

KfK 5317  
April 1994

# **Magnetohydrodynamik in Rechteckgeometrien**

**Volle numerische Simulation**

**L. Lenhart**  
Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik  
Projekt Kernfusion

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



**Kernforschungszentrum Karlsruhe**  
Institut für angewandte Thermo- und Fluidodynamik  
Projekt Kernfusion

**KfK 5317**

**Magnetohydrodynamik in Rechteckgeometrien**  
**Volle numerische Simulation**

**Lutz Lenhart**

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (T.H.)  
genehmigte Dissertation

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0303-4003

# Magnetohydrodynamics in Rectangular Ducts

## Abstract

Magnetohydrodynamic flow in straight ducts or bends is a key issue, which has to be investigated for developing self-cooled liquid metal blankets of fusion reactors. The code presented solves the full set of governing equations and simulates all phenomena of such flows, including inertial effects. The range of application is limited by computer storage only. A variation of relevant parameters yields the following results:

- ❑ The Hartmann-number  $M$  determines the thickness of viscous boundary layers. Examples up to  $M=500$  can be calculated on a VP400 computer.
- ❑ A variation of magnetic field, cross section or wall conductance creates three-dimensional effects. They all lead to qualitatively similar velocity distributions.
- ❑ Theoretical results on the inertial pressure loss as a function of the interaction parameter  $N$  at high  $M$  are confirmed and extended to lower  $M$ . The additional pressure loss is less than 20% for  $M \leq 500$ .
- ❑ The distance required to reach fully developed flow can be very long due to inertia.
- ❑ All numerical results agree with predictions of inertialess flow at  $N > M^{3/2}$ .
- ❑ Streamlines prefer the way of lowest resistance, i.e. any motion perpendicular to the magnetic field  $B$  is minimized. This produces velocity jets at the inner edge of bends.
- ❑ Additional jets can appear in sidelayers of bends, depending on the orientation of  $B$ . Superposing them with jets at the inner edge causes velocity peaks.
- ❑ Jets and peaks become higher and thinner as  $M$  increases, whereas the velocity profile flattens in the core region.



## Zusammenfassung

Im Zusammenhang mit der Entwicklung sogenannter "selbstgekühlter Flüssigmetall-Blankets" für Fusionsreaktoren ist die Untersuchung magnetohydrodynamischer Strömungen in geraden und abgewinkelten Kanälen von besonderem Interesse. Mit dem vorgelegten Programm zur vollen numerischen Simulation können sämtliche Phänomene derartiger Strömungen untersucht werden. Insbesondere kann aufgrund spezieller Verfahren erstmals auch die Auswirkung der Trägheit aufgezeigt werden. Die Anwendungen sind prinzipiell alleine durch Speicherplatzvorgaben des Computers limitiert. Die durchgeführten Parameterstudien können im wesentlichen folgende Ergebnisse liefern:

- Die Hartmann-Zahl  $M$  bestimmt die Dicke der Reibungsgrenzschichten. Beispiele bis  $M=500$  können auf dem Vektorrechner VP400 gelöst werden.
- Dreidimensionale Effekte werden durch Änderung der Wandleitfähigkeit, des Magnetfeldes oder des Kanalquerschnittes hervorgerufen. In allen Fällen kommt es zu qualitativ ähnlichen Ergebnissen.
- Die theoretische Vorhersage zur Abhängigkeit des Trägheitsdruckverlustes vom Interaktionsparameter für große  $M$  kann voll bestätigt und auf kleine  $M$  erweitert werden. Für Hartmann-Zahlen bis 500 bleiben die Trägheitsdruckverluste kleiner als 20% gemessen am Gesamtdruckverlust.
- Je nach Aufgabenstellung kann es bei trägheitsbehafteten Vorgängen zu ganz erheblichen Einlaufängen kommen.
- Nach der Theorie sind Strömungen für  $N > M^{3/2}$  trägheitsfrei. Die numerischen Ergebnisse stimmen mit dieser Aussage gut überein.
- In Krümmern strömt das Fluid auf dem Weg des geringsten Widerstandes, d.h. Bewegungen senkrecht zum Magnetfeld werden minimiert. Es kommt zu Geschwindigkeitsjets an der inneren Umlenkkante.

- Je nach Orientierung des Magnetfeldes können sich in Seitenschichten von Krümmern zusätzliche Jets ausbilden. Die Überlagerung mit dem Jet an der inneren Umlenkkante führt zu Geschwindigkeitspeaks.
  
- Geschwindigkeitsjets und -peaks werden sowohl im Geradrohr, als auch im Krümmer mit steigender Hartmann-Zahl größer und dünner. Das Profil im Kern der Strömung flacht gleichzeitig immer mehr ab.



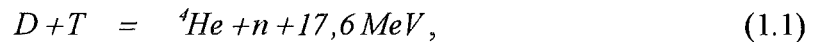
# Inhaltsverzeichnis

<b>Abstract</b> .....	<b>1</b>
<b>Zusammenfassung</b> .....	<b>3</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b> .....	<b>5</b>
<b>1 Einleitung</b> .....	<b>7</b>
<b>2 Gleichungssystem und Randbedingungen</b> .....	<b>10</b>
2.1 Voraussetzungen .....	10
2.1.1 Induziertes Magnetfeld .....	10
2.1.2 Verschiebungsströme .....	11
2.1.3 Stoffeigenschaften .....	11
2.1.4 Stationäres Magnetfeld.....	12
2.2 Gleichungen in dimensionsloser Form.....	12
2.3 Randbedingungen.....	14
<b>3 Phänomene und Lösungsansätze der MHD</b> .....	<b>19</b>
3.1 Ein- und zweidimensionale Strömung .....	19
3.1.1 Ideal leitender Kanal bei konstantem Magnetfeld .....	19
3.1.2 Endlich leitender Kanal bei konstantem Magnetfeld .....	21
3.1.3 Isolierter Kanal bei konstantem Magnetfeld .....	24
3.1.4 Kombinationen isolierender und leitender Wände.....	25
3.2 Dreidimensionale Strömung .....	26
3.3 Numerische Lösungsansätze.....	28
3.4 Umschlag von laminarer in turbulente MHD .....	30
<b>4 Numerisches Verfahren</b> .....	<b>33</b>
4.1 Allgemeines .....	33
4.2 Upwind-Verfahren .....	36
4.3 Fractional-Step-Verfahren.....	41
4.4 False-Transient-Verfahren.....	44

4.5	Explizite Formulierung.....	45
4.6	Lösung der Poisson-Gleichungen .....	46
4.7	Zerlegung der Rechengebiete .....	47
4.7.1	Gerade Kanäle .....	47
4.7.2	Abgewinkelte Kanäle .....	50
4.8	Programmablauf in der Übersicht .....	53
<b>5</b>	<b>Programm-Validierung .....</b>	<b>57</b>
5.1	Vergleich mit bekannten Lösungen.....	57
5.2	Konsistenz.....	62
<b>6</b>	<b>Strömungen in geraden Kanälen.....</b>	<b>64</b>
6.1	Strömungen bei veränderlicher Wandleitfähigkeit .....	64
6.2	Strömungen bei veränderlichem Magnetfeld.....	73
6.2.1	Variables Magnetfeld, Fall I .....	73
6.2.2	Variables Magnetfeld, Fall II.....	83
<b>7</b>	<b>Strömungen in abgewinkelten Kanälen.....</b>	<b>93</b>
<b>8</b>	<b>Schlußbemerkungen.....</b>	<b>105</b>
<b>9</b>	<b>Anhang .....</b>	<b>107</b>
9.1	Randbedingung des fractional-step-Verfahrens.....	107
9.2	Konvektive Terme in Erhaltungsform.....	109
9.3	Restriktion für die Maschen-Reynolds-Zahl .....	111
<b>10</b>	<b>Physikalische Größen und Normierung .....</b>	<b>113</b>
10.1	Dimensionsbehaftete Größen.....	114
10.2	Normierte Größen .....	115
10.3	Kennzahlen .....	116
<b>11</b>	<b>Abbildungsverzeichnis .....</b>	<b>117</b>
<b>12</b>	<b>Literatur.....</b>	<b>119</b>

# 1 Einleitung

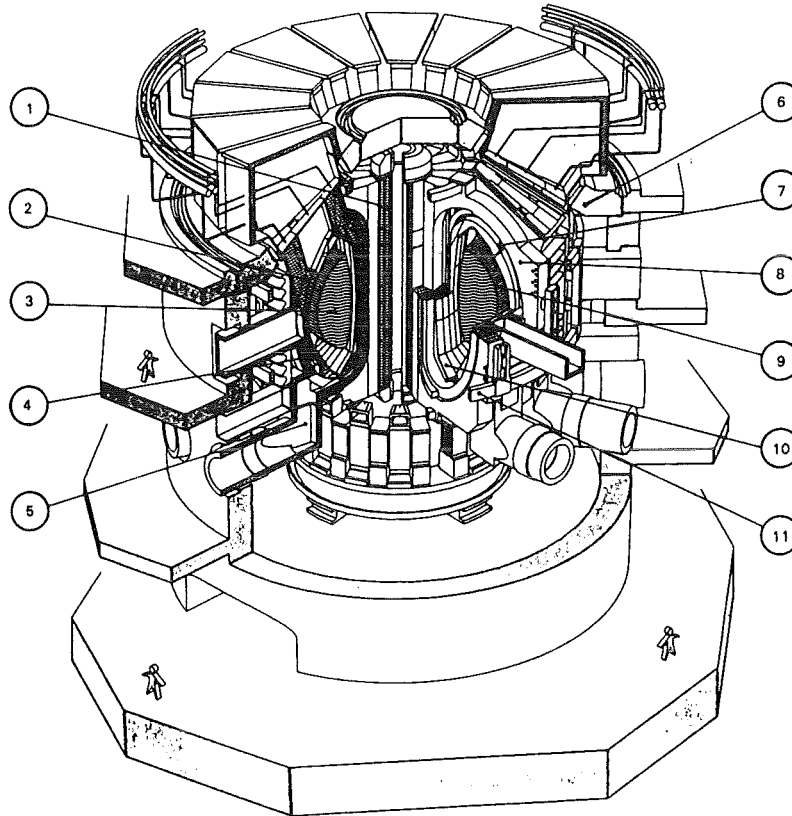
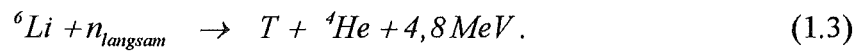
Die globale Verknappung fossiler Brennstoffe und allgemeine Fragen der Umweltverträglichkeit erfordern die Erforschung alternativer Energieformen. Neben der konventionellen Kernenergie ist deshalb auch die Nutzung der Kernfusion Gegenstand internationaler Untersuchungen. Eine Verschmelzung von Deuterium und Tritium,



erscheint dabei für die technische Anwendung am aussichtsreichsten. Um diese Verschmelzung zu ermöglichen, müssen die Fusionspartner allerdings auf einen so hohen kinetischen Zustand gebracht werden, daß sie die Abstoßungskraft ihrer Kernladungen überwinden können. Bei den damit verbundenen Temperaturen liegen Deuterium und Tritium als ionisiertes Plasma vor und können von einer torusförmigen Anordnung mehrerer Magnete auf einer Kreisbahn gehalten werden (siehe Abb.1.1). Für den thermischen Schutz von umgebenden Komponenten und die Abfuhr der Wärmeleistung aus dem Inneren des Reaktors entstehen damit komplexe Aufgabenstellungen. Die benötigte Brennstoffkomponente Tritium kommt in der Natur praktisch nicht vor und muß daher während des Betriebes ständig erbrütet werden. In diesen Zusammenhängen kommt dem zwischen Plasma und Magnetspulen angeordneten "Blanket" eine zentrale Stellung zu (siehe Abb.1.1). In den Strömungskanälen und Strukturmaterialien dieses Bauelementes sollen im Einzelnen folgende Funktionen erfüllt werden:

- Abfuhr der thermischen Leistung
- Abschirmung der Magnetspulen vor Strahlungsverlusten des Plasmas
- Erbrüten des für die Fusion notwendigen Tritiums
- Thermischer Schutz der ersten Wand des Reaktors

Als besonders geeignetes Konzept für das Design solcher Bauelemente erweist sich das sogenannte Flüssigmetall-Blanket. Dabei wird von flüssigem Li oder PbLi das gesamte Aufgabenpaket in einem Kreislauf übernommen, und damit der konstruktive Aufwand im Vergleich zu anderen Blanket-Konzepten deutlich reduziert. Das freiwerdende Neutron des Fusionsprozesses kann direkt im Fluid zum Brüten des Tritiums gebunden werden:



1 Innere Poloidalfeldspule

2 Blanket

3 Plasma

4 Vakuumgefäß und Abschirmung

5 Abgaskanal

6 Kryostat und biologische Abschirmung

7 Steuerspulen

8 Hauptfeldspulen

9 Erste Wand

10 Divertor

11 Äußere Poloidalfeldspulen

Abb. 1.1: Prinzipskizze eines Fusionsreaktors (Toschi et al. 1988)

Allerdings führt der Einsatz von Flüssigmetall bezüglich Druck- und Geschwindigkeitsverteilungen in den Strömungskanälen zu ungewohnten Ergebnissen, denn aufgrund der elektrischen Leitfähigkeit des Fluids werden unter dem Einfluß des starken Magnetfeldes elektromagnetische Kräfte induziert, die das Strömungsverhalten ganz erheblich beeinflussen. Die Resultate können dann deutlich von den aus der Hydrodynamik bekannten Strömungsphänomenen abweichen. Für die Auslegung der Pumpen, die Konstruktion der Kanäle und die Wärmeabfuhr ist die Vorausberechnung solcher magnetohydrodynamischer Strömungen von ausschlaggebender Bedeutung.

In der vorliegenden Arbeit werden die Grundgleichungen der Magnetohydrodynamik aufgestellt und den Bedingungen im Flüssigmetall-Blanket angepaßt. Da eine analytische Lösung der dreidimensionalen Differentialgleichungen im allgemeinen nicht möglich ist, wird ein numerisches Verfahren eingeführt. Entgegen den aus der Literatur bekannten asymptotischen Näherungslösungen werden dabei Trägheit und Reibung im gesamten Strömungsgebiet voll berücksichtigt. Der Algorithmus wird anhand exakter Lösungen für Spezialfälle validiert und dann für ausgewählte Beispiele von durchströmten Rohren mit geraden und abgewinkelten Rechteck-Geometrien eingesetzt. Ergebnisse für Geschwindigkeitsverteilungen, Drücke, elektrische Stromdichten und Potentiale in den Kanalströmungen werden gezeigt. Aufgrund der vollen numerischen Simulation können dabei physikalische Effekte in allen Reibungsgrenzschichten, und durch Anwendung besonderer Lösungsalgorithmen erstmals auch Einflüsse der Trägheit auf das Strömungsverhalten detailliert untersucht werden.

## 2 Gleichungssystem und Randbedingungen

Die Magnetohydrodynamik (MHD) stellt eine Verbindung der klassischen Gebiete der Hydrodynamik und Elektrodynamik her. Zur Beschreibung der Physik werden daher die Grundgleichungen beider Bereiche benötigt. Für die Hydrodynamik sind dies die Erhaltungssätze der Energie, der Masse und des Impulses, und für die Elektrodynamik die Maxwell-Gleichungen. Aufgrund der Bedingungen für den Betrieb im Kraftwerk können diese allgemeinen Gleichungen jedoch vereinfacht zusammengefaßt werden. Die dabei zugrundegelegte Skalierung kann im Kapitel 10.2 nachgeschlagen werden. Alle Vektoren werden im folgenden fett gedruckt, Vektorkomponenten erhalten als zweiten Buchstaben die Bezeichnung der Koordinatenrichtung, also beispielsweise  $v_x$  für die Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung oder  $B_z$  für das Magnetfeld in  $z$ -Richtung.

### 2.1 Voraussetzungen

#### 2.1.1 Induziertes Magnetfeld

Bereits Ampere weist auf den Zusammenhang zwischen einem Magnetfeld  $\mathbf{B}$  und der elektrischen Stromdichte  $\mathbf{j}$  hin:

$$\nabla \times \mathbf{B} = Re_m \mathbf{j}. \quad (2.1)$$

Die magnetische Reynolds-Zahl  $Re_m$  bezeichnet dabei das Verhältnis des angelegten zu dem durch die elektrische Stromdichte induzierten Magnetfeldes,

$$Re_m = \mu \sigma v_0 a \quad \frac{\text{induziertes Magnetfeld}}{\text{angelegtes Magnetfeld}}. \quad (2.2)$$

In dieser Kennzahl treten neben der magnetischen Permeabilität  $\mu$  die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$ , die mittlere Geschwindigkeit  $v_0$  des Fluids, sowie eine charakteristische Abmessung  $a$  des Problems auf. Da die magnetische Reynolds-Zahl bei Fusionsanlagen in der Größenordnung von  $10^{-2}$  liegt, kann das induzierte Feld gegenüber dem angelegten vernachlässigt werden (Hunt, Holroyd 1977).

$$\mathbf{B}_{ind} = 0. \quad (2.3)$$

Das Magnetfeld wird damit zur beliebigen, dann aber konstanten Vorgabe und muß nicht erst mit Hilfe der Gleichung (2.1) bestimmt werden.

### 2.1.2 Verschiebungsströme

Im Fusionsblanket kommt elektrisch sehr gut leitendes Lithium beziehungsweise Blei-Lithium zum Einsatz, so daß elektrostatische Ladungsunterschiede praktisch sofort ausgeglichen werden. Die Verschiebungsströme dürfen dementsprechend zu

$$\mathbf{j}_{ver} = 0 \quad (2.4)$$

gesetzt werden (Chang und Lundgren, 1961). Der dadurch entstehende Fehler hat die Größenordnung  $v^2/c^2$ , mit der Strömungsgeschwindigkeit  $v$  und der Lichtgeschwindigkeit  $c$  (Chandrasekhar, 1961).

### 2.1.3 Stoffeigenschaften

Die Stoffeigenschaften des Fluids, wie die magnetische Permeabilität  $\mu$ , die Viskosität  $\eta$ , die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  und die Dichte  $\rho$  werden als konstant, insbesondere auch als unabhängig von der Temperatur betrachtet. Dies führt zur Entkoppelung der Energiegleichung von der Impulsgleichung. Zur Berechnung der hier interessierenden

Größen (Druck, Geschwindigkeit, Potential und Stromdichte) kann daher auf eine weitere Betrachtung der Energieerhaltung verzichtet werden.

### 2.1.4 Stationäres Magnetfeld

In der differentiellen Form des Induktionsgesetzes von Maxwell ist die Rotation des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  mit der zeitlichen Ableitung der magnetischen Induktion  $\mathbf{B}$  verknüpft,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Für stationäre Magnetfelder ist das elektrische Feld demnach rotationsfrei, und es darf an dieser Stelle rein formal ein skalares elektrisches Potential  $\Phi$ ,

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad (2.6)$$

eingeführt werden.

## 2.2 Gleichungen in dimensionsloser Form

Unter Berücksichtigung der Voraussetzungen von Kapitel 2.1 kann nach einigen Umformungen aus den hydrodynamischen Erhaltungssätzen und den Maxwell-Gleichungen ein Satz von vier partiellen, gekoppelten, nichtlinearen Differentialgleichungen zur allgemeinen Beschreibung der dreidimensionalen MHD abgeleitet werden:

Die Impulserhaltung,

$$\frac{1}{N} \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{1}{M^2} \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.7)$$



die Massenerhaltung,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.8)$$

das Ohmsche Gesetz,

$$\mathbf{j} = -\nabla\Phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2.9)$$

und die Quellenfreiheit der elektrischen Stromdichte,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (2.10)$$

Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , der Druck  $p$ , die elektrische Stromdichte  $\mathbf{j}$ , das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  und das elektrische Potential  $\Phi$  sind dabei bereits in dimensionsloser Schreibweise notiert. Ihre Normierung kann dem Anhang, Kapitel 10.2 auf Seite 115, entnommen werden.

Im Vergleich zur gewöhnlichen Hydrodynamik wirkt in der nichtlinearen Navier-Stokes-Gleichung auf der rechten Seite die Lorentz-Kraft  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  als zusätzlicher Quellterm. Das Ohmsche Gesetz ist aufgrund der Bewegung des elektrischen Leiters im Magnetfeld um das Kreuzprodukt  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  erweitert. Genau diese beiden Erweiterungen stellen die Koppelung der hydrodynamischen an die elektrodynamischen Gleichungen her. Auf die grundlegende Bedeutung dieser Wechselwirkung von Magnetfeld und Fluid für die Erscheinungsform von MHD-Kanalströmungen wird in den Kapiteln 3.1 und 3.2 ab Seite 19 näher eingegangen.

Neben der bereits eingeführten magnetischen Reynolds-Zahl  $Re_m$  ergeben sich aus der Impulserhaltung zwei weitere, für die MHD charakteristische Kennzahlen:

Die Hartmann-Zahl,

$$M = a B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \sqrt{\frac{\text{elektromagnetische Kraft}}{\text{Reibungskraft}}}, \quad (2.11)$$

gebildet aus der Wurzel des Verhältnisses von elektromagnetischen Kräften zu Reibungskräften, und

der Interaktionsparameter,

$$N = \frac{\sigma a B_0^2}{\rho v_0} = \frac{\text{elektromagnetische Kraft}}{\text{Trägheitskraft}}, \quad (2.12)$$

als dem Quotienten aus elektromagnetischen Kräften und Trägheitskräften. Darin bezeichnen  $B_0$  das maximale äußere Magnetfeld,  $a$  die halbe Kanalhöhe und  $v_0$  die mittlere Strömungsgeschwindigkeit. Die Kombination beider Kennzahlen ist die aus der Hydrodynamik bekannte Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{M^2}{N}. \quad (2.13)$$

Statt der Erhaltung der elektrischen Ladung kann auch die Divergenz des Ohmschen Gesetzes (2.9) unter Berücksichtigung von Beziehung (2.10) verwendet werden. Dann ergibt sich eine numerisch wesentlich angenehmer zu behandelnde Poisson-Gleichung für das Potential

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.14)$$

Mit dem Gleichungssystem (2.7), (2.8), (2.9) und (2.10), respektive (2.14), ist der Satz von vier allgemeinen, dreidimensionalen Gleichungen zur Beschreibung der reibungs- und trägheitsbehafteten Magnetohydrodynamik bei beliebig vorgegebenem Magnetfeld aufgestellt. Zur Lösung spezieller Aufgabenstellungen müssen als nächstes geeignete Randbedingungen formuliert werden.

## 2.3 Randbedingungen

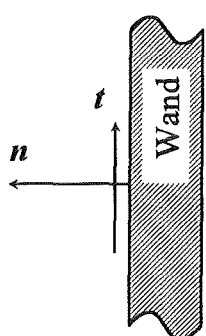
Als Randbedingung der elektrischen Größen an den Strömungskanalwänden werden die beiden Extremfälle ideal leitenden, beziehungsweise isolierenden Strukturmaterials untersucht. Isolierendes Material bedeutet anschaulich, daß kein elektrischer Strom in die Wand einfließen kann. Dies ist identisch mit Aussage

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{Wand}} = 0 \quad \text{für isolierende Wand,} \quad (2.15)$$

wobei  $\mathbf{n}$  den Einheitsvektor normal zur Wand darstellt (siehe Abbildung 2.1). Im Fall perfekter Leitfähigkeit gleichen sich sämtliche Potentialunterschiede in den Wänden sofort aus. Es muß sich folglich überall im Wandmaterial ein konstanter Wert für  $\Phi$  einstellen. Da Potentiale in den Bestimmungsgleichungen stets als Gradient auftreten, darf dieser Wert ohne Einschränkung der Allgemeinheit zu

$$\Phi \Big|_{\text{Wand}} = 0 \quad \text{für ideal leitende Wand} \quad (2.16)$$

gesetzt werden.



Das Diagramm zeigt eine vertikale Kanalwand, die als schraffiertes Rechteck mit einer unregelmäßigen Oberkante dargestellt ist. Ein horizontaler Vektor  $\mathbf{n}$  zeigt nach links von der Wand weg, ein vertikaler Vektor  $\mathbf{t}$  zeigt nach oben entlang der Wand. Die Wand ist mit dem Text 'Wand' beschriftet.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\text{Wand}} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{Wand}} = \mathbf{v} \Big|_{\text{Wand}} = 0 \quad \text{isolierende Wand}$$

$$\Phi \Big|_{\text{Wand}} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{t} \Big|_{\text{Wand}} = \mathbf{v} \Big|_{\text{Wand}} = 0 \quad \text{ideal leitende Wand}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\text{Wand}} = 0$$

Abb. 2.1: Randbedingungen an der Kanal-Wand

Für die Geschwindigkeit an der Grenzfläche Fluid-Wand wird, wie für viskose Strömungen allgemein üblich, die Haftbedingung

$$\mathbf{v} \Big|_{\text{Wand}} = 0 \quad (2.17)$$

gefordert. Aus der Kombination dieser Randbedingungen mit dem Ohmschen Gesetz (2.9) folgt unmittelbar für die elektrische Stromdichte eine homogene Dirichlet-Bedingung

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{t} \Big|_{\text{Wand}} = 0 \quad \text{für ideal leitende Wand} \quad (2.18)$$

und als homogene Neumann-Bedingung für das Potential

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\text{Wand}} = 0 \quad \text{für isolierende Wand.} \quad (2.19)$$

Neben der trivialen Formulierung hat diese Art der Randbedingungen aber noch einen weiteren wesentlichen Vorteil. Es läßt sich nämlich zeigen, daß bei geeigneter Kombination von leitenden und isolierenden Wänden die interessierenden magnetohydrodynamischen Phänomene, wie Geschwindigkeitsüberhöhungen oder dreidimensionale Druckverluste, besonders ausgeprägt auftreten.

Am Ein- beziehungsweise Austritt des betrachteten Strömungskanales werden entweder vorgegebene Werte benötigt, oder aber ein voll eingelaufener Zustand für die elektrischen Größen und die Geschwindigkeit vorausgesetzt. Die vorgegebenen Werte können beispielsweise experimentellen Messungen oder aber bekannten analytischen Lösungen einfacher Problemstellungen entnommen werden. Der voll eingelaufene Strömungszustand verlangt dagegen bei Verwendung der in Abbildung 2.2 eingeführten Normal- und Tangentialvektoren  $n$  bzw.  $t$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \Big|_{\text{Rohreingang}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \Big|_{\text{Rohrausgang}} = 0, \quad (2.20)$$

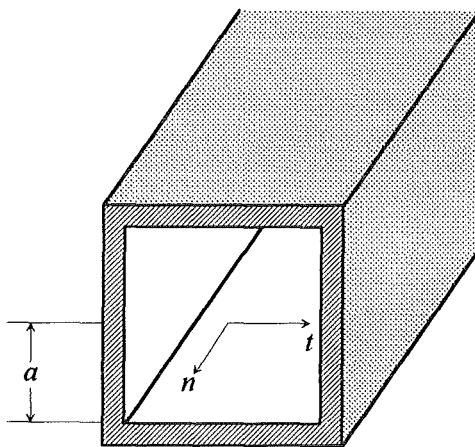
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} \Big|_{\text{Rohreingang}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} \Big|_{\text{Rohrausgang}} = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\text{Rohreingang}} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\text{Rohrausgang}} = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial n} \Big|_{\text{Rohreingang}} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial n} \Big|_{\text{Rohrausgang}} = 0, \quad (2.23)$$

für die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , die Stromdichte  $\mathbf{j}$  und das Potential  $\Phi$ . Damit ein solcher Zustand überhaupt ausgebildet werden kann, muß sich der Ein- bzw. Austritt hinreichend weit entfernt vom Einflußbereich dreidimensionaler Effekte befinden. Wie sich noch zeigen wird,

können diese Einlaufstrecken derartig lang werden, daß sie letztlich die numerische Berechenbarkeit limitieren.



$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \Big|_{\text{Rohreingang}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \Big|_{\text{Rohrausgang}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} \Big|_{\text{Rohreingang}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} \Big|_{\text{Rohrausgang}} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\text{Rohreingang}} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\text{Rohrausgang}} = 0$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{Rohreingang}} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{Rohrausgang}} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\text{Rohreingang, Rohrausgang}} = \text{const.}$$

Abb. 2.2: Randbedingungen an den Kanalenden

Die Randbedingungen für den Druck seien der Vollständigkeit halber hier erwähnt, sollen aber, da sie auf speziellen numerischen Methoden beruhen, erst in den entsprechenden Unterkapiteln hergeleitet werden. An den Kanalenden ist der Gradient des Druckes entweder vorgegeben

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\text{Rohreingang, Rohrausgang}} = \text{const.}, \quad (2.24)$$

oder er stellt sich nach "sinnvoll geratenen" Startwerten beim Voranschreiten der Iteration während des Rechenlaufes automatisch passend zum vorgegebenen Volumendurchsatz ein.

Letzteres wird eingehend unter dem Stichwort "false-transient-Verfahren" im Kapitel 4.4 auf Seite 44 erläutert.

An den Grenzflächen Fluid-Wand ergibt sich aufgrund des in Kapitel 4.3 ab Seite 37 beschriebenen "fractional-step-Verfahrens" eine Dirichlet-Randbedingung,

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{Wand} = 0. \quad (2.25)$$

## 3 Phänomene und Lösungsansätze der MHD

### 3.1 Ein- und zweidimensionale Strömung

Zum leichteren Verständnis von magnetohydrodynamischen Strömungsvorgängen sollen an dieser Stelle die grundlegenden Wechselwirkungen zwischen einem Magnetfeld und einem bewegten Fluid, sowie die Ausbildung von Strömungsgrenzschichten in Rohren anhand einiger Beispiele für voll eingelaufene, ein- und zweidimensionale Kanalströmungen diskutiert werden.

#### 3.1.1 Ideal leitender Kanal bei konstantem Magnetfeld

Abbildung 3.1 zeigt das zweidimensionale Problem eines geraden, ideal leitenden, rechteckigen Rohres bei konstantem, senkrecht zum Kanal orientierten Magnetfeld  $\mathbf{B}$ . Das elektrisch leitende Fluid wird aufgrund eines von außen aufgeprägten Druckunterschiedes mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in der  $x$ -Richtung des kartesischen Koordinatensystemes angetrieben. Das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  weist in  $y$ -Richtung. Aufgrund der Bewegung des Leiters im Magnetfeld werden elektrische Ströme induziert, die im gesamten hydraulischen Querschnitt sowohl auf  $\mathbf{B}$ , als auch auf  $\mathbf{v}$  senkrecht stehen (Stichwort "Drei-Finger-Regel"; siehe auch Gleichung 2.9).

Wegen der Quellenfreiheit der elektrischen Stromdichte (2.10) müssen die erzeugten Stromlinien wieder geschlossen werden. Da sich der Strom dabei den Weg des geringsten Widerstandes sucht, führt sein Weg im ideal leitenden Kanal über die Wände zurück (siehe Abb. 3.1). Die elektrischen Ströme im Strömungsquerschnitt wiederum verursachen in Wechselwirkung mit dem Magnetfeld eine Lorentz-Kraft  $\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$  ("Drei-Finger-Regel"). Diese Kraft ist der Strömungsrichtung entgegen gerichtet und ruft damit Druckverluste hervor, die erheblich über denen der klassischen Hydrodynamik liegen. In den Arbeiten von Chang und Lundgren (1961), sowie Uflyand (1961) werden

Näherungslösungen für den Druck und die Geschwindigkeit im ideal leitenden Rechteckrohr mit Reihenentwicklungen hergeleitet. Bereits an diesen analytischen Ergebnissen läßt sich als wesentliches Phänomen magnetohydrodynamischer Vorgänge erkennen, daß sich über dem Querschnitt aufgrund der Lorentz-Kräfte ein abgeflachtes Geschwindigkeitsprofil einstellt (siehe Gleichung 3.3). Für große Hartmann-Zahlen  $M$  treten Änderungen der Geschwindigkeit nur noch in dünnen Randschichten auf, in denen der Übergang zur Haftbedingung hergestellt werden muß.

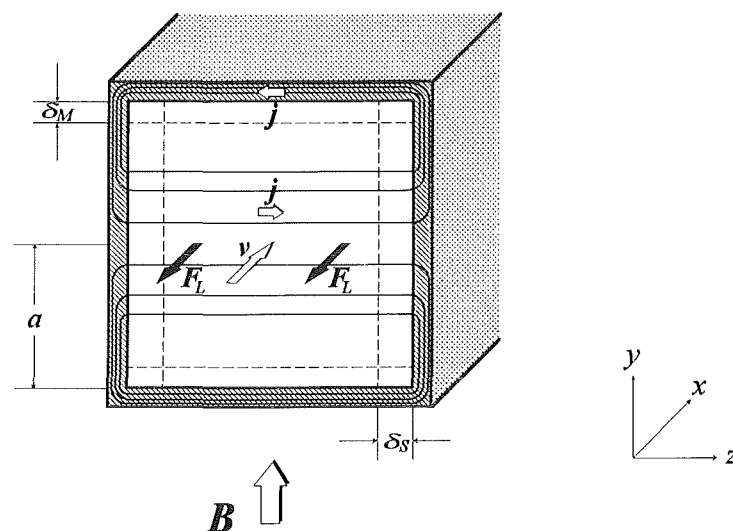


Abb. 3.1: Ideal leitender Kanal bei konstantem Magnetfeld (schematisch)

Mehrere Autoren haben die verschiedenen Grenzschichten in MHD-Rohrströmungen untersucht (siehe z.B. Hunt, Stewardson 1965; Walker et al. 1971; Walker 1981). Für die Seitenschichten an den Wänden parallel zum Magnetfeld  $B$  ergibt sich im Kanal mit rechteckigem Querschnitt als Größenordnung für die Dicke



$$\delta_s = O(M^{-1/2}). \quad (3.1)$$

Die Grenzschichten an den Wänden senkrecht zu  $\mathbf{B}$ , die sogenannten Hartmann-Schichten, sind wesentlich dünner,

$$\delta_M = O(M^{-1}), \quad (3.2)$$

und können bereits mit einer analytischen Lösung der eindimensionalen Plattenkanal-Strömung nachgewiesen werden (Hartmann, 1937).

### 3.1.2 Endlich leitender Kanal bei konstantem Magnetfeld

Wird Strukturmaterial endlicher Leitfähigkeit verwendet, so ist dem rückfließenden elektrischen Strom in den Wänden ein elektrischer Widerstand entgegengerichtet. Ein Teil des Stromes wird daher den leichteren Rückfluß über die Seiten- und Hartmann-Schichten wählen (siehe Abbildung 3.2).

Der induzierte Strom fließt nur noch im Kernbereich der Strömung und in den Hartmann-Schichten orthogonal zu  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{v}$ . Wegen der parallel geschalteten elektrischen Widerstände von Hartmann-Wänden und Hartmann-Schichten bleibt  $\mathbf{j}$  jedoch niedriger als im ideal leitenden Rohr. Damit sind auch die Lorentz-Kräfte  $\mathbf{F}_{Lorentz} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$  und der daraus resultierende Druckverlust geringer.

Chang und Lundgren (1961) erhalten analytisch für die eindimensionale Geschwindigkeit im ebenen Plattenkanal eine Lösung der Form

$$v_x(y) = \frac{I}{M} \frac{1 + \varphi}{M\varphi + \tanh M} \left( 1 - \frac{\cosh(My)}{\cosh M} \right), \quad (3.3)$$

die für große Hartmann-Zahlen  $M$  gegen den Ausdruck

$$v_x(y) = \frac{1 + \varphi}{M(1 + M\varphi)} \left( 1 - e^{-M(1-|y|)} \right) \quad \text{für } M \gg 1 \quad (3.4)$$

strebt. Dabei tritt als neue Kennzahl der sogenannte Wandleitparameter

$$\varphi = \frac{\sigma_{Wand} d}{\sigma_{Fluid} a} \quad (3.5)$$

mit der Dicke der Wand  $d$ , der charakteristischen Abmessung  $a$ , sowie den elektrischen Leitfähigkeiten  $\sigma_{Fluid}$  und  $\sigma_{Wand}$  auf. An diesen Gleichungen für  $v$  läßt sich das weiter oben erwähnte Charakteristikum sich abflachender Geschwindigkeitsprofile mit steigender Hartmann-Zahl erkennen. Nach einer Integration von Gleichung (3.3) kann die einfache dimensionsbehaftete Druckverlustbeziehung

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta v_o}{a^2} \frac{M^2}{1 + \varphi} \frac{M \varphi + \tanh M}{M - \tanh M}, \quad (3.6)$$

mit dem Grenzwert

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta v_o}{a^2} \left( M + M^2 \frac{\varphi}{1 + \varphi} \right) \quad \text{für } M \gg 1 \quad (3.7)$$

hergeleitet werden. Die Hartmann-Zahl  $M$  und der Wandleitparameter  $\varphi$  sind demnach die wesentlichen Parameter für das Niveau des Druckgradienten im ebenen Plattenkanal. Dieses Ergebnis eindimensionaler Vorgänge ist neben der grundlegenden Arbeit von Hartmann (1937) für den nichtleitenden Plattenkanal die einzige geschlossene analytische Lösung der MHD-Gleichungen.

Tillack (1990) entwickelt eine skalierte asymptotische Näherungslösung für den zweidimensionalen Rechteckkanal,

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \left( \frac{a}{3b} \frac{\sqrt{M}}{1 + \varphi_s \sqrt{M}} + \frac{\varphi_H + 1}{\varphi_H + M^{-1}} \right)^{-1}. \quad (3.8)$$

Dabei gehen die Kanalhöhe  $a$ , die Breite  $b$  und der Wandleitparameter der Seitenwand  $\varphi_s$ , beziehungsweise der Hartmann-Wand  $\varphi_H$  ein. Dieses Ergebnis stimmt im Sonderfall  $\varphi_s = \varphi_H$  mit der älteren asymptotischen Näherung von Walker (1981) überein.

