Inferenz mittels interpolierender Regeln - ein neues Verfahren zur Beschreibung von Fuzzy-Systemen[1]

E. Schäfers
Universität Karlsruhe, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme
(Prof. Dr.-Ing. V. Krebs)

Kurzfassung

Mit Hilfe der Fuzzy-Logik kann für ein System, dessen Verhalten lediglich durch eine linguistische Beschreibung in Form von Wenn-Dann Regeln charakterisiert ist, anhand des gegebenen Regelsatzes ein unscharfes Streckenmodell erstellt werden, das eine Fuzzy-Reglersynthese sowie eine Analyse der Strecke ermöglicht [2].

Als Inferenzverfahren zur mathematischen Beschreibung eines Regelsatzes hat sich in der Anwendung bei Fuzzy-Reglern die Methode der Aktivierungsgrade [1] durchgesetzt. Die mit dieser Methode ermittelte unscharfe Ausgangsgröße ist im allgemeinen von anderer Form als eine der Zugehörigkeitsfunktionen der Konklusionen. Sind sämtliche Konklusionen beispielsweise unscharfe Zahlen, kann die unscharfe Ausgangsgröße gewöhnlich nicht der Menge der unscharfen Zahlen zugeordnet werden. Ist die Ausgangsgröße Grundlage weiterer Untersuchungen oder wird sie weiterverarbeitet (beispielsweise in einem Fuzzy-System rückgekoppelt), so ist zu fordern, daß die ermittelte Ausgangsgröße einen der menschlichen Schlußweise entsprechenden Kompromiß zwischen zur Verfügung stehenden Regeln darstellt. Die linguistischen Werte der Prämissen und Konklusionen werden in den meisten Fällen durch Zugehörigkeitsfunktionen einer bestimmten Klasse, beispielsweise trianguläre unscharfe Zahlen, dargestellt. Aus einer unscharfen Eingangsgröße, deren Zugehörigkeitsfunktion derselben Klasse wie die Prämissen- und Konklusionszugehörigkeitsfunktionen angehört, ermittelt die in diesem Beitrag eingeführte Inferenzmethode eine ebenfalls dieser Klasse angehörende Ausgangsgröße, was eine linguistische Rückinterpretation erleichtert. Die Grundidee des Verfahrens ist, daß die Regeln des vorliegenden Regelsatzes als "Stützstellen" für eine interpolierende Regel dienen, die in Abhängigkeit von den jeweiligen Eingangsgrößen aufgestellt und ausgewertet wird.

Das vorgestellte Inferenzverfahren bildet die Grundlage für die Beschreibung und Analyse unscharfer Systeme. Anhand überschaubarer Beispiele werden das Inferenzverfahren sowie Ansätze zur Stabilitätsuntersuchung veranschaulicht.

---

[1]Diese Arbeit wird von der DFG unter Kr 949/5 gefördert

1 Einführung

Kern der meisten regelungstechnischen Anwendungen der Fuzzy-Logik ist ein Regelsatz mit unscharfen Prämissen und Konklusionen, dessen Auswertung unter Berücksichtigung der aktuellen Eingangsgrößen unscharfe Ausgangsgrößen liefert. Für die Auswertung des Regelsatzes, der Inferenz, gibt es verschiedene Methoden, die eine entsprechende Interpretation der Regeln voraussetzen.

Die am meisten in der Regelungstechnik verbreitete Inferenzmethode ist die Methode der Aktivierungsgrade. Dabei wird die Zugehörigkeitsfunktion der Ausgangsgröße als Vereinigung (Maximumaggregation) sämtlicher Konklusionszugehörigkeitsfunktionen, die entweder mit ihrem Aktivierungsgrad multipliziert (Produktaktivierung) oder auf ihren Aktivierungsgrad beschränkt (Minimumaktivierung) sind, ermittelt. Der Aktivierungsgrad α einer Regel mit der auf dem Grundbereich x definierten Prämisse A wird bei Anliegen der Eingangsgröße $\tilde{\mathrm{A}}$ gemäß

$$\alpha = \sup_{\mathrm{x}} \min\left[\mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}), \mu_{\tilde{\mathrm{A}}}(\mathrm{x})\right]$$

bestimmt. α ist der Grad der "maximalen Übereinstimmung" [1] zwischen A und $\tilde{A}$ oder der Möglichkeitsgrad, der der unscharfen Menge $\tilde{A}$ unter der unscharfen Schranke A zugeordnet wird [8]. Eine Konklusionszugehörigkeitsfunktion trägt somit um so mehr zur Ausgangszugehörigkeitsfunktion bei, je größer die Übereinstimmung zwischen der Eingangsgröße und der zugehörigen Prämisse ist.

Die Ausgangszugehörigkeitsfunktion ist im allgemeinen von anderer Form als eine der Zugehörigkeitsfunktionen der Konklusionen. Werden beispielsweise sämtliche linguistischen Werte, insbesondere die der Konklusionen, durch unscharfe Zahlen repräsentiert, gehört die unscharfe Ausgangsgröße im allgemeinen nicht zur Menge der unscharfen Zahlen; die unscharfe Ausgangsgröße kann deshalb im allgemeinen nicht als linguistischer Wert interpretiert werden

Diese fehlende linguistische Rückinterpretierbarkeit spielt dann keine Rolle, wenn die Ausgangsgröße defuzzifiziert wird, da in diesem Fall ein einziger scharfer Wert (beispielsweise die Schwerpunktabszisse der Ausgangszugehörigkeitsfunktion) die Information über den aus den verschiedenen Regeln resultierenden Kompromiß trägt. Wird dagegen die unscharfe Ausgangsgröße weiterverarbeitet, ist eine interpretierbare unscharfe Konklusion zu fordern, die einen der menschlichen Schlußweise entsprechenden Kompromiß betroffener Regeln darstellt. Eine Weiterverarbeitung unscharfer Ausgangsgrößen erfolgt z.B. bei Fuzzy-Systemen, deren unscharfe Ausgangsgröße rückgekoppelt wird, oder bei Beratungssystemen, deren Empfehlung als Ergebnis der Auswertung eines Fuzzy-Regelsatzes in Form einer unscharfen Menge vorliegt, die interpretierbar sein muß. Auf Fuzzy-Systeme wird in Abschnitt 3 näher eingegangen.

Ein einfaches Beispiel soll die angesprochene Problematik verdeutlichen:
Ein Anlagenfahrer beschreibt seine Vorgehensweise zur Regelung eines Prozesses unter anderem durch die beiden folgenden Regeln:

WENN Druck "niedrig" DANN Ventil "weit auf"
WENN Druck "hoch" DANN Ventil "fast zu"

Die Zugehörigkeitsfunktionen der linguistischen Variablen Druck p und Ventil φ sind (Bild 1) trianguläre unscharfe Zahlen.

