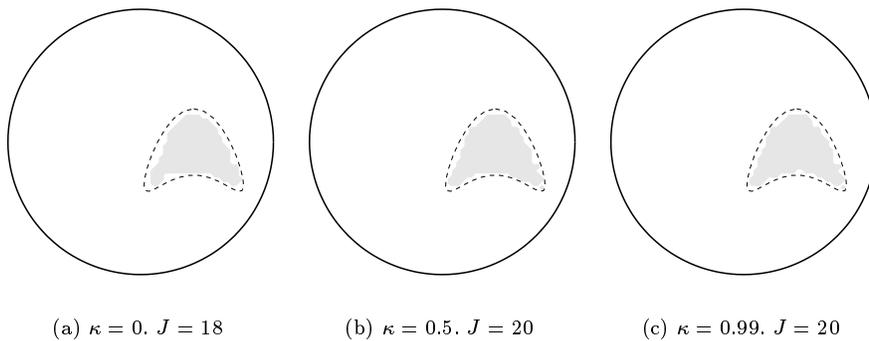


Abbildung 5.5: Rekonstruktion für verschiedene Leitfähigkeitskonstanten

chen die Qualität der Rekonstruktion für verschiedene Leitfähigkeitskonstanten κ , Abb. 5.5 zeigt die Rekonstruktionen für $\kappa = 0$ (isolierend), $\kappa = 0.5$ und $\kappa = 0.99$. Für unsere Gebietscharakterisierung in Satz 4.1 spielt der spezielle Wert keine Rolle und tatsächlich ist die Güte der erhaltenen Rekonstruktionen in allen drei Fällen vergleichbar.

Beispiel 5.2. Als nächstes untersuchen wir den Fall zweier Inhomogenitäten, diesmal allerdings in einem nichtkreisförmigen Hintergrundgebiet, vgl. Abb. 5.6. Die Leitfähigkeitsvorgaben in den beiden Komponenten sind $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.5$ bzw. $\kappa_1 = 0.5$, $\kappa_2 = 0.99$, und zum Vergleich ist noch der Fall $\kappa_1 = 0.5$, $\kappa_2 = 1$ hinzugefügt, bei dem der zweite Einschluß gar nicht existiert. In den beiden ersten Fällen ist klar zu erkennen, daß jeweils zwei Teilgebiete rekonstruiert werden. Im zweiten Fall wird jedoch die Inhomogenität, in der die Leitfähigkeit nur geringfügig unterhalb des Hintergrundwertes liegt, verkleinert wiedergegeben; dagegen wird der Fall von nur einem Einschluß korrekt aufgelöst. Hier zeigt sich auch die Tendenz aller bekannten Rekonstruktionsverfahren, getrennte Inhomogenitäten miteinander zu verschmieren. Dies führt zu den in Richtung der jeweils anderen Komponente vergrößerten rekonstruierten Einschlässe.

Beispiel 5.3. In Bemerkung 4.4 hatten wir gesehen, daß unsere Methode bei nicht einfach zusammenhängenden Inhomogenitäten versagt. Wir wollen dies numerisch überprüfen und geben dazu das Ringgebiet $\Omega = B_{0.65} \setminus \bar{B}_{0.4}$ im Einheitskreis vor und setzen dort die Leitfähigkeit $\kappa = 2$, vgl. Abb. 5.7(a). Tatsächlich wird der innere Kreis nicht erkannt, wie man nach den Ausführungen in Bemerkung 4.4 erwarten mußte. In Abb. 5.7(b) haben wir einen Durch-

