

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

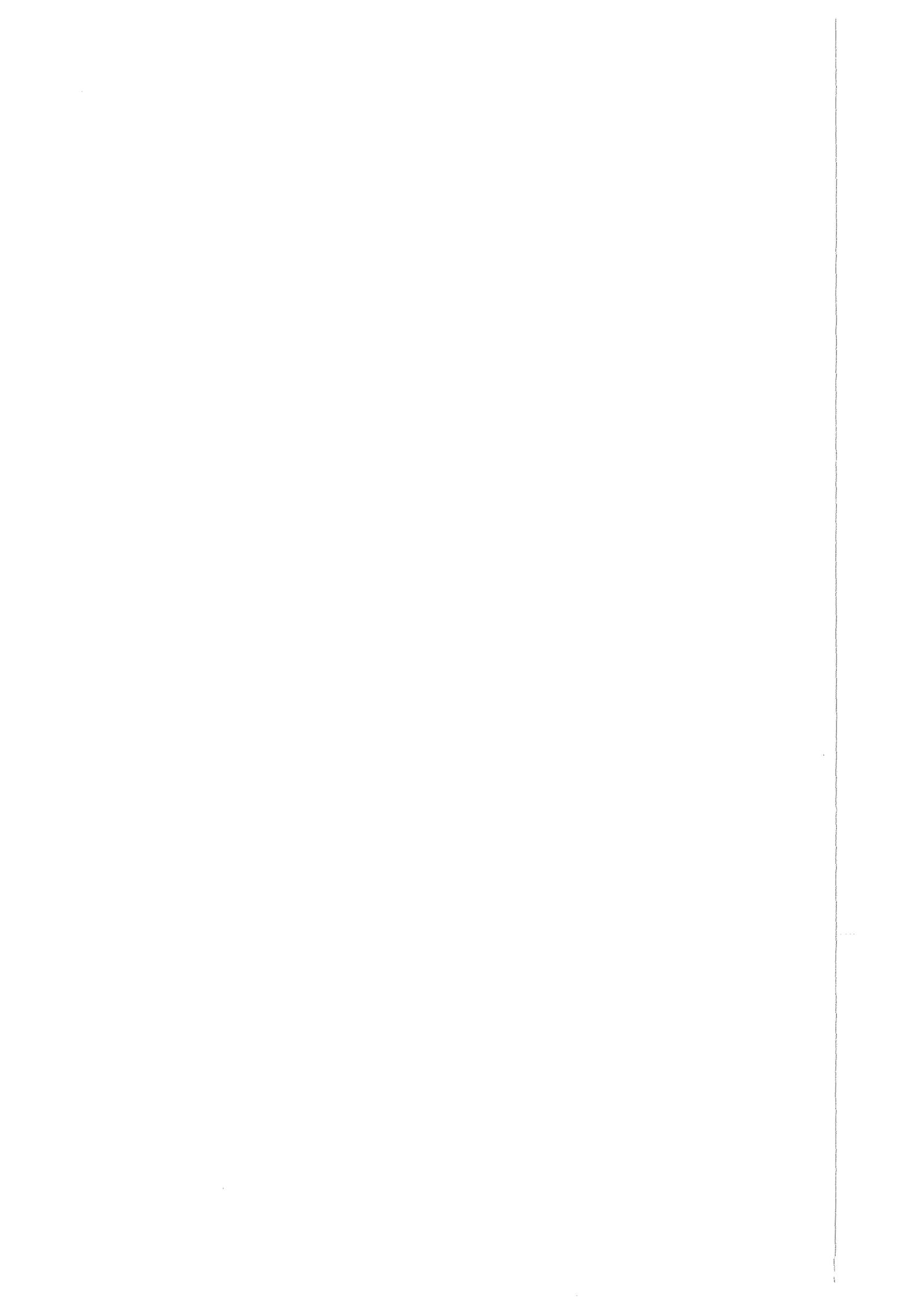
Wissenschaftliche Berichte
FZKA 6292

Numerische Untersuchung von Strömungen in Kanälen mit Versperrungen unter dem Einfluß von Magnetfeldern

B. Mück

**Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Kernfusion**

Mai 1999



Forschungszentrum Karlsruhe

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 6292

**Numerische Untersuchung von Strömungen in
Kanälen mit Versperrungen unter dem Einfluß von
Magnetfeldern**

B. Mück

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Kernfusion

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH)
genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1999

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft
Deutscher Forschungszentren (HGF)

ISSN 0947-8620

Vorwort:

Die vorliegende Arbeit entstand am Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik (IATF) des Forschungszentrums Karlsruhe.

An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei Herrn Dr.-Ing. habil. Claus Günther für die Übernahme des Hauptreferats und die vorbildliche Betreuung bedanken. In den vielen Fachdiskussionen war es möglich, tiefgehende Einblicke in aktuelle Entwicklungen und deren Hintergründe zu erhalten. Die stete Offenheit für Diskussionen und die Fähigkeit sein Wissen weiterzugeben, waren grundlegend für das Gelingen dieser Arbeit.

Ebenfalls möchte ich mich bei dem Institutsleiter, Herrn Prof. Dr.-Ing Ulrich Müller bedanken, der mir die Durchführung dieser Arbeit ermöglichte und ein Korreferat übernahm. Er begleitete die Arbeit stets mit Interesse und sorgte ebenfalls für die Schaffung der notwendigen Rahmenbedingungen.

Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Herbert Oertel vom Institut für Strömungslehre der Universität Karlsruhe bedanke ich mich für sein entgegengebrachtes Interesse sowie für die Übernahme eines Korreferats.

Des weiteren möchte ich mich bei Dr.-Ing. Leo Bühler, Dr.-Ing. Ulrich Burr sowie Dr.-Ing. Leopold Barleon bedanken für ihre stete Bereitschaft häufig gestellte Fragen im Bereich magnetohydrodynamischer Strömungen geduldig zu beantworten.

Ich bedanke mich bei allen Mitarbeitern des IATF für ihre tatkräftige Unterstützung und die angenehme Arbeitsatmosphäre, die trotz der von mir verursachten starken Strapazierung des Institutsbudgets, durch die vielen verbrauchten CPU-Wochen auf dem Großrechner, immer vorhanden war.

Numerische Untersuchung von Strömungen in Kanälen mit Versperrungen unter dem Einfluß von Magnetfeldern

Zusammenfassung

Im Zusammenhang mit der Entwicklung sogenannter "selbstgekühlter Flüssigmetall-Blankets" für Fusionsreaktoren ist die Untersuchung magneto hydrodynamischer (MHD-) Strömungen in Kanälen von Interesse. Ein Ziel ist es, die Wandtemperaturen des Blankets unterhalb der zulässigen Grenzen des Strukturmaterials zu halten. Da sich in den Blanketkanälen eine typische MHD-Strömung mit hohen Druckverlusten einstellt, ist es notwendig, die Wärme bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten abzuführen. Eine deutliche Erhöhung des Wärmeübergangs ist durch turbulenten Transport von Wärme möglich.

In dieser Arbeit wird untersucht, wie sich das Strömungsmuster einer MHD-Strömung in einem isolierten Kanal durch eingebrachte 'Turbulenzpromotoren' in Form von Stäben mit quadratischem Querschnitt ändert. Hierzu wurde ein Rechenprogramm zur Berechnung von dreidimensionalen instationären Zwangskonvektionsströmungen unter dem Einfluß von Magnetfeldern weiterentwickelt, so daß mit dem Programm die Umströmung von Hindernissen in Kanälen unter Magnetfeldeinfluß numerisch untersucht werden kann. Das Rechenprogramm wurde mit einer Gebietszerlegungsmethode (Einflußmatrix-Methode) erweitert und für die Verwendung auf einem Vektor-Parallelrechner mit explizitem Message-Passing parallelisiert.

Erstmalig wird durch eine dreidimensionale numerische Simulation der Umströmung eines quadratischen Zylinders gezeigt, wie die von den Turbulenzpromotoren erzeugten Wirbel unter der Wirkung eines magnetischen Feldes gedämpft werden. Hierbei zeigt sich, daß die Anisotropie der elektrodynamischen Kräfte zur Ausbildung zweidimensionaler Wirbel führt, deren Drehachsen in Magnetfeldrichtung orientiert sind. Bei höheren Hartmann-Zahlen und Interaktions-Parametern ($M > 100$; $N > 10$) werden auch die in Magnetfeldrichtung orientierten Wirbel gedämpft. Es wird weiter gezeigt, bei welcher Kombination der äußeren Parameter Magnetfeld und Strömungsgeschwindigkeit eine Wirbelerzeugung durch Turbulenzpromotoren möglich ist.

Durch die dreidimensionale Visualisierung der aus der numerischen Simulation gewonnenen Daten ist es möglich, die komplexen Vorgänge so aufzubereiten, daß physikalische Zusammenhänge erkennbar werden. Es konnte so das dreidimensionale Schließungsmuster des elektrischen Stroms dargestellt werden, aus dem die Wirkung der Lorentz-Kräfte auf das Medium erschlossen werden kann.

Numerical investigation of flows in channels with obstacles under the influence of magnetic fields

Abstract

In connection with the development of a so called "self cooled liquid metal blanket" for fusion reactors, the investigation of magnetohydrodynamic (MHD) flows is of interest. One objective is to keep the wall temperatures of the blanket below the permissible limits of the structure material. In the blanket channels a typical MHD-flow with high pressure drops develops. For this reason it is necessary to remove the heat at low flow velocities. A substantial enhancement of the heat removal is possible by turbulent heat transfer.

It is investigated in this work how the flow-pattern of a MHD-flow in an insulated duct changes due, to so called "turbulence promoters" in the form of cylindrical rods with square cross section (square cylinder). A numerical code for the simulation of three-dimensional MHD-flows in channels was developed to simulate additional obstacles in the channel under the influence of a magnetic field. The code was enhanced by a domain-decomposition method (influence-matrix technique) and additionally parallelized with explicit message passing for use on a vector-parallel computer.

It is shown for the first time with a three-dimensional transient simulation of the flow around a square cylinder how the vortices, produced by a turbulence promoter, are damped by a magnetic field. It turned out that the non-isotropic character of the electromagnetic forces leads to the formation of two-dimensional vortices. The axes of rotation of the vortices are aligned with the magnetic field. With rising Hartmann numbers and Interaction parameters ($M > 100$; $N > 10$) the vortices aligned with the magnetic field are also damped. Furthermore the parameter range of the magnetic field and the flow velocity are depicted in which the use of turbulence promoters is possible.

With three-dimensional visualization of the numerical data, it is possible to prepare the complex processes so that the physical relations become visible. It is possible to show the three-dimensional closing patterns of the electric currents from which the action of the Lorentz-forces can easily be derived.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Physikalische Grundlagen	4
2.1	Magnetohydrodynamische Strömungen (MHD)	4
2.2	Grundgleichungen und Randbedingungen	7
2.2.1	Hydrodynamische Gleichungen	7
2.2.2	Elektrodynamische Gleichungen	8
2.3	Physikalische Voraussetzungen und Vereinfachungen	8
2.3.1	Elektrostatische Ladung	8
2.3.2	Das Magnetfeld	9
2.3.3	Das Ohmsche Gesetz	9
2.4	Skalierung und Kennzahlen	9
2.5	Die induktionsfreie Approximation	11
2.6	Randbedingungen	12
2.6.1	Randbedingungen für die Geschwindigkeit an festen Rändern	12
2.6.2	Freie Randbedingungen (Eintritt/Austritt)	12
2.6.3	Randbedingung für den Druck	15
2.6.4	Elektrische Randbedingungen	15
2.7	Modellierung der Hartmann-Schichten	17
2.7.1	Tangentiale Geschwindigkeiten	19
2.7.2	Normale Geschwindigkeiten	20
3	Numerisches Verfahren	21
3.1	Allgemeines	21
3.2	Rechengitter und Diskretisierung der Grundgleichungen	22
3.2.1	Die zeitliche Diskretisierung	24
3.2.1.1	Euler-Vorwärts-Verfahren	24
3.2.1.2	Adams-Bashforth-Verfahren	27
3.2.2	Diskrepanz-Statement	32
3.2.3	Die örtliche Diskretisierung	32
3.2.3.1	Zentrale Differenzen	32
3.2.3.2	Upwind-Verfahren	33
3.3	Das Fractional-Step-Verfahren	35

4	Gebietszerlegungs-Methoden	37
4.1	Allgemeines	37
4.2	Überblick	39
4.3	Was ist ein paralleler Algorithmus ?	40
4.4	Überlappende Methoden	42
4.4.1	Die multiplikative Schwarz-Methode ('Schwarz alternating')	42
4.4.2	Die additive Schwarz-Methode	47
4.4.3	Die additive Jacobi-Methode	48
4.4.4	Zusammenfassung der überlappenden Methoden	49
4.5	Nicht überlappende Methoden	50
4.5.1	Die Interface-Methode	51
4.5.2	Die Einflußmatrix-Methode	54
4.6	Zusammenfassung Gebietszerlegungsmethoden	60
5	Physikalische Phänomene	61
5.1	Die hydrodynamische Zylinderumströmung	61
5.1.1	Der Kreiszyylinder	64
5.1.2	Der quadratische Zylinder	66
5.2	Magnetohydrodynamische Kanalströmungen	68
5.3	Stabilität von MHD-Strömungen, Turbulenz	70
5.3.1	Wirbeldämpfung im unendlich ausgedehnten Fluidbereich	75
5.3.2	Wirbeldämpfung im begrenzten Fluidbereich	78
5.3.3	Energietransport und Druckverluste in turbulenten MHD-Strömungen	79
5.4	Stumpfe Körper unter Magnetfeldeinfluß	81
5.4.1	Bisherige analytische und numerische Arbeiten	81
5.4.1.1	Stationäre trägheitsfreie Lösungen	81
5.4.1.2	Instationäre trägheitsbehaftete Strömungen	81
6	Validierung/Verifizierung des Programms - Ergebnisse	83
6.1	Testrechnungen ohne Magnetfeld	84
6.1.1	Zweidimensionale Testrechnungen	84
6.2	Die dreidimensionale Zylinderumströmung ohne Magnetfeldeinfluß	90
6.2.1	Dreidimensionale Testrechnungen	93
7	Dreidimensionale Zylinderumströmung mit Magnetfeldeinfluß	105
7.1	Bisherige experimentelle Ergebnisse	105
7.2	Numerische Simulation der dreidimensionalen Wirbelstraße mit Magnetfeld	111
7.3	Dämpfung von bewegten Wirbeln	123
7.4	Zusammenfassung	125
7.5	Ausblick	126

Anhang

A Multiplikatives Schwarz-Verfahren	127
B Additives Schwarz Verfahren	129
C Verzeichnis der Formelzeichen	130
Literatur	133

Abbildungsverzeichnis

1.1	Aufbau eines zukünftigen Fusionsreaktors.	2
1.2	a) Blanketsegment und b) typischer Kanalquerschnitt eines selbstgekühlten Flüssigmetallblankets.	3
2.1	Prinzipskizze einer MHD-Kanalströmung.	4
2.2	Feldlinien des durch einen Strom induzierten magnetischen Feldes.	5
2.3	Zweidimensionale Kanalströmung.	14
2.4	Elektrischer Strom bei der 'dünne Wand Approximation'.	16
2.5	Randbedingungen an isolierten Hartmann-Wänden.	20
2.6	Randbedingungen für modellierte Hartmann-Schichten und Hartmann-Wände bei hohen Hartmann-Zahlen.	20
3.1	Berechnung der Ableitung $\frac{\partial uv}{\partial x}$ an der Zylinderecke.	23
3.2	Verhalten von G1 und G2 an der von Mößner (1996) empfohlenen Stabilitätsgrenze $d = 1/8; c = 0.5$	28
3.3	Polardiagramm des Phasenfehlers für eine Advektionsgleichung bei $c = 1$ und an der von Mößner (1996) empfohlenen Stabilitätsgrenze $c = 0.5$	29
3.4	Verhalten von Dämpfung (linkes Bild) und Phasenfehler der Advektionsgleichung (rechtes Bild) der Lax-Wendroff/QUICK-Diskretisierung.	30
3.5	Dämpfungsverhalten (linkes Bild) und Phasenfehler der Advektionsgleichung (rechtes Bild) verschiedener λ -Faktoren bei $c = 0.5$ und $d = 1/8$ mit Adams-Bashfort/LECUSSO-Diskretisierung.	31
4.1	Unterteilung der Gebietszerlegungsmethoden in überlappende und nicht überlappende Methoden.	39
4.2	Prinzipielle Vorgehensweise bei der Gebietszerlegungsmethode nach Schwarz.	42
4.3	Nicht überlappende Gebiete.	50
4.4	Prinzip der Einfluß-Matrix-Methode.	51
4.5	Einflußmatrix-Methode; Zerlegung von Rechengebieten.	58
4.6	Struktur der Koeffizientenmatrix	58
5.1	Bereiche der Zylinderumströmung.	61
5.2	Strömungsbereiche der Nachlaufströmung nach Oertel (1995).	62
5.3	Geometrie der Zylinderumströmung.	63

5.4	Umströmung des Kreiszylinders bei $Re < 4$	64
5.5	Umströmung des Kreiszylinders bei $4 \lesssim Re \lesssim 45$	64
5.6	Umströmung des Kreiszylinders bei $45 \lesssim Re \lesssim 160$	65
5.7	Umströmung des Kreiszylinders bei $160 \lesssim Re \lesssim 300$	65
5.8	Umströmung des Quadratzyinders bei $Re \ll 1$	66
5.9	Umströmung des Quadratzyinders bei $1 < Re \lesssim 50$	67
5.10	Umströmung des Quadratzyinders bei $50 \lesssim Re \lesssim 160$	67
5.11	Umströmung des Quadratzyinders bei $160 \lesssim Re \lesssim 300$	67
5.12	Seitenwand-Jets in Kanälen mit elektrisch leitenden Wänden	69
5.13	Anordnung zur Turbulenzgenerierung in den Seitenschichten	70
5.14	Verschiedene in der Literatur behandelte Versuchsanordnungen.	71
5.15	Verteilung eines Markers Hg/In in einer quasi zwei-dimensionalen turbulenten Strömung mit und ohne Magnetfeld	73
5.16	Entwicklung eines Einzelwirbels bis zu seiner vollständigen Dissipation in einem isolierten Kanal unter Magnetfeldeinfluß.	74
5.17	Streckung eines Wirbels durch das Magnetfeld während einer typischen Umdrehungszeit t_{uu}	76
5.18	Wirbelstreckung durch die Wirkung des induzierten Stromes.	78
6.1	Lösungsgebiet und Randbedingungen für die Umströmung eines Zylinders mit quadratischem Querschnitt.	85
6.2	Umströmung des quadratischen Zylinders bei $Re=200$	87
6.3	Experimentelle und numerische Werte für Strouhalzahl und Widerstandkoeffizient für $50 \leq Re \leq 1000$	88
6.4	Druckanteil des Widerstandskoeffizienten bei $Re=200$	88
6.5	Isovorticity-Darstellung der zweidimensionalen numerischen Simulation bei $Re = 200$; blau $\omega_y = -6$, rot $\omega_y = +6$	89
6.6	Verschiedene Formen der Wirbelablösung nach Zhang et al. (1994)	91
6.7	Symmetriediagramme der Wirbelstraße nach Williamson (1996)	92
6.8	Abmessungen und Randbedingungen des Gitters.	94
6.9	Isovorticity-Oberflächen Plot der dreidimensionalen Umströmung eines quadratischen Zylinders $Re = 200; \omega_y = \pm 6; \omega_x = \pm 3$	95
6.10	Isovorticity-Oberflächen Plot der dreidimensionalen Umströmung eines quadratischen Zylinders $Re = 200; \omega_y = \pm 3; \omega_x = \pm 1.5$	96
6.11	Isovorticity-Oberflächen Plot der dreidimensionalen Umströmung eines quadratischen Zylinders $Re = 200; \omega_y = \pm 12; \omega_x = \pm 6$	96
6.12	Isovorticity-Schnittebenen für $\omega_x = \pm 1, 2, 3, 4$ bei $x = 1.6(a), 1.8(b), 2.0(c)$	97
6.13	Isovorticity-Oberflächen Plot der dreidimensionalen Umströmung eines quadratischen Zylinders bei $Re = 200; \omega_y = \pm 6; \omega_x = \pm 3$, gedrehte Darstellung.	98
6.14	Isovorticity-Oberflächen Plot der dreidimensionalen Umströmung eines quadratischen Zylinders aus zwei verschiedenen Blickrichtungen bei $Re = 200; \omega_x = \pm 3$	99

6.15	Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte beim Übergang zur dreidimensionalen Strömung bei $Re = 200$	99
6.16	Geschwindigkeit v_y an einer Stelle im Nachlaufgebiet des Zylinders bei $Re=200$.	100
6.17	Beginnender Wirbelhaft-Mode mit lokaler Einschnürung	101
6.18	B-Mode Wirbelablösung bei $Re = 250; \omega_y = \pm 6; \omega_x = \pm 3$	102
6.19	B-Mode Wirbelablösung bei $Re = 250; \omega_y = \pm 6; \omega_x = \pm 3$, gedrehte Darstellung.	103
6.20	B-Mode Wirbelablösung bei $Re = 250; \omega_x = \pm 3$	103
6.21	B-Mode Wirbelablösung bei $Re = 250; \omega_y = 6$, Ausschnittsvergrößerung. . .	104
7.1	Wirkung eines zylinderparallelen Magnetfeldes auf eine Kármánsche Wirbelstraße nach Papailiou (1984).	107
7.2	Kritische Reynoldszahlen nach Andreev und Kolesnikov (1997)	108
7.3	Normierte Geschwindigkeitsschwankungen hinter dem Zylinder nach Andreev und Kolesnikov (1997).	109
7.4	Versuchsaufbau nach Frank und Barleon (1997)	109
7.5	Stabilitätskurve nach Frank (1997)	110
7.6	Verwendete Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld im MHD-Fall. .	111
7.7	$Re=200; M=31.6; N=1$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6; \omega_x = \pm 3$. .	113
7.8	$Re=200; M=31.6; N=1$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6; \omega_x = \pm 3$. .	114
7.9	$Re=200; M=31.6; N=1$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6$	114
7.10	$Re=200; M=31.6; N=1$; Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte.	115
7.11	$Re=200; M=71; N=5$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6$	116
7.12	$Re=200; M=71; N=5$; Verlauf der Geschwindigkeitskomponente v_y in Magnetfeldrichtung $Y = 5, Z = 5$	116
7.13	$Re=200; M=71; N=5$; Verlauf der Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte beim Übergang von $N = 1$ auf $N = 5$	117
7.14	$Re=200; M=100; N=10$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6$	118
7.15	$Re=200; M=141.4; N=20$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6$	119
7.16	$Re=200; M=264.5; N=70$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6$	119
7.17	$Re=200; M=424; N=180$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6$	120
7.18	$Re=200; M=264.5; N=70$; Schnitte durch das Potentialfeld.	121
7.19	$Re=200; M=264.5; N=70$; Schnitte durch das Potentialfeld.	121
7.20	Vergleich von Messung Frank (1997) und Numerik.	122
7.21	Stromverlauf in einem bewegten Wirbel	123
7.22	$Re=200; M=264.5; N=70$; Isovorticity-Oberflächenplot $\omega_y = \pm 6$; elektrische Stromlinien (Pink).	124
7.23	$Re=200; M=264.5; N=70$; Isovorticity-Oberflächenplot $\omega_y = \pm 6$; elektrische Stromlinien (Pink).	125

Kapitel 1

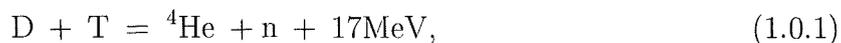
Einleitung

Für die Abfuhr von Wärme aus thermisch hochbelasteten Bauteilen sind flüssige Metalle aufgrund ihrer hohen Wärmeleitfähigkeit und geringen Zähigkeit sehr gut geeignet. Eine Verbesserung der Wärmeabfuhr ist möglich, wenn die Strömung zusätzlich instationär, dreidimensional, wirbelbehaftet und damit turbulent ist.

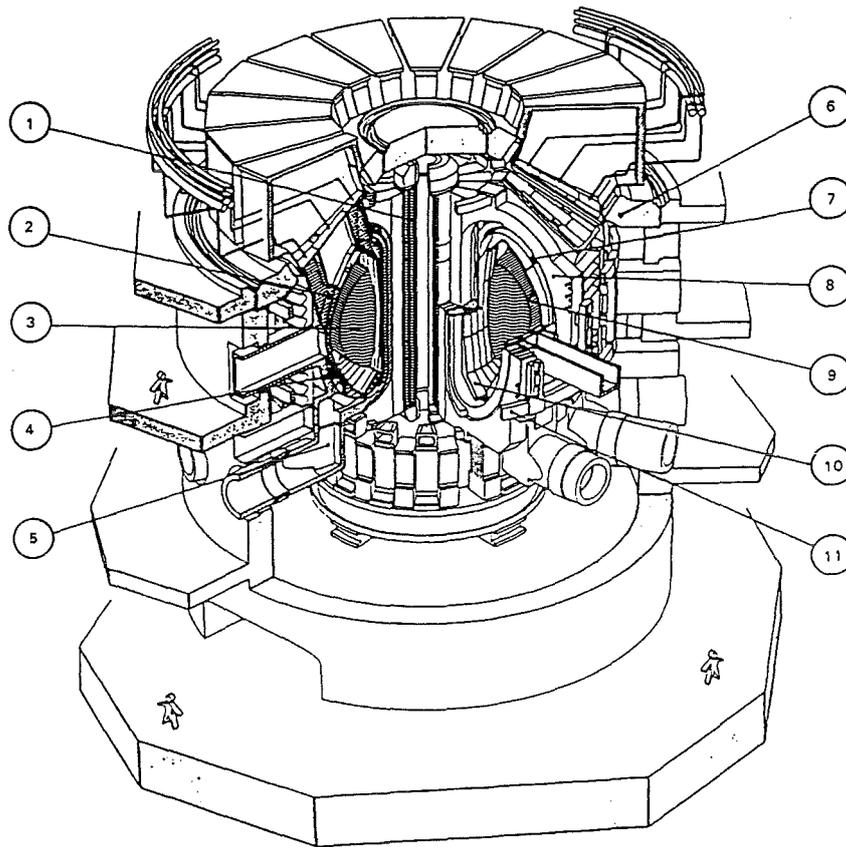
Strömungen flüssiger Metalle hoher elektrischer Leitfähigkeit können durch magnetische Felder beeinflusst werden. Solche Strömungen heißen magnetohydrodynamische (MHD-) Strömungen. Durch die Wirkung von elektrodynamischen Kräften können sich stark von den Gesetzmäßigkeiten der hydrodynamischen Strömung abweichende Geschwindigkeitsverteilungen ausbilden. Die elektrodynamischen Kräfte besitzen generell eine dämpfende Wirkung, die jedoch stark richtungsabhängig ist. Sie können eine zweidimensionale turbulente Strömung erzeugen, bei der alle vorhandenen Wirbel in Magnetfeldrichtung ausgerichtet sind.

Die Erforschung von MHD-Strömungen bekam im Zusammenhang mit der Entwicklung von Kernfusionsreaktoren großen Auftrieb. Die Energieerzeugung durch Kernfusion ist eine Alternative zur Verbrennung von fossilen Brennstoffen. Die globalen Ressourcen an fossilen Brennstoffen sind begrenzt und erzwingen die Erforschung anderer Energieträger. Regenerative Energieträger mit ihren geringen Leistungsdichten können nur einen begrenzten Beitrag erbringen.

Der Fusionsprozess beruht auf der Verschmelzung leichter Atomkerne. Für einen zukünftigen Fusionsreaktor erscheint die Verschmelzung von Deuterium und Tritium zu Helium,



zur technischen Nutzung am aussichtsreichsten. Für diese Reaktion ist eine hohe Aktivierungsenergie notwendig, die zunächst durch Heizen zugeführt werden muß. Bei den damit verbundenen Temperaturen liegen Deuterium und Tritium als ionisiertes Plasma vor. Dies ermöglicht einen Einschluß durch ein magnetisches Feld. In Abbildung 1.1 ist der Aufbau eines solchen Reaktors skizziert. Das Plasma befindet sich in einem torusförmigen Gefäß, dessen Wände durch das sogenannte Blanket gebildet werden. Dieses Blanket befindet sich zwischen dem Plasma und den supraleitenden Magnetspulen, deren Magnetfeld das Plasma zusammenhält.



- | | |
|--|------------------------------|
| 1 Innere Poloidalfeldspule | 7 Steuerfeldspulen |
| 2 Blanket | 8 Hauptfeldspulen |
| 3 Plasma | 9 Erste Wand |
| 4 Vakuumgefäß und Abschirmung | 10 Divertor |
| 5 Abgaskanal | 11 Äußere Poloidalfeldspulen |
| 6 Kryostat und biologische Abschirmung | |

Abbildung 1.1: Aufbau eines zukünftigen Fusionsreaktors.

Es hat die folgenden Aufgaben zu erfüllen:

- Abfuhr der thermischen Leistung
- Kühlung der "ersten Wand" des Reaktors
- Erbrüten des für den weiteren Reaktorbetrieb erforderlichen Tritiums
- Abschirmung der supraleitenden Magnete vor Strahlung

Zur Erfüllung dieser Aufgaben werden mehrere unterschiedliche Blanketkonzepte untersucht. Besonders attraktiv erscheint dabei das selbstgekühlte Flüssigmetall-Blanket. Durch die Verwendung von Lithium oder einer Blei-Lithium Legierung als Fluid werden alle genannten Aufgaben bei nur einem Fluidkreislauf erfüllt.

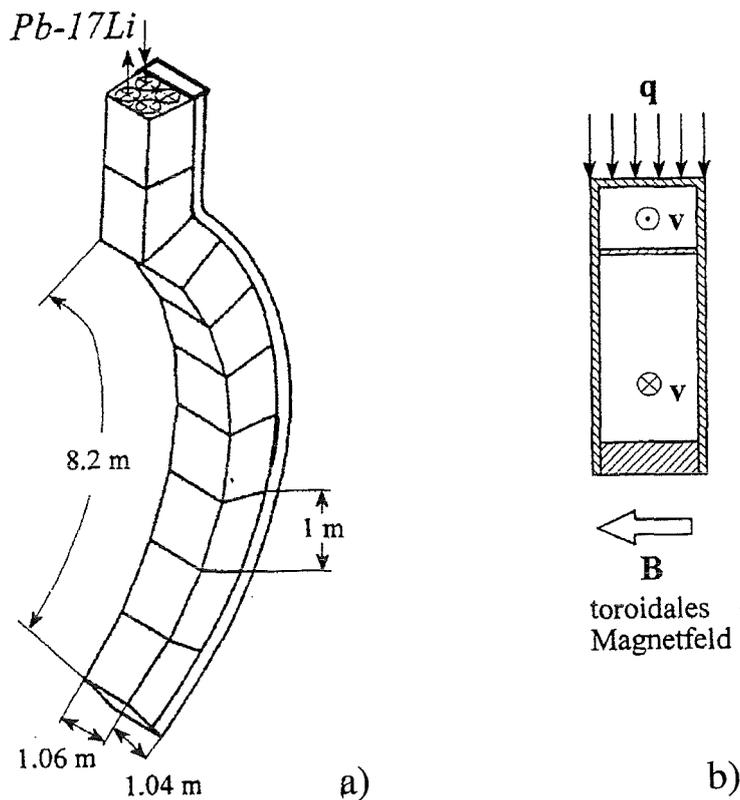


Abbildung 1.2: a) Blanketsegment und b) typischer Kanalquerschnitt eines selbstgekühlten Flüssigmetallblankets.

In Abbildung 1.2 ist ein Ausschnitt eines Blankets mit einem typischen Kanalquerschnitt dargestellt.

Die Strömung wird unter anderem in zwei poloidal angeordneten Kanälen geführt. Das Fluid wird durch volumetrische Heizung erwärmt, wobei neben der Erwärmung durch Ohmsche Verluste die γ -Strahlung den Hauptanteil liefert. Die dem Plasma zugewandte Wand ist dem Wandwärmestrom des Plasmas ausgesetzt. Ein Ziel ist es, die Wandtemperaturen unterhalb der zulässigen Grenzen des Strukturmaterials zu halten. Da sich in den Blanketkanälen eine typische MHD-Strömung mit hohen Druckverlusten einstellt, ist es notwendig, die Wärme bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten abzuführen. Eine deutliche Erhöhung des Wärmeübergangs an der Wand ist durch turbulenten Transport von Wärme möglich.

In dieser Arbeit wird untersucht, wie sich das Strömungsmuster einer MHD-Strömung durch eingebrachte 'Turbulenzpromotoren' in Form von zylindrischen Stäben ändert. Es wird durch eine dreidimensionale numerische Simulation gezeigt, wie die von den Turbulenzpromotoren erzeugten Wirbel unter der Wirkung eines magnetischen Feldes gedämpft werden. Durch die dreidimensionale Visualisierung der aus der numerischen Simulation gewonnenen Daten ist es möglich, die komplexen Vorgänge so aufzubereiten, daß physikalische Zusammenhänge erkennbar werden. Es wird weiter gezeigt, bei welcher Kombination der äußeren Parameter Magnetfeld und Strömungsgeschwindigkeit eine Wirbelerzeugung durch Turbulenzpromotoren möglich ist.

Kapitel 2

Physikalische Grundlagen

2.1 Magneto hydrodynamische Strömungen (MHD)

Schon der englische Physiker Faraday (1791-1867) und seine Zeitgenossen wußten, daß flüssiges oder festes leitendes Material, das durch ein magnetisches Feld bewegt wird, elektromagnetischen Kräften ausgesetzt ist. Anregungen, dieses Gebiet zu erforschen, kamen aus der Geophysik. Es wurde vermutet, daß elektrische Ströme unbekannter Herkunft in Wechselwirkung mit dem Erdmagnetfeld für die Ozeanbewegungen verantwortlich sein könnten. Das Interesse an diesem Thema erlahmte jedoch bald, da auch in Laborexperimenten keine Fortschritte zu verzeichnen waren. Trotzdem konnten grundlegende, auf MHD-Prinzipien beruhende Artefakte gefunden werden.

Ritchie (1832) pumpte mit einer MHD-Pumpe Wasser durch einen Kanal. Es dauerte jedoch noch ein Jahrhundert, ehe eine MHD-Pumpe in der Praxis Anwendung fand und das gesamte Gebiet der MHD wieder in den Mittelpunkt der Forschung rückte. Dieser "Neubeginn" wird von Hartmann (1937) markiert.

Die wesentlichen Effekte in einer MHD-Kanalströmung können durch grundlegende physikalische Gesetzmäßigkeiten erklärt werden.

Wir betrachten eine Zwangskonvektionsströmung eines elektrisch leitenden Fluids durch einen Kanal mit quadratischem Querschnitt nach Abbildung 2.1.

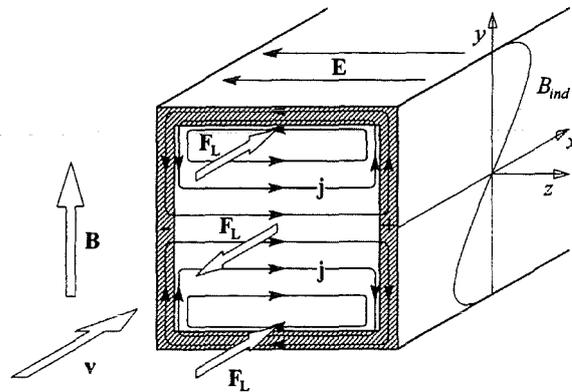


Abbildung 2.1: Prinzipskizze einer MHD-Kanalströmung.

Auf die Anordnung wirkt ein magnetisches Feld \mathbf{B} . Die Strömungsrichtung ist durch den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} gegeben. An den Wänden gilt die Haftbedingung.

Durch die Bewegung eines Leiters in einem Magnetfeld wird ein elektrisches Feld \mathbf{E} induziert. Der elektrische Strom \mathbf{j} fließt entlang der Gradienten des elektrischen Feldes. Die Richtung des Stromes ist nach der Drei-Finger-Regel der rechten Hand senkrecht zur Strömungsrichtung und ebenfalls senkrecht zum angelegten magnetischen Feld.

Außerdem bewirkt der induzierte Strom zwei weitere grundlegende Effekte:

Die Wechselwirkung des Stromes mit dem angelegten Magnetfeld erzeugt eine Lorentz-Kraft. Nach der Lenzschen Regel ist diese Wirkung des Stromes seiner Ursache entgegengerichtet. Die Lorentz-Kraft wirkt also entgegen der Strömungsrichtung des Fluids. Die Richtung der Lorentz-Kraft läßt sich ebenfalls mit der Drei-Finger-Regel ermitteln, wenn die Richtung des Stromes bekannt ist.

Eine weitere Folge des Stromflusses ist das sogenannte "induzierte Magnetfeld", mit dem sich jeder elektrische Strom im Sinne einer Rechtsschraube umgibt (siehe Abb. 2.2).

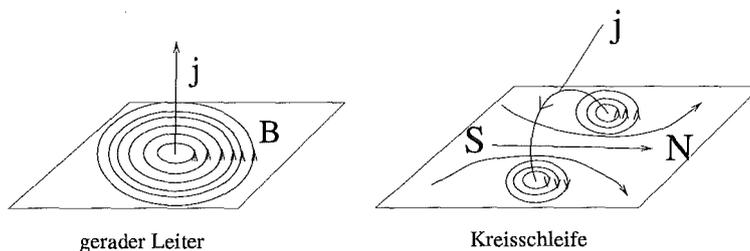


Abbildung 2.2: Feldlinien des durch einen Strom induzierten magnetischen Feldes.

Das induzierte Magnetfeld ist dem äußeren angelegten Magnetfeld überlagert und verändert deshalb den Feldlinienverlauf des Magnetfeldes in der Anordnung nach Abbildung 2.1.

Durch die Wirkung der Lorentz-Kraft wird das Profil der Strömung sowie der Druckverlust im Kanal maßgeblich beeinflusst. Im Kernbereich der Strömung wirkt die Lorentz-Kraft der Strömungsrichtung entgegen. Dadurch werden erhebliche Druckverluste erzeugt, die proportional zur Stromdichte im Fluid sind. Das Geschwindigkeitsprofil wird abgeflacht. Aus diesem Grund spielt die Reibung im Kernbereich der Strömung eine geringe Rolle.

Entlang den Wand-Grenzschichten senkrecht zum Magnetfeld sowie in der leitenden Wand schließen sich die Ströme. Die Lorentz-Kräfte zeigen hier in Strömungsrichtung und stehen im Gleichgewicht mit den Reibungskräften. Dadurch treten im Vergleich zur hydrodynamischen Grenzschicht erheblich dünnere Grenzschichten auf. Diese werden auch als Hartmann-Schichten bezeichnet.

An den magnetfeldparallelen Wänden läuft der Strom parallel zur Magnetfeldrichtung und kann daher keine Lorentz-Kräfte erzeugen. Entscheidend für die Form des Geschwindigkeitsprofils in diesen sogenannten Seitenschichten ist letztlich die Stromdichte im Fluid bzw. die Leitfähigkeit des Wandmaterials.

Bei isolierten Kanälen ist die Stromdichte im Fluid gering, da sich der Strom nur innerhalb des Fluids schließen kann. Es entsteht ein flaches Geschwindigkeitsprofil. Bei mittleren Wandleitfähigkeiten kann es zu einem Ausweichen der Fluidströmung in die magnetfeldparallelen seitlichen Schichten kommen. Es entstehen dort Geschwindigkeitsüberhöhungen,

sogenannte “Jets”. Bei perfekt leitendem Wandmaterial ist das Geschwindigkeitsprofil wieder flach. Die verschiedenen Effekte werden ausführlicher in Abschnitt 5.2 behandelt.

Die Wechselwirkungen des induzierten magnetischen Feldes werden bei Anordnungen im Labormaßstab meist vernachlässigt (siehe Abschnitt 2.5). Wichtig werden die induzierten Felder dann, wenn es ein Ziel ist, durch Strömung von elektrisch leitendem Material ein dem äußeren Magnetfeld gleichgerichtetes induziertes Magnetfeld aufzubauen, welches das äußere Feld verstärkt (Dynamo-Effekt). Es ist auch möglich, wie in vielen kosmischen Körpern, ein sich selbst erregendes Magnetfeld durch Strömung von leitendem Material zu erzeugen. Dieser Zweig führt in den Bereich der sogenannten MHD-Dynamo-Forschung, die sich vor allem damit beschäftigt, wie kosmische Körper, z.B. die Erde, ihr Magnetfeld erzeugen. Dieser Bereich der Geo- und Astrophysik wird in dieser Arbeit nicht behandelt.

2.2 Grundgleichungen und Randbedingungen

Die Magnetohydrodynamik (MHD) behandelt die Bewegung eines elektrisch leitenden Fluids unter der Wirkung eines Magnetfeldes und ist eine Verbindung zweier klassischer Gebiete der Physik, der Elektrodynamik und der Hydrodynamik.

Bei MHD-Strömungen flüssiger Metalle, deren numerische Simulation in dieser Arbeit ausschließlich betrachtet wird, wird auch der Begriff der "Liquid-Metal-MHD" verwendet. In flüssigen Metallen findet die elektrische Leitung ausschließlich durch Elektronen statt. Dies führt dazu, daß nur eine Flüssigkeit beschrieben werden muß ("Ein-Flüssigkeits-Modell"). Bei der Plasmaphysik führt die Berücksichtigung positiv geladener Ionen zu "Mehrflüssigkeits-Modellen".

Das Strömungsverhalten flüssiger Metalle wird durch die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie beschrieben.

Die hydrodynamischen Erhaltungsgleichungen werden durch zusätzliche Terme für die elektromagnetische Wechselwirkung ergänzt. Daneben gelten zusätzlich für die elektrodynamischen Effekte die Maxwell'schen Gleichungen sowie das Ohmsche Gesetz.

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur isotherme Strömungen betrachtet. Flüssige Metalle werden in guter Näherung als inkompressible Newtonsche Medien betrachtet. Es werden konstante Stoffwerte für die Dichte ρ , die spezifische elektrische Leitfähigkeit σ und die dynamische Zähigkeit ν angenommen.

Die folgenden Grundgleichungen werden in koordinatenfreier Vektorschreibweise mit dem Nabla-Operator (∇) angegeben.

2.2.1 Hydrodynamische Gleichungen

Für inkompressible Fluide läßt sich die Massenbilanz als Bedingung für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = (u, v, w)$ angeben:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad . \quad (2.2.1)$$

Die zeitliche Änderung des Impulses in einem Volumenelement wird durch die Navier-Stokes-Gleichung beschrieben. Für Newtonsche Medien konstanter kinematischer Viskosität ν beschreibt die Navier-Stokes-Gleichung das Gleichgewicht der Trägheitskräfte mit Zähigkeitskräften ($\nu \nabla^2 \vec{v}$), Druckkräften (∇p), elektrostatischen Kräften ($\rho_{el} \vec{E}$) und den Lorentz-Kräften ($\vec{j} \times \vec{B}$):

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \vec{v} + \rho_{el} \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad . \quad (2.2.2)$$

Es steht t für die Zeit, p für den Druck, ρ_{el} für die elektrostatische Ladungsdichte, \vec{E} für das elektrische Feld, \vec{j} für den Strom und \vec{B} für die magnetische Induktion. Die Lorentz-Kraft kann auch als Divergenz eines elektromagnetischen Spannungs-Tensors erhalten werden (Roberts 1967). Der sogenannte magnetische Druck wird dann mit dem Druck p zu einem Gesamtdruck P zusammengefaßt

$$P = p + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 \quad . \quad (2.2.3)$$

μ sei die magnetische Permeabilität. Gleichung (2.2.2) läßt sich jetzt schreiben als:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P + \rho \nu \nabla^2 \vec{v} + \rho_{el} \vec{E} + \frac{1}{\mu} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (2.2.4)$$

In manchen Lehrbüchern wird die Navier-Stokes-Gleichung in dieser Form verwendet (siehe Roberts (1967)).

2.2.2 Elektrodynamische Gleichungen

Durch das System der Maxwell'schen Gleichungen und das Ohmsche Gesetz werden alle bekannten elektrischen, magnetischen und elektromagnetischen Vorgänge beschrieben.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \text{Ampère-Maxwellsche Gleichung} \quad (2.2.5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Faraday-Maxwellsche Gleichung (Induktionsgesetz)} \quad (2.2.6)$$

$$\varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho_{el} \quad \text{Gaußscher Hüllenflußsatz} \quad (2.2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Quellenfreiheit Magnetfeld} \quad (2.2.8)$$

Hierin sind ε die Dielektrizitätskonstante, ρ_{el} die elektrische Ladungsdichte und \vec{E} das elektrische Feld. Die Gleichungen (2.2.5) und (2.2.6) werden gelegentlich auch als erste und zweite Maxwell'sche Gleichung bezeichnet. Das Ohmsche Gesetz für einen im Magnetfeld bewegten elektrischen Leiter lautet:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{Ohmsches Gesetz} \quad (2.2.9)$$

Dabei ist σ die spezifische elektrische Leitfähigkeit des Mediums. In Gleichung (2.2.9) gehen bereits mehrere Annahmen ein (siehe Abschnitt 2.3.3).

2.3 Physikalische Voraussetzungen und Vereinfachungen

Bei starken Magnetfeldern, wie sie in zukünftigen Fusionsreaktoren auftreten, können die allgemeingültigen Gleichungen (2.2.2) - (2.2.9) vereinfacht werden.

2.3.1 Elektrostatische Ladung

Die in einem Fusionsblanket verwendeten flüssigen Metalle haben eine sehr hohe elektrische Leitfähigkeit. Der dadurch hervorgerufene rasche Ausgleich von elektrostatischen Ladungsunterschieden führt zu mehreren Vereinfachungen. Verschiebestrome ($\varepsilon \partial \vec{E} / \partial t$) in Gleichung (2.2.5) können vernachlässigt werden. Der entstehende Fehler ist von der Größenordnung $(|\vec{v}|/c)^2$ (Shercliff 1965), mit c als der Lichtgeschwindigkeit.

Ebenfalls können elektrostatische Kraftwirkungen ($\rho_{el} \vec{E}$) in Gleichung (2.2.2) vernachlässigt werden (Chang und Lundgren 1961).

Elektrische Ladungen können nach Gleichung (2.2.7) berechnet werden. Da die elektrostatische Ladungsdichte ρ_{el} jedoch sehr klein ist und im übrigen Gleichungssystem keinen Einfluß mehr hat, wird die Lösung von Gleichung (2.2.7) oft unterlassen und deshalb im System der zu lösenden Gleichungen nicht mehr aufgeführt.

2.3.2 Das Magnetfeld

Für die in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen wird ein zeitlich konstantes Magnetfeld vorausgesetzt ($\partial B/\partial t = 0$). Daraus folgt nach Gleichung (2.2.6), daß die Rotation des elektrischen Feldes verschwindet. Es ist daher möglich, das elektrische Feld durch den Gradienten eines Potentialfeldes Φ zu ersetzen:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \quad . \quad (2.3.10)$$

Dies stellt hinsichtlich des benötigten Speicherplatzes bei numerischen Berechnungen eine Erleichterung dar, da statt einem Vektorfeld \vec{E} nur noch ein skalares Feld Φ zu berücksichtigen ist.

2.3.3 Das Ohmsche Gesetz

Das Ohmsche Gesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Stromdichtefeld und dem elektrischen Feld. Für einen ruhenden Leiter lautet es:

$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} \quad . \quad (2.3.11)$$

Im Fall des bewegten Leiters wirkt zusätzlich das induzierte elektrische Feld $\vec{v} \times \vec{B}$ und es ergibt sich das Ohmsche Gesetz nach Gleichung (2.2.9). Bei der Behandlung von flüssigen Metallen brauchen weitere Einflüsse auf den Stromfluß (z.B. Hall-Effekte, Seebeck-Effekte) nicht berücksichtigt werden. Als Hall-Effekt bezeichnet man die Bewegung freier Ladungsträger im Magnetfeld senkrecht zur Stromrichtung. Der Seebeck-Effekt beschreibt die Elektronendiffusion aufgrund eines Temperaturgradienten.

Eine detaillierte Betrachtung dieser Effekte wurde von Sterl (1989) durchgeführt.

2.4 Skalierung und Kennzahlen

Für die numerische Behandlung werden die Gleichungen in geeigneter Weise normiert. Durch die Normierung aller Größen werden Rundungsfehler der Rechenanlage, die durch die Verarbeitung sehr großer und sehr kleiner Zahlenwerte entstehen können, vermieden. Zusätzlich erlauben die entstehenden typischen Kennzahlen eine Vergleichbarkeit und Übertragbarkeit der Ergebnisse. Die vorkommenden Variablen werden auf geeignete Bezugsgrößen normiert, die für das Strömungsfeld charakteristisch sind.

Wir wählen eine Skalierung, die für MHD-Kanalströmungen ohne innere Einbauten verwendet wird (vgl. Walker (1981), Hunt und Holroyd (1977)):

$$(x', y', z') = \frac{x, y, z}{a}, \quad \vec{v}' = \frac{\vec{v}}{v_0}, \quad t' = \frac{t}{t_0}, \quad \vec{B}' = \frac{\vec{B}}{B_0} \quad (2.4.12)$$

$$p' = \frac{p}{a\sigma v_0 B_0^2}, \quad P' = \frac{P}{a\sigma v_0 B_0^2}, \quad \vec{j}' = \frac{\vec{j}}{\sigma v_0 B_0}, \quad \Phi' = \frac{\Phi}{a v_0 B_0}, \quad \vec{E}' = \frac{\vec{E}}{v_0 B_0}$$

Der Index (') bezeichnet die dimensionslosen Größen. Für die Bezugslänge a wird bei MHD-Kanalströmungen die halbe Kanalabmessung in Magnetfeldrichtung gewählt. Entstehen im Kanal durch innere Einbauten oder andere Maßnahmen Wirbel, so kann als physikalisch relevante geometrische Länge auch ein typischer Wirbeldurchmesser verwendet werden (vgl. Bühler (1996)). v_0 sei die aus dem Volumenstrom abgeleitete mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Kanal. Die typische Zeitskala wird mit $t_0 = a/v_0$ gebildet.

Mit der Normierung (2.4.12) werden im weiteren nur noch dimensionslose Größen verwendet. Die Indizierung (') kann daher entfallen.

Die normierten hydrodynamischen und elektrodynamischen Gleichungen ergeben sich in folgender Form. Die darin auftretenden dimensionslosen Größen sind nachfolgend definiert.

Hydrodynamische Gleichungen:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung} \quad (2.4.13)$$

$$\frac{1}{N} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \frac{1}{M^2} \nabla^2 \vec{v} + \vec{j} \times \vec{B} \quad \text{Impulsgleichung} \quad (2.4.14)$$

In der alternativ verwendbaren Form nach Gleichung (2.2.4) ergibt sich:

$$\frac{1}{N} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P + \frac{1}{M^2} \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{R_m} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \quad \text{Impulsgleichung} \quad (2.4.15)$$

Elektrodynamische Gleichungen:

$$\nabla \times \vec{B} = R_m \vec{j} \quad \text{Ampère-Maxwellsche Gleichung} \quad (2.4.16)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{Faraday-Maxwellsche Gleichung (Induktionsgesetz)} \quad (2.4.17)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Quellenfreiheit Magnetfeld} \quad (2.4.18)$$

Ohmsches Gesetz :

$$\vec{j} = (-\nabla \Phi + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{Ohmsches Gesetz} \quad (2.4.19)$$

Die dimensionsbehafteten Einflußgrößen können zu dimensionslosen Kennzahlen zusammengefaßt werden, die im wesentlichen Verhältnisse von Kräften sind, die in der Strömung auftreten. Der

$$\underline{\text{Interaktionsparameter}} \quad N = \frac{\sigma a B_0^2}{\rho v_0} \quad (2.4.20)$$

beschreibt das Verhältnis von elektrodynamischen Kräften zu Trägheitskräften. Das Quadrat der

$$\text{Hartmann-Zahl} \quad M = aB_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} \quad (2.4.21)$$

ist das Verhältnis von elektrodynamischen Kräften zu Reibungskräften. Die

$$\text{magnetische Reynoldszahl} \quad R_m = \mu\sigma v_0 a = \frac{v_0 a}{\eta} \quad (2.4.22)$$

entspricht dem Verhältnis von induziertem magnetischem Feld zu äußerem angelegtem Feld, wobei $\eta = 1/(\mu\sigma)$ die magnetische Diffusivität ist. R_m ist in der gleichen Art gebildet wie die hydrodynamische Reynoldszahl, die sich aus den zuvor angegebenen Kennzahlen ergibt als

$$\text{hydrodynamische Reynoldszahl} \quad Re = \frac{M^2}{N} = \frac{v_0 a}{\nu} \quad (2.4.23)$$

In einem Fusionsblanket ergeben sich folgende typische Größenordnungen für die Kennzahlen:

$$M = 10^3 - 10^4, \quad N = 10^2 - 10^6, \quad R_m = 10^{-2} - 10^{-1} \quad (2.4.24)$$

Die sehr kleinen Werte für die magnetische Reynoldszahl R_m erlauben es, eine weitere Vereinfachung vorzunehmen.

2.5 Die induktionsfreie Approximation

Für $R_m \ll 1$ ist das durch elektrische Ströme induzierte Magnetfeld klein gegenüber dem äußeren Magnetfeld und kann deswegen vernachlässigt werden (Shercliff 1965). Diese Annahme kennzeichnet die "induktionsfreie Approximation". Das Magnetfeld wird nach Gleichung (2.4.16) und (2.4.18) wirbel- und divergenzfrei. Die induktionsfreie Approximation ist gültig für die meisten experimentellen Anordnungen im Labormaßstab.

Die magnetische Induktion \vec{B} ist somit keine Variable mehr, sondern wird zu Beginn einer Rechnung fest vorgegeben. Das Strömungsfeld nimmt kaum Einfluß auf das Magnetfeld. Die nichtlinearen Terme $\vec{j} \times \vec{B}$ und $\vec{v} \times \vec{B}$ werden dadurch linear.

Es ergibt sich somit ein modifiziertes Gleichungssystem zur Beschreibung von MHD-Strömungen. Durch Anwendung des Divergenzoperators auf Gleichung (2.4.16) erhält man eine Bedingung für die Ladungserhaltung:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.5.25)$$

Diese Gleichung ersetzt die Gleichungen (2.4.16 und 2.4.17) bei gegebenem Magnetfeld.

Die Divergenz des Ohmschen Gesetzes (2.4.19) unter Berücksichtigung von Gleichung (2.5.25) führt auf eine Poisson-Gleichung für das Potential, die anstelle von Gleichung (2.5.25) nach Φ gelöst wird:

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad . \quad (2.5.26)$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert ein Potentialfeld, das bei der Berechnung des Stromes nach Gleichung (2.4.19) dessen Divergenzfreiheit nach Gleichung (2.5.25) sichert.

2.6 Randbedingungen

Im folgenden werden die möglichen Randbedingungen für die einzelnen physikalischen Größen angegeben. Dabei sei \vec{n} der Einheitsvektor senkrecht zur Wand, \vec{t} der Einheitsvektor tangential zur Wand. Der Zustand zu Beginn einer Simulation muß durch Anfangsbedingungen festgelegt werden.

2.6.1 Randbedingungen für die Geschwindigkeit an festen Rändern

- An festen Wänden gilt die Haftbedingung:

$$\vec{v}|_{Wand} = 0 \quad . \quad (2.6.27)$$

- Abhängig vom Problem kann es sinnvoll sein, schubspannungsfreie Ränder zuzulassen. Diese können wie folgt angegeben werden:

$$\left. \frac{\partial \vec{v}_t}{\partial \vec{n}} \right|_{Wand} = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{v}_n|_{Wand} = 0 \quad . \quad (2.6.28)$$

Der Behandlung der Geschwindigkeit am Ein- und Austritt des Rechengebiets kommt eine besondere Bedeutung zu. Dies wird gesondert in Abschnitt 2.6.2 behandelt.

2.6.2 Freie Randbedingungen (Eintritt/Austritt)

Bei der numerischen Simulation von Strömungen kann das zu untersuchende Gebiet nur in seltenen Fällen auf den gesamten, im Experiment untersuchten Bereich ausgedehnt werden. Für die numerische Simulation werden deshalb z.B. aus Speicherplatzgründen willkürlich künstliche Ränder an Stellen eingeführt, an denen im Experiment die Strömung ohne äußere Einflüsse strömt. Es liegt dort also kein physikalischer Rand vor. Die Einflüsse eines solchen sogenannten "freien" oder "offenen" Randes auf die Lösung sollen möglichst gering sein.

Vor allem bei instationären wirbelbehafteten Strömungen muß dafür gesorgt werden, daß auslaufende Wirbel oder Wellen das Rechengebiet an offenen Rändern störungsfrei verlassen. Insbesondere müssen in das Simulationsgebiet zurücklaufende Wellen, welche durch Reflexionen an offenen Rändern verursacht werden, vermieden werden, da dadurch z.B.

der Prozeß der Wirbelentstehung und Ablösung hinter stumpfen Körpern stark beeinflußt wird.

Aus diesem Grunde werden die offenen Rechengebietsränder möglichst weit von Orten entfernt, die durch die Simulation untersucht werden sollen.

Bei der Untersuchung von Umströmungsproblemen (z.B. Tragflügelumströmung, Wirbel hinter stumpfen Körpern usw.) wird vor allem der Austrittsrand der Strömung möglichst weit stromab gewählt. Oft wird die Auflösung des Rechengitters in Richtung dieses Randes stark vergrößert, so daß bei Strömungsstrukturen ein Glättungseffekt ("wash-out") entsteht, der starke Gradienten sowie eventuelle Reflexionen durch den Austrittsrand dämpft.

Für die freien Ausström-Ränder werden bei Strömungssimulationen oft homogene Neumann-Randbedingungen gewählt. Diese haben den Nachteil, daß Wirbelstrukturen diesen Rand nicht passieren können, ohne zerstört zu werden. Die dadurch hervorgerufenen Reflexionen wandern stromauf und beeinflussen die Simulation erheblich.

Diese Schwierigkeiten bei Problemen mit Wellencharakter führten dazu, nach nicht reflektierenden Randbedingungen zu suchen.

Eine relativ neue Untersuchung sowie eine Übersicht findet sich in Comini, Manzan und Cortella (1997). Hier wird unter anderem das Problem der Zylinderumströmung untersucht. Weitere Beiträge zu nicht reflektierenden Randbedingungen finden sich in Jin und Braze (1993) sowie Bruneau (1993).

Das Problem der freien Ränder tritt auch bei der Simulation der Maxwellgleichungen auf, da die Lösungen ebenfalls meist Wellencharakter besitzen. Aus diesem Bereich stammen einige grundlegende Arbeiten zum Problem der freien Randbedingungen unter anderem von Engquist und Majda (1977), Trefethen und Halpern (1986), Lindman (1975). Einen Überblick der verschiedensten Verfahren wird in Givoli (1991) gegeben. In Illy (1997) werden ausführliche Testrechnungen dargestellt.

Die Randbedingung sollte in der Lage sein, Wirbel ohne Reflexionen aus dem Rechengebiet zu transportieren. Die eindimensionale Wellengleichung 2. Ordnung beschreibt den Transport von Wellen:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = 0 \quad (2.6.29)$$

mit c als der Wellengeschwindigkeit und u als der Geschwindigkeit in positiver x -Richtung (siehe Abb. 2.3). Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$u(x, t) = g_1(x - ct) + g_2(x + ct) \quad (2.6.30)$$

Hierbei steht g_1 für den nach rechts laufenden Anteil und g_2 für den nach links laufenden Anteil der Lösung. Ein Anteil dieser Lösung soll den Rand des Rechengebiets ungehindert passieren, während der andere vollständig unterdrückt werden soll. Dies wird mit einem Operator P_{\pm} erreicht:

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \pm c \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (2.6.31)$$

P_+ angewandt auf die Lösung (2.6.30) ergibt $\partial g_2(x + ct)/\partial t$, P_- ergibt $\partial g_1(x - ct)/\partial t$.

P_+ "filtert" also den nach links laufenden Anteil der Lösung (2.6.30) aus. Der nach rechts laufende Anteil passiert ungestört. Soll der nach links laufende (reflektierte) Anteil an

einem rechten Rand unterdrückt werden, so muß die zeitliche Ableitung $\partial g_2(x + ct)/\partial t$ zu Null gesetzt werden. Es ergibt sich schließlich eine konvektive (advective) Randbedingung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm c \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0 \quad . \quad (2.6.32)$$

Für das positive Vorzeichen ergibt sich ein nicht reflektierender rechter Rand, für das negative Vorzeichen ein nicht reflektierender linker Rand. Dieses Schema kann für zwei und dreidimensionale Probleme so erweitert werden, daß auch schräg auftreffende Wellen reflexionsfrei passieren können (Illy 1997). Für einen vorgegebenen Einfallswinkel α lautet ein zweidimensionales reflexionsfreies Schema dann:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{c}{\cos\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0 \quad . \quad (2.6.33)$$

In der Regel sind die tatsächlichen Einfallswinkel nicht bekannt, so daß die Bemühungen in die Richtung eines adaptiven Verfahrens abhängig vom jeweiligen Einfallswinkel gehen. $\cos\alpha$ aus Gleichung (2.6.33) wird dann aus der Simulation selbst bestimmt. Solche Ansätze werden in Illy (1997) sowie Engquist und Majda (1977), Higdon (1986) und Higdon (1987) behandelt.

Bei der Behandlung der in dieser Arbeit simulierten Zylinderumströmung treffen die Wellen senkrecht auf den Rand, so daß in der vorliegenden Arbeit der einfache Ansatz (2.6.32) gewählt wurde. Bei der Betrachtung von dreidimensionalen wirbelbehafteten Strömungen kann diese Randbedingung auf alle Geschwindigkeitskomponenten angewendet werden.

Nach Gresho (1992) sollte bei der Anwendung der konvektiven Austrittsbedingung nach Gleichung (2.6.32) auf die Einhaltung der globalen Kontinuität geachtet werden, wie im folgenden ausgeführt wird. In Abbildung 2.3 wird eine zweidimensionale Kanalströmung mit einem Blockprofil am Eintritt und einer konvektiven Randbedingung am Austritt betrachtet. Die konvektive Randbedingung kann als eine in der Zeit veränderliche Geschwindigkeit

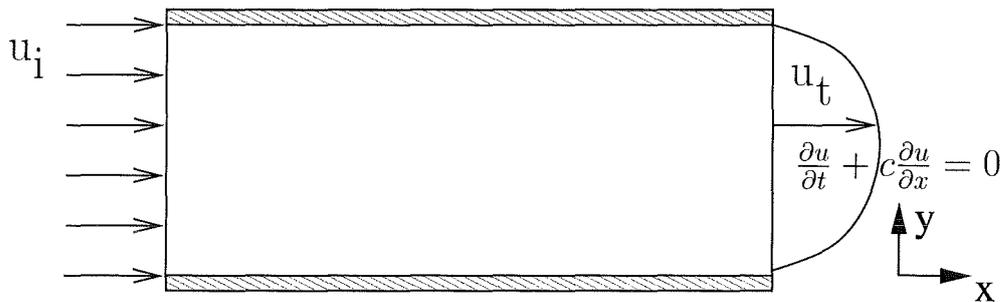


Abbildung 2.3: Zweidimensionale Kanalströmung.

normal zum Austrittsrand betrachtet werden. Dies kann durch Integration über die Zeit t von Gleichung (2.6.32) gezeigt werden. Es ergibt sich:

$$u_t = u_0 - \int_0^t c \frac{\partial u}{\partial x} dt \quad . \quad (2.6.34)$$

Hierbei ist $u_0 = u_i$ der Wert zum Zeitpunkt $t = 0$. Am Austritt $x = L$ muß aus Kontinuitätsgründen $\int_0^H u_t(L, y) dy = u_i H$ gelten. Weiterhin muß für die Austrittsgeschwindigkeit bei $x = L$ zum Zeitpunkt $t = 0$ zur Einhaltung der Kontinuität $\int_0^H u_0(L, y) dy = u_i H$

gelten. Damit folgt:

$$\int_0^H \left(\int_0^t c \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) dy = 0 \quad . \quad (2.6.35)$$

Diese Bedingung kann nur dann einfach erfüllt werden, wenn c unabhängig von y ist. In der Regel wird c auf den Wert u_i gesetzt.

2.6.3 Randbedingung für den Druck

Im numerischen Verfahren, das in der vorliegenden Arbeit verwendet wird, wird unter anderem eine Druckgleichung numerisch gelöst (siehe auch Abschnitt 3.3). Als Randbedingung für diese Druckgleichung wird an festen Wänden eine homogene Neumann-Randbedingung gewählt:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \right|_{Wand} = 0 \quad . \quad (2.6.36)$$

Eine genauere Betrachtung dieser Randbedingung findet in Abschnitt 3.3 statt.

2.6.4 Elektrische Randbedingungen

Bei der Formulierung der elektrischen Randbedingungen muß beachtet werden, daß die elektromagnetischen Felder über das Fluid-Gebiet hinaus wirksam sind.

Dies bereitet zusätzliche Schwierigkeiten, da außer im interessierenden Fluidbereich die elektromagnetischen Größen in der Wand und im Außenraum bekannt sein müssen, um die Randbedingungen an der Fluid-Wand-Grenzfläche zu bestimmen. Die Berechnung von Größen in der Wand und im Außenraum will man jedoch wegen des zusätzlichen Aufwands möglichst vermeiden.

Für einige besondere Fälle, die im folgenden erläutert werden, lassen sich jedoch Ansätze zur Bestimmung von Strom und Potential an der Fluid-Wand-Grenzfläche formulieren und damit Wand- und Außenfeldberechnungen umgehen. Dies betrifft perfekt isolierte oder perfekt leitende Wände. Von Walker (1981) wird ein Ansatz zur Behandlung von "dünnen Wänden" mit endlicher Leitfähigkeit vorgeschlagen. Des weiteren sind die elektrischen Bedingungen am Ein- und Austritt des betrachteten Strömungsbereiches zu beachten. Hier müssen ebenfalls idealisierende Annahmen gemacht werden.