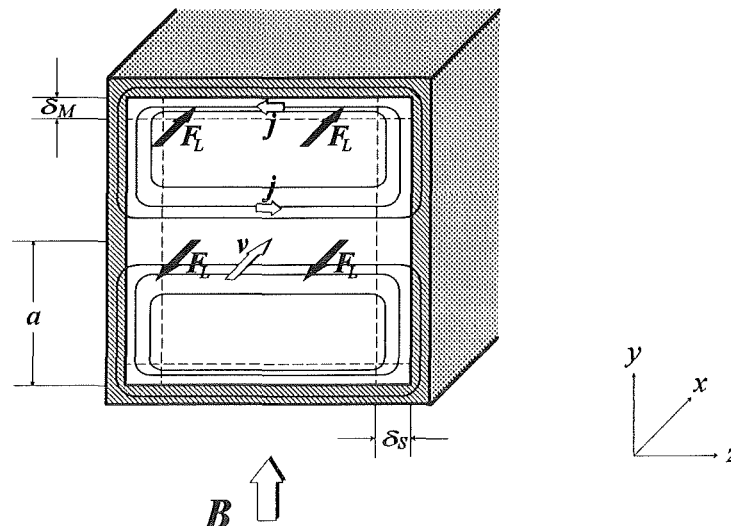


Abb. 3.2: Kanal endlicher Leitfähigkeit bei konstantem Magnetfeld (schematisch)

Im endlich leitenden Kanal bestehen, im Vergleich zum ideal leitenden Rohr, aufgrund der verschiedenen Strompfade neben dem geringeren Druckverlust aber noch weitere prinzipielle Unterschiede. In den Seitenbereichen des Strömungskanales sind  $j$  und  $B$  parallel ausgerichtet, so daß hier keine Lorentz-Kräfte auftreten. Das Fluid kann der im Kernbereich gegen die Bewegung gerichteten Kraft durch diese Seitenschichten ausweichen. Auf diese Weise entstehen die aus der Literatur bekannten  $M$ -förmigen Geschwindigkeitsprofile in voll eingelaufener zweidimensionaler MHD, bei denen die Geschwindigkeit in den Seiten höher ist als im Kern der Strömung (siehe z.B. Hunt, 1965). In den Grenzschichten senkrecht zu  $B$  kommt es im Vergleich zum Kern, trotz den sogar in Hauptströmungsrichtung weisenden Lorentz-Kräften (siehe Abb. 3.2), zu keiner Erhöhung der Geschwindigkeit. Der Grund für dieses zunächst überraschende Phänomen sind die Reibungseinflüsse, die in den extrem dünnen Hartmann-Schichten stets dominieren. Im Kern der Strömung entwickelt sich auch im endlich leitenden Kanal das bereits bekannte, abgeflachte Geschwindigkeitsprofil.

### 3.1.3 Isolierter Kanal bei konstantem Magnetfeld

Im isolierten Kanal muß sich der gesamte elektrische Strom über die Seiten- und Hartmann-Schichten innerhalb des Fluids kurzschließen, da der Rückfluß über die Wände verwehrt ist (siehe Abb. 3.3). Die dünnere Hartmann-Schicht kann damit als maßgeblicher elektrischer Widerstand betrachtet werden, der die Stärke des induzierten elektrischen Stromes  $j$  begrenzt. Die Ströme sind auch für große Hartmann-Zahlen so gering, daß sich in den Seitenschichten keine Geschwindigkeitsüberhöhungen gegenüber dem Kern ausbilden. Das Geschwindigkeitsprofil ähnelt dem der Strömung im ideal leitenden Rohr, der Druckverlust ist jedoch bedeutend geringer. Dies läßt sich leicht an den Gleichungen (3.8), (3.3) und (3.6) für den Kanal endlicher Leitfähigkeit erkennen, wenn dort als Sonderfall der Wandleitparameter zu  $\varphi = 0$  gesetzt wird.

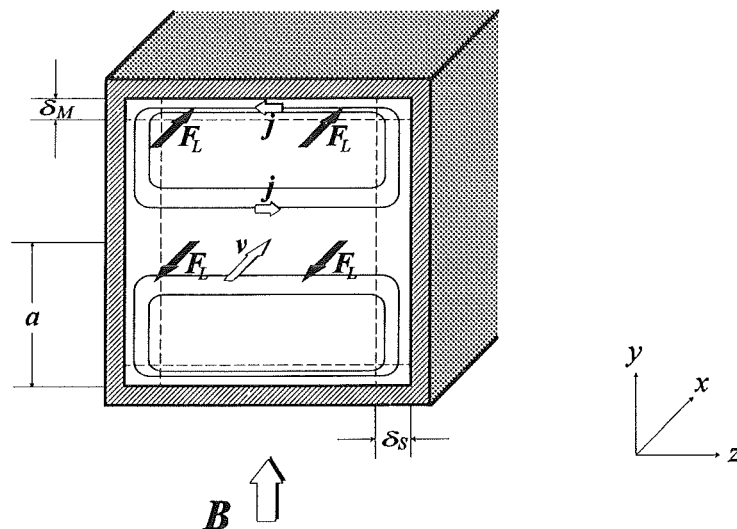


Abb. 3.3: Isolierender Kanal bei konstantem Magnetfeld (schematisch)

Die bereits erwähnte theoretische Vorhersage des eindimensionalen isolierten Plattenkanals (Hartmann, 1937) gilt als Pionierarbeit der MHD. Die Ergebnisse sind noch im gleichen Jahr experimentell in einer mit Quecksilber betriebenen Anlage bestätigt worden (Hartmann und Lazarus, 1937).

Die erste Behandlung der zweidimensionalen Rohrströmung im isolierten Kanal ist eine asymptotische Näherung von Shercliff (1953). Roberts (1967) kommt nach einer Laplace-Transformation zum gleichen Ergebnis und Messungen von Branover und Gelfgat (1968) bestätigen die Vorhersagen für große Hartmann-Zahlen. Den Fall kleiner Hartmann-Zahlen und zweidimensionaler Strömung studieren Kit et al. (1970) im Experiment und finden qualitative Übereinstimmung mit numerischen Untersuchungen.

### 3.1.4 Kombinationen isolierender und leitender Wände

In der Literatur werden neben einheitlichen Strukturmaterialien auch Kombinationen isolierender und leitender Wände untersucht. Hunt (1965) beschreibt ideal leitende Hartmann- mit endlich leitenden Seitenwänden und endlich leitende Hartmann- mit isolierenden Seitenwänden. Solan und Smith (1966) behandeln letzteres ebenfalls, allerdings mit einer Entwicklung nach Eigenfunktionen für den Grenzfall sehr großer Hartmann-Zahlen. Hunt und Stewardson (1965) verwenden die Methode der Störungsrechnung, um isolierende Hartmann- mit ideal leitenden Seitenwänden zu berechnen. Isolierende Hartmann-Wände werden auch von Chiang und Lundgren (1967) abgehandelt, wobei die Seitenwände neben perfekt auch endlich leitend sein dürfen. Ihre Ergebnisse für perfekt leitende Seitenwände stimmen mit denen von Hunt und Stewardson überein. Die asymptotische Lösung von Alty (1971) erweitert die Untersuchungen von Hunt (1965) auf beliebig im Raum orientierte, konstante Magnetfelder. Eine Zusammenfassung der Arbeiten über verschiedene Kombinationen von Wandmaterialien geben Temperly und Todd (1971).

## 3.2 Dreidimensionale Strömung

Dreidimensionale MHD-Effekte können in Strömungskanälen durch drei verschiedene physikalische Mechanismen erzwungen werden:

- Variation des Kanalquerschnittes
- Variation des Magnetfeldes
- Variation der Wandleitfähigkeit

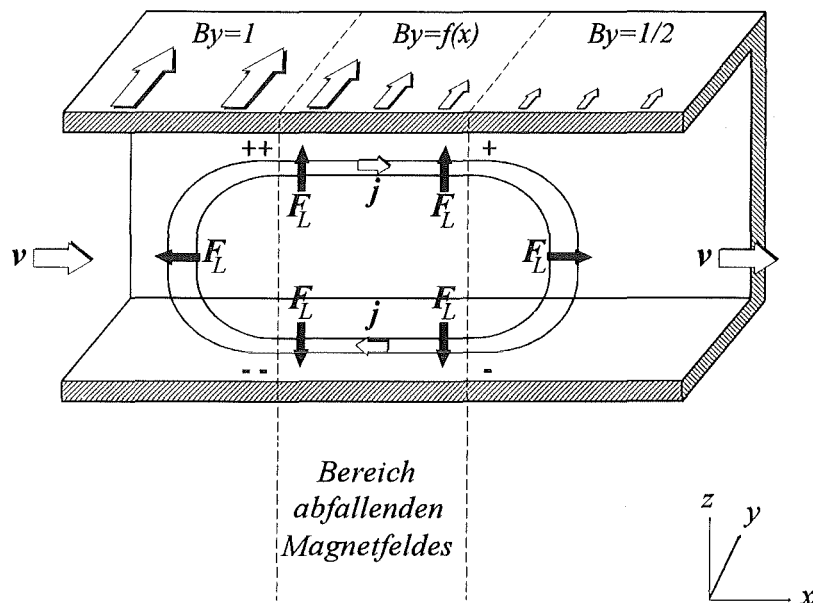


Abb. 3.4: Axiale Ströme bei variablem Magnetfeld (schematisch)

Die ersten beiden Möglichkeiten sind in der Literatur verschiedentlich untersucht worden. Asymptotische Näherungslösungen zu veränderlichen Rohrgeometrien stammen beispielsweise von Hunt, Leibovich (1967), Walker et al. (1971), Walker (1972) und Walker (1981). Näherungslösungen zum variablen Magnetfeld werden von Hunt, Holroyd (1977), Holroyd, Walker (1978) und Walker (1984) gegeben.

In allen drei Fällen sind die im Vergleich zur zweidimensionalen MHD zusätzlich induzierten elektrische Ströme für die Entstehung der dreidimensionalen Effekte verantwortlich. Dies soll stellvertretend am Beispiel eines geraden, isolierenden Rohres unter dem Einfluß eines variablen, transversalen Magnetfeldes erläutert werden. Das in  $y$ -Richtung weisende äußere Feld soll dabei monoton von  $B_y=1$  auf den Wert  $B_y=1/2$  abfallen. Die Grafik 3.4 illustriert einen schematischen Schnitt durch den betrachteten Rechteckkanal. Die Hauptströmung bewegt sich in positive  $x$ -Richtung. In hinreichend großer Entfernung vor und hinter dem Bereich variablen Magnetfeldes sollen voll eingelaufene, zweidimensionale Strömungszustände vorherrschen. Im Bereich des stärkeren Feldes  $B_y=1$  werden dabei jedoch aufgrund des Ohmschen Gesetzes (2.9) größere elektrische Spannungen im Querschnitt induziert als im Bereich des niedrigeren Feldes  $B_y=1/2$  (in der Prinzipskizze angedeutet durch ++ und --, bzw. + und -). Es entsteht ein Potentialgefälle in longitudinaler  $x$ -Richtungen, das zusätzliche elektrische Ströme in derselben Richtung nach sich zieht. Deren Stromlinien wiederum müssen wegen der Quellenfreiheit des elektrischen Stromes (siehe Gl. 2.10) senkrecht zur Hauptströmungsrichtung wieder geschlossen werden. Die Wechselwirkung des Stromes mit dem Magnetfeld hat schließlich Lorentz-Kräfte zur Folge, wie sie in Abbildung 3.4 angedeutet sind. Das Fluid wird dabei im Bereich dreidimensionaler Effekte zu den Seitenwänden hin verdrängt. Es kommt zur Ausbildung eines  $M$ -förmigen Geschwindigkeitsprofils mit erhöhten Geschwindigkeiten in den Seitenschichten und niedrigeren Geschwindigkeiten im Kern der Strömung. Das  $M$ -Profil bildet sich hinter dem dreidimensionalen Bereich wieder monoton in die bekannte zweidimensionale Strömung zurück.

Messungen von Gelfgat und Kit (1971) bestätigen die Ausbildung des  $M$ -förmigen Geschwindigkeitsprofils für den Fall plötzlicher Querschnittsänderung in einer Quecksilber-Versuchsanlage. Wegen der Umstrukturierung des Strömungsprofils treten bei den Übergängen von zwei- zu dreidimensionalen Zuständen zusätzliche Reibungseinflüsse auf, die eine Scherschicht im Strömungsquerschnitt ausbilden. In der Prinzipskizze 3.5 ist

dies am Beispiel eines Plattenkanals mit veränderlichem Querschnitt angedeutet. Die Abhängigkeit der Ausdehnung dieser Scherschicht von der Trägheit ist sofort plausibel. Hunt und Leibovich (1967) zeigen, daß bei abrupten Querschnittsänderungen im Fall großer Hartmann- und Reynolds-Zahlen, sowie kleiner magnetischer Reynolds-Zahlen die Dicke dieser Schicht von der Größenordnung

$$\delta_{\text{Scher}} = O(N^{-1/3}) \quad (3.9)$$

ist.

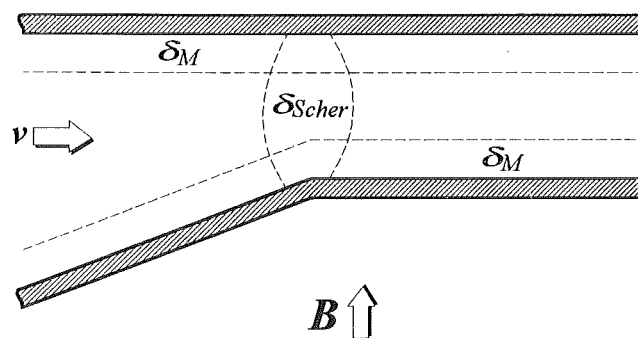


Abb. 3.5: Strömung mit Scherschicht bei Querschnittsänderung (schematisch)

### 3.3 Numerische Lösungsansätze

Für allgemeine zwei- und dreidimensionale Vorgänge in der Magnetohydrodynamik sind keine exakten analytischen Lösungen des Differentialgleichungssystems mehr möglich. In der Literatur haben sich daher zunächst analytische Näherungslösungen etabliert (siehe Kap.



3.1 und 3.2). Die stärkste Verbreitung haben asymptotische Näherungen für große Hartmann-Zahlen  $M$  und Interaktionsparametern  $N$  in Kombination mit kleinen Wandleitparametern  $\varphi$  und kleinen magnetischen Reynolds-Zahlen  $Re_m$ . Dabei werden Rand- und Scherschichten ganz vernachlässigt oder aber nur teilweise durch Abschätzungen approximiert (z.B. Walker 1984). Die Beschreibung von Strömungen im Übergangsbereich zu magnetfeldfreien Räumen oder in Kanälen, bei denen nicht ein beträchtlicher Anteil von  $B$  senkrecht zum Kanal steht, sind allerdings nicht möglich. Eine Untersuchung kleiner Hartmann-Zahlen oder kleiner Interaktionsparameter ist ebenfalls ausgeschlossen. Daneben haben sich auch halbnumerische Verfahren entwickelt. Ausgehend von den selben Voraussetzungen wie die analytischen Näherungen wird unter Ausnutzung bestimmter charakteristischer Eigenschaften der Differentialgleichungen zunächst in Magnetfeldrichtung analytisch integriert. Das dann verbleibende einfachere, lineare, zweidimensionale Problem wird anschließend numerisch gelöst (Madaramé, Hagiwara 1988; Hua 1988; McCarthy 1989; Lenhart, McCarthy 1990; Bühler 1993). Da die Voraussetzungen des Verfahrens mit denen der analytischen Asymptotik identisch sind, unterliegt es ebenfalls den obengenannten Einschränkungen.

Als einzige Möglichkeit diese Restriktionen ganz zu beseitigen bleibt die volle numerische Simulation des allgemeinen, nichtlinearen, dreidimensionalen Gleichungssystems (2.7), (2.8), (2.9) und (2.14). Der Programmieraufwand und die Anforderungen an die Rechenanlagen sind dabei allerdings derart immens, daß nur wenige Untersuchungen diese Methode verfolgen. Insbesondere für allgemeine dreidimensionale Aufgabenstellungen steht die Forschung erst ganz am Anfang. Aitov et al. (1983 und 1984) lösen zwar den vollen Gleichungssatz der MHD, ihre Anwendungen bleiben allerdings auf  $M \leq 30$  beschränkt. Die dabei präsentierten Ergebnisse für verschiedene Interaktionsparameter sind, vermutlich aufgrund einer unzureichenden Auflösung des Rechengbietes, mit Vorbehalten zu betrachten. Kim (1989) rechnet isolierende oder ideal leitende Wände bei variablem Magnetfeld oder bei konstantem Magnetfeld  $B$  mit einer Querschnittserweiterung für  $M \leq 100$ . Er verweist jedoch auf Konvergenzprobleme in den Rechenläufen. Der Restriktion durch die Maschen-Reynolds-Zahl (vergl. dazu Kap. 4.4) kann durch Kims Lösungsalgorithmus wegen der niedrigen Genauigkeit erster Ordnung nur unbefriedigend begegnet werden. Gleiches gilt auch für Kunugi et al. (1989), deren Ergebnisse für einen Krümmer auf dem Rechencode von Kim basieren. Zudem wäre eine andere Formulierung der Randbedingung für den Druck am Ausgang des Kanals unter physikalischen Gesichtspunkten günstiger. Sterl (1989) berechnet gerade Rohre mit variabler

Wandleitfähigkeit oder veränderlichem Magnetfeld bis maximal  $M=100$ . Bei genauerer Betrachtung ist seine Lösung jedoch ohne Berücksichtigung der Trägheit, denn sein Verfahren verlangt prinzipiell derart große Interaktionsparameter  $N$ , daß stets trägheitsfreie Zustände vorliegen. Bei niedrigen Interaktionsparametern liefert das Programm keine Ergebnisse mehr. Der Grund dafür ist wiederum in der Restriktion durch die Maschen-Reynolds-Zahl zu finden. Ein funktionsfähiges numerisches Programm zur Untersuchung der Trägheit bei dreidimensionalen MHD-Strömungen liegt also bei keiner der genannten Arbeiten vor. Welche Schritte notwendig werden, um dieses Problem zu lösen und den Interaktionsparameter  $N$  im physikalisch interessanten Bereichen zu variieren, wird in Kapitel 4.2 auf Seite 36 näher erläutert.

### 3.4 Umschlag von laminarer in turbulente MHD

Bereits in der grundlegenden Arbeit von Hartmann (1937) wird darauf hingewiesen, daß Turbulenz unter der Wirkung von starken Magnetfeldern aufgrund der induzierten Lorentz-Kräfte unterdrückt wird. Bewegungen parallel zum Magnetfeld werden hingegen nicht behindert, und die Ausbildung einer zweidimensionalen Turbulenz wird somit begünstigt. Spätere Arbeiten setzen die Untersuchungen in dieser Richtung sowohl theoretisch, als auch experimentell fort (z.B. Sommeria und Moreau, 1982; , Pouquet et al. 1984; Sukorianski et al., 1986). Mit einem laminar-turbulenten Umschlag ist bei magnetohydrodynamischen Strömungen also prinzipiell erst bei höheren Reynolds-Zahlen als in hydrodynamischen Strömungen zu rechnen. Für den Fall eines zweidimensionalen Plattenkanals bei transversalem Magnetfeld wird dies erstmals von Lock (1955) genauer quantifiziert. Basierend auf der Theorie kleiner Störungen ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen kritischer Reynolds-Zahl  $Re_{cr}$  und Hartmann-Zahl  $M$ :

$$Re_{cr} = 5 \cdot 10^4 M, \quad \text{Stabilitätsanalyse, } \mathbf{B} \text{ senkrecht. (3.10)}$$

Im Experiment wird zwar ein deutlich kleinerer Koeffizient ermittelt, der lineare Zusammenhang an sich kann jedoch für Hartmann-Zahlen größer als 20 bestätigt werden (Brouillette, Lykoudis, 1967).

$$Re_{cr} = 225 \cdot M. \quad \text{Experiment, } \mathbf{B} \text{ senkrecht.} \quad (3.11)$$

Ist das Magnetfeld hingegen parallel zur Hauptströmung, so sagt eine lineare Stabilitätsanalyse von Stuart (1954) voraus, daß dann bereits früher mit einsetzender Turbulenz zu rechnen ist. Stuart findet als kritischen Wert

$$Re_{cr} = 450 \cdot M. \quad \text{Stabilitätsanalyse, } \mathbf{B} \text{ parallel.} \quad (3.12)$$

Fraim und Heiser (1968) messen für ein rundes Rohr mit longitudinalem Magnetfeld

$$Re_{cr} = 30 \cdot M. \quad \text{Experiment, } \mathbf{B} \text{ parallel.} \quad (3.13)$$

Für rechteckige und runde Rohre unter dem Einfluß transversaler Magnetfelder führt Branover (1968) einen Vergleich der verschiedenen Ergebnisse mehrerer Autoren durch und kommt auf die verallgemeinernde Aussage

$$Re_{cr} = (215 - 85 e^{-0,35\beta}) \cdot M, \quad (3.14)$$

wobei  $\beta$  das Verhältnis von Höhe zu Breite im Rechteck-Kanal bezeichnet. Der Einfluß von Rauigkeit an den Kanalwänden ist nach seiner Abschätzung von untergeordneter Bedeutung für den laminar-turbulenten Umschlag. Die gleiche Aussage gilt auch für den Einfluß der Wandleitfähigkeit, solange das induzierte Magnetfeld klein ist.

Da die Aussagen verschiedener Autoren zum Teil stark voneinander abweichen, muß die Frage des laminar-turbulenten Umschlages in der Magnetohydrodynamik weiterhin als ungeklärt eingestuft werden. Auch über die Erscheinungsform der Wirbel und den Mechanismus der Unterdrückung dreidimensionaler Strukturen herrscht noch Uneinigkeit. Dennoch läßt sich zusammenfassend folgendes festhalten:

- Die kritische Reynolds-Zahl  $Re_{cr}$  für den Umschlag von laminarer in turbulente MHD ist eine lineare Funktion der Hartmann-Zahl  $M$ .
- Der Koeffizient schwankt in den Angaben der Literatur zwischen 30 und  $5 \cdot 10^4$ .

- ❑ Theoretische und experimentelle Befunde weichen voneinander um Größenordnungen ab.
- ❑ Der Koeffizient hängt stark von der Richtung des Magnetfeldes sowie der Rohrgeometrie ab.
- ❑ Wandleitfähigkeit und Rauigkeit spielen eine untergeordnete Rolle.

Werden die Daten aus den Studien von R. J. Holroyd, J. T. D. Mitchell (1984), bzw. D. L. Smith (1984) verwendet, so zeigt sich, daß bei fusionsrelevanten Kanalströmungen nur solche Reynolds-Zahlen auftreten, die um ein bis zwei Größenordnungen unter dem kritischen Wert von Gleichung (3.14) liegen. Die Rechenbeispiele aus den Kapiteln 5, 6 und 7 bleiben ebenfalls mindestens eine Größenordnung unter dem angegebenen Limit. Es ist also gerechtfertigt, bei den hier diskutierten MHD-Strömungen von laminaren Zuständen auszugehen. Prinzipiell können aber mit der vollen numerischen Simulation auch turbulente Strömungsvorgänge komplett erfaßt werden, wenn numerisch die entsprechend feine Auflösung des Rechengebietes gewählt wird.

## 4 Numerisches Verfahren

### 4.1 Allgemeines

Die Grundidee aller numerischer Verfahren ist es, Differentialgleichungen nicht geschlossen im gesamten Raum, sondern auf einer endlichen Anzahl diskreter Stellen zu lösen. Dabei haben sich die sogenannten Finite-Elemente-Verfahren und die Differenzen-Verfahren am weitesten verbreitet. Bei den für die vorliegenden Aufgabenstellungen gewählten Differenzen-Verfahren werden auf diesen Stützstellen sämtliche Ableitungen durch Taylor-Reihen approximiert. Aus einem gegebenen System gekoppelter, partieller Differentialgleichungen - im hier betrachteten Fall also (2.7), (2.8), (2.9) und (2.14) - leitet sich so ein algebraisches Gleichungssystem ab, das anschließend von einem Computer rationell weiterverarbeitet werden kann.

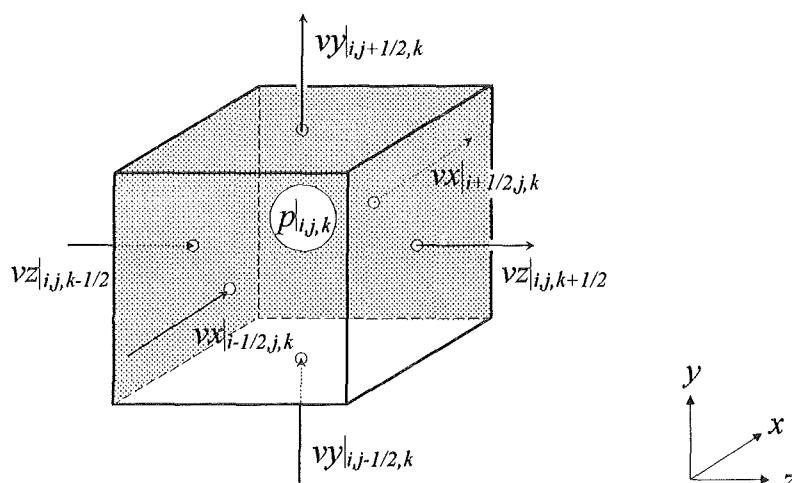


Abb. 4.1: staggered grid, dreidimensional

Für fluiddynamische Aufgabenstellungen erweist sich die Definition der Stützstellen auf einem versetzten Maschengitter (staggered grid) als besonders geeignet (Harlow, Welsch, 1965; Anderson et al., 1984, S. 459 f.). Im allgemeinen dreidimensionalen Fall wird das Rechengebiet in  $I \times J \times K$  Zellen aufgeteilt. Abbildung 4.1 zeigt eine beliebige Zelle mit dem Index  $i, j, k$ . Dabei gilt  $0 \leq i \leq I$ ,  $0 \leq j \leq J$  und  $0 \leq k \leq K$ . Im Zentrum jeder Zelle werden die skalaren Größen - für die MHD sind dies der Druck und das elektrische Potential - festgelegt (z.B.  $p|_{i,j,k}$  für den Druck an der Stelle  $i, j, k$ ). Die Vektorkomponenten der Geschwindigkeit, des Magnetfeldes und der elektrischen Stromdichte sind hingegen um eine halbe Gitterweite versetzt auf den Mitten der Zellenseiten definiert (z.B.  $vx|_{i+1/2,j,k}$  für die Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung an der Stelle  $i+1/2, j, k$ ).

Die Flußgrößen befinden sich also zentral auf den Grenzen der Kontrollflächen. Daraus resultiert auch der wesentliche Vorteil dieser Aufteilung. Die diskretisierten Erhaltungssätze für Masse und elektrische Stromdichte werden nämlich exakt erfüllt, da die Größen an den durchströmten Grenzen nicht interpoliert werden müssen, sondern, dort wo sie zur Beschreibung des Flusses durch eine Zelle benötigt werden, jeweils explizit vorliegen. Ansicht 4.2 zeigt die Anordnung mehrerer Maschen um die zentrale Zelle  $i, j$  am Beispiel von Druck und Geschwindigkeit. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist hier eine zweidimensionale Projektion gewählt. Es ist gut zu erkennen, daß der aus der einen Zelle austretende Fluß exakt in die angrenzende Zelle einströmt. Für die elektrischen Größen, Stromdichte  $j$  und Potential  $\Phi$ , gilt die gleiche Aussage.

Werden die Abmessungen der Zelle mit  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$  bezeichnet, so ergibt sich nach einer Taylor-Reihenentwicklung beispielsweise für die Ableitung der Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung

$$\left. \frac{\partial vx}{\partial x} \right|_{i+1/2,j,k} = \frac{vx|_{i+3/2,j,k} - vx|_{i-1/2,j,k}}{2\Delta x} + O(\Delta x^3). \quad (4.1)$$

Terme der Größenordnung  $O(\Delta x^3)$  sind hier im Sinne zentraler Differenzen von zweiter Ordnung vernachlässigbar klein. Auf dem versetzten Gitter werden auch die anderen Terme des Gleichungssystems (2.7), (2.8), (2.9) und (2.14), sowie die dazugehörigen Randbedingungen (2.17) bis (2.25) in zweiter Ordnung genau approximiert. Für die zweite Ableitung des Druckes an der Stelle  $i, j, k+1$  ergibt sich etwa

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right|_{i,j,k+1} = \frac{p|_{i,j+1,k+1} - 2p|_{i,j,k} + p|_{i,j-1,k+1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^3). \quad (4.2)$$

Die einzige Ausnahme von diesem Schema bilden die konvektiven Terme der Impulserhaltung, deren speziellen Behandlung in Kapitel 4.2 ausführlich erörtert wird.

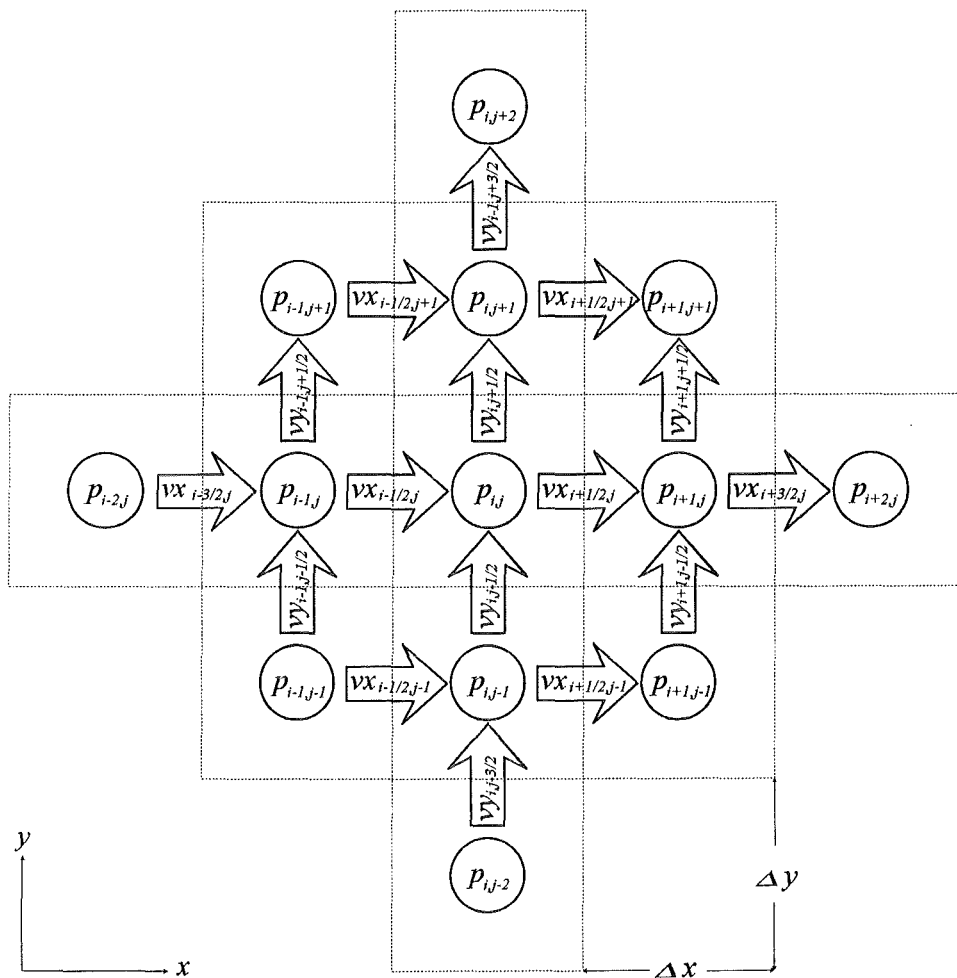


Abb. 4.2: Staggered grid, zweidimensionale Projektion

## 4.2 Upwind-Verfahren

Am Beispiel der eindimensionalen Konvektions-Diffusions-Gleichung

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (4.3)$$

mit der Temperatur  $T$ , der Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  und der Peclet-Zahl  $Pe$  soll die Notwendigkeit zur besonderen Behandlung konvektiver Terme erläutert werden. Für die Übertragung der nachfolgenden Betrachtungen auf die Impulserhaltung der MHD muß die Peclet-Zahl lediglich durch die Reynolds-Zahl ersetzt werden. Eine Diskretisierung der Gleichung durch zentrale Differenzen an der beliebigen Stelle  $i$  bringt

$$v_x|_i \frac{T|_{i+1/2} - T|_{i-1/2}}{\Delta x} = v_x|_i \frac{T|_{i+1} - T|_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{1}{Pe} \frac{T|_{i+1} - 2T|_i + T|_{i-1}}{\Delta x^2}. \quad (4.4)$$

Die erste Ableitung der Temperatur nach  $x$  an der Stelle  $i$  wird demnach mit einer Geraden durch die beiden Nachbarpunkte  $T|_{i-1/2}$  und  $T|_{i+1/2}$  angenähert (siehe Abbildung 4.3).

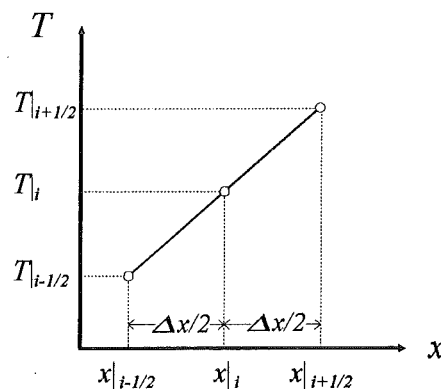


Abb. 4.3: Zentrale Differenz an der Stelle  $i$



Physikalischen Sinn macht das allerdings nur, wenn an jeder Stelle  $i$  des Rechengebietes stets

$$T|_{i-1} \stackrel{!}{\leq} T|_i \stackrel{!}{\leq} T|_{i+1}, \quad (4.5)$$

oder aber

$$T|_{i-1} \stackrel{!}{\geq} T|_i \stackrel{!}{\geq} T|_{i+1} \quad (4.6)$$

gewährleistet werden kann. Nach Einführung der, je nach verwendetem Parameter mit Maschen-Peclet-Zahl oder mit Maschen-Reynolds-Zahl bezeichneten Kenngröße

$$Pe_{\Delta x} = Pe \, v_x \, \Delta x \quad (4.7)$$

bzw.

$$Re_{\Delta x} = Re \, v_x \, \Delta x$$

kann die Konvektions-Diffusions-Gleichung (4.4) zusammen mit den Ungleichungen (4.5) und (4.6) in die Relation

$$-2 \leq Pe_{\Delta x} \leq 2 \quad (4.8)$$

bzw.

$$-2 \leq Re_{\Delta x} \leq 2$$

umgeformt werden. Die Herleitung dieser Restriktion für die Maschen-Reynolds-Zahl wird im Kapitel 9.3 des Anhanges im einzelnen ausgeführt. Eine Verletzung der Bedingung (4.8) führt bereits nach wenigen Iterationsschritten zu oszillatorischen Instabilitäten (siehe Roache, 1985). Wie unangenehm diese rein numerische Einschränkung sein kann, wird bei näherer Betrachtung der Gleichung (4.7) deutlich. Die lokale Geschwindigkeit  $v_x$ , der Gitterpunktabstand  $\Delta x$  und die Peclet-Zahl  $Pe$ , bzw. die Reynolds-Zahl  $Re$  dürfen offensichtlich bestimmte Werte nicht überschreiten und schließen somit viele Aufgabenstellungen von der Berechenbarkeit zunächst apriori aus. Insbesondere können trägheitsbehaftete MHD-Strömungen, d.h. Strömungen bei kleinen Interaktionsparametern  $N$ , auf diese Weise nicht untersucht werden. Die Reynolds-Zahl wird dann nämlich wegen ihrer Proportionalität zu  $N^{-1}$  (siehe Gleichung 2.13) für die numerische Behandlung zu groß.

