# Getwistete $L$-Reihen

Zur Erlangung des akademischen
Grades eines

DOKTORS DER
NATURWISSENSCHAFTEN

der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe
vorgelegte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Heinrich Utz
aus Poppenricht

Tag der Einreichung: 1. Juli 2004
Tag der Prüfung: 21. Juli 2004

| | |
|---|---|
| Referent: | Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt |
| Korreferent: | Prof. Dr. Frank Herrlich |

# Inhaltsverzeichnis

# 0 Einleitung

Im Jahre 1983 erschien der Artikel „Rankin-Selberg Convolutions“ von den Autoren Jacquet, Piatetski-Shapiro und Shalika, in dem zulässigen lokalen Darstellungen $\sigma$, $\pi$ von endlichem Typ eine $L$-Reihe $L(\sigma,\pi,s)$ mithilfe sogenannter Whittakerfunktionen zugeordnet wurde. Es hat sich gezeigt, dass dieser Zugang es ermöglicht, Aussagen über die kritischen Werte von $L$-Reihen, wie zum Beispiel Algebraizität, zu erhalten.

Ohne auf Darstellungen zurückgreifen zu müssen, lassen sich für Whittakerfunktionen $w, v$ und einen multiplikativen Charakter $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ sogenannte getwistete Zeta-Integrale definieren, wie zum Beispiel in den Arbeiten [K-M-Sch] und [Sch].

Integrale diesen Typs sind Hauptbestandteil der vorliegenden Arbeit, wobei das Augenmerk auf die lokalen Zetaintegrale

$$Q(h_{f,n},s) := \int\limits_{\mathrm{U}_{n-1}\backslash\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Q}_p)} \chi(\det(g))w\left(\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_{f,n}\right) v(g) \mid \det(g) \mid^{s-\frac{1}{2}} dg$$

gerichtet ist. Hierbei sind $v$ und $w$ unter der Iwahorigruppe rechtsinvariante Whittakerfunktionen, $\chi$ ein multiplikativer Charakter vom Führer $f = p^r$, $r \geq 1$, und $h_{f,n}$ die fest gewählte Matrix

$$\begin{pmatrix} & & & & f^{2-n} & f^{1-n} \\ & & & f^{4-n} & & f^{2-n} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \vdots \\ & f^{n-4} & & & & f^{-2} \\ f^{n-2} & & & & & f^{-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) .$$

Es stellt sich heraus, dass es zweckmäßig ist, die Bruhatzerlegung zu benutzen und dadurch den Integrationsbereich auf die Borelgruppe der oberen Dreiecksmatrizen zu reduzieren. Dies führt zu einem Integral der Form

$$Q(B_{n-1},h_{f,n},s) := \int\limits_{B_{n-1}} \chi(\det(\omega_{0,n-1}b))w\left(h_{1,n}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_{f,n}\right) v(\omega_{0,n-1}b) \mid \det(b) \mid^{s-\frac{1}{2}} db\,.$$

Hierbei ist $\omega_{0,n-1}$ das lange Weylelement und $h_{1,n} := \begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Um diese Integrale auswerten zu können, ist es nötig, eine konstruktive Zerlegung von Elementen der Borelgruppe in der Form $u^- \cdot \omega \cdot \iota$ an der Hand zu haben, wobei $u^-$ eine unipotente untere Dreiecksmatrix, $\omega$ ein Element der Weylgruppe und $\iota$ ein Element der Iwahorigruppe ist. Deshalb werden im ersten Kapitel dieser Arbeit die dazu notwendigen bekannten Zerlegungen vorgestellt, die oben genannte Zerlegung bewiesen und Vertauschungsrelationen gezeigt, die im zweiten Kapitel von Bedeutung sind.

Im zweiten Teil werden dann die Integrale $Q(B_{n-1}, h_{f,n}, s)$ hinsichtlich ihrer Träger untersucht und ihr Wert für eine bestimmte Teilmenge $Z_{n-1} \subseteq B_{n-1}$ berechnet. Es stellt sich in Proposition 2.1 heraus, dass

$$Q(Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = w(1)v(1)f^{-\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)} G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

ist, wobei $G(\chi)$ die übliche Gaußsumme zum Charakter $\chi$ bezeichnet.

Schließlich wird in Satz 2.1 gezeigt, dass unter gewissen Normierungen und der Bedingung $Q(B_{n-1} \setminus Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = 0$ die Gleichung

$$Q(h_{f,n}, s) = f^{-\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)} G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

gilt. Dieser Satz verallgemeinert die Resultate, die in [K-M-Sch] und [Sch], unter der Bedingung, dass die Charaktere $\chi, \chi^2, \ldots, \chi^{n-1}$ primitiv, nichttrivial und vom selben Führer $f$ sind, gezeigt wurden, da keine Bedingung an $\chi$, außer der Nichttrivialität, gestellt werden. Andererseits konnte die Bedingung $Q(B_{n-1} \setminus Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = 0$ nur für die Fälle $n = 2, 3, 4$ und für den Fall, dass die Charaktere $\chi, \chi^2, \ldots, \chi^{n-1}$ primitiv, nichttrivial und vom selben Führer $f$ sind, nachgewiessen werden. Allerdings legt dies die Vermutung nahe, dass sie für alle $n$ gültig ist. Immerhin kann mit Satz 2.1 gezeigt werden, dass mit dem Priodenintegral $P_j$, welches in 3.2 definiert wird, für $n = 2, 3, 4$ durch $\mu_j(x + f\mathbb{Z}_p) := \left(\frac{A_n \cdot A_{n-1}}{\kappa_{\underline{\alpha}} \cdot \kappa_{\underline{\lambda}}}\right)^r \cdot P_j(t_x h, f)$ ein $p$-adisches Maß definiert wird, ohne eine Bedingung außer der Nichttrivialität an den Charakter $\chi$ zu stellen.

Im Abschnitt 2.4 wird dann bewiesen, dass die Voraussetzung $Q(B_{n-1} \setminus Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = 0$ für $n = 2, 3, 4$ zutrifft.

Im dritten Kapitel werden zu automorphen cuspidalen Darstellungen der $\mathrm{GL}_{n-1}$ über dem Adelring $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ sogenannte Perioden-Integrale $P_j(t_x h, f)$ definiert und damit der Wert der globalen $L$-Reihe, die den automorphen cuspidalen Darstellungen zugeordnet ist, unter der Bedingung $Q(B_{n-1} \setminus Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = 0$, bei der Stelle $s = \frac{1}{2}$ berechnet.

Schließlich ergiebt sich im vierten Teil, unter der Bedingung $Q(B_{n-1} \setminus Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = 0$, dass für alle Charaktere außer dem trivialen durch $\mu_j(x + f\mathbb{Z}_p) := \left(\frac{A_n \cdot A_{n-1}}{\kappa_{\underline{\alpha}} \cdot \kappa_{\underline{\lambda}}}\right)^r \cdot P_j(t_x h, f)$ ein $p$-adisches Maß definiert wird, woraus sich als Korollar die Formel

$$\int_{\mathbb{Z}_p^{\times}} \chi \, d\mu = P_\infty(\frac{1}{2}) \cdot (\frac{\kappa}{A_n})^r \cdot G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot L(\pi \otimes \chi, \sigma, \frac{1}{2})$$

mit $\mu := \sum_j \mu_j$ ergibt.

Im Anhang schließlich wird das Maß der Menge $U(\mathbb{Z}_p)\omega_{0,n}B(\mathbb{Z}_p) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ berechnet, dessen Wert als Normierungsfaktor in Satz 2.1 auftaucht.

Zuletzt möchte ich mich noch bei der Kaffeerunde, namentlich Gabi Schmithüsen, Markus Even, Horst Hammer, Hendrik Kasten und Stefan Kühnlein sowohl für die schöne Athmosphäre als auch für die anregenden Gespräche bedanken. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Herrlich und Herrn Prof. Dr. Schmidt. Sowohl für die fachliche, als auch die menschliche Unterstützung.

Als aller letztes möchte ich mich noch bei meiner Frau Martina Stuber bedanken, die am besten weiß wofür.

# 1 Die $\mathrm{GL}_n$ über lokalen Körpern

Im folgenden bezeichne $F$ einen nicht archimedisch vollständig diskret bewerteten Körper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_F$, dessen maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von $\pi$ erzeugt wird, und dessen Restklassenkörper $\kappa = \mathcal{O}_F/\mathfrak{m}$ endlich ist. Die Bewertung $|\cdot|$ sei so normiert, dass $|\pi| = 1$ ist.

## 1.1 Spezielle Untergruppen der $\mathrm{GL}_n$

### 1.1.1 Die Topologie der $\mathrm{GL}_n(F)$

Die $\mathrm{GL}_n(F)$ ist nach Definition die Einheitengruppe des Rings $\mathrm{End}(F^n)$, des Endomorphismenrings des Vektorraums $F^n$.

Eine Umgebungsbasis eines Elements $x \in \mathrm{End}(F^n)$ ist durch die Mengen

$$\{U_{x,z} \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

mit $U_{x,z} := x + \mathfrak{m}^z \mathrm{End}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_F^n)$ gegeben.

Die Topologie auf der $\mathrm{GL}_n(F)$ ist die von der Topologie auf $\mathrm{End}(F^n)$ induzierte Topologie. Es gilt folgender wichtige

**Satz 1.1.** *Die $GL_n(\mathcal{O}_F)$ ist eine maximal kompakte Untergruppe der $GL_n(F)$. Alle maximal kompakten Untergruppen der $GL_n(F)$ sind zueinander konjugiert.*

**Beweis**: Vergleiche [Mœ], Theorem Seite 304.

### 1.1.2 Parabolische Untergruppen

Es bezeichne $B_n(F)$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen der $\mathrm{GL}_n(F)$. Eine echte algebraische Untergruppe der $\mathrm{GL}_n(F)$, die eine zu $B_n(F)$ konjugierte Untergruppe enthält, wird als **parabolische Untergruppe** bezeichnet.

Eine echte abgeschlossene Untergruppe der $\mathrm{GL}_n(F)$ wird als **standard-parabolische** bezeichnet, wenn sie die $B_n(F)$ selbst enthält. $B_n(F)$ nennt man die **Standard-Borelgruppe**. Die zu $B_n(F)$ konjugierten Untergruppen werden **Borelgruppen** genannt.

### 1.1.3 Die Weylgruppe

Sei $B$ eine Borelgruppe und $T$ eine Untergruppe von $B$, die isomorph zu $(F^\times)^n$ ist, also ein sogenannter maximaler zerfallender **Torus**.

Die **Weylgruppe** $W_n$ wird definiert durch

$$W_n := (\mathrm{Norm}_{\mathrm{GL}_n(F)}(T))/T \ ,$$

wobei $\mathrm{Norm}_{\mathrm{GL}_n(F)}(T)$ der Normalisator von $T$ in $\mathrm{GL}_n(F)$ ist.

**Beispiel**: Ist $B = B_n(F)$ die Standard-Borelgruppe, so ist ein Vertretersystem von $W_n$ durch die Permutationsmatrizen $g_\sigma = (\delta_{i,\sigma(i)})$ gegeben, wobei $\sigma$ die $S_n$ durchläuft, also durch

$$(g_\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \ .$$

### 1.1.4 Die Iwahorigruppe

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal im Ganzheitsring $\mathcal{O}_F$ von $F$. Die Gruppe $I(\mathfrak{a})$ ist definiert als

$$I(\mathfrak{a}) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \mid g_{ij} \equiv 0 \bmod \mathfrak{a} \ \text{ für } i > j\}$$

und wird **Iwahorigruppe zum Ideal** $\mathfrak{a}$ genannt.

Die Gruppe $I_n := I(\mathfrak{m})$ nennt man einfach die **Iwahorigruppe**.

## 1.2 Zerlegungen der $\mathrm{GL}_n(F)$

### 1.2.1 Die Bruhatzerlegung

Sei $B$ eine Borelgruppe und $W_n$ die zugehörige Weylgruppe. Dann lässt sich die $\mathrm{GL}_n(F)$ gemäß folgender Proposition zerlegen.

**Proposition 1.1.** *Für die* $\mathrm{GL}_n(F)$ *gilt:*

$$\mathrm{GL}_n(F) = \bigcup_\omega B \cdot \omega \cdot B$$

*wobei* $\omega$ *ein Repräsentantensystem der Weylgruppe* $W_n$ *durchläuft. Darüberhinaus ist die Vereinigung disjunkt.*

**Beweis**: Einen Beweis findet man in [Bo-T], 5.15. In dieser Referenz findet man auch einen Beweis für beliebige reduktive Gruppen.

**Bemerkung 1.1.** *Nach 1.1.3 ist die* $\mathrm{GL}_n(F)$ *also die disjunkte Vereinigung der Doppelnebenklassen* $B \cdot g_\sigma \cdot B$, *wobei* $B$ *die Standard-Borelgruppe ist und* $\sigma$ *die* $S_n$ *durchläuft.*

Eine einfache Folgerung aus obiger Proposition und der Bemerkung ist folgendes

**Korollar 1.1.** *Sei* $B = B_n(F)$ *die Standard-Borelgruppe und* $U_n$ *die Untergruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen. Dann gilt:*

$$\mathrm{GL}_n(F) = \bigcup_{\omega} U_n \cdot \omega \cdot B_n(F) = \bigcup_{\omega} B_n(F) \cdot \omega \cdot U_n \ ,$$

*wobei* $\omega$ *die Permutationsmatrizen durchläuft. Die Vereinigung ist disjunkt.*

**Beweis**: Jede Matrix $g \in B$ lässt sich schreiben als $diag(a_1, \ldots, a_n) \cdot u$ beziehungsweise $u \cdot diag(a_1, \ldots, a_n)$, wobei $diag(a_1, \ldots, a_n)$ die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

und $u$ eine unipotente obere Dreiecksmatrix ist. Dann folgt die Behauptung aus der Proposition und der Tatsache, dass für eine Permutationsmatrix $\omega$

$$\omega \cdot diag(a_1, \ldots, a_n) = diag(a_{\omega(1)}, \ldots, a_{\omega(n)}) \cdot \omega$$

gilt. □

Die Zerlegung aus dem Korollar wird an späterer Stelle von Bedeutung sein.

## 1.3 Vertauschungsrelationen für Matrizen

In diesem Abschnitt werden einige Zerlegungen von Elementen der Borelgruppe gezeigt, die im Weiteren von Bedeutung sind. Beginnen wir also mit

**Lemma 1.1.** *Sei* $K$ *ein Körper und seien* $a_{11}, \ldots, a_{1n} \in K^{\times}$*. Dann gilt:*

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
0 & 1 & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & \\
\vdots & & & \ddots & & \\
0 & & & & \ddots & \\
\frac{a_{11}}{a_{1n}} & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 & 1 & -\frac{a_{13}}{a_{12}} & & & \\
 & & \ddots & -\frac{a_{14}}{a_{13}} & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & 1 & -\frac{a_{1n}}{a_{1,n-1}} \\
 & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\
-\frac{a_{11}}{a_{12}} & \ddots & & & & 0 \\
 & -\frac{a_{12}}{a_{13}} & \ddots & & & \vdots \\
 & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & & -\frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}} & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\frac{a_{11}}{a_{12}} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\frac{a_{11}}{a_{13}} & \frac{a_{12}}{a_{13}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\frac{a_{11}}{a_{14}} & \frac{a_{12}}{a_{14}} & \frac{a_{13}}{a_{14}} & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\frac{a_{11}}{a_{1n}} & \frac{a_{12}}{a_{1n}} & \frac{a_{13}}{a_{1n}} & \dots & \frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}} & 1
\end{pmatrix}
$$

**Beweis**:

Es ist

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
0 & 1 & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & \\
\vdots & & & \ddots & & \\
0 & & & & \ddots & \\
\frac{a_{11}}{a_{1n}} & & & & & 1
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 & 1 & -\frac{a_{13}}{a_{12}} & & & \\
 & & \ddots & -\frac{a_{14}}{a_{13}} & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & 1 & -\frac{a_{1n}}{a_{1,n-1}} \\
 & & & & & 1
\end{pmatrix}
=
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & -\frac{a_{13}}{a_{12}} & & & \\
\vdots & & \ddots & -\frac{a_{14}}{a_{13}} & & \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \\
0 & & & & 1 & -\frac{a_{1n}}{a_{1,n-1}} \\
\frac{a_{11}}{a_{1n}} & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{11}}{a_{12}} & \ddots & & & & 0 \\ & -\frac{a_{12}}{a_{13}} & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{a_{11}}{a_{12}} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{a_{11}}{a_{13}} & \frac{a_{12}}{a_{13}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{11}}{a_{14}} & \frac{a_{12}}{a_{14}} & \frac{a_{13}}{a_{14}} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{a_{11}}{a_{1n}} & \frac{a_{12}}{a_{1n}} & \frac{a_{13}}{a_{1n}} & \cdots & \frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{11}}{a_{12}} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{11}}{a_{13}} & -\frac{a_{12}}{a_{13}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{11}}{a_{14}} & -\frac{a_{12}}{a_{14}} & -\frac{a_{13}}{a_{14}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ -\frac{a_{11}}{a_{1n}} & -\frac{a_{12}}{a_{1n}} & -\frac{a_{13}}{a_{1n}} & \cdots & -\frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}} & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_{13}}{a_{12}} & & & \\ \vdots & & \ddots & -\frac{a_{14}}{a_{13}} & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 1 & -\frac{a_{1n}}{a_{1,n-1}} \\ \frac{a_{11}}{a_{1n}} & & & & & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{11}}{a_{12}} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{11}}{a_{13}} & -\frac{a_{12}}{a_{13}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{11}}{a_{14}} & -\frac{a_{12}}{a_{14}} & -\frac{a_{13}}{a_{14}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ -\frac{a_{11}}{a_{1n}} & -\frac{a_{12}}{a_{1n}} & -\frac{a_{13}}{a_{1n}} & \cdots & -\frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Aus diesem Lemma ergeben sich einige Korollare.

**Korollar 1.2.** *Sei* $b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \in B_n \subseteq GL_n(\mathbb{Q}_p)$ *mit* $a_{1j} \in f^{n-j}\mathbb{Z}_p^\times$ *und* $w$ *eine Whittakerfunktion, die unter der Iwahorigruppe rechtsinvariant ist.*

*Dann gilt:*

$$w(\omega_{0,n}b) \quad = \quad \psi(\tfrac{a_{2n}}{a_{1n}})w\left(\omega_{0,n}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & 1 & -\frac{a_{13}}{a_{12}} & & & \\ & & \ddots & -\frac{a_{14}}{a_{13}} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -\frac{a_{1n}}{a_{1,n-1}} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{11}}{a_{12}} & \ddots & & & & 0 \\ & -\frac{a_{12}}{a_{13}} & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}} & 0 \end{pmatrix}\right)$$

**Beweis**:

Es ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

und also nach Lemma 1.1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & a_{nn}
\end{pmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
1 & & & & \\
0 & 1 & & & \\
\vdots & & \ddots & & \\
\vdots & & & \ddots & \\
0 & & & & \ddots & \\
\frac{a_{11}}{a_{1n}} & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & \\
 & 1 & -\frac{a_{13}}{a_{12}} & & 0 & \\
 & & \ddots & -\frac{a_{14}}{a_{13}} & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & 1 & -\frac{a_{1n}}{a_{1,n-1}} \\
 & & & & & 1
\end{pmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\
-\frac{a_{11}}{a_{12}} & \ddots & & & & 0 \\
 & -\frac{a_{12}}{a_{13}} & \ddots & & & \vdots \\
 & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & & -\frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}} & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\frac{a_{11}}{a_{12}} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\frac{a_{11}}{a_{13}} & \frac{a_{12}}{a_{13}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\frac{a_{11}}{a_{14}} & \frac{a_{12}}{a_{14}} & \frac{a_{13}}{a_{14}} & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\frac{a_{11}}{a_{1n}} & \frac{a_{12}}{a_{1n}} & \frac{a_{13}}{a_{1n}} & \dots & \frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}} & 1
\end{pmatrix}
$$

Nun folgt die Behauptung aus

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & a_{nn}
\end{pmatrix} \times
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
0 & 1 & & & \\
\vdots & & \ddots & & \\
\vdots & & & \ddots & \\
0 & & & & \ddots & \\
\frac{a_{11}}{a_{1n}} & & & & & 1
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & & & & \\
\frac{a_{2n}}{a_{1n}} & 1 & & & \\
\frac{a_{3n}}{a_{1n}} & & \ddots & & \\
\vdots & & & \ddots & \\
\frac{a_{n-1,n}}{a_{1n}} & & & & \ddots & \\
\frac{a_{nn}}{a_{1n}} & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

und der Tatsache, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{a_{11}}{a_{12}} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{a_{11}}{a_{13}} & \frac{a_{12}}{a_{13}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{11}}{a_{14}} & \frac{a_{12}}{a_{14}} & \frac{a_{13}}{a_{14}} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{a_{11}}{a_{1n}} & \frac{a_{12}}{a_{1n}} & \frac{a_{13}}{a_{1n}} & \dots & \frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}} & 1 \end{pmatrix}$$

aus der Iwahorigruppe ist. □

**Korollar 1.3.** *Sei* $b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in B_{n+1} \subseteq GL_{n+1}(\mathbb{Q}_p)$ *mit* $a_{1j} = a'_{1j} f^{n-j} \in f^{n-j}\mathbb{Z}_p^\times$ *und* $w$ *eine Whittakerfunktion, die unter der Iwahorigruppe rechtsinvariant ist.*

