

**Numerische Untersuchungen zum
Fragmentierungsverhalten von Beton mit Hilfe der
SPH-Methode**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für
Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)
eingereichte

DISSERTATION

von
Dipl.-Ing. Timon Rabczuk
aus Berlin

Tag der mündlichen Prüfung:

23.01.2002

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr.techn.h.c J. Eibl

Korreferenten: Prof. Dr. K. Thoma

Prof. Dr.-Ing. L. Stempniewski

Karlsruhe 2002

Kurzfassung

Gegenstand der Forschungsarbeit ist die Fragmentierung von Beton unter dynamischer Beanspruchung. Aus Gründen des Katastrophenschutzes interessiert u.a. die Trümmerbildung von Beton bei der Sprengung von Gebäuden. Hierzu sind die maßgebenden Parameter, die die Trümmerbildung von Beton beeinflussen, sowohl quantitativ als auch qualitativ zu bestimmen. Des Weiteren ist ein Verfahren bereitzustellen, mit dem die explizite Fragmentierung von Beton auch rechnerisch erfaßt werden kann. Es werden zur Validierung der Rechnung die am Institut für Massivbau der Universität Karlsruhe experimentell gewonnenen Versuchsdaten aus der Sprengung von Betonplatten hinzugezogen.

Fragmentierung entsteht durch die gleichzeitige Entstehung und Ausbreitung von Rissen in einem Körper, so daß sich dieser in viele Teile aufspaltet. Dabei spielt die Rißbildung eine entscheidende Rolle.

Die Fragmentierungstheorien lassen sich grob in drei Kategorien unterteilen [109]:

- Rein statistische Fragmentierungstheorien
- Mechanisch statistische Fragmentierungstheorien
- Fragmentierungstheorien, die auf Energiebetrachtungen beruhen

Die rein statistischen Theorien beruhen auf der zufälligen Generierung von Rissen auf einer Fläche, so daß die sich kreuzenden Risse die Fläche in viele kleine Teilflächen unterteilen. Sie basieren auf rein mathematisch statistischen Annahmen und sind daher nicht geeignet, den physikalischen Fragmentierungsprozeß realistisch abzubilden.

Die mechanisch statistischen Theorien sind erweiterte Schädigungs- oder Plastizitätsmodelle, die aus numerischen Simulationen erhaltene Variablen wie die Temperatur, Dehnrate, Schädigung, etc. benutzen, um einen mittleren Fragmentdurchmesser zu bestimmen. Über statistische Annahmen wird dann auf eine Fragmentverteilung geschlossen.

Die "energetischen" Fragmentierungstheorien bestimmen auf Energiebetrachtungen basierend nur mittlere Fragmentdurchmesser. Auch sie greifen auf die Methoden der Statistik zurück.

Zur Abbildung des Fragmentierungsprozesses im Rahmen einer numerischen Simulation entsteht die Frage nach einem geeigneten Diskretisierungsverfahren. Die gebräuchlichste Art, das Kontinuum zu diskretisieren, ist die Methode der Finiten Elemente (FEM) oder Finiten Differenzen (FDM). Eine andere Möglichkeit, das Kontinuum zu diskretisieren bieten sog. netzfreie Methoden, wie beispielsweise die Methode der Diskreten Elemente (DEM), das Elementfreie Galerkin-Verfahren (EFG) oder die Methode der Smooth Particle Hydrodynamics (SPH). In dieser Arbeit wurde die SPH-Methode zur Simulation der dynamische Fragmentierung verwendet. Die SPH-Methode ist eine netzfreie Interpolationsmethode, die das Kontinuum mit sogenannten Partikeln diskretisiert. Diese Partikel tauschen über eine Interpolationsfunktion Impulse aus und können sich völlig frei im Raum bewegen. Die Fragmentierung geschieht automatisch durch die Trennung der Partikel. Es wurde ein eigener dreidimensionaler SPH-Code entwickelt. Mit Hilfe eines makroskopischen Betonstoffgesetzes, das die Festigkeitssteigerung von Beton unter hohen Belastungsgeschwindigkeiten realitätsnah berücksichtigt, konnte die Fragmentierung von Beton auch quantitativ gut angenähert werden.

Die Fragmentierungsparameter Belastungsgeschwindigkeit und -amplitude, Werkstoffheterogenität und Materialfestigkeit wurden mit Hilfe dieses SPH-Codes studiert. Es hat sich gezeigt, daß die wesentlichen Parameter die Belastungsamplitude und -geschwindigkeit sind. Unter quasi statischer Beanspruchungen kommt auch der Materialheterogenität große Bedeutung zu.

Durch Vergleich der Rechenergebnisse mit Versuchen wurde die Rechnung bezüglich der Zerstörungsgrade und der Fragmentverteilungen an Betonplatten unter Kontaktdetonation validiert. Die Ergebnisse zeigten eine gute Übereinstimmung.

Damit steht ein Verfahren zur Verfügung, mit der die Fragmentierung von Beton rechnerisch erfaßt werden kann.

Abstract

The subject of this research work is the fragmentation of concrete due to dynamic loading. Therefore the essential parameters influencing the fragmentation of concrete have to be determined qualitatively as well as quantitatively. A method had to be developed to predict the fragment distribution of concrete structures under high velocity loading. For the validation data of tests of concrete slabs under contact detonation was used.

Fragmentation is caused by the development and propagation of cracks in a continuum dividing it into many parts, the fragments. Thus the crack propagation plays a significant role in the fragmentation process. The feature that distinguishes the dynamic from quasi static behavior is the presence of stress waves.

In the literature many fragmentation theories exist which can be classified into three groups:

- Pure statistic fragmentation theories
- Mechanical statistic fragmentation theories
- Energetic fragmentation theories

The foundation of the pure statistic fragmentation theories is the generation of randomly positioned cracks on a surface dividing it into many little parts. These theories are based only on pure mathematical or statistical assumptions and are therefore not well suited for the correct physical fragmentation process.

The mechanical statistic theories are advancements of plasticity or damage models. They are using variables like the temperature, strain rate, damage, etc. to determine a middle fragment diameter. For the final fragment distribution statistical theories are used.

The energetic fragmentation theories determine a middle fragment diameter by means of the evolution of the kinetic and internal energy. For the final fragment distribution statistical theories are applied also.

To reproduce the fragmentation process in a numerical simulation a capable discretization method has to be used. The most common discreti-

zation of continuum is the finite element (FEM) or finite difference method (FDM). Other, meshfree methods are the discrete element method (DEM), the element free Galerkin method (EFG) or the Smooth Particle Hydrodynamics (SPH). In this work the SPH-method is chosen.

The SPH-method is a meshfree Lagrangian method using particles instead of elements to model the continuum. These particles are interacting with each other via an interpolation function. Because of the advantages of being Lagrangian and meshfree it is possible to model high deformation events, failure and fragmentation. A three dimensional SPH-Code was developed and a constitutive law for concrete taken into account the dynamics strength increase under high velocity loading was implemented.

It was possible to reproduce the evolution of damage and fragmentation of concrete slabs under the dynamic loading created by a contact detonation.

The main fragmentation parameters load velocity and amplitude, material heterogeneity and strength were studied with the SPH-Code and the implemented constitutive law for concrete including high speed loading. It has been shown, that the most important parameters are the load velocity and amplitude. At quasi static load velocity also the heterogeneity of the material becomes more significant.

Finally simulations of different concrete slabs under contact detonation are performed and compared with data gained in experiments. The results show a good agreement regarding the damage of the slabs as well as in the fragment distribution.

A computer Code simulating the fragmentation process of concrete quantitatively is provided.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Massivbau und Baustofftechnologie der Universität Karlsruhe (TH), Abteilung Massivbau.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. techn. h.c. Josef Eibl gilt mein besonderer Dank für die Anregung zu diesem Thema, die langjährige und intensive Betreuung und seine oftmals darüber hinausgehende Unterstützung meiner Arbeit.

Den Herren Prof. Dr. Thoma und Prof. Dr.-Ing. L. Stempniewski seien herzlich für ihre Anregungen und Bemühungen bei der Übernahme des Koreferates gedankt.

Bei allen Kolleginnen und Kollegen des Instituts möchte ich mich für ihre fachliche und sachliche Unterstützung bedanken. Dem Kollegen Martin Sauer vom Fraunhofer Institut in Freiburg danke ich für die vielen „SPH-Anregungen“. Ebenso möchte ich mich bei Herrn Geers vom Rechenzentrum für die Unterstützung beim Arbeiten und Programmieren auf der IBM RS6000SP bedanken.

Nicht zuletzt danke ich meiner Familie für ihre Hilfe und ihr Verständnis.

Karlsruhe, im September, 2001

Timon Rabczuk

Diese Arbeit ist meinem Vater gewidmet.

Inhalt

1	Einleitung.....	1
1.1	Problemstellung.....	1
1.2	Zielsetzung.....	4
2	Stand der Erkenntnis	7
2.1	Die Fragmentierung	7
2.2	Dynamische Fragmentierungstheorien.....	15
2.2.1	Statistische Fragmentierungstheorien	15
2.2.2	Mechanisch statistische Fragmentierungstheorien.....	22
2.2.3	Energetische Fragmentierungstheorien.....	31
2.3	Numerische Verfahren zur Simulation der dynamischen Fragmentierung.....	35
2.3.1	Anwendbarkeit der FEM/FDM zur Simulation der dynamischen Fragmentierung	35
2.3.2	Anwendbarkeit der Methode der diskreten Elemente (DEM) zur Simulation der dynamischen Fragmentierung	41
3	Die Methode der Smooth Particle Hydrodynamics.....	55
3.1	Einleitung	55
3.2	Die Grundgleichungen.....	58
3.3	Die Interpolation.....	64
3.3.1	Die Interpolationsfunktion.....	64
3.3.2	Approximation von Feldgrößen	68
3.3.3	Variable Interpolationslänge.....	76
3.4	Die Erhaltungsgleichungen in SPH-Formulierung.....	78
3.4.1	Die künstliche Viskosität.....	84
3.4.2	Conservative smoothing.....	86
3.5	Verbesserung des Approximationsverfahrens	88
3.5.1	Normalisierung	90
3.5.2	Die Moving Least Squares (MLS)-Interpolation.....	92
3.5.3	Beispiele	97
3.5.3.1	Untersuchung ausgewählter Funktionen bei regelmäßiger Partikelanordnung.....	97

3.5.3.2	Die Fehlerevolution bei der zweidimensionalen SPH-Interpolation.....	106
3.5.3.3	Modifizierte MLS-Interpolation nach Sauer et al. [234]	120
3.5.3.4	Ein Beispiel aus der Statik.....	126
3.5.4	Weitere Verbesserungen der SPH-Methode	134
3.6	Randbedingungen.....	136
3.7	Das Interface-Problem	139
3.8	Berechnung von Spannungen und Dehnungen.....	140
3.9	Explizite Zeitintegration	146
3.10	Instabilitäten.....	150
3.11	Vergleich: FEM – SPH	153
3.12	Ein eigenes SPH-Programm	157
3.12.1	Preprocessing	157
3.12.2	Lösungsphase.....	159
3.12.2.1	Nachbarsuche	159
3.12.2.2	Parallelisierung.....	161
3.12.2.3	Laufzeitverhalten und Speicherplatz.....	168
3.12.2.4	Datenstrukturen.....	174
3.12.3	Postprocessing	175
3.13	Verifikationsrechnungen.....	178
4	Stoffgesetze	183
4.1	Das elastoplastische Format.....	183
4.2	Das Schädigungsformat.....	187
4.3	Zustandsgleichung für den Sprengstoff.....	191
4.4	Elasto-plastisches Stoffgesetz	194
4.5	Das Betonstoffgesetz.....	196
4.5.1	Dynamisches Materialverhalten von Beton	196
4.5.2	Schädigung.....	200
4.5.3	Plastizität	203
4.5.4	Ent- Wiederbelastung	205
4.5.5	Betonhugoniot	205
4.5.6	Tangentensteifigkeit.....	206
4.5.7	Der Dehnrateneinfluß	206
4.5.7.1	Der Homogenisierungs- und Verzögerungsmechanismus..	
.....	207

4.5.7.2 Exponentielle Schädigungsrelaxation	210
4.5.8 Verifikationsrechnungen.....	215
5 Numerische Simulation	223
5.1 Theoretische Untersuchungen zum Fragmentierungsverhalten	223
5.2 Verifikation anhand von Versuchen.....	236
5.2.1 Versuche.....	236
5.2.2 Vergleich: Versuch - Rechnung.....	238
6 Zusammenfassung und Ausblick	285
7 Literaturverzeichnis.....	289
8 Notation	307
Anhang A: Ergänzungen zu Kapitel 3	313
Anhang B: Verifikationsrechnungen	323
Anhang C: Verformungsbilder	359

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Im zunehmendem Maße interessieren dynamische Beanspruchungen von Baustrukturen bis hin zu deren gewollten oder ungewollten Zerstörung.

So ist auch der Abriß von Stahlbetonbauwerken durch Sprengung Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. Bislang noch ungeklärt ist dabei die Frage, inwieweit durch herumfliegende Trümmer, die bei einer Abbruchsprengung entstehen, benachbarte Bauwerke beschädigt werden.

Bild 1.1 zeigt den Abriß eines Schornsteines. Gut zu erkennen ist die Staubentwicklung, die durch die Zündung der Ladungen und der Einleitung des darauffolgenden Kippvorganges bis zum Auftreffen des Schornsteines auf den Boden verursacht wird. Bild 1.2 zeigt den Abbruchvorgang eines Hochlagers. Auch hier ist die Staubentwicklung enorm. Beim Aufschlagen der Tragwerksstruktur auf den Boden bildeten sich großflächige Trümmer.

Explosive und giftige Stoffe werden oft in ganzen Behälterbatterien aus Stahlbeton oder Spannbeton gelagert. Kommt es zu einer Explosion und zu einer vollständigen Zerstörung eines solchen Behälters, ist es von großer Wichtigkeit, die Auswirkungen und Beschädigungen durch die herumfliegenden Trümmer auf die benachbarten Behälter zu kennen, um Maßnahmen durch Auslegung und räumliche Anordnung zu treffen, die eine Ausweitung der Katastrophe von vornherein ausschließen. Hier ist wie bei der Abbruchsprengung besonders die Größe und Geschwindigkeit der entstehenden Trümmer von Interesse. Welche verheerenden Wirkungen das Versagen solcher Behälter haben kann, ist seit der Giftgaskatastrophe in Bhopal/Indien, der Explosion eines LPG-Terminals in Mexico-City oder der Rheinkatastrophe bei Basel auch in breiten Kreisen der Öffentlichkeit bekannt geworden.



Bild 1.1: Abriß eines Schornsteines durch Sprengen

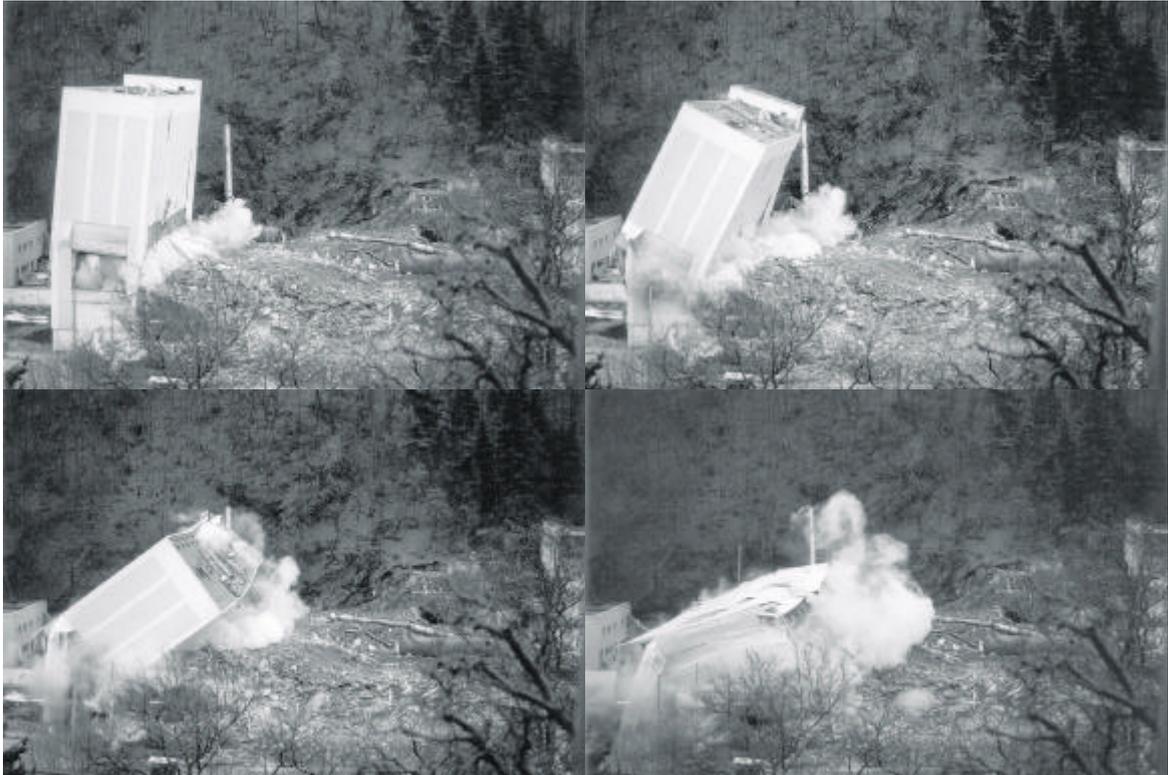


Bild 1.2: Kippsprengung eines Hochhauses

Auch im militärischen Bereich ist die Fragmentierung von Interesse. Bei Trümmerbildung, Explosion von Bomben, Projektilen, Raketen, etc. entstehen in der Regel feine Fragmente, die je nach Größe, Auftreffgeschwindigkeit und Art der getroffenen Struktur erhebliche Schäden verursachen können.

1.2 Zielsetzung

Um Tragstrukturen möglichst realistisch zu analysieren, werden in den Ingenieurwissenschaften Näherungsverfahren eingesetzt, die das zu untersuchende Problem mathematisch beschreiben. In der Festkörpermechanik führt dies auf ein Differentialgleichungssystem in Abhängigkeit von Zeit und Ort. Da in den meisten Fällen das Differentialgleichungssystem nicht analytisch gelöst werden kann, kommen sog. Diskretisierungsverfahren zum Einsatz, die das gegebene Differentialgleichungssystem auf die Lösung eines Problems mit einer endlichen Zahl von Unbekannten zurückführen. Die Diskretisierung erfolgt sowohl im Raum als auch in der Zeit. Am gebräuchlichsten ist die Methode der Finiten Elemente (FEM) und die Methode der Finiten Differenzen (FDM). Diese Verfahren unterteilen das Problem in untereinander vernetzte Elemente. Andere neuere Methoden sind sog. netzfreie Verfahren wie beispielsweise das Elementfreie Galerkin-Verfahren (EFG), die Reproducing Kernel Particle Methode (RKPM) oder die Methode der Smooth Particle Hydrodynamics (SPH). Diese Verfahren diskretisieren das Differentialgleichungssystem nicht mit Elementen, sondern mit Knoten bzw. Partikeln. Bei der Anwendung auf spezielle physikalische Probleme bieten die netzfreien Verfahren einige Vorteile. So sind sie beispielsweise in der Lage, die Fragmentbildung explizit zu berücksichtigen, ohne Partikel löschen zu müssen und ohne ein aufwendiges "Remeshing", das bei der FEM und FDM notwendig ist, um größere Deformationen abbilden zu können.

Ein bedeutender Aspekt bei der Simulation der dynamischen Fragmentierung von Beton kommt dem Werkstoffgesetz zu. Ein wichtiger Punkt im Werkstoffgesetz ist der sog. Dehnrateneffekt, der für die Festigkeitssteigerung von Beton unter hohen Belastungsgeschwindigkeiten verantwortlich ist. Es wurden zahlreiche Modelle entwickelt, den Dehnrateneffekt in das Stoffgesetz zu integrieren. Viele Modelle berücksichtigen den Dehnrateneffekt in Abhängigkeit der aktuellen Dehnrate. Eibl hat u.a. in [92] darauf hingewiesen, daß der zusätzliche dynamische Tragwiderstand eines Bauteils mit derartigen Stoffgesetzen rechnerisch nicht genau erfaßt werden kann. Erst in jüngster Zeit entstanden Modelle, die

diesen Dehnrateneffekt besser approximieren können, siehe z.B. Schmidt-Hurtienne [238] und Eibl [92].

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Trümmerbildung und die Fragmentierung von Betonstrukturen mit einem netzfreien Verfahren (SPH) und neueren Werkstoffgesetzen, die den Dehnrateneffekt von Beton wirklichkeitsnäher abbilden können, zu untersuchen. Hierbei soll einerseits geklärt werden, welche Parameter die Trümmergröße beeinflussen und maßgebend bestimmen. Andererseits sollen anhand von Versuchen quantitative Aussagen über Fragmentgröße und -verteilung, sowie zum Zerstörungsgrad des Versuchskörpers unter hochdynamischer Beanspruchung gemacht werden.

