

Regularisierung des Haftzustandes bei Coulombscher Reibung

Herrn Prof. Dr. ERWIN STEIN zum 65. Geburtstag gewidmet

Bei Stick-slip-Bewegungen infolge Coulombscher Reibung wird die volle Trennung von Gleit- und Haftbereichen in der Kontaktfläche berücksichtigt. Die zugehörigen Kontaktkräfte werden deshalb unstetig. Regularisierungsmethoden führen grenzschichtartige Näherungen für die Ruhezustände ein. Drei Näherungen werden mit der exakten Lösung eines mechanischen Systems verglichen.

Slip-stick oscillations due to Coulomb's friction depict the separation of the sliding and full adhesion portions in the contact surface. The corresponding contact forces therefore become discontinuous. Regularisation methods introduce a boundary layer-type approximation for the states of rest. Three approximations are compared with the exact solution of a mechanical system.

MSC (1991): 73T05, 73E10, 7610

1. Einleitung

Das ideal Coulombsche Kraftgesetz besitzt nur Gültigkeit für den Zustand der Relativbewegung zweier Körper im Kontakt. Man spricht von Gleiten. Die zugehörige Gleitreibungskraft ist eine eingeprägte Kraft mit bekanntem Gesetz. Im Zustand der relativen Ruhe, d. h. beim Haften, existiert kein Kraftgesetz. Die Haftkraft muß als Zwangskraft zwischen beiden Körpern aus der Kenntnis des Systemzustandes berechnet werden. Bei allgemeinen Bewegungen wechseln die Zustände Haften und Gleiten einander ab. Solche dynamischen Systeme mit wechselnden Bindungen besitzen als wesentliches Kennzeichen sprunghafte Änderungen ihres mechanischen Verhaltens. Dies wird verursacht durch den systembedingten Wechsel zwischen Differentialgleichungen, die das Gleiten beschreiben, und algebraischen Gleichungen, die den Ruhezustand des Haftens erfassen. Ein Übergang von einem zum anderen Zustand wird durch Schaltbedingungen geregelt.

Das Ziel einer Regularisierung ist die Glättung des sprunghaften Kraftverlaufes beim Wechsel von Gleiten zu Haften. Um dies zu erreichen, wird der Haftzustand durch eine Näherung beschrieben, bei der anstatt der Zwangskraft eine eingeprägte Kraft mit bekanntem Kraftgesetz an der Kontaktstelle vorausgesetzt wird. Mit der damit verbundenen Änderung des mechanischen Modells verliert der Begriff Haften seine Gültigkeit, da an keiner Kontaktstelle wirklich Ruhe herrschen kann. Die Konsequenzen verschiedener Regularisierungen werden nachfolgend an einem Modellproblem diskutiert.

2. Coulombsche Reibung bei einem Modellproblem

Zur Darstellung des wesentlichen Sachverhaltes genügt es, ein einfaches Modell zu betrachten. Gegeben sei eine Punktmasse m , die sich parallel zu einer rauhen, schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α bewegen kann. Der Gleitreibungskoeffizient ist μ . Die Ebene wird harmonisch mit der Kreisfrequenz Ω und der Amplitude a zwangsbewegt. Es ist

$$y = a \sin \Omega t. \quad (1)$$

Die Lage der Masse wird durch die Absolutkoordinate x beschrieben. In Abbildung 1a ist die Coulombsche Reibung zwischen Körper und Ebene im Fall des Gleitens durch das rheologische Symbol eines Reibgliedes gekennzeichnet. Beim Haften (Abb. 1b) ist die Masse fest mit der Unterlage verbunden. Für die Kontaktkraft zwischen Körper und Unterlage existiert im Rahmen der Coulombschen Voraussetzung kein Kraftgesetz.

Die Bewegungsgleichung für das Gleiten ergibt sich zu

$$m\ddot{x} + R_G = mg \sin \alpha \quad (2)$$

mit der Coulombschen Gleitreibungskraft

$$R_G = \mu mg \cos \alpha \operatorname{sgn}(\dot{x} - \dot{y}). \quad (3)$$

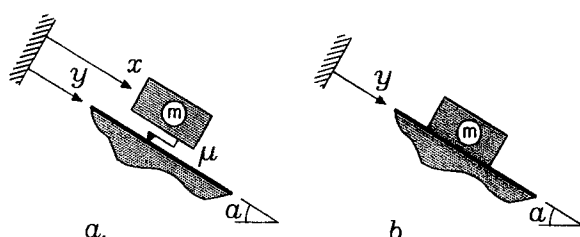


Abb. 1. Mechanisches Modell, a. Gleiten, b. Haften

Gleiten setzt eine Relativbewegung $|\dot{x} - \dot{y}| > 0$ zwischen Körper und Unterlage voraus. Die kinematische Schaltbedingung für einen Übergang zum Haften lautet deshalb

