

**Problemorientierte Modellierung  
von  
Faserverbund–Strukturen**

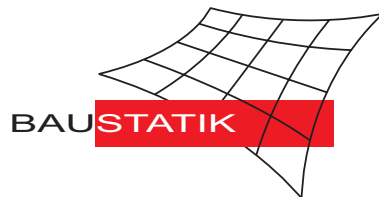
**W. Wagner, F. Gruttmann, W. Sprenger**

**Mitteilung 2(2001)**

**Problemorientierte Modellierung  
von  
Faserverbund–Strukturen**

**W. Wagner, F. Gruttmann, W. Sprenger**

**Mitteilung 2(2001)**



© Prof. Dr.-Ing. W. Wagner    Telefon: (0721) 608-2280  
Institut für Baustatik    Telefax: (0721) 608-6015  
Universität Karlsruhe    E-mail: bs@uni-karlsruhe.de  
Postfach 6980    Internet: <http://www.bs.uni-karlsruhe.de>  
76128 Karlsruhe

# Anhang A1: Abschlußbericht

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>CFK-EAS Volumenelemente</b>	<b>3</b>
2.1	Beispiel 1: Zugprobe mit unsymmetrischen Schichtaufbau . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Rebarkonzept für CFK</b>	<b>7</b>
3.1	Beispiel 2: Eingespanntes Rohr unter zwei Einzellasten . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Modellierung bei Stabilitätsproblemen</b>	<b>10</b>
4.1	Beispiel 3: Stabilitätsanalyse einer Quadratplatte . . . . .	10
4.2	Abschließende Bemerkungen zum entwickelten Volumenelement . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Lokale Effekte 1: Anfangsschadenslasten</b>	<b>15</b>
5.1	Beispiel 4: FPF-Lasten einer Lochplatte unter Zugbelastung . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Lokale Effekte 2: Delaminationsmodell</b>	<b>19</b>
6.1	Grundlegende Betrachtung der Delamination . . . . .	19
6.2	Berechnung fortschreitender Delamination . . . . .	22
6.3	Delaminationsmodell auf der Basis der kritischen Energiefreisetzungsrates . . . . .	25
6.4	Viskoplastische Regularisierung des Delaminationsalgorithmus . . . . .	29
6.5	Erweiterte Elementformulierungen und EAS-Parameter . . . . .	35
6.6	Beispiel 5: DCB-Probe . . . . .	36
6.7	Beispiel 6: Rißfortschritt am delaminierten Plattenstreifen . . . . .	42
6.7.1	Netzkonvergenz . . . . .	44
6.7.2	Entfestigungsparameter $\mu$ . . . . .	45
6.7.3	Dicke der Interface-Schicht $h_t$ . . . . .	46
6.7.4	Integrationsordnung des Interfaceelementes . . . . .	47
6.7.5	Darstellung des Delaminationswachstums . . . . .	49
6.8	Beispiel 7: Rißfortschritt bei kreisrunder Delamination einer Platte . . . . .	52
6.8.1	Parameterstudien . . . . .	54

<b>7</b>	<b>Explizites Verfahren</b>	<b>60</b>
7.1	Newmark-Verfahren . . . . .	60
7.2	Explizites Integrationsverfahren . . . . .	61
7.3	Quasi-statische Berechnungen . . . . .	62
7.4	Beispiel 8: Faserverbundplatte und Längsdruck . . . . .	63
7.5	Beispiel 9: Delaminationsalgorithmus mit quasi-statischem Verfahren anhand eines Zugversuchs . . . . .	64
7.6	Abschließende Bemerkungen zum Einsatz des expliziten Verfahrens	70
<b>8</b>	<b>Modellierung mit Übergangselementen</b>	<b>72</b>
8.1	Kinematische Voraussetzungen . . . . .	73
8.2	Formulierung einer Übergangsbedingung . . . . .	75
8.3	Finite-Element-Formulierung . . . . .	77
	8.3.1 Penalty-Verfahren, Augmented-Lagrange-Verfahren . . . . .	78
8.4	Inkompatibilitäten beim Übergang . . . . .	79
8.5	Abschließende Bemerkungen zur Modellierung mit Übergangselementen	79
<b>9</b>	<b>Schrifttum</b>	<b>80</b>

# 1 Einleitung

Aufgabe des Forschungsvorhabens war die problemorientierte Modellierung von Faserverbundstrukturen mittels der Methode der Finiten Elemente.

Der Abschlußbericht faßt die in dem Forschungsprojekt erzielten Ergebnisse zusammen. Soweit möglich, wird auf detaillierte Formeldarstellungen verzichtet und auf die in der Anlage befindlichen Veröffentlichungen verwiesen. Aus dem Forschungsprojekt entstandene und schon veröffentlichte Beispiele werden im Abschlußbericht nicht dargestellt.

## 2 CFK-EAS Volumenelemente

Das elastische Verhalten dünner Faserverbundstrukturen wird seit längerer Zeit erfolgreich mit diversen Schalenelementen untersucht. Exemplarisch seien an dieser Stelle die Arbeiten von DEHMEL [12] und LEHAR [26] für Neun-Knoten-Schalenelemente und KLARMANN [22] für Vier-Knoten-Schalenelemente mit verbesserten Ansätzen auf der Basis von BATHE UND DVORKIN [2] genannt. Bei Verwendung dieser Schalenelemente können exakte, d.h. reale Lagerbedingungen oder Lasteinleitungen nur schwer bzw. überhaupt nicht erfaßt werden. Die Berücksichtigung von Kontakt ist nur ungenau möglich und der Spannungsverlauf über die Dicke, insbesondere bei geschichtetem Material, kann nicht genau bestimmt werden. Deswegen wurde die Eindirektor- zur Multi-Direktorschalentheorie erweitert, siehe z.B. GRUTTMANN [17] und BRAUN [4], auf deren Basis z.B. auch Berechnungen über lokale Effekte möglich wurden, GRUTTMANN UND WAGNER [18] und STEIN UND TESSMER [39]. In jüngster Vergangenheit werden zur Berechnung des Verhaltens von Faserverbundwerkstoffen, zunehmend Volumenelemente eingesetzt, was nicht zuletzt auf die rasant anwachsenden Rechnerkapazitäten zurück zu führen ist. Der Übergang von Schalen- zu Volumenkonzept ist dabei fließend, siehe z.B. PARISCH [31].

Im Zwischenbericht wurde unter Punkt 2.1.1 und 2.1.2 ausführlich auf das neu entwickelte Volumenelement eingegangen. Weitere Details sind den dort angegebenen Literaturstellen zu entnehmen (u.a. SPRENGER UND WAGNER [38] und KLINKEL UND WAGNER [23]). Ergänzend wird ein Vergleich des neu entwickelten Elementes mit bewährten Schalenelementen bei der Berechnung einer Faserverbundkonstruktion dargestellt.

## 2.1 Beispiel 1: Zugprobe mit unsymmetrischen Schichtaufbau

Die zweilagige Zugprobe wurde von LEHAR [26] geometrisch linear und später von DORNINGER UND RAMMERSTORFER [14] geometrisch linear und nichtlinear berechnet. Die Probe wird an den Enden von zwei starren Spannbacken auseinandergezogen. Diese sind um die Längsachse frei drehbar, siehe Abbildung 2.1. Die zwei Laminatschichten unterscheiden sich nur hinsichtlich der Orientierung der Faserrichtungen, die Materialkennwerte sind identisch und in Abbildung 2.2 angegeben.

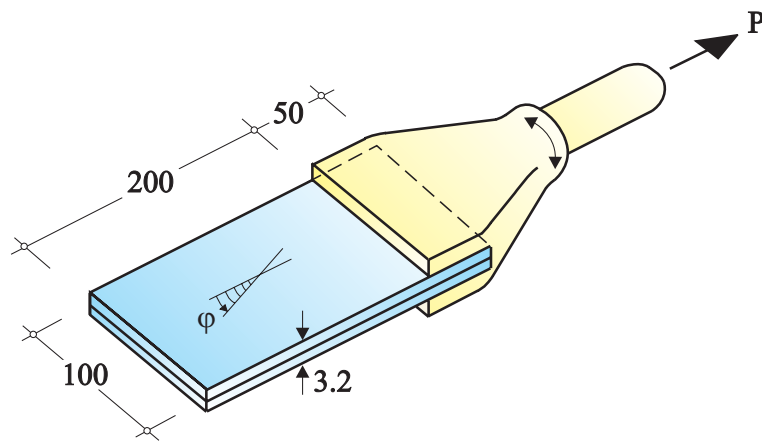


Abbildung 2.1: Halbe Zugschelle mit Einspannvorrichtung

Die Probe wird in allen Berechnungen über die gesamte Länge (400 mm) mit 12, über die Breite (100 mm) mit sechs Volumenelementen gleichmäßig diskretisiert. Die beiden Schichten werden mit je einem Element modelliert. Eine Konvergenzstudie bezüglich der benötigten Netzfeinheit wurde nicht durchgeführt. Die erzielten Ergebnisse werden mit auf Schalenberechnungen basierenden Werten aus der Literatur verglichen. An den Enden der Probe wird die Einzellast  $P$  als konstante Streckenlast eingeleitet, eine Spannbacke wurde nicht modelliert. Die zwischen den Spannbacken befindliche Zugprobe ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

Die Probe mit Kreuzverbund (Schichtaufbau  $90^0/0^0$ ) wird an den Enden an allen Knoten in  $y$ - und  $z$ -Richtung festgehalten. In Abbildung 2.3a ist ein Vergleich der 2D- zur 3D-Lösung dargestellt. Der 2D-Lösung liegen Berechnungen nach DORNINGER UND RAMMERSTORFER [14], KLARMANN [22] und einer eigenen identische Ergebnisse liefernden Analyse mit Schalenelementen zugrunde. Klarmann setzte für die Berechnungen ein beliebig gekrümmtes Vier-Knoten-Schalenelement basierend auf der Ein-Direktor-Kinematik ein, wobei das "shear

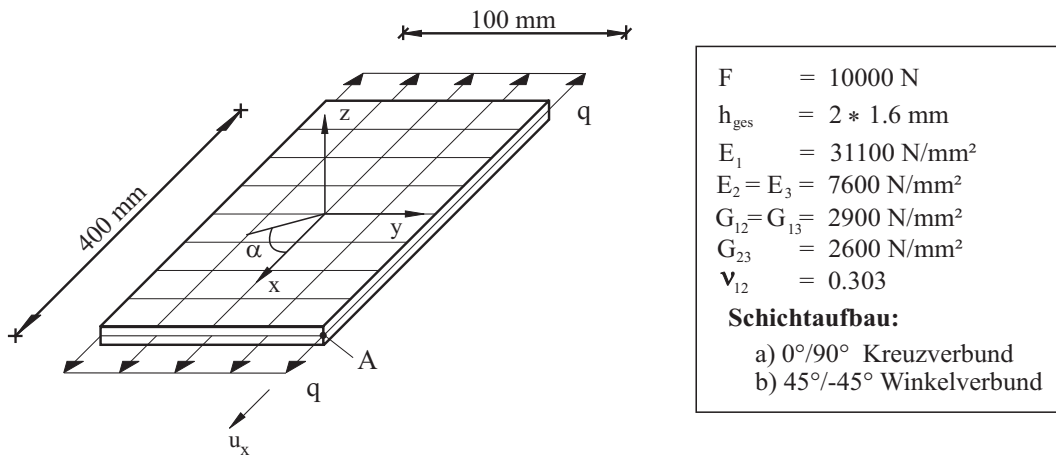


Abbildung 2.2: Geometrie und Systemdaten

locking” durch separate Ansatzfunktionen für die transversalen Schubverzerrungen vermieden wird.

Die Finite-Element Lösung basiert auf einer geometrisch nichtlinearen Berechnung. Die Volumenelemente wurden mit 30 EAS-Parametern ergänzt (EAS30-Element). Der Vergleich der beiden Lösungen zeigt die sehr gute Übereinstimmung der Verschiebungen in Dickenrichtung in der Mitte der Probe ( $x = 0$ ). Der Einsatz von 5 EAS-Parametern und den Ansätzen nach Bathe/Dvorkin und Betsch/Stein beim Volumenelement (ANS-EAS5-Element) führt zu einer nahezu exakten Übereinstimmung mit der 2D-Lösung und ist deshalb nicht in [Abbildung 2.3](#) aufgeführt.

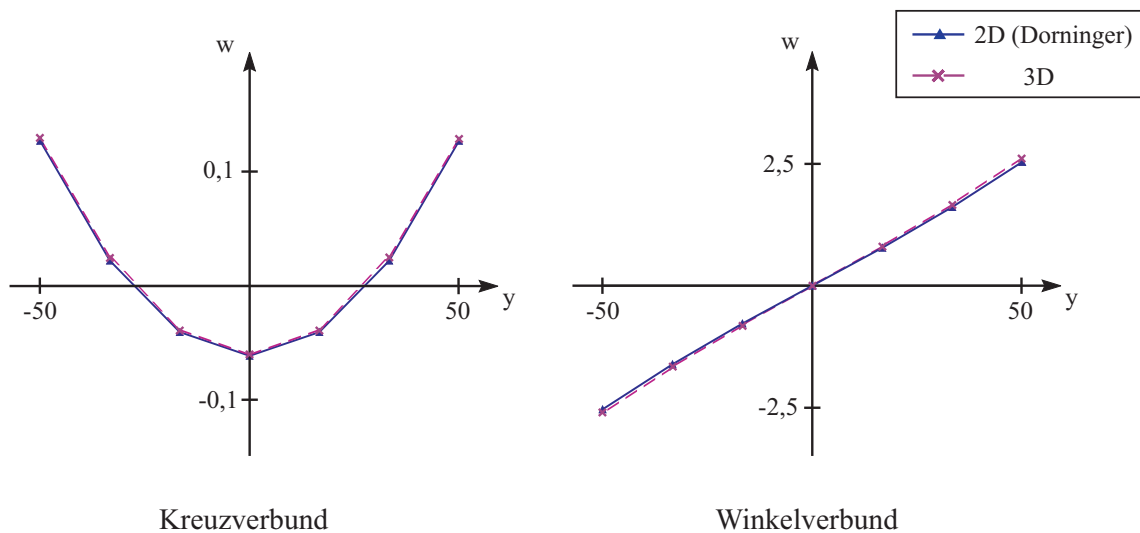


Abbildung 2.3: Vergleich 2D zu 3D: a) Kreuzverbund b) Winkelverbund



Bei der Probe mit Winkelverbund (Schichtaufbau  $45^0/-45^0$  von unten nach oben, siehe Abbildung 2.4b), wird das System im Nullpunkt des Koordinatensystems in vertikaler ( $z$ -)Richtung, und im darüber- bzw. darunterliegenden Knoten in  $y$ -Richtung gehalten. An den Probenenden wird nur an der Stelle  $(x = 200, y = 0, z = 0)$  ein Knoten in vertikaler Richtung fixiert. (Bei KLARMANN [22] wird dieser Fall Antimetrie genannt.) In Abbildung 2.3b) ist die Verformung an einem Probenende dargestellt. Auch hier ist eine sehr gute Übereinstimmung zur 2D-Lösung gegeben.

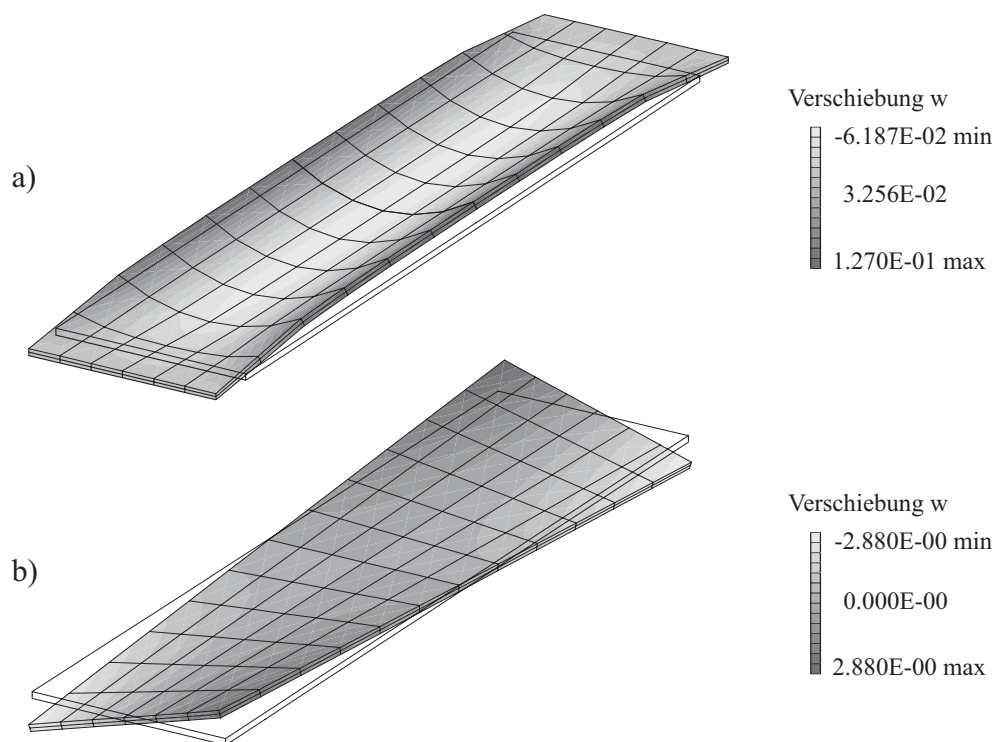


Abbildung 2.4: Verformung der Zugschelle

Der Versuch zeigt, daß die Locking-Effekte des Volumenelementes und linearen Ansatzfunktionen mit den gewählten Ansätzen zufriedenstellend reduziert werden.

### 3 Rebar-Konzept für CFK

Zur Berücksichtigung verschiedener Schichtungen innerhalb eines Volumenelementes bieten sich verschiedene Verfahren an. Beim sogenannten Rebar-Konzept wird die innere Energie innerhalb des Elementes auf das Matrix und das Fasermaterial, bzw. auf jede einzelne Schicht aufgeteilt. Das im Rahmen des Forschungsprojektes entwickelte Rebar-EAS30-Element wurde schon im Zwischenbericht unter 2.1.4 ausführlich erläutert. Eine daraus resultierende Veröffentlichung (SPRENGER UND WAGNER [38]) wurde dem Zwischenbericht beigelegt.

Weitergehend wurde das Rebar-Konzept auch in das ANS-EAS5-Element implementiert (=> Rebar-ANS-EAS5-Element). Nachfolgend wird ein vergleichendes Beispiel dargestellt. Für die ausführliche Beurteilung des Rebar-Konzeptes wird auf die im Zwischenbericht unter 2.1.4 gemachten Aussagen verwiesen.

Im Vergleich zum Rebar-Konzept wird über ein doppelt isoparametrisches Konzept eine schichtweise Volumenintegration innerhalb des Elementes durchgeführt. Diese Vorgehensweise wurde schon im Zwischenbericht erläutert.

#### 3.1 Beispiel 2: Eingespanntes Rohr unter zwei Einzellasten

Anhand eines eingespannten Rohres unter zwei gegenüberliegenden Einzellasten sollen drei Elementtypen miteinander verglichen werden. Die beiden Einzellasten werden am freien Ende des Rohres radial nach innen gezogen. Da es sich um ein doppelt symmetrisches System handelt, ist es ausreichend, nur ein viertel der Probe zu diskretisieren. Dazu wird ein unverzerrtes 16x16x1 Finite-Element-Netz verwendet. Das Netz ist in Abbildung 3.5 dargestellt, System- und Materialdaten in der nachfolgenden Tabelle.

$E_{11}$	$=$	$2068.5 \text{ N/mm}^2$	$G_{12}$	$=$	$795.6 \text{ N/mm}^2$	$\nu_{12}$	$=$	$0.3$
$E_{22}$	$=$	$517.13 \text{ N/mm}^2$	$G_{23}$	$=$	$795.6 \text{ N/mm}^2$	$F$	$=$	$100 \text{ N}$
$L$	$=$	$304.8 \text{ mm}$	$R_i$	$=$	$100.1 \text{ mm}$	$t$	$=$	$3 \text{ mm}$

Tabelle 3.1: Material- und Systemdaten

Der Zylinder besteht aus drei unterschiedlich orientierten Schichtungen. Es werden die Schichtenfolgen  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  und  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$  ausgewertet. Die Volumenelemente werden mit 30 EAS-Parametern erweitert (EAS30-Element). Die Schichtungen innerhalb eines Elementes werden mit dem Rebar-Faserschicht-Konzept oder mit einem doppelt isoparametrischen Konzept berücksichtigt.

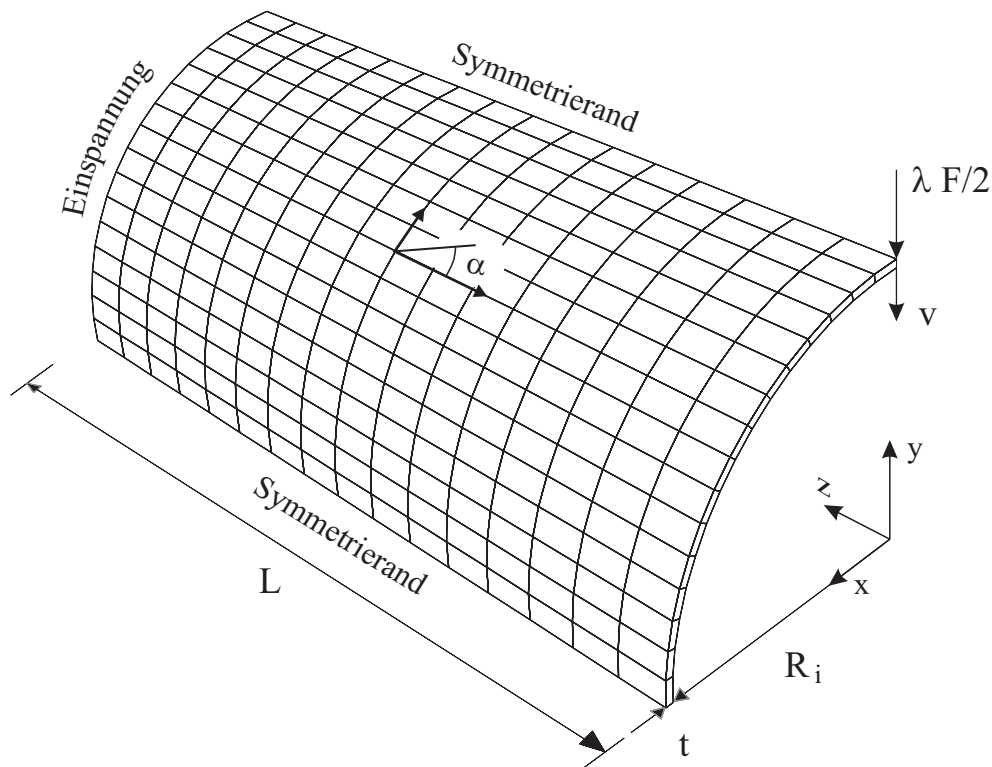


Abbildung 3.5: Eingespanntes Rohr: Geometrie und FE-Netz am 1/4 System

In Abbildung 3.6 sind die Lastverschiebungskurven für die drei Elementformulierungen bei zwei unterschiedlichen Schichtfolgen dargestellt. Die Kurven aller drei Elementformulierungen weisen prinzipiell das gleiche Verhalten auf. Bei der Schichtenfolge  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$  ist ab  $v = 120\text{ mm}$  jedoch ein "Knittern" erkennbar. Die kleinen Sprünge verschwinden, sobald ein genügend feines FE-Netz gewählt wird (z.B.  $32 \times 32$  Elemente).

Die Lastverformungskurven der beiden Volumenelemente verlaufen zunächst identisch. Erst bei großen Verschiebungen variieren die Werte geringfügig.

Das Beispiel zeigt, daß typische Schalenstrukturen aus Faserverbundwerkstoffen nicht nur mit geeigneten Schalenelementen, sondern ebenso exakt mit verbesserten Volumenelementen berechnet werden können. Dies ist eine grundlegende Erkenntnis, um später lokale Effekte an dünnen Strukturen aus Faserverbundmaterial mit Volumenelementen berechnen zu können.

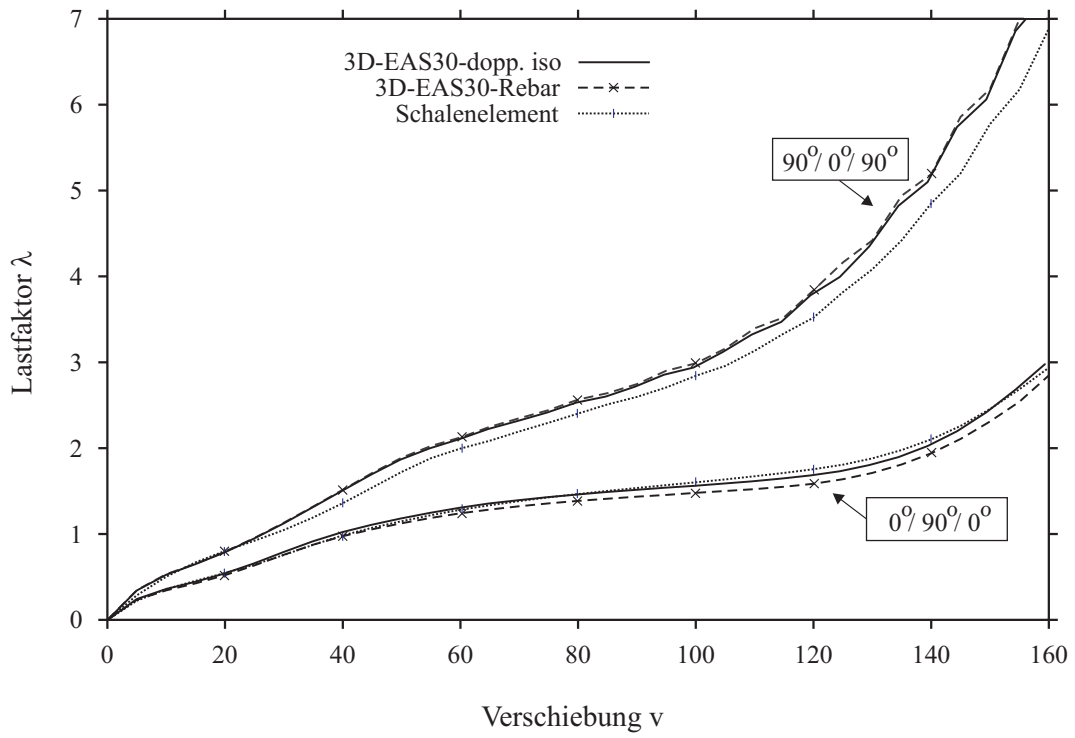


Abbildung 3.6: Lastverschiebungskurven für zwei unterschiedliche Schichtenfolgen

## 4 Modellierung bei Stabilitätsproblemen

Im Rahmen des Forschungsprojektes galt der Modellierung bei Stabilitätsproblemen besonderes Interesse. Auf der Basis der entwickelten Volumenelemente wird ein Beispiel dargestellt. Auf ein weiteres Beispiel in SPRENGER ET AL. [37] wird verwiesen.

### 4.1 Beispiel 3: Stabilitätsanalyse einer Quadratplatte

In diesem Beispiel wird anhand einer vergleichenden Stabilitätsanalyse die Qualität des erweiterten Volumenelementes zur Berechnung dünner Faserverbundstrukturen überprüft. Dazu werden die Beullasten einer Quadratplatte mit symmetrischem Schichtaufbau unter Längsdruck ermittelt. Das Beispiel wurde von NEMETH [28] und später u.a. von DORNINGER [14], KLARMANN [22] und BRAUN [4] berechnet. Der Plattenquerschnitt besteht aus insgesamt 24 Schichten, die unter den Faserwinkeln  $\pm\alpha$  symmetrisch zur Plattenmittelebene angeordnet sind  $((+\alpha, -\alpha)_{12}, (-\alpha, +\alpha)_{12})$ . Ziel der Untersuchungen ist die Faserorientierung bezüglich der maximalen Beullast zu optimieren. Dazu wird das Eigenwertproblem der Art

$$(\mathbf{K}_e + \lambda\mathbf{K}_g)\mathbf{v} = 0 \quad (4.1)$$

mit  $\mathbf{K}_e$  als elastischem und  $\mathbf{K}_g$  als geometrischem Anteil der Steifigkeitsmatrix gelöst. Der Eigenwert  $\lambda$  ist bei linearem Verhalten als Lastfaktor der kritischen Last zu deuten und wird bei einer aufgetragenen Last  $q = 0.1 \text{ KN/mm}^2$  ermittelt. Bei nichtsymmetrischer Faserschichtung treten zwischen den verschiedenen Deformationszuständen Kopplungen auf. Diese beeinflussen das Verformungs- und Stabilitätsverhalten der Struktur. Selbst bei reiner Scheibenbelastung können deshalb Verformungen aus der Plattenebene heraus auftreten. Bei symmetrischem Schichtaufbau treten bei reiner Längsbelastung hingegen keine Verformungen aus der Plattenebene heraus auf. Da das Verformungsverhalten somit als linear angenommen werden kann, genügt eine lineare Eigenwertanalyse nach dem ersten Lastschritt um den niedrigsten Eigenwert und die zugehörige Eigenform zu ermitteln.

$E_{11}$	$=$	$127.5 \text{ KN/mm}^2$	$G_{12}$	$=$	$5.5 \text{ KN/mm}^2$	$\nu_{12}$	$=$	$0.35$
$E_{22}$	$=$	$11 \text{ KN/mm}^2$	$G_{23}$	$=$	$4.6 \text{ KN/mm}^2$	$\lambda_q$	$=$	$1 \text{ KN/mm}^2$

Tabelle 4.1: Materialdaten des Graphit-Epoxy-Verbundes

Die Lagerbedingungen in Plattenebene haben einen wesentlichen Einfluß auf das Stabilitätsverhalten der Platte. Deshalb muß berücksichtigt werden, inwieweit die

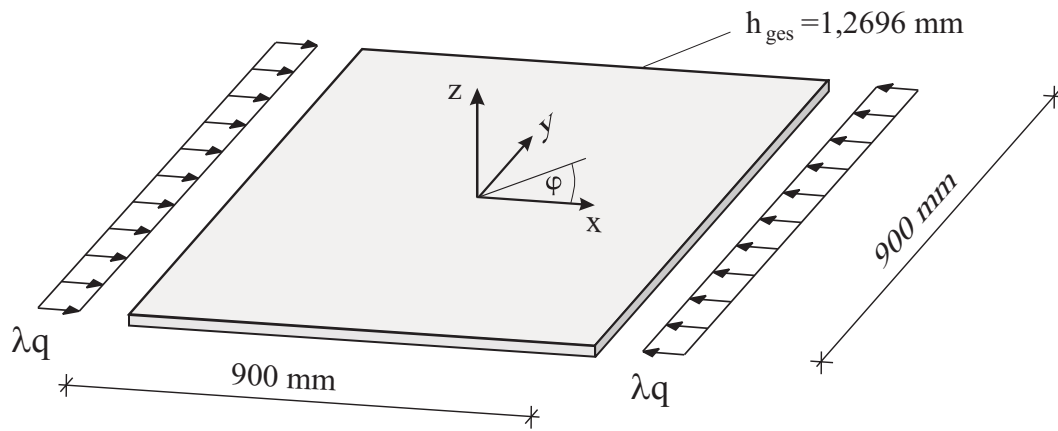


Abbildung 4.1: Quadratplatte unter Längsdruck

Freiheitsgrade in Plattenebene behindert sind, oder nicht. Dieser wichtige Aspekt wurde bei KLARMANN [22] und BRAUN [4], nicht jedoch bei NEMETH [28] und DORNINGER [14] beachtet. In Abbildung 4.2 sind zwei verschiedene Lagerungsarten dargestellt.

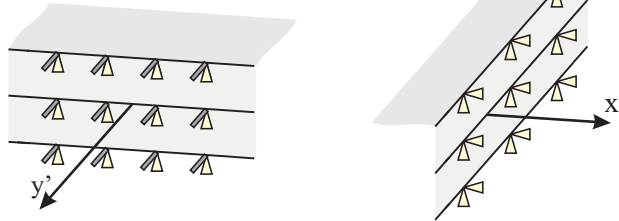
- a) Eingespannte Randlagerung ohne Behinderung der Querdehnung. An den Rändern  $y = \pm 450 \text{ mm}$  sind bei der Modellierung mit Volumenelementen die Verschiebungen in  $y$ -Richtung von drei übereinander liegenden Knoten gekoppelt. Beim Schalenmodell bedeutet dies eine behinderte Rotation um die Auflagerachse.
- b) Gelenkige Lagerung ohne Behinderung der Querdehnung.