2 Stand der Erkenntnis

2.1 Die Fragmentierung

Wird ein Behälter bis zum Bruch durch einen quasi statischen Innendruck belastet, so zerbricht der Behälter in wenige großflächige Bruchstücke. Bei einer detonativen Belastung hingegen zerfällt der Behälter in viele kleine Fragmente. Bachmann [10] bestätigt in theoretischen Untersuchungen empirische Erkenntnisse, indem er das Rißverhalten einer unter Innendruck stehenden Zylinderschale studiert (siehe Bild 2.1). In Bild 2.2 sind Rißbilder unter statischer und dynamischer Beanspruchung qualitativ aufgetragen, die als Vorstufe zur eigentlichen Fragmentierung von entscheidender Bedeutung sind. Unter statischer Belastung ist die Rißdichte bedeutend geringer als unter dynamischer Beanspruchung. Wie im Folgenden gezeigt wird liegt dies in der Tatsache begründet, daß die Risse eine gewisse Zeit benötigen, um sich zu entwickeln. Ebenso hat man anhand von Versuchen festgestellt, daß homogene Werkstoffe feiner fragmentieren als heterogene Werkstoffe wie beispielsweise Beton. Im Folgenden soll erörtert werden, warum unter statischer Belastung und bei heterogenen Werkstoffen größere Trümmer entstehen.

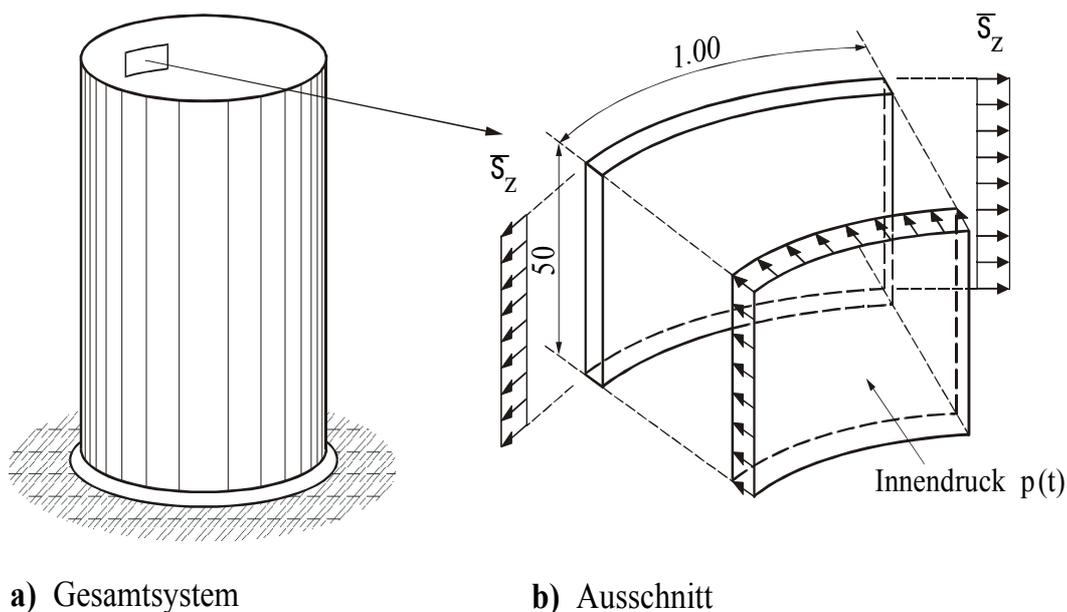


Bild 2.1: Zylinder unter Innendruck, aus [10]

Fragmentierung entsteht durch die Entwicklung, Fortpflanzung und Verzweigung einzelner Risse im Kontinuum, die den Körper in viele kleine Teilkörper zerteilt.

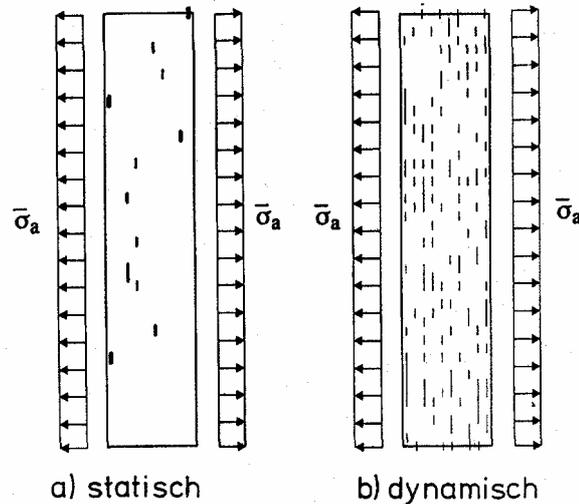


Bild 2.2: Rißbild des Zylinders unter Innendruck bei a) statischer und b) dynamischer Belastung, aus [10]

Die wichtigsten Einflußparameter beim dynamischen Fragmentierungsverhalten sind die *Belastungshöhe* bzw. *-geschwindigkeit*, die nicht immer voneinander zu trennen sind und die *Rißgeschwindigkeit*, die, wie später gezeigt wird, selber eine Funktion mehrerer Parameter ist. Unter niedrigen, quasi statischen Belastungsgeschwindigkeiten spielt die *Heterogenität* des Werkstoffes eine zusätzliche Rolle, jedoch verliert mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit der Einfluß der *Heterogenität* des Materials bezüglich des dynamischen Fragmentierungsverhaltens an Bedeutung.

Um die Ursachen der Fragmentierungsparameter *Belastungshöhe*, *Belastungsgeschwindigkeit* und *Heterogenität* zu untersuchen wird eine Scheibe unter Zugbeanspruchung betrachtet (siehe Bild 2.3).

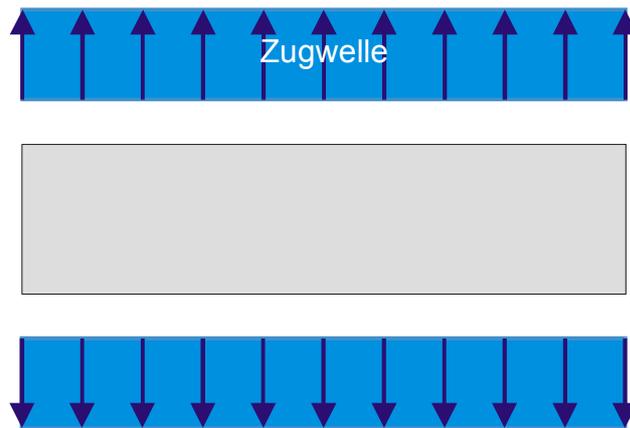


Bild 2.3: Scheibe unter Zugwellenbeanspruchung

Zunächst wird die Last langsam aufgebracht (grüne Linie in Bild 2.4), so daß sich in der zugbeanspruchten Scheibe ein nahezu homogenes Spannungsfeld aufbauen kann.

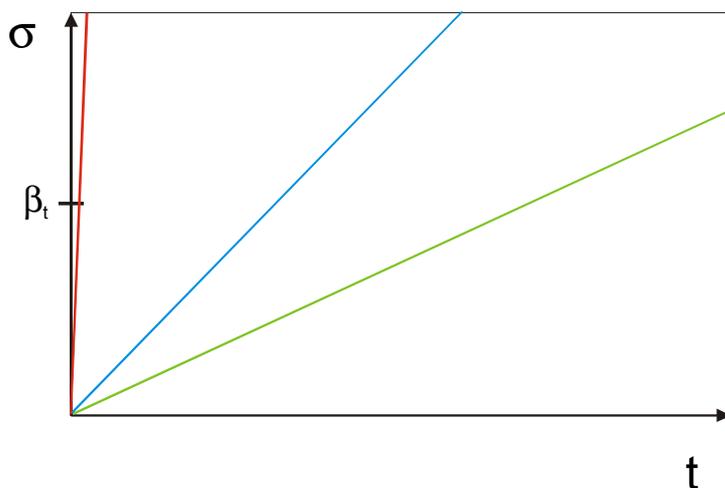


Bild 2.4: schematische Belastung der Scheibe mit unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten

Ebenso wird eine nicht allzu hohe Belastungsamplitude vorausgesetzt, d.h. die maximale Belastungsspannung liegt knapp oberhalb der mittleren Werkstoffzugfestigkeit. Sobald die geringste Zugfestigkeit an einer Stelle im Querschnitt überschritten wird (siehe Bild 2.5a und b), wird in der Scheibe ein Riß initiiert. Dieser Riß pflanzt sich dann mit einer bestimmten Rißgeschwindigkeit in der Scheibe fort. Bei entsprechend niedriger Beanspruchung (knapp oberhalb der Materialfestigkeit) und Bean-

spruchungsgeschwindigkeit kann es auch zu einem Rißstopp kommen, wenn der Riß auf eine benachbarte Stelle mit zu hoher Festigkeit trifft. Im Werkstoff Beton kann dies z.B. auftreten, wenn ein Riß auf ein Zuschlagkorn mit höherer Festigkeit zuläuft.

Wesentlich ist der Zusammenhang zwischen *Belastungsgeschwindigkeit* und *Rißgeschwindigkeit*, die keinesfalls proportional zueinander sind. Für die Scheibe unter Zugbeanspruchung wird nun zum einen ein homogenes (siehe Bild 2.5b) und zum anderen ein heterogenes (siehe Bild 2.5a) Materialverhalten mit gleicher mittlerer Zugfestigkeit angenommen. Bei dem heterogenen Werkstoff streut die Festigkeit innerhalb eines Querschnittes sehr stark (siehe Bild 2.5a). Wird die Belastung langsam aufgebracht, reißt der Querschnitt zunächst an der Stelle 1. Der Riß beginnt sich fortzupflanzen. Bei entsprechend langsamer Laststeigerung reißt nur noch die Stelle 2 und 3 (siehe Bild 2.5c). Im restlichen Querschnitt wird die Zugfestigkeit aufgrund der langsamen Laststeigerung nicht überschritten. Bei einem homogenen Material ist die Festigkeitsstreuung in einem Querschnitt eher gering (siehe Bild 2.5b). Der Werkstoff reißt aufgrund der gleichmäßigeren Festigkeitsverteilung gleichzeitig an mehreren Stellen in einem Querschnitt, in dem die Zugfestigkeit überschritten wird (siehe Bild 2.5d). Wäre die Zugfestigkeit des Materials überall äquivalent, müßte es theoretisch an allen Stellen gleichzeitig reißen. In der Realität kommt ein derartiger Werkstoff nie vor. Es bildet sich senkrecht zum Riß eine Entlastungszone aus, was die Spannung in der benachbarten Region wieder absinken läßt. Bei entsprechend langsamer (quasi statischer) Beanspruchung bringen die sich fortplanzenden Risse die Scheibe zum Versagen, noch bevor die äußere Belastung weitere Risse in der Scheibe initiieren kann. Die Scheibe fragmentiert in 2 große Fragmente.

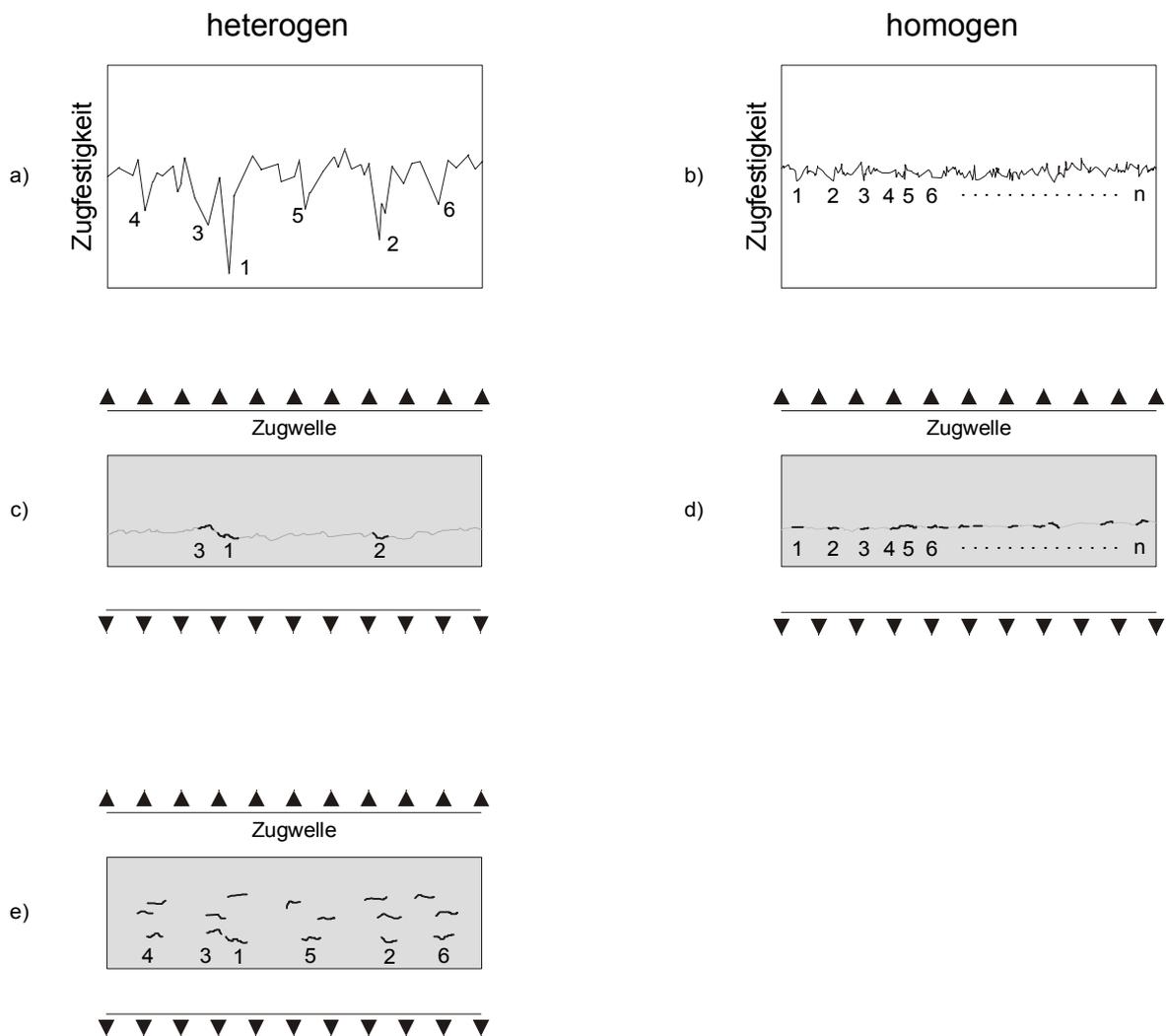


Bild 2.5: Zugfestigkeitsverteilung der Scheibe bei a) heterogener und b) homogener Werkstoffstruktur, c), d) und e) Rissinitiationen bei unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten

Nun wird die Belastung nicht mehr langsam, sondern schnell aufgebracht (blaue Linie in Bild 2.4). Es sei der heterogene Werkstoff betrachtet (siehe Bild 2.5a). Durch die schnelle Laststeigerung reißt nun im Querschnitt das Material an den Stellen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 fast gleichzeitig (siehe Bild 2.5e). Die durch die Scheibe laufende Zugwelle initiiert in den nachfolgenden Querschnitten weitere Risse, noch bevor sich die benachbarten Regionen orthogonal zum Riß ausreichend entlasten können (siehe Bild 2.5e). Diese Risse pflanzen sich wieder mit einer bestimmten Rißgeschwindigkeit fort, auf die später noch näher eingegangen wird. Je schneller die Belastung aufgebracht wird und gegebenen-

falls noch kombiniert mit einer extrem hohen Belastungsamplitude, die die Materialzugfestigkeit um ein Vielfaches übersteigt, um so mehr Risse werden in einem Querschnitt gleichzeitig initiiert. Für den theoretischen Extremfall, in dem die Belastung unendlich schnell aufgebracht wird (rote Linie in Bild 2.4), beginnen alle Risse gleichzeitig an zu laufen. Das ist auch die Begründung für die Beobachtung, daß mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit der Einfluß der Heterogenität eines Werkstoffes verschwindet. An dieser Stelle sei nochmals auf den Unterschied zwischen *Belastungsgeschwindigkeit* und *Rißgeschwindigkeit* hingewiesen. Die Belastungsgeschwindigkeit bestimmt maßgebend die Anzahl der Rißinitiiierungen bei gegebener Belastungsamplitude in einem Querschnitt, während die Rißgeschwindigkeit an andere Parameter gekoppelt ist, die im übernächsten Abschnitt näher diskutiert werden.

Die Belastungshöhe spielt in der Praxis eine große Rolle. Bei Sprengungen (siehe Kapitel 5) hat sich gezeigt, daß die Belastungshöhe direkt im Lasteinleitungsbereich die Materialfestigkeit um ein Vielfaches überschreitet, was dort auch zu einem "Pulverisieren" des Materials führt. Mit zunehmender Entfernung von der Lasteinleitungsstelle nimmt die Belastungshöhe jedoch stark ab. Auf die Sprengung bezogen kann man sagen, daß die verwendete Sprengstoffmenge und die Plattendicke einen wesentlichen Einfluß auf die Trümmergröße haben.

Ein bisher noch nicht erläutertes aber doch sehr wesentlicher Punkt ist die *Rißgeschwindigkeit*. Die Rißgeschwindigkeit bestimmt, mit welcher Geschwindigkeit sich ein Riß fortpflanzt. Da die Entstehung der Risse, das Rißwachstum und letztendlich Rißkreuzungen Ursache für die Fragmentierung sind, bestimmt die Rißgeschwindigkeit zu einem großen Teil die Fragmentgröße. Aus Versuchen (siehe z.B. Bachmann [10]) ist ebenfalls bekannt, daß sich die Rißdichte mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit vergrößert. Die Messung der Rißgeschwindigkeiten der einzelnen Risse ist in der Praxis mit einem sehr großen Aufwand verbunden. Man hat festgestellt, daß sich die Risse mit einer bedeutend niedrigeren Geschwindigkeit als der theoretischen eindimensionalen Wellengeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.1)$$

fortpflanzen. Curbach [59] führt diesen Effekt auf die Betonfeuchte, die Reibung und auf die Massenträgheit der sich entfernenden Rißufer zurück. Jeder Rißfortschritt muß mit einer mehr oder weniger großen Rißöffnungsbewegung verbunden sein, die durch die Trägheit der zu beschleunigenden Masse im Bereich der Rißufer bestimmt wird. Letztere beeinflusst daher, insbesondere in der Anfangsphase der Rißentstehung, auch den Rißfortschritt. Der Rißfortschritt wird somit durch die Massenträgheit der sich entfernender Rißufer, die bei der Rißinitiierung entstehen, abgebremst. Nicht zuletzt weil nahezu alle Festkörper ein dehnungsgeschwindigkeitsabhängiges Verhalten zeigen, liegt es nahe, daß die Massenträgheit zumindest bei hohen Dehnungsgeschwindigkeiten von großem Einfluß ist. Klassische Einflußparameter des Werkstoffes Beton, wie Art des Zuschlags und der Mörtelmatrix, oder Feuchtegehalt und –transport, die ohnehin auf bestimmte Materialgruppen begrenzt sind, können hier nicht von entscheidender Bedeutung sein (siehe Rossi [232]).

Die Rißgeschwindigkeit ist eine Funktion vieler Parameter wie der Massenträgheit, Spannung σ , Dehnrate $\dot{\epsilon}$, Feuchte etc.

$$v_{\text{crack}} = f(\sigma(t,x), \dot{\epsilon}(x,t), \dots), \quad (2.2)$$

von denen einzelne in jeweils unterschiedlichen Bereichen der Beanspruchungsgeschwindigkeit dominieren.

Die statische Materialfestigkeit hat unter sehr hohen Belastungsgeschwindigkeiten kaum eine Bedeutung. Hanchak [131] führte Impaktversuche an Betonplatten durch und stellte fest, daß der Perforationswiderstand von Betonen unterschiedlicher Festigkeit bei hohen Impaktgeschwindigkeiten nahezu identisch ist. Auch bei den von Hermann [138] und Ockert [221] durchgeführten Sprengversuchen an Betonplatten ist dieses Phänomen zu erkennen. Die Platte aus einem B35 weist fast die gleichen Schäden auf wie dieselbe Platte aus einem B200.

Zusammenfassend lassen sich folgende Parameter, die die Fragmentierung von Beton bestimmen, identifizieren:

- die Belastungshöhe
- die Belastungsgeschwindigkeit
- die Rißgeschwindigkeit
- die Heterogenität
- die Materialfestigkeit

Die Abbildung von diskreten Rissen ist bei einem dynamischen Fragmentierungsprozeß innerhalb eines Bauteils wegen der zu erwartenden großen Rißanzahl und damit verbundenen enormen Rechenzeit für eine dreidimensionale numerische Simulation kaum durchführbar. Nur für eine geringe Rißanzahl wurden u.a. von Häußler [135] und Belytschko [21] geeignete Diskretisierungsverfahren abweichend von der Methode der Finiten Elemente (FEM) vorgestellt.

Die rechnerischen Untersuchungen zum Fragmentierungsverhalten von Beton beschränken sich auf die Parameter Belastungsgeschwindigkeit, -höhe und Heterogenität (siehe Kapitel 5). Die Rißgeschwindigkeit, d.h. vielmehr die Geschwindigkeit, mit der sich die makroskopische Schädigung im Material fortpflanzt, wird in Form einer Relaxationsfunktion, die die Schädigung verzögert einsetzen läßt, implizit im Betonstoffgesetz berücksichtigt.