*Dann gilt:*

$$w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b\right)$$

$$= \psi\left(\tfrac{a_{22}}{a'_{12}} f^{-n+2}\right) \prod_{j=2}^{n-1} \psi\left(-\tfrac{a_{2j}}{a'_{1j}} f^{-n+j} + \tfrac{a_{2,j+1}}{a'_{1,j+1}} f^{-n+j+1}\right) w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} -\frac{a_{22}}{a'_{12}} f & \frac{a_{22}}{a'_{12}} - \frac{a_{23}}{a'_{13}} f & \frac{a_{23}}{a'_{13}} - \frac{a_{24}}{a'_{14}} f & \dots & \dots & \frac{a_{2,n-1}}{a'_{1,n-1}} - \frac{a_{2n}}{a'_{1n}} f & 0 & 0 \\ & -\frac{a_{33}}{a'_{13}} f & \frac{a_{33}}{a'_{13}} - \frac{a_{34}}{a'_{14}} f & \frac{a_{34}}{a'_{14}} - \frac{a_{35}}{a'_{15}} f & \dots & \frac{a_{3,n-1}}{a'_{1,n-1}} - \frac{a_{3n}}{a'_{1n}} f & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{n-1,n-1}}{a'_{1,n-1}} f & \frac{a_{n-1,n}}{a'_{1,n-1}} - \frac{a_{n-1,n}}{a'_{1,n}} f & \vdots & \vdots \\ & & & & & -\frac{a_{nn}}{a'_{1n}} f & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

**Beweis**: Wir führen die Berechnung nur in der $\mathrm{GL}_n$ durch, da die letzte Spalte und letzte Zeile keinen Einfluss auf die Rechnung haben. Nach Korollar 1.2 ist

$$
\begin{aligned}
w(\omega_{0,n}b) &= \psi\left(\tfrac{a_{2n}}{a_{1n}}\right) w \left( \omega_{0,n} \begin{pmatrix} a'_{11}f^{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \right. \\
& \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & \dots & 0 \\ & 1 & -\frac{a'_{13}}{a'_{12}}f^{-1} & & & & \\ & & \ddots & & -\frac{a'_{14}}{a'_{13}}f^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1 & -\frac{a'_{1n}}{a'_{1,n-1}}f^{-1} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\
& \left. \times \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{a'_{1n}}{a'_{11}}f^{-n+1} \\ -\frac{a'_{11}}{a'_{12}}f & \ddots & & & & 0 \\ & -\frac{a'_{12}}{a'_{13}}f & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & -\frac{a'_{1,n-1}}{a'_{1n}}f & 0 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

und es gilt

$$
\begin{pmatrix} a'_{11}f^{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & \dots & 0 \\ & 1 & -\frac{a'_{13}}{a'_{12}}f^{-1} & & & & \\ & & \ddots & & -\frac{a'_{14}}{a'_{13}}f^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1 & -\frac{a'_{1n}}{a'_{1,n-1}}f^{-1} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix} a'_{11}f^{n-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & a_{22} & -\frac{a_{22}a'_{13}}{a'_{12}}f^{-1} + a_{23} & -\frac{a_{23}a'_{14}}{a'_{13}}f^{-1} + a_{24} & \dots & -\frac{a_{2,n-1}a'_{1n}}{a'_{1,n-1}}f^{-1} + a_{2n} \\ & & a_{33} & -\frac{a_{33}a'_{14}}{a'_{13}}f^{-1} + a_{34} & \dots & -\frac{a_{3,n-1}a'_{1n}}{a'_{1,n-1}}f^{-1} + a_{3n} \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_{nn} \end{pmatrix}.
$$

Weiter ist

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{a'_{1n}}{a'_{11}} f^{-n+1} \\ -\frac{a'_{11}}{a'_{12}} f & \ddots & & & & 0 \\ & -\frac{a'_{12}}{a'_{13}} f & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & -\frac{a'_{1,n-1}}{a'_{1n}} f & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a'_{1n}}{a'_{11}} f^{-n+1} & & & & & \\ & -\frac{a'_{11}}{a'_{12}} f & & & & \\ & & -\frac{a'_{12}}{a'_{13}} f & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\frac{a'_{1,n-1}}{a'_{1n}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a'_{11} f^{n-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & a_{22} & -\frac{a_{22}a'_{13}}{a'_{12}} f^{-1} + a_{23} & -\frac{a_{23}a'_{14}}{a'_{13}} f^{-1} + a_{24} & \dots & -\frac{a_{2,n-1}a'_{1n}}{a'_{1,n-1}} f^{-1} + a_{2n} \\ & & a_{33} & -\frac{a_{33}a'_{14}}{a'_{13}} f^{-1} + a_{34} & \dots & -\frac{a_{3,n-1}a'_{1n}}{a'_{1,n-1}} f^{-1} + a_{3n} \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{a'_{1n}}{a'_{11}} f^{1-n} & & & & & \\ & -\frac{a'_{11}}{a'_{12}} f & & & & \\ & & -\frac{a'_{12}}{a'_{13}} f & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\frac{a'_{1,n-1}}{a'_{1n}} f \end{pmatrix} =$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
 & -\frac{a_{22}}{a'_{12}}f & \frac{a_{22}}{a'_{12}} - \frac{a_{23}}{a'_{13}}f & \frac{a_{23}}{a'_{13}} - \frac{a_{24}}{a'_{14}}f & \cdots & \frac{a_{2,n-1}}{a'_{1,n-1}} - \frac{a_{2n}}{a'_{1n}}f \\
 & & -\frac{a_{33}}{a'_{13}}f & \frac{a_{33}}{a'_{13}} - \frac{a_{34}}{a'_{14}f} & \cdots & \frac{a_{3,n-1}}{a'_{1,n-1}} - \frac{a_{3n}}{a'_{1n}}f \\
 & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & -\frac{a_{nn}}{a'_{1n}}f
\end{pmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
a'_{1n} & & & & & \\
 & a'_{11} & & & & \\
 & & a'_{12} & & & \\
 & & & \ddots & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & a'_{1,n-1}
\end{pmatrix},
$$

wobei

$$
\begin{pmatrix}
a'_{1n} & & & & & \\
 & a'_{11} & & & & \\
 & & a'_{12} & & & \\
 & & & \ddots & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & a'_{1,n-1}
\end{pmatrix}
$$

aus der Iwahorigruppe ist. Somit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
w(\omega_{0,n}b) \quad = \quad & \psi(\tfrac{a_{2n}}{a'_{1n}}) \times \\
& w\left( \omega_{0,n} \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
 & -\frac{a_{22}}{a'_{12}}f & \frac{a_{22}}{a'_{12}} - \frac{a_{23}}{a'_{13}}f & \frac{a_{23}}{a'_{13}} - \frac{a_{24}}{a'_{14}}f & \cdots & \frac{a_{2,n-1}}{a'_{1,n-1}} - \frac{a_{2n}}{a'_{1n}}f \\
 & & -\frac{a_{33}}{a'_{13}}f & \frac{a_{33}}{a'_{13}} - \frac{a_{34}}{a'_{14}f} & \cdots & \frac{a_{3,n-1}}{a'_{1,n-1}} - \frac{a_{3n}}{a'_{1n}}f \\
 & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & -\frac{a_{nn}}{a'_{1n}}f
\end{pmatrix} \times \right.
\end{aligned}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg)\Bigg)
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \psi(\tfrac{a_{2n}}{a_{1n}}) w \Bigg( \Bigg( \begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \times \begin{pmatrix} -\frac{a_{22}}{a'_{12}} f & \frac{a_{22}}{a'_{12}} - \frac{a_{23}}{a'_{13}} f & \frac{a_{23}}{a'_{13}} - \frac{a_{24}}{a'_{14}} f & \dots & \frac{a_{2,n-1}}{a'_{1,n-1}} - \frac{a_{2n}}{a'_{1n}} f & 0 \\ & -\frac{a_{33}}{a'_{13}} f & \frac{a_{33}}{a'_{13}} - \frac{a_{34}}{a'_{14} f} & \dots & \frac{a_{3,n-1}}{a'_{1,n-1}} - \frac{a_{3n}}{a'_{1n}} f & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{nn}}{a'_{1n}} f & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg)\Bigg) \quad .
\end{aligned}
$$

Die behauptete Gleichheit folgt nun aus

$$
\psi(\tfrac{a_{22}}{a'_{12}} f^{-n+2}) \prod_{j=2}^{n-1} \psi(-\tfrac{a_{2j}}{a'_{1j}} f^{-n+j} + \tfrac{a_{2,j+1}}{a'_{1,j+1}} f^{-n+j+1}) =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad \psi(\tfrac{a_{22}}{a'_{12}} f^{-n+2} + \sum_{j=2}^{n-1} -\tfrac{a_{2j}}{a'_{1j}} f^{-n+j} + \tfrac{a_{2,j+1}}{a'_{1,j+1}} f^{-n+j+1}) \\
&= \quad \psi(\tfrac{a_{2n}}{a'_{1n}}) \ . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Als nächstes beweisen wir ein Lemma, das in Proposition 2.1 zum Tragen kommt.

**Lemma 1.2.** *Sei $a_{1j} \in \mathbb{Z}_p^\times$ für alle $j$ und $w$ eine Whittakerfunktion, die unter der Iwahorigruppe invariant ist. Dann gilt:*

$$
w \left( \omega_{0,n} \begin{pmatrix} a_{11} f^{n-1} & a_{12} f^{n-2} & \dots & a_{1,n-1} f & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & f^{1-n} \\ & & & f^{3-n} & \\ & & \iddots & & \\ & f^{n-3} & & & \\ f^{n-1} & & & & \end{pmatrix} \right) =
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right. \\
& \times \begin{pmatrix} -\frac{a_{22}}{a_{12}}f & \frac{a_{22}}{a_{12}} - \frac{a_{23}}{a_{13}}f & \frac{a_{23}}{a_{13}} - \frac{a_{24}}{a_{14}}f & \cdots & \frac{a_{2,n-1}}{a_{1,n-1}} - \frac{a_{2n}}{a_{1n}}f & 0 \\ & -\frac{a_{33}}{a_{13}}f & \frac{a_{33}}{a_{13}} - \frac{a_{34}}{a_{14}f} & \cdots & \frac{a_{3,n-1}}{a_{1,n-1}} - \frac{a_{3n}}{a_{1n}}f & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{nn}}{a_{1n}}f & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \left.\times \begin{pmatrix} & & & & f^{2-n} & 0 \\ & & & f^{4-n} & & \vdots \\ & & \iddots & & & \vdots \\ & f^{n-4} & & & & \vdots \\ f^{n-2} & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) .
\end{aligned}
$$

**Beweis**: Es ist

$$
\begin{pmatrix} a_{11}f^{n-1} & a_{12}f^{n-2} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & f^{1-n} \\ & & f^{3-n} & \\ & \iddots & & \\ f^{n-3} & & & \\ f^{n-1} & & & \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}f^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}}f^{-1} & \frac{a_{13}}{a_{11}}f^{-2} & \cdots & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}}f^{-n+1} \\ & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} & & & f^{1-n} \\ & & f^{3-n} & \\ & \iddots & & \\ f^{n-3} & & & \\ f^{n-1} & & & \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}f^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & & & & f^{1-n} \\ & & & f^{3-n} & \\ & & \iddots & & \\ & f^{n-3} & & & \\ f^{n-1} & & & & \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \frac{a_{1n}}{a_{11}}f^{n-1} & \frac{a_{1,n-1}}{a_{11}}f^{n-2} & \dots & \frac{a_{13}}{a_{11}}f^2 & \frac{a_{12}}{a_{11}}f & 1 \end{pmatrix}.
$$

Hierbei ist die letzte Matrix aus der Iwahorigruppe.

Nun ist

$$
\begin{pmatrix} a_{11}f^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & f^{1-n} \\ & & & f^{3-n} & \\ & & \iddots & & \\ & f^{n-3} & & & \\ f^{n-1} & & & & \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & -\frac{a_{22}}{a_{12}} & -\frac{a_{23}}{a_{13}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{1n}} \\ & & -\frac{a_{33}}{a_{13}} & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{nn}}{a_{1n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}f^{n-1} & & & & \\ & -a_{12} & & & \\ & & -a_{13} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -a_{1n} \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} & & & & f^{1-n} \\ & & & f^{3-n} & \\ & & \iddots & & \\ & f^{n-3} & & & \\ f^{n-1} & & & & \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & -\frac{a_{22}}{a_{12}} & -\frac{a_{23}}{a_{13}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{1n}} \\ & & -\frac{a_{33}}{a_{13}} & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{nn}}{a_{1n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & f^{3-n} & \\ & & \iddots & & \\ & f^{n-3} & & & \\ f^{n-1} & & & & \end{pmatrix}
$$

$$\times \begin{pmatrix} -a_{1n} & & & & \\ & -a_{1,n-1} & & & \\ & & -a_{1n,n-2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{11} \end{pmatrix},$$

wobei die letzte Matrix wieder aus der Iwahorigruppe ist.

Nun ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & -\frac{a_{22}}{a_{12}} & -\frac{a_{23}}{a_{13}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{1n}} \\ & & -\frac{a_{33}}{a_{13}} & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{nn}}{a_{1n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & f^{3-n} & \\ & & \iddots & & \\ & f^{n-3} & & & \\ f^{n-1} & & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & -\frac{a_{22}}{a_{12}} & -\frac{a_{23}}{a_{13}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{1n}} \\ & & -\frac{a_{33}}{a_{13}} & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{nn}}{a_{1n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ f & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & f & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & f^{2-n} & \\ & & \iddots & & \\ & f^{n-4} & & & \\ f^{n-2} & & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & -\frac{a_{22}}{a_{12}}f & -\frac{a_{23}}{a_{13}}f & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{1n}}f \\ & & -\frac{a_{33}}{a_{13}}f & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{nn}}{a_{1n}}f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & f^{2-n} & \\ & & \iddots & & \\ & f^{n-4} & & & \\ f^{n-2} & & & & \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & -\frac{a_{22}}{a_{12}}f & -\frac{a_{23}}{a_{13}}f & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{1n}}f \\ & & -\frac{a_{33}}{a_{13}}f & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{nn}}{a_{1n}}f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & f^{2-n} & \\ & & \iddots & & \\ & f^{n-4} & & & \\ f^{n-2} & & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & -\frac{a_{22}}{a_{12}}f & -\frac{a_{23}}{a_{13}}f + \frac{a_{22}}{a_{12}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{1n}}f + \frac{a_{2,n-1}}{a_{1,n-1}} \\ & & -\frac{a_{33}}{a_{13}}f & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{1n}}f + \frac{a_{3,n-1}}{a_{1,n-1}} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{nn}}{a_{1n}}f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & 1 & f^{-1} & f^{-2} & f^{-3} & \cdots & f^{-n+2} \\ & & 1 & f^{-1} & f^{-2} & \cdots & f^{-n+3} \\ & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 & f^{-1} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\times \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & f^{2-n} & \\ & \iddots & & \\ & f^{n-4} & & \\ f^{n-2} & & & \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & -\frac{a_{22}}{a_{12}} f & -\frac{a_{23}}{a_{13}} f + \frac{a_{22}}{a_{12}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{1n}} f + \frac{a_{2,n-1}}{a_{1,n-1}} \\ & & -\frac{a_{33}}{a_{13}} f & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{1n}} f + \frac{a_{3,n-1}}{a_{1,n-1}} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{nn}}{a_{1n}} f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & f^{2-n} & \\ & \iddots & & \\ & f^{n-4} & & \\ f^{n-2} & & & \end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & f & 1 & & & & \\ & f^2 & f & \ddots & & & \\ & f^3 & f^2 & \ddots & \ddots & & \\ & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & \\ & f^{n-2} & f^{n-3} & \cdots & \cdots & f & 1 \end{pmatrix},
$$

wobei die letzte Matrix wieder aus der Iwahorigruppe ist.

Insgesamt gilt also

$$
w\left(\omega_{0,n} \begin{pmatrix} a_{11} f^{n-1} & a_{12} f^{n-2} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & f^{1-n} \\ & & & f^{3-n} & \\ & & \iddots & & \\ & f^{n-3} & & & \\ f^{n-1} & & & & \end{pmatrix}\right) =
$$

$$
= \quad w\left(\omega_{0n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & -\frac{a_{22}}{a_{12}} f & -\frac{a_{23}}{a_{13}} f + \frac{a_{22}}{a_{12}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{1n}} f + \frac{a_{2,n-1}}{a_{1,n-1}} \\ & & -\frac{a_{33}}{a_{13}} f & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{1n}} f + \frac{a_{3,n-1}}{a_{1,n-1}} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{nn}}{a_{1n}} f \end{pmatrix} \right.
$$

$$
\left. \times \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & f^{2-n} & \\ & \iddots & & \\ & f^{n-4} & & \\ f^{n-2} & & & \end{pmatrix}\right)
$$

$$
= \quad w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{a_{22}}{a_{12}}f & -\frac{a_{23}}{a_{13}}f+\frac{a_{22}}{a_{12}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{1n}}f+\frac{a_{2,n-1}}{a_{1,n-1}} & 0 \\ & -\frac{a_{33}}{a_{13}}f & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{1n}}f+\frac{a_{3,n-1}}{a_{1,n-1}} & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & -\frac{a_{nn}}{a_{1n}}f & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}\right.
$$

$$
\left.\times \begin{pmatrix} & & & & f^{2-n} & \\ & & & f^{4-n} & & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \\ & f^{n-4} & & & & \\ f^{n-2} & & & & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}\right),
$$

woraus die Behauptung folgt. □

Das folgende Lemma wird von Bedeutung sein, wenn der Träger eines Integrals bestimmt wird.

**Lemma 1.3.** *In* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ *gilt für Matrizen der Form* $\begin{pmatrix} 1 & & & b_{1i} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & b_{i-1,i} & & & \\ & & & b_{ii} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$ *mit* $b_{1i} \neq 0$*:*

$$
\begin{pmatrix} 1 & & & b_{1i} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & b_{i-1,i} & & & \\ & & & b_{ii} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
\frac{b_{2i}}{b_{1i}} & 1 & & & & & & & \\
\frac{b_{3i}}{b_{1i}} & & 1 & & & & & & \\
\vdots & & & \ddots & & & & & \\
\frac{b_{i-1,i}}{b_{1i}} & & & & \ddots & & & & \\
\frac{b_{ii}}{b_{1i}} & & & & & \ddots & & & \\
0 & & & & & & \ddots & & \\
\vdots & & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & & & 0 & & & \\
& \ddots & & b_{2i} & & & \\
& & 1 & \vdots & & & \\
& & & b_{ii} & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & b_{1i} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\
0 & & & 1 & & & & \vdots \\
-b_{1i}^{-1} & & & & 0 & & & \vdots \\
0 & & & & & 1 & & \vdots \\
\vdots & & & & & & \ddots & 0 \\
0 & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & & & & & & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & & & & & \vdots \\
0 & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\
b_{1i}^{-1} & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\
0 & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & & & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix} .
$$

**Beweis**:

Es gilt:

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & b_{1i} & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & 1 & b_{i-1,i} & & & \\
& & & b_{ii} & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & & & 0 & & & \\
& \ddots & & b_{2i} & & & \\
& & 1 & \vdots & & & \\
& & & b_{ii} & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & & & & b_{1i} & & & \\
& \ddots & & & 0 & & & \\
& & 1 & & \vdots & & & \\
& & & 1 & 0 & & & \\
& & & & 1 & & & \\
& & & & & 1 & & \\
& & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & & & 0 & & & \\
& \ddots & & b_{2i} & & & \\
& & 1 & \vdots & & & \\
& & & b_{ii} & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & \\
0 & \ddots & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & & \\
0 & & & \ddots & & & & \\
b_{1i}^{-1} & & & & \ddots & & & \\
0 & & & & & \ddots & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & b_{1i} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & & \\
0 & & & 1 & & & & \\
-b_{1i}^{-1} & & & & 0 & & & \\
0 & & & & & 1 & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & \\
0 & \ddots & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & & \\
0 & & & \ddots & & & & \\
b_{1i}^{-1} & & & & \ddots & & & \\
0 & & & & & \ddots & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\frac{b_{2i}}{b_{1i}} & 1 & & & & b_{2i} & & & \\
\frac{b_{3i}}{b_{1i}} & & 1 & & & \vdots & & & \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots & & & \\
\frac{b_{i-1,i}}{b_{1i}} & & & & 1 & b_{i-1,i} & & & \\
\frac{b_{ii}}{b_{1i}} & & & & & b_{ii} & & & \\
0 & & & & & & 1 & & \\
\vdots & & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & b_{1i} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & & \\
0 & & & 1 & & & & \\
-b_{1i}^{-1} & & & & 0 & & & \\
0 & & & & & 1 & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & \\
0 & \ddots & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & & \\
0 & & & \ddots & & & & \\
b_{1i}^{-1} & & & & \ddots & & & \\
0 & & & & & \ddots & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
\frac{b_{2i}}{b_{1i}} & 1 & & & & & & & \\
\frac{b_{3i}}{b_{1i}} & & 1 & & & & & & \\
\vdots & & & \ddots & & & & & \\
\frac{b_{i-1,i}}{b_{1i}} & & & & \ddots & & & & \\
\frac{b_{ii}}{b_{1i}} & & & & & \ddots & & & \\
0 & & & & & & \ddots & & \\
\vdots & & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & & & 0 & & & \\
& \ddots & & b_{2i} & & & \\
& & 1 & \vdots & & & \\
& & & b_{ii} & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & b_{1i} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\
0 & & & 1 & & & & \vdots \\
-b_{1i}^{-1} & & & & 0 & & & \vdots \\
0 & & & & & 1 & & \vdots \\
\vdots & & & & & & \ddots & 0 \\
0 & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & & & & & & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & & & & & \vdots \\
0 & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\
b_{1i}^{-1} & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\
0 & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & & & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

wie behauptet. $\square$

Aus Lemma 1.3 ergibt sich folgendes

**Korollar 1.4.** *Sei $b \in GL_n(\mathbb{Q}_p)$ eine Matrix der Form* $\begin{pmatrix}
1 & & & b_{1i} & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & 1 & b_{i-1,i} & & & \\
& & & b_{ii} & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix} \tau$

*wobei $\tau$ eine Permutationsmatrix ist. Dann gibt es eine untere Dreiecksmatrix der Form*

$$u = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ u_{21} & \ddots & & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ u_{i1} & \cdots & u_{i,i-1} & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

*eine Diagonalmatrix $d$, eine Permutationsmatrix $\tau'$ und eine Matrix $c$ aus der Iwahori-gruppe, sodass $b = u \cdot d \cdot \tau' \cdot c$ ist.*
*Hierbei ist*

$$u_{k+1,k} = \begin{cases} \frac{b_{k+1,i}}{b_{ki}} & \textit{für} \quad b_{ki} \neq 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

*für $k = 1, \ldots, i-1$.*

Zum Beweis des Korollars ist folgende offensichtliche Bemerkung nützlich.