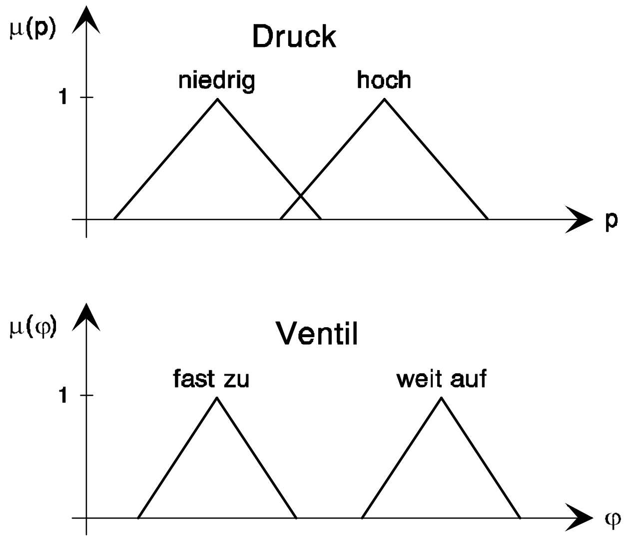

Bild 1: Zugehörigkeitsfunktionen der linguistischen Variablen Druck und Ventil

Nimmt der Druck einen mittleren Wert an, setzt sich nach der Methode der Aktivierungsgrade die Ausgangsgröße aus den beschränkten Konklusionszugehörigkeitsfunktionen zusammen. Bild 2 zeigt die unscharfe Eingangsgröße Druck "mittel" und das Ergebnis der Regelauswertung (fett) nach der Methode der Aktivierungsgrade mit Minimumaktivierung und Maximumaggregation.
Die unscharfe Ausgangsgröße läßt sich nicht in die Menge der triangulären unscharfen Zahlen einordnen, das Ergebnis der Regelauswertung ist linguistisch nicht interpretierbar: Der unscharfen Ausgangsgröße kann kein die Ventilstellung kennzeichnender linguistischer Wert zugewiesen werden. Wird die unscharfe Ausgangsgröße als unscharfe Möglichkeitsverteilung für die scharfe Größe "Ventilstellung" betrachtet, so bedeutet

dies, daß nur Ventilstellungen im Bereich des Supports der unscharfen Mengen "Ventil fast zu" bzw. "Ventil weit auf" mögliche Handlungen des Anlagenfahrers wären!

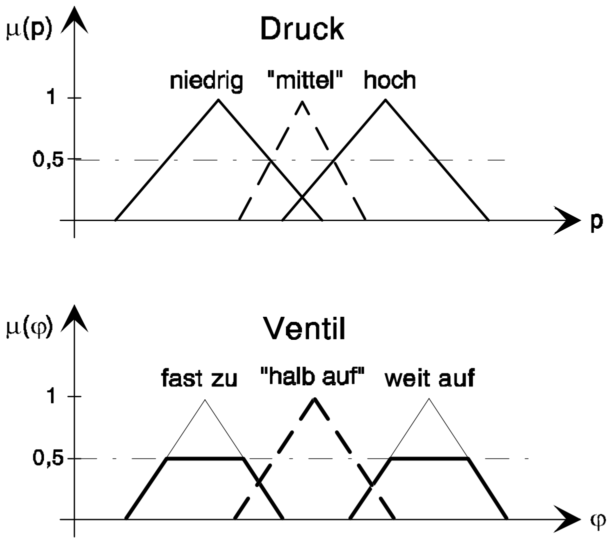

Bild 2: Verschiedene Ausgangsgrößen bei unscharfer Eingangsgröße "Druck mittel"

Gestrichelt ist in Bild 2 eine unscharfe Ausgangsgröße eingezeichnet, die einer der menschlichen Denkweise näherkommende Auswertung der Regeln darstellt. Dabei wird davon ausgegangen, daß der Anlagenfahrer im Bereich zwischen einem niedrigen und hohen Druck eine Ventilstellung zwischen den Werten "fast zu" und "weit auf" einstellt. Wächst der Druck von einem kleinen auf einen großen Wert, verringert der Anlagenfahrer die Ventilstellung monoton von "weit auf" auf "fast zu". Würde sich der Anlagenfahrer nicht so verhalten, müßten zusätzliche Regeln zur Nachbildung seiner Strategie eingefügt werden. Die unscharfe Eingangsgröße Druck "mittel" ist eine trianguläre unscharfe Zahl, die zwischen den unscharfen Prämissen Druck "hoch" und Druck "niedrig" liegt, deshalb ist die unscharfe Ausgangsgröße eine trianguläre unscharfe Zahl zwischen den unscharfen Konklusionen Ventil "weit auf" und Ventil "fast zu", die beispielsweise durch den linguistischen Wert "halb auf" beschrieben werden kann. Die Ausgangsgröße ist linguistisch interpretierbar, ihre Zugehörigkeitsfunktion gehört derselben Klasse an wie die Zugehörigkeitsfunktionen der linguistischen Werte der Eingangsgröße. Je "näher" die unscharfe Eingangsgröße an einer der unscharfen Prämissen liegt, um so "näher" ist die unscharfe Ausgangsgröße an der entsprechenden Konklusion.

Im folgenden Abschnitt 2 wird ein neues Inferenzverfahren mittels interpolierender Regeln vorgestellt, womit eine dieser Interpretation eines Regelsatzes entsprechende Auswertung unscharfer Wenn-Dann Regeln erfolgen kann.

2 Inferenz mittels interpolierender Regeln

Bei diesem Inferenzverfahren wird jede Regel des Regelsatzes als "Stützstelle" aufgefaßt, die zur Berechnung interpolierender Regeln herangezogen wird. Abhängig von den Eingangsgrößen werden eine oder mehrere interpolierende Regeln berechnet, deren Auswertung die unscharfe Ausgangsgröße ergibt. Einer interpolierenden Regel werden eine interpolierende Prämisse und eine interpolierende Konklusion, die sich durch Interpolation oder Extrapolation zwischen Prämissen und Konklusionen des Regelsatzes ergeben, zugeordnet.

2.1 Voraussetzungen

Eine Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Verfahrens ist, daß die den linguistischen Werten von Prämisse und Konklusion zugeordneten unscharfen Mengen sowie die unscharfen Eingangsgrößen so beschrieben sind, daß deren Zugehörigkeitsfunktionen einer Klasse angehören, die durch eine endliche Zahl von Stützstellen eindeutig charakterisiert ist. Beispiele dafür sind unscharfe Zahlen, deren Zugehörigkeitsfunktionen in L/R-Darstellung oder als Gaußsche Glockenkurve vorliegen. In diesem Beitrag wird von unscharfen Zahlen $\left\langle v_0; v_1, v_2 \right\rangle$ mit triangulären, normierten Zugehörigkeitsfunktionen (Bild 3) ausgegangen, die durch die Koordinaten v_1 und v_2 des linken und rechten Fußes sowie des Centers v_0 eindeutig beschrieben sind.