2.2 Dynamische Fragmentierungstheorien

In den letzten zwanzig Jahren hat es zahlreiche Veröffentlichungen zum Thema „Fragmentierung“ gegeben. Hier haben sich durch die Weiterentwicklung auf dem Gebiet der numerischen Simulation sowie durch die starke Leistungssteigerung der heutigen Computer neue Möglichkeiten ergeben, diese Problematik erfolgreich zu behandeln. Zum einen sind viele auf unterschiedlichen Ansätzen aufbauende Fragmentierungstheorien entstanden, zum anderen spielt bei einer numerischen Simulation die Wahl des richtigen Verfahrens eine große Rolle. Die Fragmentierungstheorien lassen sich in drei Klassen unterteilen, rein statistische Theorien, Theorien, die auf Energiebetrachtungen basieren und „mechanisch statistische“ Theorien, die die Bildung oder Aktivierung eines Risses über dessen Ausbreitung und Verzweigung bis schließlich zur Fragmentierung beschreiben. Letztere Klasse läßt sich noch in zwei weitere Klassen unterteilen, die die Rißbildung entweder auf Mikro- oder auf Makroebene betrachtet. Die Theorien sind Gegenstand der Kapitel 2.2.1 bis 2.2.3. In Kapitel 2.3 werden verschiedene numerische Verfahren diskutiert, mit denen die Fragmentierung rechnerisch simuliert werden kann. Es werden Gründe für die Wahl des numerischen Verfahrens gegeben.

2.2.1 Statistische Fragmentierungstheorien

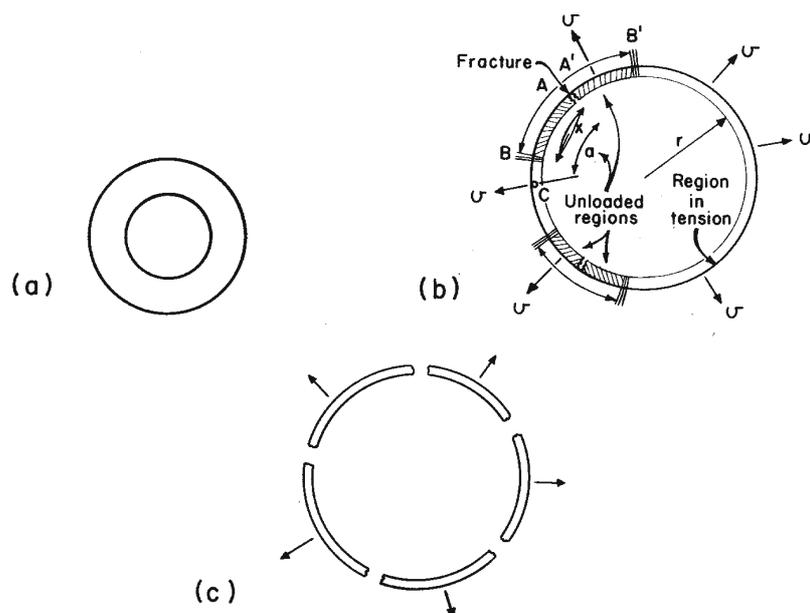


Bild 2.6: Fragmentierung nach Mott, aus [200]

Erste Untersuchungen zur dynamischen Fragmentierung gehen auf das Jahr 1946 zurück. Dort untersuchte Mott [211] das Fragmentierungsverhalten von zylindrischen metallischen Schalen. Vereinfachend wird dabei der Zylinder zweidimensional als ringförmiges Element gleicher Wanddicke betrachtet (siehe Bild 2.6). Dargestellt ist in Bild 2.6a ein Schnitt orthogonal zur Zylinderachse vor der Detonation, in Bild 2.1b im Bruchzustand. Mott geht davon aus, daß der Zylinder in infinitesimal kleine Fragmente zerfällt, wenn er überall dieselbe Bruchdehnung besitzt, weil Versagen überall gleichzeitig auftritt. Er geht von der exponentiellen Wahrscheinlichkeitsverteilung, daß eine Probe zum Dehnungszustand ε gerissen ist, aus

$$p = 1 - \exp\left(-\frac{C}{\gamma} e^{\gamma\varepsilon}\right), \quad (2.3)$$

wobei C und γ zwei Materialkonstanten bezeichnen. Für die mittlere Bruchdehnung setzt er empirisch an:

$$\varepsilon_f = \frac{1}{\gamma} \left[\log \frac{\gamma}{C} + 0.577 \right] \quad (2.4)$$

Weiter nimmt er an, daß sich um die entstehenden Risse eine Entlastungszone ausbreitet, in der keine neuen Risse mehr entstehen können. Somit bestimmt die Reißgeschwindigkeit, die Geschwindigkeit, mit der sich die Entlastungszone ausbreitet und die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Bruchdehnung die Fragmentgröße. Je größer die Streuung der Bruchdehnung ist, desto größer werden die Fragmente. Dies stimmt gut mit Beobachtungen und den eingangs erörterten Zusammenhängen überein, daß homogene Materialien wie Stahl wesentlich feiner fragmentieren als heterogene Werkstoffe wie Beton. Als letztendliches Ergebnis erhält Mott eine Fragmentgrößenverteilung in Abhängigkeit der Parameter C , γ , r , ρ , σ_f mit der Bruchspannung

$$\sigma_f = -\rho x \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{r} (a - x) \right). \quad (2.5)$$

Hierbei ist ρ die Dichte, v die Geschwindigkeit, mit der der Körper expandiert, die Variablen x , r und a sind in Bild 2.6 erklärt. Grady [121]

entwickelte eine ähnliche Theorie ausgehend von expandierenden Ringen. Er verifiziert diese anhand der von Wesenberg und Sargatz [266] durchgeführten Explosionsversuchen an dünnen Aluminium-Zylindern. In Bild 2.7 ist ein Vergleich der Ergebnisse der Fragmentverteilungen aus den Versuchen mit den Theorien von Mott und Grady dargestellt.

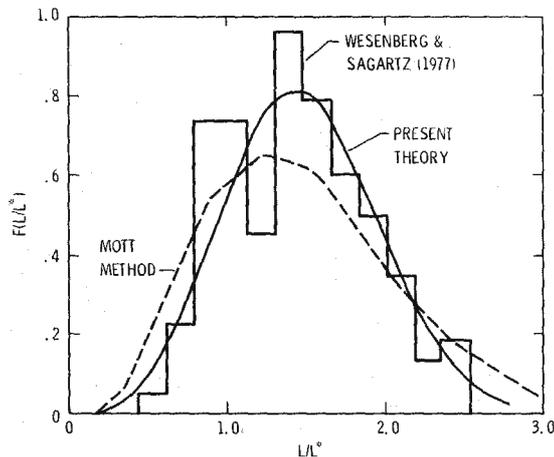


Bild 2.7: Fragmentverteilung von Aluminium aus den Versuchen von Sargatz verglichen mit den Fragmentierungstheorien von Mott und Grady, aus [266]

Grady und Kipp [117] formulieren eine Theorie, die ausschließlich auf statistischen Betrachtungen beruht. Für den eindimensionalen Fall betrachten sie einen unendlich langen Stab (siehe Bild 2.8). Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von n Bruchstellen auf einer Länge l beträgt

$$P(n,l) = (N_0 l)^n e^{-N_0 l} / n!, \quad (2.6)$$

wobei N_0 eine Konstante ist und n die Anzahl der Fehlstellen bezeichnet. Um die Wahrscheinlichkeitsverteilung in „Fragmentlängen“ zu erhalten, wird zunächst die Wahrscheinlichkeit bestimmt, keine Bruchstelle auf der Länge l zu finden:

$$P(0,l) = e^{-N_0 l} \quad (2.7)$$

Die Wahrscheinlichkeit, genau eine Bruchstelle über eine Länge dl zu finden, lautet:

$$P(1,dl) = N_0 dl \quad (2.8)$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit einer Bruchstelle innerhalb des Bereiches $l+dl$

$$dP = P(0,l)P(1,dl) = N_0 e^{-N_0 l} dl, \quad (2.9)$$

was zu einer exponentiellen Fragmentgrößenverteilung führt:

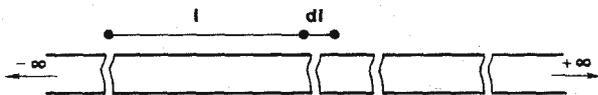
$$\frac{dP}{dl} = N_0 e^{-N_0 l} \quad (2.10)$$

Die kummulative Wahrscheinlichkeitsverteilung von Fragmenten größer als l ergibt sich dann zu:

$$P(l) = \int_l^{\infty} \frac{dP}{dl} dl = e^{-N_0 l} \quad (2.11)$$

Die kummulative Fragmentanzahl pro Einheitslänge erhält man daraus über Gl. 2.11 zu:

$$N(l) = N_0 e^{-N_0 l} \quad (2.12)$$



Random one-dimensional fragmentation—a Poisson process.

Bild 2.8: Eindimensionale Fragmentierungstheorie nach Grady, aus [117]

Die Erweiterung der eindimensionalen statistischen Fragmentierungstheorie auf den zweidimensionalen Fall ist nicht ganz trivial. Es gilt das Problem zu lösen, eine Oberfläche über eine Zufallsfunktion in viele kleine Teilregionen zu unterteilen. Die meisten Autoren verwenden eine Verteilungsfunktion in Abhängigkeit der Fragmentflächen. Es werden Linien auf der zu unterteilenden Oberfläche generiert, so daß die Fragmentflächen der gewünschten Verteilungsfunktion entsprechen. Es gibt zahlreiche Arten, Linien auf einer Oberfläche zu erzeugen (siehe z.B. Bild 2.9). Die Verfahren sind häufig iterativ. Meistens werden Punkte zufällig auf der Oberfläche erzeugt, die dann zu Linien und Fragmentflächen unterschiedlicher Geometrie (siehe Bild 2.9a) zusammengefaßt werden, so daß die gewünschte Fragmentflächenverteilung erhalten wird.

Mott und Linfoot [210] gehen davon aus, daß die Größe der Fragmentfläche a eine Poisson-Variable ist und erhalten so eine Fragmentflächenverteilung N der Form

$$N(a) = N_0 e^{-2(N_0 a)^{1/2}}, \quad (2.13)$$

wobei N_0 die Anzahl der Fragmente pro Einheitsfläche bezeichnet. Grady und Kipp [117] gehen hingegen von einer linear exponentiellen Verteilung aus

$$N(a) = N_0 e^{-N_0 a}, \quad (2.14)$$

die gut mit Versuchsergebnissen übereinstimmt. Gebräuchlicher ist es, Linien auf einer Oberfläche zu generieren, die die Oberfläche zufällig in viele Fragmente unterschiedlicher Fläche aufteilt. Mott und Linfoot [210] schlagen die Generierung von zufällig positionierten, unendlich langen Linien auf der Oberfläche vor (siehe Bild 2.9b). Damit ergibt sich eine kummulative Fragmentanzahl zu (siehe [210], [109])

$$N(a) = 2N_0 (N_0 a)^{1/2} K_1 \left[2(N_0 a)^{1/2} \right], \quad (2.15)$$

wobei K_1 eine modifizierte Bessel-Funktion ist.

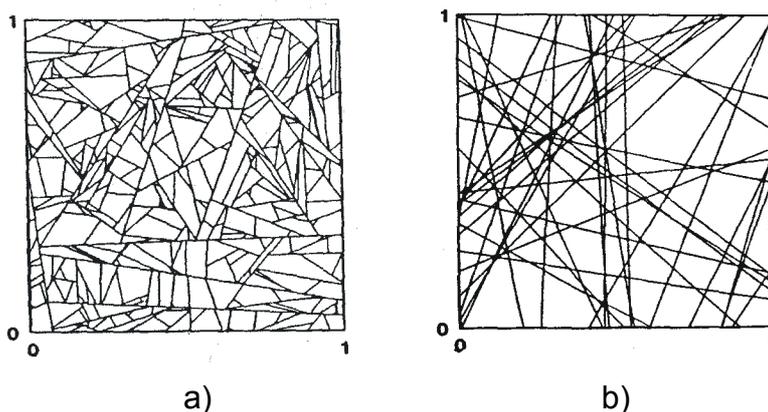


Bild 2.9: Zweidimensionale Fragmentierung, aus [117]

Eine andere Methode, die Oberfläche in viele Teilflächen zu zerlegen, zeigt Bild 2.9. Sie stimmt gut mit der linearen exponentiellen Verteilung nach Gl. 2.14 überein und zeigt aber große Abweichungen gegenüber der Mott-Verteilung (Gl. 2.13).

Am weitesten verbreitet ist die Voronoi-Methode zur Unterteilung von Oberflächen in Fragmente. In Bild 2.10 sind Fragmentanzahlen über die Fragmentfläche verschiedener Verteilungsfunktionen dargestellt.

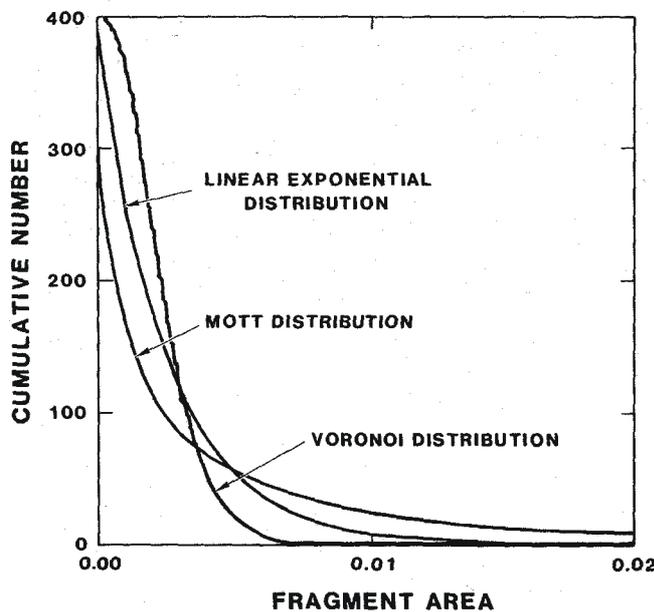


Bild 2.10: Vergleich verschiedener zweidimensionaler statistischer Oberflächenfragmentierungstheorien, aus [115]

In den bisher betrachteten rein geometrischen Fragmentierungstheorien wird über die gesamte Oberfläche dieselbe Verteilungsfunktion (in Abhängigkeit der Fragmentfläche) vorausgesetzt. Dies wird im Folgenden mit "statistischer Homogenität" bezeichnet. In Wirklichkeit variiert die Intensität der Fragmentierung innerhalb eines Körpers aufgrund der komplexen Lastgeschichte sehr stark. Am Beispiel des expandierenden Zylinders kann nahezu eine statistisch homogene Fragmentierung erreicht werden. Die meisten in der Realität verwendeten Bauteilgeometrien führen jedoch zu einer statistisch inhomogenen Fragmentierung. Deshalb schlagen Grady und Kipp [115] eine statistisch inhomogene Verteilung vor, indem sie die linear exponentielle Verteilungsfunktion (Gl. 2.14) erweitern

$$N(a) = \sum_{i=1}^n g_i N_{i0} e^{-N_{i0} a}, \quad (2.16)$$

wobei N_{i0} hier die Fragmentdichte repräsentiert und g_i die lokale Fragmentgröße bestimmt. Grady und Kipp wenden ihre Theorie auf Hoch-

Geschwindigkeits-Impakts von Metallplatten an [110]. Sie gehen von einer statistisch inhomogenen bilinearen Verteilungsfunktion aus:

$$N(a) = g_1 N_{10} e^{-N_{10} a} + g_2 N_{20} e^{-N_{20} a} \quad (2.17)$$

In Bild 2.11 ist ein Versuchsergebnis aus [110] mit der aus der bilinearen Verteilung ermittelten Fragmentsieblinie gegenübergestellt.

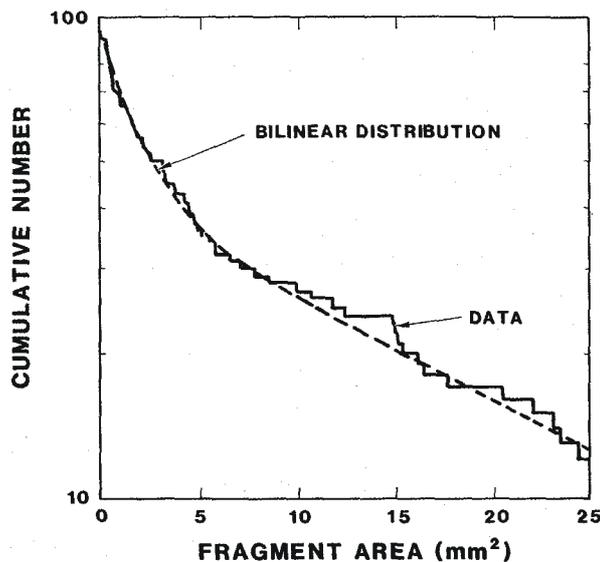


Bild 2.11: Vergleich der bilinearen statistischen Fragmentierungstheorie mit Versuchsergebnissen vom Beschuß einer Metallplatte, aus [115]

Ein Nachteil dieser statistischen Arten der Fragmentierung besteht in der Abhängigkeit von den Wahrscheinlichkeitsdichten, mit denen Linien auf der Oberfläche generiert werden.

In der Literatur finden sich weitere Ansätze einer solchen statistischen Fragmentierung, wie z.B. das sog. "Maximum-Entropie-Prinzip" (siehe [94]) oder die Filtrationstheorie (siehe z.B. [93], [247], [248]). Da rein statistische Theorien aber einer physikalischen Grundlage weitgehend entbehren, eignen sie sich wenig, den komplexen Vorgang der Fragmentierung im Dreidimensionalen, wie er in der Realität vorkommt, abzubilden. Lediglich die eindimensionalen Fragmentierungstheorien besitzen noch eine geringe physikalische Grundlage, mit der sich vereinfacht die Fragmentierung spezieller Versuche, wie z.B. auch das Fragmentieren von zylindrischen Schalen, abschätzen läßt. Schon bei einer zweidimensio-

nenalen Erweiterung beschränken sich die Fragmentierungsuntersuchungen auf mathematisch statistische Erweiterungen ohne wesentliche physikalische Begründungen. Sie sind bestenfalls für den Fall der vollständigen Zerstörung eines Bauteils anwendbar. Daß die Statistik bei der Beschreibung des Fragmentierungsprozesses eine wichtige Rolle spielt, wird deshalb nicht bestritten. So unterliegen die Entstehung oder Aktivierung von Mikrorissen immer gewissen statistischen Gesetzmäßigkeiten, die man sich zu Nutze machen wird. Wie die Statistik mit der Physik erfolgreich verknüpft werden kann, zeigen Kipp und Grady [167], [168]. Sie bestimmen in einer FE-Simulation auf physikalischen Grundlagen basierend eine mittlere Fragmentgröße pro Zelle. Im Postprozessor schließen sie dann über statistische Betrachtungen auf die Fragmentgrößenverteilung pro Zelle.

2.2.2 Mechanisch statistische Fragmentierungstheorien

Im Folgenden werden exemplarisch zwei Fragmentierungstheorien vorgestellt, die auf mikro- bzw. makromechanischen Ansätzen beruhen, um zu zeigen, daß die Fragmentierungstheorien lediglich eine kleine Erweiterung der mikro- bzw. makromechanischen Schädigungstheorien sind. Abschließend werden einige wichtige Eigenschaften des Fragmentierungsprozesses näher erörtert.

