

# Budget-Allokation

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN

Doctor rerum politicarum (Dr. rer. pol.)

an der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften

der Universität Fridericiana zu Karlsruhe

genehmigte

DISSERTATION

von

**Dipl.-Wirtschaftsing. Jens Müller**

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juli 2002  
Erstreferent: Prof. Dr. D. Pallaschke  
Korreferent: Prof. Dr. K. Neumann  
Drittreferent: Dr. habil. S. Scholtes

Karlsruhe, im November 2002

Ach! was in tiefer Brust uns da entsprungen,  
Was sich die Lippe schüchtern vorgelallt,  
Mißraten oft und jetzt vielleicht gelungen,  
Verschlingt des wilden Augenblicks Gewalt,  
Oft, wenn erst durch Jahre durchgedrungen,  
Erscheint es in vollendeter Gestalt.  
Was glänzt, ist für den Augenblick geboren;  
Das Echte bleibt der Nachwelt unverloren.

J.W.Goethe, Faust

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
Notation . . . . .	3
<b>1 Grundlagen</b>	<b>4</b>
1.1 Input-Output-Matrizen . . . . .	5
1.2 Preissysteme . . . . .	6
1.3 Technologiemenge . . . . .	11
<b>2 Allokationsmechanismen</b>	<b>14</b>
2.1 Grundlegende Axiome . . . . .	14
2.2 Effizienzanalyse . . . . .	17
2.2.1 Charakterisierung von Effizienz . . . . .	17
2.2.2 Effizienzmaß . . . . .	19
2.2.3 Einheitliche Bewertung . . . . .	29
2.3 Spieltheoretisches Lösungskonzept . . . . .	30
2.3.1 Dominanz . . . . .	31
2.3.2 Lösungsmengen . . . . .	33
2.3.2.1 Core . . . . .	34
2.3.2.2 Dynamische Lösungen . . . . .	35

2.4	Allokationsmechanismus . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Allokationsmodell</b>	<b>39</b>
3.1	Spezifikation der Technologiemenge . . . . .	39
3.1.1	Interpretation von Preismatrizen . . . . .	40
3.1.2	Empirische Technologiemenge . . . . .	41
3.2	Schwach effiziente Allokationen . . . . .	42
3.3	Ausgewogene Allokationen . . . . .	49
3.3.1	Kollektionsstruktur $CS = \{N\}$ . . . . .	50
3.3.2	Beliebige Kollektionsstrukturen . . . . .	54
3.4	Allokationsverfahren . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Analyse des Allokationsverfahrens</b>	<b>58</b>
4.1	Mathematische Grundlagen . . . . .	59
4.1.1	Nicht-differenzierbare Optimierung . . . . .	59
4.1.2	Lösungsmatrizen . . . . .	61
4.2	Analyse des Optimierungsproblems . . . . .	63
4.3	Analyse der Koalitionsbildung . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Algorithmen</b>	<b>89</b>
5.1	Tiptap-Algorithmus . . . . .	90
5.2	Konvergenzanalyse . . . . .	93
5.2.1	Positive Eigenvektoren . . . . .	95
5.2.2	Nicht-negative Eigenvektoren . . . . .	106
5.2.3	Numerische Analyse . . . . .	108
<b>A</b>	<b>Absente Beweise</b>	<b>110</b>

<b>B</b>	<b>Axiomatische Ergänzung</b>	<b>114</b>
<b>C</b>	<b>Transformierte Technologiemenge</b>	<b>118</b>
<b>D</b>	<b>Beispiele</b>	<b>121</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>123</b>
	<b>Index</b>	<b>129</b>

# Symbolverzeichnis

$(\cdot)^\top$	transponierte(r) Matrix (Vektor)
$\ \cdot\ $	Norm
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{R}^n$	$n$ -dimensionaler Vektorraum
$\mathbb{R}_+^n$	$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$
$\mathbb{R}_{++}^n$	$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x > 0\}$
$int(\cdot)$	relative Innere einer Menge
$clos(\cdot)$	Abschluß einer Menge
$convhull(\cdot)$	Konvexe Hülle einer Menge
$e$	$(1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$
$e_k$	$k$ -ter Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$
$N$	$\{1, \dots, n\}$
$f'(x, d)$	Richtungsableitung von $f$ in $x$ in Richtung $d$
$f^\circ(x, d)$	Clarkesche-Richtungsableitung von $f$ in $x$ in Richtung $d$
$\partial f(x)$	Clarkesche-Subdifferential von $f$ in $x$
$CS$	Kollektionsstruktur
$S$	Menge zulässiger Allokationen

$X$	Menge schwach effizienter Allokationen
$Y(\cdot)$	Menge ausgewogener Allokationen einer Kollektionsstruktur
$Z(\cdot)$	Menge der Allokationen einer Kollektionsstruktur
$\mathcal{T}$	Technologiemenge
$\mathcal{T}^v, \mathcal{T}(b)$	variable Technologiemenge
$\partial(\cdot)$	Pareto-Rand einer Menge
$EF(\cdot)$	effiziente Linie einer Menge
$\mathcal{C}$	Core
$D$	dynamische Lösung

# Abkürzungsverzeichnis

DEA	Data Envelopment Analysis
DMU	Organisationseinheit (decision making unit)
FNF	Frobenius-Normal-Form
I-O-Matrix	Input-Output-Matrix
O.B.d.A.	Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Ineffizienz . . . . .	20
2.2	Ineffizienz als Effizienz . . . . .	21
2.3	Effizienzüberschuss . . . . .	22
2.4	Blockierung des Effizienzmaßes . . . . .	23
2.5	Effizienzmaß und Gestalt von $\mathcal{T}^v$ . . . . .	25
2.6	Allokationsbaum AT . . . . .	27
2.7	Änderung der Kollektionsstruktur . . . . .	31
C.1	Transformierte Technologiemenge $\mathcal{T}^T(b)$ . . . . .	119

# Einleitung

In (nicht-) staatlichen Organisationen und privatwirtschaftlichen Unternehmen wird in diversen ökonomischen Situationen die Allokation eines Budgets auf *Organisationseinheiten* (*DMUs: decision making units*) vorgenommen. Bei den DMUs handelt es sich beispielsweise um Krankenhäuser, Universitäten oder Abteilungen in Unternehmen. Grundlage der Verteilung bilden häufig jährliche Budgetierungsvorhaben von Ministerien (z.B. Gesundheits- oder Bildungsministerium) oder leitenden Abteilungen.

Beim ökonomischen Problem *Budget-Allokation* werden  $n$  konkurrierende DMUs betrachtet. Jede dieser DMUs verbraucht im Produktionsprozess  $s$  verschiedene Güter und Dienstleistungen (*Input*), um  $t$  Güter und Dienstleistungen zu produzieren (*Output*). Die Input-Output-Struktur ist homogen, d.h. alle DMUs haben die gleichen, nur in der Höhe variierenden Input und Output. Die Güter und Dienstleistungen werden nicht auf Märkten gehandelt, so dass keine Preise zur Effizienzanalyse zur Verfügung stehen. Im Rahmen der Leistungserstellung erhalten die DMUs einen Anteil des Gesamtbudgets, der im Allokationsmodell als zusätzliche Inputkomponente angesehen wird.

Das Ziel der Arbeit ist, Mechanismen für eine leistungsorientierte Allokation des Budgets zu entwickeln, in die eine Effizienzanalyse integriert wird und die einer axiomatischen Formulierung des Allokationsproblems genügt.

Das Allokationsmodell soll

- die Präferenz *Budgetmaximierung* der DMUs berücksichtigen,
- ein Anreizsystem zur Effizienzsteigerung schaffen,
- eine einheitliche Evaluierung der Effizienz gewährleisten.

Obwohl Budget-Allokationen zahlreich in der Praxis durchgeführt werden, existiert für mehrdimensionale Input-Output-Vektoren in der Literatur bisher kein Modell.

In dieser Arbeit werden Mechanismen für die Allokation eines Budgets entwickelt und analysiert. Hierzu erfolgt einleitend die Charakterisierung der notwendigen Daten und der Technologiemengen. In Kapitel 2 werden Allokationsmechanismen durch axiomatisch konzipierte Budget-Allokations-Funktionen und eine integrierte Effizienzanalyse definiert. Zur Bewertung der DMUs wird ein Effizienzmaß entwickelt, das den koalitionalen Einfluss auf die Gestalt der Technologiemenge misst und den Statuswechsel von effizient zu ineffizient berücksichtigt. Für die Abhängigkeit der Allokation von den Koalitionen werden spieltheoretische Lösungen eines abstrakten Spiels formuliert. Die Spezifikation einer Ökonomie führt in Kapitel 3 zu einem konkreten Modell für die Allokation des Budgets. Hierin setzen sich ausgewogene Allokationen in der dualen Budgetgleichung aus den Eigenvektoren zu den Spektralradien von Lösungsmatrizen zusammen. Zur Berechnung der Allokationen muss ein nicht-differenzierbares und nicht konvexes Optimierungsproblem gelöst werden, welches in Kapitel 4 analysiert wird. In Kapitel 5 wird ein Algorithmus entwickelt und eine Konvergenzanalyse durchgeführt. Insbesondere wird die Endlichkeit des Algorithmus bewiesen.

## Notation

In dieser Arbeit werden Skalare und Vektoren durch kleine griechische und lateinische Buchstaben dargestellt. Für Matrizen werden lateinische Großbuchstaben verwendet. Vektoren können sowohl als Zeilenvektoren als auch als Spaltenvektoren definiert werden. Transponierte eines Vektors oder einer Matrix werden durch  $(\cdot)^\top$  gekennzeichnet. Für eine Matrix  $A$  bezeichnet  $a_k$  den  $k$ -ten Zeilenvektor.

$\mathbb{R}^n$  bezeichnet den  $n$ -dimensionalen, euklidischen Vektorraum. Eingeschränkt auf die nicht-negativen (positiven) Elemente wird die Notation  $\mathbb{R}_+^n$  ( $\mathbb{R}_{++}^n$ ) verwendet. Der  $k$ -te Einheitsvektor wird mit  $e_k$  angegeben. Mit  $e$  wird der Vektor notiert, der nur aus Einsen besteht. Außerdem wird die Mengenbezeichnung  $N = \{1, \dots, n\}$  festgelegt.

Subskripts werden für Komponenten von Vektoren oder vektorwertigen Funktionen verwendet. Für eine Teilmenge  $I \subset N$  repräsentiert  $b_I$  alle Komponenten des Vektors  $b$  der Teilmenge  $I$ . Das Gleiche gilt für vektorwertige Funktionen. Das Element in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte einer Matrix  $A$  wird mit dem Subskript  $i, j$  indiziert und durch  $a_{i,j}$  angegeben. Für  $I, J \subset N$  ist  $A_{I,J}$  die Submatrix von  $A$ , die aus den Zeilen  $i \in I$  und Spalten  $j \in J$  besteht. Iterationsnummern werden durch geklammerte Superskripts  $(\cdot)^{(k)}$  wiedergegeben.

Die Relationen  $\leq$  und  $\geq$  werden auch für Vektoren verwendet, wobei  $x \leq y$  ( $x \geq y$ ) erfüllt ist, wenn die Relation in allen Komponenten der Vektoren gilt. Für  $x \leq (\geq)y$  und  $x \neq y$  wird bei Vektoren die verkürzte Schreibweise  $x \lesseqgtr (\gtrless)y$  benutzt.

Bei Mengenoperationen bezeichnet  $\cup$  die Vereinigung,  $\cap$  die Schnittmenge und  $\setminus$  den Ausschluss.

Mit  $\|\cdot\|$  wird eine beliebige Norm bezeichnet. Ist die Norm indiziert, dann bezeichnet  $\|\cdot\|_1$  die  $l_1$ -Norm,  $\|\cdot\|_2$  die  $l_2$ -Norm und  $\|\cdot\|_\infty$  die  $l_\infty$ -Norm.

# Kapitel 1

## Grundlagen

Das ökonomische Problem *Budget-Allokation* ist durch die Frage gekennzeichnet, wie ein festes, vorgegebenes *Budget*  $\beta \in \mathbb{R}_{++}$  leistungsorientiert auf eine beliebige Anzahl von DMUs verteilt werden kann. Die  $n$  DMUs werden durch ihre nicht auf Märkten gehandelten Input und Output charakterisiert. Es stehen keine Preise für die Bewertung der Wirtschaftlichkeit zur Verfügung. Die Möglichkeit, Preisverhältnisse zu beschränken, soll im Modell jedoch gegeben sein.

Eine *Allokation* ist somit eine Aufteilung des Budgets  $\beta$ , d.h. ein Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$  mit

$$\sum_{k=1}^n b_k = \beta,$$

wobei  $b_k$  den *Budgetanteil* der DMU  $k$  für  $k \in N = \{1, \dots, n\}$  angibt. Die Allokation soll leistungsorientiert vorgenommen werden. Die erforderliche Analyse der Wirtschaftlichkeit wird durch eine Bewertung der Input-Output-Daten der DMUs vorgenommen. Hierfür wird die Technologiemenge benötigt, durch die effiziente Input-Output-Kombinationen festgelegt sind.

In diesem Kapitel werden die für die Entwicklung von Allokationsmechanismen notwendigen Daten aufgeführt. Dies sind die *Input und Output* der DMUs, die möglichen *Beschränkungen der marginalen Substitutionsraten* und die *Technologiemengen*.

## 1.1 Input-Output-Matrizen

Die DMUs werden durch eine homogene Input-Output-Struktur vollständig beschrieben. Eine DMU  $k$  wird durch einen im Produktionsprozess verbrauchten Input-Vektor  $x_k \in \mathbb{R}_+^s$  und einen erzeugten Output-Vektor  $y_k \in \mathbb{R}_+^t$  repräsentiert. Für  $k \in N$  wird der Zeilenvektor

$$a_k = (-x_k^\top, y_k^\top) \in \mathbb{R}^{1 \times (s+t)}$$

definiert und in der *Datenmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

mit  $m = s + t$  zusammengefasst. Die Datenmatrix hat hiermit folgende Gestalt:

	Input 1 (negativ)	⋯	Input $s$ (negativ)	Output 1	⋯	Output $t$
DMU 1	$a_{1,1}$	⋯			⋯	$a_{1,m}$
DMU 2	$a_{2,1}$		⋯			$a_{2,m}$
⋮	⋮			⋯		⋮
DMU $n$	$a_{n,1}$	⋯			⋯	$a_{n,m}$

Ein Eintrag  $a_{k,i} > 0$  bedeutet, dass die DMU  $k$  insgesamt  $a_{k,i}$  Einheiten des Outputs  $i$  produziert, während  $a_{k,j} < 0$  den Verbrauch von  $a_{k,j}$  Einheiten des Inputs  $j$  im Produktionsprozess symbolisiert. Alle für die Bewertung der Wirtschaftlichkeit relevanten Daten werden als bekannt angenommen.

Um bei der Analyse der Wirtschaftlichkeit konsistente Ergebnisse erzielen zu können, wird die Menge der zulässigen Datenmatrizen gemäß der folgenden Definition eingeschränkt.

**Definition 1.1.1** Für  $k \in N$  sei  $x_k \in \mathbb{R}_+^s$  ein Input- und  $y_k \in \mathbb{R}_+^t$  ein Outputvektor. Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mit den Zeilenvektoren  $a_k = (-x_k^\top, y_k^\top)$  heißt Input-Output-Matrix (I-O-Matrix), falls die Eigenschaften

1. (Positivität):  $\forall k \in N: y_k \neq 0$

2. (Kein Monopolist):  $\forall l \in \{1, \dots, m\} \exists i, j \in N, i \neq j: a_{i,l} \neq 0, a_{j,l} \neq 0$

3. (Vergleichbarkeit):  $\exists$  Permutationsmatrizen  $P$  und  $Q$ , so dass

$$PAQ = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

erfüllt sind. Die Menge aller I-O-Matrizen wird mit  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n \times m}$  bezeichnet. Ist  $x_k = 0$  für alle  $k \in N$ , dann heißt  $A \in \mathcal{M}$  Output-Matrix (O-Matrix).

In ökonomischen Analysen wird generell gefordert, dass ohne Input kein Output erzeugt werden kann, vgl. z.B. Dyckhoff [19]. Von diesem Prinzip soll auch in diesem Modell nicht abgewichen werden. Da aber das Budget als zusätzliche Inputkomponente angesehen wird, können bei der Definition der Datenmatrizen auch *reine* Output-Matrizen zugelassen werden. Von der Situation, in der eine DMU Input verbraucht, aber keinen Output erstellt, soll abgesehen werden, da solchen DMUs in einem Allokationsmodell ein negativer Budgetanteil zugewiesen werden müsste. Durch die Positivität werden ebenfalls DMUs ausgeschlossen, die weder Input noch Output aufweisen, da sie einen Budgetanteil von Null erhielten. Alle Nullzeilen einer Datenmatrix werden zur Konstruktion einer I-O-Matrix eliminiert.

Eine Wirtschaftlichkeitsanalyse verlangt die Homogenitäten der Input-Output-Struktur. Daten, bei denen entweder Monopolisten auftreten oder die das Axiom der Vergleichbarkeit verletzen, müssen wegen der Unvergleichbarkeit der DMUs ausgeschlossen werden. Ein Monopolist ist in einer Komponente nicht mit anderen DMUs vergleichbar. Bei einer nicht vergleichbaren Datenmatrix kann die Menge der DMUs in disjunkte Teilmengen mit unterschiedlichen Produktionsprozessen zerlegt werden. In beiden Fällen lassen sich die DMUs durch die Inhomogenität anhand ihrer Input und Output nicht vollständig analysieren. Die Forderungen stellen somit eine vernünftige Einschränkung der Daten dar.

## 1.2 Preissysteme

In den Allokationsmechanismen wird angenommen, dass keine Preise für die Input und Output zur Verfügung stehen, da sie nicht auf Märkten gehandelt werden. Es soll aber möglich sein, Beschränkung der Preisverhältnisse in die

Mechanismen zu integrieren.

Zunächst wird die ökonomische Situation betrachtet, in der sich für handelbare Güter und Dienstleistungen ein Markt-Gleichgewicht von Angebot und Nachfrage mit abitragefreien Gleichgewichtspreisen bildet. Zur Gleichgewichtstheorie wird z.B. auf Mas-Colell [36] verwiesen. Ist  $q \in \mathbb{R}_{++}^s$  ( $r \in \mathbb{R}_{++}^t$ ) der Preisvektor der Input (Output) (wobei  $q_i$  ( $r_j$ ) den Preis für die  $i$ ( $j$ )-te Input-(Output)-Komponente angibt), dann implizieren die Gleichgewichtspreise  $p = (q, r) > 0$  die Allokation  $b$  mit den Komponenten

$$b_k = a_k p = y_k^\top r - x_k^\top q.$$

Diese Allokation begründet sich folgendermaßen. Die *Wirtschaftlichkeit* einer DMU wird durch das bewertete Verhältnis von Output zu Input

$$\text{Wirtschaftlichkeit} = \frac{\text{bewerteter Output}}{\text{bewerteter Input}}$$

ausgedrückt. In der Literatur werden hierfür ebenfalls die Begriffe *Produktivität*, *Leistungsfähigkeit*, etc. verwendet, vgl. z.B. Grochla et al. [25]. Auf eine terminologische Auseinandersetzung wird in der Arbeit verzichtet. In Kapitel 2.2.1 wird für die Bewertung der DMUs der Begriff *Effizienz* definiert.

Wird das Budget als zusätzliche Inputkomponente angesehen und als Maß für die Wirtschaftlichkeit der DMU  $k$  der Quotient aus über die Preise gewichteter Output zu Input gebildet, dann implizieren die Gleichgewichtspreise die Beziehung

$$\frac{y_k^\top r}{b_k + x_k^\top q} = 1, \quad \forall k \in N.$$

In abitragefreien Ökonomien mit existierenden Gleichgewichtspreisen und handelbaren Gütern wird das Problem *Budget-Allokation* implizit über die Märkte gelöst.

Der normierte Preisvektor  $\bar{p} = \frac{1}{\gamma} p$  mit  $\gamma = \sum_{i=1}^n a_i p$  führt zur *Budgetgleichung*

$$b = A\bar{p} \tag{1.1}$$

mit  $b \in \mathbb{R}^n$ . Die Allokation nach der Budgetgleichung (1.1) gewährleistet eine einheitliche Bewertung der Wirtschaftlichkeit aller DMUs.

Da die Güter und Dienstleistungen in der zugrundeliegenden Ökonomie nicht auf Märkten gehandelt werden, stehen keine Preise zur Verfügung. Eine Einigung der DMUs auf Preise würde das Problem lösen und eine Allokation nach

der Budgetgleichung (1.1) implizieren. Konkurrierende DMUs werden sich in einem Verhandlungsmodell jedoch nicht auf Preise verständigen. Vielmehr wird jede DMU einen Preisvektor anstreben, der ihren Budgetanteil maximiert. Ebenso erscheint exogene Festlegung von Preisen fragwürdig, da eine DMU beliebig festgelegten Preisen widersprechen kann, indem sie die Diskrepanz zwischen den durch die Preisverhältnisse implizierten Austauschraten und der Realität in den Produktionsprozessen aufzeigt. Allgemein wird eine DMU Preisen  $p > 0$  nicht zustimmen, falls sie einen Preisvektor  $\hat{p} > 0$  angeben kann, der ihr einen höheren Budgetanteil sichert. Diese Situation wird an einem Beispiel erläutert.

**Beispiel 1.2.1** Als Output-Matrix sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 100 & 1 \end{pmatrix},$$

gegeben. Mit einem Preisvektor  $p = (p_1; p_2)$  ist aus der Budgetgleichung (1.1) zu erkennen, dass  $b_1 = a_1 \bar{p}$  mit dem Preisverhältnis  $p_2/p_1$  steigt. Für DMU 2 gilt der Zusammenhang für den reziproken Quotienten. DMU 1 wird also ein hohes Preisverhältnis  $p_2/p_1$  bevorzugen, während DMU 2 diesen Quotienten so klein wie möglich wählen wird. Die DMUs werden sich folglich nicht auf Preise einigen.

Obwohl eine Einigung der DMUs auf Preise im Allgemeinen nicht erreicht werden kann, ist eine Verständigung auf eine Menge zulässiger Preise möglich. Diese Menge basiert auf Beschränkungen der Preisverhältnisse, die eine Analyse der Produktionsprozesse voraussetzt. Handelt es sich bei der O-Matrix des Beispiels 1.2.1 um zwei wissenschaftliche Institute, von denen die Anzahl der Veröffentlichungen in einem hochrangigen internationalen Journal und die Anzahl der Studenten einer Vordiplomsklausur angegeben sind, so ist eine höhere Gewichtung der ersten Komponenten offensichtlich. Zwar kann kein eindeutiges Preisverhältnis festgelegt werden, aber eine Beschränkung der Intervallgrenzen zulässiger Preisverhältnisse ist realisierbar. Die optionale Wahl der Beschränkung von Preisverhältnissen ist bedeutend für die Allokationsmechanismen.

Preisverhältnisse sind marginale Substitutionsraten für Güter und Dienstleistungen, deren Beschränkungen in der Form

$$0 < \gamma \leq \frac{p_i}{p_j} \leq \delta$$

mit  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$  festgelegt werden. Hierbei geben  $p_i$  und  $p_j$  die Preise der Güter  $i$  und  $j$  an. Die folgenden Ausführungen gehen auf Kuntz und Scholtes [31] zurück. Beschränkungen der marginalen Substitutionsraten sind bei positiven Preisen äquivalent zu den homogenen Ungleichungen

$$\gamma p_j - p_i \leq 0, \quad p_i - \delta p_j \leq 0.$$

Die Preisrestriktionen können als Zeilen einer Matrix zusammengefasst werden. Hierfür wird folgende Definition eingeführt.

**Definition 1.2.1 (Kuntz und Scholtes [31])** *Eine Matrix  $P \in \mathbb{R}^{q \times m}$  heißt Preismatrix, falls ein Preisvektor  $p > 0$  mit  $Pp < 0$  existiert. Die Menge*

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{R}^m \mid Pp \leq 0, p \geq 0\}$$

*heißt Preissystem. Ein Preissystem ist die Menge aller zulässigen Preise. Die Menge aller Preismatrizen wird mit  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{q \times m}$  und die Menge aller Preissysteme mit  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^m$  bezeichnet.*

In ökonomischen Situationen, in denen keine Beschränkungen der marginalen Substitutionsraten abgeleitet werden können, wird die Preismatrix  $P$  gleich der Nullmatrix gewählt und das Preissystem auf die Menge aller nicht-negativen Preise beschränkt. Die Beschränkungen der Substitutionsraten sind nur dann sinnvoll formuliert, falls ein Preissystem nicht leer ist, d.h.  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ . Anderenfalls widersprechen sich die Beschränkungen und kein Preisvektor kann die Ungleichungen erfüllen. Aus technischen Gründen darf ein Preissystem kein leeres Inneres haben, was aber keine Einschränkung der Daten darstellt. Zum einen ist dies generisch erfüllt, zum anderen erlauben feste Austauschraten ( $\gamma = \delta$ ) die Substitution von Komponenten der I-O-Matrix im bekannten Verhältnis.

Auch bei exogener Festlegung eines Preissystems ist mit Einspruch seitens der DMUs zu rechnen. Die Durchsetzbarkeit eines Preissystems hängt von den Machtverhältnissen zwischen den DMUs und der übergeordneten Instanz ab, welche die Verteilung des Budgets vornimmt. In privatwirtschaftlichen Unternehmen kann diese Instanz ein Preissystem auch gegen den Einspruch einiger DMUs durchsetzen. Müssen sich konkurrierende DMUs auf Preisbeschränkungen einigen, ist die Zustimmung einer DMU zu einem für sie nachteiligen Preissystem unwahrscheinlich.

DMU  $k$  widerspricht einem Preissystem, falls alle zulässigen Preise  $p \in \mathcal{P}$  die Ungleichung  $a_k p \leq 0$  erfüllen. In diesem Fall erhält DMU  $k$  in einem Allokationsmodell kein Budget, da nach der Budgetgleichung (1.1) kein zulässiger Preis einen positiven Budgetanteil rechtfertigt. Für die weiteren Analysen wird folgende Annahme getroffen.

**Annahme (A1)** Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix und  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem, dann gilt:

$$\forall k \in N \exists p \in \mathcal{P} : a_k p > 0.$$

Um Annahme (A1) zu erfüllen, ist prinzipiell nur eine a priori Selektion von DMUs erforderlich. Diese Auswahl kann beispielsweise mit Hilfe des linearen Programms

$$\begin{array}{ll} \max & a_k p \\ \text{unter} & p \in \mathcal{P} \end{array}$$

getroffen werden. DMU  $k$  erfüllt die Anforderungen von Annahme (A1) genau dann, wenn der optimale Zielfunktionswert des linearen Programms größer als Null ist.

Diese Selektion ist nicht erforderlich, falls die marginalen Substitutionsraten nicht über unterschiedliche Produktionsstufen beschränkt werden. Annahme (A1) ist in diesem Fall immer erfüllt, da die Preismatrix (nach geeigneter Permutation) die Form

$$P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

hat. Für eine Preismatrix dieser Gestalt und ein  $p \in \mathcal{P}$  mit  $p = (q, r) > 0$  ist für  $c > 0$  auch  $\hat{p} = (cq, r) \in \mathcal{P}$ . Ist  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix, dann existiert wegen der Positivität der Output-Vektoren für jeden Vektor  $a_k = (-x_k^\top, y_k^\top)$  ein hinreichend kleines  $c > 0$ , so dass

$$a_k \hat{p} = -cx_k^\top q + y_k^\top r > 0.$$

In den weiteren Betrachtungen wird die Gültigkeit der Annahme (A1) für die I-O-Matrix  $A \in \mathcal{M}$  und das Preissystem  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  vorausgesetzt.

### 1.3 Technologiemenge

Aussagen über die Leistungsfähigkeit einer DMU erfordern Kenntnisse über die technologische Möglichkeiten, einen Produktionsprozess zu variieren. Diese Information ist in der *Technologiemenge* enthalten, die auch *Menge an Produktionsmöglichkeiten* oder *Produktionsraum* genannt wird. Die Ausführungen und Begriffe dieses Kapitels sind der gängigen Literatur zu entnehmen, z.B. Dyckhoff [19] oder Shephard [56].

Die Technologiemenge ist durch alle möglichen Input-Output-Kombinationen bestimmt, d.h.

$$\{ (x^\top, y^\top) \mid y \text{ kann durch } x \text{ erzeugt werden} \}.$$

Formal ergibt sich folgende Definition, vgl. z.B. Dyckhoff [19] oder Shephard [56].

**Definition 1.3.1** Sei  $x \in \mathbb{R}_+^s$  ein Input-Vektor,  $y \in \mathbb{R}_+^t$  ein Output-Vektor und  $\Omega : \mathbb{R}_+^s \rightarrow \mathbb{R}_+^t$  eine stetige, monotone Abbildung (Produktionsfunktion) mit  $\Omega(0) = 0$ . Die Menge

$$\mathcal{T} = \{ (x^\top, y^\top) \in \mathbb{R}^{1 \times m} \mid y \leq \Omega(x) \}$$

heißt Technologiemenge.

Die Definition des Produktionsraums impliziert eine abgeschlossene und einfach zusammenhängende Menge. Außerdem wird in einer Technologiemenge festgelegt, dass ohne Input prinzipiell kein Output erzeugt und bei vorhandener Technologie und gegebenem Input  $x$  maximal  $\Omega(x)$  (aber auch weniger) produziert werden kann.

Im Allgemeinen ist die Technologiemenge einer Ökonomie unbekannt und es ist unmöglich, vollständige Informationen über die Menge an Produktionsmöglichkeiten zu erhalten. In diesem Fall ist man gezwungen, den Produktionsraum parametrisch oder empirisch zu approximieren. Für die parametrische Schätzung der Produktionsfunktion existieren diverse Ansätze. Hierfür wird z.B. auf Aigner et al. [1], Bauer [7], Greene [24] oder Fried et al. [23] verwiesen. Empirische Approximationen von Technologiemengen sind die *Free Disposal Hull (FDH)*, die auf Deprins et al. [18] zurückgeht, oder die *DEA-basierten Technologiemengen*, deren Grundlage von Koopmans [30],

Farrel [21] und Shephard [56] geschaffen wurde. Die empirischen Verfahren approximieren die Technologiemenge über die vorhandene Datenbasis, die durch die I-O-Matrix und das Preissystem gegeben ist. Mit der FHD werden nicht konvexe Technologiemengen konstruiert, während DEA-basierte Ansätze konvexe Technologiemengen erzeugen. Es existieren ebenfalls Modelle, die beide Vorgehensweisen miteinander kombinieren. Simar und Wilson [57] verwenden das *Bootstrap-Verfahren* zur Konstruktion von Produktionsräumen.

Die Produktionsfunktion  $\Omega(x)$  determiniert den Rand  $\partial\mathcal{T}$  der Technologiemenge, der durch die Menge

$$\partial\mathcal{T} = \{ (x^\top, y^\top) \in \mathcal{T} \mid \nexists (\tilde{x}^\top, \tilde{y}^\top) \in \mathcal{T} : (-\tilde{x}^\top, \tilde{y}^\top) \succeq (-x^\top, y^\top) \}$$

beschrieben wird, vgl. z.B. Shephard [56]. Der Rand der Technologiemenge wird auch als *effiziente Linie* (*EF: efficient frontier*)

$$EF(\mathcal{T}) = \partial\mathcal{T}$$

bezeichnet.

Technologiemengen können durch ihre Charakteristika beschrieben werden. Diese sind wesentliche Bestandteile der zu analysierenden Ökonomie und müssen bei der Approximation berücksichtigt werden. Die Ausführungen dieses Abschnittes sind Neumann [39] entnommen. Zu den Eigenschaften zählen die *Teilbarkeit* der Produktionsmenge, d.h.

$$0 \leq \mu \leq 1, z \in \mathcal{T}, \text{ dann } \mu z \in \mathcal{T},$$

und die *Additivität*, d.h.

$$z_1, z_2 \in \mathcal{T}, \text{ dann } z_1 + z_2 \in \mathcal{T}.$$

Die Teilbarkeit einer Technologiemenge impliziert die *Konvexität* von  $\mathcal{T}$ , d.h.

$$z_1, z_2 \in \mathcal{T} \text{ und } \mu \in [0, 1], \text{ dann } \mu z_1 + (1 - \mu)z_2 \in \mathcal{T}.$$

Zur Beschreibung einer Technologie dienen häufig auch *Skalenerträge*, die in einer Ökonomie *abnehmend, konstant, zunehmend oder variabel* sein können. Die Skalenerträge stehen in Zusammenhang mit den vorstehenden Eigenschaften, da ein Produktionsraum Additivität und Teilbarkeit genau dann erfüllt, wenn er *konstante Skalenerträge* aufweist, d.h.

$$\mu > 0, z \in \mathcal{T}, \text{ dann } \mu z \in \mathcal{T}.$$

Fehlende Additivität führt zu abnehmenden Skalenerträgen, während fehlende Teilbarkeit zunehmende Skalenerträge impliziert. Ist weder Teilbarkeit noch Additivität erfüllt, liegen variable Skalenerträge vor. Bei abnehmenden und konstanten Skalenerträgen ist die Technologiemenge konvex.

Die Spezifikation ökonomischer Eigenschaften ist von immenser Bedeutung, da sie die Gestalt der Technologiemenge und somit die effiziente Linie nachhaltig beeinflussen.

Budget-Allokationsmodelle zeichnen sich im Vergleich zur reinen Analyse der Wirtschaftlichkeit von Organisationseinheiten durch variable Budgetanteile aus, die den DMUs als zusätzliche Input-Komponenten zugewiesen werden. Um die Notation an das Problem *Budget-Allokation* anzupassen, wird bei der Formulierung der Technologiemenge die Trennung von Input und Output zu Gunsten der Differenzierung fixer und variabler Komponenten aufgehoben. Für eine I-O-Kombination  $z = (x^\top, y^\top) \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  und eine Budgetkomponente  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  ist dann die Technologiemenge durch

$$\begin{aligned} & \{ (x^\top, y^\top, \alpha) \mid y \text{ kann durch } (x, \alpha) \text{ erzeugt werden} \} \\ & \{ (z, \alpha) \mid z \text{ fixer I-O-Vektor, } \alpha \text{ variable I-Komponente} \} \end{aligned}$$

festgelegt. Hierfür wird folgende Definition eingeführt.

**Definition 1.3.2** Sei  $x \in \mathbb{R}_+^s$  ein Input-Vektor,  $y \in \mathbb{R}_+^t$  ein Output-Vektor und  $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$  eine dem Input- und Outputvektor zugeordnete Budgetkomponente. Ferner sei  $\Omega : \mathbb{R}_+^{s+1} \rightarrow \mathbb{R}_+^t$  eine stetige, monotone Abbildung mit  $\Omega(0) = 0$ , dann heißt die Menge

$$\mathcal{T}^v = \{ (z, \alpha) \in \mathbb{R}^{1 \times (m+1)} \mid y \leq \Omega(x; \alpha) \}$$

mit  $z = (x^\top, y^\top)$  variable Technologiemenge.

Als Mengen aller möglichen Input-Output-Kombinationen, wird in variable Technologiemengen der zusätzliche, variable Input-Faktor *Budget* einbezogen. Für DMU  $k$  bezeichnet  $a_k$  weiterhin den Input-Output-Vektor, der um den variablen Input-Faktor *Budgetanteil*  $b_k$  ergänzt wird. Für alle  $k \in N$  sind die Vektoren  $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^{1 \times (m+1)}$  bei einer Allokation  $b \in \mathbb{R}_{++}^n$  Elemente der variablen Technologiemenge  $\mathcal{T}^v$ .

# Kapitel 2

## Allokationsmechanismen

In diesem Kapitel werden Mechanismen für die Allokation eines Budgets entwickelt. Als grundlegende Information fließen hierbei eine I-O-Matrix  $A \in \mathcal{M}$ , ein Preissystem  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  und eine variable Technologiemenge  $\mathcal{T}^v$  ein.

Zunächst werden allgemeine Axiome formuliert, denen ein *Allokationsmechanismus* genügen muss. Die Bewertung der DMUs wird mittels einer Effizienzanalyse vorgenommen. Für diese Analyse wird ein Effizienzmaß entwickelt, mit dem effiziente DMUs differenziert werden können.

Unter Einhaltung der Axiome und dem Grundsatz einer einheitlichen Bewertung aller DMUs werden ausgewogene Allokationen definiert. Mit einem spieltheoretischen Ansatz werden die Lösungen des Allokationsmechanismus bestimmt.

*In den weiteren Ausführungen werden als bekannte Daten eine I-O-Matrix  $A \in \mathcal{M}$ , ein Preissystem  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  und eine variable Technologiemenge  $\mathcal{T}^v$  vorausgesetzt.*

### 2.1 Grundlegende Axiome

Bei der Allokation des Budgets sollen einige, allgemeine Anforderungen eingehalten werden. Diese fließen als Axiome in die folgende Definition ein.

**Definition 2.1.1** *Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix,  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem,  $\beta \in \mathbb{R}$  ein Budget und  $\mathcal{T}^v$  eine variable Technologiemenge. Ferner sei die*

Annahme (A1) (vgl. Kapitel 1.2) erfüllt. Eine (mengenwertige) Abbildung  $\Phi : \mathcal{M} \times \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $(A, \mathcal{P}, \beta) \mapsto \Phi(A, \mathcal{P}, \beta)$  heißt Budget-Allokationsfunktion, falls gilt:

1. Normalisierung: Für  $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$ :  $\Phi(A, \mathcal{P}, \lambda\beta) = \lambda\Phi(A, \mathcal{P}, \beta)$ .
2. Positivität:  $\Phi(A, \mathcal{P}, \beta) \ni b > 0$ .
3. Anonymität: Für jede Permutationsmatrix  $\Pi$ :

$$\Phi(A, \mathcal{P}, \beta) = \Pi\Phi(A\Pi, \mathcal{P}, \beta).$$

4. Pareto-Optimalität: Für alle  $b \in \Phi(A, \mathcal{P}, \beta)$  und alle  $k \in N$ :

$$(a_k, b_k) \in \partial\mathcal{T}^v.$$

Im Weiteren werden die geforderten Axiome erläutert.

Ad 1. In Allokationsmechanismen sollen die Komponenten  $b_k$  der Allokation  $b$  einem Anteil des Gesamtbudgets  $\beta$  entsprechen. Normalisierbarkeit gewährleistet die Unabhängigkeit von der Höhe des Budgets.

Die Zuteilung durch das Allokationsverfahren muss mit den begründbaren Ansprüchen der DMUs korrelieren. Falls Annahme (A1) erfüllt ist, kann jede DMU einen zulässigen Preisvektor  $p \in \mathcal{P}$  angeben, der einen positiven Budgetanteil rechtfertigt, vgl. Budgetgleichung (1.1). Diese Forderung wird durch die Positivität der Allokationen realisiert, wodurch keine DMU (mit negativem Budgetanteil) zur Zahlung eines Betrags verpflichtet wird. Hierdurch wird sowohl die Akzeptanz als auch die Durchsetzbarkeit des Verfahrens erhöht, da Marktteilnehmer ein einzuführendes Modell eher ablehnen, wenn sie zu einer Zahlung veranlasst werden.

Aus der Normalisierbarkeit der Budget-Allokationsfunktion folgt

$$\Phi(A, \mathcal{P}, \beta) = \beta\Phi(A, \mathcal{P}, 1).$$

Ad 2. Wegen der Positivität beschränkt sich Menge zulässiger Allokationen auf die offene Teilmenge

$$S = \{b \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n b_i = 1, b > 0\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

die dem relativen Inneren des  $(n - 1)$ -Simplex entspricht.

Ad 3. Das Axiom Anonymität gewährleistet die Unabhängigkeit der Allokation von der Sortierung oder Numerierung der DMUs.

