First published in:

MESECKE, S.; LAMMERING, R.

FE-Formulierungen für piezoelektrische Flächentragwerke

Analog zu hybriden Variationsformulierungen zur Beschreibung mechanischen Materialverhaltens werden zwei Mehrfeldvariationsformulierungen für Materialien mit elektro-mechanischer Kopplung vorgestellt. Die hieraus entwickelte FE-Formulierung eines geschichteten flachen Schalenelementes mit 4-Knoten enthält pro Knoten fünf mechanische und zwei elektrische Freiheitsgrade. Die zusätzlichen elektrischen Freiheitsgrade können auf Elementebene eliminiert werden. Anhand von Beispielen aus der Literatur wurden die Formulierungen getestet und eine gute Übereinstimmung festgestellt.

1. Einleitung

Die Strukturintegration von Werkstoffen mit sensorischen und aktorischen Eigenschaften dient dem Ziel, eine Verbesserung der Lastabtragung, auch z.B. hinsichtlich des Komforts, herbeizuführen. Ein Weg zur Werkstoffintegration besteht darin, Piezokeramiken auf passive Strukturen zu applizieren. Für die Berechnung dieser komplexen Systeme ist die Entwicklung insbesondere geschichteter Schalenelemente notwendig. Dies geschieht bisher mithilfe von Verschiebungselementen. Die Anwendung der bekannten hybriden Variationsformulierungen auf gekoppelte elektromechanische Probleme wurde jedoch hierfür bisher selten umgesetzt, vgl. [1] und [3].

2. Variationsformulierungen für gekoppelte elektro-mechanische Probleme

Ausgangspunkt dieser Variationsformulierungen sind statische sowie elektrische Feldgleichungen $\operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b} = \mathbf{0}$ und $\operatorname{Div}\mathbf{D} = 0$, wobei für den Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$, die volumenspezifischen Kräfte $\rho\mathbf{b}$ und die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D}$ gewählt wird. Die Anwendung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie führt mit dem virtuellen Verschiebungsfeld $\delta\mathbf{u}$ und dem virtuellen elektrischen Potential $\delta\Phi$ auf

$$\delta\mathcal{G}(\mathbf{u},\delta\mathbf{u},\Phi,\delta\Phi) = \int_{\mathcal{B}} (\operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b})\cdot\delta\mathbf{u}dV + \int_{\mathcal{B}} \operatorname{Div}\mathbf{D}\,\delta\Phi dV = 0\,. \tag{1}$$

Die Beschreibung der Kopplung zwischen den mechanischen und elektrischen Feldgrößen erfolgt mithilfe der linearen konstitutiven Beziehungen $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{E}_m - \mathbf{e}\cdot\mathbf{E}_{el}$ sowie $\mathbf{D} = \mathbf{e}^T : \mathbf{E}_m + \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}_{el}$. Die konjugierte Formulierung ergibt sich zu $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_d : \mathbf{E}_m - \mathbf{h}\cdot\mathbf{D}$ bzw. $\mathbf{E}_{el} = -\mathbf{h}^T : \mathbf{E}_m + \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{D}$. Hierbei bezeichnet $\mathbf{E}_m$ den Greenschen Verzerrungstensor und $\mathbf{E}_{el} = -\operatorname{Grad}\Phi$ die Beziehung zwischen dem elektrischen Feld $\mathbf{E}_{el}$ und dem elektrischen Potential Φ. Der vierstufige Elastizitätstensor $\mathbf{C}$ bzw. dessen konjugierte Form $\mathbf{C}_d$ werden in gleicher Weise wie beim Hookeschen Gesetz verwandt. Ihre Konstanten werden bei konstantem elektrischen Feld $\mathbf{E}_{el}$ bzw. bei konstanter dielektrischer Verschiebung $\mathbf{D}$ ermittelt. Bei konstanter mechanischer Verzerrung $\mathbf{E}_m$ kann die Ermittlung des zweistufigen Permittivitätstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ bzw. des Impermittivitätstensors $\boldsymbol{\beta}$ erfolgen. Die Kopplung zwischen den mechanischen und elektrischen Eigenschaften wird durch den dreistufigen piezoelektrischen Modul $\mathbf{e}$ bzw. $\mathbf{h}$ erreicht.