$$|\dot{x} - \dot{y}| = 0. \quad (4)$$

Das Haften ist gekennzeichnet durch den Zustand der relativen Ruhe $\dot{x} - \dot{y} \equiv 0$. Die zeitvariante Haftkraft R_H folgt aus einer Gleichgewichtsbedingung. Unter Beachtung von (1) liefert dies die algebraische Gleichung

$$m\ddot{y} + R_H = mg \sin \alpha. \quad (5)$$

Die Zustandsgrößen besitzen die bekannten Werte

$$\dot{x} \equiv \dot{y}, \quad x \equiv x_0, \quad (6)$$

wobei die konstante Verschiebung x_0 durch die Vorgeschichte der Bewegung festgelegt ist. Haften existiert unter der Bedingung $|R_H| < |R_G|$, d. h. solange der Betrag der Haftkraft nach (5) kleiner ist als der Betrag der Gleitreibungskraft nach (3). Die statische Schaltbedingung

$$|R_H| = |R_G| \quad (7)$$

regelt den Übergang zum Gleiten.

Das gesamte Problem ist stückweise linear und deshalb vollständig algebraisierbar. Eine Lösung im Zeitbereich ergibt sich durch Anstückeln analytischer Teillösungen, mit denen aufeinanderfolgende Haft-Gleitzustände erfaßt werden. Weg und Geschwindigkeit der Masse am Ende eines Zustandes ergeben bei Kenntnis des Schaltzeitpunktes die Anfangsbedingungen für den nachfolgenden Zustand. Das mathematische Problem ist zurückgeführt auf die numerische Bestimmung aufeinanderfolgender Schaltzeitpunkte. Sie berechnen sich als Nullstellen der transzendenten Gleichungen (4) und (7).

Zur dimensionslosen Darstellung wird die bezogene Zeit

$$\tau = \Omega t \quad (8)$$

gewählt. Der Wechsel zwischen verschiedenen Zuständen ergibt eine Folge von Schaltzeiten τ_{H_0} bzw. τ_{G_0} . Haften beginnt zur Zeit $\tau = \tau_{H_0}$. Die darauf folgende Schaltzeit $\tau = \tau_{G_0}$ ist die erste Nullstelle der Schaltbedingung (7) im offenen Intervall $\tau \geq \tau_{H_0}$. Gleiten existiert ab dem Zeitpunkt $\tau = \tau_{G_0}$. Es ist beendet, wenn die erste Nullstelle der Schaltbedingung (4) im offenen Intervall $\tau > \tau_{G_0}$ erreicht wird. Aus rechentechnischen Gründen werden zu Beginn eines jeden neuen Zustandes die relativen Zeiten

$$\tau_H = \tau - \tau_{H_0}, \quad \tau_G = \tau - \tau_{G_0} \quad (9)$$

verwendet. Die Bewegung läßt sich durch Wahl einer Relativkoordinate

$$\xi = \frac{\Omega^2}{\mu g \cos \alpha} (x - y) \quad (10)$$

einfacher beschreiben. Weiterhin werden die dimensionslose Gleitreibungskraft

$$\varrho_G = \operatorname{sgn} \left(\frac{d\xi}{d\tau_G} \right), \quad (11)$$

und die Haftkraft

$$\varrho_H = \frac{R_H}{\mu G \cos \alpha} \quad (12)$$

eingeführt. Es verbleiben dann nur noch zwei frei wählbare Parameter

$$A = \frac{\tan \alpha}{\mu}, \quad B = \frac{a\Omega^2}{\mu g \cos \alpha}, \quad (13)$$

die die Wirkung der äußeren eingepprägten Kräfte beschreiben. Insgesamt ergibt sich mit allen eingeführten Größen eine Differentialgleichung und eine algebraische Gleichung mit Nebenbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d\tau_G^2} + \varrho_G &= A + B \sin(\tau_G + \tau_{G_0}); & \left| \frac{d\xi}{d\tau_G} \right| &> 0; & \tau_G &> 0, \\ \varrho_H &= A + B \sin(\tau_H + \tau_{H_0}); & |\varrho_H| &< 1; & \tau_H &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Kopplung erfolgt über zwei Schaltbedingungen, die dadurch entstehen, daß in den Nebenbedingungen die Ungleichheiten durch die Gleichheiten ersetzt werden.