**Bemerkung**: Sei $A_{ij}(a) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ eine Additionsmatrix, $B = diag(b_{11}, \ldots, b_{nn})$ eine Diagonalmatrix und $\tau$ eine Permutationsmatrix. Dann gilt:

a) $A_{ij}(a)B\tau = B\tau A_{\tau(i),\tau(j)}(\frac{b_{jj}}{b_{ii}}a)$

b) $A_{ji}(a^{-1})B\tau = B\tau A_{\tau(j),\tau(i)}(\frac{b_{ii}}{b_{jj}}a^{-1})$

c) Ist $A_{\tau(i),\tau(j)}(\frac{b_{jj}}{b_{ii}}a)$ nicht in der Iwahorigruppe, so ist $A_{\tau(j),\tau(i)}(\frac{b_{ii}}{b_{jj}}a^{-1})$ in der Iwahori-gruppe.

**Beweis von Korollar 1.4** : Ist $A_{\tau(1),\tau(i)}(b_{1i})$ in der Iwahorigruppe, so ist

$$b = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & & & \\ & \ddots & & b_{2i} & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ & & & b_{ii} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tau A_{\tau(1),\tau(i)}(b_{1i})$$

die behauptete Zerlegung.

Ist $A_{\tau(1),\tau(i)}(b_{1i})$ nicht in der Iwahorigruppe, dann folgt mit Lemma 1.3, dass

$$b\tau = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ \frac{b_{2i}}{b_{1i}} & 1 &&&&&&& \\ \frac{b_{3i}}{b_{1i}} && 1 &&&&&& \\ \vdots &&& \ddots &&&&& \\ \frac{b_{i-1,i}}{b_{1i}} &&&& \ddots &&&& \\ \frac{b_{ii}}{b_{1i}} &&&&& \ddots &&& \\ 0 &&&&&& \ddots && \\ \vdots &&&&&&& \ddots & \\ 0 &&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 &&& 0 &&& \\ & \ddots && b_{2i} &&& \\ && 1 & \vdots &&& \\ &&& b_{ii} &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 &&&&&& \vdots \\ \vdots && \ddots &&&&& \vdots \\ 0 &&& 1 &&&& \vdots \\ -b_{1i}^{-1} &&&& 0 &&& \vdots \\ 0 &&&&& 1 && \vdots \\ \vdots &&&&&& \ddots & 0 \\ 0 &&&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 &&&&&& \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots &&&&& \vdots \\ 0 & \vdots && \ddots &&&& \vdots \\ b_{1i}^{-1} & \vdots &&& \ddots &&& \vdots \\ 0 & \vdots &&&& \ddots && \vdots \\ \vdots & \vdots &&&&& \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tau$$

$$= \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ \frac{b_{2i}}{b_{1i}} & 1 &&&&&&& \\ \frac{b_{3i}}{b_{1i}} && 1 &&&&&& \\ \vdots &&& \ddots &&&&& \\ \frac{b_{i-1,i}}{b_{1i}} &&&& \ddots &&&& \\ \frac{b_{ii}}{b_{1i}} &&&&& \ddots &&& \\ 0 &&&&&& \ddots && \\ \vdots &&&&&&& \ddots & \\ 0 &&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 &&& 0 &&& \\ & \ddots && b_{2i} &&& \\ && 1 & \vdots &&& \\ &&& b_{ii} &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & & 1 & & & & \vdots \\ -b_{1i}^{-1} & & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & & & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tau A_{\tau(i),\tau(1)}(b_{1i}^{-1})$$

ist, wobei die letzte Matrix nach der Bemerkung aus der Iwahorigruppe ist.

Also genügt es folgendes zu zeigen:

Sei $b = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 & & & \\ & \ddots & & & \vdots & & & \\ & & \ddots & & 0 & & & \\ & & & \ddots & b_{ki} & & & \\ & & & 1 & \vdots & & & \\ & & & & b_{ii} & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$, $d = diag(d_{11}, \ldots, d_{nn})$ und $\tau$ eine Permutationsmatrix. Dann gibt es eine untere Dreiecksmatrix $u$, eine Diagonalmatrix $d' = diag(d'_{11}, \ldots, d'_{nn})$, eine Permutation $\tau'$ und eine Matrix $c$ aus der Iwahorigruppe, sodass

$$bd\tau = u \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 & & & \\ & \ddots & & & \vdots & & & \\ & & \ddots & & 0 & & & \\ & & & \ddots & b_{k+1,i} & & & \\ & & & 1 & \vdots & & & \\ & & & & b_{ii} & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} d'\tau' c$$

ist.

Beweis davon: Zunächst ist

$$b = \begin{pmatrix}
1 & & & & & 0 & & & \\
& \ddots & & & & \vdots & & & \\
& & \ddots & & & 0 & & & \\
& & & \ddots & & b_{k+1,i} & & & \\
& & & & 1 & \vdots & & & \\
& & & & & b_{ii} & & & \\
& & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 1
\end{pmatrix} A_{ki}(b_{ki}) \ .$$

Wegen $A_{ki}(b_{ki})d\tau = d\tau A_{\tau(k),\tau(i)}(\frac{d_{ii}}{d_{kk}}b_{ki})$ ist die Behauptung nach der Bemerkung gezeigt, falls $A_{\tau(k),\tau(i)}(\frac{d_{ii}}{d_{kk}}b_{ki})$ aus der Iwahorigruppe ist.

Ist nun $A_{\tau(k),\tau(i)}(\frac{d_{kk}}{d_{ii}}b_{ki})$ nicht aus der Iwahorigruppe, so ist mit

$$u = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & \frac{b_{k+1,i}}{b_{ki}} & 1 & & & & & & & \\
& & \frac{b_{k+2,i}}{b_{ki}} & & 1 & & & & & & \\
& & \vdots & & & \ddots & & & & & \\
& & \frac{b_{i-1,i}}{b_{ki}} & & & & 1 & & & & \\
& & \frac{b_{ii}}{b_{ki}} & & & & & 1 & & & \\
& & 0 & & & & & & 1 & & \\
& & \vdots & & & & & & & \ddots & \\
& & 0 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

nach Lemma 1.3

$$bd\tau = u \begin{pmatrix}
1 & & & & & 0 & & & \\
& \ddots & & & & \vdots & & & \\
& & \ddots & & & 0 & & & \\
& & & \ddots & & b_{k+1,i} & & & \\
& & & & 1 & \vdots & & & \\
& & & & & b_{ii} & & & \\
& & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 1
\end{pmatrix} \times$$

$$
\times \left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{k,i} & 0 & \cdots & 0 \\
& & & \vdots & 1 & & & & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & & & & \\
& & & 0 & & & 1 & & & & \\
& & & -b_{k,i}^{-1} & & & & 0 & & & \\
& & & 0 & & & & & 1 & & \\
& & & \vdots & & & & & & \ddots & \\
& & & 0 & & & & & & & 1
\end{array}\right) A_{ik}(b_{ki}^{-1}) d\tau \ .
$$

Weiter ist $A_{ik}(b_{ki}^{-1})d\tau = d\tau A_{\tau(i),\tau(k)}(\frac{d_{kk}}{d_{ii}} b_{ki}^{-1})$ und nach Voraussetzung und Lemma 1.3 ist $A_{\tau(i),\tau(k)}(\frac{d_{kk}}{d_{ii}} b_{ki}^{-1})$ aus der Iwahorigruppe. Ausserdem ist

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{k,i} & 0 & \cdots & 0 \\
& & & \vdots & 1 & & & & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & & & & \\
& & & 0 & & & 1 & & & & \\
& & & -b_{k,i}^{-1} & & & & 0 & & & \\
& & & 0 & & & & & 1 & & \\
& & & \vdots & & & & & & \ddots & \\
& & & 0 & & & & & & & 1
\end{array}\right)
$$

das Produkt einer Diagonalmatrix und einer Permutationsmatrix und also ist die Behauptung bewiesen. $\square$

# 2 Getwistete Zeta-Integrale

## 2.1 Allgemeine Vorbemerkungen

Sei $F$ ein vollständiger nicht archimedisch bewerteter Körper der Charakteristik 0 mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_F$ und endlichem Restklassenkörper. Weiter sei $\psi : F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ ein unitärer additiver Charakter mit Kern $\mathcal{O}_F$. Für eine unipotente obere Dreiecksmatrix $u = (u_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(F)$ setze

$$\psi(u) := \psi(\sum_{i=1}^{n-1} u_{i,i+1}) = \prod_{1 \le i \le n-1} \psi(u_{i,i+1}) \ .$$

Unter einer Whittakerfunktion (bezüglich $\psi$) auf $\mathrm{GL}_n(F)$ versteht man eine Funktion $w$ mit den folgenden zwei Eigenschaften:

a) $w(ug) = \psi(u)w(g)$ für alle $u \in U_n$ und alle $g \in \mathrm{GL}_n(F)$.

b) Es gibt eine offene kompakte Untergruppe $K \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$, sodass $w$ unter $K$ rechtsinvariant ist. Mit anderen Worten also gilt: $w(gk) = w(g)$ für alle $g \in \mathrm{GL}_n(F)$ und alle $k \in K$ .

## 2.2 Der Fall $F = \mathbb{Q}_p$

Sei nun $p$ eine Primzahl und $F = \mathbb{Q}_p$.

Für einen additiven Charakter $\psi : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ bezeichne $\mathcal{W}(\psi, \mathrm{GL}_n)$ den Raum aller Whittakerfunktionen und zu einer fest gegebenen offenen kompakten Untergruppe $K$ von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ bezeichne $\mathcal{W}(\psi, \mathrm{GL}_n)^K$ die Teilmenge der $K$-invarianten Whittakerfunktionen.

Im folgenden sei $K = I_n := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p) \mid g \bmod p \in B_n(\mathbb{F}_p)\}$ die Iwahorigruppe.

Weiter sei $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ ein multiplikativer Charakter mit Führer $f = p^r$.

Wie in [Ja-P-S I] betrachten wir für die Standardeinbettung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_{n-1} & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n \\ g & \mapsto & \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

und Whittakerfunktionen $w \in \mathcal{W}(\psi, \mathrm{GL}_n)$ sowie $v \in \mathcal{W}(\overline{\psi}, \mathrm{GL}_{n-1})$, wobei $\overline{\psi}$ der inverse Charakter von $\psi$ ist, Zeta-Integrale des Typs

$$\Psi(w_\chi, v, s) = \Psi(w \otimes \chi, v, s) = \int_{\mathrm{U}_{n-1}\backslash \mathrm{GL}_{n-1}} \chi(\det(g)) w \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v(g) \mid \det(g) \mid^{s-\frac{1}{2}} dg \ .$$

Dabei ist $s$ eine komplexe Variable.

Allgemeiner betrachten wir für festes $h \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ das Integral

$$Q(h,s) := \Psi(w_\chi, v, h, s) := \int\limits_{\mathrm{U}_{n-1}\backslash \mathrm{GL}_{n-1}} \chi(\det(g)) w\left(\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h\right) v(g) \mid \det g \mid^{s-\frac{1}{2}} dg \; .$$

Nach [Ja-P-S I],Theorem S. 390, weiß man, dass diese Integrale für $\mathrm{Re}(s)$ hinreichend groß absolut konvergieren und sich meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen lassen.

Im folgenden betrachten wir aber nur den Spezialfall $h = h_{f,n}$. Deshalb definieren wir zunächst die Matrix $h_{f,n}$ und weitere Matrizen, die von Bedeutung sind.

**Definition**: Wir bezeichnen mit $\rho = diag(f^{n-1}, f^{n-2}, \ldots, f, 1)$, mit $\rho' = diag(f^{n-1}, f^{n-2}, \ldots, f)$ und mit $\omega := \omega_{0,n-1}$ das lange Weylelement in der Weylgruppe $W$ von $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Q}_p)$, also

$$\omega_{0,n-1} := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} .$$

Damit definieren wir $h_{1,n} := \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & \omega_{0,n-1} & & \vdots \\ & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\omega_{f,n-1} := \rho'^{-1}\omega_{0,n-1}\rho'$ und

$$h_{f,n} := \rho^{-1} h_{1,n} \rho = \begin{pmatrix} & & & & f^{2-n} & f^{1-n} \\ & & & f^{4-n} & & f^{2-n} \\ & & \iddots & & & \vdots \\ & f^{n-4} & & & & f^{-2} \\ f^{n-2} & & & & & f^{-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Elemente von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Ferner sei $h'_{f,n} := \begin{pmatrix} & & & & f^{2-n} & 0 \\ & & & f^{4-n} & & \vdots \\ & & \iddots & & & \vdots \\ & f^{n-4} & & & & \vdots \\ f^{n-2} & & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## 2.3 Der Wert von $Q(h_{f,n},s)$

Wir bestimmen zunächst für iwahoriinvariante Whittakerfunktionen $v, w$ und einen multiplikativen Charakter $\chi$ mit Führer $f = p^r$, $r > 0$, den Wert des Integrals
$Q(Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = Q(\mathrm{Z}_{n-1}, h_{f,n}, s, w, v) :=$

$$\int\limits_{Z_{n-1}} \chi(\det(\omega_{0,n-1}b)) w\left(\begin{pmatrix}\omega_{0,n-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} h_{f,n}\right) v(\omega_{0,n-1}b) \mid \det(\omega_{0,n-1}b) \mid^{s-\frac{1}{2}} db\ ,$$

wobei $Z_1 := GL_1(\mathbb{Q}_p)$ und für $n \geq 3$

$$Z_{n-1} := \left\{ b = (b_{ij}) \in B_{n-1} \mid b' = \left(\frac{b_{ij}}{b_{ii}}\right) \notin I_{n-1} \text{ und } \omega_{f,n-1}^{-1} \cdot b' \cdot \omega_{f,n-1} \in I_{n-1} \right\}$$

ist. $db = \prod\limits_{i=1}^{n-1} \mid b_{ii} \mid^{-i} \cdot \bigotimes\limits_{i \leq j} db_{ij}$ bezeichnet, wie in [Bou], chap. VII, § 3, Exemple 4, das rechtsinvariante Haarmaß auf der Borelgruppe.

**Bemerkung**: Das Integral $Q(M, h, s, w, v)$ hängt natürlichen von der Menge $M \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, der Matrix $h \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, der komplexen Variablen $s$ und den Whittakerfunktionen $w$ und $v$ ab.

**Proposition 2.1.** *Mit den Voraussetzungen wie bisher gilt:*

$$Q(Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = f^{-\sum\limits_{k=1}^{n-1} k(n-k)} G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} v(1_{n-1}) w(1_n)$$

*Hierbei ist $G(\chi) = \sum\limits_{x} \chi(x)\psi(\frac{x}{f})$ die übliche Gaußsumme, wobei $x$ ein Repräsentantensystem modulo $f$ durchläuft.*

Bevor Proposition 2.1 bewiesen wird, ist es nützlich, einige Vertauschungsrelationen an der Hand zu haben, die in 1.3 bewiesen wurden, und sich zu überlegen, für welche Teilmengen $M$ von $Z_{n-1}$ das Integral

$$Q(M, h_{f,n}, s) := \int\limits_{M} \chi(\det(\omega_{0,n-1}b)) w\left(\begin{pmatrix}\omega_{0,n-1}b & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} h_{f,n}\right) v(\omega_{0,n-1}b) \mid \det(\omega_{0,n-1}b) \mid^{s-\frac{1}{2}} db$$

ungleich Null ist.

### 2.3.1 Der Träger von $Q$

**Lemma 2.1.** *Sei $w$ eine Whittakerfunktion aus $\mathcal{W}(\psi, GL_n)^{I_n}$. Sei weiter $B = (b_{ij}) \in GL_n(\mathbb{Q}_p)$ eine Diagonalmatrix und $b_{ii} = b_{ii}^\times \cdot p^{\mu_i}$ mit $b_{ii}^\times \in \mathbb{Z}_p^\times$. Dann ist $w(B) \neq 0$ höchstens dann, wenn $\mu_i \geq \mu_{i+1}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ ist.*

**Beweis:**

Sei wegen der Iwahoriinvarianz o.B.d.A $b_{ii}^\times = 1$.

Sei $\mu_i < \mu_{i+1}$. Dann gilt für die Additionsmatrix $A_{i,i+1}(a) = I_n + E_{i,i+1}(a)$, $a \in \mathbb{Q}_p$:

$$B \cdot A_{i,i+1}(a) = A_{i,i+1}(a \cdot p^{\mu_i - \mu_{i+1}}) \cdot B \ .$$

Wählt man nun $a \in \mathbb{Z}_p^\times$, so gilt wegen der Rechtsinvarianz von $w$ unter der Iwahorigruppe:

$$\begin{aligned} w(B) &= w(B \cdot A_{i,i+1}(a)) \\ &= w(A_{i,i+1}(a \cdot p^{\mu_i - \mu_{i+1}}) \cdot B) \\ &= \psi(a \cdot p^{\mu_i - \mu_{i+1}}) \cdot w(B) \ . \end{aligned}$$

Da $\psi$ nichttrivial mit Kern $\mathbb{Z}_p$ und $\mu_i - \mu_{i+1} < 0$ ist, kann man ein $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ wählen, sodass $\psi(a \cdot p^{\mu_i - \mu_{i+1}})$ ungleich Eins ist, woraus die Behauptung folgt. $\square$

**Lemma 2.2.** *Für $M = Z_{n-1} \setminus \{b \in Z_{n-1} \mid b_{11} \in f^{n-2}\mathbb{Z}_p^\times\}$ hat das Integral*

$Q(M, h_{f,n}, s)$

$= \int\limits_M \chi(\det(\omega_{0,n-1}))\chi(\det(b)) w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \\ & 1 \end{pmatrix} h_{f,n}\right) v(\omega_{0,n-1}b) \mid \det(b) \mid^{s-\frac{1}{2}} db$

*den Wert Null.*

**Beweis:**

Im folgenden bezeichne $\omega_0$ die Matrix $\begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zunächst ist

$$h_{f,n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & f^{1-n} \\ & 1 & & & & f^{2-n} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & 1 & & f^{-2} \\ & & & & 1 & f^{-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & & & f^{2-n} & 0 \\ & & & f^{4-n} & & 0 \\ & & \iddots & & & \vdots \\ & f^{n-4} & & & & 0 \\ f^{n-2} & & & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & f^{1-n} \\ & 1 & & & & f^{2-n} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & 1 & & f^{-2} \\ & & & & 1 & f^{-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot h'_{f,n} \ ,$$

woraus

$$\begin{aligned} w\left(\omega_0 \begin{pmatrix} b & \\ & 1 \end{pmatrix} h_{f,n}\right) &= w\left(\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & & & & & \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} f^{j-n} \\ & 1 & & & & \sum_{j=1}^{n-1} b_{2j} f^{j-n} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & 1 & & \sum_{j=1}^{n-1} b_{n-2,j} f^{j-n} \\ & & & & 1 & \sum_{j=1}^{n-1} b_{n-1,j} f^{j-n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right. \\ & \qquad \left.\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & f^{2-n} & 0 \\ & & & f^{4-n} & & 0 \\ & & \iddots & & & \vdots \\ & f^{n-4} & & & & 0 \\ f^{n-2} & & & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \psi\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} f^{j-n}\right) w\left(\omega_0 \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n}\right) \end{aligned}$$

folgt. Also erhält man:

$$
\begin{aligned}
Q(Z_{n-1}, h_{f,n}, s) &= \int\limits_{Z_{n-1}} \chi(\det(\omega_0))\chi(\det(b)) \\
&\qquad \times w\left(\omega_0 \begin{pmatrix} b & \\ & 1 \end{pmatrix} h_{f,n}\right) v(\omega_{0,n-1}b) \mid \det(b) \mid^{s-\frac{1}{2}} \, db \\
&= \int\limits_{Z_{n-1}} \chi(\det(\omega_0))\chi(\prod_{i=1}^{n-1} b_{ii}) \prod_{i=1}^{n-1} \psi(\tfrac{b_{1i}}{f^{n-i}}) \\
&\qquad \times w\left(\omega_0 \begin{pmatrix} b & \\ & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n}\right) v(\omega_{0,n-1}b) \mid \prod_{i=1}^{n-1} b_{ii} \mid^{s-\frac{1}{2}} \, db \; .
\end{aligned}
$$

