

Universität Karlsruhe (TH)

Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik

Bd. 1

Dipl.-Ing. Marcus Simon

**Zur Stabilität dynamischer
Systeme mit stochastischer
Anregung**



Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), Fakultät für Maschinenbau, 2004

Impressum

Universitätsverlag Karlsruhe
c/o Universitätsbibliothek
Straße am Forum 2
D-76131 Karlsruhe

www.uvka.de

© Universitätsverlag Karlsruhe 2004
Print on Demand

ISSN 1614-3914
ISBN 3-937300-13-9

Zur Stabilität dynamischer Systeme mit stochastischer Anregung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

von der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

Dissertation

von
Dipl.-Ing. Marcus Simon
aus Waghäusel

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Mai 2004
Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. W. Wedig
Korreferent: Prof. N.S. Namachchivaya

Kurzfassung

Die Vorgehensweise einer Stabilitätsanalyse stochastisch erregter dynamischer Systeme nach dem Konzept von Khas'minskii wird anhand drei unterschiedlicher Beispiele vorgestellt. Eine Aussage über die Stabilität der betrachteten Lösung erfolgt über das Vorzeichen des größten Ljapunov-Exponenten, der durch die Fürstenberg-Khas'minskii-Gleichung bestimmt werden kann. Hierfür ist die Kenntnis der stationären Verteilungsdichte des Systems notwendig. Diese wird entweder durch direkte Integration des stochastischen Differentialgleichungssystem (Monte-Carlo-Simulation) oder als Lösung der zugehörigen Fokker-Planck-Gleichung bestimmt.

Zunächst wird nochmals mit der Untersuchung gekoppelter Biege- und Torsionsschwingungen auf die Problematik parametererregter Systeme eingegangen. Hierbei steht der Vergleich zweier Koordinatentransformationen im Vordergrund. Beide Transformationen führen gemäß des Konzeptes von Khas'minskii auf ein System nichtlinearer stochastischer Differentialgleichungen mit einer einseitigen Entkopplung des instationären Lösungsanteiles. Anschließend wird die Stabilitätsanalyse auf nichttriviale Lösungen nichtlinearer Systeme mit stochastischer Fremderregung ausgedehnt. Die Variationsgleichungen bilden hier zusammen mit den stochastischen Differentialgleichungen der zu untersuchenden Lösung ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem, das die Grundlage für die Berechnung des größten Ljapunov-Exponenten darstellt.

In allen drei Beispielen ist zu erkennen, dass die hier verwendete Methode eine effektive Vorgehensweise bei der Bestimmung des größten Ljapunov-Exponenten von Lösungen stochastisch erregter dynamischer Systeme ist.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Mechanik der Universität Karlsruhe (TH).

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Wedig möchte ich herzlich für seine intensive Betreuung, Anregung und Förderung der Arbeit sowie das mir entgegengebrachte Vertrauen danken. Seine stets vorhandene Diskussionsbereitschaft hat zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen.

Für die Übernahme des Korreferats und das entgegengebrachte Interesse bedanke ich mich vielmals bei Herrn Prof. N. Sri Namachivaya vom Department of Aeronautical and Astronautical Engineering der University of Illinois in Urbana-Champaign, USA. Dem Vorsitzenden des Prüfungsausschusses, Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Gabi vom Fachgebiet Strömungsmaschinen der Universität Karlsruhe gilt ebenfalls mein Dank.

Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Wauer möchte ich danken für die stets vorhandene Diskussionsbereitschaft und die kritische Durchsicht des Manuskripts. Ferner danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Wittenburg für sein Interesse an meiner Arbeit.

Auch meinen Kollegen und Kolleginnen am Institut für Technische Mechanik möchte ich meinen Dank für die interessanten Gespräche und das angenehme Arbeitsklima aussprechen.

Ich bedanke mich weiterhin bei meinen Eltern, meinem Bruder mit Familie, welche Vertrauen in meine Entwicklung aufbrachten und auf deren Rückhalt ich mich stets verlassen konnte.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Lebenspartnerin Julia, die mich stets mit viel Geduld unterstützt und somit einen großen Anteil zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat, auch wenn dies oft mit einem persönlichen Verzicht verbunden war.

Karlsruhe, im Juli 2004

Marcus Simon

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Überblick	1
1.2	Aufbau der Arbeit	2
2	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie	4
2.1	Statistische Grundgrößen	4
2.1.1	Zufallsvariable	5
2.1.2	Verteilungen von Zufallsvariablen	5
2.1.3	Momente von Zufallsvariablen	8
2.2	Stochastische Prozesse	10
2.2.1	Momente von stochastischen Prozessen	10
2.2.2	Stationäre Zufallsprozesse	11
2.2.3	Ergodische Prozesse	12
2.2.4	Markov-Prozesse	14
2.2.5	Diffusionsprozesse	14
2.2.6	Wiener-Prozeß und weißes Rauschen	15
2.3	Stochastische Differentialgleichungen	16
2.3.1	Interpretation im Sinne Itô und Stratonovichs	17
3	Stabilitätstheorie	19
3.1	Kinetische Stabilitätstheorie	20
3.1.1	Die Empfindlichkeits- und Variationsgleichungen	22
3.1.2	Erste Methode von Ljapunov	23
3.2	Stochastische Stabilität	24
3.3	Ljapunov-Exponenten	25
3.3.1	Ljapunov-Exponenten für deterministische Systeme	26
3.3.2	Ljapunov-Exponenten für stochastische Systeme	26
4	Lösungsmethoden	29
4.1	Monte-Carlo-Methoden	29
4.1.1	Stochastische Taylorentwicklung	30
4.1.2	Konvergenz numerischer Verfahren	31
4.1.3	Stochastisches Eulerverfahren	31
4.1.4	Verfahren höherer Ordnung	32
4.2	Lösung der Fokker-Planck-Gleichung	34
4.2.1	Entwicklung in φ_i -Richtung	35
4.2.2	Entwicklung in x_i -Richtung	38

5	Biege- und Torsionsschwingungen eines Balkens	40
5.1	Hyperkugelkoordinaten	42
5.1.1	Monte-Carlo-Simulation	44
5.1.2	Lösung der Fokker-Planck-Gleichung	44
5.2	Bipolarkoordinaten	51
5.2.1	Monte-Carlo-Simulation	53
5.2.2	Lösung der Fokker-Planck-Gleichung	53
5.3	Vergleich der beiden Koordinatentransformationen	58
6	Kramers-Oszillator	62
6.1	Variationsgleichung	63
6.2	Transformation auf Polarkoordinaten	64
6.3	Monte-Carlo-Simulation	65
6.4	Lösung der Fokker-Planck-Gleichung	65
7	Autoparametrischer Oszillator	73
7.1	Bewegungsgleichung	74
7.2	Anregungsmodell	75
7.3	Stabilität der semitrivialen Lösung	76
7.3.1	Variationsgleichung	77
7.3.2	Anregung durch farbiges Rauschen	78
7.4	Stabilität nichttrivialer Lösungen	79
7.4.1	Variationsgleichung	79
8	Zusammenfassung	91
9	Anhang	94
9.1	Introduction	94
9.2	Organization of the Work	94
9.3	Coupled Oscillatory System	95
9.3.1	Projection by Hypersphere Coordinates	96
9.3.2	Projection by Bipolar Coordinates	98
9.4	Kramers Oscillator	100
9.5	Autoparametric Vibration Absorber	102
9.5.1	Stability Investigation of the Semitrivial Solution	103
9.5.2	Stability Investigation of Nontrivial Solutions	104
	Literaturverzeichnis	107

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Überblick

Dynamische Systeme mit zufälligen Einflüssen sind in den verschiedensten ingenieurwissenschaftlichen Gebieten anzutreffen. In der Baudynamik beispielsweise spielen zufällige Windkräfte oder zufällige Anregungen durch Erdbeben bei der Auslegung von Bauwerken eine wichtige Rolle. Im Bereich der Luft- und Raumfahrttechnik müssen zur Auslegung von Flugkörpern zufällige Erregerkräfte beachtet werden, die durch Strahltriebwerke auf deren Struktur wirken. In der Kraftfahrzeugdynamik werden regellose Fahrbahnprofile zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens von Kraftfahrzeugen betrachtet. Die Gemeinsamkeit dieser Beispiele sowie aller Systeme, die auf irgendeine Art durch zufällige Signale angeregt werden, liegt in der Beschreibung der entsprechenden Modelle durch stochastische Differentialgleichungen. Die zufälligen Einflüsse treten hierbei in Form zeitvarianter Koeffizienten oder als Zwangserregung auf. Stochastische Differentialgleichungen selbst sind abkürzende Schreibweisen für stochastische Integralgleichungen. Die Integralgleichungen enthalten stochastische Integrale, für deren Interpretation sich im Bereich der Stochastik zwei Definitionen durchgesetzt haben. Neben dem Integral im Sinne von Stratonovich [51] existieren die in dieser Arbeit ausschließlich betrachteten Itôschen Integrale [22]. Die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung auf der Basis des Itôschen Integrals ist ein Diffusionsprozeß, der durch die Angabe seiner Verteilungsdichte vollständig charakterisiert ist. Die Verteilungsdichte kann über die zugehörige Fokker-Planck-Gleichung bestimmt werden. Hierbei handelt es sich um eine homogene, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten.

Neben der Beschreibung der Lösung einer stochastischen Differentialgleichung spielt auch die physikalische Realisierbarkeit der berechneten Lösung eine Rolle. Hierfür ist es notwendig, eine Stabilitätsuntersuchung durchzuführen. Dabei ist der Begriff der Stabilität nicht als absolut anzusehen. Vielmehr bedarf es einer Definition, was genau unter Stabilität zu verstehen ist. Bei deterministischen Systemen hat sich der Stabilitätsbegriff von Ljapunov bewährt. Zur Behandlung von Systemen mit zufälligem Einfluß muß jedoch auf Basis eines bestimmten Konvergenzbegriffes eine neue Stabilitätsdefinition eingeführt werden. Zwei Definitionen haben sich dabei durchgesetzt: die Stabilität im Mittel, bei der die Momente der Lösung zu bestimmen sind, und die fast sichere Stabilität, nach der das Vorzeichen des größten Ljapunov-Exponenten über die Stabilität einer Lösung entscheidet.

In der vorliegenden Arbeit wird auf die Problematik der Stabilität einer Lösung dynamischer Systeme mit stochastischer Anregung eingegangen. Die Vorgehensweise bei einer Stabilitätsanalyse geschieht dabei nach dem folgenden Schema:

- Herleitung der entsprechenden Variationsgleichung.
- Koordinatentransformation nach dem Konzept von Khas'minskii und Aufstellung der Fürstenberg-Khas'minskii-Gleichung für den größten Ljapunov-Exponenten.
- Bestimmung der unbekannt stationären Verteilungsdichte.

In bisherigen Arbeiten wurden ausschließlich lineare, parametererregte Schwingungssysteme auf Stabilität der Ruhelage untersucht. Neben dem Vergleich zweier Koordinatentransformationen bei der Stabilitätsanalyse eines parametererregten Schwingungssystems, ist das Ziel dieser Arbeit die Erweiterung der Stabilitätsanalyse auf nichttriviale Lösungen nichtlinearer Schwingungssysteme.

1.2 Aufbau der Arbeit

Das Kapitel 2 enthält eine kurze Einführung in die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie. Hierbei werden ausgehend von den statistischen Grundgrößen, wie den Zufallsvariablen sowie deren Beschreibung durch Verteilungen und Momente, stochastische Prozesse eingeführt. Eine wichtige Prozeßklasse stellen dabei die Markov-Prozesse dar. Sind diese stetig, so werden sie Diffusionsprozesse genannt. Deren Eigenschaft, keine Informationen der Vergangenheit für die Beschreibung der wahrscheinlichen Entwicklung des Prozesses in der Zukunft zu benötigen, ist das auf stochastische Systeme übertragene Kausalitätsprinzip der klassischen Physik. Zur Beschreibung dynamischer Systeme, wie sie in der Mechanik auftreten, werden stochastische Differentialgleichungen eingeführt, deren Lösungen Diffusionsprozesse sind. Die Beschreibung von Diffusionsprozessen erfolgt durch ihre Verteilungsdichte, die auch Lösung der entsprechenden Fokker-Planck-Gleichung ist.

In dem darauffolgenden Kapitel 3 werden die Grundzüge der Stabilitätstheorie beschrieben. Hierbei steht der Stabilitätsbegriff von Ljapunov im Rahmen der kinetischen Stabilitätstheorie im Vordergrund. Für Stabilitätsanalysen werden Ljapunov-Exponenten eingeführt, die ein leistungsfähiges Instrument zur Untersuchung von Lösungen dynamischer Systeme darstellen. Nach dem Ergodentheorem von Oseledec entscheidet das Vorzeichen des größten Ljapunov-Exponenten über die Stabilität einer Lösung. Die Auswertung erfolgt durch Einführung einer d -dimensionalen Hyperkugel entsprechend dem Konzept von Khas'minskii. Durch die Transformation erhält man eine einseitige Entkopplung der Amplitude A_t , die den instationären Lösungsanteil des Prozesses darstellt. Die Norm des Zustandsvektors in der Definition des Ljapunov-Exponenten kann nun durch die Amplitude ersetzt werden, die ihrerseits durch eine Integration des Amplitudenprozesses aufzufinden ist. Der Amplitudenprozeß selbst ist nur noch abhängig von den stationären Prozessen des Systems. Sind diese Prozesse zusätzlich noch ergodisch im Mittel, so kann der zeitliche Mittelwert durch den statistischen ersetzt werden, woraus die sogenannte Fürstenberg-Khas'minskii-Gleichung resultiert. Unbekannt hierbei ist die Verteilungsdichte der stationären Prozesse, die als Voraufgabe bei einer Stabilitätsanalyse aufzufinden ist.

Kapitel 4 beschreibt zwei Möglichkeiten zur Berechnung der unbekanntenen Verteilungsdichte. Diese zwei prinzipiell unterschiedlichen Methoden können zum einen in die direkten Methoden, zu denen die Monte-Carlo-Methoden zu zählen sind und zum anderen in die indirekten, wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden unterschieden werden.

Bei den Monte-Carlo-Methoden werden mittels numerischer Integration der stochastischen Differentialgleichungen Lösungstrajektorien erzeugt, aus denen unter Zuhilfenahme eines einfachen Abzählalgorithmus die gesuchte Verteilungsdichte ermittelt wird.

Bei den indirekten Methoden wird die gesuchte Verteilungsdichte als Lösung der zugehörigen Fokker-Planck-Gleichung ermittelt. Die Lösung der Fokker-Planck-Gleichung geschieht durch Entwicklung in Fourierreihen und Polynome im Sinne eines Galerkin-Verfahrens, da strenge Lösungen nur in Ausnahmefällen angebar sind, und man auf Näherungslösungen angewiesen ist.

In Kapitel 5 wird die Stabilität der gekoppelten Biege- und Torsionsschwingungen eines schlanken Rechteckstabes untersucht. Die entsprechende Variationsgleichung ist ein parametererregtes Differentialgleichungssystem, dessen Ruhelage in gewissen Parameterbereichen aufgrund der breitbandigen, stochastischen Anregung instabil werden kann. Für die praktische Berechnung werden hier zwei Koordinatentransformationen benutzt. Zum einen handelt es sich um die klassische Hyperkugel, die schon in [16] untersucht wurde, und zum anderen um eine Bipolarkoordinatentransformation mit anschließender Amplitudentransformation.

Kapitel 6 beschreibt die Vorgehensweise bei der Stabilitätsanalyse der stationären Lösung des Kramers-Oszillators. Ein Kramers-Oszillator ist ein klassischer Duffing-Schwinger, der durch weißes Rauschen angeregt wird. Der Unterschied zu dem in Kapitel 5 behandelten System liegt in der Untersuchung einer nichttrivialen Lösung. Problematisch hierbei ist, daß die Lösung im allgemeinen nicht in geschlossener Form angegeben werden kann und sie daher in Form einer Differentialgleichung in der Variationsgleichung auftritt.

Das in Kapitel 7 behandelte System ist ein sogenanntes autoparametrisches System. Eine Besonderheit autoparametrischer Systeme liegt in der Existenz einer semitrivialen Lösung. Dies bedeutet, die Teilsysteme sind derart nichtlinear miteinander gekoppelt, daß ein System aufgrund einer Anregung im oszillierenden Zustand ist, während das andere in Ruhe verweilt. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Stabilität der semitrivialen Lösung bei einer Anregung des Primärsystems durch farbiges Rauschen untersucht. Neben der semitrivialen Lösung existieren auch nichttriviale Lösungen, die ebenfalls bezüglich Stabilität untersucht werden.

Die Arbeit schließt mit einer kurzen Zusammenfassung.

Kapitel 2

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Ausgangspunkt der Beschreibung und Analyse zufälliger Phänomene ist die mathematische Statistik und die Wahrscheinlichkeitstheorie. Im folgenden Kapitel werden die wichtigsten Bezeichnungen, Begriffe und Sätze, die für spätere Anwendungen benötigt werden und im wesentlichen den Büchern von Arnold [3], Hennig [21] und Sagirow [46] entstammen, aufgeführt. Für nähere Einzelheiten wird auf die zahlreichen Lehrbücher verwiesen, wobei hier speziell [10], [11], [14], [41], [44] und [52] zu nennen sind.

2.1 Statistische Grundgrößen

Die möglichen Versuchsausgänge eines mathematischen Modells, dessen Ausgang vom Zufall abhängt, werden Elementarereignisse genannt. Die Elementarereignisse werden in der Menge Ω , die Stichprobenraum genannt wird, zusammengefaßt. Ein typisches Element aus dem Stichprobenraum wird mit ω gekennzeichnet ($\omega \in \Omega$). Ein beobachtbares Ereignis E ist eine Teilmenge von Ω ($E \subset \Omega$). Unter den Ereignissen von Ω befindet sich das unmögliche Ereignis \emptyset sowie das sichere Ereignis entsprechend dem gesamten Raum Ω . Zu jedem Ereignis E existiert ein komplementäres Ereignis \bar{E} . Da Ereignisse Mengen sind, lassen sie sich nach den Regeln für Mengenoperationen verknüpfen.

Bei der Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird der Begriff der Sigma-Algebra benutzt. Als Sigma-Algebra auf Ω bezeichnet man eine Familie (Klasse) \mathcal{E} von Teilmengen von Ω , die folgende Eigenschaften besitzt:

- $\Omega \in \mathcal{E}$,
- $E_j \in \mathcal{E} \rightarrow \bar{E}_j \in \mathcal{E}$,
- $E_j \in \mathcal{E} \rightarrow \cup_j E_j \in \mathcal{E}$.

Ist eine Funktion P auf \mathcal{E} so definiert, daß sie die Eigenschaften

- $0 \leq P(E) \leq 1 \quad \forall E \in \mathcal{E}$,
- $P(\Omega) = 1$,

- $P(\cup_j E_j) = \sum_j P(E_j)$ (für paarweise disjunkte Ereignisse)

erfüllt, so wird diese Funktion Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{E} genannt. Mit dem Stichprobenraum Ω , der Ereignisalgebra \mathcal{E} und dem Wahrscheinlichkeitsmaß P ist ein Versuch mit zufälligem Ausgang mathematisch vollständig beschrieben. Zusammen bezeichnet man die drei Größen als den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{E}, P) des betrachteten Versuchs.

Neben dem Begriff der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit von Bedeutung. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_2 unter der Bedingung des Eintretens von E_1 wird bedingte Wahrscheinlichkeit genannt und ist definiert durch

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}; \quad P(E_1) \neq 0. \quad (2.1)$$

Das Ereignis E_2 heißt dann unabhängig vom Ereignis E_1 , wenn

$$P(E_2|E_1) = P(E_2) \quad (2.2)$$

gilt. Danach liegt mit (2.1) Unabhängigkeit bei

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) \quad (2.3)$$

vor.

2.1.1 Zufallsvariable

Ist den Elementarereignissen $\omega \in \Omega$ eines zufälligen Versuches eine reelle Variable $X(\omega)$ zugeordnet, dann heißt $X(\omega)$ Zufallsvariable. Je nachdem ob $X(\omega)$ nur endlich oder abzählbar unendlich viele oder aber überabzählbar viele Werte x annehmen kann¹, wird zwischen diskreten und stetigen Zufallsvariablen unterschieden. Diese Definition kann sinngemäß auch für vektorielle Größen $\mathbf{X}^T(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))^T$ angewendet werden. Gleichungen und Ungleichungen, die in den folgenden Definitionen auftreten, werden hierbei dann komponentenweise verstanden. Eine Zufallsvariable ist danach eine reellwertige Funktion $\mathbf{X}(\omega)$, welche den Stichprobenraum Ω auf den d -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^d abbildet.

2.1.2 Verteilungen von Zufallsvariablen

Ein Mittel zur analytischen Behandlung von Zufallsvariablen ist die sogenannte Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Verteilungsfunktion $F_X(x)$. Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $X(\omega) \leq x$ ist:

$$F_X(x) = P(\omega | X(\omega) \leq x). \quad (2.4)$$

Die Verteilungsfunktion besitzt dabei folgende Eigenschaften:

$$P(a < X(\omega) \leq b) = F(b) - F(a), \quad (2.5)$$

$$F(a) \leq F(b), \quad a < b, \quad (2.6)$$

¹Dies setzt einen überabzählbaren Stichprobenraum Ω voraus.

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) = F(-\infty) = 0, \quad (2.7)$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F(b) = F(\infty) = 1. \quad (2.8)$$

Ist eine stetige Verteilungsfunktion $F_X(x)$ im Intervall $(-\infty, \infty)$ differenzierbar, so heißt die Ableitung

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.9)$$

Verteilungsdichte oder Dichtefunktion. Aufgrund der Monotonie (2.6) der Verteilungsfunktion ist die Verteilungsdichte immer größer oder gleich null:

$$p_X(x) \geq 0. \quad (2.10)$$

Aus der Intervallwahrscheinlichkeit (2.5) folgt

$$P(a < X(\omega) \leq b) = \int_a^b p_X(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2.11)$$

Zusammen mit (2.7) und (2.8) ergibt sich die sogenannte Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1. \quad (2.12)$$

Eine wichtige stetige Verteilung ist die sogenannte Gaußsche Verteilung oder Normalverteilung. Eine Zufallsvariable $X(\omega)$ heißt im Intervall $(-\infty, \infty)$ normalverteilt mit den Parametern m, σ^2 , wenn ihre Verteilungsdichte durch

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0 \quad (2.13)$$

gegeben ist. Die Funktion besitzt ein Maximum

$$\max(p_X(x)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

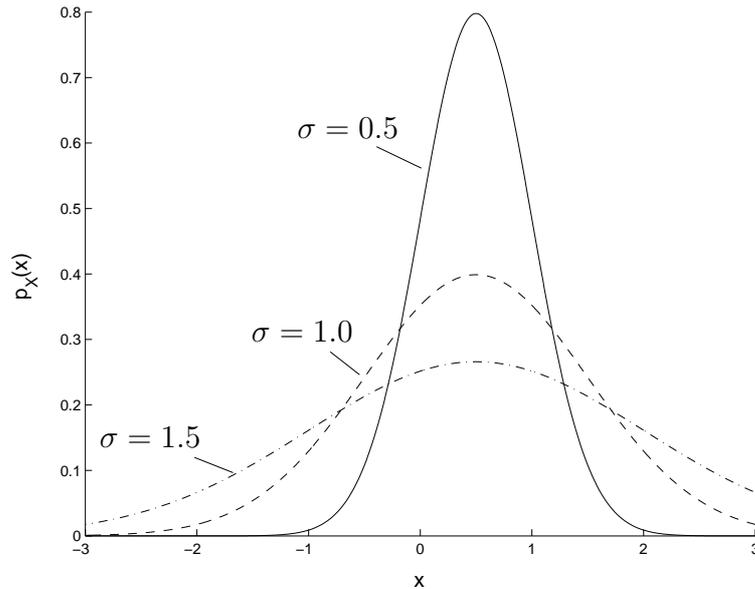
bei $x = m$ und Wendepunkte bei $x = m \pm \sigma$ mit

$$p_X(x = m \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}e}.$$

Weiterhin ist die Normalverteilung symmetrisch bezüglich $x = m$.

In Abbildung 2.1 sind Verteilungsdichten der Normalverteilung bei Variation von σ dargestellt. Der Parameter m heißt Erwartungswert, der Parameter σ^2 heißt Varianz oder Dispersion. Die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariablen $X(\omega)$ ergibt sich aus (2.13) zu

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\bar{x}-m)^2}{2\sigma^2}} d\bar{x}. \quad (2.14)$$

Abbildung 2.1: Normalverteilung bei Variation von σ bei $m = 0.5$

Bei der Betrachtung zweier Zufallsgrößen $X(\omega)$ und $Y(\omega)$ werden diese in einem zweidimensionalen Zufallsvektor $(X(\omega), Y(\omega))^T$ zusammengefaßt. Die Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsgröße wird definiert durch

$$F_{XY}(x, y) = P[(X(\omega) \leq x) \cap (Y(\omega) \leq y)]. \quad (2.15)$$

Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß $X(\omega) \leq x$ und gleichzeitig $Y(\omega) \leq y$ ist. Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen allein, unabhängig von der anderen, bezeichnet man als Randverteilung

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_{XY}(x, \infty) = P[(X(\omega) \leq x) \cap (Y(\omega) \leq \infty)] = P(X \leq x), \\ F_Y(y) &= F_{XY}(\infty, y) = P[(X(\omega) \leq \infty) \cap (Y(\omega) \leq y)] = P(Y \leq y). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Zwei Zufallsgrößen heißen unabhängig voneinander, wenn ihre Verteilungsfunktion gleich dem Produkt der Randverteilungen ist:

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) = F_{XY}(x, \infty)F_{XY}(\infty, y). \quad (2.17)$$

Sind die Zufallsvariablen $X(\omega)$ und $Y(\omega)$ stetig verteilt und existiert überall die Beziehung

$$p_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y), \quad (2.18)$$

so heißt $p_{XY}(x, y)$ zweidimensionale Verteilungsdichte, und man erhält

$$P[(X(\omega) \leq x) \cap (Y(\omega) \leq y)] = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{XY}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y},$$

$$P[(x_1 < X(\omega) \leq x_2) \cap (y_1 < Y(\omega) \leq y_2)] = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p_{XY}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \quad (2.19)$$

für die Verteilungsfunktion und die Intervallwahrscheinlichkeit.

Die Wahrscheinlichkeit für $X \leq x$ unter der Bedingung $Y = y$ wird bedingte Verteilung genannt und ist durch

$$F_{XY}(x|y) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x}} \int_{-\infty}^x p_{XY}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} \quad (2.20)$$

definiert. Analoges gilt für die bedingte Verteilungsdichte

$$p_{XY}(x|y) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}, \quad (2.21)$$

wenn die zugehörige Verteilungsdichte $p_{XY}(x, y)$ bekannt und $p_Y(y) > 0$ ist. Gilt für die bedingte Verteilungsdichte $p_{XY}(x|y) = p_X(x)$, so sind die Zufallsvariablen $X(\omega)$ und $Y(\omega)$ unabhängig voneinander, und aus (2.21) folgt

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y). \quad (2.22)$$

Ist $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ die gemeinsame Verteilungsdichte zweier Zufallsvariablen $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$, die gemäß der Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, X_2), & X_1 &= h_1(Y_1, Y_2), \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2), & X_2 &= h_2(Y_1, Y_2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

auf die Zufallsvariablen $Y_1(\omega)$ und $Y_2(\omega)$ transformiert werden, dann ist

$$p_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = p_{X_1 X_2}(x_1 = h_1(y_1, y_2), x_2 = h_2(y_1, y_2)) |J(y_1, y_2)| \quad (2.24)$$

die gemeinsame Verteilungsdichte der Zufallsvariablen $Y_1(\omega)$ und $Y_2(\omega)$. Hierin ist

$$J(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

die Jacobische Determinante (siehe dazu [9]) der Koordinatentransformation (2.23).

2.1.3 Momente von Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable $X(\omega)$ ist durch die Angabe ihrer Verteilung bzw. Verteilungsdichte vollständig charakterisiert. Eine weitere Möglichkeit, die Zufallsvariable zu beschreiben, besteht durch die Angabe ihrer Momente. Momente sind Größen, die aus der Verteilungsfunktion bzw. Verteilungsdichte der Zufallsvariablen $X(\omega)$ abgeleitet werden.

Sind $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ stetig verteilte Zufallsvariablen mit der n -dimensionalen Verteilungsdichte $p_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ und ist $g(X_1, \dots, X_n)$ eine Funktion dieser Zufallsvariablen, dann wird der Erwartungswert der Funktion $g(X_1, \dots, X_n)$ definiert durch

$$E(g(\mathbf{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.26)$$

Momente sind spezielle Erwartungswerte. Das Moment $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$ -ter Ordnung der Zufallsvariablen $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ ist der Erwartungswert der Funktion $g(\mathbf{X}) = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ und wird durch

$$m_{X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}} = E(X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}) \quad (2.27)$$

gekennzeichnet. Mit

$$\mu_{X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}} = E((X_1 - m_{X_1})^{\alpha_1} \dots (X_n - m_{X_n})^{\alpha_n}) \quad (2.28)$$

werden die zentralen Momente der Ordnung $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$ beschrieben. Für den Fall einer einzelnen Zufallsvariablen $X(\omega)$ reduzieren sich die Beziehungen zu

$$\begin{aligned} m_\alpha &= m_{X^\alpha} = E(X^\alpha), \\ \mu_\alpha &= \mu_{X^\alpha} = E((X - m_X)^\alpha). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Von besonderer Bedeutung bei der Beschreibung von Zufallsvariablen sind das Moment erster Ordnung, das auch Erwartungswert heißt, und das zentrale Moment zweiter Ordnung, das Varianz oder Dispersion genannt wird und mit σ_X^2 gekennzeichnet ist. Die positive Wurzel σ_X wird als Standardabweichung bezeichnet.

Bei der Beschreibung mehrerer Zufallsgrößen treten neben den bereits bekannten Momenten für einzelne Zufallsvariablen noch „gemischte“ Momente auf. Aufgrund der Wichtigkeit werden hier die Momente zweiter Ordnung für zwei Zufallsvariablen $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$ beschrieben. Die gewöhnlichen Momente zweiter Ordnung sind zunächst

$$\begin{aligned} m_{20} &= m_{X_1^2} = E(X_1^2), \\ m_{02} &= m_{X_2^2} = E(X_2^2). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Diese heißen quadratische Mittelwerte. Hinzu tritt das als Korrelation bezeichnete gemischte Moment m_{11} , für das

$$m_{11} = m_{X_1 X_2} = E(X_1 X_2) \quad (2.31)$$

gilt. Analog ergibt sich für die zentralen Momente zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \mu_{20} &= \mu_{X_1^2} = E((X_1 - m_{10})^2), \\ \mu_{02} &= \mu_{X_2^2} = E((X_2 - m_{01})^2) \end{aligned} \quad (2.32)$$

mit dem gemischten Moment

$$\mu_{11} = \mu_{X_1 X_2} = E((X_1 - m_{10})(X_2 - m_{01})) = m_{11} - m_{10}m_{01} = \sigma_{X_1 X_2}, \quad (2.33)$$

der sogenannten Kovarianz der Variablen $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$. Schließlich wird

$$\varrho_{X_1 X_2} = \frac{\sigma_{X_1 X_2}}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \quad (2.34)$$

als Korrelationskoeffizient bezeichnet. Für $\varrho_{X_1 X_2} = 0$ gilt

$$E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2). \quad (2.35)$$

Die Zufallsvariablen sind in diesem Fall unkorreliert. Unabhängige Zufallsvariablen sind unkorreliert, die Umkehrung gilt jedoch im allgemeinen nicht.

2.2 Stochastische Prozesse

Eine Zufallsvariable, die eine Funktion mehrerer Parameter ist, wird Zufallsfunktion oder stochastischer Prozeß genannt. Ist dieser Prozeß lediglich eine Funktion der Zeit, dann wird er mit X_t bezeichnet, wobei für eine einfachere Darstellung auf das Argument ω im weiteren verzichtet wird. Werden sämtliche Parameter des Prozesses festgehalten, so reduziert sich der Prozeß wieder auf eine Zufallsvariable. Der stochastische Prozeß X_t ist einer überabzählbaren Menge von Zufallsvariablen X äquivalent, da sich für jedes $t \in T$ eine Zufallsvariable ergibt.

Existiert für jede endliche Menge $t_i \in T$ ($i = 1, \dots, n$) eine entsprechende Menge von Zufallsvariablen $X_1 = X_{t_1}, \dots, X_n = X_{t_n}$ mit der n -dimensionalen Verteilungsfunktion

$$F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P((X_1 \leq x_1) \cap \dots \cap (X_n \leq x_n)), \quad (2.36)$$

dann definiert diese Verteilungsfunktion einen Zufallsprozeß X_t . Existieren die entsprechenden Ableitungen, so heißt

$$p_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \quad (2.37)$$

die n -dimensionale Verteilungsdichte des Prozesses X_t . Die Verteilungsfunktion (2.36) besitzt zwei wichtige Eigenschaften. Sie ist invariant gegenüber einer Permutation der Indizes (Symmetrie-Eigenschaft) und für $m > n$ gilt mit

$$F_{X_1 \dots X_m}(x_1, \dots, x_n, \infty, \dots, \infty; t_1, \dots, t_m) = F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \quad (2.38)$$

die sogenannte Verträglichkeitsbedingung. Im Zusammenhang mit stochastischen Prozessen ist der Fundamentalsatz von Kolmogorov von großer Bedeutung. Er sagt aus, daß zu jeder Familie von Verteilungsfunktionen, die die Symmetrie und Verträglichkeitsbedingungen erfüllen, ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{E}, P) und darauf ein stochastischer Prozeß X_t existiert, der die vorgegebenen Verteilungen als endlich dimensionale Verteilungen besitzt.

2.2.1 Momente von stochastischen Prozessen

Analog zur Beschreibung von Zufallsvariablen durch Momente wird man auch zur Beschreibung eines stochastischen Prozesses, aufgrund der oft fehlenden Kenntnis der Verteilungsfunktion bzw. Verteilungsdichte, wiederum entsprechende Momente einführen. Diese Momente sind, aufgrund der Zeitabhängigkeit des zu beschreibenden Prozesses, Funktionen der Zeit. Die Momente $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$ -ter Ordnung sind gegeben durch

$$\begin{aligned} m_{X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}}(t_1, \dots, t_n) &= E(X_{t_1}^{\alpha_1} \dots X_{t_n}^{\alpha_n}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} p_{X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n, \end{aligned} \quad (2.39)$$

die zentralen Momente $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$ -ter Ordnung durch

$$\mu_{X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}}(t_1, \dots, t_n) = E((X_{t_1} - m_X(t_1))^{\alpha_1} \dots (X_{t_n} - m_X(t_n))^{\alpha_n}). \quad (2.40)$$

Von spezieller Bedeutung bei der Beschreibung stochastischer Prozesse sind die Momente erster und zweiter Ordnung. Das Moment erster Ordnung eines einzelnen Prozesses X_t

$$m_X(t) = E(X_t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x; t)dx \quad (2.41)$$

wird Mittelwertfunktion genannt. Das Moment zweiter Ordnung zweier Prozesse X_t und Y_t

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E(X_{t_1}Y_{t_2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp_{XY}(x, y; t_1, t_2)dxdy \quad (2.42)$$

wird Korrelationsfunktion genannt. Sind X_t und Y_t zwei verschiedene Prozesse, so heißt $R_{XY}(t_1, t_2)$ Kreuzkorrelationsfunktion. Bezeichnen X_t und Y_t den gleichen Prozeß, so nennt man $R_{XX}(t_1, t_2)$ Autokorrelationsfunktion des Prozesses X_t .

Das zentrale Moment zweiter Ordnung der Prozesse X_t und Y_t

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{XY}(t_1, t_2) &= E((X_{t_1} - m_X(t_1))(Y_{t_2} - m_Y(t_2))) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X(t_1))(y - m_Y(t_2))p_{XY}(x, y; t_1, t_2)dxdy \end{aligned} \quad (2.43)$$

heißt Kovarianzfunktion. Sind X_t und Y_t verschiedene Prozesse, so heißt $\text{Cov}_{XY}(t_1, t_2)$ Kreuzkovarianzfunktion und für gleiche Prozesse Autokovarianzfunktion $\text{Cov}_{XX}(t_1, t_2)$. Für $t_1 = t_2 = t$ erhält man aus der Autokovarianzfunktion die zeitabhängige Dispersion

$$\text{Cov}_{XX} = E((X_t - m_X(t))^2) = \sigma_X^2(t). \quad (2.44)$$

Für Vektorprozesse \mathbf{X}_t und \mathbf{Y}_t ergeben sich anstelle der Korrelationsfunktion und der Kovarianzfunktion die Korrelationsfunktionsmatrix $\mathbf{R}_{\mathbf{XY}}(t_1, t_2)$ und die Kovarianzfunktionsmatrix $\mathbf{Cov}_{\mathbf{XY}}(t_1, t_2)$. Einen Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen (2.42) und (2.43) beschreibt die Beziehung

$$\text{Cov}_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2). \quad (2.45)$$

Für zentrierte Prozesse, für die $m_X(t_1) = 0$ und $m_Y(t_2) = 0$ gilt, fallen die beiden Funktionen zusammen.

2.2.2 Stationäre Zufallsprozesse

Ein stochastischer Prozeß heißt stationär, wenn der Prozeß invariant gegen eine Verschiebung des Nullpunktes des Parameters t ist, andernfalls heißt er instationär.

Die Verteilungsdichte für jedes n und beliebiges t_0 besitzt dann die Eigenschaft

$$p_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1 + t_0, \dots, t_n + t_0) = p_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n). \quad (2.46)$$

Ein stationärer Prozeß mit der Eigenschaft (2.46) wird auch streng stationär oder stationär im engeren Sinne genannt. Für $n = 1$ ergibt sich mit $t_0 = -t_1$

$$p_{X_1}(x_1, t_1) = p_{X_1}(x_1, 0). \quad (2.47)$$

Die eindimensionale Dichte eines stationären stochastischen Prozesses X_t hängt nicht von der Zeit ab. Damit sind auch die davon abgeleiteten Größen $E(X_t)$, $E(X_t^2)$ und die Dispersion zeitinvariant. Für zwei Prozesse $X_{1,t}$ und $X_{2,t}$ ($n = 2$) ergibt sich für $t_0 = -t_1$

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_2 - t_1). \quad (2.48)$$

Die Dichte hängt nur von der Differenz $\tau = t_2 - t_1$ der betrachteten Zeitpunkte ab. Damit hängen auch die Momente zweiter Ordnung zweier Prozesse nur von der Differenz τ ab. Speziell gilt für die Autokorrelationsfunktion

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(\tau) = E(X_t X_{t+\tau}). \quad (2.49)$$

Sie ist eine gerade Funktion

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau) \quad (2.50)$$

mit der Eigenschaft

$$|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0) = E(X_t^2). \quad (2.51)$$

Im Rahmen einer sogenannten Korrelationstheorie stochastischer Prozesse, in der nur die ersten und zweiten Momente zur Beschreibung benutzt werden, wird die einen stationären Prozeß kennzeichnende Bedingung (2.46) nur für $n = 1$ und $n = 2$ gefordert. Solche Prozesse heißen stationär im weiteren Sinne oder schwach stationär.

Unter der Spektraldichte oder dem Leistungsdichtespektrum $S_{XX}(\lambda)$ eines mindestens schwach stationären stochastischen Prozesses X_t mit der Korrelationsfunktion $R_{XX}(\tau)$ versteht man deren Fouriertransformierte

$$S_{XX}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} R_{XX}(\tau) d\tau \quad (2.52)$$

mit der Umkehrung

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} S_{XX}(\lambda) d\lambda. \quad (2.53)$$

Diese beiden Gleichungen werden als Wiener-Chintschin-Relationen bezeichnet. Sie können dahingehend interpretiert werden, daß der Zufallsprozeß entweder mit Hilfe der Korrelationsfunktion im Zeitbereich oder mit Hilfe seiner Spektraldichte im Frequenzbereich beschrieben wird. Die Spektraldichte beschreibt die Zusammensetzung des quadratischen Mittelwertes des Prozesses aus den Frequenzanteilen.

2.2.3 Ergodische Prozesse

Ein stationärer stochastischer Prozeß heißt ergodisch bezüglich einer Menge G von Funktionen $g(X_t)$, wenn für jede Funktion $g \in G$ die Beziehung

$$\overline{g(X_t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(X_t) dt = E(g(X_t)) \quad (2.54)$$

mit Wahrscheinlichkeit eins gilt, also das Zeitmittel von $g(X_t)$ gleich dem Ensemblemittel dieser Funktion ist. Die Bedeutung der Ergodizität liegt darin, daß die Momente durch Zeitmittelung aus einer einzigen Realisierung des stochastischen Prozesses gewonnen werden können, denn nach (2.54) ist das Zeitmittel $\overline{g(X_t)}$ unabhängig von der benutzten Realisierung, sofern für diese die Auftretenswahrscheinlichkeit nicht null ist. Die Bedingung der Ergodizität hängt wesentlich von der Funktion g in (2.54) ab. Ein Prozeß ist daher nicht einfach ergodisch bzw. nicht ergodisch, sondern immer nur in Bezug auf eine vorgegebene Funktion $g(X_t)$. Die wichtigsten Fälle stellen in der Anwendung die

- Ergodizität im Mittel

$$\overline{X_t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_t dt = E(X_t), \quad (2.55)$$

- Ergodizität im quadratischen Mittel

$$\overline{X_t^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_t^2 dt = E(X_t^2), \quad (2.56)$$

- Ergodizität in der Korrelation

$$\overline{X_t X_{t+\tau}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_t X_{t+\tau} dt = R_{XX}(\tau) \quad (2.57)$$

dar. Der Nachweis der Ergodizität eines Prozesses gestaltet sich oft schwierig, da Ergodizitätskriterien voraussetzen, daß der stochastische Prozeß analytisch beherrscht wird. Meist verfügt man jedoch nur über endlich lange Zeitschriebe einiger Realisierungen eines stochastischen Prozesses. Aus diesem Grund wird im weiteren vorausgesetzt, daß, so lange sich kein Widerspruch einstellt und es vernünftig erscheint, die betrachteten Prozesse im Sinne von (2.54) als ergodisch anzusehen sind. Damit können alle zur Beschreibung benötigten Größen aus den vorhandenen Zeitschrieben gewonnen werden. Als Beispiel wird hier aufgeführt, wie aus einer einzelnen Realisierung eines stochastischen Prozesses X_t die Verteilungsdichte $p_X(x)$ gewonnen werden kann.

Im Intervall $0 < t < T$ werden die Zeitintervalle Δt_i summiert, für welche $x_i < x(t) \leq x_i + \Delta x_i$ ist. Ist $T_x = \sum_i \Delta t_i$ diese Summe, dann ist

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} = P(x_i < x(t) \leq x_i + \Delta x_i) = \int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} p_X(x) dx \approx p_X(x_i) \Delta x_i \quad (2.58)$$

für hinreichend kleines Δx_i . Damit kann die Verteilungsdichte für hinreichend großes T und hinreichend kleines Δx_i aus

$$p_X(x_i) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\Delta x_i} \frac{T_x}{T} \right) \approx \frac{T_x}{\Delta x_i T} \quad (2.59)$$

angenähert werden.

