

KfK 5161
Februar 1993

**Bénard-Konvektion binärer
Flüssigkeitsmischungen
in porösen Medien
unter der Wirkung von
Nicht-Boussinesq-Effekten**

Ch. Karcher
Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik

KfK 5161

**Bénard-Konvektion binärer Flüssigkeitsmischungen
in porösen Medien unter der Wirkung von
Nicht-Boussinesq-Effekten**

Ch. Karcher

Von der Fakultät für Maschinenbau der
Universität Karlsruhe genehmigte Dissertation

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

Bénard-Konvektion binärer Flüssigkeitsmischungen in porösen Medien unter der Wirkung von Nicht-Boussinesq-Effekten

Zusammenfassung:

Es wird der Einfluß von Nicht-Boussinesq-Effekten auf die Konvektion binärer Flüssigkeitsmischungen in porösen Medien untersucht. Exemplarisch wird die Wirkung einer nichtlinearen Zustandsgleichung und die Wirkung einer dünnen Eisschicht behandelt. Eine besondere Eigenschaft der Mischung ist ihr negativer Sorét-Effekt. Er bewirkt, daß der von außen angelegte destabilisierende Temperaturgradient ein stabilisierendes Konzentrationsprofil über die Schichthöhe induziert. Für das betrachtete System ist typisch, daß bei Überschreiten der Stabilitätsgrenze des Ruhezustands oszillatorisches Verhalten auftritt.

Es ergibt sich, daß eine nichtlineare Zustandsgleichung die wirksamen Auftriebskräfte reduziert. Dadurch wird die Schicht stabilisiert und die kritischen Rayleigh-Zahlen und Frequenzen steigen. Die Untersuchungen mit Hilfe der Verzweigungstheorie zeigen, daß ein zweidimensionales Wanderwellenmuster die bevorzugte Mode bei Konvektionsbeginn ist. Für hinreichend überkritische Rayleigh-Zahlen kommt dieses Muster zum Stillstand und es findet ein sprunghafter Übergang in den Zustand stationärer Konvektion statt. Dreidimensionale Strömungsformen sind in diesem Amplitudenbereich instabil. Die symmetriebrechende Wirkung des Nicht-Boussinesq-Effekts führt dabei zu einer Verzweigungsentfaltung der stationären Hexagonlösungen.

Der Einfluß einer Eisschicht auf die Konvektionsinstabilität ist von der aktuellen Stärke des Sorét-Effekts abhängig. Für schwach negativen Sorét-Effekt wird der Ruhezustand durch die thermisch isolierende Wirkung des Eises destabilisiert. Für stärker negativen Sorét-Effekt kommt es dagegen zu einer Stabilisierung durch die Konzentrationsanreicherung in der Flüssigkeit mit wachsender Eisdicke. Phasendynamische Überlegungen ergeben, daß kleine Änderungen der Kontrollparameter mit großen Änderungen in der Eisdicke rückkoppeln, falls die Zeitskalen der oszillatorischen Konvektion und der molekularen Diffusion von gleicher Größenordnung sind.

Bénard convection of binary liquid-mixtures in porous media in presence of non-Boussinesq effects

Abstract:

The consequence of non-Boussinesq effects on the convection of binary liquid-mixtures in porous media is investigated. Two examples are considered: the effect of a non-linear equation of state and the effect of a thin ice-layer. A special property of the mixture is its negative Sorét effect. This means that an external destabilizing temperature gradient induces a stabilizing concentration profile across the layer height. For such a system beyond a threshold the state of rest is replaced typically by oscillatory behavior.

It is found, that a non-linear equation of state reduces bouyancy forces. Hence, the layer is stabilized and the critical Rayleigh numbers and frequencies increase. Bifurcation theory shows that a two-dimensional travelling wave pattern is the preferred mode at the onset of convection. For sufficiently supercritical Rayleigh numbers the motion of the wave stops and a sharp transition towards steady-state convection occurs. This domain of finite-amplitude convection is characterized by unstable three-dimensional patterns. The symmetry-breaking effect of non-Boussinesq behavior unfolds the bifurcation of the hexagonal steady-state solutions.

The convective instability is likewise influenced by an ice-layer, depending on the current magnitude of the Sorét effect. For weakly-negative Sorét effects the state of rest will be destabilized due to the insulating effect of the ice. Strongly-negative Sorét effects lead to a stabilization due to the accumulation of solute within the liquid during increase of ice-thickness. Phase dynamics show that a small change of control parameters feeds back a strong change of ice-thickness if the time scales of oscillatory convection and mass diffusion are of the same order of magnitude.

Inhaltsverzeichnis

1.	EINLEITUNG	1
1.1	Problemstellung	1
1.1.1	Binäre Flüssigkeitsmischungen	1
1.1.2	Nicht-Boussinesq-Effekte	3
1.1.3	Poröse Medien	5
1.1.4	Gliederung der Arbeit	5
1.2	Beschreibung der untersuchten Anordnungen	6
1.3	Literaturübersicht	11
2.	WIRKUNG EINER NICHTLINEAREN ZUSTANDSGLEICHUNG	17
2.1	Modellgleichungen	17
2.1.1	Grundgleichungen für die Konvektion von binären Gemischen in porösen Medien	17
2.1.2	Der stationäre Grundzustand	19
2.1.3	Dimensionslose Störungsgleichungen und Kennzahlen	20
2.2	Analytische Näherungslösungen mit Hilfe der Störungsrechnung	22
2.2.1	Lösungsgedanke, Störungsentwicklung	22
2.2.2	Das lineare Stabilitätsproblem	25
2.2.3	Diskussion der linearen Stabilitätsuntersuchung	29
2.2.4	Nichtlineare Konvektion	34
2.2.4.1	Untersuchte Strömungsmuster	34
2.2.4.2	Klassifikation des Verzweigungsverhaltens	36
2.2.4.3	Zweidimensionale, nichtlineare Konvektion	39
2.2.4.4	Verzweigungsdiagramm und Stabilität der Rollenlösungen	47
2.2.4.5	Nichtlineare, dreidimensionale Konvektion	50
2.2.4.6	Verzweigungsdiagramm und Stabilität der Hexagonlösungen	54
2.3	Zusammenfassung der Ergebnisse	56
3.	WIRKUNG EINER FREIEN BERANDUNG IN FORM EINER DÜNNEN EISSCHICHT	59
3.1	Modellgleichungen	59
3.1.1	Grundgleichungen für die feste und flüssige Phase	59
3.1.2	Vereinfachende Annahmen	60
3.1.3	Der stationäre Grundzustand und Störungsentwicklung	61

3.1.4	Die Lösung des Wärmeleit-Problems in der festen Phase	63
3.1.5	Störungsgleichungen für die flüssige Phase und Kennzahlen	64
3.2	Galerkin-Verfahren und Eigenwert-Gleichung	66
3.3	Das Stabilitätsproblem ohne Eisschicht	68
3.4	Das Stabilitätsproblem mit Eisschicht	71
3.4.1	Das stationäre Stabilitätsproblem mit Eisschicht	71
3.4.2	Die oszillatorische Instabilität mit Eisbildung	75
3.4.2.1	Die Wirkung einer dünnen Eisschicht	75
3.4.2.2	Die Wirkung der Schmelzpunktabsenkung	80
3.5	Zusammenfassung der Ergebnisse	93
4.	LITERATURVERZEICHNIS	95
5.	ANHANG	104
5.1	Verzeichnis der Formelzeichen	104
5.2	Rechnungen zur Störungsentwicklung	107
5.2.1	Rechnungen zum linearen Stabilitätsproblem	108
5.2.2	Rechnungen zur nichtlinearen Konvektion	110
5.3	Eigenwert-Gleichung in allgemeiner Form für $b \neq 1, \delta \neq 0, \psi \neq 0$	115
5.4	Konturplots des wandernden Hexagonmusters	115

1. EINLEITUNG

1.1 Problemstellung

Wird eine ebene Flüssigkeitsschicht durch Vorgabe der Randtemperaturen von unten beheizt und oben gekühlt, so setzt bei Überschreiten einer bestimmten Temperaturdifferenz über die Schichthöhe Konvektion ein. Die aufgrund von Dichteunterschieden im Schwerfeld erzeugten Auftriebskräfte überwiegen dann die konvektionshemmenden Mechanismen der Reibung und Wärmeleitung. Unter dem Zwang der Kontinuitätsgleichung entstehen regelmäßige, von den vorgegebenen Randbedingungen und den Fluideigenschaften abhängige Strömungsmuster. Dieses sogenannte Rayleigh-Bénard-Problem bildet häufig den Ausgangspunkt für grundlegende theoretische und experimentelle Untersuchungen von thermischen Konvektionsströmungen in Natur und Technik.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Frage der Stabilität dieser Konvektionsströmung auf binäre Flüssigkeitsmischungen in porösen Medien unter der Wirkung von nicht-Boussinesq'schen Effekten zu erweitern. Im folgenden wollen wir zunächst auf die auftretenden neuen Phänomene eingehen.

1.1.1 Binäre Flüssigkeitsmischungen

Das Verständnis der Konvektionsvorgänge in mehrkomponentigen Systemen ist wichtig, da bei vielen natürlichen und technisch bedeutsamen Auftriebsströmungen Flüssigkeitsmischungen oder Flüssigkeiten mit gelösten Substanzen beteiligt sind. Man denke beispielsweise an salzhaltiges Wasser, flüssiges Felsgestein im Erdinnern, Schmelzen mit Legierungsbestandteilen oder organische Gemische und wässrige Lösungen bei verfahrenstechnischen Prozessen.

Betrachtet man binäre Mischungen, so spielt neben der Wärmeleitung auch die Massendiffusion als ein zweiter diffusiver Transportvorgang eine wesentliche Rolle. Durch vertikale Konzentrationsdifferenzen ergeben sich zusätzliche Auftriebskräfte aufgrund der solutalen Volumenausdehnung der Flüssigkeit. Der Konzentrationsgradient kann von außen aufgeprägt sein oder durch den angelegten Temperaturgradienten induziert werden. Man spricht dann entweder von thermohaliner Konvektion oder von der in dieser Arbeit untersuchten Sorét-getriebenen Konvektion.

Bei dem schon seit langem bekannten Sorét-Effekt (Sorét (1879)) kommt es bedingt durch Temperaturunterschiede zu einer Entmischung der Flüssigkeit. Dieser Vorgang wird auch Thermodiffusion genannt. Bei negativem Sorét-Effekt oder negativer Thermodiffusion wird die gelöste leichte Komponente verstärkt zur kalten oberen Berandung transportiert. Die wirksamen Auftriebskräfte werden durch diese Konzentrationsverteilung reduziert. Es entsteht ein Wettbewerb zwischen dem den Ruhezustand destabilisierenden Temperaturgradienten und dem stabilisierenden Konzentrationsgradienten. In typischen Flüssigkeitsmischungen wie beispielsweise im System Wasser-Alkohol oder in Salzlösungen unterscheiden sich die Zeitskalen für molekulare und thermische Diffusion jedoch deutlich. Während sich Temperaturunterschiede zwischen einem Partikel und seiner nächsten Umgebung relativ rasch ausgleichen, bleiben Konzentrationsstörungen über sehr lange Zeiträume erhalten. Als Folge dieses Wechselspiels ist nun in gewissen Parameterbereichen eine oszillatorische Instabilität des stationären Ruhezustands der Wärmeleitung möglich (vgl. Kap. 1.3). In theoretischen und experimentellen Arbeiten zeigt sich, daß an der Stabilitätsgrenze der Ruhelösung zeitlich periodische Konvektionslösungen einer bestimmten Oszillationsfrequenz angefacht werden.

In Flüssigkeitsmischungen mit positivem Sorét-Effekt wirken der Temperaturgradient und der induzierte Konzentrationsgradient destabilisierend auf den Ruhezustand. Die leichte Komponente diffundiert zur warmen Unterseite. Ähnlich wie in einkomponentigen Schichten ergibt sich nunmehr eine stationäre Konvektionsinstabilität.

Die Erweiterung des Bénard-Problems auf binäre Flüssigkeitsmischungen bietet folglich die Möglichkeit, durch entsprechende Wahl des den Sorét-Effekt beschreibenden Kontrollparameters die Art der Instabilität zu steuern. Von besonderem theoretischen Interesse ist der Parameterbereich, für den die stationäre und oszillatorische Stabilitätsgrenze dicht beieinander liegen oder im Grenzfall bei gleichen kritischen Temperaturdifferenzen zusammentreffen. Im Sinne einer Verzweigungstheorie handelt es sich um einen Kodimension-Zwei-Verzweigungspunkt der Ruhelösung, aus dem stationäre und zeitlich periodische Konvektionslösungen simultan entspringen und miteinander wechselwirken (vgl. Guckenheimer, Holmes (1983)).

1.1.2 Nicht-Boussinesq-Effekte

Üblicherweise geht man bei der theoretischen Modellierung der Bénard-Konvektion von der Boussinesq-Approximation (Boussinesq (1903)) aus. Die Stoffdaten werden als konstant angesehen mit Ausnahme der Fluiddichte in dem die Konvektion antreibenden Auftriebsterm. Dort wird eine lineare Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur und beim Studium von zweikomponentigen Mischungen zusätzlich von der Konzentration angenommen.

Für viele Flüssigkeiten sind diese Annahmen jedoch nicht realistisch. Gültigkeitsschranken der Boussinesq-Approximation werden beispielsweise von Gray, Giorgini (1976) angegeben. Ein von den Annahmen abweichendes Verhalten wird mit dem Oberbegriff nicht-Boussinesqsche Fluideigenschaften bezeichnet. In einfachen oder binären Flüssigkeiten sind in diesem Zusammenhang folgende Eigenschaften zu nennen:

- (i) Temperatur- oder konzentrationsabhängige Transportkoeffizienten für Impuls, Wärme und Masse. Ein in der Literatur oft behandeltes Beispiel ist die Temperaturabhängigkeit der Viskosität von einkomponentigen Flüssigkeiten. Die ersten theoretischen Untersuchungen dieses Problems gehen auf Zierep (1960) und Palm (1960) zurück.
- (ii) Eine nichtlineare Zustandsgleichung für die Fluiddichte oder eine nichtkonstante spezifische Wärme. Für freie Konvektionsvorgänge ist erstere Eigenschaft besonders in Betracht zu ziehen, da sich direkt Änderungen im Auftriebsterm ergeben. Typische Vertreter eines solchen Verhaltens sind Flüssigkeiten mit Dichteanomalien wie beispielsweise Wasser in der Nähe von 4°C, siehe etwa Dubois et al. (1978), Wu, Libchaber (1991) und Normand, Azouni (1992).

Eine systematische Untersuchung der Bénard-Konvektion in einkomponentigen Flüssigkeiten mit diesen nicht-Boussinesqschen Eigenschaften wird von Busse (1967) durchgeführt. In den Arbeiten von Davis, Segel (1968) und Krishnamurti (1968) wird gezeigt, daß auch folgende Randeinflüsse einer Nicht-Boussinesq-Eigenschaft gleichkommen:

- (iii) Eine deformierbare, schubspannungsfreie Berandung, allgemein als "freier" Rand bezeichnet.
- (iv) Eine zeitliche Änderung des mittleren Temperaturniveaus über die Schicht.

Die Berücksichtigung von nicht-Boussinesqschen Effekten im Bénard-Problem erlaubt es, eine allgemeinere Klasse von thermischen Konvektionsströmungen zu untersuchen. Nach Busse (1978) ist diese Klasse dadurch ausgezeichnet, daß die das Problem beschreibenden Grundgleichungen unsymmetrisch bezüglich der halben Schichthöhe sind. In diesem Zusammenhang spricht man deshalb auch von symmetriebrechenden Effekten. Für einkomponentige Flüssigkeiten ist aus den genannten theoretischen Arbeiten bekannt, daß nunmehr beim Überschreiten der kritischen Temperaturdifferenz sprunghaft stationäre Konvektion in Form von dreidimensionalen Hexagonzellen einsetzt. Beim Fehlen dieser Eigenschaften ist dagegen ein stationäres zweidimensionales Rollenmuster die bevorzugte Mode bei Konvektionsbeginn. Experimente von Walden, Ahlers (1981) und Pampaloni et al. (1992) sowie von Dietsche (1984), Davis et al. (1984) und Dietsche, Müller (1985) bestätigen die theoretischen Befunde.

In der vorliegenden Arbeit wird die Wirkung von Nicht-Boussinesq-Effekten auf die Sorét-getriebene Konvektion in binären Flüssigkeitsmischungen untersucht. Es werden exemplarisch der Einfluß einer nichtlinearen Zustandsgleichung und der Einfluß eines freien oberen Randes in Form einer dünnen Eisschicht behandelt.

Im letzteren Fall kommt es durch die Absenkung der oberen Randtemperatur unter die Schmelztemperatur der zweikomponentigen Mischung zur Ausbildung einer Phasentrennfläche fest \leftrightarrow flüssig innerhalb der Schicht. Herrscht in der flüssigen Phase ein konvektiver Zustand, so wechselwirken die Strömungsstruktur und die Verfestigungsfront. Bedingt durch unterschiedliche Löslichkeiten in der flüssigen und erstarrten Phase sowie eine im allgemeinen starke Abhängigkeit der Schmelztemperatur von der Konzentration der gelösten Komponente ergibt sich zudem eine Kopplung von Sorét-Effekt und Verfestigungsvorgang. Der Masse- und Wärmetransport in der Flüssigkeit wird maßgeblich vom Phasenübergang geprägt. Solche Erscheinungen werden beim Gefrieren von Meerwasser, beim Erstarren von Magma in Kavitäten sowie beim Auftauen und Frieren des Erdbodens beobachtet. Bei Gießprozessen, beim Züchten von Kristallen aus mehrkomponentigen Schmelzen und bei der Oberflächenbehandlung von Werkstoffen durch Laserschmelzen kann diese Wechselwirkung die Eigenschaften des Produkts entscheidend beeinflussen.

Motiviert wird diese Arbeit durch ein Experiment von Zimmermann (1990) zur Bénard-Konvektion in Wasser-Alkohol-Mischungen unter der Wirkung von Ge-

frierflächen. Da die Experimente bei niedrigen mittleren Temperaturen durchgeführt werden, ist neben einem Phasenübergang eine nichtlineare Abhängigkeit der Dichte der Testflüssigkeit von der Temperatur zu berücksichtigen. Zimmermann findet, daß unter dem Einfluß dieser Nicht-Boussinesq-Effekte nur stationäre, dreidimensionale Konvektionszustände mit hexagonaler Struktur in der flüssigen Phase zu beobachten sind. Im eisfreien Zustand bei einem höheren mittleren Temperaturniveau treten in seinem Experiment dagegen zweidimensionale, zeitlich periodische Strömungszustände in Form von wandernden Wellen auf. Die physikalischen Ursachen für diese Beobachtungen sind bisher weitgehend ungeklärt. Die in dieser Arbeit behandelte Fragestellung soll zum Verständnis der Beobachtungen beitragen.

1.1.3 Poröse Medien

Bei unseren weiteren Ausführungen betrachten wir die Konvektion in porösen Medien. Die Flüssigkeit strömt in den Hohlräumen eines mit Poren durchsetzten Festkörpers. Solche Strömungen werden auch als Sickerströmungen bezeichnet. Sie haben eine große Bedeutung in der Geophysik und bei industriellen Filtrationsprozessen, siehe beispielsweise Caltagirone (1982), Bear (1972), Scheidegger (1974) und Combarous, Bories (1975). Erste Untersuchungen der Strömung durch eine poröse Schichtung gehen auf Darcy (1856) zurück. Das Ergebnis seines berühmten Filtrationsexperiments ist, daß die makroskopische, über das Porenvolumen gemittelte Durchflußgeschwindigkeit proportional zur angelegten Druckdifferenz ist. Dieser empirische Befund ist als Darcysches Gesetz bekannt. Als Proportionalitätskonstante tritt neben der Viskosität der Flüssigkeit die sogenannte Permeabilität des Mediums auf, welche die physikalische Beschaffenheit der Poren kennzeichnet.

Im Vergleich zur Navier-Stokes-Gleichung bei der üblichen Bénard-Konvektion reduziert sich die maßgebende Differentialgleichung für den Impulstransport im porösen Körper um zwei Ordnungen. Von einem mathematischen Standpunkt aus gesehen bedeutet dies eine außerordentliche Erleichterung bei der Lösung des Problems. Ein Vergleich unserer Ergebnisse mit den Beobachtungen von Zimmermann (1990) ist dennoch auf qualitativer Basis möglich.

1.1.4 Gliederung der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

Nach einer Beschreibung der untersuchten Anordnungen und einer Literaturübersicht wird der Einfluß einer nichtlinearen Zustandsgleichung für die Dichte behandelt. Mit einer Störungsrechnung wird zunächst die Wirkung auf das lineare Stabilitätsverhalten des Systems untersucht. Anschließend werden zwei- und dreidimensionale Konvektionslösungen analytisch berechnet. Das Hauptaugenmerk wird auf den Kodimension-Zwei-Verzweigungspunkt gerichtet, mit dem Ziel, Wechselwirkungen von stationären und zeitlich periodischen Strömungen zu diskutieren. Die Ergebnisse werden anhand von Verzweigungsdiagrammen dargestellt. Nach unserer Kenntnis der Literatur ist dieses Problem bisher noch nicht behandelt.

In einem zweiten Teil wird der Einfluß des Phasenübergangs fest \leftrightarrow flüssig auf die Konvektionsinstabilität einer binären Flüssigkeitsschicht untersucht. Als mathematisches Hilfsmittel dient uns ein Galerkin-Verfahren. Aufgrund der außerordentlich komplizierten Struktur der Übergangsbedingungen an der freien Phasentrennfläche bei zeitabhängigen Schmelz- und Gefriervorgängen beschränken wir uns bei diesem Beispiel auf die lineare Theorie. Die Auswertung komplexer Amplitudengleichungen ergibt hierbei neue Erkenntnisse über die Dynamik des Systems. Insbesondere bei negativer Thermodiffusion in der flüssigen Phase liegen bisher keine systematischen Untersuchungen zu diesem Stabilitätsproblem vor. Eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse folgt im letzten Abschnitt.

Die zum Teil sehr umfangreichen analytischen Rechnungen zur Störungs- und Verzweigungstheorie sind aus Gründen der Übersichtlichkeit in einem Anhang niedergelegt.

1.2 Beschreibung der untersuchten Anordnungen

Bei den untersuchten Problemen gehen wir von der in Abbildung 1.1 skizzierten Anordnung aus.

Zwischen zwei unendlich ausgedehnten, horizontalen Platten im Abstand h befindet sich ein poröser Stoff der Permeabilität K . In die Poren der Schichtung ist eine inkompressible, binäre Flüssigkeitsmischung eingebettet. Die Mischung besteht aus einer im Überschuß vorhandenen schweren Komponente und einer gelösten leichten Komponente der Konzentration C , gemessen in Gewichtsprozenten. Ausgehend vom isothermen ($T=T_0$) Grundzustand mit homogener Konzentrationsverteilung ($C=C_0$) wird die Temperatur T_1 der oberen Berandung bei $z=h$ quasi-

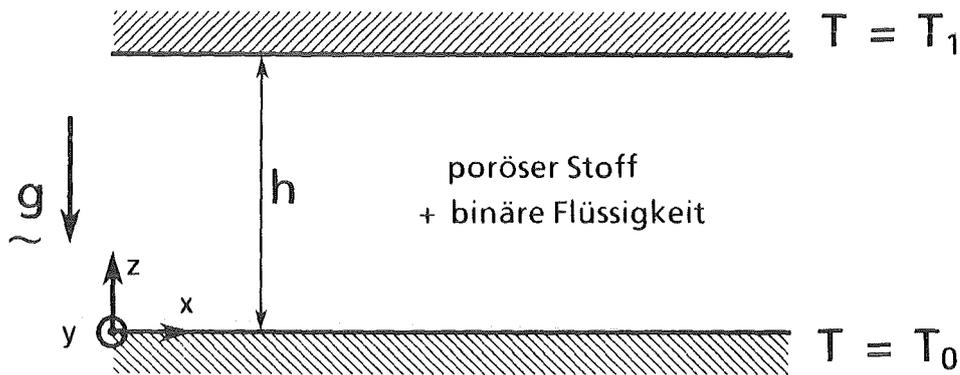


Abb. 1.1: Prinzipskizze der untersuchten Anordnung.

stationär abgesenkt. Über die Schichthöhe liegt jetzt die Temperaturdifferenz $\Delta T = T_0 - T_1$ an. In der Flüssigkeit stellt sich eine im Schwerfeld g thermisch instabile Dichteschichtung ein. Gleichzeitig wird durch die nun wirksame Thermodiffusion ein Konzentrationsgradient aufgebaut.

Zur Modellierung der erzeugten Auftriebskräfte nehmen wir im ersten Hauptteil der Arbeit eine nichtlineare Zustandsgleichung für die Fluidichte ρ_f in der Form

$$\rho_f = \rho_o \left[1 - \alpha(T - T_o) - \beta(T - T_o)^2 - \alpha' (C - C_o) \right] \quad (1.2.1)$$

an. Hierin ist ρ_o die Bezugsdichte im Ausgangszustand. α und α' sind die linearen thermischen und solutalen Expansionskoeffizienten. Die Größe β , mit

$$\beta = -\frac{1}{2\rho_o} \left. \frac{\partial^2 \rho_f}{\partial T^2} \right|_{T_o}, \quad (1.2.2)$$

bezeichnet den nichtlinearen thermischen Expansionskoeffizienten. Er charakterisiert die nicht-Boussinesq'sche Eigenschaft der Mischung. Für Wasser-Alkohol-Gemische gilt typischerweise $\beta > 0$. Auftriebskräfte werden durch diesen Nicht-Boussinesq-Effekt vermindert. Es ist folglich eine Stabilisierung des Ruhezustands des Systems zu erwarten.

Aufgrund von Temperatur- und Konzentrationsgradienten wird in der Flüssigkeit ein diffusiver Massenstrom \underline{j} erzeugt. Bezogen auf die gelöste Komponente lautet

dieser in einer um den Ausgangszustand für kleine Anfangskonzentrationen C_0 linearisierten Form

$$\vec{j} = -D_0 \left[\nabla C - S_0 C_0 (1 - C_0) \nabla T \right]. \quad (1.2.3)$$

Mit D_0 ist die molekulare Diffusionskonstante und mit S_0 der Sorét-Koeffizient bezeichnet, der den thermodiffusiven Anteil beschreibt. ∇ bezeichnet den Gradienten-Operator

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Der im allgemeinen temperatur- und konzentrationsabhängige Transportkoeffizient S_0 , siehe etwa die Messungen von Kolodner et al. (1988), wird in dieser Arbeit als konstante, jedoch beliebig einstellbare Stoffgröße angesehen. Es sei erwähnt, daß in Gl. (1.2.3) der Effekt der Barodiffusion vernachlässigt ist. Bei diesem Effekt tragen neben Konzentrations- und Temperaturgradienten auch Druckgradienten zu einem Massenstrom bei. Nach Linz (1989a) ist die Barodiffusion jedoch nur in flüssigen Helium-Mischungen zu berücksichtigen.

Man erkennt, daß der auf Stabilität zu prüfende Ruhezustand ($\vec{j}=0$) durch konstante, vertikale Temperatur- und Konzentrationsgradienten $\vec{\nabla}$ ausgezeichnet ist. Für negative Thermodiffusion mit $S_0 < 0$ steigt die Konzentration der leichten Komponente linear in der Koordinate z an und bewirkt eine Stabilisierung der Schicht. Zimmermann (1990) berechnet die Konzentrationsverteilung im Ruhezustand für eine allgemeine, nichtlineare Flußgleichung. Er findet nur eine geringfügige Abweichung vom linearen Konzentrationsprofil.

Im zweiten Teil der Arbeit wird ein Phasenübergang flüssig \leftrightarrow fest zugelassen, jedoch eine lineare Zustandsgleichung für ρ_f mit $\beta=0$ vorausgesetzt. Die Temperatur der oberen Berandung liegt unterhalb der Schmelztemperatur der Mischung. Im konvektionsfreien Fall bildet sich eine ebene, feste Phase "S" der Dicke h_s im oberen Teil der Schicht aus. Die Situation ist in Abbildung 1.2a skizziert. Der flüssigen Phase "L" der Höhe h_L ist jetzt die Temperaturdifferenz $\Delta T = T_0 - \bar{T}_M$ aufgebracht. \bar{T}_M ist die Temperatur der ungestörten Phasengrenzfläche, die der Schmelztemperatur des ruhenden Gemisches entspricht. Es gilt die Beziehung

$$h = h_s + h_L. \quad (1.2.4)$$

Es wird angenommen, daß während des Verfestigungsvorgangs nur die reine Flüssigkeit ausfriert. Die gelöste Komponente reichert sich hierdurch in der flüs-

sigen Phase an. Bei negativem Sorét-Effekt wird sich die leichte Substanz zudem verstärkt unterhalb der kalten Grenzfläche fest \leftrightarrow flüssig ansammeln, so daß sich Thermodiffusion und Erstarrung gegenseitig beeinflussen. Unter der Wirkung der Konvektion in der flüssigen Phase verformt sich die Phasentrennfläche, siehe Abbildung 1.2b. Sie ist nun beschrieben durch die orts- und zeitabhängige Koordinate η , mit

$$\eta = \eta(x, y, t), \quad (1.2.5)$$

und den Normaleneinheitsvektor \underline{n} an der Fläche, mit

$$\underline{n} = \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x}, -\frac{\partial \eta}{\partial y}, 1 \right). \quad (1.2.6)$$

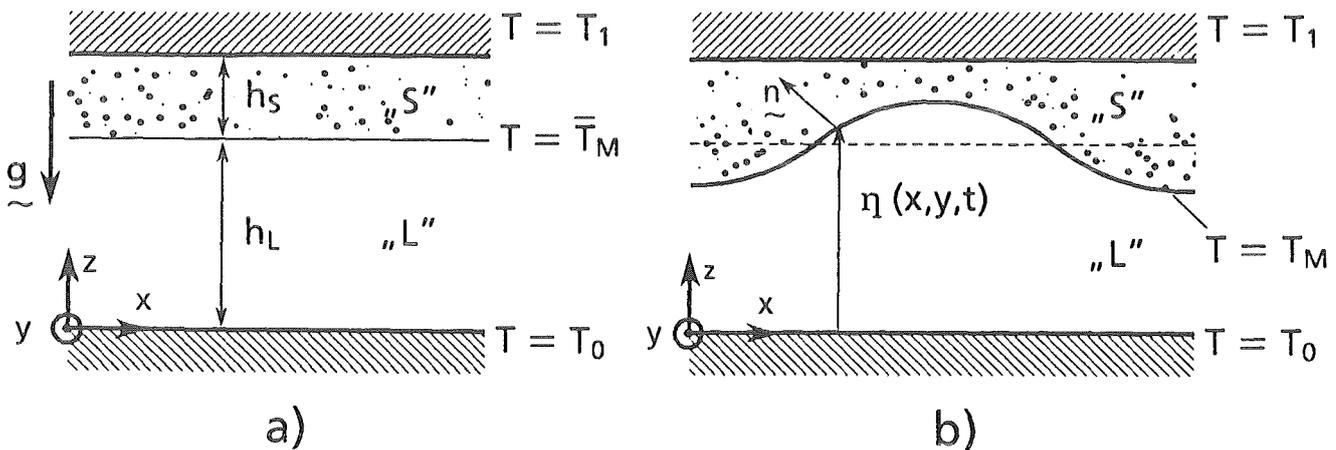


Abb. 1.2: Untersuchte Anordnung mit Phasenübergang:
a) Ruhezustand, b) Konvektiver Zustand.

Setzt in der Flüssigkeit ein oszillatorischer Konvektionszustand ein, so wirkt die Grenzfläche auf die Strömung wie eine sich zeitlich ändernde, deformierbare Berandung endlicher Wärmeleitfähigkeit mit einer periodischen Quell-Senken-Belegung für Wärme und Masse.

Die Schmelztemperatur T_M der zweikomponentigen Mischung wird durch die Konzentration an der Phasengrenze gesteuert. Wir benutzen einen linearen Zusammenhang der Form

$$T_M = T_{MO} + mC_{(\eta)}, \quad (1.2.7)$$

wobei T_{MO} die Schmelztemperatur der reinen Flüssigkeit ist. Die Schmelzkurve des Systems wird als Gerade der Steigung m , mit $m < 0$, angenähert. Abbildung 1.3 zeigt das idealisierte Phasendiagramm.

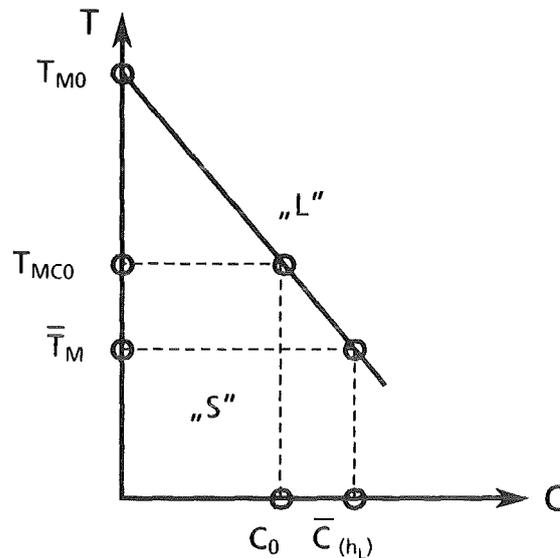


Abb. 1.3: Vereinfachtes Phasendiagramm nach Gl. (1.2.7).

Mit T_{MCO} ist die Schmelztemperatur des Systems im thermodiffusionsfreien Ausgangszustand bezeichnet. Eine dünne Eisschicht bewirkt im Zusammenspiel mit thermodiffusiven Vorgängen durch die oben erläuterten Effekte eine Schmelzpunktabenkung. Es gilt gemäß Abbildung 1.3

$$\bar{C}_{(h_L)} > C_0, \quad \bar{T}_M < T_{MCO} \quad (1.2.8)$$

In diesem Zusammenhang treten folgende Fragen auf:

- Ab welchen kritischen Temperaturdifferenzen $\Delta T = \Delta T_c$ setzt in der Flüssigkeit stationäre oder oszillatorische Konvektion ein?
- Wie hängen die kritischen Wellenzahlen und die kritische Oszillationsfrequenz von den Kontrollparametern des Systems ab?

- Wie wachsen die Amplituden der Konvektionslösungen bei einer Änderung von ΔT an? Wie wechselwirken stationäre und oszillatorische Strömungsformen und welche Konvektionsmuster sind bevorzugt?

Während zur Beantwortung der unter den ersten beiden Punkten angesprochenen Fragen eine lineare Stabilitätsuntersuchung des Ruhezustands ausreichend ist, bedarf es zur Klärung der dem dritten Punkt zugeordneten Fragen einer Untersuchung der Nichtlinearitäten des Systems.

Bei der Analyse des Problems mit einem Phasenübergang wollen wir neben der Bestimmung der kritischen Größen zusätzlich folgende Punkte mit Hilfe der linearen Theorie untersuchen:

- Welche Struktur besitzt die Phasentrennfläche bei Konvektionsbeginn?
- Wie ist die Wechselwirkung zwischen dem Verfestigungsvorgang und der Strömung?

1.3 Literaturübersicht

Wir wollen an dieser Stelle eine Zusammenstellung der wichtigsten experimentellen und theoretischen Arbeiten zur Konvektion in binären Flüssigkeitsmischungen vornehmen. Übersichtsartikel zu dieser Thematik findet man beispielsweise bei Schechter et al. (1974), Linden (1982) und Platten, Legros (1984). Es werden die auftretenden physikalischen Effekte diskutiert und die diese Effekte beschreibenden Grundgleichungen hergeleitet.

Die Stabilität des Ruhezustands einer zweikomponentigen Flüssigkeitsschicht unter der Wirkung des Sorét-Effekts wurde zuerst von Hurle, Jakeman (1969, 1971), Velarde, Schechter (1971), Platten (1971) und Schechter et al. (1972) theoretisch untersucht. Diese Autoren gehen dabei von der vereinfachenden Annahme aus, daß durch die Thermodiffusion ein konstanter Konzentrationsgradient über die Schichthöhe induziert wird. Chock, Li (1975), Knobloch, Moore (1988), Cross, Kim (1988) und Zimmermann (1990) benutzen Grundgleichungen, für die sich eine nichtlineare Konzentrationsverteilung im Ruhezustand ergibt. Die Resultate dieser numerisch durchgeführten Stabilitätsanalysen sind jedoch qualitativ gleich. Sie zeigen, daß der Ruhezustand bei negativem Sorét-Effekt durch die Konzentrationsverteilung stabilisiert wird. Für hinreichend negativen Sorét-Effekt findet bei Erhöhung der Temperaturdifferenz über die Schichthöhe ein

Übergang zu zeitlich periodischer Konvektion statt. Lekkerkerker (1978) führt aus, daß dies physikalisch durch die deutlich unterschiedlichen Zeitskalen von thermischer und molekularer Diffusion bedingt ist. Für schwächer negativen und positiven Sorét-Effekt tritt dagegen eine stationäre Konvektionsinstabilität des Ruhezustands auf. Beide Instabilitäten treffen bei der gleichen kritischen Temperaturdifferenz in einem sogenannten Kodimension-Zwei-Verzweigungspunkt zusammen. Werden die vertikalen Berandungen der Flüssigkeitsschicht als impermeabel für den Konzentrationsfluß angenommen, ergeben sich dabei verschiedene kritische Wellenzahlen für die stationäre und oszillatorische Instabilität. Zeitabhängige Konvektion setzt in der Umgebung des Kodimension-Zwei-Verzweigungspunktes mit einer endlichen Oszillationsfrequenz ein. Diese Resultate erhalten auch Linz, Lücke (1987a) und Linz (1989a) analytisch mit einem 8-Moden-Galerkin-Ansatz. Brand, Steinberg (1983a, b) und Linz (1989a) finden ein qualitativ gleiches Stabilitätsverhalten für eine binäre Flüssigkeit, die in einem porösen Körper eingebettet ist.

Die experimentellen Untersuchungen zu diesem Stabilitätsproblem gehen auf Caldwell (1970, 1973, 1974) zurück. In salzhaltigem Wasser beobachtet er eine Stabilisierung des Ruhezustands durch den negativen Sorét-Effekt. Mit lokalen Temperaturmessungen gelingt ihm der Nachweis, daß bei Überschreiten der Stabilitätsgrenze zeitlich periodische Konvektionszustände auftreten. Ein analoges Verhalten finden Hurle, Jakeman (1971) und Platten, Chavepeyer (1972) in Wasser-Alkohol-Mischungen. Sullivan, Ahlers (1988) weisen in ihrem Experiment mit einer flüssigen Heliummischung nach, daß am Kodimension-Zwei-Verzweigungspunkt zeitlich periodische Konvektion mit einer endlichen Oszillationsfrequenz einsetzt. Die wesentlichen theoretischen Voraussagen der Stabilitätsuntersuchungen werden damit durch die Experimente bestätigt.

In einigen theoretischen Arbeiten wird der Einfluß von Nicht-Boussinesq-Effekten auf die Konvektionsinstabilität binärer Mischungen untersucht. Linz, Lücke (1987b) und Linz (1989a) berücksichtigen die Abhängigkeit des Transportkoeffizienten für den thermodiffusiven Massenstrom von der Konzentration und Temperatur. Es zeigt sich, daß dadurch die Wirkung des negativen Sorét-Effekts verringert wird. Der Parameterbereich, in dem eine oszillatorische Konvektionsinstabilität auftreten kann, wird durch diesen Effekt folglich eingeschränkt. Antar (1987) untersucht eine Anordnung, bei der ein Dichtemaximum der Flüssigkeit innerhalb der Schicht vorliegt. Er findet, daß durch einen stabilisierenden Konzentrationsgradienten das Eindringen der Konvektion in den oberen Teil der

Schicht mit stabiler Dichteverteilung deutlich gehemmt wird. Hadji, Schell (1990) und Zimmermann (1990) untersuchen die Wirkung einer Eisschicht. Die ersten Autoren betrachten binäre Flüssigkeiten mit positivem Sorét-Effekt. Sie erhalten, daß eine dünne Eisschicht zusätzlich destabilisierend auf den Ruhezustand wirkt. Dies wird physikalisch damit begründet, daß die Eisschicht eine deformierbare, schlecht wärmeleitende Berandung darstellt. Zimmermann (1990) berücksichtigt dagegen auch den Einfluß der negativen Thermodiffusion. Seine numerischen Rechnungen zeigen, daß es für hinreichend negative Sorét-Zahlen wiederum zu einer oszillatorischen Konvektionsinstabilität kommt. Für mäßig negative Sorét-Zahlen und dünne Eisschichten ergibt sich dabei eine Destabilisierung des Ruhezustands. Für stärker negative Sorét-Zahlen ist mit wachsender Eisdicke dagegen eine Stabilisierung der Schicht festzustellen. Es wird argumentiert, daß es bei teilweisem Ausfrieren zu einer Konzentrationsanreicherung in der Flüssigkeit kommt, da nur das reine Lösungsmittel in die feste Phase übergeht. Dadurch wird die stabilisierende Wirkung des negativen Sorét-Effekts durch die Eisschicht verstärkt. In seinen Experimenten beobachtet Zimmermann demgegenüber eine Destabilisierung der Schicht mit zunehmender Eisdicke für eine stark negative Sorét-Zahl. Er begründet die unterschiedlichen theoretischen und experimentellen Resultate damit, daß im Experiment die Höhe der Flüssigkeitsschicht mit der Eisdicke variiert, während sich bei den theoretischen Untersuchungen die Flüssigkeit unabhängig von der Eisdicke über das Einheitsintervall erstreckt.

Wir wollen nun theoretische Arbeiten ansprechen, die sich mit den nichtlinearen Effekten der Konvektion in binären Mischungen befassen. In diesen Arbeiten wird zweidimensionale Konvektion vorausgesetzt. Knobloch (1986) weist analytisch nach, daß an der oszillatorischen Stabilitätsgrenze Konvektion in Form von stehenden oder wandernden Wellen angefacht wird. Von diesen beiden zeitlich periodischen Lösungen ist diejenige eine stabile Strömungsform, deren Amplitude bei einer Erhöhung der Temperaturdifferenz über die Schichthöhe schneller anwächst. Knobloch et al. (1986), Deane et al. (1987), Deane et al. (1988), Knobloch, Moore (1990) und Stein (1991) führen ergänzende numerische Untersuchungen zum Verzweigungs- und Stabilitätsverhalten der Lösungen im Rahmen der thermohalinen Konvektion durch. Diese Ergebnisse sind nach Knobloch (1980) qualitativ auch für die Sorét-getriebene Konvektion gültig, wenn permeable Randbedingungen für den Massenstrom gestellt werden. Cross (1986) und Ahlers, Lücke (1987) verwenden dazu ein Galerkin-Verfahren mit acht Ansatzfunktionen. Aus den genannten Arbeiten ergeben sich folgende Schlüsse:

- (i) Bei Überschreiten der kritischen Temperaturdifferenz über die Schichthöhe setzt zeitlich periodische Konvektion in Form von Wanderwellen ein.
- (ii) Wird die treibende Temperaturdifferenz weiter erhöht, nimmt die Amplitude der Wanderwellenlösung zu und die Wandergeschwindigkeit der Welle nimmt ab.
- (iii) Bei einem bestimmten Amplitudenwert kommt die Welle zum Stillstand. Dort erfolgt ein Übergang in den Zustand stationärer Konvektion. Für gewisse Parameterwerte verliert die Wanderwellenlösung ihre Stabilität gegenüber einer amplitudenmodulierten Wanderwellenlösung bevor sie zum Stillstand kommt.