Die Formulierung der mechanischen und elektrischen Randbedingungen erfolgt mit $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ auf dem Verschiebungsrand $\partial\mathcal{B}_u$, $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$ auf dem Spannungsrand $\partial\mathcal{B}_\sigma$, $\Phi = \bar{\Phi}$ auf dem Rand $\partial\mathcal{B}_\Phi$ und $\mathbf{D}\cdot\mathbf{n} = \bar{d}$ auf dem Rand $\partial\mathcal{B}_D$. Der Vektor der äußeren mechanischen Lasten wird hierbei mit $\bar{\mathbf{t}}$, der Normalenvektor auf $\partial\mathcal{B}_\sigma$ bzw. $\partial\mathcal{B}_D$ mit $\mathbf{n}$ und die äußeren elektrischen Lasten mit $\bar{d}$ bezeichnet.

Somit ergibt sich die schwache Form des Gleichgewichts als Zweifeldvariationsformulierung zu

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{E}_m : (\mathbf{C} : \mathbf{E}_m + \mathbf{e}\cdot\operatorname{Grad}\Phi)\,dV &&- \int_{\partial\mathcal{B}_\sigma} \delta\mathbf{u}\cdot\bar{\mathbf{t}}dA - \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{u}\cdot\rho\mathbf{b}dV &&= 0\\ &\int_{\mathcal{B}} \operatorname{Grad}\delta\Phi\cdot\left(\mathbf{e}^T : \mathbf{E}_m - \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\operatorname{Grad}\Phi\right)dV &&- \int_{\partial\mathcal{B}_D} \delta\Phi\bar{d}\,dA &&= 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Dreifeldvariationsformulierung

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{E}_m : (\mathbf{C}_d : \mathbf{E}_m - \mathbf{h}\cdot\mathbf{D})\,dV &&- \int_{\partial\mathcal{B}_\sigma} \delta\mathbf{u}\cdot\bar{\mathbf{t}}dA - \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{u}\cdot\rho\mathbf{b}dV &&= 0\\ &\int_{\mathcal{B}} \operatorname{Grad}\delta\Phi\cdot\mathbf{D}dV &&- \int_{\partial\mathcal{B}_D} \delta\Phi\bar{d}\,dA &&= 0\\ &\int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{D}\cdot\left(-\mathbf{h}^T : \mathbf{E}_m + \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{D} + \operatorname{Grad}\Phi\right)dV && &&= 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

wird durch den Einbau von Nebenbedingungen in das Variationsfunktional, vgl. (1), mithilfe von Lagrangen Multiplikatoren erhalten, die als virtuelle dielektrische Verschiebung $\delta\mathbf{D}$ und virtuelles elektrisches Feld $\delta\mathbf{E}_{el}$ identifiziert werden können.

Beim Übergang zur Finite Element Formulierung wird das isoparametrische Konzept auf eine schubelastische geschichtete lineare flache Schalenformulierung angewendet, vgl. [2]. Für die Verschiebungen $\underline{u} = \underline{N}_u\underline{\hat{u}}$, das elektrische Potential $\underline{\Phi} = \underline{N}_\Phi\underline{\hat{\Phi}}$ und die dielektrische Verschiebung $\underline{D} = \underline{N}_D\underline{\hat{D}}$ sowie deren Variationen werden dadurch dieselben Ansätze gewählt. Mit $\underline{N}_u$ und $\underline{N}_\Phi$ sowie $\underline{B}_u$ und $\underline{B}_\Phi$ werden die Matrizen mit den jeweiligen Ansatzfunktionen bzw. deren Ableitungen bezeichnet. Die Ansatzfunktionenmatrix $\underline{N}_D$ wird nur in der Dreifeldvariationsformulierung verwendet. Zur Vermeidung des Schublockingeffekts erfolgt eine selektiv reduzierte Integration der Schubterme. Somit ergibt sich für die semidiskrete Zweifeldvariationsformulierung unter Vernachlässigung der Volumenkräfte

$$\bigcup_{e=1}^{n_e}\left\{\begin{bmatrix}\delta\underline{\hat{u}}_e^T\\ \delta\underline{\hat{\Phi}}_e^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\int_{V_e}\underline{B}_u^T\underline{C}\,\underline{B}_u dV & \int_{V_e}\underline{B}_u^T\underline{e}\,\underline{B}_\Phi dV\\ \int_{V_e}\underline{B}_\Phi^T\underline{e}^T\underline{B}_u dV & -\int_{V_e}\underline{B}_\Phi^T\underline{\varepsilon}\,\underline{B}_\Phi dV\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\hat{u}}_e\\ \underline{\hat{\Phi}}_e\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\delta\underline{\hat{u}}_e^T\\ \delta\underline{\hat{\Phi}}_e^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\int_{A_\sigma}\underline{N}_u^T\underline{f}_u dA\\ \int_{A_D}\underline{N}_\Phi^T\underline{f}_D dA\end{bmatrix}\right\}=0 \tag{4}$$