2.2.4 Markov-Prozesse

Ein stetiger Zufallsprozeß \mathbf{X}_t heißt d -dimensionaler stetiger Markov-Prozeß, wenn die bedingten Verteilungsdichten die Beziehung

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n; t_n | \mathbf{x}_{n-1}, \dots, \mathbf{x}_0; t_{n-1}, \dots, t_0) = p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n; t_n | \mathbf{x}_{n-1}; t_{n-1}); \quad t_n > t_{n-1} > \dots > t_0 \quad (2.60)$$

erfüllen. Anschaulich bedeutet dies, daß, falls der Zustand eines stochastischen Prozesses zu einem gewissen Zeitpunkt t_0 bekannt ist, keine zusätzliche Information über das System zu Zeiten $t < t_0$ für die Beschreibung der wahrscheinlichen Entwicklung des Prozesses für $t > t_0$ nötig ist, was dem auf stochastische Systeme übertragenen Kausalitätsprinzip der klassischen Physik entspricht. Die Bedeutung der Übergangsdichten besteht darin, daß sich mit ihnen aus einer Anfangsverteilung $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_0; t_0)$ nach Gleichung (2.21) alle endlichdimensionalen Verteilungsdichten des Prozesses gewinnen lassen. Für $t_n > \dots > t_0$ ergibt sich

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n, t_0, \dots, t_n) = p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n; t_n | \mathbf{x}_{n-1}; t_{n-1}) \dots p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1; t_1 | \mathbf{x}_0; t_0). \quad (2.61)$$

Die Gleichung

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1; t_1 | \mathbf{x}_0; t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1; t_1 | \mathbf{x}; t) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; t | \mathbf{x}_0; t_0) d\mathbf{x} \quad (2.62)$$

heißt Chapman-Kolmogorow-Smoluchowski-Gleichung. Für einen Markov-Prozeß \mathbf{X}_t besagt sie, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang von einem Punkt \mathbf{x}_0 im Phasenraum \mathbb{R}^d zur Zeit t_0 zum Punkt \mathbf{x}_1 zur Zeit t_1 gleich der Wahrscheinlichkeit des Übergangs zu einem Punkt \mathbf{x} zur Zeit t multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit des Überganges von \mathbf{x} zur Zeit t nach \mathbf{x}_1 zur Zeit t_1 , integriert über alle Zwischenwerte \mathbf{x} ist.

2.2.5 Diffusionsprozesse

Ein vektorwertiger Diffusionsprozeß ist ein Markov-Prozeß mit stetigen Realisierungen. Die Übergangswahrscheinlichkeit besitzt dabei die in [3] angegebenen Eigenschaften, die hier keine weitere Bedeutung haben. Ein Diffusionsprozeß ist Lösung einer stochastischen Differentialgleichung der Form

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_t)dt + \mathbf{G}(t, \mathbf{X}_t)d\mathbf{W}_t, \quad \dim(\mathbf{X}_t) = d, \quad \dim(\mathbf{W}_t) = m, \quad (2.63)$$

falls \mathbf{f} und \mathbf{G} stetig in t sind. Der Vektor \mathbf{f} wird Driftvektor, die Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$ Diffusionsmatrix genannt. Die entscheidende Eigenschaft der Diffusionsprozesse ist, daß ihre Übergangswahrscheinlichkeit durch die Angabe des Driftvektors und der Diffusionsmatrix eindeutig bestimmt ist. Unter gewissen Voraussetzungen (z.B. Differenzierbarkeit) ist die Übergangsdichte $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; t | \mathbf{x}_s; s)$ eine Fundamentallösung der Kolmogorowschen Vorwärtsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i(t, \mathbf{x})p) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (B_{ij}(t, \mathbf{x})p) = 0, \quad (2.64)$$

die auch unter dem Namen Fokker-Planck-Gleichung bekannt ist.

2.2.6 Wiener-Prozeß und weißes Rauschen

Der Wiener-Prozeß W_t ist ein räumlich und zeitlich homogener Diffusionsprozeß mit dem Driftvektor $\mathbf{f} \equiv 0$ und der Diffusionsmatrix $\mathbf{B} \equiv \mathbf{E}$, wobei \mathbf{E} die Einheitsmatrix ist. Er ist ein Modell für die mathematische Beschreibung der Brownschen Bewegung eines Partikels in einer Flüssigkeit.

Für einen skalaren Wiener-Prozeß ergeben sich folgende wichtige Eigenschaften, deren Herleitung in [3] zu finden sind. Der Wiener-Prozeß W_t ist ein Gaußscher stochastischer Prozeß mit einer normalverteilten Dichte. Zudem ist W_t ein Martingal, d.h. $E(W_t|W_s) = W_s$ für $t \geq s$. Die Zuwächse $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sind unabhängig, stationär und normalverteilt. Daraus folgt, daß (symbolisch geschrieben) $(dW_t)^2 = dt$ gilt. Obwohl der Wiener-Prozeß W_t zwar stetige Realisierungen besitzt, ist er nicht ableitbar.

Unter weißem Rauschen wird ein Gaußscher stochastischer Prozeß ξ_t mit Erwartungswert $E(\xi_t) = 0$ und einem auf der gesamten reellen Achse konstanten Leistungsdichtespektrum $S_{\xi\xi}(\lambda)$ verstanden. Aufgrund der Wiener-Chintschin-Relationen (2.52) und (2.53) mit der Autokorrelationsfunktion $R_{\xi\xi}(\tau) = C(\tau)$ muß folglich

$$S_{\xi\xi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} C(\tau) d\tau = \frac{c}{2\pi} \quad (2.65)$$

mit einer positiven Konstanten c gelten. Gleichung (2.65) ist aber nur vereinbar mit der Wahl

$$C(\tau) = \delta(\tau), \quad (2.66)$$

wobei $\delta(\tau)$ die Diracsche Delta-Funktion darstellt. Insbesondere ergibt sich damit für die Autokorrelationsfunktion

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \begin{cases} \infty & ; \tau = 0 \\ 0 & ; \tau \neq 0. \end{cases} \quad (2.67)$$

Ein derartiger Prozeß existiert jedoch im traditionellen Sinne nicht. Das weiße Rauschen läßt sich daher aufgrund der beschriebenen Eigenschaften nur noch im Rahmen der Theorie der verallgemeinerten Funktionen (Distributionen) beschreiben. Im folgenden werden daher die für die Beschreibung wichtigsten Eigenschaften verallgemeinerter Funktionen aufgeführt, wobei für eine ausführliche Beschreibung auf die Spezialliteratur wie z.B. [13] verwiesen wird.

Ein stetiges lineares Funktional

$$\Phi_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f(t) dt \quad (2.68)$$

auf dem Raum K aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\varphi(t)$ heißt verallgemeinerte Funktion oder Distribution. Die spezielle verallgemeinerte Funktion

$$\Phi(\varphi) = \varphi(t_0) \quad (2.69)$$

heißt Diracsche Delta-Funktion und wird mit $\delta(t - t_0)$ bezeichnet.

Im Gegensatz zu den klassischen Funktionen besitzen verallgemeinerte Funktionen immer Ableitungen beliebiger Ordnung, die ebenfalls wieder verallgemeinerte Funktionen sind. Für die zeitliche Ableitung einer verallgemeinerten Funktion gilt die Beziehung

$$\dot{\Phi}(\varphi) = -\Phi(\dot{\varphi}). \quad (2.70)$$

Ein verallgemeinerter stochastischer Prozeß ist eine zufällige verallgemeinerte Funktion mit den in [3] angegebenen Eigenschaften. Ein verallgemeinerter stochastischer Prozeß heißt Gaußisch, wenn für beliebige linear unabhängige Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in K$ die Zufallsgröße $(\Phi(\varphi_1), \dots, \Phi(\varphi_n))$ normalverteilt ist. Er ist durch die Angabe des stetig linearen Mittelwertfunktional

$$E(\Phi(\varphi)) = m(\varphi) \quad (2.71)$$

und des stetig bilinearen Kovarianzfunktional

$$E((\Phi(\varphi) - m(\varphi))(\Phi(\psi) - m(\psi))) = \text{Cov}_{\varphi\psi} \quad (2.72)$$

eindeutig bestimmt. Der Vorteil eines verallgemeinerten stochastischen Prozesses liegt darin, dass seine Ableitung stets existiert und wiederum ein verallgemeinerter stochastischer Prozeß ist. Die zeitliche Ableitung ist dabei wieder durch

$$\dot{\Phi}(\varphi) = -\Phi(\dot{\varphi}) \quad (2.73)$$

gegeben.

Mit der Theorie der verallgemeinerten stochastischen Prozesse ist es nun möglich, die Ableitung eines Wiener-Prozesses zu bilden. Dabei ergibt sich dann für die Kovarianzfunktion der Ableitung des Wiener-Prozesses die verallgemeinerte Funktion

$$\frac{d}{dt} \text{Cov}(s, t) = \delta(t - s). \quad (2.74)$$

Dies ist gleichzeitig die Kovarianzfunktion des weißen Rauschens. Das weiße Rauschen ξ_t ist also die Ableitung des Wiener-Prozesses, sofern man beide Prozesse als verallgemeinerte stochastische Prozesse auffaßt. Es gilt

$$\xi_t = \dot{W}_t \quad (2.75)$$

und

$$W_t = \int_0^t \xi_s ds \quad (2.76)$$

im Sinne der Übereinstimmung der Kovarianzfunktionale.

2.3 Stochastische Differentialgleichungen

Bei der Untersuchung stochastischer dynamischer Systeme wird man häufig auf das vektorwertige Differential der Form

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_t)dt + \mathbf{G}(t, \mathbf{X}_t)d\mathbf{W}_t; \quad \mathbf{X}_{t_0} = \mathbf{x}_0 \quad (2.77)$$

mit $\dim(\mathbf{X}_t) = d$ und $\dim \mathbf{W}_t = m$ geführt. Es wird stochastisches Differentialgleichungssystem genannt und ist eine abkürzende Schreibweise der Integralgleichung

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t_0} + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{X}_s) ds + \int_{t_0}^t \mathbf{G}(s, \mathbf{X}_s) d\mathbf{W}_s; \quad \mathbf{X}_{t_0} = \mathbf{x}_0, \quad (2.78)$$

da die Ableitung des Wiener-Prozesses in (2.77) im klassischen Sinne nicht existiert und daher (2.77) nicht als gewöhnliches Differentialgleichungssystem aufgefaßt werden kann. Das zweite Integral in der Integralgleichung (2.78) kann aufgrund der glättenden Wirkung der Integration als klassische Zufallsgröße aufgefaßt werden. Dies bedeutet, daß zur Behandlung der Gleichung keine verallgemeinerten Prozesse eingeführt werden müssen.

Das erste Integral in Gleichung (2.78) kann als gewöhnliches Riemann-Integral aufgefaßt werden, wohingegen das zweite Integral, das auch stochastisches Integral genannt wird, aufgrund der unbeschränkten Schwankungen nicht mehr als Riemann-Stieltjes-Integral angesehen werden kann. Daher ist es erforderlich, einen neuen Integralbegriff zu formulieren.

2.3.1 Interpretation im Sinne Itô's und Stratonovich's

Wird das stochastische Integral in (2.78) als Grenzwert einer Riemann-Stieltjes-Summe

$$\int_{t_0}^t \mathbf{G}_s d\mathbf{W}_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_{\tau_i} (\mathbf{W}_{t_i} - \mathbf{W}_{t_{i-1}}) \quad (2.79)$$

interpretiert, so hängt dieser Wert wesentlich von der Wahl der Zwischenpunkte τ_i ab (siehe dazu [3]). Um einen eindeutigen Integralbegriff zu erhalten, ist es deshalb notwendig, eine gewisse Wahl von Zwischenpunkten τ_i derart festzulegen, daß das Integral sinnvolle und erwünschte Eigenschaften besitzt.

Stratonovich hat in seiner Arbeit [51] durch die Wahl der Zwischenpunkte bei $\tau_i = \frac{t_i + t_{i-1}}{2}$ ein Integral definiert, bei dem die Regeln des klassischen Integrationskalküls anwendbar sind. In der Literatur werden stochastische Integrale im Sinne von Stratonovich mit $\int \mathbf{G} \circ d\mathbf{W}_t$ gekennzeichnet.

Eine weitere Möglichkeit der Definition des stochastischen Integrals wurde von Itô [22] eingeführt. Die Wahl der Zwischenpunkte fällt bei seiner Definition auf $\tau_i = t_{i-1}$. Diese Wahl führt aber zu einem von der klassischen Integralrechnung abweichenden Kalkül. Stochastische Integrale im Sinne Itô's werden mit $\int \mathbf{G} d\mathbf{W}_t$ gekennzeichnet.

Die Frage nach der Interpretation des stochastischen Differentialgleichungssystems stellt sich beim Grenzübergang von physikalisch realisierbaren glatten Prozessen zu Markov-Prozessen. Zum Itô'schen Integral gelangt man, wenn man den Grenzübergang vor der Auswertung des Integrals durchführt, zum Integral von Stratonovich, wenn man den Grenzübergang nach der Integration durchführt. Es ist jedoch immer möglich, beide Integraldefinitionen mit

$$\int_{t_0}^t g_{ki} \circ dW_{i,s} = \int_{t_0}^t g_{ki} dW_{i,s} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (g_{kl})_{,j} g_{jl} ds \quad (2.80)$$

ineinander zu überführen, wobei $f(\mathbf{x})_{,j}$ die partielle Ableitung $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ bedeutet. Beide Definitionen sind identisch für $\mathbf{G}(t, \mathbf{X}_t) = \mathbf{G}(t)$.

Der entscheidende Vorteil der Itô'schen Wahl ergibt sich aus der Wahl der Zwischenpunkte $\tau_i = t_{i-1}$ an der linken Grenze des Zeitintervalls. Zur Berechnung des Integralwertes zu einem bestimmten Zeitpunkt benötigt man keine Funktionswerte \mathbf{G}_{τ_i} zu Zeitpunkten später als t_{i-1} . Das Integral ist eine nichtvorgreifende Funktion der oberen Integralgrenze. Damit ergibt sich eine einfachere Berechnung der Erwartungswerte. Insbesondere ist

$$E \left(\int \mathbf{G} d\mathbf{W}_t \right) = 0. \quad (2.81)$$

Wichtig für die Behandlung stochastischer Differentialgleichungen ist der Satz von Itô. Ist der d -dimensionale Prozeß \mathbf{X}_t durch (2.77) gegeben, so ist der k -dimensionale Prozeß $\mathbf{Y}_t = \mathbf{u}(t, \mathbf{X}_t)$ Lösung des stochastischen Differentialgleichungssystems

$$d\mathbf{Y}_t = \left[\mathbf{u}(t, \mathbf{X}_t) + \mathbf{U}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X}_t) \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbf{u}_{,ij} b_{ij} \right] dt + \mathbf{U}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X}_t) \mathbf{G}(t, \mathbf{X}_t) d\mathbf{W}_t \quad (2.82)$$

mit der $k \times d$ -Matrix $\mathbf{U}_{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial x_d} \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

wenn $\mathbf{u}(t, \mathbf{X}_t)$ als eine einmal in t und zweimal in \mathbf{x} stetig differenzierbare Funktion vorgegeben ist.

Kapitel 3

Stabilitätstheorie

Der Begriff der Stabilität hat im Laufe der Zeit eine ständige Entwicklung erfahren und wurde immer wieder den besonderen Erfordernissen spezieller Problemkreise angepaßt. Aus diesem Grund existieren in der Literatur zahlreiche Lehrbücher, die sich mit den verschiedensten Stabilitätstheorien dynamischer Systeme beschäftigen. Aus der großen Vielfalt sollen hier stellvertretend die Werke von Malkin [30], Hahn [18] und Leipholz [28] aufgeführt werden, auf deren Basis die nachfolgenden Ausführungen aufgebaut sind.

Erste Untersuchungen über Stabilität gehen auf Aristoteles und Archimedes zurück. Mit diesen beiden Namen sind zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen verknüpft. Bei Aristoteles wird die Bewegung untersucht, die nach einer Störung auftritt, und es wird aus dem Ablauf der Bewegung auf Stabilität des ungestörten Zustandes geschlossen. Archimedes hingegen folgert aufgrund der rein geometrischen Situation, die sich nach der Störung eines Systems ergibt, wann Stabilität des ungestörten Systems vorliegt.

Die erste Methode heißt kinematische und hat im Zusammenhang mit der Stabilität der Bewegungen von technischen Systemen stark an Bedeutung gewonnen. Die zweite wird geometrisch-statische Methode genannt. Neben den beiden beschriebenen Methoden existiert noch eine dritte. Bei ihr werden Energiekriterien verwendet, um auf Stabilität einer Gleichgewichtslage zu schließen, weshalb sie energetische oder Energiemethode heißt. In diesem Zusammenhang ist wesentlich der Satz von Lagrange-Dirichlet, der aussagt, daß das Gesamtpotential statisch konservativer Systeme für eine stabile Gleichgewichtslage ein Minimum besitzt.

Bemühungen, eine einheitliche Stabilitätstheorie für alle Zweige der Mechanik zu erschaffen, blieben bis heute ohne großen Erfolg. Die Methoden stehen weitestgehend nebeneinander, und es haben sich eigenständige Theorien der Stabilität gebildet, je nachdem, ob man das Feld der Dynamik betritt, wo die kinematische Methode vorherrscht, oder ob man sich im Bereich der Elastizitätstheorie und Statik befindet, wo vorwiegend die geometrisch-statische und energetische Methode angewendet werden.

Neben den Methoden, die zu einer Aufspaltung der Theorie führten, haben auch die unterschiedlichsten Stabilitätsdefinitionen trennend gewirkt und damit zu zahlreichen Auslegungsmöglichkeiten geführt. In der heutigen Zeit hat sich weitestgehend der Stabilitätsbegriff von Ljapunov durchgesetzt und stellt auch die Basis der Stabilitätsbetrachtungen dieser Arbeit dar.

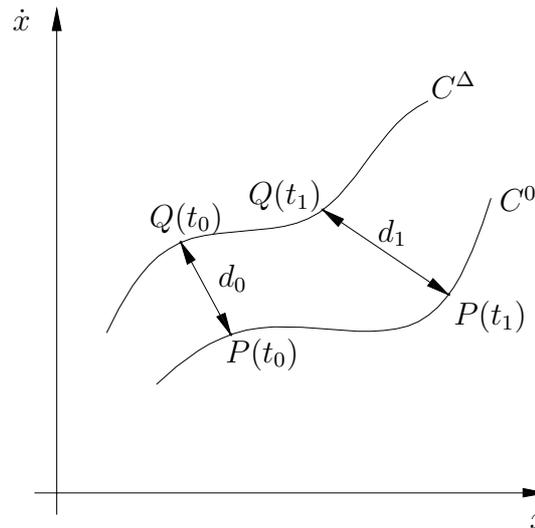


Abbildung 3.1: Trajektorien im Euklidischen Raum

3.1 Kinetische Stabilitätstheorie

In der kinetischen Stabilitätstheorie wird im wesentlichen der Stabilitätsbegriff im Sinne Ljapunovs benutzt. Damit sind die Wahl der Abstandsmaße und die Art der Störungen in charakteristischer Weise festgelegt, wohingegen die Festlegung des Bezugssystems bzw. des gestörten Zustands dadurch noch nicht scharf eingeschränkt wird.

Die Wahl der Abstandsmaße orientiert sich an einer kinematischen Auffassung der Stabilität, d.h. es existiert immer ein Zeitbezug. Ausgangspunkt sind Bewegungen $x(t)$, $t \in \mathbb{R}_0^+$ im Euklidischen Raum. Die ungestörte Bewegung wird durch die Trajektorie C^0 , die gestörte Bewegung durch eine Nachbarschaftstrajektorie C^Δ gekennzeichnet. Zur Beurteilung der Stabilität werden zwei Bildpunkte $P \in C^0$ und $Q \in C^\Delta$ betrachtet, die auf C^0 bzw. C^Δ entlanglaufen (siehe Abbildung 3.1). Als Norm wird der im Sinne der Metrik des Raumes genommene Abstand der Bildpunkte $d[P(t_k), Q(t_k)]$ gewählt, die dem gleichen Parameterwert t_k entsprechen. Damit Stabilität vorliegt, wird verlangt, daß sich die Bildpunkte auf C^0 und C^Δ zu keiner Zeit zu weit, nämlich mehr als um ein vorgegebenes Maß r , voneinander entfernen.

Im Rahmen der kinetischen Stabilitätstheorie tritt oft der Fall auf, daß der ungestörte Zustand eine statische Gleichgewichtslage ist. Die zugehörige Trajektorie C^0 schrumpft für alle Zeiten t auf einen einzigen Punkt zusammen. Dieser Fall ist in Abbildung 3.2 dargestellt.

Ausgangspunkt einer Stabilitätsanalyse sind die Bewegungsgleichungen eines physikalischen Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, t). \quad (3.1)$$

Dabei sind $\boldsymbol{\alpha}$ und t Parameter des Systems, wobei speziell t für die Zeit steht.

Denkt man sich den ungestörten Zustand \mathbf{x}^0 als partikuläre Lösung von (3.1) durch die Bedingung

$$\dot{\mathbf{x}}^0 = F^0(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\alpha}^0, t) \quad (3.2)$$

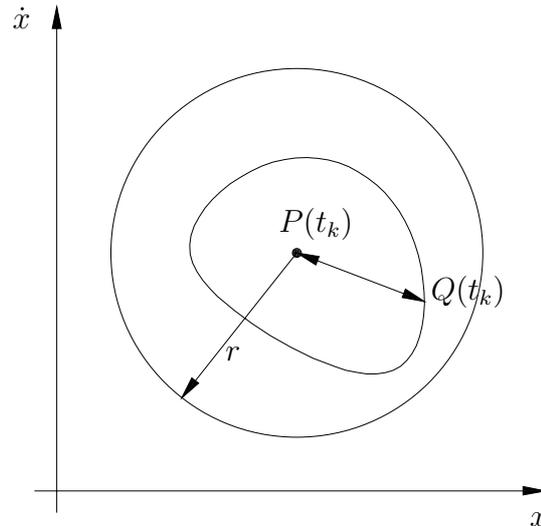


Abbildung 3.2: Stabile statische Gleichgewichtslage

und den gestörten Zustand \mathbf{x}^Δ entsprechend durch

$$\dot{\mathbf{x}}^\Delta = F^\Delta(\mathbf{x}^\Delta, \boldsymbol{\alpha}^\Delta, t) \quad (3.3)$$

festgelegt, so gilt für die Variation $\mathbf{v}(t)$ das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = F^\Delta(\mathbf{x}^\Delta, \boldsymbol{\alpha}^\Delta, t) - F^0(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\alpha}^0, t)$$

bzw.

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \Phi(\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}, t) \quad (3.4)$$

mit $v_i(t) = x_i^\Delta(t) - x_i^0(t)$ und $\beta_k = \alpha_k^\Delta - \alpha_k^0$. Die sogenannten Variationsgleichungen (3.4) haben für $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ die triviale Lösung $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, die den Nullpunkt des n -dimensionalen Raumes darstellt. Da dann gleichzeitig $\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{0}$ gilt, ist der Nullpunkt eine stationäre Lösung. Die Stabilitätsbedingung von Ljapunov läßt sich nun durch die drei folgenden Definitionen ausdrücken:

- Die ungestörte Bewegung $\mathbf{x}^0(t)$ heißt dann (schwach) stabil im Sinne Ljapunovs, wenn sich zu jeder Zahl ε , wie klein sie auch sei, ein $\vartheta(\varepsilon, t_0) > 0$ derart angeben läßt, daß für eine beliebige Norm der Variationen $\mathbf{v}(t)$ die Ungleichung

$$\|\mathbf{v}(t)\| < \varepsilon \quad (3.5)$$

für alle $t > t_0$ erfüllt ist, wenn nur

$$\|\mathbf{v}(t_0)\| < \vartheta(\varepsilon, t_0) \quad (3.6)$$

gewählt wird.

- Ist die ungestörte Bewegung $\mathbf{x}^0(t)$ stabil im Sinne Ljapunovs und kann man darüber hinaus ein $\vartheta_0(t_0) > 0$ so wählen, daß allein durch Begrenzen der Anfangsstörungen gemäß

$$\|\mathbf{v}(t_0)\| < \vartheta_0(t_0) \quad (3.7)$$

sogar ein Verschwinden der Störungen im Laufe der Zeit, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}(t)\| = 0 \quad (3.8)$$

folgt, dann heißt die ungestörte Bewegung $\mathbf{x}^0(t)$ asymptotisch stabil im Sinne Ljapunovs.

- Die ungestörte Bewegung $\mathbf{x}^0(t)$ heißt instabil, wenn sie nicht stabil ist.

Will man über die Stabilität des ungestörten Zustandes etwas aussagen, so muß man das zeitliche Verhalten der Variation kennen oder abschätzen können.

3.1.1 Die Empfindlichkeits- und Variationsgleichungen

Ausgangspunkt einer Stabilitätsanalyse ist der ungestörte Zustand $\mathbf{x}^0(t)$, der die Beziehung

$$\dot{x}_i^0 = F_i(x_k^0, \alpha_r^0, t), \quad i, k = 1, \dots, n; \quad r = 1, \dots, m \quad (3.9)$$

erfüllt. Infolge von Störungen, die auch in Veränderungen der Parameter bestehen können, erhält man den gestörten Zustand $x_i^\Delta(t)$. Unter der Annahme, daß durch die Änderung der Parameter α_r^0 in $\alpha_r^\Delta = \alpha_r^0 + \beta_r$ in der Art übergeht, daß die Struktur der Differentialgleichung (3.9) nicht verändert wird, gilt, wenn man sich auf Glieder beschränkt, die in β_r linear sind,

$$x_i^\Delta = x_i^0(\alpha_r^0 + \beta_r, t) + v_i = x_i^0(\alpha_r^0, t) + \frac{\partial x_i^0}{\partial \alpha_r^0} \beta_r + v_i. \quad (3.10)$$

Der Term $\frac{\partial x_i^0}{\partial \alpha_r^0} \beta_r$ gibt die Änderung von x_i^0 infolge der Veränderung der Parameter an.

Die Größen $\frac{\partial x_i^0}{\partial \alpha_r^0}$ werden Empfindlichkeitskoeffizienten genannt, da sie ein Maß für die Empfindlichkeit der Lösung gegen eine Parameteränderung sind. Mit der Abkürzung

$$u_{ir} = \frac{\partial x_i^0}{\partial \alpha_r^0} \quad (3.11)$$

folgt unmittelbar aus (3.10)

$$\dot{x}_i^\Delta = \dot{x}_i^0(\alpha_r^0, t) + \dot{u}_{ij} \beta_j + \dot{v}_i. \quad (3.12)$$

Aus $\dot{x}_i^\Delta = F_i(x_k^\Delta, \alpha_r^\Delta, t)$ ergibt sich mit (3.10)

$$\dot{x}_i^\Delta = F_i(x_k^0(\alpha_r^0, t) + u_{kl} \beta_l + v_k, \alpha_r^0 + \beta_r, t). \quad (3.13)$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Taylor, so erhält man bei Vernachlässigung aller Glieder, die Produkte von v_k , β_r und die Größen v_k , β_r selbst in höherer Ordnung enthalten,

$$\dot{x}_i^\Delta = F_i(x_k^0(\alpha_r^0, t), \alpha_r^0, t) + \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_l}(x_k^0, \alpha_r^0, t) \right] (u_{lj} \beta_j + v_l) + \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_j^0}(x_k^0, \alpha_r^0, t) \beta_j. \quad (3.14)$$

Wegen (3.12) und (3.9) ist andererseits

$$\dot{x}_i^\Delta = F_i(x_k^0(\alpha_r^0, t), \alpha_r^0, t) + \dot{u}_{ij}\beta_j + \dot{v}_i. \quad (3.15)$$

Vergleicht man nun (3.15) mit (3.14), so ist leicht zu erkennen, daß die Beziehungen

$$\dot{u}_{ij} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_l}(x_k^0, \alpha_r^0, t) \right] u_{lj} + \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_j^0}(x_k^0, \alpha_r^0, t) \quad (3.16)$$

und

$$\dot{v}_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_l}(x_k^0, \alpha_r^0, t) v_l \quad (3.17)$$

gelten müssen.

Interessiert man sich für den Einfluß, den die Störungen der Anfangsbedingungen hervorrufen, was in der Stabilitätstheorie nach Ljapunov ausschließlich betrachtet wird, so hat man mit den Variationen v_i zu arbeiten und das Differentialgleichungssystem (3.17) zu verwenden.

Das System (3.17) wird als System der Variationsgleichungen bezeichnet. Im allgemeinen wird es nichtlinear sein. Berücksichtigt man Glieder höherer Ordnung bei der Entwicklung von (3.14) unter Vernachlässigung von Parameteränderungen, so ergibt sich für die Variation v_i das System

$$\dot{v}_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_l}(x_k^0, \alpha_r^0, t) v_l + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n F_i}{(\partial q_l)^n} v_l^n + \dots \quad (3.18)$$

3.1.2 Erste Methode von Ljapunov

Unter den Oberbegriff der Ersten Methode von Ljapunov fallen üblicherweise alle Methoden, die in irgendeiner Weise die Lösungen der Variationsgleichungen (3.18) zur Beurteilung des Zeitverhaltens der Störungen $\mathbf{v}(t)$ heranziehen. Die zweite oder direkte Methode von Ljapunov, auf die im folgenden nicht näher eingegangen wird, geht zwar auch von den im allgemeinen nichtlinearen Variationsgleichungen aus, arbeitet jedoch mit sogenannten Vergleichsfunktionen, ohne das Gleichungssystem (3.18) selbst zu lösen. An die Stelle der Schwierigkeit, Variationsgleichungen zu lösen, tritt bei dieser Methode das Problem, eine geeignete Vergleichsfunktion zu finden.

Die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens bringt offenbar in all den Fällen keine Schwierigkeiten mit sich, in denen die Differentialgleichung der gestörten Bewegung in geschlossener Form gelöst werden kann. Derartige Fälle sind aber die Ausnahme und kommen praktisch kaum vor. Daher waren die Anstrengungen stets darauf gerichtet, Methoden zur Lösung eines Stabilitätsproblems ohne die vollständige Integration der Störungsgleichung zu entwickeln. Das gerade macht die eigentliche Stabilitätstheorie erst aus.

Der einfachste Fall sind lineare Variationsgleichungen. Dann genügt eine Abschätzung der sogenannten charakteristischen Größen; bei Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sind dies die charakteristischen Exponenten, bei Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten die charakteristischen Multiplikatoren und bei Differentialgleichungen mit beliebigen Koeffizienten die charakteristischen Zahlen. Sind die Variationsgleichungen nichtlinear, so stehen zwei Strategien zur Verfügung. Eine Möglichkeit ist, das Gleichungssystem zu linearisieren und somit auf die sogenannten

Variationsgleichungen der Ersten Näherung zu kommen. Zweitens kann man mit Hilfe von Zwischenintegralen versuchen, ausreichend viele Informationen für einen Stabilitätsnachweis zu erreichen.

3.2 Stochastische Stabilität

Bei Stabilitätsuntersuchungen von Lösungen stochastischer Systeme werden in der Systemmatrix der Variationsgleichung Elemente auftreten, die vom Zufall abhängen. Da sowohl die Systemantwort als auch die Erregung vom Zufall abhängt, muß die Stabilitätsbedingung ebenfalls statistisch ausgewertet werden. Ein Überblick über die unterschiedlichen Definitionen für die Stabilität stochastischer Systeme ist in den Arbeiten von Kozin [25], [26] zu finden. Dabei haben sich nach Arnold [3] im wesentlichen zwei Definitionen durchgesetzt, die hier beschrieben werden.

Gegeben sei die stochastische Differentialgleichung

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_t)dt + \mathbf{G}(t, \mathbf{X}_t)d\mathbf{W}_t \quad (3.19)$$

mit dem Startwert $\mathbf{X}_{t_0} = c$ und $t \geq t_0$, die die Voraussetzungen bezüglich Existenz und Eindeutigkeit erfüllt und in t stetige Koeffizienten hat. Weiterhin sei

$$\mathbf{f}(t, 0) = 0, \quad \mathbf{G}(t, 0) = 0 \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.20)$$

so daß die Ruhelage $\mathbf{X}_t(0) \equiv 0$ eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung (3.19) zum Anfangswert $c = 0$ ist. Danach bezeichnet man die Ruhelage als stochastisch stabil (stabil mit Wahrscheinlichkeit 1), wenn für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c \rightarrow 0} P \left[\sup_{t_0 \leq t < \infty} \|\mathbf{X}_t(c)\| \geq \varepsilon \right] = 0 \quad (3.21)$$

gilt.

Die Ruhelage heißt stochastisch asymptotisch stabil, wenn sie stochastisch stabil ist und wenn zusätzlich gilt

$$\lim_{c \rightarrow 0} P \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}_t(c) = 0 \right] = 1. \quad (3.22)$$

Ansonsten heißt sie instabil.

Die Ruhelage heißt insbesondere stochastisch asymptotisch stabil im Ganzen, wenn sie stochastisch stabil ist und

$$P \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}_t(c) = 0 \right] = 1 \quad (3.23)$$

für alle $c \in \mathbf{R}^d$ erfüllt ist.

Für den Fall $\mathbf{G}(t, \mathbf{X}_t) \equiv 0$ entsprechen die Definitionen denjenigen im deterministischen Fall. So gesehen kann die stochastische Stabilitätsdefinition als Verallgemeinerung des deterministischen Stabilitätsbegriffes von Ljapunov angesehen werden.

Die zweite Möglichkeit der Stabilitätsdefinition für stochastische Systeme erfolgt durch die Untersuchung entsprechender Momente. Dieses Konzept ist historisch älter und in gewissen Fällen einfacher durchzuführen. Hierbei mittelt man im Gegensatz zur Definition gemäß (3.21) – (3.23) zuerst für ein festes t über alle möglichen Werte einer Funktion $g(\mathbf{X}_t) = g_1(t)$ und prüft die so entstandene deterministische Funktion $g_1(t)$

auf ihren Verlauf im Intervall $[t_0, \infty)$. Die auf Stabilität zu untersuchende Ruhelage heißt dann im p -ten Mittel stabil ($p > 0$), wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$\sup_{t_0 \leq t < \infty} E\|\mathbf{X}_t(c)\|^p \leq \varepsilon \quad (3.24)$$

für $|c| \leq \delta$ gilt. Die Ruhelage heißt im p -ten Mittel asymptotisch stabil, wenn sie im p -ten Mittel stabil ist und wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\|\mathbf{X}_t(c)\|^p = 0 \quad (3.25)$$

für alle c aus der Umgebung von $\mathbf{x} = 0$ erfüllt ist. Im Falle $p = 1$ bzw. $p = 2$ spricht man von (asymptotischer) Stabilität im Mittel bzw. im Quadratmittel. Die besondere Betonung auf die beiden ersten Momente geht auf die sogenannte Korrelationstheorie zurück, die sich mit normalverteilten Prozessen beschäftigt, welche durch diese Momente komplett beschreibbar sind.

3.3 Ljapunov-Exponenten

Die allgemeinste Form von Variationsgleichungen, die im Rahmen der Ersten Methode von Ljapunov auftreten können, sind lineare Variationsgleichungen mit beliebig veränderlichen Koeffizienten. Ein System mit veränderlichen Koeffizienten entsteht dadurch, daß auf den rechten Seiten des Gleichungssystems (3.2), das den ungestörten Zustand beschreibt, die Zeit t explizit vorkommt.

Um eine Aussage bezüglich der Stabilität des der Variationsgleichung zugrunde liegenden ungestörten Zustands \mathbf{x}^0 treffen zu können, muss das Ziel sein, das zeitliche Verhalten der allgemeinen Lösung der Variationsgleichung abzuschätzen. Wenn alle partikulären Lösungen von (3.17) mit der Zeit dem Betrage nach gegen Null gehen oder unter einer vorgeschriebenen kleinen Schranke bleiben, so kann man sagen, daß die ungestörte Lösung stabil ist.

Eine Abschätzung der Lösungen ist für Variationsgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe des Realteils der charakteristischen Exponenten möglich. Diese Möglichkeit besteht hier nicht mehr. Man wird aber versuchen, das Wachstumsverhalten der Lösung mit ähnlichen Mitteln zu untersuchen.

Hierbei stellen die Ljapunov-Exponenten im Bereich der Stabilitätstheorie ein leistungsfähiges Instrument bei der Untersuchung von Lösungen dynamischer Systeme dar. Die Idee der Ljapunov-Exponenten entstammt der Verallgemeinerung der Untersuchung der Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} von (3.17) an den Gleichgewichtspunkten und den Floquet-Multiplikatoren. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, die Stabilität stationärer, periodischer, quasi-stationärer und chaotischer Systeme zu bestimmen. Die Ljapunov-Exponenten sind dabei ein Maß für das Auseinanderlaufen der Trajektorien durch ursprünglich benachbarte Punkte, d.h. sie sind ein Maß für die Abhängigkeit des Systems von den Anfangsbedingungen. In der Literatur haben sich die Ljapunov-Exponenten speziell auf dem Gebiet der Chaosforschung als wichtiges Werkzeug für die quantitative Beschreibung dynamischer Systeme etabliert. Siehe dazu auch [56], [49], [50], [43], [42].

3.3.1 Ljapunov-Exponenten für deterministische Systeme

Ausgangspunkt sind aus (3.17) hergeleitete lineare Variationsgleichungen. Die allgemeine Lösung $\mathbf{v}(t)$ kann durch

$$\mathbf{v}(t) = \Phi(\mathbf{x}_0, t)\mathbf{v}_0 \quad (3.26)$$

formal angegeben werden. $\Phi(\mathbf{x}_0, t)$ bezeichnet die Fundamentalmatrix. Es gilt

$$\Phi(\mathbf{x}_0, t + \tau) = \Phi(\Psi_\tau \mathbf{x}_0, t) \circ \Phi(\mathbf{x}_0, \tau). \quad (3.27)$$

Unter dem Zykel Ψ_t versteht man die Abbildung, die die Zeitentwicklung der Punkte des Phasenraums beschreibt, wobei \circ die Komposition von Abbildungen bezeichnet. Man definiert nach [42] die k -dimensionalen Ljapunov-Exponenten $\lambda(F^k, \mathbf{x}_0)$ durch

$$\lambda(F^k, \mathbf{x}_0) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\Phi \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \Phi \mathbf{e}_k\|}{\|\mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_k\|}, \quad (3.28)$$

wobei $k = 1, 2, \dots, n$ ist. F^k bezeichnet einen k -dimensionalen Teilraum des Tangentialraumes $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_0}^n$ im Punkte \mathbf{x}_0 . Die Größen \mathbf{e}_i ($i = 1, \dots, k$) bezeichnen eine Basis im F^k , \wedge bezeichnet das äußere Produkt und $\|\cdot\|$ ist die Norm bezüglich irgendeiner Riemannschen Metrik (z.B. die Euklidische Metrik). Somit ist

$$\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_k\| \quad (3.29)$$

das Volumen des k -dimensionalen Parallelepipeds. Der Ljapunov-Exponent gibt anschaulich an, wie stark sich das k -dimensionale Parallelepiped bezüglich der Größe im Zeitmittel verändert. Es gibt höchstens

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3.30)$$

k -dimensionale Ljapunov-Exponenten. Über die Existenz des Grenzübergangs¹ in der Definition (3.28) werden Aussagen im Multiplikativen Ergodentheorem von Oseledec [40] getroffen.

3.3.2 Ljapunov-Exponenten für stochastische Systeme

Ausgangspunkt der Betrachtungen stellt wiederum die lineare Form der Variationsgleichungen (3.17) dar. Im Gegensatz zu den bisherigen Betrachtungen hängen die Elemente der Systemmatrix \mathbf{A} jetzt zusätzlich von stochastischen Prozessen ab. Für die Herleitung des Ljapunov-Exponenten (siehe dazu [8]) für stochastische Systeme wird analog zum Fluß deterministischer Systeme eine Abbildung eingeführt, die den Anfangszustand $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{R}^d$ in den Zustand \mathbf{v} zum Zeitpunkt $t \in \mathbf{R}$ unter dem Einfluß von $\omega \in \Omega$ überführt:

$$\Psi(t, \omega, \mathbf{v}) = \Phi(t, \omega)\mathbf{v} \quad (3.31)$$

¹In einer strengen Definition müßte man $\lambda(F^k, \mathbf{x}_0) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\Phi \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \Phi \mathbf{e}_k\|}{\|\mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_k\|}$ schreiben, da der Limes in (3.28) nicht zu existieren braucht. Beschränkt man jedoch die Untersuchungen auf reguläre Systeme, so darf auf (3.28) zurückgegriffen werden.

Die Abbildung Ψ bezeichnet man als Kozykel. Sie besitzt die Eigenschaft

$$\Phi(t + s, \omega) = \Phi(t, \nu_s \omega) \circ \Phi(s, \omega) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}. \quad (3.32)$$

ν_s bezeichnet hierbei den Shift

$$\nu_t \omega(s) := \omega(s + t). \quad (3.33)$$

Der Shift wird in der Eigenschaft des Kozykels (3.32) benötigt, da ω von der Zeit abhängt.

Mit Hilfe des Kozykelkonzeptes kann eine Definition der Ljapunov-Exponenten für stochastische Systeme angegeben werden:

Der Ljapunov-Exponent eines linearen Kozykels $\Psi(t, \omega, \cdot) = \Phi(t, \omega)$ in Richtung von \mathbf{v}_0 unter dem Einfluß von $\omega \in \Omega$ ist definiert als

$$\lambda(\omega, \mathbf{v}_0) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(t, \omega) \mathbf{v}_0\|. \quad (3.34)$$

Ähnlich wie bei deterministischen Systemen interpretiert man diese Größe als die exponentielle Wachstumsrate des linearen Kozykels in Richtung von \mathbf{v}_0 . Eine Aussage über die Existenz dieses Grenzwerts trifft wiederum das Multiplikative Ergodentheorem von Oseledec.

Mit (3.34) erhält man die r verschiedenen Ljapunov-Exponenten $\lambda_1 > \dots > \lambda_r$ mit den Vielfachheiten d_i , $\sum_{i=1}^r d_i = d$, wenn \mathbf{v}_0 in Richtung des sogenannten Oseledec-Raumes $E_i(\omega)$ mit der Dimension $\dim E_i(\omega) = d_i$ gestartet wurde. Die Abhängigkeit von $\omega \in \Omega$ drückt aus, daß die Oseledec-Räume Zufallsvariablen sind. Die Ljapunov-Exponenten hängen dagegen nicht vom Zufall ab.

Konzept von Khas'minskii

Für die praktische Berechnung des größten Ljapunov-Exponenten hat sich die Vorgehensweise nach dem Konzept von Khas'minskii etabliert. Dabei transformiert man die zu untersuchende stochastische Variationsgleichung

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_t)dt + \mathbf{G}(t, \mathbf{X}_t)d\mathbf{W}_t, \quad \dim \mathbf{X}_t = d \quad (3.35)$$

auf eine Hyperkugel im \mathbb{R}^d und erhält dadurch folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} d \ln A_t &= h_1(\boldsymbol{\varphi}_t)dt + g_1(\boldsymbol{\varphi}_t)dW_t, \\ d\boldsymbol{\varphi}_t &= \mathbf{h}_\varphi(\boldsymbol{\varphi}_t)dt + \mathbf{g}_\varphi(\boldsymbol{\varphi}_t)dW_t \quad \dim \boldsymbol{\varphi}_t = d - 1. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Für $d = 2$ entspricht die Transformation einer Transformation auf Polarkoordinaten, für $d = 3$ auf Kugelkoordinaten usw.. Für die Berechnung des größten Ljapunov-Exponenten interessiert lediglich der Abstand des Zustandsvektors $\|\mathbf{X}_t\|$ von der Ruhelage. Durch die Transformation auf die Hyperkugel ist es nun möglich, diese Norm durch die Amplitude A_t auszudrücken. Dadurch ergibt sich für den Ljapunov-Exponenten

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{A_t}{A_0}. \quad (3.37)$$

Weiterhin erreicht man, wie man in (3.36) leicht sehen kann, eine einseitige Entkopplung des instationären Lösungsanteil A_t von den stationären Winkelprozessen φ_t . Dadurch kann der natürliche Logarithmus der Amplitude aus Gleichung (3.36) durch Zeitintegration berechnet werden, und man erhält für den Exponenten

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[\int_0^t h_1(\varphi_\tau) d\tau + \int_0^t g_1(\varphi_\tau) dW_\tau \right]. \quad (3.38)$$

Das stochastische Integral in der rechten Seite von (3.38) ist ein Integral im Sinne von Itô, für das nach (2.81)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g_1(\varphi_\tau) dW_\tau = 0 \quad (3.39)$$

gilt. Eingesetzt in (3.38) ergibt

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t h_1(\varphi_\tau) d\tau. \quad (3.40)$$

Ist die Funktion $h_1(\varphi_\tau)$ ergodisch im Mittel, so kann der zeitliche Mittelwert durch das Ortsmittel ersetzt werden, und man erhält die sogenannte Fürstenberg-Khas'minskii-Formel

$$\lambda_1 = \int_{V_\varphi} h_1(\varphi) p(\varphi) d\varphi \quad (3.41)$$

für die Berechnung des größten Ljapunov-Exponenten, wobei $p(\varphi)$ die stationäre Verteilungsdichte des Winkelprozesses φ_t darstellt.