Linz, Lücke (1987a) und Linz (1989a) untersuchen den Einfluß von experimentell relevanten, impermeablen Randbedingungen ebenfalls mit einem 8-Moden-Galerkin-Modell. Sie finden, daß mit zunehmend negativem Sorét-Effekt keine stabilen Wanderwellen mehr auftreten. Dies entspricht einer Änderung im Verzweigungsverhalten der Lösung. Für schwach negativen Sorét-Effekt liegt eine Vorwärtsverzweigung der Wanderwellenlösung vor, die für stärker negativen Sorét-Effekt in eine Rückwärtsverzweigung übergeht. An der oszillatorischen Stabilitätsgrenze erfolgt dann direkt ein Übergang in den Zustand der stationären Konvektion. Für die Konvektion in porösen Medien ergibt das Modell von Linz (1989a), daß bei impermeablen Rändern keine stabilen Wanderwellenzustände auftreten. Bensimon et al. (1989) berücksichtigen zudem die Haftbedingungen der Flüssigkeit an den Berandungen. Mit einer asymptotischen Entwicklung für schwach negativen Sorét-Effekt finden sie stabile Wanderwellen bei großen Amplituden.

Dreidimensionale Strömungsmuster werden in Flüssigkeiten mit positiver Thermodiffusion untersucht. Müller, Lücke (1988), Knobloch (1989) und Clune, Knobloch (1991) zeigen, daß für hinreichend positive Sorét-Zahlen stationäre Konvektion in Form von quadratischen Zellstrukturen einsetzt. Wird die Temperaturdifferenz erhöht, findet ein Übergang in ein zweidimensionales Rollenmuster statt. Die Wirkung einer dünnen Eisschicht bestimmen Hadji, Schell (1990) mit einer asymptotischen Entwicklung nach großen Wellenlängen. Sie erhalten, daß nun stationäre Konvektion in Form eines Hexagonmusters mit Abstrom in der Mitte einsetzt, das bei Erhöhung der Temperaturdifferenz in ein Quadratmuster übergeht. Ein qualitativ gleiches Verhalten findet Riahi (1988). Sie untersucht die Konvektion in einer zweikomponentigen Schmelze unter der Wirkung einer ebenen, mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitenden Erstarrungsfront. Es wird außer-

dem gezeigt, daß für physikalisch relevante Parameterbereiche die konvektive Instabilität von der morphologischen Instabilität der Erstarrungsfront (Mullins, Sekerka (1964)) aufgrund der deutlich unterschiedlichen Längenskalen entkoppelt, siehe dazu auch Davis (1990).

Die experimentellen Untersuchungen zur nichtlinearen Konvektion in binären Flüssigkeiten mit negativer Thermodiffusion sind vielfältig. Wir geben deshalb einen Überblick über die wichtigsten Arbeiten, die sich mit der in der vorliegenden Arbeit behandelten Fragestellung beschäftigt. Für eine detaillierte Zusammenstellung der in den Experimenten beobachteten Phänomene verweisen wir auf die Literaturübersicht von Zimmermann, Müller (1992) und Zimmermann et al. (1992).

In den Experimenten von Walden et al. (1985), Kolodner et al. (1986), Steinberg, Moses (1987), Lhost, Platten (1989) und Zimmermann (1990) mit Wasser-Alkohol-Mischungen werden folgende generellen Beobachtungen gemacht:

- (i) Bei Überschreiten der kritischen Temperaturdifferenz über die Schichthöhe erfolgt ein Übergang vom Ruhezustand in einen linearen Wanderwellenzustand mit schwacher Amplitude.
- (ii) Dieser lineare Wanderwellenzustand ist instabil. Seine Amplitude nimmt kontinuierlich zu, während die Wandergeschwindigkeit abnimmt. Am Ende dieses transienten Vorgangs beobachtet man einen stabilen Wanderwellenzustand mit endlicher Amplitude und konstanter Wandergeschwindigkeit.
- (iii) Wird die treibende Temperaturdifferenz weiter erhöht, nimmt die Amplitude der Welle zu und die Wandergeschwindigkeit ab, bis das Konvektionsmuster schließlich zum Stillstand kommt. Man beobachtet dann einen Übergang in einen Zustand zweidimensionaler stationärer Konvektion.
- (iv) Die verschiedenen Übergänge sind von Hysterese-Erscheinungen geprägt.

Das Verhalten der Wanderwellenlösung läßt sich verzweigungstheoretisch damit erklären, daß die Lösung für kleine Amplituden unterkritisch verzweigt und damit instabil ist, für größere Amplituden jedoch ihre Verzweigungsrichtung umkehrt und ihre Stabilität gewinnt, siehe Zimmermann (1990). Dieses Verzweigungsverhalten kann mit den Modellen von Linz, Lücke (1987a) und Linz (1989a) nicht erfaßt werden.

Zimmermann (1990) und Zimmermann, Müller (1992) beobachten in Experimenten mit einer 15%igen Wasser-Alkohol-Mischung, daß bei einer Absenkung des mittleren Temperaturniveaus der Schicht der Existenzbereich der stabilen Wanderwellenlösung schrumpft und schließlich verschwindet. Als physikalische Ursache dieser Beobachtung werden nicht-Boussinesqsche Flüssigkeitseigenschaften vermutet, da bei niedriger Experimentiertemperatur die Dichte der Mischung eine nichtlineare Abhängigkeit von der Temperatur zeigt. Bildet sich im oberen Teil der Meßkammer eine dünne Eisschicht aus, finden Zimmermann (1990) und Zimmermann et al. (1992), daß beim Überschreiten der Stabilitätsgrenze des Ruhezustandes sofort ein Übergang in einen stationären Konvektionszustand mit hexagonaler Symmetrie erfolgt. Dies wird mit der nicht-Boussinesqschen Wirkung einer deformierbaren, schlecht wärmeleitenden Berandung begründet.

2. WIRKUNG EINER NICHTLINEAREN ZUSTANDSGLEICHUNG

In diesem Kapitel wird der Einfluß einer nichtlinearen Zustandsgleichung auf die Sorét-getriebene Konvektion in porösen Medien untersucht. Zunächst werden die das Problem beschreibenden nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen und die zugehörigen Randbedingungen abgeleitet. Die Lösung dieser Gleichung erfolgt dann näherungsweise mit Hilfe einer Störungsrechnung.

2.1 Modellgleichungen

2.1.1 Grundgleichungen für die Konvektion von binären Gemischen in porösen Medien

Die Grundgleichungen für die Konvektion von zweikomponentigen Flüssigkeitsmischungen durch eine poröse Schichtung sind die Erhaltungssätze für Gesamtmasse, Masse einer Komponente und Energie. Hinzu kommt die Impulsbilanz in Form des Darcyschen Gesetzes. Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{v} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} C + \left(\underline{v} \cdot \nabla \right) C &= -\nabla \cdot \underline{j}, \\ \left(\rho c_p \right)^* \frac{\partial}{\partial t} T + \left(\rho c_p \right)_f \left(\underline{v} \cdot \nabla \right) T &= -\nabla \cdot \underline{q}, \\ \underline{v} &= -\frac{K}{\mu} \left(\nabla p + \rho_f g e_z \right); \quad e_z = (0, 0, 1). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Die Feldvariablen sind die Sicker- oder Filtrationsgeschwindigkeit $\underline{v} = (u, v, w)$, die Konzentration C der gelösten Komponente, die Temperatur T der Schicht sowie der Systemdruck p . Mit $(\rho c_p)_f$ und μ sind die Wärmekapazität und die dynamische Viskosität der Flüssigkeit bezeichnet. $(\rho c_p)^*$ bezeichnet die gemittelte Wärmekapazität der Paarung Fluid/poröser Körper. Im folgenden gehen wir von der Annahme $(\rho c_p)^* \approx (\rho c_p)_f$ aus, um die Anzahl der auftretenden Parameter klein zu halten. Ist die Anordnung beispielsweise durch eine Wasser-Alkohol-Mischung in einer Schüttung von Glaskugeln realisiert, so ist diese Annahme in guter Näherung erfüllt.

Im Gesetz von Darcy ist auf die Mitnahme je eines betragsmäßig sehr kleinen in-stationären und konvektiven Terms verzichtet. Diese Terme werden in dimensi-onsloser Darstellung mit dem Reziprokwert der sogenannten Darcy-Prandtl-Zahl multipliziert, die nach Joseph (1976) sehr große Werte annimmt. Sie ist typischer-weise um mehrere Ordnungen größer als die molekulare Prandtl-Zahl der Flüs-sigkeit, so daß substantielle Geschwindigkeitsänderungen nicht ins Gewicht fal-len.

Analog zu den konstitutiven Gleichungen für den Massenstrom \underline{j} in der Konzen-trationstransportgleichung gemäß Gl. (1.2.3) und für die Fluidichte ρ_f im Auf-triebsterm der Darcyschen Beziehung laut Gl. (1.2.1), ist eine Schließungsbedin-gung für die Wärmestromdichte \underline{q} in der Wärmetransportgleichung zu formulie-ren. Wir benutzen das Fouriersche Gesetz

$$\underline{q} = -\lambda^* \cdot \nabla T, \quad (2.1.2)$$

wobei λ^* die gemittelte Wärmeleitfähigkeit der Schicht ist. Es bleibt in Gl. (2.1.2) unberücksichtigt, daß auch ein Konzentrationsgradient einen Wärmestrom her-vorrufen kann. Dieser sogenannte Dufour-Effekt spielt nur bei Gasmischungen ei-ne Rolle und kann in Flüssigkeiten vernachlässigt werden, siehe Linz (1989b), Hort et al. (1992) und Linz (1992).

Zur vollständigen mathematischen Beschreibung des Problems ist das System von partiellen Differentialgleichungen (2.1.1) durch Randbedingungen zu ergänzen. In horizontaler Richtung werden periodische Randbedingungen in der x-y-Ebene gestellt, da eine lateral unendlich ausgedehnte Anordnung betrachtet wird, siehe Kapitel 2.2.1.

Die Schicht ist in vertikaler Richtung von zwei ebenen, perfekt wärmeleitenden und für die Flüssigkeit undurchdringlichen Platten bei $z=0$ und $z=h$ begrenzt. An diesen Stellen ist die Temperatur fest vorgegeben und die Vertikalkomponen-te der Geschwindigkeit verschwindet. Man erhält die Randbedingungen

$$\begin{aligned} z = 0 : & \quad T = T_0, \quad w = 0; \\ z = h : & \quad T = T_1, \quad w = 0. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Des weiteren sind für die Konzentration oder den Massenstrom Randbedingungen zu formulieren. Wir fordern

$$\begin{aligned} z = 0 : & \quad C = C_{(0)} ; \\ z = h : & \quad C = C_{(h)} . \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Durch diese Bedingungen wird die Konzentration am unteren und oberen Rand als gegeben betrachtet. Experimentell ist diese Randbedingung schwer zu realisieren, da die Platten permeabel gegenüber dem Massenstrom auszulegen sind. Für theoretische Untersuchungen bietet die idealisierte Bedingungen (2.1.4) jedoch den Vorteil, daß man auf analytischem Wege zu Lösungen der linearisierten Grundgleichungen kommt.

Die realistische, impermeable Randbedingung fordert, daß der vertikale Massenstrom j_z an den Berandungen verschwindet. Man erhält in diesem Fall

$$\begin{aligned} z = 0 : & \quad j_z = 0 ; \\ z = h : & \quad j_z = 0 . \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Mit diesen Randbedingungen beschäftigen wir uns ausführlich im zweiten Hauptteil dieser Arbeit.

2.1.2 Der stationäre Grundzustand

Die betrachtete Anordnung besitzt einen auf Stabilität zu prüfenden stationären Grundzustand der reinen Wärmeleitung. Die Flüssigkeit ruht ($\vec{v} = 0$), der Druck ist hydrostatisch und es findet kein Stofftransport statt ($\vec{j} = 0$). Für den Temperaturverlauf über die Schichthöhe erhält man

$$\bar{T}_{(z)} = T_o - (T_o - T_1) \frac{z}{h} . \quad (2.1.6)$$

Das induzierte Konzentrationsprofil im Ruhezustand ergibt sich aus der Flußgleichung (1.2.3) unter Verwendung der integralen Massenbilanz für die leichte Komponente. Diese Bilanz lautet

$$C_o h = \int_0^h \bar{C}_{(z)} dz . \quad (2.1.7)$$

Wir erhalten schließlich

$$\bar{C}_{(z)} = C_o - S_o C_o \left(1 - C_o\right) \left(T_o - T_1\right) \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2}\right) = C_{(o)} - \left(C_{(o)} - C_{(h)}\right) \frac{z}{h} . \quad (2.1.8)$$

Damit werden die Konzentrationsvorgaben $C_{(0)}$ und $C_{(h)}$ an den Rändern gemäß Gl. (2.1.4) durch den Ruhezustand festgelegt.

2.1.3 Dimensionslose Störungsgleichungen und Kennzahlen

Es ist zweckmäßig, die Grundgleichungen (2.1.1) in eine dimensionslose Form zu überführen. Wir verwenden folgende Skalierungen:

$$(x, y, z) \sim h; \quad t \sim \frac{(\rho c_p)^* h^2}{\lambda^*}; \quad v \sim \frac{\lambda^*}{h(\rho c_p)_f}; \quad p \sim \frac{\lambda^* \mu}{K(\rho c_p)_f}; \quad (2.1.9)$$

$$(T - T_o) \sim (T_o - T_1); \quad (C - C_o) \sim -S_o C_o (1 - C_o)(T_o - T_1).$$

Im folgenden werden Störungen um den Ruhezustand betrachtet und ferner wird das kombinierte Konzentrations- und Temperaturfeld S , mit

$$S = T + C, \quad (2.1.10)$$

eingeführt. Des weiteren wird der Druckgradient durch Anwendung der Rotation-Operation auf die Darcy-Gleichung eliminiert. Wir erhalten schließlich das nachstehende nichtlineare System partieller Differentialgleichungen in den dimensionslosen Störgrößen und einen Satz von homogenen Randbedingungen:

$$\nabla_H^2 w = R \nabla_H^2 \left[\left(1 + \psi - 2\gamma \cdot z \right) T + \gamma T^2 - \psi S \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T + \left(\underset{\omega}{v} \cdot \nabla \right) T = w + \nabla^2 T, \quad (2.1.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S + \left(\underset{\omega}{v} \cdot \nabla \right) S = L \nabla^2 S + \nabla^2 T;$$

$$z = [0,1] : \quad w = T = S = 0.$$

Die Horizontalkomponenten des Geschwindigkeitsvektors bestimmen sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung aus den Beziehungen

$$\nabla_H^2 u = - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} w, \quad \nabla_H^2 v = - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} w. \quad (2.1.12)$$

Mit ∇_H^2 ist der Laplace-Operator in der x-y-Ebene bezeichnet.

Das Differentialgleichungssystem (2.1.11) enthält die vier Kennzahlen

$$\begin{aligned}
 \text{Rayleigh-Zahl} \quad R &= \frac{\alpha g (T_o - T_1) K h}{\nu \kappa^*}, \\
 \text{Separationszahl} \quad \psi &= S_o C_o \left(1 - C_o\right) \frac{\alpha'}{\alpha}, \\
 \text{Nicht-Boussinesq-Zahl} \quad \gamma &= \frac{\beta}{\alpha} (T_o - T_1), \\
 \text{Lewis-Zahl} \quad L &= \frac{D_o}{\kappa^*}.
 \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Hierbei ist κ^* die Temperaturleitfähigkeit der Schicht und ν die kinematische Viskosität der Mischung. Die verschiedenen Kennzahlen haben folgende physikalische Bedeutung:

Die Rayleigh-Zahl R ist eine dimensionslose Temperaturdifferenz über die Schichthöhe. Sie gewichtet den die Konvektion anfachenden Auftriebsterm in Gl. (2.1.11) und stellt den treibenden Parameter des Systems dar. Mit der Separationszahl ψ erscheint ein zweiter Kontrollparameter, der den Beitrag des Sorét-Effekts zum Auftrieb kennzeichnet. Die Kennzahl γ ist ein Maß für die nicht-Boussinesqsche Eigenschaft der Mischung. Sie erzeugt im Auftriebsterm der Grundgleichungen einen unsymmetrischen Anteil mit einem nichtkonstanten Koeffizienten und einen nichtlinearen Anteil. Die Lewis-Zahl L ist das Verhältnis der Diffusionskoeffizienten von Konzentration und Temperatur. Sie kann als eine dimensionslose Zeitskala für molekulare Transportvorgänge aufgefaßt werden. Es gilt stets $L > 0$ und speziell für Wasser-Alkohol-Mischungen gilt $L = \mathcal{O}(10^{-2})$. Die experimentelle Erfahrung zeigt, daß die relativ langlebigen Konzentrationsstörungen besonders gefährlich für die Stabilität des Ruhezustands sind.

Die Gleichungen (2.1.11) und (2.1.12) erfassen mehrere Grenzfälle. Wird $\psi = 0$ gesetzt, so beschreiben die Gleichungen die Rayleigh-Bénard-Konvektion in ein-komponentigen, nicht-Boussinesqschen Fluiden. Die S-Feldgleichung entkoppelt dann von den restlichen Feldgleichungen. Als weitere Grenzfälle ergeben sich für $\gamma = 0$ die freie Konvektion in binären Flüssigkeiten mit $\psi \neq 0$ oder in reinen Flüssigkeiten mit $\psi = 0$ mit jeweils Boussinesqschen Eigenschaften.

2.2 Analytische Näherungslösungen mit Hilfe der Störungsrechnung

Eine analytisch geschlossene Lösung der Grundgleichungen (2.1.11) und (2.1.12) für einen beliebigen Satz von Parametern ist aufgrund vorhandener Unsymmetrien und Nichtlinearitäten nicht möglich. Die Störungsrechnung stellt jedoch ein klassisches mathematisches Hilfsmittel dar, um solche Probleme näherungsweise zu lösen.

2.2.1 Lösungsgedanke, Störungsentwicklung

Unsere Vorgehensweise orientiert sich im wesentlichen an der Methodik von Busse (1967) und Busse, Riahi (1980). Den Ausgangspunkt der Untersuchungen bildet die in den Störgrößen linearisierte Form (Index 1) der Gleichung (2.1.11). Sie beschreibt das lineare Stabilitätsverhalten der ruhenden Flüssigkeitsschicht. In Operatorschreibweise lautet diese Gleichung

$$\mathcal{L} \begin{Bmatrix} x \\ \omega^1 \end{Bmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nabla^2 & -R \left[1 + \psi - 2yz \right] \nabla_H^2 & R \psi \nabla_H^2 \\ 1 & \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & \nabla^2 & L \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ T_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = 0; \quad (2.2.1)$$

$$z = [0,1] : \quad x_j = 0.$$

Lösungen von Gl. (2.2.1) erhält man durch den Produktansatz

$$x_j(x,y,z,t) = X_j(z) \cdot \Phi(x,y) \cdot \tau(t). \quad (2.2.2)$$

Die horizontale Strukturfunktion $\Phi(x, y)$ genügt aufgrund dieses Ansatzes der Periodizitätsbedingung

$$\nabla_H^2 \Phi(x,y) = -k^2 \cdot \Phi(x,y). \quad (2.2.3)$$

Durch die formal eingeführte, zunächst unbekannte Separationskonstante $-k^2$ ist physikalisch gesehen die Wellenzahl eines Konvektionsmusters der Struktur $\Phi(x, y)$ gegeben. Das Zeitverhalten der Störgrößen wird als exponentiell angenommen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tau(t) = \sigma \cdot \tau(t). \quad (2.2.4)$$

Der komplexe Eigenwert σ , mit

$$\sigma = \sigma_r + i\omega q, \quad i = \text{imaginäre Einheit}, \quad (2.2.5)$$

entscheidet über die Stabilität des Ruhezustands. Ist der Realteil des Eigenwerts σ_r negativ, so werden Störungen gedämpft und der Ruhezustand ist stabil. Gilt dagegen $\sigma_r > 0$, so ist der Ruhezustand instabil.

Für $\sigma_r = 0$ liegt Neutralstabilität vor. Im Sinne einer Verzweigungstheorie sind hierdurch die Abzweigungspunkte von Konvektionslösungen mit infinitesimaler Amplitude aus der Ruhelösung definiert, wobei die Rayleigh-Zahl R der Verzweigungsparameter ist. Ein Verzweigungspunkt von stationären Lösungen bei $R = R_0^{(st)}$ ergibt sich für $\omega = 0$. Ein Verzweigungspunkt von oszillatorischen Lösungen bei $R = R_0^{(os)}$ liegt für $\omega = \omega_0 \neq 0$ vor. Physikalisch gesehen ist ω_0 die Oszillationsfrequenz dieser zeitlich periodischen Lösungen. Sie wird auch als Hopf-Frequenz und der entsprechende Verzweigungspunkt als Hopf-Punkt bezeichnet. Der Faktor q in Gl. (2.2.5) ist aus rechentechnischen Gründen im Sinne einer kompakten Ergebnisdarstellung eingeführt. Es gilt $q = \pi^2 + k^2$ (vgl. Gl. (2.2.13)).

Durch den Separationsansatz (2.2.2) geht Gl. (2.2.1) über in ein Rand-Eigenwert-Problem in der Variablen z . Die Forderung nach nichttrivialen Lösungen dieses Problems führt auf Zusammenhänge der Form

$$R_0^{(st)} = R_0^{(st)}(k^2, \gamma, L, \psi) \quad (2.2.6)$$

und

$$R_0^{(os)} = R_0^{(os)}(k^2, \gamma, L, \psi); \quad \omega_0 = \omega_0(k^2, \gamma, L, \psi).$$

Die kritischen Werte erhält man, indem diejenigen Wellenzahlen bestimmt werden, die die Rayleigh-Zahlen in Gl. (2.2.6) minimieren. Diese Forderungen lauten

$$\frac{\partial R_0^{(st)}}{\partial (k^2)} \stackrel{!}{=} 0; \quad \frac{\partial R_0^{(os)}}{\partial (k^2)} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.2.7)$$

Im folgenden betrachten wir die Nicht-Boussinesq-Zahl γ als einen gegebenen kleinen Parameter. Mit dieser Annahme ist es möglich, die kritischen Rayleigh-Zahlen und Wellenzahlen sowie die kritische Hopf-Frequenz und die Lösungen $\tilde{X}_1(z)$ des linearisierten Problems in analytischer Form als Potenzreihen in γ anzugeben.

Im nichtlinearen Konvektionsbereich wird das Anwachsen der Amplituden der kritischen Moden und die Änderung der Oszillationsfrequenz mit steigender Amplitude untersucht. Wird diese zunächst unbekannte Strömungsamplitude ε ebenfalls als ein kleiner Parameter angesehen, so erhalten wir Lösungen des vollständigen, nichtlinearen Problems (2.1.11) mit der folgenden Störungsentwicklung in den Störparametern ε und γ :

$$(w, T, S) = \sum_{n=1, m=0} \varepsilon^n \gamma^m (w_{nm}, T_{nm}, S_{mn}), \quad (2.2.8a)$$

und

$$R = \sum_{n=1, m=0} \varepsilon^{n-1} \gamma^m R_{n-1, m}, \quad (2.2.8b)$$

sowie

$$\omega = \sum_{n=1, m=0} \varepsilon^{n-1} \gamma^m \omega_{n-1, m}. \quad (2.2.8c)$$

Für kleine Werte ε und γ , mit

$$\varepsilon \ll 1, \gamma \ll 1,$$

werden nach dem Einsetzen dieser Entwicklung in die Grundgleichungen (2.1.11) Terme von jeweils gleicher Größenordnung in ε und γ miteinander verglichen. Wir beschränken uns damit auf Konvektionszustände mit kleiner, aber endlicher Amplitude in schwach nicht-Boussinesqschen Flüssigkeitsmischungen. Das ursprünglich nichtlineare, homogene Differentialgleichungssystem (2.1.11) mit nicht konstanten Koeffizienten zerfällt in eine Folge von linearen, inhomogenen Systemen mit konstanten Koeffizienten, welche sukzessive gelöst werden, beginnend mit dem Rand-Eigenwert-Problem der Ordnung $(\varepsilon^1, \gamma^0)$. Die Inhomogenitäten in den Problemen von höherer Ordnung in ε oder γ enthalten neben bereits bekannten Lösungen die gesuchten Entwicklungskoeffizienten $R_{n-1, m}$ und $\omega_{n-1, m}$ unseres Störungsansatzes (2.2.8). Diese Koeffizienten bestimmen wir aus den Lösbarkeitsbedingungen für inhomogene Differentialgleichungssysteme. Sind genügend viele Entwicklungskoeffizienten berechnet, erhalten wir aus Gl. (2.2.8b) einen Zusammenhang der Form

$$\varepsilon = \varepsilon(R, \gamma). \quad (2.2.9)$$

Bei einem gegebenen Wert von γ ist hiermit die formal eingeführte Strömungsamplitude ε als Funktion der Rayleigh-Zahl R definiert. Der Graph dieser Beziehung in der R - ε -Ebene wird als Verzweigungsdiagramm bezeichnet. Aus Gl. (2.2.8c) wird mit der Forderung

$$\omega^2 = \omega^2(\varepsilon, \gamma) \stackrel{!}{\geq} 0 \quad (2.2.10)$$

auf den Existenzbereich der oszillatorischen Konvektionszustände geschlossen.

Die Störungsentwicklung (2.2.8) in γ und ε wird soweit vorangetrieben, bis eindeutige Aussagen bezüglich des linearen Stabilitätsverhaltens der Ruhelösung und des Verzweigungsverhaltens der Konvektionslösungen möglich sind. Es ist hierzu notwendig, im linearen Stabilitätsproblem, definiert durch $n = 1$ in unserer Entwicklung, Terme bis zur Ordnung $(\varepsilon^1, \gamma^2)$ und im nichtlinearen Bereich mit $n > 1$ Terme bis zur Ordnung $(\varepsilon^5, \gamma^0)$ zu berücksichtigen.

Aussagen zur Stabilität der stationären und zeitlich periodischen Konvektionslösungen können für den Fall zweidimensionaler Konvektion aus der vorliegenden Verzweigungstopologie gewonnen werden, siehe beispielsweise Golubitsky et al. (1984, 1985) und Knobloch (1986). Die Verallgemeinerung dieser Stabilitätstheorie für dreidimensionale Lösungen ist bisher nicht gelungen. Stabilitätsaussagen für diese Lösungen sind nach Roberts et al. (1986) deshalb nur bedingt möglich.

2.2.2 Das lineare Stabilitätsproblem

Wir beginnen mit der Auswertung des linearen Stabilitätsproblems. Das Rand-Eigenwert-Problem der Ordnung $(\varepsilon^1, \gamma^0)$ lautet mit der Bezeichnung $D = d/dz$

$$L_{\sim 0} \left\{ \begin{matrix} X_{10} \\ \sim \\ \sim \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} D^2 - k^2 & R_{00} k^2 (1 + \psi) & -R_{00} k^2 \psi \\ 1 & D^2 - k^2 - i\omega_{00} q & 0 \\ 0 & D^2 - k^2 & L(D^2 - k^2) - i\omega_{00} q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{10} \\ T_{10} \\ S_{10} \end{pmatrix} = 0; \quad (2.2.11)$$

$$z = [0, 1]: \quad \begin{matrix} X_{10} \\ \sim \\ \sim \end{matrix} = 0.$$

Die geforderten Randbedingungen werden durch den speziellen Ansatz

$$\begin{matrix} X_{10} \\ \sim \\ \sim \end{matrix} (z) \sim \sin \pi z \quad (2.2.12)$$

befriedigt. Mit diesem Ansatz geht das Rand-Eigenwert-Problem (2.2.11) über in ein homogenes, algebraisches Gleichungssystem. Es gilt die Beziehung

$$\left(D^2 - k^2 \right) \begin{matrix} X_{10} \\ \sim \\ \sim \end{matrix} = - \left(\pi^2 + k^2 \right) \begin{matrix} X_{10} \\ \sim \\ \sim \end{matrix} = - q \cdot \begin{matrix} X_{10} \\ \sim \\ \sim \end{matrix}. \quad (2.2.13)$$

Nichttriviale Lösungen $\begin{matrix} X_{10} \\ \sim \\ \sim \end{matrix} \neq 0$ erfordern, daß die Determinante dieses Gleichungssystems verschwindet. Die Auswertung dieser komplexen Gleichung liefert folgende Verzweigungspunkte für stationäre und oszillatorische Lösungen:

$$R_{00}^{(st)} = \frac{q^2}{k^2} \frac{1}{1 + \psi(1 + L^{-1})}, \quad \text{mit } \omega_{00}^2 = 0, \quad (2.2.14)$$

sowie

$$R_{00}^{(os)} = \frac{q^2}{k^2} \frac{1 + L}{1 + \psi}, \quad \text{mit } \omega_{00}^2 = -L^2 - \psi \frac{1 + L}{1 + \psi}. \quad (2.2.15)$$

Die hier als Grenzfall $\gamma = 0$ angegebenen Resultate stehen in Einklang mit Ergebnissen von Brand, Steinberg (1983a, b) zur Konvektionsinstabilität binärer Mischungen in porösen Medien.

Im folgenden ist zu klären, inwieweit die Nicht-Boussinesq-Zahl γ diese Ergebnisse beeinflusst. Wir untersuchen zunächst die Gleichungen der Ordnung $(\varepsilon^1, \gamma^1)$. Es kommt das inhomogene Randwertproblem

$$\underset{\mathfrak{L}_0}{L} \left\{ \underset{\mathfrak{X}}{X}_{11} \right\} = \underset{\mathfrak{RS}}{RS}_{11} = \begin{pmatrix} -R_{01} k^2 \left[(1 + \psi) T_{10} - \psi S_{10} \right] + 2R_{00} k^2 z T_{10} \\ i\omega_{01} q T_{10} \\ i\omega_{01} q S_{10} \end{pmatrix}; \quad (2.2.16)$$

$$z = [0, 1] : \quad \underset{\mathfrak{X}}{X}_{11} = 0.$$

Das Differentialgleichungssystem (2.2.16) ist für die vorgegebenen homogenen Randbedingungen nur lösbar, falls der Vektor auf der rechten Seite keine Säkularterme enthält. Diese Lösbarkeitsbedingung lautet in mathematischer Form

$$\langle \underset{\mathfrak{RS}}{RS}_{11}, \underset{\mathfrak{X}}{X}_{10}^* \rangle = : \int_0^1 \underset{\mathfrak{RS}}{RS}_{11} \cdot \overline{\underset{\mathfrak{X}}{X}_{10}^*} dz = 0. \quad (2.2.17)$$

Hierin ist $\underset{\mathfrak{X}}{X}_{10}^*$ die Lösung des zu (2.2.11) adjungierten Problems, gegeben durch

$$\underset{\mathfrak{L}_0}{L}^T \left\{ \underset{\mathfrak{X}}{X}_{10}^* \right\} = 0; \quad z = [0, 1] : \underset{\mathfrak{X}}{X}_{10}^* = 0, \quad (2.2.18)$$

und $\overline{\underset{\mathfrak{X}}{X}_{10}^*}$ ist der zu $\underset{\mathfrak{X}}{X}_{10}^*$ konjugiert-komplexe Vektor. Mit $\overline{\underset{\mathfrak{L}_0}{L}}^T$ ist der zu $\underset{\mathfrak{L}_0}{L}$ konjugiert-komplexe, transponierte Operator bezeichnet. Diese Rechenvorschriften der linearen Vektoranalysis sind beispielsweise bei Faddejewa, Faddejewa (1970) enthalten.

Nach Ausführung der erforderlichen Integration über die Schichthöhe erhält man für die gesuchten Entwicklungskoeffizienten R_{01} und ω_{01} Beziehungen

$$\frac{R_{01}^{(st)}}{R_{00}^{(st)}} = \frac{1}{1 + \psi \left(1 + L^{-1}\right)}, \quad (2.2.19)$$

sowie

$$\frac{R_{01}^{(os)}}{R_{00}^{(os)}} = \frac{1}{1 + \psi}; \quad 2 \omega_{00} \omega_{01} = \left(L^2 + \omega_{00}^2\right) \frac{1}{1 + \psi}. \quad (2.2.20)$$

Für die weiteren Schritte benötigen wir eine Partikulärlösung X_{11} des Randwertproblems (2.2.16). Am einfachsten gelangt man zum Ziel, wenn für den nichtsymmetrischen Term in der Inhomogenität gemäß

$$z \cdot T_{10} \sim z \cdot \sin \pi z = \frac{1}{2} \sin \pi z - \frac{16}{9\pi^2} \sin 2\pi z - \frac{32}{225\pi^2} \sin 4\pi z + \text{HOT} \quad (2.2.21)$$

eine Fourier-Reihendarstellung gewählt wird. Mit HOT sind Terme höherer Ordnung bezeichnet, welche für die weiteren Überlegungen ohne Bedeutung sind. Die gewünschte Partikulärlösung findet sich nun problemlos über Ansätze vom "Typ der rechten Seite" (Bronstein, Smendjajew (1987)).

In der Ordnung $(\varepsilon^1, \gamma^2)$ erhält man schließlich das inhomogene Randwertproblem

$$L_{\mathbb{R}^0} \left\{ X_{12} \right\} = RS_{12} = \begin{pmatrix} -R_{02} k^2 \left\{ (1 + \psi) T_{10} - \psi S_{10} \right\} - R_{01} k^2 \left\{ (1 + \psi) T_{11} - \psi S_{11} \right\} + \\ + 2k^2 \left\{ R_{00} z T_{11} + R_{01} z T_{10} \right\} \\ i\omega_{02} q T_{10} + i\omega_{01} q T_{11} \\ i\omega_{02} q S_{10} + i\omega_{01} q S_{11} \end{pmatrix}; \quad (2.2.22)$$

$$z = [0, 1]: \quad X_{12} = 0.$$

Die Auswertung der Lösbarkeitsbedingung für dieses Problem gemäß

$$\langle RS_{12}, X_{10}^* \rangle = 0 \quad (2.2.23)$$

liefert für die Entwicklungskoeffizienten R_{02} und ω_{02} die Beziehungen

$$\frac{R_{02}^{(st)}}{R_{00}^{(st)}} = \frac{1}{\left\{1 + \psi(1 + L^{-1})\right\}^2} \left|1 - f(q)\right|, \quad (2.2.24)$$

sowie

$$\frac{R_{02}^{(os)}}{R_{00}^{(os)}} = \frac{1}{(1 + \psi)^2} \left|1 - f(q)\right|; \quad 2\omega_{00}\omega_{02} = \frac{L^2 + \omega_{00}^2}{(1 + \psi)^2} \left|1 - f(q)\right| - \omega_{01}^2, \quad (2.2.25)$$

$$\text{mit} \quad f(q) = \frac{(32q)^2}{9^2 \cdot 3\pi^6 (2q + 3\pi^2)} + \frac{(64q)^2}{225^2 \cdot 15\pi^6 (2q + 15\pi^2)}.$$

Es sei erwähnt, daß in Gl. (2.2.25) Terme der Ordnung $\mathcal{O}(L^3)$ vernachlässigt sind, um die Ergebnisse überschaubar zu halten. Für Wasser-Alkohol-Mischungen ist diese Vereinfachung durch die Kleinheit der Lewis-Zahl L gerechtfertigt. Die analytisch exakten Beziehungen können dem Anhang unter Kapitel 5.2.1 entnommen werden.

Es liegen nun Ausdrücke für die Verzweigungspunkte von stationären und oszillatorischen Konvektionslösungen sowie für die Hopf-Frequenz in hinreichender, quadratischer Genauigkeit in der Nicht-Boussinesq-Zahl γ vor. Die Minimierung der Ausdrücke für die Verzweigungspunkte bezüglich der Wellenzahl k^2 gemäß Gleichung (2.2.7) führt zu den kritischen Werten. Im Sinne unserer Entwicklung im Störparameter γ erhalten wir für die kritischen stationären und oszillatorischen Wellenzahlen die Beziehungen

$$k_c^{(st)^2} = \pi^2 \left|1 + \gamma^2 \frac{1}{\left\{1 + \psi(1 + L^{-1})\right\}^2} \cdot f_o\right|, \quad (2.2.26)$$

$$k_c^{(os)^2} = \pi^2 \left|1 + \gamma^2 \frac{1}{(1 + \psi)^2} \cdot f_o\right|.$$

Die kritischen Rayleigh-Zahlen und die kritische Hopf-Frequenz lauten

$$R_c^{(st)} = \frac{4\pi^2}{1 + \psi(1 + L^{-1})} \left|1 + \gamma \frac{1}{1 + \psi(1 + L^{-1})} + \gamma^2 \frac{1}{\left\{1 + \psi(1 + L^{-1})\right\}^2} \left|1 - f_1\right|\right|, \quad (2.2.27)$$

$$R_c^{(os)} = 4\pi^2 \frac{1+L}{1+\psi} \left[1 + \gamma \frac{1}{1+\psi} + \gamma^2 \frac{1}{(1+\psi)^2} \left\{ 1 - f_1 \right\} \right], \quad (2.2.27)$$

$$\omega_c^2 = -L^2 - \psi \frac{1+L}{1+\psi} \left[1 + \gamma \frac{1}{1+\psi} + \gamma^2 \frac{1}{(1+\psi)^2} \left\{ 1 - f_1 \right\} \right].$$

Es werden folgende Abkürzungen benutzt:

$$f_0 = \frac{32^2 \cdot 40}{9^2 \cdot 7^2 \cdot 3\pi^4} + \frac{64^2 \cdot 136}{225^2 \cdot 19^2 \cdot 15\pi^4}, \quad f_1 = \frac{32^2 \cdot 4}{9^2 \cdot 7 \cdot 3\pi^4} + \frac{64^2 \cdot 4}{225^2 \cdot 19 \cdot 15\pi^4}. \quad (2.2.28)$$

2.2.3 Diskussion der linearen Stabilitätsuntersuchung

Abbildung 2.1 zeigt das Stabilitätsdiagramm des untersuchten Problems für den Boussinesq'schen Fall mit $\gamma=0$. Im Sinne einer übersichtlichen graphischen Darstellung unserer Ergebnisse wählen wir einen qualitativen Maßstab. Das Diagramm ist dann für einen beliebigen festen Wert der Lewis-Zahl L gültig. In Abb. 2.1 sind die kritischen stationären und oszillatorischen Rayleigh-Zahlen sowie die kritische Hopf-Frequenz gemäß den Gleichungen (2.2.27) mit $\gamma=0$ als Funktion der Separationszahl ψ dargestellt. Oberhalb der Kurven für die kritischen Rayleigh-Zahlen ist der Ruhezustand des Systems instabil.

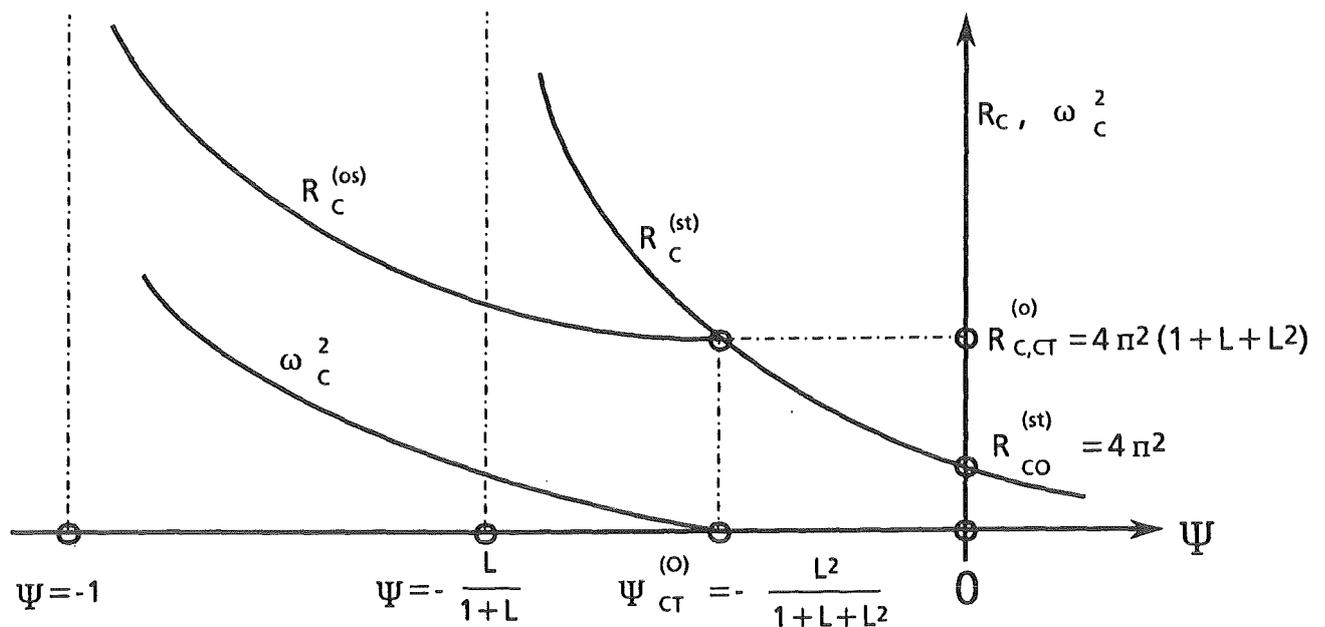


Abb. 2.1 Qualitatives Stabilitätsdiagramm für $\gamma=0$.

Im thermodiffusionsfreien Fall mit $\psi = 0$ setzt bei $R_{c0}^{(st)} = 4\pi^2$ stationäre Konvektion ein. Dieses Resultat wird schon von Lapwood (1948) angegeben. Für positive ψ -Werte diffundiert die leichte Komponente verstärkt zur warmen Unterseite der Schicht. Die Ruhelösung wird durch das induzierte Konzentrationsprofil zusätzlich destabilisiert und die kritischen stationären Rayleigh-Zahlen sinken. Umgekehrt tritt für $\psi < 0$ eine Stabilisierung des Ruhezustands auf, da die wirksamen Auftriebskräfte bei negativem Sorét-Effekt verringert werden. Ein Übergang zu einer oszillatorischen Konvektionsinstabilität findet im Kontrollparameterbereich

$$\psi \leq \psi_{CT}^{(0)} = - \frac{L^2}{1+L+L^2} \quad (2.2.29)$$

statt. In diesem Kennzahlenbereich gilt $R_c^{(os)} \leq R_c^{(st)}$. Für $\psi = \psi_{CT}^{(0)}$ haben die stationäre und oszillatorische Instabilität die gleiche kritische Rayleigh-Zahl. Wir finden den Wert

$$R_{c,CT}^{(0)} = 4 \pi^2 (1+L+L^2) . \quad (2.2.30)$$

Die obere Grenze $\psi_{CT}^{(0)}$ in Gl. (2.2.29) ist dadurch gegeben, daß das Quadrat der Hopf-Frequenz nach Gl. (2.2.27) auf null abfällt, siehe dazu Abbildung 2.1. Dieser Punkt in der Parameterebene wird als Kodimension-Zwei-Verzweigungspunkt oder kurz als CT-Punkt bezeichnet. Für eine Lewis-Zahl $L=0.01$ liegt der CT-Punkt bei $\psi_{CT}^{(0)} \approx -10^{-4}$. Der CT-Punkt teilt das Diagramm nach Abbildung 2.1 in zwei Stabilitätsbereiche. Für $\psi > \psi_{CT}^{(0)}$ setzt an der Stabilitätsgrenze $R_c^{(st)}$ stationäre Konvektion ein. Bei Separationszahlen $\psi < \psi_{CT}^{(0)}$ verliert die Ruhelösung zuerst über eine Hopf-Verzweigung bei $R_c^{(os)}$ ihre Stabilität. Es werden zeitlich periodischen Konvektionslösungen der kritischen Hopf-Frequenz ω_c^2 angefacht.

Die kritischen stationären und oszillatorischen Wellenzahlen zeigen für $\gamma = 0$ dagegen keine Abhängigkeit von Kontrollparametern des Systems. Nach Gleichung (2.2.26) gilt stets

$$k_c^{(st)^2} = k_c^{(os)^2} = \pi^2.$$

Bei den in Abbildung 2.1 eingezeichneten asymptotischen Werten der Separationszahl bei $\psi = -1$ und $\psi = -L(1+L)^{-1}$ ist die Wirkung der Thermodiffusion so groß, daß eine oszillatorische oder stationäre Instabilität auch für eine Beheizung von oben bei negativen Rayleigh-Zahlen auftreten kann. Ein analoges Stabilitätsdiagramm erhalten Brand, Steinberg (1983a, b).