Die Belastung im Finite-Elemente-Modell wird an der Seite  $x = -450 \text{ mm}$  aufgebracht. An der gegenüberliegenden Seite werden der Lastaufbringung entsprechende Auflager in  $x$ -Richtung angesetzt.

Zur Berechnung mit den erweiterten acht-Knoten-Volumenelementen (ANS-EAS5-Element) wurde ein  $12 \times 12 \times 2$ -Netz gewählt. In jeder Elementschicht wurden 12 Faserschichten berücksichtigt. Eine Schalenlösung wurde mit einem  $12 \times 12 \times 1$ -Netz berechnet. Alle 24 Faserschichten werden "vorab" über die Stoffmatrizen integriert.

In Abbildung 4.3 werden die Ergebnisse der Anfangsstabilitätsanalysen den Berechnungen von BRAUN [4] und KLARMANN [22] gegenübergestellt. Beide Referenzlösungen basieren auf geometrisch nichtlinearen Mehrschicht-Schalenelementen, wobei Braun 16-knotige (Netz:  $6 \times 6 \times 1$ ) und Klarmann 4-knotige (Netz:  $12 \times 12 \times 1$ ) Elemente verwendete. Alle Lösungen stimmen sehr gut

a) Einspannung an allen Rändern



b) Gelenkige Lagerung

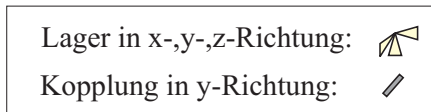
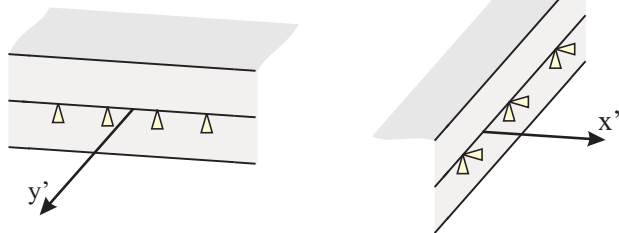


Abbildung 4.2: Lagerbedingungen: a) Einspannung b) Gelenkige Lagerung

überein. Lediglich bei der eingespannten Platte zeigen sich im Bereich  $35^\circ < \alpha < 60^\circ$  kleine Abweichungen zwischen den Schalenlösungen und den Berechnungen mit Volumenelementen. Durch die variierende Faserorientierung schwanken die Stabilitätslasten um bis zu 50%. Für die eingespannte Platte ergibt sich ein Maximalwert bei  $\alpha = 0^\circ$  (unidirektionale Ausrichtung) und für die gelenkig gelagerte Platte bei  $\alpha = 45^\circ$ .

In Tabelle 4.2 sind die Faserwinkel angegeben, ab denen sich ein Modewechsel der niedrigsten Eigenform einstellt. Die angegebenen Werte stimmen gut mit den Werten aus der Literatur überein.

Fall	a	b
Faserwinkel bei Modewechsel: 3D	52	61
Faserwinkel bei Modewechsel: Braun	50	59

Tabelle 4.2: Faserwinkel bei Modewechsel

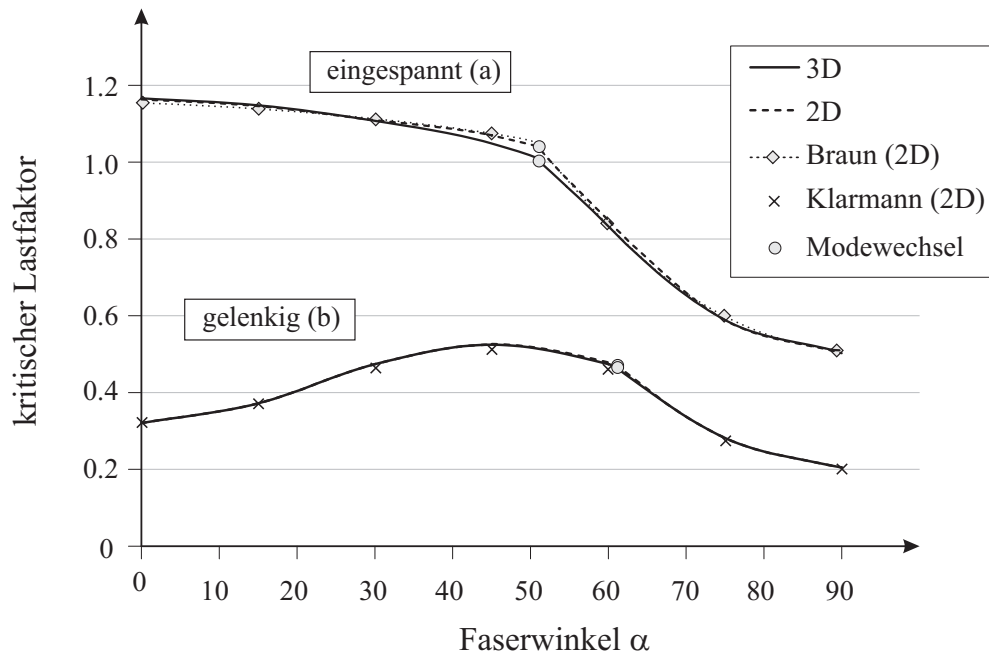


Abbildung 4.3: Beullast in Abhängigkeit vom Faserwinkel

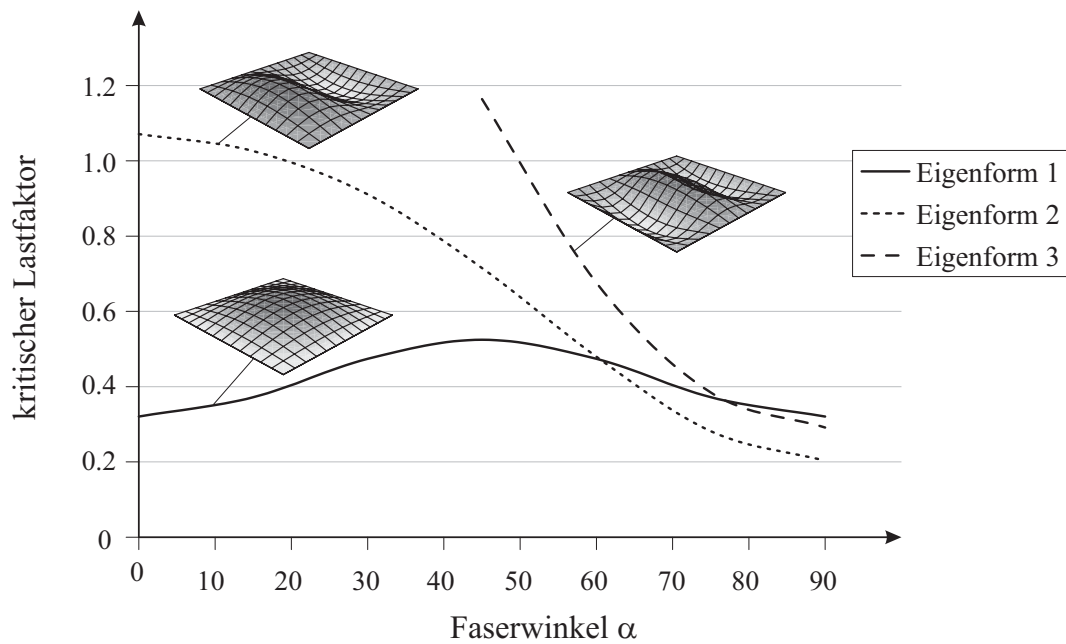


Abbildung 4.4: Wechsel der Eigenformen bei gelenkig gelagerter Platte



## **4.2 Abschließende Bemerkungen zum entwickelten Volumenelement**

Abschließend kann gesagt werden, daß sich die verbesserten Volumenelemente sehr gut zur Berechnung dünner Faserverbundstrukturen, insbesondere auch bei Stabilitätsproblemen, eignen. Im Gegensatz zu Schalenelementen können weitere Effekte mit Volumenelementen erfaßt werden, die u.U. großen Einfluß auf die Ergebnisse ausüben. Lagerbedingungen können realistischer modelliert, Spannungen in Dickenrichtung genauer und Kontaktprobleme einfacher berechnet werden. Nachteilig ist der im Vergleich zum Schalenelement erhöhte Rechenaufwand.

## 5 Lokale Effekte 1: Anfangsschadenslasten

Für eine lange Lebensdauer von Konstruktionen aus Faserverbundwerkstoffen wird häufig die Forderung aufgestellt, daß unter Normallast keine irreversiblen Schädigungen im Material auftreten dürfen. Um diese Grenzlastzustände zu ermitteln, werden sogenannte "First-Ply-Failure"-Analysen (FPF- bzw. Anfangsschadenslasten) durchgeführt, die genau den Lastzustand ermitteln, bei denen eine vorher definierte Schädigung eintritt.

Zur Ermittlung von sogenannten FPF-Lasten werden die aktuellen Spannungen analysiert und mit zulässigen Werten verglichen. Überprüft man dazu einzelne Spannungskomponenten, spricht man von *Maximalspannungskriterien*, siehe z.B. CHEN ET AL. [7]. Dabei können gezielt die einzelnen Versagensarten wie z.B. Faser- oder Matrixbruch in Faserrichtung oder Matrixbruch in Querrichtung überprüft werden.

Spannungskombinationen werden über *polynomiale Versagenskriterien* kontrolliert, siehe z.B. HWANG UND SUN [21]. Dazu können grundsätzlich alle Spannungen mit verschiedenen Wichtungen kombiniert und mit einem zulässigen Grenzwert verglichen werden.

In der Arbeit von SCHULTZ [36] sind zu beiden Vorgehensweisen diverse Versagenskriterien dargestellt worden. Auf diese wird innerhalb dieses Berichtes nicht näher eingegangen, sondern auf die einschlägige Literatur verwiesen. Nachfolgend wird der Einsatz des entwickelten ANS-EAS5-Elementes zur Berechnung von FPF-Lasten anhand eines Beispiels dargestellt.

### 5.1 Beispiel 4: FPF-Lasten einer Lochplatte unter Zugbelastung

Exemplarisch werden die Anfangsschadenslasten einer anisotropen Lochscheibe unter Zugbelastung nach Abbildung 5.1 analysiert.

Wegen der unterschiedlichen Faserschichtorientierungen liegen keine Symmetrieeigenschaften vor, so daß die Probe vollständig diskretisiert werden muß. Diese Einschränkung wurde in mehreren früheren Arbeiten, z.B. REDDY UND PANDEY [33] nicht beachtet, so daß als Vergleichswert nur die Arbeit von SCHULTZ [36] herangezogen werden kann.

In Abbildung 5.2 ist die Draufsicht des verwendeten Finite-Elemente-Netzes dargestellt. Die Berechnungen wurden sowohl mit Volumen- als auch mit Schalenelementen durchgeführt. Beim Volumenelement wurde ein Element über die Probendicke verwendet. Innerhalb des Elementes wurden vier Einzelschichten mo-

delliert. Da es sich um eine Zugprobe handelt, wurden fünf EAS-Parameter und der Ansatz nach Betsch/Stein verwendet. Die Berechnungen wurden geometrisch nichtlinear durchgeführt.

### System- und Materialdaten:

$E_1 = 19.20 \cdot 10^6 \text{ psi}$	$\hat{\sigma}_{11} = 219.50 \cdot 10^3 \text{ psi}$
$E_2 = 1.56 \cdot 10^6 \text{ psi}$	$\hat{\sigma}_{11}^* = 246.00 \cdot 10^3 \text{ psi}$
$G_{12} = G_{31} = 0.82 \cdot 10^6 \text{ psi}$	$\hat{\sigma}_{22} = 6.35 \cdot 10^3 \text{ psi}$
$G_{23} = 0.49 \cdot 10^6 \text{ psi}$	$\hat{\sigma}_{22}^* = 6.35 \cdot 10^3 \text{ psi}$
$\nu_{12} = 0.24$	$\hat{\sigma}_{12} = \hat{\sigma}_{31} = 12.60 \cdot 10^3 \text{ psi}$
	$\hat{\sigma}_{31} = 9.80 \cdot 10^3 \text{ psi}$
$L = 20.0 \text{ in}$	$b = 5.0 \text{ in}$
$d = 2.0 \text{ in}$	$h = 0.02 \text{ in}$
$h_L = 0.005 \text{ in}$	

Die Bezeichnungen bedeuten:

- $\hat{\sigma}_{11}$  Längszugfestigkeit (lokale 1-Richtung)
- $\hat{\sigma}_{11}^*$  Längsdruckfestigkeit (lokale 1-Richtung)
- $\hat{\sigma}_{22}$  Querszugfestigkeit (lokale 2-Richtung)
- $\hat{\sigma}_{22}^*$  Querdruckfestigkeit (lokale 2-Richtung)
- $\hat{\sigma}_{33}$  Zugfestigkeit (lokale 3-Richtung)
- $\hat{\sigma}_{33}^*$  Druckfestigkeit (lokale 3-Richtung)
- $\hat{\sigma}_{12}$  Schubfestigkeit (lokale 1-2-Ebene)
- $\hat{\sigma}_{13}$  Schubfestigkeit (lokale 1-3-Ebene)
- $\hat{\sigma}_{23}$  Schubfestigkeit (lokale 2-3-Ebene)

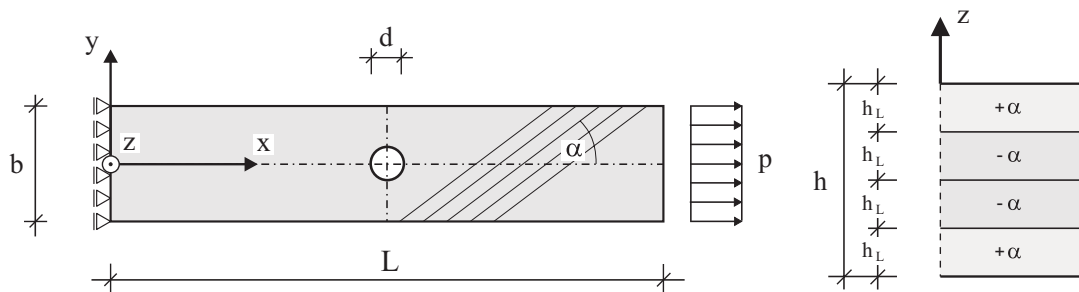


Abbildung 5.1: Anisotropes Laminat unter einachsialer Zugbelastung

Die Zugbelastung wurde zwangungsfrei am Ende aufgebracht, d.h. daß an beiden Enden nur die Verschiebungen in  $x$ -Richtung über den gesamten Querschnitt konstant gehalten wurden.

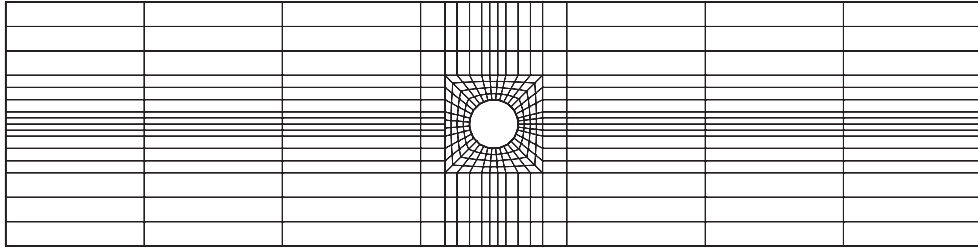


Abbildung 5.2: Finite Elemente Diskretisierung

In Abbildung 5.3 sind die Werte der Anfangsschadenslasten in Abhängigkeit vom Faserwinkel  $\alpha$  dargestellt.

Die Vergleichsrechnung mit Schalenelementen ergibt für einen Faserwinkel größer  $45^\circ$  eine sehr gute Übereinstimmung mit der 3D-Berechnung. Für kleinere Faserwinkel stimmen die Verläufe nur qualitativ überein.

Aus Abbildung 5.3 wird deutlich, daß die beiden Versagenskriterien annähernd gleiche Versagenslasten liefern. Nur im Bereich  $30^\circ < \alpha < 45^\circ$  weichen die Ergebnisse des Maximalspannungskriteriums stärker von den Ergebnissen des Tsai-Wu-Kriteriums ab. Da die Versagensarten für diese Winkel ebenfalls nicht eindeutig sind, ist in diesem Fall das gekoppelte Versagenskriterium dem Maximalspannungskriterium vorzuziehen. Versagen tritt in allen Fällen an der direkten Umgebung des Loches auf.

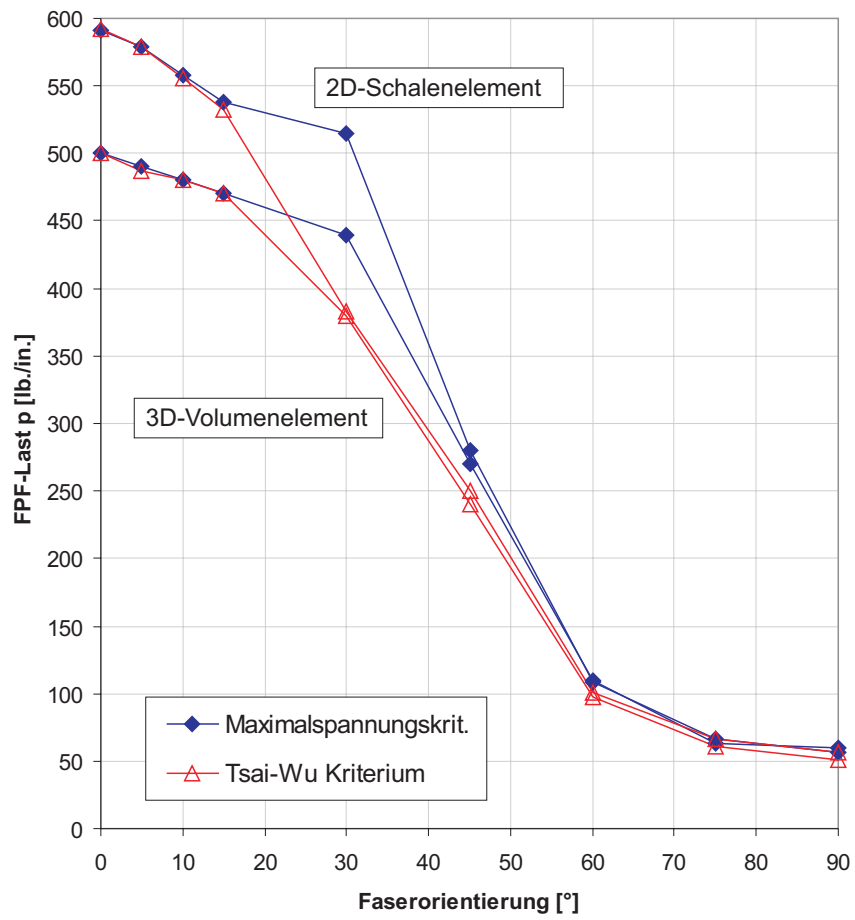


Abbildung 5.3: Anfangsschadenslasten in Abhängigkeit vom Faserwinkel  $\alpha$

## 6 Lokale Effekte 2: Delaminationsmodell

Im Zwischenbericht wurde unter 2.1.3 ein neues Delaminationsmodell zur Berechnung von lokalen Effekten dargestellt. Dieses Modell wurde auch im zweiten Antragszeitraum ausführlich bearbeitet und weiterentwickelt. Die auf Basis dieses neuen Modells erzielten Ergebnisse, konnten bisher in dieser Form nicht gewonnen werden. Das entwickelte Modell stellt einen Hauptschwerpunkt des Forschungsprojektes dar und wird deshalb nachfolgend ausführlich dargestellt.

### 6.1 Grundlegende Betrachtung der Delamination

Delamination bezeichnet das Ablösen zweier aneinander angrenzender Schichten innerhalb eines Faserverbundwerkstoffes, wie es in Abbildung 6.1 dargestellt ist.

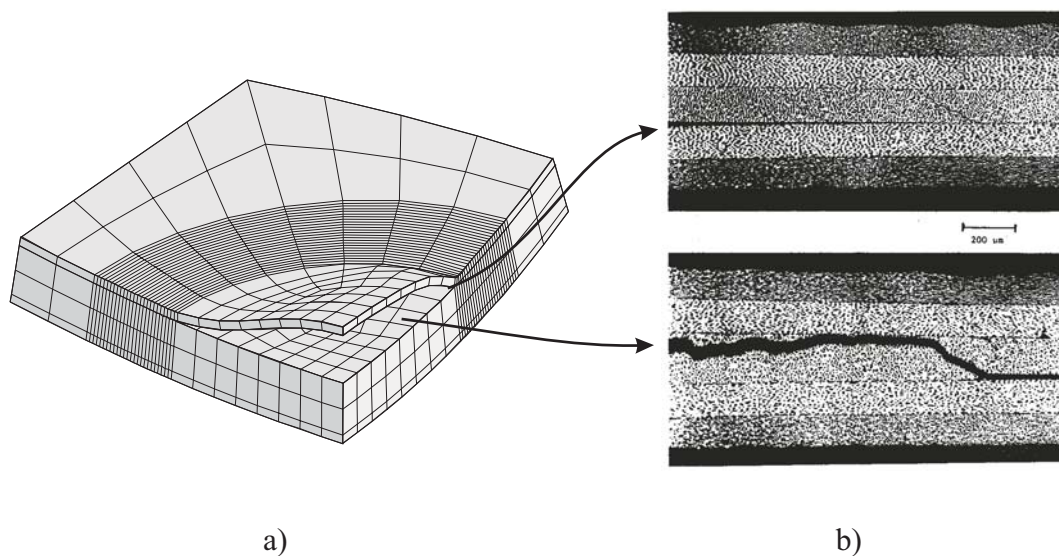


Abbildung 6.1: Delamination: a) Im Finite-Elemente-Netz b) Im realen Versuch

Die Ursache der Entstehung von Delamination kann dabei sowohl bei der Herstellung als auch beim späteren Einsatz zu finden sein.

Mangelhafte Fabrikation und somit resultierende Matrix-Risse, Faser/Matrix-Ablösungen oder fehlender Verbund zwischen angrenzenden Faserschichten können spätere Delamination verursachen. Während des Gebrauchs können diese Versagensarten durch große interlaminare Spannungen, Ermüdungserscheinungen oder Schlagbelastungen (impact) entstehen. Eine genaue Abgrenzung der drei Versagensarten ist dabei in der Regel nicht möglich. Im Gegenteil ist eine komplexe Interaktion der einzelnen Modi zu erwarten, siehe Abbildung 6.2.

Matrix-Risse oder Faser/Matrix-Ablösungen können zu Querrissen innerhalb einer Laminatschicht führen, so daß die Matrix an den Schichtgrenzen versagt und Delamination beginnt.

Andere Versagensformen wie Faserbruch oder Knicken der Fasern führen sehr selten zu Delamination, können die Tragfähigkeit einer Faserverbundstruktur jedoch auch reduzieren oder sogar ganz zerstören.

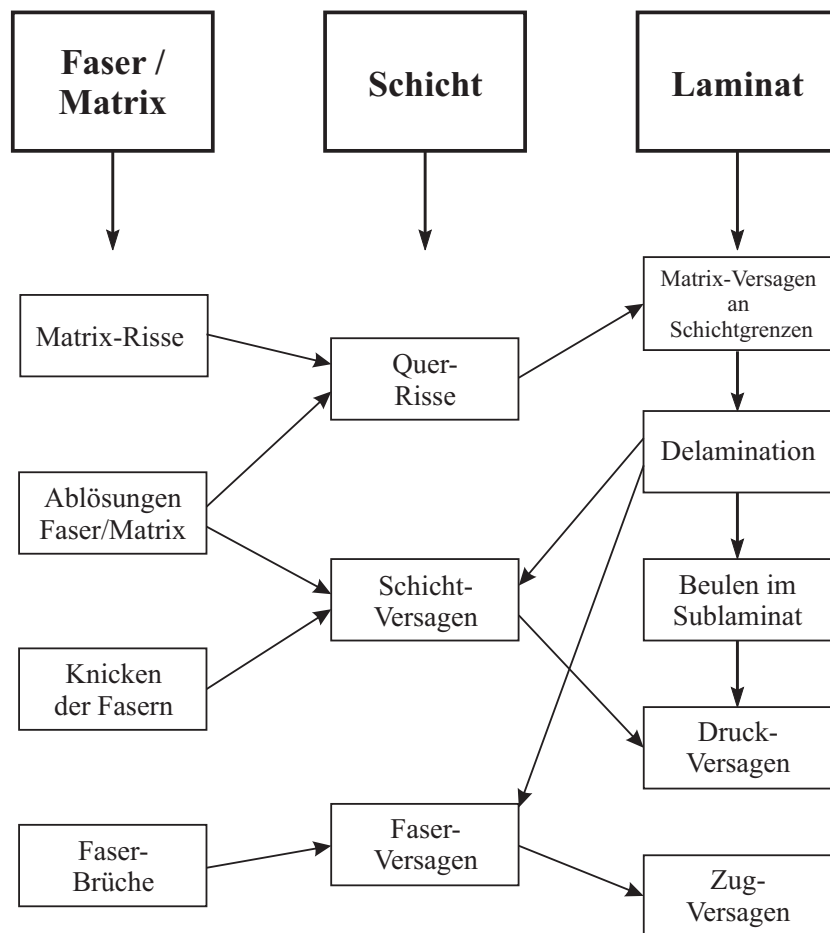


Abbildung 6.2: Versagensarten von Faserverbundstrukturen

Delamination beginnt zumeist im subkritischen Lastbereich, d.h. daß Delamination nicht nur die Maximallast eines Systems verändert, sondern schon bei geringeren Lasten das Systemverhalten z.B. durch Steifigkeitsreduktion oder Veränderung der dynamischen Eigenschaften negativ beeinflussen kann. Die Lebensdauer einer Faserverbundkonstruktion wird durch wachsende Delamination erheblich reduziert. Dieser Sachverhalt und die Tatsache, daß eine vorhandene Delamination in den allerseltensten Fällen nach außen hin sichtbar ist, macht die Delamination zu einer der gefürchtetsten Versagensarten. Nicht zuletzt deshalb wurden bis heute vielfältige Meßmethoden zur Entdeckung vorhandener Delaminationen in

Faserverbundstrukturen entwickelt, siehe z.B. STEINER [40] oder LUO UND HANAGUD [27]. Da die Delamination als vorherrschende Versagensursache erkannt ist, ist sie Objekt zahlreicher wissenschaftlicher Untersuchungen.

Die numerische Berechnung lokaler Effekte an Faserverbundwerkstoffen mittels der Methode der finiten Elemente ist seit langer Zeit Gegenstand wissenschaftlicher Forschung. Zunächst beschränkte sich die numerische Untersuchung auf die Entdeckung dieser Effekte. Dazu wurden diverse Spannungskriterien bzw. Dehnungskriterien vorgeschlagen so daß die sogenannten "Anfangsschadenslasten" berechnet werden konnten. Darauf basierend wurden erste Berechnungen mit fortschreitender Schädigung durchgeführt.

LEE [25] reduziert alle Schichtsteifigkeiten vollständig, sobald das Maximalspannungskriterium für Faserbruch verletzt wird. Andere Autoren, z.B. CHEN ET AL. [7], HWANG UND SUN [21] oder TOLSON UND ZABARAS [42], reduzieren in diesem Fall nur die hauptsächlich zum Fasermaterial gehörenden Steifigkeiten ( $E_1 = G_{12} = G_{13} = 0$ ). Bei Matrixbruch, welches in der Regel anhand des Tsai-Wu-Kriteriums überprüft wird, reduzieren alle genannten Autoren die zum Matrixmaterial gehörenden Werte im Stofftensor vollständig ( $E_2 = G_{12} = G_{23} = 0$ ).

DORNINGER [13] verwendet die gleichen Kriterien zur Berechnung einer FPF-Last, er reduziert jedoch bei Faserbruch die zum Fasermaterial gehörenden Komponenten des Stoffensors nicht vollständig, sondern auf Werte des Matrixmaterials ( $E_1^{red} = E_2$ ). Somit ist der Steifigkeitsverlust nicht so schlagartig. Bei Matrixbruch reduziert er nicht nur die zugehörigen Anteile des Matrixmaterials ( $E_2 = G_{12} = 0$ ), sondern auch die des Fasermaterials ( $E_1^{red} = \beta \cdot E_1$ ).

LEE [25] und TOLSON UND ZABARAS [42] verwenden ein ähnliches Verfahren zur Berechnung fortschreitender Delamination, wobei das Hashin-Kriterium das Überschreiten des kritischen Spannungszustandes anzeigen soll.

Bei der Bewertung dieser Verfahren ist zu berücksichtigen, daß lokale Effekte, zu denen auch die Delamination zu zählen ist, oftmals an Orten singularer Spannungsspitzen beginnen. Die Berechnung von Spannungen ist dort deshalb auf der Basis der Elastizitätstheorie nicht gültig. Somit kann bei allen hier aufgeführten Verfahren die Lösung bei einer Netzverfeinerung in der Regel nicht gegen eine eindeutige Lösung konvergieren und ist deshalb unbrauchbar. Die alleinige Berücksichtigung eines spannungsbasierten Kriteriums reicht zur Untersuchung fortschreitender Schädigung nicht aus. Zweiter Nachteil der bis hierher vorgestellten Verfahren sind die Folgen des abrupten Herabsetzens der Steifigkeiten. Nicht nur bei der Berechnung größerer Systeme führt dies zum Verlust der globalen Konvergenz, d.h. ein gültiger Gleichgewichtszustand des Systems kann nicht mehr gefunden werden.



Auf der Basis der Arbeiten von GRIFFITH [15] [16] entwickelte sich ein bruchmechanischer Ansatz, welcher nicht die maximal zulässigen Spannungen als Kriterium für Rißwachstum heranzieht, sondern zusätzlich eine bestimmte Energie pro neu entstehender Rißoberfläche fordert, um die Atome oder Moleküle des Materials auseinanderzureißen. Diese auf eine infinitesimale Vergrößerung der Bruchfläche  $dA$  bezogene freigesetzte Energie  $-d\Pi$  wird die Energiefreisetzungsrates genannt und läßt sich mit der Änderung der äußeren ( $dW$ ) und inneren Energie ( $dU$ ) formulieren als

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} \quad . \quad (6.1)$$

Anstatt einer maximal zulässigen Spannung wird nun eine mindestens zur Verfügung stehende Energie gesetzt, um ein Wachsen der Rißfläche zu erzeugen. Diese Energie wird kritische Energiefreisetzungsrates oder auch Rißzähigkeit  $G_c$  genannt, so daß sich das klassische Griffith-Kriterium schreiben läßt zu

$$G \geq G_c \quad . \quad (6.2)$$

## 6.2 Berechnung fortschreitender Delamination

Die Grundlagen zur Berechnung fortschreitender Delamination basieren auf zwei unterschiedlichen Ansätzen, deren Schlüsselparameter in beiden Fällen die kritische Energiefreisetzungsrates  $G_c$  ist.

Beim bruchmechanischen Ansatz wird eine virtuelle Energiefreisetzungsrates  $G$  berechnet und mit dem kritischen Wert  $G_c$  verglichen, siehe z.B. DAVIDSON [10], [11], NILSSON UND STORAKERS [29], WANG ET AL. [44] oder ZHANG [45]). So wird bei der Riß-Öffnungs- oder Riß-Schließungs-Methode die Energiefreisetzungsrates über Knotenkräfte und Knotenverschiebungen berechnet, die sich aus der Finiten-Elemente-Berechnung bestimmen lassen. Dazu wird an der Stelle, an der mit Delamination gerechnet wird, ein Knoten gelöst, die dort freigesetzte Energie berechnet und mit dem kritischen Wert verglichen. Somit kann es zu einer Vielzahl von Iterationen kommen bis eine Konfiguration gefunden ist, die das Gleichgewicht und das Bruchkriterium erfüllt. Bei großen Systemen oder Systemen mit unbekannter Delaminationsentwicklung, ist diese Vorgehensweise mit sehr hohem Aufwand verbunden. Komplexe Strukturen konnten deshalb nach Wissen der Autoren bis heute nicht über dieses Verfahren berechnet werden. Desweiteren sind aufwendige Netzgenerierungsalgorithmen zu verwenden, um z.B. eine gekrümmte Delaminationsfront nachzubilden. Komplizierte Delaminationsfronten sind auf diese Weise bis heute noch nicht modelliert worden. Ob dies in der Zukunft gelingen wird, ist fraglich.