Kapitel 4

Lösungsmethoden

Zur Berechnung des größten Ljapunov-Exponenten nach Gleichung (3.41) ist die zentrale Aufgabe einer Stabilitätsanalyse die Ermittlung der stationären Verteilungsdichte. Hierfür existieren zwei prinzipiell unterschiedliche Vorgehensweisen.

Die direkten Methoden, zu denen die Monte-Carlo-Methoden zu zählen sind, betrachten den stochastischen Prozeß und dessen Änderungen. Hierbei werden mittels numerischer Integration der stochastischen Differentialgleichungen Lösungstrajektorien erzeugt, aus denen gemäß Kapitel 2.2.3 die gesuchte Verteilungsdichte ermittelt wird.

Die indirekten, wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden basieren auf einer statistischen Betrachtung der Prozesse. Wird eine stochastische Differentialgleichung im Sinne von Itô untersucht, so stellt deren Lösung einen Diffusionsprozeß dar. Die Verteilungsdichte kann dann als Lösung der zugehörigen Fokker-Planck-Gleichung ermittelt werden. Bei der Fokker-Planck-Gleichung handelt es sich um eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten. Strenge Lösungen sind nur in Ausnahmefällen explizit angebar, so daß man im allgemeinen auf Näherungslösungen angewiesen ist.

4.1 Monte-Carlo-Methoden

In diesem Abschnitt werden Diskretisierungsverfahren zur approximativen Bestimmung der Trajektorien eines stochastischen Differentialgleichungssystems vorgestellt. Diese Verfahren benutzen stochastische Elemente für die Lösung eines numerischen Problems. Das bedeutet, daß jedes dieser Verfahren einen Zufallszahlengenerator verwendet, woraus auch der Begriff Monte-Carlo-Methoden abgeleitet ist. Der in dieser Arbeit verwendete Zufallszahlengenerator besteht aus einem linearen Kongruenzgenerator, der die näherungsweise gleichverteilten und statistisch unabhängigen Zahlenfolgen U_n und V_n erzeugt. Mit einer Box-Müller-Transformation

$$R_n = \sqrt{-2 \ln U_n} \cos(2\pi V_n) \quad (4.1)$$

kann daraus eine normalverteilte Zahlenfolge R_n erzeugt werden, die die geforderten Bedingungen für numerische Simulationsmethoden erfüllt.

Bei der Anwendung numerischer Integrationsmethoden ist darauf zu achten, daß diese konsistent mit dem Itô-Kalkül sind. So lassen sich insbesondere klassische Runge-Kutta-Verfahren für deterministische Systeme, wie z.B. das Heun-Verfahren, im allge-

meinen nicht direkt auf stochastische Differentialgleichungen anwenden. Eine ausführliche Begründung ist in [24] zu finden.

4.1.1 Stochastische Taylorentwicklung

Bei der Herleitung numerischer Verfahren für stochastische Differentialgleichungen nimmt die stochastische Taylorentwicklung eine zentrale Rolle ein und kann als verallgemeinerte deterministische Taylorentwicklung aufgefaßt werden. Sie basiert auf einer rekursiven Anwendung der Itô-Formel (2.82) und liefert Näherungen des Lösungsprozesses eines stochastischen Differentialgleichungssystems (2.77).

Die Vorgehensweise einer stochastischen Taylorentwicklung wird anhand der Lösung X_t einer skalaren stochastischen Differentialgleichung in integraler Form

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s) dW_s \quad (4.2)$$

erläutert. Für eine stetige, zweimal differenzierbare Funktion $h(t, X_t)$ gilt nach (2.82)

$$h(t, X_t) = h(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 h(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 h(s, X_s) dW_s. \quad (4.3)$$

Die Operatoren L^0 und L^1 sind durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} L^0 &= \frac{\partial}{\partial t} + f(t, X_t) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(t, X_t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ L^1 &= g(t, X_t) \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.4)$$

definiert.

Durch die Anwendung von Gleichung (4.3) auf die Funktionen $f(t, X_t)$ und $g(t, X_t)$ in den Integranden von (4.2) ergibt sich

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left[f(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 f(r, X_r) dr + \int_{t_0}^s L^1 f(r, X_r) dW_r \right] ds + \\ &+ \int_{t_0}^t \left[g(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 g(r, X_r) dr + \int_{t_0}^s L^1 g(r, X_r) dW_r \right] dW_s \end{aligned} \quad (4.5)$$

und daraus

$$X_t = X_{t_0} + f(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + g(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + R \quad (4.6)$$

mit dem Restglied

$$R = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 f(r, X_r) dr ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 f(r, X_r) dW_r ds +$$

$$+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 g(r, X_r) dr dW_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 g(r, X_r) dW_r dW_s. \quad (4.7)$$

Gleichung (4.6) ist die einfachste nichttriviale stochastische Taylorentwicklung. Taylorentwicklungen höherer Ordnung können durch wiederholte Anwendung der Itô-Formel in den Termen des Restgliedes erhalten werden. Dabei ist zu beachten, daß bei einem Wiener-Prozeß $(dW_t)^2$ von der Größenordnung dt ist. So muß für eine stochastische Taylorentwicklung erster Ordnung in dt die Itô-Formel zusätzlich auf das Integral mit dem Integranden $L^1 g(t, X_t)$ in (4.7) angewendet werden. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich als Näherung für den Prozeß X_t

$$\begin{aligned} X_t = & X_{t_0} + f(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + g(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s \\ & + L^1 g(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_r dW_s + \bar{R} \end{aligned} \quad (4.8)$$

mit dem neuen Restglied \bar{R} , auf dessen Darstellung hier verzichtet wird.

4.1.2 Konvergenz numerischer Verfahren

Eine charakteristische Eigenschaft numerischer Integrationsverfahrens ist die sogenannte Konvergenzordnung. Für stochastische Differentialgleichungen werden folgende Vereinbarungen getroffen.

Eine Approximation heißt stark bzw. stark konvergent mit der Ordnung γ , wenn eine positive, reelle von Δt unabhängige Konstante K existiert, so daß zum Zeitpunkt $T = N\Delta t$

$$E(|X_T - X_N^\Delta|) \leq K(\Delta t)^\gamma \quad (4.9)$$

gilt. Für eine schwache Approximation mit der Ordnung β dagegen wird

$$|E(g(X_T)) - E(g(X_N^\Delta))| \leq K(\Delta t)^\beta \quad (4.10)$$

gefordert. Mit den Ordnungszahlen γ und β ist eine quantitative Beurteilung der numerischen Verfahren möglich.

4.1.3 Stochastisches Eulerverfahren

Die approximative Berechnung der Trajektorien erfolgt über die Diskretisierung des zugehörigen stochastischen Differentialgleichungssystems. Dabei wird der Differentialquotient durch einen Differenzenquotient ersetzt. Die Schrittweite ist im allgemeinen nicht zwingend konstant anzunehmen, was hier jedoch geschehen soll.

Die einfachste Methode stammt von Maruyama [31] und wird in Anlehnung an die klassischen Methoden auch stochastisches Euler-Verfahren genannt. Die Methode überführt (2.77) in

$$X_{n+1} = X_n + f(t_n, X_n)\Delta t_n + g(t_n, X_n)\Delta W_n \quad (4.11)$$

mit den Differenzen

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} ds \quad (4.12)$$

und

$$\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW_s. \quad (4.13)$$

Die Auswertung des stochastischen Integrals erfolgt an der unteren Integrationsgrenze

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s, X_s) dW_s \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t_n, X_n) dW_s = g(t_n, X_n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW_s \quad (4.14)$$

und ist daher konsistent bezüglich des Itôschen Kalküls.

Bei der Implementierung des stochastischen Eulerverfahrens ist darauf zu achten, daß es sich bei ΔW_n um eine normalverteilte Zufallsvariable mit den Momenten

$$E(\Delta W_n) = 0; \quad E((\Delta W_n)^2) = \Delta t_n \quad (4.15)$$

handelt. Die Realisierung dieser Zufallsvariablen erfolgt durch die Vorschrift

$$\Delta W_n = R_n \sqrt{\Delta t_n} \quad (4.16)$$

mit der aus der Box-Müller-Transformation (4.1) hervorgegangenen normalverteilten Zufallsvariablen R_n , die die Momente

$$E(R_n) = 0; \quad E(R_n^2) = 1 \quad (4.17)$$

besitzt.

Das Eulerverfahren ist stark konvergent mit $\gamma = 0.5$ (gegenüber dem deterministischen Fall mit $\gamma = 1$) und schwach konvergent mit $\beta = 1$.

4.1.4 Verfahren höherer Ordnung

Für die Entwicklung von Verfahren höherer Ordnung spielt die stochastische Taylorentwicklung eine zentrale Rolle. Wird die Lösung X_t einer stochastischen Differentialgleichung gemäß Kapitel 4.1.1 entwickelt, treten hierbei deterministische, stochastische und gemischte Mehrfachintegrale auf. Für eine kompaktere Darstellungsform werden folgende zwei Vereinbarungen getroffen:

- $W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^m$ sind paarweise unabhängige, skalare Wiener-Prozesse.

- $W_t^0 \equiv t \rightarrow \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW_t^0 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt.$

Ein Mehrfachintegral kann damit im weiteren durch die Abkürzung

$$I_{(i_1, \dots, i_m); t_n, t_{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \cdots \int_{t_n}^{s_3} \int_{t_n}^{s_2} dW_{s_1}^{i_1} dW_{s_2}^{i_2} \cdots dW_{s_m}^{i_m} \quad (4.18)$$

ersetzt werden.

Milstein-Verfahren

Fügt man den Term mit dem Integral $I_{(1,1);t_n,t_{n+1}}$ aus der Taylorentwicklung (4.8) dem stochastischen Euler-Verfahren hinzu, so folgt daraus das sogenannte Milstein-Verfahren

$$X_{n+1} = X_n + f(t_n, X_n)\Delta t_n + g(t_n, X_n)\Delta W_n + L^1 g(t_n, X_n)I_{(1,1);t_n,t_{n+1}}. \quad (4.19)$$

Durch Auswertung des Mehrfachintegrals ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + f(t_n, X_n)\Delta t_n + g(t_n, X_n)\Delta W_n \\ &\quad + \frac{1}{2}g(t_n, X_n)\frac{\partial g}{\partial x}(t_n, X_n) [(\Delta W_n)^2 - \Delta t_n]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Das Verfahren ist streng konvergent mit $\gamma = 1$, was eine Verbesserung gegenüber dem Euler-Verfahren darstellt, und es ist schwach konvergent mit $\beta = 1$.

Im Falle eines additiven weißen Rauschens, für das $\frac{\partial g(t_n, X_n)}{\partial x} = 0$ gilt, verschwindet der Zusatzterm im Milstein-Verfahren. Dies hat zur Folge, daß das stochastische Eulerverfahren, welches dann identisch mit dem Milstein-Verfahren ist, streng konvergent mit $\gamma = 1$ ist.

Taylor-Verfahren der Ordnung $\gamma = 1.5$

Das Taylorverfahren der Ordnung $\gamma = 1.5$ ist eine Erweiterung des vorgestellten Milstein-Verfahrens. Hierbei werden zusätzlich die Integrale $I_{(1,0);t_n,t_{n+1}}$, $I_{(0,1);t_n,t_{n+1}}$, $I_{(0,0);t_n,t_{n+1}}$ und $I_{(1,1,1);t_n,t_{n+1}}$ dem Milstein-Verfahren hinzugefügt. Aus Gleichung (4.20) folgt damit

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + f(t_n, X_n)\Delta t_n + g(t_n, X_n)\Delta W_n + L^1 g(t_n, X_n)I_{(1,1);t_n,t_{n+1}} \\ &\quad + L^1 f(t_n, X_n)I_{(1,0);t_n,t_{n+1}} + L^0 g(t_n, X_n)I_{(0,1);t_n,t_{n+1}} \\ &\quad + L^0 f(t_n, X_n)I_{(0,0);t_n,t_{n+1}} + L^1 L^1 g(t_n, X_n)I_{(1,1,1);t_n,t_{n+1}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Die Mehrfachintegrale

$$\begin{aligned} I_{(0,0);t_n,t_{n+1}} &= \frac{1}{2}(\Delta t_n)^2, \\ I_{(1,1);t_n,t_{n+1}} &= \frac{1}{2} [(\Delta W_n)^2 - \Delta t_n], \\ I_{(1,1,1);t_n,t_{n+1}} &= \frac{1}{3!} [(\Delta W_n)^3 - \Delta W_n \Delta t_n] \end{aligned} \quad (4.22)$$

können, unter Zuhilfenahme des Satzes von Itô, direkt ausgewertet werden. Für das Integral

$$I_{(0,1);t_n,t_{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^t dW_s dt \quad (4.23)$$

existiert jedoch keine explizite Lösung. Es kann aber als normalverteilte Zufallsvariable

$$\Delta Z_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^t dW_s dt \quad (4.24)$$

mit den Momenten

$$E(\Delta Z_n) = 0; \quad E((\Delta Z_n)^2) = \frac{1}{3}(\Delta t_n)^3; \quad E(\Delta W_n \Delta Z_n) = \frac{1}{2}(\Delta t_n)^2 \quad (4.25)$$

aufgefaßt werden. Die Erzeugung der Zufallsvariable ΔZ_n erfolgt durch die Vorschrift

$$\Delta Z_n = \frac{1}{2} \left(R_{n,1} + \frac{1}{\sqrt{3}} R_{n,2} \right) (\Delta t_n)^{\frac{3}{2}} \quad (4.26)$$

mit den normalverteilten Zufallsvariablen $R_{n,1}$ und $R_{n,2}$. Unter Verwendung der Lösungen der Mehrfachintegrale und der Zufallsvariablen ΔZ_n läßt sich Gleichung (4.21) auswerten, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + f(t_n, X_n) \Delta t_n + g(t_n, X_n) \Delta W_n + \frac{1}{2} g g' [(\Delta W_n)^2 - \Delta t_n] + g f' \Delta Z_n \\ &+ \left[\dot{g} + f g' + \frac{1}{2} g^2 g'' \right] [\Delta W_n \Delta t_n - \Delta Z_n] + \frac{1}{2} \left[\dot{f} + f f' + \frac{1}{2} g^2 f'' \right] (\Delta t_n)^2 \\ &+ \frac{1}{2} g [g g'' + (g')^2] \left[\frac{1}{3} (\Delta W_n)^2 - \Delta t_n \right] \Delta W_n \end{aligned} \quad (4.27)$$

mit den Abkürzungen für die partiellen Ableitungen

$$(\dot{\cdot}) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}; \quad (\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}.$$

Ein Nachteil des Taylorschen Verfahrens besteht darin, daß die Koeffizienten der stochastischen Differentialgleichung mehrfach abzuleiten sind. Ersetzt man diese Differentialquotienten durch Differenzenquotienten, gelangt man zu den stochastischen Runge-Kutta-Approximationen. Weitergehende Verfahren sind implizite Approximationen, Extrapolationsmethoden und Predictor-Corrector-Verfahren. Eine ausführliche Beschreibung ist in [24] zu finden. Auf diese Methoden soll jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden.

Monte-Carlo-Methoden sind robuste und universell einsetzbare Werkzeuge für die Untersuchung auch höherdimensionaler stochastischer Systeme. Neben den systematischen Fehlern der Verfahren tritt zusätzlich noch ein Fehler durch die begrenzte Simulationsdauer T auf, d.h. die Kenntnisse über ein dynamisches System werden in einem bestimmten Zeitintervall gewonnen, ohne zu wissen, wie sich das System in der Zeit danach verhalten wird. Für befriedigende Lösungen werden über $10^7 \div 10^9$ Zeitschritte simuliert.

4.2 Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

Die gesuchte stationäre Verteilungsdichte $p(\mathbf{u})$ eines dynamischen Systems mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{u} = [\varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}, x_{s,1}, \dots, x_{s,d}]^T, \quad (4.28)$$

wobei die Zustandsvariablen auf die Bereiche

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 < \frac{3\pi}{2}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_2, \dots, \varphi_{d-1} < \frac{\pi}{2}; \quad -\infty < x_{s,1}, \dots, x_{s,d} < \infty \quad (4.29)$$

beschränkt sind, ist auch Lösung der stationären Fokker-Planck-Gleichung

$$\sum_{i=1}^{2d-1} \frac{\partial}{\partial u_i} (h_i(\mathbf{u})p(\mathbf{u})) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2d-1} \sum_{k=1}^{2d-1} \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_k} (g_i(\mathbf{u})g_k(\mathbf{u})p(\mathbf{u})) = 0. \quad (4.30)$$

Die Koeffizienten $h_i(\mathbf{u})$ und $g_i(\mathbf{u})$ sind dabei die Drift- und die Diffusionsterme des zugehörigen stochastischen Differentialgleichungssystems. Bei der Fokker-Planck-Gleichung handelt es sich um eine lineare, homogene, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten.

Die Randbedingungen ergeben sich aus der Periodizität des rotierenden Winkels φ_1

$$\begin{aligned} p(u_1 = -\frac{\pi}{2}, \dots, u_{2d-1}) &= p(u_1 = \frac{3\pi}{2}, \dots, u_{2d-1}), \\ \frac{\partial}{\partial u_1} p(u_1 = -\frac{\pi}{2}, \dots, u_{2d-1}) &= \frac{\partial}{\partial u_1} p(u_1 = \frac{3\pi}{2}, \dots, u_{2d-1}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

und der Integrabilitätsbedingung, aus der folgt, daß an den Rändern der restlichen Zustandsvariablen die Verteilungsdichte identisch verschwinden muß:

$$\begin{aligned} p(u_1, u_2 = -\frac{\pi}{2}, \dots, u_{2d-1}) &= p(u_1, u_2 = \frac{\pi}{2}, \dots, u_{2d-1}) = 0, \\ &\vdots \\ p(u_1, \dots, u_{d-1} = -\frac{\pi}{2}, \dots, u_{2d-1}) &= p(u_1, \dots, u_{d-1} = \frac{\pi}{2}, \dots, u_{2d-1}) = 0, \\ p(u_1, \dots, u_d = -\infty, \dots, u_{2d-1}) &= p(u_1, \dots, u_d = \infty, \dots, u_{2d-1}) = 0, \\ &\vdots \\ p(u_1, \dots, u_{2d-1} = -\infty) &= p(u_1, \dots, u_{2d-1} = \infty) = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung (4.30) können im allgemeinen nicht in geschlossener Form angegeben werden. Daher ist es notwendig, Näherungsverfahren einzusetzen. Das hier verwendete Näherungsverfahren zur Auffindung schwacher Lösungen basiert auf der Entwicklung der gesuchten Verteilungsdichte in eine Reihe von orthogonalen Funktionen

$$p(u_1, \dots, u_{2d-1}) = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_{2d-1}} \varrho_{i_1, \dots, i_{2d-1}} f_{i_1}(u_1) \cdots f_{i_{2d-1}}(u_{2d-1}) \quad (4.33)$$

mit den unbekanntenen Koeffizienten $\varrho_{i_1, \dots, i_{2d-1}}$. Für eine hohe Approximationsgüte ist die Wahl der Ansatzfunktionen $f_{i_1}(u_1), \dots, f_{i_{2d-1}}(u_{2d-1})$ von großer Bedeutung. Es zeigt sich, daß eine unbedachte Wahl formal korrekter, aber physikalisch wenig begründeter Ansatzfunktionen einen vielgliedrigen Ansatz nach sich zieht, wodurch ein hoher Rechenaufwand entsteht, der vermieden werden sollte.

4.2.1 Entwicklung in φ_i -Richtung

Es ist naheliegend für die Entwicklung der Verteilungsdichte und der nichtkonstanten Koeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung in φ_i -Richtung Fourierreihen zu verwenden. Für den rotierenden Winkel φ_1 , der auf dem Bereich $[-\pi/2, 3\pi/2)$ beschränkt ist, kann

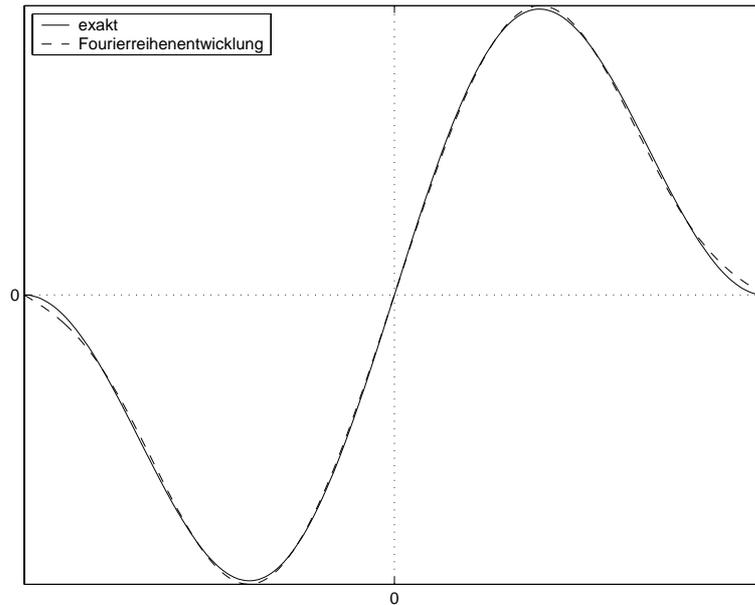


Abbildung 4.1: Entwicklung von $\sin \varphi \cos^2 \varphi$ gemäß Gleichung (4.34)

die Entwicklung mit herkömmlichen Fourierreihengliedern durchgeführt werden. Diese bilden auf dem Bereich $[-\pi/2, 3\pi/2)$ ein vollständiges, orthogonales Funktionensystem und erfüllen die Randbedingungen (4.31), was eine exakte Entwicklung der Koeffizienten ermöglicht.

Die fluktuierenden Winkel $\varphi_2, \dots, \varphi_{d-1}$ sind auf das Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ beschränkt. Herkömmliche Fourierreihenglieder bilden auf diesem Bereich kein orthogonales Funktionensystem. Dieses Problem läßt sich dadurch beheben, daß eine Beschränkung der Kosinus- und Sinusanteile auf jeweils gerad- oder ungeradzahlige Argumente vorgenommen wird. Das jetzt orthogonale Funktionensystem hat aufgrund der Beschränkung der Reihenelemente aber den Nachteil, mit den verbliebenen Gliedern die Koeffizienten nicht mehr exakt, sondern nur noch näherungsweise entwickeln zu können. Die näherungsweise Entwicklung von Termen $\sin^n \varphi \cos^m \varphi$ konvergieren für $n + m \geq 3$ sehr schnell und stellen gute Näherungen dar. Probleme treten aber bei den Entwicklungen von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ auf. Als Beispiele sind in den Abbildungen 4.1 und 4.2 die Näherungen für

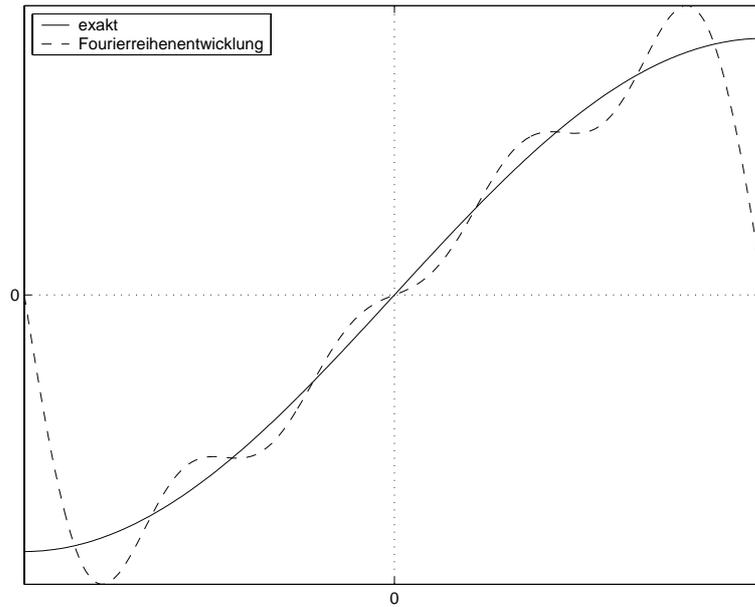
$$\sin \varphi \cos^2 \varphi \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{8}{15} \sin 2\varphi + \frac{16}{105} \sin 4\varphi - \frac{8}{315} \sin 6\varphi \right) \quad (4.34)$$

und

$$\sin \varphi \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{4}{3} \sin 2\varphi - \frac{8}{15} \sin 4\varphi + \frac{12}{35} \sin 6\varphi - \frac{16}{63} \sin 8\varphi \right) \quad (4.35)$$

dargestellt. Trotz der offensichtlichen Mängel der Näherung für $\sin \varphi$ in Abbildung 4.2 liefert diese Art der Entwicklung brauchbare Ergebnisse (siehe dazu [53]).

Zur Vermeidung der im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ auftretenden Schwierigkeiten bei der Entwicklung der Koeffizienten mit allgemeinen Fourierreihen, können verallgemeinerte Fourierreihen benutzt werden. Diese Fourierreihen bilden auf dem betrachteten Bereich

Abbildung 4.2: Entwicklung von $\sin \varphi$ gemäß Gleichung (4.35)

ein orthogonales Funktionensystem und enthalten die noch zu bestimmenden Anteile

$$S_n(\varphi) = \sum_{i=1}^n s_{in} \sin(i\varphi) \quad (4.36)$$

$$C_n(\varphi) = \sum_{i=1}^n c_{in} \cos(i\varphi), \quad (4.37)$$

die sowohl gerad- als auch ungeradzahlige Argumente enthalten, wodurch eine exakte Entwicklung der Koeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung ermöglicht wird.

Da aufgrund der Beziehung

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(n\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi = 0 \quad (4.38)$$

für beliebige ganzzahlige n und m die wechselseitige Orthogonalität

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} S_n C_m d\varphi = 0 \quad (4.39)$$

gesichert ist, genügt es, die beiden Relationen

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} S_n S_m d\varphi = 0 \quad n \neq m \quad (4.40)$$

und

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} C_n C_m d\varphi = 0 \quad n \neq m \quad (4.41)$$

zu gewährleisten. Mit Hilfe der Fouriermomente

$$m_{sn} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n \varphi d\varphi, \quad (4.42)$$

$$m_{cn} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \varphi d\varphi \quad (4.43)$$

können die Glieder der verallgemeinerten Fourierreihe ermittelt werden. Die Vorgehensweise dafür wird in Kapitel 4.2.2 anhand der Ermittlung von orthogonalen Polynomen, die zur Entwicklung der Verteilungsdichte und der Koeffizienten in x_i -Richtung benötigt werden, erläutert.

4.2.2 Entwicklung in x_i -Richtung

Die Entwicklung der Verteilungsdichte und der Koeffizienten in x_i -Richtung wird unter Verwendung von vorab zu bestimmenden Polynomen

$$H_k(x) = \sum_{j=0}^k a_{kj} x^j \quad (4.44)$$

durchgeführt. Diese müssen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_a^b H_k(x) H_l(x) w(x) dx = c_l \delta_{kl} \quad (4.45)$$

auf dem Intervall (a, b) erfüllen, das auch ein- oder beidseitig unendlich sein darf. $w(x)$ wird Belegungs- oder Gewichtsfunktion genannt und ist dem gestellten Problem entsprechend zu wählen, c_l ist eine Normierungskonstante und δ_{kl} das Kronecker-Symbol. Da die Zustandskoordinaten x_i in keiner Richtung beschränkt sind, muß die Bedingung (4.45) auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ sichergestellt werden. Die Bestimmung der noch unbekanntenen Koeffizienten a_{kj} erfolgt durch Einsetzen von (4.44) in (4.45) und anschließender Ausführung der Integrationen für $l = 1, \dots, k$. Dies führt zu einem linearen, algebraischen Gleichungssystem

$$\sum_{j=0}^l a_{kj} m_{j+l} = c_l \delta_{kl}; \quad l = 0, \dots, k \quad (4.46)$$

mit den Momenten m_{j+l} , die durch die Vorschrift

$$m_{j+l} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{j+l} w(x) dx \quad (4.47)$$

definiert sind. So werden z.B. die Koeffizienten des Polynoms

$$H_3(x) = \sum_{j=0}^3 a_{3j}x^j = a_{30} + a_{31}x + a_{32}x^2 + a_{33}x^3 \quad (4.48)$$

aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \\ m_3 & m_4 & m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{30} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{c_3}{a_{33}} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

gewonnen. Bei (4.49) handelt es sich um ein unbestimmtes Gleichungssystem. Damit ist eine der Größen frei wählbar. Hierbei bietet sich die Wahl $a_{33} = 1$ an.

Kapitel 5

Biege- und Torsionsschwingungen eines Balkens

Ein klassisches Beispiel aus der Theorie der kinetischen Stabilität elastischer Systeme stellt das hier beschriebene Problem der gekoppelten Biege- und Torsionsschwingungen eines schlanken, elastischen Rechteckbalkens dar, der durch zwei äußere, zeitabhängige Endmomente belastet wird. Dieses System wurde schon von Mettler [32] und Bolotin [7] für den Fall harmonischer Anregung ausführlich diskutiert. Stabilitätsanalysen für Systeme mit stochastischer Anregung sind in [1], [2], [38], [39], [37], [36], [16] und [48] zu finden. Ziel der erneuten Betrachtung ist eine Stabilitätsuntersuchung, bei der die Zustandskoordinaten des zugehörigen stochastischen Differentialgleichungssystems gemäß dem Konzept von Khas'minskii auf Bipolarkoordinaten transformiert werden, so daß ein Vergleich mit den Ergebnissen einer Stabilitätsanalyse, die auf einer Transformation auf Hyperkugelkoordinaten basiert und hier ebenfalls diskutiert wird, möglich ist.

Das angesprochene System ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Es besteht aus einem Balken mit Rechteckprofil, der so gelagert ist, daß lediglich eine Verdrehung der Balkenenden um die z -Achse und eine Verschiebung der Balkenenden in x -Richtung verhindert wird. Die waagrechte Verschiebung $u(z, t)$ und der Verdrehwinkel $\vartheta(z, t)$ werden durch die gekoppelten Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} EI_y u''''(z, t) + M(t)\vartheta''(z, t) + \mu\ddot{u}(z, t) + c\dot{u}(z, t) &= 0, \\ M(t)u''(z, t) + GJ\vartheta''(z, t) + \mu r^2\ddot{\vartheta}(z, t) + d\dot{\vartheta}(z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

beschrieben. Hochgestellte Striche geben in den Bewegungsgleichungen partielle Ableitungen nach der Koordinate z an, hochgestellte Punkte partielle Ableitungen nach der Zeit t . Die beiden Momente $M(t)$ sind zeitabhängige Biegemomente, die den Balken jeweils an seinen Enden belasten. EI_y und GJ sind dabei die Biege- und Torsionssteifigkeit, μ die Massenbelegung, r der polare Trägheitsradius und c und d Dämpfungskonstanten. Aus der beschriebenen Lagerung ergeben sich die sechs Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(l, t) &= 0, \\ u''(0, t) = u''(l, t) &= 0, \\ \vartheta(0, t) = \vartheta(l, t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

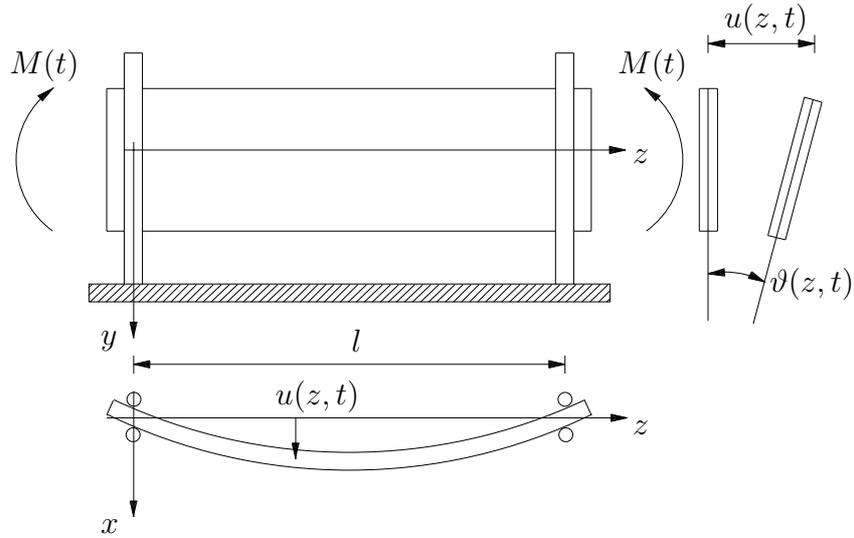


Abbildung 5.1: Beidseitig eingespannter, schlanker Rechteckbalken

für die Verschiebung $u(z, t)$ und den Verdrehwinkel $\vartheta(z, t)$.

Mit den ersten beiden Eigenformen der Biege- und Torsionsschwingungen

$$u(z, t) = r q_1(t) \sin \frac{\pi z}{l} \quad (5.3)$$

und

$$\vartheta(z, t) = q_2(t) \sin \frac{\pi z}{l} \quad (5.4)$$

ist es möglich, durch Separation das gekoppelte Differentialgleichungssystem für das Zeitverhalten der Lösung

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + 2\beta_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 - \omega_1 \omega_2 \zeta(t) q_2 &= 0 \\ \ddot{q}_2 + 2\beta_2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 - \omega_1 \omega_2 \zeta(t) q_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

mit den darin verwendeten Abkürzungen

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \pi^4 \frac{EI_y}{\mu l^4}, & \omega_2^2 &= \pi^2 \frac{GJ}{\mu l^2 r^2}, & \beta_1 &= \frac{c}{2\mu}, \\ \beta_2 &= \frac{d}{2\mu r^2}, & \zeta(t) &= \frac{M(t)}{M_{cr}}, & M_{cr} &= \pi \frac{\sqrt{EI_y GJ}}{l} \end{aligned} \quad (5.6)$$

zu erhalten. Das Gleichungssystem (5.5) ist ein parametererregtes, gekoppeltes Differentialgleichungssystem mit dem nichtkonstanten Koeffizienten $\zeta(t)$ im Koppelterm. Eine Besonderheit parametererregter Systeme besteht darin, daß die Ruhelage $q_1(t) = q_2(t) \equiv 0$ instabil werden kann. Die einer Stabilitätsuntersuchung dieser speziellen Lösung zugrunde liegende Variationsgleichung ist bei dem hier betrachteten System identisch mit dem Gleichungssystem (5.5), da dieses linear und homogen ist. Die breitbandige, stationäre Parametererregung wird beschrieben durch die Gleichung

$$\zeta(t) = \sigma \xi_t. \quad (5.7)$$

ξ_t ist hierbei das in Abschnitt 2.2.6 beschriebene weiße Rauschen, das mit der Intensität σ in die Parametererregung eingeht.

Durch die Einführung der Zustandskoordinaten

$$X_{1,t} = q_1, \quad X_{2,t} = \frac{\dot{q}_1}{\omega_1}, \quad X_{3,t} = q_2, \quad X_{4,t} = \frac{\dot{q}_2}{\omega_2} \quad (5.8)$$

wird zunächst das Gleichungssystem (5.5) in das stochastische Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} dX_{1,t} &= \omega_1 X_{2,t} dt, \\ dX_{2,t} &= -(\omega_1 X_{1,t} + 2\beta_1 X_{2,t}) dt + \omega_2 \sigma X_{3,t} dW_t, \\ dX_{3,t} &= \omega_2 X_{4,t} dt, \\ dX_{4,t} &= -(\omega_2 X_{3,t} + 2\beta_2 X_{4,t}) dt + \omega_1 \sigma X_{1,t} dW_t \end{aligned} \quad (5.9)$$

überführt.

Um eine Aussage bezüglich der Stabilität der Ruhelage treffen zu können, wird unter Verwendung des Konzeptes von Khas'minskii der größte Ljapunov-Exponent berechnet, dessen Vorzeichen entscheidend für die Stabilität der betrachteten Lösung ist. Für die praktische Berechnung nach Abschnitt 3.3.2 wird der Zustandsvektor \mathbf{X}_t derart transformiert, daß eine Entkopplung des instationären Lösungsanteil erreicht wird, wodurch der Ljapunov-Exponent unter Zuhilfenahme der Fürstenberg-Khas'minskii-Gleichung (3.41) bestimmt werden kann.

5.1 Hyperkugelkoordinaten

Als erste der beiden im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Koordinatentransformationen wird für die Untersuchung der fast sicheren Stabilität der Ruhelage $\mathbf{X}_t = \mathbf{0}$ die Transformation auf eine Hyperkugel diskutiert. Die Zustandskoordinaten $\mathbf{X}_t = (X_{1,t}, X_{2,t}, X_{3,t}, X_{4,t})^T$ werden dabei gemäß der Vorschrift

$$\begin{aligned} A_t &= \sqrt{X_{1,t}^2 + X_{2,t}^2 + X_{3,t}^2 + X_{4,t}^2}, \quad 0 \leq A_t < \infty, \\ \psi_t &= \begin{cases} \arctan \frac{X_{2,t}}{X_{1,t}}, & X_{1,t} \geq 0, \\ \arctan \frac{X_{2,t}}{X_{1,t}} + \pi, & X_{1,t} < 0, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi_t < \frac{3\pi}{2} \\ \varphi_{1,t} &= \arctan \frac{X_{3,t}}{\sqrt{X_{1,t}^2 + X_{2,t}^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi_{1,t} < \frac{\pi}{2}, \\ \varphi_{2,t} &= \arctan \frac{X_{4,t}}{\sqrt{X_{1,t}^2 + X_{2,t}^2 + X_{3,t}^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi_{2,t} < \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

unter Beachtung des Satzes von Itô (2.82) auf die neuen Koordinaten transformiert. Dadurch ergibt sich das stochastische Differentialgleichungssystem für den natürlichen Logarithmus der Amplitude $\ln A_t$ und den Winkelkoordinaten ψ_t , $\varphi_{1,t}$ und $\varphi_{2,t}$

$$\begin{aligned}
d \ln A_t &= h_1(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}) dt + g_1(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}) dW_t, \\
d\psi_t &= h_2(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}) dt + g_2(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}) dW_t, \\
d\varphi_{1,t} &= h_3(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}) dt + g_3(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}) dW_t, \\
d\varphi_{2,t} &= h_4(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}) dt + g_4(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}) dW_t
\end{aligned} \tag{5.11}$$

mit den zugehörigen Drifttermen

$$\begin{aligned}
h_1 &= -2\beta_1 \sin^2 \psi_t \cos^2 \varphi_{1,t} \cos^2 \varphi_{2,t} - 2\beta_2 \sin^2 \varphi_{2,t} - \frac{1}{2} \omega_2^2 \sigma^2 \sin^2 \varphi_{1,t} \times \\
&\quad \cos^2 \varphi_{2,t} (\sin^2 \psi_t \cos^2 \varphi_{1,t} \cos^2 \varphi_{2,t} - 1) + \frac{1}{2} \omega_1^2 \sigma^2 \cos^2 \psi_t \cos^2 \varphi_{1,t} \times \\
&\quad \cos^4 \varphi_{2,t} - \omega_1 \omega_2 \sigma^2 \sin \psi_t \cos \psi_t \sin \varphi_{1,t} \cos^2 \varphi_{1,t} \sin \varphi_{2,t} \cos^3 \varphi_{2,t}, \\
h_2 &= -\omega_1 - 2\beta_1 \sin \psi_t \cos \psi_t - \omega_2^2 \sigma^2 \sin \psi_t \cos \psi_t \tan^2 \varphi_{1,t}, \\
h_3 &= \omega_2 \cos \varphi_{1,t} \tan \varphi_{2,t} + 2\beta_1 \sin^2 \psi_t \sin \varphi_{1,t} \cos \varphi_{1,t} + \omega_2^2 \sigma^2 [\sin \varphi_{1,t} \times \\
&\quad \cos \varphi_{1,t} (1 - \sin^2 \psi_t \cos^2 \varphi_{1,t}) - \frac{1}{2} \cos^2 \psi_t \tan \varphi_{1,t} (1 + \cos^2 \varphi_{1,t})], \\
h_4 &= \omega_2^2 \sigma^2 [\sin^2 \psi_t \sin^2 \varphi_{1,t} \cos^2 \varphi_{1,t} \sin \varphi_{2,t} \cos^3 \varphi_{2,t} - \frac{1}{2} \sin \varphi_{2,t} \cos \varphi_{2,t} \times \\
&\quad (1 - 2 \cos^2 \varphi_{1,t} + \cos^4 \varphi_{1,t}) - \frac{1}{2} \cos^2 \psi_t \sin^2 \varphi_{1,t} \cos^2 \varphi_{1,t} \sin \varphi_{2,t} \times \\
&\quad \cos \varphi_{2,t}] - \omega_1^2 \sigma^2 \cos \psi_t \cos^2 \varphi_{1,t} \sin \varphi_{2,t} \cos^3 \varphi_{2,t} - \omega^2 \sin \varphi_{1,t} + \\
&\quad \omega_1 \omega_2 \sigma^2 \sin \psi_t \cos \psi_t \sin \varphi_{1,t} \cos^2 \varphi_{1,t} \cos^2 \varphi_{2,t} (1 - 2 \cos^2 \varphi_{2,t}) + \\
&\quad 2\beta_1 \sin^2 \psi_t \cos^2 \varphi_{1,t} \sin \varphi_{2,t} \cos \varphi_{2,t} - 2\beta_2 \sin \varphi_{2,t} \cos \varphi_{2,t}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

und Diffusionstermen

$$\begin{aligned}
g_1 &= \sigma \cos \varphi_{1,t} \cos \varphi_{2,t} (\omega_1 \cos \psi_t \sin \varphi_{2,t} + \omega_2 \sin \psi_t \sin \varphi_{1,t} \cos \varphi_{2,t}), \\
g_2 &= \omega_2 \sigma \cos \psi_t \tan \varphi_{1,t}, \\
g_3 &= -\omega_2 \sigma \sin \psi_t \sin^2 \varphi_{1,t}, \\
g_4 &= \sigma \cos \varphi_{1,t} \cos \varphi_{2,t} (\omega_1 \cos \psi_t \cos \varphi_{2,t} - \omega_2 \sin \psi_t \sin \varphi_{1,t} \sin \varphi_{2,t}).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Aufgrund dieser Transformation ist es möglich, die euklidische Norm des Zustandsvektors $\|\mathbf{X}_t\|$ in Gleichung (3.28) durch die Amplitude A_t zu ersetzen. Damit ergibt sich für den größten Ljapunov-Exponenten

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{A_t}{A_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t h_1(\psi_\tau, \varphi_{1,\tau}, \varphi_{2,\tau}) d\tau. \tag{5.14}$$

Wird jetzt unter Voraussetzung von Ergodizität im Mittel der zeitliche Mittelwert durch den statistischen Mittelwert mit der dreidimensionalen, stationären Verteilungsdichte $p(\psi, \varphi_1, \varphi_2)$ ersetzt, so folgt aus (5.14) die Fürstenberg-Khas'minskii-Gleichung

$$\lambda_1 = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1(\psi, \varphi_1, \varphi_2) p(\psi, \varphi_1, \varphi_2) d\psi d\varphi_1 d\varphi_2 \tag{5.15}$$

für den größten Ljapunov-Exponenten. Unbekannt ist hierin noch die stationäre Verteilungsdichte $p(\psi, \varphi_1, \varphi_2)$, die unter Verwendung der in Abschnitt 4 vorgestellten Methoden aufgefunden werden kann.

