

Forschungszentrum Karlsruhe

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 5903

**Zur Skalierung von Modellversuchen
zum Aufprall flüssiger Massen
auf deformierbare Strukturen**

Thomas Stach

Institut für Reaktorsicherheit

Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH)
genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

1997

**Zur Skalierung von Modellversuchen
zum Aufprall flüssiger Massen
auf deformierbare Strukturen**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

von der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Thomas Stach

aus Schönaich

Tag der mündlichen Prüfung: 5. Dezember 1996
Hauptreferent: Prof. Dr.rer.nat. Dr.h.c. D. G. Cacuci
Korreferenten: Prof. Dr.-Ing. U. Müller
Prof. Dr.-Ing. J. Wauer

Diese Dissertation wird als Bericht des Forschungszentrums Karlsruhe, FZKA 5903 veröffentlicht

Zusammenfassung

Der Aufprall einer Flüssigkeit auf deformierbare Strukturen wird sowohl experimentell als auch theoretisch in verschiedenen Maßstäben untersucht. Dazu werden zunächst die Ähnlichkeitsbedingungen anhand der Bilanz- und Stoffgleichungen hergeleitet. Es wird eine kompressible, Newton'sche Flüssigkeit angenommen. Für die Struktur wird elastisch, viskoplastisches Materialverhalten unter Einbeziehung der thermisch-mechanischen Kopplung betrachtet. Die erhaltenen Ähnlichkeitsbedingungen werden für verschiedene Einschränkungen diskutiert.

Zur Untersuchung des Maßstabseinflusses bei Replika-Modellen werden die Experimente in den Maßstäben 1:1, 1:2.5 und 1:10 durchgeführt (FLIPPER-Experimente). Dabei wird Wasser durch ein Fallgewicht zunächst beschleunigt und durch den Aufprall des Wassers auf eine Prallplatte werden Biegeelenke plastisch verformt. Als Material für die Biegeelenke kommen der ferritische Stahl St 37, die Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5 und der austenitische Stahl X 5 CrNi 18 9 zum Einsatz.

Beim St 37 zeigt sich eine moderate Verkleinerung des mittleren plastischen Biegewinkels bei Verkleinerung der Abmessungen, die durch den Einfluß der Dehnungsgeschwindigkeit interpretiert werden kann. Es zeigt sich weiter, daß das Verhältnis der zur Verfügung stehenden kinetischen Energie der Flüssigkeit und der dissipierten Energie im Biegeelenk nur schwach vom Maßstab und der Fallhöhe abhängt. Die Ursache für die erhebliche Streuung nominell identischer Versuche wird mit Hilfe eines Rechenmodells geklärt. Versuche mit gelochten Prallplatten zeigen, daß auch bei feingliedrigen Strukturen der Einfluß der Zähigkeit nur gering ist.

Bei der Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5 ist der Rückgang des mittleren plastischen Biegewinkels bei Verkleinerung der Abmessungen deutlich geringer ausgeprägt als beim ferritischen Stahl St 37.

Die Versuche mit dem austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 zeigen einen erheblichen Maßstabseinfluß. Als Ursache für dieses Verhalten werden verschiedene Möglichkeiten diskutiert, da aufgrund unterschiedlicher Dehnungsgeschwindigkeiten nur ein geringer Maßstabseinfluß zu erwarten ist. Der große Maßstabseinfluß bei diesem Werkstoff kann aber auf Basis der zugrunde gelegten Theorie nicht erklärt werden.

Die experimentelle Untersuchung derartiger Aufprallvorgänge zeigt aber für den ferritischen Stahl St 37 und die Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5, daß der Einfluß der Dehnungsgeschwindigkeit bei der Übertragung der Ergebnisse aus verkleinerten Versuchen auf große Maßstäbe nur zu moderaten Abweichungen führt.

On the scaling of model experiments on the impact of liquid masses at deformable structures

Summary

The impact of a liquid on a deformable structure is studied in different scales, both experimentally and theoretically. Based on the balance and constitutive equations, the similarity conditions are derived. A compressible Newtonian fluid is assumed. An elastic, viscoplastic behavior of the structure is considered and the thermo-mechanical coupling is included. The similarity conditions are discussed for various restrictions.

The influence of size, expected for replica models, is examined by experiments in the scales 1:1, 1:2.5 and 1:10 (FLIPPER experiments). Herein, water is accelerated by a drop weight and bending joints are deformed plastically due to the impact of the water on a target plate. For the bending joints the structural steel St 37, the aluminum alloy AlZnMgCu1.5 and the austenitic steel X 5 CrNi 18 9 are used.

The scale influence is revealed by the moderately decreasing mean value of the bending angle with decreasing size, which can be interpreted by the strain-rate sensitivity. The results for the different drop heights show that the ratio between the kinetic energy of the liquid and the dissipated energy in the bending joints depends weakly on the scale and the fall height. The reason of the large scatter for nominally identical tests, characteristic for all experiments, is explained by means of a structural dynamic model. Tests with perforated target plates indicate that the influence of the fluid viscosity is almost negligible.

The mean bending angle for the different scales was found to be less scale dependent in tests with the aluminum alloy AlZnMgCu1.5 than for the structural steel St 37.

The tests with the austenitic steel X 5 CrNi 18 9 showed a strong scale effect. Possible influences are discussed, since only a moderate scale effect is expected from the strain-rate sensitivity. But the strong scale effect cannot be explained based on the applied theory.

Nevertheless, the experimental investigation of the discussed impact processes shows for the structural steel St 37 and the aluminum alloy AlZnMgCu1.5, that deviations are moderate when small scale results are transferred to large scale.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Bisherige Arbeiten	2
1.1.1	Landung von Wasserflugzeugen	2
1.1.2	Schiffe in schwerer See	3
1.1.3	Wasserung von Raumkapseln	3
1.1.4	Schwappende Flüssigkeiten in Behältern	4
1.1.5	Untersuchungen an flüssigmetallgekühlten schnellen Brutreaktoren	4
1.1.6	Strukturbelastungen infolge von Druckwellen	5
1.2	Skizzierung und Zielsetzung der vorliegenden Arbeit	7
2	Ähnlichkeitstheorie	11
2.1	Definition der Ähnlichkeit	11
2.2	Verhältnissbildung charakteristischer Größen	12
2.3	Dimensionsanalyse	12
2.3.1	Buckingham'sches Π -Theorem	14
2.4	Methode der Differentialgleichungen	14
2.5	Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik	15
2.6	Materialgleichungen	16
2.6.1	Wärmefluß	16
2.6.2	Materialgleichungen für das Fluid	17
2.6.2.1	Spannungstensor für ein Newton'sches Fluid	17
2.6.2.2	Zustandsgleichung	17
2.6.3	Materialgleichungen für den Festkörper	18
2.6.3.1	Interne Variablen im Falle kleine Deformationen	18
2.6.3.2	Entwicklungsgleichung für die plastische Dehnung	21
2.7	Anfangs- und Randbedingungen	24
2.7.1	Festkörper	24
2.7.2	Flüssigkeit	24
2.7.3	Kopplung	25
2.8	Ableitung und Diskussion der Ähnlichkeitsbedingungen	25
2.8.1	Dimensionslose Größen	25
2.8.2	Flüssigkeit	26
2.8.2.1	Dimensionslose Gleichungen	26
2.8.2.2	Ähnlichkeitsbedingungen für die Flüssigkeit	28
2.8.2.3	Diskussion	29

2.8.3	Festkörper	29
2.8.3.1	Dimensionslose Gleichungen	29
2.8.3.2	Ähnlichkeitsbedingungen	31
2.8.3.3	Diskussion der Ähnlichkeitsbedingungen	32
2.8.3.4	Vernachlässigung der Gewichtskräfte	34
2.8.3.5	Verwendung gleichen Materials bei verschiedenen Temperaturen	35
2.8.3.6	Diskussion der Ähnlichkeitsbedingung für Replikamodelle	37
2.8.4	Anfangs- und Randbedingungen sowie Kopplung	38
3	Materialdaten	39
3.1	Grundsätzliches	39
3.2	Verwendete Versuchstechnik	39
3.3	Material und Probenherstellung	41
3.4	Versuchsergebnisse	41
3.4.1	Ferritischer Stahl St 37	41
3.4.2	Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5	44
3.4.3	Austenitischer Stahl X 5 CrNi 18 9	45
3.5	Analytische Darstellung Spannungs-Dehnungs-Kurven	48
3.5.1	Allgemeines	48
3.5.2	Analytische Beschreibung des viskoplastischen Verhaltens	49
3.5.3	Analytische Beschreibung des Verfestigungsverhaltens	50
4	FLIPPER-Experimente	55
4.1	Anforderungen an die Experimente	55
4.2	Versuchsprinzip	56
4.2.1	Überlegungen zur verwendeten Struktur	56
4.2.2	Prallplatte mit Biegeelenken	57
4.2.3	Beschleunigung der Flüssigkeit	57
4.2.4	Versuchsstände	60
4.2.5	Meßgrößen und deren statistische Beschreibung	60
4.3	Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen	63
4.4	Vorversuche mit starren Platten	66
4.5	Versuche mit dem ferritischen Stahl St 37	72
4.5.1	Fallhöhe $h = 2$ m	72
4.5.2	Variation der Fallhöhe	76
4.5.3	Versuche mit gelochten Prallplatten	80
4.6	Versuche mit der Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5	82
4.7	Versuche mit dem austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9	84
5	Strukturdynamisches Rechenmodell für FLIPPER	91
5.1	Modellannahmen	91
5.2	Bewegungsgleichung und hydrodynamische Belastung	91
5.3	Berechnung des Biegemoments	93
5.3.1	Geometrie	93
5.3.2	Kinematische Beziehungen	93

5.3.3	Ausdehnung der plastischen Zone	95
5.3.4	Anpassung des Querschnitts	95
5.3.5	Berücksichtigung des elastisch-viskoplastischen Materialverhaltens	98
5.3.5.1	Elastischer Bereich	99
5.3.5.2	Plastischer Bereich	100
5.3.5.3	Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich	100
5.4	Integration der Bewegungsgleichung	101
5.5	Ergebnisse	101
5.5.1	Detaillierte Einzelergebnisse	101
5.5.2	Vergleich mit Versuchen für den ferritischen Stahl St 37	107
5.5.2.1	Fallhöhe $h = 2\text{m}$	107
5.5.2.2	Andere Fallhöhen	108
5.5.3	Vergleich mit Versuchen für den austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9	112
5.5.4	Vergleich mit Versuchen für die Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5	113
6	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	115
A	Bemerkungen zur Theorie der physikalischen Dimensionen	117
A.1	Bewertung von Merkmalen	117
A.2	Metrische Konventionen	118
A.3	Dimensionsformeln	119
A.4	Dimensionslose Potenzprodukte	122
A.5	Buckingham'sches Π -Theorem	122
B	Endliche Deformation	125
C	Meßwerte aus Zugversuchen	129
	Literatur	131

Kapitel 1

Einleitung

Das bisherige Sicherheitskonzept für Druckwasserreaktoren besteht aus mehreren Ebenen, die gewährleisten sollen, daß auch unter Störfallbedingungen keine radioaktiven Stoffe freigesetzt werden (siehe Keßler et al. [1], Smidt [2]). Besondere Beachtung erfordert dabei die durch die radioaktiven Zerfallsprodukte erzeugte Nachzerfallswärme, die auch nach dem Abschalten des Reaktors abgeführt werden muß. Deshalb sind mehrfach redundant ausgelegte Notkühlsysteme vorgesehen.

Trotz der Redundanz können diese Systeme im Anforderungsfall mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit alle gleichzeitig versagen. In diesem Fall kommt es zur Kernschmelze und, wenn es nicht gelingen sollte, die über 2000°C heiße Schmelze im Rahmen von Notfallmaßnahmen doch noch zu kühlen, zur Freisetzung des radioaktiven Inventars. Für diese Vorgänge, deren Eintritt die Evakuierung des Reaktorumfeldes und die langfristige Kontamination großer Landflächen zur Folge hätte, hat sich der Begriff „Restrisiko“ eingebürgert. Wegen der extrem geringen Eintrittswahrscheinlichkeit wurde dieses Risiko, wie andere vergleichbare Risiken, aber als akzeptabel angesehen.

Nicht zuletzt aufgrund der schwerwiegenden Konsequenzen und der mangelnden Akzeptanz in der Öffentlichkeit für die bisherigen Kernkraftwerke (siehe Krieg [3]) besteht für zukünftige nukleare Kraftwerke die Forderung, daß eine Evakuierung des Reaktorumfeldes auf jeden Fall nicht erforderlich sein soll (siehe Hennies et al. [4]). Das bedeutet, daß eine Freisetzung von Spaltprodukten selbst bei dem sehr unwahrscheinlichen Kernschmelzunfall nicht stattfinden darf.

Im weiteren sei ein Szenario angenommen, daß bei einem Druckwasserreaktor eine Dampfexplosion im Reaktordruckbehälter umfaßt. Diese kann ausgelöst werden, wenn das geschmolzene Kernmaterial mit Resten von Kühlmittel, die sich in der Kalotte des Reaktordruckbehälters befinden, in Kontakt kommt. Infolge von Instabilitäten kann es dabei zu einer feinen Fragmentation der Schmelze kommen. Der damit verbundene schnelle Wärmeübergang führt in sehr kurzer Zeit zur Produktion von großen Dampfmenen. Aufgrund des entstehenden pulsartigen Dampfdrucks wird angenommen, daß ein flüssiger „Batzen“ des geschmolzenen Reaktorinventars zusammen mit anderen Strukturteilen nach oben geschleudert wird. Abschätzung liefern dazu Massen bis etwa 80000kg und Geschwindigkeiten im Bereich von 50m/s bis 150m/s, was einer freigesetzten mechanischen Energie bis zu 1GJ entspricht (siehe Jacobs [5] sowie Jacobs und Krieg [6]).

Infolge des Aufpralls des entstandenen Batzens auf den Reaktordruckbehälterdeckel könnte dieser abreißen und auf die Containmentschale des Kraftwerkes geschleudert werden, die einem solchen Geschoß kaum standzuhalten vermag (siehe Theophanus et al. [7]). Um dem Artikelgesetz zu genügen, muß ein solches frühes Containmentversagen verhindert werden.

Dies soll durch entsprechende Untersuchungen und gegebenenfalls erforderliche Maßnahmen er-

reicht werden. Es wird deshalb diejenige Aufprallenergie bestimmt, die der Reaktordruckbehälterdeckel standzuhalten vermag. In einem zweiten Schritt kann durch Vergleich mit der maximal möglichen, durch die Dampfexplosion freigesetzten mechanischen Energie entschieden werden, ob die bisherige Konstruktion in dieser Hinsicht ausreichend ist oder ob Maßnahmen zum Schutz des Containments bzw. zur Verhinderung einer Dampfexplosion getroffen werden müssen.

Die Bestimmung der maximal zulässigen Aufprallenergie kann durch Rechnung erfolgen, wobei allerdings die oberen Einbauten im Reaktordruckbehälter berücksichtigt werden müssen, weil sie die Impulsübertragung zeitlich strecken. Dabei spielen verschiedene Mechanismen eine Rolle. Zum einen dämpfen die oberen Einbauten den Aufprall und tragen zur Energiedissipation bei. Zum anderen findet durch die Wechselwirkung mit den Einbauten eine Dispersion eines eventuell kompakten flüssigen Batzens statt. Weiter entstehen beim Eindringen der Schmelze in die sich verformenden Strukturen Wirbel und letztlich Turbulenz, was ebenfalls zur Energiedissipation beiträgt.

Infolge der Wechselwirkung des aufprallenden Batzens mit den sich plastisch verformenden und versagenden Strukturen gestaltet sich eine Berechnung des Aufprallvorgangs sehr komplex, zudem müssen die großen Verformungen und Rotationen der Einbauten beachtet werden. Es müssen deshalb für die Berechnung zahlreiche Vereinfachungen getroffen und Annahmen gemacht werden, so daß es fraglich sein wird, ob die Ergebnisse für einen Sicherheitsnachweis noch akzeptabel sind.

Deswegen wird die maximal zulässige Aufprallenergie experimentell bestimmt, indem die beschriebenen Vorgänge nachgebildet werden. Aufgrund der hohen Kosten und der großen benötigten Energie ist ein Experiment im Maßstab 1:1 nicht durchzuführen. Es wurde darum beschlossen, ein im Verhältnis von 1:10 verkleinertes Experiment durchzuführen. Dabei wird auf eine möglichst gute Übertragbarkeit auf die Reaktorabmessungen durch die Beachtung der Maßstabgesetze geachtet. Es handelt sich dabei um das Experiment BERDA, das bei Krieg et al. [8], [9] näher beschrieben ist. Damit diese Untersuchungen sinnvoll werden, muß gezeigt werden, daß verkleinerte Modellversuche bei den beschriebenen Fluid-Struktur-Aufprallvorgängen durch Ähnlichkeitsgesetze auf erheblich größere Abmessungen übertragbar sind.

Aufgrund dieser Forderung wird in dieser Arbeit die erreichbare Ähnlichkeit anhand von vereinfachten Experimenten untersucht. Damit ist der Rahmen, in den die vorliegende Arbeit eingebettet ist, beschrieben. Bevor die Zielsetzung dieser Arbeit näher erläutert wird, soll zunächst ein Überblick über Arbeiten zu Aufprallvorgängen zwischen Flüssigkeiten und Festkörpern gegeben werden.

1.1 Bisherige Arbeiten

1.1.1 Landung von Wasserflugzeugen

Größere Beachtung haben die Aufprallvorgänge zwischen Flüssigkeiten und Festkörpern erstmals bei der Auslegung von Wasserflugzeugen bei der Landung gefunden. Zu nennen sind hier die Arbeiten durch von Kármán [10], Wagner [11], [12], [13] und Pabst [14].

Von Kármán liefert Abschätzungen für Drücke und Beschleunigungen mit Hilfe der sogenannten Added-Mass-Methode. Eingehende Betrachtungen zum Aufprallverhalten gekielter Rumpfe liefern die Arbeiten von Wagner. Betrachtet wird ein komplexes zweidimensionales Potentialproblem, bei dem die sich zeitlich ändernde Wasseroberfläche berechnet wird. Im Grenzfall der ebenen Platte erhält man infolge der inkompressiblen Behandlung unsinnige, unendlich große Drücke.

Bei Berücksichtigung der Kompressibilität der Flüssigkeit erhält man als maximal wirkenden Druck den sogenannten akustischen Druck. Pabst weist darauf hin, daß die Elastizität der Struktur im allgemei-

nen größer und damit entscheidender für die Reduzierung der wirkenden Drücke ist als die Kompressibilität des Wassers. Damit ist die Annahme inkompressibler Flüssigkeit meist gerechtfertigt.

Plastische Deformation der Strukturen wurde in den genannten Arbeiten nicht betrachtet, weshalb sie für den hier zugrundeliegenden Zweck weniger interessant sind.

1.1.2 Schiffe in schwerer See

Neben der Landung von Wasserflugzeugen treten ähnliche Probleme auch im Schiffbau auf, wenn der Schiffsrumpf bei hohem Seegang auf die Wasseroberfläche schlägt. Für die Anwendung im Schiffsbau hat Meyerhoff [15], [16] die Methode von Wagner auf elastische Körper erweitert. Bei Egorov [17] und Ogilvie [18] finden sich theoretische Arbeiten zum Aufprall einer starren, ebenen Platte auf eine zunächst ruhende, kompressible Flüssigkeit.

Der theoretisch vorhergesagte akustische Druck konnte experimentell beim Aufprall einer ebenen Platte mit großer Steifigkeit nie nachgewiesen werden. Die experimentellen und numerischen Arbeiten von Fujita [19], Tanaka [20], Chuang [21], [22], Verhagen [23] Lewison und Maclean [24] sowie von Koehler und Kettleborough [25] liefern dafür eine Erklärung. Nach dem Aufprall finden sich unter der Platte eingefangene Luftblasen, die den Aufprall erheblich dämpfen. Das Auftreten der Blasen läßt sich damit erklären, daß kurz vor dem Auftreffen der ebenen Platte auf die Wasseroberfläche, die sich dazwischen befindende Luft seitlich mit unendlicher Geschwindigkeit entweichen müßte, was aber nicht möglich ist.

1.1.3 Wasserung von Raumkapseln

Ein weiteres verwandtes Thema ist die Wasserung von Raumkapseln. Hier wurden umfangreiche Untersuchungen im Rahmen des Mercury- und Apollo-Programms der NASA durchgeführt. Im Vordergrund standen dabei Modellexperimente im Maßstab 1:4 bei Stubbs und Hathaway [26] und Stubbs [27] sowie im vergleichsweise großen Maßstab 1:12 bei McGehee et al. [28]. Die maximalen Aufprallgeschwindigkeiten betragen jeweils bis zu etwa 10m/s.

Bei McGehee et al. findet sich ein Vergleich von gemessenen Beschleunigungen des Schwerpunkts beim Aufprall einer Raumkapsel auf eine Wasseroberfläche von Modellexperimenten im Maßstab 1:12 mit einem 1:1-Prototyp, wobei die Übereinstimmung zwischen Modell und Prototyp sehr gut war, was aufgrund der gemessenen integralen Größe nicht sehr verwundert.

In den beiden anderen Untersuchungen [26], [27] kam ein 1:4-Modell der Apollo-Kapsel zum Einsatz. Bei diesen Modellen stand das Vibrationsverhalten des Hitzeschutzschildes, der als erstes Kontakt mit der Wasseroberfläche hat, im Vordergrund. Deshalb wurde dessen Steifigkeit und Massenverteilung dem 1:1-Prototypen entsprechend korrekt modelliert. Die Festigkeit wurde nicht skaliert. Deshalb sind diese Untersuchungen für die vorliegende Arbeit ebenfalls nicht sehr aufschlußreich.

In Untersuchungen von Baker und Westine [29], wurde zusätzlich zu den bisherigen Modellen der Apollo-Kapsel auch deren Festigkeit im Bezug auf das *Einsetzen* des plastischen Fließens untersucht und mit einem 1:1-Prototypen verglichen. Das ist bemerkenswert, weil für das Modell nicht dieselben Werkstoffe wie für den 1:1-Prototypen verwendet wurden. Ein Skalierung hinsichtlich der plastischen Deformationen fand jedoch nicht statt, so daß ein Vergleich der Deformationen zwischen Modell und Prototyp nicht sinnvoll ist. Die Zähigkeit und Kompressibilität des Wasser wurde für die Skalierung vernachlässigt ebenso wie Dehnungsgeschwindigkeitseffekte in der Struktur. Die Ergebnisse des Modellexperiments zeigten im Vergleich zum 1:1-Prototypen gute Übereinstimmung hinsichtlich

des Einsetzens von plastischen Deformationen. Eine ausführliche Zusammenstellung von Informationen zu diesem Thema findet sich bei Baker, Westine und Dodge [30].

Obwohl sie für vorliegende Problem keine neuen Erkenntnisse liefern, seien noch die interessanten Arbeiten von Lorenz [31] und Wierzbicki und Yue [32] erwähnt. In der Arbeit von Lorenz wurde ein exotisches Szenario untersucht; nämlich die Landung der Raumsonde Huygens in einem Ozean aus flüssigen Kohlenwasserstoffen auf dem Mond Titan des Planeten Saturn. Zum Einsatz kam dabei die Added-Mass-Methode, die sich schon bei von Kármán [10] findet. Der gleiche empirische Ansatz findet sich bei Wierzbicki und Yue, die nach der Explosion des Space Shuttle Challenger den Aufprall des Cockpitbereichs auf die Wasseroberfläche untersuchten.

1.1.4 Schwappende Flüssigkeiten in Behältern

Neben vielen anderen Arbeiten zum Schwappen von Flüssigkeiten in Behältern finden sich wiederum Untersuchungen aus dem Raumfahrtbereich zum Treibstoffverhalten in den Tanks einer Rakete. Besonders erwähnt werden muß die Arbeit von Dalzell [33], der den Aufprall von Treibstoff auf die Trennwand zwischen Brennstoff und Oxidator untersucht hat, weil hier Einflüsse untersucht wurden, die oft vernachlässigt werden können. In Modellexperimenten wurde dabei der Einfluß der Oberflächenspannung, der Viskosität und des Dampfdrucks untersucht, wobei allerdings im untersuchten Bereich *kein* Maßstabeffekt festgestellt wurde. Die Untersuchung umfaßten einen Variationsbereich der Koeffizienten für Oberflächenspannung und Viskosität sowie für den Dampfdruck um einen Faktor von etwa 15-20. Da die Experimente zu Auslegungszwecken unternommen wurden waren plastische Deformationen des Tanks nicht von Interesse.

1.1.5 Untersuchungen an flüssigmetallgekühlten schnellen Brutreaktoren

Im Zusammenhang mit hypothetischen kernzerstörenden Unfällen bei flüssigmetallgekühlten schnellen Brutreaktoren finden sich in der Literatur zahlreiche Quellen. Besonders interessant sind hier Arbeiten von Takei et al. [34] und Florence et al. [35], in denen das Verhalten des Reaktorbehälters bei einem solchen Unfall in Modellversuchen untersucht wurde. Der Unfallablauf wird in beiden Fällen mit Hilfe einer Sprengladung simuliert.

Bei Takei et al. war ein Prototyp des Monju-Reaktors Gegenstand der Untersuchung. Es wurden unter anderem komplexe wassergefüllte Modelle des Reaktorbehälters und dessen Einbauten im Maßstab 1:15 und 1:7.5 verwendet. Der Maßstabsfaktor zwischen diesen Modellen beträgt also 1:2. Die Modelle waren in ihren wesentlichen Abmessungen geometrisch exakt skaliert und aus dem austenitischen Stahl SUS304 hergestellt. Über die Materialeigenschaften der Modelle im kleinen und großen Maßstab wurden keine Angaben gemacht. In beiden Größen standen jeweils zwei Modelle zur Verfügung, wobei jeweils eines auch die oberen Einbauten enthielt, das andere jedoch nicht.

Nach den Sprengversuchen wurden die Axial- und Umfangsdehnungen gemessen. Die absorbierte Energie wurde für die verschiedenen Teile der Strukturen bestimmt. Ein Vergleich der erhaltenen Werte zeigt eine gute qualitative Übereinstimmung der Umfangsdehnungsverläufe über die Behälterhöhe für alle vier untersuchten Modelle. Die Auswertung der maximalen Umfangsdehnungen ergab einen Anstieg vom kleinen zum großen Modell von 14% für den Fall mit Einbauten und 30% für den Fall ohne Einbauten. Beim Vergleich der Axialdehnung des Reaktorbehälters zeigten sich sowohl mit als auch ohne obere Einbauten beim großen Modell doppelt so große Werte wie im kleinen Modell, wobei die Dehnung mit 1% bzw. 2% aber relativ klein waren. Für die gesamte dissipierte Energie pro Volumen erhält man für

beide Fälle einen Anstieg um etwa 30% vom kleinen zum großen Modell.

Obwohl sich sowohl bei den Dehnungen als auch bei der dissipierten Energie ein für den kleinen Maßstabsbereich 1:2 ziemlich großer Maßstabseinfluß zeigt, sollte dieser jedoch an dieser Stelle mit Vorsicht bewertet werden. Es handelt sich nämlich jeweils um Einzelversuche, so daß über die Streubänder, mit denen in diesen Experimenten zu rechnen ist, keine Aussagen gemacht werden können. Ein Vergleich der Mittelwerte aus mehreren nominell identischen Versuchen könnte hier möglicherweise zu anderen Ergebnissen führen.

Ähnliche Untersuchungen finden sich auch bei Florence et al. Hier wurden verschiedene Modelle des Reaktorbehälters aus dem austenitischen Stahl AISI304 in den Maßstäben 1:10 und 1:30 bei Raumtemperatur untersucht. Der Maßstabsfaktor zwischen diesen Modellen beträgt damit 1:3. In den Experimenten kamen verschiedene Ausführungen der Modelle mit einerseits dickwandigen, starren Behältern und andererseits dünnwandigen, deformierbaren Behältern zum Einsatz.

Aufgrund der geringeren Festigkeit bei Betriebstemperatur wurden die Wandstärken der dünnwandigen Behälter entsprechend reduziert und die Massenverteilung durch eine Bleibeschichtung an die Verhältnisse im Reaktormaßstab angepaßt. Die Skalierung der Dicke erfolgte aber aufgrund von Problemen bei der Materialbeschaffung, abweichend von den anderen Maßen, im Verhältnis von 1:4. Das Flüssigmetall wurde durch Wasser simuliert und der Luftspalt zwischen Wasseroberfläche und Deckel entsprechend dem Maßstab skaliert.

Die Ergebnisse zeigen für die gemessenen Druckverläufe in den großen und den kleinen Modellen qualitativ und quantitativ gute Übereinstimmung. Für die gemessenen Dehnungen konnte aufgrund der nicht korrekten Skalierung keine befriedigende Übereinstimmung erzielt werden. Dasselbe gilt auch für die dissipierte Energie, wo ein Anstieg der skalierten Werte von 50% bis 65% vom kleinen zum großen Maßstab festgestellt wurde. Für die Aufteilung der dissipierten Energie zwischen Reaktorbehälter auf der einen Seite und Kernumfassung und Deckelschrauben auf der anderen Seite ergaben die ermittelten Werte ein Verhältnis von 80:20 im großen Maßstab und von 60:40 im kleinen Maßstab. Dieser Unterschied läßt sich ebenfalls durch die nicht korrekt skalierte Wandstärke plausibel machen.

1.1.6 Strukturbelastungen infolge von Druckwellen

Eine wertvolle Quelle zur Ähnlichkeit für den Fall plastischer Deformationen findet sich bei Baker [36]. Darin wurde das Verhalten von Biegebalken untersucht, die einer durch eine Sprengladung erzeugten Druckwelle ausgesetzt waren. In Abbildung 1.1 ist die verwendete Versuchsanordnung dargestellt. Bei den untersuchten Biegebalken handelt es sich im Prinzip um dünne Bleche, die im Maßstab 1:1, 1:2 und 1:4 geometrisch skaliert waren. Die Blechdicke betrug für die jeweiligen Maßstäbe etwa 2.6mm, 1.3mm und 0.64mm. Die verwendete Aluminiumlegierung 6061-T6 zeigt einen nur geringen Dehnungsrateneffekt, weshalb die Skalierung in dieser Hinsicht unkritisch ist. Gemessen wurden die zunächst elastischen, später auch die plastischen Verformungen der Bleche. Die Ergebnisse finden sich in Abbildung 1.2. In Abbildung 1.2a sind die maximalen elastischen Dehnungen über dem skalierten Abstand von der Sprengladung dargestellt, die bei den Versuchen in den verschiedenen Maßstäben erzielt wurden. Der skalierte Abstand ergibt sich dabei als dimensionsbhaftete Größe aus dem geometrischen Abstand R und dem Energieinhalt W der Sprengladung zu $R/W^{1/3}$. Man erkennt, daß die elastischen Verformungen bei kleiner werdendem Abstand zunehmen und dabei den Maßstabsgesetzen gut gehorchen.

In Abbildung 1.2b sind die bleibenden Ausschläge der Bleche aufgetragen, bei denen infolge eines kürzer gewählten Abstands von der Sprengladung plastische Deformationen auftraten. Es wurden dabei zum Teil skalierte Verformung $\delta/L=1$ erreicht, wobei δ den bleibenden Ausschlag und L die Länge des

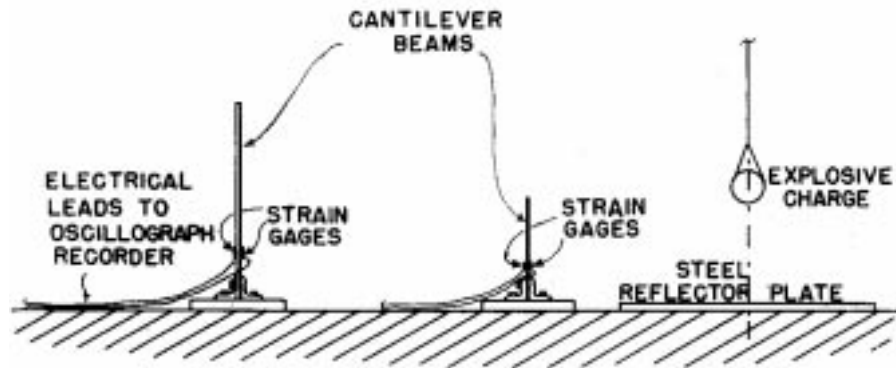


Abbildung 1.1: Versuchsanordnung zum Deformationsverhalten von Biegebalken infolge einer Belastung durch eine Druckwelle (Baker [36])

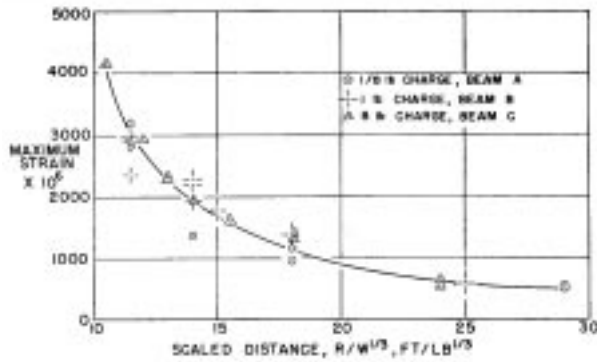
Balkens angibt. Dieser Wert entspricht dem maximal möglichen plastischen Biegewinkel von 90° . In diesem Bereich großer Verformung ergibt sich trotz der erheblichen Streuung in den Ergebnissen in den Mittelwerten infolge des Anschlags natürlich kein signifikanter Unterschied.

Eine genauere Analyse der angegebenen Daten ergibt bei den kleineren Verformungen und großen Abständen, daß dort die Streuung in den Ergebnissen im *gleichen* Maßstab mit etwa 5% Abweichung recht gering ist. Der Einfluß des Maßstabs ist jedoch erheblich, wie in Abbildung 1.2c deutlich wird. Dort sind dieselben Daten wie in Abbildung 1.2b aufgetragen, nur wurde hier für die Ordinate abweichend von der Originalarbeit von Baker ein logarithmischer Maßstab gewählt. Ein Vergleich der Ergebnisse zeigt hier besonders deutlich, daß für den Maßstab 1:4 fast fünfmal so große Verformung wie im Maßstab 1:1 erzielt wurden. Das ist für den Nachweis von ähnlichem Verhalten nicht mehr akzeptabel. Leider sind die Materialdaten in Form von Spannungs-Dehnungs-Kurven für die verschiedenen verwendeten Bleche nicht angegeben, so daß nicht überprüft werden kann, ob der Maßstabseinfluß auf eine Variabilität der Materialdaten zurückgeführt werden kann.

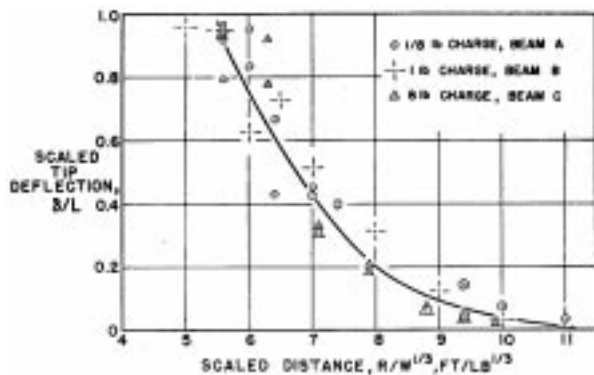
Bei Baker et al. [30] sind weitere Experimente mit Biegebalken beschrieben, die den zuvor beschriebenen Experimenten gleichen, nur daß hier verschiedene Materialien verwendet wurden. Zum einen handelt es sich um die Aluminiumlegierung 6061-T6, zum anderen um Inconel-X. Die charakteristischen Materialdaten wie Dichte, Elastizitätsmodul und Fließspannung stehen bei diesen Materialien im nahezu konstanten Verhältnis von 1:3. Wenn die skalierten Spannungs-Dehnungs-Kurven verglichen werden, ergibt sich bei nicht zu großen Genauigkeitsanforderungen hinsichtlich des Verfestigungsverhaltens ein ähnlicher Verlauf. Es wurden jeweils nur eine Blechgröße verwendet, wobei die Abmessungen der verwendeten Inconel-Bleche um den Faktor 1.23 größer sind als bei den Aluminiumblechen.

Die Experimente mit Inconel-X wurden unter freiem Himmel durchgeführt, die Experimente mit der Aluminiumlegierung mußten, um die Ähnlichkeitsbedingung für die Druckwelle einzuhalten, bei $1/3$ -Atmosphärendruck in einem großen kugelförmigen Druckbehälter durchgeführt werden. Die Ergebnisse sind in Abbildung 1.3 dargestellt. Man erkennt eine ziemlich ausgeprägte Streuung der Meßwerte, die wiederum beim Auftreten von plastischen Deformationen größer ist als im elastischen Fall. Im elastischen Fall ergibt sich beim selben skalierten Abstand eine maximale Streuung in der gemessenen Dehnung um einen Faktor von etwa drei. Bei den plastischen Deformation erhält man einen Faktor von bis zu fünf.

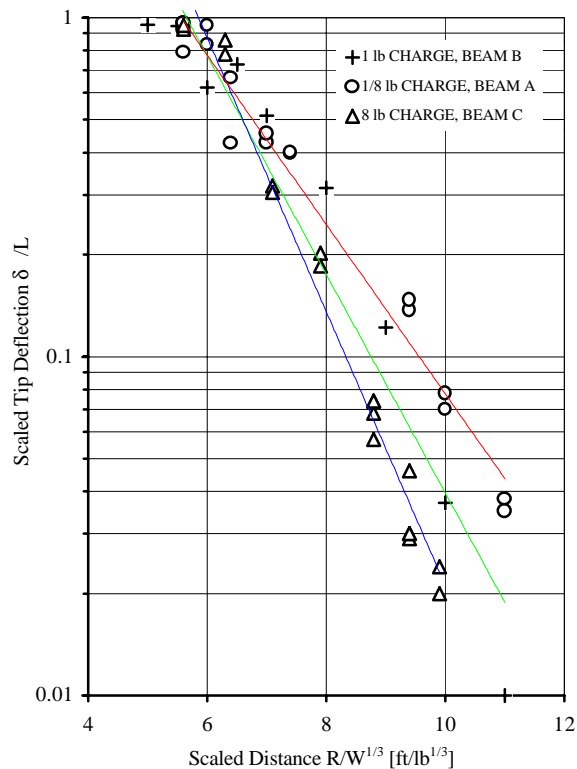
Im Falle der Ähnlichkeit müssen sich die Ergebnisse der Versuche durch eine einzige Kurve beschreiben lassen. Bei den elastischen Dehnungen ist dies, wenn Ausreißer in den Meßwerten nicht beachtet



a) Maximale elastische Dehnung über skaliertem Abstand von der Sprengladung aus [36]



b) Plastische Deformation über skaliertem Abstand von der Sprengladung aus [36]



c) Logarithmische Darstellung der plastischen Deformation über skaliertem Abstand von der Sprengladung nach den angegebenen Daten aus [36]

Abbildung 1.2: Ergebnisse aus Versuchen mit Biegebalken unter einer Belastung infolge einer Druckwelle (Baker [36])

werden, möglicherweise mit zufriedenstellender Genauigkeit gegeben. Beim Vergleich der plastischen Deformationen in Abbildung 1.3 lassen sich bei den Inconel-Blechen größere Werte erkennen als bei den Aluminiumblechen. Jedoch finden sich keine Daten, bei denen der skalierte Abstand derselbe ist, was den Vergleich erschwert. Die Daten liegen außerdem nur in grafischer Form vor.

Entsprechende Versuche wurden ebenfalls mit dünnwandigen Zylindern aus den beiden erwähnten Materialien durchgeführt, wobei allerdings Streuung in den Deformationen nominell identischer Versuche um einen Faktor von bis zu zehn auftrat, so daß sich hier kaum Aussagen bezüglich der Ähnlichkeit des Verhaltens machen lassen.

1.2 Skizzierung und Zielsetzung der vorliegenden Arbeit

In den vorgestellten Arbeiten zu Aufprallvorgängen zwischen Flüssigkeiten und Festkörpern hat die Ähnlichkeit der plastischen Verformungen bei verschiedenen Maßstäben nur wenig Beachtung gefunden. Im Rahmen der BERDA-Experimente ist dieser Punkt jedoch entscheidend für die Übertragung der

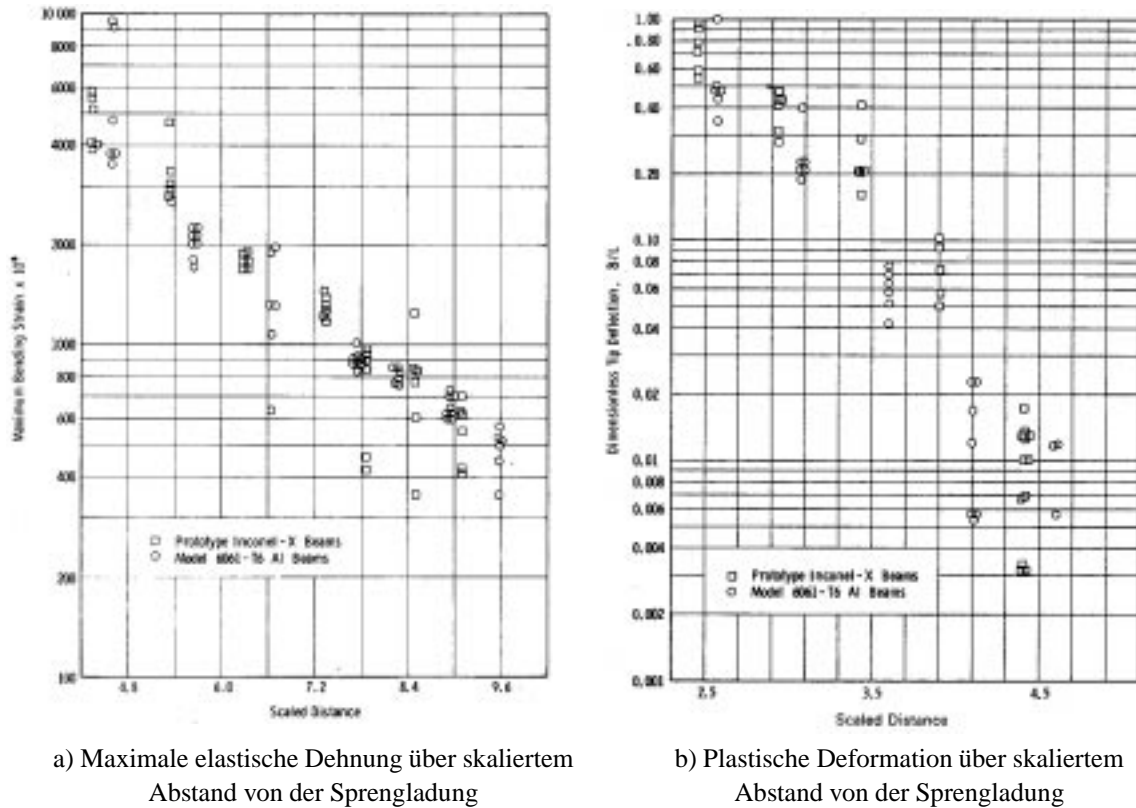


Abbildung 1.3: Versuchsergebnisse aus Modellversuchen an Biegebalken aus verschiedenen Materialien nach Belastung durch eine Druckwelle (Baker et al. [37])

erhaltenen Ergebnisse auf Reaktorabmessungen. Aus diesem Grunde sind so große Maßstabseinflüsse wie in den Versuchen von Baker [36] nicht hinnehmbar, insbesondere weil auch der Maßstabsfaktor mit 1:10 noch größer ist als bei diesen Versuchen (1:4). Darüber hinaus sind die Experimente von Baker nicht direkt vergleichbar mit den BERDA-Experimenten, bei denen ein Aufprallvorgang stattfindet.

Es soll deshalb die Ähnlichkeit der plastischen Deformationen untersucht werden, die sich infolge des Aufpralls einer Flüssigkeit auf einen Festkörper ergeben können. Für die Beschreibung des Materialverhaltens bei verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeiten kommt dabei ein Modell zum Einsatz, mit dem die elastisch-viskoplastischen Eigenschaften unter Beachtung thermodynamischer Forderungen beschrieben werden können. Zur Beschreibung des Verhaltens der Flüssigkeit werden die klassischen Gleichungen der Fluidodynamik verwendet.

Erforderlich ist nun die Herleitung der Ähnlichkeitsbedingungen, die bei einem maßstäblich skalierten Experiment eingehalten werden müssen. Dieser Teil der Arbeit wird in Kapitel 2 behandelt. Nach der Diskussion von verschiedenen Methoden, Ähnlichkeitsbedingungen zu gewinnen, werden zunächst die für die gewählte Methode notwendigen Gleichungen beschrieben und erläutert. In dieser Arbeit wurden zum erstenmal auf Basis der Differentialgleichungen die Ähnlichkeitsbedingungen unter Berücksichtigung der thermisch-mechanischen Kopplung hergeleitet. Die Diskussion der erhaltenen Ähnlichkeitsbedingung soll möglichst allgemein zeigen, unter welchen Bedingungen Ähnlichkeit erreicht werden kann. Abschließend erfolgt die Diskussion der Ähnlichkeitsbedingungen.

Weiterhin wurde der Einfluß des Maßstabs auf das Verhalten von Replika-Modellen experimentell untersucht. In den Versuchen wurden der ferritische Stahl St37, der austenitische Stahl X5 CrNi 18 9 und die Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5 benutzt. In den Experimenten ist infolge von Ähnlichkeitsbedingungen, die nicht eingehalten werden können, mit Abweichungen zwischen den verschiedenen Maßstäben zu rechnen. Zur Interpretation der Versuchsergebnisse werden in Kapitel 3 zunächst die Daten der verwendeten Materialien bereit gestellt. Dazu werden quasistatische und dynamische einachsige Zugversuche mit den verwendeten Materialien durchgeführt. Zur Weiterverwendung in einem Rechenmodell werden die gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven außerdem in Form von analytischen Gleichungen dargestellt.

Zur Untersuchung des Maßstabseinflusses beim Aufprall einer Flüssigkeit auf eine deformierbare Struktur werden erstmals Experimente mit ähnlichen Geometrien in verschiedenen Maßstäben durchgeführt. Dazu werden die Modellexperimente FLIPPER¹ in den Maßstäben 1:1, 1:2.5 und 1:10 konzipiert. Bei den FLIPPER-Experimenten wird infolge des Aufpralls einer bestimmten Menge von Flüssigkeit auf eine Prallplatte plastische Deformation verursacht. Durch Vergleich der gemessenen Deformationen in den verschiedenen Maßstäben können direkt Aussagen über den Maßstabseinfluß gewonnen werden.

Bei den Versuchsergebnissen ist hinsichtlich der plastischen Deformationen mit Streuung zu rechnen. Deshalb ist eine Aussage über die Streubänder von besonderer Bedeutung bei der Übertragung eines Ergebnisses aus einem Modellexperiment auf größere Abmessungen. Das erfordert die Durchführung von mehreren nominell identischen Experimenten, was dazu geführt hat, die durchgeführten Experimente möglichst einfach zu gestalten. Die Beschreibung der FLIPPER-Experimente und die Diskussion der Versuchsergebnisse erfolgt in Kapitel 4.

Zur theoretischen Beschreibung einiger Aspekte der Versuchsergebnisse - Streuung und Maßstabseinfluß - wird schließlich ein Rechenmodell entwickelt und in Kapitel 5 beschrieben. Dort findet sich auch ein Vergleich der Rechenergebnisse mit den Versuchsergebnissen.

Die Arbeit wird abgeschlossen mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse und einem Ausblick.

¹FLuid ImPact ExPERiment

Kapitel 2

Ähnlichkeitstheorie

2.1 Definition der Ähnlichkeit

Der Begriff der Ähnlichkeit, wie er aus der Geometrie bekannt ist, läßt sich verallgemeinern, so daß er auch für physikalische Erscheinungen brauchbar ist (siehe Kattanek et al. [38]). Zunächst sei nochmals der Begriff der geometrischen Ähnlichkeit in Erinnerung gerufen:

Zwei geometrische Figuren sind einander ähnlich, wenn die Längen aller gleichliegenden, entsprechenden - homologen - Strecken in einem konstanten Verhältnis zueinander stehen.

Somit gilt geometrische Ähnlichkeit zwischen einem Modell (Index M) und einem Prototyp (Index P), wenn für die Längen l aller homologen Strecken gilt:

$$\frac{l_{1,P}}{l_{1,M}} = \frac{l_{2,P}}{l_{2,M}} = \dots = \frac{l_{n,P}}{l_{n,M}} = \lambda_l = \text{const.} \quad (2.1)$$

Die Größe λ_l bezeichnet dabei die Ähnlichkeitskonstante bezüglich des Längenmaßstabs. Wenn Verwechslungen mit anderen Maßstabsfaktoren ausgeschlossen sind, wird im weiteren nur das Symbol λ für den Längenmaßstab verwendet. Eine äquivalente Definition ergibt sich über die Forderung der Gleichheit von homologen Winkeln zweier geometrischer Figuren. Dabei genügt es jedoch völlig, nur einer der beiden Forderungen zu genügen. Entsprechend kann auch die Ähnlichkeit bezüglich der anderen relevanten Grundgrößen Zeit, Masse, Temperatur definiert und die korrespondierenden Ähnlichkeitskonstanten eingeführt werden.

Nach Weber [39] und Herrmann [40] können folgende Definitionen getroffen werden. Wenn neben der geometrischen Ähnlichkeit auch Ähnlichkeit bezüglich der Zeit besteht, spricht man von kinematischer Ähnlichkeit. Ist bei kinematischer Ähnlichkeit bei Modell und Prototyp zusätzlich die Massenverteilung ähnlich, erhält man die dynamische Ähnlichkeit. Sind weiterhin die Temperaturfelder ähnlich, ist schließlich die thermodynamische Ähnlichkeit erreicht. Besteht gleichzeitig die Ähnlichkeit bezüglich aller Grundgrößenarten, erhält man die sogenannte physikalische Ähnlichkeit, die folgendermaßen definiert ist:

Zwei Vorgänge sind einander physikalisch ähnlich, wenn alle homologen physikalischen Größen beider Vorgänge, die zur vollständigen Beschreibung beider Vorgänge benötigt werden, in einem jeweils konstanten Verhältnis für jede Größenart stehen.

Im Falle der Ähnlichkeit sind für Modell und Prototyp die sogenannten Ähnlichkeitskennzahlen - dimensionslose Kombinationen von an den Vorgängen beteiligten physikalischen Größen - dieselben. Man kann zwischen zwei Arten von Ähnlichkeitskennzahlen unterscheiden. Die Verhältnisse von *gleichartigen* Größen werden Simplexe genannt, dimensionslose Kombinationen *verschiedener* Größenarten nennt man Komplexe.

Umfassende Zusammenstellungen dimensionsloser Kennzahlen finden sich bei Kattanek et al. [38], Land [41] sowie Boucher und Alves [42]. Catchpole und Fulford [43] liefern ohne Anspruch auf Vollständigkeit eine umfangreiche Zusammenstellung von insgesamt 210 dimensionslosen Gruppen aus dem Bereich Wärme-, Massen- und Impulstransport.

Die Ähnlichkeitskennzahlen können auf verschiedene Art gewonnen werden. Dazu gehören die Methode der Verhältnisbildung der beteiligten Größen, auch Fractional Analysis genannt, die Dimensionsanalyse und die Methode der Differentialgleichungen. Auf diese Methoden wird in den nächsten drei Abschnitten näher eingegangen.

2.2 Verhältnisbildung charakteristischer Größen

Einen guten Überblick über diese Vorgehensweise für das Gebiet der Strömungsmechanik und Wärmeübertragung liefern Zierep [44] und Weber [39]. Diese heuristische - auf Erfahrung und Praxis aufbauende - Vorgehensweise besteht aus drei Teilen.

Zunächst erfolgt aufgrund physikalischer Überlegungen eine Zusammenstellung der für das Problem wichtigen Kräfte und Energieflüsse. Danach erfolgt die Analyse welchen auftretenden Größen die verschiedenen Kräfte beziehungsweise Energieflüsse proportional sind. In Tabelle 2.1 sind die Proportionalitäten zu globalen Feldgrößen einiger wichtiger Kräfte und Energieflüsse zusammengestellt. Nachdem diese Proportionalitäten durch für das Problem charakteristische globale Größen ausgedrückt und gleichartige Größen ins Verhältnis zueinander gesetzt sind, erhält man die Ähnlichkeitskennzahlen. Die Deutung der Ähnlichkeitskennzahlen als Kraft- bzw. Energieflußverhältnisse ist in Tabelle 2.2 veranschaulicht.

Die Vorteile dieser Methode sind ihre Anschaulichkeit und der sehr geringe Aufwand mit dem die Ähnlichkeitskennzahlen gewonnen werden können. Es ist jedoch nicht immer möglich, die Ähnlichkeitskennzahlen als Kraft- bzw. Energieflußverhältnisse zu deuten.

Zierep [44] liefert ein Beispiel, daß die Methode der Verhältnisbildung mit Bedacht einzusetzen ist. Er führt die ausgebildete stationäre Rohrströmung an, bei der die Reynolds'sche Zahl im laminaren Strömungszustand nicht als Quotient von Trägheitskraft und Reibungskraft gedeutet werden kann. Da in diesem Fall die Trägheitskraft aufgrund der fehlenden Beschleunigung nicht in Erscheinung tritt, würde eine solche Deutung zu einer Reynolds'schen Zahl gleich Null führen, was offensichtlich Unsinn ist.

Die Methode der Verhältnisbildung kann jedoch gute Dienste leisten, vor allem in Verbindung mit der im nächsten Abschnitt vorgestellten Dimensionsanalyse, wo sie dazu dienen kann, dimensionslose Potenzprodukte in Form von Kraft- beziehungsweise Energieverhältnissen zu gewinnen.

2.3 Dimensionsanalyse

Die Dimensionsanalyse stützt sich auf die physikalischen Dimensionen der physikalischen Größen, die bei einem physikalischen Vorgang eine Rolle spielen. Der Begriff der physikalischen Dimension geht zurück auf Fourier (siehe Macagno [45] und Martins [46]).

Impulstransport	Energietransport
Trägheitskraft $\propto \rho v \frac{\partial v}{\partial x} \propto \rho \frac{v^2}{l}$	Enthalpieänderung $\propto \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$
Zähigkeitskraft $\propto \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \propto \frac{\eta v}{l^2}$	Wärmeleitung $\propto k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \propto \frac{k \Delta T}{l^2}$
Druckkraft $\propto \frac{\partial p}{\partial x} \propto \frac{p}{l}$	Konvektion $\propto \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial x} \propto \frac{\rho v c_p \Delta T}{l}$
Gewichtskraft $\propto \rho g$	Kinetische Energie $\propto \rho v^2$
Kapillarkraft $\propto \frac{\sigma_{OF}}{l^2}$	viskose Reibung $\propto \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \propto \frac{\eta v^2}{l^2}$
Auftriebskraft $\propto g \frac{\Delta \rho}{\rho} \propto \alpha \Delta T$	Wärmestrahlung $\propto \varepsilon \sigma T^4$
Kompressionskraft $\propto \frac{E}{\rho l}$	Reaktionswärme $\propto Q_R$

Tabelle 2.1: Impuls- und Energietransport durch Kräfte und Energieflüsse und deren Proportionalitäten zu globalen Feldgrößen - entnommen bei Zierep [44]

Reynolds'sche Zahl	$\frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Zähigkeitskraft}}$	$\frac{\rho v l}{\eta}$
Euler'sche Zahl	$\frac{\text{Druckkraft}}{\text{Trägheitskraft}}$	$\frac{p}{\rho v^2}$
Froude'sche Zahl	$\frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Schwerkraft}}$	$\frac{v^2}{g l}$
Weber'sche Zahl	$\frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Kapillarkraft}}$	$\frac{\rho v^2 l}{\sigma_{OF}}$
Cauchy'sche Zahl	$\frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Kompressionskraft}}$	$\frac{\rho v^2}{E}$
Grashoff'sche Zahl	$\frac{\text{Trägheitskraft} \cdot \text{Auftriebskraft}}{\text{Reibungskraft}^2}$	$\frac{g l^3 \alpha \Delta T}{\eta^2}$
Peclet'sche Zahl	$\frac{\text{Konvektion}}{\text{Wärmeleitung}}$	$\frac{v l \rho c_p}{k}$
Eckert'sche Zahl	$\frac{\text{Kinetische Energie}}{\text{Enthalpie}}$	$\frac{v^2}{c_p \Delta T}$
Fourier'sche Zahl	$\frac{\text{Enthalpieänderung}}{\text{Wärmeleitung}}$	$\frac{\rho c_p l^2}{k t}$
Damköhler'sche Zahl	$\frac{\text{Reaktionswärme}}{\text{Enthalpieänderung}}$	$\frac{Q_R}{c_p \Delta T}$
Stefan'sche Zahl	$\frac{\text{Wärmestrahlung}}{\text{Wärmeleitung}}$	$\frac{\varepsilon \sigma T^3 l}{k}$

Tabelle 2.2: Einige Ähnlichkeitskennzahlen und ihre Definition als Kraft bzw. Energieverhältnisse - entnommen bei Zierep [44]

Die Dimensionsanalyse kann angewendet werden, wenn die charakteristischen physikalischen Variablen für ein Problem bekannt sind. Dabei spielt es keine Rolle, ob auch ein mathematisches Modell und die entsprechenden Gleichungen zur Beschreibung des Problems bekannt sind oder nicht. Es lassen sich dimensionslose Potenzprodukte der physikalischen Variablen bilden, mit denen das physikalische Problem vollständig beschrieben werden kann.

Die Dimensionsanalyse beruht auf der Theorie der physikalischen Dimensionen, die letztendlich zum Buckingham'schen Π -Theorem [47] führt. Zur Klärung des Dimensionsbegriffs werden in Anhang A einige Bemerkungen zum Wesen der physikalischen Dimensionen gemacht.

2.3.1 Buckingham'sches Π -Theorem

Ein physikalischer Vorgang sei durch eine Anzahl n physikalischer Größen x_i bestimmt. Wenn diese physikalischen Größen durch eine Anzahl r von Grundgrößen ausgedrückt werden können, dann kann dieser Vorgang durch eine Anzahl $p = n - r$ dimensionsloser, von einander unabhängiger Größen, die sogenannten Π -Terme, und einen funktionalen Zusammenhang

$$g(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p) = 0 \quad (2.2)$$

zwischen diesen Π -Termen beschrieben werden. Die Π -Terme haben dabei die Gestalt von Potenzprodukten der beteiligten Größen:

$$\Pi_j = \prod_{i=1}^n x_i^{c_{ij}} \quad j = 1, \dots, p; \quad p = n - r \quad (2.3)$$

Der mathematische Beweis des Π -Theorems findet sich bei Langhaar [48]. Eine andere Beweisführung liefert Brand [49].

Der große Wert des Π -Theorems liegt darin, daß es erlaubt, ein physikalisches Problem mit einer reduzierten Anzahl von dimensionslosen Variablen darzustellen. Dies gilt insbesondere auch, wenn für den betrachteten physikalischen Vorgang kein mathematisches Modell bekannt ist, aus dessen Gleichungen die Ähnlichkeitsbedingungen ebenfalls bestimmt werden können.

Um das Π -Theorem anwenden zu können, müssen nur *alle* physikalischen Größen, von denen das Problem abhängt, bekannt sein. Das Π -Theorem macht jedoch keine Aussage, ob wirkliche alle physikalischen Größen erfaßt wurden, die für das Problem relevant sind. Man erhält auch über die Gestalt der dimensionslosen Variablen keine eindeutige Aussage, so daß es möglich ist, eine prinzipiell beliebige Kombination zu wählen, solange nur die Bedingung der Dimensionslosigkeit erfüllt ist. So ist es leicht möglich Potenzprodukte zu wählen, die für das entsprechende Problem nicht optimal geeignet sind. In diesem Zusammenhang ist es von Vorteil, wenn die Π -Terme auch eine physikalische Bedeutung aufweisen. Hier kann und muß physikalische Einsicht und Erfahrung wertvolle Dienste leisten. Dies kann zum Beispiel in Kombination mit der Methode der Verhältnisbildung aus Abschnitt 2.2 geschehen.

2.4 Methode der Differentialgleichungen

Wenn für ein physikalisches Problem ein mathematisches Modell und die entsprechenden Gleichungen, meist Differentialgleichungen, bekannt sind, können die Ähnlichkeitsbedingungen mit Hilfe der „Methode der Differentialgleichungen“ gewonnen werden. Diese Methode erlaubt es, die am weitesten

reichenden Aussagen bezüglich der Ähnlichkeit physikalischer Vorgänge zu machen. Ähnlichkeitsbedingungen für ein physikalisches Problem, dessen beschreibende Differentialgleichungen sowie dessen Anfangs.- und Randbedingungen bekannt sind, gewinnt man, wenn man diese in eine dimensionslose Darstellung überführt.

In den dimensionslosen Gleichungen treten dann neben den dimensionslosen Variablen zusätzlich bestimmte dimensionslose Parameter, die Ähnlichkeitskennzahlen auf. Ähnlichkeit zwischen einem Modell und einem Prototyp ist in diesem Fall erreicht, wenn bei identischen dimensionslosen Anfangs.- und Randbedingungen auch die dimensionslosen Lösungen der Differentialgleichungen identisch sind. Das kann nur erreicht werden, wenn die Ähnlichkeitskennzahlen in den Differentialgleichungen identisch sind.

In der dimensionslosen Darstellung der Differentialgleichungen kann auch mit mehr oder weniger großem Aufwand eine Größenordnungsabschätzung für verschiedene Terme durchgeführt werden. Anschließend können Terme mit geringem Einfluß aus den Differentialgleichungen gestrichen werden und so eventuell eine erhebliche Vereinfachung des Problems erzielt werden. Ein Beispiel für eine solche erfolgreiche Vereinfachung stellen die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen für die ebene Platte im Falle einer großen Reynolds'schen Zahl dar, bei denen die partiellen Navier-Stokes'schen Differentialgleichungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen vereinfacht werden konnten. Als Beispiel für den Fall kleiner Reynolds'scher Zahl sei die Stokes'sche Näherung genannt.

Das zugrundeliegende Problem einer Festkörperstruktur, die sich unter diesem Aufprall einer Flüssigkeit plastisch verformt, kann mit Hilfe der Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik und geeigneter Materialmodelle mathematisch beschrieben werden. Diese sollen in den folgenden Abschnitten als Beispiel zur Herleitung der Ähnlichkeitskennzahlen aus den Differentialgleichungen dienen. Diese Grundgleichungen werden zunächst beschrieben und erläutert.

2.5 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

Die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik basieren auf Bilanzen von Masse, Impuls und Energie, die unter Verwendung der Einstein'schen Summationskonvention folgendermaßen dargestellt werden können (siehe z.B. Malvern [50]):

- Massenbilanz:

$$\dot{\rho} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0. \quad (2.4)$$

Hier bezeichnet ρ die Massendichte, x_k die kartesischen Koordinaten und v_k die Komponenten der Geschwindigkeit. Der Punkt steht für die totale Ableitung nach der Zeit.

- Impulsbilanz (Cauchy's erstes Bewegungsgesetz):

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_k} + \rho (f_l - \dot{v}_l) = 0. \quad (2.5)$$

Dabei steht σ_{kl} für den Cauchy'schen Spannungstensor¹ (Momentankonfiguration). Der Term f_l berücksichtigt eingeprägte Volumenkräfte, wobei hier nur die Gewichtskraft $f_l = g n_l$ betrachtet werden soll. Hierbei ist n_l der Einheitsvektor in der Wirkungsrichtung der Fallbeschleunigung g .

¹Die Drehimpulsbilanz liefert weiterhin die Symmetrie des Cauchy'schen Spannungstensors

- Energiebilanz:

$$\rho \dot{e} = \sigma_{kl} d_{kl} + \rho r - \frac{\partial q_k}{\partial x_k}. \quad (2.6)$$

Hier steht e für die innere Energie, r für eine innere Wärmequelle, q_k für die Komponenten des Wärmestromvektors und d_{kl} für den Tensor der Deformationsgeschwindigkeit mit

$$d_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right). \quad (2.7)$$

Bei der Dissipation von mechanischer Energie infolge plastischer Verformung des Werkstoffes beziehungsweise viskoser Reibung muß neben den Erhaltungsgleichungen auch der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik in der Form

$$\rho \dot{s} - \rho \frac{r}{T} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{q_k}{T} \right) \geq 0 \quad (2.8)$$

erfüllt sein. Das erfordert die zusätzliche Einführung der Zustandsvariablen Temperatur T und Entropie s .

