

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Schadensmechanik</b>	<b>5</b>
2.1	Einführung . . . . .	6
2.2	Thermomechanische Grundlagen . . . . .	7
2.3	Die Normalenregel . . . . .	10
2.4	Ein elasto-plastisches schadensmechanisches Materialmodell . . . . .	12
2.5	Das schadensmechanische Modell von Ladeveze . . . . .	14
2.5.1	Formulierung des Modells . . . . .	15
2.5.2	Thermomechanische Darstellung . . . . .	16
2.6	Anisotropie . . . . .	18
2.7	Nicht-lokale Modelle . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Darstellung der Prozeßzone</b>	<b>22</b>
3.1	Materialeigenschaften der Zwischenschicht . . . . .	23
3.2	Linearisierte Zwischenschicht . . . . .	24
3.3	Grenzflächenmodell als Grenzfall . . . . .	25
3.4	Das Grenzflächenmodell von Lemaitre . . . . .	26
3.5	Vergleich von Grenzflächen- und Zwischenschichtmodellen . . . . .	28

<b>4</b>	<b>Rißfortschritt</b>	<b>30</b>
4.1	Bruchmechanisches Rißfortschrittskriterium . . . . .	30
4.2	Schadensmechanische Rißfortschrittskriterien . . . . .	31
4.2.1	Kritische Energiefreisetzungsrate . . . . .	31
4.2.2	Kritische Schädigung . . . . .	32
4.3	Rißmodellierung . . . . .	32
4.3.1	Verallgemeinerte Risse . . . . .	32
4.3.2	Diskrete Risse . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Experimentelle Parameteridentifikation</b>	<b>35</b>
5.1	Messung der Schädigung . . . . .	35
5.2	Modell des Zuglastungsversuchs . . . . .	36
5.3	Material . . . . .	36
5.4	Versuchsdurchführung . . . . .	37
5.5	Meßergebnisse . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Resultate</b>	<b>39</b>
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>44</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>46</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Faserverbundwerkstoffe zeichnen sich durch eine sehr hohe spezifische Steifigkeit und Festigkeit aus. Diese herausragenden Eigenschaften sowie die Möglichkeit, durch die Wahl der Faserorientierungen das Material an spezielle Belastungen anzupassen, haben zum weitverbreiteten Einsatz von Faserverbundwerkstoffen in der Luft- und Raumfahrt und in vielen anderen Bereichen geführt.

Ein wichtiger Versagensmechanismus für geschichtete Faserverbundwerkstoffe ist die Delamination [12]. Im Rahmen dieses Projekts wird ein Modell für die Entstehung und das Wachstum von Delaminationen entwickelt, numerisch gelöst und experimentell verifiziert. Das in der ersten Projektphase entwickelte physikalische Modell wird in diesem Bericht vorgestellt.

Die meisten Delaminationsmodelle, die in den letzten Jahren veröffentlicht wurden, beruhen auf Konzepten der linear-elastischen Bruchmechanik (z.B. [46, 10, 56, 62, 11, 17, 63, 28]). Ausgehend von der Annahme linear-elastischen Materialverhaltens werden die Spannungen im Laminat berechnet, wobei an der Delaminationsfront eine Singularität auftritt. Mit Hilfe von Spannungsintensitätsfaktoren, welche die Spannungssingularität charakterisieren, kann die Energiefreisetzungsrate für das Delaminationswachstum berechnet und als Rißfortschrittskriterium verwendet werden.

Dieser klassische Ansatz hat sich in vielen Anwendungen bewährt, stößt jedoch bei der Beschreibung von komplexen Schädigungsprozessen auf Schwierigkeiten. Ein einparametrisches bruchmechanisches Rißkriterium ist nicht in der Lage, das lokale Wachstum von Rissen mit komplexer Rißfrontgeometrie zu beschreiben [5]. Ebenso wird das Rißwachstum in Proben, die eine hohe und eine niedrige Mehrachsigkeit der Spannung aufweisen können, nicht richtig vorhergesagt [47]. Das  $J$ -Integral verliert direkt nach der Rißinitiierung seine Wegunabhängigkeit [75], und auch andere gängige Bruchparameter wie  $CTOD$ ,  $\delta_5$  und  $CTOA$  scheitern bei der Beschreibung eines großen Rißwachstums.

Aus diesem Grund wurde in einigen neuen Arbeiten [4, 35, 3, 39, 55, 2] ein anderer Weg eingeschlagen, um das Rißwachstum zu beschreiben. In einem kleinen Bereich vor der Spitze des makroskopischen Delaminationsrisses, der Prozeßzone, bilden sich Mikrorisse oder Poren [9]. Dieser dissipative Vorgang wird durch ein schadensmechanisches Kontinuumsmodell dargestellt. Als Rißfortschrittskriterium gilt je nach Modell das Erreichen des kritischen Wertes der Schädigungsvariable bzw. der schadensmechanischen Energiefreisetzungsrates.

In diesem Projekt wurde ein Delaminationsmodell entwickelt, das ebenfalls einen schadensmechanischen Ansatz verfolgt. Das Materialmodell, das zur Beschreibung der Prozeßzone aufgestellt wurde, wird im folgenden Kapitel vorgestellt. Im Gegensatz zu den Arbeiten von LADEVEZE, ALLIX, RINDERKNECHT und anderen Autoren wurde hier besonderer Wert darauf gelegt, bei der Formulierung des Modells von allgemeinen thermomechanischen Prinzipien auszugehen. Eine Modellbildung auf dieser Grundlage ist weniger willkürlich und erlaubt, bei der numerischen Umsetzung auf Verfahren zurückzugreifen, die zur Simulation der Plastizität entwickelt wurden. Im Anschluß an die Darstellung der räumlich lokalen Materialgesetze wird die spezielle Geometrie des Delaminationsproblems betrachtet und ein linearisiertes Zwischenschichtmodell aufgestellt. Die Voraussetzungen von LADEVEZEs zweidimensionalem Modell der Prozeßschicht werden klargelegt und die Nachteile von LEMAITRES Grenzflächenmodell aufgezeigt. Schließlich wird das schadensmechanische Kontinuumsmodell mit der Simulation des makroskopischen Delaminationsrisses verknüpft. Als Rißfortschrittskriterium wurde abweichend von LADEVEZEs Modell keine kritische Energiefreisetzungsrates gewählt. Nachdem das Delaminationsmodell definiert und mit den Modellen anderer Forschungsgruppen verglichen wurde, werden Experimente zur Parameteridentifikation vorgestellt.

Das in diesem Projekt entwickelte Modell zeichnet sich gegenüber bisherigen Arbeiten zur Modellierung von Delaminationen dadurch aus, daß eine auf Prinzipien der Thermomechanik basierende Formulierung des schadensmechanischen Materialmodells mit einer physikalisch adäquaten Beschreibung des Schädigungsmechanismus verbunden wurde.

# Kapitel 2

## Schadensmechanik

In der Schadensmechanik wird ein geschädigtes Material durch ein Kontinuum beschrieben, für welches als zusätzliche Zustandsgröße eine Schädigungsvariable definiert wird. Die Entstehung und das Wachstum von Mikrorissen wird durch das Wachstum der Schädigungsvariablen ausgedrückt. Die derzeit angewandten schadensmechanischen Modelle lassen sich in zwei Gruppen unterteilen.

Die erste Klasse von Modellen geht im wesentlichen auf einen Ansatz von KACHANOV [29] zurück und erlaubt die Modellierung des durch Mikrorißbildung verursachten Verlustes an makroskopischer Steifigkeit sowie der zeitlichen Entwicklung der Schädigung. Einige dieser Modelle lassen sich im Rahmen der Thermodynamik irreversibler Prozesse als Theorie mit inneren Variablen darstellen. Diese Gruppe schadensmechanischer Modelle soll in den nächsten Unterkapiteln genauer betrachtet werden.

GURSON entwickelte auf Grundlage mikromechanischer Betrachtungen von Poren in duktilen Materialien ein Modell, das die zeitliche Entwicklung des Porenvolumens und ihren Einfluß auf die Fließfunktion wiedergibt [23, 66, 26, 41].

Im nächsten Abschnitt sollen die Grundkonzepte der Schadensmechanik nach KACHANOV vorgestellt werden. Es folgt eine Einführung in thermomechanische Modelle mit inneren Variablen. Auf dieser Grundlage wird ein schadensmechanisches Materialmodell formuliert, das im wesentlichen auf Ansätzen von LEMAITRE basiert. Zum Vergleich soll das schadensmechanische Modell von LADEVEZE gegenübergestellt und diskutiert werden. Als Erweiterungsmöglichkeiten werden anisotrope Schädigung und nicht-lokale Kontinua besprochen.

## 2.1 Einführung

Die Definition der Schädigungsvariablen erfolgt mit Hilfe einer Homogenisierung [36]. Hierzu betrachtet man ein repräsentatives Volumenelement (RVE), das viele Mikrorisse enthält. Seine Größe ist so zu wählen, dass einerseits eine sinnvolle Mittelung der mechanischen Eigenschaften möglich wird, andererseits aber keine hohen Gradienten der Schädigung verwischt werden.

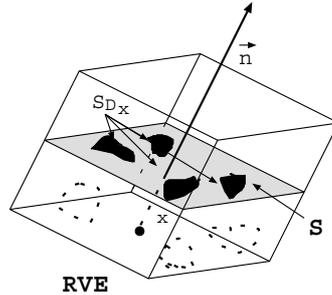


Abbildung 2.1: Repräsentatives Volumenelement (RVE)

Durch das RVE lege man eine Schnittebene. Diese Ebene schneidet einen Teil der Mikrorisse. Als ein Maß für die Schädigung bietet sich das Verhältnis der Schnittfläche der Ebene mit den Mikrorissen zur Schnittfläche mit dem RVE an:

$$D_{\text{RVE}} = \frac{S_D}{S} \quad (2.1)$$

Im ungeschädigten Material ist  $D = 0$ , eine obere Schranke ist 1.

Um die Wirkung der Schädigung auf das Materialverhalten zu erfassen, verwendet man das Konzept der effektiven Spannung. Im Falle einer Belastung durch eine äußere Kraft  $F$  trägt nicht mehr der gesamte Querschnitt  $S$  des RVE die Last, sondern nur der ungeschädigte Teil  $S - S_D$ . In diesem wirkt eine höhere sogenannte „effektive Spannung“:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S - S_D} = \frac{\sigma S}{S - S_D} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (2.2)$$

Durch diese effektive Spannung ersetzt man nun die Spannung in den konstitutiven Gleichungen des ungeschädigten Materials. („Prinzip der Verzerrungsäquivalenz“) Im Fall der linearen Elastizität erhält man z.B.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E(1 - D)} \quad (2.3)$$

Diese Beziehung ist auch so zu interpretieren, daß der E-Modul infolge der Mikrorißbildung reduziert ist zu

$$\tilde{E} = E(1 - D) \quad (2.4)$$

Die Schädigungsvariable  $D$  beschreibt also den Verlust an Steifigkeit aufgrund von Mikroschädigung.

Während der Verformung des Materials wächst die Schädigungsvariable monoton. Die Akkumulation der Schädigung schreitet so lange fort, bis die Phase der Mikrorißbildung und des Rißwachstums von Rißkoagulation und Makrorißentstehung abgelöst wird. Mit der Ausbildung eines Makrorisses kommt es zum vollständigen Versagen des repräsentativen Volumenelements. Als Kriterium für das lokale Materialversagen wählt LEMAITRE das Erreichen einer kritischen Schädigung  $D_C$ , LADEVEZE hingegen bezieht das Kriterium auf eine schadensmechanische Energiefreisetzungsrage (Kapitel 4.2.1).

Die obige Betrachtung des repräsentativen Volumenelements gibt die physikalischen Vorgänge auf der Mikroebene natürlich nur stark vereinfachend wieder. Daher ist diese Darstellung weniger als eine Definition der Schädigungsvariablen als eine Motivation ihrer Einführung und des Konzepts der effektiven Spannung anzusehen. Die strenge Definition von  $D$  erfolgt auf makroskopischer Ebene durch die konstitutiven Gleichungen.

## 2.2 Thermomechanische Grundlagen

Die Materialschädigung ist ein irreversibler Prozeß. Die Darstellung ihrer Zeitentwicklung im Rahmen eines thermodynamischen Modells mit inneren Variablen soll nun erläutert werden. Eine ausführliche Darstellung dieser thermomechanischen Grundlagen findet man beispielsweise in [38]. Der im anschließenden Abschnitt vorgestellte Zusammenhang von Normalenregel und Prinzip der maximalen Dissipationsleistung ist in [76] und [42] nachzulesen, allerdings wurde hier eine andere Darstellung gewählt.

Der Zustand des Festkörpers wird beschrieben durch das Feld seiner Zustandsvariablen. Jedem materiellen Punkt des Körpers können der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$ , die Temperatur  $\theta$  sowie geeignete innere Variablen  $\boldsymbol{\xi}$  zugeordnet werden. Als energetisch assoziierte Variablen erhält man den ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor  ${}^1\mathbf{P}$ , die spezifische Entropie  $s$  und innere Kräfte  $\boldsymbol{\Xi}$ .

$$\mathbf{F} = [\nabla_0 \otimes \mathbf{r}(\mathbf{r}_0)] \quad (2.5)$$

$${}^1\mathbf{P} = \rho_0 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}}, \quad s = -\frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \boldsymbol{\Xi} = \rho_0 \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (2.6)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{r}$  den Ortsvektor eines materiellen Punktes in der Momentankonfiguration und  $\mathbf{r}_0$  den Ort in der Referenzkonfiguration. Der Gradient  $\nabla_0 = d/dr_0$  bezieht sich auf die Referenzkonfiguration.  $f(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\xi})$  sei die spezifische Helmholtzsche freie Energie und  $\rho_0$  die Dichte bezogen auf die Referenzkonfiguration.

Für quasistatische Deformation, d.h. unter Vernachlässigung von Trägheitskräften, gilt die Gleichgewichtsbedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k} : \text{Volumenkraft} \quad (2.7)$$

Zu den räumlichen partiellen Differentialgleichungen (2.5) und (2.7) treten die in der Regel lokalen Entwicklungsgleichungen des Materialgesetzes hinzu. Auf nicht-lokale Modelle soll im Abschnitt 2.7 eingegangen werden.

Das Materialverhalten muß dem ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik genügen, von denen letzterer hier durch die Clausius-Duhem Ungleichung ausgedrückt wird:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \boldsymbol{\Xi} \dot{\boldsymbol{\xi}} + \rho_0 h - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.8)$$

$$\rho_0 \theta \frac{\partial s}{\partial t} \geq \rho_0 h - \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \quad (2.9)$$

( $u = f + s\theta$ : spezifische innere Energie,  $h$ : Wärmequelle,  $\mathbf{q}$ : Wärmestrom)

Im folgenden soll nur noch die Näherung isothermer Prozesse mit infinitesimalen Deformationen betrachtet werden. Als Variablen für Dehnung und Spannung betrachtet man dann den Eulerschen Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sowie den Cauchyschen Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$ .

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{\Xi} = \rho \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (2.11)$$

( $\mathbf{u}$ : Verschiebung)

Die Gleichgewichtsbedingung und der 1. Hauptsatz erhalten die Gestalt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{k} = 0 \quad (2.12)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\Xi} \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.13)$$

Bei elasto-visko-plastischen Materialien läßt sich die Dehnung in einen elastischen, reversiblen und einen plastischen, irreversiblen Anteil zerlegen, so daß die freie Energie nur vom elastischen Anteil abhängt.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}^e} = 0 \quad (2.14)$$

Es erweist sich als einfacher, wenn man nicht die Dehnung  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , sondern die elastische Dehnung  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  als unabhängige Variable wählt.