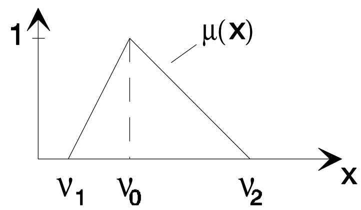

Bild 3: Trianguläre unscharfe Zahl

Die Koordinaten der interpolierenden Prämisse und interpolierenden Konklusion sowie der Ausgangsgröße ergeben sich durch Interpolation aus den Koordinaten der Prämissen- bzw Konklusionszugehörigkeitsfunktionen einzelner Regeln. Eine Interpolation ist nur möglich, wenn die Koordinaten des rechten und linken Fußes sowie des Centers benachbarter Prämissenzugehörigkeitsfunktionen jeweils voneinander verschieden sind, was deshalb vorausgesetzt wird. Das Verfahren wird im folgenden anhand eines Fuzzy-Regelsatzes mit einer Eingangsgröße und einer Ausgangsgröße erläutert, die Vorgehensweise ist bei Systemen mit mehreren Ein- und Ausgangsgrößen analog. Weiterhin wird angenommen, daß die Center k_0^i aller Konklusionen K^i mit den Koordinaten $\left\langle k_0^i; k_1^i, k_2^i \right\rangle$ voneinander verschieden sind und aus $k_0^i < k_0^j$ $k_1^i \le k_1^j$ sowie $k_2^i \le k_2^j$ folgt. Diese

Voraussetzung ist nicht zwingend, erspart aber die Betrachtung einiger Spezialfälle und hilft so, die Übersichtlichkeit der Darstellung zu wahren.

2.2 Bestimmung und Auswertung einer interpolierenden Regel

Die Berechnung einer interpolierenden Regel erfolgt unter Berücksichtigung der beiden Regeln des Regelsatzes, zwischen deren Prämissen die Eingangsgröße liegt. Ein Maß dafür, inwieweit die Parameter der Prämissenzugehörigkeitsfunktion und der Konklusionszugehörigkeitsfunktion einer Regel die Zugehörigkeitsfunktionen der interpolierenden Prämisse und der interpolierenden Konklusion beeinflußt, ist der relative Abstand der unscharfen Eingangsgrößen zur entsprechenden Prämisse. Als Maß für den Abstand d zweier unscharfer Zahlen A_1, A_2 wird der Betrag der Differenz zwischen den Centern der unscharfen Zahlen definiert:

$$d(A_1, A_2) = center(A_1) - center(A_2) \tag{1}$$

Für das bereits eingeführte Beispiel kann damit die Bestimmung der interpolierenden Regel verdeutlicht werden. Bild 4 zeigt die Zugehörigkeitsfunktionen der Prämissen und Konklusionen der beiden Regeln und der Eingangsgröße.

Die linguistischen Werte Druck "niedrig" und Druck "hoch" der Prämisse werden durch die unscharfen Zahlen $A < n_0; n_1, n_2 >$ und $B < h_0; h_1, h_2 >$ beschrieben, die linguistischen Werte Ventil "fast zu" und Ventil "weit auf" der Konklusion durch die unscharfen Zahlen $C < fz_0; fz_1, fz_2 >$ bzw. $D < wa_0; wa_1, wa_2 >$. Der Center e_0 der unscharfen Eingangsgröße $E < e_0; e_1, e_2 >$ liegt zwischen den Centern n_0 und h_0 der unscharfen Zahlen A und B, es gilt $n_0 \le e_0 \le h_0$. Die relativen Abstände $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ zwischen der Eingangsgröße E und den Prämissen A und B ergeben sich nach (1) zu:

$$\tilde{a} = \frac{d(A,E)}{d(A,B)} = \frac{e_0 - n_0}{h_0 - n_0}, \qquad \tilde{b} = \frac{d(B,E)}{d(A,B)} = \frac{e_0 - h_0}{n_0 - h_0} = 1 - \tilde{a}\,.$$

Die Anteile der beiden Regeln WENN Druck "niedrig" DANN Ventil "weit auf" und WENN Druck "hoch" DANN Ventil "fast zu" an der interpolierenden Regel "Wenn P dann K" entsprechen den relativen Abständen $\tilde{a}$ und $\tilde{b} = 1 - \tilde{a}$. Die Parameter $< p_0; p_1, p_2 >$ und $< k_0; k_1, k_2 >$ der interpolierenden Prämisse IP und interpolierenden Konklusion IK sind

$$p_0 = \tilde{a} \cdot h_0 + (1-\tilde{a}) \cdot n_0,\;\; p_1 = \tilde{a} \cdot h_1 + (1-\tilde{a}) \cdot n_1,\;\; p_2 = \tilde{a} \cdot h_2 + (1-\tilde{a}) \cdot n_2;$$
$$k_0 = \tilde{a} \cdot fz_0 + (1-\tilde{a}) \cdot wa_0,\;\; k_1 = \tilde{a} \cdot fz_1 + (1-\tilde{a}) \cdot wa_1,\;\; k_2 = \tilde{a} \cdot fz_2 + (1-\tilde{a}) \cdot wa_2.$$

Verschwindet beispielsweise der Abstand der Eingangsgröße *E* zur unscharfen Zahl *A* (Druck "niedrig"), so ist die interpolierende Prämisse gleich *A* (Druck "niedrig") und die interpolierende Konklusion gleich *D* (Ventil "weit auf").

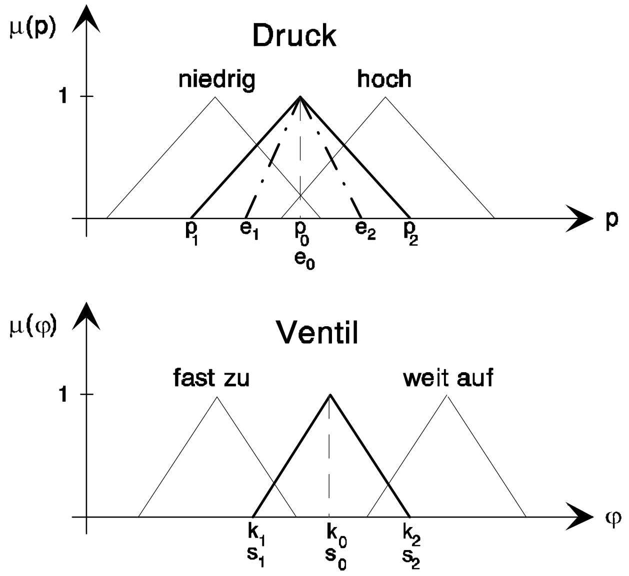

Bild 4: Eingangsgröße als Teilmenge der interpolierenden Prämisse

Schließlich ist die Ausgangsgröße mit Hilfe der interpolierenden Regel und der unscharfen Eingangsgröße zu bestimmen. Der Center der Eingangsgröße *E* stimmt grundsätzlich mit dem Center der interpolierenden Prämisse *IP* überein. Die Zugehörigkeitsfunktionen sind als Möglichkeitsgrad, mit dem ein Element des Grundbereichs der Eingangsgröße bzw. der interpolierenden Prämisse zugeordnet wird, interpretierbar. Mit dem Center der beiden unscharfen Zahlen *E* und *IP* gibt es genau ein Element des Grundbereichs, das mit dem Möglichkeitsgrad 1 sowohl der Eingangsgröße als auch der interpolierenden Prämisse zugeordnet wird. Hat eine unscharfe Menge zumindest ein Element mit der Zugehörigkeit 1, so wächst der Informationsgehalt der unscharfen Menge, wenn der Zugehörigkeitsgrad eines anderen Elements sinkt. Ein Singelton bekommt somit den höchsten Informationsgehalt zugeordnet. Ist die Eingangsgröße *E* Teilmenge der interpolierenden Prämisse *IP*, so ist der Zugehörigkeitsgrad jedes Elements des Grundbereichs zur Eingangsgröße *E* nicht größer als der Zugehörigkeitsgrad zur interpolierenden Prämisse:

$$\mu_E(\mathrm{x}) \le \mu_{IP}(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \tag{2}$$