Üblicherweise werden die Größen f_l und r vorgegeben und es verbleibt das Problem der Bestimmung der unbekanntten Felder

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(x_k, t), & d_{kl} &= D_{kl}(x_k, t), \\ v_k &= v_k(x_k, t), & q_k &= q_k(x_k, t), \\ \sigma_{kl} &= \sigma_{kl}(x_k, t), & T &= T(x_k, t), \\ e &= e(x_k, t), & s &= s(x_k, t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Durch die Definitionsgleichungen (2.7) für den Tensor der Deformationsgeschwindigkeit sowie durch Ausnützen der Symmetrieeigenschaft des Cauchy'schen Spannungstensors kann die Anzahl der Unbekannten reduziert werden. Neben dem Gleichungssystem bestehend aus den 5 Bilanzgleichungen (2.4), (2.5), (2.6) werden somit noch 10 weitere Gleichungen benötigt, um das System zu schließen. Zusätzlich ist noch Gleichung (2.8) zu beachten.

Die bisher angeschriebenen Gleichungen gelten allgemein für ein beliebiges klassisches Kontinuum. Polare Kontinua, zum Beispiel Cosserat-Kontinua, mit verteilten Volumen- oder Oberflächenmomenten, mit denen z.B. ein magnetisch polarisiertes Material in einem äußeren Magnetfeld behandelt werden kann (Becker und Bürger [51]), werden nicht betrachtet. Das Verhalten des Kontinuums bei Verformung muß durch weitere Gleichungen - die Materialgleichungen oder konstitutiven Gleichungen - beschrieben werden. Dies geschieht in den folgenden Abschnitten.

2.6 Materialgleichungen

2.6.1 Wärmefluß

Zunächst wird die Beziehung zwischen dem Wärmefluß q_k und dem Temperaturfeld T angegeben. Es soll für Flüssigkeit und Festkörper isotropes Verhalten und nicht zu große Temperaturgradienten vorausgesetzt werden, so daß die Wärmeleitung im Kontinuum dem Fourier'schen Gesetz

$$q_k = -k \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad (2.10)$$

gehört. Die Wärmeleitfähigkeit k wird als konstant vorausgesetzt.

2.6.2 Materialgleichungen für das Fluid

2.6.2.1 Spannungstensor für ein Newton'sches Fluid

Es soll ein linearer Zusammenhang zwischen den Spannungen σ_{kl} und dem Tensor der Deformationsgeschwindigkeit angenommen werden. Man erhält dann ein sogenanntes Newton'sches Fluid. Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaft von σ_{kl} und d_{kl} kann die Materialgleichung durch das Navier-Poisson-Gesetz als

$$\sigma_{kl} = -p\delta_{kl} + 2\eta d_{kl} + \lambda d_{ii}\delta_{kl} \quad (2.11)$$

dargestellt werden (siehe z.B. Malvern [50]). Dabei charakterisieren die beiden unabhängigen Parameter η und λ die Viskosität des Fluids, δ_{kl} steht für das Kronecker-Symbol und p für den Druck. Der mittlere im Fluid wirkende Druck \bar{p} , definiert als Spur des Spannungstensors, weicht dabei infolge der Volumenviskosität $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\eta$ vom thermodynamischen Druck p folgendermaßen ab:

$$\bar{p} = p - \kappa d_{kk}. \quad (2.12)$$

Die Volumenviskosität spielt in Schockwellen oder bei akustischen Phänomenen eine Rolle. Üblicherweise wird die Volumenviskosität vernachlässigt, wodurch sich zwischen den Parametern η und λ die Beziehung

$$\lambda = -\frac{2}{3}\eta \quad (2.13)$$

ergibt. Der Spannungstensor vereinfacht sich damit zu

$$\sigma_{kl} = -p\delta_{kl} + 2\eta \left(d_{kl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}d_{ii} \right). \quad (2.14)$$

In dieser Form soll der Spannungstensor für die Flüssigkeit weiter verwendet werden.

2.6.2.2 Zustandsgleichung

Zur Kopplung von Druck und Dichte wird noch eine Zustandsgleichung für das Fluid benötigt. Für eine Flüssigkeit mit kleinen Dichteänderungen kann die folgende lineare Zustandsgleichung angewendet werden:

$$p - p_R = K \left(\frac{\rho}{\rho_R} - 1 \right). \quad (2.15)$$

Die Größen p_R und ρ_R sind dabei Referenzgrößen für den Druck p und die Dichte ρ . Die Größe K kennzeichnet die Kompressibilität der Flüssigkeit.

Die innere Energie e der Flüssigkeit sei als

$$\frac{\partial e}{\partial T} = c_v \quad (2.16)$$

angenommen, wobei c_v für die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen steht.

2.6.3 Materialgleichungen für den Festkörper

Um das Verhalten des Festkörpers zu beschreiben werden Gleichungen eingeführt, die die auftretenden Spannungen mit den Deformationen beziehungsweise Verzerrungen in Beziehung setzen. Es soll dabei isotropes Materialverhalten vorausgesetzt werden. Vernachlässigt werden Bruch- und Schädigungsvorgänge. Weiterhin soll die Betrachtung auf den Fall kleiner Deformationen beschränkt sein, obwohl bei dem zugrunde liegenden Problem mit großen plastischen Deformationen zu rechnen ist. Über die Auswirkungen der damit verbundenen Vernachlässigung auf die Herleitung der Ähnlichkeitsbedingungen wird in Anhang B ein Kommentar abgegeben.

Die Verzerrung ε_{kl} sind definiert als

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right], \quad (2.17)$$

wobei u_i für die Verschiebungen steht. Die Annahme kleiner Verzerrungen erlaubt die additive Aufspaltung

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^p \quad (2.18)$$

in einen elastischen und plastischen Anteil. Weiterhin gilt bei kleinen Verzerrungen die Beziehung

$$d_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}. \quad (2.19)$$

Die Materialgleichungen können zum Beispiel als funktionale Zusammenhänge vorgegeben werden, in denen der aktuelle Belastungszustand und die Vorgeschichte des Materials berücksichtigt wird. Einschränkungen bezüglich der Gestalt der funktionalen Zusammenhänge liefern neben physikalischer Einsicht der 2. Hauptsatz (2.8) und experimentelle Ergebnisse. Nachdem die Gestalt der Funktionen bekannt ist, kann zu geeigneten Lösungsverfahren gegriffen werden. Weiteres findet sich zum Beispiel bei Ionescu und Sofonea [52].

Es soll aber zur Beschreibung des Materialverhaltens im nächsten Abschnitt ein anderer Ansatz verfolgt werden.

2.6.3.1 Interne Variablen im Falle kleine Deformationen

Eine Möglichkeit der Behandlung des plastischen Verhaltens von Festkörpern im Rahmen einer thermodynamisch begründeten Theorie ist die Beschreibung durch den aktuellen Belastungszustand und eine Reihe von sogenannten Internen Variablen α_{kl}^ν (siehe Lemaitre und Chaboche [53], Lehmann [54],[55],[56], Irschik und Ziegler [57]). Als Interne Variablen kommen zum Beispiel die dissipierte plastische Energie oder die akkumulierte plastische Dehnung in Frage. Die Internen Variablen werden durch einen Satz von Entwicklungsgleichungen bestimmt.

Die Modellierung des Materialverhaltens kann mit dem folgenden Satz von Gleichungen geschehen:

$$\begin{aligned} \sigma_{kl} &= \sigma_{kl}(\varepsilon_{mn}, T, \alpha_{mn}^\nu), \\ e &= e(\varepsilon_{mn}, T, \alpha_{mn}^\nu), \\ s &= s(\varepsilon_{mn}, T, \alpha_{mn}^\nu), \\ \dot{\alpha}_{kl}^\xi &= \Omega_{kl}^\xi(\varepsilon_{mn}, T, \alpha_{mn}^\nu), \quad \xi = 1 \dots p, \quad \nu = 1 \dots p, \end{aligned} \quad (2.20)$$

wobei p eine genügend große Zahl ist, um das vorliegende Materialverhalten zu charakterisieren.

Im weiteren erweist es sich als zweckmäßig, für das thermodynamische Potential die Freie Energie

$$\Psi = \Psi(T, \varepsilon_{kl}, \alpha_{kl}^\nu) = e - Ts \quad (2.21)$$

zu verwenden. Die totale Ableitung der Freien Energie erhält man zu:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{kl}^\nu} \dot{\alpha}_{kl}^\nu = \dot{e} - \dot{T}s - T\dot{s}. \quad (2.22)$$

Wenn der zweite Hauptsatz erfüllt sein soll, muß für alle Prozesse als hinreichende Bedingung für die Spannung

$$\sigma_{kl} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (2.23)$$

und für die Entropie

$$s = - \frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (2.24)$$

gelten. Weiterhin muß für die Dissipation, die als Summe aus mechanischer und thermischer Dissipation beschrieben werden kann, folgendes erfüllt sein:

$$\underbrace{-\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{kl}^\nu} \dot{\alpha}_{kl}^\nu}_{\text{Mechanische Dissipation}} + \underbrace{\frac{k}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2}_{\text{Thermische Dissipation}} \geq 0. \quad (2.25)$$

Die Herleitung dieser Gleichung findet sich bei Coleman und Gurtin [58]. Im vorliegenden Fall, bei dem die Temperaturleitfähigkeit k als unabhängig von den Internen Variablen angenommen wird, muß sowohl

$$-\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{kl}^\nu} \dot{\alpha}_{kl}^\nu \geq 0 \quad \text{als auch} \quad \frac{k}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2 \geq 0 \quad (2.26)$$

erfüllt sein, wobei die zweite Bedingung auf die wohlbekannte Einschränkung $k \geq 0$ führt.

In diesem Zusammenhang werden die $\dot{\alpha}_{kl}^\nu$ auch als Flußvariablen und die $-\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{kl}^\nu}$ als duale Variablen oder thermodynamische Kräfte bezeichnet. Die externen oder beobachtbaren Variablen ε_{kl} und T sind der Spannung σ_{kl} bzw. der Entropie s assoziiert. Die den Internen Variablen assoziierten Variablen werden definiert über die Festlegung des thermodynamischen Potentials $\Psi(T, \varepsilon_{kl}, \alpha_{kl}^\nu)$.

Es stellt sich das Problem geeignete Entwicklungsgleichungen für die α_{kl}^ν zu finden, die die hinreichenden und notwendigen Bedingungen erfüllen, um die Gültigkeit der ersten Bedingung in Gleichung (2.26) für alle möglichen Prozesse sicherzustellen. Diese Aufgabe wird durch die Einführung eines Dissipationspotentials $\varphi(\dot{\alpha}_{kl}^\nu, T)$ zusammen mit einer Normalitätsbedingung erheblich vereinfacht (Lemaitre und Chaboche [53]). Dann können die dualen Variablen $-\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{kl}^\nu}$ aus dem Gradienten *grad* φ normal zu Flächen $\varphi = \text{const.}$ gewonnen werden. Um den Zweiten Hauptsatz zu erfüllen, muß φ eine nicht-negative, konvexe Funktion sein, die im Ursprung verschwindet.

Es hat sich gezeigt, daß die Stoffgesetze einfacher als Entwicklungsgleichungen für die Flußvariablen anstelle der Dualen Variablen ausgedrückt werden können. Durch eine partielle Legendre-Transformation

(siehe z.B. Maugin [59]) kann das Dissipationspotential als Funktion der dualen Variablen erhalten werden. Mit dem so gewonnenen Dissipationspotential $\hat{\varphi}^* \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{kl}^\nu}, T \right)$ lassen sich die Internen Variablen aus

$$\dot{\alpha}_{kl}^\nu = \rho \frac{\partial \hat{\varphi}^* \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{kl}^\nu}, T \right)}{\partial \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{kl}^\nu}} \quad (2.27)$$

gewinnen. Um Gleichung (2.26) zu erfüllen, muß ebenfalls gefordert werden, daß $\hat{\varphi}^* \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{kl}^\nu}, T \right)$ eine nicht negative, konvexe Funktion ist, die im Ursprung verschwindet (Lemaitre und Chaboche [53]).

Da es sich bei den betrachteten Vorgängen um einmalige dynamische Belastungen handelt, seien Schädigungsvorgänge und Erholungsvorgänge ausgeschlossen und die plastische Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}_{kl}^p$ soll als einzige Interne Variable betrachtet werden. Das ist hier ausreichend, das plastische Verhalten vieler Metalle zu beschreiben. Als Duale Variable erhält man dann die Spannung

$$-\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{kl}^\nu} = \sigma_{kl} \quad (2.28)$$

Bei isotropem Materialverhalten kann die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in bekannter Weise (siehe z.B. Malvern [50]) als

$$\begin{aligned} \sigma_{kl} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk}^e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{kl}^e - \beta(T - T_R) \delta_{kl} \\ \text{mit } \beta &= \frac{E}{1-2\nu} \alpha \end{aligned} \quad (2.29)$$

geschrieben werden, wobei E für den Elastizitätsmodul, ν für die Poisson'sche Zahl, α für den thermischen Ausdehnungskoeffizienten und T_R für eine Referenztemperatur stehen.

Durch Einsetzen von (2.22) in die Energiegleichung (2.6) erhält man unter Beachtung der Gleichungen (2.10), (2.18), (2.19), (2.23), (2.24), (2.28) und (2.29) die thermomechanisch gekoppelte Energiegleichung zu (siehe z.B. Allen [60])

$$\beta T \varepsilon_{ii}^e + \rho c_\varepsilon \dot{T} - \sigma_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl}^p - k \frac{\partial^2 T}{\partial x_k^2} - \rho r = 0, \quad (2.30)$$

wobei $c_\varepsilon = -T \partial^2 \Psi / \partial T^2$ für die spezifische Wärme bei konstanter elastischer Dehnung steht. Mit Hilfe dieser Gleichung kann der Temperaturanstieg im Material infolge der dissipierten Verformungsenergie berechnet werden. Aus dem verwendeten einfachen Ansatz mit der plastischen Dehnung als der einzigen Internen Variablen folgt, daß sämtliche während der plastischen Verformung dissipierte Energie in Wärme umgewandelt wird. Messungen haben aber ergeben, daß die Umwandlung nicht vollständig geschieht, sondern ein kleiner Teil der Verformungsenergie im Material latent gespeichert wird. Diese Speicherung kann zum Beispiel in den durch Versetzungen induzierten Spannungsfeldern erfolgen. Farren und Taylor [61] haben gezeigt, daß bei Stahl nur etwa 87% der dissipierten Energie in Wärme umgewandelt wird. Für Aluminium werden Werte von 92% genannt. Taylor und Quinney [62] nennen für ferritischen Stahl Werte zwischen 88% und 93%, wobei die größeren Werte bei größeren Dehnungen beobachtet wurden. Neben diesen klassischen Arbeiten findet sich ein umfangreicher Überblick zur gespeicherten Energie bei Bever et al. [63]. Diese Vorgänge können auf der Basis des hier verwendeten einfachen Ansatzes

nicht modelliert werden. Aus diesem Grund wird in Gleichung (2.30) die mechanische Dissipation $\sigma_{kl}\dot{\epsilon}_{kl}^p$ oft durch den Ansatz

$$\xi \sigma_{kl} \dot{\epsilon}_{kl}^p, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (2.31)$$

(siehe z. B. Allen [60], Lehmann [56]), ersetzt, wobei die Größe ξ eine Art Wirkungsgrad darstellt. Es gibt jedoch auch die thermodynamisch fundierte Möglichkeit, die Modellierung der im Material gespeicherten Energie durch Hinzunahme weiterer Interner Variablen vorzunehmen. Dies geschieht zum Beispiel in Arbeiten von Bodner und Lindenfeld [64] oder Chaboche [65], [66].

2.6.3.2 Entwicklungsgleichung für die plastische Dehnung

Im weiteren soll zeitabhängiges Materialverhalten mit isotroper Verfestigung vorausgesetzt werden. Bei isotropem Verfestigungsverhalten genügt es, die Expansion der Fließfläche im Spannungsraum mit Hilfe einer skalaren Variable zu beschreiben. Kinematische Verfestigung, bei der eine Translation der Fließfläche im Spannungsraum vorliegt, wird nicht behandelt, da es sich bei den betrachteten Vorgängen um einmalige dynamische Belastungen und nicht um zyklische Vorgänge handelt. Aus demselben Grund werden Erholungsvorgänge im Werkstoff während und nach der Entlastung nicht betrachtet.

Es wird weiter wie üblich davon ausgegangen, daß sich das Einsetzen der plastischen Verformung auch bei einem mehrdimensionalen Spannungszustand auf die im einachsigen Zugversuch ermittelte Fließspannung σ_F zurückführen läßt. Dazu muß eine skalare Vergleichsspannung σ_{eq} eingeführt werden. Bei dem hier vorausgesetzten isotropen Materialverhalten muß sich die Vergleichsspannung als Funktion der Invarianten des Spannungstensors ergeben.

Da Metalle im allgemeinen inkompressibles Verhalten bei plastischer Verformung zeigen und das Einsetzen des Fließens unabhängig vom hydrostatischen Spannungszustand ist (siehe Lode [67]), ergibt sich eine Fließbedingung, die unabhängig von der ersten Invariante des Spannungstensors ist. Es genügt, den deviatorischen Anteil des Spannungstensors

$$\sigma_{kl}^D = \sigma_{kl} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} \delta_{kl} \quad (2.32)$$

zu verwenden. Das führt zur Vergleichsspannung nach von Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{kl}^D \sigma_{kl}^D}. \quad (2.33)$$

Hier tritt nur die zweite Invariante des Spannungsdeviators auf. Eine Abhängigkeit von der dritten Invarianten wird nicht betrachtet.

Die isotrope Verfestigung kann mit Hilfe einer skalaren Funktion $R(p)$ beschrieben werden, wobei

$$p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{kl}^p \dot{\epsilon}_{kl}^p} dt \quad (2.34)$$

für die akkumulierte plastische Dehnung steht. Dieser Verfestigungsterm stellt eine im allgemeinen nichtlineare Funktion dar. Unter diesen Voraussetzungen kann der Übergang vom elastischen zum plastischen Bereich durch eine Fließfläche der Form

$$f = \sigma_{eq} - R(p) - \sigma_F = 0 \quad (2.35)$$

dargestellt werden.

Bei viskoplastischen Materialverhalten wird im allgemeinen davon ausgegangen, daß zwischen dem Dissipationspotential und der Fließfunktion f eine Beziehung besteht. Für das Dissipationspotential soll

$$\hat{\varphi}^*(\sigma_{kl}, T) = \Omega(\langle f \rangle, T) \quad (2.36)$$

mit

$$\langle f \rangle = \begin{cases} \sigma_{eq} - R(p) - \sigma_F; & f \geq 0 \\ 0 & ; f < 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

angenommen werden. Die Entwicklungsgleichung für die plastische Dehnung ε_{kl}^p ergibt sich, wenn die Temperatur T als Parameter angesehen wird, zu

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}. \quad (2.38)$$

Ein Überblick für verschiedene viskoplastische Entwicklungsgleichungen findet sich zum Beispiel bei Chaboche [68]. Es soll im weiteren die folgende viskoplastische Entwicklungsgleichung, die auf Überlegungen von Perzyna [69] zurückgeht, benutzt werden. Für das Dissipationspotential werden dabei unter anderem Ansätze der Form

$$\Omega = \frac{A\sigma_N}{n+1} \left(\frac{f}{\sigma_N} \right)^{n+1}; \quad n \geq 1 \quad (2.39)$$

verwendet. Die Größe σ_N stellt im Gegensatz zur Größe A keinen Materialparameter dar, sondern dient nur zur Normierung. Die viskoplastische Entwicklungsgleichung ergibt sich dann in der Form

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = \begin{cases} A \left(\frac{f}{\sigma_N} \right)^n \frac{3}{2} \frac{\sigma_{kl}^D}{\sigma_{eq}} & , f > 0 \\ 0 & , f \leq 0 \end{cases}. \quad (2.40)$$

Der Term $A \left(\frac{f}{\sigma_N} \right)^n$ gibt dabei den Betrag des plastischen Dehnungsincrementes an, während der Term $\frac{3}{2} \frac{\sigma_{kl}^D}{\sigma_{eq}}$ die Richtung des plastischen Dehnungsincrementes im deviatorischen Spannungsraum liefert. Nach Einführung der Größe

$$\eta_{vp,n} = \frac{\sigma_N}{A^{1/n}}, \quad (2.41)$$

die ein Maß für die Quasiviskosität im Materialverhalten darstellt, kann die Entwicklungsgleichung auch in der Form

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = \begin{cases} \left(\frac{f}{\eta_{vp,n}} \right)^n \frac{3}{2} \frac{\sigma_{kl}^D}{\sigma_{eq}} & , f > 0 \\ 0 & , f \leq 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

geschrieben werden.

Zur Veranschaulichung des mit diesem Materialmodell beschriebenen Materialverhaltens werden die Gleichungen für den eindimensionalen Fall noch weiter erläutert. Die plastische Dehnungsrate läßt sich für den eindimensionalen Spannungszustand zu

$$\dot{\varepsilon}^p = \begin{cases} \left(\frac{f}{\eta_{vp,n}} \right)^n, & f > 0 \\ 0, & f \leq 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

mit

$$f = \sigma - R(\varepsilon^p) - \sigma_F \quad (2.44)$$

vereinfachen. Aufgelöst nach der Spannung erhält man

$$\sigma = \sigma_F + R(\varepsilon^p) + \frac{A^{1/n}}{\sigma_N} (\dot{\varepsilon}^p)^{1/n} = \sigma_F + R(\varepsilon^p) + \eta_{vp,n} (\dot{\varepsilon}^p)^{1/n}. \quad (2.45)$$

Die Beschreibung der Viskoplastizität mit Hilfe des verwendeten Modells bewirkt also bei konstanter plastischer Dehnungsgeschwindigkeit eine Erhöhung der anliegenden Spannung σ gegenüber dem statischen Fall (d.h. $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$) um die sogenannte Überspannung oder viskose Spannung σ_{vp} mit

$$\sigma_{vp} = \frac{A^{1/n}}{\sigma_N} (\dot{\varepsilon}^p)^{1/n} = \eta_{vp,n} (\dot{\varepsilon}^p)^{1/n} = \eta_{vp,n} (\dot{\varepsilon}^p)^m; \quad \text{mit } m = 1/n. \quad (2.46)$$

Mit diesem viskoplastischen Stoffgesetz kann Materialverhalten beschrieben werden wie es in Abbildung 2.1 dargestellt ist. Darin sind für den eindimensionalen Fall die Spannungen über der plastischen Dehnung schematisch dargestellt. Man erkennt den Anstieg der Spannung mit zunehmender plastischer Dehnungsgeschwindigkeit infolge einer Parallelverschiebung der statischen Spannungs-Dehnungs-Kurve um den Betrag σ_{vp} .

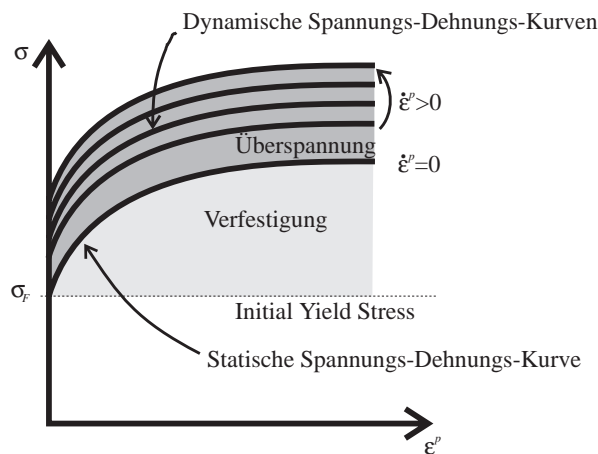


Abbildung 2.1: Schematische Spannungs-Dehnungs-Kurven entsprechend dem viskoplastischen Stoffgesetz

Um das Problem vollständig zu definieren, müssen noch die Anfangs- und Randbedingungen vorgegeben werden, was im nächsten Abschnitt für Festkörper und Flüssigkeit getrennt erfolgt.

2.7 Anfangs- und Randbedingungen

2.7.1 Festkörper

Zur Definition der Anfangsbedingungen sei der unverformte Ruhezustand des Körpers gewählt, der sich auf einer konstanten Referenztemperatur befindet. Für den Festkörper mit dem Volumen V und der Oberfläche B bedeutet das die Vorgabe des Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und des Temperaturfeldes

$$\begin{aligned} u_k(x_k, t_0) &= 0 \\ \frac{\partial u_k(x_k, t_0)}{\partial t} &= 0 \\ T(x_k, t_0) &= T_R \quad x_k \in V \end{aligned} \quad (2.47)$$

sowie Vorgabe der Dichteverteilung $\rho(x_k, t)$ aus Gleichung (2.9) zum Zeitpunkt $t = t_0$. Weiterhin müssen auch die Anfangswerte der Internen Variablen vorgegeben werden.

Als Randbedingungen müssen entweder die Spannungen

$$\sigma_{kl}(x_k, t)n_l = T_k; \quad x_k \in B_\sigma \quad (2.48)$$

auf der Oberfläche B_σ mit dem Normalenvektor n_l oder Verschiebungen

$$u_k(x_k, t) = U_k; \quad x_k \in B_u \quad (2.49)$$

auf der Oberfläche B_u vorgegeben werden, wobei

$$B = B_\sigma \cup B_u \quad (2.50)$$

gelten muß. Für das Temperaturfeld ergeben sich die Randbedingungen entweder durch die direkte Vorgabe der Temperatur

$$T(x_k, t) = T_T; \quad x_k \in B_T \quad (2.51)$$

auf der Oberfläche B_T oder des Temperaturgradienten

$$k \frac{\partial T}{\partial x_k}(x_k, t)n_l = \dot{q}; \quad x_k \in B_G \quad (2.52)$$

auf der Oberfläche B_G , wobei \dot{q} für den Wärmestrom steht. Hier muß

$$B = B_T \cup B_G \quad (2.53)$$

gelten.

2.7.2 Flüssigkeit

Als Anfangsbedingung vor dem Aufprall auf den Festkörper sei für die Flüssigkeit eine gleichförmige Geschwindigkeit v_R angenommen. Bezüglich des Temperaturfeldes gelten für die Flüssigkeit dieselben Anfangs- und Randbedingungen wie beim Festkörper im vorangegangenen Abschnitt. Für das viskose Fluid gilt an einer festen Wand die Haftbedingung

$$v_k(x_k, t) = 0; \quad x_k \in B_{\text{Wand}} \quad (2.54)$$

An der freien Oberfläche des Fluids gilt folgende Randbedingung:

$$\left(\sigma_{kl}^{\text{innen}}(x_k, t) - \sigma_{kl}^{\text{außen}}(x_k, t) + 2\gamma\kappa(x_k, t) \right) n_l = 0; \quad x_k \in B_{\text{frei}}, \quad (2.55)$$

wobei γ für den als konstant angenommenen Koeffizienten der Oberflächenspannung, κ für die Krümmung der Oberfläche und n_l für den Normalenvektor steht. Die Oberflächenspannung führt im reibungsfreien Fall zu einem Drucksprung über die freie Flüssigkeitsoberfläche, der bei konstantem Koeffizienten γ um so größer ist je größer die Krümmung der Oberfläche ist. Hier gilt wiederum

$$B = B_{\text{Wand}} \cup B_{\text{frei}}. \quad (2.56)$$

2.7.3 Kopplung

Solange Kontakt besteht müssen an der Grenzfläche zwischen Fluid und Festkörper aufgrund der Haftbedingung die Verschiebungen von Festkörper und Fluid dieselben sein. Es gilt:

$$(u_k)_{\text{Fluid}} = (u_k)_{\text{Festkörper}}. \quad (2.57)$$

Weiterhin muß die Stetigkeit der Spannungen gefordert werden:

$$(\sigma_{kl}n_k)_{\text{Fluid}} = (\sigma_{kl}n_k)_{\text{Festkörper}}. \quad (2.58)$$

Außerdem ist an der Grenzfläche die Stetigkeit auftretender Wärmeflüsse

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial x_k} n_k \right)_{\text{Fluid}} = \left(k \frac{\partial T}{\partial x_k} n_k \right)_{\text{Festkörper}} \quad (2.59)$$

und die Stetigkeit des Temperaturfeldes

$$T_{\text{Fluid}} = T_{\text{Festkörper}} \quad (2.60)$$

zu beachten.

2.8 Ableitung und Diskussion der Ähnlichkeitsbedingungen

2.8.1 Dimensionslose Größen

Für die Ableitung der Ähnlichkeitsbedingung müssen die Grundgleichungen in eine dimensionslose Form überführt werden. Dazu müssen Referenzgrößen gewählt werden. Im vorliegenden Fall könnten Referenzwerte für die Grundgrößen des Maßsystems Länge, Zeit, Masse und Temperatur eingeführt werden. Aufgrund der Struktur der Grundgleichung ist die Wahl der folgenden Referenzgrößen

$$\begin{aligned} \text{Referenzlänge:} & \quad l_R, \\ \text{Referenzgeschwindigkeit:} & \quad v_R, \\ \text{Referenzdichte:} & \quad \rho_R, \\ \text{Referenztemperatur:} & \quad T_R \end{aligned} \quad (2.61)$$

günstiger. Damit erhält man für verschiedene Größen in dimensionsloser Form die in Tabelle 2.3 zusammengestellten Ausdrücke. Die dimensionslosen Größen werden dabei durch eine Tilde gekennzeichnet.

Dichte	$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_R}$	Masse	$\tilde{m} = \frac{m}{\rho_R l_R^3}$
Geschwindigkeit	$\tilde{v} = \frac{v}{v_R}$	Beschleunigung	$\tilde{a} = \frac{a}{v_R^2 / l_R}$
Länge	$\tilde{l} = \frac{l}{l_R}$	Dehnung	$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$
Zeit	$\tilde{t} = \frac{t}{l_R / v_R}$	Dehnungsrate	$\tilde{\dot{\varepsilon}} = \frac{\dot{\varepsilon}}{v_R / l_R}$
Kraft	$\tilde{F} = \frac{F}{\rho_R v_R^2 l_R^2}$	Spannung	$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\rho_R v_R^2}$
Temperatur	$\tilde{T} = \frac{T}{T_R}$	Wärmeausdehnungskoeffizient	$\tilde{\alpha} = \alpha T_R$

Tabelle 2.3: Definition der dimensionslosen Größen

Für verschiedene abgeleitete Größen sollen noch die Maßstabsfaktoren angegeben werden. Ausgehend von den Maßstabsfaktoren der Referenzgrößen

$$\begin{aligned}
 \text{Längenmaßstab} & : \lambda_l = \frac{l_P}{l_M} \\
 \text{Geschwindigkeitsmaßstab} & : \lambda_v = \frac{v_P}{v_M} \\
 \text{Dichtemaßstab} & : \lambda_\rho = \frac{\rho_P}{\rho_M} \\
 \text{Temperaturmaßstab} & : \lambda_T = \frac{T_P}{T_M}
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

erhält man als Maßstabsfaktoren für die abgeleiteten Größen die in Tabelle 2.4 zusammengefaßten Ausdrücke.

Im weiteren wird davon ausgegangen, daß Modell und Prototyp mit dem Längenmaßstab λ_l geometrisch ähnlich skaliert sind. Die Herleitung und Diskussion der Ähnlichkeitsbedingungen erfolgt für die Flüssigkeit und den Festkörper einschließlich ihrer Anfangs- und Randbedingungen getrennt. Auf die Kopplung der beiden Medien wird separat eingegangen.

2.8.2 Flüssigkeit

2.8.2.1 Dimensionslose Gleichungen

Auf die Ähnlichkeitsbedingung für die Flüssigkeit soll hier nur relativ kurz eingegangen werden, weil sich für diesen klassischen Bereich der Ähnlichkeitsmechanik in der Literatur dazu genügend Quellen finden lassen (siehe z.B. Zierep [44], Gukhman [70] oder Szeucs [71]).

Es sei vorausgesetzt, daß die Temperaturunterschiede im Fluid nur gering sind, so daß die Wärmeleitung im Fluid vernachlässigt werden kann. Die Energiegleichung wird ebenfalls nicht weiter berücksichtigt. Nach Einführung von Bezugsgrößen für den Koeffizient der Oberflächenspannung γ_R , die Zähigkeit η_R , die Fallbeschleunigung g_R und der Kompressibilität K_R können die dimensionslosen Stoffgrößen als Simplexe eingeführt werden:

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma_R}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{\eta_R}, \quad \tilde{g} = \frac{g}{g_R} \text{ und } \tilde{K} = \frac{K}{K_R} \quad . \tag{2.63}$$

Größe	Definition des Maßstabsfaktors	Maßstabsfaktor
Zeit	$\lambda_t = \frac{t_P}{t_M}$	$\lambda_t = \frac{\lambda_v}{\lambda_l}$
Masse	$\lambda_m = \frac{m_P}{m_M}$	$\lambda_m = \frac{\lambda_\rho}{\lambda_l^3}$
Kraft	$\lambda_F = \frac{F_P}{F_M}$	$\lambda_F = \lambda_\rho \lambda_v^2 \lambda_l^2$
Moment	$\lambda_M = \frac{M_P}{M_M}$	$\lambda_M = \lambda_\rho \lambda_v^2 \lambda_l^3$
Impuls	$\lambda_I = \frac{I_P}{I_M}$	$\lambda_I = \lambda_\rho \lambda_v \lambda_l^3$
Energie	$\lambda_e = \frac{e_P}{e_M}$	$\lambda_e = \lambda_\rho \lambda_v^2 \lambda_l^3$
Spannung	$\lambda_\sigma = \frac{\sigma_P}{\sigma_M}$	$\lambda_\sigma = \lambda_\rho \lambda_v^2$
Dehnung	$\lambda_\varepsilon = \frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_M}$	$\lambda_\varepsilon = 1$
Dehnungsrate	$\lambda_{\dot{\varepsilon}} = \frac{\dot{\varepsilon}_P}{\dot{\varepsilon}_M}$	$\lambda_{\dot{\varepsilon}} = \frac{\lambda_l}{\lambda_v}$
Temperaturgradient	$\lambda_{\frac{\partial T}{\partial x_k}} = \frac{(\frac{\partial T}{\partial x_k})_P}{(\frac{\partial T}{\partial x_k})_M}$	$\lambda_{\frac{\partial T}{\partial x_k}} = \frac{\lambda_T}{\lambda_l}$
Temperaturrate	$\lambda_{\dot{T}} = \frac{\dot{T}_P}{\dot{T}_M}$	$\lambda_{\dot{T}} = \frac{\lambda_T \lambda_l}{\lambda_v}$

Tabelle 2.4: Maßstabsfaktoren für verschiedene abgeleitete Größen auf Basis der Maßstabsfaktoren für die Referenzgrößen

Für den vorliegenden Fall erscheint dieses Vorgehen aufgrund der Voraussetzung konstanter Stoffwerte bzw. konstanter Fallbeschleunigung zunächst unnötig, weil durch die Wahl der konstanten Stoffwerte als Referenzgrößen diese dimensionslosen Größen den Wert Eins annehmen. Bei der gewählten Vorgehensweise bleibt jedoch die mathematische Form der Grundgleichungen, bis auf die neu erscheinenden Ähnlichkeitskennzahlen, erhalten. Außerdem können die solchermaßen gewonnenen Grundgleichungen auch für den Fall nicht zu stark veränderlicher Stoffwerte, unter Hinzunahme der dann notwendigen zusätzlichen konstitutiven Gleichungen, weiter verwendet werden. Hier seien die Stoffwerte jedoch als vom Ort und der Zeit unabhängige Konstanten vorausgesetzt. Die dimensionslosen Gleichungen ergeben sich dann in der bekannten Form zu:

- Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{v}_k)}{\partial \tilde{x}_k} = 0, \quad (2.64)$$

- Navier-Stokes-Gleichung

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_l \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial \tilde{x}_l} \right) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_k} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_l} (\tilde{\eta} \tilde{d}_{kl}) - \frac{1}{\text{Fr}} \tilde{\rho} \tilde{g} n_k = 0, \quad (2.65)$$

mit der Reynolds'schen Zahl $\text{Re} = \frac{\rho_R v_R l_R}{\eta_R}$ und der Froude'schen Zahl $\text{Fr} = \frac{v_R^2}{g_R l_R}$,

- Zustandsgleichung

$$\tilde{p} - \text{Eu} = \frac{\tilde{K}}{\text{Ca}} (\tilde{\rho} - 1) \quad (2.66)$$

mit der Euler'schen Zahl $\text{Eu} = \frac{p_R}{\rho_R v_R^2}$ und der Cauchy'schen Zahl $\text{Ca} = \frac{\rho_R v_R^2}{K_R}$.

Die dimensionslose Randbedingung an der freien Oberfläche

$$\left(\tilde{\sigma}_{kl}^{\text{innen}} - \tilde{\sigma}_{kl}^{\text{außen}} + \frac{2}{\text{We}} \tilde{\gamma} \tilde{\kappa} \right) n_i = 0 \quad (2.67)$$

liefert als weitere Ähnlichkeitskennzahl die Weber'sche Zahl $\text{We} = \frac{\rho_R v_R^2 l_R}{\gamma_R}$. Im nächsten Abschnitt werden nun die einzuhaltenden Ähnlichkeitsbedingungen zusammengestellt.

2.8.2.2 Ähnlichkeitsbedingungen für die Flüssigkeit

Für den Fall der Ähnlichkeit müssen die folgenden dimensionslosen Parameter für Modell und Prototyp dieselben sein.

Wenn die Gewichtskraft berücksichtigt werden muß, ist um Ähnlichkeit zu erreichen, die Bedingung

$$\text{Fr}_M = \left(\frac{v_R^2}{g_R l_R} \right)_M = \left(\frac{v_R^2}{g_R l_R} \right)_P = \text{Fr}_P \quad (2.68)$$

einzuhalten. Um Ähnlichkeit bezüglich der viskosen Reibungskräfte zu erhalten, muß die Reynolds'sche Zahl für Modell und Prototyp dieselbe sein, d.h.

$$\text{Re}_M = \left(\frac{\rho_R v_R l_R}{\eta_R} \right)_M = \left(\frac{\rho_R v_R l_R}{\eta_R} \right)_P = \text{Re}_P. \quad (2.69)$$

Um Ähnlichkeit für das kompressible Verhalten der betrachteten Flüssigkeit zu erreichen, müssen die Bedingungen

$$\text{Ca}_M = \left(\frac{\rho_R v_R^2}{K_R} \right)_M = \left(\frac{\rho_R v_R^2}{K_R} \right)_P = \text{Ca}_P \quad (2.70)$$

und

$$\text{Eu}_M = \left(\frac{p_R}{\rho_R v_R^2} \right)_M = \left(\frac{p_R}{\rho_R v_R^2} \right)_P = \text{Eu}_P \quad (2.71)$$

erfüllt werden. Wenn die Oberflächenspannung bei dem betrachteten Problem eine Rolle spielt, muß schließlich noch die Bedingung

$$\text{We}_M = \left(\frac{\rho_R v_R^2 l_R}{\gamma_R} \right)_M = \left(\frac{\rho_R v_R^2 l_R}{\gamma_R} \right)_P = \text{We}_P \quad (2.72)$$

beachtet werden.

2.8.2.3 Diskussion

Bei der Untersuchung der Aufprallvorgänge prallt ein Fluidbatzen der Höhe h , mit der Geschwindigkeit v_R auf die Struktur. Mit der Höhe h als Referenzlänge erhält man für typische Werte aus den FLIPPER-Experimenten (siehe Kapitel 4) eine mittlere Beschleunigung von

$$\frac{v_R^2}{l_R} = \frac{10\text{m/s} \cdot 10\text{m/s}}{0.25\text{m}} = 400 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (2.73)$$

Dieser Wert bezieht sich auf die größte Versuchsanlage. Bei den maßstäblich verkleinerten Anlagen sind die Werte entsprechend dem Längenmaßstab größer. Diese Beschleunigung ist also erheblich größer als die Fallbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, so daß im fluiddynamischen Bereich der Einfluß der Gewichtskraft vernachlässigt werden kann. Die Froude'sche Zahl wird deshalb für den fluiddynamischen Bereich aus der Liste der einzuhaltenden Ähnlichkeitsbedingungen gestrichen.

Die Bedeutung der Weber'schen Zahl als Ähnlichkeitsbedingung wird um so größer, je größer die Krümmung der Fluidoberfläche ist. Sie ist zum Beispiel beim Aufprall *kleiner* Tröpfchen auf eine feste Oberfläche von Bedeutung wie Arbeiten von Fukai et al. [72] und [73] gezeigt haben. Bei den FLIPPER-Experimenten (siehe Kapitel 4) erhält man mit den Referenzwerten bei Verwendung von Wasser eine Weber'sche Zahl

$$\text{We} = \frac{\rho_R v_R^2 l_R}{\gamma_R} = \frac{1000\text{kg/m}^3 \cdot 10\text{m/s} \cdot 10\text{m/s} \cdot 0.025\text{m}}{72.7 \cdot 10^3 \text{N/m}} \approx 34000. \quad (2.74)$$

Dieser große Wert bedeutet, daß im vorliegenden Fall die Trägheitskräfte erheblich größer sind als die Kräfte infolge der Oberflächenspannung. Weiterhin kann im reibungsfreien Fall ein Drucksprung über die Flüssigkeitsoberfläche von $\Delta p = 2.9 \text{ Pa}$ abgeschätzt werden, wenn zur Berechnung des Krümmungsradius der nominelle Durchmesser des aufprallenden Flüssigkeitsbatzens herangezogen wird. Dieser Wert ist im Vergleich zum Atmosphärendruck vernachlässigbar. Der Einfluß der Oberflächenspannung kann im vorliegenden Fall also außer acht gelassen und die Weber'sche Zahl aus der Liste der relevanten Ähnlichkeitsbedingungen gestrichen werden.

Für die Ähnlichkeit im fluiddynamischen Bereich sind für den vorliegenden Fall die Cauchy'sche Zahl Ca , die Euler'sche Zahl Eu und die Reynolds'sche Zahl Re die relevanten Ähnlichkeitsbedingungen. Nochmals angemerkt sei, daß dieser Betrachtung isotherme Prozesse zugrunde liegen.

Abschließend wird noch auf den Fall eingegangen, daß für Modell und Prototyp dieselbe Flüssigkeit verwendet wird. Dann ist die Referenzdichte ρ_R für Modell und Prototyp dieselbe und um dieselbe Cauchy'sche Zahl und dieselbe Euler'sche Zahl zu erhalten, muß die Referenzgeschwindigkeit v_R für Modell und Prototyp dieselbe sein. Da in diesem Fall auch die Zähigkeit in Modell und Prototyp dieselbe ist, muß, um die gleiche Reynolds'sche Zahl in Modell und Prototyp zu erhalten, die Referenzlänge dieselbe sein. Das heißt, daß ein Modellversuch für den Fall, daß das betrachtete Problem eine Abhängigkeit von der Reynolds'schen Zahl aufweist, nicht korrekt durchgeführt werden kann. Bei Modellversuchen in verkleinertem Maßstab ist hier mit Abweichungen vom Verhalten des Prototyps zu rechnen. Wie groß diese Abweichungen sind hängt jedoch vom jeweiligen Problem ab.

2.8.3 Festkörper

2.8.3.1 Dimensionslose Gleichungen

Zur Diskussion der Ähnlichkeitsbedingungen für den Festkörper seien die relevanten Gleichungen zunächst ebenfalls in ihrer dimensionslosen Form angeschrieben. Analog zur Betrachtung der Flüssigkeit

werden Bezugsgrößen die Fallbeschleunigung g_R , den Elastizitätsmodul E_R , den thermischen Ausdehnungskoeffizienten α_R , die Quasiviskosität $\eta_{vp,n,R}$, die Wärmeleitfähigkeit k_R und die Wärmeleitfähigkeit $c_{v,R}$ eingeführt. Man erhält

$$\tilde{g} = \frac{g}{g_R} \quad \tilde{E} = \frac{E}{E_R} \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_R} \quad \tilde{\eta}_{vp,n} = \frac{\eta_{vp,n}}{\eta_{vp,n,R}} \quad \tilde{k} = \frac{k}{k_R} \quad \tilde{c}_v = \frac{c_v}{c_{v,R}} \quad . \quad (2.75)$$

Für den Fall, daß diese Größen konstant sind, ergeben sich die dimensionslosen Werte natürlich jeweils zu Eins. Für das angenommene elastisch-viskoplastische Material ergibt sich:

- Die Kontinuitätsgleichung entfällt im Falle kleiner Dehnungen ($\rho = \text{const.}$)
- Impulsgleichung

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{kl}}{\partial \tilde{x}_k} + \frac{1}{\text{Fr}} \tilde{\rho} \tilde{g} n_l - \tilde{\rho} \tilde{v}_l = 0, \quad (2.76)$$

- Hooke'sches Gesetz

$$\tilde{\varepsilon}_{kl}^e = \frac{1+\nu}{\tilde{E}} \text{Ca} \tilde{\sigma}_{kl} - \frac{\nu}{\tilde{E}} \text{Ca} \tilde{\sigma}_{kl} \delta_{kl} - \alpha_R T_R \tilde{\alpha} (\tilde{T} - 1) \delta_{kl}, \quad (2.77)$$

wobei $\text{Ca} = \rho_R v_R^2 / E_R$ für die Cauchy'sche Zahl steht, die für die Flüssigkeit mit der Kompressibilität K_R gebildet wurde. Im Falle der Kopplung von Flüssigkeit und Festkörper muß dabei auf eine eindeutige Definition geachtet werden.

- Fließfläche

$$\tilde{f} = \tilde{\sigma}_{eq} - \tilde{R}(p) - \tilde{\sigma}_F = 0, \quad (2.78)$$

mit $\tilde{\sigma}_F = \frac{\sigma_F}{\rho_R v_R^2}$ und $\tilde{R}(p) = \frac{R(p)}{\rho_R v_R^2}$,

- Viskoplastische Entwicklungsgleichung

$$\tilde{\varepsilon}_{kl}^p = \begin{cases} \frac{\rho_R^n v_R^{2n-1} l_R}{\eta_{vp,n,R}^n} \left(\frac{\tilde{f}}{\tilde{\eta}_{vp,n}} \right)^n \frac{3}{2} \frac{\tilde{\sigma}_{kl}^D}{\tilde{\sigma}_{eq}} & , \quad \tilde{f} > 0 \\ 0 & , \quad \tilde{f} \leq 0 \end{cases} . \quad (2.79)$$

Der Ausdruck $\frac{\rho_R^n v_R^{2n-1} l_R}{\eta_{vp,n,R}^n}$ erinnert dabei an die aus der Fluidodynamik bekannte Reynolds'sche Zahl, da sich für $n = 1$ dieselbe mathematische Form ergibt. Malmberg [74] hat deshalb diese Größe als generalisierte Reynolds'sche Zahl bezeichnet. Im weiteren wird deshalb die Ähnlichkeitskennzahl $\text{Re}_{vp,n} = \frac{\rho_R^n v_R^{2n-1} l_R}{\eta_{vp,n,R}^n}$ eingeführt.

- Energiegleichung (Festkörper)

$$\tilde{c}_v \tilde{\rho} \dot{\tilde{T}} - \text{Pe} \left(\tilde{k} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_k^2} + \tilde{\rho} \tilde{r} \right) - \frac{v_R^2}{c_{v,R} T_R} \left(\tilde{\sigma}_{kl} \tilde{\varepsilon}_{kl}^p - \alpha_R T_R \frac{\tilde{\alpha} \tilde{T} \tilde{E}}{1 - 2\nu} \frac{1}{\text{Ca}} \tilde{\varepsilon}_{ii}^e \right) = 0, \quad (2.80)$$

mit der Peclet'schen-Zahl $Pe = \frac{k_R}{c_{v,R} \rho_R v_R l_R}$. Der dimensionslose Wärmequellterm $\tilde{r} = \frac{r l_R^2 / k_R}{T_R}$ kann dabei formal als eine dimensionslose variable Temperatur angesehen werden (Gukhman [70]). Im weiteren soll jedoch davon ausgegangen werden, daß keine internen Wärmequellen vorhanden sind. Die Größe $\frac{v_R^2}{c_{v,R} T_R}$ zeigt eine Analogie zur Eckert'schen Zahl $Ec = \frac{v_R^2}{c_{p,R} \Delta T}$, die in der Gasdynamik eine Rolle spielt. Für die Größe $\alpha_R T_R$ gibt es ebenfalls aus dem Bereich des idealen Gases eine analoge Größe in Form der Gay-Lussac'schen Zahl $Ga = \frac{1}{\beta_R T_R}$ (siehe Catchpole und Fulford [43]), wobei β hier für den Volumenausdehnungskoeffizienten bei konstanten Druck steht. Für die beiden Ähnlichkeitskennzahlen $\frac{v_R^2}{c_{v,R} T_R}$ und $\alpha_R T_R$ sind aber in der Literatur keine eigenständigen Bezeichnungen eingeführt.

2.8.3.2 Ähnlichkeitsbedingungen

Um Ähnlichkeit zu erreichen, wird die Gleichheit folgender Größen für Modell und Prototyp verlangt. Wenn die Gewichtskraft berücksichtigt werden soll, muß die Bedingung

$$Fr_M = \left(\frac{v_R^2}{g_R l_R} \right)_M = \left(\frac{v_R^2}{g_R l_R} \right)_P = Fr_P \quad (2.81)$$

eingehalten werden. Um Ähnlichkeit bezüglich des elastischen Verhaltens der Struktur zu erreichen, müssen die Bedingungen

$$(\alpha_R T_R)_M = (\alpha_R T_R)_P, \quad (2.82)$$

$$\nu_M = \nu_P \quad (2.83)$$

und

$$Ca_M = \left(\frac{\rho_R v_R^2}{E_R} \right)_M = \left(\frac{\rho_R v_R^2}{E_R} \right)_P = Ca_P, \quad (2.84)$$

beachtet werden. Wenn der Übergang vom elastischen zum plastischen Verhalten in Modell und Prototyp ähnlich erfolgen soll, muß die Bedingung

$$\tilde{\sigma}_{F,M} = \tilde{\sigma}_{F,P} \quad (2.85)$$

erfüllt sein. Wenn die Verfestigung ähnlich sein soll, ist

$$\tilde{R}_M(p) = \tilde{R}_P(p) \quad (2.86)$$

zu fordern. Es ist anzumerken, daß hier nicht wie bei den anderen Ähnlichkeitsbedingungen die Gleichheit einer Konstanten gefordert wird. Vielmehr wird hier die Gleichheit zweier dimensionsloser Funktionen

über den im Modell und Prototyp relevanten Bereich der akkumulierten plastischen Dehnung p verlangt. Diese Forderung läßt sich jedoch bei entsprechender Vorgabe einer mathematischen Gleichung für die Verfestigungsfunktion wieder auf die Forderung nach Gleichheit von bestimmten dimensionslosen Parametern zurückführen.

Ähnlichkeit bezüglich des viskoplastischen Verhalten ergibt sich, wenn die Bedingungen

$$\text{Re}_{vp,n,M} = \left(\frac{\rho_R^n v_R^{2n-1} l_R}{\eta_{vp,n,R}^n} \right)_M = \left(\frac{\rho_R^n v_R^{2n-1} l_R}{\eta_{vp,n,R}^n} \right)_P = \text{Re}_{vp,n,M} \quad (2.87)$$

sowie

$$n_M = n_P \quad (2.88)$$

erfüllt sind. Wenn sich infolge der Dissipation mechanischer Energie bei der plastischen Deformation ähnliche Temperaturfelder ausbilden sollen, müssen zusätzlich die Bedingungen

$$\text{Fo}_M = \left(\frac{k_R}{c_{v,R} \rho_R v_R l_R} \right)_M = \left(\frac{k_R}{c_{v,R} \rho_R v_R l_R} \right)_P = \text{Fo}_P \quad (2.89)$$

und

$$\left(\frac{v_R^2}{c_{v,R} T_R} \right)_M = \left(\frac{v_R^2}{c_{v,R} T_R} \right)_P \quad (2.90)$$

beachtet werden.

Mit diesen Bedingungen sind zunächst noch keine prinzipiellen Einschränkungen hinsichtlich der Materialauswahl für Modell und Prototyp verbunden. Man erkennt aber, daß für das Material von Modell und Prototyp, unabhängig von anderen Einschränkungen, die sich noch ergeben können, die Querkontraktionszahl ν und der viskoplastische Exponent n dieselben sein müssen. Für den Fall, daß die dimensionslosen Stoffwerte entsprechend Gleichung (2.75) keine Konstante sind, ergeben sich weitere Ähnlichkeitsbedingungen. So muß z.B. die ortsabhängige Verteilung der Stoffwerte oder eine Temperaturabhängigkeit ähnlich sein.

2.8.3.3 Diskussion der Ähnlichkeitsbedingungen

Für die folgende Diskussion sei zunächst angenommen, daß alle genannten Ähnlichkeitsbedingungen eine nicht vernachlässigbare Rolle spielen. In den folgenden Abschnitten wird dann nach und nach durch zu treffende Einschränkungen oder Vernachlässigungen die Zahl der einzuhaltenden Ähnlichkeitsbedingungen reduziert.

Hier ergibt sich jedoch aus der mit dem Einfluß der Gewichtskraft verbundenen Forderung nach gleicher Froude'scher Zahl, daß die Referenzgeschwindigkeiten bei als konstant vorausgesetzter Fallbeschleunigung für Modell und Prototyp im Verhältnis

$$\lambda_v = \frac{v_{R,P}}{v_{R,M}} = \sqrt{\frac{l_{R,P}}{l_{R,M}}} = \sqrt{\lambda_l} \quad (2.91)$$

zueinander stehen müssen. Diese Bedingung ist unabhängig von den Materialeigenschaften und stellt eine gravierende Einschränkung für Modellversuche dar, weil durch die Wahl des Längenmaßstabs automatisch die Referenzgeschwindigkeit für das Modell festgelegt ist.

Eine Möglichkeit, diese Einschränkung zu umgehen, stellt die Verwendung einer Zentrifuge dar (siehe Sedov [75]). Damit können eine entsprechend höhere Fallbeschleunigung simuliert werden und der Modellversuch bei einer höheren Referenzgeschwindigkeit entsprechend der Gleichung

$$\frac{v_{R,P}}{v_{R,M}} = \sqrt{\frac{g_{R,P}}{g_{R,M}}} \sqrt{\frac{l_{R,P}}{l_{R,M}}} \quad (2.92)$$

durchgeführt werden. Zu beachten ist jedoch, daß nun Corioliskräfte auftreten, die sich eventuell störend auswirken können. Auch die Simulation bei einer niedrigeren Fallbeschleunigung kann mit Hilfe einer Zentrifuge nicht durchgeführt werden. Im weiteren sei die Fallbeschleunigung als konstant angenommen.

Nachdem das Geschwindigkeitsverhältnis bei der gleichen Fallbeschleunigung für Modell und Prototyp durch den Längenmaßstab vorgegeben ist, muß der Modellversuch mit einem Material durchgeführt werden, dessen Stoffwerte folgenden Bedingungen genügen:

Hinsichtlich der Ähnlichkeit des elastisch-plastischen Verhaltens ergeben sich aus den Gleichungen (2.84)-(2.87) die Bedingungen

$$\frac{(E_R/\rho_R)_P}{(E_R/\rho_R)_M} = \frac{(\sigma_F/\rho_R)_P}{(\sigma_F/\rho_R)_M} = \frac{(R(p)/\rho_R)_P}{(R(p)/\rho_R)_M} = \lambda_l \quad (2.93)$$

$$\frac{(\eta_{vp,n}^n/\rho_R^n)_P}{(\eta_{vp,n}^n/\rho_R^n)_M} = \lambda_l^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.94)$$

Wenn durch die dissipierte Energie ähnliche Temperaturfelder erzeugt werden sollen, müssen wegen den Gleichungen (2.89) und (2.90) unter Beachtung von (2.91) noch die Bedingungen

$$\frac{(c_{v,R}T_R)_P}{(c_{v,R}T_R)_M} = \lambda_l \quad (2.95)$$

$$\frac{\left(\frac{k_R}{c_{v,R}\rho_R}\right)_P}{\left(\frac{k_R}{c_{v,R}\rho_R}\right)_M} = \lambda_l^{\frac{3}{2}} \quad (2.96)$$

eingehalten werden.

Man erkennt, daß im zugrunde liegenden Fall für jeden Maßstab andere Materialparameter verlangt sind, wobei die zu beachtenden Forderungen zwar zu keinem Widerspruch führen, aber nur schwer erfüllbar sind. Um dies zu erläutern sei angenommen, daß für Modell und Prototyp Material aus der selben Materialgruppe verwendet wird, so daß die Dichte in Modell und Prototyp ungefähr dieselbe ist. Weiterhin sei ein Maßstabsfaktor $\lambda_l = 10$ angenommen.

Nach Gleichung (2.93) muß dann die Fließspannung, der Elastizitätsmodul und die Verfestigung entsprechend dem Längenmaßstab $\lambda_l = 10$ skaliert sein. Um Ähnlichkeit bezüglich des zeitabhängigen Materialverhalten zu erreichen, muß die Quasiviskosität $\eta_{vp,n}$ entsprechend $\lambda_l^{n+\frac{1}{2}}$ skaliert sein.

Weiterhin sei angenommen, daß für Modell und Prototyp die Referenztemperatur T_R dieselbe sei. Um Bedingung (2.82) zu erfüllen, muß dann der Wärmeausdehnungskoeffizient in Modell und Prototyp derselbe sein. Damit folgt dann bei konstanter Referenzdichte aus Gleichung (2.95), daß die spezifische Wärmekapazität von Modell und Prototyp mit dem Faktor

$$\frac{c_{v,P}}{c_{v,M}} = \lambda_l = 10 \quad (2.97)$$

skaliert werden muß, um Ähnlichkeit bezüglich der Temperaturfelder zu erreichen. Für die Wärmeleitfähigkeit erhält man mit Gleichung (2.96) als Skalierungsfaktor

$$\frac{k_P}{k_M} = \frac{c_{v,P}}{c_{v,M}} \lambda_l^{\frac{3}{2}} = \lambda_l^{\frac{5}{2}} \approx 320. \quad (2.98)$$

Man erhält also für den Fall, daß die Gewichtskraft beachtet werden soll, mehrere genau definierte Forderungen hinsichtlich der Materialeigenschaften von Modell und Prototyp, die alle gleichzeitig zu erfüllen sind. Es ist jedoch praktisch unmöglich Materialien zu finden, die alle diese Forderungen erfüllen, obwohl kein theoretischer Widerspruch in den Forderungen auftritt. Der den oben genannten Zahlenwerten zugrunde liegende Längenmaßstab $\lambda_l = 10$ führt insbesondere bei der spezifischen Wärmekapazität c_v und der Wärmeleitfähigkeit k zu sehr großen Skalierungsfaktoren. Für den Fall, daß vollständige Ähnlichkeit notwendig sein sollte, bliebe hier nur der Verzicht auf Modellversuche.

2.8.3.4 Vernachlässigung der Gewichtskräfte

Wie bei der Diskussion der Ähnlichkeitsbedingung für die Flüssigkeit bereits geschehen, kann auch für den Festkörper abgeschätzt werden, daß die Gewichtskräfte nur einen vernachlässigbaren Einfluß auf das betrachtete Problem haben. Damit entfällt die Bedingung (2.81) aus der Liste der Ähnlichkeitsbedingungen und es verbleiben nur noch die auf dem Materialverhalten basierenden Ähnlichkeitsbedingungen (2.82) bis (2.90). Die Kopplung von Längen- und Geschwindigkeitsmaßstab entsprechend (2.91) entfällt.

Es sei nun angenommen, das Modell und Prototyp bereits aus verschiedenen Materialien angefertigt sind. Die Fließspannungen sind damit vorgegeben zu $\sigma_{F,M}$ beim Modell und $\sigma_{F,P}$ beim Prototyp. Das Dichteverhältnis von $\rho_{R,M}$ und $\rho_{R,P}$ ist ebenfalls mit der Materialauswahl festgelegt. Die Ähnlichkeitsbedingung (2.85) führt dann zu der Forderung

$$\lambda_v = \frac{v_{R,P}}{v_{R,M}} = \left(\frac{\rho_{R,M}}{\rho_{R,P}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma_{F,P}}{\sigma_{F,M}} \right)^{\frac{1}{2}} = \lambda_{\sigma_F}^{\frac{1}{2}} \lambda_{\rho}^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.99)$$

Die Indizes der Maßstabsfaktoren kennzeichnen hierbei die jeweilige Größe, auf die sich der Maßstabsfaktor bezieht (vgl. Tabelle 2.4). Gemäß diesem Geschwindigkeitsverhältnis müssen dann auch der Elastizitätsmodul E , die Verfestigungsfunktion $R(p)$ skaliert sein, um Ähnlichkeit zu erreichen. Das folgt aus den Bedingungen (2.84) und (2.86).

Bei vorgegebenen Längenmaßstab λ_l liefert die Ähnlichkeitsbedingung (2.87) bezüglich der Quasiviskosität $\eta_{vp,n}$ unter Beachtung von (2.99) die folgende Forderung:

$$\lambda_{\eta_{vp}} = \frac{\eta_{vp,n,R,P}}{\eta_{vp,n,R,M}} = \left(\frac{\rho_{R,P}}{\rho_{R,M}} \right)^n \left(\frac{v_{R,P}}{v_{R,M}} \right)^{2n-1} \frac{l_{R,P}}{l_{R,M}} = \lambda_{\rho}^{\frac{1}{2}} \lambda_{\sigma_F}^{\frac{2n-1}{2}} \lambda_l. \quad (2.100)$$

In analoger Weise erhält man Forderungen für die Wärmeleitfähigkeit k , die Wärmekapazität c_v und den Temperaturexpansionskoeffizienten α in Modell und Prototyp. Die Forderungen nach gleicher Querkontraktionszahl ν (2.83) und gleichem viskoplastischem Exponenten n (2.88) bleiben natürlich weiterhin bestehen.

Eine andere Deutung von Gleichung (2.100) ergibt sich, wenn die Quasiviskosität durch die Wahl des Material als schon festgelegt betrachtet wird. Dann liefert Gleichung (2.100) den Längenmaßstab, für den Ähnlichkeit erreicht werden kann.

Für die verbleibenden drei Ähnlichkeitsbedingungen für den Temperaturexpansionskoeffizienten α (2.82), die Fourier'sche Zahl Fo (2.89) und den Kopplungsterm von thermischer und mechanischer Energie (2.90) steht als Parameter in einem Modellexperiment nur noch die Referenztemperatur T_R zur Verfügung. Entsprechend Gleichung (2.90) wird das Temperaturverhältnis unter Beachtung von (2.99) jedoch zu

$$\lambda_T = \frac{T_{R,P}}{T_{R,M}} = \frac{c_{v,R,P}}{c_{v,R,M}} \left(\frac{v_{R,P}}{v_{R,M}} \right)^2 = \lambda_{c_v} \lambda_\rho \lambda_{\sigma_F} \quad (2.101)$$

festgelegt. Vollständige Ähnlichkeit ist dann erreicht, wenn unter Beachtung von (2.99) und (2.100) noch entsprechend Gleichung (2.89) und (2.82) die Wärmeleitfähigkeit k und Temperaturexpansionskoeffizienten α in Modell und Prototyp im Verhältnis

$$\lambda_k = \lambda_{\sigma_F}^{1-n} \lambda_{\eta_{vp}} \lambda_{c_v} \quad (2.102)$$

und

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{\lambda_{c_v} \lambda_\rho \lambda_{\sigma_F}} \quad (2.103)$$

skaliert sind.

Theoretisch ist es also möglich, Ähnlichkeit zu erreichen, wenn die Stoffwerte den genannten Bedingungen genügen. Sollte es gelingen, alle Ähnlichkeitsbedingung in der genannten Weise einzuhalten, ist zu beachten, daß die Fließspannung in der Regel von der Temperatur abhängig ist, was Rückwirkungen auf die oben genannten Bedingungen hat. In der praktischen Ausführung ist aber sicherlich keine vollständige Ähnlichkeit zu erreichen, wenn alle genannten Ähnlichkeitsbedingung für das zugrundeliegende Problem relevant sind.