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\xi}), \quad f(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\xi}) = f(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.15)$$

Zu der durch die elastische Verformung hervorgerufenen Spannung (bisher mit  $\boldsymbol{\sigma}$  bezeichnet) kommt ein viskoser, irreversibler Anteil hinzu:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{\sigma}^v, \quad \boldsymbol{\sigma}^e = \rho \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (2.16)$$

Aus der Clausius-Duhem Ungleichung folgt hiermit für die spezifische Dissipationsleistung  $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} := \boldsymbol{\sigma}^v \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{\Xi} \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad (2.17)$$

Diese Entropieproduktion läßt sich als ein Produkt von dissipativen Kräften und Flüssen darstellen:

$$\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{x}}^i) = \boldsymbol{X}^i \dot{\boldsymbol{x}}^i \quad (2.18)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}^i := (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\xi}}), \quad \boldsymbol{X}^i := (\boldsymbol{\sigma}^v, \boldsymbol{\sigma}, -\boldsymbol{\Xi}) \quad (2.19)$$

Um die Beziehung zwischen dissipativen Kräften und Flüssen näher zu bestimmen, postuliert man das Prinzip der maximalen Dissipationsleistung:

Zu einer gegebenen Kraft  $\boldsymbol{X}_0^i$  maximiert der zugehörige Wert der dissipativen Flußvariablen  $\dot{\boldsymbol{x}}_0^i$  die Dissipation  $\mathcal{D}$ .

$$\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{x}}_0^i) = \max\{\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{x}}^i) \mid \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{x}}^i) = \boldsymbol{X}_0^i \dot{\boldsymbol{x}}^i\} \quad (2.20)$$

Die Nebenbedingung

$$h_1 := \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{x}}^i) - \boldsymbol{X}_0^i \dot{\boldsymbol{x}}^i = 0 \quad (2.21)$$

wird von  $\dot{\boldsymbol{x}}_0^i$  aufgrund der Definition von  $\mathcal{D}$  erfüllt.

Im Spezialfall eines nicht viskosen (d.h. nicht geschwindigkeitsabhängigen) Materialverhaltens folgt aus diesem Postulat ein Evolutionsgesetz, das in der Plastizitätstheorie unter dem Namen Normalenregel bekannt ist. Es existiert eine Funktion  $F(\boldsymbol{X}^i)$ , die den elastischen Bereich beschreibt:

$$F(\boldsymbol{X}^i) < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}}^i = 0 \quad (2.22)$$

Auf der Fließfläche, beschrieben durch  $F = 0$ , erhält man einen Fluß der dissipativen Variablen in Richtung des Gradienten des plastischen Potentials  $F$ :

$$\dot{\boldsymbol{x}}^i = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{X}^i} \quad (2.23)$$

An dieser Stelle soll betont werden, daß diese Form der Zeitentwicklung zwingend aus den Grundlagen der Thermodynamik und dem Postulat der maximalen Dissipationsleistung folgt. Das Postulat besitzt nicht universelle Gültigkeit, zeichnet sich aber durch eine gewisse Plausibilität aus. Während der zweite Hauptsatz eine positive Entropieproduktion fordert, besagt das Postulat der maximalen Dissipationsleistung, daß dieser Entropiezuwachs auf schnellstem Wege erfolgt.

Der Zusammenhang zwischen maximaler Dissipationsleistung und Normalenregel wird im nächsten Abschnitt im Detail erläutert, bevor im Unterkapitel 2.4 ausgehend von der thermomechanischen Formulierung ein schadensmechanisches Modell aufgestellt wird.

## 2.3 Die Normalenregel

Das Prinzip der maximalen Dissipationsleistung (2.20) läßt sich auch als Ungleichung formulieren: Für alle  $\dot{\mathbf{x}}^i$ , die die Bedingung (2.21) erfüllen, gilt:

$$\mathcal{D}(\dot{\mathbf{x}}_0^i) - \mathcal{D}(\dot{\mathbf{x}}^i) \geq 0 \quad (2.24)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{X}_0^i (\dot{\mathbf{x}}_0^i - \dot{\mathbf{x}}^i) \geq 0 \quad (2.25)$$

Dies bedeutet geometrisch, daß die Normale der durch  $h_1(\dot{\mathbf{x}}^i) = 0$  (2.21) beschriebenen Hyperfläche am Punkt  $\dot{\mathbf{x}}_0^i$  die Richtung von  $\mathbf{X}_0^i$  hat.

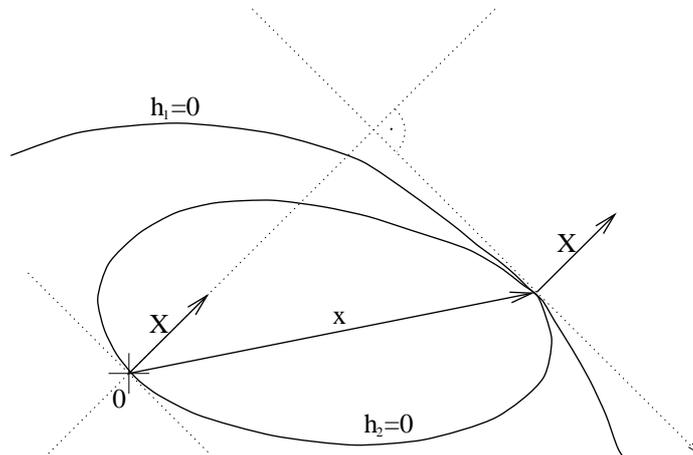


Abbildung 2.2: Veranschaulichung der Normalenregel

Man betrachte nun die Funktion

$$h_2(\dot{\mathbf{x}}^i) := \mathcal{D}(\dot{\mathbf{x}}^i) - \mathcal{D}(\dot{\mathbf{x}}_0^i) = \mathbf{X}^i \dot{\mathbf{x}}^i - \mathbf{X}_0^i \dot{\mathbf{x}}_0^i \quad (2.26)$$

Auf der Hyperfläche  $h_1 = 0$  ist

$$h_2(\dot{\mathbf{x}}^i) = \mathbf{X}_0^i \dot{\mathbf{x}}^i - \mathbf{X}_0^i \dot{\mathbf{x}}_0^i = \mathbf{X}_0^i (\dot{\mathbf{x}}^i - \dot{\mathbf{x}}_0^i) \leq 0 \quad (2.27)$$

Im Punkt  $\dot{\mathbf{x}}_0^i$  ist  $h_2(\dot{\mathbf{x}}_0^i) = 0$ . Folglich haben  $h_1 = 0$  und  $h_2 = 0$  in diesem Punkt eine gemeinsame Tangentialebene. Somit ist die Normale von  $h_1 = 0$  gleich der Richtung des Gradienten von  $\mathcal{D}$ , und es gilt

$$\mathbf{X}^i = \lambda \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\mathbf{x}}^i} \quad (2.28)$$

Ist  $\mathcal{D}$  nicht differenzierbar, so muß statt des Gradienten das Subdifferential<sup>1</sup> verwendet werden.

$$\mathbf{X}^i \in \lambda \partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{x}}^i) \quad (2.29)$$

Der Faktor  $\lambda$  läßt sich durch Einsetzen von (2.17) in (2.28) bestimmen.

$$\lambda = \left( \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\mathbf{x}}^i} \dot{\mathbf{x}}^i \right)^{-1} \mathcal{D} \quad (2.30)$$

Für eine quasihomogene Dissipationsfunktion  $\mathcal{D}(\dot{\mathbf{x}}^i)$  vereinfacht sich die Evolutionsgleichung (2.28) zu

$$\mathbf{X}^i = \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{x}}^i} \quad (2.31)$$

mit einem Pseudo-Dissipationspotential  $\Psi$ . Die dissipativen Flüsse können mittels der Legendre-Fenchel-Transformierten  $\Psi^*$  dargestellt werden:

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \frac{\partial \Psi^*}{\partial \mathbf{X}^i} \quad (2.32)$$

$$\Psi^*(\mathbf{X}^i) = \sup_{\dot{\mathbf{x}}^i} \{ \mathbf{X}^i \dot{\mathbf{x}}^i - \Psi(\dot{\mathbf{x}}^i) \} \quad (2.33)$$

Allgemeiner läßt sich zeigen, daß

$$\mathbf{X}^i \in \partial \Psi(\dot{\mathbf{x}}^i), \quad \dot{\mathbf{x}}^i \in \partial \Psi^*(\mathbf{X}^i) \quad (2.34)$$

Im Falle eines Materialverhaltens, bei dem die Kräfte nicht explizit von der Verformungsgeschwindigkeit abhängen, also beispielsweise bei der Elastoplastizität, ist Gleichung (2.31) invariant gegen eine Reskalierung der Zeitachse.

$$\tau = k t, \quad \hat{\mathbf{x}}^i = \frac{d\mathbf{x}^i}{d\tau} = \frac{1}{k} \dot{\mathbf{x}}^i \quad (2.35)$$

$$\mathbf{X}^i = \frac{\partial \Psi(\hat{\mathbf{x}}^i)}{\partial \hat{\mathbf{x}}^i} = \frac{\partial \Psi(\dot{\mathbf{x}}^i)}{\partial \dot{\mathbf{x}}^i} \quad (2.36)$$

$$= \frac{\partial \Psi(k \hat{\mathbf{x}}^i)}{k \partial \hat{\mathbf{x}}^i} \quad (2.37)$$

$$\Rightarrow \Psi(k \dot{\mathbf{x}}^i) = k \Psi(\dot{\mathbf{x}}^i) \quad (2.38)$$

---

<sup>1</sup>Das Subdifferential einer Funktion  $\phi$  an der Stelle  $x$  ist definiert als  $\partial \phi(x) = \{z | \forall y : \phi(y) - \phi(x) \geq z(y - x)\}$ . Im Falle einer differenzierbaren Funktion ist  $\partial \phi(x) = \{\frac{\partial \phi}{\partial x}\}$ .

Folglich ist  $\Psi$  homogen vom Grad eins. Man kann beweisen, daß die Legendre-Fenchel-Transformierte einer solchen Funktion<sup>2</sup> die Indikatorfunktion einer konvexen Menge  $K$  ist.

$$\Psi^*(\mathbf{X}^i) = I_K = \begin{cases} 0 & \mathbf{X}^i \in K \\ \infty & \mathbf{X}^i \notin K \end{cases} \quad (2.39)$$

Mit der Evolutionsgleichung (2.32) ergibt sich

$$\dot{\mathbf{x}}^i \in \begin{cases} \{0\} & \mathbf{X}^i \in K \\ \partial\Psi^* & \mathbf{X}^i \in \partial K \\ \emptyset & \mathbf{X}^i \notin K \cup \partial K \end{cases} \quad (2.40)$$

Die Menge  $K$  werde mit Hilfe einer differenzierbaren Funktion  $F(\mathbf{X}^i)$  durch

$$\forall \mathbf{X}^i \in K : F(\mathbf{X}^i) < 0 \quad (2.41)$$

$$\forall \mathbf{X}^i \in \partial K : F(\mathbf{X}^i) = 0 \quad (2.42)$$

$$\forall \mathbf{X}^i \notin K \cup \partial K : F(\mathbf{X}^i) > 0 \quad (2.43)$$

beschrieben. Dann gilt

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \begin{cases} 0 & F(\mathbf{X}^i) < 0 \\ \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}^i} & F(\mathbf{X}^i) = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Der Multiplikator  $\lambda$  ist aus der Bedingung  $\dot{F} = 0$  zu ermitteln.

Dieses Entwicklungsgesetz für Materialien mit einem homogenen Pseudo-Dissipationspotential ersten Grades ist aus der Plastizitätstheorie als Normalenregel bekannt. Die Menge  $K$  stellt dort den elastischen Bereich dar,  $F$  wird als plastisches Potential bezeichnet.

## 2.4 Ein elasto-plastisches schadensmechanisches Materialmodell

Für die Prozeßzone im delaminierenden Laminat soll nun ein elasto-plastisches schadensmechanisches Materialgesetz aufgestellt werden. Die Formulierung des Materialmodells erfolgt im Rahmen der eines thermomechanischen Modells mit inneren Variablen, dessen allgemeine Eigenschaften in den letzten Abschnitten dargestellt wurden.

---

<sup>2</sup>Zusätzlich ist zu verlangen, daß  $\Psi$  unterhalbstetig (lower semicontinuous) ist.

Als Zustandsvariablen wählen wir die elastische Dehnung  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ , die plastische Dehnung  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , die isotrope Verfestigung  $r$  und eine skalare Schädigungsvariable  $D$ . Als energetisch assoziierte Größen erhält man die Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$ , eine der Verfestigung zugeordnete Kraft  $R$  sowie die schadensmechanische Energiefreisetzungsrate  $Y$ . Die freie Energie setzt sich zusammen aus der elastischen Energie, welche durch die Schädigung vermindert ist, und der Verfestigungsenergie.

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, r, D), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.45)$$

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{\sigma}, 0, R, -Y) \quad (2.46)$$

$$\rho f = \frac{1}{2} \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e (1 - D) + \rho f_r(r) \quad (2.47)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e (1 - D) \quad (2.48)$$

$$R = \rho \frac{\partial f}{\partial r} \quad (2.49)$$

$$-Y = \rho \frac{\partial f}{\partial D} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.50)$$

Hierbei ist  $\boldsymbol{C}$  der Steifigkeitstensor, der Doppelpunkt bezeichne das kontrahierende Produkt von Tensoren.

Durch die Wahl von  $f_r(r)$  läßt sich die Form der Verfestigung beeinflussen. Eine Verfestigung  $\varepsilon_{\text{eq}}^p \propto (\sigma_{\text{eq}}^p - \sigma_y)^\alpha$  erzeugt man beispielsweise mit

$$f_r(r) \propto r^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \quad (2.51)$$

Die der Schädigungsvariablen zugeordnete Kraft  $-Y$  kann auch als Ableitung der elastischen Energie nach der Schädigung ausgedrückt werden:

$$Y = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial w^e}{\partial D} \right|_{\boldsymbol{\sigma}=\text{const}} \quad (2.52)$$

Diese Darstellung ist analog zur Definition der Energiefreisetzungsrates in der Bruchmechanik, daher wird  $Y$  als schadensmechanische Energiefreisetzungsrates bezeichnet.