Das Auftreten einer zeitabhängigen Konvektionsinstabilität ist ein für doppel-diffusive Systeme typisches Phänomen. Dieses Verhalten ist physikalisch dadurch bedingt, daß im Ruhezustand eine destabilisierende Temperaturverteilung und eine stabilisierende Konzentrationsverteilung vorliegt und molekulare Diffusionsvorgänge, bezogen auf die Zeitskala von thermischen Diffusionsprozessen, relativ langsam ablaufen. In realen Flüssigkeitsmischungen gilt $L \ll 1$. Ein aus seiner Gleichgewichtslage nach oben in eine kältere, konzentrationsreichere Schicht ausgelenktes Flüssigkeitsteilchen wird seine Temperatur rasch der neuen Umgebung angleichen. Während dieser Zeit findet aber nur ein geringer Konzentrationsaustausch statt. Das Teilchen ist deshalb schwerer als die Umgebung und beginnt zu sinken. Es fällt jetzt unter die ursprüngliche Gleichgewichtslage zurück, da das Teilchen kälter als die entsprechenden Nachbarpartikel ist. Nachdem sich wiederum ein Temperatúrausgleich eingestellt hat, ist das Teilchen leichter als seine konzentrationsärmere Umgebung, und der beschriebene Zyklus beginnt erneut.

Abbildung 2.2 zeigt qualitativ das Stabilitätsdiagramm für eine nicht-Boussinesqsche Flüssigkeitsmischung mit $\gamma > 0$. Die kritischen Werte sind in Form von gestrichelten Linien über der Separationszahl ψ dargestellt. Im Vergleich zu diesen neuen Resultaten ist der Fall $\gamma = 0$ mit durchgezogenen Kurven eingezeichnet.

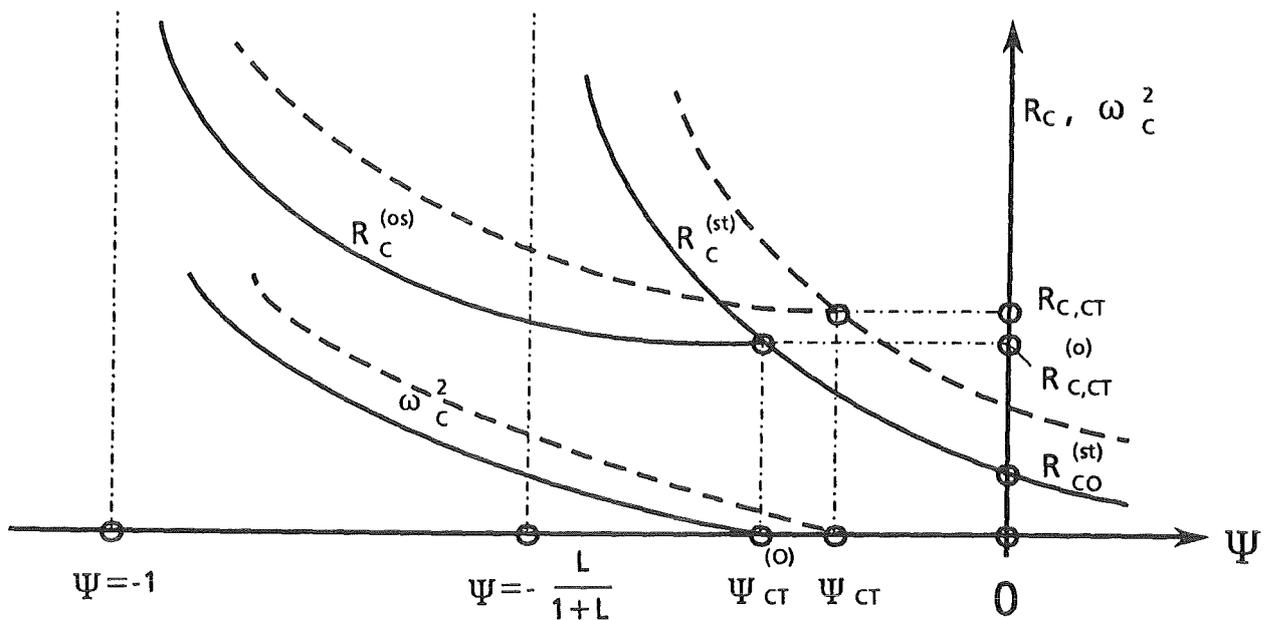


Abb. 2.2: Qualitatives Stabilitätsdiagramm für $\gamma = 0$ (-) und $\gamma > 0$ (---).

Es ist ersichtlich, daß eine nicht-Boussinesqsche Eigenschaft in Form eines nicht-linearen thermischen Expansionsverhaltens eine wesentliche Wirkung auf die Stabilität der Flüssigkeitsschicht hat. Für positive γ -Werte ergibt sich gegenüber dem Fall $\gamma=0$ eine Stabilisierung des Ruhezustandes. Die kritischen Rayleigh-Zahlen steigen an. Dies ist darauf zurückzuführen, daß für $\gamma > 0$ der destabilisierende Dichtegradient über die Schichthöhe abgebaut wird.

Des weiteren ist ein Ansteigen der kritischen Hopf-Frequenz festzustellen. Die physikalische Erklärung dieses Sachverhalts lautet, daß mit der Stabilisierung gewöhnlich eine Versteifung des Systems verbunden ist. Aus der Schwingungsmechanik ist bekannt, daß Systeme mit erhöhten Steifigkeiten auch höhere Eigenfrequenzen besitzen. Rein formal kommt man zu diesem Ergebnis, wenn in den linearisierten Grundgleichungen (2.2.1) für den thermischen Auftriebsterm eine effektive Separationszahl gemäß

$$\psi_{eff} = \psi - 2\gamma \cdot z \quad (2.2.31)$$

betrachtet wird. Positive γ -Werte verstärken den negativen Sorét-Effekt. Für den CT-Punkt erhalten wir im Rahmen unserer Störungsentwicklung

$$\psi_{CT} = \psi_{CT}^{(0)} \left[1 - \gamma + \gamma^2 \cdot f_1 \cdot \frac{1+L+L^2}{1+L} \right] . \quad (2.2.32)$$

Der CT-Punkt verschiebt sich für $\gamma > 0$ hin zu betragsmäßig kleineren, negativen Separationszahlen. Die asymptotischen ψ -Werte bei $\psi = -1$ und $\psi = -L(1+L)^{-1}$ bleiben jedoch erhalten. Der Existenzbereich der oszillatorischen Instabilität wird dadurch vergrößert, siehe auch Abbildung 2.2. Am CT-Punkt sind die kritischen Rayleigh-Zahlen gleich. Wir erhalten

$$R_c^{(st)} = R_c^{(os)} = R_{c,CT} = 4\pi^2(1+L+L^2) \left[1 + \gamma + \gamma^2 \left(1 - f_1 \frac{1+L+L^2}{1+L} \right) \right] . \quad (2.2.33)$$

Unabhängig vom Vorzeichen der Nicht-Boussinesq-Zahl γ finden wir eine Verkleinerung der Zellgröße der kritischen Konvektionsmoden. Nach Gleichung (2.2.27) ist die Zunahme der kritischen Wellenzahlen von der Ordnung γ^2 . Die kritischen Wellenzahlen der stationären und oszillatorischen Instabilität sind im allgemeinen verschieden, da sie aufgrund der γ -Abhängigkeit jetzt auch von den Kennzahlen ψ und L abhängen. Insbesondere gilt die Beziehung

$$k_c^{(os)2} \leq k_c^{(st)2}, \quad \text{für } \psi \leq \psi_{CT} . \quad (2.2.34)$$

Im nicht-Boussinesqschen Fall weisen die oszillatorischen Konvektionszellen demnach im Vergleich zu stationären Konvektionszellen größere horizontale Abmessungen auf. In Abbildung 2.3 sind die kritischen Wellenzahlen qualitativ für $\gamma = 0$ (—) und $\gamma \neq 0$ (---) als Funktion der Separationszahl ψ dargestellt.

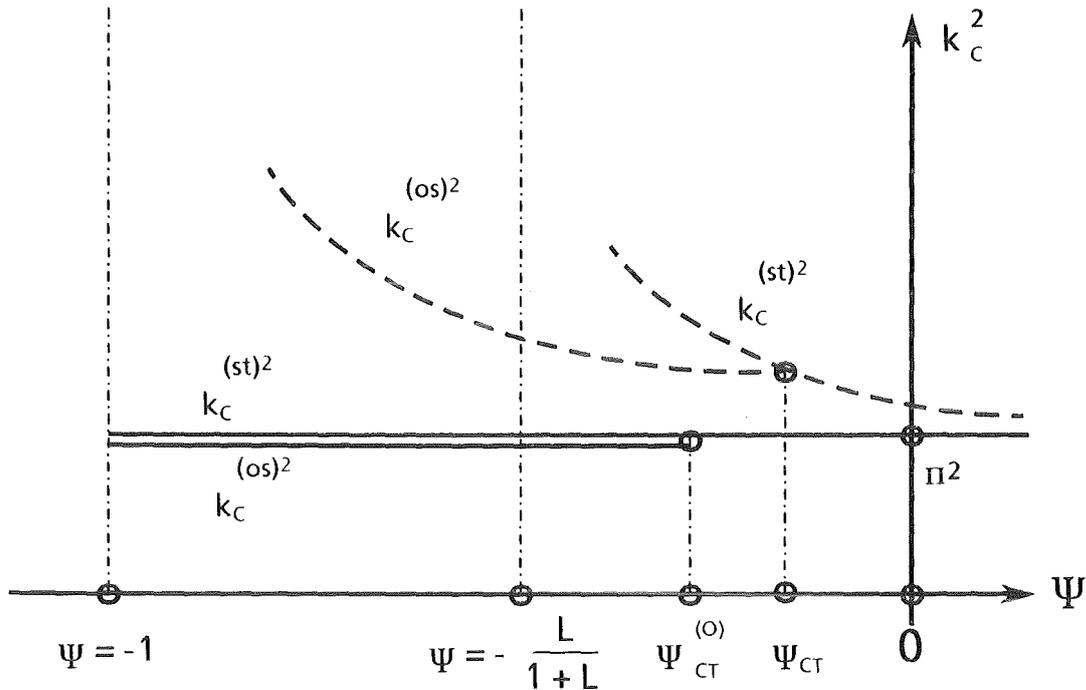


Abb. 2.3: Kritische Wellenzahlen für $\gamma = 0$ (—) und $\gamma > 0$ (---).

Für die asymptotischen Werte von ψ bei $\psi = -1$ und $\psi = -L(1+L)^{-1}$ erhalten wir nach Gl. (2.2.27) Singularitäten in unserer Reihendarstellung für die kritischen Wellenzahlen. Im Sinne der Konvergenz der Störungsentwicklung in der Nicht-Boussinsq-Zahl γ ist Gültigkeit der Resultate deshalb auf die Parameterbereiche

$$(1 + \psi)^2 \geq \gamma^2 \quad \text{und} \quad \left\{ 1 + \psi \left(1 + L^{-1} \right) \right\}^2 \geq \gamma^2 \quad (2.2.35)$$

beschränkt.

Im Grenzfall $\psi = 0$ ist ein qualitativer Vergleich unserer Resultate mit Aussagen von Busse (1967) für einkomponentige Flüssigkeiten möglich. Busse findet, daß neben der kritischen Wellenzahl auch die kritische Rayleigh-Zahl erst in quadratischer Ordnung von nicht-Boussinesqschen Flüssigkeitseigenschaften beeinflusst wird. In dieser Arbeit ergeben sich dagegen lineare Entwicklungskoeffizienten in γ für die kritische Rayleigh-Zahl. Diese Abweichung ist durch die unterschiedli-

che Wahl der Bezugstemperatur T_B für die Dichte begründet. Busse (1967) verwendet den Referenzwert $T_B = (T_0 + T_1)/2$ in der Schichtmitte bei $z = \frac{1}{2}$. Durch diese Wahl ergibt sich aufgrund der nicht-Boussinesq'schen Eigenschaft eine Dichteverteilung über die Schichthöhe, die in der unteren Hälfte der Schicht zusätzlich destabilisierend auf den Ruhezustand wirkt. Im oberen Teil der Schicht tritt dagegen eine Stabilisierung auf. Wir beziehen uns auf die Temperatur $T_B = T_0$ im isothermen Ausgangszustand, da später auch Verfestigungsvorgänge im oberen Teil der Schicht untersucht werden. In diesem Fall wirkt der Nicht-Boussinesq-Effekt stabilisierend über die gesamte Schichthöhe. Die kritischen Wellenzahlen bleiben von der Wahl der Bezugstemperatur jedoch unbeeinflusst.

2.2.4 Nichtlineare Konvektion

Wir interessieren uns nun für Konvektionszustände mit endlicher Amplitude in der Nähe der Verzweigungspunkte $R_c^{(st)}$ und $R_c^{(os)}$. Unser generelles Ziel ist es, den Einfluß der Nicht-Boussinesq-Zahl γ auf das Verzweigungsverhalten von zwei- und dreidimensionalen stationären sowie zeitlich periodischen Lösungen in der Umgebung des CT-Punktes zu bestimmen.

2.2.4.1 Untersuchte Strömungsmuster

Zunächst ist es erforderlich, auf die Struktur der zu untersuchenden Strömungsmuster näher einzugehen. Nach der linearen Theorie sind die kritischen Moden durch eine horizontale und zeitliche Periodizität gemäß Gl. (2.2.3) und Gl. (2.2.5) ausgezeichnet. In einem lateral unendlich ausgedehnten System sind prinzipiell unendlich viele Eigenfunktionen angebar, die diese Bedingungen erfüllen. Man spricht auch von einer Entartung des linearen Problems (Courant, Hilbert (1968)). Aufgrund von Symmetrieüberlegungen kommen nach Busse (1978) nur reguläre Strömungsmuster in Frage, bei welchen keine horizontale Richtung bevorzugt ist. Im Falle stationärer Konvektion sind dies Strukturen der Form

$$\Phi_{(x,y)} = A \sum_N \cos \{ k (\pi_N \cdot r) \} ,$$

mit

$$\underset{\sim}{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \pi_N = \begin{pmatrix} \pi_{Nx} \\ \pi_{Ny} \end{pmatrix}; \quad \pi_{Nx}^2 + \pi_{Ny}^2 = 1 . \quad (2.2.36)$$

Die konstante Amplitude A wird über die Normierungsvorschrift

$$\langle\langle \phi^2(x,y) \rangle\rangle = A^2 \cdot \lim_{x,y \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{4xy} \int_{-x}^x \int_{-y}^y \sum_{N,L} \cos \left\{ k \left(\underset{\sim}{\pi}_N \cdot r \right) \right\} \cdot \cos \left\{ k \left(\underset{\sim}{\pi}_L \cdot r \right) \right\} dx' dy' \right\} = 1 \quad (2.2.37)$$

festgelegt. Als eine wichtige Rechengröße zur Charakterisierung der verschiedenen Zellen erweist sich das Skalarprodukt π_{NL} zweier Einheitswellenvektoren. Es ist durch folgende Beziehung definiert:

$$\pi_{NL} = \underset{\sim}{\pi}_N \cdot \underset{\sim}{\pi}_L = (\pi_{Nx} \cdot \pi_{Lx} + \pi_{Ny} \cdot \pi_{Ly}) \quad (2.2.38)$$

Aufgrund der experimentellen Beobachtungen von Zimmermann (1990) behandeln wir im einzelnen zweidimensionale Konvektionsrollen und dreidimensionale, regelmäßige Sechseckmuster, die sogenannten Hexagons. In unserer Schreibweise gilt:

$$\text{Rollen:} \quad N=1; A_R = \pm\sqrt{2}; \quad \pi_{11}^{(R)} = 1; \quad (2.2.39)$$

$$\text{Hexagons:} \quad N=3; A_H = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \pi_{12}^{(H)} = \pi_{13}^{(H)} = -\pi_{23}^{(H)} = \frac{1}{2}.$$

Das Rollenmuster besteht aus einer Anordnung von abwechselnd links und rechts drehenden, parallelen Einzelrollen. Hexagons erhält man durch Superposition von drei Rollenmustern, deren Achsen jeweils um 60° gegeneinander gedreht sind. Es ist - je nach Vorzeichen der Amplitude A - zwischen sogenannten ℓ -Hexagons mit mittigem Aufstrom und g-Hexagons mit zentralem Abstrom zu unterscheiden.

Des weiteren sind zeitlich periodische Strömungsmuster zu betrachten. Diese Muster können zum einen „stehende Wellen“ (SW) vom Typ

$$\phi(x,y) \cdot \tau(t) = A e^{i\omega t} \sum_N \cos \left\{ k \left(\underset{\sim}{\pi}_N \cdot r \right) \right\} + c.c. \quad (2.2.40)$$

sein, bei denen die Horizontalamplitude oszilliert. Für $N=1$ beschreibt Gl. (2.2.40) ein ortsfestes Rollenmuster mit zeitlich periodischer Umkehr der Drehrichtung. Die Überlagerung von drei dieser stehenden Wellen mit 60° gegeneinander geneigten Achsen führt zu einem ortsfesten Strömungsmuster, das eine Oszillation zwischen ℓ - und g-Hexagons darstellt. Mit c.c. ist der jeweilige konjugiert-komplexe Ausdruck abgekürzt. Die Normierungsvorschrift gemäß Gl. (2.2.37) ist nunmehr um eine Mittelung im Zeitbereich zu ergänzen. Zum anderen sind „wandernde Wellen“ in der Form

$$\phi(x,y) \cdot \tau(t) = A \sum_N e^{-i\{k(\frac{\pi}{N} \cdot r) - \omega t\}} + c.c. \quad (2.2.41)$$

möglich. Für diese mit der Phasengeschwindigkeit $c_w = \omega/k$ lateral vorschreitenden Strömungsmuster hat sich in der Literatur die Bezeichnung „travelling waves“ (TW) eingebürgert. Für $N=1$ in Gl. (2.2.41) ergibt sich ein Rollenmuster, das mit konstanter Amplitude und konstanter Phasengeschwindigkeit in Richtung seines Wellenvektors $\frac{\pi}{N}$ wandert. Die Superposition von drei dieser Wanderrollen mit gleicher Amplitude und betragsmäßig gleicher Phasengeschwindigkeit, jedoch um jeweils 60° gegeneinander versetzten Wellenvektoren ergibt ein dreidimensionales Strömungsmuster, dessen Auf- und Abstromzentren sich zeitlich periodisch ändern und in einer bestimmten Richtung wandern. Die Konturplots im Anhang unter Kapitel 5.4 verdeutlichen, daß es sich bei diesem Muster zudem um eine Oszillation zwischen Hexagons und Dreieckstrukturen handelt. Wir wollen es im weiteren als wanderndes Hexagon bezeichnen.

Das Unterscheidungsmerkmal zwischen Auf- und Abstrom in der Mitte geht demnach bei den zeitlich periodischen Mustern mit hexagonaler Symmetrie verloren.

2.2.4.2 Klassifikation des Verzweigungsverhaltens

Das Verzweigungsverhalten der verschiedenen Konvektionslösungen wird nach Gl. (2.2.9) und (2.2.10) von den Entwicklungskoeffizienten $R_{n-1,m}$ und $\omega_{n-1,m}$, mit $n > 1$, unseres Störungsansatzes festgelegt. Diese Koeffizienten werden aus der Lösbarkeitsbedingung des Randwert-Problems der Ordnung $(\varepsilon^n, \gamma^m)$, gegeben durch das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$M_0 \{x_{nm}\} \equiv \begin{pmatrix} \nabla^2 & -R_{00}(1+\psi)\nabla_H^2 & R_{00}\psi\nabla_H^2 \\ 1 & \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & \nabla^2 & L\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{nm} \\ T_{nm} \\ S_{nm} \end{pmatrix} = \tilde{RS}_{nm}; \quad (2.2.42)$$

$$z = [0,1]: \quad x_{nm} = 0,$$

bestimmt. Die Inhomogenität \tilde{RS}_{nm} enthält nun auch Terme, die von Nichtlinearitäten in den Grundgleichungen herrühren. Diese Terme lassen sich als n-fache Produkte von den bereits bekannten ε^1 -Lösungen darstellen. Die gesuchten Ent-

wicklungskoeffizienten berechnen sich aus der Forderung, daß solche Produkte keine Säkularterme generieren. In einer verallgemeinerten Form lautet diese Lösbarkeitsbedingung

$$\llcorner \underset{\sim}{RS}_{nm}, \underset{\sim}{x}_{10,K}^* \gg = : \lim_{x,y,t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{8xyt} \int_{-x}^x \int_{-y}^y \int_{-t}^t \int_0^1 \underset{\sim}{RS}_{nm} \cdot \underset{\sim}{x}_{10,K}^* dz dx' dy' dt' \right\} = 0 \quad (2.2.43)$$

Mit $\underset{\sim}{x}_{10,K}^*$ ist ein beliebiger Lösungsanteil des adjungierten Rand-Eigenwert-Problems der Ordnung $(\varepsilon^1, \gamma^0)$ mit dem Einheitswellenvektor $\underset{\sim}{n}_K$ bezeichnet. Einzelheiten zu den recht umfangreichen Rechnungen sind im Anhang unter Kapitel 5.2.2 enthalten. Im Text wollen wir uns der Übersicht halber auf die Wiedergabe der wichtigsten Resultate beschränken.

Für die weiteren Schritte benötigen wir Definitionen und Aussagen der Verzweigungs- und Stabilitätstheorie, die wir vorab kurz zusammenstellen wollen. Wir folgen dabei den Ausführungen von Joseph (1976) und Guckenheimer, Holmes (1983) sowie von Golubitsky et al. (1984, 1985).

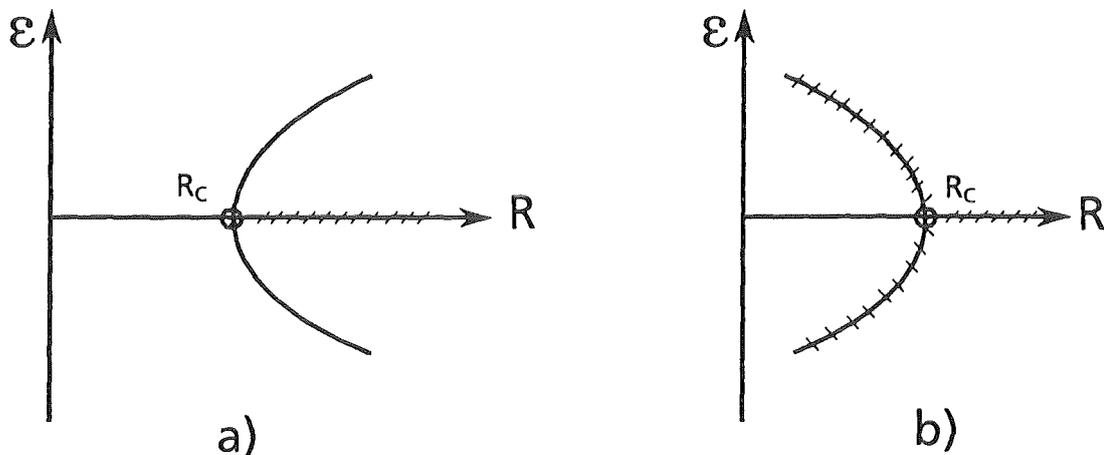


Abb. 2.4: a) Vorwärtsverzweigung b) Rückwärtsverzweigung.
Instabile Lösungsäste sind schraffiert.

In vielen Verzweigungsproblemen der Physik tritt das in Abbildung 2.4 skizzierte Lösungsverhalten auf. Es sind die Amplituden ε der Lösungen über dem Verzweigungsparameter R aufgetragen. Instabile Lösungsäste sind schraffiert eingezeichnet. Bei dem kritischen Wert $R=R_c$ wird die Lösung $\varepsilon=0$ instabil gegen Störungen mit infinitesimalen Amplituden. Es erscheinen zwei neue, symmetrische Lösungsäste, deren Amplitudenbetrag mit zunehmenden R anwächst (Abb. 2.4a) oder mit abnehmenden R anwächst (Abb. 2.4b).

Man spricht dann entweder von einer Vorwärtsverzweigung oder einer Rückwärtsverzweigung. Entsprechende Bezeichnungen sind überkritische oder unterkritische Verzweigung. Ein vorwärts verzweigender Lösungsast ist stabil gegenüber Störungen mit infinitesimaler Amplitude, während eine rückwärts verzweigende Lösung instabil ist. Diese Aussagen gelten allgemein für stationäre und zeitlich periodische Lösungen. Das dargestellte Verzweigungsverhalten wird im Sinne unserer Störungsentwicklung gemäß Gl. (2.2.9) durch die Beziehung

$$\varepsilon = \pm \left(\frac{R - R_c}{R_{20} + \psi R_{21} + \mathcal{O}(\psi^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.44)$$

beschrieben. Durch $\varepsilon=0$ ist die Ruhelösung gegeben, die bei der kritischen Rayleigh-Zahl R_c instabil wird. Der Typ der Verzweigung wird im wesentlichen durch das Vorzeichen des Entwicklungskoeffizienten R_{20} bestimmt. Gilt $R_{20} > 0$, so liegen für $R > R_c$ nach Abbildung 2.4a zwei stabile, symmetrische Konvektionslösungen vor. Für $R_{20} < 0$ handelt es sich nach Abbildung 2.4b dagegen um instabile, rückwärts verzweigende Lösungen. Der Fall $R_{20} = 0$ bezeichnet den sogenannten trikritischen Punkt der Lösungen. Über das Verzweigungsverhalten und damit über die Stabilität der Lösung entscheiden dann Entwicklungskoeffizienten von höherer Ordnung. In binären Mischungen können alle drei Konstellationen auftreten, da die Entwicklungskoeffizienten von der Separationszahl ψ abhängen werden. Bedingt durch die Symmetrie der Verzweigungsgleichung (2.2.44) hat die Nicht-Boussinesq-Zahl γ hingegen einen geringeren Einfluß auf das vorliegende Verzweigungsverhalten. Der Entwicklungskoeffizient R_{21} in Gl. (2.2.44) fungiert lediglich als Korrekturterm in ψ für den dominanten Koeffizienten R_{20} .

Im Zusammenhang mit symmetriebrechenden Effekten ist auch das in Abbildung 2.5 dargestellte Verzweigungsverhalten anzutreffen. Diese Konfiguration wird als eine Verzweigung nach zwei Seiten bezeichnet. In Abbildung 2.5a verzweigt der obere Lösungsast mit $\varepsilon > 0$ unterkritisch und der untere Ast mit $\varepsilon < 0$ überkritisch. Der entgegengesetzte Fall ist in Abbildung 2.5b skizziert. Der obere Lösungsast kehrt bei der Amplitude ε_{UP} seine Verzweigungsrichtung um. Die rückwärts gerichteten Bereiche der Lösungsäste sind instabil. Nach Joseph (1976) ist eine solche unsymmetrische Verzweigung nur für stationäre Lösungen möglich.

Die entsprechenden Verzweigungsgleichungen unserer Störungsentwicklung lauten nun

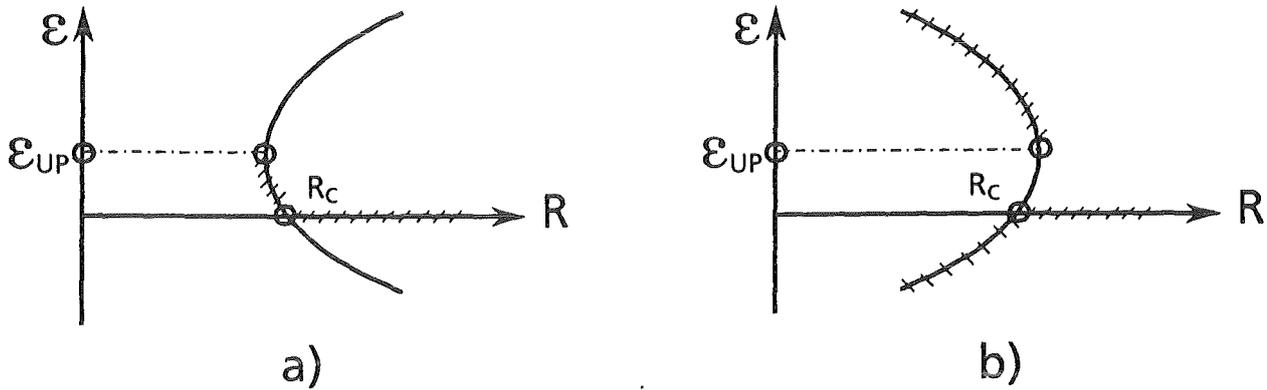


Abb. 2.5: Verzweigung nach zwei Seiten. Der obere Lösungsast verzweigt
a) unterkritisch, b) überkritisch.

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} \gamma \frac{R_{11}}{R_{20}} \pm \left(\frac{1}{4} \gamma^2 \frac{R_{11}^2}{R_{20}^2} + \frac{R - R_c}{R_{20}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2.45)$$

Für den Umkehrpunkt erhält man den Amplitudenwert

$$\varepsilon_{UP} = -\frac{1}{2} \gamma \frac{R_{11}}{R_{20}}. \quad (2.2.46)$$

Es ist ersichtlich, daß das Verzweigungsverhalten jetzt in entscheidendem Maße von der Nicht-Boussinesq-Zahl γ beeinflusst wird. Für einen positiven γ -Wert erhält man für $R_{11} < 0$ und $R_{20} > 0$ den in Abbildung 2.5a und für $R_{11} > 0$ und $R_{20} < 0$ den in Abbildung 2.5b gezeigten Fall.

2.2.4.3 Zweidimensionale, nichtlineare Konvektion

Es wird zunächst das Verzweigungsverhalten von zweidimensionalen Rollenlösungen untersucht. Die Auswertung von Lösbarkeitsbedingungen der Randwert-Probleme der Ordnungen $(\varepsilon^2, \gamma^m)$ ergibt, daß die Entwicklungskoeffizienten der Rayleigh-Zahl und der Oszillationsfrequenz verschwinden. Wir erhalten

$$R_{1m} = \omega_{1m} = 0; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.47)$$

Diese Ergebnisse folgen direkt aus Symmetrieüberlegungen. Produkte von zwei Rollenlösungen, die durch einen gemeinsamen Wellenvektor ausgezeichnet sind, können keine Säkularterme hervorrufen.

In den Ordnungen $(\varepsilon^3, \gamma^0)$ und $(\varepsilon^3, \gamma^1)$ ergeben sich nichttriviale Entwicklungskoeffizienten, da Produkte von drei Einzelrollen homogene Lösungsanteile generieren. Die Elimination dieser Säkularterme gemäß der Lösbarkeitsbedingung (2.2.43) führt auf die folgenden Ergebnisse:

Für das stationäre Rollenmuster gilt

$$\frac{R_{20}^{(st)}}{R_{00}^{(st)}} = \frac{q}{8} A_R^2 \frac{1 + \psi (1 + L^{-1} + L^{-2} + L^{-3})}{1 + \psi (1 + L^{-1})}; \quad (2.2.48)$$

$$\frac{R_{21}^{(st)}}{R_{00}^{(st)}} = \frac{q}{8} A_R^2 \frac{1 + \psi (1 + L^{-1} + 2L^{-2} + 2L^{-3})}{\{1 + \psi (1 + L^{-1})\}^2}$$

Für das Wanderwellenmuster kommt

$$\begin{aligned} R_{20}^{(TW)} &= 0; \quad 2\omega_{00}\omega_{20}^{(TW)} = -\frac{q}{8} A_R^2 (1 + \omega_{00}^2); \\ R_{21}^{(TW)} &= 0; \quad 2\omega_{00}\omega_{21}^{(TW)} = \frac{q}{16} A_R^2 \left(\frac{R_{01}}{R_{00}} \right)^{(os)} \frac{(L^2 + \omega_{00}^2)(1 - \omega_{00}^2)}{\omega_{00}^2}. \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

Für das stehende Wellenmuster ergibt sich

$$\frac{R_{20}^{(SW)}}{R_{00}^{(os)}} = \frac{q}{8} A_R^2 \frac{L + \omega_{00}^2}{L^2 + \omega_{00}^2}; \quad 2\omega_{00}\omega_{20}^{(SW)} = -\frac{q}{8} A_R^2 \frac{(L^2 + \omega_{00}^2)(1 + \omega_{00}^2) + 4(L^2 - \omega_{00}^4)}{L^2 + \omega_{00}^2}. \quad (2.2.50)$$

Für die verschiedenen Strömungsmuster können hiermit Verzweigungsgleichungen abgeleitet werden, die der in Gl. (2.2.44) angegebenen Beziehung entsprechen. Auf die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten $R_{21}^{(SW)}$ und $\omega_{21}^{(SW)}$ für das stehende Wellenmuster wird verzichtet. Es zeigt sich, daß die Kenntnis dieser Größen für unsere weiteren Betrachtungen nicht notwendig ist.

Das Verzweigungsverhalten der stationären Rollenlösung wird nach Gl. (2.2.48) von der Separationszahl ψ gesteuert. Der trikritische Punkt mit $R_{20}^{(st)} = 0$ liegt bei

$$\psi_{tri} = -(1 + L^{-1} + L^{-2} + L^{-3})^{-1}. \quad (2.2.51)$$

Für eine Lewis-Zahl $L=0.01$ ergibt dies $\psi_{\text{tri}} \approx -10^{-6}$. Für $\psi > \psi_{\text{tri}}$ gilt $R_{20}^{(\text{st})} > 0$, so daß die stationäre Rollenlösung überkritisch verzweigt. Eine Rückwärtsverzweigung mit $R_{20}^{(\text{st})} < 0$ liegt dagegen im Parameterbereich $\psi < \psi_{\text{tri}}$ vor. Insbesondere am CT-Punkt finden wir

$$\left(\frac{R_{20}^{(\text{st})}}{R_{00}^{(\text{st})}} + \gamma \frac{R_{21}^{(\text{st})}}{R_{00}^{(\text{st})}} \right)_{CT} = -\frac{q}{8} L^{-1} A_R^2 \left\{ 1 + \gamma(1 + L + L^2) \right\} < 0. \quad (2.2.52)$$

Die stationäre Rollenlösung verzweigt am CT-Punkt unterkritisch und ist damit instabil. Positive Werte der Nicht-Boussinesq-Zahl γ bewirken nach Gl. (2.2.52) und (2.2.44), daß die Amplitude ε der Konvektionslösung im unterkritischen Rayleigh-Zahlen-Bereich mit $R < R_c^{(\text{st})}$ im Vergleich zum Fall $\gamma=0$ langsamer zunehmen, siehe auch Abbildung 2.6. Dieses Ergebnis läßt sich physikalisch mit dem konvektionshemmenden Effekt für $\gamma > 0$ erklären.

Die Verzweigungsrichtung und die Stabilität der Wanderwellenlösung bleibt in der betrachteten Ordnung unbestimmt, da nach Gl. (2.2.49) die Entwicklungskoeffizienten für die Rayleigh-Zahl verschwinden. Diese Lösung ist dadurch nur lokal für $R = R_c^{(\text{os})}$ definiert, vergleiche Abbildung 2.6. Unsere Störungsentwicklung liefert für die Oszillationsfrequenz der Wanderwelle nach Gl. (2.2.10) die Beziehung

$$\omega^{(TW)^2} = \omega_c^2 + \varepsilon^2 \left\{ 2\omega_{00}\omega_{20}^{(TW)} + \gamma \left(2\omega_{00}\omega_{21}^{(TW)} + 2\omega_{01}\omega_{20}^{(TW)} \right) \right\}. \quad (2.2.53)$$

Aufgrund von

$$2\omega_{00}\omega_{20}^{(TW)} < 0, \quad (2.2.54)$$

$$2\omega_{00}\omega_{21}^{(TW)} + 2\omega_{01}\omega_{20}^{(TW)} = -\frac{q}{8} A_R^2 \left(\frac{R_{01}}{R_{00}} \right)^{(\text{os})} (L^2 + \omega_{00}^2) < 0,$$

nimmt die Oszillationsfrequenz und damit die Wandergeschwindigkeit der Welle mit zunehmender Amplitude ab. Positive γ -Werte bewirken eine schnellere Abnahme. Bei einem bestimmten Amplitudenwert gilt dann $\omega^{(TW)^2} = 0$ und die Welle kommt zum Stillstand.

Dieses Verhalten wollen wir in der Umgebung des CT-Punktes näher analysieren. Hierzu führen wir in die vorliegenden Ergebnisse den Ansatz

$$\psi = \psi_{CT} - \Delta\psi, \quad \text{mit } \Delta\psi \ll 1 \quad (2.2.55)$$

ein. Es läßt sich leicht zeigen, daß das Wanderwellenmuster genau dann zum Stehen kommt, wenn sein Lösungsast auf den der rückwärts verzweigenden, instabilen stationären Rollenlösung trifft. Die Wanderwellenlösung endet in diesem Punkt. Der entsprechende kritische Amplitudenwert lautet

$$\varepsilon_{sv}^2 = \frac{8}{qA_R^2} \frac{(1+L+L^2)^2}{1+L} (1+\gamma) \Delta\psi. \quad (2.2.56)$$

Im Rahmen unserer Störungsentwicklung ist die Gültigkeit dieser Beziehung auf den Parameterbereich $\Delta\psi = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ beschränkt. In der Verzweigungstheorie wird ein solcher Punkt, indem eine lokal stabile und eine instabile stationäre Lösung koexistieren, als ein globaler stationärer Verzweigungspunkt bezeichnet, siehe beispielsweise Deane et al. (1987). In Abbildung 2.6 ist diese Wechselwirkung der Lösungen qualitativ für $\gamma = 0$ (---) und $\gamma > 0$ (—) in einem Verzweigungsdiagramm dargestellt. Wegen der Symmetrie der Verzweigungsgleichung (2.2.44) ist es ausreichend, das Amplitudenquadrat ε^2 der Lösungen zu betrachten. Die Lösungsäste gehen dann in der betrachteten Ordnung in Geraden über.

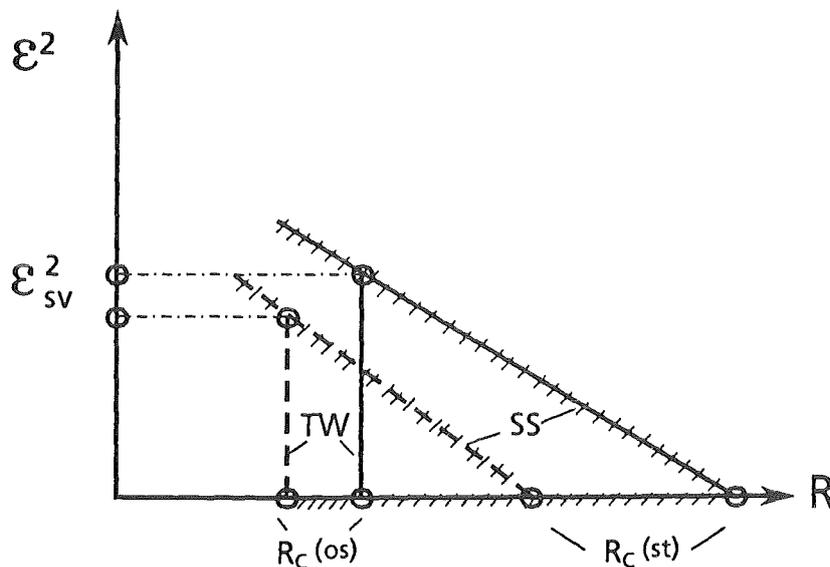


Abb. 2.6: Verzweigungsdiagramm der stationären Rollenlösung (SS) und der Wanderwellenlösung (TW) in der Umgebung des CT-Punktes für $\gamma = 0$ (---) und $\gamma > 0$ (—).

Man erkennt, daß für positive Nicht-Boussinesq-Zahlen γ der globale stationäre Verzweigungspunkt nach Gl. (2.2.56) zu größeren Amplituden hin verschoben wird. Es ergibt sich dadurch eine Ausweitung des Amplitudenbereichs, in dem eine Wanderwellenlösung existiert. Des weiteren nimmt für $\gamma > 0$ der Betrag der

Steigung des Lösungsastes des stationären Rollenmusters ab. Damit ist eine Vergrößerung des unterkritischen Rayleigh-Zahlen-Bereichs der Rollenlösung verbunden. Diese Resultate sind im wesentlichen auf die stabilisierende Wirkung des Nicht-Boussinesq-Effekts für $\gamma > 0$ zurückzuführen. In der linearen Theorie erhalten wir im Vergleich zum Fall $\gamma = 0$ eine Erhöhung der kritischen Hopf-Frequenz und höhere kritische Rayleigh-Zahlen. Die kritische stationäre Rayleigh-Zahl $R_c^{(st)}$ erfährt jedoch gegenüber der kritischen oszillatorischen Rayleigh-Zahl $R_c^{(os)}$ eine größere Änderung, siehe auch Abbildung 2.6. In der Umgebung des CT-Punktes nach Ansatz (2.2.53) gilt die Beziehung

$$\frac{R_c^{(st)} - R_c^{(os)}}{R_{00}^{(st)}} = \frac{(1+L+L^2)^2}{L(1+L)} \left\{ 1 + \gamma(2+L+L^2) + \mathcal{O}(\gamma^2) \right\} \Delta\psi. \quad (2.2.57)$$

Im oszillatorischen Verzweigungspunkt $R_c^{(os)}$ entspringt neben der Wanderwellenlösung auch der Lösungsast der stehenden Wellen. Knobloch (1986) untersucht die Stabilität dieser beiden zeitlich periodischen Lösungen. Er zeigt allgemein, daß von den Lösungen diejenige stabil ist, deren Amplitude für $R > R_c^{(os)}$ schneller anwächst, vorausgesetzt beide Lösungsäste verzweigen vorwärts. Verzweigt einer der Äste unterkritisch, so sind beide Lösungen instabil, siehe Abbildung 2.7.

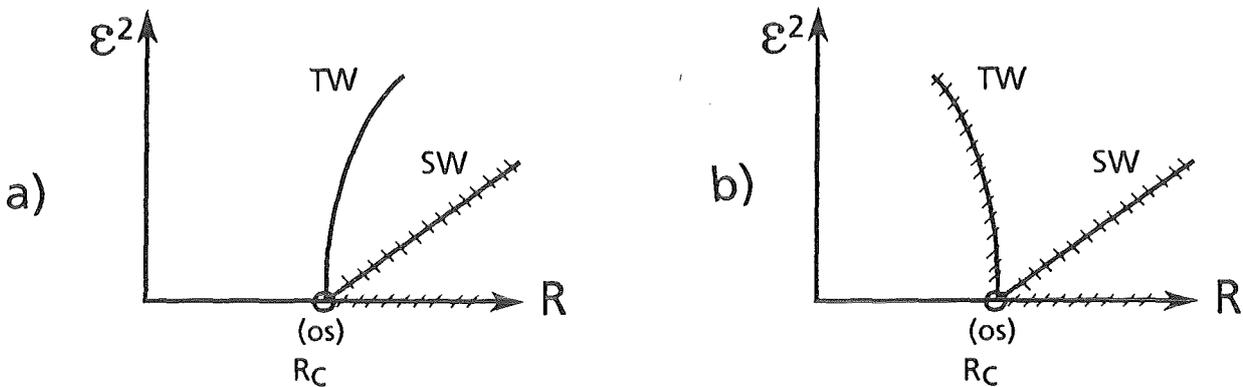


Abb. 2.7 Verzweigungsdiagramm der Wanderwellenlösung (TW) und der stehenden Wellenlösung (SW), a) stabile TW, instabile SW, b) instabile TW, instabile SW.