sowie für die Dreifeldvariationsformulierung

$$\bigcup_{e=1}^{n_e}\left\{\begin{bmatrix}\delta\underline{\hat{u}}_e^T\\ \delta\underline{\hat{\Phi}}_e^T\\ \delta\underline{\hat{D}}_e^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\int_{V_e}\underline{B}_u^T\underline{C}_d\,\underline{B}_u dV & \underline{0} & -\int_{V_e}\underline{B}_u^T\underline{h}\,\underline{N}_D dV\\ \underline{0} & \underline{0} & \int_{V_e}\underline{B}_\Phi^T\underline{N}_D dV\\ -\int_{V_e}\underline{N}_D^T\underline{h}^T\underline{B}_u dV & \int_{V_e}\underline{N}_D^T\underline{B}_\Phi dV & \int_{V_e}\underline{\beta}\,\underline{N}_D dV\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\hat{u}}_e\\ \underline{\hat{\Phi}}_e\\ \underline{\hat{D}}_e\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\delta\underline{\hat{u}}_e^T\\ \delta\underline{\hat{\Phi}}_e^T\\ \delta\underline{\hat{D}}_e^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\int_{A_\sigma}\underline{N}_u^T\underline{f}_u dA\\ \int_{A_D}\underline{N}_\Phi^T\underline{f}_D dA\\ \underline{0}\end{bmatrix}\right\}=0\,. \tag{5}$$

Die Elimination der dielektrischen Verschiebung in der Dreifeldvariationsformulierung auf Elementebene führt auf

$$\begin{bmatrix}\underline{K}_{uu} & \underline{0} & -\underline{K}_{uD}\\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{K}_{\Phi D}\\ -\underline{K}_{Du} & \underline{K}_{D\Phi} & \underline{K}_{DD}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\hat{u}}\\ \underline{\hat{\Phi}}\\ \underline{\hat{D}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{F}_u\\ \underline{F}_\Phi\\ \underline{0}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\underline{K}^*_{uu} & \underline{K}^*_{u\Phi}\\ \underline{K}^*_{\Phi u} & -\underline{K}^*_{\Phi\Phi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\hat{u}}\\ \underline{\hat{\Phi}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{F}_u\\ \underline{F}_\Phi\end{bmatrix}. \tag{6}$$

Soll die vorgestellte Schalenformulierung zusammen mit Elementen, die nur mechanisches Materialverhalten aufweisen, eingesetzt werden, so ist eine Elimination des elektrischen Potentials auf Elementebene durchzuführen $\left(\underline{K}^*_{uu}+\underline{K}^*_{u\Phi}\,(\underline{K}^*_{\Phi\Phi})^{-1}\,\underline{K}^*_{\Phi u}\right)\underline{\hat{u}}=\underline{F}_u+(\underline{K}^*_{\Phi\Phi})^{-1}\,\underline{F}_\Phi$.

3. Beispiele

Anhand eines entgegengesetzt polarisierten bimorphen Kragbalkens, vorgestellt in [4], [3], wurden beide Variationsformulierungen sowohl in aktorischer als auch in sensorischer Funktionsweise mit Ergebnissen aus der Literatur verglichen. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung auch für den Fall verzerrter Elemente.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Die vorgestellten Zweifeld- und Dreifeldvariationsformulierungen erweisen sich als effiziente Methoden zur Berechnung von gekoppelten elektro-mechanischen Problemen. Untersuchungen zur Stabilität dieser Mehrfeldvariationsformulierungen stehen jedoch noch aus. Desweiteren ist ein intensiver Vergleich der FE-Rechnungen mit experimentellen Versuchsdaten sowohl in aktorischer als auch in sensorischer Funktionsweise durchzuführen.

5. References

1 Ghandi, K.; Hagood, N.W.: A Hybrid Finite Element Model for Phase Transitions in Nonlinear Electro-Mechanically Coupled Material. SPIE Proc. **3039** (1997), 97–112.
2 Lammering, R.: The Application of a Finite Shell Element for Composites Containing Piezo-Electric Polymers in Vibration Control. Computers & Structures **41,** No. 5 (1991), 1101–1109.
3 Sze, K.Y.: Hybrid Finite Element Models for Piezoelectric Materials. J. of Sound and Vibration **226** (1999), 519–547.
4 Tzou, H.S.: Piezoelectric Shells: Distributed Sensing and Control of Continua, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1993.

Dipl.-Ing. Simone Mesecke, Prof. Dr.-Ing. Rolf Lammering Universität der Bundeswehr Hamburg, Institut für Mechanik, 22039 Hamburg, Deutschland