Zunächst gilt für die Grenzfläche zweier Medien immer:

- Das elektrische Potential ist stetig (kein Kontaktwiderstand)
- Die Normalkomponente des Stromes ist stetig.

In **isolierten (nichtleitenden) Wänden** fließt kein Strom. An der Grenzfläche zum leitenden Fluid verschwindet somit die Normalkomponente des Stromes. Aus dem Ohmschen Gesetz ergibt sich mit der Haftbedingung eine homogene Neumann-Randbedingung für das Potential:

$$\vec{j} \cdot \vec{n}|_{Wand} = 0 \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \right|_{Wand} = 0 \quad \text{perfekt isoliert} \quad . \quad (2.6.37)$$

In **perfekt leitenden Wänden** werden alle Potentialunterschiede sofort ausgeglichen. Die Tangentialkomponente des Stromes an der Wand verschwindet. Es stellt sich in der Wand ein konstanter Wert für das elektrische Potential ein:

$$\vec{j} \cdot \vec{t}|_{\text{Wand}} = 0 \quad \Phi|_{\text{Wand}} = \text{konst.} \quad \text{perfekt leitend} \quad . \quad (2.6.38)$$

Ist die Wandstärke t_W klein verglichen mit der charakteristischen Abmessung im Fluid a , also $t_W/a \ll 1$, so kann die Potentialdifferenz über die Dicke der Kanalwand vernachlässigt werden. Strom und Potential werden ausschließlich in einer wand-tangentialen Fläche betrachtet. Diese Betrachtungsweise kennzeichnet die **'dünne Wand Approximation'**. Der senkrecht auf die Wand treffende Strom (\vec{j}_n) fließt tangential in der Wand ab (\vec{I}_W), wenn die äußere Umgebung nichtleitend ist. In Abbildung 2.4 ist dies dargestellt. Damit geht

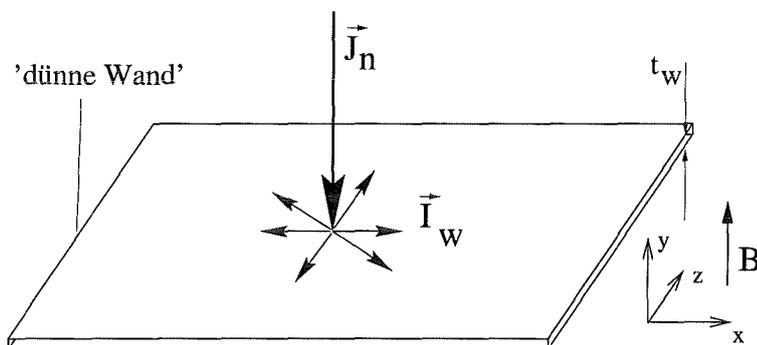


Abbildung 2.4: Elektrischer Strom bei der 'dünne Wand Approximation'.

die Normalkomponente des Stroms als Quellterm in die tangentiale Strombilanz ein. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung

$$\vec{j} \cdot \vec{n} = \nabla_t \cdot \vec{I}_W \quad , \quad (2.6.39)$$

wobei ∇_t der Nabla-Operator in der wandtangentialen x-z Ebene ist (siehe Abb. 2.4). \vec{I}_W ist die über die Wandstärke t_w integrierte Stromdichte. Nach dem Ohmschen Gesetz (2.2.9), angewandt auf die dünne Wand, folgt

$$\vec{I}_W = -c \nabla_t \Phi_w \quad \text{mit dem Wandleitparameter} \quad c = \frac{\sigma_w t_w}{\sigma a} \quad . \quad (2.6.40)$$

Dabei ist σ_w die Leitfähigkeit der Wand. Der Wandleitparameter beschreibt das Verhältnis der Widerstände von Fluid und Wand.

Eingesetzt in Gleichung (2.6.39) folgt für das Potential mit $\Phi = \Phi_w$:

$$\nabla_n \Phi = \nabla_t \cdot (c \nabla_t \Phi) \quad . \quad (2.6.41)$$

Für einen konstanten Wandleitparameter c folgt die von Walker (1981) angegebene Randbedingung

$$\nabla_n \Phi = c \nabla_t^2 \Phi \quad . \quad (2.6.42)$$

Der Fall variabler Wandleitfähigkeiten wird ausführlich in Sterl (1989) beschrieben.

Schließlich sind elektrische Randbedingungen am Ein- und Austritt zu setzen. Am Eintritt wird für das Potential gefordert

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \right|_{\text{Eintritt}} = 0 \quad . \quad (2.6.43)$$

Diese Bedingung ist für eine voll eingelaufene MHD-Strömung gültig. Da die Strömung am Eintritt keine Querkomponenten besitzt, ergibt sich für den elektrischen Strom

$$\vec{j} \cdot \vec{n} \Big|_{\text{Eintritt}} = 0 \quad . \quad (2.6.44)$$

Die angegebene Eintrittsrandbedingung gilt nur, wenn der Eintritt hinreichend weit von dreidimensionalen Effekten entfernt ist. MHD-Kanalströmungen haben mitunter sehr lange Einlaufstrecken, abhängig von der Kanalgeometrie, der Wandleitfähigkeit, der Hartmann-Zahl und dem Interaktionsparameter (Hunt und Holroyd 1977). Dies hat zur Folge, daß der eingelaufene Zustand in Rechnungen (begrenzte Länge des Rechengebiets), jedoch auch in Experimenten (begrenzte Magnetlänge) nicht immer perfekt gegeben ist.

Am Austritt kann die Strömung wirbelbehaftet sein. Hier hat sich die folgende, aus dem Ohmschen Gesetz hergeleitete Randbedingung als am besten erwiesen:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \right|_{\text{Austritt}} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} \quad . \quad (2.6.45)$$

Diese Randbedingung verhindert, daß Strom über den Austrittsrand fließt

$$\vec{j} \cdot \vec{n} \Big|_{\text{Austritt}} = 0 \quad . \quad (2.6.46)$$

Die Konsistenz der Poissongleichung (2.5.26) für das Potential kann dadurch leicht erfüllt werden. Für eine eingelaufene Strömung am Austrittsrand wäre Gleichung (2.6.45) exakt. Vor allem, wenn im Kanal produzierte Wirbel das Rechengebiet verlassen, befindet sich am Austritt des Rechengebiets keine eingelaufene Strömung, so daß hier ein Fehler über diese Randbedingung eingebracht wird. Der durch diese Approximation eingebrachte Fehler ist von der Größe $O(M^{-1})$ und wird vernachlässigbar für sehr große Hartmann-Zahlen.

2.7 Modellierung der Hartmann-Schichten

Bei steigenden Hartmann-Zahlen nimmt die Dicke der Hartmann-Schichten analog $\delta \sim 1/M$ ab, so daß es mit hohem Speicheraufwand verbunden wäre, sie mit einem numerischen Gitter aufzulösen.

Von Bühler (1995) wurde deshalb eine Modellierung für die Hartmann-Schicht vorgeschlagen, welche eine Modifikation der Potentialrandbedingung (2.6.41) verwendet. Ein ähnliches Verfahren wurde von Hua und Walker (1989) für elektrisch-isolierte Kreiskanäle angegeben.

Anhand analytischer Betrachtungen von trägheitsfreien MHD-Strömungen bei hohen Hartmann-Zahlen und Interaktionsparametern läßt sich folgendes zeigen (Moreau 1990):

- Der Geschwindigkeitsabfall in der Hartmann-Schicht (siehe Abb. 2.5) zur Wand ist exponentiell.
- Über die Höhe der Hartmann-Schicht (δ) kann das Potential als konstant angenommen werden ($\partial_n \Phi = O(\delta^2)$). Die Grenzschichtdicke δ ist hier mit Hilfe der Hartmann-Zahl M gegeben als $\delta = 1/M$.

Nach Moreau verläuft die Geschwindigkeit in der Hartmann-Schicht wie

$$\vec{v}_t = \vec{v}_{t,c}(1 - e^\eta) \quad , \quad (2.7.47)$$

mit der gestreckten Koordinate η in Magnetfeldrichtung

$$\eta = M(y - 1) \quad . \quad (2.7.48)$$

Hierbei ist die Wand bei $\eta = 0$ ($y=1$). In großer Entfernung von der Wand, $\eta \rightarrow -\infty$, nimmt die Strömung die sogenannte Kernlösung an. $\vec{v}_{t,c}$ bezeichnet die wandtangente Geschwindigkeit im Strömungskern.

Setzt man die Lösung im gesamten Strömungskanal aus einer mehr oder weniger reibungsfreien Kernlösung (Index c) und einer Grenzschichtlösung (Index h) zusammen,

$$(\vec{v}, \vec{j}, \Phi) = (\vec{v}, \vec{j}, \Phi)_c(y) + (\vec{v}, \vec{j}, \Phi)_h(\eta) \quad , \quad (2.7.49)$$

so findet man mit dem Ohmschen Gesetz für die tangentialen Ströme in der Hartmann-Schicht:

$$\vec{j}_{h,t} = -(\vec{v}_{t,c} \times \vec{B})e^\eta = -(\nabla_t \Phi_c + \vec{j}_{t,c})_{y=1} e^\eta \quad . \quad (2.7.50)$$

Die Stromerhaltung in der Hartmann-Schicht erfordert

$$\nabla \cdot \vec{j}_h = \nabla_t \cdot \vec{j}_{h,t} + \frac{1}{\delta} \partial_\eta j_{h,\eta} = 0 \quad . \quad (2.7.51)$$

Damit ergibt sich mit Gleichung (2.7.50)

$$\partial_\eta \vec{j}_{h,\eta} = \delta \nabla_t \cdot (\nabla_t \Phi_c + \vec{j}_{c,t})_{y=1} e^\eta = \delta (\nabla_t^2 \Phi_c - \nabla_t \cdot \vec{j}_{c,t})_{y=1} e^\eta \quad . \quad (2.7.52)$$

Da sich \vec{j}_c definitionsgemäß über die Grenzschicht nicht ändert, $\partial_\eta j_c = 0$, ist $\nabla_t \cdot \vec{j}_{c,t}$ gleichbedeutend mit $\nabla \cdot \vec{j}_c$ und verschwindet aufgrund der Ladungserhaltung. Die Änderung der Normalkomponente des Stromes über die Hartmann-Schicht ergibt sich somit nach Integration über die Grenzschicht zu

$$j_{h,\eta}(\eta = 0) = j_y(y = 1) - j_{c,y}(y = 1) = \delta \nabla_t^2 \Phi_c \quad . \quad (2.7.53)$$

Eine Ladungsbilanz in der Kanalwand führte zur Approximation für dünne Wände (Gleichung (2.6.42)). Diese Bedingung läßt sich auch schreiben als

$$j_y(y = 1) = -c \nabla_t^2 \Phi_w \quad . \quad (2.7.54)$$

Die dünne Wand Approximation beschreibt den Verlauf des Wandpotentials aufgrund von Strömen, die an der Stelle $y = 1$ in die Wand eintreten. Unter der Annahme, daß das Potential im Fluid und in der Wand an der gemeinsamen Grenzfläche stetig ist, können die

Gleichungen (2.7.53 und 2.7.54) kombiniert werden und man erhält eine Randbedingung für das Potential des Strömungskerns:

$$-j_{c,y}(y = 1) = \partial_y \Phi_c = (c + \delta) \nabla_t^2 \Phi_c \quad . \quad (2.7.55)$$

Wand und Hartmann-Schicht werden zu einer Schicht für den Strom zusammengefaßt (siehe Abb. 2.6). Wird für die Hartmann-Schicht das Modell nach Gleichung (2.7.55) verwendet, so müssen auch die Geschwindigkeits-Randbedingungen für den modellierten Rechengebietsrand formuliert werden.

2.7.1 Tangentiale Geschwindigkeiten

Nach Gleichung (2.7.50) gilt für den Strom in der Hartmann-Schicht

$$\vec{j}_{h,t} = -(\vec{v}_{t,c} \times B) e^n \quad . \quad (2.7.56)$$

Integriert man diese Beziehung über die Hartmann-Schicht, so erhält man den integralen tangentialen Strom \vec{I}_t in der Hartmann-Schicht als Funktion der tangentialen Geschwindigkeit im Kern:

$$\vec{I}_t = \int_{-\infty}^0 \vec{j}_{h,t} d\eta = -\delta \vec{v}_{t,c} \times \vec{B} \quad . \quad (2.7.57)$$

Nach weiteren Umformungen ($\delta = 1/M$) erhält man schließlich

$$\vec{v}_{t,c} = M \vec{I}_t \times \vec{B} \quad . \quad (2.7.58)$$

Man erkennt, daß die Geschwindigkeit $\vec{v}_{t,c}$ außerhalb der Hartmann-Schicht eine Funktion des Stromes \vec{I}_t in der Hartmann-Schicht ist. Die Hartmann-Schicht kontrolliert über den Strom die Kernströmung. Diese sehr wichtige Eigenschaft der Hartmann-Schicht ist die Ursache von Schwierigkeiten bei der Bestimmung einer Geschwindigkeits-Randbedingung, denn es ist im voraus die Kenntnis des Stromfeldes \vec{I}_t nötig, welches man jedoch erst berechnen kann, wenn das Geschwindigkeitsfeld bekannt ist.

Da viskose Effekte in den Hartmann-Schichten bereits durch die integrale Modellierung (2.7.47-2.7.55) berücksichtigt sind, ist es folgerichtig, ihren Einfluß auf die Kernströmung an der Hartmann-Wand zu vernachlässigen. Dies kann durch die Bedingung

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_{t,c}}{\partial y^2} = 0 \quad (2.7.59)$$

geschehen, was einer linearen Extrapolation der Kernlösung zum Rand entspricht.

Von Leboucher (1995) werden einige Vorschläge für eine alternative Behandlung der Randbedingungen gemacht. Seine Betrachtung zeigt, daß für den Fall dreidimensionaler Strömungen im Kernströmungsbereich die Extrapolation der Geschwindigkeiten auf den Rand am besten geeignet ist. Weiter wird von Leboucher anhand von Testrechnungen gezeigt, daß der Einfluß der Ordnung der Extrapolation auf das Ergebnis sehr gering ist. Im Programmcode der vorliegenden Arbeit ist eine Extrapolation von erster bis vierter Ordnung wählbar.

2.7.2 Normale Geschwindigkeiten

Unter Berücksichtigung der integralen Massenerhaltung über die gesamte Grenzschicht folgt eine Bedingung für die Normalkomponente $\vec{v}_{c,y}$ der Kerngeschwindigkeit bei $y=1$:

$$v_{c,y} = \frac{1}{M} \nabla_t \cdot \vec{v}_{c,t} \quad . \quad (2.7.60)$$

Für hohe Hartmann-Zahlen $M \rightarrow \infty$ erhält man schließlich

$$v_{c,y} = 0 \quad . \quad (2.7.61)$$

In den folgenden Abbildungen 2.5 und 2.6 sind zusammenfassend die verwendeten Randbedingungen an den Hartmann-Wänden ohne und mit Modellierung der Hartmann-Schichten dargestellt.

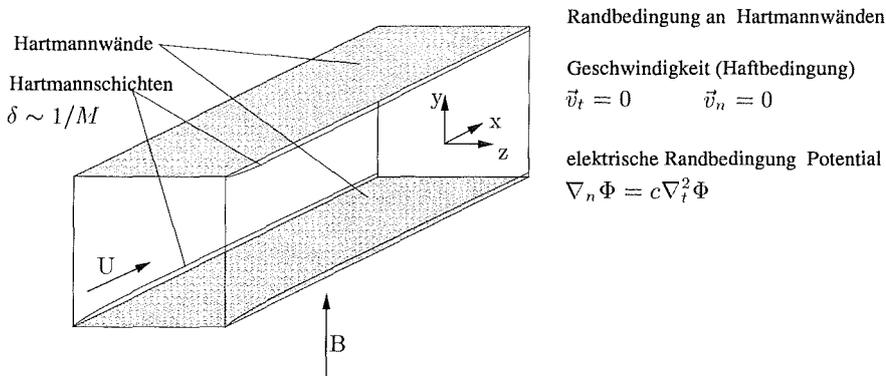


Abbildung 2.5: Randbedingungen an isolierten Hartmann-Wänden.

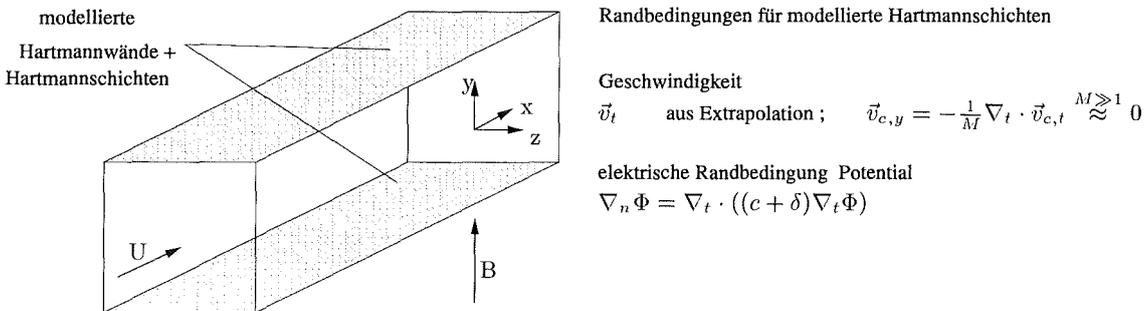


Abbildung 2.6: Randbedingungen für modellierte Hartmann-Schichten und Hartmann-Wände bei hohen Hartmann-Zahlen.

Kapitel 3

Numerisches Verfahren

3.1 Allgemeines

Zur Behandlung der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Probleme wurde zur numerischen Lösung der sie beschreibenden Gleichungen ein bereits bestehendes Simulationsprogramm weiterentwickelt, das in den vergangenen Jahren am IATF von Sterl (1989), Lenhart (1994) und Leboucher (1995) für MHD-Kanalströmungen entwickelt und anhand von experimentellen Ergebnissen verifiziert wurde. Auf dieses weiterentwickelte Simulationsprogramm auf der Basis von Finiten-Differenzen-Methoden (FDM) wird im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit immer Bezug genommen.

Die FDM ist gegenüber anderen numerischen Methoden (Finite-Volumen-Methode (FVM), Finite-Element-Methode (FEM), Spektral-Methode (SM)) ein relativ altes Verfahren und besitzt den entscheidenden Vorteil, daß deren Eigenschaften hinsichtlich Konsistenz, Konvergenz und vor allem der numerischen Stabilität schon weitgehend bekannt sind.

Der Strömungsbereich wird zunächst mit einem Rechengitter (Netz) vollständig überdeckt. Die Lösung der diskretisierten Gleichungen erfolgt auf strukturierten, meist auch äquidistanten Netzen, die einfach zu generieren sind. Die Gleichungen werden nicht kontinuierlich im gesamten betrachteten Gebiet gelöst, sondern nur an diskreten Punkten (Stützstellen) des Gitters zu bestimmten Zeitpunkten. Als Stützstellen können z.B. die Knotenpunkte des Rechengitters definiert werden. Die kontinuierliche Lösung wird durch die diskrete (numerische) Lösung ersetzt. Algebraische Beziehungen zur Berechnung der diskreten Lösung werden durch die Diskretisierungsmethode bestimmt.

Ein weiterer Kernpunkt bei FDM ist die Anwendbarkeit sogenannter **schneller Poisson-Gleichungslöser** oder **schneller elliptischer Löser (SEL)** auf Basis der schnellen Fourier-Transformation. Besitzen die Rechengebiete eine einfache äußere Form (quaderförmig, rechteckig), so können SEL eingesetzt werden, die äußerst effizient sehr große lineare Gleichungssysteme lösen können.

Der Einsatz der FDM auf komplizierten Geometrien ist mit Aufwand verbunden. Das physikalische Koordinatensystem, oft in krummlinigen Koordinaten, muß auf ein kartesisches Koordinatensystem transformiert werden, damit ein schneller Poisson-Gleichungslöser einsetzbar bleibt. Die Gitterlinien können aufgrund der Eigenschaften des SEL maximal in einer Richtung ungleichmäßig verteilt werden.

Diese Einschränkungen in der geometrischen Flexibilität wird bei der FDM oft ins Feld geführt, weswegen bei komplizierten Geometrien oft andere Methoden (FEM, FVM) zum

Einsatz kommen. Aber auch dort werden bei kompliziert geformten Berandungen bereits blockstrukturierte Netze oder Chimera-Netze eingesetzt, bei denen mehrere Blöcke zu einem Gesamtnetz zusammengeführt werden (Oertel und Laurien 1995).

Mit dem Aufkommen von Parallelrechnern müssen bei der Beurteilung von numerischen Methoden weitere Aspekte beachtet werden. Aufgrund dieser neuen Computer-Architektur gewinnen die bereits sehr alten Methoden zur Zerlegung von Rechengebieten (Gebietszerlegungsmethoden) wieder an Bedeutung. Bereits im letzten Jahrhundert wurde von Schwarz (1890) eine nach ihm benannte und heute weit verbreitete Methode zur Zerlegung von Rechengebieten vorgeschlagen.

Auf den heutigen Parallelrechnern können Gebietszerlegungsmethoden im Zusammenhang mit FDM vorteilhaft dazu verwendet werden, komplizierte Geometrien in für FDM nicht-komplizierte Teilstücke aufzulösen, die dann auf je einem Prozessor bearbeitet werden. Schnelle Lösungsverfahren (SEL) können auf den einfachen Teilgebieten eingesetzt werden. Der Zerlegungsalgorithmus sorgt für die Koppelung der Teilstücke. Es ergibt sich durch die Gebietszerlegung der günstige Umstand, daß trotz komplizierter Geometrie schnelle Lösungsmethoden für FDM anwendbar bleiben. Die Vorteile von parallelen Rechnerarchitekturen können zusammen mit den positiven Eigenschaften der FDM voll genutzt werden. Durch die Beteiligung von mehreren Prozessoren kann die Berechnung außerdem beschleunigt werden. Gebietszerlegungsmethoden können aufgrund der verwendeten einfachen Gitter relativ leicht in einen bestehenden FDM-Code eingebaut werden.

Das für die vorliegende Arbeit vorhandene Basisprogramm wurde für die Berechnung von MHD-Kanalströmungen mit inneren Einbauten um eine Gebietszerlegungsmethode erweitert. Der Code wurde in Teilen mit 'explizitem message-passing' (PVM 'Parallel Virtual Machine') parallelisiert, was zu einer erheblichen Beschleunigung beitrug.

3.2 Rechengitter und Diskretisierung der Grundgleichungen

Das verwendete strukturierte Maschennetz ist geradlinig, orthogonal und äquidistant. Zur Berechnung der vektoriiellen Größen wird ein versetztes Gitter (staggered grid) verwendet. Die einzelnen Vektorkomponenten werden um eine halbe Maschenweite in der jeweiligen Richtung versetzt und auf einer Seitenfläche der Gitterzelle (Kontrollvolumen) berechnet. Skalare werden im Zentrum der Gitterzelle berechnet. Diese Vorgehensweise verhindert die Entstehung eines oszillierenden Druckfeldes, welches vorkommen kann, wenn alle Größen im Zentrum einer Gitterzelle berechnet werden. Es wird eine sehr genaue Einhaltung der Kontinuität ermöglicht, da die Werte der Geschwindigkeiten an den Kontrollvolumenrändern nicht durch Interpolation errechnet werden müssen. Ein Nachteil des 'staggered grid' ist die aufwendigere Indizierung der Größen und die zusätzlichen Interpolationen von skalaren Größen auf die Kontrollvolumenränder. Patankar (1980) liefert eine detaillierte Beschreibung der Eigenschaften des versetzten Gitters.

Für die Diskretisierung werden die partiellen Differentialgleichungen (Konvektions-Diffusionsgleichungen) in Erhaltungform (Divergenzform) gewählt. Jede Gleichung drückt direkt Massen-, Impuls- oder Energieerhaltung aus. Durch diese Vorgehensweise wird eine konservative Diskretisierung erzielt. Die diskretisierten Gleichungen erfüllen das Prinzip der

Erhaltung in jedem Kontrollvolumen, da die Gewinn- und Verlustterme benachbarter Kontrollvolumen in der diskreten Formulierung identisch sind. Ist diese wichtige Eigenschaft nicht erfüllt, d.h. ist das Verfahren nicht-konservativ, so können durch die Diskretisierung Quellen- und Senkenterme im Rechengebiet entstehen.

Bei der Diskretisierung mit FDM werden die Differentialquotienten in den Gleichungen durch Differenzenquotienten ersetzt. Die Differenzenquotienten können durch abgebrochene Taylorreihen hergeleitet werden. Die Fehlerordnung des Verfahrens im Ort und in der Zeit wird durch den ersten vernachlässigten Term der Taylorreihe bestimmt.

Im Zusammenhang mit der Verwendung eines versetzten Gitters stellt die Beschreibung der Strömung um scharfe Kanten und an Rändern ein Problem dar. Im folgenden Beispiel (siehe Abb. 3.1) wird die Umströmung eines scharfkantigen Stabes betrachtet. Es entstehen an den Zylinderkanten halbe Gitterzellen, die durch das Diskretisierungsschema falsch behandelt werden. Das Problem tritt bei der Berechnung der konvektiven Terme auf und kann anhand der Bildung der Ableitung $\frac{\partial vu}{\partial y}$ leicht erklärt werden (siehe Abb. 3.1).

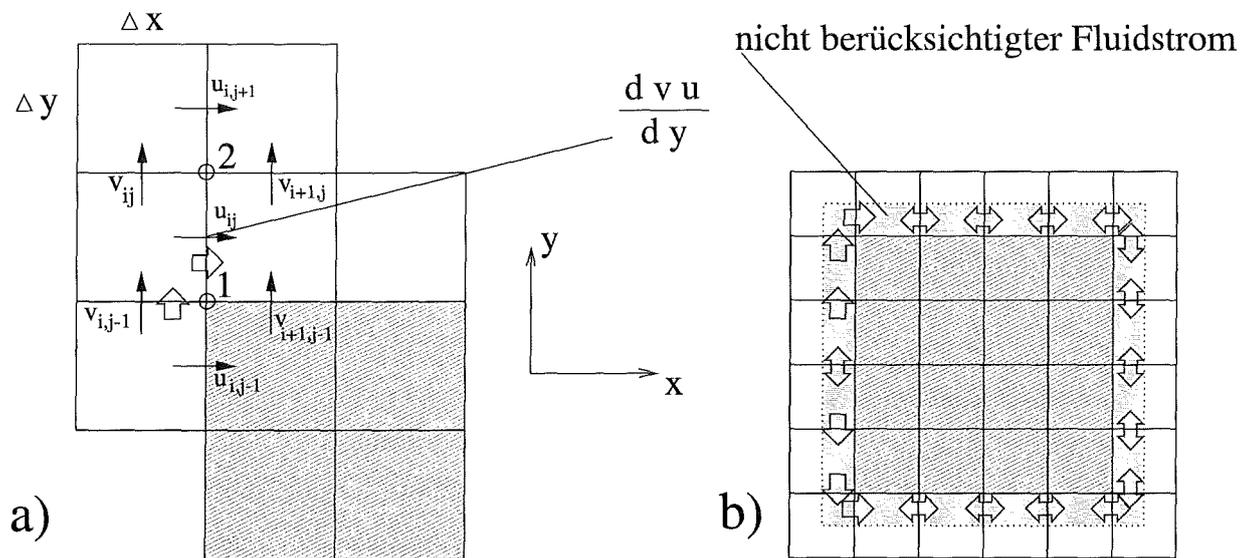


Abbildung 3.1: Berechnung der Ableitung $\frac{\partial uv}{\partial x}$ an der Zylinderecke.

Der schraffierte Teil in Abbildung 3.1a stellt den Eckenbereich des umströmten Körpers dar. In dem in dieser Arbeit verwendeten konservativen finite Differenzenverfahren werden die Geschwindigkeiten auf die beiden Punkte 1 und 2 interpoliert, wenn sie nicht auf dem Rand liegen. Da der Eckpunkt 1 ein Körperpunkt ist, muß hier der Wert zu Null gesetzt werden (Haftbedingung). Die Ableitung $\frac{\partial vu}{\partial y}$ kann aus diesen beiden Punkten mit Δy gebildet werden. Das Verfahren berücksichtigt dadurch bei der Bildung der Ableitung $\frac{\partial vu}{\partial y}$ den Fluidstrom in den halben Gitterzellen (durch \Rightarrow, \uparrow gekennzeichnet) neben dem Hindernis nicht. Diese Situation tritt an allen Zylinderkanten sowie an den Ecken in dem in Abbildung 3.1b grau gekennzeichneten Bereich und an den Rechengebietsrändern auf. An den Ecken wird dieser Effekt besonders deutlich, da hier zwei Flüsse vernachlässigt werden, weswegen die Ecken oft eine gesonderte Behandlung erfahren. Diese Eigenschaft ist eine Schwäche des versetzten Gitters.

Davis und Moore (1982), die ein Finite-Volumen-Verfahren verwenden, führen eine Interpolation der Flüsse an den Ecken und Kanten des Hindernisses durch, um den Fluß durch

die halben Kontrollvolumen bei der Berechnung des gesamten Flusses zu berücksichtigen. Eine ähnliche Behandlung der Ecken wird in Deck (1995) und Franke (1991) vorgenommen, die ebenfalls Finite-Volumen-Verfahren verwenden.

Das in dieser Arbeit verwendete Finite-Differenzen-Verfahren in seiner konservativen Form läßt eine solche Behandlung nicht zu, da es dadurch seine konservative Eigenschaft verlieren würde.

3.2.1 Die zeitliche Diskretisierung

Nahezu alle numerischen Methoden (FVM, SM, FEM) verwenden eine Diskretisierung der zeitlichen Ableitung auf der Basis von finiten Differenzen.

Eine Ausnahme bildet ein von Carte, Dusek und Fraunie (1995) vorgeschlagenes Verfahren zur Berechnung von zeitlich periodischen Strömungen mit Wellencharakter. Hier werden die primitiven Variablen aufgrund der zeitlichen Periodizität in Fourier-Reihen entwickelt. Hat die Strömung eine dominante Periode, so sind nur wenige Glieder in der Reihenentwicklung notwendig (stationäre Grundlösung und erster Mode). Ist die periodische Lösung gefunden, so entspricht der zeitliche Verlauf jeder Variablen dem gemachten Wellenansatz. Mit diesem Verfahren kann laut Carte et al. (1995) eine spektrale Genauigkeit in der Zeit erreicht werden. Es ist jedoch zu beachten, daß das physikalische Verhalten des Systems im voraus sehr genau bekannt sein muß.

Die Eigenschaften der Zeitschrittverfahren haben entscheidenden Einfluß auf das Verhalten des gesamten numerischen Lösungsverfahrens. Sehr viele Versuche wurden unternommen, um eine möglichst genaue Finite-Differenzen Darstellung der zeitlichen Ableitung zu erhalten. Das Verfahren sollte stabil sein und eine geringe Dämpfung und Dispersion aufweisen. Grundsätzlich unterscheidet man zwischen impliziter und expliziter Diskretisierung in der Zeit. Die Eigenschaften impliziter und expliziter Methoden werden in vielen Lehrbüchern behandelt, jedoch werden bestimmte Gesichtspunkte nicht immer deutlich angesprochen (siehe "Diskrepanz-Statement" 3.2.2).

Für die zeitliche Ableitung wurde in dieser Arbeit eine explizite Diskretisierung verwendet. Zur Berechnung der neuen Werte werden ausschließlich die Größen zum alten Zeitpunkt herangezogen. Neben dem geringeren Programmieraufwand haben explizite Verfahren den Vorteil, daß keine großen unregelmäßig besetzten Gleichungssysteme gelöst werden müssen wie bei impliziten Verfahren. Nachteilig bei expliziten Verfahren ist dagegen die Beschränkung des Zeitschritts durch Stabilitätskriterien.

Es kann im Programm zwischen der Euler-Vorwärts-Methode und dem Adams-Bashfort-Verfahren gewählt werden, die im folgenden kurz beschrieben werden.

3.2.1.1 Euler-Vorwärts-Verfahren

Ausgehend von der allgemeinen Darstellung einer Differentialgleichung für φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - H(\varphi, x, y, z, t) = 0 \quad (3.2.1)$$

mit H als Differentialoperator wird beim Euler-Vorwärts-Verfahren folgende Diskretisierung verwendet:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{i,j,k}^n = \frac{\varphi_{i,j,k}^{n+1} - \varphi_{i,j,k}^n}{\Delta t} + O(\Delta t) = H_{i,j,k}^n \quad (3.2.2)$$

Hierbei bezeichnen i,j,k die Indizes der Stützstellen in x,y,z . Die hochgestellten Indizes n bzw. $n + 1$ bezeichnen die diskreten Zeitpunkte, für die eine Lösung gesucht wird. Der örtliche Differentialoperator H wird zum Zeitpunkt n gewählt.

Diese Diskretisierung kann durch eine Taylorentwicklung von φ^{n+1} um den Zeitpunkt n hergeleitet werden. Der Abbruchfehler dieser Diskretisierung ist von erster Ordnung $O(\Delta t)$.

Für eine eindimensionale(1D) Advektionsgleichung lautet das Verfahren:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \frac{c}{2}(\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n) \quad \text{Euler-Vorwärts} \quad (3.2.3)$$

wobei $C = \frac{U\Delta t}{\Delta x}$ die Courant-Zahl für den eindimensionalen Fall darstellt.

Eine Analyse des zeitlichen Verfahrens muß immer zugleich die örtliche Diskretisierung berücksichtigen. Oft wird ein zentrales Differenzenverfahren (siehe Abschnitt 3.2.3) im Ort angenommen. Die Betrachtungen lassen sich jedoch auch leicht auf andere örtliche Diskretisierungen, z.B. verschiedene Upwind-Verfahren erweitern.

Die Herleitung der Stabilitätsgrenzen für das explizite Euler-Vorwärts-Verfahren in Kombination mit Zentralfdifferenzen, angewandt auf die Konvektions-Diffusions Gleichung, findet sich in vielen Lehrbüchern (Anderson, Tannehill und Pletcher 1984, Fletcher 1987).

Das Courant-Friedrichs-Levy Kriterium, kurz CFL-Kriterium, begrenzt den maximalen Zeitschritt Δt :

$$\underbrace{\left[\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} \right]}_C \Delta t \leq 1 \quad (3.2.4)$$

C bezeichnet hier die Courant-Zahl für den dreidimensionalen Fall. Das CFL-Kriterium legt fest, daß der Weg, den eine Störung während Δt konvektiv zurücklegt, geringer sein muß als der kleinste Abstand zweier Gitterpunkte (Hirsch 1988).

Ein analoges Kriterium gilt für den diffusiven Transport. Die Geschwindigkeitskomponenten werden durch eine Diffusionsgeschwindigkeit $\frac{\nu}{\Delta x}$ ersetzt. Das Diffusionslimit d ergibt sich zu:

$$\underbrace{\nu \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right]}_d \leq \frac{1}{2} \quad (3.2.5)$$

Ein weiteres Kriterium muß zur Erzielung von numerischer Stabilität ebenfalls erfüllt sein:

$$c^2 \leq 2d \leq 1 \quad (3.2.6)$$

Sind diese drei in der Regel bekannten Bedingungen erfüllt, so sind die Lösungen numerisch stabil, können jedoch trotzdem mit örtlichen und zeitlichen Oszillationen behaftet sein wie in Anderson et al. (1984) anhand einer instationären Konvektions-Diffusionsgleichung

nachgewiesen wird. Numerisch stabile und oszillationsfreie Lösungen erhält man nur, wenn das schärfere Kriterium

$$c \leq 2d \leq 1 \quad (3.2.7)$$

gilt. Dieses Kriterium führt letztlich auf die bekannte Maschen-Reynoldszahl-Beschränkung:

$$Re_{\Delta x} \leq 2 \quad \text{mit} \quad Re_{\Delta x} = \frac{c}{d} \quad (3.2.8)$$

CFL-Kriterium, Diffusionslimit und die Bedingung (3.2.7) stellen eine starke Beschränkung des Zeitschrittes dar.

Nach dem Diffusionslimit (3.2.5) ist der maximale Zeitschritt vor Beginn der Simulation berechenbar. Beim CFL-Kriterium (3.2.4) tritt das Problem auf, die zeitschrittbegrenzenden Geschwindigkeitsmaxima, die im Rechengebiete auftreten, im voraus abzuschätzen. Zudem bedeutet die Bedingung (3.2.7) eine weitere Beschränkung des Zeitschrittes.

Die hier vorgestellten Kriterien für die verwendeten Zeitschrittverfahren bei transienten Problemen lassen sich mittels heuristischer Überlegungen mit der Methode der äquivalenten Differentialgleichung oder durch eine Neumannsche Stabilitätsanalyse (siehe Abschnitt 3.2.1.2) finden.

Bei der Methode der äquivalenten DGL (Hirsch 1988) wird durch Einsetzen von Taylor-entwicklungen in die Differenzengleichung eine Differentialgleichung hergeleitet, die der Differenzengleichung äquivalent ist. Diese äquivalente DGL enthält die ursprüngliche DGL mit zusätzlichen Fehlertermen. Die Ableitungsterme gerader und ungerader Ordnung im Fehlerausdruck der entstehenden zeitabhängigen Differentialgleichung sind ein Maß für den Diskretisierungsfehler.

Ableitungen gerader Ordnung entsprechen einem Fehler durch numerische Diffusion (Dissipation). Fehler dieser Art beeinflussen die Stabilität des Verfahrens durch Reduktion oder Vergrößerung von Gradienten im Rechengebiet. Anhand dieser Methode ist sehr gut zu erkennen, daß das Euler-Vorwärts-Verfahren negative Diffusion zweiter Ordnung einbringt. Es wird deshalb auch als unterdiffusiv bezeichnet.

Ableitungsterme ungerader Ordnung im Fehlerausdruck entsprechen einem Dispersionsfehler (Phasenfehler). Der Dispersionsfehler beeinflusst die numerische Stabilität nicht, bewirkt jedoch bei einem transienten Problem eine Beschleunigung (vorausseilender Phasenfehler) oder Verzögerung (nacheilender Phasenfehler) beim Transport von Strukturen (z.B. Wirbel/Wellen u.ä.) durch das Rechengebiet. Der Dispersionsfehler ist bei einem physikalisch transienten Problem von Bedeutung, wenn es darauf ankommt, Strukturen im Strömungsgebiet in der Zeit korrekt zu transportieren, um z.B. charakteristische Frequenzen aus der Lösung zu erhalten.

Es ist zu beachten, daß das Euler-Vorwärts-Verfahren einen stark nacheilenden Phasenfehler besitzt. Im Bereich hoher Wellenzahlen werden Wellenpakete zu langsam transportiert und zusätzlich stark gedämpft. Die genannten Eigenschaften machen das Euler-Vorwärts-Verfahren zu einer ungeeigneten Methode, instationäre Vorgänge zu berechnen. Für die Berechnung stationärer Probleme durch Fortschreiten in der Zeit ("Time-Marching Methode") ist dieses Verfahren jedoch gut einsetzbar, wenn die Stabilitätslimits eingehalten werden.

3.2.1.2 Adams-Bashforth-Verfahren

Bei dieser Methode wird die Gleichung (3.2.1) wie folgt diskretisiert:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{i,j,k}^{n+1/2} = \frac{\varphi_{i,j,k}^{n+1} - \varphi_{i,j,k}^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2) = H_{i,j,k}^{n+1/2} \quad (3.2.9)$$

Der Differenzenquotient wird als Näherung des Differentialquotienten zum Zeitpunkt $n + 1/2$ betrachtet. Dieser Ansatz stellt das Problem, den örtlichen Differentialoperator H zum Zeitpunkt $n + 1/2$ berechnen zu müssen. Hier sind verschiedene Methoden denkbar, z.B. :

$$\text{Interpolation} \quad H_{i,j,k}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(H_i^{n+1} + H_i^n) \quad \text{Crank-Nicholsen} \quad (3.2.10)$$

$$\text{Extrapolation} \quad H_{i,j,k}^{n+1/2} = \frac{3}{2}H_i^n - \frac{1}{2}H_i^{n-1} \quad \text{Adams-Bashforth} \quad (3.2.11)$$

Das implizite Crank-Nicholsen-Verfahren ist unbedingt stabil. Untersuchungen hierzu finden sich in Hirsch (1988) und Fletcher (1987).

Zum expliziten Adams-Bashforth-Verfahren wurde anhand einer Konvektions-Diffusions-Gleichung von Mößner (1996) eine ausführliche Untersuchung durchgeführt, die zu folgendem Ergebnis kommt:

- Das Adams-Bashforth-Verfahren ist für rein konvektive Vorgänge schwach instabil.
- Um Stabilität zu erreichen, muß für eine feste Courant-Zahl ein Minimum an Diffusion vorhanden sein.

Um die Stabilitätsgrenzen zu erhalten, wendet man die Neumannsche Stabilitätsanalyse auf die eindimensionale, örtlich zentral und in der Zeit nach Adams-Bashforth diskretisierte Konvektions-Diffusionsgleichung an. Dies geschieht durch Auswertung des Anfachungsfaktors $G = \frac{A^{n+1}}{A^n}$ mit dem Ansatz $\varphi_i^n = A^n e^{l\theta i}$. Man erhält die folgenden Stabilitätslimits:

Für das konvektive Limit:

$$\underbrace{\left[\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} \right]}_C \Delta t \leq \frac{3}{4} \quad (3.2.12)$$

Für das diffusive Limit:

$$\underbrace{\nu \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right]}_d \leq \frac{1}{4} \quad (3.2.13)$$

Es werden beim Adams-Bashforth-Verfahren aufgrund der drei verwendeten Zeitlevels zwei Anfachungsfaktoren berechnet, von denen der erste die physikalische Dämpfung der Moden wiedergibt. Der zweite Anfachungsfaktor hat keine physikalische Bedeutung. Es sollte jedoch vermieden werden, daß er betragsmäßig zu hohe Werte annimmt. Der physikalische Anfachungsfaktor sollte für alle Wellenzahlen knapp unterhalb dem Wert Eins liegen.

Dies hat zur Folge, daß die Stabilitätslimits weiter verschärft werden. In Mößner (1996) wird ein Bereich angegeben, in dem numerisch stabile und physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu erwarten sind:

$$0 < d < \frac{1}{8}, \quad 0 < C < \frac{1}{2} \quad . \quad (3.2.14)$$

Für diesen Fall bekommt man das folgende Verhalten der beiden Anfachungsfaktoren (siehe Abb. 3.2). Man erkennt im linken Bild, daß der Verlauf des physikalischen(G1) und unphysikalischen(G2) Anfachungsfaktors immer im Einheitskreis liegt.

Trägt man den Betrag des Anfachungsfaktors über den Phasenwinkel Θ auf (rechtes Bild), so erkennt man, daß der physikalische Anfachungsfaktor immer größer als der unphysikalische ist. Dies wird durch die Bedingung (3.2.14) sichergestellt.

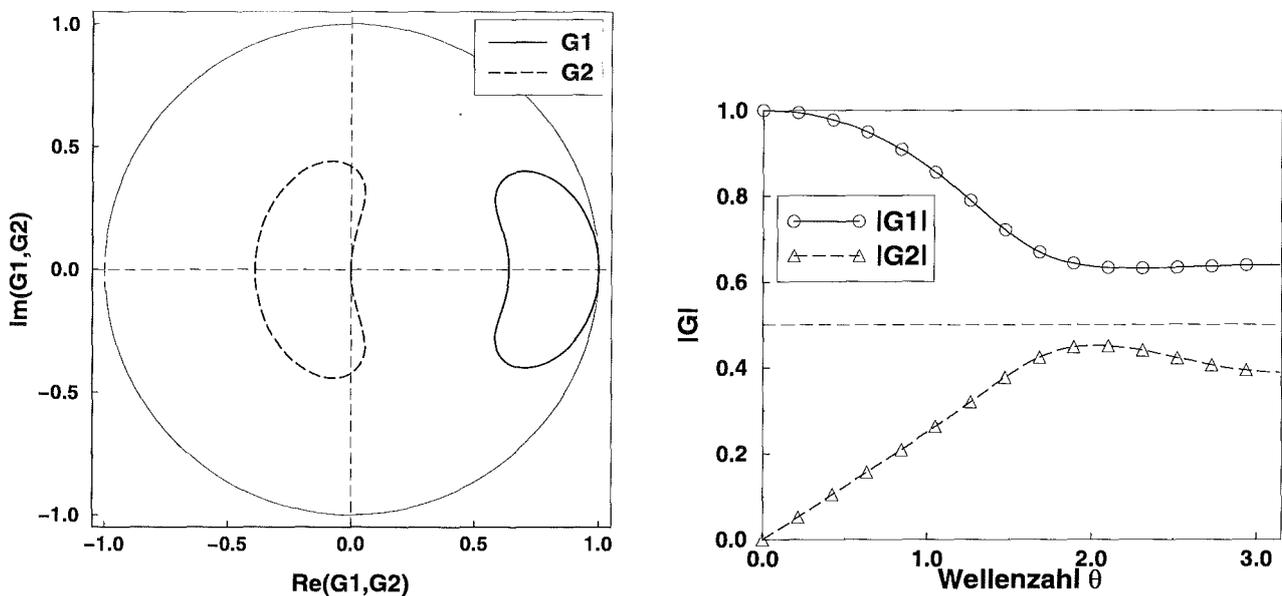


Abbildung 3.2: Verhalten von G1 und G2 an der von Mößner (1996) empfohlenen Stabilitätsgrenze $d = 1/8$; $c = 0.5$.

Die Kenntnis der Verfälschung von Phasenrelationen (Dispersionsfehler) ist beim Einsatz von Zeitschrittverfahren für instationäre Probleme von entscheidender Bedeutung. Für eine Advektionsgleichung kann man den Phasenwinkel des numerischen Verfahrens mit dem Phasenwinkel der exakten Lösung vergleichen. Der Phasenwinkel Φ des physikalischen Anfachungsfaktors G1 wird aus

$$\phi = \arctan \left[\frac{\text{Imaginärteil}(G1)}{\text{Realteil}(G1)} \right] \quad (3.2.15)$$

ermittelt. Der Phasenwinkel der exakten Lösung lautet $\phi_e = -c\Theta$. Aus dem Verhältnis ϕ/ϕ_e läßt sich erkennen, ob die Phase ϕ im Vergleich zur exakten Lösung ϕ_e vorseilt ($\phi/\phi_e > 1$) oder nacheilt ($\phi/\phi_e < 1$). Man spricht dann von einem vorseilenden oder nacheilenden Phasenfehler. Dies ergibt einen Eindruck vom Transportverhalten eines numerischen Zeitschritt-Verfahrens für verschiedene Wellenzahlen. Untersucht man das

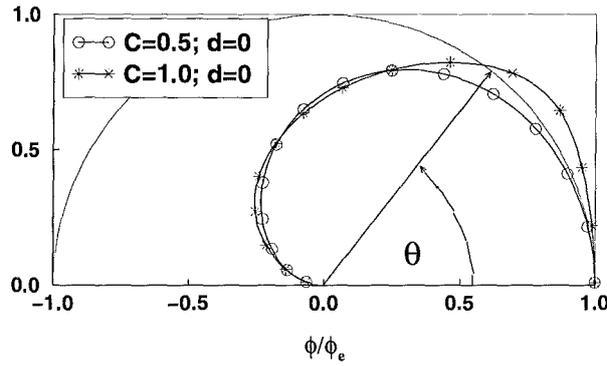


Abbildung 3.3: Polardiagramm des Phasenfehlers für eine Advektionsgleichung bei $c = 1$ und an der von Mößner (1996) empfohlenen Stabilitätsgrenze $c = 0.5$.

Verhältnis der beiden Phasenwinkel, so sollte der Wert für alle Wellenzahlen idealerweise bei Eins liegen. Der Phasenfehler wird üblicherweise in einem Polardiagramm mit dem Parameter θ (Wellenzahl) dargestellt (siehe Abb. 3.3). Aufgrund des numerischen Verfahrens werden Wellenpakete bestimmter Frequenz schneller oder langsamer transportiert als bei der exakten Lösung der Advektionsgleichung. Das Adams-Bashfort-Verfahren besitzt für höhere Wellenzahlen immer einen nachteiligen Fehler. Es ist bei höheren Courant-Zahlen $C = 1$ für kleine und mittlere Wellenzahlen auch ein vorausseilender Fehler möglich. Dies wurde jedoch durch die Bedingung (3.2.14) ausgeschlossen.

Für instationäre Strömungen, bei denen es auf exakten Transport ankommt, kann der relative Phasenfehler von größerer Bedeutung sein als die Dämpfungseigenschaften des Verfahrens.

Ein Beispiel für ein Verfahren mit geringerem Phasenfehler ist das Lax-Wendroff-Verfahren, wie es in der Untersuchung für Zylinderumströmungen von Davis und Moore (1982) in Kombination mit einem QUICK-Upwind-Verfahren verwendet wurde. Die Beschreibung der verschiedenen Upwind-Verfahren wird in Abschnitt 3.2.3.2 nachgeholt.

Das explizite Lax-Wendroff-Verfahren, das für eine Advektionsgleichung mit dem Verfahren von Leith identisch ist (Fletcher 1987), lautet

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \frac{c}{2}(\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n) + \frac{c^2}{2}(\varphi_{i+1}^n + \varphi_{i-1}^n - 2\varphi_i^n) \quad \text{Lax-Wendroff / Leith .} \quad (3.2.16)$$

Es handelt sich um ein Verfahren von zweiter Ordnung im Raum und in der Zeit. Der Term mit dem Faktor $\frac{c^2}{2}$ kann als künstliche Diffusion betrachtet werden, der das unterdiffusive Verhalten des einfachen Euler-Vorwärts-Verfahrens (siehe Gl. (3.2.3)) korrigiert. In Kombination mit dem QUICK-Verfahren lautet das Verfahren von Davis und Moore (1982) für eine Konvektions-Diffusionsgleichung:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{n+1} = & \varphi_i^n - \frac{c}{2}(\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n) + \left(\frac{c^2}{2} + d\right)(\varphi_{i+1}^n + \varphi_{i-1}^n - 2\varphi_i^n) \\ & + c\left(\frac{1}{6} - d - \frac{1}{6}c^2\right)(\varphi_{i+1}^n - 3\varphi_i^n + 3\varphi_{i-1}^n - \varphi_{i-2}^n) \quad . \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

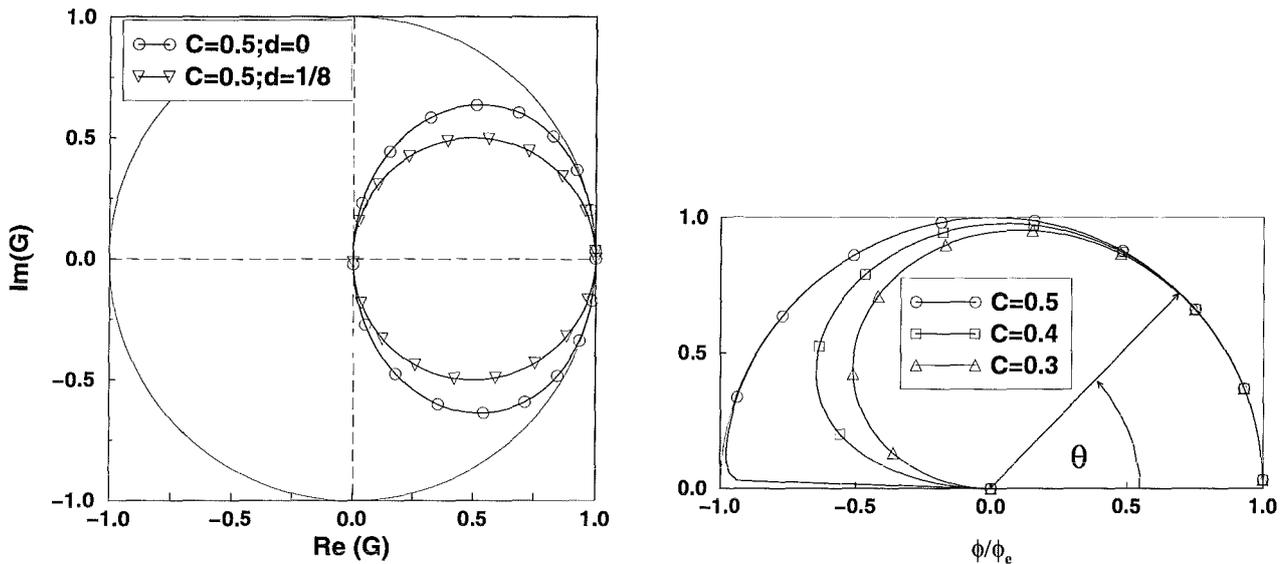


Abbildung 3.4: Verhalten von Dämpfung (linkes Bild) und Phasenfehler der Advektionsgleichung (rechtes Bild) der Lax-Wendroff/QUICK-Diskretisierung.

Interessant sind der Phasenfehler und die Dämpfung dieses Verfahrens (siehe Abb. 3.4). Es entsteht hier nur ein Anfachungsfaktor, da nur zwei Zeitlevels verwendet werden. Man erkennt in Abbildung 3.4, daß der Phasenfehler für $C = 0.5$ nahezu verschwindet und erst für hohe Wellenzahlen nachteilig wird. Unangenehmerweise ist jedoch die Dämpfung des Verfahrens ziemlich hoch, so daß trotz des geringen Phasenfehlers oft andere Verfahren gewählt werden.

Der Zusammenhang zwischen dem Phasenfehler und der durch das numerische Verfahren eingebrachten Diffusion und Dispersion darf, wie dieses Beispiel zeigt, bei instationären Methoden nie außer acht gelassen werden.

Durch die verschiedenen Arten der räumlichen Diskretisierung, vor allem des konvektiven Terms (Upwind (Donor Cell), QUICK, LECUSSO u.a. siehe Abschnitt 3.2.3.2), wird zusätzliche künstliche Diffusion eingebracht, um für **stationäre** Probleme eine oszillationsfreie Lösung zu sichern. Für die künstliche Diffusion wird im Fall von Upwind (Donor-Cell) ein Ableitungsterm zweiter Ordnung verwendet. QUICK und LECUSSO verwenden Beiträge dritter und vierter Ordnung.

Ableitungen gerader Ordnung haben bei stationären und instationären Problemen eine dämpfende Wirkung. Die Wirkung von Diffusivität ungerader Ordnung (Dispersion) ist bisher nur für instationäre Probleme erkannt und beeinflusst die Transporteigenschaften (Phasenfehler) des numerischen Verfahrens.

Betrachten wir das in dieser Arbeit verwendete Adams-Bashfort-Verfahren in Verbindung mit dem LECUSSO-Verfahren (siehe Abschnitt 3.2.3.2) für eine instationäre Konvektions-

Diffusionsgleichung:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{n+1} = & \varphi_i^n \\ & - \frac{3}{2}c \left[\frac{1}{2}(\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n) - \lambda(\varphi_{i+1}^n - 3\varphi_i^n + 3\varphi_{i-1}^n - \varphi_{i-2}^n) \right] + \frac{3}{2}d(\varphi_{i+1}^n + \varphi_{i-1}^n - 2\varphi_i^n) \\ & + \frac{1}{2}c \left[\frac{1}{2}(\varphi_{i+1}^{n-1} - \varphi_{i-1}^{n-1}) - \lambda(\varphi_{i+1}^{n-1} - 3\varphi_i^{n-1} + 3\varphi_{i-1}^{n-1} - \varphi_{i-2}^{n-1}) \right] + \frac{3}{2}d(\varphi_{i+1}^{n-1} + \varphi_{i-1}^{n-1} - 2\varphi_i^{n-1}) \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Beim LECUSSO-Verfahren wird Diffusion 3. und 4. Ordnung eingebracht. Es gehört zu den lokal exakten Verfahren, bei dem ein örtlich veränderliches λ verwendet wird, das von der Maschen-Reynoldszahl abhängig ist.

Eine Neumannsche Stabilitätsanalyse ergibt, daß die Anfachungsfaktoren sensitiv auf eine Veränderung von λ reagieren (siehe Abb. 3.5).

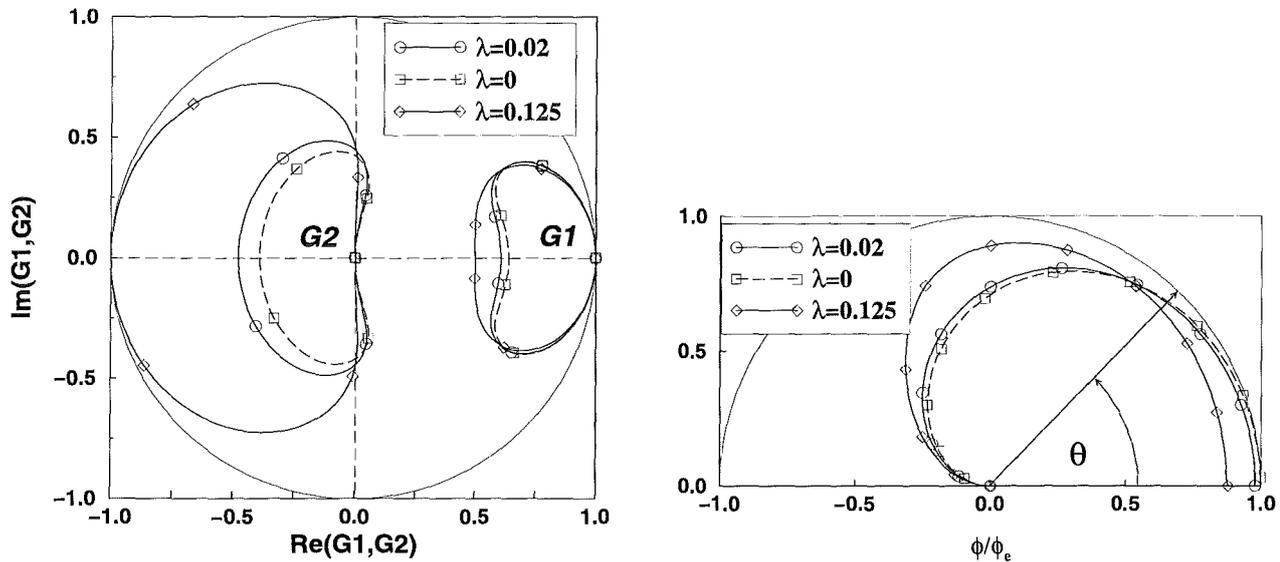


Abbildung 3.5: Dämpfungsverhalten (linkes Bild) und Phasenfehler der Advektionsgleichung (rechtes Bild) verschiedener λ -Faktoren bei $c = 0.5$ und $d = 1/8$ mit Adams-Bashfort-/LECUSSO-Diskretisierung.

Man erkennt, daß für $\lambda = 1/8$ (für dieses λ entspricht das LECUSSO-Verfahren dem QUICK-Verfahren) und bei Einhaltung des Kriteriums (3.2.14) für das Diffusionslimit und die Courant-Zahl der unphysikalische Anfachungsfaktor G2 unzulässig hohe Werte annimmt. G1 zeigt den dämpfenden Einfluß der Diffusion 4.Ordnung.

Der Phasenfehler wird durch ein wachsendes λ so verändert, daß ein nachteiliger Fehler auch bei niedrigen Wellenzahlen vorliegt, so daß auch die meist dominierenden größeren Strukturen der Strömung mit kleineren Wellenzahlen zu langsam transportiert werden. Dies verfälscht eine zeitgenaue Berechnung von instationären Strömungen erheblich.

Hieraus läßt sich der Schluß ziehen, daß bei der Verwendung einer Diskretisierung analog Gleichung (3.2.18) der Faktor λ sehr klein ($\lambda = 0.02$) gewählt werden sollte, was im verwendeten Programmcode auch so eingestellt wurde.

Damit wird der Einfluß der zusätzlichen Diffusion durch das örtliche Verfahren stark reduziert, was auch dazu führen kann, daß räumliche Oszillationen aufgrund erhöhter Maschen-Reynoldszahlen auftreten können.

Hier befindet man sich also offensichtlich in dem Dilemma, entweder das Zeitschrittverfahren korrekt zu justieren und eventuell räumliche Oszillationen zuzulassen oder räumliche Oszillationen zu unterbinden und in einem unzulässigen Bereich des Zeitschrittverfahrens mit hoher Dämpfung der Amplituden und nacheilendem Phasenfehler zu operieren. Dieser Konflikt wird durch das Diskrepanz-Statement beschrieben, das im folgenden Abschnitt behandelt wird.

3.2.2 Diskrepanz-Statement

Grundsätzlich lassen sich transiente Rechenverfahren für stationäre und instationäre Probleme einsetzen. Für die Wahl eines bestimmten transienten Verfahrens ist die Kenntnis des qualitativen physikalischen Verhaltens des zu berechnenden Systems sowie des Zieles der Rechnung von Bedeutung.

Wenn zum Beispiel mit Hilfe einer instationären Formulierung die stationäre Lösung eines Problems gesucht werden soll, so ist die Zeitgenauigkeit während der einzelnen Zeitschritte oft nicht entscheidend. Ausgehend von einer Startlösung wird in der Zeit fortgeschritten, bis sich die Lösung in der Zeit nicht mehr ändert. Diese Vorgehensweise bei stationären Problemen wird auch als "time-marching" bezeichnet.

In einigen Fällen ist jedoch der zeitgenaue Verlauf zur stationären Lösung von Interesse.

Im Gegensatz dazu steht die Berechnung einer zeitgenauen instationären Lösung, bei der der genaue zeitliche Verlauf eines zeitlich periodischen oder aperiodisch oszillierenden Zustands simuliert werden soll.

Das sogenannte "Diskrepanz-Statement" besagt, daß alle genannten Fälle nicht mit gleicher Genauigkeit und nur einer numerischen Methode gelöst werden können (Chapman 1981, Günther 1997).

Keine der bekannten Methoden zur Diskretisierung der Zeitableitung hat bei fester Einstellung die Eigenschaft die erwünschte Oszillationsfreiheit bei stationären Problemen **und** den korrekten Transport von Strömungsstrukturen bei instationären Problemen sicherzustellen. Wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert, muß man in manchen Fällen bei stationären Problemen Oszillationen in Kauf nehmen, um den korrekten Transport von Strukturen bei instationären Problemen sicherzustellen.

Falls das Verhalten(stationär oder instationär) des zu berechnenden Systems bekannt ist, kann man die zu verwendenden numerischen Methoden und deren Einstellung im voraus festlegen. Vor allem der reflektierte Umgang mit der durch örtliche Verfahren eingebrachten Diffusion 2., 3. und 4. Ordnung ist notwendig, denn sie beeinflußt das Verhalten des Zeitschrittverfahrens.

3.2.3 Die örtliche Diskretisierung

3.2.3.1 Zentrale Differenzen

Für die örtliche Diskretisierung der stationären Konvektions-Diffusionsgleichung wird oft das zentrale Differenzen-Verfahren (CDS) verwendet. Die Ableitungen werden wie folgt

gebildet:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad , \quad (3.2.19)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_i = \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad . \quad (3.2.20)$$

Dieses Verfahren 2. Ordnung ist dann oszillationsfrei, wenn für die Maschen-Reynoldszahl gilt:

$$|Re_{\Delta x}| \leq 2 \quad . \quad (3.2.21)$$

Bei den meisten von Konvektion dominierten praktischen Problemen ergeben sich bei einer vertretbaren Anzahl an Gitterpunkten oft weit höhere Maschen-Reynoldszahlen, so daß sich beim zentralen Differenzenverfahren räumliche Oszillationen entwickeln.

Der Einsatz von Upwind-Verfahren für stationäre Berechnungen überwindet dieses Problem durch das Einbringen zusätzlicher "numerischer (künstlicher) Diffusion". Dieser Themenkreis wird im nächsten Abschnitt behandelt.

Bei instationären Problemen muß beachtet werden, daß durch die zusätzliche Diffusion der Upwind-Verfahren die Eigenschaften des Zeitschrittverfahrens verändert werden. Es müssen die in den Abschnitten 3.2.1.1 und 3.2.1.2 gemachten Aussagen bezüglich der Wirkung der zusätzlichen Diffusion beachtet werden.

3.2.3.2 Upwind-Verfahren

Bei den Upwind-Verfahren werden für die Differenzenformel des konvektiven Terms einseitige Näherungen verwendet. Es werden ein oder mehrere Punkte stromauf zur Bildung einer Differenzenformel herangezogen.

Da der Zustand in einer Zelle bei Problemen mit dominanter Konvektion stärker von der stromauf liegenden Seite bestimmt wird, ist dies auch physikalisch begründbar.

Eine der einfachsten Methoden dieser Art ist das Donor-Cell-Verfahren, das gemeinhin auch als Upwind oder Upwind-Difference-Scheme(UDS) bezeichnet wird. Es ist von erster Ordnung Genauigkeit im Ort und besitzt keine Beschränkung in der Maschen-Reynoldszahl. Die Ableitungen werden je nach Strömungsrichtung mit dem jeweils stromauf liegenden Wert gebildet:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i = \begin{cases} \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) & \text{für } Re_{\Delta x} > 0 \\ \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta x} + O(\Delta x) & \text{für } Re_{\Delta x} < 0 \end{cases} \quad (3.2.22)$$

Das Donor-Cell-Verfahren ist zwar einfach zu implementieren, besitzt jedoch den gravierenden Nachteil, daß es sehr viel zusätzliche Diffusion 2. Ordnung einbringt, vor allem bei schräg angeströmten Gittern (crosswind-diffusion). Die Lösung ist zwar stabil, die Gradienten im Rechengebiet werden jedoch zu sehr abgeflacht. Man spricht auch von einer 'verschmierten' Lösung (Günther 1992b). Eine Beschreibung der negativen Auswirkungen dieses Verfahrens finden sich in vielen Lehrbüchern (Patankar 1980, Noll 1993). Einen Ausweg bieten hier Upwind-Verfahren höherer Ordnung, wie z.B. das weit verbreitete QUICK-Schema (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) von Leonard (1979) und viele andere.