Diese Aussagen zur Wechselwirkung der zeitlich periodischen Lösungen können direkt auf unser Problem angewendet werden. Aufgrund der Symmetrie der zweidimensionalen Lösungen ist das Verzweigungs- und Stabilitätsverhalten auch auf den Nicht-Boussinesq-Fall mit $\gamma \neq 0$ übertragbar. Nach Gl. (2.2.50) gilt $R_{20}^{(SW)} > 0$, so daß der Lösungsast der stehenden Wellen überkritisch verzweigt und unabhängig von der noch unbestimmten Verzweigungsrichtung der Wanderwellenlösung

instabil ist. Abbildung 2.7a zeigt das Verzweigungsdiagramm der zeitlich periodischen Lösungen für vorwärts verzweigende Wanderwellen. In Abbildung 2.7b ist der Fall unterkritisch verzweigender Wanderwellen skizziert. Stehende Wellen sind in beiden Fällen instabil.

Im folgenden wollen wir unsere Störungsentwicklung im Störparameter ε weiter vorantreiben. Es gelingt uns dadurch, die Verzweigungsrichtung und die Stabilität der Wanderwellenlösung zu bestimmen und stabile Existenzbereiche der stationären Rollenlösung anzugeben. Hierzu müssen die Entwicklungskoeffizienten $R_{40}^{(TW)}$ und $\omega_{40}^{(TW)}$ sowie der Koeffizient $R_{40}^{(st)}$ berechnet werden. Diese analytischen Rechnungen sind bisher in der Literatur noch nicht durchgeführt worden. Die Störungsentwicklung für die stehende Wellenlösung wollen wir an dieser Stelle nicht weiterverfolgen, da diese Lösung nach unseren Überlegungen instabil ist.

In der Ordnung $(\varepsilon^4, \gamma^0)$ werden keine Säkularterme generiert. Die Symmetrie des zweidimensionalen Problems bedingt

$$R_{30}^{(TW)} = R_{30}^{(TW)} = \omega_{30} = 0. \quad (2.2.58)$$

Die allgemein gültige Auswertung der Lösbarkeitsbedingungen in der Ordnung $(\varepsilon^5, \gamma^0)$ gestaltet sich sehr langwierig und erfordert einen großen Rechenaufwand (vgl. Kapitel 5.2.2 im Anhang). In unmittelbarer Umgebung des CT-Punktes gemäß Gl. (2.2.55) und für kleine Lewis-Zahlen L gelingt jedoch eine Abschätzung der Größenordnung der maßgebenden Ausdrücke. Diese Näherungen sind für qualitative Betrachtungen vollkommen ausreichend.

Für das stationäre Rollenmuster erhalten wir

$$\left. \frac{R_{40}^{(st)}}{R_{00}^{(st)}} \right|_{CT} = \frac{3}{40} \pi^4 A_R^4 L^{-3} (1 + \mathcal{O}(L)) + \mathcal{O}(\Delta\psi). \quad (2.2.59)$$

Am trikritischen Punkt laut Gl. (2.2.51) kommt das exakte Resultat

$$\left. \frac{R_{40}^{(st)}}{R_{00}^{(st)}} \right|_{tri} = \frac{3}{40} \pi^4 A_R^4 L^{-2}. \quad (2.2.60)$$

Für die Wanderwellenlösung ergibt sich

$$\left. \frac{R_{40}^{(TW)}}{R_{00}^{(os)}} \right|_{CT} = \frac{5}{384} \pi^4 A_R^4 L^{-2} (1 + \mathcal{O}(L)) + \mathcal{O}(\Delta\psi), \quad (2.2.61)$$

$$2\omega_{00}\omega_{40}^{(TW)} \Big|_{CT} = -\frac{1}{64} \pi^4 A_R^4 \frac{(1 + \omega_{00}^2)^2}{\omega_{00}^2} (1 + \mathcal{O}(\Delta\psi)).$$

Die Verzweigungsgleichung der stationären Rollenlösung lautet in der Umgebung des CT-Punktes unter Einbeziehung der Resultate nach Gl. (2.2.52) und (2.2.59) nun

$$\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} \frac{R_{20}^{(st)} + \gamma R_{21}^{(st)}}{R_{40}^{(st)}} \Big|_{CT} \pm \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{R_{20}^{(st)} + \gamma R_{21}^{(st)}}{R_{40}^{(st)}} \Big|_{CT} \right)^2 - \frac{R - R_c^{(st)}}{R_{40}^{(st)} \Big|_{CT}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2.62)$$

In Abbildung 2.8 ist das Verzweigungsverhalten der Lösung qualitativ für $\gamma=0$ (---) und $\gamma>0$ (—) in der ε^2 -R-Ebene dargestellt.

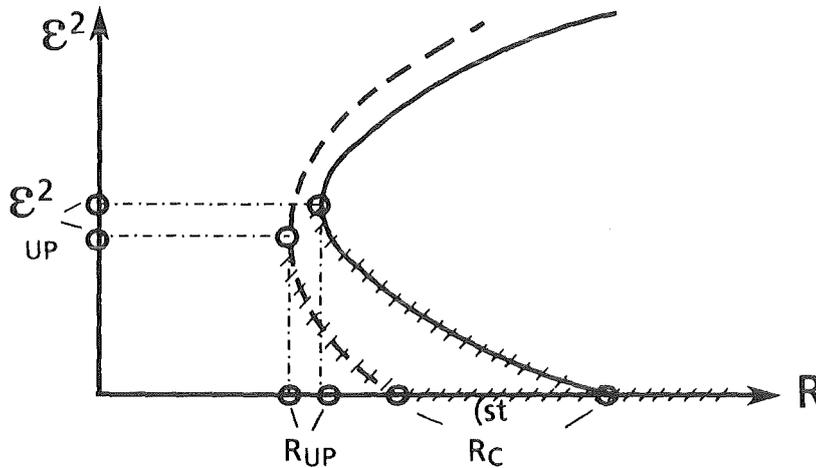


Abb. 2.8: Verzweigungsdiagramm der stationären Rollenlösung für $\gamma=0$ (---) und $\gamma>0$ (—). Schraffierte Lösungsäste sind instabil.

Aufgrund von $R_{40}^{(st)}|_{CT} > 0$ kehrt der bei $R = R_c^{(st)}$ zunächst rückwärts verzweigende, instabile Lösungsast bei der Amplitude ε^2_{UP} und der unterkritischen Rayleigh-Zahl $R_{UP} < R_c^{(st)}$ seine Verzweigungsrichtung um. Der vorwärts gerichtete, obere Teil des Lösungsastes ist nach den Stabilitätsaussagen zur Verzweigungstheorie von Joseph (1976) stabil gegenüber infinitesimalen Störungen. Die Amplitude der Lösung nimmt dann mit wachsendem Kontrollparameter R zu. Für den Umkehrpunkt erhalten wir in führender Ordnung

$$\varepsilon_{UP}^2 = \frac{5}{3\pi^2} \frac{L^2}{A_R^2} (1 + \gamma); \quad \frac{R_{UP} - R_c^{(st)}}{R_{00}^{(st)}} = - \frac{5}{24} L (1 + 4\gamma). \quad (2.2.63)$$

Ein positiver Wert der Nicht-Boussinesq-Zahl γ bewirkt gegenüber dem Fall $\gamma = 0$, daß der Umkehrpunkt größere Amplitudenwerte annimmt. Durch die Stabilisierung des Ruhezustands für $\gamma > 0$ wird des weiteren der unterkritische Rayleigh-Zahlen-Bereich $R_c^{(st)} - R_{UP}$ der stationären Rollenlösung nach Gl. (2.2.63) deutlich vergrößert, siehe auch Abbildung 2.8.

Die Wanderwellenlösung verzweigt in der Nähe des CT-Punktes überkritisch, da laut Gl. (2.2.60) der Entwicklungskoeffizient $R_{40}^{(TW)}|_{CT}$ positiv ist. Unsere Störungsentwicklung liefert die Verzweigungsgleichung

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{R - R_c^{(os)}}{R_{40}^{(TW)}|_{CT}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2.64)$$

und es gilt das Verzweigungsdiagramm nach Abbildung 2.7a. Die Beziehung für die Oszillationsfrequenz der Wanderwelle bleibt gegenüber der Gleichung (2.2.53) ungeändert. Wir finden mit Gl. (2.2.49)

$$2\omega_{00}\omega_{40}^{(TW)}|_{CT} = - \left(\omega_{20}^{(TW)}|_{CT} \right)^2, \quad (2.2.65)$$

so daß sich die beiden Beiträge zur Oszillationsfrequenz in der Ordnung (ε^5, γ^0) kompensieren. Dadurch ergibt sich keine Änderung für den Amplitudenwert des globalen stationären Verzweigungspunktes nach Gl. (2.2.54). Der stabile Lösungsast der Wanderwellenlösung endet auf dem unteren, instabilen Ast der stationären Lösung.

Die Wechselwirkungen einer stationären Rollenlösung und einer stehenden Wellenlösung untersuchen Knobloch, Proctor (1981) für die thermohaline Konvektion in binären Flüssigkeiten mit Boussinesqschen Eigenschaften. Sie finden mit Hilfe numerischer Methoden, daß der Lösungsast der stehenden Welle mit einer logarithmischen Singularität in der Periodendauer auf dem stationären Lösungsast endet. Knobloch (1986) weist die Gültigkeit der Aussage für die Sorét-getriebene Konvektion bei permeablen Konzentrationsrandbedingungen nach. Wir greifen

auf diese Ergebnisse zurück, da unsere analytische Störungsentwicklung in Potenzreihen ein solches Lösungsverhalten nicht widerspiegeln kann. Der instabil verzweigende Lösungsast des stehenden Wellenmusters endet auf dem unteren, ebenfalls instabilen Ast der stationären Lösung. Wir nehmen dabei an, daß aufgrund der Symmetrie der zweidimensionalen Lösungen dieser Sachverhalt auch für schwach nicht-Boussinesqsche Flüssigkeitsmischungen zutreffend ist.

2.2.4.4 Verzweigungsdiagramm und Stabilität der Rollenlösungen

Die im letzten Kapitel abgeleiteten Teilverzweigungsdiagramme können zu dem in Abbildung 2.9 dargestellten Verzweigungsdiagramm der zweidimensionalen Konvektionslösungen kombiniert werden. Es zeigt qualitativ für einen festen Wert der Nicht-Boussinesq-Zahl γ das Verzweigungsverhalten der stationären Rollenlösung sowie der wandernden und stehenden Wellenlösung in der unmittelbaren Umgebung des CT-Punktes, dargestellt in der R - ε^2 -Ebene. Instabile Lösungszweige sind schraffiert eingezeichnet. Ein ähnlich detailliertes Verzweigungsdiagramm ist in der Literatur bisher nur im Rahmen numerischer Untersuchungen zur thermohalinen Konvektion in binären Flüssigkeitsmischungen mit Boussinesqschen Eigenschaften von Deane et al. (1987) und Knobloch, Moore (1990) angegeben worden.

Wir finden folgende Parameterbereiche mit stabilen Lösungen: Im Rayleigh-Zahlen-Bereich $R < R_{UP}$ existiert nur die stabile Ruhelösung. Für

$$R_{UP} < R < R_c^{(os)}, \quad \text{mit } R_c^{(os)} - R_{UP} \sim L(1 + 4\gamma) + \mathcal{O}(\Delta\psi), \quad (2.2.66)$$

sind die Ruhelösung und der obere Ast der stationäre Rollenlösung stabil gegenüber infinitesimalen Störungen. In dem kleinen Kontrollparametergebiet

$$R_c^{(os)} < R < R_{SV}^{(TW)}, \quad \text{mit } R_{SV}^{(TW)} - R_c^{(os)} \sim \Delta\psi^2 \cdot L^{-2}(1 + 2\gamma) + \mathcal{O}(\Delta\psi^3), \quad (2.2.67)$$

koexistieren die stabile Wanderwellenlösung und die stabile stationäre Lösung. Für $R > R_{SV}^{(TW)}$ ist lediglich die stationäre Lösung stabil. Der Lösungsast der stehenden Welle ist dagegen im gesamten Parametergebiet instabil.

Aus Abbildung 2.9 ist zu entnehmen, daß der Lösungsast der Wanderwelle für $R > R_c^{(os)}$ nur bei quasistationärer Erhöhung des Kontrollparameters Rayleigh-Zahl aus dem Ruhezustand zu erreichen ist. Dieser Lösungsast endet bei

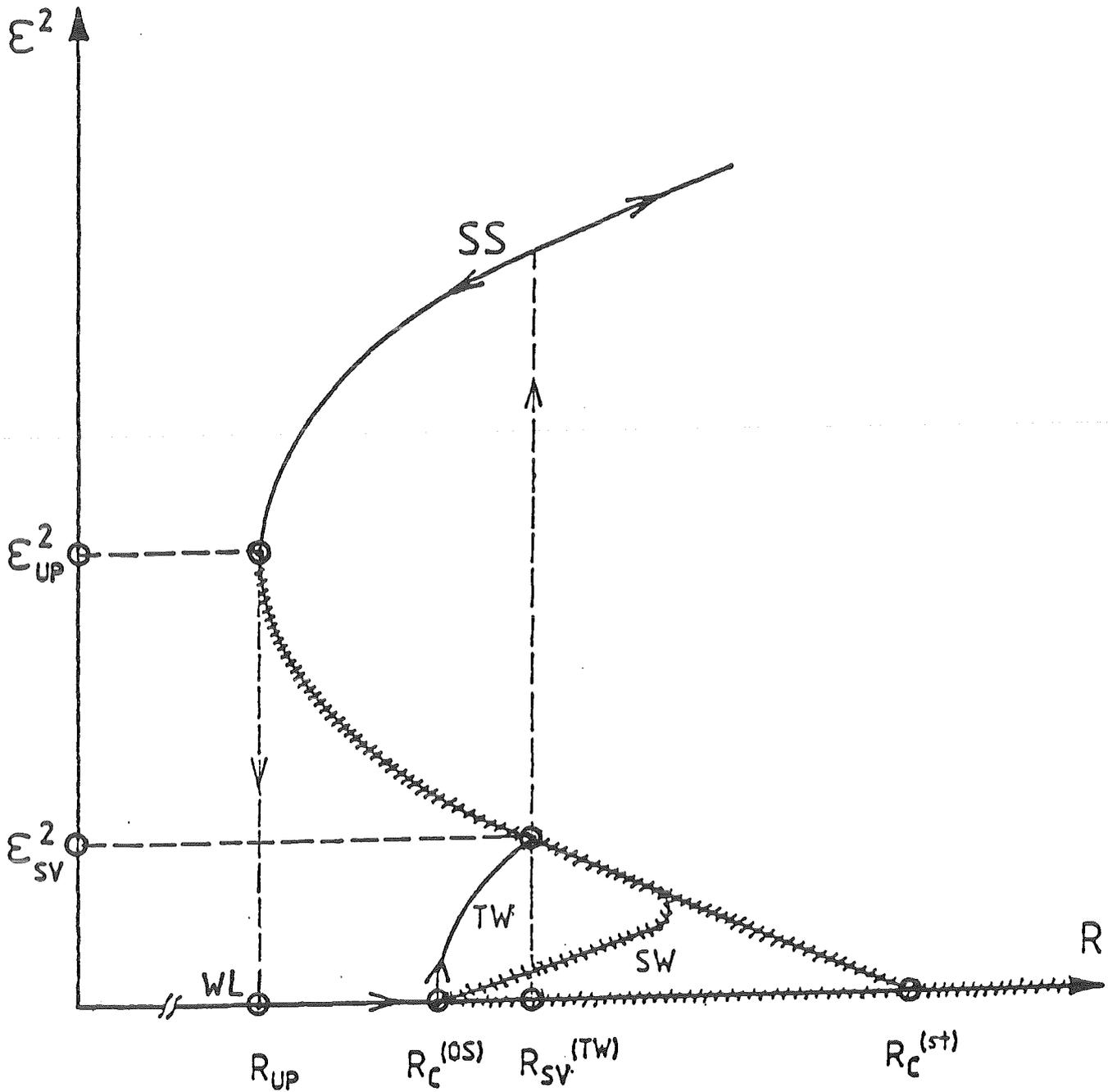


Abb.2.9: Verzweigungsdiagramm der Rollenlösungen:
 WL = Wärmeleitzustand, Ruhelösung SS = stationäre Lösung,
 TW = wandernde Wellenlösung, SW = stehende Wellenlösung,
 Instabile Lösungsäste sind schraffiert.

$R = R_{SV}^{(TW)}$ auf dem unteren, instabilen Ast der stationären Lösung. In einem Experiment findet dort ein Sprung auf den oberen, stabilen stationären Lösungsast

statt. Wird die Rayleigh-Zahl nun wieder in kleinen Schritten abgesenkt, so erfolgt bei $R = R_{UP}$ der Rücksprung vom stationären Lösungsast direkt in die Ruהלösung, da der Existenzbereich der Wanderwellenlösung komplett vom unterkritischen Bereich des stationären Astes überdeckt wird. Das Auftreten der verschiedenen stabilen Lösungen ist demnach von einem starken Hystereseverhalten geprägt. In Abbildung 2.9 sind die bei entsprechender Variation der Rayleigh-Zahl durchfahrenen Wege mit Pfeilen gekennzeichnet.

Ein wichtiges Ergebnis unserer Untersuchungen ist, daß die Nicht-Boussinesq-Zahl γ die in Abbildung 2.9 dargestellte Verzweigungstopologie der zweidimensionalen Lösungen qualitativ nicht beeinflußt. Eine Erhöhung des γ -Wertes bewirkt im wesentlichen eine Verschiebung des Verzweigungsschaubilds 2.9 hin zu größeren Rayleigh-Zahlen aufgrund der stabilisierenden Wirkung des Nicht-Boussinesq-Effekts auf den Ruhezustand. Diese Verschiebungen sind bereits in den Abbildungen 2.6 und 2.8 dargestellt. Die oben erläuterten stabilen Existenzbereiche der verschiedenen Lösungen sind damit im starken Maße von der Kennzahl γ abhängig, siehe auch die Abbildung 2.6 und 2.8. Für positive γ -Werte ergibt sich nach Gl. (2.2.66) eine deutliche Ausweitung des unterkritischen Rayleigh-Zahlen-Bereichs der stationären Lösung. Damit verbunden ist eine Vergrößerung des Parametergebiets, in dem Störungen endlicher Amplitude das sprunghafte Einsetzen stationärer Konvektion bewirken, bevor die oszillatorische Stabilitätsgrenze des Ruhezustands erreicht ist. Ein experimenteller Nachweis der stabilen Wanderwellenlösung wird dadurch merklich erschwert. Des weiteren ist für $\gamma > 0$ nach Gl. (2.2.67) eine Ausweitung des Existenzbereichs der Wanderwellenlösung festzustellen. Dieser Bereich ist in der Umgebung des CT-Punktes jedoch äußerst klein und in einem entsprechenden Experiment schwer auflösbar.

Das Experiment von Zimmermann (1990) ist bei einer stark negativen Separationszahl der Größe $\psi \approx -0,4$ durchgeführt worden, bei der die stationäre und oszillatorische Stabilitätsgrenze bei deutlich verschiedenen kritischen Rayleigh-Zahlen liegen. Mit unserem analytischen Verfahren können die Wechselwirkung der stationären Lösung und der Wanderwellenlösung dagegen nur in der Umgebung des CT-Punktes mit $\psi_{CT} \approx -10^{-4}$ beschrieben werden, da in diesem Kennzahlenbereich die Amplituden der beiden Lösungen, wie von unserer Störungsentwicklung gefordert, klein bleiben. Es ist jedoch aus unseren bisherigen Überlegungen zu schließen, daß der nicht-Boussinesqsche Effekt in Form einer nichtlinearen Zustandsgleichung das von Zimmermann beobachtete Verschwinden der zweidimensionalen Wanderwellenlösung bei einer Absenkung des mittleren Tem-

peraturniveaus der Schicht nicht bewirken kann. Mit zunehmenden γ -Werten finden wir eine Vergrößerung des stabilen Existenzbereichs dieser Lösung.

Zur Erklärung der Zimmermannschen Beobachtungen müssen deshalb auch andere Nicht-Boussinesq-Effekte wie beispielsweise die von Kolodner et al. (1988) gemessene Konzentrations- und Temperaturabhängigkeit des Sorét-Koeffizienten S_0 in Erwägung gezogen werden. Hieraus resultiert ein über die Schichthöhe nicht konstanter Kontrollparameter ψ , wodurch das Verzweigungsverhalten der Lösungen entscheidend beeinflusst werden kann. Diese Betrachtungen sind jedoch nicht Gegenstand unserer Untersuchungen.

2.2.4.5 Nichtlineare, dreidimensionale Konvektion

Es wird nun das Verzweigungsverhalten von dreidimensionalen Konvektionslösungen mit hexagonaler Symmetrie unter dem Einfluß des Nicht-Boussinesq-Effekts γ untersucht. Im Kapitel (2.2.4.1) haben wir die hier betrachteten Strömungsmuster definiert. Die erforderliche Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten für die Rayleigh-Zahl und Oszillationsfrequenz ist in der Literatur auch für den Boussinesqschen Fall mit $\gamma = 0$ bisher nicht durchgeführt worden.

Die Auswertung der Lösbarkeitsbedingung des Randwert-Problems der Ordnung $(\varepsilon^2, \gamma^0)$ ergibt, daß sämtliche Entwicklungskoeffizienten verschwinden. Aufgrund der Symmetrie der Gleichungen bezüglich der halben Schichthöhe erhalten wir für die untersuchten Strömungsmuster

$$R_{10} = \omega_{10} = 0. \quad (2.2.68)$$

Die für die weiteren Rechnungen benötigten Partikulärlösungen der Ordnung $(\varepsilon^2, \gamma^0)$ können als Produkte von zwei Summen mit je drei um 60° gegeneinander gedrehten Wellenvektoren dargestellt werden. Diese Lösungen sind im Anhang unter Kapitel 5.2.2 enthalten. Sie sind komplizierte Funktionen des Skalarprodukts π_{NL} von je zwei Wellenvektoren der Einzelsummen nach Gl. (2.2.38).

In der Ordnung $(\varepsilon^3, \gamma^0)$ führt die Elimination der Sälukarterme nach Gl. (2.2.43) auf die folgenden Ergebnisse für die gesuchten Entwicklungskoeffizienten:

Für das stationäre Hexagon ergibt sich für eine beliebige Separationszahl ψ

$$\frac{R_{20}^{(st,H)}}{R_{00}^{(st)}} = \frac{\frac{1}{4} \pi^2 A_H^2}{1 + \psi(1 + L^{-1})} \left\{ 3 \{1 + \psi(1 + L^{-1} + L^{-2} + L^{-3})\} + \frac{34}{35} \frac{\psi L^{-3}}{1 + \psi(1 + L^{-1})} \right. \\ \left. + \frac{302}{259} \{1 + \psi(1 + L^{-1} + L^{-2})\} \left\{ 1 + \frac{126}{755} \frac{\psi L^{-2}}{1 + \psi(1 + L^{-1})} \right\} \right\}. \quad (2.2.69)$$

Speziell am CT-Punkt $\psi = \psi_{CT}$ gilt

$$\frac{R_{20}^{(st,H)}}{R_{00}^{(st)}} \Big|_{CT} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{139}{35} \pi^2 A_H^2 L^{-1} + \mathcal{O}(\Delta\psi), \quad (2.2.70)$$

Für das wandernde Hexagon erhalten wir in der Umgebung des CT-Punktes

$$\frac{R_{20}^{(TW,H)}}{R_{00}^{(os)}} \Big|_{CT} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1061}{1225} \pi^2 A_H^2 L^{-1} + \mathcal{O}(\Delta\psi), \quad (2.2.71)$$

$$2\omega_{00} \omega_{20}^{(TW,H)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{11257}{2450} \pi^2 A_H^2 L^{-1} + \mathcal{O}(\Delta\psi).$$

Für das ortsfest oszillierende Hexagon kommt

$$\frac{R_{20}^{(SW,H)}}{R_{00}^{(os)}} \Big|_{CT} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4736}{1225} \pi^2 A_H^2 + \mathcal{O}(\Delta\psi), \quad (2.2.72)$$

$$2\omega_{00} \omega_{20}^{(SW,H)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{24067}{2450} \pi^2 A_H^2 + \mathcal{O}(\Delta\psi).$$

In dem Randwert-Problem der Ordnung $(\varepsilon^2, \gamma^1)$ ist die Symmetrie der Gleichungen bezüglich der halben Schichthöhe aufgrund des Nicht-Boussinesq-Effekts γ gebrochen. Für das stationäre Hexagonmuster ergibt sich deshalb in dieser Ordnung ein nichttrivaler Entwicklungskoeffizient für die Rayleigh-Zahl. Nur Produkte von zwei stationären ε^1 -Lösungen mit hexagonaler Symmetrie können Säkularterme erzeugen, die wieder von gleicher horizontaler Struktur sind. Für die zeitlich periodischen Hexagonmuster erhält man dagegen in dieser Ordnung keine Beiträge zur Rayleigh-Zahl und Oszillationsfrequenz. Zwei Wellenpakete mit gleicher Frequenz können durch nichtlineare Wechselwirkungen keine Moden generieren, die wieder von gleicher zeitlicher Struktur sind. Die aus Hopf-Verzweigungen entspringenden Lösungen zeigen deshalb immer ein symmetrisches Verhalten, vergleiche auch Guckenheimer, Holmes (1983). Im einzelnen er-

halten wir für die Entwicklungskoeffizienten in der betrachteten Ordnung folgende Ergebnisse:

$$\frac{R_{11}^{(st,H)}}{R_{00}^{(st)}} = -\frac{40}{21\pi} A_H \frac{1 + \psi(1 + L^{-1} + \frac{4}{25} L^{-2})}{\{1 + \psi(1 + L^{-1})\}^2} \quad (2.2.73)$$

Am CT-Punkt gilt dann

$$\left. \frac{R_{11}^{(st,H)}}{R_{00}^{(st)}} \right|_{CT} = -\frac{8}{5\pi} A_H (1 + L + L^2) + \mathcal{O}(\Delta\psi) \quad (2.2.74)$$

Für wandernde und ortsfest oszillierende Hexagon kommt aufgrund von Symmetrieüberlegungen

$$R_{11}^{(TW,H)} = R_{11}^{(SW,H)} = \omega_{11}^{(TW,H)} = \omega_{11}^{(SW,H)} = 0. \quad (2.2.75)$$

Für das stationäre Hexagon liefert unsere Störungsentwicklung eine unsymmetrische Verzweigungsgleichung, die der in Gl. (2.2.45) abgeleiteten Beziehung entspricht. Das Verzweigungsverhalten der stationären Hexagonlösung in der Nähe des CT-Punktes ist für den Fall $\gamma=0$ in Abbildung 2.10a und für den nicht-Boussinesqschen Fall mit $\gamma>0$ in Abbildung 2.10b qualitativ dargestellt.

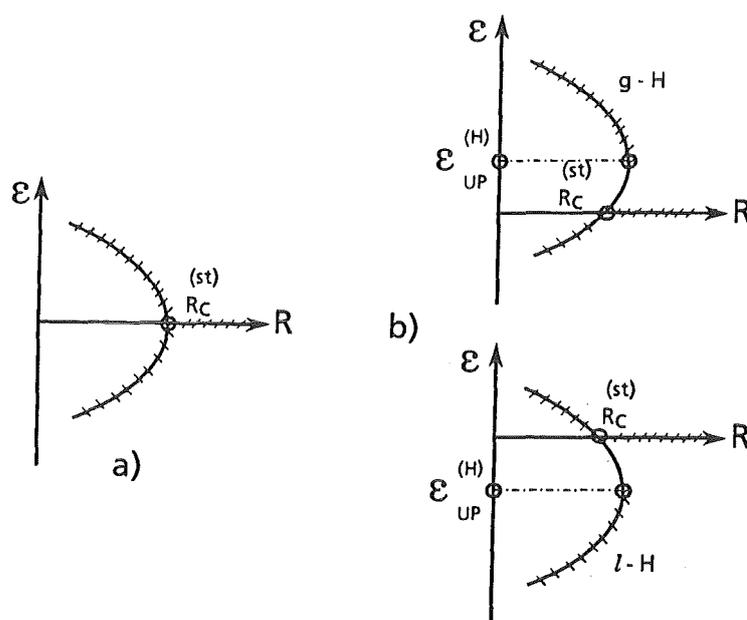


Abb. 2.10: Verzweigungsdiagramm der stationären Hexagonlösung für
a) $\gamma=0$ und b) $\gamma>0$.

Für $\gamma=0$ verzweigt der Lösungsast der stationären Hexagons unterkritisch aufgrund von $R_{20}^{(st, H)}|_{CT} < 0$ und ist damit instabil. Diese symmetrische Rückwärtsverzweigung „entfaltet“ sich für $\gamma > 0$ in eine Verzweigung nach zwei Seiten gemäß Abbildung 2.10b. Diese in der Dissertation von Brand (1981) angedeutete Verzweigungsentfaltung in binären Flüssigkeitsmischungen unter der Wirkung von Nicht-Boussinesq-Effekten wird durch unsere Rechnungen nachgewiesen. Da das Vorzeichen des Entwicklungskoeffizienten $R_{11}^{(st, H)}|_{CT}$ laut Gl. (2.2.74) vom Vorzeichen der Amplitude A_H festgelegt wird, ist zwischen dem Verzweigungsverhalten von g -Hexagons mit $A_H < 0$ und $R_{11}^{(st, H)} > 0$ sowie ℓ -Hexagons mit $A_H > 0$ und $R_{11}^{(st, H)} < 0$ zu unterscheiden. Für g -Hexagons mit mittigem Abstrom verzweigt der obere Lösungsast überkritisch, während er für ℓ -Hexagons mit mittigem Aufstrom unterkritisch verzweigt. Der Amplitudenwert des Umkehrpunktes $\varepsilon_{UP}^{(H)}$ nach Gl. (2.2.46) lautet

$$\varepsilon_{UP}^{(H)} = - \frac{168}{139\pi} \gamma L(1+L+L^2) A_H. \quad (2.2.76)$$

Bei den zeitlich periodischen dreidimensionalen Strömungsmustern entfällt das Unterscheidungsmerkmal von Auf- und Abstrom in der Mitte. Die Nicht-Boussinesq-Zahl γ hat dadurch keinen Einfluß auf das in Abbildung 2.11 dargestellten Verzweigungsverhalten der wandernden und ortsfest oszillierenden Hexagonlösung. Die beiden Lösungsäste entspringen im Hopf-Punkt

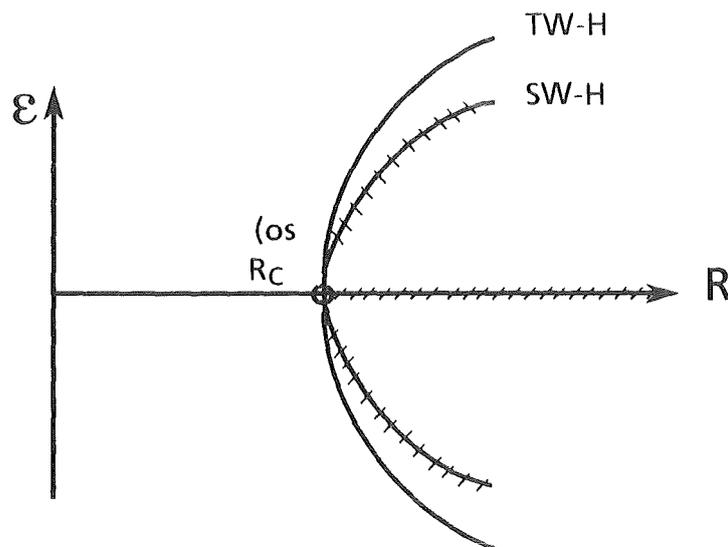


Abb. 2.11: Verzweigungsverhalten der zeitlich periodischen Hexagonlösungen
TW-H: wanderndes Hexagon, SW-H: ortsfest oszillierendes Hexagon.

bei $R = R_c^{(os)}$ in einer Vorwärtsverzweigung, da nach Gl. (2.2.71) und Gl. (2.2.72) die Entwicklungskoeffizienten $R_{20}^{(TW, H)}$ und $R_{20}^{(SW, H)}$ in der Umgebung des CT-Punktes positiv sind. Die Amplitude des wandernden Hexagons wächst dabei für $R > R_c^{(os)}$ schneller an, siehe Abb. 2.11. Analog zu den Schlüssen von Knobloch (1986) zur Stabilität der zweidimensionalen zeitlich periodischen Lösungen gehen wir davon aus, daß der Lösungsast des ortsfest oszillierenden Hexagons instabil ist. Die Gültigkeit dieser Verallgemeinerung der Stabilitätsaussage von Knobloch auf drei Dimensionen ist jedoch in der Literatur noch nicht nachgewiesen worden. In Abbildung 2.11 ist der instabile Ast schraffiert eingezeichnet.

Die Oszillationsfrequenz der zeitlich periodischen Hexagons nimmt nach Gl. (2.2.71) und Gl. (2.2.72) mit wachsender Amplitude ab, so daß bei bestimmten Amplitudenwerten die Oszillationen verschwinden. Die Lösungsäste enden in diesen Punkten. Für das wandernde Hexagon erhalten wir für $\gamma = 0$ beispielsweise den Endpunkt

$$\varepsilon_{EP}^{(TW, H)^2} = \frac{1225}{2963} \frac{2}{\pi^2 A_H^2} \frac{(1+L+L^2)^2}{1+L} \cdot \Delta\psi. \quad (2.2.77)$$

Es kann leicht gezeigt werden, daß im Boussinesqschen Fall mit $\gamma = 0$ der Lösungsast des wandernden Hexagons mit verschwindender Frequenz auf dem Lösungsast des nach Abbildung 2.10a unterkritisch verzweigenden Lösungsastes des stationären Hexagons endet. Unter dem Einfluß des Nicht-Boussinesq-Effekts γ wird diese Wechselwirkung der Lösungen jedoch zerstört, da der Lösungsast des wandernden Hexagons seine symmetrische Verzweigungsstruktur behält, während sich die Verzweigung der stationären Hexagonlösung nach Abbildung 2.10b entfaltet. Über die Wechselwirkungen des ortsfest oszillierenden Hexagons und des stationären Hexagons können wir in der betrachteten Ordnung unserer Störungsentwicklung keine Aussagen machen. Auf eine weitere Betrachtung des instabilen, ortsfest oszillierenden Hexagons wollen wir deshalb im folgenden verzichten.

2.2.4.6 Verzweigungsdiagramm und Stabilität der Hexagonlösungen

Abschließend wollen wir die im Kapitel (2.2.4.5) abgeleiteten Ergebnisse kombinieren. Abbildung 2.12 zeigt das Verzweigungsdiagramm der Hexagonlösungen in der Umgebung des CT-Punktes. In Abbildung 2.12a ist der Boussinesqsche Fall mit $\gamma = 0$ und in Abbildung 2.12b der nicht-Boussinesqsche Fall mit $\gamma > 0$ qualita-

tiv in der R - ε -Ebene dargestellt. Zur besseren Übersicht ist nur der positiv Amplitudenbereich mit $\varepsilon > 0$ eingezeichnet. Die aufgrund ihrer rückwärtigen Verzweigungsrichtung instabilen Lösungsäste sind schraffiert. Die nach vorne gerichteten Bereiche der Lösungsäste sind stabil gegenüber der Klasse der dreidimensionalen Störungen.

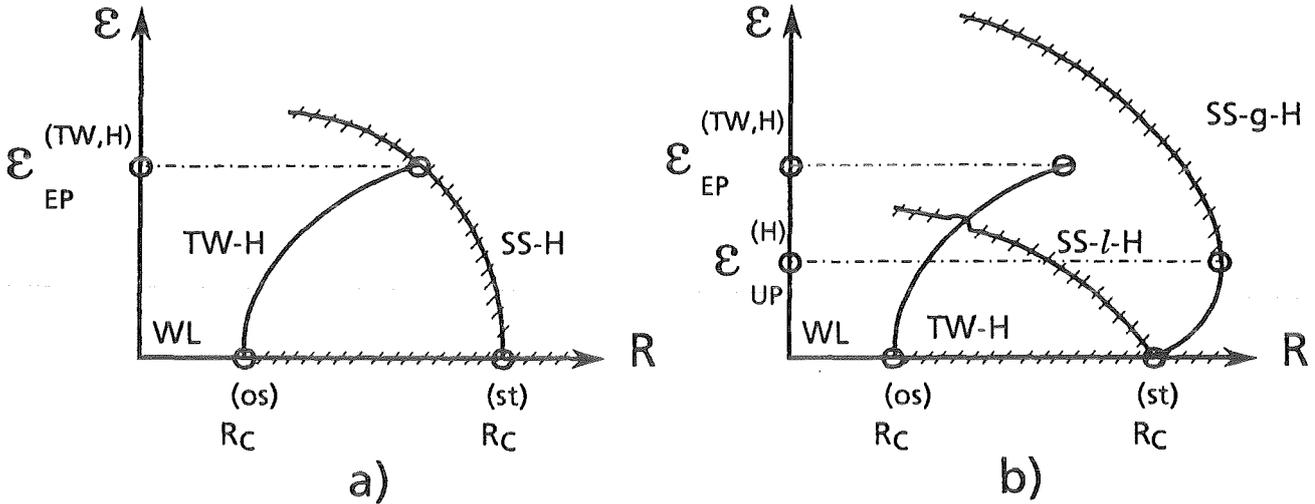


Abb. 2.12: Verzweigungsdiagramm der Hexagonlösungen für a) $\gamma = 0$ und b) $\gamma > 0$. WL: Wärmeleitzustand, Ruhelösung, SS-H: stationäre Hexagonlösung, SS-g-H: stationäre g-Hexagonlösung, SS-l-H: stationäre l-Hexagonlösung, TW-H: wandernde Hexagonlösung.

Für $\gamma = 0$ endet nach Abbildung 2.12a der Lösungsast des wandernden Hexagon auf dem der stationären Lösung. Durch die "Entfaltung" der symmetrischen Verzweigung der stationären Hexagonlösung für den nicht-Boussinesqschen Fall mit $\gamma > 0$ endet der Lösungsast des wandernden Hexagon nun in einem isolierten Punkt in der Parameterebene, siehe Abbildung 2.12b. Eine derartige Verzweigungstopologie ist bisher in der Literatur nicht beschrieben worden.

Es gilt nun noch, die Stabilität der Hexagonlösungen gegenüber der Klasse der zweidimensionalen Störungen zu diskutieren. Gruppentheoretische Untersuchungen von Roberts et al. (1986) zur Hopf-Verzweigung mit hexagonaler Symmetrie zeigen, daß falls die zweidimensionale Wanderwellenlösung eine stabile Strömungsform ist, alle anderen zeitlich periodischen Muster instabil sind. In unserem Fall spricht für die Stabilität der zweidimensionalen Wanderwellenlösung, daß ihre Amplitude von den im Hopf-Punkt $R_c^{(os)}$ entspringenden Lösungen für $R > R_c^{(os)}$ am schnellsten anwächst, siehe die Abbildungen 2.9 und 2.11. Die zweidimensionale Wanderwellenlösung stellt damit den effektivsten Wärmetransportmechanismus bei oszillatorischem Konvektionsbeginn dar. Die Stabilität des Musters mit dem optimalen Wärmetransport wurde von Golubitsky et al. (1984)

für symmetrische, stationäre Lösungen hergeleitet. Die Verallgemeinerung dieser Aussage für symmetrische, zeitlich periodische Lösungen ist jedoch bisher nicht durchgeführt worden. Die Experimente von Zimmermann (1990) legen aber ebenfalls den Schluß nahe, daß die wandernde Hexagonlösung instabil ist, da diese Lösung im Gegensatz zur zweidimensionalen Wanderwellenlösung nicht zu beobachten ist.

Der nach vorwärts gerichtete, an sich stabile Teil der stationären g-Hexagonlösung liegt isoliert in einem kleinen Rayleigh-Zahlen-Bereich, vergleiche Abbildung 2.12b. Er besitzt keine Verbindung mit einer anderen stabilen Lösung und ist deshalb in einem Experiment nur sehr schwer nachzuweisen. Naturgemäß wird der Lösungszweig der stationären Hexagons bei großen Amplituden einen weiteren Umkehrpunkt besitzen. Für den Nachweis müßte analog der Rollenlösung der Entwicklungskoeffizient R_{40} für die Rayleigh-Zahl berechnet werden. Der analytische Nachweis scheitert jedoch an dem zu großen Rechenaufwand. Wir können in der betrachteten Ordnung unserer Störungsentwicklung deshalb keine eindeutig stabilen Existenzbereiche der stationären Hexagonlösung angeben. Die Wechselwirkungen von stationären Rollen- und Hexagonlösungen bei großen Amplituden sind mit unserer analytischen Vorgehensweise nicht zu erfassen. Das von Zimmermann beobachtete Auftreten von stationären Hexagons in binären Flüssigkeitsmischungen unter der Wirkung von Nicht-Boussinesq-Effekten entzieht sich unserer theoretischen Betrachtung.

2.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Mit einer Störungsrechnung wird die Wirkung eines nicht-Boussinesqschen Flüssigkeitsverhaltens in Form einer nichtlinearen Dichte-Temperatur-Beziehung auf die Konvektion binärer Flüssigkeitsmischungen in porösen Medien untersucht. Als Entwicklungsparameter werden die Amplitude ε der Strömung und die Nicht-Boussinesq-Zahl γ verwendet. Eine weitere Eigenschaft der Mischung ist ihr negativer Sorét-Effekt. Der von außen angelegte, destabilisierende Temperaturgradient induziert dabei einen Konzentrationsgradienten, der den Ruhezustand in der Schicht stabilisiert. Ein Maß für die Stärke dieses Effekts ist die Separationszahl ψ . Für hinreichend negative ψ -Werte ist eine oszillatorische Konvektionsinstabilität möglich.

Die Resultate der linearen Theorie zeigen, daß der Nicht-Boussinesq-Effekt in realen Flüssigkeiten mit $\gamma > 0$ zu einer Stabilisierung des Ruhezustandes beiträgt.

Die Stabilitätsgrenzen für den Einsatz von stationärer und oszillatorischer Konvektion verschieben sich zu höheren kritischen Rayleigh-Zahlen hin. Dies ist physikalisch dadurch bedingt, daß aufgrund des nicht-Boussinesq-Effekts der destabilisierende Dichtegradient über die Schichthöhe vermindert wird. Positive γ -Werte unterstützen folglich die Wirkung des negativen Sorét-Effekts. Deshalb vergrößert sich durch den Nicht-Boussinesq-Effekt der Parameterbereich, für den ein Übergang zu zeitlich-periodischer Konvektion stattfinden kann. Der Kodimension-Zwei-Verzweigungspunkt, in dem die stationäre und oszillatorische Instabilität die gleiche kritische Rayleigh-Zahl besitzen, verschiebt sich für $\gamma > 0$ zu betragsmäßig kleineren, negativen Separationszahlen. Diese Untersuchungen sind bisher in der Literatur nicht enthalten. Werden die Grenzfälle $\gamma = 0$ oder $\psi = 0$ betrachtet, so stehen unsere Ergebnisse in Einklang mit bereits bekannten Resultaten von Brand, Steinberg (1983a, b) oder Busse (1967).

In der Umgebung des Kodimension-Zwei-Verzweigungspunktes wird das Verzweigungsverhalten der an den Stabilitätsgrenzen angefachten zwei- und dreidimensionalen stationären und oszillatorischen nichtlinearen Konvektionslösungen bestimmt. Diese analytischen Rechnungen sind nach unserer Kenntnis der Literatur auch für den Boussinesqschen Fall mit $\gamma = 0$ bisher nicht durchgeführt worden.