Ad 4. Eine Allokation sollte von den analysierten DMUs als *gerecht* angesehen werden. Im Sinn von Aristoteles, *Necomachean Ethics* oder *Politics*,

*‘equals should be treated equally,  
and unequals, unequally in proportion to  
relevant similarities or differences’*

ist besseren DMUs mehr Budget zuzuteilen. Eine Ungleichung der I-O-Vektoren  $a_i \geq a_j$  sollte eine Allokation mit  $b_i \geq b_j$  implizieren. Der Grundsatz der Gleichbehandlung von Gleichem (falls  $a_i = a_j$ , dann ist  $b_i = b_j$ ) ist hierin enthalten. Dieses Prinzip liegt auch der Pareto-Optimalität zugrunde, die auf das klassische Konzept der Effizienz von Pareto [41] und den Erweiterungen von Koopmans [30] zurückgeht.

**Definition 2.1.2** Sei  $b \in S$  und  $\mathcal{T}^v$  eine variable Technologiemenge. Ein Vektor  $(z, \alpha) \in \mathcal{T}^v$  heißt Pareto-optimal, falls kein  $(\hat{z}, \hat{\alpha}) \in \mathcal{T}^v$  mit  $(\hat{z}, -\hat{\alpha}) \not\geq (z, -\alpha)$  existiert.

In Ökonomien mit Austauschmöglichkeiten ergibt sich für Pareto-optimale Elemente einer Technologiemenge folgende Definition, vgl. Charnes et al. [12]. Ein DMU, die durch einen Input-Output-Vektor gekennzeichnet ist, heißt *effizient*, falls

- (Input orientiert) keine Input-Komponente verringert werden kann, ohne eine andere zu erhöhen oder eine Output-Komponente zu verringern.
- (Output orientiert) keine Output-Komponente erhöht werden kann, ohne eine anderen zu verringern oder eine Input-Komponente zu erhöhen.

Auch diese Definition von Effizienz bedingt Kenntnisse über die Technologiemenge, aber unabhängig von deren Beschaffenheit und Gestalt wird sichergestellt, dass ein Vektor  $(a_k, b_k)$  der effizienten Linie von  $\mathcal{T}^v$  Pareto-optimal ist.

## 2.2 Effizienzanalyse

Mit einem Allokationsmechanismus soll ein Anreizsystem geschaffen werden, das die Bereitschaft der DMUs zur effizienten Gestaltung der Produktionsprozesse erhöht. Dies erfordert eine Analyse der Wirtschaftlichkeit und ein Maß, mit dem die DMUs bewertet werden können. Ein Effizienzmaß ist also (implizit oder explizit) in einen Allokationsmechanismus integriert.

Die Effizienzanalyse sollte in Verbindung mit einem Allokationsmechanismus folgenden Axiomen genügen:

1. Konsistente Bewertung der Wirtschaftlichkeit.
2. Vollständigkeit der Analyse.
3. Allokation gemäß der einheitlichen Bewertung der DMUs.

In die Bewertung der Wirtschaftlichkeit einer DMU fließen die durch den I-O-Vektor  $a_k$ , den Budgetanteil  $b_k$ , das Preissystem  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  und die variable Technologiemenge  $\mathcal{T}^v$  gegebenen Daten ein. Allgemein wird für das Maß folgende Definition eingeführt.

**Definition 2.2.1** Sei  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem und  $\mathcal{T}^v$  eine variable Technologiemenge. Eine Abbildung  $\sigma : \mathbb{R}^{1 \times (m+1)} \times \mathbb{R}^{m+1} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit

$$((z, \alpha), \mathcal{T}^v, \mathcal{P}) \mapsto \sigma((z, \alpha), \mathcal{T}^v, \mathcal{P})$$

für  $(z, \alpha) \in \mathcal{T}^v$  heißt Effizienzmaß, falls gilt:

$$(z, -\alpha) \geq (\tilde{z}, -\tilde{\alpha}) \Rightarrow \sigma((z, \alpha), \mathcal{T}^v, \mathcal{P}) \geq \sigma((\tilde{z}, \tilde{\alpha}), \mathcal{T}^v, \mathcal{P}).$$

Dieses Effizienzmaß wird im Weiteren entwickelt.

### 2.2.1 Charakterisierung von Effizienz

Um den Begriff *Wirtschaftlichkeit* zu spezifizieren, wird eine Klassifikation von Punkten der Technologiemenge vorgenommen, die hierbei auf konvexe Mengen eingeschränkt werden. Für eine Erweiterung dieses Konzepts auf

nicht konvexe Mengen wird auf Rubinov [46] verwiesen.

Die Definition der Effizienz bzw. der Wirtschaftlichkeit wird an die Pareto-Optimalität eines Elements der Technologiemenge angelehnt. Da in der Literatur diverse, nicht konsistente Definitionen für Effizienz eingeführt wurden, vgl. Charnes [13, 14], Thrall [59] und Kuntz und Scholtes [31], wird in der Arbeit folgende Definition zugrunde gelegt.

**Definition 2.2.2** Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix,  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem und  $\mathcal{T}$  eine konvexe Technologiemenge. DMU  $k$  heisst

1. schwach effizient, falls kein  $z \in \mathcal{T}$  existiert, so dass für alle  $p \in \mathcal{P}$  mit  $p \neq 0$  gilt:  $zp > a_k p$ .
2. effizient, falls kein  $z \in \mathcal{T}$ ,  $z \neq \lambda a_k$  mit  $\lambda > 0$  existiert, so dass für alle  $p \in \mathcal{P}$  gilt:  $zp \geq a_k p$ .

Nach dieser Definition ist eine DMU  $k$  (schwach) effizient, falls der Vektor  $a_k$  in der Menge  $\mathcal{T}$  hinsichtlich des Ordnungskegels  $\mathcal{P}$  (schwach) Pareto-optimal ist. Wird für die Technologiemenge ein konvexer Kegel gewählt, dann können Effizienz und somit Pareto-Optimalität nicht ausschließlich über die Extrempunkte von  $\mathcal{T}$  definiert werden. Diese sind zur Beschreibung konvexer Kegel auch wenig nützlich, da der Ursprung der einzig mögliche Extrempunkt ist. Die Definition wird in diesem Fall auf die Extrempunktstrahlen von  $\mathcal{T}$  bezogen. Extrempunktstrahlen sind eindimensionale, vom Ursprung ausgehende Seiten eines Kegels.

Für konvexe Technologiemengen  $\mathcal{T}$  liefert die nächste Proposition eine nützliche Charakterisierung effizienter Elemente.

**Proposition 2.1** Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix,  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem und  $\mathcal{T}$  eine konvexe Technologiemenge, dann gilt:

1.  $a_k$  ist schwach effizient genau dann, wenn  $a_k \in \partial\mathcal{T}$ .
2.  $a_k$  ist effizient genau dann, wenn  $a_k$  ein Extrempunkt oder Element eines Extrempunktstrahls von  $\mathcal{T}$  ist.

**Beweis:** Nach Definition und Voraussetzung ist  $\mathcal{T}$  eine abgeschlossene, konvexe Menge.

1. Schwache Effizienz: Der Vektor  $a_k$  ist ein Randpunkt der Menge  $\mathcal{T}$  genau dann, wenn er von  $\mathcal{T}$  schwach separiert werden kann, d.h. es existiert ein  $p \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $p \neq 0$  mit  $Pp \leq 0$ , so dass für ein  $\gamma \in \mathbb{R}$  und alle  $z \in \mathcal{T}$  die Ungleichungen  $zp \leq \gamma$  und  $a_k p \geq \gamma$  gelten, vgl. Korollar 11.6.2 in Rockafellar [44].

2. Effizienz: Der Vektor  $a_k$  ist ein Extrempunkt oder ein Element eines Extrempunktrahls der Menge  $\mathcal{T}$  genau dann, wenn ein  $p \in \mathbb{R}_+^m$  mit  $Pp \leq 0$  existiert, so dass für ein  $\gamma \in \mathbb{R}$  und alle  $z \in \mathcal{T}$  mit  $z \neq \lambda a_k$  die Ungleichungen  $zp < \gamma$  und  $a_k p \geq \gamma$  erfüllt sind, vgl. Rockafellar [44], Korollar 11.6.2.  $\square$

Diese Definition der Effizienz liefert für beliebige konvexe Mengen konsistente Ergebnisse. Bei schwach effizienten Elementen handelt es sich immer um Randpunkte. Für konvexe Technologiemenge, die keine Kegel sind, sind die Extrempunkte die effizienten Elemente von  $\mathcal{T}$ .

Mittels der Effizienz können nun effiziente Allokationen definiert werden.

**Definition 2.2.3** Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix,  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem und  $\mathcal{T}^v$  eine konvexe, variable Technologiemenge. Eine Allokation  $b \in S$  heißt

1. schwach effizient, falls für alle  $k \in N$ :  $(a_k, b_k) \in \partial \mathcal{T}^v$ .
2. effizient, falls für alle  $k \in N$ :  $(a_k, b_k)$  ist ein Extrempunkt oder ein Element eines Extrempunktrahls von  $\mathcal{T}^v$ .

Die Menge aller schwach effizienten Allokationen wird mit  $X \subset S$  bezeichnet.

In der Arbeit wird häufig eine Charakterisierung einzelner Punkte des Produktionsraums  $\mathcal{T}^v$  benötigt. Dabei wird eine DMU  $k$  als nicht (schwach) effizient bezeichnet, falls der Vektor  $(a_k, b_k)$  nicht Randpunkt von  $\mathcal{T}^v$  ist, obwohl die Aussage eigentlich die Allokation betreffen müsste.

## 2.2.2 Effizienzmaß

Die Unterscheidung zwischen effizient und ineffizient basiert auf dem Status eines Vektors  $(a_k, b_k)$ , der auf dem Rand der Technologiemenge (der effizienten Linie) als effizient und im Innern von  $\mathcal{T}^v$  als ineffizient angesehen wird, vgl. Definition 2.2.2 Diese Begriffe bilden den Ausgangspunkt für die Entwicklung des Effizienzmaßes.

Zur Veranschaulichung der weiteren Ausführungen wird als Technologiemenge  $\mathcal{T}^v$  ein konvexer Kegel betrachtet, der durch I-O-Vektoren  $(a_k, b_k) = (-x_k, y_k, b_k)$  mit  $x_k, y_k, b_k \in \mathbb{R}_{++}$  erzeugt wird. Die I-O-Vektoren werden auf eine Schnittebene transformiert, indem sie über die Output-Komponente normiert werden. In den folgenden Abbildung ist der Schnitt durch den Kegel zum Niveau  $y = \alpha$  dargestellt.

Abbildung 2.1 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen ineffizienten

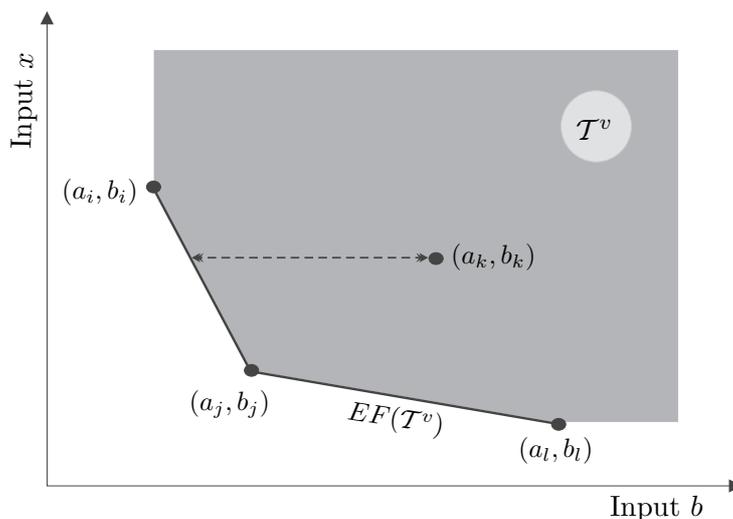


Abbildung 2.1: Ineffizienz

DMUs und Punkten im Innern der Technologiemenge. Wird der Budgetanteil eines ineffizienten I-O-Vektors ceteris paribus reduziert, wechselt eine DMU beim Erreichen der effizienten Linie ihren Status vom ineffizienten inneren Punkt zum Pareto-effizienten Randpunkt von  $\mathcal{T}^v$ . Je größer der Abstand von der effizienten Linie  $EF(\mathcal{T}^v)$ , desto größer ist die notwendige Reduktion des Budgetanteils. Der Abstand von der effizienten Linie kann also als Maß für Ineffizienz verwendet werden. Die durch die Produktionsfunktion determinierte effiziente Linie bestimmt die Struktur und Gestalt der Technologiemenge. Ineffizienz entspricht damit der notwendigen Budgetreduktion, die eine ineffiziente DMU Einfluss auf die Gestalt der Technologiemenge gewinnen lässt.

Ineffizienz wird in der Literatur im Allgemeinen durch eine Metrik, d.h. den Abstand eines Punktes zur effizienten Linie dargestellt, vgl. z.B. Charnes et

al. [9, 13] oder Scheel [47]. Mit diesem üblichen Maß für Ineffizienz kann für effiziente Allokationen aber keine Effizienzanalyse durchgeführt werden, da für alle  $k \in N$  die Vektoren  $(a_k, b_k)$  bereits auf dem Rand der Technologiemenge liegen. Der Abstand aller DMUs zur effizienten Linie beträgt daher Null, vgl. Definition 2.2.3. Aus diesem Grund wird in der Arbeit ein Effizienzmaß entwickelt.

Die grundlegende Idee bei der Konstruktion des Effizienzmaßes ist, Ineffizienz durch Effizienz von Randpunkten der Technologiemenge zu erklären, und damit die Interpretation umzukehren. Eine Verschiebung ineffizienter Punkte zur effizienten Linie ist äquivalent zum Verschieben der effizienten Linie zu ineffizienten Punkten. Abbildung 2.2 stellt diesen Zusammenhang dar.

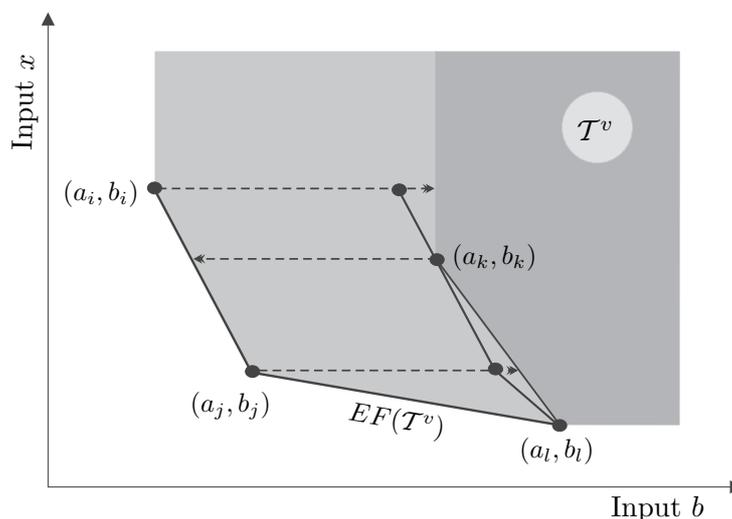


Abbildung 2.2: Ineffizienz als Effizienz

Die Ineffizienz (die notwendige Budgetreduktion) der DMU  $k$  kann über die Effizienz (die notwendige, gleichzeitige Budgeterhöhung) der DMUs  $i$  und  $j$  erklärt werden. Die Verschiebung effizienter DMUs beeinflusst die Lage der effizienten Linie und hierdurch die Gestalt der variablen Technologiemenge  $\mathcal{T}^v$ . Dieser Einfluss der DMUs auf die Gestalt und Struktur der Technologiemenge kann als Effizienz angesehen werden. Im Folgenden wird ein Effizienzmaß entwickelt, das den Einfluss der DMUs auf die Gestalt der variablen Technologiemenge misst.

Zunächst ist das Ausmaß des Einflusses einer DMU auf die effiziente Linie

festzustellen. Andersen und Petersen [2] haben dieses Maß zur Differenzierung effizienter DMUs in DEA-Modelle eingeführt. Der Zusammenhang ist in Abbildung 2.3 veranschaulicht. Eine effiziente DMU verliert ihren Ein-

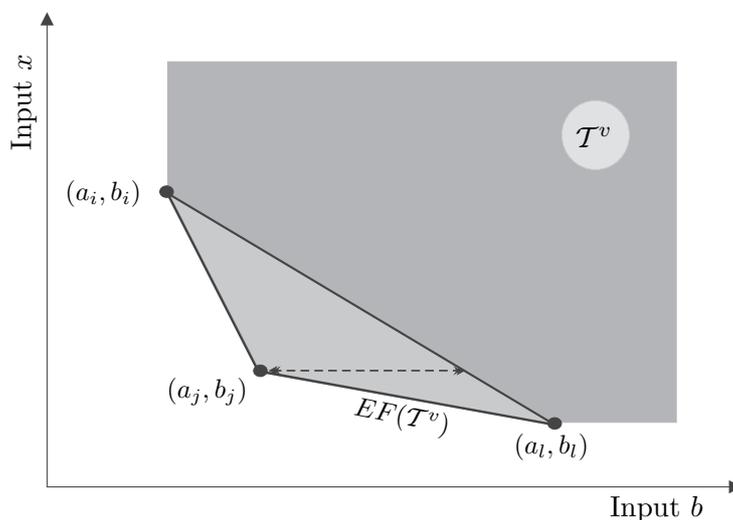


Abbildung 2.3: Effizienzüberschuss

fluss auf die Gestalt der Technologiemenge, wenn ihr Status von effizient zu ineffizient wechselt. Sukzessives Erhöhen des Budgetanteils einer auf dem Rand der Technologiemenge liegenden, effizienten DMU verschiebt sie zur ineffizienten DMU im Inneren von  $\mathcal{T}^v$ . Der Status der DMU  $j$  wechselt von effizient zu ineffizient, wenn der Vektor  $(a_j, b_j)$  beim Erhöhen des Budgetanteils die Hyperebene passiert, die durch die DMUs  $i$  und  $l$  aufgespannt wird. Im Gegensatz zum Ineffizienzmaß wird bei effizienten DMUs der Statuswechsel umgekehrt interpretiert.

Um den Einfluss der einzelnen DMUs auf die Gestalt der Technologiemenge zu ermitteln, wird mit dem Effizienzmaß  $\sigma$  der Abstand zwischen dem Input-Output-Vektor einer DMU und einer eingeschränkten Technologiemenge bestimmt. Bei der Einschränkung der Menge wird der eigene Einfluss der DMU vernachlässigt und die effiziente Linie durch alle anderen DMUs determiniert.

Dieser Wert beruht folglich auf einer Effizienzanalyse einer DMU zu allen anderen. Bei ineffizienten DMUs bleibt die Vorgehensweise unverändert, da sie keinen Einfluss auf die effiziente Linie besitzen. Die notwendige Budgetveränderung (Erhöhung für effiziente DMUs; Reduktion für ineffiziente

DMUs) bis zum Statuswechsel (effizient zu ineffizient für effiziente DMUs; ineffizient zu effizient für ineffiziente DMUs) wird im Weiteren als *Effizienzüberschuss* bezeichnet.

Wird als Maß ausschließlich der Effizienzüberschuss verwendet, liefert die Effizienzanalyse keine konsistenten Ergebnisse, da *Blockierungen* auftreten. Dies liegt daran, dass proportionale I-O-Vektoren bei schwach effizienten Allokationen auf einem Extremalstrahl der Technologiemenge liegen. Abbildung 2.4 stellt diesen Zusammenhang dar. Die Vektoren der DMUs  $j$  und

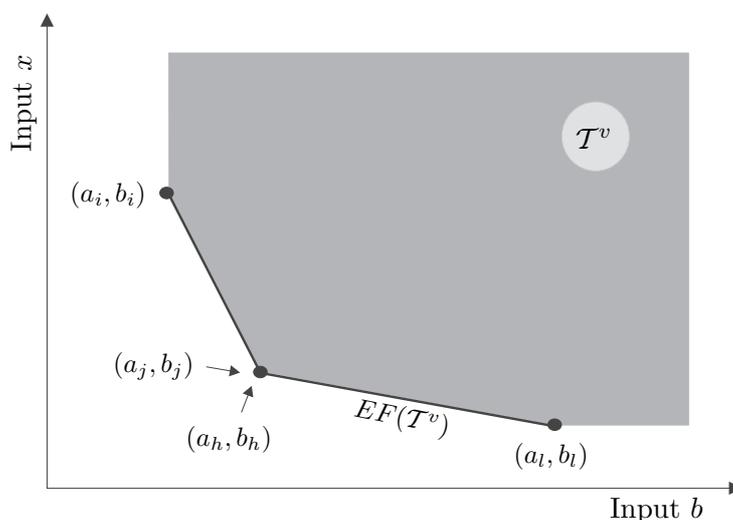


Abbildung 2.4: Blockierung des Effizienzmaßes

$h$  liegen in Abbildung 2.4 auf einem Extrempunkt, da durch die Transformation die Extremalstrahlen zu einem Punkt des Schnittes durch den Kegel verschmelzen. Jede Erhöhung des Budgetanteils einer der proportionalen I-O-Vektoren der DMUs  $j$  oder  $h$  bewirkt ein sofortiges Verlassen der effiziente Linie  $\partial\mathcal{T}^v$  und ein Verschieben ins Innere von  $\mathcal{T}^v$ . Der Effizienzüberschuss der DMUs  $j$  und  $h$  ist folglich gleich Null. Durch Entfernen aller Vielfache proportionaler I-O-Vektoren aus der Datenbasis ändert sich der Effizienzüberschuss, jedoch nicht die Technologiemenge, vgl. Abbildung 2.3.

Der Einfluss einer DMU auf die Gestalt der Technologiemenge wirkt sich folglich nur bedingt auf den Effizienzüberschuss aus. Dies kann als Blockierung von I-O-Vektoren interpretiert werden. Blockierungen sind natürlich nicht ausschließlich in der Proportionalität von I-O-Vektoren begründet, sondern

können über das Maß der linearen Abhängigkeit, d.h. das Skalar

$$d_{i,j} = \begin{cases} \frac{a_i a_j^\top}{\|a_i\| \|a_j\|} & \text{für } i \neq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.2)$$

klassifiziert werden. Blockierungen von DMUs verstärken sich, je kleiner  $\epsilon > 0$  in den Ungleichungen

$$1 - \epsilon \leq d_{i,j} \leq 1$$

gewählt werden kann. Dieser Zusammenhang kann an der transformierten Technologiemenge veranschaulicht werden, vgl. Abbildung C.1 in Anhang C. Je geringer  $\epsilon$  ist, desto kleiner kann eine Umgebung bestimmt werden, die die transformierten I-O-Vektoren umfasst.

Ein ausschließlich auf dem Effizienzüberschuss beruhendes Maß ergibt bei Blockierungen einen Widerspruch zu den Annahmen, die bei der Konstruktion der Technologiemenge getroffen wurden. Als Eigenschaft von  $\mathcal{T}^v$  wird die Verfügbarkeit der Vektoren  $(z, \alpha)$  gefordert, d.h.  $(z, \alpha) \in \mathcal{T}^v$  für  $y \leq \Omega(x, \alpha)$ , vgl. Definition 1.3.2. Bei der Konstruktion von  $\mathcal{T}^v$  wird also implizit angenommen, dass sich alle möglichen Vektoren  $(z, \alpha)$  in der Technologiemenge befinden können. Nachdem die Technologiemenge  $\mathcal{T}^v$  konstruiert wurde, muss für jeden I-O-Vektor eine Aussage über Ineffizienz oder Effizienz getroffen werden können. Das Effizienzmaß sollte von der Gestalt der Technologiemenge abhängen, jedoch nicht von der Existenz weiterer I-O-Vektoren mit einem hohem Maß an linearer Abhängigkeit.

Damit mit dem Effizienzmaß der Einfluss auf die Gestalt der Technologiemenge gemessen wird, ist eine Erweiterung nötig. Ziel ist es, den Einfluss auf die Gestalt auch für Mengen von DMUs zu messen. Hierfür wird folgende Definition eingeführt.

**Definition 2.2.4** Für  $I \subseteq N$  heißt die Menge  $C(I) = \{C_1, \dots, C_p\}$  Partition von  $I$  genau dann, wenn gilt:

1.  $\forall k \in \{1, \dots, p\}: C_k \subseteq I, C_k \neq \emptyset$ .
2.  $\forall k, l \in \{1, \dots, p\}, k \neq l: C_k \cap C_l = \emptyset$ .
3.  $\bigcup_{k=1}^p C_k = I$ .

Die Teilmengen  $C_k$  von  $C(I)$  werden als Koalitionen bezeichnet. Die Menge aller Partitionen  $C(I)$  auf  $I$  wird mit  $\mathcal{E}(I)$  notiert. Für  $I = N$  werden die verkürzten Schreibweisen  $C = C(N)$  und  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(N)$  verwendet.

Abbildung 2.5 zeigt, dass der Einfluß blockierter DMUs auf die effiziente Li-

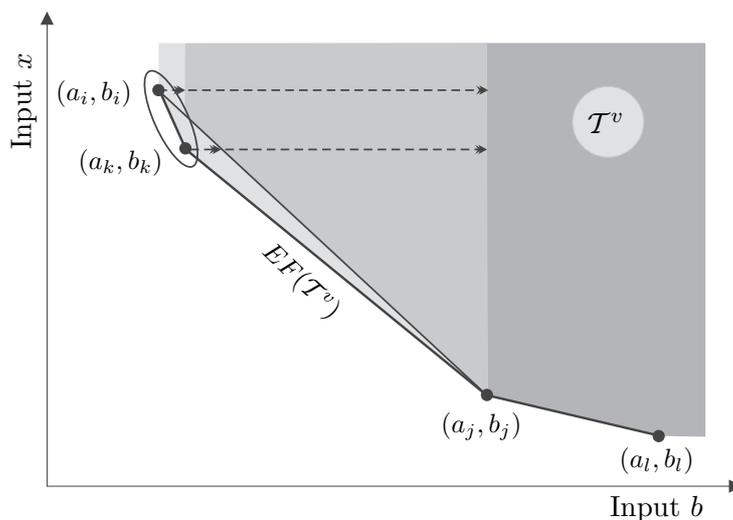


Abbildung 2.5: Effizienzmaß und Gestalt von  $\mathcal{T}^v$

nie durch eine gleichzeitige Erhöhung der Budgetanteile begründet werden kann. Obwohl jede der DMUs  $i$  oder  $k$  allein einen geringen Einfluss hat, ist er für die DMUs gemeinsam erheblich.

Um den Einfluss der Mitglieder einer Koalition auf die effiziente Linie zu messen, muss die Technologiemenge entsprechend eingeschränkt werden. Die effiziente Linie wird hierbei durch alle Elemente bestimmt, die sich nicht in der Koalition befinden. Als Effizienzwert erhalten die Mitglieder einer Koalition den (koalitionalen) Effizienzüberschuss, der durch den Abstand zu dieser effizienten Linie bestimmt wird. Dieser Wert basiert auf einer Analyse, bei der die Effizienz einer DMU im Vergleich zu den DMUs außerhalb der Koalition ermittelt wird. Schließen sich die DMUs  $i$  und  $k$  in Abbildung 2.5 zu einer Koalition zusammen, erhalten sie als Wert den Effizienzüberschuss im Vergleich zu den DMUs  $j$  und  $l$ . Mit der Koalition ist die ursprüngliche Blockierung zwischen den DMUs  $i$  und  $k$  aufgelöst.

Blockierungen können demnach aufgehoben werden, indem Koalitionen gebildet werden. Durch die Integration von Koalitionen und das Einbeziehen des

Statuswechsels von effizient zu ineffizient wurde ein Maß entwickelt, das Effizienz über die Gestalt der Technologiemenge erklärt. Die koalitionale Form der Effizienzanalyse wird im Folgenden in die Allokationsmechanismen integriert.

Durch das Eingehen von Koalitionen wird eine Partition  $C$  der Menge  $N$  gebildet, vgl. Definition 2.2.4. Für jedes Mitglied einer Koalition kann ein Effizienzwert bestimmt werden, bei dem Effizienz im Vergleich zu allen Elementen außerhalb der Koalition analysiert wird. Dieser Effizienzwert bezieht sich auf die durch die Partition  $C$  eingeschränkte variable Technologiemenge (eine genaue Spezifikation dieser Menge wird in Kapitel 3.3.2 vorgenommen). Für dieses Effizienzmaß wird folgende Definition eingeführt.

**Definition 2.2.5** Sei  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem,  $C \in \mathcal{E}$  eine Partition auf  $N$  und  $\mathcal{T}^v(C)$  eine variable Technologiemenge. Für  $(z, \alpha) \in \mathcal{T}^v$  und die Abbildung  $\sigma : \mathbb{R}^{1 \times (m+1)} \times \mathbb{R}^{m+1} \times \mathcal{Q} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt der Wert  $\sigma((z, \alpha), \mathcal{T}^v, \mathcal{P}, C)$  koalitionales Effizienzmaß.

Die als Bewertungsgrundlage in einen Allokationsmechanismus integrierte Effizienzanalyse sollte vollständig sein. *Vollständigkeit* setzt eine Analyse jeder DMU im Vergleich zu allen anderen voraus. Die koalitionale Form der Effizienzanalyse muss folglich noch innerhalb der Koalitionen durchgeführt werden.

Durch sukzessives Bilden von Partitionen entsteht ein Baum von Koalitionen, vgl. Abbildung 2.6. Der Baum sei als *Allokationsbaum* ( $AT$ ), die Teilbäume als *Koalitionsbäume* ( $CT$ ) bezeichnet.

Jeder Knoten eines Allokationsbaums  $AT$  repräsentiert eine Koalition  $C_k^\tau$  aus DMUs. Die Blätter auf der Stufe  $\tau = 0$  stellen einelementige Koalitionen und somit die DMUs dar. Auf jeder Stufe  $\tau + 1$  werden alle Koalition  $C_k^{\tau+1}$  durch Partitionen  $C_k^{\tau+1} = \{C_1^\tau, \dots, C_{p_k}^\tau\}$  in Subkoalitionen gegliedert. Einelementige Koalitionen werden bis zur Stufe  $\tau = 0$  fortgeführt. Hierdurch erhält man auf jeder Stufe  $\tau$  eine Partition  $C^\tau = \{C_1^\tau, \dots, C_p^\tau\}$  der Menge  $N$ . Die Partition auf der Stufe  $\tau = 0$  ist  $C^0 = N$ . Analog gibt  $C^T$  die Partition in der Wurzel (auf der Stufe  $\tau = T$ ) an. Ein Allokationsbaum  $AT$  wird also durch eine Menge von Partitionen  $\{C^T, \dots, C^0\}$  eindeutig beschrieben.

Zur Formalisierung werden folgende Definitionen eingeführt.

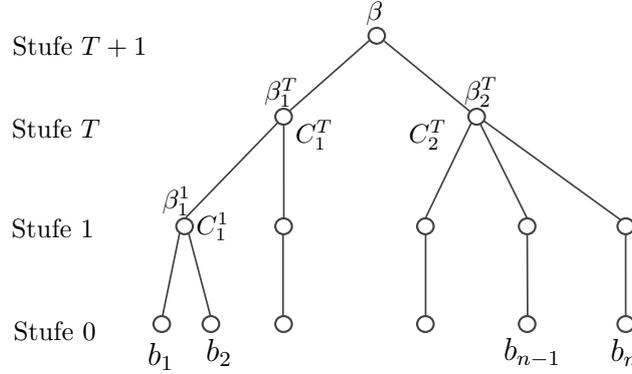


Abbildung 2.6: Allokationsbaum AT

**Definition 2.2.6** Sei  $I \subseteq N$ ,  $C(I)$  und  $\tilde{C}(I)$  Partitionen auf  $I$ . Eine Partition  $\tilde{C}(I) = \{\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_q\}$  heißt Verfeinerung von  $C(I) = \{C_1, \dots, C_p\}$ , falls

1.  $\forall j \in \{1, \dots, q\} \exists i \in \{1, \dots, p\}: \tilde{C}_j \subseteq C_i$ .
2.  $\exists j \in \{1, \dots, p\} \exists i \in \{1, \dots, q\}: \tilde{C}_i \neq C_j$ .

Eine Partition  $C(I)$  heißt Aggregation von  $\tilde{C}(I)$ , falls  $\tilde{C}(I)$  eine Verfeinerung von  $C(I)$  ist. Eine Aggregation  $C(I)$  von  $\tilde{C}(I)$  heißt einfach, falls für  $p - 1$  Koalitionen  $C_i = \tilde{C}_j$  gilt.

**Definition 2.2.7** Sei  $N$  eine endliche Menge und  $C$  eine Partition auf  $N$ . Die Menge von Partitionen  $CS = \{C^T, \dots, C^0\}$  heißt Kollektionsstruktur, falls gilt:

1.  $\forall \tau \in \{T, \dots, 1\}: C^\tau$  ist eine Aggregation von  $C^{\tau-1}$ .
2.  $C^0 = N$ .

Die Menge aller Kollektionsstrukturen auf der Menge  $N$  sei mit  $\mathcal{CS}$  bezeichnet. Eine Kollektionsstruktur  $CS(I)$  einer Teilmenge  $I \subset N$  heißt Koalitionsstruktur.

Mit einer Kollektionsstruktur  $CS$  ist ein Allokationsbaum  $AT$  eindeutig bestimmt. Ferner ist mit  $CS$  die Reihenfolge der vollständigen Effizienzanalyse festgelegt. Diese Analyse ist hierarchisch geordnet. Die Effizienz einer DMU wird in mehreren Stufen analysiert, indem die Koalitionen sukzessive in Partitionen gegliedert werden und für jede DMU jeweils die Effizienz zu den Elementen außerhalb ihrer Koalition analysiert wird. Die Effizienzanalyse ist vollständig, wenn die Koalitionen nur noch aus einer DMU bestehen.

In Allokationsmechanismen wird ein Budget auf Grundlage einer Effizienzanalyse verteilt. Diese Analyse ermöglicht die Bewertung der DMUs. Das Budget wird dann mit einer Budget-Allokations-Funktion verteilt, die in gleicher Weise an Koalitionen angepasst wird.

**Definition 2.2.8** Sei  $A \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n \times m}$  eine I-O-Matrix,  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem und  $\beta \in \mathbb{R}$  ein Budget. Ferner sei  $C \in \mathcal{E}$  eine Partition auf  $N$ . Die Abbildung  $\Phi : \mathcal{M} \times \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_{++}^n$  mit

$$(A, \mathcal{P}, \beta, C) \mapsto \Phi(A, \mathcal{P}, \beta, C) \ni b$$

und  $b \in \mathbb{R}_{++}^n$  heißt Budget-Allokations-Funktion in Koalitionen, falls sie die Axiome 1 bis 4 aus Definition 2.1.1 erfüllt.

Die Existenz dieser Abbildung wird in Proposition 3.8 bewiesen.

Bei einer Budget-Allokations-Funktion in Koalitionen basiert die Allokation auf einer Analyse, bei der die Effizienz jeder DMU im Vergleich zu allen Elementen außerhalb der Koalition ermittelt wird.

Eine Allokation über eine Kollektionsstruktur  $CS$  beginnt auf der höchsten Stufe  $\tau = T$  des Allokationsbaums  $AT$ , auf der das Budget mit der Budget-Allokations-Funktion in Koalitionen verteilt wird, vgl. Abbildung 2.6. Die Budgetanteile der Mitglieder einer Koalition werden kumuliert und sukzessiv auf die untergeordneten Strukturen verteilt, bis die Koalitionen einelementig sind. Nach Konstruktion addiert sich das Budget auf jeder Stufe  $\tau$  des Allokationsbaums  $AT$  und insbesondere in den Blättern zum Gesamtbudget  $\beta$ . Formal wird in den Knoten des Allokationsbaums  $AT$ , deren Indexmenge  $I \subseteq N$  mit  $\#I = q$  durch die Partition  $C(I) = \{C_1, \dots, C_p\}$  gegliedert ist, eine Verteilung des Budgets  $\beta(I)$  durch

$$\Phi(A_I, \mathcal{P}, \beta(I), C(I)) \ni b_I(C(I))$$

mit  $b_I(C(I)) \in \mathbb{R}_{++}^q$  vorgenommen. Für  $k \in \{1, \dots, p\}$  addiert sich das *Koalitionsbudget* der Koalition  $C_k$  zu

$$\beta(C_k) = \sum_{i \in C_k} b_i(C(I)).$$

Dieses Koalitionsbudget wird mit derselben Budget-Allokations-Funktion innerhalb der Koalition verteilt. Hierfür wird die I-O-Matrix  $A$  auf die jeweiligen Elemente der Koalition  $J$  eingeschränkt und die Budget-Allokations-Funktion in Koalitionen an die Partition  $C(J)$  der Teilmenge  $J \subset N$  angepasst.

Sukzessives Vorgehen liefert für eine Kollektionsstruktur  $CS$  eine Allokation.

**Definition 2.2.9** Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix,  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem und  $\beta \in \mathbb{R}$  ein Budget. Ferner sei  $\Phi : \mathcal{M} \times \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Budget-Allokations-Funktion in Koalitionen. Für  $CS \in \mathcal{CS}$  bezeichnet  $Z(CS)$  die Menge der Allokationen der Kollektionsstruktur  $CS$ .

Nach Konstruktion können Budget-Allokations-Funktionen und damit das Allokationsproblem rekursiv formuliert werden.

### 2.2.3 Einheitliche Bewertung

In den Allokationsmechanismen wurden Budget-Allokations-Funktionen in Koalitionen  $\Phi$  und ein Effizienzmaß  $\sigma$  integriert. Im folgenden wird ein weiterer Zusammenhang zwischen diesen Abbildungen entwickelt.

Das koalitionsale Effizienzmaß dient zur Bestimmung der Wirtschaftlichkeit von DMUs. Erfasst das Maß die Effizienz *vernünftig*, dann sollte die Allokation auf Grundlage einer einheitlichen Bewertung vorgenommen werden. Dieser Grundsatz, der ebenfalls der Budgetgleichung (1.1) zugrunde liegt, kann auf Kollektionsstrukturen  $CS$  erweitert werden.

Mit der (mengenwertigen) Budget-Allokations-Funktion in Koalitionen erhält man für  $I \subseteq N$  mit  $\#I = q \leq n$ , eine Partition  $C(I) = \{C_1, \dots, C_p\}$  und ein Koalitionsbudget  $\beta(I)$  die Menge von Allokation

$$\Phi(A_I, \mathcal{P}, \beta(I), C(I)) \subset \mathbb{R}_{++}^q$$

Für jede Allokation

$$b_I \in \Phi(A_I, \mathcal{P}, \beta(I), C(I))$$

können mit einem Effizienzmaß  $\sigma$  die koalitionalen Effizienzwerte

$$\sigma((a_k, b_k), \mathcal{T}^v, \mathcal{P}, C(I))$$

für  $k \in I$  bestimmt werden. Falls die DMUs bei einer Allokation  $b_I$  einheitlich bewertet sind, dann gilt für alle  $k \in I$  die Beziehung

$$\sigma((a_k, b_k), \mathcal{T}^v, \mathcal{P}, C(I)) = \gamma \quad (2.3)$$

mit  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ . Die Gleichung (2.3) sei als *koalitionale Budgetgleichung* bezeichnet.

**Definition 2.2.10** Sei  $\Phi : \mathcal{M} \times \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Budget-Allokations-Funktion in Koalitionen,  $\sigma : \mathbb{R}^{1 \times (m+1)} \times \mathbb{R}^{m+1} \times \mathcal{Q} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$  ein Effizienzmaß und  $CS$  eine Kollektionsstruktur. Eine Allokation  $b(CS)$  heißt ausgewogen, falls die koalitionale Budgetgleichung (2.3) in allen Knoten des Allokationsbaums  $AT$  erfüllt ist. Für eine Kollektionsstruktur  $CS$  wird die Menge aller ausgewogenen Allokationen mit  $Y(CS)$  bezeichnet.

In den Allokationsmechanismen garantieren die ausgewogenen Allokationen eine einheitliche Bewertung der DMUs. Diese Allokationen sind zu wählen, falls die Lösung der koalitionalen Budgetgleichung (3.17) existiert.