Curran et al. [60] –[65] entwickelten für numerische Simulationen eine umfangreiche Fragmentierungstheorie (NAG/FRAG) für duktile und spröde Werkstoffe auf Mikroebene. Sie unterteilen den Fragmentierungsprozeß in drei Phasen:

- Bildung von mikroskopischen Fehlstellen im Material
- deren Wachstum
- die Vereinigung der Fehlstellen, die letztendlich zur Fragmentierung führt

Die Bildung von Mikro-Fehlstellen (Nukleation) definiert Curran [64] als Entstehung von Poren und Mikrorissen im Material, d.h. von Poren, die groß genug sind, um unter den auferlegten Spannungsfeldern zu wachsen. Den Nukleationsprozeß beschreibt Curran als Evolution einer inneren Schädigungsvariablen D , für die er einen mikromechanischen Ansatz

von Kachanov [165] übernimmt. Dieser verwendet eine tensorielle Schädigungsvariable D , um die Anisotropie des Werkstoffes abzubilden. Es sei R der durchschnittliche Radius einer Fehlstelle und \mathbf{n} der Einheitsvektor orthogonal zur Reißebene. Für ellipsoide Risse sei R der Mittelwert aus größerer und kleinerer Achse und \mathbf{n} der orthogonale Einheitsvektor auf die Fläche maximalen Querschnittes. Die Schädigung D wird als Funktion der Reißkonzentration bereits „aktiver“ Risse $\rho_f(\mathbf{X}, t, R, \mathbf{n})$ gewählt, wobei \mathbf{X} den Ortsvektor und t die Zeit repräsentieren. Nach Curran ergibt sich die Anzahl aktiver Mikrorisse N_t pro Einheitsvolumen zu:

$$N_t = \int_R \int_{\mathbf{n}} \rho_f d\mathbf{n} dR \quad (2.18)$$

Die Anzahl N_g der Mikrorisse, die größer oder gleich dem Reißradius R sind, ergibt sich durch Integration von ρ_f über alle Normalenvektoren \mathbf{n} und über alle Risse, die größer oder gleich R sind:

$$N_g(\mathbf{X}, t, R) = \int_R^\infty \int_{\text{all } \mathbf{n}} \rho_f(\mathbf{X}, t, R, \mathbf{n}) d\mathbf{n} dR \quad (2.19)$$

Aus Experimenten wird eine empirische Funktion für die Reißanzahl N_g zugrunde gelegt

$$N_g(\mathbf{X}, t, R) = N_t(\mathbf{X}, t) \exp[-R/R_0(\mathbf{X}, t)] \quad (2.20)$$

wobei R_0 ein vorgegebener Wert der exponentiellen Verteilung ist. Gl. 2.20 impliziert folgende Form der Reißkonzentration:

$$\rho_f(\mathbf{X}, t, R) = [N_t(\mathbf{X}, t)/R_0(\mathbf{X}, t)] \exp[-R/R_0(\mathbf{X}, t)] \quad (2.21)$$

mit

$$\rho_f(\mathbf{X}, t, R) = \int_{\text{all } \mathbf{n}} \rho_f(\mathbf{X}, t, R, \mathbf{n}) d\mathbf{n}. \quad (2.22)$$

Die Bildung und das Fortpflanzen der Schädigung (Fehlstellen) basiert auf der Evolution der Rißdichte ρ_f in Abhängigkeit der vorhandenen makroskopischen Spannungen, Dehnungen, Dehnraten, Temperatur, etc.:

$$\dot{\rho}_f = \dot{\rho}_f(\sigma, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) \quad (2.23)$$

Durch Fehlstellenbildung wird sich die Rißanzahl N_t pro Einheitsvolumen erhöhen. Geht man davon aus, daß sich die Verteilungsfunktion nicht ändert, erhält man für die Rißkonzentrationsrate:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_f(\text{Nukleation}) &= (\dot{N}_t / R_0) \exp(-R / R_0) \\ \dot{\rho}_f(\text{Nukleation}) / \rho_f &= \dot{N}_t / N_t \end{aligned} \quad (2.24)$$

Allerdings verändert sich dabei N_t durch das Wachsen der Risse nicht. Für das Mikrorißwachstum nimmt Curran [64] dieselbe Verteilungsfunktion an:

$$\dot{\rho}_f(\text{Wachstum}) / \rho_f = (R / R_0 - 1) \dot{R}_0 / R_0 \quad (2.25)$$

Da aus Versuchsergebnissen eher die gesamte Rißanzahl N_g als die Rißanzahl N_t pro Einheitsvolumen ermittelt wird, macht Curran den Nukleations- und Mikrorißwachstumsprozeß von N_g abhängig:

$$\dot{N}_g = \left(\frac{\partial N_g}{\partial t} \right)_{X,R} = \dot{N}_g^N + \dot{N}_g^W \quad (2.26)$$

Die oberen Indizes N und W bedeuten jeweils Nukleations- bzw. Wachstumsrate. Hierbei läßt sich die Nukleationsrate über folgende Beziehung bestimmen:

$$\dot{N}_g^N / N_g = \dot{N}_t / N_t \quad (2.27)$$

Die Wachstumsrate erhält man nach Gl. 2.28:

$$\dot{N}_g^W / N_g = (R / R_0) (\dot{R}_0 / R_0) \quad (2.28)$$

Auf dieser Grundidee aufbauend entwickeln Curran et al. [64] verschiedene Nukleations-Modelle:

- spannungs/temperaturgesteuerte Nukleationsmodelle
- deformationsgesteuerte Nukleationsmodelle

Grundlage seiner Nukleationsmodelle bilden im Wesentlichen drei Punkte:

1. Annahme einer Verteilung für die inneren Fehlstellen, z.B.:

$$N_g(R) = N_0 \exp(-R/R_1)$$

2. Grenzwertbedingung F, z.B.:

$$F(\sigma_m / \sigma_y, \bar{\epsilon}^p, \dot{\epsilon}^p, T, R) \geq 0$$

3. einen Ausdruck für $\dot{\rho}_f$ bzw. \dot{N} , z.B.:

$$\dot{N} = A(\sigma_m, T) + B(\sigma_m) \dot{\sigma}_m + C(\dot{\epsilon}^p) \dot{\epsilon}^p$$

Hierbei kann die Entwicklungsrate der Fehlstellen je nach Anforderung an das Werkstoffgesetz von verschiedenen Parametern abhängig gemacht werden. Im obigen Beispiel ist die Nukleationsrate eine Funktion der Temperatur T, mittleren Zugspannung σ_m und mittleren plastischen Dehnrate $\dot{\epsilon}^p$. Entscheidend ist dabei die Wahl der Verteilungsfunktion für die inneren Fehlstellen. Hier kommt wieder der Statistik große Bedeutung zu. Für spröde Werkstoffe hat sich gezeigt, daß eine Weibull-Verteilung (siehe [14], [263]), das Materialverhalten am besten approximiert.

Das Mikrorißwachstum macht Curran [64] von verschiedenen Prozessen und Eigenschaften des Materials abhängig, so von

- dem Mikrorißwachstum durch Diffusionsprozesse
- dem Mikrorißwachstum durch Plastifizieren
- dem spröden Rißwachstum
- dem Wachstum von „Scherbändern“

Curran implementiert seine Theorien in einen FE-Code. Die Fragmentierung und die Ermittlung der Fragmentgrößenverteilung geschieht hierbei jeweils innerhalb der einzelnen Elemente, weshalb das Fragmentierungsverhalten bei der Simulation stark netzabhängig ist. Da die Fragmentierung innerhalb der einzelnen Elemente stattfindet, können nur Versuche mit äußerst feiner Fragmentierung rechnerisch erfaßt werden. Große Fragmente, wie sie bei den Sprengversuchen an Betonplatten von Hermann [138] entstanden, können im Rahmen solcher Berechnungen nicht behandelt werden.

Um von der Vereinigung von Mikrorissen, die ja innerhalb eines Elementes stattfindet, auf die Fragmentierung schließen zu können, bedarf es noch eines letzten Schrittes. Da der geometrische Ort der Mikrorisse innerhalb des Elementes nicht bekannt ist, kann die Fragmentierung nicht explizit bestimmt werden. Curran [64] geht davon aus, daß der Fragmentradius R_f ungefähr dem Rißradius R_c entsprechen muß, der zur Fragmentierung geführt hat:

$$R_f \cong R_c, \quad (2.29)$$

Dementsprechend erhält man für die Fragmentanzahl N_f

$$N_f = \xi N_c, \quad (2.30)$$

wobei der Vorfaktor ξ von der Fragmentform abhängt und für achtseitige Fragmente von Curran zu $\frac{1}{4}$ gewählt wird. N_c bezeichnet die Rißanzahl. Somit ist die Fragmentgrößenverteilung vollständig durch die Rißgrößenverteilung bestimmt. Für das Fragmentvolumen und den Fragmentradius R_f gilt

$$V_f = T_f R_f^3, \quad (2.31)$$

wobei T_f ein Koeffizient ist, der ebenso von der Form der Fragmente abhängt.

Daraus wird ersichtlich, daß die Bestimmung der Fragmentanzahl und -größe lediglich aus einer kleinen Erweiterung des mikromechanischen Schädigungsmodells resultiert.

Curran unterscheidet zwischen zwei Modellarten, dem DFRACT-Modell für duktilen Versagen und dem BFRACT-Modell für sprödes Versagen. Für Fels unter Explosionsbelastung verifiziert Curran sein BFRACT-Modell (siehe Bild 2.12). Die Fragmentgrößenverteilung aus Versuch und Rechnung stimmen dabei qualitativ gut überein, größere Trümmer entstanden bei seinen Experimenten allerdings nicht.

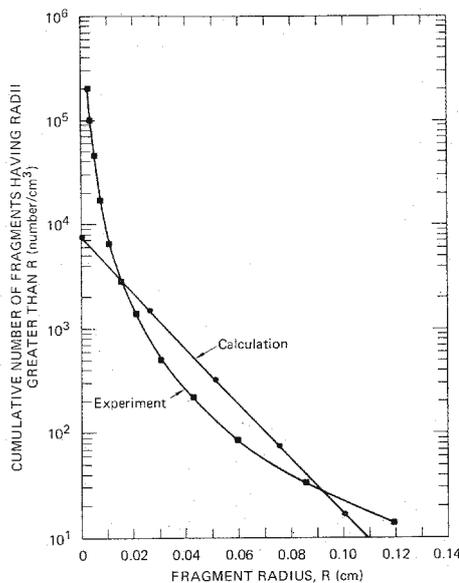


Bild 2.12: Fragmentverteilung von Fels nach Curran et al. [64]

Ein Nachteil dieser Theorie besteht darin, daß für die Anwendung der Stoffgesetze Parameter benötigt werden, die sich nur aus Versuchen und anschließend aufwendigen mikromechanischen Untersuchungen ermitteln lassen. In [65] schlägt Curran eine vereinfachte Version dieser Theorie vor.

Grady und Kipp [118], [112] entwickelten eine Fragmentierungstheorie, die versucht die Dehnrates mit der Fragmentgröße in Bezug zu bringen. Sie gehen von dem weit verbreiteten makroskopischen Schädigungsansatz aus, bei dem sich der Elastizitätsmodul durch die Bildung und Ausbreitung scheibenförmiger Risse abmindert:

$$E_f = (1 - D)E \quad (2.32)$$

D repräsentiert dabei die innere Schädigung und wird definiert als

$$D = NV, \quad (2.33)$$

wobei N die Anzahl der Risse pro Volumeneinheit und V ein Kugelvolumen bezeichnet. E bezeichnet den Anfangselastizitätsmodul, E_f den Elastizitätsmodul zur Schädigung D . Sie gehen davon aus, daß sich die Risse mit konstanter Geschwindigkeit C_g ausbreiten und erhalten somit für die Schädigung zum Zeitpunkt t :

$$D = N \frac{4}{3} \pi (C_g t)^3 \quad (2.34)$$

Weiter setzen sie für die Rißbildung eine Weibull-Verteilung mit den Parametern k und m voraus:

$$N = k \varepsilon^m \quad (2.35)$$

Wie Mott gehen sie davon aus, daß sich um jeden Riß eine Entlastungszone mit dem Volumen $V(t-\tau)$ ausbreitet, in der sich keine neuen Risse bilden können. Zum Zeitpunkt τ der Rißbildung erhält man für eine konstante Dehnung $\varepsilon = \dot{\varepsilon} t$ die Schädigung

$$D(t) = \int_0^t \dot{N}(\tau) V(t-\tau) d\tau \quad (2.36)$$

mit

$$\dot{N} = N(\varepsilon) \dot{\varepsilon} (1-D).$$

Sie setzen weiter voraus, daß Fragmentierung zum Zeitpunkt t_f auftritt, wenn sich die Risse vereinigen und das Material nicht mehr in der Lage ist, Zugspannungen aufzunehmen, d.h es gilt $D(t_f)=1$. Zu diesem Zeitpunkt t_f bestimmen Grady und Kipp [112] eine maximale Zugspannung σ_m und eine mittlere Fragmentgröße L_m in Abhängigkeit der Dehnrates und der Parameter m , k , C_g und E :

$$\sigma_m = \sigma_m(k, m, C_g, E) \dot{\varepsilon}^{3/(m+3)} \quad (2.37)$$

$$L_m = L_m(k, m, C_g, E) \dot{\varepsilon}^{-m/(m+3)}$$

Die Parameter m , k und C_g bestimmen sie aus Versuchen. Den Weibull-Exponenten m für Ölschiefer nehmen sie beispielsweise zu 8 an. Bei relativ niedrigen Dehnraten ist die Zugfestigkeitssteigerung eher klein und die Fragmentgröße eher groß. Bei hohen Dehnraten fragmentiert das Material in viele kleine Trümmer. Wie auch bei der Theorie von Curran ist es hier schwierig, die Parameter k , m , und N aus den Versuchen zu bestimmen. Grady und Kipp [116] führen zahlreiche Versuche zur Bestimmung der Fragmentierungseigenschaften von Metallen durch. Man erhält desweiteren lediglich einen mittleren Fragmentdurchmesser. Für eine Fragmentgrößenverteilung bedarf es wiederum statistischer Betrachtungen.

Man erkennt, daß die Theorie von Grady und Kipp im Gegensatz zu der von Curran auf makromechanischen Ansätzen beruht. Es handelt sich wie bei Curran um die Erweiterung der Schädigungstheorie, die im Rahmen statistischer Betrachtungen Variablen wie die Dehnraten benutzt, um schließlich die Fragmentgröße zu bestimmen.

Aimone et al. [3] untersuchen die Fragmentierung von Fels, den sie mit Schockwellen, erzeugt durch einen Plattenimpakt, beaufschlagen. Sie stellen anhand dieser Versuche fest, daß nur ein kleiner Teil der Gesamtenergie während des Fragmentierungsprozesses zur Bildung neuer Oberflächen verbraucht wird und daß weniger als 15% der gesamten Explosionsenergie in Arbeit umgewandelt wird, die den Fels fragmentiert. Sie beobachten zahlreiche Mikrorisse innerhalb der einzelnen Fragmente.

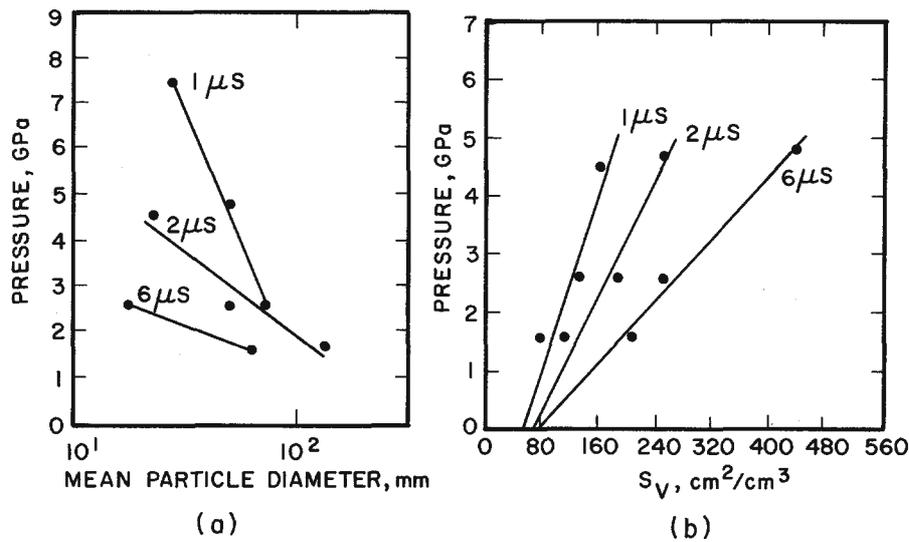


Bild 2.13: Innere Schädigung von Fragmenten, aus [3]

Die wichtigsten Ergebnisse sind in Bild 2.13 dargestellt. Daraus ist zu erkennen, daß unter gleichem hydrostatischem Druck bei steigender Impulsdauer die Rißdichte zunimmt und die Fragmente feiner werden (siehe Bild 2.13a). Dies ist aber nicht weiter verwunderlich, da der Gesamtimpuls schließlich ebenfalls zunimmt. Aus Bild 2.13b erhält man bei einem Druck von ca. 1,5 GPa und 1 μs Impulsdauer eine Rißdichte von ca. 80 cm²/cm³. Für denselben Druck bei 1 μs Impulsdauer läßt sich aus Bild 2.13b ein mittlerer Fragmentdurchmesser von 9 cm herauslesen. Unter der Annahme kugelförmiger Fragmente und der Voraussetzung, daß die Fragmente keine weiteren Risse enthalten, läßt sich die Rißdichte aus dem Verhältnis von Kugeloberfläche zu Kugelvolumen zu $d/6 = 9 \text{ cm}/6 = 1,5 \text{ cm}^2/\text{cm}^3$ für das ausgewählte Beispiel bestimmen. Die tatsächliche Rißdichte liegt mit 80 cm²/cm³ jedoch weit über diesem Wert von 1,5 cm²/cm³. Somit ist gezeigt, daß die Fragmente innere Risse enthalten müssen. Daher ist die Fragmentgröße wohl kein geeignetes Maß für die innere Schädigung, weil sie im Wesentlichen in Form innerer Risse in den Fragmenten enthalten ist.

2.2.3 Energetische Fragmentierungstheorien

Der energetische Ansatz zur Abbildung desselben physikalischen Mechanismus "Fragmentierung" bietet eine Alternative zu den mechanisch statistischen Theorien.

Grady [123] bestimmt auf Energiebetrachtungen basierend Fragmentgrößen. Hierzu betrachtet er die kinetische Energie der sich bildenden Fragmente und die Energie zur Erzeugung neuer Oberflächen. Er nimmt an, die gespeicherte elastische Energie sei gegenüber der kinetischen Energie vernachlässigbar, was für Fluide, für die diese Theorie zuerst entwickelt wurde, eine gute Annäherung ist. Später wurde sie auf spröde Festkörper erweitert. Unter Vernachlässigung der gespeicherten elastischen Energie setzt sich die Gesamtenergie E_{ges} aus der kinetischen Energie E_{kin} und der Oberflächenenergie E_{Of} zusammen:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{Of}} \quad (2.38)$$

Die Oberflächenenergie läßt sich in Abhängigkeit der Bruchfläche A wie folgt formulieren

$$E_{\text{Of}} = \gamma A, \quad (2.39)$$

wobei γ die Energie zur Erzeugung neuer Fragmentoberflächen bezeichnet. Grady und Kipp [112] nehmen an, die Gesamtenergie U als Funktion der Bruchfläche A sei durch eine Minimalbedingung während des Fragmentierungsprozesses bestimmt, so daß

$$\frac{dU}{dA} = 0 \quad (2.40)$$

gilt. Als letztendlichen Ausdruck erhalten sie die Bruchfläche in Abhängigkeit von γ und der Dichte ρ

$$A = \left(\frac{3\pi\dot{\rho}^2}{5\rho\gamma} \right)^{1/3}, \quad (2.41)$$

was unter der Annahme kugelförmiger Fragmente nach einigen Umformungen zu dem Fragmentdurchmesser d führt:

$$d = 6 \left(\frac{5\rho\gamma}{3\pi\dot{\rho}^2} \right)^{1/3} \quad (2.42)$$

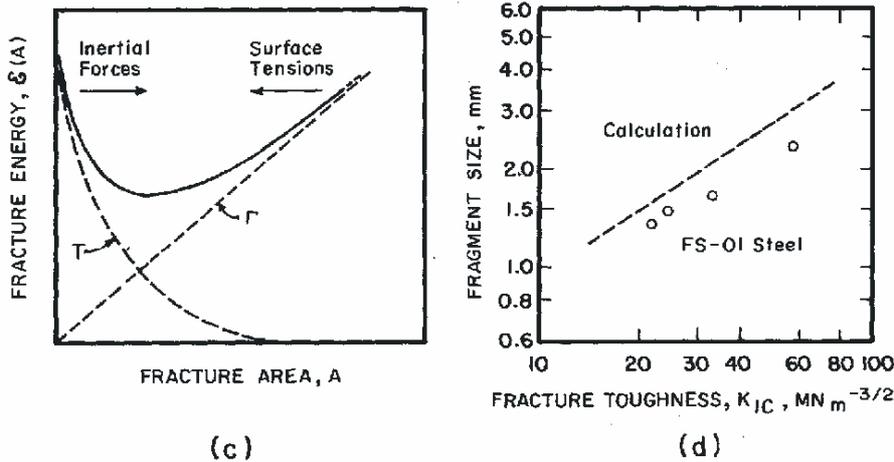


Bild 2.14: Energetische Fragmentierungstheorie nach Grady, aus [123]

In Bild 2.14c ist die Energie über die Bruchfläche A aufgetragen. Das Minimum aus kinetischer und Oberflächenenergie liefert den Fragmentdurchmesser d . Durch Vergleich der Bruchzähigkeiten aus Detonationsversuchen von mit Sprengstoff gefüllten Hohlzylindern aus Stahl, verifizieren sie ihre Theorie. In Bild 2.14d sind die Fragmentdurchmesser über die Bruchzähigkeit des durch Sprengstoff zerstörten Stahlzylinders aus Versuch und Rechnung gegenübergestellt. Die Ergebnisse stimmen ausreichend überein.

Glenn und Chudnovsky [106] erweitern Grady's Fragmentierungstheorie, indem sie in ihr Modell noch Effekte aus gespeicherter elastischer Energie mit einbeziehen. Sie stellen fest, daß die Dehnungsenergie für spröde Werkstoffe mit niedriger Bruchzähigkeit und hoher Bruchspannung maßgebend ist und verifizieren ihr Modell anhand von spröden Stählen.

Auch Grady [126], [122] zeigt, daß die Hauptursache der Fragmentierung von Festkörpern die Freigabe der gespeicherten elastischen Energie des Materials ist. Grady's Fragmentierungsmodell wurde als Postprozessor in den sog. EPIC-Code implementiert (siehe [162]).

List of the experiments, as well as the measured and predicted parameters of penetration

	Projectile				Target		
	Initial velocity U_0 (m/s)	Residual velocity U_r (m/s)	Residual length L_r (mm)	Mass loss Δm_p (g)	Thickness H (mm)	Crater radius R_{cr} (mm)	Mass loss Δm_T (g)
Exp. 527	1681	1578	83.0	197.3	40	24.9	674
Exp. 528	1696	—	82.3	201.1	40	21.2	524
Calculation	1696	1648	81.3	184.4	40	23.0	137.8
Exp. 530	1695	1506	60.1	321.1	70	20.5	685
Exp. 607	1696	1483	58.5	329.1	70	21.2	597
Calculation	1696	1587	39.7	401.0	70	23.1	163.4

Tabelle 2.1: Fragmentierung nach Yarin, aus [271]

Yarin [272] stellt für Werkstoffe, die bei der Fragmentierung ihren Aggregatzustand vom festen in den flüssigen wechseln, die Theorie des „chaotischen Zerfalls“ auf. Er geht davon aus, daß sich die kinetische Energie der sich bewegenden Partikel in Energie zur Bildung neuer Fragmentoberflächen umwandelt. Er erhält damit einen minimalen Fragmentradius r der Form

$$r \approx \left(\frac{\gamma}{\rho \dot{\epsilon}^2} \right)^{1/3}, \quad (2.43)$$

wobei ρ die Dichte, $\dot{\epsilon}$ die effektive Dehnrates und γ die spezifische Oberflächenenergie repräsentieren.