Der Typ der Bewegung wird durch die beiden Kontrollparameter A und B bestimmt. Von besonderem Interesse sind stationäre periodische Vorgänge mit der Periode 2π , bei denen der Einfluß der Anfangsbedingungen zur Zeit $\tau = 0$

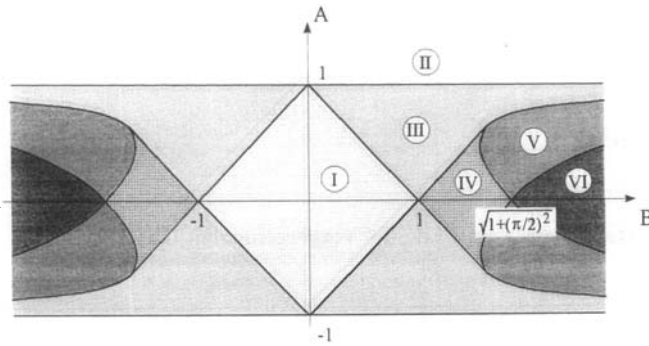


Abb. 2. Einfluß von A und B auf die Bewegungsformen

abgeklungen ist. Treten während einer Periode Gleitzustände auf, so erfährt die Koordinate ξ ein Verschiebungsincrement. Ihm ist der mittlere Drift

$$\Delta v = [\xi(\tau + 2\pi) - \xi(\tau)]/2\pi \tag{15}$$

zugeordnet. Abb. 2 zeigt alle möglichen Bewegungsformen während einer Periode in Abhängigkeit von A und B .

Im einzelnen sind dies:

I. Permanente Ruhe, – II. unidirektionale beschleunigte Bewegung, – III. unidirektionale Bewegung, unterbrochen durch eine Pause; $\Delta v = \text{const.}$, – IV. Bewegung in wechselnde Richtungen, unterbrochen durch zwei Pausen; $\Delta v = \text{const.}$, – V. Bewegung in wechselnde Richtungen, unterbrochen durch eine Pause; $\Delta v = \text{const.}$, – VI. Bewegung in wechselnde Richtungen ohne Pause; $\Delta v = \text{const.}$

Beim Übergang von Gleiten zu Haften ($\tau_H = 0$) tritt ein Kraftsprung

$$\Delta q = q_G(-0) - q_H(0); \quad 0 < |\Delta q| \leq 2, \tag{16}$$

auf. Er ist die Differenz zwischen der Gleitreibungskraft und der Haftkraft. In Abb. 3 ist exemplarisch für die Parameterwerte $A = 0.5$ und $B = 1.6$ (Bereich V) im Zeitbereich einer halben Periode, beginnend mit dem beliebigen Zeitpunkt τ_0 , der stationäre Kraftverlauf zu sehen. Es handelt sich um die Abfolge: Gleiten mit $d\xi/d\tau_G > 0$, Haften mit der Dauer Null, Gleiten mit $d\xi/d\tau_G < 0$, Haften mit endlicher Dauer und Gleiten mit $d\xi/d\tau_G > 0$.

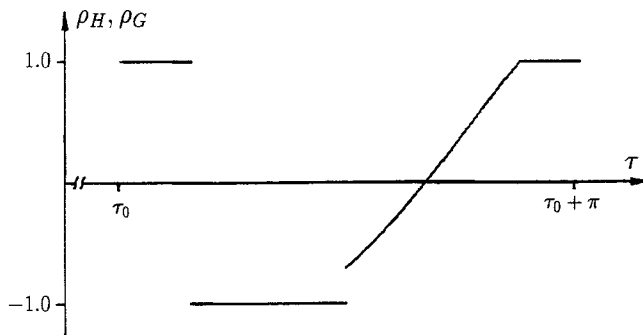


Abb. 3. Exemplarischer Kraftverlauf bei Coulombscher Reibung ($A = 0.5, B = 1.6$)

3. Die Regularisierung durch eine Feder

Dieses Regularisierungsmodell orientiert sich an der Verwandtschaft zwischen Coulombscher Reibung und idealer Elastoplastizität. Es ist z. B. bei VU VAN [1] zu finden. Im Fall des Gleitens werden die Eigenschaften des Coulombschen Gleitreibungsgesetzes beibehalten (Abb. 4a). Der Haftzustand wird dagegen ersetzt durch Einführung einer tangentialen Feder mit der Steifigkeit c_T am Kontakt (Abb. 4b). Ihre ungespannte Lage folgt aus der Vorgeschichte der Bewegung.