Die Eingangsgröße ist in diesem Fall eine unscharfe Zahl mit dem selben Center und einem zumindest genau so großen Informationsgehalt wie die interpolierende Prämisse, die Ausgangsgröße wird folglich gleich der interpolierenden Konklusion gewählt. Bild 4 zeigt ein Beispiel für den beschriebenen Fall; die Eingangsgröße *E* ist Teilmenge der interpolierenden Prämisse, weshalb die Ausgangsgröße S mit den Koordinaten $\langle s_0; s_1, s_2 \rangle$ gleich der interpolierenden Konklusion IK mit den Koordinaten $\langle k_0; k_1, k_2 \rangle$ gesetzt wird.

Ist die unscharfe Eingangsgröße keine Teilmenge der interpolierenden Prämisse, das heißt, daß entweder einer oder beide Füße der Zugehörigkeitsfunktion der Eingangsgröße außerhalb des Supports der interpolierenden Prämisse liegen, werden zunächst einer oder beide Füße der Zugehörigkeitsfunktion der Ausgangsgröße durch Interpolation zwischen den Füßen der Konklusionszugehörigkeitsfunktionen bestimmt.

In Bild 5 ist die Eingangsgröße E keine Teilmenge der interpolierenden Prämisse IP, der rechte Fuß e_2 der Eingangsgröße liegt zwischen dem rechten Fuß p_2 der interpolierenden Prämisse und dem rechten Fuß b_2 der Prämisse "hoch".

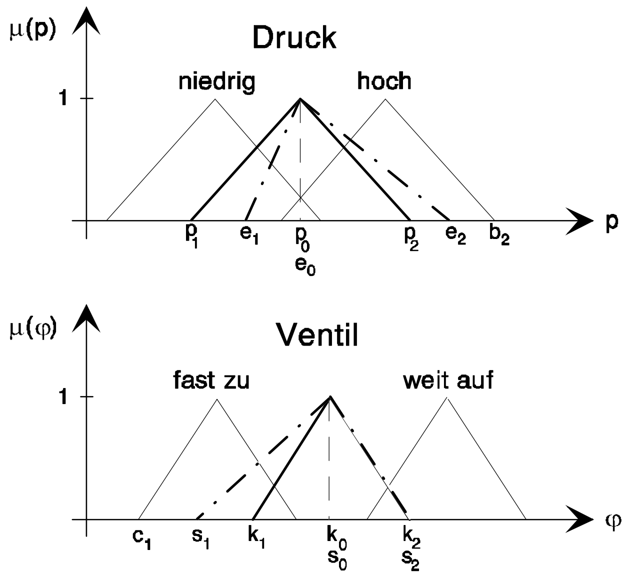

Bild 5: Eingangsgröße mit geringerem Informationsgehalt als interpolierende Prämisse

Das Verschieben des rechten Fußes der Zugehörigkeitsfunktion der Eingangsgröße zu höheren Druckwerten über den rechten Fuß der interpolierenden Prämisse hinaus wirkt sich auf die Zugehörigkeitsfunktion der Ausgangsgröße durch ein Verschieben des linken Fußes zu kleineren Ventilstellungen hin aus. Liegt der rechte Fuß e_2 auf dem rechten Fuß p_2 der interpolierenden Prämisse, ist der linke Fuß der Ausgangsgröße s_1 gleich dem linken Fuß k_1 der interpolierenden Konklusion; fällt der rechte Fuß e_2 auf den rechten Fuß b_2 der Prämisse "hoch", so entspricht s_1 dem linken Fuß c_1 der Konklusion "fast zu". Liegt der rechte Fuß der Zugehörigkeitsfunktion der Eingangsgröße, wie in Bild 5, zwischen diesen Stützstellen ($p_2 < e_2 < b_2$), dann wird der linke Fuß der Ausgangsgröße durch lineare Interpolation zwischen k_1 und c_1 ermittelt, ist $e_2 > b_2$, wird mit k_1 und c_1 extrapoliert:

$$s_1 = \tilde{a}_1 \cdot c_1 + \left(1 - \tilde{a}_1\right) \cdot d_1 \ ,$$

$$\tilde{a}_1 = \begin{cases} e_2 > p_2: & \dfrac{e_2 - a_2}{b_2 - a_2} \\ e_2 \le p_2: & \tilde{a} \end{cases} .$$

Der linke Fuß e_1 der Eingangsgröße ist im Vergleich zum linken Fuß p_1 der interpolierenden Prämisse zu größeren Werten verschoben. Diese genauere Information über mögliche Druckwerte links des Centers der interpolierenden Prämisse hat keine Auswirkung auf die unscharfe Ausgangsgröße. Der rechte Fuß der Ausgangszugehörigkeitsfunktion ergibt sich entsprechend den Berechnungsformeln für den linken Fuß zu:

$$s_2 = \tilde{a}_2 \cdot c_2 + \left(1 - \tilde{a}_2\right) \cdot d_2 ,$$

$$\tilde{a}_2 = \begin{cases} e_1 < p_1: & \dfrac{e_1 - a_1}{b_1 - a_1} \\ e_1 \ge p_1: & \tilde{a} \end{cases} .$$

In diesem Beispiel führt das Bewegen der Eingangsgröße von kleinen zu großen Werten des Drucks zu einer Verschiebung der Ausgangsgröße von großen zu kleinen Ventilstellungen; bewegt sich die Eingangsgröße von einem Interpolationsintervall in ein anderes, kann sich dieser Richtungssinn umkehren. Die sich daraus ergebenden Folgerungen werden im anschließenden Abschnitt beschrieben.

2.3 Einführung von Interpolationsbereichszugehörigkeitsfunktionen

Ergänzt man die auf der linguistischen Variablen "Druck" definierten linguistischen Werte um den Wert Druck "sehr hoch" (Bild 6) und fügt dem Regelsatz des betrachteten Beispiels die Regel

WENN Druck "sehr hoch" DANN Ventil "weit auf"

hinzu, dann ergibt sich ein Regelsatz mit einer Umkehrung des Richtungssinns: Eine Erhöhung des Drucks über den Center der Zugehörigkeitsfunktion "hoch" hinaus führt wieder zu einer Zunahme der Ventilstellung, eine mit der Prämisse Druck "sehr hoch" zusammenfallende Eingangsgröße führt, wie eine mit der Prämisse Druck "niedrig" zusammenfallende Eingangsgröße, zu einer Ventilstellung "weit auf".

Ist die Eingangsgröße im Interpolationsbereich zwischen den Prämissenzugehörigkeitsfunktionen Druck "niedrig" und "hoch", das heißt, der Center der Eingangsgröße liegt zwischen den Centern der Prämissen "niedrig" und "hoch" ($a_0 < e_0 < b_0$), wirkt sich eine Änderung des rechten Fußes der Zugehörigkeitsfunktion der Eingangsgröße auf den linken Fuß der Zugehörigkeitsfunktion der Ausgangsgröße aus. Befindet sich die Eingangsgröße dagegen im Interpolationsbereich zwischen den Prämissenzugehörigkeitsfunktionen Druck "hoch" und "sehr hoch", wird der rechte Fuß der Zugehörigkeitsfunktion der Eingangsgröße auf den rechten Fuß der Zugehörigkeitsfunktion der Ausgangsgröße abgebildet.

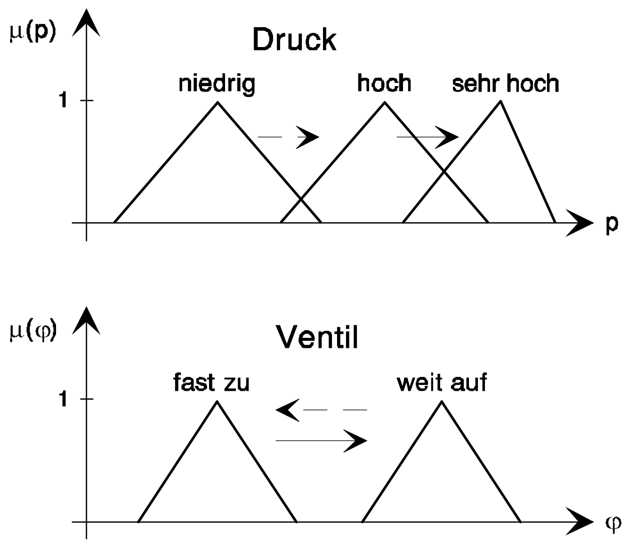

Bild 6: Verschiedener Richtungssinn in benachbarten Interpolationsbereichen

Der Übergang von einem Interpolationsbereich in den anderen erfolgt sprunghaft an der Stelle, wo der Center der Eingangsgröße den Center der Prämisse Druck "hoch" überschreitet; an diesem Übergang ist die Abbildung der unscharfen Eingangsgröße auf die unscharfe Ausgangsgröße unstetig, weil eine infinitesimale Änderung der Stützstellen der Zugehörigkeitsfunktion der Eingangsgröße nicht für beliebige Eingangsgrößen zu einer infinitesimalen Änderung der Stützstellen der Ausgangsgröße führt. Außerdem muß eine Eingangsgröße, deren Center genau auf den Center der Prämisse Druck "hoch" fällt ($e_0 = b_0$), einem der beiden Interpolationsbereiche zugeschlagen werden. Die Ursache für diese Unstetigkeit kann durch einen fließenden oder unscharfen Übergang zwischen den Interpolationsbereichen beseitigt werden. Die einzelnen Interpolationsbereiche werden nicht als scharfe, sondern als unscharfe Mengen über dem Grundbereich angesehen, deren Zugehörigkeitsfunktionen angeben, in welchem Maß ein Interpolationsbereich zur Bestimmung der Ausgangsgröße beiträgt. Bild 7 zeigt ein Beispiel für die Wahl der Interpolationsbereiche. Der Interpolationsbereich, der aus den Zugehörigkeitsfunktionen der linguistischen Werte "niedrig" und "hoch" die Ausgangsgröße ermittelt, wird durch die gestrichelte Zugehörigkeitsfunktion festgelegt, die strichpunktierte Zugehörigkeitsfunktion kennzeichnet den Interpolationsbereich zwischen den Zugehörigkeitsfunktionen der linguistischen Werte "hoch" und "sehr hoch".

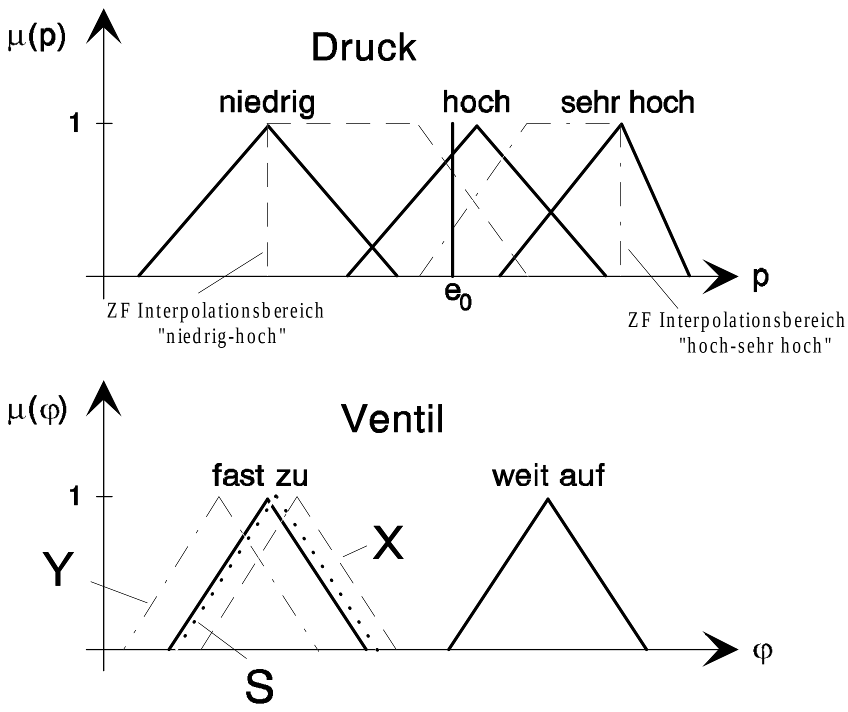

Bild 7: Einführen von Interpolationsbereichszugehörigkeitsfunktionen

Die Summe dieser beiden Zugehörigkeitsfunktionen ist über den gesamten Grundbereich gleich 1, jede Zugehörigkeitsfunktion gibt direkt den relativen Anteil der aus dem entsprechenden Interpolationsbereich berechneten Ausgangsgröße an der resultierenden Ausgangsgröße an. Als Eingangsgröße ist ein Singelton bei e_0 gewählt, die mittels des Interpolationsbereichs "niedrig-hoch" bestimmte Ausgangsgröße trägt für diese Eingangsgröße zu 70%, die Ausgangsgröße des Interpolationsbereichs "hoch-sehr hoch" zu 30% zur resultierenden Ausgangsgröße bei. Mit $X\ \langle x_0; x_1, x_2 \rangle$ als Ausgangsgröße des Interpolationsbereichs "niedrig-hoch", $Y\ \langle y_0; y_1, y_2 \rangle$ als Ausgangsgröße des Interpolationsbereichs "hoch-sehr hoch", $\mu_{I\,niedrig-hoch}(p)$ als Zugehörigkeitsfunktion des Interpolationsbereichs "niedrig-hoch" und $\mu_{I\,hoch-sehr\,hoch}(p)$ als Zugehörigkeitsfunktion des Interpolationsbereichs "hoch-sehr hoch" ergeben sich die Parameter der Ausgangsgröße $S\ \langle s_0; s_1, s_2 \rangle$ zu:

$$s_j = \mu_{I\,hoch-sehr\,hoch}(e_0) \cdot y_j + \mu_{I\,niedrig-\,hoch}(e_0) \cdot x_j,\ j = 0,1,2.$$

Im dargestellten Fall ist $\mu_{I\,niedrig-hoch}(e_0) = 0.7$, $\mu_{I\,hoch-sehr\,hoch}(e_0) = 0.3$.