Yarin [271] führt Impactversuche durch, um seine Fragmentierungstheorie zu verifizieren. Für die letztendliche Fragmentgrößenverteilung bedarf es wieder statistischer Betrachtungen. Als Impaktkörper benutzt Yarin Projektile aus einer Wolframlegierung, die er auf Stahlplatten schießt. In Tabelle 2.1 sind seine Ergebnisse dargestellt. Für das Projektil stimmen die Ergebnisse aus Versuch und Rechnung gut überein, bei der Stahlplatte treten allerdings große Diskrepanzen auf.

Grady und Kipp [115] stellen weiter fest, daß die energetischen Fragmentierungstheorien zur Simulation einer totalen Fragmentierung gut geeignet sind, also bei Zerstörungsprozessen, bei denen das belastete Bauteil vollkommen zerstört wird. Die mechanisch statistischen Modelle eignen sich besser bei nicht so hohen Zerstörungsprozessen. Sie schlagen vor, die Vorteile beider Theorien miteinander zu verbinden, was jedoch nach Wissen des Verfassers bisher nicht erfolgt ist.

In der Literatur gibt es noch eine große Anzahl weiterer mechanisch statistischer und energetischer Fragmentierungstheorien für die unterschiedlichsten Werkstoffe. Sie unterscheiden sich in ihrer Struktur nicht wesentlich voneinander. Einige Autoren verfolgen mehr Theorien auf mikromechanischer Ebene, die die Rißentwicklung innerer Fehlstellen zur Grundlage hat (siehe [114], [112], [195]), während andere Autoren makromechanische Modelle aus der Plastizitätstheorie entwickeln, die Aussagen zu Bereich und Größe der Schädigung, Zug- oder Schubversagen, etc. machen können (siehe beispielsweise [107]). Letztendliche Fragmentgrößen werden allerdings ausschließlich über statistische Betrachtungen erhalten.

2.3 Numerische Verfahren zur Simulation der dynamischen Fragmentierung

Im folgenden Kapitel werden verschiedene numerische Methoden diskutiert, mit denen die Fragmentierung von Beton simuliert werden kann, die Methode der Finiten Elemente (FEM), die Methode der Finiten Differenzen (FDM), die Methode der Diskreten Elemente (DEM) und die Methode der Smooth Particle Hydrodynamics (SPH). Alle Verfahren sind Diskretisierungsverfahren, die eine Näherungslösung eines Differentialgleichungssystem auf die Lösung eines Problemes mit einer endlichen Zahl von Unbekannten zurückführen. Ziel dieses Kapitels ist nicht, die Verfahren selbst näher zu erläutern, sondern ihre Anwendbarkeit, Vor- und Nachteile bezüglich der Simulation der dynamischen Fragmentierung aufzuzeigen. Hierzu werden nach einer kurzen Erläuterung der Verfahren zahlreiche Anwendungsbeispiele aus der Literatur diskutiert. Sicherlich gibt es noch weitere numerische Verfahren, wie z.B. das Elementfreie Galerkin-Verfahren (EFG), die jedoch nicht Gegenstand dieses Kapitels sind. Abschließend werden die drei Methoden miteinander verglichen. Es werden Vor- und Nachteile gegeneinander abgewägt. Letztendlich wird zur Simulation des Fragmentierungsverhaltens von Beton die SPH-Methode bevorzugt.

2.3.1 Anwendbarkeit der FEM/FDM zur Simulation der dynamischen Fragmentierung

Wohl am weitesten verbreitet ist die Methode der Finiten Elemente und Finiten Differenzen. Die Verfahren werden als hinreichend bekannt vorausgesetzt und deshalb nicht näher erläutert. Literatur zur FEM findet man beispielsweise bei Bathe [15], Zienkevicz [275] oder Argyris [6]. Da Rechencodes auf Grundlage einer FE- und FD Diskretisierung sich gleichermaßen zur Simulation der dynamischen Fragmentierung eignen, wird an dieser Stelle zwischen den beiden Verfahren bezüglich ihrer Anwendbarkeit auf die Abbildung der dynamischen Fragmentierung nicht näher differenziert. Es wird die Anwendung der FE-Methode im Hinblick auf die Fragmentierung erörtert wie sie im Kapitel 2.2 schon kurz angeschnitten wurde.

Im Rahmen der FEM wird das Problemgebiet mit Elementen diskretisiert. Der heterogene Werkstoff Beton wird hierbei als Kontinuum betrachtet,

d.h. das Betongefüge, bestehend aus Zuschlagkörnern, Mörtelmatrix und Poren, wird bei der Abbildung mit finiten Elementen homogenisiert. Für die Anwendung mit finiten Elementen bezüglich der dynamischen Fragmentierung ist dies von zentraler Bedeutung. Bei der expliziten Ermittlung von Fragmentgrößen muß man sich immer bewußt sein, daß es sich bei der Beschreibung des Werkstoffes im Rahmen einer Simulation mit finiten Elementen immer um ein homogenes Kontinuum handelt.

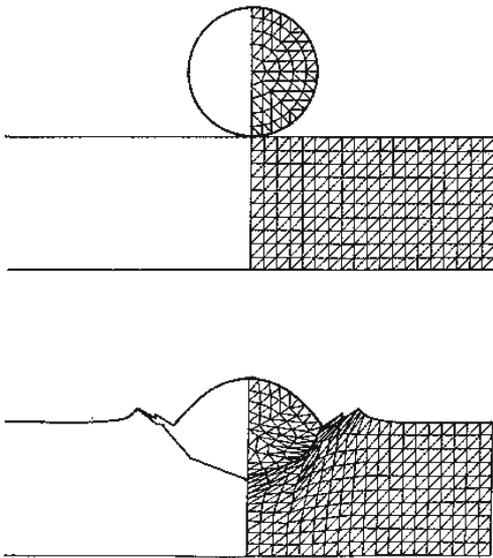


Bild 2.15: Lagrange-Diskretisierung, aus [276]

Prinzipiell gibt es zwei Möglichkeiten, die Bewegung eines Körpers im Raum zu beschreiben, die Lagrange'sche Formulierung und die Euler'sche Formulierung (siehe Altenbach [4]). Beide Betrachtungsweisen können ineinander überführt werden. Da die beiden Betrachtungsweisen für die Abbildung der dynamischen Fragmentierung im Rahmen einer numerischen Simulation wesentlich sind, seien sie im Folgenden kurz erörtert. Bei der Lagrange'schen Methode wird der Körper durch ein körperfestes Gitter diskretisiert. Jeder FE-Zelle wird eine Masse m zugeordnet, die während der Berechnung konstant bleibt. Die Verformung des Körpers wird durch die Deformation des FE-Netzes beschrieben (siehe Bild 2.15). Die Euler-Methode benutzt hingegen ein raumfestes Netz (siehe Bild 2.16).

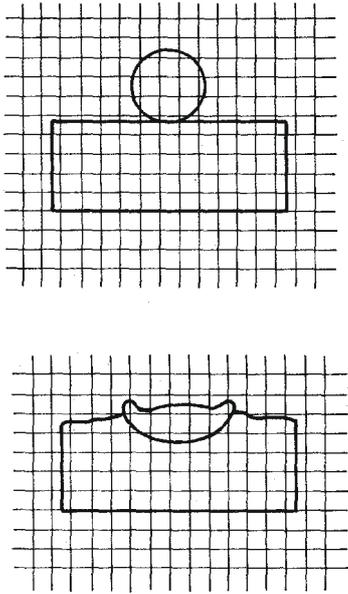


Bild 2.16: Euler-Diskretisierung, aus [276]

Die Bewegung des Körpers wird als materieller Fluß durch ein Kontrollvolumen abgebildet. Der Körper bewegt sich sozusagen im Euler-Netz. Jeder Zelle wird zu jedem Zeitschritt eine Masse zugeordnet. Das Euler-Netz muß so groß gewählt werden, daß der Körper sich in ihm ausbreiten kann. Die Verformung des Körpers wird durch entsprechende Dislokierung der Körpermasse auf die Elemente beschrieben. Beide Betrachtungsweisen haben ihre Berechtigung. Bei der Untersuchung von Modellen der Festkörpermechanik ist im allgemeinen die Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt t_0 bekannt und die Momentankonfiguration ist zu berechnen. Man erhält den deformierten Zustand durch Verfolgung der materiellen Punkte auf ihrer Bahn von der Referenz- in die Momentankonfiguration. Hierfür ist die Lagrange'sche Betrachtungsweise zweckmäßig. In der Fluidmechanik ist die Euler'sche Betrachtungsweise angemessen. Hier interessiert weniger, woher ein Teilchen kommt und wohin es fließt, sondern von Interesse sind Zustands- und/oder Feldgrößen an fixierten Orten. So ist beispielsweise die Messung der Geschwindigkeit als Funktion materieller Koordinaten mit erheblichen Aufwand verbunden. Daraus wird ersichtlich, daß FE-Codes, die auf einer Euler'schen Betrachtungsweise beruhen, zur Simulation des Materialverhaltens von Festkörpern weniger gut geeignet sind.

Kipp und Grady [168] ermitteln eine Fragmentgrößenverteilung durch Verwendung von FEM/FDM-Codes, die ein Lagrange'sches Bezugssystem verwenden. Für Metalle unter Hoch-Geschwindigkeits-Impakts entwickeln sie (siehe [168], [125]) eine Fragmentierungstheorie auf Makroebene. Als letztendliches Ergebnis bestimmen sie einen mittleren Fragmentdurchmesser, der je nach Art der Beanspruchung von drei Werkstoffparametern dominiert wird:

Dominiert die Bruchzähigkeit K_{IC} , ergibt sich der mittlere Fragmentdurchmesser zu:

$$d = \left(\frac{\sqrt{24} K_{IC}}{\rho c \dot{\epsilon}} \right)^{2/3} \quad (2.44)$$

Dominiert die Fließspannung, ergibt sich der mittlere Fragmentdurchmesser zu:

$$d = \sqrt{\frac{1,2 Y}{\rho \dot{\epsilon}^2}} \quad (2.45)$$

Dominiert die Schmelztemperatur, ergibt sich der mittlere Fragmentdurchmesser zu:

$$d = \left(\frac{48 \gamma}{\rho \dot{\epsilon}^2} \right)^{1/3} \quad (2.46)$$

Hierbei sind ρ die Dichte, $\dot{\epsilon}$ die Dehnrage, c die Schallgeschwindigkeit, γ die konstante Oberflächenspannung und Y ergibt sich zu:

$$Y = Y_0 \left(1 - \frac{T}{T_m} \right)^n \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^m, \quad (2.47)$$

wobei T_m die Schmelztemperatur bezeichnet. Die temperaturabhängige Bruchzähigkeit läßt sich über Gl. 2.48 bestimmen:

$$K_{IC} = K_{c0} \left(1 - \frac{T}{T_m} \right)^n \quad (2.48)$$

Die Variablen wie die Dehnrates, Dichte, etc. erhalten sie dabei aus der FE-Berechnung. Über statistische Betrachtungen schließen sie [125] aber auf die Fragmentgrößenverteilung. Sie berichten, daß es für Codes mit Lagrange'scher Betrachtungsweise nicht möglich ist, die Bildung diskreter Fragmente auf physikalischen Grundlagen basierend zu simulieren. Sie stellen fest, daß sie aber in der Lage sind, Feld- und Zustandsgrößen wie Schädigung, Dehnrates, Druck, Spannung, Temperatur, etc. vorherzusagen. Somit entwickelten sich Fragmentierungstheorien, die einen mittleren Fragmentdurchmesser von der Dehnrates, Temperatur oder dem Versagenszeitpunkt abhängig machen. Eine letztendliche Fragmentgrößenverteilung erhält man schließlich wieder über statistische Theorien.

Johnson et al. [162] implementieren auf Grady's Arbeiten [123], [122], [126] aufbauend die Möglichkeit der Ermittlung einer Fragmentgrößenverteilung in den EPIC 2-Code. Die auf Energieprinzipien beruhende Theorie von Grady gilt für duktile Werkstoffe. Die Fragmentgrößen werden durch Berechnung der kinetischen Energie der fliegenden Fragmente und der plastischen Dehnungsenergie während des Fragmentierungsprozesses ermittelt. Johnson et al. [162] erweitern diese eindimensionale Theorie auf den dreidimensionalen Fall. Sie bestimmen ein quaderförmiges Fragment der Kantenlänge:

$$b = \sqrt{\frac{16\bar{\sigma}\bar{\epsilon}_f}{\rho\bar{\epsilon}^2}} \quad (2.49)$$

Die äquivalente Dehnrates ermitteln sie in Abhängigkeit der deviatorischen Dehnrates $\dot{\epsilon}$ zu:

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}(\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2 + \dot{\epsilon}_z^2)} \quad (2.50)$$

Die äquivalente Spannung $\bar{\sigma}$ lautet als Funktion der Deviatorspannungen \mathbf{S} :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2)} \quad (2.51)$$

Analog zur äquivalenten Dehnrate gewinnt man auch die äquivalente plastische Deviatordehnung $\bar{\epsilon}_f$. Die Variablen wie die Dehnrate oder Deviatorspannung erhalten sie aus der FE-Simulation. Johnson et al. ermitteln eine Fragmentgrößenverteilung bei einer Impaktsimulation, in der eine Stahlplatte von einem Kupferstab perforiert wird. Vergleiche mit Versuchen fehlen. Ebenso wird auf einen Einbau in den EPIC 3-Code verzichtet.

Wie in Kapitel 2.2.2 erwähnt implementieren Curran et al. [64] ihre NAG/FRAG-Theorien in einen FE-Code. Ihr DFRACT-Modell integrieren sie in den Lagrange-Code TROTT [239]. Danach wird eine Fragmentierung innerhalb eines Elementes beschrieben, weshalb ihre Theorie nur auf Experimente mit extrem feiner Fragmentbildung anwendbar ist.

Obwohl es mit auf einer Euler'schen Betrachtungsweise basierenden Codes schwierig und sehr aufwendig ist, Werte für Spannung, Dehnung, innere Schädigung etc. über die Zeit in Abhängigkeit von materiellen Punkten zu bestimmen, implementieren Kipp, Grady und Swegle [167] eine ihrer Fragmentierungstheorien in den CTH-Code [196]. Die Bestimmung der Fragmentgrößenverteilung findet nur im Postprozessor statt. Die Dehnraten, Temperaturen, die im Laufe der Berechnung berechnet werden, bilden die Grundlage dafür. Somit werden auch bei Verwendung von Codes, die ein Euler-Bezugssystem verwenden, keine diskreten Fragmente abgebildet.

Fourney und Dick [97] untersuchen die Fragmentierung von Fels unter Explosionsbeanspruchung. Sie stellen dabei fest, daß FE-Codes wohl zur Bestimmung von Spannungen, Dehnungen, Drücken und Schädigungen durchaus in der Lage sind, weniger jedoch zur expliziten Simulation von Fragmentbildung bis hin zur Verfolgung der Trümmerbahnen. Daß FE-Programme die Bildung diskreter Fragmente nicht erfassen können, bemerken auch Kipp und Grady [167]. So entstanden zahlreiche Fragmentierungstheorien auf FE-Basis, die im Prinzip eine geringe Erweiterung der Schädigungs- oder Platizitätsmodelle auf Mikro- oder Makroebene sind, in denen Werte wie Schädigung, Dehnrate, Temperatur, etc. berechnet werden. Erst in einem Schritt danach finden die eigentli-

chen Fragmentierungstheorien ihre Anwendungen. Eine neue Möglichkeit, den Fragmentierungsprozeß in einer numerischen Simulation explizit abzubilden, bieten netzfreie Verfahren. Zwei weitere numerische Verfahren, die besser geeignet sind als FE-Codes werden nachfolgend zur Diskussion gestellt.

2.3.2 Anwendbarkeit der Methode der diskreten Elemente (DEM) zur Simulation der dynamischen Fragmentierung

Das große Problem im Hinblick auf die Bestimmung diskreter Fragmente im Rahmen einer numerischen Simulation liegt in der Art, das Material abzubilden. Daß die Methode der Finiten Elemente aufgrund ihrer Netzverbundenheit nicht in der Lage ist, explizit Fragmentgrößen zu ermitteln, wurde im vorigen Kapitel anhand von Beispielen aus der Literatur eingehend erörtert. Die Methode der Diskreten Elemente (DEM) ist eine Methode, die besser in der Lage ist, den Fragmentierungsprozeß rechnerisch zu erfassen. Die DEM betrachtet das Material im Gegensatz zur FEM als Diskontinuum. Somit ist das Materialverhalten im Rahmen der DEM völlig anders zu beschreiben. Da die DEM nicht so verbreitet ist wie die FE-Methode, soll zunächst ein Überblick der Methode gegeben werden, um Vor- und Nachteile des Verfahrens besser zu verdeutlichen, bevor auf die Anwendungsbeispiele der DEM eingegangen wird.

Im Gegensatz zur FE-Methode wird bei der DEM das Material mit vielen kleinen diskreten Elementen angenähert, die entweder starr oder verformbar sind. Die Elemente können die verschiedensten Gestalten annehmen, von der einfachen Kugelform bis hin zu sehr komplexen vielflächigen Geometrien. Die diskreten Elemente sind nur über Kontaktbedingungen aneinander gebunden und können sich somit leicht trennen, aber auch überlappen oder durchdringen. Über die Kontaktgesetze und/oder die „Stoffgesetze“ der verformbaren Elemente wird das Werkstoffverhalten approximiert. Die Elemente können ähnlich wie beim Cosserat-Kontinuum zusätzlich zu den drei translatorischen Freiheitsgraden noch drei rotatorische Freiheitsgrade besitzen. Es gibt mittlerweile eine große Anzahl an kommerziellen DEM-Programmen, die sich im Wesentlichen in drei Punkten unterscheiden:

1. Die Simulation des Kontaktes zwischen den diskreten Elementen

Ein solches rechnerisches diskontinuierliches Medium unterscheidet sich von einem tatsächlichen kontinuierlichen durch die Existenz von Kontakten an den Grenzflächen der verschiedenen diskreten Elementen. Über die Kontaktgesetze wird größtenteils das Werkstoffverhalten simuliert. Dadurch, daß die diskreten Elemente nicht miteinander vernetzt sind, kann leicht deren Trennung, also Fragmentierung, simuliert werden. Man unterscheidet zwei Arten des Kontaktes. Zum einen können sich über die Kontaktgesetze die diskreten Körper überschneiden, durchdringen oder trennen. So können auch bei starren nicht verformbaren diskreten Elementen Verformungen und Dehnungen simuliert werden. Zum anderen ist eine Überschneidung oder sogar ein Durchdringen der diskreten Elemente ausgeschlossen. Modelle mit diesen Kontaktbedingungen finden häufiger ihre Anwendungen in der Molekulardynamik [95]. Zur Simulation des Werkstoff- und Bruchverhaltens spröder Materialien sind derartige Kontaktbedingungen weniger geeignet.

2. Die Art der Elemente

Wie eingangs erwähnt können die diskreten Elementen sowohl starr als auch verformbar sein. In der Literatur gibt es zahlreiche Ansätze, die Verformbarkeit dieser diskreten Elemente abzubilden. So können die verformbaren diskreten Elemente nochmals in kleine Elemente aufgeteilt werden. Diese inneren Elemente können dann wieder starr oder verformbar sein. Bei der starren Variante sind diese über masselose verformbare Grenzschichtelemente verbunden. Einen guten Überblick über die unterschiedlichen Arten von verformbaren Elementen gibt Mustoe [216].

3. Die Art der Kontaktsuche zwischen den Elementen

Da die einzelnen diskreten Elemente über Kontaktgesetze miteinander verbunden sind und sich somit leicht trennen aber auch überschneiden und durchdringen können, besteht die Notwendigkeit die Kontaktbereiche der jeweils benachbarten diskreten Elemente zu bestimmen. Durch die Überschneidung der diskreten Elemente kann die Stauchung der Struktur abgebildet werden. Hierbei handelt es sich

sich wieder um ein mechanisches Modell. Die Überschneidung ist nicht als Durchdringung zweier materieller Teilchen anzusehen. Die Kontaktsuche hängt sehr stark von der Gestalt der diskreten Elemente ab. Bei kugelförmigen Elementen ist die Kontaktsuche denkbar einfach. Bei komplexen Geometrien wird die Kontaktsuche wesentlich komplizierter und aufwendiger, da hierbei zwischen verschiedenen Kontaktarten unterschieden werden muß:

- Spitze - Spitze
- Spitze - Kante
- Kante - Oberfläche
- Oberfläche - Oberfläche

Cundall und Hart [46] definieren die Diskrete Element Methode wie folgt:

- Die diskreten Elemente müssen endliche Verformungen und Rotationen durchführen können, einschließlich ihrer kompletten Trennung.
- Die Kontaktsuche erfolgt während der Berechnung automatisch.

Durch die erste Bedingung ist es möglich, die wichtigsten Mechanismen in einem diskontinuierlichen Medium abzubilden. Die zweite Bedingung sichert die Anwendbarkeit für beliebig große Elementzahlen. Viele bislang entwickelte Programme ähneln den DEM-Programmen, erfüllen aber nicht die oben genannten zwei Bedingungen.

Nach Cundall und Hart [46] läßt sich die DEM abermals in die **Distinkte Element Methode**, die modale Methode, die diskontinuierliche Deformationsanalyse (DDA) und die Impuls-Austausch-Methode unterteilen. In Bild 2.17 klassifizieren sie die vier verschiedenen DEM-Programme und beurteilen sie in ihrer Anwendbarkeit für verschiedene Gebiete. Es wird ersichtlich, daß zur Simulation der dynamischen Fragmentierung nur die ersten beiden Klassen in Frage kommen. Im Folgenden wird nur auf die Distinkte Element Methode eingegangen, da diese zur Simulation der dynamischen Fragmentierung am häufigsten eingesetzt wird. Bei der Distinkten Element Methode sind die Körper entweder starr oder verformbar, d.h. sie sind in Elemente unterteilt. Die Distinkte Element Methode löst die Bewegungsgleichung nach einem expliziten Zeitintegrationssche-

ma. Beispiele für kommerzielle Distinkte-Element-Codes sind TRUBAL [58], UDEC [57], [47], 3DEC [56], DIBS [260] und 3DSHEAR [259].

