First published in:

GÖTTLICHER, B.; SCHWEIZERHOF, K.

Berechnung starrer und flexibler FE-Strukturen in Gravitationsfeldern mit der 'Energy-Momentum-Method'

Mit der sogenannten Energy-Momentum-Methode (nach Simo et al) steht ein implizites Zeitintegrationsverfahren mit vollständiger Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung zur Berechnung gekoppelter starrer und flexibler Strukturen mit transienter Belastung zur Verfügung. Das Verfahren ist aufgrund seiner hohen numerischen Stabilität für Langzeitsimulationen mit großen Rotationen besonders gut geeignet. Im Beitrag wird speziell untersucht, wie sich das Zeitintegrationsverfahren auf den Algorithmus bei der Berechnung von Strukturen in Gravitationsfeldern auswirkt. Vereinfachend wird dabei von einem stationären, radialsymmetrischen Kraftfeld ausgegangen. Von besonderem Interesse ist hierbei der Nachweis der Energieerhaltung im Algorithmus bei z.B. einem sich im Kraftfeld bewegenden Satelliten. Es wird eine Formulierung vorgestellt, mit der die Gravitationskräfte energieerhaltend für starre und elastische Kontinua auch bei großen Bewegungen darstellbar sind. Die Funktionsfähigkeit der Formulierung und Fragen zur Genauigkeit werden an einem numerischen Beispiel diskutiert.

1. Einführung

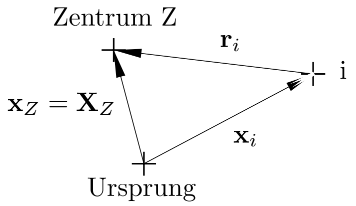
Die numerische Analyse der transienten Bewegung von Strukturen in Gravitationsfeldern erfordert eine Zeitintegration über große Zeiträume. Daher erscheinen dissipative Verfahren wenig sinnvoll, insbesondere wenn Impuls- und Drehimpulserhaltung nicht gewährleistet werden können. Aufgrund ihrer hohen numerischen Stabilität sind für Fragen der Strukturmechanik die implizite Mittelpunktsregel sowie die sogenannte 'Energy-Momentum' Methode besonders gut geeignet. Mit der Mittelpunktsregel, einem symplektischen Verfahren, kann allerdings im allgemeinen die Energieerhaltung nicht erfüllt werden. Daher wird hier im Beitrag die 'Energy-Momentum' Methode weiterverfolgt, die die Eigenschaft besitzt, Impuls, Drehimpuls und Energie exakt im Zeitschritt zu erhalten. Die Methode wurde in SIMO & TARNOW [1] vorgeschlagen und für starre Kontinua von SIMO & WONG [2] erweitert. In Bezug auf Zentralkraftfelder ist zu erwähnen, daß ein Vergleich der 'Energy-Momentum' Methode und der Mittelpunktsregel hinsichtlich der Stabilität in GONZALES & SIMO [3] für Punktmassen mit quadratischen Potentialfeldern durchgeführt wurde. In GREENSPAN [4] wurde eine, die Erhaltungssätze erfüllende Formulierung entsprechend der 'Energy-Momentum' Methode vorgeschlagen, mit der Punktmassensysteme mit den von ihnen ausgehenden Potentialfeldern berechnet werden können. Der Fokus des vorliegenden Beitrages liegt auf der entsprechenden Formulierung der Anziehungskraft als äußere Kraft auf einen Satelliten in einem quadratischen Zentralkraftfeld, das von der Masse des Satelliten nicht beeinflußt wird.

