

**Ein Approximations- und ein Attraktivitätssatz
für die verallgemeinerte
Ginzburg-Landau-Gleichung**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik
der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Phys. Jochen Bitzer
aus Balingen

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juni 2004

Referent: Prof. Dr. Guido Schneider

Korreferent: Prof. Dr. Dr. h.c. Manfred Schneider

Karlsruhe 2004

Meinen Eltern

Zusammenfassung

Untersucht werden räumlich ausgedehnte musterbildende Systeme in der Nähe des Übergangs zur ersten Instabilität, wenn die entscheidenden nichtlinearen Terme im Bifurkationspunkt verschwinden und die verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichung an die Stelle der klassischen Ginzburg-Landau-Gleichung als Amplitudengleichung des Systems tritt. Wir zeigen, dass die Lösungen der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung tatsächlich eine gute Approximation für die Lösungen des ursprünglichen Systems sind, und zwar über eine sehr lange endliche Zeitskala. Außerdem beweisen wir, dass sich in diesem Fall jede kleine Lösung des musterbildenden Systems nach einer gewissen Zeit derart entwickelt, dass sie durch die Lösung der Ginzburg-Landau-Gleichung beschrieben werden kann. Dabei beschränken wir unsere Betrachtungen auf eine Kuramoto-Shivashinsky-Swift-Hohenberg-Gleichung, die uns als Modell für ein solches musterbildendes System dient.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Musterbildende Systeme	1
1.2	Turing-Instabilitäten in degenerierten Systemen	3
2	Der Approximationssatz	9
2.1	Lineare Stabilitätsanalyse der trivialen Lösung	9
2.2	Herleitung der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung	10
2.3	Die Approximationseigenschaft	14
2.4	Die Beweisidee	15
2.5	Die Modenaufteilung	16
2.6	Die Variablentransformation	22
2.7	Abschätzungen des Residuums	25
2.8	Die Fehlerabschätzung	28
3	Der Attraktivitätssatz	41
3.1	Der erste Schritt	41
3.2	Beweis des ersten Attraktivitätssatzes	42
3.3	Konzentration der kritischen Moden	53
3.3.1	Modenkonzentration bei einer einfacheren Modellgleichung	53
3.3.2	Modenkonzentration bei der KSSH-Gleichung	60

3.4	Konzentration der nichtkritischen Moden	79
	Literaturverzeichnis	89
	Dank	94

1 Einleitung

1.1 Musterbildende Systeme

In den unterschiedlichsten Bereichen unseres täglichen Lebens und in den verschiedensten naturwissenschaftlichen Disziplinen beobachtet man ein Phänomen, das als Musterbildung oder Selbstorganisation bezeichnet wird. Gemeint ist damit ein Prozess, bei dem ein räumlich oder zeitlich homogener Zustand durch Ausbildung einer Struktur in einen inhomogenen Zustand übergeht.

Eines der bekanntesten musterbildenden Systeme ist sicherlich der Taylor-Couette-Fluss. Dabei wird eine Flüssigkeit, die sich zwischen zwei rotierenden Zylindern befindet, untersucht. In einer zu Beginn laminaren Strömung kommt es zur Bildung von Wirbeln, wenn ein bestimmter Parameter (die sog. Taylor- bzw. Reynoldszahl), der sowohl von der Geometrie und der Rotationsgeschwindigkeit der Anordnung als auch von der Viskosität und der Dichte der Flüssigkeit abhängt, einen kritischen Wert übersteigt. Vergrößert man den Parameter noch weiter, wird die periodische Wirbelstruktur instabil, und es kommt schließlich zu chaotischem Verhalten. Bei Rohrströmungen beobachtet man das gleiche Verhalten, falls die Durchflussmenge erhöht wird. Man spricht in diesem Fall vom Poiseuille-Fluss [6, 10].

Ebenfalls im Bereich der Fluidodynamik ist die für die Meteorologie (hier speziell bei der Wolkenbildung) bedeutsame Rayleigh-Bénard-Konvektion angesiedelt: Eine Flüssigkeitsschicht (oder Gasschicht) wird von unten beheizt und oben auf einer festen Temperatur gehalten. Solange die Temperaturdifferenz klein ist, geschieht der Wärmeaustausch durch Konduktion, d.h. die Flüssigkeit bewegt sich nicht. Sobald der Betrag des Temperaturgradienten jedoch einen kritischen Wert übersteigt, beginnt die Flüssigkeit sich zu bewegen, und es kommt zur Ausbildung von Mustern, wie z.B. Rollen oder Sechsecken [11, 26, 27].

Ein weiteres Beispiel aus der Physik findet sich in der nichtlinearen Optik: Viele optische Medien zeigen beim Durchgang von Licht ein nichtlineares Verhalten. So kann z.B. das Phänomen der Selbstfokussierung beobachtet werden, wenn es

in den Bereichen eines Mediums, die sehr großen Lichtintensitäten ausgesetzt sind, zu einer Vergrößerung des Brechungsindex kommt. Dann kann nämlich ein Laserstrahl, dessen Intensität in der Mitte des Strahls sehr groß ist und zum Rand hin abnimmt, zum Entstehen einer Sammellinse führen, was wiederum eine weitere Intensitätssteigerung nach sich zieht und bei bestimmten Experimenten ein Muster entstehen lässt [2, 42].

Auf dem Gebiet der Nanophysik beobachtet man beim epitaktischen Wachstum von Halbleitern ebenfalls eine Musterbildung. So kommt es beispielsweise beim Aufwachsen von InAs auf ein GaAs-Substrat mittels molecular beam epitaxy (MBE) zum Wachstum im sog. Stranski-Krastanov-Modus, bei dem sich kleine InAs-Inseln von nahezu einheitlicher Größe (≈ 10 nm) und sehr regelmäßiger Anordnung bilden. Man spricht daher auch von selbstorganisiertem Wachstum, wobei der für den Wachstumsmodus entscheidende Parameter die Differenz der Gitterkonstanten von Substrat und aufgedampftem Halbleiter ist, d.h., sind die Gitterkonstanten etwa gleich groß, kommt es nicht zum Inselwachstum, sondern zur Schichtbildung. In der Praxis finden solche Materialien bereits heute Anwendung in Halbleiterquantenpunktlasern, und für die Zukunft erhofft man sich auch in der Mikroelektronik einen Durchbruch auf dem Weg zum Quantencomputer [3, 4, 9, 25, 40].

Auch der in der Supraleitung wichtige Josephson-Kontakt kann in diesem Zusammenhang genannt werden, wobei es sich in diesem Fall nicht um ein räumliches, sondern ein zeitliches Muster handelt: Verbindet man zwei Supraleiter über eine dünne isolierende Schicht miteinander, so stellt sich ein auf dem Tunneleffekt beruhender Gleichstrom ein. Legt man nun von außen eine Spannung an, so lässt sich eine von der Größe der Spannung abhängige Oszillation des Tunnelstroms feststellen [1, 17].

In der Chemie gibt es ebenfalls Beispiele für musterbildende Systeme. Das bekannteste dürfte sicherlich die Belousov-Zhabotinsky-Reaktion sein, bei der eine aus einer Mischung von Natriumbromat (NaBrO_3), Malonsäure ($\text{C}_3\text{H}_4\text{O}_4$), Schwefelsäure (H_2SO_4), Natriumbromid (NaBr) und Ferroin ($[\text{Fe}(\text{C}_{12}\text{H}_8\text{N}_2)_3]\text{SO}_4$) bestehende Flüssigkeit ihre Farbe periodisch zwischen rot und blau ändert. Dieser

Prozess kann sich bei geeignetem Mischungsverhältnis der Chemikalien auch mit der Zeit stabilisieren, und man erhält ein rot-blaues Streifenmuster [16, 24, 46].

Andere musterbildende Systeme lassen sich in der Biologie finden. So kann das menschliche Gehirn als ein sich selbst organisierendes System angesehen werden, und auch bei der Entstehung von Korallenriffen lässt sich ein analoges theoretisches Modell herleiten [21, 30].

Darüber hinaus gibt es auch außerhalb der Naturwissenschaften Systeme, wie beispielsweise die internationalen Finanzmärkte [18] oder den Verkehrsfluss in Städten oder auf Autobahnen [7, 22], die ebenfalls eine Selbstorganisation aufweisen.

Erstmals wurde im Jahr 1952 durch A. M. Turing – ausgehend von biologisch-chemischen Fragestellungen – ein entscheidender Ansatz, den er *diffusionsgesteuerte Instabilität* nannte, vorgeschlagen, um den Mechanismus, der zur Entstehung der Muster führt, verstehen zu können [43]. Inzwischen ist die Modellbildung zur Erklärung der Musterbildung schon sehr weit fortgeschritten, und es stellt sich heraus, dass für viele Systeme die komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung zur Modellierung herangezogen werden kann.

1.2 Turing-Instabilitäten in degenerierten Systemen

Unser Interesse gilt räumlich ausgedehnten musterbildenden Systemen in der Nähe des Übergangs zur ersten Instabilität, bei denen als Amplitudengleichung nicht mehr die klassische, sondern die verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichung auftritt. Diese Situation liegt vor, wenn die entscheidenden nichtlinearen Terme in der Nähe des Bifurkationspunktes verschwinden, was beispielsweise beim Taylor-Couette-Fluss zwischen zwei mit entgegengesetztem Drehsinn rotierenden Zylindern [6], beim ebenen Poiseuille-Fluss [31], beim Jeffery-Hamel-Fluss in einer Düse [13], beim Blasius-Grenzschicht-Fluss an einer endlichen Platte [39] oder auch bei der doppelt-diffusiven Konvektion (Wärmekonvektion einer homogenen Mischung aus zwei Komponenten unterschiedlicher Dichte und gleichen

Aggregatzustandes) [23] der Fall ist. Weitere Beispiele finden sich in [15].

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir, dass sich jede kleine Lösung des musterbildenden Systems derart entwickelt, dass sie nach einer bestimmten Zeit durch die Lösungen der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung approximiert werden kann. Als Modell für ein solches musterbildendes System dient uns dabei eine Kuramoto-Shivashinsky-Swift-Hohenberg-Gleichung, auf deren genauere Untersuchung wir uns im folgenden beschränken wollen.

Die verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichung ist durch

$$\partial_T A = \alpha_0 A + \alpha_1 \partial_X^2 A + \alpha_2 |A|^2 A + \alpha_3 |A|^2 \partial_X A + \alpha_4 A^2 \partial_X \bar{A} + \alpha_5 |A|^4 A, \quad (1.1)$$

mit $\alpha_j = \alpha_{j, re} + i\alpha_{j, im} \in \mathbb{C}$, $\alpha_{1, re} > 0$, $T \geq 0$, $X \in \mathbb{R}$, und $A(X, T) \in \mathbb{C}$ gegeben.

Als Beispiel eines musterbildenden Systems betrachten wir das eindimensionale Modell

$$\partial_t u = -(1 + \partial_x^2)^2 u + \varepsilon^2 u - \beta u \partial_x u - \gamma u^3 \quad (1.2)$$

mit $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ und Parametern $\beta, \gamma, \varepsilon \in \mathbb{R}$. Diese Gleichung, die aus einer Kuramoto-Shivashinsky- und einer Swift-Hohenberg-Gleichung zusammengesetzt ist, bezeichnen wir im folgenden als KSSH-Gleichung. In der Nähe der ersten Instabilität der trivialen räumlich homogenen Lösung $u = 0$, die für $\varepsilon^2 = 0$ auftritt, betrachten wir $0 \leq \varepsilon \ll 1$ als kleinen Bifurkationsparameter und können im degenerierten Fall

$$3\gamma + \frac{\beta^2}{9} = \varepsilon c_3 \quad (c_3 \in \mathbb{R}), \quad (1.3)$$

d.h. wenn die entscheidenden nichtlinearen Terme mit $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwinden, mittels des Ansatzes

$$u(x, t) = \varepsilon^{1/2} A(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{ix} + \varepsilon^{1/2} \bar{A}(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{-ix} + O(\varepsilon) \quad (1.4)$$

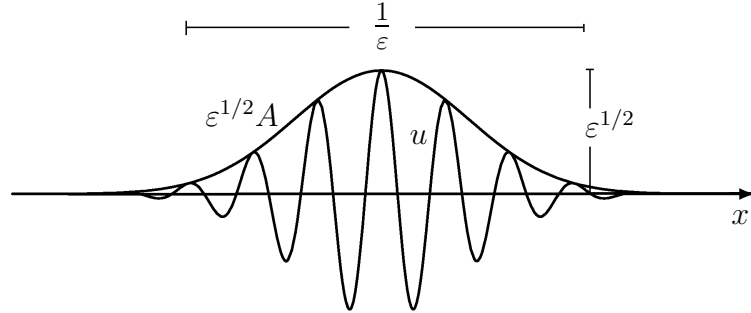


Abbildung 1.1: Modulation von u durch die Einhüllende A .

die verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichung (1.1) formal herleiten. Für kleine $\varepsilon > 0$ beschreibt die Lösung A der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung langsame zeitliche und räumliche Modulationen des instabilsten Modus e^{ix} . Die Modulation ist gemäß unseres Ansatzes (1.4) von der Größenordnung $O(\varepsilon^{1/2})$ und hat die Breite $1/\varepsilon$. Eine schematische Skizze dieser Situation ist in Abb. 1.1 zu sehen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diese Gleichung mittels eines Approximationssatzes (Satz 2.3) und eines Attraktivitätssatzes (Satz 3.4) mathematisch zu rechtfertigen.

Dazu beweisen wir in Kapitel 2, dass zu jeder Lösung der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung (1.1) für Zeiten $T \in [0, T_0]$ eine Lösung des Originalsystems (1.2) existiert, die durch diese für $t \in [0, T_0/\varepsilon^2]$ näherungsweise beschrieben wird. Die Schwierigkeit des Beweises liegt in der langen Zeitskala $O(1/\varepsilon^2)$ begründet. Durch Anwenden der Gronwallschen Ungleichung auf Lösungen der Ordnung $O(\varepsilon^{1/2})$ kann nämlich nur die Zeitskala $O(1/\varepsilon^{1/2})$ abgedeckt werden. Unser Beweis basiert auf einer Weiterentwicklung ähnlicher Approximationssätze für die klassische Ginzburg-Landau Gleichung

$$\partial_T A = \alpha_0 A + \alpha_1 \partial_X^2 A + \alpha_2 |A|^2 A \quad (1.5)$$

mit $\alpha_j = \alpha_{j,re} + i\alpha_{j,im} \in \mathbb{C}$, $\alpha_{1,re} > 0$, $T \geq 0$, $X \in \mathbb{R}$, und $A(X, T) \in \mathbb{C}$, die

mittels des Ansatzes

$$u(x, t) = \varepsilon A(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{ix} + \varepsilon \bar{A}(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{-ix} + O(\varepsilon^2) \quad (1.6)$$

im nichtdegenerierten Fall als Amplitudengleichung hergeleitet werden kann, d.h. die verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichung tritt auf, falls der kubische Koeffizient α_2 der Ginzburg-Landau-Gleichung bei Erreichen der Instabilität verschwindet, genauer gesagt, falls $\alpha_2 = O(\varepsilon)$ gilt. Approximationssätze für die klassische Ginzburg-Landau-Approximation finden sich in [8, 14, 34, 44], wo spezielle Modellprobleme, aber auch der allgemeine Fall und die Navier-Stokes-Gleichung betrachtet werden. Diese Theorie hat sich als wichtiges mathematisches Werkzeug etabliert, mit dessen Hilfe beispielsweise die obere Halbstetigkeit von Attraktoren bewiesen werden kann [29] oder sich globale Existenzaussagen gewinnen lassen [37]. Ein aktueller Überblick hierzu findet sich in [28].

Für die verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichung wurde in [41] ein entsprechender Approximationssatz für analytische Anfangsbedingungen von (1.1) bewiesen. In der hier vorliegenden Arbeit werden wir diese Voraussetzung abschwächen und nur noch die dreimalige Differenzierbarkeit der Anfangsbedingung fordern. Ferner schließen wir eine Lücke an der entscheidenden Stelle des Beweises aus [41] (siehe auch Bemerkung 2.5). Die Schwierigkeit liegt dabei darin, dass die Koeffizienten vor den kubischen Termen nur an den kritischen Wellenzahlen k_c verschwinden (dies entspricht in (1.7) dem Teil mit ∂_X), und deshalb zum Nachweis der Approximationseigenschaft die Konzentration der Fouriermoden bei k_c ausgenutzt werden muss. Im Unterschied zur klassischen Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A = \partial_X^2 A + A + \mathbf{0} \cdot A^2 + |A|^2 A$$

lautet die Gleichung im degenerierten Fall

$$\partial_T A = \partial_X^2 A + A + \mathbf{0} \cdot A^2 + \mathbf{0} \cdot |A|^2 A,$$

was bei der von uns gewählten Skalierung auf die degenerierte Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A = \partial_X^2 A + A + \mathbf{0} \cdot A^2 + |A|^2 A + |A|^2 \partial_{\mathbf{X}} A + A^2 \partial_{\mathbf{X}} \bar{A} + |A|^4 A \quad (1.7)$$

als Amplitudengleichung führt (siehe Abschnitt 2.2).

In Kapitel 3 zeigen wir, dass sich jede Lösung der Ordnung $O(\varepsilon^{1/2})$ des Originalsystems so entwickelt, dass sie nach einer Zeit $O(1/\varepsilon^2)$ durch die verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichung beschrieben werden kann. Der nichtdegenerierte Fall wurde in [14, 35] behandelt, an welchem wir uns orientieren. Eine zusätzliche Schwierigkeit in unserem Fall ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass sich die lange Zeitskala $O(1/\varepsilon^2)$ erneut nur über die Konzentration der Moden erreichen läßt, um so die Degeneriertheit der Nichtlinearität an den Wellenzahlen $k = \pm 1$ auszunutzen. Diese Konzentration wiederum müssen wir zum Nachweis des Attraktivitätssatzes aber eigentlich erst zeigen. Im nichtdegenerierten Fall ist die Konzentration nicht notwendig. Zur Beseitigung dieses Dilemmas führen wir eine zeitabhängige Norm ein.

Aus der Gültigkeit des Approximationssatzes folgt, dass sich die Dynamik der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung im Originalsystem näherungsweise wiederfindet. Die verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichung besitzt neben stabilen periodischen Lösungen auch Front- und Pulslösungen [20, 45]. In [38] wurde gezeigt, dass sich spezielle dieser Lösungen im Originalsystem für alle Zeiten wiederfinden.

Unsere Untersuchungen führen wir im Fourierraum durch. Dabei benutzen wir die Funktionenräume $L^1(m)$ und $L^1(m, \varepsilon, k_0)$, deren Normen folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{L^1(m)} &:= \int |\hat{u}(k)| (1 + |k|)^m dk, \\ \|\hat{u}\|_{L^1(m, \varepsilon, k_0)} &:= \int |\hat{u}(k)| \left(1 + \left|\frac{k - k_0}{\varepsilon}\right|\right)^m dk. \end{aligned}$$

Die Vorteile dieser Funktionenräume liegen in der Abgeschlossenheit gegenüber Faltungen sowie in der Tatsache, dass eine Skalierung keinen Einfluss auf die Norm hat. Außerdem folgt aus $\hat{u} \in L^1(m)$, dass $u \in C_b^m$ mit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0$

gilt, d.h. u liegt auch im Raum der m -mal gleichmäßig stetig differenzierbaren Funktionen.

Bezeichnung: Alle Konstanten werden einheitlich mit C bezeichnet, falls sie unabhängig vom kleinen Störungsparameter $0 \leq \varepsilon \ll 1$ gewählt werden können.

2 Der Approximationsatz

In diesem Kapitel wird für ein Modell einer Kombination der Swift-Hohenberg-Gleichung mit der Kuramoto-Shivashinsky-Gleichung, das somit sowohl eine kubische als auch eine quadratische Nichtlinearität enthält, eine verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichung hergeleitet. Hintergrund des dabei zugrundeliegenden Ginzburg-Landau-Approximationsverfahrens ist die Tatsache, dass im Fall von parabolischen Gleichungen die sich in der Nähe einer Instabilität verzweigenden Lösungen näherungsweise durch Modulationsgleichungen beschrieben werden können.

2.1 Lineare Stabilitätsanalyse der trivialen Lösung

Als Lösung von

$$\partial_t u = -(1 + \partial_x^2)^2 u + \alpha u - \beta u \partial_x u - \gamma u^3$$

mit $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ und Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ erkennt man sofort die triviale Lösung $u = 0$, die als Gleichgewichtslösung bzw. stationäre Lösung stets Lösung dieser nichtlinearen Differentialgleichung ist. Zur Untersuchung der Stabilität von $u = 0$ wird für die linearisierte Gleichung

$$\partial_t u = -(1 + \partial_x^2)^2 u + \alpha u =: L_\alpha u \tag{2.1}$$

eine Eigenwertbetrachtung durchgeführt, d.h. man untersucht die Eigenwertgleichung $L_\alpha u = \lambda_\alpha u$ mit $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$. $u(x, t) \equiv 0$ ist eine stabile Lösung von (2.1), wenn alle Eigenwerte λ_α von L_α echt negativen Realteil besitzen.

Macht man den Ansatz $u(x, t) = e^{ikx} \hat{u}_k(t)$ für $k \in \mathbb{R}$, so ergibt sich

$$L_\alpha u = -(1 + 2\partial_x^2 + \partial_x^4 + \alpha)u = (-1 + 2k^2 - k^4 + \alpha)u = \lambda_{k,\alpha} u,$$

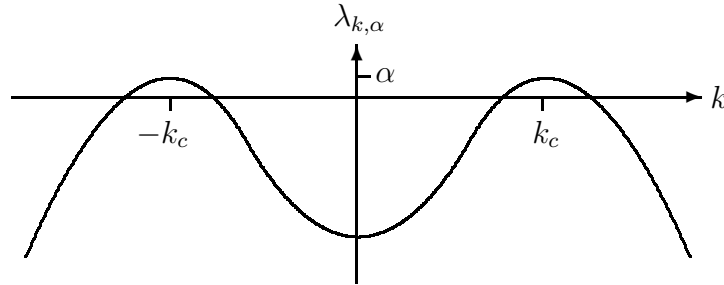


Abbildung 2.1: Eigenwert $\lambda_{k,\alpha}$ in Abhängigkeit der Wellenzahl k im Fall $\alpha \neq 0$.

so dass man für den dazugehörigen Eigenwert $\lambda_{k,\alpha}$ abliest:

$$\lambda_{k,\alpha} = -k^4 + 2k^2 + (\alpha - 1) = -(k^2 - 1)^2 + \alpha. \quad (2.2)$$

Demnach liegt im Fall $\alpha < 0$ Stabilität vor. Bei $\alpha = 0$ ist $\lambda_{\pm 1,0} = 0$, während für $\alpha > 0$ der entsprechende Eigenwert jeweils in einer ganzen Umgebung von Wellenzahlen k der kritischen Wellenzahlen $k_c = \pm 1$ positiven Realteil besitzt (siehe Abb. 2.1).

Lösungen der linearisierten Gleichung (2.1) sind damit durch

$$u(x, t) = e^{\lambda_{k,\alpha} t} e^{ikx},$$

gegeben, d.h. für $\alpha < 0$ strebt u für $t \rightarrow \infty$ mit einer exponentiellen Rate gegen 0 (Dämpfung). Im Fall $\alpha > 0$, aber klein, ist es naheliegend anzunehmen, dass es aufgrund der parabolischen Form von λ an den kritischen Wellenzahlen $k_c = \pm 1$ Lösungen in Form von langsamen zeitlichen und räumlichen Modulationen der kritischen Moden $e^{\pm ix}$ gibt.

2.2 Herleitung der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung

Aus diesem Grund wird für (1.2) der Ansatz

$$\phi(x, t) = \varepsilon A_0(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) + \varepsilon^{1/2} A_1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{ix} + \varepsilon A_2(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i2x} + \varepsilon^{3/2} A_3(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i3x} + c.c. \quad (2.3)$$

mit $\alpha = \varepsilon^2 > 0$ gemacht, wobei *c.c.* das komplex Konjugierte des davorstehenden Ausdrucks bezeichnet, was auf eine Gleichung vom Ginzburg-Landau-Typ führt. Die Wahl des Ansatzes erfolgt dabei so, dass dieser der Degeneriertheitsforderung (1.3) an die Gleichung bereits Rechnung trägt, d.h. vor $A_1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t)$ muss statt ε der Faktor $\varepsilon^{1/2}$ stehen. Im folgenden wird außerdem durch Setzen von

$$X := \varepsilon x \quad \text{und} \quad T := \varepsilon^2 t$$

eine Umskalierung sowohl des Ortes als auch der Zeit vorgenommen. Man nennt dies auch die natürliche Zeitskala, da ε^2 gerade der maximale Wert ist, den $\lambda_{k,\alpha}$ annimmt, und somit ein $O(1)$ -Anwachsen auf einer $O(1/\varepsilon^2)$ -Zeitskala passiert. Analog ist für $0 < \varepsilon \ll 1$ der Abstand der beiden Nullstellen von $\lambda_{k,\alpha}$ in der Nähe einer der kritischen Wellenzahlen von der Größenordnung $O(\varepsilon)$ (siehe Abb. 2.1). Für die partiellen Ableitungen bezüglich dieser neuen Variablen bedeutet das: $\partial_x = \varepsilon \partial_X$ und $\partial_t = \varepsilon^2 \partial_T$. Geht man nun unter Berücksichtigung der Umskalierung mit dem Ansatz (2.3) in die KSSH-Gleichung (1.2) ein, so erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{5/2} e^{ix} \partial_T A_1 + c.c. &= -\varepsilon A_0 \\ &+ \varepsilon^{3/2} e^{ix} \left(-i\beta(A_1 A_0 + A_2 \bar{A}_1) - 3\gamma A_1^2 \bar{A}_1 \right) \\ &+ \varepsilon^{5/2} e^{ix} (A_1 + 4\partial_X^2 A_1 - 3\gamma A_3 \bar{A}_1^2) \\ &- \varepsilon^{5/2} e^{ix} \beta \left(A_1 \partial_X A_0 + A_0 \partial_X A_1 + A_2 \partial_X \bar{A}_1 + \bar{A}_1 \partial_X A_2 + iA_3 \bar{A}_2 \right) \\ &+ \varepsilon e^{2ix} \left(-9A_2 - i\beta A_1^2 \right) \\ &+ \varepsilon^{3/2} e^{3ix} \left(-64A_3 - 3i\beta A_1 A_2 - \gamma A_1^3 \right) \\ &+ c.c. + h.o.t. , \end{aligned}$$

wobei *h.o.t.* hier für alle Terme steht, die an den entsprechenden Stellen von

höherer Ordnung in ε sind.

Vergleicht man die Koeffizienten, die jeweils vor εe^{0ix} , εe^{2ix} und $\varepsilon^{3/2} e^{3ix}$ stehen, erkennt man, dass für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgende Beziehungen gelten müssen:

- $A_0 = 0$,
- $-9A_2 - i\beta A_1^2 = 0 \iff A_2 = -i\beta \frac{A_1^2}{9}$,
- $-64A_3 - 3i\beta A_1 A_2 - \gamma A_1^3 = 0 \iff A_3 = \frac{-3i\beta A_1 A_2 - \gamma A_1^3}{64}$,
- $\partial_T A_1 = A_1 + 4\partial_X^2 A_1 - 3\gamma A_3 \bar{A}_1^2 - \beta (A_1 \partial_X A_0 + A_0 \partial_X A_1 + A_2 \partial_X \bar{A}_1 + \bar{A}_1 \partial_X A_2 + iA_3 \bar{A}_2)$. (2.4)

Setzt man die ersten drei Gleichungen in die vierte ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung der zu Anfang geforderten Degeneriertheit

$$3\gamma + \frac{\beta^2}{9} = \varepsilon c_3 \quad (c_3 \in \mathbb{R})$$

die verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A_1 = A_1 + 4\partial_X^2 A_1 - c_3 A_1^2 \bar{A}_1 + c_2 (A_1^2 \partial_X \bar{A}_1 + 2|A_1|^2 \partial_X A_1) + c_1 |A_1|^4 A_1 \quad (2.5)$$

mit

$$c_1 = -\frac{\beta^2 + 3\gamma}{576} \beta^2 + \frac{\gamma}{64} (\beta^2 + 3\gamma) \quad , \quad c_2 = \frac{i\beta^2}{9} \quad , \quad c_3 = \varepsilon^{-1} \left(3\gamma + \frac{\beta^2}{9} \right) .$$

Unter Annahme unseres Ansatzes (2.3) stellen die Lösungen dieser Gleichung somit eine Approximation der Lösungen der ursprünglichen Gleichung (1.2) vom Swift-Hohenberg-Typ dar.