3 Anwendungsbeispiel Fuzzy-Systeme

Einige der Möglichkeiten, die die Inferenzmethode mittels interpolierender Regeln eröffnet, werden in diesem Abschnitt anhand von Fuzzy-Systemen erläutert. Ausgangspunkt ist ein dynamisches Fuzzy-System nach Bild 8. Die Abbildung der unscharfen Eingangsgrößen $u_k, y_{k-1}, \ldots y_{k-n}$ auf die unscharfe Ausgangsgröße y_k wird durch Fuzzy-Regeln wie beispielsweise

WENN u_k "klein" und y_{k-1} "groß" und ... y_{k-n} "mittel" DANN y_k "groß"

beschrieben. Die Voraussetzungen zur Anwendung des Inferenzverfahrens mittels interpolierender Regeln seien erfüllt, außerdem werde jeder Kombination linguistischer Werte der verschiedenen Eingangsgrößen eine Konklusion zugewiesen.

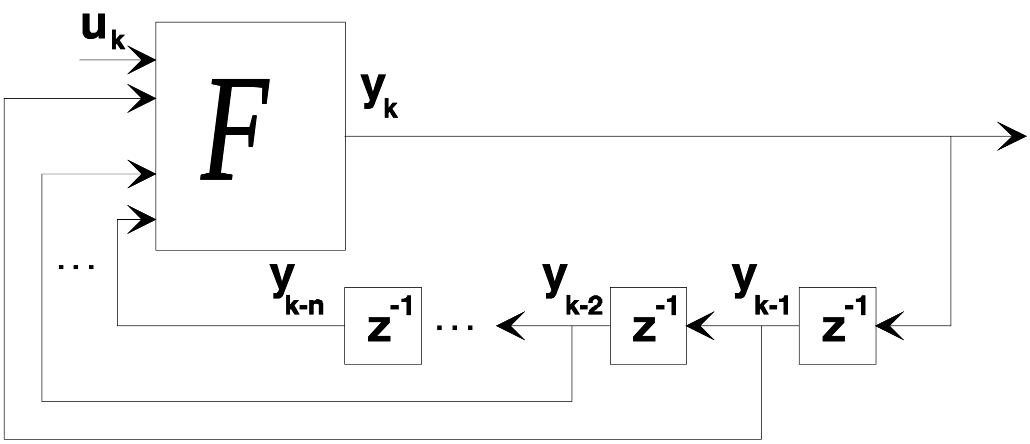

Bild 8: Dynamisches Fuzzy-System

Während in der Literatur dynamische Fuzzy-Systeme untersucht werden, die durch Relationsgleichungen, die auf die Methode der Aktivierungsgrade zurückgeführt werden können, beschrieben werden [3, 6, 7, 8], soll hier das vorgestellte Inferenzverfahren zur Systembeschreibung genutzt werden. Im folgenden Abschnitt wird zunächst anhand eines einfachen Beispiels gezeigt, welche Parameter eines Regelsatzes stabiles oder instabiles Verhalten eines Fuzzy-Systems bewirken können; außerdem wird ein Ansatzpunkt zur Stabilitätsanalyse beschrieben. Abschnitt 3.2 geht, darauf aufbauend, auf die Vorteile der Systembeschreibung mittels der Inferenz durch interpolierende Regeln ein.

3.1 Stabilität unscharfer, dynamischer Systeme

Betrachtet wird ein dynamisches Fuzzy-System, dessen einzige Eingangsgröße die rückgekoppelte, um einen Zeitschritt verzögerte Ausgangsgröße ist. Zwei Regeln seien zur Kennzeichnung des Verhaltens ausreichend:

WENN y_{k-1} "negativ" DANN y_k "positiv"
WENN y_{k-1} "positiv" DANN y_k "negativ"

Der von den beiden linguistischen Werten y_{k-1} "negativ" und y_{k-1} "positiv" aufgespannte Interpolationsbereich erstrecke sich über den gesamten Definitionsbereich $\mathbb{R}$ der linguistischen Variablen y_{k-1}. Die auf der linguistischen Variablen y_{k-1} definierten Zugehörigkeitsfunktionen werden entsprechend Bild 9 angenommen, als Anfangswert wird dem System der scharfe Wert $y_0 = \langle 2;2,2 \rangle$ zugeordnet.

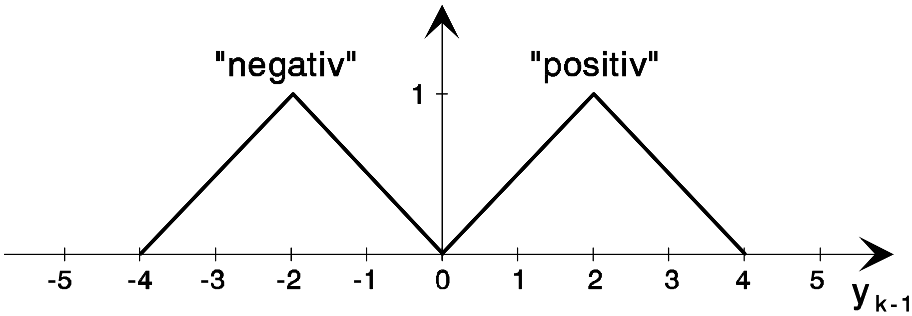

Bild 9: Auf Eingangsbereich definierte Zugehörigkeitsfunktionen

Zunächst werden die Zugehörigkeitsfunktionen auf dem Grundbereich der Ausgangsgröße entsprechend Bild 10 gewählt. Bild 11 zeigt für diesen Fall die unscharfe Ausgangsgröße zu verschiedenen Zeitschritten k. Die Ausgangsgröße konvergiert, wie gezeigt werden kann, bei beliebigem Anfangswert für $k \to \infty$ gegen die unscharfe Zahl $y_\infty = \langle 0;-2,2 \rangle$, das System ist also für alle Anfangswerte stabil. Dies wird bei genauerer Betrachtung der beiden Zugehörigkeitsfunktionen der Ausgangsgröße deutlich: Die für y_k definierten Zugehörigkeitsfunktionen haben dieselbe Form wie die Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgröße y_{k-1}, liegen jedoch enger zusammen; mit jedem Schritt wird somit die unscharfe Ausgangsgröße näher an den Endwert $y_\infty = \langle 0;-2,2 \rangle$ herangeführt.