## 2.3 Spieltheoretisches Lösungskonzept

Koalitionen wurden in den Allokationsmechanismus eingebunden, um ein Effizienzmaß zu entwickeln, vgl. Kapitel 2.2.2. Eine Kollektionsstruktur determiniert die Reihenfolge der Effizienzanalyse, eine endgültige Kollektionsstruktur  $CS$  ist jedoch nicht a priori festgelegt. Im Allokationsmechanismus wird keine DMU einer Koalition fest zugeordnet. Unter Berücksichtigung der Präferenz *Budgetmaximierung* sollte jeder DMU die Möglichkeit geboten werden, durch eine Änderung der Kollektionsstruktur ihren Budgetanteil zu erhöhen. Hierdurch entsteht ein *Verhandlungsmodell* auf der Menge der ausgewogenen Allokationen  $Y(CS)$ . Falls die Menge  $Y(CS)$  leer ist, weil eine Lösung der koalitionalen Budgetgleichung (2.3) nicht existiert, können die Allokationen der Kollektionsstruktur  $Z(CS)$  als Verhandlungsgrundlage verwendet werden. Für das Verhandlungsmodell wird die Menge der *Auszah-*

lungen

$$U = \bigcup_{CS} G(CS) \tag{2.4}$$

mit

$$G(CS) = \begin{cases} Z(CS) & \text{falls } Y(CS) = \emptyset \\ Y(CS) & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.5}$$

definiert. Im Folgenden werden Lösungen mit einem spieltheoretischen Ansatz entwickelt.

### 2.3.1 Dominanz

Zunächst werden Wechsel zwischen Kollektionsstrukturen beschrieben. Hierfür wird angenommen, es läge eine Kollektionsstruktur  $\tilde{CS}$  vor, vgl. Abbildung 2.6. Bevorzugen DMUs einer Teilmenge  $J \subset N$  eine andere Reihenfolge der Effizienzanalyse, müssen sie eine Koalitionsstruktur  $CS(J)$  formieren. Eine neue Kollektionsstruktur  $CS$  entsteht, indem die Koalitionsstruktur  $CS(J)$  an einen Knoten des Allokationsbaums angehängt und alle Elemente der Koalition  $J$  aus nicht mehr relevanten Koalitionen eliminiert werden, vgl. Abbildung 2.7.

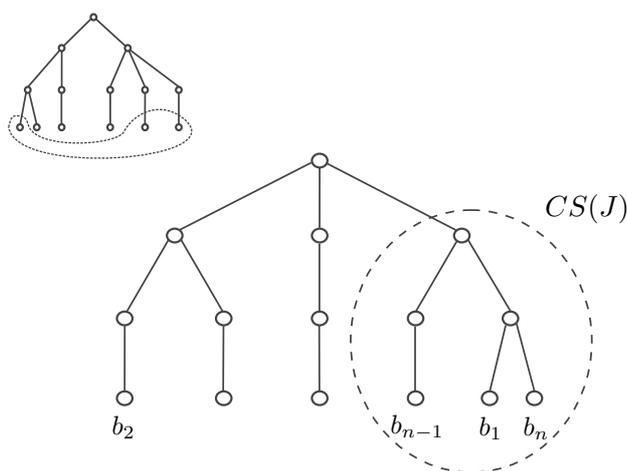


Abbildung 2.7: Änderung der Kollektionsstruktur

Um den Wechsel zwischen den Kollektionsstrukturen zu formalisieren, werden folgende Definitionen eingeführt.

**Definition 2.3.1** Sei  $I \subseteq N$  und  $\tilde{C}(I) = \{\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_p\}$  eine Partition auf  $I$ . Eine Partition  $C(I) = \{C_1, \dots, C_q\} \neq \tilde{C}(I)$  heißt durch die Menge  $J \subset I$  von  $\tilde{C}(I)$  erzeugt, falls gilt:

1.  $\exists$  genau ein  $k \in \{1, \dots, q\}$ :  $C_k = J$ .
2.  $\forall i \in \{1, \dots, q\} \setminus k \exists j \in \{1, \dots, p\}$ :  $C_i = \tilde{C}_j \setminus J$ .

Diese Definition wird auf Kollektionsstrukturen übertragen.

**Definition 2.3.2** Sei  $\tilde{C}S = \{\tilde{C}^T, \dots, C^0\}$  eine Kollektionsstruktur. Die Kollektionsstruktur  $CS = \{C^T, \dots, C^0\}$  heißt durch  $J$  erzeugt, falls gilt:

1. auf Stufe  $\tau$  wird die Partition  $C^\tau$  durch  $I$  von  $\tilde{C}^\tau$  erzeugt.
2.  $CS$  ist eine Kollektionsstruktur (Eliminierung redundanter Elemente).

Die Änderung der Kollektionsstrukturen wird durchgeführt, falls die beteiligten DMUs die neue Auszahlungen präferieren. Hierfür wird auf der Menge  $U$  die binäre Relation *Dominanz* definiert.

**Definition 2.3.3** Seien  $\tilde{C}S, CS$  Kollektionsstrukturen,  $b(\tilde{C}S) \in G(\tilde{C}S)$  und  $b(CS) \in G(CS)$  Allokationen.  $b(\tilde{C}S)$  heißt über  $J$  von  $b(CS)$  dominiert (Notation:  $b(CS) \text{ dom } b(\tilde{C}S)$ ) genau dann, wenn gilt:

1.  $CS$  wird durch  $J \subset N$  aus  $\tilde{C}S$  erzeugt.
2.  $b_J(CS) \succeq b_J(\tilde{C}S)$ .

Die Dominanzrelation setzt eine Änderung der Kollektionsstruktur voraus. Sie ist nicht auf der Menge der Allokationen einer Kollektionsstruktur definiert. Diese Definition orientiert sich am ursprünglichen Grund für das Bilden von Koalitionen, der aus der Notwendigkeit besteht, Blockierungen im Effizienzmaß aufzulösen.

Falls eine Allokation dominiert wird, erhält jedes Mitglied der erzeugenden Koalition  $J$  einen ebenso hohen Budgetanteil und mindestens eine DMU erhält einen höheren. Folglich ist für das Koalitionsbudget die Ungleichung

$$\sum_{j \in J} b_j(CS) > \sum_{j \in J} b_j(\tilde{C}S)$$

erfüllt. Da durch die neue Kollektionsstruktur nur die Reihenfolge der Effizienzanalyse verändert wird, werden die Mitglieder der Koalition  $J$  benachteiligt und empfinden die Allokation  $b(\tilde{C}S)$  als ungerecht.

### 2.3.2 Lösungsmengen

Im Folgenden werden Lösungen konzipiert, die die Abhängigkeit der Allokationen von den Kollektionsstrukturen berücksichtigt. Das Verhandlungsmodell, in dem die DMUs als Spieler aufgefasst werden, wird durch das *abstrakte Spiel*  $\Gamma = (U, dom)$  definiert. Die Allokationen  $b(CS) \in U$  werden im Folgenden auch *Auszahlungen* genannt. Zur Literatur über Spieltheorie wird z.B. auf Owen [40] verwiesen.

Im Kontext der Spieltheorie ist das Spiel  $\Gamma = (U, dom)$  folgendermaßen einzuordnen. Da mit der Integration von Koalitionen im Allokationsmechanismus keine Seitenzahlungen verbunden sind, ist das Spiel  $\Gamma = (U, dom)$  ein *Spiel mit nicht transferierbarem Nutzen (NTU: non transferable utility)* bzw. ein *Spiel ohne Seitenzahlungen*. Ferner handelt es sich um ein Spiel mit *konstanter Summe*. Prinzipiell basieren Lösungskonzepte dieser Spiele auf der Theorie *nicht-kooperativer Spiele*. Da in diesem Fall die Auszahlungen von Koalitionen abhängen, wird ein Bezug zur kooperativen Spieltheorie hergestellt. Im Gegensatz zu den Annahmen verschiedener spieltheoretischer Ansätze ist die *Auszahlungsfunktion* aber weder super- noch subadditiv in Koalitionen, vgl. Anhang B. Eine Auszahlung  $b(CS)$  repräsentiert die Budgetanteile der DMUs bei einer Kollektionsstruktur  $CS$ . Die Auszahlung  $b_k(CS)$  eines Spielers  $k$  hängt von

- der Partition  $C^T$  der Menge  $N$  und
- der Koalitionsstruktur seiner Koalition

ab. Da die Auszahlungsfunktion nicht nur von der Menge aller Partitionen, sondern von der Menge aller Kollektionsstrukturen abhängt, kann das Spiel

$\Gamma = (U, dom)$  als Verallgemeinerung der *n-person games in partition function form* betrachtet werden, vgl. Thrall [60] oder Weber [62].

### 2.3.2.1 Core

Im Spiel  $\Gamma = (U, dom)$  wird ein Gleichgewichtszustand gesucht, in dem es keiner Koalition möglich ist, von einer Änderung der Kollektionsstruktur zu profitieren. Dieser Gleichgewichtszustand ist erreicht, falls eine Auszahlung nicht dominiert wird. Hierfür wird in der Literatur folgende Definition verwendet, vgl. z.B. Owen [40].

**Definition 2.3.4** *Die Menge aller nicht dominierten Auszahlungen  $b(CS) \in U$  heißt Core und wird mit  $\mathcal{C}$  bezeichnet. Eine Auszahlung  $b(CS) \in \mathcal{C}$  heißt Core-Allokation.*

Würde im Verhandlungsmodell eine Core-Allokation gefunden, kann keine DMU durch strategisches Verhalten und Bilden von Koalitionen eine höhere Auszahlung erzwingen. Hierdurch ist im Allokationsmechanismus ein Gleichgewicht erreicht, in dem Blockierungen des Effizienzmaßes aufgelöst sind.

In der kooperativen Spieltheorie wird häufig eine andere Dominanzrelation verwendet, nämlich  $x \overline{dom} y$  genau dann, wenn  $x_I \succeq y_I$ , vgl. Owen [40]. Im abstrakten Spiel  $\Gamma = (U, dom)$  wird die Relation *dom* verwendet, da die Strategiemengen der Spieler auf das Bilden von Koalitionen beschränkt sind, deren Mitglieder sie sind. Eine Koalition kann in diesem Spiel entscheiden, in welcher Koalitionsstruktur sie sich formiert. Sie hat aber keinen Einfluss auf die Koalitionsbildung der verbleibenden Spieler. Außerdem ist der Core im Spiel  $\overline{\Gamma} = (U, \overline{dom})$  entweder leer oder identisch mit der Menge aller Auszahlungen.

**Proposition 2.2** *Sei  $\Gamma = (U, \overline{dom})$  ein abstraktes Spiel, dann gilt: Ist  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ , dann ist  $\mathcal{C} = U$ .*

**Beweis.** Der Beweis folgt aus der Pareto-Optimalität aller Auszahlungen der Menge  $S$ . □

Die Aussage der letzten Proposition ist vergleichbar mit dem Ergebnis, dass der Core für *essentielle Spiele mit konstanter Summe* immer leer ist, vgl. z.B.

Theorem X.4.3 in Owen [40].

### 2.3.2.2 Dynamische Lösungen

In diesem Kapitel werden zunächst die Eigenschaften des Cores beschrieben, die sich aus der Relation  $dom$  ergeben. Hiernach wird das Lösungskonzept für den Fall eines leeren Cores erweitert.

Die Ausführungen dieses Abschnittes basieren auf Lucas [34]. Für eine Auszahlung  $b(CS) \in U$  und die Relation  $dom$  wird die *Dominion*

$$Dom(b(CS)) = \{ b(\tilde{C}S) \in U \mid b(CS) \text{ dom } b(\tilde{C}S) \}$$

eingeführt. Mit der Erweiterung auf eine Teilmenge  $U' \subseteq U$  erhält man

$$Dom(U') = \bigcup_{b(CS) \in U'} Dom(b(CS)).$$

Für den Core gilt

$$\mathcal{C} = U \setminus Dom(U).$$

Nach Definition 2.3.4 ist der Core die Menge aller nicht dominierten Auszahlungen. Diese Eigenschaft kann als Kriterium für die *Stabilität* einer Lösung interpretiert werden. Wurde in einem Verhandlungsmodell eine Core-Allokation erreicht, kann keine andere Auszahlung durch weiteres Verhandeln (Änderung der Kollektionsstruktur) erzwungen werden.

Auch in den *stabilen Mengen* (vNM-Lösungen) von Neumanns und Morgens-terns [61] ist die Idee der Stabilität verwirklicht. Stabile Mengen sind als Teilmenge  $V \subset U$  mit

$$V = U \setminus Dom(V)$$

definiert. In dieser Definition einer Lösung wird die Stabilität hinsichtlich zweier Kriterien unterschieden: *Interne Stabilität* und *Externe Stabilität*. Interne Stabilität besagt, dass kein Element in  $V$  von einem Element in  $U \setminus V$  lokal dominiert wird, d.h.

$$V \cap Dom(V) = \emptyset.$$

Externe Stabilität bringt zum Ausdruck, dass jedes Element, das nicht in  $V$  liegt, von einem Element in  $V$  dominiert wird, d.h.

$$V \cup Dom(V) = U.$$

Externen Stabilität begründet die Akzeptanz stabiler Mengen als Lösung in einem Verhandlungsmodell. Jedes Element außerhalb dieser Menge wird von einem Element der stabilen Menge dominiert. Stabile Mengen existieren aber nicht immer und sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Außerdem ist der Core nicht unbedingt eine Teilmenge der stabilen Menge.

Daher werden in dieser Arbeit auf *dynamische Lösungen* für Verhandlungsmodelle von Shenoy et al. [54, 55] zurückgegriffen. Die Begriffe interne und externe Stabilität werden hierin dynamisch interpretiert. Die Lösungen beruhen auf der binären Relation *Erreichbarkeit*.

**Definition 2.3.5 (Shenoy [55])** *Eine Auszahlung  $b(CS)$  heißt von  $b(\tilde{C}S)$  erreichbar (Notation:  $b(CS) \leftarrow b(\tilde{C}S)$ ) genau dann, wenn eine positive, ganze Zahl  $m$  und Auszahlungen  $z_0, \dots, z_m$  existieren, so dass gilt:*

$$b(CS) = z_0 \text{ dom } z_1 \text{ dom } \dots \text{ dom } z_m = b(\tilde{C}S).$$

Mit dieser Relation können Lösungen wie folgt definiert werden.

**Definition 2.3.6 (Shenoy [55])** *Eine elementare dynamische Lösung ( $eD$ ) ist eine Teilmenge von  $U$ , für die gilt:*

1. Falls  $b(CS) \in eD$ ,  $b(\tilde{C}S) \in U \setminus eD$ , dann  $b(\tilde{C}S) \not\leftarrow b(CS)$ .
2. Falls  $b(CS), b(\tilde{C}S) \in eD$ , dann  $b(CS) \leftarrow b(\tilde{C}S)$  und  $b(\tilde{C}S) \leftarrow b(CS)$ .

Stabilität wird in dynamischen Lösungen folgendermaßen interpretiert. Externe Stabilität: Falls in einem Verhandlungsmodell eine Auszahlung einer elementaren, dynamischen Lösung  $b(CS) \in eD$  auftritt, wird keine Auszahlung außerhalb dieser Menge berücksichtigt. Interne Stabilität: Wird von einigen Spielern ein Wechsel der Auszahlungen von  $b(CS)$  nach  $b(\tilde{C}S)$  gefordert, kann der Auszahlungsvektor  $b(CS) \in eD$  durch weiteres Verhandeln wieder erreicht werden.

**Definition 2.3.7 (Shenoy [55])** *Die dynamische Lösung ( $D$ ) ist definiert durch*

$$D = \bigcup eD.$$

Für abstrakte Spiele der Form  $\Gamma = (U, \text{dom})$  wird folgende Klassifizierung gegeben.

**Definition 2.3.8** Sei  $\Gamma = (U, dom)$  ein abstraktes Spiel mit  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ .  $\Gamma$  heißt vollständig, falls

$$\forall b(\tilde{CS}) \in U \exists b(CS) \in \mathcal{C} : b(CS) \leftarrow b(\tilde{CS}).$$

Bei vollständigen Spielen mit nicht leerem Core kann von jeder Auszahlung durch Verhandeln eine Core-Allokation erreicht werden.

Den Zusammenhang zwischen Core und dynamischen Lösungen im Spiel  $\Gamma = (U, dom)$  gibt folgende Proposition wieder.

**Proposition 2.3** Sei  $\Gamma = (U, dom)$  ein abstraktes Spiel, dann gilt:

1.  $D \neq \emptyset$  und  $D$  ist eindeutig.
2.  $\mathcal{C} \subseteq D$ .
3. Falls  $\mathcal{C} \neq \emptyset$  und  $\Gamma$  vollständig, dann  $D = \mathcal{C}$ .

**Beweis.** Die Eindeutigkeit der ersten Behauptung folgt aus Proposition 3.3 in Shenoy [55]. Um zu zeigen, dass die dynamische Lösung nicht leer ist, wird die Relation  $dom$  zunächst auf die Auszahlungsmengen bezogen. Seien  $\tilde{CS}$  und  $CS$  Kollektionstrukturen. Die Menge  $G(\tilde{CS})$  heißt von  $G(CS)$  dominiert genau dann, wenn ausgewogene Allokationen  $b(CS), b(\tilde{CS})$  existieren, so dass  $b(CS) dom b(\tilde{CS})$ . Die Menge der Kollektionstrukturen ist endlich, woraus die Existenz einer nicht leeren dynamischen Lösung im Spiel auf den Auszahlungsmengen folgt, vgl. Theorem 4.1 in Shenoy [55]. Im Spiel  $\Gamma = (U, dom)$  ist die Relation  $dom$  nicht innerhalb der Lösungsmengen  $Y(CS)$  definiert. Damit sind die Auszahlungen der dynamischen Lösung im Spiel auf den Auszahlungsmengen eine dynamische Lösung im Spiel  $\Gamma = (U, dom)$ .

Die zweite Behauptung ist in Proposition 3.4 in Shenoy [55] bewiesen.

Die dritte Behauptung folgt aus der Definition der Vollständigkeit. Sei  $\Gamma = (U, dom)$  vollständig und  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ . Ist  $b(\tilde{CS}) \in U \setminus \mathcal{C}$ , dann existiert ein  $b(CS) \in \mathcal{C}$  mit  $b(CS) \leftarrow b(\tilde{CS})$ . Da  $b(CS) \in \mathcal{C}$ , folgt  $b(\tilde{CS}) \not\leftarrow b(CS)$  und somit  $b(\tilde{CS}) \notin D$ . Die Behauptung folgt hiermit aus  $\mathcal{C} \subseteq D$ .  $\square$

Für das Spiel  $\Gamma = (U, dom)$  existieren immer eindeutige, nicht leere dynamische Lösungen. Ist das Spiel vollständig und der Core nicht leer, dann sind die dynamischen Lösungen und der Core identisch. Mit dynamischen Lösungen wurden für beliebige Budget-Allokations-Funktionen eindeutige, nicht leere Lösungsmengen definiert.

## 2.4 Allokationsmechanismus

Zusammenfassend können Allokationsmechanismen durch folgendes Verfahren beschrieben werden.

**Algorithmus 2.1 (Allokationsmechanismus)** Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix,  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem,  $\beta \in \mathbb{R}$  ein Budget und  $T^v$  eine variable Technologiemenge. Ferner seien mit den Abbildungen

- $\Phi : \mathcal{M} \times \mathcal{P} \times \mathbb{R} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Budget-Allokations-Funktion in Koalitionen
- $\sigma : \mathbb{R}^{1 \times (m+1)} \times \mathbb{R}^{m+1} \times \mathcal{Q} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Effizienzmaß

gegeben.

Bestimme Allokationen  $b(CS)$ , für die gilt:

1.  $b(CS) \in G(CS)$  (vgl.(2.5)).
2.  $b(CS) \in D$  bzw.  $b(CS) \in \mathcal{C}$ .

Für einen Allokationsmechanismus müssen

- Budget-Allokations-Funktionen in Koalitionen und
- ein koalitionales Effizienzmaß konstruiert,
- ausgewogene Allokationen berechnet und
- dynamische Lösungen (Core-Allokationen) bestimmt

werden. Zur Identifikation dynamischer Lösungen ist die Berechnung der ausgewogenen Allokationen aller Kollektionsstrukturen sehr aufwendig. Budget-Allokations-Funktionen sollten daher eingehend analysiert werden, um die Lösungsmengen a priori einzugrenzen.

# Kapitel 3

## Allokationsmodell

Auf Grundlage der Allokationsmechanismen wird in diesem Kapitel ein konkretes Allokationsmodell entwickelt. Hierbei werden eine I-O-Matrix und ein Preissystem als bekannt angenommen. Bei der Spezifikation einer Technologiemenge wird ein DEA-Modell verwendet.

In diesem Allokationsmodell können schwach effiziente Allokationen über eine duale Budgetgleichung dargestellt werden. Zur Berechnung der Allokationen wird ein Optimierungsproblem angegeben, dessen Lösungen eine Budget-Allokations-Funktion implizit definieren. Außerdem wird ein koalitionales Effizienzmaß entwickelt, das in Verbindung mit der einheitlichen Bewertung der DMUs zu ausgewogenen Allokationen führt.

*In den weiteren Ausführungen werden als bekannte Daten eine I-O-Matrix  $A \in \mathcal{M}$  und ein Preissystem  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  vorausgesetzt.*

### 3.1 Spezifikation der Technologiemenge

Neben der I-O-Matrix und dem Preissystem ist die Bestimmung der Technologiemenge von grundlegender Bedeutung für Allokationsmechanismen.

### 3.1.1 Interpretation von Preismatrizen

Zunächst werden die Zeilen einer Preismatrix  $P \in \mathbb{R}^{q \times m}$  eines Preissystems  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  interpretiert und in die Technologiemenen integriert. Die Ausführungen basieren auf Kuntz und Scholtes [31].

Die Zeilen einer Preismatrix  $P$  entstehen durch Beschränkungen der marginalen Substitutionsraten. Da zulässige Preisverhältnisse durch ein nicht leeres Intervall beschrieben werden, haben die Zeilenvektoren von  $P$ , z.B.  $p_1$  und  $p_2$ , die Form

$$p_{1,i} = -1, p_{1,j} = \gamma \text{ und } p_{2,i} = 1, p_{2,j} = -\delta,$$

vgl. Kapitel 1.2. Alle anderen Einträge der Zeilenvektoren sind gleich Null.

Jede Zeile von  $P$  kann als *fiktive* DMU interpretiert werden. In Analogie zu den I-O-Vektoren der DMUs repräsentiert ein positiver Eintrag die Menge eines produzierten Gutes, während ein negativer den Verbrauch eines Gutes symbolisiert. In diesem Beispiel entspricht der Vektor  $p_1$  einer DMU, die eine Einheit des Gutes  $i$  verbraucht, um  $\gamma$  Einheiten des Gutes  $j$  zu produzieren. Der Vektor  $p_2$  charakterisiert eine DMU, die  $\delta$  Einheiten des Gutes  $j$  verbraucht, um 1 Einheit des Gutes  $i$  herzustellen.

Indem fiktive DMUs der Technologiemenge hinzugefügt werden, wird die Preismatrix mit dem Produktionsraum  $\mathcal{T}$  verschmolzen. Eine Einigung über die Beschränkung der marginalen Substitutionsraten ist dann äquivalent zur Annahme, dass die Zeilen von  $P$  zur Technologiemenge gehören. Mit der Integration der Preisrestriktionen als fiktive DMUs geht zwar die Homogenität der Input-Output-Struktur verloren, diese Inhomogenität betrifft jedoch nur die ergänzten, fiktiven DMUs und nicht die I-O-Matrix  $A \in \mathcal{M}$ .

In Allokationsmechanismen werden Technologiemenen durch variable Budgetanteile erweitert. Das Einbinden der Preisrestriktionen in variable Technologiemenen erfolgt, indem die Preisrestriktionen als fiktive DMUs aufgefasst werden, die das Einhalten der Beschränkung der marginalen Substitutionsraten garantieren und kein Budget erhalten. Die Zeilen  $p_k$  der Matrix  $P$  werden um den Budgetanteil  $b_k = 0$  ergänzt und die Dimension der Preismatrix  $P \in \mathbb{R}^{q \times (m+1)}$  um eins erhöht. Die Vektoren  $(p_k, 0)$  werden dem Produktionsraum zugeordnet, so dass für alle  $k \in \{1, \dots, q\}$  die Bedingung  $(p_k, 0) \in \mathcal{T}^v$  erfüllt ist.

### 3.1.2 Empirische Technologiemenge

Aussagen über die Wirtschaftlichkeit von Organisationseinheiten basieren auf Kenntnissen vom Variationspotential der Produktionsprozesse. In einer Ökonomie erhält man diese Information durch Bestimmung der Technologiemenge oder der Produktionsfunktion.

Zur Bestimmung der Technologiemenge wird auf die Resultate von Farrell [21] zurückgegriffen. Farrell schlug vor, die *empirische Technologiemenge* als kleinste Menge zu bestimmen, die alle I-O-Vektoren der Stichprobe beinhaltet und den Anforderungen Verfügbarkeit und Teilbarkeit genügt (vgl. Kapitel 1.3). Die Datenbasis der Stichprobe ist hierbei durch die Input- und Output-Vektoren der DMUs gegeben. Die empirische Approximation der Technologiemenge ist für die I-O-Matrix  $A \in \mathcal{M}$  und das Preissystem  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  im Fall konstanter Skalenerträge durch die Menge

$$\mathcal{T} = \{ z \in \mathbb{R}^{1 \times m} \mid z \leq \lambda A + \mu P, \lambda, \mu \geq 0 \} \quad (3.1)$$

mit  $\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  und  $\mu \in \mathbb{R}^{1 \times q}$  definiert. Wird das Budget bei der Konstruktion der Technologiemenge einbezogen, ergibt sich die variable Technologiemenge

$$\mathcal{T}(b) = \{ (z, \alpha) \in \mathbb{R}^{1 \times (m+1)} \mid \alpha \geq \lambda b, z \leq \lambda A + \mu P, \lambda, \mu \geq 0 \}. \quad (3.2)$$

Für  $\lambda, \mu \geq 0$  spannen  $\lambda A$  und  $\mu P$  Halbräume auf, die konvexe Kegel erzeugen. Die Menge  $\mathcal{T}(b)$  ist als Minkowski-Addition dieser Kegel ebenfalls ein konvexer Kegel, vgl. Schneider [48]. Das Preissystem  $\mathcal{P}$  ist ein polyedrischer, konvexer Kegel mit nicht leerem Inneren. Für  $b \in S$  existiert somit ein  $p \in \mathcal{P}$  mit  $Pp < 0$ ,  $p > 0$  und  $Ap < b$ , so dass der polare Kegel

$$\mathcal{T}^o(b) = \{ p \in \mathbb{R}^m \mid Ap \leq b, Pp \leq 0, p \geq 0 \}$$

ein nicht leeres Inneres hat. Nach Theorem 14.6 in Rockafellar [44] ist das genau dann der Fall, wenn der Kegel  $\mathcal{T}(b)$  spitz ist. Der Produktionsraum  $\mathcal{T}(b)$  wird also durch einen spitzen, konvexen, polyedrischer Kegel beschrieben.

Die Wahl der Technologiemenge ist exemplarisch. In Allokationsmechanismen können beliebige Mengen integriert werden. Eine Anpassung an Ökonomien mit abnehmenden Skalenerträgen wird durchgeführt, indem die (variable) Technologiemenge durch die konvexe Hülle (statt des konvexen Kegels) der I-O-Vektoren approximiert wird und die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{j=1}^q \mu_j = 1$$

zur Definition der Mengen in (3.1) oder (3.2) hinzugefügt wird, vgl. z.B. Charnes et al. [9]. Durch diese Vorgehensweise sind alle weiteren Analysen auf den Fall abnehmender Skalenerträge übertragbar. Die weiteren Ausführungen werden auf konstante Skalenerträge beschränkt.

## 3.2 Schwach effiziente Allokationen

In diesem Kapitel wird ein Optimierungsproblem zur Berechnung schwach effizienter Allokationen entwickelt. Außerdem wird der Zusammenhang zwischen schwach effizienten Allokationen und Budget-Allokations-Funktionen analysiert.

Basierend auf Debreu [16] schuf Farrell [21] mit der Entwicklung eines Robustheitsmaßes für die empirische Bewertung von Effizienz die Grundlage der folgenden Effizienzanalyse. Charnes et al. [10], [11] haben das Modell von Farrel als lineare Programme formuliert und das Konzept der Effizienzanalyse *Data Envelopment Analysis (DEA)* benannt. Das Maß der Ineffizienz ähnelt dem Minkowski-Funktional konvexer Mengen, vgl. Rolewicz [45]. Für die Modelle der DEA gibt es viele Variationen und Anwendungen. Für detaillierte Studien wird der interessierte Leser auf Charnes et al. [9, 12] oder Färe et al. [20] verwiesen. Die Einbindung der Beschränkungen von Preisverhältnissen in Technologiemenen geht auf Thompson et al. [58] zurück, der sie als *assurance regions* in DEA-Modelle eingeführt hat.

Schwach effiziente Allokationen zeichnen sich dadurch aus, dass für alle  $k \in N$  die Vektoren  $(a_k, b_k)$  Randpunkte der variablen Technologiemenge  $\mathcal{T}(b)$  sind. Um diese Eigenschaft zu prüfen, wird ein Maß benötigt, das eine DMU bei gegebener, zulässiger Allokation  $b \in S$  als inneren Punkt oder Randpunkt von  $\mathcal{T}(b)$  identifiziert. Hierfür wird ein Referenzbudget über die Funktion

$$\begin{aligned} \psi_k(b) = \quad & \min \quad v_k b \\ & \text{unter} \quad v_k A + w P \geq a_k \\ & \quad \quad v_k, w \geq 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

definiert. Eine Lösung  $(v_k, w) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+q)}$  des linearen Programms (3.3) liefert einen Referenzvektor

$$z = v_k A + w P \in \mathbb{R}^{1 \times m}$$

als nicht-negative Linearkombination des Produktionsraums  $\mathcal{T}$ . Der Vektor  $(a_k, b_k)$  wird mit dem Referenzpunkt  $(z, \psi_k(b))$  verglichen. Die Ungleichung  $z \geq a_k$  bedeutet, dass entweder  $z$  mit  $a_k$  übereinstimmt oder  $z$  gegenüber  $a_k$  bevorzugt wird. Das lineare Programm (3.3) wählt bei gegebener Budgetverteilung  $b \in S$  aus den Alternativen des Produktionsraums  $\mathcal{T}$  die Kombination mit minimalem Budget. Falls  $z \geq a_k$  und das Budget  $\psi_k(b)$  des Referenzvektors kleiner als der Budgetanteil  $b_k$  ist, d.h.  $\psi_k(b) < b_k$ , dann ist DMU  $k$  ineffizient, da  $(a_k, b_k)$  kein Randpunkt von  $\mathcal{T}(b)$  sein kann. In diesem Fall kann ein Referenzpunkt angegeben werden, der eine bessere Input-Output-Kombination aufweist und weniger Budget erhält. Den Zusammenhang zwischen optimalem Wert des linearen Programms (3.3) und den Budgetkomponenten  $b_k$  gibt folgende Proposition wieder.

**Proposition 3.1** *Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix und  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem. Die Ungleichung  $b_k > \psi_k(b)$  ist erfüllt genau dann, wenn  $(a_k, b_k) \notin \partial\mathcal{T}(b)$ .*

**Beweis.** Für  $A \in \mathcal{M}$  und  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  sind die lineare Programme (3.3) wohldefiniert. Da der zulässige Bereich nicht leer ist und  $\psi_k(b)$  nach unten durch Null beschränkt ist, existiert für alle  $b \in S$  eine optimale Lösung von (3.3).

‘ $\Rightarrow$ ’: Sei  $(v_k, w)$  eine Lösung des linearen Programms (3.3) und  $z = v_k A + w P$  mit  $z \geq a_k$ . Falls  $b_k > \psi_k(b)$ , dann ist  $b_k > v_k b = \alpha$ . Ferner ist  $(z, \alpha) \in \mathcal{T}(b)$ , woraus  $(a_k, b_k) \notin \partial\mathcal{T}(b)$  folgt.

‘ $\Leftarrow$ ’: Nach Konstruktion ist  $(a_k, b_k) \in \mathcal{T}(b)$  für alle  $k \in N$ . Falls  $(a_k, b_k) \in \text{int}(\mathcal{T}(b))$ , dann existiert ein  $(z, \alpha) \in \partial\mathcal{T}(b)$  mit  $z \geq a_k$  und  $\alpha < b_k$ .  $\mathcal{T}(b)$  ist ein abgeschlossener, konvexer Kegel, dessen Basis durch Vektoren  $(a_i, b_i)$  für  $i \in N' \subseteq N$  aufgespannt wird. Der Randpunkt  $(z, \alpha)$  kann folglich als positive Linearkombination einiger Punkte der Basis des Kegels dargestellt werden, d.h. es existiert ein  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$  mit

$$z = \lambda A, \quad \alpha = \lambda b.$$

Setzt man  $w = 0$ , dann ist  $(\lambda, w)$  zulässig in (3.3) und somit gilt

$$\psi_k(b) \leq \lambda b < b_k.$$

Hierdurch ist die Behauptung bewiesen. □

Für die Lösungen der linearen Programme  $\psi_k$  wird folgende Definition eingeführt.

**Definition 3.2.1** Für  $k \in N$  sei  $v_k$  eine Lösung des linearen Programms  $\psi_k$  aus (3.3) an  $b \in S$ . Die Matrix

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

heißt Lösungsmatrix des linearen Programms  $\psi_k$  an  $b$ .

Der Zusammenhang zwischen den Lösungen der linearen Programme (3.3) und schwach effizienten Allokationen kann mit Lösungsmatrizen einfach formuliert werden.

**Lemma 3.2** Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix,  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem,  $b \in S$  und  $V$  eine Lösungsmatrix von  $\psi_k(b)$  an  $b$ , dann gilt: Die Allokation  $b$  ist schwach effizient genau dann, wenn

$$Vb = b. \quad (3.5)$$

**Beweis.** Für  $b \in S$  und  $k \in N$  ist  $v_k = e_k^\top$  zulässig im linearen Programm (3.3). Für eine optimale Lösung von (3.3) gilt also die Ungleichung  $\psi_k(b) \leq b_k$ . Nach Proposition 3.1 ist DMU  $k$  schwach effizient genau dann, wenn

$$\psi_k(b) = v_k b = b_k.$$

□

Die Gleichung (3.5) wird als *duale Budgetgleichung* bezeichnet. Der Begriff ist in der Dualität von  $\psi_k(b)$  zu dem linearen Programm

$$\max\{ a_k p \mid Ap \leq b, Pp \leq 0, p \geq 0 \} \quad (3.6)$$

begründet, über dessen Lösung die Budgetgleichung (1.1) definiert werden kann.

Die Formulierung schwach effizienter Allokationen über die duale Budgetgleichung (3.5) hat eine mathematische Beschreibung. Für eine Lösungsmatrix  $V$  sei das *Spektrum* (die Menge aller *Eigenwerte*) mit  $\sigma(V)$  und der *Spektralradius* (der maximale Betrag der Eigenwerte) mit

$$\rho(V) = \max\{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(V) \}$$

bezeichnet. Eine schwach effiziente Allokation  $b$  ist in der dualen Budgetgleichung (3.5) ein Eigenvektor der Lösungsmatrix  $V$ , in der die optimalen Lösungen der linearen Programme  $\psi_k$  aus (3.3) an  $b$  zusammengefasst sind. Da die Lösungsmatrix  $V$  nicht-negativ ist, ist der Spektralradius  $\rho(V)$  ein Eigenwert von  $V$ , vgl. Theorem 8.3.1 in Horn et al. [26]. Außerdem ist  $b \in S$  und somit stimmt der Eigenwert zum Eigenvektor  $b$  mit dem Spektralradius überein, vgl. Korollar 8.1.30 in Horn et al. [26]. Für alle  $k \in N$  ist folglich die Bedingung

$$1 = \frac{\psi_k(b)}{b_k} = \rho(V)$$

erfüllt. In der dualen Budgetgleichung (3.5) ist eine schwach effiziente Allokation folglich ein Eigenvektor der Lösungsmatrix  $V$  von  $\psi_k$  an  $b$ , dessen Eigenwert mit dem Spektralradius  $\rho(V)$  übereinstimmt.

Im Folgenden werden einige Propositionen über schwach effiziente Allokationen formuliert. Die Propositionen sind von grundlegender Bedeutung für das weitere Vorgehen. Die Beweise der Aussagen werden im Anhang A geführt, nachdem die notwendigen mathematischen Grundlagen geschaffen wurden.

**Proposition 3.3** *Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix,  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem und  $b \in S$ . Ferner sei die Annahme (A1) (vgl. Kapitel 1.2) erfüllt. Die Allokation  $b$  ist schwach effizient genau dann, wenn  $b$  eine Lösung des Optimierungsproblems*

$$\sup_{b \in S} \min_{1 \leq k \leq n} \frac{\psi_k(b)}{b_k} \quad (3.7)$$

ist.

**Beweis.** Der Beweis wird in Anhang A geführt. □

Zur Bestimmung schwach effizienter Allokationen kann neben dem Optimierungsproblem (3.7) alternativ die Summe der Effizienzwerte maximiert und das Optimierungsmodell

$$\sup_{b \in S} \sum_{k=1}^n \frac{\psi_k(b)}{b_k} \quad (3.8)$$

gelöst werden. Die Lösungsmengen beider Optimierungsprobleme sind identisch.

Nachdem Optimierungsmodelle zur Berechnung schwach effizienter Allokationen angegeben wurden, bleibt noch zu zeigen, dass eine schwach effiziente Allokation existiert.

**Proposition 3.4** *Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix und  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem. Eine schwach effiziente Allokation  $b \in S$  existiert genau dann, wenn die Annahme (A1) (vgl. Kapitel 1.2) erfüllt ist.*

**Beweis.** Der Beweis wird in Anhang A geführt. □

Erfüllen eine I-O-Matrix und ein Preissystem die Annahme (A1), dann existiert eine schwach effiziente Allokation. Eine Anpassung der I-O-Matrix an Annahme (A1) kann auf einfache Weise durchgeführt werden, vgl. Kapitel 1.2. Ist eine schwach effiziente Allokation für eine I-O-Matrix und ein Preissystem eindeutig, stellt sie die Lösung des Allokationsproblems dar. Leider befindet man sich im Allgemeinen nicht in der Situation, das Fehlen schwach effizienter Allokationen zu beklagen, sondern im Dilemma, dass unendlich viele schwach effiziente Allokationen existieren.

**Proposition 3.5** *Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix und  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem. Sei  $p \in \mathcal{P}$  mit  $Ap > 0$  und*

$$b_k = \frac{a_k p}{\sum_{i=1}^n a_i p},$$

*dann ist  $b \in S$  eine schwach effiziente Allokation.*

**Beweis.** Definiert man  $\gamma = \sum_{i=1}^n a_i p$  und setzt  $\bar{p} = \frac{1}{\gamma} p$ , dann ist  $\bar{p} \in \mathcal{P}$  und  $A\bar{p} = b$ . Somit ist  $\bar{p}$  im dualen linearen Programm (3.6) von  $\psi_k(b)$  zulässig. Für  $k \in N$  sei  $v_k$  eine optimale Lösung der linearen Programme  $\psi_k$  aus (3.3). Wegen der Dualität gilt

$$v_k b = a_k p = b_k.$$

Aus Lemma 3.2 folgt die Behauptung. □

Jeder Vektor  $p > 0$  eines Preissystems  $\mathcal{P}$  mit  $Ap > 0$  impliziert eine schwach effiziente Allokation. Diese Menge wird anhand des folgenden Beispiels beschrieben.