2.8.3.5 Verwendung gleichen Materials bei verschiedenen Temperaturen

Interessant in diesem Zusammenhang ist noch, wenn ein Modellversuch mit *demselben* Material wie beim Prototyp aber bei einer anderen Referenztemperatur durchgeführt wird. Die Gewichtskräfte seien wiederum vernachlässigt. Es sei weiter angenommen, daß die Referenztemperatur des Modells die Raumtemperatur sei und die Referenztemperatur des Prototyps höher liege. In der Regel ist bei erhöhter Temperatur die Fließspannung σ_F niedriger als bei Raumtemperatur. Die Dichte bleibe annähernd konstant.

Bezüglich der Fließspannung kann in diesem Fall Ähnlichkeit erreicht werden, wenn die Referenzgeschwindigkeiten von Modell und Prototyp entsprechend (2.99) im Verhältnis

$$\lambda_v = \frac{v_{R,P}}{v_{R,M}} = \sqrt{\frac{\sigma_{F,P}}{\sigma_{F,M}}} = \lambda_{\sigma_F}^{\frac{1}{2}} \quad (2.104)$$

skaliert sind. Im selben Verhältnis muß nun auch der Elastizitätsmodul und der Verfestigungsterm skaliert sein. Da die Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls E (siehe Abbildung 2.2) von der Temperatur durchaus verschieden von der Temperaturabhängigkeit der Fließspannung (siehe Abbildung 3.6, Seite 47) ist, muß man in Bezug auf die Ähnlichkeit für das elastischen Verhalten mit Problemen rechnen. Dadurch bedingte Abweichungen zwischen Modell und Prototyp können eventuell außer acht gelassen werden,

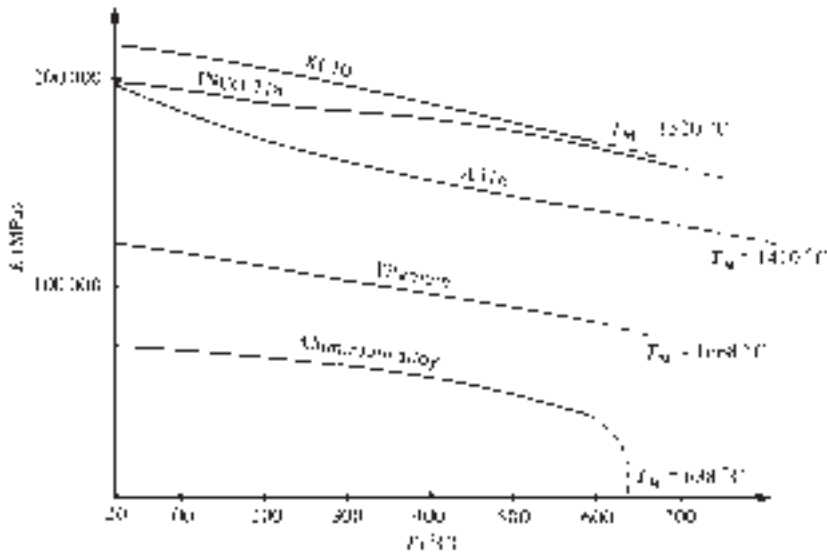


Abbildung 2.2: Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls - entnommen bei Lemaitre und Chaboche [68]

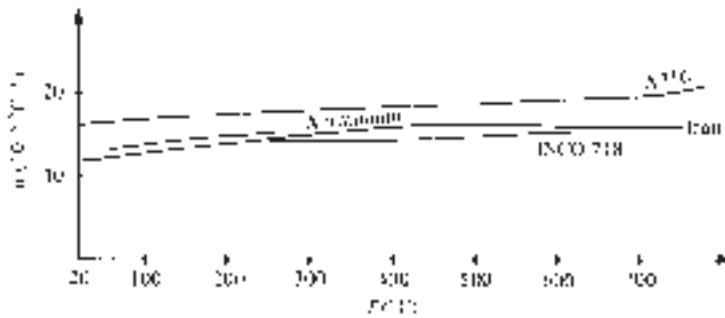


Abbildung 2.3: Temperaturabhängigkeit des Wärmeausdehnungskoeffizienten (im Bild mit σ bezeichnet) - entnommen bei Lemaitre und Chaboche [68]

wenn die elastischen Verformungen *überall* gegenüber den plastischen Verformungen vernachlässigt werden können. Das Verfestigungsverhalten muß aber beachtet werden.

Bezüglich der Temperaturdehnung kann jedoch bei größeren Unterschieden in der Referenztemperatur voraussichtlich keine Ähnlichkeit entsprechend Bedingung (2.82) erreicht werden, da der thermische Ausdehnungskoeffizient α in der Regel nur wenig von der Temperatur abhängt (siehe Abbildung 2.3). Hierauf ist insbesondere zu achten, wenn sich die Struktur nicht frei ausdehnen kann und dadurch Temperaturspannungen entstehen, die infolge der Überlagerung zu den mechanischen Spannungen das Einsetzen des Fließens beeinflussen können.

Für das viskoplastische Verhalten ergibt sich bei annähernd konstanter Dichte die Bedingung

$$\frac{\eta_{vp,n,P}}{\eta_{vp,n,M}} = \lambda_{\sigma_F}^{\frac{2n-1}{2}} \lambda_t \tag{2.105}$$

Damit liegt wiederum der Längenmaßstab fest. Wenn dieser Maßstab frei gewählt wird oder aus bestimm-

ten Gründen schon festgelegt ist, muß also mit Abweichungen im viskoplastischen Verhalten gerechnet werden.

Aus Gleichung (2.89) und (2.90) ergeben sich noch die Forderungen

$$\frac{(c_{v,R}T_R)_M}{(c_{v,R}T_R)_P} = \lambda_{\sigma_F} \quad (2.106)$$

$$\text{und} \frac{\left(\frac{k_R}{c_{v,R}}\right)_P}{\left(\frac{k_R}{c_{v,R}}\right)_M} = \lambda_l \lambda_{\sigma_F}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.107)$$

Da die Materialparameter sich normalerweise nur wenig mit der Temperatur ändern und damit in der Regel nicht diesen geforderten Verhältnissen entsprechen, ergibt sich hier eine zusätzliche Quelle für eine mögliche Verletzung der Ähnlichkeit.

2.8.3.6 Diskussion der Ähnlichkeitsbedingung für Replikamodelle

Es soll im weiteren davon ausgegangen werden, daß Modell und Prototyp aus demselben Material hergestellt und in den wesentlichen strukturellen Details geometrisch ähnlich skaliert sind und sich auf demselben Temperaturniveau befinden. Man erhält dann ein sogenanntes Replikamodell.

Die Verwendung desselben Materials hat zur Folge, daß sämtliche Materialparameter in Modell und Prototyp, nämlich ν , n , σ_F , $R(p)$, E , α , $\eta_{vp,n}$, k , c_v , ρ dieselben sind. Die Bedingungen (2.83) bezüglich der Querkontraktionszahl und (2.88) bezüglich des Exponenten in der viskoplastischen Entwicklungsgleichung sind damit automatisch erfüllt. Die Ähnlichkeitsbedingung (2.82) bezüglich der thermischen Ausdehnung ist erfüllt, wenn die Referenztemperatur für Modell und Prototyp dieselbe ist.

Da Elastizitätsmodul und Dichte dieselben sind, muß, um Ähnlichkeit bezüglich des elastischen Verhaltens zu erreichen, entsprechend Bedingung (2.84) für die Cauchy'sche Zahl die Referenzgeschwindigkeit v_R - im vorliegenden Fall die Aufprallgeschwindigkeit - in Modell und Prototyp dieselbe sein. Gleichzeitig sind auch die dimensionslose Fließspannung $\tilde{\sigma}_F$ und die dimensionslose Verfestigungsfunktion $\tilde{R}(p)$ in Modell und Prototyp dieselben. Damit ist für den quasistatischen Fall auch Ähnlichkeit bezüglich des Einsetzens von plastischen Deformationen und hinsichtlich des Verfestigungsverhaltens erreicht und die Bedingungen (2.85) und (2.86) erfüllt. Damit würden sich in Modell und Prototyp nicht nur dieselben Dehnungen sondern auch dieselben Spannungen ergeben, wenn die Viskoplastizität keine Rolle spielt.

Um Ähnlichkeit aber auch bezüglich des viskoplastischen Materialverhalten zu erreichen, ergibt sich aus Bedingung (2.87) für die generalisierte Reynolds'sche Zahl, daß der Längenmaßstab $\lambda_l = 1$ betragen muß. Bei einem Modellversuch im verkleinerten Maßstab ist hier mit Abweichungen im Verhalten von Modell und Prototyp zu rechnen. Im verkleinerten Modellversuch ergibt sich eine dem Längenmaßstab entsprechend kleinere generalisierte Reynolds'sche Zahl $Re_{vp,n}$. Mit Gleichung (2.79) ergeben sich nach Zeitintegration damit im verkleinerten Modell kleinere plastische Dehnungen als im Prototyp.

Bei einem verkleinerten Modell kann ebenfalls keine Ähnlichkeit bezüglich der Bedingungen (2.89) bezüglich der Fourier'schen Zahl erreicht werden. Auch hier wird im Falle der Ähnlichkeit verlangt, daß der Längenmaßstab $\lambda_l = 1$ sein muß.

2.8.4 Ähnlichkeitsbedingungen aus den Anfangs- und Randbedingungen sowie der Kopplung von Festkörper und Fluid

Wie Abschnitt 2.4 bereits erwähnt, genügt es nicht, nur die anhand der dimensionlosen Bilanz- und Stoffgleichungen hergeleiteten Ähnlichkeitsbedingungen für Modell und Prototyp einzuhalten, um Ähnlichkeit zu erreichen. Identische Lösungen erhält man nur, wenn auch die dimensionslosen Anfangs- und Randbedingungen identisch für Modell und Prototyp sind.

Das gilt insbesondere für das dimensionslose Temperaturfeld $\tilde{T}(x_k)$ und die dimensionslose Dichteverteilung $\tilde{\rho}(x_k)$ in Modell und Prototyp. Das führt dazu, daß auch das Verhältnis von Fluidichte zu Festkörperdichte

$$\left(\frac{\rho_{\text{Fluid}}}{\rho_{\text{Festkörper}}} \right)_M = \left(\frac{\rho_{\text{Fluid}}}{\rho_{\text{Festkörper}}} \right)_P \quad (2.108)$$

in Modell und Prototyp dasselbe sein muß. Diese Bedingung ist jedoch wohlbekannt (siehe Weber [39]). Dasselbe gilt für die Verteilung der anderen dimensionslosen Stoffwerte wie zum Beispiel \tilde{E} , \tilde{k} , \tilde{c}_v et cetera.

Durch die Kopplung von Struktur und Fluid ergeben sich keine neuen Ähnlichkeitsbedingungen, die nicht schon in den Grundgleichungen enthalten sind. So ist zum Beispiel die Stetigkeit des dimensionslosen Wärmeflusses bei Gleichheit der Fourier'schen Zahl und der Bedingung (2.90) automatisch gewährleistet.

Kapitel 3

Materialdaten

3.1 Grundsätzliches

Bei den in Kapitel 4 besprochenen FLIPPER-Experimenten spielt das Materialverhalten bei verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeiten eine wichtige Rolle. Deshalb werden hier für die verwendeten Materialien anhand von quasistatischen und dynamischen Zugversuchen die Materialdaten bereitgestellt.

Zur Bestimmung von Materialdaten stehen für die verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeitsbereiche unterschiedliche Verfahren zur Verfügung. Eine Übersicht findet sich in Tabelle 3.1. Mit zunehmender Dehnungsgeschwindigkeit sind einige Effekte mit zu berücksichtigen, die bei kleinen Dehnungsgeschwindigkeiten in der Regel zu vernachlässigen sind. Dazu gehören zum einen die Trägheitseffekte, die bei den üblichen Probengrößen für Dehnungsgeschwindigkeiten ab $\dot{\epsilon} \approx 10\text{s}^{-1}$ an Bedeutung zunehmen. Bei kleineren Dehnungsgeschwindigkeiten kann davon ausgegangen werden, daß sich Zugprobe und Zugmaschine im mechanischen Gleichgewicht befinden. Die Energiedissipation bei plastischer Verformung, die zu einer Temperaturerhöhung der Probe führt, muß dagegen schon bei kleineren Dehnungsgeschwindigkeit beachtet werden, wenn die entstandene Wärme nicht schnell genug über die Probenenden abgeführt werden kann.

3.2 Verwendete Versuchstechnik

Für die Zugversuche standen zwei verschiedene servo-hydraulische Zugmaschinen zur Verfügung. Für die mit den Dehnungsgeschwindigkeiten im Bereich von $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3}\text{s}^{-1}$ bis $\dot{\epsilon} = 1\text{s}^{-1}$ durchgeführten Versuche wurde eine konventionelle servo-hydraulische Zugmaschine der Firma Schenck verwendet. Die Kraftmessung erfolgte mit einer Kraftmeßdose, die aufgrund der niedrigen Eigenfrequenz nur für die kleinen Dehnungsgeschwindigkeiten geeignet ist. Die Wegmessung wurde direkt an der Probe mit Hilfe eines Extensometers vorgenommen, mit dem Verlängerungen bis $\Delta L \approx 15\text{mm}$ gemessen werden können. Damit war die Messung der kleinen Verlängerung im elastischen Bereich zwar nicht so genau wie mit auf die Probe geklebten Dehnungsmeßstreifen (DMS), jedoch kann ein viel größerer Verlängerungsbereich erfaßt werden. Der hier wichtige Bereich größerer plastischer Dehnungen wird aber mit zufriedenstellender Genauigkeit abgedeckt. Zu Kontrollzwecken wurde auch der Kolbenweg gemessen. Zur Vermeidung von Biegespannungen wurden die Proben kardanisch gelagert.

Die digitale Datenaufzeichnung erfolgte mit einer Taktfrequenz von 10Hz bzw. 5kHz für Dehnungsgeschwindigkeiten im Bereich von $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3}\text{s}^{-1}$ bis $\dot{\epsilon} = 1\text{s}^{-1}$ und einer Auflösung von 12 Bit.

$\dot{\epsilon} [s^{-1}]$	Testmethode	Bemerkung
10^7	Hochgeschwindigkeitsimpakt Sprengstoff	Schockwellenausbreitung
10^6	gepulste Laser	
10^5	Plattenaufprall (normal) Plattenaufprall (schief)	Scherwellenausbreitung
	Dynamisch (hoch)	Plastische Wellenausbreitung
10^4	Taylor-Test	
	Hopkinson-Bar	
10^3	Ringaufweitung	
	Dynamisch (niedrig)	Mechanische Resonanz zwischen der Probe und der Maschine spielt eine Rolle
10^2	servo-hydraulische oder pneumatische Hochgeschwindigkeitszugmaschinen	
10^1	Nocken-Plastometer	
10^0	Umlaufschlagwerke	
10^{-1}	Quasistatisch	Tests mit konstanter Abzugsgeschwindigkeit
10^{-2}	Hydraulische, servo-hydraulische oder spindelgetriebene Testmaschinen	Trägheitskräfte sind ohne Bedeutung
10^{-3}		
10^{-4}		
10^{-5}		
10^{-6}	Kriechen und Spannungsrelaxation	Viskoplastisches Materialverhalten
10^{-7}	Konventionelle Testmaschinen spezielle Kriechversuchseinrichtungen	
10^{-8}		
10^{-9}		

Tabelle 3.1: Testverfahren für verschiedene Dehnungsgeschwindigkeiten - entnommen bei Meyers [76]

Für die Versuche mit größeren Dehnungsgeschwindigkeiten wurde eine servo-hydraulische Schlagzugmaschine Schenck Typ VHS-TENS verwendet, die Abzugsgeschwindigkeiten bis $v \approx 10m/s$ erlaubt. Bei dieser Maschine wird der Kolben zusammen mit einem Mitnehmer über eine Vorlaufstrecke zunächst beschleunigt und reißt dann die Probe mit, die in ein entsprechendes Gegenstück eingeschraubt ist. Es wird dann mit annähernd konstanter Abzugsgeschwindigkeit gezogen.

Die Kraftmessung wurde mit einem piezo-elektrischen Kraftaufnehmer mit entsprechend größerer Eigenfrequenz durchgeführt, der nahe an der oberen Probeneinschraubung eingebaut war. Die Wegmessung erfolgte mit Hilfe einer Laserwegmeßeinrichtung, die den Abstand von Mitnehmer und Gegenstück verfolgt. Damit ist auch hier eine zufriedenstellende Erfassung der plastischen Verlängerungen gewährleistet. Die maximal erfassbare Verlängerung beträgt $\approx 20mm$. Parallel dazu wurde zu Kontrollzwecken auch hier der Kolbenweg mit aufgezeichnet. Auf die Dehnungsmessung mit Hilfe eines DMS wurde

verzichtet.

Die digitale Datenaufzeichnung erfolgte mit Hilfe eines Transientenrecorders der Firma Krenz. Die verwendeten Taktfrequenzen betragen 50kHz bzw. 100kHz für die höheren Dehnungsgeschwindigkeiten bei einer Auflösung von 8 Bit.

Entsprechend Tabelle 3.1 sind bei den beiden höheren Dehnungsgeschwindigkeiten die Wechselwirkung von Zugprobe und Zugmaschine zu beachten. Eine von Meyer [77] für ein Rotationsschlagwerk durchgeführte Analyse, die aber im wesentlichen auf die verwendete Zugmaschine übertragbar ist, hat zeigt, daß eine Kraftmeßstelle im Bereich der Einschraubung zufriedenstellende Ergebnisse bei Abzugsgeschwindigkeiten bis $v \approx 5\text{m/s}$ liefern kann. Bei der verwendeten Zugprobe erhält man für diese Geschwindigkeit mit der Meßlänge L_0 eine Dehnungsgeschwindigkeit von $\dot{\varepsilon} = v/L_0 \approx 140\text{s}^{-1}$, womit, wie sich später zeigen wird, der in dieser Arbeit auftretende Bereich abgedeckt ist. Bei größeren Abzugsgeschwindigkeiten empfiehlt sich eine Zugprobe mit verlängertem Schaft, auf den ein DMS appliziert wird. Darauf wurde hier aber verzichtet.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist der zeitliche Verlauf der Krafteinleitung in die Probe. Hier ist ein stetiger Übergang des Kraftanstiegs beim Mitreißen der Probe anzustreben, weil damit Überschwinger beim Übergang in den plastischen Verformungsbereich vermieden oder zumindest gemildert werden. Eine stetige, weniger schlagartig verlaufende Krafteinleitung kann mit Hilfe von entsprechend ausgelegten Dämpfungselementen erzielt werden, die zwischen Mitnehmer und Gegenstück angebracht werden.

Aus den aufgezeichneten Kraft-Zeit- und Weg-Zeit-Verläufen erhält man durch Elimination der Zeit und die entsprechende Umrechnung die Spannungs-Dehnungs-Kurven. Die Darstellung der gemessenen Kurven im Bereich bis zur Gleichmaßdehnung durch eine Auftragung der wahren Spannung

$$\sigma = \sigma_{Ing} (1 + \varepsilon) = F/A_0 (1 + \varepsilon) \quad (3.1)$$

über der wahren Dehnung

$$\varepsilon = \ln(1 + \varepsilon_{Ing}) = \ln(1 + \Delta L/L_0). \quad (3.2)$$

Hier bedeutet F die Zugkraft, L_0 die Ausgangslänge ΔL die Verlängerung und A_0 die Ausgangsfläche der Zugprobe.

3.3 Material und Probenherstellung

Als Zugproben werden kurze Proportionalstäbe gemäß DIN 50125 (siehe Abbildung 3.1) benutzt. Diese Probengröße ergab sich aus den vorgegebenen Probeneinspannungen der verwendeten Zugmaschinen. Die Proben wurden aus dem Zentrum des verwendeten Stangenmaterials (siehe Tabelle 3.2) entnommen, abgedreht und geschliffen. Es erfolgte keine Wärmebehandlung nach der Herstellung.

3.4 Versuchsergebnisse

3.4.1 Ferritischer Stahl St 37

Neben den hier verwendeten Zugproben gemäß Abbildung 3.1 wurden zur Untersuchung des Probengrößeneinflusses auch Zugversuche an Proben mit den Durchmessern $D=14\text{mm}$ und $D=1.5\text{mm}$ bei der kleinsten Dehnungsgeschwindigkeit durchgeführt. Diese ergaben jedoch beim größeren Durchmesser keine Unterschiede in den Spannungs-Dehnungs-Kurven. Beim Durchmesser $D=1.5\text{mm}$ ergaben sich

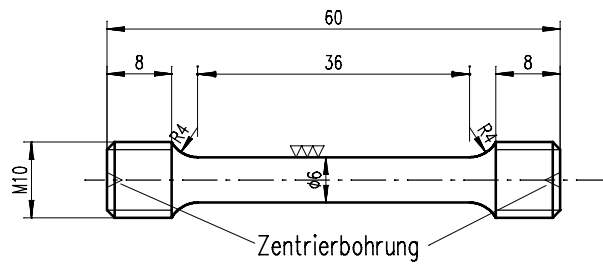


Abbildung 3.1: Zugprobe B6x30 gemäß DIN 50125

Material	Halbzeug	Herstellungsverfahren	Zustand
St 37	Stange $D=30\text{mm}$	gewalzt	Anlieferungszustand
AlZnMgCu1.5	Stange $D=40\text{mm}$	gezogen	Anlieferungszustand ausgehärtet
X 5 CrNi 18 9	Stange $D=30\text{mm}$	gezogen, abgedreht	Anlieferungszustand lösungsgeglüht 1050°C , 4h abgeschreckt

Tabelle 3.2: Zustand der verwendeten Halbzeuge für die Zugversuche und die FLIPPER-Experimente

in der Messung zwar etwas größere Spannungen, jedoch sind hier infolge der sehr kleinen Zugkräfte Unsicherheiten in der Meßgenauigkeit gegeben, weshalb diese Ergebnisse hier nicht weiter dargestellt und diskutiert sind. Die dargestellten Ergebnisse beziehen sich also alle auf Zugproben mit $D=6\text{mm}$.

In Abbildung 3.2 sind die ermittelten wahren Spannungs-Dehnungs-Kurven für verschiedene Dehnungsgeschwindigkeiten im Bereich von $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-4}\text{s}^{-1}$ bis $\dot{\epsilon} = 120\text{s}^{-1}$ bis zum Erreichen des Kraftmaximums dargestellt. Für die Gleichmaßdehnung, die der maximalen dargestellten Dehnung entspricht, kann ein kontinuierlicher Rückgang mit Zunahme der Dehnungsgeschwindigkeit festgestellt werden. Eine Ausnahme macht hier die Kurve bei der Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = 6\text{s}^{-1}$, die außerdem eine deutliche „niederfrequente“ Welligkeit im Verlauf aufweist. Die Welligkeit läßt sich mit dem Regelungsverhalten der Schlagzugmaschine erklären, die hier bei einer relativ kleinen Abzugsgeschwindigkeit betrieben wurde. Diese Geschwindigkeit konnte nicht mehr gleichmäßig genug eingehalten werden, so daß sich auch Schwankungen der Dehnungsgeschwindigkeit einstellen, die sich im Spannungs-Dehnungs-Verlauf bemerkbar machen. Möglicherweise kann damit auch das etwas frühere Einschnüren begründet werden.

Bei der Spannungs-Dehnungs-Kurven für die größeren Dehnungsgeschwindigkeiten sind im Bereich der Lüdersdehnung insbesondere bei der Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = 120\text{s}^{-1}$ „hochfrequente“ Schwingungen zu erkennen, die folgendermaßen erklärt werden können. Nach dem Erreichen der oberen Streckgrenze σ_{Fo} fällt die Spannung und damit die Zugkraft schlagartig auf den Wert an der unteren Streckgrenze σ_{Fu} ab. Dadurch wird in das Feder-Masse-System bestehend aus Zugprobe und Kraftaufnehmer eine Schwingung eingeleitet, die sich mit zunehmender Abzugsgeschwindigkeit immer stärker im gemessenen Kraft-Zeit-Verlauf und damit auch in der Spannungs-Dehnungs-Kurve bemerkbar macht. Dieser Effekt ist ebenfalls bei Meyer [77] beschrieben und kann nicht durch die weiter oben beschriebenen Dämpfungsmaßnahmen beeinflußt werden.

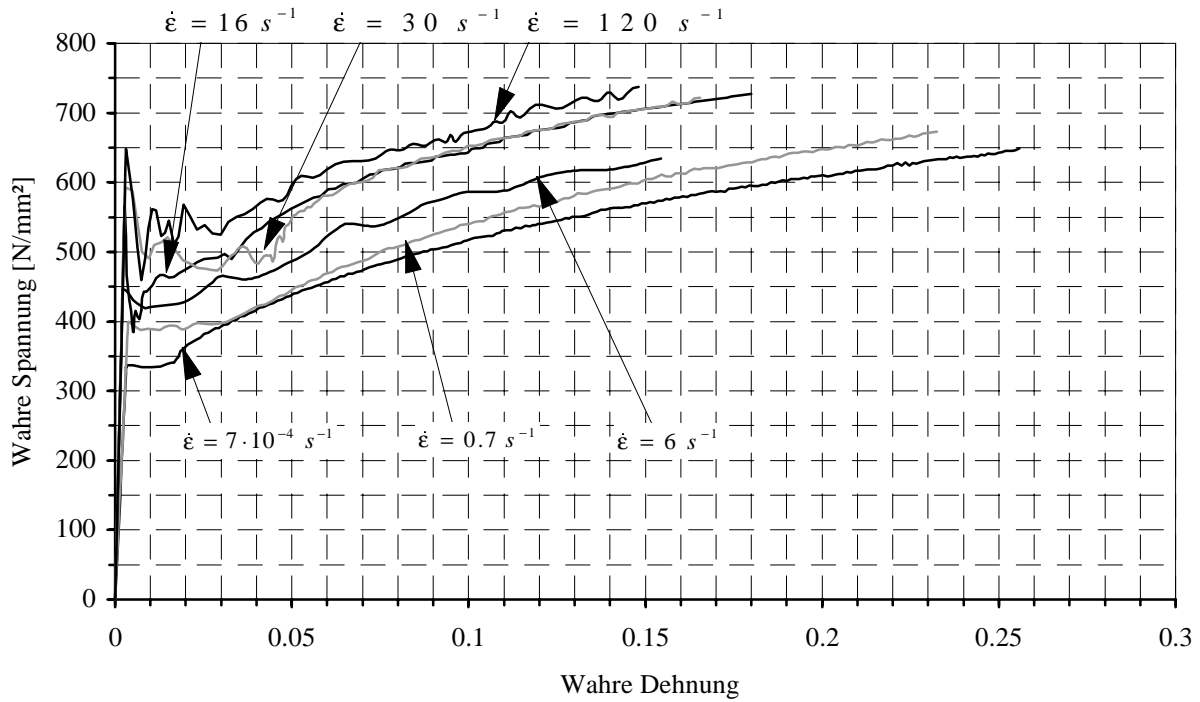


Abbildung 3.2: Spannungs-Dehnungs-Kurven für ferritischen Stahl St 37 bei Raumtemperatur und verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeiten

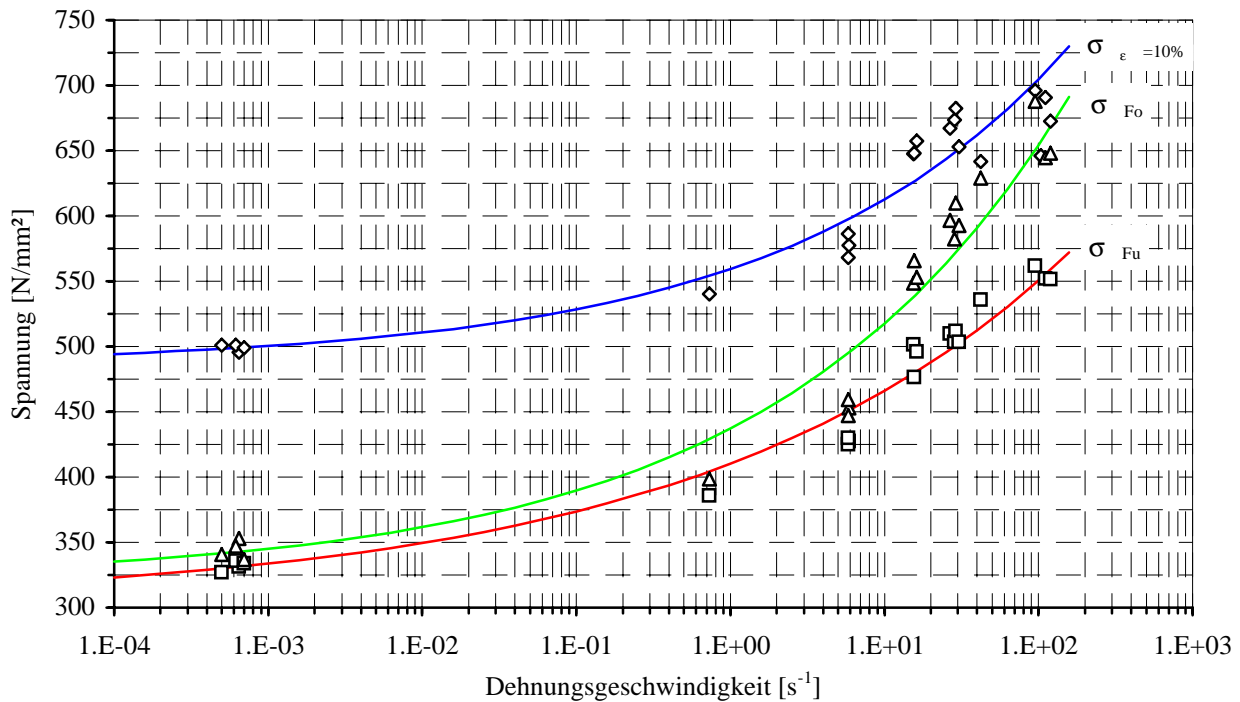


Abbildung 3.3: Materialdaten für ferritischen Stahl St 37 bei Raumtemperaturen in Abhängigkeit von der Dehnungsgeschwindigkeiten. Die verschiedenen Symbole entsprechen der unteren Fließspannung (□), der oberen Fließspannung (△) und der Spannung bei der Dehnung $\epsilon=10\%$ (◇)

In Abbildung 3.3 sind die obere Fließspannung σ_{Fo} , die untere Fließspannung σ_{Fu} und die Spannung $\sigma_{10\%}$ bei der Dehnung $\varepsilon = 10\%$ über der Dehnungsgeschwindigkeit aufgetragen. Zusätzlich sind Ausgleichskurven eingetragen, die mit dem in Abschnitt 3.5 beschriebenen Verfahren bestimmt wurden. Man erkennt, daß der Anstieg mit der Dehnungsgeschwindigkeit für die obere Streckgrenze stärker ausgeprägt ist als für die untere Streckgrenze, für die der Anstieg wiederum geringfügig größer ist als für die Spannung $\sigma_{10\%}$. Dieses Verhalten ist in der Literatur wohlbekannt. Untersuchungen von Schmidtman und Russell [78] zeigen, daß im Temperaturbereich zwischen -196°C und 20°C bei Zugversuchen mit Dehnungsgeschwindigkeiten bis zu $\dot{\varepsilon} = 100\text{s}^{-1}$ die obere Streckgrenze um mehr als 100% gegenüber quasistatischen Bedingungen ansteigen kann. Der Wert der oberen Streckgrenze kann damit den Wert der Zugfestigkeit überschreiten. Die Differenz zwischen oberer und unterer Streckgrenze nimmt dabei mit steigender Dehnungsgeschwindigkeit, steigender Temperatur und abnehmender Korngröße zu.

Die Ausbildung der oberen Streckgrenze beruht auf der Behinderung der Versetzungsbewegung infolge der interstitiellen Lösung von Kohlenstoff- und Stickstoffatomen (siehe Honeycombe [79]). Die Eignung der oberen Streckgrenze als Materialkennwerte ist umstritten, weil ihre genaue experimentelle Bestimmung bedingt durch zahlreiche Störeinflüsse¹ großen Ungenauigkeiten unterworfen ist.

Besser geeignet zur Charakterisierung des Werkstoffverhalten ist die untere Streckgrenze, weil hier die Spannung über einen größeren Bereich näherungsweise konstant bleibt. Die untere Streckgrenze ist durch die inhomogene Probenverformung infolge der Ausbreitung von Lüdersbändern charakterisiert (siehe Dahl und Rees [80]). Man erkennt qualitativ den wohlbekannten Anstieg der Lüdersdehnung bei zunehmender Dehnungsgeschwindigkeit (Van Rooyen [81]).

Neben der Temperaturabhängigkeit der Lüdersdehnung ε_L besteht ein Zusammenhang zwischen der Lüdersdehnung und dem Fließspannungsabfall $\sigma_{Fo} - \sigma_{Fu}$ in der Form $\sigma_{Fo} - \sigma_{Fu} = k\varepsilon_L^m$ (Van Rooyen [82]). Damit kann bei steigender Dehnungsgeschwindigkeit die Zunahme der Lüdersdehnung beschrieben werden, da, wie oben erwähnt, die obere Streckgrenze mit der Dehnungsgeschwindigkeit schneller ansteigt als die untere Streckgrenze.

3.4.2 Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5

Die hochfeste Aluminiumknetlegierung AlZnMgCu1.5 lag als Halbzeug entsprechend Tabelle 3.2 vor. Sie ist bekannt für einen besonders gering ausgeprägten Anstieg der Spannung mit zunehmender Dehnungsgeschwindigkeit, wie z.B. Maiden und Green [83] anhand von Druckversuchen mit der Aluminiumlegierung 7075, die in der chemischen Zusammensetzung (siehe Aluminiumschlüssel [84]) der hier verwendeten entspricht, festgestellt haben.

In Abbildung 3.4 ist dieses Verhalten ebenfalls deutlich zu erkennen. Aufgetragen sind die wahren Spannungs-Dehnungs-Kurven bis zum Erreichen der maximalen Kraft. Die Spannungs-Dehnungs-Kurven unterscheiden sich über einen Dehnungsgeschwindigkeitsbereich von sechs Zehnerpotenzen nur unwesentlich. Die dynamischen Kurven sind am Überschwinger im Übergang zum plastischen Verformungsbereich zu erkennen, der, wie oben erwähnt, meßtechnisch begründet werden kann.

Dieser Werkstoff zeigt ein sprödes Bruchverhalten mit einer geringen Einschnürung der Probe bei einer kleinen Bruchdehnung, wie ebenfalls aus Abbildung 3.4 an der geringen Gleichmaßdehnung, die der maximalen dargestellten Dehnung entspricht, zu ersehen ist. Die geringe Bruchdehnung bei diesem Werkstoff ist von Nachteilig, weil dadurch nur relativ kleine Verformungen erzielt werden können.

¹Zu den wichtigsten Störeinflüssen gehören zum Beispiel die Güte der Probenoberfläche, das vom eindimensionalen Ideal abweichende Spannungsfeld im Bereich der Probenschulter, die Probenform und -größe, Biegespannungen, hervorgerufen durch die Probeneinspannung und Steifigkeit der Zugmaschine.

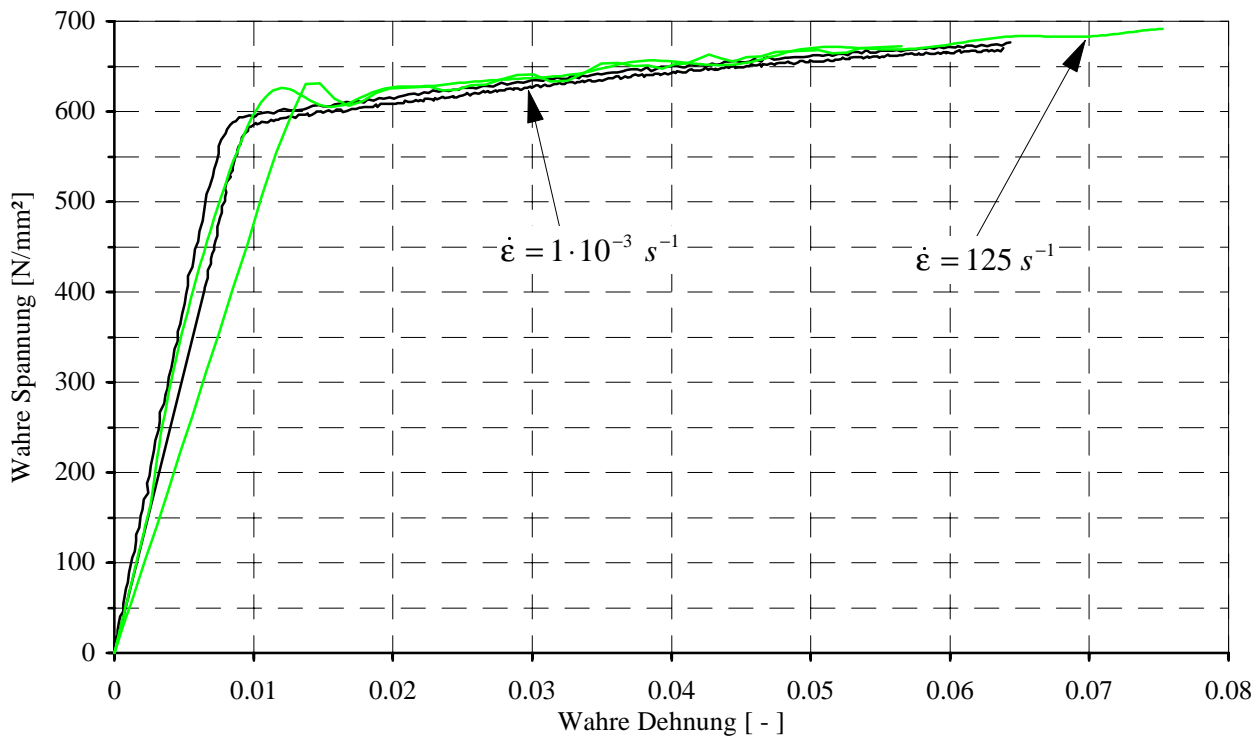


Abbildung 3.4: Spannungs-Dehnungs-Kurven für die Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5 bei Raumtemperatur und verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeiten

3.4.3 Austenitischer Stahl X 5 CrNi 18 9

Der austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 lag als Halbzeug entsprechend Tabelle 3.2 (Seite 42) in der chemischen Zusammensetzung gemäß Tabelle 3.3 vor. Es ergaben sich für die verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeiten die in Abbildung 3.5 dargestellten wahren Spannungs-Dehnungs-Kurven. Die Darstellung endet wiederum beim Erreichen der maximalen Kraft.

Die Spannungen nehmen bei kleineren Dehnungen mit wachsender Dehnungsgeschwindigkeit zu. Für die Kurven bei den größeren Dehnungsgeschwindigkeiten ($\dot{\epsilon} \geq 1 \text{ s}^{-1}$) wird die Spannungsdifferenz zur Kurve bei der kleinsten Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ jedoch mit zunehmender Dehnung geringer. Bei größeren Dehnungen liegt die Kurve für die Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ sogar über der Kurve für $\dot{\epsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$.

Dieses Verhalten läßt sich durch Berücksichtigung der großen Dehnungen, die dieser Werkstoff erreichen kann, deuten. Bei der großen plastischen Verformung wird hier ein großer Energiebetrag in der Probe dissipiert. Durch Integration der Spannungs-Dehnungs-Kurve bis zum Erreichen der Gleichmaßdehnung erhält man für die kleinste Dehnungsgeschwindigkeit Werte von etwa 243 MJ/m^3 . Die

Bezeichnung				W.-Nr.		
X 5 CrNi 18 9				1.4301		
C	Cr	Mn	Ni	P	S	Si
0.046	17.2	1.64	8.55	0.028	0 027	0.44

Tabelle 3.3: Werkstoffzusammensetzung gemäß Prüfzeugnis 3.1B für den austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9

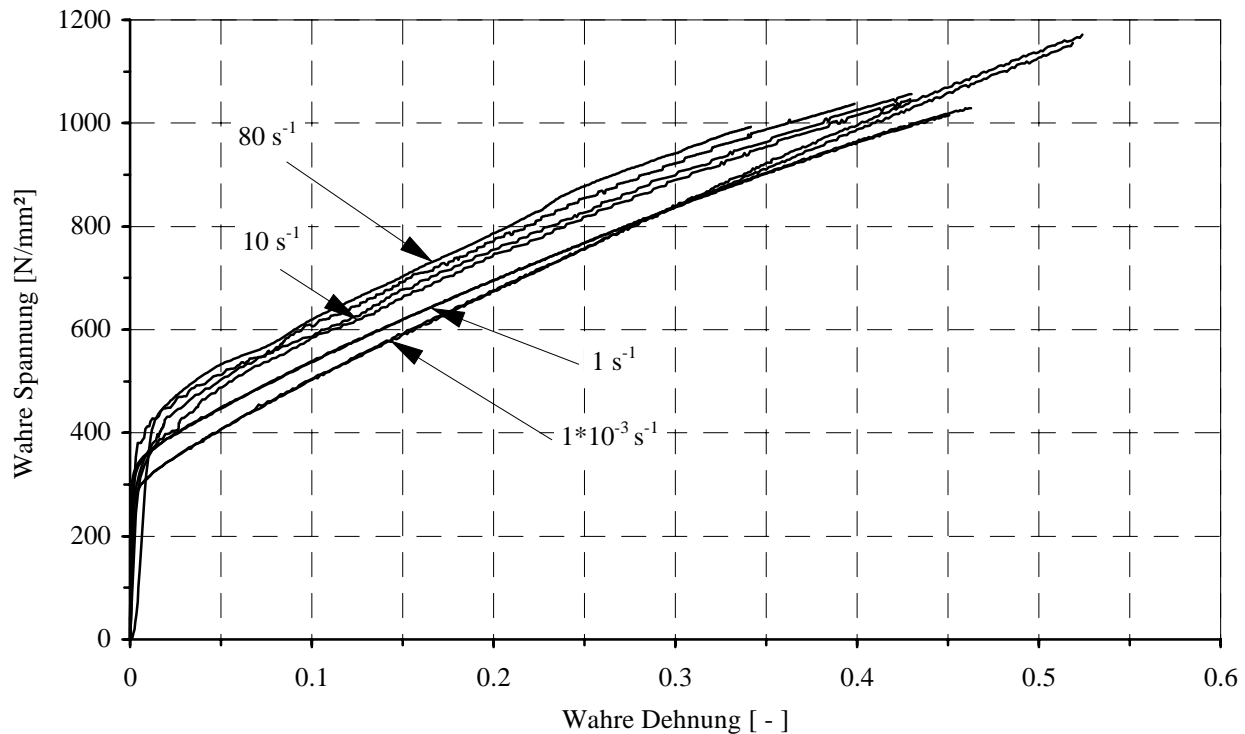


Abbildung 3.5: Spannungs-Dehnungs-Kurven für austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 bei Raumtemperatur und verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeiten

dissipierte Energie wird in Wärme umgewandelt. Diese entstehende Wärme kann bei quasistatischer Versuchsdurchführung durch Wärmeleitung über die Probenenden abgeführt werden, so daß von isothermen Prozessen ausgegangen werden kann. Bei dynamischen Zugversuchen ist das aber infolge der kurzen Versuchszeit nicht mehr möglich und es ist näherungsweise von adiabaten Prozessen auszugehen. Bei adiabater Versuchsdurchführung ergibt sich nun eine Erwärmung der Probe um ca. $70^\circ\text{C} - 80^\circ\text{C}$, wenn angenommen wird, daß die gesamte dissipierte Energie in Wärme umgewandelt wird.

Sanderson und Llewellyn [85] haben für die austenitischen Stähle AISI302 und AISI304, die in der chemischen Zusammensetzung dem austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 entsprechen (siehe Werkstoff-Datenblatt), Untersuchungen zum Temperaturverhalten bei kleiner Dehnungsgeschwindigkeit durchgeführt. Die Festigkeitskennwerte für diese Werkstoffe zeigen dabei einen deutlichen Abfall zwischen Raumtemperatur und 100°C von $\approx 25\%$ für die 0.2%-Dehngrenze und die Zugfestigkeit (siehe Abbildung 3.6). Wenn man diesen Festigkeitsabfall auf die dynamischen Zugversuche überträgt, kommt es also zu einer Überlagerung von Festigkeitssteigerung infolge der höheren Dehnungsgeschwindigkeit und einer Entfestigung infolge der Temperaturerhöhung. Dieses Verhalten zeigt sich auch sehr deutlich in den gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven. Während bei den kleineren Dehnungen der Strainrate-Effekt dominiert, wird die Überspannung mit zunehmender Dehnung immer geringer. Die quasistatische Spannungs-Dehnungs-Kurve liegt deshalb ab $\epsilon > 0.3$ über der Spannungs-Dehnungs-Kurve für die Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$.

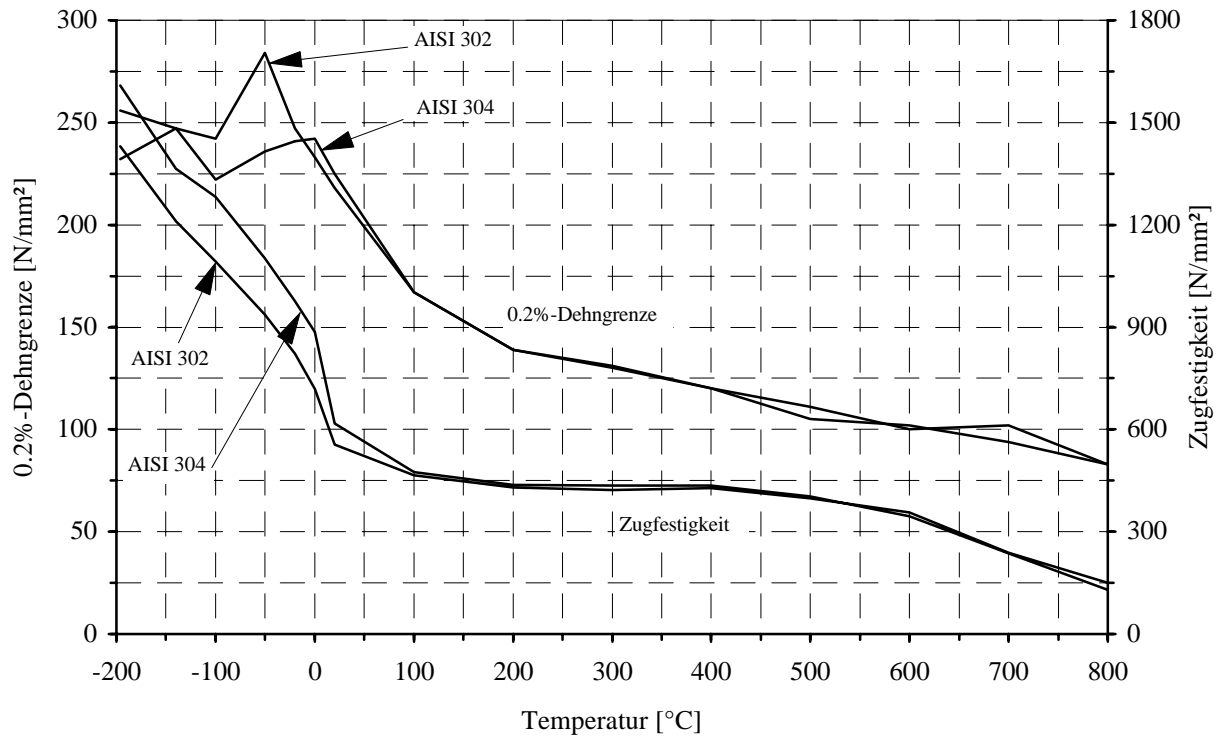


Abbildung 3.6: Materialkennwerte für austenitischen Stahl AISI 302 und AISI 304 bei verschiedenen Temperaturen nach Sanderson und Llewellyn [85] ($\dot{\epsilon} = 3.3 \cdot 10^{-5} s^{-1}$)

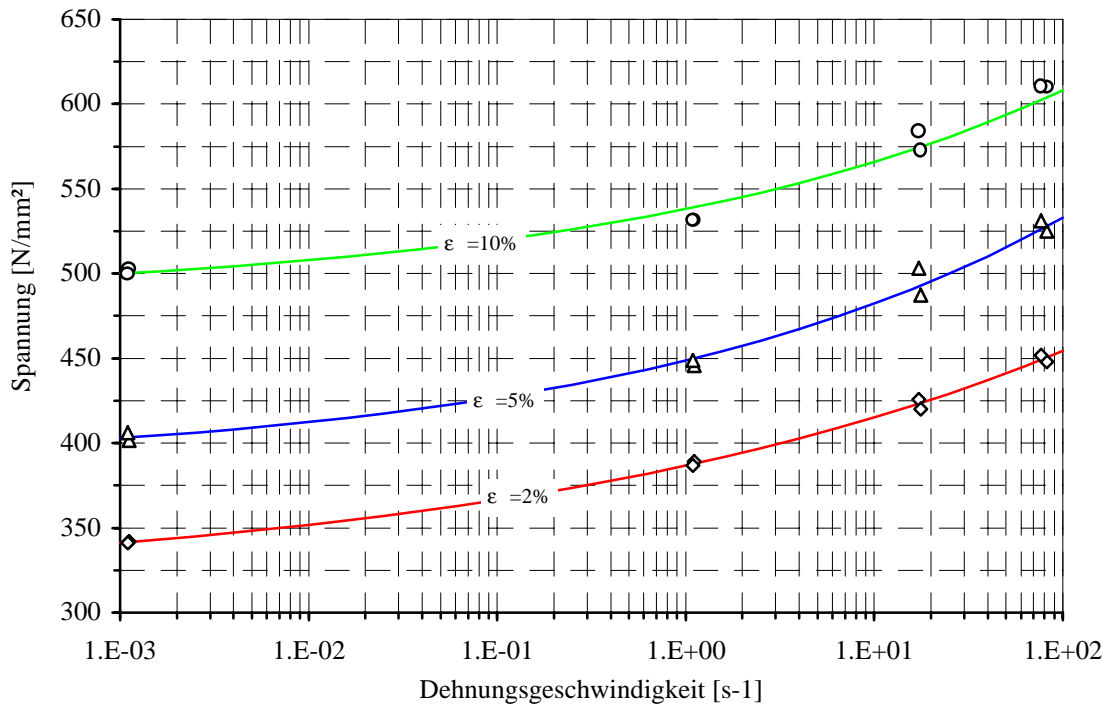


Abbildung 3.7: Materialkennwerte für austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 bei Raumtemperaturen in Abhängigkeit von der Dehnungsgeschwindigkeit

Durch das große Verfestigungsvermögen des Werkstoffs - zwischen Maximalspannung und Dehngrenze liegt ein Faktor von 2.5 bis 3 - vergrößert sich bei steigender Last der Bereich, in dem plastische Verformung auftritt, bis in die Probenschulter hinein. Dies muß bei der Verwendung externer Wegaufnehmer beachtet werden, da sich die Bezugslänge L_0 während des Versuchs laufend ändert. Die Änderung der Meßlänge kann mittels Rechnung bestimmt und die Dehnung annähernd korrigiert werden. Dies ist jedoch hier nicht geschehen, weshalb die Dehnungen, die mit der Laserwegmessung bei den größeren Dehnungsgeschwindigkeiten bestimmt wurden, ein wenig zu groß, aber ausreichend genau sind.

In Abbildung 3.7 sind verschiedene Spannungswerte über der Dehnungsgeschwindigkeit aufgetragen. Die Werte wurden bei den Dehnungen $\varepsilon = 2\%$, $\varepsilon = 5\%$ und $\varepsilon = 10\%$ bestimmt und zeigen insbesondere für die beiden kleineren Werte eine sehr gute Korrelation mit den verwendeten Näherungskurven, die mit dem im nächsten Abschnitt beschriebenen Verfahren bestimmt wurden.

3.5 Analytische Darstellung für die gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven

3.5.1 Allgemeines

Für das in Kapitel 5 vorgestellte Rechenmodell werden analytische Zusammenhänge für die Spannungs-Dehnungs-Kurve benötigt, die im folgenden bereitgestellt werden.

Zur Beschreibung des Materialverhaltens bis zur Gleichmaßdehnung der Spannungs-Dehnungs-Kurve existieren diverse empirische Ansätze, die einen Potenzansatz für den Zusammenhang von wahrer Spannung und wahrer Dehnung benutzen. Die in den Ansätzen enthaltenen Parameter müssen jeweils an experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Kurven angepaßt werden, was je nach der Anzahl der Parameter einen mehr oder weniger großen experimentellen Aufwand bedeutet. Häufig verwendet werden die Ansätze nach:

- Hollomon [86]

$$\sigma = B\varepsilon^r \quad \text{Parameter: } B, 0 \leq r \leq 1, \quad (3.3)$$

- Ludwik [87]

$$\sigma = \sigma_F + B\varepsilon^r \quad \text{Parameter: } \sigma_F, B, 0 \leq r \leq 1, \quad (3.4)$$

- Ramberg-Osgood [88]

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} = \frac{\sigma}{\sigma_F} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_F} \right)^r \quad \text{Parameter: } \sigma_F, \varepsilon_R, \alpha, r \geq 1. \quad (3.5)$$

Bei diesem Ansatz ergibt sich für $r = 1$ rein elastisches Verhalten, bei wachsendem r ergibt sich im Grenzwert $r \rightarrow \infty$ elastisch-idealplastisches Verhalten.

Johnson, Cook und Mitarbeiter [89], [90] haben folgenden Ansatz vorgeschlagen, der zusätzlich die Abhängigkeit der Materialdaten von der Dehnungsgeschwindigkeit und der Temperatur berücksichtigt:

$$\sigma = (\sigma_F + B\epsilon^r) \left(1 - C \ln \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_{Ref}}\right) \left[1 - \left(\frac{T - T_R}{T_m - T_R}\right)^m\right] \quad \text{Parameter: } \sigma_F, B, C, r, m. \quad (3.6)$$

Dabei kennzeichnet T_m die Schmelztemperatur des Werkstoffs, T_R eine Referenztemperatur und $\dot{\epsilon}_{Ref}$ eine Referenzdehnrate.

Weitere Ansätze, die zur Beschreibung des Temperatur- und Dehnungsgeschwindigkeitsverhaltens auf versetzungstheoretischen Überlegungen aufbauen, finden sich zum Beispiel bei Zerilli und Armstrong [91], [92], [93] sowie bei Follansbee und Kocks [94].

3.5.2 Analytische Beschreibung des viskoplastischen Verhaltens

Zur analytischen Beschreibung der Abhängigkeit der Materialdaten von der Dehnungsgeschwindigkeit wird der in Gleichung (2.46) verwendete Ansatz $\sigma_{vp} = \eta_{vp,n} (\dot{\epsilon}^p)^m$ benutzt. Die Größe σ_{vp} beschreibt dabei den Anstieg der Spannung bei zunehmender Dehnungsgeschwindigkeit im Vergleich zur statischen Spannungs-Dehnungs-Kurve. Diese statische Kurve ($\dot{\epsilon} \rightarrow 0$) ist jedoch nicht bekannt. Als Näherungswerte könnten die Daten für die kleinste benutzte Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-4} \text{s}^{-1}$ verwendet werden. Hier wurde jedoch auf eine andere Weise vorgegangen, da die genannte kleinste Dehnungsgeschwindigkeit für die Bestimmung der statischen Spannungs-Dehnungs-Kurve noch zu groß ist.

Der in Gleichung (2.46) verwendete Ansatz liefert in doppeltlogarithmischer Darstellung eine Gerade. Aus den Meßwerten kann in derselben Darstellung eine Regressionsgerade der Form $y = ax + b$ gewonnen werden. Hierbei gilt:

$$\begin{aligned} y &= \log(\sigma - \sigma^{stat}), \\ x &= \log \dot{\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Geradensteigung a und den Achsenabschnitt b erhält man aus den n Meßwerten zu (siehe z.B. Sachs [95]):

$$\begin{aligned} a &= \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}, \\ b &= \frac{\sum y - a \sum x}{n}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die Geradensteigung a entspricht dabei dem viskoplastischen Exponenten m und der Achsenabschnitt b dem Logarithmus $\log \eta_{vp,n}$ der Quasiviskosität. Es zeigt sich, daß das Bestimmtheitsmaß R^2 der Regressionsgeraden² mit

$$R^2 = \frac{[\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})]^2}{\sum (x - \bar{x})^2 \sum (y - \bar{y})^2} \quad (3.9)$$

²Das Bestimmtheitsmaß R^2 liefert eine Aussage inwieweit zwischen zwei Datensätzen x und y ein linearer Zusammenhang besteht. Für $R^2=0$ besteht keine Abhängigkeit und für $R^2=1$ liegen die x - und y -Werte genau auf einer Geraden.

von der statischen Spannung σ^{stat} abhängig ist. Die Größen \bar{x} und \bar{y} stehen dabei jeweils für die arithmetischen Mittelwerte.

Durch eine Iteration oder mit entsprechendem Rechenaufwand auch analytisch kann diejenige statische Spannungen σ^{stat} gewonnen werden, für die das Bestimmtheitsmaß maximal wird. Es handelt sich hier also um eine reine Kurvenanpassung, die jedoch die gemessenen Daten sehr gut approximiert, wie ein Blick auf das Bestimmtheitsmaß in Tabelle 3.4 zeigt. Die in Tabelle 3.4 aufgeführten Werte wurden mit Hilfe einer Optimierungsroutine berechnet, wie sie in gängigen Tabellenkalkulationsprogrammen zu finden ist. Aufgrund der geringen Abhängigkeit der Materialdaten der Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5 von der Dehnungsgeschwindigkeit wurde diese hier nicht betrachtet.

Mit den gewonnenen Koeffizienten wurden die in Abbildung 3.3 und 3.7 eingezeichneten Näherungskurven bestimmt. Aufgetragen sind dort die Kurven

$$\sigma = \sigma^{stat} + \eta_{vp,n} \varepsilon^m. \quad (3.10)$$

Für das in Kapitel 5 beschriebene Rechenmodell wurden beim ferritischen Stahl St 37 die Koeffizienten für die Dehnung $\varepsilon = 10\%$ weiterverwendet. Bei Verwendung der entsprechenden Koeffizienten für die obere bzw. untere Fließspannung werden bei größeren Dehnungsgeschwindigkeiten viel zu große Spannungswerte berechnet. Bei dem austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 ergeben sich, abhängig von den jeweils verwendeten Koeffizienten, keine großen Unterschiede in den berechneten Spannungs-Dehnungs-Kurven. Hier wurden deshalb die Koeffizienten verwendet, die für die Dehnung $\varepsilon = 2\%$ ermittelt wurden, weil für diese das Bestimmtheitsmaß am größten ist.

		σ^{stat}	$\eta_{vp,n}$	m	R^2
St 37	Obere Fließspannung	320	116	0.23	0.967
	Untere Fließspannung	303	102	0.20	0.984
	Spannung bei $\varepsilon = 0.1$	486	73.2	0.24	0.981
X 5 CrNi 18 9	Spannung bei $\varepsilon = 0.02$	314	72.8	0.14	0.999
	Spannung bei $\varepsilon = 0.05$	385	64.0	0.182	0.990
	Spannung bei $\varepsilon = 0.1$	480	61.4	0.166	0.973

Tabelle 3.4: Koeffizienten zum viskoplastischen Verhalten für den ferritischen Stahl St 37 und den austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 bestimmt mit Daten entsprechend Anhang C

3.5.3 Analytische Beschreibung des Verfestigungsverhaltens

Für die Approximation der gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven durch eine Verfestigungsfunktion $R(\varepsilon^p)$ wird ein möglicher Einfluß der Dehnungsgeschwindigkeit vernachlässigt und der Ansatz nach Ludwik 3.4 verwendet:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon & , \quad \varepsilon \leq \frac{\sigma_F}{E} = \varepsilon_F \\ \sigma_F + B(\varepsilon - \varepsilon_F)^r & , \quad \varepsilon > \frac{\sigma_F}{E} = \varepsilon_F \end{cases}. \quad (3.11)$$

Dieser Ansatz ist gut geeignet, das Verfestigungsverhalten von Werkstoffen wie dem austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 oder der Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5 zu beschreiben. Der Ansatz ergibt in der doppeltlogarithmischen Darstellung wiederum eine Gerade,

Werkstoff			St 37	X 5 CrNi 18 9	AlZnMgCu1.5
Statische Fließspannung	σ_F	[N/mm ²]	303	265	580
Wahre Zugfestigkeit	σ_u	[N/mm ²]	650		
Gleichmaßdehnung	ε_u	-	0.255		
Dissipierte Energie	E_{diss}	[MJ/m ³]	134		
Verfestigungsfaktor	B	[N/mm ²]	746	1523	588
Verfestigungsexponent	r	-	0.613	0.842	0.649
Quasiviskosität	η_{vp}	[Ns ^m /mm ²]	73.2	72.8	-
Überspannungsexponent	m	-	0.24	0.14	-

Tabelle 3.5: Materialkennwerte und Koeffizienten für analytische Spannungs-Dehnungs-Kurven bestimmt mit Daten entsprechend Anhang C

Für die gemessenen Werte kann nun wiederum eine lineare Regression für den kleinsten quadratischen Fehler (siehe Sachs [95]) durchgeführt wird. Die Regression erfolgte für eine Auftragung der bei der kleinsten Dehnungsgeschwindigkeit gemessenen Werte $\log(\sigma - \sigma_F)$ über $\log(\varepsilon - \varepsilon_F)$. Das Problem bei dieser Auftragung ist, daß die Fließspannung σ_F durch den kontinuierlichen Übergang in den plastischen Verformungsbereich nur schwer zu bestimmen ist. Erschwerend kommt weiter hinzu, daß das zur Dehnungsmessung verwendete Extensiometer im Bereich kleiner Dehnungen eine relativ große Meßungenauigkeit aufweist. Die Fließspannung wurde deshalb durch ein analoges Verfahren wie bei der Berechnung der Koeffizienten zur Beschreibung des viskoplastischen Verhaltens ermittelt. Es wurde wiederum der Wert der Fließspannung σ_F verwendet, für den das Bestimmtheitsmaß für die Regressionsgerade am größten war. Die aus dem Achsenabschnitt und der Steigung der Regressionsgeraden ermittelten Koeffizienten B und r sind in Tabelle 3.5 aufgeführt.

Die Ansatz bewährt sich bei den Spannungs-Dehnungs-Kurven für den austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 und die Aluminiumknetlegierung AlZnMgCu1.5 sehr gut wie man in den Abbildung 3.8 und 3.9 nachprüfen kann. Für die Spannungs-Dehnungs-Kurve bei der kleinsten Dehnungsgeschwindigkeit erhält man in beiden Fällen mit dieser Vorgehensweise eine hervorragende Übereinstimmung der gemessenen und approximierten Kurven.

Mit der analytischen Darstellung können bei Berücksichtigung der Überspannung auch die bei den anderen Dehnungsgeschwindigkeiten gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven im Bereich mittlerer Dehnungen gut nachgebildet werden. Die damit berechneten Kurven sind ebenfalls eingezeichnet. Im Bereich großer Dehnung ergeben sich allerdings zu große Spannungswerte, weil das temperaturabhängige Verhalten des Werkstoffs nicht nachgebildet wird. Die Abweichungen sind aber auch bei der Gleichmaßdehnung nicht größer als etwa 10%.