Legende:

	Nicht modellierbar
●	Modellierbar, aber wenig geeignet
●	Gut modellierbar

Für jede Methode...		Distinkte Element Methode	Modale Methode	Diskontinuierliche Deformationsanalyse	Impuls-Austausch Methode	Begrenztes Gleichgewicht Begrenzte Analyse
Starre Verbindungen	Verformbare Verbindungen	●	●	●	●	●
Starre Körper	Verformbare Körper	●	●	●	●	●
Kleine Verschiebungen	Große Verschiebungen	●	●	●	●	●
Kleine Verzerrungen	Große Verzerrungen	●	●	●	●	●
Wenige Körper	Viele Körper	●	●	●	●	●
Lineares Materialverhalten	Nichtlineares Materialverhalten	●	●	●	●	●
Kein Bruch	Bruch	●	●	●	●	●
Lockere Anordnung	Dichte Anordnung	●	●	●	●	●
Statisch	Dynamisch	●	●	●	●	●
Nur Kräfte	Kräfte und Verschiebungen	●	●	●	●	●

Bild 2.17: Klassifizierung der DEM, aus [46]

Ein Sonderfall der Distinkten Element Methode ist der Partikel Flow Code (PFC). Beim PFC handelt es sich um diskrete, kugelförmige starre Elemente. Der Werkstoff wird ausschließlich über die Kontaktgesetze simuliert. Cundall et al. [49] beschreiben die vielseitige Einsetzbarkeit des Codes. So können sowohl bruch- und schädigungsmechanische Prozesse bis hin zu dynamischen Zerstörungsprozessen, wie sie bei Sprengungen oder Erdbeben vorkommen, als auch Siloentleerungen [254] simuliert werden.

Anhand des PFC-Modells soll exemplarisch das Berechnungsschema der DEM-Methode erläutert werden:

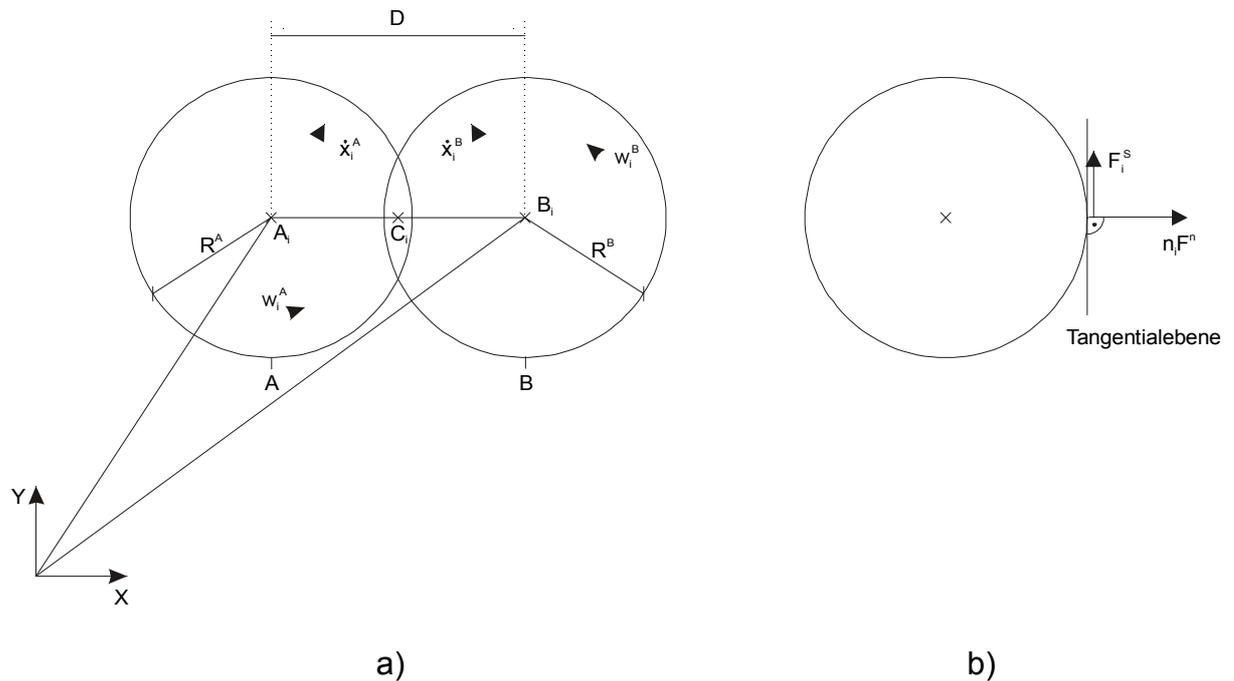


Bild 2.18: Prinzip der DEM-Methode anhand des PFC-Codes

In Bild 2.18 sind zwei Kugeln und die dort angreifenden Kräfte dargestellt. Sie haben ähnlich wie beim Cosserat-Kontinuum sowohl drei translatorische, als auch drei rotatorische Freiheitsgrade, über die der Schub oder die innere Reibung im Material abgebildet werden kann. Gelöst wird nun die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}_i + \alpha\dot{x}_i = F_i + g_i \quad (2.52)$$

und die Drehimpulsgleichung

$$\dot{\omega}_i + \alpha\omega_i = M_i / I. \quad (2.53)$$

α = künstliche Viskosität

ω = Winkelgeschwindigkeit

I = Massenträgheitsmoment

m = Masse des diskreten Elementes

\ddot{x} = Beschleunigungsvektor

\dot{x} = Geschwindigkeitsvektor

g_i = Massenkräfte

M_i = Drehmoment

Wie man aus Bild 2.18a erkennen kann, überschneiden sich die beiden Kugeln, sie treten im Punkt **C** in Kontakt. In Bild 2.18b sind die an der linken Kugel angreifenden Kräfte dargestellt. Die Schubkraft F_i^S liegt in der Tangentialebene und hängt von der relativen Winkelgeschwindigkeit der beiden Kugeln ab. Die Überschneidung der starren Kugeln ist für die realistische Abbildung des makroskopischen Materialverhaltens von zentraler Bedeutung, da ansonsten keine Verformungen der Struktur abgebildet werden können. Die Intensität der Überschneidungen wird über entsprechende Wahl der Kontaktsteifigkeiten k_n und k_s bestimmt. Wird beispielsweise die Kontaktsteifigkeit zu Null gesetzt, könnte sogar ein Durchdringen der Elemente simuliert werden, was physikalisch betrachtet natürlich wenig sinnvoll ist. Die zentrale Rolle des PFC-Code spielt die Aktualisierung der Kontaktkraft. Hierzu wird zunächst die Kontaktgeschwindigkeit ermittelt:

$$V_i = \dot{x}_i^B + e_{ijk} \omega_j^B (C_k - B_k) - \dot{x}_i^A - e_{ijk} \omega_j^A (C_k - A_k) \quad (2.54)$$

mit

$$\begin{aligned} C_i &= (A_i + B_i)/2 \\ e_{ijk} &= \text{Permutationstensor} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Das Verschiebungsinkrement berechnet sich dann zu:

$$\Delta U_i = V_i \Delta t, \quad (2.56)$$

welches in einen normalen Anteil

$$\Delta U^n = \Delta U_i n_i \quad (2.57)$$

mit

$$\begin{aligned} n_i &= Z_i / z \\ z^2 &= Z_i Z_i \\ Z_i &= B_i - A_i \end{aligned} \quad (2.58)$$

und einen Schub-Anteil

$$\Delta U_i^S = \Delta U_i - \Delta U_j n_i n_j \quad (2.59)$$

zerlegt werden kann. Da der Normalenvektor \mathbf{n} für jeden Zeitschritt neu berechnet wird, muß die alte Schubkraft zunächst in die Tangentialebene orthogonal zum Normalenvektor transformiert werden, um sie anschließend aktualisieren zu können:

$$F_i^S = F_i^S - e_{ijk} e_{kmn} F_j^S n_m^{\text{alt}} n_n \quad (2.60)$$

Das Normalkraftinkrement ergibt sich zu

$$\Delta F^n = -k_n \Delta U^n, \quad (2.61)$$

wobei die Druckkraft positiv angenommen wird. Analog erhält man für den Schub

$$\Delta F_i^S = -k_s \Delta U_i^S, \quad (2.62)$$

wobei k_n und k_s die Normal- bzw. Schubsteifigkeit bezeichnen. Somit lassen sich die neuen Kontaktkräfte bestimmen:

$$\begin{aligned} F^n &= F^n + \Delta F^n \\ F_i^S &= F_i^S + \Delta F_i^S \end{aligned} \quad (2.63)$$

Den gesamten Kontaktkraftvektor erhält man über Gl. 2.64:

$$F_i = F^n n_i + F_i^S \quad (2.64)$$

Der Kontaktkraftupdate für die beiden Elemente A und B erfolgt nun über die Gleichungen 2.65 bis 2.68.

$$F_i^A = F_i^A - F_i \quad (2.65)$$

$$M_i^A = M_i^A - e_{ijk} (C_j - A_j) F_k \quad (2.66)$$

$$F_i^B = F_i^B + F_i \quad (2.67)$$

$$M_i^B = M_i^B + e_{ijk} (C_j - B_j) F_k \quad (2.68)$$

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist die Kontaktsuche, die für komplexe Geometrien sehr umfangreich sein kann. Cundall [55] beschreibt dafür eine Prozedur. Zunächst wird ein Hintergrundnetz über die Struktur gelegt und die einzelnen diskreten Elemente werden den Zellen des Hintergrundnetzes zugeordnet. Somit ist bekannt, wie viele verschiedene Elemente in den einzelnen Hintergrundzellen vorhanden sind. Abschließend erfolgt die Suche in den Zellen dieses Hintergrundnetzes.

Weitere Literatur über die DEM findet man bei Cundall [54], Cundall et al. [50], Mustoe, Williams, Hocking [215], [268], Munjiza et al. [212], Gen-Hua Shi [100], Mustoe [216] und Barbosa et al. [12], [13].

Inzwischen sind zahlreiche Veröffentlichungen erschienen, in denen die DEM zur Simulation von dynamischen und statischen Zerstörungsprozessen bis hin zur Fragmentierung eingesetzt wurde. Nachfolgend wird die Anwendbarkeit der DEM bezüglich der Fragmentierung und des Werkstoffes Beton diskutiert.

Für den Werkstoff Beton führen Kun et al. [173] und Vonk [258] mikro-mechanische Untersuchungen mit Hilfe der DEM durch. Sie können mit der DEM den Zerstörungsprozeß einer einachsial belasteten Betondruckprobe simulieren. Vonk approximiert mit dem DEM-Code UDEC das Betonverhalten unter statischer Druck- und Zugbeanspruchung, indem er den Beton auf Mesoebene diskretisiert. Seine Berechnungsergebnisse stimmen gut mit Versuchsergebnissen überein.

Meguro und Hakuno [198] modifizieren die Methode der Distinkten Elemente, um das Bruchverhalten von Betonstrukturen zu studieren. Sie führen zusätzlich zu den starren Kugeln noch Feder- und Dämpferelemente ein. Der Beton wird über „Kontaktstoffgesetze“ modelliert. Neben statischen Druckversuchen berechnen Meguro und Hakuno das Versagen von Rahmen und verschiedenen Wänden aus bewehrtem und unbewehrtem Mauerwerk unter Erdbebenbeanspruchung. Die Ergebnisse erscheinen plausibel, Vergleiche mit konkreten Versuchen fehlen.

Donze et al. [78] führen mit der DEM Simulationen von Split-Hopkinson-Bar-Versuchen (SHB) an Beton durch. Sie ermitteln zwar keine Frag-

mentgrößenverteilung, ihre Spannungs-Dehnungs-Beziehung aus Experiment und Rechnung stimmen allerdings gut überein. Daß die Simulation der dynamischen Fragmentierung ohne große numerische Probleme mittels der DEM möglich ist, zeigen Butkovich et al. [36]. In Bild 2.19 ist der Fragmentierungsprozeß von Fels in der DEM-Berechnung dargestellt. Es ist danach sogar möglich, die Flugbahn der Trümmer bis hin zum Aufprall zu verfolgen.

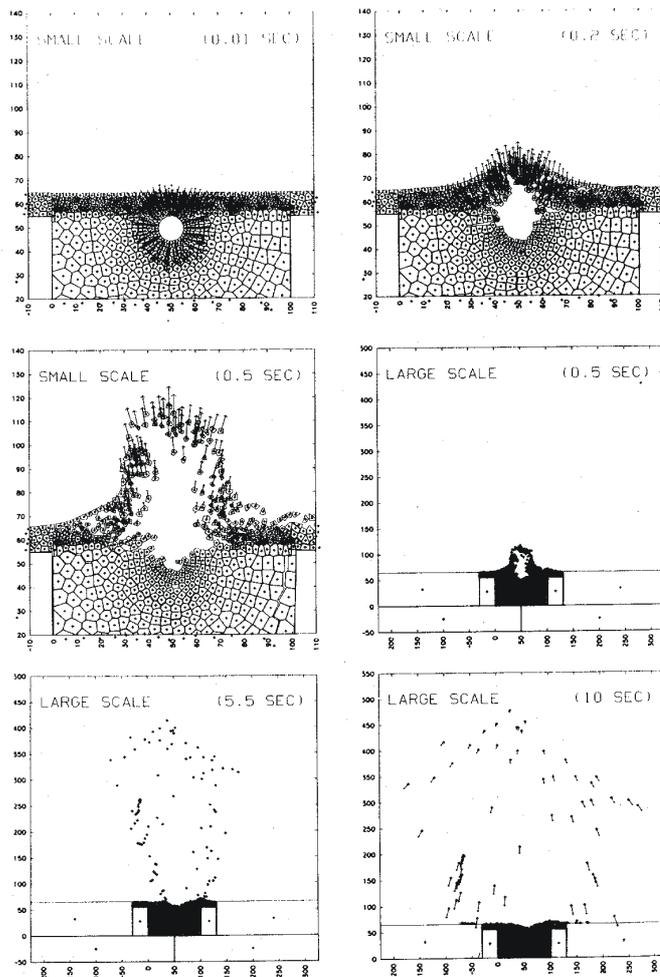


Bild 2.19: Fragmentierungsprozeß nach Butkovich, aus [36]

Lorig et al. [187] simulieren die Höhlenbildung und Fragmentierung in Fels mit dem PFC^{2D}-Code [155]. Vergleiche mit Versuchen fehlen allerdings. Nach eigenen Angaben ist eine dreidimensionale Analyse unumgänglich. Auch Potyondy und Cundall [225] versuchen mit dem PFC^{3D}-Code [156] die Fragmentierung von Fels bei einer Bohrlochsprengung zu simulieren. Der große Nachteil besteht darin, daß die Interaktion zwischen Sprengstoff und Fels nicht modelliert werden kann. Der

Sprengprozeß wird lediglich durch Vorgabe einer p-t-Kurve auf die Felswandungen abgebildet. Auch sie ziehen keine Versuchsergebnisse zur Validierung ihrer Berechnungsergebnisse heran. Ebenso simulieren Donze et al. [79] mit Hilfe der DEM den Zerstörungsprozeß von Fels bei einer Bohrlochsprengung, quantifizieren ihre Ergebnisse aber nicht. Ähnliche Berechnungen machen Song und Kim [245], wiederum ohne Verifikationsversuche. Munjiza et al. [213] versuchen die DEM mit anderen Computer-Modellen zu verifizieren. In Bild 2.20 ist ihre Fragmentgrößenverteilung von Fels infolge einer Sprengstoffbelastung dargestellt, die sie mit der Fragmentgrößenverteilung des Computer-Modells SABREX vergleichen. Vergleiche mit Versuchen fehlen auch hier.

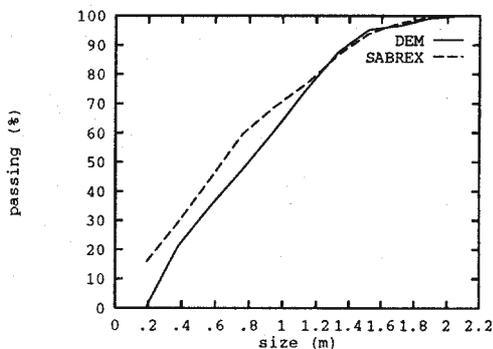


Bild 2.20: Vergleich der Fragmentverteilung von Fels infolge einer Sprengstoffbelastung zwischen der DEM-Methode und dem Computer-Modell SABREX, aus [213]

Morikawa et al. [209] führen mit der DEM Impaktberechnungen von bewehrten Betonplatten durch. Dabei wird der Beton und Stahl mit kugelförmigen starren diskreten Elementen modelliert. Das Werkstoffmodell des Betons basiert auf einer Mohr-Coulomb-Darstellung. Die Versagensfläche in Bild 2.21 wird von der maximalen Zugfestigkeit, der Druckfestigkeit, Kohäsion und dem Winkel der inneren Reibung bestimmt. Es können drei Versagensarten auftreten, einerseits Versagen auf Schub und andererseits auf Zug oder Druck. Alle drei Kontaktgesetze, für Schub, Druck und Zug werden durch linear elastisch ideal plastisches Verhalten abgebildet. Ein Zugversagen findet ab einer gewissen Dehnung statt. Diese mikromechanischen „Stoffgesetze“ unterscheiden sich deutlich von den kontinuumsmechanischen Stoffgesetzen auf Makroebene, bei denen die Betonspannungen im Druck- und Zugbereich ab

einem bestimmten Punkt mit zunehmender Dehnung wieder abnehmen. Den Stahl bilden Morikawa et al. über ein elasto-plastisches „Stoffgesetz“ mit einem dehngestütztem Zugversagen ab (siehe Bild 2.21). In Bild 2.22 werden exemplarisch zwei Berechnungsergebnisse für unterschiedliche Impaktgeschwindigkeiten mit Versuchsergebnissen verglichen. Die Zerstörungsmuster aus Versuch und Rechnung stimmen gut miteinander überein. Quantitative Aussagen fehlen wieder. Außerdem werden nur Rechnungen und Versuche mit niedrigen Impaktgeschwindigkeiten durchgeführt.