**Beispiel 3.2.1** Sei  $\mathcal{P} = \mathbb{R}_+^2$  ein Preissystem,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$$

eine Output-Matrix und  $\beta = 1$  ein Budget. Schwach effiziente Allokationen sind durch die Vektoren

$$b^1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^\top, \quad b^2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^\top, \quad b^3 = \left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right)^\top, \quad b^4 = \left(\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)^\top$$

gegeben. Auch jede Konvexkombination dieser Vektoren ist eine schwach effiziente Allokation. Das Beispiel lässt sich an der transformierten Technologiemenge verifizieren, vgl. Abbildung C.1 in Anhang C.

Die Menge der schwach effizienten Allokationen wird ebenfalls nicht durch die geforderten Axiome (vgl. Kapitel 2.1) eingeschränkt. Der Zusammenhang zwischen Budget-Allokations-Funktionen (vgl. Definition 2.1.1) und schwach effizienten Allokationen wird in folgender Proposition dargestellt.

**Proposition 3.6** Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix,  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem und die Annahme (A1) (vgl. Kapitel 1.2) erfüllt. Für die Abbildung  $\Phi : \mathcal{M} \times \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\Phi(A, \mathcal{P}, B) = \arg \sup_{b \in S} \min_{k \in N} \frac{\psi_k(b)}{b_k}$$

gilt:

1.  $\Phi$  ist eine Budget-Allokations-Funktion.
2. *Monotonie:* Für  $\hat{A} \in \mathcal{M}$  mit  $\hat{a}_i \geq a_i$  für  $i \in N$  und  $\hat{a}_j \leq a_j$  für alle  $j \in N \setminus \{i\}$  existiert eine schwach effiziente Allokation  $\hat{b} \in \hat{X}$  mit  $\hat{b}_i \geq b_i$ .

**Beweis.** Durch einfache Überlegungen lassen sich die Axiome 1-3 in Definition 2.1.1 prüfen. Axiom 4, die Pareto-Optimalität, folgt aus der Äquivalenz schwach effizienter Allokationen und der Lösungen des Optimierungsproblems (3.7), vgl. Proposition 3.3.

Die Monotonie lässt sich folgendermaßen zeigen. Für  $\hat{A} \in \mathcal{M}$  betrachtet man die Punkte  $(\hat{a}_k, b_k)$  und die Technologiemenge  $\mathcal{T}(b)$ . Wegen der Beziehung von  $A$  und  $\hat{A}$  sind für alle  $j \neq i$  die Punkte  $(\hat{a}_j, b_j) \in \mathcal{T}(b)$ . Werden für alle Indizes  $j \neq i$  die Input-Output-Kombinationen  $(\hat{a}_j, \psi_j(b))$  berechnet, dann ist  $\psi_j(b) \leq b_j$ , vgl. Proposition 3.1. Setzt man

$$\hat{b}_k = \begin{cases} b_k & \text{für } k = i \\ \psi_k(b) & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann folgt aus der Normalisierung des Vektors die Behauptung. □

Mit dem Allokationsmodell soll ein Anreizsystem zur effizienten Gestaltung der Produktionsabläufe geschaffen werden. Die Umsetzung des ökonomischen Prinzips soll durch das Verfahren belohnt werden. Diese Forderung ist prinzipiell im Axiom Pareto-Optimalität enthalten. Zur Verdeutlichung wurde bewiesen, dass Budget-Allokations-Funktionen hierdurch auch das Axiom *Monotonie* erfüllen.

Mit dem Optimierungsproblem (3.7) wurde eine Budget-Allokations-Funktion implizit definiert. Durch die Äquivalenz schwach effizienter Allokationen und der Lösungen des Optimierungsproblems (3.7), vgl. Propositionen 3.3 und 3.6, sind die Menge schwach effizienter Allokationen und das Bild der Budget-Allokations-Funktion identisch. Beispiel 3.2.1 zeigt, dass Budget-Allokations-Funktionen als ausschließliche Grundlage für die Allokation eines Budgets unzureichend sind, da die Menge schwach effizienter Allokationen nicht hinreichend eingeschränkt wird.

Ein scheinbarer Ausweg ist, für Allokationsmechanismen nicht nur schwache Effizienz, d.h. Pareto-Optimalität, zu fordern, sondern das Budget so zu verteilen, dass alle DMUs effizient sind. Da aber ein schwach effizienter Punkt des Produktionsraums  $\mathcal{T}(b)$ , also ein Randpunkt, der nicht auf einem Extremaalstrahl liegt, durch kleine Störungen der I-O-Matrix  $A$  zu einer effizienten DMU wird, vgl. Kuntz und Scholtes [31], wird die Lösungsmenge hierdurch nicht wesentlich weiter eingeschränkt.

Die axiomatisch definierten Budget-Allokations-Funktionen liefern folglich keine hinreichende Lösung des Allokationsproblems. Das liegt insbesondere daran, dass mit der bisherigen Definition von Effizienz nicht ausreichend Information zur Verfügung steht, um die Menge schwach effizienter Allokationen einzuschränken. Man stößt an dieser Stelle auf einen bekannten Schwachpunkt der DEA-Modelle, die keine Aussagen über die Qualität der Effizienz

einer DMU zulassen. Alle effizienten DMUs weisen einen Effizienzwert von  $\psi_k(b)/b_k = 1$  auf, vgl. Lemma 3.2. Da DEA-Effizienzwerte im Intervall  $[0, 1]$  liegen, können nur qualitative Aussagen über die Ineffizienz von DMUs getroffen werden. Als Erweiterung der Worte G.B. Shaws, *John Bull's Other Island*,

*'The fact is, there are only two qualities in the world:  
efficiency and inefficiency'*

wird eine Qualifizierung und Differenzierung von Effizienz benötigt, die über die bloße Unterscheidung zwischen effizient und ineffizient hinausgeht. Hierdurch wird die Notwendigkeit verdeutlicht, ein koalitionales Effizienzmaß in das Modell zu integrieren. Dieses Effizienzmaß berücksichtigt den Einfluss der DMUs auf die Gestalt der Technologiemenge über den Statuswechsel von effizient zu ineffizient und das Bilden von Koalitionen, vgl. Kapitel 2.2.2.

**Bemerkung.** Für eine I-O-Matrix  $A \in \mathcal{M}$  und ein Preissystem  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ist das lineare Programm  $\psi_k$  aus (3.3) wohldefiniert. Damit die Berechnung der linearen Programme mittels Computer, d.h. in Anwesenheit von Rundungsfehlern, problemlos möglich ist, müssen die Lösungen stetig von Störungen der Daten abhängen. Das duale lineare Programm (3.6) hat einen beschränkten zulässigen Bereich und somit ist die optimale Lösung beschränkt. Das Preissystem  $\mathcal{P}$  ist ein polyhedraler, konvexer Kegel mit nicht leerem Inneren. Für  $b \in S$  existiert ein  $p \in \mathcal{P}$  mit  $Pp < 0$ ,  $p > 0$  und  $Ap < b$ , so dass der polare Kegel  $\mathcal{T}^o(b)$  von  $\mathcal{T}(b)$  ein nicht leeres Inneres besitzt. Die optimalen Lösungen des primalen Programms sind damit ebenfalls beschränkt und das lineare Programm  $\psi_k$  aus (3.3) ist stabil im Sinn von Robinson [43]. Die optimalen Lösungen der linearen Programme hängen also stetig von Rundungsfehlern ab.

### 3.3 Ausgewogene Allokationen

In diesem Kapitel wird die Effizienzanalyse auf Koalitionen erweitert und die einheitliche Bewertung in das Allokationsmodell integriert. Die Ausführungen werden zunächst auf die Kollektionsstruktur  $CS = \{N\}$  beschränkt und dann für beliebige Kollektionsstrukturen erweitert.

### 3.3.1 Kollektionsstruktur $CS = \{N\}$

Bei der Kollektionsstruktur  $CS = \{N\}$  besteht der zugehörige Allokationsbaum AT aus einer Wurzel und  $n$  einelementigen Blättern. Wegen der Bedeutung der Koalitionen für das Effizienzmaß wird in diesem Fall die Effizienz einer DMU im Vergleich zu allen anderen analysiert. Für diese Effizienzanalyse wird die DMU  $k$  aus der Datenbasis gestrichen und die *ingeschränkte, empirische Technologiemenge*

$$\mathcal{T}_k(b) = \{(z, \beta) \in \mathbb{R}^{1 \times (m+1)} \mid \beta \geq \lambda b, z \leq \lambda A + \mu P, \lambda_k = 0, \lambda, \mu \geq 0\} \quad (3.9)$$

aus den verbleibenden I-O-Kombinationen konstruiert, vgl. Andersen und Petersen [2]. Insbesondere stimmt die Menge  $\mathcal{T}_k(b)$  mit  $\mathcal{T}(b)$  überein, falls DMU  $k$  ineffizient und der Vektor  $(a_k, b_k) \notin \partial\mathcal{T}(b)$  sind. Analog zu den Ausführungen in Kapitel 1.3 sei der Rand  $\partial\mathcal{T}_k(b)$  und die effiziente Linie  $EF(\mathcal{T}_k(b))$  definiert.

Als Effizienzmaß wird bei einer zulässigen Allokation  $b \in S$  der *radiale Abstand* des Punktes  $(a_k, b_k)$  vom Rand  $\partial\mathcal{T}_k(b)$  verwendet, vgl. Abbildung 2.3. Da dieser Abstand einen *Überschuss* an Effizienz symbolisiert, wird er in dieser Arbeit als *Überschusseffizienz* bezeichnet. Zur Differenzierung effizienter DMUs wurde das Maß von Andersen und Petersen [2] ohne Bezeichnung eingeführt. Abhängig vom jeweiligen Kontext werden für dieses Maß in der Literatur diverse Begriffe verwendet, z.B. *extreme Effizienz* in Sensitivitätsanalysen, vgl. Charnes [14] oder Thrall [59], oder *stabile Effizienz* in Stabilitätsuntersuchungen, vgl. Kuntz und Scholtes [31].

Das Effizienzmaß wird durch das lineare Programm

$$\begin{aligned} \phi_k(b) = \min \quad & v_k b \\ \text{unter} \quad & v_k A + w P \geq a_k \\ & v_{k,k} = 0 \\ & v_k, w \geq 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

und die Funktion

$$\theta_k(b) = \frac{\phi_k(b)}{b_k} \quad (3.11)$$

determiniert. Wie in Abbildung 2.3 dargestellt, bedeutet ein Wert  $\theta_k(b) \geq 1$ , dass das Budget  $b_k$  ceteris paribus um den Faktor  $\theta_k(b)$  erhöht werden kann,

bis der Vektor  $(a_k, \theta_k(b)b_k)$  seinen Einfluss auf die Gestalt von  $\mathcal{T}(b)$  verliert. Bei einer weiteren Erhöhung verliert die DMU  $k$  den Status einer effizienten Einheit, liegt nicht mehr auf der effizienten Linie  $EF(\mathcal{T}(b))$  und wird zu einer ineffizienten DMU im Inneren von  $\mathcal{T}(b)$  verschoben. Ist  $\phi_k(b) < b_k$ , dann ist  $(a_k, b_k) \in \text{int}(\mathcal{T}(b))$  und die Werte  $\phi_k(b)$  aus (3.10) und  $\psi_k(b)$  aus (3.3) stimmen überein. Auf diese Weise erhält man für effiziente DMUs einen Wert, der größer gleich eins ist. Der Zusammenhang zwischen Pareto-optimalen Randpunkten und dem Effizienzmaß  $\theta_k(b)$  wird in folgender Proposition gezeigt.

**Proposition 3.7** *Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix und  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem. Die Ungleichung  $b_k > \phi_k(b)$  ist erfüllt genau dann, wenn  $(a_k, b_k) \notin \partial\mathcal{T}(b)$ .*

**Beweis.** Da  $\mathcal{T}_k(b) \subseteq \mathcal{T}(b)$  für  $k \in N$ , gelten für die linearen Programme  $\phi_k$  aus (3.10) und  $\psi_k$  aus (3.3) an  $b \in S$  die Ungleichung

$$\psi_k(b) \leq \phi_k(b).$$

Für  $(a_k, b_k) \in \text{int}(\mathcal{T}(b))$  ist  $\mathcal{T}_k(b) = \mathcal{T}(b)$ . Hieraus folgt die Gleichheit  $\phi_k(b) = \psi_k(b)$ . Aus Proposition 3.1 folgt die Behauptung.  $\square$

Um ausgewogene Allokationen  $b \in Y(CS)$  der Kollektionsstruktur  $CS = \{N\}$  zu bestimmen, wird die einheitliche Bewertung mit dem Effizienzmaß  $\theta_k(b)$  in die Allokationen einbezogen. Einheitliche Bewertung setzt identische Effizienzwerte bei einer zulässigen Allokation  $b \in S$  voraus. Für die Werte der Überschusseffizienz ergibt sich die Bedingung

$$\theta = \theta_k(b), \quad \forall k \in N.$$

In Analogie zu Definition 3.4 wird folgende Definition eingeführt.

**Definition 3.3.1** *Für  $b \in S$  heißt die Matrix  $V$ , deren Zeilen  $v_k$  für  $k \in N$  Lösungen der linearen Programmes  $\phi_k$  aus (3.10) an  $b \in S$  sind, Lösungsmatrix von  $\phi_k$  an  $b$ .*

Mit der Definition der Lösungsmatrix  $V$  von  $\phi_k$  an  $b$  erhält man für ausgewogene Allokationen  $b \in Y(CS)$  bei der Kollektionsstruktur  $CS = \{N\}$  die Gleichung

$$Vb = \theta b, \tag{3.12}$$

die als *erweiterte duale Budgetgleichung* bezeichnet wird. Eine ausgewogene Allokation  $b$  ist in der erweiterten dualen Budgetgleichung (3.12) ein Eigenvektor der Lösungsmatrix  $V$  von  $\phi_k$  aus (3.10) an  $b$ , vgl. die duale Budgetgleichung (3.5). Auch die Lösungsmatrizen  $V$  sind nicht-negativ. Der Eigenwert zum Eigenvektor  $b$  und der Spektralradius  $\rho(V)$  sind in diesem Fall identisch, vgl. Theorem 8.3.1 und Korollar 8.1.30 in Horn et al. [26], so dass für alle  $k \in N$  die Bedingung

$$\theta = \theta_k(b) = \rho(V)$$

erfüllt ist. Eine ausgewogene Allokation  $b \in Y(CS)$  der Kollektionsstruktur  $CS = \{N\}$  ist folglich ein Eigenvektor der Lösungsmatrix  $V$  von  $\phi_k(b)$  an  $b$  zum Spektralradius  $\rho(V)$ .

Zur Berechnung ausgewogener Allokationen  $b \in Y(\{N\})$  kann das Optimierungsproblem

$$\theta^* = \sup_{b \in S} \min_{k \in N} \theta_k(b) \tag{3.13}$$

verwendet werden. Dieses Optimierungsproblem wird in Kapitel 4.2 analysiert. Unter anderem wird bewiesen, dass ausgewogene Allokationen ebenfalls Lösungen des Optimierungsproblems (3.13) sind und dass eine Lösung dieses Problems für jede I-O-Matrix und jedes Preissystem existiert, falls die Annahme (A1) erfüllt ist. Lösungen der erweiterten dualen Budgetgleichung (3.12) müssen hingegen nicht immer existieren, wie folgendes Beispiel verdeutlicht.

**Beispiel 3.3.1** Sei  $\mathcal{P} = \mathbb{R}_+^2$  und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Output-Matrix. Die optimalen Lösungen der linearen Programme  $\phi_k(b)$  sind

$$\phi_1(b) = \min\{b_2, b_3\}, \phi_2(b) = \min\{b_1, b_3\}, \phi_3(b) = \min\{b_1, b_2\} + b_4, \phi_4(b) = b_3.$$

Eine Lösung der erweiterten dualen Budgetgleichung (3.12) mit

$$Vb = \theta b$$

muss die Gleichungen

$$\begin{aligned}\min\{b_2, b_3\} &= \theta b_1 \\ \min\{b_1, b_3\} &= \theta b_2 \\ \min\{b_1, b_2\} + b_4 &= \theta b_3 \\ b_3 &= \theta b_4\end{aligned}$$

erfüllen. Für schwach effiziente Allokationen gilt  $\theta_k(b) \geq 1$ , vgl. Proposition 3.7. Für  $\min\{b_1, b_2\} > 0$  implizieren die ersten beiden Gleichungen

$$\theta \leq \min\left\{\frac{b_2}{b_1}, \frac{b_1}{b_2}\right\} \leq 1.$$

Ist  $\min\{b_1, b_2\} = 0$ , dann implizieren die letzten beiden Gleichungen  $\theta = 1$ . Der optimale Wert ist also  $\theta = 1$ , der die eindeutige Lösung  $b_1 = b_2 = 0$  und  $b_3 = b_4 = 1/2$  mit  $b \notin S$  hat.

Werden  $\epsilon > 0$  beliebig klein und

$$b = (\epsilon, \epsilon, 1/2 - \epsilon, 1/2 - \epsilon)$$

gewählt, dann ist  $b \in S$  und die Werte  $\theta_k(b) \geq 1$  für  $k \in N$ . Der Vektor  $b$  ist somit eine schwach effiziente Allokation, vgl. Proposition 3.7.

Beispiel 3.3.1 verdeutlicht, dass die Überschusseffizienz nach Andersen und Petersen [2] kein geeignetes Maß zur Differenzierung effizienter DMUs ist. Nach Proposition 3.6 ist die Menge der schwach effizienten Allokationen  $X$  das Bild einer Budget-Allokations-Funktion. In Beispiel 3.3.1 liegen schwach effiziente Allokationen aber auch beliebig nahe am Rand der Menge  $\text{clos}(S)$ . Die axiomatische Konzeption der Budget-Allokations-Funktionen, vgl. Definition 2.1.1, reicht folglich ebenfalls nicht aus, um alle *unvernünftigen* Allokationen zu filtern.

Nicht existierende Lösungen der erweiterten dualen Budgetgleichung (3.12) deuten jedoch nicht auf einen Mangel des Allokationsmechanismus, sondern auf vorliegende Blockierungen hin. Um diese Blockierungen aufzulösen, müssen Koalitionen in das Maß integriert werden. Hierfür ist eine Erweiterung der Effizienzanalyse auf beliebige Kollektionsstrukturen notwendig.

### 3.3.2 Beliebige Kollektionsstrukturen

In diesem Kapitel wird das Effizienzmaß auf beliebige Kollektionsstrukturen  $CS = \{C^T, \dots, C^0\}$  erweitert, indem sie an Teilmengen  $I \subseteq N$  und Partitionen  $C(I)$  in den jeweiligen Knoten des Allokationsbaums AT angepasst werden. Außerdem werden Optimierungsprobleme zur Berechnung ausgewogener Allokationen  $b \in Y(CS)$  formuliert.

Für  $b \in S$ ,  $I \subseteq N$  und eine Partition  $C(I) = \{C_1, \dots, C_p\}$  auf  $I$ , wird für jedes Mitglied  $k$  der Koalition  $C_j$  die *koalitionale, empirische Technologiemenge* durch

$$\mathcal{T}_k(b, C(I)) = \{ (z, \beta) \in \mathcal{T}_k(b) \mid \lambda_i = 0, \forall i \in C_j \cup N \setminus I \} \quad (3.14)$$

definiert. Der Rand  $\partial \mathcal{T}_k(b, C(I))$  und die effiziente Linie  $EF(\mathcal{T}_k(b, C(I)))$  dieser eingeschränkten Produktionsräume seien analog zu den bisherigen Ausführungen definiert.

Die linearen Programme  $\phi_k(b)$  aus (3.10) werden an die Koalitionen angepasst, indem für jedes Mitglied  $k$  der Koalition  $C_j$  die Funktion

$$\begin{aligned} \phi_k(b, C(I)) = \min \quad & v_k b \\ \text{unter} \quad & v_k A + w P \geq a_k \\ & v_{k,i} = 0, \forall i \in C_j \cup N \setminus I \\ & v_k, w \geq 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

definiert wird. Die Erweiterung wird auf die Funktionen  $\theta_k(b)$  aus (3.11) übertragen, die nun die Form

$$\theta_k(b, C(I)) = \frac{\phi_k(b, C(I))}{b_k} \quad (3.16)$$

haben. Das Effizienzmaß (3.16) wird als *koalitionale Überschusseffizienz* bezeichnet. Für jedes Mitglied  $k$  einer Koalition  $C_j$  wird hierdurch der radiale Abstand von der gemeinsamen effiziente Linie  $EF(\mathcal{T}_k(b, C(I)))$  bestimmt, vgl. Abbildung 2.5.

**Bemerkung.** Wilson [63] und Zhu [65] kritisieren die Formulierung des Effizienzmaßes durch die linearen Programme  $\phi_k(b)$ , weil sie nicht für Datenmatrizen wohldefiniert sind, in denen Monopolisten auftreten. Zwar gilt die Kritik nicht für I-O-Matrizen  $A \in \mathcal{M}$ , aber die Wohldefiniertheit geht mit

der Erweiterung der Funktionen  $\phi_k(b, C(I))$  auch für I-O-Matrizen verloren. Die Kritik richtet sich nur an die Formulierung des Effizienzmaßes als lineares Programm, nicht an das Maß selbst. Die Funktionen  $\phi_k(b, C(I))$  können aber umformuliert werden und sind dann für alle Datenmatrizen wohldefiniert, vgl. Scheel [47]. Um die Notation der Arbeit konsistent zu halten, wird die bisherige Formulierung beibehalten und die folgende Annahme getroffen.

**Annahme (A2)** Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix. Für  $b \in S$  und eine Partition  $C(I)$  einer Teilmenge  $I \subseteq N$  sind die Funktionen  $\phi_k(b, C(I))$  wohldefiniert.

Annahme (A2) ist erfüllt, falls eine I-O-Matrix  $A \in \mathcal{M}$  keine Nulleinträge hat.

Mit der koalitionalen Überschusseffizienz ist nun auch eine Abbildung für das Effizienzmaß  $\sigma : \mathbb{R}^{1 \times (m+1)} \times \mathbb{R}^{m+1} \times \mathcal{Q} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\sigma((a_k, b_k), \mathcal{T}(b, C(I)), \mathcal{P}, C(I)) = \theta_k(b, C(I))$$

definiert.

Für ausgewogene Allokationen  $b \in Y(CS)$  einer Kollektionsstruktur  $CS$  sind die Werte der koalitionalen Überschusseffizienz in den Knoten des Allokationsbaums AT identisch. Für eine Partition  $C(I)$  der Teilmenge  $I \subseteq N$  ist für die Werte  $\theta_k(b, C(I))$  die Bedingung

$$\theta(C(I)) = \theta_k(b, C(I)), \quad \forall k \in I$$

erfüllt. Wird die Submatrix  $V_{I,I}$  definiert, deren Zeilen  $v_{k,I}$  Teilvektoren der Lösungen der linearen Programm  $\phi_k(b, C(I))$  aus (3.15) an  $b$  sind, dann kann diese Bedingung durch die Gleichung

$$V_{I,I}b_I = \theta(C(I))b_I \tag{3.17}$$

beschrieben werden, die als *koalitionale, duale Budgetgleichung* bezeichnet wird. Der Teilvektor  $b_I$  ist ein Eigenvektor der Submatrix  $V_{I,I}$ , dessen Spektralradius  $\rho(V_{I,I})$  mit dem Wert  $\theta(C(I))$  übereinstimmt.

Für eine Partition  $C(I)$  einer Teilmenge  $I \subseteq N$  wird das Optimierungsproblem

$$\theta^*(C(I)) = \sup_{b \in S} \min_{k \in I} \theta_k(b, C(I)) \tag{3.18}$$

definiert. Um ausgewogene Allokationen  $b \in Y(CS)$  zu bestimmen, müssen die Indexmengen und Partitionen an die Kollektionsstruktur  $CS$  angepasst werden. Durch Addition der Budgetanteile einer Koalition und sukzessives Verteilen auf untergeordnete Strukturen erhält man eine Allokation  $b \in Y(CS)$ .

Mit dem Optimierungsproblem (3.18) wurde implizit eine Budget-Allokations-Funktion in Koalitionen definiert.

**Proposition 3.8** *Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix,  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem und  $C \in \mathcal{E}$  eine Partition auf  $N$ . Ferner seien die Annahmen (A1) und (A2) (vgl. Kapitel 1.2 bzw. 3.3.2) erfüllt, dann gilt: Die erweiterte Abbildung  $\Phi : \mathcal{M} \times \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit*

$$\Phi(A, \mathcal{P}, B, C) = \arg \sup_{b \in S} \min_{k \in N} \theta_k(b, C)$$

*ist eine Budget-Allokations-Funktion in Koalitionen (vgl. Definition 2.2.8)*

**Beweis.** Die Behauptung folgt aus den Propositionen 3.6 und 3.7.  $\square$

## 3.4 Allokationsverfahren

In diesem Kapitel werden die vorangegangenen Überlegungen zu einer Allokationsstrategie vereint.

**Algorithmus 3.1 (Allokationsverfahren)** *Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix,  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem und  $\beta \in \mathbb{R}$  ein Budget. Ferner seien die Annahmen (A1) und (A2) (vgl. Kapitel 1.2 bzw. 3.3.2) erfüllt. Sei  $\Phi : \mathcal{M} \times \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \times \mathcal{E} \rightarrow S$  durch das Optimierungsproblem (3.18) implizit definiert. Für  $I \subseteq N$  und eine Partition  $C(I)$  sei die eingeschränkte, empirische Technologiemenge  $\mathcal{T}_k(b, C(I))$  für  $k \in I$  in (3.14) definiert. Außerdem sei ein Effizienzmaß  $\sigma : \mathbb{R}^{1 \times (m+1)} \times \mathbb{R}^{m+1} \times \mathcal{Q} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\sigma((a_k, b_k), \mathcal{T}(b, C(I)), \mathcal{P}, C(I)) = \theta_k(b, C(I))$  aus (3.16) definiert.*

*Ermittle Allokationen  $b(CS)$  für die gilt:*

1.  $b(CS) \in G(CS)$  (vgl. (2.5); Ist  $Y(CS) \neq \emptyset$ , dann erfüllt eine ausgewogene Allokation in jedem Knoten des Allokationsbaums  $AT$  die koalitionale, duale Budgetgleichung (3.17)).

2.  $b(CS) \in D$  bzw.  $b(CS) \in \mathcal{C}$ .

Um diese Allokationen zu bestimmen, müssen

- ausgewogene Allokationen  $b \in Y(CS)$  für eine Kollektionsstruktur  $CS$  berechnet und
- dynamische Lösungen für die Auszahlungen identifiziert werden.

Um Algorithmen für die Bestimmung dieser Lösungen zu entwickeln, werden im nächsten Kapitel das Optimierungsproblem (3.18) und die Auswirkungen der Koalitionsbildung auf die Effizienzmaße analysiert.

# Kapitel 4

## Analyse des Allokationsverfahrens

In diesem Kapitel wird das Optimierungsproblem (3.18) analysiert, das zur Berechnung ausgewogener Allokationen definiert wurde. Die analytischen und algebraischen Eigenschaften einbeziehend werden Optimalitätsbedingungen angegeben und der Zusammenhang zwischen den Lösungen von (3.18) und der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17) dargestellt. Außerdem werden die Auswirkungen der Koalitionsbildung auf die Lösungen der Gleichung (3.17) untersucht, um dynamische Lösungen zu charakterisieren.

Zum Verständnis der folgenden Analysen sind Kenntnisse der nicht-differenzierbaren Optimierung und der Matrix-Theorie erforderlich. Der interessierte Leser wird auf die Werke von Clarke [15] und Horn et al. [26] verwiesen. Als Motivationshilfe seien die Worte von Bertrand Russel, *The Conquest of Happiness*, zitiert:

*‘In adolescence, I hated life and  
was continually at the verge of suicide,  
from which, however, I was restrained  
by the desire to know more mathematics.’*

## 4.1 Mathematische Grundlagen

Für die Analyse des Optimierungsmodells werden diverse mathematische Grundlagen benötigt, die im Folgenden aufgeführt werden.

### 4.1.1 Nicht-differenzierbare Optimierung

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Eine Funktion  $f$  heißt *lokal Lipschitz-stetig* in  $x \in X$ , falls eine Konstante  $L \geq 0$  existiert, so dass

$$\|f(y) - f(x)\| \leq L\|y - x\|$$

für alle  $y$  in einer  $\delta$ -Umgebung von  $x$ , dh.  $y \in B(x, \delta)$ . Eine Funktion heißt *Lipschitz-stetig* auf  $X$ , falls sie für alle  $x \in X$  lokal Lipschitz-stetig ist.

Eine Funktion  $f$  heißt *konvex*, falls für alle  $x, y \in X$  und  $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Eine Funktion  $f$  heißt *eigentlich konvex*, falls  $f$  konvex ist und  $f(x) < +\infty$  für mindestens einen Punkt  $x \in X$  und  $f(x) > -\infty$  für alle  $x \in X$ .

Die *Richtungsableitung* einer Funktion  $f$  im Punkt  $x$  in Richtung  $d$  wird mit

$$f'(x; d) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda}$$

bezeichnet. Bei der Definition wird die Existenz des Grenzwertes vorausgesetzt.

Die *verallgemeinerte Richtungsableitung* von  $f$  im Punkt  $x$  in Richtung  $d$  nach Clarke [15] wird mit

$$f^\circ(x; d) = \limsup_{y \rightarrow x, \lambda \searrow 0} \frac{f(y + \lambda d) - f(x)}{\lambda}$$

bezeichnet. Die verallgemeinerte Richtungsableitung existiert für lokal Lipschitz-stetige Funktionen.

Eine Abbildung  $f$  heißt *regulär*, falls für alle Richtungen  $d$  die Richtungsableitung  $f'(x; d)$  existiert und die Bedingung  $f'(x, d) = f^\circ(x; d)$  erfüllt ist.

Für nicht-differenzierbare Funktionen wird eine verallgemeinerte Ableitung eingeführt. Das Clarkesche-Subdifferential einer Lipschitz-stetigen Abbildung  $f$  im Punkt  $x$  wird mit

$$\partial f(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid y^\top d \leq f^\circ(x; d) \}$$

bezeichnet.

Spezielle nicht-differenzierbare Funktionen sind die *stückweise differenzierbaren Funktionen*. Für ausführliche Studien wird auf Scholtes [49] oder Jongen und Pallaschke [27] verwiesen.

**Definition 4.1.1 (cs-Funktionen)** Seien  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $f_1, \dots, f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetige Funktionen auf der offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $f$  ist eine stetige Selektion  $f \in cs$  (continuous selection) von  $f_1, \dots, f_k$  auf  $X$ , falls für alle  $x \in X$  die Menge der aktiven Funktionen  $I = \{i \in \{1, \dots, k\} \mid f_i(x) = f(x)\}$  nicht leer ist.

**Definition 4.1.2 (pc-Funktionen)** Sei  $f$  eine stetige Selektion von den Funktionen  $f_1, \dots, f_k$ . Falls die Funktionen  $f_1, \dots, f_k$   $r$ -mal stetig differenzierbar sind, dann bezeichnet man  $f$  als  $r$ -mal stückweise differenzierbar (piecewise differentiable)  $f \in pc^r$ . Falls  $f \in pc^1$ , dann heißt  $f$  stückweise differenzierbar.

**Definition 4.1.3 (B-differenzierbar)** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lipschitz-stetige Funktion. Die Funktion  $f$  heißt im Punkt  $x$  B-differenzierbar, falls eine positiv homogene Funktion  $Bf_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{f(x+d) - f(x) - Bf_x(d)}{\|d\|} = 0$$

existiert. Die Funktion  $Bf_x$  heißt B-Ableitung von  $f$  in  $x$ .

Für jede B-differenzierbare Funktion existiert eine Richtungsableitung mit  $f'(x; d) = Bf_x(d)$ . Die Umkehrung der Aussage gilt nicht.

Zur Charakterisierung stationärer Punkte werden folgende Definitionen eingeführt.

**Definition 4.1.4 (C-Stationarität)** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lipschitz-stetige Funktion. Ein Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  heißt C-stationär (Clarke-stationär), falls  $0 \in \partial f(x)$ .

**Definition 4.1.5 (B-Stationarität)** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lipschitz-stetige Funktion. Ein Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  heißt B-stationärer Punkt der B-differenzierbaren Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , falls  $f'(x; d) \geq 0$  für alle  $d \in \mathbb{R}^n$ .

Jeder B-stationäre Punkt einer Funktion  $f$  ist auch C-stationär. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht.

### 4.1.2 Lösungsmatrizen

In diesem Kapitel werden die Lösungsmatrizen  $V$  der linearen Programme  $\phi_k$  aus (3.10) an  $b \in S$  charakterisiert und analysiert. Die folgenden Aussagen basieren auf Horn et al. [26], Bapat et al. [6] und Berman et al. [8].

Eine Lösungsmatrix  $V$  ist eine *nicht-negative, quadratische Matrix*, deren Hauptdiagonale aus Nulleinträgen besteht, d.h.  $v_{k,k} = 0$  für alle  $k \in N$ . Eine Matrix  $V$  heißt *irreduzierbar*, falls der assoziierte Digraph *streng zusammenhängend* ist. Eine nicht irreduzierbare Matrix  $V$  heißt *reduzierbar*. Ist eine Matrix  $V$  reduzierbar, dann existiert eine Permutationsmatrix  $P$  mit

$$PVP^T = \begin{pmatrix} V_{I_1, I_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_{I_2, I_2} & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & V_{I_t, I_t} & \cdots & 0 \\ V_{I_{t+1}, I_1} & V_{I_{t+1}, I_2} & \cdots & & V_{I_{t+1}, I_{t+1}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ V_{I_s, I_1} & V_{I_s, I_2} & \cdots & & V_{I_s, I_{s-1}} & V_{I_s, I_s} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Diese Form einer reduzierbaren Matrix heißt *Frobenius-Normal-Form (FNF)*. Die *Blöcke*  $V_{I_i, I_i}$  für  $i = 1, \dots, t$ , die in der führenden Position der Hauptdiagonalen plaziert sind und bei denen die Submatrizen  $V_{I_i, I_j} = 0$  für  $j = 1, \dots, i-1$ , heißen *isolierte Blöcke*. Da der assoziierte Digraph eines isolierten Blocks ist streng zusammenhängend und wird er daher auch *finale Klasse* genannt. Die übrigen Klassen heißen *nicht-finale Klassen*. Die Blöcke  $V_{I_k, I_k}$  für alle  $k = 1, \dots, s$  der Hauptdiagonalen einer Matrix in FNF sind quadratische Submatrizen, die entweder irreduzierbar oder  $(1 \times 1)$ -Nullmatrizen sind.

Über das Spektrum  $\sigma(V)$  einer Matrix  $V$  können folgende Aussagen getroffen werden. Da die Lösungsmatrizen  $V$  von  $\phi_k$  an  $b \in S$  nicht-negativ sind, ist

der *Spektralradius*  $\rho(V)$  ein Eigenwert von  $V$ , vgl. Theorem 8.3.1 in Horn et al. [26]. Ist eine Matrix  $V$  reduzierbar, dann enthält das Spektrum  $\sigma(V)$  die Spektralradien aller finalen Klassen. Eine Klasse  $k$  einer Matrix  $V$  in FNF heißt *bestimmend* (engl.: basic), falls der Spektralradius des Diagonalblocks mit dem Spektralradius der Matrix übereinstimmt, d.h.

$$\rho(V) = \rho(V_{I_k, I_k}).$$

Für den kleinsten Spektralradius der finalen Klassen einer reduzibaren Matrix  $V$  in FNF wird die Definition

$$\rho_{mfc}(V) = \min_{1 \leq k \leq t} \rho(V_{I_k, I_k}) \quad (4.2)$$

eingeführt.

Für jede Lösungsmatrix  $V$  existiert ein nicht-negativer *Eigenvektor*  $y \geq 0$ ,  $y \neq 0$  dessen Eigenwert mit dem Spektralradius übereinstimmt, d.h.

$$Vy = \rho(V)y,$$

vgl. Theorem 8.3.1 in Horn et al. [26]. Eine irreduzibare Matrix  $V$  hat einen positiven Eigenvektor zum geometrisch eindeutigen Eigenwert  $\rho(V)$ , vgl. Perron-Frobenius-Theorem, z.B. Theorem 8.4.4 in Horn et al. [26]. Ist eine nicht-negative Matrix  $V$  reduzierbar, dann hat sie einen positiven Eigenvektor zum Spektralradius, falls die finalen Klassen und die bestimmenden Klassen identisch sind, vgl. Theorem 1.7.6 in Bapat et al. [6]. Ein Eigenvektor von  $V^\top$  wird *linker Eigenvektor* genannt.

Für  $k \in N$  und eine Zeile  $v_k$  der Matrix  $V$  an  $b \in S$  können die Einträge  $v_{k,i}$  über die Gestalt der Technologiemenge  $\mathcal{T}(b)$  erklärt werden. Hierfür wird die Menge

$$L_k(b) = \{ i \in N \mid v_{k,i} \neq 0 \} \quad (4.3)$$

definiert. Für  $k \in N$  und  $b \in S$  ist der Vektor  $(a_k, \theta_k(b)b_k) \in \partial\mathcal{T}_k(b)$ . Der Punkt  $(a_k, \theta_k(b)b_k)$  liegt folglich in einer *Seite*  $F_k(b)$  der eingeschränkten Technologiemenge, d.h.

$$(a_k, \theta_k(b)b_k) \in F_k(b) \subset \mathcal{T}_k(b).$$

Da der eingeschränkte Produktionsraum  $\mathcal{T}_k(b)$  durch alle DMUs  $i \neq k$  aufgespannt wird, liegen für alle  $i \neq k$  die Punkte  $(a_i, b_i) \in \mathcal{T}_k(b)$ . Für die Elemente  $(a_i, b_i)$ , die ebenfalls in der Seite  $F_k(b)$  liegen, wird die Indexmenge

$$M_k(b) = \{ i \in N \mid (a_i, b_i) \in F_k(b) \} \quad (4.4)$$

definiert.

Durch die Lösung des linearen Programms  $\phi_k(b)$  aus (3.10) wird der Punkt  $(a_k, \theta_k(b)b_k)$  als Linearkombination einiger  $(a_i, b_i)$  dargestellt. Jede Zeile  $v_k$  von  $V$  kann folglich nur dann einen Eintrag  $v_{k,i} \neq 0$  haben, wenn die Elemente  $(a_i, b_i)$  die Bedingung  $(a_i, b_i) \in F_k(b)$  erfüllen. Für alle  $(a_i, b_i) \notin F_k(b)$  sind die Einträge  $v_{k,i} = 0$ . Daher gilt die Beziehung

$$L_k(b) \subseteq M_k(b).$$

Zusammenfassend ergibt sich für die Einträge einer Lösungsmatrix  $V$  und die Gestalt von  $\mathcal{T}(b)$  folgendes Lemma.

**Lemma 4.1** *Sei  $k \in N$ ,  $b \in S$  und  $V$  eine Lösungsmatrix von  $\phi_k(b)$  an  $b$ , dann gilt für  $i \in N$ ,  $i \neq k$ :*

1. Falls  $i \in M_k(b)$ , dann ist  $(a_i, b_i) \in \partial\mathcal{T}_k(b)$ .
2. Falls  $(a_i, b_i) \in \text{int}(\mathcal{T}_k(b))$ , dann ist  $i \notin M_k(b)$ .

**Beweis.** Die Behauptungen folgen aus der Definition der Indexmengen und der Tatsache, dass ein Optimum des linearen Programms  $\phi_k(b)$  in einem Randpunkt der Menge  $\mathcal{T}_k(b)$  angenommen wird, vgl. Korollar 7.1h in Schrijver [52]. □

Für eine Partition  $C(I)$  einer Teilmenge  $I \subseteq N$  wurden Lösungsmatrizen der Form  $V_{I,I}$  definiert, wobei die Teilvektoren  $v_{k,I}$  der Lösungen der linearen Programme  $\phi_k(b, C(I))$  aus (3.15) an  $b$  sind. Alle Aussagen lassen sich auf diese Submatrizen übertragen. Auch die Indexmengen  $L_k(b, C(I))$  und  $M_k(b, C(I))$  können analog definiert werden.