Die Lösung dieses Problems ist als eigenständiges Forschungsgebiet einzustufen, und das zugrundeliegende Verfahren sei daher an dieser Stelle lediglich skizziert:

In der Literatur finden sich verschiedenlich Hinweise darauf, daß die Maschen-Reynolds-Zahl völlig analog zur Reynolds-Zahl gebildet wird (s. z.B. Zierep, 1982, S. 45). Bei Betrachtung einer einzelnen Masche sind ihre Abmessung sowie die lokale Geschwindigkeit als charakteristische Größen einzusetzen (vergl. Definition 4.7). Damit stellt  $Re_{\Delta x}$  das Verhältnis von Konvektion zur Diffusion der jeweils betrachteten Zelle dar (z.B. Anderson, 1985, S. 157 f). Anschaulich gesprochen bedeutet die Restriktion (4.8), daß in ein Kontrollvolumen konvektiv nur so viel Information transportiert werden darf, wie dort diffusiv verarbeitet werden kann. Genau aus diesen Überlegungen leitet sich auch der Lösungsansatz ab. Bei den sogenannten "upwind-Verfahren" werden nämlich die konvektiven Anteile der Impulserhaltung nicht in gewohnter Art und Weise definiert, sondern den Gegebenheiten der einzelnen Zelle angepaßt. Ein besonders leistungsstarkes upwinding ist das LECUSSO-Verfahren (local exact consistant upwind scheme of second order), das mit zweiter Ordnung Genauigkeit den Raum auflöst (Günther, 1988). Die transportierten Größen werden dazu gemäß der Vorschrift

$$T|_{i+1/2} = \frac{1}{2}(T|_{i+1} + T|_i) - F(T|_{i+1} - 2T|_i + T|_{i-1}), \text{ falls } Re_{\Delta x} \geq 0 \quad (4.9)$$

approximiert. Der herkömmlichen zentralen Differenz an der Stelle  $i+1/2$  (erster Summand in Gleichung 4.9) wird eine von weiter stromauf kommende Information superponiert (zweiter Summand in Gleichung 4.9). Dieser Zusatzterm hat das formale Aussehen einer Diffusion und wird mit dem Faktor  $F$  gewichtet. Es kann also auch gesagt werden, daß bei upwind-Verfahren der realen Diffusion eine künstliche überlagert wird, mit dem Ziel, die harte Einschränkung (4.8) aufzuweichen. Der Gewichtungsfaktor  $F$  selbst hängt von dem Verhältnis der Konvektion zur Diffusion in der jeweiligen Zelle wie folgt ab:

$$F = \frac{C_1}{C_2} \frac{\frac{1}{2}C_1(C_2 + 1) - (C_2 - 1)}{(C_2 - 1)^2}. \quad (4.10)$$

Innerhalb des Gewichtungsfaktors bedeutet  $C_1$  die Maschen-Reynolds-Zahl an der Stelle  $i+1/2$ ,

$$C_1 = Re_{\Delta x}|_{i+1/2}, \quad (4.11)$$

und  $C_2$  steht für die Exponentialfunktion

$$C_2 = e^{c_1}. \quad (4.12)$$

Bei negativen Maschen-Reynolds-Zahlen, d.h. bei umgekehrter Strömungsrichtung, ergibt sich eine völlig analoge Darstellung,

$$T|_{i+1/2} = \frac{1}{2}(T|_{i+1} + T|_i) - F(T|_{i+2} - 2T|_{i+1} + T|_i), \text{ falls } Re_{\Delta x} \leq 0. \quad (4.13)$$

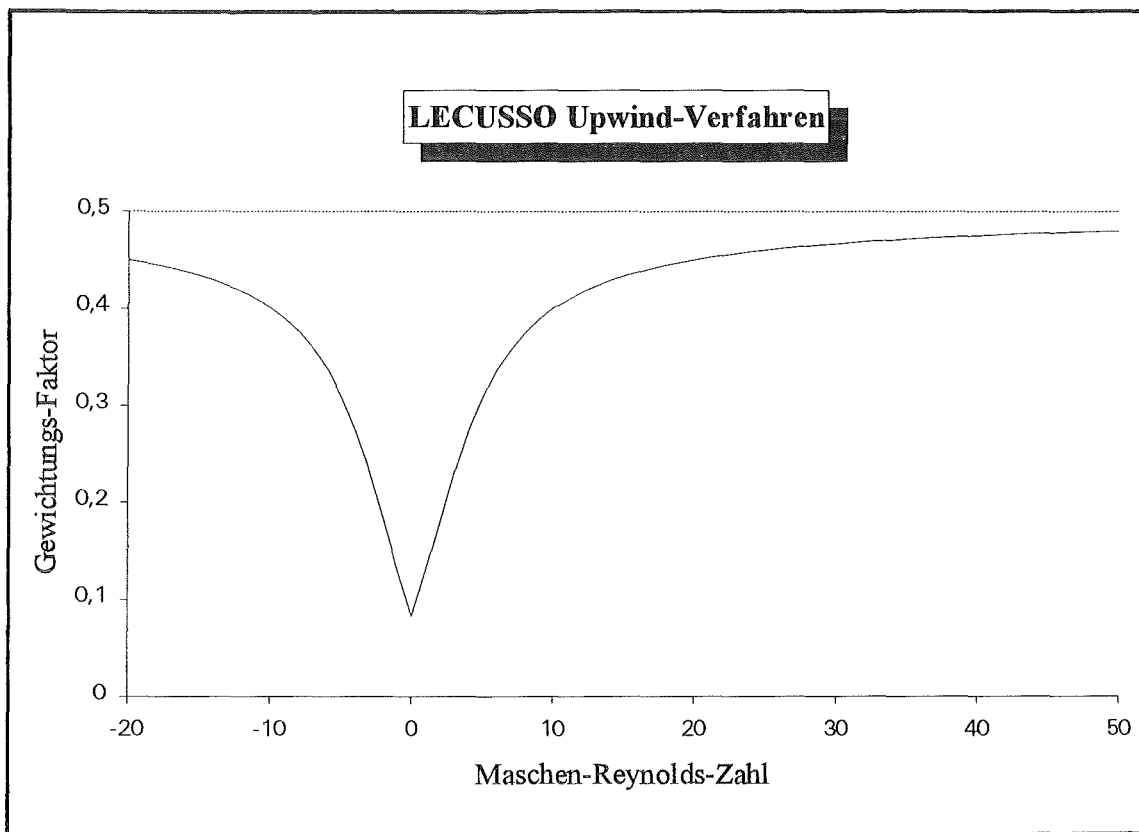


Abb. 4.4: Gewichtungsfaktor  $F$  des LECUSSO-Upwind-Verfahrens

Die Grafik 4.4 veranschaulicht den Verlauf des Gewichtungsfaktors  $F$  als Funktion der Maschen-Reynolds-Zahl  $Re_{\Delta x}$ . Der Faktor  $F$  und damit auch die künstliche Diffusion steigen mit dem Betrag von  $Re_{\Delta x}$ . Bei schnellerer Strömung findet also ein stärkerer Ausgleich statt. Die Gewichtung ist richtungsunabhängig für negative und positive Maschen-Reynolds-Zahlen gleich groß. Für den asymptotischen Grenzwert  $F=1/2$  läßt sich anhand der Gleichungen (4.9) und (4.13) erkennen, daß dann nur noch einseitig von stromaufkommende Information in die Rechnung eingeht.

Neben LECUSSO sind in der Literatur eine Vielzahl anderer upwind-Verfahren beschrieben. Ein Vergleich der verschiedenen Lösungen kann der Arbeit von Günther (1988) entnommen werden. Der Unterschied von anderen Ansätzen zu LECUSSO besteht im wesentlichen in einer anderen Wahl von  $F$  oder in der Ordnung der Genauigkeit.

Selbstverständlich müssen bei allgemeinen, dreidimensionalen Problemen die gesamten Herleitungen auch in den beiden anderen Koordinatenrichtungen durchgeführt werden. Es ergeben sich damit den Gleichungen (4.9) bis (4.13) entsprechende Aussagen für die Bildung der konvektiven Terme in  $y$ - und  $z$ -Richtung. Angesichts dieser Gleichungen liegt der ganz erhebliche Anstieg an Programmieraufwand und Rechenzeit bei dreidimensionalen Aufgabenstellungen gegenüber herkömmlichen Verfahren auf der Hand. Um hier wenigstens die Rechenzeit in Grenzen zu halten, wird LECUSSO im vorliegenden MHD-Programm nur dann angewendet, wenn tatsächlich mindestens einer der Fälle  $|Re_{\Delta x}| \geq 2$ ,  $|Re_{\Delta y}| \geq 2$  oder  $|Re_{\Delta z}| \geq 2$  eintritt. Andernfalls wird im Sinne einer Hybridtechnik die übersichtlichere, zentrale Differenz verwendet. Dabei kann statt der hydrodynamischen Formulierung der Maschen-Reynolds-Zahl (4.7) auch die magnetohydrodynamische Schreibweise für die drei kartesischen Koordinaten gewählt werden. Es ergibt sich in  $x$ -Richtung

$$Re_{\Delta x} = Re_{vx} \Delta x = \frac{M^2}{N} vx \Delta x \quad (4.14)$$

beziehungsweise

$$Re_{\Delta y} = Re_{vy} \Delta y = \frac{M^2}{N} vy \Delta y \quad (4.15)$$

und schließlich

$$Re_{\Delta z} = Re_{vz} \Delta z = \frac{M^2}{N} vz \Delta z \quad (4.16)$$

in  $y$ - und  $z$ -Richtung. Da sich in unmittelbarer Wandnähe wegen der Haftbedingung stets nur kleine Geschwindigkeiten und damit auch niedrige Maschen-Reynolds-Zahlen einstellen, darf im zur Wand nächstgelegenen Gitterpunkt ohne Einschränkung ebenfalls die zentrale Differenz verwendet werden. Auf diese Weise kann auf die Definition imaginärer, außerhalb des physikalischen Rechenggebietes gelegener Punkte verzichtet werden.

### 4.3 Fractional-Step-Verfahren

Im allgemeinen wird der Druck eines neuen Zeitschrittes  $n+1$  nach Anwendung des Divergenzoperators auf die Impulserhaltung (2.7) aus der Beziehung

$$\nabla^2 p|^{n+1} = \nabla \bullet (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{M^2} \nabla \bullet (\nabla^2 \mathbf{v}|^n) + \frac{1}{N} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \bullet \mathbf{v}|^n) + \nabla \bullet (\mathbf{v}|^n \bullet \nabla) \mathbf{v}|^n \right\} \quad (4.17)$$

gewonnen. Hochgestellte Indizes kennzeichnen hier die zeitliche Diskretisierung. Für die Geschwindigkeiten werden die bekannten Werte des vorangegangenen Zeitschrittes  $n$  eingesetzt, wobei die Terme mit  $\nabla \bullet \mathbf{v}|^n$  zur Vermeidung numerischer Instabilitäten nicht apriori vernachlässigt werden dürfen (siehe Roache, 1985). Anschließend wird mit dem dann gegebenen  $p|^{n+1}$  aus der Impulserhaltung die Geschwindigkeit zum neuen Zeitpunkt  $n+1$  bestimmt. Diese Vorgehensweise ist zwar voll funktionsfähig, aber auch sehr umständlich. Wesentlich bequemer können Druckwerte berechnet werden, wenn statt dessen nach dem sogenannten fractional-step-Verfahren vorgegangen wird (Yanenko, 1971; Reyret, Taylor, 1983). Dazu muß die Impulserhaltung zunächst zeitlich in erster Ordnung genau diskretisiert werden:

$$\frac{\mathbf{v}|^{n+1} - \mathbf{v}|^n}{\Delta t} = -(\mathbf{v}|^n \bullet \nabla) \mathbf{v}|^n + N(-\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \frac{N}{M^2} \nabla^2 \mathbf{v}|^n + O(\Delta t^2). \quad (4.18)$$

Dabei ist  $v|''$  wieder die bekannte Geschwindigkeit des alten Zeitschrittes  $n$ , und  $v|^{n+1}$  die gesuchte, neue Geschwindigkeit des Rechenzeitschrittes  $n+1$ . Jetzt wird eine künstliche, temporäre Größe gemäß der Vorschrift

$$v_{temp} = v|^{n+1} + N \Delta t \nabla p|'' \quad (4.19)$$

eingeführt. Einsetzen von (4.19) in (4.18) liefert die Bestimmungsgleichung

$$\frac{v_{temp} - v|''}{\Delta t} = -\left(v|'' \bullet \nabla\right)v|'' + N(j \times B) + \frac{N}{M^2} \nabla^2 v|''. \quad (4.20)$$

Diese Gleichung kann sofort nach  $v_{temp}$  aufgelöst und ausgewertet werden, da alle darin auftretenden Größen aus dem vorherigen Zeitschritt  $n$  bekannt sind. Nach Anwendung des Divergenzoperators auf Gleichung (4.19) ergibt sich ferner wegen der Massenerhaltung  $\nabla \bullet v = 0$  für den Druck  $p$  die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 p|^{n+1} = \frac{1}{N \Delta t} \nabla \bullet v_{temp}, \quad (4.21)$$

mit der direkt aus Definition (4.19) stammenden Randbedingung

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{Wand}^{n+1} = \frac{1}{N \Delta t} (v_{temp} - v|^{n+1}) \bullet n \Big|_{Wand}. \quad (4.22)$$

Dabei bleibt die Masse stets exakt erhalten, ohne daß dazu die numerisch sehr unangenehme Gleichung  $\nabla \bullet v = 0$  explizit gelöst werden muß. Die Einführung der Poisson-Gleichung (4.21) für den Druck ist übrigens ganz analog zur Herleitung der Poisson-Gleichung (2.14) für das elektrische Potential zu sehen, bei der eine direkte Behandlung der Stromerhaltung (2.10) umgangen werden kann. Die beiden Gleichungen mit dem Divergenzoperator werden also jeweils durch eine numerisch besser zu handhabende Gleichung vom Poisson-Typ ersetzt. Wird im hier behandelten Fall die Randbedingung (4.22) in (4.21) eingesetzt, so zeigt sich bei Diskretisierung auf einem staggered grid nach wenigen Umformungen, daß der Druck völlig unabhängig von der Wahl der künstlichen Größe  $v_{temp}$  an der Wand ist (siehe Herleitung dazu im Anhang, Kapitel 9.1 auf Seite 107):

$$p|^{n+1} \neq f(v_{temp}|_{Wand}). \quad (4.23)$$

Insbesondere darf dann natürlich immer auch

$$v_{temp}|_{Wand} = v|_{Wand}^{n+1} \quad (4.24)$$

gewählt werden. Die Randbedingung (4.22) vereinfacht sich jetzt erheblich zu

$$\frac{\partial p}{\partial n}|_{Wand}^{n+1} = 0. \quad (4.25)$$

Schließlich wird noch die Geschwindigkeit zum neuen Zeitpunkt  $n+1$  mit der geringfügig umgestellten Beziehung (4.19) bestimmt:

$$v|^{n+1} = v_{temp} - N \Delta t \nabla p|^{n+1}. \quad (4.26)$$

Das Verfahren zur Berechnung von Druck und Geschwindigkeit ist damit abgeschlossen. Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß diese Vorgehensweise keinerlei Näherungen enthält, sondern eine exakte Lösung der diskretisierten Gleichungen für Druck und Geschwindigkeit liefert. Die Vorteile können wie folgt zusammengefaßt werden:

- Statt der länglichen Differentialgleichungen (4.17) und (4.18) werden die kürzeren Gleichungen (4.20) für die künstliche Größe  $v_{temp}$ , beziehungsweise (4.21) für den Druck  $p$  gelöst.
- Dabei kann die einfache homogene Dirichlet-Randbedingung (4.25) für den Druck benutzt werden.
- Die numerisch unangenehme Massenerhaltung  $\nabla \cdot v = 0$  ist automatisch erfüllt und muß nicht explizit gelöst werden.
- Die tatsächliche Geschwindigkeit zum neuen Zeitpunkt wird dann schließlich aus der einfachen Beziehung (4.26) beschafft.

## 4.4 False-Transient-Verfahren

Das vorliegende Programm ist so konzipiert, daß bei beliebig vorgegebenen Startwerten für das Geschwindigkeitsfeld, sowie beliebig vorgegebenen Randwerten für den Druck und das Potential, allgemeine transiente Vorgänge in MHD-Kanalströmungen beschrieben werden können. An den Enden der Rohre werden dazu entweder die Druck- und Potentialwerte selbst, oder deren Ableitung über der Rechenzeit konstant gehalten. Im Experiment entspricht dies der Verwendung eines bestimmten Pumpentypes, der in der Versuchsanlage einen festen oder einstellbaren Druckunterschied erzeugt. Der Volumendurchsatz pendelt sich automatisch dazu passend ein. Es können also Rechenbeispiele für festen Druckverlust und sich entsprechend einstellende mittlere Geschwindigkeit miteinander verglichen werden. Soll hingegen der Volumenstrom des Fluids fest vorgegeben werden, und eine Parametervariation von Hartmann-Zahl und/oder Interaktionsparameter den sich dazu frei einstellenden Druckverlust liefern, muß eine andere Vorgehensweise gewählt werden.

Für stationäre Vorgänge ist in der Numerik ein Verfahren geläufig, bei dem die Navier-Stokes-Gleichung zunächst fiktiv in der Zeit diskretisiert wird, dann aber einzelne Terme mit Vorfaktoren gewichtet werden (siehe Mallinson, Davis; 1962). Ziel ist es, durch eine geeignete Wahl dieser Faktoren, unter Verzicht auf die physikalisch richtige Beschreibung des zeitlichen Ablaufes, in möglichst wenigen Iterationen vom vorgegebenen Anfangszustand zum stationären Endzustand zu gelangen. Die falschen Zwischenresultate (daher false-transient) werden dann nicht weiter betrachtet. Ein ähnliches Verfahren kann als frei wählbare Alternative zur oben genannten Vorgehensweise im vorliegenden Programm eingeführt werden. Die Randbedingungen für Druck und Potential, sowie die Geschwindigkeit im gesamten Kanal werden dabei nach jedem Zeitschritt so normiert, daß die mittlere Geschwindigkeit dimensionslos immer 1 beträgt. Wegen der Nichtlinearität der Gleichungen stellen sich dabei zwar falsche Zwischenergebnisse ein, der stationäre Endzustand ist jedoch physikalisch korrekt. Aufgrund der Normierung des Druckes bzw. seines Gradienten an den Enden des Rohres stellt sich der Druckverlust adäquat zum Volumenstrom ein. Primäres Ziel ist es also in diesem Fall, nicht schneller zur Konvergenz zu gelangen, sondern eine stationäre Lösung für bestimmte äußere Parameter zu erhalten. Methodisch sind die Gewichtung einzelner Terme und die Normierung jedoch vergleichbar und können daher beide mit false-transient-Verfahren bezeichnet werden. Weil die Zwischenresultate nicht interessieren, genügt eine Diskretisierung erster Ordnung in der Zeit



völlig, solange ein stationärer Zustand nur "irgendwie" erreicht werden kann. Die Analogien zwischen dem false-transient-Verfahren und iterativen Verfahren sind in der Literatur hinlänglich bekannt, ihr prinzipieller Aufbau ist formal sogar weitgehend identisch (siehe z.B. Varga, 1962; Roache, 1985). Unterschiede bestehen lediglich darin, daß unter Umständen die angestrebte Konvergenz verschieden schnell erreicht werden kann.

## 4.5 Explizite Formulierung

Das gesamte Programmpaket beruht auf einer expliziten Formulierung der diskretisierten Gleichungen. Explizit bedeutet, daß zu jedem neuen Zeitpunkt  $n+1$  sämtliche Variablen auf jedem Gitterpunkt des staggered grid direkt aus den Werten des vorangegangenen Zeitschrittes  $n$  bestimmt werden können. Die algebraischen Gleichungen für die einzelnen Gitterpunkte sind also im Gegensatz zu den sogenannten impliziten Verfahren zum jeweiligen neuen Zeitschritt nicht untereinander verknüpft. Dadurch kann auf das simultane Lösen riesiger Matrizen, wie es beispielsweise beim weit verbreiteten, teilimpliziten ADI-Verfahren (alternating direction implicit) oder beim Crank-Nicolson-Verfahren unvermeidlich ist, ganz verzichtet werden. Insbesondere entfällt auch das Lösen tridiagonaler Systeme, für die lediglich nicht vektorisierbare Verfahren (etwa Gauß-Algorithmus) oder nur teilweise vektorisierbare Verfahren (z.B. zyklische Reduktion, Thomas-Algorithmus) bereitstehen. Die Vorteile schneller Vektorrechner, deren hohe Effizienz auf möglichst großer Vektorisierbarkeit des Programmablaufes beruhen, blieben damit ungenützt und bei komplexeren Aufgaben stiege die Rechenzeit sofort in kaum akzeptable Bereiche. Eine genauere Betrachtung der Stabilitätskriterien zeigt außerdem, daß der häufig argumentierte Vorteil impliziter Formulierung, nämlich die numerische Verträglichkeit größerer Zeitschrittweiten, für die hier interessierenden MHD-Strömungen nicht prinzipiell zutrifft. Dies sei wie folgt belegt:

Nach einer Neumannschen Stabilitätsanalyse lassen sich zwei Kriterien für den maximal zulässigen Zeitschritt herleiten (vergl. Marsal, 1976). Aufgrund der Diffusion ergibt sich

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{Diffusion}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)^{-1} \quad (4.27)$$

und bezüglich der Konvektion die auch als CFL-Kriterium bekannte Grenze

$$\Delta t \leq \Delta t_{Konvektion} = \left( \frac{|vx|}{\Delta x} + \frac{|vy|}{\Delta y} + \frac{|vz|}{\Delta z} \right)^{-1}. \quad (4.28)$$

Leider sind die kleinstmöglichen Gitterpunktabstände  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , respektive  $\Delta z$  durch die Speicherkapazität selbst großer Computer stark begrenzt. Der Diffusionszeitschritt kann bei maximaler Ausnutzung des Rechners nur noch mit der Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{M^2}{N} \quad (4.29)$$

variiert werden. Sobald größere Hartmann-Zahlen und kleinere Interaktionsparameter interessieren, kann die obere Grenze des Zeitschrittes  $\Delta t_{Diffusion}$  leicht unterschritten werden. Für diesen, in der Fusionstechnologie häufig anzutreffenden Sachverhalt, spielt die Beschränkung des Zeitschrittes durch Konvektion eine dominierende Rolle bezüglich der Stabilität. Implizite Verfahren sind aber bekanntlich nur in der Lage, die Restriktion durch den Diffusionszeitschritt aufzuweichen. Sie bringen daher an dieser Stelle keine Erleichterung. Darüber hinaus stellt die explizite Formulierung in der Regel auch die programmiertechnisch weitaus übersichtlichere Variante dar.

## 4.6 Lösung der Poisson-Gleichungen

Die volle numerische Simulation dreidimensionaler Magnetohydrodynamik führt automatisch zu großen Gleichungssystemen und erfordert die Nutzung der gesamten Speicherkapazität selbst größter Rechenanlagen. Eine möglichst effiziente Programmierung ist folglich auch hinsichtlich des entstehenden Rechenzeitbedarfes unerlässlich. Es ist deshalb sinnvoll, zur Lösung der beiden Poisson-Gleichungen (2.14) und (4.21) für Potential bzw. Druck auf bereits existierende "schnelle Poisson-Löser" zurückzugreifen. Der für diese Arbeit ausgewählte Löser SHAFT3D ist eine Entwicklung der Universität Karlsruhe (Flassak, 1989). Ebenso wie der früher getestete Löser H3D (Schuhmann, 1988) basiert

SHAFT3D auf einer Fourier-Transformation, hat sich jedoch in der Praxis als etwa drei bis viermal schneller erwiesen. Außerdem ist bei der Wahl der Randbedingungen eine höhere Flexibilität vorhanden. Es sind beliebige Kombinationen von Dirichlet-, Neumann- und periodischen Randbedingungen sowohl auf gewöhnlichem Rechengitter, als auch auf einem staggered grid möglich. Dabei zeigen Tests des Löser, daß sein Residuum bei doppeltgenauer Definition der Felder in der Größenordnung von  $O(10^{-14})$  bleibt.

## 4.7 Zerlegung der Rechengebiete

### 4.7.1 Gerade Kanäle

Wie bereits weiter oben erwähnt, kann aus Gründen der Rechenzeit auf die Verwendung schneller Poisson-Löser nicht verzichtet werden. Solche Löser sind allerdings nur für einfache Geometrien, wie Würfel oder Zylinder, verfügbar. Neuere Entwicklungen lassen zwar verschiedene Kombinationen von Randbedingungen auf den verschiedenen Rändern zu, nicht aber den Sprung der Bedingung auf einer einzelnen Seite. Auf jeder Seite muß überall entweder eine Neumann-, eine Dirichlet-, oder eine zyklische Randbedingung vorliegen.

Sollen kompliziertere Geometrien oder einfache Geometrien mit einem Wechsel in der Randbedingung betrachtet werden, muß daher eine Zerlegung des Rechengebietes vorgenommen werden, damit die Löser eingesetzt werden können. Gerade solche Fälle liegen aber vor, wenn abgewinkelte Kanäle oder Übergänge von leitende in nichtleitende Rohrstücke untersucht werden sollen. Die Gesamtgeometrie wird dann in einzelne Würfel zerlegt, die auf jeder Begrenzung nur eine Art der Randbedingung aufweisen. Bei geraden Rohren mit Übergang von ideal leitenden in isolierende Hartmann-Wände führt dies zu einer Zweiteilung, wie sie in Abbildung 4.5 dargestellt ist. Direkt beim Sprung der Randbedingungen (gestrichelt gezeichnete Linie der Gesamtgeometrie, Abb. 4.5, oben) wird das Rohr in zwei Quader aufgeschnitten (Teilstücke 1 und 2, Abb. 4.5, unten).

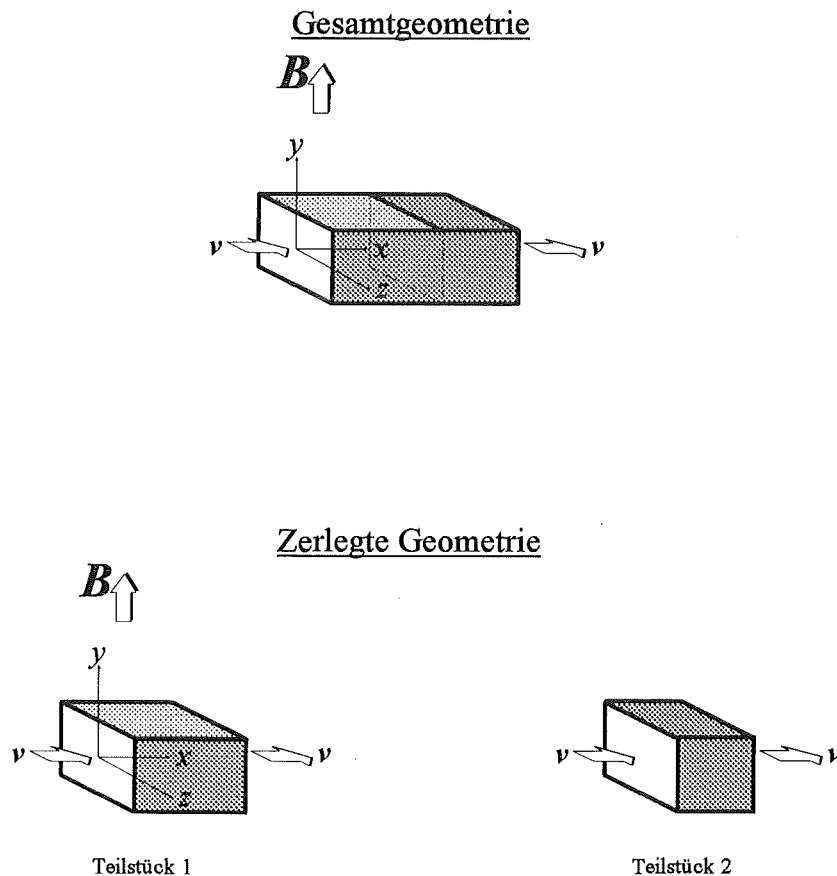


Abb. 4.5: Gebietszerlegung für gerade Geometrie

Da jedes Teilstück jetzt getrennt vom anderen berechnet wird, müssen an den Schnittflächen zusätzliche Randbedingungen definiert werden, die den physikalischen Zusammenhang der beiden Teilstücke gewährleisten. Dazu wird im Programm nach folgender numerischer Prozedur vorgegangen:

**I: Vorgaben an allen Austritts-Querschnitten**  
("sinnvoll geratene" Startwerte)

1) Austrittsgeschwindigkeit  $v|_{\text{Rohrausgang}}$



2) Druckgradient  $\partial p / \partial n|_{\text{Rohrausgang}}$



3) Gradient des elektrischen Potentials  $\partial \Phi / \partial n|_{\text{Rohrausgang}}$



**II: Teilstück 1**

1) Berechnung der Differentialgleichungen (2.7), (2.8), (2.9) und (2.14) für  $v$ ,  $j$ ,  $p$  und  $\Phi$  mit den gegebenen Randbedingungen  $v|_{\text{Rohrausgang}}$ ,  $\partial p / \partial n|_{\text{Rohrausgang}}$  und  $\partial \Phi / \partial n|_{\text{Rohrausgang}}$  im Austritts-Querschnitt (Einzelheiten s. Kap. 4.8).



2) Übergabe der neu berechneten Werte  $v|_{\text{Rohrausgang}}$ ,  $p|_{\text{Rohrausgang}}$  und  $\Phi|_{\text{Rohrausgang}}$  im Austritts-Querschnitt an Teilstück 2 als Randbedingung für den dortigen Eintritts-Querschnitt.



**III: Teilstück 2**

1) Berechnung der Differentialgleichungen (2.7), (2.8), (2.9) und (2.14) für  $v$ ,  $j$ ,  $p$  und  $\Phi$  mit den gegebenen Randbedingungen  $v|_{\text{Rohreingang}}$ ,  $p|_{\text{Rohreingang}}$  und  $\Phi|_{\text{Rohreingang}}$  im Eintritts-Querschnitt (Einzelheiten s. Kap. 4.8).



2) Übergabe der neu berechneten Werte  $v|_{\text{Rohreingang}}$ ,  $\partial p/\partial n|_{\text{Rohreingang}}$  und  $\partial\Phi/\partial n|_{\text{Rohreingang}}$  im Eintritts-Querschnitt an Teilstück 1 als Randbedingung für den dortigen Austritts-Querschnitt.



3) Weiter mit Block II, bis Konvergenz erreicht ist.

Ausgehend von vorgegebenen Startwerten stellen sich im Laufe der Zeititeration an den Schnittflächen beider Teilstücke dieselben Werte für Geschwindigkeit, Druck und Potential, sowie deren Ableitung ein. Oder anders ausgedrückt, der Zeititeration (Stichwort "false-transient") wird eine Iteration an den Schnittflächen superponiert, die zum stationären Endzustand konvergiert.

Darüber hinaus kann aber auch bei konstanten Randbedingungen entlang jeder Seite des Kanals eine Zerlegung des Rechengebietes in einzelne Würfel unvermeidlich werden. Wenn nämlich sehr lange Rohrstücke berechnet werden müssen, reicht die Speicherkapazität selbst neuester Großrechner nicht mehr aus, um diese als geschlossenes Stück ausreichend fein zu diskretisieren. Dies ist schnell der Fall, wenn trägheitsbehaftete Strömungen mit sehr ausgedehnten Einlaufängen betrachtet werden. Unter Umständen muß dann sogar in mehr als zwei Rohrstücke zerlegt werden. An die oben aufgelistete Prozedur für zwei Teilstücke werden dazu entsprechend viele Blöcke modular angehängt. Einige konkrete Anwendungsbeispiele hierzu finden sich im Kapitel 6 der vorliegenden Arbeit.

## 4.7.2 Abgewinkelte Kanäle

Analog zur Gebietszerlegung in geraden Kanälen ist es zunächst naheliegend, abgewinkelte Geometrien in drei einzelne Würfel zu zerteilen (gestrichelt gezeichnete Linien in der Gesamtgeometrie, Abb. 4.6, oben). Allerdings stoßen entlang der Innenkante drei Rechengebiete zusammen, wobei Informationen vom ersten über den zweiten, direkt an den dritten Würfel übergeben werden. Die Iteration an dieser Schnittlinie hat sich als numerisch

sehr empfindlich erwiesen. Um zu gut konvergierenden Ergebnissen zu gelangen, wird daher an dieser Stelle eine stabilisierende Erweiterung der Prozedur vorgenommen. Die Gesamtgeometrie wird dazu in zwei Rohrkombinationen aufgeteilt (siehe Abb. 4.6, unten).

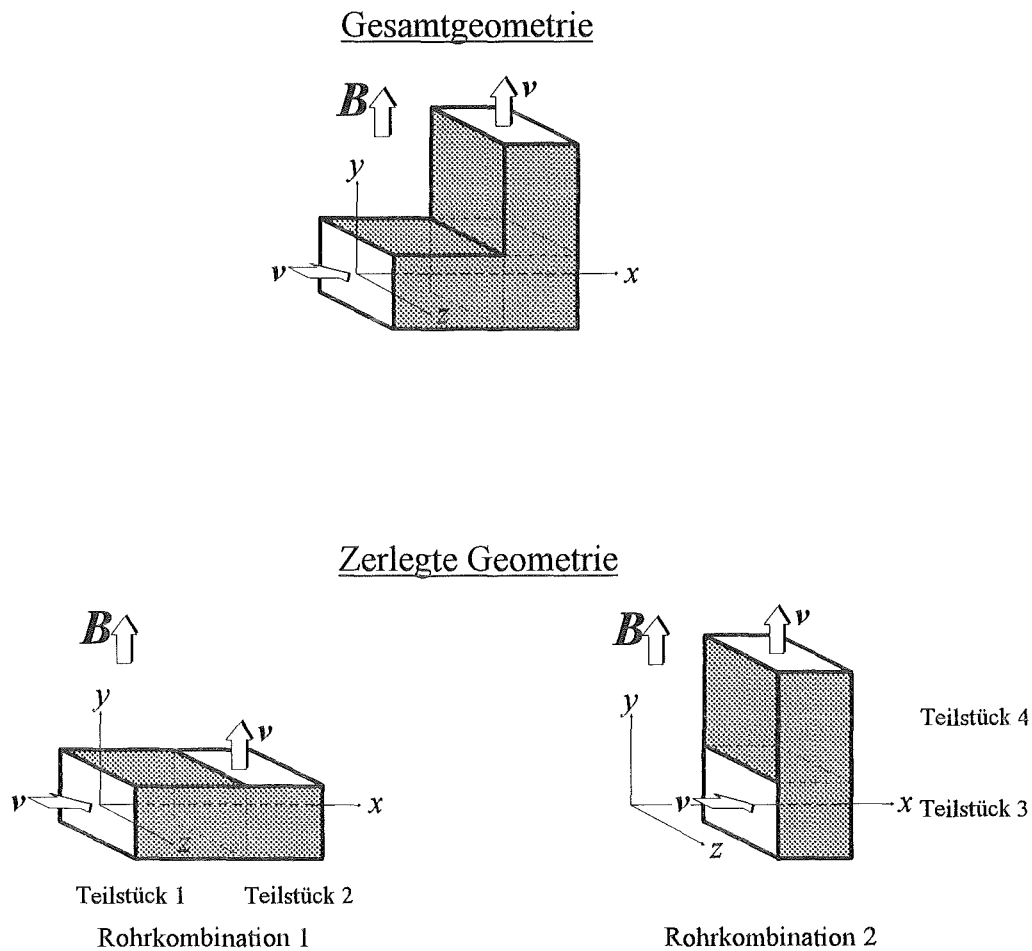


Abb. 4.6: Gebietszerlegung für abgewinkelte Geometrie

Jede dieser Rohrkombinationen wird nach der in Kapitel 4.7.1 beschriebenen Methode in jeweils zwei Teilstücke zerlegt. Der erweiterte Programm-Ablauf für die beiden Rohrkombinationen geht jetzt wie folgt von statten:

**I: Rohrkombination 1**

1) Berechnung der beiden Teilstücke 1 und 2 gemäß der Prozedur aus Kap. 4.7.1.



2) Mehrfaches Wiederholen von Punkt 1), bis die Konvergenz einen vorgegebenen Wert unterschreitet.



3) Übergabe der neu berechneten Werte  $v|_{\text{Rohrausgang}}$ ,  $p|_{\text{Rohrausgang}}$  und  $\Phi|_{\text{Rohrausgang}}$  im Austritts-Querschnitt von Teilstück 1 (gestrichelte Linie in Abb. 4.6, unten links) an Teilstück 3 der Rohrkombination 2 als Randbedingung für den dortigen Eintritts-Querschnitt.

**II: Rohrkombination 2**

1) Berechnung der beiden Teilstücke 3 und 4 gemäß der Prozedur aus Kap. 4.7.1.



2) Mehrfaches Wiederholen von Punkt 1) bis die Konvergenz einen vorgegebenen Wert unterschreitet.



3) Übergabe der neu berechneten Werte  $v|_{\text{Rohreingang}}$ ,  $\partial p / \partial n|_{\text{Rohreingang}}$  und  $\partial \Phi / \partial n|_{\text{Rohreingang}}$  im Eintritts-Querschnitt von Teilstück 3 (gestrichelte Linie in Abb. 4.6, unten rechts) an Teilstück 2 der Rohrkombination 1 als Randbedingung für den dortigen Austritts-Querschnitt.



4) Weiter mit Block I, bis Konvergenz in der Gesamtgeometrie erreicht ist.



Die Teilstücke 2 und 3 sind zwar physikalisch identisch, werden jedoch für beide Rohrkombinationen jeweils neu berechnet. Dieses überlappende Verfahren für den Eckenbereich wirkt stabilisierend auf den numerischen Ablauf. Aus der Literatur ist im übrigen bekannt, daß überlappende Rechengebiete die Konvergenz nicht nur verbessern, sondern in der Regel auch beschleunigen. Für die hier beschriebene Prozedur finden sich Anwendungsbeispiele in Kapitel 7.

## 4.8 Programmablauf in der Übersicht

Das unter Berücksichtigung der oben eingeführten numerischen Verfahren entwickelte Programmpaket zur Lösung des partiellen Differentialgleichungssystems (2.7), (2.8), (2.9) und (2.14) umfaßt etwa 17500 Zeilen und ist in FORTRAN77 abgefaßt. Prinzipiell kann der Code zwar auf jeder größeren Rechenanlage kompiliert werden, ist jedoch speziell für die Verarbeitung auf einem Vektorrechner strukturiert und optimiert. Durch die Anpassung des Programmierstils an die besondere Arbeitsweise des Vektorrechners und durch Einführung zusätzlicher, maschinenspezifischer Anweisungen kann auf diese Weise eine Beschleunigung des Programmablaufs um mehr als den Faktor 10 erzielt werden (Lenhart, 1989). Vervollständigt wird das Programmpaket durch den Poisson-Löser SHAFT3D mit etwa 7500 Zeilen. Der Ablauf des gesamten Programmes teilt sich in die drei Blöcke *Vorbereitung*, *Iteration* und *Auswertung* auf. Die oben beschriebenen numerischen Methoden werden dabei angewendet. Als Kriterium für Konvergenz und damit Beendigung des Rechenlaufes wird gewertet, wenn die maximale relative Abweichung sämtlicher Geschwindigkeiten zwischen zwei Zeitschritten unterhalb einer vorgegebenen Toleranzgrenze liegt (typischerweise Größenordnung  $10^{-4}$ ).

### I: Vorbereitung

(Vorgaben und "sinnvoll geratene" Startwerte zum Zeitschritt  $n=0$ )

- 1) Vorgabe des Magnetfeldes  $\mathbf{B}$ , der Hartmann-Zahl  $M$ , des Interaktionsparameters  $N$ , sowie der Gitterpunktabstände  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$ .



2) Gittergenerierung



- 3) Vorgabe des Iterations-Zeitschrittes  $\Delta t$  unter Berücksichtigung der Stabilitätskriterien aus Kap. 4.5.