In der Literatur werden die kritischen Energiefreisetzungsraten häufig numerisch mit einem der Reiß-Öffnungs- und Reiß-Schließungs-Methode gleichzusetzenden Verfahren bestimmt (RYBICKI ET AL. [34], RAJU ET AL. [32]) Dazu wird eine bestimmte Reißöffnung vorgegeben, und aufgrund der sich einstellenden Verformung an der Reißspitze, die zugehörigen kritischen Energiefreisetzungsraten berechnet. Die Verwendung der so ermittelten Werte ist nach Meinung der Autoren jedoch nur eingeschränkt zu empfehlen. Der Einsatz der so ermittelten kritischen Energiefreisetzungsraten kann nur bei vergleichbaren geometrischen Systemen, Belastungen und Elementformulierungen zu den Resultaten führen, die in der Ausgangsanalyse vorgegeben wurden. In dieser Arbeit werden deshalb ausschließlich experimentell ermittelte kritische Energiefreisetzungsraten zum Vergleich herangezogen, da nur diese eine Vergleichbarkeit mit realen Vorgängen gewährleisten.

Neben der Reiß-Öffnungs- und Reiß-Schließungs-Methode ist der Einsatz von Interface-Elementen der zweite Ansatz zur Berechnung von Delaminationen. Er basiert auf einer schadensmechanischen Problembetrachtung, bei der nicht die Schädigung selber, sondern nur deren Auswirkung in einer der Kontinuumsmechanik entsprechenden Weise abgebildet werden. Dabei übernehmen die Interface-Elemente die Aufgabe, die Steifigkeit der Bindung zwischen den Schichten abzubilden. Delamination ist eingetreten, wenn das Element keinerlei Festigkeit aufweist. Die z.B. von SCHELLEKENS UND DE BORST [35] angewendeten ebenen Interface-Elemente mit kubischen Ansätzen werden von den Autoren an Stellen möglicher Delamination bei der Diskretisierung eingesetzt. CRISFIELD ET AL. [9] wenden entsprechende Elemente mit quadratischen Ansätzen an. Dabei werden Reißöffnungsverschiebungen in elastische und plastische Anteile aufgespalten. Verzerrungen sind aufgrund der nicht vorhandenen Dicke des Interface-Elementes bei den dort vorgestellten Modellen nicht berechenbar. Damit ist jedoch ein Längenmaßstab im Stoffgesetz für die elastischen Spannungen nicht definiert, womit eine direkte physikalische Kopplung zur kritischen Energiefreisetzungsraten nicht möglich ist. Bei dem in dieser Arbeit vorgestellten Interface-Element sind die Verzerrungen in der 'Delaminations-Schicht' an den Integrationspunkten auf herkömmliche Weise aus dem Verschiebungsfeld zu ermitteln. Der vollständige dreidimensionale Spannungszustand kann über die Auswertung des Stoffgesetzes berechnet werden.

In den genannten Arbeiten werden ebene Verzerrungszustände angenommen, so daß eine exakte dreidimensionale Untersuchung nicht möglich ist. Aufgrund der komplexen Spannungsverteilung innerhalb einer Struktur aus Faserverbundmaterialien mindert eine Reduzierung auf solch ein zweidimensionales Modell bei aufwendigeren Systemen die Aussagekraft der damit erzielten Ergebnisse. In dieser Arbeit wird deshalb ausschließlich mit Volumenelementen gearbeitet, die den

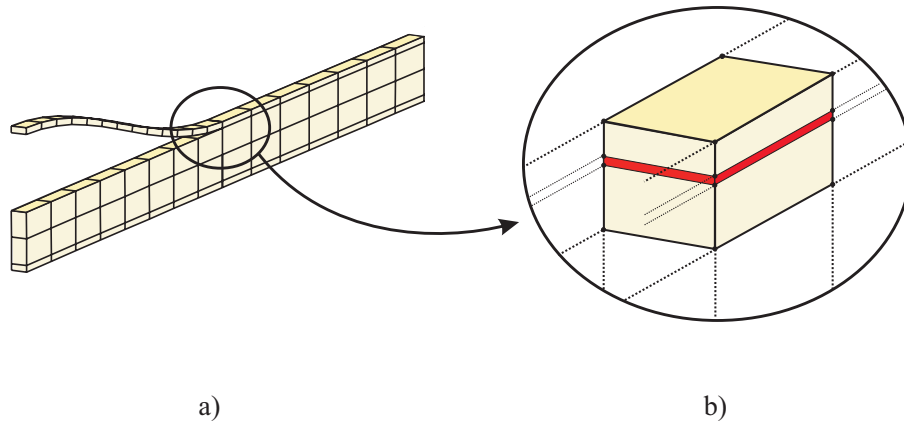


Abbildung 6.3: a) Probe mit wachsender Delamination b) Ausschnitt mit dunkel dargestelltem Interface-Element

gesamten dreidimensionalen Spannungszustand bei entsprechender Netzdicke genauer abbilden können als 2D-Modelle. Die Interface-Elemente weisen somit auch eine 'Dicke' auf, so daß eine physikalische Kopplung mit experimentellen Untersuchungen auf der Basis von Energiefreisetzungsraten möglich und sinnvoll ist.

In Abbildung 6.3a) ist ein Ausschnitt eines Plattenstreifens dargestellt, an dem die obere Schicht delaminert. Die Interface-Elemente befinden sich zwischen den sich ablösenden Schichten. Die in Abbildung 6.3b) zu erkennenden Interface-Elemente (dunkle Einfärbung) sind im tatsächlichen Versuch wesentlich dünner, um das Verhalten der Struktur nicht zu beeinflussen.

Wie dünn die Schicht mit Interface-Elementen sein muß, um das Verhalten der Struktur nicht zu verfälschen, sollte im Einzelfall überprüft werden. Die Untersuchungen in dieser Arbeit zeigen aber, daß ab einer Schichtdicke kleiner  $1/100$  der umliegenden Faserverbundschichten mit keiner Beeinflussung zu rechnen ist. Exemplarisch ist anhand einer flachen Zylinderschale unter Einzellast die Rolle der Schichtdicke  $h_t$  untersucht worden, siehe Abbildung 6.4. Das Zylindersegment ist an den Längsseiten und an der unteren Kante gelagert. Zur numerischen Berechnung wurde nur ein Viertel des Systems mit acht Elementen über die Breite und die Länge abgebildet. Jede einzelne Schicht wird mit dem ANS-EAS5-Element modelliert. Zwischen der zweiten und dritten Schicht sind Interface-Elemente der Dicke  $h_t$  eingesetzt. In Abbildung 6.5 ist die Last  $F$  über die Vertikalverschiebung  $w_c$  in Zylindermitte dargestellt. Der Einfluß der Interface-Schicht ist ab

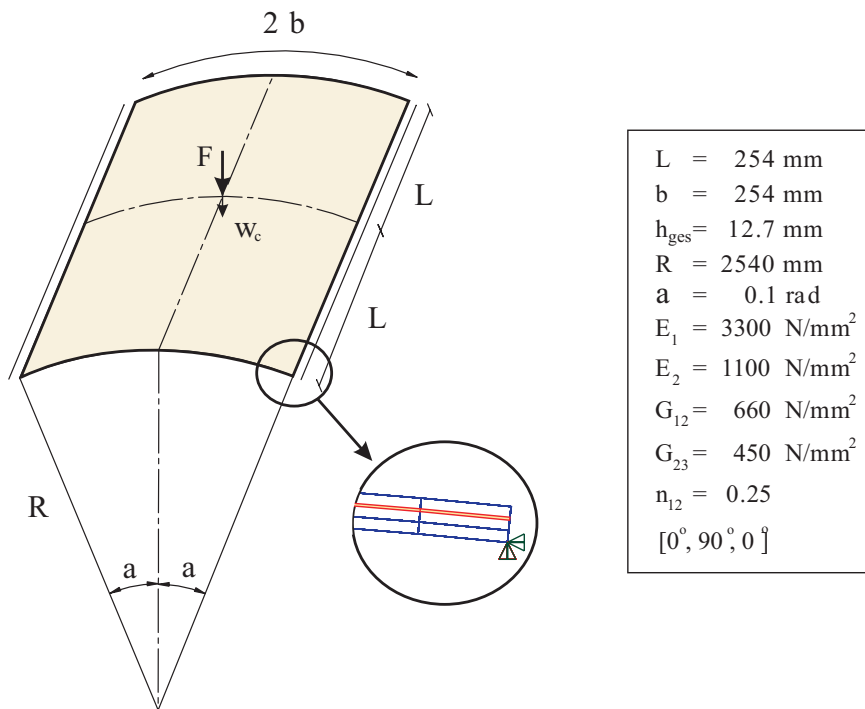


Abbildung 6.4: Flache Zylinderschale unter Einzellast, System und Materialdaten (kein typischer Faserverbundwerkstoff)

einer Interface-Schichtdicke  $h_t \leq 1/100h_L$  praktisch bedeutungslos, wobei  $h_L$  der Einzelschichtschichtdicke bezeichnet ( $h_l = h_{\text{ges}}/3$ ). Die Interface-Schicht ist in dieser Berechnung ohne erweiterte Elementansätze modelliert. Werden die Elemente dieser Schicht auch mit erweiterten Ansätzen berechnet (z.B. 30 EAS-Parametern), ist schon bei etwas dickeren Schichten kein Unterschied zwischen Berechnung mit oder ohne Interface-Schicht zu erkennen. Trotzdem wurde bei allen durchgeführten numerischen Versuchen zunächst eine Analyse des Einflusses der Interface-Schicht-Dicke durchgeführt, um sicherzustellen, daß die Schicht das Verhalten der Gesamtstruktur nicht beeinflusst.

### 6.3 Delaminationsmodell auf der Basis der kritischen Energiefreisetzungsrate

Das entwickelte Delaminationsmodell basiert auf dem Delaminationskriterium nach HASHIN [19]. In dieses Spannungskriterium gehen nur interlaminare Schub- und Normalspannungen ein, die zwischen zwei Schichtgrenzen wirken. Aus dem ursprünglichen reinen 'First-Ply-Failure'-Kriterium wird durch die Einbindung in ein elasto-plastisches bzw. elasto-viskoplastisches Materialmodell mit Entfesti-

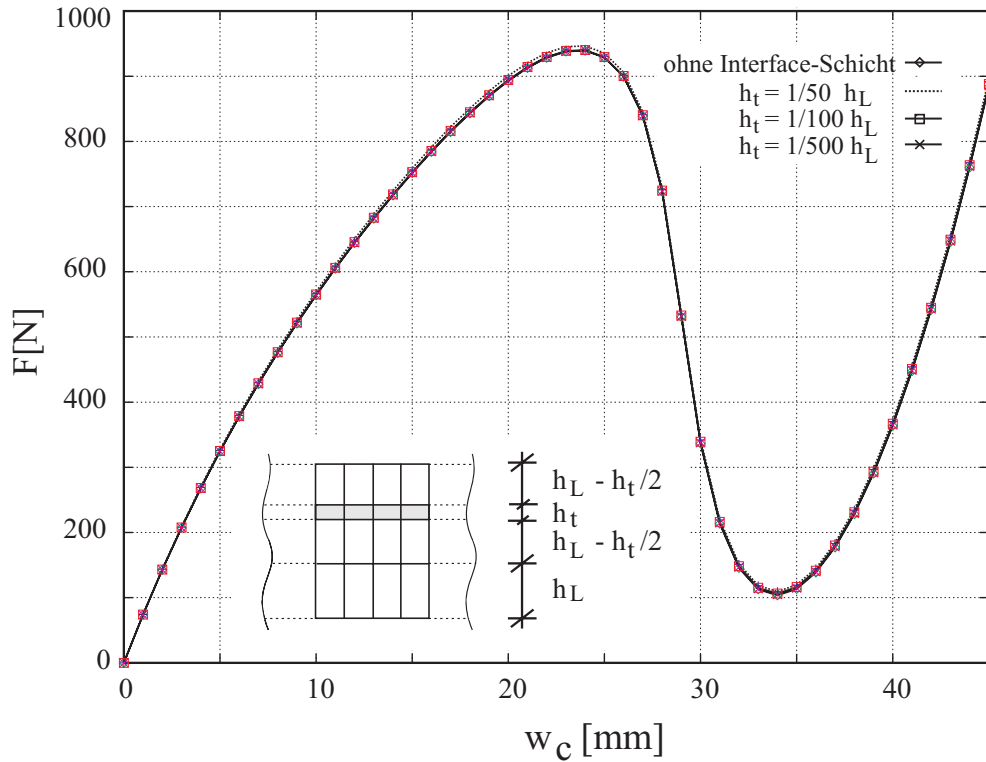


Abbildung 6.5: Lastverformungskurven mit variierender Interface-Element-Dicke  $h_t$

gung ein Konzept zur Berechnung fortschreitender Delamination. Das Verfahren wurde in der aus dem Forschungsprojekt resultierenden Veröffentlichung SPRENGER ET AL. [37] in groben Zügen dargestellt. Auf die in dieser Veröffentlichung verwendeten Formeln  $\{F.\}$  und Formelzeichen wird in der Folge zurückgegriffen.

Exemplarisch ist in Abbildung 6.6 der Verlauf der Vergleichsspannungen  $\sigma_v(\hat{=} g(\mathbf{S}))$  über die Vergleichsdehnung  $\varepsilon_v(\hat{=} \alpha)$  dargestellt, siehe dazu Gleichung ( $\{F43\}$ ). Im ideal elastischen Bereich steigt die Spannung linear zu den Verzerrungen an, bis eine Obergrenze  $\hat{\sigma}_v(\hat{=} Z_0)$  erreicht ist, siehe Gleichung ( $\{F41\}$ ). Bei weiterer Verzerrungszunahme sinken die Spannungen, das Material entfestigt, siehe Gleichung ( $\{F44\}$ ). Um einen Stetigkeitssprung in der Spannungs-Dehnungs-Beziehung zu verhindern, geht die lineare Entfestigungsfunktion kurz bevor vollständige Entfestigung erreicht ist - bei 1% Restspannung zur Maximalspannung  $\hat{\sigma}_v$  - in eine exponentielle Funktion über. Somit sind numerische Instabilitäten durch einen Stetigkeitssprung ausgeschlossen.

Die physikalische Grundlage zur Berechnung von Delamination ist die kritische Energiefreisetzungsrate  $G_c$ . Energetische Überlegungen zeigen, daß die Energie, welche bis zur vollständigen Entfestigung 'verbraucht' ist, mit der kritischen

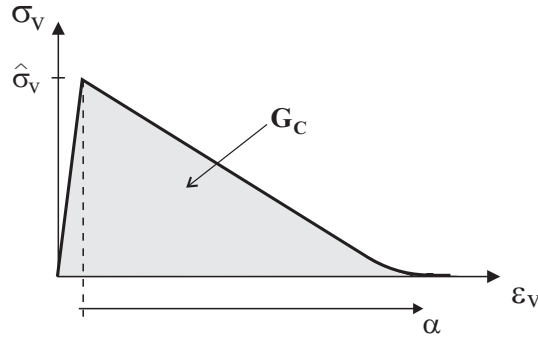


Abbildung 6.6: Entfestigungsfunktion

Energiefreisetzungsrate gleichzusetzen ist. Somit muß die Fläche unterhalb der Spannungs-Dehnungskurve (Abbildung 6.6) der kritischen Energiefreisetzungsrate entsprechen. HILLEBORG ET AL. [20] stellte diesen Zusammenhang für die Berechnung von Betonrissen dar. Der Ansatz wurde vielfach verwendet und zur Berechnung von Delaminationen in Faserverbundstrukturen 1994 von SCHELLENKENS UND DE BORST [35] übernommen (s.o.).

Die kritische Energiefreisetzungsrate  $G_c$  bezieht sich auf die freigesetzte Energie pro neu erzeugter RiBoberfläche. Da sich der Entfestigungsvorgang innerhalb eines Interface-Elementes, und somit im Volumen abspielt, muß die Elementdicke  $h_t$  (senkrecht zur Delaminationsfläche) Berücksichtigung finden. Dieser Zusammenhang ist auch durch eine Dimensionsanalyse zu belegen.

Mit  $\alpha$  als eindimensionaler Vergleichsdehnung und dem Entfestigungsparameter  $\mu$  gilt bei linearer Entfestigung die Beziehung

$$Z(\alpha) = \hat{\sigma}_{33} (1 - \mu\alpha) \quad . \quad (6.3)$$

Der Übergang von linearer zu exponentieller Entfestigung wird über den Parameter  $\gamma$  gesteuert. Je größer  $\gamma$  gewählt wird, desto später geht die lineare Entfestigung in die exponentielle über. Mit  $\hat{\sigma}_{33}^\infty$  als Endspannung bei voller Entfestigung gilt für den exponentiellen Teil der Entfestigungsfunktion

$$Z_2(\alpha) = (\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}^\infty) e^{-\gamma\mu\alpha} + \hat{\sigma}_{33}^\infty \quad . \quad (6.4)$$

Am Übergang von  $Z$  nach  $Z_2$  müssen die Steigungen der beiden Funktionen identisch sein. Diese Forderung führt nach kurzer Rechnung zur Entfestigungsfunktion für  $0 \leq \alpha \leq \infty$

$$Z(\alpha) = \begin{cases} \hat{\sigma}_{33} (1 - \mu\alpha) & \text{für } 0 \leq \alpha \leq \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu\gamma} - \frac{\hat{\sigma}_{33}^\infty}{\mu\hat{\sigma}_{33}} \right) \\ (\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}^\infty) \exp \left[ \gamma - 1 - \ln(\gamma) - \alpha\gamma\mu + \ln \left( \frac{\hat{\sigma}_{33}}{\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}^\infty} \right) - \gamma \frac{\hat{\sigma}_{33}^\infty}{\hat{\sigma}_{33}} \right] + \hat{\sigma}_{33}^\infty & \text{für } \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu\gamma} - \frac{\hat{\sigma}_{33}^\infty}{\mu\hat{\sigma}_{33}} \right) \leq \alpha \leq \infty \end{cases} \quad (6.5)$$

Beispielhaft sind zwei Funktionen mit variierendem Parameter  $\gamma$  in Abbildung 6.7 dargestellt.

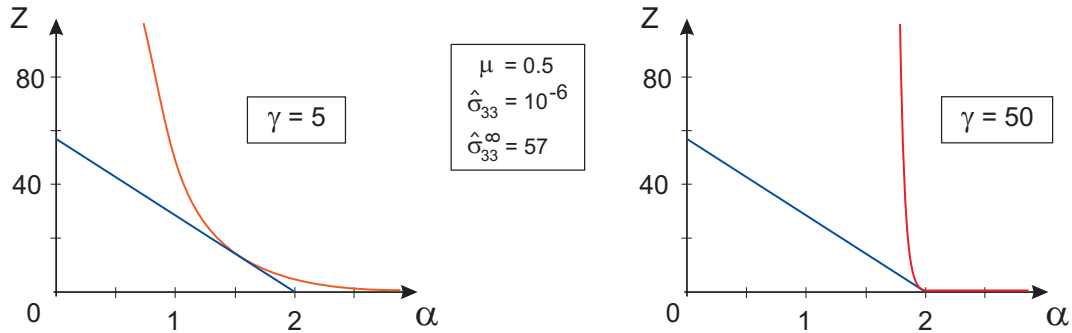


Abbildung 6.7: Entfestigungsfunktion: Übergang linear-exponentiell

Bei den nachfolgend vorgestellten numerischen Delaminationssimulationen wird mit Werten  $50 \leq \gamma \leq 80$  gerechnet, d.h. der Übergang zur Exponentialfunktion findet erst sehr kurz vor der vollständigen Delamination statt, so daß die nachfolgend vorgestellte Berechnung des Entfestigungsparameters verwendet wurde.

Aus den bisherigen Überlegungen läßt sich der Entfestigungsparameter  $\mu$  berechnen mit

$$\mu = \frac{\hat{\sigma}_{33} E h_t}{2 G_c E - \hat{\sigma}_{33}^2 h_t} \approx \frac{\hat{\sigma}_{33} h_t}{2 G_c} \quad (6.6)$$

Die Idee ist nun, auf der Basis eines 'First-Ply-Failure'-Kriteriums, eine Vorschrift zu entwickeln, mit der auch fortschreitende Delamination berechnet werden kann. Dazu wird das Delaminationskriterium nach HASHIN [19] in ein plastisches Modell mit Entfestigung überführt. Somit kann auf vorhandene und bewährte elastoplastische Algorithmen zurückgegriffen werden.

Zwischen zwei aneinander angrenzenden Faserschichten wirken die zwei interlaminare Schubspannungen  $S^{13}$  und  $S^{23}$  und die Normalspannung  $S^{33}$ . Andere

Spannungen können vernachlässigt werden. In das Kriterium von Hashin fließen nur diese interlaminaeren Schub- und Normalspannungen ein mit:

$$\frac{(S^{33})^2}{\hat{\sigma}_{33}^2} + \frac{(S^{13})^2 + (S^{23})^2}{\hat{\sigma}_{13}^2} \leq 1, \quad S^{33} > 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}_{13}^2 = \hat{\sigma}_{23}^2. \quad (6.7)$$

Eingebettet in ein plastisches Materialgesetz gilt die Fließbedingung

$$F(\mathbf{S}, \alpha) = g(\mathbf{S}) - Z(\alpha) \leq 0, \quad (6.8)$$

siehe Gleichung ( $\{F43\}$ ). Bei linearer Entfestigung ist die Ableitung  $Z' = -\mu$  stets negativ. Die konsistente Tangente  $\bar{\mathbf{C}}$  nach Gleichung ( $\{F52\}$ ) bekommt im ratenunabhängigen Fall negative Werte auf der Hauptdiagonalen, sie verliert ihre positive Definitheit. Es entstehen numerische Instabilitäten, die durch eine viskoplastische Regularisierung behoben werden können.

## 6.4 Viskoplastische Regularisierung des Delaminationsalgorithmus

Während im elastischen Bereich die elasto-plastische Tangente (Stoffmatrix) konstant und positiv definit ist, ändert sich dies bei Entfestigungsbeginn. Je nach Belastungsrichtung wechseln ein oder mehrere Hauptdiagonaleinträge auf der elasto-plastischen Tangente ihr Vorzeichen. Die Einführung eines, ausschließlich aus numerischen Gründen eingeführten, Dämpfungsparameters  $\eta^*$  erhöht die Steifigkeit des Systems und verhindert den Verlust der positiven Definitheit der Tangente. Bei der Wahl des viskoplastischen Ansatzes ist das Modell von Duvaut-Lions dem Modell von Perzyna in jedem Fall vorzuziehen, da im Modell von Duvaut-Lions eine einfache Skalierung der ratenabhängigen und ratenunabhängigen Anteile möglich ist. Siehe dazu SPRENGER ET AL. [37], Abschnitt 4.2ff. Folgende Probleme gilt es jedoch zu beachten:

1. Durch die Dämpfung verändert sich das Systemverhalten, da die Fläche unterhalb der Entfestigungsfunktion (Abbildung 6.6) anwächst oder schrumpft.
2. Die Wahl des Dämpfungsparameters ist außerordentlich schwierig. Je nach Belastung und Geometrie kann die Dämpfung an jedem Gaußpunkt die gewünschte Lösung unterschiedlich stark verändern.
3. Der Dämpfungsparameter  $\eta^*$  geht immer in Verbindung mit der Zeitschrittweite  $\Delta t$  in die Berechnungen ein. Innerhalb einer Gleichgewichtsiteration müssen diese beiden Werte konstant sein.



4. Ein physikalischer Zusammenhang mit  $\eta^*$  bzw. der Zeitschrittweite  $\Delta t$ , wie er im Stoffmodell ursprünglich vorgesehen ist, existiert nicht.

Deshalb sind folgende Punkte bei der Regularisierung berücksichtigt:

1. Die Dämpfung darf, um die Beziehung zwischen Entfestigungsfunktion und kritischer Energiefreisetzungsrate nicht zu verändern, nur gerade so groß sein, daß die positive Definitheit der elasto-plastischen Tangente nicht verloren geht, die Zeitschrittweite muß entsprechen klein gewählt werden.
2. Die Regularisierung muß an jedem Gaußpunkt stattfinden und individuell bestimmt werden.
3. Die zur Regularisierung berechnete Dämpfung gilt nicht im aktuellen, sondern erst im darauffolgenden Zeitschritt.

In Tafel 6.1 ist der Algorithmus zur Regularisierung dargestellt. Die Werte aus der ratenunabhängigen Berechnung werden mit einem hochstehendem Balken ( $\bar{\phantom{x}}$ ) gekennzeichnet. (In SPRENGER ET AL. [37] ein hochstehendes umgedrehtes Dach ( $\overset{\cdot}{\phantom{x}}$ ).

Mit dem im vorangegangenen Zeitschritt  $t_n$  berechneten Dämpfungsparameter  $\eta_n^*$  werden die aktuellen (regularisierten) Spannungen und Verzerrungen, sowie die visko-plastische Tangente berechnet. In vielen Versuchen zeigte sich, daß sich der Dämpfungsparameter innerhalb eines Zeitschrittes nur unwesentlich ändert, so daß die positive Definitheit der Stoffmatrix gewährleistet ist. Zur Regularisierung wird der kleinste Diagonaleintrag der *ratenunabhängigen* Stoffmatrix herangezogen ( $R^{pl}$ , Diagonaleintrag an der Stelle  $\bar{\mathbf{C}}_{ii}$ ). Die zugehörigen Werte aus der elastischen und viskoplastischen Tangente werden zur Iteration benötigt, die auf Gleichung ( $\{F58\}$ ) basiert, mit der sich die viskoplastische Tangente nach Duvaut-Lions berechnet,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1 - \exp \left[ \frac{-\Delta t}{\eta^*} \right]}{\frac{\Delta t}{\eta^*}} \right) R^{el} + \left( 1 - \exp \left[ \frac{-\Delta t}{\eta^*} \right] \right) R^{pl} - R^{Tol} = 0 \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\left( \frac{1 - \exp \left[ \frac{-\Delta t}{\eta^*} \right]}{\frac{\Delta t}{\eta^*}} \right) R^{el} + \left( 1 - \exp \left[ \frac{-\Delta t}{\eta^*} \right] \right) R^{pl}}_{G(\eta^*)} - R^{Tol} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (6.9)$$

Die Linearisierung des Gleichungssystems (6.9) mit

$$G(\eta^*) + \Delta \eta^* \frac{\partial G}{\partial \eta^*} - R^{Tol} = 0 \quad (6.10)$$

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>t_{n+1} = t_n + \Delta t</math></li> <li>• Ratenunabhängige Berechnung von <math>\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}_l</math>, <math>\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_l</math> und <math>\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}}_l</math></li> <li>• Regularisierte Lösung: <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\delta = \frac{\Delta t}{\eta_n^*}</math>, <math>\beta = \exp(-\delta)</math></li> <li><math>\Rightarrow \bar{\bar{\mathbf{S}}}_{n+1}, \bar{\bar{\alpha}}_{n+1}, \bar{\bar{\mathbf{C}}}^{vpl}</math> nach Tabelle {Fig.6}</li> </ul> </li> <li>• Regularisierungsberechnung für <math>t = t_{n+2}</math> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>R^{pl} = \min(\bar{\mathbf{C}}_{ii}) \Rightarrow i</math></li> <li><math>R^{el} = \mathbf{C}_{ii}^{el}</math>      <math>R^{vpl} = \mathbf{C}_{ii}^{vpl}</math></li> <li><math>R^{Tol} = R^{el} * 10^{-6}</math>      <math>\eta = 10^{-16}</math></li> </ul> </li> <li>• Iteration <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>R^{pl} &gt; 0 \Rightarrow</math> Gehe zu 6.</li> <li>2. <math>\delta = \frac{\Delta t}{\eta}</math>, <math>\beta = \exp(-\delta)</math>, <math>\omega = 1 - \beta</math></li> <li>3. <math>\Delta\eta = \frac{R^{Tol} - \omega \eta R^{el} / \Delta t - \omega R^{pl}}{R^{el} (\omega / \Delta t - \beta / \eta) - \Delta t \beta R^{pl} / \eta^2}</math></li> <li>4. <math> \Delta\eta  \leq 10^{-15} \Rightarrow</math> Gehe zu 6.</li> <li>5. <math>\eta = \eta + \Delta\eta \Rightarrow</math> Gehe zu 2.</li> <li>6. <math>\eta_{n+1}^* = \eta</math></li> </ol> </li> </ul>
--

Tabelle 6.1: Automatische Bestimmung des Viskositätsparameters

führt zu dem in Tafel 6.1 dargestellten Verfahren.

Liegt vollständige Entfestigung vor, d.h. daß die Vergleichsspannung  $Z^\infty$  erreicht ist, werden sämtliche Spannungen und alle Felder der Stoffmatrix endgültig auf den Wert  $10^{-12}$  festgesetzt. Da eine vollständige Entfestigung gleichzusetzen ist mit der vollen 'Zerstörung' des Interface-Elementes, werden auch die für Delamination nicht relevanten Spannungen ( $S_{11}, S_{22}, S_{23}$ ) auf diesen Wert herabgesetzt. Den Hauptdiagonalwerten der Stoffmatrix wird aus numerischen Gründen mit  $10^{-6}$  ebenfalls ein verschwindend geringer Wert zugewiesen.

Anhand einer Zugprobe, bestehend aus drei Elementen, wird die Wirkungsweise des Algorithmus dargestellt. Der gesamte Quader hat die Kantenlänge  $1\text{ cm}$ . Die restlichen Geometrie- und Systemdaten sind Abbildung 6.8 zu entnehmen.

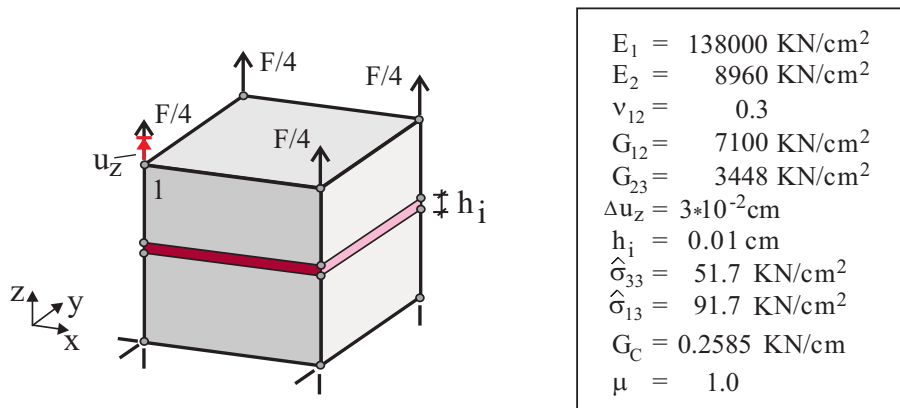


Abbildung 6.8: Zugprobe mit drei Elementen

Das System wird verschiebungsgesteuert geometrisch linear berechnet. Der Delaminationsalgorithmus wirkt nur im mittleren Element. In den Abbildungen 6.9a)-c) ist die Last  $F$  über die Verschiebung  $u_z$  des Knotens 1 dargestellt. Für Delaminationsberechnungen wird die kritische Energiefreisetzungsrate  $G_c = 0.2585\text{ KN/cm}$  nach Gleichung (6.6) in den entsprechenden Entfestigungsparameter  $\mu$  umgerechnet. Die Gleichung geht dabei zunächst von einer ratenunabhängigen Berechnung aus. Wie aus Abbildung 6.9a) hervorgeht, vergrößert sich die Fläche unterhalb der Lastverformungskurve bei ratenabhängiger Berechnung. Die sich einstellende kritische Energiefreisetzungsrate ist somit größer als der vorgegebene Wert. Eine Reduzierung des Dämpfungsparameters  $\eta^*$  führt bei konstanter Zeitschrittweite  $\Delta t$  zum Annähern der Lastverformungskurve an die ursprünglich gewünschte ratenunabhängige Lösung. Diese Reduzierung führt jedoch auch zum ungewünschten Verlust der positiven Definitheit der visko-elasto-plastischen Tangente.

Ist durch Voranalysen der Dämpfungsparameter bekannt, bei dem gerade noch keine negativen Vorzeichen auf der Hauptdiagonalen der visko-elasto-plastischen Tangente auftreten, stellt sich das Problem, daß die Überspannungen nach dem Modell von Duvaut und Lions nicht vollständig abgebaut werden, siehe Abbildung 6.9a) und b). Eine Verringerung der Zeitschrittweite führt zwar auch zu einer Annäherung an die gewünschte ratenunabhängige Lösung, aber die Restspannungen bleiben erhalten, siehe Abbildung 6.9b). Zusätzlich kann innerhalb realer Strukturen, im Gegensatz zu dem hier dargestellten einfachen Fall, kein für das gesamte Gebiet optimierter globaler Dämpfungsparameter angegeben werden.