5.1.1 Monte-Carlo-Simulation

Mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation sowie der in Abschnitt 2.2.3 beschriebenen Vorgehensweise kann die Verteilungsdichte $p(\psi, \varphi_1, \varphi_2)$ als Häufigkeitsverteilung ermittelt werden. Bei der numerischen Integration der Winkelprozesse ψ_t , $\varphi_{1,t}$ und $\varphi_{2,t}$ mittels des stochastischen Eulerverfahrens wurden $N_s = 10^8$ Zeitschritte simuliert. Die konstante Zeitschrittweite betrug dabei $\Delta t = 0.01s$. Da eine Visualisierung der Verteilungsdichte $p(\psi, \varphi_1, \varphi_2)$ nicht möglich ist, sind in den Abbildungen 5.2, 5.3 und 5.4 die Randverteilungsdichten

$$\begin{aligned} p(\psi, \varphi_1) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\psi, \varphi_1, \varphi_2) d\varphi_2, \\ p(\psi, \varphi_2) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\psi, \varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1, \\ p(\varphi_1, \varphi_2) &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} p(\psi, \varphi_1, \varphi_2) d\psi \end{aligned} \quad (5.16)$$

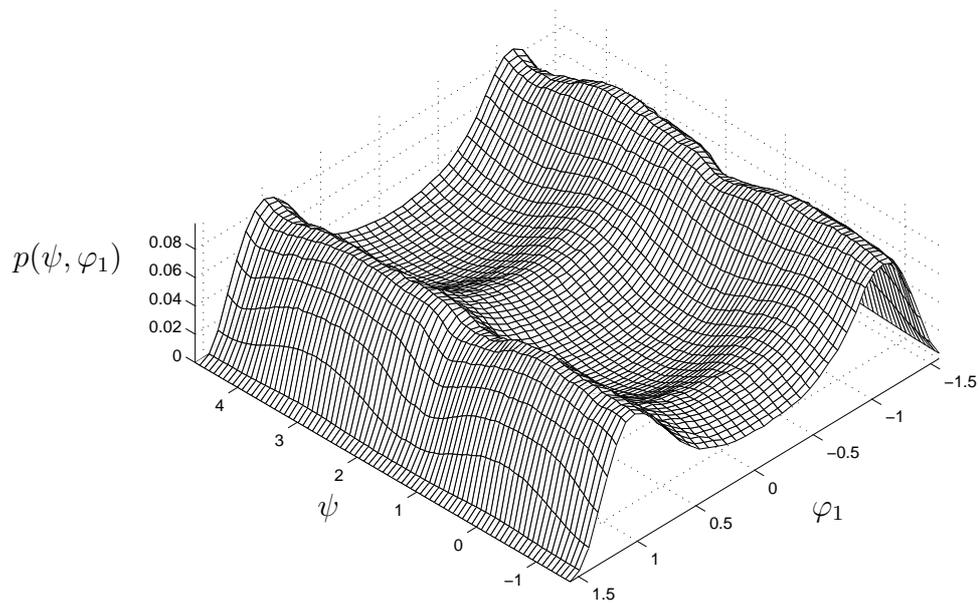
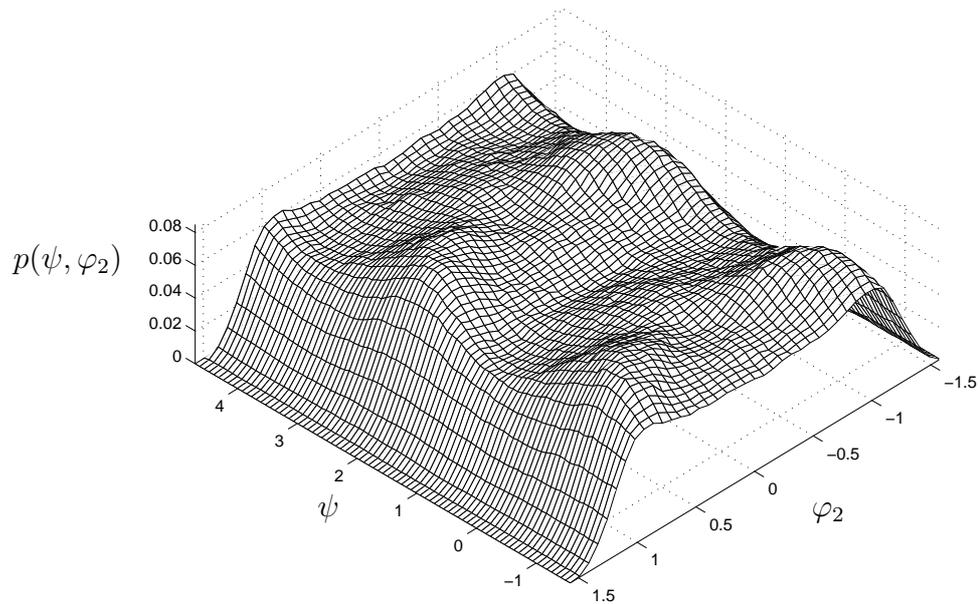
für die Parameter $\omega_1 = 1.5s^{-1}$, $\omega_2 = 1.0s^{-1}$, $\beta_1 = 0.4$, $\beta_2 = 0.2$ und $\sigma = 0.5$ dargestellt. In den beiden Abbildungen 5.2 und 5.3 ist das periodische Verhalten der Verteilungsdichte in Richtung des rotierenden Winkels ψ erkennbar. An den Rändern bei $\varphi_1, \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ verschwindet die Verteilungsdichte. Die Auswertung von (5.14) für den größten Ljapunov-Exponenten ergab für die angegebene Parameterkombination $\lambda_1 = -0.191157$. Bei den durchgeführten Simulationen hat sich gezeigt, daß ab einer Anzahl von $N_s \geq 10^6$ Simulationsschritten keine wesentlichen Änderungen mehr im Wert des Ljapunov-Exponenten auftreten (siehe dazu auch [16]). In Abbildung 5.13 ist eine Stabilitätskarte in Abhängigkeit der Dämpfungsparameter β_1 und β_2 für den Bereich $-0.2 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 0.55$ dargestellt.

5.1.2 Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

Die zur Berechnung des größten Ljapunov-Exponenten nach Gleichung (9.3.1) gesuchte stationäre Verteilungsdichte $p(\psi, \varphi_1, \varphi_2)$ ist auch Lösung der stationären Fokker-Planck-Gleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \psi}(h_2 p) + \frac{\partial}{\partial \varphi_1}(h_3 p) + \frac{\partial}{\partial \varphi_2}(h_4 p) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}(g_2^2 p) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2}(g_3^2 p) \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2}(g_3^2 p) - \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \varphi_1}(g_2 g_3 p) - \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \varphi_2}(g_2 g_4 p) - \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}(g_3 g_4 p) = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

mit den Randbedingungen für den rotierenden Winkel ψ

Abbildung 5.2: Randverteilungsdichte $p(\psi, \varphi_1)$ mittels Monte-Carlo-SimulationAbbildung 5.3: Randverteilungsdichte $p(\psi, \varphi_2)$ mittels Monte-Carlo-Simulation

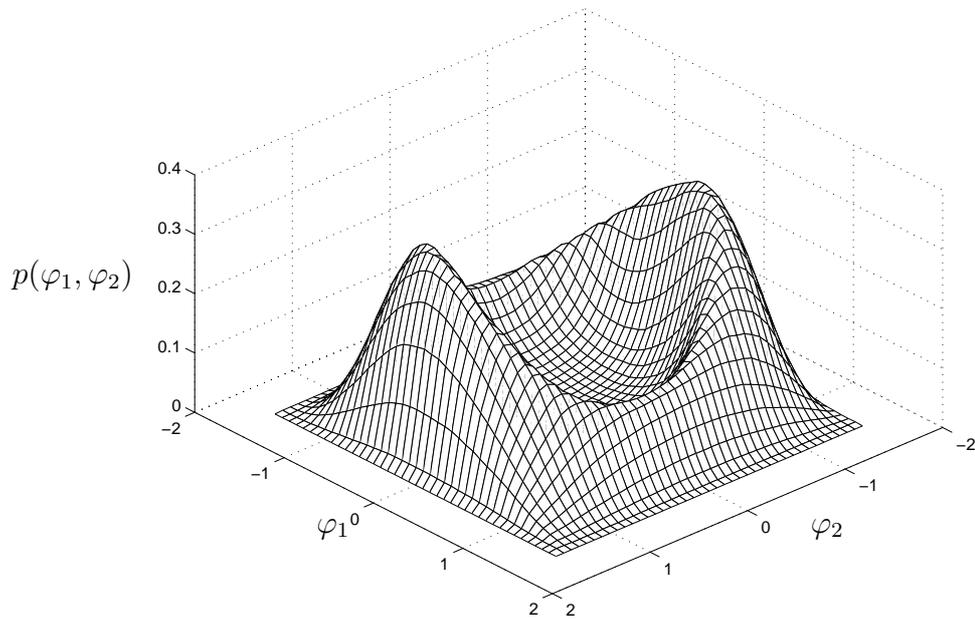


Abbildung 5.4: Randverteilungsdichte $p(\varphi_1, \varphi_2)$ mittels Monte-Carlo-Simulation

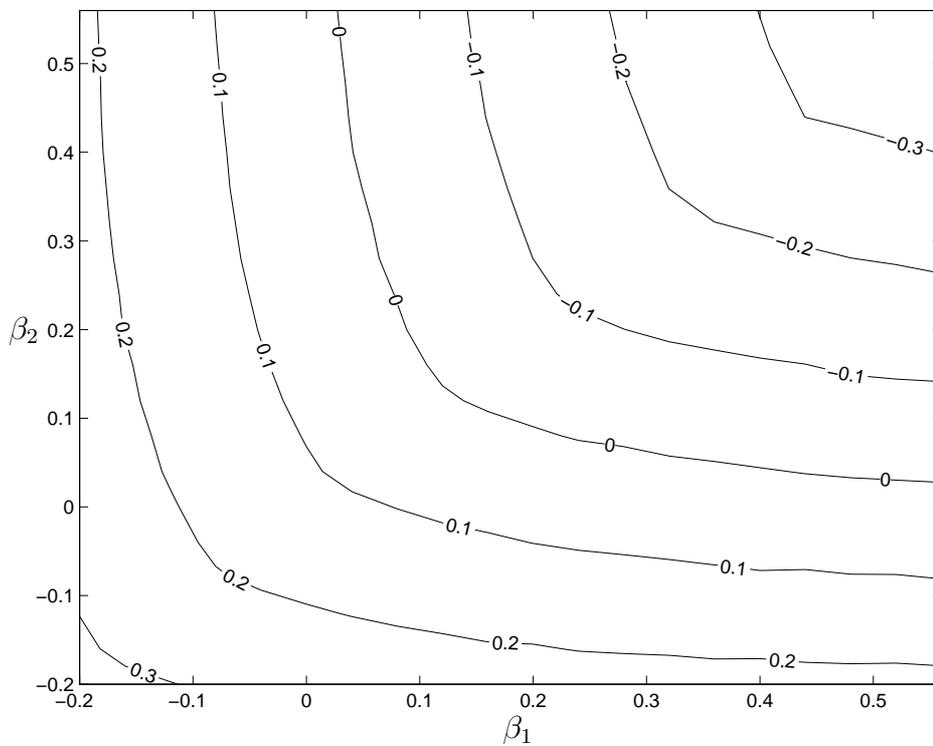


Abbildung 5.5: Ljapunov-Exponent λ_1 in Abhängigkeit der Dämpfungen β_1 und β_2

$$\begin{aligned}
p\left(\psi = -\frac{\pi}{2}, \varphi_1, \varphi_2\right) &= p\left(\psi = \frac{3\pi}{2}, \varphi_1, \varphi_2\right), \\
\frac{\partial}{\partial\psi}p\left(\psi = -\frac{\pi}{2}, \varphi_1, \varphi_2\right) &= \frac{\partial}{\partial\psi}p\left(\psi = \frac{3\pi}{2}, \varphi_1, \varphi_2\right)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

und den Randbedingungen für die fluktuierenden Winkel φ_1 und φ_2

$$\begin{aligned}
p\left(\psi, \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \varphi_2\right) &= p\left(\psi, \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2\right) = 0, \\
p\left(\psi, \varphi_1, \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}\right) &= p\left(\psi, \varphi_1, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Zusätzlich zu den Randbedingungen erfüllt die Verteilungsdichte noch die Normierungsbedingung (2.12) in der Form

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\psi, \varphi_1, \varphi_2) d\psi d\varphi_1 d\varphi_2 = 1. \tag{5.20}$$

Für die Entwicklung der Verteilungsdichte $p(\psi, \varphi_1, \varphi_2)$ und der nichtkonstanten Koeffizienten in der Fokker-Planck-Gleichung (5.17) bietet sich eine Entwicklung in Fourierreihen nach Abschnitt 4.2 an. Problematisch hierbei ist die Entwicklung der Koeffizienten, in denen Terme mit $\tan \varphi_1$ und $\tan \varphi_2$ auftreten. Diese Randsingularitäten in den fluktuierenden Winkeln bei $\varphi_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$ treten bei Transformationen der Zustandskoordinaten auf Hyperkugelkoordinaten ab der Dimension $d \geq 3$ auf. Zur Elimination dieser Terme wird nach [53] und [16] zunächst eine Substitution der Verteilungsdichte

$$p(\psi, \varphi_1, \varphi_2) = p^*(\psi, \varphi_1, \varphi_2) s(\varphi_1, \varphi_2) \tag{5.21}$$

mit der auf der Basis der Jacobischen Determinate der Rücktransformation

$$J(A_t, \psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}) = A_t^3 \cos \varphi_{1,t} \cos^2 \varphi_{2,t} \tag{5.22}$$

erhaltenen Funktion

$$s(\varphi_1, \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \tag{5.23}$$

durchgeführt. Die Normierungsbedingung (5.20) ändert sich dann zu

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p^*(\psi, \varphi_1, \varphi_2) s(\varphi_1, \varphi_2) d\psi d\varphi_1 d\varphi_2. \tag{5.24}$$

In den neuen Termen

$$\begin{aligned}
h_i^*(\psi, \varphi_1, \varphi_2) &= h_i(\psi, \varphi_1, \varphi_2) \cos \varphi_1 \cos^2 \varphi_2, \\
g_{ij}^*(\psi, \varphi_1, \varphi_2) &= g_i(\psi, \varphi_1, \varphi_2) g_j(\psi, \varphi_1, \varphi_2) \cos \varphi_1 \cos^2 \varphi_2, \quad i, j = 2, 3, 4
\end{aligned} \tag{5.25}$$

sind nach der durchgeführten Substitution weiterhin Ausdrücke mit $\tan \varphi_1$ enthalten. In [16] wird für solche Fälle vorgeschlagen, eine Multiplikation der Fokker-Planck-Gleichung mit den für die Singularitäten verantwortlichen Nennerausdrücken $n(\varphi_1, \dots, \varphi_i)$

durchzuführen. Hier erfolgt daher eine Multiplikation der Gleichung mit dem Faktor $\cos \varphi_1$. Daraus ergibt sich schließlich die modifizierte Fokker-Planck-Gleichung

$$\begin{aligned} \bar{h}_0 p^* + \bar{h}_2 \frac{\partial p^*}{\partial \psi} + \bar{h}_3 \frac{\partial p^*}{\partial \varphi_1} + \bar{h}_4 \frac{\partial p^*}{\partial \varphi_2} - \bar{g}_{22} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p^*}{\partial \psi^2} - \bar{g}_{33} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p^*}{\partial \varphi_1^2} \\ - \bar{g}_{44} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p^*}{\partial \varphi_2^2} - \bar{g}_{23} \frac{\partial^2 p^*}{\partial \psi \varphi_1} - \bar{g}_{24} \frac{\partial^2 p^*}{\partial \psi \varphi_2} - \bar{g}_{34} \frac{\partial^2 p^*}{\partial \varphi_1 \varphi_2} = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \bar{h}_0 &= \left[\frac{\partial h_2^*}{\partial \psi} + \frac{\partial h_3^*}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial h_4^*}{\partial \varphi_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}^*}{\partial \psi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{33}^*}{\partial \varphi_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{44}^*}{\partial \varphi_2^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 g_{23}^*}{\partial \psi \varphi_1} - \frac{\partial^2 g_{24}^*}{\partial \psi \varphi_2} - \frac{\partial^2 g_{34}^*}{\partial \varphi_1 \varphi_2} \right] \cos \varphi_1, \\ \bar{h}_2 &= \left[h_2^* - \frac{\partial g_{22}^*}{\partial \psi} - \frac{\partial g_{23}^*}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial g_{24}^*}{\partial \varphi_2} \right] \cos \varphi_1, \\ \bar{h}_3 &= \left[h_3^* - \frac{\partial g_{33}^*}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial g_{23}^*}{\partial \psi} - \frac{\partial g_{34}^*}{\partial \varphi_2} \right] \cos \varphi_1, \\ \bar{h}_4 &= \left[h_4^* - \frac{\partial g_{44}^*}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial g_{24}^*}{\partial \psi} - \frac{\partial g_{34}^*}{\partial \varphi_1} \right] \cos \varphi_1 \end{aligned} \quad (5.27)$$

und

$$\bar{g}_{ij}(\psi, \varphi_1, \varphi_2) = g_{ij}^*(\psi, \varphi_1, \varphi_2) \cos \varphi_1, \quad i, j = 2, 3, 4, \quad (5.28)$$

die frei von Singularitäten sind und durch endliche Fourierreihen dargestellt werden können.

Die gesuchte Funktion $p^*(\psi, \varphi_1, \varphi_2)$ wird durch die dreidimensionale, komplexe Fourierreihe

$$p^*(\psi, \varphi_1, \varphi_2) = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L \sum_{m=-M}^M c_{klm} \exp[j(k\psi + 2l\varphi_1 + 2m\varphi_2)] \quad (5.29)$$

in der modifizierten Fokker-Planck-Gleichung (5.26) ersetzt, und es ergeben sich $(2K+1)(2L+1)(2M+1)$ homogene, algebraische Gleichungen für $(2K+1)(2L+1)(2M+1)$ unbekannte Koeffizienten c_{klm} . Zusammen mit der Normierungsbedingung (5.24) wird daraus ein überbestimmtes, inhomogenes Gleichungssystem, das mit einem numerischen Gleichungslöser näherungsweise ausgewertet werden kann. In den Abbildungen 5.6, 5.7 und 5.8 sind Randverteilungsdichten für die Parameter $\omega_1 = 1.5s^{-1}$, $\omega_2 = 1.0s^{-1}$, $\beta_1 = 0.4$, $\beta_2 = 0.2$ und $\sigma = 0.5$ dargestellt. Für die Fourierreihenentwicklung in ψ -Richtung wurden $K = 2$ Reihenglieder und in Richtung der fluktuierenden Winkel φ_1 und φ_2 $L = M = 6$ Reihenglieder verwendet. Der für diese Parameterkombination errechnete Ljapunov-Exponent betrug $\lambda_1 = -0.191103$. Ein Vergleich mit dem Ergebnis aus der Monte-Carlo-Simulation zeigt eine sehr gute Übereinstimmung. Die Randverteilungsdichten in den Abbildungen 5.6, 5.7 und 5.8 sind glatter als die in den Abbildungen 5.2, 5.3 und 5.4 dargestellten, mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation erhaltenen Dichten. Dies ist auf den Abzählalgorithmus der Monte-Carlo-Simulation zurückzuführen. Abbildung 5.9 zeigt die Stabilitätskarte für die Dämpfungskonstanten β_1 und β_2 . Auch hier ist eine gute Übereinstimmung der beiden Methoden erkennbar.

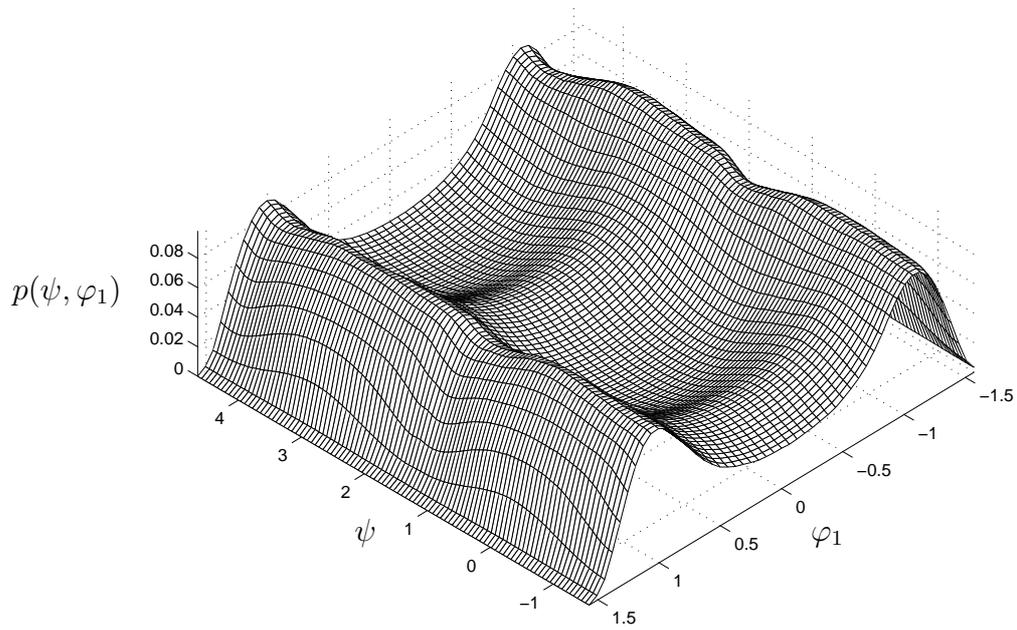


Abbildung 5.6: Randverteilungsdichte $p(\psi, \varphi_1)$ durch Lösen der Fokker-Planck-Gleichung

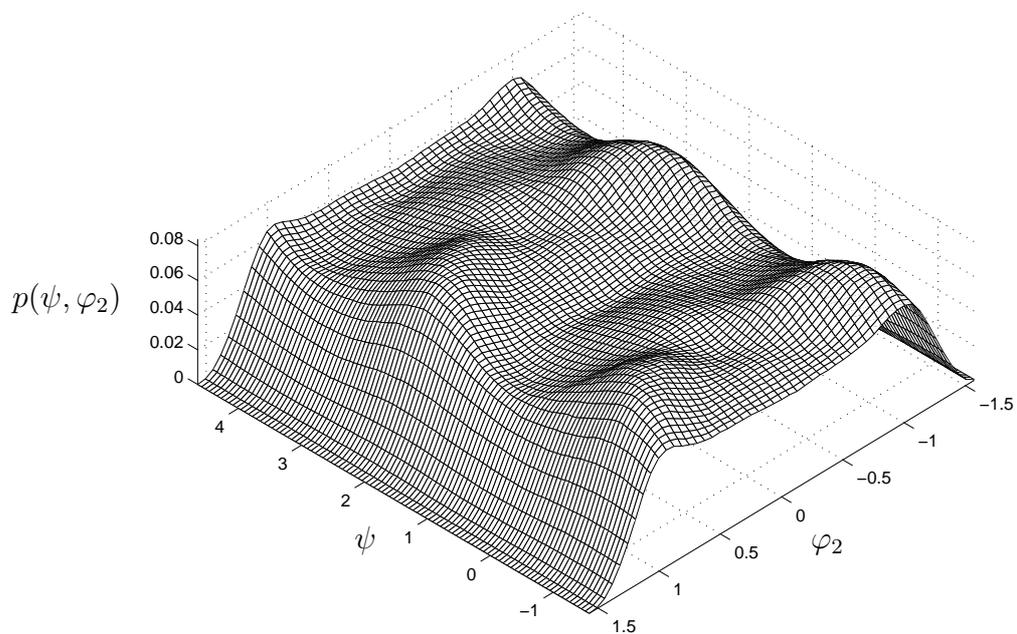


Abbildung 5.7: Randverteilungsdichte $p(\psi, \varphi_2)$ durch Lösen der Fokker-Planck-Gleichung

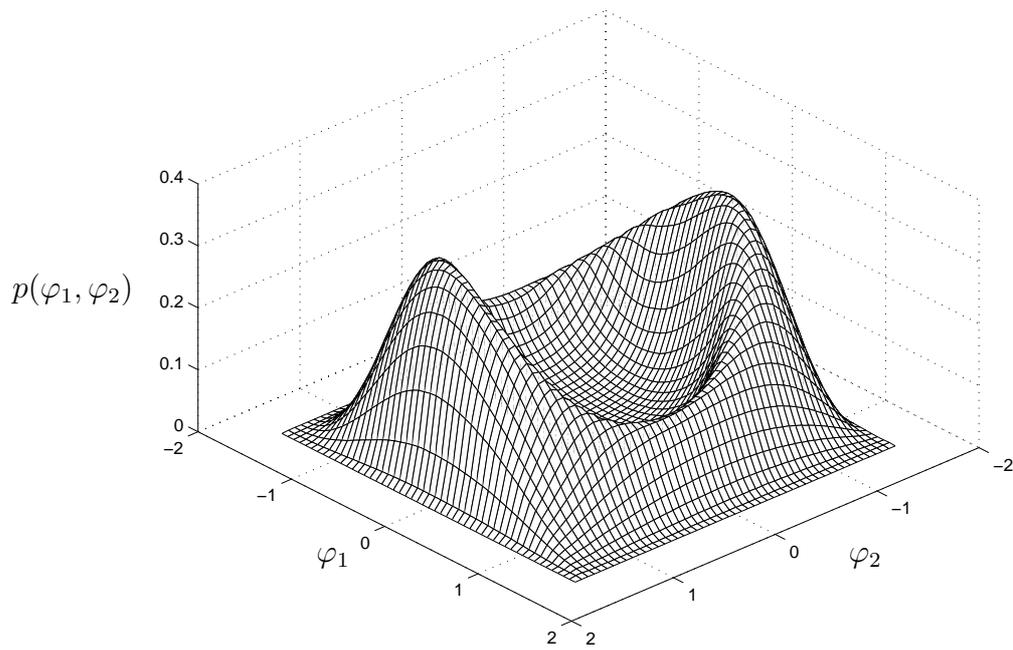


Abbildung 5.8: Randverteilungsdichte $p(\varphi_1, \varphi_2)$ durch Lösen der Fokker-Planck-Gleichung

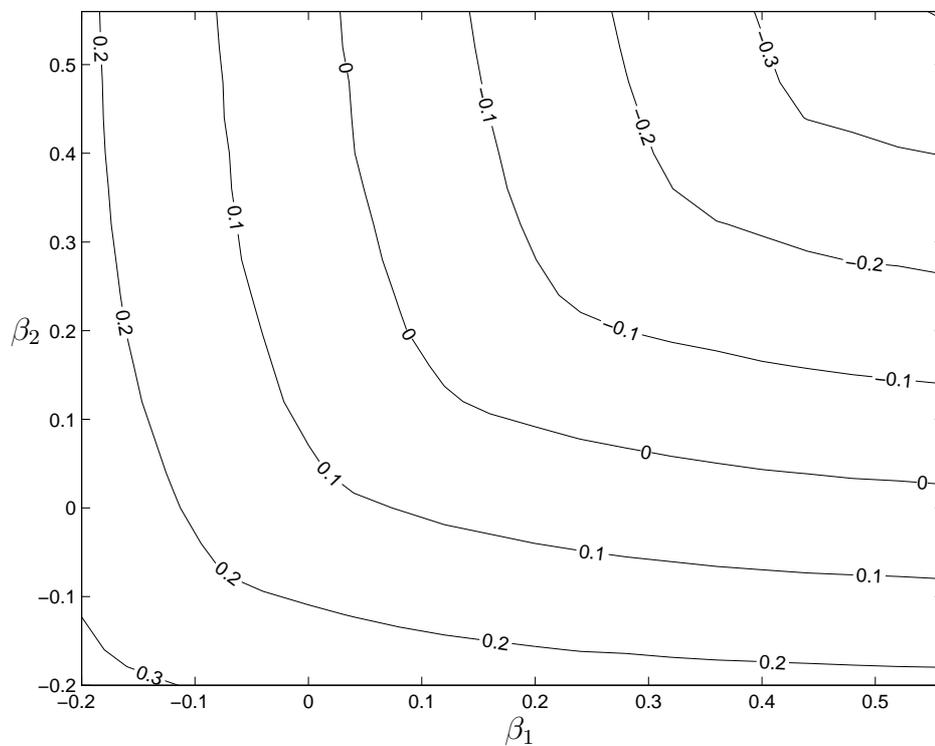


Abbildung 5.9: Ljapunov-Exponent λ_1 in Abhängigkeit der Dämpfungen β_1 und β_2

5.2 Bipolarkoordinaten

Nach der ausführlichen Diskussion der Stabilitätsanalyse unter Zuhilfenahme von Hyperkugelkoordinaten, wird hier eine weitere Koordinatentransformation vorgestellt. Aufgrund des vierdimensionalen Zustandsvektors $\mathbf{X}_t = (X_{1,t}, X_{2,t}, X_{3,t}, X_{4,t})^T$ ist es möglich, alternativ zu den bisher betrachteten Hyperkugelkoordinaten, die Zustandskoordinaten auf Bipolarkoordinaten zu transformieren. Dazu werden die beiden Amplituden $a_{1,t}$ und $a_{2,t}$ sowie die zugehörigen rotierenden Winkel $\psi_{1,t}$ und $\psi_{2,t}$ durch die Transformationsvorschrift

$$\begin{aligned}
 a_{1,t} &= \sqrt{X_{1,t}^2 + X_{2,t}^2}, & 0 \leq a_{1,t} < \infty, \\
 a_{2,t} &= \sqrt{X_{3,t}^2 + X_{4,t}^2}, & 0 \leq a_{2,t} < \infty, \\
 \psi_{1,t} &= \begin{cases} \arctan \frac{X_{2,t}}{X_{1,t}}, & X_{1,t} \geq 0, \\ \arctan \frac{X_{2,t}}{X_{1,t}} + \pi, & X_{1,t} < 0, \end{cases} & -\frac{\pi}{2} \leq \psi_{1,t} < \frac{3\pi}{2}, \\
 \psi_{2,t} &= \begin{cases} \arctan \frac{X_{4,t}}{X_{3,t}}, & X_{3,t} \geq 0, \\ \arctan \frac{X_{4,t}}{X_{3,t}} + \pi, & X_{3,t} < 0, \end{cases} & -\frac{\pi}{2} \leq \psi_{2,t} < \frac{3\pi}{2}
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

eingeführt. Unter Beachtung des Satzes von Itô erhält man daraus das stochastische Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
 da_{1,t} &= f_1(a_{1,t}, a_{2,t}, \psi_{1,t}, \psi_{2,t})dt + k_1(a_{1,t}, a_{2,t}, \psi_{1,t}, \psi_{2,t})dW_t, \\
 d\psi_{1,t} &= h_1(a_{1,t}, a_{2,t}, \psi_{1,t}, \psi_{2,t})dt + g_1(a_{1,t}, a_{2,t}, \psi_{1,t}, \psi_{2,t})dW_t, \\
 da_{2,t} &= f_2(a_{1,t}, a_{2,t}, \psi_{1,t}, \psi_{2,t})dt + k_2(a_{1,t}, a_{2,t}, \psi_{1,t}, \psi_{2,t})dW_t, \\
 d\psi_{2,t} &= h_2(a_{1,t}, a_{2,t}, \psi_{1,t}, \psi_{2,t})dt + g_2(a_{1,t}, a_{2,t}, \psi_{1,t}, \psi_{2,t})dW_t
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 h_1 &= - \left[\omega_1 + 2\beta_1 \sin \psi_{1,t} \cos \psi_{1,t} + \sigma^2 \omega_2^2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \sin \psi_{1,t} \cos \psi_{1,t} \cos^2 \psi_{2,t} \right], \\
 h_2 &= - \left[\omega_2 + 2\beta_2 \sin \psi_{2,t} \cos \psi_{2,t} + \sigma^2 \omega_1^2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \sin \psi_{2,t} \cos \psi_{2,t} \cos^2 \psi_{1,t} \right], \\
 g_1 &= \sigma \omega_2 \frac{a_2}{a_1} \cos \psi_{1,t} \cos \psi_{2,t}, \\
 g_2 &= \sigma \omega_1 \frac{a_1}{a_2} \cos \psi_{2,t} \cos \psi_{1,t}, \\
 f_1 &= -2\beta_1 \sin^2 \psi_{1,t} a_1 + \frac{1}{2} \sigma^2 \omega_2^2 \frac{a_2^2}{a_1} \cos^2 \psi_{1,t} \cos \psi_{2,t}, \\
 f_2 &= -2\beta_2 \sin^2 \psi_{2,t} a_2 + \frac{1}{2} \sigma^2 \omega_1^2 \frac{a_1^2}{a_2} \cos^2 \psi_{1,t} \cos \psi_{2,t}, \\
 k_1 &= \omega_2 \sigma a_2 \sin \psi_{1,t} \cos \psi_{2,t}, \\
 k_2 &= \omega_1 \sigma a_1 \sin \psi_{2,t} \cos \psi_{1,t}.
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Eine Amplitudentransformation der beiden Amplituden $a_{1,t}$ und $a_{2,t}$ durch

$$\begin{aligned}
A_t &= \sqrt{a_{1,t}^2 + a_{2,t}^2}, & 0 \leq A_t < \infty, \\
\varphi_t &= \arctan \frac{a_{2,t}}{a_{1,t}}, & 0 \leq \varphi_t \leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned} \tag{5.33}$$

führt auf ein Differentialgleichungssystem für den natürlichen Logarithmus der Amplitude A_t , den fluktuierenden Winkel φ_t und den beiden rotierenden Winkeln $\psi_{1,t}$ und $\psi_{2,t}$ in der Form

$$\begin{aligned}
d \ln A_t &= h_4(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dt + g_4(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dW_t, \\
d\varphi_t &= h_3(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dt + g_3(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dW_t, \\
d\psi_{2,t} &= h_2(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dt + g_2(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dW_t, \\
d\psi_{1,t} &= h_1(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dt + g_1(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dW_t.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Die Drift- und die Diffusionsterme für die Amplitude A_t und den Winkel φ_t lauten

$$\begin{aligned}
h_3 &= 2 \sin \varphi_t \cos \varphi_t (\beta_1 \sin^2 \psi_{1,t} - \beta_2 \sin^2 \psi_{2,t}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sigma^2 \left[\omega_1^2 (2 \sin \varphi_t \sin^2 \psi_{2,t} - \cos^2 \psi_{2,t}) \frac{\cos^4 \varphi_t \cos^2 \psi_{1,t}}{\sin \varphi_t \cos \varphi_t} \right. \\
&\quad \left. - \omega_2^2 (2 \cos^2 \varphi_t \sin^2 \psi_{1,t} - \cos^2 \psi_{1,t}) \frac{\sin^4 \varphi_t \cos^2 \psi_{2,t}}{\sin \varphi_t \cos \varphi_t} \right. \\
&\quad \left. + 2\omega_1\omega_2 \sin \psi_{1,t} \sin \psi_{2,t} \cos \psi_{1,t} \cos \psi_{2,t} (\cos^2 \varphi_t - \sin^2 \varphi_t) \sin \varphi_t \cos \varphi_t \right], \\
h_4 &= \frac{1}{2} \sigma^2 \left[\omega_1^2 \cos^4 \varphi_t \cos^2 \psi_{1,t} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cos^2 \varphi_t \sin^2 \varphi_t \cos^2 \psi_{1,t} \cos^2 \psi_{2,t} \right. \\
&\quad \left. + \omega_2^2 \sin^2 \varphi_t \cos^2 \psi_{2,t} - 2\omega_1\omega_2 \cos^2 \varphi_t \sin^2 \varphi_t \cos \psi_{1,t} \cos \psi_{2,t} \sin \psi_{1,t} \sin \psi_{2,t} \right. \\
&\quad \left. - 2\beta_2 \sin^2 \varphi_t \sin^2 \psi_{2,t} - 2\beta_1 \cos^2 \varphi_t \sin^2 \psi_{1,t}, \right. \\
g_3 &= -\sigma\omega_2 \sin^2 \varphi_t \sin \psi_{1,t} \cos \psi_{2,t} + \sigma\omega_1 \cos^2 \varphi_t \cos \psi_{1,t} \sin \psi_{2,t}, \\
g_4 &= \sigma \sin \varphi_t \cos \varphi_t (\omega_2 \sin \psi_{1,t} \cos \psi_{2,t} + \omega_1 \cos \psi_{1,t} \sin \psi_{2,t}).
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Die Terme h_1 , h_2 , g_1 und g_2 bleiben unverändert, da die rotierenden Winkel $\psi_{1,t}$ und $\psi_{2,t}$ nicht an der zweiten Transformation beteiligt sind.

Durch die Transformation der Zustandskoordinaten auf Bipolarkoordinaten mit anschließender Amplitudentransformation wurde wiederum, entsprechend dem Konzept von Khas'minskii, eine Entkopplung des instationären Lösungsanteils A_t von den stationären Winkelprozessen φ_t , $\psi_{1,t}$ und $\psi_{2,t}$ erreicht. Damit ist es wieder möglich, den größten Ljapunov-Exponenten unter Verwendung der Fürstenberg-Khas'minskii-Gleichung

$$\lambda_1 = \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} h_4(\varphi, \psi_1, \psi_2) p(\varphi, \psi_1, \psi_2) d\varphi d\psi_1 d\psi_2 \tag{5.36}$$

zu bestimmen.

Unbekannt in (5.36) ist auch hier die stationäre Verteilungsdichte $p(\varphi, \psi_1, \psi_2)$ der stati-

onären Winkelprozesse, die vorab noch bestimmt werden muß. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation und anschließend als Lösung der entsprechenden Fokker-Planck-Gleichung.

5.2.1 Monte-Carlo-Simulation

Wie bei der Stabilitätsanalyse unter Verwendung von Hyperkugelkoordinaten wird die Bestimmung der gesuchten Verteilungsdichte mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation an den Anfang gestellt. Die numerische Integration der Winkelprozesse erfolgte dabei durch ein stochastisches Eulerverfahren mit der konstanten Zeitschrittweite $\Delta t = 0.01s$. Für die Ermittlung der Randverteilungsdichten

$$\begin{aligned}
 p(\varphi, \psi_1) &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} p(\varphi, \psi_1, \psi_2) d\psi_2, \\
 p(\varphi, \psi_2) &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} p(\varphi, \psi_1, \psi_2) d\psi_1, \\
 p(\psi_1, \psi_2) &= \int_0^{\pi/2} p(\varphi, \psi_1, \psi_2) d\varphi
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

wurden $N_s = 10^8$ Zeitschritte simuliert, die in den Abbildungen 5.10, 5.11 und 5.12 für die Parameter $\omega_1 = 1.5s^{-1}$, $\omega_2 = 1.0s^{-1}$, $\beta_1 = 0.4$, $\beta_2 = 0.2$ und $\sigma = 0.5$ dargestellt sind. In den Abbildungen 5.10, 5.11 und 5.12 ist die Periodizität der rotierenden Winkel $\psi_{1,t}$ und $\psi_{2,t}$ zu erkennen. An den Rändern $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$ des fluktuierenden Winkels verschwinden die Randverteilungsdichten. Abbildung 5.13 zeigt die Stabilitätskarte für die Dämpfungsparameter β_1 und β_2 im Bereich $-0.2 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 0.55$, wobei für jeden berechneten Ljapunov-Exponenten eine Gesamtschrittzahl von $N_s = 10^6$ Zeitschritten benutzt wurde.