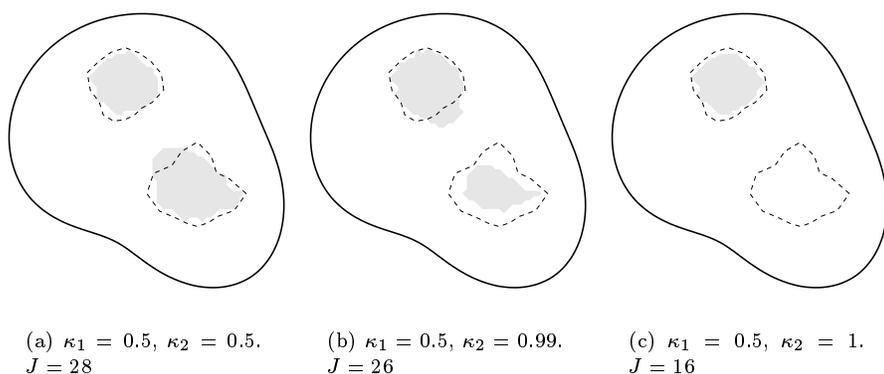


Abbildung 5.6: Rekonstruktion von zwei Inhomogenitäten

gang zum inneren Kreis hin geöffnet, indem wir ein Viertel des Ringgebiets herausgeschnitten haben. Bei dieser äußerst schwierig zu rekonstruierenden Inhomogenität stößt unser Verfahren an seine Auflösungsgrenze, gleichwohl die grundsätzliche Form des Objekts erkannt wird.

Beispiel 5.4. Wie anfangs erwähnt, wurde die Erfassung von Meßdaten für $\Lambda_\sigma f$ und $\Lambda_{\mathbb{1}} f$ durch die numerische Lösung des Vorwärtsproblems simuliert. Daß wir dabei für beide Datensätze dasselbe numerische Verfahren, insbesondere mit derselben Gebietstriangulierung, verwendet haben, birgt natürlich die Gefahr eines „inverse crime“ in sich.[†] Es ist nämlich nicht auszuschließen, daß die Datenqualität der Differenz $(\Lambda_\sigma - \Lambda_{\mathbb{1}})f$ besser ist als die der einzelnen Messungen, $\Lambda_\sigma f$ bzw. $\Lambda_{\mathbb{1}} f$, weil sich darin enthaltene Fehleranteile möglicherweise gegenseitig auslöschen. Um diese Effekte auszublenden und auch ansonsten die Empfindlichkeit des Verfahrens gegenüber Datenstörungen zu untersuchen, haben wir die Rekonstruktion für das Beispiel 5.1 (mit $\kappa = 1/2$) mit gestörten Daten wiederholt; dazu haben wir normalverteiltes Rauschen zu unseren Messungen hinzuaddiert. Die Eigenwerte von $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}$ für verschiedene Rauschpegel sind in Abb. 5.8 zu sehen. Das exponentielle Abklingverhalten der Eigenwerte bricht zusammen, sobald diese in die Größenordnung des Rauschens geraten.

[†]Der Begriff „inverse crime“ wurde von Colton und Kress [23] geprägt, um die Situation zu beschreiben, daß die Lösung des inversen Problems auf demselben Vorwärtsproblemlöser beruht, mit dem simulierte Daten erzeugt werden. Hier meinen wir damit allgemeiner, daß ein Rekonstruktionsverfahren möglicherweise einen Vorteil aus dem Gebrauch von simulierten Daten zieht.

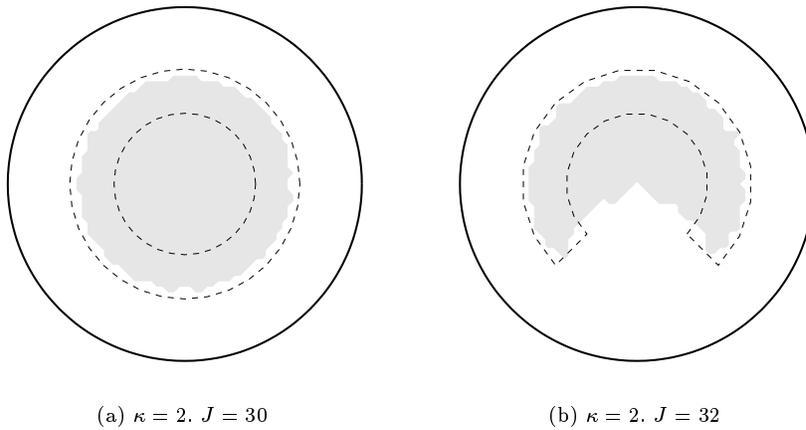


Abbildung 5.7: Rekonstruktion von (Fast-)Ringgebieten

Man wird sich zwangsläufig bei der Rekonstruktion auf die stabil berechenbaren Eigenwerte beschränken müssen, indem man den Wert δ für die Berechnung des Abbruchindex J in (5.5) an den Rauschpegel anpaßt. Die so erhaltenen Ergebnisse werden in Abb. 5.9 präsentiert; die erreichbare Auflösung schwindet erwartungsgemäß bei einer abnehmenden Anzahl verwertbarer Daten.