Im folgenden gehen wir nun der Frage nach der Güte dieser Approximation nach. Nur beim Nachweis eines Approximationssatzes ist sichergestellt, dass sowohl die Lösungen der ursprünglichen KSSH-Gleichung als auch die der Ginzburg-Landau-Gleichung annähernd identisches Verhalten haben. Wir untersuchen also die Approximationseigenschaften der Näherungslösung ϕ für den Fall, dass A_1 Lösung der Ginzburg-Landau-Gleichung (2.5) ist.

Vernachlässigt man die Terme mit höherer ε -Ordnung in (1.4), so reduziert sich die letztendlich zu untersuchende Näherungslösung auf folgenden Ausdruck:

$$\varepsilon^{1/2} A_1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{ix} + c.c. . \quad (2.6)$$

Bemerkung 2.1 Liegt bei einer Ginzburg-Landau-Gleichung Reflexionssymmetrie vor, so ist nur ein einziger weiterer Parameter notwendig, um die verallgemeinerte Gleichung zu erhalten. Wenn beispielsweise eine skalarwertige partielle Differentialgleichung auf der reellen Achse invariant bezüglich der Symmetrie $(x, u) \mapsto (-x, u)$ ist, dann muss die zugehörige Ginzburg-Landau-Gleichung invariant unter der Transformation $(X, U) \mapsto (-X, \bar{A})$ sein, d.h. mit $A(X)$ ist gleichzeitig auch $\bar{A}(-X)$ eine Lösung der Ginzburg-Landau-Gleichung. Setzt man $\bar{A}(-X)$ in die verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichung ein, erhält man

$$\partial_T \bar{A} = \alpha_0 \bar{A} + \alpha_1 \partial_X^2 \bar{A} + \alpha_2 |\bar{A}|^2 \bar{A} - \alpha_3 |\bar{A}|^2 \partial_X \bar{A} - \alpha_4 \bar{A}^2 \partial_X A + \alpha_5 |\bar{A}|^4 \bar{A}.$$

Der Vergleich mit der komplexkonjugierten Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T \bar{A} = \bar{\alpha}_0 \bar{A} + \bar{\alpha}_1 \partial_X^2 \bar{A} + \bar{\alpha}_2 |\bar{A}|^2 \bar{A} + \bar{\alpha}_3 |\bar{A}|^2 \partial_X \bar{A} + \bar{\alpha}_4 \bar{A}^2 \partial_X A + \bar{\alpha}_5 |\bar{A}|^4 \bar{A}$$

zeigt $\alpha_j = \bar{\alpha}_j$ für $j = 0, 1, 2, 5$ und $c_j = -\bar{c}_j$ für $j = 3, 4$, was gleichbedeutend ist mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \in \mathbb{R}$ und $\alpha_3, \alpha_4 \in i\mathbb{R}$. Im Fall der Symmetrie $(x, u) \mapsto (-x, -u)$ folgt für die Ginzburg-Landau-Gleichung die Symmetrie $(X, A) \mapsto (-X, -\bar{A})$, was für die Koeffizienten α_j auf dasselbe Ergebnis wie oben führt. Genau diese Situation liegt bei unserem KSSH-Modell vor.

Bemerkung 2.2 Unser Modell (1.2) ist das einfachste musterbildende System, das diese Art der Degeneriertheit (1.3) zeigt. In physikalischen Systemen findet sie sich nur nach Einführung zweier zusätzlicher reeller Parameter für den Real- und Imaginärteil des Koeffizienten vor dem kubischen Term der Ginzburg-Landau-Gleichung. Es gibt eine Reihe von physikalischen Systemen, bei denen wenigstens der Realteil dieses Koeffizienten mit dem Bifurkationsparameter zusammen verschwindet [15, 41].

2.3 Die Approximationseigenschaft

Diese Eigenschaft formulieren wir im folgenden Approximationssatz, der im Anschluss bewiesen wird.

Satz 2.3 (Approximationssatz) Sei $m \geq 1$. Für alle $T_0 > 0$ und alle $C_1 > 0$ existieren Konstanten $\varepsilon_0 > 0$ und $C_2 > 0$, so dass für alle Lösungen $A_1 = A_1(X, T)$ von (2.5), deren Fouriertransformierte $\hat{A}_1(K, T)$ die Ungleichung

$$\sup_{T \in [0, T_0]} \int |\hat{A}_1(K, T)|(1 + |K|)^{m+4} dk \leq C_1 \quad (2.7)$$

erfüllen, folgendes gilt: Für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ existieren Lösungen u von (1.2) mit

$$\max_{j=0, \dots, m} \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \partial_x^j \left(u(x, t) - (\varepsilon^{1/2} A_1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{ix} + c.c.) \right) \right| \leq C_2 \varepsilon.$$

Bemerkung 2.4 Die Voraussetzung (2.7) impliziert

$$\sup_{T \in [0, T_0]} \|A_1(\cdot, T)\|_{C_b^{m+4}} \leq C_1 \quad \text{mit} \quad A_1 \in C([0, T_0], C_b^{m+4}(\mathbb{R}, \mathbb{C})) \quad (2.8)$$

aber nicht umgekehrt, da aus (2.7) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} A_1(X, T) = 0$ folgt. Die Approximationseigenschaft gilt jedoch auch bereits unter der schwächeren Voraussetzung

(2.8), allerdings ist der funktionalanalytische Aufwand für diesen Nachweis erheblich größer, wie man in [33, 34] sehen kann. Die zugrundeliegende Hauptidee kann wesentlich einfacher erläutert werden, indem man L^1 -Räume im Fourierraum betrachtet.

Als eine Konsequenz kann die für (1.1) bekannte Dynamik [12, 20, 45] auch für unser musterbildendes System (1.2) gefunden werden. Dabei ist der Fehler von der Ordnung $O(\varepsilon)$ viel kleiner als die Approximation und die Lösung selbst, die beide jeweils die Größenordnung $O(\varepsilon^{1/2})$ für alle $T \in [0, T_0]$ bzw. $t \in [0, T_0/\varepsilon^2]$ haben.

2.4 Die Beweisidee

Allgemein betrachtet, haben wir es mit dem abstrakten Evolutionssystem

$$\partial_t U = \Lambda U + B(U, U) + C(U, U, U)$$

zu tun, wobei Λ ein linearer, B ein bilinearer symmetrischer und C ein trilinear symmetrischer Operator ist. Die Lösung U können wir in eine Näherungslösung $\varepsilon^{1/2}\varphi$ und in einen Fehler $\varepsilon^\beta R$ aufspalten, d.h. es gilt $U = \varepsilon^{1/2}\varphi + \varepsilon^\beta R$ mit $\beta > 1$. Der Fehler R erfüllt dann die Gleichung

$$\partial_t R = \Lambda R + 2\varepsilon^{1/2}B(\varphi, R) + O(\varepsilon).$$

Wenn wir nun zeigen, dass R auf dem Zeitintervall $[0, T_0/\varepsilon^2]$ $O(1)$ -beschränkt ist, ist der Approximationssatz bewiesen. Wegen der auftretenden $O(\varepsilon^{1/2})$ -Terme ist dies jedoch kein triviales Problem: Einfaches Anwenden der Gronwallschen Ungleichung würde uns nur auf einer Zeitskala $O(1/\varepsilon^{1/2})$ eine Aussage liefern. Wir müssen daher zunächst eine Aufteilung der Lösung U (bzw. \hat{U} im Fourierraum) in Moden vornehmen, was allein jedoch noch nicht ausreicht, da es uns nur bis zu einer Zeitskala $O(1/\varepsilon)$ führt. Erst nach Durchführung einer geeigneten Variablentransformation kann schließlich mit Hilfe der Degeneriertheitsbedingung (1.3) die Beschränktheit von R auf einer Zeitskala $O(1/\varepsilon^2)$ gezeigt werden.

Bemerkung 2.5 Die Hauptschwierigkeit beim Beweis des Approximationssatzes rührt von der langen Zeitskala $O(1/\varepsilon^2)$ her. Die Verwendung der Modenfilter,

die sich bei der klassischen Ginzburg-Landau-Gleichung als erfolgreiches Werkzeug erwiesen haben, würde in unserem Fall nur zu einer Abschätzung auf einer $O(1/\varepsilon)$ -Zeitskala führen und die quadratische Kopplung der kritischen Moden $e^{\pm ix}$ zu den gedämpften Moden e^{0x} und $e^{\pm i2x}$ zeigen. Erst mit Hilfe der Degeneriertheitsbedingung (1.3) gelingt es, den fehlenden Faktor $1/\varepsilon$ zu gewinnen, d.h. die kubischen Terme in der Ginzburg-Landau-Gleichung werden damit mit einem zusätzlichen ε versehen oder besitzen wenigstens eine Ableitung. In den skalierten Variablen bedeuten Ableitungen formal das Hinzukommen von weiteren ε -Potenzen, da ja $\partial_x = \varepsilon \partial_X$. Um dieses ε ausnutzen zu können, müssen wir Regularität aufgeben, d.h. $\|\partial_x A(\varepsilon \cdot)\|_{C_b^0} \leq \varepsilon \|\partial_X A(\cdot)\|_{C_b^0} \leq \varepsilon \|A(\cdot)\|_{C_b^1}$. Dies stellt jedoch nicht wirklich eine Einschränkung dar, da wir mit Hilfe der linearen Halbgruppe $(e^{\alpha_1 \partial_x^2 t})_{t \geq 0}$ der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung diese Regularität zurückgewinnen.

Darüber hinaus muss auch noch die Konzentration der kritischen Fouriermoden bei $k = \pm 1$ verwendet werden. Dieser entscheidende Schritt fehlt im Beweis von [41].

2.5 Die Modenaufteilung

Zunächst schreiben wir die Ausgangsgleichung (1.2) mit $\eta := -\frac{\beta}{2}$ und $\gamma_1 := -\gamma$ in folgender Form:

$$\partial_t u = -\left(1 + \partial_x^2\right)^2 u + \varepsilon^2 u + \eta \partial_x(u^2) + \gamma_1 u^3. \quad (2.9)$$

Die weitere Untersuchung erfolgt nun im Fourierraum, wo (2.9) die Darstellung

$$\partial_t \hat{u} = \lambda \hat{u} + \rho \hat{u} * \hat{u} + \gamma_1 \hat{u} * \hat{u} * \hat{u} \quad (2.10)$$

hat, mit $\hat{u} = \hat{u}(k, t)$, $\lambda = \lambda(k) := -(1 + k^2)^2 + \varepsilon^2$ und $\rho = \rho(k) := 2i\eta k$.

Die Moden \hat{u}_m bei ganzzahligen k -Werten, d.h. $k = m \in \mathbb{Z}$, lassen sich mit Hilfe der Trägerfunktion

$$\chi(k) := \begin{cases} 1, & |k| < \delta, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.11)$$

ausgehend von

$$\varepsilon^{1/2} \hat{v}_1(k) = \hat{u}(k) \chi(k-1)$$

und

$$\varepsilon^{1/2} \hat{v}_{-1}(k) = \hat{u}(k) \chi(k+1)$$

folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 \hat{v}_0(k) &= \hat{u}(k) \chi\left(\frac{1}{2}k\right), \\ \varepsilon^1 \hat{v}_2(k) &= \hat{u}(k) \chi\left(\frac{1}{2}(k-2)\right), \\ \varepsilon^{3/2} \hat{v}_3(k) &= \hat{u}(k) \chi\left(\frac{1}{3}(k-3)\right), \\ \varepsilon^2 \hat{v}_4(k) &= \hat{u}(k) \chi\left(\frac{1}{4}(k-4)\right), \\ \varepsilon^1 \hat{v}_{-2}(k) &= \hat{u}(k) \chi\left(\frac{1}{2}(k+2)\right), \\ \varepsilon^{3/2} \hat{v}_{-3}(k) &= \hat{u}(k) \chi\left(\frac{1}{3}(k+3)\right), \\ \varepsilon^2 \hat{v}_{-4}(k) &= \hat{u}(k) \chi\left(\frac{1}{4}(k+4)\right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dabei ist $\delta > 0$ eine feste kleine Zahl, die unabhängig von ε gewählt wird.

Nimmt man auch noch die Kopplung zwischen \hat{v}_0 und \hat{v}_1 bzw. \hat{v}_{-1} , \hat{v}_{-1} und \hat{v}_2 sowie \hat{v}_{-2} und \hat{v}_1 hinzu, erhält man die im weiteren nicht zu vernachlässigenden Moden

$$\begin{aligned} \varepsilon^{3/2} \hat{v}_{1n}(k) &= \hat{u}(k) \left(\chi\left(\frac{1}{3}(k-1)\right) - \chi(k-1) \right), \\ \varepsilon^{3/2} \hat{v}_{-1n}(k) &= \hat{u}(k) \left(\chi\left(\frac{1}{3}(k+1)\right) - \chi(k+1) \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Die Berücksichtigung der Kopplung von \hat{v}_{1n} mit \hat{v}_{-1} und umgekehrt sowie von \hat{v}_2 mit \hat{v}_{-2} liefert weitere Beiträge bei $k = 0$, die man in \hat{v}_{0n} zusammenfasst. Analog koppeln \hat{v}_1 und \hat{v}_{1n} bzw. \hat{v}_{-1} und \hat{v}_{-1n} zu zusätzlichen Beiträgen bei $k = 2$ bzw. $k = -2$, was zusammen schließlich die folgenden drei weiteren Moden ergibt:

$$\varepsilon^2 \hat{v}_{0n}(k) = \hat{u}(k) \left(\chi\left(\frac{1}{4}k\right) - \chi\left(\frac{1}{2}k\right) \right),$$

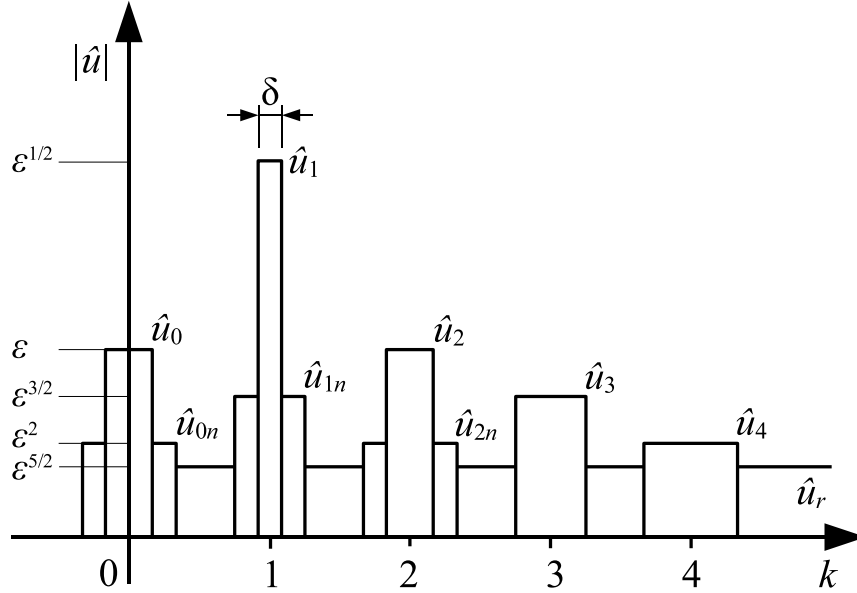


Abbildung 2.2: Graphische Veranschaulichung der Moden im Fourierraum, wobei wir uns auf die Darstellung des Bereiches $0 \leq k \leq 4$ beschränken (s.a. Bem. 2.6 u. 2.7).

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \hat{v}_{2n}(k) &= \hat{u}(k) \left(\chi\left(\frac{1}{4}(k-2)\right) - \chi\left(\frac{1}{2}(k-2)\right) \right) \quad \text{und} \quad (2.14) \\ \varepsilon^2 \hat{v}_{-2n}(k) &= \hat{u}(k) \left(\chi\left(\frac{1}{4}(k+2)\right) - \chi\left(\frac{1}{2}(k+2)\right) \right). \end{aligned}$$

In (2.12), (2.13) und (2.14) sind somit die Beiträge bis zur Ordnung ε^2 berücksichtigt. Alle übrigen Moden, die sich im Ausdruck

$$\begin{aligned} \varepsilon^{5/2} \hat{u}_r &= \hat{u} - \varepsilon^2 \hat{v}_{0n} - \varepsilon^{3/2} \hat{v}_{1n} - \varepsilon^{3/2} \hat{v}_{-1n} - \varepsilon^2 \hat{v}_{2n} - \varepsilon^2 \hat{v}_{-2n} - \varepsilon^{1/2} \hat{v}_1 - \varepsilon^{1/2} \hat{v}_{-1} \\ &\quad - \varepsilon \hat{v}_0 - \varepsilon \hat{v}_2 - \varepsilon \hat{v}_{-2} - \varepsilon^{3/2} \hat{v}_3 - \varepsilon^{3/2} \hat{v}_{-3} - \varepsilon^2 \hat{v}_4 - \varepsilon^2 \hat{v}_{-4} \end{aligned}$$

zusammenfassen lassen, sind mindestens von der Ordnung $O(\varepsilon^{5/2})$ und haben in den folgenden Überlegungen bereits eine Größe, um sie mittels einer einfachen Anwendung der Gronwallschen Ungleichung abschätzen zu können.

Eine anschauliche graphische Darstellung der einzelnen Moden ist in Abb. 2.2 zu sehen, wo die im k -Bereich zwischen 0 und 4 liegenden Moden aufgetragen sind. Da die im x -Raum vorliegenden Multiplikationen der Funktionen u im

k -Raum Faltungen der entsprechenden Fouriertransformierten \hat{u} dieser Funktionen bedeuten, kommt es zu einer Verbreiterung der Moden. Genauer gesagt, addieren sich die Breiten der einzelnen Träger dieser Funktionen im Fourierraum. In den Gleichungen erkennt man dies am Argument der Trägerfunktion χ : Bei $\chi(\frac{1}{p}(k - k_0))$ handelt es sich um ein Rechteck der Höhe 1 und der Breite $p\delta$, das symmetrisch über k_0 liegt (vgl. Definition von χ in Gleichung (2.11)). Es liegt also eine Verbreiterung um den Faktor p vor. Darüber hinaus addieren sich bei der Faltung auch die ε -Ordnungen der Ausgangsmoden des Produkts, so dass der Beitrag des Faltungsprodukts immer geringer ist als der der einzelnen Faktoren.

Bemerkung 2.6 Aufgrund der Symmetrie der Modenverteilung, d.h. wegen $\hat{u}_k = \hat{u}_{-k}^*$, sieht das Bild für den negativen k -Bereich völlig analog aus, und es ist möglich, die weiteren Betrachtungen auf die Moden mit $k \geq 0$ zu beschränken. Die dabei gefundenen Ergebnisse können dann problemlos auf den negativen k -Bereich übertragen werden.

Bemerkung 2.7 Sämtliche Abbildungen von Modenverteilungen in dieser Arbeit sind so zu verstehen, dass die L^1 -Norm der jeweiligen Moden aufgetragen ist. Im Fall von \hat{u}_1 in Abb. 2.2 bedeutet dies beispielsweise, dass die L^1 -Norm von der Ordnung $O(\varepsilon^{1/2})$ ist.

Einsetzen von (2.12) in Gleichung (2.10) bei Darstellung nur derjenigen Beiträge, die ε -unabhängig oder von der Ordnung $\varepsilon^{3/2}$ in der Gleichung für \hat{v}_1 sind, liefert nach Division durch die jeweilige ε -Potenz vor der Zeitableitung auf der linken Seite das folgende Differentialgleichungssystem für die einzelnen Moden:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{v}_0 &= \lambda \hat{v}_0 + 2\rho (\hat{v}_1 * \hat{v}_{-1}) \chi_0 + H_0, \\ \partial_t \hat{v}_{0n} &= \lambda \hat{v}_{0n} + 2\rho (\hat{v}_2 * \hat{v}_{-2}) \chi_{0n} + 6\gamma_1 (\hat{v}_0 * \hat{v}_1 * \hat{v}_{-1}) \chi_{0n} + H_{0n}, \\ \partial_t \hat{v}_1 &= \lambda \hat{v}_1 + 3\gamma_1 \varepsilon (\hat{v}_1 * \hat{v}_1 * \hat{v}_{-1}) \chi_1 + 2\rho \varepsilon (\hat{v}_1 * \hat{v}_0 + \hat{v}_{-1} * \hat{v}_2) \chi_1 + H_1, \\ \partial_t \hat{v}_{1n} &= \lambda \hat{v}_{1n} + 2\rho (\hat{v}_1 * \hat{v}_0 + \hat{v}_{-1} * \hat{v}_2) \chi_{1n} + 3\gamma_1 (\hat{v}_1 * \hat{v}_1 * \hat{v}_{-1}) \chi_{1n} + H_{1n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \hat{v}_2 &= \lambda \hat{v}_2 + \rho(\hat{v}_1 * \hat{v}_1) \chi_2 + H_2, \\
\partial_t \hat{v}_{2n} &= \lambda \hat{v}_{2n} + 2\rho(\hat{v}_2 * \hat{v}_0 + \hat{v}_3 * \hat{v}_{-1}) \chi_{2n} + 3\gamma_1(\hat{v}_1 * \hat{v}_1 * \hat{v}_0) \chi_{2n} + H_{2n}, \\
\partial_t \hat{v}_3 &= \lambda \hat{v}_3 + \gamma_1(\hat{v}_1 * \hat{v}_1 * \hat{v}_1) \chi_3 + 2\rho(\hat{v}_1 * \hat{v}_2) \chi_3 + H_3, \\
\partial_t \hat{v}_4 &= \lambda \hat{v}_4 + \rho(\hat{v}_2 * \hat{v}_2) \chi_4 + 3\gamma_1(\hat{v}_1 * \hat{v}_1 * \hat{v}_2) \chi_4 + H_4, \\
\partial_t \hat{v}_r &= \lambda \hat{v}_r + 2\rho(\hat{v}_2 * \hat{v}_3 + \hat{v}_1 * \hat{v}_4) + 3\gamma_1(\hat{v}_1 * \hat{v}_1 * \hat{v}_3 + \hat{v}_2 * \hat{v}_2 * \hat{v}_1) + H_r.
\end{aligned}$$

Für $\hat{v}_{-1}, \hat{v}_{-1n}, \hat{v}_{-2}, \hat{v}_{-2n}, \hat{v}_{-3}$ und \hat{v}_{-4} gelten entsprechende Gleichungen. Die verwendeten Abkürzungen χ_m , $m \in \mathbb{Z}$, sind – basierend auf der Vereinbarung in (2.11) – folgendermaßen definiert:

$$\chi_m(k) := \begin{cases} \chi\left(\frac{1}{m}(k-m)\right), & |m| \in \mathbb{N}, \\ \chi\left(\frac{1}{2}k\right), & m = 0. \end{cases}$$

Für die restlichen oben benutzten, aber bislang noch nicht definierten Trägerfunktionen $\chi_{\dots n}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\chi_{0n}(k) &:= \chi\left(\frac{1}{4}k\right) - \chi\left(\frac{1}{2}k\right), \\
\chi_{\pm 1n}(k) &:= \chi\left(\frac{1}{3}(k \mp 1)\right) - \chi(k \mp 1), \\
\chi_{\pm 2n}(k) &:= \chi\left(\frac{1}{4}(k \mp 2)\right) - \chi\left(\frac{1}{2}(k \mp 2)\right).
\end{aligned}$$

Die Summanden H_{\dots} stehen für die Terme mit höherer ε -Ordnung. Definiert man

$$\begin{aligned}
\hat{v}_s &:= (\hat{v}_0, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4, \hat{v}_{0n}, \hat{v}_{1n}, \hat{v}_{2n}, \hat{v}_r), \\
H_s &:= (H_0, H_2, H_3, H_4, H_{0n}, H_{1n}, H_{2n}, H_r)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

und daraus abgeleitet

$$\begin{aligned}
\|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} &:= \|\hat{v}_0\|_{L^1(m)} + \|\hat{v}_2\|_{L^1(m)} + \|\hat{v}_3\|_{L^1(m)} + \|\hat{v}_4\|_{L^1(m)} + \|\hat{v}_{0n}\|_{L^1(m)} \\
&\quad + \|\hat{v}_{1n}\|_{L^1(m)} + \|\hat{v}_{2n}\|_{L^1(m)} + \|\hat{v}_r\|_{L^1(m)}, \\
\|H_s\|_{L^1(m)} &:= \|H_0\|_{L^1(m)} + \|H_2\|_{L^1(m)} + \|H_3\|_{L^1(m)} + \|H_4\|_{L^1(m)} + \|H_{0n}\|_{L^1(m)} \\
&\quad + \|H_{1n}\|_{L^1(m)} + \|H_{2n}\|_{L^1(m)} + \|H_r\|_{L^1(m)},
\end{aligned}$$

dann gilt für diese Terme:

$$\begin{aligned} \|H_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} &\leq C\varepsilon^2 \left(\|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} \right), \\ \|H_s\|_{L^1(m-1)} &\leq C\varepsilon \left(\|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} \right) \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung, dass die Ungleichung

$$\|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} \leq C_v$$

mit einer beliebigen, aber festen Konstante $C_v > 0$ erfüllt ist. Hierbei haben wir verwendet, dass gilt:

$$\begin{aligned} \|\hat{u} * \hat{v}\|_{L^1(m)} &\leq C \|\hat{u}\|_{L^1(m)} \|\hat{v}\|_{L^1(m)}, \\ \|\hat{u} * \hat{v}\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} &\leq C \|\hat{u}\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \|\hat{v}\|_{L^1(0,\varepsilon,1)}, \\ \|\hat{u}\chi\|_{L^1(m)} &\leq C \|\hat{u}\chi\|_{L^1(0,\varepsilon,1)}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Die zu betrachtenden Funktionenräume sind der $L^1(m)$ - und der $L^1(0,\varepsilon,k_0)$ -Raum, deren Normen folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{L^1(m)} &:= \int |\hat{u}(k)| (1 + |k|)^m dk, \\ \|\hat{u}\|_{L^1(m,\varepsilon,k_0)} &:= \int |\hat{u}(k)| \left(1 + \left| \frac{k - k_0}{\varepsilon} \right| \right)^m dk. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Aus $\hat{u} \in L^1(m)$ folgt dann $u \in C_b^m$ mit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0$. Die zweite Norm ermöglicht es schließlich, die Konzentration einer Funktion in einer Umgebung von k_0 analytisch zu fassen. Genauer gesagt: Falls $\hat{u} \in L^1(m,\varepsilon,k_0)$ von der Ordnung $O(1)$ ist, bedeutet dies, dass $u = \varepsilon A(\varepsilon x) e^{ik_0 x}$ mit $A \in C_b^m$ von der Ordnung $O(1)$ ist. D.h. \hat{u} ist in einer $O(\varepsilon)$ -Umgebung von k_0 konzentriert, was gleichbedeutend damit ist, dass u eine langsame räumliche Modulation von $e^{ik_0 x}$ darstellt.