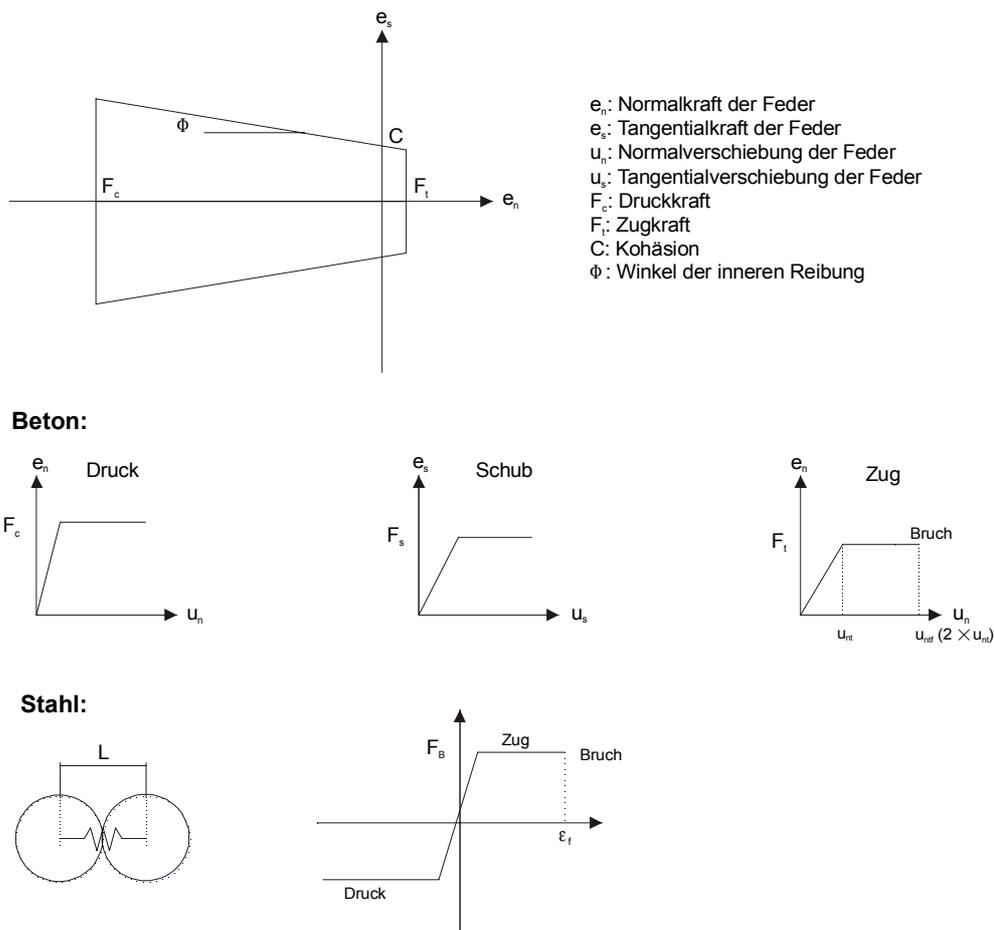
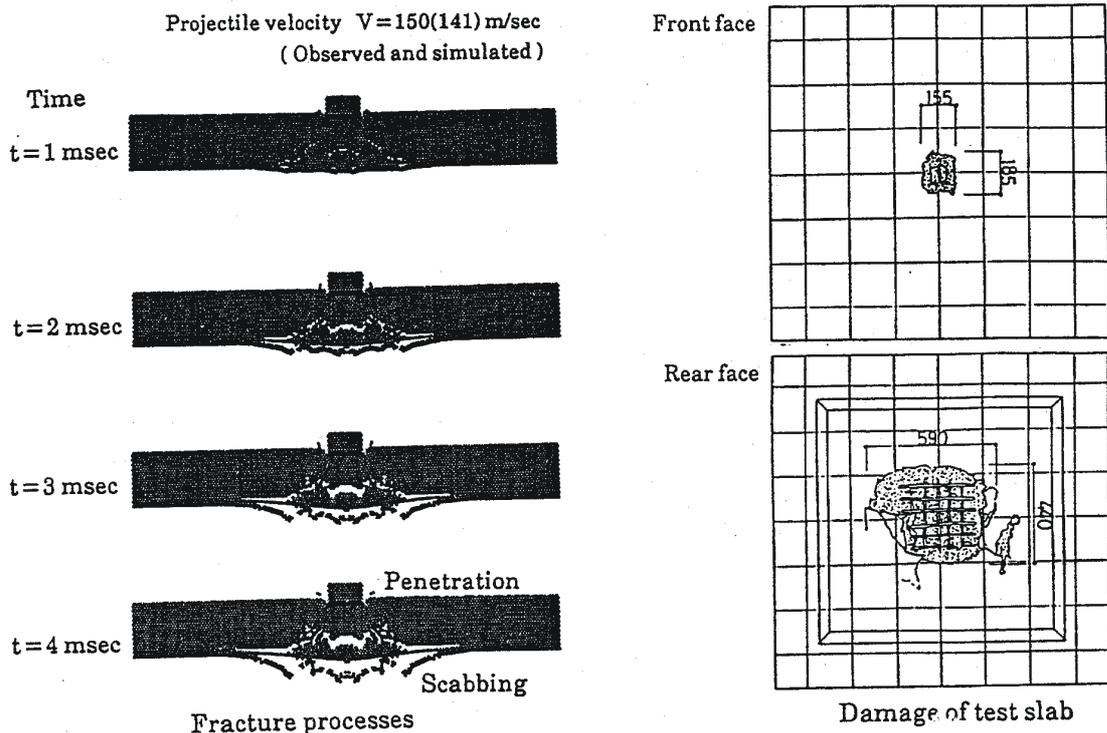
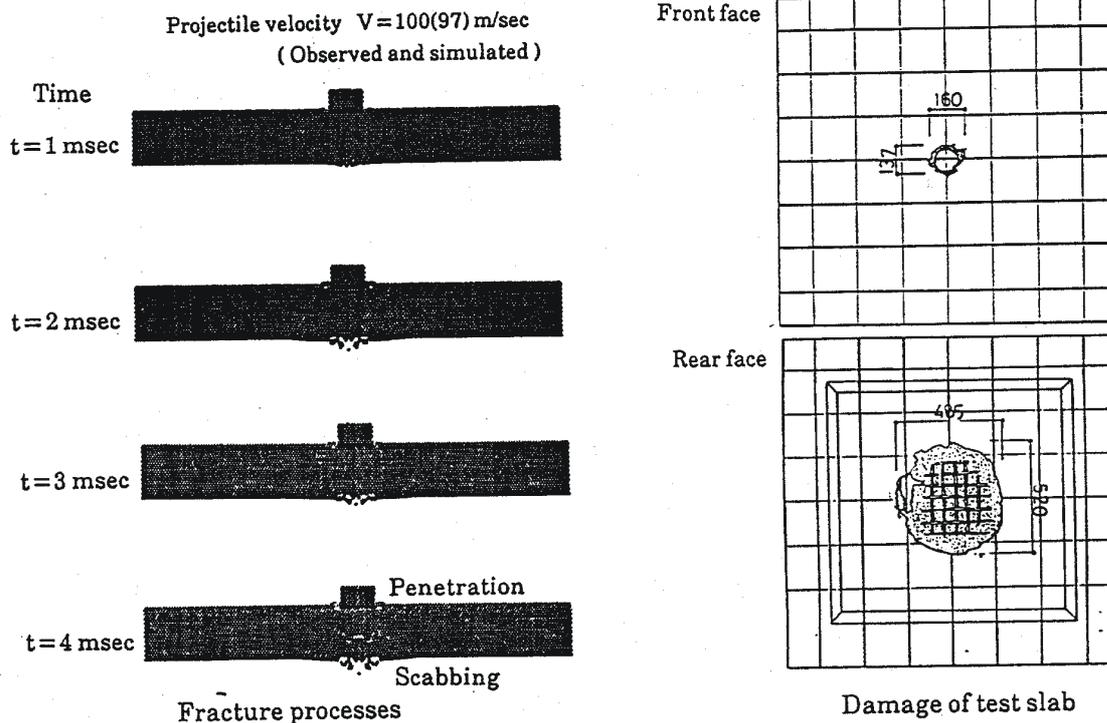


Bild 2.21: Stoffgesetz für Stahl und Beton bei einer Impaktsimulation nach Morikawa, aus [209]



(b) $V = 150$ m/sec



(c) $V = 100$ m/sec

Bild 2.22: Simulation eines Impaktes nach Morikawa, aus [209]

Weitere Veröffentlichungen über die Simulation von Zerstörungs- und Fragmentierungsprozessen mittels der DEM liegen vor (siehe z.B. bei Asgian et al. [7], Donze et al. [76], Mustoe et al. [214], Dobry [75], Brahurst et al. [34], Bazant et al. [158], Nilson et al. [218], Donze et al. [77] und Drlik [80]), allerdings fehlen auch dort meist hinreichende Validierung und Verifikationen anhand von Versuchsergebnissen. Trent et al. [256] bezeichnen die DEM als numerisches Versuchslabor, mit der es möglich ist auf Mikroebene, das Verhalten granularer Materialien zu untersuchen.

Das große Problem bei der Simulation einer dynamischen Fragmentierung von Beton bildet die Materialabbildung. Da der Werkstoff auf Mikroebene diskretisiert wird, ist es schwer bis unmöglich mit Hilfe der DEM größere Strukturen exakt zu berechnen. Die Diskretisierung erfolgt in den meisten kommerziellen DEM-Programmen zufallsgesteuert. Kugeln oder diskrete Elemente werden zufällig generiert, wobei das gewünschte Porenvolumen im Werkstoff iterativ ermittelt wird. Auch die Wahl der Kugelgröße hat einen großen Einfluß auf die Simulationsergebnisse, siehe z.B. Cundall et al. [49], [7], [46]. Es bedarf verschiedener Elementgrößen. Somit bestimmen schon allein bei der Diskretisierung eine große Anzahl von Parametern die Berechnungsergebnisse.

Weiter wird der Werkstoff Beton mit Hilfe sehr einfacher eindimensionaler „Kontaktstoffgesetze“ angenähert. Es ist schwierig, das tatsächliche Materialverhalten durch diese einfachen Kontaktgesetze abzubilden. Die richtige Kalibrierung und Wahl der mikromechanischen Werkstoffparameter, um das aus Versuchen gemessene makromechanische Materialverhalten zu approximieren, kann nur iterativ erfolgen. Es bedarf dazu eines großen Erfahrungsschatzes.

Desweiteren ist es in der DEM äußerst schwierig, die Interaktion zwischen Sprengstoff und Beton abzubilden. Die Verwendung einer JWL-Zustandsgleichung ist aufgrund der Diskretisierung ausgeschlossen. Vereinfacht wird eine Druck-Zeit-Funktion als Belastung auf die jeweils betroffenen Elemente aufgegeben, was eine grobe Näherung darstellt.

Eine andere Möglichkeit zur Simulation der dynamischen Fragmentierung bieten netzfreie kontinuierliche Verfahren wie die Methode der Smooth Particle Hydrodynamics (SPH). Sie ist Gegenstand des dritten Kapitels.

3 Die Methode der Smooth Particle Hydrodynamics

3.1 Einleitung

Wie in Kapitel 2 bereits erwähnt, wird im Rahmen dieser Arbeit die Methode der Smooth-Particle-Hydrodynamics (SPH) gewählt, um die Fragmentierung von Beton zu simulieren. Hierzu wurde ein eigenes SPH-Programm zur Simulation dreidimensionaler Probleme entwickelt. Der Berechnungsalgorithmus wurde in FORTRAN 90, die Programme zur Visualisierung der Ergebnisse in UNIRAS geschrieben.

Die SPH-Methode ist eine netzfreie Lagrangemethode, die sog. Partikel zur Diskretisierung des Kontinuums verwendet. Diese Partikelmethode nutzt eine Interpolationsfunktion, deren Stützstellen eine gewisse Masse zugeordnet sind. Im Laufe der Berechnung tauschen die Partikel über ihre Interpolationsfunktion Impulse aus. An ihren jeweiligen Orten werden Dichte, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Spannung, Dehnung und alle weiteren Größen berechnet. Kontakt zweier Körper, z.B. bei einem Impakt, muß nicht über slide-line-Verfahren realisiert werden. Die Körper treten automatisch über die Interpolationsfunktion ihrer Partikel in Kontakt. So können große Deformationen bis hin zur Trennung von Partikeln, also zur Fragmentierung berechnet werden.

Die SPH-Methode bietet die Möglichkeit, das Material wie bei der FEM auf Makroebene abzubilden. Hierfür können bereits vorhandene, gut ausgetestete Stoffgesetze, die durchaus auch auf mikromechanischen Ansätzen basieren können, verwendet werden. Das Verhalten des Sprengstoffes kann durch die Verwendung einer JWL-Zustandsgleichung angenähert werden. Wegen der netzfreien Diskretisierung treten keine numerischen Probleme bei großen Verformungen auf. Die Bildung diskreter Fragmente geschieht *physikalisch* aufgrund der implementierten Materialmodelle und *numerisch* aufgrund der Trennung der Partikel.

Die SPH-Methode geht auf Lucy [190] zurück, der dieses numerische Verfahren als Monte-Carlo-Näherung zur Berechnung nicht axialsymmetrischer Probleme in der Astrophysik einsetzte. Gingold und Monag-

han [105] entwickelten die Methode dahingehend weiter, daß sie eine Interpolationsfunktion einführten. Libersky und Petschek [182] erweiteren die Methode auf die Festkörpermechanik, indem sie die hydrodynamischen Gleichungen um den Deviatoranteil der Spannungs–Dehnungs–Beziehung erweiterten. Weitere Literatur über die SPH–Methode an sich findet man bei Libersky und Petschek [179], [181], Benz [26], Monaghan [207], [208] und Fulk [98].

Sie findet hauptsächlich bei Hoch-Geschwindigkeits-Impakts oder Explosionen ihre Anwendung, wenn das Material sehr stark zerstört und verformt wird und/oder seinen Aggregatzustand verändert.

Mandell et al. [193] simulieren die Fragmentierung von Stahlkugeln beim Beschuß einer Stahlplatte mit Hilfe des SPHINX-Code und unter Verwendung des Cagnoux-Glenn Modells. Die Fragmentierungsmuster stimmen gut mit denen des Versuches überein, quantitative Aussagen fehlen allerdings. Mandell et al. [194] berichten, daß zur Reproduktion des Rißmusters einer Aluminiumplatte infolge eines Wolfram-Impaktes eine zweidimensionale Analyse aufgrund der höheren Auflösung wesentlich besser geeignet ist als ein vollständiges 3-D-Modell.

Hiermaier [145] konnte mit der SPH-Methode die Perforation einer Aluminiumkugel auf eine Kupferplatte recht gut abbilden. Die kugelförmige Fragmentwolke an Plattenunterseite aus dem Versuch bildet die Rechnung fast identisch ab. Auch Hayhurst et al. [136] konnten mit Hilfe der SPH-Methode die kugelförmige Fragmentwolke beim Beschuß einer Aluminiumplatte mit einer Aluminiumkugel gut reproduzieren.

Benz et al. [25] untersuchen die dynamische Fragmentierung von spröden Materialien infolge einer Impaktbeanspruchung. Sie beschreiben eine Prozedur zum Auffinden von Fragmenten nach der Berechnung. Eine Fragmentgrößenverteilung aus Rechnung und Versuch ermitteln sie allerdings nicht.

Randles, Libersky [184] untersuchen die dynamische Fragmentierung von Stahlzylindern und Bomben unter detonativer Belastung. Durch Einbau von skalaren Schädigungsmodellen konnten sie die dynamische

Fragmentierung auch quantitativ gut vorhersagen. In Bild 3.1 ist die Verformung eines mit Sprengstoff gefüllten Stahlzylinders nach $280 \mu\text{s}$ dargestellt. In Bild 3.1 ist exemplarisch die Fragmentgrößenverteilung dieses Beispiels aus Versuch und Rechnung gegenübergestellt. Die Kurven stimmen sehr gut überein.

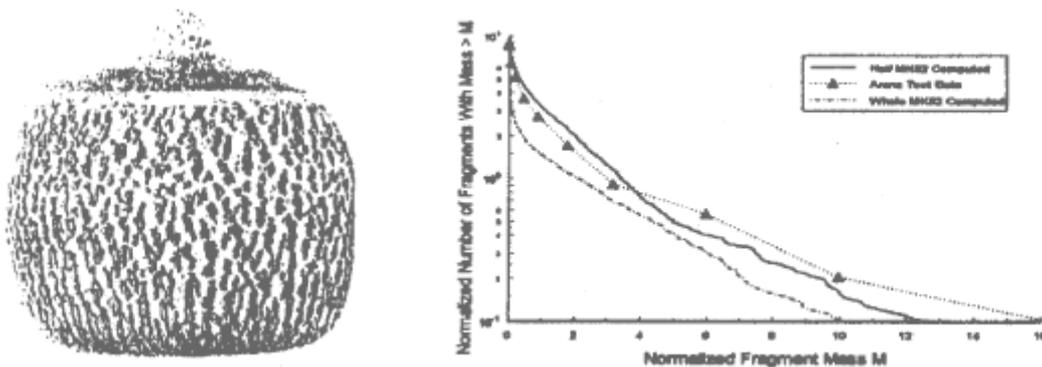


Bild 3.1: Fragmentierung eines Stahlzylinders mit Hilfe der Methode der Smooth Particle Hydrodynamics nach Libersky, aus [184]

Weitere Anwendungsbeispiele der SPH-Methode findet man beispielsweise bei Groenenboom [127], Stellingwerf [248] oder Cloutman [43].

Nachfolgend werden zunächst die theoretischen und die für die Implementierung benötigten Grundlagen erläutert und hergeleitet. Abschließend werden mit dem Programm Verifikationsrechnungen durchgeführt, die mit Ergebnissen des kommerziellen Rechencodes ABAQUS verglichen werden.

3.2 Die Grundgleichungen

Zunächst seien die Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik für Masse, Energie und Impuls für kleine Verzerrungen nachfolgend näher erläutert. Eine ausführliche Herleitung findet man z.B. bei Malvern [192].

- **Massenerhaltung**

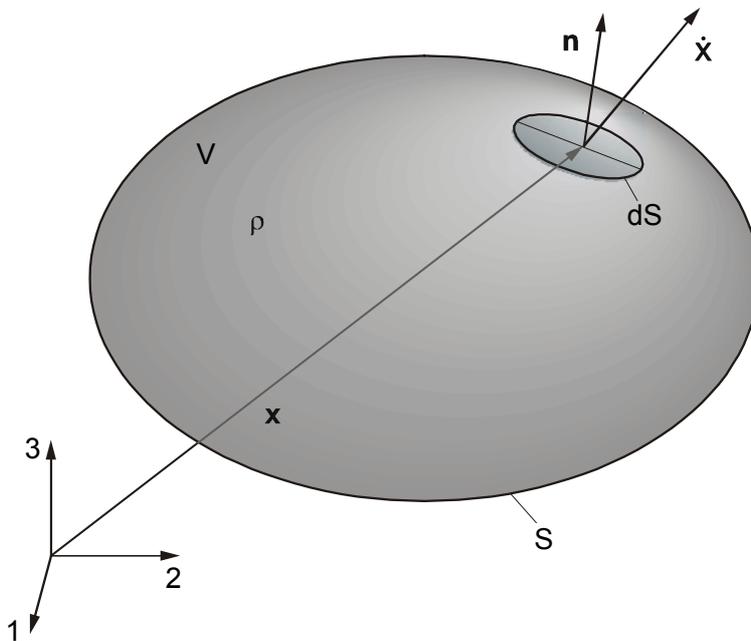


Bild 3.2: Massenbilanz am Referenzvolumen, aus [238]

Betrachtet wird ein Kontrollvolumen V mit einer Oberfläche S (siehe Bild 3.2). Besitzt das Kontrollvolumen zur Zeit t die Dichte ρ , kann die Masse wie folgt berechnet werden:

$$M = \int_V \rho \, dV \quad (3.1)$$

Die Wachstumsrate der Gesamtmasse im Kontrollvolumen beträgt:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV \quad (3.2)$$

Sie entspricht dem Massenzufluß durch die Oberfläche:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = - \int_S \rho \dot{x}_i n_i \, dS \quad (3.3)$$

Mit Hilfe des Divergenztheorems lässt sich Gl. 3.3 in ein Volumenintegral transformieren:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = - \int \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \dot{x}_i) dV \quad (3.4)$$

Setzt man Gl. 3.2 in Gl. 3.4 ein, so erhält man folgende Bedingung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \dot{x}_i) = 0 \quad (3.5)$$

Durch Anwendung der Produktregel auf den rechten Term der linken Seite lässt sich Gl. 3.5 wie folgt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \dot{x}_i + \rho \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.6)$$

umformen.

Die materielle Zeitableitung der Dichte

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (3.7)$$

eingesetzt in Gl. 3.6 liefert die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.8)$$

- **Impulserhaltung**

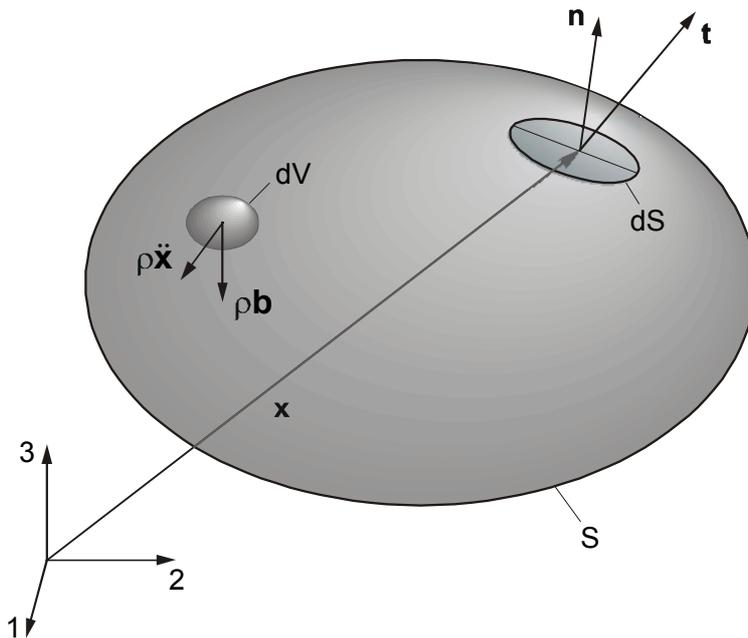


Bild 3.3: Impulsbilanz am Referenzvolumen, aus [238]

Das Trägheitsprinzip besagt, daß die Impulsänderung eines Körpers durch die Vektorsumme aller äußeren Kräfte bestimmt wird. Greifen an einen Körper (siehe Bild 3.3) die Massenkräfte \mathbf{b} und die Oberflächenkräfte \mathbf{t} an, erhält man somit die Impulsänderung:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \dot{x}_i = \int_V \rho \ddot{x}_i dV = \int_S t_i dS + \int_V \rho b_i dV \quad (3.9)$$

Da infolge der Massenerhaltung $\rho dV = dm = \text{const.}$ ist und mit der Beziehung zwischen Spannungsvektor und -tensor $t_i = \sigma_{ji} n_j$ läßt sich Gl. 3.9 auch als

$$\int_V \rho \ddot{x}_i dV = \int_S n_j \sigma_{ji} dS + \int_V \rho b_i dV \quad (3.10)$$

schreiben. Es sei hier darauf hingewiesen, daß der Spannungstensor symmetrisch ist, d.h. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Der Gauß'sche Integralsatz bzw. das Divergenztheorem liefert

$$\int_V \rho \ddot{x}_i dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho b_i dV, \quad (3.11)$$

d.h. mit

$$\rho \ddot{x}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (3.12)$$

die Bewegungsgleichung für einen beliebigen Massenpunkt unter Einwirkungen von Spannungen und Massenkräfte.

• Energieerhaltung

Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik entspricht die Änderung der Energie eines abgeschlossenen mechanischen Systems der äußeren Arbeit am sowie dem Wärmeeintrag in das System.