Bei kleinen Dehnungen $\varepsilon < 0.01$ werden mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit ebenfalls zu große Spannungen berechnet. Das ist begründet, weil die Zugversuche mit konstanter Abzugsgeschwindigkeit durchgeführt wurden, woraus sich eine konstante Dehnungsgeschwindigkeit für die Ingenieur-Dehnung $\varepsilon_{ing} = \varepsilon_{ing}^e + \varepsilon_{ing}^p$ ergibt. Daher ist aber im Bereich kleiner plastischer Verformung sowohl die elastische Dehnungsgeschwindigkeit als auch die plastische Dehnungsgeschwindigkeit nicht mehr konstant. In Abhängigkeit vom Verfestigungsverhalten des Materials nimmt mit zunehmender Dehnung die elastische Dehnungsgeschwindigkeit ab, während die plastische Dehnungsgeschwindigkeit zunimmt, bis sie schließlich annähernd gleich der konstanten gesamten Dehnungsgeschwindigkeit ist. Die dargestellten Kurven wurden jedoch von konstanter plastischer Dehnungsgeschwindigkeit auch bei kleinen

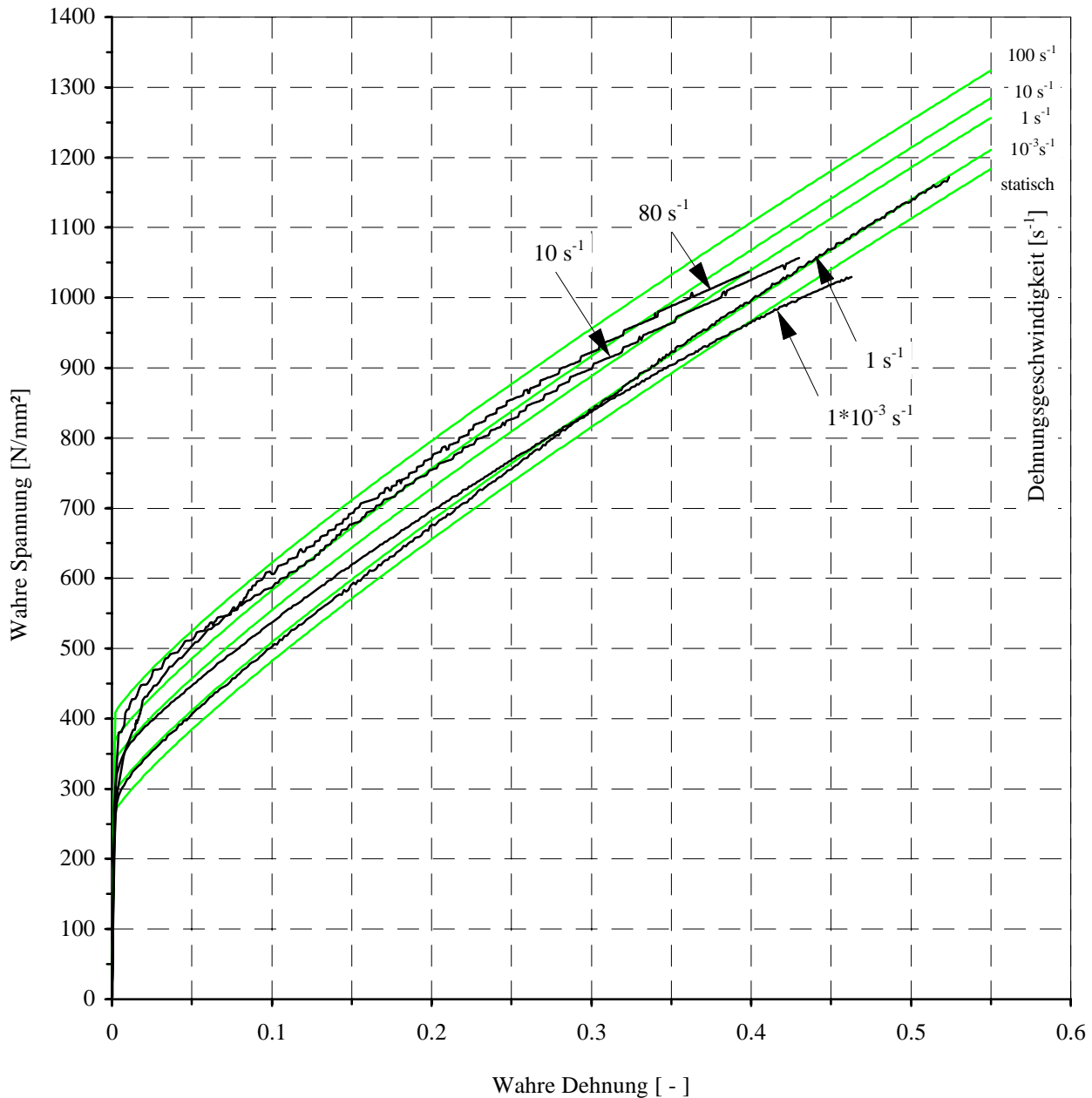


Abbildung 3.8: Vergleich der gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven (dunkel) mit dem empirischen Verfestigungsansatz nach Ludwik (hell) für den austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 bei verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeiten

plastischen Dehnungen berechnet und liefern damit in diesem Bereich im Vergleich zum Zugversuch zu große Spannungen.

Um die Spannungs-Dehnungs-Kurve für den ferritischen Stahl St 37 nachzubilden, ist der verwendete Verfestigungsansatz prinzipiell schlecht geeignet. Verbesserungen können erreicht werden, wenn die Spannungs-Dehnungs-Kurve in mehrere Bereiche aufgeteilt wird, für die jeweils getrennt eine Anpassung vorgenommen wird. Für die Modellrechnungen in Kapitel 5 ist diese Vorgehensweise jedoch unbequem, so daß ein anderer Weg eingeschlagen wurde, um auch hier mit nur einer Verfestigungsfunktion arbeiten

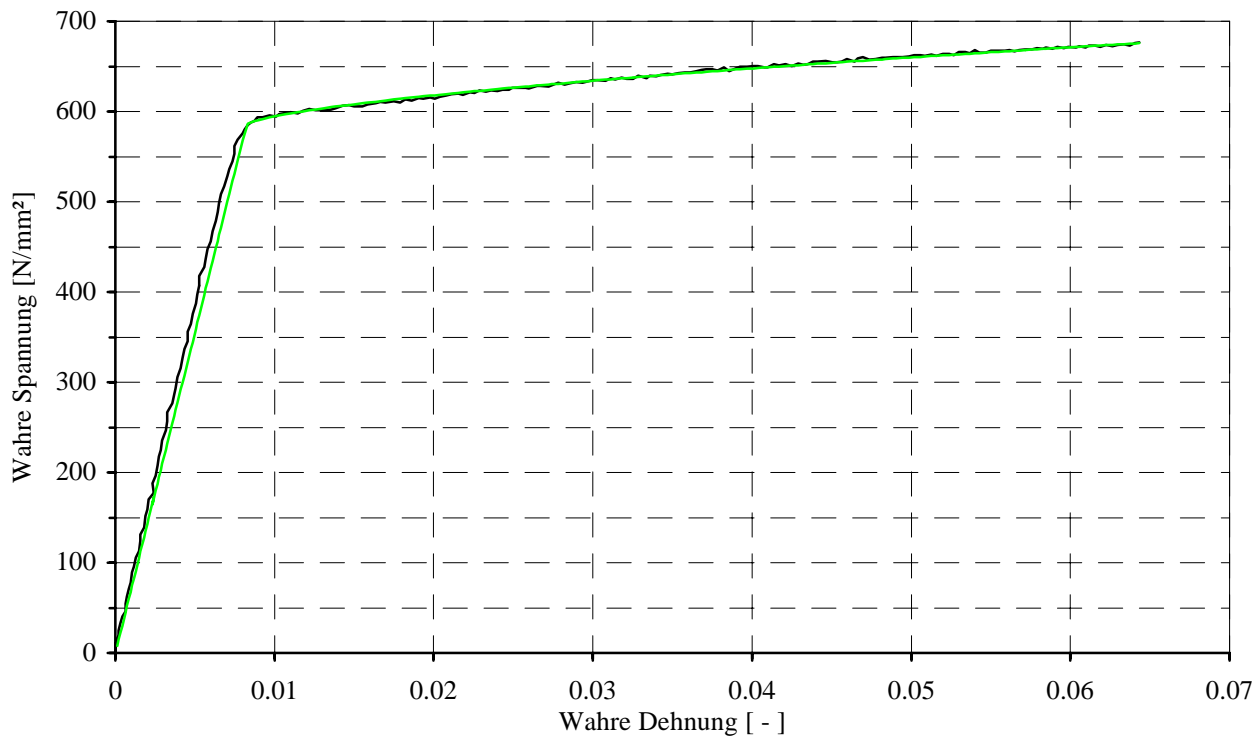


Abbildung 3.9: Vergleich der gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurve (dunkel) mit dem empirischen Verfestigungsansatz nach Ludwik (hell) für die Aluminiumknetlegierung AlZnMgCu1.5

zu können. Die Anpassung der benötigten Koeffizienten B und r der verwendeten Verfestigungsfunktion an die gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven erfolgt so, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Bis zum Punkt der Gleichmaßdehnung ε_u soll die dissipierte Energie für die gemessene Kurve und die verwendete Approximation dieselbe sein.
- Für die Gleichmaßdehnung ε_u soll die approximierte Spannung mit der gemessenen Spannung σ_u übereinstimmen.

Aus der ersten Forderung erhält man folgende Bedingung:

$$\begin{aligned}
 E_{diss} &\approx \int_{\varepsilon_F}^{\varepsilon_u} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{\varepsilon_F}^{\varepsilon_u} \sigma_F + B(\varepsilon - \varepsilon_F)^r d\varepsilon \\
 &= \sigma_F(\varepsilon_u - \varepsilon_F) + \frac{B}{r+1}(\varepsilon_u - \varepsilon_F)^{r+1}.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Der Faktor B ergibt sich nun in Abhängigkeit vom Exponenten r zu

$$B = (r+1) \frac{E_{diss} - \sigma_F(\varepsilon_u - \varepsilon_F)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_F)^{r+1}}. \tag{3.13}$$

Aus der zweiten Forderung erhält man folgende Bedingung:

$$\sigma_u = \sigma_F + B(\varepsilon_u - \varepsilon_F)^r \tag{3.14}$$

bzw. nach Einsetzen von (3.13)

$$r = 1 - \frac{(\sigma_u - \sigma_F)(\varepsilon_u - \varepsilon_F)}{E_{diss} - \sigma_F(\varepsilon_u - \varepsilon_F)}. \quad (3.15)$$

Mit den gemessenen Werten erhält man für die Koeffizienten die in Tabelle 3.5 aufgeführten Werte. Die approximierten Spannungs-Dehnungs-Kurven finden sich in Abbildung 3.10 im Vergleich zu den gemessenen Verläufen. Dabei ist das dehnungsgeschwindigkeitsabhängige Verhalten durch die entsprechenden Koeffizienten aus Tabelle 3.4 für die Werte bei der Dehnung $\varepsilon = 0.1$ berücksichtigt.

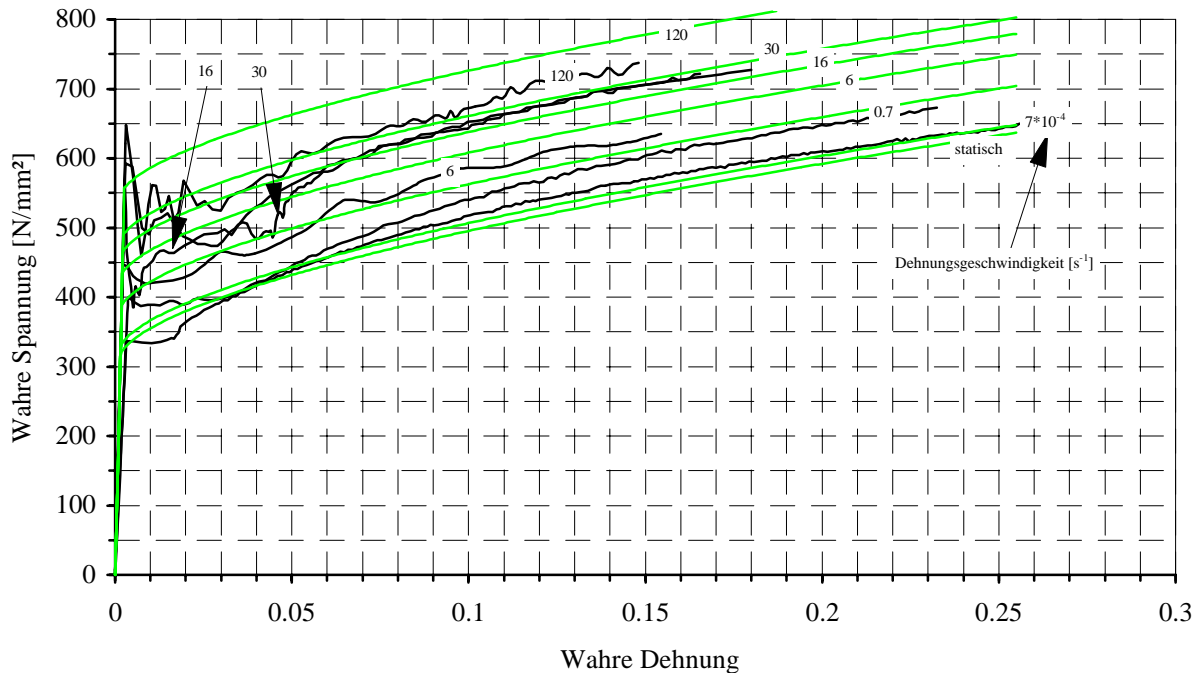


Abbildung 3.10: Vergleich der gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven (dunkel) mit dem empirischen Verfestigungsansatz nach Ludwik (hell) für den ferritischen Stahl St 37 bei verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeiten

Für die Spannungs-Dehnungs-Kurve bei der kleinsten gemessenen Dehnungsgeschwindigkeit ergibt sich eine zufriedenstellende Approximation. Für größere Dehnungsgeschwindigkeiten ergeben sich Spannungswerte, die bis etwa 10% zu groß sind. Damit sind die Abweichungen etwas größer als beim austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9, jedoch ist die Approximation auch hier zufriedenstellend.

Kapitel 4

FLIPPER-Experimente

4.1 Anforderungen an die Experimente

Bei den FLIPPER-Versuchen wird eine Struktur durch den Aufprall eines flüssigen Batzens plastisch verformt. Die Experimente werden bei Raumtemperatur in drei verschiedenen geometrischen Maßstäben $\lambda = 1$, $\lambda = 2.5$ und $\lambda = 10$ durchgeführt. Es werden Replikamodelle untersucht, das heißt, in allen Maßstäben werden für die wesentlichen Strukturteile und die Flüssigkeit dieselben Materialien verwendet. Zum Einsatz kommen dabei der ferritische Stahl St 37, der austenitische Stahl X 5 CrNi 18 9 und die Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5.

Die Diskussion der Ähnlichkeitsbedingungen für diesen Fall in Abschnitt 2.8.3.6 hat gezeigt, daß bei zeitabhängigem Materialverhalten nicht alle Ähnlichkeitsbedingungen eingehalten werden können. Außerdem kann bei Verwendung derselben Flüssigkeit die Reynolds'sche Zahl in den verschiedenen Maßstäben nicht konstant gehalten werden. Um die Ähnlichkeitsbedingungen bei zeitunabhängigem Materialverhalten einzuhalten, muß nach Abschnitt 2.8.3.6 für die verschiedenen Maßstäbe dieselbe Referenzgeschwindigkeit gewählt werden. Das ist in diesem Fall die Aufprallgeschwindigkeit der Flüssigkeit. Es ist unter anderem Ziel der Arbeit, die Abweichungen, die durch die Verletzung der Ähnlichkeitsbedingungen verursacht werden, experimentell zu bestimmen. Als Maßstabsbereich wird $\lambda = 10$ gewählt.

Der Aufwand für die Experimente soll nicht zu groß sein, um die Durchführung einer großen Anzahl von Einzelversuchen zu ermöglichen. Die Durchführung mehrerer nominell identischer Versuche liefert dabei wichtige Aussagen über zu erwartende Streubänder der Versuchsergebnisse.

Die Teile der Struktur, die plastisch verformt werden, sollen einfach herzustellen sein und bei der Herstellung in den verschiedenen Maßstäben die Verwendung identischer Halbzeuge ermöglichen, um den Einfluß von Streuungen der Materialdaten auf die Versuchsergebnisse möglichst gering zu halten. Die Auswahl des Materials ist ein nicht zu unterschätzendes Problem bei der Durchführung von nominell identischen Versuchen in verschiedenen Maßstäben. Von besonderer Bedeutung ist dabei, daß die Materialkennwerte größenunabhängig sind. Das ist nicht unbedingt gegeben (siehe Morrison [96], Thornton [97] und Richards [98], [99]).

4.2 Versuchsprinzip

4.2.1 Überlegungen zur verwendeten Struktur

Für die Struktur wären in Anlehnung an die BERDA-Experimente beispielsweise eingespannte, kreisförmige, ebene Platten geeignet, die aus Blechen einfach herzustellen sind. In den Platten ergeben sich infolge des Aufpralls der Flüssigkeit qualitativ vergleichbare Spannungsverläufe wie im Modell des Reaktordruckbehälterdeckels bei BERDA. In beiden Fällen ergibt sich ein Spannungsgradient über die Dicke.

Für alle Maßstäbe könnte im Prinzip dasselbe Halbzeug bzw. Blech verwendet werden. Für einen kleineren Maßstab könnte die entsprechend kleinere und dünnere Platte durch spanabhebene Bearbeitung aus dickeren Blechen hergestellt werden. Durch diese mechanische Bearbeitung wird bei den kleineren Maßstäben jedoch das Material an der Blechoberfläche zumindest auf einer Seite entfernt. An der Oberfläche ist jedoch durch die Walzprozesse bei der Blechherstellung mit Kaltverfestigungseffekten und anisotropem Materialverhalten zu rechnen (siehe z.B. Schneider [100]). Deshalb ist zum einen zu erwarten, daß die Festigkeitseigenschaften für die verschiedenen Maßstäbe nicht dieselben sind, zum anderen kann es durch Eigenspannungen im Blech nach der Bearbeitung zum Verziehen der Platten kommen.

Um die zur Verformung benötigte Energie zu begrenzen, darf die Dicke bei gegebenem Durchmesser nicht zu groß gewählt werden. Der Durchmesser der Platte kann ungefähr dem jeweiligen „Durchmesser“ des ankommenden flüssigen Batzens entsprechen. Die Dicke darf andererseits im kleinsten Maßstab nicht zu gering sein, um zu verhindern, daß durch die Gefügestruktur Größeneffekte induziert werden.

Um ein vernünftiges Verhältnis von Durchmesser D zu Wandstärke t zu erhalten, erscheinen folgende Parameter sinnvoll:

	D	t
$\lambda = 10$	25 mm	1 mm
$\lambda = 1$	250 mm	10 mm

Um derartige Platten gerade eben plastisch zu verformen, wird nach Young [101] bei einer angenommenen Fließspannung des verwendeten Materials von $\sigma_F = 300 \text{ N/mm}^2$, ein statischer Druck von $4/3\sigma_F (t/D)^2 \approx 26 \text{ bar}$ benötigt. Unter Vernachlässigung des akustischen Drucks $p_s = \rho cv$, der, wenn er überhaupt auftritt, nur für eine sehr kurze Zeit wirkt, kann durch den Vergleich mit einer Staupunktströmung im halbinendlichen Raum abgeschätzt werden, welche Größenordnung die Fluidgeschwindigkeit haben muß, um im Staupunkt diesen Druck zu erzeugen. Soll dieser Druck durch den Staudruck des ankommenden Wassers erzeugt werden, würde nach dem Satz von Bernoulli (siehe z.B. Landau und Lifschitz [102]) eine Geschwindigkeit von $v = \sqrt{(2p/\rho)} \approx 72 \text{ m/s}$ benötigt. Durch die endliche Ausdehnung der Platte, den Druckabfall mit der Entfernung vom Staupunkt und wenn größere plastische Verformungen erzielt werden sollen, ergeben sich noch größere Geschwindigkeiten für den ankommenden flüssigen Batzen. Um eine Geschwindigkeit von etwa 100 m/s zu erreichen, ist eine aufwendige Beschleunigungseinrichtung für die aufprallende Flüssigkeit nötig. Die notwendige komplizierte Versuchstechnik, muß zudem in verschiedenen Maßstäben zur Verfügung stehen. Das hat dazu geführt nach einfacheren Möglichkeiten zu suchen, aussagekräftige Experimente durchzuführen.

Es wird deshalb eine einseitig eingespannte Platte verwendet, die infolge eines Biegemoments verformt wird, das durch den Aufprall des flüssigen Batzens erzeugt wird. Der Spannungsgradient in der Probe bleibt somit erhalten. Durch die Übersetzungswirkung des Hebelarms erhält man merkliche

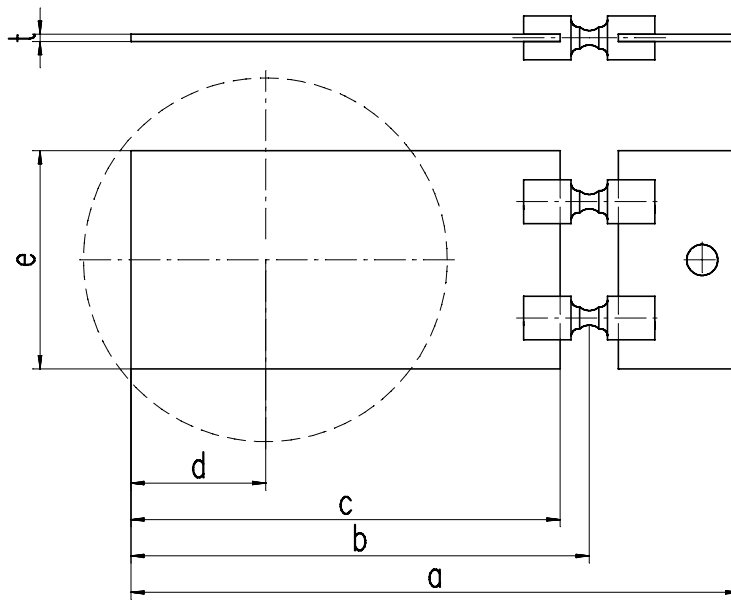


Abbildung 4.1: Prallplatte mit Biegeelenken und Projektion des Wasserbehälters aus Abbildung 4.3 (gestrichelter Kreis)

plastische Verformungen bereits bei erheblich kleineren Aufprallgeschwindigkeiten. Die verwendeten Testkörper werden im folgenden Abschnitt vorgestellt.

4.2.2 Prallplatte mit Biegeelenken

Nach den Überlegungen zur Herstellung der Testobjekte im vorangegangenen Abschnitt erscheint es nicht günstig, einfache Bleche zu verwenden und diese durch den Aufprall eines Fluidbatzens durch ein Biegemoment plastisch zu verformen.

In den FLIPPER-Versuchen wird deshalb eine Prallplatte aus Messing Ms58 verwendet (siehe Abbildung 4.1), die so ausgelegt ist, daß sie sich nur elastisch verformt. Das entstehende Biegemoment wird auf zwei sogenannte Biegeelenke (siehe Abbildung 4.2) übertragen, die aus Stangenmaterial entsprechend Tabelle 3.2 hergestellt werden. Die wesentlichen Maße von Prallplatte und Biegeelenken sind Tabelle 4.1 zu entnehmen. Durch die Wahl des Verhältnisses der Durchmesser D_1 und D_2 ist die plastische Verformung des Biegeelenks auf den Bereich des kreisbogenförmigen Einstichs mit dem Radius R_1 beschränkt. Die Übertragung des Moments von der Prallplatte auf die Biegeelenke erfolgt formschlüssig über die Schlitze der Biegeelenke, in die die Prallplatte eingesteckt und mit Klebstoff fixiert wird.

Durch die Bearbeitung des Stangenmaterials wird die Randschicht entfernt. Darum ist in dem Bereich der Gelenke, der plastisch verformt wird, mit Kaltverfestigungseffekten, die auf dem Herstellungsprozeß des Halbzeugs basieren, nicht zu rechnen ist. Die Möglichkeit der Kaltverfestigung im Oberflächenbereich bleibt jedoch bei der Herstellung der Biegeelenke je nach verwendetem Material bestehen.

4.2.3 Beschleunigung der Flüssigkeit

Bei den FLIPPER-Versuchen wird ein Fallgewicht benutzt, um eine bestimmte Flüssigkeitsmenge zu beschleunigen. Als Flüssigkeit wurde Wasser gewählt, weil es einfach zu handhaben ist. Es befindet sich

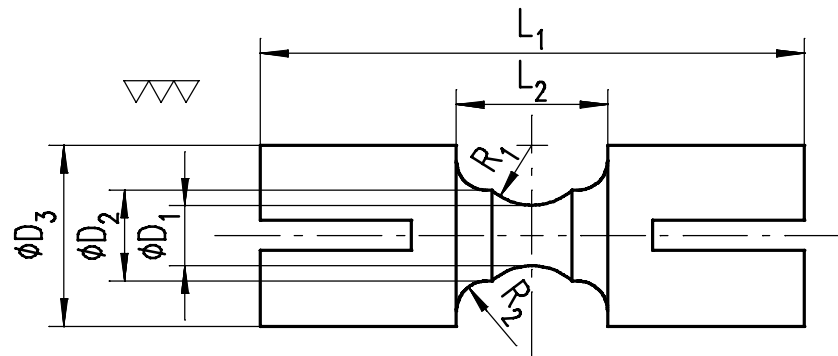


Abbildung 4.2: Biegeelenke für FLIPPER-Versuche

Maß	Maßstab		
	$\lambda = 1$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 10$
a	417.5	167	41.75
b	315	126	31.5
c	295	118	29.5
d	92.5	37	9.25
e	150	60	15
t	5	2	0.5

Maß	Maßstab		
	$\lambda = 1$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 10$
D_1	10	4	1
D_2	15	6	1.5
D_3	30	12	3
R_1	10	4	1
R_2	5	2	0.5
L_1	90	36	9
L_2	25	10	2.5

Tabelle 4.1: Wesentliche Maße von Prallplatte und Biegeelenken in [mm] entsprechend Abbildung 4.1 und 4.2

zunächst in einem Behälter, dessen Boden von einer Aluminiummembran gebildet wird (siehe Abbildung 4.3). Den oberen Abschluß des Wasserbehälters bildet ein „schwimmender“ Aluminiumdeckel, der mit Hilfe dreier sehr dünner Bleche in seiner Position gehalten wird.

Der Deckel besitzt zwei Funktionen. Zum einen wird der Wasserbehälters nach dem Befüllen durch Anbringen des Deckels zum Überlaufen gebracht, was sicherstellt, daß sich bei jedem Versuch die gleiche Wassermenge im Behälter befindet und keine Luftblasen im Wasserbehälter vorhanden sind. Zum zweiten sorgt der eingebaute Deckel dafür, daß durch den Aufprall des Fallgewichts, sämtliches Wasser nach unten beschleunigt wird und nicht zum Teil seitlich wegspritzen kann. Dadurch ist eine gute Übertragung des Impulses auf die Flüssigkeit gewährleistet.

Die Aluminiummembran wird durch einen Flansch gegen den Wasserbehälter gedrückt und eingespannt. Wenn sich das Wasser nach unten bewegt wird die Aluminiummembran gedehnt, reißt auf und gibt schließlich die Wasserbewegung nach unten frei. Die Prallplatte ist in einem bestimmten Abstand unterhalb des Wasserbehälters befestigt. Dadurch ist gewährleistet, daß die Membran rechtzeitig aufreißt und nur der Aufprall des Fluidbatzens erfolgt. Der Flansch ist im Durchmesser etwas kleiner als der Deckel und der Wasserbehälter, so daß der Deckel im Wasserbehälter zurückbleibt und nicht gegen die Prallplatte geschleudert werden kann.

Nach dem Auftreffen auf den Deckel kann das Fallgewicht zunächst noch ein Stück in den Behälter eintauchen, wird dann jedoch schlagartig abgebremst. Um den dadurch in die Anlage eingeleiteten Stoß zu dämpfen, wird in der größten Anlage ($\lambda = 1$) ein Aluminiumring auf den Wasserbehälter gelegt.

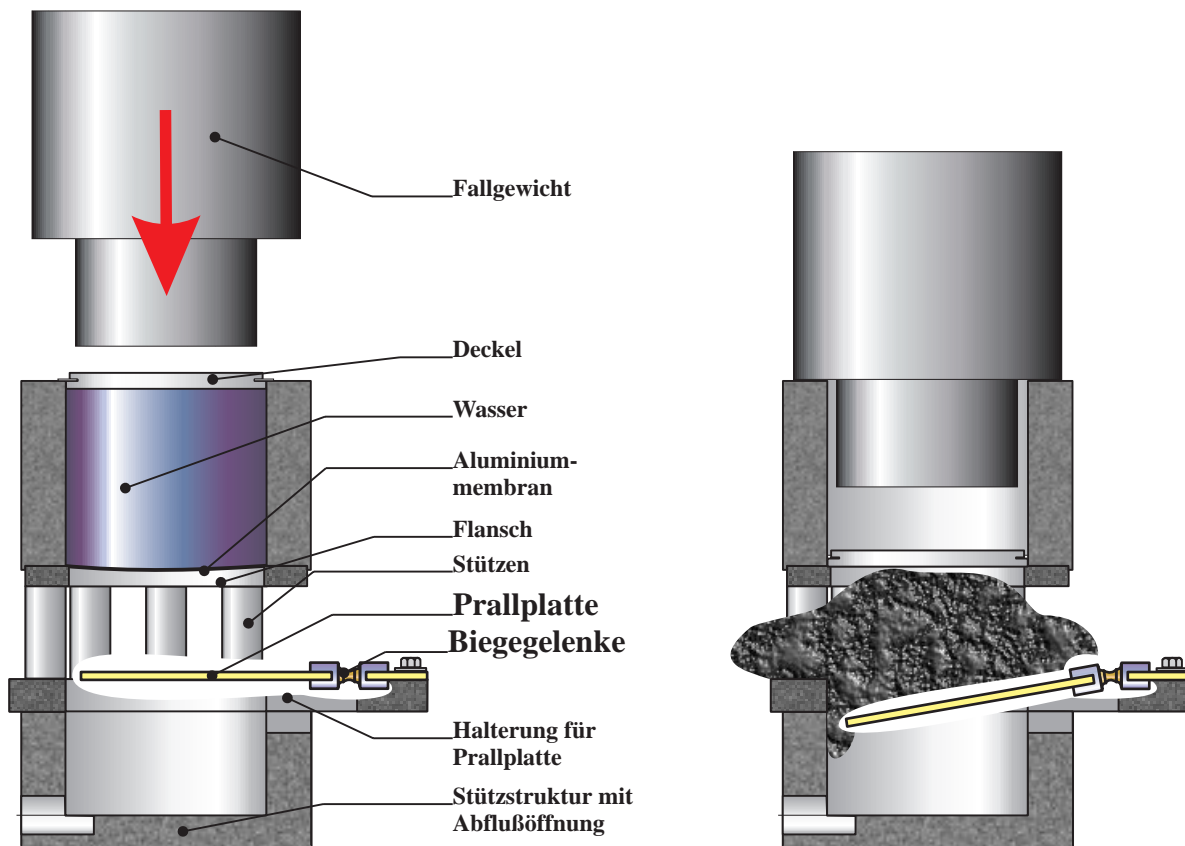


Abbildung 4.3: FLIPPER - Versuchsprinzip

Durch den Aufprall des Fallgewichts beult der Ring seitlich aus und sorgt für eine Verzögerung auf einer Strecke in der Größenordnung der Ringhöhe. In den kleineren Anlagen erfolgt die Dämpfung durch eine plastische Dichtmasse.

Die Geschwindigkeit v_{FL} , mit der die Flüssigkeit den Behälter verläßt, kann über die Stoßgesetze (siehe z.B. Szabo [103]) abgeschätzt werden. Die Geschwindigkeit des Fallgewichts vor dem Stoß sei $v_{FG,v}$, nach dem Stoß $v_{FG,n}$. Die Ausströmgeschwindigkeit der zunächst ruhenden Flüssigkeit sei v_{FL} . Die Masse des Fallgewichts sei m_{FG} , die von Flüssigkeit samt Deckel sei m_{FL} . Es sei ein idealer, gerader und elastischer Stoß zwischen dem Fallgewicht und Deckel mit der darunterliegenden Flüssigkeit angenommen. Man erhält dann:

$$v_{FL} = \frac{2m_{FG}}{m_{FG} + m_{FL}} v_{FG,v} = 1.89 v_{FG,v} \quad (4.1)$$

$$v_{FG,n} = \frac{m_{FG} - m_{FL}}{m_{FG} + m_{FL}} v_{FG,v} = 0.89 v_{FG,v}$$

Der Öffnungsdurchmesser des Wasserbehälters ist kleiner als dessen Innendurchmesser, so daß noch eine Beschleunigung der Flüssigkeit beim Ausströmen stattfindet. Aus dem Durchmesser Verhältnis (siehe

Maßstab	$\lambda = 1$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 10$
Masse Fallgewicht [kg]	240	15.4	0.24
Max. Fallhöhe [m]	3.8	3.8	3.8
Durchmesser Wasserbehälter [mm]	250	100	25
Durchmesser Flansch [mm]	245	98	24.5
eff. Höhe Wasserbehälter [mm]	220	88	22
Abstand Prallplatte - Membran [mm]	135	54	13.5
Membrandicke [μm]	50	20	8

Tabelle 4.2: Geometrische Daten der FLIPPER-Anlagen

Tabelle 4.2) erhält man nach dem Satz von Bernoulli die Ausströmgeschwindigkeit zu

$$v_{FL} = \frac{1.89 v_{FG,v}}{0.98^2} = 1.97 v_{FG,v}. \quad (4.2)$$

Diese Werte können jedoch nur eine Abschätzung sein und bedürfen einer Überprüfung. Dazu sei auf Abschnitt 4.3 verwiesen.

4.2.4 Versuchsstände

Die Versuche werden in drei Anlagen durchgeführt, deren wesentliche Teile im Maßstab $\lambda = 1$, $\lambda = 2.5$ und $\lambda = 10$ skaliert sind (siehe Tabelle 4.2). Die Hauptbestandteile des Versuchsaufbaus sind neben den oben beschriebenen Teilen zur Aufnahme des Wassers und der Prallplatte, die Falltürme für die verschiedenen Fallgewichte. Um ein zielgenaues Auftreffen der Fallgewichte zu erreichen, müssen diese während des Falls mit möglichst geringen Reibungsverlusten geführt werden. Diese Führung wird in der kleinen und mittleren Anlage bis kurz vor dem Auftreffen auf den Wasserbehälter mit Hilfe von drei Stangen am Umfang erzielt. Die Auslösung der Fallgewichte geschieht indem ein Befestigungsdraht durchgeschnitten wird.

In der großen Anlage fällt das Gewicht in einem Rohr. Am Umfang des Fallgewichts sind in zwei verschiedenen Höhen Kugelrollen federnd eingebaut, die die Führung innerhalb des Rohres übernehmen. Das Fallgewicht wird hier durch einen Elektromagneten gehalten und ausgelöst.

4.2.5 Meßgrößen und deren statistische Beschreibung

Aus der Differenz x der Plattenpositionen vor und nach einem Versuch entsprechend Abbildung 4.4 kann die plastische Verformung der Biegeelenke ermittelt werden. Die Messung der Positionen erfolgt mit Hilfe einer Meßuhr mit einer Genauigkeit von $\Delta x = \pm 0.05$ mm. Diese Genauigkeit ist in allen drei Maßstäben dieselbe, was dazu führt, daß der relative Meßfehler im Maßstab $\lambda = 10$ entsprechend der kleineren Abmessungen am größten ist. Der Fehler bei der Ermittlung des mittleren plastischen Biegewinkels α ergibt sich mit der Hebellänge b aus Tabelle 4.1 über die Gleichung

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{x}{b}\right) \quad (4.3)$$

zu

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta x}{b \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}} + \frac{x \Delta b}{b^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}}. \quad (4.4)$$

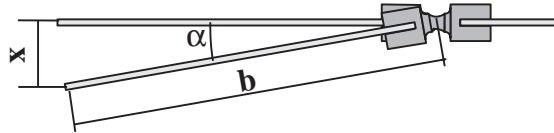


Abbildung 4.4: Ermittlung des plastischen Biegewinkel α der Biegeelenke

Man erhält damit im Maßstab $\lambda = 10$ für eine relativ kleine Auslenkung $x=2\text{mm}$ einen relativen Fehler für den plastischen Biegewinkel zu $\approx 2.6\%$, wenn die Maßtoleranz Δb für die Hebellänge mit $\pm 0.05\text{mm}$ angesetzt wird. Bei den anderen Maßstäben und größeren plastischen Biegewinkel ist der relative Fehler kleiner. Diese Genauigkeit ist ausreichend, wenn man die Streuung der gemessenen Biegewinkel, auf die weiter unten eingegangen wird, in Betracht zieht.

Die Einstellung der Fallhöhe erfolgt bei den Anlagen im Maßstab $\lambda = 2.5$ und $\lambda = 10$ mit Hilfe einer Markierung mit einer Genauigkeit von $\pm 5\text{mm}$. Die Höhe die Fallgewichts in der Anlage im Maßstab $\lambda = 1$ wird mit Hilfe eines Fadenpotentiometers gemessen, das mit einem Spannungshub von 0.4V/m arbeitet. Bei einer elektrischen Meßgenauigkeit von $\pm 5\text{mV}$ ergibt die Fallhöhe hier mit einer Genauigkeit von $\pm 12\text{mm}$. Für den zu erwartenden relativen Fehler der Fallgeschwindigkeit bei einer nominellen Fallhöhe von $h = 2\text{ m}$ erhält man

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta h}{2h} < 0.3\%. \quad (4.5)$$

Die mit Hilfe einer Lichtschranke gemessenen Fallgeschwindigkeiten ergeben ein erheblich größeres Streuband von etwa $\pm 2\%$ um den Mittelwert von 6.05m/s (siehe Abbildung 4.5). Gemessen wurde dieser Wert an einem Punkt 120mm über dem Deckel des Wasserbehälters. Hierbei sind Fehler in der Zeitmessung zu vernachlässigen. Die berechnete Geschwindigkeit an dieser Stelle beträgt 6.07m/s , was im Vergleich mit der gemessenen mittleren Geschwindigkeit jedoch darauf schließen läßt, daß der Reibungseinfluß durch die Führung der Fallgewichte nur gering ist. Weiterhin ist in Abbildung 4.5 zu erkennen, daß die Streuung der gemessenen plastischen Biegewinkel erheblich größer ist als die Streuung der gemessenen Aufprallgeschwindigkeit. Eine Korrelation zwischen den *einzelnen* gemessenen plastischen Biegewinkeln und der Aufprallgeschwindigkeit ist nicht gegeben. Mehr zur Streuung der gemessenen plastischen Biegewinkel findet sich im nächsten Abschnitt, wo der Aufprall des Flüssigkeitsbatzen auf die Prallplatte näher beobachtet wird, sowie in Kapitel 5.

Die Streuung der Meßwerte erfordert eine statistische Auswertung der Daten. Ziel der durchgeführten Experimente ist es Abweichungen durch verletzte Ähnlichkeitsbedingungen in verschiedenen Maßstäben zu bestimmen. Zum Vergleich der jeweiligen Versuchsreihen werden deshalb den arithmetischen Mittelwert

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (4.6)$$

der n Meßgrößen x_i herangezogen. Bei den dem Mittelwert zugrundeliegenden Meßwerten handelt es sich im statistischen Sinn um eine Stichprobe aus einer unendlich großen Grundgesamtheit. Der Mittelwert m einer solchen Stichprobe weicht vom Mittelwert der Grundgesamtheit im allgemeinen ab. Aus dem Mittelwert m der Stichprobe kann deshalb der unbekannte Mittelwert der Grundgesamtheit nicht mit 100% iger Sicherheit ermittelt werden. Es kann aber ein Intervall $m \pm c$, der sogenannte

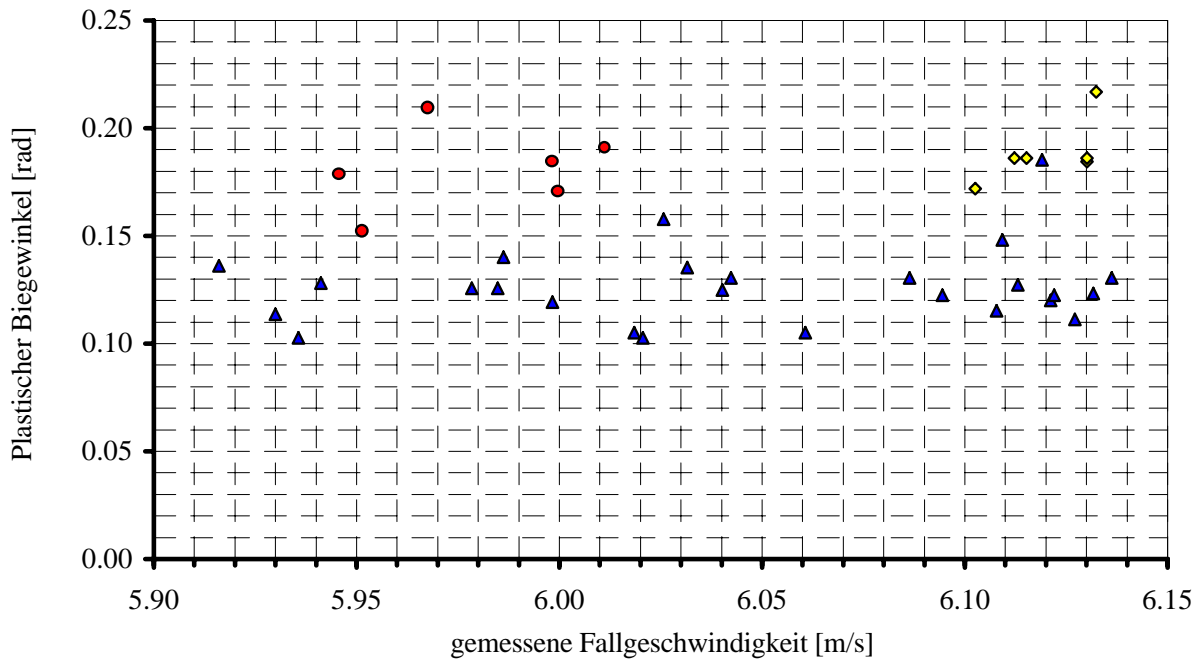


Abbildung 4.5: Streuung der Fallgeschwindigkeit und des plastischen Biegewinkels bei Versuchen mit der Fallhöhe $h = 2 \text{ m}$ im Maßstab $\lambda = 2.5$

Vertrauensbereich für den Mittelwert, angegeben werden, in dem sich der wahre Mittelwert mit einer bestimmten, zu spezifizierenden Wahrscheinlichkeit befindet.

Der Vertrauensbereich bzw. das Konfidenzintervall c des Mittelwerts ist definiert als (siehe z.B. Sachs [95])

$$c = \pm \frac{ts}{\sqrt{n}}. \quad (4.7)$$

Dabei bezeichnen n die Anzahl der Meßwerte, s die Standardabweichung

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{x_i - m}{n - 1}}, \quad (4.8)$$

und t den Koeffizienten der Student-Verteilung [104]. Das Konfidenzintervall wird also mit zunehmender Streuung größer und mit zunehmendem Stichprobenumfang bzw. Versuchsanzahl kleiner. Der Koeffizient t ist abhängig vom Freiheitsgrad $\nu = n - 1$ der Stichprobe und von der sogenannten Vertrauenswahrscheinlichkeit p . Dabei nimmt der Koeffizient t mit zunehmendem Stichprobenumfang ab und mit zunehmender Vertrauenswahrscheinlichkeit zu.

Das Konfidenzintervall gibt nun den Bereich an, in dem der Mittelwert der Grundgesamtheit mit der Wahrscheinlichkeit p liegt. Als Vertrauensbereich wird meist - so auch hier - $p = 95\%$ gewählt. Im vorliegenden Fall bedeutet diese Wahrscheinlichkeit, daß - bei häufiger Anwendung - in 95 % aller Fälle der Mittelwert der Grundgesamtheit im Konfidenzintervall eingeschlossen ist.

4.3 Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen

Um genaueren Einblick in die Vorgänge beim Aufprall des Flüssigkeitsbatzens zu gewinnen, wurden Filmaufnahmen angefertigt. Ziel ist es, Information über die Geschwindigkeit und Form des aufprallenden Flüssigkeitsbatzens zu gewinnen. Da erwartet wird, daß das Aufreißen der Aluminiummembran als stochastischer Vorgang die Form des aufprallenden Flüssigkeitsbatzens beeinflusst, soll auch die Reproduzierbarkeit der Einzelversuche untersucht werden.

Für die Filmaufnahmen stand eine Hochgeschwindigkeitskamera FASTAX Model WF14 zur Verfügung. Diese Kamera arbeitet mit Hilfe eines rotierenden Prismas und erlaubt Aufnahmen mit bis zu 5000 Bildern/s auf 16mm-Film. Die Steuerung der Aufzeichnungsgeschwindigkeit erfolgt über die Vorgabe der Antriebsspannung für den Motor. Zur Kontrolle der Aufzeichnungsgeschwindigkeit werden auf dem Film zusätzlich Marken mit einer Frequenz von 1000 Hz angebracht.

Die Filmaufnahmen erfolgten mit der maximal möglichen Bildfolge im Gegenlicht, um bei den sehr kurzen Belichtungszeiten noch eine ausreichende Belichtung des Films zu ermöglichen. Durch die Art der Beleuchtung ist auf den Aufnahmen nur ein Schattenriß des Geschehens zu erkennen. Erklärungen zur Versuchsanordnung, die im Bildausschnitt zu sehen ist, finden sich in Abbildung 4.6 (Spiegelbildliche Darstellung im Vergleich zur Abbildung 4.3). Um ein größeres Beobachtungsfenster zu erhalten, wurden zwei der Stützen des Wasserbehälters entfernt.

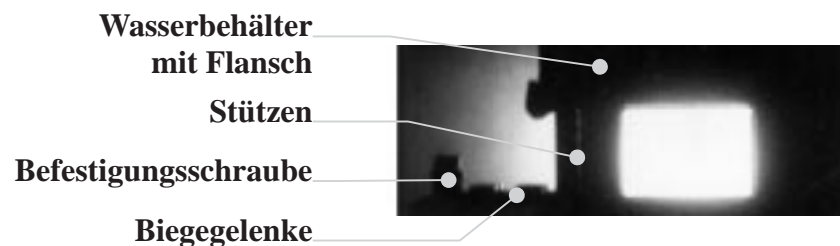


Abbildung 4.6: Erläuterungen zum Bildausschnitt der Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen - Spiegelbildliche Darstellung im Vergleich zur Abbildung 4.3

In Abbildung 4.7 und Abbildung 4.8 sind Bildserien von 4 durchgeführten Versuchen dargestellt. Man erkennt, wie der Bildausschnitt zunehmend durch den Schatten der Membran und des Flüssigkeitsbatzens verdunkelt wird. Dabei es ist sehr schwierig, zwischen dem ankommenden Flüssigkeitsbatzen und der aufgerissenen Aluminiummembran, die sich ebenfalls durch den Bildausschnitt bewegt, zu unterscheiden. Vermutlich wird der Schatten jedoch von der Aluminiummembran erzeugt. Erst in den letzten Bildern einer jeden Serie ist das nach dem Aufprall seitlich wegspritzende Wasser zu erkennen.

Bei den ersten Bildern einer jeden Serie ist deutlich zu erkennen, wie die Aluminiummembran zunächst gedehnt wird. Im weiteren Verlauf wird der Umriß des Schattens zunehmend unregelmäßiger, was auf das Aufreißen der Membran schließen läßt. Bedingt durch die Dehnung der Membran erhält man keine gerade, sondern eine gekrümmte Oberfläche für den Flüssigkeitsbatzen. Die endgültige Form dieser Oberfläche unterscheidet sich in allen 4 Serien, da das Aufreißen der Membran ein zufallsbestimmter Prozeß ist. Beim Versuch Nr.3 ist noch ein zufällig herunterfallender Wassertropfen zu erkennen, der aus dem beim Anbringen des Deckels übergelaufenen Wasser stammt.

Diese 4 Versuche wurden mit einer reduzierten Fallhöhe $h = 1.6$ m durchgeführt. Dadurch ergibt sich aufgrund der geringeren Geschwindigkeit eine etwas längere Beobachtungszeit, außerdem wird die

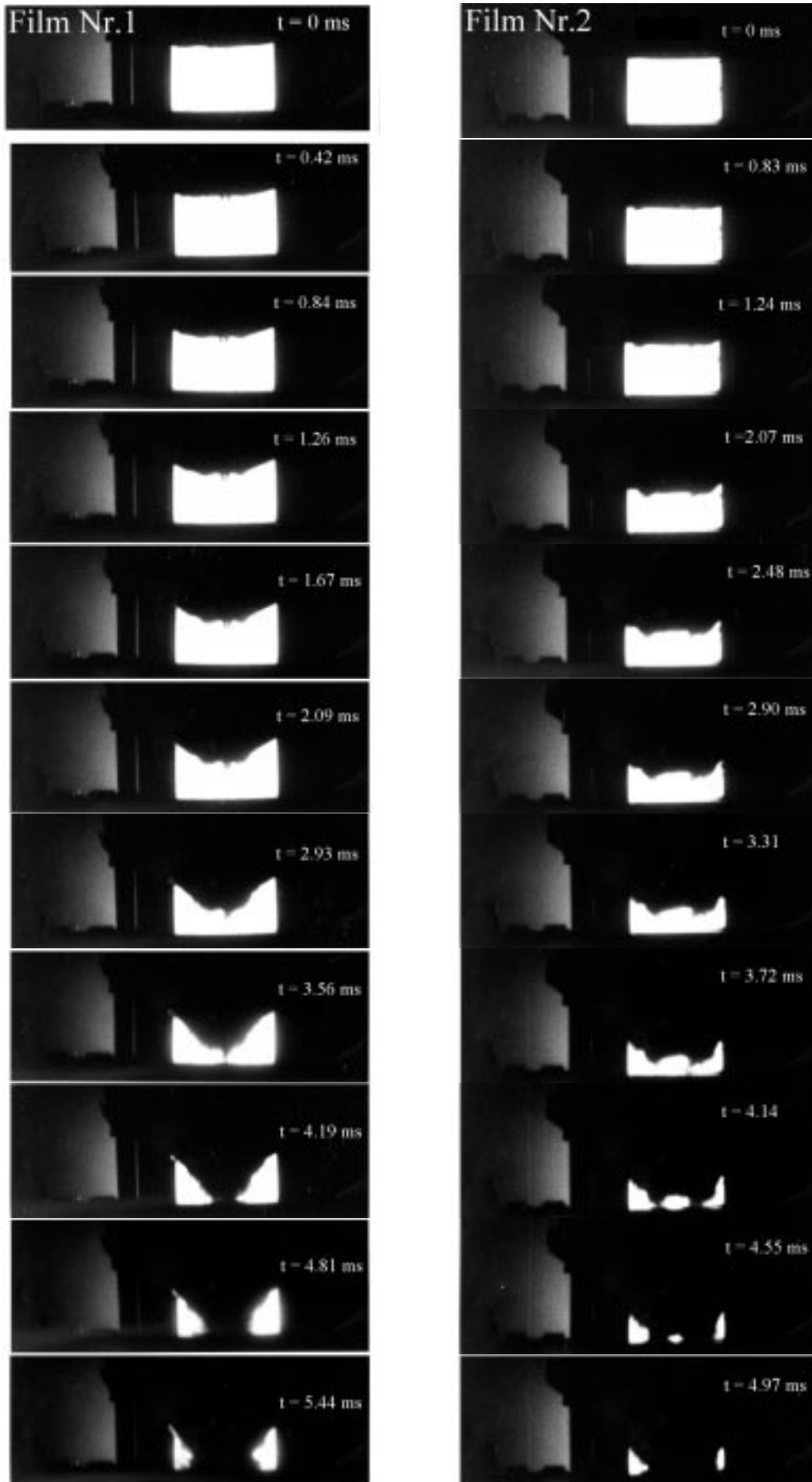


Abbildung 4.7: Bilder aus Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen

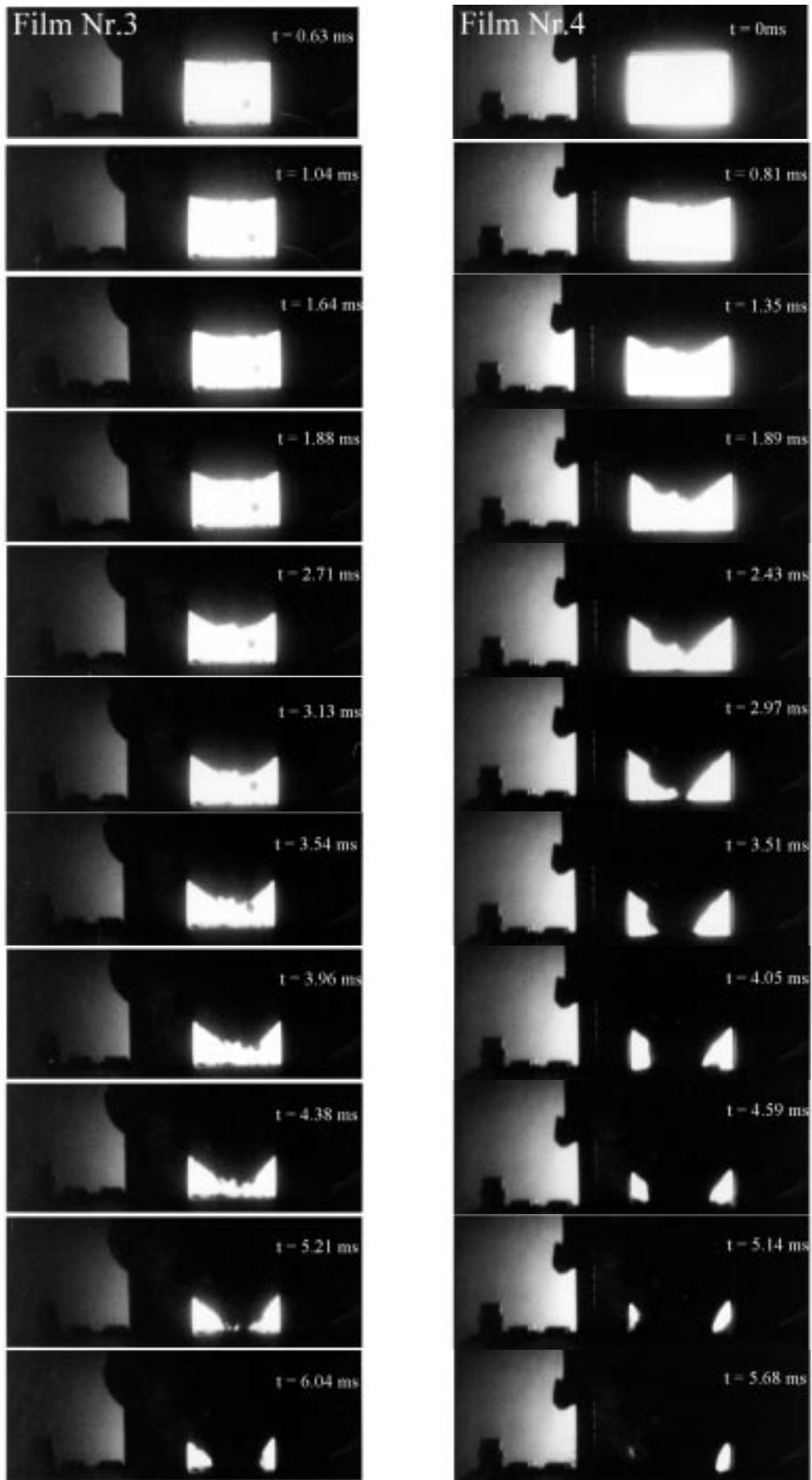


Abbildung 4.8: Bilder aus Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen

Belastung der Anlage beim Aufprall des Fallgewichts reduziert. Mit Gleichung (4.2) erhält man eine Aufprallgeschwindigkeit $v_{FL} = 11.0\text{m/s}$ für den Flüssigkeitsbatzen. Bei den Filmaufnahmen wird im Mittel eine Geschwindigkeit von $v_{FL} = 11.2\text{ m/s}$ (siehe Tabelle 4.3) ermittelt. Hierbei wurde der vordere Rand der Schattenzone herangezogen. Dieser Rand muß aber nicht unbedingt mit der Flüssigkeitsoberfläche übereinstimmen. Die Geschwindigkeiten, die diesem Mittelwert zugrundeliegen, sind deshalb mit einer relativ großen Unsicherheit und Streuung versehen. Der im Vergleich zu den Stoßgesetzen etwas höhere Wert der Aufprallgeschwindigkeit kann mit der gekrümmte Oberfläche der Flüssigkeit begründet werden, was zu einer kleineren Querschnittsfläche und damit zu einer größeren Strömungsgeschwindigkeit führt. Der Vergleich zur Strahlkontraktion beim Ausfließen aus einer Öffnung liegt hier ebenfalls nahe.

	Versuch				Mittelwert
	Nr.1	Nr.2	Nr.3	Nr.4	
Aufprallgeschwindigkeit v_{FL} [m/s]	10.0	11.8	10.6	12.5	11.2
Biegewinkel der Platte [rad]	0.131	0.129	0.187	0.109	0.139

Tabelle 4.3: Plastische Biegewinkel und zugehörige Aufprallgeschwindigkeit ermittelt aus Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen

Zwischen den ermittelten Aufprallgeschwindigkeiten und den *einzelnen* gemessenen plastischen Biegewinkeln der Prallplatten kann, wie bereits bei der Fallgeschwindigkeit und den *einzelnen* Biegewinkeln, keine Korrelation festgestellt werden (vgl. Tabelle 4.3). Das liegt zum einen begründet in den Unsicherheiten bei der Ermittlung der Aufprallgeschwindigkeit, zum anderen sagt diese Geschwindigkeit, bedingt durch die möglicherweise unterschiedliche Oberflächenform des Flüssigkeitsbatzens, nur wenig aus über den Verlauf der auf die Prallplatte einwirkenden Kraft. Die Reproduzierbarkeit der Einzelversuche wird deshalb durch Messung von Kraftverläufen an starren Platten näher untersucht.

4.4 Vorversuche mit starren Platten

Ziel dieser Versuche ist es, die Reproduzierbarkeit der dynamischen Belastung zu prüfen. Die Versuche werden in der Anlage im Maßstab $\lambda = 2.5$ durchgeführt. Dazu wurde eine starre Prallplatte verwendet, die auf drei Stützen durch Schrauben befestigt war (siehe Abbildung 4.9). Die Dicke der Platten betrug 15mm. Dadurch ergibt sich eine erheblich größere Steifigkeit und damit eine günstige höhere Eigenfrequenz des Meßaufbaus im Vergleich zu den Prallplatten mit Biegeelenken. Die geometrische Anordnung der Prallplatte entspricht im übrigen den Versuchen mit den verformbaren Biegeelenken, nur daß auf die Biegeelenke verzichtet wurde. Auf diese Weise ist für eine direkte Übertragbarkeit der Versuche gesorgt.

In die Stützen sind drei piezo-elektrische Kraftaufnehmer Kistler Mod. 9301A mit einer Eigenfrequenz von ca. 90kHz eingebaut. Die Meßkette wird vervollständigt durch Ladungsverstärker Kistler Mod. 5001 und einen 6-Kanal Transientenrecorder Mod. TRC 6070 der Firma Krenz Elektronik. Die digitale Datenaufzeichnung erfolgt mit einer Auflösung von 8 Bit und einer Taktfrequenz von 100 kHz.

Die Versuche wurden mit einer Fallhöhe von $h=2\text{m}$ durchgeführt. Die Aufprallgeschwindigkeit des Wassers ergibt sich mit Gleichung (4.2) dann zu $v_{FL}=12.3\text{ m/s}$. Aus der Aufprallgeschwindigkeit kann die Dauer des Aufprallvorgangs abgeschätzt werden. Hierzu wird angenommen, daß sich der flüssige Batzen nach dem Aufprall auf die Prallplatte gleichförmig weiterbewegt. Der Aufprallvorgang ist dann beendet, wenn der flüssige Batzen einmal seine eigene Höhe durchlaufen hat. Die Höhe des flüssigen Batzens wird aus der Höhe des Wasserbehälters abgeschätzt. Man erhält damit für den Aufprallvorgang eine Dauer

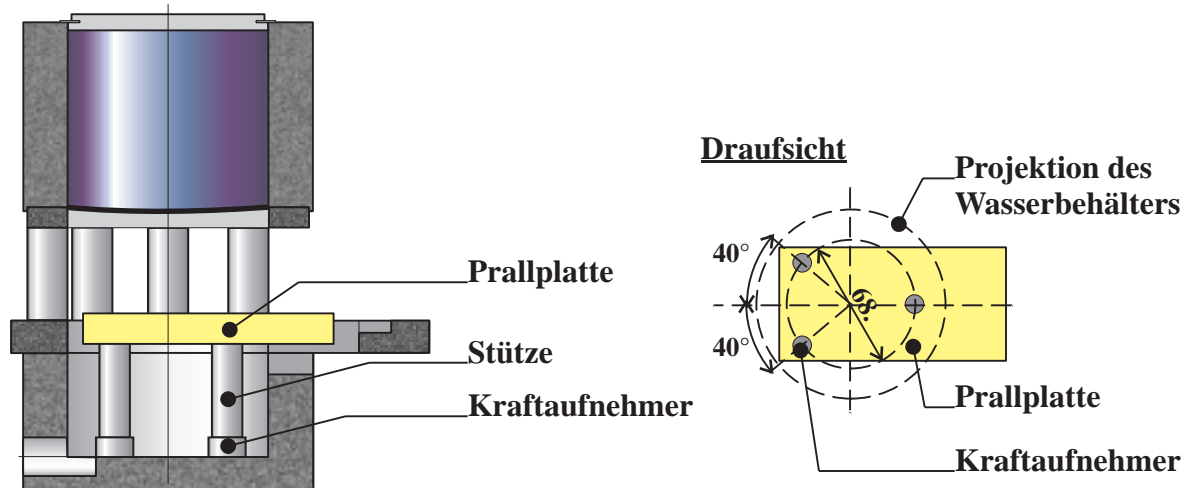


Abbildung 4.9: Versuchsaufbau zur Kraftmessung an starren Prallplatten

von $t \approx 7$ ms. In dieser Zeit werden bei der verwendeten Taktfrequenz 700 Meßwerte aufgezeichnet.

Es wurden insgesamt zehn nominell identische Versuche durchgeführt. In Abbildung 4.10 sind die gemessenen Zeitverläufe der resultierenden Kräfte dargestellt. Eine Filterung der Daten wurde nicht vorgenommen. Man erkennt zu Beginn einer jeden Meßkurve mehr oder weniger stark ausgeprägte Schwingungen in den Kraftverläufen. Diese werden durch den Kontakt des Fallgewichts mit dem Deckel des Wasserbehälters angeregt. Im weiteren Verlauf ist in den verschiedenen Kurven nach $t \approx 12$ ms eine weitere, mehr oder weniger ausgeprägte Schwingungsanregung zu beobachten. Diese wird durch das Abbremsen des Fallgewichts auf dem Wasserbehälter ausgelöst. Die Amplitude der Schwingungen ist von Versuch zu Versuch starken Schwankungen unterworfen. Dies liegt vermutlich in leichten Unregelmäßigkeiten beim Aufprall des Fallgewichts auf den Deckel und anschließend auf den Wasserbehälter begründet, die durch das in der Führung auftretende Spiel verursacht sind.

Die Kraftspitze in den Kraftverläufen kennzeichnet den eigentlichen Aufprall des Fluidbatzens auf die Prallplatte. Zwischen dem Beginn der durch den Kontakt des Fallgewichts mit dem Deckel ausgelösten Schwingungen und dem Auftreten der Kraftspitze liegen im Mittel etwa $\bar{t} = 4.4$ ms. Aus dieser Zeit und dem Abstand Prallplatte-Membran (siehe Tabelle 4.2) bestimmt sich eine Aufprallgeschwindigkeit $v_{Fl} \approx 12.3$ m/s. Die Übereinstimmung mit dem berechneten Wert nach Gleichung (4.2) ist sehr gut, was nochmals die Annahme eines elastischen Stoßes zwischen Fallgewicht und Deckel mit der darunterliegenden Flüssigkeit rechtfertigt.

Die Amplitude der Kraftspitze ist einer starken Streuung unterworfen. Einem Maximum von 900N steht ein Minimum von 400N gegenüber. Hier zeigen sich die Auswirkungen des unregelmäßigen Reißen der Aluminiumfolie. Nach der Kraftspitze folgt ein Kraftplateau mit einem Niveau von etwa 200N, wobei jeweils zwei Höcker mehr oder weniger deutlich zu erkennen sind. Anschließend fällt die Kraft wieder sanft auf Null ab.