Bei den in der Realität vorhandenen komplexen dreidimensionalen Spannungszuständen variiert dieser Parameter bei Finite-Element-Analysen von Gaußpunkt zu Gaußpunkt.

Die viskoplastische Regularisierung kann somit ohne Steuerung des Dämpfungsparameters nicht die Einhaltung der vorgegebenen kritischen Energiefreisetzungsrate ohne einen Verlust der positiven Definitheit der tangentialen Steifigkeitsmatrix gewährleisten. Die Steuerung muß sogar für jeden Gaußpunkt einzeln durchgeführt werden.

In Abbildung 6.9c) sind zwei Lastverformungskurven auf der Basis einer gesteuerten viskoplastischen Regularisierung nach Tabelle 6.1 dargestellt. Folgende Ergebnisse sind hervorzuheben:

- Es verbleiben keine Restspannungen im Element.
- Die Berechnungen verlaufen ohne negative Vorzeichen auf der Hauptdiagonalen der visko-elasto-plastischen Tangente.
- Der gesteuerte Dämpfungsparameter variiert an jedem Gaußpunkt, somit können die variierenden Spannungsverläufe an realen Strukturen berücksichtigt werden.
- Eine Reduzierung der Zeitschrittweite  $\Delta t$  führt zu einer Annäherung der visko-elasto-plastischen an die elasto-plastische Lösung!

Abschließend wird somit deutlich, daß die vorgegebene kritische Energiefreisetzungsrate bei genügend kleiner Zeitschrittweite eingehalten werden kann, ohne daß die positive Definitheit der Tangente verloren geht. Stabile numerische Berechnungen sind somit möglich. Wird die Fließbedingung an einem Gaußpunkt zum ersten mal verletzt, liegt noch kein automatisch ermittelter Dämpfungsparameter vor, da dieser stets erst für den folgenden Zeitschritt gültig wird. Deswegen wird zu Beginn der Berechnung ein globaler Dämpfungsparameter  $\eta_{Start}^*$  festgelegt. Die in dieser Arbeit später vorgestellten Untersuchungen haben gezeigt, daß  $\eta_{Start}^*$  die Berechnungen nicht beeinflusst.

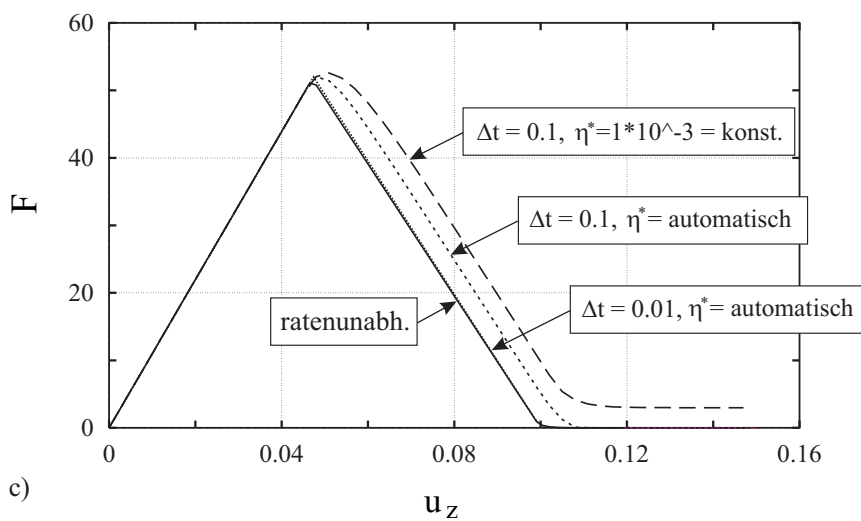
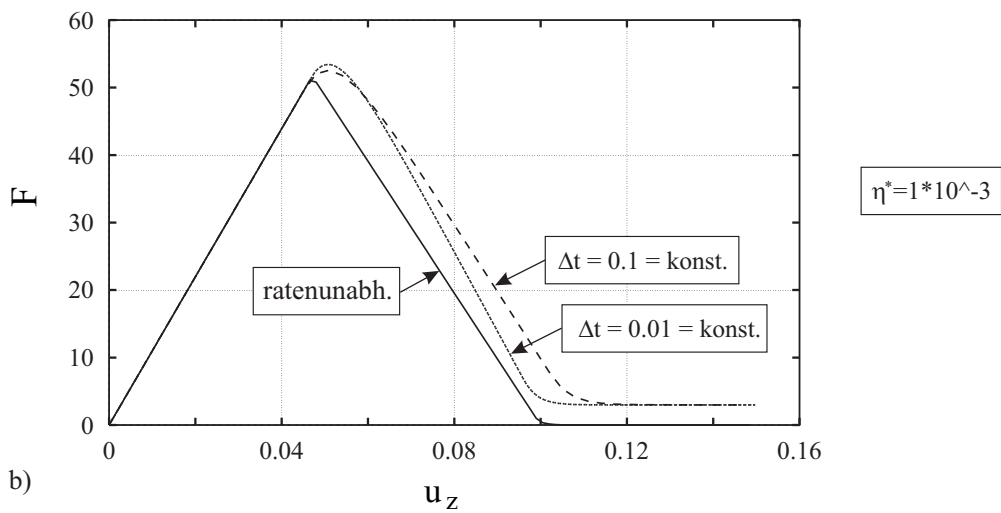
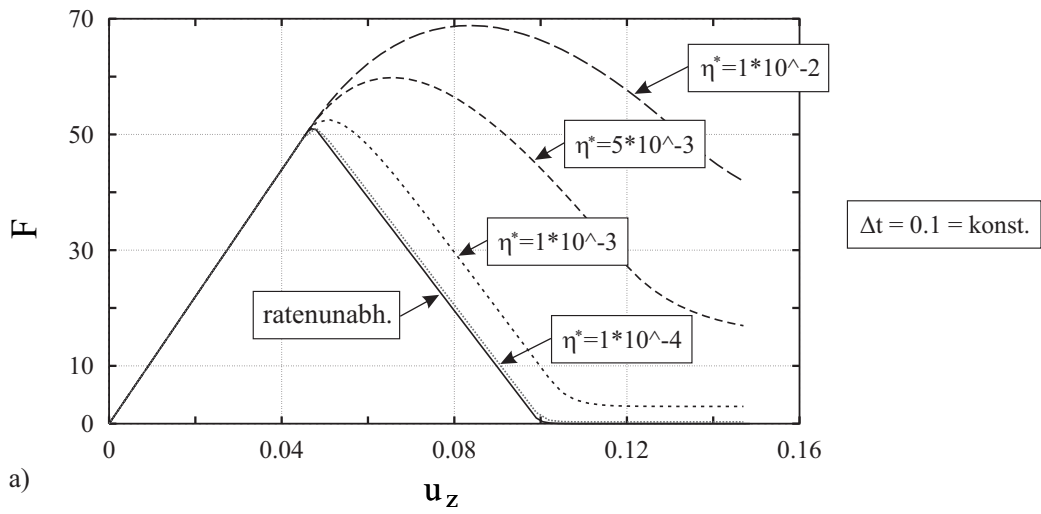


Abbildung 6.9: Lastverformungskurven: Verschiebung am Knoten 1

## 6.5 Erweiterte Elementformulierungen und EAS-Parameter

Das neu entwickelte Delaminationsmodell wurde in die EAS30- und ANS-EAS5-Elemente implementiert.

Beim Einsatz der EAS-Methode in Verbindung mit dem Delaminationskonzept auf der Basis von physikalischer Entfestigung muß jedoch berücksichtigt werden, daß eine Reduzierung der Elementsteifigkeit in eine Vorzugsrichtung die Wahl der zusätzlichen Verzerrungen einschränkt. In dem im Rahmen des Forschungsprojektes entwickelten Delaminationskonzeptes auf der Basis des Delaminationskriteriums nach HASHIN [19] werden sowohl Spannungen als auch Steifigkeiten in der Interface-Schicht reduziert. Volle Delamination geht somit einher mit einer annähernd zu null verminderten Normalspannung in Dickenrichtung ( $S_{33}$ ). Die zusätzlichen verbesserten Verzerrungen, welche Locking in dieser Richtung verhindern sollen, verlieren somit nicht nur ihre Gültigkeit, sondern führen aufgrund der notwendigen Kondensation auf Elementebene zu numerischen Ausfällen. Zur Lösung dieses Problems kann entweder eine von Beginn an angepaßte Interpolationsmatrix der Art

$$\mathbf{M}^4 = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

verwendet werden, oder ein Ausschalten der zusätzlichen Verzerrungen kurz vor Erreichen der endgültigen Entfestigung durchgeführt werden. Die Verwendung der Interpolationsmatrix nach Gleichung (6.11) reduziert das Locking-Verhalten jedoch wesentlich weniger, da der zusätzliche Verzerrungsparameter in Dickenrichtung (siehe auch BÜCHTER ET AL. [5]) nicht enthalten ist.

Die ANS-Methode kann in Kombination mit dem Delaminationskonzept problemlos angewendet werden.

Bei den nachfolgend dargestellten Beispielen zeigt sich jedoch, daß zur Berechnung fortschreitender Delamination sehr kleine Elementabmessungen im Bereich der Delaminationsfront notwendig sind. Deshalb sind die zu erwartenden Versteifungseffekte sehr gering. Tests haben bewiesen, daß innerhalb dieses Bereiches auf die Elementerweiterungen verzichtet werden kann, ohne daß sich die Ergebnisse verändern.

Der sehr erfolgreiche Einsatz des neu entwickelten Verfahrens zur Berechnung fortschreitender Delamination wird nachfolgend anhand von drei Beispielen be-

legt. Dem Abschlußbericht ist eine CD beigelegt, auf der Animationen der einzelnen Beispiele gespeichert sind. Der zugehörige Movie-Player ist beigelegt.

## 6.6 Beispiel 5: DCB-Probe

Das in der Folge untersuchte Beispiel wurde experimentell von ALIYU UND DANIEL [1] vorgestellt. Ein typischer Versuchsaufbau in Abbildung 6.10 dargestellt.



Abbildung 6.10: DCB-Probe: Versuchsaufbau aus CARLSSON UND PIPES [6]

Die Autoren analysierten das Aufreißen einer vorgerissenen Probe in Abhängigkeit von der Rißgeschwindigkeit. Die kritische Energiefreisetzungsrate  $G_c = 222 N/m$  wurde experimentell bei einer Rißöffnungsgeschwindigkeit von  $\dot{w} = 0.85 mm/s$  ermittelt, und wird innerhalb der folgenden Finite-Elemente-Berechnungen verwendet. Aufgrund der Versuchsanordnung kann von einem reinen Mode-I-RiB ausgegangen werden. Das in Abbildung 6.11 dargestellte System wird an der vorgerissenen Probenspitze an den äußeren Kanten auseinandergezogen. Eine Modellierung der exakten Lasteinleitung über angeklebte Spannbacken

wird durch eine Verlängerung des gerissenen Bereichs um  $6.35\text{ mm}$  berücksichtigt. Die Materialdaten des verwendeten Graphit/Epoxid-Faserverbundmaterials AS-4/3501-6 sind ebenfalls in Abbildung 6.11 angegeben. Der Faserwinkel beträgt im gesamten Querschnitt  $0^\circ$ .

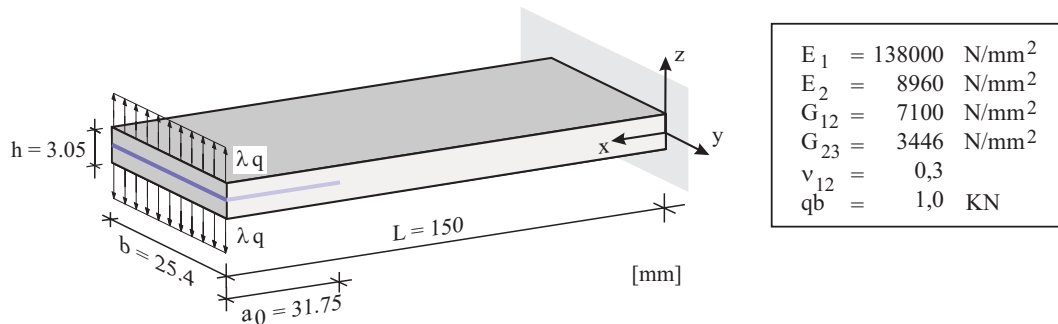


Abbildung 6.11: DCB-Probe: Geometrie und Materialdaten

Zur Modellierung des Finite-Elemente-Systems wurden die gegebenen Symmetrieeigenschaften ausgenutzt, d.h. daß nur ein Viertel der Probe diskretisiert wurde. Dabei wurden zwei Elemente über die Breite und drei über die Höhe eingesetzt. Die Anzahl der Elemente ( $n_1 - n_4$ ) in den einzelnen Bereichen über die Länge sind Abbildung 6.12 zu entnehmen. Im Reißbereich ( $n_4$ ) wird die Anzahl der Elemente in Längsrichtung variiert.

Für die Untersuchungen mit dem 8-Knoten-Volumenelement wurde dieses mit fünf EAS-Parameter und den Ansätzen nach Bathe/Dvorkin und Betsch/Stein erweitert.

Die Dicke der Interface-Schicht wurde mit  $1/100h = 0.0305\text{ mm}$  festgelegt, so daß das elastische Verhalten des Systems nur unwesentlich durch diese beeinflusst wurde.

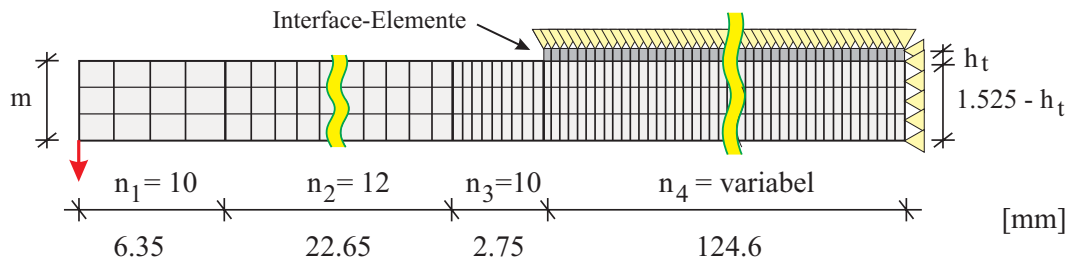


Abbildung 6.12: Finite-Elemente-Netz

Aus Gleichung (6.6) ergibt sich mit den maximalen Zug- bzw. Schubspannungen

$$\hat{\sigma}_{33} = 51.7\text{ N/mm}^2 \text{ und } \hat{\sigma}_{13} = \hat{\sigma}_{23} = 91.7\text{ N/mm}^2 \quad (6.12)$$



der die Delamination bestimmende Entfestigungsparameter  $\mu = 7.1$ . Es ist zu beachten, daß die kritische Energiefreisetzungsrates halbiert wird, da die FE-Berechnung nur an der unteren Hälfte des Systems durchgeführt wird und bei voller Entfestigung in der Interface-Schicht nur die Hälfte der Energie freigesetzt wird.

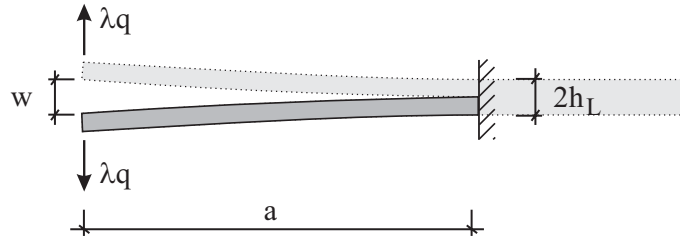


Abbildung 6.13: Vereinfachtes Biegebalken-Modell

Für die Lastverformungskurve bei wachsender Delaminationslänge kann auf der Grundlage der Balkentheorie eine analytische Lösung angegeben werden. Nach Abbildung 6.13 gilt für die halbe Rißöffnung mit der konservativen Last  $P = \lambda q$  bekannterweise

$$\frac{w}{2} = \frac{Pa^3}{3E_1I} = \frac{4Pa^3}{E_1bh_L^3}. \quad (6.13)$$

Das Potential des Gesamtsystems mit zwei Kragarmen berechnet sich damit zu

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a = 2 \left[ \frac{1}{2} P \frac{w}{2} + \left( -P \frac{w}{2} \right) \right] = -P \frac{w}{2} = -4 \frac{P^2 a^3}{E_1 b h_L^3}. \quad (6.14)$$

Schließlich berechnet sich die kritische Energiefreisetzungsrates zu

$$G_c = -\frac{d\Pi}{b da} = 12 \frac{P^2 a^2}{E_1 b^2 h_L^3}. \quad (6.15)$$

Nach wenigen Umformungen gilt bei gegebener kritischer Energiefreisetzungsrates letztlich

$$P(a) = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{G_c E_1 h_L^3}{12}} \text{ und} \quad (6.16)$$

$$P(w) = \sqrt{\frac{2b^2}{3w}} \sqrt{\frac{G_c^3 E_1 h_L^3}{12}}.$$

In Abbildung 6.14 sind vier verschiedene Lastverformungskurven dargestellt. Der Lastfaktor  $\lambda$  ist dazu über die Rißöffnung  $w$  am Beginn der Probe aufgetragen. Das typische Verhalten eines Aufreiversuches ist zu erkennen. Bei zunächst konstanter Laststeigerung öffnet sich die Rißspitze proportional zur aufgebrauchten Last. Bei Erreichen der kritischen Zugspannung in Dickenrichtung ( $\hat{\sigma}_{33}$ ) an der

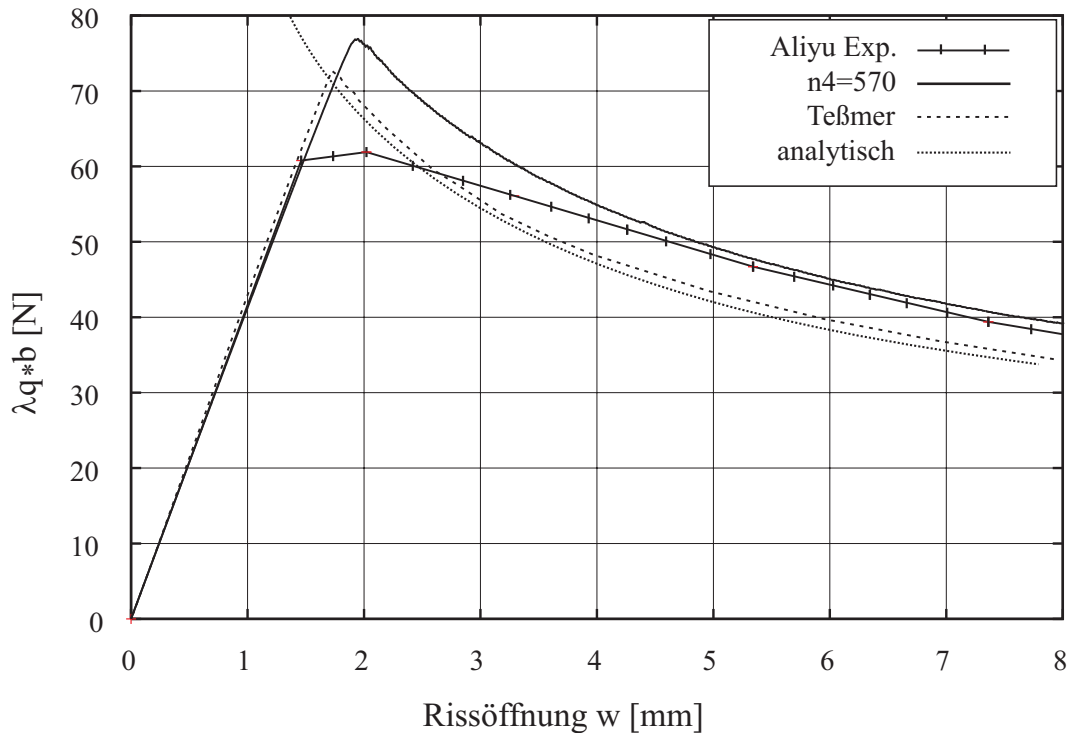


Abbildung 6.14: Lastverformungskurven im Vergleich: Experiment, FE-Berechnungen, und analytische Lösung

Rißspitze, nimmt die aufnehmbare Belastung schnell ab. Der Riß pflanzt sich innerhalb der Probe weiter fort. Dieser Effekt ist in allen abgebildeten Kurven zu erkennen. Der Vergleich zeigt, daß die auf der Basis des in dieser Arbeit vorgestellten Delaminationsalgorithmus berechnete Kurve ( $n_4 = 570$ ) sehr gut mit den experimentell ermittelten Werten nach Aliyu übereinstimmt. Die analytische Lösung liegt etwas unterhalb dieser Kurven, ebenso wie eine Berechnung von TESSMER [41]. Bis auf die Anzahl der Elemente über die Breite (nur 1 Element), verwendete er eine vergleichbare Diskretisierung. Unter Verwendung von Multi-Direktor-Schalenelementen kontrolliert er zunächst, ob an der Rißspitze das Spannungskriterium nach HASHIN [19] verletzt wird. Ist dies der Fall, überprüft er mit einer virtuellen Riß-Öffnungs/Schließungsmethode, ob bei einem Rißwachstum die mindestens erforderliche kritische Energie  $G_c$  freigesetzt wird. Sind beide Bedingungen erfüllt, geht er von Delaminationswachstum aus.

In Abbildung 6.15 sind drei FE-Berechnungen mit verschieden feiner Netzdiskretisierung im Rißbereich im Vergleich zu experimentellen Werten dargestellt. Alle Finite-Elemente-Untersuchungen der DCB-Probe wurden geometrisch linear durchgeführt.

Eine zu grobe Diskretisierung ( $n_4 = 268$ ) führt zu einer welligen Lastverformungs-

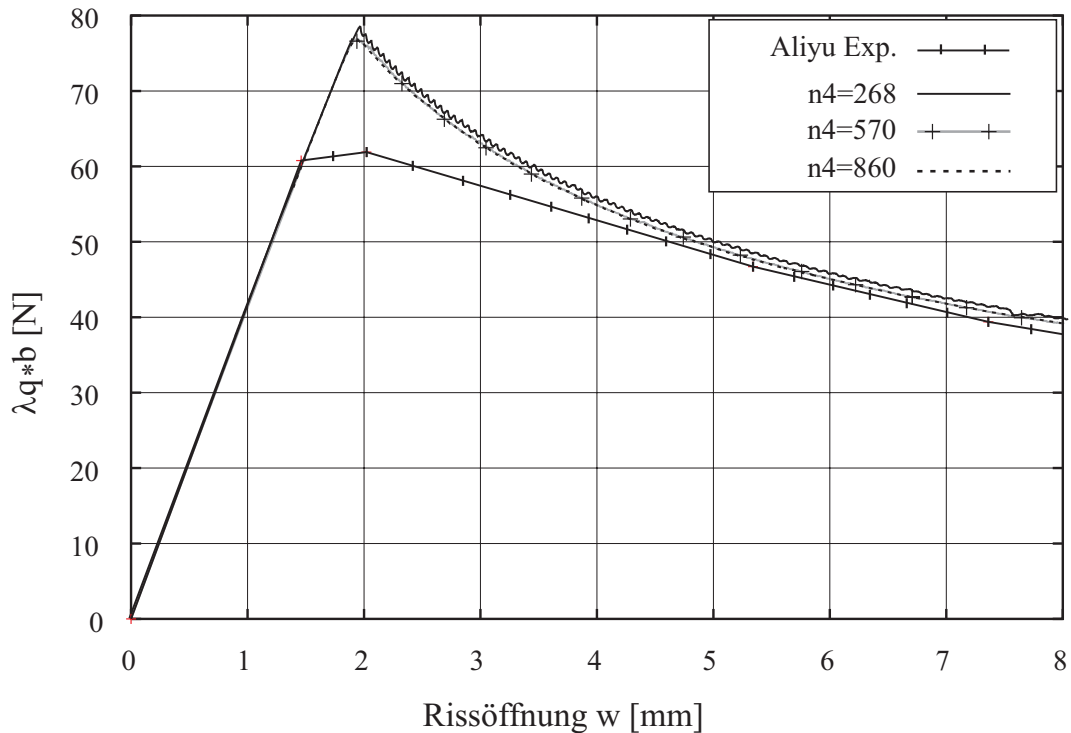


Abbildung 6.15: Netzkonvergenz bei der DCB-Probe

kurve. Diese Unregelmäßigkeiten sind bei feineren Netzen nicht mehr vorhanden. Mit  $n_4 = 570$  Elementen ist eine genügend feine Diskretisierung gefunden, d.h. daß die Lösung bei Erhöhung der Elementanzahl gegen einen festen Wert konvergiert. Dies ist insbesondere wegen der eingesetzten viskoplastischen Regularisierung zu betonen.

Wegen der viskoplastischen Regularisierung beeinflusst die gewählte Zeitschrittweite  $\Delta t$  die Ergebnisse der FE-Berechnungen. Aus Abbildung 6.16 geht hervor, daß eine Verringerung der Zeitschrittweite zu einem schnelleren Delaminationswachstum führt. Bei genügend kleiner Zeitschrittweite ( $\Delta t < 0.0005$ ) konvergiert die Finite-Elemente-Analyse gegen eine konstante Lösung. Dies kann als einziger Nachteil im Verfahren angesehen werden, da mit ca. 8000 Zeitschritten, der Rechenaufwand relativ groß ist.

Abschließend ist in Abbildung 6.17 der Verlauf und die Zugspannungen in Dickenrichtung an der Delaminationsfront zu verschiedenen Laststufen dargestellt. Das Wandern der Rißspitze ist deutlich zu erkennen. Die Zugspannungen in Dickenrichtungen wandern mit der Rißspitze, d.h. daß ober- und unterhalb eines vollständig delaminierten Interface-Elementes kein interlaminares Zug- und Schubspannungen mehr vorhanden sind. Die Interface-Schicht ist in der Abbildung ausgeblendet.

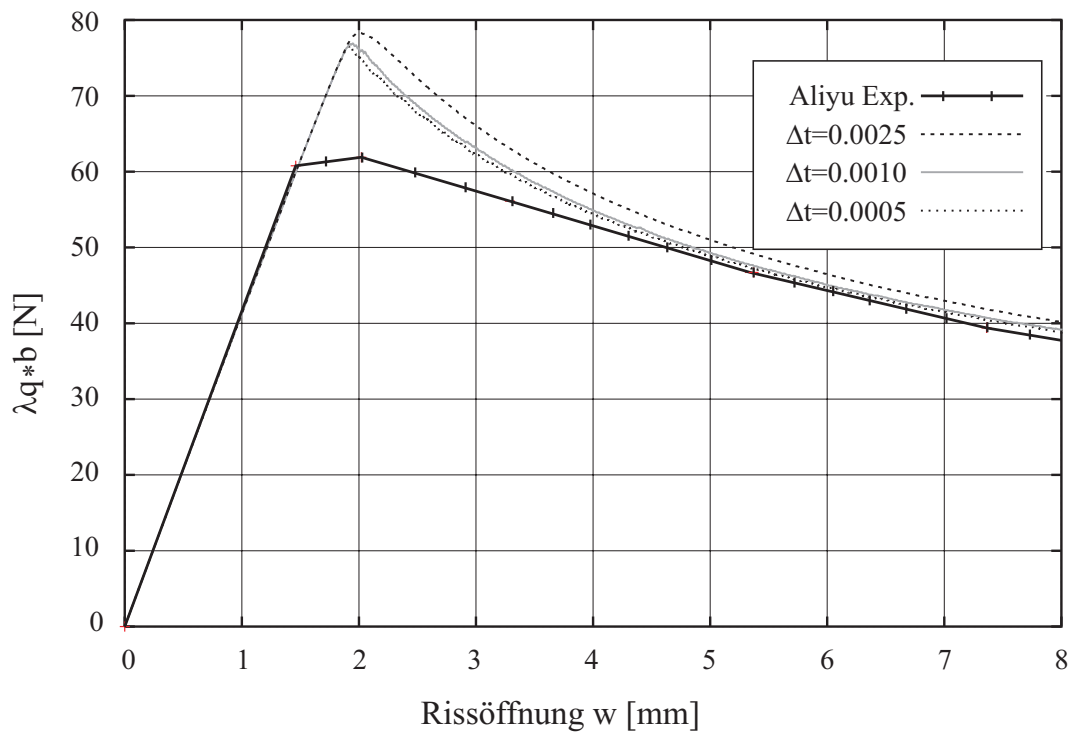


Abbildung 6.16: Abhängigkeit von der verwendeten Zeitschrittweite  $\Delta t$

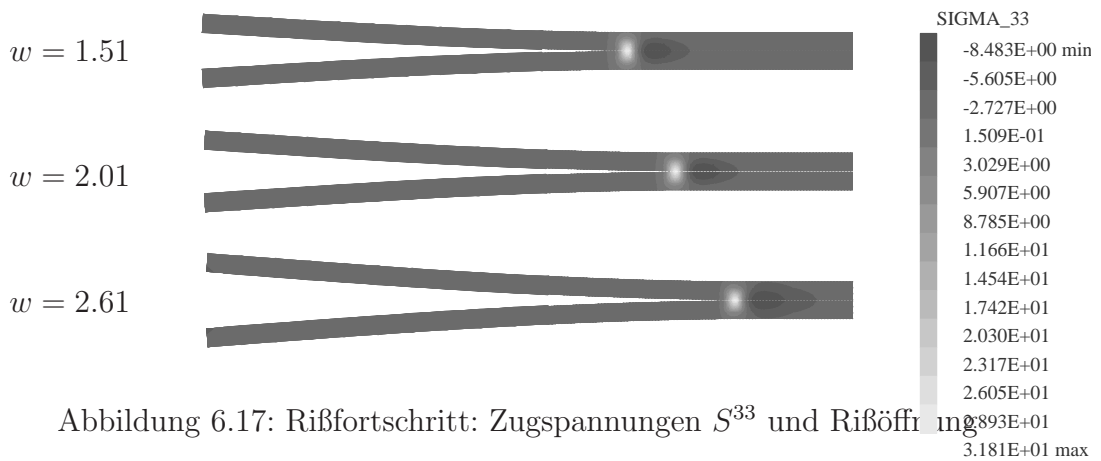


Abbildung 6.17: Rißfortschritt: Zugspannungen  $S^{33}$  und Rißöffnung

In experimentellen Versuchen wird häufig von gekrümmten Rißspitzen berichtet. Dieser Effekt ist in Abbildung 6.18 deutlich sichtbar. Die Zugspannungen in Dickenrichtung ( $S^{33}$ ) in der Nähe der Rißspitze sind zu drei verschiedenen Laststufen dargestellt.

Bei Verwendung von Elementen, die nur ebene Verzerrungszustände abbilden, (z.B. SCHELLEKENS UND DE BORST [35] oder CRISFIELD ET AL. [9]) kann dieser Effekt nicht beobachtet werden, während er sich bei dem hier vorgestellten Konzept ohne weiteres Zutun automatisch einstellt. Kann die Reißspitze nur identisch mit Elementkanten verlaufen, wie z.B. bei der virtuellen Reißöffnungs-/Schließungsmethode (TESSMER [41]), sind aufwendige Verfahren zur Veränderung der Netzgeometrien notwendig, siehe z.B. OUSSET [30]. BELYTSCHKO UND BLACK [3] stellen hingegen ein Verfahren vor, bei dem durch ein zusätzlich diskontinuierliches Verschiebungsfeld ein Riß unabhängig vom Finiten-Elemente-Netz verlaufen kann.