2. Definition von Gravitationsfeldern

Das betrachtete Schwerefeld wird von einer Punktmasse erzeugt, deren Masse sehr viel größer ist als die des betrachteten Körpers. Daher kann das Zentrum Z des Schwerefeldes als ortsfest angesehen werden, d.h. seine Position wird von den Körpern in seinem Schwerefeld nicht beeinflußt. Bei Kenntnis der Gravitationsbeschleunigung g_{ref} in einer Referenzentfernung r_{ref} ergibt sich der Vektor der Gravitationbeschleunigung eines Punktes i auf dem Körper zu

$$\mathbf{g}_i = g_{ref} \frac{r_{ref}^2}{r_i^2} \mathbf{e}_\mathbf{i}^\mathbf{r} \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{e}_\mathbf{i}^\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \tag{1}$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{X}_Z - \mathbf{X}_i - \mathbf{u}_i = \mathbf{X}_Z - \mathbf{x}_i \tag{2}$$



Hierbei sei $\mathbf{X}$ der Ortsvektor in der Referenzkonfiguration und $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ der Ortsvektor in der aktuellen Konfiguration. $\mathbf{u}$ sei der Verschiebungsvektor und der Betrag der Referenzentfernung sei $r_i = |\mathbf{r}_i|$

Die Gravitation führt mit der Dichte ϱ auf eine Volumenkraft der Form $\mathbf{p} = \varrho\, \mathbf{g}_{em}$ wobei mit $\mathbf{g}_{em}$ eine sinnvoll zu wählende Größe des im Zeitschritt konstanten Vektors der Gravitationsbeschleunigung bezeichnet wird.
Die schwache Form der Impulsbilanz im Zeitschritt $t_{00} \rightarrow t_{10}$ für das unbelastete System im Schwerefeld lautet:

$$\delta\Pi = \delta\Pi^M + \delta\Pi^E - \int_V \varrho\, \mathbf{g}_{em} \cdot \delta\mathbf{u}\ dV = \mathbf{0}. \tag{3}$$

$\delta\Pi^M$ und $\delta\Pi^E$ stehen für die virtuellen Arbeiten infolge Massenträgheit und Verzerrungen von elastischen, starren und gekoppelten starr-elastischen Strukturbereichen. Für $\mathbf{g}_{em}$ wird folgender Ansatz eingeführt:

$$\mathbf{g}_{em} = g_{ref} \; \frac{r_{ref}^2}{r_{00}\, r_{10}} \; \frac{\mathbf{r}_{00} + \mathbf{r}_{10}}{r_{00} + r_{10}} \tag{4}$$

3. Nachweis der Erhaltungssätze

Es wird davon ausgegangen, daß sich für die beiden ersten Anteile in (3) der Nachweis der Impuls-, Drehimpuls- und Energieerhaltung führen läßt. Für den Anteil infolge Gravitation müssen folgende Nachweise erbracht werden:

- Drehimpulserhaltung um das Gravitationszentrum $\int_{B_0} \mathbf{r}_{05} \times \varrho\, \mathbf{g}_{em}\; dV = \mathbf{0}$ mit $\mathbf{r}_{05} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{r}_{00} + \mathbf{r}_{10})$

Dieser Nachweis kann sowohl für die vorgeschlagene Formulierung als auch für eine Formulierung mit der Mittelpunktsregel geführt werden.

- Energieerhaltung $W_{ext} = \Delta t \int_{B_0} \varrho\, \mathbf{g}_{em} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{05}}\; dV = \int_{B_0} \varrho\, (\mathbf{g}_{10} \cdot \mathbf{r}_{10} - \mathbf{g}_{00} \cdot \mathbf{r}_{00})\; dV = W_a$

Hierbei wird gezeigt, daß die Arbeit der Gravitationskräfte W_{ext} im Zeitschritt genauso groß ist wie der Potentialverlust im Schwerefeld W_a. Dieser Nachweis gelingt nur für die vorgeschlagene Formulierung und kann für eine Formulierung mit der Mittelpunktsregel nicht geführt werden.