5.2.2 Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

Die dem stochastischen Differentialgleichungssystem (5.34) zugehörige Fokker-Planck-Gleichung lautet

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial \varphi}(h_3 p) + \frac{\partial}{\partial \psi_1}(h_1 p) + \frac{\partial}{\partial \psi_2}(h_2 p) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(g_3^2 p) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \psi_1^2}(g_1^2 p) \\
 &- \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \psi_2^2}(g_2^2 p) - \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \psi_1}(g_3 g_1 p) - \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \psi_2}(g_3 g_2 p) - \frac{\partial^2}{\partial \psi_1 \partial \psi_2}(g_1 g_2 p) = 0 \tag{5.38}
 \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

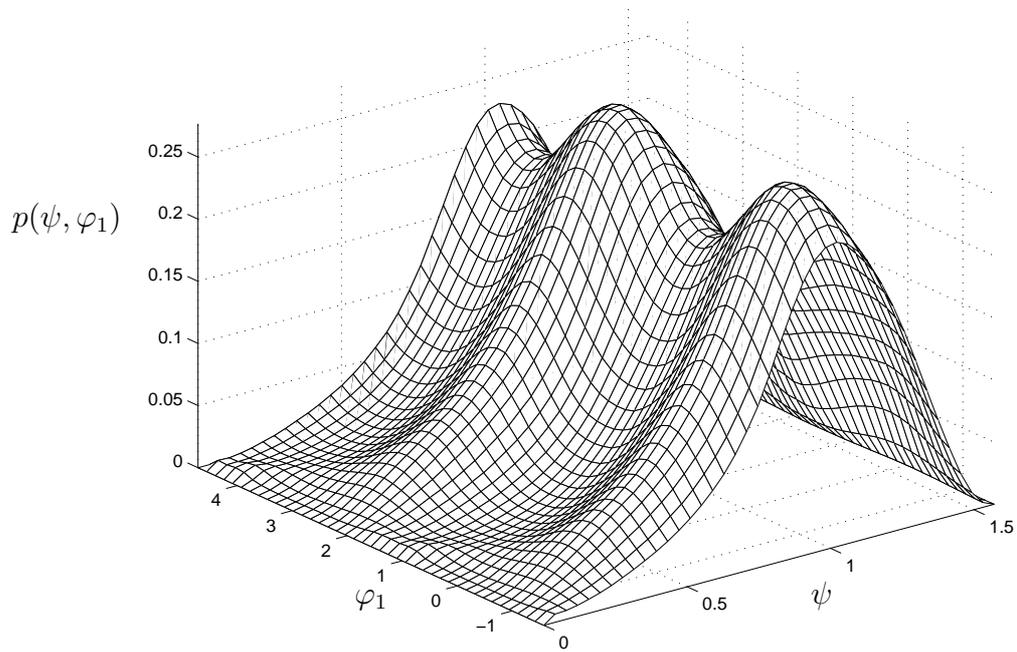


Abbildung 5.10: Randverteilungsdichte $p(\psi, \varphi_1)$ aus Monte-Carlo-Simulation

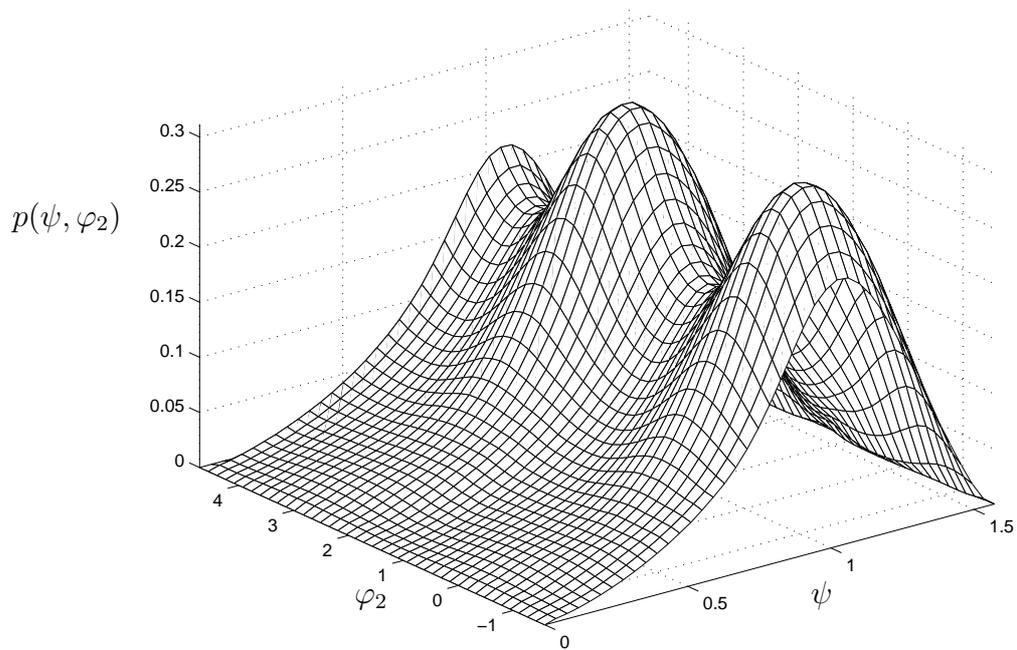
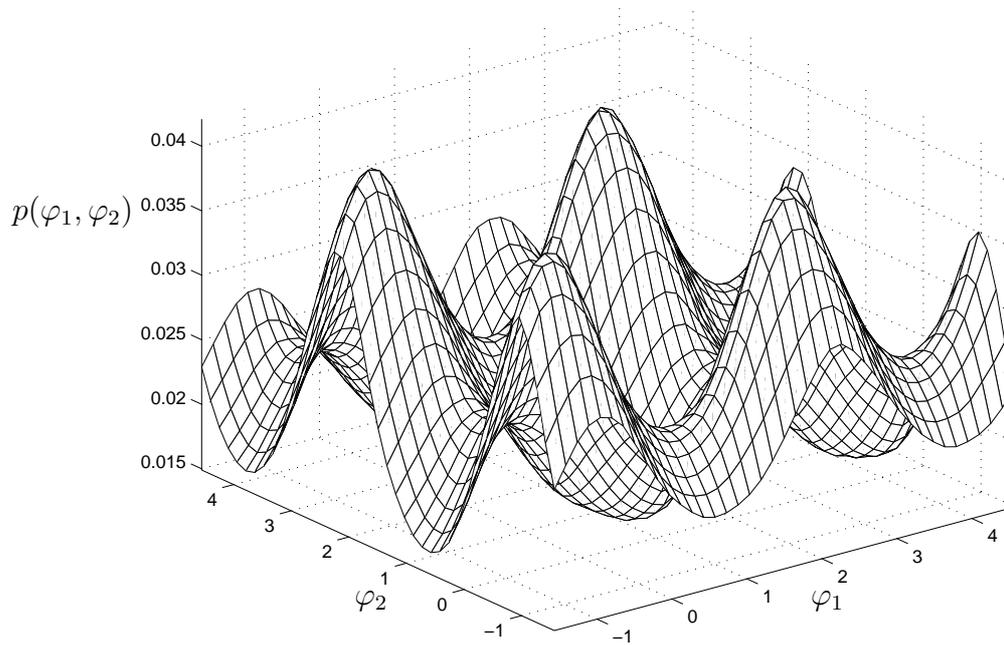
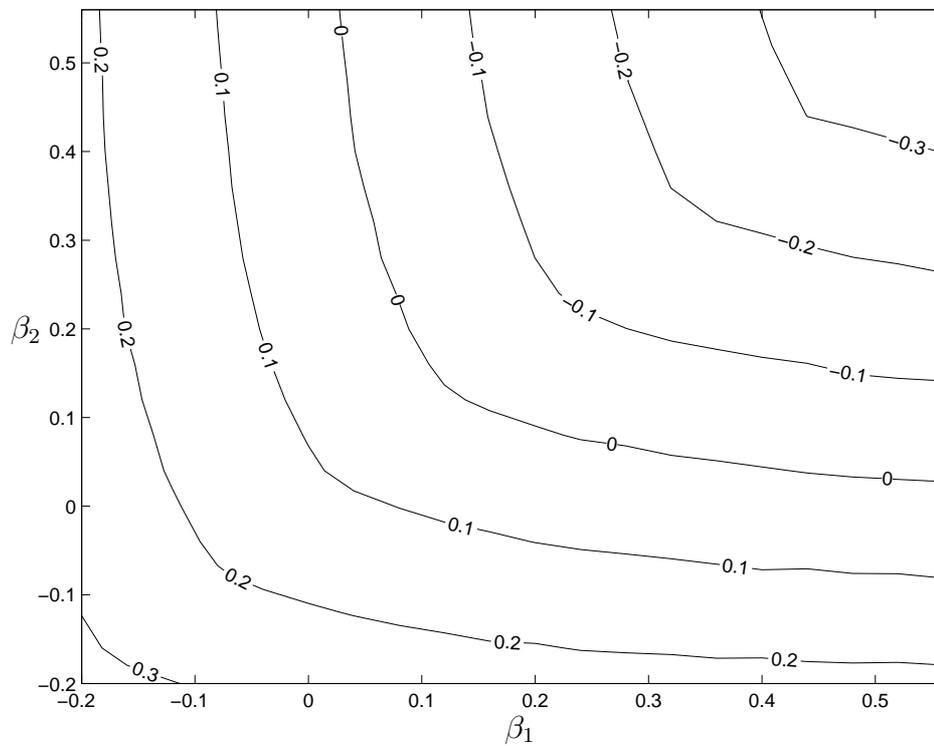


Abbildung 5.11: Randverteilungsdichte $p(\psi, \varphi_2)$ aus Monte-Carlo-Simulation

Abbildung 5.12: Randverteilungsdichte $p(\varphi_1, \varphi_2)$ aus Monte-Carlo-SimulationAbbildung 5.13: Ljapunov-Exponent λ_1 in Abhängigkeit der Dämpfungen β_1 und β_2

$$\begin{aligned}
p\left(\varphi, \psi_1 = -\frac{\pi}{2}, \psi_2\right) &= p\left(\varphi, \psi_1 = \frac{3\pi}{2}, \psi_2\right) \\
\frac{\partial}{\partial\psi_1}p\left(\varphi, \psi_1 = -\frac{\pi}{2}, \psi_2\right) &= \frac{\partial}{\partial\psi_1}p\left(\varphi, \psi_1 = \frac{3\pi}{2}, \psi_2\right) \\
p\left(\varphi, \psi_1, \psi_2 = -\frac{\pi}{2}\right) &= p\left(\varphi, \psi_1, \psi_2 = \frac{3\pi}{2}\right) \\
\frac{\partial}{\partial\psi_2}p\left(\varphi, \psi_1, \psi_2 = -\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\partial}{\partial\psi_2}p\left(\varphi, \psi_1, \psi_2 = \frac{3\pi}{2}\right) \\
p(\varphi = 0, \psi_1, \psi_2) &= p\left(\varphi = \frac{\pi}{2}, \psi_1, \psi_2\right) = 0.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Zusätzlich zu den Randbedingungen erfüllt die Verteilungsdichte die Normierungsbedingung

$$\int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} p(\varphi, \psi_1, \psi_2) d\varphi d\psi_1 d\psi_2 = 1 \tag{5.40}$$

In den Drifttermen h_3 und h_4 treten, wie bei der Transformation auf Hyperkugelkoordinaten, Terme in den Koeffizienten auf, die zu Singularitäten bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ führen. Diese müssen für eine Entwicklung der Verteilungsdichte und der nichtkonstanten Koeffizienten noch eliminiert werden. Die Fokker-Planck-Gleichung wird hierfür mit dem Faktor $n(\varphi) = \sin \varphi \cos \varphi$ durchmultipliziert. Dies führt auf die modifizierte Fokker-Planck-Gleichung

$$\begin{aligned}
\bar{h}_0 p + \bar{h}_1 \frac{\partial p}{\partial\psi_1} + \bar{h}_2 \frac{\partial p}{\partial\psi_2} + \bar{h}_3 \frac{\partial p}{\partial\varphi} - \frac{1}{2} \bar{g}_{11} \frac{\partial^2 p}{\partial\psi_1^2} - \frac{1}{2} \bar{g}_{22} \frac{\partial^2 p}{\partial\psi_2^2} - \frac{1}{2} \bar{g}_{33} \frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2} \\
- \bar{g}_{12} \frac{\partial^2 p}{\partial\psi_1 \psi_2} - \bar{g}_{13} \frac{\partial^2 p}{\partial\psi_1 \varphi} - \bar{g}_{23} \frac{\partial^2 p}{\partial\psi_2 \varphi} = 0 \tag{5.41}
\end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
\bar{h}_0 &= \left[\frac{\partial h_3}{\partial\varphi} + \frac{\partial h_1}{\partial\psi_1} + \frac{\partial h_2}{\partial\psi_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial\psi_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial\psi_2^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2 g_{31}}{\partial\varphi \partial\psi_1} - \frac{\partial^2 g_{32}}{\partial\varphi \partial\psi_2} - \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial\psi_1 \partial\psi_2} \right] \sin \varphi \cos \varphi, \\
\bar{h}_1 &= \left[h_1 - \frac{\partial g_{11}}{\partial\psi_1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial\varphi} - \frac{\partial g_{12}}{\partial\psi_2} \right] \sin \varphi \cos \varphi, \\
\bar{h}_2 &= \left[h_2 - \frac{\partial g_{22}}{\partial\psi_2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial\varphi} - \frac{\partial g_{12}}{\partial\psi_1} \right] \sin \varphi \cos \varphi, \\
\bar{h}_3 &= \left[h_3 - \frac{\partial g_{33}}{\partial\varphi} - \frac{\partial g_{13}}{\partial\psi_1} - \frac{\partial g_{23}}{\partial\psi_2} \right] \sin \varphi \cos \varphi
\end{aligned} \tag{5.42}$$

und

$$\bar{g}_{ij} = g_i g_j \sin \varphi \cos \varphi \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{5.43}$$

die jetzt frei von Singularitäten sind.

Die Verteilungsdichte $p(\varphi, \psi_1, \psi_2)$ kann in eine Reihe orthogonaler Funktionensysteme entwickelt werden:

$$p(\varphi, \psi_1, \psi_2) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=-L}^L \sum_{m=-M}^M c_{klm} P_k(\varphi) \exp[j(l\psi_1 + m\psi_2)]. \quad (5.44)$$

Für die Entwicklung in Richtung der beiden rotierenden Winkel ψ_1 und ψ_2 bieten sich aufgrund der Periodizität komplexe Fourierreihen an. In Richtung des fluktuierenden Winkels φ werden auf dem Intervall $(0, \pi/2)$ orthogonale Polynome $P_k(\varphi)$ verwendet, die als Voraufgabe noch bestimmt werden müssen. Gemäß der in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Vorgehensweise werden die Polynome

$$P_n(\varphi) = \sum_{i=0}^n e_{ni} \varphi^i \quad (5.45)$$

unter Verwendung der Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^{\pi/2} P_n P_m d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ f_n, & n = m \end{cases} \quad (5.46)$$

für die Gewichtsfunktion $w(\varphi) = 1$ berechnet:

$$\begin{aligned} P_0(\varphi) &= 1, \\ P_1(\varphi) &= \varphi - \frac{\pi}{4}, \\ P_2(\varphi) &= \varphi^2 - \frac{\pi}{2}\varphi + \frac{1}{24} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.47)$$

Mit den Polynomen (5.47) kann der Ansatz (5.44) in die modifizierte Fokker-Planck-Gleichung (5.41) eingesetzt werden. In Verbindung mit der Normierungsbedingung ergibt sich damit ein inhomogenes, algebraisches, überbestimmtes Gleichungssystem für die unbekanntenen Koeffizienten c_{klm} , das näherungsweise mit einem numerischen Gleichungslöser ausgewertet werden kann.

Bei der Entwicklung der Fokker-Planck-Gleichung mit dem Ansatz (5.44) werden Ausdrücke vom Typ

$$\sin^a \varphi \cos^b \varphi \frac{\partial^c}{\partial \varphi^c} (P(\varphi)) = \sum_{i=0}^{\infty} h_{abcni} P_i(\varphi) \quad (5.48)$$

zu entwickeln sein. Unter Beachtung der Orthogonalitätsrelation ergibt sich für die nullte, erste und zweite Ableitung ($c = 0, 1, 2$) der Polynome die Entwicklung

$$\begin{aligned}
h_{ab0nk} &= \frac{1}{f_k} \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^k e_{nj_1} e_{nj_2} \int_0^{\pi/2} \sin^a \varphi \cos^b \varphi \varphi^{j_1+j_2} d\varphi, \\
h_{ab1nk} &= \frac{1}{f_k} \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^k e_{nj_1} e_{nj_2} j_1 \int_0^{\pi/2} \sin^a \varphi \cos^b \varphi \varphi^{j_1+j_2-1} d\varphi, \\
h_{ab2nk} &= \frac{1}{f_k} \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^k e_{nj_1} e_{nj_2} j_1(j_1-1) \int_0^{\pi/2} \sin^a \varphi \cos^b \varphi \varphi^{j_1+j_2-2} d\varphi.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Eine Entwicklung unter Verwendung der hier berechneten orthogonalen Polynome eignet sich besser für eine Approximation der Koeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung als eine Entwicklung in nichtverallgemeinerte Fourierreihen. In den Abbildungen 5.14, 5.15 und 5.16 sind Randverteilungsdichten für die Parameter $\omega_1 = 1.5s^{-1}$, $\omega_2 = 1.0s^{-1}$, $\beta_1 = 0.4$, $\beta_2 = 0.2$ und $\sigma = 0.5$ dargestellt. Die Dichte wurde dabei in den beiden Richtungen der rotierenden Winkel bis zum sechsten Glied und in Richtung des fluktuierenden Winkels bis zum vierten Glied entwickelt. Ein Vergleich mit den Randverteilungsdichten, die mit der Monte-Carlo-Simulation bestimmt wurden, zeigt wiederum eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse. Der für die angegebene Parameterkombination ermittelte größte Ljapunov-Exponent betrug $\lambda_1 = -0.191115$. Abbildung 5.17 zeigt die Stabilitätskarte für die Dämpfungsparameter β_1 und β_2 im Bereich $-0.2 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 0.55$, die ebenfalls sehr gut mit der Stabilitätskarte der Monte-Carlo-Simulation übereinstimmt.

5.3 Vergleich der beiden Koordinatentransformationen

Bei einem Vergleich der beiden Koordinatentransformationen wird die Frage im Vordergrund stehen, ob durch die Wahl einer der beiden Transformationen ein entscheidender Vorteil bei der Durchführung einer Stabilitätsanalyse gewonnen werden kann. Die numerische Integration des stochastischen Differentialgleichungssystem mittels einer Monte-Carlo-Simulation ist für beide Koordinatentransformationen unproblematisch und zeigt keine Vorteile auf. Problematisch ist jedoch eine Stabilitätsanalyse unter Verwendung der Lösung der entsprechenden Fokker-Planck-Gleichung bei Systemen höherer Ordnung. Hier ist das Auftreten von Singularitäten in den Koeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung in den Rändern der fluktuierenden Winkeln kritisch. Diese Singularitäten treten jedoch in den Drifttermen des stochastischen Differentialgleichungssystem sowohl nach der Transformation auf Hyperkugelkoordinaten als auch nach der Transformation auf Bipolarkoordinaten auf. Auch hier führt keine der beiden Transformationen zu einer Vereinfachung. Ein Vergleich der Stabilitätskarten zeigt auch eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse der Stabilitätsanalysen. Einziger Nachteil der Transformation der Zustandskoordinaten auf Bipolarkoordinaten ist die Notwendigkeit einer zweiten Transformation, der Amplitudentransformation. Diese macht es erforderlich, einen zusätzlichen Arbeitsschritt einzuführen, so daß der Auf-

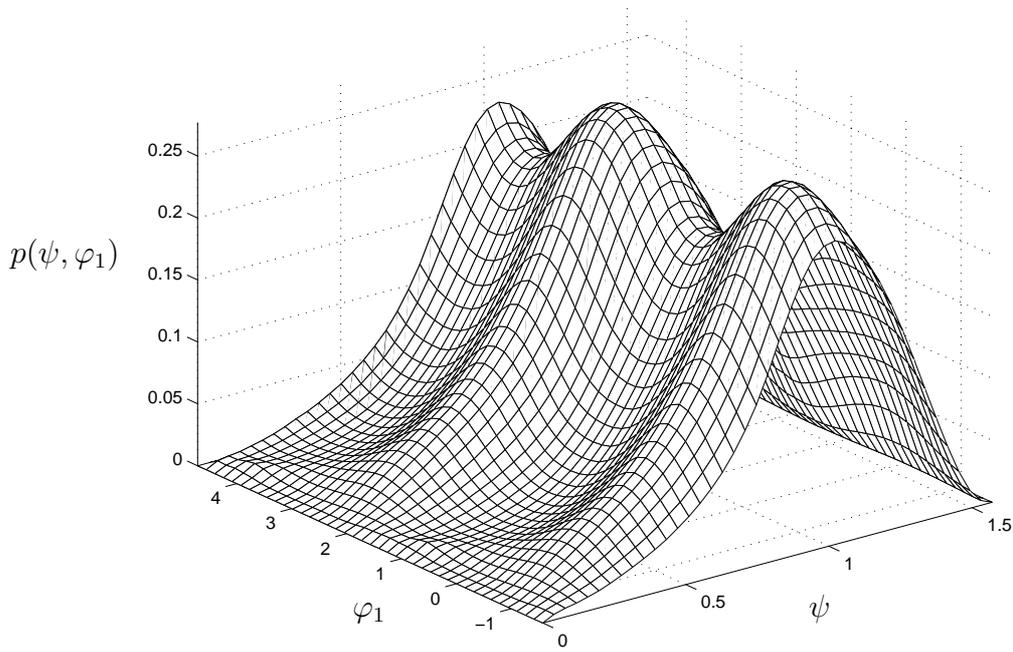


Abbildung 5.14: Randverteilungsdichte $p(\psi, \varphi_1)$ durch Lösen der Fokker-Planck-Gleichung

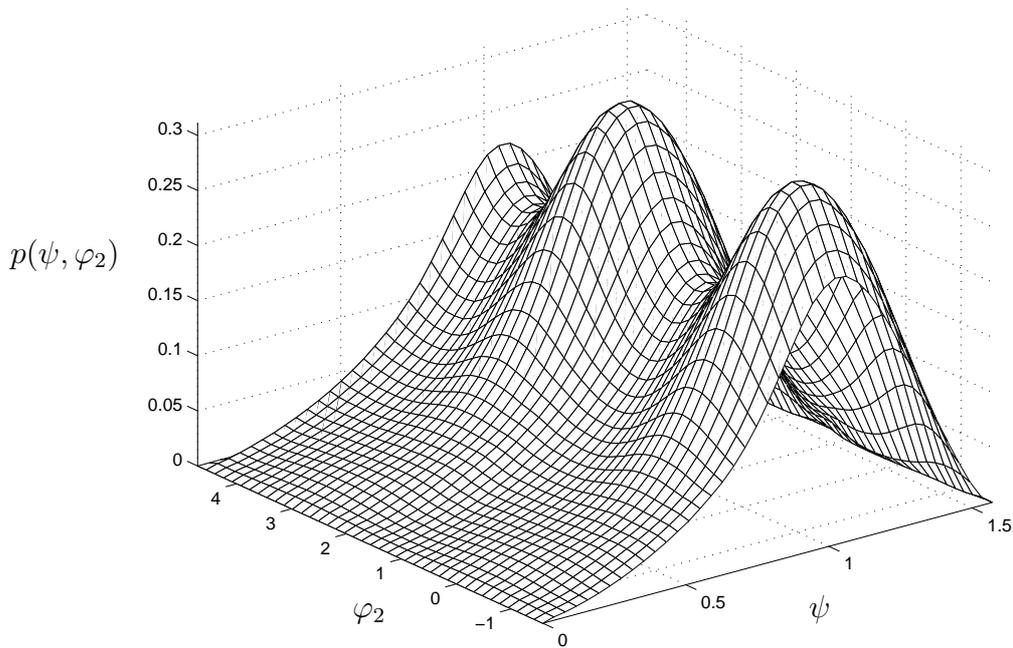


Abbildung 5.15: Randverteilungsdichte $p(\psi, \varphi_2)$ durch Lösen der Fokker-Planck-Gleichung

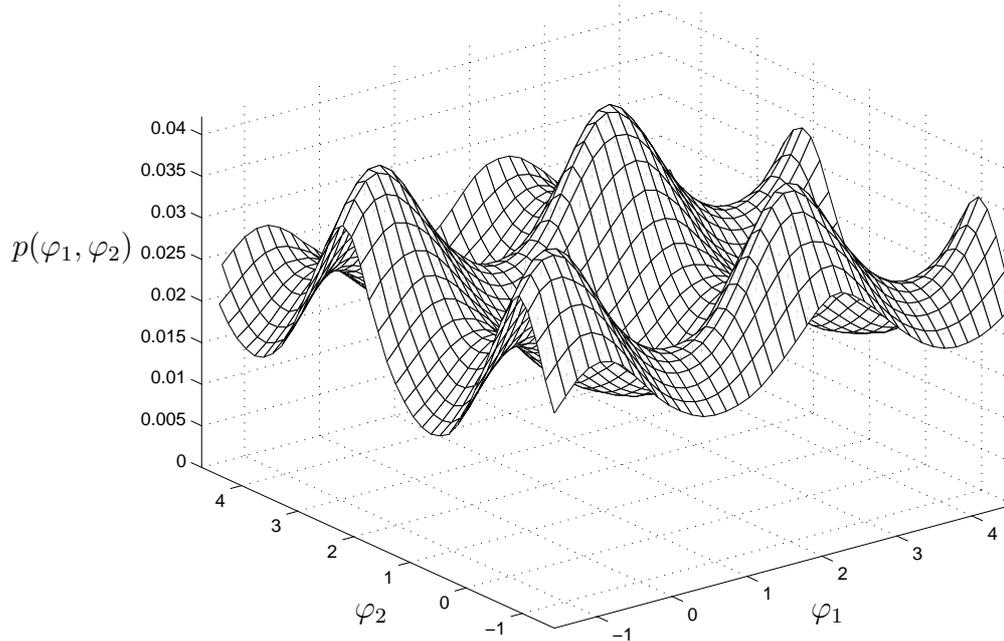


Abbildung 5.16: Randverteilungsdichte $p(\varphi_1, \varphi_2)$ durch Lösen der Fokker-Planck-Gleichung

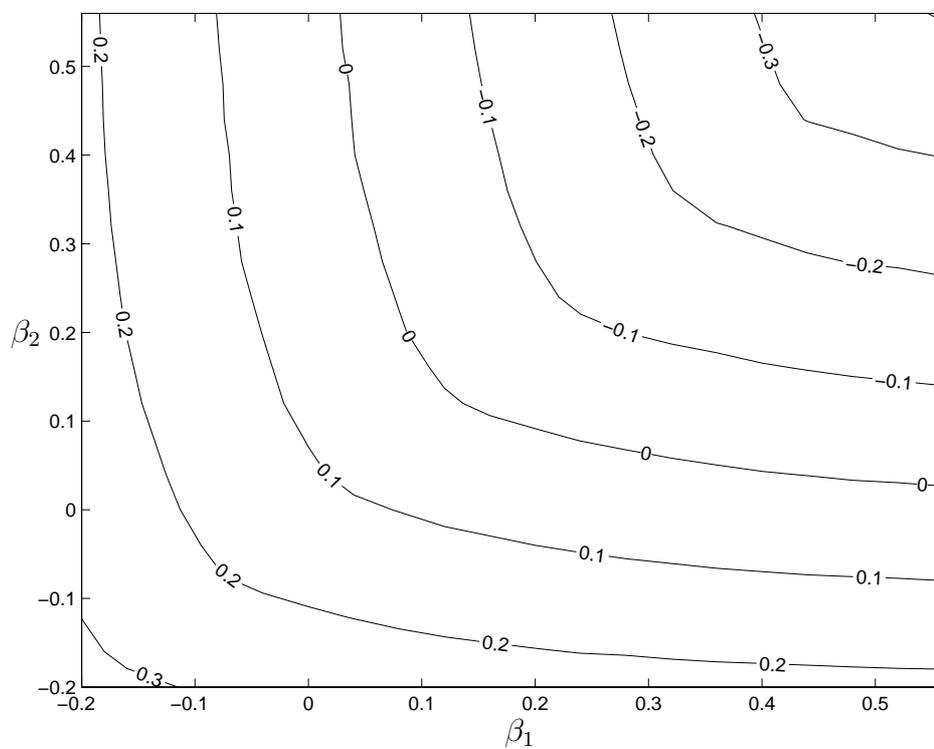


Abbildung 5.17: Ljapunov-Exponent λ_1 in Abhängigkeit der Dämpfungen β_1 und β_2

wand hier etwas höher ist, als bei der Verwendung von Hyperkugelkoordinaten. Dies ist jedoch wenig problematisch, da die Transformation mit Hilfe des Computeralgebrasystem MAPLE durchgeführt wurde und damit der Mehraufwand geringfügig und wenig fehleranfällig war.

Kapitel 6

Kramers-Oszillator

In den bisherigen Arbeiten (z.B. [16] und [23]) und in dem vorausgegangenen Abschnitt wurden lediglich Stabilitätsanalysen von Ruhelagen als spezielle Lösungen parametererregter Systeme untersucht. Diese Einschränkung soll nun nicht mehr gelten. Im folgenden wird die Analyse auf nichttriviale Lösungen fremderregter dynamischer Systeme erweitert.

Seit seiner Einführung 1918 von Duffing [12] gilt der nichtlineare Oszillator mit einem kubischen Rückstellterm

$$\ddot{z}_t + \gamma \dot{z}_t + U'(z_t) = f(t), \quad \gamma > 0, \quad (6.1)$$

wobei sich der kubische Rückstellterm aus dem Potential

$$U(z) = -a \frac{z^2}{2} + b \frac{z^4}{4} \quad (6.2)$$

mit den Parametern

$$a, b > 0 \quad (6.3)$$

ergibt, als eines der klassischen Systeme in der nichtlinearen Mechanik. Ausführliche Beschreibungen der Phänomene dieses Oszillators sind in zahlreichen Arbeiten zu finden, wobei hier exemplarisch das Buch von Guckenheimer und Holmes [17] aufgeführt werden soll. Rückt anstelle einer deterministischen Anregung, wie sie in den Untersuchungen des Duffing-Oszillators benutzt wird, eine stochastische in der Form

$$f(t) = \sqrt{2\varepsilon\gamma}\xi_t, \quad (6.4)$$

so beschreibt Gleichung (6.1) die regellose Bewegung eines Partikels in einem Wärmebad unter dem Einfluß eines bistabilen Potentials. ξ_t repräsentiert auch hier das stationäre Gaußsche weiße Rauschen. Der Parameter ε in der Anregung steht für die Temperatur des Wärmebades. Dieses Modell wurde erstmals von Kramers in seiner Arbeit [27] vorgestellt und ist daher auch unter dem Namen „Kramers-Oszillator“ in der Literatur zu finden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden der Einfachheit halber die Parameter $\varepsilon = a = b = 1$ gesetzt. Gleichung (6.1) kann dann mit der Anregung (6.4) als stochastisches Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} dx_t &= y_t dt, \\ dy_t &= (-\gamma y_t - U'(x_t))dt + \sqrt{2\gamma} dW_t \end{aligned} \quad (6.5)$$

mit den Zustandskoordinaten $x_t = z_t$ und $y_t = \dot{z}_t$ geschrieben werden. W_t ist dabei der Wiener-Prozeß. Für jeden beliebigen Startvektor (x_0, y_0) existiert eine Lösung von (6.5), die ihrerseits Diffusionsprozesse mit der stationären Verteilungsdichte

$$p(x, y) = N \exp\left(-U(x) - \frac{y^2}{2}\right) \quad (6.6)$$

darstellen. N ist eine Normierungskonstante. Eine Besonderheit dieses Systems liegt in der Unabhängigkeit der Verteilungsdichte vom Dämpfungsparameter γ .

Schimansky-Geier und Herzog zeigten in ihrer Arbeit [47], daß für kleine Dämpfungswerte ($\gamma < 1$) der größte Ljapunov-Exponent $\lambda_1(\gamma)$ größer Null werden kann. Dies ist (siehe [4]) das erste Beispiel eines dynamischen Systems, für das additives weißes Rauschen zu Instabilitäten führt.

Ziel dieser Untersuchung ist die numerische Bestimmung der Ljapunov-Exponenten unter Verwendung einer Monte-Carlo-Simulation und durch Lösen der Fokker-Planck-Gleichung mittels Reihenentwicklung zum Auffinden der unbekanntenen Verteilungsdichte.

6.1 Variationsgleichung

Für die Untersuchung der Lösung

$$z_t = z_s, \quad (6.7)$$

die die Gleichung (6.1) erfüllt, muß zunächst die entsprechende Variationsgleichung aufgefunden werden. Hierzu führt man den Störungsansatz

$$z_t = z_s + \Delta z_t \quad (6.8)$$

in (6.1) ein:

$$(\ddot{z}_s + \Delta \ddot{z}_t) + \gamma(\dot{z}_s + \Delta \dot{z}_t) + U'(z_s + \Delta z_t) = \sqrt{2\gamma} \xi_t. \quad (6.9)$$

Der nichtlineare Term $U'(z_s + \Delta z_t)$ kann mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung um die Lösung z_s

$$U'(z_s + \Delta z_t) = U'(z_s) + \left. \frac{\partial U'(z_t)}{\partial z_t} \right|_{z_s} \Delta z_t + \dots \quad (6.10)$$

linearisiert werden. Einsetzen von (6.10) in (6.9) führt auf

$$\ddot{z}_s + \gamma \dot{z}_s + U'(z_s) + \Delta \ddot{z}_t + \gamma \Delta \dot{z}_t + \left. \frac{\partial U'(z_t)}{\partial z_t} \right|_{z_s} \Delta z_t = \sqrt{2\gamma} \xi_t. \quad (6.11)$$

Da die Lösung z_s die Differentialgleichung (6.1) identisch erfüllt, ergibt sich aus (6.11) die Variationsgleichung

$$\Delta \ddot{z}_t + \gamma \Delta \dot{z}_t + \left. \frac{\partial U'(z_t)}{\partial z_t} \right|_{z_s} \Delta z_t = 0, \quad (6.12)$$

die mit den Zustandskoordinaten

$$v_{1,t} = \Delta z_t, \quad v_{2,t} = \Delta \dot{z}_t \quad (6.13)$$

als stochastisches Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} dv_{1,t} &= v_{2,t} dt, \\ dv_{2,t} &= (-U''(z_s)v_{1,t} - \gamma v_{2,t}) dt = ((1 - 3z_s^2)v_{1,t} - \gamma v_{2,t}) dt \end{aligned} \quad (6.14)$$

angegeben werden kann.

6.2 Transformation auf Polarkoordinaten

Zur Bestimmung des größten Ljapunov-Exponenten werden die Zustandskoordinaten $v_{1,t}$ und $v_{2,t}$ gemäß dem Konzept von Khas'minskii auf Polarkoordinaten nach der Vorschrift

$$\begin{aligned} A_t &= \sqrt{v_{1,t}^2 + v_{2,t}^2}, & 0 \leq A_t < \infty, \\ \varphi_t &= \begin{cases} \arctan \frac{v_{2,t}}{v_{1,t}}, & v_{1,t} \geq 0, \\ \arctan \frac{v_{2,t}}{v_{1,t}} + \pi, & v_{1,t} < 0 \end{cases} & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_t < \frac{3\pi}{2} \end{aligned} \quad (6.15)$$

transformiert. Durch diese Transformation ergibt sich das stochastische Differentialgleichungssystem für den natürlichen Logarithmus der Amplitude A_t und den rotierenden Winkel φ_t . In den transformierten Variationsgleichungen tritt jetzt noch, im Unterschied zu parametererregten Systemen, die Lösung des Systems x_s als Parameter auf. Zur vollständigen Beschreibung ist es daher notwendig, die Systemgleichungen (6.5), die die Lösung beschreiben, hinzuzuziehen:

$$\begin{aligned} d \ln A_t &= [(2 - 3x_{s,t}^2) \sin \varphi_t \cos \varphi_t - \gamma \sin^2 \varphi_t] dt, \\ d\varphi_t &= [(2 - 3x_{s,t}^2) \cos^2 \varphi_t - \gamma \sin \varphi_t \cos \varphi_t - 1] dt, \\ dx_{s,t} &= y_{s,t} dt, \\ dy_{s,t} &= [-\gamma y_{s,t} + x_{s,t} - x_{s,t}^3] dt + \sqrt{2\gamma} dW_t. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Durch die Transformation auf Polarkoordinaten wird eine einseitige Entkopplung des instationären Lösungsanteils erreicht, so daß der größte Ljapunov-Exponent mit Hilfe der Fürstenberg-Khas'minskii-Gleichung

$$\lambda_1(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} [(2 - 3x_s^2) \sin \varphi \cos \varphi - \gamma \sin^2 \varphi] p(x_s, y_s, \varphi) d\varphi dx_s dy_s \quad (6.17)$$

unter Voraussetzung von Ergodizität mit der noch unbekannt stationären Verteilungsdichte $p(x_s, y_s, \varphi)$ bestimmt werden kann.

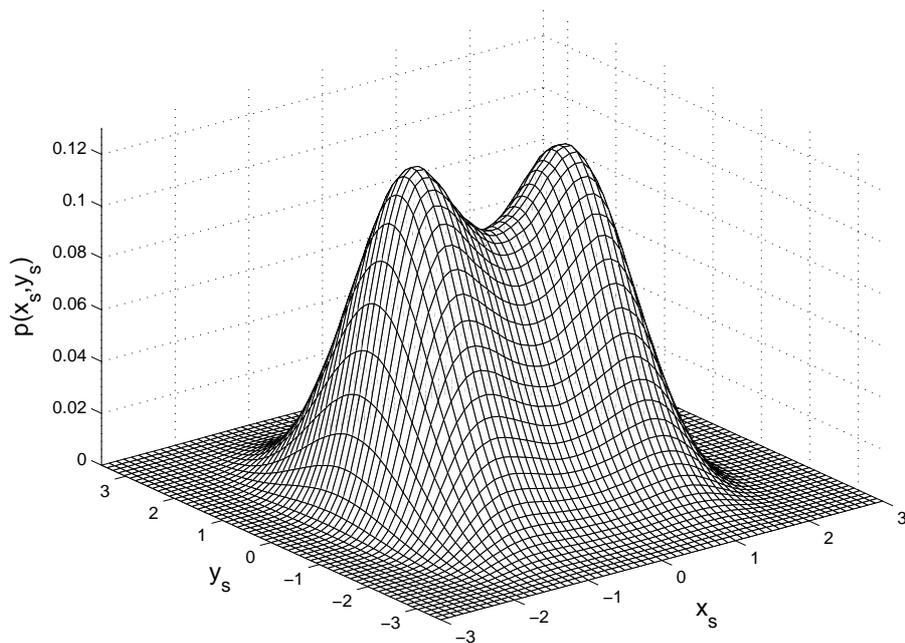


Abbildung 6.1: Verteilungsdichte $p(x_s, y_s)$ der stationären Lösung mittels Monte-Carlo-Simulation

6.3 Monte-Carlo-Simulation

Für die Berechnung der stationären Verteilungsdichten mittels einer Monte-Carlo-Simulation wurden wie im vorausgegangenen Abschnitt $N_s = 10^9$ Zeitschritte simuliert. In Abbildung 6.1 ist die stationäre Verteilungsdichte $p(x_s, y_s)$ der Lösung des Kramers-Oszillators dargestellt. Es ist hier deutlich der Einfluß des Potentials (6.2) zu erkennen. An dieser Stelle soll nochmals erwähnt werden, daß die Lösung, im Gegensatz zum Ljapunov-Exponenten, invariant gegenüber dem Dämpfungsparameter γ ist. In den Abbildungen 6.2 und 6.3 ist der größte Ljapunov-Exponent als Funktion des Parameters γ aufgetragen. Zur Berechnung dieser Stabilitätskarten wurde für die Ermittlung eines Ljapunov-Exponenten $N_s = 10^6$ Zeitschritte simuliert. Es ist zu erkennen, daß für $0 < \gamma \lesssim 0.55$ der Exponent ein positives Vorzeichen besitzt. In diesem Bereich ist die Lösung des Kramers-Oszillators (6.6) instabil. Für $\gamma \gtrsim 0.55$ besitzt der Ljapunov-Exponent ein negatives Vorzeichen. Hier ist die berechnete Lösung von (6.1) stabil.

6.4 Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

Die zu (6.16) gehörende stationäre Fokker-Planck-Gleichung mit den zugehörigen Drift- und Diffusionstermen

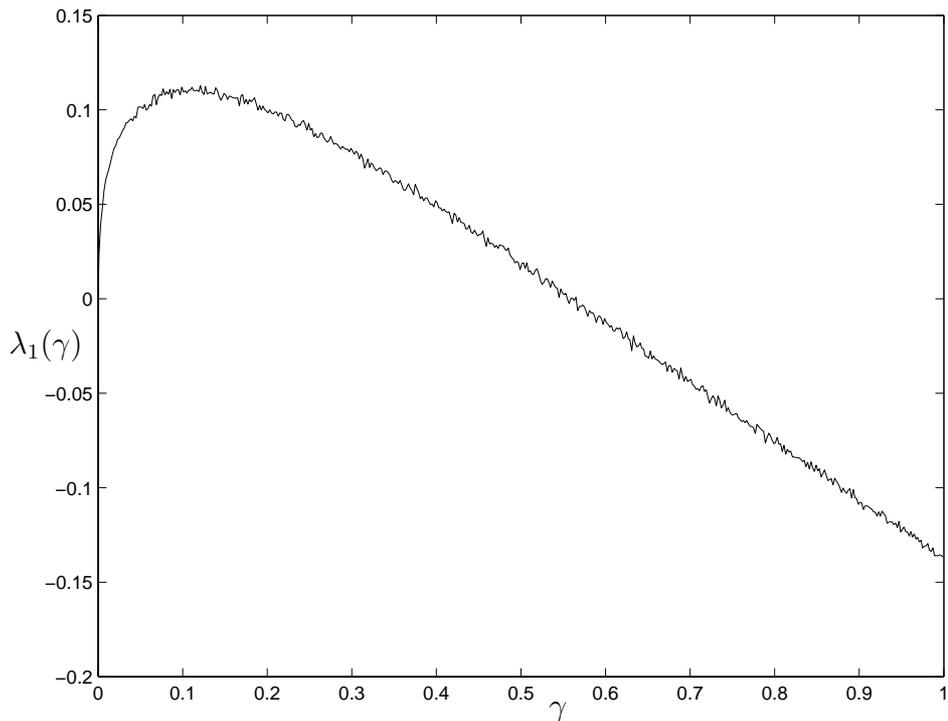


Abbildung 6.2: Größter Ljapunov-Exponent $\lambda_1(\gamma)$ im Bereich $0 \leq \gamma < 1$ mittels Monte-Carlo-Simulation

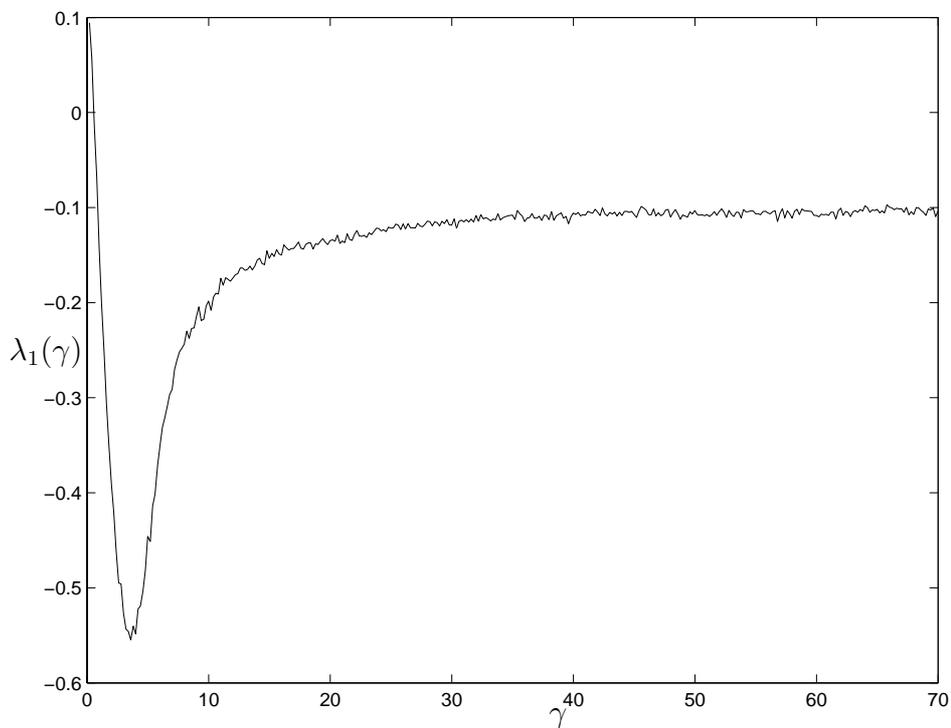


Abbildung 6.3: Größter Ljapunov-Exponent $\lambda_1(\gamma)$ im Bereich $0 \leq \gamma < 70$ mittels Monte-Carlo-Simulation

$$\begin{aligned}
h_2 &= (2 - 3x_s^2) \cos^2 \varphi - \gamma \sin \varphi \cos \varphi - 1, \\
h_3 &= y_s, \\
h_4 &= -\gamma y_s + x_s - x_s^3, \\
g_4^2 &= 2\gamma
\end{aligned} \tag{6.18}$$

lautet

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(h_2 p) + \frac{\partial}{\partial x_s}(h_3 p) + \frac{\partial}{\partial y_s}(h_4 p) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_s^2}(g_4^2 p) = 0. \tag{6.19}$$

Die Randbedingungen

$$\begin{aligned}
p(\varphi = -\frac{\pi}{2}, x_s, y_s) &= p(\varphi = \frac{3\pi}{2}, x_s, y_s), \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} p(\varphi = -\frac{\pi}{2}, x_s, y_s) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} p(\varphi = \frac{3\pi}{2}, x_s, y_s), \\
p(\varphi, x_s = -\infty, y_s) &= p(\varphi, x_s = \infty, y_s) = 0, \\
p(\varphi, x_s, y_s = -\infty) &= p(\varphi, x_s, y_s = \infty) = 0
\end{aligned} \tag{6.20}$$

ergeben sich aus der Periodizitätsbedingung für den rotierenden Winkel φ und der Integrierbarkeitsbedingung der stationären Verteilungsdichte. Neben den Randbedingungen muß die Verteilungsdichte die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} p(x_s, y_s, \varphi) d\varphi dx_s dy_s = 1 \tag{6.21}$$

erfüllen. Nach Ausführen der Differentiationen ergibt sich aus (6.19)

$$\left[\frac{\partial h_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial h_4}{\partial y_s} \right] p + h_2 \frac{\partial p}{\partial \varphi} + h_3 \frac{\partial p}{\partial x_s} + h_4 \frac{\partial p}{\partial y_s} - \frac{1}{2} g_4^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y_s^2} = 0. \tag{6.22}$$

In den Koeffizienten der Gleichung (6.22) treten nach der Transformation auf Polarkoordinaten keine Terme auf, die zu Singularitäten führen. Daher ist eine Modifikation der Fokker-Planck-Gleichung bei diesem Problem nicht notwendig. Die Lösung von (6.22) erfolgt wiederum durch Entwicklung der gesuchten Verteilungsdichte in eine Reihe orthogonaler Funktionensysteme. Dabei bietet sich in Richtung des rotierenden Winkels φ aufgrund der Periodizität eine Entwicklung in eine Fourierreihe an. In Richtung der beiden Zustandskoordinaten x_s und y_s der zu untersuchenden Lösung wird die Verteilungsdichte in orthogonale Polynome auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ entwickelt. Diese Polynome müssen vorab noch bestimmt werden. Die zur Erzeugung benötigten Gewichtsfunktionen werden aus der bekannten Lösung (6.6) gewonnen und lauten

$$\begin{aligned}
w_1(x_s) &= \exp\left(\frac{x_s^2}{2} - \frac{x_s^4}{4}\right), \\
w_2(y_s) &= \exp\left(-\frac{y_s^2}{2}\right).
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Polynome, die die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} He_n(y_s) He_m(y_s) w_2(y_s) dy_s = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ n! \sqrt{2\pi}, & m = n \end{cases} \quad (6.24)$$

mit der speziellen Gewichtsfunktion $w_2(y_s)$ aus (6.23) erfüllen, werden Hermite-Polynome genannt. Beispielhaft sind hier die ersten vier Polynome angegeben:

$$\begin{aligned} He_0(y_s) &= 1, \\ He_1(y_s) &= y_s, \\ He_2(y_s) &= y_s^2 - 1, \\ He_3(y_s) &= y_s^3 - 3y_s, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.25)$$

Hermite-Polynome besitzen eine Reihe von wichtigen Eigenschaften, die in [29] ausführlich beschrieben werden. Für die Entwicklung der stationären Verteilungsdichte sind dabei die Differentiationsformel

$$\frac{d}{dy_s} He_n(y_s) = n He_{n-1}(y_s) \quad (6.26)$$

und die Rekursionsrelation

$$y_s He_n(y_s) = He_{n+1}(y_s) + n He_{n-1}(y_s) \quad (6.27)$$

besonders zu erwähnen. Aufwendiger gestaltet sich die Auffindung der Polynome

$$H_n(x_s) = \sum_{i=0}^n e_{ni} x_s^i \quad (6.28)$$

mit der Gewichtsfunktion $w_1(x_s)$. Es muß hier die in Abschnitt 4.2.2 beschriebene Vorgehensweise zur Bestimmung orthogonaler Polynome durchgeführt werden. Durch Auswertung der Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x_s) H_m(x_s) w_1(x_s) dy_s = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ c_m, & m = n \end{cases} \quad (6.29)$$

ergeben sich die Polynome

$$\begin{aligned} H_0(x_s) &= 1, \\ H_1(x_s) &= x_s, \\ H_2(x_s) &= x_s^2 - 1,042, \\ H_3(x_s) &= x_s^3 - 1,960x_s, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.30)$$

Die gewonnenen Polynome bilden zusammen mit der Gewichtsfunktion $w_1(x_s)$, ebenso wie die Hermite-Polynome mit der Gewichtsfunktion $w_2(y_s)$, ein orthogonales Funktionensystem auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ und werden daher generalisierte Hermite-Polynome genannt (siehe dazu auch [55]).