Weiter gilt wegen $b \in Z_{n-1}$:

$$
h'^{-1}_{f,n} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_{12}}{b_{11}} & \frac{b_{13}}{b_{11}} & \cdots & \frac{b_{1,n-1}}{b_{11}} & \\ & 1 & \frac{b_{23}}{b_{22}} & \cdots & \frac{b_{2,n-1}}{b_{22}} & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \\ & & & 1 & \frac{b_{n-2,n-1}}{b_{n-1,n-1}} & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n} \in I_n \, ,
$$

also

$$
w\left(\omega_0 \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n}\right) =
$$

$$
= w\left(\omega_0 \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & b_{n-1,n-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_{12}}{b_{11}} & \frac{b_{13}}{b_{11}} & \cdots & \frac{b_{1,n-1}}{b_{11}} & \\ & 1 & \frac{b_{23}}{b_{22}} & \cdots & \frac{b_{2,n-1}}{b_{22}} & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \\ & & & 1 & \frac{b_{n-2,n-1}}{b_{n-1,n-1}} & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n}\right)
$$

$$
= w\left(\omega_0 \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & b_{n-1,n-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n} h'^{-1}_{f,n} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_{12}}{b_{11}} & \frac{b_{13}}{b_{11}} & \cdots & \frac{b_{1,n-1}}{b_{11}} & \\ & 1 & \frac{b_{23}}{b_{22}} & \cdots & \frac{b_{2,n-1}}{b_{22}} & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \\ & & & 1 & \frac{b_{n-2,n-1}}{b_{n-1,n-1}} & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n}\right)
$$

$$= w\left(\omega_0 \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & b_{n-1,n-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n}\right) ,$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Iwahoriinvarianz von $w$ folgt. Also gilt:

$$\begin{aligned} Q(Z_{n-1}, h_{f,n}, s) &= \int\limits_{Z_{n-1}} \chi(\det(\omega_0))\chi(\prod_{i=1}^{n-1} b_{ii}) \prod_{i=1}^{n-1} \psi(\tfrac{b_{1i}}{f^{n-i}}) \\ &\quad \times w\left(\omega_0 \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & b_{n-1,n-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n}\right) v(\omega_{0,n-1}b) \mid \prod_{i=1}^{n-1} b_{ii} \mid^{s-\frac{1}{2}} db \\ &= \int\limits_{Z_{n-1}} \chi(\det(\omega_0))\chi(\prod_{i=1}^{n-1} b_{ii}) \prod_{i=1}^{n-1} \psi(\tfrac{b_{1i}}{f^{n-i}}) \\ &\quad \times w\left(\begin{pmatrix} b_{n-1,n-1}f^{n-2} & & & \\ & \ddots & & \\ & & b_{11}f^{2-n} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right) v(\omega_{0,n-1}b) \mid \prod_{i=1}^{n-1} b_{ii} \mid^{s-\frac{1}{2}} db \; . \end{aligned}$$

Sei nun $b_{11} = b'_{11}p^k$ mit $b'_{11} \in \mathbb{Z}_p^\times$ und $f = p^r$. Dann ist nach Lemma 2.1 das Integral höchstens für $k \geq r(n-2)$ ungleich Null und wegen $\chi(p^k) \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(b'_{11})\psi(\frac{b'_{11}p^k}{f^{n-1}}) = 0$ für $k > r(n-2)$ also ungleich Null höchstens für $k = r(n-2)$. Also ist $b_{11}$ von der behaupteten Form und das Lemma ist bewiesen. □

**Proposition 2.2.** *Sei* $1 \leq m \leq n-1$,

$$M := \left\{ g \in Z_{n-1} \mid g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 & g_{1,m+1} & \cdots & g_{1,n-1} \\ & g_{22} & \ddots & \vdots & g_{2,m+1} & \cdots & g_{2,n-1} \\ & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & & g_{mm} & g_{m,m+1} & & \vdots \\ & & & & g_{m+1,m+1} & & \vdots \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & g_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \right\}$$

*und*

$$M_f := \left\{ g \in M \mid g_{i,m+1} \in f^{n-m-1-i}\mathbb{Z}_p^\times \ \textit{und}\ g_{ii} \in f^{n-2i}\mathbb{Z}_p^\times \right\} \ .$$

*Dann ist*

$$\int\limits_{M \setminus M_f} \chi(\det(\omega_{0,n-1}))\chi(\prod_{i=1}^{n-1} g_{ii})\times$$

$$w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_{f,n}\right) v(\omega_{0,n-1}g\tau) \mid \prod_{i=1}^{n} g_{ii} \mid^{s-\frac{1}{2}} dg = 0 \ ,$$

*für jedes Produkt* $\tau$ *einer Diagonalmatrix und einer Permutationsmatrix.*

**Beweis**: Es ist zu zeigen, dass das Integral

$$\int\limits_{M} \chi(\det(\omega_{0,n-1}))\chi(\prod_{i=1}^{n-1} g_{ii})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_{f,n}\right) v(\omega_{0,n-1}g\tau) \mid \prod_{i=1}^{n-1} g_{ii} \mid^{s-\frac{1}{2}} dg$$

höchstens dann ungleich Null ist, wenn $g_{j,m+1} \in f^{n-m-1-j} \cdot \mathbb{Z}_p^\times$ ist.
Offensichtlich gilt nun für $g \in M$:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 & g_{1,m+2} & \cdots & g_{1,n-1} \\ & g_{22} & \ddots & \vdots & g_{2,m+2} & \cdots & g_{2,n-1} \\ & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & & g_{m+1m+1} & g_{m+1,m+2} & & \vdots \\ & & & & g_{m+2,m+2} & & \vdots \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & g_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \times$$

$$
\times \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{g_{1,m+1}}{g_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\
 & 1 & \ddots & \vdots & \frac{g_{2,m+1}}{g_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\
 & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & \frac{g_{m,m+1}}{g_{mm}} & & & \vdots \\
 & & & & 1 & & & \vdots \\
 & & & & & 1 & & \vdots \\
 & & & & & & \ddots & 0 \\
 & & & & & & & 1
\end{pmatrix}.
$$

Betrachten wir zuerst den Fall, dass $S = \{i \mid g_{i,m+1} = 0\} \neq \emptyset$ ist. Sei $k = \max S$. Dann gilt nach Korollar 1.4:

$$
v(\omega_{0,n-1} g\tau) = v(\omega_{0,n-1} g' u d\tau' c) = \prod_{i=1, i\notin S}^{m} \overline{\psi}(\frac{g_{i+1,m+1}}{g_{i,m+1}}) v(\omega_{0,n-1} g'' d\tau')
$$

wobei $ud\tau' c$ die Zerlegung von

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{g_{1,m+1}}{g_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\
 & 1 & \ddots & \vdots & \frac{g_{2,m+1}}{g_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\
 & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & \frac{g_{m,m+1}}{g_{mm}} & & & \vdots \\
 & & & & 1 & & & \vdots \\
 & & & & & 1 & & \vdots \\
 & & & & & & \ddots & 0 \\
 & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

aus Korollar 1.4 ist,

$$
g' = \begin{pmatrix}
g_{11} & 0 & \cdots & 0 & g_{1,m+2} & \cdots & g_{1,n-1} \\
 & g_{22} & \ddots & \vdots & g_{2,m+2} & \cdots & g_{2,n-1} \\
 & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\
 & & & g_{m+1m+1} & g_{m+1,m+2} & & \vdots \\
 & & & & g_{m+2,m+2} & & \vdots \\
 & & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & g_{n-1,n-1}
\end{pmatrix}
$$

und $g''$ die Matrix ist, die beim „Vorbeiziehen“ von $u$ an $g'$ entsteht. Es gelten die Gaußsummen Relationen

$$\sum_x \chi(x)\psi(\frac{ax}{f}) = \chi(a^{-1})G(\chi)$$

und

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(x)\psi(\frac{x}{p^t})dx = 0 \text{ für } t < r \text{ und Führer von } \chi \text{ gleich } p^r \ ,$$

und also gilt

$$\begin{aligned} & \int \chi(\det(\omega_{0,n-1}))\chi(\prod_{i=1}^{n-1} g_{ii})w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix} h_{f,n}\right) \\ & \times\ v(\omega_{0,n-1}g\tau) \mid \det(g) \mid^{s-\frac{1}{2}} \ dg \\ = \ & \int \chi(g_{m+1,m+1})\psi(\tfrac{g_{1,m+1}}{f^{n-m-1}}) \prod_{i=1,i\notin S}^{m} \overline{\psi}(\tfrac{g_{i+1,m+1}}{g_{i,m+1}}) \\ & \times\ \int \chi(\det(\omega_{0,n-1})) \prod_{i=1,i\neq m+1}^{n-1} \chi(g_{ii})w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n}\right) \\ & \times\ v(\omega_{0,n-1}g'd\tau') \mid \det(g) \mid^{s-\frac{1}{2}} \ dg \end{aligned}$$

wobei $\tau$ und $\tau'$ aus der Weylgruppe sind und $d$ eine Diagonalmatrix ist.
Weiter ist mit $g_{i,m+1} = g_{i,m+1}^\times \cdot p^{r_i}$:

$$\begin{aligned} & \int \chi(g_{m+1,m+1})\psi(\tfrac{g_{1,m+1}}{f^{n-m-1}}) \prod_{i=1,i\notin S}^{m} \overline{\psi}(\tfrac{g_{i+1,m+1}}{g_{i,m+1}}) \prod_{i=1,i\notin S}^{m+1} dg_{i,m+1} = \\ & = c\cdot G(\chi)^{m-k-1} \int \chi(g_{m-k-1}^\times)\ dg_{m-k-1}^\times \ \int \psi(\tfrac{g_{1,m+1}}{f^{n-m-1}}) \prod_{i=1,i\notin S}^{k-1} \overline{\psi}(\tfrac{g_{i+1,m+1}}{g_{i,m+1}}) \prod_{i=1,i\notin S}^{k-1} dg_{i,m+1} \ , \end{aligned}$$

wobei $c$ eine Konstante ist, die von der Integration über die $\chi(g_{i+1,m+1})\overline{\psi}(\frac{g_{i+1,m+1}}{g_{i,m+1}})$ herkommt.

Nun ist

$$\int \chi(g_{m-k-1}^\times)\ dg_{m-k-1}^\times = 0$$

und also das ganze Integral gleich Null.

Sei also nun $g_{i,m+1} \neq 0$ für $i = 1, \ldots, m+1$. Dann erhält man nach $m$-facher Anwendung des Lemmas 1.3 und nach Korollar 1.4:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 & g_{1,m+2} & \cdots & g_{1,n-1} \\ & g_{22} & \ddots & \vdots & g_{2,m+2} & \cdots & g_{2,n-1} \\ & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & & g_{m+1,m+1} & g_{m+1,m+2} & & \vdots \\ & & & & g_{m+2,m+2} & & \vdots \\ & & & & & \ddots & g_{n-2,n-1} \\ & & & & & & g_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \times N$$

$$= T \times \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 & g_{1,m+2} & \cdots & g_{1,n-1} \\ & g_{22} & \ddots & \vdots & g'_{2,m+2} & \cdots & g'_{2,n-1} \\ & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & & g_{m+1,m+1} & g'_{m+1,m+2} & & \vdots \\ & & & & g_{m+2,m+2} & & \vdots \\ & & & & & \ddots & g'_{n-2,n-1} \\ & & & & & & g_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \times N \ ,$$

wobei $b$ eine unipotente untere $(m+1)\times(m+1)$ Matrix und also $T = (t_{ij})$ eine unipotente untere Dreiecksmatrix mit $t_{i+1,i} = \frac{g_{i+1,m+1}}{g_{i,m+1}}$ für $i = 1, \ldots, m$ ist, was sofort aus Korollar 1.4 folgt. $N$ ist von der Form Diagonalmatrix $\cdot$ Permutationsmatrix $\cdot$ Matrix aus der Iwahorigruppe.

Sei nun für die weitere Rechnung $g_{i,m+1} = g^{\times}_{i,m+1} \cdot p^{r_i}$ mit $g^{\times}_{i,m+1} \in \mathbb{Z}_p^{\times}$ und $f = p^r$.

Da $g$ aus $Z_{n-1}$ ist, und wir also die obige Zerlegung nur bei der Whittakerfunktion $v$ durchführen müssen, wird das Integral zu

$$\int \chi(\det(\omega_{0,n-1}))\chi(\prod_{i=1}^{n-1} g_{ii})\psi(\tfrac{g_{11}}{f^{n-1}}) \prod_{j=m+1}^{n-1} \psi(\tfrac{g_{1j}}{f^{n-j}}) \prod_{j=1}^{m+1} \overline{\psi}(\tfrac{g_{j+1,m+1}}{g_{j,m+1}})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n}\right) v(\omega_{0,n-1} g' N \tau) \mid \prod_{i=1}^{n-1} g_{ii} \mid^{s-\frac{1}{2}} dg =$$

$$= \int \chi(g_{m+1,m+1})\psi(\tfrac{g_{1,m+1}}{f^{n-m-1}}) \prod_{j=1}^{m+1} \overline{\psi}(\tfrac{g_{j+1,m+1}}{g_{j,m+1}}) \prod_{j=1}^{m+1} dg_{j,m+1}$$

$$\times \ \int \chi(\det(\omega_{0,n-1}))\chi(\prod_{i=1,i\neq m+1}^{n-1} g_{ii})\psi(\tfrac{g_{11}}{f^{n-1}}) \prod_{j=m+2}^{n-1} \psi(\tfrac{g_{1j}}{f^{n-j}})$$

$$\times \ w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n}\right) v(\omega_{0,n-1}g'N\tau) \mid \prod_{i=1}^{n-1} g_{ii} \mid^{s-\frac{1}{2}} \prod_{1\leq i,j\leq n-1, j\neq m+1} dg_{ij} \ .$$

Nach Lemma 2.1 ist $g_{m+1,m+1}$ dann von der Form $g^{\times}_{m+1,m+1} \cdot p^{r_{m+1}}$ mit $g^{\times}_{m+1,m+1} \in \mathbb{Z}_p^{\times}$ und $r_{m+1} + r(2(m+1)-n) \geq 0$. Wegen den Gaußsummen Relationen

$$\sum_x \chi(x)\psi(\frac{ax}{f}) = \chi(a^{-1})G(\chi)$$

und

$$\int_{\mathbb{Z}_p^{\times}} \chi(x)\psi(\frac{x}{p^t})dx = 0 \text{ für } t < r \text{ und Führer von } \chi \text{ gleich } p^r \ ,$$

folgt, dass bei $\frac{g^{\times}_{j+1,m+1}}{g^{\times}_{j,m+1}} p^{r_{j+1}-r_j}$ der Exponent $r_{j+1} - r_j \leq -r$ sein muss.

Also erhält man folgende Ungleichungen:

$$\begin{cases} (n-(m+1))r - r_1 \geq r \\ r_i - r_{i+1} \geq r \text{ für } i = 1, \cdots, m \\ r_{m+1} + (2(m+1)-n)r \geq 0 \end{cases} .$$

Es genügt nun zu zeigen, dass

$$r_i = (n-m-1-i)r$$

ist. Dies ergibt sich folgendermaßen:

Aufsummieren der ersten $j$ Ungleichungen ergibt $(n-m)r - r_j \geq j \cdot r$, woraus sich speziell für $m+1$ die Ungleichung $(n-(m+1))r - r_{m+1} \geq (m+1)r$ ergibt. Hieraus und mit der letzten Ungleichung folgt $(n-2(m+1))r \geq r_{m+1} \geq (n-2(m+1))r$ und also die Gleichheit und somit die Behauptung für $i = m+1$.

Angenommen, wir wissen, dass $r_i = (n-m-1-i)r$ ist. Dann folgt wegen $r_{i-1} - r_i \geq r$ also $r_{i-1} \geq (n-m-i)r$.

Andererseits ist aber nach Aufsummieren der ersten $i-1$ Gleichungen $(n-(m+1))r - r_{i-1} \geq (i-1)r$ und also

$$(n-m-i)r \geq r_{i-1} \ .$$

Somit gilt $r_{i-1} = (n-m-i)r = (n-m-1-(i-1))r$ wie behauptet. □

Aus Proposition 2.2 erhält man

**Korollar 2.1.** *Sei* $H := \{g \in Z_{n-1} \mid g_{1j} \in f^{n-j-1}\mathbb{Z}_p^\times$ *und* $g_{ii} \in f^{n-2i}\mathbb{Z}_p^\times\}$. *Dann gilt:*

$$Q(Z_{n-1} \setminus H, h_{f,n}, s) = 0 \ .$$

**Beweis**: Für $g_{11}$ ist die Behauptung gerade Lemma 2.2.
Der Rest folgt durch mehrfache Anwendung der Proposition 2.2. □

### 2.3.2 Beweis der Proposition 2.1

Die Behauptung der Proposition wird mit Induktion nach $n$ bewiesen, wobei die Induktion bei $n = 2$ beginnt.

Wir beginnen mit der Einbettung $B_1 = \mathbb{Q}_p^\times \hookrightarrow B_2$ , gegeben durch $b \mapsto \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dann ist $\omega_{0,1} = (1)$, $h_{f,2} = \begin{pmatrix} 1 & f^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $v : \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ eine Whittakerfunktion auf $\mathbb{Q}_p$, also $v(a\epsilon) = v(a)$ für alle $\epsilon \in \mathbb{Z}_p^\times$.
Im Folgenden führen wir für ein Element $a \in \mathbb{Q}_p$ folgende verkürzende Schreibweise ein: Sei $a = a' \cdot p^n$ mit $a' \in \mathbb{Q}_p^\times$ so bezeichne $\mid a \mid := p^{-n}$ für $a \neq 0$ und $\mid 0 \mid := 0$ ein Element aus $\mathbb{Q}_p$.
Somit gilt :

$$\begin{aligned} Q(Z_1, h_f, s) &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \chi(x) w\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & f^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) v(x) \mid x \mid^{s-\frac{1}{2}} \tfrac{dx}{|x|} \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \chi(x) w\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) v(x) \mid x \mid^{s-\frac{1}{2}} \tfrac{dx}{|x|} \end{aligned}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{Q}_p^\times} \chi(x)\psi(\tfrac{x}{f}) w\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) v(x) \mid x \mid^{s-\frac{1}{2}} \tfrac{dx}{|x|}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{Q}_p^\times} \chi(x)\psi(\tfrac{x}{f}) w\left(\begin{pmatrix} \mid x \mid^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) v(x) \mid x \mid^{s-\frac{1}{2}} \tfrac{dx}{|x|} \qquad \text{(Iwahoriinvarianz)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(p^n) p^{-n(s-\frac{1}{2})} w\left(\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) v(p^n) \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(x)\psi(\tfrac{p^n x}{f}) \tfrac{dx}{|x|}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \chi(p^n) p^{-n(s-\frac{1}{2})} w\left(\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) v(p^n) \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(x)\psi(\tfrac{p^n x}{f}) \tfrac{dx}{|x|} \,,$$

wobei die letzte Gleichheit nach Lemma 2.1 wegen $w\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$ für $n < 0$ gilt.

Nun gilt

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(x)\psi(\tfrac{p^n x}{f}) \tfrac{dx}{|x|} = \begin{cases} 0 \ \text{ für } \ n > 0 \ \ \text{(Relation für Gaußsummen)} \\ \\ \mid f \mid \cdot G(\chi) \ \text{ für } \ n = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \ \text{ für } \ n > 0 \\ \\ f^{-1} \cdot G(\chi) \ \text{ für } \ n = 0 \end{cases}$$

woraus, wie behauptet, $Q(Z_1, h_f, s) = w\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v(1) \frac{G(\chi)}{f}$ folgt.

Nun zum Induktionsschritt $n-1 \curvearrowright n$:

Wir betrachten wieder die Standardeinbettung $B_{n-1} \hookrightarrow B_n$, die durch $(b_{ij}) = b \mapsto \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben ist. Es gilt dann:

$$h_{f,n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & f^{1-n} \\ & 1 & & & & f^{2-n} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & 1 & & f^{-2} \\ & & & & 1 & f^{-1} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & & & f^{2-n} & 0 \\ & & & f^{4-n} & & 0 \\ & & \iddots & & & \vdots \\ & f^{n-4} & & & & 0 \\ f^{n-2} & & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & f^{1-n} \\ & 1 & & & & f^{2-n} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & 1 & & f^{-2} \\ & & & & 1 & f^{-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot h'_{f,n} \; .$$

Nach Korollar 2.1 ist das Integral $Q(M, h_{f,n}, s)$, wobei

$$M = \{ b \in Z_{n-1} \mid b_{1i} \notin f^{n-1-i}\mathbb{Z}_p^\times \text{ oder } b_{ii} \notin f^{n-2i}\mathbb{Z}_p^\times \}$$

ist, gleich Null. Also gilt wegen der Iwahoriinvarianz von $w$, wobei $f^{n-1-j}\mathbb{Z}_p^\times$ der Integrationsbereich von $b_{1j}$ ist:

$$\begin{aligned} Q(Z_{n-1}, h_{f,n}, s) \;\; = & \int\limits_{\left(\prod_{j=1}^{n-1} f^{n-1-j}\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\right)\cap Z_{n-1}} \chi(\det(\omega_{0,n-1})) \prod_{i=1}^{n-1} \chi(b_{ii}) \prod_{j=1}^{n-1} \psi(b_{1j} f^{j-n}) \\ & \times w\left( \begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n} \right) v(\omega_{0,n-1} b) \mid \prod_{i=1}^{n-1} b_{ii} \mid^{s-\frac{1}{2}} \frac{\prod_{i\le j} db_{ij}}{\prod_{i=1}^{n-1} |b_{ii}|^i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{*}{=} \;\; & \mid f \mid^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \int\limits_{\left({\mathbb{Z}_p^\times}^{n-1} \times \mathbb{Q}_p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\right)\cap Z_{n-1}} \chi(\det(\omega_{0,n-1}))\chi(f^{n-2} b'_{11} \prod_{j=2}^{n-1} b_{jj}) \prod_{i=1}^{n-1} \psi(\tfrac{b'_{1i}}{f}) \\ & \times w \left( \begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_{11} f^{n-2} & b'_{12} f^{n-3} & \cdots & b'_{1,n-1} & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & b_{n-1,n-1} & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n} \right) \\ & \times v \left( \omega_{0,n-1} \begin{pmatrix} b'_{11} f^{n-2} & b'_{12} f^{n-3} & \cdots & b'_{1,n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \right) \mid f^{n-2} b'_{11} \prod_{j=2}^{n-1} b_{jj} \mid^{s-\frac{1}{2}} \frac{\prod_{i\le j} db_{ij}}{|f^{n-2} b'_{11}| \prod_{i=2}^{n-1} |b_{ii}|^i} \end{aligned}$$

$$= \; | \, f \, |^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^{\times\, n-1} \times \mathbb{Q}^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\right) \cap Z_{n-1}} \chi(\det(\omega_{0,n-1}))\chi(f^{n-2} b'_{11} \prod_{j=2}^{n-1} b_{jj}) \prod_{i=1}^{n-1} \psi(\frac{b'_{1i}}{f})$$

$$\times w \left( \begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_{11} f^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & b_{n-1,n-1} & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} h'_{f,n} \right)$$

$$\times \; v \left( \omega_{0,n-1} \begin{pmatrix} b'_{11} f^{n-2} & b'_{12} f^{n-3} & \cdots & b'_{1,n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \right) | \, f^{n-2} b'_{11} \prod_{j=2}^{n-1} b_{jj} \, |^{s-\frac{1}{2}} \; \frac{\prod_{i \leq j} db_{ij}}{|f^{n-2} b'_{11}| \prod_{i=2}^{n-1} |b_{ii}|^i} \; ,$$

wobei das Gleichheitszeichen $*$ nach [Ta], Lemma 2.2.5, gilt, da das additive Haarmaß benutzt wird.