- 4) Setzen von Startwerten der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , der Austrittsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}|_{\text{Rohrausgang}}$ , der Druckgradienten  $\partial p/\partial n|_{\text{Rohreingang}}$ ,  $\partial p/\partial n|_{\text{Rohrausgang}}$  sowie der Gradienten des elektrischen Potentials  $\partial \Phi/\partial n|_{\text{Rohreingang}}$  und  $\partial \Phi/\partial n|_{\text{Rohrausgang}}$  für jedes Teilstück.



### II: Iteration

(Zeitschritt  $n \rightarrow n+1$  für jedes einzelne Teilstück gemäß Kapitel 4.7)

- 1) Normierung der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}^n$  und der Randwerte  $\partial p/\partial n|_{\text{Rohreingang}}$ ,  $\partial \Phi/\partial n|_{\text{Rohreingang}}$ ,  $\partial p/\partial n|_{\text{Rohrausgang}}$  und  $\partial \Phi/\partial n|_{\text{Rohrausgang}}$  (false-transient-Verfahren)



- 2) Lösen der Poisson-Gleichung (2.14) für das elektrische Potential  $\Phi|^{n+1}$

$$\nabla^2 \Phi|^{n+1} = \nabla \cdot (\mathbf{v}|^n \times \mathbf{B})$$



3) Berechnen Stromdichte  $j|^{n+1}$  gemäß Gleichung (2.9)

$$j|^{n+1} = -\nabla\Phi|^{n+1} + v|^{n+1} \times B$$



4) Ermitteln der temporären Geschwindigkeit  $v_{temp}$  mit Gleichung (4.20) (explizit, upwind-Verfahren, fractional-step-Verfahren)

$$\frac{v_{temp} - v|^{n+1}}{\Delta t} = -\left(v|^{n+1} \cdot \nabla\right)v|^{n+1} + N(j \times B) + \frac{N}{M^2} \nabla^2 v|^{n+1}$$



5) Lösen der Poisson-Gleichung (4.21) für den Druck  $p|^{n+1}$

$$\nabla^2 p|^{n+1} = \frac{1}{N \Delta t} \nabla \cdot v_{temp}$$



6) Bestimmen der Geschwindigkeit des Zeitschrittes  $n+1$  aus Gleichung (4.26)

$$v|^{n+1} = v_{temp} - N \Delta t \nabla p|^{n+1}$$



7) Übergabe von Randwerten an benachbarte Teilstücke.



8) Rücksprung zu II.1, bis sämtliche Teilstücke berechnet sind.



### III: Auswertung

1) Konvergenztest für die Geschwindigkeit  $v|^{n+1}$



2) Bestimmung des Normierungsfaktors (false-transient-Verfahren)



3) Speichern der Ergebnisse am Ende des Rechenlaufes



4) Rücksprung zu II.1, falls Konvergenz noch nicht erreicht ist

## 5 Programm-Validierung

Bevor ein neu entwickeltes Rechenprogramm für belastbare Produktionsläufe freigegeben werden kann, sollten aus der Literatur bekannte und abgesicherte Ergebnisse zum Testvergleich nachgerechnet werden. Zu einer Programm-Validierung gehört außerdem die Überprüfung der Konsistenz.

### 5.1 Vergleich mit bekannten Lösungen

Die einzigen beiden geschlossenen analytischen Lösungen von MHD-Strömungen stammen von Hartmann (1937) beziehungsweise Chang und Lundgren (1961).

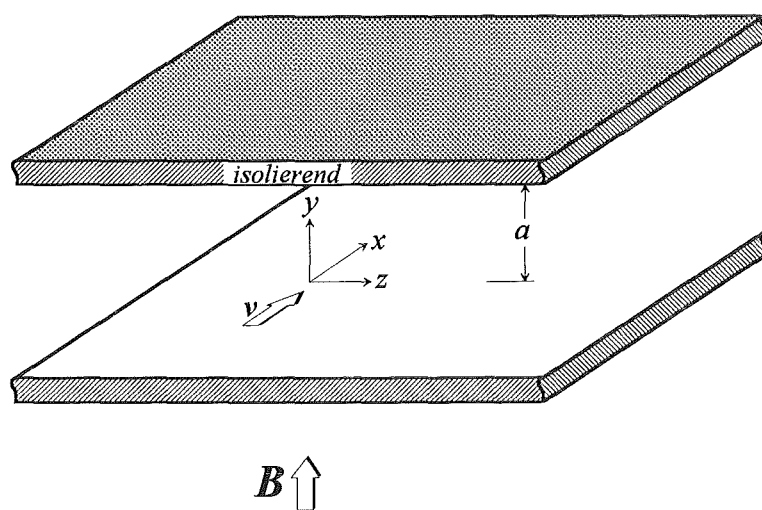


Abb. 5.1: Isolierter Plattenkanal

Für die eindimensionale Strömung in einem isolierenden Plattenkanal unter dem Einfluß eines senkrecht zu den Wänden orientierten Magnetfeldes (siehe Abb. 5.1) erhalten sie als Druckgradienten in Hauptströmungsrichtung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\tanh M}{M - \tanh M} \quad (5.1)$$

Dieses Ergebnis soll mit dem vorliegenden Programm nachvollzogen werden. Weil dabei an den Seiten des Kanales Wände vorgegeben werden müssen, wird zum Vergleich die Durchströmung eines isolierten Kanales mit quadratischem Querschnitt bei transversalem Magnetfeld herangezogen (siehe Abb. 5.2).

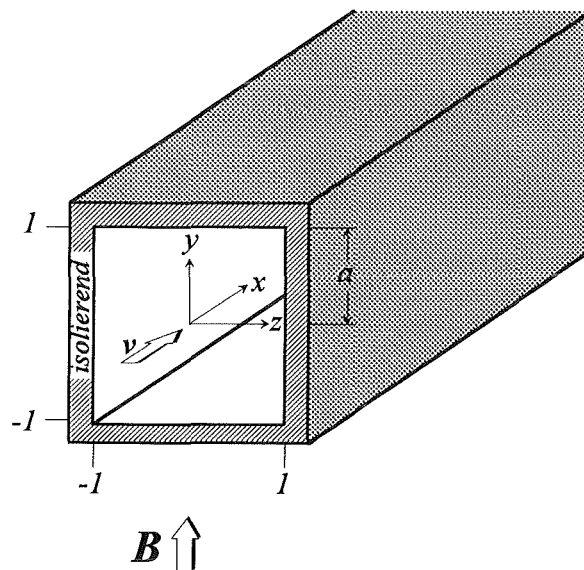


Abb. 5.2: Isolierter Rechteckkanal

Da es sich bei der Kanalströmung mit konstanten Magnetfeldern um ein rein zweidimensionales Problem handelt, genügt es beim allgemeinen dreidimensionalen

Programm völlig, sich bei der Gittergenerierung in der dritten Koordinatenrichtung auf das Minimum von 5 Punkten zu beschränken. Der gesparte Speicherplatz wird zur feineren Auflösung der relevanten Koordinatenrichtungen verwendet. Die Ergebnisse für die Druckgradienten werden in Abbildung 5.3 in Abhängigkeit von der Hartmann-Zahl  $M$  aufgetragen. Das Diagramm illustriert die sehr gute Übereinstimmung der analytisch und numerisch gefundenen Werte für den Kennzahlbereich  $M \geq 100$ .

Bei Hartmann-Zahlen unter hundert gewinnt im Rechteckkanal der Reibungsverlust in den Seitenschichten an Bedeutung. Deshalb berechnet das Programm unter Berücksichtigung der Seitenwände einen höheren Druckgradienten als die analytische Formel ohne Seitenwandeneinfluß. Als weiterer Vergleich sind die numerischen Ergebnisse des Rechencodes von Sterl (1989) eingetragen. Seine Resultate stimmen mit denen des vorliegenden Programmes mit einer Genauigkeit der Größenordnung  $10^{-4}$  überein. Deshalb fallen beide Kurven in Abbildung 5.3 praktisch zusammen.

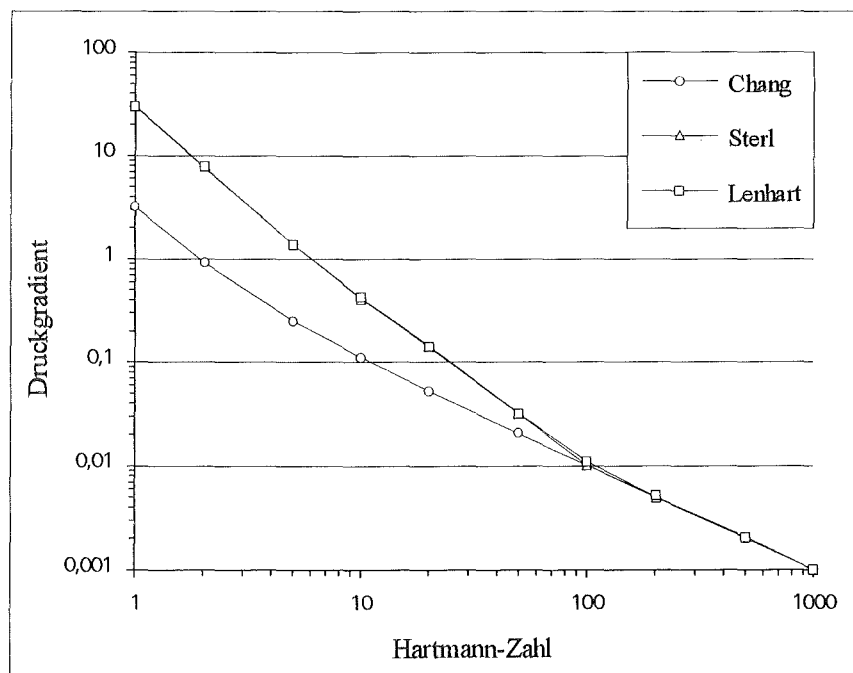


Abb. 5.3: Druckgradient des isolierten Platten- bzw. Rechteckkanals

Als weiteres Beispiel für die Programm-Validierung soll die Strömung in einem Rechteckkanal mit isolierenden Seiten- und perfekt leitenden Hartmann-Wänden bei konstantem transversalem Magnetfeld betrachtet werden (siehe Abb. 5.4). Dieses Problem haben Hunt und Stewardson 1965 mit einem Reihenansatz behandelt. Ihre Ergebnisse sind als "exakte Lösung" in die Literatur eingegangen und enthalten im wesentlichen folgende Aussagen:

- ❑ In den Seitenschichten strömt das Fluid schneller als im Kernbereich.
- ❑ Für  $M \rightarrow \infty$  strebt das Verhältnis von Maximalgeschwindigkeit zur Kerngeschwindigkeit gegen den Wert  $1/4 M$ .
- ❑ Für  $M > 89$  ergibt sich im Übergangsbereich von Seitenschicht zur Kernströmung ein lokales Rückströmungsgebiet.
- ❑ Für  $M \rightarrow \infty$  hat die Rückströmung den Grenzwert  $-0,011 M v|_{\text{Kern}}$

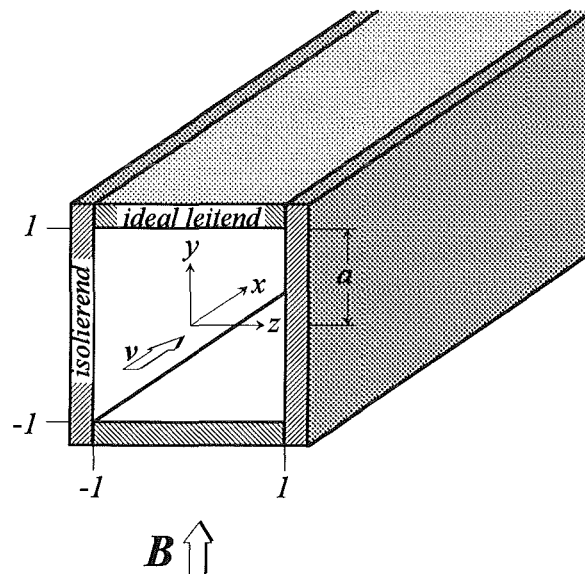


Abb. 5.4: Kanal mit leitenden Hartmann- und isolierenden Seitenwänden



Diese Resultate werden von Temperly und Todd (1971) analytisch im Prinzip bestätigt, wenn auch der in dieser Arbeit angegebene Grenzwert für das Einsetzen der Rückströmung geringfügig höher liegt.

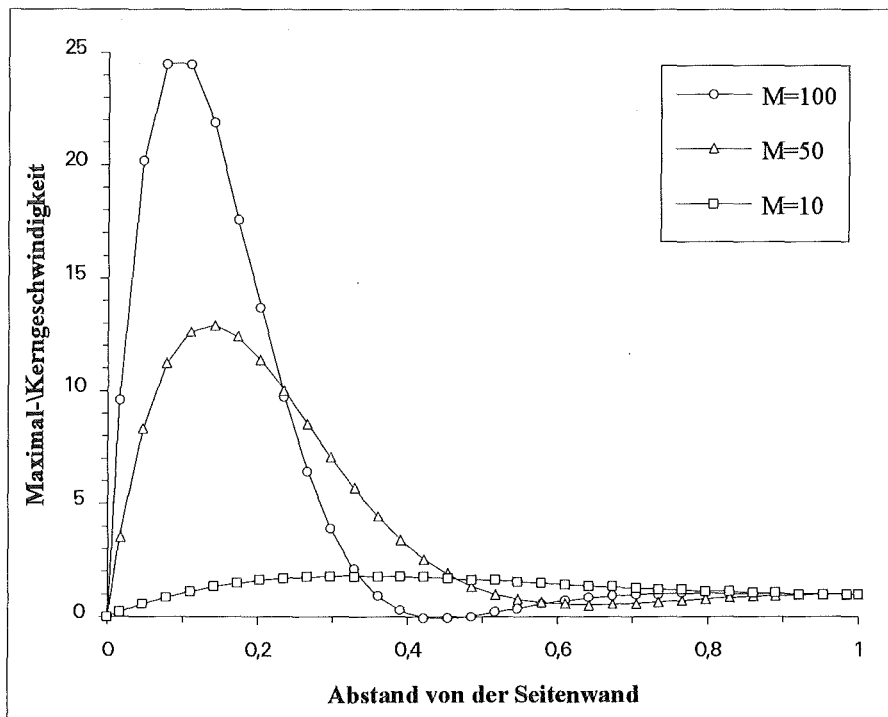


Abb. 5.5: Relative Geschwindigkeit des Rechteckkanals bei  $y=0$ , Huntsche Lösung

Die Aussagen der Huntschen Lösung können mit der numerischen Simulation in sehr guter Übereinstimmung bestätigt werden. Das in der Grafik 5.5 gezeigte Verhältnis von der Maximal- zur Kerngeschwindigkeit, aufgetragen über dem Abstand von der Seitenwand, hat für steigende  $M$  den vorhergesagten Grenzwert. Für  $M=100$  kann im Übergangsbereich die prognostizierte Rückströmung gefunden werden.

## 5.2 Konsistenz

Die Diskretisierung des Differentialgleichungssystems erfolgt wie bereits erwähnt auf einer endlichen Zahl von Punkten im Strömungskanal. Abhängig von der Anzahl dieser Stützstellen entstehen bei den numerischen Ergebnissen daher Abweichungen vom tatsächlichen physikalischen Verhalten. Ein Rechenprogramm gilt im allgemeinen dann als konsistent, wenn diese Diskretisierungsfehler mit feinerer Auflösung immer kleiner werden. Zum Vergleich wird wieder die Lösung von Hunt (1965) für den Kanal mit isolierenden Seiten- und ideal leitenden Hartmann-Wänden herangezogen (siehe Abb. 5.4).

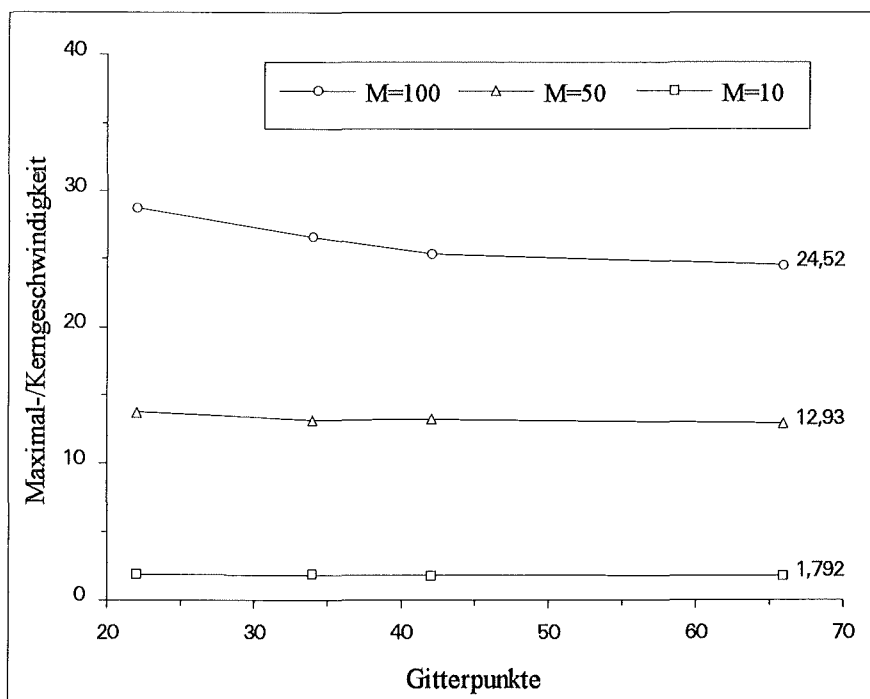


Abb. 5.6: Konsistenz des Rechenprogrammes

Im Diagramm 5.2 wird das Verhältnis von der Maximal- zur Kerngeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Gitterpunkte präsentiert. Dabei ist im Kanalquerschnitt in beiden Richtungen das Maschennetz gleich eng gewählt. Für alle untersuchten Hartmann-Zahlen konvergiert das Ergebnis mit steigender Punktezahl gegen einen festen Wert. Bei höheren Hartmann-Zahlen strebt dieser Wert gegen die analytisch vorhergesagten  $0.25M$ . Die Konsistenz des Programmes ist damit gewährleistet und das Ergebnis von Hunt nachvollzogen. Da die Dicken der numerisch aufzulösenden Grenzschichten die Größenordnung  $M^{-1}$  für die Hartmann-Schichten, beziehungsweise  $M^{-1/2}$  für die Seitenschichten aufweisen, müssen bei größeren Hartmann-Zahlen zwangsläufig kleinere Gitterpunktabstände gewählt werden, um vergleichbare Genauigkeit zu erreichen. Bei  $M=100$  genügen jedoch 42 Punkte in Magnetfeldrichtung, damit Resultate hinreichender Genauigkeit erzielt werden (Abweichung in der Größenordnung von einem Prozent vom prognostizierten Verhältnis). Eine feinere Auflösung bringt lediglich noch marginale Verbesserungen bezüglich der Konsistenz und sollte angesichts des stark anwachsenden Rechenzeitbedarfes vermieden werden.

## 6 Strömungen in geraden Kanälen

Wie bereits in Kapitel 3.3 erwähnt, können allgemeine dreidimensionale MHD-Strömungen durch Variation des Kanalquerschnittes, des Magnetfeldes oder der Wandleitfähigkeit hervorgerufen werden. In diesem Kapitel sollen anhand einiger ausgewählter Beispiele die Anwendungsmöglichkeiten des Rechenprogrammes für den Fall gerader Rechteckkanäle bei veränderlicher Leitfähigkeit und veränderlichem Magnetfeld aufgezeigt werden. Dabei soll besonderes Augenmerk auf die Untersuchung des Trägheitseinflusses gelegt werden.

### 6.1 Strömungen bei veränderlicher Wandleitfähigkeit

Die stärksten dreidimensionalen Einflüsse in geraden Kanälen mit variabler Wandleitfähigkeit sind dann zu erwarten, wenn abrupte Änderungen des elektrischen Widerstandes der Hartmann-Wände auftreten und gleichzeitig isolierende Seitenwände vorliegen. In Abbildung 6.1 ist dazu als Beispiel ein Kanal mit dem plötzlichen Übergang von ideal leitenden Wänden in isolierende Hartmann-Wände bei konstantem transversalem Magnetfeld  $By=1$  dargestellt. Der Kanal habe die dimensionslose Länge  $\delta$ , die Stoßkante der Wandmaterialien sei bei  $x=3$ . Die Tabelle 6.1 listet die durchgeführte Parametervariationen und die genauen Kanalabmessungen für diesen Fall auf.

Im Bereich ideal leitender Hartmann-Wände werden besonders große Gradienten des elektrischen Potentials in den Seitenbereichen induziert, im Bereich isolierender Hartmann-Wände besonders kleine. In Abbildung 6.2 auf Seite 66 ganz links und ganz rechts sind die Potentiale dieser beiden voll eingelaufenen Strömungszustände über dem Kanalquerschnitt für das Beispiel  $M=50$  und  $N=2500$  aufgetragen. Wegen der isolierenden Seitenwände müssen sich die daraus resultierenden axialen Ströme ohne Ausnahme innerhalb des hydraulischen Querschnittes kurzschließen und bewirken so dreidimensionale Effekte. Dabei gestaltet sich der Zustand für leitende Hartmann-Wänden monoton in den Zustand für isolierende Wände um (siehe Abb. 6.2). Die Abbildung 6.3 (s. Seite 66) verdeutlicht den Druck in denselben Querschnitten. Im Übergangsbereich von leitenden zu isolierenden



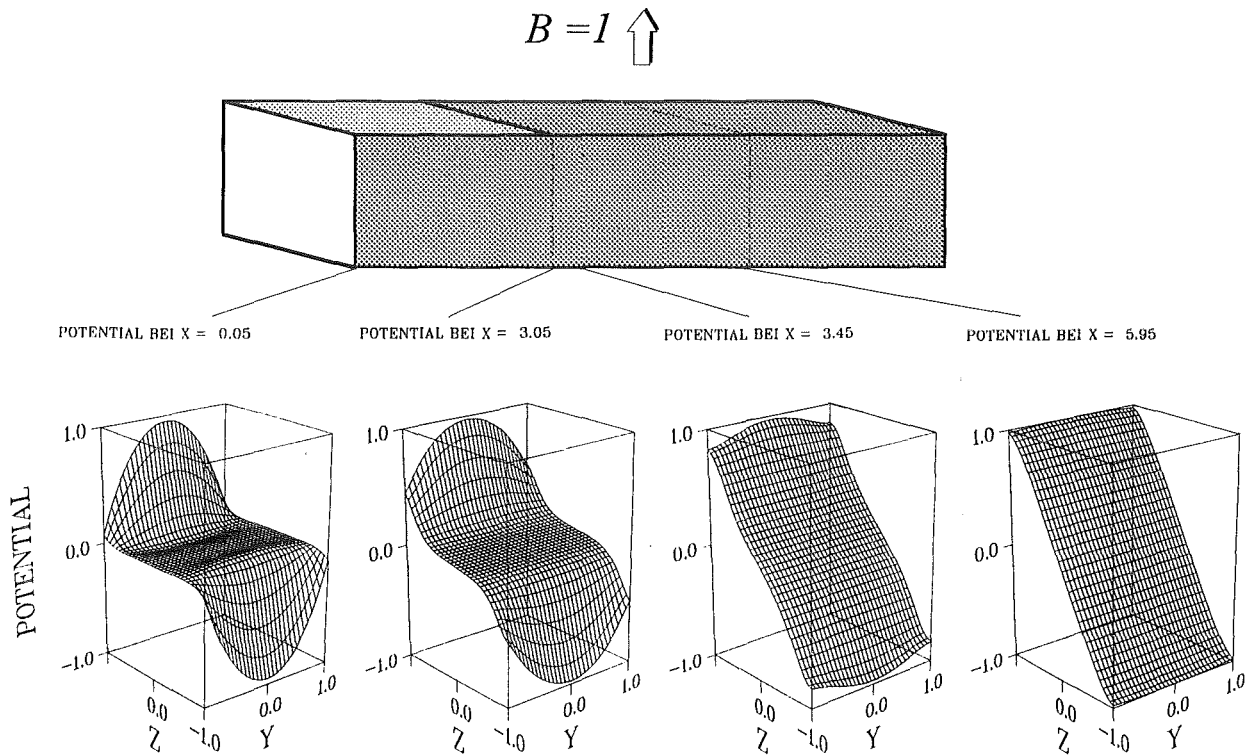


Abb. 6.2: Potentiale ( $M=50$ ;  $N=2500$ ; leitende  $\rightarrow$  isolierte Hartmann-Wände)

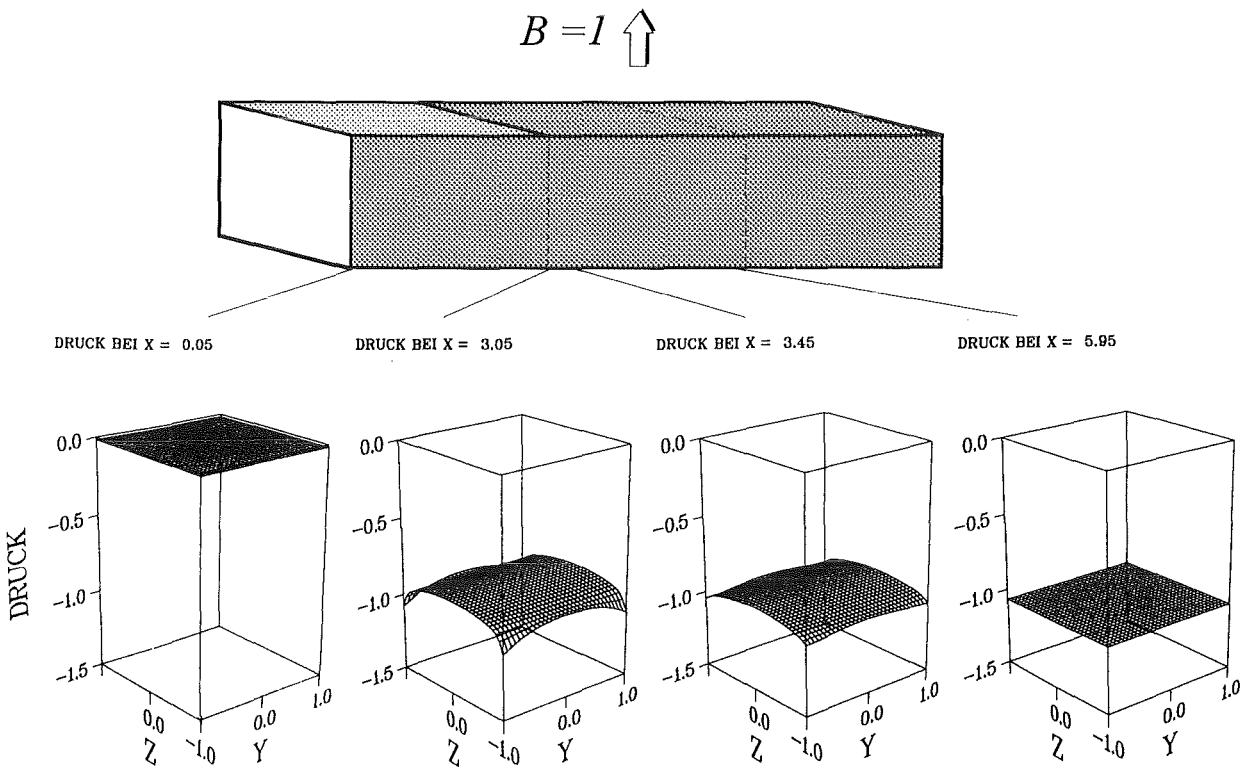


Abb. 6.3: Druck ( $M=50$ ;  $N=2500$ ; leitende  $\rightarrow$  isolierte Hartmann-Wände)

Der monotone Übergang von dem einen voll eingelaufenen Profil in das andere ist auch anhand der Geschwindigkeitsprofile in Abbildung 6.4 auf der Seite 68 gut zu erkennen. Die Seitenjets der Geschwindigkeit für den Bereich leitender Hartmann-Wände ( $x < 3$ ) nehmen im Gebiet dreidimensionaler Einflüsse in Hauptströmungsrichtung kontinuierlich ab, und schließlich bildet sich etwa bei  $x = 4,15$  das bekannte, abgeflachte Profil für voll isolierende Kanäle aus. In Kapitel 3.1 wird die Phänomenologie der voll eingelaufenen Geschwindigkeitsprofile für isolierende bzw. leitende Hartmann-Wände mit Hilfe der auftretenden Kräfte anschaulich gemacht. An dieser Stelle soll nun eine weitere Erklärung eingeführt werden. Dazu betrachten wir das Ohmsche Gesetz (2.9) in der Richtung normal zur isolierenden Seitenwand:

$$j_z = -\nabla\Phi + v_x \times B_y. \quad (6.1)$$

In unmittelbarer Nähe der Seitenwände verschwindet der Anteil  $j_z$  aufgrund des isolierenden Wandmaterials. Wie bereits erwähnt, ist der Gradient des elektrischen Potentials in den Seitenschichten bei leitenden Hartmann-Wänden sehr viel größer als bei isolierenden Hartmann-Wänden (vgl. Abb. 6.2, Seite 66). Nach dem Ohmschen Gesetz muß sich dann dort bei konstantem Magnetfeld auch eine größere Geschwindigkeit  $v_x$  einstellen. Es kommt zu den erwähnten Geschwindigkeitsjets. Beim voll isolierten Kanal fließen insgesamt sehr kleine elektrische Ströme, und der Gradient des Potentials ist nahezu im gesamten Querschnitt konstant. Dementsprechend ist auch die Geschwindigkeit, abgesehen von den Reibungsgrenzschichten, überall im Kanal gleich groß. Die Entstehung bestimmter Strömungsformen kann also in vielen Fällen auch mit einer elektrischen Bilanz für die jeweiligen Bereiche anschaulich gemacht werden.

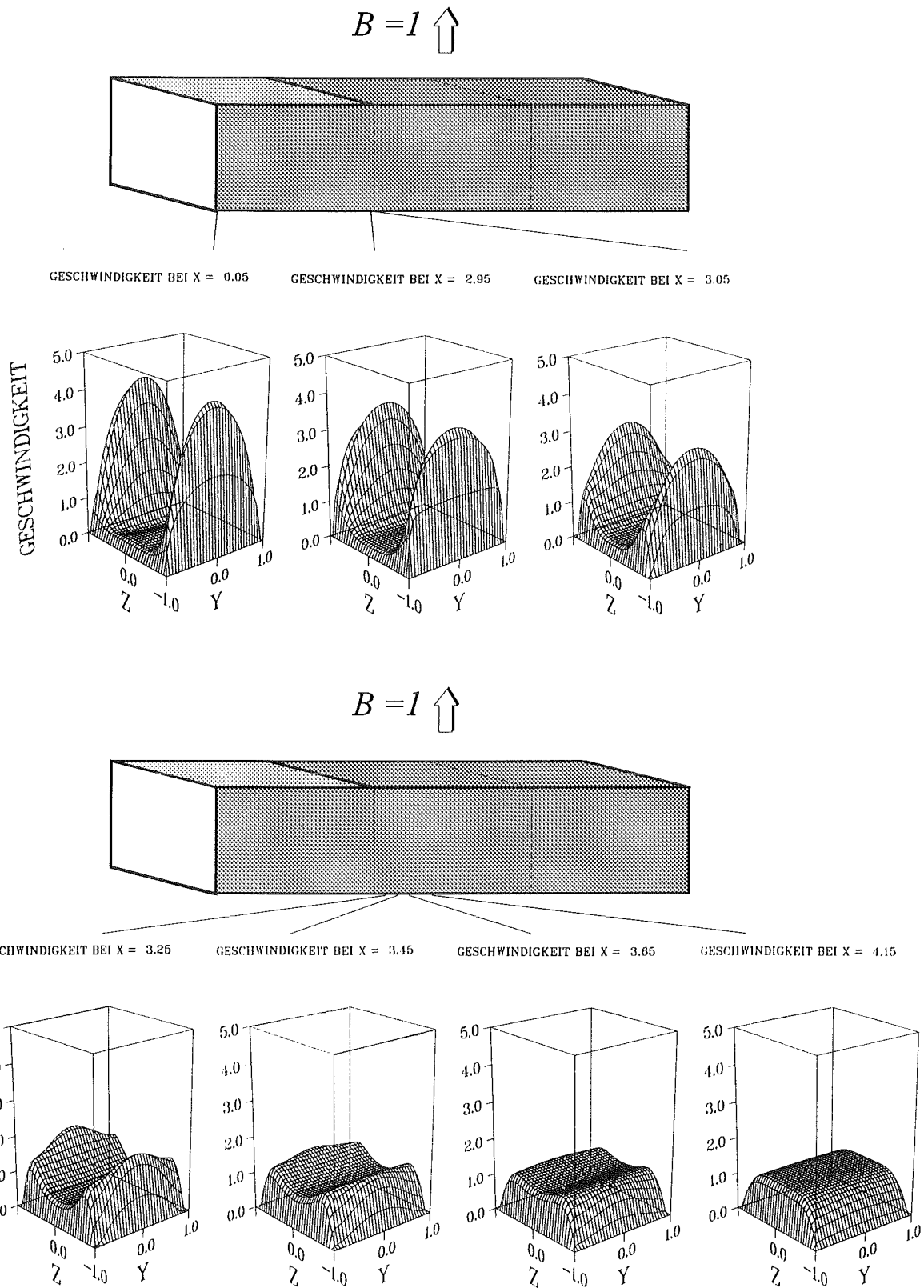


Abb. 6.4: Geschwindigkeit ( $M=50$ ;  $N=2500$ ; leitende  $\rightarrow$  isolierte Hartmann-Wände)



Als nächstes soll für dieselbe Geometrie bei einer konstant gehaltenen Hartmann-Zahl von  $M=50$  der Interaktionsparameter  $N$  variiert werden. An zwei charakteristischen Stellen im Querschnitt des Kanals (siehe Kreismarkierungen in der Skizze 6.5) werden in den Abbildungen 6.6, Seite 70, die Geschwindigkeit  $v_x$  und der Druck  $p$  entlang des Rohres dargestellt. Der eine charakteristische Punkt liegt dabei in der Mitte des Kanals, also im Kernbereich der Strömung, der andere in der Mitte der Seitenschicht, genau dort, wo der Geschwindigkeitsjet sein Maximum erreicht.

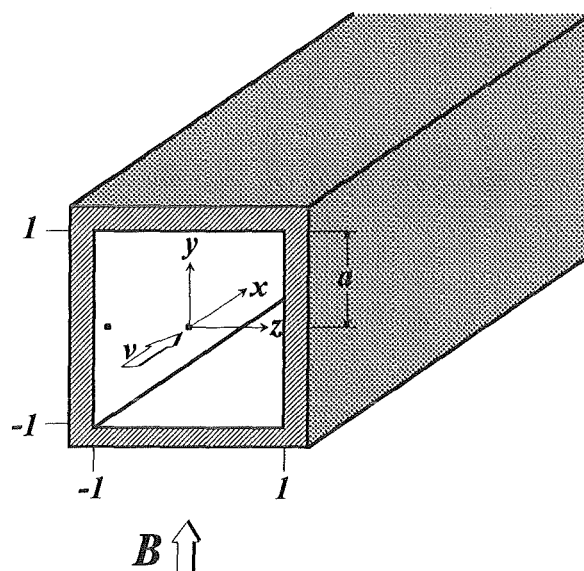


Abb. 6.5: Referenzpunkte im Kanalquerschnitt (leitende  $\rightarrow$  isolierte Hartmann-Wände)

Die  $x$ -Koordinate, bei der sich die Leitfähigkeit der Hartmann-Wände sprunghaft ändert, ist in den Abbildungen zur besseren Orientierung mit einer vertikalen Linie markiert. In jedem der Diagramme ist an der Stelle  $x=0$  der voll eingelaufene, magnetohydrodynamische Zustand für leitende Hartmann- und isolierende Seitenwände ausgebildet. Der Druck ist im gesamten Querschnitt konstant, die Geschwindigkeit ist in den Seitenschichten erhöht und erzeugt das typische  $M$ -Profil. Wie bereits im Kapitel 3.1 erläutert, ist hier

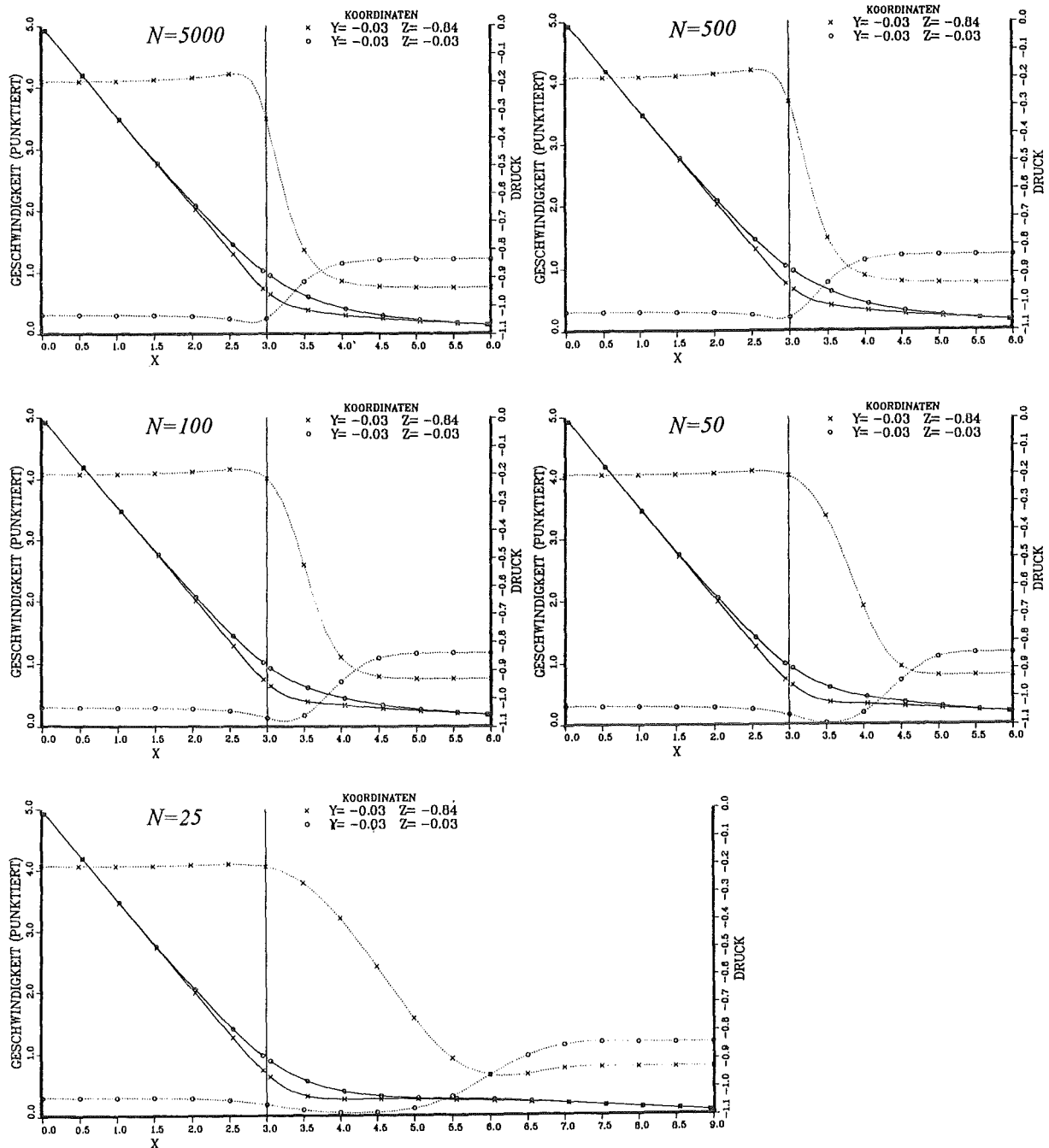


Abb. 6.6: Druck und Geschwindigkeit entlang des Kanals in der Seite und der Mitte ( $M=50$ ,  $N=25-5000$ , leitende  $\rightarrow$  isolierte Hartmann-Wände)

wegen der stärkeren elektrischen Ströme auch der Druckgradient erheblich höher als im isolierten Kanal. Dies ist gut an den beiden Kanalenden zu sehen, an denen sich der niedrigere Druckgradient und das abgeflachte Geschwindigkeitsprofil der voll eingelaufenen Strömung für isolierende Wände einstellt. Bei den Geschwindigkeiten ist dabei für verschiedene Interaktionsparameter deutlich der Einfluß der Trägheit zu erkennen. Je kleiner  $N$  wird, desto länger dauert die Umstrukturierung der Volumenströme. Für  $N=25$  beträgt der Unterschied etwa 3 charakteristische Längen gegenüber  $N=5000$ . Allerdings wirkt sich die Trägheit fast ausschließlich stromabwärts vom Bereich der Magnetfeldänderung aus.