## 4.2 Analyse des Optimierungsproblems

In diesem Kapitel werden die Optimierungsprobleme (3.13) und (3.18) analysiert. Insbesondere werden die Zusammenhänge zwischen den Lösungen und den dualen Budgetgleichungen (3.12) und (3.17) erläutert. Dem Prinzip Albert Einsteins

*‘Everything should be as simple as possible,  
but not simpler.’*

folgend, werden die Ausführungen auf den Fall  $I = N$ ,  $C = N$  und das Optimierungsproblem

$$\sup_{b \in S} \min_{k \in N} \theta_k(b)$$

aus (3.13) eingeschränkt. Durch eine Anpassung der Abbildungen an Teilmengen  $I \subseteq N$  und Partitionen  $C(I)$  können die folgenden Aussagen ohne Einschränkung auf das Optimierungsproblem (3.18) übertragen werden.

*Für die folgenden Analysen sei eine I-O-Matrix  $A \in \mathcal{M}$  und ein Preissystem  $P \in \mathcal{Q}$  gegeben. Ferner sei die Annahme (A1) (vgl. Kapitel 1.2) erfüllt.*

Die mathematischen Betrachtungen werden an die übliche Notation der nicht-differenzierbaren Optimierung angelehnt. Hierzu wird obiges Optimierungsproblem als äquivalentes Minimierungsproblem umformuliert. Für  $b \in S$  und  $k \in N$  werden die Funktion  $f_k(b) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\begin{aligned} f_k(b) = -\phi_k(b) = \quad & \max \quad w_k b \\ & \text{unter} \quad w_k A + uP \leq -a_k \\ & \quad \quad w_{k,k} = 0 \\ & \quad \quad w_k, u \leq 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

definiert. Ferner werden die *Lösungsmatrizen*

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix},$$

definiert, deren Zeilen  $w_k$  für  $k \in N$  Lösungen der linearen Programme  $f_k$  an  $b \in S$  sind. Die Aussagen über nicht-negative Matrizen aus Kapitel 4.1.2 können auf die Matrizen  $W$  übertragen werden, da für alle  $b \in S$  die Matrix  $-W$  nicht-negativ ist. Außerdem wird durch die Funktionen

$$h_k(b) = \frac{f_k(b)}{b_k} = -\theta_k(b) \quad (4.6)$$

und

$$h(b) = \max_{k \in N} h_k(b) \quad (4.7)$$

das Optimierungsproblem

$$\min\{ h(b) \mid b \in S \} \quad (4.8)$$

formuliert.

Zu Beginn werden einige Eigenschaften der definierten Funktionen beschrieben.

**Proposition 4.2**

1. Die Funktionen  $f_k$  sind nicht positiv, konvex und positiv homogen auf  $\mathbb{R}_+^n$ . Das Subdifferential  $\partial f_k(b)$  der Funktionen  $f_k$  an  $b \in \mathbb{R}_+^n$  stimmt mit der Menge der optimalen Lösungen  $w_k$  von  $f_k$  an  $b$  überein.
2. Die Funktion  $h$  ist auf  $\mathbb{R}_+^n$  nach oben durch Null beschränkt und positiv homogen vom Grad Null. Auf  $\mathbb{R}_{++}^n$  ist  $h$  negativ und eine reguläre, Lipschitz-stetige Funktion. Das Subdifferential  $\partial h(b)$  von  $h$  an  $b \in \mathbb{R}_{++}^n$  ist

$$\partial h(b) = \text{convhull}\left\{ g_k \in \mathbb{R}^n \mid g_k = \frac{1}{b_k} (w_k^\top - \frac{f_k(b)}{b_k} e_k) \right\},$$

wobei  $\text{convhull}$  die konvexe Hülle,  $k \in K = \{k \in N \mid h_k(b) = h(b)\}$  die aktive Indermenge und  $w_k$  eine optimale Lösung von  $f_k$  an  $b$  ist.

**Beweis.**

1. Wegen der Restriktion  $w \leq 0$  ist der optimale Wert des linearen Programms  $f_k$  aus (4.5) für  $b \in \mathbb{R}_+^n$  nach oben durch Null beschränkt. Konvexität und positive Homogenität können einfach verifiziert werden. Die Aussage über das Subdifferential folgt aus Korollar 23.5.3. in Rockafellar [44].
2. Nicht-Positivität auf  $\mathbb{R}_+^n$  und Negativität auf  $\mathbb{R}_{++}^n$  folgt aus der Definition von  $h$ . Lipschitz-Stetigkeit, positive Homogenität vom Grad Null und Regularität sind leicht zu verifizieren. Das Subdifferential folgt aus Propositionen 2.3.12 und 2.3.13 in Clarke [15]. □

Die Funktion  $h$  ist nicht-differenzierbar und auch nicht konvex. Aber  $h$  ist *halbstrikt quasikonvex* auf  $\mathbb{R}_{++}^n$ , d.h. für  $x, b \in \mathbb{R}_{++}^n$  mit  $h(x) \neq h(b)$  und  $\lambda \in (0, 1)$  ist

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)b) < \max\{h(x), h(b)\}.$$

Dies wird in der folgenden Proposition bewiesen.

**Proposition 4.3** *Die Funktion  $h$  ist halbstrikt quasikonvex auf  $\mathbb{R}_{++}^n$ .*

**Beweis.** Zuerst wird gezeigt, dass die Funktionen  $h_k$  auf der Menge  $\mathbb{R}_+^n$  halbstrikt quasikonvex sind. Seien  $x, b \in \mathbb{R}_+^n$  mit  $h_k(x) \neq h_k(b)$  und  $\lambda \in (0, 1)$ . Wegen der Konvexität der Funktionen  $f_k$  ist

$$\begin{aligned} h_k(\lambda x + (1 - \lambda)b) &= \frac{f_k(\lambda x + (1 - \lambda)b)}{\lambda x_k + (1 - \lambda)b_k} \\ &\leq \frac{\lambda f_k(x)}{\lambda x_k + (1 - \lambda)b_k} + \frac{(1 - \lambda)f_k(b)}{\lambda x_k + (1 - \lambda)b_k} \\ &= \frac{\lambda x_k}{\lambda x_k + (1 - \lambda)b_k} \frac{f_k(x)}{x_k} + \frac{(1 - \lambda)b_k}{\lambda x_k + (1 - \lambda)b_k} \frac{f_k(b)}{b_k} \\ &< \max\{h_k(x), h_k(b)\}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist strikt, da  $\alpha p + (1 - \alpha)q < \max\{p, q\}$  für  $\alpha \in (0, 1)$  und  $p \neq q$ . Die Funktionen  $h_k$  sind also halbstrikt quasikonvex. Aus der Stetigkeit der Funktionen  $h_k$  folgt, dass sie auch quasikonvex sind, vgl. Karamadian [28] oder Martos [35], Theorem 7.

Funktionen, die sowohl halbstrikt quasikonvex als auch quasikonvex sind, werden in Martos [35] explizit quasikonvex genannt. Die Funktion  $h$  ist ein endliches Maximum halbstrikt quasikonvexer Funktionen  $h_k$  und somit ebenfalls explizit quasikonvex, vgl. Theorem 54 in Martos [35].  $\square$

Halbstrikte Quasikonvexität der Funktion  $h$  ist für die Eigenschaften der Lösungsmenge des Optimierungsproblems (4.8) bedeutend. Aus der Stetigkeit von  $h$  auf  $\mathbb{R}_{++}^n$  folgt, dass  $h$  auch quasikonvex ist. Hierdurch ist die Niveaumenge der Funktion konvex, vgl. Karamadian [28]. Jedes lokale Minimum einer halbstrikt quasikonvexen Funktion ist ebenfalls ein globales Optimum, vgl. Avriel [5], Theorem 6.5. Halbstrikte Quasikonvexität von Funktionen impliziert aber nicht, dass jeder stationäre Punkt ein Minimum ist. Dies kann an dem trivialen Beispiel  $f(b) = b^3$  verdeutlicht werden. Für die Funktion  $h$  ist Stationarität jedoch eine hinreichende Bedingung für ein Minimum. Außerdem ist Stationarität der Funktion  $h$  auf der offenen Menge  $S$  äquivalent zur Stationarität von  $h$  ohne die Nebenbedingung  $e^\top b = 1$ . Diese Aussagen werden im Weiteren bewiesen. Zunächst wird eine nützliche Beschreibung der Stationarität der Funktion  $h$  auf der Menge  $S$  eingeführt.

**Lemma 4.4** *Der Punkt  $b$  ist C-stationär auf  $S$  genau dann, wenn ein Vektor  $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$  mit  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha_i = 0 \forall i \notin K = \{k | h_k(b) = h(b)\}$  und  $\alpha^\top b = 1$  existiert, so dass*

$$W^\top \alpha = h(b)\alpha - \lambda e.$$

**Beweis.** Sei  $b \in S$  und  $K = \{k | h_k(b) = h(b)\}$  mit  $\#K = p \leq n$ . Der Punkt  $b \in S$  ist C-stationär genau dann, wenn  $0 \in \partial h(b) + \lambda e$ . Nach Proposition 4.2 ist die Bedingung  $0 \in \partial h(b) + \lambda e$  erfüllt genau dann, wenn ein Vektor  $\mu \in \mathbb{R}_+^p$  existiert, so dass

$$0 = \sum_{k \in K} \frac{\mu_k}{b_k} (w_k^\top - \frac{f_k(b)}{b_k} e_k) + \lambda e, \quad \sum_{k \in K} \mu_k = 1.$$

Setzt man  $\alpha_k = \mu_k / b_k$ , dann erhält man mit  $e^\top \mu = \alpha^\top b = e^\top b = 1$  die Beziehung

$$h(b)\alpha - \lambda e = \sum_{k \in K} \alpha_k w_k^\top.$$

Ergänzt man den Vektor  $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$  um die Komponenten  $\alpha_i = 0$  für alle  $i \notin K$  und verwendet in der Notation die Lösungsmatrix  $W$ , deren Zeilen aus den Vektoren  $w_k$  bestehen, dann folgt

$$h(b)\alpha - \lambda e = W^\top \alpha$$

und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

Für das Optimierungsproblem (4.8) ergeben sich folgende Optimalitätsbedingungen.

**Proposition 4.5 (Optimalitätsbedingungen)** *Für  $b \in S$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Der Punkt  $b$  ist ein Minimum von  $h$  auf  $S$ .*
2. *Der Punkt  $b$  ist B-stationär auf  $S$ , d.h. die Ungleichung  $h'(b; d) \geq 0$  ist für jede Richtung  $d$  mit  $e^\top d = 0$  erfüllt.*
3. *Der Punkt  $b$  ist C-stationär auf  $S$ , d.h. es existiert ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  und die Bedingung  $0 \in \partial h(b) + \lambda e$  gilt.*
4. *Der Punkt  $b$  ist B-stationär auf  $\mathbb{R}_{++}^n$ , d.h. die Ungleichung  $h'(b; d) \geq 0$  gilt für jede Richtung  $d \in \mathbb{R}^n$ .*

5. Der Punkt  $b$  ist  $C$ -stationär auf  $\mathbb{R}_{++}^n$ , d.h. die Bedingung  $0 \in \partial h(b)$  ist erfüllt.

**Beweis.** Zuerst wird die Äquivalenz der ersten und zweiten Aussagen bewiesen. Die zweite Aussage ist natürlich notwendig für ein Minimum von  $h$  in  $b$ . Es bleibt zu zeigen, dass sie auch hinreichend ist. Hierfür sei angenommen,  $b$  sei kein Minimum von  $h$  auf  $S$ . Dann existiert ein Punkt  $x \in S$  mit  $h(x) < h(b)$ . Aus der halbstrikten Quasikonvexität der Funktion  $h$  folgt für jedes  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $d = x - b$  mit  $e^\top d = 0$  die Ungleichung  $h(b + \alpha d) < h(b)$ . Da die Indexmenge der aktiven Funktionen  $K = \{k | h(b) = h_k(b)\}$  in einer Umgebung von  $b$  nicht größer wird, existiert ein Index  $k \in K$  und eine positive Nullfolge  $\alpha^{(l)}$ , so dass

$$h(b + \alpha^{(l)}d) = h_k(b + \alpha^{(l)}d) = \frac{f_k(b + \alpha^{(l)}d)}{b_k + \alpha^{(l)}d_k} < \frac{f_k(b)}{b_k} = h_k(b) = h(b).$$

Wählt man  $x$  nahe genug bei  $b$ , dann ist die letzte strikte Ungleichung für  $\alpha^{(1)} = 1$  erfüllt. Mit der Konvexität der Funktionen  $f_k$  erhält man

$$\begin{aligned} h'(b; d) &= h'_k(b; d) \\ &= \frac{f'_k(b; d) - f_k(b) \frac{d_k}{b_k}}{b_k} \\ &\leq \frac{f_k(b + d) - f_k(b) - f_k(b) \frac{d_k}{b_k}}{b_k} \\ &< \frac{f_k(b) \left[ \frac{b_k + d_k}{b_k} - 1 - \frac{d_k}{b_k} \right]}{b_k} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch beweist die Äquivalenz der Aussagen 1 und 2.

Aus der Konvexität von  $h'(b; \cdot)$ , vgl. Proposition 4.2, folgt die Äquivalenz der Aussagen 2 und 3, vgl. Theorem 28.3. in Rockafellar [44].

Um die Äquivalenz der Aussagen 3 und 5 zu zeigen, muss bewiesen werden, dass für einen stationären Punkt der Lagrangemultiplikator  $\lambda = 0$  ist. Nach Lemma 4.4 ist  $0 \in \partial h(b) + \lambda e$  genau dann, wenn ein Vektor  $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha_i = 0$  für alle  $i \notin K$  mit  $\alpha^\top b = 1$  existiert, so dass

$$W^\top \alpha = h(b)\alpha - \lambda e.$$

Durch Multiplizieren der Gleichungen von links mit  $b^\top$ , erhält man mit  $\alpha_i = 0$  für alle  $i \notin K$  und  $\alpha^\top b = 1$  die Beziehung

$$b^\top W^\top \alpha = h(b) \alpha^\top b = h(b).$$

Einsetzen liefert

$$h(b) = h(b) - \lambda,$$

woraus die Behauptung  $\lambda = 0$  folgt.

Die Äquivalenz der Aussagen 4 und 5 folgt ebenfalls aus der Konvexität von  $h'(b; \cdot)$ , vgl. Proposition 4.2 und Theorem 28.3. in Rockafellar [44].  $\square$

Um stationäre Punkte genauer analysieren zu können, werden Aussagen der nicht-differenzierbaren Optimierung mit der Matrix-Theorie verknüpft. Hierfür wird zunächst ein Lemma über den Zusammenhang zwischen dem minimalen Spektralradius der finalen Klassen einer Lösungsmatrix und den Funktionswerten  $h$  bewiesen.

**Lemma 4.6** *Sei  $W$  eine Lösungsmatrix von  $f_k$  aus (3.10) an  $b \in S$ , dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Es existiert ein  $y > 0$ ,  $y^\top e = 1$  mit*

$$Wy \leq -\rho_{mfc}(-W)y.$$

2.  *$-\rho_{mfc}(-W) \leq h(\hat{b})$  für alle  $\hat{b} \in S$ .*

**Beweis.** Um die erste Behauptung zu beweisen, wird für  $b \in S$  eine nicht-negative Lösungsmatrix  $-W$  betrachtet. Falls  $-W$  einen positiven Eigenvektor  $y$  hat, dann ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt, vgl. Theorem 8.4.4 in Horn et al. [26]. Die Behauptung muss also noch für reduzierbare Lösungsmatrizen gezeigt werden. Hierbei wird angenommen, dass  $-W$  (durch geeignete Permutation) in Frobenius-Normal-Form (FNF) ist, vgl. (4.1).

Der Vektor  $y$  wird folgendermaßen konstruiert. Für die finalen Klassen  $k$  von  $W$  wählt man  $y_{I_k} > 0$  als Eigenvektor zum Spektralradius der irreduzierbaren Teilmatrizen  $-W_{I_k, I_k}$ , vgl. Theorem 8.4.4 in Horn et al. [26].

Zur Bestimmung der Komponenten  $y_{I_k}$  nicht-finaler Klassen  $k$  von  $W$  wird eine Fallunterscheidung getroffen. Ist  $k$  eine nicht-finale Klasse mit

$$\rho(-W_{I_k, I_k}) \geq \rho_{mfc}(-W),$$

dann wird  $y_{I_k} > 0$  ebenfalls als Eigenvektor von  $-W_{I_k, I_k}$  bestimmt, dessen Eigenwert mit dem Spektralradius übereinstimmt. Anderenfalls werden zwei Fälle unterschieden. Falls  $-W_{I_k, I_k} \neq 0$ , dann berechnet man die Komponenten von  $y_{I_k}$  durch

$$y_{I_k} = (\rho(V)I + W_{I_k, I_k})^{-1} \sum_{i=1}^{k-1} -W_{I_k, I_i} y_{I_i}.$$

Ist  $W_{I_k, I_k} = 0$ , dann besteht die finale Klasse  $k$  nur aus einem Element und man berechnet  $y_k$  durch

$$y_k = \frac{1}{\rho(-W)} \sum_{i=1}^{k-1} -w_{k, I_i} y_{I_i}.$$

Nach Konstruktion können die Komponenten des Vektors  $y$  der nicht-finalen Klassen von  $W$  iterativ berechnet werden. Außerdem ist  $-W_{I_k, I_k} \geq 0$ ,  $y_{I_i} > 0$  und  $(\rho(-W)I + W_{I_k, I_k})^{-1} > 0$ , vgl. Theorem 1.7.2 in Bapat [6]. Mit der Normalisierung des Vektors  $y$  ist die erste Behauptung bewiesen.

Um die zweite Behauptung zu zeigen, sei  $\hat{W}$  eine Lösungsmatrix an  $\hat{b} \in S$ . Aus der Zulässigkeit der Zeilen  $w_k$  der Lösungsmatrix  $W$  in den linearen Programmen  $f_k$  an  $\hat{b}$  ergibt sich die Ungleichung

$$W\hat{b} \leq \hat{W}\hat{b} \leq h(\hat{b})\hat{b}.$$

Nach Theorem 8.1.26 in Horn et al. [26] folgt  $-\rho_{mfc}(-W) \leq h(\hat{b})$ .  $\square$

Die Existenz einer Lösung des Optimierungsproblems (4.8) auf der offenen Menge  $S \subset \mathbb{R}_+^n$  wird in der folgenden Proposition bewiesen.

**Proposition 4.7** *Die Funktion  $h$  hat ein Minimum auf der Menge  $S$ .*

**Beweis.** Für  $\epsilon > 0$  hinreichend klein sei die nicht leere, kompakte Menge

$$S_\epsilon = \{b \in S | b \geq \epsilon\}$$

definiert. Da die Funktion  $h$  stetig auf  $S_\epsilon$  ist, vgl. Proposition 4.2, existiert ein Minimum  $b(\epsilon)$  der Funktion  $h$  auf  $S_\epsilon$ . Es wird gezeigt, dass  $\epsilon > 0$  hinreichend klein gewählt werden kann, so dass ein Minimum  $b(\epsilon)$  auf  $S_\epsilon$  auch ein Minimum auf  $S$  ist.

Sei  $\epsilon^{(k)}$  eine positive Nullfolge und  $b(\epsilon^{(k)})$  eine Folge stationärer Punkte auf  $S_{\epsilon^{(k)}}$ . Da die Folge  $b(\epsilon^{(k)})$  beschränkt ist, hat sie mindestens einen Häufungspunkt

$$b^0 = \lim_{k \rightarrow \infty} b(\epsilon^{(k)}) \in \text{clos}(S).$$

Die Funktion  $h$  ist halbstrikt quasikonvex, vgl. Proposition 4.3, und jeder C-stationäre Punkt  $b \in S$  ist ein globales Minimum, vgl. Proposition 4.5 und Theorem 6.5 in Avriel [5]. Ist ein Minimum  $b(\epsilon)$  auf  $S_\epsilon$  kein Minimum von  $h$  auf  $S$ , dann wird es auf dem Rand  $\partial S_\epsilon$  angenommen. Es existiert also ein  $k_1$ , so dass die Folge der Funktionswerte  $h(b(\epsilon^{(k)}))$  für alle  $k \geq k_1$  strikt monoton fallend ist.

Der Punkt  $b(\epsilon)$  ist C-stationär auf  $S_\epsilon$  genau dann, wenn ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  und ein Vektor  $\nu \in \mathbb{R}_+^n$  mit  $0 \in \partial h + \nu - \lambda e$  existieren. Nach Lemma 4.4 ist das der Fall genau dann, wenn ein Vektor  $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$  mit  $\alpha^\top b = 1$  und  $\alpha_i = 0$  für  $i \notin K = \{k | h_k(b(\epsilon)) = h(b(\epsilon))\}$  existiert und die Gleichung

$$W^\top \alpha = h(b(\epsilon))\alpha - \lambda e + \nu. \quad (4.9)$$

erfüllt ist.

Nun wird gezeigt, dass in Gleichung (4.9) der Lagrangemultiplikator  $\lambda = 0$  ist. Hierfür wird die aktive Indexmenge  $K$  genauer untersucht. Es seien die Indexmengen  $I = \{i | b_i^0 = 0\}$  und  $J = \{j | b_j^0 > 0\}$  definiert. Mit einer geeigneten Permutation ergeben sich die Vektoren  $b = (b_I; b_J)$  und die Lösungsmatrizen  $W$  haben die Form

$$W = \begin{pmatrix} W_{I,I} & W_{I,J} \\ W_{J,I} & W_{J,J} \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen den Indexmengen  $I, J, K$  untersucht. Ist  $i \in I$  und  $i \in K$ , dann muss  $w_{i,j} = 0$  für alle  $j \in J$  sein, da anderenfalls  $f_i(b(\epsilon^{(k)})) < 0$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_i(\epsilon^{(k)}) = 0$  zu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_i(b(\epsilon^{(k)})) = -\infty$$

führt und somit  $i \notin K$  folgt.

Nun wird bewiesen, dass  $J \cap K = \emptyset$  gilt. Es sei angenommen, dass ein Index  $j \in J$  und  $j \in K$  existiert. Da die Folge der Funktionswerte  $h(b(\epsilon^{(k)}))$  für alle  $k \geq k_1$  strikt monoton fallend ist, existiert kein  $b \in B(b^0, \delta) \cap S$  mit

$$h_j(b) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} h_j(b(\epsilon^{(k)})) = h_j(b^0).$$

Definiert man den Vektor  $\hat{b}$  mit

$$\hat{b}_k = \begin{cases} \gamma_k > 0 & k \in I \\ b_k^0 & k \in J \end{cases},$$

dann erhält man wegen  $\hat{b} \geq b^0$

$$f_j(\hat{b}) \leq f_j(b^0).$$

Aus  $\hat{b}_j = b_j^0$  folgt

$$h_j(\hat{b}) = \frac{f_j(\hat{b})}{\hat{b}_j} \leq \frac{f_j(b^0)}{b_j^0} = h_j(b^0).$$

Normierung liefert den Vektor  $b = \hat{b}/e^\top \hat{b}$  mit  $b \in S$ . Für  $i \in I$  können die Komponenten  $\gamma_i$  von  $\hat{b}$  so gewählt werden, dass  $b \in B(b^0, \delta) \cap S$ . Da  $h_j$  positiv homogen vom Grad Null ist, folgt

$$h_j(b) = h_j(\hat{b}) \leq h_j(b^0).$$

Dies führt zu einem Widerspruch und die Behauptung  $J \cap K = \emptyset$  ist bewiesen.

Zusammenfassend erhält man für die Indexmengen  $K, I, J$  folgende Ergebnisse. Ist  $i \in I$  und  $i \in K$ , dann ist  $w_{i,j} = 0$  für alle  $j \in J$ . Außerdem ist  $J \cap K = \emptyset$ .

Diese Resultate werden auf die Gleichung (4.9) angewendet. Für  $j \in J$  ist die  $j$ -te Zeile der Gleichung (4.9) gegeben durch

$$\sum_{k \in K} \alpha_k w_{k,j} = h(b(\epsilon)) \alpha_j - \lambda + \nu_j. \quad (4.10)$$

Aus der Stationarität von  $b(\epsilon)$  und den Komplementaritätsbedingungen

$$\nu^\top (b(\epsilon) - \epsilon e) = 0$$

folgt  $\nu_j = 0$  für alle  $j \in J$ . Außerdem ist  $\alpha_i = 0$  für alle  $i \notin K$ . Wegen obiger Ergebnisse ist also  $\nu_j = 0$ ,  $\alpha_j = 0$ ,  $w_{k,j} = 0$  für alle  $k \in K$  und  $j \in J$ . Einsetzen in Gleichung (4.10) liefert das Ergebnis  $\lambda = 0$ .

Nun wird gezeigt, dass für eine Lösungsmatrix  $W$  an  $b(\epsilon)$  die Bedingung

$$-\rho_{mfc}(-W) = h(b(\epsilon))$$

erfüllt ist. Aus Lemma 4.6 folgt, dass ein Vektor  $y > 0$ ,  $\alpha^\top y = 1$  mit

$$Wy \leq -\rho_{mfc}(-W)y$$

und  $-\rho_{mfc}(-W) \leq h(b(\epsilon))$  existiert. Multipliziert man die Gleichungen (4.9) von links mit  $y^\top$ , dann erhält man

$$y^\top W^\top \alpha = h(b(\epsilon))\alpha^\top y - \lambda e^\top y + \nu^\top y,$$

so dass  $\nu \geq 0$ ,  $\nu \neq 0$ ,  $y > 0$ ,  $y^\top \alpha = 1$  und  $\lambda = 0$  die Ungleichungen

$$-\rho_{mfc}(-W) \geq h(b(\epsilon)) + \nu^\top y > h(b(\epsilon))$$

ergeben. Somit ist die Bedingung  $-\rho_{mfc}(-W) \leq h(b(\epsilon))$  erfüllt.

Am C-stationären Punkt  $b(\epsilon)$  gilt also  $-\rho_{mfc}(-W) = h(b(\epsilon))$ . Hieraus folgt, dass eine finale Klasse  $k$  mit Indexmenge  $I_k$  existiert, so dass

$$-\rho(-W_{I_k, I_k}) = h(b(\epsilon)).$$

Die Submatrix  $W_{I_k, I_k}$  ist irreduzierbar und hat somit einen positiven linken Eigenvektor  $z_{I_k} > 0$ , dessen Eigenwert mit dem Spektralradius übereinstimmt, vgl. Theorem 8.4.4 in Horn et al. [26]. Die Ungleichung

$$W_{I_k, I_k} b_{I_k}(\epsilon) \not\leq h(b(\epsilon)) b_{I_k}(\epsilon)$$

führt zu einem Widerspruch, vgl. Theorem 8.3.4 in Horn et al. [26]. Hierdurch sind alle Funktionen  $h_i$  für  $i \in I_k$  aktiv an  $b(\epsilon)$ . Setzt man  $K = I_k$ ,  $\alpha_k = z_k$  für  $k \in K$ ,  $\alpha_j = 0$  für  $j \notin I_k$ ,  $\lambda = 0$  und  $\nu = 0$ , dann erhält man

$$W^\top \alpha = h(b(\epsilon))\alpha.$$

Diese Gleichung ist identisch zu  $0 \in \partial h(b(\epsilon))$ , vgl. Lemma 4.4. Nach Proposition 4.5 ist  $b(\epsilon) \in S$  also ein Minimum von  $h$  auf  $S$ , wodurch die Behauptung bewiesen ist.  $\square$

Eine Lösung des Optimierungsproblems (4.8) existiert, auch wenn kein  $b \in S$  die erweiterte duale Budgetgleichung (3.12) erfüllt, vgl. Beispiel 3.3.1. Diese Aussage ist bedeutend für das Spiel  $\Gamma = (U, dom)$ , das auf der Menge ausgewogener Allokationen definiert wurde, vgl. Kapitel 2.3. Existiert keine Lösung der koalitionalen, dualen Budgetgleichung, dann können die Lösungen des Optimierungsproblems (3.18) als Auszahlungen im Spiel verwendet werden.

Hierdurch ist das Spiel  $\Gamma = (U, \text{dom})$  durch die Lösungen des Optimierungsproblems (4.8) auf der Menge der Kollektionsstrukturen wohldefiniert.

Bisher wurde auf klassische Konzepte (B-Stationarität, C-Stationarität) zur Charakterisierung der Optimalitätsbedingungen zurückgegriffen. Im Folgenden werden die Optimalitätsbedingungen über die algebraischen Eigenschaften der Lösungsmatrizen  $W$  erklärt.

**Proposition 4.8** *Sei  $b \in S$  und  $W$  eine Lösungsmatrix von  $f_k$  an  $b$ , dann gilt: Der Punkt  $b$  ist ein Minimum von  $h$  auf  $S$  genau dann, wenn*

$$-\rho_{mfc}(-W) = h(b).$$

**Beweis.** Der Punkt  $b \in S$  ist ein Minimum von  $h$  auf  $S$  genau dann, wenn  $0 \in \partial h(b)$ , vgl. Proposition 4.5. Nach Lemma 4.4 ist das der Fall genau dann, wenn ein Vektor  $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$  mit  $\alpha_i = 0$  für alle  $i \notin K = \{k | h_k(b) = h(b)\}$  existiert und die Gleichung

$$W^\top \alpha = h(b)\alpha.$$

erfüllt ist. Dass die Bedingung  $-\rho_{mfc}(-W) = h(b)$  hinreichend für ein Minimum ist, wurde bereits im Beweis der Proposition 4.7 gezeigt. Um die Notwendigkeit der Bedingung zu zeigen, sei angenommen, dass  $b \in S$  ein Minimum von  $h$  auf  $S$  ist. Aus der Gleichung

$$Wb \leq h(b)b$$

folgt  $-\rho_{mfc}(-W) \leq h(b)$ , vgl. Theorem 8.1.26 in Horn et al. [26]. Aus Lemma 4.6 folgt die Existenz eines Vektors  $y > 0$  mit

$$Wy \leq \rho_{mfc}(-W)y.$$

Ist  $-\rho_{mfc}(-W) < h(b)$ , dann führt

$$\begin{aligned} 0 &= y^\top (W^\top \alpha - h(b)\alpha) \\ &\leq (-\rho_{mfc} - h(b))y^\top \alpha < 0 \end{aligned}$$

zu einem Widerspruch. □

Als Ergänzung zur letzten Proposition soll auf die Identität von optimalem Funktionswert  $h(b)$  und dem Spektralradius einer Lösungsmatrix  $W$  hingewiesen werden. Ist  $b \in S$  ein Minimum von  $h$  auf  $S$  und existiert eine

Lösungsmatrix  $W$  an  $b$ , die einen positiven Eigenvektor  $y > 0$  hat, dann gilt im Optimum die Bedingung

$$-\rho(-W) = h(x).$$

Dies ist der Fall, falls die Matrix  $W$  irreduzierbar ist, vgl. Theorem 8.4.4 in Horn et al. [26], oder falls die finalen Klassen und die bestimmenden Klassen von  $W$  identisch sind, vgl. Theorem 1.7.6 in Bapat [6].

Eine optimale Lösung des Optimierungsproblems (4.8) kann auch identifiziert werden, ohne das Subdifferential der Funktion  $h$  oder den Spektralradius einer Lösungsmatrix  $-W$  zu analysieren.

**Proposition 4.9** *Ist  $b \in S$  and  $h_k(b) = h(b)$  für alle  $k \in N$ , dann ist  $b$  ein Minimum von  $h$  auf  $S$ .*

**Beweis.** Sei  $b \in S$  und  $h_k(b) = h(b)$ . Mit der Definition der Lösungsmatrizen  $W$  erhält man

$$Wb = h(b)b.$$

Der Vektor  $b$  ist also ein Eigenvektor der Matrix  $-W$  zum Eigenwert  $h(b)$ . Da der Vektor  $b > 0$  ist, stimmt der Eigenwert mit dem Spektralradius überein, d.h.  $-\rho(-W) = h(b)$ , vgl. Korollar 8.1.20 in Horn et al. [26].

Die Matrix  $-W$  ist nicht-negativ und hat einen nicht-negativen linken Eigenvektor zum Spektralradius, d.h. es existiert  $z \geq 0$  mit

$$W^\top z = -\rho(-W)z = h(b)z,$$

vgl. Theorem 2.1.1 in Berman et al. [8] Diese Gleichung ist äquivalent zu  $0 \in \partial h(b)$ , vgl. Lemma 4.4. □

In der letzten Proposition wurde bewiesen, dass die Lösungen der erweiterten dualen Budgetgleichung (3.12) ebenfalls Lösungen des Optimierungsproblems (4.8) sind. Wie in Beispiel 3.3.1 erläutert, existieren Lösungen der Gleichung (3.12) nicht für beliebige I-O-Matrizen. Im Weiteren werden anhand der algebraischen Eigenschaften der Lösungsmatrizen hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Lösung der erweiterten dualen Budgetgleichung (3.12) angegeben.

**Proposition 4.10** *Sei  $b \in S$  und  $W$  eine Lösungsmatrix von  $f_k$  aus (4.5) an  $b$ , dann gilt: Es existiert ein Minimum  $b^*$  der Funktion  $h$  auf  $S$  mit  $h_k(b^*) = h(b^*)$  für alle  $k \in N$  genau dann, wenn eine Lösungsmatrix  $W$  an einem Minimum  $b \in S$  existiert, die einen positiven Eigenvektor zum Eigenwert  $-\rho(-W) = h(b)$  hat.*

**Beweis.** Der Beweis wird in Anhang A geführt. □

In der folgenden Proposition werden Bedingungen angegeben, unter denen alle Lösungen des Optimierungsproblems (4.8) die erweiterte duale Budgetgleichung (3.12) erfüllen.

**Proposition 4.11** *Falls eine Lösungsmatrix  $W$  von  $f_k$  aus (4.5) an einer Lösung  $b \in S$  des Optimierungsproblems (4.8) mit  $-\rho(-W) = h(b)$  existiert, die einen positiven linken Eigenvektor hat, dann gilt  $h_k(b^*) = h(b^*)$  für alle  $k \in N$  und alle Lösungen  $b^*$  von (4.8).*

**Beweis.** Sei  $b \in S$  eine Lösung des Optimierungsproblems (4.8) und  $W$  eine Lösungsmatrix von (4.5) an  $b$  mit  $-\rho(-W) = h(b)$ . Stimmen die Funktionswerte  $h_k$  an  $b$  nicht überein, dann ist

$$Wb \not\leq h(b)b.$$

Der Eigenwert des positiven linken Eigenvektors stimmt mit dem Spektralradius  $-\rho(-W) = h(b)$  überein, vgl. Theorem 2.1.1 in Berman [8] und Korollar 8.1.30 in Horn et al. [26]. Hierdurch ergibt sich ein Widerspruch zu Theorem 8.3.4 in Horn et al. [26]. □

Auch die Eindeutigkeit der Lösung des Optimierungsproblems (4.8) kann mit den algebraischen Eigenschaften der Lösungsmatrizen erklärt werden. Dieser Zusammenhang wird in der folgenden Proposition bewiesen.

**Proposition 4.12** *Falls eine Lösungsmatrix  $W$  von  $f_k$  aus (4.5) an einer Lösung  $b \in S$  des Optimierungsproblems (4.8) mit  $-\rho(-W) = h(b)$  existiert, die irreduzierbar ist, dann gilt:*

1. Die Lösung  $b$  von (4.8) ist eindeutig.
2. Für alle  $k \in N$  ist  $h_k(b) = h(b)$ .

**Beweis.** Falls eine irreduzierbare Lösungsmatrix  $W$  der linearen Programme  $f_k$  an einer Lösung  $b$  des Optimierungsproblems (4.8) existiert, dann hat die nicht-negative Matrix  $-W$  einen positiven linken und rechten Eigenvektor, vgl. Theorem 2.1.1 in Berman [8] und Theorem 8.4.4 in Horn et al. [26]. Nach Voraussetzungen sei  $-\rho(-W) = h(b)$ .

Ist  $b$  keine eindeutige Lösung von  $h$  auf  $S$ , dann existiert ein Minimum  $x \in S$ ,  $x \neq b$  des Optimierungsproblems (4.8). Aus der Zulässigkeit der Zeilen  $w_k$  von  $W$  in den linearen Programmen  $f_k$  an  $x$  und der Gleichheit  $h(x) = h(b)$  folgt

$$Wx \leq h(b)x.$$

Mit der Identität  $-\rho(-W) = h(b)$  und der Irreduzierbarkeit von  $W$  folgt

$$Wx = h(b)x,$$

vgl. Theorem 8.3.4 in Horn et al. [26]. Da aber der Eigenvektor einer irreduzierbaren Matrix  $-W$  eindeutig ist, vgl. Theorem 8.4.4 in Horn et al. [26], ist die erste Behauptung bewiesen.

Die Identität der Funktionswerte folgt aus der Irreduzierbarkeit der Lösungsmatrix, der Existenz eines positiven linken Eigenvektors und Proposition 4.11.

□

### 4.3 Analyse der Koalitionsbildung

Im Folgenden werden die Auswirkungen der Koalitionsbildung auf ausgewogene Allokationen  $b \in Y(CS)$  untersucht. Insbesondere werden Voraussetzungen analysiert, unter denen eine Allokation  $b(CS)$  einer Kollektionsstruktur  $CS$  dominiert wird.

*Es wird angenommen, dass eine I-O-Matrix  $A \in \mathcal{M}$  und ein Preissystem  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  gegeben sind. Ferner seien die Annahmen (A1) und (A2) (vgl. Kapitel 1.2 bzw. 3.3.2) erfüllt.*

Zunächst werden die Änderungen der Budgetanteile beim Wechsel der Kollektionsstrukturen erläutert. Sei  $\tilde{CS}$  eine Kollektionsstruktur und  $b(\tilde{CS})$  eine ausgewogene Allokation. Außerdem sei  $CS$  eine Kollektionsstruktur die durch  $J \subset N$  aus  $\tilde{CS}$  erzeugt wird. Bei der Allokation  $b(\tilde{CS}) \in Y(\tilde{CS})$  erhalten die Mitglieder der Koalition  $J$  insgesamt das Budget

$$\tilde{\beta}(J) = \sum_{j \in J} b_j(\tilde{CS}).$$

Wird das Koalitionsbudget  $\tilde{\beta}(J)$  auf die zu bildende Koalitionsstruktur  $CS(J)$  verteilt, ergibt sich eine Allokation  $\hat{b}_j(CS(J))$  mit

$$\sum_{j \in J} \hat{b}_j(CS(J)) = \tilde{\beta}(J).$$

Die Änderungen der Budgetanteile werden durch die Quotienten

$$\delta_j = \frac{\hat{b}_j(CS(J))}{b_j(\tilde{CS})}$$

beschrieben. Da es sich bei diesem Vorgehen nur um eine Umverteilung des Koalitionsbudgets  $\tilde{\beta}(J)$  handelt, gilt

$$\min_{j \in J} \delta_j \leq 1.$$

Die durch die Koalition  $J$  erzeugte Kollektionsstruktur  $CS$  liefert eine ausgewogene Allokation  $b(CS) \in Y(CS)$ . Bei der Lösung der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17) auf der Stufe  $\tau = T$  erhält die Koalition  $J$  das Koalitionsbudget  $\beta(J)$ . Die Änderung des Koalitionsbudgets wird mit

$$\delta_I = \frac{\beta(I)}{\tilde{\beta}(I)}$$

bezeichnet. Insgesamt werden die Änderungen der Budgetanteile durch die Änderung des Koalitionsbudgets und die Umverteilung in der Koalitionsstruktur bestimmt. Für DMU  $j$  erhält man beim Wechsel der Koalitionsstrukturen die Budgetänderung

$$\Delta_j = \frac{b_j(CS)}{b_j(\tilde{C}S)} = \delta_j \delta_J.$$

Mit  $\Delta \in \mathbb{R}^n$  wird der Vektor bezeichnet, dessen Komponenten  $\Delta_k$  für  $k \in N$  die Änderungen der Budgetanteile beim Wechsel von Koalitionsstrukturen wiedergeben. Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich folgendes Korollar.