Einen Ansatz mit größerer Variabilität ohne Maschen-Reynoldszahl-Beschränkung stellen die sogenannten 'lokal exakten Verfahren' dar. Das Verfahren nach Allen und Southwell (1955) ASS oder das LECUSSO-Verfahren (Locally Exact Consistent Upwind Scheme of Second Ord) von Günther (1992a) sind Vertreter dieser Art.

Die grundlegende Idee dieser Verfahren besteht darin, Differenzennäherungen so zu finden, daß lokal an den Gitterknoten die exakte Lösung der Konvektions-Diffusions-Gleichung gefunden wird, wenn die Maschen-Reynoldszahl als konstant über die Gitterzelle angenommen wird. Unter dieser Bedingung heißt ein Verfahren "lokal exakt".

Wäre die Maschen-Reynoldszahl im betrachteten Intervall oder im gesamten Rechenggebiet konstant $Re_{\Delta x} = Re_0$, so berechnen solche Verfahren die exakte Lösung der Gleichung:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{Re_0} \frac{d^2\varphi}{dx^2} \quad \text{mit der Lösung} \quad \varphi = e^{Re_0 x} \quad . \quad (3.2.23)$$

Durch die Berücksichtigung der lokalen Maschen-Reynoldszahl wird gerade nur soviel zusätzliche numerische Diffusion erzeugt, um die stationäre Lösung oszillationsfrei zu halten.

Beim LECUSSO-Verfahren lautet die Näherung für die erste Ableitung:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2} + \lambda_i \{-\varphi_{i+1} + 3\varphi_i - 3\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}\} \right] \quad \text{für } Re_{\Delta x} > 0 \quad . \quad (3.2.24)$$

Der LECUSSO-Faktor λ berechnet sich aus:

$$\lambda_i(Re_{\Delta x,i}) = \frac{e^{Re_{\Delta x,i}}}{Re_{\Delta x,i}} \frac{Re_{\Delta x,i} 0.5(e^{Re_{\Delta x,i}} + 1) - (e^{Re_{\Delta x,i}} - 1)}{(e^{Re_{\Delta x,i}} - 1)^2} \quad . \quad (3.2.25)$$

Dieses Verfahren ist von zweiter Ordnung genau. Für feste Werte von λ findet man einige bekannte Upwind-Verfahren:

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{1}{8} & \quad \text{QUICK-Verfahren nach Leonard (1979)} \\ \lambda = \frac{1}{6} & \quad \text{Verfahren nach Agarwal (1981)} \\ \lambda = \frac{1}{2} & \quad \text{Verfahren nach Atias et al. (1977)} \\ \lambda = 0 & \quad \text{Zentrale Differenzen} \end{aligned}$$

Vorteilhafterweise läßt sich die eingebrachte Diffusion durch den λ -Faktor stufenlos steuern, was die Anpassung an ein Zeitschrittverfahren erleichtert. In dieser Arbeit wurde aus Gründen der Stabilität des eingesetzten Adams-Bashforth- Zeitschrittverfahrens der Faktor $\lambda = 0.02$ gewählt, damit bei transienten Problemen die Amplituden nicht zu stark gedämpft werden und ein korrekter Transport gesichert wird (siehe Abb. 3.5). Diese Einstellung gilt jedoch nur, wenn das physikalische Problem tatsächlich transient ist. Hinweise zur Implementierung des Verfahrens in Erhaltungsform auf einem versetzten Gitter finden sich in Günther (1992b).

3.3 Das Fractional-Step-Verfahren

Bei der Lösung des nichtlinearen elliptischen Gleichungssystems (2.2.1 - 2.2.2) werden die Transportgleichungen in den Raumrichtungen getrennt voneinander berechnet. Dies kennzeichnet ein entkoppeltes Berechnungsverfahren. Die Koppelung des Gleichungssystems muß durch ein entsprechendes Lösungsverfahren berücksichtigt werden. Hierbei muß in der Regel eine Gleichung für den Druck gelöst werden.

Die vorgeschlagenen Verfahren lassen sich einteilen in iterative Druck-Korrektur-Verfahren wie SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations (Patankar und Spalding 1972)) und nicht-iterative Verfahren wie das von Issa, Gosman und Watkins (1984) vorgeschlagene PISO-Verfahren (Pressure Implicit with Splitting of Operations) oder das von Chorin (1968) und Temam (1968) unabhängig voneinander vorgeschlagene Fractional-Step oder Time Splitting-Verfahren. Bei den SIMPLE- und PISO-Verfahren wird eine Gleichung für die Druck-Korrektur gelöst. Beim Fractional-Step-Verfahren wird eine Gleichung für den Druck gelöst.

In der Anwendung auf dreidimensionale Probleme in Kombination mit verschiedenen Zeitschritt-Verfahren für Konvektion und Diffusion (Adams-Bashfort, Crank-Nicolson) wurde das Fractional-Step-Verfahren von Kim und Moin (1985) beschrieben.

In dieser Arbeit wurde das Fractional-Step-Verfahren in Kombination mit dem expliziten Adams-Bashfort-Verfahren für Konvektion und Diffusion verwendet. Nach Perot (1993) ist das gesamte Verfahren dann von 2. Ordnung für die Geschwindigkeiten und von erster Ordnung im Druck.

Die Darstellung des Fractional-Step-Verfahrens erfolgt der Übersichtlichkeit halber für das Euler-Vorwärts-Verfahren.

Die Impulsgleichung kann dargestellt werden als:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -F_p \nabla p + Rest \quad , \quad (3.3.26)$$

wobei im Rest der konvektive und der diffusive Teil sowie die Lorentz-Kraft zusammengefaßt werden. F_p sei der Faktor, der in den Impulsgleichungen vor dem Druckterm steht.

Diskretisiert man Konvektion und Diffusion mit dem Euler-Vorwärts-Verfahren und wählt den Druck jedoch zum neuen Zeitpunkt (implizit in der Zeit), so ergibt sich:

$$\frac{\vec{v}^{n+1} - \vec{v}^n}{\Delta t} = -F_p \nabla p^{n+1} + Rest^n \quad . \quad (3.3.27)$$

Nun kann eine sogenannte temporäre Geschwindigkeit definiert werden:

$$\vec{v}_{temp} = \vec{v}^{n+1} + F_p \Delta t \nabla p^{n+1} \quad . \quad (3.3.28)$$

Wird diese Gleichung in die Impulsgleichung (3.3.27) eingesetzt, so fällt der Druck heraus und man kann die temporäre Geschwindigkeit explizit aus der dann entstehenden Gleichung berechnen.

Nach Anwendung des Divergenzoperators auf Gleichung (3.3.28) erhält man mit $\nabla v^{n+1} = 0$ eine Poissongleichung für den Druck:

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{F_p \Delta t} \nabla \cdot \vec{v}_{temp} \quad . \quad (3.3.29)$$

Die Lösung der Poissongleichung liefert den Druck, der dazu verwendet wird, das temporäre Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei zu machen. Aus der umgeformten Beziehung (3.3.28) erhält man die divergenzfrie Geschwindigkeit zum neuen Zeitpunkt:

$$\vec{v}^{n+1} = \vec{v}_{temp} + F_p \Delta t \nabla p^{n+1} \quad . \quad (3.3.30)$$

Aus Gleichung (3.3.28) kann die Randbedingung für den Druck hergeleitet werden:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \right|_{Wand}^{n+1} = \frac{1}{F_p \Delta t} (\vec{v}_{temp} - \vec{v}^{n+1}) \cdot \vec{n} \quad , \quad (3.3.31)$$

wobei \vec{n} der Normalenvektor auf der Wand ist.

In Lenhart (1994) sowie Peyret und Taylor (1983) wird nachgewiesen, daß sich nach Einsetzen von Gleichung (3.3.31) in die Poissongleichung (3.3.29) und bei der Verwendung eines versetzten Gitters der Druck als unabhängig von der eingeführten temporären Geschwindigkeit an der Wand erweist. Deshalb kann an der Wand $v_{temp}|_{Wand} = v|_{Wand}^{n+1}$ gesetzt werden und es ergibt sich eine homogene Neumann-Randbedingung für den Druck:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \right|_{Wand}^{n+1} = 0 \quad . \quad (3.3.32)$$

Um die Fehlerordnung des Verfahrens im Druck zu verbessern, wird diskutiert, bei der Berechnung von \vec{v}_{temp} das alte Druckfeld zu berücksichtigen (Maday, Patera und Ronquist 1990).

Dies wäre zum Beispiel bei einer Diskretisierung des Drucks mit der Crank-Nicolson-Methode möglich, wie von Bell, Colella und Glaz (1989) vorgeschlagen. Statt Gleichung (3.3.27) hat man dann (siehe (3.2.9 - 3.2.10)):

$$\frac{\vec{v}^{n+1} - \vec{v}^n}{\Delta t} = -F_p \frac{1}{2} (\nabla p^{n+1} + \nabla p^n) + Rest^n \quad . \quad (3.3.33)$$

Es wird nun eine modifizierte temporäre Geschwindigkeit eingeführt nach:

$$\vec{v}_{temp} = \vec{v}^{n+1} + F_p \frac{1}{2} \Delta t \nabla p^{n+1} \quad . \quad (3.3.34)$$

Im Unterschied zur Vorgehensweise nach Gleichung (3.3.27 - 3.3.30) bleibt nun bei der Bestimmung der temporären Geschwindigkeit ein Ausdruck mit dem alten Druckfeld stehen. Die Bestimmung einer Poisson-Gleichung für den Druck und die Bestimmung des neuen divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldes wird analog zur Version mit erster Ordnung vorgenommen.

Kapitel 4

Gebietszerlegungs-Methoden

4.1 Allgemeines

Die Nutzung von Hochleistungsrechnern hat sich in vielen Bereichen (Autoindustrie, Flugzeugindustrie u.a.) zur Berechnung wissenschaftlicher und technischer Probleme etabliert. Trotz der stürmisch gestiegenen Rechnerleistung bereitet die Bearbeitung der sogenannten großen Aufgaben (“Grand Challenges”) wie zum Beispiel Wettervorhersage, Hochenergiephysik und “Computational Fluid Dynamics (CFD)” immer noch große Probleme.

In einigen Fällen liegen die Rechenzeiten bei CFD im Bereich von Wochen und Monaten. Bei der Wettervorhersage müssen Rechenzeiten auch für große Probleme in der Größenordnung von Stunden gehalten werden. Begrenzend ist hier also vor allem die zur Verfügung stehende Rechenleistung, weniger der Speicherplatz.

Diese Aufgaben benötigen einen weiteren Anstieg der Rechenleistung um einige Größenordnungen, um sie aus dem Bereich des “nur Machbaren” herauszuheben und Parametervariationen zu ermöglichen.

Die Geschwindigkeit der schnellsten Prozessoren stößt bereits an physikalische Grenzen, so daß eine sprunghafte Steigerung der Rechenleistung nur durch parallele Rechnerarchitekturen möglich scheint.

Ganz allgemein wird eine Menge von Prozessoren, die in der Lage ist, ein Problem kooperativ zu lösen, als Parallelrechner bezeichnet. Parallelrechner können grundsätzlich in drei Klassen eingeteilt werden (Hafermann 1995):

- Vektor-Parallelrechner mit bis zu 16 Prozessoren und einem gemeinsamen oder mehreren, auf die Prozessoren verteilten Speicherbereichen.
- Massiv-Parallelrechner (MPP) mit 100 bis 1000 Prozessoren.
- Workstation-Cluster, die über ein Netzwerk miteinander verbunden sind.

Die Anwendung paralleler Rechner erfordert Kommunikation und Datenaustausch zwischen den einzelnen Prozessoren. Die hierfür notwendigen Algorithmen und Methoden befinden sich immer noch in der Entwicklung.

Die Entwicklung der Parallelrechner übt auch auf dem Gebiet der CFD einen großen Einfluß auf die verwendeten numerischen Methoden und Algorithmen aus. Manche Methoden, die

aufgrund der Verwendung von sequentiellen Rechnerarchitekturen an Bedeutung verloren (z.B. Jacobi-Methode zur Lösung von Gleichungssystemen), müssen aufgrund der in ihnen liegenden Parallelität neu bewertet werden.

Mit dem Aufkommen von Parallelrechnern entstand der Wunsch, ein Gesamtproblem in getrennte Teilprobleme zu zerlegen, um diese nach Möglichkeit **gleichzeitig** zu berechnen. Die Zerlegung kann auch dadurch motiviert sein, daß den Teilgebieten verschiedene Materialien zugeordnet sind oder daß sie in einfache Geometrien (z.B. Rechtecke) zerlegbar sind. Damit kann die Berechnung vereinfacht und zugleich die Ausführungszeit der Programme weiter verkürzt werden.

Aufgrund dieses neuen Aspektes sind die schon sehr alten Zerlegungs-Algorithmen wieder stark in den Mittelpunkt des Interesses gerückt.

Gebietszerlegungs-Algorithmen ('domain-decomposition methods') sind Methoden, um partielle Differentialgleichungen eines Gesamtgebietes auf zusammenhängenden Teilgebieten zu lösen. Die Teilgebiete entstehen durch Zerlegung des ursprünglichen Rechengebiets. Der Gebietszerlegungs-Algorithmus sorgt für die Kopplung der Teilgebiete.

Die Wurzeln der Zerlegungsmethoden reichen weit zurück. Von Schwarz (1890) wurde erstmals ein solches Verfahren angegeben.

In den Anfängen der numerischen Berechnung von elliptischen Differentialgleichungen mit Computern (etwa 1950) mußten allein aus Speicherplatzgründen zu große Rechengebiete zerlegt werden. Die einzelnen Rechengebiete wurden abwechselnd in den Speicher geladen und berechnet. Außerdem war es hinsichtlich der Rechenzeit vorteilhaft, wenn die zerlegten Gebiete eine Form hatten, bei der ein effizientes Lösungsverfahren anwendbar war.

Aufgrund der heutigen Hauptspeichergrößen ist es problemlos möglich, mehrere Rechengebiete im Speicher zu halten. Der Fortschritt besteht in der Möglichkeit, mehrere Gebiete gleichzeitig (parallel) zu bearbeiten.

Gerade die in den Zerlegungs-Algorithmen liegende Parallelität kann mit einem Parallelrechner genutzt werden. Dies kann bei dreidimensionalen transienten Problemen zu einer deutlichen Verkürzung der Rechenzeit führen. Es werden Parametervariationen ermöglicht, um den Einblick in die Vorgänge zu verbessern.

Gebietszerlegungs-Algorithmen können direkt auf partielle Differentialgleichungen angewendet werden. Das Hauptaugenmerk in dieser Arbeit gilt aber der Anwendung auf diskretisierte partielle Differentialgleichungen, wie sie bei der Verwendung von Finite-Element-Methoden, Finite-Differenzen-Methoden oder Spektralmethoden entstehen.

4.2 Überblick

Die verschiedenen Methoden der Gebietszerlegung werden erst in neueren Büchern von Smith, Bjørstad und Gropp (1996) sowie Roache (1995) eingehender behandelt. Weitere zusammenfassende Darstellungen finden sich in Hackbusch (1993) oder Canuto, Hussaini, Quarteroni und Zang (1987) in kleinerem Umfang.

Ein Übersichtsartikel, der alle gängigen Methoden beschreibt sowie Konvergenzaussagen zu den einzelnen Methoden bringt, ist in Chan und Mathew (1994) zu finden. Systematische Ausarbeitungen des Themas sind in den Paper-Sammlungen des "International Symposium on Domain decomposition" enthalten (Chan und Glowinski 1988, Chan und Glowinski 1989, Keyes und Chan 1992).

Die Gebietszerlegungsmethoden können nach Abbildung 4.1 in zwei Gruppen unterteilt werden.

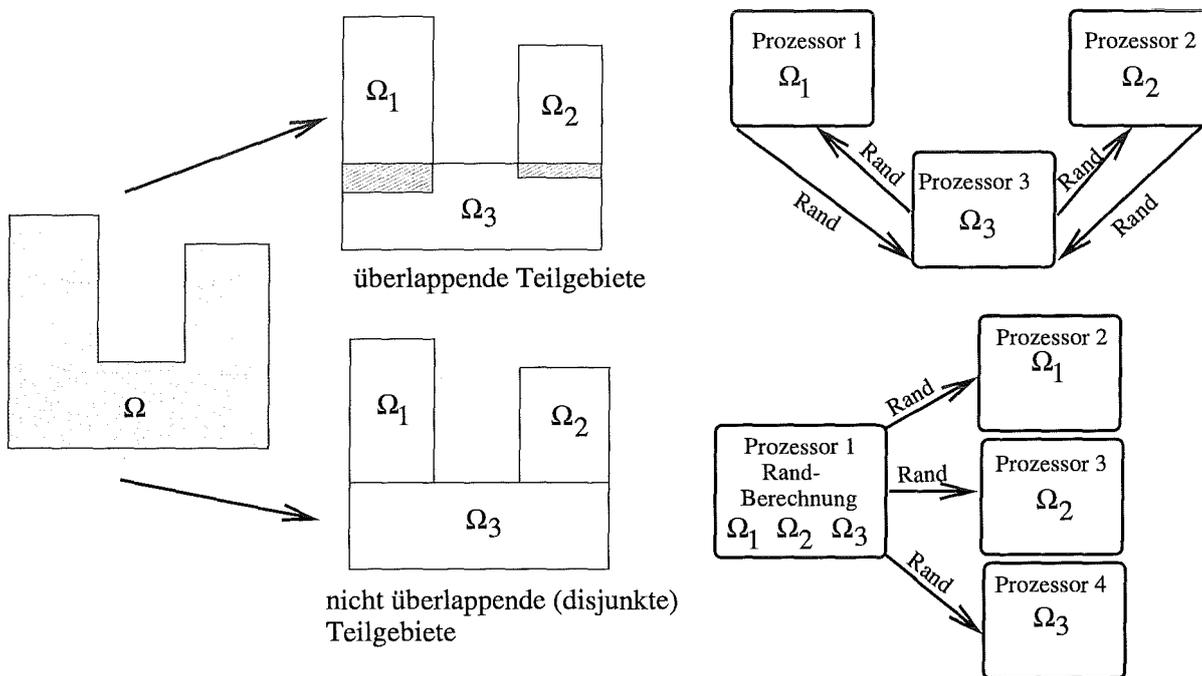


Abbildung 4.1: Unterteilung der Gebietszerlegungsmethoden in überlappende und nicht überlappende Methoden.

Überlappende Methoden werden ausschließlich in Zusammenhang mit der schon sehr alten iterativen Schwarzschen Methode (Schwarz 1890) genannt. Bei dieser Strategie wird, wie in Abbildung 4.1 gezeigt, das Rechengebiet in einander überlappende Teilgebiete zerlegt. Nun werden abwechselnd die einzelnen Rechengebiete Ω_1 , Ω_2 und Ω_3 auf den Prozessoren eins, zwei und drei berechnet. Dabei wird nach jeder Berechnung die Randinformation wechselseitig übermittelt (durch Pfeile angedeutet). Die Konvergenz des Verfahrens ist umso besser je größer der überlappende Bereich ist, jedoch steigt auch der Rechenaufwand, da die Bereiche der Überlappung doppelt berechnet werden. Die Parallelität des Algorithmus ist leicht zu erkennen. Jedes Teilgebiet wird einem Prozessor zugeordnet, auf dem es berechnet wird. Der Austausch der Randbedingungen, der bei jeder Iteration stattfindet, erfolgt durch Kommunikation zwischen den Prozessoren.

Bei **nicht überlappenden Methoden** wird eine andere Strategie verfolgt. Es wird ein Gleichungssystem für die durch die Zerlegung neu entstehenden Ränder (Interfaces) erzeugt. Bei dieser Vorgehensweise muß das sogenannte Interface-System (Schur-Komplement) (siehe Abschnitt 4.5) oder eine "Kapazitäts-Matrix" (siehe Abschnitt 4.5.2) berechnet werden. Ist dieses Gleichungssystem gelöst und die Werte an den Rändern gefunden, so kann im nächsten und letzten Schritt die Lösung auf allen drei Teilgebieten gefunden werden. Dieser Algorithmus wird als nicht-iterativ bezeichnet. Die Berechnung der 3 Teilgebiete kann nun von 3 Prozessoren gleichzeitig erledigt werden. Es ist nach Übergabe der Ränder keine weitere Kommunikation nötig, da alle Randinformationen bereits berechnet wurden.

4.3 Was ist ein paralleler Algorithmus ?

Anhand eines Beispiels soll prinzipiell gezeigt werden, wie ein Algorithmus als parallel erkannt werden kann. Dies wird anhand eines Vergleiches der Jacobi und der Gauß-Seidel-Iteration für ein lineares Gleichungssystem gezeigt.

Betrachten wir den Fall eines linearen Gleichungssystems (4.3.1), bei dem der Vektor x berechnet werden soll.

$$Ax = f \quad \longrightarrow \quad x = A^{-1}f \quad (4.3.1)$$

Das Jacobi- oder Gesamtschritt-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems läßt sich jetzt wie folgt herleiten: In Matrixform lautet Gleichung (4.3.1):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} . \quad (4.3.2)$$

Multipliziert man den Vektor x mit der Matrix A , so erhält man:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = f_1 \quad (4.3.3)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = f_2 \quad (4.3.4)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = f_3 \quad (4.3.5)$$

Nun wird der Iterationsindex n eingeführt, wobei die "neuen" Werte $n + 1$ aus den bekannten alten Werten berechnet werden. Zu Beginn der Iteration wird eine beliebige Schätzung vorgegeben. Das einfachste Verfahren dieser Art ist die Jacobi-Iteration oder Gesamtschritt-Verfahren, wobei die doppelt eingerahmten Terme die "neuen Werte" bezeichnen, die einfach eingerahmten Terme die "alten Werte":

$$\begin{aligned} \boxed{x_1^{n+1}} &= \frac{1}{a_{11}} (f_1 - a_{12} \boxed{x_2^n} - a_{13} \boxed{x_3^n}) \\ \boxed{x_2^{n+1}} &= \frac{1}{a_{22}} (f_2 - a_{21} \boxed{x_1^n} - a_{23} \boxed{x_3^n}) \\ \boxed{x_3^{n+1}} &= \frac{1}{a_{33}} (f_3 - a_{31} \boxed{x_1^n} - a_{32} \boxed{x_2^n}) \quad . \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Eine Verbesserung des Jacobiverfahrens bezüglich der Konvergenz stellt das Gauß-Seidel oder Einzelschritt-Verfahren dar:

$$\begin{aligned}
 \boxed{x_1^{n+1}} &= \frac{1}{a_{11}}(f_1 - a_{12}\boxed{x_2^n} - a_{13}\boxed{x_3^n}) \\
 \boxed{x_2^{n+1}} &= \frac{1}{a_{22}}(f_2 - a_{21}\boxed{x_1^{n+1}} - a_{23}\boxed{x_3^n}) \\
 \boxed{x_3^{n+1}} &= \frac{1}{a_{33}}(f_3 - a_{31}\boxed{x_1^{n+1}} - a_{32}\boxed{x_2^{n+1}}) \quad . \quad (4.3.7)
 \end{aligned}$$

Durch die Änderung der Iterationsindizes in Gleichung (4.3.7) wird der neu berechnete Wert der vorherigen Zeile in die nächste Gleichung eingebracht. Werden die Zeilen von Gleichung (4.3.7) bzw. Gleichung (4.3.6) in einem Programm nacheinander abgearbeitet, so konvergiert, unter gewissen Voraussetzungen, welche in vielen praktisch auftretenden Fällen erfüllt sind, der Gauß-Seidel-Algorithmus schneller als der Jacobi-Algorithmus.

Die Formulierung des Gauß-Seidel-Algorithmus hat jedoch den Nachteil, daß sie eine zeilenweise Abarbeitung von oben nach unten erzwingt. Dies ist beim Jacobi-Verfahren nicht der Fall! Ist die Lösung zum Iterationsindex n bekannt, so kann beim Jacobi-Verfahren erst die mittlere Gleichung gelöst werden, dann die Letzte und zum Schluß die Erste. Die Reihenfolge der Berechnung spielt also keine Rolle. Wenn die Bearbeitung einer Zeile nicht von der Lösung einer anderen abhängig ist, so kann man auch alle Gleichungen gleichzeitig, das heißt parallel lösen. Liegt eine solche Konstellation bei einem Algorithmus vor, wird er als parallel bezeichnet.

Die in den folgenden Abschnitten beschriebenen Varianten der Schwarzschen Methode lassen sich auf das Jacobi- oder Gauß-Seidel-Verfahren zurückführen.

4.4 Überlappende Methoden

Ein großer Teil der einschlägigen Literatur beschäftigt sich mit Methoden, bei denen das Rechengebiet in zwei sich überlappende Teilgebiete zerlegt wird.

Das Gebiet wird dabei oft so zerlegt, daß die entstehenden Gebiete mit einem schnellen Lösungsverfahren (z.B. aus den Softwarearchiven FISHPAK (Swarztrauber und Sweet 1975) oder LAPACK (Demmel 1989) usw.) berechnet werden können. Der Prototyp dieses Verfahrens wurde bereits von Schwarz (1890) beschrieben.

Die Eigenschaften dieses Algorithmus legen den Einsatz auf Parallelrechnern nahe. Die Schwarz-Methoden kann man in zwei Kategorien einteilen:

- multiplikative Schwarz-Methode
- additive Schwarz-Methode

4.4.1 Die multiplikative Schwarz-Methode ('Schwarz alternating')

Zunächst folgt die Beschreibung der multiplikativen Variante anhand eines Beispiel-Problems. Gleichung (4.4.8) stellt den einfachsten Fall eines nichttrivialen Randwertproblems dar. Es ist die Poisson-Gleichung:

$$\nabla^2 \psi(x, y) = -f(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \Omega \quad , \quad (4.4.8)$$

$$\psi(x, y) = \varphi(x, y) \quad \text{auf dem Rand } \Gamma = \partial\Omega \quad . \quad (4.4.9)$$

Das Rechengebiet Ω wird zunächst geteilt. Danach findet bei dem iterativen Verfahren ein fortlaufender Tausch der Randinformationen statt (siehe Abb. 4.2).

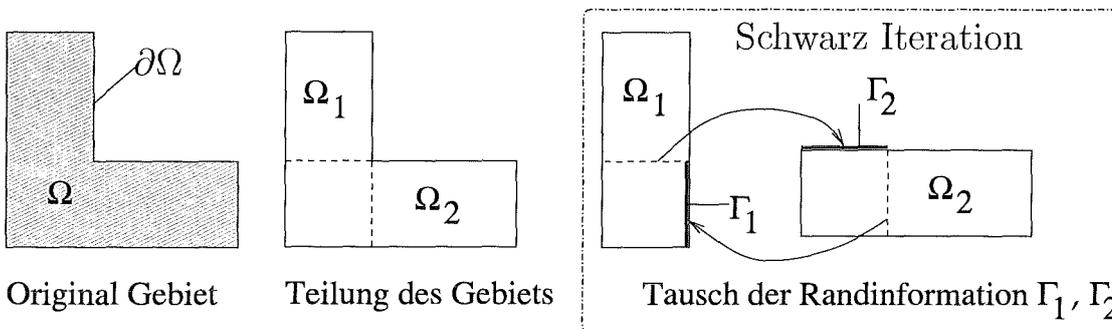


Abbildung 4.2: Prinzipielle Vorgehensweise bei der Gebietszerlegungsmethode nach Schwarz.

Die multiplikative Schwarz-Methode läßt sich wie folgt beschreiben (für Iterationsindex $k = 0, 1, 2, 3 \dots$):

Beginne bei beliebiger Anfangsschätzung:

$$\text{im Gesamtgebiet} \quad \psi^0 = 0 \quad (4.4.10)$$

$$\text{im ersten Teilgebiet} \quad -\nabla^2 \psi_1^{k+1} = f \quad \text{auf } \Omega_1 \quad \text{mit} \quad \psi_1^{k+1} = \psi_2^k \quad \text{auf } \Gamma_1 \quad (4.4.11)$$

$$\text{im zweiten Teilgebiet} \quad -\nabla^2 \psi_2^{k+1} = f \quad \text{auf } \Omega_2 \quad \text{mit} \quad \psi_2^{k+1} = \psi_1^{k+1} \quad \text{auf } \Gamma_2 \quad (4.4.12)$$

Die Teilgebiete werden abwechselnd nacheinander berechnet und die jeweiligen Rechengiebetsränder ψ_2^k und ψ_1^k ebenfalls abwechselnd nacheinander übertragen, daher die englische Bezeichnung "alternating Schwarz".

Dies geschieht solange, bis die gemeinsame Lösung in den beiden Rechengebieten der Lösung des gesamten Gebiets entspricht.

Dieses Verfahren kann analog auf Gleichungssysteme angewendet werden. Bei der Diskretisierung von Gleichung (4.4.8), beispielsweise mit finiten Differenzen, entsteht ein großes, schwach besetztes Gleichungssystem, das symmetrisch und positiv definit ist.

$$A\psi = f \quad . \quad (4.4.13)$$

Um den Algorithmus in Matrixnotation schreiben zu können, werden noch einige Hilfsgrößen eingeführt. Entsprechend den beiden Teilgebieten $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ werden $\{J_1, J_2\}$ als die Indizes bezeichnet, die innerhalb der Gebiete Ω_1 und Ω_2 liegen.

Es sei n_1 die Zahl der Indizes in J_1 sowie n_2 die Zahl in J_2 . Durch die Überlappung muß $n_1 + n_2 > n$ gelten, wobei n die Zahl der Unbekannten im gesamten Rechengebiet ($\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$) ist.

Zu jedem Teilgebiet Ω_i wird eine $n \times n_i$ "Erweiterungsmatrix" R_i^T definiert, die nur mit Null (außerhalb von Ω_i) oder Eins (innerhalb von Ω_i) besetzt ist:

$$(R_i^T x_i)_k = \begin{cases} (x_i)_k & \text{für } k \in J_i, \\ 0 & \text{für } k \in J - J_i, \text{ mit } J = J_1 \cup J_2 \end{cases} \quad (4.4.14)$$

Den diskreten Algorithmus kann man nun schreiben als:

$$\psi^{k+1/2} = \psi^k + R_1^T A_1^{-1} R_1 (f - A\psi^k) \quad (4.4.15)$$

$$\psi^{k+1} = \psi^{k+1/2} + R_2^T A_2^{-1} R_2 (f - A\psi^{k+1/2}) \quad . \quad (4.4.16)$$

Die Darstellung (4.4.15 - 4.4.16) zeigt, daß das multiplikative Schwarz-Verfahren bei zwei Gebieten sequentiell abläuft. Eine parallele Durchführung ist für den Fall zweier Rechengebiete nicht möglich. Bei mehr als zwei Gebieten ist jedoch eine parallele Abarbeitung möglich, indem alle die Gebiete gemeinsam berechnet werden, an die gerade Randbedingungen übergeben wurden. Dieses Vorgehen kann man mit einem Schachbrett-Muster vergleichen, in dem zunächst alle weißen Felder parallel berechnet werden und danach alle schwarzen.

Zur Konvergenz des multiplikativen Schwarz-Verfahrens

Die Beschäftigung mit der Konvergenz iterativer Verfahren setzt einige Begriffe voraus, die im folgenden eingeführt werden.

Setzt man Gleichung (4.4.15) in Gleichung (4.4.16) ein und schreibt:

$$P_i \equiv R_i^T A_i^{-1} R_i A \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.4.17)$$

sowie

$$d = \underbrace{(RA_1^{-1}R + RA_2^{-1}R - P_2RA_1^{-1}R)}_N f \quad (4.4.18)$$

so ergibt sich:

$$\psi^{k+1} = \underbrace{((I - P_2) * (I - P_1))}_M \psi^k + \underbrace{d}_{Nf} \quad (4.4.19)$$

$$\psi^{k+1} = M\psi^k + Nf \quad (\text{erste Normalform}) \quad (4.4.20)$$

Hierbei stellt M die sogenannte Iterationsmatrix dar. I sei die Einheitsmatrix, die in der Diagonalen mit dem Wert Eins und sonst mit dem Wert Null besetzt ist. Da die Iterationsmatrix M aus dem Produkt $(I - P_2) * (I - P_1)$ gebildet wird, heißt das Verfahren **multiplikatives** Schwarz-Verfahren.

Gleichung (4.4.20) stellt die sogenannte erste Normalform eines **linearen iterativen Verfahrens** zur Lösung des linearen Gleichungssystems (4.4.13) dar. Nach (Hackbusch 1993) kann eine Iteration durch die Vorschrift

$$\psi^{k+1} := \phi(\psi^k, f) \quad m \geq 0, \text{ mit } \psi, f \text{ aus (4.4.13)} \quad (4.4.21)$$

beschrieben werden. Außerdem gilt nach Hackbusch (1993) (S.57):

1 (Definition). Ein Iterationsverfahren ϕ heißt linear, wenn $\phi(\psi, f)$ in ψ und f linear ist d.h. wenn es Matrizen M und N gibt, so daß gilt:

$$\phi(\psi, f) = M\psi + Nf \quad . \quad (4.4.22)$$

Die Matrix M heißt Iterationsmatrix der Iteration ϕ .

Ist die Iteration auch konsistent, kann man eine zweite Normalform schreiben, wenn gilt:

$$M = I - NA \quad . \quad (4.4.23)$$

Die Definition der Konsistenz einer Iteration kann in Hackbusch (1993)(S.56) nachgelesen werden. Ist die Matrix A regulär (d.h. A^{-1} existiert), so gilt auch:

$$N = (I - M)A^{-1} \quad . \quad (4.4.24)$$

Damit ergibt sich die sogenannte zweite Normalform zu:

$$\psi^{k+1} = \psi^k - N(A\psi^k - f) \quad (\text{zweite Normalform}) \quad . \quad (4.4.25)$$

Die Matrix N der zweiten Normalform wird auch als Prädiktionierungsmatrix (preconditioner) bezeichnet. Die Prädiktionierungsmatrix N kann als angenäherte Inverse der Matrix A verstanden werden. Idealerweise ist $N = A^{-1}$. Setzt man dies in Gleichung (4.4.25) ein, so stellt man fest, daß die Lösung in einer Iteration erreicht wird ($A^{-1}A = I$). Es stellt sich nun die Aufgabe, auf möglichst einfache Weise solche Prädiktionierungsmatrizen zu finden, die der Inversen von A möglichst nahekommen.

Die trivialste Möglichkeit ist, für die Prädiktionierungsmatrix die Einheitsmatrix I zu wählen (als grobe Näherung für A^{-1}). Man erhält die Grundform eines linearen iterativen Verfahrens, das Richardson-Verfahren:

$$\psi^{k+1} = \psi^k - I(A\psi^k - f) \quad \text{oder} \quad \psi^{k+1} = \psi^k - (A\psi^k - f) \quad . \quad (4.4.26)$$

Multipliziert man die zu lösende Gleichung ($A\psi^m = b$) mit der Prädiktionierungsmatrix durch und wendet das Richardson-Verfahren an, so ergibt sich wiederum die Vorschrift (4.4.25). Jede lineare Iterationsvorschrift läßt sich also als ein Richardson-Verfahren, angewandt auf ein mit einer Prädiktionierungsmatrix modifiziertes Gleichungssystem, auffassen.

Somit kann der multiplikative Schwarz-Algorithmus als Richardson-Iteration mit einem zusätzlichen "multiplikativen Schwarz-Prädiktionierer" aufgefaßt werden.

Entscheidend für die Konvergenz des Verfahrens sind die Eigenschaften der Iterationsmatrix M . Hier gilt ebenfalls nach Hackbusch (1993):

2 (Definition). *Ein lineares Iterationsverfahren mit der Iterationsmatrix M ist genau dann konvergent, wenn für den Spektralradius ρ gilt*

$$\rho(M) < 1 \quad . \quad (4.4.27)$$

$\rho(M)$ heißt die Konvergenzrate der Iteration.

Der Spektralradius ist definiert als der Absolutbetrag des betragsmäßig größten Eigenwerts der Matrix M . Viele Autoren verwenden auch den negativen Logarithmus $-\log(\rho(M))$ als Konvergenzrate.

Ein weiterer entscheidender Parameter ist die Konditionszahl κ einer Matrix. Sie ist definiert durch:

$$\kappa(M) = \rho(M)\rho(M^{-1}) \quad . \quad (4.4.28)$$

Hat die Iterationsmatrix M ein positives Spektrum mit λ_{min} und λ_{max} als kleinstem bzw. größtem Eigenwert, so gilt für die Konditionszahl oder Kondition der Matrix M :

$$\kappa(M) = \lambda_{max}/\lambda_{min} \quad . \quad (4.4.29)$$

Je größer die Konditionszahl der Iterationsmatrix M , desto schlechter wird die Konvergenz des Verfahrens.

Man findet in der Literatur häufig Abschätzungen für den größten und kleinsten Eigenwert der Iterationsmatrix M oder eine Schätzung der Eigenwerte oder Kondition des prädiktionierten Systems NA . Aus den Eigenwerten ($\lambda_{min}, \lambda_{max}$) von NA ist die Konvergenzrate der Iterationsmatrix $M = I - NA$ sofort bestimmbar, da alle Eigenwerte der Einheitsmatrix den Wert Eins annehmen:

$$\rho(M) = \max\{|1 - \lambda_{minNA}|, |1 - \lambda_{maxNA}|\} \quad . \quad (4.4.30)$$

Die Kondition der Matrix M ist damit auch bestimmt.

Man kann, mit einigen Umformungen, für den multiplikativen Schwarz-Algorithmus zeigen, daß er unter der Voraussetzung nicht-überlappender Gebiete einer blockweisen Gauss-Seidel

Iteration entspricht. Die Umformungen hierzu finden sich im Anhang (A). Damit gelten für die nicht-überlappende Variante des multiplikativen Verfahrens die bekannten Konvergenzkriterien des Gauß-Seidel-Verfahrens (Hackbusch 1993). Die Konvergenzrate verschlechtert sich mit sinkender Gitterweite im diskretisierten Gebiet.

Mit dem Einführen einer Überlappung der beiden Rechengebiete bekommt das multiplikative Schwarz-Verfahren bessere Konvergenzeigenschaften als das Block-Gauss-Seidel Verfahren ohne Überlappung.

Ist die Überlappung der beiden Rechengebiete groß genug, so kann man nachweisen, daß die Konvergenz unabhängig von der Gitterweite der Diskretisierung ist (Chan und Mathew 1994). Dieser Befund steht im Gegensatz zu den Eigenschaften der klassischen Block-Gaus-Seidel-Iteration, bei der die Konvergenz mit sinkender Gitterweite schlechter wird. (Hackbusch 1993).

Allgemein kann man sagen, daß mit steigender Anzahl der Teilgebiete, in die das ursprüngliche Rechengebiet zerlegt wird, die Konvergenz des multiplikativen Verfahrens nach Gleichung (4.4.19) schlechter wird. Die Konvergenz hängt außerdem vom Maß der Überlappung und der Gitterweite ab. Für den einfachen Fall zweier überlappender Gebiete können exakte Werte für die Konvergenz angegeben werden (Bjørstad 1988).

Die Abhängigkeit der Konvergenz von der Anzahl der Rechengebiete kann durch die Einführung einer Grobgitter-Korrektur ('coarse-mesh') beseitigt werden. Dadurch wird ein Mechanismus eingeführt, der die Information global über das Rechengebiet transportiert.

Einige Veröffentlichungen beschäftigen sich mit der Konvergenz des multiplikativen Schwarz-Verfahrens. In Chan, Hou und Lions (1991) wird die Geometrie-Abhängigkeit des Konvergenzverhaltens anhand einiger grundlegender Geometrien untersucht (z.B. T-förmige Gebiete sowie C- und L-förmige Gebiete). Weitere Hinweise zur Konvergenz des Verfahrens finden sich ebenfalls in Chan und Mathew (1994), Cai und Widlund (1993), Griebel und Oswald (1995), Kincaid und Hayes (1990) sowie Bramble, Pasciak, Wang und Xu (1991).

4.4.2 Die additive Schwarz-Methode

Die prinzipielle Vorgehensweise ist wie in Abbildung 4.2 bereits beschrieben, jedoch werden die Gebiete nicht abwechselnd hintereinander berechnet, sondern gleichzeitig. Danach werden die Randwerte getauscht und es wird wiederum auf beiden Gebieten gleichzeitig gerechnet. Aus diesem Grund ist das Interesse an dieser Variante des Schwarz-Algorithmus stark gestiegen.

Der additive Schwarz-Algorithmus in diskreter Form lautet:

$$\psi^{k+1/2} = \psi^k + R_1^T A_1^{-1} R_1 (f - A\psi^k) \quad (4.4.31)$$

$$\psi^{k+1} = \psi^{k+1/2} + R_2^T A_2^{-1} R_2 (f - A\psi^k) \quad . \quad (4.4.32)$$

Diese Version ist besser parallelisierbar als die multiplikative Variante, denn die Lösung auf den beiden Teilgebieten kann parallel durchgeführt werden.

Zu beachten ist, daß der Algorithmus in dieser Form nicht immer konvergiert. Wie in Hackbusch (1993) beschrieben, muß zusätzlich ein Relaxationsparameter oder Dämpfungsfaktor Θ eingeführt werden:

$$\psi^{k+1/2} = \psi^k + \Theta R_1^T A_1^{-1} R_1 (f - A\psi^k) \quad (4.4.33)$$

$$\psi^{k+1} = \psi^{k+1/2} + \Theta R_2^T A_2^{-1} R_2 (f - A\psi^k) \quad . \quad (4.4.34)$$

Die Iteration konvergiert für hinreichend kleines $\Theta > 0$, wobei Θ von der Anzahl der Gebiete, vom Grad der Überlappung sowie von der Form des Rechengebiets abhängen kann.

Zur Konvergenz des additiven Schwarz-Verfahrens

Der Algorithmus entspricht, unter der Voraussetzung nicht überlappender Gebiete, einer Block-Jacobi-Iteration. Die Herleitung hierfür findet sich in Anhang (B). Damit gelten für die nicht überlappende additive Schwarz-Methode die Konvergenzkriterien des Block-Jacobi-Verfahrens.

Mit Überlappung verbessern sich die Konvergenzeigenschaften. Zunächst wird wiederum die erste und zweite Normalform des Verfahrens hergeleitet. Setzt man Gleichung (4.4.31) in Gleichung (4.4.32) ein, so erhält man unter Verwendung von Gleichung (4.4.17) die erste Normalform:

$$\psi^{k+1} = \underbrace{(I - P_1 - P_2)}_{M_a} \psi^k + \underbrace{d}_{N_a f} \quad (\text{erste Normalform}) \quad (4.4.35)$$

mit

$$d = \underbrace{(R_1^T A_1^{-1} R_1 + R_2^T A_2^{-1} R_2)}_{N_a} f \quad (4.4.36)$$

Dies ist eine lineare Iterationvorschrift nach Definition 1. Formt man Gleichung (4.4.36) um, so erhält man die zweite Normalform:

$$\psi^{k+1} = \psi^k + \underbrace{(R_1^T A_1^{-1} R_1 + R_2^T A_2^{-1} R_2)}_N (f - A\psi^k) \quad (\text{zweite Normalform}) \quad . \quad (4.4.37)$$

Es handelt sich wie beim multiplikativen Verfahren um eine Richardson-Iteration mit einer Prädiktionierungsmatrix N .

Ein Vorteil dieser Variante ist, daß eine Konvergenzbeschleunigung der Iteration durch ein Verfahren konjugierter Gradienten sofort anwendbar ist, da die Iterationsmatrix M (siehe Gl.(4.4.35)) bei diesem Modellproblem (Gl.(4.4.8)) symmetrisch und positiv definit ist.

Entscheidend für die Konvergenz des Verfahrens ist die Kondition der Prädiktionierungsmatrix N . Sie wird in Dryja und Widlund (1994) bis auf eine Konstante C angegeben, die unabhängig von der Gitterweite der Diskretisierung h und des Maßes für die Größe der Teilgebiete H ist, aber abhängig von den Koeffizienten des Gleichungssystems. Der Grad der Überlappung der Rechengebiete sei β ($0 \leq \beta \leq 1$), wobei βH die Distanz der Überlappung der einzelnen Rechengebiete ist.

$$\kappa(NA) \leq CH^{-2}(1 + \beta^{-2}) \quad . \quad (4.4.38)$$

Man erkennt, daß die Kondition sinkt, je größer die Überlappung β der Teilgebiete wird, sie jedoch steigt mit kleiner werdendem H , d.h. mit steigender Zahl der Teilgebiete. Durch eine Grobgitterkorrektur ist es möglich, die Abhängigkeit von der Zahl der Teilgebiete zu eliminieren. Die Kondition wird dann als

$$\kappa(NA) \leq C(1 + \beta^{-1}) \quad (4.4.39)$$

angegeben.

4.4.3 Die additive Jacobi-Methode

Eine noch einfachere Variante ist die in Pavarino und Rame (1995) erwähnte und dort so genannte Jacobi-Methode. Diese kann man folgendermaßen beschreiben:

$$\psi^{k+1/2} = \psi^k + R_1^T D_1^{-1} R_1 (f - A\psi^k) \quad (4.4.40)$$

$$\psi^{k+1} = \psi^{k+1/2} + R_2^T D_2^{-1} R_2 (f - A\psi^k) \quad . \quad (4.4.41)$$

Hierbei stellen D_1 und D_2 die Diagonalen der Matrizen A_1 und A_2 dar. Hier wird also wie beim Jacobi-Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen die besonders leicht zu beschaffende Inverse der Diagonalen der Matrizen A_1 , A_2 als Prädiktionierungsmatrix verwendet. Es ergibt sich die Iterations-Vorschrift:

$$\psi^{k+1} = \psi^k + \underbrace{(R_1^T D_1^{-1} R_1 + R_2^T D_2^{-1} R_2)}_N (f - A\psi^k) \quad . \quad (4.4.42)$$

Die Iterationsmatrix dieser Vorschrift lautet:

$$M = (I - J_1 - J_2) \quad \text{mit } J_i = R_i^T D_i^{-1} R_i A \quad . \quad (4.4.43)$$

Es wurde in Pavarino und Rame (1995) anhand eines Beispiels gezeigt, wie sich die Kondition des vorkonditionierten Systems (NA) mit steigender Anzahl der Gebiete entwickelt. Dabei zeigte sich, daß diese Methode sehr viel schlechter konvergiert, als das additive Schwarz-Verfahren. Dies ist jedoch verständlich, da die Matrix N der additiven Jacobi-Methode die Inverse der Matrix A schlechter approximiert, als die Prädiktionierungsmatrix der additiven Schwarz-Methode. Abschließend sollte noch erwähnt werden, daß diese Methode auch multiplikativ verwendet werden kann.

4.4.4 Zusammenfassung der überlappenden Methoden

Wie in den vorigen Abschnitten gezeigt, lassen sich die verschiedenen iterativen Methoden zur Lösung des Gesamt-Gleichungssystems

$$A\psi = f \quad (4.4.44)$$

anhand ihrer Prädiktionierungsmatrix unterscheiden.

In der zweiten Normalform lauten alle Verfahren:

$$\psi^{k+1} = \psi^k + N(f - A\psi^k) \quad . \quad (4.4.45)$$

Die verschiedenen Prädiktionierungsmatrizen für den Fall zweier Teilgebiete lauten nun für:

$$P_i = R_i^T A_i^{-1} R_i A \quad J_i = R_i^T D_i^{-1} R_i A \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.4.46)$$

$$N = \begin{cases} (P_1 + P_2 - P_2 P_1) A^{-1} & \text{für multiplikativ Schwarz,} \\ (P_1 + P_2) A^{-1} & \text{für additiv Schwarz,} \\ (J_1 + J_2) A^{-1} & \text{für additiv Jacobi} \end{cases} \quad (4.4.47)$$

Die erste Normalform lautet:

$$\psi^{k+1} = M\psi^k + Nf \quad . \quad (4.4.48)$$

Die Iterationsmatrizen M der ersten Normalform lauten:

$$M = \begin{cases} ((I - P_2) \cdot (I - P_1)) & \text{für multiplikativ Schwarz,} \\ (I - P_1 - P_2) & \text{für additiv Schwarz,} \\ (I - J_1 - J_2) & \text{für additiv Jacobi} \end{cases} \quad (4.4.49)$$

Im Fall der additiven Schwarz- bzw. Jacobi-Methode sind die Iterationsmatrizen symmetrisch und positiv definit, so daß zusätzlich zur Konvergenzbeschleunigung eine Gradienten-Methode einsetzbar ist.

Die beiden additiven Verfahren lassen sich besser parallel abarbeiten als das multiplikative Verfahren.

Die Konvergenz der Verfahren wird in allen drei Fällen mit steigender Zahl der Teilgebiete schlechter, wenn nicht eine Grobgitterkorrektur eingesetzt wird, die die Information global über das Rechenggebiet transportiert.

4.5 Nicht überlappende Methoden

Die nicht überlappenden Methoden, in der Folge als Interface-Methoden bezeichnet, basieren auf einer Unterteilung des Rechengebiets in mehrere **nicht überlappende** Teilgebiete. Sie werden auch als *substructuring* oder *'tearing'* (engl. 'zerreißen') Methoden bezeichnet. Einer der ersten Ansätze hierfür stammt von Kron (1953).

Zur Berechnung der gemeinsamen Ränder ('Interfaces') der Teilgebiete wird ein Gleichungssystem ('Interface System') aufgestellt (siehe Abb. 4.3). Nach Lösung dieses Systems kann die Lösung auf den nun voneinander unabhängigen Teilgebieten mit den ermittelten Randwerten erfolgen.

Das Gleichungssystem für die Ränder wird in der Literatur unterschiedlich bezeichnet:

- Interface System
- Schur-Komplement System
- Kapazitätz- oder Einflußmatrix-System

Ein Vorteil der nicht überlappenden Methoden ist, daß Teile des Rechengebiets nicht doppelt berechnet werden müssen wie bei den überlappenden Algorithmen.

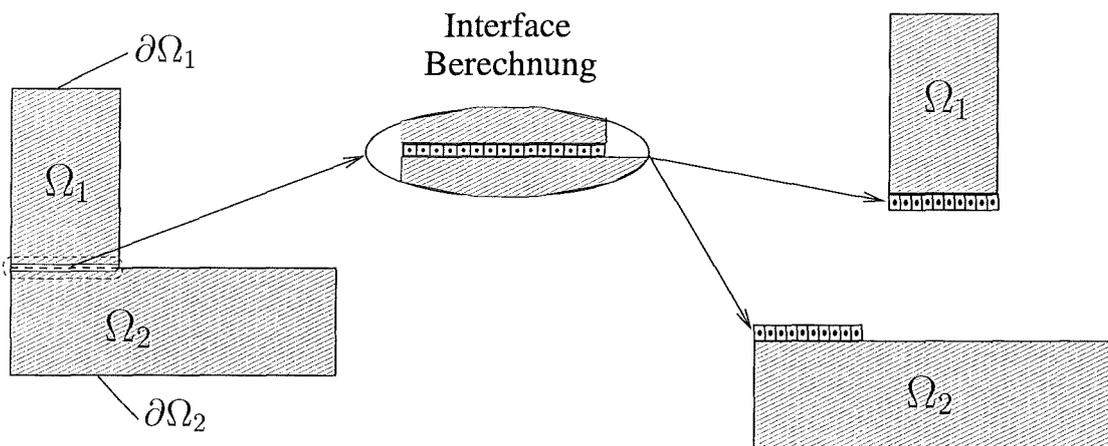


Abbildung 4.3: Nicht überlappende Gebiete.

Das einheitliche Merkmal dieser Methoden ist, daß ein iteratives Verfahren zur Lösung des Interface-Systems verwendet wird. Es wird in der Regel ein 'präkonditioniertes konjugierte Gradienten' Verfahren ('preconditioned conjugate gradient' (PCG)) verwendet. Der größte Aufwand wurde für die Konstruktion verschiedener Präkonditionierer verwendet, um die Zahl der Iterationen für das Interface-System klein zu halten. In Resasco (1990) werden die meisten Präkonditionierer aufgeführt und hinsichtlich ihrer Eigenschaften (Konvergenzraten, Konditionsverbesserung) analysiert. Besonders interessant ist die Tatsache, daß über den Präkonditionierer Überlappungsinformation analytisch eingebracht werden kann (siehe Abschnitt(4.5.1)).

Eine Methode nimmt im Bereich der Gebietszerlegung eine Sonderstellung ein. Es ist die in dieser Arbeit so bezeichnete 'Einflußmatrix-Methode' (siehe Abschnitt 4.5.2). Bei dieser Methode werden die Gebiete nicht zerlegt, sondern in ein größeres (möglichst rechteckiges)

Gebiet eingebettet, das eine leicht zu behandelnde äußere Form hat. Durch gezieltes Einbringen von Quellen (analog der Singularitäten-Methode in der Potentialtheorie) werden innere Versperrungen ‘modelliert’ (siehe Abb. 4.4).

Die Methode wurde schon sehr früh (Hockney 1968) mit dem Ziel entwickelt, sogenannte ‘Schnelle Poisson-Gleichungslöser’ auch auf Gebieten mit komplizierten Rändern einsetzen zu können, da diese nur für regelmäßige äußere Berandungen geeignet sind. Der zusätzliche Aufwand durch das vergrößerte Gebiet wird durch den Einsatz der schnellen Löser hinsichtlich der Rechenzeit mehr als kompensiert. Mit dieser Methode lassen sich sehr gut ‘kleinere’ Hindernisse oder Versperrungen behandeln.

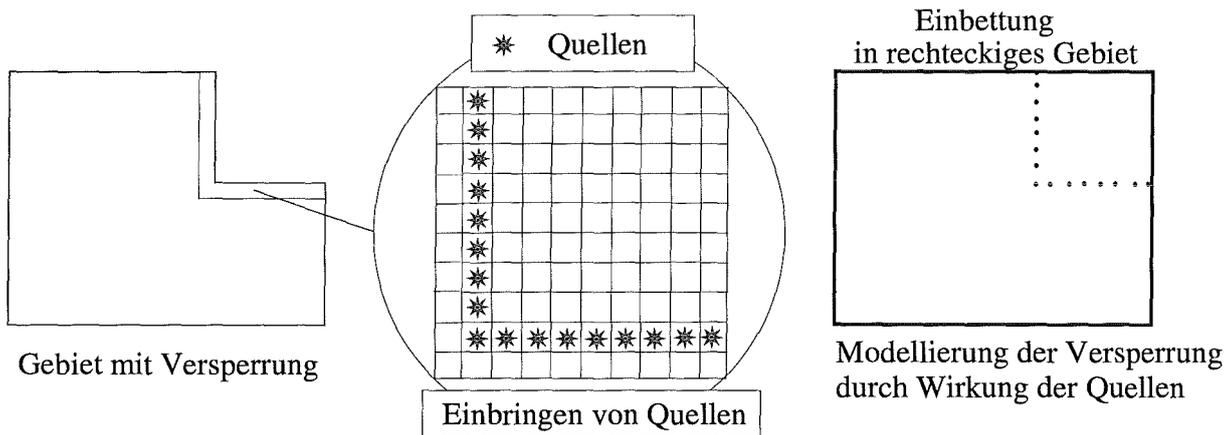


Abbildung 4.4: Prinzip der Einfluß-Matrix-Methode.

Es ist jedoch auch möglich, diese Methode zur Zerlegung von Rechengebieten zu verwenden, wobei sie dann mit der Interface-Methode identisch ist. Auch die Einflußmatrix-Methode ist unter verschiedenen Namen bekannt:

- Kapazitäts- oder Kapazitätanz-Matrix Methode ('capacitance matrix method')
- Einflußmatrix Methode
- Methode der fiktiven Gebiete ('fictitious domain method')
- Gebietseinbettung ('domain imbedding')

Man erkennt hier, daß die verwendete Nomenklatur uneinheitlich ist und sich mit den Bezeichnungen der Interface-Methoden überschneiden.

4.5.1 Die Interface-Methode

Wie in Abbildung 4.3 gezeigt, wird das Rechengebiet durch den Rand (Interface) in zwei Rechengebiete unterteilt.

Das Interface Γ wird als eigenes 'Rechengebiet' behandelt. Sind die Werte auf dem Interface bekannt, so erhält man die Lösung in den beiden Rechengebieten Ω_1 und Ω_2 sofort durch die Verwendung der Interface-Werte als Randbedingung für Ω_1 und Ω_2 . Das gesamte Rechengebiet ω setzt sich somit zusammen aus den Gebieten Ω_1, Ω_2 und dem Rand Γ .

Ausgehend von Gleichung (4.4.13) kann man das Gleichungssystem auch in einer modifizierten Blockform schreiben:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{13}^T & A_{23}^T & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} . \quad (4.5.50)$$

Hier bezeichnet A_{33} die Werte auf dem Interface. Die Blöcke A_{12} und A_{21} sind Null unter der Voraussetzung, daß der Differenzenoperator im Gebiet Ω_1 nicht auf Werte im Gebiet Ω_2 zugreift, sondern nur auf das Interface. Diese Forderung ist für einen zentralen Differenzenoperator erfüllt. Schwierigkeiten in diesem Punkt kann es geben, wenn der Differenzenoperator mehr als einen Punkt stromauf oder stromab benötigt, wie dies bei der Diskretisierung von konvektiven Termen leicht der Fall sein kann (Upwind-Verfahren).

Zur Herleitung eines Gleichungssystems für das Interface ψ_3 werden in Gleichung (4.5.50) ψ_1 und ψ_2 eliminiert. Mit

$$\psi_1 = A_{11}^{-1}(f_1 - A_{13}\psi_3) \quad (4.5.51)$$

$$\psi_2 = A_{22}^{-1}(f_2 - A_{23}\psi_3) \quad (4.5.52)$$

kann man das 'Interface-System' schreiben als

$$\underbrace{(A_{33} - A_{13}^T A_{11}^{-1} A_{13} - A_{23}^T A_{22}^{-1} A_{23})}_S \psi_3 = \underbrace{f_3 - A_{13}^T A_{11}^{-1} f_1 - A_{23}^T A_{22}^{-1} f_2}_{\tilde{f}_3} . \quad (4.5.53)$$

Die Matrix S wird als das Schurkomplement von A_{33} in A bezeichnet (Manchmal wird sie auch als Kapazitätanz-Matrix bezeichnet. (Chan und Resasco 1987a)). Das Schurkomplement ist voll besetzt und nur sehr aufwendig explizit zu berechnen. Deshalb werden direkte Methoden, die die explizite Kenntnis der Matrix S verlangen, in der Regel nicht angewendet.

Bei den iterativen Methoden ist es nicht notwendig, die Matrix S explizit zu kennen. Es wird bei jeder Iteration lediglich das Produkt von S und ψ_3 berechnet. Das Muster der Iteration ist die schon bekannte zweite Normalform (siehe Gl. (4.4.25)) mit einer noch zu bestimmenden Präkonditionierungsmatrix N :

$$\psi_3^{m+1} = \psi_3^m - N(S\psi_3^m - \tilde{f}_3) \quad m = 1, 2, 3 \dots . \quad (4.5.54)$$

Dabei müssen bei jeder Iteration zwei Matrizen, A_{11} und A_{22} der Matrix S invertiert werden. Dies kann parallel durchgeführt werden.

Die Invertierung der Matrizen A_{11} und A_{22} kann exakt erfolgen. Es kann jedoch, vor allem am Anfang der Iteration, von Vorteil sein, diese nicht exakt zu invertieren, sondern nur die ungefähren Inversen mit einem abgebrochenen iterativen Verfahren zu berechnen. In Bramble, Pasciak und Vassilev (1998) wird eine Methode vorgeschlagen, in der dies genutzt wird.

Oft werden zusätzlich konvergenzbeschleunigende Verfahren eingesetzt, um die Zahl der Iterationen zur Lösung des Systems (4.5.53) gering zu halten. Der Einsatz ist jedoch an Bedingungen für die Matrix S geknüpft. Bei der behandelten Poissongleichung (4.4.8)

ergeben sich symmetrische, positiv definite Koeffizientenmatrizen. Hiermit sind die Voraussetzungen für ein Gradienten-Verfahren gegeben (einfaches Gradienten-Verfahren oder Verfahren konjugierter Gradienten) (Mansfield 1990).

Bei der Behandlung von Konvektions-Diffusions-Gleichungen ergeben sich nicht symmetrische Koeffizientenmatrizen, bei denen einfache Gradienten-Verfahren nicht verwendet werden können. Für solche Probleme müssen andere Verfahren zur Beschleunigung der Konvergenz eingesetzt werden.

Folgende Verfahren werden in der Literatur angeführt:

- BI-CG ‘Bi-Conjugate Gradient’ (Cullum 1996)
- CGS ‘Conjugate Gradient Squared’ (Sonneveld, Wesseling und Zeeuw 1985)
- GMRES ‘Generalized Minimal Residual’ (Saad und Schultz 1986)
- BI-CGSTAB ‘Stabilisiertes Verfahren von BI-CG’ (van der Vorst 1992)
- QMR ‘Quasi Minimal Residual’ (Freund und Nachtigal 1991)

Es kann gezeigt werden, daß die Kondition der Matrix S von der Ordnung $O(h^{-1})$ ist, sie wird also mit sinkender Gitterweite h schlechter. Die Kondition von S ist besser als die der Gesamt-Matrix A , kann aber immer noch groß sein (Chan und Mathew 1994).

Ein CG-Verfahren, angewandt auf die Richardson-Iteration (4.5.54) ohne Präkonditionierung N , liefert die schlechte Konvergenzrate $\rho = 1 - O(h^{1/2})$. Es sollte also versucht werden, eine gute Präkonditionierungsmatrix N zu finden, die einfach und schnell zu berechnen ist. Ein entscheidender Vorteil der Interface-Methode ist der, daß die Information der Überlappung analytisch in den Vorkonditionierer eingebracht werden kann, ohne das überlappende Gebiet doppelt berechnen zu müssen.

Die Entwicklung von Präkonditionierern ist ein Gebiet der aktuellen Forschung, zu dem es eine Fülle von Literatur gibt. Die jüngsten Entwicklungen finden sich in Bramble et al. (1998). Zusammenfassende Darstellung findet man in Chan und Mathew (1994) sowie Bramble, Pasciak und Schatz (1986), Bramble, Pasciak und Schatz (1987), Bramble, Pasciak und Schatz (1988). In Chan und Resasco (1987a) und Resasco (1990) findet sich ebenfalls eine Analyse der Eigenschaften einiger Präkonditionierer.

Interface-Methoden haben wie die überlappenden Methoden die Eigenschaft, daß die Konvergenzeigenschaften abhängig von der äußeren Geometrie des zu zerlegenden Gebiets sind. Untersuchungen zu verschieden geformten Gebieten z.B. T- oder C-förmig finden sich in Chan et al. (1991).

4.5.2 Die Einflußmatrix-Methode

Eine der Interface-Methode sehr ähnliche Methode ist die in dieser Arbeit verwendete Einflußmatrix-Methode, wenn auch die Idee zu dieser Methode aus einem völlig anderen Bereich, der Potentialtheorie, stammt. Das Prinzip dieser Methode ist in Abbildung 4.4 gezeigt.

Nur Gleichungssysteme, die sich aus der Diskretisierung der Poisson- oder Helmholtzgleichung auf regelmäßigen Rechengebieten ergeben, können von effizienten 'schnellen elliptischen Lösern' (SEL) verarbeitet werden. Regelmäßige Gebiete können rechteckig, quaderförmig, kreisförmig oder zylinderförmig sein. Auf nicht regelmäßigen Gebieten ergibt sich ein Gleichungssystem, bei dem die Koeffizienten-Matrix nicht die notwendige regelmäßige Struktur besitzt, um von solch einem Löser bearbeitet werden zu können.

Die Idee des Einflußmatrix-Systems besteht darin, ein ähnliches Problem zu konstruieren, das dieselbe Lösung besitzt wie das ursprüngliche Problem, jedoch mit einem schnellen elliptischen Löser lösbar ist.

Nach Proskurowski und Widlund (1976) wurde die Einflußmatrix-Technik in Anlehnung an die Potentialtheorie entwickelt. Eine der ersten Formen der Einflußmatrix-Technik wurde von Hockney (1968) beschrieben, der sich bei Oskar Bunemann für die Idee bedankt. Eine detaillierte Beschreibung seiner Methode und die Implementierung in FORTRAN findet sich in Hockney (1970). Zur fast gleichen Zeit erschienen die Veröffentlichungen von George (1970) und Buzbee, Dorr, George und Golub (1974), in der die Technik relativ ausführlich beschrieben wird. Eine Zusammenfassung der bis 1976 geleisteten Arbeiten auf dem Gebiet der Lösung von Poisson-Gleichungen mit Hilfe der Einflußmatrix-Technik findet man in Proskurowski und Widlund (1976).

Diese schon alte Methode hat bis heute nichts an Attraktivität verloren, da einige heute erhältliche schnelle Poisson-Löser ebenfalls schon an die parallelen Rechner-Architekturen angepaßt sind (Chan und Fatoohi 1989, Buzbee 1973, Chan und Resasco 1987b).

Neuere Quellen sind Proskurowski und Vassilevski (1994) sowie Proskurowski und Vassilevski (1995). Arbeiten, in denen die Einflußmatrix-Technik angewandt wurde, finden sich in Schumann (1979) als auch in Schumann und Benner (1982). Es existieren bereits vorgefertigte Software-Pakete speziell für diese Methode von Proskurowski (1984).

Die Einflußmatrix-Technik soll für ein Problem auf nicht-regulärem Gebiet (siehe Abb. 4.4) beschrieben werden. Diese Technik läßt sich aber auch zur Zerlegung von Rechengebieten verwenden (siehe Abb. 4.5).

Bei der numerischen Lösung von elliptischen Differentialgleichungen ergibt sich oft ein großes System linearer Gleichungen, das zu lösen ist. Das Problem läßt sich als lineares Gleichungssystem der allgemeinen Form (siehe Gleichung (4.4.13))

$$Ax = y$$

darstellen. Das lineare Gleichungssystem, welches sich aus dem ursprünglichen Rechengebiet ergibt, wird als 'A-Problem' bezeichnet. Auf irregulären Gebieten ergibt sich ein A-Problem, das nicht die erforderliche Form besitzt, die vom schnellen elliptischen Löser verarbeitet werden kann.

Die meisten Gleichungen besitzen jedoch bei nicht-regulären A-Problemen eine "regelmäßige" Struktur, wie sie sich bei der Lösung der Helmholtzgleichung auf rechteckigem Gebiet ergibt.

Die Gesamtzahl der Gleichungen des nicht-regulären **A**-Problems sei n . Beim dreidimensionalen Problem ergibt sich für die Gesamtzahl der Gleichungen $n = \text{im} \times \text{jm} \times \text{km}$. Es sei m die Zahl der Gleichungen, die die erforderliche regelmäßige Struktur stören. Durch diese Aufteilung des Gleichungssystems kann man für die Matrix **A** und den Vektor y auch schreiben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

Für die Effizienz der Einflußmatrix-Technik ist es notwendig, daß die Zahl m der unregelmäßigen Gleichungen nicht zu groß wird. Es sollte $m \ll n$ gelten. Das **A**-Problem kann aufgrund der Struktur seiner Koeffizientenmatrix nicht mit dem schnellen elliptischen Löser gelöst werden.

Die Idee des Einflußmatrix-Systems besteht, wie bereits erwähnt, darin, ein ähnliches Problem zu "konstruieren", das dieselbe Lösung wie das **A**-Problem besitzt, jedoch mit dem schnellen elliptischen Löser lösbar ist. Das neue Problem wird als **B**-Problem bezeichnet, das sich vom **A**-Problem, nach eventueller Umsortierung, nur in den m nichtregulären Reihen unterscheidet und vom schnellen elliptischen Löser gelöst werden kann. Nach Schumann (1979) wird das **B**-Problem häufig so definiert, daß es dem Problem mit rechteckigen Begrenzungsflächen und ohne Einbauten bzw. Hindernisse im Rechengebiet entspricht. Das **B**-Problem lautet in diesem Fall:

$$\mathbf{B}\hat{x} = \hat{y} \quad . \quad (4.5.55)$$

Ohne Einschränkung kann man sagen, daß die ersten m Zeilen, nach einer Umsortierung des **B**-Problems, die modifizierten Gleichungen darstellen. Mit der Modifikation der m Zeilen der Matrix **A** können auch die ersten m Elemente des Vektors y modifiziert werden. Es ergibt sich für das **B**-Problem folgende Aufteilung:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

Die Lösung \hat{x} dieses *ersten* **B**-Problems entspricht nicht der Lösung des **A**-Problems. Es wird nun die rechte Seite \hat{y} des ersten **B**-Problems mit Hilfe der Einflußmatrix so modifiziert, daß die Lösung \hat{x} des dann entstehenden zweiten **B**-Problems identisch mit der Lösung x des **A**-Problems ist.

Zunächst wird die Lösung des ersten **B**-Problems (4.5.55) mit dem SEL berechnet. Im nächsten Schritt soll die Differenz der beiden Lösungsvektoren des **A**-Problems und des ersten **B**-Problems ermittelt werden:

$$x - \hat{x} = \sum_{i=1}^m \beta_i g_i \quad . \quad (4.5.56)$$

Die skalaren Faktoren β_i sind noch unbekannt und werden im nächsten Schritt berechnet. Die Vektoren g_i werden berechnet aus:

$$\mathbf{B}g_i = e_i \quad ; \quad i = 1 \cdots m \quad . \quad (4.5.57)$$

e_i bezeichnet die i -te Spalte der $n \times n$ Einheitsmatrix. In diesem Schritt wird, physikalisch interpretiert, an jedem Punkt am Rand der Versperrung eine Einheitsquelle eingebracht.

Die Vektoren g_i beschreiben die Wirkung dieser Einheitsquellen auf das gesamte Gebiet. Mit dieser Information soll die Rechnung so beeinflusst werden, daß die Randbedingungen am Hindernis erfüllt werden.

Die Matrix e , die zusammengesetzt ist aus den Vektoren e_i der $n \times n$ Einheitsmatrix, läßt sich aufteilen in eine obere $m \times m$ Einheitsmatrix e_1 und eine untere Nullmatrix e_2 . Für die rechte Seite der Gleichung (4.5.57) brauchen nicht zwingend die Spaltenvektoren der $n \times n$ Einheitsmatrix verwendet werden. Anstelle der oberen $m \times m$ Einheitsmatrix e_1 kann eine beliebig positiv definite $m \times m$ Matrix verwendet werden. Schumann und Benner (1982) setzen anstelle der Matrix e die Selektionsmatrix W :

$$W = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline W_1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline W_2 \\ \hline \end{array} \end{array} ; \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \dots \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline B_1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A_2 \\ \hline \end{array} \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline g \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline W_1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline W_2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

mit W_1 beliebig positiv definit. W_2 ist eine Nullmatrix. Laut Schumann und Benner (1982) wird jedoch, wie im bereits beschriebenen Fall, in der Regel die Einheitsmatrix für W_1 gewählt, so daß $W = e$ gilt. Die Matrix g entspricht in diesem Fall den ersten m Spalten der inversen Matrix von B .

Um den Vektor β zu berechnen, wird die Gleichung (4.5.56) mit der Matrix A multipliziert. Dabei ergibt sich:

$$Ax = A\hat{x} + \sum_{i=1}^m \beta_i (Ag_i) \quad (4.5.58)$$

Da \hat{x} schon mit dem ersten B -Problem (Gleichung (4.5.55)) berechnet wird, kann man das Produkt $A\hat{x}$ berechnen. Mit $Ax = y$ und $g = B^{-1}e$ gilt:

$$y = A\hat{x} + \sum_{i=1}^m \beta_i AB^{-1}e_i \quad (4.5.59)$$

Aus Gleichung (4.5.59) läßt sich der Vektor β berechnen, wie im folgenden beschrieben wird. In Gleichung (4.5.59) wird das Produkt $AB^{-1}e$ zusammengefaßt zu einer $n \times m$ Matrix, deren erste m Zeilen die $m \times m$ Einflußmatrix C darstellen und deren restliche Zeilen gleich Null sind. In Matrizenschreibweise lautet Gleichung (4.5.59) zusammengefaßt:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \end{array} \end{array} - \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline Ax \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \beta \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Hieraus ergibt sich als Bestimmungsgleichung für den Vektor β , unter Berücksichtigung der vorgenommenen Aufteilungen, ein lineares Gleichungssystem der Form :

$$\mathbf{C}\beta = y_1 - \mathbf{A}_1\hat{x} \quad . \quad (4.5.60)$$

Dieses System wird als Einflußmatrix-System bezeichnet. Gleichung (4.5.56) wird nun mit Matrix \mathbf{B} durchmultipliziert. Es ergibt sich das *zweite* \mathbf{B} -Problem:

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{B}\hat{x} + \mathbf{B} \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{g}_i \quad . \quad (4.5.61)$$

Nach Umformungen der Gleichung (4.5.56), insbesondere des Terms $\sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{g}_i$ und Gleichung (4.5.57), läßt sich nun schreiben:

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{B}\hat{x} + \mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}\beta \quad (4.5.62)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \hat{y} + \mathbf{e}\beta \quad . \quad (4.5.63)$$

Die Lösung \mathbf{x} des \mathbf{A} -Problems kann nun aus der Lösung des *zweiten* \mathbf{B} -Problems (4.5.63) mit dem schnellen elliptischen Löser erhalten werden.

Wenn die Möglichkeit besteht, den Ergebnisvektor \hat{x} des ersten \mathbf{B} -Problems und die $n \times m$ Matrix \mathbf{g} zu speichern, kann die Lösung auch aus Gleichung (4.5.56) erhalten werden. Aus Gründen der Speicherplatz- und Rechenzeiterparnis wird jedoch meistens die erstgenannte Methode nach Gleichung (4.5.63) gewählt.

Die Einflußmatrix-Methode ist ebenfalls dazu geeignet, ein aus Rechtecken gebildetes Gebiet zu zerlegen. Die anschauliche Interpretierbarkeit durch Quellbelegungen, wie bei der Einbettung, ist hier jedoch nicht mehr gegeben. Der Vorteil dieser Variante ist leicht zu sehen. Es werden keine zusätzlichen Unbekannten eingeführt. Es werden so viele Einflußmatrix-Systeme gebildet, wie durch die Zerlegung an neuen Interfaces zwischen den Gebieten entstehen. Die Einflußmatrix-Methode ist dann analog zur Interface-Methode, jedoch mit dem Unterschied, daß durch den Algorithmus eine sequentielle Abarbeitung erzwungen wird.

Das \mathbf{A} -Problem wird mit dieser Technik in mehrere kleinere Teilprobleme zerlegt, die mit dem schnellen elliptischen Löser lösbar sind. Dies kann an einem Beispiel deutlich gemacht werden (siehe Abb. 4.5). Setzt man die Gitterindizes des L-förmigen Rechengebietes in die diskretisierte Form der zweidimensionalen elliptischen Differentialgleichung ein, so erhält man ein blocktriagonales lineares Gleichungssystem (\mathbf{A} -Problem). Die Bandstruktur der Matrix \mathbf{A} wird an der Grenze zum nächsten Gebiet unterbrochen. Das \mathbf{A} -Problem, das aus der elliptischen Differentialgleichung entsteht, kann vom schnellen elliptischen Löser nicht mehr gelöst werden. Die Untermatrizen \mathbf{A}_I und \mathbf{A}_{II} besitzen jedoch die erforderliche Bandstruktur für den schnellen elliptischen Löser (siehe Abb. 4.6).

Die Matrix \mathbf{A} wird in zwei Teilmatrizen \mathbf{A}_I und \mathbf{A}_{II} zerlegt. Es werden nun die Gleichungen der oberen Hälfte der Matrix \mathbf{A} modifiziert, die auf die noch unbekanntten Werte im zweiten Gebiet zugreifen. Die Werte in der Matrix \mathbf{J} werden zu Null gesetzt.

Das \mathbf{A} -Problem wird somit ersetzt durch ein \mathbf{B} -Problem. Die Koeffizientenmatrizen lauten:

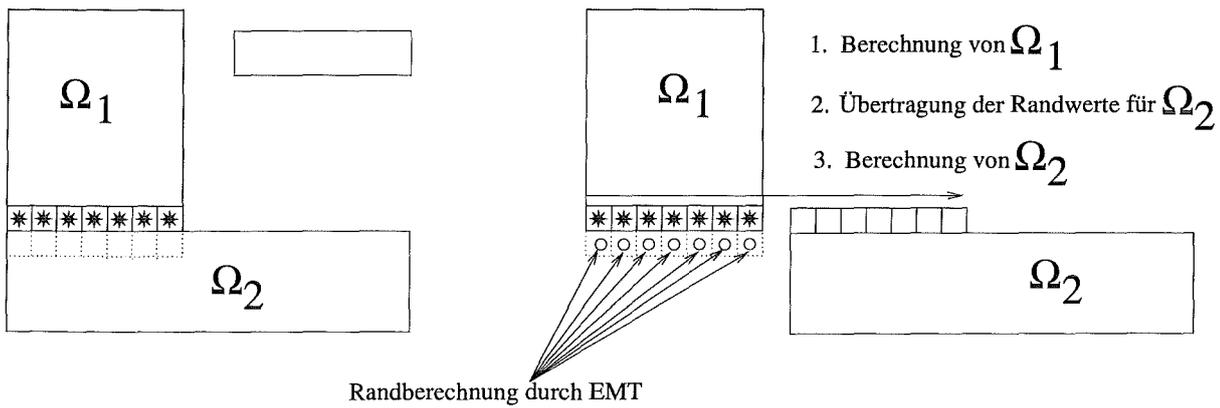


Abbildung 4.5: Einflußmatrix-Methode; Zerlegung von Rechengebieten.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{A}_I & 0 \\ \hline \hline \mathbf{J}^T & \hline \hline 0 & \mathbf{A}_{II} \\ \hline \end{array} ; \quad \mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{A}_I & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{A}_{II} \\ \hline \end{array}$$

Abbildung 4.6: Struktur der Koeffizientenmatrix des A- und B-Problems.

Der schraffierte Bereich in der Matrix \mathbf{A} bezeichnet die Gleichungen, die modifiziert worden sind und als \mathbf{A}_{mod} bezeichnet werden. Die Zahl der modifizierten Gleichungen sei m . Es sollte, wie bereits erwähnt, $m \ll n$ gelten. Das erste \mathbf{B} -Problem lautet dann:

$$\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y} \quad . \quad (4.5.64)$$

Der Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ ist genauso aufgeteilt wie der Vektor \mathbf{x} des \mathbf{A} -Problems. Die Lösung dieses \mathbf{B} -Problems kann in zwei Teilschritten erlangt werden. Zuerst löst man mit dem schnellen elliptischen Löser den oberen Teil des \mathbf{B} -Problems:

$$\mathbf{A}_I \hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{y}^{(1)} \quad . \quad (4.5.65)$$

Nach diesem Schritt löst man den unteren Teil des \mathbf{B} -Problems ebenfalls mit dem schnellen elliptischen Löser:

$$\mathbf{A}_{II} \hat{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{y}^{(2)} - \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{x}}_{r_{mod}}^{(1)} \quad . \quad (4.5.66)$$

Den Untervektor $\hat{\mathbf{x}}_{r_{mod}}^{(1)}$ erhält man aus dem Lösungsvektor $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}$ aus Gleichung (4.5.65), der zuvor berechnet wurde. Er enthält die Lösungen der modifizierten Gleichungen. Die Matrix \mathbf{J}^T hat so viele Zeilen wie die Matrix \mathbf{A}_{II} . Sie stellt eine Selektionsmatrix dar und hat folgende Gestalt:

$$\mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^T \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die $m \times m$ Einflußmatrix lautet nun:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}_{mod} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e} \quad .$$

\mathbf{A}_{mod} enthält die m modifizierte Zeilen der Matrix \mathbf{A} . Die $n \times m$ Matrix \mathbf{e} enthält jene m Spalten der $n \times n$ Einheitsmatrix, die den Zeilennummern der modifizierten Gleichungen entsprechen.

$$\mathbf{e} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \mathbf{I} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Die Spaltenvektoren \mathbf{b}_i der inversen Matrix \mathbf{B}^{-1} erhält man ebenfalls durch Aufteilung der Berechnung in zwei Teilschritte. Die Gleichung

$$\mathbf{B} \mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i \quad ; \quad i = 1 \cdots n \quad (4.5.67)$$

wird ersetzt durch:

$$\mathbf{A}_I \mathbf{b}_i^{(1)} = \mathbf{e}_i^{(1)} \quad (4.5.68)$$

$$\mathbf{A}_{II} \mathbf{b}_i^{(2)} = \mathbf{e}_i^{(2)} - \mathbf{J}^T \mathbf{b}_{r_{mod}}^{(1)} \quad . \quad (4.5.69)$$

und mit dem schnellen elliptischen Löser gelöst. Der Vektor β , der die Randbedingung für das erste Teilgebiet darstellt (siehe Abb. 4.5) wird erhalten aus dem Einflußmatrix-System:

$$\mathbf{C} \beta = \mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{A}_{mod} \hat{\mathbf{x}} \quad . \quad (4.5.70)$$

Nach diesen Vorberechnungen wird das zweite modifizierte \mathbf{B} -Problem in zwei Schritten mit dem schnellen elliptischen Löser gelöst:

$$\mathbf{A}_I \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{y}^{(1)} + \mathbf{e} \beta \quad (4.5.71)$$

$$\mathbf{A}_{II} \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{y}^{(2)} - \mathbf{J}^T \mathbf{x}_{r_{mod}}^{(1)} \quad . \quad (4.5.72)$$

Die Lösung dieses Systems entspricht der Lösung des \mathbf{A} -Problems. Man erkennt, daß in Gleichung (4.5.71) das erste Teilproblem mit dem aus dem Einflußmatrix-System (4.5.70) bekannten Rand ($\mathbf{e} \beta$) berechnet wird. Bei mehr als zwei Teilgebieten wird diese Technik analog angewendet.

Durch geschickte Trennung der beiden Rechengebiete kann man erreichen, daß der berechnete Rand β für beide Teilgebiete verwendbar ist und die beiden Gebiete nicht mehr sequentiell abgearbeitet werden müssen. Das Verfahren entspricht dann der Interface-Methode.

4.6 Zusammenfassung Gebietszerlegungsmethoden

Es läßt sich zeigen, daß überlappende und nicht überlappende Methoden unter bestimmten Umständen äquivalente Verfahren sind und trotz unterschiedlicher Formulierungen die selben Iterationen erzeugen. Dies wird in Bjørstadt und Widlund (1989) sowie Chan und Goovaerts (1992) nachgewiesen. Die Frage stellt sich, wo welche Methode eingesetzt werden sollte. Diese Entscheidung ist in der Praxis häufig schwer zu treffen, da jede Methode eigene Vor- und Nachteile besitzt.

Die überlappenden Methoden sind einfacher zu verstehen und zu programmieren. Ein Nachteil dieser Verfahren ist die doppelte Berechnung im überlappenden Gebiet.

Für Gebiete, die aus Rechtecken zusammengesetzt sind, wird in Chan und Goovaerts (1992) gezeigt, daß die Schur-Komplement-Methode mit einem Prädiktionierer effizienter ist als ein überlappendes Verfahren, da die Information der Überlappung in den Prädiktionierer eingebracht werden kann.

Bei kleinen Hindernissen oder bei Gebieten mit regelmäßigen äußeren Berandungen kann es günstiger sein, eine Methode wie die Einflußmatrix-Technik zu wählen, anstatt das Gebiet in viele kleine Gebiete zu zerlegen.

Ein weiterer Gesichtspunkt ist die parallele Implementierung der beschriebenen Algorithmen auf einem Parallelrechner. Die parallele Implementierung bringt viele neue Gesichtspunkte ein, die für oder gegen einen bestimmten Algorithmus ausschlaggebend sein können und an dieser Stelle nur in Kernpunkten erwähnt wird.

Um Parallelrechner effizient nutzen zu können, sollte das Konzept der Lokalität der Daten eingehalten werden, da es weit mehr Zeit kostet, Daten von einem Prozessor zum anderen zu transportieren (Kommunikation), als eine arithmetische Operation auf demselben Prozessor durchzuführen. Das Verhältnis von Kommunikations- und Rechenzeit auf einem Prozessor wird oft zur Beurteilung der parallelen Implementierung verwendet ('Performance'). Je mehr Kommunikation notwendig ist, umso mehr 'Arbeit' muß auf den einzelnen Prozessoren durchgeführt werden, um eine hohe Effizienz zu erzielen. Die Entscheidung für einen bestimmten Gebietszerlegungs-Algorithmus kann also auch durch den entstehenden Kommunikationsaufwand motiviert sein. Dies muß jedoch für jeden Einzelfall beim Entwurf eines parallelen Algorithmus erneut geprüft werden. Weiterführende Literatur zum Entwurf paralleler Algorithmen findet sich in Hafermann (1995) und Smith et al. (1996).

Kapitel 5

Physikalische Phänomene

5.1 Die hydrodynamische Zylinderumströmung

Die hydrodynamische Nachlaufströmung hinter stumpfen Körpern ist seit langem ein Gebiet intensiver Forschungen. Die Nachlaufströmung hinter dem Kreiszyylinder (siehe Abb. 5.1), bei der in einem bestimmten Reynoldszahlenbereich die Kármánsche Wirbelstraße auftritt, ist eines der bekanntesten Beispiele, wie die zahlreichen Veröffentlichungen zu diesem Thema zeigen.

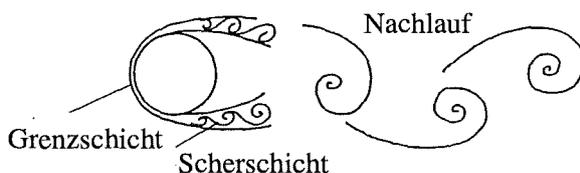


Abbildung 5.1: Bereiche der Zylinderumströmung.

In der neueren Forschung konnte mit Hilfe der Störungsrechnung viel zum physikalischen Verständnis dieser Strömungsform beigetragen werden. Bei der Störungsrechnung wird einer bekannten Grundströmung eine Störung aufgeprägt. Untersucht man das zeitliche und räumliche Verhalten des so erhaltenen Stromfeldes, können physikalische Aussagen zur Stabilität des Stromfeldes gemacht werden.

Mit Hilfe der Wellenpaketmethode von Oertel und Delfs (1995) ist es möglich, den betrachteten Strömungsbereich in verschiedene Bereiche zu unterteilen, die sich gegenüber lokal eingebrachten Störungen unterschiedlich verhalten. Man unterscheidet zwischen einem absolut sensitiven Bereich und einem konvektiv sensitiven Bereich (siehe Abb. 5.2). Hierbei wird der absolut sensitive Bereich als der reibungsbehaftete Strömungsbereich definiert, in dem lokal eingebrachte Störungen zeitlich und räumlich angefacht werden. Mit fortschreitender Zeit wird der gesamte absolut sensitive Strömungsbereich beeinflusst. Lokale Störungen, die im konvektiv sensitiven Gebiet eingebracht werden, werden stromab transportiert und können den Ort der Störung nicht mehr beeinflussen. Die Ort-Zeit-Diagramme 5.2b und 5.2c zeigen die Impulsantwort auf einen am Ort $x = 0$ zur Zeit $t = 0$ eingebrachten

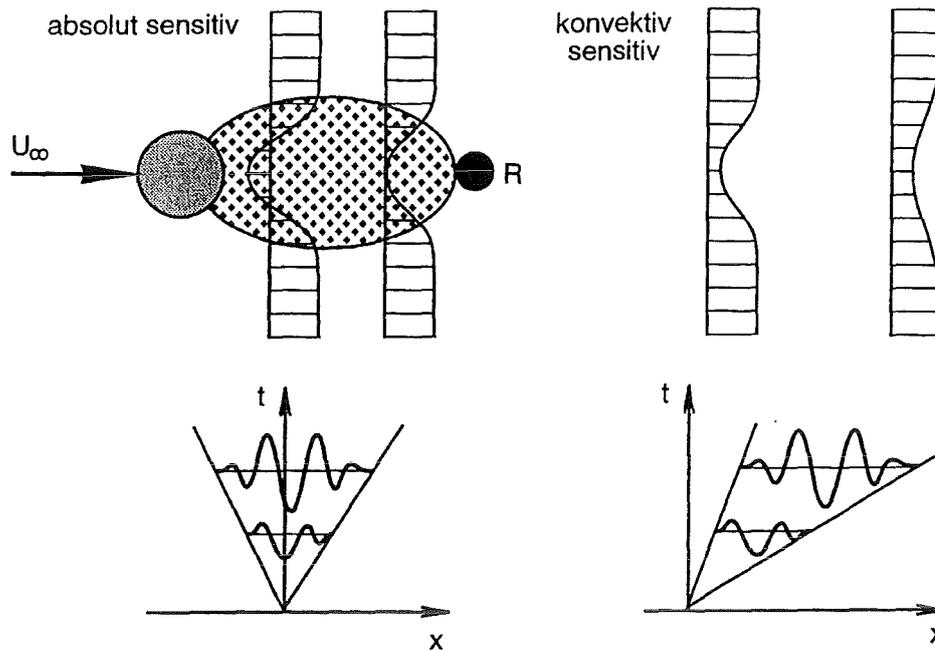


Abbildung 5.2: Strömungsbereiche der Nachlaufströmung nach Oertel (1995).

Impuls im absolut sensitiven Bereich und im konvektiv sensitiven Bereich. Der Resonanzpunkt R ist der erste Punkt, in dem eine Störung eine Wirkung auf die Strömung um den Zylinder ausübt. Der Wechsel von einem absolut sensitiven zu einem konvektiv sensitiven Strömungsgebiet erlaubt eine Rückkopplung von zeitlich wachsenden Störungen im absolut sensitiven Gebiet. Bereits Koch (1985) weist darauf hin, daß die Kármánsche Wirbelstraße als Resonanzphänomen im absolut sensitiven Bereich des Zylindernachlaufs verstanden werden kann.

Die Kenntnis der absolut sensitiven Gebiete in Strömungsanordnungen macht eine gezielte Strömungsbeeinflussung zur Vermeidung dieser Gebiete möglich. Es kann durch gezieltes Einbringen eines kleinen Störzylinders das Auftreten eines absolut sensitiven Gebiets im Nachlauf des Kreiszylinders verhindert werden (Oertel 1990). Damit wird die Entstehung einer Kármánschen Wirbelstraße unterdrückt. Es sind jedoch auch andere passive Methoden, wie zum Beispiel Platten im Nachlauf des Zylinders ('splitter plates') (Roshko 1954) oder das Ausblasen am Zylinder ('base bleed') (Beheim, Klamm und Yeaser 1962) möglich. Die benötigte Länge der 'splitter plates' gibt eine qualitative Information über die Länge des absolut sensitiven Bereichs.

Sehr viele Untersuchungen zu Nachlaufphänomenen wurden an Kreiszylindern durchgeführt. Genauso praxisrelevant, aber weit weniger oft untersucht, ist die Strömung hinter quadratischen oder rechteckigen Zylindern. Hier tritt ebenfalls die Kármánsche Wirbelstraße im Nachlauf auf, jedoch bildet sich am Hindernis durch die scharfen Kanten ein anderes Strömungsbild, bei dem die Ablösepunkte an der vorderen oder hinteren Kante des Zylinders fixiert sind.

In der Regel werden zweidimensionale, d.h. in einer Richtung unendlich lang ausgedehnte Körper behandelt (siehe Abb. 5.3). Die Strömungszustände im Nachlauf des Zylinders

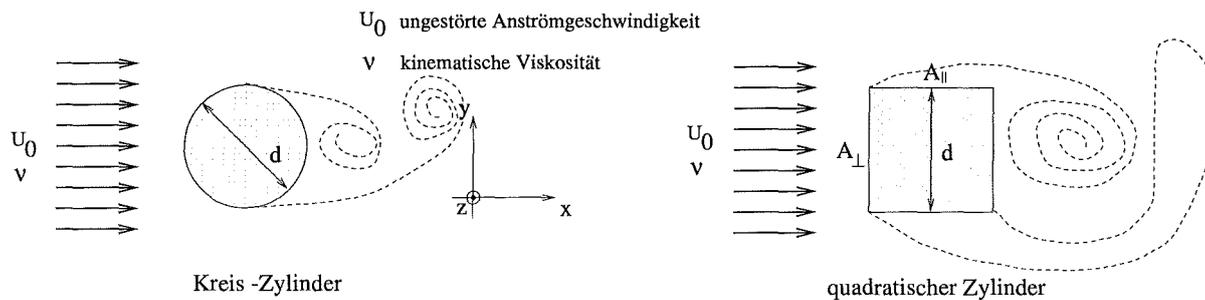


Abbildung 5.3: Geometrie der Zylinderumströmung.

können anhand der vorliegenden Reynoldszahl

$$Re = \frac{U_0 d}{\nu} \quad \text{Reynoldszahl} \quad (5.1.1)$$

klassifiziert werden.

Von Interesse bei der Beschreibung der Wirbelstraße ist die Frequenz, mit der sich die Wirbel vom Zylinder lösen sowie die auf den Zylinder wirkenden Kräfte. Die Strouhalzahl kennzeichnet die dimensionslose charakteristische Schwingungsdauer einer periodischen instationären Strömung. Sie ist definiert als:

$$St = \frac{fd}{U_0} \quad \text{Strouhalzahl} \quad (5.1.2)$$

Durch die periodisch ablösenden Wirbel werden zeitabhängige Auf- und Abtriebskräfte (engl. 'lift', Index L) sowie Widerstandkräfte (engl. 'drag', Index D) erzeugt, die auf den Zylinder wirken. Die Auf- und Abtriebskräfte wirken senkrecht zur Strömungsrichtung. Sie treten nur bei der instationären Wirbelablösung auf. Die Widerstandskräfte wirken parallel zur Hauptströmung und sind bei reibungsbehafteten Strömungen immer vorhanden.

Der dimensionslose Auftriebsbeiwert c_L besteht aus zwei Komponenten, einem Druck(c_{LP})- und einem Reibungsanteil(c_{LF}). Diese werden durch Integration der Drücke und Wand Schubspannungen entlang der Zylinderwand ermittelt und mit dem dynamischen Druck der Anströmung normiert:

$$c_L = c_{LP} + c_{LF}, \quad \text{mit} \quad c_{LP} = \frac{\int p dA_{\parallel}}{\rho/2U_0^2 A_{\perp}}, \quad c_{LF} = \frac{\int \tau dA_{\perp}}{\rho/2U_0^2 A_{\perp}} \quad (5.1.3)$$

Für den dimensionslosen Widerstandsbeiwert(c_D) gilt

$$c_D = c_{DP} + c_{DF}, \quad \text{mit} \quad c_{DP} = \frac{\int p dA_{\perp}}{\rho/2U_0^2 A_{\perp}}, \quad c_{DF} = \frac{\int \tau dA_{\parallel}}{\rho/2U_0^2 A_{\perp}} \quad (5.1.4)$$

Hierbei gilt bei einem Newtonschen Fluid für die Schubspannung

$$\tau = \nu \rho \frac{d\vec{u}}{d\vec{n}} \quad (5.1.5)$$

Für die Ermittlung der charakteristischen Frequenz im Experiment gibt es mehrere Möglichkeiten. Oft wird eine Frequenzanalyse von punktwisen Geschwindigkeitsmessungen im Nachlauf durchgeführt. Man kann aber auch das Signal des Auftriebsbeiwerts heranziehen. Verwendet man den Widerstandsbeiwert, so ist zu beachten, daß er mit der doppelten Frequenz des Auftriebs- oder Geschwindigkeitssignals oszilliert.

5.1.1 Der Kreiszyylinder

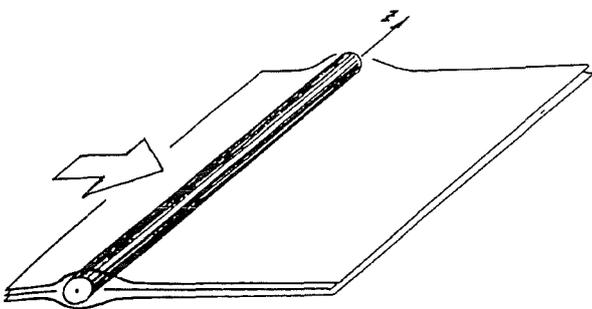
Die ersten umfassenden Messungen für Auftriebs- und Widerstandkräfte sowie die Strouhalzahl wurden für Kreiszyylinder von Roshko (1955) durchgeführt. Diese und einige frühere Messungen sind in dem Bericht von Lienhard (1966) zusammengefaßt. Eine Auflistung von neueren Messungen findet sich in Cantwell und Coles (1983).

Schon sehr früh wurde in den Experimenten erkannt, daß sehr lange Zylinder ($H/d \gg 1$) sowie spezielle Maßnahmen an den Zylinderenden notwendig sind, um den Einfluß der umströmten Zylinderenden auf das gesamte Strömungsfeld kleinzuhalten.

Zum Einfluß der Zylinderenden auf die Strouhalzahl und die Ablöswinkel der Wirbel wurden von König, Noack und Eckelmann (1992) ausführliche Untersuchungen durchgeführt. Wie auch Williamson (1989) in Experimenten bestätigt, wird die schräge Wirbelablösung als der am häufigsten auftretende Standardfall gefunden. Eine parallele Wirbelablösung kann nur durch spezielle Maßnahmen an den Zylinderenden erreicht werden wie zum Beispiel Endplatten (Williamson 1989), Kontrollzylinder (Hammache und Gharib 1991) oder spezielle Endzylinder (Eisenlohr und Eckelmann 1989). Die schrägen Ablösemoden sind in der Regel mit kleineren Strouhalzahlen verbunden als die parallelen Ablösemoden.

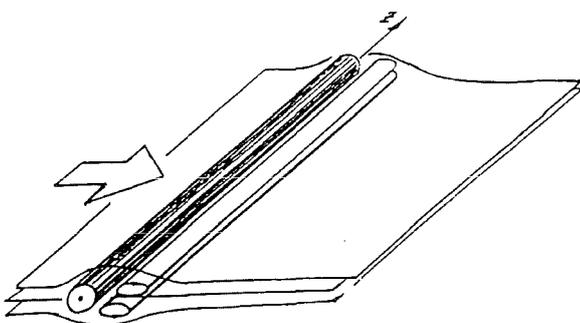
Es wurde ebenfalls erkannt, daß die Strömung in einem Bereich von $Re=160-300$ in einen dreidimensionalen Zustand übergeht. Dieser Bereich wird als Transitionsbereich bezeichnet (siehe Abb. 5.4-5.7). Die numerischen und experimentellen Untersuchungen der letzten Jahre konzentrieren sich auf diesen Bereich, siehe Williamson (1996a), Ohle (1997), König und Eckelmann (1993).

Anhand der folgenden phänomenologischen Darstellungen können die verschiedenen Strömungszustände unterschieden werden (Abbildungen 5.4 bis 5.7 aus Ohle (1997)):



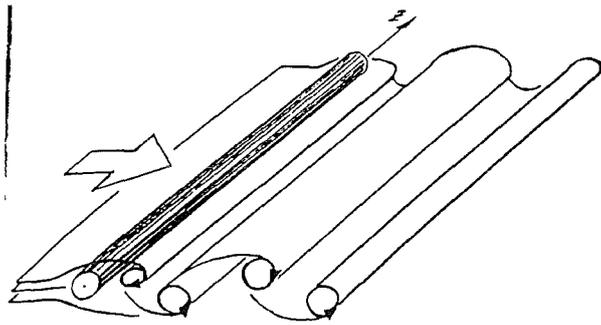
Umströmung des Zylinders ohne Ablösung (stationär).

Abbildung 5.4: Umströmung bei $Re < 4$



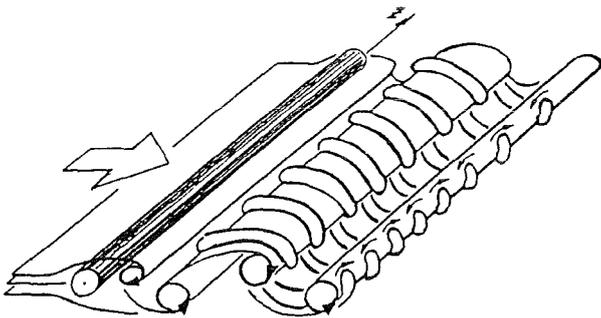
Bildung von Föppl-Wirbeln

Abbildung 5.5: $4 \lesssim Re \lesssim 45$



Kármánsche Wirbelstraße
laminarer Bereich der Wirbelstraße

Abbildung 5.6: $45 \lesssim Re \lesssim 160$



Kármánsche Wirbelstraße
Transitionsbereich zur turbulenten Wirbelstraße

Abbildung 5.7: $160 \lesssim Re \lesssim 300$

Bereich $0 \lesssim Re \lesssim 4$ Abbildung 5.4

Stationäre Umströmung des Zylinders ohne Ablösung.

Bereich $4 \lesssim Re \lesssim 45$ Abbildung 5.5

Es bildet sich an der Rückseite des Zylinders ein symmetrisches Wirbelpaar (Föppl-Wirbel). Die Strömung ist stationär.

Bereich $45 \lesssim Re \lesssim 160$ Abbildung 5.6

Oberhalb einer kritischen Reynoldszahl $Re \approx 45$ setzt eine periodische Wirbelablösung ein. Es handelt sich um eine Hopf-Verzweigung. Die abgehenden Wirbel sind zweidimensional.

Bereich $160 \lesssim Re \lesssim 300$ Abbildung 5.7

Im Übergangsbereich zur turbulenten Wirbelstraße treten dreidimensionale Strömungsstrukturen in Spannweitenrichtung auf, sogenannte Rippen-Wirbel ('rib-vortices').

Bereich $300 \lesssim Re \lesssim 1000$

In diesem Bereich wird die Wirbelstraße turbulent. Es zeigt sich eine regelmäßige Wirbelablösung, die jedoch durch turbulente Schwankungen überlagert ist. Die dreidimensionalen Strukturen zeigen eine zunehmende Unordnung.

Bereich $1000 \lesssim Re \lesssim 200 \cdot 10^3$

In diesem Bereich findet die Transition zu einer turbulenten Scherschicht statt. Die am Körper ablösende Grenzschicht wird instabil. Kennzeichnend ist der Anstieg des Widerstandsbeiwerts. Es findet eine regelmäßige Wirbelablösung mit überlagerten turbulenten Schwankungen statt.

Bereich $Re > 200 \cdot 10^3$

Im sogenannten superkritischen Bereich liegt eine turbulente Grenzschicht am Zylinder vor. Da die turbulente Grenzschicht der Körperkontour länger folgen kann als die laminare,

sinkt der Widerstandsbeiwert stark ab. Bei weiterer Erhöhung steigt der Widerstandsbeiwert wieder an, da auch die turbulente Grenzschicht ablöst. Schließlich wird eine Sättigung des Widerstandsbeiwerts erreicht, wenn die Grenzschichten bereits in der Nähe des vorderen Staupunkts des Kreiszyinders ablösen. Bereits Roshko (1961) konnte zeigen, daß auch bei diesen hohen Reynoldszahlen noch eine regelmäßige Wirbelablösung sichtbar ist.

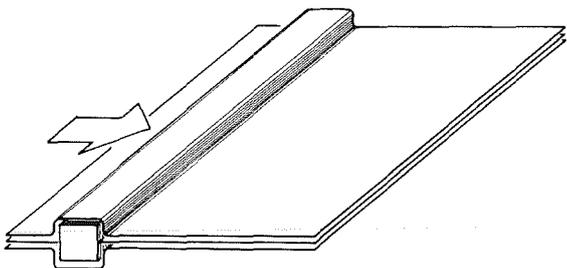
5.1.2 Der quadratische Zylinder

Bei der Umströmung des quadratischen Zylinders treten ähnliche Bereiche der Wirbelablösung auf. Während jedoch beim Kreiszyinder der Umschlag zur turbulenten Grenzschichtströmung starken Einfluß auf den Widerstandsbeiwert sowie das Strömungsmuster hat, tritt beim quadratischen Zylinder solch ein Phänomen nicht auf, da durch die scharfen Kanten der Ablösepunkt der Strömung entweder an der hinteren oder vorderen Kante fixiert ist (Franke 1991). Zur Umströmung eines quadratischen Zylinders gibt es weit weniger Literatur, obwohl auch hier das Interesse vor allem im Bereich der Bauwerksumströmung bei hohen Reynoldszahlen ($10^3 - 10^5$) sehr groß ist.

Für Reynoldszahlen $Re \leq 200$ existieren nur wenige veröffentlichte experimentelle Daten. Experimentelle Arbeiten stammen von Vickery (1966), Davis und Moore (1982), Okajima (1982). In Kniseley (1990) werden die bis 1990 veröffentlichten experimentellen Daten des gesamten Reynoldszahlenbereichs zusammengefaßt. Für den Bereich kleinerer Reynoldszahlen ($50 \leq Re \leq 1000$) wird in Sohankar, Norberg und Davidson (1997) sowie Sohankar, Norberg und Davidson (1998) das bis dahin gesammelte numerische und experimentelle Material zusammengefaßt.

Sehr viele experimentelle Daten sowie numerischen Ergebnisse findet man im turbulenten Bereich $Re \approx 22 \cdot 10^3$, der oft als Testfall für die Turbulenzmodellierung verwendet wird. Die experimentellen und numerischen Arbeiten im turbulenten Bereich sind in Bosch (1995) zusammengefaßt.

Anhand der phänomenologischen Bilder können beim quadratischen Zylinder die folgenden Zustände unterschieden werden. Es werden nur die Zustände bis $Re = 300$ aufgezählt.



Umströmung des Zylinders ohne Ablösung (stationär).

Abbildung 5.8: Umströmung bei $Re \ll 1$

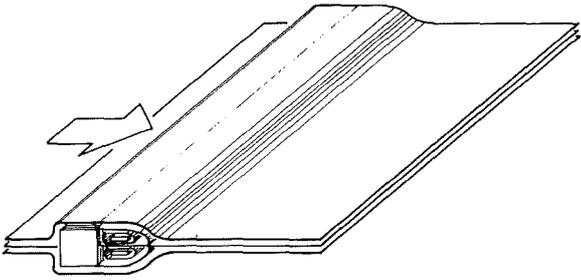


Abbildung 5.9: $1 < Re \lesssim 50$

Föppl-Wirbel:

Es bildet sich an der Rückseite des Zylinders ein symmetrisches Wirbelpaar. Die Strömung ist stationär.

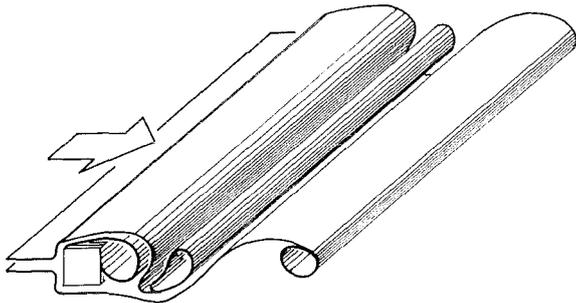


Abbildung 5.10: $50 \lesssim Re \lesssim 160$

Kármánsche Wirbelstraße:

Laminarer Bereich der Wirbelstraße

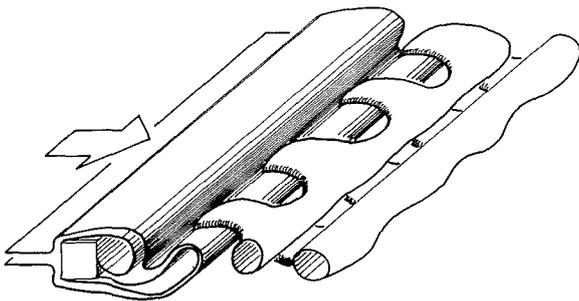


Abbildung 5.11: $160 \lesssim Re \lesssim 300$

Kármánsche Wirbelstraße:

Transitionsbereich der Wirbelstraße

Bereich $0 \lesssim Re \lesssim 1$ Abbildung 5.8

Stationäre Umströmung des Zylinders ohne Ablösung.

Bereich $1 < Re \lesssim 50$ Abbildung 5.9

Es bildet sich an der Rückseite des Zylinders ein symmetrisches Wirbelpaar, die sogenannten Föppl-Wirbel. Die Strömung ist stationär.

Bereich $50 \lesssim Re \lesssim 160$ Abbildung 5.10

Oberhalb einer kritischen Reynoldszahl $Re \approx 50$ setzt eine periodische Wirbelablösung ein. Die abgehenden Wirbel sind zweidimensional in Zylinderrichtung. Bei dem Übergang bei $Re = 50$ handelt es sich um eine Hopf-Verzweigung. Die Strömungsablösung findet bis $Re \approx 100$ vorwiegend an den hinteren Kanten statt. Nach einem Übergangsbereich findet ab $Re \approx 150$ die Strömungsablösung vorwiegend an der Vorderkante statt.

Bereich $160 \lesssim Re \lesssim 300$ Abbildung 5.11

Im Übergangsbereich zur turbulenten Wirbelstraße treten dreidimensionale Strömungsstrukturen in Spannweitenrichtung auf. Über den Transitionsbereich zur Turbulenz beim

quadratischen Zylinder ist kaum etwas bekannt. Im allgemeinen wird angenommen, daß er ähnlich verläuft wie beim Kreiszyylinder (Sohankar (1998)). Jedoch wird vermutet, daß die entstehenden Rippen-Wirbel andere Längenskalen besitzen und außerdem zusätzliche Instabilitäts-Moden entstehen können (Robichaux, Balachandar und Vanka 1996). Eine der neuesten Untersuchungen von Sohankar et al. (1997) gibt den Transitionsbereich nach eigenen Experimenten bei $Re \approx 150$ an. Es ist für diesen Bereich nur eine dreidimensionale numerische Simulation von Sohankar (1998) bekannt, in der dreidimensionale Strömungsstrukturen wie beim Kreiszyylinder erkannt werden. Daher war ein Ziel der vorliegenden Arbeit, die dreidimensionalen Strukturen hinter quadratischen Zylindern mit Hilfe einer dreidimensionalen numerischen Simulation zu erfassen.

Eine größere Zahl von Untersuchungen liegt erst wieder im turbulenten Bereich bei $Re \approx 22000$ vor.

5.2 Magneto hydrodynamische Kanalströmungen

Wie bereits in Abschnitt 2.1 erwähnt, veröffentlichte Hartmann im Jahr 1937 seine oft zitierte theoretische Arbeit über die voll eingelaufene, laminare, eindimensionale Strömung von Quecksilber in einem isolierten Plattenkanal unter dem Einfluß eines konstanten Magnetfeldes. Diese ersten analytischen Lösungen der Grundgleichungen der MHD konnte Hartmann zusammen mit Lazarus ebenfalls 1937 experimentell bestätigen. Es wurde mit diesen Experimenten zugleich gezeigt, daß turbulente Strömungsformen durch starke Magnetfelder unterdrückt werden können. Seither wird diese Strömung als Hartmann-Strömung bezeichnet, deren Grenzschichten als Hartmann-Schichten sowie der bestimmende dimensionslose Parameter als Hartmann-Zahl.

Die analytische Lösung von Hartmann konnte von Chang und Lundgren (1961) für einen Kanal mit dünnen, elektrisch leitenden Platten erweitert werden. Anhand dieser Lösungen konnten die grundlegenden Eigenschaften von MHD-Strömungen gezeigt werden. Für starke Magnetfelder, bzw. große Hartmann-Zahlen gilt:

1. Das Geschwindigkeitsprofil ist im größten Teil des Querschnitts flach, $v = const.$ Es entstehen hier keine Reibungsverluste. Die elektrodynamischen Kräfte stehen im Gleichgewicht mit den Druckkräften.
2. Die Geschwindigkeit fällt in einer sehr dünnen Schicht, der Hartmann-Schicht, auf den Wert Null an der Wand ab. Nur in dieser dünnen Schicht entstehen Reibungsverluste, die im Gleichgewicht zu den in Strömungsrichtung wirkenden Lorentz-Kräften stehen.
3. Der Druckverlust ist bei gegebenem Volumenstrom allein abhängig von der Hartmann-Zahl und der Wandleitfähigkeit.

Diese sogenannten eindimensionalen Lösungen stellen die einzigen bekannten geschlossenen, analytischen Lösungen der Grundgleichungen der MHD dar.

Im Rahmen der Forschungen zur Entwicklung eines selbstgekühlten Flüssigmetallblankets für Fusionsreaktoren waren MHD-Strömungen in Rechteckrohren im Mittelpunkt sehr vieler experimenteller, analytischer und numerischer Untersuchungen. Neben der Hartmann-Schicht sind bei diesen zweidimensionalen Strömungen die Grenzschichten an den magnet-

feldparallelen Seitenwänden, die sogenannten Seitenschichten, zu behandeln. Die Seitenschichten sind für große Hartmann-Zahlen mit $\delta \sim 1/\sqrt{M}$ deutlich dicker als die Hartmann-Schichten ($\delta \sim 1/M$).

Exakte Lösungen für eingelaufene MHD-Strömungen in Rechteckrohren mit zwei magnetfeldparallelen Wänden (Seitenwänden) können nur für bestimmte Kombinationen der Wandleitparameter c von Hartmann (c_H)- und Seitenwand (c_S) bestimmt werden. Chang und Lundgren (1961) finden eine Lösung für den Grenzfall von perfekt leitenden Wänden ($c_H, c_S \rightarrow \infty$). Hunt (1965) liefert eine Lösung für $c_H \rightarrow \infty; c_S \gg 1/M$, sowie $c_H \gg 1/M; c_S = 0$ in Form von unendlichen Reihen.

Viele Beiträge beschäftigen sich mit asymptotischen Lösungen für große Hartmann-Zahlen (Williams 1963, Hunt und Stewartson 1965, Walker 1981). In Temperley (1984) werden die Arbeiten auf diesem Gebiet zusammengefaßt.

Einen interessanten Aspekt weisen Lösungen auf, die für eine schwache bis mittlere Leitfähigkeit der Kanalwänden gefunden werden. In den Seitenschichten können strahlartige Geschwindigkeitsüberhöhungen, sogenannte "Seitenwand-Jets", auftreten. Sie weisen ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil in Magnetfeldrichtung auf. Am Übergang zur Kernströmung kann gleichzeitig eine Rückströmung auftreten (Hunt 1965).

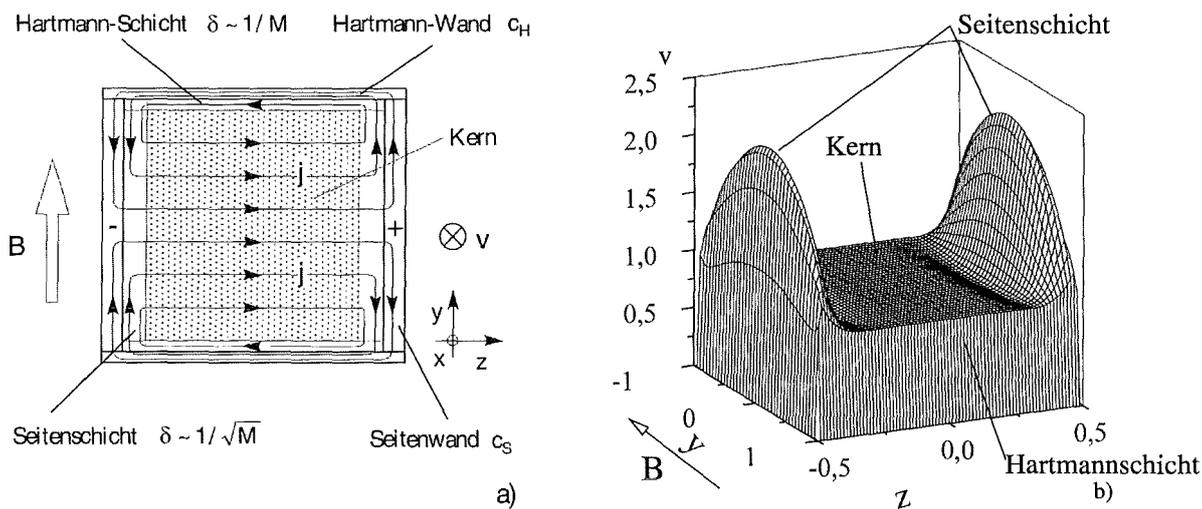


Abbildung 5.12: Seitenwand-Jets in Kanälen mit elektrisch leitenden Wänden

In der Kanalmitte liegt eine konstante Strömungsgeschwindigkeit vor. Für solche "M-förmigen" Geschwindigkeitsverläufe wurde von Walker (1981) eine asymptotische Lösung angegeben. Eine experimentelle Bestätigung liefern Hunt, Branover und Gel'fgat (1969) sowie Branover (1978). In Tillack (1990) wird eine Beziehung zur Berechnung des dimensionslosen Druckverlustes hergeleitet.

MHD-Strömungen mit Seitenwand-Jets werden im Vergleich zu den flachen Strömungsprofilen bei isolierten und perfekt leitenden Kanälen stärker durch nichtlineare Trägheitskräfte bestimmt. Auch der laminar-turbulente Übergang wird durch die nichtlinearen Trägheitskräfte bestimmt. Eine entscheidende Frage ist deshalb die nach der Stabilität einer MHD-Strömung.

5.3 Stabilität von MHD-Strömungen, Turbulenz

Der Einfluß eines konstanten magnetischen Feldes auf ein elektrisch leitendes Fluid führt in der Regel zu größerer Stabilität und verzögert das Auftreten von Turbulenz. Dies wird bereits von Hartmann und Lazarus (1937) in Experimenten beobachtet. Stark vereinfacht kann man sagen, daß jede Störung Wirbelströme induziert. Die Energie der Wirbelströme wird durch Ohmsche Verluste (Joulsche Dissipation) im Fluid in Wärme umgewandelt und ist verbunden mit einem entsprechenden Verlust an kinetischer Energie der Strömung. Damit werden Störungen letztlich dissipiert. In manchen Anwendungsfällen ist es erwünscht, Turbulenz zu erzeugen, um zum Beispiel in Blankets von Fusionsreaktoren den Wärmeübergang zu verbessern. Deshalb wurde schon früh das Stabilitätsverhalten von MHD-Strömungen untersucht.

Für die Hartmann-Strömung wird von Lock (1955) durch Lösung der Orr-Sommerfeld-Gleichung eine kritische Reynoldszahl Re_{krit} gefunden. Es ergibt sich eine lineare Abhängigkeit für $M > 20$.

$$Re_{krit} = 5 \cdot 10^4 M \quad \text{Lock (1955)} \quad (5.3.6)$$

Von Brouillette und Lykoudis (1967) wird in Experimenten ein völlig unterschiedlicher, jedoch ebenfalls linearer Zusammenhang gefunden.

$$Re_{krit} = 225 M \quad \text{Brouillette und Lykoudis (1967)} \quad (5.3.7)$$

Branover (1978) faßt die Ergebnisse aus anderen Experimenten zusammen und gibt eine obere und untere Grenze für den laminar-turbulenten Umschlag an.

$$130M < Re < 215M \quad \text{laminar-turbulenter Umschlag} \quad \text{Branover (1978)} \quad (5.3.8)$$

Die experimentellen Ergebnisse weisen hier eine relativ große Bandbreite auf.

Der Übergang zu turbulenter Strömung kann durch verschiedene Maßnahmen zusätzlich forciert werden. Es ist möglich, durch eine geeignete Wahl der elektrischen Randbedingungen Seitenwand-Jets zu erzeugen, die große lokale Geschwindigkeitsgradienten im Strömungsfeld verursachen (siehe Abb. 5.12, 5.13). Da die nichtlinearen Trägheitskräfte mit der Erhöhung der lokalen Geschwindigkeit und des lokalen Gradienten stark zunehmen, ist diese Methode gut geeignet, um Turbulenz im Strömungskanal zu erzeugen.

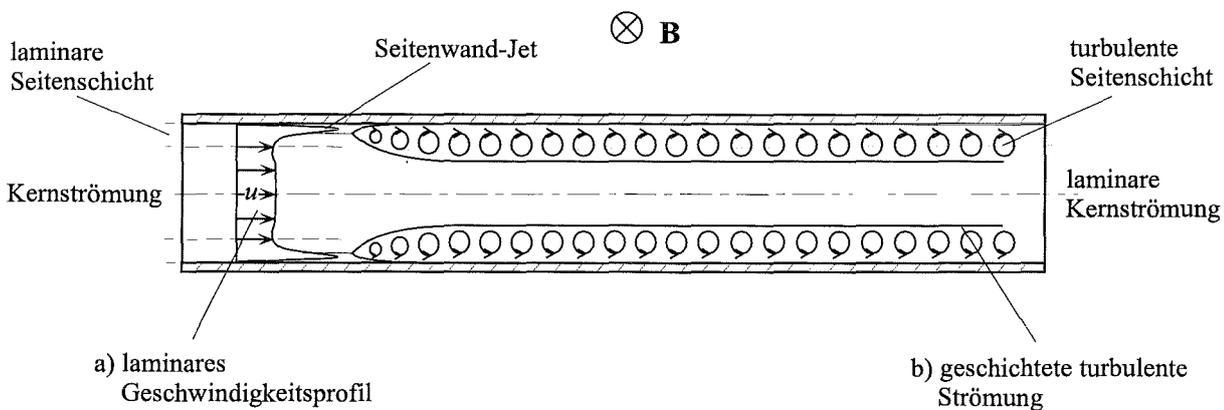


Abbildung 5.13: Anordnung zur Turbulenzgenerierung in den Seitenschichten nach Burr (1998).

Eine solche Anordnung mit Seitenwandjets wurde von Reed und Picologlou (1989) untersucht. Die eingelaufene Strömung in einem Rechteckkanal ($c_H = c_S = 0.07$) im Bereich der Hartmann-Zahlen $2700 < M < 5400$ wurde im Reynoldszahlenbereich $2650 < Re_{krit} < 5100$ instabil. Die Kernströmung blieb jedoch weiter laminar.

Aus einer von Ting, Walker, Reed und Picologlou (1991) durchgeführten linearen Stabilitätsanalyse, angewandt auf die von Reed und Picologlou (1989) benutzte Geometrie, ergibt sich eine von der Hartmann-Zahl unabhängige kritische Reynoldszahl von $Re_{krit} = 313$.

$$\underbrace{2700 < M < 5400; 2650 < Re_{krit} < 5100}_{\text{Experiment}} \quad \underbrace{Re_{krit} = 313}_{\text{lineare Stabilitätsanalyse}} \quad (\text{Reed et.al.1989}) \quad (5.3.9)$$

Eine Übertragung der Stabilitätsanalyse auf die von Burr (1998) verwendete Geometrie ergibt $Re_{krit} = 2004$. Aus dem Experiment ergibt sich jedoch für $M > 600$ für die kritische Reynoldszahl ein Bereich $8000 < Re_{krit} < 9000$.

$$\underbrace{M > 600; 8000 < Re_{krit} < 9000}_{\text{Experiment}} \quad \underbrace{Re_{krit} = 2004}_{\text{lineare Stabilitätsanalyse}} \quad (\text{Burr 1998}) \quad (5.3.10)$$

Die im Experiment gefundenen Werte liegen in beiden Fällen über den von der Theorie vorhergesagten Werten.

Neben der Möglichkeit, durch Seitenwandjets Turbulenz einzubringen, kann man auch durch mechanische Einbauten, sogenannter Turbulenzpromotoren, Störungen einbringen. Diese Möglichkeit wird in der vorliegenden Arbeit ausführlicher betrachtet. Eine prototypische Anordnung ist die Strömung eines leitenden Mediums um einen Zylinder unter der Wirkung eines Magnetfeldes. Das Magnetfeld kann parallel zur Hauptströmungsrichtung (Fall 1), parallel zum Zylinder (Fall 3) oder senkrecht zu Zylinder und Hauptströmungsrichtung (Fall 2) angelegt sein (siehe Abb. 5.14).

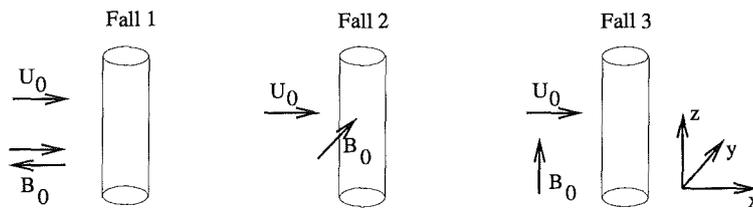


Abbildung 5.14: Verschiedene in der Literatur behandelte Versuchsanordnungen.

Im Vergleich zum hydrodynamischen Fall der Zylinderumströmung existieren im MHD-Fall relativ wenige experimentelle oder theoretische Arbeiten, die in der Folge aufgezählt und kurz beschrieben werden.

Der Fall des Magnetfeldes in Strömungsrichtung (Fall 1) wird in der Literatur etwas häufiger behandelt. Die Anordnung wurde von Josserand, Marthy und Allemany (1993) experimentell untersucht. In Lahjomri, Caperan und Alemany (1993) werden alle bisher zu diesem Fall durchgeführten Experimente zusammengefasst. Zweidimensionale numerische Rechnungen finden sich in Shatrov, Mutschke und Gerbeth (1997). In jüngster Zeit wurde von Mutschke, Gerbeth, Shatrov und Tomboulides (1997) eine dreidimensionale Stabilitätsuntersuchung sowie eine dreidimensionale numerische Simulation zu diesem Fall durchgeführt.

Fall 2 wurde bisher selten betrachtet. Nur in Kit, Turuntaev und Tsinober (1970) findet sich eine experimentelle Untersuchung. Numerische Untersuchungen finden sich in Kalis und Tsinober (1973) und Shatrov et al. (1997).

Die Fälle 1 und 2 erscheinen interessant, da hier durch elektromagnetische Diffusion in Magnetfeldrichtung, als Folge der Kopplung des magnetischen Feldes mit dem Fluid, stark beeinflusste Gebiete hinter und vor dem Körper entstehen können. Dies kann zur Folge haben, daß sich vor und hinter dem Körper (in Richtung des Magnetfeldes) die Zone des stagnierenden Fluids vergrößert. Das Hindernis wird in seiner Wirkung in Magnetfeldrichtung verlängert. Außerdem werden Wirbel in Richtung des magnetischen Feldes gestreckt. Die genaueren Mechanismen der magnetischen Wirbelstreckung und Dämpfung werden in Abschnitt 5.3.1 beschrieben. Dieser Effekt kann in Analogie zum Phänomen des "zweidimensionalen Zwanges" in rotierenden Systemen gesehen werden. Dieser bewirkt die Entstehung von Taylor-Proudman-Säulen, in denen ebenfalls die Wirkung eines Hindernisses in Richtung der Drehachse des Systems verlängert wird. Für die instationäre Nachlaufströmung hinter einem Zylinder bedeutet dies, daß eine Wirbelstraße mit wachsendem Magnetfeld relativ rasch unterdrückt wird. Im Fall 2 ist die Dämpfung stärker als im Fall 1.

Der in der vorliegenden Arbeit untersuchte Fall 3 wurde von Kit et al. (1970) sowie Kolesnikov und Tsinober (1972b) untersucht. Weitere experimentelle Untersuchungen finden sich in Papailiou (1984), Andreev und Kolesnikov (1997) sowie Frank und Barleon (1997), deren Ergebnisse in Abschnitt 7.1 ausführlich besprochen werden.

Der Fall 3 wurde in Zusammenhang mit Experimenten zur Verbesserung des Wärmeübergangs in Flüssigmetallblankets für Fusionsreaktoren eingehend untersucht, da die in diesen Fällen entstehende zweidimensionale Turbulenz als Mittel zur besseren Wärmeübertragung wünschenswert erschien (Barleon, Mack, Kirchner und Stieglitz 1995, Lielausis 1975). Es wurde mit Anordnungen von mehreren Zylindern hintereinander oder nebeneinander experimentiert.

Die Wirkung eines senkrecht zur Strömungsrichtung angelegten magnetischen Feldes auf eine turbulente Kanal-Strömung zeigt im allgemeinen die folgenden charakteristischen Merkmale:

- Die Geschwindigkeiten sind in Magnetfeldrichtung über die gesamte Kanalbreite stark korreliert.
- Die Geschwindigkeitskomponenten in Magnetfeldrichtung sind sehr viel kleiner als die anderen.
- Wirbel, die zweidimensional in Richtung des Magnetfeldes ausgerichtet sind, erfahren nur noch eine Dämpfung durch Stromschluß über die Hartmann-Wände.

Die Erzeugung der Turbulenz, ob durch M-Profil Instabilität (siehe Bild 5.13) oder Nachlaufinstabilität hinter Hindernissen, scheint nach Sommeria und Moreau (1982) keine größere Rolle zu spielen.

Die folgende Anordnung wurde von Kolesnikov und Tsinober (1972a) untersucht. Sie zeigt die stark anisotropen Transporteigenschaften von MHD-Turbulenz.

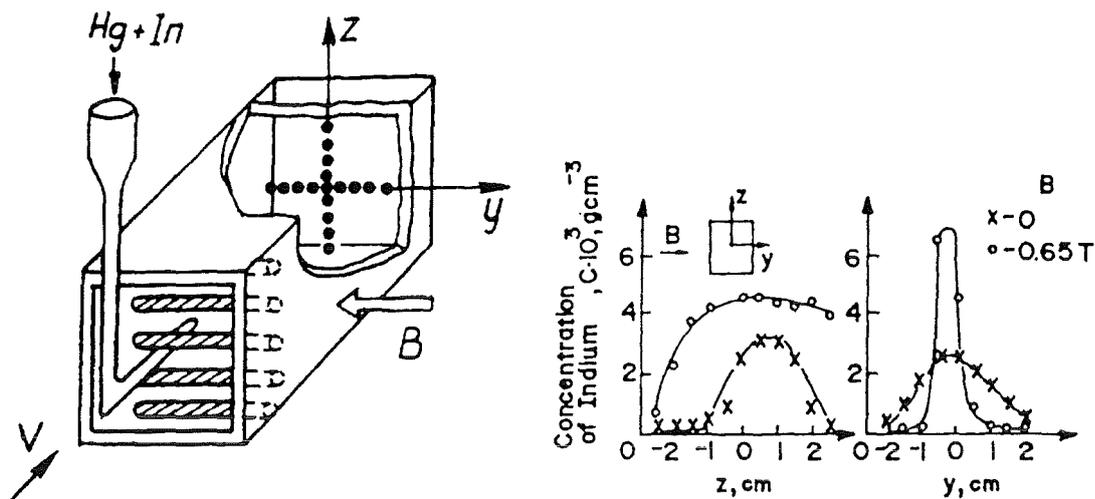


Abbildung 5.15: Verteilung eines Markers Hg/In in einer quasi zwei-dimensionalen turbulenten Strömung mit (o) und ohne Magnetfeld (\times) (aus Lielausis(1975)).

In diesem Aufbau wird durch eine magnetfeldparallele Anordnung von Zylindern in einem isolierten Kanal Turbulenz erzeugt. Die Art der Anordnung bevorzugt eine zweidimensionale Struktur des Nachlaufs, da die Wirbelachsen der abgehenden Wirbel am Zylinder hauptsächlich in Magnetfeldrichtung zeigen. Bei den in solchen Versuchen üblichen Reynoldszahlen ($Re \gg 150$) ist man jedoch meist weit im Bereich der dreidimensionalen Wirbelablösung (siehe Abb. 5.7), wobei die Reynoldszahl auf den Zylinderdurchmesser bezogen ist.

Zusätzlich wird durch die Interaktion der Wirbelstraßen eine gute Durchmischung erzielt. Die Eigenschaften der Strömung werden hier durch Einbringen eines passiven Markers (Quecksilber-Indium-Legierung) untersucht. Die in einiger Entfernung zu den Zylindern gemessenen Konzentrationsprofile in z - und y -Richtung zeigen in Abwesenheit eines Magnetfeldes eine gleichmäßige Verteilung in beide Richtungen. Im Gegensatz dazu wird die Ausbreitung mit eingeschaltetem Magnetfeld in Magnetfeldrichtung stark reduziert, jedoch senkrecht dazu stark erhöht. Die Vorstellung von säulenartigen Wirbeln ohne Krümmung, die größer als die ursprünglichen dreidimensionalen Strukturen sind, wird dadurch bekräftigt. Nach Moreau (1990) verschwindet durch Joulesche Dissipation jede Ausbildung von wellenartig deformierten Säulen, die durch Instabilitäten entstehen können. Wichtig ist ebenfalls die Feststellung, daß langlebige zweidimensionalen Strukturen nur in Kanälen mit isolierten Hartmann-Wänden vorkommen. In Platnieks (1972) wird gezeigt, daß Turbulenz in Gegenwart von gut leitenden Hartmann-Wänden stark gedämpft wird, wenn $Ha/Re > 0.02$. Dies zeigt den starken Einfluß der Hartmann-Wände auf wirbelbehaftete Strömungen.

Die Entwicklung hin zu zweidimensionalen Strukturen und deren Dämpfung kann anhand der Geschichte eines Einzelwirbels in einer MHD-Kanalströmung mit isolierten Wänden veranschaulicht werden.

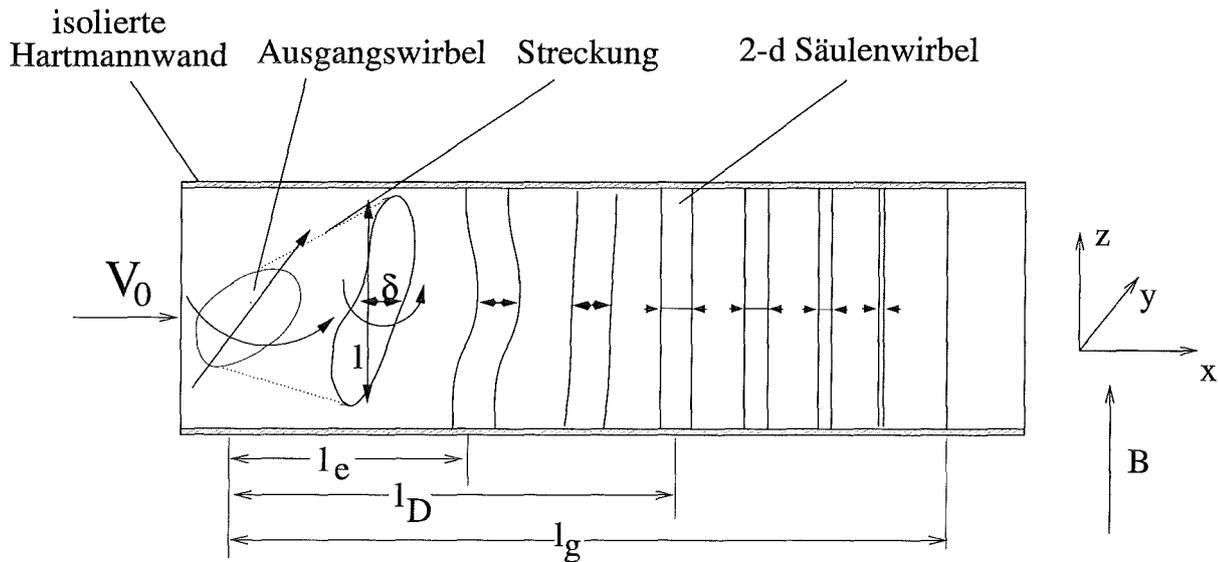


Abbildung 5.16: Entwicklung eines Einzelwirbels bis zu seiner vollständigen Dissipation in einem isolierten Kanal unter Magnetfeldeinfluss.

Abbildung 5.16 zeigt einen wirbelbehafteten Fluidbereich, der als Ausgangswirbel bezeichnet wird. Die Wirkung eines Magnetfeldes auf diesen Wirbel besteht zunächst darin, daß Wirbelanteile, die nicht in Magnetfeldrichtung orientiert sind, durch starke Joulesche Dissipation gedämpft werden.

Wirbelanteile, die parallel zur Magnetfeldrichtung ausgerichtet sind, induzieren ebenfalls elektrische Ströme. Die Wirkung dieser Ströme ist nicht nur dissipativ. Sie schließen sich im Fluid, das den ursprünglichen Wirbel umgibt und treiben dort durch Lorentz-Kräfte eine wirbelbehaftete Strömung an, was zu einer Streckung des Wirbels in Magnetfeldrichtung führt. Diese Wirbelstreckung unterscheidet sich jedoch wesentlich von der Wirbelstreckung, die in reinen hydrodynamischen Strömungen beobachtet wird. In hydrodynamischen Strömungen ist die Wirbelstärke und somit ihr Transport unmittelbar an das Fluid gebunden. Die Streckung eines Wirbels führt zur Kontraktion der Wirbelröhre und verstärkt aufgrund der Drehimpulserhaltung die Wirbelstärke. Bei der magnetischen Streckung dagegen wird einem rotierenden Fluidvolumen Drehimpuls entzogen. Dieser wird dem Fluid an einer anderen (weniger rotierenden) Stelle wieder zugeführt. Der Wirbel wird länger, das wirbelbehaftete Fluidvolumen größer, die Wirbelstärke in diesem Volumen nimmt ab. Die Wirbel erreichen nach einer Lauflänge l_e die Hartmann-Wände. Sind diese Wände isoliert, erfahren die im Wirbel induzierten Ströme eine starke Reduktion aufgrund des hohen elektrischen Widerstandes dieser sehr dünnen Schichten. Wirbel, die einmal die Hartmann-Wand erreicht haben, werden jetzt nur noch schwach gedämpft. Nach einer Lauflänge l_d haben sich die Wirbel zu einer quasi zweidimensionalen Strömung perfekt entlang von Magnetfeldlinien ausgerichtet.

Im quasi-zweidimensionalen Zustand findet die weitere Dämpfung des Wirbels nur noch durch Stromschlüsse über die Hartmann-Wände statt. Dadurch wird der Wirbel schließlich vollständig dissipiert. Nach der Lauflänge l_g sind keine Wirbel mehr vorhanden.

Es ist zu beachten, daß der Einfluß der Wände parallel zum magnetischen Feld auf die Seitenschichten begrenzt bleibt. Sie sind passiven Charakters und haben keine Rückwirkung auf die Hauptströmung. Ein anderes Bild ergibt sich, wenn durch instabile Seitenwandjets

Wirbel produziert werden (siehe Abb. 5.13). Es erfolgt in diesem Fall eine permanente Anfachung der Turbulenzstrukturen in der Seitenschicht. In diesem Fall ist der Joulschen Dämpfung eine permanente Anfachung überlagert (Burr 1998).

Wichtig für die praktische Auslegung von MHD-Kanälen ist die Kenntnis darüber, wie lange die, z.B. von einem Zylinder produzierten Wirbel, stromab existieren, um die Zylinder in einem optimalen Abstand voneinander zu plazieren.

5.3.1 Wirbeldämpfung im unendlich ausgedehnten Fluidbereich

Die zugrundeliegenden Zeitskalen und der Mechanismus der Entwicklung der säulenförmigen Wirbel lassen sich mit Hilfe der Grundgleichungen darstellen. Dabei ist es von Vorteil, die begrenzenden Wände zunächst nicht zu betrachten und einen unendlich ausgedehnten Fluidbereich vorauszusetzen. Betrachten wir noch einmal die Grundform der Navier-Stokes-Gleichung (2.4.15)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -N\nabla P + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{v} + \frac{N}{R_m}(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} \quad . \quad (5.3.11)$$

Aus einer Kombination des Ohmschen Gesetzes mit dem Ampèreschen Gesetz und dem Faradayschen Gesetz erhält man die Magnetfeldtransportgleichung

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{v} + \frac{1}{R_m}\nabla^2\vec{B} \quad . \quad (5.3.12)$$

Eine ausführliche Herleitung dieser Gleichung findet sich in Müller (1997). Das Magnetfeld setzt sich zusammen aus einem konstanten, von außen angelegten Anteil \hat{z} und einem durch die Strömung induzierten Anteil $R_m\vec{b}$ zu $\vec{B} = \hat{z} + R_m\vec{b}$. Damit vereinfacht sich die obige Gleichung (5.3.12) für $R_m \ll 1$ nach einigen Umformungen zu

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} = -\nabla^2\vec{b} \quad . \quad (5.3.13)$$

Angenommen, wir könnten die Gleichung (5.3.13) durch die Anwendung des inversen Laplace-Operators Δ^{-1} formal nach \vec{b} lösen und dieses Ergebnis in (5.3.11) einsetzen, dann erhielten wir für $R_m \ll 1$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -N\nabla P + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{v} - N\Delta^{-1}\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial z^2} \quad . \quad (5.3.14)$$

Setzen wir ferner voraus, daß $\partial/\partial z \ll \partial/\partial x, \partial/\partial y$ und $v_z \ll v_x, v_y$ gilt (Sommeria und Moreau 1982) und eliminieren P , so folgt mit $\omega = \nabla \times \vec{v} \approx \omega\hat{z}$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{\omega} - N\Delta_{\perp}^{-1}\frac{\partial^2\vec{\omega}}{\partial z^2} \quad . \quad (5.3.15)$$

Der Operator Δ_{\perp}^{-1} enthält aufgrund der getroffenen Maßnahmen nur noch Anteile in der Ebene senkrecht zum angelegten Magnetfeld. Gleichung (5.3.15) beschreibt die Ausbreitung von Wirbeln durch viskose Dissipation sowie durch elektromagnetische Effekte, die ebenfalls einen "diffusiven" Charakter besitzen. Um qualitative Aussagen über die elektromagnetische Diffusion von Wirbelstärke machen zu können, vernachlässigen wir die viskosen Anteile für $Re \gg 1$.

Schreibt man Gleichung (5.3.15) dann dimensionsbehaftet, so läßt sich die elektromagnetische Diffusivität, abhängig von der magnetfeldsenkrechten Länge l_{\perp} eines Wirbels, angeben zu $\alpha = \sigma B^2 l_{\perp}^2 / \rho$. Sei l_{\parallel} der Abstand zweier magnetfeldsenkrechten Ebenen, so geschieht der Ausgleich der Geschwindigkeitsunterschiede zwischen den Ebenen durch elektromagnetische Diffusion in der Zeit:

$$t_d \cong \frac{\rho}{\sigma B_0^2} \frac{l_{\parallel}^2}{l_{\perp}^2} = \tau \left(\frac{l_{\parallel}}{l_{\perp}} \right)^2 . \quad (5.3.16)$$

Hier stellt τ eine oft verwendete Zeitskala der Dämpfung isotroper Turbulenz dar (Shercliff 1965). Während einer typischen Umdrehungszeit (eddy-turn-over) des Wirbels $t_{tu} = l_{\perp} / u_{\perp}$ wird der Wirbel um die Länge l_{\parallel} gestreckt (siehe Abb. 5.17), wobei u_{\perp} die Tangentialgeschwindigkeit der Wirbelumdrehung ist:

$$l_{\parallel} \cong \sqrt{\alpha t_{tu}} = l_{\perp} \sqrt{\frac{\sigma B_0^2 l_{\perp}}{\rho u_{\perp}}} \implies l_{\parallel} \cong l_{\perp} \sqrt{N_{\perp}} . \quad (5.3.17)$$

Der Vorgang kann durch die folgende Skizze verdeutlicht werden.

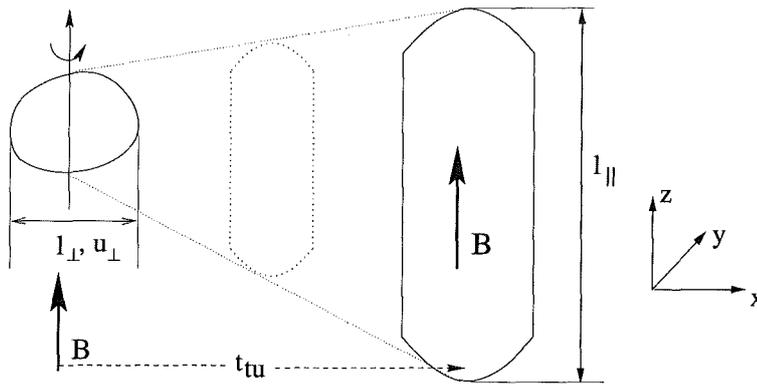


Abbildung 5.17: Streckung eines Wirbels durch das Magnetfeld während einer typischen Umdrehungszeit t_{tu} .

Entdimensioniert man die Diffusionszeitkonstante τ_d mit der Umdrehungszeit t_{tu} , so erhält man eine dimensionslose Zeitdauer für die Wirbelstreckung unter der Wirkung eines magnetischen Feldes ohne Wandeinfluß:

$$\tau^* = \frac{t_d}{t_{tu}} \cong \frac{\rho u_{\perp}}{\sigma B_0^2 l_{\perp}} \left(\frac{l_{\parallel}}{l_{\perp}} \right)^2 = \frac{1}{N_{\perp}} \left(\frac{l_{\parallel}}{l_{\perp}} \right)^2 . \quad (5.3.18)$$

Der Zusammenhang nach Gleichung (5.3.17, 5.3.18) (siehe Abb. 5.17) gilt nur so lange bis die gestreckten Wirbel an die Hartmann-Wand anstoßen. Danach findet die weitere Dämpfung über den Stromschluß in der Hartmann-Schicht statt.

Unter der vereinfachenden Annahme, daß sich die Wirbel mit der Hauptströmungsgeschwindigkeit $U_{\perp} \approx V_0$ (siehe Abb. 5.16) bewegen, kann die Wegstrecke l_e abgeschätzt werden, in der sich die Wirbel bis zur vollen Kanalhöhe a entwickeln und die Hartmann-Schichten erreichen. Mit einer charakteristischen Zeitskala für den Kanal $t_k = a / V_0$ und

Gleichung (5.3.16) erhält man eine weitere dimensionslose Zeitskala:

$$\frac{l_e}{a} \cong \frac{1}{N} \left(\frac{a}{l_{\perp}} \right)^2 \quad (5.3.19)$$

Von Davidson (1995) stammt ein weiterer Erklärungsansatz zur Beschreibung des Verhaltens eines Wirbels unter Magnetfeldeinfluß bei kleinen magnetischen Reynoldszahlen in einem unendlich ausgedehnten Fluid. Er findet drei wesentliche Grundsätze, die für das Verhalten maßgeblich sind:

1. Die Lorentz-Kräfte dissipieren kinetische Energie, ändern jedoch nicht die Komponente des Drehimpulses parallel zum Magnetfeld.
2. Die Lorentz-Kräfte ordnen das Geschwindigkeitsfeld so um, daß die globale Joulsche Dissipation D abnimmt. Diese Umordnung geschieht schneller als die Abnahme der kinetischen Energie E .
3. Die Abnahme der relativen Dissipation D/E ist erforderlich für die Erhaltung des Drehimpulses in Magnetfeldrichtung und wird durch Transport von Drehimpuls in Magnetfeldrichtung erreicht.

Die Folgerungen hieraus sind:

- 1) Durch die Erhaltung des Drehimpulses kann der Wirbel durch magnetische Dämpfung nicht vollständig dissipiert werden. Nur Drehungsanteile senkrecht zum magnetischen Feld werden dissipiert.
- 2) Die Lorentz-Kräfte ordnen das Strömungsgebiet in die Richtung zweidimensionaler Säulenwirbel um, die in Magnetfeldrichtung ausgerichtet sind. In einer perfekten zweidimensionalen Strömung, bei unendlich langen Säulenwirbeln, finden die elektrischen Ströme keine Schließungsmöglichkeiten mehr. Es fließt kein Strom und die Lorentz-Kräfte verschwinden. Die Joulsche Dissipation ist dann Null. Dieses Verhalten läßt sich durch Anwendung des Rotationsoperators auf das Ohmsche Gesetz (Gleichung (2.4.19)) zeigen. Es ergibt sich

$$\nabla \times j = (B \cdot \nabla) \vec{v} \quad (5.3.20)$$

Diese Bedingung zusammen mit der Divergenzfreiheit des Stroms und dem Verschwinden von Lorentz-Kräften läßt sich nur dann erfüllen, wenn der Strom den Wert Null annimmt. Gleichung (5.3.20) für einen verschwindenden Strom läßt sich nur erfüllen, wenn keine Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes in Magnetfeldrichtung auftreten.

Ohne elektrische Ströme ist keine Kopplung mehr zwischen Magnetfeld und Fluid vorhanden. Es liegt dann eine hydrodynamische Strömung vor.

Die Wirbelstreckung in Magnetfeldrichtung kann durch die Stromdichteverteilung einer Wirbelstruktur in einem sonst ruhenden Medium verdeutlicht werden (siehe Abb. 5.18a,b):

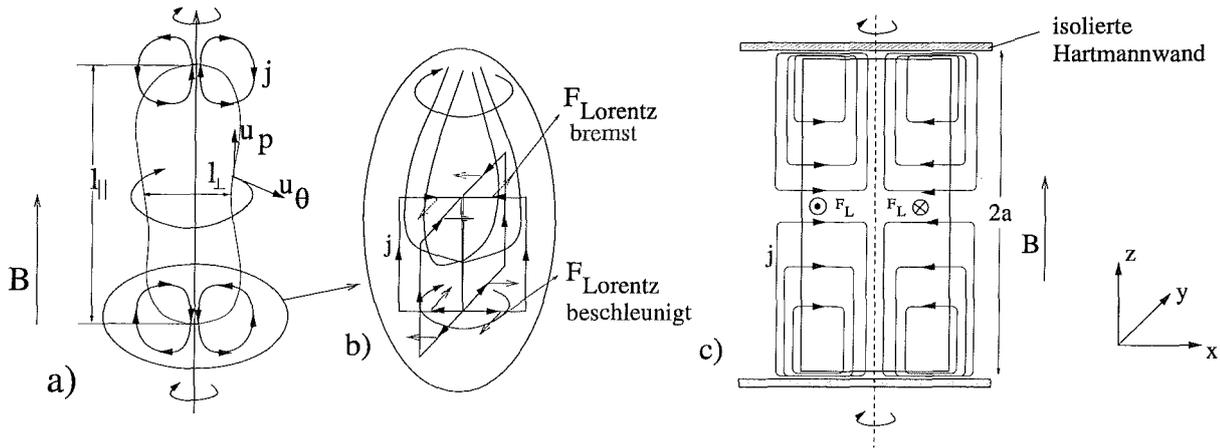


Abbildung 5.18: Wirbelstreckung durch die Wirkung des induzierten Stromes.

In Abbildung 5.18a werden die durch den Wirbel induzierten Strompfade gezeigt. Die Ströme schließen sich im ruhenden Medium. Anhand der Ausschnittsvergrößerung 5.18b kann die dreidimensionale Situation im unteren Teil des Wirbels erkannt werden. Die Lorentz-Kräfte wirken so, daß der Wirbel gebremst wird, das ruhende Medium jedoch angetrieben. Der Transport des Drehimpulses nach Davidson erfolgt durch die Wirkung der elektrischen Ströme.

Der azimutale E_θ und der axiale Anteil E_p der sich zeitlich ändernden kinetischen Energie ergibt sich nach Davidson (1995) zu:

$$\frac{dE_\theta}{dt} \sim \pm \frac{E_\theta}{t_{tu}} - \frac{E_\theta}{\tau} \left(\frac{l_\perp}{l_\parallel} \right)^2 \quad (5.3.21)$$

$$\frac{dE_p}{dt} \sim \mp \frac{E_\theta}{t_{tu}} - \frac{E_p}{\tau} \quad (5.3.22)$$

Aus Gleichung (5.3.21) erkennt man, daß in der azimutalen Komponente die inverse Diffusionszeitskala aus Gleichung (5.3.16), $t_d = \tau(l_\parallel/l_\perp)^2$, auftaucht. Es geht hier das Seitenverhältnis des Wirbels l_\perp/l_\parallel ein. Die Dämpfung wird umso schwächer, je kleiner dieses Verhältnis ist, d.h. je größer die Streckung wird. Die Joulsche Dissipation kann dadurch vermindert werden. Die Lorentz-Kräfte dämpfen die kinetische Energie der axialen Geschwindigkeitskomponente mit E_p/τ , da diese Anteile nicht gestreckt werden. Der Anteil E_θ/t_{tu} , der in beiden Gleichungen auftaucht, steht für den Energieaustausch zwischen azimutaler und axialer Komponente.

5.3.2 Wirbeldämpfung im begrenzten Fluidbereich

Die Betrachtungen galten bis hierher für ein unendlich ausgedehntes Medium ohne begrenzende Wände. In realen Anordnungen ist der Fluidbereich immer begrenzt. Im Folgenden wird die Begrenzung durch eine isolierte Wand betrachtet. Für die Wirbeldämpfung sind die magnetfeldsenkrechten Hartmann-Schichten, obwohl sie sehr dünn sind ($\delta_{Ha} \sim O(1/M)$), von entscheidender Bedeutung, da sich in ihnen die elektrischen Ströme schließen (siehe Abb. 5.18c). Die parallelen Seitenwände haben, wie schon erwähnt, passiven Charakter.

In Sommeria und Moreau (1982) wird nachgewiesen, daß die elektrischen Randbedingungen an einer isolierten Hartmann-Wand (siehe Abschnitt 2.6.4) in eine Bedingung für die Vorticity in Magnetfeldrichtung umgeformt werden können:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z}(x, y, 0, t) = -\frac{l_\perp}{M} \Delta_\perp \omega_z(x, y, 0, t) \quad . \quad (5.3.23)$$

Da Gleichung (5.3.23) überall an der Wand gültig ist, ergibt sich mit $\Delta_\perp \sim 1/l_\perp^2$ und Gleichung (5.3.17) für die Geschwindigkeit v_\perp in der magnetfeldsenkrechten Ebene:

$$\frac{\partial v_\perp}{\partial z}(x, y, 0, t) = O\left(\frac{V_0}{M l_\perp}\right) = O\left(\frac{V_0}{\sqrt{Re} l_\parallel}\right) \quad . \quad (5.3.24)$$

Gleichung (5.3.24) zeigt, daß die Achsen der Wirbel in guter Näherung senkrecht auf den Hartmann-Wänden stehen, obwohl sie in der Hauptströmung eine Krümmung aufweisen können (Moreau 1990). Dieses qualitative Kriterium ist für die Beurteilung von numerischen Simulationen einsetzbar.

Durch eine Integration des Stromes über die Kanalhöhe läßt sich nach Sommeria und Moreau (1982) zeigen, daß sich die charakteristische Zeitskala für die Dämpfung über die Hartmann-Wände ergibt zu:

$$\tau_{Ha} \cong \frac{a}{B_0} \left(\frac{\rho}{\sigma \nu}\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (5.3.25)$$

Eine Entdimensionierung mit der Wirbelumdrehungszeit t_{tu} ergibt:

$$\tau_{Ha} \cong \left(\frac{N_{l_\perp}}{M}\right)^{-1} \quad . \quad (5.3.26)$$

Eine Erweiterung auf dünne leitende Hartmann-Wände findet sich in Bühler (1996). Dort wird gezeigt, daß sich mit dem Wandleitparameter c_H der Hartmann-Wand die Dämpfungszeit ergibt zu:

$$\tau_H^* = \left(\frac{N_{l_\perp}}{M} + \frac{c_H N_{l_\perp}}{1 + c_H}\right)^{-1} \quad . \quad (5.3.27)$$

Für isolierte Wände ($c_H \rightarrow 0$) ergibt sich hieraus wiederum Gleichung (5.3.26).

Trotz gleicher äußerer Kenngrößen wie z.B. Hartmann-Zahl und Interaktionsparameter, die oft auf die halbe Kanalhöhe in Magnetfeldrichtung bezogen sind, ist die Dämpfung von Wirbeln in Kanälen von verschiedenem Seitenverhältnis unterschiedlich. Die Dämpfung von Wirbeln bei konstantem Magnetfeld und Zylinderdurchmesser wird umso schwächer, je länger der Kanal in Magnetfeldrichtung ist. Die dimensionslose Dämpfungszeit τ_H^* ist somit eine geeignete Kenngröße, um Experimente und numerische Rechnungen miteinander zu vergleichen, denn sie berücksichtigt das Seitenverhältnis der Wirbel.

5.3.3 Energietransport und Druckverluste in turbulenten MHD-Strömungen

In turbulenten hydrodynamischen Strömungen entziehen die Wirbel der Grundströmung Energie. Durch den Verlust ihrer Stabilität zerfallen große Wirbel zu immer kleineren

Wirbeln, die schließlich durch viskose Reibung dissipiert werden. Dies hat zusätzliche Druckverluste zur Folge, die bei der Auslegung von z.B. Rohrleitungssystemen beachtet werden müssen.

In zweidimensionalen hydrodynamischen Strömungen besitzen größere Wirbelstrukturen eine hohe Stabilität, da der dreidimensionale Wirbelzerfall nicht auftreten kann. Die viskose Dissipation und der damit verbundene Druckverlust sind geringer.

In MHD-Strömungen wird der Druckverlust hauptsächlich von elektrodynamischen Kräften bestimmt. Das Verhältnis von Joulscher Dissipation und viskoser Dissipation entscheidet darüber, ob der Druckverlust bei turbulenten MHD-Strömungen ansteigt. Besitzt die Strömung isotropen Charakter, so werden durch das Magnetfeld alle Wirbelanteile, die mit den Achsen senkrecht zum angelegten Feld stehen, stark gedämpft. Dies bewirkt eine Vergrößerung des Druckverlustes durch Joulsche Dissipation.

Bei ausschließlich in Magnetfeldrichtung ausgerichteten Wirbelstrukturen erfolgt die Joulsche Dissipation nur noch durch Stromschlüsse in den Hartmann-Schichten und liegt weit unter der Dissipation der magnetfeldsenkrechten Komponenten.

Dies ist beim Einsatz von Turbulenzpromotoren in Fusionsblankets von entscheidender Bedeutung, denn die Verbesserung des Transports passiver Zustandsgrößen durch die Promotoren kann ohne wesentlich höhere Druckverluste, verglichen mit den Verlusten in der laminaren Strömung, erzielt werden.

Die Messung von Geschwindigkeitsfluktuationen ermöglicht die Bestimmung von Leistungsdichtespektren des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes. Es kann damit gezeigt werden, auf welche Frequenzbereiche sich die turbulente kinetische Energie verteilt.

Kolesnikov und Tsinober (1972a) ermitteln Spektren hinter einem durch magnetfeldparallele Stäbe gebildeten Gitter (siehe Abb. 5.15) sowie einem einzelnen Zylinder. Die Ergebnisse zeigen, daß in zweidimensionalen turbulenten Strömungen ein Transport turbulenter kinetischer Energie von kleineren zu größeren Skalen erfolgt. Dieser Effekt wird als inverse Energiekaskade bezeichnet und ist nach Kraichnan (1967) kennzeichnend für zweidimensionale Turbulenz.

5.4 Stumpfe Körper unter Magnetfeldeinfluß

5.4.1 Bisherige analytische und numerische Arbeiten

5.4.1.1 Stationäre trägheitsfreie Lösungen

Wie bereits in Abschnitt 5.3 erwähnt, wurden grundlegende Phänomene zur Umströmung stumpfer Körper mit begrenzenden Wänden experimentell bereits gut erforscht. Körperumströmungen mit MHD wurden neben Experimenten auch mit asymptotischen Methoden untersucht, allerdings unter einschränkenden Voraussetzungen. Es wird ein unendlich ausgedehnter Fluidbereich angenommen und ein starkes magnetisches Feld vorausgesetzt, wodurch eine trägheitsfreie Approximation ermöglicht wird. Bereits Ludford und Singh (1963) untersuchten die Bewegung einer isolierten Kugel in einem leitenden Fluid unter der Wirkung eines starken magnetischen Feldes. Für eine perfekt leitende Kugel finden sie, daß sich eine Fluidsäule auf beiden Seiten der Kugel in Magnetfeldrichtung ausbildet und sich mit der Kugel bewegt, als ob sie starr mit ihr verbunden wäre. In Molokov (1992) wird ein Überblick über die analytischen Arbeiten gegeben. In Molokov und Rajan (1997) wird eine Analyse für zweidimensionale Körper mit beliebigem Querschnitt und elektrischer Leitfähigkeit vorgestellt.

Ein spezieller Aspekt, der die Untersuchung der Umströmung von Körpern in den Blickpunkt rückt, ist die Umströmung von Meßsonden, die in das zu untersuchende Gebiet eingebracht werden. Speziell bei MHD-Strömungen mit starken Magnetfeldern kann dies die Ursache für Meßfehler sein. Durch die Wirkung eines starken Magnetfeldes werden auf beiden Seiten des Geschwindigkeitssensors Scherschichten in Magnetfeldrichtung aufgebaut.

Ein ähnlicher Effekt wird auch in Stieglitz, Barleon, Bühler und Molokov (1996) als Ursache für die Meßfehler bei Geschwindigkeitsmessungen in Krümmern vermutet. In Reed und Picologlou (1986) wird experimentell gezeigt, daß die Auswirkungen dieses Effekts gering sind, wenn die Strömung zweidimensional ist. Ist die Strömung dreidimensional, wie zum Beispiel in Krümmern oder hinter Hindernissen, so werden starke Einflüsse der Meßsonden auf die Strömung erwartet. Da der Einfluß der Sonde selbst experimentell schwer zu bestimmen ist, wurde bisher mit asymptotischen Methoden das Strömungsfeld untersucht. In den letzten Jahren haben sich asymptotische Methoden als geeignetes Werkzeug erwiesen, um stationäre laminare und trägheitsfreie Strömungen in dreidimensionalen Geometrien zu berechnen. Bei den meisten Anwendungsfällen in starken magnetischen Feldern, z.B. bei selbstgekühlten Flüssigmetallblankets in Fusionsreaktoren, sind die Trägheitskräfte klein verglichen mit den Lorentz-Kräften und wurden deshalb nur in wenigen Arbeiten berücksichtigt.

5.4.1.2 Instationäre trägheitsbehaftete Strömungen

Wie in Abschnitt 5.3 beschrieben, kann das Erzeugen von Turbulenz erwünscht sein, um den Wärmeübergang an Wänden zu verbessern und die Wandtemperaturen in akzeptablen Grenzen zu halten. In starken magnetischen Feldern werden Wirbel senkrecht zur Magnetfeldrichtung stark gedämpft. Wirbel in Magnetfeldrichtung werden nur schwach gedämpft und können große zweidimensionale Strukturen in der magnetfeldsenkrechten Ebene bilden. Solche trägheitsbehafteten instationäre MHD-Strömungen können außer mit Experimenten nur durch numerische Simulationen erfaßt werden.

Da numerische Simulationen von instationären MHD-Strömungen erst in jüngster Zeit durch die stark gestiegene Rechnerleistung möglich wurden, beschränkten sich die Arbeiten zuvor auf analytische Methoden zur Stabilitätsanalyse laminarer Strömungen für einfache Geometrien.

In Lock's (1955) Stabilitätsuntersuchung der Hartmann-Strömung wird durch Lösung der Orr-Sommerfeld-Gleichung eine Stabilitätsgrenze gefunden, die von der Hartmann-Zahl linear abhängig ist. In Abas (1969) wird die Stabilität einer freien Grenzfläche untersucht. Auf Basis der Orr-Sommerfeld-Gleichung findet er ebenfalls einen linearen Zusammenhang der kritischen Reynoldszahl von der Hartmann-Zahl für das Einsetzen zeitabhängiger Bewegung. In Bühler (1996) wird durch leitende Kanaleinsätze eine Scherschicht erzeugt. Deren Stabilität wird durch eine lineare Stabilitätsanalyse untersucht. Es wird eine lineare Abhängigkeit der kritischen Reynoldszahl von der Hartmann-Zahl gefunden. Zu diesem Problem wurde von Leboucher (1995) eine volle dreidimensionale instationäre numerische Simulation durchgeführt.

Für das Einsetzen von Turbulenz in Seitenwandjets wurde von Ting et al. (1991) eine Stabilitätsrechnung durchgeführt. Hier ergibt sich eine konstante kritische Reynoldszahl.

Für das Einsetzen einer zeitabhängigen Strömung hinter stumpfen Körpern unter dem Einfluß von Magnetfeldern wurde von Mutschke et al. (1997) eine zwei- und dreidimensionale Stabilitätsuntersuchung hinter einem kreisförmigen Zylinder durchgeführt. Das Magnetfeld wurde in Strömungsrichtung angelegt. Diese Anordnung entspricht dem Aufbau nach Abbildung 5.14, Fall 1. In dieser Untersuchung wird zunächst durch ein zweidimensionales numerisches Verfahren die Stabilitätsgrenze für das Einsetzen der Kármánschen Wirbelstraße gefunden. Interessanterweise ergibt sich bei einer dreidimensionalen Analyse, daß die Strömung in bestimmten Parameterbereichen dreidimensionale Instabilitäten zeigt, obwohl die entsprechende zweidimensionale Strömung bereits stationär ist. Dieses Ergebnis wurde von den Autoren durch eine dreidimensionale numerische Simulation mit periodischen Randbedingungen in Zylinderrichtung qualitativ bestätigt. Für den Fall des senkrecht zur Strömung und zum Zylinder angelegten Magnetfeldes wurde von Shatrov et al. (1997) eine zweidimensionale numerische Simulation durchgeführt und eine Grenzkurve für das Einsetzen der Wirbelstraße ermittelt.

Der Fall des Magnetfeldes in Zylinderrichtung wurde bisher noch nicht numerisch oder stabilitätstheoretisch für Reynoldszahlen über 40 untersucht. Diese Lücke wird mit dieser Arbeit, in der eine numerische Methode verwendet wird, geschlossen.

Kapitel 6

Validierung/Verifizierung des Programms - Ergebnisse

Bei der Anwendung eines Simulationsprogramms für ein bestimmtes Problem muß zunächst geprüft werden, ob die richtigen Gleichungen und Modelle verwendet werden (Validierung). Um zu prüfen, ob das verwendete Gleichungssystem richtig gelöst wird (Verifikation), muß ein Vergleich mit analytischen Lösungen oder Experimenten stattfinden. Ein weiterer Begriff, der in diesem Zusammenhang des öfteren verwendet wird, ist das sogenannte 'Benchmarking' (Williams und Baker 1996). Dabei werden die Ergebnisse von Programmen verglichen, die mit unterschiedlichen numerischen Methoden arbeiten.

Der gewählte Testfall für den hydrodynamischen Teil des in dieser Arbeit verwendeten Codes ist die instationäre hydrodynamische Umströmung eines Zylinders mit quadratischem Querschnitt bei einer Reynoldszahl von 200, bei der sich eine Kármánsche Wirbelstraße ergibt.

Es wird davon ausgegangen, daß in diesem Reynoldszahlenbereich die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen für laminare Strömungen eines Newtonschen Mediums mit konstanten Stoffwerten gültig sind.

Für diesen Fall existiert keine analytische Lösung. Aus Experimenten sind die Ablösefrequenzen der Wirbel sowie die Größen Auftriebs- und Widerstandskoeffizient bekannt. In diesem Reynoldszahlenbereich wurden zweidimensionale Simulationen häufig und mit unterschiedlichen numerischen Methoden durchgeführt. Eine dreidimensionale Simulation des quadratischen Zylinders in diesem Reynoldszahlenbereich ist nur von Sohankar (1998) bekannt. Das gesamte experimentelle und numerische Datenmaterial weist durch die verwendeten unterschiedlichen Anordnungen (z.B. Kanalabmessungen oder Versperrungsverhältnis) eine Streuung auf. Aus diesem Grund ist die Kenntnis des Einflusses der verschiedenen verwendeten Parameter notwendig, um experimentelle oder numerische Ergebnisse einordnen zu können.

In dreidimensionalen Strömungen muß zusätzlich die 'Struktur einer Strömung' beurteilt und verglichen werden. Mathematisch bestimmt ist eine solche Struktur durch das Auftreten von 'kritischen Punkten' (z.B. Knoten-, Sattelpunkte) einer stetigen Funktion, die die Verteilung der betrachteten physikalischen Größe wiedergibt (Oertel 1984). In der numerischen Simulation können solche Strukturen durch vollständige Visualisierung des gesamten Strömungsgebiets gefunden werden. Es entsteht dadurch ein Eindruck des Strömungsfeldes.

Ein Vergleich der dreidimensionalen Strömungsstrukturen am quadratischen Zylinder ist nur mit den bereits erwähnten Ergebnissen von Sohankar (1998) möglich, da andere Quellen hierzu nicht auffindbar waren. Damit ist eine Validierung und Verifikation anhand des Beispiels der dreidimensionalen Umströmung des quadratischen Zylinders nur eingeschränkt möglich.

Die numerische Simulation der MHD-Strömung um den quadratischen Zylinder wurde mit einem Experiment von Frank (1997) verglichen. In diesem Experiment wird ein Kreiszyylinder anstelle eines quadratischen Zylinder verwendet, so daß für diesen Fall eine Abweichung der numerischen Simulation zum Experiment zu erwarten ist. Weiteres Datenmaterial zu dieser Konfiguration ist nicht bekannt. Eine Verifikation des Codes anhand von anderen dreidimensionalen MHD-Strömungen, wie z.B. Krümmer, Kanalströmung mit nicht konstantem äußeren Magnetfeld oder instationäre, dreidimensionale MHD-Strömungen, wurde bereits von Sterl (1990), Lenhart (1994) und Leboucher (1995) durchgeführt. Der hydrodynamische Grenzfall für sehr schwache Magnetfelder wurde in Sterl (1989) behandelt.

6.1 Testrechnungen ohne Magnetfeld

In der Vergangenheit wurde wegen der beschränkten Rechnerkapazitäten die zweidimensionale stationäre Umströmung eines Zylinders berechnet. Bis zu einer Reynoldszahl von 40 wurden von verschiedenen Autoren Rechnungen durchgeführt, die gut mit den Experimenten übereinstimmten und eine geringe Streuung aufwiesen. Erste numerische Ergebnisse für den Kreiszyylinder stammen von Kalis, Tsinober, Shtern und Shcherbinin (1965). In Franke (1991) werden weitere Quellen zusammengefaßt.

Für die numerische Simulation der instationären Nachlaufströmung hinter Zylindern gibt es eine große Zahl von Veröffentlichungen, die bereits in Abschnitt 5.1 angeführt wurden. Die meisten Angaben beziehen sich auf die Umströmung des kreisförmigen Zylinders. In erheblich geringerem Ausmaß finden sich Arbeiten zur Simulation von Strömungen um quadratische Zylinder oder Zylinder mit allgemeinen nichtkreisförmigen Querschnitten. Für den Bereich kleiner Reynoldszahlen ($50 \leq Re \leq 1000$) wird in Sohankar et al. (1997) sowie Sohankar et al. (1998) der aktuelle Wissenstand über die Umströmung von Zylindern quadratischen und rechteckigen Querschnitts zusammengefaßt. Es wird eine zweidimensionale numerische Simulation mit ausführlicher Variation aller Parameter mit dem Ziel einer gitterunabhängigen Simulation vorgestellt. Jedoch wurde in Sohankar et al. (1997) festgestellt, daß die Simulation dieses zweidimensionalen Standardfalls immer noch nicht gitterunabhängig gelingt. In Sohankar et al. (1998) werden die kritischen numerischen Parameter identifiziert, die eine gitterunabhängige numerische Simulation behindern. Diese werden in Abschnitt 6.1.1 beschrieben.

6.1.1 Zweidimensionale Testrechnungen

Ziel dieser Testrechnungen war es, die instationäre Wirbelablösung hinter einem quadratischen Hindernis mit zwei begrenzenden Wänden in einer zweidimensionalen numerischen Simulation zu erfassen (siehe Abb. 6.1). Es sollten bei akzeptablem Aufwand bei der Gitterauflösung die Schlüsselparameter Strouhalzahl, Widerstandsbeiwert und Auftriebsbeiwert qualitativ bestimmt werden.

Da der Schwerpunkt dieser Arbeit die Berechnung der magnetischen Dämpfung der ablösenden Wirbel ist, muß auch der Nachlaufbereich des Zylinders hinreichend genau aufgelöst werden und eine ausreichende Länge aufweisen.

Stark nicht-äquidistante Netze, wie sie in den meisten hydrodynamischen Berechnungen mit dem Ziel der genauen Auflösung der körpernahen Strukturen eingesetzt werden, können damit nicht verwendet werden. Eine starke Vergrößerung des Netzes in Richtung des freien Austrittsrandes ist auf keinen Fall hinnehmbar, da die Dämpfung der Wirbel durch numerische Diffusion ("wash-out Effekt") die magnetische Dämpfung der Wirbel überwiegen könnte und damit keine Beurteilung der Wirkung des Magnetfeldes auf die Wirbel mehr möglich wäre.

Ein sinnvoller Kompromiß ist hier die Verwendung eines äquidistanten Gitters, da hiermit die eingebrachte numerische Diffusion durch das Gitter minimiert wird. Dies hat zur Folge, daß die Auflösung des umströmten Körpers nicht mehr so fein geschehen kann, wie dies in Sohankar et al. (1998) ausgeführt wurde, ohne erhebliche Einschränkungen in der Länge des Rechengebiets in Kauf nehmen zu müssen. Hinsichtlich der später durchgeführten dreidimensionalen Simulation wurde die Gitterauflösung auf ein Mindestmaß reduziert, um in der dritten Dimension genügend Punkte zur Verfügung stellen zu können, aber trotzdem noch die Physik der zweidimensionalen Strömung zu erfassen.

Anfangs- und Randbedingungen

Abbildung 6.1 zeigt das Lösungsgebiet und die verwendeten Randbedingungen für den quadratischen Zylinder. Am Zylinder selbst wird die Haftbedingung ($u = 0, v = 0$) vorgegeben. Am Eintritt wurde ein Blockprofil gewählt und an den seitlichen Rändern gilt die Haftbedingung. Es entsteht dadurch eine Einlaufströmung mit sich entwickelnden Grenzschichten an den Kanalwänden. Für die betrachteten Reynoldszahlen bleiben die Grenzschichten jedoch auf die Wandnähe beschränkt. Diese Randbedingungen wurden gewählt, da sich so eine günstige Startlösung für den späteren Übergang auf eine Rechnung mit eingeschaltetem Magnetfeld ergibt. Eine hydrodynamische Strömung mit diesen Randbedingungen besitzt vergleichbare Geschwindigkeitsfelder wie eine eingelaufene MHD-Strömung bei hohen Hartmann-Zahlen.

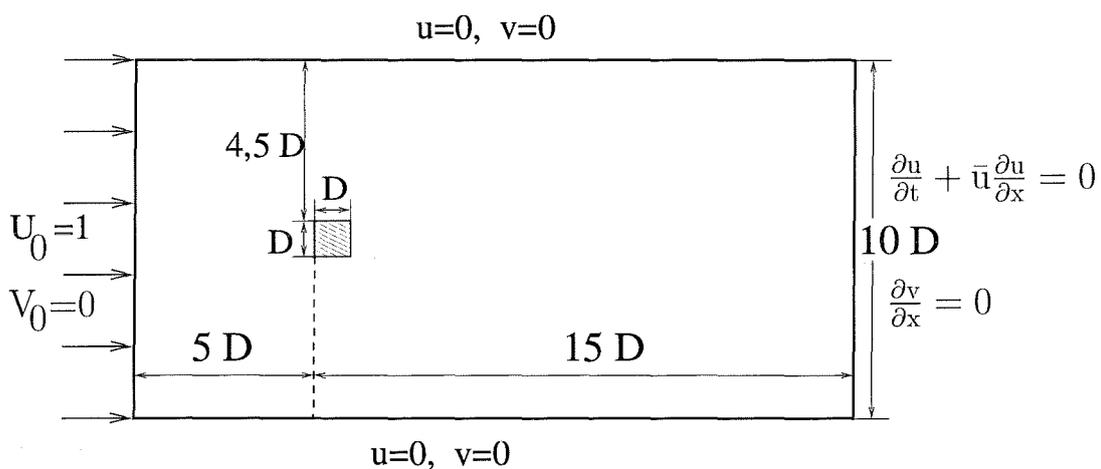


Abbildung 6.1: Lösungsgebiet und Randbedingungen für die Umströmung eines Zylinders mit quadratischem Querschnitt.

Bei der Rechengröße wurde darauf geachtet, genügend Abstand zum Aus- und Eintrittsrand sowie zu den seitlichen Rändern einzuhalten. Es ist zu erwarten, daß sich durch die seitlichen Begrenzungen und die einlaufende Strömung die Auftriebs- und Widerstandskoeffizienten verändern. Das Verhältnis von Zylinderseitenlänge D zur Gesamthöhe des Rechengebiets $10D$ wird als Versperrungsverhältnis β bezeichnet und beträgt bei dem in Abbildung 6.1 verwendeten Rechengebiet $\beta = 0.1$. Strömungen mit Haftbedingung an den seitlichen Rändern und höheren Versperrungsraten wurden ebenfalls von Davis, Moore und Purtell (1984) behandelt. Am Austrittsrand wurde die in Abschnitt 2.6.2 behandelte konvektive Austrittsrandbedingung gewählt sowie eine homogene Neumann-Randbedingung für die senkrechte Komponente. Die Zahl der Gitterpunkte pro Einheitslänge D (Körperauflösung) betrug 13 Punkte. Es wurde ein 260×130 Gitter verwendet. Die halbe Gitterweite $l_K = 0.038$ stellt beim äquidistanten versetzten Gitter zugleich den Abstand zum körpernächsten Punkt dar, an dem die wandtangente Geschwindigkeit am Hindernis berechnet wird. Der Abstand dieses Punktes vom Hindernis liegt um eine Größenordnung über dem in Sohankar et al. (1998) gewählten Abstand ($l_K = 0.004$). Wie jedoch in Davis und Moore (1982) sowie Davis et al. (1984) gezeigt wird, können auch schon mit sehr viel größeren Auflösungen gute Ergebnisse erzielt werden. Für eine Abschätzung der Grenzschichtauflösung am Körper wird die Grenzschichtdicke an den Zylinderseiten anhand der ebenen Plattengrenzschicht mit der Lauflänge ℓ ermittelt. Nach Zierep (1987) gilt für die ebene Plattengrenzschicht:

$$\frac{\delta}{\ell} = \frac{3.5}{\sqrt{Re_\ell}} \quad (6.1.1)$$

Für eine Reynoldszahl von 200 und der Lauflänge $\ell = 1$ ergibt sich $\delta \approx 0.25$. Bei einem Abstand des wandnächsten berechneten Punktes der tangente Geschwindigkeit von $l_K = 0.038$ ergibt sich eine Grenzschichtauflösung von etwa 4 Gitterpunkten. Für qualitative Zwecke ist dies ausreichend. Für eine genaue Simulation muß die Entwicklung der Grenzschicht, die an der scharfen Vorderkante beginnt, feiner aufgelöst werden, was bei äquidistanten Verfahren zu sehr vielen Gitterpunkten führt.

Über die Art der Implementierung der Randbedingungen bzw. der verwendeten Differenznäherungen am Rand/Hindernis wird selten in den verschiedenen Veröffentlichungen eingegangen. In der vorliegenden Arbeit wird zur genäherten Berechnung der zweiten Ableitung eine Differenzenformel für ungleichmäßige Maschennetze am Rand nach Hirsch (1988) verwendet:

$$\left. \frac{d^2\Phi}{dx^2} \right|_j = \frac{\frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{\Delta x_j} - \frac{\Phi_j - \Phi_{j-1}}{\Delta x_{j-1}}}{0.5(\Delta x_j + \Delta x_{j-1})} \quad (6.1.2)$$

Diese Näherung ist von der Ordnung $O(\Delta x)$ und bei einem äquidistanten Gitter äquivalent einer quadratischen Extrapolation auf fiktive Punkte im Hindernis, wie in Davis und Moore (1982) verwendet.

Der maximale Zeitschritt des eingesetzten expliziten Adams-Bashforth-Verfahrens richtet sich nach den Stabilitätskriterien, die in Abschnitt 3.2.1.2 beschrieben wurden. Es wurde in der Regel mit einem dimensionslosen Zeitschritt von $1.5 \cdot 10^{-3} - 2.0 \cdot 10^{-3}$ gearbeitet. Dadurch wird eine Schwingungsperiode mit 600 bis 1000 Zeitschritten aufgelöst. Als Anfangsbedingung wurde im Rechengebiet die Geschwindigkeit $U_0 = 1$ gesetzt. Die Wirbelablösung setzt nach einer gewissen Zeit ohne das Einbringen zusätzlicher Störungen ein.

Der RMS-Wert des Auftriebs wird von Sohankar et al. (1997) als der empfindlichste Gesamtindikator für numerische Simulationen bezeichnet, da er sich in Abhängigkeit von verschiedenen numerischen Parametern stark ändert. In Sohankar et al. (1997) wird dies anhand einer Verfeinerungsstudie gezeigt. Da dieser Wert in den verschiedenen experimentellen und numerischen Veröffentlichungen eine starke Streuung aufweist, werden statt dessen oft die Strouhalzahl und der Widerstandkoeffizient zu Vergleichen herangezogen.

Abbildung 6.2a zeigt den Druckanteil des Auftriebsbeiwerts c_{LP} nach einer ausreichend langen Einschwingzeit. Der RMS-Wert des Auftriebsbeiwertes beträgt $c'_{LP} = 0.192$ und ist durch die grobe Diskretisierung tendenziell zu klein. Diese Tendenz für den Auftrieb beim Übergang zu größeren Gittern wird in Sohankar et al. (1997) bestätigt. Sohankar et al. (1998) berechnen für ein Versperrungsverhältnis von $\beta = 5\%$ den Auftriebsbeiwert zu $c'_{LP} = 0.232$. Aus Davis et al.'s (1984) Experimenten bei einem Versperrungsverhältnis von $\beta = 16\%$ kann $c'_{LP} \approx 0.25$ entnommen werden.

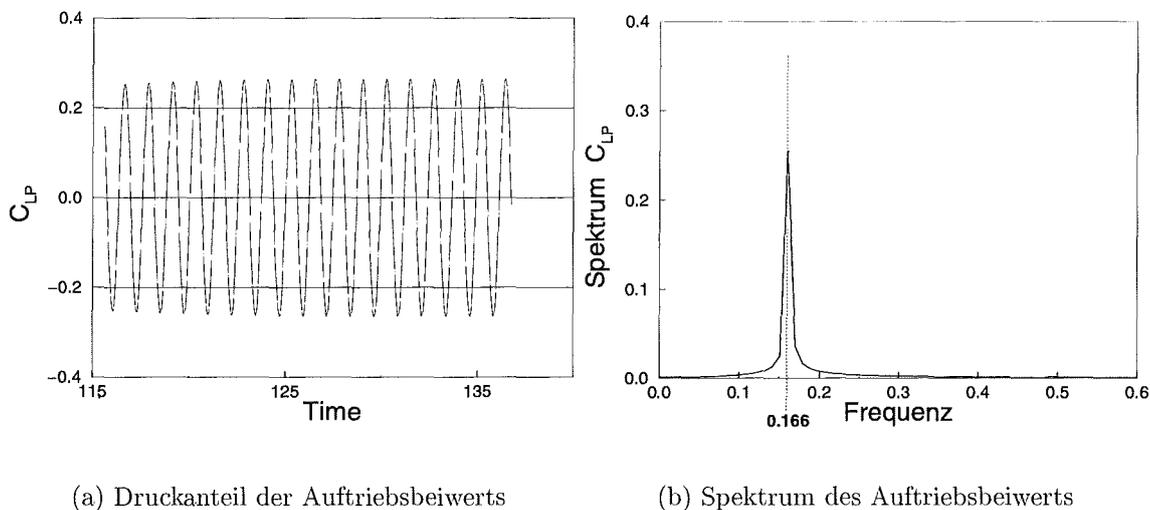
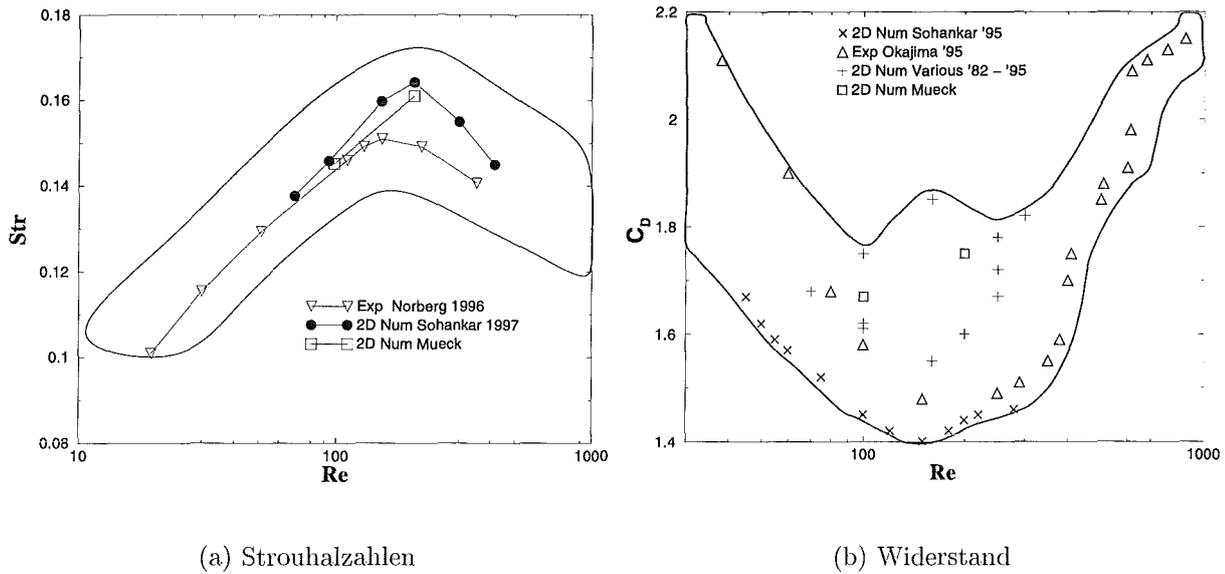


Abbildung 6.2: Umströmung des quadratischen Zylinders bei $Re=200$.

Dem Spektrum des Auftriebsbeiwertes (siehe Abb. 6.2b) entnimmt man eine Strouhalzahl von $St=0.166$. Ein Vergleich mit den in Abbildung 6.3a zusammengefaßten numerischen und experimentellen Daten zeigt, daß der Wert an der oberen Grenze des Streubereichs liegt. Diese Tendenz ist im Einklang mit den experimentellen Ergebnissen von Davis et al. (1984) und den numerischen Ergebnissen von Sohankar et al. (1997), die für wachsende Versperrungsverhältnisse β größere Werte für die Strouhalzahl und den Widerstandkoeffizienten finden. Die Werte der zweidimensionalen Simulationen weichen im Bereich der Reynolds-Zahl von 200 relativ stark von den experimentellen Daten ab. Dies kann als Hinweis darauf verstanden werden, daß bei einer Reynolds-Zahl von 200 bereits größere dreidimensionale Anteile in der Strömung vorhanden sind, die mit einer zweidimensionalen Simulation nicht mehr erfaßt werden.



(a) Strouhalzahlen

(b) Widerstand

Abbildung 6.3: Experimentelle und numerische Werte für Strouhalzahl und Widerstandkoeffizient für $50 \leq Re \leq 1000$. Der Streubereich der aus der Literatur zugänglichen Daten ist grau hinterlegt.

Der Druckanteil des Widerstandskoeffizienten und sein Spektrum werden in Abbildung 6.4 gezeigt. Hier zeigt sich der Einfluß des Versperrungsverhältnisses deutlicher, denn der mittlere Widerstandskoeffizient $\overline{C_{DP}} = 1.748$ liegt deutlich oberhalb der in Abbildung 6.3b gezeigten Werte. Der Wert des Widerstandskoeffizienten stimmt jedoch gut mit den berechneten Werten von Davis et al. (1984) überein, die für ein Versperrungsverhältnis von $\beta = 16\%$ einen mittleren Widerstandskoeffizienten von $\overline{C_{DP}} \approx 1.75$ finden. Der Widerstandskoeffizient oszilliert mit der doppelten Frequenz des Auftriebsbeiwertes. Dies ergibt sich aus dem Mechanismus der Wirbelablösung am Zylinder.

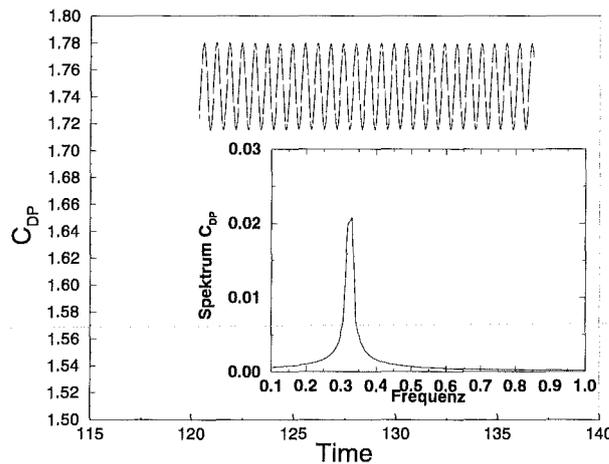


Abbildung 6.4: Druckanteil des Widerstandskoeffizienten bei $Re=200$.

Abbildung 6.5 zeigt eine Isovorticity-Darstellung der hier durchgeführten zweidimensionalen numerischen Simulation der Kármánschen Wirbelstraße bei einer Reynoldszahl von 200 und einem 260×130 Gitter.

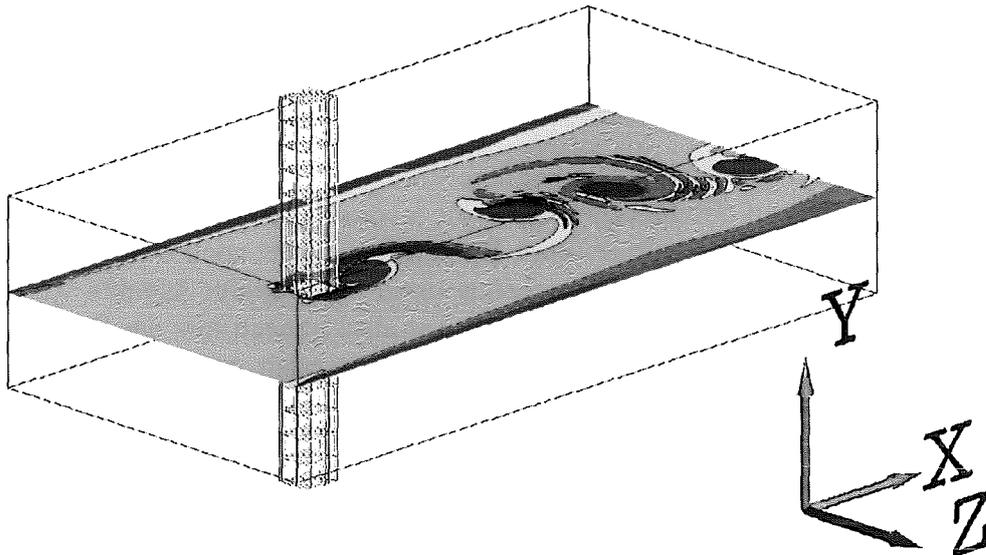


Abbildung 6.5: Isovorticity-Darstellung der zweidimensionalen numerischen Simulation bei $Re = 200$; blau $\omega_y = -6$, rot $\omega_y = +6$.

Man erkennt die Wirbelablösung am Zylinder sowie die sich entwickelnden Grenzschichten an den seitlichen Rechengebietsgrenzen.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die Ergebnisse der durchgeführten Simulation bei dieser Auflösung für die periodische Wirbelablösung qualitativ richtig liegen. Legt man die numerisch ermittelten Werte von Sohankar et al. (1997) und Davis et al. (1984) bei einer Reynoldszahl von 200 zugrunde, so wird die Strouhalzahl mit dem vorliegenden Programmcode mit einer Abweichung von $\pm 2\%$ gefunden. Die in Sohankar et al. (1997) gezeigten experimentellen Werte weisen auf einen etwas niedrigeren Wert von $St \approx 0.15$ hin, was eine Abweichung von etwa 7% zum numerisch ermittelten Wert bedeutet.

Der Widerstandskoeffizient wird im Vergleich zu Sohankar et al. (1997) um etwa 16% zu hoch berechnet. Vergleicht man jedoch mit den numerischen Ergebnissen von Davis et al. (1984) bei ähnlichem Versperrungsverhältnis, so stellt man eine gute Übereinstimmung von $\pm 5\%$ fest.

Der Auftriebskoeffizient wird tendenziell zu niedrig berechnet, was durch die geringe Körperauflösung begründet werden kann. Die Abweichung beträgt hier etwa 18% zu den Ergebnissen von Sohankar et al. (1997) und Davis et al. (1984).

In weiteren Tests wurde festgestellt, daß sich die Ergebnisse beim Übergang auf ein noch gröberes Gitter kaum verändern, so daß bei den dreidimensionalen Rechnungen ein gröberes Gitter zum Einsatz kommen kann. Da die zweidimensionale Situation gut erfaßt wird, ist zu erwarten, daß mit diesem Verfahren auch die dreidimensionale Strömung um den in Abbildung 6.5 gezeigten Zylinder qualitativ gut erfaßt werden kann.

6.2 Die dreidimensionale Zylinderumströmung ohne Magnetfeldeinfluß

Obwohl zwei- und dreidimensionale Wirbelinstabilitäten in Nachlaufströmungen die Wissenschaft seit vielen Jahren beschäftigen, stellt die Vorausberechnung der Strömung hinter stumpfen Körpern mit Hilfe der numerischen Simulation immer noch eine Herausforderung dar. In den letzten 10 Jahren ist die Betrachtung dreidimensionaler Aspekte von Nachlaufströmungen in den Vordergrund gerückt. In der Tat sind nahezu alle der Strömungen, die bisher numerisch oder analytisch als zweidimensional behandelt wurden, dreidimensionaler Natur. In einer der ersten dreidimensionalen numerischen Simulationen der Kármánschen Wirbelstraße von Karniadakis und Triantafyllou (1992) wird Morkovin (1964) mit der Aussage zitiert, *'two dimensional flows for all their computational and conceptual convenience seem to be part of a comfortable dream world'*.

Den verschiedenen Aspekten der dreidimensionalen Wirbeldynamik wurde in der Vergangenheit wenig Beachtung geschenkt. Die dreidimensionale Wirbelablösung hinter kreisförmigen Zylindern stellt durch neue experimentelle Techniken sowie der heute zur Verfügung stehenden Rechnerleistung ein in der jüngsten Zeit enorm gewachsenes Forschungsgebiet dar.

Die dreidimensionalen Aspekte der Wirbelablösung hinter quadratischen Zylindern wurden dagegen noch kaum behandelt. Im allgemeinen wird angenommen, daß das Verhalten ähnlich wie beim kreisförmigen Zylinder ist (Sohankar et al. 1997). Erste dreidimensionale numerische Simulationen von Sohankar (1998) bestätigen dies.

Aus diesem Grund werden in der Folge zunächst die bekannten Aspekte der dreidimensionalen Kreiszyylinderumströmung aufgeführt.

Aus experimentellen Untersuchungen ist schon lange bekannt, daß die zweidimensionale Wirbelstraße ab einer Reynoldszahl von etwa 150 in eine dreidimensionale Strömung übergeht. Die ersten umfassenden Messungen über einen weiten Bereich von Reynoldszahlen wurden von Roshko (1955) durchgeführt. Er definierte einen Übergangsbereich von $150 \lesssim Re \lesssim 300$ von einem "stabilen" zu einem "unregelmäßigen" Regime. In diesem Regime stellte er unregelmäßige Geschwindigkeitsüberhöhungen ("bursts") fest, die mit steigender Reynoldszahl immer stärker wurden. Die Ablösefrequenz der Wirbel vom Zylinder war schwierig zu bestimmen. Von Hama (1957) und Tritton (1959) wurde gezeigt, daß dies durch das Einsetzen einer dreidimensionalen Instabilität verursacht wird.

Zum konkreten Mechanismus der dreidimensionalen Instabilitäten stellt Bloor (1964) zwei mögliche Szenarien für den Transitionsbereich vor:

1. Die Anfachung einer zweidimensionalen Instabilität produziert Tollmien-Schlichting-Wellen, die durch kleine Störungen dreidimensional werden und schließlich zur Turbulenz führen.
2. Eine Verzerrung der Wirbel durch großskalige dreidimensionale Strukturen in der Strömung.

Fall eins tritt nur bei hohen Reynoldszahlen auf. Die vom Körper ablösende Grenzschicht (Scherschicht) wird turbulent, bevor sie in die ablösenden Wirbel eingerollt wird. Die Stabilität der ablösenden Scherschicht wurde von Prasad und Williamson (1997) untersucht.

Sie finden, daß das Einsetzen der Scherschichtinstabilität extrem von den Zylinderenden beeinflusst wird. Abhängig von parallel oder schräg ablösenden Wirbeln, was durch die Art der Zylinderenden beeinflusst werden kann, finden sie eine kritische Reynoldszahl von entweder $Re_c \approx 1200$ oder $Re_c \approx 2600$.

Fall zwei tritt bei niedrigeren Reynoldszahlen zwischen 200 und 400 auf. Bei der Wirbelbildung ist die Strömung laminar, die Transition zur Turbulenz findet stromab statt. Großräumige, niederfrequente Geschwindigkeitsfluktuationen im Nachlaufgebiet wurden zuerst von Roshko (1955) und Bloor (1964) beobachtet. Nach Williamson (1992) verursachen lokale Phasenverschiebungen der ablösenden Wirbel am Zylinder diesen Effekt. Die Phasenverschiebungen am Zylinder bilden größere, fleckenartige Strukturen im Strömungsgebiet, die von Williamson als 'vortex dislocations' bezeichnet werden. In der dreidimensionalen numerischen Simulation von Zhang, Noack und Eckelmann (1994) (siehe Abb. 6.6a,b,c) wird ein Prozeß der Wirbelanhaftung am Zylinder ('vortex-adhesion') als Ursache der niederfrequenten Geschwindigkeitsfluktuationen angegeben. Die Wirbelhaftpunkte am Zylinder sind in Abbildung 6.6a sehr gut zu sehen und können über die Spannweite des Zylinders wandern.

Ein weiteres Merkmal der dreidimensionalen Zylindernachlaufströmung ist die Bildung von rippenartigen Wirbeln ('rib vortices') (siehe Abb. 6.6b,c), die erst in den letzten Jahren durch experimentelle Strömungssichtbarmachung und numerische Simulation gezeigt werden konnten. Diese Phänomene werden im folgenden weiter erläutert.

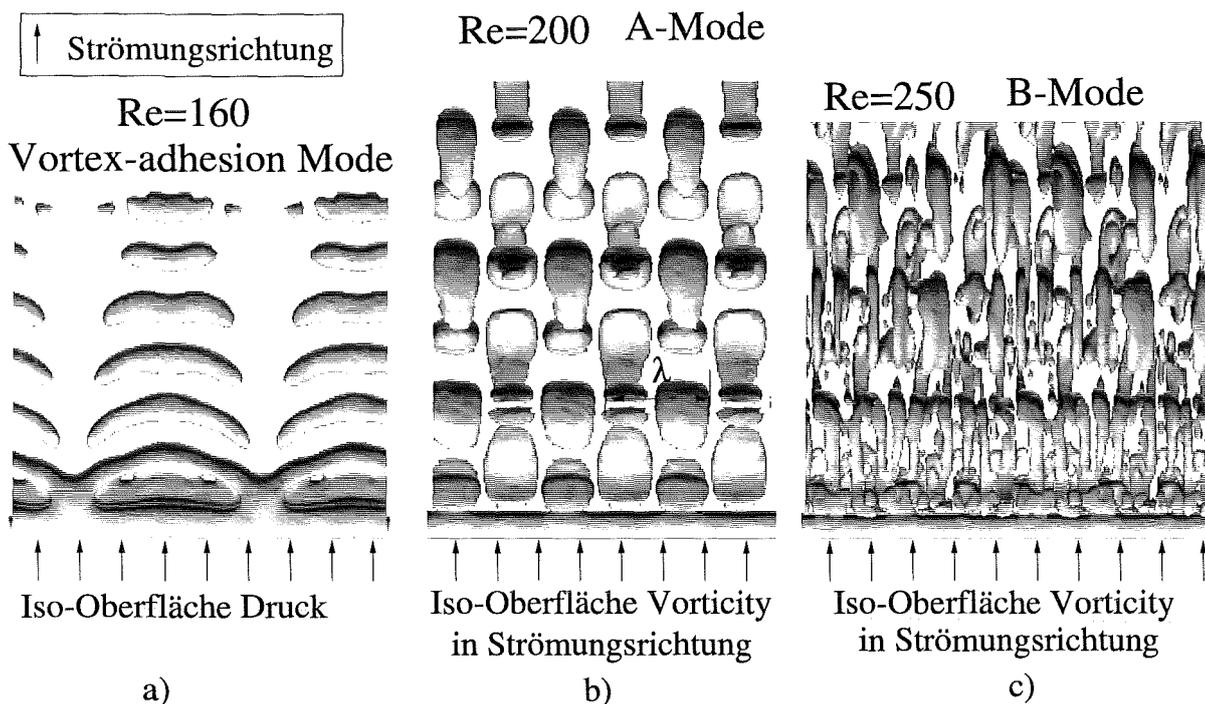


Abbildung 6.6: Verschiedene Formen der Wirbelablösung nach Zhang et al. (1994). Wellenlänge λ der Wirbel in Zylinderrichtung in Abbildung 6.6b.

Williamson (1988) beobachtet beim Übergang zur Dreidimensionalität zwei aufeinanderfolgende sprunghafte Änderungen der Nachlaufstruktur. Beide sind gekennzeichnet durch eine unstetige Änderung in der Strouhalzahl-Reynoldszahl Beziehung. Die erste Änderung bei

$170 \lesssim Re \lesssim 190$ ist verbunden mit der Bildung von Wirbel-Schleifen ('vortex-loops'), die er als 'A-Mode' bezeichnet (siehe Abb. 6.6b). Die zweite Änderung bei $\sim 230 \lesssim Re \lesssim 250$ verursacht kleinskaligere Wirbel in Strömungsrichtung, die als 'B-Mode' bezeichnet werden (siehe Abb. 6.6c). In diesem Bereich findet nach Williamson (1996a) ein Übergang von der A-Mode auf die B-Mode statt. Dies deutet darauf hin, daß sich beide Moden zeitlich abwechseln. Die charakteristische Wellenlänge in Längsrichtung des Zylinders der kleinskaligeren Wirbel (B-Mode) war etwa ein Zylinderdurchmesser, die der A-Mode etwa 4 Zylinderdurchmesser.

Bei der Ermittlung dieser Wellenlängen traten bei den verschiedenen experimentellen und theoretischen Arbeiten erhebliche Diskrepanzen auf. So finden Noack, König und Eckelmann (1993) in einer dreidimensionalen Stabilitätsanalyse eine Wellenlänge von $\lambda \approx 1.8D$ als die am stärksten angefachte. Ein ähnlicher Wert wird von Karniadakis und Triantafyllou (1992) angegeben, $\lambda \approx 1.6D$. Die Ursache dieser Unterschiede konnte noch nicht geklärt werden.

Ein Merkmal, das die beiden auftretenden Moden unterscheidet, ist die unterschiedliche Anordnung der Rippen-Wirbel 'in' der Wirbelstraße. Es treten bestimmte Symmetrien in der A- und B-Mode auf, die in der folgenden Abbildung 6.7 gezeigt werden.

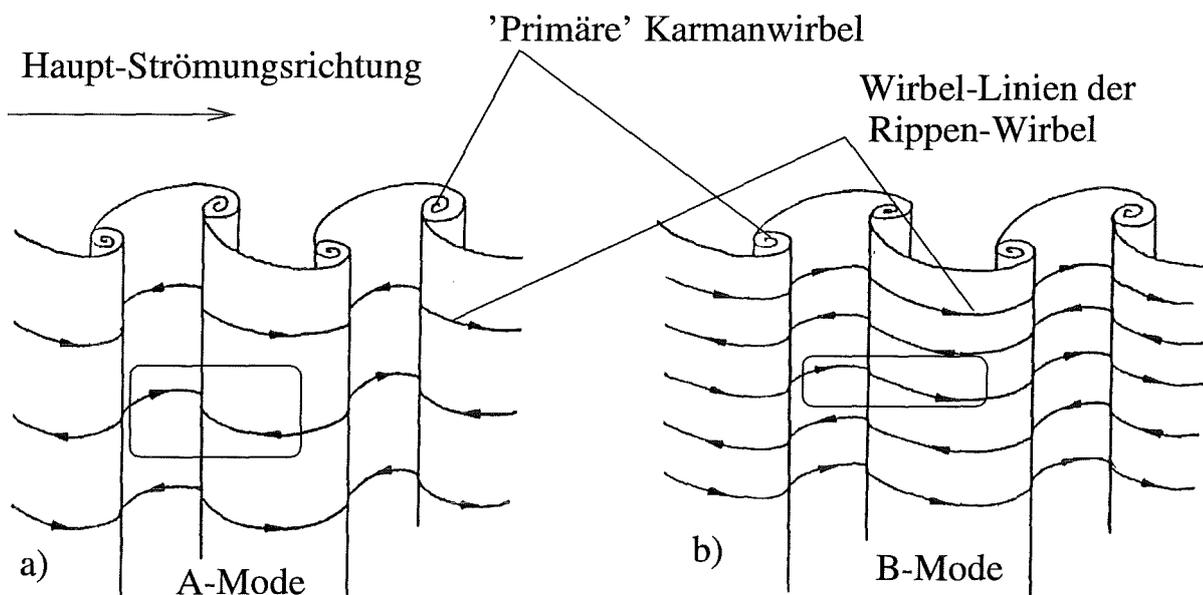


Abbildung 6.7: Symmetriediagramme der Wirbelstraße nach Williamson (1996)(Prinzipiskizze).

Betrachtet man den eingekreisten Bereich, so erkennt man, daß beim A-Mode Rippen-Wirbel mit *unterschiedlicher* Drehrichtung hintereinander produziert werden. Beim B-Mode werden Wirbel gleicher Drehrichtung erzeugt. Überraschenderweise ist auch der Ursprung der Rippen-Wirbel noch nicht vollständig geklärt. Während von Zhang et al. (1994) die Rippen-Wirbel als Manifestation von Görtler-Wirbeln gesehen werden, wird von Williamson (1996a) ein Prozeß der Wirbelstreckung in Strömungsrichtung vorgeschlagen.

Durch die dreidimensionale direkte numerische Simulation dieser Strömungsform konnte viel zum Verständnis der Wirbeldynamik im Transitionsbereich ($160 \lesssim Re \lesssim 300$) beigetragen werden. Ein Teil dieses Fortschritts liegt auch in den zunehmenden Möglichkeiten

bei der Visualisierung der bei numerischen Simulationen anfallenden riesigen Datenmengen. Das Gebiet der Visualisierung wissenschaftlicher Daten wird zunehmend zu einem eigenen Forschungsgebiet.

Unter den ersten, die sich an der dreidimensionalen Simulation der Kármánschen Wirbelstraße versuchten, waren wie erwähnt, Karniadakis und Triantafyllou (1992). Sie verwenden eine gemischte Spektral/Spektral-Element-Methode und können zeigen, daß die dreidimensionale Instabilität die Folge einer sekundären Instabilität der zweidimensionalen Wirbelstraße ist. Die sekundäre Instabilität wird bei $Re \approx 200$ gefunden. In Zhang et al. (1994) wird ein Finite-Differenzen Verfahren gewählt. Sie finden in ihren Simulationen die 'vortex adhesion Mode' als Ursache für die niederfrequenten Oszillationen, die von Williamson (1989) als 'vortex dislocations' bezeichnet werden. Sie geben als Ursache der Rippen-Wirbel eine Görtler-Instabilität an. In Henderson (1997) wird ebenfalls eine Spektral-Element-Methode verwendet. Er beschreibt alle Strömungszustände, die im Reynoldszahlenbereich zwischen $180 \lesssim Re \lesssim 270$ auftreten können, wobei bei den Reynoldszahlen $Re = 220$ und $Re = 265$ für große Verhältnisse von Zylinderlänge zu Zylinderdurchmesser A- und B-Mode gemeinsam auftreten können und die Strömung räumlich und zeitlich ungeordnet ist.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß durch experimentelle und numerische Arbeiten bestätigt werden konnte, daß die Transition zur Turbulenz der Kármánschen Wirbelstraße grundsätzlich in drei Regime einteilbar ist:

1. Transition zur turbulenten Nachlaufströmung ($\sim 190 \lesssim Re \lesssim 1000$)
2. Transition zur turbulenten Scherschicht ($\sim 1000 \lesssim Re \lesssim 200000$)
3. Transition zur turbulenten Grenzschicht ($Re \sim 5 \cdot 10^5$)

Obwohl dieses Gebiet über die letzten zehn Jahre intensiv bearbeitet worden ist, sind noch viele Fragen offen (Williamson 1996b). In Noack (1998a) und Noack (1998b) findet sich eine Zusammenfassung der noch ungelösten Fragen im laminaren und turbulenten Bereich der Strömung um den Kreiszyylinder.

6.2.1 Dreidimensionale Testrechnungen

In der vorliegenden Arbeit dient das Ergebnis einer dreidimensionalen numerischen Simulation der hydrodynamischen Umströmung eines quadratischen Zylinders als Ausgangslösung für die Behandlung des Falles mit einem zusätzlich angelegten magnetischen Feld.

Da dreidimensionale numerische Simulationen zur Umströmung eines quadratischen Zylinders in der Literatur zum Zeitpunkt der Anfertigung dieser Arbeit noch nicht vorlagen, wurden die Erkenntnisse aus den bisherigen Simulationen von Kreiszyindern als Anhaltswerte für die Wahl der Gitterauflösung benützt. Neueste dreidimensionale Berechnungen zum quadratischen Zylinder von Sohankar (1998) bestätigen die Wahl der Gitterauflösung in der dritten Dimension. Es wurde das in Abbildung 6.8 skizzierte Rechengebiet verwendet. Die z-Position des quadratischen Zylinders kann aus der zweidimensionalen Anordnung (siehe Abb. 6.1) entnommen werden. In Zhang et al. (1994) wurde eine systematische Gitterverfeinerungsstudie durchgeführt. Sie finden, daß sieben Gitterpunkte ausreichen sollten, um eine Wellenlänge der Wirbel in Spannweitenrichtung des Zylinders aufzulösen.

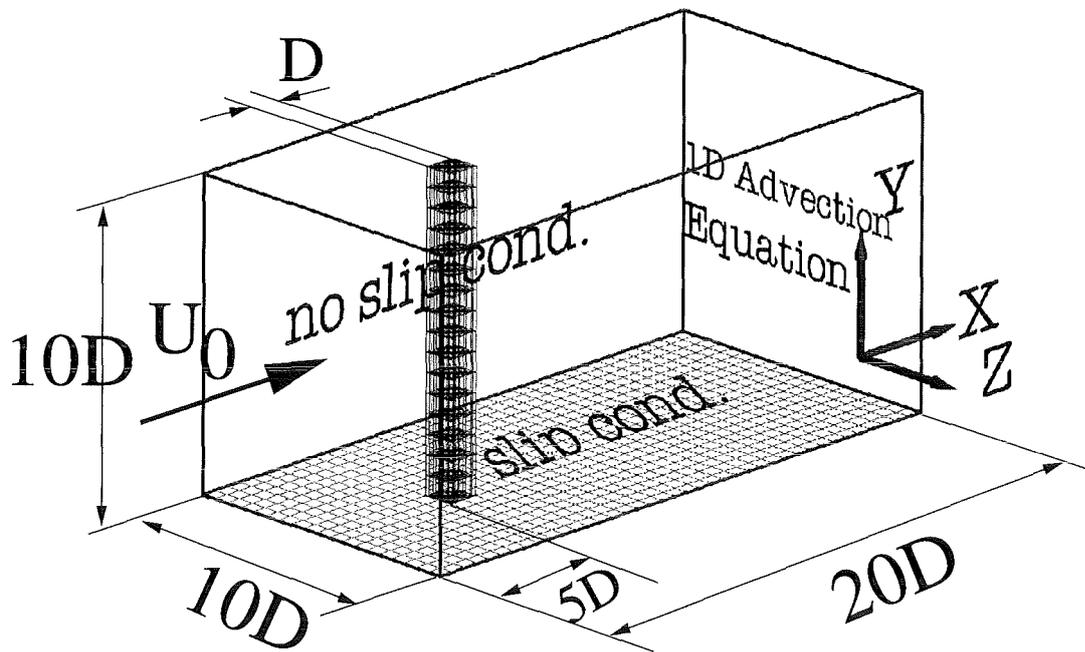


Abbildung 6.8: Abmessungen und Randbedingungen des Gitters.

Die erwartete Wellenlänge der A-Mode von etwa vier Zylinderdurchmessern ist bezüglich der Gitterauflösung unkritisch. Will man jedoch auch die B-Mode erfassen, so sind etwa 70 bis 80 Gitterpunkte in Spannweitenrichtung notwendig. Dies führt bei einer Auflösung der zweidimensionalen Strömung von 200×100 Gitterpunkten und einer Auflösung in y -Richtung von 80 Punkten zu $1.6 \cdot 10^6$ Gitterpunkten. Bei diesem Gitter kann nicht mehr erwartet werden, daß die Strömungsvorgänge direkt am Zylinder genau abgebildet werden. Da die sekundären Instabilitäten der wegschwimmenden Wirbel bei Reynoldszahlen von 200 bis 250 nicht direkt in der Grenzschicht am Zylinder auftreten, kann dennoch erwartet werden, daß die dreidimensionale Wirbeldynamik stromab richtig abgebildet wird. Für das oben gezeigte Gitter ergibt sich bei einer Reynoldszahl von 200 nach einer gewissen Zeit selbsterregt eine zweidimensionale Wirbelablösung. Die erwartete sekundäre Instabilität mit Bildung der dreidimensionalen Strukturen tritt ebenfalls selbsterregt nach einer gewissen Wartezeit ein.

Für die Randbedingungen in Zylinder-Richtung (Y -Richtung) wurde in vielen hydrodynamischen numerischen Simulationen eine periodische Randbedingung gewählt (Zhang et al. (1994), Sohankar (1998) u.a.). Diese Annahme unterstellt eine parallele Ablösung der Wirbel zur Zylinderachse. In Experimenten wird jedoch weit häufiger eine schräge Ablösung der Wirbel oder eine Wirbelablösung ohne periodischen Charakter in Spannweiten-Richtung beobachtet (König et al. (1992)). Aus diesem Grund wurden in der vorliegenden Arbeit, wie auch in der numerischen Simulation von Persillon und Braza (1998), homogene Neumann-Randbedingungen ('slip condition') in Spannweiten-Richtung verwendet. Die übrigen Randbedingungen entsprechen der zweidimensionalen Anordnung (siehe Abb. 6.1). Dreidimensionale instationäre Prozesse müssen zumindest aus mehreren Perspektiven betrachtet werden, damit man die räumliche Struktur erkennen und optische Täuschungen

ausschließen kann. Bei der Darstellung auf Papier ist es deshalb notwendig, einen dreidimensionalen Vorgang zumindest aus zwei räumlich unterschiedlichen Perspektiven zu zeigen. Idealerweise geschieht die Darstellung durch Visualisierungssysteme, mit denen man am Computerbildschirm die Darstellung im Raum drehen kann und gleichzeitig instationäre Prozesse darstellen kann. Die moderne Visualisierung-Software (z.B. Data-Explorer (IBM) oder AVS (Advanced Visual Systems INC.) u.a.) ist in der Lage Parallelrechner zu nutzen und so auch sehr große Datenmengen zu verarbeiten. Es ist möglich, beliebig komplexe Darstellungen aus einfachen Grundfunktionen aufzubauen. Dadurch wird ein systematisches Vorgehen beim Aufbau einer Darstellung ermöglicht. Die Verwendung von speziellen Graphikbeschleunigern ('Hardware-Renderer') erleichtert die Erstellung von Animationen auf dem Bildschirm. Bei der Darstellung durch bewegte Bilder können vom Beobachter sehr viele Informationen gleichzeitig aufgenommen werden. Man gewinnt durch computeranimierte Filme einen sehr guten Eindruck von der Natur einer Strömung.

Ist die Strömung wirbelbehaftet, so empfiehlt es sich, eine Darstellungsweise für Wirbel zu verwenden. In der vorliegenden Arbeit wurde zur Darstellung von Wirbeln Oberflächen gleicher Vorticity verwendet. Die Darstellung von Vorticity-Oberflächen oder Schnitt-Ebenen hat sich in den verschiedenen Veröffentlichungen zur numerischen Simulation der dreidimensionalen Zylinderumströmung durchgesetzt. Dabei sind die Werte der Vorticity in den Veröffentlichungen durch die verschiedene Skalierung unterschiedlich, aber fest. In der vorliegenden Arbeit wurden für alle Darstellungen einheitlich die Werte $\omega_y = \pm 6$ bzw. $\omega_x = \pm 3$ für die jeweilige Vorticitykomponente gewählt. Um einen Eindruck zu bekommen, wie stark sich die Darstellungen für andere Werte der Vorticity unterscheiden, können die Abbildungen 6.9, 6.10, 6.11 miteinander verglichen werden. Wie vor allem aus Abbildung 6.11 erkennbar, sollten die dargestellten Werte so gewählt werden, daß die Strömungsstrukturen noch abgebildet werden können. Die sich entwickelnden Grenzschichten an den Rändern $z = \pm 5$ werden nicht gezeigt.

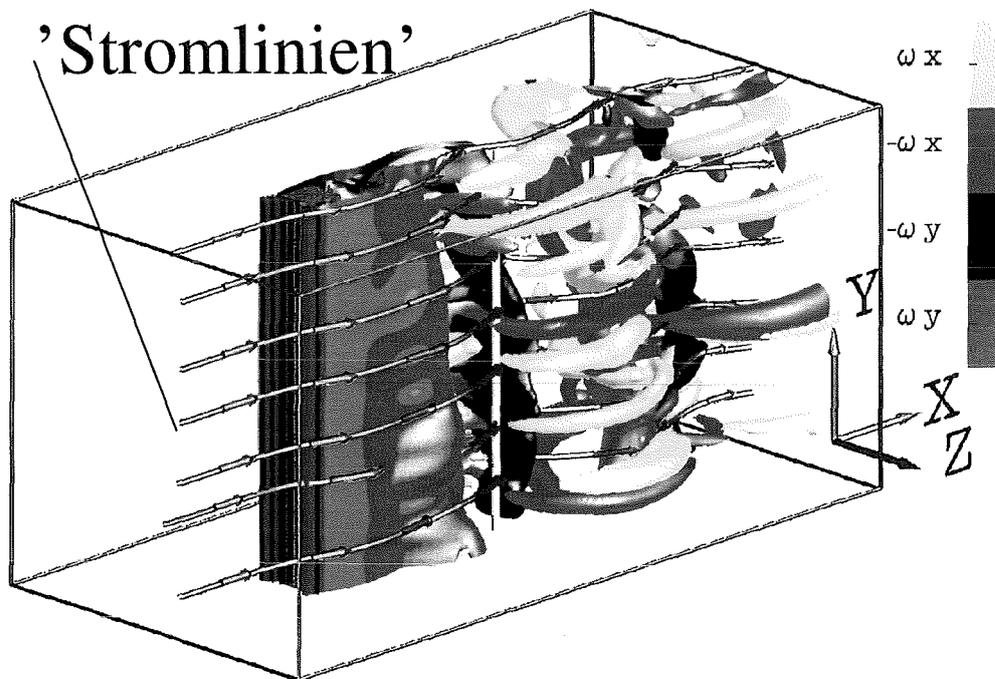


Abbildung 6.9: Isovorticity-Oberflächen Plot der dreidimensionalen Umströmung eines quadratischen Zylinders $Re = 200$; $\omega_y = \pm 6$; $\omega_x = \pm 3$.

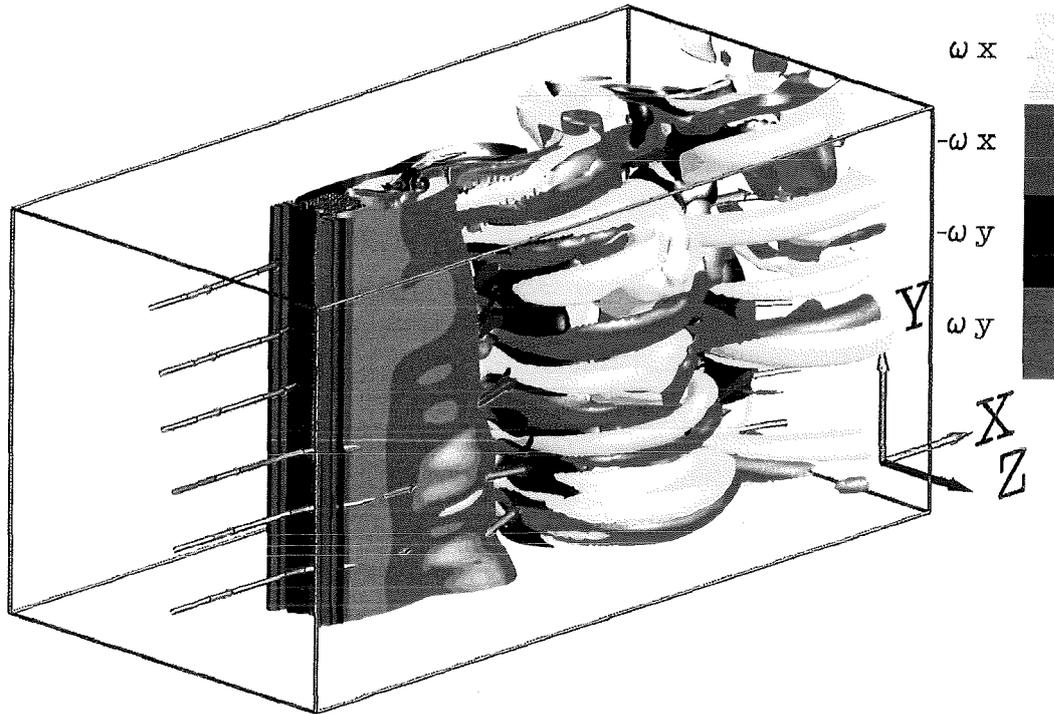


Abbildung 6.10: Isovorticity-Oberflächen Plot der dreidimensionalen Umströmung eines quadratischen Zylinders $Re = 200$; $\omega_y = \pm 3$; $\omega_x = \pm 1.5$.

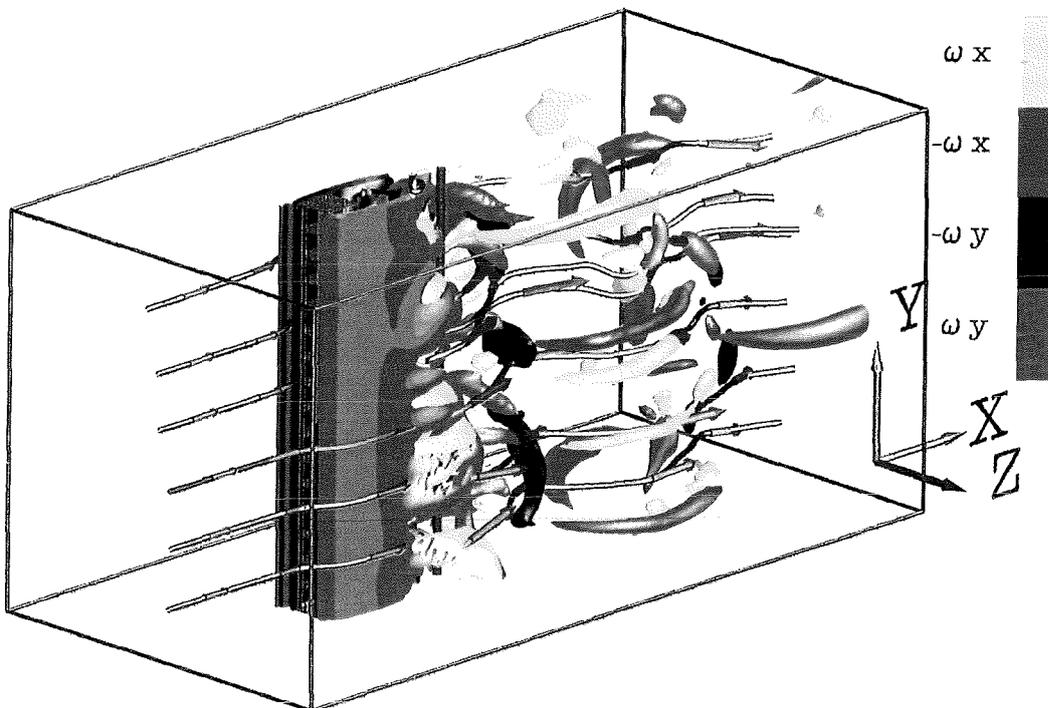


Abbildung 6.11: Isovorticity-Oberflächen Plot der dreidimensionalen Umströmung eines quadratischen Zylinders $Re = 200$; $\omega_y = \pm 12$; $\omega_x = \pm 6$.

Man erkennt in allen Bildern die parallel zum Zylinder stehenden Kármán-Wirbel sowie

die senkrecht zum Zylinder stehenden Rippen-Wirbel. Die Rippen-Wirbel besitzen eine ähnliche Struktur wie die bei der Wirbelstraße des Kreiszylinders, sie treten jedoch nicht in so geordneter Weise auf, wie dies beim Kreiszylinder der Fall ist. Die Wellenlänge in Spannweitenrichtung der Rippen-Wirbel beträgt etwa $\sim 2D - 3D$. Dies kann in Abbildung 6.12 anhand von Vorticity-Schnittebenen im Nachlauf des Zylinders etwas besser erkannt werden.

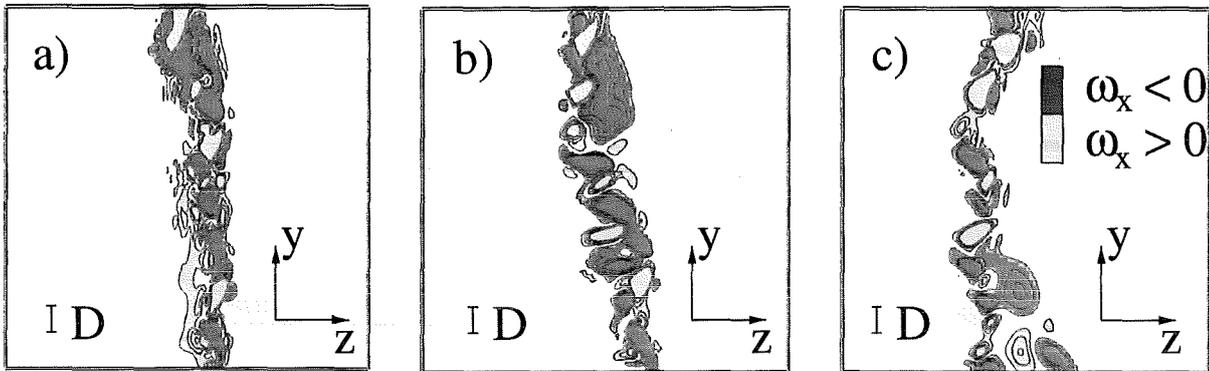


Abbildung 6.12: Isovorticity-Schnittebenen für $\omega_x = \pm 1, 2, 3, 4$ bei $x = 1.6(a), 1.8(b), 2.0(c)$.

In den Schnittbildern 6.12 a), b), c) ist zu erkennen, daß die Rippen-Wirbel nicht regelmäßig in Spannweitenrichtung angeordnet sind und sich stromab verändern. Dies macht nur eine ungefähre Bestimmung der Wellenlänge möglich. In der Regel werden die Werte aus den Schnittebenen 2–4 Zylinderdurchmesser hinter dem Zylinder zur Beurteilung herangezogen (Sohankar 1998). Diese sind in Abbildung 6.12 dargestellt. Die Wellenlänge von $\sim 2 - 3D$ und die unregelmäßige Verteilung der Wirbel wurden auch in der numerischen Simulation von Sohankar (1998) für eine Zylinderlänge von 10 gefunden. Sohankar (1998) stellt für diesen Fall eine Ähnlichkeit zur A-Mode Ablösung fest.

Eine Ursache für die Unregelmäßigkeit des Strömungsfeldes könnte, in Analogie zum Kreiszyylinder, ein Wettbewerb zwischen verschiedenen Moden sein. In Barkley und Henderson (1996) werden für den Kreiszyylinder mehrere instabile A-Mode Wellenlängen oberhalb der kritischen Reynoldszahl von 190 gefunden. Ist die Länge des Zylinders größer als die größte instabile Wellenlänge, so wird erwartet, daß sich die verschiedenen A-Moden zeitlich und räumlich abwechseln. Dieser Vorgang wird als Wettbewerb zwischen den Moden beschrieben und läßt sehr unregelmäßige Strömungsmuster erwarten.

In der vorliegenden Arbeit können bei der Reynoldszahl 200 Aspekte einer B-Mode Ablösung gefunden werden, obwohl eine eindeutige Entscheidung für eine A- oder B-Mode nicht gefällt werden kann. Als Entscheidungskriterium kann Abbildung 6.7 herangezogen werden. Eine Darstellung der Vorticity-Komponente in Strömungsrichtung in Abbildung 6.14 zeigt durchgehende Wirbelröhren einer Farbe, d.h. gleichem Drehsinn. Es liegt hier also der Fall wie in Abbildung 6.7b vor. Die größere spannweite Wellenlänge im Vergleich zur B-Mode bei einem Kreiszyylinder erklärt sich aus der früheren Ablösung der Grenzschicht und der größeren effektiven Nachlaufbreite des quadratischen Zylinders. Dadurch entstehen Kármán-Wirbel, die deutlich größer als die Breite des Zylinders sind. Da die Rippen-Wirbel mit dem Durchmesser der Kármán-Wirbel skalieren, sind die Wirbel der B-Mode deutlich größer als beim Kreiszyylinder.

In der folgenden Abbildung 6.13 läßt sich die rippenartige Struktur der B-Mode-Wirbel sehr gut erkennen.

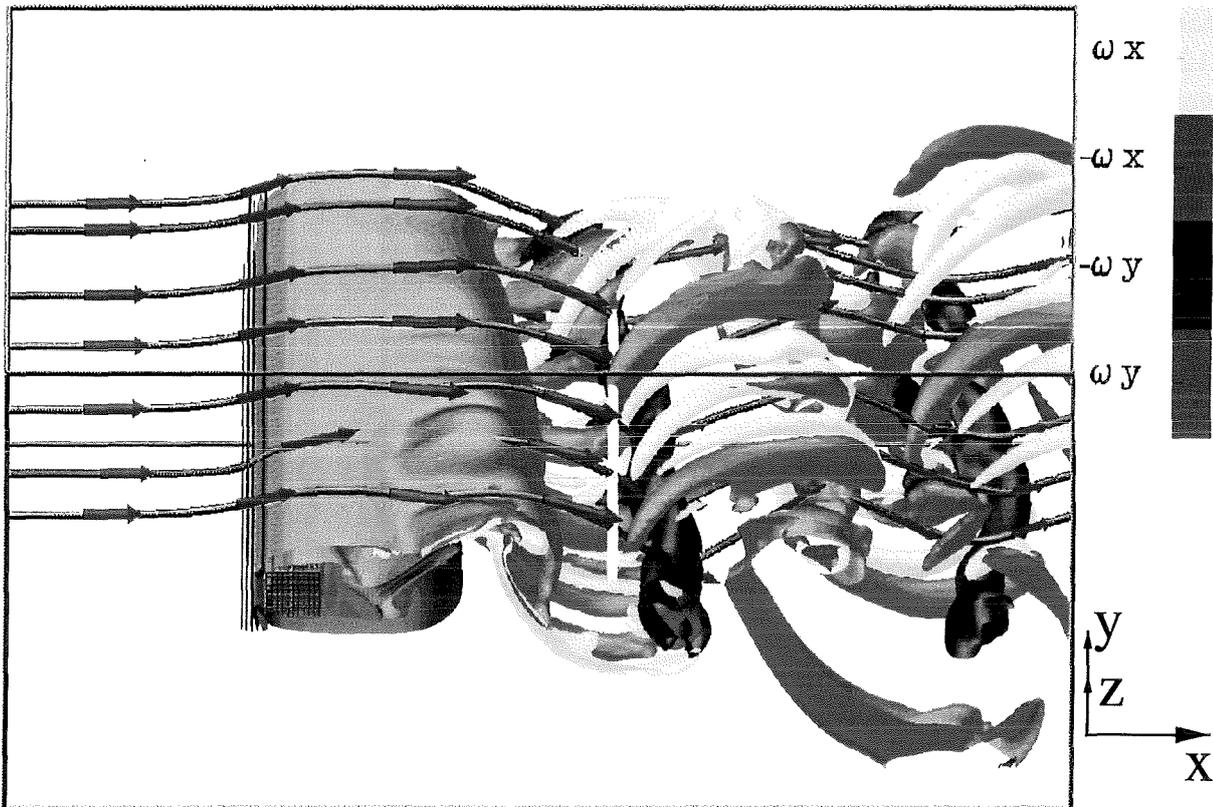


Abbildung 6.13: Isovorticity-Oberflächen Plot der dreidimensionalen Umströmung eines quadratischen Zylinders bei $Re = 200$; $\omega_y = \pm 6$; $\omega_x = \pm 3$, gedrehte Darstellung.

Man erkennt in Abbildung 6.13 sehr gut, daß die dreidimensionalen Strukturen nicht unmittelbar am Zylinder entstehen, sondern im Nachlaufbereich des Zylinders. Die Rippen-Wirbel entwickeln sich zwischen den primären, wegschwimmenden Kármán-Wirbeln.

Eine Untersuchung der Geschwindigkeitsverteilung in der Wirbelbildungszone nahe des Zylinders zeigt, daß sich lokal eine konkave Scherschicht ausbildet, die einer Cvette-Strömung im Ringspalt oder einer Grenzschicht entlang einer konkaven Wand ähnlich ist. Somit können lokal Effekte ähnlich einer Taylor- oder Görtler-Instabilität erwartet werden, wenn die hierfür gültigen Stabilitätslimits überschritten werden.

Der analoge Erklärungsansatz zur Bildung der Rippen-Wirbel beim Kreiszyylinder wird in Zhang et al. (1994) ausführlich erläutert.

Die Entwicklung einer konkaven Scherschicht im Nachlaufgebiet findet sowohl beim Kreiszyylinder als auch beim quadratischen Zylinder statt. Aufgrund dieser Ähnlichkeit wird auch von (Sohankar 1998) vermutet, daß die Rippen-Wirbel beim quadratischen Zylinder durch denselben Effekt verursacht werden, wie beim Kreiszyylinder.

Die folgende Abbildung 6.14 zeigt die Rippen-Wirbel ohne die primären Kármán-Wirbel.

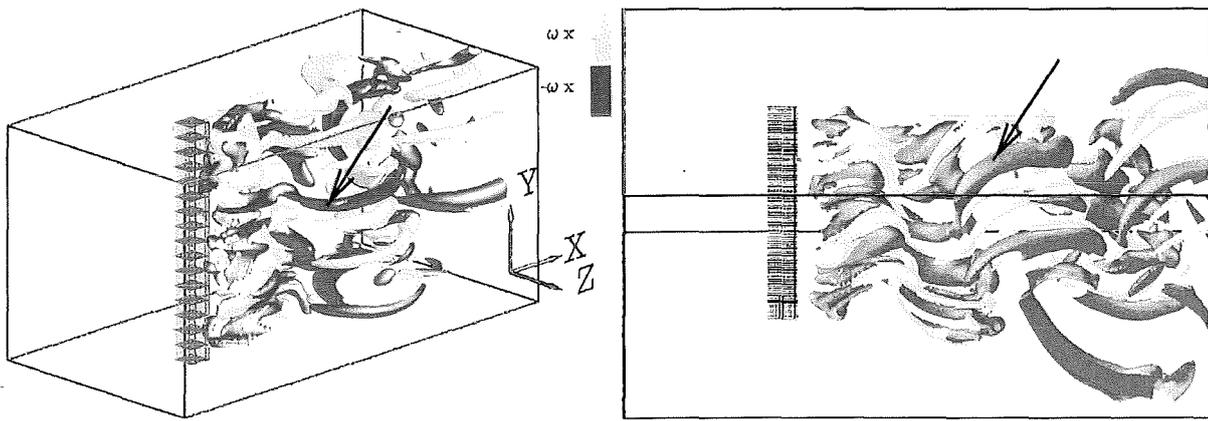


Abbildung 6.14: Isovorticity-Oberflächen Plot der dreidimensionalen Umströmung eines quadratischen Zylinders aus zwei verschiedenen Blickrichtungen bei $Re = 200; \omega_x = \pm 3$.

Man erkennt, daß die B-Mode-Wirbel erst in einem gewissen Abstand zum Zylinder entstehen. Untersucht man die Verläufe des Auftriebs- und Widerstandskoeffizienten in Abbildung 6.15, so findet man die Stelle des Einsetzens der Dreidimensionalität anhand der Amplituden Modulation beider Werte.

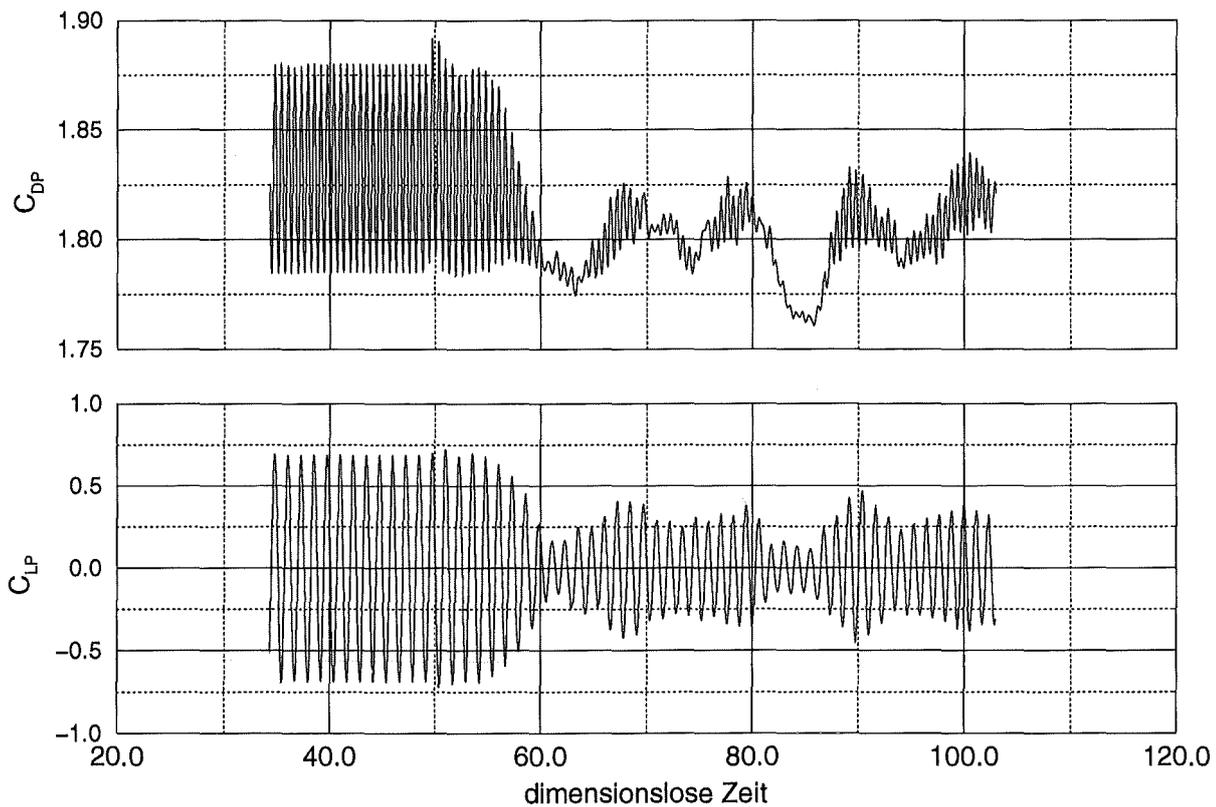


Abbildung 6.15: Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte beim Übergang zur dreidimensionalen Strömung bei $Re = 200$.

An einer bestimmten Stelle bei $t \approx 60$ brechen Auftriebs und Widerstandsbeiwert plötzlich ein und zeigen im weiteren Verlauf eine starke Amplitudenmodulation. Betrachtet man

die y-Komponente der Geschwindigkeit im Nachlaufbereich des Zylinders an einem festen Punkt (siehe Abb. 6.16), so stellt man fest, daß diese Geschwindigkeitskomponente zeitgleich mit dem Einbruch der Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte zu oszillieren beginnt und damit das Einsetzen der dreidimensionalen Strömung markiert. Die Stelle befindet sich ein Zylinderdurchmesser hinter dem Zylinder in der Mitte des Rechengebiets.

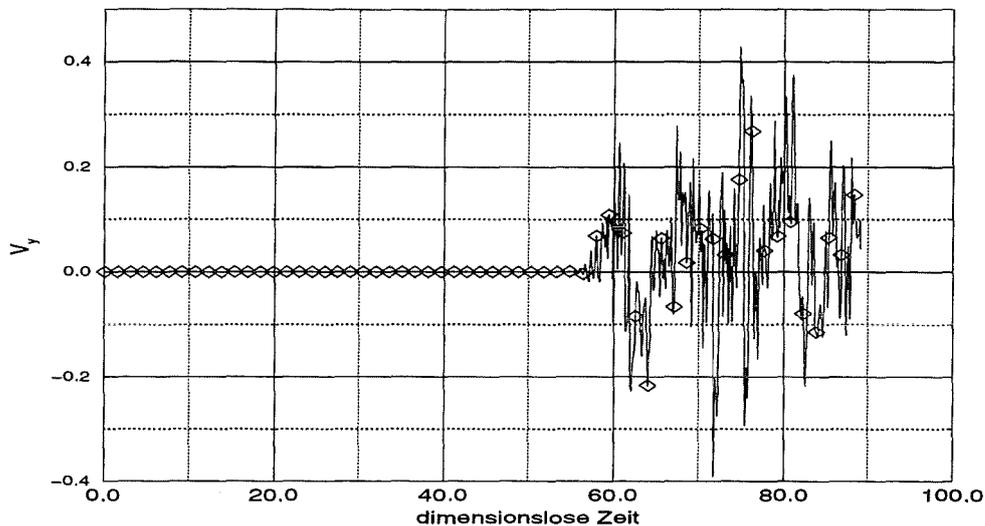
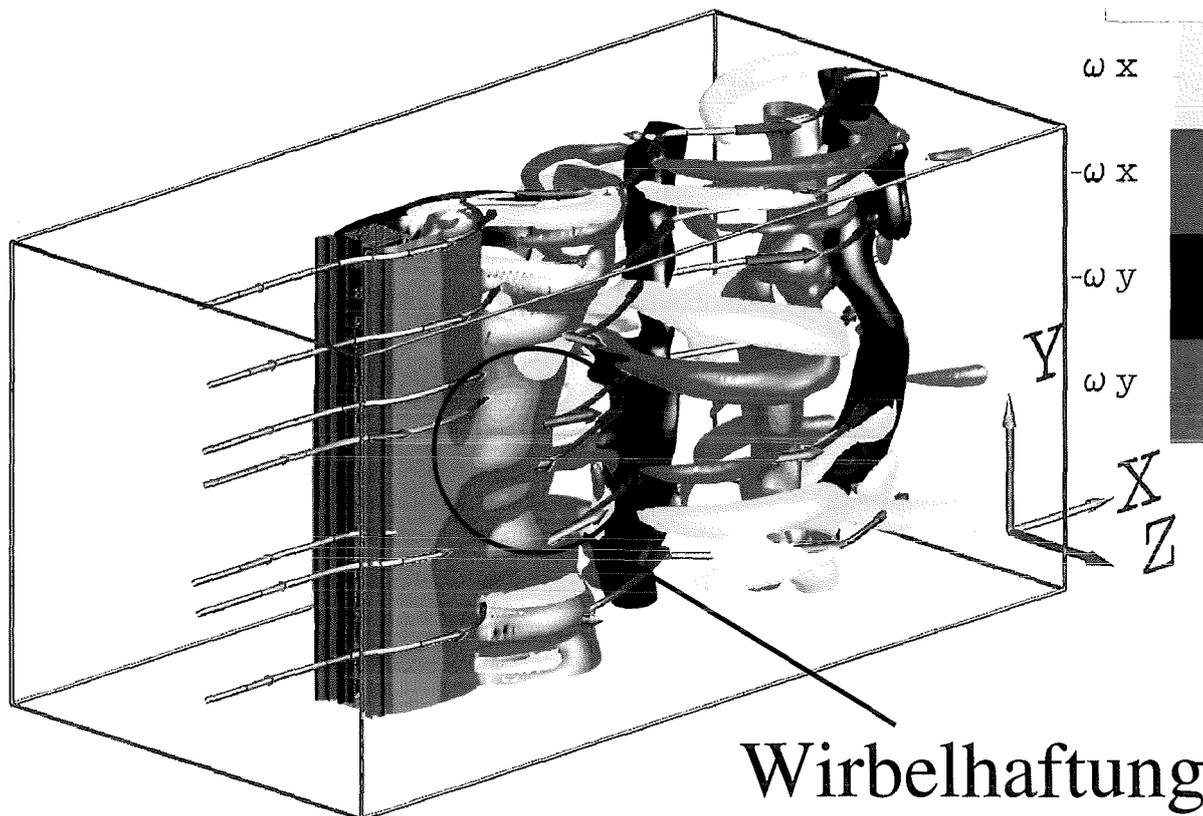


Abbildung 6.16: Geschwindigkeit v_y an einer Stelle im Nachlaufgebiet des Zylinders bei $Re=200$.

Der unregelmäßige Verlauf des Auftriebs- und Widerstandsbeiwerts nach dem Einsetzen der dreidimensionalen Strömung wird auch bei Kreiszyklindern bei Reynoldszahlen um 200 beobachtet (Williamson 1996a). Die dreidimensionale numerische Simulation am quadratischen Zylinder von Sohankar (1998) zeigt das gleiche Verhalten.

Dieser Vorgang kann mit einem beginnenden 'Vortex-adhesion mode' erklärt werden, der die Wirbel lokal einschnürt und so die effektive Nachlaufbreite verringert. Die Amplitude des Auftriebsbeiwertes wird dadurch kleiner. Solche Stellen werden auch als Haftpunkte bezeichnet, an denen die Kármánwirbel vorübergehend am Zylinder haften (siehe auch Abb. 6.6a). Williamson verwendet den Ausdruck 'vortex dislocation' für den gleichen Sachverhalt. Die folgende Abbildung 6.17 zeigt andeutungsweise den Vorgang der Wirbelhaftung.



Wirbelhaftung

Abbildung 6.17: Beginnender Wirbelhaft-Mode mit lokaler Einschnürung der primären Kármán-Wirbel, $Re = 200$; $\omega_y = \pm 6$; $\omega_x = \pm 3$.

Die Wirbelablösung wird an dieser Stelle durch das Haften des Wirbels am Zylinder temporär unterdrückt. Dadurch wird die effektive Nachlaufbreite verringert, was wiederum den Auftriebs- und Widerstandsbeiwert verringert. Haftpunkte können während der Simulationszeit entlang des Zylinders wandern. Dies kann für den zeitlich unregelmäßigen Auftriebs- und Widerstandsverlauf verantwortlich sein.

Um eine weitere Startlösung für die Rechnung mit eingeschaltetem Magnetfeld zu bekommen, wurde eine Rechnung bei einer Reynoldszahl von $Re = 250$ durchgeführt. Das Gitter wurde auf $250 \times 80 \times 125 = 2.5 \cdot 10^6$ Gitterpunkte verfeinert. Das Ergebnis wird ebenfalls in Form einer Isovorticity-Oberflächen Darstellung gezeigt.

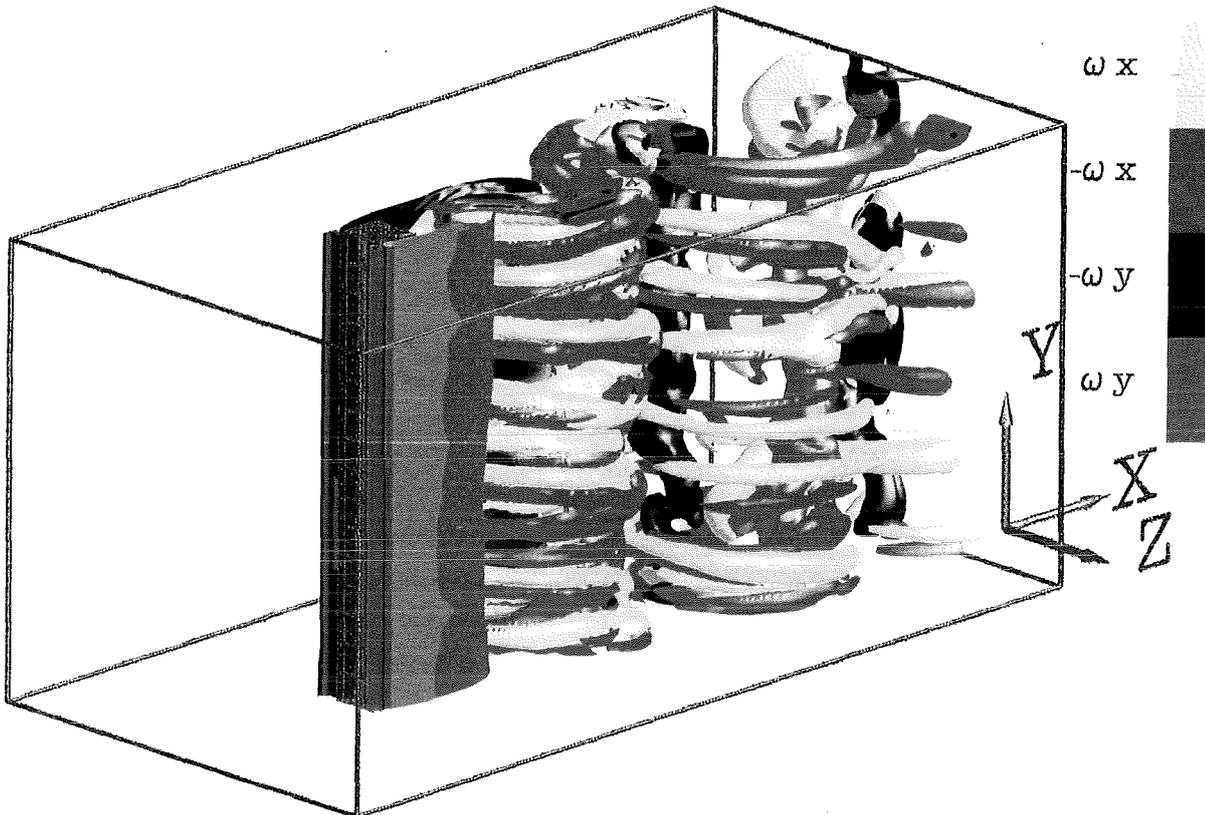


Abbildung 6.18: B-Mode Wirbelablösung bei $Re = 250; \omega_y = \pm 6; \omega_x = \pm 3$.

Man erkennt in Abbildung 6.18, daß der Abstand der Rippen-Wirbel kleiner geworden ist. Die Wellenlänge λ der Wirbel in Zylinderrichtung beträgt jetzt etwa $\sim 1D$. Das gesamte Strömungsmuster ist erheblich gleichmäßiger als bei $Re = 200$. Wirbelanhaftungen treten nicht mehr auf.

Die gedrehte Abbildung 6.19 läßt gut erkennen, daß die Bildungszone der Rippen-Wirbel zwischen den primären Kármán-Wirbeln liegt. Dies bestätigen auch die Bilder der Vorticity in Strömungsrichtung (siehe Abb. 6.20).

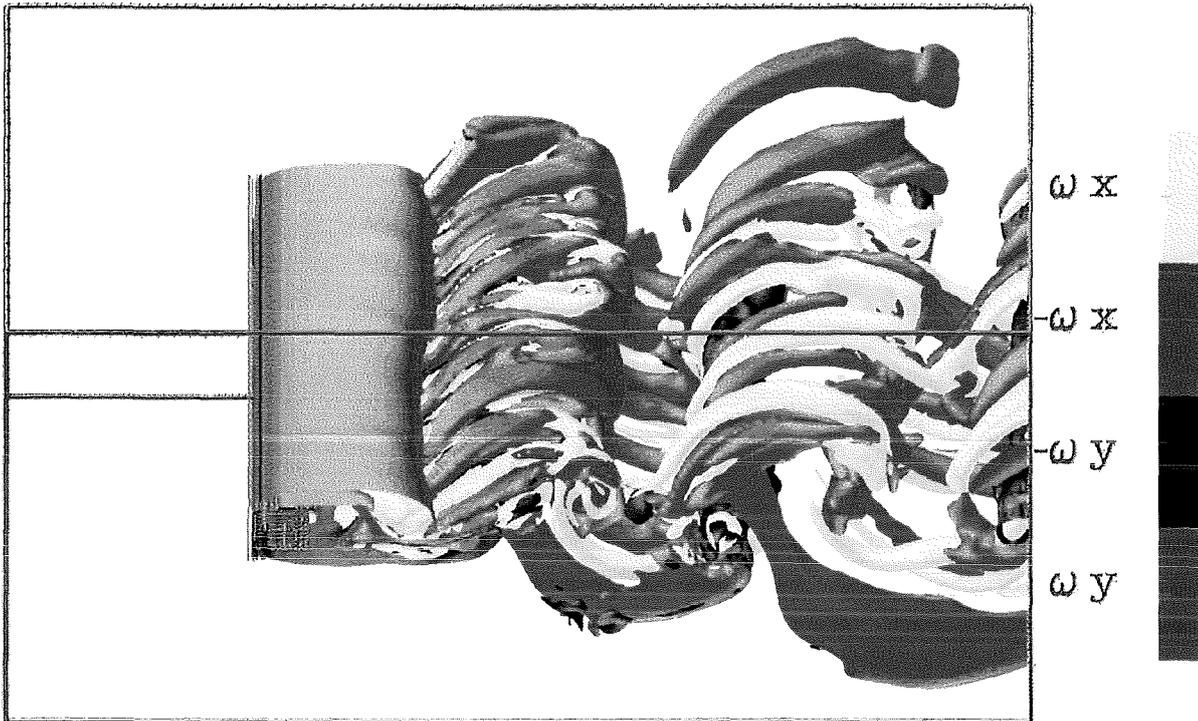


Abbildung 6.19: B-Mode Wirbelablösung bei $Re = 250; \omega_y = \pm 6; \omega_x = \pm 3$, gedrehte Darstellung.

Die folgende Darstellung zeigt die x-Komponente der Vorticity in Strömungsrichtung. Vergleicht man dies mit den Bildern vom B-Mode von Zhang et al. (1994), Abbildung 6.6c, so erkennt man eine starke Ähnlichkeit zum B-Mode der Wirbelablösung am Kreiszyylinder.

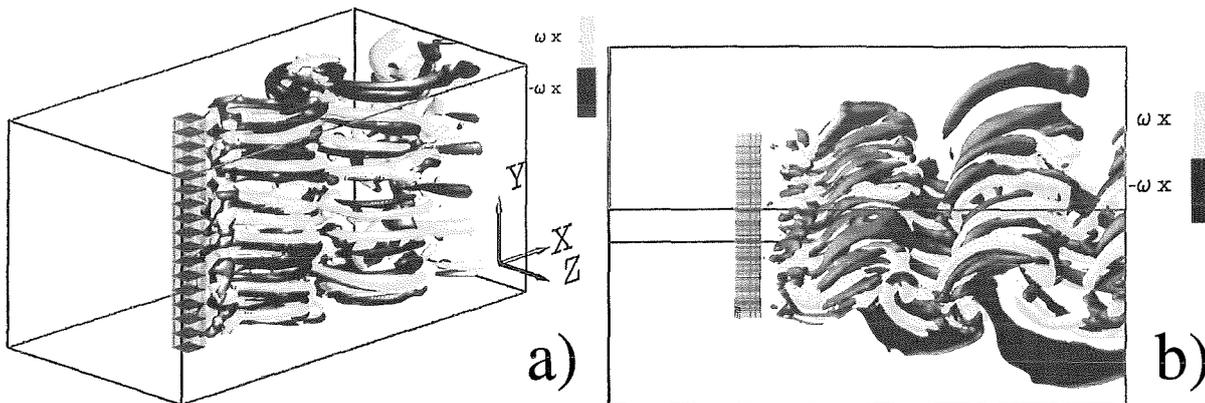


Abbildung 6.20: B-Mode Wirbelablösung bei $Re = 250; \omega_x = \pm 3$.

Betrachtet man nur die y-Komponente der Vorticity in Abbildung 6.21, so erkennt man, daß aus den primären Kármán-Wirbeln senkrecht fingerartige Strukturen herausragen (rote Pfeile, rechts). Die sekundären Wirbel hinterlassen Abdrücke auf den primären Wirbeln (schwarze Pfeile, links). Dieser Vorgang wird ebenfalls beim Kreiszyylinder beobachtet.

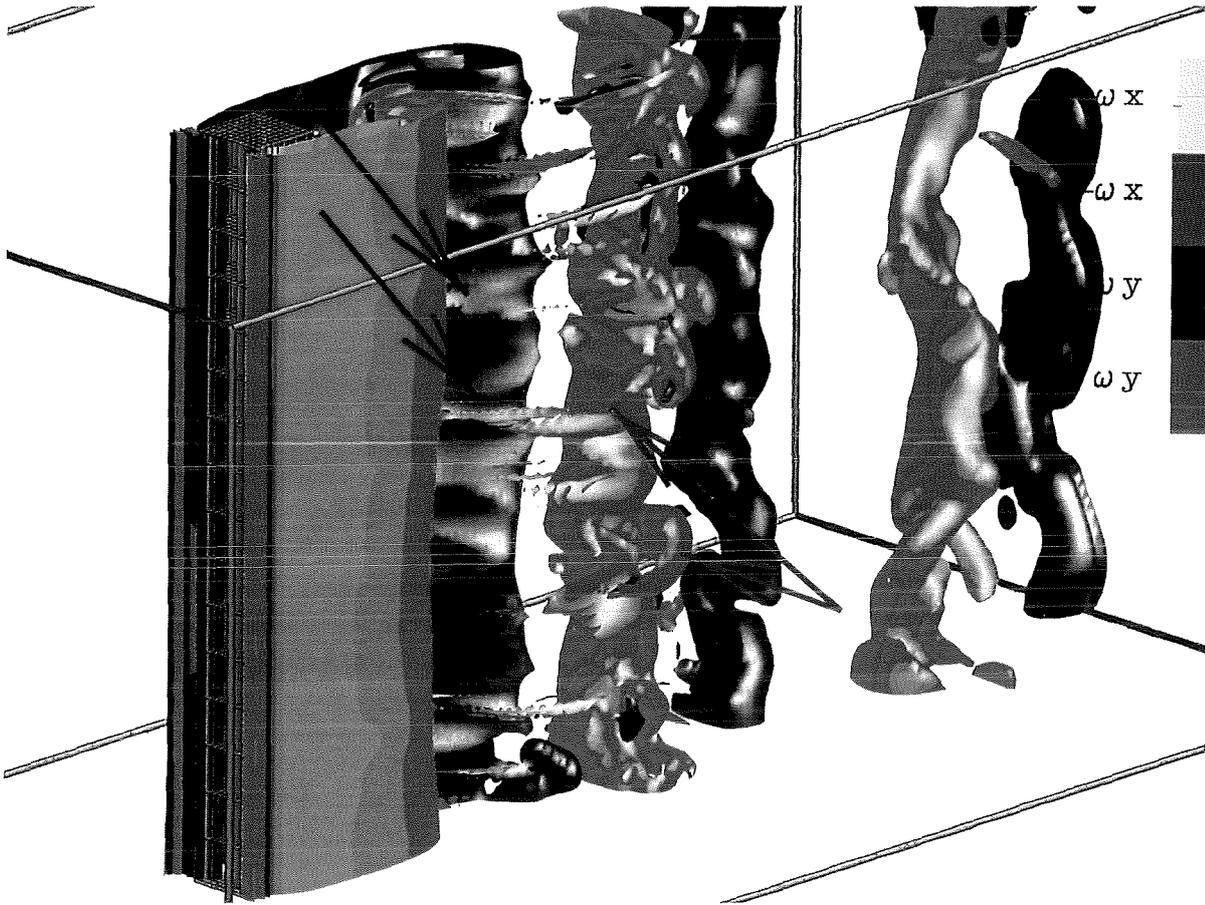


Abbildung 6.21: B-Mode Wirbelablösung bei $Re = 250; \omega_y = 6$, Ausschnittsvergrößerung.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die qualitativen Merkmale der Umströmung des quadratischen Zylinders ähnlich sind wie die beim Kreiszyylinder. Es treten ebenfalls Rippen-Wirbel auf, die jedoch in den Abmessungen quer zur Hauptströmung größer sind als beim Kreiszyylinder.

Bei einer Reynoldszahl von 200 konnte kein 'reiner B-Mode' entdeckt werden. Es erscheinen zeitweilig Wirbelanhaftungen am Zylinder, was zur Folge hat, daß die Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte in der Zeit stark fluktuieren. Der Punkt der Wirbelanhaftung wandert, so daß zeitweilig eine schräge Ablösung am Zylinder entsteht. Auch bei der Kreiszyylinderumströmung wird in der numerischen Simulation von Henderson (1997) bei einer Reynoldszahl von 220 eine unregelmäßige zeitliche Folge von A- und B-Moden gefunden.

Bei einer Reynoldszahl von 250 wird für den quadratischen Zylinder eine regelmäßige B-Mode ohne Wirbelanhaftungen am Zylinder gefunden. Es ist denkbar, daß beim quadratischen Zylinder die einzelnen Phasen der Transition zu niedrigeren Reynoldszahlen verschoben sind, da auch die dreidimensionale Strömung beim quadratischen Zylinder früher einsetzt ($Re \approx 150$) als am Kreiszyylinder ($Re \approx 190$).

Kapitel 7

Dreidimensionale Zylinderumströmung mit Magnetfeldeinfluß

Eine numerische Simulation der dreidimensionalen Umströmung des quadratischen Zylinders in einem in Zylinderrichtung angelegten Magnetfeld ist bisher noch nicht durchgeführt worden. Eine dreidimensionale numerische Simulation für den Fall des Kreiszyinders mit einem in Hauptströmungsrichtung angelegten Magnetfeld ist von Mutschke et al. (1997) durchgeführt worden. Es sind keine experimentellen oder numerische Ergebnisse mit angelegtem magnetischen Feld beim quadratischen Zylinder bekannt. Aus diesem Grund werden die bisher durchgeführten relevanten experimentellen Ergebnisse des Kreiszyinders zusammengefaßt. Beim Vergleich mit den numerischen Ergebnissen am quadratischen Zylinder muß beachtet werden, daß aufgrund der unterschiedlichen Körperkontour Abweichungen zum Experiment zu erwarten sind. Ebenfalls werden einige bestimmte Eigenschaften von MHD-Strömungen noch einmal erläutert, die bei Messungen ausgenutzt werden.