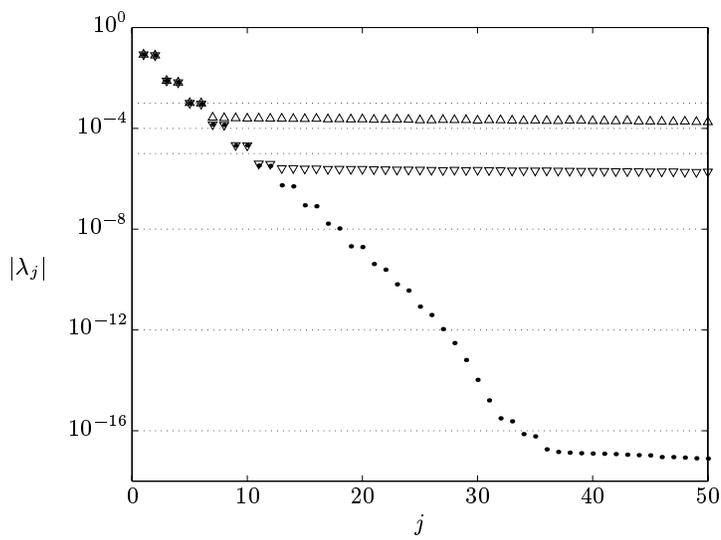
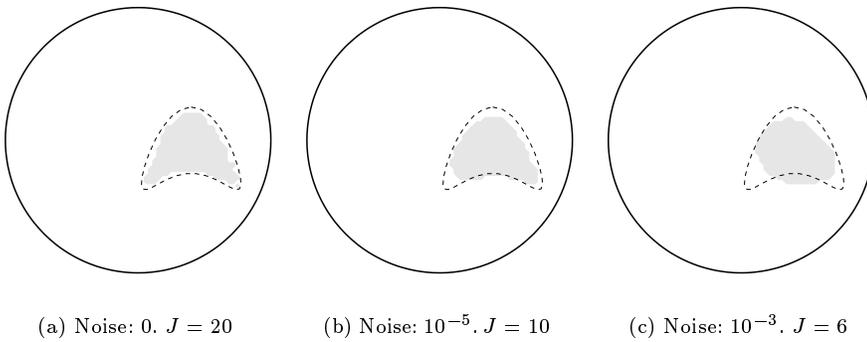
Abbildung 5.8: Einfluß von Störungen auf Eigenwerte von $\tilde{\Lambda}_\sigma - \tilde{\Lambda}_1$ 

Abbildung 5.9: Rekonstruktion bei gestörten Daten

Zusammenfassung

Wir haben in dieser Arbeit ein neuartiges Verfahren zur Erkennung von Leitfähigkeitsinhomogenitäten in der elektrischen Impedanztomographie entwickelt. Für Einschlüsse, die gegenüber dem Hintergrund durch eine sprunghaft erhöhte oder erniedrigte Leitfähigkeit gekennzeichnet sind, haben wir eine explizite Charakterisierung hergeleitet, die sozusagen als Nebenprodukt auch einen konstruktiven Eindeutigkeitsbeweis für diese Klasse von Leitfähigkeiten abwirft. Die Beweisidee zu dieser Charakterisierung ist durch entsprechende Resultate von Kirsch [46] für das inverse Streuproblem angeregt worden, jedoch unterscheiden sich die eingesetzten mathematischen Hilfsmittel teilweise deutlich. Der von uns geführte Beweis kommt im wesentlichen ohne Potential- und Spektraltheorie aus und benutzt nur die Lösungstheorie von elliptischen Randwertproblemen.