Für den Fall zweidimensionaler Konvektion wird nachgewiesen, daß oszillatorische Strömung in Form von wandernden Wellen einsetzt. Es zeigt sich, daß unter der Wirkung des Nicht-Boussinesq-Effekts der Existenzbereich der Wanderwellenlösung vergrößert wird. Dieses wichtige Ergebnis ist neu. Zimmermann (1990) beobachtet in seinen Experimenten, daß bei einer Absenkung der mittleren Temperatur der Schicht die zweidimensionale Wanderwellenlösung verschwindet. Er führt dies auf eine nichtlineare Dichteverteilung über die Schichthöhe zurück. Aus unseren Rechnungen ist dagegen zu schließen, daß diese Vermutung nicht zutreffend ist, da durch diesen Nicht-Boussinesq-Effekt eine stabile Wanderwellenlösung in einem größeren Rayleigh-Zahlen- und Amplitudenbereich auftreten kann. Des weiteren wird gezeigt, daß positive γ -Werte zu einer deutlichen Ausweitung des unterkritischen Bereichs der stationären Lösung führen. Eine qualitative Änderung der Verzweigungstopologie der zweidimensionalen Lösungen wird durch den Nicht-Boussinesq-Effekt jedoch nicht bewirkt. Die für den Fall $\gamma > 0$ gefundenen Resultate entsprechen physikalisch der konvektionshemmenden Wirkung des Nicht-Boussinesq-Effekts.

Die Untersuchung der Wechselwirkungen zwischen den zweidimensionalen Lösungen ergibt, daß die Wanderwellenlösung auf dem unterkritischen Teil des stationären Lösungsastes endet. Dort findet ein sprunghafter Übergang zu stationärer Konvektion statt. Die Übergänge des Ruhezustands in den Wanderwellenzustand und des Wanderwellenzustands in den Zustand stationärer Konvektion sind mit einer Hysterese verbunden. Durch den Nicht-Boussinesq-Effekt werden diese Hystereseerscheinungen noch stärker ausgeprägt. Ein vergleichbares Verzweigungsverhalten ist bisher nur im Rahmen numerischer Untersuchungen zur thermohalinen Konvektion in Boussinesqschen Flüssigkeitsmischungen angegeben worden, siehe Deane et al. (1987) und Knobloch, Moore (1990).

Für den Fall dreidimensionaler Konvektion wird gezeigt, daß der Nicht-Boussinesq-Effekt eine "Entfaltung" der Verzweigung der stationären Hexagonlösung in eine Verzweigung nach zwei Seiten von Hexagons mit Aufstrom oder Abstrom in der Mitte bewirkt. Dies ist auf den symmetriebrechenden Effekt der nicht-Boussinesqschen Eigenschaft zurückzuführen. Dagegen bleiben für $\gamma \neq 0$ die Verzweigungen der zeitlich periodischen Hexagonlösungen symmetrisch, weil bei diesen Lösungen das Unterscheidungsmerkmal zwischen mittigem Auf- und Abstrom verloren geht. Als Folge davon endet unter der Wirkung des Nicht-Boussinesq-Effekts der Lösungsast des wandernden Hexagons nicht mehr auf dem des stationären Hexagonmusters, sondern in einem isolierten Punkt in der Zustandsebene. Für ein derartiges Verzweigungsverhalten liegt bisher in der Literatur kein Beispiel vor. Das von Zimmermann (1990) experimentell beobachtete Auftreten von stationären Strömungsformen mit hexagonaler Struktur läßt sich mit unserer analytischen Vorgehensweise jedoch nicht nachweisen.

3. WIRKUNG EINER FREIEN BERANDUNG IN FORM EINER DÜNNEN EISSCHICHT

In diesem Kapitel wird die Wirkung einer dünnen Eisschicht auf die Konvektionsinstabilität einer binären Flüssigkeitsschicht behandelt. Die untersuchte Anordnung ist in Kapitel 1.2 beschrieben. Einige Teile unserer Betrachtungen erfolgen analog zu den Ausführungen in Kapitel 2.1 und werden nur kurz dargestellt. Wesentliche Änderungen ergeben sich in den Randbedingungen. Es sind Rand- und Übergangsbeziehungen an einer freien Phasentrennfläche zu formulieren. Des Weiteren wird jetzt die Impermeabilität des unteren Randes berücksichtigt. Das lineare Stabilitätsproblem wird analytisch mit einem Galerkin-Verfahren gelöst.

3.1 Modellgleichungen

3.1.1 Grundgleichungen für die feste und flüssige Phase

Der Zustand in der festen Phase wird durch eine Wärmeleitungsgleichung beschrieben. In der flüssigen Phase gelten die Erhaltungsgleichungen (2.1.1). Der vollständige Satz der Grundgleichungen lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} T^{(S)} = \kappa^{*(S)} \nabla^2 T^{(S)} ; \quad (3.1.1a)$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{v}} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C + (\underline{\underline{v}} \cdot \nabla) C = -\nabla \cdot \underline{\underline{j}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T + (\underline{\underline{v}} \cdot \nabla) T = \kappa^* \nabla^2 T, \quad (3.1.1b)$$

$$\underline{\underline{v}} = -\frac{K}{\mu} \left(\nabla p + \rho_f g e_z \right); \quad e_z = (0, 0, 1).$$

In der Differentialgleichung (3.1.1a) bezeichnen $T^{(S)}$ die Temperatur und $\kappa^{*(S)}$ die Temperaturleitfähigkeit der erstarrten Schicht. Der Massenstrom $\underline{\underline{j}}$ in Gl. (3.1.1b) ist durch die Beziehung (1.2.3) und die Fluidichte ρ_f durch eine lineare Zustandsgleichung nach Gl. (1.2.1) mit $\beta=0$ gegeben. In der Wärmetransportgleichung in Gl. (3.1.1b) ist bereits das Fouriersche Gesetz gemäß Gl. (2.1.2) eingesetzt und von der Annahme $(\rho c_p)^* = (\rho c_p)_f$ gemäß Kapitel 2.1.1 Gebrauch gemacht.

Die untere Berandung der Flüssigkeit bei $z=0$ ist perfekt wärmeleitend und impermeabel. An der oberen Berandung bei $z=h_L+h_S$ wird die Temperatur vorgegeben. Man erhält an diesen Stellen die Randbedingungen

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad w = T = j_z = 0; \\ z = h_L + h_S : \quad T^{(S)} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

An der Phasentrennfläche bei $z = \eta(x, y, t)$ gelten Erhaltungsbedingungen für Masse, Energie und Konzentration. Diese Bilanzen lauten in allgemeiner Form (siehe Zimmermann (1990))

$$z = \eta : \quad \underbrace{v \cdot n}_{\approx} = \left(1 - \frac{\rho^{(S)}}{\rho_o}\right) \frac{\partial}{\partial t} \eta, \quad (3.1.3a)$$

$$\left[\lambda^{*(S)} \nabla T^{(s)} - \lambda^* \nabla T \right] \cdot \underbrace{n}_{\approx} = \rho^{(S)} \Lambda \frac{\partial}{\partial t} \eta, \quad (3.1.3b)$$

$$\underbrace{j \cdot n}_{\approx} = \frac{\rho^{(S)}}{\rho_o} C \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (3.1.3c)$$

Es ist berücksichtigt, daß bei Phasenübergängen ein Dichtesprung und bedingt durch die Schmelzenthalpie Λ ein Sprung in den Wärmeströmen auftritt. Da nur die reine Substanz ausfriert, wird die gelöste Komponente beim Gefrieren in die flüssige Phase zurückgeworfen. In den Übergangsbeziehungen (3.1.3) bezeichnen $\rho^{(S)}$ und $\lambda^{*(S)}$ die Dichte und Wärmeleitfähigkeit der festen Phase.

Unter der Annahme, daß an der Phasentrennfläche thermodynamisches Gleichgewicht vorliegt, ergibt sich die thermische Randbedingung

$$z = \eta : \quad T = T^{(S)} = T_M. \quad (3.1.4)$$

Dabei verwenden wir für die konzentrationsabhängige Schmelztemperatur T_M den linearen Zusammenhang nach Gl. (1.2.7). Die Auswirkung der Krümmung der Phasentrennfläche auf die Schmelztemperatur, der sogenannte Gibbs-Thomson-Effekt, wird vernachlässigt.

3.1.2 Vereinfachende Annahmen

Im weiteren werden folgende vereinfachende Annahmen gemacht:

- (i) Die Stoffdaten der flüssigen und der festen Phase unterscheiden sich nur wenig. Eine erste Approximation liefert dann

$$\rho^{(S)} = \rho_o; \quad \kappa^{*(S)} = \kappa^*; \quad \lambda^{*(S)} = \lambda^*. \quad (3.1.5)$$

- (ii) Die Phasentrennfläche besitzt eine scharfe Kontur. Es bildet sich keine Mischzone von flüssigem und festem Material aus. Dies ist gleichbedeutend

mit der Annahme, daß die binäre Flüssigkeit eine scharfe Schmelztemperatur hat und das idealisierte Phasendiagramm nach Abbildung 1.3 gilt.

- (iii) Im Ruhezustand nach Abbildung 1.2a ist die Dicke der festen Phase klein gegenüber der Schichthöhe der Flüssigkeit. Es gilt die "dünnes-Eis"-Approximation

$$\frac{h_s}{h_L} \ll 1. \quad (3.1.6)$$

3.1.3 Der stationäre Grundzustand und Störungsentwicklung

Der stationäre Grundzustand der Ruhe des Systems mit $\bar{v} = 0, \bar{j} = 0$ und mit der hydrostatischen Druckverteilung $p = \bar{p}$ ist der Bezugszustand unserer Stabilitätsuntersuchung. Die Phasentrennfläche ist eben und befindet sich an der Position $z = \bar{\eta} = h_L$, siehe Abbildung 1.2a. Für die Temperaturverteilung über der flüssigen und festen Phase erhalten wir die linearen Verläufe

$$\begin{aligned} \bar{T}_{(z)} &= \bar{T}_M - (T_o - \bar{T}_M) \frac{z - h_L}{h_L}, \\ \bar{T}_{(z)}^{(S)} &= \bar{T}_M - (\bar{T}_M - T_1) \frac{z - h_L}{h_S}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Im Ruhezustand wird unter der Wirkung der Thermodiffusion in der flüssigen Phase ein Konzentrationsprofil aufgebaut. Es bestimmt sich entsprechend zu Kapitel 2.1.2 aus der Massenstromgleichung (1.2.3) unter Benutzung der integralen Massenbilanz für die gelöste Komponente. Da nur die reine Flüssigkeit gefriert, lautet diese Massenbilanz (vgl. Gl. (2.1.7))

$$C_o \cdot (h_L + h_S) = \int_o^{h_L} \bar{C}_{(z)} dz. \quad (3.1.8)$$

Für die Konzentrationsverteilung im Ruhezustand erhalten wir damit den linearen Verlauf

$$\bar{C}_{(z)} = C_o \left(1 + \frac{h_S}{h_L}\right) - S_o C_o (1 - C_o) (T_o - \bar{T}_M) \left(\frac{z}{h_L} - \frac{1}{2}\right). \quad (3.1.9)$$

Die Schmelztemperatur \bar{T}_M der ruhenden Flüssigkeit ergibt sich rekursiv aus Gleichung (3.1.9):

$$\bar{T}_M = T_{MO} + m \cdot \bar{C}_{(h_L)}. \quad (3.1.10)$$

Die Wärmestrom-Randbedingungen (3.1.3b) verknüpft im Ruhezustand die Schichthöhen mit den Temperaturdifferenzen gemäß der Beziehung

$$\frac{h_S}{h_L} = \frac{\bar{T}_M - T_1}{T_0 - \bar{T}_M}. \quad (3.1.11)$$

Es interessiert das dynamische Verhalten des Systems gegenüber kleinen Störungen dieses Ruhezustandes. Hierzu setzen wir in die partiellen, nichtlinearen Grundgleichungen (3.1.1) und in die Rand- und Übergangsbedingungen (3.1.2-3.1.4) die folgende Störungsentwicklung ein:

$$\begin{aligned} \underline{v} &= 0 + \varepsilon^1 \underline{v}'(x, y, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ p &= \bar{p}_{(z)} + \varepsilon^1 p'(x, y, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ T &= \bar{T}_{(z)} + \varepsilon^1 T'(x, y, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ C &= \bar{C}_{(z)} + \varepsilon^1 C'(x, y, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ T^{(S)} &= \bar{T}_{(z)}^{(S)} + \varepsilon^1 T^{(S)'}(x, y, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \eta &= \eta + \varepsilon^1 \eta'(x, y, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad 3.1.12$$

Anschließend linearisieren wir das System in der Amplitude ε der Störgrößen. Mit dem speziellen Lösungsansatz (vgl. auch Kapitel 2.2.1)

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y, z, t) &= \Gamma_{(z)} \cdot \Phi_{(x, y)} \cdot \tau_{(t)}, \quad \text{mit } \Gamma \in (\underline{v}', p', T', C', T^{(S)'}) \\ \eta'_{I(x, y, t)} &= \eta \cdot \Phi_{(x, y)} \cdot \tau_{(t)} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

erhalten wir gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen. Es gelten gemäß den Gleichungen (2.2.3) und (2.2.4) die Periodizitätsbedingungen

$$\nabla_H^2 \Phi_{(x, y)} = -k^2 \cdot \Phi_{(x, y)}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \tau_{(t)} = i\omega \cdot \tau_{(t)}, \quad (3.1.14)$$

wobei mit k die Wellenzahl und mit ω die Oszillationsfrequenz der Störgrößen bezeichnet sind. Für eine dimensionslose Darstellung werden die Skalierungen nach Gl. (2.1.9) im wesentlichen übernommen. Längen und Temperatur- und Konzentrationsdifferenzen sind jedoch zweckmäßigerweise auf den Ruhezustand in der flüssigen Phase bezogen:

$$(x, y, z, \eta) \sim h_L, \quad (T - T_o) \sim (T_o - \bar{T}_M), \quad (T^{(S)} - T_o) \sim (T_o - \bar{T}_M). \quad (3.1.15a)$$

$$C - C_o \sim -S_o C_o (1 - C_o) (T_o - \bar{T}_M).$$

Der Ruhezustand ist dann durch konstante vertikale Temperatur- und Konzentrationsgradienten gekennzeichnet. Wir erhalten die Beziehungen

$$\frac{d}{dz} \bar{T} = -1, \quad \frac{d}{dz} \bar{T}^{(S)} = -1; \quad \frac{d}{dz} \bar{C} = 1. \quad (3.1.15b)$$

3.1.4 Die Lösung des Wärmeleit-Problems in der festen Phase

Mit den Ansätzen von Kapitel (3.1.3) ergibt sich aus der Differentialgleichung (3.1.1a) der erstarrten Schicht in der Ordnung ε^1 eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit entsprechenden Randbedingungen. In Operator-schreibweise lautet dieses Randwert-Problem

$$(D^2 - k^2 - i\omega) T^{(S)} = 0; \\ z = 1: \quad T^{(S)} = T; \quad z = 1 + \frac{h_S}{h_L}: \quad T^{(S)} = 0. \quad (3.1.16)$$

Als Lösung erhält man

$$T_{(z)}^{(S)} = T_{(1)} \frac{\operatorname{sh} \left\{ \left(k^2 + i\omega \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{h_S}{h_L} - z \right) \right\}}{\operatorname{sh} \left\{ \left(k^2 + i\omega \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{h_S}{h_L} \right\}}. \quad (3.1.17)$$

Für den Temperaturgradienten an der Phasentrennfläche ergibt sich

$$DT_{(1)}^{(S)} = - \left(k^2 + i\omega \right)^{\frac{1}{2}} T_{(1)} \operatorname{cth} \left\{ \left(k^2 + i\omega \right)^{\frac{1}{2}} \frac{h_S}{h_L} \right\}. \quad (3.1.18)$$

Eine Reihenentwicklung nach kleinen Eisdicken $h_S/h_L \ll 1$ gemäß Voraussetzung (3.1.6) liefert das Ergebnis

$$DT_{(1)}^{(S)} = - \left(\frac{h_S}{h_L} \right)^{-1} T_{(1)} + \mathcal{O} \left(\frac{h_S}{h_L} \right). \quad (3.1.19)$$

Mit dem Resultat (3.1.19) läßt die Energiebilanz (3.1.3b) an der Phasentrennfläche wesentlich vereinfachen. Man erhält durch Einsetzen die Beziehung

$$T_{(1)} = -\frac{h_S}{h_L} \left[DT_{(1)} + \mathcal{O}\left(\frac{h_S}{h_L}\right) + \Lambda^* i\omega\eta \right], \quad (3.1.19)$$

wobei Λ^* eine dimensionslose Schmelzenthalpie oder Stefan-Zahl mit

$$\Lambda^* = \frac{\rho_o k^*}{\lambda^* (T_o - \bar{T}_M)} \Lambda \quad (3.1.20)$$

bezeichnet. Für typische Stoffwerte von Wasser-Alkohol-Mischungen, wie sie von Zimmermann (1990) angegeben werden, gilt $\Lambda^* = \mathcal{O}(1)$. Da die dimensionslose Störung der Phasentrennfläche η in Gl. (3.1.19) anschaulich höchstens von der Größenordnung h_S/h_L sein kann, bedeutet dies, daß der Einfluß der Latentwärme für "dünnes Eis" ein Effekt höherer Ordnung in h_S/h_L darstellt. Im Rahmen unserer Approximation $h_S/h_L \ll 1$ gilt deshalb an der Phasentrennfläche die vereinfachte Bilanz

$$T_{(1)} = -\frac{h_S}{h_L} DT_{(1)}. \quad (3.1.21)$$

3.1.5 Störungsgleichungen für die flüssige Phase und Kennzahlen

Es ergibt sich mit den Ansätzen (3.1.12-3.1.14) aus den Grundgleichungen (3.1.1b) und den Rand- und Übergangsbedingungen (3.1.2) und (3.1.3) schließlich ein Rand-Eigenwert-Problem für die flüssige Phase in den dimensionslosen Störgrößen erster Ordnung. Wir wählen wie in Kapitel 1.2.3 eine Darstellung, in der das kombinierte Konzentrations- und Temperaturfeld S eingeführt und der Druckgradient eliminiert ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \left(D^2 - k^2 \right) w + Rk^2 \left\{ \left(1 + \psi \right) T - \psi S \right\} &= 0, \\ \left(D^2 - k^2 - i\omega \right) T + w &= 0, \\ \left\{ L \left(D^2 - k^2 \right) - i\omega \right\} S + \left(D^2 - k^2 \right) T &= 0; \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

$$z=0: \quad w = T = DS = 0;$$

$$z=1: \quad w=0, \quad T = -B \cdot DT, \quad DS = -i\omega AL^{-1} \left(T + \frac{\delta}{1-\delta} S \right).$$

Die Feldgleichungen stimmen dann mit den Gleichungen der Ordnung (ε^1, γ^0) des ersten Hauptteils gemäß Gl. (2.2.12) überein. Aus der thermischen Randbedin-

gung (3.1.4) läßt sich eine Bestimmungsgleichung für die Auslenkung der Phasentrennfläche ableiten. Man erhält die Beziehung

$$z=1: \quad \eta = T + \frac{\delta}{1-\delta} S. \quad (3.1.23)$$

Neben den bereits in Kapitel 2.1.3 erläuterten Kennzahlen Rayleigh-Zahl R , Separationszahl ψ und Lewis-Zahl L in den Differentialgleichungen, sind in den Randbedingungen des Systems (3.1.22) drei weitere Kennzahlen enthalten, die den Phasenübergang beschreiben:

$$\begin{aligned} \text{Biot-Zahl} \quad B &= \frac{h_S}{h_L} = \frac{\bar{T}_M - T_1}{T_o - \bar{T}_M}, \\ \text{Grenzflächenkonzentrations-Zahl} \quad A &= \frac{\bar{C}_{(1)}}{\bar{C}_{(1)} - \bar{C}_{(0)}}, \\ \text{Schmelzpunktabenkungs-Zahl} \quad \delta &= m S_o C_o (1 - C_o). \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Die aus den Grenzflächenbedingungen abgeleiteten Kennzahlen haben folgende physikalische Bedeutung:

Durch die Biot-Zahl B ist ein Maß für die Dicke der festen Phase im Ruhezustand gegeben. Temperaturstörungen an der Stelle $z=1$ führen dann zu einer Deformation der Grenzfläche siehe Gl. (3.1.23). Durch die einsetzende Konvektion wird die Phasentrennfläche in warmen Auftriebszonen nach oben ausgelenkt. Die feste Phase wird dort zum Teil aufgeschmolzen. In kalten Konvektionsbereichen erfährt die Grenzfläche dagegen eine Ausbeulung nach unten, da an diesen Stellen die Flüssigkeit ausfrieren kann.

Über die Kennzahl A geht die Konzentrationsverteilung im Ruhezustand ein. Bei negativer Thermoeffusion gilt $A > 1$, weil sich die leichte Komponente verstärkt unter der kalten Phasentrennfläche ansammelt. Die Grenzflächenkonzentrations-Zahl steuert zusammen mit der Lewis-Zahl die Diffusion der gelösten Substanz an der Phasentrennfläche bei zeit-periodischen Schmelz- und Gefriervorgängen. Da nur die reine Substanz in die feste Phase übergeht, kontrolliert die Größe A auch den Anreicherungseffekt der gelösten Komponente in der flüssigen Phase bei teilweisem Ausfrieren. Während die Biot-Zahl nach Voraussetzung klein ist, nimmt die Zahl der Grenzflächenkonzentration typischerweise Werte der Größenordnung eins an.

Die Schmelzpunktabenkungs-Zahl δ beschreibt den Einfluß der Thermodiffusion auf den Phasenübergang. Für negative Sorét-Koeffizienten $S_0 < 0$ gilt $\delta > 0$. Der Aufbau eines Konzentrationsgradienten in der flüssigen Phase bewirkt dann eine lokale Absenkung der Schmelztemperatur, siehe auch Abbildung 1.3. Hieraus resultiert gemäß Gl. (3.1.24) eine zusätzliche Störung der Grenzflächenposition η . In konzentrationsreichen Konvektionszonen wird die Phasengrenzfläche nach oben und in konzentrationsarmen Strömungsgebieten nach unten ausgelenkt.

Wird in Gl. (3.1.22) $B = \delta = 0$ gesetzt, so werden Phasenübergänge ausgeschlossen. Das Rand-Eigenwert-Problem beschreibt dann als Grenzfall die Konvektionsinstabilität einer binären Flüssigkeitsmischung unter der Wirkung der Thermodiffusion bei impermeablen Berandungen. Der einkomponentige Grenzfall mit und ohne Verfestigungsvorgänge kommt für $\psi = 0$.

3.2 Galerkin-Verfahren und Eigenwert-Gleichung

Zur Lösung des Rand-Eigenwert-Problems (3.1.22) wenden wir ein Galerkin-Verfahren an, siehe dazu Finlayson (1972). Die z -Abhängigkeit der Feldvariablen w , T und S wird durch eine Reihenentwicklung nach linear unabhängigen Ansatzfunktionen approximiert, die die Randbedingungen des Systems identisch erfüllen. Durch die Forderung, daß die Entwicklung das Problem im integralen Mittel befriedigt, erhält man dann ein algebraisches, homogenes Gleichungssystem in den unbekanntem, im allgemeinen komplexen Amplituden der Ansatzfunktionen. Die Forderung nach nicht trivialen Amplituden führt zur Eigenwert-Gleichung des Problems. Sie bildet eine komplexe Gleichung zur Bestimmung der gesuchten kritischen Rayleigh- und Wellenzahlen sowie der kritischen Oszillationsfrequenz. Wir verwenden einen eingliedrigen Galerkin-Ansatz in Form der Polynom-Darstellung

$$\begin{aligned} w_{(z)} &= W_1 z (1-z), \\ T_{(z)} &= T_1 z (1-bz), \\ S_{(z)} &= S_1 + S_2 z^2. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Es gilt aufgrund der Bedingungen an den Berandungen der Flüssigkeitsschicht

$$b = \frac{1+B}{1+2B}; \quad S_2 = - \frac{\frac{1}{2} i \omega L^{-1} A}{1 + \frac{1}{2} i \omega L^{-1} A \frac{\delta}{1-\delta}} \left[(1-b) T_1 + \frac{\delta}{1-\delta} S_1 \right]. \quad (3.2.2)$$

Die Beziehung für S_2 stellt schon eine der gesuchten Amplitudengleichungen dar. Die restlichen Gleichungen erhalten wir über die Auswertung der Integrale

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\left(D^2 - k^2 \right) w_{(z)} + Rk^2 \left\{ \left(1 + \psi \right) T_{(z)} - \psi S_{(z)} \right\} \right] \cdot w_{(z)} dz &= 0, \\ \int_0^1 \left[\left(D^2 - k^2 - i\omega \right) T_{(z)} + w_{(z)} \right] \cdot T_{(z)} dz &= 0, \\ \int_0^1 \left[\left\{ L \left(D^2 - k^2 \right) - i\omega \right\} S_{(z)} + \left(D^2 - k^2 \right) T_{(z)} \right] \cdot S_1 dz &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Es ergeben sich die linearen, algebraischen Gleichungen

$$\begin{aligned} -(10 + k^2) W_1 + Rk^2 \left(1 + \psi \right) \frac{5-3b}{2} T_1 - 5Rk^2 \psi \left(S_1 + \frac{3}{10} S_2 \right) &= 0, \\ \left[b \left(3 - 2b \right) + \left(k^2 + i\omega \right) \frac{10 - 15b + 6b^2}{10} \right] T_1 - \frac{5-3b}{20} W_1 &= 0, \\ - \left(Lk^2 + i\omega \right) S_1 - 2 \left[b + \frac{(3-2b)k^2}{12} \right] T_1 + 2 \left[L - \frac{1}{6} \left(Lk^2 + i\omega \right) \right] S_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Für die Störung der Grenzflächenposition η nach Gl. (3.1.23) ergibt sich

$$\eta = T_1 \cdot \left(1 - b \right) + \frac{\delta}{1 - \delta} \left(S_1 + S_2 \right). \quad (3.2.5)$$

Für die weiteren Rechnungen ist es zweckmäßig, die Rayleigh-Zahl R und die Wellenzahl k^2 auf die kritischen Werte im einkomponentigen Grenzfall ohne Phasenübergang zu beziehen. Dadurch können die Ergebnisse in einer übersichtlichen Form dargestellt werden. Wir untersuchen die Gleichungen (3.2.4) im Limes $\psi = 0$, $b = 1$. Nichttriviale Amplituden W_1 , T_1 erfordern für diesen Grenzfall, den wir mit dem Index "00" kennzeichnen,

$$R_{00} = \frac{(10 + k_{00}^2)^2}{k_{00}^2}; \quad \omega_{00} = 0. \quad (3.2.6)$$

Die kritische Wellenzahl und Rayleigh-Zahl lauten dann

$$k_{00,c}^2 = 10; \quad R_{00,c} = 40. \quad (3.2.7)$$

Diese Werte stellen im Vergleich zu den theoretisch exakten Werten

$$k_{00,c}^{(th)2} = \pi^2; \quad R_{00,c}^{(th)} = 4\pi^2 \quad (3.2.8)$$

eine gute Näherung dar. Die gute Übereinstimmung rechtfertigt die Anwendung unseres Galerkin-Ansatzes für den komplexen Fall $\psi \neq 0, b \neq 1$. Die längliche Form der Eigenwert-Gleichung für den allgemeinen Fall ist im Anhang unter Gleichung (A 5.3) zu finden. Für die weiteren Ausführungen werden die Bezeichnungen

$$r = \frac{R}{R_{00,c}}; \quad \hat{k}^2 = \frac{k^2}{k_{00,c}^2}; \quad \hat{\omega} = \frac{\omega}{10\hat{q}}; \quad \hat{L} = L \frac{\hat{k}^2}{\hat{q}}; \quad \hat{q} = 1 + \hat{k}^2; \quad (3.2.9)$$

eingeführt.

3.3 Das Stabilitätsproblem ohne Eisschicht

Es wird die Stabilität des Ruhezustands bei impermeablen Berandungen untersucht. Phasenübergänge werden zunächst ausgeschlossen. An diesem Beispiel kann das Potential unseres Galerkin-Verfahrens für den Fall zweikomponentiger Flüssigkeiten mit $\psi \neq 0$ überprüft werden. Des weiteren stellen die für diesen Spezialfall gewonnenen kritischen Rayleigh-Zahlen, Wellenzahlen und Oszillationsfrequenzen geeignete Vergleichswerte für den Fall mit Phasenübergang dar. Im Grenzfall $B = \delta = 0$ reduziert sich die Eigenwert-Gleichung (A 5.3) auf die Form

$$\left[r \hat{k}^2 (1 + \psi) - \frac{1}{4} \frac{\hat{k}^2}{\hat{q}} (1 + i\hat{\omega}) \right] + r \hat{k}^2 \psi \frac{1 + \frac{5}{6} \hat{k}^2}{1 + \hat{k}^2} \frac{\hat{L} - i\hat{\omega}}{\hat{L}^2 + \hat{\omega}^2} = 0. \quad (3.3.1)$$

Die Aufspaltung dieser Beziehung in Real- und Imaginärteil liefert für die stationäre Instabilität mit $\hat{\omega} = 0$ die bezogenen kritischen Rayleigh-Zahlen und Wellenzahlen

$$r_{0,c}^{(st)} = \frac{1}{4} \frac{\left(1 + \hat{k}_{0,c}^{(st)2}\right)^2}{\hat{k}_{0,c}^{(st)2}} \frac{1}{1 + \psi \left\{ 1 + L^{-1} \frac{1 + \frac{5}{6} \hat{k}_{0,c}^{(st)2}}{1 + \hat{k}_{0,c}^{(st)2}} \right\}}, \quad \hat{k}_{0,c}^{(st)2} = \frac{1 + \psi \left(1 - \frac{7}{6} L^{-1}\right)}{1 + \psi \left(1 + \frac{5}{6} L^{-1}\right)}. \quad (3.3.2)$$

Für die oszillatorische Instabilität mit $\hat{\omega} = \hat{\omega}_0 \neq 0$ erhalten wir

$$r_{0,c}^{(os)} = \frac{1}{4} \frac{\left(1 + \hat{k}_{0,c}^{(os)2}\right)^2}{\hat{k}_{0,c}^{(os)2}} \frac{1 + \hat{L}}{1 + \Psi}, \quad \hat{\omega}_{0,c}^2 = -\hat{L}^2 - \Psi \frac{1 + \hat{L}}{1 + \Psi} \frac{1 + \frac{5}{6} \hat{k}_{0,c}^{(os)2}}{1 + \hat{k}_{0,c}^{(os)2}}, \quad (3.3.3)$$

$$\hat{k}_{0,c}^{(os)2} = (1 + L)^{-\frac{1}{2}}.$$

Der Index "0" weist darauf hin, daß keine Verfestigungsvorgänge stattfinden.

Abbildung 3.1 zeigt das Stabilitätsdiagramm des untersuchten Grenzfalles. In Abbildung 3.1a sind qualitativ die bezogenen kritischen Rayleigh-Zahlen $r_{0,c}^{(st)}$ und $r_{0,c}^{(os)}$ sowie die kritische Hopf-Frequenz $\hat{\omega}_{0,c}^2$ gemäß den Gleichungen (3.3.2) und (3.3.3) als Funktion der Separationszahl Ψ dargestellt. Oberhalb der Kurven für die kritischen Rayleigh-Zahlen ist der Ruhezustand instabil. In Abbildung 3.1b sind die kritischen Wellenzahlen $\hat{k}_{0,c}^{(st)2}$ und $\hat{k}_{0,c}^{(os)2}$ über dem Kontrollparameter Ψ eingezeichnet. Bei den in den Abbildungen strichpunktiert eingezeichneten asymptotischen Ψ -Werten bei $\Psi = -1$ und $\Psi = -L(5/6 + L)^{-1}$ ist die Wirkung der Thermodiffusion so groß, daß eine entsprechende Instabilität bei einer Heizung von oben mit negativen Rayleigh-Zahlen auftritt.

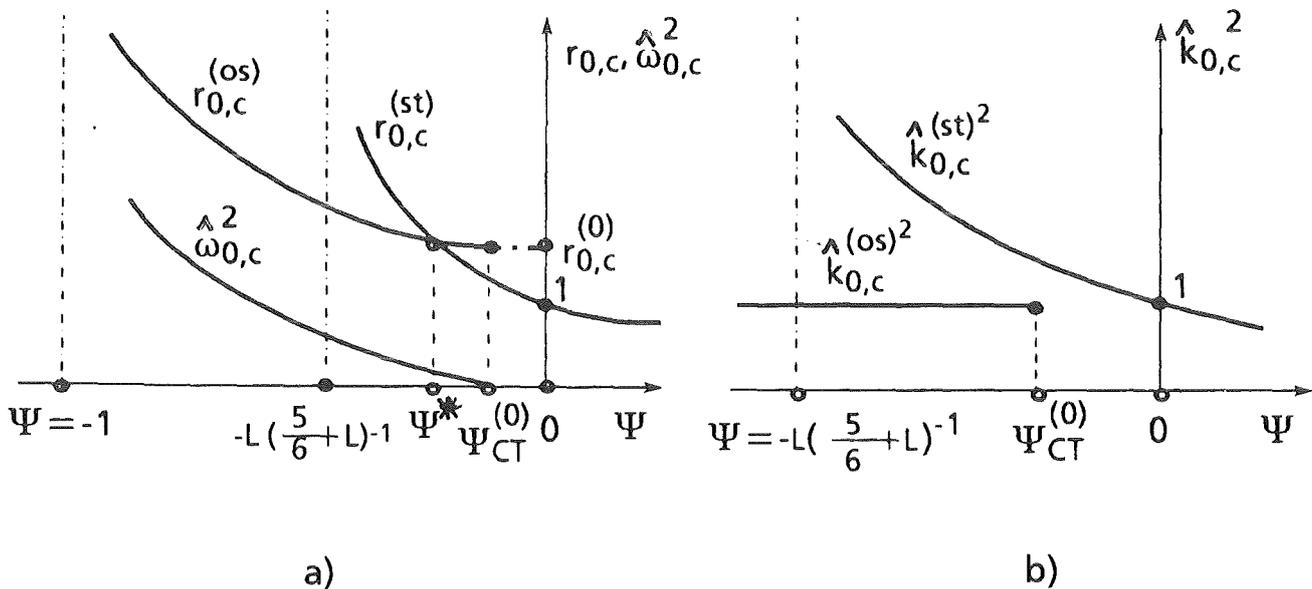


Abb. 3.1: Qualitatives Stabilitätsdiagramm bei impermeablen Berandungen.
 a) kritische bezogene Rayleigh-Zahlen und kritische Hopf-Frequenz.
 b) kritische bezogene Wellenzahlen.

Im Vergleich zum Stabilitätsproblem bei permeablen Rändern mit $\gamma = 0$ in Kapitel 2.2.3 mit Abbildung 2.1 ergeben sich folgende markante Unterschiede:

- (i) Eine oszillatorische Instabilität ist nach Abbildung 3.1a für negative Separationszahlen im Parameterbereich

$$-1 < \psi < \psi_{CT}^{(0)} = \frac{-\hat{L}^2}{\left(1 + \hat{L}\right) \frac{1 + \frac{5}{6} \hat{k}_{0,c}^{(os)2}}{1 + \hat{k}_{0,c}^{(os)2}} + \hat{L}^2} \quad (3.3.4)$$

möglich. Für eine Lewis-Zahl $L=0.01$ erhalten wir für den Kodimension-Zwei-Verzweigungspunkt bei $\psi = \psi_{CT}^{(0)}$, definiert durch die Bedingungen $\hat{\omega}_{0,c}^2 = 0$, den Wert $\psi_{CT}^{(0)} \approx -2.6997 \cdot 10^{-5}$. Bei permeablen Randbedingungen ergibt sich dagegen der kleinere Wert $\psi_{CT}^{(0)} \approx -10^{-4}$. Für impermeable Be-
randungen vergrößert sich deshalb der Existenzbereich oszillatorischer Instabilitäten.

- (ii) Nach Abbildung 3.1a gilt

$$r_{0,c}^{(os)} \leq r_{0,c}^{(st)}, \quad \text{für } \psi \leq \psi^*. \quad (3.3.5)$$

Der Ruhezustand verliert bei solchen ψ -Werten zuerst seine Stabilität gegen oszillatorische Störungen. Für $L=0.01$ erhält man für die obere Grenze ψ^* in Gl. (3.3.5) den Wert $\psi^* \approx -2.7143 \cdot 10^{-5}$. Wegen $\psi_{CT}^{(0)} > \psi^*$ setzt oszillatorische Konvektion stets mit endlicher Hopf-Frequenz ein (siehe auch Abb. 3.1a). Bei permeablen Randbedingungen gilt dagegen $\psi_{CT}^{(0)} = \psi^*$, so daß die kritischen stationären und oszillatorischen Rayleigh-Zahlen am CT-Punkt gleich sind, siehe Abbildung 2.1.

- (iii) Die kritischen, stationären und oszillatorischen Wellenzahlen sind verschieden. Die Wellenzahl der stationären Instabilität zeigt dabei nach Abbildung 3.1b eine signifikante Abhängigkeit von der Separationszahl ψ , während die kritische oszillatorischen Wellenzahl nach Gl. (3.2.3) unabhängig von ψ ist und nur schwach von der Lewis-Zahl L abhängt. Für $\psi < \psi_{CT}^{(0)}$ gilt nach Abbildung 3.1b die Beziehung $\hat{k}_{0,c}^{(os)2} < \hat{k}_{0,c}^{(st)2}$, so daß oszillatorische Strömungsmuster im Vergleich zu stationären Strömungsmustern größere horizontale Abmessungen aufweisen. Für positive ψ -Werte setzt stationäre Konvektion in Form von Strömungsmustern mit größeren Wellenlängen ein. Dies ist eine Folge der Impermeabilität der Ränder. Konzentrationsstörungen können dadurch über große horizontale Strecken wirken. Im Rahmen unseres Modells sind die Konvektionszellen im Parameterbereich

$$\psi \geq L \left(\frac{7}{6} - L \right)^{-1} \quad (3.3.6)$$

unendlich ausgedehnt. Bei permeablen Randbedingungen ergibt sich dagegen keine Abhängigkeit der kritischen Wellenzahlen von den Kennzahlen ψ und L , vergleiche Abbildung 2.3 mit $\gamma = 0$.

Unsere Ergebnisse stimmen qualitativ mit Untersuchungen von Linz (1989a) überein, der ein Galerkin-Verfahren mit komplizierteren Ansatzfunktionen verwendet. Dies stellt eine schöne Bestätigung unseres relativ einfachen analytischen Modells dar. Die qualitativen Änderungen des Stabilitätsverhaltens des Ruhezustands bei Verwendung der realistischen impermeablen Konzentrationsrandbedingungen (2.1.5) anstatt der idealisierten permeablen Bedingung (2.1.4) beschränken sich auf die Umgebung des CT-Punktes, vergleiche Abbildungen 3.1a und 2.1. Die Experimente von Zimmermann (1990) sind dagegen bei einer stark negativen Separationszahl $\psi \approx -0.4$ durchgeführt worden. Er beobachtet, daß bei einer Absenkung des mittleren Temperaturniveaus der Schicht zeitlich periodische Konvektionszustände verschwinden. Unsere Stabilitätsuntersuchungen ergeben in diesem Parameterbereich der Separationszahl keine qualitativen Unterschiede zwischen permeablen und impermeablen Berandungen. Es ist deshalb zu vermuten, daß die physikalischen Ursachen für die Beobachtungen von Zimmermann nicht mit der Impermeabilität der Ränder zusammenhängen.

3.4 Das Stabilitätsproblem mit Eisschicht

Es wird der Einfluß von Verfestigungsvorgängen untersucht. Wir diskutieren zuerst die stationäre Instabilität. Danach wird die Wirkung des Phasenübergangs auf die oszillatorische Instabilität anhand von zwei Grenzfällen erläutert.

3.4.1 Das stationäre Stabilitätsproblem mit Eisschicht

Die stationäre Konvektionsinstabilität des Ruhezustands unter der Wirkung einer Eisschicht wird durch die Eigenwert-Gleichung (A 5.3) mit $\hat{\omega} = 0$ und $B \neq 0$ oder $b \neq 1$ beschrieben. Die Gleichung kann sofort nach dem gesuchten Verzweigungspunkt $r = r^{(st)}$ aufgelöst werden. Man erhält

$$r^{(st)} = \frac{1}{(5-3b)^2} \frac{1+\hat{k}^2}{\hat{k}^2} \frac{b(3-2b) + \hat{k}^2(10-15b+6b^2)}{1 + \psi \left\{ 1 + \hat{L}^{-1} \frac{2b + \frac{5}{3}(3-2b)\hat{k}^2}{(5-3b)(1+\hat{k}^2)} \right\}}. \quad (3.4.1)$$

Die Minimierung der Stabilitätsgrenze bezüglich \hat{k}^2 führt auf eine quadratische Gleichung für die kritische Wellenzahl $\hat{k}_c^{(st)2}$ mit der Lösung

$$\hat{k}_c^{(st)2} = \frac{1}{2P_1} \left[(P_1 + P_2) \left\{ 1 - 8(1-b) \frac{5-4b}{10-15b+6b^2} \frac{P_1 P_3}{(P_1 + P_2)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} - (P_1 - P_2) \right]. \quad (3.4.2)$$

Es sind folgende Abkürzungen benutzt:

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 + \psi \left\{ 1 + \frac{5(3-2b)}{3(5-3b)} L^{-1} \right\}, \\ P_2 &= 1 + \psi \left\{ 1 - \frac{22b-15}{3(5-3b)} L^{-1} \right\}, \\ P_3 &= 1 + \psi \left\{ 1 - \frac{16b-15}{3(5-3b)} L^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Abbildung 3.2a zeigt quantitativ die bezogene kritische Rayleigh-Zahl $r_c^{(st)}$ und Abbildung 3.2b die bezogene kritische Wellenzahl $\hat{k}_c^{(st)2}$ in Abhängigkeit von der Eisdicke B und der Separationszahl ψ für eine Lewis-Zahl $L=0.01$. Die Grenzflächenkonzentrations-Zahl A und die Schmelzpunktabenkungs-Zahl δ gehen nicht in das stationäre Stabilitätsproblem ein.