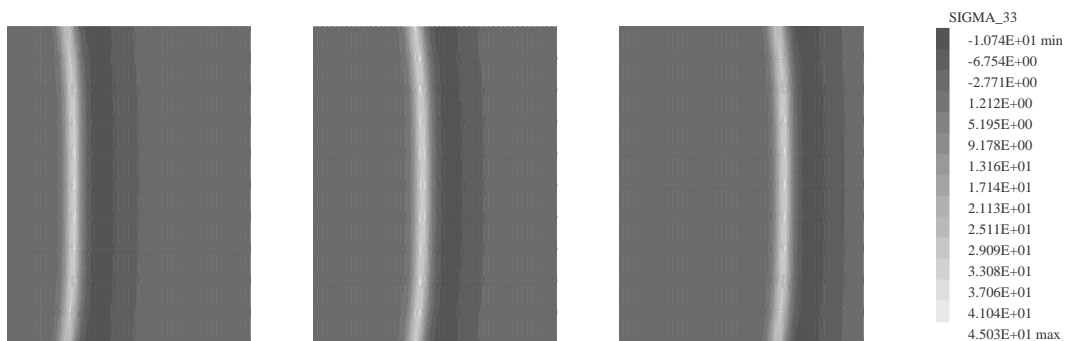


Abbildung 6.18: Zugspannungen in Dickenrichtung ( $S^{33}$ ) an der Delaminationsfront: a)  $w = 1.40$ , b)  $w = 1.85$ , c)  $w = 2.05$

## 6.7 Beispiel 6: Reißfortschritt am delaminierten Plattenstreifen

In SPRENGER ET AL. [37] wurde unter Abschnitt 5.2 die Stabilitätsuntersuchung eines delaminierten Plattenstreifens dargestellt. Basierend auf dem gleichen System und den gleichen Materialdaten wird die Netzgeometrie nach Abbildung 6.19 verändert. Um ein Delaminationswachstum modellieren zu können, wird zwischen der neunten und zehnten Schicht eine Elementreihe mit Interface-Elementen verwendet. Bei den Interface-Elementen handelt es sich um Volumenelemente, welche Delamination mittels des neu entwickelten Verfahrens darstellen sollen. Durch diese Elementschicht geht die Symmetrie des Querschnitts innerhalb der FE-Diskretisierung verloren.

Die zwischen den Schichten neun und zehn im Bereich  $n_1$  delaminierte Probe soll im Bereich  $n_2$  weiterreißen. Dazu ist zwischen Schicht neun und zehn in diesem Bereich das Interface-Element mit der Dicke  $h_t$  modelliert. Im Bereich  $n_1$  ist diese Schicht nicht besetzt und im Bereich  $n_3$  sind an dieser Stelle normale acht-Knoten-Volumenelemente mit fünf EAS-Parametern und Ansätzen nach Bathe/Dvorkin

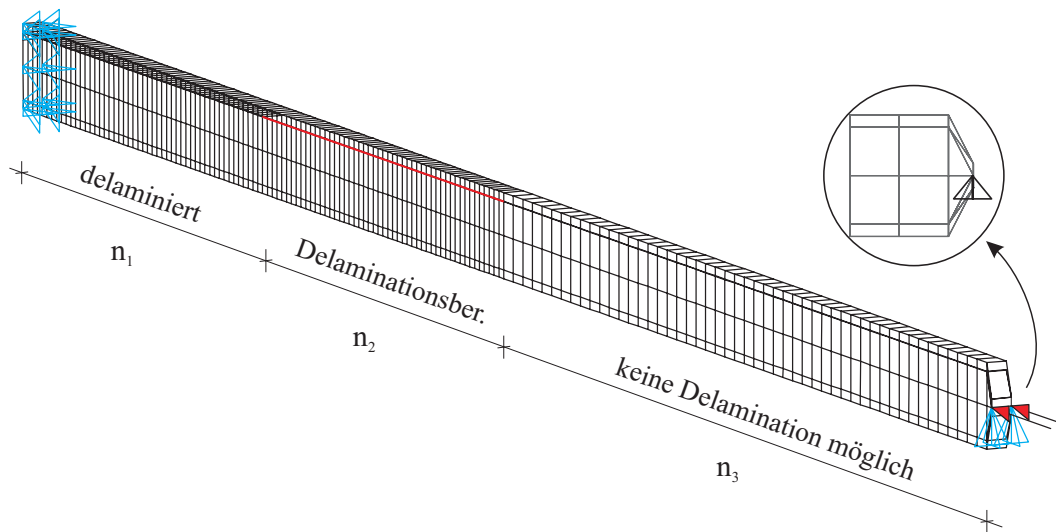


Abbildung 6.19: Halber Plattenstreifen mit Unterteilung für verschiedene Netzfeinheiten (Hier:  $n_1 = n_2 = n_3 = 50$ )

und Betsch/Stein eingesetzt. Diese Elemente finden auch in allen anderen Schichten Anwendung. Verschieden feine Diskretisierungen für  $n_1$ ,  $n_2$  und  $n_3$  wurden untersucht. Die Länge der einzelnen Bereiche beträgt  $l_1 = 25 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 25 \text{ mm}$  und  $l_3 = 50 \text{ mm}$ . Die Berechnungen werden, bis auf die Interface-Schicht, geometrisch nichtlinear durchgeführt. Zur Berechnung der Lastverformungskurven wird das Bogenlängenverfahren verwendet. Wegen der hohen Zahl an vorgegebenen Randbedingungen und der gewählten Entfestigungsparameter ist eine viskoplastische Regularisierung nicht erforderlich.

Zur Lasteinleitung wird eine kurze, vertikale, sehr steife Elementreihe nach Abbildung 6.19 an das Ende des Plattenstreifens angesetzt. Das  $E$ -Modul dieser homogenen und isotropen Schicht entspricht dem 500-fachen des  $E_1$ -Moduls vom restlichen Querschnitt.

In Abbildung 6.20 ist der überhöhte Verformungszustand bei zwei unterschiedlichen Netzmodellen dargestellt. Beide Berechnungen wurden bei stationärer Delamination durchgeführt. In Abbildung 6.20a) ist diese  $25 \text{ mm}$ , in Abbildung 6.20b)  $50 \text{ mm}$  lang. Nach Aufbringen der ersten Eigenform als Imperfektion, verformen sich die Systeme in der dargestellten Art. Grundsätzlich dienen diese beiden Fälle als obere und untere Schranke bei den Berechnungen mit fortschreitender Delamination, wobei jedoch noch andere Netzfeinheiten untersucht wurden.

Anhand dieses Beispiels sollen die Einflüsse aller anteiligen System-, Element-

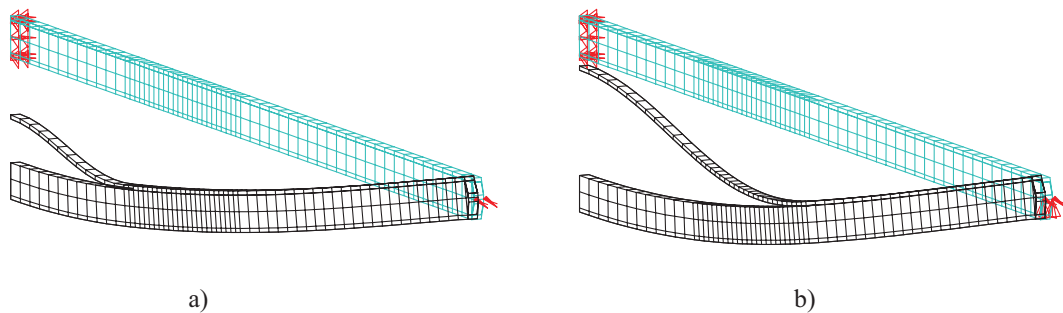


Abbildung 6.20: Verformte Konfigurationen nach Aufbringen der ersten Eigenform (überhöht): a) Ohne Interface-Schicht im Bereich  $n_1$  b) Ohne Interface-Schicht im Bereich  $n_1$  und  $n_2$  (Hier:  $n_1 = 12$ ,  $n_2 = 24$  und  $n_3 = 24$ )

und Materialparameter untersucht werden. Die hier verwendeten Materialparameter, welche das Delaminationsverhalten beschreiben sollen ( $\mu$ ,  $Z_0$  und  $R_0$ ) sind beliebig gewählt, da keinerlei Werte aus Versuchen oder der Fachliteratur bekannt sind. Sie dienen einer prinzipiellen Beurteilung der Systemantwort auf die gewählten Parameter. Die Materialparameter der Interface-Schicht stimmen in allen Berechnungen mit den Parametern des transversal isotropen Materials der restlichen Probe überein. Untersuchungen haben gezeigt, daß die Faserorientierung innerhalb der Schicht das Delaminationsverhalten in diesem Beispiel nicht beeinflußt. In allen Lastverformungskurven ist der Lastfaktor über die vertikale Verschiebung des Punktes  $B$  (Punkt in der Mitte des Querschnitts in der Probenmitte) dargestellt.

### 6.7.1 Netzkonvergenz

Zunächst wird anhand einer Netzkonvergenzuntersuchung die notwendige Feinheit der Diskretisierung ermittelt.

In Abbildung 6.21 sind die Lastverformungskurven von Berechnungen an drei unterschiedlich feinen Netzen dargestellt. Die fortschreitende Delamination beginnt in allen drei Netzen bei der gleichen Belastung. Der Delaminationsfortschritt ist bei den drei Proben identisch. Eine grobe Diskretisierung ( $n_{1-3} = 25$ ) führt jedoch zu einer unregelmäßigen (gezackten) Lastverformungskurve. Es delaminieren nicht alle Elemente. Erst ab einer Netzfeinheit von  $n_{1-3} = 50$  liegt eine gleichmäßige Lastverschiebungskurve vor und alle Interface-Elemente delaminieren vollständig. Eine weitere Netzverfeinerung führt zu keiner Verbesserung des Verhaltens. In der Folge wird deshalb mit einer Diskretisierung  $n_{1-3} = 50$  gearbeitet, mit der auch die beiden Grenzuntersuchungen ( $L_{del} = \text{konst.} = 25 \text{ mm}$  bzw.  $= 50 \text{ mm}$ ) durchgeführt wurden.

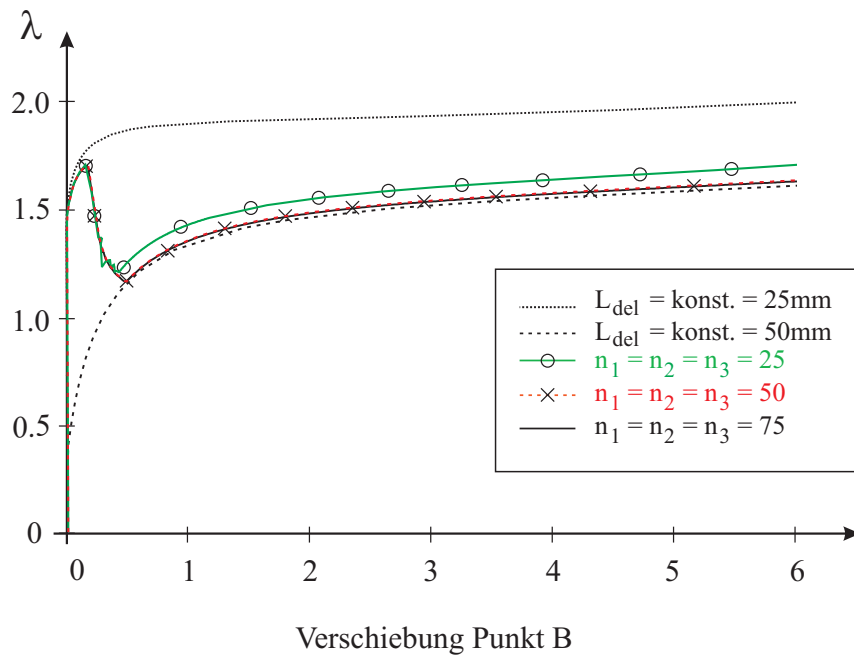


Abbildung 6.21: Untersuchung verschiedener Vernetzungsgrade ( $Z_0 = 0.42$ ,  $R_0 = 6.0$ ,  $\mu = 1.0$ ,  $h_t = 0.02$ )

### 6.7.2 Entfestigungsparameter $\mu$

In Abbildung 6.22 sind verschiedene Lastverformungskurven in Abhängigkeit vom Entfestigungsparameter  $\mu$  dargestellt.

Der Entfestigungsparameter  $\mu$  ist umgekehrt proportional zur kritischen Energiefreisetzungsrage. Somit führt eine geringere kritische Energiefreisetzungsrage zu einem größeren Entfestigungsparameter, d.h. daß ein Wachsen des Entfestigungsparameters ein schnelleres Delaminieren der Interface-Schicht verursachen sollte.

Als obere Schranke wird eine Berechnung ohne fortschreitende Delamination und einer konstanten Rißlänge von  $L_{del} = 25\text{ mm}$  herangezogen. Die untere Grenze bildet die gleiche Analyse mit einer Rißlänge von  $L_{del} = 50\text{ mm}$ . Findet innerhalb der Interface-Elemente keine Entfestigung statt, sondern werden die Spannungen innerhalb der Schicht auf  $Z_0$  bzw.  $R_0$  begrenzt ( $\mu = 0$ ), verläuft die Lastverformungskurve nur wenig unterhalb der oberen Grenze, da sich die Rißlänge nicht vergrößern kann. Mit wachsendem Entfestigungsparameter  $\mu$  delaminiert die Interface-Schicht zunehmend schneller, beginnend an der Rißspitze. Ab einem Entfestigungsparameter  $\mu > 0.75$  delaminiert die gesamte Interface-Schicht, so daß sich die Lastverformungskurve sehr nah an die Kurve annähert, welche die von Beginn an vorhandene Delamination ( $L_{del} = 50\text{ mm}$ ) beschreibt.



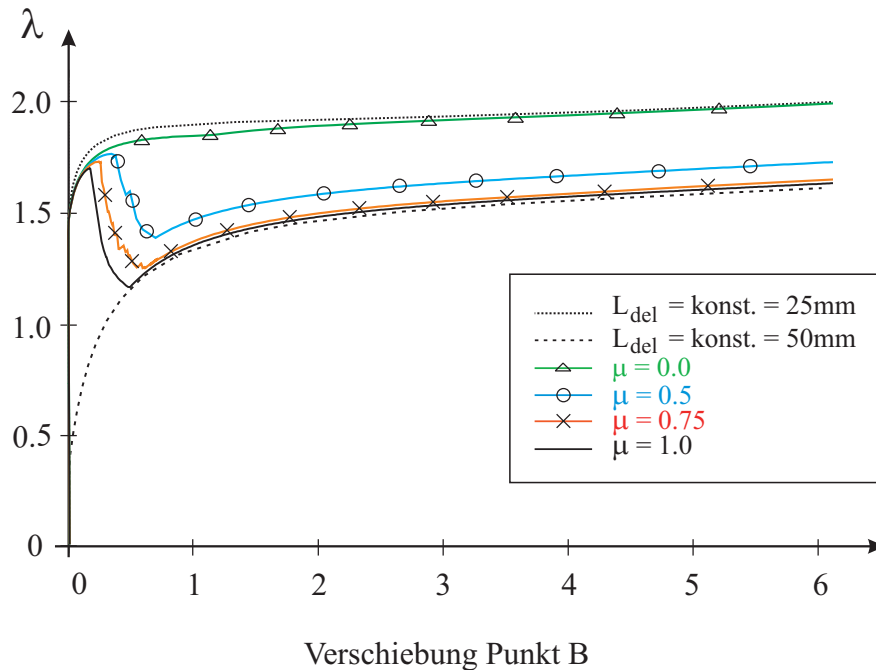


Abbildung 6.22: Variation des Entfestigungsparameters  $\mu$  ( $Z_0 = 0.42$ ,  $R_0 = 6.0$ ,  $n_{1-3} = 50$ ,  $h_t = 0.02$ )

### 6.7.3 Dicke der Interface-Schicht $h_t$

In Abbildung 6.23 ist die Abhängigkeit des Delaminationswachstums von der gewählten Dicke der Interface-Schicht dargestellt.

Da sich der Entfestigungsparameter nach Gleichung (6.6) bestimmt zu

$$\mu = \frac{Z_0 h_t}{2 G_c} , \quad (6.17)$$

ändert sich mit variierender Interface-Dicke auch der zugehörige Entfestigungsparameter. Entsprechend sind die Entfestigungsparameter den Interface-Dicken in den Berechnungen nach Abbildung 6.23 angepaßt, um die Ergebnisse vergleichbar zu halten.

Die Lastverformungskurven unterscheiden sich bei den drei hier gewählten Interface-Dicken nicht wesentlich. Lediglich im Anfangsbereich der entstehenden Delamination (siehe vergrößerter Bereich in Abbildung 6.23) zeigen sich sehr kleine Unterschiede. Eine abnehmende Interface-Dicke führt zu einem minimal früheren Delaminationsbeginn und einer etwas weicheren Systemantwort auf die aufgeführte Belastung. Dieser Effekt läßt sich jedoch nur bei sehr starker Vergrößerung erkennen. Die Untersuchungen ergeben somit, daß das Delaminationsverhalten in diesem Beispiel ab einer Interface-Dicke  $h_t < 1/50h_L$  von dieser nicht

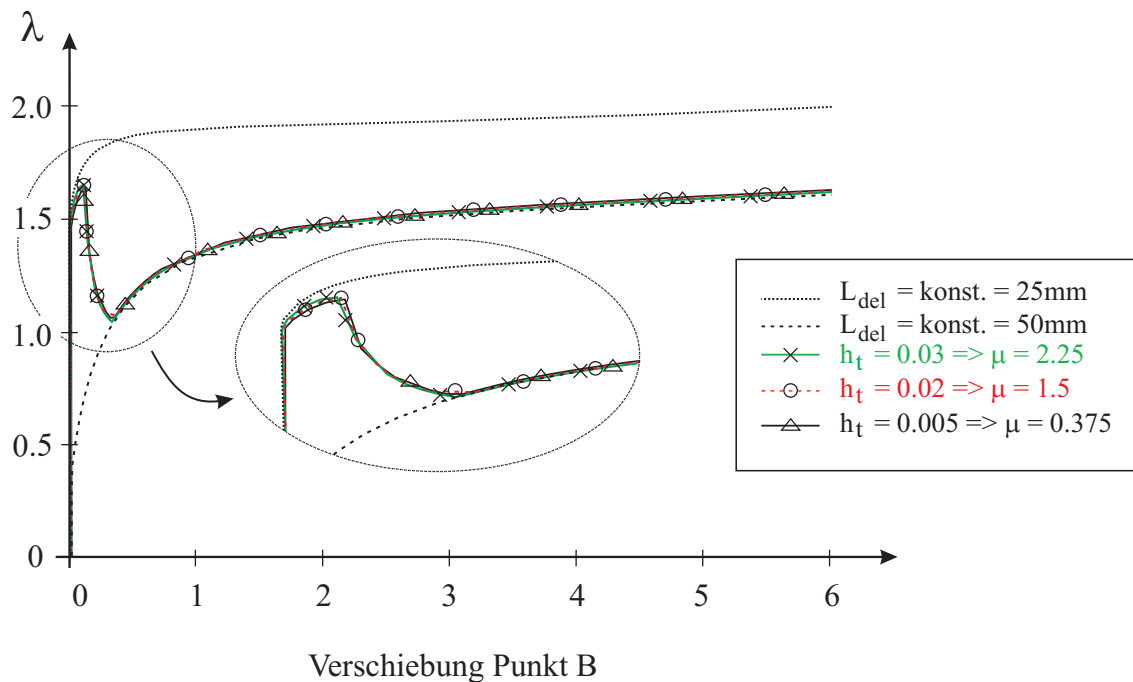


Abbildung 6.23: Einfluß der Interface-Schichtdicke ( $Z_0 = 0.42$ ,  $R_0 = 6.0$ ,  $G_c = konst$ ,  $n_{1-3} = 50$ )

mehr beeinflusst wird. In Verbindung mit den durchgeführten Konvergenzuntersuchung bezüglich der notwendigen Feinheit der FE-Diskretisierung ist somit die **Netzunabhängigkeit** des verwendeten Verfahrens für dieses Beispiel bewiesen. Bei der Wahl der Interface-Dicke sollte grundsätzlich beachtet werden, daß es bei sehr dünnen Elementen zu Konditionierungsproblemen beim Auflösen des FE-Gleichungssystems auf System-Ebene kommen kann. Die Interface-Dicke sollte so groß sein, daß sie daß lokale und globale Verhalten des Systems gerade nicht beeinflusst.

#### 6.7.4 Integrationsordnung des Interfaceelementes

In Abbildung 6.24 sind die Lastverformungskurven von Berechnungen mit unterschiedlichen Integrationsordnungen innerhalb der Interface-Elemente dargestellt. Da es sich bei den Diskretisierungen zur Berechnung von Delaminationen in der Regel um sehr feine Netze handelt, soll untersucht werden, ob evtl. eine niedrigere Integrationsordnung das Verhalten nicht beeinflusst und somit Rechenzeit eingespart werden kann.

In Abbildung 6.24 sind die Ergebnisse aus Berechnungen mit drei verschiedenen Integrationsgraden innerhalb des Interface-Elementes dargestellt. Die Analysen

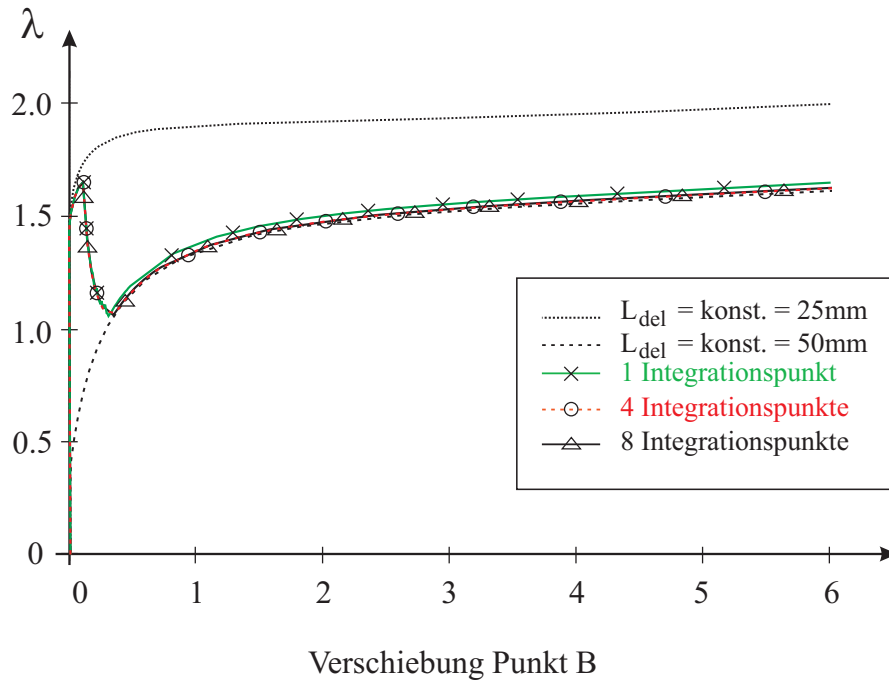


Abbildung 6.24: Einfluß der Integrationsordnung des Delaminationselementes ( $Z_0 = 0.42$ ,  $R_0 = 6.0$ ,  $\mu = 1.5$ ,  $h_t = 0.02$ ,  $n_{1-3} = 50$ )

wurden mit einem Gaußpunkt in Elementmitte, vier Gaußpunkten in der Elementmittelebene und acht Gaußpunkten an den Standardintegrationsstützstellen durchgeführt. Während die Untersuchungen mit acht und vier Gaußpunkten keine Unterschiede zeigen, weicht das Ergebnis bei nur einem verwendeten Gaußpunkt von diesen beiden Berechnungen ab. D.h. daß eine um einen Grad verminderte Integrationsordnung von zwei auf eins, die Ergebnisse verfälscht. Eine exakte numerische Integration eines acht-Knoten-Volumenelementes erfordert bekannterweise acht Gaußpunkte. Das Beispiel zeigt jedoch auch, daß eine Berechnung mit nur vier Gaußpunkten exakte Ergebnisse liefert.

Im Rahmen der oben dargestellten Berechnungen wurde ebenfalls der Einfluß der Elementerweiterungen (EAS, Bathe/Dvorkin, Betsch/Stein) auf das Verhalten der Interface-Schicht ermittelt. Dabei zeigte sich keine Veränderung des globalen und lokalen Verhaltens der Schicht infolge der verwendeten Erweiterungen. Die Berechnungen verliefen ebenso robust und es traten keine numerischen Instabilitäten auf. Es ist allerdings zu beachten, daß keine zusätzlichen Verzerrungen auf Elementebene (EAS-Parameter) in Dickenrichtung verwendet werden dürfen. Eine Kondensation dieser Parameter auf Elementebene ist beim Zustand vollständiger Entfestigung nicht mehr möglich. Obwohl diese erweiterten Verzerrungen in Dickenrichtung eine hohe Reduzierung des Locking-Effektes bewirken, kann auch

auf sie, wie alle anderen Elementerweiterungen, in der Interface-Schicht verzichtet werden, da durch die zur Delaminationsberechnung notwendigen feinen Netze nur geringen Locking-Effekte auftreten.

### 6.7.5 Darstellung des Delaminationswachstums

In Abbildung 6.25 ist die Interface-Schicht zu vier verschiedenen Lastzuständen dargestellt. In der perspektivischen Ansicht sind die Verformungen der Interface-Schicht fünffach überhöht. Unterhalb dieser Ausschnitte ist die zugehörige Draufsicht der Interface-Schicht dargestellt. Die Einfärbung zeigt den nachfolgend definierten Delaminationsgrad an.

$$Del. = 100 \cdot \left( 1 - \frac{Z(\alpha) - Z_\infty}{Z_0 - Z_\infty} \right) \quad (6.18)$$

Bei vollständiger Delamination (100Spannungen, nicht nur die interlaminaeren Spannungen, zu null reduziert, so daß die Reißoberfläche spannungsfrei ist.

Es handelt sich in Abbildung 6.25 um Ausschnitte aus dem gesamten Lochstreifen. Nur im Bereich  $L_2$  ( $n_2$ ) sind die Interface-Elemente in den Plattenstreifen zwischen den Schichten neun und zehn eingebaut. Je nach Belastung des Systems sind unterschiedlich viele dieser insgesamt 50 Elemente vollständig entfestigt. Mit der wachsenden Delamination wird die aufnehmbare Belastung reduziert. Im Zustand  $\lambda = 1.260$  sind alle Interface-Elemente entfestigt, d.h. daß in den Elementen sämtliche Spannungen und Steifigkeiten vollständig reduziert sind.

Ein Löschen eines vollständig entfestigten Elementes durch Entfernung im Finite-Elemente-Netz wurde im Rahmen dieser Untersuchung nicht durchgeführt. Ein solches Verfahren könnte evtl. auftretende Konditionierungsprobleme verhindern.

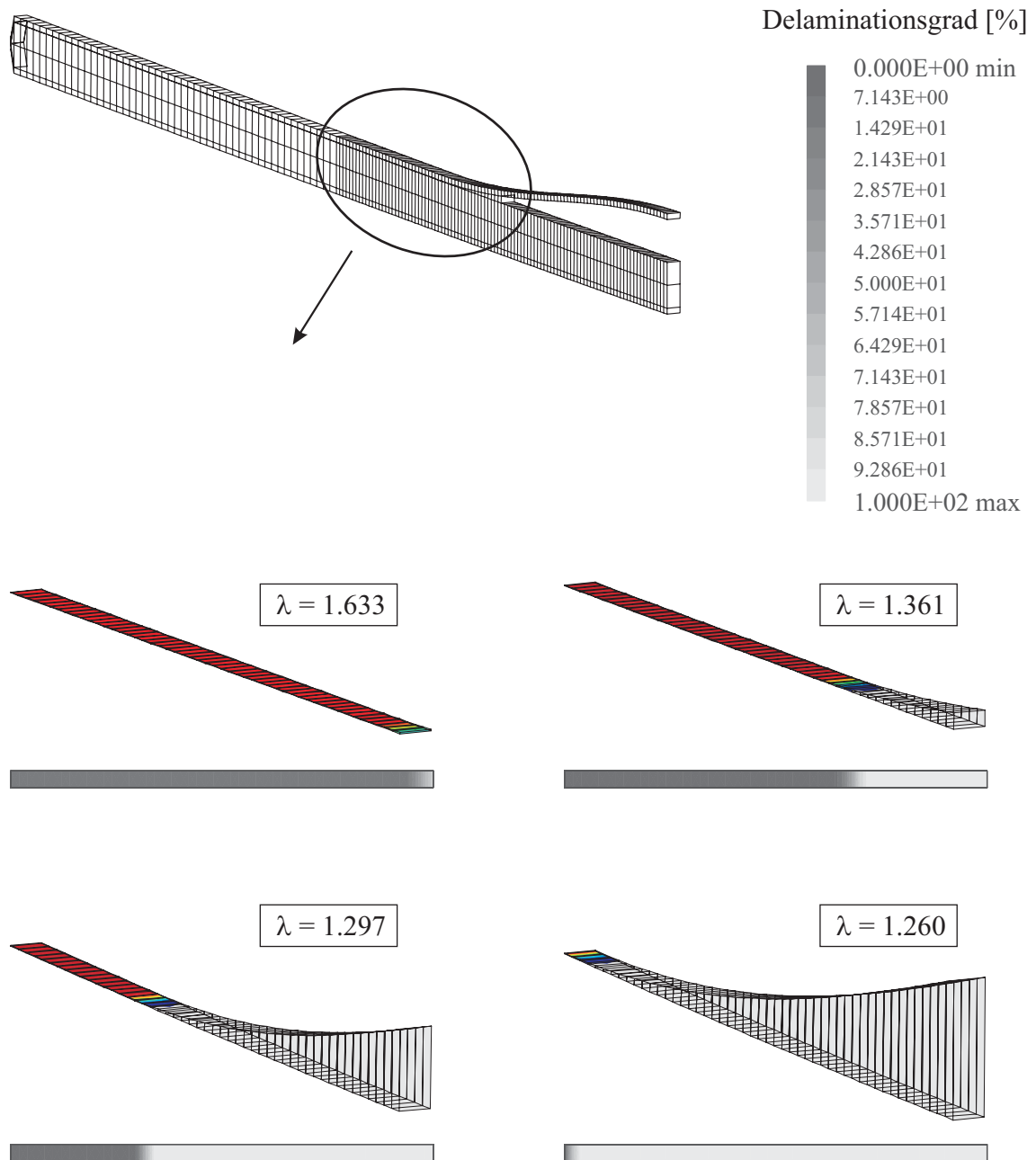


Abbildung 6.25: Delaminationswachstum in der Interface-Schicht ( $Z_0 = 0.42$ ,  $R_0 = 6.0$ ,  $\mu = 1.5$ ,  $n_{1-3} = 50$ )

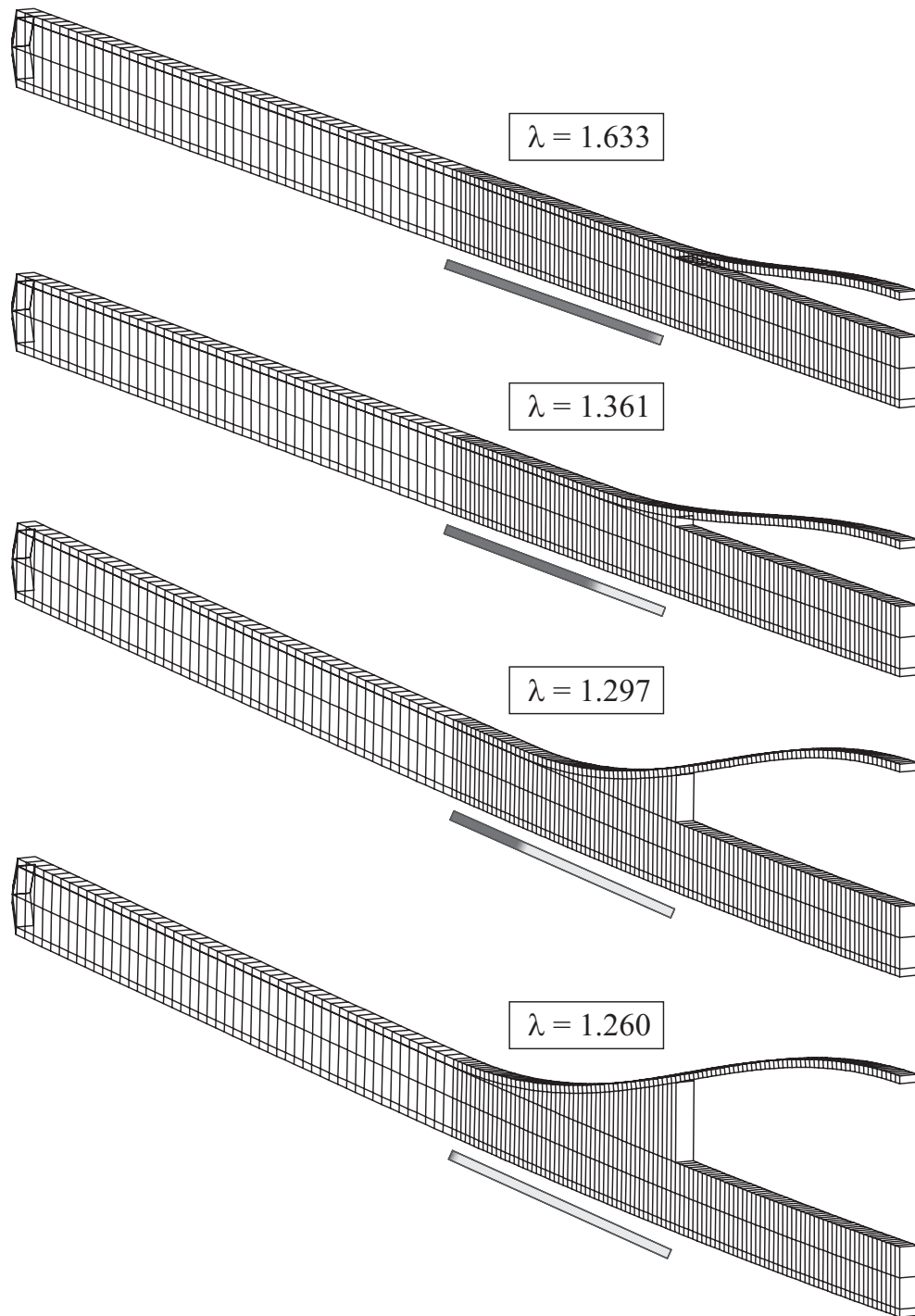


Abbildung 6.26: Delaminationsfortschritt am halben Plattenstreifen ( $Z_0 = 0.42$ ,  $R_0 = 6.0$ ,  $\mu = 1.5$ ,  $n_{1-3} = 50$ )

Abschließend sind vier verschiedene Lastzustände des Plattenstreifens in Abbildung 6.26 dargestellt. Mit zunehmender Delamination reduziert sich die zugehörige

ge Last und vergrößert sich die ausbeulende obere Faserverbundschicht. Unterhalb der perspektivischen Darstellung sind die Draufsichten der Interface-Schicht mit den Delaminationsgraden dargestellt. Die Legende dazu entspricht derjenigen aus Abbildung 6.25.