Die dissipativen Flüsse und Kräfte sind

$$\dot{\boldsymbol{x}}^i = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{r}, \dot{D}) \quad (2.53)$$

$$\boldsymbol{X}^i = (\boldsymbol{\sigma}, -R, Y) \quad (2.54)$$

Die Fließfunktion  $F_\sigma$  wird nach VON MISES gewählt. Das plastische Potential setzt sich zusammen aus diesem plastischen Anteil und einem Term  $F_Y$ , der für

die Zeitentwicklung der Schädigung verantwortlich ist. Für dieses Schädigungspotential wird ein Ansatz von LEMAITRE [36] verwendet, den dieser durch mikromechanische Betrachtungen und experimentelle Ergebnisse begründet. In der Fließfunktion wird die Spannung durch die effektive Spannung ersetzt, um den Einfluß der Schädigung zu berücksichtigen.

$$F_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, R) = \sigma_{\text{eq}}^{\text{D}} - \sigma_y - R \quad (2.55)$$

$$F_Y(Y) = \frac{Y^2 \theta(r - r_D)}{2 S (1 - D)} \quad (2.56)$$

$$F = F_\sigma + F_Y(Y) \quad (2.57)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{D}} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.58)$$

$$\sigma_{\text{eq}}^{\text{D}} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\text{D}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{D}}} \quad (2.59)$$

$\theta$  bezeichne hierbei die Heavyside-Funktion,  $\sigma_y, r_D$  und  $S$  seien Materialparameter. Als Zeitentwicklung (2.44) erhält man für  $F_\sigma < 0$  (elastischer Bereich)  $\dot{\boldsymbol{x}}^i = 0$  und bei plastischer Verformung

$$F_\sigma = 0 \quad (2.60)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.61)$$

$$\dot{r} = \lambda \frac{\partial F}{\partial (-R)} \quad (2.62)$$

$$\dot{D} = \lambda \frac{\partial F}{\partial Y} \quad (2.63)$$

Hieraus folgt nach kurzer Rechnung

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{1 - D} \frac{\boldsymbol{\sigma}^{\text{D}}}{\sigma_{\text{eq}}^{\text{D}}} \quad (2.64)$$

$$\dot{r} = \lambda = \dot{\epsilon}_{\text{eq}}^{\text{p}} (1 - D) \quad (2.65)$$

$$\dot{\epsilon}_{\text{eq}}^{\text{p}} := \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}}} \quad (2.66)$$

$$\lambda = \dot{\sigma}_{\text{eq}}^{\text{D}} \left[ (1 - D) \rho \frac{\partial^2 f_r}{\partial r^2} - \left( \sigma_y + \rho \frac{\partial f_r}{\partial r} \right) \frac{\partial F}{\partial Y} \right]^{-1} \quad (2.67)$$

$$\dot{D} = \frac{Y \theta(r - r_D)}{S} \dot{\epsilon}_{\text{eq}}^{\text{p}} \quad (2.68)$$

## 2.5 Das schadensmechanische Modell von Ladeveze

LADEVEZE, ALLIX, RINDERKNECHT und andere Autoren verwenden ein elasti-

ches, schadensmechanisches Materialmodell zur Beschreibung von Delaminationen [3, 4, 35, 55, 2]. Dieses Modell soll in den folgenden Unterkapiteln vorgestellt und in den Rahmen der Thermomechanik eingeordnet werden.

## 2.5.1 Formulierung des Modells

LADEVEZE beschreibt eine zweidimensionale orthotrope Grenzfläche zwischen zwei Laminae des Verbundwerkstoffs. An dieser Stelle soll nur das lokale Materialgesetz betrachtet werden, auf die Besonderheiten eines Interface-Modells wird in Kapitel 3 eingegangen.

Der Verformungszustand der Grenzfläche wird beschrieben durch die Differenz der Verschiebungen in den angrenzenden Schichten:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = (u_1, u_2, u_3) \quad (2.69)$$

$$u_3 \geq 0 \quad (\text{Kontaktbedingung}) \quad (2.70)$$

Hierbei sei die Richtung  $x_3$  senkrecht zur Grenzfläche. Die Flächendichte der freien Energie wird angesetzt als

$$f = \frac{1}{2} \left[ k_1 u_1^2 (1 - D_1) + k_2 u_2^2 (1 - D_2) + k_3 \langle -u_3 \rangle_+^2 + k_3 \langle u_3 \rangle_+^2 (1 - D_3) \right] \quad (2.71)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_{31}^2}{k_1 (1 - D_1)} + \frac{\sigma_{32}^2}{k_2 (1 - D_2)} + \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3 (1 - D_3)} \right] \quad (2.72)$$

$k_1, k_2$  und  $k_3$  sind Steifigkeitskonstanten; mit  $D_1, D_2$  und  $D_3$  werden drei Schädigungsvariablen bezeichnet, die einen Steifigkeitsverlust bezüglich der jeweiligen Dehnung bzw. Scherung beschreiben. Durch die Zerlegung in positiven  $\langle u_3 \rangle_+$  und negativen  $\langle -u_3 \rangle_+$  Anteil sollen Zug- und Druckbelastung unterschieden werden.<sup>3</sup> Als assoziierte Kräfte erhält man

$$Y_1 = \frac{\sigma_{31}^2}{2 k_1 (1 - D_1)^2}, \quad Y_2 = \frac{\sigma_{32}^2}{2 k_2 (1 - D_2)^2}, \quad Y_3 = \frac{\langle \sigma_{32} \rangle_+^2}{2 k_3 (1 - D_3)^2} \quad (2.73)$$

Für die Zeitentwicklung gibt es unterschiedliche Ansätze, denen gemeinsam ist, daß die Schädigung durch ein zeitliches Supremum einer Funktion der Energiefreisetzungsraten bestimmt wird.

$$\bar{Y} = \sup_{\tau \leq t} \{g(Y_1(\tau), Y_2(\tau), Y_3(\tau))\} \quad (2.74)$$

$$D_i = h_i(\bar{Y}) \quad (2.75)$$

---

<sup>3</sup>Dies steht im Widerspruch zur Kontaktbedingung (2.70) [2], die allerdings fallen gelassen werden kann.

Man beachte, daß im Gegensatz zu Gleichung (2.63) hier nicht die Zeitableitung  $\dot{D}$ , sondern die Schädigungsvariable selbst eine Funktion von  $Y$  ist. Für die Funktionen  $g, h_1, h_2$  und  $h_3$  wird beispielsweise [2]

$$g = \frac{n}{n+1} [Y_1^\alpha + (\gamma_2 Y_2)^\alpha + (\gamma_3 Y_3)^\alpha]^{1/\alpha}, \quad h_i = \left( \frac{\bar{Y}}{Y_C} \right)^n \quad (2.76)$$

oder [3]

$$g = Y_1 + \gamma_2 Y_2 + \gamma_3 Y_3, \quad h_i = \min \left( \gamma_i \frac{\langle \sqrt{Y} - \sqrt{Y_0} \rangle_+}{\sqrt{Y_C} - \sqrt{Y_0}}, 1 \right) \quad (2.77)$$

gewählt.

In [3] formulieren ALLIX und LADEVEZE auch einen Ansatz, der plastisches Materialverhalten berücksichtigt, jedoch wurde dieser Weg nicht weiter verfolgt.

## 2.5.2 Thermomechanische Darstellung

In diesem Unterkapitel soll gezeigt werden, daß das schadensmechanische Modell nach LADEVEZE et al. Grundprinzipien der in Kapitel 2.2 vorgestellten Form thermomechanischer Modelle widerspricht.

Bei CORIGLIANO [16] findet man eine allgemeinere Darstellung des Modells von LADEVEZE, in der sich auch das Modell von SCHELLEKENS und DE BORST wiedergeben läßt. Er setzt die freie Energie der Grenzfläche in Abhängigkeit von den Zustandsvariablen  $\mathbf{u}, \mathbf{u}^p, D_1, D_2, D_3$  und  $r$  an als

$$f = \frac{1}{2} \left[ k_1 (u_1^e)^2 (1 - D_1) + k_2 (u_2^e)^2 (1 - D_2) + k_3 \langle u_3^e \rangle_+^2 (1 - D_3) + k_3 \langle -u_3^e \rangle_+^2 \right] + f_r(r) \quad (2.78)$$

Nach (2.11) sind die assoziierten Variablen

$$\sigma_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad -Y_i = \frac{\partial f}{\partial D_i}, \quad R = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (2.79)$$

Die Zeitentwicklung bestimmt CORIGLIANO durch ein Gesetz ähnlich einer nicht-assozierten Fließregel mit Fließfunktion  $F(\sigma_i, Y_i, R; D_i)$  und plastischem Potential  $G(\sigma_i, Y_i, R; D_i)$ .

Für  $F < 0$ :  $\dot{u}_i^p, \dot{r}, \dot{D}_i = 0$

Für  $F = 0$ :

$$\dot{u}_i^p = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_i}, \quad \dot{r} = \lambda \frac{\partial G}{\partial (-R)} \quad (2.80)$$

$$\dot{D}_i = \lambda l_i(\sigma_j, Y_j, R; D_j) \quad (2.81)$$

Während die Zeitableitungen der Verschiebungen und der Verfestigung hier analog zu Gleichung (2.44) als partielle Ableitungen eines Potentials gegeben sind, wurde für die Schädigungsvariable (2.81) ein allgemeinerer Ansatz gemacht, der nur bei sehr spezieller Wahl von  $l_i$  eine Potentialdarstellung besitzt. Hieraus können wir schließen, daß das Postulat der maximalen Dissipationsleistung von diesem Modell i.Allg. nicht erfüllt wird.

CORIGLIAO stellt LADEVEZES Modell als Spezialfall dar, bei dem gilt

$$f_r = 0, \quad G = 0 \quad (2.82)$$

$$F = F(Y_i, \bar{Y}) = g(Y_1, Y_2, Y_3) - \bar{Y} \quad (2.83)$$

$$l_i = l_i(\bar{Y}) \quad (2.84)$$

$$\bar{Y} = \sup_{\tau \leq t} \{g(Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t))\} \quad (2.85)$$

$$\dot{\bar{Y}} = \lambda \quad (2.86)$$

Er scheint dabei außer acht zu lassen, daß die Größe  $\bar{Y}$  zeitabhängig und zudem noch geschichtsabhängig ist. Sie hat somit den Charakter einer inneren Variablen, wird aber formal nicht als solche behandelt. Daher folgt Gleichung (2.86) auch nicht aus der Konsistenzbedingung  $\dot{F} = 0$ , sondern muß als zusätzliche Annahme akzeptiert werden.

Die explizite Geschichtsabhängigkeit, die über  $\bar{Y}$  (2.85, 2.74) in LADEVEZES Modell eingeführt wird, stellt einen wesentlichen Unterschied zu üblichen thermomechanischen Modellen mit inneren Variablen dar. Ein wichtiges Ziel der Einführung innerer Variablen ist gerade die Ermöglichung einer zeitlich lokalen Beschreibung.

Mit (2.84) und (2.86) kann (2.81) integriert werden, und man erhält die Schädigungsvariablen  $D_i$  als explizite Funktion der Energiefreisetzungsraten  $Y_i$  (2.75). Im Gegensatz dazu ist im zuvor vorgestellten thermomechanischen Modell die Zeitableitung der dissipativen Variablen eine Funktion der dissipativen Kräfte (2.44). Es ist daher zu vermuten, daß das Modell von LADEVEZE der Schädigung weniger den Charakter eines irreversiblen Prozesses als den eines nichtlinearen reversiblen Vorgangs verleiht.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß sich das schadensmechanische Modell von LADEVEZE nicht als ein thermomechanisches Materialmodell mit inneren Variablen analog zur Plastizität darstellen läßt. Dies bedeutet nicht, daß das Modell notwendigerweise zur Beschreibung von Delaminationen ungeeignet wäre. Es erscheint jedoch wünschenswert, das Materialmodell nicht auf heuristischen Annahmen aufzubauen, sondern von fundamentalen Postulaten auszugehen. Der im Abschnitt 2.2 vorgestellte Ansatz eines allgemeinen thermomechanischen Modells hat sich bei der Beschreibung der Plastizität bewährt und wurde daher in diesem Projekt als Rahmen für das schadensmechanische Modell gewählt.

## 2.6 Anisotropie

Bislang wurde ausschließlich isotrope Schädigung betrachtet, die durch eine skalare Variable dargestellt werden kann. Im allgemeinen findet man jedoch anisotrope Schädigung vor, da Mikrorisse, die durch eine mechanische Belastung erzeugt werden, meist eine Vorzugsorientierung aufweisen.

Um solch eine anisotrope Schädigung zu modellieren, muß das Konzept der effektiven Spannung (2.2) erweitert werden [59]. Eine einfache Form richtungsabhängiger Schädigung kann durch einen Schädigungstensor  $\mathbf{D}$  zweiter Stufe eingeführt werden [45, 40], z.B. durch [44]

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} [(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1}] \quad (2.87)$$

Eine allgemeinere Darstellung anisotroper Schädigung erhält man mit der Definition eines Schadens-Effekt-Tensors  $\mathbf{M}$  vierter Stufe [59, 14, 15, 68, 69].

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.88)$$

Folgt man dem Prinzip der Verzerrungsäquivalenz und ersetzt in der konstitutiven Gleichung des elastischen Materialverhaltens die Spannung durch die effektive Spannung, so ergibt sich

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} =: \tilde{\mathbf{C}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.89)$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{C}}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{M} \quad (2.90)$$

Da jedoch  $\tilde{\mathbf{C}}$  ebenso wie  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  und  $\boldsymbol{\sigma}$  symmetrisch sein muß, impliziert dies erhebliche Einschränkungen für  $\mathbf{M}$ . Beispielsweise folgt aus der Symmetriebedingung, daß einer isotrope bzw. deviatorische Spannung eine gleichfalls isotrope bzw. deviatorische effektive Spannung zugeordnet wird, was der Idee einer allgemein anisotropen Schädigung widerspricht [59]. Daher schlägt SIDOROFF vor, das Prinzip der Verzerrungsäquivalenz durch das einer äquivalenten Komplementärenergie zu ersetzen. Anstatt in der Spannungs-Dehnungs-Beziehung soll die effektive Spannung in die Komplementärenergie  $V$  eingesetzt werden:

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^{-1} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} =: \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \tilde{\mathbf{C}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.91)$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{M}^{-1})^T \quad (2.92)$$

In dieser allgemeinen Form ist ein anisotropes Schädigungsmodell bislang noch nicht auf ein konkretes Problem angewendet worden. Schon die Messung aller

Komponenten des Schadens-Effekt-Tensors  $\mathbf{M}$  erfordert einen sehr großen experimentellen Aufwand. Ferner benötigt man zur Beschreibung der Zeitentwicklung eine unvertretbar hohe Anzahl von Materialkonstanten. Daher werden stark vereinfachte anisotrope Modelle bevorzugt, die beispielsweise von einem diagonalen Tensor  $M$  ausgehen, der durch drei den Hauptspannungs- oder Symmetrierichtungen zugeordnete Skalare beschrieben werden kann [15, 34]. In diesem Projekt soll vorerst eine isotrope<sup>4</sup> Schädigung modelliert werden. Anhand der numerischen Resultate und experimentellen Vergleiche wird zu klären sein, ob zur korrekten Beschreibung der Delamination ein anisotropes Modell notwendig ist.

## 2.7 Nicht-lokale Modelle

Lokale Materialmodelle basieren auf der Annahme, daß die Entwicklung der Zustandsgrößen an einem Punkt ausschließlich durch die Zustandsvariablen und evt. deren Geschichte an diesem Ort bestimmt ist. Beinhaltet das Materialgesetz die Möglichkeit zur Entfestigung, kann es zu einem nicht sinnvollen Verhalten des Modells kommen. Zur Lösung dieses Problems werden derzeit unterschiedliche nicht-lokale Ansätze diskutiert.