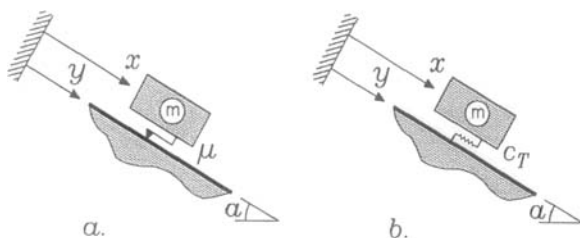


Abb. 4. Regularisierungsmodell Feder, a. Gleiten, b. Haften

Das Kraftgesetz

$$Q_H = \frac{1}{\varepsilon_e} (\xi - \xi_0) \quad (17)$$

besitzt den dimensionslosen Regularisierungsparameter

$$\varepsilon_e = \Omega^2 m / c_T. \quad (18)$$

Die ungespannte Lage ξ_0 der Feder folgt für das Haften aus dem Ende des vorhergehenden Gleitens zu

$$\xi_0 = \xi(-0) - \varepsilon_e \operatorname{sgn} \left[\frac{d\xi}{d\tau_G}(-0) \right]. \quad (19)$$

Im regularisierten Problem wird die Abfolge verschiedener Zustände durch zwei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau_G^2} + \operatorname{sgn} \left(\frac{d\xi}{d\tau_G} \right) &= A + B \sin(\tau_G + \tau_{G_0}); & \left| \frac{d\xi}{d\tau_G} \right| > 0; & \quad \tau_G > 0, \\ \frac{d^2\xi}{d\tau_H^2} + \frac{1}{\varepsilon_e} (\xi - \xi_0) &= A + B \sin(\tau_H + \tau_{H_0}); & |Q_H| < 1; & \quad \tau_H > 0, \end{aligned} \quad (20)$$

beschrieben. Im Grenzübergang $\varepsilon_e \rightarrow 0$ geht (20) in (14) über. Das Gesamtproblem (20) ist algebraisierbar. Nur die Schaltzeiten müssen numerisch bestimmt werden. Von Interesse ist der Fehler im Vergleich mit der exakten Lösung. Für eine grundsätzliche Diskussion genügt es, einen beliebigen Haftzustand zu betrachten. Hier gilt im Coulombschen Fall für die Geschwindigkeit $d\xi/d\tau_H \equiv 0$. Wird die Lösung des Anfangswertproblems (20) nach Potenzen von ε_e geordnet, so ergibt sich auch im Haftzustand eine Geschwindigkeit

$$\frac{d\xi}{d\tau_H} = -\sqrt{\varepsilon_e} \Delta Q \sin(\tau_H/\sqrt{\varepsilon_e}) + \varepsilon_e B \sin(\tau_H + \tau_{H_0}) + O(\sqrt{\varepsilon_e} \varepsilon_e). \quad (21)$$

Der Fehler bei der Haftkraft ist von der Ordnung $O(1)$, beim Weg $O(\varepsilon_e)$. Dem harmonischen Anteil der Erregung ist eine harmonische Funktion mit der Frequenz $1/\sqrt{\varepsilon_e}$ überlagert, deren Amplitude vom Kraftsprung ΔQ an der Schaltstelle abhängt. Bei Verkleinerung von ε_e nimmt die Oszillation der Lösung zu. Für den Wert $\varepsilon_e = 0.01$ und denselben Parametern wie in Abb. 3 zeigt Abb. 5 den regularisierten Verlauf der Kraft. Auffallend ist, daß bedingt durch die Oszillation im Haftbereich ein Bereich mit kurzzeitigem Gleiten auftritt, der keinen realen Bezug besitzt.

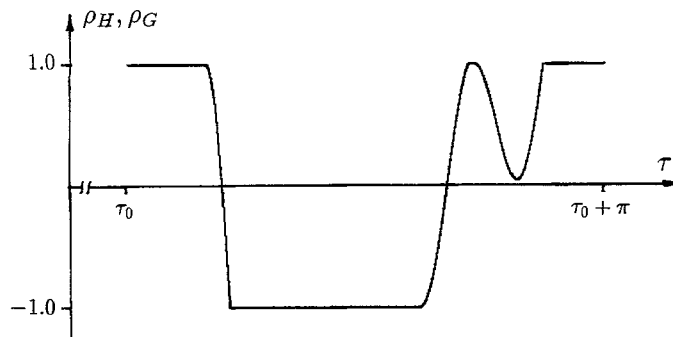


Abb. 5. Exemplarischer Kraftverlauf bei Regularisierung durch eine Feder ($A = 0.5$, $B = 1.6$, $\varepsilon_e = 0.01$)