4. Diskretisierung im Raum

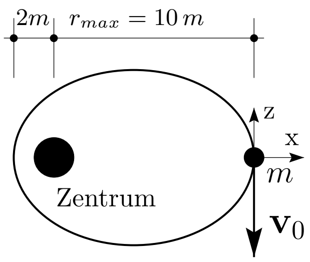
Die Einführung der Formfunktionen gemäß $\mathbf{N}_e = [\mathbf{I}_{3X3}\, N_1, ..., \mathbf{I}_{3X3}\, N_{nen}]$ im Rahmen einer isoparametrischen Diskretisierung ergibt auf Elementebene das Residuum

$$\mathbf{R}_e = \int_{B_0} \varrho\, \mathbf{N}_e^T\, \mathbf{g}_{em}(\mathbf{r})\; dV \tag{5}$$

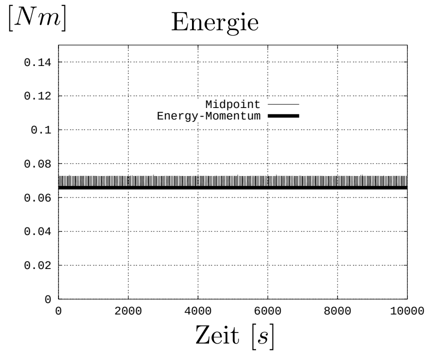
$\mathbf{g}_{em}$ ist verschiebungsabhängig und bei einer Linearisierung ergeben sich zusätzliche, unsymmetrische sogenannte 'Last'anteile für die Elementsteifigkeitsmatrix. Starrkörper werden zur Erfassung der Gravitation analog der FE-Methode räumlich über Einzelelemente diskretiert. Die Wirkungslinie der resultierenden Gravitationskraft verläuft dann durch den Schwerpunkt des Starrkörpers, der in einem inhomogenen Potentialfeld aber i.a. nicht identisch mit dem Massenmittelpunkt ist. Die Position des Schwerpunktes, sowie der Betrag der resultierenden Anziehungskraft hängen von der jeweiligen Lage des Starrkörpers im Gravitationsfeld ab, d.h. zur Erfassung des korrekten Einflusses der Gravitation muß eine Integration über das Volumen in der aktuellen Konfiguration durchgeführt werden.
Die aus der räumlichen Diskretisierung des Starrkörpers berechneten Knotenkräfte werden dann über Kopplungsbedingungen auf die 6 Freiheitsgrade im Massenmittelpunkt transformiert. Entsprechend sind die Lastanteile der effektiven Steifigkeitsmatrix auf die Starrkörperfreiheitsgrade zu transformieren.

5. Numerisches Beispiel: Punktmasse auf elliptischer Bahn

Es wird eine Punktmasse (Masse m) betrachtet, die sich infolge ihrer Geschwindigkeit auf einer elliptischen Umlaufbahn um ein Gravitationszentrum gemäß der Abbildung befindet. Mit Hilfe der Kepler'schen Gesetze werden die Anfangsbedingungen bestimmt zu: $g\,(r_{max}) = 3.9478 \cdot 10^{-2}\ \frac{m}{s^2}$; $v_0 = 0.36276\ \frac{m}{s}$; $T = 46.4758\, s$



Die Abbildung rechts zeigt den zeitlichen Verlauf der Gesamtenergie für eine konstante Zeitschrittweite über einen längeren Zeitraum. Während die Zeitintegration mit der Mittelpunktsregel Oszillationen aufweist, wird die Energieerhaltung mit der 'Energy-Momentum' Methode exakt erfüllt. Impuls und Drehimpulserhaltung sind für beide Methoden erwartungsgemäß exkat erfüllt.



6. References

1 SIMO, J.C.; TARNOW, N.: The discrete energy-momentum method. Conserving alghorithms for nonlinear elastodynamics, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik **43** (1992), 757-793

2 SIMO, J.C.; WONG, K.K.: Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum, International Journal for Numerical Methods in Engineering **31** (1991), 19-52

3 GONZALES, O.; SIMO, J.C.: On the stability of symplectic and energy-momentum alghorithms for non-linear Hamiltonian systems with symmetry. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **134** (1996), 197-222

4 GREENSPAN, D.: Completely conservative, covariant numerical methodology. Computers and Mathematics with Applications. **4** (1995) 37-43

DIPL.-ING. BURKHARD GÖTTLICHER, PROF. DR.-ING KARL SCHWEIZERHOF, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe