
MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN
DER
IMPEDANZTOMOGRAPHIE

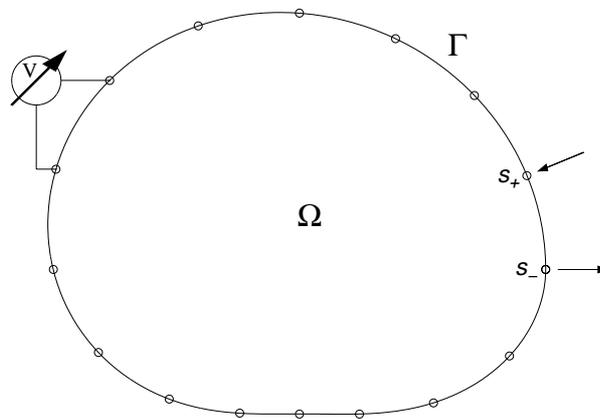
HDOZ. DR. M. HANKE

Universität Karlsruhe

WS 1996/97

1. Elektrische Impedanztomographie

Elektrische Impedanztomographie (kurz EIT) ist eine neuartige Tomographiemethode aus der Medizin. Ziel ist die Darstellung des Leitfähigkeitskoeffizienten im Innern des Körpers anhand von Randmessungen.



Der “Versuchsaufbau” ist wie folgt. Auf dem Rand ∂ des Körpers Ω werden p Elektroden befestigt. In p einzelnen Versuchen wird reihum durch jeweils zwei benachbarte Elektroden Strom in den Körper geschickt, bzw. abgezapft. Dabei ergibt sich ein elektrisches Feld E , bzw. ein Potential U (“Spannung”), welches am Rand ∂ – also an den p Elektroden – abgegriffen werden kann. Auf diese Weise erhält man somit p Datensätze: einer für jeden Versuch mit jeweils p Meßwerten (einer je Elektrode).

Wie hängen diese Meßwerte mit der Leitfähigkeit $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zusammen? Das physikalische Modell liefert das Ohm’sche Gesetz, nachdem der Strom J und das elektrische Feld E wie folgt gekoppelt sind:

$$J = \sigma E . \quad (\text{Ohm'sches Gesetz})$$

Dabei ist der positive Leitfähigkeitskoeffizient σ der Kehrwert des Widerstands. J und E sind vektorwertige Funktionen; das elektrische Feld ist der negative Gradient des Potentials U , also ein Gradientenfeld. Nach dem Ohm’schen Gesetz fließt der Strom in

die Richtung des steilsten Abfalls des Potentials; je größer die Leitfähigkeit ist, desto stärker ist der fließende Strom.

Von entscheidender Bedeutung ist im folgenden der Begriff der *Leistung* (Arbeit pro Zeiteinheit). Die Leistung ist gegeben durch das Skalarprodukt von Kraft mit Geschwindigkeitsvektor, also in unserem Fall $J \cdot E$. Integration über Ω ergibt die Leistungskomponente

$$P_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\text{grad } U|^2 dx.$$

Dieser Teil der Leistung ist immer positiv. Darüberhinaus fließt noch ein Strom J_0 zwischen den beiden Elektroden von s_- nach $s_+ \in \mathcal{C}$ außerhalb von Ω . Dies ergibt die zweite Leistungskomponente

$$P_2 = |J_0| (U(s_-) - U(s_+));$$

ist das Potential in s_+ größer, dann ist dieser Anteil der Leistung negativ.

Die Gesamtleistung des Systems ergibt sich aus der Summe der beiden Komponenten

$$P = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\text{grad } U|^2 dx + |J_0| (U(s_-) - U(s_+)). \quad (1.1)$$

Bei einem festen Zeitintervall der Länge T ergibt sich somit die Energie $W = PT$, die von der Batterie in diesem Zeitintervall aufgebracht werden muß.

Aufgrund üblicher physikalischer Annahmen (*Prinzip der geringsten Arbeit*) richtet sich in diesem Experiment dasjenige elektrische Feld aus, für das die Gesamtenergie minimiert wird. Nach Normierung des Randstroms J_0 zu eins und Übergang zu dimensionslosen Größen führt das auf das Funktional

$$\Phi[u] := \frac{1}{2} a(u, u) - b(u) \quad (1.2)$$

mit

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \sigma \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx, \quad b(u) := u(s_+) - u(s_-), \quad (1.3)$$

welches zu minimieren ist. Die Potentialfunktion u ist also die Lösung des Minimierungsproblems

$$\Phi[u] \longrightarrow \min. \quad (1.4)$$

Natürlich ergeben sich unmittelbar eine Reihe wichtiger Fragen: Bezüglich welcher Grundmenge $u \in \mathcal{X}$ wird $\Phi[u]$ minimiert? Existiert überhaupt das Infimum, und wenn ja, wird es angenommen? Diese Fragen werden wir leider erst in Kapitel 4 zufriedenstellend beantworten können. Vorwegnehmen wollen wir hier lediglich, daß \mathcal{X} ein linearer Raum sein soll. Dies paßt gut zu den grundlegenden Eigenschaften der

Funktionen a und b aus (1.3): $a(u, v)$ ist nämlich eine Bilinearform in u und v , und $b(u)$ ein lineares Funktional auf \mathcal{X} .

Nehmen wir für den Moment an, daß Φ an der Stelle $u \in \mathcal{X}$ ein lokales Minimum besitzt; dann folgt aus der erwähnten Linearität für ein beliebiges Element $v \in \mathcal{X}$ und für $t \in \mathbb{R}$ hinreichend nahe bei 0:

$$\begin{aligned}\Phi[u] &\leq \Phi[u + tv] = \frac{1}{2} a(u, u) + t a(u, v) + \frac{1}{2} t^2 a(v, v) - b(u) - t b(v) \\ &= \Phi[u] + t(a(u, v) - b(v)) + \frac{1}{2} t^2 a(v, v) \\ &=: p(t).\end{aligned}$$

Das quadratische Polynom p hat also in $t = 0$ ein globales Minimum, und es folgt zwangsläufig $0 = p'(0) = a(u, v) - b(v)$. Mit anderen Worten: Ist u ein lokales Minimum von Φ in \mathcal{X} , dann gilt

$$a(u, v) = b(v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}. \quad (1.5)$$

Bemerkung 1.1 Die Gleichung (1.5) ist vor allem für die Numerik interessant: Wählt man etwa einen endlichdimensionalen Teilraum $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}$, so bietet es sich an, das Funktional Φ statt über \mathcal{X} lediglich über \mathcal{X}_n zu minimieren. In diesem Fall genügt die Approximation $u_n \in \mathcal{X}_n$ den Gleichungen (1.5) zumindest noch für alle $v \in \mathcal{X}_n$. Repräsentiert man nun \mathcal{X}_n durch eine Basis $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, dann ergibt sich aus (1.5) ein lineares Gleichungssystem für die unbekanntenen Koeffizienten in der Darstellung $u_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k$, nämlich

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k a(\psi_k, \psi_j) = b(\psi_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

Die Matrix $A = [a(\psi_j, \psi_k)]_{jk}$ wird *Steifigkeitsmatrix* genannt.

Zurück zu (1.5), wobei wir nun ergänzend noch annehmen wollen, daß das Gebiet Ω , sowie die Funktionen σ und u hinreichend glatt seien. Durch *partielle Integration*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} v \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) dx &= \int_{\Gamma} \sigma v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega} \sigma \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u dx \\ &= \int_{\Gamma} \sigma v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - a(u, v)\end{aligned} \quad (1.7)$$

ergibt sich

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) dx = \int_{\Gamma} \sigma v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - b(v) = \int_{\Gamma} \sigma v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds + v(s_-) - v(s_+). \quad (1.8)$$

Wählt man schließlich in geschickter Weise für v Funktionen, die in Randnähe verschwinden und in $\Omega' \subset \Omega$ die Funktion $\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u)$ approximieren, so erkennt man, daß notwendig

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega .$$

Wieder eingesetzt in (1.8) folgt weiter, daß

$$\int_{\Gamma} \sigma v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = v(s_+) - v(s_-)$$

für alle $v \in \mathcal{X}$, also formal

$$\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)(s) = \delta(s - s_+) - \delta(s - s_-).$$

δ bezeichnet hierbei die *Delta-Distribution*.

Falls die obigen Umformungen also allesamt zulässig sind (d.h. im wesentlichen, falls u hinreichend glatt ist), dann löst u die partielle Differentialgleichung (Randwertaufgabe)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) &= 0 && \text{in } \Omega , \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) &= \delta(s - s_+) - \delta(s - s_-) && \text{auf } \Gamma . \end{aligned} \tag{1.9}$$

Ist umgekehrt u eine glatte Lösung von (1.9), dann löst u auch das Minimierungsproblem (1.4). Dies ergibt sich durch Einsetzen von (1.9) in (1.7): Daraus folgt nämlich die Gültigkeit von (1.5), so daß u ein kritischer Punkt von Φ ist. Wie wir in Kapitel 4 sehen werden, ist dies hinreichend für den Nachweis, daß u das globale Minimum von Φ ist (vgl. Korollar 4.2).

Bemerkung 1.2 Die Lösung von (1.9) ist allerdings ohne zusätzliche Einschränkungen nicht eindeutig. Das sieht man unmittelbar, da mit u auch jede Verschiebung $u + c$ (c konstant) eine Lösung von (1.9) darstellt. Diese (triviale) Mehrdeutigkeit kann man jedoch leicht ausschließen, indem man von der Lösungsfunktion noch zusätzlich fordert, daß

$$\int_{\Gamma} u ds = 0 .$$

Dies werden wir durch eine geeignete Wahl von \mathcal{X} garantieren.

Bemerkung 1.3 Die Voraussetzungen an die Glattheit von σ und u in diesem Resultat lassen sich für die oben gegebene Beweisskizze noch etwas abschwächen; allerdings ist das für uns nicht von Interesse, da wir später ohnehin einen deutlich allgemeineren Lösungsbegriff einführen werden. Man spricht nämlich von einer "schwachen Lösung"

u von (1.9), falls u lediglich das Minimierungsproblem (1.4) löst, aber beispielsweise noch nicht einmal in ganz Ω differenzierbar ist. Umgekehrt wird eine Funktion u “starke Lösung” von (1.9) genannt, falls u in Ω zweimal stetig differenzierbar ist, und der Gradient von u stetig auf den Rand $\partial\Omega$ fortgesetzt werden kann. Schwache Lösungen sind durchaus physikalisch sinnvoll: So werden wir beispielsweise in Satz 6.5 sehen, daß die Ableitung der Lösung u von (1.4) Sprünge aufweist an Stellen, an denen auch die Leitfähigkeit sich sprunghaft ändert, etwa an Grenzschichten zweier unterschiedlicher Medien. Dies ist physikalisch notwendig, da auf Grund von Flußerhaltungssätzen garantiert werden muß, daß in der Nähe von Grenzschichten der elektrische Fluß stetig ist.

Es gibt einen wichtigen Spezialfall, für den man die Gleichung (1.9) explizit lösen kann, nämlich für $\sigma \equiv 1$ im Einheitskreis Ω . In diesem Fall ist $\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = \Delta u$ der *Laplace-Operator*, und Lösungen von $\Delta u = 0$ werden *harmonische Funktionen* genannt.

Erinnerung. Ist $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit Realteil u und Imaginärteil v , also

$$f(z) = u(\xi, \eta) + i v(\xi, \eta), \quad z = \xi + i\eta,$$

dann gelten bekanntlich die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

$$u_\xi = v_\eta, \quad u_\eta = -v_\xi,$$

und es besteht der folgende Zusammenhang zu der (komplexen) Ableitung:

$$f' = u_\xi + i v_\xi = u_\xi - i u_\eta. \quad (1.10)$$

Aus den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen folgt unmittelbar, daß u und v beides harmonische Funktionen in Ω sind, also daß $\Delta u = \Delta v = 0$ in Ω .

Harmonische Funktionen erben einige Eigenschaften analytischer Funktionen: Beispielsweise ist eine harmonische Funktion u selber wieder analytisch bezüglich den Variablen ξ und η . Außerdem gilt das Maximum-/Minimumprinzip: Sind etwa u und v zwei harmonische Funktionen mit den gleichen Randwerten auf Γ , dann ist offensichtlich auch $u - v$ harmonisch mit identisch verschwindenden Randwerten. Nach dem Maximum-/Minimumprinzip muß somit $u - v \equiv 0$ gelten, d.h., u und v sind identisch. Mit anderen Worten: Eine harmonische Funktion ist durch ihre Randwerte eindeutig festgelegt. In dem Spezialfall, in dem Ω die Einheitskreisscheibe ist, kann diese Festlegung durch die *Poisson-Integraldarstellung* explizit gemacht werden. Ist g die gegebene Funktion der Randwerte auf Γ , dann läßt sich die harmonische Funktion u in Ω in Polarkoordinaten in der folgenden Weise darstellen:

$$u(r, \varphi) := P_{r, \varphi}[g] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} g(\theta) d\theta. \quad (1.11)$$

Beispiel 1.4 Wir betrachten die (komplexe) Funktion

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \log \frac{1+z}{1-z}, \quad z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}. \quad (1.12)$$

mit Realteil u und Imaginärteil v . Folglich ist

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{1+z}{1-z} \right| = \frac{1}{2\pi} \log \frac{(1+\xi)^2 + \eta^2}{(1-\xi)^2 + \eta^2}, \quad z = \xi + i\eta, \quad (1.13)$$

eine Lösung von $\Delta u = 0$ in Ω . Aus (1.10) folgt, daß

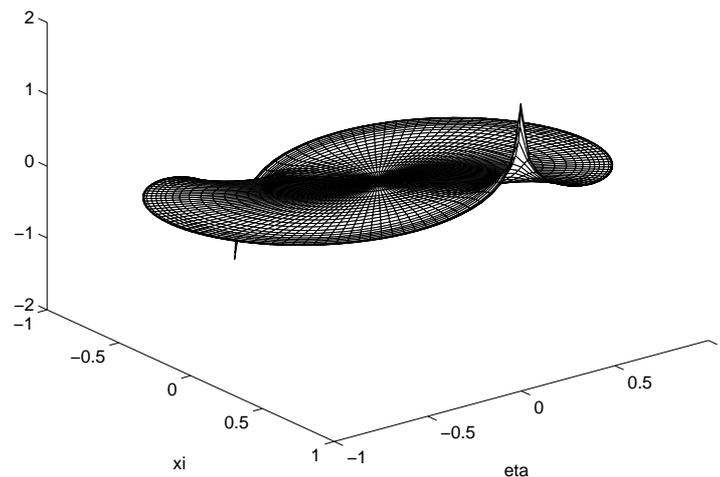
$$\frac{1}{|z|} \operatorname{Re} z f'(z) = \frac{\xi}{|z|} u_\xi + \frac{\eta}{|z|} u_\eta = \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi, \eta). \quad (1.14)$$

Auf dem Kreisring $|z| = r < 1$ ergibt das (mit $\xi = r \cos \theta$)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(r, \theta) = \frac{2}{\pi |z|} \operatorname{Re} \frac{z}{1-z^2} = \frac{2}{\pi r} \frac{\operatorname{Re}(z - |z|^2 \bar{z})}{1 - z^2 - \bar{z}^2 + |z|^4} = \frac{2}{\pi} \frac{(1-r^2) \cos \theta}{1 - 2r^2 \cos(2\theta) + r^4}.$$

Offensichtlich ergibt sich also durch stetige Fortsetzung $\frac{\partial u}{\partial \nu}(s) = 0$ auf allen Randpunkten $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. In diesen Ausnahmepunkten hat $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ hingegen einen Pol erster Ordnung: konvergiert $z \in \Omega$ gegen $s_+ = 1$, dann divergiert $\frac{\partial u}{\partial \nu}(z)$ gegen $+\infty$; konvergiert $z \in \Omega$ entsprechend gegen $s_- = -1$, dann divergiert $\frac{\partial u}{\partial \nu}(z)$ gegen $-\infty$. Abgesehen von ihrem Vorzeichen, sind die Residuen dieser Pole aber gleich, nämlich $1/\pi$.

Potential bei Dipolstromvorgabe



Natürlich ist dies kein Nachweis, daß $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma$ die Differenz zweier Delta-Distributionen ist. Dazu muß man anders argumentieren: Für festes $r < 1$ ist

$$N_r[g] := \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \nu}(r, \theta) g(\theta) d\theta$$

ein stetiges lineares Funktional über dem Raum der (reellen) Funktionen $g \in C(\cdot)$. Eine kurze Rechnung zeigt, daß

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi r} \left(\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} - \frac{1 - r^2}{1 + 2r \cos \theta + r^2} \right). \quad (1.15)$$

Nun verwenden wir, daß die Poisson-Integralformel (1.11) eine harmonische Funktion $v = P[g]$ in Ω mit Randwerten $v|_r = g$ definiert. Durch Integration folgt daher aus (1.15):

$$\begin{aligned} N_r[g] &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \nu}(r, \theta) g(\theta) d\theta = \frac{1}{r} (P_{r,0}[g] - P_{r,\pi}[g]) = \frac{1}{r} (v(r, 0) - v(r, \pi)) \\ &\longrightarrow g(1) - g(-1), \quad r \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Das Funktional $N_r[\cdot]$ konvergiert gegen $\delta(\cdot - 1) - \delta(\cdot + 1)$ für $r \rightarrow 1$. Damit ist nachgewiesen, daß die Funktion u aus (1.13) die Differentialgleichung (1.9) löst. Die Randwerte von u (also die abgreifbaren Spannungen) sind übrigens gegeben durch

$$u(1, \theta) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1 + \xi}{1 - \xi} = \frac{1}{\pi} \log \cot \frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad \theta \neq \pi. \quad (1.16)$$

$u|_r$ hat also milde (logarithmische) Singularitäten in $s = 1$ und $s = -1$.

Dieses Beispiel läßt sich leicht weiterführen: Bezeichnet $s = e^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$, einen Punkt auf dem Einheitskreisrand mit $\sqrt{s} = e^{i\theta/2}$, dann bildet die *Möbius-Transformation*

$$\zeta(z) = i \frac{z + \alpha\sqrt{s}}{\alpha z + \sqrt{s}}, \quad \alpha = \frac{(1 - \sqrt{s})i - 1 - \sqrt{s}}{(1 - \sqrt{s})i + 1 + \sqrt{s}},$$

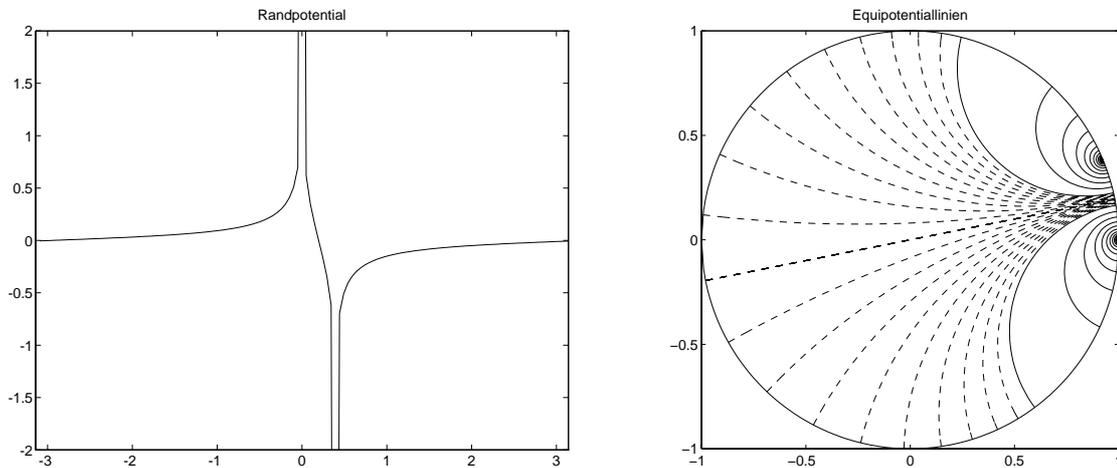
den abgeschlossenen (offenen) Einheitskreis Ω konform auf sich ab mit

$$\zeta(1) = 1, \quad \zeta(s) = -1 \quad \text{und} \quad \zeta(\sqrt{s}) = i.$$

Der Realteil U der analytischen Funktion $f(\zeta(z))$ ist also ebenfalls eine harmonische Funktion in Ω , und mit denselben Überlegungen wie zuvor sieht man, daß

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} \Big|_r = \delta(\cdot - 1) - \delta(\cdot - s).$$

Auf diese Weise läßt sich also auch das allgemeinere Problem (1.9) mit beliebigen Randpunkten s_+ und s_- auf $\partial\Omega$ lösen – zumindest im Einheitskreis und mit homogener Leitfähigkeit. Zur Illustration betrachten wir die folgenden zwei Plots:



Die Abbildungen gehören zu einer 16-Elektroden Konfiguration mit einer typischen Dipolanregung an zwei benachbarten Elektroden. Die beiden Bilder zeigen auf der einen Seite die resultierenden Spannungen auf dem Rand $\partial\Omega$, sowie die Äquipotentiallinien in Ω . Die durchgezogenen Äquipotentiallinien gehören zu $|U| = 0.1, 0.2, \dots, 2$, während die gebrochenen Linien den verbliebenen Bereich $|U| < 0.1$ feiner in Hundertstelschritten unterteilen. Wie man sieht, treten relevante Abweichungen vom Nullpotential nur in einer sehr kleinen Umgebung der stromführenden Elektroden auf. Man kann sich denken, daß es daher sehr schwer sein wird, beispielsweise Inhomogenitäten im Leitfähigkeitskoeffizienten weit im Inneren des Körpers, etwa in der Nähe des Nullpunkts, zu identifizieren. Wir werden dies später noch genauer in Kapitel 8 untersuchen.

2. Der Raum $H^1_\diamond(\Omega)$

Wir beschränken uns in dieser Vorlesung ausschließlich auf den Fall der Einheitskreisscheibe

$$\Omega = \{x = (\xi, \eta) \mid |(\xi, \eta)| < 1\},$$

so daß $\partial\Omega$ der Einheitskreisrand ist. Dies hat vor allem didaktische Gründe, da in diesem Fall einige kritische Abschätzungen “explizit” nachgerechnet werden können.

Bekanntlich bezeichnet $\mathcal{L}^2(\Omega)$ den Hilbert-Raum aller quadratisch integrierbaren Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, bzw. alternativ, den Abschluß von $C(\overline{\Omega})$ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u^2(x) dx.$$

Der entscheidende Vorteil des Einheitskreises macht sich dadurch bemerkbar, daß Funktionen $u \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ durch einen “Separationsansatz” bezüglich Polarkoordinaten approximiert werden können, d.h., durch Funktionen der Form

$$u(x) = y(r)\tau(\theta)$$

mit

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \theta & \eta &= r \sin \theta \\ r &= (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} & \theta &= \arctan \frac{\eta}{\xi} \\ r_\xi &= \frac{\xi}{r}, \quad r_\eta = \frac{\eta}{r} & \theta_\xi &= -\frac{\eta}{r^2}, \quad \theta_\eta = \frac{\xi}{r^2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Insbesondere ist also die Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(r, \theta)} \right| = r. \tag{2.2}$$

Lemma 2.1 Sei $\mathcal{L}^2_r[0, 1]$ der Abschluß der Menge aller über $[0, 1]$ stetigen Funktionen bezüglich der Norm

$$\|y\|_{\mathcal{L}^2_r[0,1]} := \left(\int_0^1 y^2(r) r dr \right)^{1/2}.$$

Funktionen der Form $u(x) = y(r)\tau(\theta)$ mit $\tau \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ und $y \in \mathcal{L}_r^2[0, 1]$ gehören zu $\mathcal{L}^2(\Omega)$, und es gilt

$$\|y(r)\tau(\theta)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \|y\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]} \|\tau\|_{\mathcal{L}^2[0,2\pi]}.$$

Beweis. Für eine Funktion u der genannten Form gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2(x) dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 y^2(r) \tau^2(\theta) \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \tau^2(\theta) \int_0^1 y^2(r) r dr d\theta = \|\tau\|_{\mathcal{L}^2[0,2\pi]}^2 \|y\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]}^2. \end{aligned}$$

□

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß

$$\tau(\theta) = \tau_n(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\theta), & n > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & n = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\theta), & n < 0 \end{cases}.$$

Wir setzen

$$\mathcal{T}_n := \{u(x) = y(r)\tau_n(\theta) \mid n \in \mathbf{Z}, y \in \mathcal{L}_r^2[0, 1]\}. \quad (2.3)$$

Proposition 2.2 Die Unterräume \mathcal{T}_n ($n \in \mathbf{Z}$) sind paarweise orthogonal zueinander.

Beweis. Sei $m \neq n$, $u_n = y_n(r)\tau_n(\theta)$ und $u_m = y_m(r)\tau_m(\theta)$ mit $y_n, y_m \in \mathcal{L}_r^2[0, 1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle u_n, u_m \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 y_n(r) y_m(r) \tau_n(\theta) \tau_m(\theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^1 y_n(r) y_m(r) r \int_0^{2\pi} \tau_n(\theta) \tau_m(\theta) d\theta dr, \end{aligned}$$

und das Ergebnis ist Null wegen der Orthogonalität der $\{\tau_n\}$. □

Satz 2.3 Die Summe aller Teilräume \mathcal{T}_n liegt dicht in $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Beweis. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$, und nehmen wir an, daß $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $v(x) = y(r)\tau_n(\theta)$ mit stetigem y . Zu zeigen ist, daß dann $u = 0$ sein muß. Wegen

$$0 = \langle u, v \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^1 u(x) y(r) \tau_n(\theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \tau_n(\theta) \int_0^1 u(x) y(r) r dr d\theta$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die stetige Funktion

$$\tau(\theta) := \int_0^1 u(r, \theta) y(r) r dr$$

zwangsläufig die Nullfunktion, und zwar für jedes $y \in C[0, 1]$. Wir wählen nun $\theta \in [0, 2\pi)$ fest: Da

$$\int_0^1 u(r, \theta) y(r) r dr = 0$$

für alle $y \in C[0, 1]$, also insbesondere für $y(r) := u(r, \theta)$ mit eben jenem fest gewählten θ , folgt $\int_0^1 u^2(r, \theta) r dr = 0$. Folglich ist die stetige Funktion $u(r, \theta)$ identisch 0, und zwar für jedes θ . Also ist $u \equiv 0$.

Somit ist die Summe der \mathcal{T}_n ($n \in \mathbb{Z}$) dicht in $C(\overline{\Omega})$ (bezüglich der \mathcal{L}^2 -Topologie) und damit auch in $\mathcal{L}^2(\Omega)$. \square

Wir führen nun in Analogie zum $\mathcal{L}^2(\Omega)$ einen Raum “differenzierbarer Funktionen” ein:

Definition 2.4 Sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $\int_{\Gamma} u d\theta = 0$, sowie

$$\|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.4)$$

Der Raum $H_{\diamond}^1(\Omega)$ bezeichne die Vervollständigung von $\{u \in C^1(\overline{\Omega}) \mid \int_{\Gamma} u d\theta = 0\}$ bezüglich der Norm in (2.4).

$H_{\diamond}^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit Innenprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H_{\diamond}^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx. \quad (2.5)$$

Die Einschränkung auf Funktionen u mit $\int_{\Gamma} u d\theta = 0$ ist wichtig, damit (2.4) tatsächlich eine Norm ist.

Achtung. Genau wie \mathcal{L}^2 -Funktionen keine Punktauswertung zulassen, brauchen $H_{\diamond}^1(\Omega)$ -Funktionen nicht differenzierbar sein; sie brauchen noch nicht einmal beschränkt zu sein:

Beispiel 2.5 Sei $u(r, \theta) := \log |\log \frac{r}{2}| - \log \log 2$. Dann ist $u|_{\Gamma} = 0$ und u ist stetig differenzierbar in $\Omega \setminus \{0\}$ mit Ableitung

$$\text{grad } u = \frac{1}{\log \frac{r}{2}} \frac{1}{r} \text{grad } r.$$

Folglich ist

$$|\operatorname{grad} u|^2 = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\log^2 \frac{r}{2}} |\operatorname{grad} r|^2 = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\log^2 \frac{r}{2}},$$

und (2.4) existiert als uneigentliches Integral:

$$\int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{r^2} \frac{1}{\log^2 \frac{r}{2}} r dr d\theta = -2\pi \frac{1}{\log \frac{r}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{\log 2}.$$

Funktionen mit “schlimmeren” Singularitäten sind jedoch im allgemeinen aus $H_{\diamond}^1(\Omega)$ ausgeschlossen.

Beispiel 2.6 Sei u die Funktion aus Beispiel 1.4, vgl. (1.13). Diese Funktion hat logarithmische Singularitäten an den Randpunkten ± 1 . Wegen (1.10) ergibt sich mit f gemäß (1.12) die Identität

$$|\operatorname{grad} u|^2 = |f'(z)|^2 = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{|1-z|^2|1+z|^2}.$$

Durch die Substitution $1-z = \rho e^{i\phi}$ sieht man, daß

$$\int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 dx \geq \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{4|\rho e^{i\phi}|^2} d\phi \rho d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\rho} d\rho,$$

und das letzte Integral ist eine divergente Minorante. Folglich haben wir $u \notin H_{\diamond}^1(\Omega)$.

Auch in $H_{\diamond}^1(\Omega)$ spielen die Teilräume \mathcal{T}_n aus (2.3) eine wichtige Rolle.

Proposition 2.7 Die Unterräume $\mathcal{T}_n \cap H_{\diamond}^1(\Omega)$ ($n \in \mathbb{Z}$) sind auch bezüglich dem $H_{\diamond}^1(\Omega)$ -Innenprodukt (2.5) paarweise orthogonal.

Beweis. Seien u_n und u_m wie im Beweis von Proposition 2.2 gewählt, nun allerdings stetig differenzierbar auf $\overline{\Omega}$. Wegen

$$\operatorname{grad} u_n = y'_n \tau_n \operatorname{grad} r + y_n \tau'_n \operatorname{grad} \theta$$

und den Rechenregeln

$$|\operatorname{grad} r| = 1, \quad \operatorname{grad} r \cdot \operatorname{grad} \theta = 0, \quad |\operatorname{grad} \theta| = r^{-1}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} & \operatorname{grad} u_n \cdot \operatorname{grad} u_m \\ &= y'_n \tau_n y'_m \tau_m |\operatorname{grad} r|^2 + (y'_n \tau_n y_m \tau'_m + y_n \tau'_n y'_m \tau_m) \operatorname{grad} r \cdot \operatorname{grad} \theta + y_n \tau'_n y_m \tau'_m |\operatorname{grad} \theta|^2 \\ &= y'_n \tau_n y'_m \tau_m + r^{-2} y_n \tau'_n y_m \tau'_m. \end{aligned}$$

Da $\tau'_n = n\tau_{-n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ folgt

$$\text{grad } u_n \cdot \text{grad } u_m = y'_n y'_m \tau_n \tau_m + nm r^{-2} y_n y_m \tau_{-n} \tau_{-m}$$

und

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \text{grad } u_n \cdot \text{grad } u_m \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \tau_n \tau_m \int_0^1 y'_n y'_m r \, dr \, d\theta + nm \int_0^{2\pi} \tau_{-n} \tau_{-m} \int_0^1 \frac{y_n y_m}{r} \, dr \, d\theta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite verschwindet für $n \neq m$. Das zweite Integral hingegen kann höchstens einen Beitrag liefern, wenn $nm \neq 0$ ist. In diesem Fall müssen y_n und y_m einfache Nullstellen in $r = 0$ haben, da ansonsten u_n bzw. u_m in $x = 0$ nicht differenzierbar wäre. Damit hat $y_n y_m / r$ eine hebbare Singularität im Nullpunkt und der gesamte hintere Term in (2.6) verschwindet wegen der Orthogonalität der $\{\tau_n\}$. Da die in $\overline{\Omega}$ differenzierbaren Funktionen dicht in $H^1_{\diamond}(\Omega)$ liegen, folgt die vollständige Behauptung schließlich durch Grenzübergang. \square

Satz 2.8 *Die Summe der Unterräume $\mathcal{T}_n \cap H^1_{\diamond}(\Omega)$ ($n \in \mathbb{Z}$) liegt dicht in $H^1_{\diamond}(\Omega)$.*

Beweis. Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$, und sei ferner angenommen, daß $\langle u, v \rangle_{H^1_{\diamond}(\Omega)} = 0$ für alle $v(x) = y(r)\tau_n(\theta)$ mit stetigem y und $n \in \mathbb{Z}$. Mittels partieller Integration ergibt sich, vgl. (1.7),

$$0 = \langle u, v \rangle_{H^1_{\diamond}(\Omega)} = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\theta - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx = y(1) \int_{\Gamma} \tau_n \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\theta - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx. \quad (2.7)$$

Damit ist $\langle \Delta u, v \rangle = 0$ für alle $v(x) = y(r)\tau_n(\theta)$ mit $y(1) = 0$. Letztere Nebenbedingung ist aber wegen der Dichtheit der entsprechenden stetigen Funktionen keine wesentliche Einschränkung, und es folgt wie im Beweis von Satz 2.3 daß $\Delta u = 0$ in Ω . Eingesetzt in (2.7) – nun wieder mit einer beliebigen in $[0, 1]$ stetigen Funktion y – folgt

$$\int_{\Gamma} \tau_n \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\theta = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},$$

also $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0$. Wegen

$$|z| \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi, \eta) = \text{Re } z f'(z),$$

vgl. (1.14), ist $|z| \frac{\partial u}{\partial \nu}$ selber wieder eine harmonische Funktion in Ω , die auf dem Rand verschwindet. Also ist $|z| \frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv 0$ und u somit konstant in radiale Richtungen. Da $u \in C^2(\overline{\Omega})$, ist u insbesondere stetig im Nullpunkt und folglich muß u in ganz $\overline{\Omega}$ konstant sein. Wegen $\int_{\Gamma} u \, d\theta = 0$ ergibt sich $u \equiv 0$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Die Teilräume \mathcal{T}_n enthalten für große n ausschließlich stark oszillierende Funktionen. Daher wird man für große n eine große $H^1_{\diamond}(\Omega)$ -Norm erwarten.

Lemma 2.9 *Ist $u \in \mathcal{T}_n \cap H_\diamond^1(\Omega)$, dann gilt*

$$\|u\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \geq \max\{1, |n|\} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} .$$

Beweis. Wieder beschränken wir uns auf stetig differenzierbare $u = y(r)\tau_n(\theta) \in \mathcal{T}_n$, so daß für $n \neq 0$ zwangsläufig $y(0) = 0$ gelten muß. Dann ist nach (2.6) für solche n

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\text{grad } u|^2 dx &= \int_0^1 (|y'|^2 + \frac{n^2}{r^2} y^2) r dr \geq \int_0^1 n^2 y^2 r dr \\ &= n^2 \|y\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]}^2 \|\tau_n\|_{\mathcal{L}^2[0,2\pi]}^2 . \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.1 ist die rechte Seite gleich $n^2 \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2$, so daß die Aussage für $u \in \mathcal{T}_n \cap H_\diamond^1(\Omega)$ mit $n \neq 0$ gültig ist.

Für $n = 0$ erhalten wir entsprechend

$$\|u\|_{H_\diamond^1(\Omega)} = \|y'\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]} \|\tau_0\|_{\mathcal{L}^2[0,2\pi]} . \quad (2.8)$$

Ferner ist

$$0 = \int_\Gamma u d\theta = y(1) \int_0^{2\pi} \tau_0 d\theta = \sqrt{2\pi} y(1) .$$

Daher ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$y(r) = y(1) + \int_1^r y'(\rho) d\rho = \int_1^r y'(\rho) d\rho ,$$

und mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt

$$ry^2(r) = r \left(\int_r^1 y'(\rho) d\rho \right)^2 \leq r \int_r^1 |y'(\rho)|^2 d\rho \int_r^1 d\rho \leq \int_r^1 \rho |y'(\rho)|^2 d\rho \leq \|y'\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]}^2 ,$$

und damit

$$\|y\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]}^2 = \int_0^1 ry^2(r) dr \leq \int_0^1 \|y'\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]}^2 dr = \|y'\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]}^2 . \quad (2.9)$$

Zusammen mit (2.8) und Lemma 2.1 gilt also für $u \in \mathcal{T}_0 \cap H_\diamond^1(\Omega)$

$$\|u\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \geq \|y\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]} \|\tau_0\|_{\mathcal{L}^2[0,2\pi]} = \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} .$$

□

Korollar 2.10 *Für jede Funktion $u \in H_\diamond^1(\Omega)$ gilt*

$$\|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)} \geq \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Ist zudem $u \perp \mathcal{T}_m$ für alle m mit $|m| < n$, dann ist

$$\|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)} \geq n \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Beweis. Sei

$$u = \sum_{|n| \leq N} y_n(r) \tau_n(\theta). \quad (2.10)$$

Nach den Propositionen 2.2 und 2.7, sowie Lemma 2.9 gilt (Satz von Pythagoras)

$$\|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)}^2 = \sum_{|n| \leq N} \|y_n \tau_n\|_{H^1_\diamond(\Omega)}^2 \geq \sum_{|n| \leq N} \|y_n \tau_n\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2.$$

Da nach Satz 2.8 Funktionen der Form (2.10) dicht in $H^1_\diamond(\Omega)$ liegen, folgt die erste Behauptung. Die zweite Aussage ergibt sich entsprechend, da gemäß der Zusatzvoraussetzung $y_m \tau_m = 0$ sein muß für $|m| < n$. \square

3. Ein Spursatz

Wie wir in Kapitel 2 gesehen haben, sind Funktionen in $H_{\diamond}^1(\Omega)$ nicht notwendig stetig. Später werden wir sehen, daß die Spannungsverteilungen u der EIT-Experimente unter milden Voraussetzungen zu diesem Raum $H_{\diamond}^1(\Omega)$ gehören werden. In welchem Sinn kann man dann davon sprechen, diese Spannungen (also die "Werte" von u) auf dem Rand von Ω abzugreifen?

In der Tat kann dies wegen der fehlenden Stetigkeit nicht punktweise erlaubt sein; aber man kann von einer Randfunktion $u|_{\Gamma}$ (Einschränkung oder *Spur*) zumindest im \mathcal{L}^2 -Sinn sprechen.

Satz 3.1 *Eine Funktion $u \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ hat Randwerte $u|_{\Gamma} \in \mathcal{L}^2(\Gamma)$ mit*

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \leq 2 \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)}^{1/2}.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst nur Funktionen $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann ist

$$u^2(1, \theta) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u^2(r, \theta)) dr = \int_0^1 2(r^2 u u_r + r u^2) dr.$$

Die partielle Ableitung u_r entspricht der Richtungsableitung in die Richtung $x/|x|$, d.h., $u_r = \frac{x}{|x|} \text{grad } u$, und somit ist $|u_r| \leq |\text{grad } u|$. In die obige Umformung eingesetzt, ergibt sich

$$u^2(1, \theta) \leq \int_0^1 2(r^2 |u| |\text{grad } u| + r u^2) dr \leq \int_0^1 2r (|u| |\text{grad } u| + u^2) dr.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}^2 &= \int_0^{2\pi} u^2(1, \theta) d\theta \leq 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (|u| |\text{grad } u| + u^2) r dr d\theta \\ &= 2 \int_{\Omega} (|u| |\text{grad } u| + u^2) dx \leq 2 (\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2). \end{aligned}$$

Eine Anwendung von Korollar 2.10 ergibt somit die Behauptung für $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Der sogenannte Spuroperator

$$\gamma : C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathring{\kappa}), \quad \gamma : u \mapsto u|_{\Gamma},$$

ist also eine stetige Abbildung des dichten Teilraums $C^1(\overline{\Omega})$ von $H_{\diamond}^1(\Omega)$ nach $\mathcal{L}^2(\Omega)$ und entsprechend auf den ganzen Raum fortsetzbar. \square

Bemerkung 3.2 Dieser Satz ist in gewisser Hinsicht scharf, in anderer Hinsicht jedoch nicht. Tatsächlich läßt sich für $0 \leq s \leq 1$ eine ganze “Skala” von Hilberträumen $H_{\diamond}^s(\Omega) \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ definieren (die sogenannten *Sobolev-Räume*), die zwischen $H_{\diamond}^0(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega)$ und $H_{\diamond}^1(\Omega)$ “interpolieren” in dem Sinn, daß

$$\|u\|_{H_{\diamond}^s(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^{1-s} \|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)}^s$$

für alle $u \in H_{\diamond}^1(\Omega)$. Es zeigt sich dann, daß der Spuroperator sogar für Funktionen $u \in H_{\diamond}^{1/2}(\Omega)$ noch wohldefiniert ist mit

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \leq c \|u\|_{H_{\diamond}^{1/2}(\Omega)}$$

und einem festem $c > 0$. Diese Schranke unterscheidet sich also nur wenig von der Schranke aus Satz 3.1; in diesem Sinn ist Satz 3.1 scharf. Umgekehrt ist die Spur einer $H_{\diamond}^1(\Omega)$ -Funktion jedoch nicht einfach nur in $\mathcal{L}^2(\mathring{\kappa})$, sondern hat zusätzliche Eigenschaften. Anders ausgedrückt: Nicht jede $\mathcal{L}^2(\mathring{\kappa})$ -Randfunktion ist die Spur einer $H_{\diamond}^1(\Omega)$ -Funktion. Dies wird z.B. deutlich bei der speziellen Lösung u aus Beispiel 1.4 für Dipolstromvorgaben. Wie wir in Beispiel 2.6 gesehen haben, liegt u gerade nicht mehr in $H_{\diamond}^1(\Omega)$. Trotzdem ist die Spur $u|_{\Gamma}$ aus (1.16),

$$u(1, \theta) = \frac{1}{\pi} \log \cot \frac{\theta}{2},$$

eine Funktion mit quadratisch integrierbaren Singularitäten, d.h., es ist $u|_{\Gamma} \in \mathcal{L}^2(\mathring{\kappa})$. Derartige Diskrepanzen lassen sich leider nicht an Satz 3.1 ablesen.

Am ehesten kann man dieses Defizit noch daran erkennen, daß das \mathcal{L}^2 -Maß auf dem Rand $\mathring{\kappa}$ einer Funktion $u \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ keine Rückschlüsse auf ihre $H_{\diamond}^1(\Omega)$ -Norm erlaubt; die beiden Topologien sind also weit voneinander entfernt.

Korollar 3.3 Sei $n \in \mathbb{Z}$ fix und $u \in \mathcal{T}_n \cap H_{\diamond}^1(\Omega)$. Dann ist

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \leq 2 \max\{n, 1\}^{-1/2} \|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)}.$$

Beweis. Nach Satz 3.1 und Lemma 2.9 ist

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}^2 &\leq 4 \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \leq 4 \frac{\|u\|_{H_\diamond^1(\Omega)}}{\max\{n, 1\}} \|u\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \\ &= 4 \max\{n, 1\}^{-1} \|u\|_{H_\diamond^1(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

□

4. Das Minimierungsproblem

In Kapitel 1 haben wir gesehen, daß das Potential u die Energie

$$\Phi[u] \equiv \frac{1}{2} a(u, u) - b(u) \quad (4.1)$$

zu minimieren sucht. Im folgenden wollen wir Minimierungsprobleme der Form (4.1) allgemein ansehen.

Wir gehen dabei von den folgenden Voraussetzungen aus. Sei \mathcal{X} ein Hilbertraum und a eine symmetrische Bilinearform über \mathcal{X} , sowie b ein stetiges (lineares) Funktional auf \mathcal{X} . b ist also ein Element des Dualraums \mathcal{X}' von \mathcal{X} mit der entsprechenden Norm

$$\|b\|_{\mathcal{X}'} = \sup_{u \neq 0} \frac{|b(u)|}{\|u\|}.$$

Ferner sei $0 < \underline{a} \leq \bar{a} < \infty$ mit

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \bar{a} \|u\| \|v\| & \forall u, v \in \mathcal{X}, \\ a(u, u) &\geq \underline{a} \|u\|^2 & \forall u \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Offensichtlich ist unter diesen Voraussetzungen Φ eine stetige Funktion in \mathcal{X} , denn

$$\begin{aligned} \Phi[u] - \Phi[v] &= \frac{1}{2} a(u, u) - b(u) - \frac{1}{2} a(v, v) + b(v) = \frac{1}{2} a(u - v, u + v) - b(u - v) \\ &\leq \left(\frac{\bar{a}}{2} \|u + v\| + \|b\|_{\mathcal{X}'}\right) \|u - v\|, \end{aligned}$$

und nach Vertauschung von u und v ergibt sich

$$|\Phi[u] - \Phi[v]| \leq \left(\frac{\bar{a}}{2} \|u + v\| + \|b\|_{\mathcal{X}'}\right) \|u - v\|.$$

Unter den getroffenen Annahmen klärt der folgende Satz die Lösbarkeit von (4.1).

Satz 4.1 *Das Minimierungsproblem (4.1) hat eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{X}$, und jede Minimalfolge $\{u_n\} \subset \mathcal{X}$ konvergiert gegen u . Zusatz: Mit $b \neq 0$ ist auch $u \neq 0$.*

Beweis. Offensichtlich ist Φ nach unten beschränkt, denn

$$\Phi[u] \geq \frac{1}{2} \underline{a} \|u\|^2 - \|b\|_{\mathcal{X}'} \|u\| \geq -\frac{1}{2\underline{a}} \|b\|_{\mathcal{X}'}^2.$$

Also existiert das Infimum von Φ über \mathcal{X} . Es gilt zudem

$$\phi := \inf_{u \in \mathcal{X}} \Phi[u] \leq \Phi[0] = 0$$

und Gleichheit kann nur gelten wenn $b = 0$; andernfalls existiert nämlich ein $v \in \mathcal{X}$ mit $b(v) \neq 0$, und dann ist

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \Phi[tv] = \inf_{t \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} t^2 a(v, v) - t b(v) \right) = -\frac{1}{2} \frac{|b(v)|^2}{a(v, v)} < 0.$$

Damit ist der Zusatz schon einmal bewiesen.

Wir wählen nun eine Minimalfolge $\{u_n\} \in \mathcal{X}$, also eine Folge aus \mathcal{X} mit

$$\Phi[u_n] \longrightarrow \phi, \quad n \rightarrow \infty.$$

Zu zeigen ist, daß $\{u_n\}$ eine Cauchy-Folge ist. Wegen

$$\begin{aligned} a(u+v, u+v) &= a(u, u) + 2a(u, v) + a(v, v), \\ a(u-v, u-v) &= a(u, u) - 2a(u, v) + a(v, v), \end{aligned}$$

ergibt sich die ‘‘Parallelogramm-Gleichung’’

$$a(u, u) + a(v, v) = \frac{1}{2} a(u+v, u+v) + \frac{1}{2} a(u-v, u-v), \quad u, v \in \mathcal{X}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \Phi[u_m] + \Phi[u_n] &= \frac{1}{2} a(u_m, u_m) + \frac{1}{2} a(u_n, u_n) - b(u_m) - b(u_n) \\ &= \frac{1}{4} a(u_n + u_m, u_n + u_m) + \frac{1}{4} a(u_n - u_m, u_n - u_m) - b(u_m + u_n) \\ &= \frac{1}{4} a(u_n - u_m, u_n - u_m) + 2\Phi\left[\frac{u_m + u_n}{2}\right] \\ &\geq \frac{1}{4} \underline{a} \|u_n - u_m\|^2 + 2\phi. \end{aligned}$$

Für $m, n \rightarrow \infty$ strebt die linke Seite gegen 2ϕ und daher $\|u_n - u_m\|$ gegen 0. Mit anderen Worten: $\{u_n\}$ ist eine Cauchy-Folge in \mathcal{X} und hat einen eindeutigen Grenzwert $u \in \mathcal{X}$. Wegen der Stetigkeit von Φ ist u also eine Lösung von (4.1). Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß jede Minimalfolge eine Cauchy-Folge ist: Gäbe es zwei minimierende Elemente $u, v \in \mathcal{X}$, würde die Minimalfolge

$$u_{2n} = u, \quad u_{2n+1} = v, \quad n \in \mathbb{N},$$

ansonsten nicht konvergieren. □

Korollar 4.2 *Unter der Voraussetzung (4.2) läßt sich die Lösung u des Minimierungsproblems (4.1) charakterisieren als Lösung der Gleichungen*

$$a(u, v) = b(v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}. \quad (4.3)$$

Ferner gilt

$$\|u\| \leq \frac{1}{\underline{a}} \|b\|_{\mathcal{X}'}$$

Beweis. Daß (4.3) aus Satz 4.1 folgt, haben wir bereits in Kapitel 1 gesehen, vgl. (1.5). Ist nun umgekehrt u eine Lösung von (4.3), dann gilt

$$\begin{aligned} \Phi[v] - \Phi[u] &= \frac{1}{2} a(v, v) - b(v) - \frac{1}{2} a(u, u) + b(u) \\ &= \frac{1}{2} a(v - u, v - u) + a(u, v) - a(u, u) - b(v) + b(u) \\ &= \frac{1}{2} a(v - u, v - u) + b(v) - b(u) - b(v) + b(u) \\ &\geq \frac{1}{2} \underline{a} \|u - v\|^2. \end{aligned}$$

Folglich ist u die Lösung von (4.1). Um die Abschätzung zu beweisen, verwenden wir (4.3) und die zweite Bedingung aus (4.2):

$$\underline{a} \|u\|^2 \leq a(u, u) = b(u) \leq \|b\|_{\mathcal{X}'} \|u\|.$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. □

Die Gleichungen (4.3) werden üblicherweise als *Variationsproblem* bezeichnet (v variiert in \mathcal{X}). Das Variationsproblem kann auch als Gleichung in \mathcal{X}' aufgefaßt werden:

$$a(u, \cdot) = b.$$

Demnach existiert ein linearer Operator

$$A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}', \quad A : u \mapsto b,$$

und Korollar 4.2 besagt, daß dieser Operator stetig invertierbar ist.

Satz 4.3 *Der Operator L , der dem linearen Funktional b des Minimierungsproblems (4.1) die Lösung u zuordnet, ist injektiv, linear und stetig; es ist*

$$\|L\|_{\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}} \leq \frac{1}{\underline{a}}.$$

Beweis. L ist der inverse Operator zu A . Die Abschätzung und die anderen Aussagen folgen unmittelbar aus Satz 4.1. \square

Wir wollen nun diese allgemeine Theorie auf unser EIT-Problem anwenden. Das Prinzip der minimalen potentiellen Energie führt auf das Minimierungsproblem

$$\Phi[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\text{grad } u|^2 dx - \int_{\Gamma} u f d\theta \longrightarrow \min, \quad (4.4)$$

wobei $f = \delta(\cdot - s_+) - \delta(\cdot - s_-)$. Wir wählen also

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx, \quad (4.5)$$

$$b(v) = \int_{\Gamma} f v d\theta.$$

Unser Ziel ist es nachzuweisen, daß Φ eine eindeutige (globale) Minimalstelle $u \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ besitzt. Dazu bedarf es jedoch zweier Einschränkungen:

- Die Leitfähigkeit σ ist meßbar und durch $0 < \underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma} < \infty$ beschränkt. Dies entspricht dem Ausschluß von Isolatoren und Supraleitern. Die Menge der zugelassenen Leitfähigkeitskoeffizienten bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_+^{\infty}(\Omega)$.
- Anstelle von δ -Distributionen, wie sie in (1.3) und (1.9) bei der Definition von b verwendet wurden, sei das Element f im folgenden aus einem quadratisch integrierbarem Raum, nämlich

$$f \in \mathcal{L}_{\diamond}^2(\epsilon) := \{f \in \mathcal{L}^2(\epsilon) \mid \int_{\Gamma} f d\theta = 0\}. \quad (4.6)$$

Dies ist eine Konsequenz aus dem Ergebnis, daß Punktauswertungen wie in (1.3) für $u \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ nicht erlaubt sind. Zudem haben wir bereits bei dem einfachen Beispiel 1.4 gesehen, daß im Fall von Delta-Distributionen f in der Regel keine $H_{\diamond}^1(\Omega)$ -Funktion als Lösung erwartet werden kann. Die Einschränkung (4.6) kann andererseits dadurch rechtfertigt werden, daß Elektroden eine positive Breite haben, und sie daher statt durch eine Delta-Distribution besser durch

eine \mathcal{L}^2 -Approximation – etwa die charakteristische Funktion des Elektroden-trägers – modelliert werden. Der spezielle Teilraum von $\mathcal{L}^2(\mathcal{C})$ deutet an, daß in jedem Fall genauso viel Strom aus dem Körper hinausfließt wie eingespeist wird.

Für Funktionen $f \in \mathcal{L}^2_\diamond(\mathcal{C})$ ist das Funktional $b(u)$ stetig über $H^1_\diamond(\Omega)$, denn nach Satz 3.1 und Korollar 2.10 ist

$$|b(u)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \leq 2 \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)}^{1/2} \leq 2 \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)}.$$

Satz 4.4 Für das EIT-Minimierungsproblem (4.4) mit $f \in \mathcal{L}^2_\diamond(\mathcal{C})$ existiert eine eindeutige Lösung $u \in H^1_\diamond(\Omega)$, die durch die Variationsgleichung (4.3) charakterisiert ist. Es ist

$$\|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)} \leq \frac{2}{\underline{\sigma}} \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)},$$

und $u \neq 0$ falls $f \neq 0$.

Beweis. Wie bereits oben gezeigt wurde, ist b ein stetiges Funktional über $H^1_\diamond(\Omega)$ mit

$$\|b\|_{H^1_\diamond(\Omega)'} \leq 2 \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}.$$

Andererseits erfüllt die Bilinearform a aus (4.5) die Voraussetzungen von Satz 4.1, da

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx \right| &\leq \bar{\sigma} \left(\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\operatorname{grad} v|^2 \right)^{1/2} \\ &= \bar{\sigma} \|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)} \|v\|_{H^1_\diamond(\Omega)}, \end{aligned}$$

$$\int_\Omega \sigma |\operatorname{grad} u|^2 \, dx \geq \underline{\sigma} \|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)}^2.$$

Also folgen Existenz, Eindeutigkeit und Abschätzung aus Satz 4.1. Die Darstellung über die Variationsgleichung folgt aus Korollar 4.2. Der Zusatz von Satz 4.1 besagt, daß $u \neq 0$, falls $b \neq 0$. $b = 0$ bedeutet aber, daß $f \perp v|_\Gamma$ für jedes $v \in H^1_\diamond(\Omega)$. Insbesondere, ist $v \in \mathcal{T}_n \cap H^1_\diamond(\Omega)$ dann ergibt sich $f \perp \tau_n$, und zwar für jedes $n \neq 0$. Demnach ist f eine Konstante, und wegen $\int f \, d\theta = 0$ ist zwangsläufig $f = 0$. \square

Bemerkung 4.5 Satz 4.4 besagt, daß der Lösungsoperator

$$L_\sigma : \mathcal{L}^2_\diamond(\mathcal{C}) \rightarrow H^1_\diamond(\Omega), \quad L_\sigma : f \mapsto u,$$

der den Neumann-Randwerten das zugehörige Potential zuordnet, stetig ist. Mit anderen Worten: Das resultierende Potential hängt stetig von den vorgegebenen Randströmen ab.

5. Der Neumann-to-Dirichlet Operator

Bezeichnet $u \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ die Lösung des Minimierungsproblems (4.4) bei gegebener Funktion $f \in \mathcal{L}_{\diamond}^2(\mathfrak{c})$, dann ist u eindeutig bestimmt, und wir können den Operator

$$\Lambda : \mathcal{L}_{\diamond}^2(\mathfrak{c}) \rightarrow \mathcal{L}_{\diamond}^2(\mathfrak{c}), \quad \Lambda : f \mapsto u|_T$$

definieren. Λ heißt *Neumann-to-Dirichlet Operator* (NtD-Operator), da Λ die vorgegebenen Neumann-Daten von u , vgl. (1.9), auf die zugehörigen Dirichlet-Daten $u|_T$ abbildet.

Satz 5.1 $\Lambda : \mathcal{L}_{\diamond}^2(\mathfrak{c}) \rightarrow \mathcal{L}_{\diamond}^2(\mathfrak{c})$ ist stetig mit $\|\Lambda\| \leq 4/\underline{\sigma}$.

Beweis. Nach Satz 3.1, Korollar 2.10 und Satz 4.4 gilt

$$\|\Lambda f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \leq 2 \|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)} \leq \frac{4}{\underline{\sigma}} \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}.$$

□

Im weiteren werden wir zeigen, daß Λ ein kompakter Operator, sogar ein Hilbert-Schmidt Operator ist. Zunächst zeigen wir jedoch erst, daß Λ selbstadjungiert ist.

Satz 5.2 $\Lambda : \mathcal{L}_{\diamond}^2(\mathfrak{c}) \rightarrow \mathcal{L}_{\diamond}^2(\mathfrak{c})$ ist selbstadjungiert und positiv.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{L}_{\diamond}^2(\mathfrak{c})$ und $u \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ die zugehörige Lösung der Minimierungsaufgabe (4.4). Ferner sei g eine beliebige andere Funktion aus $\mathcal{L}_{\diamond}^2(\mathfrak{c})$, und $w \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ die Lösung des entsprechenden Minimierungsproblems

$$\frac{1}{2} a(w, w) - \tilde{b}(w) \longrightarrow \min, \quad \tilde{b}(w) = \int_{\Gamma} g w \, d\theta.$$

Nach Satz 4.4 gilt

$$a(u, v) = b(v), \quad a(w, v) = \tilde{b}(v), \quad \text{für alle } v \in H_{\diamond}^1(\Omega).$$

Folglich gilt

$$\int_{\Gamma} g(\Lambda f) d\theta = \tilde{b}(u) = a(w, u) = a(u, w) = b(w) = \int_{\Gamma} fw d\theta = \int_{\Gamma} f(\Lambda g) d\theta.$$

Ferner ist

$$\int_{\Gamma} f(\Lambda f) d\theta = b(u) = a(u, u) \geq \underline{\sigma} \|u\|_{H^1_0(\Omega)}^2 > 0$$

für $f \neq 0$, vgl. Satz 4.4. □

Erinnerung. Ein kompakter, selbstadjungierter und positiver Operator $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ im Hilbertraum \mathcal{X} besitzt eine abzählbare Menge $\{\lambda_n\}$ absteigend sortierter Eigenwerte $\lambda_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Die zugehörigen Eigenfunktionen $x_n \in \mathcal{X}$ können so gewählt werden, daß $\{x_n\}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{X} bildet. (→ Literatur: W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*)

Für die Eigenwerte von K gilt das *Minmax-Prinzip* von Courant und Fischer: Demnach ist

$$\lambda_n = \min_{0 \neq x \perp \mathcal{X}_n} \frac{\|Kx\|}{\|x\|} = \min_{0 \neq x \perp \mathcal{X}_n} \frac{\langle x, Kx \rangle}{\|x\|^2}, \quad (5.1)$$

wobei das Minimum über alle $(n-1)$ -dimensionalen Teilräume $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}$ gebildet wird.

Gilt für die Eigenwerte des kompakten Operators zudem $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$, so nennt man K einen *Hilbert-Schmidt Operator*. In diesem Fall gilt für jede Orthonormalbasis $\{z_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ von \mathcal{X} :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Kz_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 =: \|K\|^2. \quad (5.2)$$

(Mittels (5.2) kann der Begriff des Hilbert-Schmidt Operators auf nicht notwendig selbstadjungierte Operatoren verallgemeinert werden.) Die Abbildung $\|\cdot\|$ definiert eine Norm über allen Hilbert-Schmidt Operatoren, die sogenannte *Hilbert-Schmidt Norm*. Sie wird durch ein Innenprodukt erzeugt, nämlich

$$\langle\langle K_1, K_2 \rangle\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \langle K_1 z_n, K_2 z_n \rangle. \quad (5.3)$$

Dadurch gewinnt die Hilbert-Schmidt Norm einen entscheidenden Vorteil gegenüber der Spektralnorm, da letztere nicht zu einem Hilbertraum führt. Übrigens ist der Wert der Hilbert-Schmidt Norm immer größer als der Wert der Spektralnorm $\|K\| = \lambda_1$.

Den Nachweis, daß (5.3) von der Wahl der Basis $\{z_n\}$ unabhängig ist, führt man am besten wie folgt: Ist $\{\tilde{z}_\nu\}$ eine zweite Orthonormalbasis von \mathcal{X} , dann können $K_1 z_n$ und $K_2 z_n$ wie folgt entwickelt werden:

$$K_1 z_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle K_1 z_n, \tilde{z}_\nu \rangle \tilde{z}_\nu, \quad K_2 z_n = \sum_{\mu=1}^{\infty} \langle K_2 z_n, \tilde{z}_\mu \rangle \tilde{z}_\mu.$$

Daraus folgt

$$\langle K_1 z_n, K_2 z_n \rangle = \sum_{\nu, \mu=1}^{\infty} \langle K_1 z_n, \tilde{z}_\nu \rangle \langle K_2 z_n, \tilde{z}_\mu \rangle \langle \tilde{z}_\nu, \tilde{z}_\mu \rangle = \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle K_1 z_n, \tilde{z}_\nu \rangle \langle K_2 z_n, \tilde{z}_\nu \rangle,$$

und weiter

$$\begin{aligned} \langle\langle K_1, K_2 \rangle\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle K_1 z_n, K_2 z_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle K_1 z_n, \tilde{z}_\nu \rangle \langle K_2 z_n, \tilde{z}_\nu \rangle \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle K_1 \tilde{z}_\nu, z_n \rangle \langle K_2 \tilde{z}_\nu, z_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K_1 \tilde{z}_\nu, K_2 \tilde{z}_\nu \rangle. \end{aligned}$$

Beispiel 5.3 Wir betrachten den Spezialfall, daß $\sigma \equiv c > 0$ konstant ist (für $c = 1$ ergibt sich also wieder die bereits früher betrachtete Poisson-Gleichung). Eine naheliegende Orthonormalbasis für $\mathcal{L}_\diamond^2(\epsilon)$ bilden die trigonometrischen Funktionen $\{\tau_n \mid n \neq 0\}$. Für $f = \tau_n$, $n \neq 0$, führt das Minimierungsproblem (4.4) auf eine Lösung u_n der partiellen Differentialgleichung, vgl. (1.9),

$$c\Delta u = 0, \quad c \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_\Gamma = \tau_n. \quad (5.4)$$

Als Real- bzw. Imaginärteil von $(c|n|)^{-1}z^{|n|}$ ist

$$u_n(x) = \frac{1}{c} |n|^{-1} r^{|n|} \tau_n(\theta)$$

eine harmonische Funktion und daher die Lösung von (5.4). Offensichtlich hat u_n die Spur

$$u_n|_\Gamma = \frac{1}{c} |n|^{-1} \tau_n,$$

und daher ist τ_n eine Eigenfunktion der NtD-Abbildung Λ mit Eigenwert $\lambda_n = (c|n|)^{-1}$. Folglich ist diese NtD-Abbildung ein Hilbert-Schmidt Operator, denn

$$\|\Lambda\| = \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{c^2} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{c} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{c} \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Bevor wir an dieser Stelle weitermachen können, müssen wir noch ein kleines Hilfsresultat beweisen. Dazu führen wir die Teilräume

$$\mathcal{X}_n := [\tau_{-n}, \dots, \tau_{-1}, \tau_1, \dots, \tau_n] \subset \mathcal{L}_\diamond^2(\epsilon), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.5)$$

der Dimension $2n$ ein.

Lemma 5.4 Sei L_σ der Lösungsoperator aus Bemerkung 4.5. Dann gilt

$$\|L_\sigma f\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\underline{\sigma}} (n+1)^{-1/2} \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } f \perp \mathcal{X}_n.$$

Beweis. Wir zerlegen ein beliebiges Element $u \in H_\diamond^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gemäß Satz 2.8 als $u = u_n + w$ mit

$$u_n(x) = \sum_{|m| \leq n} y_m(r) \tau_m(\theta) \quad \text{und} \quad w \perp \mathcal{T}_m, \quad |m| \leq n.$$

Dann ist nach Voraussetzung

$$b(u) = b(u_n) + b(w) = \int_\Gamma u_n f \, d\theta + b(w) = \sum_{|m| \leq n} y_m(1) \int_\Gamma f \tau_m \, d\theta + b(w) = b(w).$$

Folglich ist nach Proposition 2.7 und Satz 3.1

$$\begin{aligned} \|b\|_{H_\diamond^1(\Omega)'} &= \sup_{u \neq 0} \frac{|b(u)|}{\|u\|_{H_\diamond^1(\Omega)}} \leq \sup_{0 \neq w \perp \mathcal{T}_m, |m| \leq n} \frac{|b(w)|}{\|w\|_{H_\diamond^1(\Omega)}} \\ &\leq \sup_{0 \neq w \perp \mathcal{T}_m, |m| \leq n} \frac{\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \|w\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}}{\|w\|_{H_\diamond^1(\Omega)}} \leq 2 \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \sup_{0 \neq w \perp \mathcal{T}_m, |m| \leq n} \frac{\|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^{1/2}}{\|w\|_{H_\diamond^1(\Omega)}^{1/2}}. \end{aligned}$$

Zusammen mit Korollar 2.10, ergibt sich daher

$$\|b\|_{H_\diamond^1(\Omega)'} \leq 2(n+1)^{-1/2} \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)},$$

und aus Korollar 4.2 folgt schließlich

$$\|L_\sigma f\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}} 2(n+1)^{-1/2} \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)},$$

was zu zeigen war. □

Nun kommen wir zum Hauptresultat dieses Kapitels.

Satz 5.5 *Sei $\sigma \in \mathcal{L}_+^\infty(\Omega)$. Dann ist die zugehörige NtD-Abbildung $\Lambda : \mathcal{L}_\diamond^2(\cdot) \rightarrow \mathcal{L}_\diamond^2(\cdot)$ ein Hilbert-Schmidt Operator.*

Beweis. Wir verwenden wieder die Mengen \mathcal{X}_n , $n \in \mathbb{N}$, aus (5.5) und das Minmax-Prinzip von Courant-Fischer. Das ergibt die Abschätzung

$$\lambda_{2n+1} \leq \max_{0 \neq f \perp \mathcal{X}_n} \frac{\langle f, \Lambda f \rangle}{\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}^2}.$$

(Der Nachweis, daß Λ kompakt ist, bzw. Eigenwerte hat, folgt automatisch als Nebenprodukt, da wir sehen werden, daß die rechte Seite gegen Null konvergiert für $n \rightarrow \infty$.)

Bezeichnet P_n den Orthogonalprojektor auf \mathcal{X}_n^\perp , dann ist $P_n f = f$ für $f \perp \mathcal{X}_n$, und folglich

$$\langle f, \Lambda f \rangle = \langle P_n f, \Lambda P_n f \rangle = \langle f, P_n \Lambda P_n f \rangle \leq \|P_n \Lambda P_n\| \|f\|^2.$$

Λ kann mit Hilfe des Spurooperators γ und des Lösungsoperators L_σ aus Bemerkung 4.5 durch $\Lambda = \gamma L_\sigma$ faktorisiert werden; dadurch können wir nun die Eigenwerte von Λ wie folgt abschätzen:

$$\lambda_{2n+1} \leq \|P_n \gamma L_\sigma P_n\| \leq \|P_n \gamma\|_{H_\diamond^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)} \|L_\sigma P_n\|_{\mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma) \rightarrow H_\diamond^1(\Omega)}. \quad (5.6)$$

Bezeichnet nun Q_n noch den Orthogonalprojektor auf die Summe der \mathcal{T}_k mit $|k| > n$, dann ist offensichtlich $\gamma Q_n = P_n \gamma$, und daher folgt aus Korollar 3.3:

$$\|P_n \gamma\| = \|\gamma Q_n\| \leq 2(n+1)^{-1/2}. \quad (5.7)$$

Andererseits haben wir $\|L_\sigma P_n\|$ in Lemma 5.4 durch $\frac{2}{\underline{\sigma}}(n+1)^{-1/2}$ abgeschätzt, wobei $\underline{\sigma}$ eine positive untere Schranke von σ bezeichnet, die wegen der Voraussetzung $\sigma \in \mathcal{L}_+^\infty(\Omega)$ auch existiert. Aus (5.6) folgt somit

$$\lambda_{2n+1} \leq \frac{4}{\underline{\sigma}} \frac{1}{n+1}.$$

Daher ist Λ kompakt und $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2$ konvergent: Λ ist folglich ein Hilbert-Schmidt Operator. \square

6. Radialsymmetrische Leitfähigkeiten

In diesem Kapitel betrachten wir den Spezialfall radialsymmetrischer Leitfähigkeiten $\sigma = \sigma(r)$. Unter dieser Voraussetzung vereinfacht sich das Minimierungsproblem (4.4) durch den Ansatz

$$u(x) = y(r)\tau_n(\theta) \quad \text{mit} \quad \tau_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\theta), & n > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & n = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\theta), & n < 0 \end{cases}$$

und stetig differenzierbarem y wie folgt. Wegen

$$\text{grad } u = y' \tau_n \text{ grad } r + y \tau_n' \text{ grad } \theta, \quad \tau_n' = n \tau_{-n},$$

und

$$|\text{grad } r| = 1, \quad \text{grad } r \cdot \text{grad } \theta = 0, \quad |\text{grad } \theta| = r^{-1}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi[u] &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\sigma y'^2 \tau_n^2 + \frac{n^2}{r^2} \sigma y^2 \tau_{-n}^2) d\theta r dr - y(1) \int_{\Gamma} f \tau_n d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\sigma y'^2 + \frac{n^2}{r^2} \sigma y^2) r dr - y(1) \int_{\Gamma} f \tau_n d\theta. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Speziell mit $\sigma = 1$ und $f = 0$ ergibt sich (wie bereits im Beweis von Lemma 2.9 gesehen):

$$\|u\|_{H_n^1(\Omega)} = \left(\int_0^1 (y'^2 + \frac{n^2}{r^2} y^2) r dr \right)^{1/2}. \quad (6.2)$$

Definition 6.1 Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert die rechte Seite von (6.2) eine Norm $\|\cdot\|_n$ in dem Teilraum $\{y \in C^1[0, 1] \mid y(0) = 0\}$. Den Abschluß dieses Teilraums bezüglich dieser Norm bezeichnen wir mit $H_n^1[0, 1]$.

Im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall enthalten eindimensionale H^1 -Räume nur stetige Funktionen, wie wir im folgenden gleich nachrechnen werden. Wegen der Nullstelle der Gewichtsfunktion r im Nullpunkt gilt dies hier allerdings nur im Intervall $(0, 1]$: In Kapitel 2 haben wir bereits gesehen, daß die Funktion $\log|\log(r/2)|$ als Beispiel dafür dient, daß Elemente aus $H_0^1[0, 1]$ im Nullpunkt nicht unbedingt stetig sein müssen. Allerdings darf die Singularität im Nullpunkt nicht viel schlimmer sein. Bereits $\log r$ oder gar $r^{-\alpha}$ mit $\alpha > 0$ liegen nicht mehr in $H_n^1[0, 1]$.

Lemma 6.2 *Ein Element $y \in H_n^1[0, 1]$ ist stetig in $(0, 1]$, und es gilt*

$$|y(r)| \leq \frac{2}{r} \|y\|_n, \quad r \in (0, 1].$$

Beweis. Sei $y \in H_n^1[0, 1]$ stetig differenzierbar in $[0, 1]$ mit $y(0) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} r^2 y^2(r) &= \left| \int_0^r \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 y^2(\rho)) d\rho \right| = \left| \int_0^r 2(\rho^2 y y' + \rho y^2) d\rho \right| \leq 2 \int_0^1 (|y y'| + y^2) \rho d\rho \\ &\leq 2 (\|y\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]} \|y\|_n + \|y\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]}^2). \end{aligned}$$

Für $n \neq 0$ ist $n^2/r^2 \geq 1$ in $[0, 1]$, so daß sicher

$$\|y\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]} \leq \|y\|_n;$$

andererseits wurde diese Ungleichung für $n = 0$ bereits im Beweis von Lemma 2.9 nachgewiesen, vgl. (2.9). Damit folgt jedoch $r^2 y^2(r) \leq 4 \|y\|_n^2$ für alle $r \in [0, 1]$. Also ist für jedes $r \in (0, 1)$ die Einbettung

$$\left(\{y \in C^1[0, 1] \mid y(0) = 0\}, \|\cdot\|_n \right) \hookrightarrow \left(C[r, 1], \|\cdot\|_\infty \right)$$

stetig und daher auf den Abschluß $H_n^1[0, 1]$ stetig fortsetzbar. Folglich ist jedes Element $y \in H_n^1[0, 1]$ in $(0, 1]$ stetig und es gilt die gewünschte punktweise Abschätzung. \square

Zum Verhalten einer Funktion $y \in H_n^1[0, 1]$ mit $n \neq 0$ sei abschließend noch angemerkt, daß y höchstens durch $y(0) = 0$ in den Nullpunkt hin stetig fortgesetzt werden kann, da ansonsten $\|y\|_n$ nicht existiert.

Wegen Lemma 6.2 ist also (6.1) für alle $y \in H_n^1[0, 1]$ wohldefiniert.

Lemma 6.3 *Das Minimierungsproblem*

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (\sigma y'^2 + \frac{n^2}{r^2} \sigma y^2) r dr - y(1) \int_{\Gamma} f \tau_n d\theta \longrightarrow \min \quad (6.3)$$

über $H_n^1[0, 1]$, $n \neq 0$, besitzt eine eindeutige Lösung y . Sie ist charakterisiert durch die Gleichung

$$\int_0^1 (\sigma y' Y' + \frac{n^2}{r^2} \sigma y Y) r dr = Y(1) \int_{\Gamma} f \tau_n d\theta \quad \text{für alle } Y \in H_n^1[0, 1]. \quad (6.4)$$

Beweis. Nach Lemma 6.2 ist $c\delta(\cdot - 1)$ mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ ein stetiges Funktional in $H_n^1[0, 1]$. Ferner ist

$$A_n(y, Y) := \int_0^1 (\sigma y' Y' + \frac{n^2}{r^2} \sigma y Y) r dr \quad (6.5)$$

eine Bilinearform in $H_n^1[0, 1]$ mit

$$|A_n(y, Y)| \leq \bar{\sigma} \|y\|_n \|Y\|_n.$$

Zudem ist

$$A_n(y, y) \geq \underline{\sigma} \|y\|_n^2.$$

Damit folgt die Aussage aus dem allgemeinen Satz 4.1 und seinem Korollar 4.2. \square

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist nun das folgende: Bei radialsymmetrischen Leitfähigkeiten haben die NtD-Operatoren alle die gleichen Eigenfunktionen, nämlich $\{\tau_n \mid n \neq 0\}$.

Satz 6.4 *Sei σ radialsymmetrisch und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann gilt*

$$\Lambda \tau_n = \lambda_n \tau_n$$

mit $\lambda_n = y_n(1)$, wobei y_n die Lösung von (6.3) mit $f = \tau_n$ bezeichnet.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ fest, und $f = \tau_n$ in (6.3). Nach Lemma 6.3 existiert eine eindeutige Lösung $y_n \in H_n^1[0, 1]$ des entsprechenden Minimierungsproblems. Zu zeigen ist nun, daß $u := y_n \tau_n$ die Lösung des Minimierungsproblems (4.4) ist, denn dann ergibt sich

$$\Lambda \tau_n = y_n \tau_n|_{\Gamma} = y_n(1) \tau_n$$

wie behauptet.

Sei $N > |n|$ und

$$\tilde{u}_N = \sum_{|m| \leq N} \tilde{y}_m(r) \tau_m(\theta).$$

Bezeichnet A_m wieder die jeweils entsprechende Bilinearform aus (6.5), dann ergibt sich in Analogie zu (6.1)

$$\begin{aligned} \Phi[\tilde{u}_N] &= \sum_{|m| \leq N} \frac{1}{2} A_m(\tilde{y}_m, \tilde{y}_m) - \tilde{y}_n(1) \geq \frac{1}{2} A_n(\tilde{y}_n, \tilde{y}_n) - \tilde{y}_n(1) \\ &\geq \frac{1}{2} A_n(y_n, y_n) - y_n(1) = \Phi[u] \end{aligned}$$

nach Definition von y_n . Bezeichnet nun \tilde{u} das globale Minimum von Φ in $H_\diamond^1(\Omega)$ und $\{\tilde{u}_N\}$ die Folge der Partialsummen der Entwicklung von \tilde{u} gemäß Satz 2.8, dann ist $\{\tilde{u}_N\}$ offensichtlich eine Minimalfolge von Φ . Nach dem eben gezeigten bildet dann aber auch $\hat{u}_N = u$ für alle $N > |n|$ eine Minimalfolge von Φ , die nach Satz 4.1 gegen die Lösung konvergiert. Folglich ist u die Lösung der Minimierungsaufgabe (4.4). \square

Mit anderen Worten: Im radialsymmetrischen Fall kann die NtD-Abbildung durch ihre Eigenwerte charakterisiert werden. Erinnerung (vgl. Beispiel 5.3): Für $\sigma \equiv c$ ergibt sich $\lambda_n = (c|n|)^{-1}$.

Wir bleiben bei der speziellen Stromvorgabe $f = \tau_n$ mit $n \neq 0$. Im ersten Kapitel haben wir Minimalforderungen an die Glattheit der resultierenden Spannungsfunktion u gestellt. Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir nun nachrechnen, daß (zumindest in diesem eindimensionalen Fall) der "Fluß" $\sigma y'$ stetig ist. Dazu machen wir zunächst die folgende Vorüberlegung unter der Voraussetzung, daß alle beteiligten Funktionen hinreichend glatt sind. Nach (6.4) gilt dann für beliebiges $Y \in C^1[0, 1]$ mit $Y(0) = 0$, daß

$$\begin{aligned} Y(1) &= \int_0^1 (\sigma y' Y' + \frac{n^2}{r^2} \sigma y Y) r dr \\ &= r \sigma y' Y|_0^1 + \int_0^1 (\frac{n^2}{r} \sigma y - (r \sigma y')') Y dr. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Speziell für Funktionen Y mit $Y(1) = 0$ ergibt sich daher

$$\langle \frac{n^2}{r} \sigma y, Y \rangle = \langle (r \sigma y')', Y \rangle.$$

Da die entsprechenden Funktionen Y dicht in $\mathcal{L}^2[0, 1]$ liegen, erfüllt y die Differentialgleichung

$$(r \sigma y')' = \frac{n^2}{r} \sigma y. \tag{6.7}$$

Das letzte Integral in (6.6) verschwindet also für jede stetig differenzierbare Funktion Y mit $Y(0) = 0$, d.h.,

$$Y(1) = \sigma(1)y'(1)Y(1),$$

bzw. $y'(1) = 1/\sigma(1)$. Wegen $\sigma \geq \underline{\sigma}$ sieht man zudem, daß (6.6) nur für $y(0) = 0$ sinnvoll ist. Also ist y als Lösung der Differentialgleichung (6.7) mit Randwerten

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 1/\sigma(1) \quad (6.8)$$

festgelegt.

Satz 6.5 Sowohl die Lösung $y \in H_n^1[0, 1]$ des Minimierungsproblems (6.3) mit $f = \tau_n$ als auch der "Fluß" $\sigma y'$ sind stetig in $(0, 1]$.

Beweis. Da y in $H_n^1[0, 1]$ liegt, ist die rechte Seite von (6.7) wegen der Beschränktheit von σ und der Cauchy-Schwarz Ungleichung (angewandt auf $\frac{\sigma}{\sqrt{r}} \cdot \frac{y}{\sqrt{r}}$) in $[\delta, 1]$ integrierbar ($\delta \in (0, 1)$ beliebig), und die Funktion

$$z(r) := 1 - \int_r^1 \frac{n^2}{\rho} \sigma(\rho) y(\rho) d\rho \quad (6.9)$$

ist stetig in $(0, 1]$ mit $z(1) = 1$. Unter Verwendung der Testfunktion

$$Y(r) = \begin{cases} r/\varepsilon, & 0 < r < \varepsilon \\ 1, & \varepsilon < r < 1 \end{cases} \in H_n^1[0, 1]$$

folgt aus (6.4)

$$1 = \int_0^\varepsilon \sigma y' \frac{r}{\varepsilon} dr + \int_0^\varepsilon \frac{n^2}{\varepsilon} \sigma y dr + \int_\varepsilon^1 \frac{n^2}{r} \sigma y dr. \quad (6.10)$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergieren die ersten beiden Integrale wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung gegen 0: Zum Beispiel ist

$$\int_0^\varepsilon \frac{n^2}{\varepsilon} \sigma y dr \leq \bar{\sigma} \frac{n^2}{\varepsilon} \left(\int_0^\varepsilon \frac{y^2}{r} dr \right)^{1/2} \left(\int_0^\varepsilon r dr \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} n^2 \bar{\sigma} \left(\int_0^\varepsilon \frac{y^2}{r} dr \right)^{1/2},$$

wobei wegen der Existenz des Integrals in (6.2) das letzte Integral für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert. Damit ergibt sich durch Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ in (6.10), daß die Funktion z aus (6.9) im ganzen Intervall $[0, 1]$ stetig ist mit

$$z(0) = 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{n^2}{r} \sigma(r) y(r) dr = 0.$$

Nun wählen wir eine beliebige Funktion $Y' \in \mathcal{L}^2[0, 1]$. Dann ist Y' insbesondere Lebesgue-integrierbar, und nach Satz 131.4 aus Heuser II gilt für die Funktion z aus (6.9) und für die Funktion

$$Y(r) = \int_0^r Y'(\rho) d\rho$$

die Regel der partiellen Integration:

$$\int_0^1 zY' dr = zY|_0^1 - \int_0^1 \frac{n^2}{r} \sigma y Y dr .$$

Auf das letzte Integral kann die Identität (6.4) angewendet werden, so daß sich unter Verwendung der Randwerte von z ergibt, daß

$$\int_0^1 zY' dr = z(1)Y(1) + \int_0^1 \sigma y' Y' r dr - Y(1) = \int_0^1 \sigma y' Y' r dr .$$

Da $Y' \in \mathcal{L}^2[0, 1]$ beliebig war, folgt $z = \sigma r y'$ im \mathcal{L}^2 -Sinn, und da z stetig ist, kann also die Funktion $\sigma y'$ mit der stetigen Funktion z/r in $(0, 1]$ identifiziert werden. \square

Bemerkung 6.6 Aus dem Beweis von Satz 6.5 wird klar, daß die Lösung y des Minimierungsproblems (6.3) dadurch charakterisiert werden kann, daß $r\sigma y'$ durch 0 im Nullpunkt stetig fortgesetzt werden kann, und im \mathcal{L}^2 -Sinn mit der entsprechenden Stammfunktion von $n^2\sigma y/r$ übereinstimmt; vgl. dies mit (6.7).

7. Zur Identifizierbarkeit

Für das EIT-Problem ist es natürlich von entscheidender Bedeutung, ob die NtD-Abbildung Λ überhaupt genügend Informationen enthält, um σ identifizieren zu können, d.h., ob die Abbildung $\sigma \mapsto \Lambda(\sigma)$ *injektiv* ist.

Diese Frage ist bis heute nicht abschließend beantwortet. Teilresultate sind hingegen bekannt, zumeist im Hinblick auf die Eindeutigkeit von Λ auf hinreichend glatten Funktionenräumen. Wir werden in diesem Abschnitt die Injektivität über dem Raum der in Ω harmonischen Funktionen σ beweisen, und eine Beweisskizze für den Fall reell analytischer Funktionen angeben.

Zunächst wollen wir jedoch anhand einer Plausibilitätsüberlegung die Identifizierbarkeitsfrage diskutieren. Die gesuchte Funktion σ ist eine reelle Funktion zweier Veränderlicher, und daher wird man annehmen, daß zu ihrer Identifikation auch eine zweidimensionale Datenmannigfaltigkeit benötigt wird. Diese ist durch die Wertepaare $(f, \Lambda f)$ mit $f \in \mathcal{L}_\diamond^2(\mathcal{C})$ auch gegeben. Beim EIT-Problem für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sieht es übrigens für die Identifizierbarkeit besser aus: Dort ist σ eine reelle Funktion dreier Veränderlicher, während f und Λf Funktionen zweier Veränderlicher sind, also formal eine vierdimensionale Datenmannigfaltigkeit liefern. Im \mathbb{R}^3 ist das EIT-Problem also formal überbestimmt. Tatsächlich sind Injektivitätsaussagen im \mathbb{R}^2 schwieriger zu beweisen als im \mathbb{R}^3 .

Demgegenüber macht das EIT-Problem im \mathbb{R}^1 überhaupt keinen Sinn. Die Randwertaufgabe

$$-(\sigma u')' = 0, \quad \sigma u'(0) = 1, \quad \sigma u'(1) = 1, \quad (7.1)$$

mit $0 < \underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma} < \infty$ hat eine eindeutige Lösung \hat{u} . Die Randwerte $\sigma u'(0) = \alpha$ und $\sigma u'(1) = \alpha$ führen auf die Lösung $\alpha \hat{u}$. Die NtD-Abbildung Λ hat daher die Form

$$\Lambda : \alpha \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \hat{u}(0) \\ \alpha \hat{u}(1) \end{pmatrix},$$

deren Informationsgehalt also nur aus den beiden Werten $\hat{u}(0)$ und $\hat{u}(1)$ besteht. Daraus läßt sich σ sicher nicht rekonstruieren.

Will man sich mit einem eindimensionalen Modell des EIT-Problems beschäftigen, so muß man also eher den Fall radialsymmetrischer Leitfähigkeiten betrachten. Wie wir in Kapitel 6 gesehen haben, führt dies zu einem zusätzlichen variablen Term der Form $\frac{n^2}{r^2}\sigma u$ auf der linken Seite der Differentialgleichung (7.1), wobei nun sowohl σ wie u Nullstellen im Nullpunkt haben müssen. Die Daten sind dann die Werte $\lambda_n = u_n(1)$.

Wir bezeichnen im weiteren mit

$$C_+^1(\overline{\Omega}) := \{\sigma \in C^1(\overline{\Omega}) \mid 0 < \inf_{\Omega} \sigma \leq \sup_{\Omega} \sigma < \infty\}$$

die in $\overline{\Omega}$ differenzierbaren Leitfähigkeitskoeffizienten, und mit

$$\mathcal{H}_+ := \{\sigma \in C_+^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \mid \Delta\sigma = 0 \text{ in } \Omega\}$$

die zugehörige Teilmenge harmonischer Leitfähigkeitskoeffizienten.

Lemma 7.1 *Ist $\sigma \in C_+^1(\overline{\Omega})$, dann konvergiert in $\mathcal{L}^2(\cdot)$*

$$|n|(\tau_n \Lambda \tau_n + \tau_{-n} \Lambda \tau_{-n}) \longrightarrow \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sigma} \Big|_{\Gamma}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Wir untersuchen das EIT-Problem mit Randstromvorgabe $f = \tau_n$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ fix. Dabei wird das Potential u zur tatsächlichen Leitfähigkeitsverteilung σ mit dem Potential u_1 zur konstanten Leitfähigkeitsverteilung identisch 1 verglichen. In dem Minimierungsproblem (4.4) verwenden wir entsprechend die Bezeichnungen a und a_1 für die beiden Bilinearformen. Nach Satz 4.4 gilt die Variationsgleichung

$$a(u, v) = a_1(u_1, v) = b(v) \quad \text{für alle } v \in H_{\diamond}^1(\Omega). \quad (7.2)$$

Sei

$$w := u - \frac{1}{\sigma} u_1 \quad \text{und} \quad \rho := \log \sigma.$$

Nach Voraussetzung sind ρ und $1/\sigma$ in $\overline{\Omega}$ stetig differenzierbar: Es gilt

$$\text{grad} \frac{1}{\sigma} = -\frac{1}{\sigma^2} \text{grad} \sigma = -\frac{1}{\sigma} \text{grad} \rho.$$

Folglich ist

$$\text{grad} w = \text{grad} u - \frac{1}{\sigma} \text{grad} u_1 - u_1 \text{grad} \frac{1}{\sigma} = \text{grad} u - \frac{1}{\sigma} \text{grad} u_1 + \frac{u_1}{\sigma} \text{grad} \rho,$$

und

$$\sigma |\operatorname{grad} w|^2 = \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w - \operatorname{grad} u_1 \cdot \operatorname{grad} w + u_1 \operatorname{grad} \rho \cdot \operatorname{grad} w .$$

Daher folgt aus (7.2)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma |\operatorname{grad} w|^2 dx &= a(u, w) - a_1(u_1, w) + \int_{\Omega} u_1 \operatorname{grad} \rho \cdot \operatorname{grad} w dx \\ &= \int_{\Omega} u_1 \operatorname{grad} \rho \cdot \operatorname{grad} w dx . \end{aligned}$$

Da die (vektorwertige) Funktion $\operatorname{grad} \rho$ in $\overline{\Omega}$ stetig ist, kann $|\operatorname{grad} \rho|$ durch eine positive Konstante C abgeschätzt werden, und es ergibt sich

$$\underline{\sigma} \|w\|_{H^1_{\sigma}(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} |u_1| |\operatorname{grad} w| dx \leq C \|u_1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|w\|_{H^1_{\sigma}(\Omega)} ,$$

bzw.

$$\|w\|_{H^1_{\sigma}(\Omega)} \leq \frac{C}{\underline{\sigma}} \|u_1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} . \quad (7.3)$$

u_1 wurde in Beispiel 5.3 explizit ausgerechnet: Daher ist $u_1(r, \theta) = \frac{1}{|n|} r^{|n|} \tau_n$ und

$$\|u_1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} n^{-2} r^{2|n|} \tau_n^2 d\theta r dr = n^{-2} \int_0^1 r^{2|n|+1} dr = \frac{1}{2(|n|+1)n^2} .$$

Zusammen mit (7.3), Satz 3.1 und Korollar 2.10 ergibt sich damit

$$\|w\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \leq 2 \|w\|_{H^1_{\sigma}(\Omega)} \leq \frac{2C}{\underline{\sigma}} \|u_1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \frac{2C}{\underline{\sigma}} |n|^{-3/2} . \quad (7.4)$$

Schließlich ist noch zu beachten, daß die Randwerte von u durch

$$u|_{\Gamma} = w|_{\Gamma} + \left(\frac{1}{\sigma} u_1\right)|_{\Gamma} = w|_{\Gamma} + \frac{1}{|n|} \frac{\tau_n}{\sigma}|_{\Gamma}$$

gegeben sind. Wegen (7.4) bedeutet das, daß in $\mathcal{L}^2(\cdot)$ die folgende Gleichung gilt:

$$|n| \Lambda \tau_n = |n| w|_{\Gamma} + \frac{\tau_n}{\sigma}|_{\Gamma} = \frac{\tau_n}{\sigma}|_{\Gamma} + O(|n|^{-1/2}) .$$

Mit $\tau_n^2 + \tau_{-n}^2 = 1/\pi$ ergibt sich daraus sofort die Behauptung. \square

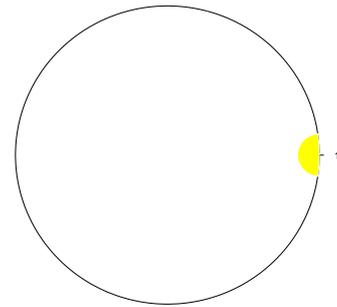
Nach Lemma 7.1 sind also die Randwerte einer Funktion $\sigma \in C^1_+(\overline{\Omega})$ durch die NtD-Abbildung eindeutig festgelegt. Ist σ zudem harmonisch, dann können diese Randwerte durch die Poisson-Darstellung (1.11) eindeutig auf den ganzen Einheitskreis Ω fortgesetzt werden. Wir haben also das folgende Ergebnis bewiesen.

Satz 7.2 *Der Operator Λ ist auf dem Raum \mathcal{H}_+ injektiv.*

Das obige Eindeutigkeitsresultat – so elegant und einfach es auf den ersten Blick zu sein scheint – hat jedoch einen entscheidenden Schönheitsfehler. Wegen der Poisson-Integralformel (1.11) ist die Menge der harmonischen Funktionen nur eine recht “dünne Menge”, topologisch äquivalent zu einer Menge von Funktionen über einem eindimensionalen Intervall. Ein Eindeutigkeitsatz für eine solche Grundmenge liefert sicherlich kein hinreichendes Indiz dafür, daß ein allgemeinerer Leitfähigkeitskoeffizient ebenfalls identifizierbar ist.

Wir wollen daher zum Abschluß dieses Kapitels einen Eindeutigkeitsatz für reell analytische Funktionen zweier Veränderlicher in $\overline{\Omega}$ skizzieren. Solche Funktionen können in jedem Punkt $x \in \overline{\Omega}$ in eine lokal konvergente Potenzreihe in beiden Veränderlichen ξ und η mit reellen Koeffizienten entwickelt werden. Die Entwicklungskoeffizienten eines einzigen Punktes, bzw. die entsprechenden partiellen Ableitungen legen die Funktion dabei eindeutig fest.

Nehmen wir dazu an, daß für zwei unterschiedliche reell analytische Leitfähigkeitskoeffizienten σ_1 und σ_2 in $\overline{\Omega}$ die NtD-Abbildungen $\Lambda(\sigma_1)$ und $\Lambda(\sigma_2)$ gleich sind. Da σ_1 und σ_2 nach Lemma 7.1 zwar auf $\mathring{\Omega}$, aber nicht in ganz Ω übereinstimmen, gibt es einen Exponenten k und eine Umgebung U von $x = 1$ (vgl. Skizze), so daß



$$\sigma_1(x) \geq \sigma_2(x) + c|x - 1|^k, \quad x \in U \cap \Omega, \quad (7.5)$$

wobei c eine geeignete positive Konstante bezeichnet. Sind a_1 und a_2 die Bilinearformen aus (4.4) und u_1 , bzw. u_2 die Potentiale für einen vorgegebenen Randstrom f , dann stimmen u_1 und u_2 auf dem Rand $\mathring{\Omega}$ wegen der Gleichheit der NtD-Abbildungen überein, und somit auch $b(u_1)$ und $b(u_2)$. Aus der Variationsgleichung folgt dann

$$a_1(u_1, u_1) = b(u_1) = b(u_2) = a_2(u_2, u_2),$$

also

$$\int_{\Omega} \sigma_1 |\text{grad } u_1|^2 dx = \int_{\Omega} \sigma_2 |\text{grad } u_2|^2 dx. \quad (7.6)$$

Andererseits folgt aus (7.5), daß

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_1 |\text{grad } u_1|^2 dx &\geq \int_U \sigma_1 |\text{grad } u_1|^2 dx \\ &\geq \int_U \sigma_2 |\text{grad } u_1|^2 dx + c \int_U |x - 1|^k |\text{grad } u_1|^2 dx. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Der entscheidende Trick besteht nun darin, den Randstrom f geeignet zu wählen, und zwar entsprechend der Einführung in Kapitel 1 näherungsweise als Summe von “Deltadistributionen” mit extrem nah aneinanderliegenden Elektroden in U . Wie die in Kapitel 1 gezeigten Abbildungen suggerieren, kann man nämlich durch hinreichend nahe Elektroden und stark oszillierende Randströme erreichen, daß das Teilgebiet $\Omega \setminus U$ beliebig wenig zur gesamten Leistung beiträgt. Umgekehrt bedeutet dies, daß das zweite Integral in der letzten Zeile von (7.7), $\int_U |x - 1|^k |\text{grad } u_1|^2 dx$, trotz der Nullstelle des Integranden im Punkt $x = 1$ nicht beliebig schnell klein werden kann.

Diese Aussagen lassen sich präzisieren, allerdings müssen dazu Hilfsmittel verwendet werden, die unsere Vorkenntnisse um einiges überschreiten. Dann aber folgt, daß für geeignet zu wählende Randströme (gemäß obiger Heuristik)

$$\int_{\Omega \setminus U} \sigma_2 |\text{grad } u_1|^2 dx < c \int_U |x - 1|^k |\text{grad } u_1|^2 dx,$$

und damit die Ungleichungskette (7.7) ergänzt werden kann zu

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_1 |\text{grad } u_1|^2 dx &> \int_U \sigma_2 |\text{grad } u_1|^2 dx + \int_{\Omega \setminus U} \sigma_2 |\text{grad } u_1|^2 dx \\ &= a_2(u_1, u_1). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Nach Definition von u_2 ist aber

$$\frac{1}{2} a_2(u_1, u_1) - b(u_1) \geq \frac{1}{2} a_2(u_2, u_2) - b(u_2) = \frac{1}{2} a_2(u_2, u_2) - b(u_1),$$

also $a_2(u_1, u_1) \geq a_2(u_2, u_2)$. In (7.8) eingesetzt ergibt sich

$$\int_{\Omega} \sigma_1 |\text{grad } u_1|^2 dx > \int_{\Omega} \sigma_2 |\text{grad } u_2|^2 dx,$$

im Widerspruch zu (7.6).

Literatur.

E. SOMERSALO, M. CHENEY, D. ISAACSON, E. ISAACSON, *Layer stripping: a direct numerical method for impedance imaging*, Inverse Problems **7** (1991), 899–926.

R. KOHN, M. VOGELIUS, *Determining conductivity by boundary measurements*, Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 289–298.

8. Zur Instabilität von EIT

Die berühmte These von Hadamard (1923) besagt, daß ein Problem *gut gestellt* ist, falls

- zu jedem Datensatz eine Lösung existiert,
- die Lösung eindeutig bestimmt ist,
- die Lösung stetig von den Daten abhängt.

Probleme, bei denen eine dieser Eigenschaften verletzt ist, heißen *schlecht gestellt*.

In diesem Sinn ist etwa das Meßproblem der EIT (d.h., die Bestimmung des NtD-Operators Λ) gut gestellt: Existenz und Eindeutigkeit wurden in Kapitel 4 nachgewiesen; die stetige Abhängigkeit beweisen wir in Kapitel 9.

Uns interessiert jedoch mehr das *inverse Problem*, also die Rekonstruktion des Leitfähigkeitskoeffizienten σ aus einem gegebenen Hilbert-Schmidt Operator $\Lambda = \Lambda(\sigma)$. Im folgenden werden wir untersuchen, wie es bei dem inversen Problem mit der stetigen Abhängigkeit aussieht; dies ist natürlich vor allem bei numerischen Implementierungen von größter Bedeutung.

Der Einfachheit halber definieren wir in diesem Kapitel das EIT-Problem über die Differentialgleichung anstelle des Minimierungsproblems. Im Hinterkopf wollen wir jedoch behalten, daß wir unter “Lösungen” immer schwache Lösungen verstehen.

Wir betrachten im folgenden den Fall eines Körpers, der bis auf einen kleinen Kreis um den Nullpunkt homogen ist. Genauer: σ sei radialsymmetrisch mit

$$\sigma(r) = \begin{cases} \Sigma, & 0 \leq r \leq \rho, \\ 1, & \rho < r \leq 1, \end{cases} \quad \Sigma > 1. \quad (8.1)$$

Gemäß unserer Ergebnisse aus Kapitel 6 ist die zugehörige NtD-Abbildung $\Lambda(\sigma)$ also durch ihre Eigenwerte vollständig charakterisiert, es ist

$$\Lambda(\sigma)\tau_n = \lambda_n\tau_n, \quad n \neq 0,$$

mit $\lambda_n = y_n(1)$, wobei $y_n \in H_n^1[0, 1]$ als Lösung des Randwertproblems

$$(r\sigma y')' = \frac{n^2}{r}\sigma y, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad (8.2)$$

festgelegt ist. Offensichtlich ist $\lambda_{-n} = \lambda_n$, so daß wir uns im folgenden auf den positiven Index n beschränken können.

In $(0, \rho)$, bzw. in $(\rho, 1)$, hat die Differentialgleichung die gleiche Form wie in Beispiel 5.3, nämlich

$$(ry')' = \frac{n^2}{r}y.$$

Die beiden Funktionen $y(r) = r^n$ und $y(r) = r^{-n}$ bilden offensichtlich ein Fundamentalsystem für diese Differentialgleichung; demnach hat die Lösung von (8.2) die Form

$$y(r) = \begin{cases} \alpha_n r^n, & 0 \leq r \leq \rho, \\ \beta_n r^n - (n^{-1} - \beta_n)r^{-n}, & \rho < r \leq 1. \end{cases} \quad (8.3)$$

Die Koeffizienten α_n und β_n sind dabei nach Satz 6.5 so zu bestimmen, daß y und $\sigma y'$ jeweils stetig sind. Das heißt, es sind die folgenden zwei Gleichungen zu erfüllen:

$$\begin{aligned} \beta_n \rho^n - (n^{-1} - \beta_n)\rho^{-n} &= \alpha_n \rho^n, \\ \beta_n \rho^n + (n^{-1} - \beta_n)\rho^{-n} &= \Sigma \alpha_n \rho^n. \end{aligned}$$

Elimination von α_n ergibt

$$(\Sigma - 1)\beta_n \rho^n = (\Sigma + 1)(n^{-1} - \beta_n)\rho^{-n},$$

beziehungsweise

$$\beta_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{\Sigma - 1}{\Sigma + 1} \rho^{2n}\right)^{-1}. \quad (8.4)$$

Der Vollständigkeit halber sei noch angefügt, daß

$$\alpha_n = \frac{2}{\Sigma + 1} \beta_n.$$

So richtig ist damit allerdings noch nicht bewiesen, daß y aus (8.3) die Lösung des Randwertproblems ist; es ist lediglich ein sehr guter *Kandidat*. Allerdings fehlt nicht mehr viel zu einem Beweis auf der Grundlage von Bemerkung 6.6. Wir wollen hier den Nachweis jedoch explizit über Lemma 6.3 führen, weil dann noch einmal klar wird, warum die Koeffizienten α_n und β_n gerade in dieser Weise miteinander verknüpft sein müssen.

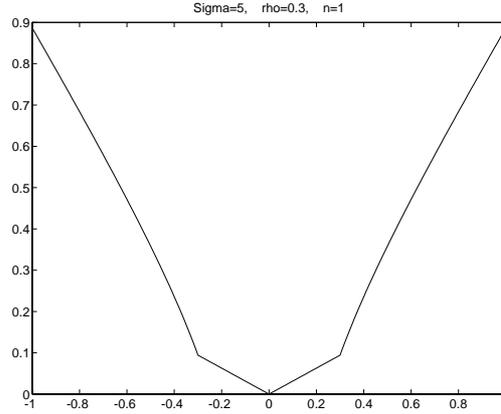


Fig. 8.1. Die Lösung $y(r)$ des gestörten Problems

Wir greifen also ein beliebiges $Y \in C^1[0, 1]$ heraus, und setzen y aus (8.3) in (6.4) ein: Durch partielle Integration ergibt sich (da $\sigma y'$ stetig ist)

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (\sigma y' Y' + \frac{n^2}{r^2} \sigma y Y) r dr \\
&= \int_0^\rho \Sigma r y' Y' dr + \int_\rho^1 r y' Y' dr + \int_0^1 \frac{n^2}{r} \sigma y Y dr \\
&= \Sigma r y' Y|_0^\rho + r y' Y|_\rho^1 - \int_0^\rho \Sigma (r y')' Y dr - \int_\rho^1 (r y')' Y dr + \int_0^1 \frac{n^2}{r} \sigma y Y dr \\
&= Y(1) + \rho Y(\rho) (\Sigma y'(\rho-) - y'(\rho+)) - \int_0^1 \sigma Y ((r y')' - \frac{n^2}{r} y) dr \\
&= Y(1),
\end{aligned}$$

so daß y nach Lemma 6.3 als Lösung des Randwertproblems feststeht.

Uns interessiert jedoch ausschließlich der Eigenwert λ_n der NtD-Abbildung, und zwar ist nach (8.3) und (8.4)

$$\lambda_n = y_n(1) = \beta_n - (n^{-1} - \beta_n) = \frac{1}{n} \frac{1 - \frac{\Sigma-1}{\Sigma+1} \rho^{2n}}{1 + \frac{\Sigma-1}{\Sigma+1} \rho^{2n}}. \quad (8.5)$$

Zur Erinnerung: Der entsprechende Eigenwert bei konstanter Leitfähigkeit $\sigma \equiv 1$ ist n^{-1} . Bezeichnet im weiteren $\Lambda(1)$ die NtD-Abbildung zu $\sigma \equiv 1$, so folgt für die Differenz

$$\| \Lambda(\sigma) - \Lambda(1) \| \|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^{-1})^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \left(\frac{\frac{\Sigma-1}{\Sigma+1} \rho^{2n}}{1 + \frac{\Sigma-1}{\Sigma+1} \rho^{2n}} \right)^2$$

$$\leq 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{\Sigma - 1}{\Sigma + 1} \rho^{2n} \right)^2 \leq 8\rho^4 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}.$$

Demnach gilt

$$|||\Lambda(\sigma) - \Lambda(1)||| \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0, \quad (8.6)$$

ohne daß gleichzeitig $\|\sigma - 1\|_{\infty} = |\Sigma - 1|$ gegen 0 konvergieren würde. Mit anderen Worten, bezüglich der Supremumsnorm liegt keine stetige Abhängigkeit des Leitfähigkeitskoeffizienten von der NtD-Abbildung vor.

Bekanntlich hängt jedoch die Stetigkeit wesentlich von den verwendeten Topologien ab, und man könnte hoffen, daß andere (praxisrelevante) Topologien zu stetiger Abhängigkeit führen. Hierbei ist sogleich anzumerken, daß die Hilbert-Schmidt Norm einen sinnvollen Praxisbezug hat, da ihre Verwendung impliziert, daß jede gemessene Spannungsserie in gleicher Weise (\mathcal{L}^2) gestört ist. Da die Spektralnorm immer kleiner ist als die Hilbert-Schmidt Norm, überträgt sich fehlende Stabilität übrigens sofort auch auf diese Norm.

Andererseits könnte man für den Leitfähigkeitskoeffizienten mit einer schwächeren Konvergenz als der gleichmäßigen zufrieden sein; wegen der Hilbertraumstruktur ist hierbei etwa die Frage nach \mathcal{L}^2 -Stabilität von Bedeutung. Offensichtlich konvergiert in dem obigen Beispiel bei festem Σ der Leitfähigkeitskoeffizient σ gegen 1 in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ für $\rho \rightarrow 0$. Wählt man allerdings $\Sigma = \Sigma(\rho)$, und zwar etwa

$$\Sigma(\rho) = 1 + \rho^{-1},$$

dann gilt (8.6) weiterhin; andererseits ist jedoch nun

$$\|\sigma - 1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 = \pi \rho^2 (\Sigma - 1)^2 = \pi,$$

konstant für alle ρ . Wir fassen zusammen:

Satz 8.1 *Das EIT-Problem ist schlecht gestellt: Selbst wenn $|||\Lambda_k - \Lambda||| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, brauchen weder in $\mathcal{L}_+^{\infty}(\Omega)$ noch in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ die zugehörigen Leitfähigkeitskoeffizienten σ_k gegen den Grenzkoeffizienten σ zu konvergieren.*

Literatur.

G. ALESSANDRINI, *Stable determination of conductivity by boundary measurements*, Appl. Anal. **27** (1988), 153–172.

9. Die Fréchet-Ableitung

Nachdem wir im vergangenen Kapitel gesehen haben, daß das inverse Problem nicht stabil ist, gehen wir nun der Frage nach, ob das direkte Problem stabil ist. Mit anderen Worten, wir wollen untersuchen, inwieweit die resultierenden Spannungen (bzw. die NtD-Abbildung) stetig von dem Leitfähigkeitskoeffizienten abhängen.

Satz 9.1 *Sind σ_1, σ_2 zwei Leitfähigkeitsverteilungen mit $0 < \underline{\sigma} \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq \bar{\sigma} < \infty$, und u_1 , bzw. u_2 die zugehörigen Potentiale bei gleicher Stromvorgabe f , dann gilt:*

$$\|u_1 - u_2\|_{H^1_\diamond(\Omega)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}} \|u_2\|_{H^1_\diamond(\Omega)} \|\sigma_2 - \sigma_1\|_\infty \leq \frac{2}{\underline{\sigma}^2} \|f\|_{\mathcal{L}^2_\diamond(\Gamma)} \|\sigma_2 - \sigma_1\|_\infty.$$

Beweis. Zu σ_1 und σ_2 gehören die beiden Bilinearformen $a_1(u, v)$ und $a_2(u, v)$ entsprechend der Definition (4.5) (das lineare Funktional b hängt hingegen nur von f ab, ist also unabhängig von der Wahl von σ). Wichtig ist, daß die allgemeine Bilinearform $a(u, v)$ aus (4.5) bei festen u, v linear von σ abhängt. Demnach ist die Bilinearform

$$A(u, v) := a_2(u, v) - a_1(u, v) = \int_\Omega (\sigma_2 - \sigma_1) \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx \quad (9.1)$$

wieder von der Form (4.5) und gehört zu der Koeffizientenfunktion $\sigma_2 - \sigma_1$. Dabei ist allerdings zu beachten, daß $\sigma_2 - \sigma_1$ in der Regel keine physikalisch sinnvolle Leitfähigkeitsverteilung mehr darstellt, da die Positivität nicht gewährleistet ist. Die Beschränkung nach oben ist hingegen kein Problem: $A(u, v)$ läßt sich abschätzen durch

$$|A(u, v)| \leq \|\sigma_2 - \sigma_1\|_\infty \|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)} \|v\|_{H^1_\diamond(\Omega)}. \quad (9.2)$$

Nach Satz 4.4 gilt nun

$$a_1(u_1, v) = b(v), \quad a_2(u_2, v) = b(v) \quad \text{für alle } v \in H^1_\diamond(\Omega),$$

und durch Subtraktion folgt

$$0 = a_2(u_2, v) - a_1(u_1, v) = A(u_2, v) + a_1(u_2 - u_1, v). \quad (9.3)$$

Speziell für $v = u_1 - u_2$ ergibt sich daher

$$a_1(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = A(u_2, u_1 - u_2),$$

und mit (9.2) erhält man

$$\underline{a} \|u_1 - u_2\|_{H_\diamond^1(\Omega)}^2 \leq \|\sigma_2 - \sigma_1\|_\infty \|u_2\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{H_\diamond^1(\Omega)}.$$

Der zweite Teil der Abschätzung folgt wiederum aus Satz 4.4. \square

Für festes $f \in \mathcal{L}_\diamond^2(\cdot)$ führen wir nun die *Zuordnungsfunktion* F_f ein, die der Leitfähigkeit σ das zugehörige Potential u zuordnet:

$$F_f : \mathcal{L}_+^\infty(\Omega) \rightarrow H_\diamond^1(\Omega), \quad F_f : \sigma \mapsto u = L_\sigma f. \quad (9.4)$$

L_σ ist hierbei der Lösungsoperator aus Bemerkung 4.5. Satz 9.1 besagt, daß die Zuordnungsfunktion F_f in der gewählten Topologie stetig ist.

Während L_σ jedoch linear war, ist F_f kein linearer Operator. Eher ist F_f "vom Typ $1/\sigma$ ": Insbesondere ist F homogen vom Grad -1 , d.h.,

$$F_f(t\sigma) = \frac{1}{t} F_f(\sigma), \quad t > 0.$$

Dies folgt leicht aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 4.4.

Damit stellt sich uns nun die Frage nach Differenzierbarkeitsaussagen für F . Wir beginnen mit einer heuristischen Überlegung. Sei σ fest gewählt: Dann ist auch $\tilde{\sigma} = \sigma + h$ für hinreichend kleine $h \in \mathcal{L}^\infty$ eine zulässige Leitfähigkeitsverteilung. Bezeichnen

$$u = F_f(\sigma), \quad \tilde{u} = F_f(\tilde{\sigma})$$

die zugehörigen Potentiale, dann erhalten wir aus der Darstellung (9.3), daß

$$a(\tilde{u} - u, v) = -a_h(\tilde{u}, v) \quad (9.5)$$

für alle $v \in H_\diamond^1(\Omega)$. Hierbei ist a die Bilinearform (4.5) für σ und

$$a_h(u, v) = \int_\Omega h \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx. \quad (9.6)$$

Für kleine h kann \tilde{u} auf der rechten Seite von (9.5) durch u approximiert werden, so daß also $\tilde{u} - u$ näherungsweise eine Lösung u' von

$$a(u', v) = -a_h(u, v) \quad \text{für alle } v \in H_\diamond^1(\Omega) \quad (9.7)$$

ist. Da nach Voraussetzung $h \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ liegt, ist $a_h(u, \cdot)$ eine stetige Bilinearform über $H_\diamond^1(\Omega)$, und daher hat (9.7) nach Korollar 4.2 eine eindeutige Lösung u' .

Lemma 9.2 Sei u' durch (9.7) definiert, und bezeichne $w := \tilde{u} - u - u'$. Dann gilt mit a_h aus (9.6):

$$a(w, v) = -a_h(\tilde{u} - u, v) \quad \text{für alle } v \in H_\diamond^1(\Omega).$$

Beweis. Sei \tilde{a} die Bilinearform (4.5) für $\tilde{\sigma}$. Dann ist wegen Satz 4.4 und (9.7)

$$\begin{aligned} a(\tilde{u} - u - u', v) &= a(\tilde{u}, v) - b(v) + a_h(u, v) \\ &= a(\tilde{u}, v) - \tilde{a}(\tilde{u}, v) + a_h(u, v) \\ &= -a_h(\tilde{u} - u, v). \end{aligned}$$

□

Erinnerung. Ein nichtlinearer Operator F zwischen zwei Banachräumen \mathcal{X} und \mathcal{Y} heißt in einem inneren Punkt $x \in \mathcal{X}$ (*Fréchet-*) *differenzierbar*, falls ein stetiger linearer Operator $F'(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ existiert, so daß

$$\|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\|_{\mathcal{Y}} = o(\|h\|), \quad \|h\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0,$$

gleichmäßig bzgl. h. Diese Definition ist analog zur Differenzierbarkeit im \mathbf{R}^n , vgl. Heuser II.

Ein schwächerer Ableitungsbegriff ist der der *Gateaux-Ableitung*: Der Operator F heißt *Gateaux-differenzierbar* in $x \in \mathcal{X}$, wenn in x für alle Richtungen $h \in \mathcal{X}$ Richtungsableitungen $\frac{\partial F}{\partial h}(x)$ existieren, d.h., wenn

$$\|F(x+th) - F(x) - t \frac{\partial F}{\partial h}(x)\|_{\mathcal{Y}} = o(t), \quad t \rightarrow 0.$$

Wie wir nun sehen werden, ist F_f Fréchet-differenzierbar als Abbildung von $\mathcal{L}_+^\infty(\Omega)$ nach $H_\diamond^1(\Omega)$.

Satz 9.3 Der Operator $F_f : \mathcal{L}_+^\infty(\Omega) \rightarrow H_\diamond^1(\Omega)$ ist Fréchet-differenzierbar, wobei $F_f'(\sigma)h$ durch die Lösung u' von (9.7) definiert ist. Genauer gilt:

$$\|F_f(\sigma + h) - F_f(\sigma) - F'_f(\sigma)h\|_{H^1_\diamond(\Omega)} \leq \frac{2}{\underline{\sigma}^3} \|f\|_{\mathcal{L}^2_\diamond(\Gamma)} \|h\|_\infty^2.$$

Beweis. Bezeichne $u = F_f(\sigma)$ und $\tilde{u} = F_f(\sigma + h)$. Nach Lemma 9.2 ist $w = \tilde{u} - u - u'$ Lösung der Variationsgleichung

$$a(w, v) = -a_h(\tilde{u} - u, v) \quad \text{für alle } v \in H^1_\diamond(\Omega).$$

Mit $v = w$ ergibt sich

$$\underline{\sigma} \|w\|_{H^1_\diamond(\Omega)}^2 \leq \|h\|_\infty \|\tilde{u} - u\|_{H^1_\diamond(\Omega)} \|w\|_{H^1_\diamond(\Omega)},$$

also

$$\|w\|_{H^1_\diamond(\Omega)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}} \|h\|_\infty \|\tilde{u} - u\|_{H^1_\diamond(\Omega)}. \quad (9.8)$$

Aus Satz 9.1 folgt schließlich die Behauptung. \square

Damit können wir uns nun dem Hauptresultat dieses Kapitels zuwenden, nämlich der Differenzierbarkeit der Funktion $\Lambda = \Lambda(\sigma)$ bezüglich $\sigma \in \mathcal{L}^\infty_+(\Omega)$. Bevor wir den formalen Beweis führen (vgl. Satz 9.5) zeigen wir zunächst, daß die auftretenden Ableitungsoperatoren wiederum selbstadjungiert sind.

Proposition 9.4 *Sei $\sigma \in \mathcal{L}^\infty_+(\Omega)$ und $h \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Der lineare Operator $\Lambda' : \mathcal{L}^2_\diamond(\mathfrak{c}) \rightarrow \mathcal{L}^2_\diamond(\mathfrak{c})$, definiert durch*

$$\Lambda' f = \gamma F'_f(\sigma)h, \quad f \in \mathcal{L}^2_\diamond(\mathfrak{c}),$$

ist selbstadjungiert.

Beweis. Da $F'_f(\sigma)h$ als Lösung des Variationsproblems (9.7) bei festen σ und h linear von $u = L_\sigma f$ und damit linear von f abhängt, ist Λ' eine lineare Selbstabbildung von $\mathcal{L}^2_\diamond(\mathfrak{c})$. Seien im weiteren f und g zwei Elemente von $\mathcal{L}^2_\diamond(\mathfrak{c})$ und u, w die zugehörigen Potentiale, dann gilt nach Korollar 4.2

$$a(u, v) = b(v), \quad a(w, v) = \tilde{b}(v), \quad v \in H^1_\diamond(\Omega),$$

wobei $b(v) = \int_\Gamma f v d\theta$ und $\tilde{b}(v) = \int_\Gamma g v d\theta$ die entsprechenden linearen Funktionale zu f und g bezeichnen. Nun folgt mit u' aus (9.7), daß

$$\langle \Lambda' f, g \rangle = \int_\Gamma u' g d\theta = \tilde{b}(u') = a(w, u') = -a_h(u, w), \quad (9.9)$$

und entsprechend ergibt sich durch Vertauschung von f und g auch $\langle \Lambda'g, f \rangle = -a_h(w, u)$. Folglich ist

$$\langle \Lambda'f, g \rangle = \langle f, \Lambda'g \rangle, \quad f, g \in \mathcal{L}_\diamond^2(\epsilon),$$

was zu zeigen war. \square

Wie die Notation bereits nahelegt, stellt sich heraus, daß der Operator Λ' die Ableitung $\Lambda'(\sigma)h$ ist.

Satz 9.5 Λ ist als operatorwertige Funktion über $\mathcal{L}_+^\infty(\Omega)$ bezüglich der Hilbert-Schmidt Norm Fréchet differenzierbar, und es ist

$$(\Lambda'(\sigma)h)f = \gamma F'_f(\sigma)h, \quad h \in \mathcal{L}^\infty(\Omega), \quad f \in \mathcal{L}_\diamond^2(\epsilon).$$

Beweis. Der Einfachheit halber lassen wir im Verlauf des Beweises die Argumente σ bei F , Λ , F' und Λ' weg, und verwenden statt dessen die “tilde” über Λ und F , falls das entsprechende Argument $\tilde{\sigma} = \sigma + h$ ist. Der Ansatz zum Beweis dieses Satzes ist der gleiche wie bei Satz 5.5: Das Spektrum des Hilbert-Schmidt Operators

$$\Psi := \tilde{\Lambda} - \Lambda - \Lambda'h$$

muß mit dem Maximumprinzip von Courant-Fischer abgeschätzt werden. Dazu bezeichne \mathcal{X}_n wieder den Unterraum

$$[\tau_{-n}, \dots, \tau_{-1}, \tau_1, \dots, \tau_n], \quad n \in \mathbb{N},$$

und P_n den Orthogonalprojektor auf \mathcal{X}_n^\perp . Nun gilt

$$\Psi f = \tilde{\Lambda}f - \Lambda f - \gamma F'_f h = \gamma(\tilde{F}_f - F_f - F'_f h),$$

und daher ist nach Satz 9.3, Satz 3.1 und Korollar 2.10

$$\|\Psi\| \leq \frac{4}{\underline{\sigma}^3} \|h\|_\infty^2. \quad (9.10)$$

Ferner gilt für $f \perp \mathcal{X}_n$

$$\begin{aligned} |\langle f, \Psi f \rangle| &= |\langle P_n f, \gamma(\tilde{F}_f - F_f - F'_f h) \rangle| \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)} \|P_n \gamma\| \|\tilde{F}_f - F_f - F'_f h\|_{H_\diamond^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die Norm des Operators $P_n\gamma$ (zwischen $H_\diamond^1(\Omega)$ und $\mathcal{L}_\diamond^2(\cdot)$) wurde bereits in (5.7) durch $2(n+1)^{-1/2}$ abgeschätzt. Also ist

$$|\langle f, \Psi f \rangle| \leq 2(n+1)^{-1/2} \|f\|_{\mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)} \|\tilde{F}_f - F_f - F'_f h\|_{H_\diamond^1(\Omega)}, \quad (9.11)$$

und es geht nun noch darum, den hinteren Faktor für $f \perp \mathcal{X}_n$ abzuschätzen. Nach (9.8) und Satz 9.1 ist

$$\|\tilde{F}_f - F_f - F'_f h\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}} \|h\|_\infty \|\tilde{F}_f - F_f\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}^2} \|h\|_\infty^2 \|\tilde{F}_f\|_{H_\diamond^1(\Omega)},$$

und wegen $f \perp \mathcal{X}_n$ liefert Lemma 5.4 nun

$$\|\tilde{F}_f - F_f - F'_f h\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\underline{\sigma}^3} (n+1)^{-1/2} \|h\|_\infty^2 \|f\|_{\mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)}.$$

Eingesetzt in (9.11) folgt schließlich

$$|\langle f, \Psi f \rangle| \leq \frac{4}{\underline{\sigma}^3} (n+1)^{-1} \|f\|_{\mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)}^2 \|h\|_\infty^2,$$

und nach dem Minimax Prinzip von Courant-Fischer ergibt sich die obere Schranke

$$|\lambda_{2n+1}| \leq \frac{4}{\underline{\sigma}^3} (n+1)^{-1} \|h\|_\infty^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

für den $(2n+1)$ -ten Eigenwert von Ψ . Zusammen mit (9.10) führt das auf die folgende Abschätzung für die Hilbert-Schmidt Norm von Ψ :

$$\|\Psi\|_{HS}^2 \leq \frac{32}{\underline{\sigma}^6} \|h\|_\infty^4 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}.$$

Folglich ist $\|\tilde{\Lambda} - \Lambda - \Lambda'\| = O(\|h\|_\infty^2)$, d.h., Λ ist Fréchet differenzierbar. \square

Da die Hilbert-Schmidt Norm die Spektralnorm dominiert, ergibt sich natürlich sofort auch die Differenzierbarkeit bezüglich der Spektralnorm.

Korollar 9.6 Die "schwache Form" von Satz 9.5 lautet wie folgt: Sind $f, g \in \mathcal{L}_\diamond^2(\cdot)$ beliebig und u, v bei Leitfähigkeit σ die zugehörigen Potentiale, dann gilt

$$\langle (\Lambda'(\sigma)h)f, g \rangle = -a_h(u, w).$$

Beweis. Folgt sofort aus (9.9). \square

Bemerkung 9.7 Abschließend ist noch festzuhalten, daß sich diese Beweise leider nicht auf $\mathcal{L}^2(\Omega)$ als Topologie in der Menge der Leitfähigkeitskoeffizienten σ übertragen lassen. Das entscheidende Problem ist die Abschätzung (9.2), die in dem Fall

nicht mehr gültig ist. Somit ist die Verwendung der \mathcal{L}^2 -Topologie (aber auch die H^1 -Topologie) für σ problematisch.

Beispiel 9.8 Für $\sigma \equiv 1$ und Stromvorgabe τ_n ist nach Beispiel 5.3 $u_n(x) = |n|^{-1}r^{|n|}\tau_n(\theta)$ das resultierende Potential, und $(\Lambda'(1)h)\tau_n$ die Spur der Lösung U_n des Variationsproblems (9.7), also

$$\int_{\Omega} \text{grad} U_n \cdot \text{grad} v \, dx = - \int_{\Omega} h \, \text{grad} u_n \cdot \text{grad} v \, dx \quad \text{für alle } v \in H_{\diamond}^1(\Omega).$$

Offensichtlich genügt es, sich auf $n \in \mathbb{N}$ zu beschränken. Bei radialsymmetrischen Störungen h hat U_n die Form $U_n(x) = y_n(r)\tau_n(\theta)$, und y_n löst das Variationsproblem

$$\int_0^1 (y_n' Y' + \frac{n^2}{r^2} y_n Y) r \, dr = - \int_0^1 h(r^n Y' + n r^{n-1} Y) \, dr \quad \text{für alle } Y \in H_n^1[0, 1].$$

Wir betrachten speziell die Störungen h aus dem Beispiel aus Kapitel 8, d.h.,

$$h(x) = \begin{cases} \Sigma - 1, & |x| \leq \rho, \\ 0, & |x| \geq \rho, \end{cases} \quad \Sigma > 0.$$

In das Variationsproblem eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^1 (y_n' Y' + \frac{n^2}{r^2} y_n Y) r \, dr &= -(\Sigma - 1) \int_0^{\rho} (r^n Y' + n r^{n-1} Y) \, dr \\ &= -(\Sigma - 1) r^n Y \Big|_0^{\rho} = -(\Sigma - 1) \rho^n Y(\rho) \end{aligned} \quad (9.12)$$

für alle $Y \in H_n^1[0, 1]$. Wie seinerzeit in Kapitel 8 weist man nun durch partielle Integration in $(0, \rho)$ und $(\rho, 1)$ nach, daß

$$y_n(r) = \begin{cases} \alpha n^{-1} r^n, & r \leq \rho \\ \beta n^{-1} (r^n + r^{-n}), & r \geq \rho \end{cases}$$

das Variationsproblem (9.12) löst, falls

$$\alpha = -\frac{\Sigma - 1}{2} (1 + \rho^{2n}), \quad \beta = -\frac{\Sigma - 1}{2} \rho^{2n}.$$

Damit ergibt sich schließlich

$$(\Lambda(1)'h)\tau_n = y_n(1)\tau_n = -(\Sigma - 1)\rho^{2n}n^{-1}\tau_n.$$

Unter Verwendung der Ergebnisse aus Kapitel 8 folgt

$$\begin{aligned}
& (\Lambda(1+h) - \Lambda(1) - \Lambda'(1)h)\tau_n \\
&= \frac{1}{n} \frac{\frac{\Sigma-1}{\Sigma+1}\rho^{2n}}{1 + \frac{\Sigma-1}{\Sigma+1}\rho^{2n}} \left(-2 + (\Sigma+1)\left(1 + \frac{\Sigma-1}{\Sigma+1}\rho^{2n}\right)\right) \tau_n \\
&= \frac{1}{n} \frac{(\Sigma-1)^2}{\Sigma+1} \rho^{2n} \frac{1 + \rho^{2n}}{1 + \frac{\Sigma-1}{\Sigma+1}\rho^{2n}} \tau_n.
\end{aligned}$$

Der hintere Bruch ist monoton wachsend mit ρ , so daß die Hilbert-Schmidt Norm wie folgt abgeschätzt werden kann:

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(1+h) - \Lambda(1) - \Lambda'(1)h\|^2 &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{(\Sigma-1)^4}{(\Sigma+1)^2} \rho^{4n} \frac{(\Sigma+1)^2}{\Sigma^2} \\
&\leq \frac{2}{\Sigma^2} (\Sigma-1)^4 \rho^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{3\Sigma^2} \|h\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^4.
\end{aligned}$$

Man beachte allerdings, daß Λ nicht bezüglich $\mathcal{L}^2(\Omega)$ differenzierbar sein kann, da $\mathcal{L}_+^\infty(\Omega)$ bezüglich der \mathcal{L}^2 -Topologie keine inneren Punkte besitzt.

10. Die Methode der kleinsten Quadrate

Erinnern wir uns noch einmal an die Ausgangssituation. Anstelle des linearen Operators Λ sind uns in der Praxis lediglich p Messreihen gegeben, etwa

$$\psi_n = \Lambda f_n, \quad n = 1, \dots, p.$$

Tatsächlich ist noch nicht einmal diese Information vorhanden, sondern allenfalls die Funktionswerte $\psi_n(\theta_m)$ für endlich viele $\{\theta_m\}_{m=1}^q \subset \mathcal{C}$. Diese zusätzliche Schwierigkeit soll jedoch zunächst vernachlässigt werden.

Ein naheliegender Ansatz zur Rekonstruktion der tatsächlichen Leitfähigkeit besteht in der Minimierung des Funktionals

$$\sum_{n=1}^p \|\psi_n - \Lambda(\sigma) f_n\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}^2 \quad (10.1)$$

bezüglich einer geeigneten Teilmenge von Leitfähigkeiten σ . Man spricht dabei von der *Methode der kleinsten Quadrate*, oder englisch von *output least squares*. Offensichtlich handelt es sich dabei – zumindest bei einer endlichen Orthonormalbasis $\{f_n\}_{n=1}^p$ – um eine Approximation der Hilbert-Schmidt Norm $\|\tilde{\Lambda} - \Lambda(\sigma)\|$, wobei $\tilde{\Lambda}$ die durch Meßfehler gestörte tatsächliche NtD-Abbildung bezeichnen soll.

Die Forderung, daß $\{f_n\}$ eine Orthonormalbasis darstellt, wird in der Praxis nicht immer erfüllt (bei nur endlich vielen Meßreihen ist das auch nicht so wichtig wie im unendlichdimensionalen Raum $\mathcal{L}^2(\Omega)$). Beispielsweise sind \mathcal{L}^2 -Approximationen an die Deltadistributionen aus Kapitel 1 sicher nicht paarweise orthogonal. Manche Autoren bilden daher Linearkombinationen der gewonnenen Daten, um diskrete trigonometrische Strommuster $f_n \approx \tau_n$ zu simulieren (man beachte, daß $\tilde{\Lambda}$ ein linearer Operator ist). Dies ist analog zur endlichen diskreten Fouriertransformation als Approximation an Fourierreihen.

Da σ nicht stetig von Λ abhängt (vgl. Kapitel 8), ist eine “naive” Minimierung des Funktionals (10.1) oder seines kontinuierlichen Analogons jedoch nicht ratsam. Wegen der unvermeidlichen Meßfehler ist nicht damit zu rechnen, daß ein $\tilde{\sigma}$ mit $\Lambda(\tilde{\sigma}) = \tilde{\Lambda}$

existiert, und selbst wenn, kann $\tilde{\sigma}$ weit von der tatsächlichen Leitfähigkeit σ entfernt sein. Daher minimiert man zumeist das sogenannte *Tikhonov-Funktional*

$$|||\tilde{\Lambda} - \Lambda(\sigma)|||^2 + \alpha \|\sigma\|^2. \quad (10.2)$$

Unklar ist hierbei jedoch die zu verwendende Norm für σ . Es gibt zwar inzwischen für nichtlineare Probleme eine Hilbertraum Theorie der Tikhonov-Regularisierung, allerdings ist diese auf unser Problem nicht unmittelbar anwendbar. Konvergenzaussagen oder Vorschläge zur Wahl des *Regularisierungsparameters* $\alpha > 0$ gibt es also weder für die \mathcal{L}^2 -Norm noch für die \mathcal{L}^∞ -Norm. Für numerische Zwecke ist die \mathcal{L}^2 -Norm sicherlich angenehmer.

Neben der Tikhonov-Regularisierung kann man auch ein iteratives Verfahren zur Minimierung von

$$\Xi[\sigma] := |||\tilde{\Lambda} - \Lambda(\sigma)|||^2$$

verwenden. Hier bietet sich etwa das *Verfahren des steilsten Abstiegs* an: Wegen

$$\Xi[\sigma] = |||\tilde{\Lambda}|||^2 - 2\langle\langle \tilde{\Lambda}, \Lambda(\sigma) \rangle\rangle + |||\Lambda(\sigma)|||^2$$

ergibt sich

$$\Xi'[\sigma]h = -2\langle\langle \tilde{\Lambda} - \Lambda(\sigma), \Lambda'(\sigma)h \rangle\rangle = -2\langle \Lambda'(\sigma)^*(\tilde{\Lambda} - \Lambda(\sigma)), h \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Hierbei ist $\Lambda'(\sigma)^* : HS \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$ der adjungierte Operator des Hilbert-Schmidt Operators $\Lambda'(\sigma)$. Da die Fréchet-Ableitung nur auf dem dichten Teilraum $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ definiert wurde, muß man damit rechnen, daß dieser adjungierte Operator in der Regel auch nur auf einer dichten Teilmenge aller Hilbert-Schmidt Operatoren wohldefiniert ist. Diesen adjungierten Operator werden wir in Kapitel 11 bestimmen.

Wenn jedoch die obigen Umformungen wohldefiniert sind (und im endlich-dimensionalen ist das immer der Fall), dann ist offensichtlich

$$h := \Lambda'(\sigma)^*(\tilde{\Lambda} - \Lambda(\sigma))$$

die Richtung des steilsten Abstiegs des Funktionals Ξ im Punkt σ . Beim Verfahren des steilsten Abstiegs bestimmt man daher im k ten Iterationsschritt die nächste Approximation σ_{k+1} als

$$\sigma_{k+1} := \sigma_k + \omega_k \Lambda'(\sigma_k)^*(\tilde{\Lambda} - \Lambda(\sigma_k)). \quad (10.3)$$

Verschiedene Varianten dieses Verfahrens unterscheiden sich dabei in der Wahl des positiven *Relaxationsparameters* ω_k . Für einzelne Varianten existiert dabei eine Hilbertraum Konvergenztheorie, allerdings bislang nur unter der wesentlichen Voraussetzung, daß der nichtlineare Operator differenzierbar ist. Dies ist, wie gesagt, in $\mathcal{L}^2(\Omega)$

nicht unbedingt korrekt. Sicher ist jedoch, daß man auch dieses Iterationsverfahren regularisieren muß; dies geschieht üblicherweise durch einen vorzeitigen Abbruch der Iteration, etwa wenn der “Datenfit” im Bereich des (angenommenen) Datenfehlers liegt (gemessen bezüglich der Hilbert-Schmidt Norm).

Natürlich denkt man bei nichtlinearen Problemen aber in erster Linie an *Newton-artige Verfahren*, wobei für schlecht gestellte Probleme das *Levenberg-Marquardt-Verfahren* wohl das robusteste ist. Bei diesem Verfahren wird in jedem Iterationsschritt ein linearisiertes Tikhonov-Funktional

$$\| \tilde{\Lambda} - \Lambda(\sigma_k) - \Lambda'(\sigma_k)h \|^2 + \alpha_k \|h\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 \quad (10.4)$$

bezüglich h minimiert, und dann

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k + \omega_k h$$

gesetzt. Wieder sind α_k ein positiver Regularisierungsparameter und ω_k ein positiver Relaxationsparameter, die aufgrund verschiedener Heuristiken ausgewählt werden müssen; für $\alpha_k \rightarrow \infty$ (ein Fall, den man üblicherweise vermeiden wird), approximiert die neue Suchrichtung h die Richtung des steilsten Abstiegs aus (10.3).

Da (10.4) ein lineares Problem ist, kann die Lösung h über die entsprechende Normalgleichung bestimmt werden:

$$h = \left(\Lambda'(\sigma_k)^* \Lambda'(\sigma_k) + \alpha_k I \right)^{-1} \Lambda'(\sigma_k)^* (\tilde{\Lambda} - \Lambda(\sigma_k)). \quad (10.5)$$

Hierbei ist I die Identität in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ und $\Lambda'(\sigma_k)^*$ wiederum der entsprechende adjungierte Operator bezüglich $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Obwohl das Levenberg-Marquardt-Verfahren wohl das am meisten verwendete Verfahren für unser EIT-Problem ist, ist die entsprechende Konvergenztheorie – verglichen mit den anderen beiden Verfahren (10.2) und (10.3) – bislang noch am unbefriedigendsten. Dennoch ist es wohl auch hier so, daß die Iteration aus Regularisierungsgründen vorzeitig abgebrochen werden muß, etwa anhand einer Kontrolle des Datenfits.

Eine numerische Implementierung von (10.5) könnte wiederum iterativ erfolgen. Man spricht in diesem Fall von einer *inneren Iteration* (im Gegensatz zur *äußeren* Levenberg-Marquardt Iteration). Iterative Verfahren sind vor allem dann vorteilhaft, wenn die Ableitungsmatrix “konventionell” aufgestellt wird: Bezeichnet $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ eine Basis des Ansatzraums, in dem σ gesucht werden soll, dann kann $\Lambda'(\sigma)$ durch eine $pq \times N$ Matrix A dargestellt werden, mit

- p Anzahl Strommuster,
- q Anzahl Meßpunkte auf dem Rand.

Im $(q(n-1) + m, i)$ -Eintrag von A steht dann der m -te Meßwert der Lösung $u'_{n,i}$ des Variationsproblems

$$a(u'_{n,i}, v) = -a_{\phi_i}(u_n, v), \quad (10.6)$$

also der Ableitung von dem zum Randstrom f_n gehörenden Potential u_n in Richtung $h = \phi_i$. Folglich sind pN Variationsprobleme zum Aufstellen von A zu lösen.

Wesentlich effizienter ist allerdings die folgende schwache Formulierung, vgl. Korollar 9.6. Demnach ersetzt man die Daten $\psi_n(\theta_m)$ durch gewichtete Integralmittel

$$\omega_{m,n} = \int_0^{2\pi} \psi_n(\theta) g_m(\theta) d\theta, \quad m = 1, \dots, q.$$

Der bislang betrachtete diskrete Fall von Punktelektroden entspricht der entarteten Wahl $g_m = \delta(\theta - \theta_m)$. Da $\psi_n = u_n|_{\Gamma} \in \mathcal{L}^2_{\diamond}(\cdot)$ sollte man sich für die Theorie aber auf "Meßfunktionen" $g_m \in \mathcal{L}^2_{\diamond}(\cdot)$ beschränken. Man beachte, daß sich die Anzahl Daten bei dieser Transformation *nicht* ändert.

Die Abbildung

$$\Lambda_G : \begin{cases} \mathcal{L}^{\infty}_+(\Omega) & \longrightarrow \mathbf{R}^{q \times p} \\ \sigma & \mapsto (\omega_{m,n})_{m,n} \end{cases}$$

ist nun durch Hintereinanderschalten $G \circ \Lambda$ der NtD-Abbildung Λ mit dem "Beobachtungsoperator" $G : \mathcal{L}^2_{\diamond}(\cdot) \longrightarrow \mathbf{R}^q$ gegeben, mit

$$G\psi_n = \left(\int_{\Gamma} \psi_n g_m d\theta \right)_{m=1}^q =: (d_m(u_n))_{m=1}^q, \quad u_n = L_{\sigma}^{-1} f_n.$$

Damit ist $\Lambda'_G(\sigma)h = G \circ \Lambda'(\sigma)h$ und es folgt

$$\Lambda'_G(\sigma)\phi_i = G \circ \Lambda'(\sigma)\phi_i = (d_m(u'_{n,i}))_{m=1}^q$$

mit $u'_{n,i}$ gemäß (10.6).

Bezeichnet nun jedoch w_m die Lösung des Variationsproblems

$$a(w_m, v) = d_m(v) \quad \text{für alle } v \in H^1_{\diamond}(\Omega), \quad (10.7)$$

dann folgt

$$\begin{aligned} \Lambda'_G(\sigma)\phi_i &= (d_m(u'_{n,i}))_m = (a(w_m, u'_{n,i}))_m = -(a_{\phi_i}(u_n, w_m))_m \\ &= - \left(\int_{\Omega} \phi_i \operatorname{grad} u_n \cdot \operatorname{grad} w_m dx \right)_m. \end{aligned}$$

Das heißt, um $\Lambda'_G(\sigma)$ als Matrix aufstellen zu können, reicht es aus, lediglich $p + q$ Differentialgleichungen mit f_n bzw. g_m als Stromvorgabe zu lösen.

Egal welche Implementierung gewählt wird, zur Lösung der Differentialgleichung müssen lediglich lineare Gleichungssysteme mit der *selben* Steifigkeitsmatrix wie bei dem Vorwärtsproblem gelöst werden.

11. Die Adjungierte der Ableitung

Wie wir in Kapitel 10 gesehen haben, benötigen wir für die Methode der kleinsten Quadrate auch noch den adjungierten Operator zu der Fréchet-Ableitung Λ' aus Satz 9.5. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen (vgl. Bemerkung 9.7), daß $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ kein Hilbertraum ist, und umgekehrt die Differenzierbarkeit von Λ bezüglich der Hilberträume $\mathcal{L}^2(\Omega)$ und $H^1(\Omega)$ nicht offensichtlich ist.

Wir behelfen uns im folgenden damit, daß wir die in Satz 9.5 definierte Fréchet-Ableitung Λ' als (möglicherweise unbeschränkter) linearer Operator eines dichten Teilraums von $\mathcal{L}^2(\Omega)$ auffassen. Als ein solcher Operator zwischen zwei Hilberträumen hat Λ' dann wieder einen adjungierten Operator $(\Lambda')^*$, den wir im folgenden formal berechnen wollen. Das Argument σ wird im weiteren zur Vereinfachung weggelassen, da es ohnehin fix sein soll.

Wir verwenden eine Orthonormalbasis $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{L}_\diamond^2(\cdot)$ und das Hilbert-Schmidt Innenprodukt (5.3):

$$\langle\langle \Lambda' h, \Psi \rangle\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle (\Lambda' h) f_n, \Psi f_n \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}, \quad (11.1)$$

wobei Ψ ein beliebiger Hilbert-Schmidt Operator in $\mathcal{L}_\diamond^2(\cdot)$ ist. Im weiteren sei Ψ fest gewählt, und es bezeichne

$$v_n := F'_{f_n} h \in H_\diamond^1(\Omega), \quad \psi_n := \Psi f_n \in \mathcal{L}_\diamond^2(\cdot), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Weiterhin sei u_n immer das resultierende Potential zur gegebenen Leitfähigkeit σ und Stromvorgabe f_n . Zu der Randfunktion $\psi_n \in \mathcal{L}_\diamond^2(\cdot)$ kann man nach Satz 4.4 eine Funktion $w_n = L_\sigma \psi_n$ in $H_\diamond^1(\Omega)$ als Lösung des Minimierungsproblems

$$\frac{1}{2} a(w, w) - \int_\Gamma w g_n d\theta \longrightarrow \min. \quad (11.2)$$

konstruieren. Für diese Funktion w_n gilt dann $\int_\Gamma v_n \psi_n d\theta = a(w_n, v_n)$, und daher wird (11.1) zu

$$\langle\langle \Lambda' h, \Psi \rangle\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v_n|_T, \psi_n \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} = \sum_{n=1}^{\infty} a(w_n, v_n). \quad (11.3)$$

Nun ist aber nach den Sätzen 9.5 und 9.3 v_n durch das Variationsproblem $a(v_n, v) = -a_h(u_n, v)$ für alle $v \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ charakterisiert, so daß (11.3) wie folgt umgeformt werden kann:

$$\begin{aligned} \langle\langle \Lambda' h, \Psi \rangle\rangle &= - \sum_{n=1}^{\infty} a_h(u_n, w_n) = - \int_{\Omega} h \sum_{n=1}^{\infty} \text{grad } u_n \cdot \text{grad } w_n \, dx \\ &= \langle h, - \sum_{n=1}^{\infty} \text{grad } u_n \cdot \text{grad } w_n \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das folgende Resultat:

Satz 11.1 *Der adjungierte Operator $\Lambda'(\sigma)^*$ ist gegeben durch*

$$\Lambda'(\sigma)^* \Psi = - \sum_{n=1}^{\infty} \text{grad } u_n \cdot \text{grad } w_n,$$

vorausgesetzt, diese Reihe konvergiert in $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Hierbei sind $u_n = L_{\sigma} f_n$ und $w_n = L_{\sigma}(\Psi f_n)$ die zu der Leitfähigkeit σ und den Randströmen f_n , bzw. Ψf_n gehörenden Potentiale.

In der Praxis, in der lediglich p Randströme f_1, \dots, f_p zur Verfügung stehen, müssen für eine Auswertung von $\Lambda'(\sigma)^*$ die zugehörigen p Potentiale u_1, \dots, u_p des direkten Problems, sowie die weiteren p Potentiale w_1, \dots, w_p berechnet werden. Während u_1, \dots, u_p bereits zur Auswertung von $\Lambda(\sigma)$ bekannt sein müssen, erfordert die Berechnung von w_1, \dots, w_p die numerische Lösung weiterer p partieller Differentialgleichungen, *aber wieder mit der gleichen Steifigkeitsmatrix* (1.6). Dieser Mehraufwand ist also nicht von entscheidender Bedeutung. Weiter ist anzumerken, daß im Beweis an keiner Stelle verwendet wurde, daß die Randströme $\{f_n\}$ paarweise orthogonal sind: Bei fehlender Orthonormalität ist der in Satz 11.1 konstruierte Operator dann eben nicht bezüglich dem Hilbert-Schmidt Innenprodukt zu Λ' adjungiert, sondern bezüglich dem durch (11.1) definierten Innenprodukt in HS .

Der Vollständigkeit halber soll nun noch kurz der adjungierte Operator bezüglich des $H_{\diamond}^1(\Omega)$ -Innenprodukts angegeben werden. Eine Verwendung des $H_{\diamond}^1(\Omega)$ -Innenprodukts für die Leitfähigkeitskoeffizienten macht allerdings nur Sinn, wenn die Randwerte $\sigma|_T$ der exakten Leitfähigkeitsverteilung explizit bekannt sind, und es – wie in Kapitel 10 beschrieben – darum geht den Abstand $\tilde{\sigma} - \sigma$ der Approximation $\tilde{\sigma}$ zu minimieren. In diesem Fall kann man nämlich $\tilde{\sigma}$ aus einem affinen Raum $\sigma_0 + H_0^1(\Omega)$ wählen, wobei

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H_\diamond^1(\Omega) \mid u|_\Gamma = 0\},$$

und σ_0 so gewählt wird, daß es bereits die richtigen Randwerte annimmt. Die Bestimmung dieser Randwerte kann dabei gemäß Lemma 7.1 erfolgen.

Korollar 11.2 *Bezeichnet $\Delta^{-1} : \mathcal{L}^2(\Omega) \rightarrow H_\diamond^1(\Omega)$ den Lösungsoperator der Poisson-Gleichung*

$$\Delta u = \phi, \quad u|_\Gamma = 0, \quad (11.4)$$

dann ist der adjungierte Operator $\Lambda'(\sigma)^\sharp : HS \rightarrow H_0^1(\Omega)$ gegeben durch

$$\Lambda'(\sigma)^\sharp \Psi = \Delta^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \text{grad } u_n \cdot \text{grad } w_n,$$

vorausgesetzt, diese Reihe konvergiert in $H_\diamond^1(\Omega)$. u_n und w_n haben dabei die gleiche Bedeutung wie in Satz 11.1.

Beweis. Seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt wegen der Green'schen Formel

$$\int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\theta - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx.$$

Ist zudem $u = 0$ auf $\mathring{\Omega}$, dann folgt daraus, daß

$$\langle u, v \rangle_{H_\diamond^1(\Omega)} = \langle u, -\Delta v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \quad (11.5)$$

Zum Vergleich: Ist $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$ der Einbettungsoperator von $H_0^1(\Omega)$ nach $\mathcal{L}^2(\Omega)$, dann gilt

$$\langle Ju, -\Delta v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \langle u, -J^* \Delta v \rangle_{H_\diamond^1(\Omega)}.$$

Da die genannten Funktionen u und v dicht in $H_0^1(\Omega)$ liegen, folgt $-J^* \Delta = I$, bzw. $-\Delta^{-1}$ ist der adjungierte Operator des Einbettungsoperators J . Hierbei bezeichnet $\Delta^{-1}\phi$ die Lösung der partiellen Differentialgleichung (11.4).

Mit der gleichen Notation wie im Beweis von Satz 11.1 folgt nun

$$\begin{aligned} \langle \langle \Lambda' h, \Psi \rangle \rangle &= \langle h, -\sum_{n=1}^{\infty} \text{grad } u_n \cdot \text{grad } w_n \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ &= \langle h, \Delta^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \text{grad } u_n \cdot \text{grad } w_n \rangle_{H_\diamond^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich die behauptete Darstellung von $\Lambda'(\sigma)^\sharp \Psi$. □

Die Differentialgleichung (11.4) kann über ihre schwache Formulierung in Form des Minimierungsproblems

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 dx + \int_{\Omega} \phi u dx \longrightarrow \min$$

über $u \in H_0^1(\Omega)$ gelöst werden. Wegen des Spursatzes (Satz 3.1) ist $H_0^1(\Omega)$ ein abgeschlossener Teilraum von $H^1(\Omega)$, und folglich existiert in $H_0^1(\Omega)$ eine eindeutige Lösung von (11.4), die stetig von $\phi \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ abhängt.