4. Die Regularisierung durch einen Dämpfer

KIKUCHI und ODEN [2] schlagen im Haftzustand als Regularisierungsmodell die Anordnung eines tangentialen viskosen Dämpfers mit der Konstanten d_T vor. Anschaulich ergibt sich dieselbe Situation wie in Abb. 4, wobei aber im Fall des Haftens die Feder durch einen Dämpfer ersetzt werden muß. Zum Unterschied zu vorher wird keine Verschiebung aus der Vorgeschichte benötigt, da das Kraftgesetz

$$Q_H = \frac{1}{\varepsilon_d} \frac{d\xi}{d\tau_H} \quad (22)$$

mit dem dimensionslosen Regularisierungsparameter

$$\varepsilon_d = \Omega m / d_T \quad (23)$$

geschwindigkeitsabhängig ist. Stattdessen muß der Gültigkeitsbereich des Gleitzustandes und damit auch die kinema-

tische Schaltbedingung geändert werden. Das gesamte Problem lautet

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau_G^2} + \operatorname{sgn}\left(\frac{d\xi}{d\tau_G}\right) &= A + B \sin(\tau_G + \tau_{G_0}); & \left|\frac{d\xi}{d\tau_G}\right| > \varepsilon_d; & \quad \tau_G > 0, \\ \frac{d^2\xi}{d\tau_H^2} + \frac{1}{\varepsilon_d} \frac{d\xi}{d\tau_H} &= A + B \sin(\tau_H + \tau_{H_0}); & |\varrho_H| < 1; & \quad \tau_H > 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Mit $\varepsilon_d \rightarrow 0$ ergibt sich der Coulombsche Fall. Die Lösung des Anfangswertproblems (24) liefert auch für den Haftzustand eine Geschwindigkeit

$$\frac{d\xi}{d\tau_H} = \varepsilon_d [A + B \sin(\tau_H + \tau_{H_0})] + O(\varepsilon_d^2). \quad (25)$$

Der Klammerterm enthält die Haftkraft des Coulombschen Falls. Der konstante Kraftanteil A erzeugt eine konstante Geschwindigkeit $\varepsilon_d A$.

Beim Übergang von Gleiten zu Haften besitzt die Haftkraft eine Grenzschicht der Art $\Delta\varrho e^{-\tau_H/\varepsilon_d}$. Außerhalb der Grenzschicht ist der Fehler $O(\varepsilon_d)$. Für den Wert $\varepsilon_d = 0.01$ und die in Abb. 3 verwendeten Parameter zeigt Abb. 6 den regularisierten Verlauf der Kraft im gleichen Zeitbereich wie in Abb. 3. In den Haftbereichen wurde die Lösung mit einer Zeitschrittweite von $2\pi/10000$ berechnet, und die Ergebnisse wurden durch eine Punktfolge dargestellt.

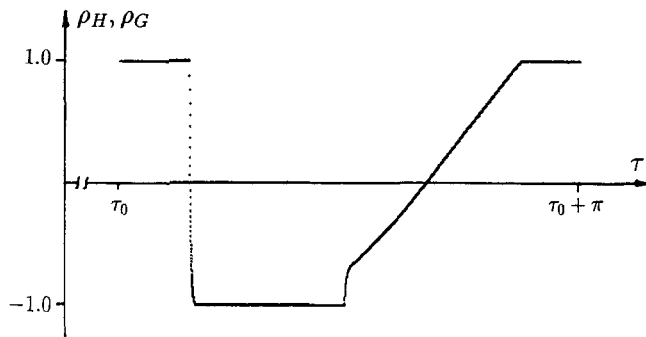


Abb. 6. Exemplarischer Kraftverlauf bei der Regularisierung durch einen Dämpfer ($A = 0.5$, $B = 1.6$, $\varepsilon_d = 0.01$)

5. Regularisierung durch Feder und Dämpfer

Es ist naheliegend, beide vorher betrachteten Regularisierungsmethoden zu vereinen und beim Haften an der Kontaktstelle (Abb. 4b) parallel sowohl Feder wie auch Dämpfer anzubringen. Dann lautet das Kraftgesetz

$$\varrho_H = \frac{1}{\varepsilon_d} \frac{d\xi}{d\tau_H} + \frac{1}{\varepsilon_e} (\xi - \xi_0). \quad (26)$$