Aus den Kraftverläufen kann eine Zeitspanne von 15 ms - 20 ms für die Dauer des Aufpralls bestimmt werden, wenn der Zeitabstand zwischen der Kraftspitze am Anfang und Rückgang zum Nullpunkt herangezogen wird. Im Vergleich mit der geschätzten Zeitdauer von 7 ms kann daraus geschlossen werden, daß eine Abbremsung des Fluidbatzens während des Aufprallvorganges stattfindet.

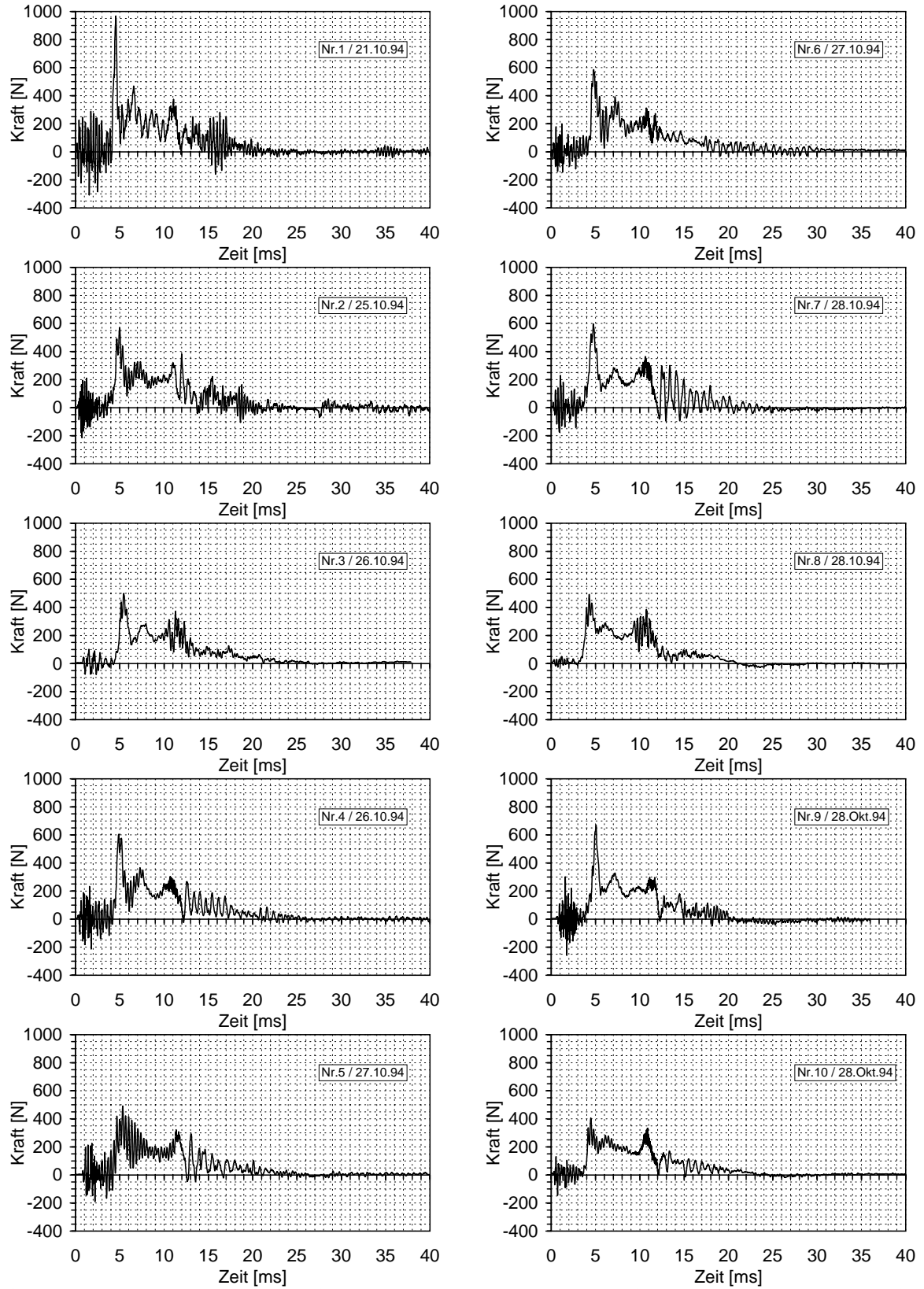


Abbildung 4.10: Gemessene Kraftläufe bei starren Platten bei zehn nominell identischen Versuchen für den Maßstab $\lambda = 2.5$ - Fallhöhe $h = 2$ m

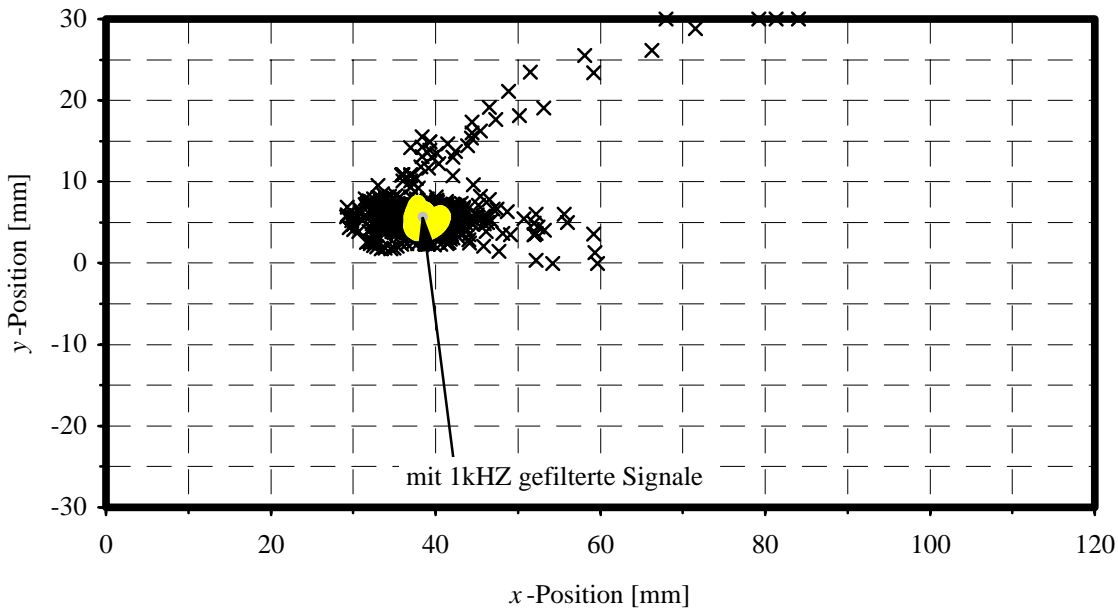


Abbildung 4.11: Kraftangriffspunkt auf der Prallplatte zu verschiedenen Zeiten, ermittelt aus den gemessenen ungefilterten und mit 1kHz-tiefpaßgefilterten Kraftverläufen in den drei Stützen - Fallhöhe $h = 2$ m, Maßstab $\lambda = 2.5$

In Abbildung 4.11 ist der Kraftangriffspunkt auf der Platte für den Versuch Nr.2 dargestellt. Er wurde aus den drei Einzelkräften in den Stützen und den entsprechenden geometrischen Daten für sämtliche relevanten Zeitpunkte ermittelt. Es wurden dabei Zeitpunkte berücksichtigt, die zwischen dem impulsartigen Kraftanstieg und kurz nach dem Aufschlagen des Fallgewichts auf den Wasserbehälter liegen. Die aus den ungefilterten Kraftverläufen ermittelten Punkte sind mit einem Kreuz gekennzeichnet und zeigen eine markante Häufung, die durch die dunkle Fläche gekennzeichnet ist. Die Kraftangriffspunkte überstreichen dabei einen relativ großen Bereich der Prallplatte. Die weitab vom Häufungspunkt liegenden Punkte gehören zu den Zeitpunkten, die kurz nach dem Aufschlagen der Fallgewichtes auf den Wasserbehälter liegen. Die durch das Aufschlagen induzierten Störungen machen sich hier bei der Bestimmung des Kraftangriffspunktes bemerkbar.

Durch eine Tiefpaßfilterung der Stützenkräfte mit 1kHz Grenzfrequenz wurden diese Störungen eliminiert und Kraftangriffspunkte ermittelt, die sich für denselben Zeitbereich auf das viel kleinere hell gekennzeichnete Feld konzentrieren. Eine arithmetische Mittelung aller so ermittelten Punkte für die einzelnen Kraftmessungen ergibt die in Tabelle 4.4 aufgeführten Werte. Zum Vergleich finden sich dort auch der Mittelpunkt der Projektion des Wasserbehälters und der Flächenschwerpunkt des durch die Projektion aus der Prallplatte ausgeschnitten Flächenstückes. Diese beiden Größen kommen als Näherungswerte für den Kraftangriffspunkt in Frage. Sie unterscheiden sich aber nur sehr wenig.

Es zeigt sich, daß der Kraftangriffspunkt im Vergleich zum Mittelpunkt des Wasserbehälters im Mittel um etwa 3mm in Richtung der Biegegelenke und seitlich um etwa 5mm verschoben ist. Die relativ kleine Verschiebung in Richtung der Biegegelenke deutet darauf hin, daß der Flächenanteil der Prallplatte, der sich außerhalb des Projektionskreises befindet, nur noch wenig zur Impulsübertragung beiträgt.

Versuch Nr.	Koordinaten	
	x -Position[mm]	y - Position[mm]
1	38.10	5.59
2	41.68	5.23
3	40.93	3.76
4	38.53	5.72
5	39.46	3.77
6	42.33	4.83
7	38.49	3.72
8	36.55	4.05
9	42.91	5.46
10	38.87	6.87
Mittelwert	39.78	4.90
Projektion des Wasserbehälters		
Mittelpunkt	37	0
Flächenschwerpunkt	37.3	0

Tabelle 4.4: Gemittelter Kraftangriffspunkt aus Kraftmessungen im Vergleich zu relevanten Geometriegrößen - Fallhöhe $h = 2$ m, Maßstab $\lambda = 2.5$

Die festgestellte seitliche Verschiebung ist größer als es die möglichen Einbautoleranzen zulassen. Möglicherweise ist eine Verspannung infolge der Verschraubung und ein dadurch bedingter Meßfehler die Ursache für die gemessene Verschiebung in y -Richtung und möglicherweise auch in x -Richtung.

Nach Integration der Kraftverläufe über die Zeit erhält man den auf die Platte übertragenen Impuls. Abbildung 4.12 zeigt die entsprechenden Impulsverläufe bezogen auf den Anfangsimpuls mv_{FL} des Wassers. Im Mittel werden 31% des Anfangsimpulses auf die Platte übertragen. Die Streubreite ist mit maximal +9% und minimal -8% Abweichung vom Mittelwert im Hinblick auf die erheblichen Streuungen in den Kraftverläufen gering. Sie ist aber größer als die gemessene Streuung der Fallgeschwindigkeit entsprechend Abbildung 4.5.

Abschließend kann gesagt werden, daß die Reproduzierbarkeit der Kraft-Zeit-Verläufe bei den einzelnen Versuchen nur recht gering ist. Für den übertragenen Impuls ist die Reproduzierbarkeit jedoch gut. Da für die Verformung der Impuls ausschlaggebend ist, kann die Reproduzierbarkeit der dynamischen Belastung als zufriedenstellend bezeichnet werden.

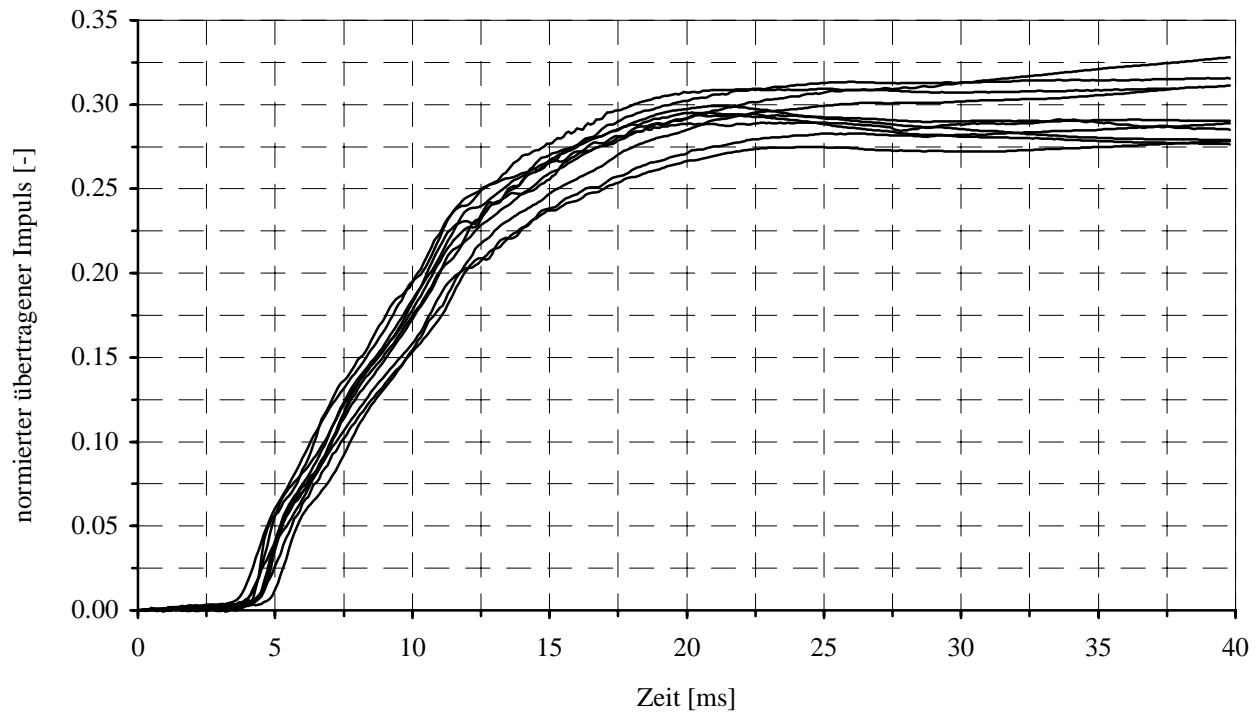


Abbildung 4.12: Zeitlich integrierte Kraftverläufe bei starren Platten bezogen auf den Anfangsimpuls mv_{Fl} des aufprallenden Flüssigkeitsbatzens - Fallhöhe $h = 2$ m, Maßstab $\lambda = 2.5$

4.5 Versuche mit dem ferritischen Stahl St 37

4.5.1 Fallhöhe $h = 2 \text{ m}$

In diesen Versuchen wurden Biegeelenke aus dem ferritischen Stahl St 37 verwendet. Es wurden verschiedene Serien nominell identischer Versuche durchgeführt und entsprechend Tabelle 4.5 mit einem Kreis, einer Raute bzw. einem Dreieck gekennzeichnet. Dort sind auch der mittlere Durchmesser und die Toleranzen der verwendeten Biegeelenke zu entnehmen. In Abbildung 4.13 sind die Versuchsergebnisse für die Fallhöhe $h = 2 \text{ m}$ dargestellt. Aufgetragen ist jeweils der plastische Biegewinkel, um den die Prallplatte nach dem Versuch ausgelenkt war. Jeder Punkt bezeichnet das Ergebnis eines Einzelversuchs. Die Punkte sind nach dem Maßstab, in dem der Versuch durchgeführt wurde, geordnet. Die Ergebnisse einer Versuchsserie sind jeweils zu einer Datenreihe zusammengefaßt. Für jede Serie sind der Mittelwert und dessen Vertrauensintervall eingezeichnet.

Maßstab	$\lambda = 10$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 10$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 10$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 1$
Material	Gruppe I		Gruppe II		Gruppe III		
Symbol	○	○	◇	◇	△	△	△
Mittlerer Durchmesser [mm]	0.98	3.97	1.00	4.01	1.00	4.00	10.01
gemessene Toleranz [mm]	+0.04 -0.06	+0.03 -0.03	+0.03 -0.03	+0.01 -0.01	+0.01 -0.02	+0.01 -0.04	+0.02 -0.02
Mitt. plast. Biegewinkel [rad]	0.167	0.177	0.144	0.188	0.178	0.127	0.205

Tabelle 4.5: Meßwerte der Biegeelenke aus ferritischem Stahl St 37 bei den Versuchen mit der Fallhöhe $h = 2 \text{ m}$

Bei Einhaltung aller Ähnlichkeitsbedingungen müßten die Mittelwerte der plastischen Biegewinkel bei allen Versuchen gleich sein. Wie die Diskussion der Ähnlichkeitsbedingungen für Replikamodelle aus Abschnitt 2.8.3.6 jedoch gezeigt hat, ist zu erwarten, daß sich Abweichungen für die verschiedenen Maßstäbe ergeben. Aufgrund der Abhängigkeit des Materialverhaltens des verwendeten St 37 von der Dehnungsgeschwindigkeit (siehe Abbildung 3.3) ist zu erwarten, daß die Proben bei Verkleinerung des Maßstabs infolge der mit der Dehnungsgeschwindigkeit steigenden Spannung ein steiferes Verhalten zeigen.

Bei den Versuchsergebnissen ist in allen Datenreihen die relativ große Streuung auffällig. Die maximale Abweichung der Einzelergebnisse vom Mittelwert ist mit ungefähr $\pm 30\%$ erheblich größer als die Streuung im übertragenen Impuls bei den Messungen an den starren Platten. Mit Hilfe eines Rechenmodells (siehe Kapitel 5) kann gezeigt werden, daß die Streuung in den übertragenen Impulsen zu einer verstärkten Streuung in den plastischen Biegewinkeln führt. Dieses Verhalten ergibt sich beim Auftreten von plastischen Verformungen durch die nichtlineare Beziehung von Biegewinkel und Biegemoment. Eine weitere Ursache für die Streuung stellen die großen Dehnungen in den Biegeelenken dar. Durch eine Abschätzung mit Gleichung (5.12) kann man zeigen, daß die Dehnungen in der äußeren Faser der Biegeelenke im Bereich der Gleichmaßdehnung liegen. Hier ist mit Streuungen im Materialverhalten zu rechnen.

Nun sollen die Versuchsergebnisse im einzelnen diskutiert werden. Bei den Versuchen der Gruppe I (Kreis) sind die Biegeelenke im Maßstab $\lambda = 10$ und $\lambda = 2.5$ aus ein und derselben Stange hergestellt

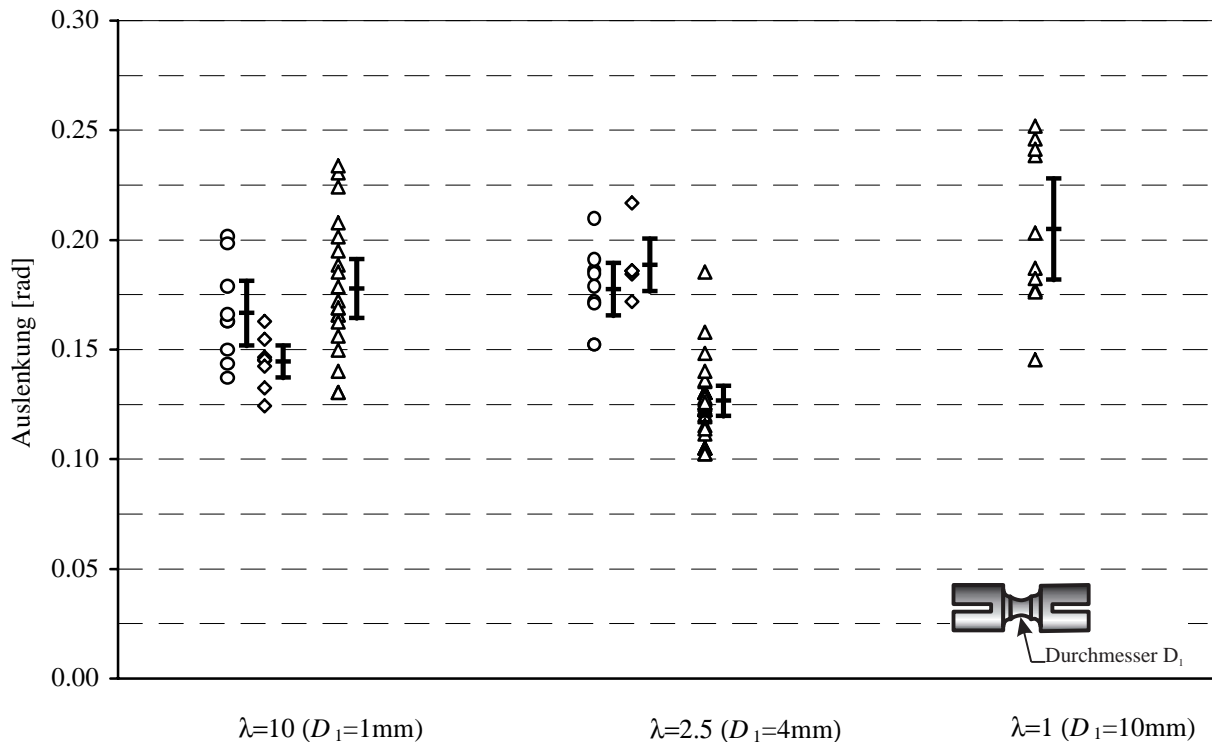


Abbildung 4.13: Plastische Biegewinkel für ferritischen Stahl St 37 mit Biege gelenken der Gruppen I, II und III (gekennzeichnet durch verschiedene Symbole) - Fallhöhe $h = 2 \text{ m}$. Für jede Versuchsserie sind Mittelwert und Vertrauensintervall dargestellt.

worden. Für die Gruppe II (Raute) gilt dasselbe, nur wurde eine Stange aus einer anderen Charge als Rohmaterial verwendet. Zum Zeitpunkt, als diese Versuche durchgeführt wurden, stand die Anlage im Maßstab $\lambda = 1$ noch nicht zur Verfügung, so daß die entsprechenden Versuchsreihen hier fehlen.

Bei der Gruppe I erkennt man einen Rückgang des Mittelwertes des Ausschlags um etwa 6% von $\lambda = 2.5$ zu $\lambda = 10$. Diese Abweichung kann jedoch nicht als statistisch signifikant erachtet werden, da sich die Konfidenzintervalle für die Mittelwerte zum großen Teil überschneiden.

Bei der Gruppe II wurden die Biege gelenke sorgfältiger gefertigt, was sich in der geringeren Maßtoleranz (Tabelle 4.5) sowie in der reduzierten Streuung (Bild 4.13) niederschlägt. Für die Mittelwerte ergibt sich ein Rückgang um etwa 23% von $\lambda = 2.5$ zu $\lambda = 10$. Da sich hier die Konfidenzintervalle für die Mittelwerte nicht überschneiden, ist diese Abweichung als statistisch signifikant zu erachten.

Zwischen Maßtoleranz und Streuung gibt es jedoch keinen eindeutigen Zusammenhang, wie am Beispiel der Datenreihe der Gruppe III (Dreieck) für den Maßstab $\lambda = 10$ zu erkennen ist. Die maximalen Abweichungen sind hier, bei einer größeren Anzahl durchgeführter Versuche, trotz weiter verkleinerter Maßtoleranz größer als bei den beiden anderen Datenreihen.

Die Versuche der Gruppe III wurden in allen drei Maßstäben durchgeführt. Es wurde hier aus mehreren Stangen eine größere Stückzahl von Biege gelenken angefertigt, die auch für die nachfolgenden Versuche (siehe Abschnitt 4.5.2 und 4.5.3) verwendet wurden.

Bei dieser Versuchsreihe zeigt sich im Mittel ein Rückgang des Ausschlag um etwa 13% von $\lambda = 1$ zu $\lambda = 10$. Das Ergebnis für $\lambda = 2.5$ mit einem um 38% geringeren mittleren Ausschlag liegt erheblich tiefer als für $\lambda = 1$. Der mittlere Ausschlag ist damit noch geringer als für den Maßstab $\lambda = 10$. Das ist

ein unerwartetes Ergebnis, das nicht durch den Dehnungsrateneinfluß erklärt werden kann.

Eine Erklärung für dieses Verhalten gründet sich auf dem Umstand, daß im Unterschied zu den bisherigen Versuchsreihen, die bei diesen Versuchen verwendeten Biegeelenke nicht mehr aus ein und derselben Stange hergestellt waren.

Um das ungewöhnliche Verhalten zu klären, wurden mit den verformten Proben aus dieser Gruppe zusätzlich statische Versuche durchgeführt. Dazu wurden an die Prallplatten Gewichte gehängt, die so dimensioniert waren, daß zu der bereits vorhandenen plastischen Verformung der Biegeelenke zusätzliche Verformung aufgebracht wurden.

Um ähnliche Verformung zu erzielen, müssen die dimensionslosen Biegemomente dieselben sein. Für das hier betrachtete Replikamodell skaliert sich das Biegemoment entsprechend Tabelle 2.4 zu $\lambda_M = \lambda_l^3$. Zu beachten ist die Skalierung des Hebelarmes mit dem Längenmaßstab, so daß die Gewichtskraft bzw. die angehängte Masse nur mit dem Faktor $\lambda_F = \lambda_l^2$ skaliert werden muß. Die skalierten Massen betragen 81.0kg, 12.96kg und 0.81kg für die jeweiligen Maßstäbe $\lambda = 1$, $\lambda = 2.5$ und $\lambda = 10$.

Da es sich um statische Versuche handelt, bei denen kein Dehnungsrateneinfluß auftritt, wird erwartet, daß die Summe der plastischen Verformung aus den FLIPPER-Versuchen und den statischen Versuchen bei gleichem Material in allen drei Maßstäben dieselbe ist. Diese Erwartung ist folgendermaßen begründet. Die Entlastung nach einer plastischen Verformung erfolgt näherungsweise auf einer Parallelen zur elastische Geraden. Bei einer Wiederbelastung erfolgt die Verformung zunächst mit kleinen Abweichungen (Hysterese) entlang dieser Entlastungsgeraden bis die Spannungen das zuvor erlangte Niveau wieder erreichen. Danach erfolgt die weitere plastische Verformung in Verlängerung der ursprünglichen Spannungs-Dehnungs-Kurve. Zur Illustration sei Abbildung 4.14 angeführt, die das beschriebene Verhalten für eine Aluminiumlegierung zeigt und bei Lemaitre und Chaboche [53] entnommen ist. Infolge der skalierten Gewichte wird nun in allen Biegeelenken unabhängig vom Maßstab dieselbe Spannung erzielt, so daß bei gleichem Materialverhalten nach der Entlastung unabhängig von der Vorverformung auch dieselbe Dehnung erreicht werden muß, wenn das in den FLIPPER-Versuchen zuvor erreichte Spannungsniveau überschritten wird.

Nach dem Abnehmen der Gewichte wurden die in Abbildung 4.15 dargestellten plastischen Biegewinkel gemessen. Der Vergleich mit den ebenfalls eingezeichneten Biege winkeln nach den Versuchen in den FLIPPER-Anlage zeigt, daß bei den Biegeelenken im Maßstab $\lambda = 1$ nur wenig zusätzliche plastische Verformung erzielt wurde. Das Gewicht war also etwas knapp bemessen. Bei den Maßstäben $\lambda = 2.5$ und $\lambda = 10$ hat der Biege Winkel dagegen deutlich zugenommen. Die Verformung der Proben im Maßstab $\lambda = 10$ liegt im Mittel um 2% über den Proben im Maßstab $\lambda = 1$. Das ist aufgrund der Überschneidung der Konfidenzintervalle statistisch nicht als signifikant anzusehen. Dagegen ergibt sich für die Proben im Maßstab $\lambda = 2.5$ eine um 11% geringere und auch statistisch signifikant geringere bleibende Durchbiegung. Das läßt darauf schließen, daß das Material, daß für die Proben im Maßstab $\lambda = 2.5$ verwendet wurde etwas größere Festigkeit aufweist als das Material für die Proben in den Maßstäben $\lambda = 1$ und $\lambda = 10$. Dadurch erklärt sich dann auch die geringere Verformung in den FLIPPER- Versuchen im Maßstab $\lambda = 2.5$.

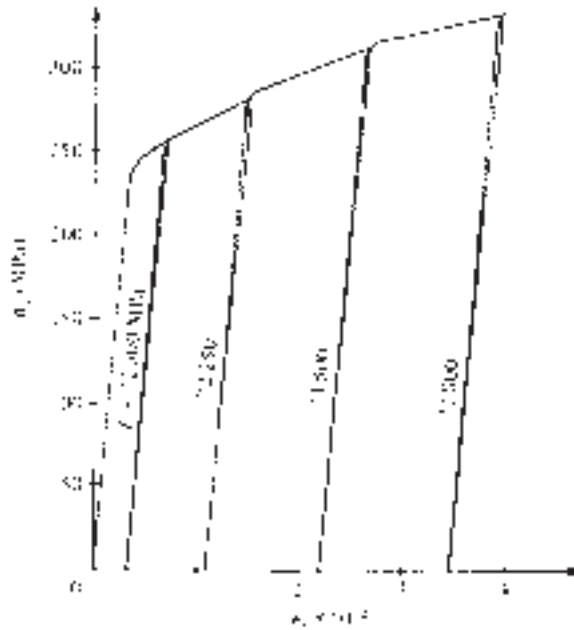


Abbildung 4.14: Spannungs-Dehnungs-Kurve für die Aluminiumlegierung 2024 bei $T = 20^\circ\text{C}$ mit Entlastung und Wiederbelastung (entnommen bei Lemaitre und Chaboche [53])

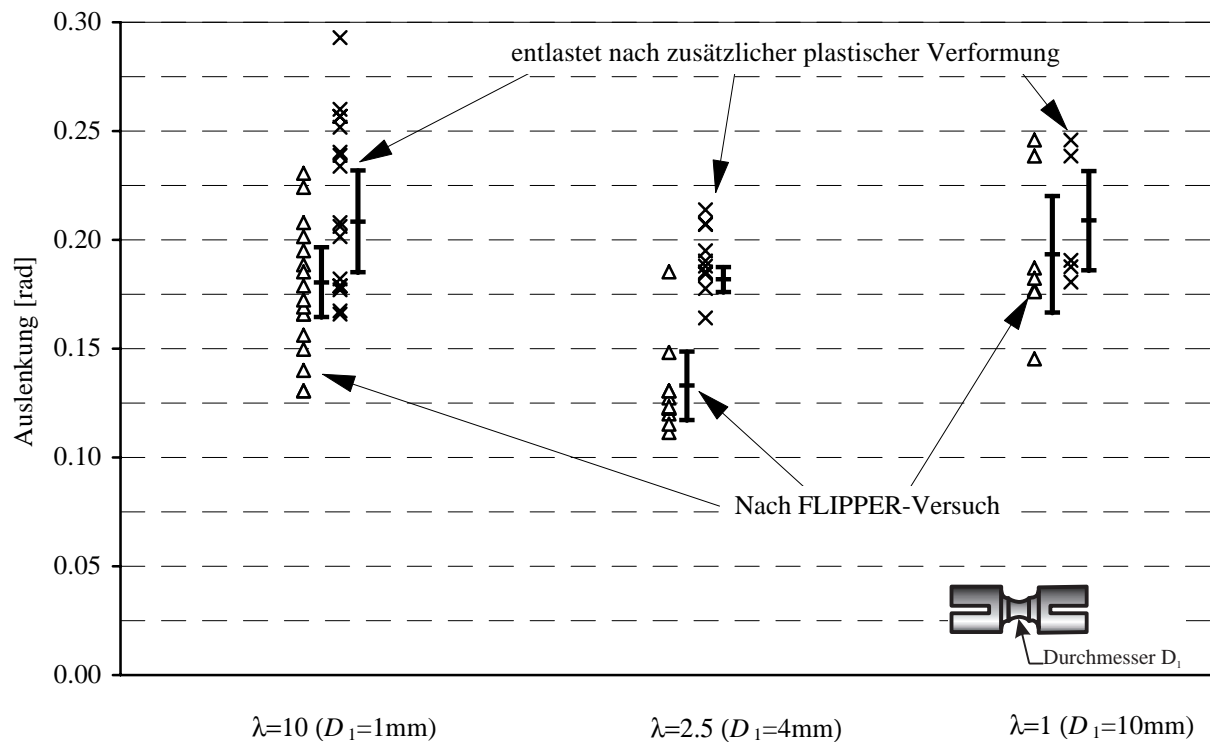


Abbildung 4.15: Zusätzliche plastische Verformung der vorverformten Biegeelenke der Gruppe III aus den Versuchen mit Fallhöhe $h = 2\text{ m}$ durch Anbringen eines skalierten Gewichtes

4.5.2 Variation der Fallhöhe

In weiteren Untersuchungen wurde eine Variation der Fallhöhe vorgenommen, um den Einfluß auf die Verformung zu studieren. Dazu wurden Biegegeelenke verwendet, die denen der Gruppe III aus dem vorangegangenen Abschnitt entsprechen. Der mittlere Durchmesser und die Toleranzen und die mittleren plastischen Biegewinkel sind Tabelle 4.6 zu entnehmen. In Abbildung 4.16 sind die Versuchsergebnisse für die Fallhöhe $h = 1.5$ m dargestellt.

Der Rückgang des mittleren plastischen Biegewinkels beträgt hier 37% von $\lambda = 1$ zu $\lambda = 10$. Der Mittelwert des Ausschlags für $\lambda = 2.5$ liegt um 43% tiefer als beim Maßstab $\lambda = 1$. Er ist damit wiederum kleiner als für die beiden anderen Maßstäbe, wobei sich die Konfidenzintervalle in den Maßstäben $\lambda = 10$ und $\lambda = 2.5$ jedoch überlappen. Es ergibt sich aber im Trend dasselbe Verhalten, daß auch bei der Fallhöhe $h = 2$ m festgestellt wurde.

	$h = 1.5$ m			$h = 3$ m		
Maßstab	$\lambda = 10$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 1$
Material	Gruppe III (Δ)			Gruppe III (Δ)		
Mittlerer Durchmesser [mm]	0.995	3.996	10.01	0.972	3.97	9.99
gemessene Toleranz [mm]	+0.02 -0.01	+0.01 -0.04	+0.02 -0.02	+0.02 -0.01	+0.03 -0.02	+0.05 -0.05
Ausschlag [rad]	0.09	0.082	0.143	0.28	0.256	0.317

Tabelle 4.6: Meßwerte der Biegegeelenke aus ferritischem Stahl St 37 - Fallhöhe $h = 1.5$ m und $h = 3$ m

Deshalb wurden die statischen Versuche wiederholt. Da bei den im vorangegangenen Abschnitt durchgeführten statischen Versuchen die Gewichte etwas knapp bemessen waren, wurde hier etwas größeren Gewichten gearbeitet. Die Massen waren 87.10kg, 13.94kg und 0.870kg. Das Ergebnis dieser Versuche ist Abbildung 4.17 dargestellt. Dabei ist der plastische Biegewinkel nach den FLIPPER-Versuchen und nach der Entlastung bei den Versuchen mit angehängtem Gewicht eingezeichnet. Zusätzlich ist die Auslenkung mit angehängtem Gewicht, bei der auch die elastische Verformung von Prallplatte und Biegegelenk eingeht, dargestellt. Dabei zeigt sich, daß die Differenz der Auslenkung mit angehängtem Gewicht und nach dessen Entfernung in allen Maßstäben diesselbe ist und somit das elastische Verhalten ähnlich ist.

Man erkennt, daß durch diese nur mäßig erhöhten Gewichte erheblich größere bleibende Verformung erzielt wurden. Es zeigt sich weiterhin, daß die Streuung der gemessenen Werte im Maßstab $\lambda = 10$ im Vergleich zu den Maßstäben $\lambda = 1$ und $\lambda = 2.5$ erheblich größer ist. Dieser Trend ist, wenn auch weniger deutlich, in Abbildung 4.15 ebenfalls zu erkennen.

Bezogen auf den mittleren plastischen Biegewinkel nach der Entlastung beim Maßstab $\lambda = 1$ ergibt sich hier für den Mittelwert beim Maßstab $\lambda = 10$ ein Anstieg um $\approx 5\%$. Diese Abweichung ist jedoch durch die Streuung der Meßwerte beim Maßstab $\lambda = 10$ nicht als signifikant anzusehen. Der mittlere plastische Biegewinkel beim Maßstab $\lambda = 2.5$ ist um $\approx 10\%$ geringer als im Maßstab $\lambda = 1$. Der geringere mittlere plastische Biegewinkel beim Maßstab $\lambda = 2.5$ läßt darauf schließen, daß die Festigkeitswerte der Biegegeelenke in diesem Maßstab größer sind als bei den anderen beiden Maßstäben. Das erklärt auch die geringere Durchbiegung bei diesem Maßstab.

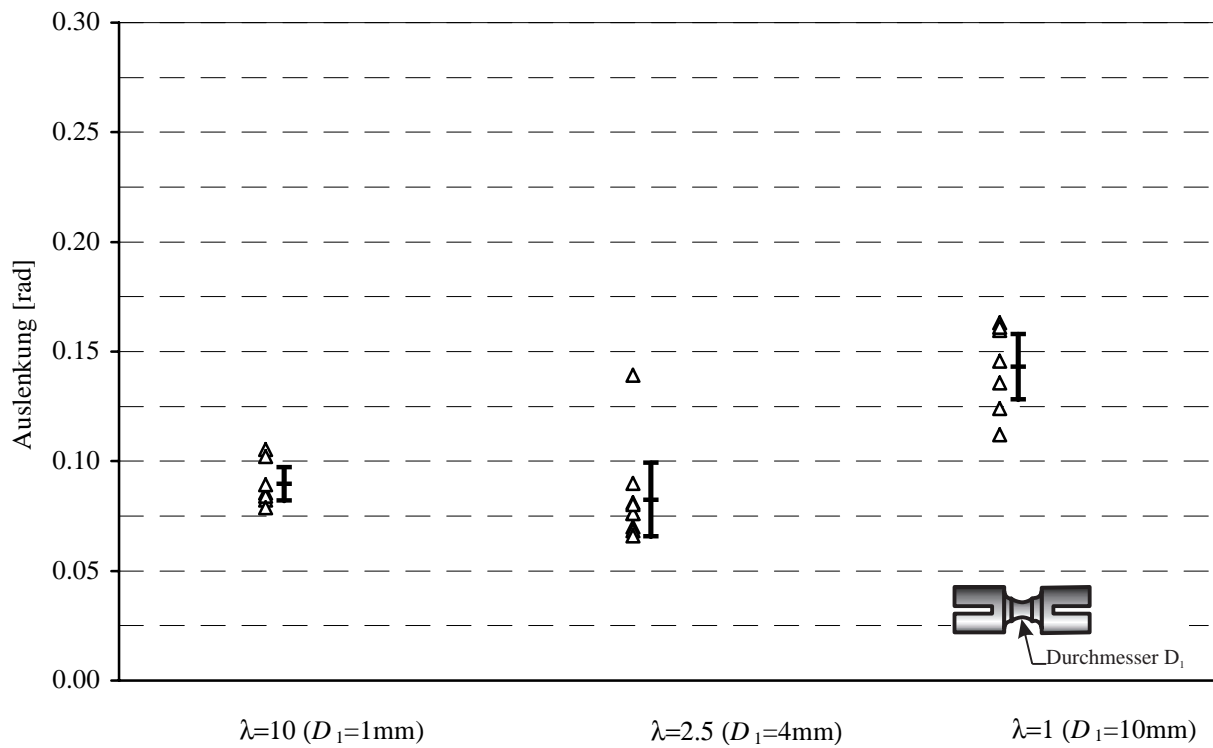


Abbildung 4.16: Plastische Biegewinkel für ferritischen Stahl St 37 mit Biegeelenken der Gruppe III - Fallhöhe $h = 1.5$ m

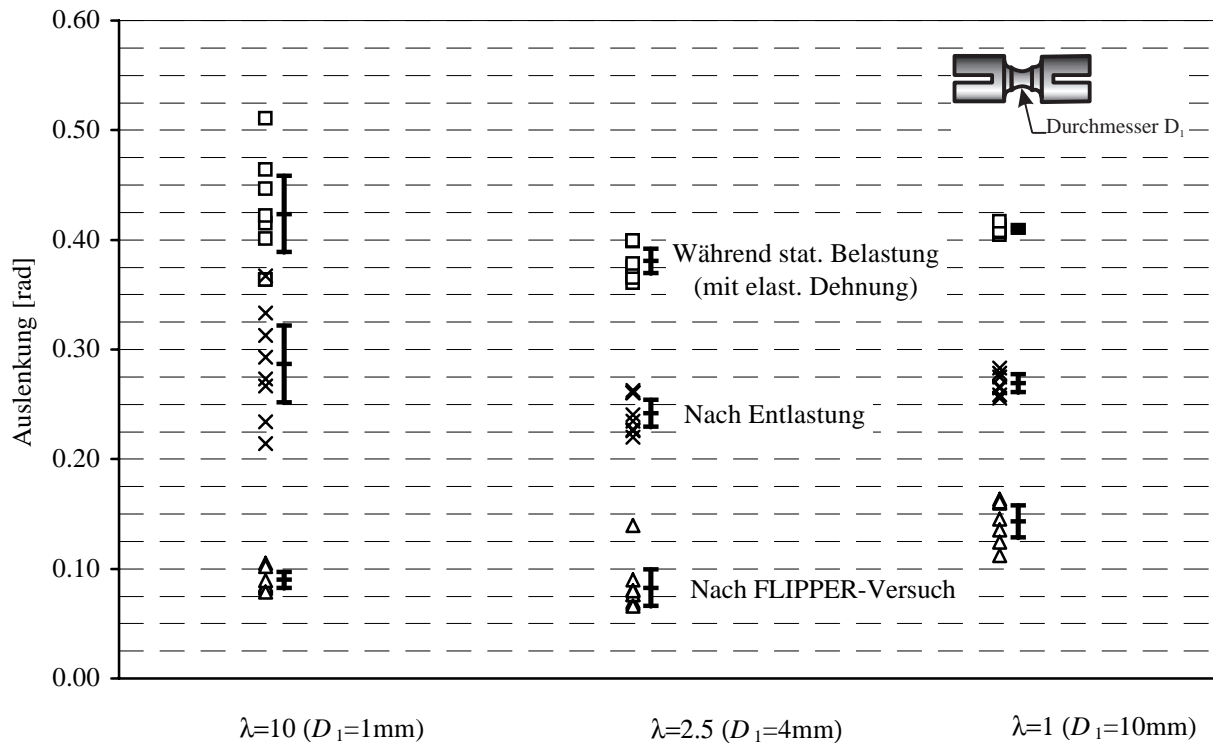


Abbildung 4.17: Zusätzliche plastische Verformung der vorverformten Biegeelenke der Gruppe III aus den Versuchen mit Fallhöhe $h = 1.5$ m durch Anbringen eines skalierten Gewichtes

In Abbildung 4.18 sind die Versuchsergebnisse für die Fallhöhe $h = 3$ m dargestellt. Der mittlere Durchmesser und die Toleranzen sind wiederum Tabelle 4.6 zu entnehmen. Die Differenz der Mittelwerte der plastischen Biegewinkel zwischen $\lambda = 1$ zu $\lambda = 10$ beträgt 0.037. Das entspricht einem Rückgang um 12%. Der Mittelwert für den Maßstab $\lambda = 2.5$ liegt um 20% tiefer als beim Maßstab $\lambda = 1$. Auffällig ist die ungewöhnlich große Streuung bei dieser Datenreihe. Die Ursache für dieses Verhalten wurde jedoch nicht näher untersucht. Auf die statischen Versuche wurde hier ebenfalls verzichtet.

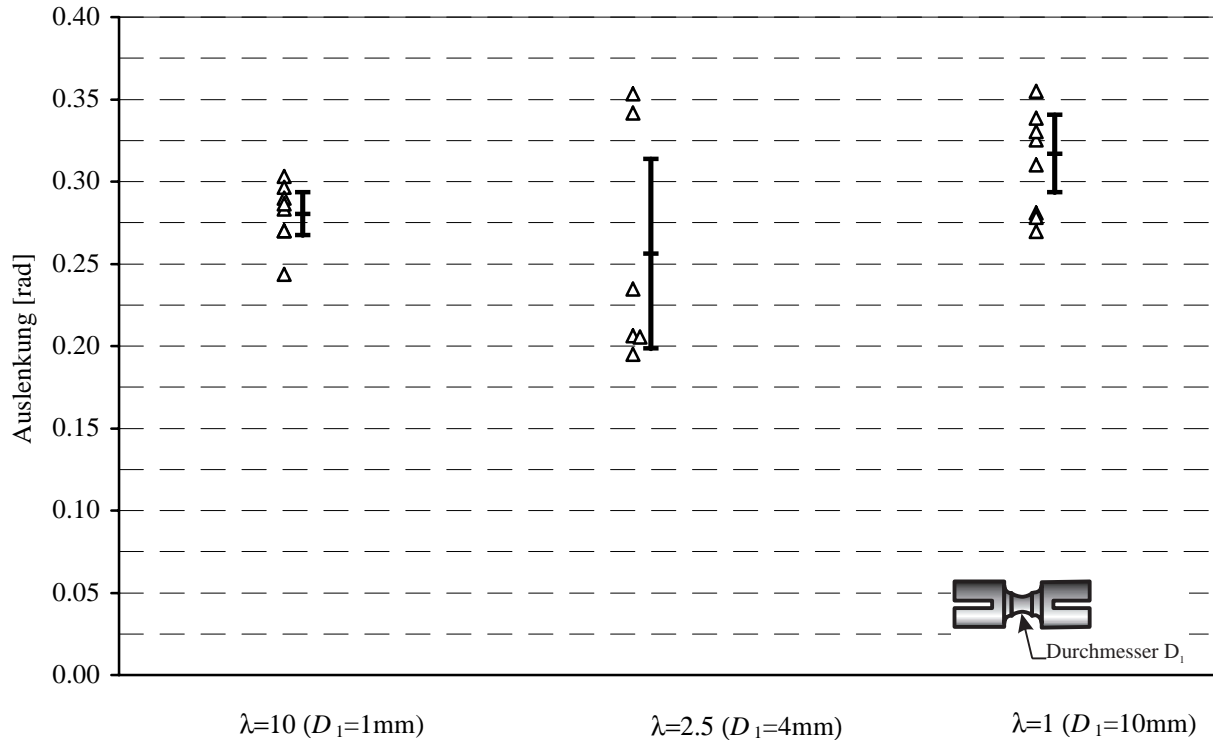


Abbildung 4.18: Plastische Biegewinkel für ferritischen Stahl St 37 mit Biege gelenken der Gruppe III - Fallhöhe $h = 3$ m

Eine Auftragung der mittleren plastischen Biegewinkel über der Fallhöhe findet sich Abbildung 4.19. Dabei sind die Mittelwerte der bisher besprochenen Versuche bei den Fallhöhen $h = 1.5$ m, $h = 2$ m und $h = 3$ m eingezeichnet und entsprechend mit dem bisher verwendeten Dreieck-Symbol gekennzeichnet.

Eine Variation der Fallhöhe wurde ebenfalls mit Biege gelenken durchgeführt, die aus derselben Stange hergestellt waren wie die Biege gelenke der Gruppe II. Für die Maßstäbe $\lambda = 10$ und $\lambda = 2.5$ wurde dabei, neben der Fallhöhe $h = 2$ m, die Fallhöhen $h = 1.6$ m und $h = 2.4$ m untersucht. Die Mittelwerte dieser Versuche sind entsprechend Abbildung 4.13 ebenfalls mit dem Rauten-Symbol gekennzeichnet.

Die Versuche mit den unterschiedlichen Fallhöhen und den sich ergebenden unterschiedlichen plastischen Biege winkeln zeigen, daß der plastische Biege winkel tatsächlich ein Maß für den Aufprallvorgang darstellt und nicht infolge eines Anschlags immer etwa derselbe Biege winkel auftritt.

Der Verlauf des mittleren plastischen Biege winkel über der Fallhöhe ist bei allen Maßstäben näherungsweise linear. Bei weiterer Zunahme des mittleren plastischen Biege winkels ist ein degressives Verhalten zu erwarten, da die Fluidkräfte, die auf die ausgelenkte Prallplatte wirken, entsprechend dem Kosinus des Biege winkels kleiner werden. Dieses Verhalten ist jedoch bei den hier aufgetretenen Biege winkeln noch nicht zu erkennen. Man erkennt weiter, daß näherungsweise eine Parallelverschiebung der

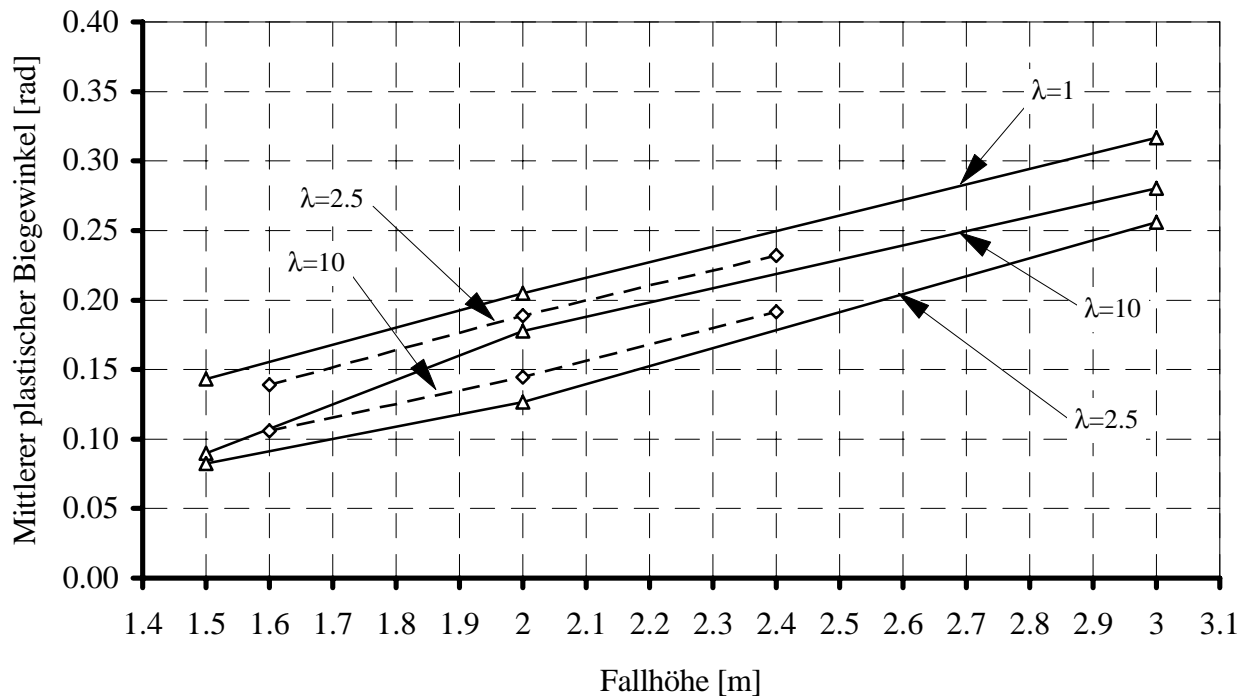


Abbildung 4.19: Versuchsergebnisse für ferritischen Stahl St 37 bei verschiedenen Fallhöhen für Biege-gelenke der Gruppen II und III entsprechend Abbildung 4.13 (S. 73) bzw. Tabelle 4.5 (S. 72)

Verläufe des plastischen Biegewinkels über der Fallhöhe bei den verschiedenen Maßstäben stattfindet, so daß die Differenz der mittleren plastischen Biegewinkel zwischen zwei Maßstäben konstant bleibt.

Lediglich der Wert für den Maßstab $\lambda = 10$ bei der Fallhöhe $h = 1.5$ m weicht hiervon stärker ab. Durch die konstant bleibende Differenz der mittleren plastischen Biegewinkel zwischen zwei Maßstäben wird die prozentuale Abweichung mit fallendem mittleren plastischen Biegewinkel natürlich größer. Deshalb ist die große relative Abweichung zwischen dem Maßstab $\lambda = 1$ und dem Maßstab $\lambda = 10$ bei der Fallhöhe $h = 1.5$ m nicht zu ungünstig im Hinblick auf die Ähnlichkeit zu bewerten ist.

Eine Erklärung für den linearen Zusammenhang zwischen dem mittleren plastischen Biegewinkel und der Fallhöhe liefern energetische Überlegungen. Die kinetische Energie des Flüssigkeitsbatzens ist nämlich proportional zur Fallhöhe. Wenn man annimmt, daß sich das Biegemoment nicht zu stark mit dem Biegewinkel ändert, dann ist die im Biegegelenk dissipierte Energie proportional zum Biegewinkel. Der lineare Anstieg des mittleren plastischen Biegewinkels läßt sich deuten, wenn man weiter annimmt, daß, unabhängig vom Maßstab *und* der Fallhöhe, das Verhältnis von dissipierter Energie und Energieangebot - die kinetische Energie des Flüssigkeitsbatzens - konstant ist. In diesem Fall gilt für den Biegewinkel φ und die Fallhöhe h

$$\frac{\varphi}{h} = a = \text{const.} \quad (4.9)$$

Mit dieser Beziehung erhält man also Ursprungsgeraden, wobei die Geradensteigung a ein Maß für den dissipierten Energieanteil darstellt. Eine lineare Regression $\varphi = ah + b$ der Meßpunkte liefert für die Steigung a und den Achsenabschnitt b die in Tabelle 4.7 aufgeführten Werte.

Es zeigt sich, daß die Steigung a aller Regressionsgeraden annähernd konstant ist. Man erhält allerdings keine Ursprungsgeraden, was sofort einsichtig ist, wenn man bedenkt, daß zum Einsetzen

der plastischen Verformung eine gewisse Mindestfallhöhe h_0 erforderlich ist. Die Höhe kann aus dem Achsenabschnitt der Regressionsgerade zu $h_0 = -b/a$ (siehe Tabelle 4.7) näherungsweise ermittelt werden. Diese Höhe ist aufgrund der Abhängigkeit der Materialdaten von der Dehnungsgeschwindigkeit, wie erwartet, für den kleinen Maßstab größer. Eine Ausnahme machen hier wieder aufgrund des „Durchhängens“ die Meßwerte der Gruppe III beim Maßstab $\lambda = 2.5$. Damit ist die Steigung der Regressionsgeraden

$$a = \frac{\varphi}{h - h_0}. \quad (4.10)$$

Die empirischen Ergebnisse in Tabelle 4.7 - näherungsweise konstante Geradensteigung a - bestätigen die Annahme eines konstanten Verhältnisses der Energiedissipation in den Biegeelenken und des Energieangebot.

Maßstab	Gruppe III (Δ)			Gruppe II (\diamond)	
	$\lambda = 1$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 10$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 10$
a	0.1154	0.1176	0.1236	0.1165	0.1070
b	-0.0283	-0.0996	-0.0852	-0.0465	-0.0668
R^2	0.9994	0.9932	0.9785	0.9986	0.9966
$h_0 [m] = -b/a$	0.245	0.847	0.689	0.399	0.624

Tabelle 4.7: Koeffizienten zur Energieaufspaltung bei den FLIPPER-Versuchen

4.5.3 Versuche mit gelochten Prallplatten

Die Diskussion der Ähnlichkeitsbedingungen in Abschnitt 2.8.3.6 hat gezeigt, daß nicht nur die generalisierte Reynolds'sche Zahl zur Beschreibung des viskoplastischen Materialverhalten sondern auch die fluiddynamischen Reynolds'schen Zahlen in Modell und Prototyp bei einem Replikamodell unterschiedlich sind. Bei den bisherigen Versuchen wird nur ein geringer Einfluß der Reynolds'schen Zahl erwartet, da die Druckkräfte für die Impulsübertragung auf die Prallplatte verantwortlich sind. Für feingliedrige Strukturen, bei deren Umströmung und Durchströmung vermehrt Geschwindigkeitsgradienten im Strömungsfeld auftreten können, ist ein größerer Einfluß möglich. In der Tendenz ist zu erwarten, daß der Anteil der Zähigkeitskräfte bei einem kleineren Maßstab infolge der kleineren Reynolds'schen Zahl größer wird. Bei den Versuchen im kleinen Maßstab wirken also auf die Prallplatte im Vergleich größere Kräfte als im großen Maßstab. Das führt in der Tendenz zu größeren Verformungen. Man erhält damit einen Effekt, der dem Dehnungsrateneinfluß entgegenwirkt, wobei der Einfluß der Dehnungsgeschwindigkeit aber vermutlich überwiegt. Bei diesen Versuchen sind deshalb etwas geringere Abweichungen zwischen den verschiedenen Maßstäben zu erwarten.

Um den Einfluß der Zähigkeitskräfte zu verstärken, wird nun eine Versuchsreihe mit modifizierten Prallplatten (siehe Abbildung 4.20) durchgeführt. Die Prallplatten wurden hier mit jeweils 96 Löchern durchbohrt. Die Lochdurchmesser und Abstände sind konstant und entsprechend dem Maßstab skaliert (siehe Tabelle 4.8). Im Vergleich zu den bisherigen Versuchen ist die Plattenbreite und Plattenlänge dieselbe, die Dicke jedoch verdoppelt. Dadurch wird verhindert, daß sich die Platten infolge der Schwächung durch die Löcher verbiegen. Außerdem bleibt das Massenträgheitsmoment bezüglich der Drehachse in der Mitte der Biegeelenke annähernd konstant.

Beim Aufprall wird hier nicht mehr die gesamte Flüssigkeit zur Seite umgelenkt. Ein Teil kann die Löcher durchströmen. Durch die Kontraktion der Flüssigkeit vor den Löchern kommt es zu Bildung von

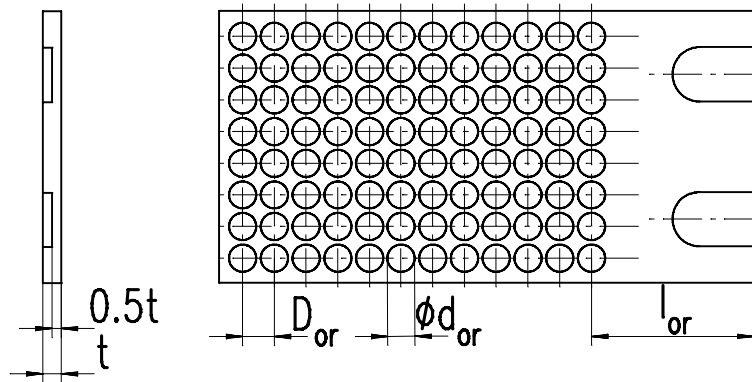


Abbildung 4.20: Gelochte Prallplatten

Maßstab	$\lambda = 10$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 1$
Lochdurchmesser d_{or} [mm]	1.5	6	15
Lochabstand D_{or} [mm]	1.75	7	17.5
Plattendicke t [mm]	1	4	10
Abstand l_{or} [mm]	9	36	90

Tabelle 4.8: Geometrische Daten der gelochten Platten

Geschwindigkeitsgradienten im Strömungsfeld. Die Flüssigkeit wird zudem beschleunigt und verläßt die Öffnungen in Form von Freistrahlen. Vermutet wird ein Strömungsbild entsprechend Abbildung 4.21.

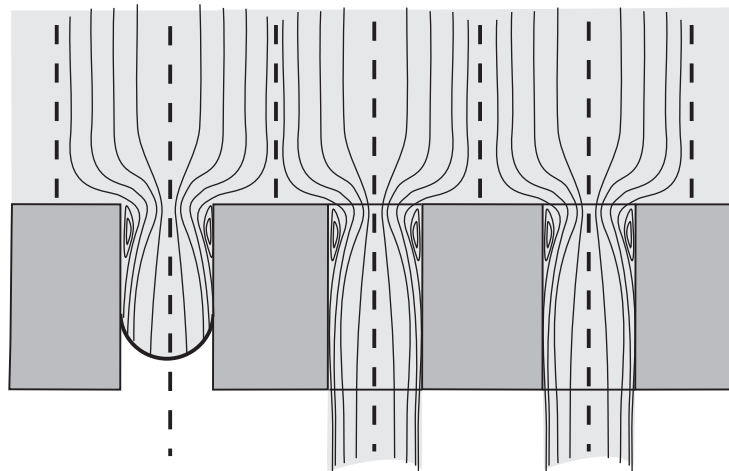


Abbildung 4.21: Durchströmung der gelochten Prallplatten (schematisch)

In der Literatur (siehe Idelchik [105]) finden sich Untersuchungen zum Druckverlust solcher perforierter Platten in Rohrleitungen. Daraus können Hinweise für unseren Fall gewonnen werden. Die Vorgänge in beiden Fällen sind zwar nicht direkt vergleichbar, da in der Rohrleitung die Flüssigkeit zum einen vor der Platte nicht seitlich ausweichen kann und zum anderen nach der Platte eine plötzliche Strahlexpansion, Ablösung und der anschließenden intensiven Verwirbelung stromab von der Gitterplatte stattfindet. Außerdem gelten die Daten nur für stationäre Strömung.

Der Druckverlustkoeffizient einer Gitterplatte im Rohr setzt sich zusammen aus einem Eintrittsverlust, einem Verlustanteil infolge Rohrreibung und einem Austrittsverlust. Der letzte Verlustanteil trägt bei den geometrischen Verhältnissen der hier benutzten Platten am meisten zum Gesamtdruckverlust bei. Die Änderung des Druckverlustkoeffizienten ist im dem Bereich der Reynolds'schen Zahlen, die hier vorliegen, aber nur noch gering. Das muß jedoch bei den hier vorliegenden instationären Verhältnissen nicht unbedingt der Fall sein.

Durch die zahlreichen Bohrungen ist die durch den Aufprall des Flüssigkeitsbatzens hervorgerufene Kraft wesentlich geringer als bei den Prallplatten ohne Löcher. Deshalb muß bei diesen Versuchen die Fallhöhe vergrößert werden, um deutliche Verformungen der Biegeelenke zu erzielen. Es wurde bei diesen Versuchen mit der maximal möglichen Fallhöhe $h = 3.8\text{m}$ gearbeitet. Mit Gleichung (4.2) ergibt sich eine Aufprallgeschwindigkeit $v_{Fl} = 17.0\text{m/s}$. Für die Durchströmungsgeschwindigkeit der Löcher erhält man aus dem Flächenverhältnis $v_{or} = 29.8\text{m/s}$.

Maßstab	$\lambda = 10$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 1$
Material	Gruppe III (Δ)		
Mittlerer Durchmesser [mm]	0.981	3.99	10.01
gemessene Toleranz [mm]	+0.02 -0.01	+0.02 -0.02	+0.05 -0.01
Mitt. plast. Biegewinkel [rad]	0.081	0.086	0.118

Tabelle 4.9: Meßwerte der Biegeelenke bei den Versuchen mit der Fallhöhe $h = 3.8\text{m}$

Für diese Versuche wurden wiederum Biegeelenke aus der Gruppe III verwendet. Die Abmessungen und die mittleren plastischen Biegewinkel finden sich in Tabelle 4.9. In Abbildung 4.22 sind die Ergebnisse der durchgeführten Versuche dargestellt. Für den mittleren plastischen Biegewinkel ergibt sich ein Rückgang um 27% vom Maßstab $\lambda = 1$ zum Maßstab $\lambda = 2.5$. Für den Maßstab $\lambda = 10$ erhält man einen Rückgang um 31% im Vergleich zum Maßstab $\lambda = 1$. Hier bietet sich der Vergleich mit den Versuchen ohne Löcher bei der Fallhöhe $h = 1.5\text{m}$ an, die im Mittel etwa dieselbe Verformung aufweisen. Der Rückgang des mittleren plastischen Biegewinkels vom Maßstab $\lambda = 1$ zum Maßstab $\lambda = 10$ war dort mit 37% etwas größer. Das „Durchhängen“ der Meßwerte für den Maßstab $\lambda = 2.5$, wie es bei den Versuchen mit den normalen Prallplatten festgestellt wurde, ist nicht festzustellen.

Das Ergebnis dieser Versuche deutet darauf hin, daß der Einfluß der Fluidzähigkeit bei den gelochten Prallplatten etwas größer geworden ist, aber im Vergleich zum Dehnungsrateneffekt zumindest bei den untersuchten Reynolds'schen Zahlen, wie vermutet, gering ist.