Nach Korollar 1.3 erhält man für $v(\omega_{0,n-1} b)$:

$$v(\omega_{0,n-1} b) \;=\; v \left( \omega_{0,n-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{b_{22}}{b'_{12}} f^{-n+3} & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -\frac{b_{22}}{b'_{12}} f^{-n+3} + \frac{b_{23}}{b'_{13}} f^{-n+4} & \ddots & & & & \\ \frac{b_{33}}{b_{13}} & & \ddots & & & \\ 0 & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$
\times \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
-\frac{b_{23}}{b'_{13}} f^{-n+4} + \frac{b_{24}}{b'_{14}} f^{-n+5} & \ddots & & & & & \\
-\frac{b_{33}}{b_{13}} + \frac{b_{34}}{b_{14}} & & \ddots & & & & \\
\frac{b_{44}}{b_{14}} & & & \ddots & & & \\
0 & & & & \ddots & & \\
\vdots & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & 1
\end{pmatrix} \cdots
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
1 & & & \\
-\frac{b_{2,n-2}}{b'_{1,n-2}} f^{-1} + \frac{b_{2,n-1}}{b'_{1,n-1}} & \ddots & & \\
\vdots & & \ddots & \\
\frac{b_{n-1,n-1}}{b_{1,n-1}} & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \vdots \\
0 & 1 & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\left( \begin{pmatrix}
-\frac{b_{22}}{b'_{12}} f & -\frac{b_{23}}{b'_{13}} f + \frac{b_{22}}{b'_{12}} & -\frac{b_{24}}{b'_{14}} f + \frac{b_{23}}{b'_{13}} & \cdots & 0 \\
 & -\frac{b_{33}}{b'_{13}} f & -\frac{b_{34}}{b'_{14}} f + \frac{b_{33}}{b'_{13}} & \cdots & 0 \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & 1
\end{pmatrix} \right) .
$$

Für $w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} bh'_{f,n}\right)$ ergibt sich aus der Iwahoriinvarianz von $w$:

$$
w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} bh'_{f,n}\right) =
$$

$$
= w\left( \begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
b'_{11} f^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & \vdots \\
 & & b_{33} & & & \vdots \\
 & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & b_{n-1,n-1} & 0 \\
 & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
 & & f^{2-n} & 0 \\
 & \iddots & & \vdots \\
f^{n-2} & & & 0 \\
0 & & 0 & 1
\end{pmatrix} \right)
$$

$$= w\left(\begin{pmatrix}\omega_{0,n-1} & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ & -\frac{b_{22}}{b_{12}} & -\frac{b_{23}}{b_{13}} & \cdots & -\frac{b_{2,n-1}}{b_{1,n-1}} & 0\\ & & -\frac{b_{33}}{b_{13}} & \cdots & -\frac{b_{3,n-1}}{b_{1,n-1}} & 0\\ & & & \ddots & -\frac{b_{n-1,n-1}}{b_{1,n-1}} & 0\\ & & & & & 1\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}b'_{11}f^{n-2} & & & & \\ & -b_{12} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -b_{1,n-1} & \\ & & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & f^{2-n} & 0\\ \vdots & & \iddots & 0 & 0\\ 0 & \iddots & & \vdots & \vdots\\ f^{n-2} & & & \vdots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$= w\left(\begin{pmatrix}\omega_{0,n-1} & \\ & 1\end{pmatrix}B'\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ \vdots & & f^{4-n} & 0 & 0\\ 0 & \iddots & & & \vdots\\ f^{n-2} & & & & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Wobei $B' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ & -\frac{b_{22}}{b_{12}} & -\frac{b_{23}}{b_{13}} & \cdots & -\frac{b_{2,n-1}}{b_{1,n-1}} & 0\\ & & -\frac{b_{33}}{b_{13}} & \cdots & -\frac{b_{3,n-1}}{b_{1,n-1}} & 0\\ & & & \ddots & -\frac{b_{n-1,n-1}}{b_{1,n-1}} & 0\\ & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & -b_{12} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -b_{1,n-1} & \\ & & & & 1\end{pmatrix}$ ist.

Somit wird $w\left(\begin{pmatrix}\omega_{0,n-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}bh'_{f,n}\right)$ zu

$$w\left(\begin{pmatrix}\omega_{0,n-1} & \\ & 1\end{pmatrix}B'\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & f & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & f & \\ & & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ \vdots & & f^{3-n} & 0 & \vdots\\ 0 & \iddots & & & \vdots\\ f^{n-3} & & & & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$

$$
= \quad w \left( \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \iddots & 0 & \vdots & \\ 0 & \iddots & & \vdots & \vdots & \\ 1 & 0 & & \vdots & 0 & \\ 0 & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. B'
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & f & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & f & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left. \begin{pmatrix} & & f^{3-n} & 0 & \vdots \\ & \iddots & & \vdots & \vdots \\ f^{n-3} & & & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)
$$

$$
= \quad w \left( \begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{b_{22}}{b'_{12}} f & -\frac{b_{23}}{b'_{13}} f + \frac{b_{22}}{b'_{12}} & \cdots & -\frac{b_{2,n-1}}{b'_{1,n-1}} f + \frac{b_{2,n-2}}{b'_{1,n-2}} & 0 & 0 \\ & -\frac{b_{33}}{b'_{13}} f & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \frac{b_{n-1,n-1}}{b'_{1,n-1}} & 0 & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \right.
$$

$$
\left. \begin{pmatrix} 1 & f^{-1} & f^{-2} & \cdots & f^{-n+3} & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & f^{-2} & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & f^{-1} & \vdots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & f^{3-n} & 0 & 0 \\ & \iddots & & \vdots & \\ f^{n-3} & & & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) .
$$

Mit $B'' = \begin{pmatrix} -\frac{b_{22}}{b'_{12}} f & -\frac{b_{23}}{b'_{13}} f + \frac{b_{22}}{b'_{12}} & \cdots & -\frac{b_{2,n-1}}{b'_{1,n-1}} f + \frac{b_{2,n-2}}{b'_{1,n-2}} & 0 \\ & -\frac{b_{33}}{b'_{13}} f & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & -\frac{b_{3,n-1}}{b'_{1,n-1}} f & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ folgt:

$$Q(Z_{n-1}, h_{f,n}, s) =$$

$$\overset{*}{=} \ | f |^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \int_{\mathbb{Z}_p^{\times\, n-1} \times \left(\mathbb{Q}_p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\right) \cap Z_{n-1}} \chi(\det(\omega_{0,n-1}))\chi(f^{n-2} b'_{11} \prod_{j=2}^{n-1} b_{jj}) \prod_{i=1}^{n-1} \psi(\tfrac{b'_{1i}}{f}) \overline{\psi}(\tfrac{b_{22}}{b'_{12}} f^{-1})$$

$$\times \prod_{i=2}^{n-2} \overline{\psi}(-\tfrac{b_{2i}}{b'_{1i}} f^{-1} + \tfrac{b_{2,i+1}}{b'_{1,i+1}}) w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B'' & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h'_{f,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \ v\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & \\ & 1 \end{pmatrix} B''\right) | f^{n-2} b'_{11} \prod_{j=2}^{n-1} b_{jj} |^{s-\frac{1}{2}} \ \frac{\prod_{i \le j} db_{ij}}{|f^{n-2} b'_{11}|^1 \prod_{i=2}^{n-1} |b_{ii}|^i}$$

$$= \ | f |^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \int_{\mathbb{Z}_p^{\times\, n-1} \times \left(\mathbb{Q}_p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\right) \cap Z_{n-1}} \chi(\det(\omega_{0,n-1}))\chi(b'_{11} f^{n-2} \prod_{j=2}^{n-1} b_{jj}) \prod_{i=1}^{n-1} \psi(\tfrac{b'_{1i}}{f}) \overline{\psi}(\tfrac{b_{22}}{b'_{12}} f^{-1})$$

$$\times \prod_{i=2}^{n-2} \psi(\tfrac{b_{2i}}{b'_{1i}} f^{-1} - \tfrac{b_{2,i+1}}{b'_{1,i+1}}) w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B'' & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h'_{f,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \ v\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & \\ & 1 \end{pmatrix} B''\right) | f^{n-2} \prod_{j=2}^{n-1} b_{jj} |^{s-\frac{1}{2}} \ \frac{\prod_{i \le j} db_{ij}}{|f^{n-2}| \prod_{i=2}^{n-1} |b_{ii}|^i}$$

$$= \ | f |^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \int_{\mathbb{Z}_p^{\times\, n-1} \times \left(\mathbb{Q}_p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\right) \cap Z_{n-1}} \chi(\det(\omega_{0,n-1}))\chi(-1)^{n-2} \chi(\prod_{j=2}^{n-1} -\tfrac{b_{jj}}{b'_{1j}}) \chi(b'_{11})$$

$$\times \ \prod_{j=2}^{n-2} \chi(b'_{1j}) \chi(f^{n-2}) \prod_{i=1}^{n-1} \psi(\tfrac{b'_{1i}}{f}) \overline{\psi}(\tfrac{b_{22}}{b'_{12}} f^{-1} + \sum_{i=2}^{n-2} (-\tfrac{b_{2i}}{b'_{1i}} f^{-1} + \tfrac{b_{2,i+1}}{b'_{1,i+1}}))$$

$$\times w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B'' & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h'_{f,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) v\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & \\ & 1 \end{pmatrix} B''\right)$$

$$\times \ | \prod_{j=2}^{n-1} -\tfrac{b_{jj}}{b'_{1j}} f \ |^{s-\frac{1}{2}} \ \frac{\prod_{i \le j} db_{ij}}{|f^{n-2}| \prod_{i=2}^{n-1} |b_{ii}|^i}$$

$$= \mid f \mid^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \int\limits_{\mathbb{Z}_p^{n-1}\times\mathbb{Q}_p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}} \chi(\det(\omega_{0,n-2}))\chi(\det(B'')) \prod_{j=1}^{n-1}\chi(b'_{1j}) \prod_{j=1}^{n-1}\psi(\tfrac{b'_{1j}}{f})\overline{\psi}(\tfrac{b'_{22}}{b'_{12}}f^{-1})$$

$$\times \prod_{i=2}^{n-2}\overline{\psi}(-\tfrac{b_{2i}}{b_{1i}}f^{-1}+\tfrac{b_{2,i+1}}{b_{1,i+1}})w\left(\begin{pmatrix}\omega_{0,n-2}&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B''&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h'_{f,n-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times v\left(\begin{pmatrix}\omega_{0,n-2}&\\&1\end{pmatrix}B''\right) \mid \det B'' \mid^{s-\frac{1}{2}} \frac{\prod\limits_{i\leq j}db_{ij}}{|f^{n-2}|\prod\limits_{i=2}^{n-1}|b_{ii}|^i}$$

$$= \mid f \mid^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \int\limits_{\mathbb{Z}_p^{n-1}\times\mathbb{Q}_p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}} \chi(\det(\omega_{0,n-2}))\chi(\det(B'')) \prod_{j=1}^{n-1}\chi(b'_{1j}) \prod_{j=1}^{n-1}\psi(\tfrac{b'_{1j}}{f})\psi(-\tfrac{b_{22}}{b'_{12}}f^{-1})$$

$$\times \prod_{i=2}^{n-2}\psi(\tfrac{b_{2i}}{b'_{1i}}f^{-1}-\tfrac{b_{2,i+1}}{b'_{1,i+1}})w\left(\begin{pmatrix}\omega_{0,n-2}&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B''&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h'_{f,n-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times v\left(\begin{pmatrix}\omega_{0,n-2}&\\&1\end{pmatrix}B''\right) \mid \det B'' \mid^{s-\frac{1}{2}} \frac{\prod\limits_{i\leq j}db_{ij}}{|f^{n-2}|\prod\limits_{i=2}^{n-1}|b_{ii}|^i} \;,$$

wobei das Gleichheitszeichen $*$ nach Seite 44, bzw. Korollar 1.3 gilt.

Also gilt mit $a = -\frac{b_{22}}{b'_{12}}f^{-1} + \sum\limits_{i=2}^{n-2}(-\frac{b_{2,i+1}}{b'_{1,i+1}}f^{-1}+\frac{b_{2i}}{b'_{1i}})$ wegen

$$B''\begin{pmatrix}1&&&&f^{2-n}\\&1&&&f^{3-n}\\&&\ddots&&\vdots\\&&&1&f^{-1}\\&&&&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&&&a&\\&\ddots&&*&\\&&\ddots&\vdots&\\&&1&*&\\&&&1&\\&&&&1\end{pmatrix}B'' \; :$$

$$\psi(-\tfrac{b_{22}}{b'_{12}}f^{-1})\prod_{i=2}^{n-2}\psi(-\tfrac{b_{2,i+1}}{b'_{1,i+1}}f^{-1}+\tfrac{b_{2i}}{b'_{1i}})w\left(\begin{pmatrix}\omega_{0,n-2}&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B''&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h'_{f,n-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= w\left(\begin{pmatrix} 1 & & & * & \\ & \ddots & & \vdots & \\ & & \ddots & * & \\ & & 1 & a & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B'' & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h'_{f,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & a & \\ & \ddots & & * & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & * & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B'' & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h'_{f,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B'' & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & & f^{2-n} & \\ & & \omega_{f,n-2} & & \vdots & \\ & & & & f^{-1} & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B'' & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{f,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) ,
\end{aligned}
$$

wobei die Einträge $*$ entsprechend gewählt sind, damit die vorletzte Gleichung richtig ist.

Insgesamt gilt also:

$$Q(Z_{n-1},h_{f,n},s) \;=\; |\, f \,|^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \int\limits_{(\mathbb{Z}_p^\times)^{n-1}\times\mathbb{Q}_p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}} \chi(\det(\omega_{0,n-2}))\chi(\det(B''))\prod_{j=1}^{n-1}\chi(b'_{1j})\prod_{j=1}^{n-1}\psi(\tfrac{b'_{1j}}{f})$$

$$\times w\left(\begin{pmatrix}\omega_{0,n-2} & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B'' & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_{f,n-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times v\left(\begin{pmatrix}\omega_{0,n-2} & \\ & 1\end{pmatrix}B''\right)|\,\det B''\,|^{s-\frac{1}{2}}\,\frac{\prod\limits_{i\le j} db_{ij}}{|f^{n-2}|\prod\limits_{i=2}^{n-1}|b_{ii}|^{i}}\;.$$

Nun zur Variablentransformation.

Sei nun $c_{1j}=b'_{1j}$ und für $i>1$

$$c_{ij}=\begin{cases}-\frac{b_{jj}}{b'_{1j}}f & \text{für } i=j\\ -\frac{b_{ij}}{b'_{1j}}f+\frac{b_{i,j-1}}{b'_{1,j-1}} & \text{für } j>i\;.\end{cases}$$

Dann ist $\frac{\partial c_{ij}}{\partial b_{kl}}=\frac{\partial}{\partial b_{kl}}(-\frac{b_{ij}}{b'_{1j}}f+\frac{b_{i,j-1}}{b'_{1,j-1}})=0$ für $k>i$ oder $l>j$ und also die Jacobimatrix

$$D=\left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial b_{kl}}\right)\in\mathbb{Q}_p^{\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{n(n-1)}{2}}$$

eine obere Dreiecksmatrix, mit Betrag

$$|\det(D)|=|\,f\,|^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot\left|\prod_{j=2}^{n-1}b'^{\,j-1}_{1j}\right|^{-1}\;.$$

Da die $b'_{1j}$ aus $\mathbb{Z}_p^\times$ sind, ist $|\det(D)|=|\,f\,|^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

Weiter ist $b_{11}=c_{11}f^{n-2}$ und $b_{ii}=-\frac{c_{ii}b'_{1i}}{f}$ für $i>1$. Also gilt, da die $b'_{1i}$ aus $\mathbb{Z}_p^\times$ sind:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n-1} \mid b_{ii} \mid^{-i} &= \mid c_{11} \mid^{-1} \cdot \mid f^{n-2} \mid^{-1} \prod_{i=2}^{n-1} \mid c_{ii} f^{-1} \mid^{-i} \\
&= \mid f \mid^{2-n} \prod_{i=2}^{n-1} \mid f \mid^{i} \prod_{j=1}^{n-1} \mid c_{jj} \mid^{-j} \\
&= \mid f \mid^{1-n} \prod_{i=1}^{n-1} \mid f \mid^{i} \prod_{j=1}^{n-1} \mid c_{jj} \mid^{-j} \\
&= \mid f \mid^{1-n} \mid f \mid^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} \mid c_{jj} \mid^{-j} \\
&= \mid f \mid^{1-n} \mid f \mid^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=2}^{n-1} \mid c_{jj} \mid^{-j} ,
\end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen $c_{11} \in \mathbb{Z}_p^{\times}$ gilt.

Somit gilt für $i > 1$ mit $B'' = C = (c_{ij})$:

$$\begin{aligned}
Q(Z_{n-1}, h_{f,n}, s) &= \mid f \mid^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} \int_{(\mathbb{Z}_p^{\times})^{n-1}} \chi(b'_{1j}) \psi(\tfrac{b'_{1j}}{f}) db'_{1j} \\
&\times \int_{\mathbb{Q}_p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cap Z_{n-2}} \chi(\det(\omega_{0,n-2})) \chi(\det(C)) \\
&\times\, w\left( \begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{f,n-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&\times v\left( \begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & \\ & 1 \end{pmatrix} C \right) \mid \det(D) \mid^{-1} \\
&\times\ \mid \det(C) \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid f \mid^{1-n} \mid f \mid^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\prod_{1 < i \leq j} dc_{ij}}{\prod_{i=2}^{n-1} |c_{ii}|^{i-1}}
\end{aligned}$$

$$= \ | f |^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} \int_{(\mathbb{Z}_p^\times)^{n-1}} \chi(b_{1j})\psi(\tfrac{b_{1j}}{f}) db_{1j}$$

$$\times \int_{\mathbb{Q}_p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cap Z_{n-2}} \chi(\det(\omega_{0,n-2}))\chi(\det(C))$$

$$\times \ w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{f,n-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times v\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & \\ & 1 \end{pmatrix} C\right) | f |^{-\frac{(n-1)(n-2)}{2}} | \det(C) |^{s-\frac{1}{2}} | f |^{1-n} | f |^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\prod\limits_{1<i\leq j} dc_{ij}}{\prod\limits_{i=2}^{n-1} |c_{ii}|^{i-1}}$$

$$= \ | f |^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot | f |^{n-1} \cdot | f |^{1-n} \cdot | f |^{-\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot | f |^{\frac{n(n-1)}{2}} G(\chi)^{n-1}$$

$$\times \int_{Z_{n-2}} \chi(\det(\omega_{0,n-2}))\chi(\det(C))$$

$$\times \ w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{f,n-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times v\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-2} & \\ & 1 \end{pmatrix} C\right) | \det(C) |^{s-\frac{1}{2}} \ dC$$

$$= \ | f |^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot G(\chi)^{n-1} \cdot Q(Z_{n-2}, h_{f,n-1}, s, res(w), res(v))$$

$$= \ f^{-\frac{n(n-1)}{2}} \cdot G(\chi)^{n-1} Q(Z_{n-2}, h_{f,n-1}, s) \ ,$$

wobei $G(\chi)$ die übliche Gaußsumme ist.