In einem elasto-plastischen schadensmechanischen Modell kann es durch starke Schädigung zu einer Entfestigung kommen. Die tangentielle Steifigkeitsmatrix kann ihre positive Definitheit verlieren, die das Material beschreibenden partiellen Differentialgleichungen sind nicht länger elliptisch, und es kann zum Verlust der Eindeutigkeit der Lösung kommen. Auf physikalischer Ebene zeigt sich das unerwünschte Modellverhalten als Lokalisierung der Verformung in einem Punkt. Infolge der Lokalisierung von plastischer Deformation und Schädigung findet ein Materialversagen ohne Dissipation statt. Numerisch äußert sich das Problem als eine Abhängigkeit der Ergebnisse von der Diskretisierung und durch Konvergenzprobleme. [6, 33]

Eine weitere Schwäche lokaler Modelle besteht darin, daß sie Größen-Effekte nicht korrekt wiedergeben. Experimentell beobachtet man ein unterschiedliches Verhalten geometrisch ähnlicher, aber unterschiedlich großer Proben, das erst durch nicht-lokale Modelle richtig wiedergegeben wird [43].

Um Lokalisierungsphänomene korrekt darzustellen, werden unterschiedliche Wege verfolgt:

- mikropolare Modelle (Einführung eines Cosserat-Kontinuums mit inneren Rotations-Freiheitsgraden) [18, 61]

---

<sup>4</sup>Der Begriff der Anisotropie bezieht sich hier nur auf die Schädigungsvariable, bei der Beschreibung der Laminae muß das orthotrope elastische Verhalten selbstverständlich erfaßt werden.

- viskose Regularisierung (delay damage model) [1]
- Gradienten-Modelle (Abhängigkeit der Zeitentwicklung auch von Gradienten der Zustandsvariablen) [13, 18]
- nicht-lokale Modelle, bei denen die Zeitentwicklung von einem räumlichen Integral einer Zustandsgröße abhängt [48, 43, 74, 67, 19, 52, 33]

Letzterer Ansatz ist speziell für schadensmechanische Modelle gut physikalisch zu begründen und soll nun vorgestellt werden.

Die Definition (2.1) der Schädigungsvariablen besitzt bereits den Charakter eines Mittelwerts bzw. einer räumlichen Integration:

$$D_{\text{RVE}} = \frac{S_D}{S} = \frac{1}{S} \sum_{i \in \text{Risse}} S_D^{(i)} \quad (2.93)$$

Die Summe erstreckt sich über die Risse im repräsentativen Volumenelement. Das Volumenelement kann nicht beliebig klein gewählt werden, da es für eine sinnvolle Mittelwertbildung einige Risse enthalten sollte. Eine Lokalisierung der durch  $D$  ausgedrückten Schädigung auf einen kleineren Bereich ist nicht physikalisch sinnvoll.

Als zweites Argument für eine nicht-lokale Schädigungsvariable ist die Wechselwirkung zwischen Mikrorissen anzuführen. BAZANT [7] leitet aus mikromechanischen Betrachtungen eine Wechselwirkung  $\Lambda$  zwischen (dreidimensionalen) Mikrorissen ab, die für große Abstände  $r$  asymptotisch wie  $r^{-3}$  abklingt. Demnach divergiert das Integral der Wechselwirkung  $\int \Lambda dV$  über ein dreidimensionales, unendlich ausgedehntes Gebiet konstanter Schädigung; es handelt sich um eine sehr langreichweitige Wechselwirkung. Dennoch braucht man in der Praxis nur die Wechselwirkung mit nahen Mikrorissen zu berücksichtigen, da die Bereiche starker Schädigung i.Allg. nicht dreidimensional ausgedehnt sind, sondern sich beispielsweise in Scherbändern lokalisieren.

In der Entwicklungsgleichung (2.68) ist  $\dot{D}$  eine Funktion von  $\dot{\varepsilon}_{\text{eq}}^{\text{p}}$ . Eine Möglichkeit zur Einführung einer nicht-lokalen Schädigungsvariable besteht darin,  $\dot{D}$  stattdessen gleich der Funktion eines räumlichen Mittelwerts von  $\dot{\varepsilon}_{\text{eq}}^{\text{p}}$  zu setzen.

$$\dot{D}(\mathbf{r}) = f_{\dot{D}} \left( \int w(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}) \dot{\varepsilon}_{\text{eq}}^{\text{p}}(\mathbf{r}^*) d^3 r^* \right), \quad \int w(\mathbf{r}) d^3 r = 1 \quad (2.94)$$

Als Gewichtsfunktion  $w$  werden beispielsweise Stufenfunktionen oder Gauß-Normalverteilungen verwendet.

$$w(\mathbf{r}) = \begin{cases} (4/3 \pi l^3)^{-1} & |\mathbf{r}| \leq l \\ 0 & |\mathbf{r}| > l \end{cases} \quad (2.95)$$

$$w(\mathbf{r}) = (8 l^3 \pi^{3/2})^{-1} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{l^2}\right) \quad (2.96)$$

Versuche, auch Spannung und Dehnung nicht-lokal zu beschreiben, verliefen nicht erfolgreich [8]. Dies sollte nicht überraschen, weil die physikalische Bedeutung der Nichtlokalität bei diesen Größen nicht so klar erkennbar ist wie bei der Schädigungsvariablen.

Derzeit kann noch nicht entschieden werden, ob die Schädigung an der Delaminationsfront nicht-lokal beschrieben werden muß. KÖNKE, der ein lokales schadensmechanisches Modell zur Simulation des Makrorißwachstums in duktilen Materialien nutzt [31], berichtet von netzunabhängigen numerischen Ergebnissen. Daher soll in diesem Projekt vorerst ein Modell mit lokaler Schädigungsvariable implementiert werden, dessen Ergebnisse dann auf das Auftreten von Lokalisierungsphänomenen hin zu untersuchen sind.

# Kapitel 3

## Darstellung der Prozeßzone

Die Entstehung und das Wachstum von Grenzflächenrissen in geschichteten Faserverbundwerkstoffen sind komplexe Prozesse. Die Wechselwirkung mit Matrixrissen in den benachbarten Laminae kann beispielsweise dazu führen, daß die Delamination die Grenzfläche verläßt und in einer anderen Ebene weiter wächst [70]. Zur Entwicklung von Delaminationsmodellen ist es sinnvoll, sich anfangs auf einen einfacheren Fall zu beschränken. Im folgenden sollen nur Delaminationen betrachtet werden, die sich in einer ebenen Grenzfläche zwischen zwei Laminae unterschiedlicher Orientierung ausbreiten. Die Laminae werden als ungeschädigt betrachtet.

In einem kleinen Bereich vor der Delaminationsfront bilden sich Mikrorisse, bevor der makroskopische Grenzflächenriß weiter fortschreitet. Diese Prozeßzone soll schadensmechanisch modelliert werden (Abb. 3.1). Während die Delamination wächst, breitet sich der geschädigte Bereich entlang der Delaminationsebene aus. Somit ist für eine dünne Zwischenschicht, welche die Delaminationsebene umgibt, das Material schadensmechanisch zu beschreiben, hingegen genügt für den Rest der Probe ein linear-elastisches, schichtweise transversal-isotropes Materialmodell. Die Kopplung der Schichten erfolgt über die Bedingung stetiger Verschiebungen und Normalspannungen.

Die Ausdehnung der Prozeßzone senkrecht zur Delaminationsebene liegt gewöhnlich nur in der Größenordnung des Faserdurchmessers [9]. Somit ist die Dicke der Zwischenschicht sehr klein im Verhältnis zur Dicke der Laminae  $h \ll H$ . Es stellt sich daher die Frage, ob die Zwischenschicht als dreidimensionales Gebiet oder als zweidimensionale Grenzfläche modelliert werden sollte. Ferner ist zu entscheiden, welche Materialeigenschaften der als Kontinuum dargestellten Zwischenschicht zugeschrieben werden sollen. Verschiedene Möglichkeiten der Simulation sollen in diesem Kapitel vorgestellt und diskutiert werden.

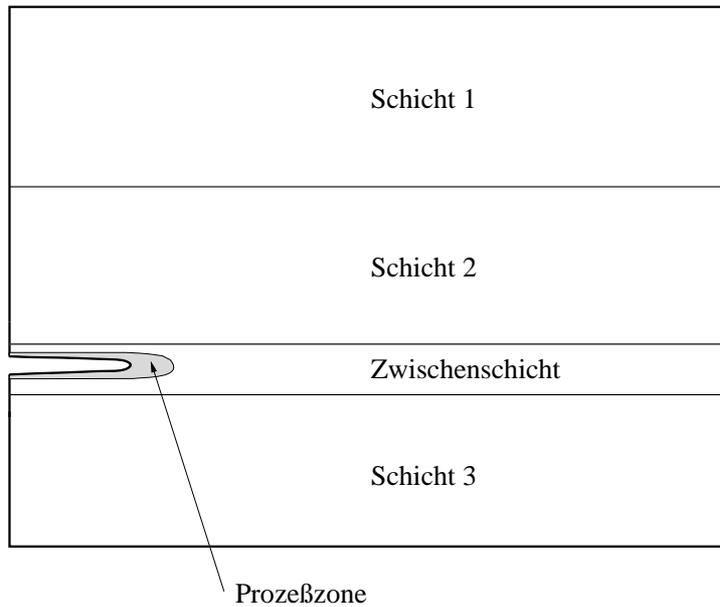


Abbildung 3.1: Prozeßzone und Zwischenschicht

### 3.1 Materialeigenschaften der Zwischenschicht

An der Delaminationsebene grenzen zwei Laminae aneinander, die i.A. unterschiedliche Faserorientierungen aufweisen. Dennoch soll die Zwischenschicht als ein homogenes Kontinuum modelliert werden.

LADEVEZE und ALLIX [35], die ein zweidimensionales Modell verwenden, gehen davon aus, daß die Symmetrieeigenschaften des Steifigkeitstensors der Grenzfläche durch die Faserorientierungen der benachbarten Laminae bestimmt sind. Sie postulieren ein monoklines, linear-elastisches Materialverhalten mit Schädigung. Als Hauptachsen treten die Normale zur Grenzfläche sowie die beiden Winkelhalbierenden zwischen den zwei Faserrichtungen auf.

In diesem Projekt wird eine isotrope Zwischenschicht angenommen, die ein elastoplastisches Materialverhalten mit Schädigung zeigt. Der isotrope Ansatz wird nicht allein deshalb gewählt, weil er zu einem einfacheren Modell führt, sondern er kann auch aus experimentellen Ergebnissen motiviert werden. Elektronenmikroskopische Untersuchungen [9] der Delaminationsfront zeigen, daß die Mikrorißbildung in der Prozeßzone im Wesentlichen das Matrixmaterial zwischen den zwei Laminae betrifft. Somit sollten die Materialparameter des isotropen Matrixmaterials eine gute erste Näherung für die Zwischenschicht darstellen.

WANG [71] begründet die Annahme einer isotropen Zwischenschicht mit seinen mikroskopischen Beobachtungen eines hohen Anteils von Matrixmaterial in der

Zwischenschicht in Glass-Epoxyd-Verbundwerkstoffen. Jedoch ist davon auszugehen, daß sein Befund einer mehrere Faserdurchmesser dicken, aus Matrixmaterial bestehenden Zone zwischen den Laminae stark von den speziellen Herstellungsbedingungen abhängt und bei modernen Faserverbunderkstoffen in der Regel nicht mehr anzutreffen ist.

## 3.2 Linearisierte Zwischenschicht

Aufgrund der geringen Dicke der Zwischenschicht ist der Sinn einer räumlichen Auflösung in Normalenrichtung fragwürdig (siehe Abschnitt 3.5), und es bietet sich ein linearer Ansatz für die Verschiebungen entlang dieser Richtung an. Sei  $x_3$  die Richtung senkrecht zur Delaminationsebene, durch  $x_3 = 0$  sei der untere Rand der Zwischenschicht bestimmt.  $\mathbf{u}$  bezeichne die Verschiebung.

$$\mathbf{u}^{(0)}(x_1, x_2) := \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) \quad (3.1)$$

$$\Delta \mathbf{u}(x_1, x_2) := \mathbf{u}(x_1, x_2, h) - \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{u}^{(0)}(x_1, x_2) + \frac{x_3}{h} \Delta \mathbf{u}(x_1, x_2), \quad x_3 \in (0, h) \quad (3.3)$$

Mit dieser Linearisierung erhält man für die Dehnungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{x_3}{h} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{22} \text{ analog} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{x_3}{h} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} + \frac{x_3}{h} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \right) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{h} \Delta u_3 \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h} \Delta u_1 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{x_3}{h} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_1} \right), & \varepsilon_{23} \text{ analog} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Falls die Differenz der Dehnungen an Ober- und Unterseite der Zwischenschicht klein ist im Vergleich zu den Dehnungen, kann man die  $x_3$  enthaltenden Terme vernachlässigen, und die Dehnung hängt nur noch von der Position auf der Delaminationsebene ab.

$$|\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, h) - \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, 0)| < c |\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, 0)| \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} \right| < c \left| \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} \right| \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2) (1 + O(c)) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}(x_1, x_2) &= \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1}, & \varepsilon_{22} \text{ analog} \\
\varepsilon_{12}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_1} \right) \\
\varepsilon_{33}(x_1, x_2) &= \frac{1}{h} \Delta u_3 \\
\varepsilon_{13}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h} \Delta u_1 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} \right), & \varepsilon_{23} \text{ analog}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

### 3.3 Grenzflächenmodell als Grenzfall

Für sehr dünne Zwischenschichten  $h \rightarrow 0$  ist das linearisierte Zwischenschichtmodell gleichbedeutend mit einem Grenzflächenmodell der Prozeßzone, wie es von LADEVEZE [35] verwendet wird. RINDERKNECHT [55] stellt die Interface-Formulierung als Grenzfall dar, indem er diejenigen Komponenten des Dehnungstensors null setzt, die im Grenzwert  $h \rightarrow 0$  nicht singular werden, d.h. die in-plane Komponenten  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  und  $\varepsilon_{12}$ . Er erklärt diesen Ansatz nicht; offenbar setzt er jedoch bei der Bildung des Grenzwertes voraus, daß  $\Delta \mathbf{u}$  konstant bleibt oder zumindest schwächer als  $h$  gegen null strebt. Seine Argumentation bleibt somit unklar, stattdessen soll hier eine andere Möglichkeit vorgeschlagen werden, um zu einem Grenzflächenmodell überzugehen.

Verringert man die Zwischenschichtdicke  $h$  unter der physikalisch sinnvollen Annahme beschränkter Dehnungen, so strebt die Energie der Zwischenschicht ebenfalls gegen null und wird klein gegenüber den Energien der Laminae. Die Verschiebungen  $\mathbf{u}^{(0)}$  am Rand der Zwischenschicht gehen sowohl über die Zwischenschichtenergie als auch über die Energie der Laminae in die gesamte freie Energie ein. Da der Beitrag der Grenzschicht jedoch für  $h \rightarrow 0$  vernachlässigbar wird, wird  $\mathbf{u}^{(0)}$  im Grenzfall nur noch durch das elastische Verhalten der Laminae und nicht mehr durch das Materialverhalten der Zwischenschicht bestimmt. Die Verschiebungsdifferenz  $\Delta \mathbf{u}$  hingegen fließt weiterhin zum größtenteils über die Energie der Zwischenschicht in die Gesamtenergie ein. Somit wird die dünne Zwischenschicht im Wesentlichen durch die Verschiebungsdifferenz  $\Delta \mathbf{u}(x_1, x_2)$  charakterisiert, und ihre elastische Energiedichte (ohne Schädigung) ist

$$w = \frac{1}{2} \int_0^h \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} dx_3 \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{h}{2} \left( C_{3333} \left( \frac{\Delta u_3}{h} \right)^2 + 2 C_{1333} \frac{\Delta u_1}{h} \frac{\Delta u_3}{h} + 2 C_{2333} \frac{\Delta u_2}{h} \frac{\Delta u_3}{h} + \right. \\
&\quad \left. + 2 C_{1213} \frac{\Delta u_1}{h} \frac{\Delta u_2}{h} + C_{1313} \left( \frac{\Delta u_1}{h} \right)^2 + C_{2323} \left( \frac{\Delta u_2}{h} \right)^2 \right) \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Im Grenzfall  $h \rightarrow 0$  stimmt das Zwischenschichtmodell also mit dem Modell einer Grenzfläche überein, an der eine Verschiebungsdiskontinuität  $\Delta \mathbf{u}$  auftritt und deren Grenzflächenenergie durch obige Gleichung (3.10) bestimmt ist. Wählt man als Richtungen des Koordinatensystems die Hauptachsen des Steifigkeitstensors, so erhält man eine Energiedichte, wie sie im Modell von LADEVEZE verwendet wird.

$$w = \frac{1}{2} \left( k_3 (\Delta u_3)^2 + k_1 (\Delta u_1)^2 + k_2 (\Delta u_2)^2 \right) \quad (3.11)$$

$$k_3 = \frac{C_{3333}}{h}; \quad k_1 = \frac{2 C_{1313}}{h}; \quad k_2 = \frac{2 C_{2323}}{h} \quad (3.12)$$

Diese Gestalt der elastischen Energie kann durch ein Federmodell veranschaulicht werden. Die zwei benachbarten Laminae werden an der Grenzfläche durch Federn verknüpft, welche bei einer Relativverschiebung  $\Delta \mathbf{u}$  der Laminae gespannt werden.  $k_1, k_2$  und  $k_3$  sind hierbei als Federkonstanten zu verstehen. Auf der Ebene einer Finite Elemente Diskretisierung wurde ein ähnlicher Ansatz von TAKADA et al. formuliert [65] („bonding spring elements“).

### 3.4 Das Grenzflächenmodell von Lemaitre

Eine andere Möglichkeit, die Schädigung einer Grenzfläche zweidimensional zu modellieren, wurde von LEMAITRE [37, 36] vorgeschlagen. Für sein Modell ist bislang keine Darstellung als Grenzfall eines Zwischenschichtmodells bekannt.

LEMAITRE geht bei seiner Argumentation von der Frage aus, welche der im Dreidimensionalen definierten Observablen  $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$  sich auch auf einer Grenzfläche definieren lassen. Es sind dies die in-plane Dehnungen  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$  und die out-of-plane Spannungen  $\sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ , denn diese Größen sind an der Grenzfläche stetig und somit wohldefiniert. Nicht als Observable gegeben sind hingegen die jeweiligen energetisch assoziierten Größen: die in-plane Spannungen und out-of-plane Dehnungen.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \bullet \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \sigma_{13} \\ \bullet & \bullet & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$\bullet$  : in Grenzfläche undefinierte Observable

Um dennoch ein Materialmodell basierend auf den in Kapitel 2.2 bis 2.4 vorgestellten Konzepten einführen zu können, postuliert LEMAITRE, daß eine Grenzflächenenergie analog zu üblichen dreidimensionalen Modellen (2.47) eingeführt

werden kann. Aus dieser lassen sich die assoziierten Variablen ableiten:

$$i, j = 1, 2, 3; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$$

$$f = \frac{1}{2} \left( K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(\varepsilon)} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta} + K_{ij}^{(\sigma)} e_{i3}^e e_{j3}^e \right) (1 - D) + f_r(r) \quad (3.14)$$

$$S_{\alpha\beta}^e = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \quad (3.15)$$

$$\sigma_{i3} = \frac{\partial f}{\partial e_{i3}^e} \quad (3.16)$$

Mit  $S_{\alpha\beta}^e$  seien die den in-plane Dehnungen  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  zugeordneten Variablen bezeichnet; die  $e_{i3}^e$  seien den out-of-plane Dehnungen assoziiert.  $\mathbf{K}^{(\varepsilon)}$  und  $\mathbf{K}^{(\sigma)}$  sind Materialkonstanten. Der Anteil der elastischen Energie an der freien Energie  $f$  (3.14) ist wie üblich eine quadratische Form der dehnungsartigen Variablen  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ,  $e_{i3}^e$ . Zusätzlich ist angenommen worden, daß diese in einen Term der in-plane Dehnungen  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  und einen Anteil der neu eingeführten Variablen  $e_{i3}^e$  separierbar ist.

Zwei Eigenschaften von LEMAITRES Modell sind für die anschließende Diskussion (Abschnitt 3.5) von besonderem Interesse. Die Variablen  $e_{i3}^e$ ,  $S_{\alpha\beta}^e$  sind keine direkt beobachtbaren Größen, sondern innere Variablen. Es ist daher nicht möglich, eine der Zustandsvariablen gemeinsam mit ihrer assoziierten Variablen zu messen. Ferner stimmt das Modell nicht mit dem als Grenzfall des Zwischenschichtmodells abgeleiteten Ansatz von LADEVEZE überein. Der Anteil der in-plane Dehnungen an der freien Energie ist bei LEMAITRE i.Allg. nicht vernachlässigbar. Es ist ungewiß, ob LEMAITRES Grenzfläche überhaupt als Grenzwert einer Grenzschicht darstellbar ist.

Der Vollständigkeit halber soll das weitere Vorgehen bei LEMAITRES Modell kurz skizziert werden. Es wird ein elasto-plastisches Materialverhalten in den out-of-plane Komponenten und ein visko-elastisches Verhalten in den in-plane Komponenten simuliert:

$$S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^e + S_{\alpha\beta}^v \quad (3.17)$$

$$e_{i3} = e_{i3}^e + e_{i3}^p \quad (3.18)$$

Die Zeitentwicklung bei inelastischer Deformation wird durch eine Normalenregel beschrieben und ist durch ein viskoses Potential  $\Omega$ , die Fließfunktion  $F_\sigma$  und das plastische Potential  $F$  bestimmt.

$$R = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (3.19)$$

$$Y = -\frac{\partial f}{\partial D} \quad (3.20)$$

$$f_r = K_r \frac{\mu}{\mu + 1} r^{1 + \frac{1}{\mu}} \quad (3.21)$$

$$\Omega = \frac{Y^2 (\dot{\epsilon}_{\text{eq}})^\eta \dot{\epsilon}_{\text{eq}}}{2 S_\epsilon} \quad (3.22)$$

$$\dot{\epsilon}_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}} \quad (3.23)$$

$$F_\sigma = \sigma_{\text{eq}} - \sigma_y - R \quad (3.24)$$

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma_{33} |\sigma_{33}| + \left(\frac{\sigma_R}{\tau_R}\right)^2 (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \quad (3.25)$$

$$F = F_\sigma + \frac{Y^2}{2 S_\sigma} \quad (3.26)$$

$$s_{\alpha\beta}^v = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}} \quad (3.27)$$

$$\dot{\epsilon}_{i3}^p = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{i3}} \lambda \quad (3.28)$$

$$\dot{r} = -\frac{\partial F}{\partial R} \lambda \quad (3.29)$$

$$\dot{D} = \frac{\partial \Omega}{\partial Y} + \frac{\partial F}{\partial Y} \lambda \quad (3.30)$$

Speziell für Delaminationen unter Mode-I- und Mode-II-Belastung gibt LEMAITRE ein vereinfachtes Modell an, bei dem  $\mathbf{K}^{(\epsilon)} = 0$  ist und die elastische Energie eine ähnliche Gestalt wie in LADEVEZES Modell erhält.

### 3.5 Vergleich von Grenzflächen- und Zwischenschichtmodellen

Nachdem in den letzten Abschnitten verschiedene Möglichkeiten zur zwei- und dreidimensionalen Darstellung der vom Schädigungsprozeß betroffenen Zone in der Umgebung der Delaminationsebene erläutert wurden, sollen diese Ansätze nun diskutiert werden.

Auf den ersten Blick mag es erscheinen, als müßte eine dreidimensionale Repräsentation der Zwischenschicht die Realität am genauesten wiedergeben. Schließlich ist es gerade die Prozeßzone, die bei der Modellierung der Delamination besonderes Interesse verdient und auch einen höheren Diskretisierungsaufwand rechtfertigt. So wurden zweidimensionale Modelle [4, 65, 35, 16, 57, 55, 2, 49], sofern ihre Wahl überhaupt begründet wurde, bislang im Wesentlichen aufgrund des geringeren numerischen Aufwands bevorzugt. Unbeachtet geblieben sind die theoretischen Schwierigkeiten, die bei einer dreidimensionalen Modellierung auftreten.

Die Dicke der Prozeßzone senkrecht zur Delaminationsebene liegt in der Größenordnung eines oder mehrerer Faserdurchmesser. Eine dreidimensionale Zwischenschicht bedeutet also eine sehr hohe räumliche Auflösung in Normalenrichtung. Die angrenzenden Laminae werden jedoch auf einer weitaus größeren Skala beschrieben. Ihre innere Struktur bestehend aus Fasern und Matrix wird nicht wiedergegeben, sondern sie werden als homogenisiertes Kontinuum dargestellt. Eine direkte Verknüpfung dieses groben Modells der Laminae mit einer dünnen, dreidimensionalen Zwischenschicht ist nicht sinnvoll. Besonders deutlich wird das Problem, wenn man sich fragt, an welche Stelle im realen Laminat die Grenzen zwischen Zwischenschicht und Laminae zu legen sind, ob die Grenze vielleicht direkt an einer Faserlage vorbeiführt oder sich mehr in der Matrix befindet. Betrachtet man die homogenisierten Laminae, scheint die genaue Position der Grenze unerheblich zu sein; auf der Größenskala einer räumlich aufgelösten Zwischenschicht betrachtet würde man jedoch erhebliche Unterschiede in den Spannungen am Rand der Zwischenschicht erwarten.

Will man die Prozeßzone also dreidimensional simulieren, genügt es nicht, das Laminat in homogene Laminae und eine homogene Zwischenschicht zu unterteilen. Vielmehr ist es notwendig, in einer Umgebung der Prozeßschicht Fasern und Matrix in einem nicht homogenisierten Modell darzustellen. Der Aufwand einer solchen Simulation erscheint derzeit nicht vertretbar.

Als eine zweidimensionale Näherung der Zwischenschicht wird in diesem Projekt die in Normalenrichtung linearisierte Zwischenschicht (Abschnitt 3.2) verwendet. Anhand der numerischen Ergebnisse soll überprüft werden, ob die Näherung (3.7) konstanter Dehnungen auch nahe der Delaminationsfront gerechtfertigt ist. Ebenfalls zu testen ist die Annahme verschwindender Bedeutung der in-plane Dehnungen, die dem Modell von LADEVEZE zu Grunde liegt.

LEMAITREs Modell weist den Nachteil auf, daß der Zusammenhang zu dreidimensionalen Darstellungen unklar bleibt. Es wird daher nicht deutlich, welche physikalischen Annahmen zu Grunde liegen und wie die Materialkonstanten zu bestimmen sind. LEMAITRE [37] schlägt vor, wie bei schadensmechanischen Modellen dreidimensionaler Körper üblich, die Schädigung über die verringerte Steifigkeit (2.4) zu messen. Dies ist aus zwei Gründen jedoch nicht möglich. Um eine Komponente des Steifigkeitstensors zu bestimmen, muß die entsprechende Komponente des Dehnungstensors und die assoziierte Spannung gemessen werden. Von diesen zwei Größen ist in LEMAITREs Modell aber jeweils nur eine Observable, während es sich bei der anderen um eine innere Variable handelt (3.13). Ferner dürfte es äußerst schwierig sein, eine Probe mit homogener Grenzflächenschädigung zu präparieren sowie Dehnungen und Spannungen an der Grenzfläche zu messen. Bei Modellen, die von einer dreidimensionalen Zwischenschicht ausgehen, können die Materialparameter hingegen an homogenen Proben ohne Grenzfläche gemessen werden.

# Kapitel 4

## Rißfortschritt

In den vorangehenden Kapiteln wurde ein Modell entwickelt, das die Schädigung in Form von Mikrorissen und Poren vor der Delamination schadensmechanisch beschreibt. Nun ist an diese Mikroschädigung ein Rißfortschrittskriterium für den makroskopischen Delaminationsriß zu knüpfen.

Viele Delaminationsmodelle greifen zur Modellierung des Rißfortschritts auf die klassische Bruchmechanik zurück. In Analogie zur Bruchmechanik kann ein Rißkriterium mittels der schadensmechanischen Energiefreisetzungsrate formuliert werden. Ein anderer Ansatz verwendet einen kritischen Wert der Schädigungsvariablen.

Zur Simulation des gewachsenen Makrorisses gibt es zwei unterschiedliche Verfahren. Bei der Methode der verallgemeinerten Risse („smeared cracks“) wird die Steifigkeit in einem Gebiet auf nahezu Null reduziert. Alternativ läßt sich ein Riß auch diskret mittels neuer Oberflächen einführen.

### 4.1 Bruchmechanisches Rißfortschrittskriterium

Die meisten Veröffentlichungen zur Modellierung der Delamination greifen auf Konzepte der Bruchmechanik zurück [46, 10, 56, 62, 11, 17, 63, 28]. Die bei Wachstum des Risses freigesetzte elastische Energie  $W^e$  wird mit der zur Erzeugung der zusätzlichen Rißoberfläche aufzubringenden Arbeit  $W^s$  verglichen. Ist die Bilanz der Energiefreisetzung positiv, schreitet der Riss fort. (GRIFFITH-Kriterium [22])

$$G := \frac{\partial W^e}{\partial a} \geq G_C := \frac{\partial W^s}{\partial a}, \quad a : \text{Rißlänge} \quad (4.1)$$

Analog zu diesem Vergleich von Energiefreisetzungsrate  $G$  und kritischer Energiefreisetzungsrate  $G_C$  wurde ein schadensmechanisches Kriterium aufgestellt, das im nächsten Abschnitt diskutiert wird.

## 4.2 Schadensmechanische Rißfortschrittskriterien

### 4.2.1 Kritische Energiefreisetzungsrate

In den Delaminationsmodellen von LADEVEZE, ALLIX, RINDERKNECHT und anderen wird der Rißfortschritt durch die schadensmechanischen Energiefreisetzungsraten  $Y_i$  gesteuert. Bei RINDERKNECHT [55] findet man beispielweise das Kriterium

$$\frac{Y_1}{Y_1^C} + \frac{Y_2}{Y_2^C} + \frac{Y_3}{Y_3^C} \geq 1 \quad (4.2)$$

$Y_1^C, Y_2^C$  und  $Y_3^C$  sind Materialkonstanten. Im isotropen Fall  $Y_1 = Y_2 = Y_3$  ist dieses Kriterium ein Vergleich zwischen schadensmechanischer Energiefreisetzungsrate und kritischer Energiefreisetzungsrate  $Y \geq Y_C$  in Analogie zum GRIFFITH-Kriterium. RINDERKNECHT [55] sieht einen über diese Ähnlichkeit hinausgehenden Zusammenhang zwischen der bruchmechanischen Modellierung der Delamination und seinem schadensmechanischen Modell. Er bezeichnet die Bruchmechanik als einen Grenzfall der Schadensmechanik für abruptes Materialversagen in einer unendlich steifen und dünnen Prozeßschicht, bleibt jedoch den Beweis schuldig.