Bei den Druckverläufen ist bei dieser Art der Darstellung hingegen lediglich eine marginale Abhängigkeit von der Trägheit abzulesen. Um den Einfluß von  $N$  auf den Druck dennoch deutlich zu machen, muß der Effekt sozusagen "herausgefiltert" werden. Als Grundlage dafür wird die Arbeit von Hunt und Leibovich (1967) verwendet. Die beiden Autoren finden heraus, daß MHD-Strömungen dann trägheitsfrei sind, wenn für den Interaktionsparameter die Bedingung

$$N \geq M^{3/2} \quad (6.2)$$

erfüllt ist. Angewendet auf den vorliegenden Fall bedeutet dies, daß bei  $M=50$  und  $N=5000$  mit Sicherheit von einer trägheitsfreien Strömung ausgegangen werden kann. Diese Parameterkombination wird nun als Referenz verwendet, d.h. es wird die Differenz der Druckverläufe bei anderen Interaktionsparametern mit diesem Referenzfall in der Kanalmitte gebildet. Diese Differenz stellt dann den Druckverlust aufgrund des Trägheitseinflusses dar. Auf Seite 72 sind diese Druckdifferenzen in den Abbildungen 6.7 für verschiedene Interaktionsparameter über der Rohrlänge  $x$  aufgetragen. Die Vorhersage von Hunt und Leibovich kann numerisch voll bestätigt werden. Für  $N=2500$  und  $N=500$  ist der Trägheitseinfluß verschwindend. Für kleiner werdende Interaktionsparameter steigt der Druckverlust dagegen deutlich an. Aber ein Vergleich der Abbildungen 6.6 und 6.7 ergibt, daß selbst beim Extremfall  $N=25$  der zusätzliche Druckabfall nur etwa 2-3% des gesamten Druckverlustes ausmacht. Für eine weitergehende Untersuchung des Trägheitseinflusses eignet sich daher ein isoliertes Rohr unter dem Einfluß eines variablen Magnetfeldes besser. Wenn die Änderung der Magnetfeldstärke über eine kurze Strecke erfolgt (etwa eine charakteristische Länge), sind wesentlich stärkere Effekte auch für den Druckverlauf zu erwarten. Ein solcher Fall soll daher im nächsten Abschnitt behandelt werden.

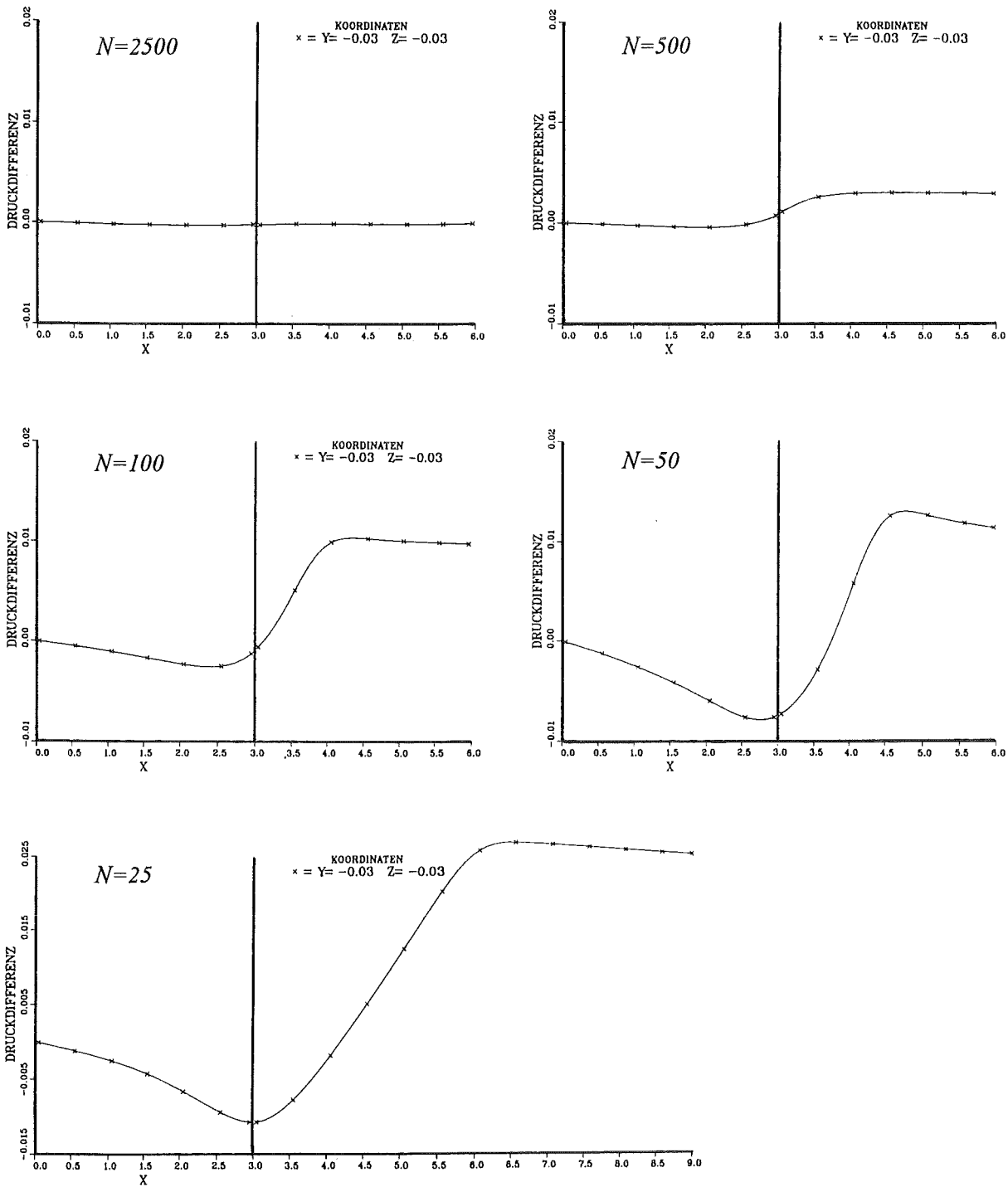
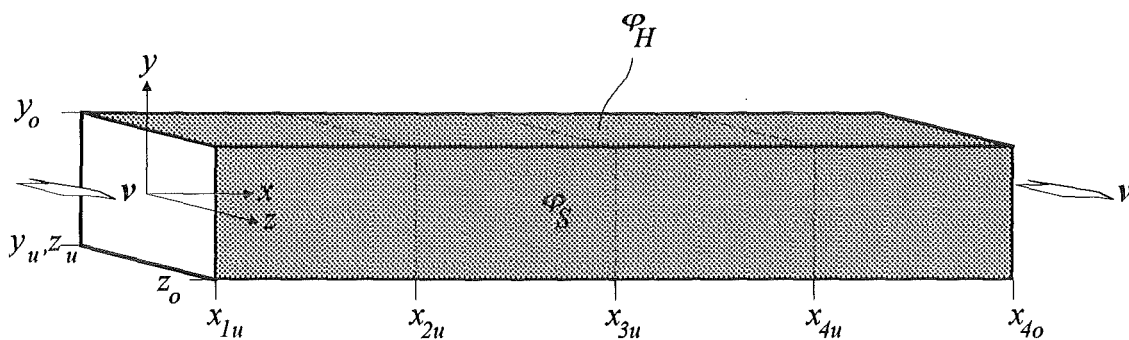


Abb. 6.7: 3d-Druckdifferenz ( $M=50$ ,  $N=25-5000$ , leitende  $\rightarrow$  isolierte Hartmannwände)

## 6.2 Strömungen bei veränderlichem Magnetfeld

Für die Untersuchung von Strömungen in geraden Kanälen unter dem Einfluß von veränderlichen Magnetfeldern soll die in Abbildung 6.8 dargestellte Geometrie herangezogen werden. Um dabei die größtmöglichen dreidimensionalen Effekte zu erhalten, wird ein voll isolierter Kanal mit den Wandleitparametern  $\varphi_H = \varphi_H = 0$  gewählt.



$$B = f(x) \uparrow$$

Abb. 6.8: Isolierter Kanal mit variablem Magnetfeld

### 6.2.1 Variables Magnetfeld, Fall I

Im Fall I habe das von außen angelegte Magnetfeld  $B_y(x)$  am Anfang des Kanals, bei  $x=0$ , den Wert eins und falle an der Symmetriestelle  $x=3$  innerhalb einer charakteristischen Länge steil auf den Wert null ab (siehe Abb. 6.9). Dies entspricht im Experiment dem Austritt eines Kanals aus einem Magneten.

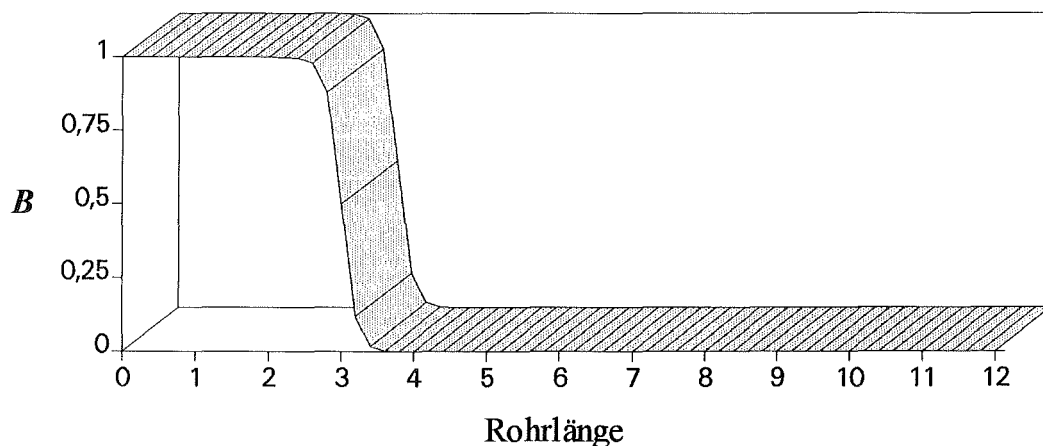
**Magnetfeld (Fall I)**

Abb. 6.9: Verlauf des Magnetfeldes, Fall I

Im Kapitel 4.7.1 befindet sich ein Hinweis darauf, daß bei bestimmten Kanalströmungen die Zerlegung des Rechengebietes für gerade Kanäle aus Kapazitätsgründen selbst bei großen Rechenanlagen in mehr als zwei Rohrstücke notwendig werden kann. Bei stark trägheitsbehafteter Strömung und großen Hartmann-Zahlen ist der hier untersuchte Kanal aufgrund der großen Einlaufängen ein gutes Beispiel dafür. Während bei kleinem  $M$  und/oder großem  $N$  noch zwei Teilstücke genügen, müssen für  $M=200$  und  $N=250$  bereits vier Teilstücke aneinandergesetzt werden, weil sich erst nach etwa 20 charakteristischen Längen der voll eingelaufene Zustand eingestellt hat. Entsprechend erhöhen sich auch die Rechenzeiten auf etwa 20 Stunden CPU. Die genauen Abmessungen des Kanals und die Parametervariationen für  $N$  und  $M$  können der Tabelle 6.2 entnommen werden.

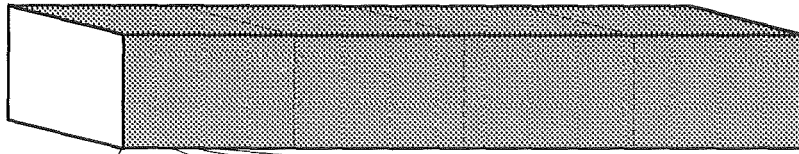


In der Abbildung 6.10 sind, stellvertretend für die Vielzahl berechneter Beispiele, Geschwindigkeitsverteilungen im Kanalquerschnitt bei der Parameterkombination  $M=100$  und  $N=2500$  gezeigt. Am Eintritt des Kanals, bei  $x=0,03$ , ist die voll eingelaufene MHD-Strömung für konstantes Magnetfeld zu sehen (s. Seite 80, Abbildung 6.10 links oben). Am Austritt des Kanals beträgt  $B_y=0$ , und es ergibt sich etwa bei  $x=4,6$  das aus der Hydrodynamik bekannte, parabolische Geschwindigkeitsprofil. Dazwischen findet kontinuierlich der Übergang von magnetohydrodynamischer zu hydrodynamischer Strömung statt. Im Kapitel 3.2 sind die physikalischen Vorgänge bei einer Änderung des Magnetfeldes bereits schematisch dargestellt (vergleiche Seite 26). Im Bereich des variablen Magnetfeldes ergeben sich dabei auf die Seitenwände gerichtete Lorentz-Kräfte, die ein  $M$ -förmiges Geschwindigkeitsprofil ausprägen. Dies ist in der Abbildung 6.10 sehr gut zu erkennen. Insbesondere ergibt sich kurz hinter der Stelle  $x=3$  der größte Geschwindigkeitsjet. In diesem Bereich müssen nämlich sämtliche induzierte, axiale Ströme die Seitenschichten passieren. Die resultierenden Lorentz-Kräfte und damit auch die Verdrängung des Fluids in die Seitenbereiche wird hier folglich maximal.

Als nächstes soll der Einfluß der Magnetfeldstärke durch eine Variation der Hartmann-Zahl  $M$  bei festgehaltenem Interaktionsparameter  $N$  untersucht werden. Das Magnetfeld soll wieder den oben beschriebenen Verlauf aufweisen (Fall I, s. Seite 74). In der Abbildung 6.12 auf Seite 80 sind Geschwindigkeitsprofile über dem Kanalquerschnitt an drei ausgezeichneten Querschnitten für die Hartmann-Zahlen  $M=20, 50, 100$  und  $200$  bei  $N=1000$  aufgetragen. Jeweils links, bei  $x=0$ , ist das voll eingelaufene MHD-Profil für isolierende Wände zu erkennen. Mit steigendem  $M$  werden, wie von der Theorie vorhergesagt, die Seiten- und Hartmann-Schichten dünner (Größenordnung  $M^{-1/2}$  für die Seiten-, bzw.  $M^{-1}$  für die Hartmann-Schichten). Gleichzeitig flacht das Geschwindigkeitsprofil im Kern mit steigender Hartmann-Zahl immer mehr ab. Für große Hartmann-Zahlen kann daher in guter Näherung von einem Kolbenprofil gesprochen werden. Bei den jeweils rechten Abbildungen ( $x=12$ ) ist das Magnetfeld bereits auf den Wert null abgesunken, und es stellt sich dementsprechend in allen Fällen der hydrodynamische Strömungszustand ein. Die mittleren Abbildungen zeigen Geschwindigkeitsprofile in den Querschnitten, die den maximalen Anstieg der Geschwindigkeitsüberhöhung aufweisen (etwa bei  $x=3,03$ ). Je größer die Hartmann-Zahl ist, desto dünner und schneller werden die Seitenjets. Im Kern des Kanals ist das Fluid dann nahezu stagnierend, d.h. der gesamte Volumenstrom fließt durch die Seitenschichten.



$$B = f(x) \uparrow$$

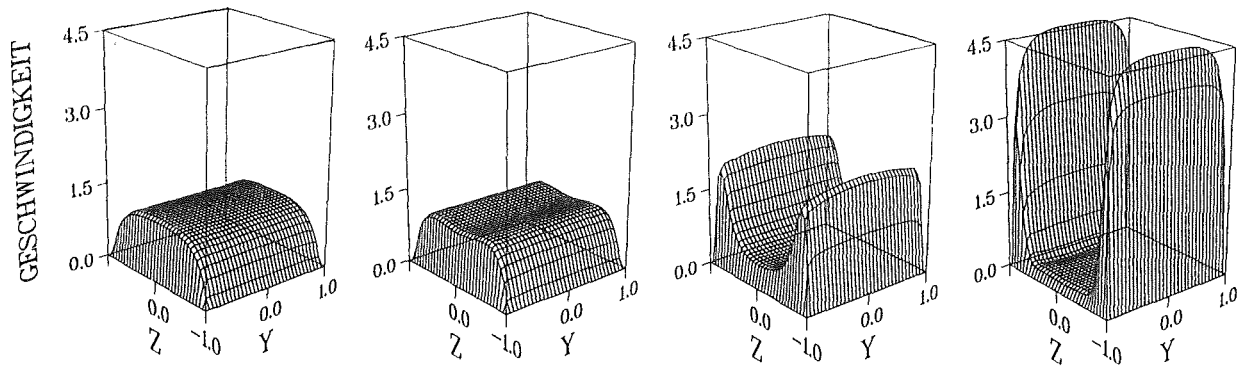


GESCHWINDIGKEIT BEI X = 0.03

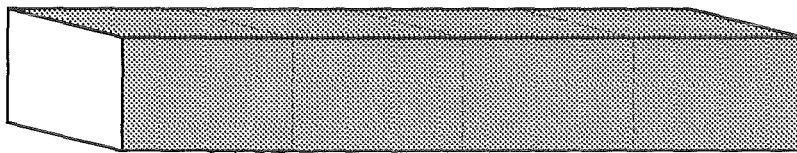
GESCHWINDIGKEIT BEI X = 1.93

GESCHWINDIGKEIT BEI X = 2.63

GESCHWINDIGKEIT BEI X = 3.03



$$B = f(x) \uparrow$$



GESCHWINDIGKEIT BEI X = 3.48

GESCHWINDIGKEIT BEI X = 3.88

GESCHWINDIGKEIT BEI X = 4.38

GESCHWINDIGKEIT BEI X = 4.63

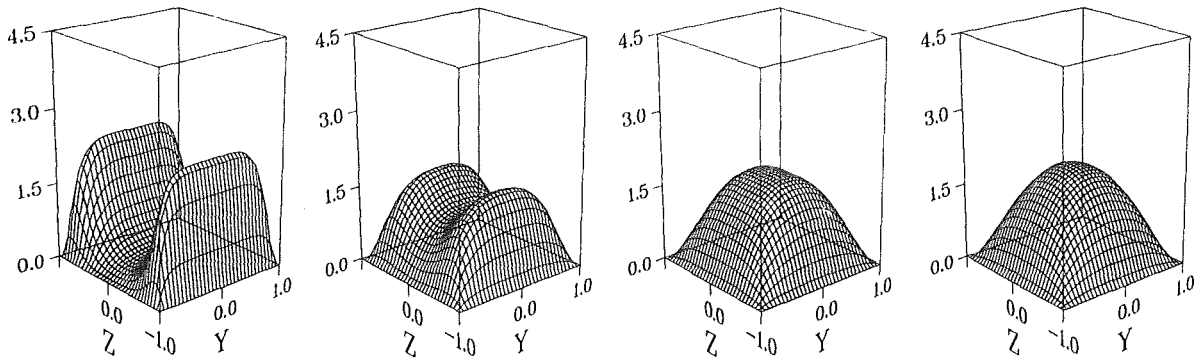


Abb. 6.10: Geschwindigkeit ( $M=100$ ;  $N=2500$ ; variables Magnetfeld, Fall I)

Der Einfluß der Trägheit auf den Druckverlust kann wieder unter Zuhilfenahme des trägheitsfreien Referenzfalles  $N=5000$  herausgefiltert werden. Die Ergebnisse für Interaktionsparameter zwischen 25 und 2500 liegen in der Abbildung 6.11 auf Seite 79 vor. In guter Übereinstimmung mit der Theorie kann der Einfluß der Trägheit für  $N > M^{3/2}$  vernachlässigt werden. Bei  $N=500$  beträgt der zusätzliche Druckverlust gerade noch knapp 1% gemessen am Gesamtdruckverlust. Demgegenüber ist der Trägheitsdruckverlust bei  $N=25$  mit etwa 12%, gemessen am Gesamtdruckverlust, um eine Größenordnung angestiegen.

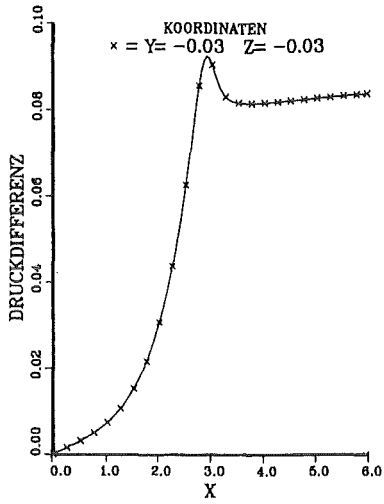
In der Literatur wird bereits früh darauf hingewiesen, daß der auf Trägheit beruhende Druckverlust für große Hartmann-Zahlen von der Größenordnung

$$\Delta p_{\text{Trägheit}} \sim N^{-1/3}, \quad \text{für } M \rightarrow \infty \quad (6.3)$$

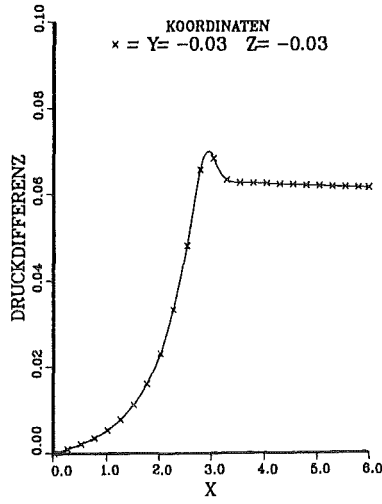
ist. Hunt und Leibovich (1967) leiten dies theoretisch mit Hilfe einer asymptotischen Näherung her. Entsprechende experimentelle Untersuchungen für Geometrien mit Querschnittsänderungen stammen zum Beispiel von Holroyd (1980) und können die Theorie im Rahmen der Meßgenauigkeit tendenziell bestätigen. Mit der vollen numerischen Simulation kann ergänzend hierzu der Bereich kleinerer Hartmann-Zahlen studiert werden, bei dem die Näherungslösung nicht mehr greift, sondern stattdessen ganz allgemein

$$\Delta p_{\text{Trägheit}} = N^{E(M)}, \quad (6.4)$$

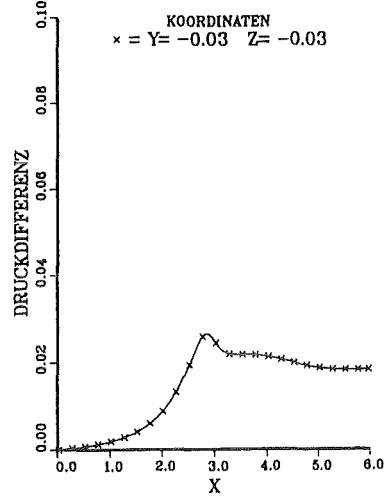
gilt.  $E(M)$  stellt hier den Exponenten des Trägheitsdruckverlustes als Funktion der Hartmann-Zahl dar. Um diese Abhängigkeit näher zu untersuchen, wird in Abbildung 6.13 auf Seite 81 der Trägheitsdruckverlust  $\Delta p_{\text{Trägheit}}$  für verschiedene Hartmann-Zahlen doppeltlogarithmisch über dem Interaktionsparameter aufgetragen. Für jede Hartmann-Zahl wird dabei die Berechnung mit dem jeweils größten Interaktionsparameter als Referenzfall im Sinne der Filterung verwendet. Wird nun eine Gerade durch die mit den Kreuzen gekennzeichneten, numerischen Rechenergebnisse gelegt, so repräsentiert deren Steigung gerade den gesuchten Exponenten  $E(M)$  des Trägheitsdruckverlustes. Die Abbildungen können belegen, daß die Exponenten  $E(M)$  für steigende Hartmann-Zahlen monoton zum vorhergesagten Wert  $-1/3$  für große  $M$  konvergieren. Im Unterkapitel 6.2.2 soll diese Aussage unter Verwendung weiterer Berechnungen noch systematischer betrachtet werden



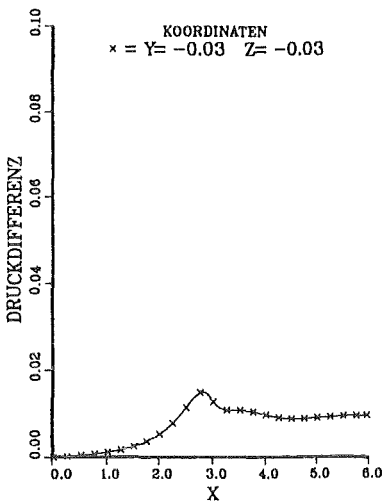
$N=25$



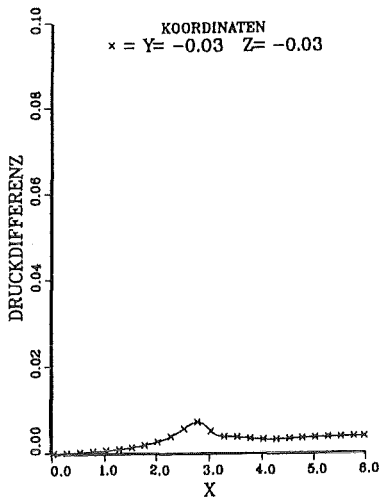
$N=50$



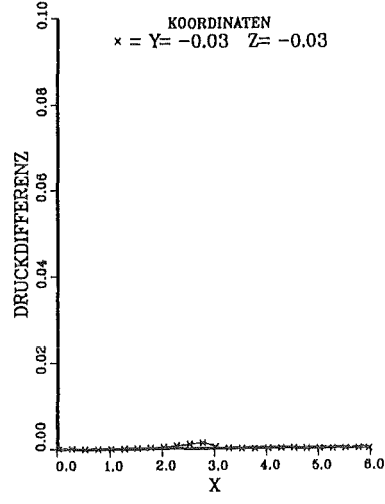
$N=250$



$N=500$



$N=1000$



$N=2500$

Abb. 6.11: 3d-Druckdifferenz ( $M=100$ ;  $N=25-5000$ ; variables Magnetfeld, Fall I)

$$B = f(x) \uparrow$$

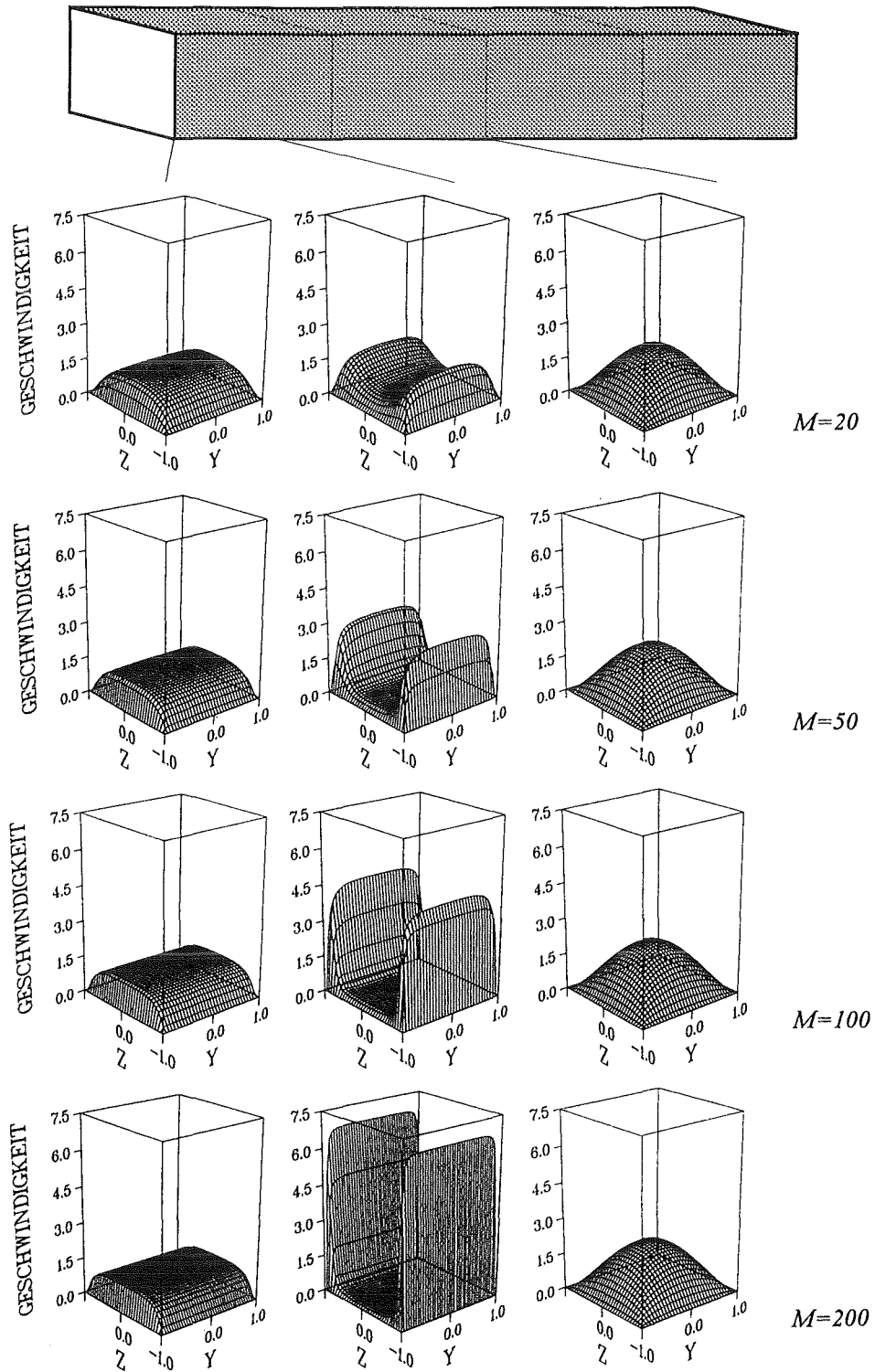
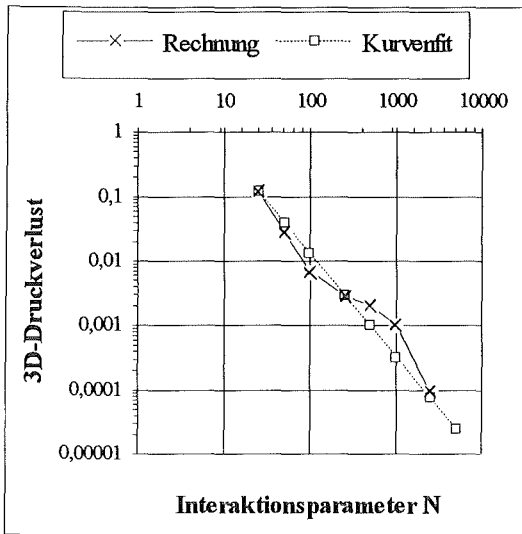
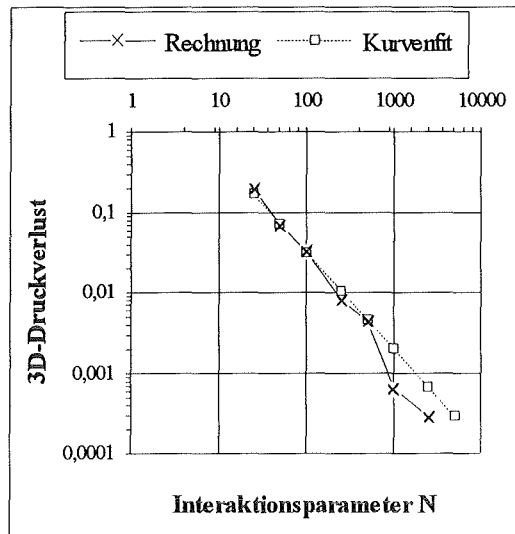


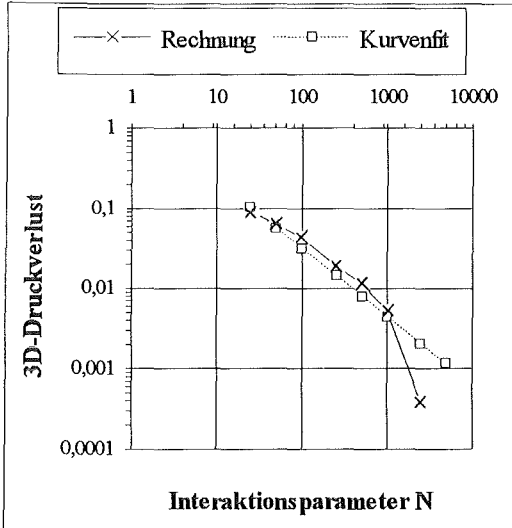
Abb. 6.12: Geschwindigkeit ( $M=20-200$ ;  $N=1000$ ; variables Magnetfeld, Fall I)



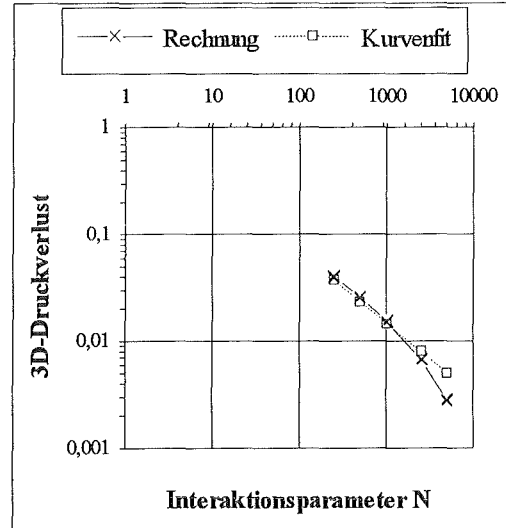
$M=20, N=25-5000, \text{Exponent: } -1,6$



$M=50, N=25-5000, \text{Exponent: } -1,2$



$M=100, N=25-5000, \text{Exponent: } -1,0$



$M=200, N=25-5000, \text{Exponent: } -0,67$

Abb. 6.13: Exponent des 3d-Druckverlustes, Fall I

Abschließend für diesen Magnetfeldverlauf kann der Gesamtdruckverlust des betrachteten Kanals als Funktion der Hartmann-Zahl aufgetragen werden. In der Abbildung 6.14 ist dies für die beiden Beispiele  $N=500$  und  $N=5000$  durchgeführt. Es hat danach zunächst den paradoxen Anschein, als werde der Druckverlust trotz ansteigenden Magnetfeldes, also trotz ansteigender Hartmann-Zahl, geringer. Dies ist jedoch ausschließlich auf die Normierung des Druckes mit  $B_0^{-2}$  zurückzuführen. Der dimensionsbehaftete Druckabfall steigt selbstverständlich mit dem Magnetfeld an. Die Differenz der Verläufe für  $N=500$  und  $N=5000$  stellt den Einfluß der Trägheit auf die Strömung dar.