Man erkennt, daß die Schicht bei negativer Thermodiffusion mit $\psi < 0$ durch eine dünne Eisschicht destabilisiert wird. In diesem Parameterbereich sinken die kritischen Rayleigh-Zahlen für einen festen ψ -Wert mit zunehmenden B -Werten, siehe Abbildung 3.2a. Die physikalische Erklärung dieses Verhaltens lautet, daß durch die endliche Wärmeleitfähigkeit der Eisschicht Temperaturstörungen an der Phasentrennfläche nicht sofort abgebaut werden. Zimmermann (1990) findet im Rahmen einer numerischen Stabilitätsuntersuchung, daß größere Eisdicken sogar zu einer zusätzlichen Stabilisierung des Ruhezustands führen können. Er argumentiert, daß sich durch die Anreicherung der gelösten Komponente in der flüssigen Phase bei teilweisem Ausfrieren eine effektive Sorét-Zahl gemäß

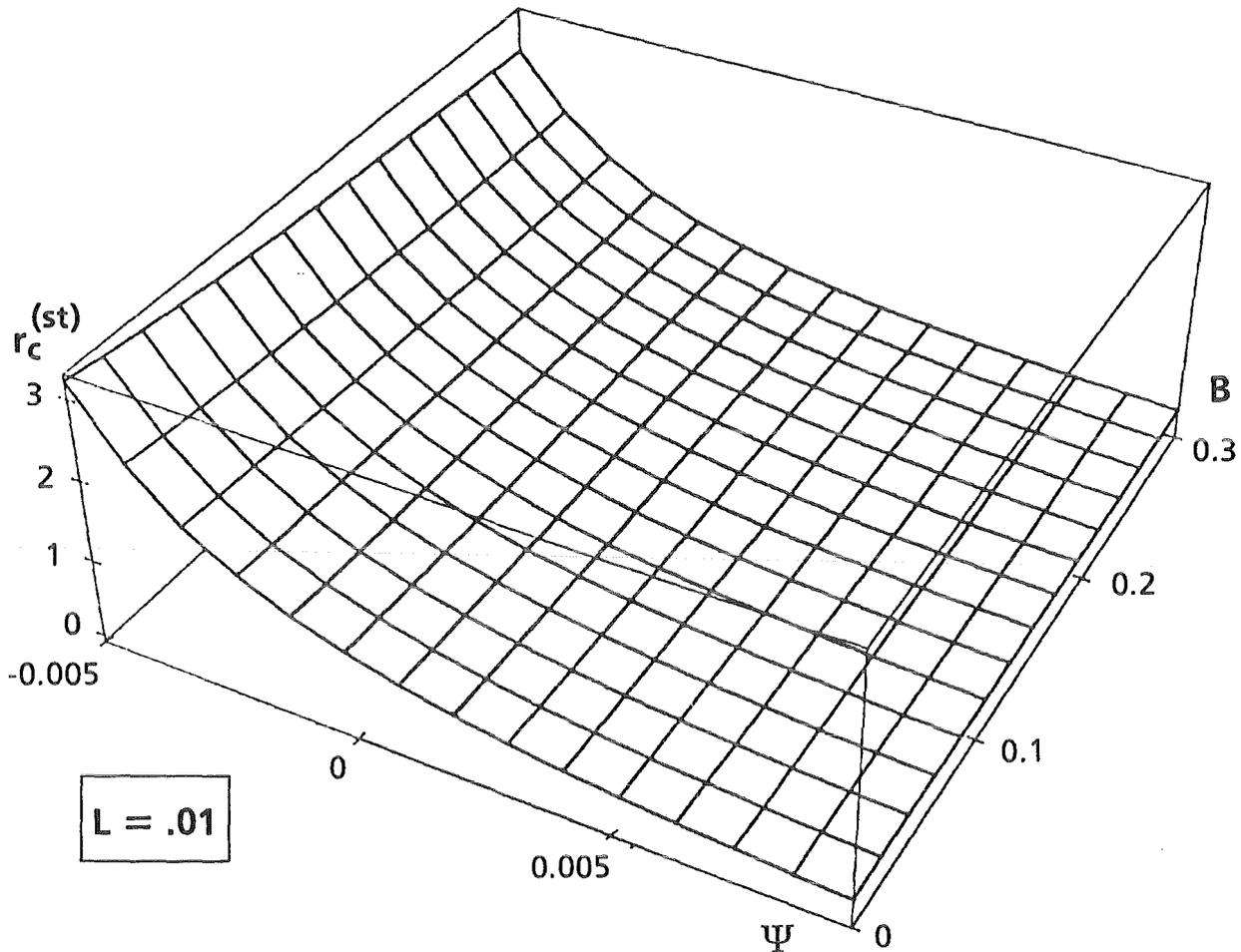


Abb. 3.2a: Kritische bezogene stationäre Rayleigh-Zahl $r_c^{(st)}$ als Funktion der Separationszahl ψ und der Eisdicke B für $L = 0.01$.

$$S_{eff} \approx S_o(1+B), \quad (3.4.4)$$

ergibt, deren stabilisierende Wirkung den destabilisierenden Mechanismus einer verschlechterten Wärmeleitfähigkeit des oberen Randes überkompensiert. In seinen Experimenten kann dieser theoretische Befund jedoch nicht überprüft werden, da es bedingt durch die stark negativen experimentellen ψ -Werte zuerst zu einer oszillatorischen Instabilität kommt. Die unterschiedlichen theoretischen Ergebnisse lassen sich mit den verschiedenen Ansätzen für den Massenstrom erklären. In der vorliegenden Arbeit wird eine für kleine Konzentrationen linearisierte Massenstromgleichung gemäß Gl. (1.2.3) benutzt. Es resultiert nach Gl. (3.1.9) ein konstanter Konzentrationsgradient im Ruhezustand. Durch unsere gewählte Skalierung nach Gl. (3.1.15a) ist dieser Konzentrationsgradient in dimensionsloser Darstellung unabhängig von der Eisdicke B , siehe Gl. (3.1.15b). Endliche Eisdicken bewirken für den Fall stationärer Konvektion dann lediglich eine

Änderung der thermischen Randbedingung. Zimmermann (1990) arbeitet dagegen mit einer verallgemeinerten Massenstromgleichung. Er erhält dadurch einen über die Schichthöhe nicht konstanten, von der Eisdicke B abhängigen Konzentrationsgradienten im Ruhezustand. Bei einer Störungsentwicklung gemäß Gl. (3.1.12) geht diese nichtlineare Konzentrationsverteilung explizit in das lineare Stabilitätsproblem ein.

Bei positiven Separationszahlen ψ unterstützt eine dünne Eisschicht zunächst die destabilisierende Wirkung des Sorét-Effekts. Die kritische Rayleigh-Zahl fällt nach Abbildung 3.2a mit ansteigenden ψ - und B -Werten. Für hinreichend positive Separationszahlen mit $\psi > 5 \cdot 10^{-3}$ ist jedoch keine Abhängigkeit der Stabilitätsgrenze von der Eisdicke zu erkennen. Solutale Auftriebskräfte dominieren in diesem Parameterbereich über thermisch induzierte Auftriebskräfte. Die Resultate für positive ψ -Werte sind qualitativ in Einklang mit numerischen Studien von Hadji, Schell (1990) zur Stabilität einer ebenen binären Flüssigkeitsschicht.

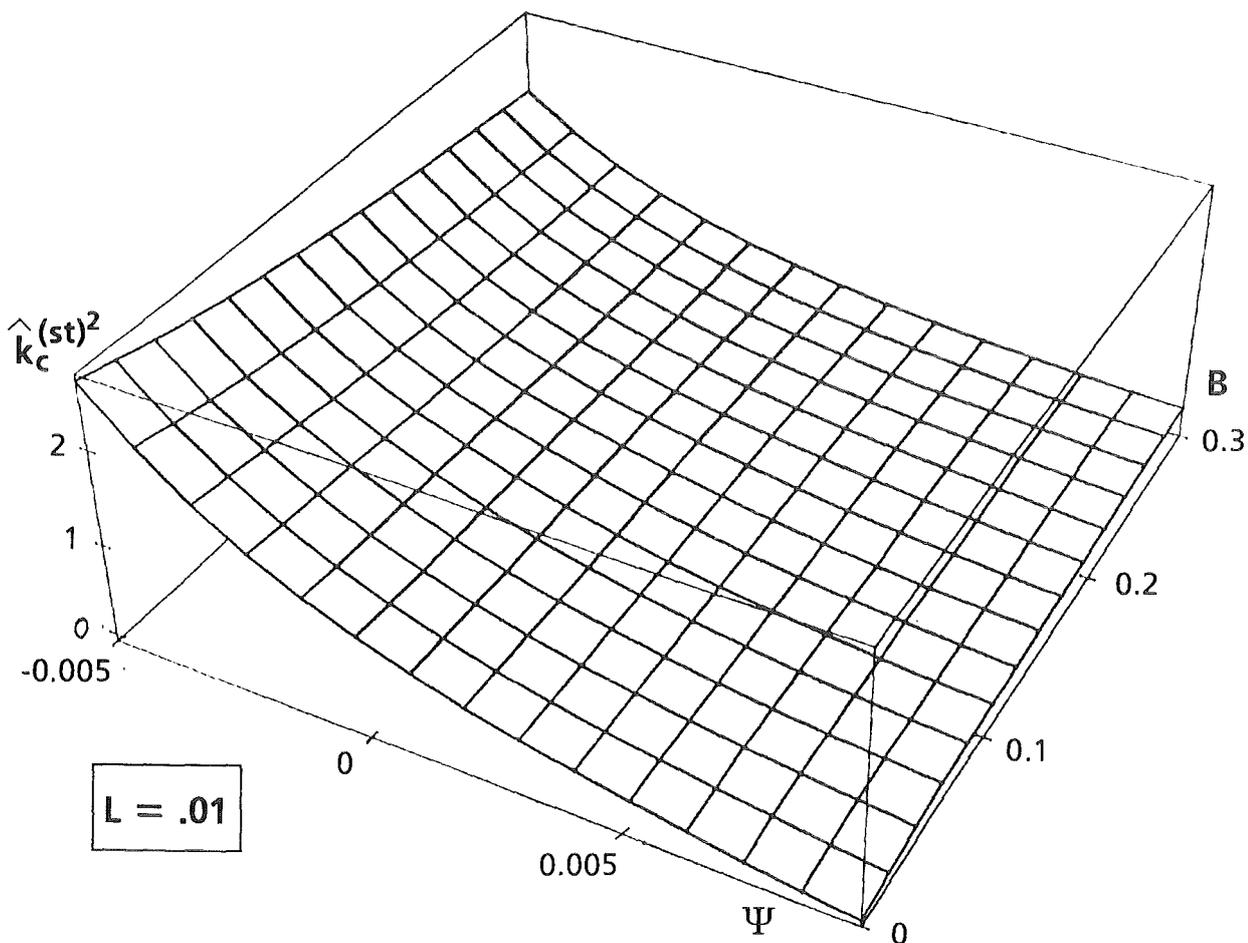


Abb. 3.2b: Kritische bezogene stationäre Wellenzahl $\hat{k}_c(st)^2$ als Funktion der Separationszahl ψ und der Eisdicke B für $L = 0.01$.

Die stationäre kritische Wellenzahl $\hat{k}_c^{(st)2}$ zeigt nach Abbildung 3.2b eine ähnliche Abhängigkeit von den Parametern ψ und B wie die kritische Rayleigh-Zahl. Es ist anzumerken, daß es für hinreichend positive ψ -Werte zu einer leichten Erhöhung der Wellenzahlen mit steigenden Eisdicken kommt. Dies entspricht der thermisch isolierenden Wirkung der Eisschicht. Ein analoges Verhalten für positive ψ -Werte finden Hadji, Schell (1990) im Rahmen ihrer numerischen Untersuchungen.

Für den einkomponentigen Sonderfall mit $\psi = 0$ sind unsere Ergebnisse in qualitativer Übereinstimmung mit Rechnungen und Messungen von Dietsche (1984), Davis et al. (1984) und Dietsche, Müller (1985) zur Bénard-Konvektion unter der Wirkung von Gefrierflächen. Auch diese Autoren stellen eine Destabilisierung der Schicht mit zunehmenden Eisdicken fest.

3.4.2 Die oszillatorische Instabilität mit Eisbildung

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die Stabilität des Ruhezustands gegen oszillatorische Störungen im Zusammenhang mit zeitabhängigen Phasenübergängen fest \leftrightarrow flüssig. Zu diesem Stabilitätsproblem liegen in der Literatur bisher keine systematischen Untersuchungen vor. Neben der kritischen Rayleigh-Zahl $r_c^{(os)}$ und Wellenzahl $\hat{k}_c^{(os)2}$ interessiert hauptsächlich die kritische Oszillationsfrequenz $\hat{\omega}_c^2$ an der Stabilitätsgrenze.

Bei Schmelz- und Gefriervorgängen an der Phasentrennfläche gehen neben der Biot-Zahl B auch die Schmelzpunktabsenkungs-Zahl δ und die Grenzflächenkonzentrations-Zahl A als Parameter in das Stabilitätsproblem ein. Um die Wirkungen der auftretenden Effekte eindeutig zu erfassen, wollen wir zwei Grenzfälle betrachten. Wir gehen dabei von der Überlegung aus, daß sich die Deformation der ebenen Grenzflächenposition laut Gl. (3.2.5) durch eine Überlagerung eines thermisch bedingten Anteils mit $B \neq 0$ und eines solutalen Anteils mit $\delta \neq 0$ darstellen läßt.

3.4.2.1 Die Wirkung einer dünnen Eisschicht

Die Wirkung einer dünnen Eisschicht wird anhand des Sonderfalles $B \neq 0$, $A \neq 0$ mit $\delta = 0$ bestimmt. Er besagt, daß sich die Schmelztemperatur der binären Flüssigkeit aufgrund von Konzentrationsstörungen an der Phasentrennfläche gegenüber der Schmelztemperatur im Ruhezustand nicht ändert. Eine Auslenkung der

Grenzfläche bei einsetzender Konvektion wird dann allein durch Temperaturstörungen verursacht, siehe Gl. (3.2.5). Über den relativ warmen Aufstromzentren finden Schmelzvorgänge und über den kalten Abstromgebieten Gefriervorgänge statt.

Die im Anhang angegebene Eigenwert-Gleichung (A 5.3) vereinfacht sich für den betrachteten Spezialfall zu

$$\left[\left(\frac{5-3b}{2} \right)^2 r \hat{k}^2 (1+\psi) - \frac{1}{4} \hat{q}^2 \left\{ \frac{b(3-2b) + (10-15b+6b^2)(\hat{k}^2 + i\hat{\omega}\hat{q})}{1 + \hat{k}^2} \right\} \right] \cdot (\hat{L} + i\hat{\omega}) +$$

$$+ \frac{5-3b}{2} r \hat{k}^2 \psi \left[\frac{b + \frac{5}{6} \hat{k}^2 (3-2b)}{1 + \hat{k}^2} + 5 i\hat{\omega}\hat{L} - 1 \hat{k}^2 A (1-b) \left\{ \frac{\hat{L}}{\hat{k}^2} \left(1 - \frac{1}{6} \hat{k}^2 \right) - \frac{1}{6} i\hat{\omega} \right\} \right] = 0. \quad (3.4.6)$$

Aus dem Imaginärteil der Gleichung (3.4.6) erhält man direkt eine Beziehung für den oszillatorischen Verzweigungspunkt bei $r = r^{(os)}$:

$$r^{(os)} = \frac{1}{(5-3b)^2} \frac{(1 + \hat{k}^2)}{\hat{k}^2} \frac{b(3-2b) + (1+L)(10-15b+6b^2)\hat{k}^2}{1 + \psi \left\{ 1 + 10A \frac{1-b}{5-3b} \left(1 - \frac{1}{6} \hat{k}^2 \right) \right\}}. \quad (3.4.7)$$

Die Minimierung der Stabilitätsgrenze (3.4.7) bezüglich \hat{k}^2 liefert eine Bestimmungsgleichung für die kritische oszillatorische Wellenzahl $\hat{k}_c^{(os)2}$. Die bezogene kritische oszillatorische Rayleigh-Zahl $r_c^{(os)}$ ist dann durch die Beziehung $r_c^{(os)} = r^{(os)}(\hat{k}_c^{(os)2})$ gegeben. Über den Realteil der Beziehung (3.4.6) ergibt sich schließlich eine Gleichung für die kritische Hopf-Frequenz $\hat{\omega}_c^2$. Diese einfachen, jedoch umfangreichen Rechnungen führen wir mit Hilfe des algebraischen Rechenprogramms "Mathematica" (Wolfram (1991)) durch.

Abbildungen 3.3 zeigen die Resultate dieser Berechnungen. Es sind in Abbildung 3.3a die bezogene kritische oszillatorische Rayleigh-Zahl $r_c^{(os)}$ und in Abbildung 3.3b die kritische oszillatorische Wellenzahl $\hat{k}_c^{(os)2}$ als Funktionen der Separationszahl ψ und der normierten Eisdicke B dargestellt. Abbildung 3.3c zeigt die Abhängigkeit der kritischen Oszillationsfrequenz $\hat{\omega}_c^2$ von den Kennzahlen ψ und B . Die Lewis-Zahl ist dabei für eine übersichtliche graphische Darstellung der Ergebnisse zu $L = 0,1$ und die Grenzflächenkonzentrations-Zahl zu $A = 2$ gewählt. Eine Änderung dieser Parameterwerte ergibt jedoch keine qualitative Änderung des in den Abbildungen 3.3 gezeigten Stabilitätsverhaltens.

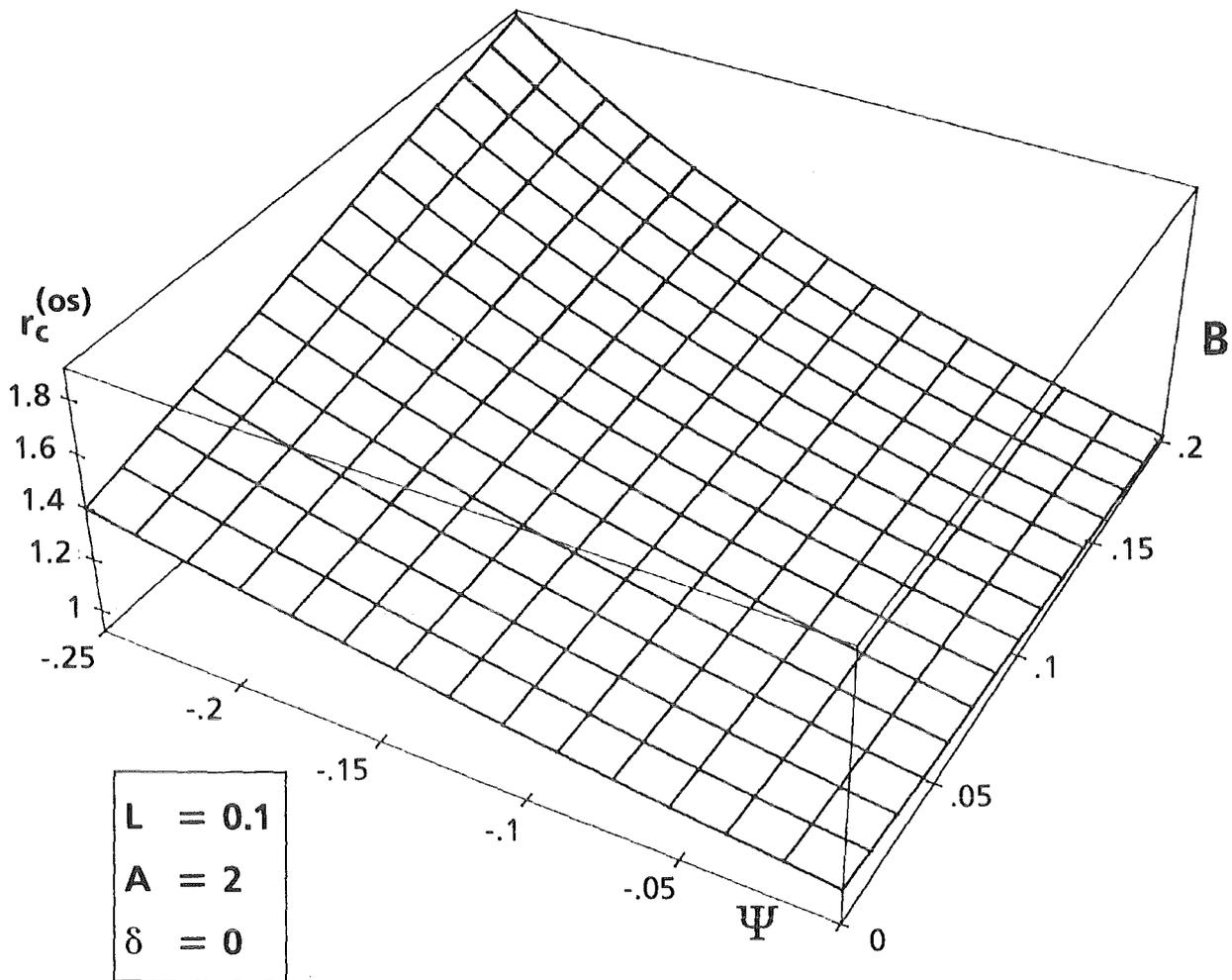


Abb. 3.3a: Kritische bezogene Rayleigh-Zahl $r_c^{(os)}$ als Funktion der Separations-Zahl ψ und der Eisdicke B für $L=0.1$, $A=2$, $\delta=0$.

Für mäßig negative Separationszahlen ist eine relativ geringe Destabilisierung der Schicht mit zunehmender Eisdicke B zu beobachten. Die kritischen Rayleigh- und Wellenzahlen sinken mit steigenden B -Werten, siehe die Abbildungen 3.3a und 3.3b. In diesem Parameterbereich überwiegt der Einfluß der schlecht wärmeleitenden oberen Berandung den stabilisierenden Effekt der Thermodiffusion. Bei hinreichend negativen ψ -Werten führt jedoch die Präsenz einer dünnen Eisschicht zu einer deutlichen Stabilisierung des Ruhezustands und zu einer Erhöhung der kritischen Wellenzahlen. Die Konzentrationsanreicherung in der flüssigen Phase bei teilweisem Ausfrieren - dieser Effekt ist über die Grenzflächenkonzentrations-Zahl A in unserem Modell enthalten - unterstützt die nun dominante Wirkung des Sorét-Effekts. Aus Gleichung (3.4.7) ersieht man, daß eine effektive Separationszahl gemäß der Beziehung

$$\psi_{eff} = \psi \left[1 + 10 A \frac{1-b}{5-3b} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{A^2}{k^2} \right) \right] \quad (3.4.8)$$

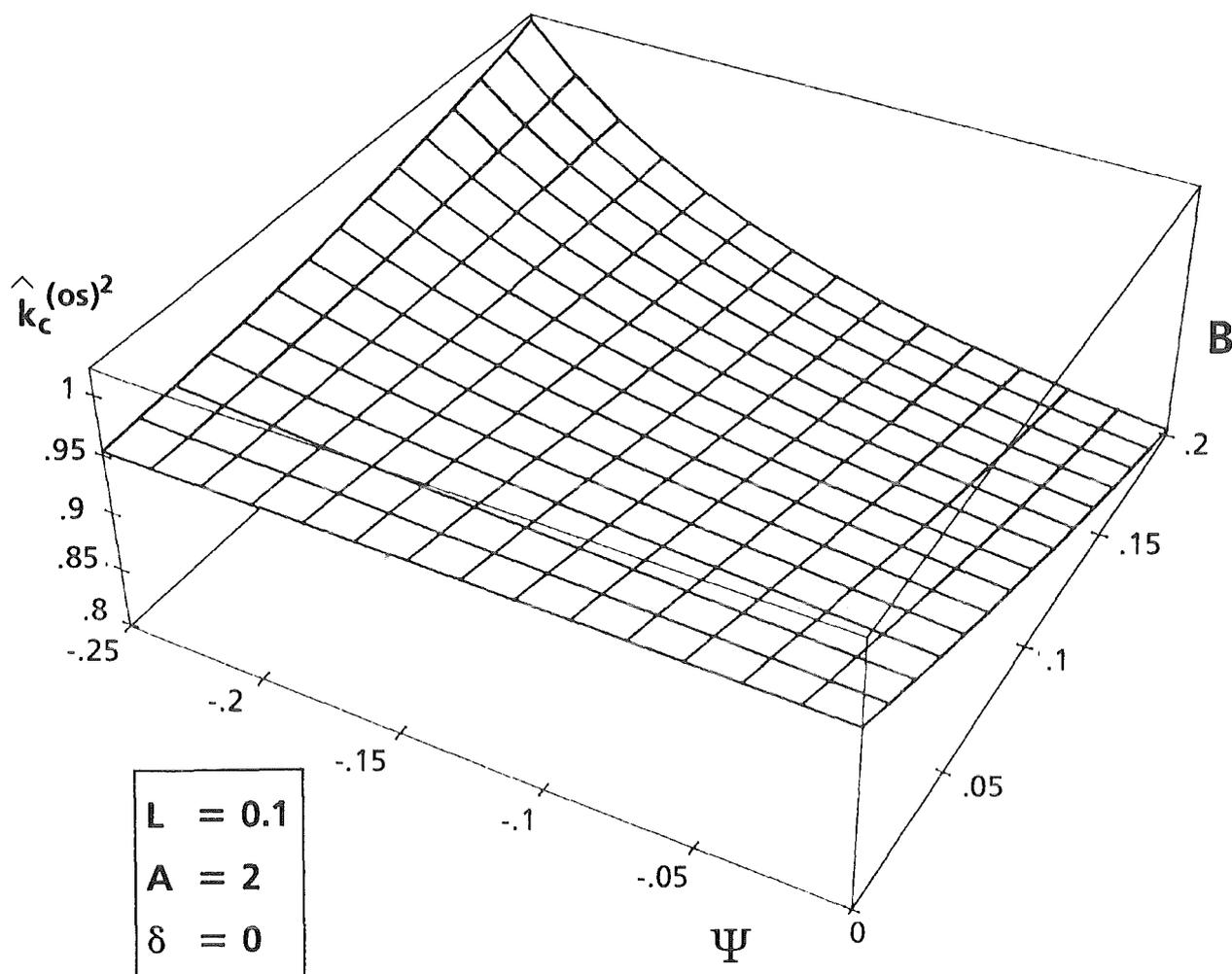


Abb. 3.3b: Kritische bezogene Wellenzahl $\hat{k}_c^{(os)2}$ als Funktion der Separationszahl ψ und der Eisdicke B für $L=0.1$, $A=2$, $\delta=0$.

wirksam ist. Damit verbunden ist auch eine Zunahme der kritischen Hopf-Frequenz mit ansteigenden B -Werten in diesem Bereich des Kontrollparameters Separations-Zahl, siehe Abbildung 3.3c.

Es sei erwähnt, daß die Gültigkeit unserer Aussagen auf den Kontrollparameterbereich

$$\psi > - \left\{ 1 + 10 A \frac{1-b}{5-3b} \left[1 + \frac{1}{6} L^{-1} \left(\hat{k}^2 + \frac{b(3-2b)}{10-15b+6b^2} \right) \right] \right\}^{-1} \quad (3.4.9)$$

beschränkt ist, da für den in Gl. (3.4.9) angegebenen unteren Grenzwert der Separationszahl eine Singularität im Realteil der Modellgleichung (3.4.6) auftritt. Dadurch ist die Oszillationsfrequenz in diesem Punkt nicht definiert. Im Vergleich zum eisfreien Fall nach Abbildung 3.1 mit $B=0$ und der Polstelle bei $\psi = -1$ bedeutet dies, daß unter der Wirkung einer dünnen Eisschicht der Existenzbereich der oszillatorischen Instabilität auf einen wesentlich kleineren Wertevorrat der

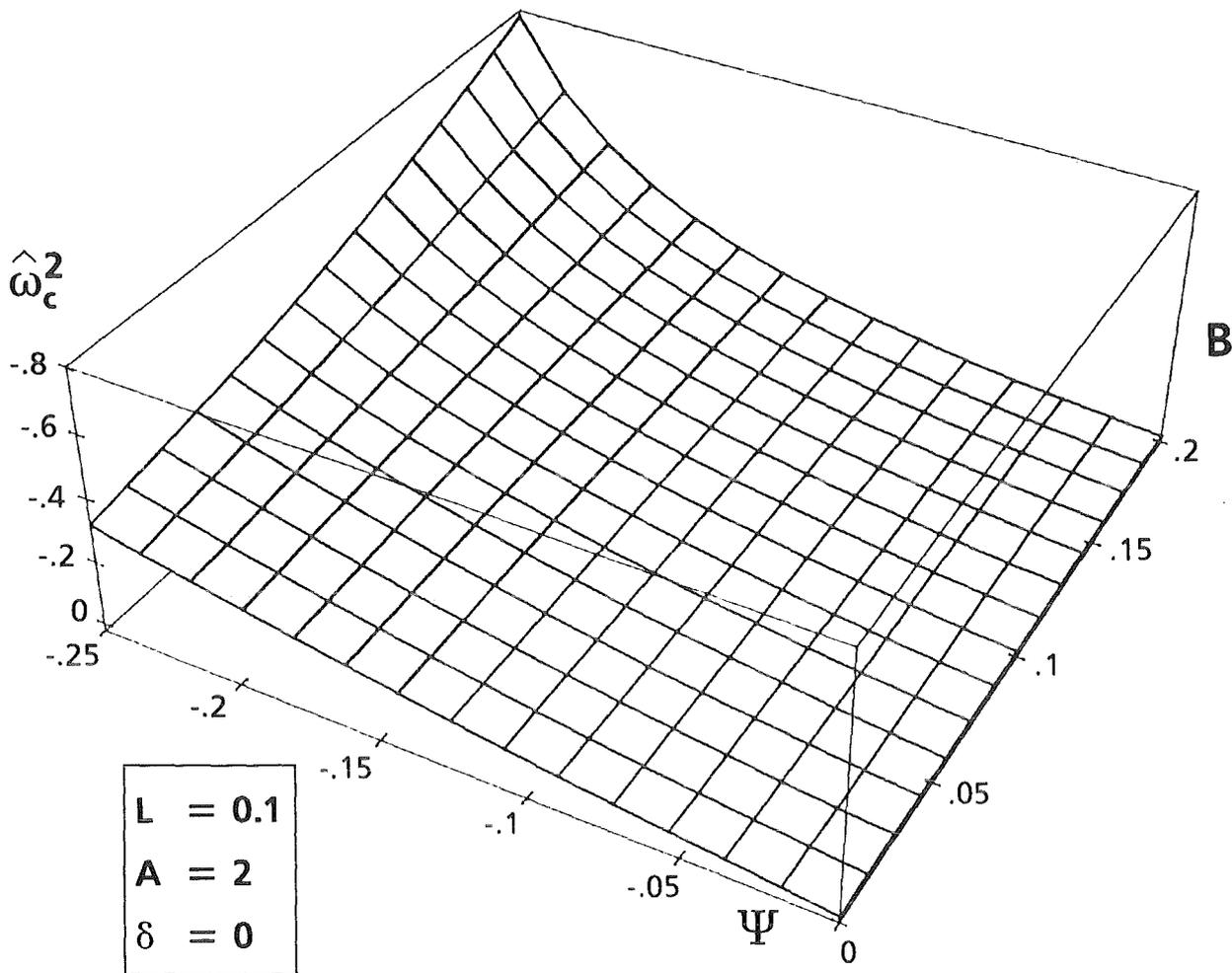


Abb. 3.3c: Kritische Hopf-Frequenz $\hat{\omega}_c^2$ als Funktion der Separationszahl ψ und der Eisdicke B für $L=0.1$, $A=2$, $\delta=0$.

Separationszahl schrumpft. Dieses Resultat ist neu. In den theoretischen Untersuchungen von Zimmermann (1990) zur Bénard-Konvektion mit Thermodiffusion wird lediglich ein sehr kleiner Bereich von negativen Separationszahlen mit $\psi > -10^{-3}$ zugelassen. Die numerische Lösung des entsprechenden Rand-Eigenwert-Problems ergibt deshalb eine leichte Frequenzerhöhung und einen leichten Abfall der kritischen oszillatorischen Rayleigh-Zahl und Wellenzahl mit wachsender Eisdicke. Dieses Verhalten finden wir ebenfalls mit unserem analytischen Modell für die Konvektion in porösen Medien bei mäßig negativen Separationszahlen.

Vergleichsrechnungen von Zimmermann (1990) mit einer für seine Experimente relevanten stark negativen Separationszahl von $\psi \approx -0.4$ zeigen dagegen, daß es in diesem Parametergebiet zu einer Stabilisierung der Schicht und einem Anstieg der kritischen Oszillationsfrequenz mit zunehmender Eisdicke kommt. Ein mit diesen numerisch ermittelten Ergebnissen übereinstimmendes Verhalten an der

oszillatorischen Stabilitätsgrenze finden wir mit unserem Modell schon für schwächer negative Separationszahlen. Es ist daraus zu schließen, daß sich in unserem Modell der Effekt der Konzentrationsanreicherung in der Flüssigkeit bei teilweisem Ausfrieren stärker auswirkt.

In seinen Experimenten beobachtet Zimmermann demgegenüber eine Abnahme der kritischen oszillatorischen Rayleigh-Zahl mit zunehmender Eisdicke. Er begründet dieses zu den theoretischen Aussagen konträre Resultat damit, daß sich die theoretisch betrachtete Flüssigkeitsschicht unabhängig von der Eisdicke über das Einheitsintervall $z=[0,1]$ erstreckt, während im Experiment die Höhe der Flüssigkeitsschicht mit der Eisdicke variiert. Diese Argumentation ist nach unserer Meinung jedoch nicht schlüssig, da die mit den Meßgrößen ΔT_c und h_L gebildete experimentelle kritische Rayleigh-Zahl direkt vergleichbar mit dem theoretisch gefundenen Wert ist. Zu einer Destabilisierung der Schicht mit zunehmender Eisdicke trägt vielmehr die Abhängigkeit der Separationszahl ψ von der Konzentration bei. In den Experimenten wird eine Wasser-Alkohol-Mischung der Ausgangskonzentration $C_0=0.15$ verwendet. Messungen von Kolodner (1988) zeigen, daß für $C>0.08$ die Separationszahl mit steigender Konzentration betragsmäßig kleinere Werte annimmt. Durch eine dünne Eisschicht wird deshalb die im Experiment wirksame negative Thermodiffusion verringert. Dieser Effekt äußert sich in einer Abnahme der kritischen Rayleigh-Zahl gegenüber dem Fall ohne Eisschicht. In den theoretischen Untersuchungen wird dagegen dieser Effekt nicht berücksichtigt.

3.4.2.2 Die Wirkung der Schmelzpunktabenkung

Es wird nun der interessante Grenzfall $\delta \neq 0$, $A \neq 0$ mit $B=0$ diskutiert. Über die Definition der Biot-Zahl erhält man $T_1 = \bar{T}_m$. Die Temperatur des oberen Randes hat gerade den Wert der Schmelztemperatur der ruhenden Flüssigkeitsmischung. Die mittlere Position der Phasentrennfläche ist für $B=0$ dann die obere, feste Berandung bei $z=1$. Durch Konvektion angefachte Konzentrationsstörungen führen zu einer Verformung dieses speziellen Grenzflächenprofils des Ruhezustands. Aus Gl. (3.2.5) erhalten wir die Beziehung

$$\eta(x,y,t) = \frac{\delta}{1-\delta} S_{(1)} \cdot \phi_{(x,y)} \cdot v_{(t)} \quad (3.4.10)$$

In raum-zeitlichen Konvektionsgebieten mit relativem Mangel an gelöstem Stoff gilt

$$z = 1 : \quad \eta(x, y, t) < 0. \quad (3.4.11)$$

An diesen Stellen bilden sich dünne Eishöcker an der oberen Berandung, da dort die Temperatur unterhalb der aktuellen Erstarrungstemperatur der strömenden Flüssigkeit liegt. Konzentrationsreiche Gebiete mit $\eta > 0$ bleiben dagegen eisfrei. Solche isolierten, nicht geschlossenen Gefrierflächen sind experimentell durch Zimmermann (1990) beobachtet worden. Theoretische Untersuchungen zur Stabilität dieses Zustands liegen jedoch bisher in der Literatur nicht vor.

Zur physikalischen Analyse des Problems ordnen wir dem oszillatorischen Konvektionszustand einen linearen Wanderwellenzustand nach Gl. (2.2.41) zu. Das Grenzflächenprofil (3.4.10) wandert dann mit der Welle mit konstanter Amplitude und der Phasengeschwindigkeit $c_w = \hat{\omega}/\hat{k}$ in horizontaler Richtung. In Abbildung 3.4 ist ein nach rechts wandernder Zustand skizziert.

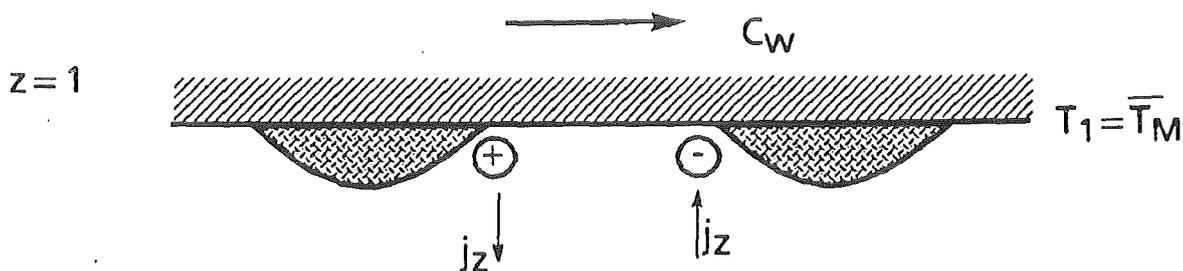


Abb. 3.4: Wanderwelle mit Eisbildung.

Links der Eisinseln verflüssigt sich Eis, rechts gefriert flüssige Phase. Da nur das reine Lösungsmittel in die feste Phase übergeht, wird die Flüssigkeit in den verschiedenen Bereichen lokal verdünnt (\ominus) oder angereichert (\oplus). Der vertikale Massenstrom j_z an der Grenzfläche,

$$j_z = DS_{(1)}, \quad (3.4.12)$$

sorgt durch den diffusiven An- und Abtransport der gelösten Komponente für einen Austausch mit der Konvektionsströmung, siehe Abbildung 3.4. Einen entscheidenden Einfluß auf dieses Wechselspiel haben die unterschiedlichen Zeitskalen für den Konvektionsvorgang und den molekularen Diffusionsvorgang. Der charakteristische Zeitmaßstab der Wanderwelle ist durch den Reziprokwert der Oszillationsfrequenz $\hat{\omega}$ gegeben und wird durch die Separationszahl ψ gesteuert. Für den diffusiven Stofftransport an der Grenzfläche ist dagegen die molekulare Diffusionszeit typisch. Dieser Zeitmaßstab ist in dimensionsloser Form proportio-

nal zum Reziprokwert der Lewis-Zahl L . Aus diesem Verhalten resultieren nach Linz et al. (1988) und Zimmermann (1990) Phasenverschiebungen zwischen der Konzentrationswelle und der Geschwindigkeits- und Temperaturwelle. Je nach Phasenlage des Konzentrations- und Massenstromfeldes an der Grenzfläche zum Geschwindigkeits- und Temperaturfeld in der Flüssigkeit werden die in Abbildung 3.4 dargestellten Verfestigungsvorgänge gefördert oder gehemmt.

Es ist plausibel, daß zum Verständnis der Vorgänge bei zeitabhängigen Schmelz- und Gefrierprozessen die Kenntnis der kritischen Größen $R_c^{(os)}$ und $\hat{\omega}_c^2$ nicht ausreicht. Vielmehr bedarf es einer Analyse des linearen Wanderwellenzustands durch die Auswertung der komplexen Feldamplituden (3.2.4) und (3.2.5) nach Betrag und Phase. Der Antriebsmechanismus der Wanderwelle wird ebenfalls mit Phasendifferenzen zwischen den verschiedenen Feldern erklärt, siehe Linz et al. (1988) und Zimmermann (1990). Es wird argumentiert, daß es dadurch zur Ausbildung von horizontalen Gradienten in der Schicht kommt, die einen globalen konvektiven Wärme- und Massetransport konstanter Amplitude in horizontaler Richtung hervorrufen.

Zur Phasenanalyse wählen wir folgenden Weg. Zunächst werden aus der Eigenwert-Beziehung (A 6.3) Bestimmungsgleichungen für die kritischen Größen abgeleitet. Dann können die Amplitudengleichungen (3.2.4) und (3.2.5) bis auf eine willkürliche Konstante gelöst werden. Wir fordern

$$T_1 = 1. \quad (3.4.13)$$

Betrag und Phase der einzelnen Feldamplituden werden auf die normierte Temperatur mit der Phase null bezogen. Die Phase des Konzentrationsfeldes entspricht dadurch der Phase des in Gleichung (3.1.22) eingeführten kombinierten Konzentrations- und Temperaturfeldes S . An der Grenzfläche flüssig \leftrightarrow fest bei $z=1$ ist auch der Betrag des Konzentrationsfeldes mit dem des S -Feldes gleich, da dort für den betrachteten Spezialfall mit $B=0$ Temperaturstörungen verschwinden.

Analog zum Fall ohne Verfestigung finden wir anstatt Gl. (3.3.1) nun

$$\left[r\hat{k}^2(1+\psi) - \frac{1}{4}\hat{q}^2(1+i\hat{\omega}) \right] + r\hat{k}^2\psi \frac{1 + \frac{5}{6}\hat{k}^2}{1 + \hat{k}^2} \frac{\hat{L} - i\hat{\omega}}{\hat{L}^2 + \hat{\omega}^2} \cdot F = 0, \quad (3.4.14)$$

mit dem komplexen Faktor F ,

$$F = \frac{1 - \frac{3}{10}d}{1 - \frac{1}{3}d \left\{ 1 - \frac{3\hat{L}}{5\hat{k}^2} \frac{\hat{L} - i\hat{\omega}}{\hat{L}^2 + \hat{\omega}^2} \right\}} \quad \text{und} \quad d = \frac{\delta}{1 - \delta} \frac{5i\hat{\omega}\hat{L}^{-1}\hat{k}^2 A}{1 + 5i\hat{\omega}\hat{L}^{-1}\hat{k}^2 A \frac{\delta}{1 - \delta}}. \quad (3.4.15)$$

Die explizite Auflösung der Beziehung (3.4.14) nach den Größen $r = r^{(os)}(\hat{k}^2)$ und $\hat{\omega} = \hat{\omega}(\hat{k}^2)$ ist nicht möglich. Zur weiteren Analyse des Problems wählen wir deshalb ein iteratives Verfahren. Spalten wir den Faktor F in Real- und Imaginärteil gemäß

$$F = Re[F] + i\hat{\omega} Im[F] \quad (3.4.16)$$

auf, so erhält man aus der Forderung, daß der Real- und Imaginärteil der komplexen Gleichung (3.4.14) getrennt verschwinden, die Beziehungen

$$r^{(os)} = \frac{1}{4} \frac{(1 + \hat{k}^2)^2}{\hat{k}^2} \frac{1 + \hat{L}}{1 + \psi} \frac{1}{1 + \frac{\psi}{1 + \psi} \frac{1 + \frac{5}{6}\hat{k}^2}{1 + \hat{k}^2} Im[F]}, \quad (3.4.17a)$$

$$\hat{\omega}^2 = -\hat{L}^2 - \psi \frac{1 + \hat{L}}{1 + \psi} \frac{1 + \frac{5}{6}\hat{k}^2}{1 + \hat{k}^2} \left| \frac{Re[F] - \hat{L} Im[F]}{1 + \frac{\psi}{1 + \psi} \frac{1 + \frac{5}{6}\hat{k}^2}{1 + \hat{k}^2} Im[F]} \right|. \quad (3.4.17b)$$

Beginnend mit den in Kapitel 3.3 für $\delta = 0$ ermittelten Startwerten $\hat{k}^2 = \hat{k}_{0,c}^{(os)2}$ und $\hat{\omega} = \hat{\omega}_{0,c}$ für die Darstellung des Faktors F in Gl. (3.4.15) lassen sich die Gleichungen (3.4.17a) und (3.4.17b) iterativ lösen. Die Minimierung der Stabilitätsgrenze (3.4.17a) bezüglich \hat{k}^2 liefert in einem ersten Schritt eine neue kritische Wellenzahl. Mit diesem Ergebnis wird über Gl. (3.4.17b) eine neue kritische Oszillationsfrequenz bestimmt. Die neuen kritischen Größen werden in einem zweiten Schritt zur erneuten Berechnung des Faktors F benutzt und die einzelnen Rechenschritte werden wiederholt. Für diese Iteration verwenden wir das algebraische Programmpaket "Mathematica" von Wolfram (1991).

Die Untersuchungen zeigen, daß die kritische oszillatorische Wellenzahl praktisch nicht von der Schmelzpunktabenkungs-Zahl δ abhängt. Die Neutralkurve $r^{(os)}(\hat{k}^2)$ ist für weite Parameterbereiche in der Umgebung von $\hat{k}^2 = \hat{k}_{0,c}^{(os)2}$ so flach, daß es selbst innerhalb der Rechengenauigkeit von $\mathcal{O}(10^{-16})$ nicht immer gelingt, das Minimum der Kurve eindeutig zu bestimmen. Ein ähnliches Verhalten zeigt der Graph $\hat{\omega}^2(\hat{k}^2)$. Für die weiteren Überlegungen gehen wir deshalb von dem Ergebnis

$$\hat{k}_c^{(os)2} = \hat{k}_{0,c}^{(os)2} \quad (3.4.17c)$$

aus.