Mit der komplexen Fourierreihe, den Hermite-Polynomen und den generalisierten Hermite-Polynomen kann die Verteilungsdichte als eine Reihe in der Form

$$p(\varphi, x_s, y_s) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=-M}^M c_{klm} H_k(x_s) w_1(x_s) H_l(y_s) w_2(y_s) \exp(jm\varphi) \quad (6.31)$$

dargestellt werden. Wird der Ansatz (6.31) in die ausdifferenzierte Fokker-Planck-Gleichung (6.22) eingesetzt, so werden unter anderem Ausdrücke der Form

$$x_s^k \frac{\partial^c}{\partial x_s^c} [H_n(x_s) w_1(x_s)] = \sum_{i=0}^{i_{max}} g_{ckni} H_i(x_s) w_1(x_s) \quad (6.32)$$

zu entwickeln sein. Die Entwicklung soll dabei auf die für den Reihenansatz gewählte Anzahl n_{x_s} an Polynomen beschränkt bleiben.

Eine Möglichkeit, die gesuchten Koeffizienten g_{ckni} zu ermitteln, besteht darin, die Differentiation und die Multiplikation auszuführen und diese über die Lösung eines linearen Gleichungssystems zu bestimmen. Diese Variante benötigt zur Berechnung jedoch eine höhere als die gewählte Anzahl von Polynomen und führt darüber hinaus zum Teil auch zu Schwierigkeiten bei der Lösung des Gleichungssystems. Näheres hierzu ist in [53] zu finden.

Besser eignet sich hier die folgende Möglichkeit, die die Orthogonalitätsrelation (6.29) ausnutzt. Hierbei wird Gleichung (6.32) mit einem Polynom $H_j(x_s)$ multipliziert und über dem Bereich $(-\infty, \infty)$ integriert. So ergibt sich für den Koeffizienten

$$g_{cknj} = \frac{1}{c_j} \int_{-\infty}^{\infty} x_s^k H_j(x_s) \frac{\partial^c}{\partial x_s^c} [H_n(x_s) w_1(x_s)] dx_s. \quad (6.33)$$

Bei dieser Entwicklung ist es nur noch notwendig, eine von k und c abhängende größere Zahl als n_{x_s} an Taylormomenten

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x_s^n w_1(x_s) dx_s \quad (6.34)$$

zu berechnen, nicht aber mehr als n_{x_s} Polynome. Nach Ausführung der Differentiationen ergeben sich für die nullte, erste und zweite Ableitung

$$\begin{aligned}
g_{0knj} &= \frac{1}{c_j} \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^j e_{ni_1} e_{ji_2} m_{i_1+i_2+k}, \\
g_{1knj} &= \frac{1}{c_j} \left[\sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^j i_1 e_{ni_1} e_{ji_2} m_{i_1+i_2+k-1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^j e_{ni_1} e_{ji_2} (-h_1 m_{i_1+i_2+k+1} - h_2 m_{i_1+i_2+k+3}) \right], \\
g_{2knj} &= \frac{1}{c_j} \left[\sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^j i_1 (i_1 - 1) e_{ni_1} e_{ji_2} m_{i_1+i_2+k-2} \right. \\
&\quad - 2 \frac{1}{c_j} \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^j (h_1 m_{i_1+i_2+k} + h_2 m_{i_1+i_2+k+2}) \\
&\quad + \frac{1}{c_j} \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^j e_{ni_1} e_{ji_2} (h_2^2 m_{i_1+i_2+k+6} + 2h_1 h_2 m_{i_1+i_2+k+4} \\
&\quad \left. + (h_1^2 - 3h_2) m_{i_1+i_2+k+2} - h_1 m_{i_1+i_2+k}) \right]. \tag{6.35}
\end{aligned}$$

Nach einer Entwicklung der Verteilungsdichte und der nichtkonstanten Koeffizienten in der Fokker-Planck-Gleichung ergibt sich in Verbindung mit der Normierungsbedingung der Verteilungsdichte ein inhomogenes, algebraisches Gleichungssystem für die unbekanntenen Koeffizienten c_{klm} aus (6.31), das unter Zuhilfenahme eines Standardgleichungslösers ausgewertet werden kann. In den Abbildungen 6.4 bis 6.6 sind Ergebnisse dargestellt, die durch Lösen der Fokker-Planck-Gleichung ermittelt wurden. Für die Entwicklung in Richtung der Zustandkoordinaten wurden $k = l = 3$ Reihenglieder, in Richtung des rotierenden Winkels $m = 6$ Reihenglieder verwendet. Abbildung 6.4 zeigt die stationäre Verteilungsdichte der Lösung von (6.1). In den Abbildungen 6.5 und 6.6 sind Stabilitätskarten für den Dämpfungsparameter γ dargestellt. Auch hier ist zu erkennen, daß die Qualität der Lösung, die mittels der Fokker-Planck-Methode bestimmt wurde, deutlich besser ist. Dieser Verbesserung gegenüber der Monte-Carlo-Methode steht jedoch ein hoher Aufwand bei der Reihenentwicklung der Fokker-Planck-Gleichung gegenüber.

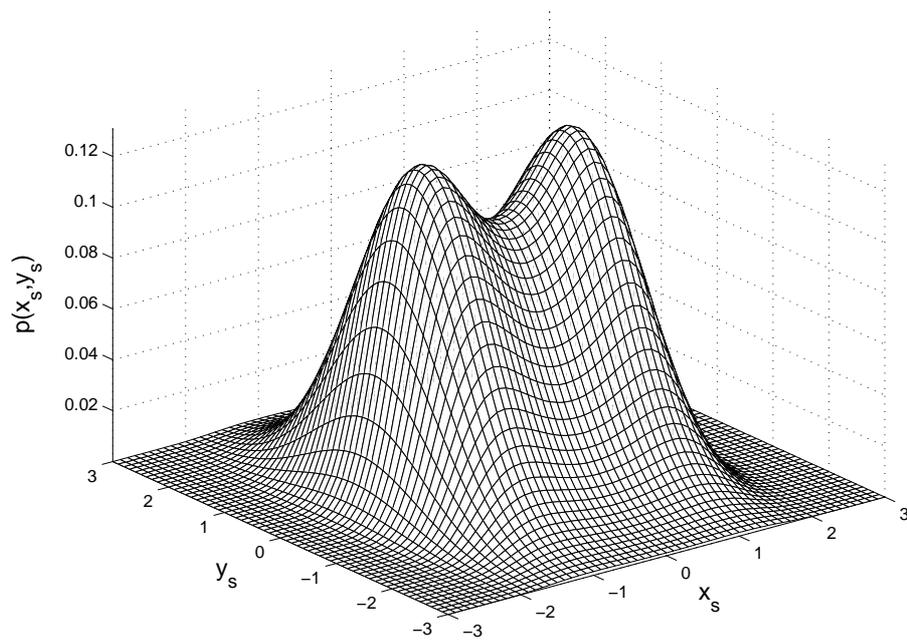


Abbildung 6.4: Verteilungsdichte $p(x_s, y_s)$ der stationären Lösung mittels Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

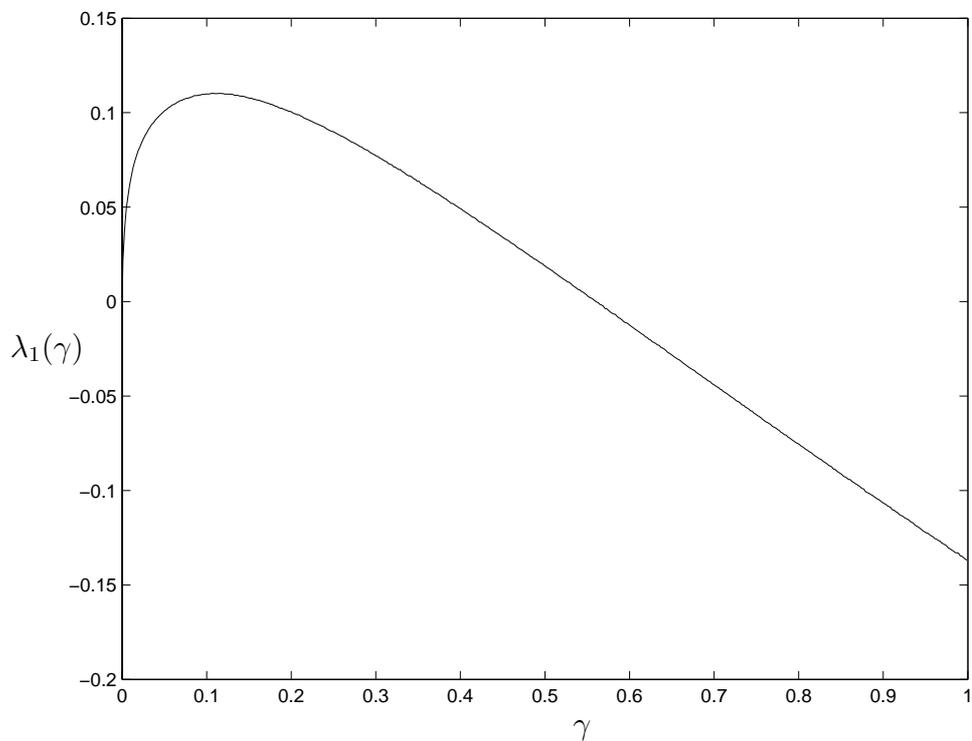


Abbildung 6.5: Größter Ljapunov-Exponent $\lambda_1(\gamma)$ im Bereich $0 \leq \gamma < 1$ mittels Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

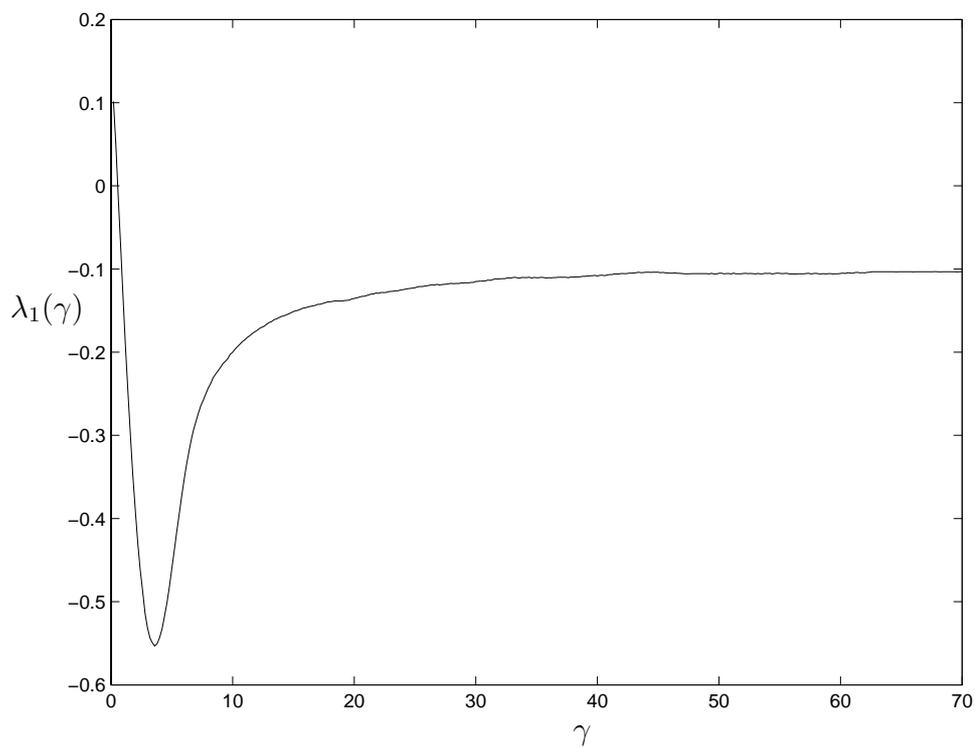


Abbildung 6.6: Größter Ljapunov-Exponent $\lambda_1(\gamma)$ im Bereich $0 \leq \gamma < 70$ mittels Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

Kapitel 7

Autoparametrischer Oszillator

Eine spezielle Gruppe nichtlinearer Systeme sind sogenannte autoparametrische Systeme. Darunter versteht man Schwingungssysteme, die sich aus mindestens zwei Teilsystemen zusammensetzen. Ein Teilsystem, das sogenannte Primärsystem, befindet sich durch eine Anregung im oszillierenden Zustand. Die Anregung kann durch Fremderregung, Parametererregung, Selbsterregung oder durch Kombination verschiedener Anregungsarten erfolgen. In dieser Arbeit wird ausschließlich eine als Funktion der Zeit vorgegebene Krafterregung $F(t)$ betrachtet. Im allgemeinen besitzt das Primärsystem den Freiheitsgrad N und wird durch die Zustandskoordinaten x_i, \dot{x}_i ($i = 1, \dots, N$) beschrieben. Das andere Teilsystem wird Sekundärsystem genannt. Es besitzt n Freiheitsgrade und wird durch die Zustandskoordinaten y_j, \dot{y}_j ($j = 1, \dots, n$) beschrieben. Die beiden Systeme sind derart nichtlinear miteinander gekoppelt, dass eine sogenannte semitriviale Lösung existieren kann, die durch die Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^N (x_i^2 + \dot{x}_i^2) \neq 0, \quad y_j = 0, \quad \dot{y}_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (7.1)$$

gekennzeichnet ist. Das bedeutet, dass das Sekundärsystem in Ruhe verweilt, während das Primärsystem aufgrund der Anregung schwingt. Die semitriviale Lösung kann in bestimmten Bereichen der Erregerkreisfrequenz instabil werden. Diese Bereiche nennt man Instabilitätsbereiche. Innerhalb der Instabilitätsbereiche oder beim Übergang in diese Bereiche befindet sich das System in autoparametrischer Resonanz. Aufgrund der Schwingungen des Primärsystems, die als Parametererregung in das Sekundärsystem eingehen, verweilt dieses nicht mehr länger im Ruhezustand. In diesem Zusammenhang spricht man auch von autoparametrischer Erregung.

Erste Arbeiten über autoparametrische Systeme gehen auf Gorelik und Witt [15], Minorsky [35] und Mettler [33], [34] zurück, die die freien Schwingungen eines elastischen Pendels untersuchten.

Das hier behandelte, in Abbildung 7.1 dargestellte Schwingungssystem wird auch autoparametrischer Schwingungstilger genannt. Es besteht aus einer Masse M , die über eine Feder mit der Federkonstanten c_1 und einem Dämpfer mit der Dämpferkonstanten k mit der Umgebung verbunden ist und einer Masse m , die über einen masselosen Stab der Länge ℓ und einen winkelschwindigkeitsproportionalen Dämpfer mit der Dämpferkonstanten k_d pendelnd an der Masse M befestigt ist. Die Masse M wird durch eine äußere, zeitabhängige Kraft $F(t)$ zu vertikalen Schwingungen angeregt, die mit der Koordinate y beschrieben werden. Die Pendelbewegung der Masse m wird

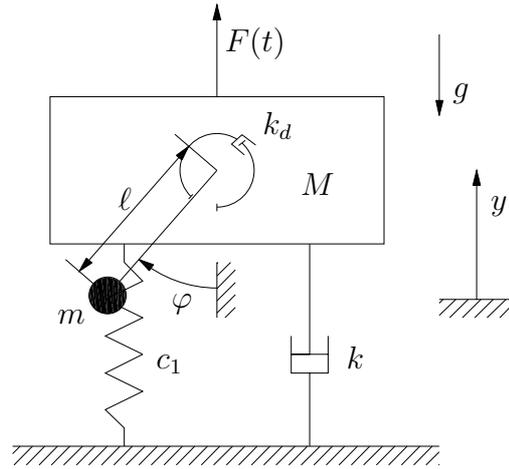


Abbildung 7.1: Autoparametrisches System bestehend aus einer Masse und einem Pendel

durch die Koordinate φ beschrieben. Alle Bewegungen des Systems laufen unter dem Einfluß des Schwerkraftfeldes der Erde ab. Dieses System wurde für deterministische Anregungen in der Literatur ausführlich diskutiert. Stellvertretend werden hier die Arbeiten von Haxton und Barr [20], Hatwal [19], Bajaj [5], Ruijgrok [45] und Banerjee u.a. [6] aufgeführt.

7.1 Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung des Systems kann mit der kinetischen und der potentiellen Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{y} + l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi} \cos \varphi)^2, \\ V &= mgl(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2}c_1 y^2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

sowie der virtuellen Arbeit der potentiallosen Kräfte

$$W_{virt} = -k\dot{y}\delta y - k_d\dot{\varphi}\delta\varphi = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 \quad (7.3)$$

durch Auswertung der Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i; \quad i = 1, 2 \quad (7.4)$$

gewonnen werden. Dabei sind

$$\begin{aligned} q_1 &= y, \\ q_2 &= \varphi \end{aligned} \quad (7.5)$$

die generalisierten Koordinaten und

$$\begin{aligned} Q_1 &= -k\dot{y}, \\ Q_2 &= -k_d\dot{\varphi} \end{aligned} \quad (7.6)$$

die generalisierten Kräfte, die aus (7.3) durch Koeffizientenvergleich ermittelt werden. Die Auswertung der Lagrangeschen Gleichungen (7.4) ergibt das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{y}_t + k\dot{y}_t + c_1y_t + m\ell(\ddot{\varphi}_t \sin \varphi_t + \dot{\varphi}_t^2 \cos \varphi_t) &= F(t), \\ m\ell^2\ddot{\varphi}_t + k_d\dot{\varphi}_t + mgl\varphi_t + m\ell\ddot{y}_t \sin \varphi_t &= 0, \end{aligned} \quad (7.7)$$

das mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{k}{M+m}, \quad \kappa_2 = \frac{k_d}{m\ell^2}, \quad \omega_1^2 = \frac{c}{M+m}, \\ \omega_2^2 &= \frac{g}{\ell}, \quad \mu = \frac{m}{M+m}, \quad C(t) = \frac{F(t)}{(M+m)\ell} \end{aligned} \quad (7.8)$$

auf die Form

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_t + \kappa_1\dot{\eta}_t + \omega_1^2\eta_t + \mu(\ddot{\varphi}_t \sin \varphi_t + \dot{\varphi}_t^2 \cos \varphi_t) &= C(t), \\ \ddot{\varphi}_t + \kappa_2\dot{\varphi}_t + \omega_2^2\varphi_t + \ddot{\eta}_t \sin \varphi_t &= 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

gebracht werden kann.

7.2 Anregungsmodell

Neben dem bisher betrachteten weißen Rauschen als Anregungsmodell, existieren auch Modelle, die es ermöglichen, dynamische Systeme durch farbiges Rauschen anzuregen. Eine Möglichkeit, farbiges Rauschen zu erzeugen, wird in [54] vorgestellt. Hierbei geht der Anregungsprozeß C_t mit der Amplitude Λ

$$C_t = \Lambda \cos \phi_t, \quad |\phi_t| \leq \pi \quad (7.10)$$

über die \cos -Funktion aus dem Anregungswinkel ϕ_t hervor. Der Anregungswinkel ϕ_t wird beschrieben durch die Differentialgleichung erster Ordnung

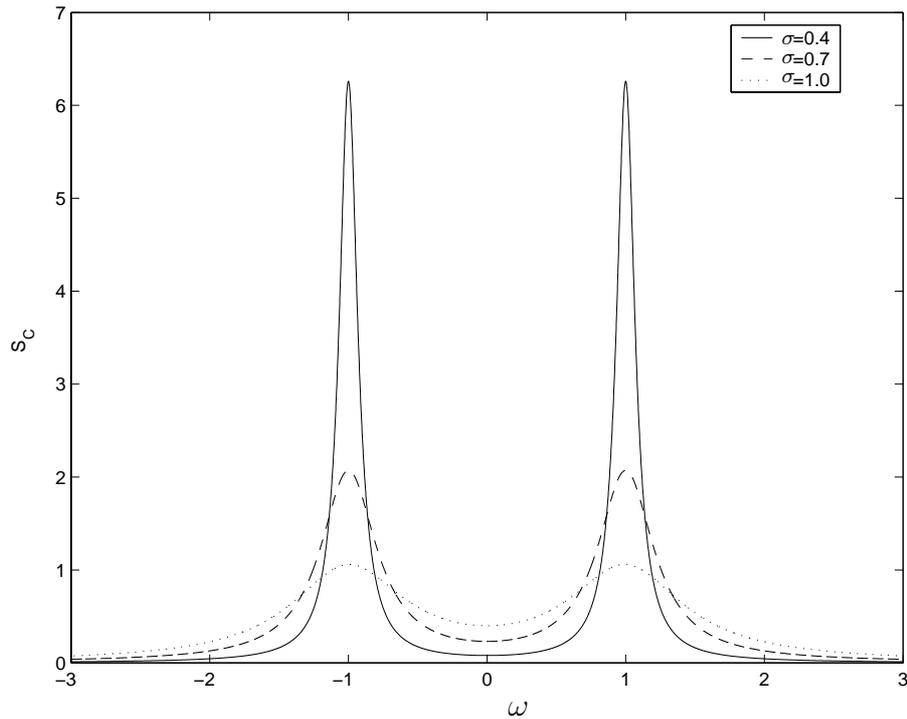
$$\dot{\phi}_t = -\omega_e + \sigma\xi_t \quad (7.11)$$

bzw. durch die äquivalente stochastische Differentialgleichung

$$d\phi_t = -\omega_e dt + \sigma dW_t. \quad (7.12)$$

Der Parameter ω_e stellt dabei die konstante Anregungsfrequenz dar, die durch weißes Rauschen mit der Intensität σ gestört wird. Durch die zusätzliche Beschreibung des Anregungswinkels mittels Gleichung (7.12) erhöht sich die Dimension des zu beschreibenden Problems um eins.

Der Anregungsprozeß kann durch die in Kapitel 2.2.2 beschriebene Spektraldichte

Abbildung 7.2: Spektraldichte der Anregung C_t mit Bandpaßcharakter

$$S_C(\omega) = \frac{1}{2} \Lambda^2 \sigma^2 \frac{\omega^2 + \omega_e^2 + \sigma^4/4}{[(\omega - \omega_e)^2 + \sigma^4/4][(\omega + \omega_e)^2 + \sigma^4/4]} \quad (7.13)$$

charakterisiert werden. In den Abbildungen 7.2 und 7.3 ist die Spektraldichte für verschiedene Parameter dargestellt. Für $\omega_e = 1.0$ und $\Lambda = 1.0$ zeigt die Anregung in Abbildung 7.2 Bandpaßcharakter mit einer zunehmend aufgeweiteten Spektraldichte für wachsende Intensitäten σ . Verschwindet die Anregungsfrequenz ω_e , so ergeben sich Tiefpaßspektren, wie sie in Abbildung 7.3 dargestellt sind. Wie aus Gleichung (7.13) ersichtlich ist, ergeben sich für den Anregungsprozeß offensichtlich zwei Grenzfälle:

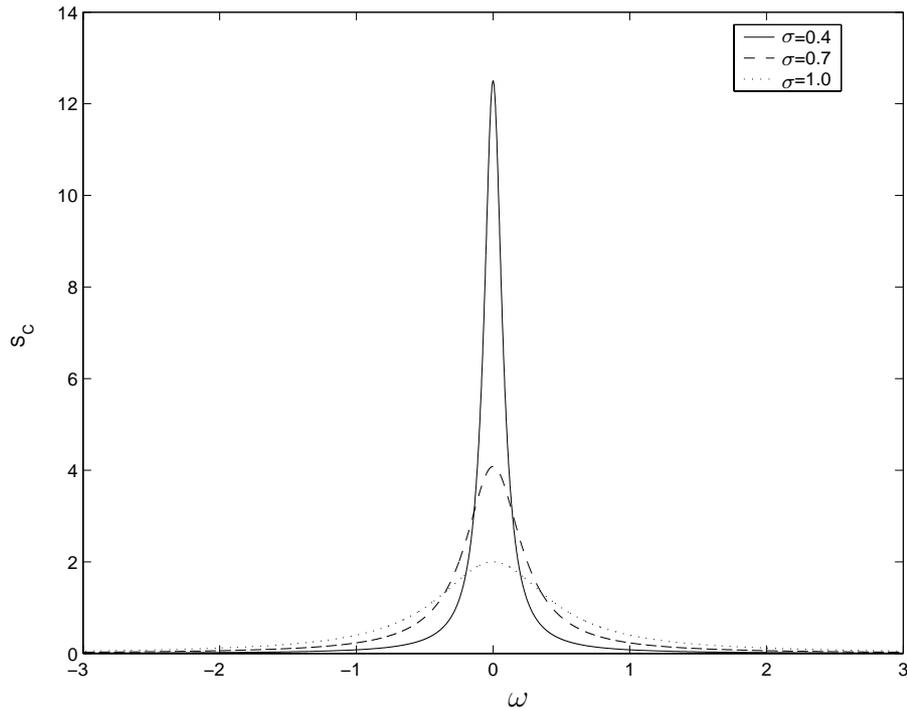
1. Für $\sigma \equiv 0$ konzentriert sich die Spektraldichte bei $\pm\omega_e$ in Form von Dirac'schen Delta-Funktionen. Dies bedeutet, daß eine harmonische Anregung vorliegt.
2. Für $\Lambda, \sigma \rightarrow \infty$ konvergiert die Spektraldichte gegen eine Konstante. Hierbei handelt es sich gemäß (2.65) um eine Anregung mit weißem Rauschen.

7.3 Stabilität der semitrivialen Lösung

Bei näherer Betrachtung der Systemgleichungen (7.9) ist zu erkennen, daß die Existenz einer semitrivialen Lösung, die charakteristisch für autparametrische Systeme ist, der Form

$$\eta_t = \eta_{s,t}; \quad \varphi_t = 0 \quad (7.14)$$

für das zu untersuchende Schwingungssystem möglich ist. Diese spezielle Lösung wird im folgenden bezüglich ihrer Stabilität untersucht.

Abbildung 7.3: Spektraldichte der Anregung C_t mit Tiefpaßcharakter

7.3.1 Variationsgleichung

Zur Stabilitätsuntersuchung der semitrivialen Lösung (7.14) wird zunächst die Variationsgleichung hergeleitet. Dazu wird die Lösung durch die beiden Größen $u_t \ll 1$ und $v_t \ll 1$ gemäß

$$\eta_t = \eta_{s,t} + u_t, \quad \varphi_t = 0 + v_t \quad (7.15)$$

gestört.

Durch Einsetzen des Störansatzes (7.15) in das Ausgangssystem (7.9) ergibt sich nach Linearisierung das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_{s,t} + \kappa_1 \dot{\eta}_{s,t} + \omega_1^2 \eta_{s,t} &= C_t, \\ \ddot{u}_t + \kappa_1 \dot{u}_t + \omega_1^2 u_t &= 0, \\ \ddot{v}_t + \kappa_2 \dot{v}_t + (\omega_2^2 + \ddot{\eta}_{s,t}) v_t &= 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Die Gleichung für die Störgröße u_t ist eine gewöhnliche, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die entkoppelt von den beiden anderen Gleichungen betrachtet werden kann. Dabei ist leicht zu erkennen, daß die Störung u_t für $t \rightarrow \infty$ verschwindet, da für das System eine positive Dämpfung κ_1 vorausgesetzt wird. Damit wird das Stabilitätsverhalten der semitrivialen Lösung alleine durch das Verhalten der Störung v_t charakterisiert. Es genügt also, zur Stabilitätsuntersuchung das reduzierte Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_{s,t} + \kappa_1 \dot{\eta}_{s,t} + \omega_1^2 \eta_{s,t} &= C_t, \\ \ddot{v}_t + \kappa_2 \dot{v}_t + (\omega_2^2 + \ddot{\eta}_{s,t})v_t &= 0\end{aligned}\quad (7.17)$$

heranzuziehen.

7.3.2 Anregung durch farbiges Rauschen

Wird das Schwingungssystem (7.9) durch den in Kapitel 7.2 vorgestellten farbigen Rauschprozeß angeregt, so ergibt sich mit den Zustandsvariablen

$$\begin{aligned}\eta_{1,s,t} &= \eta_{s,t}, & \eta_{2,s,t} &= \dot{\eta}_{s,t}, \\ v_{1,t} &= v_t, & v_{2,t} &= \dot{v}_t\end{aligned}\quad (7.18)$$

die zur Variationsgleichung (7.17) äquivalente stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned}d\eta_{1,s,t} &= \eta_{2,s,t}dt, \\ d\eta_{2,s,t} &= (\Lambda \cos \phi_t - \kappa_1 \eta_{2,s,t} - \omega_1^2 \eta_{1,s,t})dt, \\ dv_{1,t} &= v_{2,t}dt, \\ dv_{2,t} &= (-\kappa_2 v_{2,t} - (\omega_2^2 + \Lambda \cos \phi_t - \kappa_1 \eta_{2,s,t} - \omega_1^2 \eta_{1,s,t})v_{1,t})dt, \\ d\phi_t &= -\omega_e dt + \sigma dW_t,\end{aligned}\quad (7.19)$$

wobei sich die Dimension durch die Beschreibung des Anregungswinkels ϕ_t um eins erhöht.

Die Zustandskoordinaten der Störung werden gemäß dem Konzept von Khas'minskii nach der Vorschrift

$$\begin{aligned}A_t &= \sqrt{v_{1,t}^2 + v_{2,t}^2}, & 0 \leq A_t < \infty, \\ \psi_t &= \begin{cases} \arctan \frac{v_{2,t}}{v_{1,t}}, & v_{1,t} \geq 0, \\ \arctan \frac{v_{2,t}}{v_{1,t}} + \pi, & v_{1,t} < 0, \end{cases} & -\frac{\pi}{2} \leq \psi_t < \frac{3\pi}{2}\end{aligned}\quad (7.20)$$

auf Polarkoordinaten transformiert. Dadurch ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}d \ln A_t &= h_1(\psi_t, \eta_{1,s,t}, \eta_{2,s,t}, \phi_t)dt + g_1(\psi_t, \eta_{1,s,t}, \eta_{2,s,t}, \phi_t)dW_t, \\ d\psi_t &= h_2(\psi_t, \eta_{1,s,t}, \eta_{2,s,t}, \phi_t)dt + g_2(\psi_t, \eta_{1,s,t}, \eta_{2,s,t}, \phi_t)dW_t, \\ d\eta_{1,s,t} &= \eta_{2,s,t}dt, \\ d\eta_{2,s,t} &= (\Lambda \cos \phi_t - \kappa_1 \eta_{2,s,t} - \omega_1^2 \eta_{1,s,t})dt, \\ d\phi_t &= -\omega_e dt + \sigma dW_t\end{aligned}\quad (7.21)$$

mit den Drift- und Diffusionstermen

$$\begin{aligned}h_1 &= -\kappa_2 \sin^2 \psi_t + [1 - (\omega_2^2 + \Lambda \cos \phi_t - \kappa_1 \eta_{2,s,t} - \omega_1^2 \eta_{1,s,t})] \sin \psi_t \cos \psi_t, \\ h_2 &= -\sin^2 \psi_t - (\omega_2^2 + \Lambda \cos \phi_t - \kappa_1 \eta_{2,s,t} - \omega_1^2 \eta_{1,s,t}) \cos^2 \psi_t - \kappa_2 \sin \psi_t \cos \psi_t, \\ g_1 &= 0, \\ g_2 &= 0\end{aligned}\quad (7.22)$$

für den Amplitudenprozeß $\ln A_t$ und den Winkelprozeß ψ_t . Aufgrund der durch die Koordinatentransformation erhaltenen Separation des instationären Lösungsprozesses kann der größte Ljapunov-Exponent λ_1 durch die Fürstenberg-Khas'minskii-Gleichung

$$\lambda_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} (-\kappa_2 \sin^2 \psi + K \sin \psi \cos \psi) p(\psi, \eta_1, \eta_2, \phi) d\phi d\psi d\eta_2 d\eta_1 \quad (7.23)$$

mit

$$K = [1 - (\omega_2^2 + \Lambda \cos \phi_t - \kappa_1 \eta_{2,s,t} - \omega_1^2 \eta_{1,s,t})] \quad (7.24)$$

bestimmt werden. Die noch unbekannt stationäre Verteilungsdichte $p(\psi, \eta_1, \eta_2, \phi)$ wird mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation ermittelt.

In Abbildung 7.4 ist der größte Ljapunov-Exponent λ_1 als Funktion der natürlichen Eigenkreisfrequenz des Pendels ω_2 und der Amplitude der Rauschanregung Λ dargestellt. Bei der Simulation wurden für jeden Exponenten $N_s = 10^7$ Zeitschritte simuliert. Das Verhältnis der konstanten Anregungsfrequenz ω_e zur natürlichen Eigenkreisfrequenz des Primärsystems betrug $\frac{\omega_e}{\omega_1} = 1.0$. Für die Dämpfungsparameter wurde $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.2$ gewählt. Abbildung 7.6 zeigt einen Schnitt durch Abbildung 7.4 auf der Höhe von $\lambda_1 = 0$. Hierdurch sind die Stabilitäts- und Instabilitätsbereiche der semitrivialen Lösung deutlich zu erkennen. In den Abbildungen 7.5 und 7.7 ist ebenfalls der Ljapunov-Exponent λ_1 als Funktion der Amplitude Λ und der Eigenkreisfrequenz ω_2 dargestellt. Hier jedoch für den Fall einer verschwindenden Rauschanregung $\sigma = 0.0$. Dies entspricht einer harmonischen Anregung mit konstanten Anregungsfrequenz ω_e . Für den dargestellten Parameterbereich ist eine Stabilisierung der semitrivialen Lösung durch die Einführung eines Rauschprozesses zu erkennen. Dieser Stabilisierungseffekt kann jedoch nicht auf den gesamten Parameterbereich verallgemeinert werden.

7.4 Stabilität nichttrivialer Lösungen

Neben der semitrivialen Lösung (7.14) existiert auch eine nichttriviale Lösung der Form

$$\eta_t = \eta_{s,t}; \quad \varphi_t = \varphi_{s,t}. \quad (7.25)$$

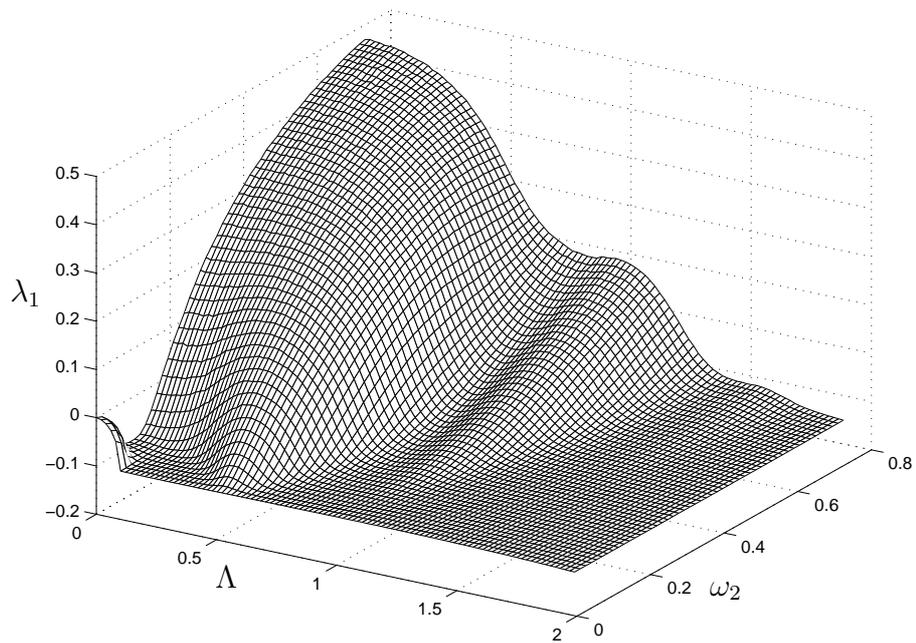
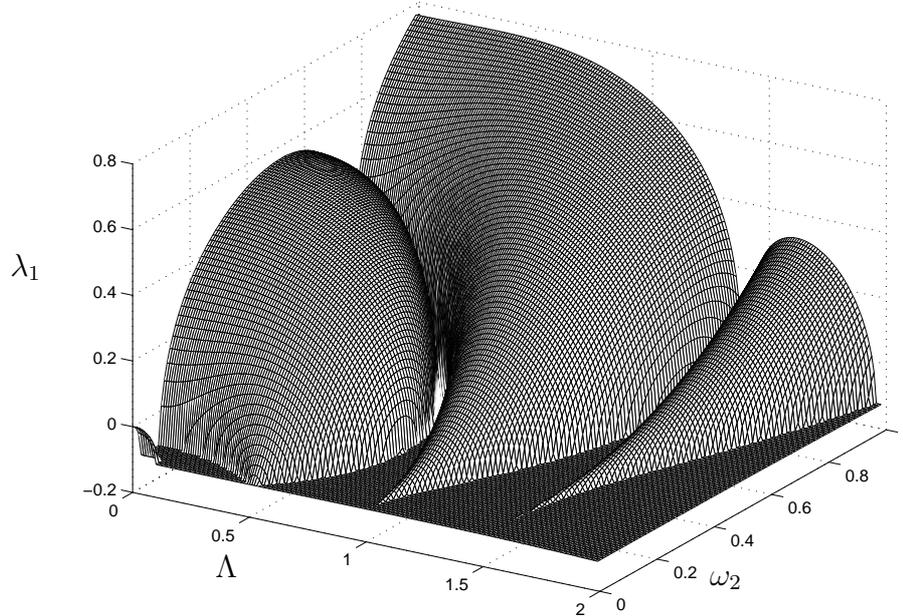
In diesem Fall ist zusätzlich zum Primärsystem auch das Sekundärsystem im oszillierenden Zustand. Für gewisse Parameterkombinationen kann auch diese Lösung instabil werden, was Gegenstand der folgenden Untersuchung sein soll.