Dies ergibt die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau_G^2} + \operatorname{sgn}\left(\frac{d\xi}{d\tau_G}\right) &= A + B \sin(\tau_G + \tau_{G_0}); & \left|\frac{d\xi}{d\tau_G}\right| > 0; & \quad \tau_G > 0, \\ \frac{d^2\xi}{d\tau_H^2} + \frac{1}{\varepsilon_d} \frac{d\xi}{d\tau_H} + \frac{1}{\varepsilon_e} (\xi - \xi_0) &= A + B \sin(\tau_H + \tau_{H_0}); & |\varrho_H| < 1; & \quad \tau_H > 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Um Oszillationen zu vermeiden, muß eine überkritische Dämpfung mit

$$(2\varepsilon_d)^2 < \varepsilon_e \quad (28)$$

gewählt werden. Für einen Vergleich mit den vorhergehenden Regularisierungen wird speziell

$$\varepsilon_e = \varepsilon_p = \varepsilon \quad (29)$$

vorausgesetzt. Dann ergibt sich im Haften aus der Lösung des Anfangswertproblems (27.2) die Geschwindigkeit

$$\frac{d\xi}{d\tau_H} = \varepsilon \frac{B}{2} [\cos(\tau_H + \tau_{H_0}) + \sin(\tau_H + \tau_{H_0}) - (\sin \tau_{H_0} + \cos \tau_{H_0}) e^{-\tau_H} + \Delta\varrho (e^{-\tau_H/\varepsilon} - e^{-\tau_H}) + O(\varepsilon^2)]. \quad (30)$$

Der Fehler ist außerhalb einer Grenzschicht mit verschiedenen abklingenden Exponentialfunktionen von der Ordnung $O(\varepsilon)$. Der harmonische Erregerkraftanteil geht mit einer Phasenverschiebung von $\pi/4$ in den Fehler ein. Bei der Haftkraft klingt der Kraftsprung mit $e^{-\tau_H/\varepsilon}$ ab. Der Fehler ist außerhalb der Grenzschicht $O(\varepsilon)$.

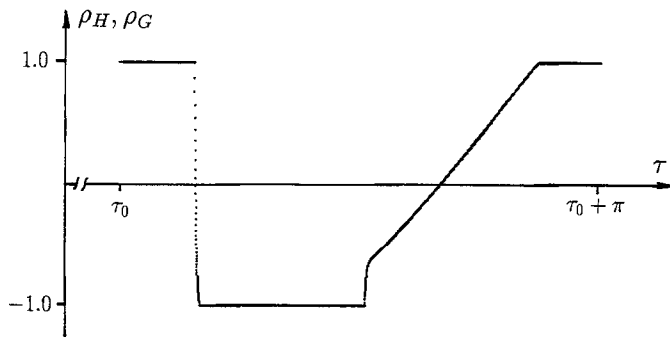


Abb. 7. Exemplarischer Kraftverlauf bei der Regularisierung durch Feder und Dämpfer ($A = 0.5$, $B = 1.6$, $\epsilon_e = \epsilon_d = 0.01$)

Abb. 7 zeigt den Verlauf der Kraft für die in Abb. 3 verwendeten Parameter und dem Regularisierungsparameter $\epsilon = 0.01$ im gleichen Zeitbereich wie in Abb. 3.

6. Auswirkung der Regularisierung auf die Gesamtbewegung

Bisher wurde nur die Auswirkung der Regularisierung auf einen beliebigen Haftzustand untersucht. Die Schaltzeit τ_{H_0} wurde dabei als bekannt angenommen. Da sie geschichtsabhängig ist, wird sie von der Art der Regularisierung beeinflusst. Eine formelmäßige Darstellung verbietet sich wegen der unbekanntenen Lösungen der sie ergebenden algebraischen Gleichung. Eine Diskussion des gesamten Fehlers kann somit nur noch auf der Basis numerischer Ergebnisse für ausgesuchte Beispiele erfolgen. Hierzu werden zwei extreme Parameterkonstellationen betrachtet.

Bewegungstyp III: In Abb. 8 ist für eine stationäre Bewegung der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit während zweier Perioden zu sehen. Der Zeitbereich ist in allen Bildern derselbe.

Abb. 8a zeigt den exakten Verlauf. In jeder Periode tritt ein Wechsel zwischen Haften und Gleiten ein. In Abb. 8b ist die vorhergesagte Oszillation beim Haften im Fall der Regularisierung durch eine Feder zu erkennen. Sie ist die Ursache für das Auftreten zusätzlicher kurzer Haftzustände, die der Realität widersprechen. Der konstante Anteil in Abb. 8c bei der Regularisierung durch einen Dämpfer führt zu einer unrealistischen Geschwindigkeit. Die Regularisierung durch Feder und Dämpfer gibt im Mittel das exakte Ergebnis richtig wieder (Abb. 8d).