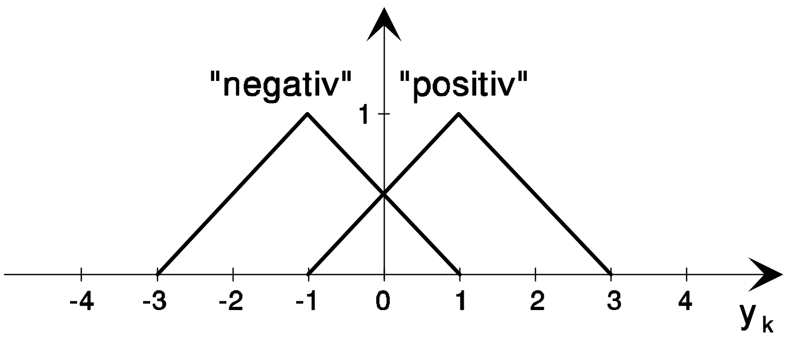

Bild10: Beispiel für Ausgangszugehörigkeitsfunktionen bei stabilem Systemverhalten

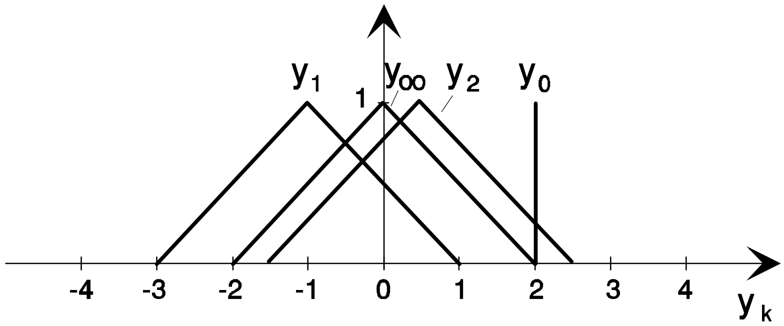

Bild 11: Systemausgangsgröße bei stabilem Systemverhalten zu verschiedenen Schritten

Werden die y_k zugeordneten Zugehörigkeitsfunktionen entsprechend Bild 12 gewählt, ist das System instabil, die unscharfe Ausgangsgröße bewegt sich alternierend Richtung Unendlich (Bild 13). Auch dies wird anhand der Zugehörigkeitsfunktionen der Ausgangsgröße y_k verständlich, die bei gleicher Form weiter auseinander liegen als die Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgröße y_{k-1}, so daß jeder Schritt die Ausgangsgröße weiter vom Anfangswert entfernt.

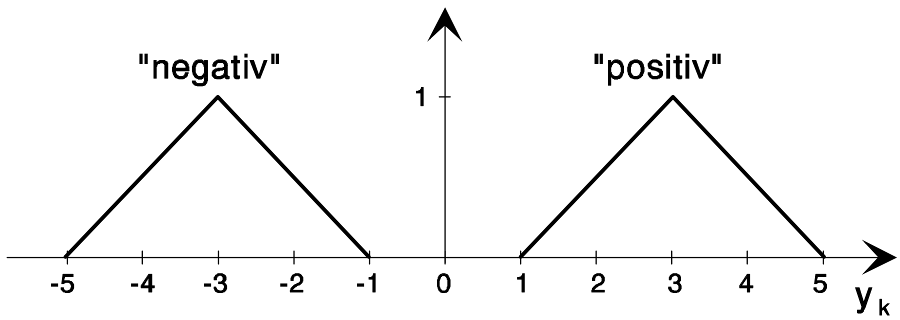

Bild 12: Beispiel für Ausgangszugehörigkeitsfunktionen bei instabilem Systemverhalten

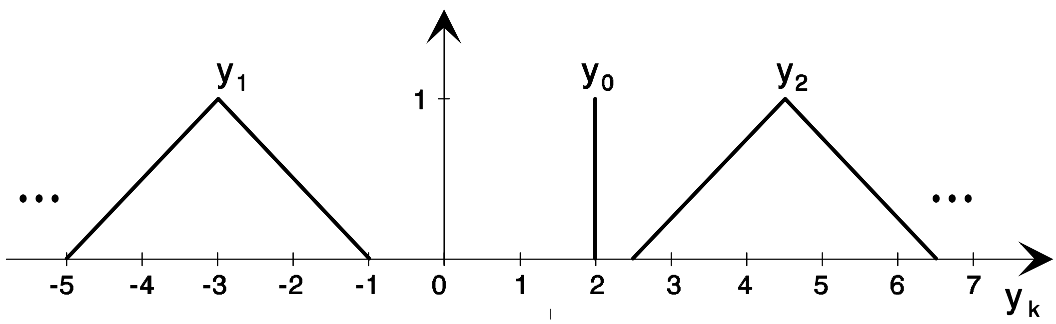

Bild 13: Instabiles Systemverhalten: Die Ausgangsgröße bewegt sich Richtung Unendlich

Ein anderer Fall der Instabilität tritt bei Wahl der Zugehörigkeitsfunktionen der Ausgangsgröße entsprechend Bild 14 auf. Obwohl sich der Center der unscharfen Ausgangsgröße mit jedem Schritt dem Wert 0 nähert, entfernen sich die beiden Füße von der

Ruhelage 0 des Centers. Die Ausgangsgröße wird bei jeder Iteration unschärfer, der Informationsgehalt der unscharfen Ausgangsgröße verschwindet für $k \to \infty$ (Bild 15).

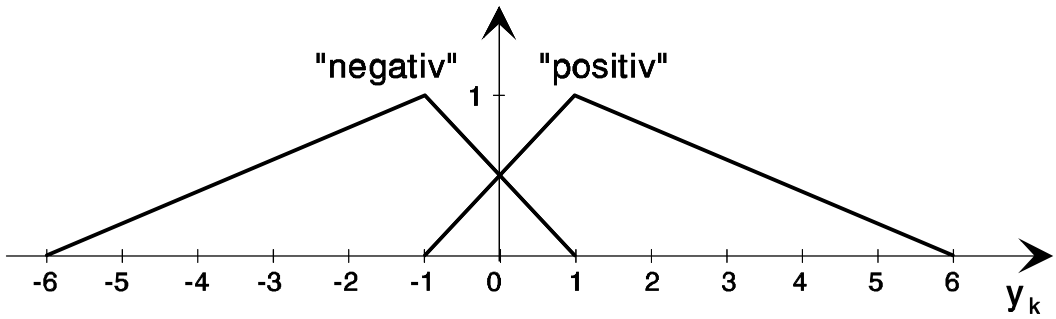

Bild 14: Instabiles Systemverhalten: Zu unscharfe Ausgangszugehörigkeitsfunktionen