Somit folgt mit Induktion

$$\begin{aligned} Q(Z_{n-1}, h_{f,n}, s) &= f^{-\frac{n(n-1)}{2}} \cdot G(\chi)^{n-1} \ Q(Z_{n-2}, h_{f,n-1}, s) \\ &= f^{-\frac{n(n-1)}{2}} \cdot G(\chi)^{n-1} \ v(1)w(1) \prod_{i=1}^{n-2} f^{-\sum\limits_{j=1}^{i} j} G(\chi)^i \end{aligned}$$

$$= \quad v(1)w(1)f^{-\sum\limits_{k=1}^{n-1} k(n-k)} G(\chi)^{\sum\limits_{i=1}^{n-1} i}$$

$$= v(1)w(1)f^{-\sum\limits_{k=1}^{n-1} k(n-k)} G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} ,$$

wie behauptet. $\square$

Aus Proposition 2.1 ergibt sich als Hauptergebnis

**Satz 2.1.** *Ist $Q(B_{n-1} \setminus Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = 0$, so gilt für das Zeta-Integral $Q(h_{f,n}, s)$:*

*a) $Q(h_{f,n}, s) = c \cdot v(1) \cdot w(1) \cdot f^{-\sum\limits_{k=1}^{n-1} k(n-k)} G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .*
*Hierbei ist $c$ eine reelle Konstante, die vom Wechsel des Maßes der $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Q}_p)$ zu $B_{n-1}$ herkommt und in Lemma 5.4 berechnet wird.*

*b) Seien zusätzlich $v(1)$ und $w(1)$ ungleich Null. Normiert man $v$ und $w$ zu $v(1) = w(1) = 1$, so kann das Haarmaß auf $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ so normiert werden, dass $Q(h_{f,n}, s) = f^{-\sum\limits_{k=1}^{n-1} k(n-k)} G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}}$*
*ist.*

**Beweis:**

a) Für $Q(h_{f,n}, s)$ gilt:

$$\begin{aligned}
Q(h_{f,n}, s) &= \int\limits_{U_{n-1}\backslash GL_{n-1}(\mathbb{Q}_p)} \chi(\det(g)) w\left(\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_{f,n}\right) v(g) \mid \det(g) \mid^{s-\frac{1}{2}} dg \\
&= \sum_{\omega \in S_{n-1}} \int\limits_{U_{n-1}\backslash(U_{n-1}\omega B_{n-1})} \chi(\det(g)) w\left(\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_{f,n}\right) v(g) \mid \det(g) \mid^{s-\frac{1}{2}} dg \\
&= c \cdot \int\limits_{B_{n-1}} \chi(\det(\omega_{0,n-1} b)) w\left(\begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_{f,n}\right) \\
&\quad \times v(\omega_{0,n-1} b) \mid \det(\omega_{0,n-1} b) \mid^{s-\frac{1}{2}} db
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= c \cdot \int\limits_{Z_{n-1}} \chi(\det(\omega_{0,n-1}b)) w \left( \begin{pmatrix} \omega_{0,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_{f,n} \right) \\
&\quad \times v(\omega_{0,n-1}b) \mid \det(\omega_{0,n-1}b) \mid^{s-\frac{1}{2}} db \\
&= c \cdot Q(Z_{n-1}, h_{f,n}, s) \ ,
\end{aligned}
$$

womit die Behauptung folgt.

b) Diese Aussage folgt direkt aus a). □

**Bemerkung**: Sind $v$ und $W$ die lokalen Whittakerfunktionen, die dem entsprechenden Neuvektor zugeordnet sind, so ist $w(1)$ und $v(1)$ nach [K-M-Sch], Proposition 4.12, ungleich Null und Satz 2.1 b) gilt.

Der nächste Satz liefert ein hinreichendes Kriterium, wann $Q(B_{n-1} \setminus Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = 0$ ist.

**Satz 2.2.** *Sind $\chi, \chi^2, \ldots, \chi^{n-1}$ primitive, nichttriviale Charaktere mit Führer $f$ und sowohl $v(1)$ als auch $w(1)$ ungleich Null, so ist $Q(B_{n-1} \setminus Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = 0$.*

**Beweis**: In diesem Fall ist, nach geeigneter Normierung des Haarmaßes, nach [Sch], Corollary 2.8

$$
Q(h_{f,n}, s) = v(1) \cdot w(1) \cdot f^{-\sum\limits_{k=1}^{n-1} k(n-k)} \cdot G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} = Q(Z_{n-1}, h_{f,n}, s)
$$

und also $Q(B_{n-1} \setminus Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = 0$. □

**Bemerkung**: Leider konnte nicht gezeigt werden, dass für jeden Charakter $\chi$ das Integral $Q(B_{n-1} \setminus Z_{n-1}, h_{f,n}, s)$ den Wert Null hat. Allerdings legt Satz 2.2 und auch das folgende Kapitel, in dem für $n = 2, 3, 4$ gezeigt wird, dass $Q(B_{n-1} \setminus Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = 0$ ist, nahe, dass für jedes $n \geq 2$ der Wert von $Q(B_{n-1} \setminus Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = 0$ und also $Q(h_{f,n}, s) = c \cdot v(1) \cdot w(1) \cdot f^{-\sum\limits_{k=1}^{n-1} k(n-k)} G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ist. Dies würde eine Verschärfung der wichtigsten Sätze in den Arbeiten [K-M-Sch] und [Sch] nach sich ziehen, die, nach dem folgenden Kapitel, jetzt immerhin für $n = 2, 3, 4$ zutreffen.

## 2.4 Die kleinen Fälle

### 2.4.1 Die Einbettung $1 \hookrightarrow 2$

Im Fall $1 \hookrightarrow 2$ ist $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = B_1 = Z_1$. Also gilt der

**Satz 2.3.** *Mit den Voraussetzungen wie bisher gilt:*

$$Q(Z_1, h_{f,1}, s) = Q(h_{f,1}, s) = G(\chi) \ .$$

**Beweis**: Die Behauptung ist gerade der Induktionsanfang von Proposition 2.1. $\square$

### 2.4.2 Die Einbettung $2 \hookrightarrow 3$

**Lemma 2.3.** $Q(B_2, h_{f,3}, s)$ *ist höchstens auf der Menge*

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b}{a} f^2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist in der Iwahorigruppe} \right.$$
$$\left. \text{und } \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist nicht in der Iwahorigruppe} \right\} = Z_2$$

*ungleich Null.*

**Beweis**: Es ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & f^{-1} \\ f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f^{-1} \\ f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b}{a} f^2 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Außerdem gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} \\ -\frac{a}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix}$$

Demnach betrachten wir zuerst folgende Fälle:

1. Fall: $\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist in der Iwahorigruppe. In diesem Fall wird das Integral zu

$$\int \chi(ac)\psi(\tfrac{a}{f^2})\psi(\tfrac{b}{f})w\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&f^{-1}&0\\f&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\times$$

$$v\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&c\end{pmatrix}\right)\mid ac\mid^{s-\frac{1}{2}}\mid a\mid^{-1}\mid c\mid^{-2}\,da\,db\,dc$$

$$=\int \chi(ac)\psi(\tfrac{a}{f^2})\psi(\tfrac{b}{f})w\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mid a\mid^{-1}&0&0\\0&\mid c\mid^{-1}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&f^{-1}&0\\f&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\times$$

$$v\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mid a\mid^{-1}&0\\0&\mid c\mid^{-1}\end{pmatrix}\right)\mid ac\mid^{s-\frac{1}{2}}\mid a\mid^{-1}\mid c\mid^{-2}\,da\,db\,dc$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\chi(p^i)p^{2i}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\chi(c)dc\times$$

$$\int \chi(a)\psi(\tfrac{a}{f^2})\psi(\tfrac{b}{f})w\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mid a\mid^{-1}&0&0\\0&p^i&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&f^{-1}&0\\f&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\times$$

$$v\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mid a\mid^{-1}&0\\0&p^i\end{pmatrix}\right)\mid ap^i\mid^{s-\frac{1}{2}}\mid a\mid^{-1}\,da\,db$$

$$=0\ .$$

Letzteres wegen $\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times}\chi(c)dc=0$.

2. Fall: $\begin{pmatrix}1&0\\\frac{b}{a}f^2&1\end{pmatrix}$ ist nicht in der Iwahorigruppe.

Analog zum ersten Fall gilt:

$$\int \chi(ac)\psi(\tfrac{a}{f^2})\psi(\tfrac{b}{f})w\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{b}{a}&0\\\frac{a}{b}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&f^{-1}&0\\f&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{b}{a}\\\frac{a}{b}&0\end{pmatrix}\right)\mid ac\mid^{s-\frac{1}{2}}\mid a\mid^{-1}\mid c\mid^{-2}\ \,da\,db\,dc$$

$$= \int \chi(ac)\psi(\tfrac{a}{f^2})\psi(\tfrac{b}{f})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\,a\,|^{-1}&0&0\\0&|\,c\,|^{-1}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&|\,\frac{b}{a}\,|^{-1}&0\\|\,\frac{a}{b}\,|^{-1}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&f^{-1}&0\\f&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\,a\,|^{-1}&0\\0&|\,c\,|^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&|\,\frac{b}{a}\,|^{-1}\\|\,\frac{a}{b}\,|^{-1}&0\end{pmatrix}\right)|\,ac\,|^{s-\frac{1}{2}}|\,a\,|^{-1}|\,c\,|^{-2}\,da\,db\,dc$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\chi(p^i)p^{2i}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\chi(c)dc$$

$$\times\ \int\chi(a)\psi(\tfrac{a}{f^2})\psi(\tfrac{b}{f})w\left(\begin{pmatrix}0&|\,\frac{a}{b}\,|^{-1}\,p^if^{-1}&0\\|\,b\,|^{-1}\,f&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix}|\,\frac{a}{b}\,|^{-1}\,p^i&0\\0&|\,b\,|^{-1}\end{pmatrix}\right)|\,ap^i\,|^{s-\frac{1}{2}}|\,a\,|^{-1}\,da\,db$$

$$= 0\,.$$

Letzteres wieder wegen $\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times}\chi(c)dc = 0\,.$

Somit ist das Integral höchstens dann ungleich Null, wenn $\begin{pmatrix}1&\frac{b}{a}\\0&1\end{pmatrix}$ nicht in der Iwahorigruppe und $\begin{pmatrix}1&0\\\frac{b}{a}f^2&1\end{pmatrix}$ in der Iwahorigruppe ist.

Somit ergibt sich folgendes

**Korollar 2.2.** *Für die Einbettung* $2 \hookrightarrow 3$ *ist* $Q(h_{f,3},s) = Q(B_2,h_{f,3},s) = f^{-4}G(\chi)^3\,.$

### 2.4.3 Die Einbettung $3 \hookrightarrow 4$

**Lemma 2.4.** *Das Integral $Q(B_3, h_{f,4}, s)$ ist höchstens auf der Menge*

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p) \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{e}{d}f^2 & 1 & 0 \\ \frac{c}{a}f^4 & \frac{b}{a}f^2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist in der Iwahorigruppe} \right.$$

$$\left. \text{und } \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{e}{d} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist nicht in der Iwahorigruppe} \right\} = Z_3$$

*ungleich Null.*

**Beweis**: Wie im Fall $2 \hookrightarrow 3$ ergeben sich mehrere Fälle, in denen die möglichen Zerlegungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}$$

betrachtet werden. Im folgenden sei $f = p^r$ und wir bezeichnen $h_{f,4}$ kurz mit $h_f$. Weiter wird für eine Menge $M$ mit $M^c$ das Komplement der Menge $M$ in der Menge der oberen Dreiecksmatrizen bezeichnet.

Bevor wir zum eigentlichen Beweis von Lemma 2.4 kommen geben wir eine kurze Übersicht über die möglichen Fälle.

In Fall 1 und Fall 2 wird gezeigt, dass $Q(M, h_f, s) = 0$ ist, wobei $M$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}$ ist, für die zusätzlich gilt, dass entweder $\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in der Iwahorigruppe ist, oder $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a}f^2 & 1 \end{pmatrix}$ nicht in der Iwahorigruppe ist.

In Fall 3 wird gezeigt, dass $Q(M', h_f, s) = 0$ ist, wobei $M'$ die Menge alle Matrizen aus $M^c$ ist, für die zusätzlich gilt, dass $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in der Iwahorigruppe ist. Hier ergeben sich mehrere Unterfälle, die im Laufe des Beweises behandelt werden.

In Fall 4.1 wird gezeigt, dass $Q(M'', h_f, s) = 0$ ist, wobei $M''$ die Menge alle Matrizen aus $M^c$ ist, für die zusätzlich gilt, dass $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c}{a}f^4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht in der Iwahorigruppe ist. Wie im Fall 3 ergeben sich, je nach dem Verhalten der restlichen Einträge mehrere Unterfälle, die gesondert behandelt werden müssen.

Im Fall 5.1 zeigt sich ,dass $Q(M''', h_f, s) = 0$ ist, wobei $M'''$ die Menge alle Matrizen aus $(M' \cup M'')^c$ ist, für die zusätzlich gilt, dass $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in der Iwahorigruppe ist.

Im Fall 5.2 zeigt sich ,dass $Q(M'''', h_f, s) = 0$ ist, wobei $M''''$ die Menge alle Matrizen aus $M'''^c$ ist, für die zusätzlich gilt, dass $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{e}{d}f^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht in der Iwahorigruppe ist.

Hiermit ist gezeigt, dass $Q(Z_3^c, h_f, s) = 0$ ist und also die Behauptung von Lemma 2.4.

Kommen wir also jetzt zum eigentlichen Beweis:

**Fall 1**: Sei $M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist in der Iwahorigruppe} \right\}$. Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in der Iwahorigruppe, dann ist auch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a}f^2 & 1 \end{pmatrix}$$

aus der Iwahorigruppe. Also wird das Integral $Q(M_1, h_f, s)$ wegen der Rechtsinvarianz unter der Iwahorigruppe zu

$$\int\limits_{M_1} \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})w\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$\times\, v\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\right)\right) \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} \; dadbdcdddedg$$

$$= \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(d)dd \int \chi(ag)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})$$

$$\times\; w\left(\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&c&0\\ 0&p^i&e&0\\ 0&0&g&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&f^{-2}&0\\ 0&1&0&0\\ f^2&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\; v\left(\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&c\\ 0&p^i&e\\ 0&0&g \end{pmatrix}\right) \mid agp^i \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} \;\; dadbdcdedg\ ,$$

was wegen $\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(d)dd = 0$ gleich Null ist.

**Fall 2**: Sei $M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a&b&c\\ 0&d&e\\ 0&0&g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&\frac{b}{a}f^2&1 \end{pmatrix} \text{ist nicht in der Iwahorigruppe} \right\}$ .

Mit $\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&\frac{b}{a}f^2&1 \end{pmatrix}$ ist auch die Matrix $\begin{pmatrix} 1&\frac{b}{a}&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ nicht in der Iwahorigruppe.

Weiter gilt zunächst

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a&b&c\\ 0&d&e\\ 0&0&g \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a&0&c\\ 0&d&e\\ 0&0&g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&\frac{b}{a}&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} a&0&c\\ 0&d&e\\ 0&0&g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\ \frac{a}{b}&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&\frac{b}{a}&0\\ -\frac{a}{b}&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\ \frac{a}{b}&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1&0&0\\ \frac{d}{b}&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&c\\ 0&d&e-\frac{cd}{b}\\ 0&0&g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&\frac{b}{a}&0\\ -\frac{a}{b}&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\ \frac{a}{b}&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und das Integral $Q(M_2, h_f, s)$ wird, wegen der Rechtsinvarianz unter der Iwahorigruppe zu

$$\int_{M_2} \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&c&0\\ 0&d&e-\frac{cd}{b}&0\\ 0&0&g&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&\frac{b}{a}&0&0\\ \frac{a}{b}&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&f^{-2}&0\\ 0&1&0&0\\ f^2&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&c\\ 0&d&e-\frac{cd}{b}\\ 0&0&g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&\frac{b}{a}&0\\ \frac{a}{b}&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\right) \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}}$$

$$\times\ \mid a \mid^{-1}\mid d \mid^{-2}\mid g \mid^{-3}\ dadbdcdddedg\ .$$

Nach einer Variablentransformation $e \mapsto e - \frac{cd}{b}$ wird das Integral zu

$$\sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i)p^{2i} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(d)dd \int \chi(ag)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&c&0\\ 0&p^i&e&0\\ 0&0&g&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&\frac{b}{a}&0&0\\ \frac{a}{b}&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&f^{-2}&0\\ 0&1&0&0\\ f^2&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&c\\ 0&p^i&e\\ 0&0&g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&\frac{b}{a}&0\\ \frac{a}{b}&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\right) \mid agp^i \mid^{s-\frac{1}{2}}$$

$$\times\ \mid a \mid^{-1}\mid g \mid^{-3}\ dadbdcdedg\ ,$$

wobei das zweite Integral nicht mehr von $d$ abhängt und also der ganze Ausdruck wegen $\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(d)dd = 0$ gleich Null ist.

Also ist $Q(M_1 \cup M_2, h_f, s) = 0$.

**Fall 3**: Wir betrachten nun die Menge

$$M_3 := (M_1 \cup M_2)^c \cap \left\{ \begin{pmatrix} a&b&c\\ 0&d&e\\ 0&0&g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1&0&\frac{c}{a}\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \text{ist in der Iwahorigruppe} \right\}\ ,$$

wobei $(M_1 \cup M_2)^c$ das Komplement von $M_1 \cup M_2$ in $B_3$ bezeichnet.

Da mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ auch $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c}{a}f^4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in der Iwahorigruppe ist, wird das Integral $Q(M_3, h_f, s)$ zu

$$\int_{M_3} \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\right) \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

$$= \int_{M_3} \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}}$$

$$\times\ \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg\ .$$

Jetzt gibt es drei Unterfälle:

**Fall 3.1**: Sei

$$M_{3.1} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b}{a}\frac{e}{d} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{e}{d}f^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{sind in der Iwahorigruppe} \right\} \cap M_3\ .$$

Nach Fall 1 und Fall 2 ist dann

$$Q(M_{3.1},h_f,s)=\int\limits_{M_{3.1}}\chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$w\left(\left(\begin{array}{cccc}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc}a&0&0&0\\0&d&0&0\\0&0&g&0\\0&0&0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc}0&0&f^{-2}&0\\0&1&0&0\\f^2&0&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\\frac{e}{d}f^2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)\right)$$

$$v\left(\left(\begin{array}{ccc}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc}a&0&0\\0&d&0\\0&0&g\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc}0&\frac{b}{a}&0\\\frac{a}{b}&0&0\\0&0&1\end{array}\right)\right)\mid adg\mid^{s-\frac{1}{2}}$$

$$\mid a\mid^{-1}\mid d\mid^{-2}\mid g\mid^{-3}\,dadbdcdddedg$$

$$=\sum_{-\infty<i<\infty}\chi(p^i)p^{3i}\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times}\chi(g)dg\int\chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$w\left(\left(\begin{array}{cccc}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc}a&0&0&0\\0&d&0&0\\0&0&p^i&0\\0&0&0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc}0&0&f^{-2}&0\\0&1&0&0\\f^2&0&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right)\right)$$

$$v\left(\left(\begin{array}{ccc}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc}a&0&0\\0&d&0\\0&0&p^i\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc}0&\frac{b}{a}&0\\\frac{a}{b}&0&0\\0&0&1\end{array}\right)\right)\mid adp^i\mid^{s-\frac{1}{2}}$$

$$\mid a\mid^{-1}\mid d\mid^{-2}\,dadbdcddde\ ,$$

was wegen $\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times}\chi(g)dg=0$ Null ist.

**Fall 3.2**: Sei

$$M_{3.2}:=\left\{\left(\begin{array}{ccc}a&b&c\\0&d&e\\0&0&g\end{array}\right)\mid\left(\begin{array}{ccc}1&0&\frac{b}{a}\frac{e}{d}\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\text{ und }\right.$$

$$\left.\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\\frac{e}{d}f^2&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\text{ sind nicht in der Iwahorigruppe}\right\}\cap M_3\ .$$

Dann wird das Integral $Q(M_{3.2},h_f,s)$ zu

$$\int\limits_{M_{3.2}} \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$w\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{d} & 0 \\ 0 & \frac{d}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$v\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{d} \\ 0 & \frac{d}{e} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right) \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}}$$

$$\times \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

$$= \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)dg \int \chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$w\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{d} & 0 \\ 0 & \frac{d}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$v\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & p^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{d} \\ 0 & \frac{d}{e} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right) \mid adp^i \mid^{s-\frac{1}{2}}$$

$$\times \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid p^i \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

was wegen $\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)dg = 0$ Null ist.

**Fall 3.3**: Sei

$$M_{3.3} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b}{a}\frac{e}{d} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist nicht in der Iwahorigruppe und} \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{e}{d}f^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ist in der Iwahorigruppe} \right\} \cap M_3 \ .$$

Dann wird das Integral $Q(M_{3.3}, h_f, s)$ zu

$$\int\limits_{M_{3.3}} \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})\overline{\psi}(\tfrac{g}{e})$$

$$w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{d} \\ 0 & \frac{d}{e} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}}$$

$$\times \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} \, dadbdcdddedg$$

$$= \sum_{-\infty<i<\infty} \sum_{-\infty<j<\infty} \chi(p^{i+j}) \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)\overline{\psi}(\tfrac{g}{e}p^{j-i})dedg \int \chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p^i}{d} \\ 0 & \frac{d}{p^i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \mid adp^j \mid^{s-\frac{1}{2}}$$

$$\times \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid p^j \mid^{-3} \, dadbdcdd \; .$$

Weiter ist $\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)\overline{\psi}(\frac{g}{e}p^{j-i})dedg = 0$ für $j-i > -r$, und für $j-i \leq -r$ gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)\overline{\psi}(\frac{g}{e}p^{j-i})dedg = c \cdot G(\chi) \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(e)de = 0 \; .$$

Hierbei ist $c$ eine Konstante und $G(\chi)$ die übliche Gaußsumme zum Charakter $\chi$. Insgesamt folgt also, dass das Integral Null ist.