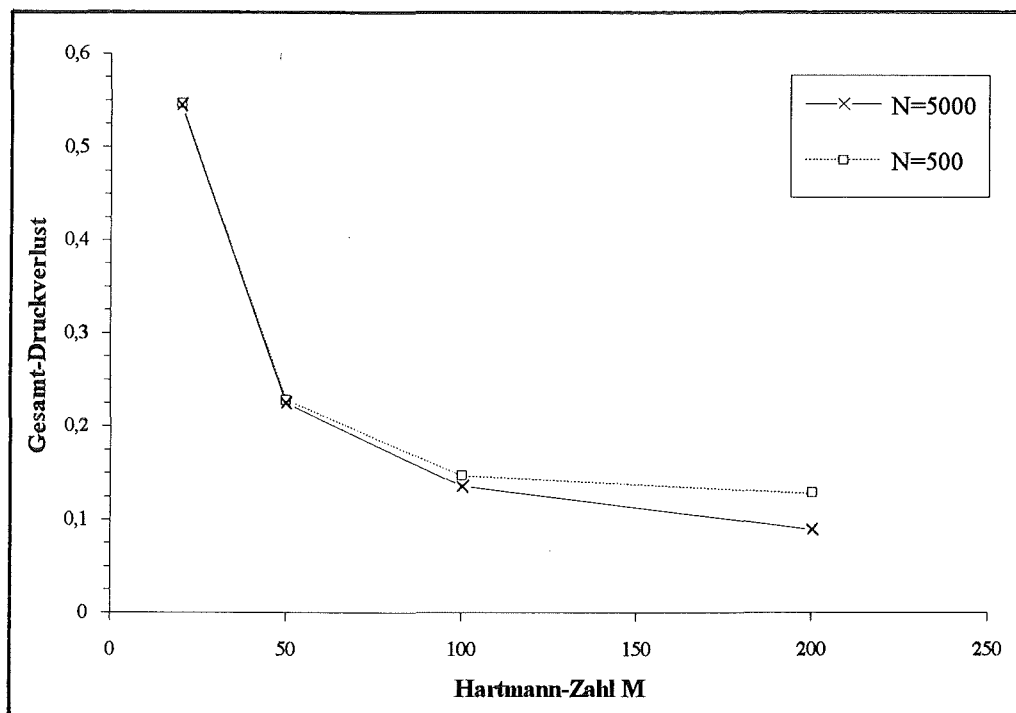


Abb. 6.14: Gesamt-Druckverlust in Abhängigkeit von der Hartmann-Zahl, Fall I

## 6.2.2 Variables Magnetfeld, Fall II

Der zuvor betrachtete Magnetfeldverlauf (Fall I) hat Ergebnisse für den Übergang einer magnetohydrodynamischen in eine hydrodynamische Strömung gebracht. Als weiteres Beispiel kann der Übergang zwischen zwei verschiedenen MHD-Strömungen anhand des Magnetfeldverlaufes von Abbildung 6.15 (Fall II) untersucht werden. An der Stelle  $x=4$  steige dabei das Magnetfeld innerhalb einer charakteristischen Länge von  $1/2$  auf  $1$  an. In der Tabelle 6.3 sind wieder die genauen Kanalabmessungen und alle durchgeführten Parameterkombinationen aufgeführt.

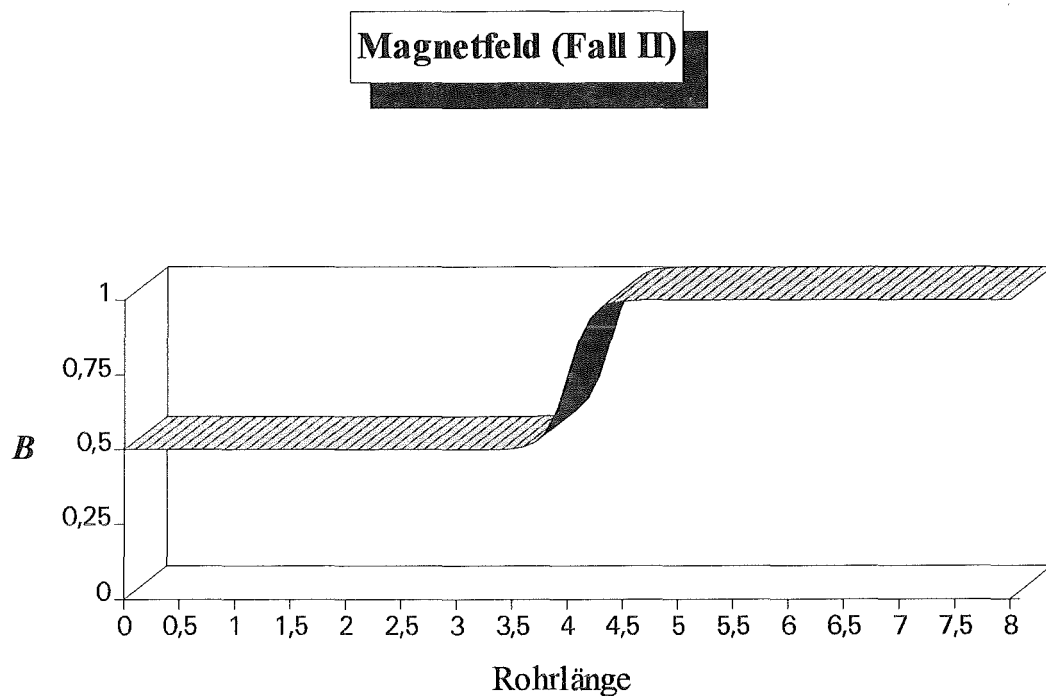


Abb. 6.15: Verlauf des Magnetfeldes, Fall II





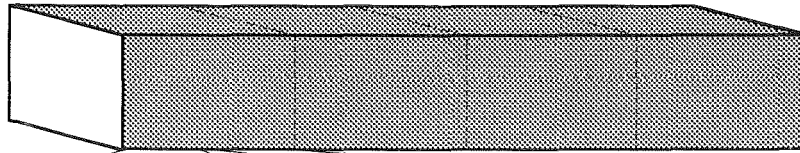
Tab. 6.3: Fortsetzung (Fall II)

$\varphi_S$	$\varphi_H$	$x_{1u}$	$x_{2u}$	$x_{3u}$	$x_{4u}$	$x_{4o}$	$y_u$	$y_o$	$z_u$	$z_o$	$B$	$M$	$N$
0	$\infty$	0	8	16	—	—	-1	1	-1	1	$B_y = 1 - 1/2(1 + e^{10(x-4)})$	500	500
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	1000
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	2500
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	5000
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	10000
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	20000

Die nachfolgenden drei Abbildungen zeigen Ergebnisse für das elektrische Potential (Abb. 6.16 auf Seite 86), den Druck (Abb. 6.17 auf Seite 86) und die Geschwindigkeiten (Abb. 6.18 auf S. 87) über den jeweils gekennzeichneten Querschnitten am Beispiel  $M=200$  und  $N=5000$ . Kurz hinter dem Bereich des stärksten Gradienten des Magnetfeldes (etwa bei  $x=4,05$ ) ergeben sich die größten dreidimensionalen Phänomene. Dort passieren alle axialen elektrischen Ströme die Seitenschichten und der Potentialunterschied über dieser Randschicht ist hier maximal.

Gegenüber der Strömung in den magnetfeldfreien Raum (Fall I) hat der hier betrachtete Fall II den gravierenden Vorteil, daß die Einlauflängen erheblich kürzer sind. Dafür sind die im gesamten Kanal wirkenden Lorentz-Kräfte verantwortlich, die bereits in relativ kurzen Abständen vor und hinter dem Bereich der Veränderung des Magnetfeldes die Strömung in ein eingelaufenes MHD-Profil zwingen. Dagegen wirken beim Ausströmen in den magnetfeldfreien Raum keine elektromagnetischen Kräfte mehr, die einen prägenden Einfluß auf die Struktur der Strömung haben könnten. Eine Zerlegung des numerischen Rechengebietes in nur zwei Teilstücke ist also im Fall II selbst bei den stark trägheitsbehafteten Strömungen völlig ausreichend. Die numerischen Ergebnisse können daher, verglichen mit dem Fall I bei gleichen Kennzahlen, in knapp der Hälfte der Rechenzeit erzielt werden. Darüberhinaus sind wegen der kürzeren Einlauflängen auch Berechnungen bei höheren Hartmann-Zahlen ( $M=500$ ) möglich.

$$B = f(x) \uparrow$$



POTENTIAL BEI X = 0.04

POTENTIAL BEI X = 3.56

POTENTIAL BEI X = 4.12

POTENTIAL BEI X = 7.96

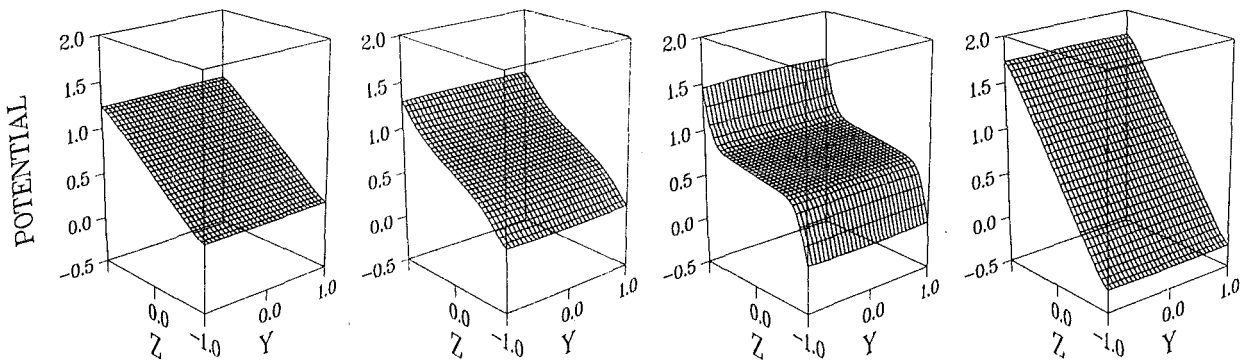
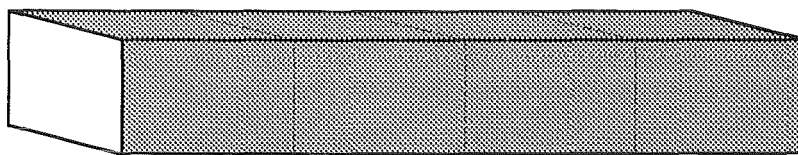


Abb. 6.16: Potential ( $M=200$ ;  $N=5000$ ; variables Magnetfeld, Fall II)

$$B = f(x) \uparrow$$



DRUCK BEI X = 0.04

DRUCK BEI X = 3.56

DRUCK BEI X = 4.12

DRUCK BEI X = 7.96

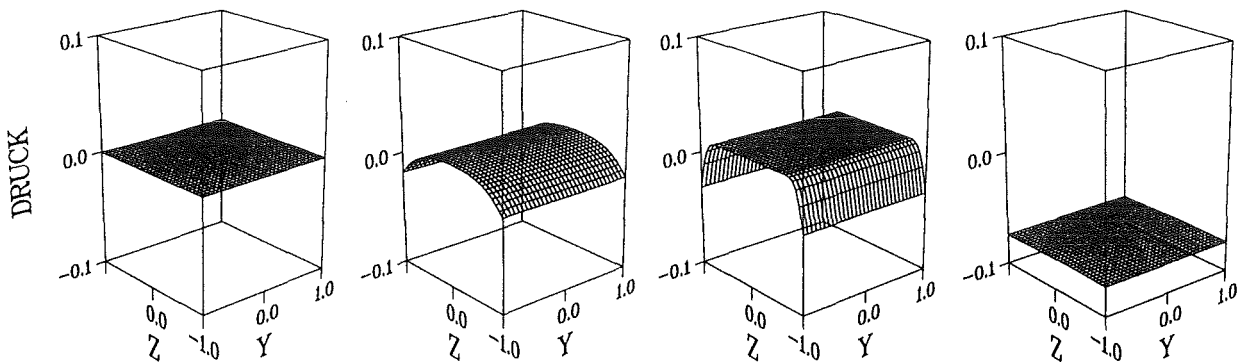
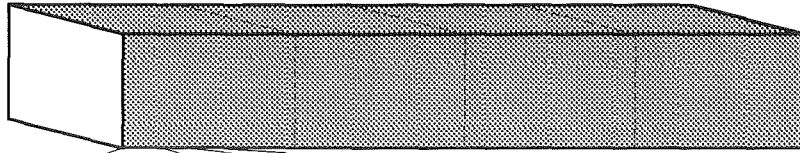


Abb. 6.17: Druck ( $M=200$ ;  $N=5000$ ; variables Magnetfeld, Fall II)

$$B = f(x) \uparrow$$

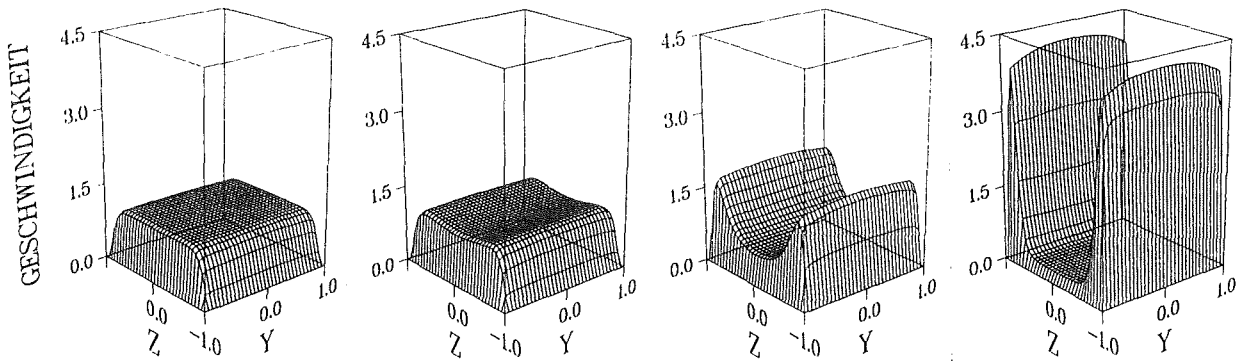


GESCHWINDIGKEIT BEI X = 0.04

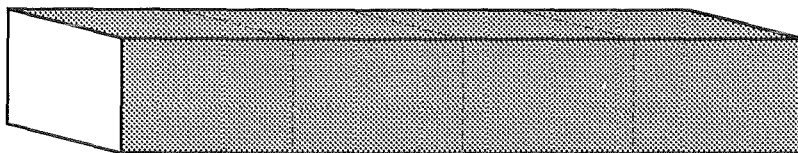
GESCHWINDIGKEIT BEI X = 2.84

GESCHWINDIGKEIT BEI X = 3.56

GESCHWINDIGKEIT BEI X = 4.04



$$B = f(x) \uparrow$$



GESCHWINDIGKEIT BEI X = 4.36

GESCHWINDIGKEIT BEI X = 4.60

GESCHWINDIGKEIT BEI X = 5.32

GESCHWINDIGKEIT BEI X = 5.64

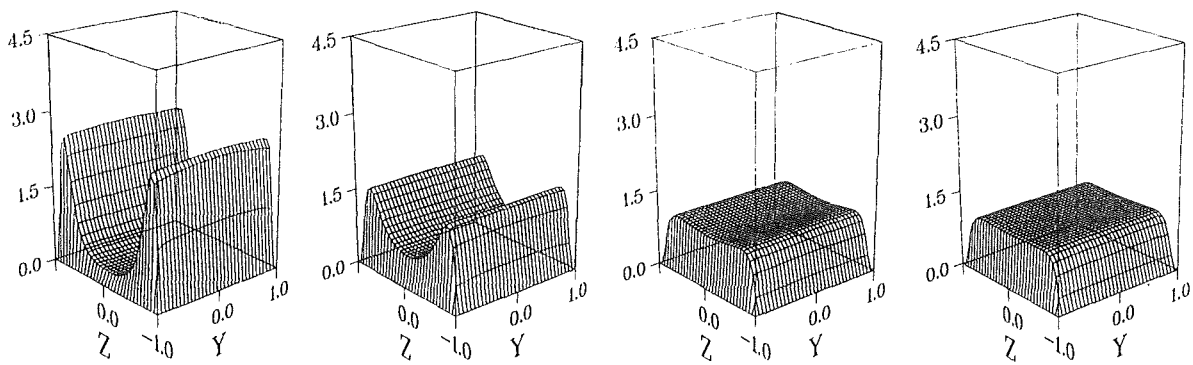
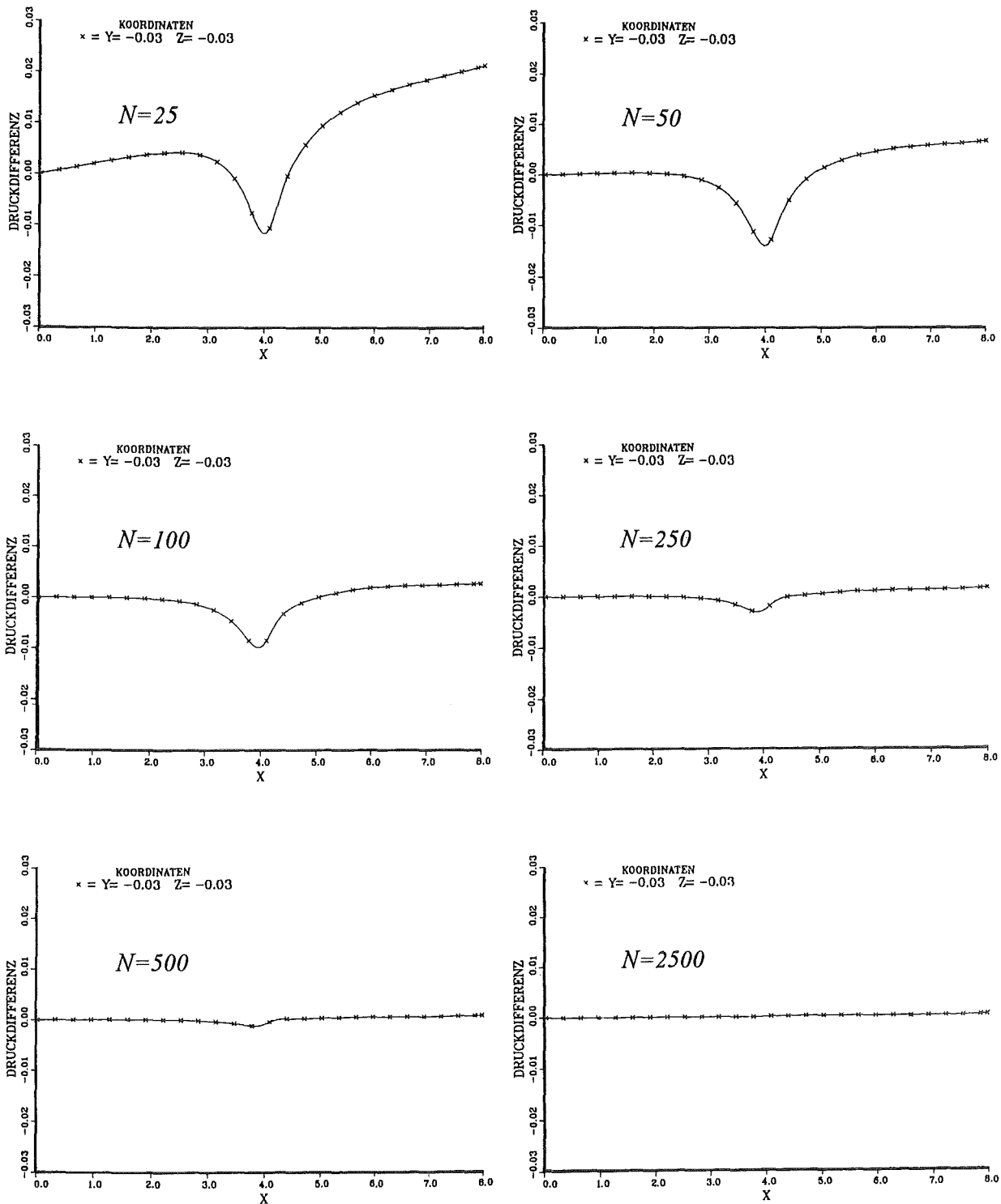


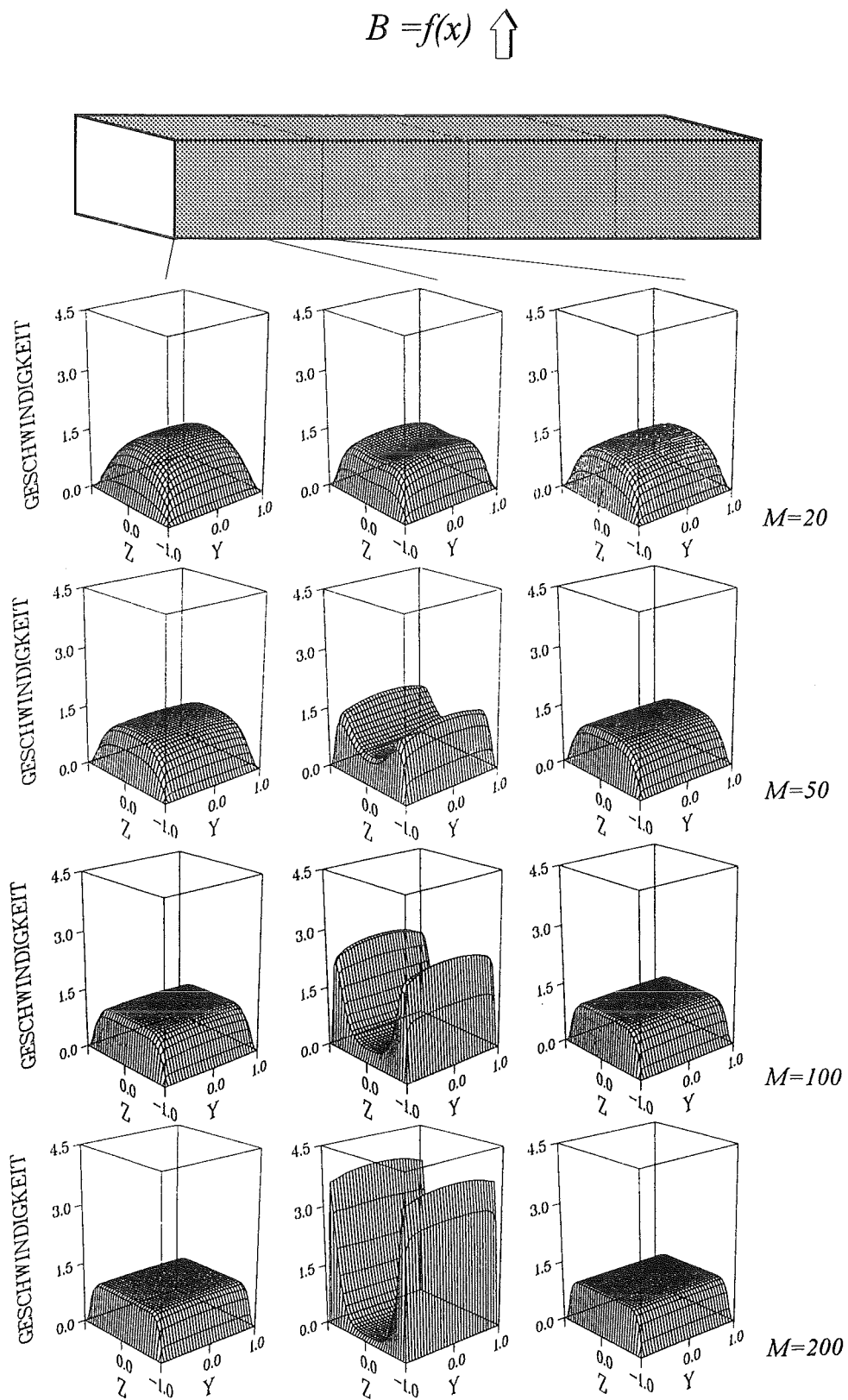
Abb. 6.18: Geschwindigkeit ( $M=200$ ;  $N=5000$ ; variables Magnetfeld, Fall II)

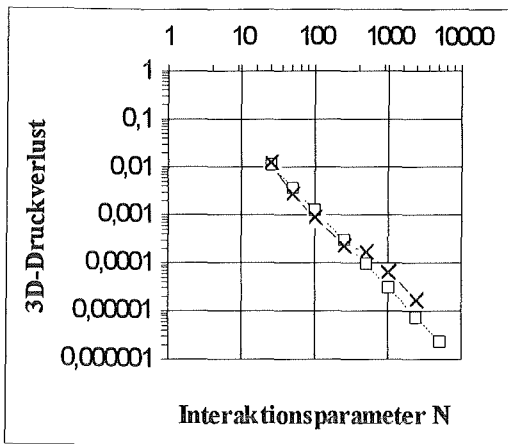
Ganz analog zur Strömung in den magnetfeldfreien Raum (Fall I) wird auch für den Fall II die theoretische Vorhersage, daß die Trägheit für  $N > M^{3/2}$  vernachlässigbar sei, voll bestätigt. Dies kann anschaulich anhand der herausgefilterten Trägheitsdruckverluste in der Abbildung 6.19 überprüft werden. Ab  $N \geq 250$  ist für  $M=50$  praktisch kaum noch eine Auswirkung des Interaktionsparameters auf das Strömungsverhalten zu erkennen.

In den Abbildungen 6.20 ist der Einfluß der Hartmann-Zahl auf das Geschwindigkeitsfeld zu erkennen. Bei den Profilen ganz rechts (an der Stelle  $x=8$ ) hat das Magnetfeld den vollen Wert  $B_y=1$ , und das eingelaufene, rein zweidimensionale MHD-Profil für die daneben angegebenen Hartmann-Zahlen hat sich ausgebildet. Jeweils links befinden sich die dazugehörigen Geschwindigkeitsprofile am Kanaleingang (an der Stelle  $x=0$ ). Dort hat  $B_y$  den Wert  $1/2$ , und die Profile haben dementsprechend dickere Seiten- und Hartmann-Schichten als am Austritt des Kanals. In den mittleren Abbildungen sind die Profile mit den maximalen Geschwindigkeitsüberhöhungen gezeigt (etwa bei  $x=4,05$ ). Wie beim Übergang in den magnetfeldfreien Raum ergibt sich für große Hartmann-Zahlen ein nahezu stagnierendes Fluid in der Mitte des Kanals. Das Profil der Kernströmung ist abgeflacht. Der gesamte Volumenstrom muß dann durch die dünnen Seitenschichten fließen.

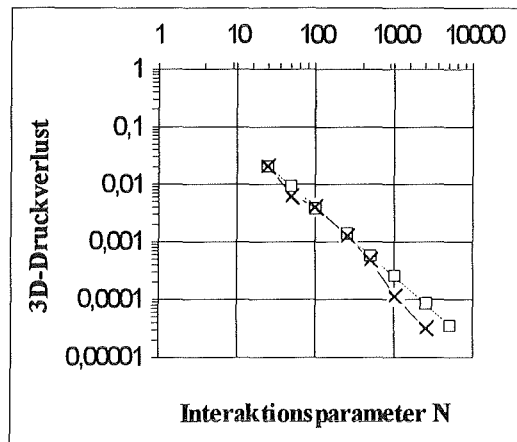
Die Ergebnisse zu den in der Tabelle 6.3 aufgelisteten Parameterkombinationen lassen sich bezüglich des gefilterten 3d-Druckverlustes in den fünf Diagrammen 6.21 zusammenfassen (s. Seite 91). Dabei sind wieder die Ergebnisse für den jeweils größten Interaktionsparameter als Referenzfall eingesetzt. Wie nicht anders zu erwarten ist, ergeben sich hier für den Exponenten des  $N$ -abhängigen Druckverlustes exakt dieselben Werte wie für die Strömung in den magnetfeldfreien Raum. Die Ergebnisse für den Exponenten  $E(M)$  des Druckverlustes sind also auf jedes beliebige Magnetfeld übertragbar. Prinzipiell muß das gleiche aber auch ganz allgemein für jede Art von Trägheitseffekten, beispielsweise aufgrund von Umlenkungen, Querschnittsveränderungen oder Änderungen der Wandleitfähigkeit gelten.

Abb. 6.19: 3d-Druckdifferenz ( $M=50$ ;  $N=25-5000$ ; variables Magnetfeld, Fall II)

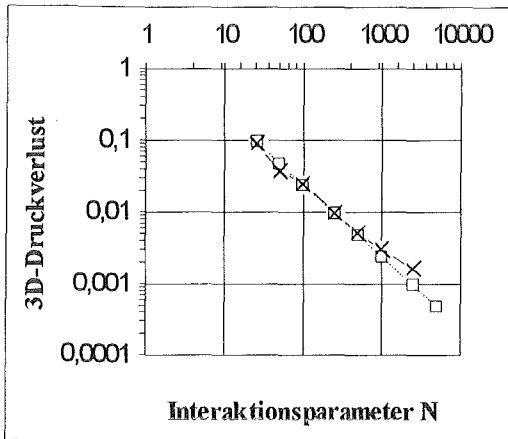
Abb. 6.20: Geschwindigkeit ( $M=20-200$ ;  $N=1000$ ; variables Magnetfeld, Fall II)



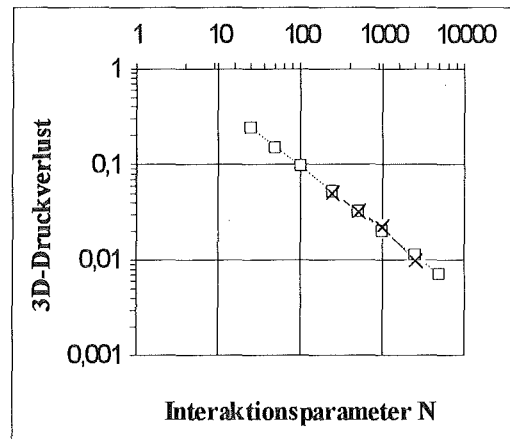
$M=20, N=25-5000, \text{Exponent: } -1,6$



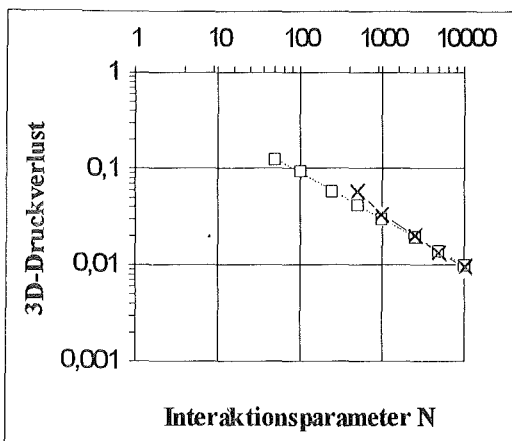
$M=50, N=25-5000, \text{Exponent: } -1,2$



$M=100, N=25-5000, \text{Exponent: } -1,0$



$M=200, N=25-5000, \text{Exponent: } -0,67$



$M=500, N=25-10000, \text{Exponent: } -0,45$

-x-	Rechnung
-□-	Kurvenfit

Abb. 6.21: Exponent des 3d-Druckverlustes, Fall II

Zum Abschluß dieses Kapitels können die gewonnenen Ergebnisse für den Einfluß der Trägheit auf den Druckabfall bei MHD-Strömungen in geraden Kanälen in der Abbildung 6.22 zusammengeführt werden. Dort sind mit den Kreuzen die Exponenten des numerischen Druckverlustes für sämtliche berechneten Beispiele eingetragen. Um daraus eine Aussage für größere Hartmann-Zahlen zu extrapolieren, ist durch diese Kreuze ein Kurvenfit gelegt (gepunktete Linie in der Abbildung), der nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichungen mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogrammes ermittelt ist. Zusätzlich ist in dieser Darstellung der theoretische Grenzwert nach Hunt und Leibovich für sehr große  $M$  gestrichelt eingetragen. Die numerischen Resultate konvergieren monoton gegen die Vorhersage und können damit die Theorie voll bestätigen. Die Extrapolation der Rechenergebnisse erreicht etwa bei  $M=800$  den Wert von einem Drittel.

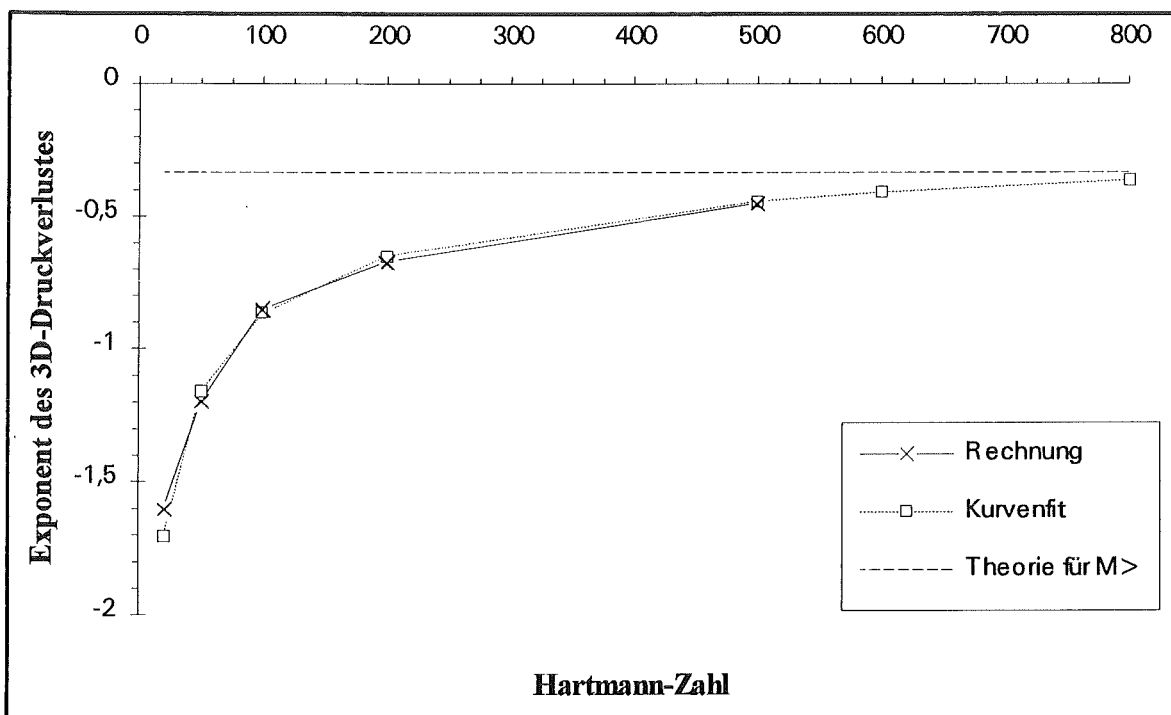


Abb. 6.22: Exponent des 3d-Druckverlustes als Funktion von  $N$ , Fall I und II



## 7 Strömungen in abgewinkelten Kanälen

Neben den Strömungen in geraden Kanälen sind auch die Vorgänge in Umlenkungen von besonderem Interesse. Dazu wird als Beispiel der in Abbildung 7.1 skizzierte Krümmer betrachtet. Um wieder die größten dreidimensionalen Effekte beobachten zu können, wird voll isolierendes Strukturmaterial vorausgesetzt. Das konstante Magnetfeld soll unter dem Winkel  $\alpha$  gegenüber der Horizontalen anliegen. Wie in Kapitel 4.7 bereits ausführlich erläutert, wird der abgewinkelte Kanal in zwei Rohrkombinationen, bestehend aus den Teilstücken 1 und 2, beziehungsweise 3 und 4, zerlegt. Die Teilstücke 2 und 3 sind physikalisch identisch und stellen bei der getrennten Berechnung der beiden Rohrkombinationen das Gebiet der Überlappung dar. In der Tabelle 7.1 sind die genauen Kanalabmessungen und die für die Berechnung ausgewählten Kombinationen von  $\alpha$ ,  $M$  und  $N$  zusammengefaßt.

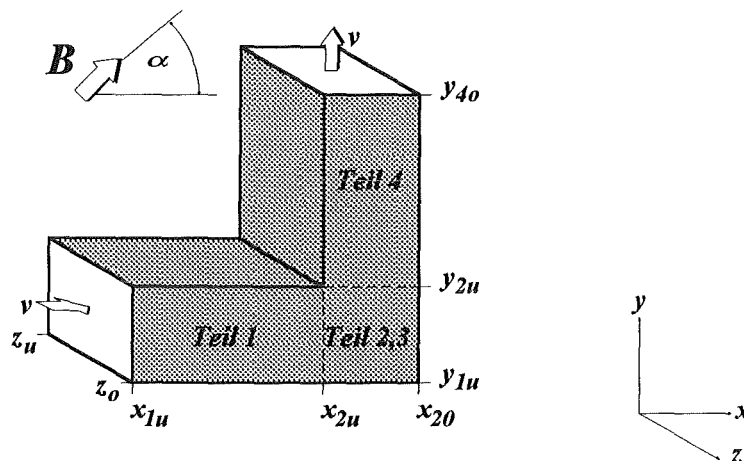


Abb. 7.1: Abgewinkelter Kanal

Tab. 7.1: Matrix der Beispiele für den abgewinkelten Kanal

$\varphi$	$x_{1u}$	$x_{2u}$	$x_{2o}$	$y_{1u}$	$y_{2u}$	$y_{2o}$	$z_u$	$z_o$	$B$	$\alpha$	$M$	$N$
0	0	4	6	-1	1	5	-1	1	$By=1$	45	10	100
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	20	100
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	50	100
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	250
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	500
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	5000
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	15	"	100
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	30	"	100
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	60	"	100
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	75	"	100
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	45	100	100
0	0	4	6	-1	1	5	-1	1	$Bz=1$	-	50	100

Als erstes sollen die Geschwindigkeitsprofile an signifikanten Querschnitten des Kanals für eine relativ niedrige Hartmann-Zahl von  $M=20$  und einem Interaktionsparameter von  $N=100$  betrachtet werden. Das Magnetfeld liege unter einem Winkel von  $\alpha=45^\circ$  an. Für diesen Fall lassen sich bereits alle wesentlichen Phänomene bei der Strömung durch den abgewinkelten Kanal erkennen.

Aufgrund der Symmetrie muß sich am Ein- und Austritt des Kanals (bei  $x=0,y,z$ ; bzw.  $x,y=5,z$ ), also in hinreichend großer Entfernung vom Einflußbereich der Umlenkung, dasselbe Geschwindigkeitsprofil einstellen. Dies kann in Abbildung 7.2 (s. Seite 96) anhand der Profile in der unteren Zeile links und in der rechten Spalte oben leicht belegt werden. Dort hat sich nämlich jeweils die eingelaufene, zweidimensionale Strömung über dem  $y,z$ - bzw. dem  $x,z$ -Querschnitt entwickelt. Dabei ist zu beachten, daß die Profile in der Zeile unten Geschwindigkeiten in  $x$ -Richtung, die in der Spalte rechts Geschwindigkeiten in  $y$ -Richtung darstellen.