4.6 Versuche mit der Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5

Weitere Versuche mit Prallplatten ohne Löcher wurden mit der hochfesten Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5 durchgeführt, die sich durch eine sehr geringe Abhängigkeit der Festigkeitskennwerte von der Dehnungsgeschwindigkeit auszeichnet (siehe Abbildung 3.4). Man erhält damit ein Replikamodell, bei dem alle in Abschnitt 2.8.3.6 diskutierten Ähnlichkeitsbedingungen bis auf die Reynolds'sche Zahl Re für die Flüssigkeit eingehalten werden können. Es sind deshalb nur geringe maßstäbliche Abweichungen zu erwarten.

Die Biegeelenke für diese Versuche wurden alle aus ein und derselben Stange hergestellt. Dieser

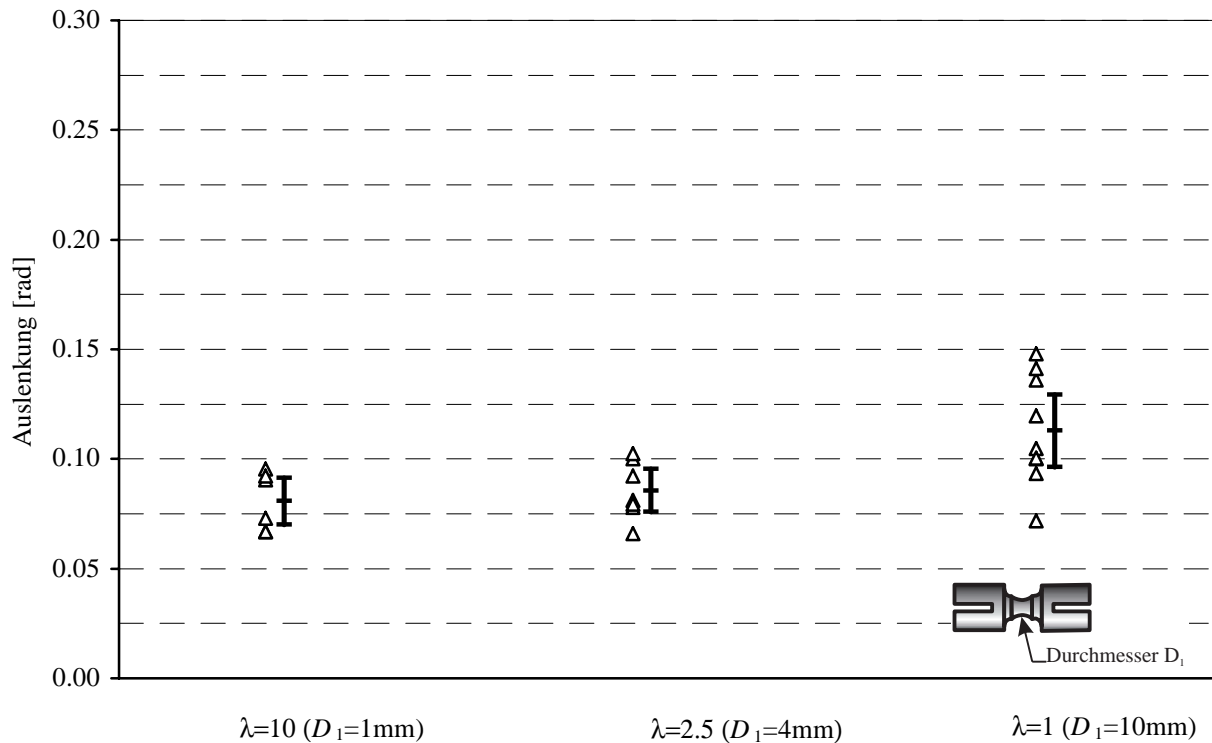


Abbildung 4.22: Plastische Biegewinkel für ferritischen Stahl St 37 bei der Fallhöhe $h = 3.8\text{m}$ mit gelochten Prallplatten

Werkstoff zeigt jedoch nur eine geringe Bruchdehnung von $\approx 7\%$. Deshalb mußte bei den Versuchen darauf geachtet werden, daß die Biegeelenke nur relativ kleine Verformungen erfuhren. Die Fallhöhe wurde deshalb zu $h = 1.5\text{ m}$ gewählt, was sich im nachhinein als sehr nahe am maximal möglichem Wert herausstellte, da bei drei der verwendeten Biegeelenke im Maßstab $\lambda = 1$ Bruch auftrat.

Die Ergebnisse der geglückten Versuche, bei denen kein Bruch auftrat, sind in Abbildung 4.23 dargestellt und durch ein Rauten-Symbol gekennzeichnet. Zum Vergleich sind die Ergebnisse der Versuche mit den ferritischen Stahl St 37 bei der Fallhöhe $h = 1.5\text{ m}$ eingetragen und entsprechend der bisherigen Kennzeichnung wieder durch ein Dreieck gekennzeichnet. Man erkennt deutlich den für alle Maßstäbe reduzierten mittleren plastischen Biegewinkel im Vergleich zu den Werten für St 37 bei derselben Fallhöhe.

Im Vergleich der verschiedenen Maßstäbe erkennt man für AlZnMgCu1.5 außerdem einen Rückgang des mittleren plastischen Biegewinkel vom Maßstab $\lambda = 1$ zum Maßstab $\lambda = 10$ von 28%, jedoch überlappen sich hier die Konfidenzintervalle, so daß dieser Rückgang statistisch nicht signifikant ist. In Anbetracht der Tatsache, daß hier alle Ähnlichkeitsbedingung eingehalten sind, die von den zugrundeliegenden theoretischen Betrachtungen auch eingehalten werden müssen, ist diese Abweichung aber größer als erwartet. Man muß jedoch bedenken, daß hier nur kleine Verformungen aufgetreten sind, wodurch die relativen Abweichungen schnell groß werden. Die absolute Abweichung zwischen den verschiedenen Maßstäben ist im Vergleich zum ferritischen Stahl St 37 deutlich geringer.

Maßstab	$\lambda = 10$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 1$
Symbol	◇		
Mittlerer Durchmesser [mm]	0.988	3.99	9.99
gemessene Toleranz [mm]	+0.01	+0.02	+0.03
Ausschlag [rad]	0.048	0.039	0.067

Tabelle 4.10: Meßwerte der Biegeelenke bei den Versuchen mit Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5 bei der Fallhöhe $h = 1.5\text{ m}$

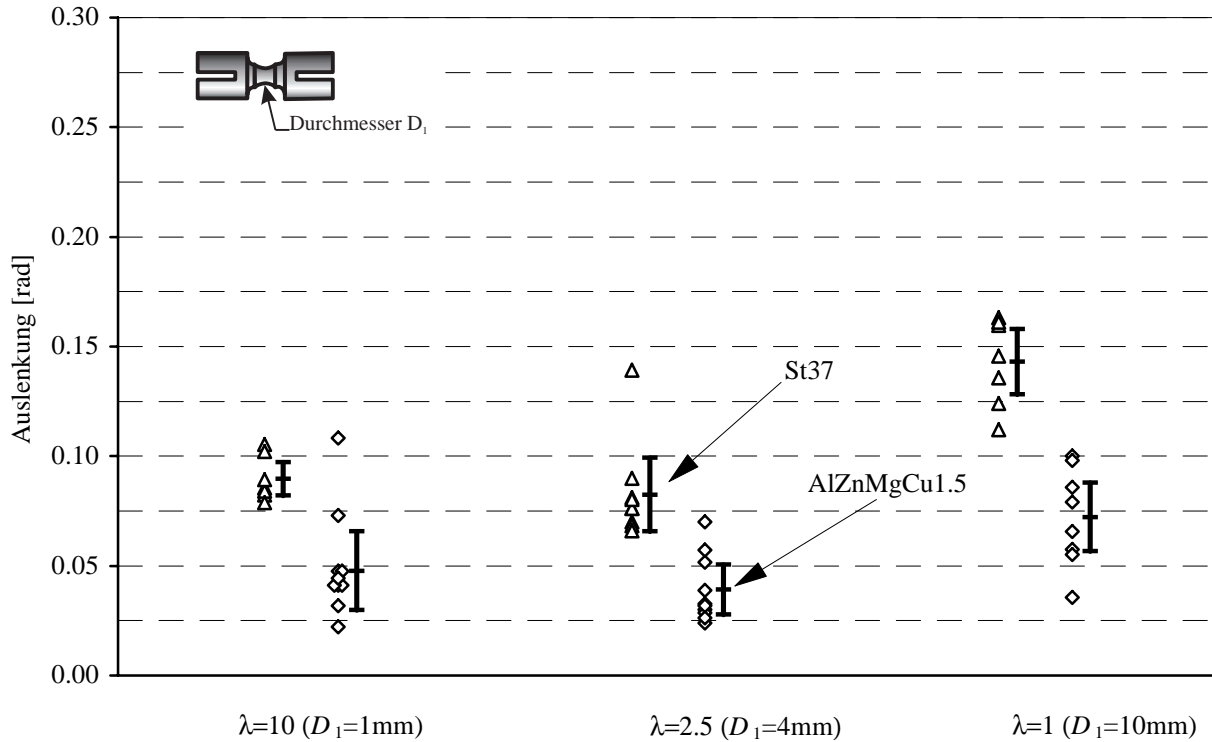


Abbildung 4.23: Versuchsergebnisse für die Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5 im Vergleich mit dem ferritischen Stahl St 37 - Fallhöhe $h = 1.5\text{ m}$

4.7 Versuche mit dem austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9

Als dritter Werkstoff für die Biegeelenke wurde der austenitische Stahl X 5 CrNi 18 9 ausgewählt, der ebenso wie der ferritische Stahl St 37 eine Abhängigkeit der Festigkeitskennwerte von der Dehnungsgeschwindigkeit zeigt. Jedoch ist der Anstieg der Fließspannung mit der Dehnungsgeschwindigkeit geringer als beim ferritischen Stahl, so daß hier auch mit geringeren Maßstabseinflüssen zu rechnen ist. Alle Stangen, aus denen die Biegeelenke hergestellt wurden, stammen aus der gleichen Charge. Es wurden jeweils abwechselnd 4 Biegeelenke im Maßstab $\lambda = 1$, $\lambda = 2.5$ und $\lambda = 10$ hergestellt, so daß eine Beeinflussung der Versuchsergebnisse durch möglicherweise veränderliche Materialeigenschaften entlang des Stangenmaterials im Mittel ausgeglichen sind. Als Fallhöhe wurde $h = 1.9\text{ m}$ gewählt.

Die Ergebnisse dieser Versuche (Dreieck-Symbol) finden sich in Tabelle 4.11 und in Abbildung 4.24. Sie zeigen, daß der mittlere plastische Biegewinkel im Maßstab $\lambda = 1$ mehr als dreimal so groß ist wie beim Maßstab $\lambda = 10$.

Maßstab	$\lambda = 10$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 1$
Symbol	\triangle		
Mittlerer Durchmesser [mm]	0.994	4.00	10.00
gemessene Toleranz [mm]	+0.02 -0.02	+0.02 -0.02	+0.03 -0.02
Ausschlag [rad]	0.070	0.107	0.247

Tabelle 4.11: Meßwerte der ungeglühten Biegeelenke bei den Versuchen mit dem austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 bei der Fallhöhe $h = 1.9 \text{ m}$

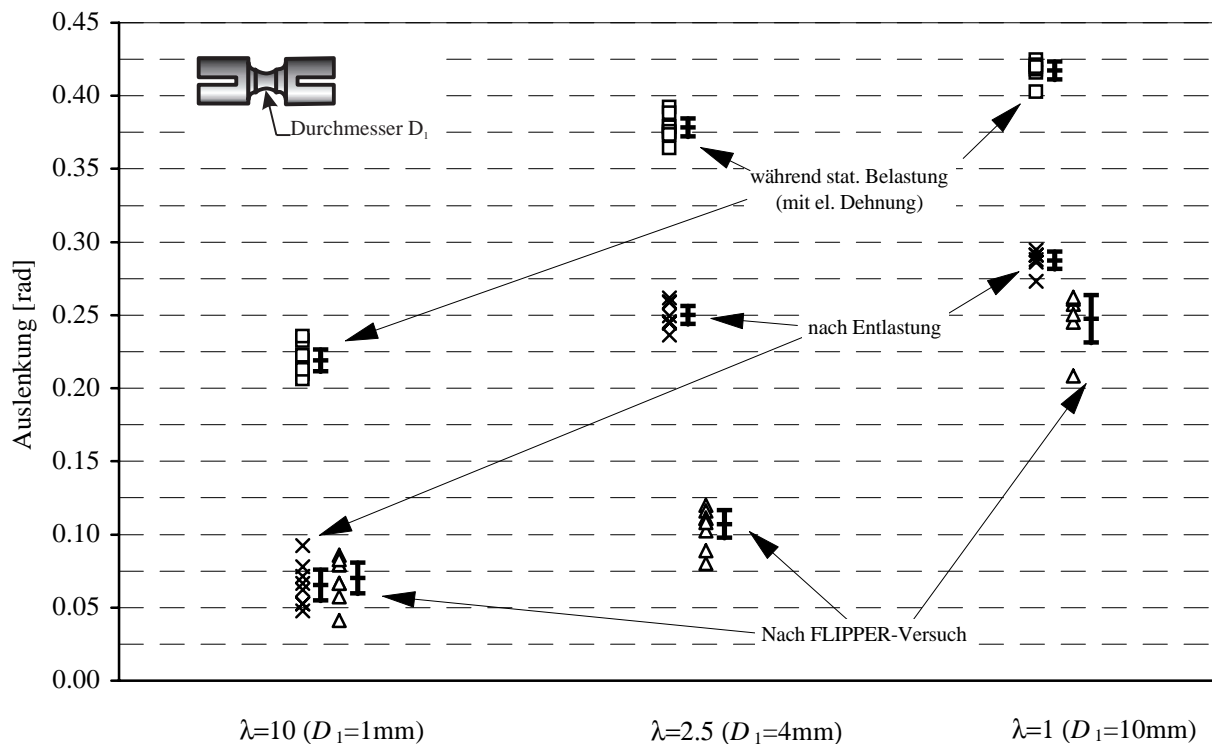


Abbildung 4.24: Plastische Biegewinkel für austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 aus FLIPPER-Experimenten - Fallhöhe $h = 1.9 \text{ m}$ - und anschließenden statischen Versuchen

Infolge dieses unerwarteten Ergebnisses wurden mit diesen Proben ebenfalls statische Versuche durchgeführt. Die mittleren plastischen Biegewinkel nach der Entlastung zeigen beim Maßstab $\lambda = 1$ einen leichten Anstieg, während der Anstieg beim Maßstab $\lambda = 2.5$ sehr deutlich ausgeprägt ist. Der Wert des mittleren plastischen Biegewinkels liegt jedoch deutlich unter dem für den Maßstab $\lambda = 1$. Im Maßstab $\lambda = 10$ ergeben sich jedoch nur geringfügig größere Biegewinkel nach dem statischen Versuch.

Dieses Verhalten läßt darauf schließen, daß die Festigkeitswerte bei den Biegeelenken im kleinen Maßstab erheblich über denen im großen Maßstab liegen. Gegebenenfalls ist hier eine Grundvorausset-

zung, die Skaleninvarianz der Stoffwerte, die zur Herleitung der Ähnlichkeitsbedingungen vorausgesetzt wurde, verletzt.

Eine mögliche Erklärung für dieses Materialverhalten liefern die gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven für den verwendeten Werkstoff (siehe Abschnitt 3.4.3). Der austenitische Stahl ist mit einer Ingenieur-Bruchdehnung von mehr als 60% sehr duktil und zeigt außerdem eine sehr große Verfestigung. Die Zugfestigkeit liegt um den Faktor 2-2.5 über der Fließspannung. Dadurch kann in der Randschicht der Biegeelenke infolge der spannenden Bearbeitung Kaltverfestigung stattgefunden haben. Beim Einsetzen des Fließens infolge einer Biegespannung muß dann in der äußeren Faser eine deutlich größere Spannung überwunden werden. Wenn die Eindringtiefe, bis zu der diese Kaltverfestigung auftritt, unabhängig vom Maßstab ist, dann ist der Verfestigungseffekt bei den kleinen Biegeelenken entsprechend dem Maßstab größer. Das hat zur Folge, daß die kleinen Biegeelenke ein deutlich steiferes Verhalten als die großen Biegeelenke zeigen.

Hinweise auf die Kaltverfestigung geben die Gefügeschliffe in Abbildung 4.25, die von einem plastisch verformten Biegeelenk im Maßstab $\lambda = 10$ hergestellt wurden. Die Schliffebene befindet sich senkrecht zur „Drehachse“ des Biegeelenkes. In allen drei Bildern zeigen sich in horizontaler Richtung Streifenstrukturen, die durch den Herstellungsprozeß des Stangenmaterials entstanden sind. Hier zeigen sich im Randbereich des Biegeelenkes (Bild b und c) feine Streifen. Daran kann man möglicherweise die Gleitsysteme erkennen, die infolge von plastischen Verformungen entstanden sind. Diese feinen Streifen finden sich sowohl im dem Bereich des Biegeelenkes, der der plastischen *Biege*verformung unterliegt - hier im Winkel von 45° - als auch in anderen Bereichen des Biegeelenkes, die nach der Bearbeitung keine plastische Biegeverformung erfahren haben - hier in senkrechter Richtung (Bild a). Im Gegensatz dazu zeigt Bild c aus dem mittleren Bereich des Biegeelenkes keine solchen Gleitsysteme sondern nur das normale austenitische Gefüge.

Um diese These zu prüfen, wurden weitere Versuche durchgeführt, bei denen die Biegeelenke zunächst bei 650°C spannungsarm gegläht wurden. Die Glühzeit betrug 20 min für die Biegeelenke im Maßstab $\lambda = 10$ und $\lambda = 2.5$ sowie 30 min beim Maßstab $\lambda = 1$, infolge der größeren Dicke der Biegeelenke. Gefügeumwandlungen treten bei dieser Temperatur nicht auf. Es werden lediglich Spannungen oberhalb der Streckgrenze bei der Glüh Temperatur abgebaut. Es ist deshalb nicht zu erwarten, daß die Kaltverfestigung ganz verschwindet, lediglich mit einer Minderung ist zu rechnen (Opitz et al. [106]).

Maßstab	$\lambda = 10$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 1$
Symbol	◇			○		
Mittlerer Durchmesser [mm]	0.989	3.99	9.98	0.987	3.99	9.99
gemessene Toleranz [mm]	+0.02	+0.03	+0.02	+0.01	+0.01	+0.03
Toleranz [mm]	-0.01	-0.02	-0.02	-0.01	-0.01	-0.02
Ausschlag [rad]	0.123	0.085	0.261	0.129	0.086	0.268

Tabelle 4.12: Meßwerte der geglähten Biegeelenke bei den Versuchen mit dem austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 bei der Fallhöhe $h = 1.9\text{ m}$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.12 und in Abbildung 4.26 dargestellt. Man erkennt eine deutliche Zunahme des mittleren plastischen Biegewinkels im Maßstab $\lambda = 10$ im Vergleich zu den ungeglähten Proben. Der mittlere plastische Biegewinkel der Biegeelenke im Maßstab $\lambda = 1$ liegt jedoch noch immer etwa doppelt so hoch.

Deshalb wurde eine weitere Versuchsreihe durchgeführt, bei der die Proben bei 700°C spannungsarm

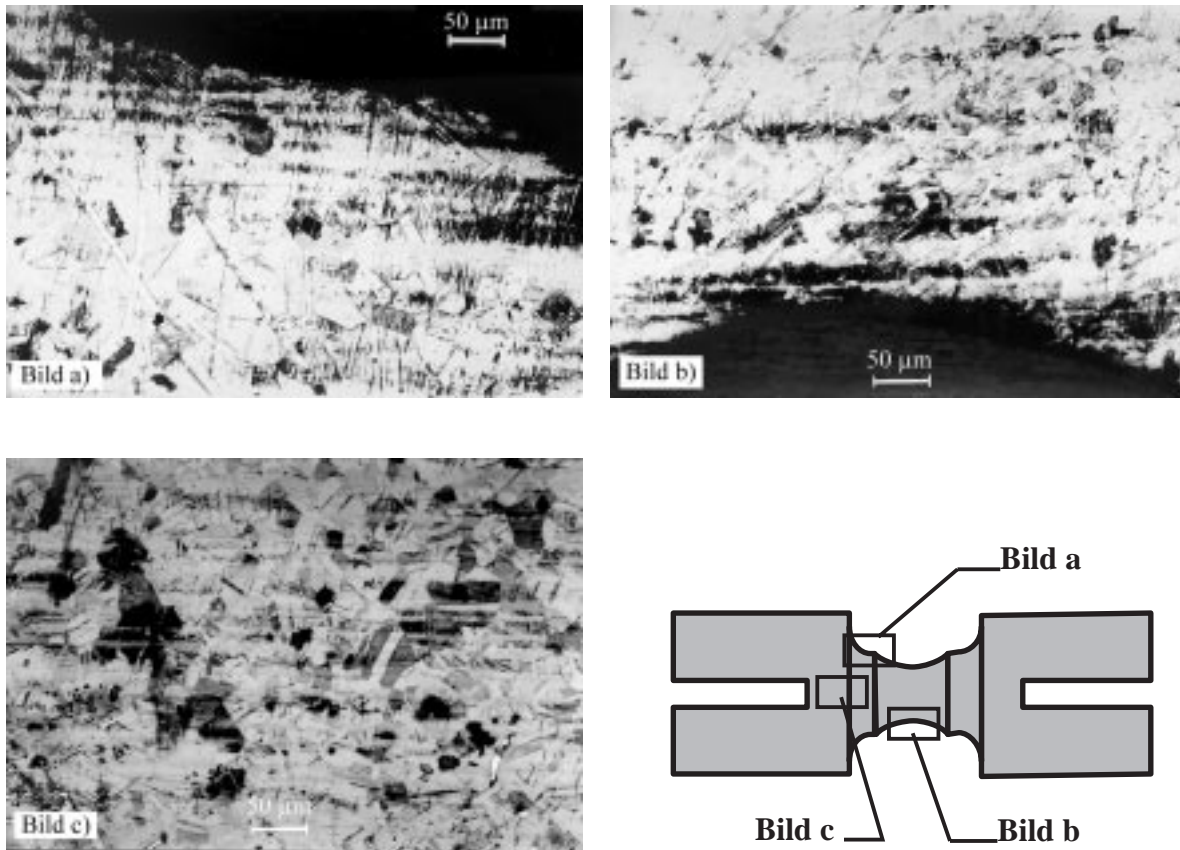


Abbildung 4.25: Gefügeschliffe eines gebogenen Biegegelenks im Maßstab $\lambda = 10$ aus austenitischem Stahl X 5 CrNi 18 9 - Vergrößerung $\approx 1400\times$

geglüht wurden. Die Glühzeit betrug hier 30 min für die Biegegelenke im Maßstab $\lambda = 10$ und $\lambda = 2.5$ sowie 40 min beim Maßstab $\lambda = 1$. Das Ergebnis zeigt jedoch keine signifikanten Unterschiede. Weiterer Klärung bedarf außerdem das Verhalten der Biegegelenke im Maßstab $\lambda = 2.5$, da hier der mittlere plastische Biegewinkel der geglühten Biegegelenke im Mittel etwas tiefer liegt als bei den ungeglühten Biegegelenken und zusätzlich eine höhere Streuung der Einzelversuche auftritt. Als nächster Schritt kommt noch das erneute Lösungsglühen oder ein Rekristallisationsglühen in Frage, bei dem die Gefügestruktur neu gebildet wird. Hier müßten dann sämtliche Kaltverfestigungseffekte verschwinden. Jedoch ist hier ein signifikanter Effekt nicht mehr zu erwarten. Da hierfür keine Biegegelenke mehr zur Verfügung standen, müssen dazu neue Versuche durchgeführt werden.

Eine Variabilität der Materialfestigkeit über den Stangenquerschnitt wäre eine weitere mögliche Ursache für den festgestellten Maßstabseinfluß. Eine Messungen des Härteverlaufs über den Stangenquerschnitt zeigte einen relativ geringen Anstieg der Härte in der Stangenmitte von etwa 10% (siehe Abbildung 4.27). Eine damit zusammenhängende größere Fließspannung käme allenfalls bei den Biegegelenken im Maßstab $\lambda = 1$ zum Tragen. Für Radien ≥ 2 mm ergeben sich jedoch gleichmäßige Härtewerte. Das Verhalten der Biegegelenke im Maßstab $\lambda = 2.5$, die bis zum Radius ± 2 mm reichen und ebenfalls eine größere Steifigkeit aufweisen, kann damit also nicht erklärt werden. Damit scheidet eine Variation der Fließspannung über den Stangenquerschnitt als Ursache für den festgestellten Maßstabseinfluß ebenfalls aus.

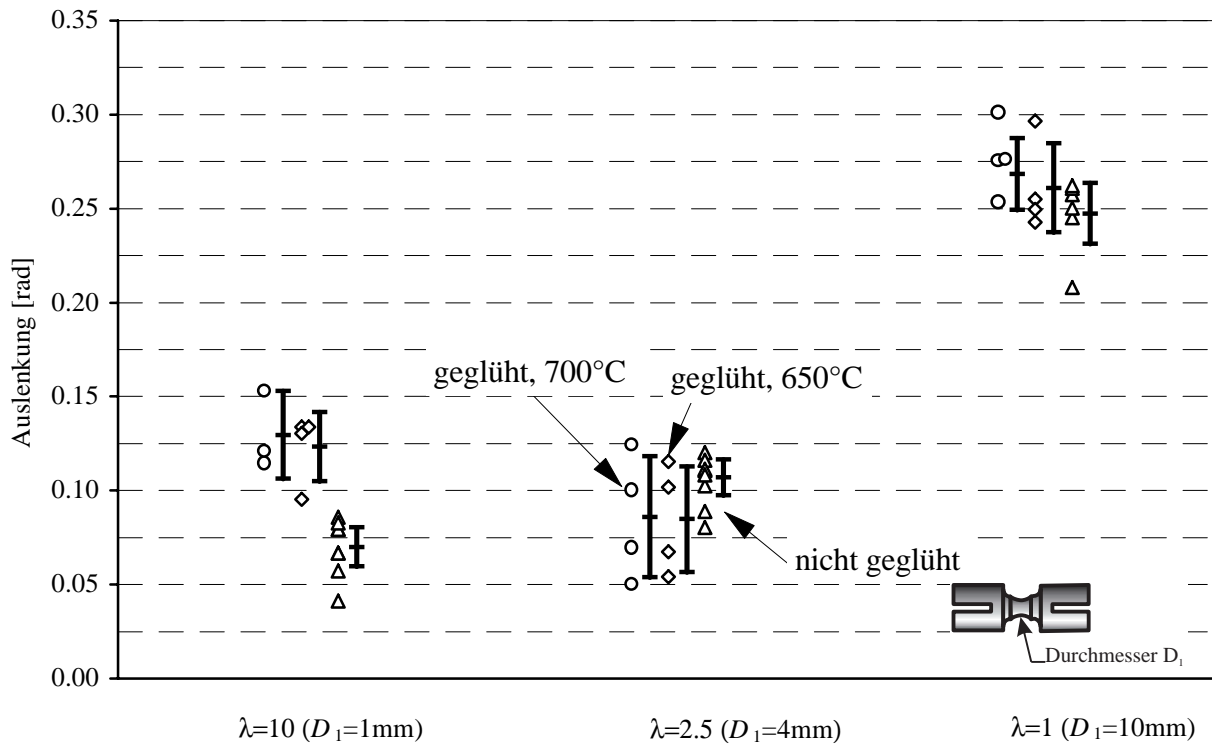


Abbildung 4.26: Vergleich der Versuchsergebnisse von nicht geblühten und geblühten Biege gelenken für austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 - Fallhöhe $h = 1.9$ m

Eine weitere Möglichkeit zur Erklärung des beobachteten großen Maßstabseinflusses liefert die kritische Hinterfragung der Fließbedingung, die der der Ähnlichkeitstheorie zugrundeliegt. Es wurde davon ausgegangen, daß plastisches Fließen einsetzt, wenn die Vergleichsspannung die Fließspannung σ_F erreicht, welche im einachsigen Zugversuch, also bei homogener Spannungsverteilung, ermittelt wird. Im vorliegenden Fall erhält man infolge der Biegung jedoch einen Spannungsgradienten über die Höhe der Biege gelenke. Da die Skalierung der durchgeführten Experimente so vorgenommen ist, daß an homologen Orten dieselben Spannungen und Dehnungen zumindest bei elastischem Verhalten auftreten, erhält man im kleinen Maßstab größere Spannungs- und Dehnungsgradienten.

Es gibt in der Literatur Ansätze mehrerer Autoren (Fleck et al. [107], Zbib [108], Mühlhaus und Aifantis [109] sowie Zbib und Aifantis [110], [111] [112]), die Gradienten der plastischen Dehnung in der Fließbedingungen benützen, um verschiedene Phänomene im plastischen Verhalten zu beschreiben. Dazu gehören die Modellierung von Scherbändern oder auch der Anstieg der Verfestigung mit wachsendem Dehnungsgradienten.

Malmberg [113] liefert einen Ansatz für den Fall reiner Biegung, der einen solchen Gradienten in der Fließbedingung berücksichtigt. Wenn man zur Vereinfachung einen Rechteckquerschnitt der Höhe H voraussetzt, setzt Fließen nach diesem Ansatz ein, wenn die Bedingung

$$\frac{1}{d^*} \int_{H/2-d^*}^{H/2} \sigma dz = \sigma_F \quad (4.11)$$

in einer Grenzschicht der finiten Dicke d^* erfüllt ist. Wenn man postuliert, daß diese Dicke d^* ein maßstabunabhängiger Materialparameter ist, erhält man bei einem quadratischen Querschnitt einen

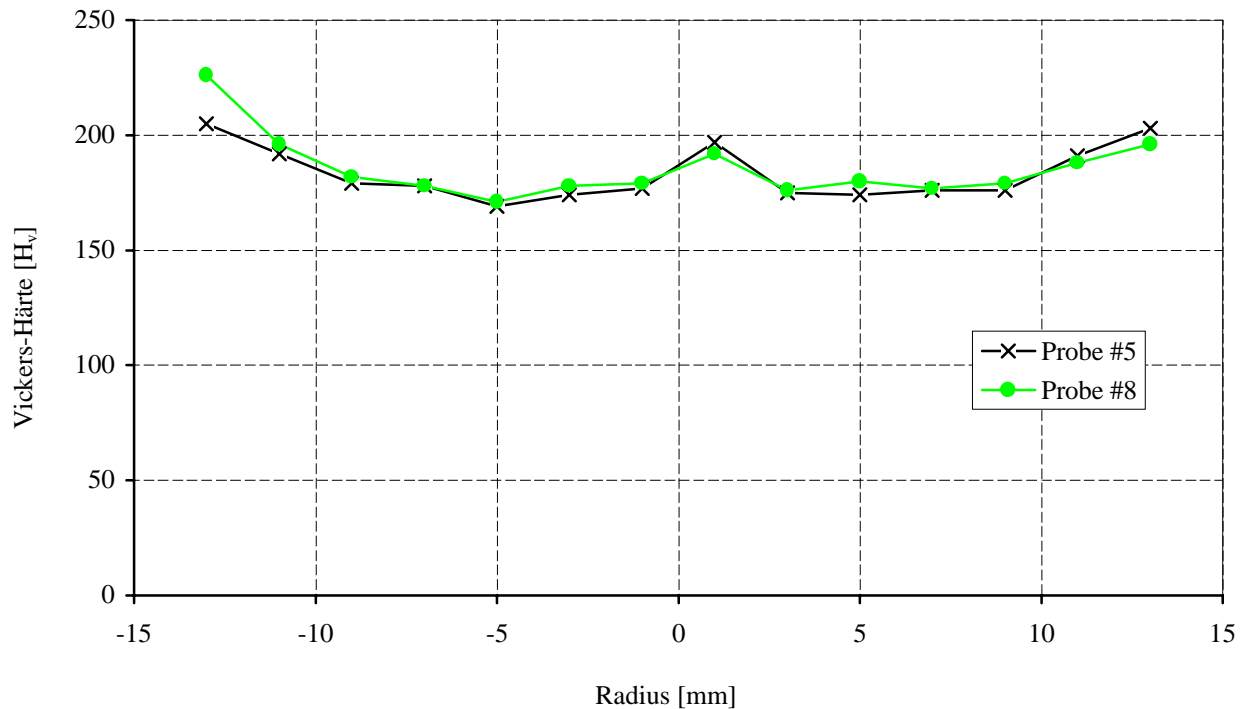


Abbildung 4.27: Verlauf der Härte nach Vickers (Pyramide) über den Stangenquerschnitt für zwei Proben aus austenitischem Stahl X 5 CrNi 18 9

Anstieg der auftretenden scheinbaren Fließspannung bis zu einem Faktor von zwei, wenn die Probenhöhe von sehr großen Werten kommend bis hin zum Wert von d^* verkleinert wird. Wird dieser Querschnitt um 45° gedreht, so daß mehr Material bei der neutralen Faser konzentriert ist, erhält man sogar einen Faktor von drei. Das Einsetzen eines merklichen Anstiegs erfolgt, wenn die Dicke d^* etwa 20% der Probenhöhe erreicht. Bei kleineren Werten ist der Effekt kleiner als 10%. Zur Klärung, ob im vorliegenden Fall ein solcher Effekt zum Tragen kommt, sind jedoch weitere theoretische und experimentelle Arbeiten notwendig, wobei bei den letzteren die Materialeigenschaften der verwendeten Werkstoffe sehr genau kontrolliert werden müssen.

Kapitel 5

Strukturdynamisches Rechenmodell für FLIPPER

5.1 Modellannahmen

Ziel bei der Erstellung dieses Rechenmodells ist es, die Auswirkungen zu untersuchen, die Schwankungen im übertragenen Impuls auf die Streuung der gemessenen plastischen Verformungen bei den FLIPPER-Experimenten haben. Das Rechenmodell kann weiterhin dazu dienen, den Einfluß der verschiedenen Maßstäbe auf den Biegewinkel abzuschätzen und ihn mit den experimentellen Ergebnissen zu vergleichen. Deshalb wird zur Modellbildung das dehnungsgeschwindigkeitsabhängige Materialverhalten berücksichtigt.

Der bleibende Ausschlag der Prallplatte beruht ausschließlich auf der plastischen Verformung der Biegeelenke. Die während des Versuchsablaufs auftretenden elastischen Verformungen der Prallplatte gehen nach Ende des Versuchs wieder auf Null zurück. Die Prallplatte und der Teil der Biegeelenke, der sich nur elastisch verformt, werden deshalb für die Berechnung als starr angenommen. Für die Ermittlung der Verformung wird nur der Bereich der Biegeelenke berücksichtigt, in dem plastische Deformationen auftreten. Unter der Voraussetzung, daß die elastischen Verformungen in diesem Bereich klein gegenüber den plastischen Verformungen sind, sollte dann der maximale Winkelausschlag der Prallplatte während der Belastungsphase in guter Näherung dem plastischen Biegewinkel nach den FLIPPER-Versuchen entsprechen. Die Vorgänge bei der Entlastung nach Durchlaufen der maximalen Auslenkung, bei denen der Rückgang der Spannungen in den Biegeelenken auf einer Parallelen zur Hooke'schen Geraden erfolgt, werden deshalb nicht explizit modelliert. Das weitere Verhalten des Rechenmodells nach Erreichen der maximalen Auslenkung entspricht dem Zurückfedern einer Feder mit nichtlinearer Kennlinie und liefert deshalb für uns keine physikalische verwertbaren Aussagen mehr.

5.2 Bewegungsgleichung und hydrodynamische Belastung

Die Bewegungsgleichung des Systems (Abbildung 5.1) kann unter den gemachten Annahmen folgendermaßen angesetzt werden:

$$M(\varphi, \dot{\varphi}) - F(t)l \cos \varphi + \Theta \ddot{\varphi} = 0. \quad (5.1)$$

Dabei steht φ für den Winkelausschlag, $M(\varphi, \dot{\varphi})$ für das Biegemoment, $F(t)$ für die auf die Platte wirkende und als linientreu angenommene resultierende Kraft, l für den Hebelarm und Θ für das Mas-

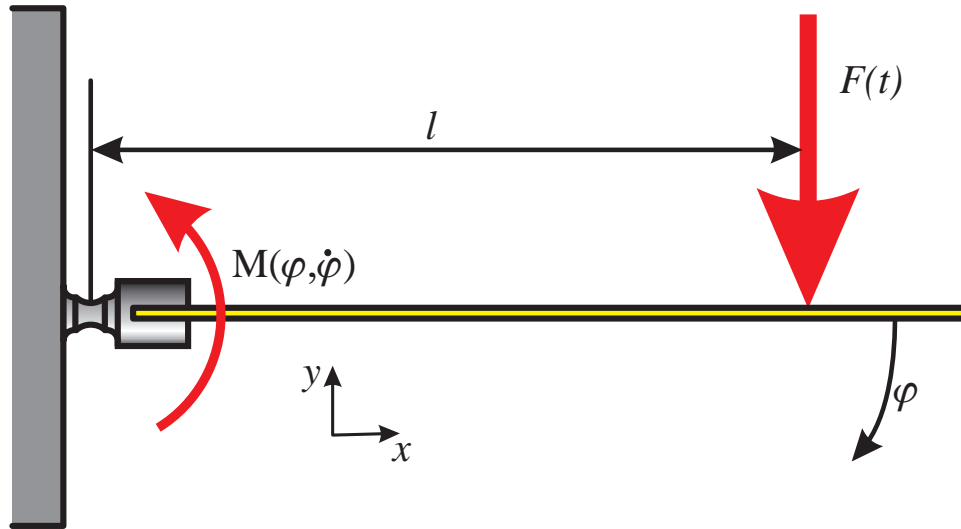


Abbildung 5.1: Strukturdynamisches Modell der FLIPPER- Testproben

senträgheitsmoment der Prallplatte um den in der Mitte der Biegeelenke angenommenen Drehpunkt. Das Massenträgheitsmoment der Biegeelenke wird vernachlässigt. Für den Hebelarm l wird der Abstand zwischen den Biegeelenken und dem Mittelpunkt des Wasserbehälters angesetzt, der mit zufriedenstellender Genauigkeit mit dem gemessenen Kraftangriffspunkt übereinstimmt (siehe Tabelle 4.4).

Die Kraft $F(t)$ wird aus den an den starren Platten gemessenen Kraftverläufen bestimmt. Diese können jedoch nicht direkt übernommen werden, weil sich die Prallplatte infolge der Kraftwirkung in Bewegung setzt. Das führt je nach Bewegungsrichtung zu einer Verminderung oder Vergrößerung der wirkenden Kraft, für deren Größe die Relativgeschwindigkeit zwischen Prallplatte und Flüssigkeit maßgebend ist. Dieser Effekt wird wie folgt berücksichtigt.

Die an einer starren Platte gemessenen Kraftverläufe F_{starr} lassen sich über eine Normierung mit der Flüssigkeitsdichte ρ , die Aufprallgeschwindigkeit v_{FL} und die Plattenfläche A durch einen zeitabhängigen Widerstandsbeiwert $c_w(t)$ in der Form

$$F_{starr}(t) = \frac{1}{2} c_w(t) \rho v_{FL}^2 A \quad (5.2)$$

darstellen. Für die sich bewegende Prallplatte kann entsprechend

$$F_{bewegt}(t) = \frac{1}{2} c_w(t) \rho (v_{FL} - \dot{\varphi} l)^2 A \cos \varphi \quad (5.3)$$

angesetzt werden, wobei $A \cos \varphi$ die zum ankommenden Fluid senkrechte Plattenfläche und $\dot{\varphi} l$ die Geschwindigkeit der Platte im Kraftangriffspunkt ist. Unter der Annahme, daß die Zeitabhängigkeit der c_w -Werte für die starre und die bewegte Platte dieselbe ist, gilt nun für das Verhältnis

$$\frac{F_{bewegt}}{F_{starr}} = \left(1 - \frac{\dot{\varphi} l}{v_{FL}}\right)^2 \cos \varphi. \quad (5.4)$$

Damit erhält die Bewegungsgleichung folgende Form:

$$M(\varphi, \dot{\varphi}) - F_{starr} \left(1 - \frac{\dot{\varphi} l}{v_{FL}}\right)^2 l \cos^2 \varphi + \Theta \ddot{\varphi} = 0. \quad (5.5)$$

Infolge der Vereinfachung, daß sich die Prallplatte als starrer Körper bewegen soll, ist die Relativgeschwindigkeit fehlerhaft. Bei den Experimenten ist nämlich aufgrund der stattfindenden elastischen Verformung der Prallplatte mit einer größeren Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ im Kraftangriffspunkt zu rechnen. Die Größe des Fehlers ist dabei abhängig vom Verhältnis der Steifigkeiten von Biegegelenk und Prallplatte. Dieses Verhältnis wird bestimmt von der Fließspannung σ_F der Biegegelenke, weil die anderen Einflußgrößen, wie die Geometrie und das Materialverhalten der Prallplatte, festliegen. In der Folge erhält man deshalb bei der Modellrechnung etwas zu große Kräfte, was im Endeffekt eine etwas zu große Deformation erwarten läßt.

Die Abhängigkeit des Biegemoments $M(\varphi, \dot{\varphi})$ vom Biegewinkel φ und der Winkelgeschwindigkeit berechnet sich aus der Geometrie der Biegegelenke und den Eigenschaften des verwendeten Materials wie folgt.

5.3 Berechnung des Biegemoments

Im weiteren werden die Gleichungen in dimensionsloser Form verwendet. Zur Normierung werden dabei folgende Größen verwendet:

- die Fließspannung σ_F ,
- die halbe Querschnittshöhe, hier der kleinste Radius r_0 der Biegegelenke und
- eine charakteristische Zeit $\bar{t} = h_W/v_{FL}$ gebildet aus der Höhe des Wasserbehälters h_W und der nominellen Aufprallgeschwindigkeit v_{FL} der Flüssigkeit.

5.3.1 Geometrie

Die Geometrie der Biegegelenke mit dem kreisbogenförmigen Einstich kann entsprechend Abbildung 5.2 wie folgt beschrieben werden. Bezeichnet r_0 den minimalen Radius des Biegegelenkes und R den Radius des Einstichs, dann gilt für den Verlauf $r(x)$ des Radius der Biegegelenke:

$$r(x) = r_0 + R - \sqrt{R^2 - x^2} \quad (5.6)$$

oder dimensionslos mit $\rho = r/r_0$, $\rho_R = R/r_0$ und $\chi = x/r_0$

$$\rho(\chi) = 1 + \rho_R - \sqrt{\rho_R^2 - \chi^2}. \quad (5.7)$$

Für die FLIPPER-Biegegelenke beträgt der Wert $\rho_R = 2$.

5.3.2 Kinematische Beziehungen

Für die Biegelinie $w(x)$ und deren Krümmung κ , definiert als Änderung des Biegewinkels φ über die Bogenlänge s gilt bekanntlich folgender allgemeiner Zusammenhang:

$$\kappa = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.8)$$

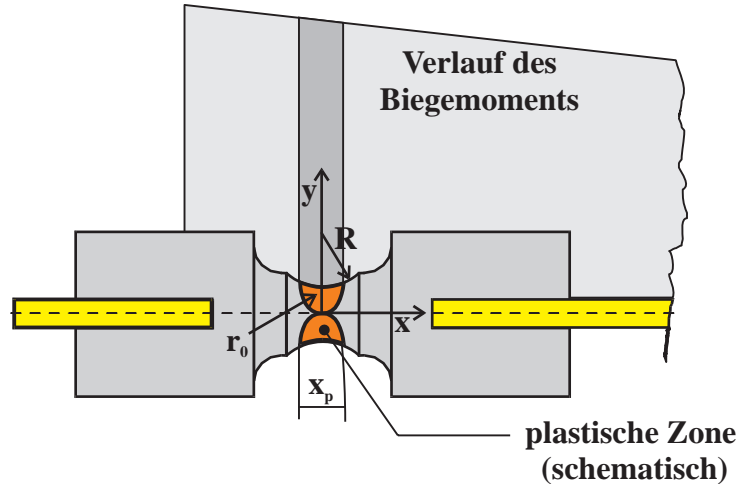


Abbildung 5.2: FLIPPER-Bieegeelenk

Für kleine Biegewinkel $\varphi \ll 1$ gilt näherungsweise $\partial\varphi/\partial s \approx \partial\varphi/\partial x$ und $y' = \tan \varphi \approx \varphi$. Es wird angenommen, daß auch im Falle plastischer Verformung, die Bernoulli-Hypothese ebenbleibender Querschnitte angewendet werden kann. Es wird hier also die übliche Vorgehensweise bei einer vereinfachten elasto-plastischen Balkentheorie (siehe z.B. Kaliszky [114]) benutzt. Unter der weiteren Vereinfachung, daß das Biegemoment in der kleinen plastischen Zone x_p in der x -Richtung näherungsweise konstant ist (siehe Abschnitt 5.3.3), ergibt sich, wenn auch die Querschnittsänderung in x -Richtung vernachlässigt wird, über die plastische Zone eine konstante Krümmung. Zwischen der Dehnung ε_{max} in der äußeren Faser, der Höhe des Querschnitts y_{max} und dem Biegewinkel φ gilt dann der folgende kinematische Zusammenhang:

$$\kappa \approx \frac{\partial\varphi}{\partial x} \approx \frac{\varepsilon_{max}}{y_{max}} \approx \text{const.} \quad (5.9)$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich nach Integration über die Ausdehnung x_p der plastischen Zone in Richtung des Balkens

$$\frac{\varepsilon_{max}}{y_{max}} = \frac{\varphi}{x_p}. \quad (5.10)$$

Die Ausdehnung x_p der plastischen Zone ist zunächst noch unbekannt und wird im nächsten Abschnitt bestimmt. Für den Dehnungsverlauf über die Höhe y des Querschnitts gilt entsprechend:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{max}}{y_{max}} y = \frac{\varphi}{x_p} y = \kappa y, \quad (5.11)$$

oder dimensionslos mit $\xi_p = x_p/r_0$, $\nu = y/r_0$ und $k = \kappa r_0$

$$\varepsilon = \frac{\varphi}{\xi_p} \nu = k \nu \quad (5.12)$$

Für die dimensionslose Dehnungsrate¹ $\dot{\varepsilon}$ in einer bestimmten Höhe ν des Querschnitts erhält man sofern $\xi_p = \text{const.}$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\varphi}}{\xi_p} \nu. \quad (5.13)$$

5.3.3 Ausdehnung der plastischen Zone

Zur Bestimmung der Ausdehnung x_p bzw. ξ_p der plastischen Zone in Balkenrichtung muß zunächst das wirkende Biegemoment abgeschätzt werden. Dies kann durch eine zeitliche Mittelung aller gemessenen Kraftverläufe aus Abbildung 4.10 geschehen. Bei der Mittelung wurde der Bereich der Kraftverläufe erfaßt, der zwischen dem steilen Kraftanstieg zu Beginn des Aufprallvorgangs und dem Rückgang der Kraft auf Null liegt. Mit der so ermittelten Kraft \bar{F} , die sich auf beide Biegeelenke aufteilt, und dem Hebelarm l erhält man durch Normierung mit dem maximalen elastischen Biegemoment $M_e = \frac{\pi}{4} \sigma_F r_0^3$ des Kreisquerschnitts, auch Fließmoment genannt, das folgende dimensionslose Biegemoment

$$\mu = \frac{M}{M_e} = \frac{\frac{1}{2} \bar{F} l}{\frac{\pi}{4} \sigma_F r_0^3}. \quad (5.14)$$

Das Biegemoment ist über den plastischen Bereich x_p näherungsweise konstant (vgl. Abbildung 5.2). Die plastische Zone dehnt sich in χ -Richtung soweit aus, bis an der Stelle χ_p mit dem Radius $\rho(\chi_p)$ gerade das Fließmoment erreicht ist. Der dimensionslose Radius $\rho(\chi_p)$ erfüllt hier die Bedingung

$$\rho^3(\chi_p) = \mu. \quad (5.15)$$

Mit Gleichung (5.7) erhält man für die Ausdehnung ξ_p für den Wert $\rho_R = 2$ schließlich

$$\xi_p = 2\chi_p = 2\sqrt{\rho_R^2 - (\rho_R + 1 - \sqrt[3]{\mu})^2}. \quad (5.16)$$

Mit den Materialdaten entsprechend Tabelle 3.5 erhält man die in Tabelle 5.1 (Seite 98) angegebenen Werte. Die plastische Zone befindet sich also noch im Bereich des kreisförmigen Einstichs der Biegeelenke, der bis $\rho=1.5$ reicht. Für den ferritischen Stahl St 37 wird dieser Bereich bei der Fallhöhe $h = 3\text{m}$ geringfügig überschritten.

5.3.4 Anpassung des Querschnitts

Bei der Berechnung der Abhängigkeit des Biegemoments vom Biegewinkel ergeben sich für die Biegeelenke mit veränderlichem Kreisquerschnitt Gleichungen, die nicht mehr analytisch zu behandeln sind. Aufgrund der zuvor bereits eingeführten Vereinfachungen erscheint es gerechtfertigt, im weiteren den veränderlichen Kreisquerschnitt durch einen quadratischen Querschnitt mit konstanter Höhe zu ersetzen, der der Geometrie der Biegeelenke entsprechend angepaßt wird. Durch diese Vereinfachung ist mit einem etwas weicheren Verformungsverhalten nach dem Einsetzen des Fließens zu rechnen, wie der Vergleich des Verhältnisses von Kollapsmoment M_p , das bei elastisch-idealplastischem Materialverhalten und vollständiger Plastifizierung auftritt, und dem Fließmoment M_e zeigt. Die Werte betragen für

¹Auf die Kennzeichnung der dimensionslosen Größen mit einer Tilde, wie sie in Abschnitt 2.8.1 eingeführt wurde, wird hier und im weiteren verzichtet, so daß die verwendeten Symbole stets dimensionslose Größen darstellen. Wenn im weiteren Text eine Unterscheidung in dimensionsbehaftete und dimensionslose Größen nicht klar sein sollte, wird darauf explizit hingewiesen.

den Kreisquerschnitt $\frac{M_p}{M_e} = \frac{16}{3\pi} \approx 1.69$ und für den Rechteckquerschnitt $\frac{M_p}{M_e} = 1.5$ (siehe z.B. Kaliszky [114]). Das Biegemoment steigt also für den Kreisquerschnitt etwas stärker an. Weiterhin zeigt sich hier, daß das abgeschätzte Biegemoment erheblich über dem Kollapsmoment liegt.

Die Anpassung des Querschnitts geschieht in zwei Schritten. Zunächst wird ein quadratischer Querschnitt eingeführt, bei dem die halbe Seitenlänge $a(\chi)$ entsprechend Gleichung (5.7) zunimmt. An die Stelle des Radius r_0 tritt nun die halbe Seitenlänge a_0 . Die Seitenlänge a_0 wird so gewählt, daß das plastische Verhalten bei der gleichen Belastung wie beim Kreisquerschnitt einsetzt. Dazu muß das Widerstandsmoment dasselbe sein. Die halbe Seitenlänge ergibt sich aus den bekannten Beziehungen (siehe Dubbel [115]) damit zu $a_0 = \sqrt[3]{3\pi/16}r_0$.

Für die weitere Berechnung wird das Verfestigungsverhalten des Materials berücksichtigt, weil mit Biegemomenten gerechnet werden muß, die erheblich über dem elastisch-idealplastischem Kollapsmoment liegen. Es wird dazu der Verfestigungsansatz von Ludwik (Gleichung (3.4)) benutzt, der auch für die analytische Darstellung der gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven verwendet wurde.

Der veränderliche Querschnitt wird nun durch einen konstanten Querschnitt mit den halben Seitenlänge \bar{a} ersetzt, wobei die halbe Seitenlänge \bar{a} so berechnet wird, daß sich bei einem bestimmten Biegemoment für beide Fälle derselbe Biegewinkel ergibt.

Zur Berechnung wird der Querschnitt in den elastischen und den plastischen Bereich aufgeteilt und das Verfestigungsverhalten durch den Ansatz von Ludwik entsprechend Gleichung (3.11) berücksichtigt. In dimensionsloser Darstellung erhält man, wenn zur Vereinfachung die elastische Dehnung im plastischen Bereich des Querschnitts vernachlässigt wird,

$$s = \frac{\sigma}{\sigma_F} = \begin{cases} \frac{E}{\sigma_F} \varepsilon = e\varepsilon & , \quad \varepsilon \leq \frac{\sigma_F}{E} = \frac{1}{e} = \varepsilon_F \\ 1 + \frac{B}{\sigma_F} \varepsilon^r = 1 + \beta\varepsilon^r & , \quad \varepsilon > \frac{\sigma_F}{E} = \frac{1}{e} = \varepsilon_F. \end{cases} \quad (5.17)$$

Hier steht $s = \sigma/\sigma_F$ für die dimensionslose Spannung, $\beta = B/\sigma_F$ für den dimensionslosen Verfestigungsfaktor, r für den Verfestigungsexponenten und $e = E/\sigma_F$ für den dimensionslosen Elastizitätsmodul. Das Biegemoment für einen quadratischen Querschnitt mit der halben Seitenlänge $a(x)$ erhält man aus

$$\mu = \frac{M}{M_e} = \frac{4a(x)}{M_e} \int_0^{a(x)} \sigma(y) y dy. \quad (5.18)$$

Hierbei steht μ für das mit dem Fließmoment $M_e = \frac{4}{3}\sigma_F a_0^3$ normierte Biegemoment, Unter Verwendung von Gleichung (5.17) kann der Biegewinkel aus dem dimensionslosen Biegemoment mit Hilfe der Beziehung

$$\mu = 3a(\chi) \left[\int_0^{\nu_F} e\varepsilon\nu d\nu + \int_{\nu_F}^{a(\chi)} (1 + \beta\varepsilon^r) \nu d\nu \right] \quad (5.19)$$

berechnet werden. Das linke Integral beschreibt dabei den elastischen Bereich des Querschnitts und das rechte Integral den plastischen Bereich. Dabei steht ν_F für die Höhe des Querschnitts bei der das plastische Fließen einsetzt und $a(\chi)$ für den Verlauf der halben Seitenlänge des Querschnitts. Die Höhe ν_F ergibt sich mit Gleichung (5.12) zu

$$\nu_F = \frac{\xi_p}{\varphi} \varepsilon_F = \frac{1}{ek}. \quad (5.20)$$

Nach dem Einsetzen dieser Beziehung in (5.19), anschließender Integration unter Verwendung von Gleichung (5.12) erhält man nach kurzer Rechnung

$$1 + \frac{3}{2} \left(a^2(\chi) e^2 k^2 - 1 \right) + \frac{3\beta}{(r+2)e^r} \left(a^{r+2}(\chi) e^{r+2} k^{r+2} - 1 \right) - \frac{\mu e^2 k^2}{a} = 0. \quad (5.21)$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für die dimensionslose Krümmung $k(\chi)$, die bei konstantem Biegemoment μ iterativ für jede χ -Koordinate ermittelt werden kann. Dabei ist noch die Abhängigkeit der Seitenlänge a von der χ -Koordinate (siehe auch Gleichung (5.7))

$$a(\chi) = 1 + \rho_R - \sqrt{\rho_R^2 - \chi^2}. \quad (5.22)$$

zu beachten. Den Biegewinkel φ erhält man aus

$$\varphi = 2 \int_0^{\xi_p/2} k(\chi) d\chi = \bar{k} \xi_p, \quad (5.23)$$

woraus die *konstante* Krümmung \bar{k} für den Querschnitt mit konstanter halber Seitenlänge \bar{a} berechnet werden kann. Zur Berechnung des Integrals bietet sich zum Beispiel das Romberg-Schema an.

In analoger Weise erhält man für den Ersatzquerschnitt die Gleichung

$$1 + \frac{3}{2} \left(\bar{a}^2 e^2 \bar{k}^2 - 1 \right) + \frac{3\beta}{(r+2)e^r} \left(\bar{a}^{r+2} e^{r+2} \bar{k}^{r+2} - 1 \right) - \frac{\mu e^2 \bar{k}^2}{\bar{a}} = 0 \quad (5.24)$$

woraus die Höhe \bar{a} für verschiedene Parameter μ, e, β, r wiederum iterativ bestimmt werden kann. Die numerischen Rechnungen wurden mit Verfahren durchgeführt, wie sie bei Press et al [116] beschrieben sind.

Bei einer Parametervariation für das Biegemoment μ und den Verfestigungsexponenten r bei festgehaltenen Werten $\beta = 2.46$ und $e = 667$, die mit den Werten für den ferritischen Stahl St 37 vergleichbar sind, erhält man die in Abbildung 5.3 dargestellten Verläufe für die halbe Seitenlänge \bar{a} des Ersatzquerschnitts.

Man erkennt, daß bei größeren Werten für den Verfestigungsexponenten bei Änderung des Biegemoments von $\mu = 1.5$ auf $\mu = 4$ der Wert \bar{a} um weniger als 10% ansteigt. Für kleiner werdende Werte des Verfestigungsexponenten nimmt bei konstanten Biegemoment der Wert \bar{a} ab, durchläuft ein Minimum und steigt wieder an. Dieses Verhalten kann anhand der zugrundeliegenden Gleichungen unter Beachtung der zugehörigen Biegewinkel, die in Abbildung 5.4 dargestellt sind, interpretiert werden.

In Abbildung 5.4 erkennt man zunächst, daß bei kleiner werdenden Verfestigungsexponenten auch der Biegewinkel kleiner wird. Das ist begründet, weil bei kleineren Verfestigungsexponenten in der zugrundeliegenden Spannungs-Dehnungs-Kurve bei der gleichen Dehnung größere Spannungen erreicht werden. Deshalb ergeben sich bei konstantem Biegemoment kleinere Dehnungen und damit auch kleinere Biegewinkel.

Zu den Werten des Verfestigungsexponenten, bei dem die Höhe \bar{a} minimal wird, gehören jedoch sehr kleine Biegewinkel und damit auch kleine Dehnungen, die in der Größenordnung der maximalen elastischen Dehnung liegen (siehe Abbildung 5.4). In diesem Bereich ergeben sich durch die Vernachlässigung der elastischen Dehnung im plastischen Bereich des Querschnitts, die bei der Herleitung der Gleichungen getroffen wurde, erhebliche Fehler, so daß das Verhalten der Biegeelenke für kleine Biegewinkel nicht mehr korrekt modelliert werden kann.

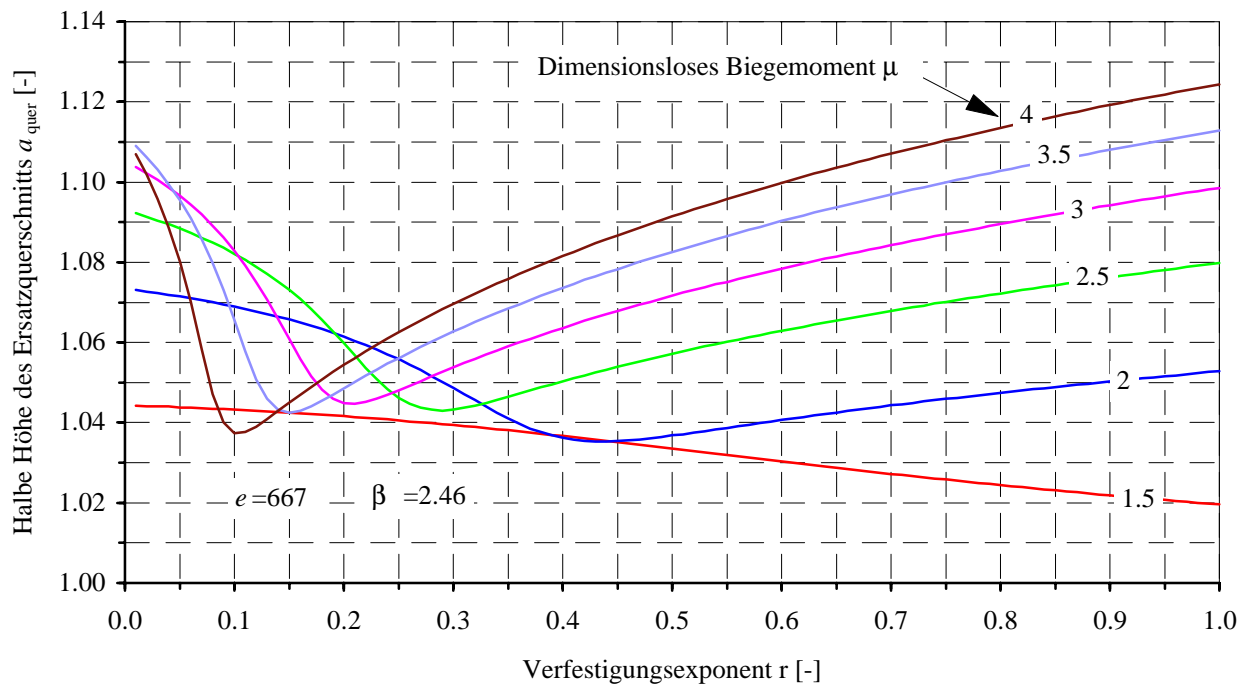


Abbildung 5.3: Höhe des Ersatzquerschnitts bei Parametervariation für das Biegemoment und den Verfestigungsexponenten bei festgehaltenen Werten für den Elastizitätsmoduls und des Verfestigungsfaktors

Für die Werte der Verfestigungsexponenten und des abgeschätzten Biegemoments für den ferritischen Stahl St 37 und den austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 sind die Biegewinkel jedoch groß, so daß von einer guten Modellierung des Verhaltens der Biegeelenke ausgegangen werden kann.

Zur Berechnung des Ersatzquerschnitts im Rechenmodell wurden, abhängig vom jeweiligen Material, die in Tabelle 5.1 aufgeführten mittleren Biegemomente benutzt. Zur Berechnung der dimensionslosen Biegemomente für die von $h = 2\text{m}$ abweichenden Fallhöhen sei insbesondere auf Abschnitt 5.5.2.2 sowie auf die Abschnitte 5.5.3 und 5.5.4 verwiesen. Für diese Momente ergibt sich nun im Rechenmodell mit konstantem Querschnitt derselbe Biegewinkel wie für den veränderlichen Querschnitt.

Werkstoff	St 37			X 5 CrNi 18 9	AlZnMgCu1.5
Fallhöhe h [m]	1.5	2	3	1.9	1.5
μ	2.18	2.91	4.37	3.16	1.53
ξ_p	2.10	2.47	2.92	2.57	1.52
\bar{a}	1.05	1.07	1.11	1.10	1.03

Tabelle 5.1: Mittleres Biegemoment μ , Ausdehnung der plastischen Zone ξ_p bzw. $\rho(\chi_p)$ und Ersatzquerschnitt \bar{a} für die verschiedenen Werkstoffe und Fallhöhen

5.3.5 Berücksichtigung des elastisch-viskoplastischen Materialverhaltens

Die Berechnung des Biegemoments im Rechenmodell berücksichtigt die Verfestigung des Materials und dessen Verhalten bei verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeiten unter Verwendung des im Abschnitt

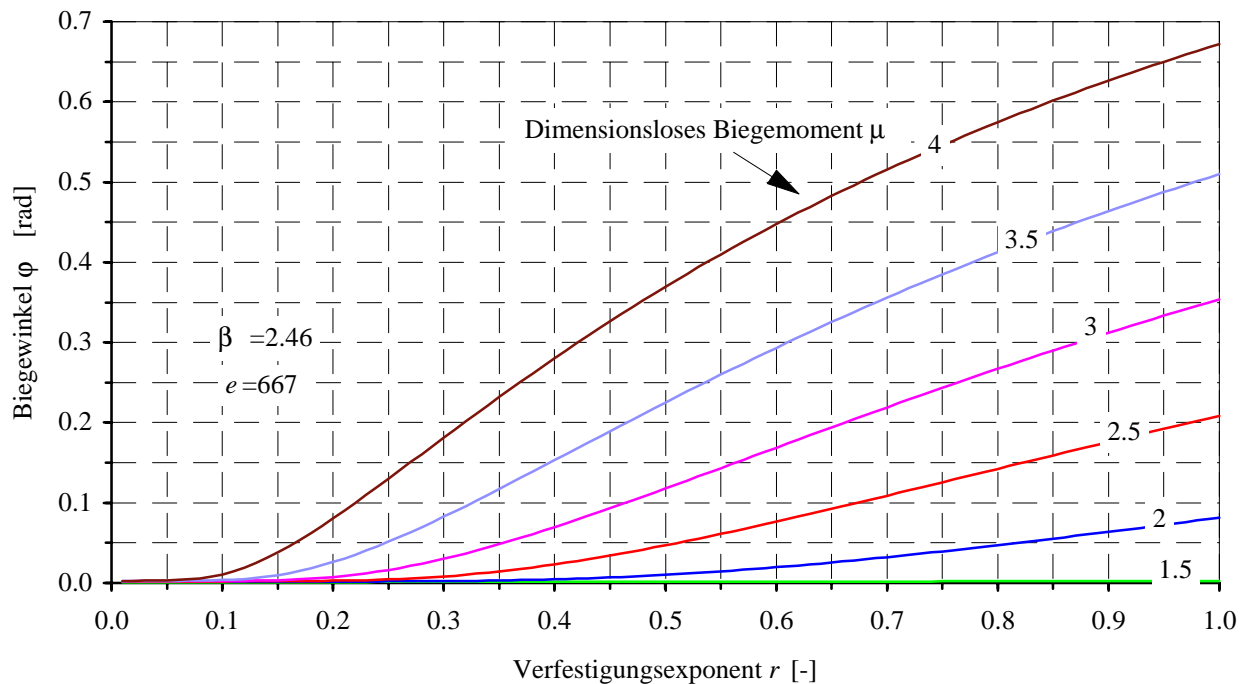


Abbildung 5.4: Statischer Biegewinkel bei Parametervariation für das Biegemoment und den Verfestigungsexponenten bei festgehaltenen Werten für den Elastizitätsmodul und den Verfestigungsfaktor

2.6.3.2 vorgestellten viskoplastischen Materialmodells. Für die Berechnung des Biegemoments werden die in Abschnitt 3.5 ermittelten analytischen Spannungs-Dehnungs-Kurven zugrunde gelegt.