Weiterhin haben wir einen numerischen Algorithmus entworfen und diesen wir mit synthetischen, teilweise verrauschten Daten getestet. Die Qualität der erhaltenen Rekonstruktionen erweist sich dabei derjenigen von herkömmlichen Verfahren, welche in der Regel beträchtlich mehr Vorabinformation über Anzahl und Form der Inhomogenitäten benötigen, als mindestens ebenbürtig. Darüberhinaus erfordert unser Algorithmus als direktes Verfahren einen vergleichsweise sehr geringen Rechenaufwand. Die bei gestörten Daten erforderliche Regularisierung erfolgt in Abhängigkeit vom Rauschpegel durch eine naheliegende Wahl eines Diskretisierungsparameters.

Literaturverzeichnis

- [1] ALESSANDRINI G.: Stable determination of conductivity by boundary measurements. *Appl. Anal.* **27**, 153–172, 1988.
- [2] ALESSANDRINI G.: Remark on a paper by Bellout and Friedman. *Boll. Un. Mat. Ital. A* **3**, 243–249, 1989.
- [3] ALESSANDRINI G.: Singular solutions of elliptic equations and the determination of conductivity by boundary measurements. *J. Differential Equations* **84**, 252–272, 1990.
- [4] ALESSANDRINI G., DIAZ VALENZUELA A.: Unique determination of multiple cracks by two measurements. *SIAM J. Control Optim.* **34**, 913–921, 1996.
- [5] ALESSANDRINI G., ROSSET E.: The inverse conductivity problem with one measurement: bounds on the size of the unknown object. *SIAM J. Appl. Math.* **58**, 1060–1071, 1998.
- [6] BARBER D.C., BROWN B.H.: Applied potential tomography. *J. Phys. E: Sci. Instrum.* **17**, 723–733, 1984.
- [7] BARBER D.C., BROWN B.H.: Progress in electrical impedance tomography. In: D. Colton, R. Ewing, W. Rundell, Hg., *Inverse Problems in Partial Differential Equations*, S. 151–164. SIAM, Philadelphia, 1990.
- [8] BARCELÓ B., FABES E., SEO J.K.: The inverse conductivity problem with one measurement: uniqueness for convex polyhedra. *Proc. Amer. Math. Soc.* **122**, 183–189, 1994.
- [9] BELLOUT H., FRIEDMAN A.: Identification problems in potential theory. *Arch. Rational Mech. Anal.* **101**, 143–160, 1988.

-
- [10] BELLOUT H., FRIEDMAN A., ISAKOV V.: Stability for an inverse problem in potential theory. *Trans. Amer. Math. Soc.* **332**, 271–296, 1992.
- [11] BRECKON W.R., PIDCOCK M.K.: Mathematical aspects of impedance imaging. *Clin. Phys. Physiol. Meas.* **8**, A77–A84, 1987.
- [12] BROWN B.H., BARBER D.C., SEAGAR A.D.: Applied potential tomography: possible clinical applications. *Clin. Phys. Physiol. Meas.* **6**, 109–121, 1985.
- [13] BROWN R.M., UHLMANN G.A.: Uniqueness in the inverse conductivity problem for nonsmooth conductivities in two dimensions. *Comm. Partial Differential Equations* **22**, 1009–1027, 1997.
- [14] BRYAN K.: Numerical recovery of certain discontinuous electrical conductivities. *Inverse Problems* **7**, 827–840, 1991.
- [15] BRYAN K., VOGELIUS M.: A computational algorithm to determine crack locations from electrostatic boundary measurements. The case of multiple cracks. *Int. J. Engng. Sci.* **32**, 579–603, 1994.
- [16] CALDERÓN A.P.: On an inverse boundary value problem. In: W.H. Meyer, M.A. Raupp, Hg., *Seminar on Numerical Analysis and its Application to Continuum Physics*, S. 65–73. Brasil. Math. Soc., Rio de Janeiro, 1980.
- [17] CHENEY M., ISAACSON D.: An overview of inversion algorithms for impedance imaging. *Contemp. Math.* **122**, 29–39, 1991.
- [18] CHENEY M., ISAACSON D.: Issues in electrical impedance imaging. *IEEE Comput. Sci. Eng.* **2**, 53–62, 1995.
- [19] CHENEY M., ISAACSON D., ISAACSON E.L.: Exact solutions to a linearized inverse boundary value problem. *Inverse Problems* **6**, 923–934, 1990.
- [20] CHENEY M., ISAACSON D., NEWELL J., GOBLE J., SIMSKE S.: NOSER: An algorithm for solving the inverse conductivity problem. *Internat. J. Imag. Syst. Tech.* **2**, 66–75, 1990.
- [21] CHENEY M., ISAACSON D., NEWELL J.C.: Electrical impedance tomography. *SIAM Rev.* **41**, 85–101, 1999.
- [22] CHENG K.C., ISAACSON D., NEWELL J.C., GISSER D.G.: Electrode models for electric current computed tomography. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **36**, 918–924, 1989.