Zwischen dem Ein- und Austritt des Krümmers muß eine Umorientierung der Strömung von der  $x$ -Richtung in die  $y$ -Richtung stattfinden. Dabei sucht sich das Fluid den Weg des geringsten Widerstandes. Für die Magnetohydrodynamik bedeutet dies, daß sich die Flüssigkeit in einer möglichst kurze Strecke senkrecht zum Magnetfeld bewegt. Auf diese Weise wird sozusagen eine Induzierung von gegen die Strömung gerichteten Lorentz-Kräften minimiert. Bei der Strömung durch den abgewinkelten Kanal mit dem Magnetfeld unter  $45^\circ$  führt das zu einer Erhöhung der Geschwindigkeit im oberen Bereich des horizontalen und im linken Bereich des vertikalen Rohrstückes. Anschaulich gesprochen weicht das Fluid den hemmenden Lorentz-Kräften aus, indem es auf möglichst kurzem Weg um die Ecke strömt. Je näher das Fluid der Umlenkung kommt, desto stärker wird die Umstrukturierung des Volumenstromes hin zur inneren Ecke (siehe Abbildung 7.2). Dieses Phänomen läßt sich aber auch auf andere Weise erläutern. Im horizontalen Rohrstück werden gemäß der Drei-Finger-Regel elektrische Ströme in positiver  $z$ -Richtung hervorgerufen, im vertikalen Rohrstück dagegen in die entgegengesetzte Richtung. Im Bereich der Ecke kompensieren sich diese Ströme, sodaß dort geringere Lorentz-Kräfte gegen die Strömung wirken. Ein Jet an der Innenseite des Krümmers wird auf diese Weise ermöglicht.

Eine genauere Betrachtung der Profile in Abbildung 7.2 zeigt darüber hinaus, daß in der näheren Umgebung der Umlenkung auch in den Seitenschichten geringe Geschwindigkeitsüberhöhungen auftreten. Dieser Effekt läßt sich ebenfalls auf die elektrischen Strompfade zurückführen. Die im horizontalen und vertikalen Rohrstück in entgegengesetzter Richtung induzierten Ströme schließen sich nämlich auch im Bereich der Seitenschichten in Hauptströmungsrichtung kurz. Wie bereits im Zusammenhang mit dem Ohmschen Gesetz beschrieben (siehe dazu Gleichung 6.1 auf Seite 67), entstehen im isolierten Kanal über die Seitenschichten hinweg erhöhte Potentialdifferenzen. Die Geschwindigkeiten müssen entsprechend ansteigen, um mittels des Termes  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  die elektrische Bilanz erfüllen zu können. Die Superposition dieser Seitenjets mit den Geschwindigkeitsüberhöhungen im Bereich der Ecke bildet übrigens die in Abbildung 7.2 deutlich sichtbaren "Geschwindigkeitspeaks" aus.

Das Profil bei der Koordinate  $x=4,05$  gehört zu einem Querschnitt unmittelbar hinter der Umlenkung. Der Geschwindigkeitsjet und die Peaks haben sich dort bereits leicht zurückgebildet. Die Haftbedingung gilt an der Kante  $y=1$  natürlich nicht mehr, da an dieser Stelle ja kein Wandkontakt mehr vorliegt.

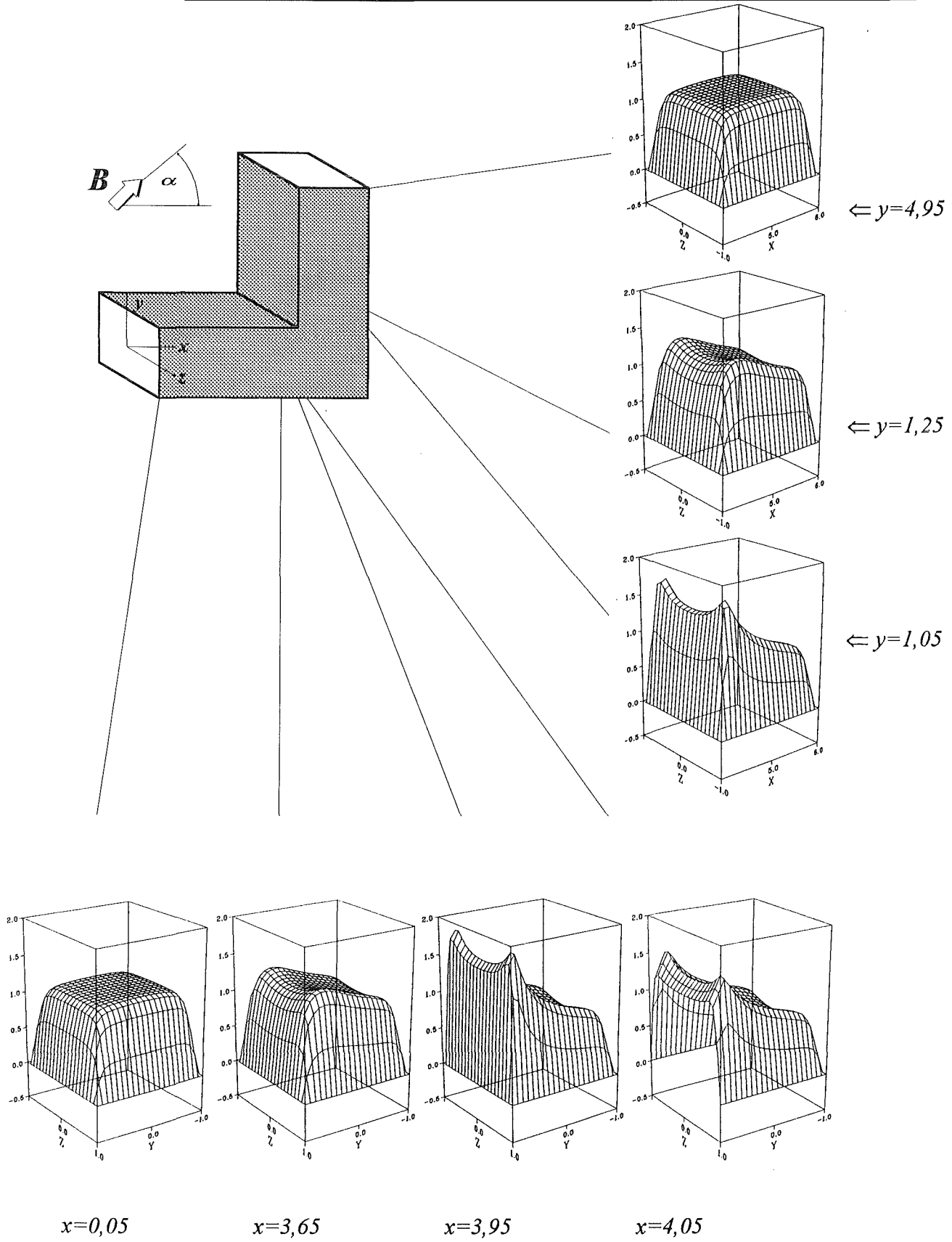


Abb. 7.2: Geschwindigkeit ( $M=20$ ;  $N=100$ ;  $\alpha=45^\circ$ ; abgewinkelt)

Wird nun bei der vorgegebenen Geometrie die Stärke des angelegten Magnetfeldes geändert, so läßt die Theorie im wesentlichen folgende Phänomene erwarten:

- Die Seiten- und Hartmann-Schichten werden mit steigender Hartmann-Zahl dünner (Größenordnung  $M^{-1/2}$  bzw.  $M^{-1}$ ).
- Die Geschwindigkeitsjets und -peaks wachsen mit der Hartmann-Zahl an.
- Das Geschwindigkeitsprofil im Kern der Strömung flacht mit steigender Hartmann-Zahl immer mehr ab.

Es ist jetzt als nächstes zu klären, inwieweit die volle numerische Simulation diese Sachverhalte beschreiben kann. Dazu vergleichen wir in den Abbildungen 7.3 und 7.4, auf den Seiten 98 beziehungsweise 99, Strömungsprofile für jeweils zwei verschiedene Hartmann-Zahlen. Bereits für die beiden niedrigeren Hartmann-Zahlen  $M=10$  und  $M=20$  (Abb. 7.3) können alle von der Theorie prognostizierten Phänomene beobachtet werden. In der oberen Zeile und der linken Spalte sind in den Geschwindigkeitsprofilen für  $M=10$  die dickeren Grenzschichten klar zu erkennen. Bei  $x=3,95$  und  $y=1,05$  weisen die Verteilungen für  $M=20$  die höheren Jets und Peaks auf. Im Kern der Strömung sind sämtliche Profile der höheren Hartmann-Zahl stärker abgeflacht. Das gleiche gilt in noch deutlicherer Ausprägung auch für die beiden Hartmann-Zahlen  $M=50$  und  $M=100$  in der Abbildung 7.4. Für  $M=100$  kann, abgesehen von den Grenzschichten, in guter Näherung von einem Kolbenprofil gesprochen werden. In der Hartmann-Schicht der Umlenkung, bei  $x=3,95$ , steigen die Geschwindigkeitspeaks allerdings auf mehr als das sechsfache der mittleren Geschwindigkeit an. Für  $y=1,05$  läßt sich im übrigen der Einfluß der Trägheit gut erkennen. Die Jets und Peaks erreichen dort nicht mehr das bei  $x=3,95$  vorhandene Maximum.

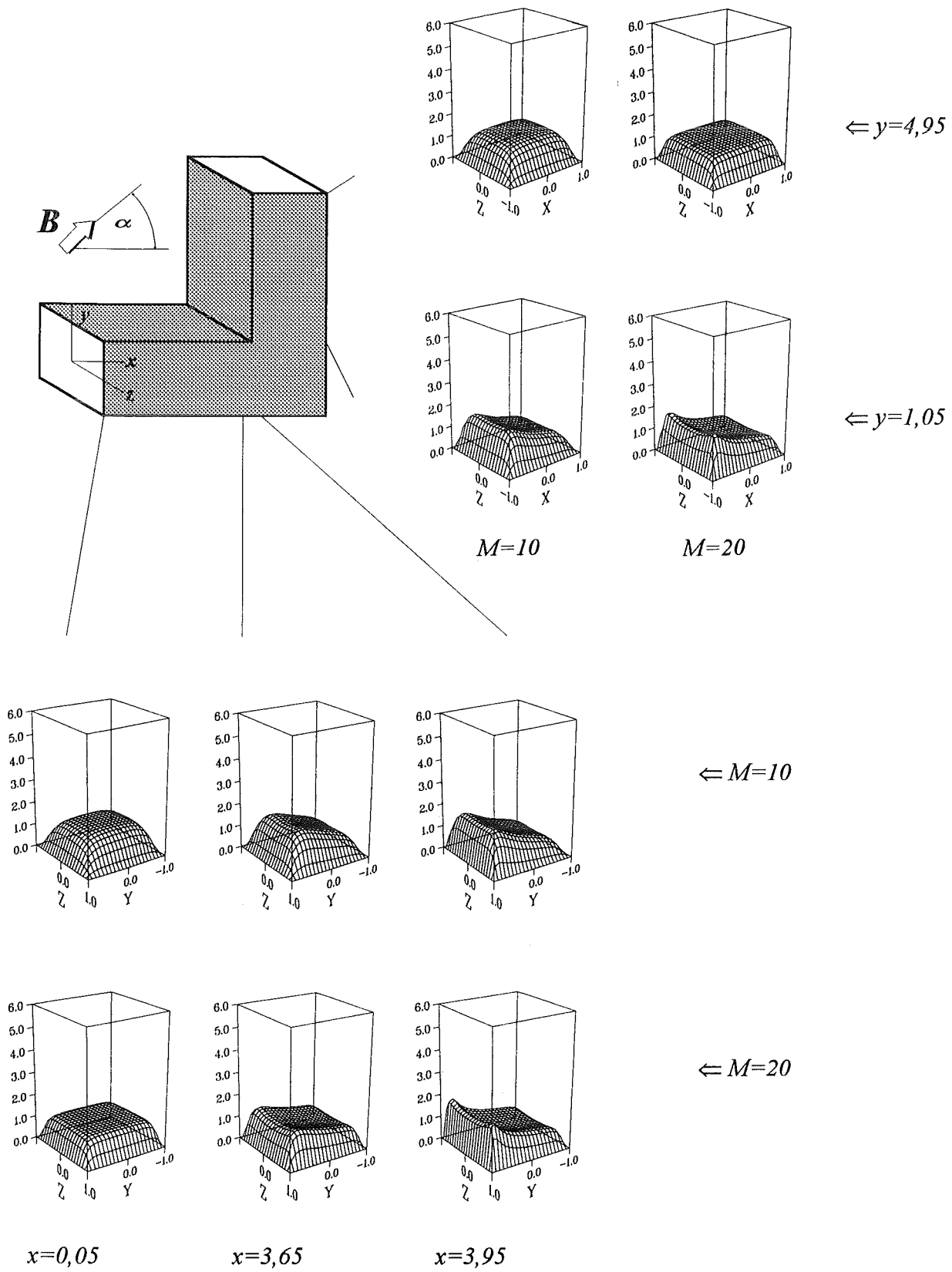


Abb. 7.3: Geschwindigkeit ( $M=10, 20$ ;  $N=100$ ;  $\alpha=45^\circ$ ; abgewinkelt)

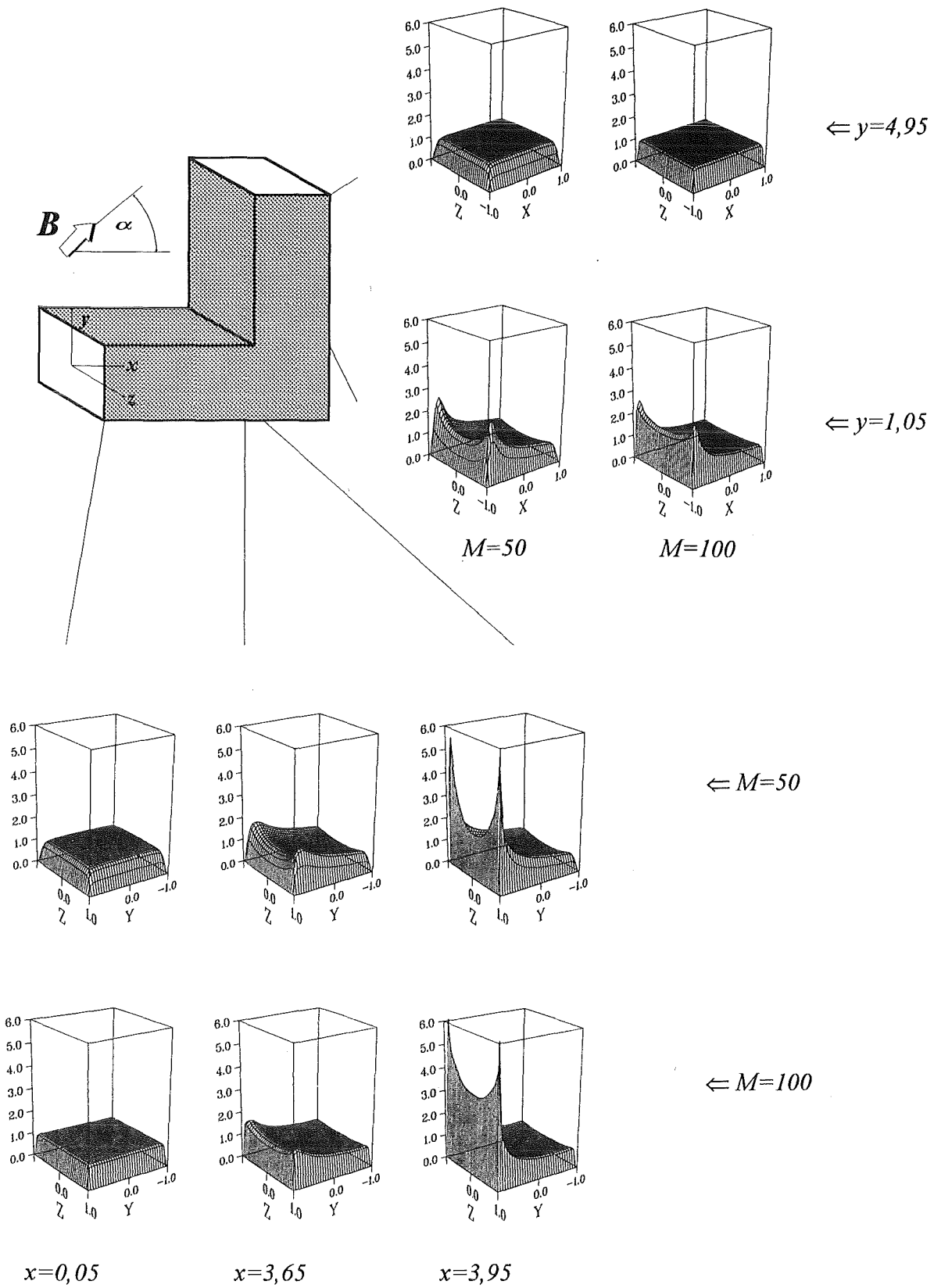


Abb. 7.4: Geschwindigkeit ( $M=50, 100$ ;  $N=100$ ;  $\alpha=45^\circ$ ; abgewinkelt)

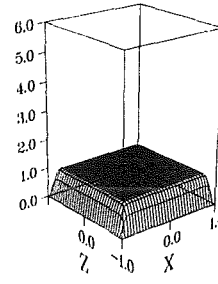
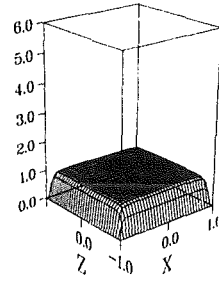
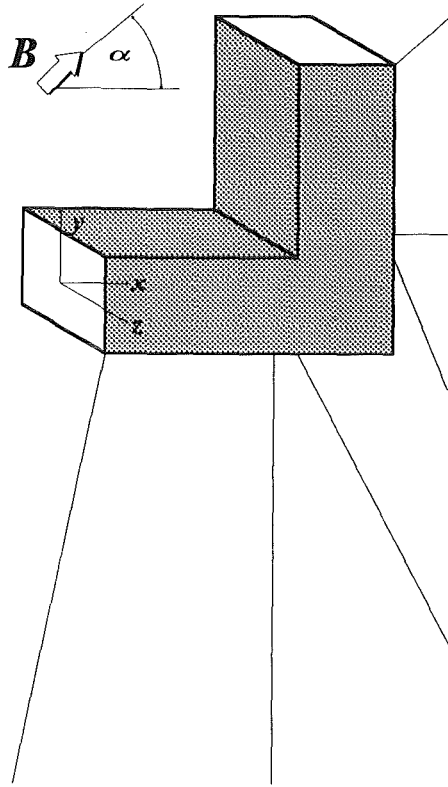
Wenden wir uns als nächstes der Frage zu, welchen Einfluß der Winkel  $\alpha$  des von außen angelegten Magnetfeldes auf die Strömung hat. Da ein Winkel von  $\alpha=0^\circ$  oder  $\alpha=90^\circ$  extrem große Einlaufängen in dem zum Magnetfeld parallelen Rohrstück nach sich ziehen würde (Längen der Größenordnung  $M^{-1}$ ), ist eine Beschränkung auf Winkel von  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  zwar prinzipiell nicht unbedingt notwendig, aber rein rechentechnisch gesehen von erheblichem Vorteil. Die aus Kapazitätsgründen durch die Rechenanlage determinierte Anzahl von zu koppelnden Rohrstücken kann damit, wie bisher, auf vier limitiert bleiben. Auch die erforderlichen Rechenzeiten bleiben in akzeptablen Bereichen von einigen Stunden CPU pro Rechenbeispiel.

In der Abbildung 7.5 auf der Seite 101 sind die beiden Fälle  $\alpha=15^\circ$  und  $\alpha=75^\circ$  zum Vergleich herangezogen. Für  $\alpha=15^\circ$  hat das vertikale Rohrstück den größeren Anteil des Magnetfeldes senkrecht zur Hauptströmungsrichtung. Aufgrund der daraus resultierenden größeren Lorentz-Kräfte wird die Strömung bereits im kürzeren Abstand zur Umlenkung in das abgeflachte Kolbenprofil gezwungen als für den Fall  $\alpha=75^\circ$ . Wie bereits oben angedeutet, steigen also ganz allgemein die Einlaufängen mit dem zur Hauptströmungsrichtung parallelen Anteil von  $B$ . Völlig entsprechend dazu hat sich im horizontalen Rohrstück für  $\alpha=75^\circ$  im Vergleich zu  $\alpha=15^\circ$  an der Stelle  $x=3,65$  das abgeflachtere Profil eingestellt. Bei genauerer Betrachtung der Geschwindigkeitsprofile am Ein- und Ausgang des Krümmers kann darüber hinaus die Auswirkung des Winkels auf die Dicke der Hartmann-Schichten abgelesen werden. Mit dem zum Rohrstück parallelen Anteil von  $B$  muß auch die Dicke dieser Grenzschicht anwachsen.

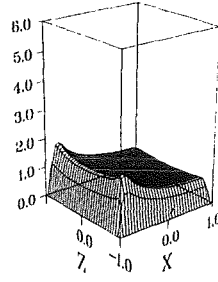
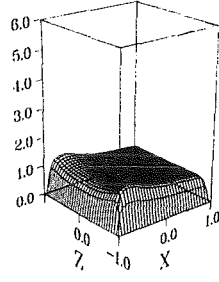
Da die Potentialdifferenzen über den Seitenschichten für die Höhe der Geschwindigkeitspeaks verantwortlich sind, ist für  $\alpha=45^\circ$  der höchste Wert zu erwarten. In diesem Fall sind nämlich elektrische Ströme in Hauptströmungsrichtung und Änderungen des Potentials maximal. Ein Vergleich der Profile aus den Abbildungen 7.4 und 7.5 spiegelt genau diesen Sachverhalt wieder. Für  $\alpha=45^\circ$  liegt der Peak mit einem Höchstwert von circa 5,5 um etwa eins über den Höchstwerten für  $\alpha=15^\circ$  und  $\alpha=75^\circ$ .

Auf den Druckabfall über das gesamte Rohr hat die Wahl des Winkels  $\alpha$  keinen bedeutenden Einfluß. Die Druckverluste für  $\alpha=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  und  $\alpha=75^\circ$  weichen bei der Hartmann-Zahl  $M=50$  lediglich um wenige Prozent voneinander ab.

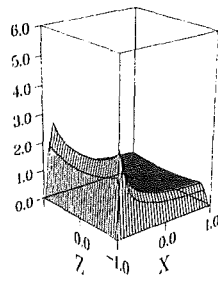
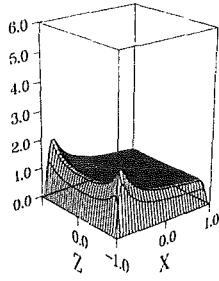




$\Leftarrow y=4,95$



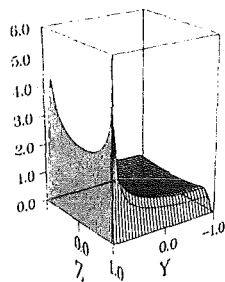
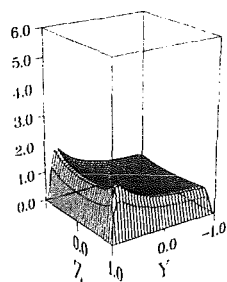
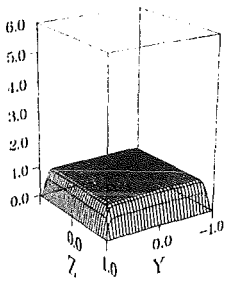
$\Leftarrow y=1,25$



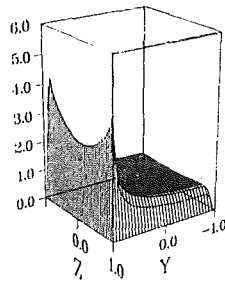
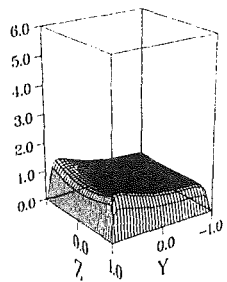
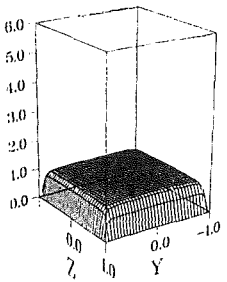
$\Leftarrow y=1,05$

$\alpha=15^\circ$

$\alpha=75^\circ$



$\Leftarrow \alpha=15^\circ$



$\Leftarrow \alpha=75^\circ$

$x=0,05$

$x=3,65$

$x=3,95$

Abb. 7.5: Geschwindigkeit ( $M=50$ ;  $N=100$ ;  $\alpha=15^\circ, 75^\circ$ ; abgewinkelt)

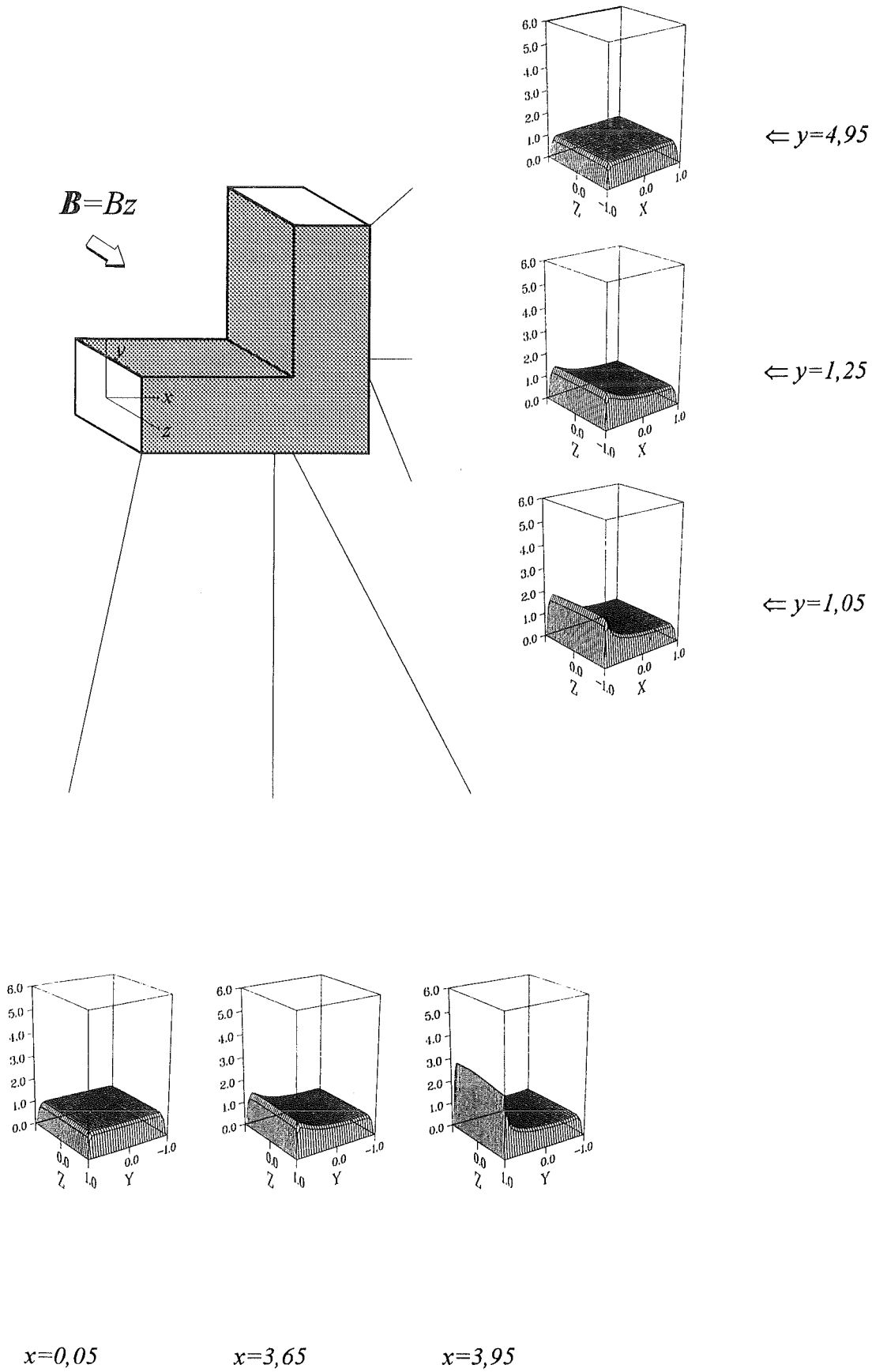


Abb. 7.6: Geschwindigkeit ( $M=50$ ;  $N=100$ ;  $B=Bz$ ; abgewinkelt)

Wie es sich auswirkt, wenn die in Hauptströmungsrichtung orientierten elektrischen Ströme in den Seitenschichten nicht auftreten, kann die Abbildung 7.6 auf der Seite 102 verdeutlichen. Das Magnetfeld ist in diesem Fall in positive  $z$ -Richtung orientiert und steht somit überall senkrecht zum Kanal. Alle im Kernbereich induzierten Ströme haben dieselbe Richtung und wegen der deshalb fehlenden Ströme in den Seitenschichten entfallen dort auch die Geschwindigkeitsüberhöhungen. Abgesehen vom Bereich der Umlenkung bleibt das Geschwindigkeitsprofil somit überall kolbenförmig. Die Geschwindigkeitspeaks an der Umlenkante entfallen damit ebenfalls.

Zum Abschluß der Untersuchung von MHD-Strömungen in abgewinkelten Kanälen soll der letzte noch verbleibende freie Parameter, der Interaktionsparameter  $N$ , variiert werden. Da eine ausführliche Parameterstudie bereits im Kapitel 6 durchgeführt worden ist, und die Auswirkungen der Trägheit auf MHD-Strömungen bis  $M=500$  vom Prinzip her dort herausgearbeitet sind, können an dieser Stelle wenige ergänzende Beispiele genügen.

Stellvertretend für die vier berechneten Beispiele  $N=100$ ,  $250$ ,  $500$  und  $N=1000$  sind in der Abbildung 7.7 (s. Seite 104) die Ergebnisse für den kleinsten und den größten Interaktionsparameter nebeneinandergestellt. Von der Umlenkung her stromaufwärts gesehen, also in horizontalen Rohrstück bei  $x < 4$ , ist praktisch keinerlei Auswirkung der Trägheit in den Geschwindigkeitsprofilen zu erkennen. Dies deckt sich völlig mit den Erkenntnissen vom Geradrohr, wo sich die Trägheit vom Bereich dreidimensionaler Effekte (ausgelöst durch Variation der Wandleitfähigkeit oder Änderung des Magnetfeldes) ebenfalls fast ausschließlich stromabwärts bemerkbar macht. Im vertikalen Rohrstück ist dann allerdings offensichtlich, daß sich die Umstrukturierung des Fluids für kleinere Interaktionsparameter weiter stromab ausdehnt. Bei  $x=2,55$  ist für  $N=1000$  die Strömung bereits voll eingelaufen, für  $N=100$  dagegen noch nicht. Dies ist an der leichten Wölbung des Geschwindigkeitsprofils im Kern zu erkennen. Auch dieses Verhalten stimmt tendenziell mit den Ergebnissen vom Geradrohr überein und belegt wiederum die Aussage, daß es für die Phänomenologie dreidimensionaler MHD-Strömungen unerheblich ist, ob diese durch Änderung des Magnetfeldes, des Kanalquerschnittes oder der Wandleitfähigkeit ausgelöst werden. Lediglich die Intensität der Effekte kann verschieden ausgeprägt sein.

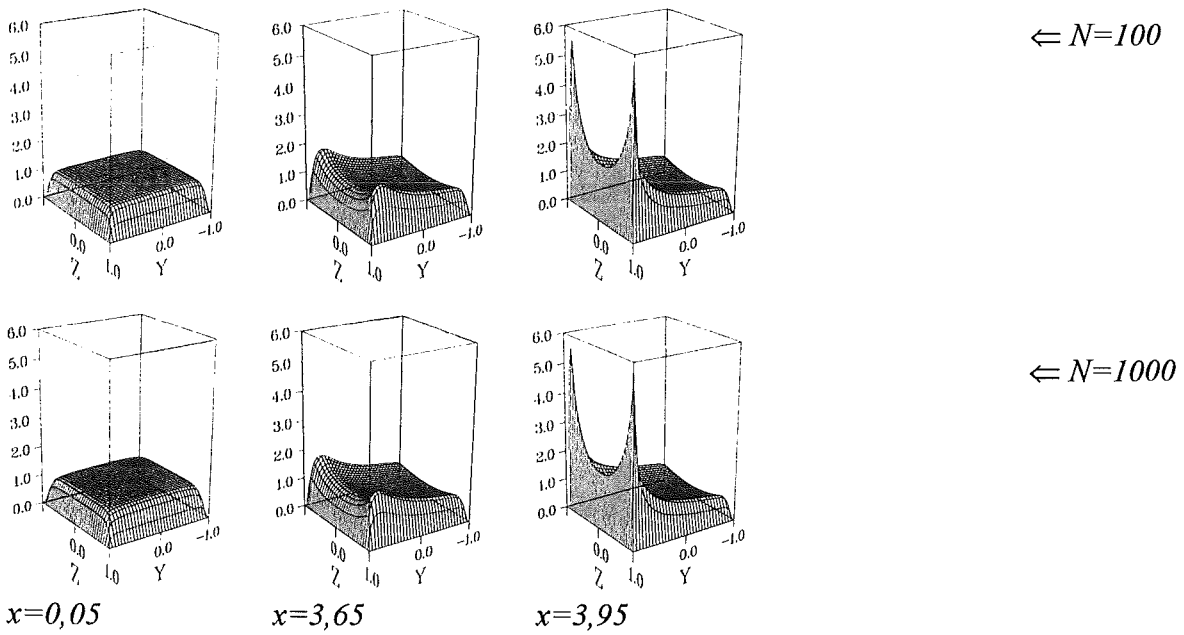
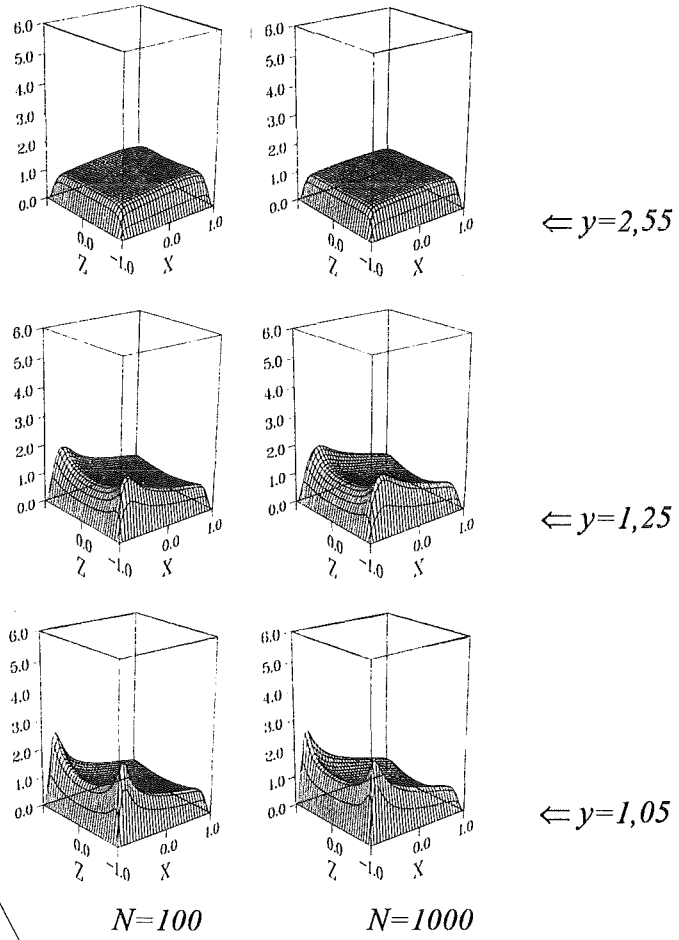
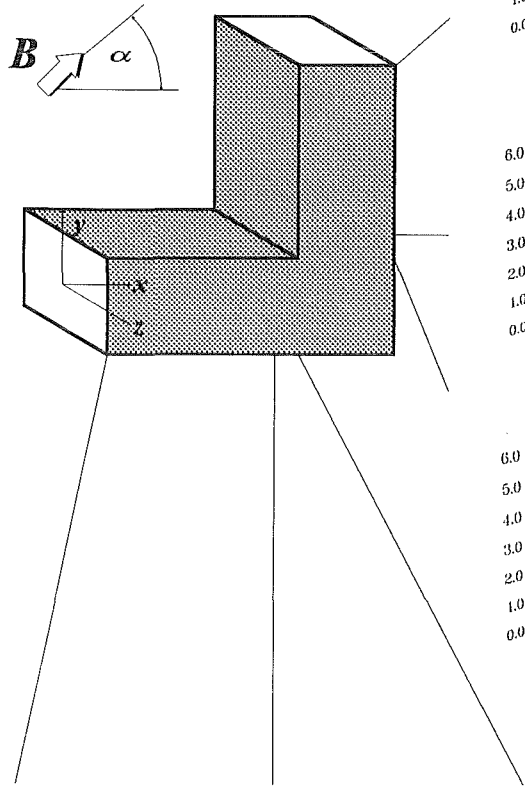


Abb. 7.7: Geschwindigkeit ( $M=50$ ;  $N=100, 1000$ ;  $\alpha=45^\circ$ ; abgewinkelt)

## 8 Schlußbemerkungen

Basierend auf der Validierung des Rechenprogrammes zur vollen numerischen Simulation dreidimensionaler MHD-Strömungen (siehe Kapitel 5), kann in den Kapiteln 6 und 7 dessen Leistungsfähigkeit anhand ausgewählter Beispiele demonstriert werden. Es zeigt sich dabei, daß die Anwendungen bei der Bandbreite möglicher Parameter prinzipiell alleine durch Speicherplatzvorgaben des Computers limitiert werden. Für den Vektorrechner VP400 liegt die Obergrenze der berechenbaren Hartmann-Zahlen im Fall gerader Rohre in der Größenordnung von etwa 500.