Obwohl die Analogie zu bewährten Rißfortschrittskriterien der Bruchmechanik für das Kriterium einer kritischen schadensmechanischen Energiefreisetzungsrate  $Y_C$  spricht, ist dieses mangels physikalischer Begründung abzulehnen. Die schadensmechanische Energiefreisetzungsrate  $Y$  ist gleich der Änderung der elastischen Energie bei fortschreitender Mikroschädigung (Abschnitt 2.4, [36]):

$$Y = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial w^e}{\partial D} \right|_{\boldsymbol{\sigma}=\text{const}} \quad (4.3)$$

Es handelt sich nicht um die Energieänderung aufgrund von Bildung oder Wachstum eines makroskopischen Risses, also ergibt ein Vergleich mit einer Oberflächenenergie keinen Sinn. Die Tatsache, daß zur Bildung der Mikrorisse Oberflächenenergie aufzubringen ist, ist bereits in den Entwicklungsgleichungen der Schädigung enthalten.

$Y$  ist die verallgemeinerte treibende Kraft für die (Mikro-)Schädigung und geht daher entscheidend in die Zeitentwicklung der Schädigungsvariablen ein (2.63, 2.68). Als Kriterium für die Entstehung oder das Wachstum eines Makrorisses benötigen wir jedoch eine Größe, die angibt, wann der Gültigkeitsbereich des schadensmechanischen Modells verlassen wird.

## 4.2.2 Kritische Schädigung

In der ersten Phase der Materialschädigung entstehen und wachsen Mikrorisse und Löcher. Diese Phase kann in einem schadensmechanischen Kontinuumsmodell beschrieben werden. Sobald die Rißdichte eine gewisse Größe erreicht, kommt es zur Koagulation von Mikrorissen, und schließlich bilden sich Makrorisse. Nach LEMAITRE [36] findet der Übergang von der Mikrorißbildung zur Makrorißentstehung bei einem kritischen Wert  $D_C$  der Schädigungsvariablen  $D$  statt. Es wird angenommen, daß  $D_C$  eine Materialkonstante ist.

LEMAITRE hat dieses Kriterium bislang nur zur Bestimmung des globalen Materialversagens eingesetzt. In diesem Projekt soll die kritische Schädigung  $D = D_C$  hingegen als Bedingung für das lokale Wachstum eines Makrorisses verwendet werden. Ähnliche Rißfortschrittskriterien findet man bei schadensmechanischen Modellen nach GURSON, mit denen die Rißausbreitung simuliert wird [24, 31].

## 4.3 Rißmodellierung

Nachdem das Kriterium für das Makrorißwachstum festgelegt worden ist, muß eine geeignete Form der Modellierung des Makrorisses gewählt werden. Eine diskrete Darstellung des Risses kann durch Änderung der Modellgeometrie erfolgen, eine Kontinuumsdarstellung erzeugt man durch ein dreidimensionales Gebiet verschwindender Steifigkeit.

### 4.3.1 Verallgemeinerte Risse

Die Schädigungsvariable  $D$  wurde im Abschnitt 2.1 als eine Art „Rißdichte“ in einem repräsentativen Volumenelement (RVE) eingeführt. Wenn im RVE die kritische Schädigung  $D_C$  erreicht wird, verschmelzen Mikrorisse zu einem neuen Makroriß, der irgendwo durch das Element läuft, oder ein bereits in der Nachbarschaft vorhandener Makroriß wächst durch das RVE hindurch. Die genaue Position des Makrorisses ist nicht bestimmt. Erreicht also nach einer Lasterhöhung die Schädigungsvariable in einem gewissen Gebiet ihren kritischen Wert, so muß nun der Effekt eines irgendwo durch dieses Gebiet verlaufenden Risses modelliert werden. Es liegt nahe, zu diesem Zweck die effektive Steifigkeit  $\check{C}$  innerhalb des betreffenden Gebietes auf null zu setzen.<sup>1</sup>

Ist die Steifigkeit in einem dreidimensionalen Gebiet  $\Omega_D$  null, so geht allerdings die Eindeutigkeit der Lösung im Innern des Gebietes verloren. Dies ist

---

<sup>1</sup>Dies gilt nur, wenn der Riß nicht durch Druck belastet wird.

auch anschaulich klar, denn mit der Steifigkeit verschwinden auch die Spannungen, welche das System in seine Gleichgewichtsposition führen. Daher darf die Lösung der Gleichgewichtsbedingung nur noch außerhalb von  $\Omega_D$  gesucht werden:  $\Omega(t) = \Omega(t_0) \setminus \Omega_D(t)$ . Physikalisch bedeutet dies, daß das Gebiet  $\Omega_D$  sozusagen aus dem modellierten Körper herausgeschnitten wird. Da somit die Masse nicht erhalten bleibt, erscheint dieser Ansatz etwas bedenklich. Insbesondere ist bei Aufgaben, in denen Trägheitskräfte nicht vernachlässigt werden können, mit deutlichen Abweichungen des Modells von der Realität zu rechnen.

Eine Änderung der Geometrie des modellierten Körpers ist numerisch aufwendig. Daher wird die Steifigkeit in Modellen mit verallgemeinerten Rissen („smeared cracks“ [53, 66, 21, 24]) nicht bis auf null, sondern nur auf einen sehr kleinen Wert reduziert.

$$\tilde{\mathbf{C}} = k \mathbf{C}, \quad k \ll 1 \quad \text{für } D \geq D_C \quad (4.4)$$

Zwar bleibt die Eindeutigkeit des mathematischen Problems bei dieser Modellierung erhalten, jedoch resultieren aus der entarteten Steifigkeitsmatrix erhebliche numerische Schwierigkeiten bei einer Diskretisierung mit Finiten Elementen [72]:

- Je geringer die Reststeifigkeit im Rißgebiet gewählt wird, desto schlechter wird die Konditionierung der linearen Gleichungssysteme.
- Abhängigkeit der Ergebnisse von der Vernetzung
- Konvergenzprobleme bei sehr feiner Diskretisierung
- Falls die Rißausbreitung nicht parallel zu Elementkanten ist, tritt „stress-locking“ auf.

Aufgrund dieser Probleme der Kontinuumsdarstellung von Makrorissen wird in diesem Projekt eine diskrete Repräsentation des Delaminationsrisses verwendet, die im folgenden Abschnitt erläutert wird.

### 4.3.2 Diskrete Risse

Stellt man diskrete Makrorisse dar [72], so ändert sich durch das Rißwachstum die Geometrie des modellierten Objekts. Entlang der neugebildeten Rißspitze müssen neue Oberflächen eingeführt werden, auf denen die Randbedingung verschwindender Normalspannungen gilt<sup>2</sup>. Die Simulation der Delaminationskinetik ist folglich eine freie Randwertaufgabe. Für die numerische Umsetzung bedeutet dies, daß

---

<sup>2</sup>Falls der Riß durch Druck belastet wird, ist statt der Randbedingung eine Kontaktbedingung zu formulieren.

nach jedem Zeitschritt des Rißwachstums die Umgebung der Rißspitze neu vernetzt werden muß.

Im Gegensatz zum Modell verallgemeinerter Risse muß bei diskreter Rißdarstellung ein Kriterium für die Ausbreitungsrichtung explizit angegeben werden. KÖNKE [31], der ein schadensmechanisches Materialmodell ähnlich dem GURSON-Modell zur Simulation des Rißwachstums in duktilen Materialien verwendet, wählt als Ausbreitungsrichtung die Richtung, in der die Schädigungsvariable am schwächsten abnimmt. Bei der Simulation ebener Delaminationen ist das Rißwachstum von vornherein auf eine Ebene beschränkt, da wir auf eine räumliche Auflösung der Zwischenschicht senkrecht zur Delaminationsebene verzichten (Abschnitt 3.5).

# Kapitel 5

## Experimentelle Parameteridentifikation

Die experimentelle Verifikation des in den vorangehenden Kapiteln entwickelten Delaminationsmodells soll anhand von Beobachtungen des stabilen Delaminationsfortschritts in CFK-Proben erfolgen, weil für dieses Material in unserem Institut röntgenografische [73, 50, 51] und kohärent-optische [30, 58, 60] Untersuchungsmethoden entwickelt wurden. Zunächst müssen die Modellparameter für das Material bestimmt werden.

### 5.1 Messung der Schädigung

Zur Messung der Materialschädigung bieten sich einige unterschiedliche Verfahren an [36]. Der Verlust an Steifigkeit infolge der Schädigung läßt sich in Zugentlastungsversuchen und Kurzzeit-Schwingversuchen beobachten. Andere meßbare Effekte der Mikrorißbildung sind Veränderungen der Dichte, der Geschwindigkeit von Ultraschall, der Mikrohärtigkeit, der elektrischen Leitfähigkeit und der Geschwindigkeit des tertiären Kriechens.

Unter diesen Meßmethoden zeichnet sich die Messung der Steifigkeit dadurch aus, daß sie das einzige direkte Verfahren ist; denn die Schädigungsvariable ist gerade über die Reduktion der Steifigkeit definiert (2.47). Ferner ist ihre Messung im Zugentlastungsversuch mit relativ einfachen Mitteln durchzuführen.

Im Zugentlastungsversuch (Abb. 5.1) wird eine Probe einachsigt, homogen, quasi-statisch verformt. Während der Entlastungsphasen des Versuchs liegt - abgesehen von ggf. kleineren nicht-linearen Effekten (Mikroplastizität, Bauschinger-Effekt) - linear-elastisches Materialverhalten vor. Aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm lassen sich der verringerte E-Modul und damit die Schädigung (2.4) sowie ggf. die plastische Dehnung bestimmen.

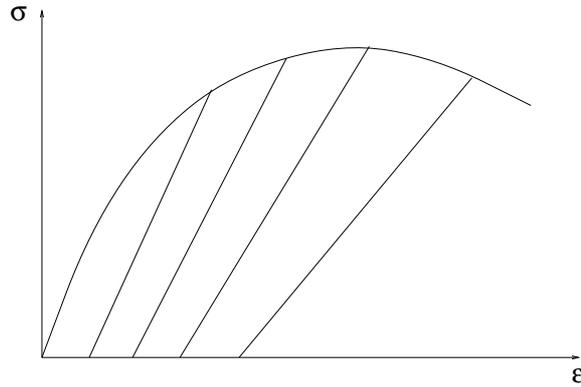


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung des Zugentlastungsversuchs

## 5.2 Modell des Zugentlastungsversuchs

Zur Auswertung des Versuchs muß das schadensmechanische Materialmodell (Abschnitt 2.4) für den Spezialfall der homogenen Verformung eines isotropen Materials unter einachsigen Zug spezifiziert werden. Hierzu setzen wir

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon^e \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} + \varepsilon^p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Damit vereinfachen sich in den konstitutiven Gleichungen (2.55) bis (2.68) die Gleichungen (2.59), (2.64) und (2.66):

$$\dot{\varepsilon}_{\text{eq}}^p = \dot{\varepsilon}^p \quad (5.3)$$

$$= \frac{\lambda}{1 - D} \quad (5.4)$$

$$\sigma_{\text{eq}}^D = \sigma \quad (5.5)$$

## 5.3 Material

Für die CFK-Proben wurden T300-5208 Prepregs der Firma Ciba-Geigy verwendet, welche entsprechend den Empfehlungen des Herstellers ausgehärtet wurden. Wie im Abschnitt 3.1 erläutert, sind die Materialeigenschaften der Matrix als Näherung der Eigenschaften der Zwischenschicht zu verwenden. Im Gegensatz zu den CFK der 1. Generation ist es jedoch für das von uns verwendete Material nach

Angaben des Herstellers nicht möglich, eine hinreichend große Epoxid-Harz-Probe anzufertigen, die die gleichen Eigenschaften wie das Harz im Verbundwerkstoff aufweist. Daher wurden die Experimente zur Parameteridentifikation an unidirektionalen Laminatproben durchgeführt, die einer Zugbelastung senkrecht zur Faserrichtung ausgesetzt wurden. Unter dieser Belastung sind Matrixrisse die dominante Schadensform, so daß auf die Parameter der Zwischenschicht geschlossen werden kann.

## 5.4 Versuchsdurchführung

Als Proben wurden  $90^\circ$ -orientierte, zwölfplagige UD-Lamine mit den Abmessungen  $200 \text{ mm} \times 30 \text{ mm} \times 1.25 \text{ mm}$  verwendet. Nach dem Aufkleben von Aluminiumbacken zur Einspannung verblieben 12 cm freie Meßlänge. Die Dehnungsmessung erfolgte mittels Dehnmeßstreifen. Zur Messung der Zugkraft wurde eine zweite Probe bestehend aus einer Aluminiumlegierung in Reihe geschaltet und ebenfalls die Dehnung per DMS bestimmt. Bei der Aluminiumprobe handelte es sich um eine flache proportionale Probe (EN 10002) mit einem Querschnitt von  $1 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ . Die Kraftmessung wurde mit Ringkraftmessern geeicht.

In den Zugentlastungsversuchen wurden die CFK-Proben etwa zehn mal entlastet, ehe die Bruchspannung erreicht wurde. Die Entlastung erfolgte nicht ganz vollständig, da sonst Probleme mit der Einspannung auftraten.

## 5.5 Meßergebnisse

Die Anfangssteifigkeit (im ungeschädigten Zustand) in  $90^\circ$ -Richtung wurde zu 11 GPa bestimmt, die Bruchspannung variierte deutlich und lag bei etwa 40 MPa, als Bruchdehnung wurde 0.4% gemessen. Der Hersteller der Prepregs gibt für Elastizitätsmodul und Bruchspannung im trockenen Zustand 8.5 GPa bzw. 67 MPa an. Die Differenz zu unseren Werten ist durch den unterschiedlichen Wassergehalt der Proben vollständig zu erklären.

Zu einer präzisen Bestimmung von Steifigkeitsverlust und irreversiblen Dehnungen erwies sich die Meßgenauigkeit jedoch als ungenügend. Der Bruch der Probe erfolgte bereits bei Schädigungen von  $D = 1 - \tilde{E}/E = 4\%$ , die Meßgenauigkeit betrug  $\pm 0.3\%$ . Der plastische Dehnungsanteil wurde durch Extrapolation der während der Entlastungsphasen gemessenen Spannungen und Dehnungen auf die Spannung null ermittelt. Diese Werte lagen unterhalb von 0.02%, ihre zufälligen, absoluten Fehler erreichten 0.005%. Diese Meßgenauigkeit reicht nicht aus, um aus den Ergebnissen die Parameter des Materialmodells zu bestimmen.

Der relativ geringe Rückgang der Steifigkeit in unseren Experimenten - TAKEDA [64] berichtet von einer Reduktion der Steifigkeit im Material T800H/3631 um mehr als 20% - deutet darauf hin, daß die Proben gebrochen sind, noch ehe sich eine größere Matrixschädigung ausgebildet hat. Als Ursache ist der Einfluß der Fasern zu sehen, welche die Bruchspannung im 90°-Composit gegenüber dem reinen Matrixmaterial reduzieren. In zukünftigen Experimenten soll daher ein Verbundwerkstoff verwendet werden, zu dem auch das Matrixmaterial erhältlich ist und zur Bestimmung der Materialparameter der Zwischenschicht verwendet werden kann. Ferner ist geplant, die Versuche an einer Zugprüfmaschine durchzuführen, welche genauere Meßwerte für Spannungen und Dehnungen liefert.

# Kapitel 6

## Resultate

Nachdem in den vorangehenden Kapiteln ausgehend von einer kritischen Diskussion bisheriger Ansätze ein rigoroses Delaminationsmodell auf physikalisch kohärenter Basis entwickelt wurde, soll dieses Modell nun zusammenfassend dargestellt und als Variationsungleichung formuliert werden.