Hieraus ergibt sich, dass das Integral höchstens auf dem Komplement der Menge $M_3 = M_{3.1} \cup M_{3.2} \cup M_{3.3}$ in $B_3$, also auf der Menge

$$M_4 := M_3^c \setminus (M_1 \cup M_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sind} \right.$$

$$\left. \text{nicht in der Iwahorigruppe und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{b}{a} f^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist in der Iwahorigruppe} \right\},$$

ungleich Null ist.

Auf $M_4$ gilt nun nach dem Vorher gezeigten:

$$\begin{aligned} Q(M_4, h_f, s) = \quad & \int \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})\overline{\psi}((e - \tfrac{cd}{b})c^{-1}) \\ & \times w\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ & \times v\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & e - \frac{cd}{b} \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ & \times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg \, . \end{aligned}$$

Nun betrachten wir, je nach dem Verhalten der Einträge $c, e$ und $e - \frac{cd}{b}$, die folgenden Fälle:

**Fall 4.1**: Sei

$$M_{4.1} := M_4 \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c}{a} f^4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist nicht in der Iwahorigruppe} \right\} .$$

Dann ist

$Q(M_{4.1}, h_f, s) = \int \chi(adg)\psi(\frac{a}{f^3})\psi(\frac{b}{f^2})\psi(\frac{c}{f})\overline{\psi}(\frac{d}{b})\overline{\psi}((e-\frac{cd}{b})c^{-1})\psi(\frac{e}{c})$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & e-\frac{cd}{b} \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$

$= \int \chi(adg)\psi(\frac{a}{f^3})\psi(\frac{b}{f^2})\psi(\frac{c}{f})$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & e-\frac{cd}{b} \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$ .

Es gilt nun:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{ae}{cd}f^{-2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d}-\frac{c}{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a}(\frac{be}{cd}-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und also sind vier weitere Unterfälle zu betrachten:

**Fall 4.1.1**: Sei

$$M_{4.1.1} := M_{4.1} \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{ae}{cd}f^{-2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und} \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a}(\frac{be}{cd}-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sind in der Iwahorigruppe} \right\}.$$

Dann ist

$$Q(M_{4.1.1}, h_f, s) = \int\limits_{M_{4.1.1}} \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

$$= \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)\ dg \int \chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & p^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid p^i \mid^{-3} dadbdcddde$$

$$= 0$$

da das zweite Integral nicht von $g$ abhängt und

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)\ dg = 0$$

ist.

**Fall 4.1.2**: Sei

$$M_{4.1.2} := M_{4.1} \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{ae}{cd}f^{-2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist in der Iwahorigruppe und} \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a}(\frac{be}{cd}-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist nicht in der Iwahorigruppe} \right\}.$$

Dann ist

$$Q(M_{4.1.2},h_f,s) = \int\limits_{M_{4.1.1}} \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(g(e-\tfrac{cd}{b})^{-1})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&0&0\\ 0&d&0&0\\ 0&0&g&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&\frac{c}{a}&0\\ 0&1&0&0\\ \frac{a}{c}&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&f^{-2}&0\\ 0&1&0&0\\ f^2&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&0\\ 0&d&0\\ 0&0&g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&\frac{e}{d}-\frac{c}{b}\\ 0&(\frac{e}{d}-\frac{c}{b})^{-1}&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&\frac{c}{a}\\ 0&1&0\\ \frac{a}{c}&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&\frac{b}{a}&0\\ \frac{a}{b}&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

Nach der Variablentransformation $\frac{e}{d}-\frac{c}{b} \mapsto e$ gilt wie im Fall 3.3, dass

$$Q(M_{4.1.2},h_f,s) =$$

$$= \sum_{-\infty<i<\infty}\ \sum_{-\infty<j<\infty} \chi(p^{i+j}) \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)\overline{\psi}(\tfrac{g}{e}p^{j-i})dedg \int \chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$w\left(\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&0&0\\ 0&d&0&0\\ 0&0&g&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&f^{-2}&0\\ 0&1&0&0\\ f^2&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\right)$$

$$v\left(\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&0\\ 0&d&0\\ 0&0&g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&\frac{p^i}{d}\\ 0&\frac{d}{p^i}&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&\frac{b}{a}&0\\ \frac{a}{b}&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\right) \mid adp^j \mid^{s-\frac{1}{2}}$$

$$\times \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid p^j \mid^{-3} dadbdcdd$$

ist und analog also $\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)\overline{\psi}(\frac{g}{e}p^{j-i})dedg = 0$ für $j-i > -r$, und

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)\overline{\psi}(\frac{g}{e}p^{j-i})dedg = c\cdot G(\chi)\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times}\chi(e)de = 0\ .$$

für $j-i \le -r$.

Hierbei ist $c$ wieder eine Konstante und $G(\chi)$ die übliche Gaußsumme zum Charakter $\chi$. Insgesamt folgt also, dass das Integral Null ist.

Kommen wir nun zu

**Fall 4.1.3**: Sei

$$M_{4.1.3} := M_{4.1} \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{ae}{cd} f^{-2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist nicht in der Iwahorigruppe und} \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a}(\frac{be}{cd} - 1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist in der Iwahorigruppe} \right\} .$$

Dann gilt:

$$Q(M_{4.1.3}, h_f, s) = \int_{M_{4.1.3}} \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\psi(\tfrac{g}{e})$$

$$\times\ w\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{d} & 0 \\ 0 & \frac{d}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\times\ v\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

$$= \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(d)\ dd \int \chi(ag)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\psi(\tfrac{g}{e})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{p^i} & 0 \\ 0 & \frac{p^i}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & p^i & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid ap^ig \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid p^i \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

$$= 0$$

wegen

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(d)\ dd = 0\ .$$

Weiter mit

**Fall 4.1.4**: Sei

$$M_{4.1.4} := M_{4.1} \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{ae}{cd}f^{-2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a}(\frac{be}{cd} - 1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sind nicht in der Iwahorigruppe} \right\} .$$

Hier ist

$$Q(M_{4.1.4},h_f,s)=\int\limits_{M_{4.1.4}}\chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\psi(\tfrac{g}{e})\overline{\psi}(g(e-\tfrac{cd}{b})^{-1})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&d&0&0\\0&0&g&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&\frac{e}{d}&0\\0&\frac{d}{e}&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}0&0&\frac{c}{a}&0\\0&1&0&0\\\frac{a}{c}&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&f^{-2}&0\\0&1&0&0\\f^2&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&d&0\\0&0&g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&\frac{e}{d}-\frac{c}{b}\\0&(\frac{e}{d}-\frac{c}{b})^{-1}&0\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}0&0&\frac{c}{a}\\0&1&0\\\frac{a}{c}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{b}{a}&0\\\frac{a}{b}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\mid adg\mid^{s-\frac{1}{2}}\mid a\mid^{-1}\mid d\mid^{-2}\mid g\mid^{-3}\,dadbdcdddedg$$

$$=\int\limits_{M_{4.1.4}}\chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\psi(-g\tfrac{\frac{cd}{eb}}{e-\frac{cd}{eb}})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&d&0&0\\0&0&g&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&\frac{e}{d}&0\\0&\frac{d}{e}&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}0&0&\frac{c}{a}&0\\0&1&0&0\\\frac{a}{c}&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&f^{-2}&0\\0&1&0&0\\f^2&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&d&0\\0&0&g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&\frac{e}{d}-\frac{c}{b}\\0&(\frac{e}{d}-\frac{c}{b})^{-1}&0\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}0&0&\frac{c}{a}\\0&1&0\\\frac{a}{c}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{b}{a}&0\\\frac{a}{b}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg\mid^{s-\frac{1}{2}}\mid a\mid^{-1}\mid d\mid^{-2}\mid g\mid^{-3} dadbdcdddedg$$

$$= G(\chi)\sum_{-\infty<i<\infty}\chi(p^i)\int\chi(ad)\chi(\tfrac{eb}{cd}-1)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&d&0&0\\0&0&p^i&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&\frac{e}{d}&0\\0&\frac{d}{e}&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}0&0&\frac{c}{a}&0\\0&1&0&0\\\frac{a}{c}&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&f^{-2}&0\\0&1&0&0\\f^2&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&d&0\\0&0&p^i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&\frac{e}{d}-\frac{c}{b}\\0&(\frac{e}{d}-\frac{c}{b})^{-1}&0\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}0&0&\frac{c}{a}\\0&1&0\\\frac{a}{c}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{b}{a}&0\\\frac{a}{b}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg\mid^{s-\frac{1}{2}}\mid a\mid^{-1}\mid d\mid^{-2}\mid p^i\mid^{-3} dadbdcddde$$

$$= G(\chi) \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) \int \sum_{-\infty<j<\infty} \chi(p^j)\chi(a)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f}) \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(\tfrac{eb}{c} - d)\ dd$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{p^j} & 0 \\ 0 & \frac{p^j}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & p^j & 0 \\ 0 & 0 & p^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{p^j} - \frac{c}{b} \\ 0 & (\frac{e}{p^j} - \frac{c}{b})^{-1} & 0 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid p^j \mid^{-2} \mid p^i \mid^{-3} dadbdcde$$

$$= 0\ ,$$

wobei die letzte Gleichheit wegen

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(\frac{eb}{c} - d)\ dd = 0$$

gilt.

Insgesamt folgt also, dass mit

$$M_5 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sind nicht in der} \right.$$

$$\left. \text{Iwahorigruppe und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{b}{a}f^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c}{a}f^4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sind in der Iwahorigruppe} \right\},$$

das Integral $Q(M_5^c, h, f, s) = 0$ ist.

Wir müssen uns also jetzt noch um den Eintrag $e$ kümmern.

**Fall 5.1**: Sei

$$M_{5.1} := M_5 \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist in der Iwahorigruppe} \right\} .$$

Dann ist auch $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{e}{d}f^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in der Iwahorigruppe.

Außerdem ist $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c - \frac{be}{d} \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und also gilt

$$Q(M_{5.1}, h_f, s) = \int\limits_{M_{5.1}} \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})$$

$$\times\ w\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\times\ v\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c - \frac{be}{d} \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

$$= \int\limits_{M_{5.1}} \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$\times\ w\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\times\ v\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & c - \frac{be}{d} \\ 0 & d & e - \frac{cd}{b} \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

Jetzt gibt es wieder vier Unterfälle.

**Fall 5.1.1**: Sei

$$M_{5.1.1} := M_{5.1} \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b}{a}(\frac{e}{d} - \frac{c}{b}) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \text{und} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a}{b}(\frac{c}{a} - \frac{be}{ad}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sind in der Iwahorigruppe} \right\} .$$

Dann ist

$$Q(M_{5.1.1}, h_f, s) = \int\limits_{M_{5.1.1}} \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$\times\, w\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\times\, v\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

$$= \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)\ dg\ \int \chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$\times\, w\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\times\, v\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & p^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\times \mid adp^i \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid p^i \mid^{-3} dadbdcddde$$

$$= 0$$

wegen $\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)\ dg = 0$.

**Fall 5.1.2**: Sei

$$M_{5.1.2} := M_{5.1} \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b}{a}(\frac{e}{d} - \frac{c}{b}) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist in der Iwahorigruppe} \right.$$

$$\left. \text{und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a}{b}(\frac{c}{a} - \frac{be}{ad}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist nicht in der Iwahorigruppe} \right\}.$$

Dann ist

$$Q(M_{5.1.2}, h_f, s) = \int\limits_{M_{5.1.2}} \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & c - \frac{be}{d} \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

$$= \int \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ g(c - \frac{be}{d})^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{-1}(c - \frac{be}{d}) \\ 0 & 1 & 0 \\ a(c - \frac{be}{d})^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

$$= \int \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{-1}(c-\frac{be}{d}) \\ 0 & 1 & 0 \\ a(c-\frac{be}{d})^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

$$= \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)\ dg\ \int \chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & p^i \end{pmatrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{-1}(c-\frac{be}{d}) \\ 0 & 1 & 0 \\ a(c-\frac{be}{d})^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adp^i \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid p^i \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

$$= 0$$

wieder wegen

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)\ dg = 0\ .$$

**Fall 5.1.3**: Sei

$$M_{5.1.3} := M_{5.1} \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b}{a}(\frac{e}{d} - \frac{c}{b}) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist nicht in der Iwahorigruppe} \right.$$

$$\left. \text{und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a}{b}(\frac{c}{a} - \frac{be}{ad}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist in der Iwahorigruppe} \right\} .$$

Dann ist

$$Q(M_{5.1.3}, h_f, s) = \int_{M_{5.1.3}} \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$\times\, w\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\times\, v\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & e - \frac{cd}{b} \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

$$= \int \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$\times\, w\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\times\, v\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & g(e - \frac{cd}{b})^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{d} - \frac{c}{b} \\ 0 & d(e - \frac{cd}{b})^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

$$= \int \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})\overline{\psi}(g(e-\tfrac{cd}{b})^{-1})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{d}-\frac{c}{b} \\ 0 & d(e-\frac{cd}{b})^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3}\ dadbdcdddedg$$

$$= \int \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)\overline{\psi}(g(e-\tfrac{cd}{b})^{-1})\ dg\ \chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & p^i \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{d}-\frac{c}{b} \\ 0 & d(e-\frac{cd}{b})^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adp^i \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid p^i \mid^{-3}\ dadbdcddde$$

$$= \int G(\chi) \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) \int \chi(e - \tfrac{cd}{b})\ de\ \chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & p^i \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{d} - \frac{c}{b} \\ 0 & d(e - \frac{cd}{b})^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adp^i \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid p^i \mid^{-3} dadbdcdd$$

$$= 0$$

wegen

$$\int \chi(e - \frac{cd}{b})\ de = 0\ .$$

**Fall 5.1.4**: Sei

$$M_{5.1.4} := M_{5.1} \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b}{a}(\frac{e}{d} - \frac{c}{b}) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a}{b}(\frac{c}{a} - \frac{be}{ad}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sind nicht in der Iwahorigruppe} \right\}\ .$$

Dann ist

$$Q(M_{5.1.4},h_f,s)=\int\limits_{M_{5.1.4}}\chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&d&0&0\\0&0&g&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&f^{-2}&0\\0&1&0&0\\f^2&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&c-\frac{be}{d}\\0&d&e-\frac{cd}{b}\\0&0&g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{b}{a}&0\\\frac{a}{b}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\mid adg\mid^{s-\frac{1}{2}}\mid a\mid^{-1}\mid d\mid^{-2}\mid g\mid^{-3}\,dadbdcdddedg$$

$$=\int\limits_{M_{5.1.4}}\chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&d&0&0\\0&0&g&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&f^{-2}&0\\0&1&0&0\\f^2&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{d}{b}&1&0\\g(c-\frac{be}{d})^{-1}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&d&e-\frac{cd}{b}\\0&0&g\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}0&0&a^{-1}(c-\frac{be}{d})\\0&1&0\\a(c-\frac{be}{d})^{-1}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{b}{a}&0\\\frac{a}{b}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\mid adg\mid^{s-\frac{1}{2}}\mid a\mid^{-1}\mid d\mid^{-2}\mid g\mid^{-3}\,dadbdcdddedg$$

$$= \int \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & e-\frac{cd}{b} \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\right.$$

$$\times\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{-1}(c-\frac{be}{d}) \\ 0 & 1 & 0 \\ a(c-\frac{be}{d})^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

Außerdem ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d^{-1}(e-\frac{cd}{b}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{-1}(c-\frac{be}{d}) \\ 0 & 1 & 0 \\ a(c-\frac{be}{d})^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{-1}(c-\frac{be}{d}) \\ 0 & 1 & 0 \\ a(c-\frac{be}{d})^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nach Voraussetzung nicht in der Iwahorigruppe liegt.

Somit gilt

$$Q(M_{5.1.4},h_f,s)=\int\chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&d&0&0\\0&0&g&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&f^{-2}&0\\0&1&0&0\\f^2&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&g(e-\frac{cd}{b})^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&d&0\\0&0&g\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&d^{-1}(e-\frac{cd}{b})\\0&d(e-\frac{cd}{b})^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&a^{-1}(c-\frac{be}{d})\\0&1&0\\a(c-\frac{be}{d})^{-1}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{b}{a}&0\\\frac{a}{b}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\mid adg\mid^{s-\frac{1}{2}}\mid a\mid^{-1}\mid d\mid^{-2}\mid g\mid^{-3}\,dadbdcdddedg$$

$$=\int\chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(g(e-\tfrac{cd}{b})^{-1})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&d&0&0\\0&0&g&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&f^{-2}&0\\0&1&0&0\\f^2&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&d&0\\0&0&g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&d^{-1}(e-\frac{cd}{b})\\0&d(e-\frac{cd}{b})^{-1}&1\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}0&0&a^{-1}(c-\frac{be}{d})\\0&1&0\\a(c-\frac{be}{d})^{-1}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{b}{a}&0\\\frac{a}{b}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\mid adg\mid^{s-\frac{1}{2}}\mid a\mid^{-1}\mid d\mid^{-2}\mid g\mid^{-3}\,dadbdcdddedg$$

$$= \int \chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f}) \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(g)\overline{\psi}(g(e-\tfrac{cd}{b})^{-1})\ dg$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&0&0\\ 0&d&0&0\\ 0&0&p^i&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&f^{-2}&0\\ 0&1&0&0\\ f^2&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&0\\ 0&d&0\\ 0&0&p^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&d^{-1}(e-\frac{cd}{b})\\ 0&d(e-\frac{cd}{b})^{-1}&1 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{pmatrix} 0&0&a^{-1}(c-\frac{be}{d})\\ 0&1&0\\ a(c-\frac{be}{d})^{-1}&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&\frac{b}{a}&0\\ \frac{a}{b}&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adp^i \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid p^i \mid^{-3}\ dadbdcddde$$

$$= \int \chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f}) \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) G(\chi) \int \chi(e-\tfrac{cd}{b})\ de$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&0&0\\ 0&d&0&0\\ 0&0&p^i&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&f^{-2}&0\\ 0&1&0&0\\ f^2&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&0&0\\ 0&d&0\\ 0&0&p^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&d^{-1}(e-\frac{cd}{b})\\ 0&d(e-\frac{cd}{b})^{-1}&1 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{pmatrix} 0&0&a^{-1}(c-\frac{be}{d})\\ 0&1&0\\ a(c-\frac{be}{d})^{-1}&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&\frac{b}{a}&0\\ \frac{a}{b}&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adp^i \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid p^i \mid^{-3}\ dadbdcdd$$

$$= 0$$

wegen

$$\int \chi(e - \frac{cd}{b})\ de\ = 0\ .$$

**Fall 5.2**: Sei

$$M_{5.2} := M_5 \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \frac{e}{d}f^2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist nicht in der Iwahorigruppe} \right\} .$$

Dann ist auch $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht in der Iwahorigruppe.

Nach den vorhergehenden Fällen wissen wir, dass

$$Q(M_5, h_f, s) = \int \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{d}{b})\overline{\psi}((e - \tfrac{cd}{b})c^{-1})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & e - \frac{cd}{b} \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

ist, und also

$$Q(M_{5.2}, h_f, s) = \int \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{e}{c})\psi(\tfrac{g}{e})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d} & 0 \\ 0 & \frac{d}{e} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & e - \frac{cd}{b} \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3} dadbdcdddedg$$

ist.

Weiter ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d} - \frac{c}{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b^2}{ac}(\frac{e}{d} - \frac{c}{b}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und also bleiben noch zwei Fälle übrig, je nachdem, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b^2}{ac}(\frac{e}{d} - \frac{c}{b}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in der Iwahorigruppe ist oder nicht.