2.6 Die Variablentransformation

Um die erforderliche Fehlerabschätzung aus Satz 2.3 für eine $O(1/\varepsilon^2)$ -Zeitskala beweisen zu können, muss der die Schwierigkeiten verursachende Term $2\rho\varepsilon(\hat{v}_1 * \hat{v}_0 + \hat{v}_{-1} * \hat{v}_2)$ in der Gleichung für \hat{v}_1 beherrscht werden. Mit Hilfe einer Variablentransformation wandeln wir diesen Term in $\varepsilon\tilde{\rho}(\hat{v}_1 * \hat{v}_1 * \hat{v}_{-1})$ mit $|\tilde{\rho}(k)| \leq C(|\varepsilon| + |k - 1|)$ um, d.h. die Degeneriertheit (1.3) kann unmittelbar verwendet werden. Die Variablentransformation hat die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\hat{v}_0 &= -2\lambda^{-1}\chi_{0\rho}\hat{v}_1 * \hat{v}_{-1} + \varepsilon\hat{w}_0, \\ \hat{v}_2 &= -\lambda^{-1}\chi_{2\rho}\hat{v}_1 * \hat{v}_1 + \varepsilon\hat{w}_2,\end{aligned}\tag{2.18}$$

d.h. die Transformation basiert darauf, dass \hat{v}_0 und \hat{v}_2 durch \hat{v}_1 und \hat{v}_{-1} „verklavt“ werden (analog gilt dies natürlich auch für \hat{v}_{-2}). Damit werden die störenden Moden beseitigt und durch die beiden neuen, mit einer zusätzlichen ε -Potenz skalierten Funktionen \hat{w}_0 und \hat{w}_2 ersetzt. Diese liefern in der \hat{v}_1 -Gleichung nur noch solche Beiträge, die für das Erreichen unseres Zieles unproblematisch sind:

$$\begin{aligned}\partial_t\hat{w}_0 &= \lambda\hat{w}_0 + \tilde{H}_0 + \tilde{F}_0, \\ \partial_t\hat{v}_{0n} &= \lambda\hat{v}_{0n} + \tilde{H}_{0n}, \\ \partial_t\hat{v}_1 &= \lambda\hat{v}_1 + \varepsilon G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1}) + \tilde{H}_1, \\ \partial_t\hat{v}_{1n} &= \lambda\hat{v}_{1n} + \tilde{H}_{1n}, \\ \partial_t\hat{v}_{2n} &= \lambda\hat{v}_{2n} + \tilde{H}_{2n}, \\ \partial_t\hat{w}_2 &= \lambda\hat{w}_2 + \tilde{H}_2 + \tilde{F}_2, \\ \partial_t\hat{v}_3 &= \lambda\hat{v}_3 + \tilde{H}_3, \\ \partial_t\hat{v}_4 &= \lambda\hat{v}_4 + \tilde{H}_4, \\ \partial_t\hat{v}_r &= \lambda\hat{v}_r + \tilde{H}_r.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Die Situation nach der Variablentransformation ist in Abbildung 2.3 dargestellt, wobei dort bereits berücksichtigt ist, dass \hat{w}_0 und \hat{v}_{0n} bzw. \hat{w}_2 und \hat{v}_{2n} je-

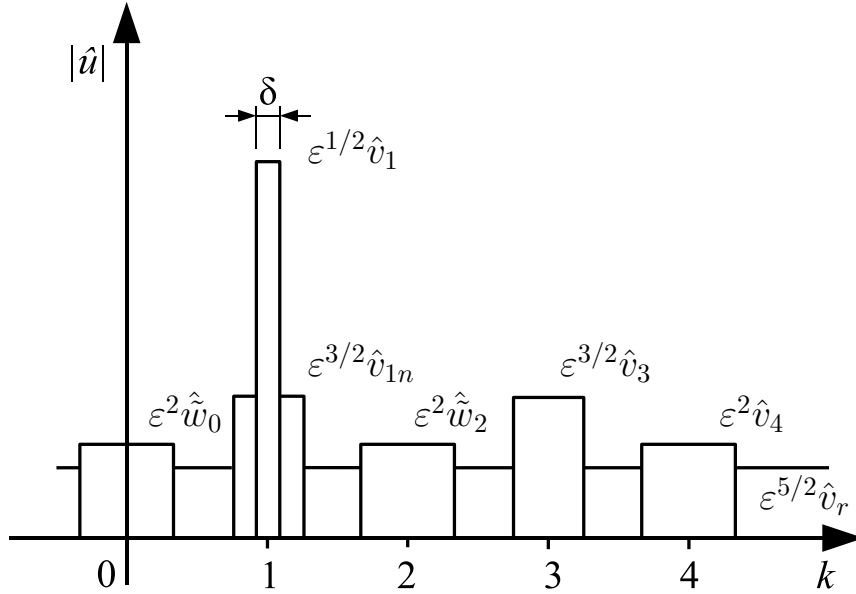


Abbildung 2.3: Die Modenverteilung nach Durchführung der Variablentransformation (s.a. Bem. 2.6 u. 2.7).

weils von der Ordnung $O(\varepsilon^2)$ sind und daher jeweils gemeinsam durch die neuen Variablen \tilde{w}_0 bzw. \tilde{w}_2 ausgedrückt werden können.

Die Terme mit höherer ε -Ordnung werden dabei in den Ausdrücken \tilde{H}_{\dots} zusammengefasst. Für diese gelten mit

$$\|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} \leq C_v,$$

wobei C_v wieder eine beliebige, aber feste Konstante ist, die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\tilde{H}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} &\leq C\varepsilon^2 \left(\|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \varepsilon \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} \right), \\ \|\tilde{H}_s\|_{L^1(m-1)} &\leq C \left(\|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \varepsilon \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} \right), \end{aligned}$$

wobei in Analogie zu (2.15)

$$\tilde{H}_s := (\tilde{H}_0, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3, \tilde{H}_4, \tilde{H}_{0n}, \tilde{H}_{1n}, \tilde{H}_{2n}, \tilde{H}_r)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{H}_s\|_{L^1(m)} &:= \|\tilde{H}_0\|_{L^1(m)} + \|\tilde{H}_2\|_{L^1(m)} + \|\tilde{H}_3\|_{L^1(m)} + \|\tilde{H}_4\|_{L^1(m)} + \|\tilde{H}_{0n}\|_{L^1(m)} + \\ &+ \|\tilde{H}_{1n}\|_{L^1(m)} + \|\tilde{H}_{2n}\|_{L^1(m)} + \|\tilde{H}_r\|_{L^1(m)}, \end{aligned}$$

definiert sind. Dabei sind in \tilde{H}_\dots die bislang durch H_\dots ausgedrückten Terme und die durch die Variablentransformation neu auftretenden Beiträge mit höheren ε -Ordnungen zusammengefasst.

Für H_0 erhalten wir durch die Transformation

$$\begin{aligned} H_0 &= 2\rho\varepsilon\hat{v}_2 * \hat{v}_{-2} + \rho\varepsilon\hat{v}_0 * \hat{v}_0 + O(\varepsilon^2) \\ &= 2\rho\varepsilon(-\lambda^{-1}\chi_2\rho\hat{v}_1 * \hat{v}_1) * (-\lambda^{-1}\chi_2\rho\hat{v}_1 * \hat{v}_{-1}) \\ &\quad + 2\rho\varepsilon(-2\lambda^{-1}\chi_0\rho\hat{v}_1 * \hat{v}_{-1}) * (2\lambda^{-1}\chi_0\rho\hat{v}_1 * \hat{v}_{-1}) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

so dass obige Abschätzung für \tilde{H}_0 richtig ist. (Analoges gilt für \tilde{H}_2 .)

Die auftretenden Zeitableitungen der Variablentransformation sind in \tilde{F}_0 und \tilde{F}_2 zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0 &= \varepsilon^{-1}2\lambda^{-1}\chi_0\rho(\partial_t\hat{v}_1 * \hat{v}_{-1} + \hat{v}_1 * \partial_t\hat{v}_{-1}), \\ \tilde{F}_2 &= \varepsilon^{-1}2\lambda^{-1}\chi_2\rho(\partial_t\hat{v}_1 * \hat{v}_1). \end{aligned}$$

Damit können sämtliche Terme der Ordnung $O(\varepsilon)$ in der Gleichung für \hat{v}_1 durch den zur Verbesserung der Übersichtlichkeit eingeführten Ausdruck $\varepsilon G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1})$, der für das Faltungsprodukt steht, dargestellt werden. Es gilt:

$$G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1})(k) = \iiint g(k, k - \ell, \ell - m, n) \hat{v}_1(k - \ell) \hat{v}_1(\ell - m) \hat{v}_{-1}(n) \, dn \, dm \, d\ell \quad (2.20)$$

mit

$$g(1, 1, 1, -1) = O(\varepsilon).$$

Im x -Raum bedeutet diese Variablentransformation für den Ansatz $u = u(x, t)$:

$$\begin{aligned} u = & \varepsilon^{1/2}v_1e^{ix} + \varepsilon^2w_2e^{2ix} + \varepsilon^{3/2}v_3e^{3ix} + \varepsilon^2v_4e^{4ix} + \\ & + \varepsilon^2w_0 + \varepsilon^{3/2}v_{1n}e^{ix} + \varepsilon^2v_{2n}e^{2ix} + \varepsilon^2v_{0n} + \varepsilon^{5/2}v_r + c.c. \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.7 Abschätzungen des Residuums

Beim Residuum von u handelt es sich um die Terme, die nach dem Einsetzen der Approximation (1.4) in die ursprüngliche Gleichung übrigbleiben. Dementsprechend bedeutet $\text{Res}(u) = 0$, dass u eine Lösung von (1.2) ist. In der Fehlergleichung entspricht das Residuum einer Art Inhomogenität, d.h.

$$\text{Res}(\hat{u}) := -\partial_t \hat{u} + \lambda \hat{u} + \gamma_1 \hat{u} * \hat{u} * \hat{u} + \rho \hat{u} * \hat{u}.$$

Für die Fehlerabschätzung ist es notwendig, das Residuum, das sich auch folgendermaßen aufspalten lässt, klein zu machen:

$$\begin{aligned} \text{Res}_0 &= -\partial_t \hat{w}_0 + \lambda \hat{w}_0 + \tilde{H}_0 + \tilde{F}_0, \\ \text{Res}_1 &= -\partial_t \hat{v}_1 + \lambda \hat{v}_1 + \varepsilon G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1}) + \tilde{H}_1, \\ \text{Res}_{1n} &= -\partial_t \hat{v}_{1n} + \lambda \hat{v}_{1n} + \tilde{H}_{1n}, \\ \text{Res}_2 &= -\partial_t \hat{w}_2 + \lambda \hat{w}_2 + \tilde{H}_2 + \tilde{F}_2, \\ \text{Res}_3 &= -\partial_t \hat{v}_3 + \lambda \hat{v}_3 + \tilde{H}_3, \\ \text{Res}_4 &= -\partial_t \hat{v}_4 + \lambda \hat{v}_4 + \tilde{H}_4, \\ \text{Res}_r &= -\partial_t \hat{v}_r + \lambda \hat{v}_r + \tilde{H}_r. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Um dies zu erreichen, ergänzen wir unsere Approximation ϕ um Terme höherer Ordnung, so dass wir für die Lösung u des transformierten Systems schließlich

den folgenden Ansatz machen:

$$\begin{aligned}
\varphi(x, t) = & (\varepsilon^{1/2} A_1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{ix} + c.c.) \\
& + (\varepsilon^{3/2} A_1^1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{ix} + c.c.) \\
& + \varepsilon^2 A_0(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) + (\varepsilon^2 A_2(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i2x} + c.c.) \\
& + \varepsilon^3 A_0^1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) + (\varepsilon^3 A_2^1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i2x} + c.c.) \\
& + (\varepsilon^{3/2} A_3(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i3x} + c.c.) + (\varepsilon^2 A_4(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i4x} + c.c.) \\
& + (\varepsilon^{5/2} A_3^1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i3x} + c.c.) + (\varepsilon^3 A_4^1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i4x} + c.c.) \\
& + (\varepsilon^{5/2} A_5(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i5x} + c.c.) + (\varepsilon^3 A_6(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i6x} + c.c.) \\
& + (\varepsilon^{7/2} A_5^1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i5x} + c.c.) + (\varepsilon^4 A_6^1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i6x} + c.c.) \\
& + (\varepsilon^{7/2} A_7(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i7x} + c.c.) + (\varepsilon^4 A_8(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{i8x} + c.c.).
\end{aligned}$$

Dabei löst A_1 die verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichung (1.1), während A_1^1 eine Lösung der um A_1 linearisierten verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung mit einer nur von $A_{\pm 1}$ abhängigen Inhomogenität ist. Alle übrigen A_j können als Lösungen von algebraischen Gleichungen wie in (2.4) bestimmt werden (vgl. [41]). Die Approximation ist dann so lange wohldefiniert, wie die Lösung A_1 der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung existiert, denn aufgrund der ε -Unabhängigkeit der Approximationsgleichung sind die restlichen A_j für alle $t \in [0, T_0/\varepsilon^2]$ $O(1)$ -beschränkt.

Wir definieren im folgenden

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{1/2} \hat{\varphi}_1 &= \hat{\varphi} \chi_1, & \varepsilon^{3/2} \hat{\varphi}_{1n} &= \hat{\varphi} \chi_{1n}, & \varepsilon^{3/2} \hat{\varphi}_3 &= \hat{\varphi} \chi_3, \\
\varepsilon^2 \hat{\varphi}_4 &= \hat{\varphi} \chi_4, & \varepsilon^2 \hat{\varphi}_0 &= \hat{\varphi} \chi_0, & \varepsilon^2 \hat{\varphi}_2 &= \hat{\varphi} \chi_2, \\
\varepsilon^2 \hat{\varphi}_{0n} &= \hat{\varphi} \chi_{0n}, & \varepsilon^2 \hat{\varphi}_{2n} &= \hat{\varphi} \chi_{2n}, & \varepsilon^{5/2} \hat{\varphi}_r &= \hat{\varphi} \chi_r,
\end{aligned}$$

wobei die $\hat{\varphi}_j \in L^1(1, \varepsilon, j)$ für alle $t \in [0, T_0/\varepsilon^2]$ von der Größenordnung $O(1)$ sind, so dass das folgende Lemma gilt:

Lemma 2.8 *Für alle $\varepsilon \in (0, 1)$ gibt es eine Konstante $C_{Res} > 0$, so dass*

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|Res_1(t)\|_{L^1(1, \varepsilon, 1)} \leq C_{Res} \varepsilon^4$$

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|Res_s(t)\|_{L^1(m)} \leq C_{Res} \varepsilon^2 \quad (2.23)$$

gilt, wobei wir die Abkürzungen

$$Res_s = (Res_0, Res_2, Res_3, Res_4, Res_{1n}, Res_r)$$

und

$$\begin{aligned} \|Res_s\|_{L^1(m)} &= \|Res_0\|_{L^1(m)} + \|Res_2\|_{L^1(m)} + \|Res_3\|_{L^1(m)} \\ &\quad + \|Res_4\|_{L^1(m)} + \|Res_{1n}\|_{L^1(m)} + \|Res_r\|_{L^1(m)} \end{aligned}$$

verwendet haben.

Beweis:

Dass die ε -Ordnungen formal richtig sind, ist nach der Herleitung der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung klar.

In den gewählten Räumen folgt die Abschätzung nun unter Verwendung der folgenden Ungleichung [32]: Es sei $f(k + \ell) = O(k^s)$ für $k \rightarrow 0$. Dann gilt für $m_A \geq s + m$:

$$\begin{aligned} &\int \left| \varepsilon^{-1} \hat{A} \left(\frac{k - \ell}{\varepsilon} \right) f(k) \right| (1 + |k|)^m dk \quad (2.24) \\ &\leq \|\hat{A}\|_{L^1(m_A)} \sup_k \left| \frac{f(k + \ell)(1 + |k|)^m}{(1 + |k + \ell|)^{m_A}} \right| \leq C \sup_k \left| \frac{k^s (1 + |k + \ell|)^m}{(1 + |\frac{k}{\varepsilon}|)^{m_A}} \right| \\ &\stackrel{k=\varepsilon K}{\leq} C \varepsilon^s \sup_K \left| \frac{K^s (1 + |\varepsilon K + \ell|)^{m-s}}{(1 + |K|)^{m_A}} \right| = O(\varepsilon^s). \end{aligned}$$

Wenn man den obigen Ansatz in das transformierte System einsetzt, fallen eine Reihe von Termen weg, so dass die letzte Abschätzung beispielsweise auf

$$|f(k + 1)| = \left| \lambda(1 + k) + 4k^2 \right| \leq C|k|^3$$

für $|k| \leq 1$ angewendet werden kann.

Für \hat{u}_1 ist die Approximation von der Größenordnung $O(\varepsilon^{1/2})$, während das Residuum bei $k = 1$ durch A_1 die Ordnung $O(\varepsilon^{7/2})$ hat (vgl. Abschnitt 2.2). Einen weiteren Beitrag zum Residuum bei $k = 0$ liefert noch A_1^1 mit der Ordnung $O(\varepsilon^{9/2})$, so dass sich in der Gleichung für \hat{v}_1 die Ordnung $O(\varepsilon^4)$ ergibt. Die Kurve der Eigenwerte λ in der Gleichung für A_1^1 kann nun um $k = 1$ zu $|k - 1|^3$ entwickelt werden, woraus folgt, dass wir aufgrund von (2.24) für die Lösung A der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung die Forderung $A \in C[0, T_0, L^1(m + 4)]$ stellen müssen (vgl. Satz 2.3). Im Fall von \hat{u}_2 ist die Approximation im transformierten System von der Ordnung $O(\varepsilon^2)$, während die Beiträge von A_2 bzw. A_2^1 zum Residuum bei $k = 2$ die Ordnung $O(\varepsilon^3)$ bzw. $O(\varepsilon^4)$ haben, d.h. in der Gleichung für \hat{w}_2 liegt die Ordnung $O(\varepsilon^2)$ vor. Alle übrigen Terme können völlig analog abgeschätzt werden. ■

2.8 Die Fehlerabschätzung

Nach diesen Vorarbeiten kann nun die Fehlerbetrachtung in unserem neuen System (2.15) durchgeführt werden. Um die Fehlergleichungen für die einzelnen Moden zu gewinnen, wählt man in Analogie zum Ansatz (2.3) folgende Ansätze:

$$\begin{aligned}
\hat{v}_1 &= \hat{\varphi}_1 + \varepsilon^2 \hat{R}_1, \\
\hat{v}_{1n} &= \hat{\varphi}_{1n} + \varepsilon^2 \hat{R}_{1n}, \\
\hat{v}_3 &= \hat{\varphi}_3 + \varepsilon^2 \hat{R}_3, \\
\hat{v}_4 &= \hat{\varphi}_4 + \varepsilon^2 \hat{R}_4, \\
\hat{w}_0 &= \hat{\varphi}_0 + \varepsilon^2 \hat{R}_0, \\
\hat{w}_2 &= \hat{\varphi}_2 + \varepsilon^2 \hat{R}_2, \\
\hat{v}_r &= \hat{\varphi}_r + \varepsilon^2 \hat{R}_r,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

wobei in \hat{w}_0 bzw. \hat{w}_2 die Beiträge von \hat{w}_0 und \hat{v}_{0n} bzw. \hat{w}_2 und \hat{v}_{2n} zusammengefasst sind (vgl. Gleichung (2.21)).

Für \hat{v}_1 erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
\partial_t \hat{v}_1 &= \partial_t \hat{\varphi}_1 + \varepsilon^2 \partial_t \hat{R}_1 \\
&= \lambda \hat{\varphi}_1 + \lambda \varepsilon^2 \hat{R}_1 + 3\varepsilon G\left(\hat{\varphi}_1 + \varepsilon^2 \hat{R}_1, \hat{\varphi}_1 + \varepsilon^2 \hat{R}_1, \hat{\varphi}_{-1} + \varepsilon^2 \hat{R}_{-1}\right) + \tilde{H}_1 \\
&= \lambda \hat{\varphi}_1 + \lambda \varepsilon^2 \hat{R}_1 + \\
&\quad + 3\varepsilon \iiint g(k, k - \ell, \ell - m, n) \cdot (\hat{\varphi}_1 + \varepsilon^2 \hat{R}_1)(k - \ell) \cdot (\hat{\varphi}_1 + \varepsilon^2 \hat{R}_1)(\ell - m) \cdot \\
&\quad \quad (\hat{\varphi}_{-1} + \varepsilon^2 \hat{R}_{-1})(n) \, dn \, dm \, d\ell + \tilde{H}_1 .
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Somit genügt der Summand \tilde{H}_1 der Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|\tilde{H}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} &\leq C\varepsilon^2 \left(\|\hat{R}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \varepsilon \|\hat{R}_s\|_{L^1(m)} + C_{Res} \right) \\
&\quad + C(D_1, D_s) \varepsilon^3 \left(\|\hat{R}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \|\hat{R}_s\|_{L^1(m)} \right)^2 ,
\end{aligned}$$

solange

$$\|\hat{R}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \leq D_1 \quad , \quad \|\hat{R}_s\|_{L^1(m)} \leq D_s$$

mit den beiden von $0 \leq \varepsilon \ll 1$ unabhängigen Konstanten C (unabhängig von D_1 und D_s) und $C(D_1, D_s)$ (abhängig von D_1 und D_s) gilt. \hat{R}_s steht für die stabilen Moden, d.h.

$$\hat{R}_s = (\hat{R}_0, \hat{R}_2, \hat{R}_3, \hat{R}_4, \hat{R}_{1n} \hat{R}_r)$$

mit $\|\hat{R}_s\|_{L^1(m)}$ wie oben definiert.

Betrachtet man nun nur diejenigen Beiträge, die mit ε^2 skalieren, folgt nach Division durch ε^2 für den Fehler \hat{R}_1 die Gleichung

$$\partial_t \hat{R}_1 = \lambda \hat{R}_1 + 3\varepsilon G(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1, \hat{R}_{-1}) + 6\varepsilon G(\hat{\varphi}_1, \hat{R}_1, \hat{\varphi}_{-1}) + \tilde{H}_1 . \tag{2.27}$$

Diese Gleichung lösen wir mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel:

$$\hat{R}_1(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (3\varepsilon G(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1, \hat{R}_{-1}) + 6\varepsilon G(\hat{\varphi}_1, \hat{R}_1, \hat{\varphi}_{-1}) + \tilde{H}_1)(\tau) d\tau. \quad (2.28)$$

Als Anfangswert wurde dabei $\hat{R}_1(t)|_{t=0} = 0$ angenommen. Ebenso soll auch für die übrigen Fehleranteile $\hat{R}_{\dots}(t)|_{t=0} = 0$ gelten.

In den anderen Fällen muss unter Verwendung der Definitionen

$$\hat{v}_s := (\tilde{w}_0, \tilde{w}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4, \hat{v}_{1n}, \hat{v}_r),$$

$$\tilde{H}_s := (\tilde{H}_0, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3, \tilde{H}_4, \tilde{H}_{1n}, \tilde{H}_r)$$

die sich mit Hilfe des Ansatzes

$$\hat{v}_s = \varphi_s + \varepsilon^2 R_s$$

ergebende Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{v}_s &= \partial_t \hat{\varphi}_s + \varepsilon^2 \partial_t \hat{R}_s \\ &= \lambda \hat{\varphi}_s + \lambda \varepsilon^2 \hat{R}_s + \tilde{H}_s + \tilde{F}_s \end{aligned}$$

auf die gleiche Weise behandelt werden, und man erhält für den Fehler \hat{R}_s

$$\partial_t \hat{R}_s = \lambda \hat{R}_s + \tilde{H}_s + \tilde{F}_s,$$

deren Lösung durch

$$\hat{R}_s(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (\tilde{H}_s + \tilde{F}_s)(\tau) d\tau \quad (2.29)$$

gegeben ist. Der Ausdruck \tilde{H}_s genügt dabei der Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\tilde{H}_s\|_{L^1(m-1)} &\leq C \left(\|\hat{R}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \varepsilon \|\hat{R}_s\|_{L^1(m)} \right) + C_{Res} \\ &\quad + C(D_1, D_s) \varepsilon \left(\|\hat{R}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \|\hat{R}_s\|_{L^1(m)} \right)^2. \end{aligned}$$

\tilde{F}_s enthält die beiden Zeitableitungsterme \tilde{F}_0 und \tilde{F}_2 , für die ja

$$\varepsilon^{-1}(\partial_t \hat{v}_1 * \hat{v}_1) = \varepsilon^{-1}(2\hat{\varphi}_1 * \partial_t \hat{\varphi}_1 + \varepsilon^2 \partial_t \hat{\varphi}_1 * \hat{R}_1 + \varepsilon^2 \hat{\varphi}_1 * \partial_t \hat{R}_1 + 2\varepsilon^4 \hat{R}_1 * \partial_t \hat{R}_1)$$

und

$$\partial_t \hat{\varphi}_1 = O(\varepsilon^2) \quad \text{in} \quad L^1(0, \varepsilon, 1)$$

gilt. Daraus folgt dann:

$$\|\tilde{F}_s\|_{L^1(m)} \leq C(\varepsilon \|\hat{R}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \varepsilon^{-1} \|\partial_t \hat{R}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \varepsilon \|\hat{R}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)}^2).$$

Ersetzt man hier nun $\partial_t \hat{R}_1$ durch die rechte Seite von (2.27) und schätzt $|\lambda(k)| \leq C(\varepsilon^2 + |k-1|^2)$ für k nahe 1 ab, wie im Beweis von Lemma 2.8 benutzt, so erkennt man, dass damit

$$\|\partial_t \hat{R}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \leq C\varepsilon \|\hat{R}_1\|_{L^1(1,\varepsilon,1)}$$

und somit

$$\|\tilde{F}_s\|_{L^1(m)} \leq C \|\hat{R}_1\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} + \varepsilon^2 \|\hat{R}_1\|_{L^1(1,\varepsilon,1)}^2$$

gilt.

Um nun die Gültigkeit des Approximationssatzes beweisen zu können, muss gezeigt werden, dass die Fehlerterme beschränkt sind und somit für kleine $\varepsilon > 0$ keinen signifikanten Beitrag liefern, was gleichbedeutend damit ist, dass diese Terme für $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwinden. Dies gelingt durch Betrachtung der Ausdrücke für den Fehler in den oben (siehe Gleichung (2.17)) definierten Normen $L^1(m)$ und $L^1(m, \varepsilon, k_0)$.

Wegen $\hat{R}_n = \hat{R}_{-n}^*$ ($n \in \mathbb{N}$) genügt es, die Moden mit positiven Indizes zu betrachten. Die dabei gefundenen Resultate lassen sich einfach auf den konjugiert komplexen Term übertragen.

Für $\|\hat{R}_1(t)\|_{L^1(1,\varepsilon,1)}$ gilt nach (2.28) folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
& \|\hat{R}_1(t)\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} \\
&= \left\| \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \left(3\varepsilon G(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1, \hat{R}_{-1}) + 6\varepsilon G(\hat{\varphi}_1, \hat{R}_1, \hat{\varphi}_{-1}) + \tilde{H}_1 \right) (\tau) d\tau \right\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} \\
&\leq \int_0^t \|e^{\lambda(t-\tau)}\|_{L^1(0,\varepsilon,1) \rightarrow L^1(1,\varepsilon,1)} \left(\|3\varepsilon G(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1, \hat{R}_{-1})\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \right. \\
&\quad \left. + \|6\varepsilon G(\hat{\varphi}_1, \hat{R}_1, \hat{\varphi}_{-1})\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \|\tilde{H}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \right) (\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Um eine endgültige Abschätzung dieses Ausdruckes bestimmen zu können, ist es erforderlich, sich zunächst mit den beiden Faltungsprodukten zu beschäftigen, die in obiger Ungleichung wieder mit Hilfe von G geschrieben sind.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \|\varepsilon G(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1, \hat{R}_{-1})\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \\
&= \varepsilon \iiint |g(k, k-\ell, \ell-m, m) \hat{\varphi}_1(k-\ell) \hat{\varphi}_1(\ell-m) \hat{R}_{-1}(m)| dm d\ell dk \\
&\leq C \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}_1\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} \|\hat{\varphi}_1\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} \|\hat{R}_{-1}\|_{L^1(1,\varepsilon,-1)}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \left\| \iiint g(k, k-\ell, \ell-m, m) \hat{\varphi}_1(k-\ell) \hat{\varphi}_1(\ell-m) \hat{R}_{-1}(m) dm d\ell \right\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \\
&\leq \varepsilon \iiint |g(k, k-\ell, \ell-m, m) \hat{\varphi}_1(k-\ell) \hat{\varphi}_1(\ell-m) \hat{R}_{-1}(m)| dm d\ell dk
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \iiint |g(k, k - \ell, \ell - m, m)| \cdot \\
&\quad \cdot \left| \hat{\varphi}_1(k - \ell) \left(1 + \left| \frac{k - \ell - 1}{\varepsilon} \right| \right) \left(1 + \left| \frac{k - \ell - 1}{\varepsilon} \right| \right)^{-1} \right| \cdot \\
&\quad \cdot \left| \hat{\varphi}_1(\ell - m) \left(1 + \left| \frac{\ell - m - 1}{\varepsilon} \right| \right) \left(1 + \left| \frac{\ell - m - 1}{\varepsilon} \right| \right)^{-1} \right| \cdot \\
&\quad \cdot \left| \hat{R}_{-1}(m) \left(1 + \left| \frac{m + 1}{\varepsilon} \right| \right) \left(1 + \left| \frac{m + 1}{\varepsilon} \right| \right)^{-1} \right| dm d\ell dk \\
&\leq \varepsilon \sup_{k, \ell, m \in \mathcal{M}} \left| \frac{g(k, k - \ell, \ell - m, m)}{\left(1 + \left| \frac{k - \ell - 1}{\varepsilon} \right| \right) \left(1 + \left| \frac{\ell - m - 1}{\varepsilon} \right| \right) \left(1 + \left| \frac{m + 1}{\varepsilon} \right| \right)} \right| \cdot \\
&\quad \cdot \iiint |\hat{\varphi}_1(k - \ell)| \left(1 + \left| \frac{k - \ell - 1}{\varepsilon} \right| \right) |\hat{\varphi}_1(\ell - m)| \left(1 + \left| \frac{\ell - m - 1}{\varepsilon} \right| \right) \cdot \\
&\quad \cdot |\hat{R}_{-1}(m)| \left(1 + \left| \frac{m + 1}{\varepsilon} \right| \right) dm d\ell dk \\
&= \varepsilon \sup_{k, \ell, m \in \mathcal{M}} \left| \frac{g(k, k - \ell, \ell - m, m)}{\left(1 + \left| \frac{k - \ell - 1}{\varepsilon} \right| \right) \left(1 + \left| \frac{\ell - m - 1}{\varepsilon} \right| \right) \left(1 + \left| \frac{m + 1}{\varepsilon} \right| \right)} \right| \cdot \\
&\quad \cdot \|\hat{\varphi}_1\|_{L^1(1, \varepsilon, 1)} \|\hat{\varphi}_1\|_{L^1(1, \varepsilon, 1)} \|\hat{R}_{-1}\|_{L^1(1, \varepsilon, -1)}. \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Dabei ist \mathcal{M} folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{M} := \{k, \ell, m \in \mathbb{R} : |k - \ell - 1| < \delta, |\ell - m - 1| < \delta, |m + 1| < \delta, |k - 1| < \delta\}.$$

Um die Abschätzung fortsetzen zu können, fehlt noch eine genauere Untersuchung des Faktors

$$\sup_{k, \ell, m \in \mathcal{M}} \left| \frac{g(k, k - \ell, \ell - m, m)}{\left(1 + \left| \frac{k - \ell - 1}{\varepsilon} \right| \right) \left(1 + \left| \frac{\ell - m - 1}{\varepsilon} \right| \right) \left(1 + \left| \frac{m + 1}{\varepsilon} \right| \right)} \right|. \quad (2.33)$$

Nach Durchführung der Substitution

$$\left. \begin{array}{l} k - \ell - 1 =: \varepsilon K \\ \ell - m - 1 =: \varepsilon L \\ m + 1 =: \varepsilon M \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} k = \varepsilon(K + L + M) + 1 \\ \ell = \varepsilon(L + M) \\ m = \varepsilon M - 1 \end{array} \right.$$

erhält man für (2.33) die folgende Darstellung in den neuen Variablen:

$$\sup_{K,L,M \in \tilde{\mathcal{M}}} \left| \frac{g(1 + \varepsilon(K + L + M), 1 + \varepsilon K, 1 + \varepsilon L, \varepsilon M - 1)}{(1 + |K|)(1 + |L|)(1 + |M|)} \right|,$$

wobei $\tilde{\mathcal{M}} = \{K, L, M \in \mathbb{R} : |\varepsilon K| < \delta, |\varepsilon L| < \delta, |\varepsilon M| < \delta\}$.