Damit können die Gleichungen (3.4.17a) und (3.4.17b) vereinfacht werden. Für eine übersichtliche graphische Darstellung der Ergebnisse ist es zweckmäßig, Abweichungen der kritischen oszillatorischen Rayleigh-Zahl und der kritischen Oszillationsfrequenz vom Fall ohne Verfestigung mit $\delta = 0$ in Kapitel 3.3 zu betrachten und diese auf geeignete Referenzwerte zu beziehen. Wir verwenden die folgende Form:

$$\frac{r_c^{(os)} - r_{0,c}^{(os)}}{r_{0,c}^{(os)}} = \left\{ 1 + \frac{\Psi}{1 + \Psi} \frac{1 + \frac{5}{6} \hat{k}_{0,c}^{(os)2}}{1 + \hat{k}_{0,c}^{(os)2}} \operatorname{Im}[F] \right\}^{-1} - 1, \quad (3.4.18a)$$

$$\frac{\hat{\omega}_c^2 - \hat{\omega}_{0,c}^2}{\hat{L}^2 + \hat{\omega}_{0,c}^2} = (\operatorname{Re}[F] - L \cdot \operatorname{Im}[F]) \left\{ 1 + \frac{\Psi}{1 + \Psi} \frac{1 + \frac{5}{6} \hat{k}_{0,c}^{(os)2}}{1 + \hat{k}_{0,c}^{(os)2}} \operatorname{Im}[F] \right\}^{-1} - 1. \quad (3.4.18b)$$

Die Abbildungen 3.5 zeigen den Graph der Beziehungen (3.4.18) nach zwei Iterationsschritten für die Parameterwerte $L=0.01$ und $A=2$ für verschiedene Werte der Schmelzpunktabenkungs-Zahl δ . In Abbildung 3.5a sind die Abweichungen der bezogenen kritischen oszillatorischen Rayleigh-Zahl nach Gl. (3.4.18a) und in Abbildung 3.5b die der kritischen Oszillationsfrequenz nach Gl. (3.4.18b) dargestellt. Um das Stabilitätsverhalten des Systems in der Umgebung des Kodimension-Zwei-Verzweigungspunkts bei $\Psi = \Psi_{CT}^{(o)}$ nach Gl. (3.3.4) besser aufzulösen und den gesamten Bereich des Kontrollparameters Ψ zu erfassen, sind die Beziehungen (3.4.18) als Funktion der Größe $\Delta\Psi$, mit

$$\Delta\Psi = \Psi_{CT}^{(o)} - \Psi, \quad (3.4.18c)$$

eingezeichnet. Für $\Delta\Psi$ ist dabei ein logarithmischer Maßstab gewählt.

In unmittelbarer Umgebung des CT-Punktes bei $\Delta\Psi = 10^{-8}$ tritt mit zunehmenden δ -Werten eine geringfügige Destabilisierung der Schicht auf. Die kritischen oszillatorischen Rayleigh-Zahlen sinken mit wachsender Schmelzpunktabenkungs-Zahl δ , siehe Abbildung 3.5a. Dagegen nimmt die kritische Oszillationsfrequenz nach Abbildung 3.5b in diesem Parameterbereich mit steigenden δ -Werten zu. Für schwach negative Separationszahlen mit $\Delta\Psi \approx 10^{-4}$ wirkt die Schmelzpunktabenkung stabilisierend auf den Ruhezustand. Entsprechend nehmen die kriti-

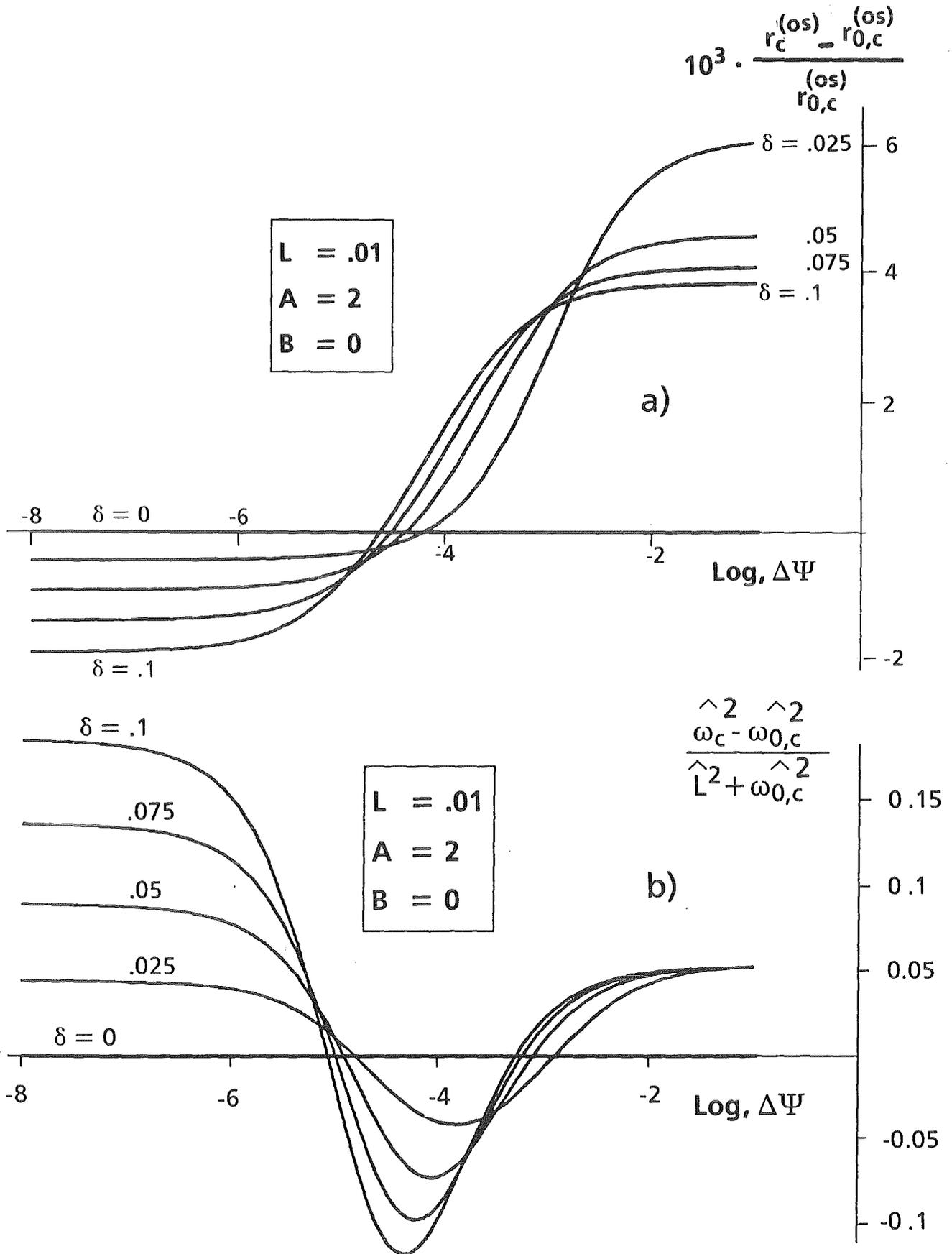


Abb. 3.5: Abweichungen der bezogenen kritischen oszillatorischen Rayleigh-Zahl (Abb. 3.5a) und Oszillationsfrequenz (Abb. 3.5b) vom Fall ohne Verfestigung mit $\delta = 0$ für verschiedene Schmelzpunktabsenkungszahlen für $L = 0.01$, $A = 2$.

schen Rayleigh-Zahlen nach Abbildung 3.5a zu. Gleichzeitig sinken die kritischen Oszillationsfrequenzen mit zunehmenden δ -Werten, siehe Abbildung 3.5b. Im Parameterbereich $\Delta\psi \approx 10^{-1}$ bei stark negativen Separationszahlen erkennt man aus Abbildung 3.5a eine mäßige Stabilisierung der Schicht, die mit zunehmenden Schmelzpunktabsenkungs-Zahlen δ jedoch wieder abnimmt. Eine weniger ausgeprägte δ -Abhängigkeit zeigt in diesem Parameterbereich die kritische Oszillationsfrequenz. Die numerischen Resultate ergeben, daß sie mit der Schmelzpunktabsenkungs-Zahl zunächst anwächst, dann aber mit zunehmenden δ -Werten wieder minimal abfällt. Dieses Verhalten ist im Rahmen der gewählten graphischen Darstellung in Abbildung 3.5b im einzelnen jedoch nicht zu erkennen.

Zur physikalischen Erklärung der Ergebnisse ziehen wir die Resultate der Phasenanalyse für die Konzentrations- und Geschwindigkeitswelle in die Diskussion heran. Die komplexen Amplituden des S- und w-Feldes besitzen die Darstellung

$$S_{(z)} = -\frac{1}{5} \frac{1 + \frac{5}{6} \hat{k}_{0,c}^{(os)2}}{1 + \hat{k}_{0,c}^{(os)2}} \frac{\hat{L} - i\hat{\omega}}{\hat{L}^2 + \hat{\omega}^2} \frac{1 - d \cdot z^2}{1 - \frac{1}{3}d \left\{ 1 - \frac{3\hat{L}}{5\hat{k}_{0,c}^{(os)2}} \frac{\hat{L} - i\hat{\omega}}{\hat{L}^2 + \hat{\omega}^2} \right\}}, \quad (3.4.19a)$$

$$w_{(z)} = 10\hat{\eta}(1 + i\hat{\omega})z(1 - z). \quad (3.4.19b)$$

Betrag und Phase der Felder sind über folgende Ausdrücke definiert:

$$Abs[S] := \left\{ Re[S]^2 + Im[S]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.4.20a)$$

$$Arg[S] := -\arctg \frac{Im[S]}{Re[S]}. \quad (3.4.20b)$$

Insbesondere ergeben sich aus Gl. (3.4.19a) mit den Gln (3.4.10) und (3.4.12) an der Grenzfläche bei $z=1$ die Relationen

$$Abs[\eta] = \frac{\delta}{1 - \delta} Abs[S_{(1)}], \quad Arg[\eta] = Arg[S_{(1)}], \quad (3.4.21a)$$

$$Abs[j_z] = Abs[DS_{(1)}], \quad Arg[j_z] = Arg[DS_{(1)}]. \quad (3.4.21b)$$

Die Größe $S_{(1)}$ in Gl. (3.4.21a) entspricht der Amplitude der Konzentrationswelle an der Grenzfläche.

In Abbildung 3.6 sind die Ergebnisse unserer Rechnungen für $L=0.01$ und $A=2$ quantitativ dargestellt. Es sind Betrag und Phase der komplexen Amplituden nach Gl. (3.4.20) als Funktion der Oszillationsfrequenz $\hat{\omega}$ für verschiedene Werte

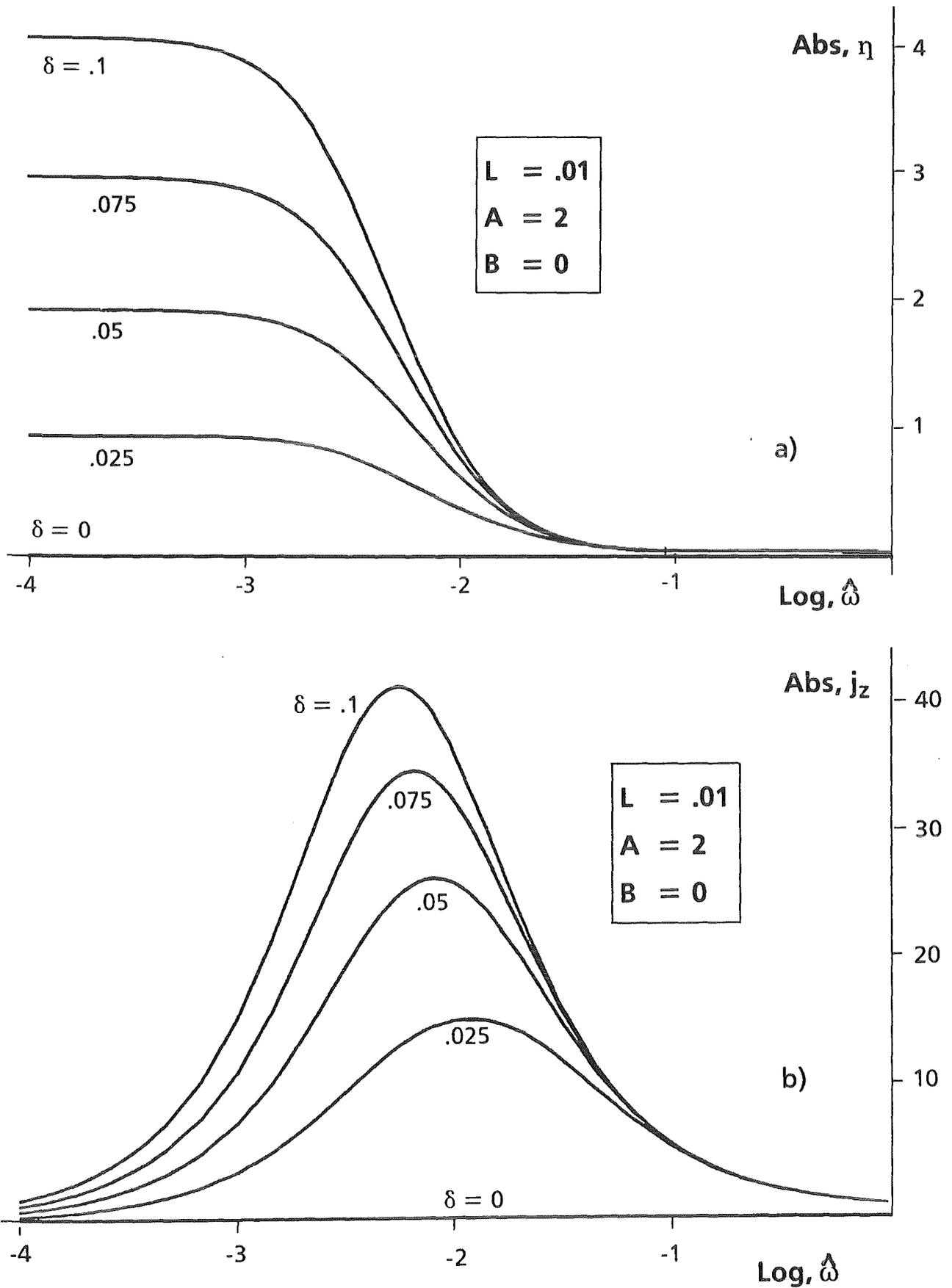


Abb. 3.6a + b: Betrag der Grenzflächenposition η (Abb. 3.6a) und des Massenstroms j_z (Abb. 3.6b) als Funktion der Oszillationsfrequenz $\hat{\omega}$ für verschiedene Schmelzpunktabsenkungs-Zahlen δ mit $L=0.01$, $A=2$, $B=0$.

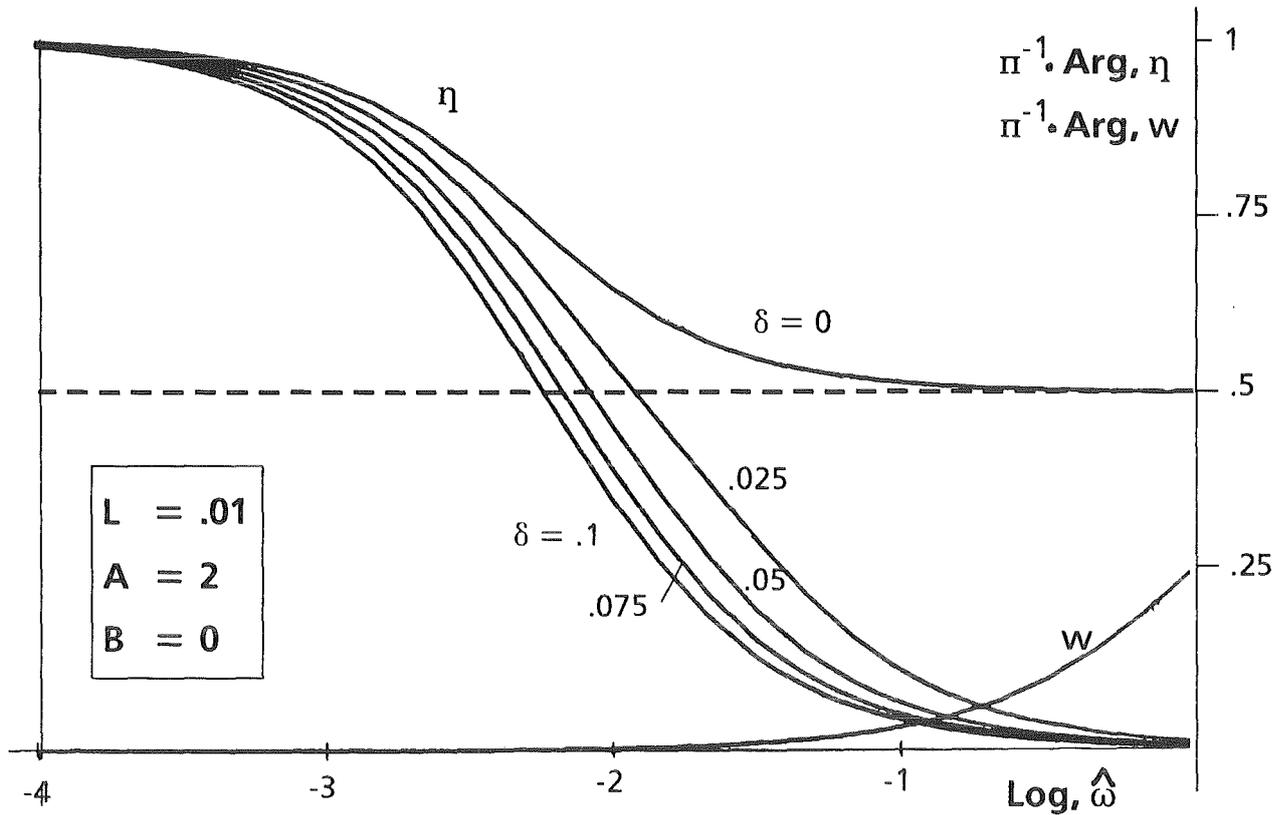


Abb. 3.6c: Phase der Grenzflächenposition/Konzentration und Vertikalgeschwindigkeit w als Funktion der Oszillationsfrequenz für verschiedene Schmelzpunktabsenkungs-Zahlen δ mit $L = 0.01$, $A = 2$, $B = 0$.

der Schmelzpunktabsenkungs-Zahl δ eingezeichnet. Für $\hat{\omega}$ ist dabei ein logarithmischer Maßstab gewählt. Diese Darstellung von komplexen Größen ist in der Regelungstechnik üblich und wird als Bode-Diagramm bezeichnet, siehe etwa Föllinger (1984). Den verschiedenen Frequenzbereichen in Abbildung 3.6 kann physikalisch ein Wert des Kontrollparameters Separations-Zahl ψ oder der in Abbildung 3.5 benutzten Größe $\Delta\psi$ nach Gl. (3.4.18c) zugeordnet werden. Kleine Frequenzen entsprechen kleinen $\Delta\psi$ -Werten, da in der Umgebung des CT-Punktes die Oszillationsfrequenzen klein bleiben. Großen Frequenzen sind dagegen große $\Delta\psi$ -Werten zuzuordnen, weil für stark negative Separationszahlen die kritischen Oszillationsfrequenzen stark ansteigen. Für den Fall $\delta = 0$ liefert Gl. (3.3.3) beispielsweise die typische Abhängigkeit $\hat{\omega}_{20,c}^2 \sim \Delta\psi$.

In Abbildung 3.6a ist mit $\text{Abs}[\eta]$ nach Gl. (3.4.21a) der Betrag der Grenzflächenamplitude und in Abbildung 3.6b mit $\text{Abs}[j_z]$ nach Gl. (3.4.21b) der Betrag des Massenstroms eingezeichnet. Abbildung 3.6c zeigt mit $\text{Arg}[\eta]$ nach Gl. (3.4.21a) die Phasenverschiebung zwischen Grenzflächenposition oder Konzentration und Temperatur. Des weiteren ist in Abbildung 3.6c mit $\text{Arg}[w] = -\text{arctg} \hat{\omega}$ die vom

Parameter δ unabhängige Phasenverschiebung zwischen der vertikalen Geschwindigkeit und der Temperatur dargestellt. Der diffusive Massenstrom j_z ist gegenüber der Konzentration stets um die Phase $-\pi/2$ verschoben, da er nach Gl. (3.4.12) durch Differentiation aus dem Konzentrationsfeld hervorgeht.

Wir wollen die Wirkung der Schmelzpunktabenkungs-Zahl δ anhand Abbildung 3.5 für aufsteigende $\Delta\psi$ -Werte und entsprechend Abbildung 3.6 für aufsteigende Frequenzen diskutieren.

In unmittelbarer Umgebung des CT-Punktes bei sehr kleinen Frequenzen mit $\Delta\psi \approx 10^{-8}$, $\hat{\omega} \approx 10^{-4}$ liegt bei zeitlich periodischen Konvektionseinsatz der in Abbildung 3.7 skizzierte Strömungszustand am oberen Rand vor.

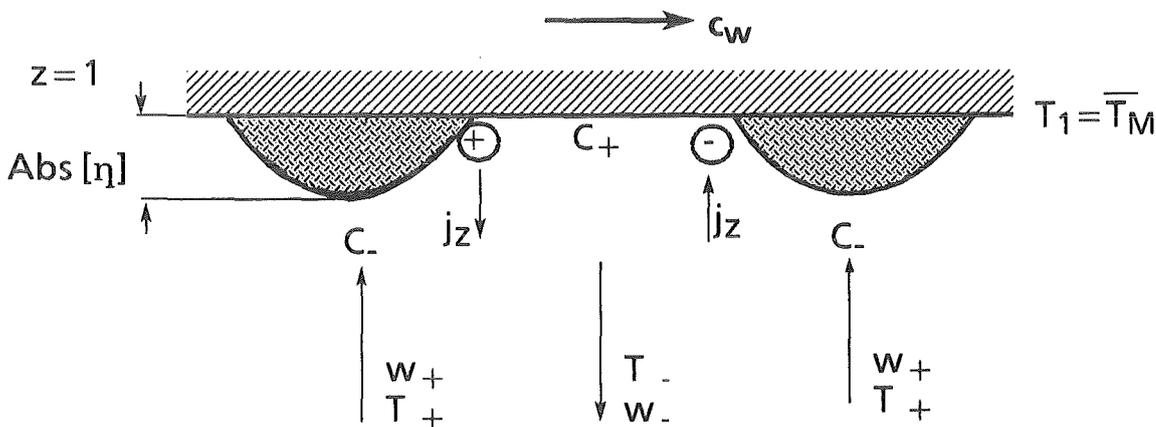


Abb. 3.7: Wanderwellenzustand bei sehr kleinen Frequenzen ($\hat{\omega} \approx 10^{-4}$).

Nach Abbildung 3.6c sind Vertikalgeschwindigkeit und Temperatur in Phase und die Konzentration eilt beiden mit der Phase π voraus. Die Eisinseln bilden sich nahezu direkt über den relativ warmen Aufstromgebieten ($w+$, $T+$) aus, da diese aufgrund der negativen Thermodiffusion konzentrationsarme Flüssigkeit $C-$ mit sich führen. Während die sehr schwachen Temperaturstörungen auf ihrem Weg nach oben weiter abgeschwächt werden, bleiben die induzierten Konzentrationsstörungen erhalten. Sie bewirken eine Änderung der aktuellen Schmelztemperatur der Flüssigkeit, gekennzeichnet durch den Parameter δ , und damit einen lokalen Gefrierprozeß. Der kalte Abstrom transportiert die aus der festen Phase verdrängte und an der Grenzfläche in der flüssigen Phase aufkonzentrierte leichte Komponente ab. Mit zunehmenden δ -Werten sind nach Abbildung 3.6a steigende Beträge der Grenzflächenposition η zu verzeichnen. Dies entspricht der Überlegung, daß durch eine stärkere Änderung der Schmelztemperatur der Gefriervor-

gang begünstigt wird und deshalb die Dicke der in Abbildung 3.7 dargestellten Eishügel zunimmt. Da die Oszillationsfrequenz sehr klein ist, wird nur wenig Material an der Phasengrenze aufgeschmolzen oder angefroren. Der vertikale Massenstrom bleibt damit nach Abbildung 3.6b gering. Mit wachsender Dicke der Eishügel wird jedoch pro Zeiteinheit mehr Material an der Grenzfläche umgesetzt. Deshalb nimmt der Massenstrom mit steigenden δ -Werten leicht zu, siehe auch Abbildung 3.6b. Mit zunehmender Dicke der Eishügel reichert sich die leichte Komponente in der flüssigen Phase an. Dadurch wird die Wirkung des negativen Sorét-Effekts verstärkt und es kommt nach Abbildung 3.5b zu einer Erhöhung der kritischen Oszillationsfrequenz mit wachsendem Parameter δ . Mit dicker werden Gefrierflächen ist gleichzeitig eine Destabilisierung der Schicht verbunden. Die kritischen Rayleigh-Zahlen für den Beginn der oszillatorischen Konvektion nehmen gemäß Abbildung 3.5a mit steigenden δ -Werten ab. Dies entspricht der destabilisierenden Wirkung einer deformierbaren Berandung endlicher Wärmeleitfähigkeit für schwach negative Separationszahlen, vergleiche Abbildung 3.3a in Kapitel 3.4.

Mit ansteigenden $\Delta\psi$ -Werten und entsprechend ansteigender Frequenz nimmt der Einfluß der negativen Thermodiffusion zu. Gebiete mit relativem Überschuß an der leichten gelösten Komponente verlagern sich deshalb mehr und mehr zu den Auftriebszentren der Konvektion hin, siehe Abbildung 3.6a.

In einem Bereich mit mäßig negativen Separationszahlen und kleinen Frequenzen bei $\Delta\psi \approx 10^{-4}$ und $\hat{\omega} \approx 10^{-2}$ hat sich die Konzentration gegenüber der phasengleichen Geschwindigkeit und Temperatur nach Abbildung 3.6c um die Phase $-\pi/2$ verschoben. In Abbildung 3.8 ist dieser Zustand dargestellt.

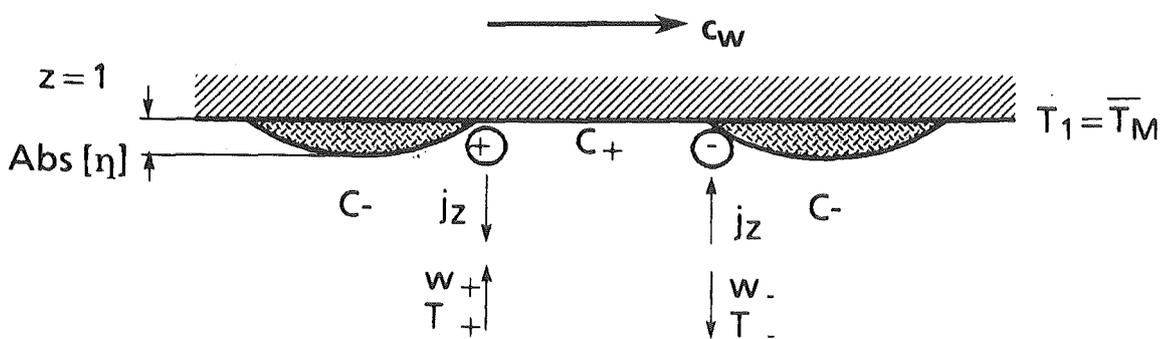


Abb. 3.8: Wanderwellenzustand bei kleinen Frequenzen ($\hat{\omega} \approx 10^{-2}$).

Die warmen Auftriebsgebiete der Konvektion kommen nun unterhalb von Zonen der Grenzfläche zu liegen, in denen Gefriervorgänge stattfinden. Konvektionsgebiete mit kaltem Abstrom befinden sich dagegen unterhalb der Schmelzzonen. Der An- und Abtransport der gelösten Komponente beim Phasenübergang wird demnach durch die Lage des Strömungsfelder nicht unterstützt. Die aus der festen Phase verdrängte Konzentration bewirkt, daß dort die aktuelle Schmelztemperatur der Flüssigkeit absinkt. Dadurch wird der Gefrierprozeß behindert. Als Folge hiervon wird feste Phase abgebaut. Wir registrieren deshalb in Abbildung 3.6a einen starken Abfall im Betrag der Grenzflächenamplitude η . Der Massenstrom nimmt entsprechend einen maximalen Betrag an, siehe Abbildung 3.6b. Die Behinderung der Gefriervorgänge führt auch zu einer Behinderung des Wandervorgangs der Welle. Die Oszillationsfrequenz nimmt gemäß Abbildung 3.5b mit zunehmenden δ -Werten ab. Dagegen tritt in diesem Parameterbereich nach Abbildung 3.5a eine Stabilisierung des Ruhezustands mit steigender Schmelzpunktabsenkungs-Zahl auf. Dies entspricht der stabilisierenden Wirkung einer dünnen Eisschicht bei mäßig negativen Separationszahlen, siehe Abbildung 3.3a in Kapitel 3.4.

Für stärker negative Separationszahlen und größere Frequenzen, im Parameterbereich $\Delta\psi \geq 10^{-2}$ mit $\hat{\omega} \geq 10^{-1}$, bewegen sich die Auftriebszonen der Konvektion zu den konzentrationsreicheren, kälteren Gebieten hin, siehe Abbildung 3.6c. Es wird dabei fast keine feste Phase mehr gebildet, siehe Abbildung 3.6a. Der Betrag der Grenzflächenamplitude η geht unabhängig vom Wert des Parameters δ gegen null. Dies bedeutet physikalisch, daß in diesem Parameterbereich Konzentrationsstörungen sehr klein werden. Dafür gibt das relativ rasche Fortschreiten des Wellenzustandes Anlaß, das für eine gute Durchmischung der Flüssigkeit in horizontaler Richtung sorgt. Aufgrund der schnellen Schmelz- und Gefriervorgängen an der Grenzfläche nimmt der Betrag des Massenstroms für $\delta \neq 0$ einen von null verschiedenen, kleinen Wert an, siehe Abbildung 3.6b. Die beim Gefrieren verdrängte geringe Menge der gelösten Komponente bewirkt jedoch eine Konzentrationsverteilung an der oberen Berandung, die gegenüber derjenigen im Fall $\delta = 0$ nach Abbildung 3.6c einen Phasenunterschied von $-\pi/2$ aufweist. In einem physikalischen Sinn wird der Flüssigkeitsschicht die Konzentrationsverteilung nun vom Verfestigungsvorgang aufgeprägt. Der Sprung in der Phasenlage des Konzentrationsfeldes an der Grenzfläche ist formal dadurch bedingt, daß der Realteil der komplexen Amplitude $S_{(1)}$ in Gl. (3.4.20b) für $\delta \neq 0$ sein Vorzeichen wechselt. Dies entspricht nach Gl. (3.4.21a) gerade einer Phase von $\pi/2$. In Abbildung 3.9 ist die Phasenlage des Wanderwellenzustands für $\hat{\omega} \approx 10^{-1}$ am oberen Rand für $\delta \neq 0$

und $\delta = 0$ dargestellt. Die Vertikalgeschwindigkeit eilt der Temperatur dabei nach Abbildung 3.6c jeweils leicht voraus.

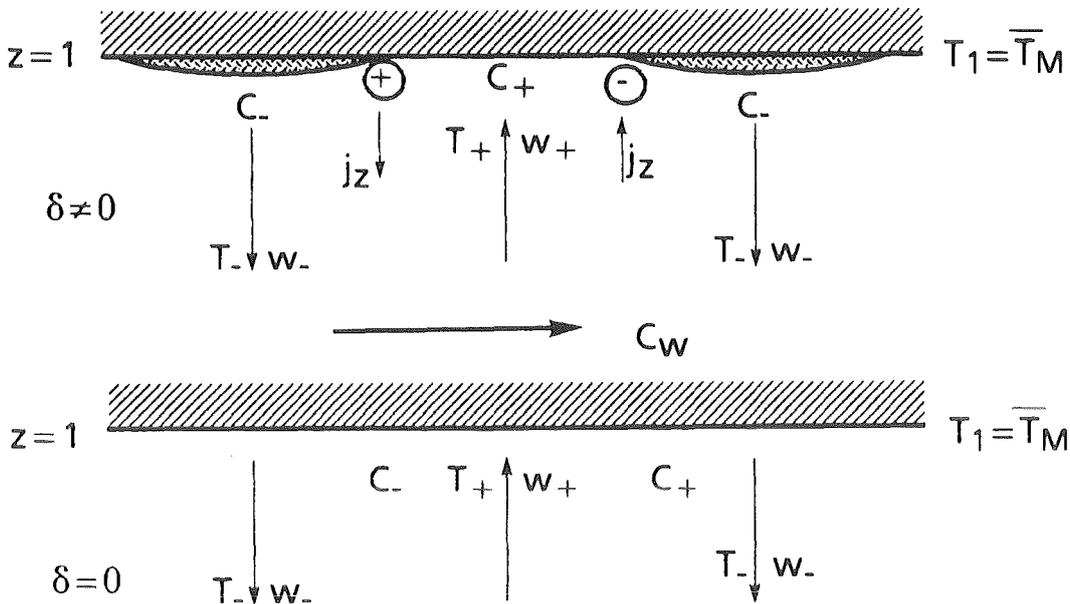


Abb. 3.9: Wanderwellenzustand bei größeren Frequenzen ($\hat{\omega} \approx 10^{-1}$) für $\delta \neq 0$, $\delta = 0$.

Die im Parameterbereich $\Delta\psi \geq 10^{-2}$ leicht abnehmende Stabilisierung der Schicht mit zunehmenden δ -Werten gemäß Abbildung 3.5a läßt sich mit leichten Phasenunterschieden zwischen Temperatur und Konzentration erklären. Nach Abbildung 3.6c bewegen sich im entsprechenden Frequenzbereich $\hat{\omega} \geq 10^{-1}$ die konzentrationsreichen Gebiete mit zunehmendem Parameter δ näher zu den relativ warmen Gebieten hin. Damit nehmen auch die effektiven Auftriebskräfte mit steigenden δ -Werten zu und die kritischen Rayleigh-Zahlen sinken.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß für sehr kleine Frequenzen mit $\hat{\omega} \approx 10^{-4}$ das Wandern des Konvektionsmusters eine untergeordnete Rolle spielt. Dieser Zustand entspricht dann weitgehend dem Zustand der stationären Konvektion. Molekulare Transportvorgänge sind an der Grenzfläche wegen $L \gg \hat{\omega}$ vorherrschend und sorgen bezogen auf die Zeitskala der Wanderwelle für einen raschen An- und Abtransport der gelösten Komponente beim Schmelzen und Gefrieren. Sind die beiden Zeitskalen von vergleichbarer Größenordnung $L \approx \hat{\omega} \approx 10^{-2}$, unterbinden Phasendifferenzen zwischen dem Konzentrationsfeld und dem Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld dieses Zusammenspiel. Die beim Gefrieren anfallenden Konzentrationsüberschüsse an der Grenzflächen werden nicht mehr abtransportiert. Als Folge hiervon sinkt die aktuelle Schmelztemperatur ab und die Gefrier-

flächen schmelzen teilweise auf. Ist die Oszillationsfrequenz der Wanderwelle genügend groß, $\hat{\omega} > 10^{-1}$, so wird die Eisbildung ganz unterdrückt. Nun ist der konvektive Transport vorherrschend. Er sorgt für eine gute Durchmischung der Flüssigkeit, so daß Konzentrationsstörungen an der Grenzfläche schnell verschwinden. Dadurch kann an der oberen Berandung keine feste Phase mehr gebildet werden.

3.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

Mit einem Galerkin-Verfahren wird die Wirkung einer dünnen Eisschicht auf die Konvektionsinstabilität einer binären Flüssigkeitsschicht in einem porösen Körper untersucht. Es zeigt sich, daß an der Stabilitätsgrenze des Ruhezustands bei negativem Sorét-Effekt ein Übergang zu einem Zustand oszillatorischer Konvektion stattfinden kann.

Die Auslenkung der im Ruhezustand ebenen Phasentrennfläche durch einsetzende Konvektion wird aufgrund von zwei Effekten bewirkt. Zum einen verursachen Temperaturstörungen eine Störung der Grenzflächenposition. In warmen Aufstromgebieten wird die Phasentrennfläche nach oben und in kalten Abstromgebieten nach unten ausgelenkt. Zum anderen bewirken Konzentrationsstörungen, daß die Gefrierfläche in Zonen mit viel gelöstem Stoff nach oben und in Gebieten mit wenig gelöster Komponente nach unten deformiert wird.

Herrscht in der Flüssigkeit ein Zustand stationärer Konvektion, so sind diese beiden Effekte gegenläufig, da für negative Separationszahlen ψ der warme Aufstrom konzentrationsarm ist. Die Deformationen des Grenzflächenprofils werden in diesem Fall minimal. Mit zunehmender Eisdicke nehmen die kritischen Rayleigh-Zahlen für den Beginn stationärer Konvektion ab. Dies entspricht der destabilisierenden Wirkung eines deformierbaren, schlecht wärmeleitenden Randes. Diese Wirkung ist auch für den Fall der Konvektion in einfachen Flüssigkeiten von Dietsche (1984), Davis et al. (1984) und Dietsche, Müller (1985) festgestellt worden.

Im Fall einer zeitlich periodischen Strömung bei Konvektionsbeginn ist die Wirkung einer dünnen Eisschicht komplexer. Für mäßig negative Separationszahlen überwiegt zunächst die destabilisierende Wirkung des freien Randes mit endlicher Wärmeleitfähigkeit. Für hinreichend negative ψ -Werte dominiert dagegen die stabilisierende Wirkung der Konzentrationsanreicherung der gelösten leicht-

ten Komponente in der flüssigen Phase bei teilweisem Ausfrieren. Dies ist dadurch bedingt, daß nur die reine Komponente in die feste Phase übergeht. Es kommt deshalb zu einem Anstieg der kritischen oszillatorischen Rayleigh-Zahl und der Oszillationsfrequenz gegenüber dem eisfreien Fall. Ein entsprechendes Verhalten findet Zimmermann (1990) für stärker negative ψ -Werte mit einer numerischen Stabilitätsanalyse.

Mit der durch den Anreicherungseffekt zunehmenden Oszillationsfrequenz ergeben sich gleichzeitig Verschiebungen in der Phasenlage zwischen dem Konzentrationsfeld und dem Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld. Die Ergebnisse der Phasenanalyse zeigen, daß diese Erscheinungen besonders ausgeprägt sind, wenn die Zeitskalen der molekularen Diffusion und der Oszillation von vergleichbarer Größenordnung sind. Der warme Aufstrom kommt dann in Bereichen zu liegen, in denen Gefriervorgänge stattfinden und deshalb größere Mengen der gelösten Komponente verdrängt werden. Als Folge davon wird der eigentliche Gefriervorgang behindert und feste Phase wird teilweise aufgeschmolzen. Wir finden, daß der beschriebene Zustand bei Werten der Separationszahl auftritt, die nur geringfügig kleiner als der Wert am Kodimensions-Zwei-Verzweigungspunkt sind. Dies spiegelt die Empfindlichkeit der Anordnung gegenüber einer kleinen Änderung des Kontrollparameters Separationszahl wider. Diese Betrachtungen sind bisher in der Literatur nicht durchgeführt worden.

Zimmermann (1990) beobachtet experimentell, daß unter der Wirkung einer dünnen Eisschicht ein oszillatorischer Konvektionszustand nicht stabil ist. Es bildet sich vielmehr ein Zustand der stationären Konvektion aus. Mit unserer linearen Stabilitätsanalyse des Ruhezustands kann dieses Verhalten naturgemäß nicht erfaßt werden. Hierzu ist eine nichtlineare Stabilitätsanalyse erforderlich. Unsere Untersuchungen zur Phasenanalyse legen jedoch ebenfalls den Schluß nahe, daß ein oszillatorischer Strömungszustand im Zusammenhang mit Schmelz- und Gefriervorgängen kein stabiler Konvektionszustand darstellt. Wir finden, daß kleinste Änderungen des Kontrollparameters Separationszahl zu Änderungen in der Oszillationsfrequenz führen, die mit großen Änderungen in der Eisdicke rückkopplern.

4. LITERATURVERZEICHNIS

G. Ahlers, M. Lücke, 1987:

Some properties of an eight-mode Lorenz model for convection in binary fluids; Phys. Rev. A 35, 470-473.

B. Antar, 1987:

Penetrative double-diffusive convection; Phys. Fluids 30, 322-330.

J. Bear; 1972:

Dynamics of fluids in porous media; American Elsevier Publishing Company, New York.

D. Bensimon, A. Pumir, B. Shraiman; 1989:

Nonlinear theory of traveling wave convection in binary mixtures; J. Phys. France 50, 3089-3108.

J. Boussinesq; 1903:

Théorie analytique de la chaleur; Vol. 2; Gauthier-Villars, Paris.

H. Brand; 1981:

Beiträge zur Sorét-getriebenen konvektiven Instabilität in der Mischung zweier Flüssigkeiten; Dissertation, Universität Essen.

H. Brand; V. Steinberg; 1983a:

Convective instabilities in binary mixtures in a porous medium; Physica 119A, 327-333.

H. Brand; V. Steinberg; 1983b:

Nonlinear effects in the convective instability of a binary mixture in a porous medium near threshold; Phys. Lett. 93A, 333-336.

I. Bronstein; K. Smendjajew; 1987:

Taschenbuch der Mathematik; Verlag Harri Deutsch, Thun.

F. Busse; 1967:

The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle; J. Fluid Mech. 30, 625-649.

F. Busse; 1976:

Non-linear properties of thermal convection; Rep. Prog. Phys. 41, 1929-1967.

F. Busse; N. Riahi; 1980:

Nonlinear convection in a layer with nearly insulating boundaries; J. Fluid Mech. 96, 243-256.

D. Caldwell; 1970:

Nonlinear effects in a Rayleigh-Bénard experiment; J. Fluid Mech. 42, 161-175.

D. Caldwell; 1973:

Measurements of negative thermal diffusion coefficients by observing the onset of thermohaline convection; J. Phys. Chem. 77, 2004-2008.

D. Caldwell; 1974:

Experimental studies on the onset of thermohaline convection; J. Fluid Mech. 64, 347-367.

J. Caltagirone; 1982:

Convection in a porous medium; in: Convective transport and instability phenomena; 199-232.

Hrsg.: J. Zierep; H. Oertel jr.; Verlag G. Braun, Karlsruhe.

D. Chock; C.H. Li; 1975:

Direct integration method applied to Sorét-driven instability; Phys. Fluids 18, 1401-1406.

T. Clune; E. Knobloch; 1991:

Square pattern convection in binary fluids with experimental boundary conditions; Phys. Rev. A44, 8084.

M. Combarous; S. Bories; 1975:

Hydrothermal convection in a saturated porous media; Adv. Hydro. Sci. 10, 231-306.

R. Courant; D. Hilbert; 1968:

Methoden der mathematischen Physik, Band I, II, Springer-Verlag.

M. Cross; 1986:

An eight-mode Lorenz model of traveling waves in a binary fluid convection.
Phys. Lett. A119, 21-24.

M. Cross; K. Kim; 1988:

Linear instability and the codimension-2 region in a binary fluid convection
between rigid impermeable boundaries; Phys. Rev. A37, 3909-3920.

H. Darcy; 1856:

Les fontaines publiques de la ville de Dijon; Dalmont Paris.

S. Davis; 1990:

Hydrodynamic interaction in directional solidification; J. Fluid Mech. 212, 241-262.

S. Davis; L. Segel; 1968:

Effects of curvature and property variation on cellular convection; Phys. Fluids 11,
470-475.

S. Davis; U. Müller; Ch. Dietsche; 1984:

Pattern selection in single-component systems coupling Bénard convection and
solidification; J. Fluid Mech. 144, 133-151.

A. Deane; E. Knobloch; J. Toomre; 1987:

Traveling waves and chaos in thermosolutal convection; Phys. Rev. A36, 2862-
2869.

A. Deane; E. Knobloch; J. Toomre; 1987:

Traveling waves in large-aspect-ratio thermosolutal convection; Phys. Rev. A37,
1817-1820.

Ch. Dietsche; 1984:

Einfluß der Bénard Konvektion auf Gefrierflächen; KfK-Bericht 3724.

Ch. Dietsche; U. Müller; 1985:

Influence of Bénard convection on solid-liquid interfaces; J. Fluid Mech. 161, 249-
268.

M. Dubois; P. Berge; J. Wesfreid; 1978:

Non-Boussinesq convective structures in water near 4 °C; *J. Phys.* 12, 1253-1257.

D. Faddejew; W. Faddejewa; 1970:

Numerische Methoden der linearen Algebra; R. Oldenburg Verlag München.