Bewegungstyp VI: Die Geschwindigkeit für zwei Perioden zeigt Abb. 9. Visuell ist kein Unterschied zwischen dem Ergebnis für den Coulombschen Ansatz und den drei Regularisierungsmethoden festzustellen. Deshalb ist der Verlauf nur einmal dargestellt.

Es existiert nur noch Gleiten in wechselnde Richtungen mit unterschiedlicher Zeitdauer. Der zugehörige Kraftverlauf ist eine Meanderfunktion mit Kraftsprüngen vom Wert Zwei. Für den Coulombschen Ansatz ist die Haftdauer Null, ansonsten endlich, aber sehr klein. Deshalb verschwindet die Oszillation bei der Regularisierung durch eine Feder.

Ein quantitatives Maß zur Beurteilung der Güte einer Regularisierung ist der Drift Δv nach Gleichung (15). Er erfaßt den Verschiebungsverlauf. Ergebnisse für zwei um eine Zehnerpotenz verschiedene Werte der beiden Regularisierungsparameter zeigt Abb. 10. Für die Coulombschen Voraussetzungen werden absolute Zahlen angegeben. Abweichungen durch die Regularisierungen werden dagegen in Prozenten ausgedrückt.

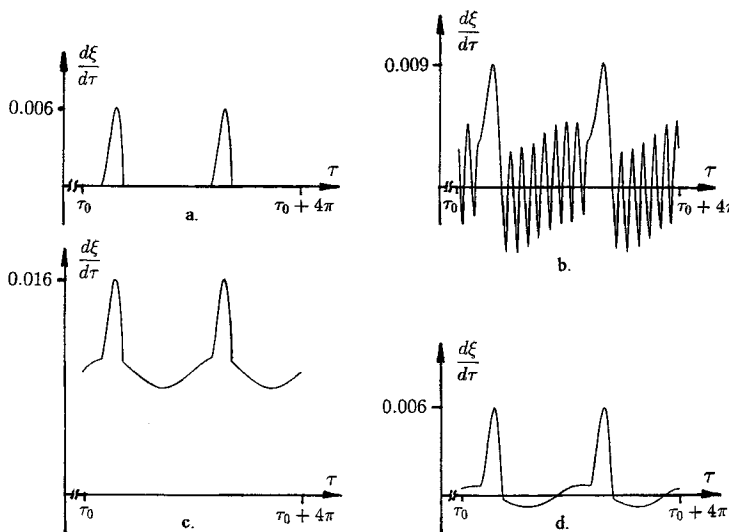


Abb. 8. Geschwindigkeit für $A = 0.9$, $B = 0.11$; $\epsilon_e = \epsilon_d = 0.01$ a. Coulomb, b. Feder, c. Dämpfer, d. Feder und Dämpfer

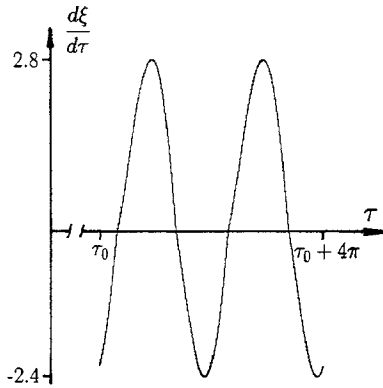


Abb. 9. Geschwindigkeit für $A = 0.05$; $B = 3.0$, $\epsilon_e = \epsilon_d = 0.01$

Die Regularisierung durch eine Feder ergibt für den Kraftverlauf immer die schlechteste Näherung. Durch die Integrationen zur Ermittlung des Geschwindigkeits- und Verschiebungsverlaufes tritt eine Glättung der oszillierenden Teillösungen in Haftbereichen ein. Das Modell kann deshalb für Bewegungen mit kurzen Haftbereichen bei Wahl eines genügend kleinen Regularisierungsparameters zur Beschreibung des Verschiebungsverlaufes Verwendung finden. Die Regularisierung durch einen Dämpfer führt bei großen konstanten eingepprägten Kräften und lang andauernden Haftzuständen zu einem nicht akzeptablen Fehler. Bei kurzen Haftzeiten liefert es dagegen das genaueste Ergebnis. Das gemischte Modell ergibt gleichmäßig für alle Kontrollparameter A und B ausreichende Näherungen.