Wegen

$$\begin{aligned} & |g(1 + \varepsilon(K + L + M), 1 + \varepsilon K, 1 + \varepsilon L, \varepsilon M - 1)| \\ & \leq |g(1, 1, 1, -1)| + D_1 \varepsilon |K + L + M| + D_2 \varepsilon |K| + D_3 \varepsilon |L| + D_4 \varepsilon |M| \end{aligned}$$

mit von ε, K, L, M unabhängigen Konstanten D_j und $|g(1, 1, 1, -1)| = O(\varepsilon)$, ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} & \sup_{K,L,M \in \tilde{\mathcal{M}}} \left| \frac{g(1 + \varepsilon(K + L + M), 1 + \varepsilon K, 1 + \varepsilon L, \varepsilon M - 1)}{(1 + |K|)(1 + |L|)(1 + |M|)} \right| \\ & \leq \sup_{K,L,M \in \tilde{\mathcal{M}}} \left| \frac{|g(1, 1, 1, -1)| + D_1 \varepsilon |K + L + M| + D_2 \varepsilon |K| + D_3 \varepsilon |L| + D_4 \varepsilon |M|}{(1 + |K|)(1 + |L|)(1 + |M|)} \right| \\ & = C \varepsilon. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung gilt in einer Umgebung der kritischen Stelle, d.h. es gibt ein $\delta > 0$, so dass für $|\varepsilon K| + |\varepsilon L| + |\varepsilon M| < \delta$ die Überlegungen richtig sind.

Setzt man dieses Ergebnis in (2.32) ein, erhält man die Behauptung. ■

Genauso lässt sich auch die Abschätzung für das zweite Faltungsprodukt in (2.30) zeigen, für das die analoge Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\varepsilon G(\hat{\varphi}_1, \hat{R}_1, \hat{\varphi}_{-1})\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \\ \leq C \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}_1\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} \|\hat{R}_1\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} \|\hat{\varphi}_{-1}\|_{L^1(1,\varepsilon,-1)} \end{aligned}$$

gilt.

Damit fehlt nur noch eine genauere Betrachtung der linearen Halbgruppe in (2.30):

$$\begin{aligned} e^{-\varepsilon^2 t} \left\| e^{\lambda(t-\tau)} \right\|_{L^1(0,\varepsilon,1) \rightarrow L^1(1,\varepsilon,1)} &\leq \sup_{|k| < \delta} e^{-\varepsilon^2 t} \left| e^{\lambda(k)(t-\tau)} \left(1 + \frac{|k-1|}{\varepsilon} \right) \right| \\ &\leq \sup_k \left| e^{-(k-1)^2(t-\tau)} \right| + \sup_k \left| \frac{|k-1|}{\varepsilon} e^{-(k-1)^2(t-\tau)} \right| \\ &\leq C \left(1 + \sup_K \left| e^{-K^2(t-\tau)} \frac{|K|}{\varepsilon} \right| \right) \\ &\leq \stackrel{K^2(t-\tau)=:\xi}{\leq} C \left(1 + \sup_{\xi} \left| e^{-\xi^2} \frac{|\xi|}{\varepsilon \sqrt{t-\tau}} \right| \right) \\ &\leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon \sqrt{t-\tau}} \right) \quad (C > 0). \end{aligned}$$

Diese Zwischenergebnisse setzt man nun in (2.30) ein, was auf folgende Ungleichung für $\|\hat{R}_1\|_{L^1(1,\varepsilon,1)}$ führt:

$$\begin{aligned} \|\hat{R}_1(t)\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} \\ \leq \int_0^t C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon \sqrt{t-\tau}} \right) \left(3C_3 \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}_1\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} \|\hat{\varphi}_1\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} \|\hat{R}_{-1}\|_{L^1(1,\varepsilon,-1)} \right. \\ \left. + 6C_4 \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}_1\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} \|\hat{R}_1\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} \|\hat{\varphi}_{-1}\|_{L^1(1,\varepsilon,-1)} + \|\tilde{H}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \right) (\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon\sqrt{t-\tau}}\right) \left(\varepsilon^2 \|\hat{R}_1\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} + \|\tilde{H}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)}\right) (\tau) d\tau \quad (2.34) \\
&\leq \int_0^t C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon\sqrt{t-\tau}}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \left((C+1)\varepsilon^2 \|\hat{R}_1(\tau)\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + C\varepsilon^3 \|\hat{R}_s(\tau)\|_{L^1(m)} + \varepsilon^2 C_{Res} \right. \\
&\quad \left. + C(D_1, D_s)\varepsilon^3 \left(\|\hat{R}_1(\tau)\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \|\hat{R}_s(\tau)\|_{L^1(m)}\right)^2 \right) d\tau.
\end{aligned}$$

Die Betrachtung von $\|\hat{R}_s\|_{L^1(m)}$ in analoger Weise führt auf

$$\begin{aligned}
\|\hat{R}_s(t)\|_{L^1(m)} &\stackrel{(2.29)}{=} \left\| \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \left(\tilde{H}_s(\tau) + \tilde{F}_s(\tau)\right) d\tau \right\|_{L^1(m)} \quad (2.35) \\
&\leq \int_0^t \|e^{\lambda(t-\tau)}\|_{L^1(m-1) \rightarrow L^1(m)} \left\| \left(\tilde{H}_s(\tau)\|_{L^1(m-1)} + \|\tilde{F}_s(\tau)\|_{L^1(m)}\right) \right\| d\tau.
\end{aligned}$$

Mit

$$\|e^{\lambda(t-\tau)}\chi_s\|_{L^1(m-1) \rightarrow L^1(m)} \leq \sup_k \left| e^{\lambda(k)(t-\tau)} (1 + |k|) \right| \leq C e^{-\sigma(t-\tau)} (1 + (t-\tau)^{-1/4}) \quad (\sigma > 0)$$

kann die obige Abschätzung (2.35) fortgesetzt werden:

$$\begin{aligned}
\|\hat{R}_s(t)\|_{L^1(m)} &\leq \int_0^t C e^{-\sigma(t-\tau)} (1 + (t-\tau)^{-1/4}) \left(\|\tilde{H}_s(\tau)\|_{L^1(m-1)} + \|\tilde{F}_s(\tau)\|_{L^1(m)} \right) d\tau \\
&\leq \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} (1 + (t-\tau)^{-1/4}) \cdot \\
&\quad \cdot \left(C \|\hat{R}_1(\tau)\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} + \varepsilon C \|\hat{R}_s(\tau)\|_{L^1(m)} + C_{Res} \right. \\
&\quad \left. + C(D_1, D_s)\varepsilon \left(\|\hat{R}_1(\tau)\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \|\hat{R}_s(\tau)\|_{L^1(m)}\right)^2 \right) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sup_{\tau \in [0, t]} \left(\|\hat{R}_1(\tau)\|_{L^1(1, \varepsilon, 1)} + \varepsilon \|\hat{R}_s(\tau)\|_{L^1(m)} + C_{Res} \right. \\
&\quad \left. + C(D_1, D_s) \varepsilon \left(\|\hat{R}_1(\tau)\|_{L^1(0, \varepsilon, 1)} + \|\hat{R}_s(\tau)\|_{L^1(m)} \right)^2 \right) \cdot \\
&\quad \cdot \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} (1 + (t-\tau)^{-1/4}) d\tau \\
&\leq C \sup_{\tau \in [0, t]} \left(\|\hat{R}_1(\tau)\|_{L^1(1, \varepsilon, 1)} + \varepsilon \|\hat{R}_s(\tau)\|_{L^1(m)} + C_{Res} \right. \\
&\quad \left. + C(D_1, D_s) \varepsilon \left(\|\hat{R}_1(\tau)\|_{L^1(0, \varepsilon, 1)} + \|\hat{R}_s(\tau)\|_{L^1(m)} \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

Somit folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\sup_{\tau \in [0, t]} \|\hat{R}_s(\tau)\|_{L^1(m)} &\leq C \sup_{\tau \in [0, t]} \left(\|\hat{R}_1(\tau)\|_{L^1(1, \varepsilon, 1)} + \varepsilon \|\hat{R}_s(\tau)\|_{L^1(m)} + C_{Res} \right) \quad (2.36) \\
&\quad + C(D_1, D_s) \varepsilon \left(\|\hat{R}_1(\tau)\|_{L^1(0, \varepsilon, 1)} + \|\hat{R}_s(\tau)\|_{L^1(m)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Man sieht, dass die beiden Fehlergleichungen (2.34) und (2.36) für $\|\hat{R}_1\|_{L^1(1, \varepsilon, 1)}$ und $\|\hat{R}_s\|_{L^1(m)}$ miteinander gekoppelt sind. Nach [34, 36] kann die Abschätzung folgendermaßen weitergeführt werden, wobei man als erstes den Fehlerterm $\|\hat{R}_s\|_{L^1(m)}$ betrachtet und dann in die Ungleichung für $\|\hat{R}_1\|_{L^1(1, \varepsilon, 1)}$ einsetzt. Definiert man zuvor

$$\begin{aligned}
S_1(t) &:= \sup_{\tau \in [0, t]} \|R_1(\tau)\|_{L^1(1, \varepsilon, 1)}, \\
S_s(t) &:= \sup_{\tau \in [0, t]} \|R_s(\tau)\|_{L^1(m)},
\end{aligned}$$

so erhält man die Abschätzung

$$S_s(t) \leq C \left(S_1(t) + \varepsilon S_s(t) + \varepsilon C(D_1, D_s) (S_1(t) + S_s(t))^2 + C_{Res} \right).$$

Wählt man nun $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so dass

$$C\varepsilon \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \varepsilon C(D_1, D_s)(D_1 + D_s)^2 \leq 1$$

gilt, folgt daraus die folgende Ungleichung:

$$S_s(t) \leq 2C(S_1(t) + C_{Res} + 1). \quad (2.37)$$

Diese kann jetzt in (2.34) eingesetzt werden, was auf

$$\begin{aligned} \|\hat{R}_1(t)\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} &\leq \int_0^t C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon\sqrt{t-\tau}}\right) \cdot \\ &\quad \cdot \left((C+1)\varepsilon^2 \|\hat{R}_1(\tau)\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} + C\varepsilon^3(S_1(\tau) + C_{Res} + 1) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 C_{Res} + C(D_1, D_s)\varepsilon^3 (S_1(\tau) + S_s(\tau))^2 \right) d\tau \end{aligned}$$

führt. Ist außerdem $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$\varepsilon D_1(t) + \varepsilon C(D_1, D_s)(D_1 + D_s)^2 \leq 1 \quad (2.38)$$

erfüllt ist, kann die Abschätzung für $\|\hat{R}_1(t)\|_{L^1(1,\varepsilon,1)}$ fortgesetzt werden. Mit $T = \varepsilon^2 t$ und analog $\tilde{\tau} = \varepsilon^2 \tau$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\| \hat{R}_1 \left(\frac{T}{\varepsilon^2} \right) \right\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} &\leq C \int_0^T \left(1 + \frac{1}{\sqrt{T-\tilde{\tau}}} \right) \left(\left\| \hat{R}_1 \left(\frac{\tilde{\tau}}{\varepsilon^2} \right) \right\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} + (1 + C_{Res}) \right) d\tilde{\tau} \\ &\leq C \int_0^T \left(1 + \frac{1}{\sqrt{T-\tilde{\tau}}} \right) (1 + C_{Res}) d\tilde{\tau} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +C \int_0^T \left(1 + \frac{1}{\sqrt{T-\tilde{\tau}}}\right) \left\| \hat{R}_1 \left(\frac{\tilde{\tau}}{\varepsilon^2} \right) \right\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} d\tilde{\tau} \\
& = C(1 + C_{Res})(T + 2\sqrt{T}) + \\
& +C \int_0^T \left(1 + \frac{1}{\sqrt{T-\tilde{\tau}}}\right) \left\| \hat{R}_1 \left(\frac{\tilde{\tau}}{\varepsilon^2} \right) \right\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} d\tilde{\tau} \\
& \stackrel{T \in [0, T_0]}{\leq} D + C \int_0^T \left(1 + \frac{1}{\sqrt{T-\tilde{\tau}}}\right) \left\| \hat{R}_1 \left(\frac{\tilde{\tau}}{\varepsilon^2} \right) \right\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} d\tilde{\tau}.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Gronwallschen Ungleichung nach [19], S. 188ff, folgt aus (2.39) schließlich

$$\|\hat{R}_1(t)\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} \leq D_1 = O(1) \quad \text{für alle } t \in \left[0, \frac{T_0}{\varepsilon^2}\right]$$

und somit die Beschränktheit des Fehlers $\hat{R}_1(t)$.

Abschließend bleibt noch die Beschränktheit von $\|\hat{R}_s(t)\|_{L^1(1,\varepsilon,1)}$ bzw. $S_s(t)$ zu zeigen. Dies geschieht, indem man das gerade berechnete Ergebnis für $\|\hat{R}_1(t)\|_{L^1(1,\varepsilon,1)}$ bzw. $S_1(t)$ in (2.37) einsetzt:

$$S_s(t) \leq 2C(S_1(t) + C_{Res} + 1) \leq 2C(D_1 + C_{Res} + 1) =: D_s = O(1) \quad \text{für alle } t \in \left[0, \frac{T_0}{\varepsilon^2}\right].$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt dann folglich

$$\varepsilon S_s(t) \leq \varepsilon D_s \leq 1 = O(1) \quad \text{für alle } t \in \left[0, \frac{T_0}{\varepsilon^2}\right],$$

womit auch die Gültigkeit von Ungleichung (2.38) gezeigt ist.

Damit ist die Beschränktheit der Fehlerterme gezeigt und die Approximationseigenschaft des Ansatzes bewiesen.

Als weitere wichtige Eigenschaft neben der Approximation bleibt nun noch die Attraktivität der Näherungslösungen nachzuweisen, was im folgenden Abschnitt geschieht.

3 Der Attraktivitätssatz

In diesem Kapitel beweisen wir, dass die Lösungen, die durch die verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichung im Sinne des vorigen Kapitels beschrieben werden können, attraktiv sind.

Unter der Attraktivität versteht man dabei den Effekt, dass sich eine beliebige, jedoch hinreichend kleine Anfangsbedingung (Größenordnung $O(\varepsilon^{1/2})$) unserer KSSH-Gleichung (1.2) zeitlich derart entwickelt, dass sie nach einer Zeit T_1/ε^2 durch Lösungen der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung (1.1) beschrieben werden kann (vgl. [5, 14]) und somit die in Abb. 3.1 dargestellte Fouriermodenverteilung besitzt.

In einem ersten Schritt beweisen wir dafür, dass wir auf einer sehr kleinen Zeitskala $O(\varepsilon^{-1/4})$ eine Modenverteilung wie in Abb. 3.1 erhalten. Dies geschieht durch einen Existenzsatz auf einer $O(\varepsilon^{-1/4})$ -Zeitskala und anschließendes Auswerten der Variation-der-Konstanten-Formel zu verschiedenen Zeitpunkten. Danach folgt im zweiten Schritt der Beweis des vollständigen Attraktivitätssatzes (vgl. Satz 3.4). Dies geschieht wiederum durch einen Existenzsatz, jetzt jedoch auf einer $O(1/\varepsilon^2)$ -Zeitskala, und anschließendes Auswerten der Variation-der-Konstanten-Formel zu verschiedenen Zeiten. Die Schwierigkeit dabei liegt darin, dass wir die Konzentration der kritischen Moden verwenden müssen, um auf eine $O(1/\varepsilon^2)$ -Zeitskala zu kommen, während wir andererseits diese lange Zeitskala zum Entstehen der Konzentration benötigen. Wir lösen das Problem durch Einführen zeitabhängiger Normen.

3.1 Der erste Schritt

Wie bereits gesagt, betrachten wir zunächst eine sehr kleine Zeitskala $t = \varepsilon^{-a}$ mit beliebig kleinem, aber festem $a > 0$. Zur besseren Übersicht wählen wir im folgenden $a = 1/4$. Die Attraktivitätseigenschaft lässt sich im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 3.1 (Erster Attraktivitätssatz) Für alle $C_1 > 0$ gibt es Konstanten $\varepsilon_0 > 0$, $C_2 > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ folgendes gilt: Sei $u(\cdot, 0)$ eine Anfangsbedingung des Kuramoto-Shivashinsky-Swift-Hohenberg-Modells (1.2) mit $\|\hat{u}(\cdot, 0)\|_{L^1(m)} \leq C_1 \varepsilon^{1/2}$. Dann erfüllt die Lösung $\hat{u} = \hat{u}(k, t)$ für $t = \varepsilon^{-1/4}$ mit der Notation aus Kapitel 2 (Gleichung (2.12)) die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_0(\varepsilon^{-1/4})\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon, \\ \|\hat{u}_2(\varepsilon^{-1/4})\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon, \\ \|\hat{u}_{0n}(\varepsilon^{-1/4})\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon^2, \\ \|\hat{u}_{2n}(\varepsilon^{-1/4})\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon^2, \\ \|\hat{u}_1(\varepsilon^{-1/4})\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon^{1/2}, \\ \|\hat{u}_{1n}(\varepsilon^{-1/4})\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon^{3/2}, \\ \|\hat{u}_3(\varepsilon^{-1/4})\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon^{3/2}, \\ \|\hat{u}_4(\varepsilon^{-1/4})\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon^2, \\ \|\hat{u}_r(\varepsilon^{-1/4})\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon^{5/2}. \end{aligned}$$

Analoges gilt für die \hat{u}_{\dots} mit negativen Indizes.

Bemerkung: Aus Notationsgründen beweisen wir die Modenverteilung nicht für $t = \varepsilon^{-1/4}$, sondern für $t = \kappa \varepsilon^{-1/4}$ für ein $\kappa \in \mathbb{N}$.

Der Satz besagt also, dass die zu einer beliebigen, aber kleinen Anfangsbedingung gehörende Lösung von (1.2) sich derart entwickelt, dass sie zum Zeitpunkt $t = \varepsilon^{-1/4}$ die Fourierdarstellung aus Abb. 3.1 besitzt. Zur Wahrung der Übersichtlichkeit beschränken wir uns auf die Darstellung des Bereichs $k \geq 0$.

3.2 Beweis des ersten Attraktivitätssatzes

Da die Anfangsbedingung $u_A := u(x, 0)$ laut Voraussetzung von der Größenordnung $O(\varepsilon^{1/2})$ ist, machen wir für die Lösung $u(x, t)$ den Ansatz

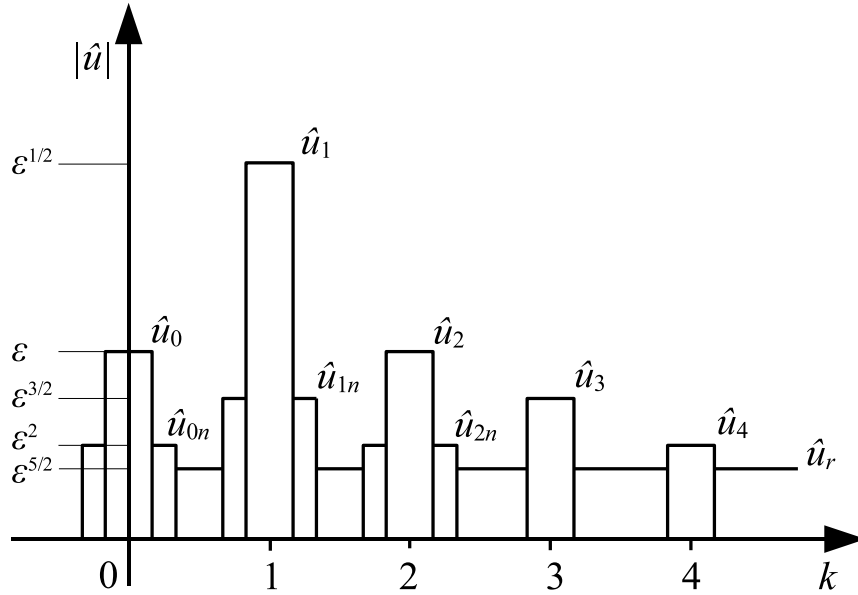


Abbildung 3.1: Entwicklung der Moden aus dem Kontinuum heraus nach Satz 3.1 (s.a. Bem. 2.6 u. 2.7).

$$u(x, t) = \varepsilon^{1/2} v(x, t) \quad \text{mit} \quad v = O(1).$$

Im k -Raum, wo die weitere Betrachtung stattfinden soll, bedeutet dies völlig analog, dass der Ansatz

$$\hat{u}(x, t) = \varepsilon^{1/2} \hat{v}(x, t) \quad \text{mit} \quad \hat{v} = O(1). \quad (3.1)$$

lautet.

Diesen Ansatz setzen wir nun in die fouriertransformierte Differentialgleichung

$$\partial_t \hat{u} = \lambda \hat{u} + N(\hat{u}) \quad \text{mit} \quad N(\hat{u}) \stackrel{(2.10)}{=} \rho \hat{u} * \hat{u} + \gamma_1 \hat{u} * \hat{u} * \hat{u}$$

ein, was auf folgende Gleichung für \hat{v} führt:

$$\partial_t \hat{v} = \lambda \hat{v} + \varepsilon^{1/2} \rho \hat{v} * \hat{v} + \varepsilon \gamma_1 \hat{v} * \hat{v} * \hat{v}. \quad (3.2)$$

Aufgrund der Gültigkeit des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes für semilineare Differentialgleichungen (vgl. [19]) erhalten wir eine Lösung $\hat{v} \in C([0, t_0], L^1(m))$ für ein $t_0 > 0$ und können diese mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel darstellen:

$$\hat{v} = \hat{v}(k, t) = e^{\lambda(k)t} \hat{v}_A(k) + \varepsilon^{1/2} \int_0^t e^{\lambda(k)(t-\tau)} (\rho \hat{v} * \hat{v} + \varepsilon^{1/2} \gamma_1 \hat{v} * \hat{v} * \hat{v})(k, \tau) d\tau. \quad (3.3)$$

Diese Lösung kann durch wiederholtes Anwenden des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes für alle $t \in [0, \varepsilon^{-1/4}]$ fortgesetzt werden, wenn wir die Beschränktheit von \hat{v} in diesem Zeitintervall beweisen können.

Bezeichnet man die Inhomogenität aus (3.2) mit \tilde{N} , d.h.

$$\tilde{N}(\hat{v}) := \rho \hat{v} * \hat{v} + \varepsilon^{1/2} \gamma_1 \hat{v} * \hat{v} * \hat{v},$$

so folgt

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, \varepsilon^{-1/4}]} \|\hat{v}(\cdot, t)\|_{L^1(m)} \\ & \leq \sup_{t \in [0, \varepsilon^{-1/4}]} \left(\|e^{\lambda t} \hat{v}_A\|_{L^1(m)} + \varepsilon^{1/2} \int_0^t \|e^{\lambda(t-\tau)}\|_{L^1(m-1) \rightarrow L^1(m)} \|\tilde{N}(\hat{v}(\tau))\|_{L^1(m-1)} d\tau \right) \\ & \leq e^{\varepsilon^{7/4}} \|\hat{v}_A\|_{L^1(m)} + C \varepsilon^{1/2} \sup_{t \in [0, \varepsilon^{-1/4}]} \int_0^t e^{\varepsilon^2(t-\tau)} (1 + (t-\tau)^{-1/4}) d\tau \cdot \\ & \qquad \qquad \qquad \cdot \sup_{\tau \in [0, \varepsilon^{-1/4}]} \|\tilde{N}(\hat{v}(\tau))\|_{L^1(m-1)} \\ & \leq e \|\hat{v}_A\|_{L^1(m)} + C \varepsilon^{1/2} e \left(\varepsilon^{-1/4} + 4t^{3/4} \Big|_{t=0}^{\varepsilon^{-1/4}} \right) \cdot \\ & \qquad \qquad \qquad \cdot \left(\sup_{\tau \in [0, \varepsilon^{-1/4}]} \|\hat{v}(\tau)\|_{L^1(m)}^2 + \sup_{\tau \in [0, \varepsilon^{-1/4}]} \|\hat{v}(\tau)\|_{L^1(m)}^3 \right) \end{aligned}$$

mit unterschiedlichen von $0 \leq \varepsilon \ll 1$ unabhängigen Konstanten C . Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist damit die Beschränktheit von \hat{v} bewiesen, denn wir erhalten

$$\sup_{t \in [0, \varepsilon^{-1/4}]} \|\hat{v}(\cdot, t)\|_{L^1(m)} \leq 2e \|\hat{v}_A\|_{L^1(m)} = O(1).$$

Es ist offensichtlich, dass dies auch für $t_0 = \kappa \varepsilon^{-1/4}$ mit festem $\kappa \in \mathbb{N}$ richtig ist, d.h. es gilt

$$\sup_{t \in [0, \kappa \varepsilon^{-1/4}]} \|\hat{v}(\cdot, t)\|_{L^1(m)} \leq 2e \|\hat{v}_A\|_{L^1(m)} = O(1).$$

Damit können wir nun mit der Untersuchung der Attraktivitätseigenschaften fortfahren und betrachten zunächst das Verhalten der Lösung bei $k_c = \pm 1$. Im ersten Schritt wird hierfür $\hat{v}(k, t)$ in zwei Beiträge aufgespalten:

$$\begin{aligned} \hat{v}(k, t) &= \hat{v}_{\pm 1}(k, t) + \hat{v}_s(k, t) \quad \text{mit} \quad \hat{v}_{\pm 1}(k, t) = (\chi_1(k) + \chi_{-1}(k)) \hat{v}(k, t), \\ &\quad \hat{v}_s(k, t) = \hat{v}(k, t) - \hat{v}_{\pm 1}(k, t). \end{aligned}$$

Als erstes betrachten wir den Beitrag \hat{v}_s unter Berücksichtigung, dass im Bereich des Trägers von \hat{v}_s $\lambda(k) < 0$ gilt, und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\hat{v}_s(\varepsilon^{-1/4})\|_{L^1(m)} &\leq \|e^{\lambda \varepsilon^{-1/4}} \chi_s\|_{L^1(m) \rightarrow L^1(m)} \|\hat{v}_s(0)\|_{L^1(m)} + \\ &\quad + \varepsilon^{1/2} C \sup_{\tau \in [0, \varepsilon^{-1/4}]} \|\tilde{N}(\hat{v}(\tau))\|_{L^1(m-1)} \int_0^{\varepsilon^{-1/4}} e^{\lambda(t-\tau)} (1 + (t-\tau)^{-1/4}) d\tau \\ &\leq e^{-\sigma \varepsilon^{-1/4}} \|\hat{v}_s(0)\|_{L^1(m)} + C \varepsilon^{1/2} \sup_{\tau \in [0, \varepsilon^{-1/4}]} \|\tilde{N}(\hat{v}(\tau))\|_{L^1(m)} \\ &\leq O(\varepsilon^{1/2}), \end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass

$$e^{-\sigma\varepsilon^{-1/4}} = o(\varepsilon^{1/2}) \text{ für } \sigma < 0 \text{ und } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

gilt.