Beim Auftreten von plastischen Verformung erfolgt die Berechnung getrennt für den plastischen Querschnittsbereich und den elastischen Restquerschnitt. Das gesamte Biegemoment ergibt sich dann als Summe

$$\mu = \mu_e + \mu_p \quad (5.25)$$

der Momentenbeiträge des plastischen Querschnittsbereichs μ_p und des elastischen Restquerschnitts μ_e .

5.3.5.1 Elastischer Bereich

Elastisches Verhalten ergibt sich für den Bereich $0 < \nu < \nu_F$ des Querschnitts: Hier gilt ein linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung unter Verwendung von Gleichung (5.12) wie folgt

$$s(\nu) = e\varepsilon(\nu) = e \frac{\varphi}{\xi_p} \nu \quad (5.26)$$

Der Anteil des elastischen Bereichs zum gesamten Biegemoment berechnet sich unter Beachtung von (5.12) dann zu

$$\mu_e = \frac{\bar{a} e \varphi}{\xi_p} \nu_F^3 \quad (5.27)$$

5.3.5.2 Plastischer Bereich

Im plastischen Bereich des Querschnitts $\nu_F < \nu < \bar{a}$ wird der elastische Dehnungsanteil vernachlässigt und nur die plastische Dehnung berücksichtigt. Diese Vereinfachung erscheint unter Vorwegnahme der Ergebnisse der Rechnungen für dieses Modells gerechtfertigt, da die maximale elastische Dehnung $\sigma_F/E \approx 0.2\%$ klein ist gegenüber der berechneten plastischen Dehnung. Dadurch ergibt sich eine erhebliche Vereinfachung der Berechnung, die für die gemachten Ansätze für die Verfestigung $R(p)$ und die Überspannung σ_{vp} analytisch durchgeführt werden kann. Die Annahme ebenbleibender Querschnitte bleibt weiterhin bestehen.

Für die dimensionslose Spannungs-Dehnungs-Kurve gilt bei Berücksichtigung der Überspannung durch Gleichung (2.46) und bei Verwendung des Verfestigungsansatzes von Ludwik (3.4), für die auch die Anpassung der gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven in Abschnitt 3.5 erfolgt ist, folgender Zusammenhang

$$s = 1 + \beta \varepsilon^r + \eta \dot{\varepsilon}^m, \quad (5.28)$$

wobei

$$\eta = \frac{\eta_{vp,n}}{t^m \sigma_F} = \frac{\eta_{vp,n} v_{FL}^m}{\sigma_F h_W^m} \quad (5.29)$$

für die dimensionslose Quasiviskosität steht.

Man erhält unter Beachtung von (5.12) und (5.13) für den Beitrag M_p des plastischen Bereichs des Querschnitts am Biegemoment

$$\begin{aligned} \mu_p &= 3\bar{a} \int_{\nu_F}^{\bar{a}} (1 + \beta \varepsilon^r + \eta \dot{\varepsilon}^m) \nu \, d\nu \\ &= 3\bar{a} \left[\frac{1}{2} (\bar{a}^2 - \nu_F^2) + \frac{\beta}{r+2} \left(\frac{\varphi}{\xi_p} \right)^r (\bar{a}^{r+2} - \nu_F^{r+2}) + \frac{\eta}{m+2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\xi_p} \right) (\bar{a}^{m+2} - \nu_F^{m+2}) \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

wobei die Stelle des Übergangs vom elastischen zum plastischen Bereich ν_F - abhängig vom Biegewinkel φ - noch unbekannt ist.

5.3.5.3 Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich

Plastische Verformung setzt in der Höhe ν_F des Querschnitts ein, in der die Fließdehnung ε_F erreicht wird. Hier gilt mit (5.12) aufgrund des viskoplastischen Verhaltens die Bedingung

$$\nu_F = \frac{\xi_p}{\varphi} \varepsilon_F = \frac{\xi_p}{\varphi} \frac{1 + \eta \left(\frac{\dot{\varphi}}{\xi_p} \right)^m}{e} \nu_F^m \quad (5.31)$$

Die Erhöhung der Fließspannung bei größeren Dehnungsgeschwindigkeiten ist also durch die Zunahme der Überspannung berücksichtigt. Die Stelle des Übergangs vom elastischen zum plastischen Bereich ν_F erhält man iterativ, zum Beispiel mittels Newton-Verfahren. Da in unserem Fall $m < 1$ gilt, gibt es jeweils nur eine eindeutige Lösung. Für den Fall, daß der gesamte Querschnitt nur elastisch verformt wird, erhält man eine unsinnige Lösung $\nu_F > \bar{a}$. Hier wird dann $\nu_F = \bar{a}$ explizit gesetzt, wodurch der Anteil des plastischen Querschnittsbereichs entsprechend Gleichung 5.30 zu null wird.

5.4 Integration der Bewegungsgleichung

Es ergibt sich nun folgende nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung 2.Ordnung

$$\ddot{\varphi} = \frac{4}{3\vartheta} \left[f_{starr}(t) \left(1 - \dot{\varphi} \frac{L}{H_W} \right)^2 L \cos \varphi - 4\bar{a} \left[\frac{e\varphi}{3\xi_p} \nu_F^3 + \frac{1}{2} (\bar{a}^2 - \nu_F^2) + \frac{\beta}{r+2} \left(\frac{\varphi}{\xi_p} \right)^r (\bar{a}^{r+2} - \nu_F^{r+2}) + \frac{\eta}{m+2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\xi_p} \right)^m (\bar{a}^{m+2} - \nu_F^{m+2}) \right] \right], \quad (5.32)$$

wobei $\vartheta = \frac{\Theta}{\sigma_F \bar{a}^3 t^2}$ für das dimensionslose Trägheitsmoment, $f_{starr} = \frac{3F_{starr}}{4\sigma_F \bar{a}^2}$ für die dimensionslose Kraft, $L = l/\bar{a}$ für den dimensionslosen Hebelarm und $H_W = h_W/\bar{a}$ für die dimensionslose Höhe des Wasserbehälters steht. Der Punkt steht dabei für die Ableitung nach der dimensionslosen Zeit. Die Integration erfolgt unter den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(0) &= 0, \\ \varphi(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

durch eine Umwandlung in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= f(t, \varphi, \phi) \\ \dot{\varphi} &= \phi \end{aligned} \quad (5.34)$$

mittels des Runge-Kutta-Verfahrens 4.Ordnung, wie es bei Press u.a. [116] beschrieben ist.

Die dimensionslosen Zeitschritte für die Integration wurden dabei entsprechend dem Maßstab $\lambda = 1$, $\lambda = 2.5$ bzw. $\lambda = 10$ zu $\Delta t \approx 3.5 \cdot 10^{-3}$, $\Delta t \approx 1.4 \cdot 10^{-3}$ bzw. $\Delta t \approx 3.5 \cdot 10^{-2}$ gewählt. Für diesen und kleinere Zeitschritte ergibt sich ein vom Zeitschritt unabhängiger maximaler Ausschlag. Die gewählten Zeitschritte entsprechen damit der Taktrate bei der Messung der Kraftverläufe.

5.5 Ergebnisse

5.5.1 Detaillierte Einzelergebnisse

Für die Berechnungen wurden alle gemessenen Kraftverläufe aus Abschnitt 4.4 herangezogen. Zunächst sollen einige Ergebnisse der Berechnungen im Detail diskutiert werden, die mit Kraftverlauf Nr.2 aus Abbildung 4.10 erzielt wurden. Diese Kurve wurde ausgewählt, weil der damit erzielte Ausschlag am nächsten am Mittelwert der berechneten Werte liegt. Die Fallhöhe war dabei zu $h = 2\text{m}$ gewählt, so daß die Meßwerte direkt übernommen werden konnten. Damit beziehen sich die nachfolgenden Ergebnisse soweit nicht explizit auf etwas Anderes hingewiesen wird, auf den mittleren Maßstab $\lambda = 2.5$. Es wurden die in Abschnitt 3.5 ermittelten Materialdaten für St 37 zugrundegelegt. Die Ergebnisse sind jeweils in dimensionsloser Form dargestellt. Normiert wurde mit den Größen, die auch zur Normierung der oben genannten Gleichungen verwendet wurden. Die Seitenlänge des Ersatzquerschnitts ergibt sich dabei zu $\bar{a} = 1.07$

In Abbildung 5.5 zeigt sich der Einfluß der Relativgeschwindigkeit zwischen der Prallplatte und dem auftreffenden Flüssigkeitsbatzen in einer Reduzierung der wirksamen Kraft um $\approx 40\%$ im Bereich der maximalen Winkelgeschwindigkeit der Prallplatte. Im Bereich $t > 1.5$ kommt es zu einer Vergrößerung der wirksamen Kraft infolge des Rückfederns der Prallplatte im Rechenmodell, was aber für die Aussagen, die aus dem Rechenmodell gewonnen werden sollen, nicht mehr relevant ist, wie die folgenden Erläuterungen zeigen.

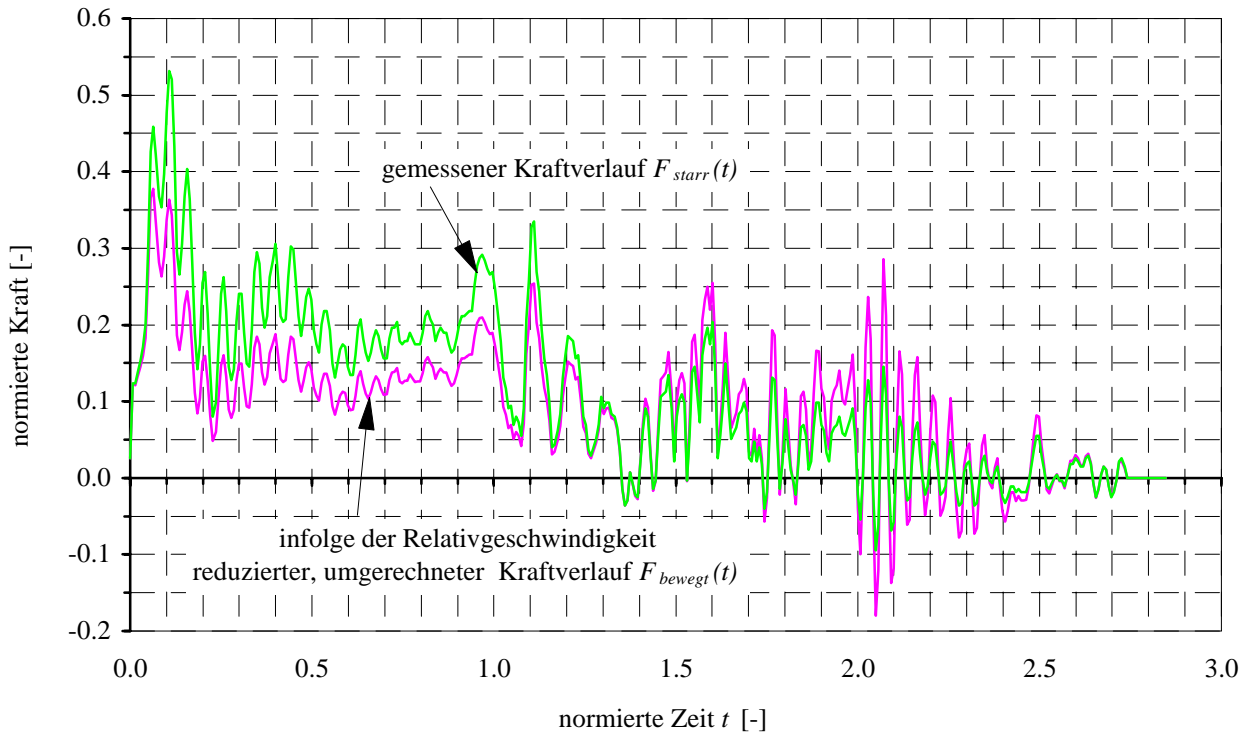


Abbildung 5.5: Einfluß der Relativbewegung zwischen Prallplatte und aufprallender Flüssigkeit auf die wirkende Kraft

Abbildung 5.6 zeigt den berechneten Verlauf des Ausschlags über der normierten Zeit. Die Berechnung erfolgt hier bei weit über den Gültigkeitsbereich des Rechenmodells hinaus, der lediglich bis Erreichen des ersten Maximums des Ausschlags reicht. Das Rechenmodell zeigt nach dem Ende der Kraftwirkung, wie infolge der Modellierung nicht anders zu erwarten, eine freie ungedämpfte stabile Schwingung, die natürlich nichts mit dem Verhalten von Prallplatte und Biegeelenken bei den FLIPPER-Versuchen zu tun hat. Die konstante Amplitude der Schwingung bestätigt jedoch, daß der Zeitschritt klein genug gewählt ist. Die dargestellte Schwingung ist infolge des nichtlinearen Biegemomentenverlaufs nicht sinusförmig. Da die Rechnung nach dem Erreichen des maximalen Ausschlags bei $t \approx 1.4$ keine relevanten Aussagen mehr liefern kann bleiben sämtlichen weiteren Darstellungen auf den Bereich bis zum Erreichen dieses Maximums beschränkt.

Der in Abbildung 5.7 über dem Ausschlag dargestellte Verlauf der Grenze zwischen elastischem und plastischem Bereich zeigt, daß das plastische Verhalten bereits bei sehr kleinen Biegewinkeln über große Bereiche des Querschnitts auftritt. Wenn der elastische Restquerschnitt weniger als 20 % einnimmt, wird das Verhalten der Biegeelenke unter den gemachten Voraussetzungen nur noch vom plastischen Materialverhalten bestimmt, wie anhand des Momentenverlaufs in Abbildung 5.8 gezeigt werden kann.

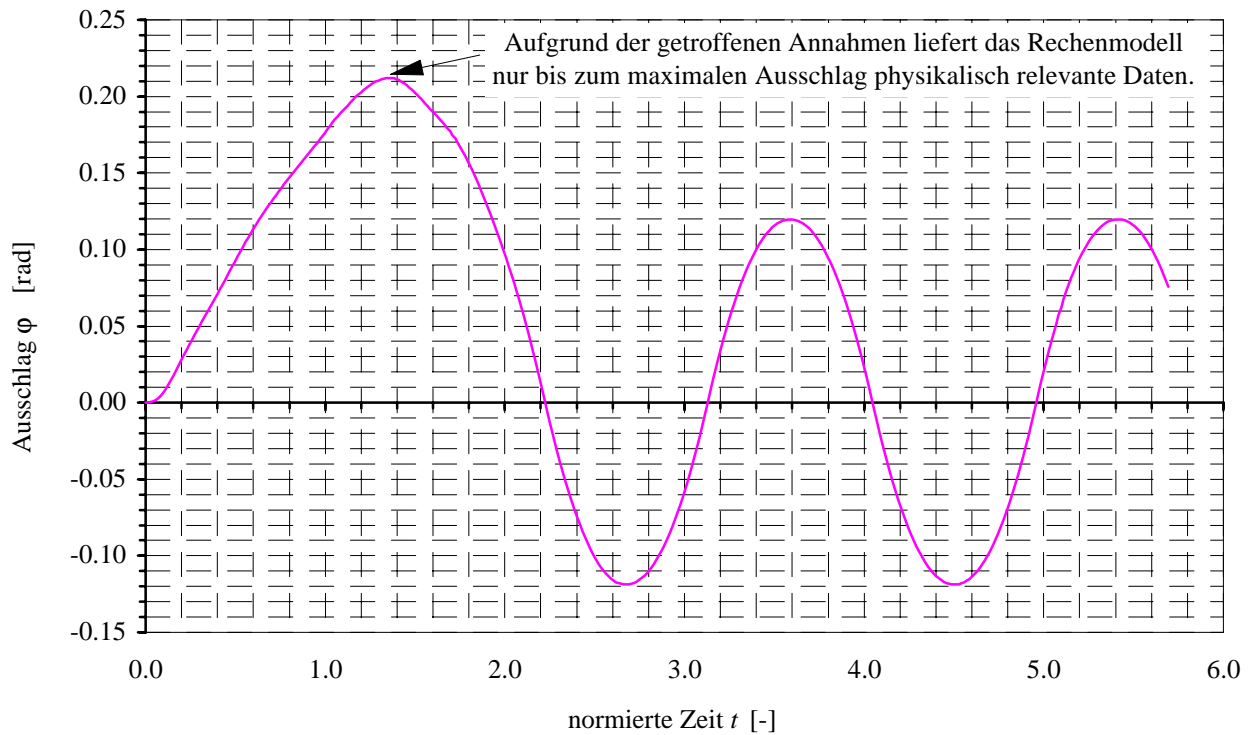


Abbildung 5.6: Maximaler Ausschlag der Prallplatte und Schwingungsverhalten des Systems bei Überschreiten des Gültigkeitsbereichs für das Rechenmodell

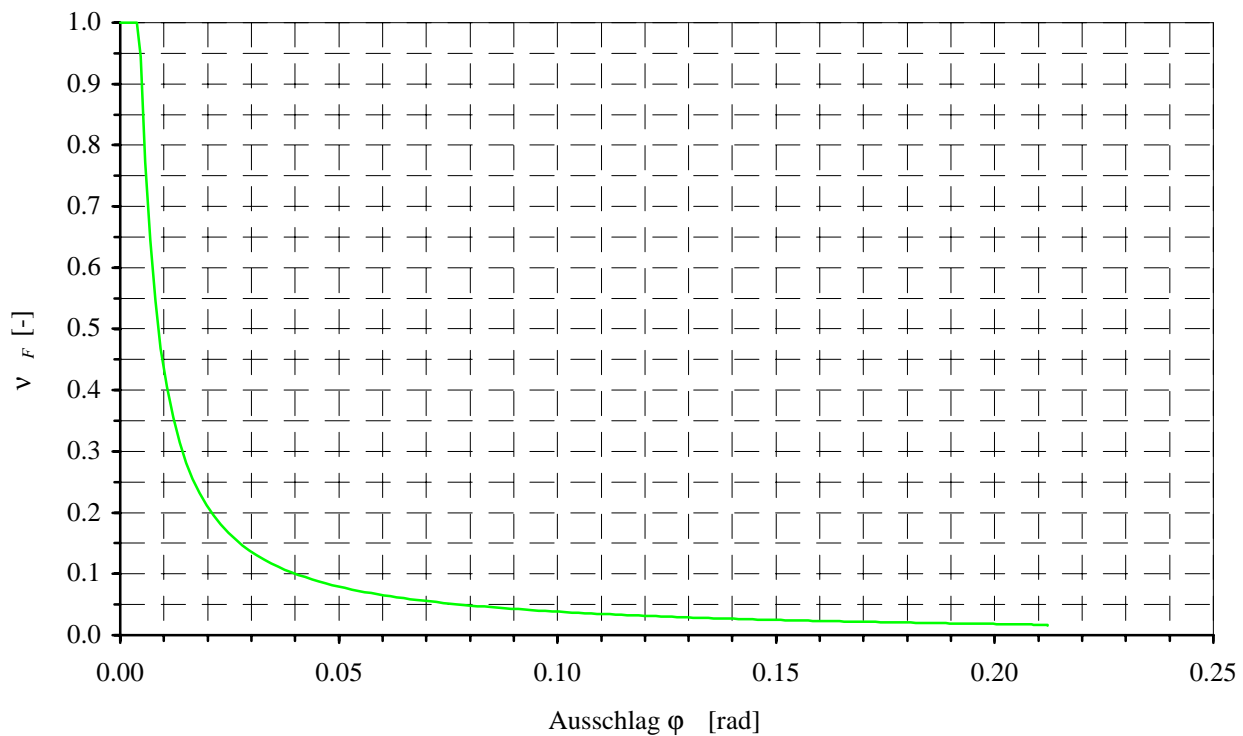


Abbildung 5.7: Normierte Höhe des Übergangs zwischen dem der plastischen Verformung unterliegenden Querschnittsanteil und dem elastischen Restquerschnitt

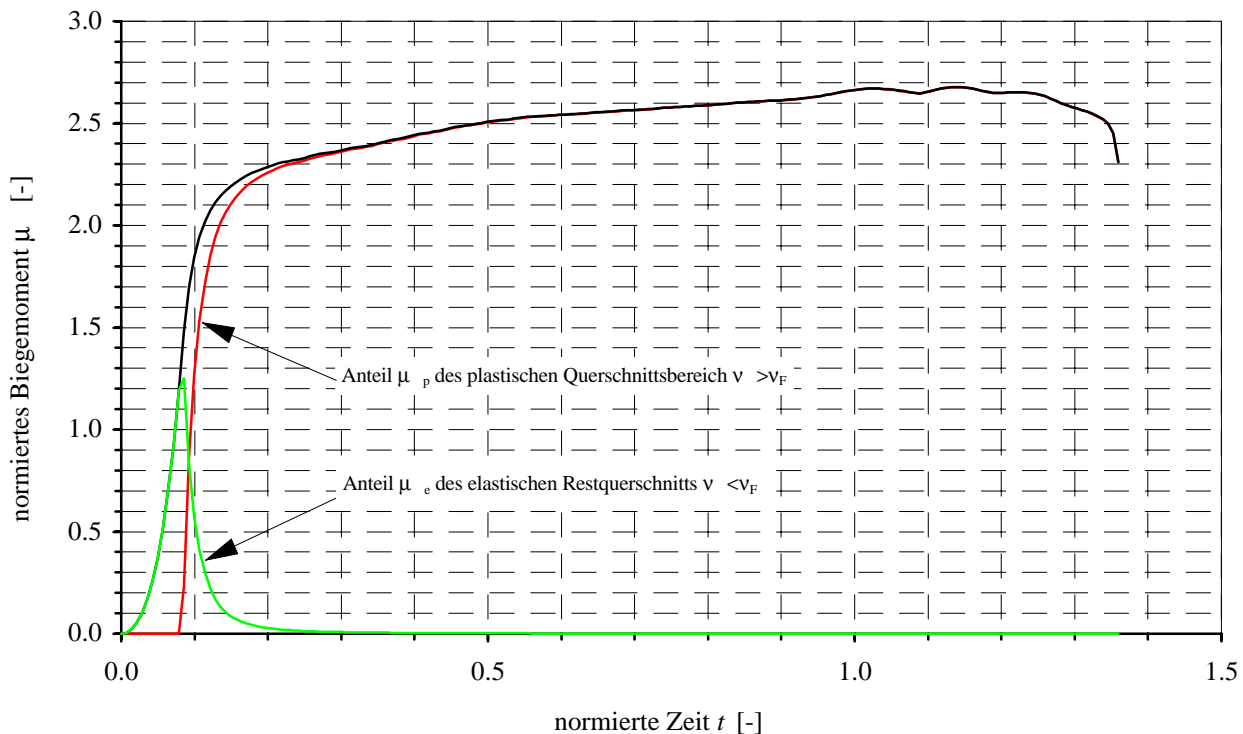


Abbildung 5.8: Zeitlicher Verlauf des Biegemoments und dessen Zusammensetzung aus den Beiträgen des der plastischen Verformung unterliegenden Querschnittsanteils und des elastischen Restquerschnitts

Dort ist - normiert auf das maximale elastische Biegemoment - neben dem gesamten wirkenden Biegemoment auch der jeweilige Beitrag des elastischen bzw. plastischen Querschnittsanteils dargestellt. Man erkennt das der elastische Restquerschnitt für $t > 0.2$ zum wirkenden Biegemoment nur noch unwesentlich beiträgt. Zu diesen Zeitpunkt ist gerade der Biegewinkel $\varphi = 0.02$ erreicht (vgl. Abbildung 5.6), der einem elastisch Restquerschnitt von 0.2 entspricht (vgl. Abbildung 5.7). In Abbildung 5.7 wird auch deutlich, daß die elastische Verformung der Biegeelenke durchaus, wie oben angenommen, gegenüber der plastischen Verformung vernachlässigt werden kann, denn der steile Abfall des Übergangs beginnt bereits bei einem Biegewinkel vom $\varphi = 0.004$, der im Vergleich zum maximalen Ausschlag von $\varphi_{max} \approx 0.26$ nicht in Gewicht fällt.

In Abbildung 5.8 wird ebenfalls der Einfluß des viskoplastischen Materialverhaltens deutlich. Zum einen erkennt man, daß der elastischen Anteil am gesamten Biegemoment mit $\mu_{e,max} \approx 1.25$ den im statischen Fall erreichbaren Wert von $\mu_e = 1$ deutlich überschreitet. Das ist begründet durch die dehnungsratenabhängige Überspannung, die auch für die Erhöhung der Fließspannung gegenüber dem statischen Fall verantwortlich ist. Zum anderen ergibt sich kurz vor dem Erreichen des maximalen Ausschlags ein Rückgang des Biegemoments, obwohl der Biegewinkel noch weiter zunimmt. Dieses Verhalten läßt sich mit dem Rückgang der Dehnungsgeschwindigkeit und dem damit verbundenen Rückgang der Spannung in diesem Bereich erklären, worauf aber weiter unten noch näher eingegangen wird.

Zunächst soll noch auf den Einfluß der Verfestigung und der Dehnungsgeschwindigkeit auf das Biegemoment eingegangen werden. In Abbildung 5.9 ist das Biegemoment in Abhängigkeit vom Biegewinkel dargestellt, wie es sich bei elastisch-idealplastischem Materialverhalten einstellt. Der Verlauf wurde berechnet, indem die Verfestigung und die Überspannung nicht berücksichtigt wurde und führte

auf einen maximalen Ausschlag von $\varphi_{max} = 0.49$, der weit über dem oben genannten maximalen Wert liegt und in der Abbildung nicht mehr dargestellt ist. Man erkennt, daß das Kollapsmoment $\mu_p = 1.5$ bereits bei einem Ausschlag von $\varphi \approx 0.03$ erreicht ist. Die Berücksichtigung des Verfestigungsverhalten ohne den Einfluß der Dehnungsgeschwindigkeit führt zu viel höheren Biegemomenten und damit auch zu einer erheblichen Reduzierung des Ausschlags auf $\varphi_{max} \approx 0.35$, der hier, wie nicht anders zu erwarten, mit dem maximalen berechneten Biegemoment zusammenfällt.

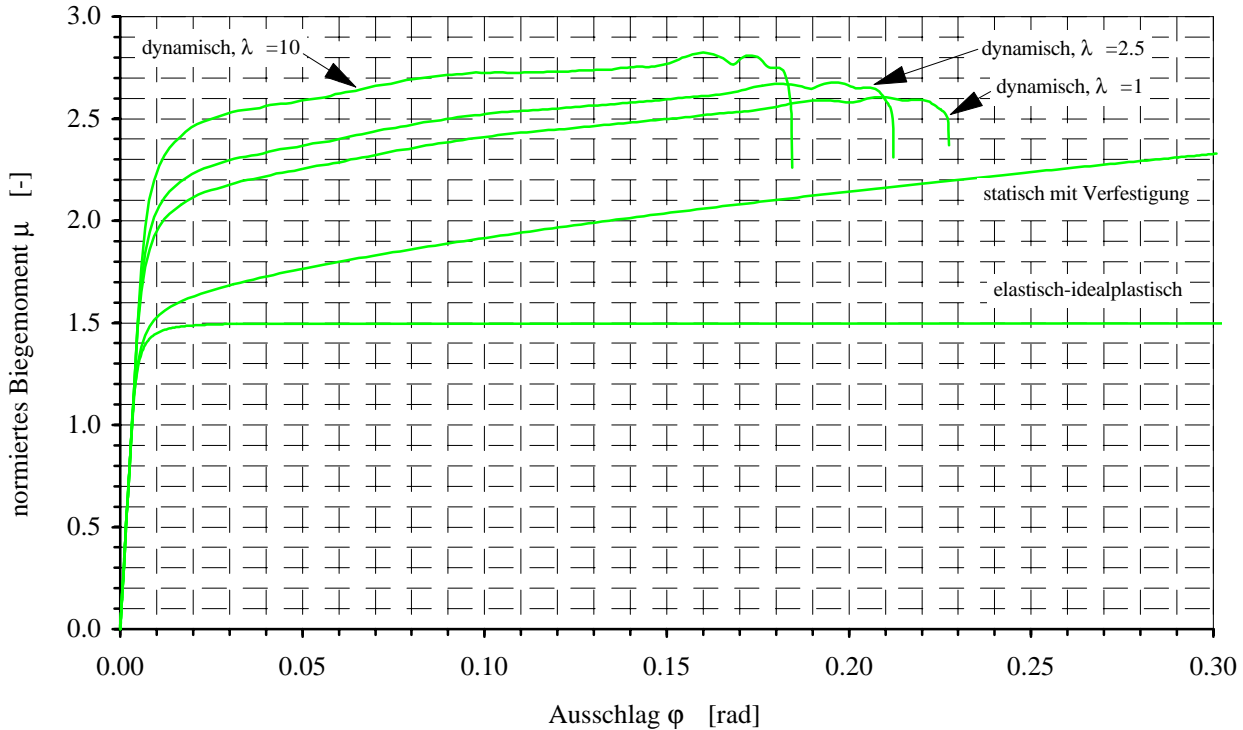


Abbildung 5.9: Einfluß von Verfestigung, Überspannung und des Maßstabs auf das Biegemoment

Diese beiden Momentenverläufe sind in der dargestellten Form maßstabsunabhängig. Eine Maßstab-sabhängigkeit ergibt jedoch durch Berücksichtigung des viskoplastischen Materialverhaltens, wie an den drei unterschiedlichen Verläufen für die drei dargestellten Maßstäbe deutlich zu erkennen ist.

Infolge der dimensionslosen Darstellung können die normierten Kraft-Zeit-Verläufe auch bei den anderen Maßstäben direkt verwendet werden, wenn der Einfluß der Fluidzähigkeit vernachlässigt wird. Die dimensionslose Quasiviskosität $\eta = \frac{\eta_{vp,n} v_F^m L}{\sigma_F h_W}$ entsprechend Gleichung (5.29) ist aber abhängig vom Maßstab. Bei den hier verwendeten Materialdaten für den ferritischen Stahl St 37 ergeben sich die Werte aus den Tabellen 4.2 und 3.5 infolge der verschiedenen Höhen h_W der Wasserbehälter für die verschiedenen Maßstäbe zu

$$\begin{aligned} \lambda = 1 : & \quad \eta = 0.635 \\ \lambda = 2.5 : & \quad \eta = 0.792 \\ \lambda = 10 : & \quad \eta = 1.104 \end{aligned}$$

Die Maßstabsverkleinerung führt zu größerem Biegemoment und kleinerem maximalen Ausschlag. Die Begründung ergibt sich aus der mit der Verkleinerung des Maßstabs größer werdenden Quasiviskosität, was größere Spannungen und damit größere Biegemomente zur Folge hat.

Die in der äußeren Faser des Biegegelenkes durchlaufenen Wege im Spannungs-Dehnungs-Diagramm sind in Abbildung 5.10 für die verschiedenen Maßstäbe in dimensionsbehafteter Form dargestellt. Wei-

terhin sind zur Veranschaulichung die Spannungs-Dehnungs-Kurven für eine jeweils konstante Dehnungsgeschwindigkeit eingetragen.

Man erkennt die Auffächerung der Kurven für die verschiedenen Maßstäbe entsprechend der jeweiligen Dehnungsgeschwindigkeit. Kurz vor Erreichen des maximalen Ausschlag bzw. der maximalen Dehnung erfolgt ein relativ steiles Abfallen der Spannung, infolge des Rückgangs der Dehnungsgeschwindigkeit. Die Kurven spiegeln also die sich auf dem Weg zum maximalen Ausschlag ständig ändernde Dehnungsgeschwindigkeit in den Biegeelenken für jeden Maßstab wieder.

Interessant ist aber in diesem Zusammenhang noch das Verhalten der dimensionslosen Dehnungsgeschwindigkeiten für die verschiedenen Maßstäbe, die Abbildung 5.11 dargestellt ist. Zunächst ist zu erkennen, daß in der dimensionslosen Darstellung die Dehnungsgeschwindigkeit im kleinen Maßstab kleiner ist als im Großen. Die Begründung für dieses Verhalten liegt in den höheren Spannungen im Biegeelenk in Folge der größeren Quasiviskosität. Die Differenz zwischen wirkendem Moment und dem Reaktionsmoment der Biegeelenke wird dadurch kleiner. Das führt zu einer kleineren dimensionslosen Winkelbeschleunigung und in der Folge zu einer kleineren dimensionslosen Winkelgeschwindigkeit. Das kleine Biegeelenk wirkt darum steifer und erreicht so nur eine kleinere dimensionslose Dehnungsgeschwindigkeit. Abschließend sei noch bemerkt, daß der maximale Winkelausschlag, der durch das Verschwinden der Dehnungsgeschwindigkeit gekennzeichnet ist, im kleineren Maßstab etwas früher erreicht wird als im großen Maßstab.

Auf die bisher nur qualitativ beschriebenen Maßstabseinflüsse soll im nächsten Abschnitt im Vergleich zu den Messungen aus den Experimenten noch quantitativ eingegangen werden.

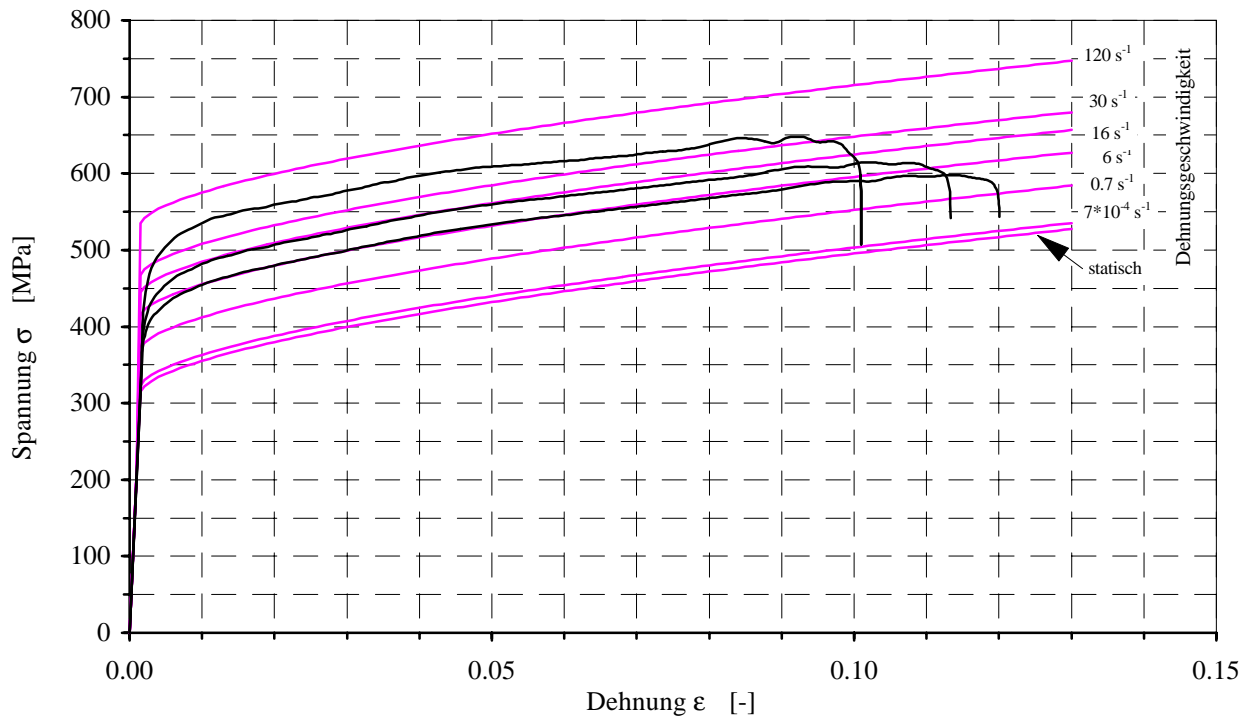


Abbildung 5.10: Spannungspfade für verschiedene Maßstäbe in dimensionsbehafteter Form - Zusätzlich sind die analytischen Spannungs-Dehnungs-Kurven eingezeichnet, die auf Basis der Werte für den ferritischen Stahl St 37 ermittelt wurden

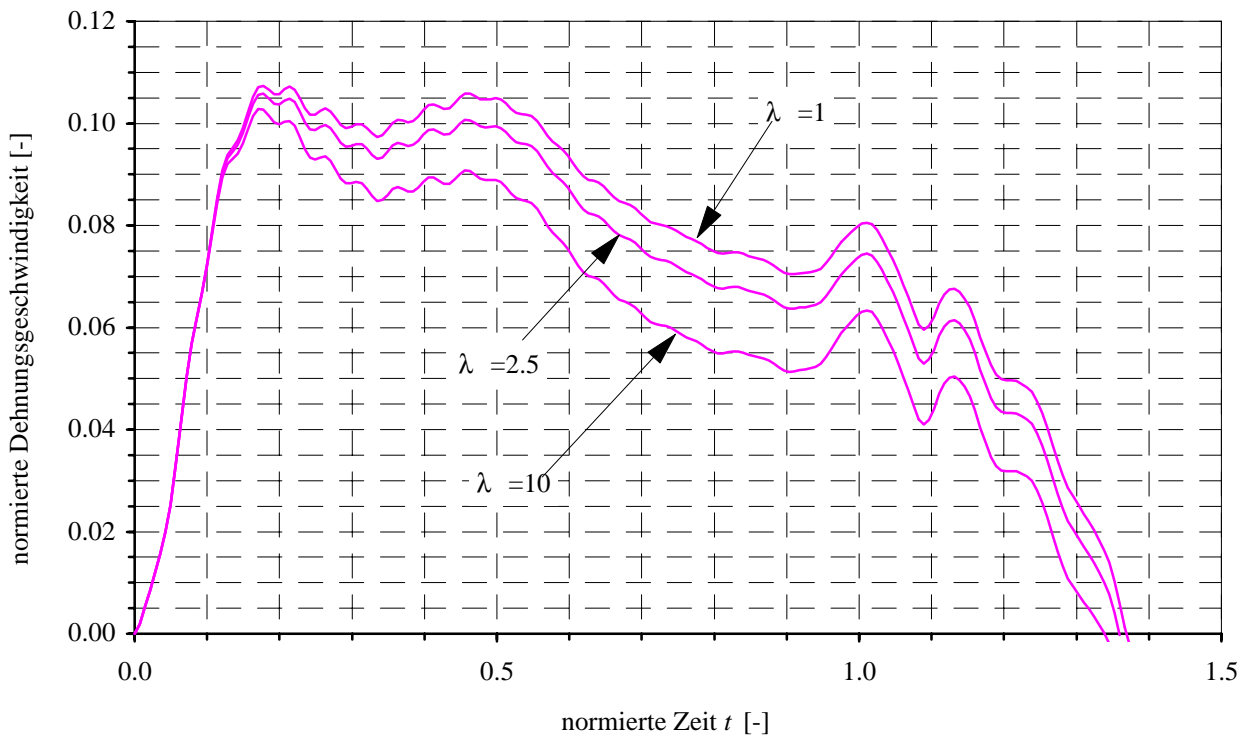


Abbildung 5.11: Einfluß der Maßstabs auf die Dehnungsgeschwindigkeit

5.5.2 Vergleich mit Versuchen für den ferritischen Stahl St 37

5.5.2.1 Fallhöhe $h = 2\text{m}$

In Abbildung 5.12 sind die Ergebnisse des Rechenmodells im Vergleich zu den Meßwerten aus den FLIPPER-Versuchen dargestellt. Grundlage für den Vergleich sind hier die bereits in Abbildung 4.13 dargestellten Ergebnisse bei der Fallhöhe $h = 2\text{m}$ für die Biegeelenke aus St 37. Die Rechnungen wurden mit allen zehn an den starren Platten gemessenen Kraftverläufen durchgeführt. Für jeden Maßstab sind jeweils die berechneten maximalen Winkelausschläge, die Mittelwerte und der Vertrauensbereich eingetragen.

Vorrangiges Ziel bei der Entwicklung war, die Ursache für die relativ große Streuung der Meßpunkte zu finden. Bei konstantem Durchmesser erhält man nun bei den Rechenergebnissen Abweichungen des maximalen bzw. minimalen Ausschlags vom Mittelwert von +10% und -18% im Vergleich zur Streuung der Impulse von +9% und -8% (vgl. Abbildung 4.12). Die Streuung ist damit kleiner als die Streuung der Meßwerte von, wie bereits erwähnt, etwa $\pm 30\%$. Eine zusätzliche Variation der Höhe des Rechteckquerschnitts im Rechenmodell um $\pm 2\%$ sorgte für eine Vergrößerung des Streubandes auf etwa +18% und -26%, womit die Breite des gemessenen Streubandes fast erreicht ist.

Zu Beachten ist dabei, daß nur zehn Kraft-Zeit-Verläufe als Meßkurven zur Verfügung standen; dem stehen bis zu 20 Meßpunkte gegenüber. Weitere Vergrößerung der berechneten Streuung ergäbe sich noch, wenn die Anzahl der gemessenen Kraftverläufe erhöht würde, weil hier noch mit einer leichten Zunahme der Streuung im übertragenen Impuls zu rechnen wäre. Auch eine Variation des Kraftangriffspunktes bzw. der Hebellänge würde die Streuung erhöhen.

Beim Vergleich der berechneten mit den gemessenen Mittelwerte für die Maßstäbe $\lambda = 1$ und $\lambda = 10$ zeigt, daß der Winkelausschlag um etwa 25%-30% überschätzt wird. In Anbetracht der bei der

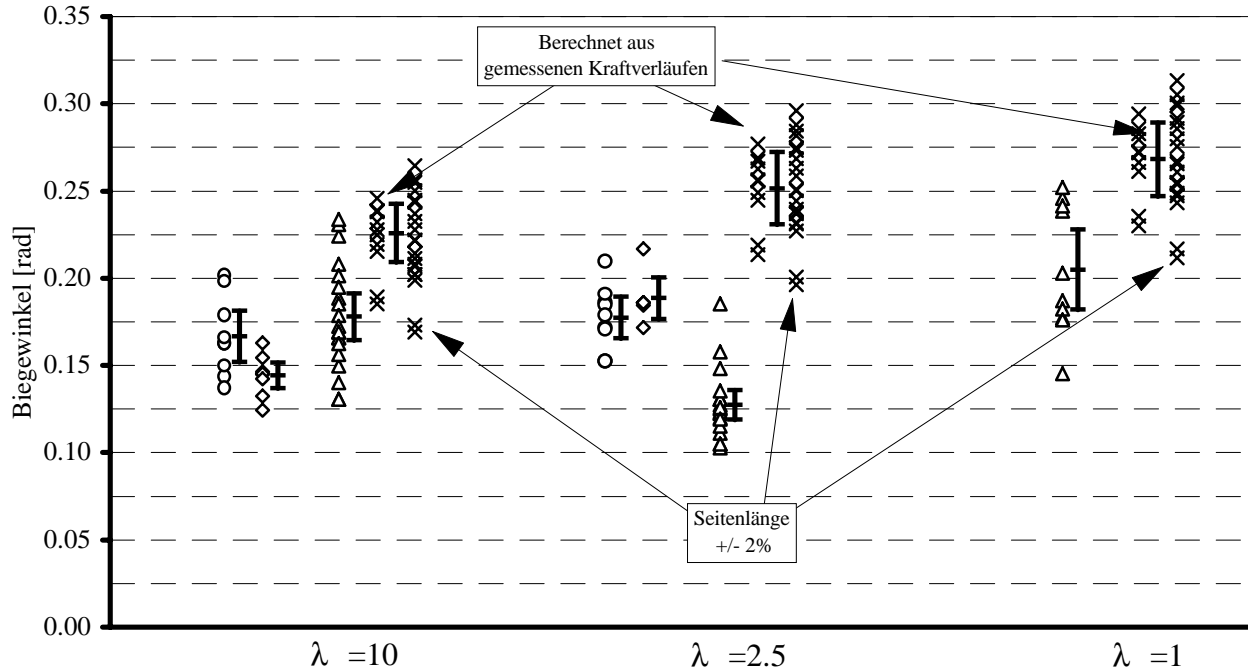


Abbildung 5.12: Vergleich von gemessenen und berechneten Biegewinkel für den ferritischen Stahl St 37 bei der Fallhöhe $h = 2\text{m}$.

Versuchsergebnisse mit Biegegeelenken aus den Gruppen I bis III sind mit den Symbolen entsprechend Abbildung 4.13 (S. 73) bzw. Tabelle 4.5 (S. 72) gekennzeichnet. Mittelwert und Vertrauensintervall sind für jede Serie dargestellt

Entwicklung des Rechenmodells gemachten Vereinfachungen ist die Übereinstimmung der errechneten mit den gemessenen Biegewinkel aber gut. Eine Ausnahme macht die Datenreihe der Gruppe III für den Maßstab $\lambda = 2,5$, deren Verhalten bereits im Abschnitt 4.5.1 diskutiert wurde.

Der berechnete Maßstabseinfluß auf den mittleren plastischen Biegewinkel ergibt einen Rückgang um 16% bei der Verkleinerung des Maßstabs von $\lambda = 1$ auf $\lambda = 10$. Das stellt in Anbetracht der Streubänder ebenfalls eine gute Reproduktion des gemessenen Rückgangs von 13% dar.

5.5.2.2 Andere Fallhöhen

Unter der Annahme, daß die gemessenen Widerstandsbeiwerte $c_w(t)$ entsprechend Gleichung (5.2) wie in stationären Fall (siehe z. B. Dubbel [115]) unabhängig von der Aufprallgeschwindigkeit sind, kann bei einer entsprechenden Umrechnung auf die Fallhöhe $h = 1,5\text{m}$ und $h = 3\text{m}$ ein Vergleich auch bei diesen Fallhöhen durchführt werden. Die Umrechnung erfolgt durch die Beziehung

$$\frac{f_{starr,h}(t)}{f_{starr,h_{ref}}(t)} = \frac{v_{FL,h}^2}{v_{FL,h_{ref}}^2} = \frac{h}{h_{ref}}. \quad (5.35)$$

Zu Beachten ist auch die Umrechnung der Quasiviskosität entsprechend Gleichung (5.29). Außerdem ergibt sich durch die Umrechnung der Kräfte auch ein neuer Wert für die Seitenlänge des in der Rechnung

benutzten Ersatzquerschnitts. Für die Fallhöhe $h = 1.5\text{m}$ beträgt $\bar{a} = 1.05$ und für die Fallhöhe $h = 3\text{m}$ erhält man $\bar{a} = 1.11$.

In Abbildung 5.13 und 5.14 ergibt sich, insbesondere beim größten Maßstab, immer noch eine gute Übereinstimmung der Breite der Streubänder. Weil die Rechnungen nur bei konstantem Durchmesser durchgeführt wurden, beruht die rechnerische Streuung hier ausschließlich auf der Variation der hydrodynamischen Kräfte.

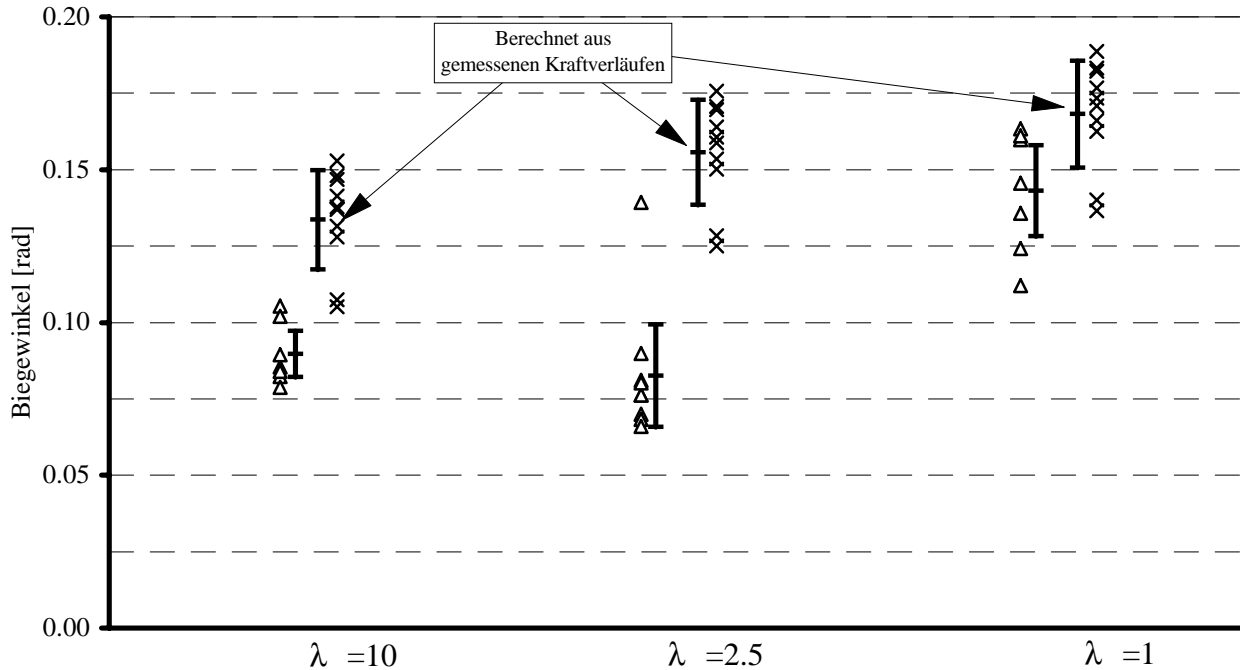


Abbildung 5.13: Vergleich von gemessenen und berechneten Biegewinkeln für den ferritischen Stahl St 37 bei der Fallhöhe $h = 1.5\text{m}$. Die gemessenen Werte entsprechen Abbildung 4.16 (S. 77)

Bei den Rechnungen wird der mittlere plastische Biegewinkel wiederum überschätzt, der „Durchhänger“ beim Maßstab $\lambda = 2.5$ kann ebenfalls rechnerisch nicht nachgebildet werden. Für die Fallhöhe $h = 1.5\text{m}$ erhält man einen berechneten Rückgang des mittleren plastischen Biegewinkels um 21% im Vergleich zum gemessenen Wert von 37%.

Bei den berechneten mittleren plastischen Biegewinkeln ergibt sich für die Fallhöhe $h = 3\text{m}$ eine deutliche Überschätzung. Zur Begründung kann angeführt werden, dass hier schon relativ große Biege- winkel erreicht werden. Infolge der höheren Aufprallgeschwindigkeit ist die Belastung der Prallplatte und damit ihre elastische, in der Rechnung vernachlässigte Durchbiegung größer. Die Vernachlässigung führt wie oben erwähnt zu einem in der Tendenz zu großen Ausschlag beim Rechenmodell, was sich mit zunehmender Fallhöhe immer deutlicher auswirkt. Der berechnete Rückgang des Ausschlags von 16% korrespondiert aber mit dem gemessenen Wert von 14% .

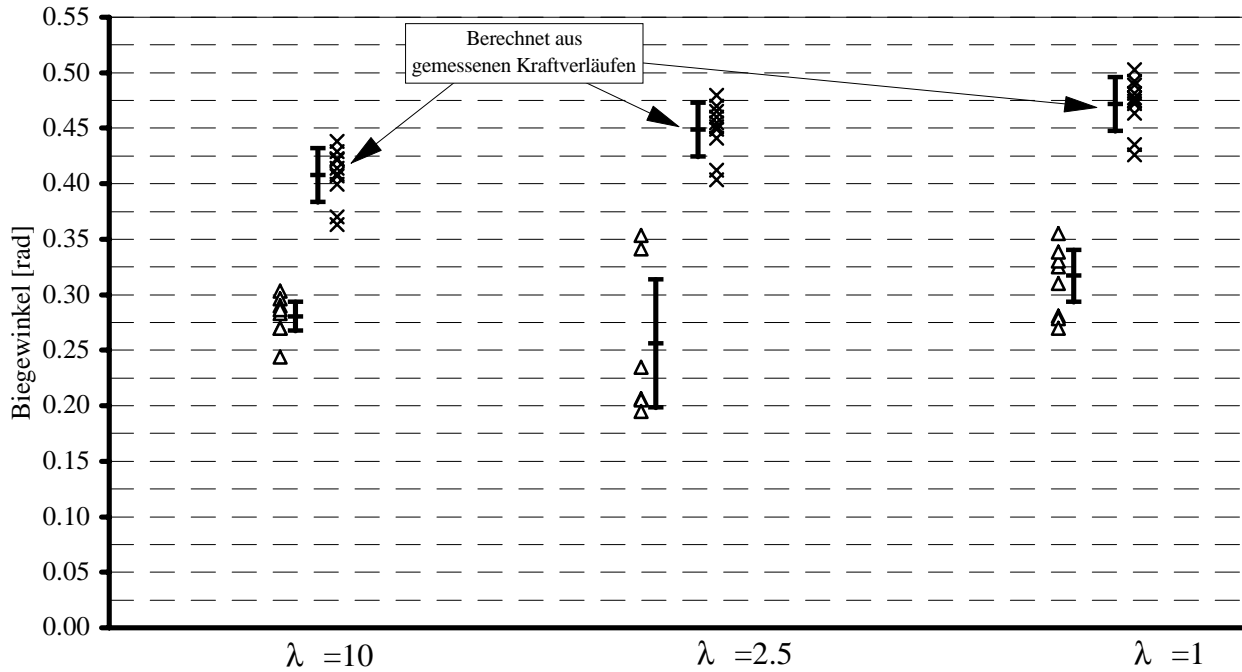


Abbildung 5.14: Vergleich von gemessenen und berechneten Biegewinkeln für den ferritischen Stahl St 37 bei der Fallhöhe $h = 3\text{m}$. Die gemessenen Werte entsprechen Abbildung 4.18 (S. 78)

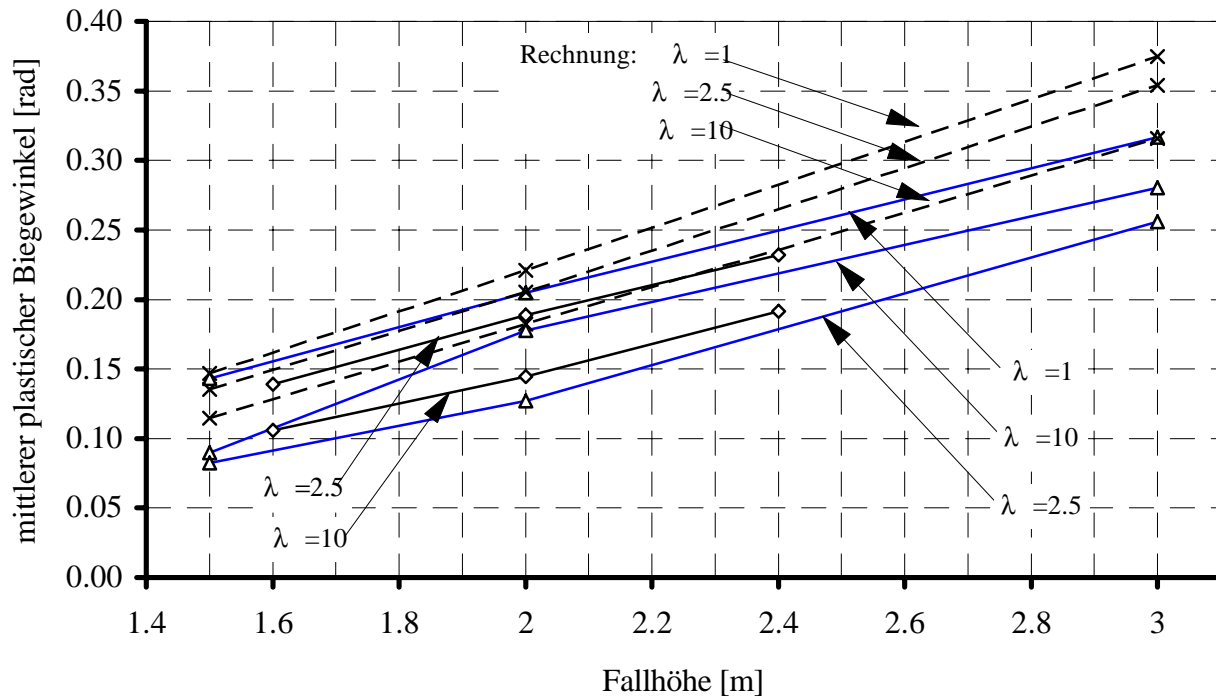


Abbildung 5.15: Vergleich von berechneten und gemessenen mittleren plastischen Biegewinkeln in Abhängigkeit von der Fallhöhe bei verschiedenen Maßstäben für den ferritischen Stahl St 37. Versuchsergebnisse mit Biegegleiten aus den Gruppen II und III sind mit den Symbolen entsprechend Abbildung 4.13 (S. 73) bzw. Tabelle 4.5 (S. 72) gekennzeichnet.

Abschließend ist noch der berechnete Verlauf des mittleren plastischen Biegewinkels im Vergleich mit den Meßwerten in Abbildung 5.15 angeführt. Im Vergleich mit den gemessenen Verläufen zeigt sich wiederum ein linearer Verlauf des mittleren plastischen Biegewinkels über der Fallhöhe h , wobei dieser Anstieg deutlich steiler ist als bei den Experimenten. Eine Regressionsgerade der Form $\varphi = a h + b$ durch die berechneten Punkte liefert hierzu die in Tabelle 5.2 dargestellten Werte. Entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 4.5.2 ist die Steigung ein Maß für den Anteil der in den Biegeelenken dissipierten Energie des Flüssigkeitsbatzens.

Man erkennt, daß die Steigung bei Verkleinerung des Maßstabs ebenfalls kleiner wird, was bedeutet, daß bei Maßstabsverkleinerung in den Biegeelenken rechnerisch ein etwas geringerer Anteil der kinetischen Energie in den Biegeelenken dissipiert wird.

Maßstab	$\lambda = 1$	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 10$
a	0.2024	0.1957	0.1824
b	-0.1361	-0.1387	-0.1396
R^2	0.999982	0.999948	0.999986
$h_0 [m] = -b/a$	0.672	0.709	0.766

Tabelle 5.2: Koeffizienten zur Energieaufspaltung bei den Rechnungen zu den FLIPPER-Versuchen

5.5.3 Vergleich mit Versuchen für den austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9

Aufgrund der Materialdaten für den austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 (Tabelle 3.5) und der Umrechnung der Kraftverläufe auf die hier verwendete Fallhöhe erhält man hier als Seitenlänge des Ersatzquerschnitts $\bar{a} = 1.10$. Bei der Nachrechnung der Experimente mit dem austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 erhält wiederum gute Übereinstimmung der Breite der ermittelten Streubänder für den mittleren plastischen Biegewinkel. Es zeigt sich weiterhin, daß der mittlere plastische Biegewinkel im Maßstab $\lambda = 1$ gut reproduziert werden kann. Die mittleren plastischen Biegewinkel bei den anderen beiden Maßstäben wurden aber um einen Faktor von zwei bis drei über den gemessenen Werten errechnet. Der große Maßstabseinfluß kann also nicht durch das viskoplastische Materialverhalten erklärt werden.

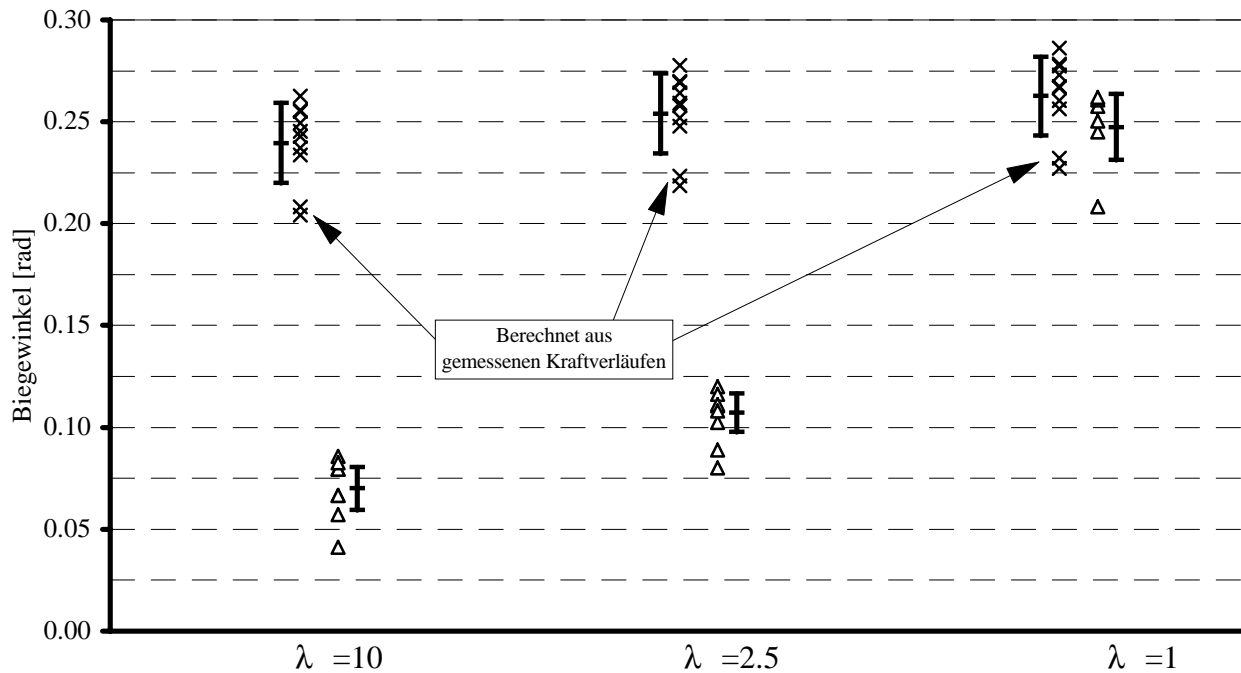


Abbildung 5.16: Vergleich von gemessenen und berechneten Biegewinkeln für den austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 bei der Fallhöhe $h = 1.9\text{m}$ Die gemessenen Werte entsprechen Abbildung 4.24 (S. 85)

Die errechnete Abweichung zwischen dem Maßstab $\lambda = 1$ und $\lambda = 10$ entspricht einem Rückgang des mittleren plastischen Biegewinkels um etwa 9%. Für den ferritischen Stahls St 37 wurden für den Fall $h = 2\text{m}$ vergleichbare Biegewinkel errechnet. Dort war aber der Maßstabseinfluß mit 17% deutlich größer. Der relativ geringe berechnete Maßstabseinfluß für den austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 erscheint aber realistisch, da der Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Kurven einen geringeren Einfluß der Dehnungsgeschwindigkeit als beim ferritischen Stahl St 37 zeigte.