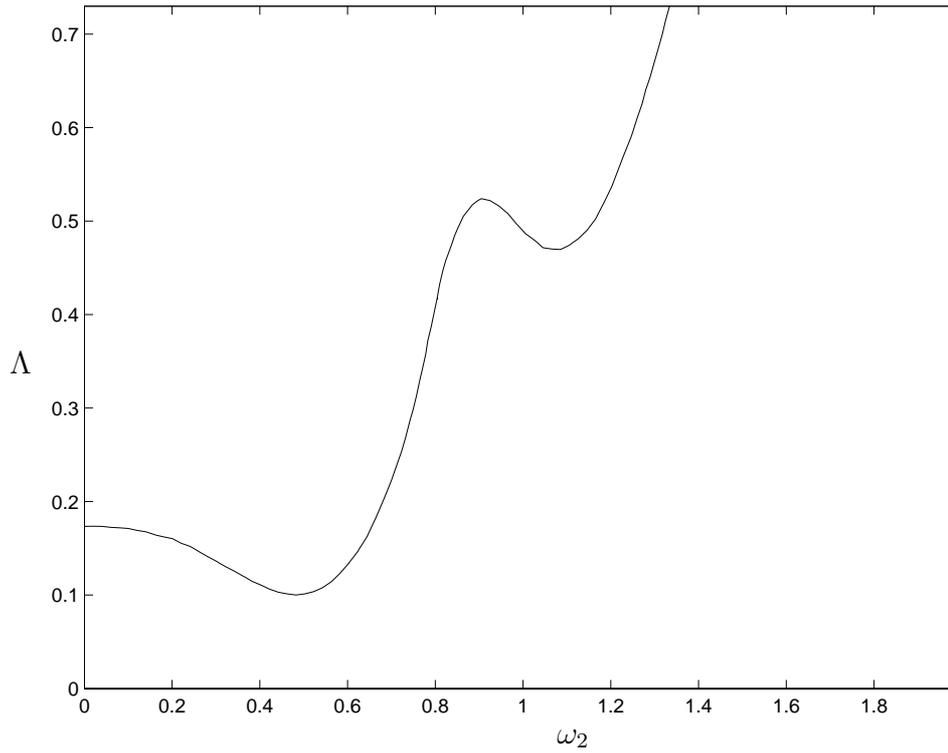
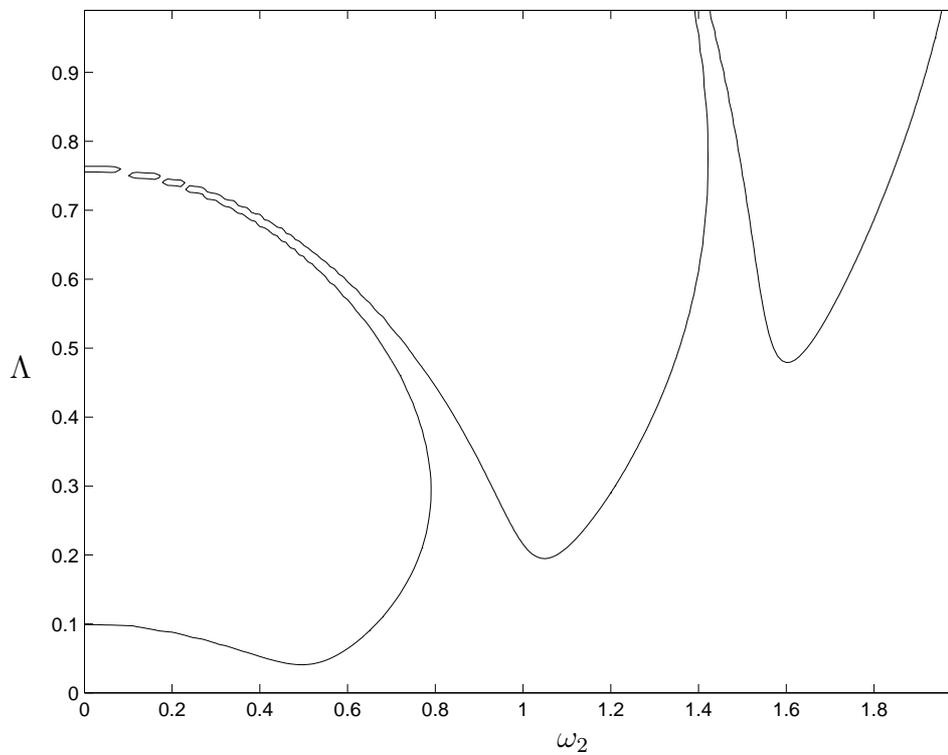
7.4.1 Variationsgleichung

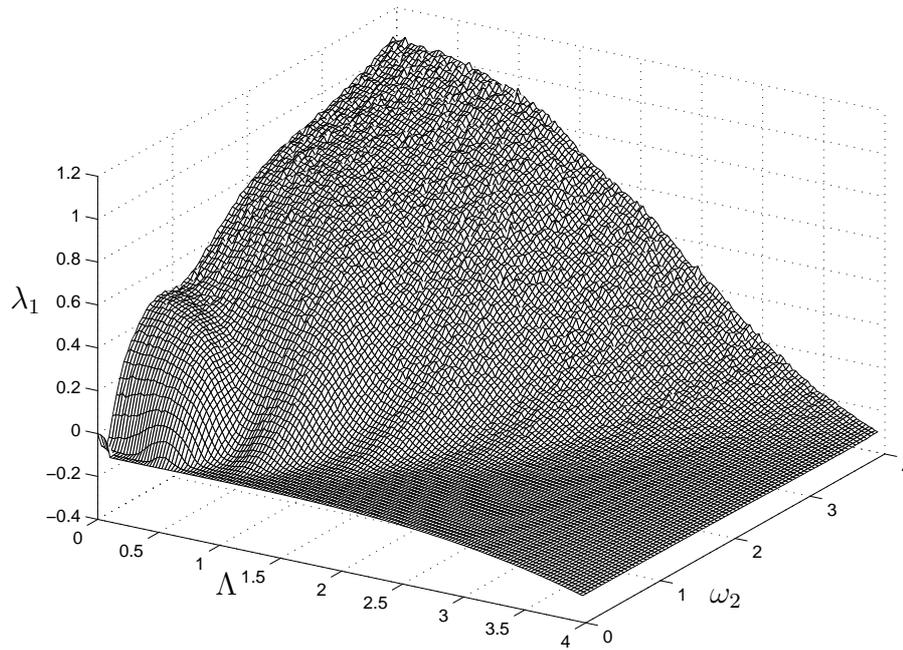
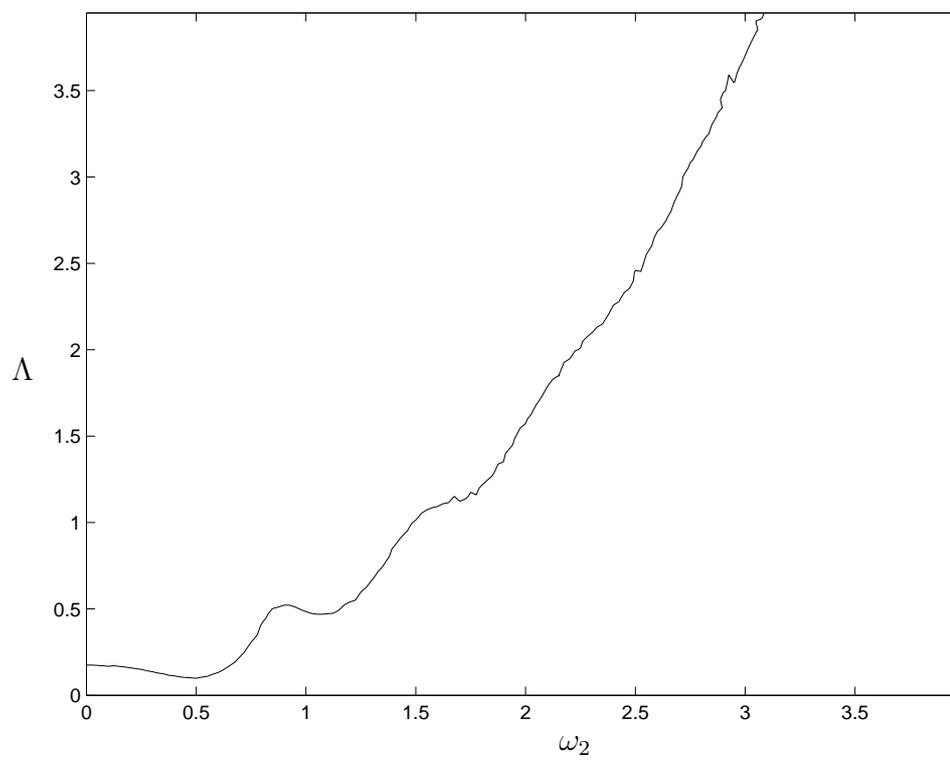
Die Variationsgleichung für die nichttriviale Lösung ist unter Verwendung eines Störansatzes der Form

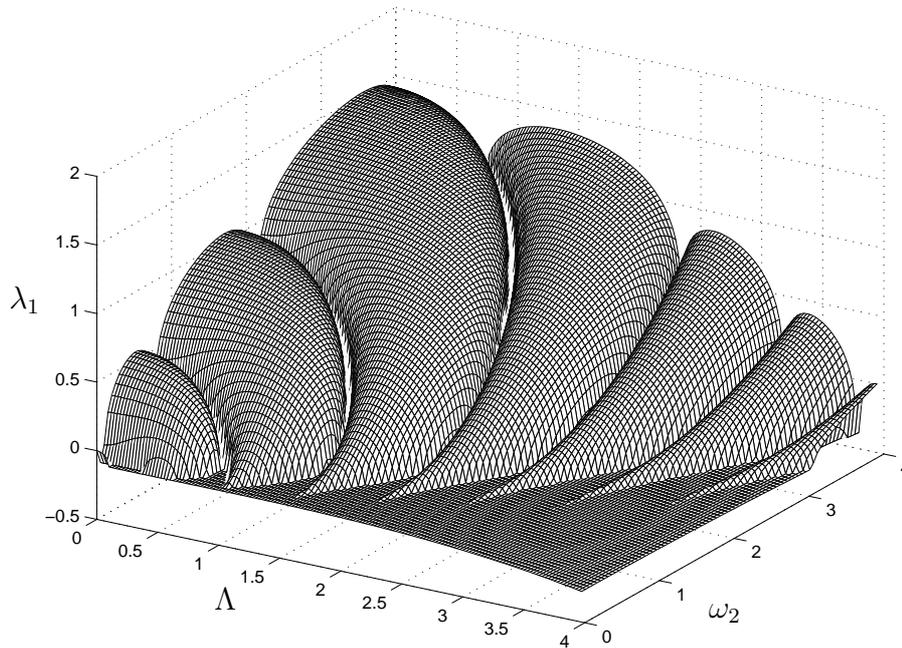
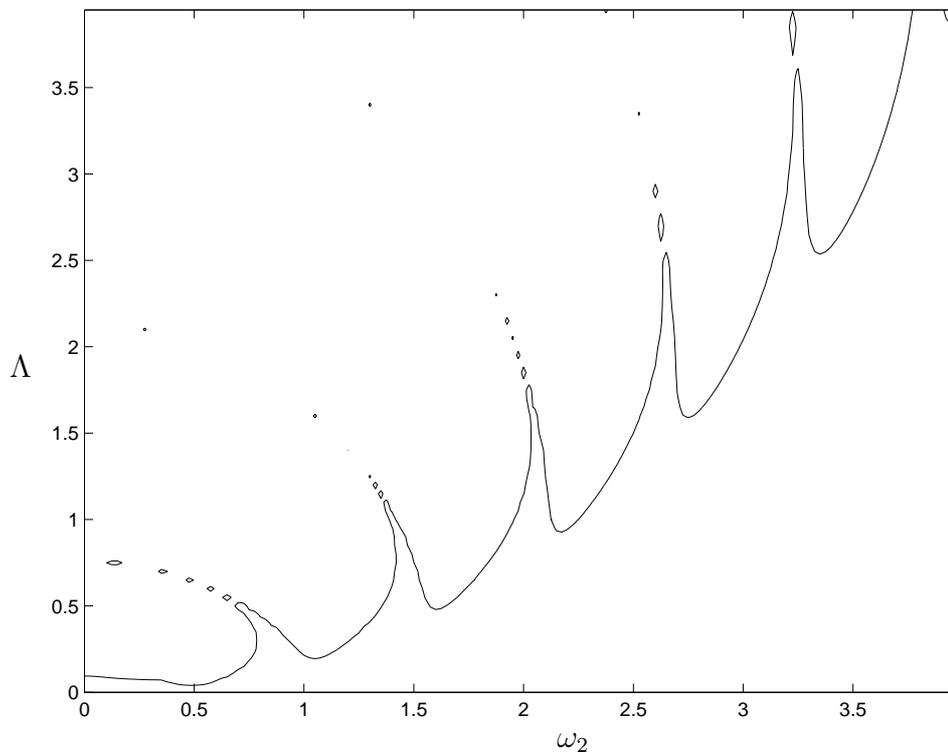
$$\eta_t = \eta_{s,t} + u_t; \quad \varphi_t = \varphi_{s,t} + v_t \quad (7.26)$$

mit den Störgrößen $u_t \ll 1$ und $v_t \ll 1$ zu ermitteln. Die nichtlinearen Ausdrücke

Abbildung 7.4: Größter Ljapunov-Exponent für $\sigma = 0.7$ Abbildung 7.5: Größter Ljapunov-Exponent für $\sigma = 0.0$ (harmonische Anregung)

Abbildung 7.6: Stabilitätskarte für $\sigma = 0.7$ Abbildung 7.7: Stabilitätskarte für $\sigma = 0.0$ (harmonische Anregung)

Abbildung 7.8: Stabilitätskarte für $\sigma = 0.7$ Abbildung 7.9: Stabilitätskarte für $\sigma = 0.7$

Abbildung 7.10: Stabilitätskarte für $\sigma = 0.0$ (harmonische Anregung)Abbildung 7.11: Stabilitätskarte für $\sigma = 0.0$ (harmonische Anregung)

$$\begin{aligned} f_1 &= \mu (\ddot{\varphi}_t \sin \varphi_t + \dot{\varphi}_t^2 \cos \varphi_t), \\ f_2 &= \ddot{\eta}_t \sin \varphi_t, \end{aligned} \quad (7.27)$$

die in den Systemgleichungen (7.9) auftreten, werden mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung um die zu untersuchenden Lösungen $\eta_{s,t}$ und $\varphi_{s,t}$ linearisiert:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \mu (\ddot{\varphi}_{s,t} \sin \varphi_{s,t} + \dot{\varphi}_{s,t}^2 \cos \varphi_{s,t}) + \mu v_t (\ddot{\varphi}_{s,t} \cos \varphi_{s,t} - \dot{\varphi}_{s,t}^2 \sin \varphi_{s,t}) \\ &\quad + 2\mu \dot{\varphi}_{s,t} \dot{v}_t \cos \varphi_{s,t} + \mu \ddot{v}_t \sin \varphi_{s,t}, \\ \bar{f}_2 &= \ddot{\eta}_{s,t} \sin \varphi_{s,t} + \ddot{u}_t \sin \varphi_{s,t} + \ddot{\eta}_{s,t} v_t \cos \varphi_{s,t}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Zusammen mit den Systemgleichungen für die nicht in geschlossener Form angebbaren Lösungsfunktion $\eta_{s,t}$ und $\varphi_{s,t}$, ergibt sich das für die Stabilitätsanalyse zu betrachtende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_{s,t} + \kappa_1 \dot{\eta}_{s,t} + \omega_1^2 \eta_{s,t} + \mu (\ddot{\varphi}_{s,t} \sin \varphi_{s,t} + \dot{\varphi}_{s,t}^2 \cos \varphi_{s,t}) &= \Lambda \cos \phi_t, \\ \ddot{\varphi}_{s,t} + \kappa_2 \dot{\varphi}_{s,t} + \omega_2^2 \varphi_{s,t} + \ddot{\eta}_{s,t} \sin \varphi_{s,t} &= 0, \\ \ddot{u}_t + \kappa_1 \dot{u}_t + \omega_1^2 u_t + \mu v_t (\ddot{\varphi}_{s,t} \cos \varphi_{s,t} - \dot{\varphi}_{s,t}^2 \sin \varphi_{s,t}) + \\ &\quad + 2\mu \dot{\varphi}_{s,t} \dot{v}_t \cos \varphi_{s,t} + \mu \ddot{v}_t \sin \varphi_{s,t} = 0, \\ \ddot{v}_t + \kappa_2 \dot{v}_t + \omega_2^2 v_t + \ddot{u}_t \sin \varphi_{s,t} + \ddot{\eta}_{s,t} v_t \cos \varphi_{s,t} &= 0, \\ \dot{\phi}_t &= -\omega_e + \sigma \xi_t. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Für die Angabe der äquivalenten stochastischen Differentialgleichung muß das Gleichungssystem (7.29) auf ein System erster Ordnung umgeformt werden. Diese Umformung geschieht unter Verwendung der Systemmatrix \mathbf{B} , die durch die Einführung der Zustandskoordinaten

$$\begin{aligned} \eta_{1,t} &= \eta_{s,t}, & \varphi_{1,t} &= \varphi_{s,t}, & u_{1,t} &= u_t, & v_{1,t} &= v_t, \\ \eta_{2,t} &= \dot{\eta}_{s,t}, & \varphi_{2,t} &= \dot{\varphi}_{s,t}, & u_{2,t} &= \dot{u}_t, & v_{2,t} &= \dot{v}_t \end{aligned} \quad (7.30)$$

aus der Darstellung

$$\mathbf{B} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_t \\ \dot{\eta}_{1,t} \\ \dot{\varphi}_{1,t} \\ \dot{u}_{1,t} \\ \dot{v}_{1,t} \\ \dot{\eta}_{2,t} \\ \dot{\varphi}_{2,t} \\ \dot{u}_{2,t} \\ \dot{v}_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega + \sigma \xi_t \\ \eta_{2,t} \\ \varphi_{2,t} \\ u_{2,t} \\ v_{2,t} \\ -\kappa_1 \eta_{2,t} - \omega_1^2 \eta_{1,t} - \mu \varphi_{2,t}^2 \cos \varphi_{1,t} + C \cos \phi_t \\ -\kappa_2 \varphi_{2,t} - \omega_2^2 \varphi_{1,t} \\ -\kappa_1 u_{2,t} - \omega_1^2 u_{1,t} + \mu \varphi_{2,t}^2 v_{1,t} \sin \varphi_{1,t} - 2\mu \varphi_{2,t} v_{2,t} \cos \varphi_{1,t} \\ -\kappa_2 v_{2,t} - \omega_2^2 v_{1,t} \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

gefunden wird. Durch Linksmultiplikation mit der inversen Matrix \mathbf{B}^{-1} ergibt sich das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_t \\ \dot{\eta}_{1,t} \\ \dot{\varphi}_{1,t} \\ \dot{u}_{1,t} \\ \dot{v}_{1,t} \\ \dot{\eta}_{2,t} \\ \dot{\varphi}_{2,t} \\ \dot{u}_{2,t} \\ \dot{v}_{2,t} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} -\omega + \sigma\xi_t \\ \eta_{2,t} \\ \varphi_{2,t} \\ u_{2,t} \\ v_{2,t} \\ -\kappa_1\eta_{2,t} - \omega_1^2\eta_{1,t} - \mu\varphi_{2,t}^2 \cos \varphi_{1,t} + C \cos \phi_t \\ -\kappa_2\varphi_{2,t} - \omega_2^2\varphi_{1,t} \\ -\kappa_1u_{2,t} - \omega_1^2u_{1,t} + \mu\varphi_{2,t}^2v_{1,t} \sin \varphi_{1,t} - 2\mu\varphi_{2,t}v_{2,t} \cos \varphi_{1,t} \\ -\kappa_2v_{2,t} - \omega_2^2v_{1,t} \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

Ein kritischer Fall bei der oben beschriebenen Umformung tritt ein, wenn die Systemmatrix \mathbf{B} singulär wird. Hier gilt dann

$$\det \mathbf{B} = (1 - \mu \sin^2 \varphi_{1,t})^2 = 0. \quad (7.33)$$

Für $\mu < 1$ kann die Determinante der Matrix \mathbf{B} nicht identisch verschwinden. Dies ist aber immer für $M > 0$ erfüllt, so daß die hier durchgeführte Invertierung immer möglich ist.

Durch Einführung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{1}{-1 + \mu \sin^2 \varphi_{1,t}}, & D_2 &= -\frac{\sin \varphi_{1,t}}{-1 + \mu \sin^2 \varphi_{1,t}}, \\ D_3 &= \frac{2\mu \sin \varphi_{1,t} \cos \varphi_{1,t}}{(-1 + \mu \sin^2 \varphi_{1,t})}, & D_4 &= \frac{\cos \varphi_{1,t}(1 + \mu \sin^2 \varphi_{1,t})}{(-1 + \mu \sin^2 \varphi_{1,t})}, \\ D_5 &= -\kappa_1\eta_{2,t} - \omega_1^2\eta_{1,t} - \mu\varphi_{2,t}^2 \cos \varphi_{1,t} + C \cos \phi_t, & D_6 &= -\kappa_2\varphi_{2,t} - \omega_2^2\varphi_{1,t} \end{aligned} \quad (7.34)$$

ergibt sich die Inverse der Systemmatrix in der kompakten Schreibweise

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_1 & \mu D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 & D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{1,t}D_3 & \mu v_{1,t}D_4 & D_1 & \mu D_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{1,t}D_4 & v_{1,t}D_3 & D_2 & D_1 \end{pmatrix}. \quad (7.35)$$

Die stochastische Differentialgleichung nach Itô kann damit in der Form

$$\begin{aligned}
d\phi_t &= -\omega_e dt + \sigma dW_t, \\
d\eta_{1,t} &= \eta_{2,t} dt, \\
d\varphi_{1,t} &= \varphi_{2,t} dt, \\
du_{1,t} &= u_{2,t} dt, \\
dv_{1,t} &= v_{2,t} dt, \\
d\eta_{2,t} &= \left[D_1 D_5 + \mu D_2 D_6 \right] dt, \\
d\varphi_{2,t} &= \left[D_2 D_5 + D_1 D_6 \right] dt, \\
du_{2,t} &= \left[v_{1,t} D_3 D_5 + \mu v_{1,t} D_4 D_6 + \right. \\
&\quad \left. D_1 \left(-\kappa_1 u_{2,t} - \omega_1^2 u_{1,t} + \mu v_{2,t} \varphi_{2,t}^2 \sin \varphi_{1,t} - 2\mu v_{2,t} \varphi_{2,t} \cos \varphi_{1,t} \right) \right. \\
&\quad \left. + \mu D - 2 \left(-\kappa_2 v_{2,t} - \omega_2^2 v_{1,t} \right) \right] dt, \\
dv_{2,t} &= \left[v_{1,t} D_4 D_5 + v_{1,t} D_3 D_6 + \right. \\
&\quad \left. D_2 \left(-\kappa_1 u_{2,t} - \omega_1^2 u_{1,t} + \mu v_{2,t} \varphi_{2,t}^2 \sin \varphi_{1,t} - 2\mu v_{2,t} \varphi_{2,t} \cos \varphi_{1,t} \right) \right. \\
&\quad \left. + D_1 \left(-\kappa_2 v_{2,t} - \omega_2^2 v_{1,t} \right) \right] dt
\end{aligned} \tag{7.36}$$

angegeben werden. Nach dem Konzept von Khas'minskii werden die Zustandskoordinaten der Störungen gemäß der Vorschrift

$$\begin{aligned}
A_t &= \sqrt{u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2 + v_{1,t}^2 + v_{2,t}^2}, \quad 0 \leq A_t < \infty, \\
\psi_t &= \begin{cases} \arctan \frac{u_{2,t}}{u_{1,t}}, & u_{1,t} \geq 0, \\ \arctan \frac{u_{2,t}}{u_{1,t}} + \pi, & u_{1,t} < 0, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi_t < \frac{3\pi}{2}, \\
\psi_{1,t} &= \arctan \frac{v_{1,t}}{\sqrt{u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi_{1,t} < \frac{\pi}{2}, \\
\psi_{2,t} &= \arctan \frac{v_{2,t}}{\sqrt{u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2 + v_{1,t}^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi_{2,t} < \frac{\pi}{2}
\end{aligned} \tag{7.37}$$

auf Hyperkugelkoordinaten transformiert. Dadurch erhält man das stochastische Differentialgleichungssystem

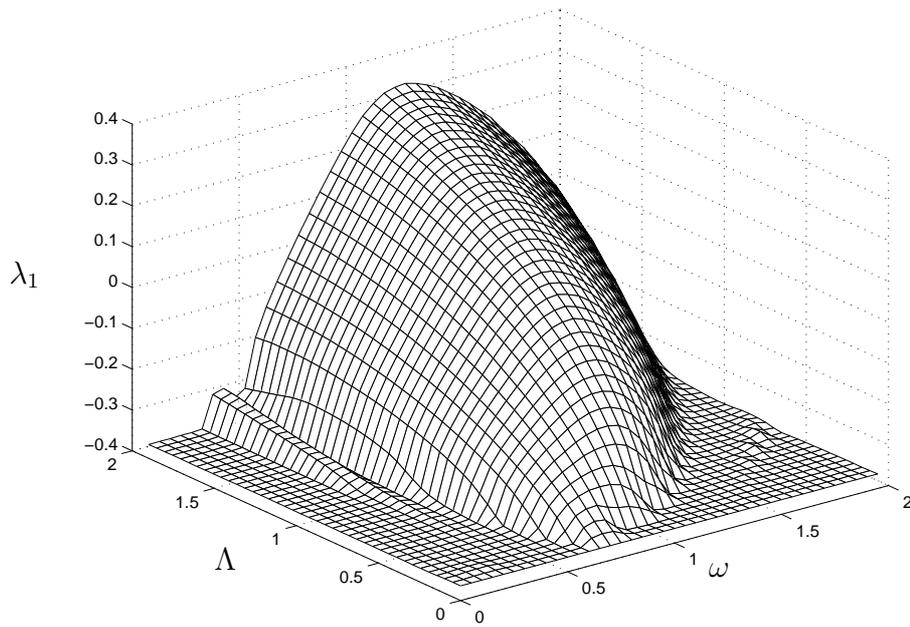
$$\begin{aligned}
d \ln A_t &= h_1(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dt + \\
&\quad g_1(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dW_t, \\
d\psi_t &= h_2(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dt + \\
&\quad g_2(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dW_t, \\
d\psi_{1,t} &= h_3(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dt + \\
&\quad g_3(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dW_t, \\
d\psi_{2,t} &= h_4(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dt + \\
&\quad g_4(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dW_t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\eta_{1,t} &= \eta_{2,t}dt, \\
d\eta_{2,t} &= (D_1D_5 + \mu D_2D_6) dt, \\
d\varphi_{1,t} &= \varphi_{2,t}dt, \\
d\varphi_{2,t} &= (D_2D_5 + D_1D_6) dt, \\
d\phi_t &= -\omega dt + \sigma dW_t
\end{aligned} \tag{7.38}$$

bei dem der instationäre Lösungsanteil $\ln A_t$ einseitig von den stationären Prozessen entkoppelt ist. Die Diffusionsterme der transformierten Zustandsgleichung g_1, g_2, g_3 und g_4 verschwinden alle, da das weiße Rauschen nur in der Gleichung für den Anregungswinkel auftritt. Dieser ist jedoch nicht an der Koordinatentransformation beteiligt. Die entsprechenden Diffusionsterme ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
h_1 &= (1 - \omega_1^2 D_1) \sin \psi_t \cos \psi_t \cos^2 \psi_{1,t} \cos^2 \psi_{2,t} + \\
&\quad + (D_3 D_5 + \mu D_4 D_6 + \mu D_1 \varphi_{2,t}^2 \sin \varphi_{1,t} - \mu \omega_2^2 D_2) \sin \psi_t \sin \psi_{1,t} \cos \psi_{1,t} \cos^2 \psi_{2,t} - \\
&\quad - \kappa_1 D_1 \sin^2 \psi_t \cos^2 \psi_{1,t} \cos^2 \psi_{2,t} - (2\mu D_1 \varphi_{2,t} \cos \varphi_{1,t} + \\
&\quad + \mu \kappa_2 D_2) \sin \psi_t \cos \psi_{1,t} \sin \psi_{2,t} \cos \psi_{2,t} + (1 + D_4 D_5 + D_3 D_6 + \\
&\quad + \mu D_2 \varphi_{2,t}^2 \sin \varphi_{1,t} - \omega_2^2 D_1) \sin \psi_{1,t} \sin \psi_{2,t} \cos \psi_{2,t} - \\
&\quad - (\kappa_1 D_2 \sin \psi_t + \omega_1^2 D_2 \cos \psi_t) \cos \psi_{1,t} \sin \psi_{2,t} \cos \psi_{2,t} - \\
&\quad - (2\mu D_2 \varphi_{2,t} \cos \varphi_{1,t} + \kappa_2 D_1) \sin^2 \psi_{2,t}, \\
h_2 &= -\sin^2 \psi_t + (D_3 D_5 + \mu D_4 D_6 + \mu D_1 \varphi_{2,t}^2 \sin \varphi_{1,t} - \mu D_2 \omega_2^2) \cos \psi_t \tan \psi_t \\
&\quad - (2\mu D_1 \varphi_{2,t} \cos \varphi_{1,t} + \kappa_2 \mu D_2) \frac{\cos \psi_t}{\cos \psi_{1,t}} \tan \psi_{2,t} - \kappa_1 D_1 \sin \psi_t \cos \psi_t \\
&\quad - \omega_1^2 D_1 \cos^2 \psi_t, \\
h_3 &= \cos \psi_{1,t} \tan \psi_{2,t} + (\kappa_1 D_1 \sin^2 \psi_t - \sin \psi_t \cos \psi_t) \sin \psi_{1,t} \cos \psi_{1,t} - \\
&\quad - (D_3 D_5 + \mu D_4 D_6 + \mu D_1 \varphi_{2,t}^2 \sin \varphi_{1,t} - \mu D_2 \omega_2^2) \sin \psi_t \sin^2 \psi_{1,t} + \\
&\quad + (2\mu D_1 \varphi_{2,t} \cos \varphi_{1,t} + \mu \kappa_2 D_2) \sin \psi_t \sin \psi_{1,t} \tan \psi_{2,t} + D_1 \omega_1^2 \sin \psi_t \cos \psi_t \cos \psi_{1,t}, \\
h_4 &= -\sin \psi_{1,t} \sin^2 \psi_{2,t} + (D_1 \omega_1^2 - 1) \sin \psi_t \cos \psi_t \cos^2 \psi_{1,t} \sin \psi_{2,t} \cos \psi_{2,t} - \\
&\quad - (\mu D_4 D_6 + D_3 D_5 - \mu D_2 \omega_2^2) \sin \psi_t \sin \psi_{1,t} \cos \psi_{1,t} \sin \psi_{2,t} \cos \psi_{2,t} \\
&\quad + 2\mu D_1 \varphi_{2,t} \cos \varphi_{1,t} \sin \psi_t \cos \psi_{1,t} \sin^2 \psi_{2,t} - \\
&\quad - (\kappa_2 D_1 + 2\mu D_2 \varphi_{2,t} \cos \varphi_{1,t}) \sin \psi_{2,t} \cos \psi_{2,t} + \\
&\quad + \kappa_2 \mu D_2 \sin \psi_t \cos \psi_{1,t} \sin^2 \psi_{2,t} - \mu D_1 \varphi_{2,t}^2 \sin \varphi_{1,t} \sin \psi_t \sin \psi_{1,t} \cos \psi_{1,t} \sin \psi_{2,t} + \\
&\quad + (\mu D_2 \varphi_{2,t}^2 \sin \varphi_{1,t} + D_4 D_5 + D_3 D_6 - \omega_2^2 D_1) \sin \psi_{1,t} \cos^2 \psi_{2,t} - \\
&\quad - (\omega_1^2 D_2 \cos \psi_t + \kappa_1 D_2 \sin \psi_t) \cos \psi_{1,t} \cos^2 \psi_{2,t} \\
&\quad + \kappa_1 D_1 \sin^2 \psi_t \cos^2 \psi_{1,t} \sin^2 \psi_{2,t} \cos \psi_{2,t}.
\end{aligned} \tag{7.39}$$

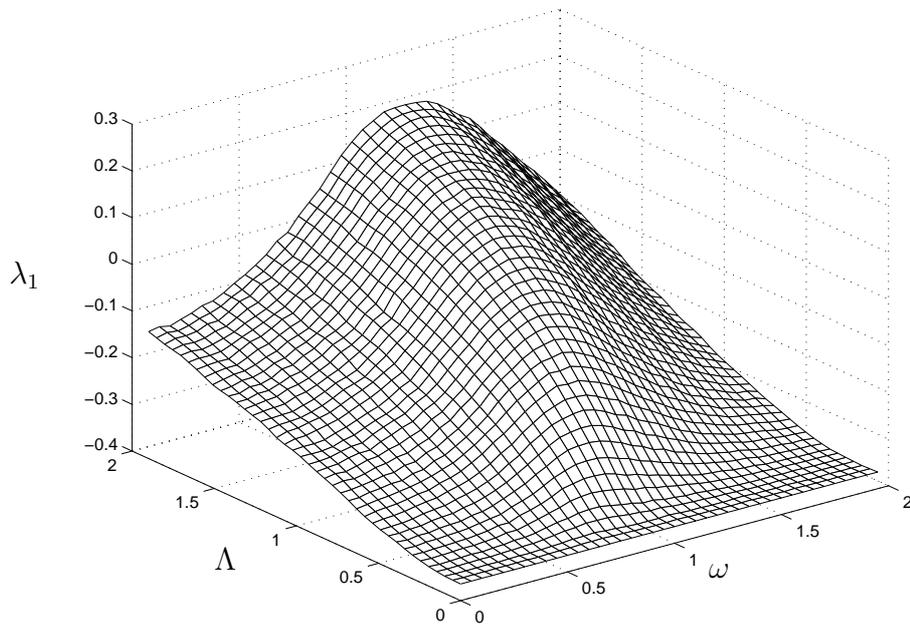
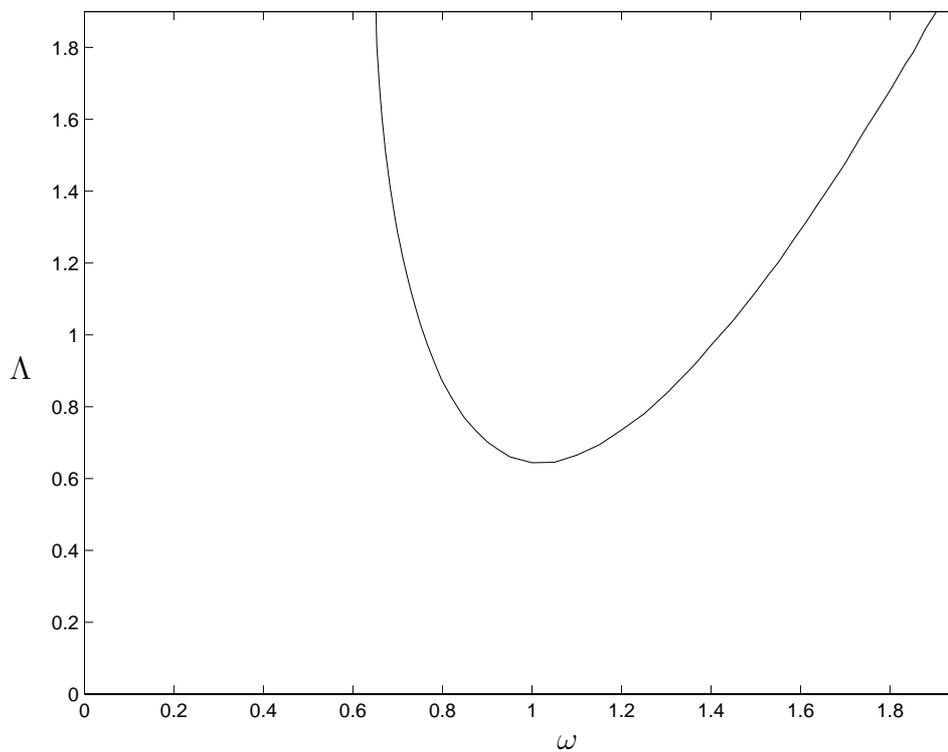
Nach der Transformation ist es möglich, den größten Ljapunov-Exponenten λ_1 , unter Voraussetzung von Ergodizität im Mittel, über die Fürstenberg-Khas'minskii-Gleichung,

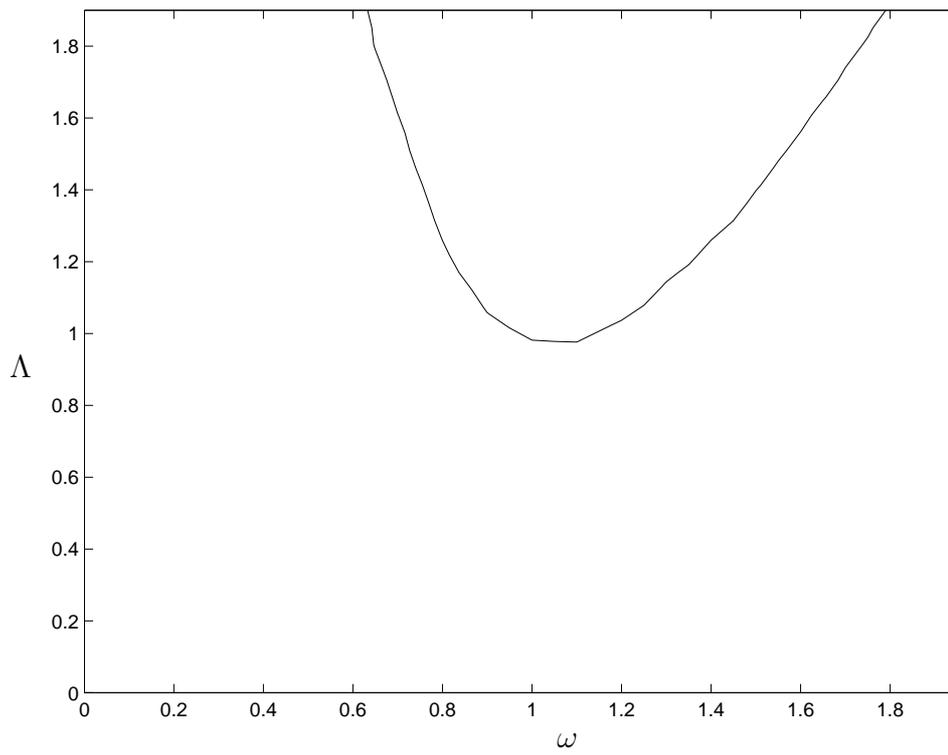
Abbildung 7.12: Stabilitätskarte für $\sigma = 0.0$ (harmonische Anregung)

die für das gegebene Problem durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} h_1 p(\eta_1, \eta_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi, \psi_1, \psi_2, \phi) d\eta_1 d\eta_2 d\varphi_1 d\varphi_2 d\psi d\psi_1 d\psi_2 d\phi \quad (7.40)$$

gegeben ist, zu bestimmen. Die Berechnung der achtdimensionalen Verteilungsdichte in Gleichung (7.40) erfolgt über eine Monte-Carlo-Simulation. In den Abbildungen 7.12 und 7.13 ist der größte Ljapunov-Exponent als Funktion der Anregungsamplitude Λ und der Erregerfrequenz ω_e für eine harmonische Anregung ($\sigma = 0.0$) und für einen farbigen Anregungsprozeß mit der Intensität $\sigma = 0.7$ dargestellt. Für die Simulation wurden $N_s = 10^6$ Zeitschritte simuliert. Die natürlichen Eigenkreisfrequenzen ω_1 und ω_2 standen im Verhältnis 2 : 1. Als Dämpfungsparameter wurden $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.7$ gewählt. In den Abbildung 7.14 und 7.15 sind Höhenlinien für $\lambda_1 = 0$ aufgetragen. Es ist für die angegebene Parameterkombination ein stabilisierender Effekt durch das farbige Rauschen zu erkennen. Ähnlich wie bei der semitrivialen Lösung ist jedoch auch hier keine Übertragung dieses Stabilisierungseffektes auf andere Parameterkombinationen möglich. Es muß für jede dieser Kombinationen erneut eine vollständige Stabilitätsanalyse durchgeführt werden.

Abbildung 7.13: Stabilitätskarte für $\sigma = 0.7$ Abbildung 7.14: Stabilitätskarte für $\sigma = 0.0$ (harmonische Anregung)

Abbildung 7.15: Stabilitätskarte für $\sigma = 0.7$

Kapitel 8

Zusammenfassung

Bei der Untersuchung dynamischer Systeme steht oft die Frage nach der physikalischen Realisierbarkeit einer Lösung im Vordergrund. Hierbei findet der Begriff der Stabilität eine vielfältige Verwendung. In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Aussagen auf Basis der kinetischen Stabilitätstheorie getroffen, da Stabilitätsprobleme offensichtlich ihrer Natur nach kinetische Fragestellungen sind. In der kinetischen Stabilitätstheorie wird alleine der Stabilitätsbegriff im Sinne Ljapunovs verwendet, wobei das Verhalten der Trajektorie einer gestörten Bewegung bezüglich der Trajektorie der zugehörigen ungestörten Lösung untersucht wird. Hierbei stellen die Ljapunov-Exponenten ein leistungsfähiges Instrument zur Untersuchung von Lösungen dynamischer Systeme dar. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, die Stabilität deterministischer und stochastischer Systeme zu bestimmen. Die Ljapunov-Exponenten sind dabei ein Maß für das Auseinanderlaufen der Trajektorien durch ursprünglich benachbarte Punkte, d.h. sie sind ein Maß für die Abhängigkeit des Systems von den Anfangsbedingungen. Nach dem Ergodentheorem von Oseledec entscheidet das Vorzeichen des größten Ljapunov-Exponenten über die Stabilität der zu untersuchenden Lösung des Systems. Dabei ist die Lösung asymptotisch stabil, wenn der größte Ljapunov-Exponent kleiner null ist.

Die Auswertung des Ergodentheorems von Oseledec ist einfach, wenn die Zustandskoordinaten der Störungen eines d -dimensionalen Systems nach dem Konzept von Khas'minskii auf eine Hyperkugel projiziert werden. Durch die Einführung einer Amplitude und $d-1$ Winkelkoordinaten, gibt der größte Ljapunov-Exponent die exponentielle Wachstumsrate der instationären Amplitude an. Sind die stationären Winkelprozesse und die zu untersuchende stationäre Lösung zusätzlich ergodisch im Mittel, so kann der größte Ljapunov-Exponent aus der stationären Verteilungsdichte der Winkel- und Lösungsprozesse gewonnen werden.

Für die Berechnung der stationären Verteilungsdichte existieren zwei prinzipiell unterschiedliche Möglichkeiten, die in dieser Arbeit verwendet werden. Beide Methoden besitzen als Ausgangspunkt der Betrachtungen stochastische Differentialgleichungen im Sinne von Itô.

Zu den sogenannten direkten Methoden sind die Monte-Carlo-Methoden zu zählen. Hierbei wird der stochastische Prozeß selbst und seine Änderungen betrachtet. Mittels numerischer Integration der stochastischen Differentialgleichungen werden Lösungstrajektorien erzeugt, aus denen, unter Voraussetzung von Ergodizität, durch einen Abzählalgorithmus die entsprechenden Verteilungsdichten als Häufigkeitsverteilung auf-

gefunden werden. Monte-Carlo-Simulationen sind robuste und universell einsetzbare Verfahren zur Untersuchung stochastischer Systeme. Die Nachteile sind lange Rechenzeiten und die Tatsache, daß mit diesen Verfahren nur ein beschränkter Abschnitt der Lösung analysiert werden kann.

Die indirekten, wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden basieren auf einer statistischen Betrachtung der Prozesse. Die Verteilungsdichte kann dann als Lösung der zugehörigen Fokker-Planck-Gleichung ermittelt werden. Bei der Fokker-Planck-Gleichung handelt es sich um eine homogene, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten. Strenge Lösungen sind nur in Ausnahmefällen angebar, so daß man im allgemeinen auf Näherungslösungen angewiesen ist. In der vorliegenden Arbeit werden zur Lösung der Fokker-Planck-Gleichung orthogonale Funktionensysteme benutzt. Dazu werden in Richtung der durch die Transformation eingeführten Winkelkoordinaten komplexe Fourierreihen und in Richtung der Zustandskoordinaten der ungestörten Lösung angepaßte orthogonale Polynome verwendet. Der auf diesen Funktionensystemen basierende Reihenansatz der gesuchten stationären Verteilungsdichte überführt die Fokker-Planck-Gleichung zusammen mit einer Normierungsbedingung in ein inhomogenes, algebraisches Gleichungssystem, das mit Hilfe eines numerischen Gleichungslösers ausgewertet werden kann. Probleme bei der Entwicklung treten bei verschwindender Rauschanregung auf. Hier wird die stationäre Verteilungsdichte singulär. Den Grenzübergang zu singulären Verteilungsdichten können Fourierreihen jedoch nicht leisten. Daraus ergibt sich die Forderung, daß die Rauschanregung hinreichend groß sein muß, damit die Verteilungsdichte eine reguläre Gestalt annimmt. Eine weitere Ursache für das Auftreten von Singularitäten liegt in der Transformation der Zustandskoordinaten auf eine Hyperkugel. Ab der Dimension $d = 3$ treten in den Koeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung Terme auf, die in den Rändern der fluktuierenden Winkel zu Singularitäten führen. Zur Elimination dieser Terme wird ausgehend von der Transformationsvorschrift eine Substitution verwendet, die diese Terme beseitigt. Hierdurch entsteht eine modifizierte Fokker-Planck-Gleichung, die eine Verwendung von Fourierreihen bei der Entwicklung der stationären Verteilungsdichte erlaubt. Ist die Substitution nicht ausreichend, so wird die modifizierte Fokker-Planck-Gleichung mit den Kehrwerten der verbleibenden Singularitätsterme multipliziert. Die dadurch erhaltene partielle Differentialgleichung ist nun keine Fokker-Planck-Gleichung mehr. Diese wiederum kann jedoch unter Zuhilfenahme von Fourierreihen gelöst werden. Ein entsprechender Lösungsansatz führt jetzt zu einem überbestimmten, inhomogenen, algebraischen Gleichungssystem, das mit einem Least-Square-Verfahren näherungsweise gelöst wird. Beispielhaft für solche Systeme ist die Untersuchung der Stabilität von gekoppelten Biege- und Torsionsschwingungen eines schlanken Rechteckstabes in Kapitel 4. Die zugehörige Variationsgleichung ist ein gewöhnliches, parametererregtes Differentialgleichungssystem, dessen Ruhelage für gewisse Parameterkombinationen instabil werden kann. Die Stabilitätsanalyse wurde hierbei unter Verwendung von zwei Koordinatentransformationen durchgeführt, wobei jeweils Terme in den Koeffizienten auftraten, die zu Singularitäten an den Rändern der fluktuierenden Winkel führten. Bei beiden Koordinatentransformationen war daher vor der eigentlichen Reihenentwicklung eine Modifikation der Fokker-Planck-Gleichung notwendig, so daß sich kein entscheidender Vorteil bei der Wahl einer bestimmten Koordinatentransformation ergab.

Wird die Stabilität einer nichtrivialen Lösung untersucht, so ist die stationäre Verteilungsdichte zusätzlich zu den Winkelkoordinaten abhängig von den Zustandskoordi-

naten der ungestörten Lösung. Die Entwicklung in Richtung dieser Koordinaten erfolgt durch angepaßte Polynome. Hierbei eignen sich aufgrund des Lösungsintervalles $(-\infty, \infty)$ der Zustandskoordinaten Hermite- bzw. generalisierte Hermite-Polynome. Als klassisches Beispiel hierfür wurde in Kapitel 5 die nichttriviale Lösung des sogenannten Kramers-Oszillators auf Stabilität untersucht.

In Kapitel 6 wurde die Stabilität der semitrivialen und nichttrivialen Lösung eines autoperametrischen Systems, das einer Fremdanregung durch farbiges Rauschen unterliegt, betrachtet. Autoperametrische Systeme bestehen aus n Teilsystemen, so daß die nichttriviale Lösung einen $2n$ -dimensionalen Zustandsvektor besitzt. Zusätzlich zu den $2n$ Zustandskoordinaten hängt die stationäre Verteilungsdichte von $2n - 1$ Winkelkoordinaten der Koordinatentransformation und dem Anregungswinkel des Rauschprozesses ab. Damit handelt es sich um eine $4n$ -dimensionale Verteilungsdichte, die für eine Stabilitätsanalyse aufgefunden werden muß. Hierbei hob sich der Vorteil der schnelleren Rechnung bei der Lösung der Fokker-Planck-Gleichung gegenüber der Monte-Carlo-Simulation durch den hohen Aufwand bei der Entwicklung der Verteilungsdichte auf. Aus diesem Grund wurde hier nur eine Stabilitätsanalyse unter Verwendung von Monte-Carlo-Simulationen durchgeführt.

Kapitel 9

Anhang

9.1 Introduction

Systems with random influence can be found in various fields of engineering. For example in civil engineering random wind forces or random excitations through earthquakes play a decisive role. In the sector of aeronautical and astronautical engineering it is necessary to pay attention to random forces through turbo fans which act on the structure of planes. The common ground of these examples and any system being subject to random excitations is the description by stochastic differential equations. Among the characterization of a solution to a stochastic differential equation the technical feasibility of the computed solution is of particular importance. For this purpose it is necessary to make a stability investigation.

This work deals with stability investigations of dynamical systems driven by random excitations. The procedure of stability investigation can be divided into three parts:

- Derivation of the corresponding variational equation.
- Coordinate transformation with respect to the concept of Khas'minskii and formulation of the Fürstenberg-Khas'minskii-equation for the top Ljapunov-exponent.
- Determination of the unknown stationary distribution density using Monte-Carlo-methods and Fokker-Planck-methods.