- [23] COLTON D., KRESS R.: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer, Berlin, 1992.
- [24] DOBSON D.C.: Convergence of a reconstruction method for the inverse conductivity problem. *SIAM J. Appl. Math.* **52**, 442–458, 1992.
- [25] ENGL H.W., HANKE M., NEUBAUER A.: *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer, Dordrecht, 1996.
- [26] FRIEDMAN A., GUSTAFSSON B.: Identification of the conductivity coefficient in an elliptic equation. *SIAM J. Math. Anal.* **18**, 777–787, 1987.
- [27] FRIEDMAN A., ISAKOV V.: On the uniqueness in the inverse conductivity problem with one measurement. *Indiana Univ. Math. J.* **38**, 563–579, 1989.
- [28] FRIEDMAN A., VOGELIUS M.: Identification of small inhomogeneities of extreme conductivity by boundary measurements: a theorem on continuous dependence. *Arch. Rational Mech. Anal.* **105**, 299–326, 1989.
- [29] GAIER D.: *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*. Springer, Berlin, 1964.
- [30] GILBARG D., TRUDINGER N.S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Berlin, 1977.
- [31] GIRAULT V., RAVIART P.A.: *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer, Berlin, 1986.
- [32] GISSER D.G., ISAACSON D., NEWELL J.C.: Electric current computed tomography and eigenvalues. *SIAM J. Appl. Math.* **50**, 1623–1634, 1990.
- [33] GRADSHTEYN I.S., RYZHIK I.M.: *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, New York, 5. Aufl., 1994.
- [34] HAACK W., WENDLAND W.: *Vorlesungen über Partielle und Pfaffsche Differentialgleichungen*. Birkhäuser, Basel, 1969.
- [35] HÄHNER P.: An inverse problem in electrostatics. *Inverse Problems* **15**, 1999.
- [36] HENRICI P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Bd. 3. Wiley, New York, 1986.
- [37] HETTLICH F., RUNDELL W.: The determination of a discontinuity in a conductivity from a single boundary measurement. *Inverse Problems* **14**, 67–82, 1998.

-
- [38] HOFMANN B.: Approximation of the inverse electrical impedance tomography problem by an inverse transmission problem. *Inverse Problems* **14**, 1171–1187, 1998.
- [39] IKEHATA M.: Reconstruction of the shape of the inclusion by boundary measurements. *Comm. Partial Differential Equations* **23**, 1459–1474, 1998.
- [40] ISAKOV V.: On uniqueness of recovery of a discontinuous conductivity coefficient. *Comm. Pure Appl. Math.* **41**, 865–877, 1988.
- [41] ISAKOV V.: *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer, New York, 1998.
- [42] KANG H., SEO J.K.: The layer potential technique for the inverse conductivity problem. *Inverse Problems* **12**, 267–278, 1996.
- [43] KANG H., SEO J.K., SHEEN D.: The inverse conductivity problem with one measurement: stability and estimation of size. *SIAM J. Math. Anal.* **28**, 1389–1405, 1997.
- [44] KANG H., SEO J.K., SHEEN D.: Numerical identification of discontinuous conductivity coefficients. *Inverse Problems* **13**, 113–123, 1997.
- [45] KIRSCH A.: *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer, New York, 1996.
- [46] KIRSCH A.: Characterization of the shape of the scattering obstacle using the spectral data of the far field operator. *Inverse Problems* **14**, 1489–1512, 1998.
- [47] KOHN R.V., MCKENNEY A.: Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography. *Inverse Problems* **6**, 389–414, 1990.
- [48] KOHN R.V., VOGELIUS M.: Determining conductivity by boundary measurements. *Comm. Pure Appl. Math.* **37**, 289–298, 1984.
- [49] KOHN R.V., VOGELIUS M.: Determining conductivity by boundary measurements II. Interior results. *Comm. Pure Appl. Math.* **38**, 643–667, 1985.
- [50] KOHN R.V., VOGELIUS M.: Relaxation of a variational method for impedance computed tomography. *Comm. Pure Appl. Math.* **40**, 745–777, 1987.
- [51] KRESS R.: *Linear Integral Equations*. Springer, Berlin, 1989.