Die aus Experimenten, theoretischen Überlegungen oder Näherungslösungen bekannten Phänomene, wie beispielsweise die Ausbildung bestimmter Grenzschichten, Geschwindigkeitsjets oder die Abflachung von Geschwindigkeitsprofilen, können alle mit der vollen Simulation gefunden werden. Aufgrund der speziell eingeführten Lösungsalgorithmen können erstmals auch Ergebnisse für niedrige Interaktionsparameter, das heißt Ergebnisse für stark trägheitsbehaftete Vorgänge, vorgelegt werden. Es ist damit gelungen, die theoretische Vorhersage zur Abhängigkeit des Druckverlustes vom Interaktionsparameter für große Hartmann-Zahlen zu bestätigen und auf kleine  $M$  zu erweitern. Der zusätzliche Druckverlust ist für große Hartmann-Zahlen, unabhängig davon, auf welche Weise die Beschleunigungen hervorgerufen werden, proportional zu  $N^{-1/3}$ . Das analytische Resultat des Überganges von trägheitsbehafteter zu trägheitsfreier MHD bei  $N > M^{3/2}$  kann numerisch ebenfalls gezeigt werden.

Dreidimensionale Effekte innerhalb der Strömung können durch Änderung des Kanalquerschnittes, der Wandleitfähigkeit oder des Magnetfeldes hervorgerufen werden. Die Umstrukturierung vom Bereich dreidimensionaler Einflüsse in voll eingelaufene, zweidimensionale Kanalströmung kann sich je nach Aufgabenstellung über sehr große Strecken ausdehnen. Besonders groß sind die Einlaufängen bei Strömungen in den magnetfeldfreien Raum im isolierten Kanal. Auch hier bestimmt die Kapazität des Computers letztlich die Wahl der Rechenbeispiele.

Mit Hilfe einer Zerlegung des Rechengebietes in einzelne Würfel können Berechnungen für Strömungen in Umlenkungen durchgeführt, und insbesondere die Phänomene des Strömungsverhaltens um Ecken untersucht werden. Die Programmierarbeit muß hier mit

äußerster Sorgfalt durchgeführt werden, da sich an den sensiblen Umlenkungen ansonsten keine Konvergenz mehr einstellt. Außerdem muß unter Umständen durch den Vergleich verschiedener numerischer Behandlungen der Gebietszerlegung der jeweils beste Rechenweg in Abhängigkeit von der vorgegebenen Gesamtgeometrie herausgefunden werden.

Mit größeren als den derzeit zur Verfügung stehenden Computern wäre eine noch weiterführende Bestätigung der gewonnenen Erkenntnisse für den Bereich  $M > 500$  möglich. Prinzipiell wäre sogar die Untersuchung des laminar-turbulenten Umschlages denkbar, da dieses in der vollen Simulation bei hinreichend feiner Diskretisierung enthalten ist.

Als nächste Schritte der Programmentwicklung ist eine Erweiterung von isolierenden oder perfekt leitenden Wänden auf Kanäle endlicher Leitfähigkeit vorstellbar. Dazu müßte statt einfacher Vorgaben für das Potential an den Rändern zu jedem Rechenzeitschritt eine zusätzliche partielle Differentialgleichung gelöst werden. Ein deutlicher Anstieg der Rechenzeit muß damit allerdings in Kauf genommen werden. Daneben könnten auch Überlegungen zur Behandlung anderer Rohrgeometrien angestellt werden. Hierbei kämen, nach weiterem Zerlegen und Zusammenfügen einzelner Rechengebiete, zuerst eine U- oder eine Z-Umlenkung in Betracht.

## 9 Anhang

### 9.1 Randbedingung des fractional-step-Verfahrens

Als Ergänzung soll hier die Randbedingung für den Druck bei Verwendung des fractional-step-Verfahrens ausführlich erläutert werden. Dazu werden die in Kapitel 4.3 bereits hergeleitete Poisson-Gleichung für den Druck zum neuen Zeitpunkt  $n+1$

$$\nabla^2 p|^{n+1} = \frac{1}{N \Delta t} \nabla \bullet \mathbf{v}_{temp}, \quad (9.1)$$

sowie deren Randbedingung an den Wänden,

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{Wand}^{n+1} = \frac{1}{N \Delta t} (\mathbf{v}_{temp} - \mathbf{v}|^{n+1}) \bullet \mathbf{n} \Big|_{Wand}, \quad (9.2)$$

herangezogen. Für die Herleitung genügt die übersichtlichere Betrachtung eines zweidimensionalen versetzten Maschengitters in unmittelbarer Wandnähe, wie sie in der Abbildung 9.1 dargestellt ist.

Eine Diskretisierung der Poisson-Gleichungen an der Stützstelle  $i=1$  und beliebigem  $j$  bringt die zentralen Differenzen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^2} (p|_{2,j} - 2p|_{1,j} + p|_{0,j}) + \frac{1}{\Delta y^2} (p|_{1,j+1} - p|_{1,j} - p|_{1,j} + p|_{1,j-1}) \\ & = \frac{1}{N \Delta t} \left[ \frac{1}{\Delta x} (v_{x,temp}|_{3/2,j} - v_{x,temp}|_{1/2,j}) + \frac{1}{\Delta y} (v_{y,temp}|_{1,j+1/2} - v_{y,temp}|_{1,j-1/2}) \right] \end{aligned} \quad (9.3)$$

und die Randbedingung, ausgewertet an dem Gitterpunkt  $i=1/2$  direkt in der Wand, liefert

$$\frac{1}{\Delta x} (p|_{1,j} - p|_{0,j}) = \frac{1}{N \Delta t} (v_{x,temp}|_{1/2,j} - v_{x}|_{1/2,j}). \quad (9.4)$$

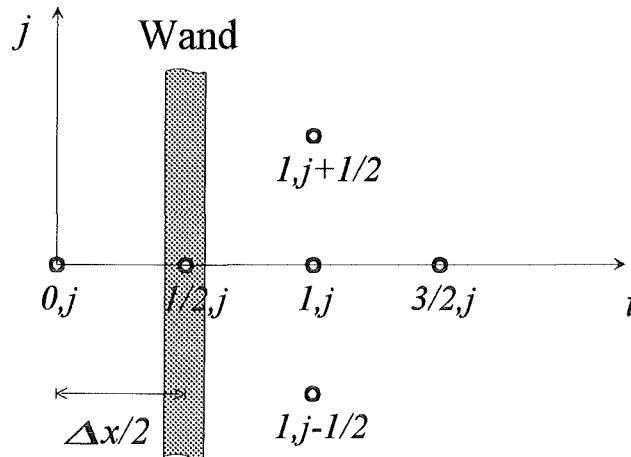


Abb. 9.1: Gitterpunkt-Indizierung am Rand

Einsetzen der Druckdifferenz aus (9.4) in (9.3) ergibt bei Auslassung der an dieser Stelle nicht weiter interessierenden Terme den Ausdruck

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^2} \left( p|_{2,j} - p|_{1,j} + \frac{\Delta x}{N \Delta t} (vx|_{1/2,j} - vx_{temp}|_{1/2,j}) \right) + \frac{1}{\Delta y^2} (\dots) \\ & = \frac{1}{N \Delta t} \left[ \frac{1}{\Delta x} (vx_{temp}|_{3/2,j} - vx_{temp}|_{1/2,j}) + \frac{1}{\Delta y} (\dots) \right]. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Offensichtlich hebt sich  $vx_{temp}|_{1/2,j}$  an der Wand aus der Gleichung heraus. Auf diese Weise ist garantiert, daß der Druck  $p$  in unmittelbarer Wandnähe, und somit auch im gesamten Rechengebiet, ohne die Kenntnis der künstlichen Größe an der Wand bestimmt wird. Da die Randwerte von  $vx_{temp}$  nicht in das Ergebnis eingehen, dürfen sie beliebig vorgegeben werden. Insbesondere dürfen sie dann auch mit der physikalischen Geschwindigkeit am Rand gleichgesetzt werden. Für diesen günstig gewählten Spezialfall folgt aus Gleichung (9.2) sofort die homogene Neumann-Randbedingung des Druckes (siehe auch Kapitel 4.3).



## 9.2 Konvektive Terme in Erhaltungform

In Kapitel 4.1 wird das versetzte Maschengitter als adäquate Form der Diskretisierung fluiddynamischer Aufgabenstellungen eingeführt, weil dadurch die Masse automatisch exakt erhalten wird. Ergänzend dazu kann die Festlegung konvektiver Terme in der sogenannten Erhaltungform gesehen werden. Betrachten wir dazu die an dieser Stelle relevanten konvektiven Bestandteile der Impulserhaltung (2.7) der Übersichtlichkeit wegen zunächst nur in  $x$ -Richtung,

$$vx \frac{\partial(vx)}{\partial x} + vy \frac{\partial(vx)}{\partial y} + vz \frac{\partial(vx)}{\partial z}, \quad (9.6)$$

so ist dieser Ausdruck im allgemeinen nicht mit der Darstellung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(vx vx)}{\partial x} + \frac{\partial(vx vy)}{\partial y} + \frac{\partial(vx vz)}{\partial z} \\ &= vx \frac{\partial(vx)}{\partial x} + vy \frac{\partial(vx)}{\partial y} + vz \frac{\partial(vx)}{\partial z} \\ &+ vx \left( \frac{\partial(vx)}{\partial x} + \frac{\partial(vy)}{\partial y} + \frac{\partial(vz)}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (9.7)$$

identisch. Für inkompressible Strömungen werden beide Ausdrücke jedoch wegen der Massenerhaltung,

$$\frac{\partial(vx)}{\partial x} + \frac{\partial(vy)}{\partial y} + \frac{\partial(vz)}{\partial z} = 0, \quad (9.8)$$

wieder gleichwertig. Trotz dieser Tatsache unterscheiden sich die Überführungen in eine diskrete Form erheblich. Aus (9.6) kommt nämlich

$$\begin{aligned}
vx \frac{\partial(vx)}{\partial x} + vy \frac{\partial(vx)}{\partial y} + vz \frac{\partial(vx)}{\partial z} &\cong vx \Big|_{i+1/2,j,k} \frac{vx \Big|_{i+3/2,j,k} - vx \Big|_{i-1/2,j,k}}{2 \Delta x} \\
&+ \overline{vy} \Big|_{i+1/2,j,k} \frac{vx \Big|_{i+1/2,j+1,k} - vx \Big|_{i+1/2,j-1,k}}{2 \Delta y} \\
&+ \overline{vz} \Big|_{i+1/2,j,k} \frac{vx \Big|_{i+1/2,j,k+1} - vx \Big|_{i+1/2,j,k-1}}{2 \Delta z}.
\end{aligned} \tag{9.9}$$

Aus Gleichung (9.7) folgt hingegen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(vx vx)}{\partial x} + \frac{\partial(vy vx)}{\partial y} + \frac{\partial(vz vx)}{\partial z} &\cong \frac{vx \Big|_{i+3/2,j,k} vx \Big|_{i+3/2,j,k} - vx \Big|_{i-1/2,j,k} vx \Big|_{i-1/2,j,k}}{2 \Delta x} \\
&+ \frac{\overline{vy} \Big|_{i+1/2,j+1,k} vx \Big|_{i+1/2,j+1,k} - \overline{vy} \Big|_{i+1/2,j-1,k} vx \Big|_{i+1/2,j-1,k}}{2 \Delta y} \\
&+ \frac{\overline{vz} \Big|_{i+1/2,j,k+1} vx \Big|_{i+1/2,j,k+1} - \overline{vz} \Big|_{i+1/2,j,k-1} vx \Big|_{i+1/2,j,k-1}}{2 \Delta z}.
\end{aligned} \tag{9.10}$$

Die Terme mit Querstrich stellen dabei Mittelungen aus vier, jeweils umgebenden Werten dar. Der Ausdruck (9.6) trägt in der Literatur die Bezeichnung *konvektive Form*, während bei Darstellung (9.7) im allgemeinen von *Erhaltungsfom* gesprochen wird. Verschiedene Autoren untersuchen die Auswirkungen dieser beiden Formulierungen auf das erzielte Ergebnis (z.B. Anderson et al., 1983, S. 51ff). Bei der konvektiven Form kann es zum einen in Strömungen mit Verdichtungsstößen zu Schwierigkeiten bezüglich der Konvergenz kommen. Zum anderen können bei numerischen Verfahren, die aufgrund geeigneter Gitterauswahl eigentlich exakte Massenerhaltung erwarten lassen, dennoch Quellen oder Senken auftreten. Um dieser Gefahr von vorneherein vorzubeugen, ist für das vorliegende Programm die etwas aufwendigere diskrete Formulierung (9.10) in Erhaltungsfom eingesetzt.

### 9.3 Restriktion für die Maschen-Reynolds-Zahl

Die in Kapitel 4.2 kurz hergeleitete Restriktion für die Maschen-Reynolds-Zahl (MRZ) soll hier anhand der bereits eingeführten, eindimensionalen Konvektions-Diffusions-Gleichung (KDG),

$$vx|_i \frac{T|_{i+1} - T|_{i-1}}{2\Delta x} = \nu \frac{T|_{i+1} - 2T|_i + T|_{i-1}}{\Delta x^2}, \quad (9.11)$$

mathematisch im einzelnen entwickelt werden. Bei Verwendung der Definition für die MRZ,

$$Re_{\Delta x} = \frac{vx \Delta x}{\nu}, \quad (9.12)$$

hat die KDG die Form

$$\frac{1}{2} Re_{\Delta x} (T|_{i+1} - T|_{i-1}) = T|_{i+1} - 2T|_i + T|_{i-1}. \quad (9.13)$$

Eine Auflösung nach der zentralen Stützstelle  $T_i$  kann in den beiden Darstellungen

$$T|_i = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} Re_{\Delta x} \right) (T|_{i+1} - T|_{i-1}) + T|_{i-1} \quad (9.14)$$

und

$$T|_i = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} Re_{\Delta x} \right) (-T|_{i+1} + T|_{i-1}) + T|_{i+1} \quad (9.15)$$

erfolgen. Zusammen mit den in Kapitel 4.2 begründeten Relationen für die zentrale Stelle  $T_i$

$$T|_{i-1} \stackrel{!}{\leq} T|_i \stackrel{!}{\leq} T|_{i+1}, \quad (9.16)$$

oder

$$T|_{i-1} \stackrel{!}{\geq} T|_i \stackrel{!}{\geq} T|_{i+1}, \quad (9.17)$$

folgen jetzt die beiden Ungleichungen

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} Re_{\Delta x}\right) (T|_{i+1} - T|_{i-1}) + T|_{i-1} \geq T|_{i-1}, \quad (9.18)$$

beziehungsweise

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} Re_{\Delta x}\right) (-T|_{i+1} + T|_{i-1}) + T|_{i+1} \geq T|_{i+1}. \quad (9.19)$$

Daraus ergeben sich schließlich die beiden Aussagen

$$Re_{\Delta x} \leq 2 \quad (9.20)$$

sowie

$$Re_{\Delta x} \geq -2 \quad (9.21)$$

für die MRZ.

## 10 Physikalische Größen und Normierung

Alle physikalischen Größen werden kursiv, Vektoren zusätzlich fett dargestellt. Die einzelnen Vektorkomponenten tragen als zweiten Buchstaben die kartesische Koordinatenrichtung, also beispielsweise  $v_x$  für die Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung. Bei den diskretisierten Gleichungen treten außerdem tiefgestellte Indizes zur Beschreibung des Ortes und hochgestellte Indizes für die Zeit auf. Bei gleicher Bezeichnung normierter und nicht normierter Größen dient der hochgestellte Stern "\*" als Kennzeichnung der dimensionsbehafteten Notierung. Die angeführten, für Fusionsreaktoren typischen Werte sind den Studien von Holroyd und Mitchell (1984), beziehungsweise Smith (1984) entnommen.

## 10.1 Dimensionsbehaftete Größen

Bezeichnung	Einheit	typ. Wert	Größe
$x^*, y^*, z^*$	[m]		kartesische Koordinaten
$\Delta x^*, \Delta y^*, \Delta z^*$	[m]	$10^{-3}-10^{-2}$	Gitterweite in $x$ -, $y$ -, $z$ -Richtung
$a^*$	[m]	0,3	charakt. Länge, hier halbe Kanalhöhe
$\alpha$	[°]	0-90	Winkel zw. $x$ -Achse und Magnetfeld
$t^*$	[s]		Zeit
$v_o$	[m s <sup>-1</sup> ]	0,5	mittlere Geschwindigkeit
$c$	[m s <sup>-1</sup> ]	$3 \cdot 10^8$	Lichtgeschwindigkeit
$p^*$	[N m <sup>-2</sup> ]		Druck
$\rho$	[kg m <sup>-3</sup> ]	$10^3$	Dichte
$B_o$	[V s m <sup>-2</sup> =10 <sup>-4</sup> tesla]	3-5 tesla	maximales äußeres Magnetfeld
$\sigma$	[Ω <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup> ]	$10^6$	elektr. Leitfähigkeit des Fluids
$\mu$	[1]	1	magnetische Permeabilität
$\eta$	[N s m <sup>-2</sup> ]	$10^{-4}-10^{-3}$	Viskosität
$\kappa$	[N s <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]		Temperaturleitfähigkeit
$\mathbf{j}^*=(j_x^*, j_y^*, j_z^*)$	[A m <sup>-2</sup> ]		elektrische Stromdichte
$\Phi$	[V]		elektrisches Potential

## 10.2 Normierte Größen

Bezeichnung	Normierung	Größe
$x, y, z$	$a$	kartesische Koordinaten
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	$a$	Gitterpunkt Abstand in $x$ -, $y$ -, $z$ -Richtung
$d$	$a$	Dicke der Kanalwand
$b$	$a$	Breite des Kanals
$t$	$a/v_0$	Zeit
$v=(v_x, v_y, v_z)$	$v_0$	Geschwindigkeit
$p$	$\rho v_0^2 N$	Druck
$\mathbf{B}=(B_x, B_y, B_z)$	$B_0$	Magnetfeld
$\mathbf{j}=(j_x, j_y, j_z)$	$\sigma v_0 B_0$	elektrische Stromdichte
$\Phi$	$\alpha v_0 B_0$	elektrisches Potential

### 10.3 Kennzahlen

Bezeichnung	Normierung	Größe
$M$	$M = a B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$	Hartmann-Zahl
$N$	$N = \frac{\sigma a B_0^2}{\rho v_0}$	Interaktionsparameter
$\varphi$	$\varphi = \frac{\sigma_{Wand} d}{\sigma_{Fluid} a}$	Wandleitparameter
$Pe$	$Pe = \frac{v_0 a}{\kappa}$	Peclet-Zahl
$Re$	$Re = \frac{M^2}{N}$	Reynolds-Zahl
$Re_m$	$Re_m = \mu \sigma v_0 a$	magnetische Reynolds-Zahl
$Pe_{\Delta x}, Pe_{\Delta y}, Pe_{\Delta z}$	$Pe_{\Delta x} = Pe v_x \Delta x$ $Pe_{\Delta y} = Pe v_y \Delta y$ $Pe_{\Delta z} = Pe v_z \Delta z$	Maschen-Peclet-Zahl in x-, y-, z-Richtung
$Re_{\Delta x}, Re_{\Delta y}, Re_{\Delta z}$	$Re_{\Delta x} = Re v_x \Delta x$ $Re_{\Delta y} = Re v_y \Delta y$ $Re_{\Delta z} = Re v_z \Delta z$	Maschen-Reynolds-Zahl in x-, y-, z-Richtung



# 11 Abbildungsverzeichnis

Prinzipskizze eines Fusionsreaktors (Toschi et al. 1988).....	8
Randbedingungen an der Kanal-Wand.....	15
Randbedingungen an den Kanalenden.....	17
Ideal leitender Kanal bei konstantem Magnetfeld (schematisch).....	20
Kanal endlicher Leitfähigkeit bei konstantem Magnetfeld (schematisch).....	23
Isolierender Kanal bei konstantem Magnetfeld (schematisch).....	24
Axiale Ströme bei variablem Magnetfeld (schematisch).....	26
Strömung mit Scherschicht bei Querschnittsänderung (schematisch).....	28
Staggered grid, dreidimensional .....	33
Staggered grid, zweidimensional .....	35
Zentrale Differenz an der Stelle $i$ .....	36
Gewichtungsfaktor $F$ des LECUSSO-Upwind-Verfahrens.....	39
Gebietszerlegung für gerade Geometrie.....	48
Gebietszerlegung für abgewinkelte Geometrie.....	51
Isolierter Plattenkanal.....	57
Isolierter Rechteckkanal.....	58
Druckgradient des isolierten Platten- bzw. Rechteckkanals.....	59
Kanal mit leitenden Hartmann- und isolierenden Seitenwänden.....	60
Relative Geschwindigkeit des Rechteckkanals, Huntsche Lösung .....	61
Konsistenz des Rechenprogrammes.....	62
Kanal mit veränderlicher Wandleitfähigkeit.....	65
Potentiale ( $M=50$ ; $N=2500$ ; leitende isolierte Hartmann-Wände).....	66
Druck ( $M=50$ ; $N=2500$ ; leitende isolierte Hartmann-Wände).....	66
Geschwindigkeit ( $M=50$ ; $N=2500$ ; leitende isolierte Hartmann-Wände).....	68
Referenzpunkte im Kanalquerschnitt (leitende isolierte Hartmann-Wände).....	69
Druck und Geschwindigkeit entlang des Kanales in der Seite und der Mitte.....	70
3d-Druckdifferenz ( $M=50$ , $N=25-5000$ , leitende isolierte Hartmannn-Wände.....	72
Isolierter Kanal mit variablem Magnetfeld.....	73
Verlauf des Magnetfeldes, Fall I.....	74
Geschwindigkeit ( $M=100$ ; $N=2500$ ; variables Magnetfeld, Fall I).....	77
3d-Druckdifferenz ( $M=100$ ; $N=25-5000$ ; variables Magnetfeld, Fall I).....	79

Geschwindigkeit ( $M=20-200$ ; $N=1000$ ; variables Magnetfeld, Fall I).....	80
Exponent des 3d-Druckverlustes, Fall I.....	81
Gesamt-Druckverlust in Abhängigkeit von der Hartmann-Zahl, Fall I.....	82
Verlauf des Magnetfeldes, Fall II.....	83
Potential ( $M=200$ ; $N=5000$ ; variables Magnetfeld, Fall II).....	86
Druck ( $M=200$ ; $N=5000$ ; variables Magnetfeld, Fall II).....	86
Geschwindigkeit ( $M=200$ ; $N=5000$ ; variables Magnetfeld, Fall II).....	87
3d-Druckdifferenz ( $M=50$ ; $N=25-5000$ ; variables Magnetfeld, Fall II).....	89
Geschwindigkeit ( $M=20-200$ ; $N=1000$ ; variables Magnetfeld, Fall II).....	90
Exponent des 3d-Druckverlustes, Fall II.....	91
Exponent des 3d-Druckverlustes als Funktion von $N$ , Fall I und II.....	92
Abgewinkelter Kanal.....	93
Geschwindigkeit ( $M=20$ ; $N=100$ ; $\alpha=45^\circ$ abgewinkelt).....	96
Geschwindigkeit ( $M=10, 20$ ; $N=100$ ; $\alpha=45^\circ$ abgewinkelt).....	98
Geschwindigkeit ( $M=50, 100$ ; $N=100$ ; $\alpha=45^\circ$ abgewinkelt).....	99
Geschwindigkeit ( $M=50$ ; $N=100$ ; $\alpha=15^\circ, 75^\circ$ ; abgewinkelt).....	101
Geschwindigkeit ( $M=50$ ; $N=100$ ; $B=B_z$ ; abgewinkelt).....	102
Geschwindigkeit ( $M=50$ ; $N=100, 1000$ ; $\alpha=45^\circ$ ; abgewinkelt).....	104
Gitterpunkt-Indizierung am Rand.....	108

## 12 Literatur

**Aitov, T. N.; Kalyntik, A. I.; Tannanaev, A. V. (1978)**

Numerical investigation of three-dimensional MHD-flow in a curved channel of rectangular cross section

Magnetohydrodynamics, 4, pp. 458-462, 1978

**Aitov, T. N.; Kalyntik, A. I.; Tannanaev, A. V. (1983)**

Numerical analysis of three-dimensional MHD-flow in channels with abrupt change of cross section

Magnetohydrodynamics, 19 (2), pp. 223-229, 1983

**Alty, C. J. N. (1971)**

Magnetohydrodynamic duct flow in a uniform transverse magnetic field of arbitrary orientation

J. Fluid Mech., vol. 48, part 3, pp. 429-461, 1971

**Anderson, D. A.; Tanhill, J. C.; Plether, R. H. (1984)**

Computational fluid mechanics and heat transfer

Hemisphere Publishing Corporation, New York, pp. 343-346, 1984

**Barleon, L.; Lenhart, L.; Mack, H. J.; Sterl, A.; Tomauske, K. (1989)**

Investigations on liquid metal MHD in straight ducts at high Hartmann numbers and interaction parameters

Proceedings of the NURETH-4 meeting, Karlsruhe, october 10-13, pp. 857-862, 1989

**Book, D. L. (1981)**

Finite Difference Techniques for Vectorized Fluid Dynamic Calculations

Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1981

**Branover H. (1978)**

Magnetohydrodynamic flow in ducts  
Israel University Press, Jerusalem, 1978

**Brouillette, E.C.; Lykoudis, P. S. (1967)**

Magneto-fluid-mechanic channel flow  
I. Experiment  
Physics of Fluids, Vol. 10(5), pp. 995-1001, 1967

**Bühler, L. (1993)**

Magnetohydrodynamische Strömungen flüssiger Metalle in allgemeinen dreidimensionalen Geometrien unter der Einwirkung starker, lokal variabler Magnetfelder  
KfK-Bericht Nr. 5095, Kernforschungszentrum Karlsruhe, Februar 1993

**Chandrasekhar, S. (1961)**

Hydrodynamic and hydromagnetic stability  
Oxford University Press, 1961

**Chang, C.; Lundgren, S. (1961)**

Duct flow in magnetohydrodynamics  
ZAMP Vol. XII, pp. 100-114, 1961

**Chiang, D.; Lundgren, S. (1967)**

Magnetohydrodynamic Flow in a Rectangular Duct with Perfectly Conducting Electrodes  
ZAMP Vol. XVIII, pp. 92-106, 1967

**DISSPLA graphics software (1984/85)**

Integrated software cooperation  
San Diego, California, US, 1984/85

**Flassak, Th.; Moussiopoulos, N. (1989)**

A fully vectorized fast direct solver of the Helmholtz equation

Applications of supercomputers in engineering

Proceedings of the first international conference, Southampton, UK, pp. 67-77,  
september 1989

**Fraim, F. W.; Heiser, W. H. (1968)**

The Effect of a Strong Longitudinal Magnetic Field on the Flow of Mercury in a  
Circular Tube

J. Fluid Mech. 68:769, 1968

**Gelfgat, Yu. M; Kit, L. G. (1971)**

Investigation of occurrence of M-shaped velocity profiles at a sudden expansion or  
contraction of a magnetohydrodynamic flow

Magnitnaya Gidrodynamika, Vol. 1, pp. 25-30, 1971

**Gentzsch, W. (1984)**

Vectorization of computer programs with application to computational fluid  
dynamics

Vieweg Braunschweig/Wiesbaden, 1984

**Günther, C. (1988)**

Vergleich verschiedener Differenzenverfahren zur numerischen Lösung der 2-d-  
Konvektions-Diffusionsgleichung anhand eines Beispiels mit bekannter exakter  
Lösung

KfK-Bericht 4439, Kernforschungszentrum Karlsruhe, August 1988

**Harlow, F. H.; Welch, J. E. (1965)**

Numerical calculation of time-dependend incompressible flow of fluid with free  
surface

Physics of Fluids, vol. 8, pp. 2182-2189, 1965

**Hartmann, J. (1937)**

Hg-Dynamics I. Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser XV(6), 1937

**Hartmann, J.; Lazarus, F. (1937)**

Hg-Dynamics II. Experimental investigations of the flow of mercury in a homogeneous magnetic field

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser XV(7), 1937

**Holroyd, R. J., Walker, J. S. (1978)**

A theoretical study of the effects of wall conductivity, non-uniform magnetic fields and variable-area ducts on liquid metal flow at high Hartmann number.

J. Fluid Mechanics 84, pp. 471-495, 1978

**Holroyd, R. J. (1980)**

An experimental study of the effects of wall conductivity, non-uniform magnetic fields and variable area ducts on liquid metal flows at high Hartmann number.

Part 2. Ducts with conducting walls

J. Fluid Mechanics 96, pp. 355-374, 1980

**Holroyd, R. J.; Mitchell, J. T. D. (1984)**

Liquid lithium as a coolant for tokamak fusion reactors

Nuclear Engineering and Design / Fusion, vol. 1, pp. 17-38, 1984

**Hua, T. Q.; Walker, J. S.; Picologlou, B. F.; Reed, C. B. (1988)**

Three-dimensional magnetohydrodynamic flows in rectangular ducts of liquid-metal-cooled blankets

Fusion Technology, Vol. 14, pp. 1389-1398, 1988

**Hunt, J. C. R. (1965)**

Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts

J. Fluid Mech., Vol. 21(4), pp. 577-590, 1965

**Hunt, J. C. R.; Stewartson, K. (1965)**

Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. II  
J. Fluid Mech., Vol. 23, pp. 563-581, 1965

**Hunt, J. C. R.; Leibovich, S. (1967)**

Magnetohydrodynamic flow in channels of variable cross-section with strong transverse magnetic fields  
J. Fluid Mech., Vol. 28, part 2, pp. 241-260, 1967

**Hunt, J. C. R.; Hancox, R. (1972)**

The use of liquid lithium as coolant in a toroidal fusion reactor  
Part 1. Calculation of pumping power.  
Culham Laboratory, Abingdon, Oxford, UK, CLM-R 115, 1971

**Hunt, J. C. R.; Holroyd, R. J. (1977)**

Applications of laboratory and theoretical MHD duct flow studies in fusion relevant technology  
UKAEA-Report CLM-R 169, 1977

**Kim, Ch. N. (1989)**

Development of a numerical method for full solution of magnetohydrodynamic flows and application to fusion blankets  
Dissertation, University of California, Los Angeles, US, 1989

**Kim, Ch. N.; Hadid, A. H.; Abdou, M. A. (1989)**

Development of a computational method for full solution of MHD flow in fusion blankets  
Fusion Engineering and Design, Vol. 8, pp. 265-270

**Kit, L. G. et al. (1970)**

Investigation of the influence of fringe effects on a magnetohydrodynamic flow in a duct with nonconducting walls  
Magnitnaya Gidrodynamika, Vol. 4, pp. 47-53, October-Dezember 1971

**Kunugi, T.; Tillack, M. S.; Abdou, M. A. (1991)**

Analysis of liquid metal MHD fluid flow and heat transfer using the KAT code  
Fusion Technology, Vol. 19, pp. 1000-1005, May 1991

**Lenhart, L. (1989)**

Kernforschungszentrum Karlsruhe, interner Bericht  
Karlsruhe, April 1989

**Lenhart, L.; McCarthy, K. (1993)**

Comparison of the core flow solution and the full solution for MHD flow  
Metallurgical Technologies, Energie Conversion, and Magnetohydrodynamik Flows  
Progress in Astronautics and Aeronautics, Volume 148, pp 482-499, Washington,  
DC, 1993

**Lock, R. C. (1955)**

Stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under  
a transverse magnetic field  
Proc. Roy. Soc. A233, 105, 1955

**Lykoudis, P. S. (1968)**

Turbulent Magneto-Fluid-Mechanic Flow in a Pipe with an Axial Field  
Proc. Symp. Turbulence of Fluids and Plasmas  
Brooklyn Polytechnic Institute Press, 1968

**McCarthy, K. (1989)**

Analysis of Liquid Metal MHD Flow Using a Core Flow Approximation, with  
Applications to Calculating the Pressure Drop in Basic Geometric Elements of  
Fusion Reactor Blankets  
Dissertation, University of California, Los Angeles, 1989

**McCarthy, K.; Tillack, M. S.; Abdou, M. A. (1989)**

Analysis of liquid metal MHD flow using an iterative method to solve the core flow  
equations  
Journal of Nuclear Science and Technology, 25(3), pp. 233-244



**Madarame, H.; Hagiwara, T. (1988)**

Computer code for analyzing liquid metal MHD flow in rectangular ducts under strong transverse magnetic field

International symposium on fusion nuclear technology, Tokio, Japan, 1988

**Marsal, D. (1976)**

Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen

Bibliographisches Institut Mannheim / Wien / Zürich, 1976

**Mullinson, G. D.; Davis, G. de Vahl (1973)**

The Method of false Transient for the Solution of Coupled Elliptic Equations

Journal of Computational Physics, Vol. 12, pp. 435-461, 1973

**Peyret, R.; Taylor, T. D. (1983)**

Computational methods in fluid flow

Springer Ser. Comput. Phys., Berlin / Heidelberg, 1983

**Picologlou, B. F.; Reed, C. B.; Dauzvardis, P. V.; Walker, J. S. (1987)**

Experimental and analytical investigations of magnetohydrodynamic flows near the entrance to a strong magnetic field

Fusion Technology, vol. 10, pp. 860-865, 1987

**Picologlou, B. F.; Reed, C. B.; Hua, T. Q.; Barleon, L.; Kreuzinger, H.; Walker, J. S. (1987)**

Experimental investigations of MHD flow tailoring for first wall coolant channels of self-cooled blankets

Eighth topical meeting on the technology of fusion energy, Salt Lake City, Utah, US, october 9-13, 1988

**Pouquet, A. et al. (1984)**

Numerical simulations of magnetohydrodynamic turbulenc

Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids

Proceedings of the international Symposium, Kyoto, 5-10 Sept. 1983, North Holland, Amsterdam, pp. 501-501

**Roache, P. J. (1985)**

Computational Fluid dynamics

Hermosa Publishers, Albuquerque, N.M., US, 6. Auflage, 1985

**Roberts, P. H. (1967)**

An Introduction to Magnetohydrodynamics

Longmans, 1967

**Shercliff, J. A. (1953)**

Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 49, p.136, 1953

**Shercliff, J. A. (1965)**

A textbook of magnetohydrodynamics

Pergamon press, Oxford, 1965

**Smith, D. L. et al. (1984)**

Blanket comparison and selection study - final report

Argonne Nat. Lab. report ANL/FPP 84-1, 1984

**Solan, D. M.; Smith, P. (1966)**

Z. angew. Math. Mech., Vol 46, p. 439, 1966

**Someria, J.; Moreau, R. (1982)**

Why, how and when MHD turbulence becomes two-dimensional

J. Fluid Mech, Vol. 118, pp 507-518

**Sterl, A. (1987)**

Numerische Simulation magnetohydrodynamischer Flüssigmetall-Strömungen in rechteckigen Rohren bei großen Hartmann-Zahlen

KfK-Bericht Nr. 4504, Kernforschungszentrum Karlsruhe, Januar 1989

**Stuart, J. T. (1954)**

On the Stability of Viscous Flow between Parallel Planes in the Resence of a Coplanar Magnetic field

Proc. Roy. Soc. A221:189

**Sukorianski, S.; Zilberman, I.; Branover, H. (1986)**

Experimental studies of turbulence in mercury flows with transverse magnetic fields  
Exp. in Fluids, Vol 4, pp. 11-16, 1986

**Temperly, D. J.; Todd, L. (1971)**

The effects of wall conductivity in magnetohydrodynamic duct flow at high  
Hartmann numbers  
Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 69, pp. 337-351, 1971

**Tillack, M. S. (1990)**

MHD flow in rectangular ducts. Design equations for pressure drop and flow  
quantity  
UCLA-Report, UCLA-FNT-41, 1990

**Toschi, R.; Chazalon, M.; Engelmann, F.; Nihoul, J.; Reader, J.; Salpietro, E (1981)**

Next european torus objectives, general requirements, and parameter choices  
Fusion Technology, Vol. 14, pp. 19-29

**Uflyand, Y. S. (1961)**

Y.S. Soviet Phys. Tech. Phys, Vol 5, p. 1194, 1961

**Varga, R. S. (1962)**

Matrix Iterative Analysis  
Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962

**Walker, J. S.; Ludford, G. S. S.; Hunt, J. C. R. (1971)**

Three-dimensional MHD duct flows with strong transverse magnetic fields.  
Part 2. Variable-area rectangular ducts with conducting sides  
J. Fluid Mech., Vol. 46(4), pp. 657-684, 1971

**Walker, J. S.; Ludford, G. S. S.; Hunt, J. C. R. (1972)**

Three-dimensional MHD duct flows with strong transverse magnetic fields.  
Part 2. Variable-area rectangular ducts with insulating walls  
J. Fluid Mech., Vol. 46(4), pp. 657-684, 1971

**Walker, J. S. (1981)**

Magnetohydrodynamic flows in rectangular ducts with thin conducting walls.  
Part I. Constant area and variable area ducts with strong magnetic fields  
J. de Mecanique, Vol. 20, pp. 79-112, 1981

**Walker, J. S. (1984)**

Approximate side-layer solutions for a liquid metal flow in a rectangular duct with a strong, non-uniform magnetic field  
Fourth Beer-Sheva International Seminar on Magnetohydrodynamic Flows and Turbulence, Feb. 27 - March 2, 1984

**Walker, J. S. (1986)**

Liquid metal flow in a rectangular duct with a non uniform magnetic field  
Argonne Nat. Lab. report ANL/FPP/TM-207, 1986

**Yanenko, N. N. (1971)**

The method of fractional steps  
Springer Verlag, New York, 1971

**Zierep, J. (1982)**

Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre  
Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1982