Das Laminat wird beschrieben durch die Felder der Zustandsvariablen  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ ,  $r$  und  $D$  auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ . Auf Teilen des Randes  $\partial\Omega$  sind zeitabhängige kinematische und dynamische Randbedingungen gegeben:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \subset \partial\Omega \quad (6.1)$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{n}(\mathbf{x}) \perp \Gamma_t \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \subset \partial\Omega \quad (6.2)$$

$$\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset \quad (6.3)$$

Die Deformation startet aus einem unverformten, ungeschädigten Zustand.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}, t_0) = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}, t_0) = 0, \quad r(\mathbf{x}, t_0) = 0, \quad D(\mathbf{x}, t_0) = 0 \quad (6.4)$$

Es gilt das statische Kräftegleichgewicht sowie die Kompatibilitätsbedingung; die Dehnung setzt sich zusammen aus elastischem und plastischem Anteil:

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0 \quad (6.5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (6.7)$$

Das Gebiet  $\Omega$  wird zerlegt in eine Zwischenschicht  $\Omega_D$  der Dicke  $h$ , die die Delaminationsebene umgibt, und den Rest des Laminats  $\Omega_e$ . Auf  $\Omega_e$  wird ein linear-elastisches Materialverhalten angenommen ( $\boldsymbol{\varepsilon}^p = 0$ ,  $r = D = 0$ ), der Steifigkeitstensor  $\mathbf{C}$  ist schichtweise orthotrop. Die Zwischenschicht  $\Omega_D$  wird schadensmechanisch modelliert, wobei sowohl die Schädigung als auch die Elastizität isotrop

angesetzt werden. Da die Dicke  $h$  der Zwischenschicht sehr gering ist gegenüber der Dicke der Laminae, wird durch eine Linearisierung in Dickenrichtung eine zweidimensionale Darstellung eingeführt:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{u}_0(x_1, x_2) + \frac{x_3}{h} \Delta \mathbf{u}(x_1, x_2) \quad (6.8)$$

Als Kriterium für die Bildung oder das Wachstum eines makroskopischen Delaminationsrisses wird ein kritischer Wert der Schädigungsvariablen verwendet.

$$D(\mathbf{x}, t) = D_C \quad (6.9)$$

Der Makroriß wird durch Einführung zusätzlicher, innerer Oberflächen mit NEUMANN-Randbedingungen  $\mathbf{t} = 0$  dargestellt.

Das schadensmechanische Materialmodell ist bestimmt durch die Wahl der freien Energie und des plastischen Potentials. Wir verwenden ein Modell mit VON MISES- Fließregel und isotroper Verfestigung.

$$\rho f(\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, D) = \frac{1}{2} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e (1 - D) + \rho \frac{1}{2} k r^2 \quad (6.10)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}, -R, Y) = \tilde{\sigma}_{\text{eq}}^D - \sigma_y - R + \frac{Y^2}{2S(1-D)} \quad (6.11)$$

Hierin treten vier Materialparameter auf, die experimentell zu bestimmen sind. Der Steifigkeitstensor  $\mathbf{C}$ , die Fließspannung  $\sigma_y$  und die Konstante der isotropen Verfestigung  $\rho k$  sind aus einem einfachen Zugversuch zu gewinnen. Zur Ermittlung der Konstanten  $S$ , welche die Geschwindigkeit der Schädigungsentwicklung steuert, wurde in Kapitel 5 ein Verfahren vorgestellt. Im Zugentlastungsversuch läßt sich die innere Variable  $D$  aus der effektiven Steifigkeit ermitteln. Die Ergebnisse zeigen, daß die Meßgenauigkeit noch gesteigert werden muß und daß zur Bestimmung der Zwischenschichteigenschaften Versuche direkt am Matrixmaterial durchgeführt werden sollten.

Die assoziierten Variablen sind als Ableitungen der freien Energie gegeben:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e (1 - D) \quad (6.12)$$

$$R = \rho \frac{\partial f}{\partial r} = k r \quad (6.13)$$

$$-Y = \rho \frac{\partial f}{\partial D} = -\frac{1}{2} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (6.14)$$

Aus dem plastischen Potential erhält man die dissipativen Flüsse mit der Normalenregel:

$$F \lambda = 0; \quad \lambda \geq 0; \quad F \leq 0 \quad (6.15)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (6.16)$$

$$\dot{r} = \lambda \frac{\partial F}{\partial (-R)} \quad (6.17)$$

$$\dot{D} = \lambda \frac{\partial F}{\partial Y} \quad (6.18)$$

Um zu einer Darstellung zu gelangen, in der die mathematische Struktur der konstitutiven Gleichungen klarer hervortritt, wählen wir eine Formulierung als Variationsungleichung. Zunächst sind die Räume für die Zustandsvariablen zu definieren.

$$U = \{\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^3 \mid \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0\} \quad (6.19)$$

$$Q = \{\mathbf{q} = (q_{ij}) \mid q_{ij} = q_{ji}, q_{ij} \in L_2(\Omega)\} \quad (6.20)$$

$$M = L_2(\Omega) \quad (6.21)$$

$$N = \{D : \Omega \mapsto [0, D_C] \mid D \in L_2(\Omega)\} \quad (6.22)$$

$$Z = U \times Q \times M \times N \quad (6.23)$$

$$V = \{\mathbf{w} : [0, T] \mapsto Z \mid \dot{\mathbf{w}} \in Z\} \quad (6.24)$$

Die Gleichgewichtsbedingung (6.5) kann in einer schwachen Formulierung in der Form

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (1 - D) \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}(\hat{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Gamma_t \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in U \end{aligned} \quad (6.25)$$

geschrieben werden.

Um die dissipativen Prozesse zu beschreiben, gehen wir nicht von der Normalenregel [20, 27, 32], sondern von der dualen Darstellung [25, 54] durch das Pseudodissipationspotential  $\Psi$  (2.34a) aus. Im Falle eines gegen die Reskalierung der Zeit invarianten Problems läßt sich zeigen, daß dieses Potential gleich der Dissipationsleistung  $\mathcal{D}$  ist.

$$\mathbf{X}^i \in \partial\Psi(\dot{\mathbf{x}}^i) = \partial\mathcal{D}(\dot{\mathbf{x}}^i) \quad (6.26)$$

$$\mathbf{x}^i = (\boldsymbol{\varepsilon}^p, r, D), \quad \mathbf{X}^i = (\boldsymbol{\sigma}, -R, Y) \quad (6.27)$$

Mit der Definition des Subdifferentials folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \hat{r}, \hat{D}) - \mathcal{D}(\boldsymbol{\varepsilon}^p, r, D) - \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + R(\hat{r} - r) - Y(\hat{D} - D) \geq 0 \\ & \forall \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in Q, \hat{r} \in M, \hat{D} \in M \end{aligned} \quad (6.28)$$

Durch Integration und Addition von Gleichung (6.25) erhält man

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \hat{r}, \hat{D}) - \mathcal{D}(\boldsymbol{\varepsilon}^p, r, D) + \right. \\
& \quad + (1 - D) \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) - (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)) \\
& \quad \left. + k r (\hat{r} - r) - \frac{1}{2} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) (\hat{D} - D) \right] d\Omega \\
& \geq \int_{\Omega} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}(\hat{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}) d\Gamma_t \\
& \forall \hat{\mathbf{u}} \in U, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in Q, \hat{r} \in M, \hat{D} \in M
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir folgende Größen ein:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, r, D) \in Z, \quad \hat{\mathbf{w}} = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \hat{r}, \hat{D}) \in Z \tag{6.30}$$

$$j(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathcal{D}(\boldsymbol{\varepsilon}^p, r, D) d\Omega \tag{6.31}$$

$$a(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}}) = \int_{\Omega} (1 - D) \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) d\Omega \tag{6.32}$$

$$b(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \hat{D} d\Omega \tag{6.33}$$

$$\langle \mathbf{l}_{\Omega}(t), \mathbf{w} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \mathbf{u} d\Omega \tag{6.34}$$

$$\langle \mathbf{l}_{\Gamma}(t), \mathbf{w} \rangle = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}(t) \mathbf{u} d\Gamma_t \tag{6.35}$$

Damit erhält das Materialmodell folgende Form: Gesucht ist ein  $\mathbf{w} \in V$ , so daß für alle  $\hat{\mathbf{w}} \in Z$  und  $t \in [0, T]$  gilt

$$\begin{aligned}
& j(\hat{\mathbf{w}}) - j(\dot{\mathbf{w}}(t)) + a(\mathbf{w}(t), \hat{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{w}}(t)) - b(\mathbf{w}(t), \hat{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{w}}(t)) \\
& \geq \langle \mathbf{l}_{\Omega}(t), \mathbf{w}(t) \rangle + \langle \mathbf{l}_{\Gamma}(t), \mathbf{w}(t) \rangle
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Für den Spezialfall verschwindender Schädigung ( $D, \dot{D} = 0$ ) ist die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Problems sowie die Stabilität eines Lösungsalgorithmus bereits bewiesen [25]. Ohne Schädigung verschwindet der Term

$$b(\mathbf{w}(t), \hat{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{w}}(t)), \quad \text{und} \quad a(\mathbf{w}(t), \hat{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{w}}(t))$$

vereinfacht sich zu einer symmetrischen, beschränkten, H-elliptischen Bilinearform.  $\mathbf{l}_{\Omega}(t)$  und  $\mathbf{l}_{\Gamma}(t)$  sind - auch mit Schädigung - beschränkte Funktionale; das Funktional  $j$  ist konvex, positiv homogen, nichtnegativ und unterhalbstetig (lower semicontinuous). Durch die Einführung der Schädigungsvariablen tritt in  $a(\mathbf{w}(t), \hat{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{w}}(t))$  ein zusätzlicher Faktor  $(1 - D)$  auf. Da dieser beschränkt ist ( $0 < 1 - D_C < 1 - D \leq 1$ ), spielt er vermutlich nur die Rolle eines Parameters, ohne qualitativ neue Probleme für das Lösungsverfahren hervorzurufen. Im Gegensatz dazu verdient der im schadensmechanischen Modell hinzutretende Term

$b(\mathbf{w}(t), \hat{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{w}}(t))$  eine genaueren Untersuchung hinsichtlich seiner Konsequenzen für die mathematischen Eigenschaften des Problems.

Das schadensmechanische Modell wurde ursprünglich über das plastische Potential definiert (6.11). Um die Variationsungleichung (6.36) vollständig zu bestimmen, muß daher noch die Dissipationsfunktion  $\mathcal{D}$  berechnet werden. Hierzu verwenden wir das Prinzip der maximalen Dissipationsleistung:

$$\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{r}, \dot{D}) = \sup\{g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{r}, \dot{D}; \boldsymbol{\sigma}, R, Y) \mid \forall(\boldsymbol{\sigma}, R, Y) \in M_F\} \quad (6.37)$$

$$M_F = \{(\boldsymbol{\sigma}, R, Y) \in V \times M \times M \mid F(\boldsymbol{\sigma}, -R, Y) \leq 0\}$$

$$g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{r}, \dot{D}; \boldsymbol{\sigma}, R, Y) = \boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P - R \dot{r} + Y \dot{D} \quad (6.38)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}, -R, Y) = \frac{\sigma_{\text{eq}}^D}{1-D} - \sigma_y - R + \frac{Y^2}{2S(1-D)} \quad (6.39)$$

Da  $g$  linear und  $M_F$  konvex ist, wird das Supremum auf dem Rand von  $M_F$  angenommen. Löst man die Fließbedingung nach  $R$  auf, so erhält man

$$\mathcal{D} = \sup \left\{ \boldsymbol{\sigma}^D \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{pD}} + \left( \sigma_y - \frac{\sigma_{\text{eq}}^D}{1-D} - \frac{Y^2}{2S(1-D)} \right) \dot{r} + Y \dot{D} \mid \forall \boldsymbol{\sigma} \in V, Y \in M \right\} \quad (6.40)$$

Ferner kann man leicht zeigen, daß

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^D \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{pD}} &\leq \dot{r} \frac{\sigma_{\text{eq}}^D}{1-D} \\ \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{eq}}^{\text{pD}} &\leq \frac{\dot{r}}{1-D} \quad \text{oder} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{pD}} = 0, \end{aligned} \quad (6.41)$$

und erhält schließlich

$$\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{r}, \dot{D}) = \begin{cases} 0 & \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{pD}} = 0 \\ \sigma_y \dot{r} + \frac{\dot{D}^2}{2S(1-D)\dot{r}} & \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{eq}}^{\text{pD}} \leq \frac{\dot{r}}{1-D} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.42)$$

Somit ist das Materialgesetz in Form einer Variationsungleichung gegeben, so daß bei der numerischen Lösung auf Methoden zurückgegriffen werden kann, die für ähnliche mathematische Probleme entwickelt wurden.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung

Ziel des Projekts ist die Modellierung der Entstehung und des Wachstums von Delaminationen in geschichteten Faserverbundwerkstoffen. Es wurde ein Modell entwickelt, das die physikalisch nichtlinearen Prozesse adäquat darstellt und eine numerische Lösung unter vertretbarem numerischem Aufwand ermöglicht. Das Modell verknüpft eine diskrete Beschreibung des makroskopischen Delaminationsrisses mit einer schadensmechanischen Kontinuumsdarstellung der Mikrorisse in der Prozeßzone.

Bisher veröffentlichte schadensmechanische Delaminationsmodelle beinhalten Materialgesetze, die überwiegend als heuristisch zu bezeichnen sind. In diesem Projekt wurde ein thermomechanisches Modell mit inneren Variablen formuliert, das die Hauptsätze der Thermodynamik, die Forderung zeitlicher und räumlicher Lokalität, das Postulat der maximalen Dissipationsleistung sowie eine Symmetriebedingung bezüglich Reskalierung der Zeit erfüllt. Das Materialverhalten der Prozeßzone wurde zunächst als isotrop angenommen und räumlich lokal modelliert. Anhand der numerischen Resultate wird zu entscheiden sein, wann die Einführung einer tensoriellen, nicht-lokalen Schädigungsvariablen notwendig ist.

Es konnte gezeigt werden, daß eine dreidimensionale Darstellung der Prozeßschicht in Verbindung mit Laminae, die als homogenes Kontinuum modelliert werden, nicht sinnvoll ist. Stattdessen wurde ein in Dickenrichtung linearer Verschiebungsansatz für die Zwischenschicht vorgeschlagen. Der Beziehung zu Grenzflächenmodellen, die in Arbeiten von LADEVEZE und anderen verwendet werden, wurde aufgezeigt. Ob die den Grenzflächenmodellen zu Grunde liegenden Näherungen (insbesondere nahe der Delaminationsfront) gerechtfertigt sind, wird anhand der numerischen Ergebnisse überprüft werden. An dem Grenzflächenmodell von LEMAITRE wurde auf ein grundsätzliches, bislang unbeachtetes Problem der Parameteridentifikation hingewiesen.

Die Wahl einer kritischen, schadensmechanischen Energiefreisetzungsrates als Reißfortschrittskriterium wurde aus physikalischen Gründen verworfen. Im Gegensatz zu anderen Arbeiten ist in unserem Modell das Wachstum des Delaminationsrisse an einen kritischen Wert der Schädigungsvariablen gekoppelt. Der Makroriß wird durch Einführung zusätzlicher Oberflächen geometrisch modelliert, dies ist aus numerischen Gründen einer Kontinuumsdarstellung vorzuziehen.