Daraus folgt, dass \hat{v} nach der Zeit $t = \varepsilon^{-1/4}$ in einer Umgebung von $k_c = \pm 1$ von der Größenordnung $O(1)$ ist, während im übrigen Bereich die Größenordnung $O(\varepsilon^{1/2})$ vorliegt.

Für die ursprüngliche, uns interessierende Funktion \hat{u} bedeutet dies nach (3.1), dass

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}_{\pm 1}(k, t) + \hat{u}_s(k, t) = \varepsilon^{1/2}\hat{v}_{\pm 1}(k, t) + \varepsilon^{1/2}\hat{v}_s(k, t)$$

gilt, d.h. zum Zeitpunkt $t = \varepsilon^{-1/4}$ ist \hat{u} bei $k_c = \pm 1$ von der Größenordnung $O(\varepsilon^{1/2})$ und im übrigen Bereich $O(\varepsilon)$, was in Abb. 3.2 graphisch veranschaulicht ist.

Offensichtlich erhalten wir dieselbe Modenverteilung für alle $t \in [\varepsilon^{-1/4}, \kappa\varepsilon^{-1/4}]$ mit $\kappa \in \mathbb{N}$ (s.o.), d.h. \hat{v}_s erfüllt die Ungleichung

$$\sup_{t \in [\varepsilon^{-1/4}, \kappa\varepsilon^{-1/4}]} \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} \leq C\varepsilon^{1/2}.$$

Auf diesem Zwischenergebnis bauen wir nun auf und führen in unserem zweiten Iterationsschritt die neue Funktion $\hat{\hat{v}}_s$ ein, die wie oben von der Größenordnung $O(1)$ sein soll und die gleichen Träger wie \hat{v}_s besitzt. Damit lässt sich \hat{u} folgendermaßen schreiben:

$$\hat{u}(k, t) = \varepsilon^{1/2}\hat{v}_{\pm 1}(k, t) + \varepsilon\hat{\hat{v}}_s(k, t). \quad (3.5)$$

Wir gehen also völlig analog zum ersten Schritt vor, bei dem in (3.1) $\hat{v} = O(1)$ eingeführt wurde, und ziehen wieder den Faktor $\varepsilon^{1/2}$ heraus. Einziger Unterschied ist, dass die Modenentwicklung jetzt bei $k = \pm 2$ und $k = 0$ untersucht wird.

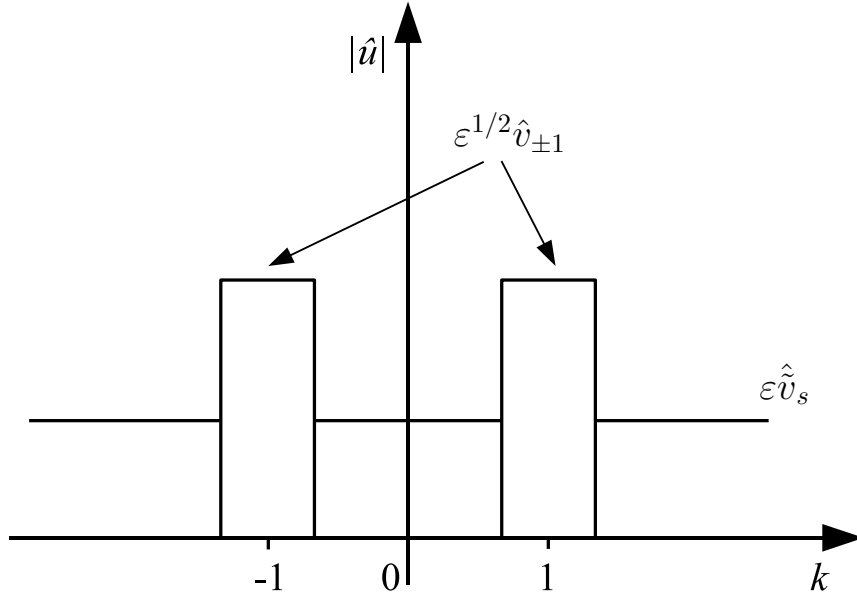


Abbildung 3.2: Verteilung und Größenordnung der Moden nach dem ersten Iterationsschritt zur Zeit $t = \varepsilon^{-1/4}$ (vgl. Gleichung (3.5) sowie Bem. 2.7).

Dann können wir wie bei der Einführung von $\hat{v}_{\pm 1}$ und \hat{v}_s oben eine Aufspaltung vornehmen, und zwar für den nicht um $k = \pm 1$ konzentrierten Anteil:

$$\begin{aligned} \hat{v}_s &= \hat{v}_{0,\pm 2} + \hat{v}_r & \text{mit} & & \hat{v}_{0,\pm 2} &= (\chi_0 + \chi_2 + \chi_{-2}) \hat{v}_s, & (3.6) \\ & & & & \hat{v}_r &= \hat{v}_s - \hat{v}_{0,\pm 2}. \end{aligned}$$

Um die Größenordnung von $\hat{v}_r(\varepsilon^{-1/4})$ zu erhalten, setzen wir (3.5) in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$\varepsilon^{1/2} \partial_t \hat{v}_{\pm 1} + \varepsilon \partial_t \hat{v}_s = \lambda \varepsilon^{1/2} \hat{v}_{\pm 1} + \lambda \varepsilon \hat{v}_s + N(\varepsilon^{1/2} \hat{v}_{\pm 1} + \varepsilon \hat{v}_s),$$

wobei nach (2.10)

$$N(\varepsilon^{1/2} \hat{v}_{\pm 1} + \varepsilon \hat{v}_s) = \rho(\varepsilon^{1/2} \hat{v}_{\pm 1} + \varepsilon \hat{v}_s)^{*2} + \gamma_1(\varepsilon^{1/2} \hat{v}_{\pm 1} + \varepsilon \hat{v}_s)^{*3}$$

ist. Damit ergibt sich nach Aufspaltung nach der $O(\varepsilon)$ -Ordnung und Ausmultiplizieren der Faltungsprodukte folgende Differentialgleichung für \hat{v}_s :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{v}_s &= \lambda \hat{v}_s + \left\{ \rho \left(\hat{v}_{\pm 1}^{*2} + 2\varepsilon^{1/2} \hat{v}_{\pm 1} * \hat{v}_s \right) + \varepsilon \hat{v}_s^{*2} \right\} + \\ &\quad + \gamma_1 \left(\varepsilon^{1/2} \hat{v}_{\pm 1}^{*3} + 3\varepsilon \hat{v}_{\pm 1}^{*2} * \hat{v}_s + 3\varepsilon^{3/2} \hat{v}_{\pm 1} * \hat{v}_s^{*2} + \varepsilon^2 \hat{v}_s^{*3} \right) \chi_s. \end{aligned}$$

χ_s ist dabei der Träger von \hat{v}_s , und mit $(\dots)^{*2}$ ist das Faltungsquadrat gemeint, d.h. $(\dots)^{*2} = (\dots) * (\dots)$. Analog gilt dann: $(\dots)^{*3} = (\dots) * (\dots) * (\dots)$.

Als nächstes setzen wir die Aufspaltung (3.6) in diese Gleichung ein, was mit der Trägerfunktion χ_r von \hat{v}_r auf die DGL

$$\partial_t \hat{v}_r = \lambda \hat{v}_r + \tilde{N}_r \chi_r$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{N}_r(\hat{v}_{\pm 1}, \hat{v}_{0,\pm 2}, \hat{v}_r) &= \rho \left(\hat{v}_{\pm 1}^{*2} + 2\varepsilon^{1/2} \hat{v}_{\pm 1} * (\hat{v}_r + \hat{v}_{0,\pm 2}) + \varepsilon (\hat{v}_r + \hat{v}_{0,\pm 2})^{*2} \right) \\ &\quad + \gamma_1 \left(\varepsilon^{1/2} \hat{v}_{\pm 1}^{*3} + 3\varepsilon \hat{v}_{\pm 1}^{*2} * (\hat{v}_r + \hat{v}_{0,\pm 2}) \right. \\ &\quad \left. + 3\varepsilon^{3/2} \hat{v}_{\pm 1} * (\hat{v}_r + \hat{v}_{0,\pm 2})^{*2} + \varepsilon^2 (\hat{v}_r + \hat{v}_{0,\pm 2})^{*3} \right) \end{aligned}$$

führt.

Ausgangspunkt der weiteren Betrachtung ist die Tatsache, dass aufgrund unserer obigen Definitionen für $\hat{v}_{\pm 1}$ und χ_r

$$\hat{v}_{\pm 1}^{*2} \chi_r = 0$$

gilt, was folgende Abschätzung ermöglicht:

$$\sup_{t \in [\varepsilon^{-1/4}, \kappa \varepsilon^{-1/4}]} \|\tilde{N}_r \chi_r\|_{L^1(m-1)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\varepsilon^{1/2} \left(\sup_{t \in [\varepsilon^{-1/4}, \kappa\varepsilon^{-1/4}]} \|\hat{v}_{\pm 1}\|_{L^1(m)} \cdot \sup_{t \in [\varepsilon^{-1/4}, \kappa\varepsilon^{-1/4}]} \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} \right) \\
&= O(\varepsilon^{1/2}).
\end{aligned}$$

Für die weitere Auswertung ziehen wir wieder die Variation-der-Konstanten-Formel

$$\hat{v}_r(t) = e^{\lambda(k)(t-\varepsilon^{-1/4})} \hat{v}_r(\varepsilon^{-1/4}) + \int_{\varepsilon^{-1/4}}^t e^{\lambda(k)(t-\tau)} \tilde{N}_r(\tau) \chi_r d\tau$$

heran und schätzen ab:

$$\begin{aligned}
\|\hat{v}_r(t)\|_{L^1(m)} &\leq \|e^{\lambda(k)(t-\varepsilon^{-1/4})} \chi_r\|_{L^1(m) \rightarrow L^1(m)} \|\hat{v}_r(\varepsilon^{-1/4})\|_{L^1(m)} \\
&\quad + \sup_{\tau \in [\varepsilon^{-1/4}, t]} \|\tilde{N}_r \chi_r\|_{L^1(m-1)} \int_{\varepsilon^{-1/4}}^t \|e^{\lambda(k)(t-\tau)} \chi_r\|_{L^1(m-1) \rightarrow L^1(m)} d\tau \\
&\leq e^{-\sigma(t-\varepsilon^{-1/4})} \|\hat{v}_r(\varepsilon^{-1/4})\|_{L^1(m)} + C\varepsilon^{1/2} \int_{\varepsilon^{-1/4}}^t e^{-\sigma(t-\tau)} (t-\tau)^{-1/4} d\tau.
\end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t = 2\varepsilon^{-1/4}$ lautet die Abschätzung

$$\|\hat{v}_r(2\varepsilon^{-1/4})\|_{L^1(m)} \leq C\varepsilon^{1/2} \quad (\text{vgl. (3.4)}),$$

bzw. analog zu oben gilt

$$\sup_{t \in [2\varepsilon^{-1/4}, \kappa\varepsilon^{-1/4}]} \|\hat{v}_r(t)\|_{L^1(m)} \leq C\varepsilon^{1/2}.$$

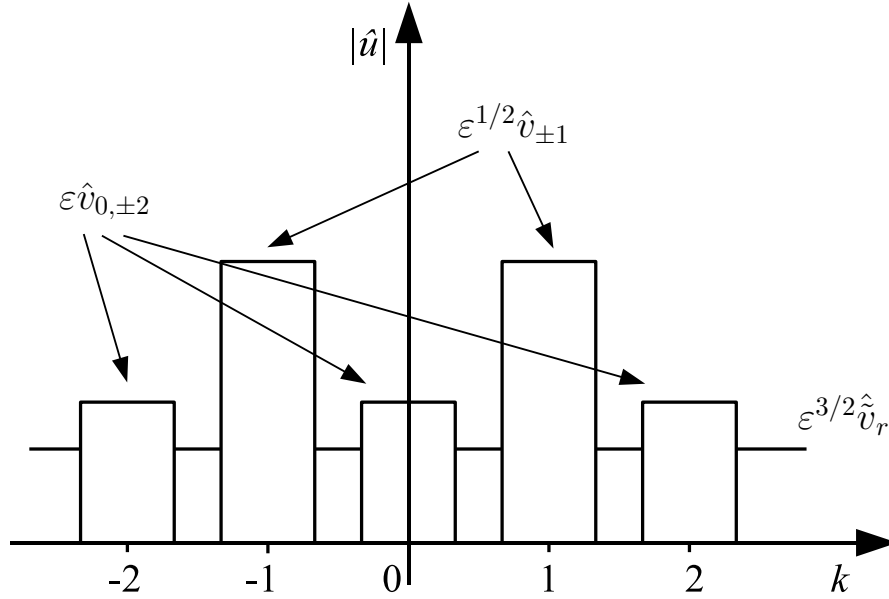


Abbildung 3.3: Verteilung und Größenordnung der Moden nach dem zweiten Iterationsschritt zur Zeit $t = 2\varepsilon^{-1/4}$ (vgl. Gleichung (3.7) sowie Bem. 2.7).

Für $\hat{v}_{0,\pm 2}$ bedeutet dies wegen $\hat{v}_s = O(1)$

$$\hat{v}_{0,\pm 2} = O(1),$$

womit gezeigt ist, dass sich auch bei $k = 0$ und $k = \pm 2$ nach der Zeit $t = 2\varepsilon^{-1/4}$ Moden aus dem Kontinuum herausbilden (siehe Abb. 3.3).

Die Moden bei $k = \pm 3$ untersuchen wir entsprechend, indem wir zunächst die soeben gewonnenen Erkenntnisse nutzen, was uns auf den Ansatz

$$\hat{u}(k, t) = \varepsilon^{1/2}\hat{v}_{\pm 1}(k, t) + \varepsilon\hat{v}_{0,\pm 2}(k, t) + \varepsilon^{3/2}\hat{v}_r(k, t) \quad (3.7)$$

führt, wobei auch $\hat{v}_r(k, t) = O(1)$ ist und durch die Aufspaltung

$$\begin{aligned} \hat{v}_r &= \hat{v}_{\pm 1n,\pm 3} + \hat{v}_{r(2)} \quad \text{mit} \quad \hat{v}_{\pm 1n,\pm 3} = (\chi_{1n} + \chi_{-1n} + \chi_3 + \chi_{-3})\hat{v}_r, \\ &\hat{v}_{r(2)} = \hat{v}_r - \hat{v}_{\pm 1n,\pm 3}, \end{aligned}$$

dargestellt wird. Einsetzen in unsere Differentialgleichung führt auf

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/2} \partial_t \hat{v}_{\pm 1} + \varepsilon \partial_t \hat{v}_{0, \pm 2} + \varepsilon^{3/2} \partial_t \hat{v}_r \\ = \lambda \varepsilon^{1/2} \hat{v}_{\pm 1} + \lambda \varepsilon \hat{v}_{0, \pm 2} + \lambda \varepsilon^{3/2} \hat{v}_r + N(\varepsilon^{1/2} \hat{v}_{\pm 1} + \varepsilon \hat{v}_{0, \pm 2} + \varepsilon^{3/2} \hat{v}_r) \end{aligned}$$

mit der Nichtlinearität

$$\begin{aligned} N(\varepsilon^{1/2} \hat{v}_{\pm 1} + \varepsilon \hat{v}_{0, \pm 2} + \varepsilon^{3/2} \hat{v}_r) \\ = \rho(\varepsilon^{1/2} \hat{v}_{\pm 1} + \varepsilon \hat{v}_{0, \pm 2} + \varepsilon^{3/2} \hat{v}_r)^{*2} + \gamma_1(\varepsilon^{1/2} \hat{v}_{\pm 1} + \varepsilon \hat{v}_{0, \pm 2} + \varepsilon^{3/2} \hat{v}_r)^{*3}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man den Träger von \hat{v}_r mit χ_r , erhalten wir somit für \hat{v}_r die Differentialgleichung

$$\partial_t \hat{v}_r = \lambda \hat{v}_r + \varepsilon^{-3/2} \left(\rho(\varepsilon \hat{v}_{\pm 1}^{*2} + 2\varepsilon^{3/2} \hat{v}_{\pm 1} * \hat{v}_{0, \pm 2} + O(\varepsilon^2)) + \gamma_1(\varepsilon^{3/2} \hat{v}_{\pm 1}^{*3} + O(\varepsilon^2)) \right) \chi_r.$$

Unter Berücksichtigung der obigen Aufspaltung für v_r , wobei $\chi_{r(2)}$ der Träger von $\hat{v}_{r(2)}$ ist, folgt für alle $t \in [2\varepsilon^{-1/4}, \kappa\varepsilon^{-1/4}]$

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{v}_{r(2)} &= \lambda \hat{v}_{r(2)} + \varepsilon^{-3/2} \left(\rho(\varepsilon \hat{v}_{\pm 1}^{*2} + 2\varepsilon^{3/2} \hat{v}_{\pm 1} * \hat{v}_{0, \pm 2} + O(\varepsilon^2)) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_1(\varepsilon^{3/2} \hat{v}_{\pm 1}^{*3} + O(\varepsilon^2)) \right) \chi_{r(2)} \\ &= \lambda \hat{v}_{r(2)} + B_{r(2)} \quad \text{mit } \|B_{r(2)}\|_{L^1(m-1)} = O(\varepsilon^{1/2}) \end{aligned}$$

und daraus mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel

$$\begin{aligned} \|\hat{v}_{r(2)}(t)\|_{L^1(m)} &\leq \|e^{\lambda(t-2\varepsilon^{-1/4})} \chi_{r(2)}\|_{L^1(m) \rightarrow L^1(m)} \|\hat{v}_{r(2)}(2\varepsilon^{-1/4})\|_{L^1(m)} \\ &\quad + \sup_{\tau \in [2\varepsilon^{-1/4}, \kappa\varepsilon^{-1/4}]} \|B_{r(2)}\|_{L^1(m-1)} \int_{2\varepsilon^{-1/4}}^t \|e^{\lambda(t-\tau)} \chi_{r(2)}\|_{L^1(m-1) \rightarrow L^1(m)} d\tau \\ &\leq e^{-\sigma(t-2\varepsilon^{-1/4})} \hat{v}_{r(2)}(2\varepsilon^{-1/4}) + C\varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich die Abschätzung

$$\sup_{t \in [3\varepsilon^{-1/4}, \kappa\varepsilon^{-1/4}]} \|\hat{v}_{r(2)}(t)\| \leq C\varepsilon^{1/2}, \quad (3.8)$$

was für die oben neu definierten Moden

$$\hat{v}_{\pm 1n, \pm 3} = O(1)$$

bedeutet. Bei $k = \pm 1$ und $k = \pm 3$ bilden sich demnach nach der Zeit $t = 3\varepsilon^{-1/4}$

weitere Moden der Größenordnung $O(\varepsilon^{3/2})$ heraus.

In völliger Analogie zum bisherigen Vorgehen können wir auf diesem Zwischenergebnis

$$\hat{u}(k, t) = \varepsilon^{1/2}\hat{v}_{\pm 1}(k, t) + \varepsilon\hat{v}_{0, \pm 2}(k, t) + \varepsilon^{3/2}\hat{\tilde{v}}_{\pm 1n, \pm 3}(k, t) + \varepsilon^2\hat{v}_{r(2)}(k, t)$$

aufbauend zeigen, dass die Lösung $\hat{u}(t)$ für $t \in [4\varepsilon^{-1/4}, \kappa\varepsilon^{-1/4}]$ die Darstellung

$$\hat{u}(k, t) = \varepsilon^{1/2}\hat{v}_{\pm 1}(k, t) + \varepsilon\hat{v}_{0, \pm 2}(k, t) + \varepsilon^{3/2}\hat{\tilde{v}}_{\pm 1n, \pm 3}(k, t) + \varepsilon^2\hat{v}_{0n, \pm 2n, \pm 4}(k, t) + \varepsilon^{5/2}\hat{v}_{r(3)}(k, t)$$

mit

$$\hat{v}_{0n, \pm 2n, \pm 4} = \hat{v}_{r(2)}(\chi_{0n} + \chi_{2n} + \chi_{-2n} + \chi_4 + \chi_{-4})$$

besitzt, wobei $\hat{v}_{\pm 1}, \hat{v}_{0, \pm 2}, \hat{v}_{\pm 1n, \pm 4}, \hat{v}_{0n, \pm 2, \pm 4}$ in $L^1(m)$ für alle $t \in [4\varepsilon^{-1/4}, \kappa\varepsilon^{-1/4}]$ $O(1)$ -beschränkt sind.

Damit ist Satz 3.1 bewiesen, und wir können tatsächlich von der in Abb. 3.1 graphisch veranschaulichten Modenverteilung ausgehen.

3.3 Konzentration der kritischen Moden

Die obigen Betrachtungen haben gezeigt, dass sich aus einer beliebigen, aber $O(\varepsilon^{1/2})$ kleinen Anfangsbedingung unserer KSSH-Gleichung nach einer Zeit T_1/ε^2 bei $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ Moden herausbilden, die von einer Größenordnung $O(\varepsilon^{1/2})$ bis $O(\varepsilon^2)$ sind, während die Beiträge in den übrigen k -Bereichen von der Größenordnung $O(\varepsilon^{5/2})$, d.h. stark gedämpft, sind. Die Modenbeiträge bei den kritischen Wellenzahlen $k_c = \pm 1$ liefern dabei den größten Beitrag. In Kapitel 2 haben wir gesehen, dass diese kritischen Moden der Ginzburg-Landau-Gleichung stark konzentriert sind, was wir schließlich beim Nachweis der Approximationseigenschaft ausgenutzt haben. Diese Konzentration wollen wir im folgenden für die sich aus dem Kontinuum heraus entwickelnden Lösungen der KSSH-Gleichung nachweisen.

3.3.1 Modenkonzentration bei einer einfacheren Modellgleichung

Zur Erklärung und Veranschaulichung der Beweismethode wollen wir zunächst die Konzentration für eine einfachere Modellgleichung betrachten, bevor wir dann zu unserem eigentlichen Problem übergehen.

Unsere exemplarische Gleichung lautet

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + \partial_x u^3.$$

Der Summand $\partial_x^2 u$ ist dabei gerade der Linearteil unserer Ginzburg-Landau-Gleichung, während $\partial_x u^3$ der Degeneriertheit der dortigen Nichtlinearität entspricht. Durch diese Vereinfachung erreichen wir zum einen eine Verschiebung der kritischen Wellenzahl zu $k_c = 0$, und zum anderen als Haupteffekt, dass aufgrund des Nichtvorhandenseins quadratischer Nichtlinearitäten der Nachweis der Konzentration in diesem Fall ohne eine zuvor durchgeführte Variablentransformation vergleichsweise einfach möglich ist. Unser Ziel ist es, den folgenden Satz zu zeigen.

Satz 3.2 (Konzentrationsatz 1) Für alle $C_1 > 0$ gibt es Konstanten $C_2, \varepsilon_0, T_1 > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ aus der Anfangsbedingung

$$\|\hat{u}(0)\|_{L^1(m)} \leq C_1 \varepsilon^{1/2}$$

folgt, dass

$$\|\hat{u}(T_1/\varepsilon^2)\|_{L^1(1,\varepsilon,0)} \leq C_2 \varepsilon^{1/2}$$

gilt, was aufgrund unserer Definition der $L^1(1, \varepsilon, 0)$ -Norm gleichbedeutend einer Konzentration von \hat{u} bei $k_c = 0$ nach der Zeit T_1/ε^2 ist.

Beweis:

Wir verwenden wieder den Ansatz aus Gleichung (3.1)

$$u = \varepsilon^{1/2} v,$$

so dass die Ausgangsgleichung für unsere Untersuchung in v

$$\partial_t v = \partial_x^2 v + \varepsilon \partial_x v^3$$

lautet. Nach Übergang in den k -Raum ist somit die Gleichung

$$\partial_t \hat{v} = -k^2 \hat{v} + \varepsilon i k \hat{v}^{*3}$$

zu betrachten, die wir unter Verwendung der Variation-der-Konstanten-Formel lösen:

$$\hat{v}(k, t) = e^{-k^2 t} \hat{v}(k, 0) + \varepsilon \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} i k \hat{v}^{*3}(k, \tau) d\tau. \quad (3.9)$$

Im ersten Schritt werden wir nun zeigen, dass

$$S(t) := \sup_{\tau \in [0, t]} \|\hat{v}(\tau)\|_{L^1(m)} = O(1) \quad (3.10)$$

gilt, und zwar auf der langen Zeitskala $t = T_1/\varepsilon^2$.

Mit der Abschätzung

$$\|e^{-k^2(t-\tau)}ik\|_{L^1(m)} \leq C(t-\tau)^{-1/2}$$

für den Integranden erhalten wir zunächst die Ungleichung

$$\begin{aligned} S(t) &\leq S(0) + \varepsilon S(t)^3 \int_0^t C(t-\tau)^{-1/2} d\tau \\ &= S(0) - \varepsilon S(t)^3 2C\sqrt{t-\tau} \Big|_0^t \\ &= S(0) + 2C\varepsilon\sqrt{t}S(t)^3. \end{aligned}$$

Gleichung (3.10) ist also beispielsweise dann erfüllt, wenn es ein $T_1 > 0$ gibt, so dass $S(T_1/\varepsilon^2) \leq 2S(0)$ gilt. Wir müssen also die Existenz eines solchen $T_1 > 0$ zeigen, für das

$$2C\varepsilon\sqrt{t}S(t)^3 \leq S(0) \quad (t = T_1/\varepsilon^2)$$

folgendermaßen abgeschätzt werden kann:

$$2C\varepsilon\sqrt{t}S(t)^3 \leq 2C\varepsilon\sqrt{t}(2S(0))^3 = 16C\varepsilon\sqrt{t}S(0)^3 \stackrel{!}{\leq} S(0).$$

Für t bedeutet das

$$t \leq \left(\frac{1}{16CS(0)^2} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon^2}$$

und weiter

$$T_1 \leq \left(\frac{1}{16CS(0)^2} \right)^2 .$$

Damit haben wir gezeigt, dass es tatsächlich ein solches $T_1 > 0$ gibt, für das

$$\hat{v}(T_1/\varepsilon^2) \in L^1(m) \tag{3.11}$$

von der Ordnung $O(1)$ ist.

Um schließlich die Konzentration der Mode bei $k = 0$ zeigen zu können, gliedert sich das weitere Vorgehen in zwei Teile, wobei wir unter Verwendung des gerade erhaltenen Zwischenresultats (3.11) zunächst $\hat{v}(T_1/\varepsilon^2) \in L^1(1/2, \varepsilon, 0)$ zeigen und anschließend darauf aufbauend durch erneute analoge Durchführung dieses letzten Schrittes

$$\hat{v}(T_1/\varepsilon^2) \in L^1(1, \varepsilon, 0)$$

beweisen werden.