## 6.8 Beispiel 7: Rißfortschritt bei kreisrunder Delamination einer Platte

An der in Abbildung 6.27 dargestellten Rechteckplatte soll ein Delaminationsfortschritt berechnet werden. Die Geometrie ist ebenfalls Abbildung 6.27 zu entnehmen. Die Platte besteht aus 16 Schichten der Dicke  $h_{Schicht} = 0.12\text{ mm}$  und der Schichtenfolge  $[0^\circ/0^\circ/ + 45^\circ/0^\circ/0^\circ/ - 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_S$ . Zwischen Schicht 14 und 15 von unteren Rand aus gerechnet, befindet sich in der Mitte der Probe eine kreisrunde Delamination, siehe Abbildung 6.27b. Da in dieser Analyse das prinzipielle Verhalten eines Delaminationswachstums untersucht werden soll, wird nur 1/4 der Probe diskretisiert. In den Arbeiten von COCHELIN ET AL. [8] und GRUTTMANN [17], die dieses System bei stationärer Delamination untersuchten, wurde diese Vereinfachung ebenfalls vorgenommen. Da die vorhandenen Faserschichten nicht nur parallel oder senkrecht zu den Symmetrieachsen verlaufen, sondern auch im  $45^\circ$ -Winkel, ist diese Reduktion auf 1/4 des Systems jedoch ungültig, d.h. daß die berechneten Ergebnisse nicht in jedem Fall auf das Gesamtsystem zu übertragen sind.

In Abbildung 6.27c sind weitere Daten angegeben.

Die Materialdaten und Netzabmessungen lauten

$$\begin{array}{ll}
 E_1 = 135000 \text{ MPa} & G_{12} = 5150 \text{ MPa} \\
 E_2 = 85000 \text{ MPa} & G_{23} = 5150 \text{ MPa} \\
 \nu_{12} = 0.317 & \\
 L_1 = 2.5 \text{ mm} & L_2 = 2.5 \text{ mm} \\
 L_3 = 2.5 \text{ mm} & L_4 = 4.5 \text{ mm} \\
 n_1 = 4 \text{ mm} & n_2 = 4 \text{ mm} \\
 n_3 = 25 \text{ mm} & n_4 = 4 \text{ mm} \\
 h_t = 0.005 \text{ mm} & F = 30 \text{ N/mm} \\
 \eta_{Start} = 10^{-3} \text{ MPa s} & Z_{inf} = 10^{-6} \text{ MPa} \\
 Z_0 = 51.7 \text{ MPa} & R_0 = 91.0 \text{ MPa}
 \end{array}$$

In Abbildung 6.28 ist die Finite-Elemente-Diskretisierung über die Dicke der Probe in den verschiedenen Bereichen dargestellt. Zur Berechnung fortschreitender

Delamination ist zwischen den Schichten 14 und 15 eine zusätzliche Elementschicht (Interface-Schicht) der Höhe  $h_t$  im kreisringförmigen Bereich  $L_3$  eingebaut. Die dort eingesetzten Elemente verfügen über den in Abschnitt 6.4 vorgestellten Delaminationsalgorithmus. Im kreisringförmigen Bereich  $L_1$  und  $L_2$  sind an dieser Stelle keine Elemente vorhanden, da dort die eingeprägte Delamination vorgegeben ist. Im restlichen Probenbereich ( $L_4$ ) sind anstelle der Delaminationselemente normale Volumenelemente mit gleichen Ansätzen wie im Restquerschnitt vorhanden. In allen Schichten wurden die Volumenelemente mit fünf EAS-Parametern und den Ansätzen nach Bathe/Dvorkin und Betsch/Stein ergänzt. Insgesamt wird die Probe mit vier Elementen über die Dicke (plus der Interface-Schicht) diskretisiert. Die untere und die obere Elementschicht beinhaltet je zwei Schichten mit einem Faserwinkel von  $0^\circ$ . Mit den beiden mittleren Elementschichten werden je sechs Faserschichten erfaßt. Diese Schichtung wird innerhalb des Elementes mittels des doppelt isoparametrischen Konzeptes nach berücksichtigt.

Die Berechnung wurde bis auf die Delaminationselemente geometrisch nichtlinear durchgeführt.

An den umlaufenden Rändern ist die Platte in vertikaler Richtung in Probenmitte gelagert ( $u_z = 0$ ). Die eingeprägten Druckkräfte werden nach Abbildung 6.28 über sehr steife Randelemente übertragen. Auf diese Art wird eine starre Lasteinleitungsplatte modelliert, welche sich um das vertikale Auflager drehen kann ( $y = \pm 26$ ).

Zunächst wird die Platte ohne eingeprägte Delamination berechnet. Dabei wird – nur für diesen Spezialfall – im gesamten System auf eine Zusatzelementreihe zwischen den Schichten 14 und 15 verzichtet. In den Abbildung 6.29 bis 6.31 ist diese Lösung mit "perfekt" gekennzeichnet. Bei einem Lastfaktor von  $\lambda = 50.3$  ist die kritische Last des Gesamtsystems erreicht. Durch eine Störung des Systems mit dem zugehörigen ersten Eigenvektor verzweigt die Lastverformungskurve in einen stabilen sekundären Pfad. Am System mit eingepprägter Delamination ohne Delaminations-Wachstum (in den Abbildungen mit "ohne Del.-W." gekennzeichnet) beulen zunächst die beiden Schichten oberhalb des delaminierten Bereichs. Aufgrund der Unsymmetrie über die Probendicke (Interface-Elementschicht) entsteht kein klassischer Stabilitätspunkt bei dem die oberen Schichten beulen. Die beiden Schichten oberhalb der eingepprägten Delamination beginnen schon bei der ersten Laststeigerung, nach oben auszuweichen. Dabei entsteht in diesem Bereich bei weiterer Lasterhöhung ein typisches Beulmuster. Die Absenkung des Punktes  $B$  ist durch die eingepprägte Delamination größer als beim nichtdelaminierten System. Bei genügender Laststeigerung ( $\lambda > 60$ ), nähern sich die beiden Lastverformungskurven immer mehr an, d.h. daß mit zunehmender Last der Einfluß der Delamination abnimmt.



### 6.8.1 Parameterstudien

In den Abbildungen 6.29 bis 6.31 sind die Einflüsse verschiedener Parameter auf den Delaminationsfortschritt dargestellt. Voruntersuchungen zeigten, daß die Verwendung von EAS-Ansätzen, den Ansätzen von Bathe/Dvorkin und Betsch/Stein innerhalb der Delaminationselemente das lokale und das globale Systemverhalten nicht beeinflussen. Deshalb wurde in allen Untersuchungen auf diese Elementweiterungen verzichtet (nur in der Interface-Schicht!). Die die Delamination beschreibenden Materialparameter  $Z_0 = \hat{\sigma}_{33}$  und  $R_0 = \hat{\sigma}_{12}$  basieren auf realen Werten für einen Graphit/Epoxid Faserverbundwerkstoff AS/3501, TSAI [43], die kritische Energiefreisetzungsrate  $G_c$  entspricht in ihrer Größenordnung den in anderen realen Versuchen ermittelten Werten.

In Abbildung 6.29 ist zu erkennen, daß ein Zunehmen des Entfestigungsparameters  $\mu$  (indirekt proportional zur kritischen Energiefreisetzungsrate), ein schnelleres Delaminationswachstum verursacht. Die Lastverformungskurven verlaufen unterhalb der Kurve, welche bei stationärer Delamination entsteht. Je größer der Entfestigungsgrad  $\mu$ , desto früher weichen die Kurven ab. Da das Delaminationswachstum auf einen Kreisring der Breite  $L_3 = 2.5 \text{ mm}$  begrenzt ist, nähern sich die Kurven mit zunehmender Last einander an.

Eine Berechnung des Delaminationsfortschrittes ist ohne die in Abschnitt 6.4 dargestellte Regularisierung in diesem Beispiel nicht möglich. Wegen der Regularisierung beeinflußt die gewählte Zeitschrittweite den Delaminationsfortschritt. Die Zeitschrittweite ist im verwendeten Finite-Elemente-Programm *FEAP* gekoppelt mit dem Lastinkrement  $\Delta\lambda$ . In Abbildung 6.30 ist zu erkennen, daß eine reduzierte Zeit- (Last-) Schrittweite ein schnelleres Delaminationswachstum verursacht. Ergänzende Untersuchungen deuten darauf hin, daß bei weiterer Reduzierung der Zeit-Schrittweite  $\Delta t$  die Lastverformungskurve gegen eine endgültige Lösung konvergiert.

Die Interface-Schicht befindet sich zwischen zwei Schichten verschiedener Faserorientierung. Somit stellt sich die Frage nach der Faserorientierung innerhalb der Interface-Schicht. In Abbildung 6.31 sind Berechnungen mit Faserwinkeln zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  dargestellt. Während zwischen  $0^\circ$  und  $60^\circ$  ein zunehmendem Faserwinkel ein schnelleres Delaminationswachstum verursacht, reduziert sich das Delaminationswachstum für Faserwinkel zwischen  $60^\circ$  und  $90^\circ$ . Liegt der endgültige Delaminationszustand vor, unterscheiden sich die weiteren Ergebnisse nicht mehr. Die Reihenfolge der delaminierende Elemente wird durch den Faserwinkel kaum beeinflusst.

In Abbildung 6.32 ist die Interface-Schicht zu unterschiedlichen Lastzuständen dargestellt. Zuerst tritt die Delamination an der Stelle ( $x = 0 \text{ mm}, y = 5 \text{ mm}$ )

auf. Die Delaminationsfront wandert am Rand der Interface-Schicht entlang, bis an der Stelle  $(x = 5 \text{ mm}, y = 0 \text{ mm})$  Delamination einsetzt. D.h. daß an zwei unterschiedlichen Punkten die Delamination einsetzt. Dann wächst die Delamination in Richtung des seitlichen Randes senkrecht zur Belastungsrichtung. Da die Interface-Schicht auf diesen Bereich beschränkt ist, nimmt die Delamination ab einer Belastung  $\lambda > 50$  nicht weiter zu.

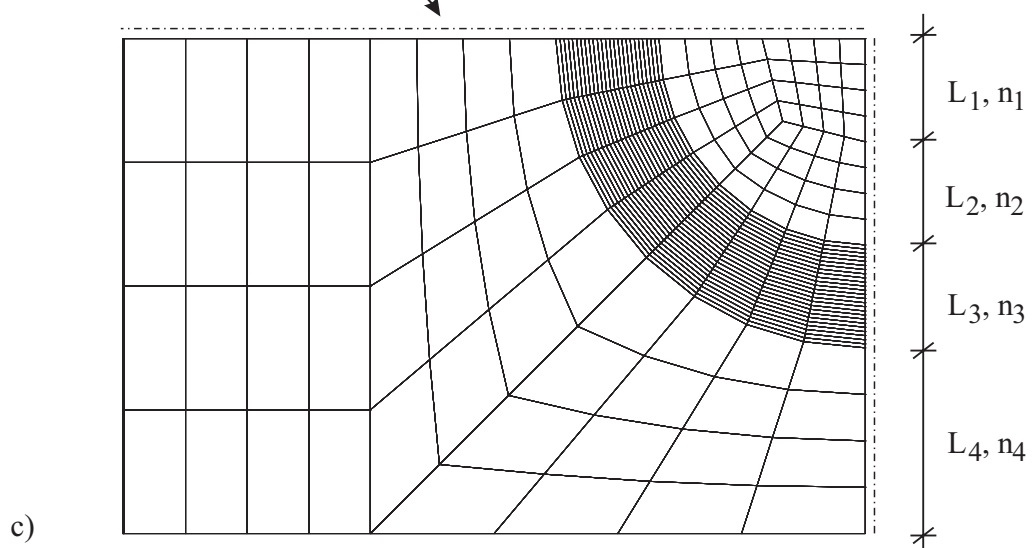
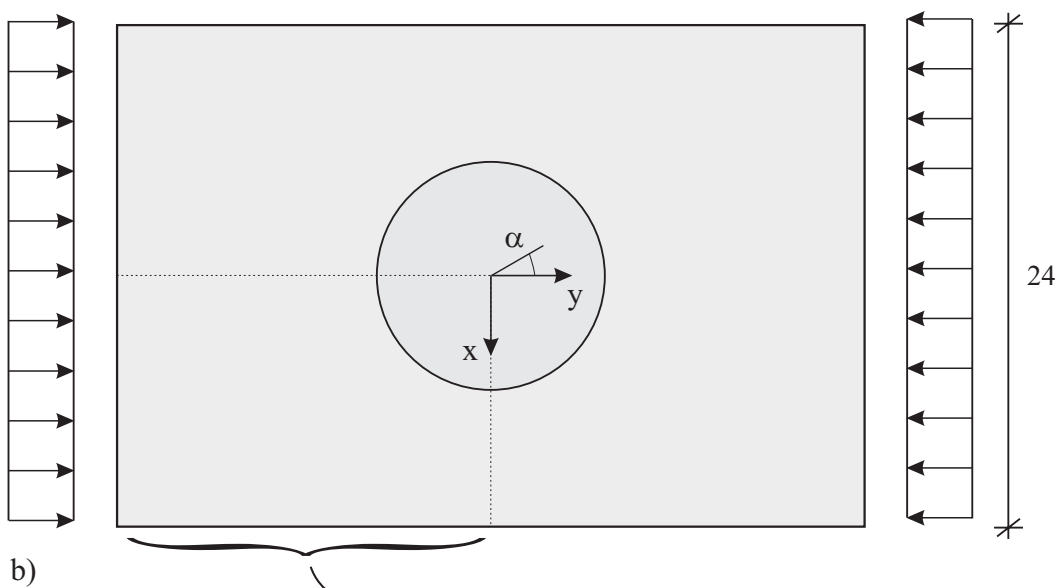
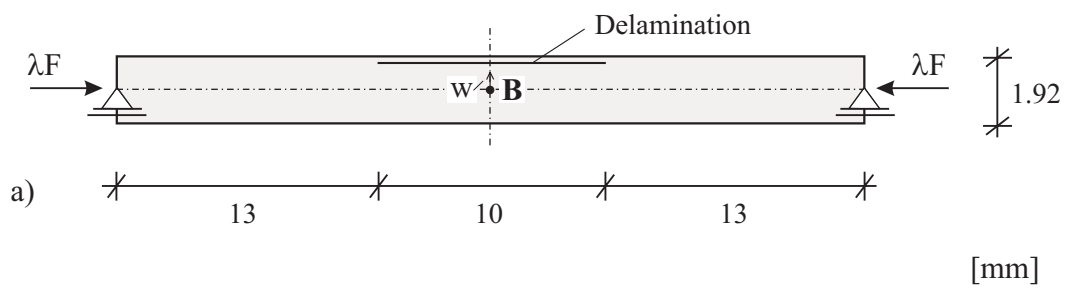


Abbildung 6.27: Platte mit kreisförmiger Delamination: a) Ansicht b) Draufsicht c) Finite-Elemente Netz

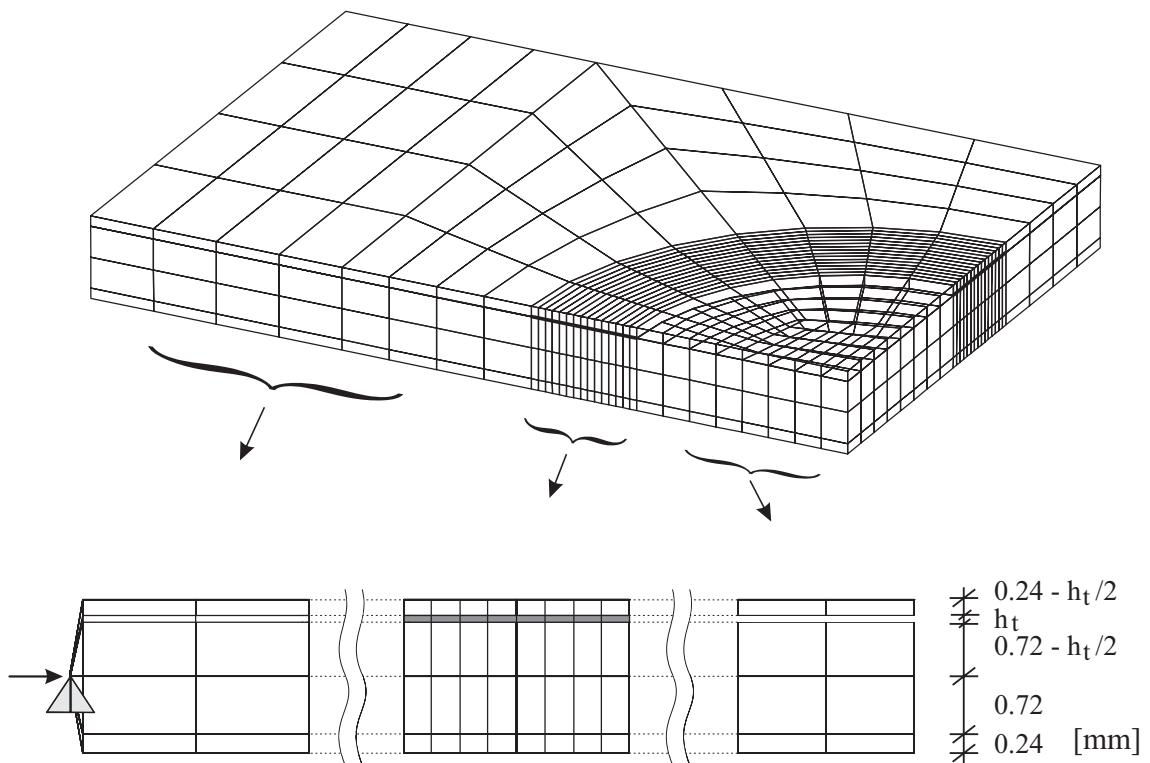


Abbildung 6.28: Modellierung der Interface-Schicht in drei verschiedenen Bereichen

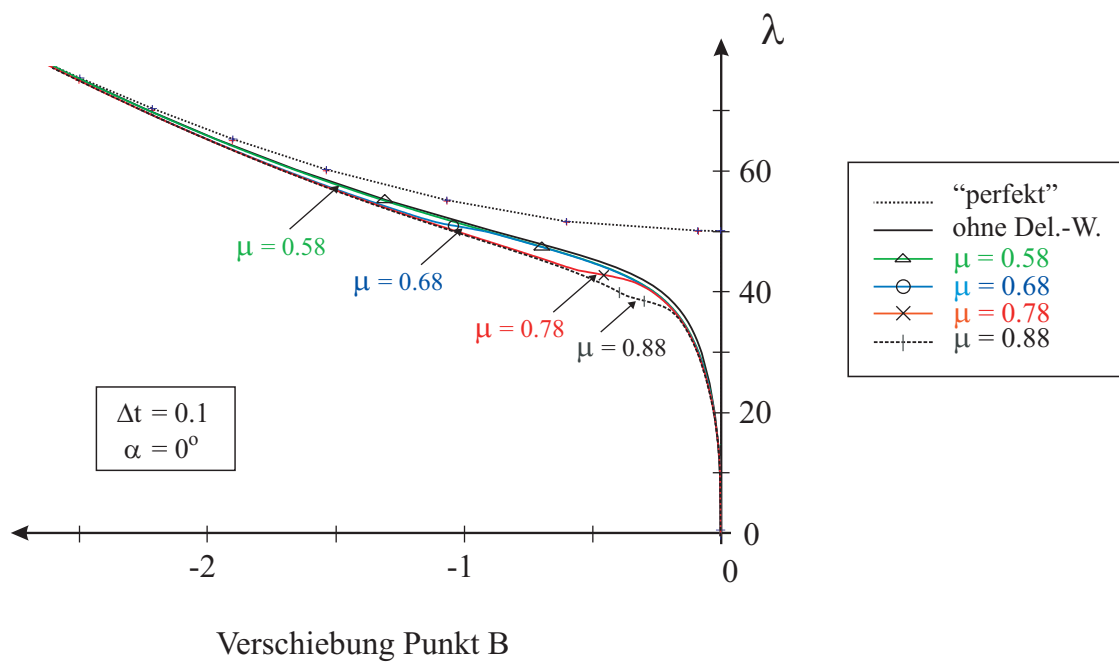


Abbildung 6.29: Lastverschiebungskurven des Punktes  $B$  als Funktion des Entfestigungsparameters  $\mu$

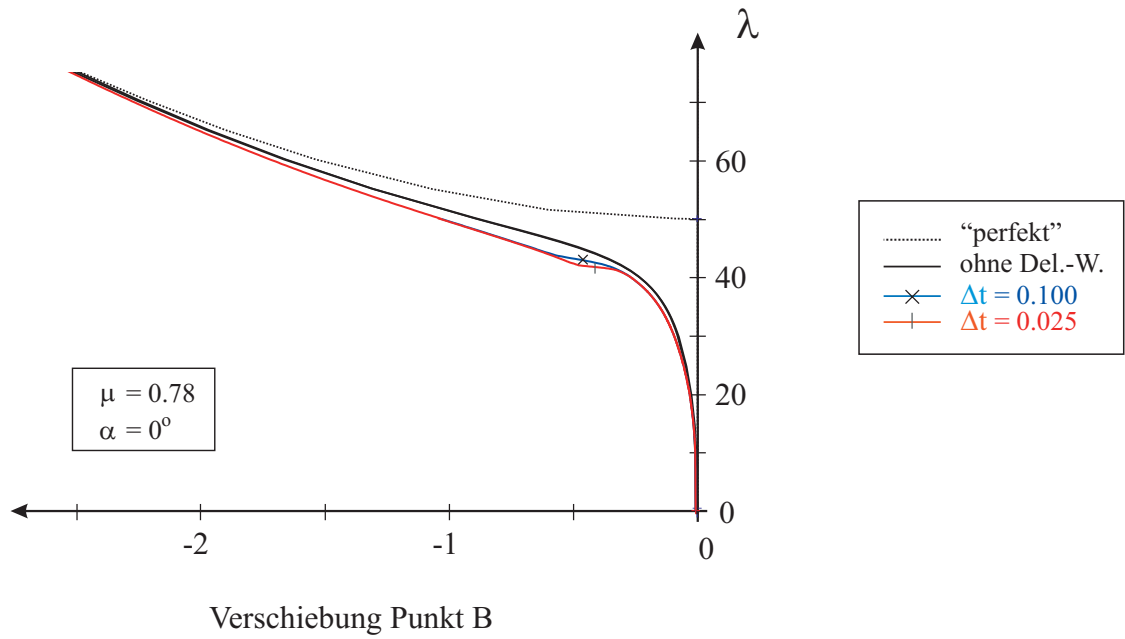


Abbildung 6.30: Lastverschiebungskurven des Punktes  $B$  als Funktion der Zeitschrittweite  $\Delta t$

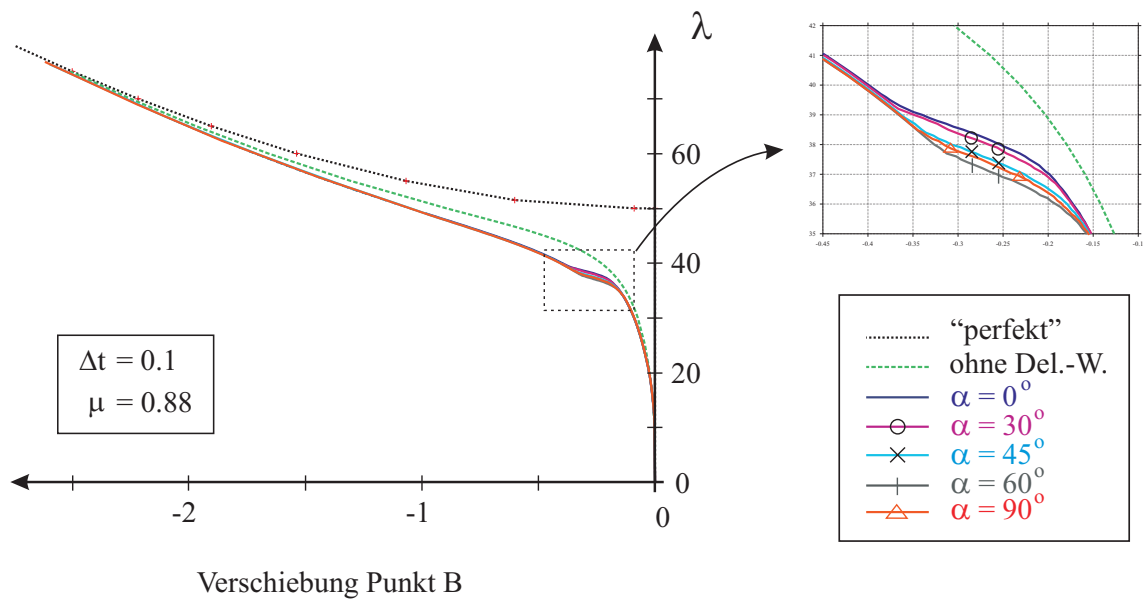


Abbildung 6.31: Lastverschiebungskurven des Punktes  $B$  als Funktion des Faserwinkels  $\alpha$  der Interface-Schicht

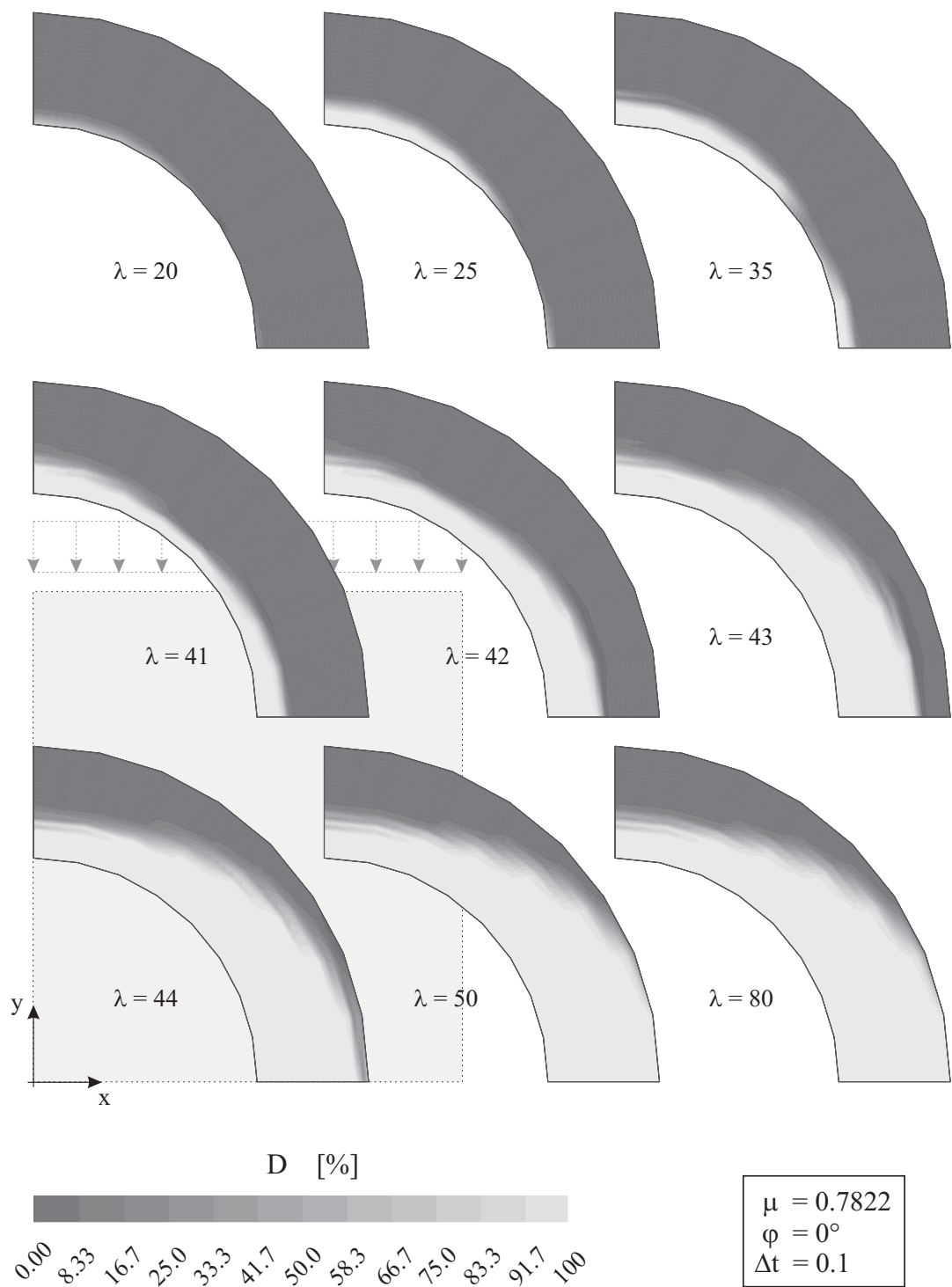


Abbildung 6.32: Delaminationsfortschritt der Interface-Zone bei verschiedenen Laststufen

## 7 Explizites Verfahren

Das vorgestellte Delaminationsmodell benötigt zur robusten FE-Simulation eine viskoplastische Regularisierung. Um die gewonnenen Ergebnisse auf der Basis der kritischen Energiefreisetzungsrates nicht zu verfälschen, ist eine große Zahl von Zeitschritten zur Berechnung notwendig. Sehr kleine Zeitschritte werden auch bei expliziten Zeitintegrationsverfahren in der Dynamik bei quasistatischer Belastung benötigt. Deswegen wurde im Rahmen des Forschungsprojektes untersucht, inwieweit sich beide Verfahren miteinander koppeln lassen. Zunächst werden Grundgleichungen eines expliziten Integrationsverfahrens auf der Basis des Newmark-Verfahrens dargestellt.