7.1 Bisherige experimentelle Ergebnisse

Bei MHD-Strömungen in isolierten Kanälen unter der Wirkung eines starken äußeren Magnetfelds ist, wie bereits in Abschnitt 2.1 erwähnt, das Strömungsprofil relativ flach und kann bis auf die Hartmann-Schichten an den magnetfeldsenkrechten Wänden als zweidimensional betrachtet werden. Solche Strömungen werden auch als 'quasi-zweidimensional' bezeichnet, da nur in den dünnen Hartmann-Schichten eine dreidimensionale Strömung vorliegt. Im zweidimensionalen Kernströmungsbereich läßt sich aus dem Ohmschen Gesetz ein Zusammenhang zwischen dem externen Magnetfeld B_0 , dem zweidimensionalen Geschwindigkeitsvektor und dem induzierten elektrischen Feld E herleiten (Sommeria und Moreau 1982):

$$\begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} = -\left(1 - \frac{1}{M}\right) \cdot \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ w \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (7.1.1)$$

Da ein zeitlich konstantes Magnetfeld vorausgesetzt wird, kann das elektrische Feld E als Gradient des elektrischen Potentials Φ dargestellt werden (siehe auch Abschnitt 2.3.2). Man

erhält unter Vernachlässigung des Termes $1/M$ bei hohen Hartmann-Zahlen die folgenden, für Messungen wichtigen Beziehungen:

$$u = -\frac{1}{B_0} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad w = \frac{1}{B_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad . \quad (7.1.2)$$

Das elektrische Potential kann durch Elektroden, die in die Strömung eingebracht werden, gemessen werden. Die Komponenten des Gradientenvektors des elektrischen Potentials können durch Messung der Spannungsdifferenzen zwischen zwei in der entsprechenden Richtung angeordneten Elektroden ermittelt werden. Die in Gleichung 7.1.2 angegebenen Ableitungen von Φ werden durch einen Differenzenquotient approximiert. Es kann des weiteren eine zweidimensionale Stromfunktion $\Psi(x, z)$ eingeführt werden mit:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad , \quad (7.1.3)$$

Aus den Gleichungen (7.1.3) und (7.1.2) ergibt sich

$$\Psi = -\frac{1}{B_0} \Phi \quad . \quad (7.1.4)$$

Im Kernbereich von quasi-zweidimensionalen Strömungen ist daher das elektrische Potential bis auf eine multiplikative Konstante identisch mit der Stromfunktion. Es wird in Moreau (1990) weiter gezeigt, daß bei hohen Hartmann-Zahlen die Änderung des elektrischen Potentials über die Höhe der Hartmann-Schicht vernachlässigbar gering ist. Es gilt also:

$$\Phi_{Hartmann-Schicht} \approx \Phi_{Kern} \quad . \quad (7.1.5)$$

Hieraus folgt, daß sich die Potentialverteilung der Kernströmung auf der Hartmann-Wand des Kanals 'abbildet'. Dadurch ist es möglich, bei einer quasi-zweidimensionalen Strömung die Kernströmungsgeschwindigkeit an einer bestimmten Stelle durch Potentialmessungen an der Wand zu ermitteln. Durch das geschickte Anbringen vieler Potentialmeßstellen können so auch ausgedehnte Strömungsmuster (z.B. Wirbel) in der Kernströmung erfaßt werden. Dieser Zusammenhang erlaubt es, daß die Meßverfahren, die bei den folgenden Experimenten mit MHD-Strömungen zum Teil verwendet werden, besser verständlich werden.

Eine interessante experimentelle Arbeit stammt von Papailiou (1984) der, in einem offenen, isolierten Behälter mit ruhendem Quecksilber die Strömung um einen durch den Kanal gezogenen Zylinder unter der Wirkung eines in Zylinderrichtung angelegten Magnetfeldes untersucht. Durch den offenen Kanal ist es möglich, die Organisation der Strömung an der Oberfläche des verwendeten Quecksilbers optisch zu beobachten und die Wirkung des Magnetfeldes anhand der Wirbelabstände in Längs- und Querrichtung zu beurteilen. Obwohl bei dieser Anordnung eine Hartmann-Wand fehlt und auf die Vorgänge unter der Oberfläche nur indirekt geschlossen werden kann, können doch qualitative Kriterien für die Wirkung eines Magnetfeldes auf die Wirbelstraße gefunden werden. Papailiou (1984) führt Messungen der Wirbelabstände und der Strouhalzahl durch und findet für ein in Zylinderrichtung angelegtes magnetisches Feld:

- Durch die Wirkung des Magnetfeldes wird die Strouhalzahl nicht verändert.

- Ein Auseinanderdriften der Nachlaufwirbel senkrecht zur Hauptströmungsrichtung wird mit zunehmendem Magnetfeld unterdrückt. Die Wirbelstraße wird 'schmäler'.
- Der Abstand der Wirbel in Hauptströmungsrichtung wird mit wachsendem Magnetfeld kleiner.

Er beobachtet, daß eine turbulente Wirbelstraße bei den zwei untersuchten Reynoldszahlen 1800 bzw. 12500 unter der Wirkung eines magnetischen Feldes stromab weit 'klarer organisiert' erscheint als ohne Magnetfeld. Bei hohen magnetischen Feldstärken erfolgt die Organisation von fast parallelen Wirbelreihen. Ebenfalls erkennt er keine sichtbare Dämpfung der Wirbel, was er darauf zurückführt, daß die Wirbel in Richtung des magnetischen Feldes ausgerichtet sind und sie deswegen nur sehr schwach gedämpft werden. In Abbildung 7.1 wird in einer Prinzipskizze die Wirkung eines zylinderparallelen Feldes gezeigt.

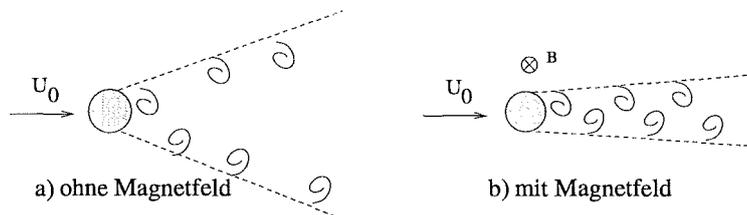


Abbildung 7.1: Wirkung eines zylinderparallelen Magnetfeldes auf eine Kármánsche Wirbelstraße nach Papailiou (1984).

Messungen in geschlossenen isolierten Kanälen wurden bereits von Kit et al. (1970) sowie Kolesnikov und Tsinober (1972b) durchgeführt. Später folgten Andreev und Kolesnikov (1997) sowie Frank und Barleon (1997). Im folgenden werden diese Experimente beschrieben.

Kit et al. (1970) verwenden einen isolierten Kanal, in dem ein Glaszylinder in magnetfeldparalleler Richtung eingebaut ist. Als Medium wird Quecksilber verwendet. 13 Zylinderdurchmesser hinter dem Zylinder wurde die Intensität der Geschwindigkeitsschwankungen gemessen. Bei einer festen Reynoldszahl von 8700 wurde mit wachsendem Magnetfeld eine steigende Intensität der Schwankungen festgestellt. Dies wurde darauf zurückgeführt, daß ein Übergang von drei- auf zweidimensionale Strukturen stattfindet, die in Magnetfeldrichtung ausgerichtet sind. Diese können, da sie aufgrund ihrer größeren Abmessungen eine geringere viskose Dissipation erfahren, weiter transportiert werden als kleinskalige Wirbel. Diese Thesen werden in Kolesnikov und Tsinober (1972b) durch weitere Messungen bestätigt. Es wird ein Isotropiekoeffizient κ eingeführt:

$$\kappa = 2 \cdot \frac{\overline{E_y^2}}{\overline{E_z^2}} \quad (7.1.6)$$

Hier sind $E_y; E_z$ die Komponenten des gemessenen elektrischen Feldstärkevektors in Magnetfeldrichtung bzw. senkrecht zur Strömungsrichtung (Koordinatenrichtung wie in Abbildung 6.8). Der Isotropiekoeffizient κ kann Werte zwischen 1 (isotrop, dreidimensional) und 0 (zweidimensionale Strömung) annehmen. Die Messung zeigt, daß bei hydrodynamischer Strömung κ einen Wert von 0.6 annimmt. Bei einem angelegten Magnetfeld

($M \approx 160$) sinkt dieser Wert auf 0.005. Dies bestätigt das Einsetzen einer zweidimensionalen Strömung. Aus Autokorrelationen von Hitzdrahtsondenmessungen an verschiedenen Stellen stromab hinter dem Zylinder wird gefolgert, daß sich die Längenskala der Turbulenz bei eingeschaltetem Magnetfeld stromab vergrößert, wohingegen ohne Magnetfeld ein Zerfall zu kleinen Skalen festzustellen ist.

In der Arbeit von Andreev und Kolesnikov (1997) wird die Kreiszyklinderumströmung ebenfalls in einem isolierten Kanal untersucht. Allerdings wird in diesem Fall ein elektrisch leitender Zylinder aus Kupfer verwendet. Da sich, wie bereits gezeigt, das elektrische Potential einer MHD-Strömung durch die Hartmann-Schicht auf die Wand abbildet, ist es möglich, in einer quasi-zweidimensionalen MHD-Strömung durch Messung von Wandpotentialen die Geschwindigkeit der Strömung zu berechnen. Dies hat den Vorteil, daß keine mechanischen Hindernisse (Sonden), die wie ein Störzylinder wirken könnten, in den Nachlauf eingebracht werden. Durch solche Potentialmessungen in den Hartman-Wänden an zwei Stellen im Nachlauf des Zylinders werden bei konstantem Magnetfeld zwei kritische Reynoldszahlen gefunden, wie in der folgenden Abbildung 7.2 gezeigt wird.

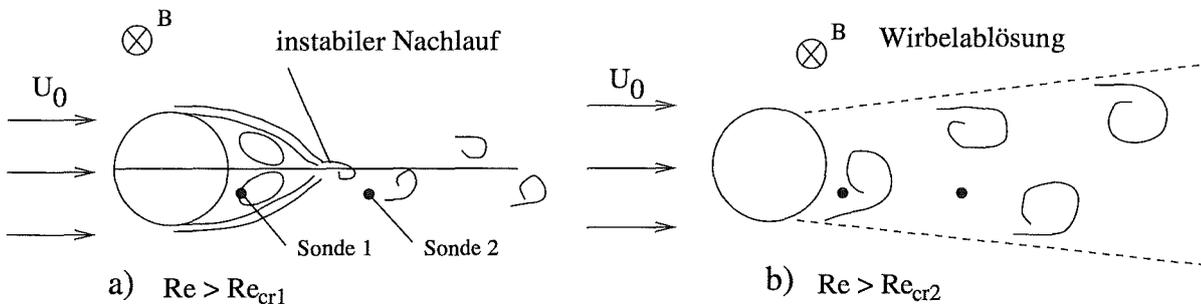


Abbildung 7.2: $Re > Re_{cr1}$ Nachlauf-Instabilität a) ; $Re > Re_{cr2}$ Wirbelablösung b) nach Andreev und Kolesnikov (1997).

Die Reynoldszahl dieser Anordnung wird schrittweise erhöht. Die erste kritische Reynoldszahl Re_{cr1} wird mit dem Einsetzen von Schwankungen an Sonde 2 festgelegt. Das Signal von Sonde 1 zeigt dabei keine Fluktuationen. Die zweite kritische Reynoldszahl Re_{cr2} wird mit dem Einsetzen von Fluktuationen an Sonde 1 festgelegt. Es findet dann eine vollständige Wirbelablösung statt. Senkt man die Reynoldszahl im Zustand des vollständigen Wirbelablösens wieder, so bleibt die Wirbelablösung bis $Re_{cr3} \approx 0.6Re_{cr2}$ erhalten, um dann auf einen stabilen Zustand ohne Wirbelablösung und Schwankungen im Nachlauf zurückzufallen. Dieser Hysterese-Effekt wird in Abbildung 7.3 gezeigt. Bei einer Feldstärke von $B = 0.7T$ ($M = 560$) beginnt die Nachlaufinstabilität bei $Re_{cr1} = 831$. Erhöht man die Reynoldszahl auf $Re_{cr2} = 1005$, so setzt vollständiges Wirbelablösen ein. Wird die Reynoldszahl wieder verringert, so hört bei $Re_{cr3} = 604$ die Wirbelablösung und Nachlaufinstabilität plötzlich auf. Diese Messung wurde ebenfalls bei einem stärkeren Magnetfeld ($B = 1.35T$; $M = 1080$) durchgeführt. Es ergaben sich: $Re_{cr1} = 1680$, $Re_{cr2} = 2193$, $Re_{cr3} \approx 1314$.

Die bisher umfangreichsten Messungen wurden von Frank und Barleon (1997) durchgeführt. Sie verwenden eine neu entwickelte Matrix-Potentialsonde für die Messung des Potentialfeldes an der Hartmann-Wand (siehe Abb. 7.4). Ausführliche Angaben zum Aufbau der Sonde werden in Frank (1997) gemacht. Im Unterschied zur Methode von Andreev und Kolesnikov (1997) wird hier eine Messung mit einem Feld von 6x11 Potential-Meßstellen

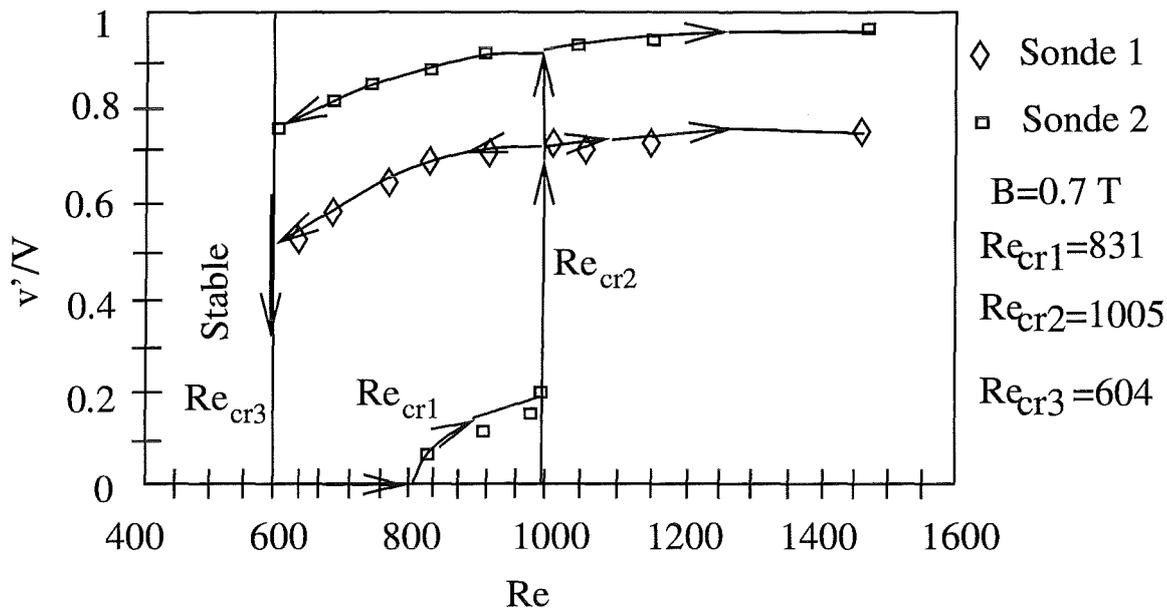


Abbildung 7.3: Normierte Geschwindigkeitsschwankungen hinter dem Zylinder nach Andreev und Kolesnikov (1997).

an mehreren Stellen im Nachlauf eines isolierten Kreiszyklinders durchgeführt. Dies hat den Vorteil, daß die zweidimensionale Ausdehnung von Wirbelstrukturen erfaßt und dargestellt werden kann (siehe Anfang Abschnitt 7.1).

Die Matrix-Potentialsonde wurde bei den verschiedenen Messungen an unterschiedlichen Stellen im Nachlauf des Zylinders bei $x=0, 3, 7, 16, 32$ eingebaut.

Die Abbildung 7.4 zeigt den prinzipiellen Versuchsaufbau.

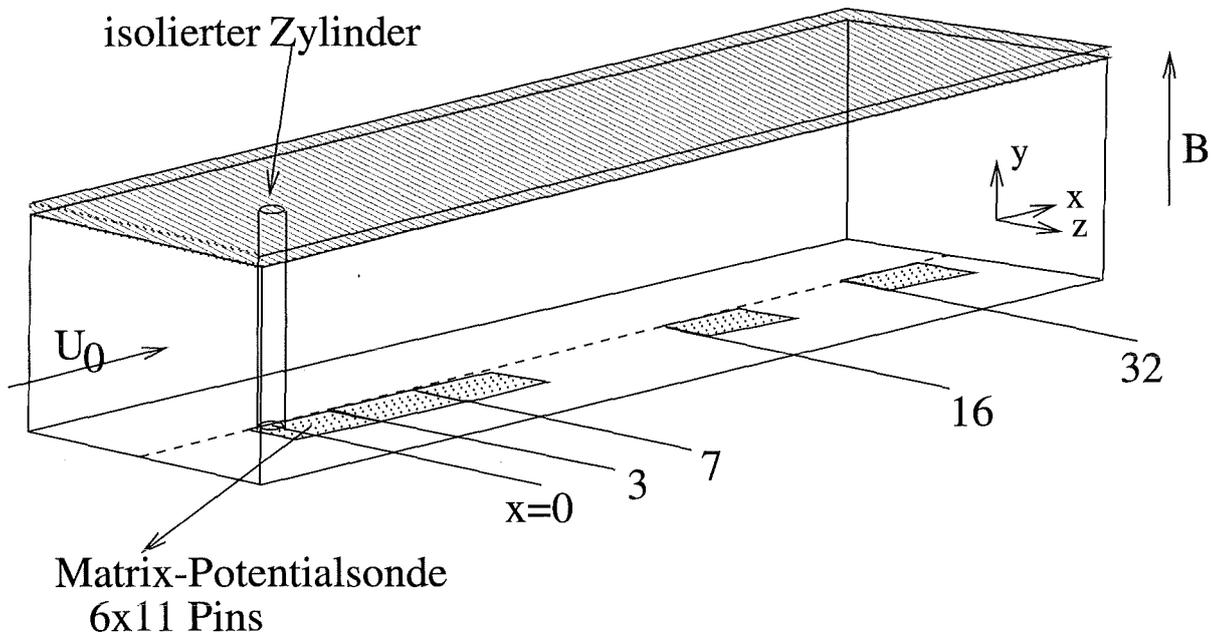


Abbildung 7.4: Prinzipieller Versuchsaufbau von Frank und Barleon (1997) mit möglichen Positionen der Matrix-Potentialsonde.

Durch diese Versuchsanordnung ist es nicht nur möglich, quantitativ die kritischen Reynoldszahlen für das Einsetzen der Wirbelablösung bei bestimmten Hartmann-Zahlen zu finden, sondern auch Strömungsstrukturen, die die Sonde passieren, durch Stromlinien oder als Vorticity darzustellen. Durch diese Methode können auch die von Papailiou (1984) im offenen Kanal optisch beobachteten Eigenschaften (siehe Abb. 7.1) in einem geschlossenen Kanal mit zwei Hartmann-Wänden wieder gefunden werden.

Aus den Messungen konnte die in Abbildung 7.5 gezeigte Grenzkurve für das Einsetzen der instationären Wirbelablösung gefunden werden.

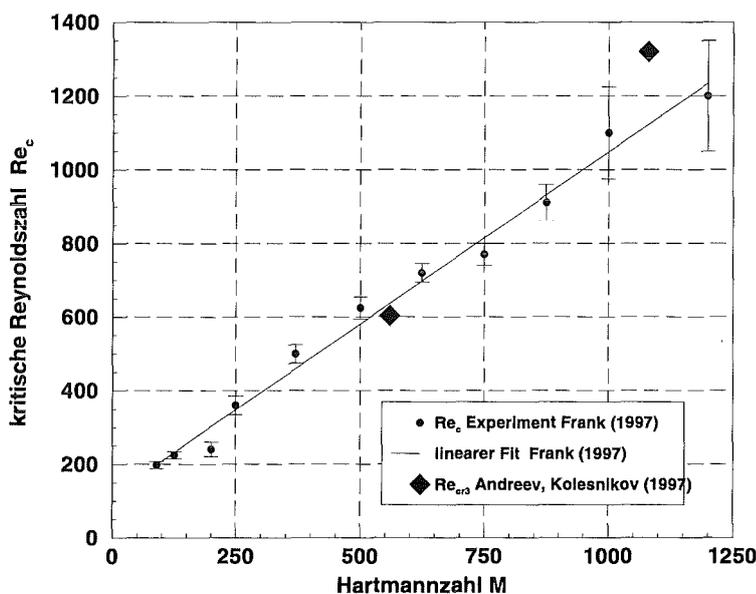


Abbildung 7.5: Verlauf der kritischen Reynoldszahl für steigende Hartmann-Zahlen nach Frank (1997). Zusätzlich Meßpunkte aus Andreev und Kolesnikov (1997) an der dritten Stabilitätsgrenze Re_{cr3} .

Für die Stabilitätsgerade kann der folgende Zusammenhang angegeben werden:

$$Re_c = (0.94 \pm 0.03) \cdot M \quad (7.1.7)$$

Ähnliche Steigungen der Stabilitätsgeraden werden auch in Scherströmungen unter dem Einfluß von Magnetfeldern in Experimenten von Frank (1997) und einer numerischen Simulation von Bühler (1996) gefunden.

Eine Hysterese, wie von Andreev und Kolesnikov (1997) festgestellt, konnte im Experiment von Frank und Barleon (1997) nicht gefunden werden. Im Experiment von Frank und Barleon (1997) wurden sehr lange Haltezeiten bei den einzelnen Reynoldszahlen eingehalten, um so eine scheinbare Hysterese, die durch zu schnelle Veränderung der äußeren Parameter Magnetfeldstärke und Strömungsgeschwindigkeit zustandekommen kann, auszuschließen.

In diesem Zusammenhang fällt auf, daß die Werte, die von Andreev und Kolesnikov (1997) an der dritten Stabilitätsgrenze Re_{krit3} gefunden werden, gut mit den Werten an der Stabilitätsgrenze von Frank (1997) übereinstimmen (siehe Abb. 7.5). Da von Andreev und Kolesnikov (1997) zur Haltezeit bei den einzelnen Reynoldszahlen keine Angaben gemacht werden, könnte in diesem Experiment Hysterese durch zu schnelle Variation der Parameter

vermutet werden. Jedoch könnte auch der in Andreev und Kolesnikov (1997) verwendete leitende Kupferzylinder oder das größere Versperrungsverhältnis $\beta = 0.4$ (Frank (1997) $\beta = 0.1$) einen Einfluß ausüben.

Im Experiment von Frank und Barleon (1997) konnte nachgewiesen werden, daß ein steigendes Magnetfeld einen stabilisierenden Einfluß auf die Wirbelstraße hat. Es wurde gezeigt, daß die Aufspreizung der Wirbelstraße bei konstanter Reynoldszahl mit wachsendem Magnetfeld verringert wird. Die Strouhalzahl wird bei den gemessenen Reynoldszahlen bei Verdoppelung der Hartmann-Zahl nur geringfügig (-0.02) verringert. Dies bestätigt die qualitativen Ergebnisse von Papailiou (1984). Die von Papailiou (1984) gefundene Verringerung des Abstandes der Wirbel in Hauptströmungsrichtung konnte nicht gefunden werden.

7.2 Numerische Simulation der dreidimensionalen Wirbelstraße mit Magnetfeld

Die Ergebnisse der in Abschnitt 7.1 beschriebenen Experimente können für eine Verifikation des in dieser Arbeit verwendeten Programmcodes verwendet werden. Die in Abschnitt 6.2 gezeigten hydrodynamischen Rechnungen werden nun als Startlösung für die Rechnungen mit angelegtem Magnetfeld verwendet. Hierbei ist zu beachten, daß durch die zusätzlich zu lösenden Gleichungen für das Potential und den Strom weitere Randbedingungen gesetzt werden müssen. Die Randbedingungen wurden bereits ausführlich in Abschnitt 2.6 besprochen und werden an dieser Stelle deshalb nur kurz zusammengefaßt.

Die in der hydrodynamischen Rechnung gesetzten Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld müssen modifiziert werden, da die dünnen Hartmann-Schichten der MHD-Strömung nicht durch das Rechengitter aufgelöst werden, sondern durch ein Modell (siehe Abschnitt 2.7) ersetzt werden. In folgender Abbildung 7.6 werden die modifizierten Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld gezeigt. Die detaillierten Randbedingungen an der Hartmann-Schicht können aus Abbildung 2.6 in Abschnitt 2.7 entnommen werden. Die äußeren Abmessungen können Abbildung 6.8 und 6.1 entnommen werden.

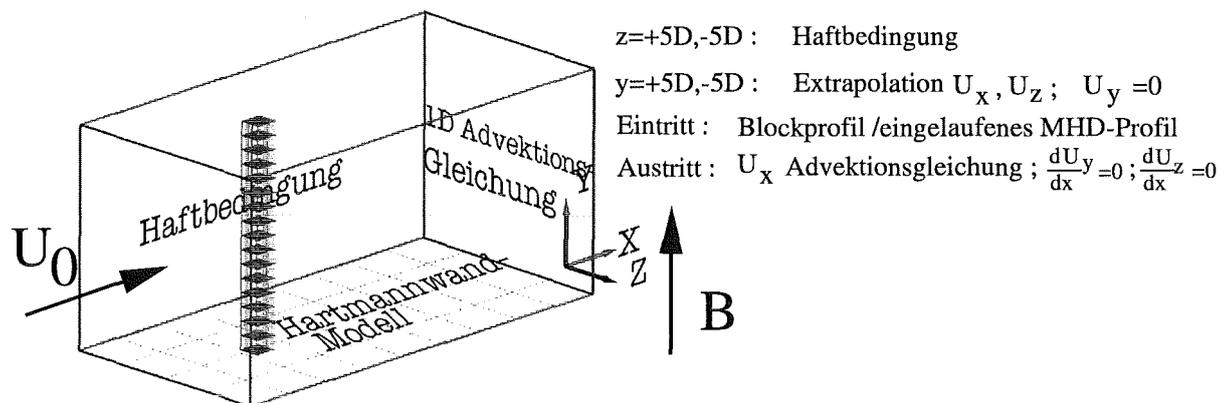


Abbildung 7.6: Verwendete Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld im MHD-Fall.

An den Hartmann-Wänden wird für die wandparallelen Geschwindigkeitskomponenten eine quadratische Extrapolation verwendet. Bei hohen Hartmann-Zahlen wird das in den

hydrodynamischen Rechnungen verwendete Blockprofil am Eintritt einem eingelaufenen MHD-Profil sehr ähnlich. Ersetzt man dann das Blockprofil am Eintritt durch ein eingelaufenes MHD-Profil, so stellt die hydrodynamische Rechnung mit dem Blockprofil eine Startlösung dar, die durch Einlaufprozesse nach dem Eintritt nur noch minimal umgebildet wird. Das eingelaufene MHD-Profil wurde aus einer vorher durchgeführten Rechnung eines Kanals ohne Hindernis beschafft.

Für den Druck werden an den äußeren Begrenzungen sowie am Zylinder homogene Neumann-Randbedingungen verwendet (siehe Abschnitt 2.6.3). Für das Potential wird an den modellierten Hartmann-Wänden die in Abschnitt 2.7 hergeleitete Randbedingung verwendet (siehe Abb. 2.6). Am isolierten quadratischen Zylinder wird für das Potential eine homogene Neumannrandbedingung verwendet. Die elektrischen Randbedingungen können aus Abschnitt 2.6.4 entnommen werden.

Ausgehend von einer hydrodynamisch eingeschwungenen Lösung wird bei t_0 das Magnetfeld eingeschaltet. Danach wird die Wirkung des Magnetfeldes 30-40 dimensionslose Zeiteinheiten beobachtet, bis ein eingeschwungener Zustand vorliegt. Dies ist erkennbar durch Visualisierung der Daten und dem Vorliegen einer konstanten Amplitude des Auftriebs- bzw. Widerstandsbeiwerts.

Bei kleinen Hartmann-Zahlen und Interaktionsparametern liegen immer noch dreidimensionale Strömungsanteile vor, die durch das Magnetfeld nicht vollständig gedämpft werden. Deshalb ist es hier schwierig, das Erreichen eines eingeschwungenen Zustands zu beurteilen. Es liegen immer noch relativ starke Amplitudenmodulationen des Auftriebsbeiwerts vor. Dennoch ist anhand der Amplituden eine Dämpfung sichtbar. Die Rechnung wurde nach einer bestimmten Zeit abgebrochen und die Wirbeldämpfung anhand der Visualisierung der Daten qualitativ beurteilt.

Die folgende Abbildung 7.7 zeigt die Situation kurz nach dem Beginn der Rechnung mit eingeschaltetem Magnetfeld bei einer Hartmann-Zahl von 31.6, einem Interaktionsparameter von 1 und einer Reynoldszahl von 200.

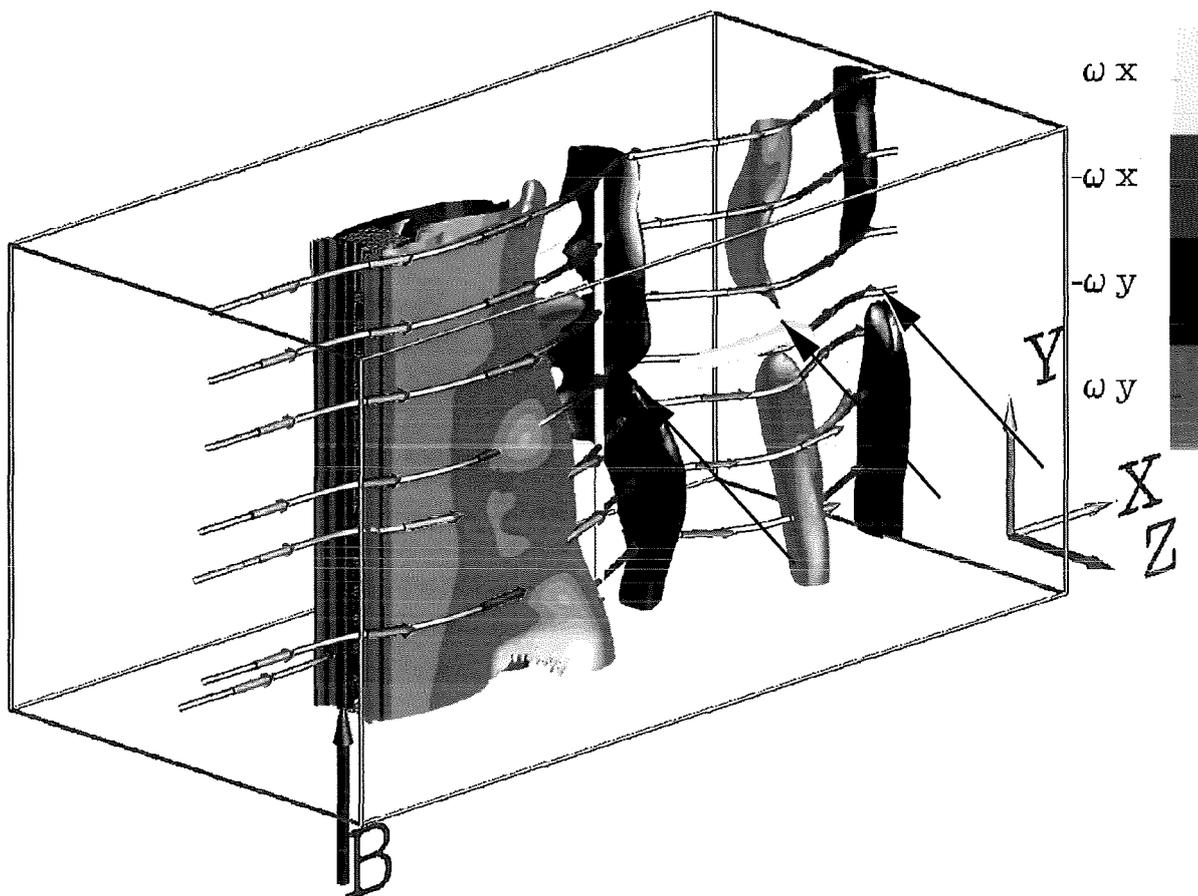


Abbildung 7.7: $Re=200$; $M=31.6$; $N=1$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6$; $\omega_x = \pm 3$.

Obwohl bei diesen Parametern das Magnetfeld als relativ schwach bezeichnet werden kann (im Vergleich zu fusionsrelevanten Parametern), zeigt sich die stark dämpfende Wirkung des Magnetfeldes auf Wirbelkomponenten, die senkrecht zum angelegten Magnetfeld stehen nach sehr kurzer Zeit offensichtlich. Die Rippen-Wirbel werden nahezu vollständig gedämpft. An Stellen in der Mitte des Kanals, in Abbildung 7.7 mit Pfeilen gekennzeichnet, ist die Verformung der Kármán-Wirbel stark. Durch die magnetische Dämpfung werden sie in der Mitte 'dortrennt'.

Die Strömung bildet sich unter der Wirkung des Magnetfeldes um und zeigt die Tendenz, eine Symmetrie zur Mittelebene $y = 5D$ auszubilden, was im weiteren zeitlichen Verlauf der Rechnung gut zu sehen ist. Die folgende Abbildung 7.8 zeigt eine Momentaufnahme zu einem späteren Zeitpunkt desselben Rechenlaufes. Vergleicht man die Bilder 6.9 (hydrodynamisch), 7.7 und 7.8, so ist die Tendenz zur Ausbildung einer Symmetrie gut erkennbar. Eine weitere gut sichtbare Wirkung des Magnetfeldes ist die 'Ausrichtung' der um die y-Achse rotierenden Wirbel durch die Dämpfung der magnetfeldsenkrechten Wirbelkomponenten. Betrachtet man ausschließlich die y-Komponente der Vorticity (siehe Abb. 7.9), so ist dies leicht zu sehen.

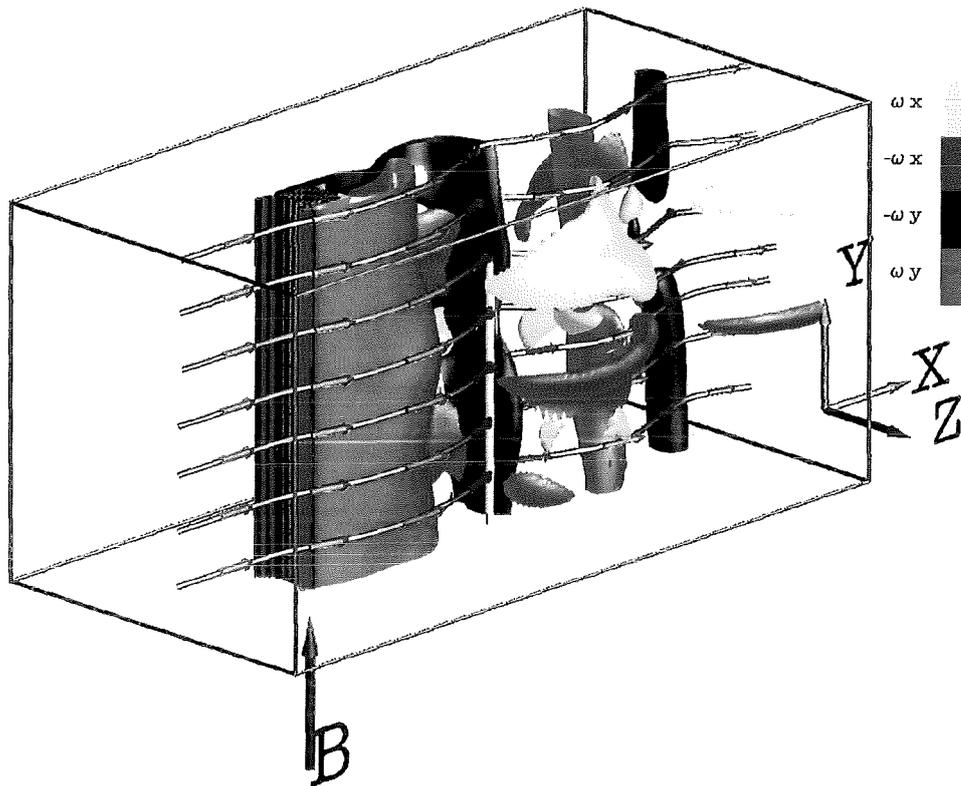


Abbildung 7.8: $Re=200$; $M=31.6$; $N=1$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6$; $\omega_x = \pm 3$.

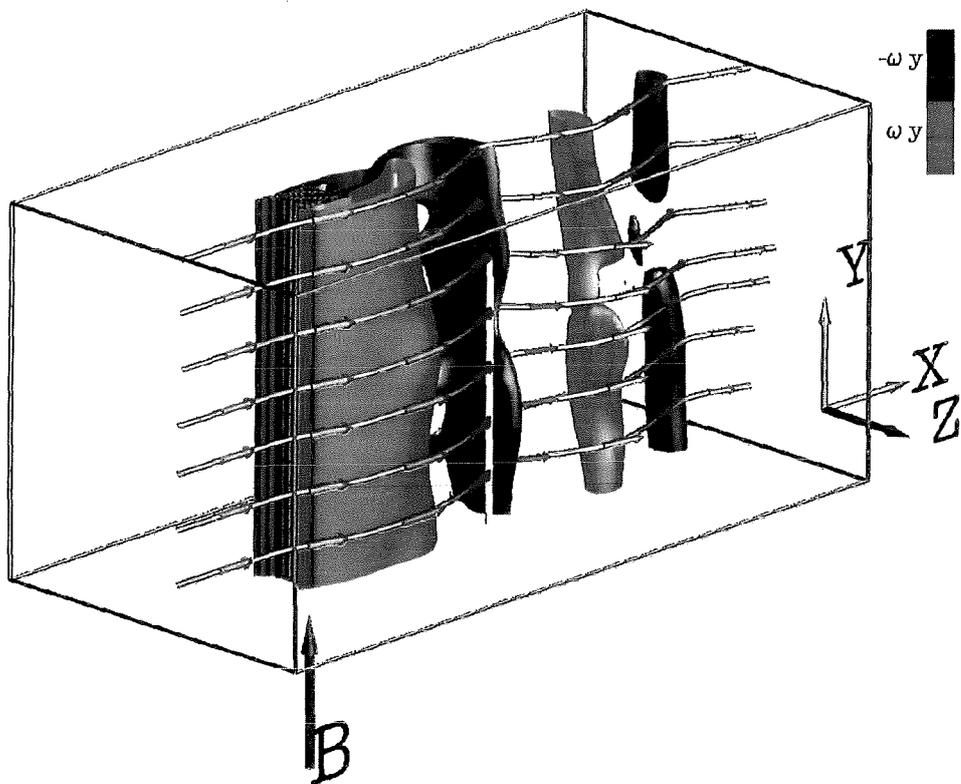


Abbildung 7.9: $Re=200$; $M=31.6$; $N=1$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6$.

Betrachtet man den Auftriebs- und Widerstandsbeiwert (siehe Abb. 7.10), so erkennt man die Dämpfung der Amplituden beim Auftriebs- (C_{LP}) und beim Widerstandsbeiwert (C_{DP}).

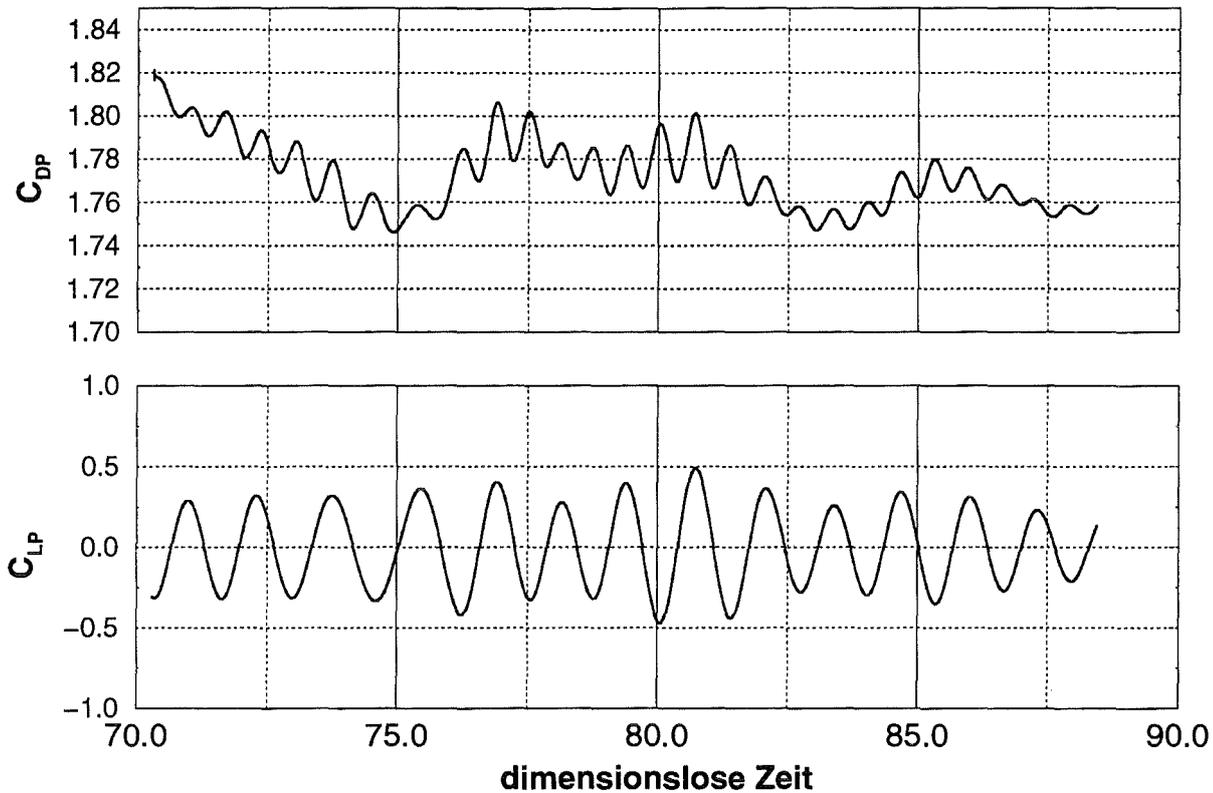


Abbildung 7.10: $Re=200$; $M=31.6$; $N=1$; Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte.

Geht man, ausgehend von dieser Lösung, zu höheren Hartmann-Zahlen und Interaktionsparametern über, so wird der Einfluß des Magnetfeldes auf die Strömung deutlicher. Als Startlösung für die höheren Hartmann-Zahlen und Interaktionsparameter werden die Lösungen des vorigen Rechenlaufs mit dem schwächeren Magnetfeld gewählt. In Abbildung 7.11 ist eine Momentaufnahme bei $Ha = 71$ und $N = 5$ gezeigt. Es sind bei den Einstellungen $\omega_x = \pm 3$ keine Wirbel mehr senkrecht zum Magnetfeld zu erkennen, weswegen auf deren Darstellung verzichtet wurde. Man erkennt in Abbildung 7.11 sofort die stärkere Wirkung des Magnetfeldes. Die Wirbel sind in Magnetfeldrichtung gut ausgerichtet. Dreidimensionale Strukturen sind kaum noch zu erkennen.

Der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeiten in Magnetfeldrichtung an mehreren Stellen im Nachlauf des Zylinders, siehe Abbildung 7.12, zeigt die starke Dämpfung dieser Geschwindigkeitskomponenten. Die Stellen liegen bei 0.2, 0.7 bzw. 1.2D in Hauptströmungsrichtung hinter dem Zylinder bei $Y = 5, Z = 5$.

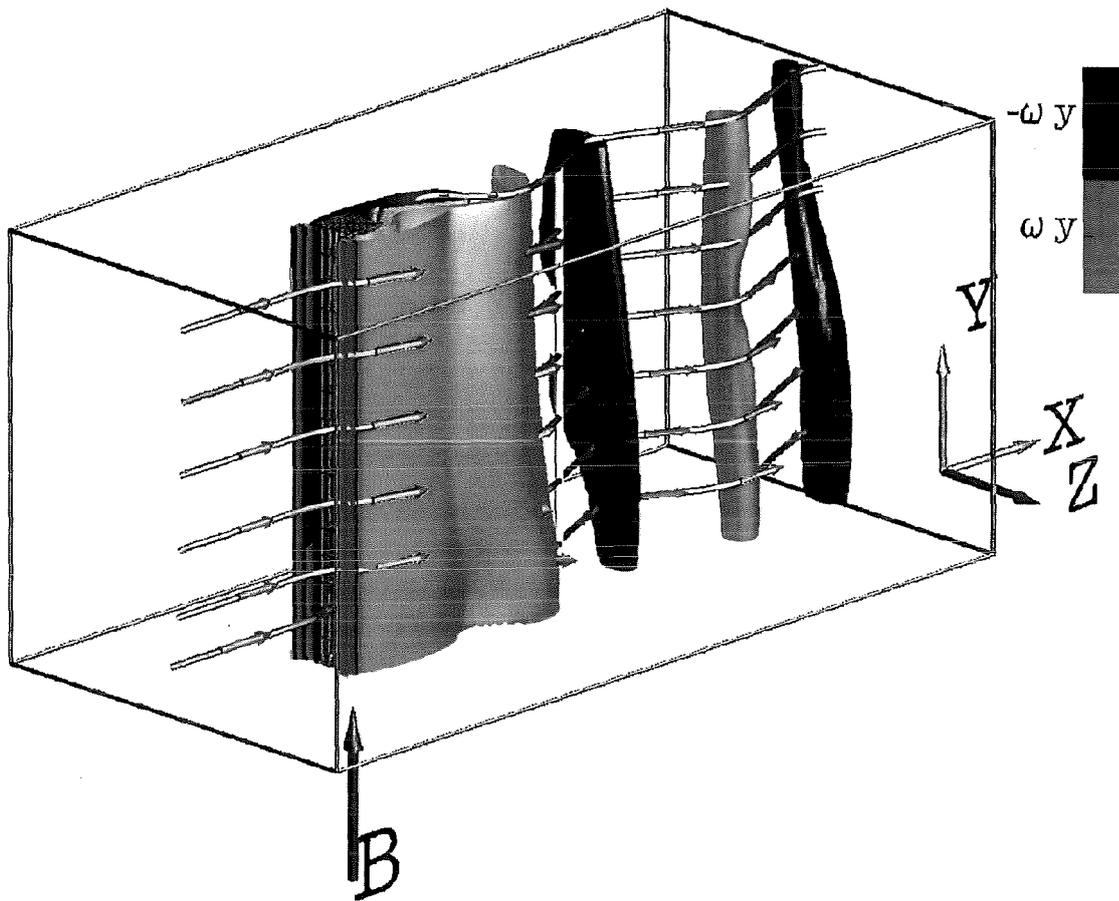


Abbildung 7.11: $Re=200$; $M=71$; $N=5$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6$.

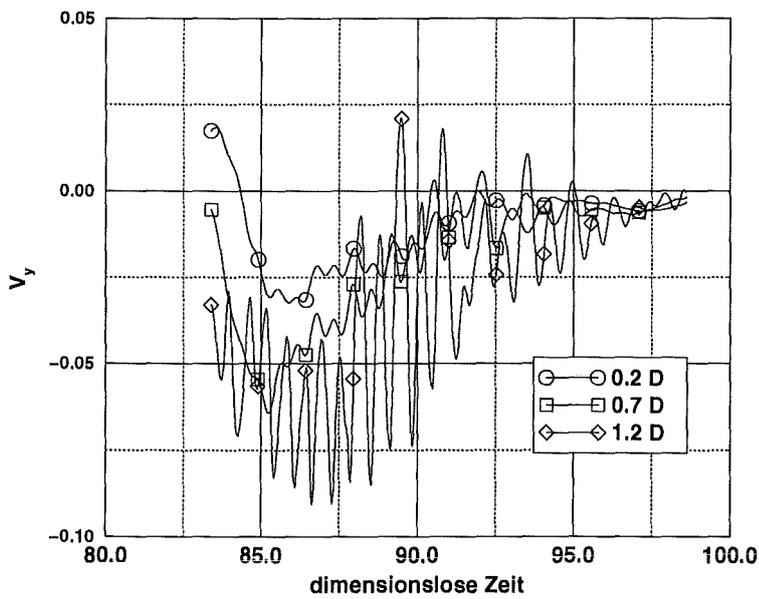


Abbildung 7.12: $Re=200$; $M=71$; $N=5$; Verlauf der Geschwindigkeitskomponente v_y in Magnetfeldrichtung $Y = 5, Z = 5$.

Die Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte reduzieren sich weiter. In Abbildung 7.13 wird der Verlauf des Auftriebs- und Widerstandsbeiwertes beim Übergang von $N = 1$ (schwarz) auf $N = 5$ (rot) dargestellt.

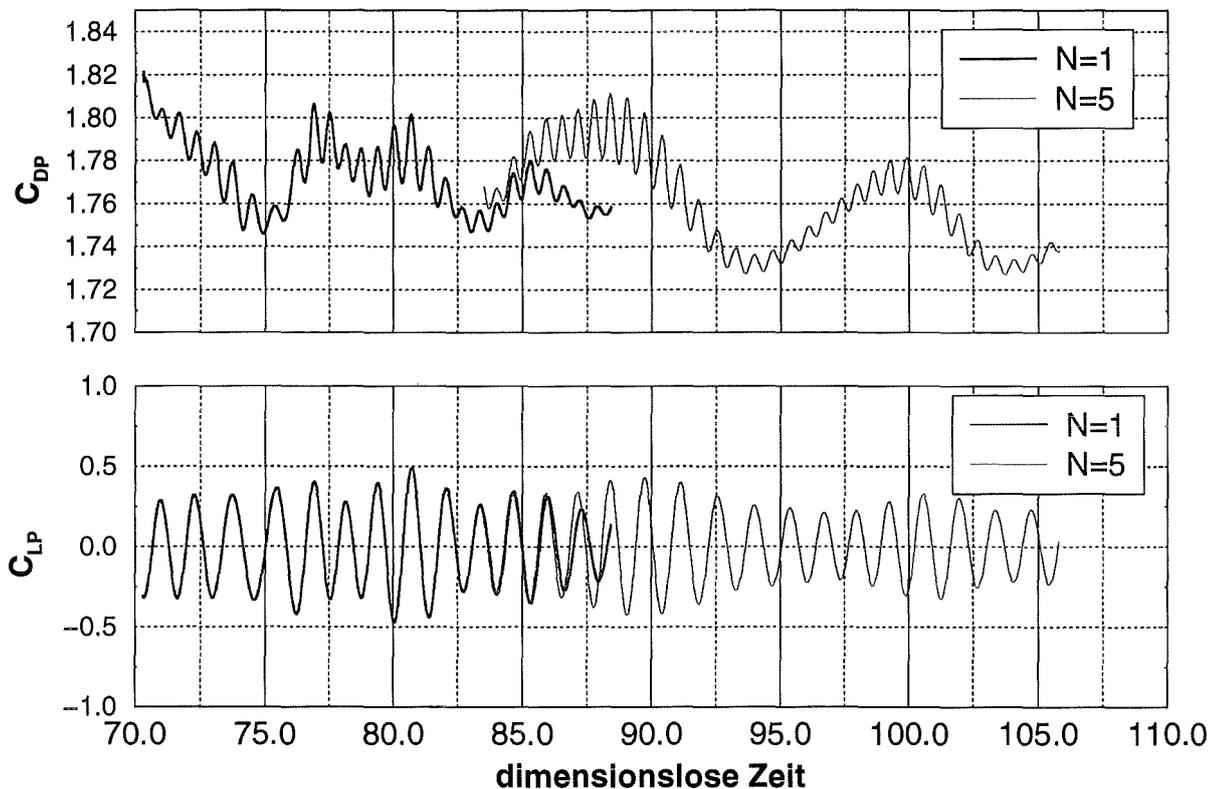


Abbildung 7.13: $Re=200$; $M=71$; $N=5$; Verlauf der Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte beim Übergang von $N = 1$ auf $N = 5$.

Die weitere Dämpfung der Amplituden sowie eine weitere Reduktion des Widerstandsbeiwertes ist gut zu erkennen. Es ist ebenfalls zu sehen, daß die Lösungen bei $N = 1$ und $N = 5$ noch nicht eingeschwungen, aber prinzipielle und qualitativ richtige Ergebnisse schon zu erkennen sind. Da das letztliche Ziel der Rechnung war, die Grenze zur vollständigen Dämpfung der Wirbelablösung zu finden, wurde die Rechnung zugunsten der Berechnung höherer Hartmann-Zahlen und Interaktionsparameter hier abgebrochen.

Abbildung 7.14 zeigt eine Momentaufnahme bei $M = 100$ und $N = 10$.

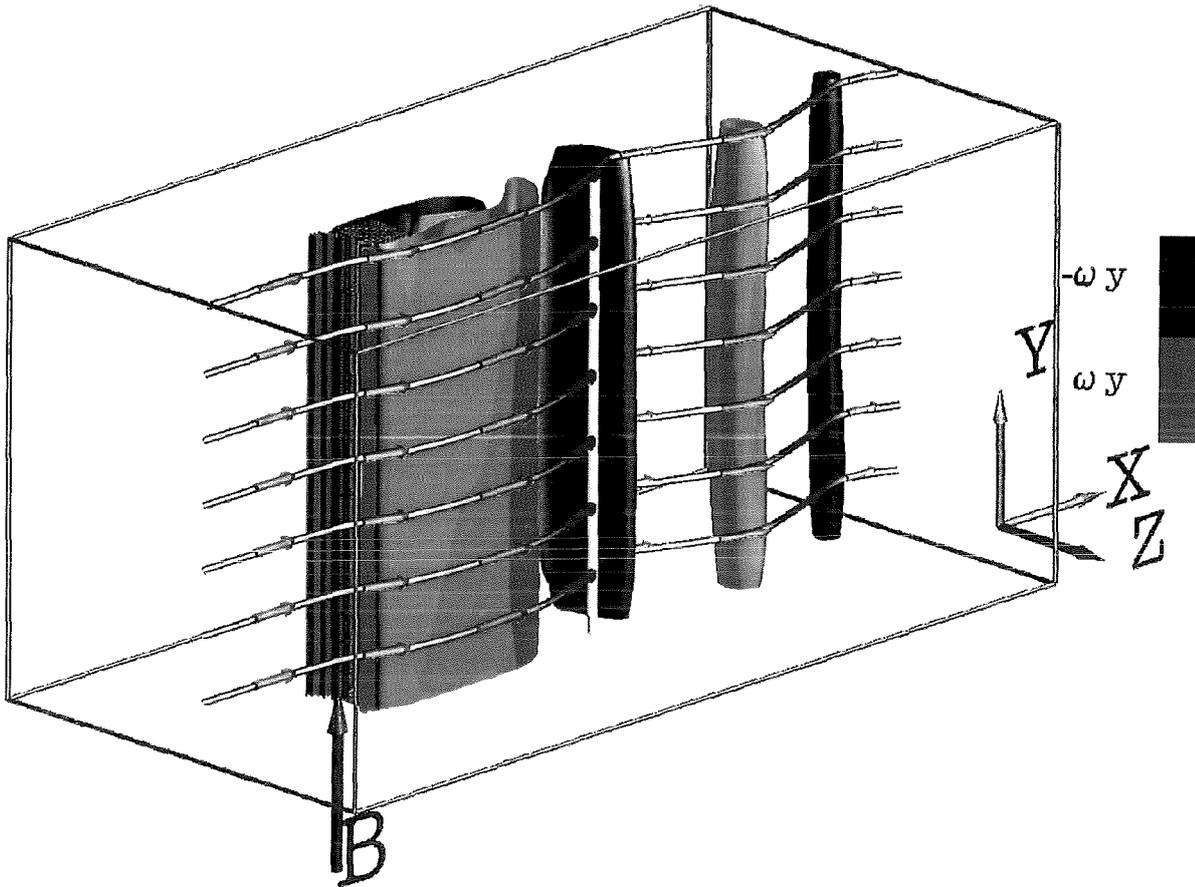


Abbildung 7.14: $Re=200$; $M=100$; $N=10$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6$.

In Abbildung 7.14 erkennt man, daß die Strömung nahezu perfekt zweidimensional organisiert ist. Es ist anhand des sich verkleinernden Durchmessers der Wirbel stromab zu sehen, daß bereits eine signifikante Dämpfung der in Magnetfeldrichtung ausgerichteten Wirbel stattfindet.

In der Folge werden Momentanbilder bei steigenden Hartmann-Zahlen und Interaktionsparametern gezeigt, in denen die Dämpfung der magnetfeldparallelen Wirbel sichtbar wird.

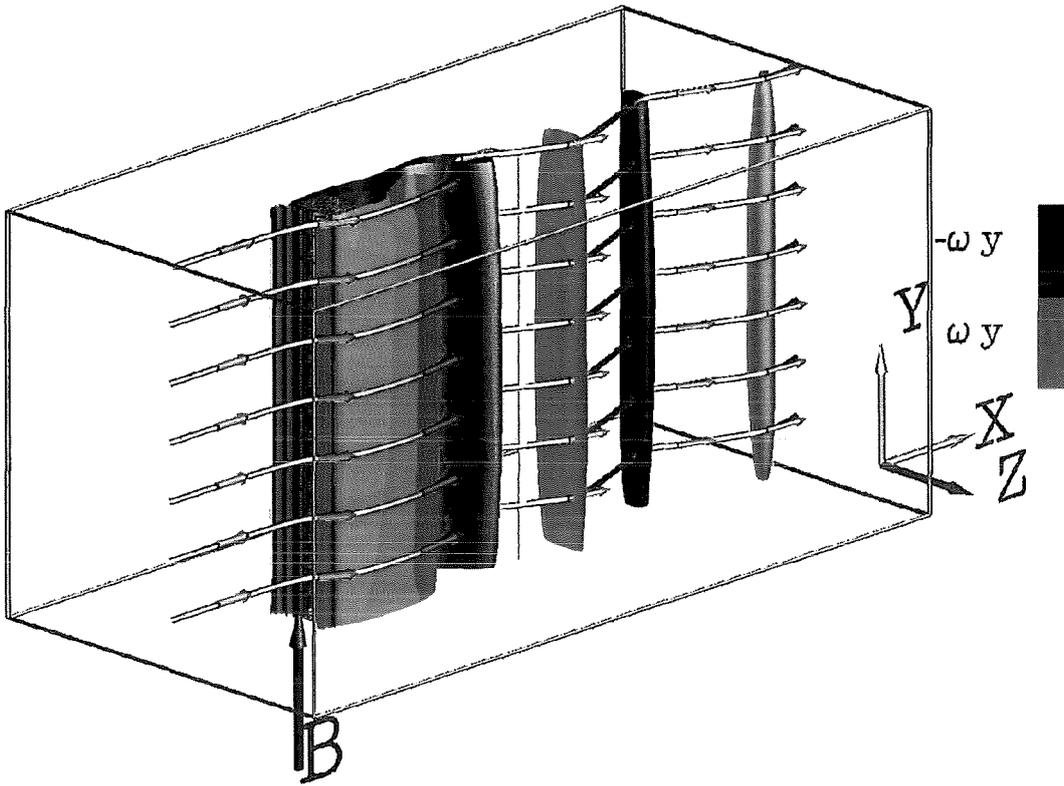


Abbildung 7.15: $Re=200$; $M=141.4$; $N=20$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6$.

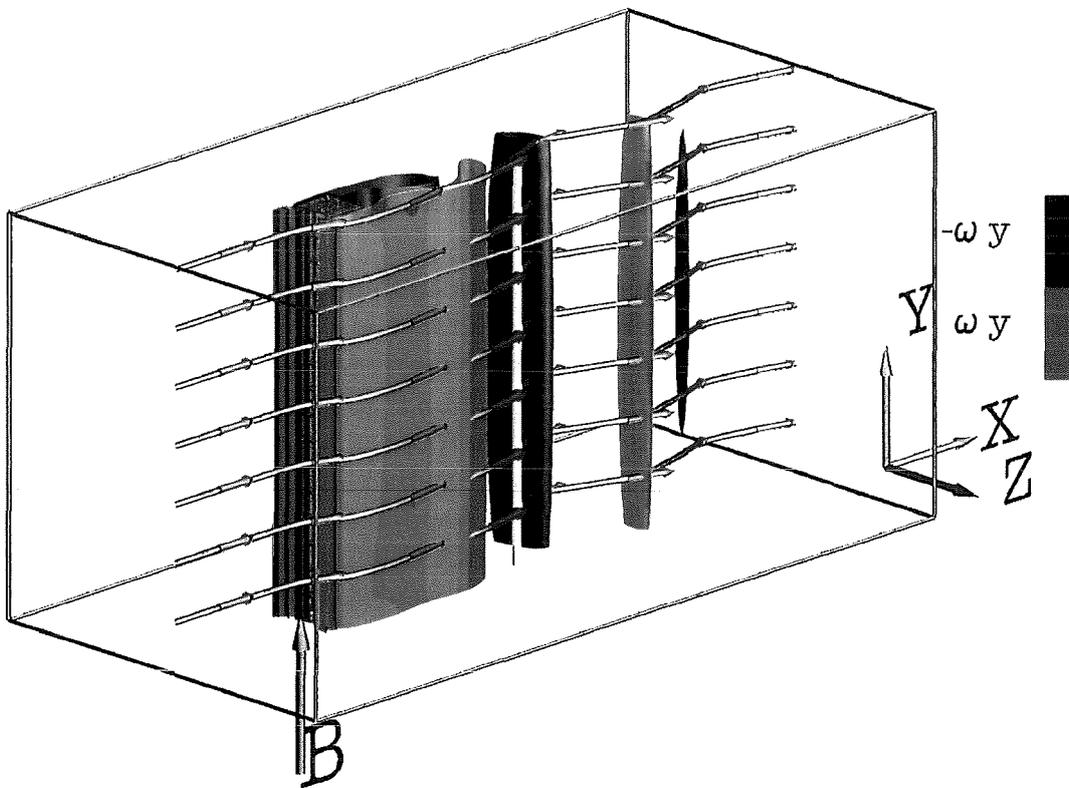


Abbildung 7.16: $Re=200$; $M=264.5$; $N=70$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6$.

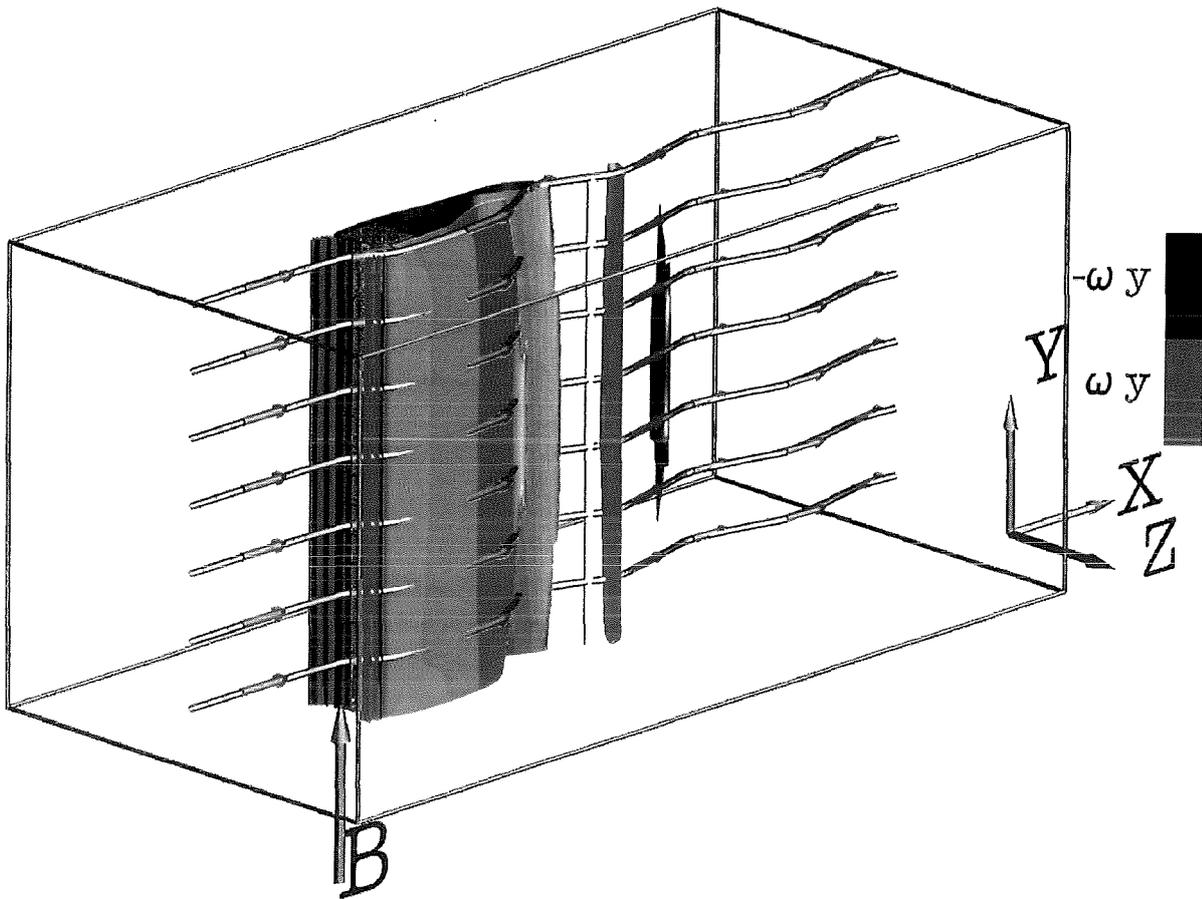


Abbildung 7.17: $Re=200$; $M=424$; $N=180$; Isovorticity-Oberflächenplot; $\omega_y = \pm 6$.

Zunächst ist in der Bilderreihe 7.15-7.17 im Vergleich mit den hydrodynamischen Ergebnissen (Abbildungen 6.9, 6.13, 6.17, 6.18, 6.19) eine Spreizung der Wirbelstraße im MHD-Fall nicht mehr erkennbar. Dies bestätigt die qualitativen Ergebnisse von Frank und Barleon (1997) sowie Papailiou (1984).