Für die $L^1(1/2, \varepsilon, 0)$ -Norm von \hat{v} erhalten wir nach Einsetzen der mit der Variation-der-Konstanten-Formel erhaltenen Lösung \hat{v} die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\hat{v}(t)\|_{L^1(1/2, \varepsilon, 0)} &= \int |\hat{v}(t)| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} dk \\ &\stackrel{(3.9)}{=} \int \left| e^{-k^2 t} \hat{v}(k, 0) + \varepsilon \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} ik \hat{v}(k, \tau) d\tau \right| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} dk \\ &\leq \int |e^{-k^2 t} \hat{v}(k, 0)| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} dk + \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon \int \left| \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} ik \hat{v}(k, \tau)^{*3} d\tau \right| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} dk.$$

Die weitere Abschätzung wollen wir getrennt für die beiden Summanden vornehmen. Für den ersten gilt bei $t = T_1/\varepsilon^2$:

$$\begin{aligned} \int |e^{-k^2 t} \hat{v}(k, 0)| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} dk &\leq \sup_k \left| e^{-k^2 t} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} \right| \int |\hat{v}(k, 0)| dk \\ &= \sup_k \left| e^{-k^2 t} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} \right| \|\hat{v}(0)\|_{L^1(0)} \\ &\stackrel{\xi^2 = k^2 t}{=} \sup_{\xi} \left| e^{-\xi^2} \left(1 + \left| \frac{\xi}{\varepsilon t^{1/2}} \right| \right)^{1/2} \right| \|\hat{v}(0)\|_{L^1(0)} \\ &\leq C \max\{1, \varepsilon^{-1/2} t^{-1/4}\} \|\hat{v}(0)\|_{L^1(0)} \\ &\stackrel{t=T_1/\varepsilon^2}{\leq} C \max\{1, T_1^{-1/4}\} \|\hat{v}(0)\|_{L^1(0)} = O(1). \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist nach der Zeit T_1/ε^2 ebenfalls von der Größenordnung $O(1)$, was sich folgendermaßen zeigen lässt:

$$\begin{aligned} \varepsilon \int \left| \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} ik \hat{v}(k, \tau)^{*3} d\tau \right| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} dk \\ \leq \varepsilon \sup_k \left| \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} |k| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} d\tau \right| \int \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\hat{v}(k, \tau)^{*3}| dk \\ \leq \sup_k \left| \int_0^t \varepsilon^2 e^{-k^2(t-\tau)} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{3/2} d\tau \right| S(t)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\xi^2=k^2(t-\tau)}{\leq} \int_0^t \varepsilon^2 \sup_{\xi} \left| e^{-\xi^2} \left(1 + \left| \frac{\xi}{\varepsilon(t-\tau)^{1/2}} \right| \right)^{3/2} \right| d\tau S(t)^3 \\
& \leq \int_0^t \varepsilon^2 C \max\{1, (t-\tau)^{-3/4} \varepsilon^{-3/2}\} d\tau S(t)^3 \\
& \leq \varepsilon^2 C \max\{t, t^{1/4} \varepsilon^{-3/2}\} S(t)^3 \\
& \stackrel{t=T_1/\varepsilon^2}{=} C \max\{T_1, T_1^{1/4}\} S(t)^3 \\
& = O(1).
\end{aligned}$$

Damit haben wir das wichtige Zwischenergebnis $\hat{v}(T_1/\varepsilon^2) \in L^1(1/2, \varepsilon, 0)$ erhalten, was wir bei der nun folgenden Betrachtung der für die Konzentration maßgeblichen $L^1(1, \varepsilon, 0)$ -Norm von \hat{v} verwenden werden. Entsprechendes gilt natürlich auch für alle $t \in [T_1/\varepsilon^2, 2T_1/\varepsilon^2]$.

Es ist

$$\begin{aligned}
\|\hat{v}(t)\|_{L^1(1, \varepsilon, 0)} &= \int |\hat{v}(t)| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right) dk \\
&\stackrel{(3.9)}{=} \int \left| e^{-k^2(t-T_1/\varepsilon^2)} \hat{v}(k, T_1/\varepsilon^2) \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \int_{T_1/\varepsilon^2}^t e^{-k^2(t-\tau)} ik \hat{v}(k, \tau)^{*3} d\tau \right| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right) dk \\
&\leq \int \left| e^{-k^2(t-T_1/\varepsilon^2)} \hat{v}(k, T_1/\varepsilon^2) \right| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right) dk + \\
&\quad + \varepsilon \int \left| \int_{T_1/\varepsilon^2}^t e^{-k^2(t-\tau)} ik \hat{v}(k, \tau)^{*3} d\tau \right| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right) dk.
\end{aligned}$$

Wir beginnen wieder mit dem ersten Summanden und schätzen für die Zeit $t =$

$2T_1/\varepsilon^2$ ab:

$$\begin{aligned}
& \int \left| e^{-k^2(t-T_1/\varepsilon^2)} \hat{v}(k, T_1/\varepsilon^2) \right| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right) dk \\
& \leq \sup_k \left| e^{-k^2(t-T_1/\varepsilon^2)} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} \right| \int |\hat{v}(k, T_1/\varepsilon^2)| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} dk \\
& \stackrel{t=2T_1/\varepsilon^2}{\leq} C \max\{1, T_1^{-1/4}\} \|\hat{v}(T_1/\varepsilon^2)\|_{L^1(1/2, \varepsilon, 0)} \\
& = O(1).
\end{aligned}$$

Bei der Betrachtung des zweiten Summanden gehen wir entsprechend vor:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int \left| \int_{T_1/\varepsilon^2}^t e^{-k^2(t-\tau)} ik \hat{v}(k, \tau)^{*3} d\tau \right| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right) dk \\
& \leq \varepsilon \sup_k \left| \int_{T_1/\varepsilon^2}^t e^{-k^2(t-\tau)} |k| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} d\tau \right| \\
& \quad \cdot \int_{T_1/\varepsilon^2 \leq \tau \leq 2T_1/\varepsilon^2} \sup |\hat{v}(k, \tau)^{*3}| \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} dk \\
& \leq \sup_k \left| \int_{T_1/\varepsilon^2}^t \varepsilon^2 e^{-k^2(t-\tau)} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{3/2} d\tau \right| \tilde{S}(t)^3 \\
& \stackrel{t=2T_1/\varepsilon^2}{\leq} C \max\{T_1, T_1^{1/4}\} \tilde{S}(t)^3 \\
& = O(1)
\end{aligned}$$

mit $\tilde{S}(t) = \sup_{T_1/\varepsilon^2 \leq \tau \leq 2T_1/\varepsilon^2} \|\hat{v}(t)\|_{L^1(1/2, \varepsilon, 0)}$.

Insgesamt folgt hieraus also $\hat{v}(2T_1/\varepsilon^2) \in L^1(1, \varepsilon, 0)$. Analog können wir

$\hat{v}(\kappa T_1/\varepsilon^2) \in L^1(\kappa/2, \varepsilon, 0)$ zeigen. Demnach tritt bei der kritischen Mode $k_c = 0$ nach einer Zeit $O(1/\varepsilon^2)$ eine Kontraktion auf.

3.3.2 Modenkonzentration bei der KSSH-Gleichung

Im weiteren wollen wir zeigen, dass auch die von uns betrachtete KSSH-Gleichung

$$\partial_t u = -(1 + \partial_x^2)^2 u + \varepsilon^2 u - \gamma u^3 - \beta u \partial_x u$$

und die zugehörige verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichung mit der schematischen Darstellung

$$\partial_T A = A + \partial_x^2 A + |A|^2 A + |A|^2 \partial_x A + A^2 \partial_x \bar{A} + |A|^4 A$$

ein der soeben betrachteten Modellgleichung entsprechendes Konzentrationsverhalten besitzt. Die obige Vorgehensweise ist dabei jedoch nicht direkt anwendbar. Der Grund hierfür ist die Tatsache, dass sich das Faltungsprodukt $G(\hat{u}_1, \hat{u}_1, \hat{u}_{-1})$ nicht als Ableitung schreiben lässt.

Modellgleichung für eine quadratische Nichtlinearität

Aufgrund der Tatsache, dass die Existenz der Lösung auf der langen Zeitskala $O(1/\varepsilon^2)$ nur mit Hilfe der Konzentration der kritischen Moden bei $k_c = \pm 1$ gezeigt werden kann, stehen wir nun vor einer neuen Schwierigkeit, denn andererseits ist die Existenz der Lösung auf der langen $O(1/\varepsilon^2)$ -Zeitskala Voraussetzung dafür, dass die Konzentration der Moden überhaupt bewiesen werden kann. Wir beseitigen dieses Dilemma, indem wir eine zeitabhängige Norm einführen, die es uns trotz der gegenseitigen Abhängigkeit von Konzentration und Existenz auf der langen Zeitskala ermöglicht, beide Fragestellungen gleichzeitig zu betrachten. Dazu untersuchen wir im weiteren zunächst die nichtlinearen Terme.

Als erstes betrachten wir die exemplarische Modellgleichung

$$\partial_t v = \partial_x^2 v + \varepsilon v \partial_x v,$$

wobei wir anders als bei der vorigen Modellgleichung nicht ausnutzen wollen, dass sich $v \partial_x v$ auch als $\frac{1}{2} \partial_x v^2$ schreiben lässt. Geht man in den Fourierraum über, ist zu zeigen, dass für die Lösungen \hat{v} der Gleichung

$$\partial_t \hat{v} = -k^2 \hat{v} + \varepsilon \hat{v} * ik \hat{v}$$

folgender Satz gilt:

Satz 3.3 (Konzentrationsatz 2) *Für alle $C_1 > 0$ gibt es Konstanten $C_2, \varepsilon_0, T_1 > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ aus der Anfangsbedingung*

$$\|\hat{v}(0)\|_{L^1(m)} \leq C_1$$

von $\partial_t \hat{v} = -k^2 \hat{v} + \varepsilon \hat{v} * ik \hat{v}$ folgt, dass

$$\|\hat{v}(T_1/\varepsilon^2)\|_{L^1(1,\varepsilon,0)} \leq C_2$$

gilt, d.h. es liegt eine Konzentration von \hat{v} bei $k_c = 0$ nach der Zeit T_1/ε^2 vor.

Der Beweis basiert auf der Abschätzung der mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel erhaltenen Lösung

$$\hat{v}(k, t) = e^{-k^2 t} \hat{v}_0(k) + \varepsilon \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} (\hat{v} * ik \hat{v})(k, \tau) d\tau. \quad (3.12)$$

Dabei erweist es sich als vorteilhaft, die beiden von t abhängigen Funktionen $a(t)$ und $b(t)$ einzuführen, die folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned}
a(t) &:= \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\hat{v}(\tau)\|_{L^1(0)} \\
b(t) &:= \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} |\hat{v}(k, \tau)| \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| dk
\end{aligned}$$

Aus der Beschränktheit von $a(t)$ und $b(t)$ folgt dann nämlich die Konzentration der Mode bei $k = 0$.

Als erstes schätzen wir $a(t)$ ab:

$$\begin{aligned}
a(t) &= \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left\| e^{-k^2 \tau} \hat{v}_0(k) + \varepsilon \int_0^\tau e^{-k^2(\tau-s)} (\hat{v} * ik\hat{v})(k, s) ds \right\|_{L^1(0)} \\
&\leq \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left\| e^{-k^2 \tau} \hat{v}_0 \right\|_{L^1(0)} \\
&\quad + \varepsilon \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int_0^\tau \|e^{-k^2(\tau-s)}\|_{L^1(0) \rightarrow L^1(0)} \|\hat{v}(s)\|_{L^1(0)} \|ik\hat{v}(s)\|_{L^1(0)} ds \\
&\leq Ca(0) + C\varepsilon a(t) \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int_0^\tau \left\| \frac{k}{\varepsilon} (\varepsilon^2 s)^{1/2} \hat{v}(s) \right\|_{L^1(0)} (\varepsilon^2 s)^{-1/2} \varepsilon ds \\
&\leq Ca(0) + Ca(t) \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int_0^\tau b(s) \varepsilon^2 (\varepsilon^2 s)^{-1/2} ds \\
&\stackrel{S=\varepsilon^2 s}{\leq} Ca(0) + Ca(t)b(t) \int_0^{\varepsilon^2 t} S^{-1/2} dS \\
&= C_{a1}a(0) + C_{a2}T_1^{1/2} a(T_1/\varepsilon^2) b(T_1/\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die lange Zeitskala $t = T_1/\varepsilon^2$ eingesetzt wurde.

Für die Abschätzung von $b(t)$ gehen wir entsprechend vor. Zur Verbesserung der Übersicht betrachten wir die beiden Summanden in (3.12) getrennt und bilden das Supremum erst zum Schluss. Zunächst der erste Term:

$$\begin{aligned}
\int (\varepsilon^2 t)^{1/2} |e^{-k^2 t} \hat{v}_0(k)| \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| dk &\leq (\varepsilon^2 t)^{1/2} \sup_k \left| e^{-k^2 t} \frac{k}{\varepsilon} \right| \int |\hat{v}_0(k)| dk \\
&\leq C \|\hat{v}_0\|_{L^1(0)} \\
&\leq Ca(0).
\end{aligned}$$

Für den zweiten Term gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int \left| (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \varepsilon \int_0^\tau e^{-k^2(\tau-s)} (\hat{v} * ik\hat{v})(k, s) \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| ds \right| dk \\
&\leq (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \varepsilon \int_0^\tau \int e^{-k^2(\tau-s)} |(\hat{v} * ik\hat{v})(s)| \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| dk ds \\
&\leq (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \varepsilon \int_0^\tau \sup_k \left| e^{-k^2(\tau-s)} \frac{k}{\varepsilon} \right| \int |(\hat{v} * ik\hat{v})(k, s)| dk ds \\
&\leq (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \varepsilon \int_0^\tau \sup_k \left| e^{-k^2(\tau-s)} \frac{k}{\varepsilon} \right| \|\hat{v}(s)\|_{L^1(0)} \|ik\hat{v}(s)\|_{L^1(0)} ds \\
&= (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \varepsilon \int_0^\tau \sup_k \left| e^{-k^2(\tau-s)} \frac{k}{\varepsilon} \right| \|\hat{v}(s)\|_{L^1(0)} \left\| \frac{k}{\varepsilon} (\varepsilon^2 s)^{1/2} \hat{v}(s) \right\|_{L^1(0)} \varepsilon (\varepsilon^2 s)^{-1/2} ds \\
&\leq (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} a(\tau) b(\tau) \int_0^\tau \sup_k \left| e^{-k^2(\tau-s)} k \right| s^{-1/2} ds \\
&\leq (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} a(\tau) b(\tau) \int_0^\tau C(\tau-s)^{-1/2} s^{-1/2} ds \\
&\leq C(\varepsilon^2 \tau)^{1/2} a(\tau) b(\tau) \leq \sup_{0 \leq \tau \leq t} C(\varepsilon^2 \tau)^{1/2} a(\tau) b(\tau) \\
&\stackrel{t=T_1/\varepsilon^2}{\leq} CT_1^{1/2} a(T_1/\varepsilon^2) b(T_1/\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also auf der langen Zeitskala $t = T_1/\varepsilon^2$ für $b(t)$ die Abschätzung

$$b(t) \leq C_{b1}a(0) + C_{b2}(\varepsilon^2 t)^{1/2}a(t)b(t)$$

gefunden, d.h. die beiden Ungleichungen, denen $a(t)$ und $b(t)$ genügen müssen, hängen gegenseitig voneinander ab. Dies ermöglicht eine Fortführung der Abschätzung bis zur Zeit $T_1 = \varepsilon^2 t$, wenn zum einen

$$C_{a2}(\varepsilon^2 t)^{1/2}a(t)b(t) \leq C_{a1}a(0)$$

und zum anderen

$$C_{b2}(\varepsilon^2 t)^{1/2}a(t)b(t) \leq C_{b1}a(0)$$

gilt. Dies ist erfüllt, falls T_1 so klein ist, dass sowohl

$$C_{a2}C_{b1}T_1^{1/2}a(0) \leq \frac{1}{4}$$

also auch

$$C_{a1}C_{b2}T_1^{1/2}a(0) \leq \frac{1}{4}$$

gelten. Damit folgen die beiden Ungleichungen

$$a(T_1/\varepsilon^2) \leq 2C_{a1}a(0)$$

und

$$b(T_1/\varepsilon^2) \leq 2C_{b1}a(0) ,$$

woraus die Beschränktheit von $a(T_1/\varepsilon^2)$ und $b(T_1/\varepsilon^2)$ wegen $\hat{v}_0 \in L^1(m)$ unmittelbar ersichtlich ist.

Abschließend bleibt noch zu zeigen, dass hieraus wiederum die Konzentration der Mode bei $k = 0$ zum Zeitpunkt T_1 folgt. Dazu betrachten wir die für die Konzentrationsuntersuchung maßgebliche $L^1(1, \varepsilon, 0)$ -Norm von $\hat{v}(k, t)$:

$$\begin{aligned}
\|\hat{v}(t)\|_{L^1(1, \varepsilon, 0)} &= \int \left| \hat{v}(k, t) \left(1 + \frac{k}{\varepsilon}\right) \right| dk \\
&\leq \int |\hat{v}(k, t)| dk + \int \left| \hat{v}(k, t) \left(\frac{k}{\varepsilon}\right) \right| dk \\
&= \|\hat{v}(t)\|_{L^1(0)} + (\varepsilon^2 t)^{-1/2} \int (\varepsilon^2 t)^{1/2} |\hat{v}(k, t)| \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| dk \\
&\leq a(t) + (\varepsilon^2 t)^{-1/2} b(t).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Beschränktheit von $a(t)$ und $b(t)$ erhalten wir nun zur Zeit T_1 die Beschränktheit von $\|\hat{v}\|_{L^1(1, \varepsilon, 0)}$:

$$\begin{aligned}
\|\hat{v}(T_1/\varepsilon^2)\|_{L^1(1, \varepsilon, 0)} &\leq a(T_1/\varepsilon^2) + b(T_1/\varepsilon^2) \leq 2C_{a1}a(0) + 2T_1^{-1/2}C_{b1}a(0) \\
&\leq 2C_{a1}\|\hat{v}(0)\|_{L^1(m)} + 2T_1^{-1/2}C_{b1}\|\hat{v}(0)\|_{L^1(m)}.
\end{aligned}$$

■

Damit ist Satz 3.3 bewiesen, d.h. für die Lösung unserer Modellgleichung $\partial_t \hat{v} = -k^2 \hat{v} + \varepsilon \hat{v} * ik \hat{v}$ folgt aus $\hat{v}(k, 0) \in L^1$ die Konzentration der Mode bei $k_c = 0$ bis zum Zeitpunkt T_1 .

Modenkonzentration bei der KSSH-Gleichung

Auf der Basis dieses Ergebnisses können wir nun schließlich die Untersuchung auf unsere KSSH-Gleichung (1.2) ausdehnen. Das Resultat dieser Untersuchungen formulieren wir im folgenden

Satz 3.4 (Zweiter Attraktivitätssatz) Für alle $C_1 > 0$ gibt es Konstanten $\varepsilon_0 > 0$, $C_2 > 0$, $T_1 > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ folgendes gilt: Sei $u(\cdot, 0)$ eine Anfangsbedingung des Kuramoto-Shivashinsky-Swift-Hohenberg-Modells (1.2) mit $\|\hat{u}(\cdot, 0)\|_{L^1(m)} \leq C_1 \varepsilon^{1/2}$. Dann erfüllt die Lösung $\hat{u} = \hat{u}(k, t)$ für $t = T_1/\varepsilon^2$ mit der Notation aus Kapitel 2 (Gleichung (2.12)) die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_0(T_1/\varepsilon^2)\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon, \\ \|\hat{u}_2(T_1/\varepsilon^2)\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon, \\ \|\hat{u}_{0n}(T_1/\varepsilon^2)\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon^2, \\ \|\hat{u}_{2n}(T_1/\varepsilon^2)\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon^2, \\ \|\hat{u}_1(T_1/\varepsilon^2)\|_{L^1(1,\varepsilon,1)} &\leq C_2 \varepsilon^{1/2}, \\ \|\hat{u}_{1n}(T_1/\varepsilon^2)\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon^{3/2}, \\ \|\hat{u}_3(T_1/\varepsilon^2)\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon^{3/2}, \\ \|\hat{u}_4(T_1/\varepsilon^2)\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon^2, \\ \|\hat{u}_r(T_1/\varepsilon^2)\|_{L^1(m)} &\leq C_2 \varepsilon^{5/2}. \end{aligned}$$

Analoges gilt für die $\hat{u}...$ mit negativen Indizes.

Dies ist der vollständige Attraktivitätssatz, der das Hauptergebnis dieses Kapitels darstellt. Danach entwickelt sich die zu einer beliebigen, aber kleinen Anfangsbedingung gehörende Lösung von (1.2) so, dass sich zusätzlich zu der bereits in Satz 3.1 gefundenen Modenstruktur nach der langen Zeit T_1/ε^2 mit beliebigem, aber festem $T_1 > 0$ bei den kritischen Wellenzahlen $k_c = \pm 1$ eine Kontraktion der Moden herausbildet, so dass die Lösung dann die in Abb. 3.4 gezeigte Fourierdarstellung besitzt, was gleichbedeutend damit ist, dass sich u im x -Raum als

$$u\left(x, T_1/\varepsilon^2\right) = \varepsilon^{1/2} A(\varepsilon x) e^{ix} + \varepsilon^{1/2} \bar{A}(\varepsilon x) e^{-ix} + O(\varepsilon)$$

schreiben lässt, wobei

$$\sup_{X \in \mathbb{R}} (|A(X)| + |\partial_X A(X)|) = O(1)$$

gilt.

Beweis von Satz 3.4:

In Kapitel 2 hatten wir in Gleichung (2.19) nach Durchführung der Variablentransformation

$$\begin{aligned}\hat{v}_0 &= -2\lambda^{-1}\chi_0\rho \hat{v}_1 * \hat{v}_{-1} + \varepsilon\hat{w}_0, \\ \hat{v}_2 &= -\lambda^{-1}\chi_2\rho \hat{v}_1 * \hat{v}_1 + \varepsilon\hat{w}_2,\end{aligned}\tag{3.13}$$

folgendes System erhalten:

$$\begin{aligned}\partial_t\hat{w}_0 &= \lambda\hat{w}_0 + \tilde{H}_0 + \tilde{F}_0, \\ \partial_t\hat{v}_{0n} &= \lambda\hat{v}_{0n} + \tilde{H}_{0n}, \\ \partial_t\hat{v}_1 &= \lambda\hat{v}_1 + \varepsilon G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1}) + \tilde{H}_1, \\ \partial_t\hat{v}_{1n} &= \lambda\hat{v}_{1n} + \tilde{H}_{1n}, \\ \partial_t\hat{v}_{2n} &= \lambda\hat{v}_{2n} + \tilde{H}_{2n}, \\ \partial_t\hat{w}_2 &= \lambda\hat{w}_2 + \tilde{H}_2 + \tilde{F}_2, \\ \partial_t\hat{v}_3 &= \lambda\hat{v}_3 + \tilde{H}_3, \\ \partial_t\hat{v}_4 &= \lambda\hat{v}_4 + \tilde{H}_4, \\ \partial_t\hat{v}_r &= \lambda\hat{v}_r + \tilde{H}_r,\end{aligned}\tag{3.14}$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{F}_0 &= \varepsilon^{-1}2\lambda^{-1}\chi_0\rho(\partial_t\hat{v}_1 * \hat{v}_{-1} + \hat{v}_1 * \partial_t\hat{v}_{-1}), \\ \tilde{F}_2 &= \varepsilon^{-1}2\lambda^{-1}\chi_2\rho(\partial_t\hat{v}_1 * \hat{v}_1).\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|\tilde{H}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} &\leq C\varepsilon^2 \left(\|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \varepsilon\|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} \right), \\ \|\tilde{H}_s\|_{L^1(m-1)} &\leq C \left(\|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \varepsilon\|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} \right),\end{aligned}$$

solange

$$\|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} + \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} \leq C_v$$

mit einer beliebigen, aber festen Konstante $C_v > 0$ ist, wobei weiterhin

$$\tilde{H}_s := (\tilde{H}_0, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3, \tilde{H}_4, \tilde{H}_{0n}, \tilde{H}_{1n}, \tilde{H}_{2n}, \tilde{H}_r),$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{H}_s\|_{L^1(m)} &:= \|\tilde{H}_0\|_{L^1(m)} + \|\tilde{H}_2\|_{L^1(m)} + \|\tilde{H}_3\|_{L^1(m)} + \|\tilde{H}_4\|_{L^1(m)} + \|\tilde{H}_{0n}\|_{L^1(m)} + \\ &+ \|\tilde{H}_{1n}\|_{L^1(m)} + \|\tilde{H}_{2n}\|_{L^1(m)} + \|\tilde{H}_r\|_{L^1(m)}. \end{aligned}$$

Bislang haben wir lediglich gezeigt, dass $\hat{w}_0|_{t=4\varepsilon^{-1/4}}$ und $\hat{w}_{\pm 2}|_{t=4\varepsilon^{-1/4}}$ in $L^1(m)$ von der Ordnung $O(\varepsilon^{-1})$ sind. Um beweisen zu können, dass diese Terme tatsächlich sogar von der Ordnung $O(1)$ sind, müssen wir genauso wie in Kapitel 2 die Terme $\tilde{F}_{0,\pm 2}$ mittels der Konzentration der Moden als $O(1)$ abschätzen. Zum Beweis der Modenkonzentration und um das bisherige Vorgehen, das bei unseren Modellgleichungen zum Ziel geführt hat, problemloser übertragen zu können, vernachlässigen wir zunächst den Summanden \tilde{H}_1 , d.h. wir betrachten das Teilproblem

$$\partial_t \hat{v}_1 = \lambda \hat{v}_1 + \varepsilon G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1}),$$

und transformieren die Gleichung noch derart, dass die zu betrachtende kritische Mode ($k_c = 1$) nun ebenfalls bei 0 liegt. Jetzt können wir die Lösung von (3.14) betrachten, indem wir die Variation-der-Konstanten-Formel benutzen:

$$\hat{v}_1(t) = e^{\lambda(k)t} \hat{v}_1(k, 0) + \varepsilon \int_0^t e^{\lambda(k)(t-s)} G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1})(k, s) ds.$$

Die für die Abschätzung entscheidenden Hilfsgrößen seien wieder mit a und b bezeichnet und folgendermaßen definiert:

$$a(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\hat{v}_1(\tau)\|_{L^1(0)}, \quad (3.15)$$

$$b(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} |\hat{v}_1(k, \tau)| \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| dk. \quad (3.16)$$

Für $a(t)$ gilt dann die Ungleichung

$$\begin{aligned} a(t) &\leq \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left(\|e^{\lambda(k)\tau} \hat{v}_1(k, 0)\|_{L^1(0)} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \int_0^\tau \|e^{\lambda(k)(\tau-s)}\|_{L^1(0) \rightarrow L^1(0)} \|G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1})(s)\|_{L^1(0)} ds \right) \end{aligned}$$

$$\leq a(0) + C\varepsilon \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int_0^\tau \|G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1})(s)\|_{L^1(0)} ds. \quad (3.17)$$

Mit der Definition aus Gleichung (2.20) sowie analogen Überlegungen wie im Anschluss an Gleichung (2.33), diesmal natürlich mit $k_c = 0$, folgt

$$\begin{aligned} \|G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1})\|_{L^1(0)} &= \\ &= \iiint |g(k, k - \ell, \ell - \ell_1, \ell_1)| |\hat{v}_1(k - \ell)| |\hat{v}_1(\ell - \ell_1)| |\hat{v}_{-1}(\ell_1)| d\ell_1 d\ell dk \\ &\leq \iiint C(|k| + |k - \ell| + |\ell - \ell_1| + |\ell_1|) \\ &\quad \cdot |\hat{v}_1(k - \ell)| |\hat{v}_1(\ell - \ell_1)| |\hat{v}_{-1}(\ell_1)| d\ell_1 d\ell dk \\ &\leq \iiint C(|k - \ell + \ell - \ell_1 + \ell_1| + |k - \ell| + |\ell - \ell_1| + |\ell_1|) \\ &\quad \cdot |\hat{v}_1(k - \ell)| |\hat{v}_1(\ell - \ell_1)| |\hat{v}_{-1}(\ell_1)| d\ell_1 d\ell dk. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung setzen wir fort:

$$\begin{aligned} &\leq \iiint C(|k - \ell| + |\ell - \ell_1| + |\ell_1| + |k - \ell| + |\ell - \ell_1| + |\ell_1|) \cdot \\ &\quad \cdot |\hat{v}_1(k - \ell)| |\hat{v}_1(\ell - \ell_1)| |\hat{v}_{-1}(\ell_1)| d\ell_1 d\ell dk \\ &\leq \iiint 2C|k - \ell| |\hat{v}_1(k - \ell)| |\hat{v}_1(\ell - \ell_1)| |\hat{v}_{-1}(\ell_1)| d\ell_1 d\ell dk \\ &\quad + \iiint 2C|\ell - \ell_1| |\hat{v}_1(k - \ell)| |\hat{v}_1(\ell - \ell_1)| |\hat{v}_{-1}(\ell_1)| d\ell_1 d\ell dk \\ &\quad + \iiint 2C|\ell_1| |\hat{v}_1(k - \ell)| |\hat{v}_1(\ell - \ell_1)| |\hat{v}_{-1}(\ell_1)| d\ell_1 d\ell dk. \end{aligned}$$

Diese drei Summanden, die jeder für sich wieder eine Faltung darstellen, betrachten wir nun getrennt voneinander, wobei wir mit dem letzten beginnen:

$$2C \iiint |\ell_1| |\hat{v}_1(k - \ell)| |\hat{v}_1(\ell - \ell_1)| |\hat{v}_{-1}(\ell_1)| d\ell_1 d\ell dk$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2C \int |\hat{v}_1(\ell)| d\ell \int |\hat{v}_1(\ell)| d\ell \int |\ell_1| |\hat{v}_{-1}(\ell_1)| d\ell_1 \\
&\leq 2C \|\hat{v}_1\|_{L^1(0)} \|\hat{v}_1\|_{L^1(0)} \tau^{-1/2} \int \left| \frac{\ell_1}{\varepsilon} \right| |\hat{v}_{-1}(\ell_1)| (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} d\ell_1 \\
&\leq 2C \tau^{-1/2} a(\tau) a(\tau) b(\tau).
\end{aligned}$$

Völlig analog zeigen wir für den ersten Summanden

$$\begin{aligned}
&2C \iiint |k - \ell| |\hat{v}_1(k - \ell)| |\hat{v}_1(\ell - \ell_1)| |\hat{v}_{-1}(\ell_1)| d\ell_1 d\ell dk \\
&\leq 2C \int |k - \ell| |\hat{v}_1(k - \ell)| dk \int |\hat{v}_1(\ell - \ell_1)| d\ell \int |\hat{v}_{-1}(\ell_1)| d\ell_1 \\
&\leq 2C \tau^{-1/2} a(\tau) a(\tau) b(\tau)
\end{aligned}$$

und für den zweiten

$$\begin{aligned}
&2C \iiint |\ell - m| |\hat{v}_1(k - \ell)| |\hat{v}_1(\ell - \ell_1)| |\hat{v}_{-1}(\ell_1)| d\ell_1 d\ell dk \\
&\leq 2C \int |\ell - \ell_1| |\hat{v}_1(\ell - \ell_1)| dk \int |\hat{v}_1(k - \ell)| d\ell \int |\hat{v}_{-1}(\ell_1)| d\ell_1 \\
&\leq 2C \tau^{-1/2} a(\tau) a(\tau) b(\tau).
\end{aligned}$$

Somit gilt die Ungleichung

$$\|G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1})\|_{L^1(0)} \leq 6C \tau^{-1/2} a(\tau) a(\tau) b(\tau),$$

die wir in (3.17) einsetzen:

$$a(t) \leq Ca(0) + 6C\varepsilon \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int_0^\tau a(s) a(s) b(s) s^{-1/2} ds$$

$$\leq C_{a1}a(0) + C_{a2}T_1^{1/2}a(t)a(t)b(t).$$

Ausgehend von der Definition von $b(t)$ ergibt sich nach Einsetzen der Variation-der-Konstanten-Formel

$$\begin{aligned} b(t) &\leq \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \left| e^{\lambda(k)\tau} \hat{v}_1(k, 0) \frac{k}{\varepsilon} \right| dk \\ &\quad + \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \varepsilon \left| \int_0^\tau e^{\lambda(k)(\tau-s)} G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1})(k, s) ds \right| \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| dk. \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden gilt dabei in völliger Analogie zu (3.17)

$$\int (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \left| e^{\lambda(k)\tau} \hat{v}_1(k, 0) \frac{k}{\varepsilon} \right| dk \leq C \|\hat{v}_1(\cdot, 0)\|_{L^1(0)} = Ca(0).$$

Beim zweiten Summanden nutzen wir die gerade gezeigte Abschätzung für $\|G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1})\|_{L^1(0)}$:

$$\begin{aligned} &\int (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \varepsilon \left| \int_0^\tau e^{\lambda(k)(\tau-s)} G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1})(k, s) ds \right| \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| dk \\ &\leq (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \varepsilon \int_0^\tau \sup_k \left| e^{\lambda(k)(\tau-s)} \frac{k}{\varepsilon} \right| \int |G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1})(k, s)| dk ds \\ &\leq (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \int_0^\tau \sup_k \left| e^{\lambda(k)(\tau-s)} k \right| 6C s^{-1/2} a(s) a(s) b(s) ds \\ &\leq (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} 6Ca(\tau) a(\tau) b(\tau) \int_0^\tau \sup_k \left| e^{\lambda(k)(\tau-s)} k \right| s^{-1/2} ds \\ &\leq (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} 6Ca(\tau) a(\tau) b(\tau) C \int_0^\tau (\tau - s)^{-1/2} s^{-1/2} ds \end{aligned}$$

$$\leq (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} C a(\tau) a(\tau) b(\tau).$$

Insgesamt gilt also mit $T_1 = \varepsilon^2 t$

$$b(t) \leq C_{b1} a(0) + C_{b2} T_1^{1/2} a(t)^2 b(t). \quad (3.18)$$

Die Beschränktheit von $a(t)$ und $b(t)$ kann nun unter der Annahme

$$C_{a2} T_1^{1/2} a(t)^2 b(t) \leq C_{a1} a(0)$$

und

$$C_{b2} T_1^{1/2} a(t)^2 b(t) \leq C_{b1} a(0)$$

gezeigt werden.