### 7.1 Newmark-Verfahren

Als Grundlage dient die diskretisierte Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}^{int} = \mathbf{P} , \quad (7.1)$$

mit der Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$ , dem Vektor der inneren Knotenkräfte  $\mathbf{F}^{int}$  und dem Vektor der äußeren Lasten  $\mathbf{P}$ . Die Basisgleichung zur Berechnung des zeitlichen Verlaufs der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{u}}$  lautet

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\gamma\Delta t} = (1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}_t + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} , \quad (7.2)$$

und zur Integration der Verschiebungen gilt der Ansatz

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+2\beta\Delta t} = (1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_t + 2\beta \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} . \quad (7.3)$$

Eine Integration von (7.2) und (7.3) liefert die gesuchten Verschiebungen und Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= (1 - \gamma)\dot{\mathbf{u}}_t\Delta t + \gamma \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\Delta t + \dot{\mathbf{u}}_t \\ \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= (1 - 2\beta)\dot{\mathbf{u}}_t\Delta t + 2\beta \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\Delta t + \dot{\mathbf{u}}_t \\ \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{\mathbf{u}}_t\Delta t^2 + \beta \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\Delta t^2 + \dot{\mathbf{u}}_t\Delta t + \mathbf{u}_t \end{aligned} \quad (7.4)$$

Über die Wahl der Parameter  $\beta$  und  $\gamma$  wird die Art des Integrationsverfahrens definiert. Bei einer impliziten Zeitintegration ( $\beta \neq 0$ ) wird das Gleichgewicht am Ende des Zeitschritts erfüllt. Somit kann stets eine Lösung gefunden werden, die aber u.U. falsch sein kann. Üblicherweise werden  $\beta = 0.25$  und  $\gamma = 0.50$  eingesetzt.

## 7.2 Explizites Integrationsverfahren

Bei der Parameterwahl  $\beta = 0$  und  $\gamma = 0.50$  werden die gesuchten Verschiebungen aus bekannten Werten zum Zeitpunkt  $t$  ermittelt. Es entsteht das sog. zentrale Differenzenverfahren als Sonderfall des Newmark-Verfahrens. Eingesetzt in Gleichung (7.2) bedeutet dies

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}_t\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\Delta t + \dot{\mathbf{u}}_t \\ \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}_t\Delta t^2 + \dot{\mathbf{u}}_t\Delta t + \mathbf{u}_t .\end{aligned}\tag{7.5}$$

Für die gesuchten Geschwindigkeiten und Verschiebungen gilt somit

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\Delta t + \overbrace{\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}_t\Delta t + \dot{\mathbf{u}}_t}^{\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}^0} \\ \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \underbrace{\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}_t\Delta t^2 + \dot{\mathbf{u}}_t\Delta t + \mathbf{u}_t}_{\mathbf{u}_{t+\Delta t}^0} .\end{aligned}\tag{7.6}$$

Aus Gleichung (7.6) geht hervor, daß sich die gesuchten Verschiebungen direkt, d.h. ohne Iteration, berechnen lassen.

Für Gleichung (7.1) gilt zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  die Differentialgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{int} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} .\tag{7.7}$$

Einsetzen von Gleichung (7.4<sub>1</sub>) führt zu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\left(\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\Delta t + \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}^0\right) + \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{int} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} .\tag{7.8}$$

Umgestellt lautet Gleichung (7.8)

$$\left(\mathbf{M} + \frac{1}{2}\mathbf{C}\right)\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{int} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}^0 ,\tag{7.9}$$

und somit ist  $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$  ohne Iteration sofort berechenbar. Für die gesuchten Geschwindigkeiten gilt dann

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}^0 + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\Delta t .\tag{7.10}$$

Kann die Dämpfung  $\mathbf{C}$  vernachlässigt werden, gilt für Gleichung (7.7)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{int} .\tag{7.11}$$



Hat zusätzlich die Massenmatrix Diagonalform ( $\mathbf{M} = \text{diag}\mathbf{M}$ ), vereinfacht sich die Lösung schließlich für jeden Freiheitsgrad  $k$  zu

$$\ddot{u}_{t+\Delta t}^k = \frac{P_{t+\Delta t}^k - F_{t+\Delta t}^{int\ k}}{M^{kk}}. \quad (7.12)$$

Diese Formulierung bietet Vorteile, die sich wesentlich auf eine Verkürzung der Rechenzeit auswirken:

- Kein aufwendiges Lösen eines Gleichungssystems notwendig.
- Die gesuchten Werte können durch einfache Multiplikation ermittelt werden.
- Steifigkeitsmatrizen werden nicht benötigt.
- Direkte Lösung ohne Iteration.

Nachteilig ist einzig die vorgegebene größte Zeitschrittweite

$$\Delta t_{krit} \approx \frac{L_{min}}{\sqrt{E/\rho}}, \quad (7.13)$$

mit der die Berechnungen durchgeführt werden müssen, um eine numerisch "stabile Berechnung" des Systems sowie nur geringe Abweichungen vom Gleichgewichtszustand zu gewährleisten. In Gleichung (7.13) bezeichnet  $L_{min}$  die kleinsten Elementabmessungen,  $\rho$  die Massendichte und  $E$  das maßgebende Elastizitätsmodul.

### 7.3 Quasi-statische Berechnungen

Mit kleiner werdender Dichte  $\rho$  nimmt der Einfluß der Masse auf die Berechnungen ab. Somit kann das dynamische Verfahren zur quasi-statischen Berechnung von Strukturen eingesetzt werden. Zur Berechnung fortschreitender Delaminationen ergibt sich zudem der große Vorteil, daß die elasto-plastische Tangente des Systems nicht in die Lösungsalgorithmen eingeht. D.h. daß der Verlust der positiven Definitheit der Tangente irrelevant ist. Es ist jedoch zu beachten, daß mit kleiner werdender Dichte, die kritische Zeitschrittweite ebenso abnimmt, wie mit der kleinsten vorhandenen Elementlänge  $L_{min}$ .

Nachfolgend wird ein Beispiel zur Stabilitätsberechnung einer Faserverbundplatte dargestellt.

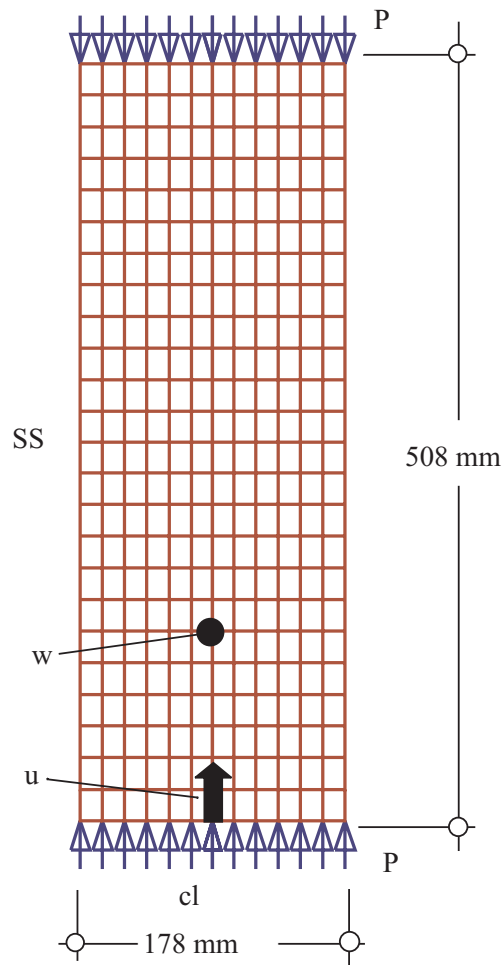


Abbildung 7.1: System und Materialdaten

## 7.4 Beispiel 8: Faserverbundplatte und Längsdruck

Untersucht wird das in Abbildung 7.1 dargestellte System.

Die Materialparameter (T300/N5208) sind nachfolgend angegeben.

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 131 \text{ GPa} & G_{12} &= 6.4 \text{ GPa} \\
 E_2 &= 13.0 \text{ GPa} & G_{23} &= 6.4 \text{ GPa} \\
 \nu_{12} &= 0.38
 \end{aligned}$$

Die Probe ist aus 24 Schichten der Dicke  $h_L = 0.14 \text{ mm}$  aufgebaut. Die Faserorientierungen lauten  $[\pm 45/0_2/\pm 45/0_2/\pm 45/0/90]_s$ . Die Platte ist an den Längsrändern links und rechts gelenkig gelagert und oben und unten längsverschieblich eingespannt.

Das System wird zunächst mit dem Bogenlängenverfahren analysiert. Ein erster Stabilitätspunkt erscheint als Verzweigungspunkt bei einer Last  $P = 22.7\text{kN/mm}$ . Ein Aufbringen der ersten Eigenform, siehe Abbildung führt dann zum Abweichen vom "perfekten" Pfad, siehe Abbildung 7.2.

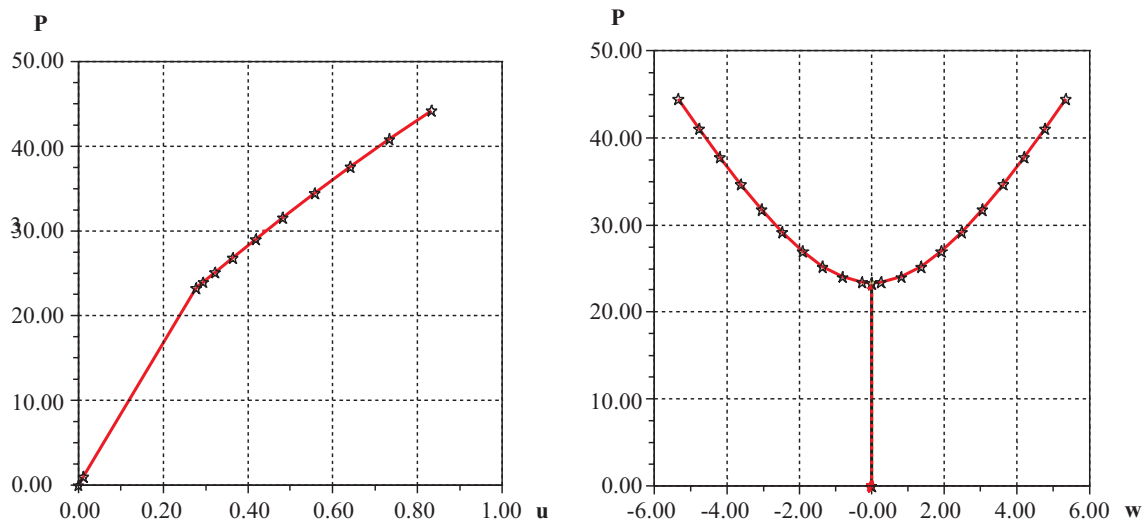


Abbildung 7.2: Lastverformungsverhalten:  $P[\text{kN/mm}]$  über a) Verschiebung  $u[\text{mm}]$  b) Verschiebung  $w[\text{mm}]$

In den Abbildung 7.4 bis 7.7 sind verschiedene Lastverformungskurven gegenübergestellt. Abbildung 7.4 zeigt zunächst eine Lösung, die mit dem Bogenlängenverfahren berechnet wurde. Dazu wurde am ersten Verzweigungspunkt eine kleine Imperfektion aufgebracht. Mit dieser Imperfektion ( $i = 0.01$ ) wird bei lastgesteuerter Rechnung das System von Anfang an gestört, so daß die Lastverformungskurve von Beginn an vom "perfekten" Pfad abweicht. Die beiden Berechnungen dienen in der Folge als Ideallösung.

In Abbildung 7.5 sind die Ergebnisse zweier dynamischer Analysen mitangegeben. In beiden Fällen wurde die Berechnung zunächst bis zur Last  $P = 11\text{kN/mm}$  statisch durchgeführt. Die dann folgenden dynamischen Berechnungen schwingen um die statische Lösung. Das Newmark-Verfahren liefert dabei die gleichen Ergebnisse wie das vorgestellte explizite Integrationsverfahren.

In den Abbildungen 7.6 und 7.7 sind die Ergebnisse von Berechnungen dargestellt, bei denen die Dichte des Materials um den Faktor 100 reduziert wurde. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Schwingungsamplitude mit abnehmender Dichte wesentlich kleiner wird. Im Detailausschnitt (7.7) ist die Schwingung selber jedoch noch gut zu erkennen. Somit wird die Annahme bestätigt, daß quasistatische Lösungen bei dynamischer Rechnung mit genügend kleinen Materialdichten gegen die statische Lösung konvergieren.

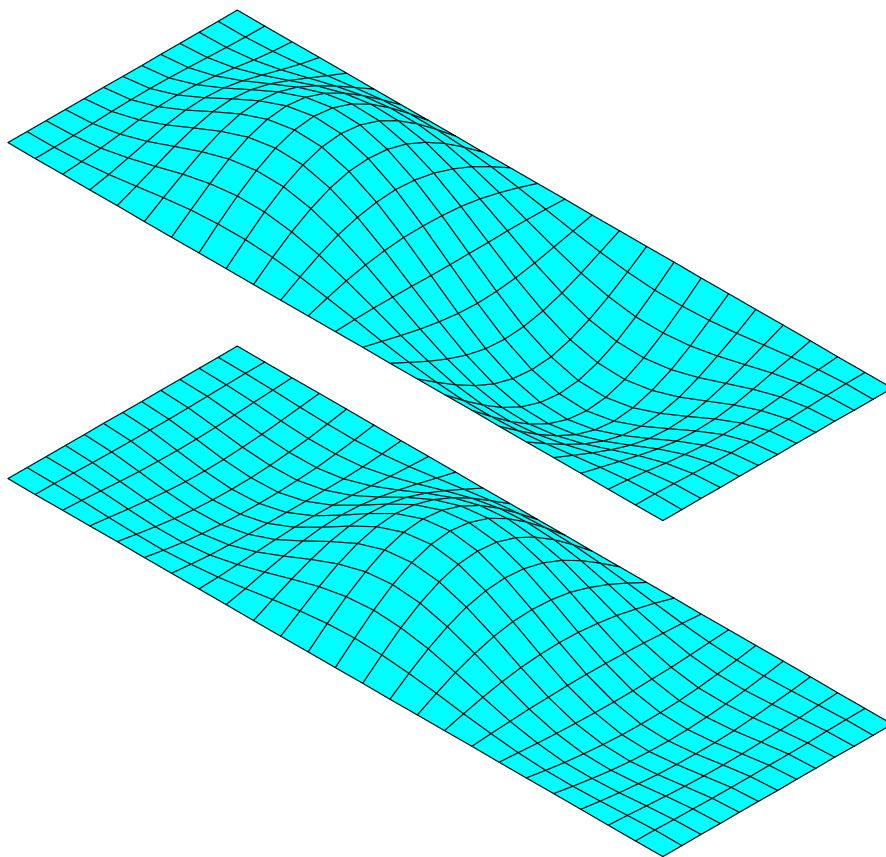


Abbildung 7.3: Erster und zweiter Eigenvektor

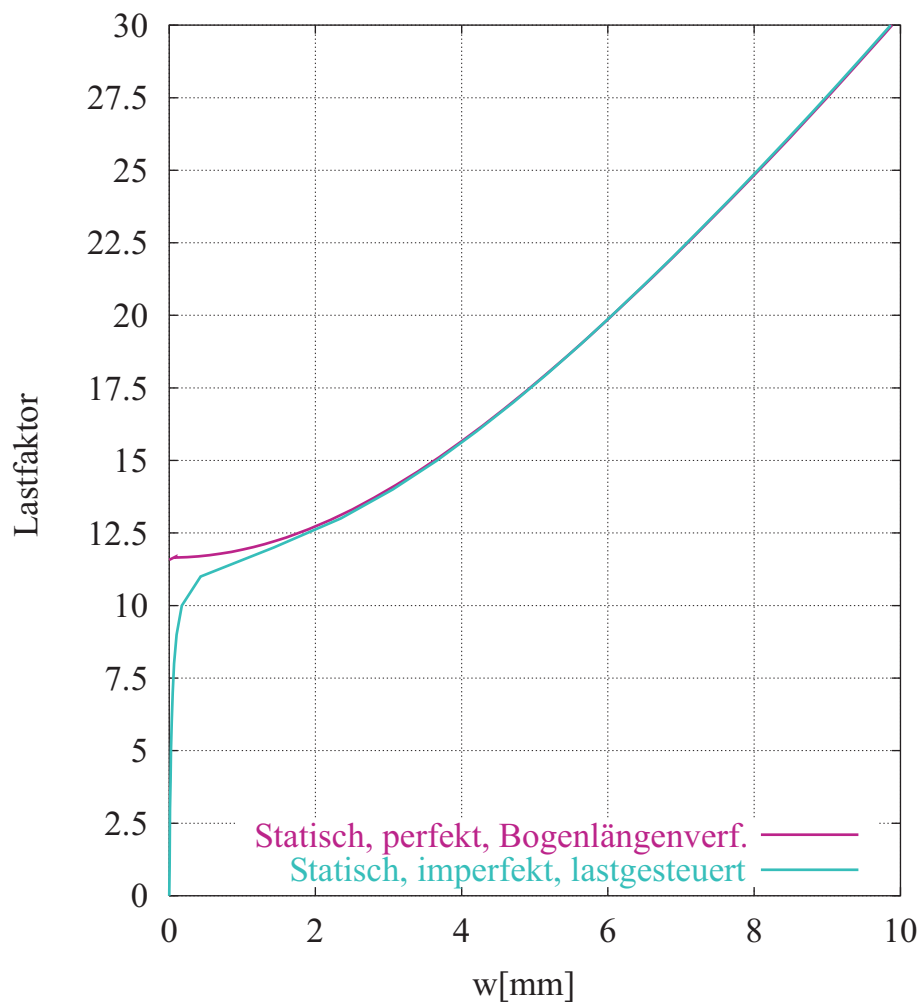


Abbildung 7.4: Lastverformungskurve  $P[kN/mm]$  über  $w[mm]$  an der Stelle ( $x = 0, y = h/4$ )

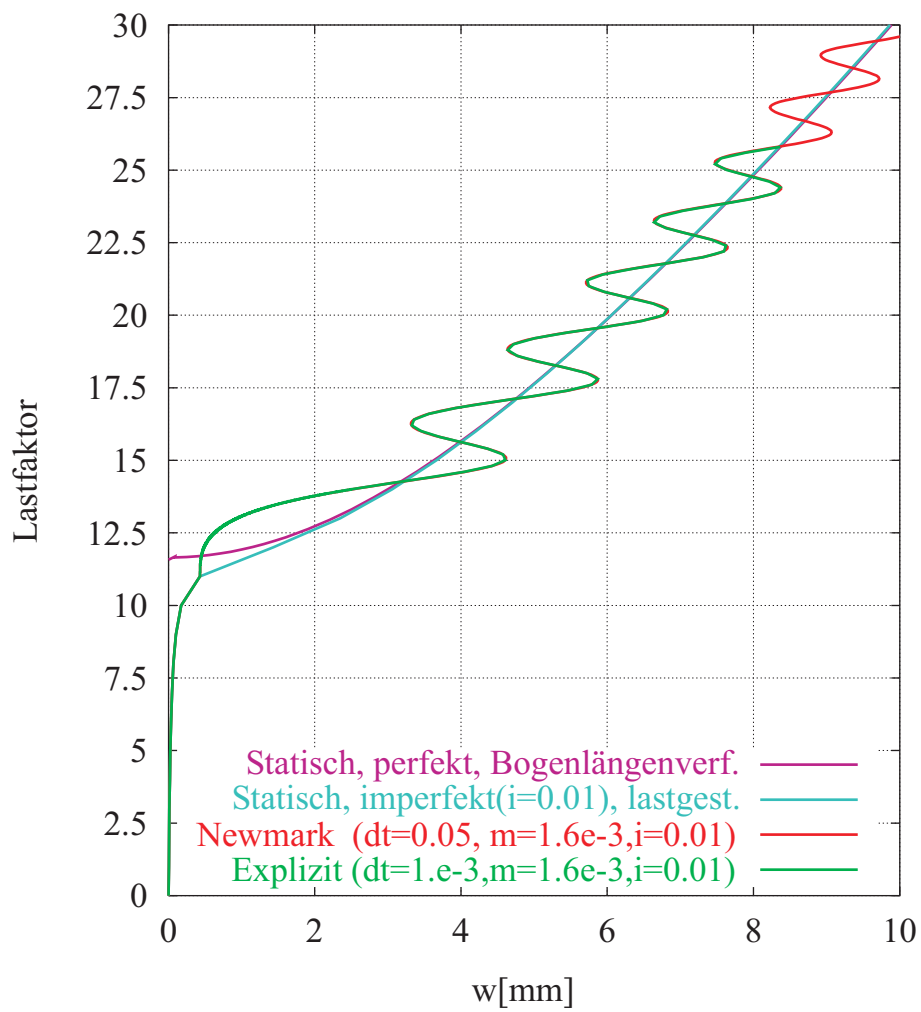


Abbildung 7.5: Lastverformungskurve  $P[kN/mm]$  über  $w[mm]$  an der Stelle ( $x = 0, y = h/4$ )

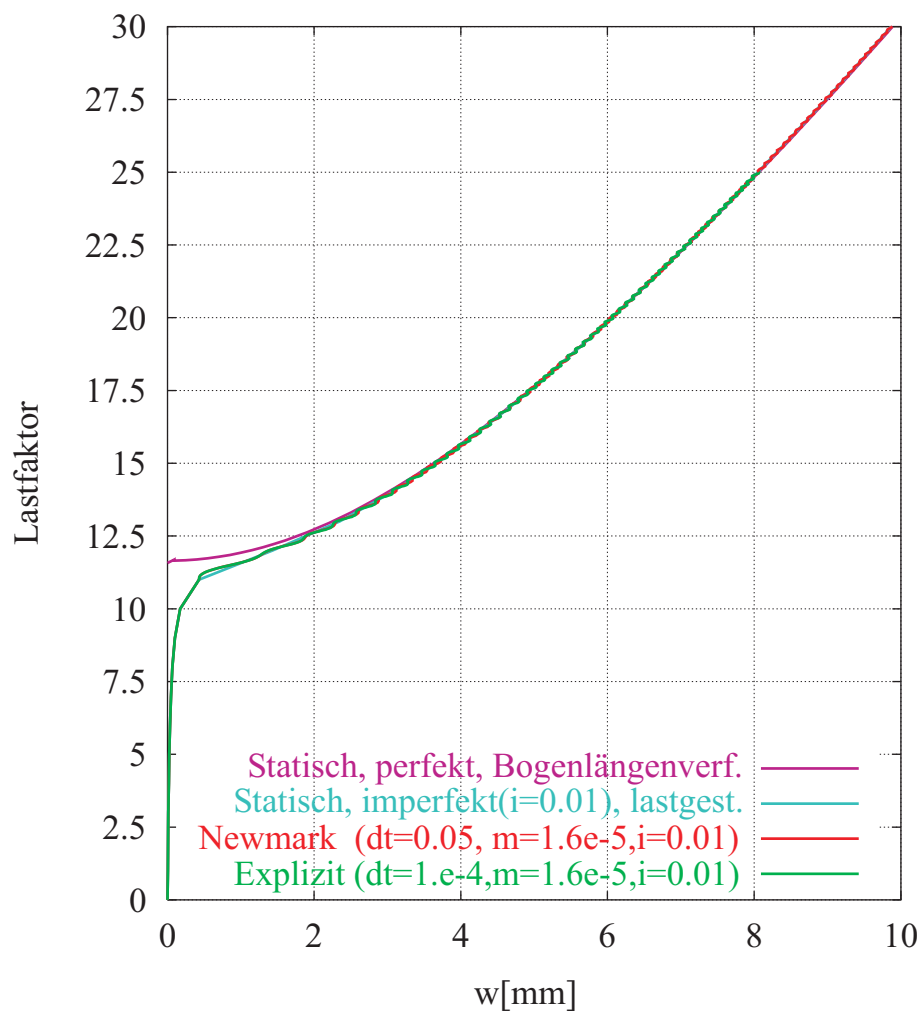


Abbildung 7.6: Lastverformungskurve  $P[kN/mm]$  über  $w[mm]$  an der Stelle ( $x = 0, y = h/4$ )

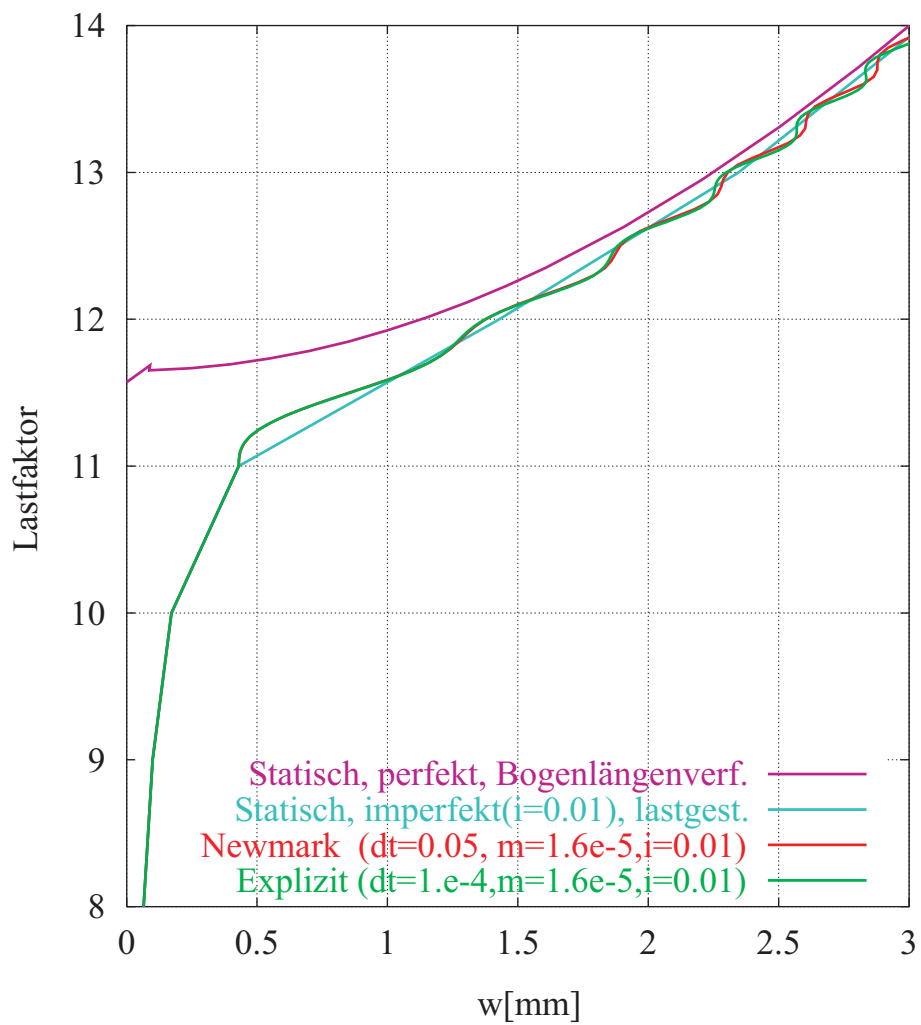


Abbildung 7.7: Lastverformungskurve  $P[kN/mm]$  über  $w[mm]$  an der Stelle ( $x = 0, y = h/4$ )



## 7.5 Beispiel 9: Delaminationsalgorithmus mit quasi-statischem Verfahren anhand eines Zugversuchs

Elastische Analysen von Faserverbundstrukturen können mittels quasi-statischer Methoden sehr gut mit einem expliziten Verfahren berechnet werden. Nachfolgend wird eine einfache Zugprobe aus drei Elementen untersucht, wobei im mittleren Element der Delaminationsalgorithmus aktiviert ist. System- und Materialdaten sind in Abbildung 7.8 dargestellt.

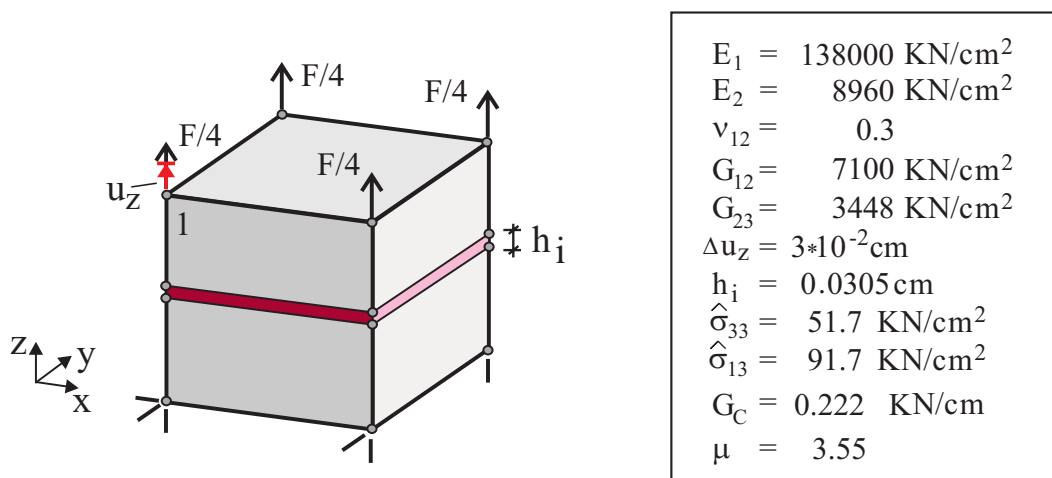


Abbildung 7.8: Zugprobe mit drei Elementen

In Abbildung 7.9 sind die Ergebnisse einer statischen Analyse den Werten aus expliziten dynamischen Berechnungen gegenübergestellt. Es ist zu erkennen, daß das typische Verhalten bei Entfestigung auch mittels eines expliziten Integrationsverfahrens erfaßt werden kann. Mit abnehmender Dichte  $\rho$  nähert sich die Lastverformungskurve der Kurve aus der statischen Methode an. Die Zeitschrittweite  $\Delta t$ , mit der stabile Berechnungen möglich sind, nimmt mit abnehmender Dichte ebenfalls ab.

## 7.6 Abschließende Bemerkungen zum Einsatz des expliziten Verfahrens

Grundsätzlich kann das dynamische und statische Verhalten von Faserverbundstrukturen mittels expliziter Integrationsverfahren untersucht werden. Hohe Steifigkeiten, verbunden mit sehr dünnen Strukturen führen jedoch dazu, daß die kritischen Zeitschrittweite  $\Delta t_{krit}$ , siehe Gleichung (7.13), sehr klein wird. Dies ist insbesondere bei Verwendung von Volumenelementen der Fall, da dort als kleinste

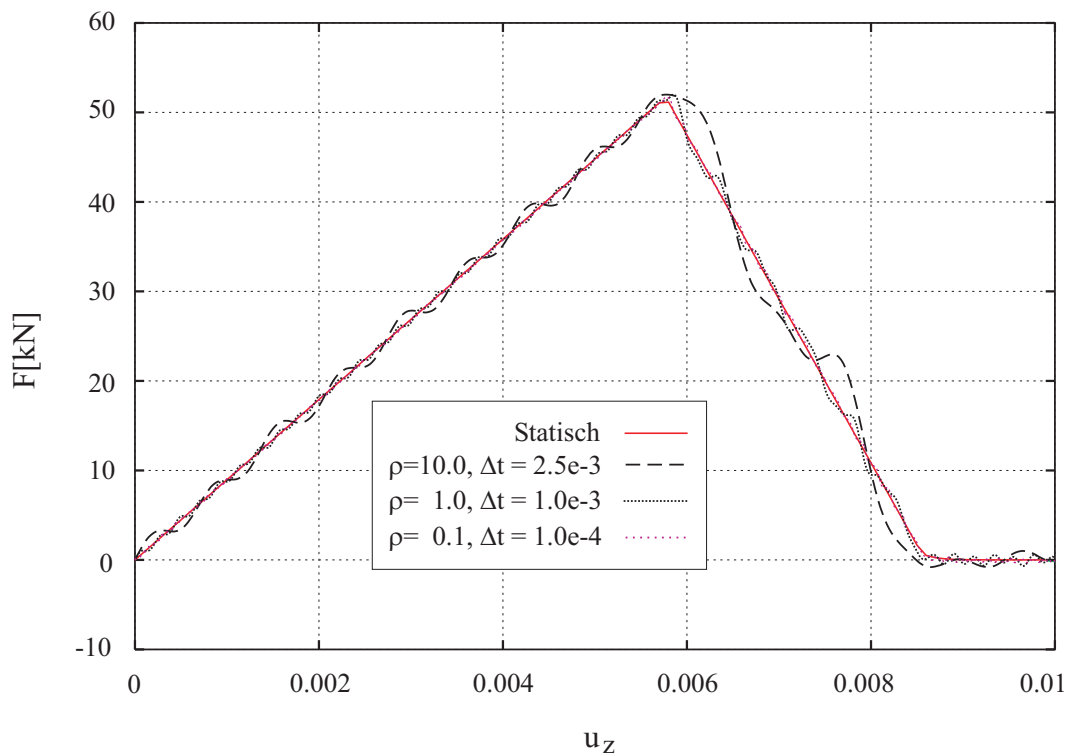


Abbildung 7.9: Lastverformungskurve des Knotens 1

Längenabmessung  $L_{min}$  die kleinste Elementdicke eingeht. Bei Delaminationsberechnungen kann diese um einen Faktor 100 kleiner sein, als eine Faserschichtdicke. Zur Berechnung lokaler Effekte kann dies auch wegen der erforderlichen großen FE-Netze die Effizienz des Verfahrens sehr stark beeinträchtigen. Genauere Untersuchungen, die im Rahmen des Forschungsprojektes bisher nicht möglich waren, sollten aber gerade in dieser Hinsicht noch bessere und eindeutige Aussagen ermöglichen.