Ein interessanter Effekt ist die zigarrenartige, an beiden Enden spitz zulaufende Verformung der ablösenden Wirbel mit steigenden Hartmann-Zahlen, wie in den vorausgegangenen Abbildungen 7.15-7.17 erkennbar ist. Diese Art der Wirbeldämpfung zeigt, daß die Wirbel vor ihrer vollständigen Dämpfung von der Hartmann-Wand 'abheben' und sich möglicherweise nicht mehr über das Potential an der Hartmann-Wand abbilden. Dies hat entscheidende Auswirkungen auf die Meßtechnik mit Wandpotentialmessungen, denn Wirbel können immer noch vorhanden sein, obwohl sie sich im Wandpotential nicht mehr meßtechnisch auflösen lassen. Die gemessene Stabilitätsgerade in Abbildung 7.5 müßte dann nach rechts, zu höheren Werten der Hartmann-Zahl, verschoben werden.

In den folgenden Abbildungen 7.18 und 7.19 werden zwei Schnitte durch das berechnete Potentialfeld gezeigt.

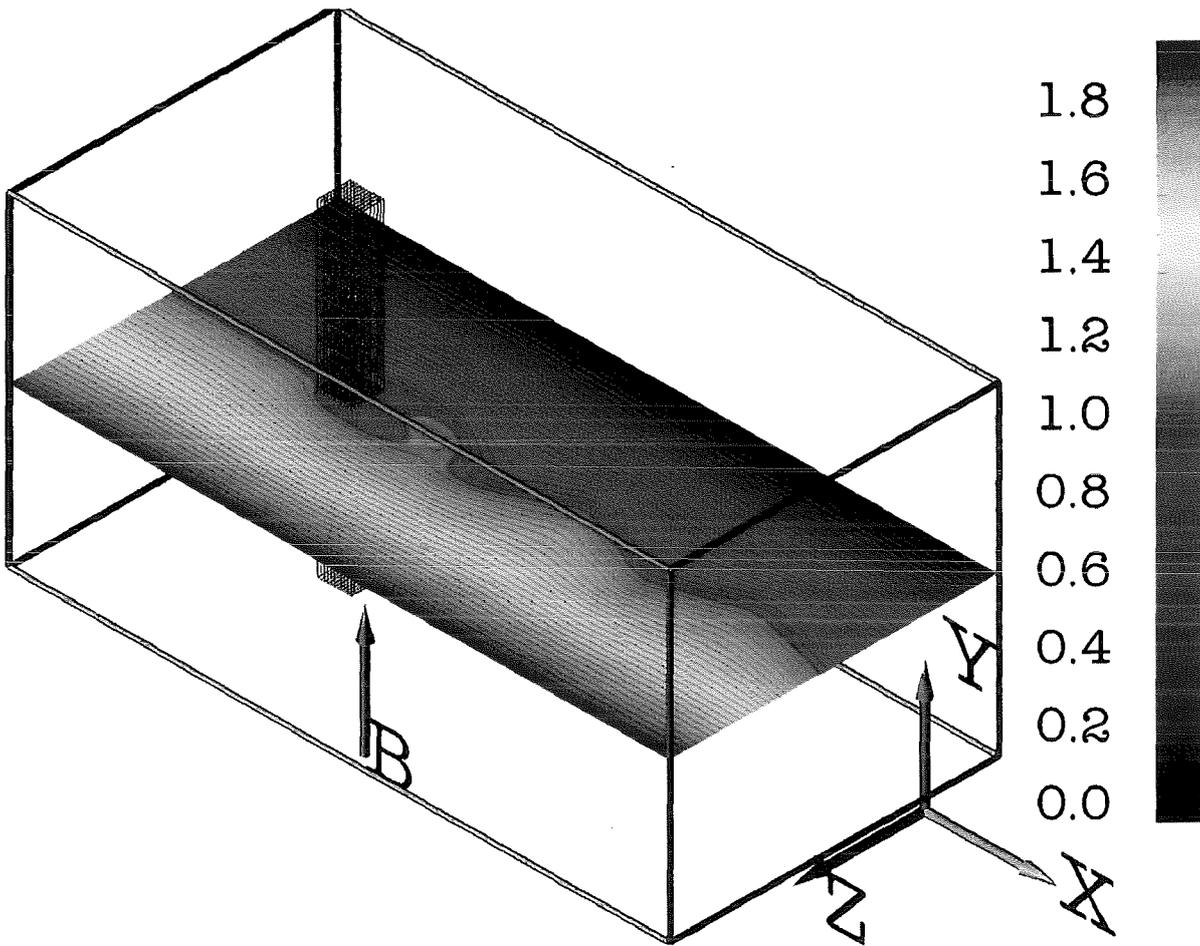


Abbildung 7.18: $Re=200$; $M=264.5$; $N=70$; Schnitt ($y=5$) durch das Potentialfeld. Linien entsprechen Isopotentiallinien der Ebene.

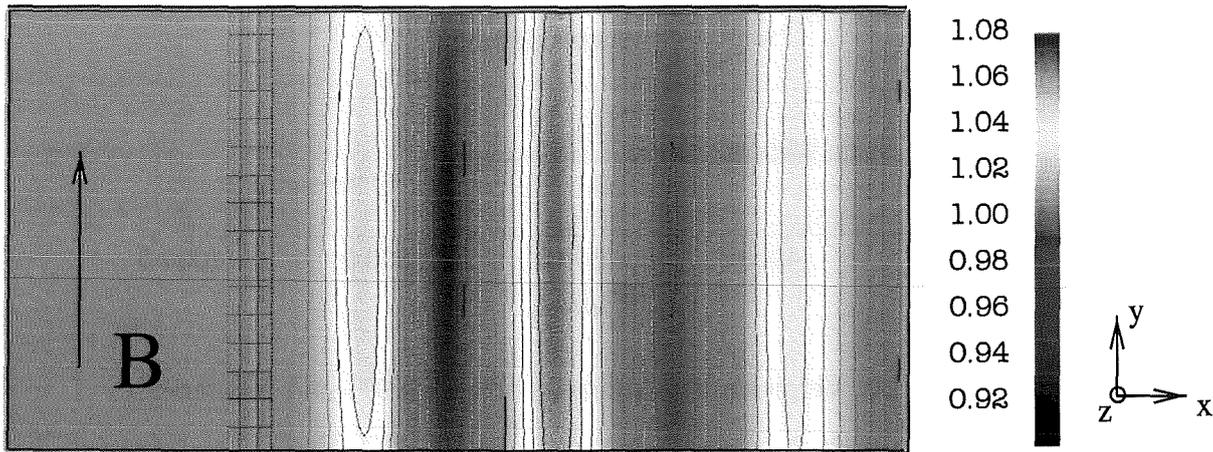


Abbildung 7.19: $Re=200$; $M=264.5$; $N=70$; Schnitt ($Z=5$) durch das Potentialfeld. Linien entsprechen Isopotentiallinien der Ebene.

In Abbildung 7.18 ist zu erkennen, daß das Potential Stromlinien der Strömung wiedergibt. In Abbildung 7.19 sieht man, daß sich die zigarrenartige Form der Wirbeldämpfung durch das magnetische Feld auch im Potential widerspiegelt.

Eine vollständige Dämpfung der Wirbelstraße konnte in dieser Rechnung auch bei den höchsten verwendeten Hartmann-Zahlen und Interaktionsparametern nicht erreicht werden. Es trat das Problem auf, das 'Ende der Wirbelablösung' definieren zu müssen. Das 'Ende der Wirbelablösung' wurde bei den Parametern definiert, bei denen die Wirbel das Rechengebiet nicht mehr verlassen und vorher gedämpft werden. Die so erhaltenen Werte wurden mit den Ergebnissen von Frank und Barleon (1997) verglichen.

Da sich die mit den unterschiedlichen Kanalgeometrien und Zylinderabmessungen erzielten Ergebnisse nicht unmittelbar vergleichen lassen, wird die dimensionslose Dämpfungszeit τ_{Ha} nach Gleichung 5.3.26 verwendet, in die das Verhältnis aus Kanalhöhe in Magnetfeldrichtung und der typischen Querabmessung (Wirbeldurchmesser \sim Zylinderseitenlänge) eingeht. τ_{Ha} stellt die charakteristische Zeitskala für die Joulsche Dissipation der Wirbel über die Hartmann-Wände dar. In Abbildung 7.20 wurden die Werte aus der Kurve von Frank und Barleon (1997) umgerechnet und die Ergebnisse der durchgeführten numerischen Simulation eingetragen.

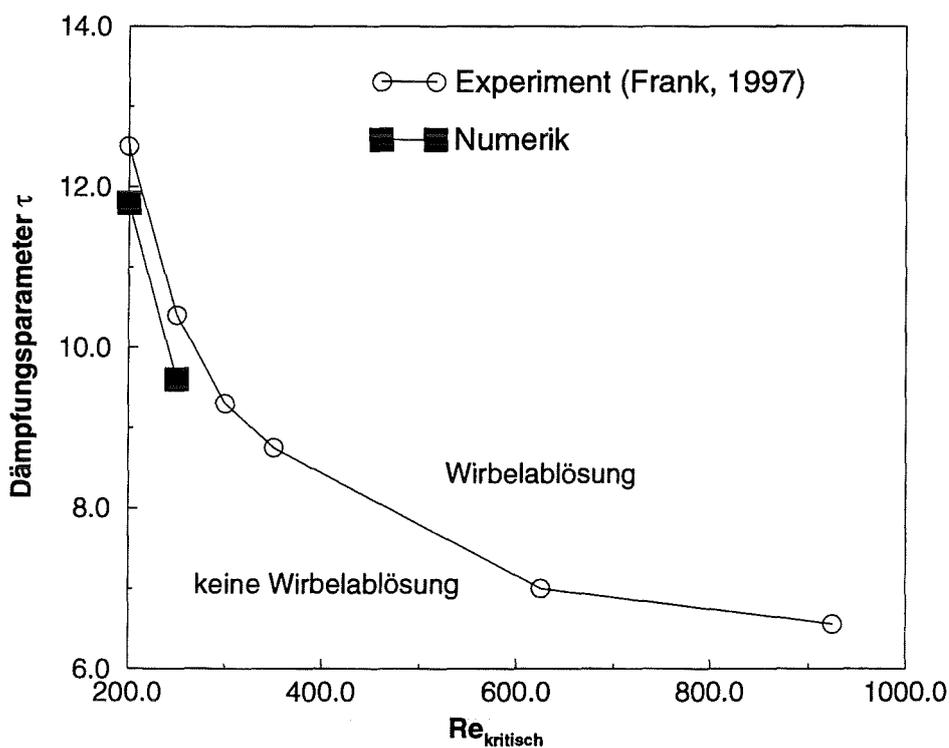


Abbildung 7.20: Vergleich von Messung Frank (1997) und Numerik.

Die Werte der numerischen Simulation liegen qualitativ richtig. Tendenziell ist in der numerischen Simulation eine stärkere magnetische Dämpfung notwendig als im Experiment. Verursacht die magnetische Dämpfung jedoch eine zigarrenförmige Verformung der Wirbel, so sind auch die Werte des Experiments zu höheren Werten von Hartmann-Zahl und Interaktionsparameter verschoben, da die Wirbel kurz vor ihrer vollständigen Dämpfung nicht

mehr auf der Hartmann-Wand experimentell aufgelöst werden können. Dies hätte in Abbildung 7.20 die Folge, daß die experimentellen Werte für τ_c nach unten zu korrigieren wären. Es ist weiter zu beachten, daß in der numerischen Simulation ein Zylinder quadratischen Querschnitts verwendet wurde, was eine weitere Ursache für Diskrepanzen darstellt.

7.3 Dämpfung von bewegten Wirbeln

Die Dämpfung eines einzelnen, in Magnetfeldrichtung ausgerichteten Wirbels durch Stromschluß in den Hartmann-Wänden wurde bereits in Abbildung 5.18c gezeigt. Die durch die Wechselwirkung des elektrischen Stromes mit dem Magnetfeld entstehenden Lorentz-Kräfte wirken so, daß die Drehung des Wirbels verlangsamt wird. Dieser Wirbel wurde nicht durch eine äußere Strömung bewegt.

Um die Mechanismen der Wirbeldämpfung verstehen zu können, ist es wichtig, die Schließungswege des elektrischen Stromes zu kennen. Bewegen sich die Wirbel mit der Hauptströmung, wie in Abschnitt 7.2 gezeigt, so entsteht durch die Überlagerung der induzierten elektrischen Ströme der Hauptströmung und der induzierten Ströme des Wirbels ein komplexes dreidimensionales Muster des elektrischen Stromes. Kennt man dieses Muster, so ist es auf sehr einfache Weise möglich, auf die Kraftwirkung der Lorentz-Kraft zurückzuschließen. Zunächst wird in Abbildung 7.21 noch einmal das Schließungsmuster des Stromes für einen einfachen, nichtbewegten Wirbel sowie für eine Kanalströmung in einem isolierten Kanal gezeigt.

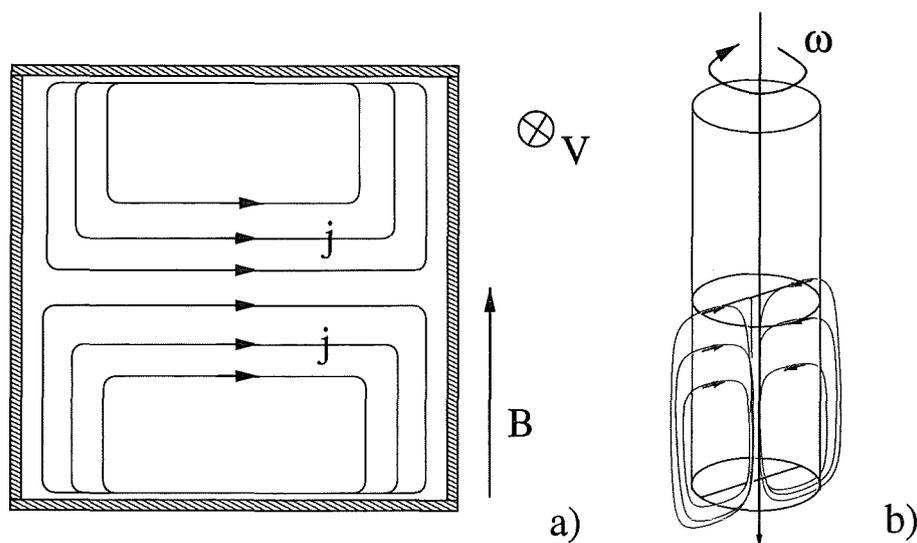


Abbildung 7.21: Stromverläufe in einem isolierten Kanal a) und in einem nicht bewegten Wirbel b).

Überlagert man die beiden Stromverläufe, so läßt sich eine Vorstellung entwickeln, vor allem wenn man als Hilfestellung den dargestellten elektrischen Stromverlauf der numerischen Simulation betrachtet, der in den Abbildungen 7.22 und 7.23 gezeigt wird. In den Abbildungen 7.22 und 7.23 wurde ein Teil des Strömungsgebietes ausgeblendet und die

Isovorticity Oberflächen teilweise durchsichtig gemacht, um den Verlauf des Stromes besser zeigen zu können. Um die räumliche Lage besser beurteilen zu können, werden zwei Darstellungen gezeigt.

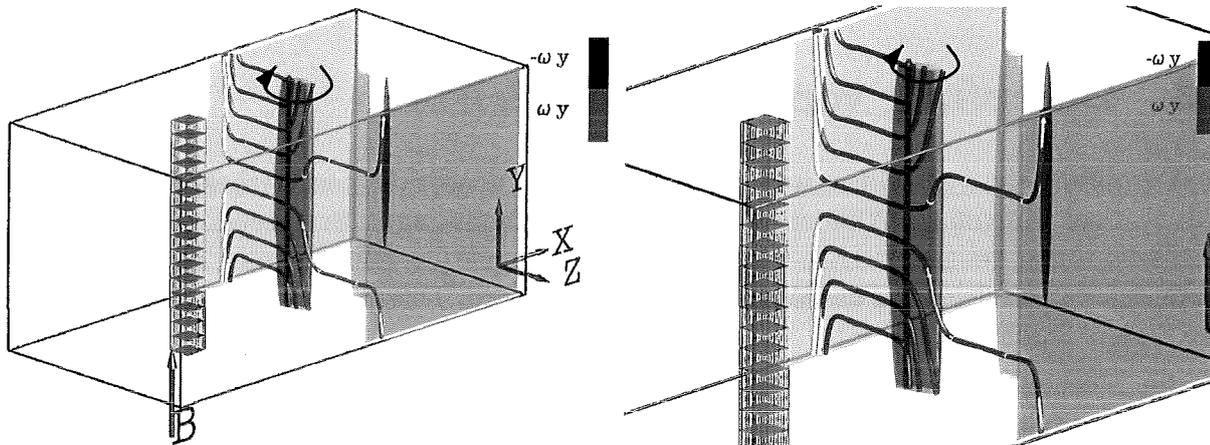


Abbildung 7.22: $Re=200$; $M=264.5$; $N=70$; Isovorticity-Oberflächenplot $\omega_y = \pm 6$; elektrische Stromlinien (Pink).

Außerhalb des Wirbels ist die Stromdichte gleichmäßig entlang der y -Richtung verteilt. Im 'Einflußbereich des Wirbels' wird der elektrische Strom in Richtung der Hartmann-Schicht abgelenkt und teilweise von ihr aufgenommen. Dies ist folgerichtig, denn betrachtet man den Stromverlauf im nichtbewegten Wirbel, so fließt der Strom in die Richtung der Hartmann-Wände. Die Darstellung kann also als Überlagerung der beiden Stromverläufe aus Abbildung 7.21 verstanden werden. Auf der linken Seite des Wirbels wird die Stromdichte durch den Wirbel erhöht, auf der rechten Seite reduziert. Dennoch gibt es Strompfade, die rechts des Wirbels die Seitenschichten erreichen, um dann ebenfalls in die Hartmann-Wände abzubiegen. Die Lorentz-Kräfte rechts und links des Wirbels zeigen hier beide entgegen der Strömungsrichtung. Sie sind aufgrund der höheren Stromdichte links stärker als rechts, was sich auf die Wirbeldrehung bremsend auswirkt. Für Wirbel mit umgekehrtem Drehsinn (siehe Abb. 7.23) kann analog argumentiert werden. Es läßt sich beobachten, daß der Strom nur dann in einer Ebene $x = const$ fließt, wenn diese Ebene den Wirbel genau halbiert. In allen anderen Fällen ändert der Strom die Ebene, in der er fließt, im Bereich des Wirbels, in $+x$ oder $-x$ Richtung. Betrachtet man den Stromfluß durch einen umgekehrt drehenden Wirbel (siehe Abb. 7.23), so erkennt man die 'umgekehrte' Form des Stromverlaufs.

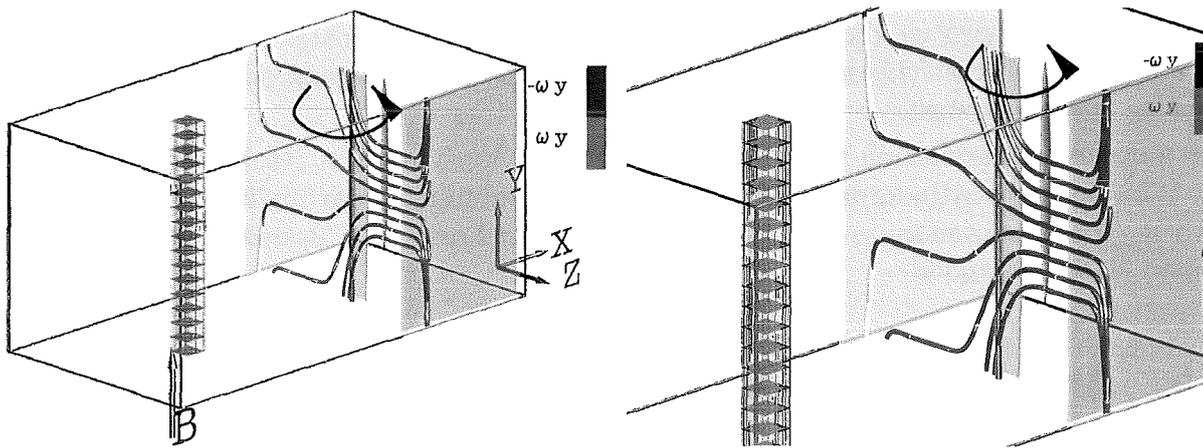


Abbildung 7.23: $Re=200$; $M=264.5$; $N=70$; Isovorticity-Oberflächenplot $\omega_y = \pm 6$; elektrische Stromlinien (Pink).

Im Bereich des Wirbels wird elektrischer Strom durch den Wirbel aus der Hartmann-Schicht aufgenommen und auf den Kern verteilt.

7.4 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Rechenprogramm zur Berechnung von dreidimensionalen instationären Zwangskonvektionsströmungen unter dem Einfluß von Magnetfeldern weiterentwickelt, so daß mit dem Programm nun die Umströmung von Hindernissen in Kanälen unter Magnetfeldeinfluß numerisch untersucht werden kann.

Das Rechenprogramm wurde mit einer Gebietszerlegungsmethode (Einflußmatrix-Methode) erweitert und für die Verwendung auf einem Vektor-Parallelrechner (VPP300) mit explizitem Message-Passing parallelisiert.

Zusätzlich zur Verifizierung des Rechenprogramms zur Simulation instationärer dreidimensionaler MHD-Strömungen in Leboucher (1995) sowie Lenhart (1994) und Sterl (1989) wurde das weiterentwickelte Programm mit Testfällen der zwei- und dreidimensionalen Umströmung eines quadratischen Zylinders für den hydrodynamischen Fall verifiziert. Für die numerische Simulation der hydrodynamischen dreidimensionalen Umströmung eines quadratischen Zylinders ist bisher nur eine Arbeit von Sohankar (1998) bekannt, mit der eine gute Übereinstimmung erzielt werden konnte.

Die dreidimensionale Simulation der Zylinderumströmung unter der Wirkung eines zylinderparallelen Magnetfeldes wurde in dieser Arbeit zum ersten Mal durchgeführt. Durch die Verwendung eines Modells für die Hartmann-Schichten entsprechend Bühler (1995) oder Hua und Walker (1989) ist es möglich, die Auflösung der dünnen Hartmann-Schichten zu vermeiden und so die benötigte Gitterpunktanzahl für das Problem der Kernlösung zur Verfügung zu stellen. Die numerisch berechneten Ergebnisse für die Dämpfung der Kármánschen Wirbelstraße durch ein äußeres magnetisches Feld stimmen mit den experimentell von Frank und Barleon (1997) gefundenen Ergebnissen gut überein. In der numerischen Simulation wurde wie im Experiment nur eine geringfügige Verringerung der dimensionslosen Wirbelablösefrequenz gefunden. Insbesondere konnte die Unterdrückung

von Wirbelkomponenten, die nicht in Magnetfeldrichtung ausgerichtet sind, schon bei relativ schwachen Magnetfeldern gezeigt werden. Es findet ein Übergang zu einer zweidimensionalen Strömung statt.

Die numerische Simulation zeigt ebenfalls, daß die Spreizung des Nachlaufgebiets unter der Wirkung eines zylinderparallelen Magnetfeldes abnimmt. Diese qualitative Eigenschaft wird in Übereinstimmung mit den Experimenten von Frank und Barleon (1997) und Pailiou (1984) gefunden.

7.5 Ausblick

Die Durchführung dreidimensionaler instationärer numerischer Berechnungen ist sehr aufwendig, da große Datenmengen verarbeitet werden müssen. Um bei den hier erforderlichen Gitterauflösungen im Bereich von 1-10 Millionen Gitterpunkten in vertretbarer Zeit zu einem Ergebnis zu kommen, ist der Einsatz der jeweils neuesten Großrechner-Generation notwendig.

Bei den heute eingesetzten Großrechnern (SNI VPP300, IBM RS/6000 SP) handelt es sich in der Regel um Parallelrechner oder Vektor-Parallelrechner. Der Fortschritt zu den früher eingesetzten Vektorrechnern wird hauptsächlich durch die Möglichkeit einer parallelen Abarbeitung eines Programms erzielt. Die bisherige stürmische Entwicklung der Rechnerleistung läßt weitere Steigerungen erwarten. Um diese Leistung nutzen zu können, sollten nicht nur physikalische Aspekte bei der Weiterentwicklung des verwendeten Programm-Codes beachtet werden, sondern auch die Aspekte der eingesetzten Algorithmen hinsichtlich der Verwendbarkeit auf parallelen Rechner-Architekturen. Auch das Problem der Auswertung der anfallenden Daten ('Post-Prozessing') muß berücksichtigt werden, da hier in der Regel mehr Zeit aufgewendet werden muß, wie zur Erzeugung dieser Daten selbst benötigt wurde.

Eine Verbesserung in allen diesen Einzelaspekten ist notwendig, um schneller zu einer Lösung zu kommen und größere Probleme berechnen zu können.

Hinsichtlich der Rechenzeit ist eine weitere Beschleunigung anzustreben. Die Parallelisierung des Programms durch die vorgenommene funktionale Zerlegung könnte durch eine Gebietszerlegungsmethode, wie in der vorliegenden Arbeit beschrieben, systematisch erweitert werden. Nicht nur hinsichtlich der Rechenzeit sondern auch hinsichtlich der Größe des Problems könnten hier Fortschritte erzielt werden.

Weitere denkbare Schritte zur Programmentwicklung sind die Erweiterung auf kontourangepaßte, nichtäquidistante Gitter, was die Flexibilität bezüglich der Auflösung von Grenzschichten am Hindernis erhöht und es ermöglichen würde, Hartmann-Schichten an einem Hindernis aufzulösen. Damit könnte man den Einfluß von in MHD-Experimenten verwendeten Meßsonden genauer beurteilen.

Für hydrodynamische Rechnungen ist eine Erweiterung durch ein Turbulenzmodell sinnvoll, um zu höheren Reynoldszahlen zu gelangen. Von physikalischem Interesse bezüglich der Zylinderumströmung ist die genauere Untersuchung der Beeinflussung des absolut sensitiven Gebiets durch ein magnetisches Feld.

Das oben angesprochene 'Post-Prozessing' von Daten hat sich bereits zu einem eigenen Forschungsgebiet entwickelt. Jeder Geschwindigkeitsgewinn in diesem Gebiet verkürzt die Entwicklungszeit eines Programmcodes.

Anhang A

Multiplikatives Schwarz-Verfahren

Als Ergänzung soll hier gezeigt werden, daß das multiplikative Schwarz-Verfahren einer blockweisen Gauß-Seidel Iteration entspricht. Im folgenden wird exemplarisch eine Block-Gauß-Seidel Iteration gezeigt und die Umformungen des multiplikativen Verfahrens um diese Form zu erhalten.

Betrachtet wird wieder ein allgemeines Gleichungssystem:

$$A\psi = f \quad (\text{A.0.1})$$

Bei einer Aufteilung in zwei Gebiete ergibt sich in Matrixschreibweise :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.2})$$

Die Block-Gauß-Seidel Iteration läuft jetzt, mit dem Iterationsindex m , folgendermaßen ab:

$$\psi_1^{k+1} = A_{11}^{-1}(f_1 - A_{12}\psi_2^k) \quad (\text{A.0.3})$$

$$\psi_2^{k+1} = A_{22}^{-1}(f_2 - A_{21}\psi_1^{k+1}) \quad (\text{A.0.4})$$

Nun folgt die Umformung des multiplikativen Schwarz Verfahrens. Die Vorschriften 4.4.15 und 4.4.16 kann man auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^k \\ \psi_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(f - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^k \\ \psi_2^k \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.0.5})$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \left(f - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^k \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.0.6})$$

führt man die Matrix-Vektor Multiplikationen aus, so erhält man:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^k \\ \psi_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(f - \begin{pmatrix} A_{11}\psi_1^k + A_{12}\psi_2^k \\ A_{21}\psi_1^k + A_{22}\psi_2^k \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.0.7})$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \left(f - \begin{pmatrix} A_{11}\psi_1^{k+1} + A_{12}\psi_2^k \\ A_{21}\psi_1^{k+1} + A_{22}\psi_2^k \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.0.8})$$

und schlieslich:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^k \\ \psi_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{A_{11}^{-1} A_{11} \psi_1^k + A_{11}^{-1} A_{12} \psi_2^k}{0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.9})$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_{22}^{-1} f_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{A_{22}^{-1} A_{21} \psi_1^{k+1} + A_{22}^{-1} A_{22} \psi_2^k}{0} \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.10})$$

Da sich die unterstrichenen Terme mit ψ_1^k bzw. ψ_2^{k+1} herausheben und die jeweils andere Vektorkomponente von ψ nicht verändert wird, ergibt sich die Vorschrift einer blockweisen Gauss-Seidel Iteration wie in den Gleichungen A.0.3 und A.0.4:

$$\psi_1^{k+1} = A_{11}^{-1}(f_1 - A_{12}\psi_2^k) \quad (\text{A.0.11})$$

$$\psi_2^{k+1} = A_{22}^{-1}(f_2 - A_{21}\psi_1^{k+1}) \quad (\text{A.0.12})$$

Für den allgemeinen Fall vieler Teilgebiete gilt die allgemeine Vorschrift für eine Block-Gauss-Seidel Iteration wie in Hackbusch (1993) S.104 angegeben.

Anhang B

Additives Schwarz Verfahren

Die Umformung der Vorschriften (4.4.31) und (4.4.32) zur Block-Jacobi-Form läuft analog zu den Gleichungen (A.0.5-A.0.10): Das additive Schwarz'sche Verfahren in Matrixform lautet:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^k \\ \psi_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(f - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^k \\ \psi_2^k \end{pmatrix} \right) \quad (\text{B.0.1})$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \left(f - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^k \\ \psi_2^k \end{pmatrix} \right) \quad (\text{B.0.2})$$

Nach einigen Umformungen erhält man:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^k \\ \psi_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{A_{11}^{-1} A_{11} \psi_1^k + A_{11}^{-1} A_{12} \psi_2^k}{0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.3})$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{k+1} \\ \psi_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_{22}^{-1} f_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{A_{22}^{-1} A_{21} \psi_1^{k+1} + A_{22}^{-1} A_{22} \psi_2^k}{0} \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.4})$$

Da sich die unterstrichenen Terme mit ψ_1^k bzw. ψ_2^k herausheben und die jeweils andere Vektorkomponente von ψ nicht verändert wird, ergibt sich die Vorschrift einer blockweisen Jacobi Iteration:

$$\psi_1^{k+1} = A_{11}^{-1} (f_1 - A_{12} \psi_2^k) \quad (\text{B.0.5})$$

$$\psi_2^{k+1} = A_{22}^{-1} (f_2 - A_{21} \psi_1^k) \quad (\text{B.0.6})$$

Für den allgemeinen Fall vieler Teilgebiete gilt die allgemeine Vorschrift für eine Block-Jacobi Iteration.

Anhang C

Verzeichnis der Formelzeichen

Vektoren

\vec{v}	ms^{-1}	Geschwindigkeitsvektor
\vec{B}	$N(Am)^{-1}$	magnetische Induktion
\vec{j}	Am^{-2}	elektrische Stromdichte
\vec{E}	Vm^{-1}	elektrisches Feld
$\vec{\omega}$	s^{-1}	Vorticity
\vec{n}	m	Normalenvektor auf einer Fläche
$\vec{\tau}$	Nm^{-2}	Schubspannungen

Skalare

Φ	V	elektrisches Potential
p	Nm^{-2}	Druck
ϕ	-	Transportvariable
a	m	charakteristische Länge
ρ	kgm^{-3}	Dichte
ρ	-	Spektralradius
ρ_{el}	Cm^{-3}	elektrische Ladungsdichte
κ	-	Konditionszahl einer Matrix
λ	-	Eigenwert einer Matrix
ν	m^2s^{-1}	kinematische Viskosität
σ	$A(Vm)^{-1}$	elektrische Leitfähigkeit
μ	-	magnetische Permeabilität
x, y, z	m	Koordinaten
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	m	Gitterweite in x-,y-,z-Richtung
ϵ	$As(Vm)^{-1}$	Dielektrizitätskonstante
t	s	Zeit
$I = \sqrt{-1}$	-	imaginäre Einheit
f	s^{-1}	Frequenz
c	ms^{-1}	Wellengeschwindigkeit
A	m^2	Fläche

δ	-	Dicke der Grenzschicht
t_w	m	Dicke der Wand
η	-	gestreckte Koordinate in der Hartmann-Schicht
β	-	Versperrungsverhältnis
β	-	Überlappungsparameter
Θ	-	Relaxationsparameter

Indizes

n	Komponente normal zur Wand
t	Komponente tangential zur Wand
w	Größe in der Wand
c	Größe im Strömungskern
h	Größe in der Hartmann-Schicht
x, y, z	Komponenten in x, y, z-Richtung
\parallel	Komponente parallel zur Wand
\perp	Komponente senkrecht zur Wand
0	Grundzustand

Abkürzungen

MHD	<u>M</u> agnetohydrodynamik
CFD	<u>C</u> omputational <u>F</u> luid <u>D</u> ynamics
FDM	<u>F</u> inite <u>D</u> ifferenzen <u>M</u> ethoden
FEM	<u>F</u> inite <u>M</u> ethoden
FVM	<u>F</u> inite <u>V</u> olumen <u>M</u> ethoden
SM	<u>S</u> pektral <u>M</u> ethoden
SEL	<u>s</u> chneller <u>e</u> lliptischer <u>L</u> öser
DGL	<u>D</u> ifferentialgleichung
UDS	<u>U</u> pwind <u>D</u> ifference <u>S</u> cheme
QUICK	<u>Q</u> uadratic <u>U</u> pstream <u>I</u> nterpolation for <u>C</u> onvective <u>K</u> inematics
ASS	<u>A</u> llen <u>S</u> outhwell <u>S</u> cheme
LECUSSO	<u>L</u> ocally <u>E</u> xact <u>C</u> onsistent <u>U</u> pwind <u>S</u> cheme of <u>S</u> econd <u>O</u> rd
SIMPLE	<u>S</u> emi <u>I</u> mplizit <u>M</u> ethod for <u>P</u> ressure <u>L</u> inked <u>E</u> quations
PISO	<u>P</u> ressure <u>I</u> mplicit with <u>S</u> plitting of <u>O</u> perations
MPP	<u>M</u> assively <u>P</u> arallel <u>P</u> rocessor
RMS	<u>R</u> oot <u>M</u> ean <u>S</u> quare

dimensionslose Kennzahlen

M	$=$	$aB\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}$	Hartmann-Zahl
N	$=$	$\frac{\sigma a B_0^2}{\rho\nu_0}$	Interaktionsparameter
c	$=$	$\frac{\sigma_w t_w}{\sigma a}$	Wandleitparameter
R_m	$=$	$\mu\sigma\nu_0 a$	magnetische Reynoldszahl
Re	$=$	$\frac{v_0 a}{\nu}$	hydrodynamische Reynoldszahl
St	$=$	$\frac{fd}{U_0}$	Strouhalzahl
c_{LP}	$=$	$\frac{\int p dA_{\parallel}}{\rho/2U_0^2 A_{\perp}}$	Druckanteil des Auftriebsbeiwertes
c_{DP}	$=$	$\frac{\int p dA_{\perp}}{\rho/2U_0^2 A_{\perp}}$	Druckanteil des Widerstandsbeiwertes
c_{LF}	$=$	$\frac{\int \tau dA_{\perp}}{\rho/2U_0^2 A_{\perp}}$	Reibungsanteil des Auftriebsbeiwertes
c_{DF}	$=$	$\frac{\int \tau dA_{\parallel}}{\rho/2U_0^2 A_{\perp}}$	Reibungsanteil des Widerstandsbeiwertes
c_L	$=$	$c_{LP} + c_{LF}$	Auftriebsbeiwert
c_D	$=$	$c_{DP} + c_{DF}$	Widerstandsbeiwert
C	$=$	$\left[\frac{ u }{\Delta x} + \frac{ v }{\Delta y} + \frac{ w }{\Delta z} \right] \Delta t$	Courant-Zahl
d	$=$	$\nu\Delta t \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right]$	Diffusionslimit

Literaturverzeichnis

- Abas, S.: 1969, The effect of a parallel magnetic field on the stability of free boundary-layer type flows of low magnetic Reynolds number, *J. Fluid Mech.* **38**, 243–253.
- Agarwal, R. K.: 1981, A third-order-accurate upwind schema for Navier Stokes solutions in three dimensions, in K.N. Ghia et al. (ed.), *Computers in Flow Prediction and Fluid Dynamics Experiments*, ASME, Washington, pp. 73–82.
- Allen, D. N. und Southwell, R. V.: 1955, Relaxation methods applied to determine the motion, in two dimensions, of a viscous fluid past a fixed cylinder, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **8**, 129–145.
- Anderson, D., Tannehill, J. und Pletcher, R.: 1984, *Computational fluid mechanics and heat transfer*, Hemisphere, New York.
- Andreev, O. V. und Kolesnikov, Y.: 1997, MHD instabilities at transverse flow around a circular cylinder in a axial magnetic field, *Third International Conference on Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamic and Electroconducting Flows*, pp. 205–210.
- Atias, M., Wolfshtein, M. und Israeli, M.: 1977, Efficiency of the Navier-Stokes solver, *AIAA Journal* **15**, 263–266.
- Barkley, D. und Henderson, R.: 1996, Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder., *J. Fluid Mech.* **322**, 215–241.
- Barleon, L., Mack, K., Kirchner, R. und Stieglitz, R.: 1995, Heat transfer in MHD-flow at high Hartmann-numbers and improvement by turbulence promotion, *Magnetohydrodynamics* **31**(3), 328–337.
- Beheim, M., Klamm, M. und Yeaser, R.: 1962, Jet effects on annular base pressure and temperature in a supersonic stream, *Technical Report TR R-125*, NASA.
- Bell, J., Colella, P. und Glaz, H.: 1989, A second-order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comp. Phys.* **85**, 257–283.
- Bjørstad, P. E.: 1988, Multiplicative and additive Schwarz methods: Convergence in the two-domain case, in T. Chan, R. Glowinski und J. Periaux (eds.), *Domain Decomposition Methods*, SIAM, pp. 147–159.
- Bjørstadt, P. E. und Widlund, O. B.: 1989, To overlap or not to overlap: A note on a domain decomposition method for elliptic problems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **10**(5), 1053–1061.

- Bloor, M.: 1964, The transition to turbulence in the wake of a circular cylinder, *J. Fluid Mech.* **19**, 290–304.
- Bosch, G.: 1995, *Experimentelle und theoretische Untersuchungen der instationären Strömung um zylindrische Strukturen*, Dissertation, Universität Karlsruhe.
- Bramble, J. H., Pasciak, J. E. und Schatz, A. H.: 1986, The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring I, *Math. Comp.* **47**(175), 103–134.
- Bramble, J. H., Pasciak, J. E. und Schatz, A. H.: 1987, The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring II, *Math. Comp.* **49**(179), 1–16.
- Bramble, J. H., Pasciak, J. E. und Schatz, A. H.: 1988, The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring III, *Math. Comp.* **51**(184), 415–430.
- Bramble, J. H., Pasciak, J. E., Wang, J. und Xu, J.: 1991, Convergence estimates for product iterative methods with applications to domain decomposition, *Math. Comp.* **57**(195), 1–21.
- Bramble, J., Pasciak, J. und Vassilev, A.: 1998, Analysis of non-overlapping domain decomposition algorithms with inexact solvers, *Math. Comp.* **67**(221), 1–19.
- Branover, H.: 1978, *Magnetohydrodynamic flow in ducts*, Wiley, New York.
- Brouillette, E. C. und Lykoudis, P. S.: 1967, Magneto-fluid-mechanic channel flow. I. Experiment, *Phys. Fluids* **10**, 995–1001.
- Bruneau, C. H.: 1993, Computation of incompressible flows behind a cylinder in a channel, *Proc. of the 5th Int. Symp. on Computational Fluid Dynamics*, Vol. I, JSCFD, Sendai, pp. 94–100.
- Bühler, L.: 1995, Magnetohydrodynamic flows in arbitrary geometries in strong, nonuniform magnetic fields, *Fusion Technology* **27**, 3–24.
- Bühler, L.: 1996, Instabilities in quasi-two-dimensional magnetohydrodynamic flows, *J. Fluid Mech.* **326**, 125–150.
- Burr, U.: 1998, *Turbulente Transportvorgänge in magnetohydrodynamischen Kanalströmungen*, Dissertation, Universität Karlsruhe.
- Buzbee, B. L.: 1973, A fast Poisson solver amenable to parallel computation, *IEEE Transactions on Computers* **C-22**, 793–796.
- Buzbee, B. L., Dorr, F. W., George, J. A. und Golub, G. H.: 1974, The direct solution of the discrete Poisson equation on irregular regions, *SIAM J. Numer. Anal.* **11**(4), 753–759.
- Cai, X. und Widlund, O.: 1993, Multiplicative Schwarz algorithms for some nonsymmetric and indefinite problems, *SIAM J. Numer. Anal.* **30**(4), 936–952.
- Cantwell, B. und Coles, D.: 1983, An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder., *J. Fluid Mech.* **136**, 321–374.

- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. und Zang, T. A.: 1987, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, Berlin.
- Carte, G., Dusek, J. und Fraunie, P.: 1995, A spectral time discretisation for flows with dominant periodicity, *J. Comp. Phys.* **120**, 171–183.
- Chan, T. F., Hou, T. Y. und Lions, P. L.: 1991, Geometry related convergence results for domain decomposition algorithms, *SIAM J. Numer. Anal.* **28**(2), 378–391.
- Chan, T. F. und Fatoohi, R. A.: 1989, Multitasking domain decomposition fast Poisson solvers on the Cray Y-MP, *Proceedings of the fourth SIAM Conference on parallel Processing for scientific Computing*, SIAM, pp. 237–244.
- Chan, T. F. und Glowinski, R. (eds.): 1988, *First int. Symp. on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, SIAM.
- Chan, T. F. und Glowinski, R. (eds.): 1989, *Second int. Symp. on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, SIAM.
- Chan, T. F. und Goovaerts, D.: 1992, On the relationship between overlapping and nonoverlapping domain decomposition methods, *Siam J. Matrix Anal. Appl.* **13**(2), 663–670.
- Chan, T. F. und Mathew, T. P.: 1994, Domain decomposition algorithms, *Acta Numerica* pp. 61–143.
- Chan, T. F. und Resasco, D. C.: 1987a, Analysis of domain decomposition preconditioners on irregular regions, in R. Vichnevetsky und R. S. Stepleman (eds.), *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 4, IMACS, pp. 121–133.
- Chan, T. F. und Resasco, D. C.: 1987b, A domain-decomposed fast Poisson solver on a rectangle, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **8**(1), 14–26.
- Chang, C. und Lundgren, S.: 1961, Duct flow in magnetohydrodynamics, *ZAMP* **12**, 100–114.
- Chapman, M.: 1981, FRAM-nonlinear damping algorithms for the continuity equation, *J. Comp. Phys.* **44**, 84–103.
- Chorin, A. J.: 1968, Numerical solution of the Navier-Stokes equation, *Math. Comp.* **22**(120), 745.
- Comini, G., Manzan, M. und Cortella, G.: 1997, Open boundary conditions for the streamfunction-vorticity formulation of unsteady laminar convection, *Numerical Heat Transfer, Part B* **31**, 217–234.
- Cullum, J. K.: 1996, Iterative methods for solving $Ax = b$ GMRES/FOM versus QMR/BiCG, *Technical Report CS-TR-3587*, University of Maryland, College Park.
- Davidson, P. A.: 1995, Magnetic damping of jets and vortices, *J. Fluid Mech.* **299**, 153–186.
- Davis, R., Moore, E. und Purtell, L.: 1984, A numerical-experimental study of confined flow around rectangular cylinders, *Phys. Fluids* **27**, 46–59.

- Davis, R. und Moore, E.: 1982, A numerical study of vortex shedding from rectangles, *J. Fluid Mech.* **116**, 475–506.
- Deck, T.: 1995, *Numerische Simulation einer Kanalströmung um einen quaderförmigen Körper mit Hilfe lokaler Gitterverfeinerung*, Dissertation, Universität Karlsruhe.
- Demmel, J.: 1989, LAPACK: A portable linear algebra package for supercomputers, *Proceedings 1989 IEEE Control Systems Society Workshop on Computer-Aided Control System Design*, Tampa, Florida, pp. 1–7.
- Dryja, M. und Widlund, O. B.: 1994, Domain decomposition algorithms with small overlap, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **15**(3), 604–620.
- Eisenlohr, H. und Eckelmann, H.: 1989, Vortex splitting and its consequences in the vortex street wake of cylinders at low Reynolds numbers, *Phys. Fluids* **1**, 189–192.
- Engquist, B. und Majda, A.: 1977, Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Math. Comp.* **31**(139), 629–651.
- Fletcher, C.: 1987, *Computational techniques for fluid dynamics*, Vol. 1,2, Springer, New York.
- Frank, M.: 1997, Experimentelle Untersuchung zweidimensionaler MHD-Turbulenz, Diplomarbeit am Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik, Forschungszentrum Karlsruhe.
- Frank, M. und Barleon, B.: 1997, Experimental visualisation of two dimensional turbulence, *Third International Conference on Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamic and Electroconducting Flows*, pp. 217–222.
- Franke, R.: 1991, *Numerische Berechnung der instationären Wirbelablösung hinter zylindrischen Körpern*, Dissertation, Universität Karlsruhe.
- Freund, R. W. und Nachtigal, N. M.: 1991, QMR: A quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems, *Numerische Mathematik* **60**, 315–339.
- George, J. A.: 1970, The use of direct methods for the solution of the discrete Poisson equation on non-rectangular regions, *Research Report 159*, Computer Science Department Stanford University.
- Givoli, D.: 1991, Non-reflecting boundary conditions, *J. Comp. Phys.* **94**, 1–29.
- Gresho, P.: 1992, Some interesting issues in incompressible fluid dynamics, both in the continuum and in numerical simulation, *Advances in applied mechanics* **28**, 45–140.
- Griebel, M. und Oswald, P.: 1995, On the abstract theory of additive and multiplicative Schwarz algorithms, *Numerische Mathematik* **70**, 163–180.
- Günther, C.: 1992a, Conservative versions of the locally exact consistent upwind scheme of second order (LECUSSO-SCHEME), *Int. J. Numer. Methods Eng.* **34**, 793–804.

- Günther, C.: 1992b, *Fortgeschrittene Upwind-Differenzenverfahren zur numerischen Lösung der Konvektions-Diffusionsgleichung*, Habilitationsschrift, Universität Karlsruhe.
- Günther, C.: 1997, Die kleine Upwindfibel- Was es mit der künstlichen Diffusion auf sich hat, private Mitteilungen.
- Hackbusch, W.: 1993, *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*, Teubner, Stuttgart.
- Hafermann, D.: 1995, Numerische Simulation auf Parallelrechnern, Vorlesung Universität Karlsruhe.
- Hama, F.: 1957, Three-dimensional vortex pattern behind a circular cylinder, *J. Aeronaut. Sci.* **24**, 156.
- Hammache, M. und Gharib, M.: 1991, An experimental study of the parallel and oblique vortex shedding from circular cylinders, *J. Fluid Mech.* **232**, 567–581.
- Hartmann, J.: 1937, Hg-dynamics(I) Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field, *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-fysiske Meddelelser*.
- Hartmann, J. und Lazarus, F.: 1937, Hg-dynamics(II) Experimental investigations on the flow of an electrically conductive liquid in homogeneous magnetic field, *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-fysiske Meddelelser*.
- Henderson, R.: 1997, Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition, *J. Fluid Mech.* **352**, 65–112.
- Higdon, R. L.: 1986, Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multidimensional wave equation, *Math. Comp.* **47**(176), 437–459.
- Higdon, R. L.: 1987, Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation, *Math. Comp.* **49**(179), 65–90.
- Hirsch, C.: 1988, *Numerical computation of internal and external flows*, Vol. I, Wiley, New York.
- Hockney, R. W.: 1968, Formation and stability of virtual electrodes in a cylinder, *Journal of Applied Physics* **39**, 4166–4170.
- Hockney, R. W.: 1970, POT-4-A fast direct Poisson solver for the rectangle allowing some mixed boundary conditions and internal electrodes, *Research Report RC 2870*, IBM Research Division.
- Hua, T. Q. und Walker, J. S.: 1989, MHD-flows in insulating circular ducts for fusion blankets, *Fusion Technology* **15**, 699–721.
- Hunt, J. C. R.: 1965, Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts, *J. Fluid Mech.* **21**, 577–590.

- Hunt, J. C. R., Branover, G. G. und Gel'fgat, Y. M.: 1969, Magneto-hydrodynamic flow in a rectangular channel with walls of finite conductivity, *Magnetohydrodynamics* **5**(3), 139–142.
- Hunt, J. C. R. und Holroyd, R. J.: 1977, Applications of laboratory and theoretical MHD duct flow studies in fusion reactor technology, *UKAEA-Report CLM-R 169*, United Kingdom Atomic Energy Authority.
- Hunt, J. C. R. und Stewartson, K.: 1965, Magneto-hydrodynamic flow in rectangular ducts II, *J. Fluid Mech.* **23**, 563–581.
- Illy, S.: 1997, *Untersuchungen von Strahlinstabilitäten in der Kompressionszone von Gyrotron-Oszillatoren mit Hilfe der kinetischen Theorie und zeitabhängiger Particle-in-Cell-Simulationen*, Dissertation, Universität Karlsruhe.
- Issa, R. I., Gosman, A. D. und Watkins, A. P.: 1984, The computation of compressible and incompressible recirculating flows by a noniterative implicit scheme, *J. Comp. Phys.* **62**, 66–82.
- Jin, G. und Braze, M.: 1993, A nonreflecting outlet boundary condition for incompressible unsteady Navier-Stokes calculations, *J. Comp. Phys.* **107**, 239–253.
- Josserand, J., Marthy, P. und Allemany, A.: 1993, Pressure and drag measurements on a cylinder in a liquid metal flow with an aligned magnetic field, *Fluid Dynamics Research* **11**, 107–117.
- Kalis, K., Tsinober, A., Shtern, A. und Shcherbinin, V.: 1965, Flow of a conducting fluid past a circular cylinder in a transverse magnetic field, *Magnetohydrodynamics* **1**(1), 11–19.
- Kalis, K. und Tsinober, A.: 1973, Numerical analysis of three dimensional MHD flow problems, *Magnetohydrodynamics* **2**(1), 175–179.
- Karniadakis, G. und Triantafyllou, G.: 1992, Three dimensional dynamics and transition to turbulence in the wake of bluff objects, *J. Fluid Mech.* **238**, 1–30.
- Keyes, D. und Chan, T. F. (eds.): 1992, *Fifth Int. Symp. on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, SIAM.
- Kim, J. und Moin, P.: 1985, The fractional step method, *J. Comp. Phys.* **59**, 308–317.
- Kincaid, D. R. und Hayes, L. J.: 1990, *Iterative Methods for large linear Systems*, Academic Press Inc., New York.
- Kit, L. G., Turuntaev, S. V. und Tsinober, A. B.: 1970, Investigation with a conducting anemometer of the effect of a magnetic field on disturbances in the wake of a cylinder, *Magnetohydrodynamics* **6**(3), 35–40.
- Kniseley, C.: 1990, Strouhal numbers of rectangular cylinders at incidence: a review and new data, *Journal of Fluids and Structures* **4**, 371–393.
- Koch, W.: 1985, Local instability characteristics and frequency determination of self excited wake flows, *J. Sound Vib.* **99**, 53–83.

- Kolesnikov, Y. und Tsinober, A.: 1972a, An experimental study of two-dimensional turbulence behind a grid, *Fluid Dynamics* **9**, 621–624.
- Kolesnikov, Y. und Tsinober, A.: 1972b, Two-dimensional turbulent flow behind a circular cylinder, *Magnetohydrodynamics* **3**(1), 300–307.
- König, M., Noack, B. R. und Eckelmann, H.: 1992, Discrete shedding modes in the von Kármán vortex street, *Phys. Fluids* **5**, 1846–1848.
- König, M. und Eckelmann, H.: 1993, An experimental study of the three-dimensional structure of the wake of circular cylinders in the laminar and transitional Reynolds number range, in H. Eckelmann et al. (ed.), *IUTAM Symposium on Bluff-Body Wakes, Dynamics and Instabilities*, pp. 341–344.
- Kraichnan, R. H.: 1967, Inertial ranges in two-dimensional turbulence, *Phys. Fluids* **10**, 1417–1423.
- Kron, G.: 1953, A set of principles to interconnect the solutions of physical systems, *Journal of Applied Physics* **24**, 965–987.
- Lahjomri, J., Caperan, C. und Alemany, A.: 1993, The cylinder wake in a magnetic field aligned with the velocity, *J. Fluid Mech.* **253**, 421–448.
- Leboucher, L.: 1995, Numerical simulation of unsteady magnetohydrodynamic flows in ducts, *Wissenschaftliche Berichte FZKA 5663*, Forschungszentrum Karlsruhe.
- Lenhart, L.: 1994, *Magnetohydrodynamik in Rechteckgeometrien*, Dissertation, Universität Karlsruhe.
- Leonard, B. P.: 1979, A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Comp. Methods. Appl. Mech. Eng.* **19**, 59–98.
- Lielausis, O.: 1975, Liquid metal magnetohydrodynamics, *Atomic Energy Review* **13**, 527–581.
- Lienhard, J. H.: 1966, Synopsis of lift, drag, and vortex frequency data for rigid circular cylinders, *Bulletin 300*, College of Engineering Washington State University.
- Lindman, E. L.: 1975, Free-space boundary conditions for the time dependent wave equation, *J. Comp. Phys.* **18**, 66–78.
- Lock, R. C.: 1955, Stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field, *Proc. Roy. Soc.* **A233**, 105.
- Ludford, G. und Singh, M.: 1963, The motion of a non-conducting sphere through a conducting fluid in a magnetic cross field, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **59**, 615–624.
- Maday, Y., Patera, A. T. und Ronquist, E. M.: 1990, An operator-integration-factor splitting method for time-dependent problems: Application to incompressible flow, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **5**(4), 263–292.
- Mansfield, L.: 1990, On the conjugate gradient solution of the Schur complement system obtained from domain decomposition, *SIAM J. Numer. Anal.* **27**(6), 1612–1620.

- Molokov, S.: 1992, Single-component magnetohydrodynamic flows in a strong uniform magnetic field. 1. The motion of an infinite cylinder, *Magnetohydrodynamics* **28**(1), 79–86.
- Molokov, S. und Rajan, K.: 1997, Magnetohydrodynamic flows around bodies in strong transverse magnetic fields, *Third International Conference on Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamic and Electroconducting Flows*, pp. 231–236.
- Moreau, R.: 1990, *Magnetohydrodynamics*, Kluwer Academic Press, Dordrecht.
- Morkovin, M.: 1964, Flow around circular cylinders. A kaleidoscope of challenging fluid phenomena, *ASME Symp. on Fully Separated Flows, Philadelphia*, p. 102.
- Mößner, R.: 1996, *Dreidimensionale numerische Simulation von Naturkonvektionsströmungen unter dem Einfluß von Magnetfeldern*, Dissertation, Universität Karlsruhe.
- Müller, U.: 1997, Einführung in die Magnetohydrodynamik elektrisch leitender Flüssigkeiten, Vorlesung Universität Karlsruhe.
- Mutschke, G., Gerbeth, G., Shatrov, V. und Tomboulides, A.: 1997, Two- and three-dimensional instabilities of the cylinder wake in an aligned magnetic field., *Phys. Fluids* **9**, 3114–3116.
- Noack, B., König, M. und Eckelmann, H.: 1993, Three-dimensional stability analysis of the periodic flow around a circular cylinder, *Phys. Fluids* **5**, 1279–1281.
- Noack, B. R.: 1998a, On the flow around a circular cylinder. Part I: laminar and transitional regime, *accepted for publication in ZAMM*.
- Noack, B. R.: 1998b, On the flow around a circular cylinder. Part II: turbulent regime, *accepted for publication in ZAMM*.
- Noll, B.: 1993, *Numerische Strömungsmechanik*, Springer, Berlin.
- Oertel, H.: 1984, Temporal and spatial structures in fluid mechanics, *Lecture Notes in Engineering* **13**, 1–36.
- Oertel, H.: 1990, Wakes behind blunt bodies, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 539–564.
- Oertel, H. und Delfs, J.: 1995, Mathematische Analyse der Bereiche reibungsbehafteter Strömungen, *ZAMM* **75**, 491–505.
- Oertel, H. und Laurien, E.: 1995, *Numerische Strömungsmechanik*, Springer, Berlin.
- Ohle, F.: 1997, *Geometrische und dynamische Phänomene bei Nachlaufströmungen hinter stumpfen Körpern*, Habilitationsschrift, Universität Karlsruhe.
- Okajima, A.: 1982, Strouhal numbers of rectangular cylinders, *J. Fluid Mech.* **123**, 379–398.
- Papailiou, D. D.: 1984, Magneto-fluid-mechanic turbulent vortex streets, *Fourth Beer-Sheva Seminar on MHD Flows and Turbulence*, pp. 152–173.

- Patankar, S. V.: 1980, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere, Washington, D.C.
- Patankar, S. V. und Spalding, D. B.: 1972, A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flows, *Int. J. Heat Mass Transfer* **15**, 1787–1806.
- Pavarino, L. F. und Rame, M.: 1995, Numerical experiments with an overlapping additive Schwarz solver for 3-d parallel reservoir simulation, *The International Journal of Supercomputer Applications* **9**(1), 3–17.
- Perot, J. B.: 1993, An analysis of the fractional step method, *J. Comp. Phys.* **108**, 51–58.
- Persillon, H. und Braza, M.: 1998, Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional navier-stokes simulation, *J. Fluid Mech.* **365**, 23–88.
- Peyret, R. und Taylor, T.: 1983, *Computational Methods for fluid flow*, Springer, New York.
- Platnieks, I. A.: 1972, Correlation study of the transformation of a field of turbulence velocity perturbation in a MHD duct, *Proceedings of the 7th Riga Conference on MHD*, Vol. 1, pp. 31–40.
- Prasad, A. und Williamson, C.: 1997, The instability of the shear layer separating from a bluff body, *J. Fluid Mech.* **333**, 375–402.
- Proskurowski, W.: 1984, CMMPAK – The capacitance matrix software package, in G. Birkhoff und A. Schoenstadt (eds.), *Elliptic Problem Solvers II*, Academic Press, New York, pp. 65–74.
- Proskurowski, W. und Vassilevski, P. S.: 1994, Preconditioning capacitance matrix problems in domain imbedding, *SIAM J. Sci. Comput.* **15**(1), 77–88.
- Proskurowski, W. und Vassilevski, P. S.: 1995, Preconditioning nonsymmetric and indefinite capacitance matrix problems in domain imbedding, *SIAM J. Sci. Comput.* **16**(2), 414–430.
- Proskurowski, W. und Widlund, O.: 1976, On the numerical solution of Helmholtz’s equation by the capacitance matrix method, *Math. Comp.* **30**(133), 433–468.
- Reed, C. B. und Picologlou, B. F.: 1986, Techniques for measurements of velocity in liquid metal MHD-flows, *Proc. 7th Top. Meeting on Fusion Technology; Nevada*, Vol. 1, pp. 297–309.
- Reed, C. B. und Picologlou, B. F.: 1989, Sidewall flow instabilities in liquid metal MHD-flow under blanket relevant conditions, *Fusion Technology* **15**, 705–715.
- Resasco, D. C.: 1990, *Domain decomposition algorithms for elliptic partial differential equations*, PhD thesis, Yale University.
- Ritchie, W.: 1832, Electromagnetic force propels liquid, *Phil. Trans. Roy. Soc.* p. 294.

- Roache, P. J.: 1995, *Elliptic Marching Methods and Domain Decomposition*, CRC Press Inc.
- Roberts, P.: 1967, *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Longmans, London.
- Robichaux, J., Balachandar, S. und Vanka, P.: 1996, Transition to three-dimensionality in the wake of square cylinders, Abstract submitted for the DFD96 Meeting of the American Physical Society.
- Roshko, A.: 1954, On the development of turbulent wakes from vortex streets, *Technical Report 1191*, NACA.
- Roshko, A.: 1955, On the wake and drag of bluff bodies, *Jour. Aero. Sci.* **22**(2), 801.
- Roshko, A.: 1961, Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* **10**, 345–351.
- Saad, Y. und Schultz, M. H.: 1986, GMRES: A generalized minimum residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **7**(3), 856–869.
- Schumann, U.: 1979, Effektive Berechnung dreidimensionaler Fluid-Struktur Wechselwirkung beim Kühlmittelverluststörfall eines Druckwasserreaktors, *KfK-Bericht 2645*, Kernforschungszentrum Karlsruhe.
- Schumann, U. und Benner, J.: 1982, Direct solution of the discretized Poisson-Neumann problem on a domain composed of rectangles, *J. Comp. Phys.* **46**, 1–14.
- Schwarz, H. A.: 1890, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Vol. 2, Springer, Berlin, pp. 272–286.
- Shatrov, V., Mutschke, G. und Gerbeth, G.: 1997, Numerical simulation of the two dimensional MHD flow around a circular cylinder, *Magnetohydrodynamics* **33**(2), 3–13.
- Shercliff, J. A.: 1965, *A textbook of Magnetohydrodynamics*, Pergamon Press, Oxford.
- Smith, B. F., Bjørstad, P. E. und Gropp, W. D.: 1996, *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, New York.
- Sohankar, A.: 1998, *Numerical Study of Laminar, Transitional and Turbulent Flow Past Rectangular Cylinders*, PhD thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg.
- Sohankar, A., Norberg, C. und Davidson, L.: 1997, Numerical simulation of unsteady low-Reynolds number flow around rectangular cylinders at incidence, *Journal of Wind Engineering* **69-71**, 189–201.
- Sohankar, A., Norberg, C. und Davidson, L.: 1998, Low-Reynolds-number flow around a square cylinder at incidence: study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **26**, 39–56.
- Sommeria, J. und Moreau, R.: 1982, Why, how, and when, MHD turbulence becomes two-dimensional, *J. Fluid Mech.* **118**, 507–518.

- Sonneveld, P., Wesseling, P. und Zeeuw, P.: 1985, Multigrid and Conjugate Gradient methods as convergence acceleration techniques, in D. Paddon und H. Holstein (eds.), *Multigrid Methods for Integral and Differential Equations*, Oxford, Clarendon Press, pp. 117–167.
- Sterl, A.: 1989, *Numerische Simulation magnetohydrodynamischer Flüssig-Metall-Strömungen in rechteckigen Rohren bei großen Hartmann-Zahlen*, Dissertation, Universität Karlsruhe.
- Sterl, A.: 1990, Numerical simulation of liquid-metal MHD flows in rectangular ducts, *J. Fluid Mech.* **216**, 161–191.
- Stieglitz, R., Barleon, L., Bühler, L. und Molokov, S.: 1996, Magnetohydrodynamik flow in a right-angle bend in a strong magnetic field, *J. Fluid Mech.* **326**, 91–123.
- Swarztrauber, P. und Sweet, R.: 1975, Efficient FORTRAN subprograms for the solution of elliptic partial differential equations, *Technical note TN-109*, National Center for Atmospheric Research, Boulder, USA.
- Temam, R.: 1968, Une methode d'approximation de la solution des equations de Navier-Stokes, *Bull. Soc. Math. Fr.* **96**, 115.
- Temperley, D. J.: 1984, Reconciliation of some discrepancies in results obtained for magnetohydrodynamic flow in a rectangular duct under an uniform transverse magnetic field at high Hartmann number, *Arch. Mech.* **35(5)**, 673–686.
- Tillack, M. S.: 1990, Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. Design equations for pressure drop and flow quantity, *UCLA-Report UCLA-FNT-41*.
- Ting, A. L., Walker, J. S., Reed, C. B. und Picologlou, B. F.: 1991, Linear stability analysis for high-velocity boundary layers in liquid-metal magnetohydrodynamic flows, *Int. J. Eng. Sci.* **29(8)**, 939–948.
- Trefethen, L. und Halpern, L.: 1986, Well-posedness of one-way wave equations and absorbing boundary conditions, *Math. Comp.* **47(176)**, 421–435.
- Tritton, D.: 1959, Experiments on flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* **6**, 547–567.
- van der Vorst, H. A.: 1992, Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of non-symmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **13(3)**, 631–644.
- Vickery, B. J.: 1966, Fluctuating lift and drag on a long cylinder of square cross-section in a smooth and turbulent stream, *J. Fluid Mech.* **25**, 481–494.
- Walker, J. S.: 1981, Magnetohydrodynamic duct flows in rectangular ducts with thin conducting walls I, *Journal de Mécanique* **20(1)**, 79–112.
- Williams, P. und Baker, A.: 1996, Incompressible computational fluid dynamics and the continuity constraint method for the three-dimensional Navier-Stokes equations, *Numerical Heat Transfer, Part B* **29**, 137–273.

- Williams, W. E.: 1963, Magnetohydrodynamic flow in a rectangular tube at high Hartmann number, *J. Fluid Mech.* **16**, 262–275.
- Williamson, C. H.: 1988, Defining a universal and continuous Strouhal-Reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder, *Phys. Fluids* **31**, 2742–2744.
- Williamson, C. H.: 1989, Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a cylinder., *J. Fluid Mech.* **206**, 579–628.
- Williamson, C. H.: 1992, The natural and forced formation of spot like 'vortex dislocations' in the transition of a wake, *J. Fluid Mech.* **206**, 579–627.
- Williamson, C. H.: 1996a, Three dimensional wake transition, *J. Fluid Mech.* **328**, 345–407.
- Williamson, C. H.: 1996b, Vortex dynamics in the cylinder wake, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **28**, 477–539.
- Zhang, H., Noack, B. und Eckelmann, H.: 1994, Numerical computation of the 3-D cylinder wake, *Bericht 3/1994*, Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen.
- Zierep, J.: 1987, *Grundzüge der Strömungslehre*, G. Braun, Karlsruhe.