**Fall 5.2.1**: Sei

$$M_{5.2.1} := M_5 \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & \frac{b^2}{ac}(\frac{e}{d} - \frac{c}{b}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist in der Iwahorigruppe} \right\}.$$

Dann ist

$$Q(M_{5.2.1}, h_f, s) = \int \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{e}{c})\psi(\tfrac{g}{e})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d} & 0 \\ 0 & \frac{d}{e} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid g \mid^{-3}\, dadbdcdddedg$$

$$= \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(d)\ dd\ \int \chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{e}{c})\psi(\tfrac{g}{e})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{p^i} & 0 \\ 0 & \frac{p^i}{e} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & p^i & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid ap^ig \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid p^i \mid^{-2} \mid g \mid^{-3}\ dadbdcdedg$$

$$= 0$$

wegen

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(d)\ dd\ = 0\ .$$

**Fall 5.2.2**: Sei

$$M_{5.2.2} := M_5 \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & \frac{b^2}{ac}(\frac{e}{d} - \frac{c}{b}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist nicht in der Iwahorigruppe} \right\}\ .$$

Dann ist

$$Q(M_{5.2.2},h_f,s)=\int \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{e}{c})\psi(\tfrac{g}{e})\overline{\psi}(g(e-\tfrac{cd}{b})^{-1})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&d&0&0\\0&0&g&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&\frac{e}{d}&0\\0&\frac{d}{e}&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&f^{-2}&0\\0&1&0&0\\f^2&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&d&0\\0&0&g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{e}{d}-\frac{c}{b}\\0&(\frac{e}{d}-\frac{c}{b})^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{c}{a}\\0&1&0\\\frac{a}{c}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{b}{a}&0\\\frac{a}{b}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg\mid^{s-\frac{1}{2}}\ \mid a\mid^{-1}\mid d\mid^{-2}\mid g\mid^{-3}\ dadbdcdddedg$$

$$=\int \chi(adg)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{e}{c})\psi(-g\tfrac{\frac{cd}{be}}{e-\frac{cd}{b}})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&d&0&0\\0&0&g&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&\frac{e}{d}&0\\0&\frac{d}{e}&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&f^{-2}&0\\0&1&0&0\\f^2&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&d&0\\0&0&g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{e}{d}-\frac{c}{b}\\0&(\frac{e}{d}-\frac{c}{b})^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{c}{a}\\0&1&0\\\frac{a}{c}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{b}{a}&0\\\frac{a}{b}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adg\mid^{s-\frac{1}{2}}\ \mid a\mid^{-1}\mid d\mid^{-2}\mid g\mid^{-3}\ dadbdcdddedg$$

$$=\sum_{-\infty<i<\infty}\chi(p^i)\int \chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{e}{c})\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\chi(g)\psi(-g\tfrac{\frac{cd}{be}}{e-\frac{cd}{b}})\ dd$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&d&0&0\\0&0&p^i&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&\frac{e}{d}&0\\0&\frac{d}{e}&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&f^{-2}&0\\0&1&0&0\\f^2&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&d&0\\0&0&p^i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{e}{d}-\frac{c}{b}\\0&(\frac{e}{d}-\frac{c}{b})^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{c}{a}\\0&1&0\\\frac{a}{c}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{b}{a}&0\\\frac{a}{b}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adp^i\mid^{s-\frac{1}{2}}\ \mid a\mid^{-1}\mid d\mid^{-2}\mid p^i\mid^{-3}\ dadbdcddde$$

$$= G(\chi) \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) \int \chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{e}{c})\chi(\tfrac{e-\frac{cd}{b}}{\frac{cd}{be}})$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d} & 0 \\ 0 & \frac{d}{e} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & p^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d}-\frac{c}{b} \\ 0 & (\frac{e}{d}-\frac{c}{b})^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adp^i \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid p^i \mid^{-3} dadbdcddde$$

$$= G(\chi) \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) \int \chi(ad)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{e}{c})\chi(\tfrac{e^2b}{cd}-e)$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d} & 0 \\ 0 & \frac{d}{e} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & p^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d}-\frac{c}{b} \\ 0 & (\frac{e}{d}-\frac{c}{b})^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adp^i \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid p^i \mid^{-3} dadbdcddde$$

$$= G(\chi) \sum_{-\infty<i<\infty} \chi(p^i) \int \chi(a)\psi(\tfrac{a}{f^3})\psi(\tfrac{b}{f^2})\psi(\tfrac{c}{f})\overline{\psi}(\tfrac{e}{c})\chi(e) \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(\tfrac{eb}{c} - d)\ dd$$

$$\times\ w\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d} & 0 \\ 0 & \frac{d}{e} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ v\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & p^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e}{d} - \frac{c}{b} \\ 0 & (\frac{e}{d} - \frac{c}{b})^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times \mid adp^i \mid^{s-\frac{1}{2}} \mid a \mid^{-1} \mid d \mid^{-2} \mid p^i \mid^{-3} dadbdcde$$

$$= 0$$

wegen

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(\frac{eb}{c} - d)\ dd = 0\ .$$

Insgesamt folgt also, dass $Q(Z_3^c, h_f, s) = 0$ ist und also ist das Lemma bewiesen. $\square$

Auch hier ergibt sich das

**Korollar 2.3.** *Für die Einbettung* $3 \hookrightarrow 4$ *ist* $Q(h_f, s) = Q(B_3, h_f, s) = f^{-10} G(\chi)^6$ .

# 3 Getwistete $L$-Reihen

Ab jetzt nehmen wir an, dass $Q(B_{n-1} \setminus Z_{n-1}, h_{f,n}, s) = 0$ ist, und also die Aussage von Satz 2.1 zutrift.

## 3.1 $L$-Reihen

Im folgenden bezeichne $\mathbb{A}$ den Adelring und $\mathbb{A}_f$ den Ring der endlichen Adele von $\mathbb{Q}$.

Seien $\pi$ und $\sigma$ cuspidale automorphe Darstellungen der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ bzw. der $\mathrm{Gl}_{n-1}(\mathbb{A})$, die bei der Primzahl $p$ unverzweigt sind. Für jede feste Primzahl $q$ und jedes Paar von Whittakerfunktionen $(w_q, v_q) \in \mathcal{W}(\pi_q, \psi_q) \times \mathcal{W}(\sigma_q, \overline{\psi}_q)$ zu einem additiven Charakter $\psi_q$ auf $\mathbb{Q}_q$ und seinem Inversen $\overline{\psi}_q$ konvergiert das zugehörige Zeta-Integral

$$\Psi(w_q, v_q, s) = \int\limits_{U_{n-1}(\mathbb{Q}_q)\backslash GL_{n-1}(\mathbb{Q}_q)} w_q \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_q(g) \mid \det(g) \mid^{s-\frac{1}{2}} dg$$

für $\mathrm{Re}(s)$ genügend groß absolut. Diese Zeta-Integrale erzeugen im Körper $\mathbb{C}(q^s)$ der rationalen Funktionen in $q^s$ ein gebrochenes Ideal $L(\pi_q, \sigma_q, s) \cdot \mathbb{C}[q^s, q^{-s}]$. Es gibt dann ein eindeutig bestimmtes Polynom $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit $Q(0) = 1$, sodass $L(\pi_q, \sigma_q, s) = Q(q^{-s})^{-1}$ ist.

Nun betrachtet man globale Whittaker-Funktionen $w$ und $v$ auf $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ und $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{A})$, die auf $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ bzw. $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{A}_f)$ als Produkt von lokalen Whittaker-Funktionen gegeben sind, also $w = \prod\limits_{q\neq\infty} w_q$ und $v = \prod\limits_{q\neq\infty} v_q$. Für jede Wahl von $(w_\infty, v_\infty) \in \mathcal{W}_0(\pi_\infty, \psi_\infty) \times \mathcal{W}_0(\sigma_\infty, \overline{\psi}_\infty)$ erhält man zugehörige globale Whittaker-Funktionen aus $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{A})$ bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ mit zugehörigen automorphen Formen $(\phi, \varphi)$, sodass

$$\prod_q \Psi(w_q, v_q, s) = \int \phi \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi(g) \mid \det(g) \mid^{s-\frac{1}{2}} dg$$

gilt, wobei die Integration über $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{A})$ läuft.

Die globale $L$-Reihe wird dann wie folgt definiert:

$$L(\pi, \sigma, s) := \prod_q L(\pi_q, \sigma_q, s)$$

Hierbei ist $L(\pi_\infty, \sigma_\infty, s)$ wie in [Ja-P-S II] über die korespondierende Darstellung der Weilgruppe definiert.

Bei der $\infty$-Stelle gibt es zu jedem Paar $(w_\infty, v_\infty)$ von Whittaker-Funktionen eine ganze Funktion $P(X)$, sodass

$$P(s)\cdot L(\pi,\sigma,s)=\Psi(w_\infty,v_\infty,s)\cdot\prod_{q\neq\infty}L(\pi_q,\sigma_q,s)$$

ist. Siehe hierzu auch [K-M-Sch], Seite 112.

Für die globale $L$-Reihe gibt es endlich viele Paare $(\phi_j,\varphi_j)$ automorpher Formen, sodass

$$P(s)\cdot L(\pi,\sigma,s)=\sum_j\int\phi_j\begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\varphi_j(g)\mid\det(g)\mid^{s-\frac{1}{2}}dg$$

gilt, wobei die Integration wieder über $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{Gl}_{n-1}(\mathbb{A})$ läuft.

Es gilt nun

**Satz 3.1.** *Sei $p$ eine fest gewählte Primzahl. Seien $(w_\infty,v_\infty)$ fest und $(w_p,v_p)$ rechtsinvariant unter der jeweiligen Iwahorigruppe und $P$, $\phi$, $\varphi$ die zugehörige ganze Funktion, bzw. die zugehörigen automorphen Formen. Sei weiter $\chi=\prod_q\chi_q$ ein endlicher Idelklassencharakter, sodass $\chi_p$ nicht-trivialen Führer $f=p^r$ hat, $\chi_\infty$ trivial ist, alle $\chi_q$ für $q\neq p,\infty$ unverzweigt sind und $\overline{h}_{f,n}=\begin{cases} h_{f,n} & \text{bei der Stelle } p\\ E_n & \text{sonst}\end{cases}$ in $GL_n(\mathbb{A})$ ist.*

*Dann gilt unter den Voraussetzungen von Satz 2.1:*

$$\begin{aligned}&w_p(1)\cdot v_p(1)\cdot cP(s)f^{-\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)}(G(\chi_p))^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot L(\pi\otimes\chi,\sigma,s)\\ =&\sum_j\int\limits_{GL_{n-1}(\mathbb{Q})\backslash GL_{n-1}(\mathbb{A})}\chi(\det(g))\phi_j\left(\begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\overline{h}_{f,n}\right)\cdot\varphi_j(g)\mid\det(g)\mid^{s-\frac{1}{2}}dg\end{aligned}$$

*Hierbei ist $c$ die Konstante aus Satz* 2.1.

**Beweis:**

Der Beweis ist analog zu dem Beweis des Globalen Birch-Lemmas in [K-M-Sch],3.2. Der einzige Unterschied besteht darin, dass das lokale Zetaintegral bei $p$ den Wert

$$w_p(1)\cdot v_p(1)\cdot c\cdot f^{-\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)}(G(\chi_p))^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

liefert. $\square$

## 3.2 Perioden-Integrale

Wie oben seien $\pi$ und $\sigma$ cuspidale automorphe Darstellungen der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ bzw. der $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{A})$, die unverzweigt bei $p$ sind. Weiter sei $f=p^r$. Für $x\in\mathbb{Z}_p^\times$ bezeichne $C_x\subseteq\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{A})$ das Urbild von

$$\mathbb{Q}^\times \backslash (\mathbb{Q}^\times \cdot (\mathbb{R}_{>0} \times \prod_{q \neq p, \infty} \mathbb{Z}_q^\times \times (x + f\mathbb{Z}_p))) \subset \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times$$

unter der Determinantenabbildung

$$\det : \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times \ .$$

Weiter bezeichne $t_x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ das Element, das in der $p$-Komponente die Matrix $diag(x, 1, \ldots, 1)$ ist und die Einheitsmatrix sonst.

Weiter seien, wie oben, $\phi$ bzw $\varphi$ cuspidale automorphe Formen, die zu $\pi$ und $\sigma$ gehören und die rechtsinvariant unter der Iwahorigruppe bei der Stelle $p$ sind.

Für die endlich vielen Paare $(\phi_j, \varphi_j)$, die im vorherigen Abschnitt eingeführt wurden, sollen nun sogenannten Periodenintegrale

$$P_j(h, f) := \int_{C_1} \phi_j \left( \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h \right) \varphi_j(g) dg$$

für festes $h \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ betrachtet werden.

Es gilt folgender

**Satz 3.2.** *Mit den Bezeichnungen wie oben gilt:*

$$\sum_{x \ mod \ f} \chi(x) \cdot \sum_j P_j(t_x \overline{h}_{f,n}, f)$$

$$= c \cdot P(\frac{1}{2}) \cdot f^{-\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)} (G(\chi))^{\frac{n(n-1)}{2}} L(\pi \otimes \chi, \sigma, \frac{1}{2})$$

**Beweis**: Da mit $x$ auch die $C_1 t_x \overline{h}_{f,n}$ ganz $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{A})$ durchlaufen, folgt die Behauptung, indem man in Satz 3.1 $s = \frac{1}{2}$ setzt. □

Sei nun $U_n^{(0)} := U_n(\mathbb{Z}_p)$ und für $r \in \mathbb{Z}$ sei $U_n^{(r)} := t^r U_n^{(0)} t^{-r}$, wobei $t = diag(p^{n-1}, p^{n-2}, \ldots, 1)$ ist. Ist $r = m$, dann ist $t^r = diag(f^{n-1}, f^{n-2}, \ldots, 1)$. □

Für später ist nun folgendes Korollar wichtig.

**Korollar 3.1.** *Seien die Bezeichnungen wie oben. Bei geeigneter Wahl von $(w_\infty, v_\infty)$ gilt mit einer ganzen Funktion $P$:*

$$P(\frac{1}{2}) G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot L(\pi \otimes \chi, \sigma, \frac{1}{2}) = (U_n^{(0)} : U_n^{(r)}) \cdot \sum_{x \ mod \ f} \chi(x) \cdot \sum_j P_j(t_x \overline{h}_{f,n}, f)$$

**Beweis**:

Die Wahl von $(w_\infty, v_\infty)$ bewirkt eine Änderung der Funktion $P$. Bei entsprechender Wahl lässt sich die Konstante $c$ also auf 1 normieren. Weiter ist $f^{\sum_{k=0}^{n-1} k(n-k)} = (U_n^{(0)} : U_n^{(r)})$ woraus die Behauptung folgt. $\square$

# 4 Ein $p$-adisches Maß

Im Folgenden seien $\pi$ und $\sigma$ cuspidale automorphe Darstellungen der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ bzw. $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{A})$, die in der Kohomologie auftauchen. Dies bedeutet, dass bei der Unendlichstelle die Darstellungen $\pi_\infty$ und $\sigma_\infty$ Darstellungen mit nicht trivialer Liealgebren-Kohomologie sind. Daraus ergibt sich, dass die Nullstellen $\lambda_i$ bzw. $\alpha_i$ der Heckepolynome bei $p$ algebraische Zahlen sind. Weiter wird angenommen, dass die unverzweigten lokalen Darstellungen bezüglich einer fest gewählten Einbettung von $\overline{\mathbb{Q}}$ in $\overline{\mathbb{Q}_p}$ die Nullstellen $\lambda_i$ und $\alpha_j$ den $p$-adischen Absolutbetrag $\mid \lambda_i \mid = p^{1-i}$ bzw. $\mid \alpha_j \mid = p^{1-j}$ für eine geeignete Nummerierung der Nullstellen haben. Mit anderen Worten, dass die $\pi_p$ und $\sigma_p$ ordinäre Darstellungen sind. Wie in Theorem 4.16 in [K-M-Sch] werden die automorphen Formen $(\phi_i, \varphi_i)$, die die Periodenintegrale $P_j(h, f)$ definieren, etwas abgeändert, sodass die $\phi_j$ und $\varphi_j$ Eigenformen unter der modifizierten Heckealgebra bei $p$ werden (Proposition 4.2 in [K-M-Sch]). Speziell gilt für die modifizierten Paare von Eigenformen $(\phi_j, \varphi_j)$ nach einer Normierung durch einen geeignet gewählten skalaren Faktor das Korollar 2.8 aus [Sch]. Weiter folgt, da die Darstellungen ordinär sind, dass die Eigenwerte $\eta_\nu(\underline{\lambda}) := p^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}\lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_\nu$ bzw $\eta_\nu(\underline{\alpha}) := p^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}\alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_\nu$ der zugehörigen modifizierten Heckeoperatoren $V_\nu$ $p$-adische Einheiten sind.

Im weiteren sei

$$\kappa_{\underline{\lambda}} := \prod_{\nu=1}^{n-1} \eta_\nu(\underline{\lambda}) \text{ und } \kappa_{\underline{\alpha}} := \prod_{\nu=1}^{n-2} \eta_\nu(\underline{\alpha}) \ .$$

Außerdem seien $A_n := (U_n^{(0)} : U_n^{(1)})$ und $\kappa := \frac{A_n \cdot A_{n-1}}{\kappa_{\underline{\alpha}} \cdot \kappa_{\underline{\lambda}}}$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt nun folgender

**Satz 4.1.** *Sei $f = p^r$ eine nicht triviale Primzahlpotenz. Sei weiter für jede Nebenklasse $x + f\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p^\times$*

$$\mu(x + f\mathbb{Z}_p) := \kappa^r \cdot \sum_j P_j(t_x h, f).$$

*Sind zusätzlich die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt,dann definiert $\mu$ eine $\mathbb{C}$-wertige Distribution auf $\mathbb{Z}_p^\times$. Weiter gilt dann für einen Charakter $\chi$ von endlicher Ordnung und mit Führer $f$ :*

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi \; d\mu = P(\frac{1}{2}) \cdot (\frac{\kappa}{A_n})^r \cdot G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot L(\pi \otimes \chi, \sigma, \frac{1}{2}).$$

**Beweis:**

Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Theorem 3.1 in [Sch]. Nur dass mit Satz 2.1 anstelle von "Corollary 2.8" argumentiert wird. □

Für jedes feste Paar $(\phi_j, \varphi_j)$ definiert man die gewichteten Perioden als

$$\mu_j(x + f\mathbb{Z}_p) := (\frac{A_n \cdot A_{n-1}}{\kappa_{\underline{\alpha}} \cdot \kappa_{\underline{\lambda}}})^r \cdot P_j(t_x h, f) \ .$$

Weiter gilt wie in [Sch] folgender

**Satz 4.2.** *Sind $\pi_p$ und $\sigma_p$ beide ordinär, dann ist jede Distribution $\mu_j$ $p$-adisch beschränkt, und also ein $p$-adisches Maß.*

**Beweis:**

Zum Beweis vergleiche [Sch], Theorem 3.5.

Aus diesem Satz und aus Satz 2.1 folgt nun das folgende

**Korollar 4.1.** *Sei $\chi$ ein Charakter auf $\mathbb{Q}_p$ mit Führer $f = p^r$. Dann gilt mit dem $p$-adischen Maß $\mu := \sum_j \mu_j$:*

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi \, d\mu = P_\infty(\frac{1}{2}) \cdot (\frac{\kappa}{A_n})^r \cdot G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot L(\pi \otimes \chi, \sigma, \frac{1}{2})$$

*mit einer ganzen Funktion $P_\infty$.*

# 5 Anhang

## 5.1 Das Maß der Menge $U(\mathbb{Z}_p)\omega B(\mathbb{Z}_p)$

**Lemma 5.1.** *Sei $\omega_{0,n}$ das lange Weylelement. Dann hat die Menge $U(\mathbb{Z}_p)\omega_{0,n}B(\mathbb{Z}_p) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ das Maß $\frac{(1-p^{-1})^n}{\prod_{\nu=0}^{n-1}(1-p^{\nu-n})}$.*

**Beweis:**

Sei $b \in B(\mathbb{Z}_p)$. Da $\det(b) \in \mathbb{Z}_p^\times$ ist, also $\prod_{i=1}^{n} b_{ii} \in \mathbb{Z}_p^\times$, müssen bereits die $b_{ii} \in \mathbb{Z}_p{}^\times$ sein, da sonst eines der $b_{ii}$ von der Form $\epsilon p^{-t}$ mit $\epsilon \in \mathbb{Z}_p^\times$ und $t > 0$ und also $b \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ wäre.

Weiter lässt sich jede Matrix aus $U(\mathbb{Z}_p)\omega_{0,n}B(\mathbb{Z}_p)$ eindeutig in der Form $u\omega_{0,n}b$ mit $u \in U(\mathbb{Z}_p)$ und $b \in B(\mathbb{Z}_p)$ schreiben.

Da die Menge $B(\mathbb{Z}_p)\omega_{0,n}B(\mathbb{Z}_p) = U(\mathbb{Z}_p)\omega_{0,n}B(\mathbb{Z}_p)$ in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ ein Maß ungleich Null hat und $U(\mathbb{Z}_p)\omega_{0,n}B(\mathbb{Z}_p)$ volles Urbild von $U(\mathbb{F}_p)\omega_{0,n}B(\mathbb{F}_p)$ ist, ist das Maß der Menge gleich

$$\begin{aligned}
\mu(U(\mathbb{Z}_p)\omega_{0,n}B(\mathbb{Z}_p)) &= \mid U(\mathbb{F}_p)\omega_{0,n}B(\mathbb{F}_p) \mid : \mid \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p) \mid \\
&= ((p-1)^n p^{n(n-1)}) : (p^{n^2} \prod_{\nu=0}^{n-1}(1-p^{\nu-n}) \\
&= ((p-1)^n p^{n^2} p^{-n}) : (p^{n^2} \prod_{\nu=0}^{n-1}(1-p^{\nu-n})) \\
&= \frac{(1-p^{-1})^n}{\prod_{\nu=0}^{n-1}(1-p^{\nu-n})} .
\end{aligned}$$

# Literatur


[P.S.P.M.] T.N.Bailey und A.W. Knapp (Herausgeber), Representation Theory and Automorphic Forms, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Volume 61, Providence, Rhode Island 1997

[Bo-T] A. Borel und J. Tits, Groupes réductifs, Publ. Math. I.H.E.S. 27, Paris 1965, S. 659-755

[Bou] N. Bourbaki, Intégration, Chapitre 7, Herman, Paris 1963

[Bu] Daniel Bump, Automorphic Forms and Representations, Cambridge University Press, Cambridge 1997

[Ca-Fr] J.W.S. Cassels, A. Fröhlich, Algebraic Number Theory, Thompson, Washington, D.C. 1967

[Ja-P-S I] Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika Rankin-Selberg convolutions, American Journal of Mathematics Nr. 105, 1983, S. 367-464

[Ja-P-S II] Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika Facteur $L$ et $\epsilon$ du groupe linéaire: Théorie archimédienne, C.R. Acad. Sci. (A) 293 (1981), S. 13-18

[K-M-Sch] D. Kazhdan, B. Mazur und C.-G. Schmidt, Relative modular symbols and Rankin-Selberg convolutions, Journal für die reine und angewandte Mathematik Nr. 519, 2000, S. 97-141

[Mœ] C. Mœglin, Representations of $\mathrm{GL}(n, K)$ in the Nonarchimedian Case, erschienen in [P.S.P.M.], S. 303-319

[Sch] C.-G. Schmidt, Period relations and $p$-adic measures, Manuscripta Mathematica Nr. 106, 2001, S. 177-201

[Ta] John Tate, Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta-Functions, erschienen in [Ca-Fr], S. 305-347