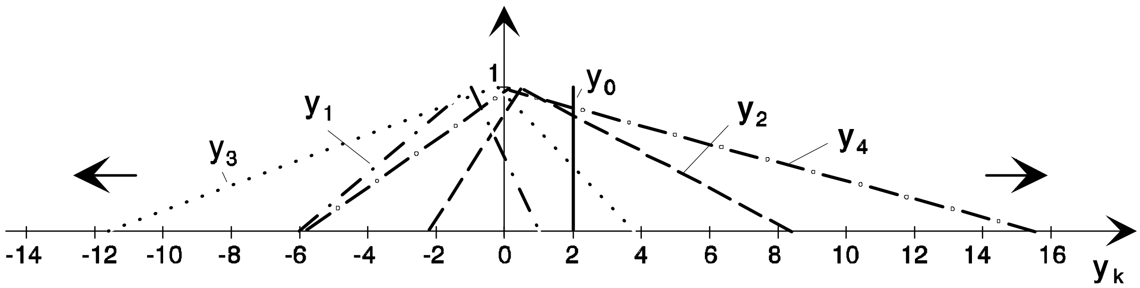

Bild 15: Informationsgehalt der Ausgangsgröße sinkt mit jedem Schritt

Anhand des einfachen Beispiels wurden zwei verschiedene Fälle für instabiles Systemverhalten demonstriert. Eine weitere denkbare Möglichkeit ist beispielsweise, daß auf dem Grundbereich der Ausgangsgröße Bereiche definiert werden, die dem System einen bestimmten Grad an Instabilität zuordnen, wenn die Ausgangsgröße dieses Gebiet erreicht; sicherlich ist ein solcher Bereich die vorgegebene Grenze des Definitionsbereichs eines rückgekoppelten Vergangenheitswerts der Ausgangsgröße, da mit dieser Grenze das Ende des Bereichs erreicht wird, der eine Aussage über die Systemausgangsgröße im nächsten Schritt erlaubt.

Falls die Zugehörigkeitsfunktionen der Ausgangsgröße einen zumindest gleichgroßen Informationsgehalt wie die auf dem Bereich der rückgekoppelten Vergangenheitswerte definierten Zugehörigkeitsfunktionen haben (somit "schmalere" Dreiecke sind), ist ein einfacher Ansatz zur Stabilitätsanalyse denkbar. Die einzige von den rückgekoppelten, unscharfen Vergangenheitswerten weiterverarbeitete Information ist dann die Lage des Centers der Vergangenheitswerte; zur Stabilitätsanalyse muß somit lediglich ein scharfes System betrachtet werden, das die aktuelle Systemausgangsgröße einzig aus den scharfen Centern der Vergangenheitswerte und der Systemeingangsgröße ermittelt. Zur Analyse eines solchen scharfen, dynamischen diskreten Systems sind Vorgehensweisen denkbar, die auf der Stabilitätsanalyse nach Ljapunov aufbauen, beispielsweise die Methode der konvexen Zerlegung [4, 5].

3.2 Eigenschaften des Inferenzverfahrens in Hinblick auf Fuzzy-Systeme

Ein wesentlicher Vorteil der Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines Fuzzy-Systems durch das vorgestellte Inferenzverfahren ist, daß die Wenn-Dann-Regeln für interpretierbare Eingangsgrößen formuliert werden können, da die rückgekoppelte Ausgangsgröße jedes Schritts, wie die linguistischen Werte der Ein- und Ausgangsgrößen, eine unscharfe Zahl ist. Auch kann mit wenig Regeln, durch entsprechend festgelegte Interpolationsbereiche, ein beliebig großer Teil des Grundbereichs der Eingangsgrößen abgedeckt werden.

Ein weiterer Aspekt ist, daß auch scharfe, lineare zeitdiskrete Systeme durch das betrachtete Verfahren beschrieben werden können. Die Zugehörigkeitsfunktionen der Systemein- und Ausgangsgrößen sind in diesem Fall Singeltons; für jede Eingangsgröße (d.h. rückgekoppelte Vergangenheitswerte der Ausgangsgröße oder Systemeingangsgrößen) kann die Lage zweier voneinander verschiedener Singeltons beliebig gewählt werden; für jede Kombination der Eingangsgrößen wird die Lage der Singeltons am Ausgang entsprechend der systembeschreibenden Rekursionsformel berechnet. Wird das so beschriebene System mit scharfen oder unscharfen Eingangsgrößen beaufschlagt, ist die mit dem vorgestellten Inferenzverfahren bestimmte Ausgangsgröße, wie sich zeigen läßt, mit der nach dem Zadehschen Erweiterungsprinzip berechneten identisch.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Im vorliegenden Beitrag wird mit der Inferenz mittels interpolierender Regeln eine neue Inferenzmethode vorgestellt, deren Vorteile sich daraus ergeben, daß die mit dem neuen Verfahren aus dem Regelsatz bestimmte unscharfe Ausgangsgröße leichter linguistisch interpretierbar ist. Das Inferenzverfahren wird anhand eines durchgängigen, einfachen Beispiels erläutert. Die Anwendung der Methode auf Fuzzy-Systeme eröffnet neue Möglichkeiten zur Analyse dieser Systeme, beispielhaft wird die Stabilität eines Fuzzy-Systems betrachtet. Weiterhin wird ein unter bestimmten Voraussetzungen anwendbarer Ansatz zur Stabilitätsanalyse vorgestellt sowie auf die Vorteile des Inferenzverfahrens, die sich bei der Beschreibung von Fuzzy-Systemen ergeben, eingegangen.

Schwerpunkte weiterer Untersuchungen sind die Entwicklung geeigneter Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung, der systematische Reglerentwurf unter Berücksichtigung der unscharfen Streckenbeschreibung sowie die datengestützten Optimierung eines vorliegenden unscharfen Streckenmodells.

Literatur:

[1] *H. Bandemer, S. Gottwald:* Einführung in Fuzzy-Methoden. Akademie Verlag, Berlin 1993.

[2] *R. Böhm, V. Krebs:* Entwurf von Fuzzy-Kompensationsreglern auf Basis von Relationengleichungssystemen. VDI-Berichtsband "Fuzzy-Control-Grundlagen-Entwurf-Anwendungen-Tools", S. 263-275, 1994.

[3] *G. Bretthauer, R. Mikut, H.-P. Opitz:* Stabilität von Fuzzy-Regelungen-Eine Übersicht. VDI-Berichtsband "Fuzzy-Control-Grundlagen-Entwurf-Anwendungen-Tools", S. 287-297, 1994.

[4] *O. Rumpf:* Anwendung der Methode der konvexen Zerlegung zur Stabilitätsanalyse dynamischer Systeme mit neuronalen Komponenten. 39. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium, Illmenau 1994.

[5] *H. Kiendl:* Robustheitsanalyse von Regelungssystemen mit der Methode der konvexen Zerlegung. Automatisierungstechnik 35, S. 192-202, 1987 (5).

[6] *J. B. Kiszka, M. M. Gupta, P. N. Nikiforuk:* Energetistic Stability of Fuzzy Dynamic Systems. IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, 15, S.783-792, 1985.

[7] *R. M. Tong: Some Properties of Fuzzy Feedback Systems.* IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, 10, S.327-330, 1980.

[8] *R. R. Yager, D. P. Filev:* Essentials of Fuzzy Modeling and Control. John Wiley & Sons, Inc. 1994.