9.2 Organization of the Work

Chapter 2 contains a short introduction to the fundamental terms of probability theory. Chapter 3 deals with stability theory in the sense of Ljapunov. Here the Ljapunov-exponents are introduced. Ljapunov-exponents are an important and powerful tool for the investigation of solutions of dynamical systems. For the calculation of the top exponent one has to introduce a d-dimensional unit hypersphere following the concept of Khas'minskii. Due to the transformation the amplitude A_t describing the unsteady part of the process can be decoupled. In the definition of the top Ljapunov-exponent the norm of the state vector can be replaced by the amplitude A_t . The amplitude process depends only on the stationary processes of the dynamical system and thus can be found by time integration. With the assumption of ergodicity the so called

Fürstenberg-Khas'minskii-equation containing the unknown distribution density of the stationary processes can be formulated.

Chapter 4 describes two possibilities to determine the unknown distribution density. The first method is a direct method, the so called Monte-Carlo-simulation. Here trajectories of the solution are generated by integrating the stochastic differential equation. The distribution density can be found by using a simple counting algorithm.

The second possibility is an indirect method. Here the distribution density can be found as a solution of the corresponding stationary Fokker-Planck-equation. The solution can be found using series expansion of the density and the nonconstant coefficients.

Chapter 5 describes the stability investigation of an elastic structure. For the considered system it is possible to project the linear state processes of the dynamic system on a unit hypersphere and on bipolar coordinates. The purpose of this investigation is to compare the results according to these two transformations.

In chapter 6 the stability of the solution to the so called Kramers-oscillator is investigated. Here, in contrast to stability investigations of elastic structures, the solution is nontrivial. This leads to a more complex variational equation because there is no analytical form for the investigated solution.

Chapter 7 deals with a simple autoparametric system. The main goal of this chapter is to compare the results of stability investigations of the system driven by a deterministic excitation and the system driven by a random excitation.

9.3 Coupled Oscillatory System

Figure 5.1 shows a typical stability problem for torsional bending of a rectangular slim beam subject to time-variant end moments $M(t)$ acting at both ends of the beam. Introducing initial deflections the beam performs lateral bending vibrations $u(z, t)$ and torsional cross section rotations $\vartheta(z, t)$, both described by the equations of motion

$$\begin{aligned} EI_y u''''(z, t) + M(t) \vartheta''(z, t) + \mu \ddot{u}(z, t) + c \dot{u}(z, t) &= 0, \\ M(t) u''(z, t) + GJ \vartheta''(z, t) + \mu r^2 \ddot{\vartheta}(z, t) + d \dot{\vartheta}(z, t) &= 0. \end{aligned}$$

Herein primes denote partial derivatives with respect to the length coordinate z and dots are corresponding derivatives with respect to time t . The parameter EI_y denotes the lateral bending stiffness, GJ is the torsional stiffness, μ is the mass of the beam per unit length ℓ , r is the polar radius of inertia and the coefficients c and d determine viscous damping mechanisms of the beam along $0 \leq z \leq \ell$. The bending torsional vibrations satisfy the homogeneous boundary conditions

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u''(0, t) = u''(\ell, t) = \vartheta(0, t) = \vartheta(\ell, t) = 0$$

such that the lateral deflections, the bending moments and the torsional rotations are vanishing at both ends of the beam.

The first two modes $u(z, t) = r q_1(t) \sin \pi z / \ell$ and $\vartheta(z, t) = q_2 \sin \pi z / \ell$, which satisfy the homogeneous boundary conditions, are applied to reduce the equations of motion to second order ordinary differential equations

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + 2\beta_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 - \omega_1 \omega_2 \zeta(t) q_2 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + 2\beta_2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 - \omega_1 \omega_2 \zeta(t) q_1 &= 0. \end{aligned}$$

In both equations, $q_i(t)$ ($i = 1, 2$) are coordinate functions, ω_i denote the first two natural frequencies, β_i are related damping measures given by $\beta_1 = c/(2\mu)$ and $\beta_2 = d/(2\mu r^2)$, and $\zeta(t) = M(t)/M_{cr}$ represents the external loading related to the critical moment $M_{cr} = \pi(EI_y GJ)^{1/2}/\ell$ of a time-invariant buckling moment. Obviously, the equations possess for $i = 1, 2$ the trivial solutions $q_i \equiv 0$ which can be destabilized with increasing intensities of the parametric excitation $\zeta(t)$.

The present paper determines the invariant measures by means of the two different projections:

- projection by means of hypersphere coordinates,
- projection by means of bipolar coordinates.

Both projections lead to different invariant measures.

For multiplicative perturbations $\zeta(t) = \sigma\xi(t)$ by white noise $\xi(t)$ of an intensity σ , the equations are written as the first order stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dX_{1,t} &= \omega_1 X_{2,t} dt, \\ dX_{2,t} &= -(\omega_1 X_{1,t} + 2\beta_1 X_{2,t}) dt + \omega_2 \sigma X_{3,t} dW_t, \\ dX_{3,t} &= \omega_2 X_{4,t} dt, \\ dX_{4,t} &= -(\omega_2 X_{3,t} + 2\beta_2 X_{4,t}) dt + \omega_1 \sigma X_{1,t} dW_t. \end{aligned}$$

This is done by introducing the state vector $\mathbf{X}_t = (X_{1,t}, X_{2,t}, X_{3,t}, X_{4,t})^T$ of the displacements $q_i(t) = X_{2i-1,t}$ and the velocities $\dot{q}_i(t) = \omega_i X_{2i,t}$ and replacing the increments $\xi(t)dt$ of white noise by the stationary increments dW_t of the Wiener process. According to the multiplicative ergodic theorem, the trivial solutions $X_{i,t} \equiv 0$ are almost surely asymptotically stable if the top Ljapunov-exponent

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{X}_t\|}{\|\mathbf{X}_0\|}$$

is negative.

9.3.1 Projection by Hypersphere Coordinates

Introducing the hyperspherical coordinates of the radius or amplitude A_t and of three angles ψ_t , $\varphi_{1,t}$ and $\varphi_{2,t}$ by means of the four-dimensional process transformation

$$\begin{aligned} A_t &= \sqrt{X_{1,t}^2 + X_{2,t}^2 + X_{3,t}^2 + X_{4,t}^2} & 0 \leq A_t < \infty, \\ \psi_t &= \begin{cases} \arctan \frac{X_{2,t}}{X_{1,t}} & X_{1,t} \geq 0 \\ \arctan \frac{X_{2,t}}{X_{1,t}} + \pi & X_{1,t} < 0 \end{cases} & -\frac{\pi}{2} \leq \psi_t < \frac{3\pi}{2}, \\ \varphi_{1,t} &= \arctan \frac{X_{3,t}}{\sqrt{X_{1,t}^2 + X_{2,t}^2}} & -\frac{\pi}{2} < \varphi_{1,t} < \frac{\pi}{2}, \\ \varphi_{2,t} &= \arctan \frac{X_{4,t}}{\sqrt{X_{1,t}^2 + X_{2,t}^2 + X_{3,t}^2}} & -\frac{\pi}{2} < \varphi_{2,t} < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

the linear stability equations take the nonlinear forms

$$\begin{aligned} d \ln A_t &= h_1(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t})dt + g_1(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t})dW_t, \\ d\psi_t &= h_2(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t})dt + g_2(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t})dW_t, \\ d\varphi_{1,t} &= h_3(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t})dt + g_3(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t})dW_t, \\ d\varphi_{2,t} &= h_4(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t})dt + g_4(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t})dW_t. \end{aligned}$$

Herein, the coefficients $g_i(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t})$ are four diffusion terms and $h_i(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t})$ are the drift terms of the transformed equations. Both terms are calculated applying the Itô calculus to the process transformation. The drift terms and the diffusion terms of the transformed equations depend only on the three angle processes and are independent of the amplitude process $A_t = \|X_t\|$, the euclidian norm of the state vector \mathbf{X}_t . Consequently, the amplitude equation can be explicitly integrated in the time domain and then inserted into the definition of the top Ljapunov-exponent. That leads to a mean value form of a time integral. Because of the non-anticipating property of Itô-integrals, the mean value of the diffusion terms is vanishing and the mean value of the drift term yields

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h_1(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t})dt.$$

Provided $h_1(\psi_t, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t})$ is ergodic and there exists an invariant measure with the density $p(\psi, \varphi_1, \varphi_2)$, the time average can be replaced by the space average

$$\lambda_1 = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1(\psi, \varphi_1, \varphi_2) p(\psi, \varphi_1, \varphi_2) d\psi d\varphi_1 d\varphi_2$$

which determines the top Ljapunov-exponent of the dynamic system for known densities $p(\psi, \varphi_1, \varphi_2)$.

One possibility to calculate the density $p(\psi, \varphi_1, \varphi_2)$ is to do a Monte-Carlo-simulation. Hereby, the angle equations are discretized by the Euler forward differences $d\varphi_{i,t} \approx \varphi_{i,n+1} - \varphi_{i,n}$ and the Wiener increment dW_t is approximated by $\Delta W_n = R_n \sqrt{\Delta t}$ where R_n denotes a stationary, normally distributed sequence of numbers with the expected values $E(R_n) = 0$ and $E(R_n^2) = 1$.

The three-dimensional angle density $p(\psi, \varphi_1, \varphi_2)$ of the invariant measure of the dynamic system is also determined by the corresponding Fokker-Planck-equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi}(h_2 p) + \frac{\partial}{\partial \varphi_1}(h_3 p) + \frac{\partial}{\partial \varphi_2}(h_4 p) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}(g_2^2 p) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2}(g_3^2 p) \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2}(g_4^2 p) - \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \varphi_1}(g_2 g_3 p) - \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \varphi_2}(g_2 g_4 p) - \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}(g_3 g_4 p) = 0. \end{aligned}$$

The solution of this partial differential equation has to satisfy the natural boundary conditions

$$\begin{aligned} p\left(\psi, \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \varphi_2\right) &= p\left(\psi, \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2\right) = 0, \\ p\left(\psi, \varphi_1, \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}\right) &= p\left(\psi, \varphi_1, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

as well as the periodicity conditions

$$\begin{aligned} p\left(\psi = -\frac{\pi}{2}, \varphi_1, \varphi_2\right) &= p\left(\psi = \frac{3\pi}{2}, \varphi_1, \varphi_2\right), \\ \frac{\partial}{\partial \psi} p\left(\psi = -\frac{\pi}{2}, \varphi_1, \varphi_2\right) &= \frac{\partial}{\partial \psi} p\left(\psi = \frac{3\pi}{2}, \varphi_1, \varphi_2\right). \end{aligned}$$

Finally, $p(\psi, \varphi_1, \varphi_2)$ has to fulfil the normalization condition

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\psi, \varphi_1, \varphi_2) d\psi d\varphi_1 d\varphi_2 = 1.$$

The Fokker-Planck-equation can be solved by the three-dimensional Fourier series

$$p(\psi, \varphi_1, \varphi_2) = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L \sum_{m=-M}^M c_{klm} \exp[j(k\psi + 2l\varphi_1 + 2m\varphi_2)]$$

which is described in chapter 5.1.2 in detail. Inserting the three-dimensional Fourier expansion into the Fokker-Planck-equation and using the normalization condition leads to an inhomogeneous system of equations for $(2k + 1)(2L + 1)(2M + 1)$ expansion coefficients c_{klm} which can approximately be solved by a least square procedure.

The stability map in figure 5.9 shows level lines of the top Ljapunov-exponent $\lambda(\beta_1, \beta_2)$ in dependence on the damping coefficients β_1 and β_2 of the system.

9.3.2 Projection by Bipolar Coordinates

The projection of the state process $X_{k,t}$ for $k = 1, 2, 3, 4$ is performed in two steps. First the amplitudes $a_{i,t}$ and phases $\psi_{i,t}$

$$\begin{aligned} a_{1,t} &= \sqrt{X_{1,t}^2 + X_{2,t}^2}, & 0 \leq a_{1,t} < \infty, \\ a_{2,t} &= \sqrt{X_{3,t}^2 + X_{4,t}^2}, & 0 \leq a_{2,t} < \infty, \\ \psi_{1,t} &= \begin{cases} \arctan \frac{X_{2,t}}{X_{1,t}}, & X_{1,t} \geq 0, \\ \arctan \frac{X_{2,t}}{X_{1,t}} + \pi, & X_{1,t} < 0, \end{cases} & -\frac{\pi}{2} \leq \psi_{1,t} < \frac{3\pi}{2}, \\ \psi_{2,t} &= \begin{cases} \arctan \frac{X_{4,t}}{X_{3,t}}, & X_{3,t} \geq 0, \\ \arctan \frac{X_{4,t}}{X_{3,t}} + \pi, & X_{3,t} < 0, \end{cases} & -\frac{\pi}{2} \leq \psi_{2,t} < \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

for $i = 1, 2$ are introduced. In the second step, the amplitudes $a_{i,t}$ are replaced by the polar coordinates A_t and φ_t . This leads to the nonlinear projection equations

$$\begin{aligned} d \ln A_t &= h_4(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dt + g_4(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dW_t, \\ d\varphi_t &= h_3(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dt + g_3(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dW_t, \\ d\psi_{2,t} &= h_2(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dt + g_2(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dW_t, \\ d\psi_{1,t} &= h_1(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dt + g_1(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}) dW_t \end{aligned}$$

wherein the new drifts $h_i(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t})$ and diffusions $g_i(\varphi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t})$ have to be calculated by means of the Itô calculus. This transformed system of equations yields to the new Fürstenberg-Khas'minskii-equation

$$\lambda_1 = \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} h_4(\varphi, \psi_1, \psi_2) p(\varphi, \psi_1, \psi_2) d\varphi d\psi_1 d\psi_2$$

which determines the top Ljapunov-exponent of the dynamical system.

Again the density $p(\varphi, \psi_1, \psi_2)$ can be obtained by a Monte-Carlo-simulation. The results are shown in the figures 5.10, 5.11 and 5.12.

The density can also be determined by the corresponding Fokker-Planck-equation

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varphi}(h_3 p) + \frac{\partial}{\partial \psi_1}(h_1 p) + \frac{\partial}{\partial \psi_2}(h_2 p) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(g_3^2 p) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \psi_1^2}(g_1^2 p) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \psi_2^2}(g_2^2 p) - \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \psi_1}(g_3 g_1 p) - \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \psi_2}(g_3 g_2 p) - \frac{\partial^2}{\partial \psi_1 \partial \psi_2}(g_1 g_2 p) = 0. \end{aligned}$$

The boundary conditions are

$$\begin{aligned} p\left(\varphi, \psi_1 = -\frac{\pi}{2}, \psi_2\right) &= p\left(\varphi, \psi_1 = \frac{3\pi}{2}, \psi_2\right), \\ \frac{\partial}{\partial \psi_1} p\left(\varphi, \psi_1 = -\frac{\pi}{2}, \psi_2\right) &= \frac{\partial}{\partial \psi_1} p\left(\varphi, \psi_1 = \frac{3\pi}{2}, \psi_2\right), \\ p\left(\varphi, \psi_1, \psi_2 = -\frac{\pi}{2}\right) &= p\left(\varphi, \psi_1, \psi_2 = \frac{3\pi}{2}\right), \\ \frac{\partial}{\partial \psi_2} p\left(\varphi, \psi_1, \psi_2 = -\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\partial}{\partial \psi_2} p\left(\varphi, \psi_1, \psi_2 = \frac{3\pi}{2}\right), \\ p\left(\varphi = 0, \psi_1, \psi_2\right) &= p\left(\varphi = \frac{\pi}{2}, \psi_1, \psi_2\right) = 0. \end{aligned}$$

Besides these four equations the density has to fulfil the normalization condition

$$\int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} p(\varphi, \psi_1, \psi_2) d\varphi d\psi_1 d\psi_2 = 1.$$

The Fokker-Planck-equation can be solved by the following expansion

$$p(\varphi, \psi_1, \psi_2) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=-L}^L \sum_{m=-M}^M c_{klm} P_k(\varphi) \exp[j(l\psi_1 + m\psi_2)].$$

Herein $P_k(\varphi)$ denote orthogonal polynomials on the interval $(0, \pi/2)$. For further details see chapter 5.2.2 and chapter 4.2.2. Insertion of the expansion in the Fokker-Planck-equation yields together with the normalization condition an inhomogeneous system of equations which can be solved by a least square procedure. The results are shown in the figures 5.14, 5.15 and 5.16. Figure 5.17 shows level lines of the top Ljapunov-exponent $\lambda(\beta_1, \beta_2)$ in dependence on the damping coefficients β_1 and β_2 of the system.

Comparing the two figures 5.9 and 5.17 no differences can be found in the results. So there are no advantages or disadvantages in using a projection on a hypersphere or a projection on bipolar coordinates.

9.4 Kramers Oscillator

Since its introduction by Duffing in 1918, the nonlinear oscillator with a cubic stiffness term given by

$$\ddot{z}_t + \gamma \dot{z}_t + U'(z_t) = f(t), \quad U(z) = -a \frac{z^2}{2} + b \frac{z^4}{4} \quad a, b > 0, \quad \gamma > 0,$$

has been one of the paradigms of nonlinear dynamics.

If the forcing is chosen to be

$$f(t) = \sqrt{2\varepsilon\gamma}\xi_t,$$

the oscillator describes stochastic motion of a particle in a bistable potential, where $\varepsilon > 0$ stands for the temperature of a heat bath. This model was proposed and studied by Kramers.

For the further investigation the parameters are put

$$\varepsilon = a = b = 1$$

and the Langevin equation is written correctly as a stochastic differential equation for $x_t = z_t$ und $y_t = \dot{z}_t$ as

$$\begin{aligned} dx_t &= y_t dt, \\ dy_t &= (-\gamma y_t - U'(x_t))dt + \sqrt{2\gamma}dW_t, \end{aligned}$$

where W_t is a standard Wiener process. For every initial value (x_0, y_0) the solution exists and forms a Markov process possessing a unique stationary measure with density

$$p(x, y) = N \exp\left(-U(x) - \frac{y^2}{2}\right)$$

where N is a norming constant. Note that p is independent of the friction (or damping) coefficient γ .

The Ljapunov-exponents corresponding to the measure p are defined to be the two possible exponential growth rates of the solutions to the variational equation given by

$$\begin{aligned} dv_{1,t} &= v_{2,t} dt, \\ dv_{2,t} &= (-U''(x_s)v_{1,t} - \gamma v_{2,t})dt = ((1 - 3x_s^2)v_{1,t} - \gamma v_{2,t})dt \end{aligned}$$

where x_s is the x -component of the solution starting with random values (x_0, y_0) having density p .

The projection of the state vector \mathbf{v}_t is performed by introducing polar coordinates

$$\begin{aligned} A_t &= \sqrt{v_{1,t}^2 + v_{2,t}^2}, & 0 \leq A_t < \infty, \\ \varphi_t &= \begin{cases} \arctan \frac{v_{2,t}}{v_{1,t}}, & v_{1,t} \geq 0, \\ \arctan \frac{v_{2,t}}{v_{1,t}} + \pi, & v_{1,t} < 0 \end{cases} & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_t < \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

This leads to the nonlinear projection equations

$$\begin{aligned} d \ln A_t &= [(2 - 3x_{s,t}^2) \sin \varphi_t \cos \varphi_t - \gamma \sin^2 \varphi_t] dt, \\ d\varphi_t &= [(2 - 3x_{s,t}^2) \cos^2 \varphi_t - \gamma \sin \varphi_t \cos \varphi_t - 1] dt, \\ dx_{s,t} &= y_{s,t} dt, \\ dy_{s,t} &= [-\gamma y_{s,t} + x_{s,t} - x_{s,t}^3] dt + \sqrt{2\gamma} dW_t. \end{aligned}$$

Note that the variational equations contain the x -component of the solution as a parameter. Due to that it is necessary to consider the system equations in addition to the variational equations. With this system of equations the Fürstenberg-Khas'minskii-equation can be written in the form

$$\lambda_1(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \left[(2 - 3x_s^2) \sin \varphi \cos \varphi - \gamma \sin^2 \varphi \right] p(x_s, y_s, \varphi) d\varphi dx_s dy_s.$$

The density $p(x_s, y_s, \varphi)$ can be determined by a Monte-Carlo-Simulation so that the top Lyapunov-exponent can be calculated by integration. The results are shown in the figures 6.1, 6.2 and 6.3. In 6.2 it can be seen that the exponent λ_1 is larger than 0 for small γ which is a remarkable result and is comparable to the results of Arnold and Imkeller. The purpose of the recurrent investigation of the Kramers oscillator is to determine the density as a solution to the Fokker-Planck-equation.

The corresponding Fokker-Planck-equation can be written in the form

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(h_2 p) + \frac{\partial}{\partial x_s}(h_3 p) + \frac{\partial}{\partial y_s}(h_4 p) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_s^2}(g_4^2 p) = 0$$

with the drift and diffusion terms

$$\begin{aligned} h_2 &= (2 - 3x_s^2) \cos^2 \varphi - \gamma \sin \varphi \cos \varphi - 1, \\ h_3 &= y_s, \\ h_4 &= -\gamma y_s + x_s - x_s^3, \\ g_4^2 &= 2\gamma \end{aligned}$$

and the boundary conditions

$$\begin{aligned} p(\varphi = -\frac{\pi}{2}, x_s, y_s) &= p(\varphi = \frac{3\pi}{2}, x_s, y_s), \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} p(\varphi = -\frac{\pi}{2}, x_s, y_s) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} p(\varphi = \frac{3\pi}{2}, x_s, y_s), \\ p(\varphi, x_s = -\infty, y_s) &= p(\varphi, x_s = \infty, y_s) = 0, \\ p(\varphi, x_s, y_s = -\infty) &= p(\varphi, x_s, y_s = \infty) = 0. \end{aligned}$$

In addition the density $p(x_s, y_s, \varphi)$ has to fulfil the normalization condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} p(x_s, y_s, \varphi) d\varphi dx_s dy_s = 1.$$

The solution is obtained by an expansion of the density in the following form

$$p(\varphi, x_s, y_s) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=-M}^M c_{klm} H_k(x_s) w_1(x_s) H_l(y_s) w_2(y_s) \exp(jm\varphi)$$

wherein $He_l(y_s)$ and $H_k(x_s)$ represent orthogonal polynomials on the interval $(-\infty, \infty)$, which has to be calculated in a first step. Therefore the procedure described in chapter 4.2.2 is used with weight functions derived from the solution

$$p(x, y) = N \exp\left(-U(x) - \frac{y^2}{2}\right).$$

The weight function for the polynomials $He_l(y_s)$ can be found in the form $w_2(y_s) = \exp\left(-\frac{y_s^2}{2}\right)$ and for the polynomials $H_k(x_s)$ in the form $w_1(x_s) = \exp\left(\frac{x_s^2}{2} - \frac{x_s^4}{4}\right)$.

Inserting the expansion into the Fokker-Planck-equation and using the normalization condition leads to an inhomogeneous system of equations for the unknown coefficients c_{klm} . For further details see chapter 6.4. The results are shown in the figures 6.4, 6.5 and 6.6. In figure 6.6 the same effects as in figure 6.3 can be seen. Compared to the solution using a Monte-Carlo-simulation the solution computed with the Fokker-Planck-equation is of higher quality.

9.5 Autoparametric Vibration Absorber

The mechanical system treated in this section has two degrees of freedom and is schematically represented in figure 7.1. It consists of a mass M mounted on a linear spring, carrying a simple pendulum. The pendulum has mass m , attached to a hinged massless rod having length ℓ . In the figure y denotes the coordinate of the mass M and φ is the angular deflection of the pendulum. Moreover, the mass M is excited by a time depended force described by colored noise and linear damping is assumed.

There are three frequencies associated with this system: the natural frequencies of the pendulum and of the linear mass-spring and the frequency of the undisturbed driving force.

The most interesting situation occurs when the natural frequencies of the mass-spring-system (primary system) and the pendulum (secondary system) are in 2 : 1 resonance and the frequency of the external forcing is in 1 : 1 resonance with the natural frequency of the primary system. The resonant motion of the primary system then acts as a parametric excitation on the motion of the pendulum. Conversely, the motion of the pendulum influences the motion of the mass-spring system. It is possible, that energy from mass-spring motion is transferred to the motion of the pendulum. When this happens, the pendulum effectively acts as a vibration absorber.

The equations of motion can be written in the dimensionless form

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_t + \kappa_1 \dot{\eta}_t + \omega_1^2 \eta_t + \mu(\ddot{\varphi}_t \sin \varphi_t + \dot{\varphi}_t^2 \cos \varphi_t) &= C(t), \\ \ddot{\varphi}_t + \kappa_2 \dot{\varphi}_t + \omega_2^2 \varphi_t + \dot{\eta}_t \sin \varphi_t &= 0.\end{aligned}$$

The noisy excitation C_t arises from

$$C_t = \Lambda \cos \phi_t, \quad |\phi_t| \leq \pi$$

with the amplitude Λ and the angle process ϕ_t described by the stochastic differential equation

$$d\phi_t = -\omega_e dt + \sigma dW_t$$

wherein ω_e denotes the constant frequency of excitation disturbed by white noise with intensity σ . This model of excitation contains two special cases:

- Harmonic excitation for $\sigma \equiv 0$
- White noise excitation for $\Lambda, \sigma \rightarrow \infty$.

9.5.1 Stability Investigation of the Semitrivial Solution

The semitrivial solution is given by

$$\eta_t = \eta_{s,t}, \quad \varphi_t = 0.$$

Introducing the perturbations $u_t \ll 1$ and $v_t \ll 1$ in the form

$$\eta_t = \eta_{s,t} + u_t, \quad \varphi_t = 0 + v_t$$

leads after linearization to the variational equations

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_{s,t} + \kappa_1 \dot{\eta}_{s,t} + \omega_1^2 \eta_{s,t} &= C_t, \\ \ddot{u}_t + \kappa_1 \dot{u}_t + \omega_1^2 u_t &= 0, \\ \ddot{v}_t + \kappa_2 \dot{v}_t + (\omega_2^2 + \ddot{\eta}_{s,t})v_t &= 0. \end{aligned}$$

It can easily be shown that the perturbation u_t will vanish for $t \rightarrow \infty$. This means that only the perturbation v_t characterizes the stability behavior of the solution.

With the state variables

$$\begin{aligned} \eta_{1,s,t} &= \eta_{s,t}, & \eta_{2,s,t} &= \dot{\eta}_{s,t}, \\ v_{1,t} &= v_t, & v_{2,t} &= \dot{v}_t \end{aligned}$$

the variational equations can be written as a stochastic differential equation

$$\begin{aligned} d\eta_{1,s,t} &= \eta_{2,s,t} dt, \\ d\eta_{2,s,t} &= (\Lambda \cos \phi_t - \kappa_1 \eta_{2,s,t} - \omega_1^2 \eta_{1,s,t}) dt, \\ dv_{1,t} &= v_{2,t} dt, \\ dv_{2,t} &= (-\kappa_2 v_{2,t} - (\omega_2^2 + \eta_{2,s,t})v_{1,t}) dt, \\ d\phi_t &= -\omega_e dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Following the concept of Khas'minskii the state vector will be projected on polar coordinates

$$\begin{aligned} A_t &= \sqrt{v_{1,t}^2 + v_{2,t}^2}, & 0 \leq A_t < \infty, \\ \psi_t &= \begin{cases} \arctan \frac{v_{2,t}}{v_{1,t}}, & v_{1,t} \geq 0, \\ \arctan \frac{v_{2,t}}{v_{1,t}} + \pi, & v_{1,t} < 0, \end{cases} & -\frac{\pi}{2} \leq \psi_t < \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

This leads to the nonlinear transformed system of equations

$$\begin{aligned} d \ln A_t &= h_1(\psi_t, \eta_{1,s,t}, \eta_{2,s,t}, \phi_t) dt + g_1(\psi_t, \eta_{1,s,t}, \eta_{2,s,t}, \phi_t) dW_t, \\ d\psi_t &= h_2(\psi_t, \eta_{1,s,t}, \eta_{2,s,t}, \phi_t) dt + g_2(\psi_t, \eta_{1,s,t}, \eta_{2,s,t}, \phi_t) dW_t, \\ d\eta_{1,s,t} &= \eta_{2,s,t} dt, \\ d\eta_{2,s,t} &= (\Lambda \cos \phi_t - \kappa_1 \eta_{2,s,t} - \omega_1^2 \eta_{1,s,t}) dt, \\ d\phi_t &= -\omega_e dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

with the drift and diffusion terms

$$\begin{aligned} h_1 &= -\kappa_2 \sin^2 \psi_t + [1 - (\omega_2^2 + \Lambda \cos \phi_t - \kappa_1 \eta_{2,s,t} - \omega_1^2 \eta_{1,s,t})] \sin \psi_t \cos \psi_t, \\ h_2 &= -\sin^2 \psi_t - (\omega_2^2 + \Lambda \cos \phi_t - \kappa_1 \eta_2 - \omega_1^2 \eta_1) \cos^2 \psi_t - \kappa_2 \sin \psi_t \cos \psi_t, \\ g_1 &= 0, \\ g_2 &= 0. \end{aligned}$$

With this system of equations the Fürstenberg-Khas'minskii-equation can be formulated in the form

$$\lambda_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} (-\kappa_2 \sin^2 \psi + K \sin \psi \cos \psi) p(\psi, \eta_1, \eta_2, \phi) d\phi d\psi d\eta_2 d\eta_1$$

with

$$K = [1 - (\omega_2^2 + \Lambda \cos \phi_t - \kappa_1 \eta_{2,s,t} - \omega_1^2 \eta_{1,s,t})].$$

The density is determined by a Monte-Carlo-Simulation. Figures 7.4 and 7.5 show the top Ljapunov-exponent depending on the amplitude Λ and the natural frequency of the pendulum ω_2 . Figures 7.6 and 7.7 show level lines of the exponent for $\lambda = 0$. It can be seen that the noisy perturbation can lead to stabilization in some parameter domains but also to destabilization.

9.5.2 Stability Investigation of Nontrivial Solutions

Beside the semitrivial solution there exist nontrivial solutions in the form

$$\eta_t = \eta_{s,t}, \quad \varphi_t = \varphi_{s,t}.$$

In this case the secondary system is also in vibrating mode. In this section the stability of this solution will be investigated. The procedure is equal to the procedure described in the section before. The first step is to derive the variational equation. Therefore the two perturbations $u_t \ll 1$ and $v_t \ll 1$ are introduced. After inserting and linearizing the variational equations can be obtained

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_{s,t} + \kappa_1 \dot{\eta}_{s,t} + \omega_1^2 \eta_{s,t} + \mu (\ddot{\varphi}_{s,t} \sin \varphi_{s,t} + \dot{\varphi}_{s,t}^2 \cos \varphi_{s,t}) &= \Lambda \cos \phi_t, \\ \ddot{\varphi}_{s,t} + \kappa_2 \dot{\varphi}_{s,t} + \omega_2^2 \varphi_{s,t} + \ddot{\eta}_{s,t} \sin \varphi_{s,t} &= 0, \\ \ddot{u}_t + \kappa_1 \dot{u}_t + \omega_1^2 u_t + \mu v_t (\ddot{\varphi}_{s,t} \cos \varphi_{s,t} - \dot{\varphi}_{s,t}^2 \sin \varphi_{s,t}) + \\ &+ 2\mu \dot{\varphi}_{s,t} \dot{v}_t \cos \varphi_{s,t} + \mu \ddot{v}_t \sin \varphi_{s,t} &= 0, \\ \ddot{v}_t + \kappa_2 \dot{v}_t + \omega_2^2 v_t + \ddot{u}_t \sin \varphi_{s,t} + \ddot{\eta}_{s,t} v_t \cos \varphi_{s,t} &= 0, \\ \dot{\phi}_t &= -\omega_e + \sigma \xi_t. \end{aligned}$$

Introduction of the state variables

$$\begin{aligned} \eta_{1,t} &= \eta_{s,t}, & \varphi_{1,t} &= \varphi_{s,t}, & u_{1,t} &= u_t, & v_{1,t} &= v_t, \\ \eta_{2,t} &= \dot{\eta}_{s,t}, & \varphi_{2,t} &= \dot{\varphi}_{s,t}, & u_{2,t} &= \dot{u}_t, & v_{2,t} &= \dot{v}_t \end{aligned}$$

the stochastic differential equation can be written in the form

$$\begin{aligned}
d\phi_t &= -\omega_\epsilon dt + \sigma dW_t, \\
d\eta_{1,t} &= \eta_{2,t} dt, \\
d\varphi_{1,t} &= \varphi_{2,t} dt, \\
du_{1,t} &= u_{2,t} dt, \\
dv_{1,t} &= v_{2,t} dt, \\
d\eta_{2,t} &= \left[D_1 D_5 + \mu D_2 D_6 \right] dt, \\
d\varphi_{2,t} &= \left[D_2 D_5 + D_1 D_6 \right] dt, \\
du_{2,t} &= \left[v_{1,t} D_3 D_5 + \mu v_{1,t} D_4 D_6 + \right. \\
&\quad \left. D_1 \left(-\kappa_1 u_{2,t} - \omega_1^2 u_{1,t} + \mu v_{2,t} \varphi_{2,t}^2 \sin \varphi_{1,t} - 2\mu v_{2,t} \varphi_{2,t} \cos \varphi_{1,t} \right) \right. \\
&\quad \left. + \mu D - 2 \left(-\kappa_2 v_{2,t} - \omega_2^2 v_{1,t} \right) \right] dt, \\
dv_{2,t} &= \left[v_{1,t} D_4 D_5 + v_{1,t} D_3 D_6 + \right. \\
&\quad \left. D_2 \left(-\kappa_1 u_{2,t} - \omega_1^2 u_{1,t} + \mu v_{2,t} \varphi_{2,t}^2 \sin \varphi_{1,t} - 2\mu v_{2,t} \varphi_{2,t} \cos \varphi_{1,t} \right) \right. \\
&\quad \left. + D_1 \left(-\kappa_2 v_{2,t} - \omega_2^2 v_{1,t} \right) \right] dt.
\end{aligned}$$

Following the concept of Khas'minskii the state vector of the disturbance will be projected on a unit hypersphere

$$\begin{aligned}
A_t &= \sqrt{u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2 + v_{1,t}^2 + v_{2,t}^2}, \quad 0 \leq A_t < \infty, \\
\psi_t &= \begin{cases} \arctan \frac{u_{2,t}}{u_{1,t}}, & u_{1,t} \geq 0, \\ \arctan \frac{u_{2,t}}{u_{1,t}} + \pi, & u_{1,t} < 0, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi_t < \frac{3\pi}{2}, \\
\psi_{1,t} &= \arctan \frac{v_{1,t}}{\sqrt{u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi_{1,t} < \frac{\pi}{2}, \\
\psi_{2,t} &= \arctan \frac{v_{2,t}}{\sqrt{u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2 + v_{1,t}^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi_{2,t} < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

which leads to the nonlinear transformed system of equations

$$\begin{aligned}
d \ln A_t &= h_1(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dt + \\
&\quad g_1(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dW_t, \\
d\psi_t &= h_2(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dt + \\
&\quad g_2(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dW_t, \\
d\psi_{1,t} &= h_3(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dt + \\
&\quad g_3(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dW_t, \\
d\psi_{2,t} &= h_4(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dt + \\
&\quad g_4(\eta_{1,t}, \eta_{2,t}, \varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}, \psi_t, \psi_{1,t}, \psi_{2,t}, \phi_t) dW_t, \\
d\eta_{1,t} &= \eta_{2,t} dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\eta_{2,t} &= (D_1 D_5 + \mu D_2 D_6) dt, \\
d\varphi_{1,t} &= \varphi_{2,t} dt, \\
d\varphi_{2,t} &= (D_2 D_5 + D_1 D_6) dt, \\
d\phi_t &= -\omega dt + \sigma dW_t
\end{aligned}$$

with the drift und diffusion terms given in equation (7.39). The Fürstenberg-Khas'minskii-equation can be written in the form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} h_1 p(\eta_1, \eta_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi, \psi_1, \psi_2, \phi) d\eta_1 d\eta_2 d\varphi_1 d\varphi_2 d\psi d\psi_1 d\psi_2 d\phi$$

The results in figure 7.12-7.15 are calculated by Monte-Carlo-simulations. A stabilization of the solution due to the disturbance of white noise can be seen.

Literaturverzeichnis

- [1] Ariaratnam, S.T., Tam, D.S.F., Xie, W.-C. Lyapunov Exponents and Stochastic Stability of Coupled Linear Systems under White Noise Excitation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 6, 1991.
- [2] Ariaratnam, S.T., Xie, W.-C. Lyapunov Exponents and Stochastic Stability of Coupled Linear Systems under Real Noise Excitation. *Journal of Applied Mechanics*, 59, 1992.
- [3] Arnold, L. *Stochastische Differentialgleichungen*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 1973.
- [4] Arnold L., Imkeller P. The Kramers-Oscillator Revisited. *Lecture Notes in Physics*, pages 280–291, 2000.
- [5] Bajaj, A.K., Chang, S.I., Davies, P. Second-Order Averaging Study of an Auto-parametric Systems. *Nonlinear Dynamics*, 5:21–39, 1994.
- [6] Banerjee, B., Bajaj, A.K., Davies, P. Resonant Dynamics of an Autoparametric System: A Study Using Higher Order Averaging. *I. J. Non-Linear Mech.*, 31:21–39, 1996.
- [7] Bolotin, W.W. *Kinetische Stabilität elastischer Systeme*. VEB Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1961.
- [8] Boxler, P. Lyapunov Exponents Indicate Stability and Detect Stochastic Bifurcations. *Probabilistic Methods in Applied Physics*, pages 97 – 120, 1995.
- [9] Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1987.
- [10] Bunke, H. *Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern*. Akademie-Verlag, Berlin, 1972.
- [11] Doob, J. *Stochastic Process*. John Wiley, New York, 1953.
- [12] Duffing, G. *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1918.
- [13] Gelfand, I.M., Wilenkin, N.J. *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.

- [14] Gichmann, I., Skorochod, A. *Stochastische Differentialgleichungen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1972.
- [15] Gorelik, G., Witt, A. Swing of an Elastic Pendulum as an Example of Two Parametrically Bound Linear Vibration Systems. *J. Tech. Phys. (USSR)*, 3:244–307, 1933.
- [16] Griesbaum, R. *Zur Stabilität dynamischer Systeme mit stochastischer Parametererregung*. Dissertation, Fortschritt-Berichte VDI, 1999.
- [17] Guckenheimer, J. Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.
- [18] Hahn, W. *Stability of Motion*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
- [19] Hatwal, H., Mallik, A.K., Ghosh, A. Forced Nonlinear Oscillations of an Autoparametric System. *Am. Soc. Mech. Eng. J. Appl. Mech*, 50:657–662, 1983.
- [20] Haxton, R.S., Barr, A.D.S. The Autoparametric Vibration Absorber. *Am. Soc. Mech. Eng. J. Eng. Ind.*, 94:119–125, 1972.
- [21] Heinrich, W., Hennig, K. *Zufallsschwingungen mechanischer Systeme*. Akademie-Verlag, Berlin, 1973.
- [22] Itô, K. *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.
- [23] Karch, G. *Zur Stabilität linearer, stochastisch parametererregter Schwingungssysteme*. Dissertation, 1992.
- [24] Kloeden, P.E., Platen, E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [25] Kozin, F. On Almost Sure Stability of Linear Systems With Random Coefficients. *Journal of Mathematics and Physics*, 42:59 – 67, 1963.
- [26] Kozin, F. A Survey of Stability of Stochastic Systems. *Automatica*, 5:95 – 112, 1969.
- [27] Kramers, H.A. *Physica*, 7:284–304, 1940.
- [28] Leipholz, H. *Stabilitätstheorie*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1968.
- [29] Magnus, W., Oberhoettinger, F., Soni, R.P. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.
- [30] Malkin, J.G. *Theorie der Stabilität einer Bewegung*. R. Oldenbourg, München, 1959.
- [31] Maruyama, G. Continuous Markov Process and Stochastic Equations. *Rend. Circolo Math.*, 4:48–90, 1955.

- [32] Mettler, E. Nichtlineare Schwingungen und kinetische Instabilität bei Saiten und Stäben. *Ingenieur-Archiv*, 23, 1955.
- [33] Mettler, E. Stabilitätsfragen bei freien Schwingungen mechanischer Systeme. *Ing.-Arch.*, 28:213–228, 1959.
- [34] Mettler, E. Über höhere Näherungen in der Theorie des elastischen Pendels mit innerer Resonanz. *ZAMM*, 55:49–62, 1975.
- [35] Minorsky, N. *Introduction to Non-Linear Mechanics*. J.W. Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1947.
- [36] Namachchivaya, N.S., Doyle, M.M. Almost-sure Asymptotic Stability of a General Four Dimensional Dynamical System Driven by Real Noise. *Journal of Statistical Physics*, 75:525–552, 1994.
- [37] Namachchivaya, N.S., Doyle, M.M., van Roessel, H.J. Maximal Lyapunov Exponent for Two Coupled Oscillators Driven by Real Noise. *Journal of Applied Mathematics*, 56, 1996.
- [38] Namachchivaya, N.S., Talwar, S. Maximal Lyapunov Exponent and Rotation Number for Stochastically Perturbed Co-dimension Two Bifurcations. *Journal of Sound and Vibration*, 169, 1993.
- [39] Namachchivaya, N.S., van Roessel, H.J. Maximal Lyapunov Exponent and Rotation Number for Two Coupled Oscillators Driven by Real Noise. *Journal of Statistical Physics*, 71, 1993.
- [40] Oseledec, V.I. Ein multiplikativer Ergodensatz und charakteristische Ljapunov-Zahlen für dynamische Systeme. *Trudy Mosk. Mat. Obsc.*, 19:179 – 210, 1968 (Russisch).
- [41] Papoulis, A. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 1965.
- [42] Plaschko, P., Brod, K. *Nichtlineare Dynamik, Bifurkation und chaotische Systeme*. Vieweg, Braunschweig Wiesbaden, 1995.
- [43] Reitmann, V. *Reguläre und chaotische Dynamik*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1996.
- [44] Risken, H. *The Fokker-Planck-Equation*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1964.
- [45] Ruijgrok, M. *Studies in Parametric And Autoparametric Resonance*. Thesis, Utrecht University, 1995.
- [46] Sagirow, P. *Stochastische Systeme*. Manuskript zur Vorlesung, Universität Stuttgart, 1970.
- [47] Schimansky-Geier L., Herzog H. *Journal of Statistical Physics*, 70:141–147, 1993.

- [48] Simon M., Wedig W.V. Stochastic Stability of Elastic Structures - Quantification of Uncertainties by Ljapunov-Exponents. *Proc. 8th Intern. Conference on Structurel Safety and Reliability, Newport Beach, USA, June 17-22, CD-ROM*, 2001.
- [49] Steeb, W.-H. *A Handbook of Terms Used in Chaos and Quantum Chaos*. BI Wissenschaftsverlag, 1991.
- [50] Steeb, W.-H. *Chaos und Quantenchaos in dynamischen Systemen*. BI Wissenschaftsverlag, 1994.
- [51] Stratonovich, R. A New Representation for Stochastic Integrals and Equations. *Journal Siam Control*, 4:213–229, 1966.
- [52] Stratonovich, R. *Topics in the Theory of Random Noise*. Gordon and Breach Science Publisher, 1967.
- [53] von Wagner, U. *Zur Berechnung stationärer Verteilungsdichten nichtlinearer stochastisch erregter Systeme*. Dissertation, Fortschritt-Berichte VDI, 1998.
- [54] Wedig, W.V. Vom Chaos zur Ordnung. *Gamm-Mitteilungen*, 2:3–31, 1989.
- [55] Wedig, W.V. Spectral Analysis of Non-smooth Dynamical Systems. *Stochastic Structural Dynamics*, pages 249–256, 1999.
- [56] Worg, R. *Deterministisches Chaos, Wege in die nichtlineare Dynamik*. BI Wissenschaftsverlag, 1993.

Lebenslauf

von **Marcus Simon**

Geburtsdatum: 19. April 1972
Geburtsort Bruchsal
Familienstand ledig

Schulbildung

Schiller-Grundschule in Waghäusel 1978-1982
Copernicus-Gymnasium in Philippsburg 1982-1988
Balthasar-Neumann-Schule, Technisches Gymnasium
in Bruchsal 1988-1991
Abitur 1991
Grundwehrdienst 1991-1992

Hochschulbildung

Maschinenbaustudium an der Universität Karlsruhe
(Allgemeiner Maschinenbau) 1992-1999
Diplom-Schlußprüfung 26. Januar 1999

Berufstätigkeit

wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für
Technische Mechanik der Universität Karlsruhe seit 1. September 1999
Research Assistant am Department of Aeronautical and
Astronautical Engineering der University of Illinois, USA Februar 2002 - Mai 2002