**Korollar 4.13** *Sei  $CS$  eine Koalitionsstruktur, die durch  $J \subset N$  von  $\tilde{C}S$  erzeugt wird, dann gilt: Die ausgewogene Allokation  $b(\tilde{C}S) \in Y(\tilde{C}S)$  wird von  $b(CS) \in Y(CS)$  über  $J$  dominiert genau dann, wenn*

$$\Delta_J \geq 1.$$

**Beweis.** Trivial. □

Die binäre Dominanzrelation *dom* erfordert eine gewisse Ausgeglichenheit zwischen den Umverteilungen, die sich durch die Koalitionsstruktur  $CS(J)$  ergeben, und der Änderung des Koalitionsbudgets. Führt die Umverteilung des Koalitionsbudgets  $\tilde{\beta}(J)$  innerhalb der Koalition zu großen Abweichungen ( $\min \delta_j \ll 1$ ), dann wird eine Allokation nur dominiert, falls die Änderung des Koalitionsbudgets ebenfalls groß ist ( $\delta_J \gg 1$ ). Grundsätzlich ist eine notwendige Bedingung für Dominanz  $\delta_J > 1$ .

Eine ausgewogene Allokation  $b(CS) \in Y(CS)$  wird durch die Lösungen der koalitionalen, dualen Budgetgleichungen (3.17) in den Knoten des Allokationsbaums AT determiniert. Für eine Teilmenge  $I \subseteq N$  und eine Partition  $C(I)$  ist eine Lösung der Gleichung (3.17) ebenfalls eine Lösung des Optimierungsproblems

$$\theta^*(C(I)) = \max_{b \in S} \min_{k \in I} \theta_k(b, C(I)),$$

vgl. Proposition 4.9. Das Optimierungsproblem wurde in (3.18), die Funktionen  $\theta_k(b, C(I)) = \phi_k(b, C(I))/b_k$  in (3.16) und die linearen Programme  $\phi_k(b, C(I))$  in (3.15) definiert.

Für die weiteren Analysen werden für eine Partition  $C(I)$  einer Teilmenge  $I \subseteq N$  der minimale Funktionswert

$$\theta(b, C(I)) = \min_{k \in I} \theta_k(b, C(I)) \quad (4.11)$$

und der maximale Funktionswert

$$\kappa(b, C(I)) = \max_{k \in I} \theta_k(b, C(I)) \quad (4.12)$$

definiert. Der optimale Wert  $\theta^*(C(I))$  des Optimierungsproblems (3.18), der als Eigenwert in der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17) auftritt, lässt sich folgendermaßen abschätzen.

**Proposition 4.14** *Sei  $I \subseteq N$  und  $C(I)$  eine Partition auf  $I$ , dann gilt:*

$$\max\{1, \theta(b, C(I))\} \leq \theta^*(C(I)) \leq \kappa(b, C(I)).$$

**Beweis.** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (O.B.d.A) sei  $I = N$  und  $C = N$ . Eine schwach effiziente Allokation  $b \in X$  existiert, vgl. Proposition 3.4. Für  $b \in X$  ist  $\theta(b) \geq 1$ , vgl. Proposition 3.1, woraus  $\theta^* \geq 1$  folgt. Die Ungleichung  $\theta(b) \leq \theta^*$  ist nach Definition von  $\theta^*$  erfüllt.

Nun sei  $\kappa(b) < \theta^*$ . Dann ist

$$Vb < \theta^*b.$$

Aus der Stetigkeit des Spektralradius und Theorem 8.1.26 in Horn [26] folgt die Ungleichung  $\rho(V) < \theta^*$ . Ist  $b^*$  eine optimale Lösung von (3.13), dann folgt aus der Zulässigkeit der Lösungsmatrix  $V$  an  $b^*$

$$\theta^*b^* \leq Vb^*.$$

Hieraus folgt  $\theta^* \leq \rho(V)$ , vgl. Theorem 8.1.26 in Horn [26], was zu einem Widerspruch führt.  $\square$

Um die Auswirkungen der Koalitionsbildung auf das Optimierungsproblem zu untersuchen, wird eine Abschätzung über die Veränderung der Lösung der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17) benötigt. Diese wird in folgenden Lemma aufgeführt.

**Lemma 4.15** *Sei  $I \subseteq N$ ,  $C(I)$  eine Partition auf  $I$  und  $\tilde{b}, b \in S$ . Für  $k \in I$  sei*

$$\gamma_k = \frac{b_k}{\tilde{b}_k} = \frac{\theta_k(\tilde{b}, C(I)) \phi_k(b)}{\theta_k(b, C(I)) \phi_k(\tilde{b})}, \quad (4.13)$$

und die Indexmengen  $M_k$  in (4.4) definiert, dann gilt: Für alle  $k \in I$  existieren Vektoren  $\lambda_k, \tilde{\lambda}_k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  mit  $\lambda_k e = \tilde{\lambda}_k e = 1$  und

$$\sum_{i \in M_k(b, C(I))} \lambda_{k,i} \gamma_i \leq \frac{\theta_k(b, C(I))}{\theta_k(\tilde{b}, C(I))} \gamma_k \leq \sum_{i \in M_k(\tilde{b}, C(I))} \tilde{\lambda}_{k,i} \gamma_i.$$

**Beweis.** O.B.d.A. sei  $I = N$  und  $C = N$ . Ferner seien  $\tilde{b}, b \in S$ . Für  $k \in N$  sei  $\tilde{v}_k$  eine optimale Lösung von  $\phi_k$  aus (3.10) an  $\tilde{b}$  und  $v_k$  eine optimale Lösung von  $\phi_k$  an  $b$ .

Setzt man

$$\tilde{\lambda}_{k,i} = \frac{\tilde{v}_{k,i} \tilde{b}_i}{\sum_{j=1}^n \tilde{v}_{k,j} \tilde{b}_j},$$

dann ist  $0 \leq \tilde{\lambda}_{k,i} \leq 1$  und  $\tilde{\lambda}_k e = 1$ . Aus der Optimalität von  $v_k$  und der Zulässigkeit von  $\tilde{v}_k$  an  $b$  erhält man die Ungleichung  $v_k b \leq \tilde{v}_k b$  und somit

$$\begin{aligned} \gamma_k &\leq \frac{\theta_k(\tilde{b}) \tilde{v}_k b}{\theta_k(b) \tilde{v}_k \tilde{b}} \\ &= \frac{\theta_k(\tilde{b})}{\theta_k(b)} \sum_{i \in M_k(\tilde{b})} \tilde{\lambda}_{k,i} \gamma_i. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\lambda_{k,i} = \frac{v_{k,i} \tilde{b}_i}{\sum_{j=1}^n v_{k,j} \tilde{b}_j},$$

mit  $0 \leq \lambda_{k,i} \leq 1$  und  $\lambda_k e = 1$ , dann erhält man aus der Optimalität von  $\tilde{v}_k$  und der Zulässigkeit von  $v_k$  an  $\tilde{b}$  die Ungleichung  $v_k \tilde{b} \geq \tilde{v}_k \tilde{b}$ . Dies führt zur Abschätzung

$$\frac{\theta_k(\tilde{b})}{\theta_k(b)} \sum_{i \in M_k(b)} \lambda_{k,i} \gamma_i \leq \gamma_k$$

und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

Bei einer Änderung der Kollektionsstruktur kann die Lösung der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17) und damit die ausgewogene Allokation  $b \in Y(CS)$  erhalten bleiben. Hierfür wird folgende Definition eingeführt.

**Definition 4.3.1** Eine Partition  $C(I) = (C_1, \dots, C_p)$  einer Menge  $I \subseteq N$  heißt essentiell, falls für alle  $k \in \{1, \dots, p\}$  und alle  $i, j \in C_k$  die Seiten

$$F_i(b, C(I)) = F_j(b, C(I))$$

identisch sind.

**Korollar 4.16** Sei  $\tilde{C}(I)$  eine Partition auf  $I$  und  $\tilde{b}(\tilde{C}(I))$  eine Lösung der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17). Ist  $\tilde{C}(I)$  nicht essentiell, dann existiert eine Verfeinerung  $C(I)$  von  $\tilde{C}(I)$ , so dass  $b(C(I)) = \tilde{b}(\tilde{C}(I))$  eine Lösung von Gleichung (3.17) für die Partition  $C(I)$  ist.

**Beweis.** Sei  $I \subseteq N$  und  $\tilde{C}(I)$  eine Partition auf  $I$ . Ist  $\tilde{C}(I)$  nicht essentiell, dann kann eine Koalition, deren Elemente  $(a_k, \theta_k(\tilde{b}, C(I))b_k)$  in unterschiedlichen Seiten  $F_k(\tilde{b}, \tilde{C}(I))$  liegen zerlegt werden, ohne die radialen Abstände  $\theta_k(\tilde{b}, \tilde{C}(I))$  zu verändern. Bleibt die Bedingung

$$\theta_k(b, C(I)) = \theta^*(\tilde{C}(I)) = \theta^*(C(I)), \quad \forall k \in I$$

für die Verfeinerung der Partition erhalten, dann ist  $b(C(I)) = \tilde{b}(\tilde{C}(I))$  eine Lösung der Gleichung (3.17), vgl. Proposition 4.9.  $\square$

Für die Lösungsmenge des Allokationsmodells sind folglich nur essentielle Koalitionen von Bedeutung.

Als notwendige Bedingung für Dominanz gilt  $\delta_J > 1$ , vgl. Korollar 4.13. Im Weiteren wird untersucht, für welche Koalitionen  $J$  diese Bedingung bei der Änderung der Kollektionsstruktur erfüllt ist.

**Definition 4.3.2** Sei  $I \subseteq N$ ,  $\tilde{C}(I)$  eine Partition auf  $I$  und  $\tilde{b}_I \in S$  eine Lösung der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17). Sei  $J \subset I$  und  $C(I)$  durch  $J$  erzeugt. Die Menge  $J$  heißt potentielle Koalition, falls gilt:

1.  $\theta^*(C(I)) \geq \theta^*(\tilde{C}(I))$ .
2.  $\forall j \in J: \theta_j(\tilde{b}_I, C(I)) \geq \theta^*(C(I))$ .
3.  $\exists j \in J: \theta_j(\tilde{b}_I, C(I)) > \theta^*(C(I))$ .

Im Weiteren wird bewiesen, dass eine potentielle Koalition die notwendige Bedingung  $\delta_J > 1$  erfüllt. Hierzu werden die Lösungen der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17) beim Wechsel der Kollektionsstrukturen untersucht.

**Proposition 4.17** Sei  $I \subseteq N$ ,  $\tilde{C}(I)$  eine Partition auf  $I$  und  $\tilde{b}_I \in S$  eine Lösung der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17). Ferner sei  $C(I)$

eine Partition von  $I$ , die durch eine essentielle Koalition  $J \subset I$  erzeugt wird und  $b_I \in S$  eine Lösung von (3.17) für die Partition  $C(I)$ , dann gilt: Ist  $J \subset I$  eine potentielle Koalition, dann ist

$$\sum_{j \in J} b_j > \sum_{j \in J} \tilde{b}_j.$$

**Beweis.** O.B.d.A sei  $I = N$ . Es sei  $\tilde{C}$  eine Partition auf  $N$  und  $\tilde{b}$  eine Lösung von Gleichung (3.17) mit optimalem Wert  $\theta^*(\tilde{C})$ . Nach Definition ist für alle  $k \in N$

$$\theta_k(\tilde{b}, \tilde{C}) = \theta^*(\tilde{C}). \quad (4.14)$$

Sei  $J \subset N$  eine potentielle Koalition und  $C$  eine Partition, die durch  $J$  erzeugt wird. Nach Konstruktion gilt für alle  $j \in J$

$$\theta_j(\tilde{b}, C) \geq \theta^*(C) \geq \theta^*(\tilde{C}). \quad (4.15)$$

Die Lösungsmatrizen  $\tilde{V}$  an  $\tilde{b}$  und  $V$  an  $b$  seien so gewählt, dass für alle  $k \in N$  die Identität

$$L_k(\tilde{b}, C) = M_k(\tilde{b}, C) \text{ und } L_k(b, C) = M_k(b, C) \quad (4.16)$$

gilt, vgl. Indexmengen in (4.3) und (4.4). Die Allokationen  $\tilde{b}$  und  $b$  sind schwach effizient. Da  $J$  eine essentielle Koalition ist, sind für alle  $j \in J$  die Indexmengen  $M_j(\tilde{b}, C)$  und  $M_j(b, C)$  identisch. Durch die Identität der Indexmenge liegen die Zielfunktionen der zu  $\phi_j(b, C)$  aus (3.15) dualen Programme

$$\max\{a_k p \mid p \in Z\}$$

mit

$$Z = \{p \in \mathbb{R}^m \mid a_i p \leq b_i, \forall i \notin J, Pp \leq 0, p \geq 0\}$$

im Kegel der selben bindenden Nebenbedingungen. Für alle  $j \in J$  sind die zulässigen Bereiche  $Z$  identisch. Ein Optimum des dualen Programms ist folglich für alle  $j \in J$  durch einen Extrempunkt von  $Z$  gegeben. Beim Übergang von  $\tilde{b}$  zu  $b$  verhalten sich die linearen Programme also ähnlich, d.h. für alle  $j \in J$  ist

$$\text{entweder } \frac{\phi_j(b, C)}{\phi_j(\tilde{b}, C)} \geq 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\phi_j(b, C)}{\phi_j(\tilde{b}, C)} < 1.$$

Für alle  $k \in N$  sei  $\gamma_k = b_k/\tilde{b}_k$ , vgl. (4.13). Im ersten Fall folgt für alle  $j \in J$  aus der Definition von  $\gamma_j$  die Ungleichung

$$\gamma_j \geq \frac{\theta_j(\tilde{b}, C)}{\theta^*(C)} \geq 1$$

und hieraus die Behauptung.

Im zweiten Fall ist für alle  $j \in J$

$$\gamma_j < \frac{\theta_j(\tilde{b}, C)}{\theta^*(C)}.$$

Da  $b, \tilde{b}$  Lösungen der koalitionalen Budgetgleichung für die Partitionen  $C$  und  $\tilde{C}$  sind, folgt aus den Gleichungen (4.14), (4.15) und Lemma 4.15, dass  $\forall i \in \bigcup_{j \in J} M_j(b, C) = J'$  die Ungleichung  $\gamma_i \leq 1$  gilt.

Da  $J$  eine essentielle Koalition ist, gilt für alle  $k \notin J \cup J'$  die Ungleichung  $\theta^*(C) \geq \theta_k(\tilde{b}, C)$  und somit

$$\gamma_k \leq \sum_{i \in M_k(\tilde{b}, C)} \lambda_{k,i} \gamma_i, \quad (4.17)$$

vgl. Lemma 4.15. Es sei  $K = \{k | \gamma_k = \max_{i \in N \setminus J} \gamma_i\}$ . Für  $k \in K$  ist  $\gamma_k > 1$ . Anderenfalls ist die Behauptung bewiesen. Da für alle  $i \in J'$  die Ungleichung  $\gamma_i \leq 1$  erfüllt ist, folgt aus Ungleichung (4.17), dass für alle  $k \in K$  die Teilmengenbeziehung  $M_k(\tilde{b}, C) \subseteq K$  gilt. Hiermit ist

$$\bigcup_{k \in K} M_k(\tilde{b}, C) \subsetneq N \setminus J. \quad (4.18)$$

Es existiert also eine finale Klasse der Lösungsmatrix  $\tilde{V}$  an  $\tilde{b}$  mit Indexmenge  $I_k$ , so dass die Teilmengenbeziehung  $I_k \subseteq K$  erfüllt ist. Sei  $b \in X$  eine schwach effiziente Allokation. Die Menge  $\mathcal{T}(b)$  ist ein konvexer Kegel. Betrachtet man einen Punkt  $(a_k, b_k) \in \partial \mathcal{T}(b)$ , bei dem die Menge  $M_k(b)$  durch die Elemente der Seite  $F_k(b)$  eindeutig festgelegt wird. Wird der Budgetanteil  $\hat{b}_k = cb_k$  mit  $c < 1$  sukzessive reduziert, dann werden ab einem bestimmten Niveau einzelne Punkte  $(a_i, b_i)$  ins Innere verlagert. Auf diesem Niveau vergrößert sich die Indexmenge  $M_k(\hat{b})$ , so dass die Beziehung

$$M_k(b) \subset M_k(\hat{b}) \subseteq \left( \left( \bigcup_{i \in M_k(b)} M_i(b) \right) \cup M_k(b) \right)$$

erfüllt ist. Werden also die Komponenten einer finalen Klasse simultan reduziert, dann wird die finale Klasse für eine Lösungsmatrix mit  $L_k(\hat{b}, C) = M_k(\hat{b}, C)$  aufgelöst. Die Werte  $\theta_k(\hat{b}, C) = \theta_k(b, C)$  der Elemente der finalen Klasse bleiben hierbei erhalten.

Es sei also  $\hat{b}$  ein Punkt mit

$$\hat{b}_i = \begin{cases} c\tilde{b}_i & \text{für } i \in I_k \\ \tilde{b}_i & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $c < 1$ , da anderenfalls  $I_k$  keine finale Klasse an  $\tilde{b}$  ist, vgl. Identität der Indexmengen in (4.16). Ferner sei  $\hat{V}$  eine Lösungsmatrix an  $\hat{b}$ ,  $\hat{\gamma}_k = b_k/\hat{b}_k$  und  $\hat{K} = \{k | \hat{\gamma}_k = \max_{i \in N \setminus J} \hat{\gamma}_i\}$ . Da  $c < 1$  gilt nun  $\hat{K} = I_k$ . Da aber  $I_k$  keine finale Klasse an  $\hat{b}$  ist, folgt aus (4.17) und (4.18), dass ein  $\hat{K} \cap J' \neq \emptyset$ . Nun führt  $\hat{K} \subseteq K$  und  $K \cap J' = \emptyset$  zu einem Widerspruch.  $\square$

Neben der Änderung des Koalitionsbudgets sind die Änderungen der Budgetanteile innerhalb einer Koalitionsstruktur von Bedeutung. Hierfür gilt folgende Aussage.

**Korollar 4.18** *Sei  $C(I) = \{C_1, \dots, C_p\}$  eine Partition von  $I \subseteq N$ ,  $b_I$  eine Lösung der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17) und  $V_{I,I}$  eine Lösungsmatrix an  $b_I$ . Ferner sei  $C(J) = \{C_{\pi(1)}, \dots, C_{\pi(r)}\}$  eine Partition von  $J \subset I$ , so dass  $\forall i \in \{1, \dots, r\} \exists j \in \{1, \dots, p\}$  mit  $C_{\pi(i)} \subseteq C_j$ , dann gilt: Ist  $J$  eine finale Klasse von  $V_{I,I}$ , dann existiert eine Lösung  $\tilde{b}_J$  der koalitionalen Budgetgleichung (3.17) mit*

$$\min_{j \in J} \frac{\tilde{b}_j}{b_j} = \min_{j \in J} \delta_j = 1.$$

**Beweis.** Wegen der Finalität der Klasse  $J$  gilt für alle  $j \in J$

$$\theta_j(\tilde{b}, C(J)) = \theta^*(C(J)).$$

Die Behauptung folgt hiermit aus Proposition 4.9.  $\square$

Finale Klassen  $J$  einer Lösungsmatrix  $V_{I,I}$  können Koalitionen bilden, ohne dass eine Umverteilung in der Koalitionsstruktur  $CS(J)$  auftritt.

Die Lösungsmenge des Optimierungsproblems (3.18) wurde in Kapitel 4.2 untersucht. Hierbei wurde bewiesen, dass eine Lösung der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17) ebenfalls eine Lösung des Optimierungsproblems,

vgl. Proposition 4.9. In Ergänzung zu Proposition 4.12 werden die Voraussetzungen für die Eindeutigkeit der Lösung der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17) weiter eingeschränkt.

**Proposition 4.19** *Sei  $I \subseteq N$  und  $C(I)$  eine Partition auf  $I$ . Sei  $b_I$  eine Lösung der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17), dann gilt: Die Lösung  $b_I$  ist eindeutig, falls eine Lösungsmatrix  $V_{I,I}$  von  $\phi_k(b, C(I))$  an  $b$  existiert, die genau eine finale Klasse hat.*

**Beweis.** O.B.d.A. sei  $I = N$  und  $C = N$ . Es sei angenommen, die Aussage stimme nicht und die Vektoren  $b$  und  $\hat{b}$  erfüllen die erweiterten dualen Budgetgleichung (3.12). Dann existieren Lösungsmatrizen  $V$  und  $\hat{V}$  mit

$$Vb = \theta^*b \text{ und } \hat{V}\hat{b} = \theta^*\hat{b}.$$

Die Matrizen seien so gewählt, dass die Identität  $L_k(b, C(I)) = M_k(b, C(I))$  gilt, vgl. Indexmengen in (4.3) und (4.4).

Jede Lösungsmatrix  $V$  von  $\phi_k$  an  $b$  hat mindestens eine finale Klasse. Für irreduzierbare Lösungsmatrizen  $V$  folgt die Behauptung aus Proposition 4.12.  $V$  sei also eine reduzierbare Lösungsmatrix, die (nach geeigneter Permutation) in FNF ist, vgl. (4.1). Ferner sei  $I \subset N$  die Indexmenge der finalen Klasse von  $V$  an  $b$ . Die Matrix  $V$  hat folglich die Gestalt

$$V = \begin{pmatrix} V_{I,I} & 0 \\ V_{J,I} & V_{J,J} \end{pmatrix},$$

wobei  $V_{J,J}$  eine untere Dreiecks-Block-Matrix ist. Wegen der Zulässigkeit der Zeilen von  $V$  in  $\phi_k$  an  $\hat{b}$  gilt

$$V\hat{b} \geq \hat{V}\hat{b} = \theta^*\hat{b}.$$

Aus der Irreduzierbarkeit der Submatrix  $V_{I,I}$  folgt die Gleichung

$$V_{I,I}\hat{b}_I = \theta^*\hat{b}_I,$$

vgl. Theoreme 8.3.4 und 8.4.4 in Horn [26]. Da  $b$  ein positiver Eigenvektor von  $V$  ist, gilt

$$\theta^* = \rho(V) = \rho(V_{I,I}),$$

vgl. Korollar 8.1.30 in Horn [26]. Außerdem ist der Eigenvektor einer irreduzierbaren Matrix eindeutig, vgl. Theorem 8.4.4 in Horn [26], woraus  $b_I = \hat{c}b_I$  folgt. Somit ist

$$V_{J,J}(\hat{c}b_J - b_J) \geq \theta^*(\hat{c}b_J - b_J).$$

Den restlichen Beweis erhält man durch Induktion über die nicht-finalen Klassen von  $V$ . Sei  $k = t + 1$  die erste nicht-finale Klasse mit Indexmenge  $I_k$ . Ist  $V_{I_k, I_k} \neq 0$ , dann existiert ein  $z_{I_k} > 0$  mit

$$V_{I_k, I_k} z_{I_k} = \rho(V_{I_k, I_k}) z_{I_k}$$

und  $\rho(V_{I_k, I_k}) < \theta^*$ , vgl. Theorem 1.7.6 in Bapat [6]. Setzt man  $\epsilon > 0$  hinreichend klein, so dass

$$y = z_{I_k, I_k} + \epsilon(\hat{c}b_{I_k} - b_{I_k}) > 0,$$

dann führt

$$V_{I_k, I_k} y > \rho(V_{I_k, I_k}) y$$

zu einem Widerspruch, vgl. Theorem 8.1.26 in Horn [26]. Ist hingegen  $V_{I_k, I_k} = 0$ , dann ist die Menge  $I_k$  einelementig und die Gleichung  $b_{I_k} = \hat{c}b_{I_k}$  erfüllt. Durch Induktion folgt  $b = \hat{c}b$  und hiermit die Behauptung.  $\square$

In der nächsten Proposition wird bewiesen, dass eine Lösung der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17) entweder eindeutig ist oder dominiert wird.

**Proposition 4.20** *Sei  $CS$  eine Kollektionsstruktur und  $b \in Y(CS)$  eine ausgewogene Allokation, dann gilt:*

1. *Ist  $b \in Y(CS)$  nicht eindeutig, dann wird  $b$  dominiert.*
2. *Ist  $b \in \mathcal{C}$ , dann ist  $b \in Y(CS)$  eindeutig.*

**Beweis.** Sei  $CS$  eine Kollektionsstruktur und  $b(CS) \in Y(CS)$ . Ist  $b$  nicht eindeutig, dann existiert in einem Knoten des Allokationsbaums AT eine Lösungsmatrix mit mindestens zwei finalen Klassen, vgl. Proposition 4.19. O.B.d.A sei dies der Knoten auf der Stufe  $\tau = T$ , so dass  $I = N$  und als Partition  $\tilde{C} = N$  gewählt werden kann. Es sei  $\tilde{b}$  der Eigenvektor der erweiterten dualen Budgetgleichung (3.12) zum Eigenwert  $\theta^*$ . Ferner sei  $\tilde{V}$  eine Lösungsmatrix an  $\tilde{b}$  bei der Partition  $\tilde{C}$  mit mindestens zwei finalen Klassen.

Nun sei  $J$  eine finale Klasse der Lösungsmatrix  $\tilde{V}$  an  $\tilde{b}$  und  $C$  eine einfache Aggregation von  $\tilde{C}$ , die durch  $J \subset N$  erzeugt wird.

Zuerst wird gezeigt, dass  $J$  eine potentielle Koalition ist. Da  $C$  eine einfache Aggregation ist, gilt für alle  $j \in J$

$$\theta_j(\tilde{b}, C) \geq \theta^*$$

und für alle  $i \notin J$

$$\theta_i(\tilde{b}, C) = \theta^*.$$

Nun sei  $V$  eine Lösungsmatrix an  $\tilde{b}$  bei der Partition  $C$ . Die Matrix  $V$  hat mindestens eine finale Klasse, die mit einer finalen Klasse von  $\tilde{V}$  übereinstimmt. Der minimale Spektralradius der finalen Klassen  $\rho_{mfc}(V)$  stimmt also mit dem Wert  $\theta^*$  überein. Der Vektor  $\tilde{b}$  ist folglich eine optimale Lösung des Optimierungsproblems (3.18) bei der Partition  $C$ , vgl. Proposition 4.8. Damit ist für den optimalen Wert des Optimierungsproblems (3.18) die Bedingung  $\theta^*(C) = \theta^*$  erfüllt. Nach Definition 4.3.2 ist  $J$  eine potentielle Koalition.

Aus Proposition 4.17 folgt  $\delta_J > 1$ . Da  $J$  eine finale Klasse der Lösungsmatrix  $V$  an  $\tilde{b}$  ist, folgt für die Umverteilung bei der Koalitionsstruktur  $CS(J) = \{J\}$  die Gleichung

$$\min_{j \in J} \delta_j = 1,$$

vgl. Korollar 4.18. Dann ist  $\Delta_J \geq 1$  und der Vektor  $\tilde{b}$  wird dominiert, vgl. Korollar 4.13. Hierdurch ist die erste Behauptung bewiesen.

Nach Definition wird eine Auszahlung  $b \in \mathcal{C}$  nicht dominiert. Die zweite Behauptung folgt direkt aus dem ersten Teil.  $\square$

# Kapitel 5

## Algorithmen

In diesem Kapitel wird ein Algorithmus zur Berechnung ausgewogener Allokationen entwickelt und analysiert. Ausgewogene Allokationen  $b \in Y(CS)$  einer Kollektionsstruktur  $CS$  werden rekursiv über die Lösungen der koalitionalen, dualen Budgetgleichung (3.17) in den Knoten des Allokationsbaums  $AT$  bestimmt.

Die Ausführungen werden auf den Fall  $I = N$  und  $C = N$  und die Kollektionsstruktur  $CS = \{N\}$  beschränkt. In diesem Fall sind die ausgewogenen Allokationen Lösungen der erweiterten dualen Budgetgleichung

$$V^*b^* = \theta^*b^*, \quad (5.1)$$

die in (3.12) eingeführt wurde. Hierin ist  $V^*$  eine Lösungsmatrix der linearen Programme  $\phi_k$  aus (3.10) an  $b^*$ . Die Lösungen der Gleichung (5.1) sind auch Lösungen des Optimierungsproblems

$$\theta^* = \max_{b \in S} \min_{k \in N} \theta_k(b), \quad (5.2)$$

vgl. Proposition 4.9. Das Optimierungsproblem (5.2) wurde in (3.13) eingeführt. Die Funktionen  $\theta_k(b) = \phi_k(b)/b_k$  wurden in (3.11) und die linearen Programme  $\phi_k(b)$  in (3.10) definiert.

Durch eine Anpassung der Indexmengen und Partitionen an beliebige Kollektionsstrukturen können ausgewogene Allokationen mit dem folgenden Verfahren sukzessiv berechnet werden.

*Für die folgenden Analysen sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix und  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem. Ferner sei die Annahme (A1) (vgl. Kapitel 1.2) erfüllt.*

## 5.1 Tiptap-Algorithmus

Unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Kapitel 4.2 erscheint die *Bundle-Trust-Region-Methode* von Schramm und Zowe [51] als geeignetes Verfahren zur Bestimmung einer Lösung des Optimierungsproblems

$$\min\{ \max_{k \in N} -\theta_k(b) \mid b \in S \},$$

dem zu (5.2) äquivalenten Minimierungsproblems. Diese Methode verbindet die *Bundle-Methode* von Lemaréchal [32, 33], eine Variante nicht-differenzierbarer Optimierungstechniken, vgl. Lemaréchal [32], Mifflin [37], Kiwiel [29] und die *Trust-Region-Methode* von Powell [42], vgl. auch Fletcher [22] und Dennis [17].

Ein Subgradient der Funktion  $h$  kann ohne zusätzlichen Aufwand angegeben werden, sobald ein Funktionswert berechnet wurde, vgl. Proposition 4.2. Im nicht konvexen Fall garantiert die Konvergenztheorie der Bundle-Trust-Region-Methode die C-Stationarität eines Häufungspunktes der Iterationsfolge, falls die Folge beschränkt ist und die Funktionswerte nach unten beschränkt sind, vgl. Theorem 3.1 in Schramm und Zowe [51].

Bei obigem Minimierungsproblem ist die Menge  $S$  und damit die Iterationsfolge beschränkt. Außerdem ist der minimale Funktionswert nach unten beschränkt, vgl. Proposition 4.7. Ein Häufungspunkt der Folge wird folglich ein C-stationärer Punkt sein. Da das Bundle-Trust-Region-Verfahren eine Abstiegsmethode und jeder C-stationäre Punkt ein globales Minimum ist, vgl. Proposition 4.5, wird die Folge gegen ein Minimum konvergieren.

Die Bundle-Trust-Region-Methode gewährleistet für das Minimierungsproblem (4.8) *superlineare Konvergenz* der Folge  $b^{(k)}$  gegen eine Lösung  $b^*$  des Optimierungsproblems, d.h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|b^{(k+1)} - b^*\|}{\|b^{(k)} - b^*\|} = 0,$$

vgl. Schramm und Zowe [51]. Zur Bestimmung eines Funktionswertes von  $h$  müssen allerdings  $n$  lineare Programme mit  $m$  Nebenbedingungen gelöst werden. Obwohl ein Subgradient ohne zusätzlichen Aufwand angegeben werden kann, ist die superlineare Konvergenz der Folge nicht ausreichend, um Lösungen effizient zu berechnen. Dies gilt vor allem, wenn berücksichtigt wird, dass

im Allokationsmodell 2.1 ausgewogene Allokationen für mehrere Kollektionsstrukturen zu berechnen sind. Um die Güte des Verfahrens zu verbessern, muss die Anzahl der Iterationen reduziert werden.

In diesem Kapitel wird eine alternative Lösungsmethode präsentiert. Für  $b \in S$  werden die Definitionen

$$\theta(b) = \min_{k \in N} \theta_k(b)$$

und

$$\kappa(b) = \max_{k \in N} \theta_k(b)$$

eingeführt. Eine Lösung der erweiterten dualen Budgetgleichung (5.1) bzw. des Optimierungsproblems (5.2) kann durch folgendes Verfahren bestimmt werden.

**Algorithmus 5.1 (TipTap)** Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix und  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem.

1. Wähle einen zulässigen Punkt  $b^{(0)} \in S$ . Setze  $k = 1$ .
2. Bestimme
  - (a) eine Lösungsmatrix  $V^{(k)}$  an  $b^{(k-1)}$
  - (b) den Wert  $\rho_{mfc}(V^{(k)})$ , d.h. den minimalen Spektralradius der finalen Klassen von  $V^{(k)}$  (vgl. (4.2))
  - (c) den Funktionswert  $\theta^{(k)} = \theta(b^{(k)})$
3. (a) Falls  $\rho_{mfc}(V^{(k)}) = \theta^{(k)}$ , STOP
- (b) Sonst wähle eine nicht-negative Matrix  $Q^{(k)}$ , so dass  $V^{(k)} + Q^{(k)}$  positiv ist, und bestimme den Perron-Vektor  $b^{(k)}$  zum Spektralradius  $\rho(V^{(k)} + Q^{(k)})$ , dh.

$$(V^{(k)} + Q^{(k)})b^{(k)} = \rho(V^{(k)} + Q^{(k)})b^{(k)}. \quad (5.3)$$

Erhöhe  $k = k + 1$  und gehe zu Schritt 2.

Der *Tiptap-Algorithmus* berechnet abwechselnd eine Lösungsmatrix  $V^{(k)}$  von  $\phi_k$  am Punkt  $b^{(k-1)}$  und dann einen Eigenvektor  $b^{(k)}$  der Matrix  $V^{(k)} + Q^{(k)}$ , dessen Eigenwert mit dem Spektralradius  $\rho(V^{(k)} + Q^{(k)})$  übereinstimmt.

Die Störungsmatrix  $Q^{(k)}$  wird ausschließlich in das Verfahren integriert, um die Existenz eines positiven Eigenvektors der Matrix  $V^{(k)} + Q^{(k)}$  sicher zu stellen. Wird nämlich  $Q^{(k)} \neq 0$  so gewählt, dass  $V^{(k)} + Q^{(k)}$  positiv ist, dann hat diese Matrix einen eindeutig bestimmten, positiven Eigenvektor, der *Perron-Vektor* genannt wird. Der Eigenwert zum Perron-Vektor (engl.: *Perron-root*) und der Spektralradius  $\rho(V^{(k)} + Q^{(k)})$  sind identisch, vgl. Perrons-Theorem, z.B. Theorem 8.2.4 in Horn [26].

Die Störungsmatrizen  $Q^{(k)}$  können vernachlässigt, d.h. als Nullmatrix gewählt werden, wenn der Algorithmus 5.1 modifiziert wird. Die Modifikationen, die von der Beschaffenheit der Eigenvektoren  $b^{(k)}$  und der Lösungsmatrizen  $V^{(k)}$  abhängen, werden im Laufe des Kapitels beschrieben.

Für die weitere Analyse wird der Spektralradius der gestörten Matrix  $V^{(k)} + Q^{(k)}$  mit

$$\delta^{(k)} = \rho(V^{(k)} + Q^{(k)}) \quad (5.4)$$

bezeichnet. Das Infimum der Folge  $\delta^{(k)}$  wird durch

$$\delta^* = \inf_{k \rightarrow \infty} \delta^{(k)} \quad (5.5)$$

definiert. Ferner wird angenommen, dass die Einträge  $q_{i,j}^{(k)}$  der Störungsmatrix  $Q^{(k)}$  monoton fallende Nullfolgen sind.

**Annahme (A3)** Für die Störungsmatrix  $Q^{(k)}$  in Algorithmus 5.1 gilt:

$$0 \leq Q^{(k)} \leq Q^{(k-1)} \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(k)} = 0.$$

Als Störungsmatrix  $Q^{(k)}$  kann z.B.

$$Q^{(k)} = \frac{1}{k^2} E$$

gewählt werden, wobei  $E$  die quadratische  $(n \times n)$ -Matrix bezeichnet, die nur aus Einsen besteht.

## 5.2 Konvergenzanalyse

In diesem Kapitel wird der Tiptap-Algorithmus 5.1 analysiert. Mit dem Algorithmus wird eine monoton fallende Folge von Spektralradien generiert.

**Proposition 5.1** *Sei  $V^{(k)}$  die Folge des Algorithmus 5.1 und die Annahme (A3) erfüllt, dann gilt: Für alle  $k \geq 1$  sind die Ungleichungen*

$$\theta^* \leq \rho(V^{(k)}) \leq \delta^{(k)} \leq \delta^{(k-1)}. \quad (5.6)$$

*erfüllt.*

**Beweis.** Sei  $b \in S$  eine Lösung des Optimierungsproblems (5.2). Die Existenz dieser Lösung wurde in Proposition 4.7 bewiesen. Außerdem sei  $V$  eine Lösungsmatrix von  $\phi_k$  aus (3.10) an  $b$ . Dann ist

$$Vb \geq \theta^*b.$$

Die Matrix  $V$  und alle Lösungsmatrizen  $V^{(k)}$  sind nicht-negative, quadratische Matrizen. Da die Zeilen  $v_k^{(k)}$  der Matrix  $V^{(k)}$  im linearen Programm  $\phi_k$  aus (3.10) an  $b$  zulässig sind, gilt

$$V^{(k)}b \geq Vb \geq \theta^*b.$$

Nach Theorem 2.1.11 in Berman [8] folgt  $\theta^* \leq \rho(V^{(k)})$ , womit die erste Ungleichung bewiesen ist.

Die zweite Ungleichung folgt aus  $V^{(k)} \geq 0$ ,  $Q^{(k)} \geq 0$ , der Definition von  $\delta^{(k)}$  und Theorem 8.1.18 in Horn et al. [26].

Es bleibt zu zeigen, dass die Ungleichung  $\delta^{(k-1)} \leq \delta^{(k)}$  erfüllt ist. Nach Annahme (A3) ist

$$Q^{(k)}b^{(k-1)} \leq Q^{(k-1)}b^{(k-1)}.$$

Aus der Zulässigkeit der Zeilen von  $V^{(k-1)}$  und der Optimalität der Zeilen von  $V^{(k)}$  in  $\phi_k$  aus (3.10) an  $b = b^{(k-1)}$  folgt

$$V^{(k)}b^{(k-1)} \leq V^{(k-1)}b^{(k-1)}.$$

Addiert man die letzten beiden Ungleichungen, dann erhält man

$$(V^{(k)} + Q^{(k)})b^{(k-1)} \leq (V^{(k-1)} + Q^{(k-1)})b^{(k-1)} = \delta^{(k-1)}b^{(k-1)}.$$

Nach Theorem 2.1.11 in Berman [8] erhält man

$$\delta^{(k)} = \rho(V^{(k)} + Q^{(k)}) \leq \delta^{(k-1)}$$

und die Behauptungen sind bewiesen.  $\square$

Falls die im Tiptap-Algorithmus generierte Folge  $b^{(k)}$  gegen einen Punkt  $b \in S$  konvergiert, dann ist  $b$  eine Lösung des Optimierungsproblems (5.2) und erfüllt die erweiterte duale Budgetgleichung (5.1). Diese Aussagen werden in der nächsten Proposition bewiesen.

**Proposition 5.2** *Sei  $b^{(k)}$  die Folge, die in Algorithmus 5.1 generiert wird, und die Annahme (A3) erfüllt. Falls  $b^{(k)}$  gegen  $b^* \in S$  konvergiert, dann gilt:*

1.  $b^*$  ist eine Lösung der erweiterten dualen Budgetgleichung (5.1).
2.  $b^*$  ist eine Lösung des Optimierungsproblems (5.2).