Zur Bestimmung der schadensmechanischen Materialparameter wurden Zugentlastungsversuche an unidirektionalen CFK-Proben durchgeführt. Die Ergebnisse legen eine Erhöhung der Meßgenauigkeit und die Durchführung von Experimenten an Epoxid-Proben nahe.

Das schadensmechanische Modell wurde analog zu elasto-plastischen Materialmodellen als Variationsungleichung formuliert. Dieses Vorgehen bietet den Vorteil, daß bei der numerischen Behandlung auf bewährte Verfahren zurückgegriffen werden kann.

Die numerische Umsetzung des Modells steht im Mittelpunkt der zweiten Projektphase. Aufgrund der erheblichen Größenunterschiede zwischen Laminae und Zwischenschicht sowie der unterschiedlichen Materialmodelle werden Gebietszerlegungsmethoden eingesetzt. Die Entwicklung der Algorithmen zur Gebietszerlegung erfolgt in Zusammenarbeit mit dem Projekt C5 (Prof. Wendland) im SFB 404. Die numerischen Resultate werden mit bruchmechanischen Simulationen, welche von unseren Kooperationspartnern durchgeführt werden, und mit eigenen Experimenten verglichen.

# Literaturverzeichnis

- [1] O. Allix, F. Bras and J.-F. Deü. A first damage modelling of SiC-SiC laminates under dynamic loading. *Journal de physique IV*, **C8**, 527–531.
- [2] O. Allix, L. Daudeville, J. L. Neau, and P. Ladeveze. Necessity of using damage mechanics for the analysis of delamination specimen. In D. R. J. Owen and E. Onate (editors), *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications Proc. of the Fourth Int. Conf.*, pages 1057–1068 (1995).
- [3] O. Allix and P. Ladeveze. Interlaminar modelling for the prediction of delamination. *Composite Structures*, **22**, 235–242 (1992).
- [4] O. Allix, P. Ladeveze, E. L. Dantec, and E. Vittecoq. Damage mechanics for composite laminates under complex loading. In J. P. Boehler (editor), *Yielding, Damage, and Failure of Anisotropic Solids*, volume EGF5, pages 551–569. Mechanical Engineering Publ. (1990).
- [5] D. Aurich. Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte. Forschungsbericht 192, BAM, Berlin (1993).
- [6] Z. P. Bazant. Why continuum damage is nonlocal: micromechanics arguments. *J. Engng. Mech.*, **117**(5), 1070–1087 (1991).
- [7] Z. P. Bazant. Nonlocal damage theory based on micromechanical crack interactions. *J. Engng. Mech.*, **120**(3), 593–617 (1994).
- [8] Z. P. Bazant and G. Pijaudier-Cabot. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *J. App. Mech.*, **55**, 287–239 (1988).
- [9] W. L. Bradley. Relationship of matrix toughness to interlaminar fracture toughness. In K. Friedrich (editor), *Application of Fracture Mechanics to Composite Materials*, volume 6 of *Composite Material Series*, chapter 5, pages 159–187. Elsevier Science Publ., Amsterdam (1989).
- [10] J. C. Brewer and P. A. Lagace. Failure of graphite/epoxy induced by delamination. In *Advanced materials. Looking ahead the 21. century Int. SAMPE technical conf. 22*, pages 532–545 (1990).

- [11] D. S. Cairns, P. J. Minguet and M. G. Abdallah. Theoretical and experimental response of composite laminates with delaminations loaded in compression. In *The 33rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ACE structures, structural dynamics and materials conf., paper 92-2223*, pages 1–9. (1992).
- [12] W. J. Cantwell and J. Morton. The significance of damage and defects and their detection in composite materials: a review. *J. of Strain Analysis*, **27**(1), 29–42 (1992).
- [13] Z. Chen and H. L. Schreyer. Nonlocal damage models for interface problems. *Int. J. Solids Structures*, **31**(9), 1241–1260 (1994).
- [14] C. L. Chow and J. Wang. An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics. *Int. J. Fracture*, **33**, 3–16 (1987).
- [15] C. L. Chow and J. Wang. A continuum damage mechanics model for crack initiation in mixed mode ductile fracture. *Int. J. Fracture*, **47**, 145–160 (1991).
- [16] A. Corigliano. Formulation, identification and use of interface models in the numerical analysis of composite delamination. *J. Solids Structures*, **30**(20), 2779–2811 (1993).
- [17] J. H. Crews, K. N. Shivakumar and I. S. Raju. A fibre-resin micromechanics analysis of the delamination in a double cantilever beam specimen. In *Phase interaction in composite materials, The 2nd Int. Symp. COMP '88*, pages 396–405. (1992).
- [18] R. de Borst and H. B. Mühlhaus. Continuum models for discontinuous media. In J. G. M. van Mier, J. G. Rots and A. Bakker (editors), *Proc. Int. RILEM/ESIS Conf. on Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics*, pages 601–618. Noordwijk (1991).
- [19] J. H. P. de Vree, W. A. M. Brekelmans and M. A. J. van Gils. Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers & Structures*, **55**(4), 581–588 (1995).
- [20] G. Duvaut and J. L. Lions. *Inequalities and Mechanics and Physics*. Springer (1976).
- [21] A. Feldmüller. Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua. Technical Report 75, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik (1991).
- [22] A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **A221**, 163–197 (1921).

- [23] A. L. Gurson. Porous rigid-plastic materials containing rigid inclusions - yield function, plastic potential and void nucleation. *Fracture*, **2**, 357–364 (1977).
- [24] R. Häcker, P. Gerwien, D. Klingbeil, and G. Moussavi-Zadeh. Duktilen Rißfortschritt simulieren. *Materialprüfung*, **38**(3), 80–84 (1996).
- [25] W. Han, B. D. Reddy and G. C. Schroeder. Qualitative and numerical analysis of quasistatic problems in elastoplasticity. in review.
- [26] U. Herding and G. Kuhn. A field boundary element formulation for damage mechanics. to appear in: *Engineering Analysis with Boundary Elements*, (1996).
- [27] I. Hlavacek, J. Haslinger, J. Necas, and J. Lovisek. *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*. Springer (1988).
- [28] C. Hwu, C. J. Kao and L. E. Chang. delamination fracture criteria for composite laminates. *J. Composite Materials*, **29**(15), 1962–1987 (1995).
- [29] L. M. Kachanov. Time of the ruture process under creep conditions. *Izvestiya Akademia Nauk, USSR Otd. Tekh.*, **8**, 26–31 (1958).
- [30] P. A. Klumpp. *Delaminationsuntersuchungen an Carbonfaser/Epoxid-Verbunden mit kohärentoptischen Verfahren*. Dissertation, Karlsruhe University (1990).
- [31] C. Könke. Coupling of a micromechanically based void-growth model and a macro crack model for the simulation of damage evolution in ductile materials. Technical Report 94-4, Division of Structural Engineering, Ruhr-University Bochum (1994).
- [32] M. S. Kuczma and J. R. Whiteman. Variational inequality for flow theory plasticity. *Int. J. Engng. Sci.*, **33**(8), 1153–1169 (1995).
- [33] I. Laalal and K. Sab. A stochastic nonlocal damage model. *Int. J. Fracture*, **76**, 121–140 (1996).
- [34] P. Ladeveze. A damage approach for composite structures: theory and identification. In A. Vautrin and H. Sol (editors), *Mechanical identification of composites*, pages 44–57. (1990). 92A1699.
- [35] P. Ladeveze, O. Allix and L. Daudeville. Mesomodelling of damage for laminate composites: application to delamination. In G. et. al. (editor), *Inelastic deformation of composite materials*, pages 607–622. New York (1991).

- [36] J. Lemaitre. *A Course on Damage Mechanics*. Springer Verlag, Berlin (1992).
- [37] J. Lemaitre. Endommagement et rupture des interfaces. *PEAU*, **94.1023/A** (1994).
- [38] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [39] J. Lemaitre and I. Doghri. Damage 90: a post processor for crack initiation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **115**, 197–232 (1994).
- [40] W. F. Li and S. Y. Du. Modelling of anisotropic damage at a crack tip in composite laminates. *Engng. Fracture Mec.*, **45(3)**, 381–385 (1993).
- [41] X. F. Luo and S. Aoki. Crack-growth on elastic-plastic bimaterial interfaces. *Int. J. Fracture*, **57**, 365–379 (1992).
- [42] G. A. Maugin. *The thermomechanics of plasticity and fracture*. University of Cambridge (1992).
- [43] J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot and C. Saouridis. Size effect and continuous damage in cementitious materials. *Int. J. Fracture*, **51**, 159–173 (1991).
- [44] S. Murakami and N. Ohno. A constitutive equation of creep damage in polycrystalline materials. Euromech colloquium 111, Marianske Lazne (1978).
- [45] J. Murzewski. Cumulative damage of solids for random stress. *Engng. Fracture Mec.*, **8** (1976).
- [46] K. F. Nilsson and A. E. Giannakopoulos. Finite element simulation of delamination growth. In *Proc. of the first Int. Conf. on Computer-Aided Assessment and Control of Localized Damage*, pages 299–313 (1990).
- [47] P. Pawliska. *Stabiles Rißwachstum in duktilen Materialien bei kombinierter Normal- und Schubbeanspruchung*. Number 194 in VDI-Fortschrittberichte, Reihe 18: Mechanik/Bruchmechanik. VDI Verlag, Düsseldorf (1996).
- [48] G. Pijaudier-Cabot and Z. P. Bazant. Nonlocal damage theory. *J. Engng. Mech.*, **113(10)**, 1512–1533 (1997).
- [49] N. Point and E. Sacco. A delamination model for laminated composites. *Int. J. Solids Structures*, **33(4)**, 483–509 (1996).
- [50] B. Prinz. *Experimentelle Ermittlung und numerische Simulation interlaminaarer Spannungskonzentrationen in kohlefaserverstärkten Polymeren*. Dissertation, Universität Karlsruhe (1993).

- [51] B. Prinz, R. Meyer and E. Schnack. Finite element simulation and experimental determination of interlaminar stresses in fibrous composites. In V. Hauk, H. P. Hougardy and E. Macherauch (editors), *Residual Stresses*, pages 623–632. DGM Informationsgesellschaft mbH (1992).
- [52] Z. Qian, S. Takezono and K. Tao. A nonlocal damage mechanics approach to high temperature fatigue crack growth. *Engng. Fracture Mec.*, **53**(4), 535–543 (1996).
- [53] J. R. Rashid. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, **7**, 334–344 (1968).
- [54] B. D. Reddy and J. B. Martin. Algorithms for the solution of internal variable problems in plasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **93**, 253–273 (1991).
- [55] S. Rinderknecht. *Delamination in Faserverbundplatten. Ein vereinfachtes Berechnungsmodell*. Dissertation, Universität Stuttgart (1994).
- [56] B. V. Sankar and S. Hu. Dynamic delamination propagation in composite beams. *J. Composite Materials*, **25**, 1414–1426 (1991).
- [57] J. C. J. Schellekens and R. de Borst. Nonlinear fracture mechanics of mode-I and mixed-mode free edge delamination in carbon-epoxy composites. In *Advanced Composites '93 ICACM, Warrendale: TMS, Minerals, Metals, Materials*, pages 359–366. (1993).
- [58] E. Schnack and P. A. Klumpp. Shearographic and holographic defect detection for composite materials. In R. J. Pryputniewicz (editor), *Proceedings of SPIE's 1991 Conference on Laser Interferometry IV: Computer-Aided Interferometry*, volume 1553, pages 332–347. (1991).
- [59] F. Sidoroff. Description of anisotropic damage application to elasticity. In *Physical nonlinearities in structural analysis*, pages 237–244, Berlin (1981). IUTAM, J Hult.
- [60] S. Staroske. Bestimmung von Delaminationen mit einer inversen Methode. Technical report, Institute of Solid Mechanics, University of Karlsruhe (1996).
- [61] P. Steinmann. Theory and numerics of ductile micropolar elastoplastic damage. *Int. J. Numerical Meth. Engng.*, **38**, 583–606 (1995).
- [62] C. T. Sun and C. J. Jih. A quasi-static treatment of delamination crack propagation in laminates subjected to low velocity impact. In *Proc. of the American Society for Composites 7th Techn. Conf., Composites Materials Mechanics and Processing*, pages 949–961. ASC (1992).

- [63] N. Takeda and S. Ogihara. Initiation and growth of delamination from the tips of transverse cracks in cfrp cross-ply laminates. *Composites Sci. Tec.*, **52**, 309–318 (1994).
- [64] N. Takeda, S. Ogihara and A. Kobayashi. Experimental micromechanical approach to failure process in cfrp cross-ply laminates. In *Proceedings of the American Society for Composites, 9th Techn. Conf.*, pages 89–96. Lancaster Technomic Publ. (1994).
- [65] R. Taktak, E. P. Scott and J. V. Beck. Optimal experimental designs for estimating thermal properties of composite materials. In *Proc. of the ASME 5th technical conference, 12.-14.6.1990*, pages 755–764. ASME (1990).
- [66] V. Tvergaard and A. Needleman. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Met.*, **32**(1), 157–169 (1984).
- [67] V. Tvergaard and A. Needleman. Effects of nonlocal damage in porous plastic solids. *Int. J. Solids Structures*, **32**(8/9), 1063–1077 (1995).
- [68] G. Z. Voyiadjid and P. I. Kattan. Ductile fracture of fibre-reinforced metal matrix laminates using an anisotropic coupled model of damage and finite plasticity. In *Enhancing analysis techniques for composite materials the winter annual meeting of the ASME, 1.-6.12.1991*, pages 251–259. ASME (1991).
- [69] G. Z. Voyiadjis and P. I. Kattan. A continuum micromechanics damage model for metal-matrix composites. In *Composite Material Technology, PD-Vol. 45*, pages 83–95. ASME (1992).
- [70] A. S. D. Wang. Fracture analysis of interlaminar cracking. In N. P. Pagano (editor), *Interlaminar response of composite materials*, volume 5 of *Composite Material Series*, chapter 2, pages 69–109. (1989).
- [71] S. S. Wang. Delamination crack growth in unidirectional fibre-reinforced composites under static and cyclic loading. In S. W. Tsai (editor), *Composite materials: testing and design (fifth conf.) ASTM STP 674*, pages 642–663. ASTM (1979).
- [72] P. A. Wawrzynek and A. R. Ingraffea. Discrete modeling of crack propagation. theoretical aspects and implementation issues in two and three dimensions. Technical Report 91-5, Department of Structural Engineering, Cornell University (1991).
- [73] M. Wörtler. *Interlaminare Spannungskonzentrationen in Faserverbundwerkstoffen*. Dissertation, Universität Karlsruhe (1988).

- [74] S. Xia, S. Takezono and K. Tao. Nonlocal damage near crack tip. *Int. J. Fracture*, **62**, 87–95 (1993).
- [75] H. Yuan and M. Eng. *Untersuchung bruchmechanischer Parameter für elastisch-plastisches Rißwachstum*. Number 82 in VDI-Fortschrittberichte, Reihe 18: Mechanik/Bruchmechanik. VDI Verlag, Düsseldorf (1990).
- [76] H. Ziegler. Some extremum principles in irreversible thermodynamics with application to continuum mechanics. volume 4 of *Progress in solid mechanics*, chapter 2. North-holland Publishing Co., Amsterdam (1963).