-
- [52] LADYZHENSKAYA O.A.: *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. Springer, New York, 1985.
- [53] MIRANDA C.: *Partial Differential Equations of Elliptic Type*. Springer, Berlin, 2. Aufl., 1970.
- [54] NACHMAN A.I.: Reconstructions from boundary measurements. *Ann. of Math.* **125**, 531–576, 1988.
- [55] NACHMAN A.I.: Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem. *Ann. of Math.* **142**, 71–96, 1995.
- [56] PAULSON K., BRECKON W., PIDCOCK M.: Electrode modelling in electrical impedance tomography. *SIAM J. Appl. Math.* **52**, 1012–1022, 1992.
- [57] PAULSON K., LIONHEART W., PIDCOCK M.: POMPUS: an optimized EIT reconstruction algorithm. *Inverse Problems* **11**, 425–437, 1995.
- [58] PIDCOCK M.K., KUZUOGLU M., LEBLEBICIOGLU K.: Analytic and semi-analytic solutions in electrical impedance tomography: I. Two-dimensional problems. *Physiol. Meas.* **16**, 77–90, 1995.
- [59] PIDCOCK M.K., KUZUOGLU M., LEBLEBICIOGLU K.: Analytic and semi-analytic solutions in electrical impedance tomography: II. Three-dimensional problems. *Physiol. Meas.* **16**, 91–110, 1995.
- [60] RUDIN W.: *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Singapore, 1991.
- [61] SANTOSA F., VOGELIUS M.: A backprojection algorithm for electrical impedance imaging. *SIAM J. Appl. Math.* **50**, 216–243, 1990.
- [62] SEO J.K.: On the uniqueness in the inverse conductivity problem. *J. Fourier Anal. Appl.* **2**, 227–235, 1996.
- [63] SOMERSALO E., CHENEY M., ISAACSON D., ISAACSON E.: Layer stripping: a direct numerical method for impedance imaging. *Inverse Problems* **7**, 899–926, 1991.
- [64] SOMERSALO E., ISAACSON D., CHENEY M.: Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography. *SIAM J. Appl. Math.* **52**, 1023–1040, 1992.
- [65] SYLVESTER J., UHLMANN G.: A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Ann. of Math.* **125**, 153–169, 1987.

- [66] SYLVESTER J., UHLMANN G.: Inverse boundary value problems at the boundary — continuous dependence. *Comm. Pure Appl. Math.* **41**, 197–219, 1988.
- [67] TRIEBEL H.: *Höhere Analysis*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.
- [68] WEIDMANN J.: *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Springer, New York, 1980.
- [69] WEXLER A., FRY B., NEUMAN M.R.: Impedance-computed tomography algorithm and system. *Appl. Optics* **24**, 3985–3992, 1985.
- [70] WLOKA J.: *Partielle Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 1982.
- [71] YORKEY T.J., WEBSTER J.G., TOMPKINS W.J.: Comparing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **34**, 843–852, 1987.

Lebenslauf

Martin Brühl

12. Januar 1969 Geboren in Wissen/Sieg. Eltern: Stefan Brühl und Klara Brühl, geb. Westdickenberg
- 1975–1979 Grundschule Wissen
1979–1988 Kopernikus-Gymnasium Wissen, Abschluß: Abitur
- 1988–1989 Wehrdienst
- 1989–1994 Studium der Technomathematik an der Universität Karlsruhe. Erstes Nebenfach: Maschinenbau
10. Oktober 1991 Vordiplom
8. Dezember 1994 Diplomabschluß Technomathematik
- SS 1994 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Praktische Mathematik der Universität Karlsruhe
- seit 1. Januar 1995 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Praktische Mathematik der Universität Karlsruhe