**Beweis.** Sei  $b^{(k)}$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $b^* \in S$ . Nach Proposition 5.1 ist die Folge der Spektralradien  $\rho(V^{(k)})$  beschränkt. Dann ist die Folge der Lösungsmatrizen  $V^{(k)}$  auch beschränkt, vgl. Lemma 5.6.10 in Horn [26].

Wählt man eine konvergente Teilfolge von Lösungsmatrizen  $V^{(k_i)}$  mit Grenzwert  $\bar{V}$ , dann erhält man aus Gleichung (5.3) und Annahme (A3)

$$\bar{V}b^* = \delta^*b^*. \quad (5.7)$$

Nun wird bewiesen, dass  $\bar{V}$  eine Lösungsmatrix der linearen Programme  $\phi_k$  aus (3.10) an  $b^*$  ist. Nach Definition ist  $V^{(k_i)}$  eine Lösungsmatrix von (3.10) an  $b^{(k_i-1)}$ . Die Menge der optimalen Lösungen von (3.10) stimmt mit dem Subdifferential der Trägerfunktion (engl.: support function)  $-\phi_k(b)$  überein, die eine abgeschlossene, eigentlich konvex Funktion ist, vgl. Theorem 13.2 und Korollar 23.5.3 in Rockafellar [44]. Die Optimalität der Zeilen von  $\bar{V}$  folgt dann aus der Abgeschlossenheit der Abbildung des Subdifferentials einer abgeschlossenen, eigentlich konvexen Funktion, vgl. Theorem 24.4 in Rockafellar [44], und der Annahme, dass  $b^{(k_i-1)}$  gegen  $b^*$  konvergiert.

Aus der Optimalität der Zeilen von  $\bar{V}$  an  $b^* \in S$  und Gleichung (5.7) folgt die Optimalität des Punktes  $b^*$  im Optimierungsproblem (5.2), vgl. Proposition 4.9, so dass  $\theta^* = \delta^*$ . Hiermit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

### 5.2.1 Positive Eigenvektoren

In diesem Kapitel wird die Folge der Eigenvektoren  $b^{(k)}$  im Algorithmus 5.1 analysiert, die generiert werden kann, falls die Lösungsmatrizen  $V^{(k)}$  einen positiven Eigenvektor haben. In diesem Fall können für  $k \geq 0$  die Störungsmatrizen  $Q^{(k)}$  vernachlässigt und gleich der Nullmatrix  $Q^{(k)} = 0$  gewählt werden.

**Annahme (A4)** *Im Algorithmus 5.1 haben die Lösungsmatrizen  $V^{(k)}$  von  $\phi_k$  an  $b^{(k-1)}$  für  $k \geq 1$  einen positiven Eigenvektor  $b^{(k)}$ .*

Eine Matrix  $V^{(k)}$  hat einen positiven Eigenvektor, falls sie irreduzierbar ist, vgl. Perron-Frobenius-Theorem, z.B. Theorem 8.4.4 in Horn [26], oder die finalen Klassen und die bestimmenden Klassen einer reduzierbaren Matrix  $V^{(k)}$  identisch sind, vgl. Theorem 1.7.6 in Bapat [6].

Im Fall positiver Eigenvektoren ist die Abbruchbedingung in Schritt 3(a) des Algorithmus 5.1 also identisch zu

$$\rho_{mfc}(V^{(k)}) = \rho(V^{(k)}) = \theta(b^{(k-1)}).$$

Für irreduzierbare Matrizen  $V^{(k)}$  sind die positiven Eigenvektoren  $b^{(k)}$  geometrisch eindeutig, vgl. Perron-Frobenius-Theorem, z.B. Theorem 8.4.4 in Horn [26]. Für reduzierbare Matrizen  $V^{(k)}$  ist dies nicht der Fall. Um ein oszillierendes Verhalten der Folge von Eigenvektoren  $b^{(k)}$  zu unterbinden, wird die Auswahl der Eigenvektoren  $b^{(k)}$  konkretisiert.

#### Algorithmus 5.2 (Modifikation von Schritt 3(b))

*Sei  $V^{(k)}$  eine Lösungsmatrix mit positivem Eigenvektor:*

*Falls  $V^{(k)}$  reduzierbar (in Frobenius-Normal-Form (vgl. 4.1)) und  $\rho(V^{(k)}) = \kappa(b^{(k-1)})$ , dann bestimme  $y^{(k)}$  folgendermaßen:*

1. Für alle finalen Klassen  $i = 1, \dots, t$ :

$$y_{I_i}^{(k)} = b_{I_i}^{(k-1)}.$$

2. Für alle nicht-finalen Klassen  $i = t + 1, \dots, s$ :

(a) Falls  $V_{I_i, I_i} \neq 0$ :

$$y_{I_i}^{(k)} = (\rho(V)I - V_{I_i, I_i})^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} V_{I_i, I_j} y_{I_j}^{(k)}.$$

(b) Sonst

$$y_i^{(k)} = \frac{1}{\rho(V)} \sum_{j=1}^{i-1} v_{i, I_j} y_{I_j}^{(k)}.$$

Berechne  $b^{(k)}$  durch

$$b^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{e^\top y^{(k)}}.$$

Sonst bestimme einen Eigenvektor  $b^{(k)}$  der Matrix  $V^{(k)}$  zum Spektralradius  $\rho(V^{(k)})$ .

Wird der Vektor  $b^{(k)}$  nach Algorithmus 5.2 bestimmt, dann ist  $b^{(k)}$  ein positiver Eigenvektor der Matrix  $V^{(k)}$ . Außerdem hat  $b^{(k)}$  folgende Eigenschaften.

**Lemma 5.3** Sei  $V^{(k)}$  eine reduzierbare Lösungsmatrix von  $\phi_k$  an  $b^{(k-1)} \in S$ , die einen positiven Eigenvektor zum Eigenwert  $\rho(V^{(k)}) = \kappa(b^{(k-1)})$  hat. Wird der Vektor  $y^{(k)}$  nach Algorithmus 5.2 bestimmt, dann gilt:

1.  $y_{I_i}^{(k)} = b_{I_i}^{(k-1)}$  für alle finalen Klassen  $i$ .
2.  $y_{I_i}^{(k)} \leq b_{I_i}^{(k-1)}$  für alle nicht-finalen Klassen  $i$ .

**Beweis.** Sei  $V$  eine reduzierbare Lösungsmatrix von  $\phi_k$  an  $b \in S$  in Frobenius-Normal-Form, vgl. (4.1), die einen positiven Eigenvektor zum Eigenwert  $\rho(V) = \kappa(b)$  hat.

Die Behauptung über die Komponenten des Eigenvektors, die zu den finalen Klassen von  $V$  gehören, folgt direkt aus der Konstruktion.

Im Weiteren werden die nicht-finalen Klassen  $k = t + 1, \dots, s$  der Matrix  $V$  betrachtet. Die Submatrizen  $V_{I_k, I_k}$  dieser Klassen sind entweder  $(1 \times 1)$  Nullmatrizen oder irreduzierbare Teilmatrizen mit

$$\rho(V_{I_k, I_k}) < \rho(V),$$

vgl. Theorem 1.7.6 in Bapat [6] und die Positivität des Eigenvektors.

Sei  $k$  eine nicht-finale Klasse mit Indexmenge  $I_k$ . Für alle  $i \in I_k$  gilt die Ungleichung

$$\rho(V) = \kappa(b) \geq \theta_i(b).$$

Hieraus folgt für die  $(n \times n)$ -Diagonalmatrix  $\Theta$  mit  $\Theta_{i,i} = \theta_i(b)$

$$(\rho(V)I - V_{I_k, I_k}) \geq (\Theta_{I_k} - V_{I_k, I_k}).$$

Da  $(\rho(V)I - V_{I_k, I_k})^{-1} > 0$ , vgl. Theorem 1.7.2 in Bapat [6], ist

$$(\rho(V)I - V_{I_k, I_k})^{-1}(\Theta_{I_k} - V_{I_k, I_k}) \leq I,$$

Der verbleibende Teil wird durch Induktion über die nicht-finalen Klassen bewiesen. Für  $i = 1, \dots, t$  sei  $y_{I_i} = b_{I_i}$ . Ferner sei  $k = t + 1$  eine nicht-finale Klasse der Matrix  $V$ .

Für die Komponenten  $y_{I_k}$  gelten folgende Zusammenhänge. Ist  $V_{I_k, I_k} \neq 0$ , dann ist

$$\begin{aligned} y_{I_k} &= (\rho(V)I - V_{I_k, I_k})^{-1} \sum_{i=1}^{k-1} V_{I_k, I_i} y_{I_i} \\ &\leq (\rho(V)I - V_{I_k, I_k})^{-1} \sum_{i=1}^{k-1} V_{I_k, I_i} b_{I_i} \\ &= (\rho(V)I - V_{I_k, I_k})^{-1} (\theta_{I_k}(b)I - V_{I_k, I_k}) b_{I_k} \\ &\leq b_{I_k}. \end{aligned}$$

Anderenfalls ist  $V_{I_k, I_k}$  eine  $(1 \times 1)$ -Nullmatrix, so dass

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{1}{\rho(V)} \sum_{i=1}^{k-1} v_{k, I_i} y_{I_i} \\ &\leq \frac{1}{\rho(V)} \sum_{i=1}^{k-1} v_{k, I_i} b_{I_i} \\ &= \frac{\theta_k(b)}{\rho(V)} b_k \leq b_{I_k} \end{aligned}$$

Wählt man die nächste nicht-finale Klasse, indem der Index  $k$  erhöht wird, dann bleiben die Ungleichungen erhalten und die Behauptung folgt per Induktion.  $\square$

Zunächst wird die Konvergenz der Folge  $b^{(k)}$  mit der Modifikation in Algorithmus 5.2 gezeigt, falls für ein  $k_0$  der Spektralradius  $\rho(V^{(k_0)})$  mit dem Wert  $\theta^*$  des Optimierungsproblems (5.2) übereinstimmt.

**Proposition 5.4** *Seien  $V^{(k)}$  und  $b^{(k)}$  die Folgen, die nach den Algorithmen 5.1 und 5.2 generiert werden. Ferner sei die Annahme (A4) erfüllt, dann gilt: Falls ein  $k_0$  existiert, so dass*

$$\rho(V^{(k_0)}) = \theta^*,$$

*dann konvergiert die Folge  $b^{(k)}$  gegen einen Punkt  $b^* \in S$ .*

**Beweis.** Sei  $V^{(k)}$  die Folge der Lösungsmatrizen und  $b^{(k)}$  die Folge der Eigenvektoren. Nach Voraussetzung und Proposition 5.1 existiert ein  $k_0$ , so dass

$$\rho(V^{(k)}) = \kappa(b^{(k-1)}) = \theta^*$$

für alle  $k \geq k_0$ . Hierdurch ist die Bedingung des Algorithmus 5.2 erfüllt und die Eigenvektoren  $b^{(k)}$  werden nach der Modifikation von Schritt 3(b) berechnet. Die Folge  $b^{(k)}$  wird also durch die Folge  $y^{(k)}$  determiniert.

Nach Proposition 4.7 existiert eine Lösung  $\hat{b} \in S$  des Optimierungsproblems (5.2). Es sei  $\beta > 0$  mit

$$\beta = \min_{i \in N} \frac{y_i^{(k_0)}}{\hat{b}_i}.$$

Zuerst wird gezeigt, dass für alle  $k \geq k_0$  die Eigenvektoren  $y^{(k)}$  die Ungleichung

$$y^{(k)} \geq \beta \hat{b}$$

erfüllen. Stimmt die Behauptung nicht, dann existiert ein kleinster Index  $k_1$  mit  $y_i^{(k_1)} < \beta \hat{b}_i$  für mindestens ein  $i \in N$ . Da die Eigenvektoren  $y^{(k)}$  nach Algorithmus 5.2 berechnet werden, wird eine Komponente  $y_i^{(k)}$  des Vektors  $y^{(k)}$  nur reduziert, falls der Index zu einer nicht-finalen Klasse gehört. Aus der Minimalität des Index  $k_1$  folgt also, dass alle Indizes  $i$  mit  $y_i^{(k_1)} < \beta \hat{b}_i$  Elemente nicht-finaler Klassen sind. Nun sei

$$\beta_1 = \min_{i \in N} \frac{y_i^{(k_1)}}{\hat{b}_i}$$

und  $I = \{i \in N \mid y_i^{(k_1)} - \beta_1 \hat{b}_i = 0\}$ . Ferner sei  $\hat{V}$  eine Lösungsmatrix an  $\hat{b}$ . Dann folgt aus der Optimalität von  $\hat{V}$  und der Zulässigkeit von  $V^{(k_1)}$  an  $\hat{b}$

$$V^{(k_1)} \hat{b} \geq \hat{V} \hat{b} \geq \theta^* \hat{b}.$$

Aus Theorem 8.1.26 in Horn [26] und der Gleichung  $\rho(V^{(k_1)}) = \theta^*$  folgt

$$V^{(k_1)}(y^{(k_1)} - \beta_1 \hat{b}) \leq \rho(V^{(k_1)})y^{(k_1)} - \beta_1 \hat{V} \hat{b} \leq \theta^*(y^{(k_1)} - \beta_1 \hat{b}).$$

Nun ist für alle  $i \in I$

$$v_i^{(k_1)}(y^{(k_1)} - \beta_1 \hat{b}) \leq \theta^*(y_i^{(k_1)} - \beta_1 b_i) = 0.$$

Da aber  $V^{(k_1)} \geq 0$ ,  $y^{(k_1)} - \beta_1 \hat{b} \geq 0$ ,  $y_j^{(k_1)} - \beta_1 \hat{b}_j > 0$  für alle  $j \notin I$ , folgt  $v_{i,j}^{(k_1)} = 0$  für alle  $i \in I$  und  $j \notin I$ . Dies ist ein Widerspruch, da die Menge  $I$  eine Vereinigung von Elementen nicht-finaler Klassen von  $V^{(k_1)}$  ist.

Für die Folge  $y^{(k)}$  gilt also  $y^{(k)} \geq \beta_1 \hat{b} > 0$  für alle  $k \geq k_0$ . Nach Konstruktion sind die Komponenten des Vektors  $y^{(k)}$  monoton fallende, nach unten beschränkte Folgen. Die Folge  $y^{(k)}$  konvergiert also gegen einen Punkt  $y^* \in \mathbb{R}_{++}^n$ . Da  $b^{(k)}$  nach Algorithmus 5.2 berechnet wird, konvergiert die Folge gegen einen Punkt  $b^* \in S$ .  $\square$

Falls der Spektralradius einer Lösungsmatrix  $V^{(k)}$  die Bedingung

$$\theta^* < \rho(V^{(k)})$$

erfüllt, dann impliziert die Irreduzierbarkeit von  $V^{(k)}$  die strikte Monotonie der Spektralradienfolge, d.h.

$$\rho(V^{(k)}) < \kappa(b^{(k-1)}),$$

vgl. Theoreme 8.3.4 und 8.4.4 in Horn [26]. Um die strikte Monotonie der Folge der Spektralradien im Fall reduzierbarer Lösungsmatrizen zu gewährleisten, wird der Algorithmus 5.1 in der Wahl der Lösungsmatrizen  $V^{(k)}$  modifiziert.

### Algorithmus 5.3 (Modifikation von Schritt 2(a))

Bestimme eine Lösungsmatrix  $V$  an  $b^{(k-1)}$ .

Falls die Matrix  $V$  reduzierbar ist und  $\rho(V) = \kappa(b^{(k-1)})$  gilt, dann bestimme  $V^{(k)}$  folgendermaßen:

Entweder

1.  $\forall i \in N$ : Falls  $\phi_i(b^{(k-1)}) = v_i^{(k-1)} b^{(k-1)}$ , setze  $v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}$ .  
Sonst wähle  $v_i^{(k)}$  beliebig.

Oder

2. Setze  $v_{i,j}^{(k)} \neq 0 \forall j \in M_i(b^{(k-1)})$  (vgl. (4.4)).

Sonst setze  $V^{(k)} = V$ .

Wird zur Lösung der linearen Programme  $\phi_i$  eine *Simplex-Methode* verwendet, kann der Algorithmus 5.1 bei der Wahl der Lösungsmatrizen  $V^{(k)}$  in Schritt 2(a) durch die erste Alternative modifiziert werden. Hierin kann eine optimale Lösung  $v_i^{(k-1)}$  als Startpunkt am Punkt  $b^{(k-1)}$  verwendet werden. Bleibt die Lösung  $v_i^{(k-1)}$  am Punkt  $b^{(k-1)}$  optimal, wird sie auch in der Lösungsmatrix  $V^{(k)}$  verwendet.

Die zweite Alternative in Algorithmus 5.3 ist generisch erfüllt. Die Verwendung einer *Inneren-Punkte-Methode*, die bei mehrdeutigen Lösungen der linearen Programme  $\phi_i(b)$  keine Extrempunkte bestimmt, unterstützt die Erfüllung der Bedingung.

In der folgenden Proposition wird bewiesen, dass Folge der Spektralradien in Algorithmus 5.1 strikt monoton fallend ist, falls die Eigenvektoren in Schritte 2(a) nach der Modifikation in Algorithmus 5.2 und die Lösungsmatrizen in Schritt 3(b) nach der Modifikationen in Algorithmus 5.3 bestimmt werden.

**Proposition 5.5** *Seien  $V^{(k)}$  und  $b^{(k)}$  die Folgen, die nach den Algorithmen 5.1, 5.2 und 5.3 generiert werden. Ferner sei die Annahme (A4) erfüllt und  $b^*$  ein Punkt, der die erweiterte duale Budgetgleichung (5.1) erfüllt, dann gilt: Ist  $\theta^* < \kappa(b^{(k)})$ , dann ist  $\rho(V^{(k+1)}) < \kappa(b^{(k)})$ .*

**Beweis.** Sei  $b \in S$  und  $V$  eine Lösungsmatrix von  $\phi_k$  an  $b$ . Nach Definition ist

$$Vb \leq \kappa(b)b.$$

Sei  $y$  ein positiver Eigenvektor von  $V$ . Der Eigenwert von  $y > 0$  stimmt mit dem Spektralradius überein, vgl. Korollar 8.1.30 in Horn [26]. Außerdem sei  $\bar{V}$  eine Lösungsmatrix an  $y$ . Aus der Optimalität der Zeilen  $\bar{v}_k$  von  $\bar{V}$  an  $y$  und der Zulässigkeit der Zeilen  $v_k$  von  $V$  an  $y$  folgt

$$\bar{V}y \leq Vy = \rho(V)y.$$

Weiter folgt aus der Monotonie der Spektralradienfolge

$$\rho(\bar{V}) \leq \rho(V) = \kappa(b),$$

vgl. Proposition 5.1. Es sei angenommen, die Aussage stimme nicht und  $\rho(\bar{V}) = \kappa(b)$  gelte. Es wird gezeigt, dass diese Behauptung zu einem Widerspruch führt. Der weitere Beweis wird in mehreren Schritten geführt.

1. Zuerst wird bewiesen, dass eine Indexmenge  $I$  existiert, die eine finale Klasse der Matrix  $\bar{V}$  ist, und dass für alle  $i \in I$  die Gleichung  $\theta_i(y) = \kappa(b)$  erfüllt ist. Hierfür werden die Matrizen  $V$  und  $\bar{V}$  betrachtet. Da die Matrix  $V$  einen positiven Eigenvektor hat, sind die finalen und die bestimmenden Klassen identisch, vgl. Theorem 1.7.6 in Bapat [6]. Folglich stimmt der Spektralradius der Matrix  $\rho(V)$  mit den maximalen Eigenwerten der Submatrizen überein, die durch die finalen Klassen gebildet werden.

Wegen der Optimalität der Zeilen von  $\bar{V}$  an  $y$  ist

$$\bar{V}y \leq \kappa(b)y. \quad (5.8)$$

Da nach Annahme  $\rho(\bar{V}) = \kappa(b)$  ist, existiert eine finale Klasse mit Indexmenge  $I$  der Matrix  $\bar{V}$  mit

$$\rho(\bar{V}_{I,I}) = \rho(\bar{V}) = \kappa(b).$$

Aus Gleichung (5.8), der Irreduzierbarkeit der Submatrix  $\bar{V}_{I,I}$  und den Theoremen 8.3.4 und 8.4.4 in Horn [26] folgt für die Funktionswerte  $\theta_i(y) = \kappa(b)$  für alle  $i \in I$ .

2. Nun wird gezeigt, dass für alle  $i \in I$  die Teilmengenbeziehung

$$L_i(b) \subseteq L_i(y) \quad (5.9)$$

gilt, falls die Lösungsmatrix  $\bar{V}$  nach Algorithmus 5.3 bestimmt wird. Für alle  $i \in I$  folgt aus  $\theta_i(y) = \kappa(b) = \rho(V)$  und  $\rho(V)y_i = v_i y = \bar{v}_i y$

$$L_i(b) \subseteq M_i(y).$$

Wird die Lösungsmatrix nach der ersten Alternative des Algorithmus 5.3 bestimmt, dann folgt aus

$$M_i(b) = L_i(b) \subseteq M_i(y) = L_i(y)$$

die Behauptung. Wird die Lösungsmatrix nach der zweiten Alternative gewählt, dann gilt

$$L_i(b) = L_i(y)$$

und die Behauptung ist bewiesen.

3. Nun wird gezeigt, dass auch eine finale Klasse der Lösungsmatrix  $V$  an  $b$  mit Indexmenge  $J$  existiert und die Teilmengenbeziehung  $J \subseteq I$  erfüllt ist. Die Existenz folgt direkt aus dem 2-ten Teil des Beweises und der Tatsache

$$\bigcup_{i \in I} L_i(b) \subseteq \bigcup_{i \in I} L_i(y) = I.$$

4. Aus der Finalität der Klasse mit Indexmenge  $J$  der Matrix  $V$  an  $b$  und der Tatsache  $\bar{v}_i y = v_i y$  für  $i \in I \supseteq J$  folgt die Existenz einer Lösungsmatrix  $\bar{V}$  an  $y$ , die eine finale Klasse mit Indexmenge  $J$  hat.

5. Im Folgenden wird bewiesen, dass Indizes  $j \in J$  und  $i \notin I$  existieren, so dass

$$(a_i, b_i) \in \bigcap_{k \in N} \mathcal{T}_k(b) \text{ und } F_i(b) \not\subset \mathcal{T}_j(b).$$

In diesem Fall ist die Seite  $F_i(b)$  keine Teilmenge der eingeschränkten Technologiemenge  $\mathcal{T}_j(b)$ . Hierdurch wird die Existenz eines Punktes  $(a_i, b_i)$  im Innern der Schnittmenge aller eingeschränkten Technologiemengen bewiesen, dessen Seite  $F_i(b)$  auf dem Rand von  $\mathcal{T}(b)$  durch mindestens ein Element der Menge  $J$  aufgespannt wird.

Angenommen die Aussage stimme nicht. Dann gilt für alle  $k \in N$  und  $j \in J$ , dass  $F_k(b) \subset \mathcal{T}_j(b)$ .

Sei  $b^*$  ein Punkt, der Gleichung (5.1) erfüllt. Da  $b^* \in X$  eine schwach effiziente Allokation ist, liegen für alle  $k \in N$  die Punkte  $(a_k, b_k^*) \in \partial \mathcal{T}(b^*)$ . Es gilt also  $F_k(b^*) \subset \mathcal{T}_j(b^*)$  für alle  $k \in N$  und alle  $j \in J$ . Hieraus folgt, dass für alle  $j \in J$  die Teilmengenbeziehung  $L_j(b) \subseteq M_j(b^*)$  erfüllt ist.

Wegen der Finalität der Klasse mit Indexmenge  $J$  der Matrix  $V$  an  $b$  existiert eine Lösungsmatrix  $V^*$  an  $b^*$ , so dass die Zeilen  $v_{j,k}^* = 0$  für alle  $j \in J$  und  $k \notin J$ . Mit der Zulässigkeit der Zeilen von  $V^*$  an  $b$  folgt, dass

$$V_{J,J}^* b_J = V_J^* b \geq V_J b = \kappa(b) b_J.$$

Somit ist

$$\theta^* = \rho(V^*) \geq \rho(V_{J,J}^*) = \kappa(b) > \theta^*,$$

vgl. Korollar 8.1.20 und Theorem 8.1.26 in Horn [26], was zu einem Widerspruch führt.

6. In diesem Teil des Beweises werden die Aussagen verknüpft und zu einem Widerspruch geführt. Betrachtet werden die Indizes  $j \in J$  und  $i \notin I$ , für die die Bedingung  $F_i(b) \not\subset \mathcal{T}_j(b)$  erfüllt ist.

Da der Eigenvektor  $y$  nach Algorithmus 5.2 berechnet wird, gilt die Ungleichung  $y_k \leq b_k$  für alle  $k \in N$  und die Gleichheit  $y_{J_j} = b_{J_j}$  ist für alle finalen Klassen  $j$  erfüllt, vgl. Lemma 5.3. Wegen der Konstruktion des Eigenvektors  $y$  ist  $(a_i, \rho(V)y_i) \in F_j(b)$ . Da aber  $\rho(V) > \theta^* \geq 1$ , vgl. Proposition 4.14, folgt  $(a_i, y_i) \notin \mathcal{T}_j(y)$ , und somit  $\theta_j(y) < \rho(V)$ . Dies führt zu einem Widerspruch.  $\square$

Die Folge der Spektralradien  $\rho(V^{(k)})$  ist nicht nur monoton, sondern stimmt auch nach endlich vielen Schritten mit dem Wert  $\theta^*$  des Optimierungsproblems (5.2) überein.

**Proposition 5.6** *Seien  $V^{(k)}$  und  $b^{(k)}$  die Folgen, die nach den Algorithmen 5.1, 5.2 und 5.3 generiert werden. Ferner sei die Annahme (A4) erfüllt, dann gilt: Es existiert ein  $k_0$ , so dass  $\rho(V^{(k)}) = \theta^*$  für alle  $k \geq k_0$ .*

**Beweis.** Sei  $b^{(k-1)} \in S$  und  $V^{(k)}$  eine Lösungsmatrix, deren Zeilen  $v_k^{(k)}$  Lösungen der linearen Programme  $\phi_k$  aus (3.10) am Punkt  $b^{(k-1)}$  sind. Die Lösungen  $v_k^{(k)}$  sind Randpunkte der Polyeder

$$Z_k = \{ (v_k, w) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+q)} \mid v_k A + w P \geq a_k, v_{k,k} = 0, v_k, w \geq 0 \}.$$

Da die Mengen  $Z_k$  polyhedral und konvex sind, kann jede Zeile  $v_k^{(k)}$  der Matrix  $V^{(k)}$  als Konvexkombination endlich vieler Extrempunkte von  $Z_k$  dargestellt werden, vgl. Satz von Carathéodory's, z.B. Theorem 17.1. in Rockafellar [44]. Bezeichnet man die Extrempunkte von  $Z_k$  mit  $\hat{v}_k^{(k)}$ , dann existiert eine nicht leere, endliche Indexmenge  $J_k$ , so dass

$$v_k^{(k)} = \sum_{j \in J_k} \lambda_j \hat{v}_j^{(k)}, \quad \lambda_j > 0, \quad \sum_{j \in J_k} \lambda_j = 1.$$

Da diese Darstellung für jede Zeile der Lösungsmatrix  $V^{(k)}$  existiert, kann eine Matrix  $V^{(k)}$  als Konvexkombination endlich vieler Matrizen  $\hat{V}^{(k)}$  geschrieben werden, deren Zeilen  $\hat{v}_k^{(k)}$  Extrempunkte von  $Z_k$  und Lösungen der linearen Programme  $\phi_k$  an  $b^{(k-1)}$  sind. Somit existiert eine endliche Indexmenge  $J$  mit  $\#J = p < \infty$  und

$$V^{(k)} = \sum_{j \in J} \mu_j \hat{V}_j^{(k)}, \quad \mu_j > 0, \quad \sum_{j \in J} \mu_j = 1.$$

Auf dem  $(p-1)$ -Simplex  $\Delta^{p-1}$  sei der maximale Spektralradius der Konvexkombinationen von  $V^{(k)}$

$$d(V^{(k)}) = \max_{\lambda \in \Delta^{p-1}} \rho\left(\sum_{j \in J} \lambda_j \hat{V}_j\right)$$

definiert. Dieses Maximum wird angenommen, da  $\Delta^{p-1}$  kompakt und  $\rho$  eine stetige Funktion ist, vgl. Appendix D in Horn [26]. Für den Wert  $d(V^{(k)})$  kann

eine obere und eine untere Schranke angegeben werden. Nach Definition ist

$$\rho(V^{(k)}) \leq d(V^{(k)}).$$

Die Zeilen  $v_k^{(k)}$  und ebenfalls jede Zeile  $\hat{v}_k^{(k)}$  sind optimale Lösungen von (3.10) an  $b^{(k-1)}$ . Für jede Konvexkombination der Matrizen  $\hat{V}^{(k)}$  gilt folglich

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \hat{V}_j^{(k)} b^{(k-1)} = V^{(k)} b^{(k-1)} \leq \kappa(b^{(k-1)}) b^{(k-1)},$$

woraus die Ungleichung

$$d(V^{(k)}) \leq \kappa(b^{(k-1)})$$

folgt, vgl. Theorem 8.1.26 in Horn [26]. Dann ist

$$\theta^* \leq \kappa(b^{(k)}) \leq \rho(V^{(k)}) \leq d(V^{(k)}) \leq \kappa(b^{(k-1)}),$$

vgl. Proposition 5.1.

Die konvexen Polyeder  $Z_k$  haben nur endlich viele Extrempunkte. Es existieren also nur endlich viele Matrizen  $\hat{V}^{(k)}$  und somit auch nur endlich viele Zahlen  $d(V^{(k)})$ . Falls die Aussage der Proposition nicht stimmt, dann muss die monoton fallende Folge  $d(V^{(k)})$  für die unendliche Folge  $b^{(k)}$  auf einem Niveau  $d(V^{(k)}) > \theta^*$  einen Zyklus aufweisen. Dies widerspricht Proposition 5.5. Also hat man nach endlich vielen Schritten einen Punkt  $b^{(k_0)}$  mit  $\rho(V^{(k_0)}) = \theta^*$  und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

Mit den bisherigen Resultaten ist die Konvergenz der Folge  $b^{(k)}$  gegen eine Lösung  $b^*$  der erweiterten dualen Budgetgleichung (5.1) bewiesen, die auch eine Lösung des Optimierungsproblems (5.2).

**Proposition 5.7** *Seien  $V^{(k)}$  und  $b^{(k)}$  die Folgen, die nach den Algorithmen 5.1, 5.2 und 5.3 generiert werden. Ferner sei die Annahme (A4) erfüllt, dann gilt: Die Folge  $b^{(k)}$  konvergiert gegen eine Lösung  $b^*$  der erweiterten dualen Budgetgleichung (5.1).*

**Beweis.** Nach Proposition 5.6 existiert ein  $k_0$ , so dass  $\rho(V^{(k)}) = \theta^*$  für alle  $k \geq k_0$ . Die Folge  $b^{(k)}$  konvergiert also gegen einen Punkt  $b^*$ , vgl. Proposition 5.4. Die Behauptung folgt hiermit aus Proposition 5.2.  $\square$

Mit Annahme (A4) und  $Q^{(k)} = 0$  für alle  $k \geq 0$  kann für die Algorithmen 5.1, 5.2 und 5.3 nicht nur die Konvergenz der Folge  $b^{(k)}$  bewiesen werden. In

diesem Fall terminiert der Algorithmus nach endlich vielen Schritten mit einer Lösung  $b^* \in S$  des Optimierungsproblems (5.2), die auch die erweiterte duale Budgetgleichung (5.1) erfüllt.

**Proposition 5.8** *Seien  $V^{(k)}$  und  $b^{(k)}$  die Folgen, die nach den Algorithmen 5.1, 5.2 und 5.3 generiert werden. Ferner sei die Annahme (A4) erfüllt, dann gilt: Es existiert ein  $k_0$ , so dass  $b^{(k_0)}$  die erweiterte duale Budgetgleichung (5.1) erfüllt.*

**Beweis.** Nach Proposition 5.7 konvergiert die Folge  $b^{(k)}$  gegen eine Lösung  $b^*$  erweiterten dualen Budgetgleichung (5.1), d.h.

$$V^*b^* = \theta^*b^*.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Folge  $b^{(k)}$  nach endlich vielen Schritten terminiert. Da die Folge  $b^{(k)}$  konvergiert, ist sie eine Cauchy-Folge mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|b^{(k+1)} - b^{(k)}\| = 0.$$

Der zulässige Bereich der linearen Programme  $\phi_k$  aus (3.10) ist durch den Polyeder

$$Z_k = \{ (v_k, w) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+q)} \mid v_k A + w P \geq a_k, v_{k,k} = 0, v_k, w \geq 0 \}.$$

gegeben. Für  $b \in S$  ist die Menge der optimalen Lösungen des linearen Programms (3.10) durch eine Seite des Polyeders  $Z_k$  gegeben. Da das Polyeder endlich generiert ist, hat es nur endlich viele Seiten. Da  $b^{(k)}$  eine Cauchy-Folge ist, existiert also ein Index  $k_1$ , so dass für alle  $k \in N$  die Zeilen  $v_k^{(k_1)}$  der Lösungsmatrix  $V^{(k_1)}$  der linearen Programme  $\phi_k$  an  $b^{(k_1-1)}$  auch optimale Lösungen von  $\phi_k$  am Eigenvektor  $b^{(k_1)}$  sind. Mit der Optimalität der Zeilen von  $V^{(k_1)}$  folgt

$$V^{(k_1+1)}b^{(k_1)} = V^{(k_1)}b^{(k_1)} = \theta^*b^{(k_1)}$$

und mit Korollar 8.1.30 in Horn et al. [26] die Behauptung.  $\square$

Proposition 5.7 zeigt die deutliche Überlegenheit des TipTap-Algorithmus 5.1 gegenüber den Bundle-Trust-Region-Methoden. Die Folge der Eigenvektoren  $b^{(k)}$  kann so gewählt werden, dass nach endlich vielen Schritten ein Vektor  $b^{(k_0)}$  bestimmt ist, der die erweiterte duale Budgetgleichung (5.1) erfüllt und eine optimale Lösung des Optimierungsproblems (5.2) ist.

### 5.2.2 Nicht-negative Eigenvektoren

Falls die nicht-negativen Lösungsmatrizen  $V^{(k)}$  keinen positiven Eigenvektor haben, kann mit einer nicht-negativen Störungsmatrix  $Q^{(k)}$  eine positive Matrix  $V^{(k)} + Q^{(k)}$  mit eindeutigem, positivem Eigenvektor  $b^{(k)}$  erzeugt werden, vgl. Perron-Theorem, z.B. Theorem 8.2.5 in Horn [26].

Nach Annahme (A3) ist die Folge der Störungsmatrizen  $Q^{(k)}$  eine nicht-negative, monoton fallende Folge mit Grenzwert Null. Die Konvergenz der Folge  $b^{(k)}$  des Algorithmus 5.1 kann also auch auf den gestörten Fall übertragen werden. Die Folge  $b^{(k)}$  konvergiert dann gegen einen Punkt  $b^* \in \text{clos}(S)$ , der die erweiterte duale Budgetgleichung (5.1) erfüllt. Der Punkt  $b^*$  liegt aber nicht unbedingt in der Menge  $S$ , vgl. Proposition 4.10 und Beispiel 3.3.1.

Um die Endlichkeit des Algorithmus 5.1 im Fall nicht-negativer Eigenvektoren zu garantieren, kann das Verfahren modifiziert werden. Hierfür werden die Lösungsmatrizen  $V^{(k)}$  genauer analysiert.

Hat eine Matrix  $V^{(k)}$  keinen positiven Eigenvektor, dann ist  $V^{(k)}$  reduzierbar, vgl. Theorem 8.4.4 in Horn [26]. In diesem Fall ist entweder eine finale Klasse nicht-bestimmend, oder eine nicht-finale Klasse bestimmend, vgl. Theorem 1.7.6 in Bapat [6]. Dennoch ist  $V^{(k)}$  eine nicht-negative Matrix, die einen nicht-negativen Eigenvektor  $b^{(k)} \geq 0$  zu dem Eigenwert  $\rho(V^{(k)})$  hat, vgl. Theorem 8.3.1 in Horn [26]. Außerdem existiert ein Vektor  $y^{(k)} > 0$  mit

$$V^{(k)}y^{(k)} \geq \rho_{\text{mfc}}(V^{(k)})y^{(k)} \geq \theta^*y^{(k)},$$

vgl. Lemma 4.6. Falls also kein positiver Eigenvektor existiert, kann in Algorithmus 5.1 ein Vektor  $b^{(k)}$  berechnet werden, der diese Ungleichungen erfüllt.

#### Algorithmus 5.4 (Modifikation von Schritt 3(b))

Sei  $V^{(k)}$  eine reduzierbare Lösungsmatrix (in Frobenius-Normal-Form, vgl. (4.1)) ohne positiven Eigenvektor.

Berechne  $y^{(k)}$  folgendermaßen:

1. Für alle finalen Klassen  $i = 1, \dots, t$ :

$$y_{I_i}^{(k)} = b_{I_i}^{(k-1)}.$$

2. Für alle nicht-finalen Klassen  $i = t + 1, \dots, s$ :

(a) Falls  $\rho(V_{I_i, I_i}^{(k)}) \geq \rho_{mfc}(V^{(k)})$ :

$$y_{I_i}^{(k)} = b_{I_i}^{(k-1)}.$$

(b) Sonst

i. Falls  $V_{I_i, I_i}^{(k)} \neq 0$ :

$$y_{I_i}^{(k)} = \left( \rho(V^{(k)})I - V_{I_i, I_i}^{(k)} \right)^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} V_{I_i, I_j}^{(k)} y_{I_j}^{(k)}.$$

ii. Sonst

$$y_i^{(k)} = \frac{1}{\rho(V^{(k)})} \sum_{j=1}^{i-1} v_{i, I_j}^{(k)} y_{I_j}^{(k)}.$$

Setze

$$b^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{e^\top y^{(k)}}.$$

Durch diese Modifikation des Algorithmus 5.1 können die Resultate der Konvergenztheorie auf den Fall nicht positiver Eigenvektoren übertragen werden. Da eine optimale Lösung  $b$  des Optimierungsproblems (5.2) existiert, vgl. Proposition 4.7, an der die Optimalitätsbedingung  $\rho_{mfc}(V) = \theta^*$  erfüllt ist, vgl. Proposition 4.8, wird das modifizierte Verfahren ebenfalls nach endlich vielen Schritten terminieren.

Falls eine Lösung der erweiterten dualen Budgetgleichung (5.1) nicht existiert, haben alle Lösungsmatrizen  $V$  an einem Minimum  $b$  des Optimierungsproblems 5.2 keinen positiven Eigenvektor, vgl. Proposition 4.10. In diesem Fall kann die strikte Monotonie der Folge der Spektralradien nicht gewährleistet werden, vgl. Proposition 5.5. Bei den Lösungsmatrizen  $V$  tritt dann entweder eine finale, nicht-bestimmende Klasse auf, d.h.

$$\rho_{mfc}(V^{(k)}) < \rho(V^{(k)}),$$

oder es existiert eine bestimmende, nicht-finale Klasse, vgl. Theorem 1.7.6 in Bapat [6]. In diesem Fall ist die Kontrolle der Spektralradien aller finalen Klassen notwendig.

Details der Konvergenzanalyse für Matrizen  $V^{(k)}$  ohne positive Eigenvektoren werden nicht betrachtet, da in diesem Fall Blockierungen im Allokationsmodell 3.1 vorliegen. Durch Bilden einer Partition  $C$  auf  $N$ , als einfache

Aggregation einer Koalition aus Elementen einer finalen Klasse, erhält man eine potentielle Koalition, vgl. Definition 4.3.2. Die Lösung der erweiterten dualen Budgetgleichung (5.1) auf  $\text{clos}(S)$  wird also durch die ausgewogene Allokation der neuen Kollektionsstruktur dominiert, vgl. Propositionen 4.17 und 4.18. Deshalb ist es hier sinnvoll, die Kollektionsstruktur zu ändern, und die Berechnung der optimalen Lösung auf die neue Kollektionsstruktur zu verlagern. Auf diese Weise kann das Bilden von Koalitionen in Algorithmus 5.1 integriert werden. Blockierungen, die durch finale Klassen in den Lösungsmatrizen gekennzeichnet sind, werden dann im modifizierten Verfahren automatisch identifiziert.