Diese Annahme ist richtig, falls $T_1 > 0$ und unabhängig von $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass zum einen

$$C_{a2} C_{b1} T_1^{1/2} a(0) a(0) \leq \frac{1}{8}$$

und zum anderen

$$C_{a1} C_{b2} T_1^{1/2} a(0) a(0) \leq \frac{1}{8}$$

Wir erhalten also

$$a(T_1/\varepsilon^2) \leq 2C_{a1} a(0)$$

und

$$b(T_1/\varepsilon^2) \leq 2C_{b1} a(0),$$

d.h. sowohl $a(T_1/\varepsilon^2)$ und auch $b(T_1/\varepsilon^2)$ sind wegen $\hat{v}(0) \in L^1(m)$ beschränkt. Aufgrund der oben bereits gezeigten Äquivalenz von $a(t)$ und $b(t)$ auf der einen Seite und der $L^1(1, \varepsilon, 0)$ -Norm von $\hat{v}(k, t)$ folgt damit zum Zeitpunkt $t = T_1/\varepsilon^2$ die Konzentration der Moden bei $k = 0$, was wegen unserer Transformation zu

Beginn dieses Beweises letztendlich eine Konzentration der kritischen Moden in einer $O(\varepsilon)$ -Umgebung von $k_c = 1$ der Lösungsfunktion unseres Teilproblems der KSSH-Gleichung bedeutet.

Das volle Problem

Zur Behandlung des vollen Problems dürfen im folgenden die in (3.14) mit $\tilde{H}\dots$ bezeichneten Terme nicht mehr vernachlässigt werden. Außerdem spalten wir von \hat{v}_r noch die Mode bei $k = 3$ ab, so dass schließlich folgendes System zu betrachten ist:

$$\begin{aligned}\partial_t \hat{v}_1 &= \lambda \hat{v}_1 + \varepsilon G(\hat{v}_1, \hat{v}_1, \hat{v}_{-1}) + \tilde{H}_1, \\ \partial_t \hat{w}_3 &= \lambda \hat{w}_3 + \tilde{H}_3, \\ \partial_t \hat{v}_s &= \lambda \hat{v}_s + \tilde{H}_s + \tilde{F}_s\end{aligned}\tag{3.19}$$

mit

$$\begin{aligned}\hat{v}_s &= \hat{w}_0 + \hat{w}_2 + \hat{w}_{-2} + \hat{v}_4 + \hat{v}_{-4} + \varepsilon^{1/2} \hat{v}_r + \hat{v}_{0n} + \hat{v}_{2n} + \hat{v}_{-2n}, \\ \tilde{H}_s &= \tilde{H}_0 + \tilde{H}_2 + \tilde{H}_4 + \tilde{H}_{-4} + \varepsilon^{1/2} \tilde{H}_r + \tilde{H}_{2n} + \tilde{H}_{-2n}, \\ \tilde{F}_s &= \tilde{F}_0 + \tilde{F}_2 + \tilde{F}_{-2}, \\ \hat{w}_3 &= \hat{v}_3 + \hat{v}_{-3} + \hat{v}_{1n} + \hat{v}_{-1n}, \\ \tilde{H}_3 &= \tilde{H}_3 + \tilde{H}_{-3} + \tilde{H}_{1n} + \tilde{H}_{-1n}.\end{aligned}$$

Für festes $t \geq 0$ gilt dabei wie oben

$$\begin{aligned}\|\tilde{H}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} &\leq \varepsilon^2 \|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)}^2 \|\hat{w}_3\|_{L^1(m)} + \varepsilon^2 \|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} \\ &\quad + \varepsilon^2 \|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)}^5 + \varepsilon^{5/2} \|\hat{w}_3\|_{L^1(m)}^2 + \varepsilon^{7/2} \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)}^2, \\ \|\tilde{H}_3\|_{L^1(m)} &\leq \|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)}^3 + \varepsilon \|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} + \varepsilon^{3/2} \|\hat{w}_3\|_{L^1(m)}^2 + \varepsilon^{5/2} \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)}^2, \\ \|\tilde{H}_s\|_{L^1(m)} &\leq \|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)}^4 + \|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \|\hat{w}_3\|_{L^1(m)} + \varepsilon^{1/2} \|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)} \\ &\quad + \varepsilon \|\hat{w}_3\|_{L^1(m)}^2 + \varepsilon^2 \|\hat{v}_s\|_{L^1(m)}^2, \\ \|\tilde{F}_s\|_{L^1(m)} &\leq C \varepsilon^{-1} \|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \|\partial_t \hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \\ &\leq C \varepsilon^{q-1} \|\hat{v}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \|\hat{v}_1\|_{L^1(q,\varepsilon,1)},\end{aligned}$$

wobei bei der letzten Ungleichung $\partial_t \hat{v}_1$ durch die rechte Seite der Gleichung für \hat{v}_1 ersetzt wurde und $q \in [0, 2]$ gilt.

Führt man nun zusätzlich zu $a(t)$ und $b(t)$ (siehe (3.15) und (3.16)) die beiden Größen

$$c(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\hat{w}_3(\tau)\|_{L^1(m)}, \quad (3.20)$$

$$d(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\varepsilon^2(1 + \tau))^{1/2} \|\hat{v}_s(\tau)\|_{L^1(m)} \quad (3.21)$$

ein, so können wir diese Ungleichungen auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \|\tilde{H}_1(t)\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} &\leq \varepsilon^2 a(t)^2 c(t) + \varepsilon^2 a(t)^5 + \varepsilon^2 a(t) d(t) (\varepsilon^2(1+t))^{-1/2} \\ &\quad + \varepsilon^{5/2} c(t)^2 + \varepsilon^{7/2} d(t)^2 (\varepsilon^2(1+t))^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{H}_3(t)\|_{L^1(m)} &\leq a(t)^3 + \varepsilon a(t) d(t) (\varepsilon^2(1+t))^{-1/2} + \varepsilon^{3/2} c(t)^2 \\ &\quad + \varepsilon^{5/2} d(t)^2 (\varepsilon^2(1+t))^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{H}_s(t)\|_{L^1(m)} &\leq a(t)^4 + a(t) c(t) + \varepsilon^{1/2} a(t) d(t) (\varepsilon^2(1+t))^{-1/2} \\ &\quad + \varepsilon c(t)^2 + \varepsilon^2 d(t)^2 (\varepsilon^2(1+t))^{-1}, \end{aligned}$$

$$\|\tilde{F}_s(t)\|_{L^1(m)} \leq C a(t) b(t) (\varepsilon^2 t)^{-1/2}.$$

Damit lassen sich unter Berücksichtigung der Ungleichungen für $\|\tilde{H}_1\|_{L^1(0,\varepsilon,1)}$, $\|\tilde{H}_3\|_{L^1(m)}$ und $\|\tilde{H}_s\|_{L^1(m)}$ sowie unter Verwendung der Variation-der-Konstanten-Formel die gleichen Abschätzungen wie oben für $a(t)$, $b(t)$ und $c(t)$ durchführen. Wir schätzen zunächst die neu hinzugekommenen Terme ab und setzen diese anschließend in die bereits vorhandenen Ungleichungen für $a(t)$ und $b(t)$ ein. Die noch aufzustellenden Ungleichungen für $c(t)$ und $d(t)$ sind analog zu der von $a(t)$ aufgebaut.

Für die Betrachtung von $a(t)$ und $b(t)$ benötigen wir mit $\gamma \geq 0$:

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^\tau e^{\lambda(\tau-s)} \chi_1 \hat{f}_1(s) (\varepsilon^2(1+s))^{-\gamma} ds \right\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \\
& \leq \int_0^\tau \left\| e^{\lambda(\tau-s)} \chi_1 \right\|_{L^1(0,\varepsilon,1) \rightarrow L^1(0,\varepsilon,1)} \|\hat{f}_1(s)\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} (\varepsilon^2(1+s))^{-\gamma} ds \\
& \leq C \sup_{0 \leq s \leq \tau} \|\hat{f}_1(s)\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \varepsilon^{-2\gamma} \begin{cases} \tau^{\max(0,1-\gamma)}, & \gamma \neq 1, \\ \ln \tau, & \gamma = 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

wobei $\hat{f}_1 = \hat{f}_1 \chi_1$, sowie

$$\begin{aligned}
& \int (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \left| \int_0^\tau e^{\lambda(k)(\tau-s)} \chi_1(k) \hat{f}_1(k, s) (\varepsilon^2(1+s))^{-\gamma} ds \right| \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| dk \\
& \leq (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \varepsilon^{-1} \int_0^\tau \sup_k \left| e^{\lambda(k)(\tau-s)} \frac{k}{\varepsilon} \right| \int |\hat{f}_1(k, s)| (\varepsilon^2(1+s))^{-\gamma} dk ds \\
& \leq (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \varepsilon^{-1} \int_0^\tau \sup_k \left| e^{\lambda(k)(\tau-s)} k \right| \|\hat{f}_1(s)\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} (\varepsilon^2(1+s))^{-\gamma} ds \\
& \leq (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \varepsilon^{-1} \sup_{0 \leq s \leq \tau} \|\hat{f}_1(s)\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \int_0^\tau C(\tau-s)^{-1/2} s^{-1/2} (\varepsilon^2(1+s))^{-\gamma} ds \\
& \leq (\varepsilon^2 \tau)^{1/2} \varepsilon^{-1} C \sup_{0 \leq s \leq \tau} \|\hat{f}_1(s)\|_{L^1(0,\varepsilon,1)} \varepsilon^{-2\gamma} (1+\tau)^{-\min(1/2,\gamma)},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung einfach durch die Aufspaltung $\int_0^\tau = \int_0^{\tau/2} + \int_{\tau/2}^\tau$ gewonnen wird.

Bei $c(t)$ und $d(t)$ sind

$$\left\| \int_0^\tau e^{\lambda(\tau-s)} \chi_3 \hat{f}_3(s) (\varepsilon^2(1+s))^{-\gamma} ds \right\|_{L^1(m)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^\tau \left\| e^{\lambda(\tau-s)} \chi_3 \right\|_{L^1(m) \rightarrow L^1(m)} \|\hat{f}_3(s)\|_{L^1(m)} (\varepsilon^2(1+s))^{-\gamma} ds \\
&\leq C \sup_{0 \leq s \leq \tau} \|\hat{f}_3(s)\|_{L^1(m)} (\varepsilon^2(1+\tau))^{-\gamma}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^\tau e^{\lambda(\tau-s)} \chi_s \hat{f}_s(s) (\varepsilon^2(1+s))^{-\gamma} ds \right\|_{L^1(m)} \\
&\leq \int_0^\tau \left\| e^{\lambda(\tau-s)} \chi_s \right\|_{L^1(m) \rightarrow L^1(m)} \|\hat{f}_s(s)\|_{L^1(m)} (\varepsilon^2(1+s))^{-\gamma} ds \\
&\leq C \sup_{0 \leq s \leq \tau} \|\hat{f}_s(s)\|_{L^1(m)} (\varepsilon^2(1+\tau))^{-\gamma}
\end{aligned}$$

mit $\hat{f}_3 = \hat{f}_3 \chi_3$ und $\hat{f}_s = \hat{f}_s \chi_s$ hilfreich. Statt (3.18) erhalten wir damit dann unter Verwendung der Variation-der-Konstanten-Formel

$$\begin{aligned}
a(t) \leq & Ca(0) + C_{10} T_1^{1/2} a(t)^2 b(t) + C T_1 (a(t)^2 c(t) + a(t)^5) + C T_1^{1/2} a(t) d(t) \\
& + C \varepsilon^{1/2} c(t)^2 + C \varepsilon^{1/2} d(t)^2.
\end{aligned}$$

Die Abschätzung für $b(t)$ lautet (vgl. (3.18))

$$\begin{aligned}
b(t) \leq & Ca(0) + C T_1^{1/2} a(t)^2 b(t) + T_1^{1/2} \varepsilon C (a(t)^2 c(t) + a(t)^5) + C \varepsilon a(t) d(t) \\
& + C T_1^{1/2} \varepsilon^{1/2} c(t)^2 + C \varepsilon^{3/2} d(t)^2.
\end{aligned}$$

Die Ungleichungen für $c(t)$ und $d(t)$ erhalten wir durch entsprechende Überlegungen wie bei $a(t)$ und $b(t)$ aus der Variation-der-Konstanten-Formel:

$$c(t) \leq Cc(0) + C(a(t)^3 + a(t)d(t) + \varepsilon^{3/2}c(t)^2 + \varepsilon^{1/2}d(t)^2),$$

$$d(t) \leq Cd(0) + C(a(t)^4 + T_1 a(t)c(t) + \varepsilon^{1/2}a(t)d(t) + \varepsilon c(t)^2 + \varepsilon d(t)^2 + a(t)b(t)).$$

Unter der Annahme, dass

$$CT_1^{1/2}a(t)^2b(t) + CT_1(a(t)^2c(t) + a(t)^5) + CT_1^{1/2}a(t)d(t) \\ + C\varepsilon^{1/2}c(t)^2 + C\varepsilon^{1/2}d(t)^2 \leq Ca(0),$$

$$CT_1^{1/2}a(t)^2b(t) + CT_1^{1/2}\varepsilon(a(t)^2c(t) + a(t)^5) + C\varepsilon a(t)d(t) \\ + CT_1^{1/2}\varepsilon^{1/2}c(t)^2 + C\varepsilon^{3/2}d(t)^2 \leq Ca(0),$$

$$C(\varepsilon^{3/2}c(t)^2 + \varepsilon^{1/2}d(t)^2) \leq Cc(0),$$

$$C(\varepsilon^{1/2}a(t)d(t) + \varepsilon c(t)^2 + \varepsilon d(t)^2 + T_1a(t)c(t)) \leq Cd(0)$$

erfüllt ist, gelten die Abschätzungen

$$a(t) \leq 2Ca(0),$$

$$b(t) \leq 2Ca(0),$$

$$c(t) \leq C(a(t)^3 + a(t)d(t)) + 2Cc(0) \leq C(a(0)^3 + a(0)d(0) + c(0)),$$

$$d(t) \leq C(a(t)^4 + a(t)b(t)) + 2Cd(0) \leq C(a(0)^4 + a(0)^2 + d(0)),$$

was unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die $L_1(m)$ -Norm unserer Anfangsbedingung beschränkt ist, gleichbedeutend damit ist, dass auch $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ und $d(t)$ beschränkt sind.

Dabei ist zu beachten, dass die obige Annahme tatsächlich richtig ist, wenn nur T_1 und ε hinreichend klein sind, so dass

$$CT_1(a(0)^5 + a(0)^3d(0) + a(0)^2c(0)) + CT_1^{1/2}(a(0)^5 + a(0)^3 + a(0)d(0)) \\ + C\varepsilon^{1/2}\left(\left(a(0)^4 + a(0)^2 + d(0)\right)^2 + \left(a(0)^3 + a(0)d(0) + c(0)\right)^2\right) \leq Ca(0),$$

$$CT_1^{1/2}a(0)^3 + CT_1^{1/2}\varepsilon(a(0)^5 + a(0)^3d(0) + a(0)^2c(0)) \\ + C\varepsilon(a(0)^5 + a(0)^3 + a(0)d(0)) + CT_1^{1/2}\varepsilon^{1/2}\left(a(0)^3 + a(0)d(0) + c(0)\right)^2 \\ + C\varepsilon^{3/2}\left(a(0)^4 + a(0)^2 + d(0)\right)^2 \leq Ca(0),$$

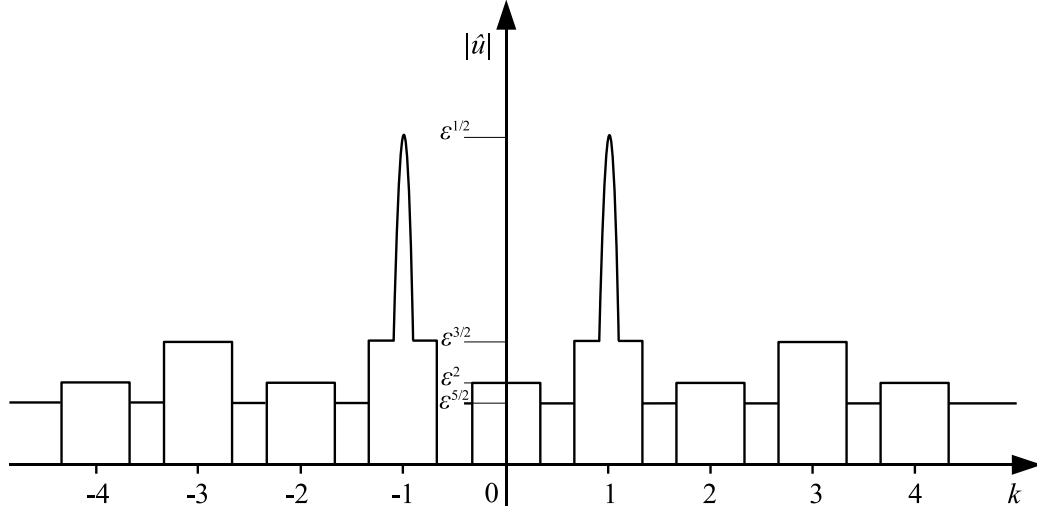


Abbildung 3.4: Entwicklung der Moden aus dem Kontinuum heraus, wobei die beiden kritischen Moden bei $k_c = \pm 1$ konzentriert sind (s.a. Bem.2.7). Beachte: Die Variablentransformation ist in dieser Abbildung bereits berücksichtigt, so dass bei $k = 0$ und $|k| = 2$ die Ordnung $O(\varepsilon^2)$ vorliegt.

$$C\varepsilon^{3/2} \left(a(0)^3 + a(0)d(0) + c(0) \right)^2 + C\varepsilon^{1/2} \left(a(0)^4 + a(0)^2 + d(0) \right)^2 \leq Cc(0),$$

$$\begin{aligned} C\varepsilon^{1/2} \left(a(0)^5 + a(0)^3 + a(0)d(0) \right) \\ + C\varepsilon \left(\left(a(0)^3 + a(0)d(0) + c(0) \right)^2 + \left(a(0)^4 + a(0)^2 + d(0) \right)^2 \right) \\ + CT_1 \left(a(0)^4 + a(0)^2d(0) + a(0)c(0) \right) \leq Cd(0). \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass auch beim vollen Problem (3.19) die für die Konzentration nach der Zeit T_1/ε^2 entscheidende Größe $b(T_1/\varepsilon^2)$ beschränkt bleibt. Zu diesem Zeitpunkt liegt für die gerade untersuchte transformierte Gleichung also tatsächlich eine Konzentration der Mode bei $k = 0$ vor, was letztendlich nach Durchführung der Rücktransformation eine Konzentration der kritischen Mode bei $k_c = 1$ der Lösungsfunktion unserer KSSH-Gleichung bedeutet.

Wegen $\hat{v}_{-1} = \hat{v}_1^*$ zeigt auch die zweite kritischen Mode ($k_c = -1$) diese Konzentration, so dass sich nach der Zeit T_1 die in Abb. 3.4 dargestellte Modenverteilung

herausbildet. Zusätzlich zu unseren bisherigen Ergebnissen (vgl. Abb. 2.2 und 3.1) haben wir damit bewiesen, dass die kritischen Moden sich nicht nur durch ihre Größenordnung — $O(\varepsilon^{1/2})$ im Vergleich zu $O(\varepsilon)$ der restlichen Beiträge — hervorheben, sondern auch eine Peakform entwickeln.

3.4 Konzentration der nichtkritischen Moden

Im vorigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass sich für $t \in [T_1/\varepsilon^2, \kappa T_1/\varepsilon^2]$ in unserem System eine Modenverteilung, wie sie in Abb. 3.4 zu sehen ist, herausbildet. Das wichtigste Ergebnis dabei war, dass die kritischen Moden bei $k = \pm 1$ konzentriert sind, während für die übrigen Moden eine derartige Aussage bislang nicht möglich ist. Darauf bauen wir auf und verwenden insbesondere, dass $\hat{u}_0 \in L^1(m)$ von der Ordnung $O(\varepsilon^2)$ und $\hat{u}_1 \in L^1(1, \varepsilon, 1)$ von der Ordnung $O(\varepsilon^{1/2})$ ist. Setzen wir diese Modenverteilung in unsere Nichtlinearität $N(\hat{u}) = \rho \hat{u} * \hat{u} + \gamma_1 \hat{u} * \hat{u} * \hat{u}$ (vgl. 2.10) ein, so ergibt sich für $t \in [T_1/\varepsilon^2, \kappa T_1/\varepsilon^2]$ die in Abb. 3.5 dargestellte Modenverteilung von $N(\hat{u})$.

Für die weitere Betrachtung ziehen wir unter Berücksichtigung dieser Modenverteilung von $N(\hat{u})$ die Variation-der-Konstanten-Formel

$$\hat{u}(k, t) = e^{\lambda(k)(t-T_1/\varepsilon^2)} \hat{u}(k, T_1/\varepsilon^2) + \int_{T_1/\varepsilon^2}^t e^{\lambda(k)(t-s)} N(\hat{u})(k, s) ds$$

heran. Da der erste Summand für die nichtkritischen Moden exponentiell gedämpft ist, spielt er im folgenden keine Rolle, so dass wir für die nichtkritischen Moden die Abschätzung

$$\int \left| \int_{T_1/\varepsilon^2}^t e^{\lambda(k)(t-s)} (1 - \chi_1 - \chi_{-1}) N(\hat{u})(k, s) ds f(k) \right| dk$$

$$\leq C \sup_{t \in [T_1/\varepsilon^2, \kappa T_1/\varepsilon^2]} \|N(\hat{u})(\cdot, t) f(\cdot)\|_{L^1(0)}$$

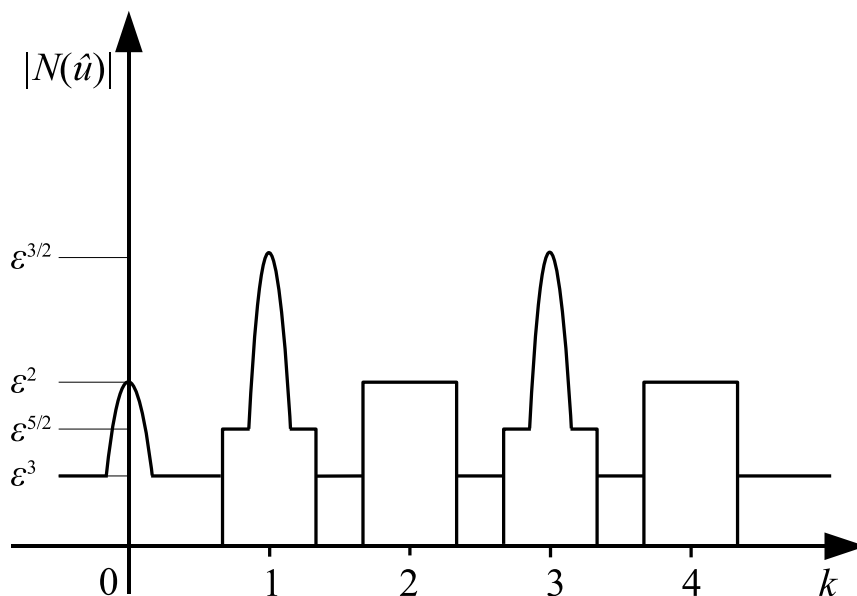


Abbildung 3.5: Modenverteilung der Nichtlinearität für $t \in [T_1/\varepsilon^2, \kappa T_1/\varepsilon^2]$ unter Beschränkung des dargestellten Bereiches auf $0 \leq k \leq 4$ (s.a. Bem. 2.6 u. 2.7).

finden, wobei die Gewichtsfunktion f die Eigenschaft hat, dass $\frac{1}{f}$ die Modenverteilung aus Abb. 3.5 ist. Im Zusammenhang mit der Variation-der-Konstanten-Formel bedeutet dies, dass $(1 - \chi_1 - \chi_{-1})\hat{u}$ dieselbe Modenverteilung besitzt wie $(1 - \chi_1 - \chi_{-1})N(\hat{u})$, d.h. neben den kritischen Moden weisen demnach auch die Moden bei $k = 0$, $k = 3$ und $k = -3$ eine Konzentration auf.