Die grundsätzlichen Vorteile des expliziten Integrationsverfahrens gelten natürlich auch bei der Berechnung von Faserverbundstrukturen, siehe Kapitel 7.2.

## 8 Modellierung mit Übergangselementen

Der Einsatz von Übergangselementen zur 2D/3D-Kopplung ermöglicht eine problemangepaßte Modellierung von Faserverbundkonstruktionen. Es ist möglich, sowohl Schalen- als auch Volumenelemente innerhalb eines FE-Modells einzusetzen, um somit den Rechenaufwand zu reduzieren. In Abhängigkeit der Beanspruchung und Anforderung an die Berechnungsergebnisse kann zwischen zwei und dreidimensionaler Modellierung gewechselt werden. Im Rahmen des Forschungsprojektes wurden dazu die Grundlagen entwickelt, sodaß die Kopplung zwischen Schalen- und Volumenmodellen ausgeführt werden kann. Bei der Entwicklung des Verfahrens soll dem universellen und zugleich robusten Einsatz große Bedeutung zukommen. Damit hat auch diese Formulierung im wesentlichen die kinematischen Beziehungen zwischen den angrenzenden Schichten umzusetzen. Gleichzeitig müssen unvermeidliche Störungen im Bereich des Modellübergangs minimiert werden. Die Kopplung ist unabhängig von der jeweiligen Geometrie und von der am System angreifenden statischen Belastung. Dem heutigen Stand entsprechend werden sämtliche Formulierungen vollständig nichtlinear beschrieben. Im Hinblick auf die Rotationseigenschaften bedeutet dies, daß die Übergangselemente endliche Drehungen exakt abbilden müssen.

In der Folge werden die Formulierungen von Übergangselementen zwischen Schalen- und Volumenelementen kurz vorgestellt. Die Herleitung der entsprechenden Nebenbedingungen erfolgt mittels geeigneter kinematischer Zwangsbedingungen. Ihre Eigenschaften werden beschrieben und verbleibende Inkompatibilitäten herausgearbeitet. Für weitergehende Darstellungen wird auf die Arbeit von KUGLER [24] verwiesen.

Der Übergang von einer Schalendiskretisierung auf eine Volumendiskretisierung ist schematisch in Abbildung 8.1 zu sehen. Darin wird deutlich, daß bei einer Vernetzung ohne Übergangsbedingung die Kinematik verletzt wäre: Das Schalenelement schließt frei drehbar am Volumenelement an, da Volumenelemente lediglich Verschiebungsfreiheitsgrade, nicht aber Rotationsfreiheitsgrade besitzen. Letztere werden also keinen Randbedingungen unterworfen. Eine solche Vernetzung entspricht einem gelenkigen Anschluß an dieser Stelle. Außerdem tritt das Problem der *'hanging nodes'* auf, was bedeutet, daß die außenliegenden Volumenknotten ebenfalls keinen Randbedingungen unterliegen. Der Elementverband ist hier unterbrochen.

An der Übergangsstelle müssen also Forderungen aufgestellt werden, so daß im Rahmen der Fähigkeiten der Modelltheorien der Beanspruchungszustand übertragen werden kann.

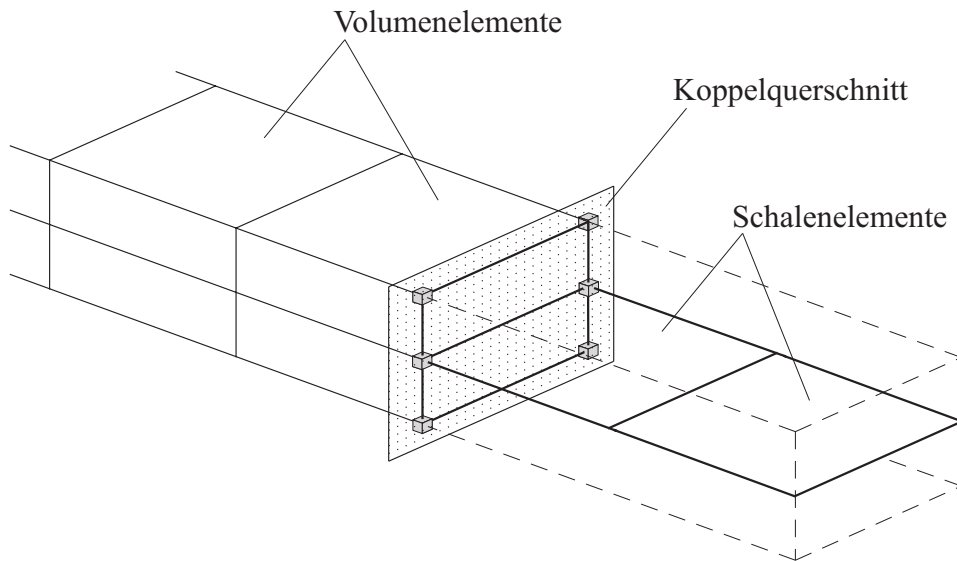


Abbildung 8.1: Kopplung Schalendiskretisierung – Volumendiskretisierung.

Zunächst wird von einem in seiner Geometrie gleichmäßig ausgebildetem Tragwerk im Bereich der Koppelstelle ausgegangen. Schalen- und Volumenmodell beschreiben den gleichen Querschnitt. Die Kopplung findet in einer Ebene statt, zu der die Schale senkrecht steht. In dieser Ebene liegen die beiden Schalenknoten und alle zu koppelnden Volumenknöten.

Die Orientierung der Ebene im Raum erfolgt entweder durch den Schalendirektor und dem Verbindungsvektor zwischen den beiden Schalenknoten, oder die Ebene wird alternativ direkt über die Querschnittsfläche definiert, die die Volumenstirnfläche darstellt.

In jedem der beiden Schalenknoten kann ein orthonormales Dreibein  $\mathbf{A}_i$  derart angeordnet werden, daß  $\mathbf{A}_1$  der Normalenrichtung auf die Koppelene entspricht, und  $\mathbf{A}_3$  in Richtung des Schalendirektors  $\mathbf{D}$  zeigt. In Abbildung 8.2 ist dies für einen der beiden Schalenknoten skizziert.  $\mathbf{A}_2$  steht senkrecht auf  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_3$  und kann beispielsweise über das Vektorkreuzprodukt von  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_3$  bestimmt werden. Die drei Vektoren  $\mathbf{A}_i$  bilden die Spaltenvektoren des Drehtensors  $\mathbf{R}_0$ , der die Basis  $\mathbf{e}_i$  mit  $\mathbf{A}_i$  über die Beziehung  $\mathbf{A}_i = \mathbf{R}_0 \mathbf{e}_i$  verknüpft.

## 8.1 Kinematische Voraussetzungen

Ausgehend von der Schalentheorie wird die zugehörige kinematische Annahme übernommen, daß Punkte, die in der Ausgangskonfiguration auf demselben Direktor  $\mathbf{D}$  gelegen haben, auch in der aktuellen Konfiguration auf diesem Direktor

### Referenzkonfiguration

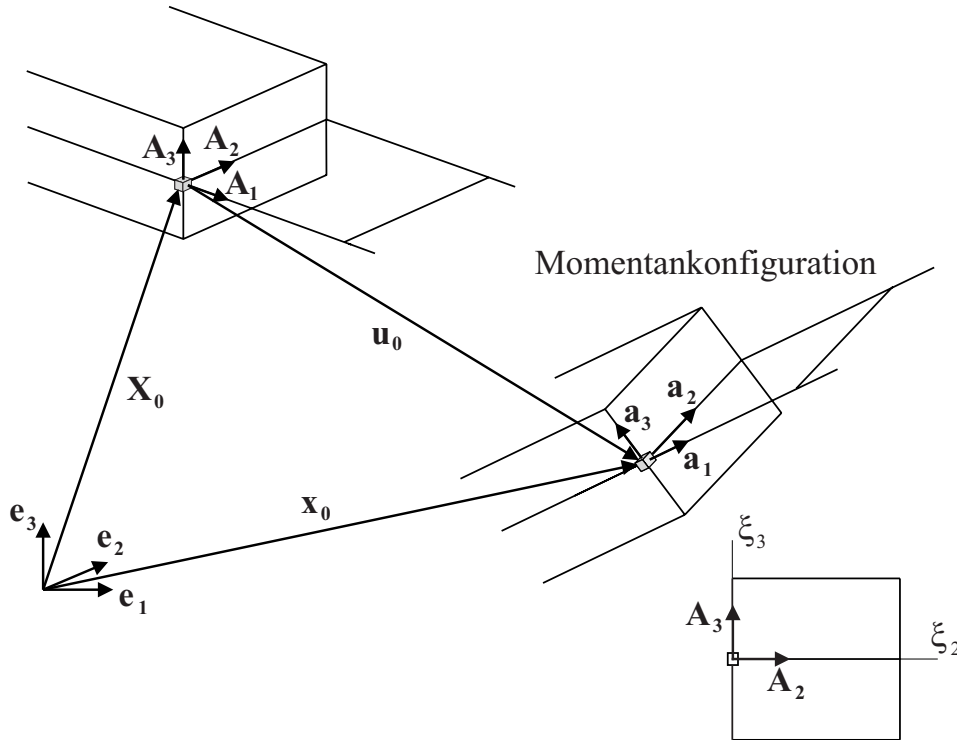


Abbildung 8.2: Ausgangs- und Momentankonfiguration bei der Schalen-Volumenkopplung.

$\mathbf{d}$  liegen. (Der Direktor  $\mathbf{d}$  entsteht aus  $\mathbf{D}$  über eine orthogonale Transformation.) Dies entspricht dem Ebenbleiben der Querschnitte bei der Stabtheorie, was sich bei der Schale auf ein ‘Geradebleiben’ des Direktors reduziert. Diese Forderung ist sowohl Bestandteil der Reissner–Mindlin–Theorie (mittlere Querschubverzerrungen werden zugelassen) als auch der von Kirchhoff–Love (die Querschubverzerrungen werden zu null gesetzt). Indem in beiden Schalenknoten ein eigenständiges Dreibein  $\mathbf{A}_i$  formuliert wird, ist auch an beiden Schalenpunkten diese Bedingung unabhängig voneinander erfüllt.

Die Schalentheorie impliziert üblicherweise, daß Längenänderungen der Schalennormalen vernachlässigt werden. Die Beschreibung der Schale erfolgt über die Referenzfläche, so daß sich die aktuelle Lage eines Punktes  $I$  im Schalenraum angeben läßt durch

$$\mathbf{x}_I = \mathbf{x}_0 + \xi^3 \mathbf{d} \quad , \quad (8.1)$$

wobei  $\mathbf{x}_0$  den Ortsvektor zur Referenzfläche darstellt,  $\mathbf{d}$  den normierten Schalendirektor und  $\xi^3$  die damit unveränderliche Dickenkoordinate bezeichnet.

Übernimmt man diese Annahme bei der Kopplung von Schalen- mit Volumenelementen, resultiert daraus ein Zwang, der aus Sicht der Volumenelemente weder vorhanden noch sinnvoll ist. Umgekehrt wird die Schale nicht beeinträchtigt, wenn die Ausdehnbarkeit des Bauteils in Dickenrichtung innerhalb der Volumenmodellierung zugelassen wird.

Weiterhin wird ein Übergang vorausgesetzt, der in Schalendickenrichtung mindestens zwei Lagen von Volumenelementen anschließt. Dies ist dadurch motiviert, daß eine einlagige Volumenmodellierung gegenüber dem Schalenmodell keine wesentlichen Verbesserungen beinhaltet. Insbesondere wenn extensible Schalenkonzepte verwendet werden, gleichen sich beide Modellierungsvarianten. Liegt dagegen ein dreidimensionaler Spannungszustand vor, für den ein Wechsel auf die Volumenmodellierung sinnvoll ist, wird ohnehin eine mehrlagige Modellierung durch Volumenelemente gewählt werden.

## 8.2 Formulierung einer Übergangsbedingung

Mit den vorangegangenen Ausführungen lassen sich die folgenden Forderungen an den Koppelquerschnitt zusammenfassen:

1. Die Querschnitte dürfen sich nicht überschneiden oder auseinanderklaffen. Ebensowenig dürfen sie aneinander abgleiten oder gegenseitig verdreht sein.
2. Der Schalendirektor bleibt gerade.
3. Um Verzerrungen in Dickenrichtung zu ermöglichen, können sich Punkte der Querschnittsebene auf einer Geraden mit der Richtung des zugehörigen Direktors frei bewegen.
4. Der Übergang einer Schalendiskretisierung auf das Volumenmodell erfolgt mindestens an zwei Volumenelementlagen.

Ausgehend vom Schalenknoten ‘0’ in der Koppellebene kann die zugehörige Querschnittsgerade definiert werden durch die Vektorgleichung

$$\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_0 + \xi^3 \mathbf{D} = \mathbf{X}_0 + \xi^3 \mathbf{A}_3 \quad , \quad (8.2)$$

wobei  $\mathbf{x}_I$  den Ortsvektor eines beliebigen Punktes  $I$  auf der Querschnittsgeraden darstellt. Damit gilt Gleichung 8.2 auch für den anzukoppelnden Volumenknoten, der mit Voraussetzung 1 auf der Querschnittsgeraden liegen muß.

Der Volumenknoten  $I$  besitzt in seiner Ausgangslage die Koordinaten  $0, 0, \xi^3$  bezogen auf die Basis  $\mathbf{A}_i$ :

$$\xi^3 = (\mathbf{X}_I - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{A}_3 \quad . \quad (8.3)$$

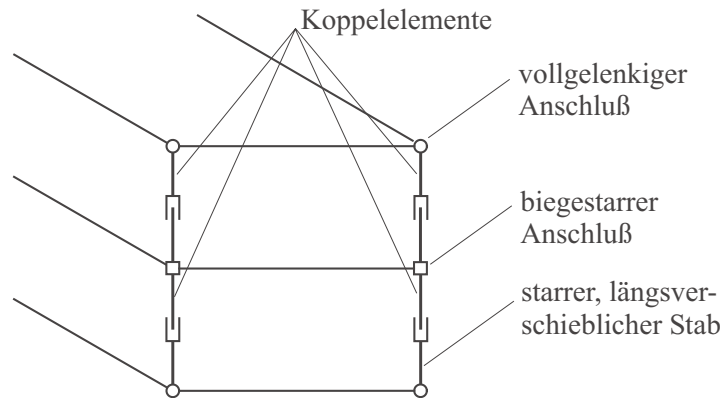


Abbildung 8.3: Mechanisches Modell.

Mit der Forderung 3 läßt sich die Lage des anzukoppelnden Volumenknotts in der Momentankonfiguration ausdrücken durch

$$\mathbf{x}_I = \mathbf{x}_0 + \lambda \xi^3 \mathbf{d} = \mathbf{x}_0 + \lambda \xi^3 \mathbf{a}_3 \quad , \quad \lambda \in \mathcal{R} \quad . \quad (8.4)$$

Der Parameter  $\lambda$  kann mit der Gleichung

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_0\|}{\|\mathbf{X}_I - \mathbf{X}_0\|} \quad (8.5)$$

bestimmt werden. Damit läßt sich die Übergangsbedingung für die Kopplung von Schalen- und Volumenelementen formulieren:

$$\mathbf{f} = \mathbf{x}_I - \mathbf{x}_0 - \lambda \xi^3 \mathbf{a}_3 \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad . \quad (8.6)$$

Aus der Übergangsbedingung 8.6 läßt sich die mechanische Modellierung entwickeln. Jeder Schalenknoten bildet einen eigenständigen Referenzknoten, von dem aus die Querschnittsgerade in der Koppellebene definiert ist. Die Schalendirektoren dieser beiden Referenzknoten bilden jeweils die Basisvektoren  $\mathbf{a}_3$  aus Gleichung 8.6. Alle Volumenknotten auf einer Querschnittsgeraden müssen in der Momentankonfiguration ebenfalls wieder auf der Querschnittsgeraden liegen, die durch den zugehörigen Direktor  $\mathbf{d}$  bestimmt wird. Ihre Lage in Dickenrichtung ist dabei allerdings nicht fest definiert, sondern mit der Einführung des Parameters  $\lambda$  frei vom Volumenelement bestimmbar.

Dies entspricht einem ideal starren Stabwerk, das im Referenzpunkt (d.h. dem Schalenknoten) biegestarr an der Schale angeschlossen ist und jeden Volumenknotten einer Querschnittsgeraden mit einem starren Stab gelenkig verbindet (vgl. Abbildung 8.3). In jedem dieser Stäbe ist eine Schiebehülse angeordnet, um die Längsverschieblichkeit in Dickenrichtung zu gewährleisten.

### 8.3 Finite–Element–Formulierung

Die Umsetzung der Übergangsbedingung 8.6 wird innerhalb einer FE–Berechnung mit dem Penalty–, dem Augmented–Lagrange–Verfahren oder mit dem Verfahren der Lagrangeschen Multiplikatoren durchgeführt. Dabei entspricht die Bedingung zwischen einem Volumenknoten und dem zugehörigen Schalenknoten einem Übergangselement.

Die Darstellung des Ortsvektors vom Referenzknoten (Schalenknoten) zum Koppelknoten (Volumenknoten) bezüglich der Basis  $\mathbf{a}_i$  reduziert sich auf  $\mathbf{r}_I = \xi^3 \mathbf{a}_3$ . Damit lautet die Variation der Nebenbedingung in Form von Gl. 8.6:

$$\delta \mathbf{f} = \delta \mathbf{u}_I - \delta \mathbf{u}_0 - \delta \lambda \mathbf{r}_I - \lambda \delta \mathbf{r}_I \quad . \quad (8.7)$$

Die Gleichungen zur Formulierung des Residuums und der tangentialen Steifigkeitsmatrix in Abhängigkeit des jeweiligen Verfahrens sind im folgenden zusammengestellt.  $\alpha$  bezeichnet dabei jeweils den Penalty-Faktor.



### 8.3.1 Penalty–Verfahren, Augmented–Lagrange–Verfahren

**Residuum:**

$$\mathbf{G}^{(e)} = \tilde{\Lambda}_I^T \mathbf{B}_f \quad (8.8)$$

bezogen auf den Elementverschiebungsvektor  $\mathbf{v}^{(e)} = [ \mathbf{u}_I^T \quad \boldsymbol{\omega}_I^T \quad \mathbf{u}_0^T \quad \boldsymbol{\omega}_0^T ]^T$

mit  $\tilde{\Lambda}_I = \alpha \mathbf{f}$  (Penalty) Update:  $\tilde{\Lambda}_I^{i+1} = \alpha \mathbf{f}^i + \Lambda_I^i$  (Augm. Lagr.)

$$\mathbf{B}_f = [ \mathbf{A} \quad \mathbf{0} \quad -\mathbf{A} \quad -\overline{\mathbf{W}} ]$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{1} - \mathbf{r}_I \otimes \hat{\mathbf{n}}$$

wobei  $\mathbf{r}_I = \xi^3 \mathbf{a}_3$

$$\hat{\mathbf{n}} = (1/R) (\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_0) / \|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_0\|$$

$$R = \|\mathbf{X}_I - \mathbf{X}_0\|$$

$$\overline{\mathbf{W}} = -\lambda \text{skew } \mathbf{r}_I$$

**Tangentiale Steifigkeitsmatrix**

$$\mathbf{k}_T^{(e)} = \mathbf{B}_f^T \alpha \mathbf{B}_f + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}} & \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{P}} & \mathbf{F}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\bar{\mathbf{P}} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{P}} & -\mathbf{F}^T \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} & -\mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

mit  $\bar{\mathbf{P}} = -(\tilde{\Lambda}_I \cdot \mathbf{r}_I) \hat{\mathbf{P}}$  wobei  $\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{R} \frac{1}{\|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_0\|} (\mathbf{1} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}))$

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{r}_I \times \tilde{\Lambda}_I) \otimes \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{H} = -\lambda \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{r}_I \otimes \tilde{\Lambda}_I + \tilde{\Lambda}_I \otimes \mathbf{r}_I) - (\tilde{\Lambda}_I \cdot \mathbf{r}_I) \mathbf{1} \right]$$

## 8.4 Inkompatibilitäten beim Übergang

Der Übergang vom Schalen- zum Volumenmodell kann nicht völlig störungsfrei erfolgen. Bedingt durch die kinematischen Voraussetzungen beim Aufstellen der Übergangsbedingung können sich Störungen an der Koppelstelle ergeben, die bei einer reinen Volumendiskretisierung nicht vorhanden sind.

Zu erwarten sind Störungen in Dickenrichtung, die aus Querschubverformungen resultieren. Die Störungen werden umso ausgeprägter, je feiner das Volumenmodell über die Dicke diskretisiert ist.

## 8.5 Abschließende Bemerkungen zur Modellierung mit Übergangselementen

Für den Schalen-Volumenübergang wurde die zugehörige Kinematik in ein spezielles Übergangselement implementiert. Die Schwierigkeit bestand darin, daß die Unausdehnbarkeit der Schale in Dickenrichtung bei starrer Kopplung zu Störungen im Volumenmodell führt. Zur Kopplung wird ein Zwei-Knoten-Element verwendet, das einem Volumenknoten die Verschiebungen in Abhängigkeit der Schalenfreiheitsgrade vorgibt. Das Element beinhaltet die freie Verschiebungsmöglichkeit des Volumenknotens in Direktorrichtung der Schale, erzwingt aber gleichzeitig das Geradebleiben des Direktors. Störeinflüsse infolge Querdehnung entfallen damit. Lediglich die Querschubverformungen verursachen in geringem Umfang Zwängungen, die aus der Verwölbungsbehinderung des Schalendirektors resultieren. Nach dem Prinzip von de Saint-Venant klingen diese Störungen jedoch rasch ab.

Der Einsatz geschichteter Volumen- und Schalenelemente ist möglich. Die unterschiedliche Ausdehnung in Dickenrichtung innerhalb einzelner Schichten am Modellübergang konnte im Rahmen des Forschungsprojektes aus Zeitgründen bisher noch nicht implementiert werden. Das Modell ist jedoch so aufgebaut, daß es für diesen Zweck einfach erweitert werden kann.

## 9 Schrifttum

### Literatur

- [1] ALIYU, A.A. / DANIEL, I.M.: *Effects of Strain Rate on Delamination Fracture Toughness of Graphite/Epoxy*. In: JOHNSON, W.S., (HRSG.), *Delamination and Debonding of Materials, ASTM STP 876*, S. 336–348, Philadelphia, 1985. 6.6
- [2] BATHE, K.-J. / DVORKIN, E.: *A Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation*. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 21 (1985), S. 367–383. 2
- [3] BELYTSCHKO, T. / BLACK, T.: *Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing*. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 45 (1999), S. 601–620. 6.6
- [4] BRAUN, M.: *Nichtlineare Analysen von geschichteten elastischen Flächentragwerken*. Dissertationsschrift, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, 1995. 2, 4.1, 4.1, 4.1
- [5] BÜCHTER, N. / RAMM, E. / ROEHL, D.: *Three-Dimensional Extension of Nonlinear Shell Formulation Based on the Enhanced Assumed Strain Concept*. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 37 (1994), S. 2551–2568. 6.5
- [6] CARLSSON, L.A. / PIPES, R.B.: *Hochleistungsfaserverbundwerkstoffe*. Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1989. 6.10
- [7] CHEN, J.K. / SUN, C.T. / CHANG, C.I.: *Failure Analysis of a Graphite/Epoxy Laminate Subjected to Combined Thermal and Mechanical Loading*. *Journal of Composite Materials* 9 (1985), S. 408–423. 5, 6.1
- [8] COCHELIN, B. / DAMIL, N. / POTIER-FERRY, M.: *Asymptotic-Numerical Methods and Pad e Approximants for Nonlinear-Elastic Structures*. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 37 (1994), S. 1137–1213. 6.8
- [9] CRISFIELD, M.A. / JELENIC, G. / MI, Y. / ZHONG, H.-G. / FAN, Z.: *Some Aspects of the Non-linear Finite Element Method*. *Finite Elements in Analysis and Design* 27 (1997), S. 19–40. 6.2, 6.6
- [10] DAVIDSON, B.D.: *An Analytical Investigation of Delamination Front Curvature in Double Cantilever Beam Specimens*. *Journal of Composite Materials* 24 (1990), S. 1124–1137. 6.2

- [11] DAVIDSON, B.D. / KRÜGER, R. / KÖNIG, M.: *Effect of Stacking Sequence on Energy Release Rate Distributions in Multidirectional DCB and ENF Specimens*. Engineering Fracture Mechanics 55 (1996), S. 557–569. 6.2
- [12] DEHMEL, W.: *Zur nichtlinearen statischen Berechnung isotroper, orthotroper und geschichteter Flächentragwerke nach der Methode der Finiten Elemente*. VDI-Verlag, Reihe 4, Nr. 77, Düsseldorf, 1986. 2
- [13] DORNINGER, K.: *Entwicklung von nichtlinearen FE-Algorithmen zur Berechnung von Schalenkonstruktionen aus Faserverbundstoffen*. VDI-Verlag, Reihe 18, Nr. 65, Düsseldorf, 1989. 6.1
- [14] DORNINGER, K. / RAMMERSTORFER, F.G.: *Berechnungsverfahren für faserverstärkte Werkstoffe und Faser-Verbund-Schalen*. Baustatik Baupraxis Hannover 1 (1990). 2.1, 2.1, 4.1, 4.1
- [15] GRIFFITH, A.A.: *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*. Phil. Trans. Roy. Soc. of London (1921), S. A221:163–197. 6.1
- [16] GRIFFITH, A.A.: *The Theory of Rupture*. In: BICZENO / BURGERS, (HRSG.), *Proc. 1st Int. Congress Appl. Mech.*, S. 55–63, 1924. 6.1
- [17] GRUTTMANN, F.: *Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen*. Habilitationsschrift, Universität Hannover, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, 1995. 2, 6.8
- [18] GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *Delamination Analysis of Thin Composite Structures Using a Multi-Director Formulation*. In: TOPPING, B. H. V., (HRSG.), *Advances in Analysis and Design of Composites*, S. 51–59, Edinburgh, 1996 CIVIL-COMP Ltd. 2
- [19] HASHIN, Z.: *Failure Criteria for Unidirectional Composites*. J. Appl. Mech. 47 (1980), S. 329–334. 6.3, 6.3, 6.5, 6.6
- [20] HILLEBORG, A. / MODEER, M. / PETERSSON, I.E.: *Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements*. Cement Concrete Res. 6 (1976), S. 773–782. 6.3
- [21] HWANG, W.C. / SUN, C.T.: *Failure Analysis of Laminated Composites by Using Iterative Three-Dimensional Finite Element Method*. Computers & Structures 33(1) (1989), S. 41–47. 5, 6.1
- [22] KLARMANN, R.: *Nichtlineare Finite Element Berechnungen von Schalentragwerken mit geschichtetem anisotropen Querschnitt*. Dissertationsschrift, Universität Karlsruhe, Institut für Baustatik, 1991. 2, 2.1, 2.1, 4.1, 4.1, 4.1

- [23] KLINKEL, S. / GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *A Continuum Based Three-Dimensional Shell Element for Laminated Structures*. Computers & Structures 71 (1999), S. 43–62. [2](#)
- [24] KUGLER, J.: *Finite-Element-Modellierung von Starrkörper- und Übergangsbedingungen in der Statik*. Dissertationsschrift, Universität Karlsruhe, Institut für Baustatik, 1999. [8](#)
- [25] LEE, J.D.: *Three Dimensional Finite Element Analysis of Damage Accumulation in Composite Laminate*. Computers & Structures 15(3) (1982), S. 335–350. [6.1](#)
- [26] LEHAR, H.: *Beitrag zur Behandlung ebener, anisotroper Schichtverbunde mittels der Methode der finiten Elemente*. Dissertationsschrift, Universität Innsbruck, Institut für Baustatik und verst. Kunststoffe, 1985. [2](#), [2.1](#)
- [27] LUO, H. / HANAGUD, S.: *Delamination Modes in Composite Plates*. Journal of Aerospace Engineering 10 (1996), S. 106–113. [6.1](#)
- [28] NEMETH, M.P.: *Importance of Anisotropy on Buckling of Compression-Loaded Symmetric Composite Plates*. AIAA Journal 24 (1986), S. 1831–1835. [4.1](#), [4.1](#)
- [29] NILSSON, K.F. / STORAKERS, B.: *On Interface Crack Growth in Composite Plates*. J. Appl. Mech. (1990), S. 530–538. [6.2](#)
- [30] OUSSET, Y.: *Numerical Simulation of Delamination Growth in Layered Composite Plates*. European Journal of Mechanics and Solids 18 (1999), S. 291–312. [6.6](#)
- [31] PARISCH, H.: *A Continuum-Based Shell Theory for Non-Linear Applications*. Int. J. Num. Meth. Engng. 38 (95), S. 1855–1883. [2](#)
- [32] RAJU, I.S. / CREWS, J.H. / AMINPOUR, M.A.: *Convergence of Strain Energy Release Rate Components for Edge-Delaminated Composite Laminates*. Engineering Fracture Mechanics 30(3) (1988), S. 383–396. [6.2](#)
- [33] REDDY, J.N. / PANDEY, A.K.: *A First-Ply Failure Analysis of Composite Laminates*. Computers & Structures 25 (1987), S. 371–393. [5.1](#)
- [34] RYBICKI, E.F. / SCHMUESER, D.W. / FOX, J.: *An Energy Release Rate Approach for Stable Crack Growth in the Free-Edge Delamination Problem*. Journal of Composite Materials 11 (1977), S. 470–487. [6.2](#)

- [35] SCHELLEKENS, J.C. / DE BORST, R.: *Free Edge Delamination in Carbon-Epoxy Laminates: a Novel Numerical/Experimental Approach*. Composite Structures 28 (1994), S. 357–373. 6.2, 6.3, 6.6
- [36] SCHULTZ, R.: *Nichtlineare Struktur- und Versagensanalyse von Faserverbundsystemen mit Mehrschicht-Schalenelementen*. Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen 96-3, Ruhr - Universität Bochum, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, 1996. 5, 5.1
- [37] SPRENGER, W. / GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *Delamination growth analysis in laminated structures with continuum based 3D-shell elements and a viscoplastic softening model*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 185 (2000), S. 123–139. 4, 6.3, 6.4, 6.4, 6.7
- [38] SPRENGER, W. / WAGNER, W.: *On the Formulation of Geometrically Nonlinear 3D-Rebar-Elements Using the Enhanced Assumed Strain Method*. Engineering Structures 21(3) (1999), S. 209–218. 2, 3
- [39] STEIN, E. / TESSMER, J.: *Delamination, Instability and Failure of Multilayered Composites*. In: PREDELEANU, M. / GILORMINI, P., (HRSG.), *Advanced Methods in Materials Processing Defects*, Laboratoire de Mécanique et Technologie, S. 405–414, Amsterdam, 1996 Elsevier. 2
- [40] STEINER, K. V.: *Detect Classifications in Composite Using Ultrasonic Non-destructive Evaluation Techniques*. In: MASTERS, J.E., (HRSG.), *Damage detection in Composite Materials*, ASTM, S. 72–84, Philadelphia, 1992. 6.1
- [41] TESSMER, J.: *Theoretische und algorithmische Beiträge zur Berechnung von Faserverbundschalen*. zu veröffentlichende dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 2000. 6.6, 6.6
- [42] TOLSON, S. / ZABARAS, N.: *Finite Element Analysis of Progressive Failure in Laminated Composite Plates*. Computers & Structures 38 (1991), S. 361–376. 6.1
- [43] TSAI, S.W.: *Composites Design - Fourth Edition*. Think Composites, Dayton, Ohio, 1988. 6.8.1
- [44] WANG, A.S.D. / SLOMIANA, M. / BUCINELL, R.B.: *Delamination Crack Growth in Composite Laminates*. In: JOHNSON, W.S., (HRSG.), *Delamination and Debonding of Materials*, ASTM, S. 135–167, Philadelphia, 1995. 6.2

- [45] ZHANG, S.Y.: *A New Model for the Energy Release Rate of Fibre/Matrix interfacial fracture*. Composites Science and Technology 58 (1998), S. 163–166. [6.2](#)