5.5.4 Vergleich mit Versuchen für die Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5

Zur Vervollständigung wurden ebenfalls die Experimente mit der Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5 nachgerechnet, wobei aufgrund der in den Zugversuchen gefundenen äußerst geringen Abhängigkeit des Materialverhaltens von der Dehnungsgeschwindigkeit die Überspannung nicht berücksichtigt wurde. Man erhält deshalb in Abbildung 5.17 auch keine Maßstabsabhängigkeit der berechneten Ausschläge.

Bedingt durch die Materialeigenschaften der Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5 stellen die hier durchgeführten Rechnungen einen Grenzfall für die Anwendbarkeit des Rechenmodells dar. Während der Rechnung wurden nämlich nur maximale Dehnungen von etwa $\varepsilon \approx 4\text{-}5\%$ errechnet. Die Fließdehnung $\varepsilon_F = \sigma_F/E \approx 0.8\%$ ist relativ groß und gegenüber der plastischen Dehnung nicht mehr ohne weiteres zu vernachlässigen. Infolge der großen Fließspannung der Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5 ergeben in den Biegegeelenken außerdem doppelt so große Reaktionsmomente, was auch zu größeren elastischen Verformungen der Prallplatte in den FLIPPER-Versuchen führt, die bei der Herleitung der verwendeten Gleichungen vernachlässigt wurde.

Bei der Berechnung des Ersatzquerschnitts \bar{a} wurde hier das in der Rechnung ermittelte maximale Biegemoment zugrunde gelegt, weil das für die anderen Fälle benutzte, gemittelte Biegemoment hier für die Ausdehnung der plastischen Zone zu geringe Werte lieferte. Mit dem maximalen Biegemoment $\mu \approx 1.5$ aus der Rechnung und den Materialdaten aus Tabelle 3.5 erhält man $\bar{a} = 1.03$.

Die Streuung der errechneten Werte ist etwas geringer als bei den Messungen. Die mittleren plastischen Biegewinkel zeigen aber beim Rechenmodell für alle Maßstäbe, wie erwartet, eine deutliche Überschätzung des mittleren plastischen Biegewinkels.

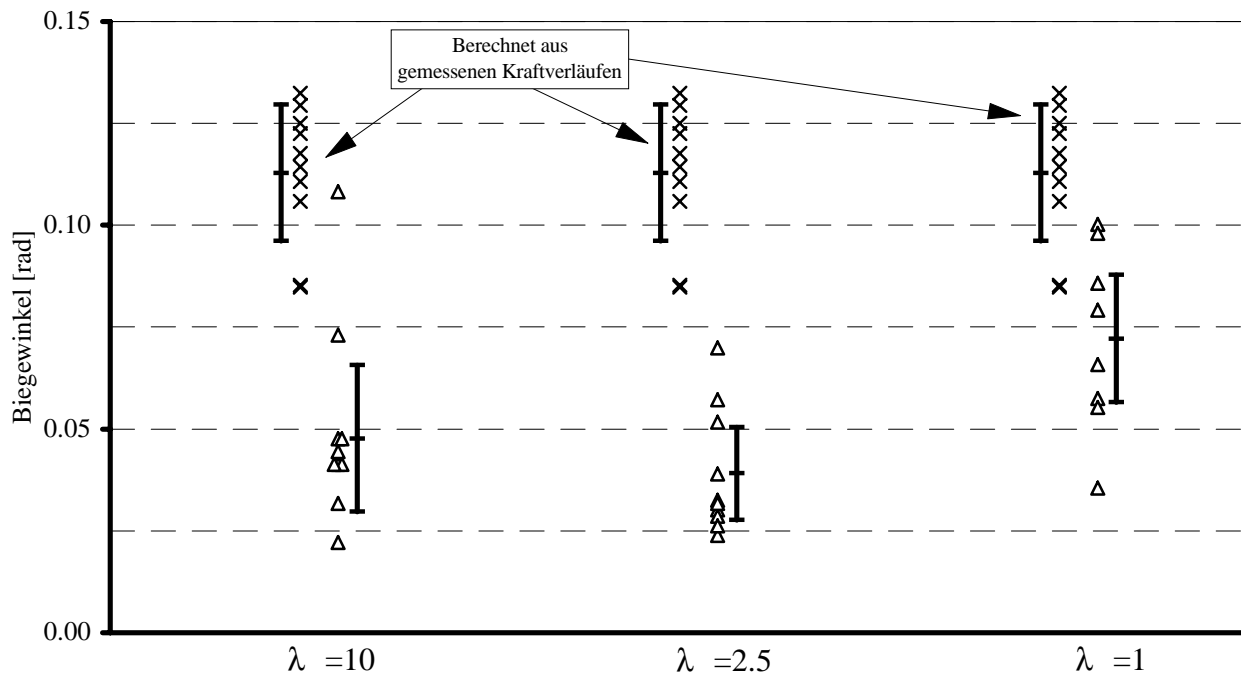


Abbildung 5.17: Vergleich von gemessenen und berechneten Biegewinkeln für die Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5 bei der Fallhöhe $h = 1.5\text{m}$. Die gemessenen Werte entsprechen Abbildung 4.23 (S. 84)

Kapitel 6

Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

In der vorliegenden Arbeit wurde der Aufprall einer Flüssigkeit auf deformierbare Strukturen in verschiedenen Maßstäben sowohl experimentell als auch theoretisch untersucht. Es wurde insbesondere der Frage nachgegangen, inwieweit Abweichungen zwischen den verschiedenen Maßstäben zu erwarten sind.

Zunächst wurden die Ähnlichkeitsbedingungen aus den relevanten Bilanz- und Stoffgleichungen hergeleitet und diskutiert. Für das Materialverhalten der Struktur wurde dabei ein Internes-Variablen-Modell zugrunde gelegt, mit dem das elastisch-viskoplastische Werkstoffverhalten, unter Berücksichtigung der thermisch-mechanischen Kopplung, beschrieben werden konnte. Die Flüssigkeit wurde als kompressibel und linear viskos angesehen.

Die Diskussion der Ähnlichkeitsbedingungen zeigte, daß die Wechselwirkung von Flüssigkeit und Struktur während des Aufprallvorgangs keine zusätzlichen Ähnlichkeitsbedingungen liefert. Es zeigte sich, daß *alle* Ähnlichkeitsbedingungen widerspruchsfrei hergeleitet werden können. Es ist aber praktisch unmöglich, geeignete Materialien zu finden, deren Stoffeigenschaften die Einhaltung aller Ähnlichkeitsbedingungen erlaubt. Bei Replika-Modellen, bei denen dasselbe Material für Modell und Prototyp verwendet wird, muß mit Abweichungen zwischen verschiedenen Maßstäben gerechnet werden, weil der Einfluß der Dehnungsgeschwindigkeit und der Fluidzähigkeit nicht korrekt wiedergegeben wird. Unter Vernachlässigung der genannten Einflüsse, erzielt man bei Replika-Modellen Ähnlichkeit, wenn die Referenzgeschwindigkeit - hier die Aufprallgeschwindigkeit - für Modell und Prototyp dieselbe ist.

Um den Maßstabseinfluß zu untersuchen, wurden die FLIPPER-Experimente in den Maßstäben $\lambda = 1$, $\lambda = 2.5$ und $\lambda = 10$ durchgeführt. Dabei wird Wasser durch ein Fallgewicht zunächst beschleunigt und durch den Aufprall des Wassers auf eine Prallplatte werden Biegeelenke plastisch verformt. Durch direkten Vergleich der durchgeführten Versuche konnte der Maßstabseinfluß bei den zugrunde liegenden Aufprallvorgängen bestimmt werden. Für die Herstellung der Biegeelenke wurde Stangenmaterial aus dem ferritischen Stahl St 37, dem austenitischen Stahl X 5 CrNi 18 9 und der Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5 verwendet.

Ergänzende Versuche zeigten, daß die Form der auftreffenden Wasserfront und der zeitliche Verlauf der gemessenen Aufprallkraft einer erheblichen Streuung unterliegt. Bei der Aufprallgeschwindigkeit und dem übertragenen Impuls war die Reproduzierbarkeit mit einer Abweichung von weniger als $\pm 10\%$ jedoch zufriedenstellend. Bei den gemessenen plastischen Biegewinkeln traten wiederum erhebliche Streuungen in der Größe von bis zu $\pm 30\%$ auf.

Mit Hilfe eines strukturdynamischen Rechenmodells konnte gezeigt werden, daß die Ursache für die Streuung im nichtlinearen Verhalten des Biegemoments liegt. Dies führt dazu, daß kleine Abweichungen in der Belastung der Biegeelenke, infolge unterschiedlicher hydrodynamischer Kräfte, erhebliche Abweichungen in der plastischen Verformung verursachen. In Kombination mit den Fertigungstoleranzen ergaben sich im Rechenmodell Streubänder, die mit den experimentell bestimmten Werten vergleichbar waren.

Für den *ferritischen Stahl St37* zeigte ein Vergleich der Mittelwerte der plastischen Biegewinkel für die verschiedenen Maßstäbe, daß bei größeren Aufprallgeschwindigkeiten und damit größeren Verformungen der Biegeelenke der Maßstabseinfluß relativ moderat ist. Der Einfluß des Maßstabs äußerte sich dabei in einer Verminderung der mittleren plastischen Biegewinkel bei Verkleinerung der Abmessungen. Vom Maßstab $\lambda = 1$ zum Maßstab $\lambda = 10$ betrug der Rückgang des mittleren plastischen Biegewinkels für die Fallhöhe $h = 3\text{m}$ etwa 12%, für die Fallhöhe $h = 2\text{m}$ etwa 17% und für die Fallhöhe $h = 1.5\text{m}$ etwa 37%. Der hier verwendete Werkstoff zeigt bekanntlich einen ausgeprägten Anstieg der Fließspannungen bei größeren Dehnungsgeschwindigkeiten. Deshalb war bei den kleineren Maßstäben, bei denen die Dehnungsgeschwindigkeiten entsprechend höher war, das festgestellte, steifere Verhalten der Biegeelenke zu erwarten. Dies konnte auch mit Hilfe des Rechenmodells quantitativ gut reproduziert werden.

Ein Vergleich der Ergebnisse für verschiedene Fallhöhen zeigte, daß zwischen Fallhöhe und mittlerem plastischen Biegewinkel ein annähernd linearer Zusammenhang besteht. Der oben diskutierte Maßstabseinfluß zeigte sich dabei durch eine Parallelverschiebung der ermittelten Geraden, was darauf hindeutet, daß das Verhältnis der im Biegeelenk dissipierten Energie und der zur Verfügung stehenden kinetischen Energie der aufprallenden Flüssigkeit nur schwach vom Maßstab abhängt. Die Ursache für den Maßstabseinfluß liegt damit im unterschiedlichen Einsetzen des Fließens bei den verschiedenen Maßstäben.

Zur Untersuchung des Einflusses der Fluidzähigkeit wurden Versuche mit gelochten Prallplatten durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen erwartungsgemäß einen etwas geringeren Rückgang der mittleren plastischen Biegewinkel vom Maßstab $\lambda = 1$ zum Maßstab $\lambda = 10$. Selbst bei den gelochten Platten war aber der Einfluß der Dehnungsgeschwindigkeit größer als der Zähigkeitseinfluß.

Weitere Versuche wurden mit der *Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5* durchgeführt, bei der die Spannungs-Dehnungs-Kurve im untersuchten Bereich nur sehr wenig von der Dehnungsgeschwindigkeit beeinflusst wird. Im Vergleich zum ferritischen Stahl St37 wurde hier für die Fallhöhe $h = 1.5\text{m}$ ein deutlich geringerer Rückgang des mittleren plastischen Biegewinkels von nun 22% vom Maßstab $\lambda = 1$ zum Maßstab $\lambda = 10$ gefunden.

Mit dem *austenitischen Stahl X5 CrNi 18 9* wurden ebenfalls Versuche durchgeführt. Aufgrund der Materialdaten wurde ein geringerer Maßstabseinfluß als beim ferritischen Stahl St 37 erwartet. Die mittleren plastischen Biegewinkel zeigten jedoch einen Rückgang um einen Faktor von etwa zwei bis drei vom Maßstab $\lambda = 1$ zum Maßstab $\lambda = 10$.

Es zeigte sich in statischen Nachuntersuchungen, daß die Materialfestigkeit bei den kleinen Biegeelenken erheblich größer ist als bei den großen Biegeelenken. Kaltverfestigung bei der Herstellung und Materialinhomogenitäten im Rohmaterial konnten als Ursache ausgeschlossen werden. Ein Vergleich mit dem Rechenmodell zeigte, daß auch durch das viskoplastische Materialverhalten nur ein moderater Maßstabseinfluß zu erwarten ist.

Eine Erklärungsmöglichkeit für den großen Maßstabseinfluß ergibt sich durch kritische Hinterfragung der zugrunde liegenden Theorie, insbesondere hinsichtlich der Fließbedingung. Ein möglicher Einfluß des Spannungsgradienten infolge der Biegebelastung auf das Einsetzen des Fließens wurde diskutiert. Die endgültige Klärung, warum bei diesem Werkstoff ein so großer Maßstabseinfluß vorliegt, steht aber noch aus. Die Ähnlichkeit bzw. der Maßstabseinfluß im Zusammenhang mit Bruch- und Schädigungsvorgängen sollte in weiteren Arbeiten ebenfalls untersucht werden.

Die experimentelle Untersuchung der genannten Aufprallvorgänge zeigte aber für den ferritischen Stahl St 37 und die Aluminiumlegierung AlZnMgCu1.5, daß bei der Übertragung der Ergebnisse aus verkleinerten Versuchen auf große Maßstäbe der Einfluß der Dehnungsgeschwindigkeit und der der Viskosität nur zu moderaten Abweichungen führt.

Anhang A

Bemerkungen zur Theorie der physikalischen Dimensionen

A.1 Bewertung von Merkmalen

Zunächst muß hier der Begriff der physikalischen Dimension geklärt und mathematisch präzise definiert werden. Ausgangspunkt ist das Beschreiben und Bewerten von Merkmalen von Gegenständen, worunter mathematisch folgendes zu verstehen ist. Gegeben sei eine Menge

$$\mathcal{G} = \{A, B, C, \dots\} \quad (\text{A.1})$$

von Gegenständen und eine Menge \mathcal{M} von Merkmalen sowie eine Zuordnung μ zwischen beiden. Als Gegenstände im physikalischen Sinn können zum Beispiel Strecken und als Merkmale deren Längen betrachtet werden. Um die Merkmale \mathcal{M} bewerten zu können, müssen an die Zuordnung μ drei Forderungen gestellt werden

1. Jedem Gegenstand aus \mathcal{G} ist genau ein Merkmal aus \mathcal{M} durch eine eindeutige Abbildung

$$\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M} \quad (\text{Eindeutigkeit}) \quad (\text{A.2})$$

zugeordnet. Durch Beobachtung kann einem Gegenstand $A \in \mathcal{G}$ ein Merkmal aus \mathcal{M} zugeordnet werden, daß mit $\mu(A)$ bezeichnet wird. Durch diese erste Forderung kann entschieden werden, ob zwei Gegenstände aus \mathcal{G} gleiche Merkmale besitzen. Geschieht diese Zuordnung durch physikalische Messung, ergeben sich bedingt durch unvermeidliche Meßfehler natürlich Probleme bezüglich der Eindeutigkeit. Zu dieser Problematik sei auf Wiener [117] verwiesen.

2. Jede Merkmalart \mathcal{M} ist linear geordnet d.h. es gilt

$$\text{entweder } \mu_1 \sim \mu_2 \quad \text{oder } \mu_1 \prec \mu_2 \quad \text{oder } \mu_1 \succ \mu_2 \quad (\text{Asymmetrie})^1 \quad (\text{A.3})$$

und aus

$$\mu_1 \prec \mu_2 \quad \text{und} \quad \mu_2 \prec \mu_3 \quad \text{folgt} \quad \mu_1 \prec \mu_3 \quad (\text{Transitivität}). \quad (\text{A.4})$$

Wenn diese Forderung erfüllt ist, können die Merkmale geordnet werden.

3. Für jede Merkmalart \mathcal{M} gibt es eine streng monotone Abbildung

$$F : \mathcal{M} \rightarrow I_R \quad (\text{A.5})$$

auf ein beliebiges Intervall I_R der reellen Zahlen mit der Eigenschaft, daß

$$F(\mu_1) \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} F(\mu_2) \quad \text{falls} \quad \mu_1 \begin{matrix} \prec \\ \sim \\ \succ \end{matrix} \mu_2 \quad (\text{Monotonie}). \quad (\text{A.6})$$

Mit der Erfüllung dieser Forderung ergibt sich die Bewertbarkeit der Merkmale \mathcal{M} aus der Topologie der reellen Zahlen. Gleichzeitig scheidet hiermit Zuordnungen aus, die \mathcal{M} auf eine endliche, diskrete Zahlenmenge abbilden, weil sonst die Möglichkeit besteht, daß Merkmale μ_i , die sich nur wenig unterscheiden, auf dieselbe Zahl abgebildet werden. Beispiele für solche unzulässigen Skalen sind die Beaufort-Skala für die Windstärke oder die Mercalli-Skala für die Stärke von Erdbeben.

Damit sind alle Voraussetzungen geschaffen, um Merkmalarten - in unserem Fall physikalische Größenarten bewerten - zu können. Diese Bewertung kann mit Hilfe der Funktion F auf mannigfache Weise geschehen, jedoch sind nicht alle möglichen Bewertungen auch für physikalische Zwecke brauchbar.

In der Physik ist es zum Beispiel unentbehrlich, auch Merkmalunterschiede eindeutig bewerten zu können. Entscheidend ist dabei, daß unabhängig von der Bewertung F , neben der Ordnung der Merkmale selbst, auch die Ordnung der Merkmalunterschiede relativ zueinander erhalten bleibt. Es ist für praktische Zwecke nicht akzeptabel, daß bei der einen Bewertung ein Merkmalunterschied größer ist als ein zweiter und bei einer anderen Bewertung gerade umgekehrt. Mathematisch kann diese Anforderung durch die metrischen Konventionen folgendermaßen ausgedrückt werden.

A.2 Metrische Konventionen

Der Merkmalunterschied x eines Merkmalpaares (μ_i, μ_j) bezüglich einer beliebigen Bewertung F_0 ist definiert als

$$x = F_0(\mu_i) - F_0(\mu_j). \quad (\text{A.7})$$

Damit ergibt sich für die Paare (μ_i, μ_j) eine Klasseneinteilung U als Vereinigungsmenge aller Klassen U_x , wobei eine Klasse U_x definiert ist als die Menge aller Paare (μ_i, μ_j) die zum selben Merkmalunterschied x führen oder in mathematischer Schreibweise

$$U_x := \{(\mu_i, \mu_j) \mid F_0(\mu_i) - F_0(\mu_j) = x; \mu_i, \mu_j \in \mathcal{M}\}. \quad (\text{A.8})$$

Um den oben genannten Anforderungen gerecht zu werden und um eine Maßzahlskala vollständig festzulegen, werden die drei metrischen Konventionen eingeführt.

1. Merkmalunterschiede der Bewertung $F_0(\mu)$ sind alle Klassen $U_x \in U$, wobei U derselben Ordnung unterliegt wie die zugehörigen reellen Zahlen

$$U_x \begin{matrix} \prec \\ \sim \\ \succ \end{matrix} U_y \quad \text{genau dann, wenn} \quad x \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} y. \quad (\text{A.9})$$

Diese erste metrische Konvention ist sehr einschneidend. Man kann nämlich zeigen (Görtler [118]), daß die Ordnung der Merkmalunterschiede bezüglich F_0 nur für Bewertungen F erhalten bleibt, die aus der linearen Abbildung

$$F(\mu) = aF_0(\mu) + b \quad \text{für alle } \mu \in \mathcal{M}, \quad a, b \text{ reell, } a > 0 \quad (\text{A.10})$$

hervorgehen. Die Forderung $a > 0$ ist notwendig, um die Ordnung der Merkmale aufrecht zu erhalten.

2. Das Nullmerkmal μ_0 einer Merkmalart wird dadurch ausgezeichnet, daß ihm die Maßzahl Null zugeordnet wird:

$$F(\mu_0) = aF_0(\mu_0) + b = 0. \quad (\text{A.11})$$

3. Das Einheitsmerkmal μ_1 einer Merkmalart wird dadurch ausgezeichnet, daß ihm die Maßzahl Eins zugeordnet wird:

$$F(\mu_1) = aF_0(\mu_1) + b = 1. \quad (\text{A.12})$$

Aus den beiden letzten Konventionen können die Konstanten a und b ermittelt und die Maßzahlskala festgelegt werden.

An dieser Stelle kann nun auch der Begriff der Einheitenänderung eingeführt werden. Unter Einheitenänderung ist in diesem Zusammenhang die Wahl einer neuen Einheitsgröße zu verstehen, wobei der Nullpunkt der Maßzahlskala und die Ordnung der Größenunterschiede erhalten bleibt. Es handelt sich also um eine Abbildung der Maßzahlen x auf neue Maßzahlen \bar{x}

$$\bar{x} = \alpha x \quad \text{mit } \alpha > 0. \quad (\text{A.13})$$

Hieraus folgt praktisch unmittelbar das Axiom von Bridgman [119]:

Das Verhältnis der Maßzahlen zweier gleichartigen physikalischen Größen ist invariant gegenüber Einheitenänderungen der benutzten Maßzahlen.

Aufbauend auf diesem Axiom kann gezeigt werden, daß alle physikalischen Größen durch Potenzprodukte der Grundgrößen dargestellt werden können.

A.3 Dimensionsformeln

Dimensionsformeln dienen der Darstellung von abgeleiteten Größen auf Basis der Grundgrößen. Mit den metrischen Konventionen sind die Voraussetzungen geschaffen, um nach der Einführung von Grundgrößen den Begriff der Dimensionsformel sauber zu definieren.

Grundgrößenart nennt man dabei eine physikalische Größenart \mathcal{M} , deren Bewertung F durch Vergleich mit einem Prototyp festgelegt wird. Hierzu sei auf die Definition der SI-Einheiten verwiesen. Die Menge

$$\left\{ \left(\mathcal{M}_1, F_1^{-1}(1) \right), \dots, \left(\mathcal{M}_n, F_n^{-1}(1) \right) \right\} \quad (\text{A.14})$$

von Grundgrößenarten \mathcal{M}_i und den zugehörigen Grundeinheiten $F_i^{-1}(1)$ bezeichnet ein Maßsystem. Die Menge

$$\{M_1, \dots, M_n\} \quad (\text{A.15})$$

der zu den Grundgrößenarten und einer beliebigen Bewertung gehörenden Maßzahlen bezeichnet das zugehörige Grundgrößensystem. Ein mögliches Maßsystem der Mechanik ist zum Beispiel

$$\{(\text{Masse, kg}), (\text{Länge, m}), (\text{Zeit, s})\}. \quad (\text{A.16})$$

Man erhält entsprechend das $\{M, L, T\}$ -System, wobei M, L, T die zu den Grundgrößen gehörenden Maßzahlen sind.

Auf den Maßzahlen der Grundgrößenarten basieren die abgeleiteten Größenarten x . Ihre Definition wird durch die Definition einer reellwertigen Funktion

$$x := f(M_1, M_2, \dots, M_n) \quad (\text{A.17})$$

für die Maßzahlen (M_1, \dots, M_n) der Grundgrößenarten gegeben. Man kann hier also von einer indirekten Definition sprechen, da sie nicht über die Grundgrößen selbst, sondern über deren Maßzahlen erfolgt. Für die Definition wird dabei gefordert, daß sie unabhängig von der Wahl der Grundeinheiten sein soll.

Als Konsequenz dieser Forderung nach Einheiteninvarianz und der weiteren Forderung, daß sich bei Einheitenänderung der Grundgrößen die Maßzahl der abgeleiteten Größe analog zur Maßzahl der Grundgrößen (Gleichung (A.13)) neu bestimmen läßt, ergibt sich die Gestalt der definierenden Funktion als Potenzprodukt der Maßzahlen der Grundgrößen:

$$f(M_1, M_2, \dots, M_n) = M_1^{a_1} \cdot M_2^{a_2} \cdot \dots \cdot M_n^{a_n} f(1, 1, \dots, 1) \quad (\text{A.18})$$

mit a_i reell.

Zum Beweis dieser Aussage, der nach Logarithmieren analog zum Beweis für Gleichung (A.12) erfolgt, sei wiederum auf Görtler [120] verwiesen.

Die Dimension $[x]$ der abgeleiteten Größe mit der Maßzahl x ist definiert als das Produkt

$$[x] := M_1^{a_1} \cdot M_2^{a_2} \cdot \dots \cdot M_n^{a_n}. \quad (\text{A.19})$$

Mit dieser Gleichung können natürlich auch die Dimensionen der Grundgrößen ausgedrückt werden. In diesem Fall hat genau eines der a_i den Wert eins, alle anderen a_j haben den Wert null. Für eine dimensionslose Größe gilt insbesondere

$$[x] := M_1^0 \cdot M_2^0 \cdot \dots \cdot M_n^0 = 1. \quad (\text{A.20})$$

Bei einem Einheitenwechsel der Grundeinheiten kann die neue Maßzahl \bar{x} der abgeleiteten Größe aus der alten Maßzahl x analog zu Gleichung (A.12) in der Form

$$\bar{x} = \alpha_1^{a_1} \cdot \dots \cdot \alpha_n^{a_n} x \quad (\text{A.21})$$

berechnet werden.

Die Definition einer abgeleiteten physikalischen Größe muß aber nicht ausschließlich auf den Grundgrößen erfolgen, sondern kann im allgemeinen Fall auch abgeleitete Größenarten x_i beinhalten. Man erhält die definierende Funktion für eine physikalischen Größe y dann zu

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}, \quad (\text{A.22})$$

wobei

$$[y] = M_1^{b_1} \cdot M_2^{b_2} \cdot \dots \cdot M_m^{b_m} \quad (\text{A.23})$$

die Dimension der physikalischen Größe y und

$$[x_i] = M_1^{a_{i1}} \cdot M_2^{a_{i2}} \cdot \dots \cdot M_m^{a_{im}} \quad (\text{A.24})$$

die Dimensionen der physikalischen Größen x_i seien.

An diese Definitionsgleichung muß wiederum die Forderung der Einheiteninvarianz gestellt werden, die nur erfüllt werden kann, wenn f eine dimensionshomogene Funktion ist. Eine dimensionshomogene Funktion hat die Eigenschaft, daß bei einem Einheitenwechsel die Gleichung

$$f(\alpha_1^{a_{11}} \cdot \dots \cdot \alpha_n^{a_{1n}} x_1, \dots, \alpha_1^{a_{m1}} \cdot \dots \cdot \alpha_n^{a_{mn}} x_m) = \alpha_1^{b_1} \cdot \dots \cdot \alpha_n^{b_n} f(x_1, \dots, x_m) \quad (\text{A.25})$$

durch reelle a_{ik} und b_k erfüllbar ist.

Die Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

der a_{ij} aus Gleichung (A.24) heißt dabei Dimensionsmatrix der physikalischen Größen x_i . Der Zeilenvektor

$$\mathbf{b} := (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (\text{A.27})$$

der b_i aus Gleichung (A.23) ist der Dimensionsvektor der Größe y und der Zeilenvektor

$$\mathbf{k} := (k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (\text{A.28})$$

ist der Exponentenvektor der k_i in Gleichung (A.22) und kann aus der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{b} := \mathbf{kA} \quad (\text{A.29})$$

gewonnen werden.

Mit Hilfe der Dimensionsmatrix können die Exponenten b_k in Gleichung (A.23) dargestellt werden als

$$b_k := \sum_{i=1}^n k_i a_{ij}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (\text{A.30})$$

Für mehrere physikalische Größen y_i erhält man aus deren Dimensionsvektoren \mathbf{b}_i eine Dimensionsmatrix \mathbf{B} und aus den Exponentenvektoren der \mathbf{k}_i die Exponentenmatrix \mathbf{K} . Die y_i können bestimmt werden als Potenzprodukte

$$P_i = x_1^{k_{i1}} \cdot x_2^{k_{i2}} \cdot \dots \cdot x_n^{k_{in}}. \quad (\text{A.31})$$

Die Dimensionsvektoren der P_i sind dabei die entsprechenden Zeilen der Dimensionsmatrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{KA}. \quad (\text{A.32})$$

A.4 Dimensionslose Potenzprodukte

Von besonderem Interesse sind die dimensionslosen Potenzprodukte, zur Unterscheidung von dimensionsbehafteten Potenzprodukten mit Π bezeichnet, für die gilt:

$$[\Pi] = M_1^0 \cdot M_2^0 \cdot \dots \cdot M_n^0 = 1. \quad (\text{A.33})$$

Solche Potenzprodukte stellen eine Lösung des homogen linearen Gleichungssystems

$$kA := \mathbf{o} \quad (\text{A.34})$$

dar. Nach den Sätzen der linearen Algebra (siehe z.B. Bronstein-Semendjajev [121]) gibt es genau $p = n - r$ von einander unabhängige dimensionslose Potenzprodukte der x_1, x_2, \dots, x_n , wobei r der Rang von A ist. Die Menge

$$\{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p\} \quad (\text{A.35})$$

bildet ein sogenanntes Fundamentalsystem von dimensionslosen Potenzprodukten.

Für jede physikalische Größe y gibt es ein Potenzprodukt der x_i , so daß die Gleichung

$$\left[\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}} \right] = M_1^0 \cdot M_2^0 \cdot \dots \cdot M_n^0 = 1 \quad (\text{A.36})$$

mit reellen k_i dargestellt werden kann.

A.5 Buckingham'sches Π -Theorem

Nach den vorangegangenen Ausführungen kann das Buckingham'sche Π -Theorem [47] folgendermaßen formuliert werden :

Bezüglich eines Grundgrößensystems $\{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ seien x_1, x_2, \dots, x_n die Maßzahlen von n physikalischen Größen, A sei deren Dimensionsmatrix, und f sei eine beliebige dimensionshomogene Funktion der x_1, x_2, \dots, x_n . Weiterhin sei $\{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p\}$ ein Fundamentalsystem von dimensionslosen Potenzprodukten der x_1, x_2, \dots, x_n mit $p = n - r$ und $r = \text{Rang} A$.

Dann existiert eine Funktion G der Π_i , und es existieren reelle Zahlen k_1, k_2, \dots, k_n , so daß die Gleichung

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n} G(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p) \quad (\text{A.37})$$

für alle x_1, x_2, \dots, x_n erfüllt ist.

Der Beweis des Π -Theorems ergibt sich nach der ausführlichen Einführung des Dimensionsbegriffs in den vorherigen Abschnitten fast zwangsläufig und wird hier nicht dargestellt. Ein Beweis des Π -Theorems findet sich bei Langhaar [48]. Eine unterschiedliche Beweisführung liefert Brand [49].

Der große Nutzen des Π -Theorems liegt darin, daß es erlaubt ein physikalisches Problem mit einer reduzierten Anzahl von dimensionslosen Variablen darzustellen. Dies gilt insbesondere auch wenn für den

betrachteten physikalischen Vorgang kein mathematisches Modell bekannt ist, aus dessen Gleichungen die Ähnlichkeitsbedingungen ebenfalls bestimmt werden können.

Um das Π -Theorem anwenden zu können, müssen nur *alle* physikalischen Größen, von denen das Problem abhängt, bekannt sein. Das Π -Theorem macht jedoch keine Aussage, ob wirklich alle physikalischen Größen erfaßt wurden, die für das Problem relevant sind. Man erhält auch über die Gestalt der dimensionslosen Variablen keine eindeutige Aussage, so daß es möglich ist, ein prinzipiell beliebiges Fundamentalsystem zu wählen, solange nur die Bedingung der Dimensionslosigkeit erfüllt ist. So ist es leicht möglich, ein Fundamentalsystem zu wählen, das für das entsprechende Problem nicht optimal geeignet ist. In diesem Zusammenhang ist es von Vorteil, wenn die Π -Terme auch eine physikalische Bedeutung aufweisen. Hier kann und muß physikalische Einsicht und Erfahrung wertvolle Dienste leisten. Dies kann zum Beispiel in Kombination mit der Methode der Verhältnisbildung aus Abschnitt 2.2 geschehen.

Anhang B

Endliche Deformation

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß es für den Zweck der Herleitung von Ähnlichkeitsbedingungen genügt, sich auf den einfacheren Fall kleiner Deformationen zu beschränken, da durch die Berücksichtigung großer Deformationen keine weiteren Ähnlichkeitsbedingungen eingeführt werden. Bei der rechnerischen Lösung eines Problems, bei dem große Deformationen auftreten, würde dieses Vorgehen natürlich zu mehr oder weniger großen Fehlern führen, so daß hier die Behandlung des Problems mit den Gleichungen für endliche Deformationen unabdingbar sein kann.

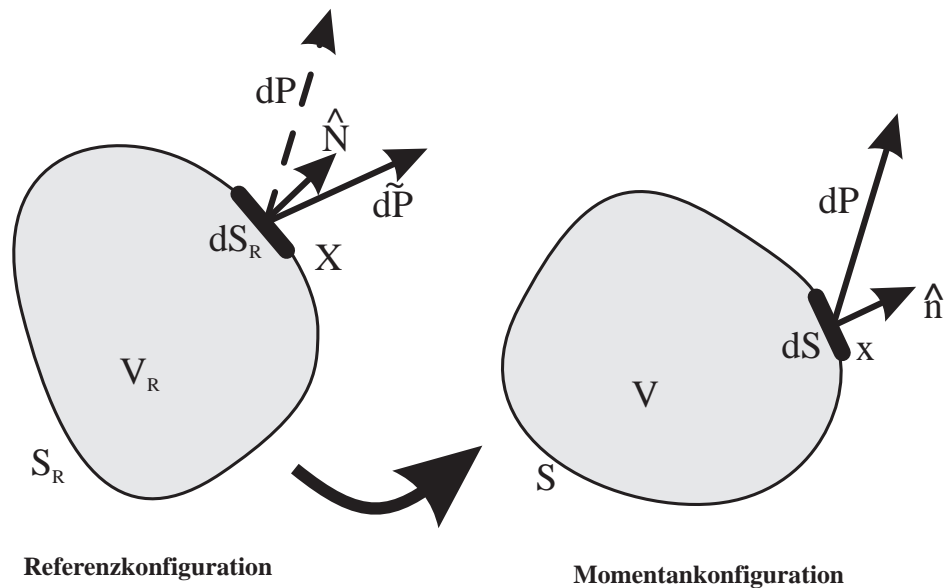


Abbildung B.1: Definition der Kraftvektoren für die Piola-Kirchhoff Spannungstensoren

Im Abbildung B.1 ist ein Körper in der Referenzkonfiguration und in der deformierten Momentankonfiguration gezeigt. Bezeichnet X_k die Ausgangsposition eines Teilchens oder Punktes im Kontinuum in der Referenzkonfiguration und $x_k(X_k, t)$ die momentane Position, dann charakterisiert

$$F_{kl} = \frac{\partial x_k}{\partial X_l} \quad (\text{B.1})$$

den Tensor \mathbf{F} des Deformationsgradienten bezüglich der Ausgangsposition. Man erhält den La-

grange'schen Verzerrungstensor \mathbf{E} zu

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \bullet \mathbf{F} - \mathbf{1}] \iff \\ E_{kl} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x_m}{\partial X_k} \frac{\partial x_m}{\partial X_l} - \delta_{kl} \right]\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

beziehungsweise den Euler'schen Verzerrungstensor \mathbf{E}^* zu

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^* &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{1} - (\mathbf{F}^{-1})^T \bullet (\mathbf{F}^{-1}) \right] \iff \\ E_{kl}^* &= \frac{1}{2} \left[\delta_{kl} - \frac{\partial X_m}{\partial x_k} \frac{\partial X_m}{\partial x_l} \right]\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

Dieser Euler'schen Verzerrungstensor \mathbf{E}^* wäre ein geeignetes Verzerrungsmaß für den in der Impulsgleichung 2.5 auftretenden Cauchy'schen Spannungstensor σ_{kl} , der sich ebenfalls auf die momentane, deformierte Konfiguration bezieht. Für die Berechnung des elastischen Verhalten eines Festkörpers erscheint jedoch die Lagrange'sche Formulierung günstiger, bei der als Referenzkonfiguration der natürliche, undeformierte Zustand gewählt wird. Die Beschreibung des Spannungszustands in dieser Referenzkonfiguration geschieht mit Hilfe eines der beiden Piola-Kirchhoff Spannungstensoren. Der erste Piola-Kirchhoff Spannungstensor σ_{kl}^0 liefert die Kraft $d\mathbf{P}$ auf das deformierte Flächenelement dS jedoch bezogen auf das Referenzflächenelement dS_R und die Normale $\hat{\mathbf{N}}$ bezüglich dS_R (siehe Abbildung B.1). Die Beziehung zwischen dem ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor σ_{kl}^0 und dem Cauchy'schen Spannungstensor σ_{kl} lautet :

$$\sigma_{kl}^0 = \frac{\rho_R}{\rho} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \sigma_{ml} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{kl} = \frac{\rho}{\rho_R} \frac{\partial x_k}{\partial X_m} \sigma_{ml}^0. \quad (\text{B.4})$$

Unter Verwendung dieses ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor bleibt die Form der Impulsgleichung (2.5) vollständig erhalten. Da der Tensor \mathbf{F} des Deformationsgradienten im allgemeinen Fall nicht symmetrisch ist, ist dieser erste Piola-Kirchhoff Spannungstensor im allgemeinen Fall ebenfalls nicht symmetrisch, was die Verwendung in einer Materialgleichung mit symmetrischem Verzerrungstensor unbequem macht. Deshalb wird der zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor $\hat{\sigma}_{kl}$ eingeführt, der die Kraft $d\hat{\mathbf{P}}$ auf dS auf eine Kraft $d\hat{\mathbf{P}}$ auf dS_R in derselben Weise bezieht, wie der Vektor $d\mathbf{X}$ bei \mathbf{X} auf den Vektor $d\mathbf{x}$ bei \mathbf{x} bezogen ist, das heißt:

$$d\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{-1} \bullet d\mathbf{P} \quad \text{entsprechend zu} \quad d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \bullet d\mathbf{x}. \quad (\text{B.5})$$

Die Beziehung zwischen dem zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor $\hat{\sigma}_{kl}$ und dem Cauchy'schen Spannungstensor σ_{kl} lautet entsprechend:

$$\hat{\sigma}_{kl} = \frac{\rho_R}{\rho} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \sigma_{mn} \frac{\partial X_l}{\partial x_n} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{kl} = \frac{\rho}{\rho_R} \frac{\partial x_k}{\partial X_m} \hat{\sigma}_{ml} \frac{\partial x_l}{\partial X_n}. \quad (\text{B.6})$$

Man erhält hier also wieder einen symmetrischen Spannungstensor, jedoch muß die Formulierung der Impulsgleichung (2.5) modifiziert werden (siehe z.B. Malvern [50]).

Im Falle kleiner Verzerrungen erhält man für den Lagrange'schen Verzerrungstensor mit

$$u_k = x_k - X_k \quad (\text{B.7})$$

durch Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung die lineare Beziehung

$$E_{kl} \approx \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_k}{\partial X_l} + \frac{\partial u_l}{\partial X_k} \right]. \quad (\text{B.8})$$

Für den Euler'schen Verzerrungstensor erhält man

$$E_{kl}^* \approx \varepsilon_{kl}^* = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right] \quad (\text{B.9})$$

Für kleine Verschiebungen und kleine Verschiebungsgradienten wird die Unterscheidung zwischen der Euler'schen und Lagrange'schen Darstellung aufgrund der nur geringen Abweichungen meist ignoriert. Bei der Darstellung der Spannung wird aus demselben Grund der Cauchy'sche Spannungstensor anstatt der Piola-Kirchhoff Spannungstensoren verwendet.

Auch für den Zweck der Herleitung von Ähnlichkeitsbedingungen ist es vollkommen ausreichend, sich auf den Bereich der kleinen Verzerrungen zu beschränken. Dies kann begründet werden, wenn man die entsprechenden Definitionen für die Verzerrungen (Gleichungen (B.3) und (B.4) bzw. (B.8) und (B.9)) sowie der Spannungen (Gleichungen (B.4) und (B.6)) hinsichtlich der Dimension der Ausdrücke vergleicht. Hier ergeben sich keine Unterschiede zwischen den Betrachtungen für große oder kleine Deformation. Als mögliche Quelle für unterschiedliche Ähnlichkeitsbedingungen für beide Fälle bleibt nur noch die mathematische Form der Materialgleichung, die die Beziehung zwischen Verzerrungen und Spannungen liefert.

Ein wichtiger Aspekt bei der Bestimmung von Stoffgesetzen für das Materialverhalten bei elastischen und plastischen Deformationen ist die Aufspaltung des Verzerrungstensors in einen elastischen, reversiblen Anteil und einen inelastischen, irreversiblen Anteil. Für den Fall finiter Verzerrungen wird diese Aufspaltung multiplikativ vorgenommen (Lee [122]). Die Annahme kleiner Verzerrungen erlaubt die additive Aufspaltung

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^p \quad (\text{B.10})$$

in einen elastischen und plastischen Anteil. Weiterhin gilt bei kleinen Verzerrungen die Beziehung

$$d_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}. \quad (\text{B.11})$$

Anhang C

Meßwerte aus Zugversuchen

Die folgenden Tabellen enthalten Meßdaten der in Kapitel 3 besprochenen quasistatischen und dynamischen Zugversuche für den ferritischen Stahl St37 und den austenitischen Stahl X5 CrNi 18 9.

Proben-Nr.	Dehnungs- geschwindigkeit	Untere Fließspannung	Obere Fließspannung	Spannung bei $\varepsilon = 10\%$
	$\dot{\varepsilon}$ [s^{-1}]	σ_{Fu} [MPa]	σ_{Fo} [MPa]	$\sigma_{10\%}$ [MPa]
1	$6.50 \cdot 10^{-4}$	326	353	495
2	$6.20 \cdot 10^{-4}$	331	347	501
3	$7.00 \cdot 10^{-4}$	329	337	499
4	$5.00 \cdot 10^{-4}$	322	340	501
5	0.73	386	398	540
6	5.81	425	447	586
7	5.84	430	459	589
8	15.5	501	548	647
9	15.5	477	566	648
10	16.2	496	553	657
11	26.6	510	596	667
12	28.6	503	582	673
13	29	512	610	682
14	30.6	503	593	653
15	42	536	629	642
16	94.8	562	688	696
17	111	552	645	691
18	119	551	648	673

Tabelle C.1: Meßwerte aus quasistatischen und dynamischen Zugversuchen für ferritischen Stahl St37

Proben-Nr.	Dehnungs- geschwindigkeit	Spannung bei $\varepsilon = 2\%$	Spannung bei $\varepsilon = 5\%$	Spannung bei $\varepsilon = 10\%$
	$\dot{\varepsilon}$ [s^{-1}]	$\sigma_{2\%}$ [MPa]	$\sigma_{5\%}$ [MPa]	$\sigma_{10\%}$ [MPa]
1	$1.11 \cdot 10^{-3}$	342	401	503
2	81.9	448	525	610
3	17.2	426	503	584
4	1.11	389	446	532
5	1.09	387	449	531
6	17.6	420	487	573
7	77.0	452	531	610
8	$1.10 \cdot 10^{-3}$	341	406	500

Tabelle C.2: Meßwerte aus quasistatischen und dynamischen Zugversuchen für austenitischen Stahl X5 CrNi 18 9

Literaturverzeichnis

- [1] G. Keßler, D. Faude, J. Erhardt. Sicherheitskonzept gegenwärtiger Druckwasserreaktoren. *KfK-Nachrichten*, **25**(1):20–28, 1993.
- [2] D. Smidt. *Reaktortechnik - Band 1/2*, 2. Auflage. G. Braun, Karlsruhe, 1976.
- [3] R. Krieg. Sicherheitsanforderungen für Druckwasserreaktoren der nächsten Generation - Beachtung soziologisch-psychologischer Überlegungen. *KfK-Nachrichten*, **25**(1):42–50, 1993.
- [4] H.-H. Hennies, G. Keßler, J. Eibl. Sicherheitskonzept zukünftiger Druckwasserreaktoren. *KfK-Nachrichten*, **25**(1):29–41, 1993.
- [5] H. Jacobs. Steam explosions during light water reactor meltdown accidents. In *Proc. 3rd Int. Sem. on Containment of Nuclear Reactors*, 10-11. Band, 302–320, Los Angeles, Ca, Aug. 1989.
- [6] H. Jacobs, R. Krieg. Discussion of steam explosion structural consequences in german pressurized water reactors. In *Proc. 3rd Int. Sem. on Containment of Nuclear Reactors*, 10-11. Band, 321–331, Los Angeles, Ca, Aug. 1989.
- [7] T. G. Theophanus, B. Najafi, E. Rumble, M. A. Abolfadl, W. H. Amarasooriya, G. E. Lucas. An assessment of steam-explosion-induced containment failure. Part I-IV. *Nuclear Science and Engineering*, **97**:259–326, 1987.
- [8] R. Krieg, G. Messemer, T. Stach, E. Stratmanns. Experiments on slug impact loading of the reactor vessel head during a postulated steam explosion. *Kerntechnik*, **4-5**:178–184, 1995.
- [9] R. Krieg, T. Malmberg, G. Messemer, T. Stach, E. Stratmanns. Slug impact loading on the vessel head during a postulated in-vessel steam explosion in pressurized water reactors. *Nucl. Technology*, **111**(3):369–385, 1995.
- [10] Th. v. Kármán. The impact on seaplane floats during landing. Tech. Bericht, NACA TN321, 1929.
- [11] H. Wagner. Zur Mechanik des Starts und der Landung von Seeflugzeugen. *Schiffbau*, **30**(14):343–348, 1929.
- [12] H. Wagner. Über die Landung von Seeflugzeugen. *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschifffahrt*, **22**(1):1–8, 1931.
- [13] H. Wagner. Über Stoß- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten. *ZAMM*, **12**(4):193–215, 1932.

- [14] W. Pabst. Theorie des Landestoßes von Seeflugzeugen. *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt*, **21**(9):218–226, 1930.
- [15] W. K. Meyerhoff. Die Berechnung hydroelastischer Stöße, Teil 1. *Schiffstechnik*, **12**(60):18–30, 1965.
- [16] W. K. Meyerhoff. Die Berechnung hydroelastischer Stöße, Teil 2. *Schiffstechnik*, **12**(61):49–64, 1965.
- [17] I. T. Egorov. Impact on a compressible fluid. Tech. Bericht, NACA TM1413, 1956.
- [18] T. F. Ogilvie. Compressibility effects in ship slamming. *Schiffstechnik*, **10**(53):147–154, 1963.
- [19] Y. Fujita. On the impulsive pressure of a circular plate falling upon a water surface. *Journal of Zosen Kiokai*, **94**:105–110, 1954.
- [20] N. Tanaka. On the impact of a body falling upon the water surface. *Journal of the Society of Naval Architects of West Japan*, **72**, 1952.
- [21] S. L. Chuang. Experiments on flat-bottom slamming. *J. Ship Res.*, **10**:10–17, 1966.
- [22] S. L. Chuang. Investigation of impact of rigid and elastic bodies with water. Tech. Bericht Report No. 3248, Naval Ship Research and Development Center, Washington, D. C., 1970.
- [23] J. H. G. Verhagen. The impact of a flat plate on a water surface. *J. Ship Res.*, **11**:211–223, Dez. 1967.
- [24] G. Lewison, W. M. Maclean. On the cushioning effect of water impact by entrapped air. *J. Ship Res.*, **12**:116–130, Jun. 1968.
- [25] B. R. Koehler Jr., C. F. Kettleborough. Hydrodynamic impact of a falling body upon a viscous incompressible fluid. *J. Ship Res.*, **21**(3):165–181, 1977.
- [26] S. M. Stubbs, Melvin E. Hathaway. Effects of bottom-structure flexibility on water landing loads of Apollo spacecraft models. Tech. Bericht TN D-5108, NASA, 1969.
- [27] S. M. Stubbs. Dynamic model investigation of water pressures and accelerations encountered during landings of the Apollo spacecraft. Tech. Bericht TN D-3980, NASA, 1967.
- [28] J. R. McGehee, M. E. Hathaway, V. L. Vaughan. Water-landing characteristics of a reentry capsule. MEMO5-23-59L, NASA, 1959.
- [29] W. E. Baker, P. S. Westine. Model tests for structural response of apollo command module to water impact. *J. Spacecraft*, **4**(2):201–208, 1967.
- [30] W. E. Baker, P. S. Westine, F. T. Dodge. *Similarity Methods in Engineering Dynamics*, 2. Auflage. Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo, 1991.
- [31] R. D. Lorenz. Huygens probe impact dynamics. *ESA Journal*, **18**:93–117, 1994.
- [32] T. Wierzbicki, D. K. Yue. Impact damage of the challenger crew compartment. *J. Spacecraft*, **23**(6):646–654, 1986.

- [33] J. F. Dalzell. Liquid impact on tank bulkheads. In H. N. Abramson, Herausgeber, *The Dynamic Behaviour of Liquids in Moving Containers*, SP-106. Band, 353–385. NASA, 1966.
- [34] A. Takai, M. Matsumura, O. Kawaguchi, K. Okabayashi, Y. Ando, S. Kondo. Structural Shock Tests of Prototype FBR „MONJU“ Scale Models. *Nuclear Engineering and Design*, **38**:109–129, 1976.
- [35] A. L. Florence, G. R. Abrahamson, , D. J. Cagliostro. Hypothetical Core Disruptive Accident Experiments on Simple Fast Test Test Reactor Models. *Nuclear Engineering and Design*, **38**:95–108, 1976.
- [36] W. E. Baker. Modeling of large transient elastic and plastic deformations of structures subjected to blast loading. *Journal of Applied Mechanics*, **E 27**:521–527, 1960.
- [37] W. E. Baker, P. S. Westine. Modeling the blast response of structures using dissimilar materials. *AIAA Journal*, **7**(5):951–959, May 1969.
- [38] S. Kattanek, R. Gröger, C. Bode. *Ähnlichkeitstheorie*, 1. Auflage. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1967.
- [39] M. Weber. Das allgemeine Ähnlichkeitsprinzip der Physik und sein Zusammenhang mit der Dimensionslehre und der Modellwissenschaft. *Jahrbuch der Schiffbautechnik*, **31**:274–354, 1930.
- [40] Walter Herrmann. Die Anwendung des Ähnlichkeitsprinzips der Mechanik auf zeitlich beliebig veränderliche Vorgänge mit besonderer Berücksichtigung schiffbaulicher und aerodynamischer Probleme. *Jahrbuch der Schiffbautechnik*, **31**:355–388, 1930.
- [41] N. S. Land. A compilation of nondimensional numbers. Tech. Bericht NASA-SP-274, NASA, 1972.
- [42] D. F. Boucher, G. E. Alves. Dimensionless numbers. *Chemical Engineering Progress*, **55**(9):55–64, September 1959.
- [43] J. P. Catchpole, G. Fulford. Dimensionless groups. *Industrial and Engineering Chemistry*, **58**(3), 1966.
- [44] J. Zierep. *Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre*, 3. Auflage. G. Braun, Karlsruhe, 1991.
- [45] E. O. Macagno. Historico-critical review of dimensional analysis. *Journal of The Franklin Institute*, **292**(6):391–402, December 1971.
- [46] R. De A. Martins. The origin of dimensional analysis. *Journal of The Franklin Institute*, **311**(1):331–337, 1981.
- [47] E. Buckingham. On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Phys. Rev.*, **4**(4):345–376, 1914.
- [48] H. L. Langhaar. *Dimensional Analysis and Theory of Models*, 3. Auflage. John Wiley & Sons, New York, 1957.

- [49] L. Brand. The Pi theorem of dimensional analysis. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **1**:35–45, 1957.
- [50] L. E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969.
- [51] E. Becker, W. Bürger. *Kontinuumsmechanik*, 1. Auflage. Teubner, Stuttgart, 1975.
- [52] I. R. Ionescu, M. Sofonea. *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, 1. Auflage. Oxford University Press, New York u. a., 1993.
- [53] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*, 1. Auflage. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [54] Th. Lehmann. Some thermodynamic considerations of phenomenological theory of non- isothermal elastic-plastic deformations. *Archive of Mechanics*, **24**(5-6):975–988, 1972.
- [55] Th. Lehmann. On the theory of large, non-isothermic, elastic-plastic and elastic-visco-plastic deformations. *Archive of Mechanics*, **29**(3):393–409, 1977.
- [56] Th. Lehmann. Coupling phenomena in thermoplasticity. *Nuclear Engineering and Design*, **57**(2):323–332, 1980.
- [57] H. Irschik, F. Ziegler. Dynamic processes in structural thermo-plasticity. *Applied Mechanics Reviews*, **48**(6):301–315, 1995.
- [58] B. D. Coleman, M. E. Gurtin. Thermodynamics with internal state variables. *J. Chem. Phys*, **47**(2), 1967.
- [59] G. A. Maugin. *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*, 1. Auflage. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [60] D. H. Allen. Thermomechanical coupling in inelastic solids. *Applied Mechanics Reviews*, **44**(8):361–373, 1991.
- [61] W. S. Farren, G. I. Taylor. The heat development during plastic extension of metals. *Proc. Roy. Soc.*, **A107**:422–451, 1925.
- [62] G. I. Taylor, H. Quinney. The latent energy remaining in a metal after cold work. *Proc. Roy. Soc.*, **143**:307–326, 1934.
- [63] M. B. Bever, D. L. Holt, A. L. Titchener. The Stored Energy Of Cold Work. In B. Chalmers, T. B. Massalski, Herausgeber, *Progress in Materials Science*, 17. Auflage. Pergamon Press, Oxford u. a., 1973.
- [64] S. R. Bodner, A. Lindenfeld. Constitutive modelling of the stored energy of cold work under cyclic loading. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **14**(3), 1995.
- [65] J.-L. Chaboche. Cyclic viscoplastic constitutive equations, part i: A thermodynamically consistent formulation. *J. Appl. Mech.*, **60**:813–821, 1993.

- [66] J.-L. Chaboche. Cyclic viscoplastic constitutive equations, part ii: Stored energy comparison between models and experiments. *J. Appl. Mech.*, **60**:822–828, 1993.
- [67] W. Lode. Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. *Z. Phys.*, **20**:913–939, 1926.
- [68] J. L. Chaboche. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, **5**:247–302, 1989.
- [69] P. Perzyna. The constitutive equations for rate sensitive plastic materials. *Quarterly of Applied Mathematics*, **20**:321–332, 1963.
- [70] A. A. Gukhman. *Introduction to the Theory of Similarity*, 1. Auflage. Academic Press, London, 1965.
- [71] E. Szücs. *Similitude and Modelling*, 1. Auflage. Elsevier, Amsterdam u. a., 1980.
- [72] J. Fukai, C. M. Megaridis, O. Miyatake, D. Poulikakos, Z. Zhao. Modeling of the deformation of a liquid droplet impinging upon flat surface. *Phys. Fluids.*, **5**(11):2588–2599, 1993.
- [73] J. Fukai, C. M. Megaridis, O. Miyatake, D. Poulikakos, Y. Shiiba, T. Yamamoto, Z. Zhao. Wetting effects on the spreading of a liquid droplet colliding with a flat surface: Experiment and modeling. *Phys. Fluids*, **7**(2):236–247, 1995.
- [74] T. Malmberg. unveröffentlichter Report, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1992.
- [75] L. I. Sedov. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, 10. Auflage. CRC Press, Boca Raton, 1993.
- [76] M. A. Meyers. *Dynamic Behaviour of Materials*, 1. Auflage. John Wiley & Sons, New York, 1994.
- [77] L. W. Meyer. *Werkstoffverhalten hochfester Baustähle unter einsinnig dynamischer Belastung*. Dissertation, Universität, Dortmund, 1982.
- [78] E. Schmidtman, D. Russell. Einfluß hoher Dehngeschwindigkeiten auf die Ausbildung der Streckgrenze ferritischer Stähle im Bereich tiefer Temperaturen. *Arch. Eisenhüttenwes.*, **43**(10):781–788, 1972.
- [79] R. W. K. Honeycombe. *The Plastic Deformation of Metals*, 2. Auflage. Edward Arnold Publishers Co., London, 1984.
- [80] W. Dahl, H. Rees. *Die Spannungs-Dehnungs-Kurve von Stahl*, 1. Auflage. Verlag Stahleisen, Düsseldorf, 1976.
- [81] G. T. van Rooyen. The stress and strain distribution in a propagating Lüders front accompanying the yield-point phenomenon in iron. *Materials Science and Engineering*, **3**:195–117, 1968/69.
- [82] G. T. van Rooyen. Basic factors which influence the Lüders strain during discontinuous yielding. *Mater. Sci. Eng.*, **7**:37–48, 1971.

- [83] C. J. Maiden, S. J. Green. Compressive strain-rate tests on six selected materials at strain rates from 10^{-3} , to 10^4 in/in/sec. *Journal of Applied Mechanics*, **33**:496–504, 1966.
- [84] W. Hufnagel. *Aluminiumschlüssel*, 4. Auflage. Aluminium-Verlag, Düsseldorf, 1991.
- [85] G. P. Sanderson, D. T. Llewellyn. Mechanical properties of standard austenitic stainless steels in the temperature range -196°C to $+800^{\circ}\text{C}$. *Journal of The Iron and Steel Institute*, **207**(8):1129–1140, 1969.
- [86] J. H. Hollomon. Tensile deformation. *Transactions of The Metallurgical Society of AIME*, **16**(2):268–290, 1949.
- [87] P. Ludwik. *Elemente der technologischen Mechanik*, 1. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, 1909.
- [88] W. Ramberg, W. R. Osgood. Description of stress-strain curves by three parameters. *NACA- TN 902*, 1943.
- [89] G. R. Johnson, J. M. Hoegfeldt, U. S. Lindholm, A. Nagy. Response of various metals to large torsional strains over a large range of strain rates - part 1: Ductile metals. *ASME Journal Of Engineering Materials And Technology*, **105**:42–47, 1983.
- [90] G. R. Johnson, J. M. Hoegfeldt, U. S. Lindholm, A. Nagy. Response of various metals to large torsional strains over a large range of strain rates - Part 2: Less Ductile Metals. *ASME Journal Of Engineering Materials And Technology*, **105**:48–53, 1983.
- [91] F. J. Zerilli, R. W. Armstrong. Dislocation-mechanis-based constitutive relations for material dynamics calculations. *Journal of Applied Physics*, **61**:1816–1825, 1987.
- [92] F. J. Zerilli, R. W. Armstrong. Description of tantalum deformation behaviour by dislocation mechanics based constitutive relations. *Journal of Applied Physics*, **68**:1580–1591, 1990.
- [93] F. J. Zerilli, R. W. Armstrong. The effect of dislocation drag on the stress-strain behaviour of f. c. c. metals. *Acta Metallurgica et Materialia*, **40**:1803–1808, 1992.
- [94] P. S. Follansbee, U. F. Kock. A constitutive description of the deformation of copper based on the use of the mechanical threshold stress as an internal state variable. *Acta Metallurgica*, **36**:81–93, 1988.
- [95] L. Sachs. *Angewandte Statistik*, 5. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [96] J. L. M. Morrison. The yield of mild steel with particular reference to the effect of size of specimen. *Proc. of the Inst. of Mech. Eng.*, **142**(1):193–223, 1939.
- [97] P. H. Thornton. Static and dynamic collapse characteristics of scale model corrugated tubular sections. *Journal of Engineering Materials and Technology*, **97**(4):375–362, 1975.
- [98] C. W. Richards. Size effect in the tension of mild steel. *Proc. Am. Soc. Test. Mater.*, **54**:995–1000, 1954.
- [99] C. W. Richards. Effect of size on the yielding of mild steel beams. *Proc. Am. Soc. Test. Mater.*, **58**:955–970, 1958.

- [100] C. Schneider. *Untersuchungen zur Erfassung der senkrechten Anisotropie $\gg r \ll$ und des Verfestigungsexponenten $\gg n \ll$ von Blechen zur Kaltumformung*. Dissertation, Technische Hochschule Berlin, 1967.
- [101] W. C. Young. *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 6. Auflage. McGraw-Hill Book Company, Planet Earth, 1989.
- [102] L. D. Landau, E. M. Lifschitz. *Hydrodynamik*, 5. Auflage. Akad.-Verl., Berlin, 1991.
- [103] I. Szabo. *Einführung in die technische Mechanik*, 15. Auflage. Springer, Berlin u. a., 1984.
- [104] W. S. Gosset (Student). The probable error of a mean. *Biometrika*, **6**, 1908.
- [105] I. E. Idelcik. *Handbook of Hydraulic Resistance*, 2. Auflage. Hemisphere Publ., Washington u. a., 1986.
- [106] H. Opitz, R. Schmalfuß, G. Nicht, K. Kraft, W. Marby, H. Seifert, K. Horn. *Allgemeine Werkstoffkunde für Ingenieurschulen*, 7. Auflage. VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1973.
- [107] N. A. Fleck, G. M. Muller, M. F. Ashley, J. W. Hutchinson. Strain Gradient Plasticity: Theory and Experiment. *Acta Metall. Mater.*, **42**(2):475–487, 1994.
- [108] H. M. Zbib. Strain gradients and size effects in nonhomogeneous plastic deformation. *Scripta Metall. & Mater.*, **30**(9):1223–1226, 1994.
- [109] H. B. Mühlhaus, E. C. Aifantis. A variational principle for gradient plasticity. *Int. J. Sol. & Struct.*, **28**(7):845–857, 1991.
- [110] H. M. Zbib, E. C. Aifantis. On The Structures and Width of Shear Bands. *Scripta Metallurgica*, **22**:703–708, 1988.
- [111] H. M. Zbib, E. C. Aifantis. A Gradient-Dependent Model for the Portevin-le Chatelier Effect. *Scripta Metallurgica*, **22**:1331–1336, 1988.
- [112] H. T. Zhu, H. M. Zbib, E. C. Aifantis. On the role of strain gradients in adiabatic shear banding. *Acta Mechanica*, **111**:111–124, 1995.
- [113] T. Malmberg. Aspects of Similitude Theory in Solid Mechanics - Part I: Deformation Behaviour. Tech. BerichtFZKA 5657, Forschungszentrum Karlsruhe - Technik und Umwelt, 1995.
- [114] S. Kaliszky. *Plastizitätslehre - Theorie und technische Anwendungen*, 1. Auflage. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1984.
- [115] W. Beitz, K.-H. Küttner, Herausgeber. *Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau*, 18. Auflage. Springer-Verlag, Berlin u. a., 1995.
- [116] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2. Auflage. Cambridge University Press, Cambridge u. a., 1992.
- [117] N. Wiener. A new theory of measurement: a study in the logic of mathematics. *Proc. London Math. Soc.*, **19**:181–205, 1919.

- [118] H. Görtler. Die Grundlagen der Theorie der physikalischen Dimensionen. *ZAMM*, **46**:T3–T10, 1966.
- [119] P. W. Bridgman. *Theorie der physikalischen Dimensionen*, 1. Auflage. Teubner, Leipzig, 1932.
- [120] H. Görtler. *Dimensionsanalyse*, 1. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.
- [121] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*, 22. Auflage. Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/M, 1985.
- [122] E. H. Lee. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, **36**(1):1–6, 1969.

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Doktorand am Institut für Reaktorsicherheit des Forschungszentrums Karlsruhe.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. Dr. h.c. D.G. Cacuci, unter dessen Leitung diese Arbeit entstand. Weiterhin danke ich Herrn Professor Dr.-Ing. Müller und Herrn Professor Dr.-Ing. Wauer für die Übernahme des Korreferats.

Für die Initiierung und die intensive Betreuung der Arbeit danke ich Herrn Dr. R. Krieg und Herrn Dr. T. Malmberg, der durch kritische Anmerkungen und Vorschläge wesentlich zum Gelingen beigetragen hat und durch aufmerksames Korrekturlesen für die Beseitigung zahlreicher Druckfehler gesorgt hat. Dem Personal der Institutswerkstatt sei für die Herstellung der Versuchseinrichtungen und die, wenn nötig, prompte Erledigung zahlreicher Eilaufträge herzlich gedankt. Allen Kolleginnen und Kollegen danke ich dafür, daß sie ein angenehmes Umfeld für meine Arbeit geschaffen haben.

Nicht zuletzt danke ich meinen Eltern für die immerwährende Förderung und Unterstützung, die sie mir haben zukommen lassen.