Doch auch für die kritischen Moden bringt dieses Vorgehen neue Erkenntnisse, und zwar folgt aus $\hat{u}_1 \in L^1(1, \varepsilon, 1)$ für $t \in [T_1/\varepsilon^2, \kappa T_1/\varepsilon^2]$, dass für $t \in [2T_1/\varepsilon, \kappa T_1/\varepsilon^2]$ dann $\hat{u}_1 \in L^1(3/2, \varepsilon, 1)$ gilt, d.h. mit fortschreitender Zeit nimmt die Konzentration immer mehr zu, und es kommt zu Ausbildung eines schmalen Peaks. Um dies zu beweisen, untersuchen wir zunächst die einfache Modellgleichung

$$\partial_t \hat{u} = -k^2 \hat{u} + (|k| + \varepsilon) h,$$

wobei

$$\sup_{t \in [0, T_1/\varepsilon^2]} \int h(k, t) \varepsilon^{-3/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^1 dk = O(1) \quad (3.22)$$

und

$$\int \hat{u}(k, 0) \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^1 dk = O(1) \quad (3.23)$$

gelte. Zu zeigen ist also für $t = T_1/\varepsilon^2$:

$$\int |\hat{u}(k, t)| \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^{3/2} dk = O(1).$$

Wir betrachten dazu die Variation-der-Konstanten-Formel

$$\hat{u}(k, t) = e^{-k^2 t} \hat{u}(k, 0) + \int_0^t e^{-k^2(t-s)} (|k| + \varepsilon) h(k, s) ds \quad (3.24)$$

und schätzen ab:

$$\begin{aligned} & \int |\hat{u}(k, t)| \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^{3/2} dk \\ & \leq \int |e^{-k^2 t} \hat{u}(k, 0)| \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^{3/2} dk \\ & \quad + \int \int_0^t \left| e^{-k^2(t-s)} \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^{3/2} (|k| + \varepsilon) h(k, s) \right| ds dk. \end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden gilt hier:

$$\begin{aligned} & \int \int_0^t \left| e^{-k^2(t-s)} \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^{3/2} (|k| + \varepsilon) h(k, s) \right| ds dk \leq \\ & \int_0^t \sup_k \left| e^{-k^2(t-s)} \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^{3/2} (|k| + \varepsilon) \varepsilon^{3/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^{-1} \right| ds \cdot \\ & \quad \cdot \sup_{0 \leq s \leq t} \int |h(k, s)| \varepsilon^{-3/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^1 dk. \end{aligned}$$

Wegen (3.22) fehlt jetzt nur noch die genauere Betrachtung des ersten Faktors. Nutzt man

$$\begin{aligned} & \sup_k \left| e^{-k^2(t-s)} \varepsilon \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} (|k| + \varepsilon) \right| \\ & \leq C \left(\sup_k |e^{-k^2(t-s)} \varepsilon^2| + \sup_k |e^{-k^2(t-s)} |k|^{3/2} \varepsilon^{1/2}| \right) \\ & \leq C \left(\varepsilon^2 + (t-s)^{-3/4} \varepsilon^{1/2} \right), \end{aligned}$$

so folgt für diesen mit $t = T_1/\varepsilon^2$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sup_k \left| e^{-k^2(t-s)} \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{3/2} (|k| + \varepsilon) \varepsilon^{3/2} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{-1} \right| ds \\ & \leq \int_0^t C \left(\varepsilon^2 + (t-s)^{-3/4} \varepsilon^{1/2} \right) ds \\ & \leq C \varepsilon^2 t + C \varepsilon^{1/2} t^{1/4} \\ & \leq C T_1 + C T_1^{1/4} = O(1). \end{aligned}$$

Damit und wegen (3.23) folgt auch

$$\int |e^{-k^2 T_1/\varepsilon^2} \hat{u}(k, 0)| \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{3/2} dk = O(1),$$

woraus sich schließlich die Behauptung ergibt.

Dies gilt auch für unsere KSSH-Gleichung, da sich die für die Modellgleichung gerade durchgeführten Abschätzungen wegen

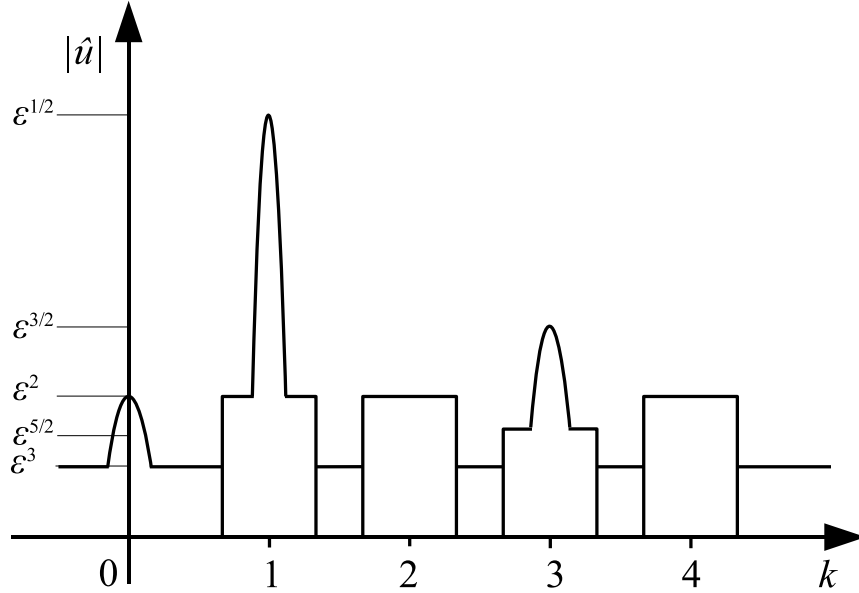


Abbildung 3.6: Modenverteilung von \hat{u} für $t \in [2T_1/\varepsilon^2, \kappa T_1/\varepsilon^2]$ (s.a. Bem. 2.6 u. 2.7).

$$\begin{aligned}
 |\lambda(1+k)| &\leq C(\varepsilon^2 - k^2) \quad \text{und} \\
 |g(k, \ell, m, n)| &\leq C(\varepsilon + |k-1| + |k-\ell-1| + |\ell-m-1| + |n+1|)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

problemlos übertragen lassen. Für $t \in [2T_1/\varepsilon^2, \kappa T_1/\varepsilon^2]$ gilt also, dass $\hat{u}_0 \in L^1(1, \varepsilon, 0)$ von der Ordnung $O(\varepsilon^2)$ und $\hat{u}_1 \in L^1(3/2, \varepsilon, 1)$ von der Ordnung $O(\varepsilon^{1/2})$ ist. Diese Modenverteilung ist in Abb. 3.6 dargestellt.

Die Betrachtung können wir nun rekursiv fortsetzen, indem wir das gerade für $t \in [2T_1/\varepsilon^2, \kappa T_1/\varepsilon^2]$ gewonnene Zwischenergebnis als Ausgangspunkt für den nächsten Iterationsschritt, der völlig analog zum gerade gezeigten verläuft, verwenden. Für die Nichtlinearität erhalten wir damit die in Abb. 3.7 dargestellte Modenverteilung; insbesondere sieht man, dass gilt:

$$\begin{aligned}
 \chi_0 N(\hat{u}) \in L^1(3/2, \varepsilon, 0) &\leq C\varepsilon^2, \\
 \chi_1 N(\hat{u}) \in L^1(3/2, \varepsilon, 1) &\leq C\varepsilon^{3/2}, \\
 \chi_2 N(\hat{u}) \in L^1(3/2, \varepsilon, 2) &\leq C\varepsilon^2.
 \end{aligned}$$

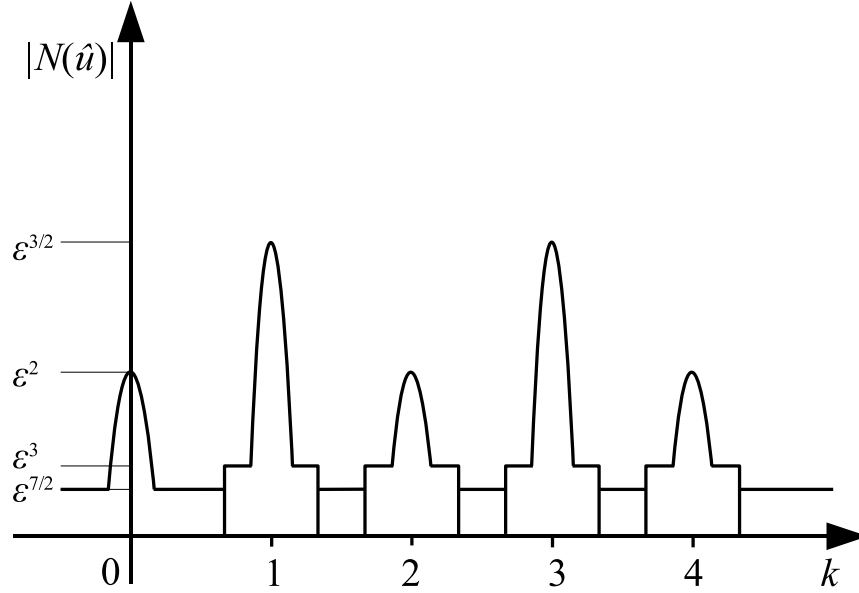


Abbildung 3.7: Modenverteilung von $N(\hat{u})$ für $t \in [2T_1/\varepsilon^2, \kappa T_1/\varepsilon^2]$ (s.a. Bem. 2.6 u. 2.7).

Die Variation-der-Konstanten-Formel lautet mit der Startzeit $t = 2T_1/\varepsilon^2$ dann:

$$\hat{u}(k, t) = e^{\lambda(k)(t-2T_1/\varepsilon^2)} \hat{u}(k, 2T_1/\varepsilon^2) + \int_{2T_1/\varepsilon^2}^t e^{\lambda(k)(t-s)} N(\hat{u})(k, s) ds .$$

Mit der oben definierten Gewichtsfunktion f machen wir für die nichtkritischen Moden, für die der erste Summand exponentiell gedämpft und daher unproblematisch ist, die Abschätzung

$$\int \left| \int_{2T_1/\varepsilon^2}^t e^{\lambda(k)(t-s)} (1 - \chi_1 - \chi_{-1}) N(\hat{u})(k, s) ds f(k) \right| dk$$

$$\leq C \sup_{t \in [2T_1/\varepsilon^2, \kappa T_1/\varepsilon^2]} \|N(\hat{u})(\cdot, t) f(\cdot)\|_{L^1(0)} ,$$

was wiederum zeigt, dass $(1 - \chi_1 - \chi_{-1})\hat{u}$ zu diesem Zeitpunkt die gleiche Mo-

denverteilung wie $(1 - \chi_1 - \chi_{-1})N(\hat{u})$ hat.

Beim kritischen Teil gehen wir entsprechend wie oben vor und beweisen, dass aus $\hat{u}_1 \in L^1(3/2, \varepsilon, 1)$ von der Ordnung $O(\varepsilon^{1/2})$ für $t \in [2T_1/\varepsilon^2, \kappa T_1/\varepsilon^2]$ jetzt $\hat{u}_1 \in L^1(2, \varepsilon, 1)$ von der Ordnung $O(\varepsilon^{1/2})$ für $[3T_1/\varepsilon^2, \kappa T_1/\varepsilon^2]$ folgt. Dazu betrachten wir erneut die Modellgleichung

$$\partial_t \hat{u} = -k^2 \hat{u} + (|k| + \varepsilon) h,$$

jedoch diesmal mit

$$\sup_{t \in [0, T_1/\varepsilon^2]} \int h(k, t) \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^{3/2} dk = O(1) \quad (3.26)$$

sowie

$$\int \hat{u}(k, 0) \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^1 dk = O(1), \quad (3.27)$$

und zeigen für $t = T_1/\varepsilon^2$, dass

$$\int |\hat{u}(k, t)| \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^2 dk = O(1)$$

gilt. Das gelingt uns mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel (3.24), die uns folgende Abschätzung ermöglicht:

$$\begin{aligned} & \int |\hat{u}(k, t)| \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^2 dk \\ & \leq \int |e^{-k^2 t} \hat{u}(k, 0)| \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^2 dk \\ & \quad + \int \int_0^t \left| e^{-k^2(t-s)} \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|\right)^2 (|k| + \varepsilon) h(k, s) \right| ds dk. \end{aligned}$$

Die Betrachtung des zweiten Summanden liefert:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int \left| e^{-k^2(t-s)} \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^2 (|k| + \varepsilon) h(k, s) \right| ds dk \\
& \leq \int_0^t \sup_k \left| e^{-k^2(t-s)} \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^2 (|k| + \varepsilon) \varepsilon^{3/2} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{-3/2} \right| ds \cdot \\
& \quad \cdot \sup_{0 \leq s \leq t} \int |h(k, s)| \varepsilon^{-3/2} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{3/2} dk.
\end{aligned}$$

Für $t = T_1/\varepsilon^2$ gilt damit

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left| e^{-k^2(t-s)} \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^2 (|k| + \varepsilon) \varepsilon^{3/2} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{-3/2} \right| ds \\
& = \int_0^t \left| e^{-k^2(t-s)} \varepsilon \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{1/2} (|k| + \varepsilon) \right| ds \\
& \stackrel{\text{s.o.}}{\leq} CT_1 + CT_1^{1/4} = O(1),
\end{aligned}$$

woraus mit (3.27) zusätzlich

$$\int \left| e^{-k^2 T_1/\varepsilon^2} \hat{u}(k, 0) \right| \varepsilon^{-1/2} \left(1 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^2 dk = O(1)$$

folgt, so dass wegen (3.26) die Behauptung, dass für $t = T_1/\varepsilon^2$ die Lösung unserer Modellgleichung $\hat{u} \in L^1(2, \varepsilon, 0)$ von der Ordnung $O(\varepsilon^{1/2})$ ist, stimmt.

Dieses Resultat kann bei unserer KSSH-Gleichung wegen (3.25) unmittelbar auf die Mode \hat{u}_1 übertragen werden, so dass für $t \in [3T_1/\varepsilon^2, \kappa T_1/\varepsilon^2]$ schließlich die Modenverteilung aus Abb. 3.8 vorliegt, d.h. es gilt

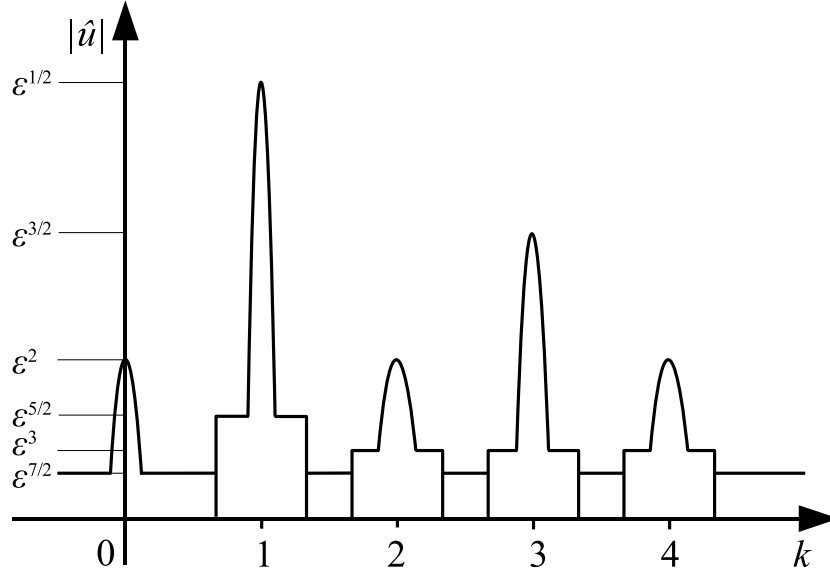


Abbildung 3.8: Modenverteilung von \hat{u} für $t \in [3T_1/\varepsilon^2, \kappa T_1/\varepsilon^2]$ (s.a. Bem. 2.6 u. 2.7).

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_0 &\in L^1(3/2, \varepsilon, 0) \quad \text{ist } O(\varepsilon^2), \\
 \hat{u}_1 &\in L^1(2, \varepsilon, 1) \quad \text{ist } O(\varepsilon^{1/2}), \\
 \hat{u}_2 &\in L^1(1, \varepsilon, 2) \quad \text{ist } O(\varepsilon^2), \\
 \hat{u}_3 &\in L^1(3/2, \varepsilon, 3) \quad \text{ist } O(\varepsilon^{3/2}), \\
 \hat{u}_4 &\in L^1(1, \varepsilon, 4) \quad \text{ist } O(\varepsilon^2), \\
 \hat{u}_5 &\in L^1(m) \quad \text{ist } O(\varepsilon^{5/2}), \\
 \hat{u}_6 &\in L^1(m) \quad \text{ist } O(\varepsilon^3), \\
 \hat{u}_r &\in L^1(m) \quad \text{ist } O(\varepsilon^{7/2})
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

und analog für die Moden \hat{u}_{-n} mit $n \in \mathbb{N}$.

Diese Vorgehensweise (Betrachtung von $N(\hat{u})$ und Abschätzung sowohl der kritischen also auch der nichtkritischen Moden) lässt sich beliebig oft rekursiv fortsetzen. Als Ergebnis zeigt sich, dass nicht nur die kritischen Moden, sondern auch die übrigen Moden eine Konzentration aufweisen, d.h. für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt

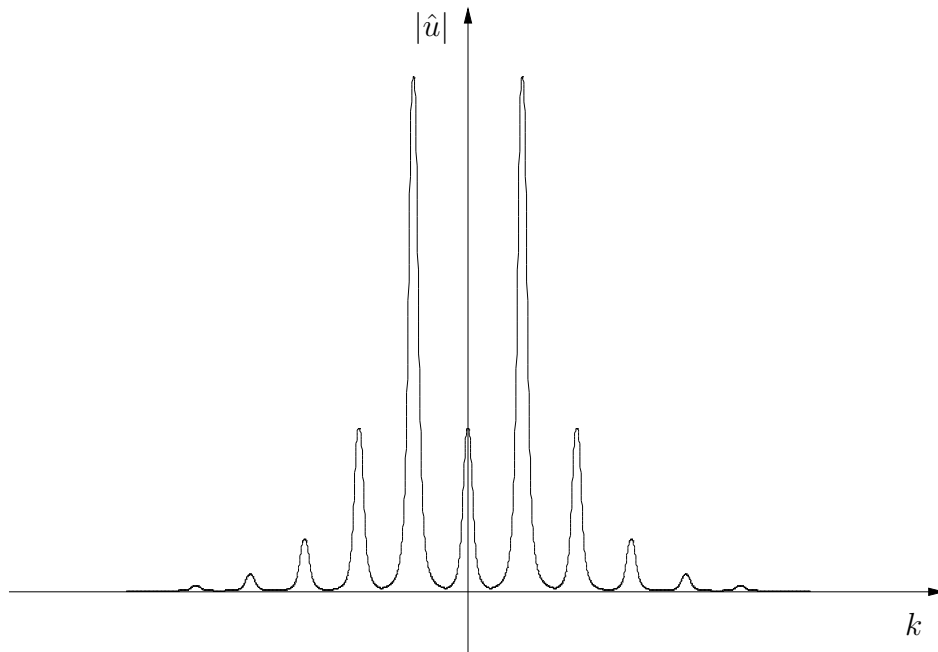


Abbildung 3.9: Modenverteilung von \hat{u} im nichttransformierten System nach einer Zeit $O(1/\varepsilon^2)$ (s.a. Bem. 2.7).

$\hat{u}_n \in L^1(m, \varepsilon, n)$ mit beliebig großem $m \in \mathbb{N}$. In Abb. 3.9 ist dies für diejenigen Moden, deren Größenordnung zwischen $O(\varepsilon^{1/2})$ und $O(\varepsilon^{5/2})$ liegt, dargestellt, wobei sich dieses Bild im Gegensatz zu den vorigen Abbildungen jetzt auf die Situation im nichttransformierten System bezieht, so dass die Moden bei $k = 0$ und $k = \pm 2$ wieder die Ordnung $O(\varepsilon)$ haben (vgl. Abb. 3.1).

Literaturverzeichnis

- [1] BELYKH, V. N., PEDERSEN, B., AND SOERENSEN, O. H. Shunted-Josephson-junction model. I. The autonomous case. *Phys. Rev. B* 16, 11 (1977), 4853–4859.
- [2] BENNINK, R. S., WONG, V., MARINO, A. M., ARONSTEIN, A. L., BOYD, R. W., C.R. STROUD, J., AND LUKISHOVA, S. Nonlinear dynamics, fluid dynamics, classical optics, etc. - honeycomb pattern formation by laser-beam filamentation in atomic sodium vapor. *Phys. Rev. Lett.* 88, 11 (2002), 113901.
- [3] BIMBERG, D., GRUNDMANN, M., AND LEDENTSOV, N. N. *Quantum dot heterostructures*. Wiley, Chichester, 1999.
- [4] BITZER, J. Optische Untersuchungen an CdSe- und $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Quantenpunkten. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe, April 1997.
- [5] BOLLERMAN, P., VAN HARTEN, A., AND SCHNEIDER, G. On the justification of the Ginzburg-Landau approximation. In *Pitman Research Notes 335* (Longman, 1995), A. Doelman and A. van Harten, Eds., pp. 20–36.
- [6] CHOSSAT, P., AND IOOSS, G. *The Couette-Taylor problem*. Springer, New York, Heidelberg, 1994.
- [7] CHOWDHURY, D., AND SCHADSCHNEIDER, A. Self-organization of traffic jams in cities: effects of stochastic dynamics and signal periods. *Phys. Rev. E (Rapid Comm.)* 59, 2 (1999), R1311–R1314.
- [8] COLLET, P., AND ECKMANN, J.-P. The time dependent amplitude equation for the Swift-Hohenberg problem. *Comm. Math. Phys.* 132 (1990), 139–153.
- [9] DILGER, M., HAUG, R. J., EBERL, K., AND VON KLITZING, K. Single-electron transistors with a self-assembled quantum dot. *Semicond. Sci. Technol.* 11, 11 (1996), 1493–1497.
- [10] DIPRIMA, R. C., AND SWINNEY, H. L. Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders. In *Hydrodynamic instabilities*

- and the transition to turbulence* (Berlin, Heidelberg, 1981), H. Swinney and J. Gollub, Eds., vol. 45 of *Topics in applied physics*, Springer, pp. 139–176.
- [11] DRAZIN, P. *Introduction to hydrodynamic stability*, vol. 32 of *Cambridge texts in applied mathematics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [12] DUAN, J., HOLMES, P., AND TITI, E. S. Global existence theory for a generalized Ginzburg-Landau equation. *Nonlinearity* 5 (1992), 1303–1314.
- [13] EAGLE, M. P. Supercritical flow in a diverging channel. *J. Fluid Mech.* 57 (1973), 149–160.
- [14] ECKHAUS, W. The Ginzburg-Landau equation is an attractor. *J. Nonl. Sc.* 3 (1993), 329–348.
- [15] ECKHAUS, W., AND IOOSS, G. Strong selection or rejection of spatially periodic patterns in degenerate bifurcations. *Phys. D* 39, 1 (1989), 124–146.
- [16] FRANCK, U. Chemische oszillationen. *Angewandte Chemie* 90 (1978), 1–78.
- [17] GERTHSEN, C., AND VOGEL, H. *Physik*, 17 ed. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
- [18] GHASHGHAIE, S., BREYMAN, W., PEINKE, J., TALKNER, T., AND DODGE, Y. Turbulente cascades in foreign exchange markets. *Nature* 381 (1996), 767–770.
- [19] HENRY, D. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1981.
- [20] KAPITULA, T., AND SANDSTEDT, B. Stability of bright solitary-wave solutions to perturbed nonlinear Schrödinger equations. *Physica D* 124, 1-3 (1999), 58–103.
- [21] KELSO, J. A. S. Dynamic patterns: The self-organization of brain and behavior. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology* 103, 5 (1997), 576.

- [22] KERNER, B. S. Experimental features of self-organization in traffic flow. *Phys. Rev. Lett.* 81, 17 (1998), 3797–3800.
- [23] KNOBLOCH, E. On the degenerate Hopf bifurcation with $O(2)$ symmetry. In *Multiparameter Bifurcation Theory*, M. Golubitsky and J. Guckenheimer, Eds., vol. 56. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986, pp. 193–201.
- [24] KURAMOTO, Y. *Chemical oscillations, waves and turbulences*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984.
- [25] LEDENTSOV, N., GRUNDMANN, M., KIRSTAEDTER, N., SCHMIDT, O., HEITZ, R., BÖHRER, J., BIMBERG, D., USTINOV, V., SHCHUKIN, V., EGOROV, A., ZHUKOV, A., ZAITSEV, S., KOP'EV, P., ALFEROV, Z., RUVIMOV, S., KOSOGOV, A., WERNER, P., GÖSELE, U., AND HEYDENREICH, J. Ordered arrays of quantum dots: Formation, electronic spectra, relaxation phenomena, lasing. *Sol. State El.* 40 (1996), 785–798.
- [26] MEYER, C., CANNELL, D., AND AHLERS, G. Hexagonal and roll flow patterns in temporally modulated Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. A* 45, 12 (1992), 8583–8604.
- [27] MEYER-SPASCHE, R. *Pattern formation in viscous flows: the Taylor-Couette problem and Rayleigh-Bénard convection*. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1999.
- [28] MIELKE, A. The Ginzburg-Landau equation in its role as a modulation equation. In *Handbook of dynamical systems* (Amsterdam, 2002), B. Fiedler, Ed., vol. 2, Elsevier, pp. 759–834.
- [29] MIELKE, A., AND SCHNEIDER, G. Attractors for modulation equations on unbounded domains – existence and comparison. *Nonlinearity* 8, 5 (1995), 743–768.
- [30] MISTR, S., AND BERCOVICI, D. A theoretical model of pattern formation in coral reefs. *Ecosystems* 6, 1 (2003), 61–74.

- [31] PEKERIS, C. L., AND SHKOLLER, B. Stability of plane poiseuille flow to periodic disturbance of finite amplitude in the vicinity of the neutral curve. *J. Fluid Mech.* 29 (1967), 31–38.
- [32] SCHNEIDER, G. *Die Gültigkeit der Ginzburg-Landau-Approximation*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1992.
- [33] SCHNEIDER, G. A new estimate for the Ginzburg-Landau approximation on the real axis. *J. Nonlinear Science* 4 (1994), 23–34.
- [34] SCHNEIDER, G. Error estimates for the Ginzburg-Landau approximation. *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 45 (1994), 433–457.
- [35] SCHNEIDER, G. Analyticity of Ginzburg-Landau modes. *J. Diff. Equ.* 121, 2 (1995), 233–257.
- [36] SCHNEIDER, G. Hopf bifurcation in spatially extended reaction-diffusion systems. *J. Nonlinear Sci.* 8 (1998), 17–41.
- [37] SCHNEIDER, G. Global existence results for pattern forming processes in infinite cylindrical domains applications to 3D Navier-Stokes problems. *J. Math. Pures Appl.* 78, 3 (1999), 265–312.
- [38] SCHNEIDER, G. Existence and stability of modulating pulse-solutions in a phenomenological model of nonlinear optics. *Physica D* 140 (2000), 283–293.
- [39] SEN, P. K., AND VASHIST, T. K. On nonlinear stability of boundary-layer flow over a flat plate. *Proc. R. Soc. London A* 424 (1989), 81–92.
- [40] SHCHUKIN, V. A., LEDENTSOV, N. N., AND BIMBERG, D. *Epitaxy of nanostructures*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [41] SHEPELEVA, A. *On pattern formation through instabilities and bifurcations*. Dissertation, Universiteit Utrecht, 1997.
- [42] TLIDI, M., MANDEL, P., AND HAELTERMANN, M. Spatiotemporal patterns and localized structures in nonlinear optics. *Phys. Rev. E* 56, 6 (1997), 6524–6530.

- [43] TURING, A. M. The chemical basis of morphogenesis. *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. B* 237 (1952), 37–72.
- [44] VAN HARTEN, A. On the validity of Ginzburg-Landau's equation. *J. Non-linear Science* 1 (1991), 397–422.
- [45] VAN SAARLOOS, W., AND HOHENBERG, P. Fronts, pulses, sources and sinks in degenerate complex Ginzburg-Landau equation. *Physica D* 56 (1992), 303–367.
- [46] ZHABOTINSKY, A. Eine periodische Oxydationsreaktion in flüssiger Phase. In *Selbstorganisation chemischer Strukturen. Arbeiten von Friedrich Ferdinand Runge, Raphael E. Liesegang, Boris P. Belousov, Anatol M. Zhabotinsky* (Leipzig, 1987), vol. 272 of *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*, Akad. Verl.-Ges., pp. 83–89.

Dank

Abschließend möchte ich an dieser Stelle allen danken, die mich während der Entstehungszeit dieser Arbeit unterstützt und begleitet haben, insbesondere

- Herrn Prof. Dr. Guido Schneider für die interessante Themenstellung, die ausgezeichnete Betreuung der Arbeit und seine kontinuierliche Unterstützung
- Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Manfred Schneider für die Übernahme des Korreferats sowie die gute Zusammenarbeit und sein wohlwollendes Interesse
- allen, die während meiner Tätigkeit am Mathematischen Institut I für eine angenehme und kooperative Atmosphäre gesorgt haben, für ihre stete Hilfsbereitschaft und anregende Diskussionen auch abseits der Mathematik
- meinen Eltern und meiner Freundin Ulrike für alles