A = 0.9		B = 0.11		
$\epsilon_e = \epsilon_d$	Coulomb	Feder	Dämpfer	Feder + Dämpfer
0.010	0.0007	110%	1400%	6 %
0.001		11%	140%	0.5%

A = 0.05		B = 3.0		
$\epsilon_e = \epsilon_d$	Coulomb	Feder	Dämpfer	Feder + Dämpfer
0.010	0.4	5%	0.7 %	0.9 %
0.001		2%	0.06%	0.08%

Abb. 10. Fehler beim Drift infolge Regularisierung

7. Ausblick

Kennzeichnend für alle bisherigen Betrachtungen ist die getrennte Beschreibung aufeinanderfolgender Haft- und Gleitzustände. Die Übergänge werden durch statische und kinematische Schaltbedingungen geregelt. Die Schalter entstehen durch die stückweise Linearisierung eines nichtlinearen Kraftgesetzes. Tatsächlich wurden bei allen erfolgten Regularisierungen lineare Kraftgesetze verwendet, die insgesamt zu stückweise linearen Bewegungsgleichungen für Haften und Gleiten führten. Beispielhaft ist dieser Sachverhalt in Abb. 11 im Fall der Regularisierung durch einen Dämpfer wiedergegeben.

Bei einer stückweise linearen Regularisierung (Abb. 11b) wird die im Coulombschen Gesetz (Abb. 11a) nicht definierte Haftkraft im Fall der Ruhe ($d\xi/d\tau = 0$) ersetzt durch ein lineares Kraftgesetz im Bereich kleiner Geschwindigkeiten ($|d\xi/d\tau| < \epsilon_d$). Mit der Vorgabe eines einzigen, jetzt aber nichtlinearen Kraftgesetzes (Abb. 11c), können aufeinanderfolgende Haft- und Gleitzustände durch eine einzige Bewegungsgleichung beschrieben werden, wobei die Schaltbedingungen entfallen. Hierzu bietet sich die arctan-Funktion an. Sie ist bei KIKUCHI und ODEN [2] zu finden. POPP et. al. [3] verwenden sie bei der Regularisierung durch einen Dämpfer für ein Schwingungsproblem. Mit der Wahl

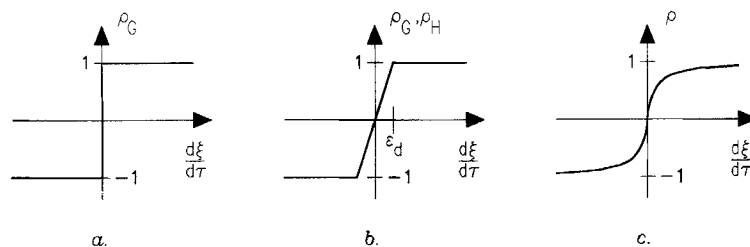


Abb. 11. Kraftgesetze, a. Coulomb, b. stückweise lineare Regularisierung, c. nichtlineare Regularisierung

eines nichtlinearen Kraftgesetzes ist implizit auch die Festlegung eines Regularisierungsparameters ε verbunden, und zwar derart, daß mit $\varepsilon \rightarrow 0$ eine stetige Annäherung an das Coulombsche Gesetz erfolgen muß. Deswegen wird auch bei dieser Art der Regularisierung die Lösung der Bewegungsgleichung Grenzschnittcharakter besitzen. Eine numerische Integration bringt somit neue Fehlerquellen ins Spiel. Wesentlich hierbei ist sicherlich eine geeignete Steuerung der Zeitschrittweiten, um innere und äußere Lösung des Grenzschnittproblems mit gleicher Genauigkeit zu erfassen.

Literatur

- 1 VU VAN, T.: Zur Behandlung von Stoß-Kontaktproblemen mit Reibung unter Verwendung der Finite-Element-Methode. Diss., Univ. Hannover 1989.
- 2 KIKUCHI, N.; ODEN, J. T.: Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and Finite Element Methods. SIAM, Philadelphia 1988.
- 3 POPP, K.; HINRICHS, N.; OESTREICH, M.: Numerische Untersuchungen von Slip-Stick-Bewegungen mit Hilfe geglätteter Reibkennlinien. ZAMM 75 (1995), S63–S64.

Eingegangen: 7. April 1995; revidiert: 11. Juli 1995; angenommen: 21. Juli 1995

Adresse: Prof. Dr.-Ing. PETER VIELSACK, Universität Karlsruhe (TH), Institut für Mechanik, Kaiserstraße 12, D-76128 Karlsruhe, Deutschland