B. Finlayson; 1972:

The method of wighted residuals and variational principles; Academic Press New York.

O. Föllinger; 1984:

Regelungstechnik; AEG-Telefunken Berlin.

M. Golubitsky; I. Stewart; D. Schaeffer; 1984, 1985:

Singularities and groups in bifurcation theory, Vol. 1, 2; Springer-Verlag.

M. Golubitsky; J. Swift; E. Knobloch; 1984:

Symmetries and pattern selection in Rayleigh-Benard convection; *Physica 10 D*, 249.

D. Gray; A. Giorgini; 1976:

The validity of the Boussinesq approximation; *Int. J. Heat Mass Tr.* 19, 545-551.

J. Guckenheimer; P. Holmes; 1983:

Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields; Springer-Verlag.

L. Hadji; M. Schell; 1990:

Sorét-driven convection coupled to the morphology of a solid-liquid interface; *Phys. Fluids A2*, 1597-1606.

W. Hort; S. Linz; M. Lücke; 1992:

Onset of convection in binary gas mixtures: Role of the Dufour effect; *Phys. Rev. A45*, 3737.

D. Hurle; E. Jakeman; 1969:

Significance of the Sorét effect in the Rayleigh-Jeffreys'problem; *Phys. Fluids a12*, 2704-2707.

- D. Hurle; E. Jakeman; 1971:
Sorét-driven thermosolutal convection; *J. Fluid Mech.* 47, 667-687.
- D. Joseph; 1976:
Stability of fluid motion I, II; Springer-Verlag.
- E. Knobloch; 1980:
Convection in binary fluids; *Phys. Fluids* 23, 1918-1920.
- E. Knobloch; 1986:
Oscillatory convection in binary mixtures; *Phys. Rev.* A34, 1538-1549.
- E. Knobloch; 1989:
Pattern selection in binary-fluid convection at positive separation ratios; *Phys. Rev.* A40, 1549.
- E. Knobloch; D. Moore; 1988:
Linear stability of experimental Sorét convection; *Phys. Rev.* A37, 860-870.
- E. Knobloch; D. Moore; 1990:
Minimal model of binary fluid convection; *Phys. Rev.* A42, 4693-4709.
- E. Knobloch; M. Proctor; 1981:
Nonlinear periodic convection in double-diffusive systems; *J. Fluid Mech.* 108, 291-313.
- P. Kolodner; A. Passner; C. Surko; R. Walden; 1986:
Onset of oscillatory convection in a binary fluid mixture; *Phys. Rev. Lett.* 56, 2621-2624.
- P. Kolodner; H. Williams; C. Moe; 1988:
Optical measurement of the Sorét coefficient of ethanol, water solutions; *J. Chem. Phys.* 88, 6512-6524.
- R. Krishnamurti; 1968:
Finite amplitude convection with changing mean temperature; *J. Fluid Mech.* 33, 445-463.

E. Lapwood; 1948:

Convection of a fluid in a porous medium; Proc. Camb. Phil. Soc. 44, 508-521.

H. Lekkerkerker; 1978:

Convective instability in a binary liquid mixture; Physica 93A, 307-315.

O. Lhost; J. Platten; 1989:

Experimental study of the transition from nonlinear traveling waves to steady overturning convection in binary mixtures; Phys. Rev. A40, 4552-4557.

P. Linden; 1982:

Double-diffusive convection; in: Convective transport and instability phenomena; 171-197; Hrsg.: J. Zierep; H. Oertel jr.; G. Braun Verlag Karlsruhe.

S. Linz; 1989a:

Konvektion in binären Mischungen; Dissertation Universität Saarbrücken.

S. Linz; 1989b:

Binary mixtures: Onset of Dufour driven convection; Phys. Rev. A40, 7175-7181.

S. Linz; 1992:

Onset of Dufour-driven convection in binary fluid mixtures with no slip boundary conditions; Phys. Rev. A45, 1262.

S. Linz; M. Lücke; 1987a:

Convection in binary mixtures: A Galerkin model with impermeable boundary conditions; Phys. Rev. A35, 3997-4000.

S. Linz; M. Lücke; 1987b:

Non-Oberbeck-Boussinesq effects and barodiffusion in binary mixtures with small thermodiffusion ratio; Phys. Rev. A36, 3505-3509.

S. Linz; M. Lücke; H.W. Müller; J. Niederländer; 1988:

Convection in binary fluids mixtures: Traveling waves and lateral currents; Phys. Rev. A38, 5727-5741.

W. Mullins; R. Sekkerka; 1964:

Stability of a planar interface during solidification of a dilute binary alloy; *J. Appl. Phys.* 35, 444-451.

H.W. Müller; M. Lücke; 1988:

Competition between roll and square convection patterns in binary mixtures; *Phys. Rev. A* 38, 2965.

Ch. Normand; A. Azouni; 1992:

Penetrative convection in a internally heated layer of water near the maximum density point; *Phys. Fluids A* 4, 243.

E. Palm; 1960:

On the tendency towards hexagonal cells in steady convection; *J. Fluid Mech.* 8, 183-192.

E. Pampaloni; C. Pérez-García; L. Albavetti; 1992:

Transition from hexagons to rolls in convection in fluids under non-Boussinesq conditions; *J. Fluid Mech.* 234, 393-416.

J. Platten; 1971:

Le problème de Bénard dans les mélanges: cas de surface libres; *Bull. Classe Sci. Acad. Roy. Belg.* 57, 669-683.

J. Platten; G. Chavepeyer; 1972:

Sorét-driven instability; *Phys. Fluids* 15, 1555-1557.

J. Platten; J. Legros; 1984:

Convection in liquids; Springer-Verlag.

N. Riahi; 1988:

Solutal convection in a melt during solidification of a binary alloy; *Phys. Fluids* 31, 27.

M. Roberts; J. Swift; D. Wagner; 1986:

The Hopf bifurcation on a hexagonal lattice; in: Multiparameter bifurcation theory; 283-318; Hrsg.: M. Golubitsky; J. Guckenheimer; A.M.S. Providence.

R. Schechter; I. Prigogine; J. Hamm; 1972:

Thermal diffusion and convection stability; *Phys. Fluids* 15, 379-386.

R. Schechter; M. Velarde; J. Platten; 1974:

The two-component Bénard problem; *Adv. Chem. Phys.* 26, 265.

A. Scheidegger; 1974:

The physics of flow through porous media; University of Toronto Press.

Ch. Sorét; 1879:

Une dissolution saline primitivement homogène; *Arch. Sci. Phys. nat. Genève* 2, 48-61.

N. Stein; 1991:

Exact sine series solution for oscillatory convection in a binary fluid; *Phys. Rev. A* 43, 768-773.

V. Steinberg; E. Moses; 1987:

Experiments on convection in binary mixtures; in: *Patterns, defects and microstructures in nonequilibrium systems*; Proc. NATO Adv. Res. Workshop; Hrsg.: D. Walgraef, NATO ASI Series E; Martinus Nijhoff Publishers Dordrecht, Boston.

T. Sullivan; G. Ahlers; 1988:

Hopf bifurcation to convection near the codimension-two-point in a ^3He - ^4He mixture; *Phys. Rev. Lett.* 61, 78-81.

M. Velarde; R. Schechter; 1971:

Thermal diffusion and convective instability (III): A critical survey of Sorét coefficient measurements; *Chem. Phys. Lett.* 12, 312-315.

R. Walden; G. Ahlers; 1981:

Non-Boussinesq and penetrative convection in a cylindrical cell; *J. Fluid Mech.* 109, 89-114.

R. Walden; P. Kolodner; A. Passner; C. Surko; 1985:

Traveling waves and chaos in convection in binary fluid mixtures; *Phys. Rev. Lett.* 55, 381-394.

S. Wolfram; 1991:

Mathematica - a system for doing mathematics by computer; Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

X. Wu; A. Libchaber; 1991:

Non-Boussinesq-effects in free thermal convection; Phys. Rev. A43, 2833.

J. Zierep; 1960:

Zur Theorie der Zellularkonvektion IV. Über die Bewegungsrichtung in thermokonvektiven Zellularströmungen; Beitr. Phys. Atmos. 32, 158-160.

G. Zimmermann; 1990:

Bénard-Konvektion in binären Flüssigkeitsmischungen mit Thermodiffusion; Dissertation Universität Karlsruhe.

G. Zimmermann; U. Müller; 1992:

Bénard convection in binary mixtures with Sorét effects; Int. J. Heat Mass Transfer 35, 2245-2256.

G. Zimmermann; U. Müller; S. Davis, 1992:

Bénard convection in binary mixtures with Sorét effects and solidification; J. Fluid Mech. 238, 657-682.

5. Anhang

5.1 Verzeichnis der Formelzeichen

Das Verzeichnis enthält aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die häufig gebrauchten Formelzeichen. Vektoren sind mit einer Tilde und Matrizen mit einer Doppeltilde gekennzeichnet.

Lateinische Formelzeichen

A	Grenzflächenkonzentrations-Zahl
A_H	Amplitude des Hexagon-Musters
A_R	Amplitude des Rollen-Musters
B	Biot-Zahl
b	Abkürzung; $b = (1 + B)/(1 + 2B)$
C	Konzentration der gelösten Komponente
C_o	Anfangskonzentration der gelösten Komponente
c_p	spezifische Wärme
c_w	Phasengeschwindigkeit der Wanderwelle
D_o	molekulare Diffusionskonstante
e_z	Einheitsvektor in z-Richtung
\tilde{g}	Betrag der Schwerebeschleunigung
h	Schichthöhe
h_L	Höhe der Flüssigkeitsschicht im Ruhezustand
h_s	Höhe der Eisschicht im Ruhezustand
i	imaginäre Einheit
\tilde{j}	Massenstrom
\tilde{K}	Permeabilität des porösen Körpers
k	Wellenzahl
L	Lewis-Zahl
m	Steigung der Schmelzkurve
\tilde{n}	Normaleneinheitsvektor an der Grenzfläche
p	Druck
q	Abkürzung; $q = n^2 + k^2$
\tilde{q}	Wärmestrom
\tilde{R}	Rayleigh-Zahl
r	bezogene Rayleigh-Zahl
\tilde{r}	Positionsvektor in der x-y-Ebene
\tilde{RS}	Inhomogenitätenvektor

S	kombiniertes Temperatur- und Konzentrationsfeld
S_0	Sorét-Koeffizient
T	Temperatur
T_0, T_1	Temperatur des unteren, oberen Randes
T_M, T_{MO}	Schmelztemperatur der Mischung, der reinen Flüssigkeit
ΔT	Temperaturdifferenz
t	Zeit
$\mathbf{v} = (u, v, w)$	Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{x} = (w, T, S)$	Lösungsvektor
\mathbf{x}^*	adjungierter Lösungsvektor
$\bar{\mathbf{x}}$	konjugiert-komplexer Lösungsvektor
$\mathbf{X} = (W, T, S)$	Amplitudenvektor

Griechische Formelzeichen

α, α'	linearer thermischer, solotaler Expansionskoeffizient
β	nichtlinearer thermischer Expansionskoeffizient
γ	Nicht-Boussinesq-Zahl
δ	Schmelzpunktabenkungs-Zahl
ε	Amplitude der Störgrößen, Entwicklungsparameter
η	Position der Grenzfläche
κ	Temperaturleitfähigkeit
λ	Wärmeleitfähigkeit
Λ	Schmelzenthalpie
μ	dynamische Viskosität
ν	kinematische Viskosität
Π	Einheitswellenvektor
ρ	Dichte
ρ_0	Bezugsdichte
σ	komplexer Eigenwert
$\tau(t)$	Zeitverhalten der Störgrößen
$\Phi(x, y)$	horizontale Struktur der Strömungsmuster
Ψ	Separationszahl
$\Delta\Psi$	Differenz der Separationszahl, $\Delta\Psi = \Psi_{CT} - \Psi$
ω	Oszillationsfrequenz

Indices

c	kritisch
CT	Kodimension-Zwei-Verzweigungspunkt
eff	effektiv
EP	Endpunkt
f	Flüssigkeit
H	Hexagonmuster
g-Hex	Hexagon mit mittigem Abstrom
l-Hex	Hexagon mit mittigem Aufstrom
L	flüssige Phase
n, m	Laufindices der Störungsentwicklung
N,L,K	Laufindices in der Darstellung der Strömungsmuster
os	oszillatorisch
R	Rollenmuster
S	feste Phase
st	stationär
SV	stationärer Verzweigungspunkt
SW	stehende Welle
TW	wandernde Welle
UP	Umkehrpunkt
x,y,z	in Koordinatenrichtung
*	gemittelte Stoffkonstante
^	bezogene Größe
-	Ruhezustand

Operatoren

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}$ Ableitungen nach den Koordinaten; Zeitableitung

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ Gradienten-Operator

$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right)$ Laplace-Operator

$$\nabla_H^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Laplace-Operator in der x-y-Ebene

$$D = \frac{d}{dz}$$

totales Differential in z-Richtung

 $\underline{L}, \underline{M}$

Differentialoperatoren in der Störungsrechnung

 $\underline{L}^*, \underline{\bar{L}}, \underline{L}^T$ zu \underline{L} adjungierter, konjugiert-komplexer, transponierter Operator

Abs

Beitrag einer komplexen Größe

Arg

Argument einer komplexen Größe

Im

Imaginärteil einer komplexen Größe

Re

Realteil einer komplexen Größe

 Σ

Summenoperator

 $\langle \rangle$

verallgemeinertes Skalarprodukt

5.2 Rechnungen zur Störungsentwicklung

Es werden die Randwert-Probleme in den verschiedenen Ordnungen in ε und γ und die benötigten Lösungen angegeben. Bei sämtlichen Problemen werden homogene Randbedingungen bei $z=0$ und $z=1$ gefordert. Die Lösungen sind durch die Bedingungen

$$\langle T_{nm}, T_{10}^* \rangle = \begin{cases} 1/2 \text{ für } n=1, m=0 \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

normiert. Beziehungen für die Entwicklungskoeffizienten werden nur angegeben, falls sie im Text nicht in allgemeiner Form aufgeführt sind.

5.2.1 Rechnungen zum linearen Stabilitätsproblem

(i) Ordnung $(\varepsilon^1, \gamma^0)$:

$$\underset{\sim}{L}_o \{ \underset{\sim}{X}_{10} \} \equiv \begin{pmatrix} D^2 - k^2 & R_{00} k^2 (1 + \psi) & -R_{00} k^2 \psi \\ 1 & D^2 - k^2 - i\omega q & 0 \\ 0 & D^2 - k^2 & L(D^2 - k^2) - i\omega q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{10} \\ T_{10} \\ S_{10} \end{pmatrix} = 0.$$

$$\underset{\sim}{X}_{10}^{(st)} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \\ -L^{-1} \end{pmatrix} \cdot \sin \pi z, \quad \underset{\sim}{X}_{10}^{(os)} = \begin{pmatrix} q(1 + i\omega_{00}) \\ 1 \\ -(L - i\omega_{00})(L^2 + \omega_{00}^2)^{-1} \end{pmatrix} \cdot \sin \pi z.$$

Adjungierte Lösungen:

$$\underset{\sim}{X}_{10}^{*(st)} = \begin{pmatrix} q^{-1} \\ 1 \\ -\psi L^{-1} \{ 1 + \psi(1 + L^{-1}) \}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \sin \pi z; \quad \underset{\sim}{X}_{10}^{*(os)} = \begin{pmatrix} q^{-1} \\ 1 \\ L + i\omega_{00} \end{pmatrix} \cdot \sin \pi z.$$

(ii) Ordnung $(\varepsilon^1, \gamma^1)$:

$$\underset{\sim}{L}_o \{ \underset{\sim}{X}_{11} \} = \begin{pmatrix} -R_{01} k^2 \left[(1 + \psi) T_{10} - \psi S_{10} \right] + 2R_{00} k^2 z T_{10} \\ i\omega_{01} q T_{10} \\ i\omega_{01} q S_{10} \end{pmatrix}.$$

$$\underset{\sim}{X}_{11}^{(st)} = \begin{pmatrix} q + 3\pi^2 \\ 1 \\ -L^{-1} \end{pmatrix} \cdot \frac{32q^2}{3^3 \pi^4 (2q + 3\pi^2)} \frac{1}{1 + \psi \{ 1 + L^{-1} \}} \cdot \sin 2\pi z$$

$$+ \begin{pmatrix} q + 15\pi^2 \\ 1 \\ -L^{-1} \end{pmatrix} \cdot \frac{64q^2}{15^3 \pi^4 (2q + 15\pi^2)} \frac{1}{1 + \psi \{ 1 + L^{-1} \}} \cdot \sin 4\pi z + HOT.$$

$$\begin{aligned}
X_{\sim 11}^{(os)} &= \begin{pmatrix} i\omega_{01}q \\ 0 \\ \frac{(L-i\omega_{00})^2}{(L^2+\omega_{00}^2)^2} \end{pmatrix} \cdot \sin \pi z \\
&+ \begin{pmatrix} \frac{q(1+i\omega_{00})+3\pi^2}{1} \\ \frac{1}{q+3\pi^2} \\ -\frac{q(L+i\omega_{00})+3\pi^2L}{q(L+i\omega_{00})+3\pi^2L} \end{pmatrix} \cdot \frac{32q^2}{3^3\pi^4(2q+3\pi^2)} \frac{L(q+3\pi^2)+i\omega_{00}q}{L(q+3\pi^2)+i\omega_{00}q(1+L)} \frac{1+L}{1+\Psi} \cdot \sin 2\pi z \\
&+ \begin{pmatrix} \frac{q(1+i\omega_{00})+15\pi^2}{1} \\ \frac{1}{q+15\pi^2} \\ -\frac{q(L+i\omega_{00})+15\pi^2L}{q(L+i\omega_{00})+15\pi^2L} \end{pmatrix} \cdot \frac{64q^2}{15^3\pi^4(2q+15\pi^2)} \frac{L(q+15\pi^2)+i\omega_{00}q}{L(q+15\pi^2)+i\omega_{00}q(1+L)} \frac{1+L}{1+\Psi} \cdot \sin 4\pi z + HOT.
\end{aligned}$$

(iii) Ordnung (ε^1, ν^2) :

$$L_2^0 \{ X_{\sim 12} \} = \begin{pmatrix} -R_{02}k^2\{(1+\Psi)T_{10}-\Psi S_{10}\} - R_{01}k^2\{1+\Psi\}T_{11}-\Psi S_{11} \} + 2k^2\{R_{00}zT_{11}+R_{01}zT_{10}\} \\ i\omega_{02}qT_{10}+i\omega_{01}qT_{11} \\ i\omega_{02}qS_{10}+i\omega_{01}qS_{11} \end{pmatrix}.$$

Exakte Beziehungen für die Entwicklungskoeffizienten des oszillatorischen Problems:

$$\begin{aligned}
\frac{R_{02}^{(os)}}{R_{00}^{(os)}} &= \frac{1}{(1+\Psi)^2} \left[1 - \frac{(32q)^2(1+L)}{9 \cdot 27\pi^6(2q+3\pi^2)} \frac{L^2(q+3\pi^2)^2 + \omega_{00}^2q^2(1+L) - qL^3(q+3\pi^2)}{L^2(q+3\pi^2)^2 + \omega_{00}^2q^2(1+L)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(64q)^2(1+L)}{225^2 \cdot 15\pi^6(2q+15\pi^2)} \frac{L^2(q+15\pi^2)^2 + \omega_{00}^2q^2(1+L) - qL^3(q+15\pi^2)}{L^2(q+15\pi^2)^2 + \omega_{00}^2q^2(1+L)^2} \right], \\
2\omega_{00}\omega_{02} &= \frac{L^2+\omega_{00}^2}{(1+\Psi)^2} \left[1 - \frac{(32q)^2(1+L)}{9 \cdot 27\pi^6(2q+3\pi^2)} \frac{L^2(q+3\pi^2)^2 + \omega_{00}^2q^2(1+L) + qL^3(q+3\pi^2)}{L^2(q+3\pi^2)^2 + \omega_{00}^2q^2(1+L)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(64q)^2(1+L)}{225^2 \cdot 15\pi^6(2q+15\pi^2)} \frac{L^2(q+15\pi^2)^2 + \omega_{00}^2q^2(1+L) + qL^3(q+15\pi^2)}{L^2(q+15\pi^2)^2 + \omega_{00}^2q^2(1+L)^2} \right] - \omega_{01}^2.
\end{aligned}$$

5.2.2 Rechnungen zur nichtlinearen Konvektion

(i) Ordnung (ε^2, v^0):

$$M_0 \{x_{20}\} \equiv \begin{pmatrix} \nabla^2 & -R_{00}(1+\psi)\nabla_H^2 & R_{00}\psi\nabla_H^2 \\ 1 & \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & \nabla^2 & L\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{20} \\ T_{20} \\ S_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{10}\nabla_H^2\{1+\psi\}T_{10} - \psi S_{10} \\ (\underline{v}_{10} \cdot \nabla)T_{10} + i\omega_{10}qT_{10} \\ (\underline{v}_{10} \cdot \nabla)S_{10} + i\omega_{10}qS_{10} \end{pmatrix}.$$

Rollenlösungen:

$$\underline{x}_{20}^{(st)} = -\frac{q}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -L^{-1}(1+L^{-1}) \end{pmatrix} \cdot \sin 2\pi z,$$

$$\underline{x}_{20}^{(TW)} = -\frac{q}{4\pi} (1-i\omega_{00}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -L^{-1}\left(1 + \frac{L-i\omega_{00}}{L^2+\omega_{00}^2}\right) \end{pmatrix} \cdot \sin 2\pi z,$$

$$\underline{x}_{20}^{(SW)} = -\frac{q}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ (1-i\omega_{00}) + e^{2i\omega_{00}t} \\ -L^{-1}(1-i\omega_{00})\left(1 + \frac{L-i\omega_{00}}{L^2+\omega_{00}^2}\right) - \frac{L-i\omega_{00}}{L^2+\omega_{00}^2} \left\{1 + (1+i\omega_{00})\frac{L-i\omega_{00}}{L^2+\omega_{00}^2}\right\} e^{2i\omega_{00}t} \end{pmatrix} \cdot \sin 2\pi z.$$

Hexagonlösungen:

$$\underline{x}_{20}^{(st,H)} = -\frac{q}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -L^{-1}(1+L^{-1}) \end{pmatrix} \cdot \sin 2\pi z - \frac{q}{12\pi} \sin 2\pi z \star$$

$$\star \left[\sum_{N \neq L} F(\pm \pi_{NL}) \left\{ 1 - a_1(\pm \pi_{NL}) \frac{\psi L^{-2}}{1 + \psi(1 + L^{-1})} \right\} \begin{pmatrix} q(3 \mp \pi_{NL}) \\ 1 \\ L^{-1} \end{pmatrix} \cos \left\{ k(\pi_N \mp \pi_L) r \right\} \right. \\ \left. - \sum_{N \neq L} b_1(\pm \pi_{NL}) \begin{pmatrix} q(3 \mp \pi_{NL}) \\ 0 \\ L^{-2} \end{pmatrix} \cos \left\{ k(\pi_N \pm \pi_L) r \right\} \right];$$

$$F(\pi_{NL}) = \frac{(3 - \pi_{NL})(1 + \pi_{NL})}{(3 - \pi_{NL})^2 - 2(1 - \pi_{NL})}; \quad a_1(\pi_{NL}) = 2 \frac{1 - \pi_{NL}}{(3 - \pi_{NL})^2}; \quad b_1(\pi_{NL}) = \frac{1 + \pi_{NL}}{3 - \pi_{NL}}.$$

$$\tilde{x}_{20}^{(TW,H)} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_1 \\ D_4 \end{pmatrix} \sin 2\pi z + \sin 2\pi z \sum_{N \neq L} e^{i\{k(\pi_N - \pi_L)r\}} \begin{pmatrix} 0 \\ D_2 \\ D_5 \end{pmatrix} \\ + \sin 2\pi z \sum_{N \neq L} e^{-i\{k(\pi_N + \pi_L)r - 2\omega_{00}t\}} \begin{pmatrix} 0 \\ D_3 \\ D_6 \end{pmatrix};$$

$$D_1 = -\frac{q}{4\pi} (1 - i\omega_{00}); \quad D_2 = D_1 \cdot F^{(\pi_{NL})} \left[1 - \frac{2(1 - \pi_{NL})(L - i\omega_{00})}{L(3 - \pi_{NL})^2} \right];$$

$$D_3 = \frac{1}{3} \overline{D_1} \frac{(3 + \pi_{NL})(1 - \pi_{NL}) \left[1 - \frac{2(1 + \pi_{NL})}{3 + \pi_{NL}} \frac{L - i\omega_{00}}{L(3 + \pi_{NL}) + 2i\omega_{00}} \right]}{(3 + \pi_{NL})^2 - 2(1 - \pi_{NL}) \left[\frac{(3 + \pi_{NL})(L - \omega_{00}^2) + 2(1 + L)i\omega_{00}}{L(3 + \pi_{NL}) + 2i\omega_{00}} \right] + 2i\omega_{00}(3 + \pi_{NL})};$$

$$D_4 = -L^{-1} D_1 \left\{ 1 + \frac{L - i\omega_{00}}{L^2 + \omega_{00}^2} \right\}; \quad D_5 = -L^{-1} D_2 - \frac{1}{3} L^{-1} D_1 \frac{L - i\omega_{00}}{L^2 + \omega_{00}^2} \frac{1 + \pi_{NL}}{3 - \pi_{NL}};$$

$$D_6 = -\frac{3 + \pi_{NL}}{L(3 + \pi_{NL}) + 2i\omega_{00}} D_3 - \frac{1}{3} \overline{D_1} \frac{L - i\omega_{00}}{L^2 + \omega_{00}^2} \frac{1}{L(3 + \pi_{NL}) + 2i\omega_{00}};$$

$$F^{(\pi_{NL})} = \frac{(3 - \pi_{NL})(1 + \pi_{NL})}{(3 - \pi_{NL})^2 - 2(1 - \pi_{NL})(1 - L^{-1}\omega_{00}^2)}.$$

$$\tilde{x}_{20}^{(SW,H)} = \tilde{x}_{20}^{(SW)} + \frac{q}{12} \sin 2\pi z \cos \{ k(\pi_N \mp \pi_L)r \} *$$

$$\sum_{N \neq L} \left[(1 - i\omega_{00}) \frac{D_2(\pm \pi_{NL})}{D_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -L^{-1} \end{pmatrix} + (1 + i\omega_{00}) \frac{3D_3(\mp \pi_{NL})}{D_1} e^{2i\omega_{00}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{3 \mp \pi_{NL}}{L(3 \mp \pi_{NL}) + 2i\omega_{00}} \end{pmatrix} \right]$$

$$+ \sum_{N \neq L} \left[L^{-1} (1 \pm \pi_{NL}) + \frac{(L - i\omega_{00})(1 + i\omega_{00})}{L^2 + \omega_{00}^2} \frac{1 \pm \pi_{NL}}{L(3 \pm \pi_{NL}) + 2i\omega_{00}} e^{2i\omega q t} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} *$$

$$* \frac{q}{12} \sin 2\pi z \cos \left\{ k \left(\underbrace{\pi_N}_{\sim} \mp \underbrace{\pi_L}_{\sim} \right) \underbrace{r}_{\sim} \right\}.$$

Es gilt innerhalb der Summen eine Kurznotation, wie beispielsweise

$$F(\pm \pi_{NL}) \cos \left\{ k \left(\underbrace{\pi_N}_{\sim} \mp \underbrace{\pi_L}_{\sim} \right) \underbrace{r}_{\sim} \right\} = F(+\pi_{NL}) \cos \left\{ k \left(\underbrace{\pi_N}_{\sim} - \underbrace{\pi_L}_{\sim} \right) \underbrace{r}_{\sim} \right\} + F(-\pi_{NL}) \cos \left\{ k \left(\underbrace{\pi_N}_{\sim} + \underbrace{\pi_L}_{\sim} \right) \underbrace{r}_{\sim} \right\}.$$

(ii) Ordnung (ϵ^2, ν^1)

$$M_o \{x_{21}\} \approx \begin{pmatrix} R_{11} \nabla_H^2 \{(1 + \psi)T_{10} - \psi S_{10}\} + R_{01} \nabla_H^2 \{(1 + \psi)T_{20} - \psi S_{20}\} \\ (\underline{v}_{10} \cdot \nabla)T_{11} + (\underline{v}_{11} \cdot \nabla)T_{10} + i\omega_{10}qT_{11} + i\omega_{11}qT_{10} \\ (\underline{v}_{10} \cdot \nabla)S_{11} + (\underline{v}_{11} \cdot \nabla)S_{10} + i\omega_{10}qS_{11} + i\omega_{11}qS_{10} \end{pmatrix};$$

$x_{21}^{(st)} = NRT,$
 $x_{21}^{(os)} = \frac{q}{4\pi} i\omega_{00} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -L^{-1} \left(1 + \frac{1+L}{(L+i\omega_{00})^2} \right) \end{pmatrix} \sin 2\pi z + NRT;$
NRT = Nicht-Resonanz-Terme.

(iii) Ordnung (ϵ^3, ν^0):

$$M_o \{x_{30}\} \approx \begin{pmatrix} R_{20} \nabla_H^2 \{(1 + \psi)T_{10} - \psi S_{10}\} \\ (\underline{v}_{10} \cdot \nabla)T_{20} + i\omega_{20}qT_{20} \\ (\underline{v}_{10} \cdot \nabla)S_{20} + i\omega_{20}qS_{20} \end{pmatrix}.$$

Rollenlösungen:

$$x_{30}^{(st)} \approx 2\sqrt{2} \cos(k(\pi_1 \cdot r)) \begin{bmatrix} \frac{q}{8} \\ 0 \\ L^{-2}(1+L^{-1}) \end{bmatrix} \sin \pi z + \begin{bmatrix} (q+8\pi^2)E_1 - q^2/8 \\ E_1 \\ -L^{-1}E_1 - \frac{q^2}{8} \frac{L^{-2}(1+L^{-1})}{q+8\pi^2} \end{bmatrix} \sin 3\pi z;$$

$$E_1 = \frac{q^2}{128\pi^2} \frac{q+8\pi^2}{q+4\pi^2} \left\{ 1 + \frac{q^2}{(q+8\pi^2)^2} \frac{L^{-2}\psi(1+L^{-1})}{1+\psi(1+L^{-1})} \right\}.$$

$$\tilde{x}_{30}^{(TW)} = \sqrt{2} e^{-i\{k(\pi_1 r) - \omega_0 t\}} \left[\begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \\ E_3 \end{pmatrix} \sin \pi z + 2 \begin{pmatrix} E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{pmatrix} \sin 3\pi z \right];$$

$$E_2 = \frac{q^2}{4} (1 + i\omega_{00}) + i\omega_{20}q; \quad E_4 = -\frac{q^2}{8} (1 + i\omega_{00}) + \{q(1 + i\omega_{00}) + 8\pi^2\}E_5;$$

$$E_3 = \frac{q^2 (1 + i\omega_{00})(L - i\omega_{00})}{4(L^2 + \omega_{00}^2)^2} (1 + L) + i\omega_{20}q \frac{(L - i\omega_{00})^2}{(L^2 + \omega_{00}^2)^2};$$

$$E_6 = -\frac{q^2}{4} \frac{(1 + i\omega_{00})(1 + L)}{(L^2 + \omega_{00}^2)[q(L + i\omega_{00}) + 8\pi^2 L]} - \frac{q + 8\pi^2}{q(L + i\omega_{00}) + 8\pi^2 L} E_5;$$

$$E_5 = -\frac{q^2}{128\pi^2} \frac{q + 8\pi^2}{q + 4\pi^2} \frac{(1 + i\omega_{00}) \left\{ 1 - \frac{q^2(1 + L)}{L^2(q + 8\pi^2)^2 + \omega_{00}^2 q^2} \left(L - \frac{qi\omega_{00}}{q + 8\pi^2} \right) \right\}}{1 + \frac{q^2 L \omega_{00}^2}{L^2(q + 8\pi^2)^2 + \omega_{00}^2 q^2} + i\omega_{00} \frac{q(q + 8\pi^2)L^2}{L^2(q + 8\pi^2)^2 + \omega_{00}^2 q^2}}.$$

(iv) Ordnung (ε^4, γ^0):

$$\tilde{M}_{30} \{ \tilde{x}_{40} \} = \begin{pmatrix} R_{30} \nabla_H^2 \{ (1 + \psi) T_{10} - \psi S_{10} \} + R_{20} \nabla_H^2 \{ (1 + \psi) T_{20} - \psi S_{20} \} \\ (v_{10} \cdot \nabla) T_{30} + (v_{30} \cdot \nabla) T_{10} + i\omega_{30} q T_{10} + i\omega_{20} q T_{20} \\ (v_{10} \cdot \nabla) S_{20} + (v_{30} \cdot \nabla) S_{10} + i\omega_{30} q S_{10} + i\omega_{20} q S_{20} \end{pmatrix}.$$

Rollenlösungen:

$$\tilde{x}_{40}^{(st)} = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ (q + 4\pi^2)E_1 - \frac{1}{8} q^2 \\ -L^{-1}(q + 4\pi^2)(1 + L^{-1})E_1 + \frac{1}{8} q^2 L^{-1}(1 + L^{-1}) \left(1 - L^{-2} \frac{q + 4\pi^2}{q + 8\pi^2} \right) \end{pmatrix} \sin 2\pi z + NRT;$$

$$\tilde{x}_{40}^{(TW)} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ q(1 - i\omega_{00})E_5 - (\bar{E}_2 - \bar{E}_4) \\ L^{-1}q(1 - i\omega_{00})(E_5 + E_3 - E_6) + L^{-1}(\bar{E}_2 - \bar{E}_4) \left(1 + \frac{L - i\omega_{00}}{L^2 + \omega_{00}^2} \right) \end{pmatrix} \sin 2\pi z + NRT.$$

(vi) Ordnung(ε^5, ν^0):

$$M_{\nu^0} \{x_{50}\} = \begin{pmatrix} R_{40} \nabla_H^2 \{1 + \Psi\} T_{10} - \Psi S_{10} + R_{20} \nabla_H^2 \{(1 + \Psi) T_{30} - \Psi S_{30}\} \\ (v_{10} \cdot \nabla) T_{40} + (v_{30} \cdot \nabla) T_{20} + i\omega_{40} q T_{10} + i\omega_{20} q T_{30} \\ (v_{10} \cdot \nabla) S_{40} + (v_{30} \cdot \nabla) S_{20} + i\omega_{40} q S_{10} + i\omega_{20} q S_{30} \end{pmatrix}.$$

Exakte Beziehung für den Entwicklungskoeffizienten $R_{40}(st)$ des stationären Rollenmusters:

$$\frac{R_{40}^{(st)}}{R_{00}^{(st)}} = \frac{q^2}{16} \frac{1 + \Psi (1 + L^{-1} + L^{-2} + L^{-3})}{\{1 + \Psi (1 + L^{-1})\}^2} \Psi (L^{-2} + L^{-3}) \left\{ 1 - \frac{q^2 (3q + 16\pi^2)}{16\pi^2 (q + 4\pi^2) (q + 8\pi^2)} \right\} \\ - \frac{q^2}{8} \frac{q + 4\pi^2}{q + 8\pi^2} \frac{\Psi (L^{-4} + L^{-5})}{1 + \Psi (1 + L^{-1})} + \frac{q^2}{4} \left\{ 1 - \frac{(3q + 16\pi^2) (q + 8\pi^2)}{64\pi^4 (q + 4\pi^2)} \right\} \left\{ 1 + \frac{\Psi (L^{-2} + L^{-3})}{1 + \Psi (1 + L^{-1})} \right\}.$$

Lösbarkeitsbedingung für die Wanderwellenlösung in allgemeiner Form.

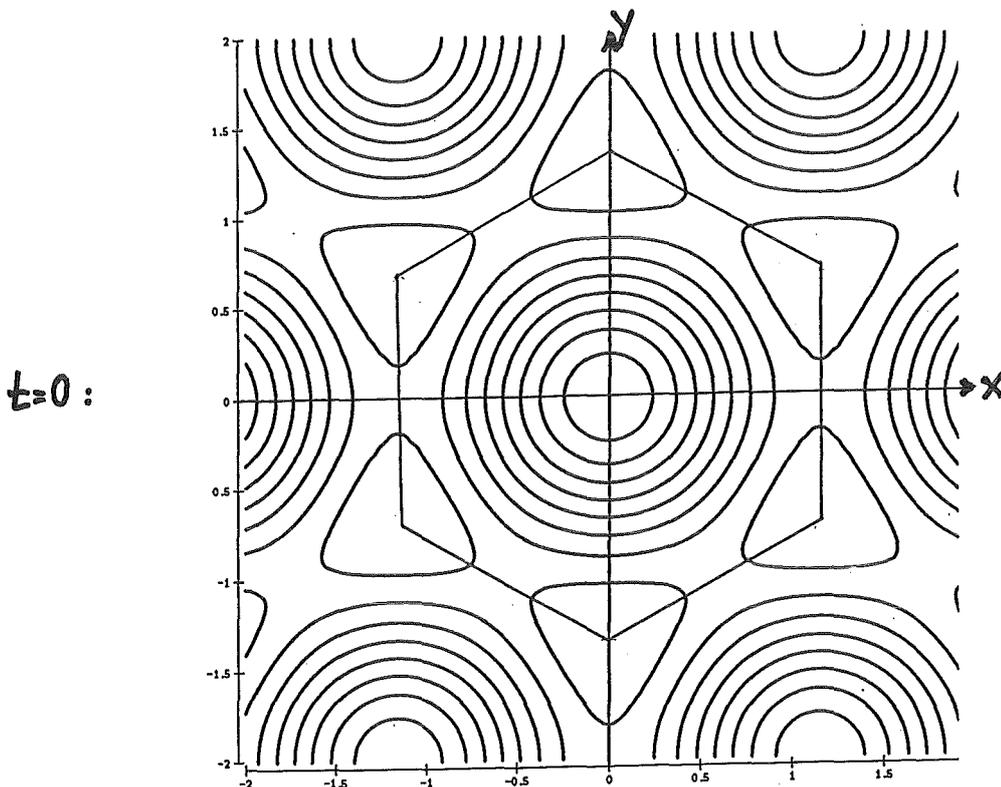
$$- \frac{R_{40}^{(TW)}}{R_{00}^{(os)}} (1 + i\omega_{00}) - \frac{2\omega_{00}\omega_{40}}{L^2 + \omega_{00}^2} (L - i\omega_{00}) + \frac{1}{2} (E_2 - E_4) \left\{ 1 - \frac{(1 + L)(L - i\omega_{00})}{L^2 + \omega_{00}^2} \right\} \\ + i\omega_{20} 2E_3 (L - i\omega_{00}) - \frac{1}{2} (1 + i\omega_{00}) \left[q(E_5 + \bar{E}_5) - i\omega_{00} q(E_5 - \bar{E}_5) - (E_2 + \bar{E}_2) + (E_4 + \bar{E}_4) \right] \\ + \frac{1}{4L} (1 + i\omega_{00}) (L - i\omega_{00})^* \\ * \left[q(E_5 + \bar{E}_5) - i\omega_{00} q(E_5 - \bar{E}_5) - (E_2 + \bar{E}_2) + (E_4 + \bar{E}_4) \right. \\ \left. + q(E_3 + \bar{E}_3) - i\omega_{00} q(E_3 - \bar{E}_3) - q(E_6 + \bar{E}_6) + i\omega_{00} q(E_6 - \bar{E}_6) \right. \\ \left. - \frac{L}{L^2 + \omega_{00}^2} \left\{ (E_2 + \bar{E}_2) - (E_4 + \bar{E}_4) \right\} - \frac{i\omega_{00}}{L^2 + \omega_{00}^2} \left\{ (E_2 - \bar{E}_2) - (E_4 - \bar{E}_4) \right\} \right] = 0.$$

5.3 Eigenwert-Gleichung in allgemeiner Form für $b \neq 1, \delta \neq 0, \psi \neq 0$

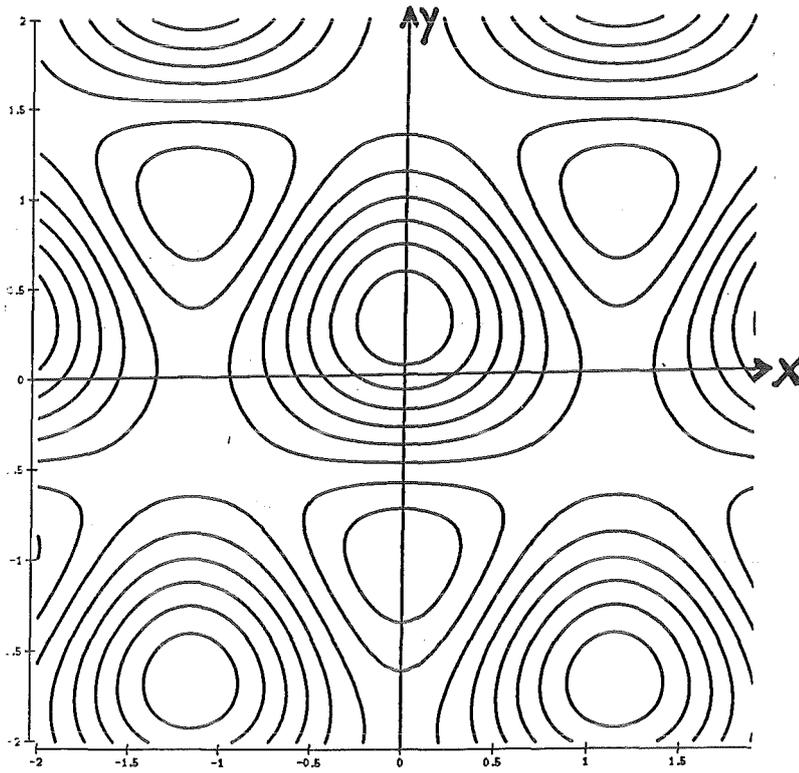
$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{5-3b}{2} r \hat{k}^2 (1+\psi) - \frac{1}{4} \hat{q}^2 \frac{b(3-2b) + (10-15b+6b^2)(\hat{k}^2 + i\hat{\omega})}{1+\hat{k}^2} \right]^* \\
 & \left[(\hat{L} + i\hat{\omega}) - \frac{1}{3} \frac{\delta}{1-\delta} \left[\hat{L} \left(1 - \frac{3}{5\hat{k}^2} \right) + i\hat{\omega} \right] \frac{5i\hat{\omega}\hat{L} - 1\hat{k}^2 A}{1 + 5i\hat{\omega}\hat{L} - 1\hat{k}^2 A} \frac{\delta}{1-\delta} \right] \\
 & + \frac{5-3b}{2} r \hat{k}^2 \psi \left[\frac{b + \frac{5}{6} \hat{k}^2 (3-2b)}{1+\hat{k}^2} - \frac{3}{10} \frac{5i\hat{\omega}\hat{L} - 1\hat{k}^2 A}{1 + 5i\hat{\omega}\hat{L} - 1\hat{k}^2 A} \frac{\delta}{1-\delta} \right]^* \\
 & * \left\{ \frac{\delta}{1-\delta} \frac{b + \frac{5}{6} \hat{k}^2 (3-2b)}{1+\hat{k}^2} - \frac{10}{3} (1-b) \left[\frac{\hat{L}}{\hat{k}^2} \left(1 - \frac{1}{6} \hat{k}^2 \right) - \frac{1}{6} i\hat{\omega} \right] \right\} = 0,
 \end{aligned} \tag{A.6.3}$$

5.4 Konturplots des wandernden Hexagonmusters

Die Abbildung zeigt Isolinen konstanter Vertikalgeschwindigkeit zu den Zeitpunkten $t=0$, nach einer Achtel-Periode und einer Viertel-Periode. Man erkennt die Transformation von einem Hexagonmuster in ein Dreieckmuster. Die Auftriebszentren der Konvektion wandern dabei in $+y$ -Richtung.



$$t = \frac{4t_f}{8} :$$



$$t = \frac{4t_f}{4} :$$