### 5.2.3 Numerische Analyse

Um die Güte des Algorithmus 5.1 einzuschätzen, werden im Folgenden einige numerische Resultate aufgeführt.

Zur Berechnung der linearen Programme  $\phi_k(b)$  aus (3.10) wurde sowohl ein *Lipsol-Solver*, der auf *Inneren-Punkte-Methoden* basiert, als auch der *LP-Solver* (*LP: Linear Programming*) von *Matlab* verwendet, der auf einem *QP-Solvers* (*QP: Quadratic Programming*) beruht. Der Vorteil der Inneren-Punkte-Methode liegt in der Güte des Verfahrens bei der Lösung der linearen Programme. Außerdem generiert diese Methoden im Fall mehrdeutiger optimaler Lösungen  $v_k$  der linearen Programme  $\phi_k(b)$  keine Extrempunkte des Polyeders  $\mathcal{T}_k(b)$ . Hierdurch befinden sich weniger Null-Einträge in der Matrix  $V^{(k)}$  und der Algorithmus 5.1 benötigt weniger Iterationen bis zur Lösung der erweiterten dualen Budgetgleichung (5.1). Der Vorteil des QP-Solvers und der *Simplex-Verfahren* ist, dass die optimale Lösung  $v_k^{(k)}$  an  $b^{(k-1)}$  in der nächsten Iteration als Startpunkt in den linearen Programme  $\phi_k$  benutzt werden kann.

Die numerischen Tests basieren auf folgenden Einstellungen:

- Die I-O-Matrizen  $A \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n \times m}$  wurden in den Dimensionen

$$(n \times m) : (30 \times 20) \text{ und } (100 \times 30)$$

bestimmt. Die I-O-Matrizen  $A$  wurden mit *Matlab* zufällig generiert.

- Als Preissystem diente  $\mathcal{P} = \mathbb{R}_+^m$ .

- Das Budget wurde mit  $B = n * 10^6$  festgelegt.
- Als Startpunkt wurde  $b^{(0)} = e/n$  gewählt. Für Output-Matrizen  $A$  wurde auch die schwach effiziente Allokation  $b^{(0)} = Ap$  mit  $p = e$  verwendet, vgl. Proposition 3.5.
- In den Tests wurde als Abbruchbedingung die exakte Lösung (Computergenauigkeit) der erweiterten dualen Budgetgleichung (5.1) verwendet.

In Tabelle 5.1 wurden die Ergebnisse zusammengefasst. Eine Iteration in Al-

Dimension ( $n \times m$ )	Anzahl Iterationen
(30 $\times$ 20)	4-7
(100 $\times$ 30)	5-12

Tabelle 5.1: Numerische Ergebnisse

gorithmus 5.1 schließt die Lösung  $n$  linearer Programme und die Berechnung eines Perron-Vektors  $b$  einer Lösungsmatrix  $V$  ein. Die Endlichkeit des Verfahrens wurde in Proposition 5.8 bewiesen.

Durch das Ausnutzen der algebraischen Eigenschaften wird eine deutliche Überlegenheit des Tiptap-Algorithmus gegenüber den Bündel-Trust-Region-Verfahren erzielt.

# Anhang A

## Absente Beweise

Im Folgenden werden die Beweise einiger Propositionen aus den vorherigen Kapiteln geführt.

### Propositionen aus Kapitel 3

**(Wiederholung von Proposition 3.3)** Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix,  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem und  $b \in S$ . Ferner sei die Annahme (A1) (vgl. Kapitel 1.2) erfüllt. Die Allokation  $b$  ist schwach effizient genau dann, wenn  $b$  eine Lösung des Optimierungsproblems (3.7) ist.

**Beweis.** Der Vektor  $b \in S$  ist schwach effizient genau dann, wenn  $\psi_k(b) = b_k$  für alle  $k \in N$ , vgl. Lemma 3.2. Da die Quotienten

$$\frac{\psi_k(b)}{b_k} \leq 1$$

nach oben beschränkt sind, ist  $b \in X$  auch eine Lösung von (3.7).

Nun sei  $b \in S$  eine Lösung des Optimierungsproblems (3.7), die nicht schwach effizient ist. Dann gilt

$$\sup_{b \in S} \min_{k \in S} \frac{\psi_k(b)}{b_k} < 1.$$

Nach Voraussetzung ist Annahme (A1) erfüllt. Somit existiert eine Lösung  $\hat{b}$  des Optimierungsproblems (3.13), vgl. Proposition 4.7. Für diese Lösung  $\hat{b}$  ist  $\theta_k(\hat{b}) \geq 1$ , vgl. Proposition 4.14. Dann ist aber  $\psi_k(\hat{b}) = \hat{b}_k$ , was zu einem Widerspruch führt.  $\square$

**(Wiederholung von Proposition 3.4)** Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix und  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preissystem. Eine schwach effiziente Allokation  $b \in S$  existiert genau dann, wenn die Annahme (A1) (vgl. Kapitel 1.2) erfüllt ist.

**Beweis.** Nach Definition sind für alle  $k \in N$  die zulässigen Bereiche der linearen Programme  $\phi_k(b)$  in (3.3) und dem hierzu dualen Programm in (3.6) nicht leer. Aus der Dualitätstheorie der linearen Programmierung folgt, dass die linearen Programme eine optimale Lösung haben genau dann, wenn die zulässigen Bereiche nicht leer sind, vgl. Korollar 7.1g in Schrijver [52].

Sei  $b \in X$  eine schwach effiziente Allokation. Nach Definition sind die Zielfunktionswerte der linearen Programme grösser als Null. Falls Annahme (A1) nicht erfüllt ist, existiert ein  $k \in N$ , so dass für alle  $p \in \mathcal{P}$  die Ungleichung  $a_k p \leq 0$  gilt. In diesem Fall ist  $p = 0$  eine Lösung des dualen linearen Programms (3.6) mit optimalem Zielfunktionswert von Null. Dies führt zu einem Widerspruch und folglich ist die Annahme (A1) erfüllt.

Falls Annahme (A1) erfüllt ist, dann existiert eine Lösung  $b \in S$  des Optimierungsproblems (3.13), vgl. Proposition 4.7. Außerdem ist

$$\min_{k \in N} \theta_k(b) \geq 1,$$

vgl. Proposition 4.14. Dann ist  $b \in X$  eine schwach effiziente Allokation und die Behauptung bewiesen.

□

## Propositionen aus Kapitel 4

**(Wiederholung von Proposition 4.10)** Sei  $b \in S$  und  $W$  eine Lösungsmatrix von  $f_k$  aus (4.5) an  $b$ , dann gilt: Es existiert ein Minimum  $b^*$  der Funktion  $h$  auf  $S$  mit  $h_k(b^*) = h(b^*)$  für alle  $k \in N$  genau dann, wenn eine Lösungsmatrix  $W$  an einem Minimum  $b \in S$  existiert, die einen positiven Eigenvektor zum Eigenwert  $-\rho(-W) = h(b)$  hat.

**Beweis.** Die hinreichende Bedingung ist trivial, da  $b \in S$  mit

$$Wb = h(b)b$$

impliziert, dass  $b > 0$  ein Eigenvektor von  $-W$  ist, und dass für den Eigenwert die Gleichung  $-\rho(-W) = h(b)$  gilt, vgl. Korollar 8.1.30 in Horn et al. [26].

Um die notwendige Bedingung zu beweisen, wird angenommen, dass eine Lösungsmatrix  $W$  an einem Minimum  $b$  von  $h$  auf  $S$  mit

$$Wb \leq h(b)b$$

existiert, die einen positiven Eigenvektor  $y > 0$ ,  $y^\top e = 1$  zum Eigenwert  $-\rho(-W) = h(b)$  hat, d.h.

$$Wy = -\rho(-W)y = h(b)b.$$

Mit  $\hat{W}$  sei eine Lösungsmatrix der linearen Programme  $f_k$  aus (4.5) am Punkt  $y$  bezeichnet. Aus der Zulässigkeit der Zeilen  $w_k$  und der Optimalität der Zeilen  $\hat{w}_k$  in den linearen Programmen  $f_k$  an  $y$  folgt

$$\hat{W}y \geq h(b)y. \tag{A.1}$$

Wenigstens eine der Ungleichung in (A.1) ist strikt, d.h.  $h(b) < h(y)$ . Anderenfalls ist die Behauptung bewiesen. Für die Matrix  $\hat{W}$  gelten folgende Beziehungen. Aus der Zulässigkeit der Zeilen  $\hat{w}_k$  an  $b$  folgt die Ungleichung

$$\hat{W}b \leq Wb \leq h(b)b.$$

Da  $b, y \in S$  folgt

$$-\rho(-\hat{W}) = h(b),$$

vgl. Theorem 8.1.26 in Horn et al. [26].

Nun wird bewiesen, dass eine Lösungsmatrix  $\hat{W}$ , die Gleichung (A.1) erfüllt, reduzierbar ist. Falls  $\hat{W}$  irreduzierbar ist, dann hat sie einen positiven linken Eigenvektor, vgl. Proposition 8.4.4 in Horn et al. [26]. Mit Theorem 8.3.4 in Horn et al. [26] folgt  $h(y) = h(b)$ , was zu einem Widerspruch führt. Die Matrix  $\hat{W}$  ist also reduzierbar.

Im Folgenden wird gezeigt, dass eine reduzierbare Lösungsmatrix  $\hat{W}$  an  $y$ , die Gleichung (A.1) erfüllt, einen positiven Eigenvektor hat. Hierfür werden die Klassen der Matrix  $\hat{W}$  in Frobenius-Normal-Form betrachtet, vgl. (4.1). Sei  $k$  eine finale Klasse mit Indexmenge  $I_k$ . Aus

$$\hat{W}_{I_k, I_k} b_{I_k} \leq h(b) b_{I_k}$$

folgt

$$-\rho(-\hat{W}_{I_k, I_k}) \leq h(b),$$

vgl. Theorem 8.1.26 in Horn et al. [26]. Außerdem gilt

$$h(b) = -\rho(-\hat{W}) \leq -\rho(-\hat{W}_{I_k, I_k}),$$

vgl. Korollar 8.1.20 in Horn et al. [26], so dass

$$\rho(-\hat{W}) = \rho(-\hat{W}_{I_k, I_k}).$$

Alle finalen Klassen  $k$  sind also bestimmende Klassen.

Sei  $k$  eine nicht-finale Klasse mit Indexmenge  $I_k$ , dann gilt für alle  $i \in I_k$  wegen  $\hat{w}_i y \geq h(b) y_i$  die Ungleichung

$$\hat{W}_{I_k, I_k} y_{I_k} > h(b) y_{I_k}.$$

Hieraus folgt

$$\rho(-\hat{W}) > \rho(-\hat{W}_{I_k, I_k}),$$

vgl. Korollar 8.1.29 in Horn et al. [26]. Alle nicht-finalen Klassen sind also keine bestimmenden Klassen. Aus Theorem 1.7.6 in Bapat [6] folgt die Existenz eines positiven Eigenvektors der Matrix  $\hat{W}$ .

Die letzten Ausführungen gelten für jede Lösungsmatrix  $\hat{W}$ , die Gleichung (A.1) erfüllt. Ferner gilt für einen Eigenvektor  $\hat{y}$  von  $\hat{W}$  wieder die Beziehung

$$\hat{W} \hat{y} = h(b) \hat{y},$$

wobei  $b$  eine Minimum von  $h$  auf  $S$  ist. Somit sind die Voraussetzungen von Proposition 5.4 erfüllt. Es kann also eine Folge von positiven Eigenvektoren  $y^{(k)}$  generieren werden, die gegen einen Grenzwert  $b^* \in S$  konvergiert, der die Bedingung  $h_k(b^*) = h(b^*)$  für alle  $k \in N$  erfüllt.  $\square$

# Anhang B

## Axiomatische Ergänzung

Als Ergänzung zur axiomatischen Konzeption von Budget-Allokations-Funktionen, vgl. Definition 2.1.1, wird für eine Auswahl von Axiomen begründet, warum sie für Allokationsmechanismen nicht gefordert werden können.

Wird ein Allokationsmechanismus in eine Ökonomie integriert, passen sich die Marktteilnehmer an die veränderten Marktgegebenheiten an. Mögliche Reaktionen sind Aggregationen von DMUs, oder die Disaggregation einer DMU in mehrere Organisationseinheiten. Die Anpassungen werden vollzogen, falls die DMUs hiervon profitieren und ihre Budgetanteile erhöhen können. Eine weitere Forderung an Allokationmechanismen ist folglich, dass kein Anreiz zum Aggregieren oder Disaggregieren von Produktionseinheiten geschaffen wird. Denn (Dis-)Aggregation von DMUs sollte ausschliesslich auf dem Ausnutzen von *Synergieeffekten* (*Skalenerträge* (*economics of scale*), *Verbundeffekten* (*economics of scope*)) oder *Kapazitätsauslastungen* beruhen, die durch die Produktionsverfahren determiniert werden. Die Anpassungsprozesse dürfen aber nicht durch den Allokationsmechanismus initialisiert werden.

Anreizneutralität hinsichtlich der (Dis-)Aggregation von Organisationseinheiten wird im Allgemeinen als *Koalitionsinvarianz* bezeichnet. Koalitionsinvariante Budget-Allokations-Funktionen sind additiv in der Koalitionsbildung. Der Budgetanteil einer aggregierten Einheit, die durch Addition der I-O-Vektoren gebildet wird, muss identisch zur Addition der Budgetanteile der einzelnen DMUs sein. Formal ergibt sich bei einem Zusammenschluss der

DMUs 1 und 2

$$\Phi_1 \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \Phi_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \Phi_2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Diese Forderung ist aber zu streng, da die Menge zulässiger Allokationen hierdurch stark eingegrenzt wird. Scholtes [50] hat gezeigt, dass koalitionsinvariante Allokationsmechanismen entweder Preise für Input und Output implizit festlegen oder ein Anreizsystem für die (Dis-)Aggregation von Organisationseinheiten schaffen.

**Proposition B.1 (Scholtes [50])** *Sei  $A \in \mathbb{R}_{++}^{n \times t}$  eine Output-Matrix. Eine koalitionsinvariante Budget-Allokations-Funktion, die auf der Menge der positiven Output-Matrizen stetig ist und die Axiome Normalisierung, Anonymität (vgl. Definition 2.1.1) und Skaleninvarianz, d.h. für jede positive Diagonalmatrix  $D$  ist*

$$\Phi(A, \mathcal{P}, \beta) = \Phi(AD, \mathcal{P}, \beta)$$

*erfüllt, impliziert Allokationen der Form*

$$b_k = \sum_{i=1}^m p_i \frac{a_{i,k}}{\sum_{j=1}^n a_{j,k}}$$

*mit  $p > 0$  und  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ .*

Das Resultat in Scholtes [50] ist auf Output-Matrizen bezogen. Es kann aber problemlos auf I-O-Matrizen erweitert werden.

Proposition B.1 zeigt, dass das Axiom Koalitionsinvarianz die Menge zulässiger Allokationen stark eingrenzt. Neben weiteren methodisch-inhaltlichen Problemen koalitionsinvarianter Verfahren ist die Anforderung also zu restriktiv.

Im Weiteren soll die Abgrenzung von Budget-Allokationsmechanismen zu Verfahren für die Allokation von Kosten verdeutlicht werden.

Für Auszahlungsfunktionen wird in der kooperativen Spieltheorie häufig *Superadditivität* oder *Subadditivität in Koalitionen* gefordert. Diese Anforderung

wird auch in Modellen verwendet, die sich mit der *Allokation von Kosten* beschäftigen, vgl. z.B. Young [64], *cost saving game*. Für weiterführende Literatur zur Spieltheorie und Allokation von Kosten wird auf die Werke von Aumann et al. [3, 4] verwiesen. Super- und Subadditivität der Allokationsfunktion äussert sich im mathematischen Sinn durch eine Ungleichung in Gleichung (B.1). Da dieses Axiom ein Anreizsystem schafft, das als Anpassungsprozess vollständige Disaggregation oder vollständige Aggregation aller DMUs zur Folge hat, dürfen Budget-Allokationsfunktionen weder superadditiv noch subadditiv in Koalitionen sein.

Eine weitere mögliche Forderung an Budget-Allokationsfunktionen ist die *Additivität in Projekten*. Das Axiom wurde von Shapley [53] für Kostenfunktionen gefordert. Additivität in Projekten bedeutet für Budget-Allokationsfunktionen: Die Allokation bleibt unabhängig davon, ob das Budget als Ganzes auf alle Projekte des Produktionsprozesses verteilt wird, oder ob die DMUs die Summe der Budgetanteile der einzelnen Komponenten des zerlegten Produktionsprozesses erhalten. Mit der Aufteilung einer I-O-Matrix  $A \in \mathcal{M}$  in Komponenten (Projekten), erhält man für  $k = 1, \dots, m$  mit den Spaltenvektoren  $\bar{a}_k$  die Matrix

$$A = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$$

Um zu begründen, warum diese Eigenschaft in den Modellen nicht gefordert werden soll, wird eine Output-Matrix mit nur einer Output-Komponente betrachtet.

**Proposition B.2** *Sei  $A \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n \times t}$  eine Output-Matrix mit  $t = 1$ ,  $\mathcal{P} = \mathbb{R}_+$  ein Preissystem und  $\beta = 1$  ein Budget. Für jeden Allokationsmechanismus ist  $\Phi(A, \mathcal{P}, \beta) = \{b\}$  mit*

$$b_k = \frac{a_k}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

*die eindeutige Allokation.*

**Beweis.** Die Behauptung folgt aus der Pareto-Optimalität. □

Die Forderung nach Additivität in Projekten lässt sich bei der Allokationsfunktion durch die Gleichung

$$\Phi_k(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = \sum_{i=1}^m \Phi_k(\bar{a}_i)$$

ausdrücken. Für Allokationsmechanismen, die additiv in Projekten sind, wird die Menge der zulässigen Allokationen also gleichermaßen eingeschränkt, wie für koalitionsinvariante Verfahren, vgl. Propositionen B.1 und B.2. Für weiterführende Literatur zur axiomatischen Behandlung von Allokationsmechanismen wird auf Moulin [38] verwiesen.

# Anhang C

## Transformierte Technologiemenge

Zur Veranschaulichung und zum Verständnis diverser Propositionen aus den vorherigen Kapiteln ist eine graphische Darstellung hilfreich, die eine Transformation des Technologieraums verwendet. Hierfür wird die Diagonalmatrix  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit den Diagonaleinträgen

$$t_{k,k} = \frac{1}{b_k}$$

für  $k \in N$  und die *transformierte I-O-Matrix*

$$\hat{A} = TA$$

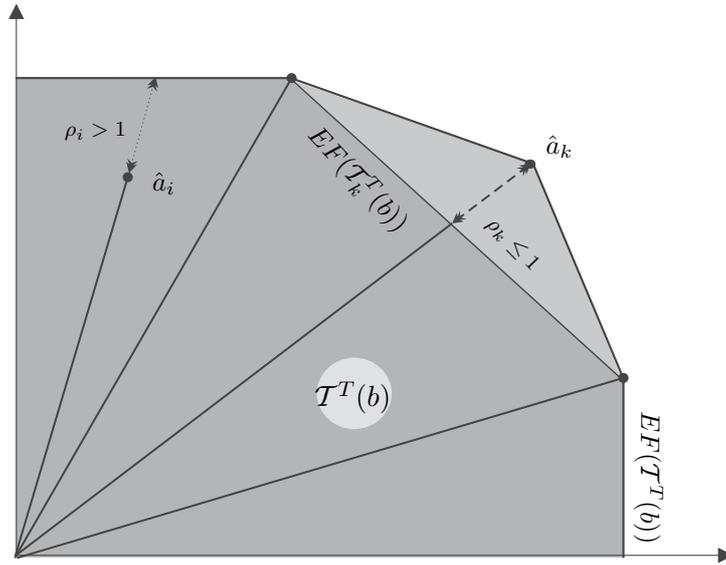
mit den Zeilenvektoren

$$\hat{a}_k = t_{k,k} a_k = \frac{1}{b_k} a_k$$

definiert. Mit den transformierten I-O-Vektoren erhält man die *transformierte Technologiemenge*

$$\mathcal{T}^T(b) = \{ \hat{z} \mid \hat{z} \leq \lambda \hat{A} + \mu P, \lambda e = 1, \lambda, \mu \geq 0 \}. \quad (\text{C.1})$$

Wie in Abbildung C.1 dargestellt, ergibt sich für eine I-O-Matrix  $A \in \mathcal{M}$  und eine zulässige Allokation  $b \in S$  der transformierten Produktionsraum  $\mathcal{T}^T(b)$  als axialer Abschluss einer Projektion eines Schnittes durch  $\mathcal{T}(b)$ , in dem die transformierten I-O-Vektoren  $\hat{a}_i = a_i/b_i \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  liegen. Durch die Transformation werden die Extremalstrahlen zu einem Punkt verschmolzen.


 Abbildung C.1: Transformierte Technologiemenge  $\mathcal{T}^T(b)$ 

Mit Hilfe des linearen Programms

$$\begin{aligned}
 & \max && \rho_k \\
 \text{unter} & && \lambda \hat{A} + \mu P \geq \rho_k \hat{a}_k \\
 & && \lambda e = 1, \lambda_k = 0 \\
 & && \lambda, \mu \geq 0
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

wird zunächst eine geometrische Interpretation gegeben.

Wie in Abbildung C.1 dargestellt, ist der Wert des linearen Programms (C.2) größer als eins, d.h.  $\rho_i > 1$ , genau dann, wenn der Vektor  $\hat{a}_i$  im axialen Abschluss oder in der konvexen Hülle der transformierten I-O-Vektoren  $\hat{a}_j$  für  $j \neq i$  liegt. In diesem Fall gibt  $1/\rho_i$  den Faktor an, um den der Budgetanteil  $b_i$  reduziert werden muss, bis der transformierte I-O-Vektor  $\hat{a}_i$  den Rand des transformierten, empirischen Produktionsraums  $\mathcal{T}^T(b)$  erreicht. Für  $\rho_i > 1$  gilt die Identität von transformierter Technologiemenge  $\mathcal{T}^T(b)$  und eingeschränkter, transformierter Technologiemenge  $\mathcal{T}_i^T(b)$ .

Bei einem Wert  $\rho_k \leq 1$  liegt der Vektor  $\hat{a}_k$  auf der effizienten Linie  $EF(\mathcal{T}(b))$ . Analog bestimmt der Wert  $1/\rho_k$  den Faktor, um den der Budgetanteil  $b_i$  erhöht werden kann, bis der transformierte I-O-Vektor  $\hat{a}_k$  auf dem Rand der transformierten, eingeschränkten Technologiemenge  $\partial \mathcal{T}_k^T(b)$  liegt.

Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen der transformierten Techno-

logiemenge  $\mathcal{T}^T(b)$  aus (C.1) und der Technologiemenge  $\mathcal{T}(b)$  aus (3.2) beschrieben. Mit den Variablentransformationen

$$v_{k,i} = \frac{b_k}{\rho_k b_i} \lambda_i, \quad w_i = \frac{b_k}{\rho_k} \mu_i$$

im linearen Programm (C.2) erhält man wegen  $\lambda^\top e = 1$  für  $v_k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  die Beziehung

$$\rho_k = \frac{b_k}{v_k b}$$

und somit das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{v_k b}{b_k} \\ \text{unter} \quad & v_k A + w P \geq a_k \\ & v_{k,k} = 0 \\ & v_k, w \geq 0. \end{aligned}$$

Aus der positiven Homogenität folgt der Zusammenhang zwischen den Abbildungen in (C.2) und  $\theta_k$  in (3.11).

Wie die folgende Proposition zeigt, bleiben wesentliche Struktureigenschaften bei der Transformation der Technologiemenge erhalten.

**Proposition C.1** *Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine I-O-Matrix,  $\mathcal{P} \in \mathcal{Q}$  ein Preisystem,  $\mathcal{T}(b)$  die Technologiemenge aus (3.2) und  $\mathcal{T}^T(b)$  die transformierte Technologiemenge aus (C.1), dann gilt:*

1.  $(a_k, b_k)$  ist schwach effizient genau dann, wenn  $\hat{a}_k \in \partial \mathcal{T}^T(b)$ .
2.  $(a_k, b_k)$  ist effizient genau dann, wenn  $\hat{a}_k$  Extrempunkt von  $\mathcal{T}^T(b)$ .

**Beweis.** Nach Konstruktion der Mengen liegen für alle  $k \in N$  die Vektoren  $(a_k, b_k) \in \mathcal{T}(b)$  und  $\hat{a}_k \in \mathcal{T}^T(b)$ . Da  $\mathcal{T}(b)$  ein konvexer Kegel ist, liegt  $(a_k, b_k)$  auf dem Rand genau dann, wenn  $(\hat{a}_k, 1) \in \partial \mathcal{T}(b)$ . Die Menge  $\mathcal{T}^T(b)$  wird durch eine Projektion eines Schnittes durch den Kegel  $\mathcal{T}(b)$  zum Niveau  $b_k = 1$  erzeugt. Damit ist  $(a_k, b_k)$  Randpunkt von  $\mathcal{T}(b)$  genau dann, wenn  $\hat{a}_k \in \partial \mathcal{T}^T(b)$ . Ferner ist der Punkt  $(\hat{a}_k, 1)$  Element eines Extrempunktes genau dann, wenn  $\hat{a}_k$  Extrempunkt von  $\mathcal{T}^T(b)$  ist.  $\square$

# Anhang D

## Beispiele

Abschließend werden noch einige Beispiele aufgeführt.

**Beispiel D.0.1** Sei  $\mathcal{P} = \mathbb{R}_+^2$  ein Preissystem,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{++}^{4 \times 2}$$

eine Output-Matrix und  $\beta = 1$  ein Budget. Die Kollektionsstruktur  $CS = \{C^1, C^0\}$  mit

$$C^1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \quad C^0 = \{1, 2, 3, 4\}$$

liefert die eindeutige, ausgewogene Allokation

$$b(CS) = (0.207, 0.207, 0.343, 0.243)^\top \in Y(CS).$$

Außerdem ist  $b(CS) \in \mathcal{C}$  eine eindeutige Core-Allokation.

Für die Partitionen

$$\tilde{C}^2 = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}, \quad \tilde{C}^1 = \hat{C}^1 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$$

und die Kollektionsstrukturen  $\tilde{C}S = \{\tilde{C}^2, \tilde{C}^1, C^0\}$  und  $\hat{C}S = \{\hat{C}^1, C^0\}$  ergeben sich die ausgewogenen Allokationen

$$b(\tilde{C}S) = (0.237, 0.237, 0.335, 0.191)^\top \in Y(\tilde{C}S)$$

und

$$b(\hat{C}S) = (0.241, 0.241, 0.278, 0.241)^\top \in Y(\hat{C}S).$$

**Beispiel D.0.2** Sei  $\mathcal{P} = \mathbb{R}_+^2$  ein Preissystem,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{++}^{6 \times 2}$$

eine Output-Matrix und  $\beta = 1$  ein Budget.

Für die Kollektionsstruktur  $CS = \{C^2, C^1, C^0\}$  mit den Partionen

$$C^2 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}, C^1 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}, C^0 = \{1, \dots, 6\}$$

ist

$$b(CS) = (0.11, 0.15, 0.15, 0.23, 0.19, 0.17)^\top \in Y(CS)$$

die eindeutige ausgewogene Allokation. Ferner ist  $b \in \mathcal{C}$  eine eindeutige Core-Allokation.

# Literaturverzeichnis

- [1] D. Aigner und S. Chu. On estimating the industry production function. *Economic Review*, 58:826–839, 1968.
- [2] P. Andersen und N.C. Petersen. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science*, 39(10):1261–1264, 1992.
- [3] R.J. Aumann und S. Hart. *Handbook of game theory with economic application, Vol.1*. Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [4] R.J. Aumann und S. Hart. *Handbook of game theory with economic application, Vol.2*. Elsevier, Amsterdam, 1994.
- [5] M. Avriel. *Nonlinear programming*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [6] R.B. Bapat und T.E.S Raghavan. *Nonnegative matrices and applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [7] P. Bauer. A survey of recent econometric developments in frontier estimation. *Journal of Econometrics*, 46:21–39, 1990.
- [8] A. Berman und R.J. Plemmons. *Nonnegative matrices in the mathematical science*. Academic Press, New York, 1979.
- [9] A. Charnes, W.W. Cooper, Y. Lewin und L.M. Seiford. *Data envelopment analysis: Theory, methodology and application*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [10] A. Charnes, W.W. Cooper und E. Rhodes. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operations Reserach*, 2:429–444, 1978.

- [11] A. Charnes, W.W. Cooper und E. Rhodes. Short communication: Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operations Research*, 3:339, 1979.
- [12] A. Charnes, W.W. Cooper und E. Rhodes. Evaluating program and managerial efficiency: An application of data envelopment analysis to program follow through. *Management Science*, 27(6):668–679, 1981.
- [13] A. Charnes, W.W. Cooper und R.M. Thrall. A structure for classifying and characterizing efficiencies and inefficiencies in data envelopment analysis. *The Journal of Productivity Analysis*, 2:197–237, 1991.
- [14] A. Charnes, J.J. Rousseau und J. Semple. Sensitivity of efficiency classifications in data envelopment analysis. *The Journal of Productivity Analysis*, 7:7–18, 1996.
- [15] F.H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*. J. Wiley & Sons, Chichester, 1983.
- [16] G. Debreu. The coefficient of resource utilization. *Econometrica*, 19:273–292, 1951.
- [17] J.E. Dennis und R.B. Schnabel. A view on unconstrained optimization. In G-L. Menhauser, A.H.G. Rinnooy Han und M.J. Todd, editors, *Optimization*, pages 1–72. North Holland, Amsterdam, 1989.
- [18] D. Deprins, L. Simar und H. Tulkens. Measuring labor-efficiency in post offices. In M. Marchand, P. Pestieau und H. Tulkens, editors, *The performance of public enterprises*, pages 243–267. North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [19] H. Dyckhoff. *Betriebliche Produktion*. Springer-Verlag, 1994.
- [20] R.S. Färe, S. Grosskopf und C.A.K. Lovell. *Production frontiers*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [21] M.J. Farrell. The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, 120:253–281, 1957.
- [22] R. Fletcher. *Practical methods of optimization*. John Wiley, Chichester, 1987.

- [23] H.O. Fried, A.K. Lovell und S. Schmidt. *The measurement of productive efficiency*. Oxford University Press, New York, 1993.
- [24] W.H. Greene. *The econometric approach to efficiency analysis*, pages 68–119. In [23], 1993.
- [25] E. Grochla und W. Wittmann. *Handbuch der Betriebswirtschaft*, volume 5. Schäffer-Poeschel, Stuttgart, 1993.
- [26] A.R. Horn und C.R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [27] H.Th. Jongen und D. Pallaschke. On linearization and continuous selection of functions. *Optimization*, 19:343–353, 1988.
- [28] S. Karamardian. Duality in mathematical programming. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 20:344–358, 1967.
- [29] K.C. Kiwiel. *Methods of descent for nondifferentiable optimization*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [30] T.C. Koopmans. Analysis of production as an efficient combination of activities. In T.C. Koopmans, editor, *Activity analysis of production and allocation*, pages 33–97. Wiley, New York, 1951.
- [31] L. Kuntz und S. Scholtes. Measuring the robustness of empirical efficiency valuations. *Management Science*, 46:807–823, 2000.
- [32] C. Lemaréchal. Bundle methods in nonsmooth optimization. In C. Lemaréchal und R. Mifflin, editors, *Nonsmooth Optimization*, pages 79–102. Pergamon Press, Oxford, 1978.
- [33] C. Lemaréchal, J.J. Strodiot und A. Bihain. On a bundle algorithm for nonsmooth optimization. In O.L. Mangasarian, R.R. Mayer und S.M. Robinson, editors, *Nonlinear Programming*, pages 245–281. 1981.
- [34] W.F. Lucas. *Von Neumann-Morgenstern stable sets*, chapter 17. In [3], 1992.
- [35] B. Martos. *Nonlinear programming: Theory and methods*. North-Holland, Amsterdam, 1975.

- [36] A. Mas-Colell, M.D. Whinston und J.R. Green. *Microeconomic theory*. Oxford University Press, New York, 1995.
- [37] R. Mifflin. A modification and extension of Lemaréchal's algorithm for nonsmooth optimization. In D.C. Sorensen und R.J.-B. Wets, editors, *Nondifferential and variational techniques in optimization*, Mathematical Programming Study 17, pages 77–90. 1982.
- [38] H. Moulin. Axiomatic cost and surplus sharing. In Arrow; Sen und Suzumura, editors, *Handbook of social choice and welfare*, chapter 17. 1999. to appear.
- [39] M. Neumann. *Theoretische Volkswirtschaft II: Produktion, Nachfrage und Allokation*. Verlag Vahlen, 1995.
- [40] G. Owen. *Game theory*. Academic Press, San Diego, 3 edition, 1995.
- [41] V. Pareto. *Cours d'économie politique*, volume 2. Lausanne, 1897.
- [42] M.J.D. Powell. A new algorithm for unconstrained optimization. In O.L. Mangasarian, R.R. Mayer und S.M. Robinson, editors, *Nonlinear Programming*, pages 245–281. 1970.
- [43] S.M. Robinson. A characterization of stability in linear programming. *Operations Research*, 25:435–447, 1977.
- [44] R.T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [45] S. Rolewicz. *Metric linear spaces*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 2 edition, 1984.
- [46] A. Rubinov. Generalized convexity, global optimization and data classification. to appear, 2001.
- [47] H. Scheel. *Effizienzmaße der Data Envelopment Analysis*. PhD thesis, University of Dortmund, Dortmund, 1999.
- [48] R. Schneider. *Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

- [49] S. Scholtes. Introduction to piecewise differentiable equations. Habilitationsschrift, Institut für Statistik und Mathematische Wirtschaftstheorie, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, Germany, 1994.
- [50] S. Scholtes. A characterization of coalition invariant resource allocation mechanism. to appear, 2001.
- [51] H. Schramm und J. Zowe. A version of the bundle idea for minimizing a nonsmooth function: conceptual idea, convergence analysis, numerical results. *SIAM Journal of Optimization*, 2:121–152, 1992.
- [52] A. Schrijver. *Theory of linear and integer programming*. Wiley & Sons, Chichester, 1986.
- [53] L. Shapley. A value for n-person games. In H.W. Kuhn und A.W. Tucker, editors, *Contributions to the theory of games II*, Annals of Mathematical Studies No. 28, pages 307–317. Princeton University Press, Princeton, 1953.
- [54] P.P. Shenoy. On coalition formation: A game theoretical approach. *International Journal of Game Theory*, 8:133–164, 1979.
- [55] P.P. Shenoy. A dynamic solution concept for abstract games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 32(2):151–169, 1980.
- [56] R.W. Shephard. *Cost and production functions*. Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [57] L. Simar und P.W. Wilson. Sensitivity analysis of efficiency scores: How to bootstrap in nonparametric frontier models. *Management Science*, 44:49–61, 1998.
- [58] R.G. Thompson, C.T. Langemeier, L.N. Lee, E. Lee und R.M. Thrall. The role of multiplier bounds in efficiency analysis with applications to Kansas farming. *Journal of Econometrics*, 46:93–108, 1990.
- [59] R.M. Thrall. Duality, classification and slacks in DEA. *Annals of Operations Research*, 66:109–138, 1996.
- [60] R.M. Thrall und W.F. Lucas. N-person games in partition function form. *Naval Research Logistics Quarterly*, 10:281–298, 1963.

- [61] J. von Neumann und O. Morgenstern. *Theory of games and economic behaviour*. Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [62] R.J. Weber. *Games in coalition form*, chapter 36. In [4], 1994.
- [63] P.W. Wilson. Detecting influential observations in data envelopment analysis. *The Journal of Productivity Analysis*, 6:27–45, 1995.
- [64] H.P. Young. *Cost allocation*, chapter 34. In [4], 1994.
- [65] J. Zhu. Robustness of the efficient DMUs in data envelopment analysis. *Journal of Operations Research*, 90:451–460, 1996.

# Index

- Abstand
  - radial, 50
- Aggregation, 27
  - einfach, 27
- Allokation
  - ausgewogen, 30
  - effizient, 19
  - schwach effizient, 19
  - zulässig, 15
- Allokationsbaum, 26
- Allokationsmechanismus, 14
- Anonymität, 15
- Auszahlung, 33
- B-Ableitung, 60
- B-differenzierbar, 60
- Blockierung, 23
- Budget-Allokations-Funktion, 15
  - implizit, 47
  - in Koalitionen, 28
    - implizit, 56
- Budgetgleichung, 7
  - dual, 44
    - erweitert, 52
    - koalitional, 55
  - koalitional, 30
- Core, 34
- Core-Allokation, 34
- Datenmatrix, 5
- DMU, 1
  - fiktiv, 40
- Dominanz, 32
- Dominion, 35
- Dynamische Lösung, 36
  - elementar, 36
- Dynamische Lösungen, 36
- Effizienz, 18
  - schwach, 18
- Effizienzüberschuss, 23
- Effizienzmaß, 17
  - koalitional, 26
- Eigenvektor, 62
  - linker, 62
- Eigenwert, 44, 62
- Erreichbarkeit, 36
- Funktion
  - cs, stetige Selektion, 60
  - eigentlich konvex, 59
  - halbstrikt quasikonvex, 65
  - konvex, 59
  - nicht-differenzierbar, 60
  - pc, stückweise differenzierbar,  
60
  - regulär, 59
- I-O-Matrix, 5
  - transformiert, 118
- Input, 1
- Klassen

- bestimmend, 62
- final, 61
- nicht-final, 61
- Koalition, 25
  - potentiell, 82
- Koalitionsbaum, 26
- Koalitionsbudget, 29
- Koalitionsinvarianz, 114
- Koalitionsstruktur, 27
- Kollektionsstruktur, 27
  - erzeugt, 32
- Lösungsmatrix, 44, 51, 64
- Lipschitz-stetig, 59
  - lokal, 59
- Matrix
  - Blöcke, 61
    - isoliert, 61
  - Frobenius-Normal-Form, 61
  - irreduzierbar, 61
  - nicht-negativ, 61
  - quadratisch, 61
  - reduzierbar, 61
- Monotonie, 47
- Normalisierung, 15
- Output, 1
- Output-Matrix, 6
- Pareto-Optimalität, 16
- Partition, 24
  - erzeugt, 32
  - essentiell, 81
- Perron-Eigenwert, 92
- Perron-Vektor, 92
- Positivität, 15
- Preise
  - zulässig, 9
- Preismatrix, 9, 40
- Preissystem, 9
- Produktionsfunktion, 11
- Richtungsableitung, 59
  - verallgemeinerte, Clarke, 59
- Skalenerträge, 114
- Skaleninvarianz, 115
- Spektralradius, 44, 62
- Spektrum, 44, 61
- Spiel
  - abstrakt, 33
  - vollständig, 37
- Stabile Mengen, 35
- Stabilität, 35
  - extern, 35
  - intern, 35
- Stationarität
  - B, 61
  - C, Clarke, 60
- Subdifferential, 60
  - Clarke, 60
- Technologiemenge, 11, 41
  - Additivität, 12
  - effiziente Linie, 12
  - eingeschränkt, 50
  - empirisch, 41
  - koalitional, 54
  - Konvexität, 12
  - Skalenerträge, 12
  - Teilbarkeit, 12
  - transformiert, 118
  - variabel, 13, 41
- Überschusseffizienz, 50
  - koalitional, 54

Verbundeffekte, 114

Verfeinerung, 27

Wirtschaftlichkeit, 7