Beim mechanischen Leistungseintrag leisten die äußeren Oberflächenspannungen \mathbf{t} pro Flächeneinheit und die Massenkräfte \mathbf{b} pro Masseneinheit Arbeit mit dem Volumen \mathbf{V} und der Oberfläche \mathbf{S} :

$$P_{\text{input}} = \int_S \mathbf{t}_i \dot{x}_i dS + \int_V \rho b_i \dot{x}_i dV \quad (3.13)$$

Mit der Beziehung zwischen Spannungsvektor und –tensor $t_i = \sigma_{ji} n_j$ kann das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral umgewandelt werden:

$$P_{\text{input}} = \int_V \left[\dot{x}_i \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) + \sigma_{ji} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \right] dV \quad (3.14)$$

Der Ausdruck $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i$ entspricht der Bewegungsgleichung, so daß man eingesetzt in Gl. 3.14 erhält:

$$P_{\text{input}} = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{x}_i \dot{x}_i dV + \int_V \sigma_{ji} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} dV \quad (3.15)$$

Analog zum mechanischen Leistungseintrag in das System besteht der Wärmeeintrag q aus einem Wärmefluß durch die Oberfläche und einer Wärmequelle r pro Masseneinheit:

$$Q_{\text{input}} = - \int_S q_i n_i dS + \int_V \rho r dV \quad (3.16)$$

Werden Leistungseinträge, z.B. aus elektrischen oder magnetischen Feldern, in das System vernachlässigt, läßt sich der erste Hauptsatz der Thermodynamik formulieren:

$$\oint \dot{E}_{\text{total}} dt = \oint (P_{\text{input}} + Q_{\text{input}}) dt = 0 \quad (3.17)$$

Die gesamte Energie E_{total} eines Systems setzt sich nun aus zwei Anteilen zusammen, der kinetischen Energie

$$K = \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{x}_i \dot{x}_i dV \quad (3.18)$$

und der inneren Energie

$$U = \int_V \rho e dV. \quad (3.19)$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V (\frac{1}{2} \rho \dot{x}_i \dot{x}_i + \rho e) dV &= \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{x}_i \dot{x}_i dV + \int_V \sigma_{ji} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} dV \\ &\quad - \int_S q_i n_i dS + \int_V \rho r dV \end{aligned} \quad (3.20)$$

Wird das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral umgeformt und bringt man alle Terme auf die linke Seite vereinfacht sich Gl. 3.20 zu:

$$\int_V \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho \frac{de}{dt} - \sigma_{ji} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} - \rho r \right) dV = 0 \quad (3.21)$$

Der Integrand in Gl. 3.21 muß gleich null sein. Somit lautet die Energieerhaltungsgleichung:

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ji} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} + \rho r - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (3.22)$$

Es werden folgende Vereinfachungen getroffen:

- Massenkräfte (Eigengewicht) werden im Rahmen dieser Arbeit aufgrund der hohen Belastung vernachlässigt. Somit entfällt der zweite Term auf der rechten Seite der Impulserhaltungsgleichung (Gl. 3.12).
- Thermomechanische Terme werden in den Erhaltungsgleichungen vernachlässigt, da der Temperatureinfluß einen unbedeutenden Einfluß auf das Fragmentierungsverhalten von Beton hat, zumindest im Rahmen der hier untersuchten Beanspruchungen.

Somit vereinfachen sich die Erhaltungsgleichungen in differenzieller Form zu:

- Massenerhaltung:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.23)$$

- Impulserhaltung:

$$\rho \ddot{x}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.24)$$

- Energieerhaltung:

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \quad (3.25)$$

3.3 Die Interpolation

3.3.1 Die Interpolationsfunktion

In der Literatur gibt es diverse Ansätze für die Interpolationsfunktion W (Monaghan [206], Gingold et al. [104], Johnson et al. [160], [163], Fulk [98]). Geeignet zur Interpolation sind prinzipiell alle Funktionen, die folgende Eigenschaften erfüllen (Swegle [252]):

- Die Kernelfunktion W wird für $h \rightarrow 0$ zum Dirac–Delta:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) = \delta(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j) \quad (3.26)$$

- Sie muß folgender Normalisierungsbedingung genügen:

$$\int W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) d\Omega^j = 1 \quad (3.27)$$

Die diskrete Form nach einer 1-Punkt-Gauss-Quadratur lautet:

$$\sum_j \frac{m^j}{\rho^j} W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) = 1 \quad (3.28)$$

- Sie hat eine begrenzte Reichweite (compact support) :

$$W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j) \geq 2h \quad (3.29)$$

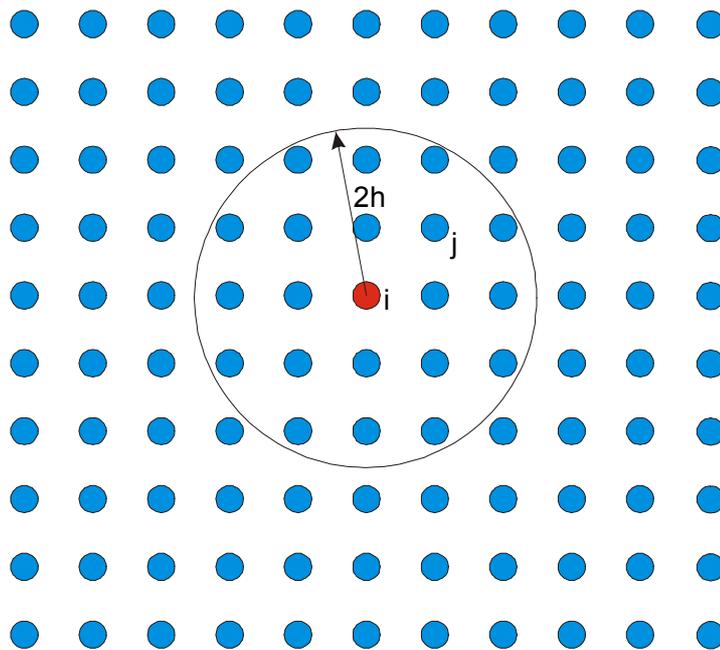


Bild 3.4: Einflußbereich eines Partikels

Für \mathbf{x}^i und \mathbf{x}^j sind die Partikelkoordinaten einzusetzen (siehe Bild 3.4), h bezeichnet die Interpolationslänge. Aus der dritten Bedingung wird ersichtlich, daß nur Partikel innerhalb eines gewissen Einflussesbereiches von $2h$ eine gegenseitige Wechselwirkung aufeinander ausüben, Partikel außerhalb dieses Bereiches liefern keinen Beitrag zu den entsprechenden Gleichungen (siehe Bild 3.4). Gewöhnlich werden radiale Interpolationsfunktionen verwendet. Im Zweidimensionalen bildet der Einflussesbereich somit einen Kreis, im Dreidimensionalen eine Kugel. Da im Laufe der Berechnung hohe Dichtegradienten auftreten können, beispielsweise bei der Simulation von Explosionen oder Hoch-Geschwindigkeits-Impakts, muß die Interpolationslänge h sich während der Berechnung ändern können. Die Verwendung einer variablen Interpolationslänge h wird in Kapitel 3.3.3 näher erläutert. Die 2. Bedingung, Gl. 3.27 oder 3.28, ist die sog. kontinuierliche bzw. diskrete Konsistenzbedingung 0. Ordnung. Sie stellt sicher, daß eine konstante Funktion exakt reproduziert wird. Für das Standard SPH-Verfahren ist sie allerdings lediglich in der Ausgangskonfiguration bei gleichmäßiger Partikelanordnung exakt erfüllt. Für Randpartikel ist sie ebenso nicht mehr erfüllt. Aus diesem Grunde wurde das Approximationsverfahren zur Abschätzung von Funktionswerten und deren Ableitungen verbessert. Mehr dazu in Kapitel 3.5. Die 1. Bedingung, Gl. 3.26, ist eigentlich überflüssig, da es in der Praxis wohl kaum

eine Funktion gibt, die den anderen Anforderungen genügt, ohne Gl. 3.26 zu erfüllen (siehe Belytschko [20]).

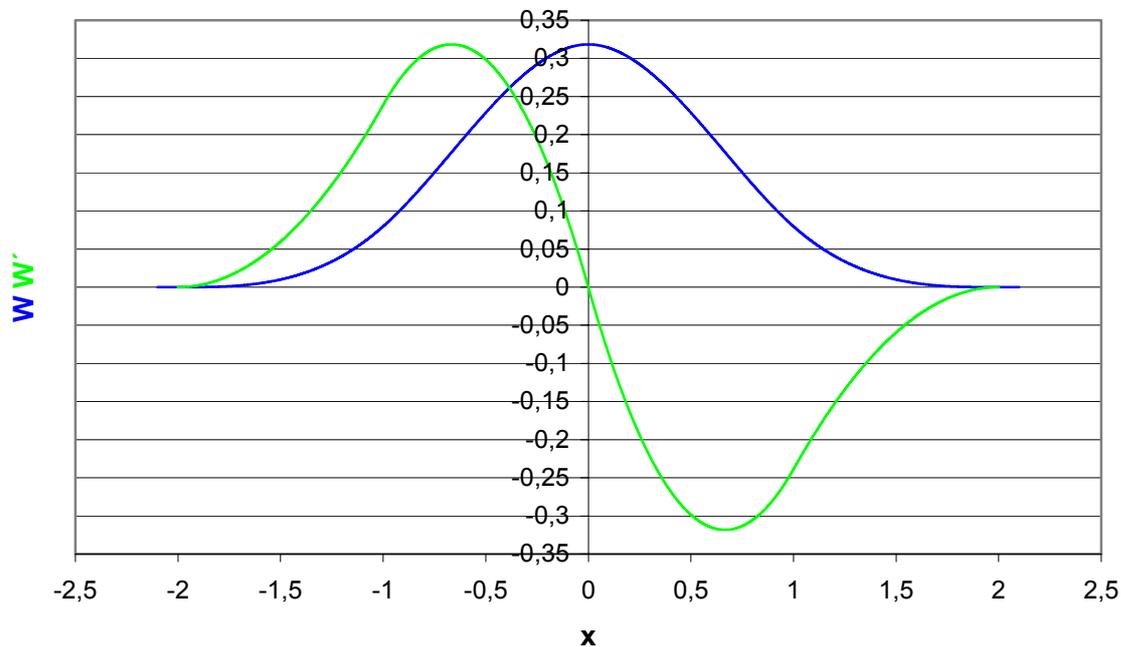


Bild 3.5: Interpolationsfunktion und deren Ableitung

Desweiteren sind noch weitere Eigenschaften der Interpolationsfunktion wünschenswert. So soll sie eine monoton fallende gerade Funktion sein. Somit gelten folgende Symmetriebedingungen:

$$W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) = W(\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i, h) \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h)}{\partial \mathbf{x}^j} = - \frac{\partial W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h)}{\partial \mathbf{x}^i}$$

Die am häufigsten verwendete Kernelfunktion ist der kubische B-Spline (siehe Bild 3.5). Er ist die einzige Kernelfunktion, die konstante und lineare Funktionen bei gleichmäßiger Partikelanordnung exakt interpoliert. Er wird auch in dieser Arbeit verwendet. Andere Kernelfunktionen kann man aus der oben erwähnten Literatur entnehmen.

Swegle [252] gibt den kubischen B-Spline in Abhängigkeit der Dimension D an:

$$W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{C}{h^D} \left(1 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{4}z^3\right) & \forall 0 \leq z < 1 \\ \frac{C}{4h^D} (2-z)^3 & \forall 1 \leq z \leq 2 \\ 0 & \forall z > 2 \end{array} \right\}, \quad (3.31)$$

wobei $z = \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j\|/h$, D die Dimension und C eine Konstante ist, die mit der Dimension variiert. $\bar{u} = \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j\|$ ist der Abstand der Partikel.

$$C = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{3} & D = 1 \\ \frac{10}{7\pi} & D = 2 \\ \frac{1}{\pi} & D = 3 \end{array} \right\} \quad (3.32)$$

Benötigt wird noch der Gradient der Wichtungsfunktion W . Ableiten der Interpolationsfunktion nach \bar{u} ergibt:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{u}} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3C}{h^{D+1}} \left(-z + \frac{3}{4}z^2\right) & \forall 0 \leq z < 1 \\ \frac{-3C}{4h^{D+1}} (2-z)^2 & \forall 1 \leq z \leq 2 \\ 0 & \forall z > 2 \end{array} \right\} \quad (3.33)$$

Durch Anwendung der Kettenregel ergibt sich die Ableitung:

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}^j} = \frac{\partial W}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \mathbf{x}^j} = -\frac{(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j)}{\bar{u}} \frac{\partial W}{\partial \bar{u}} \quad (3.34)$$

Für dreidimensionale Probleme lautet die Interpolationsfunktion:

$$W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) = \begin{cases} \frac{1}{\pi h^3} \left(1 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{4}z^3\right) & \forall 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{4\pi h^3} (2-z)^3 & \forall 1 \leq z \leq 2 \\ 0 & \forall z > 2 \end{cases} \quad (3.35)$$

Deren Ableitung nach Gl. 3.34 ergibt:

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}^j} = -\left(\frac{\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j}{\bar{u}}\right) \begin{cases} \frac{3}{\pi h^4} \left(-z + \frac{3}{4}z^2\right) & \forall 0 \leq z < 1 \\ \frac{-3}{4\pi h^4} (2-z)^2 & \forall 1 \leq z \leq 2 \\ 0 & \forall z > 2 \end{cases} \quad (3.36)$$

3.3.2 Approximation von Feldgrößen

Grundlage der SPH-Methode ist die Interpolationsfunktion. Es sei u eine beliebige Funktion, die interpoliert werden soll. W sei der Kernel, dessen Reichweite durch den Interpolationsradius h bestimmt wird. Ein allgemeiner Ansatz zur Abschätzung des Funktionswertes u an der Stelle \mathbf{x}^i ist durch Gl. 3.37 gegeben:

$$\langle u(\mathbf{x}^i) \rangle \approx \int u(\mathbf{x}^j) W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) d\Omega^j \quad (3.37)$$

In der SPH-Notation beziehen sich obere Indizes auf die Partikel, untere Indizes geben Tensoren an. Nicht indizierte Tensoren sowie Matrizen und Vektoren werden fett gedruckt. Über Gl. 3.37 wird die Kernelabschätzung $\langle u \rangle$ von u definiert.

Integriert wird über das Partikelvolumen $d\Omega^j$:

$$\int d\Omega^j = \frac{m^j}{\rho^j} \quad (3.38)$$

Somit kann die kontinuierliche Form, Gl. 3.37, in die diskrete Form überführt werden:

$$\langle u(\mathbf{x}^i) \rangle \approx \sum_{j=1}^N u(\mathbf{x}^j) W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) \frac{m^j}{\rho^j} = \sum_{j=1}^N u(\mathbf{x}^j) \Phi^j = u_h(\mathbf{x}^i) \quad (3.39)$$

Die Funktion

$$\Phi^j = \frac{m^j}{\rho^j} W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) \quad (3.40)$$

ist als Ansatzfunktion des Knotens j zu betrachten. W ist wie gesagt eine Wichtungsfunktion, die den Einfluß des Knotens i auf seine Umgebung bestimmt. Sind den Stützstellen die physikalischen Größen Masse m und Dichte ρ zugewiesen, kann das Partikelvolumen $V=m/\rho$ bestimmt werden. Anzumerken wäre, daß im streng mathematischen Sinn keine Interpolation, sondern lediglich eine Approximation vorliegt, da $\langle u \rangle \approx u$ und $\langle u \rangle \neq u$ gilt, näheres siehe Anhang A1. Dennoch wird im Folgenden der Begriff elementfreie Interpolation verwendet, da er sich in der Literatur durchgesetzt hat. Die Ansatzfunktion Φ in Gl. 3.40 gilt für das Standard SPH-Verfahren. Für die Ansatzfunktion gibt es noch weitere Ansätze, die im Kapitel 3.5 näher erläutert werden. Die prinzipielle Vorgehensweise bei der Abschätzung von Funktionswerten bleibt jedoch erhalten. Im Hinblick auf die Verwendung in numerischen Rechenverfahren sind auch die räumlichen Ableitungen der Interpolation zu bestimmen. Substituiert man den Gradienten $\nabla u(\mathbf{x})$ für $u(\mathbf{x})$ in Gl. 3.37, erhält man (siehe Swegle [252]):

$$\langle \nabla u(\mathbf{x}^i) \rangle \approx \int \nabla u(\mathbf{x}^j) W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) d\Omega^j \quad (3.41)$$

Umformen des Integranden, $\nabla u(\mathbf{x})W = \nabla(u(\mathbf{x})W) - u\nabla W$, eingesetzt in Gl. 3.41 liefert:

$$\begin{aligned} \langle \nabla u(\mathbf{x}^i) \rangle \approx & \int \nabla(u(\mathbf{x}^j)W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h)) d\Omega^j \\ & - \int u(\mathbf{x}^j) \nabla W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) d\Omega^j \end{aligned} \quad (3.42)$$

Der erste Term der rechten Seite kann mit Hilfe des Divergenztheorems in ein Oberflächenintegral umgeformt werden:

$$\int_{\mathcal{S}} \nabla(u(\mathbf{x}^j)W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h)) d\Omega^j = \int_{\mathcal{S}} u(\mathbf{x}^j)W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (3.43)$$

Da die SPH-Methode zu Beginn für astrophysikalische Probleme entwickelt wurde und nur von freien Oberflächen ausging, hat man die Oberflächenintegrale vernachlässigt, was in der Festkörpermechanik zu Problemen bei der Stellung von Randbedingungen führt. Auf diese Problematik wird in Kapitel 3.6 eingegangen. Durch Vernachlässigung der Oberflächenintegrale in Gl. 3.42 kann der Gradient einer Zustands- oder Feldgröße durch

$$\langle \nabla u(\mathbf{x}^i) \rangle \approx - \int u(\mathbf{x}^j) \nabla W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) d\Omega^j \quad (3.44)$$

abgeschätzt werden. Über Gl. 3.38 läßt sich die integrale Form in eine Summenformulierung überführen:

$$\langle \nabla u(\mathbf{x}^i) \rangle \approx - \sum_{j=1}^N \frac{m^j}{\rho^j} u(\mathbf{x}^j) \nabla W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) = \nabla u_h(\mathbf{x}^i) \quad (3.45)$$

Belytschko et al. [20] zeigen, daß die kontinuierliche Standard SPH-Methode die Konsistenzbedingung 0. Ordnung, Gl. 3.27, erfüllt. Für die kontinuierliche Form ist das SPH-Verfahren gewöhnlich sogar konsistent 2. Ordnung. In der diskreten Form ist die SPH-Methode allerdings nicht einmal konsistent 0. Ordnung (siehe Belytschko et al. [20]). Die Konsistenz 0. Ordnung kann aber leicht durch eine sog. Symmetrisierung erzeugt werden (siehe Belytschko et al. [19]). Ausgangspunkt ist die Tatsache, daß die Ableitung der SPH-Ansatzfunktion für eine Konstante gleich null sein muß:

$$\sum_j \nabla W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) \frac{m^j}{\rho^j} = 0 \quad (3.46)$$

Durch Addition des Produktes des Funktionswertes $u(\mathbf{x}^i)$ mit diesem Gradienten, das aufgrund von Gl. 3.46 gleich null sein muß, in Wirklichkeit nur ungefähr null ist, verändert sich Gl. 3.45 zu:

$$\nabla u_h(\mathbf{x}^i) = - \sum_{j=1}^N \frac{m^j}{\rho^j} (u(\mathbf{x}^j) - u(\mathbf{x}^i)) \nabla W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) \quad (3.47)$$

Diese Art der Abschätzung eines Funktionsgradienten hat gegenüber der Formulierung, Gl. 3.45, den Vorteil, daß der Gradient der Funktion $u(\mathbf{x}^i)$ für konstante Funktionen u wegen $u^i = u^j$ tatsächlich überall gleich null ist, egal wie die Partikel angeordnet sind. Auch für Randpartikel ist die Bedingung 3.46 exakt erfüllt. Somit ist zumindest für den Gradienten der Funktion u , der für die Anwendung in der SPH-Methode erforderlich ist, die Konsistenzbedingung 0. Ordnung erfüllt.

Anstelle der Addition des „Null-Termes“ kann auch eine Subtraktion erfolgen:

$$\nabla u_h(\mathbf{x}^i) = - \sum_{j=1}^N \frac{m^j}{\rho^j} (u(\mathbf{x}^j) + u(\mathbf{x}^i)) \nabla W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) \quad (3.48)$$

Durch Gl. 3.48 wird eine symmetrische Wechselwirkung der Partikel i und j sichergestellt. Gl. 3.46 ist für Randpartikel allerdings nicht mehr erfüllt. Soll ein konstantes Spannungsfeld im Innern eines Körpers zu Beschleunigungen von Randpartikeln führen, ist dieses Vorgehen durchaus legitim. In der Standard SPH-Methode wird auf diese Weise der freie Rand realisiert (siehe Sauer [236]).

Um die recht abstrakten, mathematischen Formulierungen zu veranschaulichen, werden im Folgenden einige Beispiele angegeben, an denen verschiedene Eigenschaften der Interpolationsfunktion diskutiert werden (siehe Merzbacher [199]). Betrachtet wird die Interpolation gemäß Gl. 3.39, die zu einer besseren physikalischen Veranschaulichung auf die Ermittlung der Dichte in einem Kontinuum angewendet werden kann (siehe auch Gl. 3.59).

- **Gleichmäßiger Abstand der Netzkpunkte bei konstantem Interpolationsradius**

Der einfachste Fall ist hier die eindimensionale Betrachtungsweise. Konkret werden vier Netzkpunkte (Partikel) mit den Koordinaten 2,3,4,5 im

Einheitsabstand betrachtet; desweiteren wird für alle Partikel jeweils $h^i = 1$ und für deren Masse $m^i = 1$ gesetzt. Betrachtet werden soll wie eingangs erwähnt die Dichteverteilung gemäß Gl. 3.59.

Bild 3.6 zeigt den Einfluß jedes einzelnen Netzpunktes auf seine Umgebung. Die resultierende Dichte an einer bestimmten Stelle erhält man hieraus durch Summation (Überlagerung) der einzelnen Partikelbeiträge; die Position der Netzpunkte entspricht jeweils dem Maximum der Wichtungsfunktion.

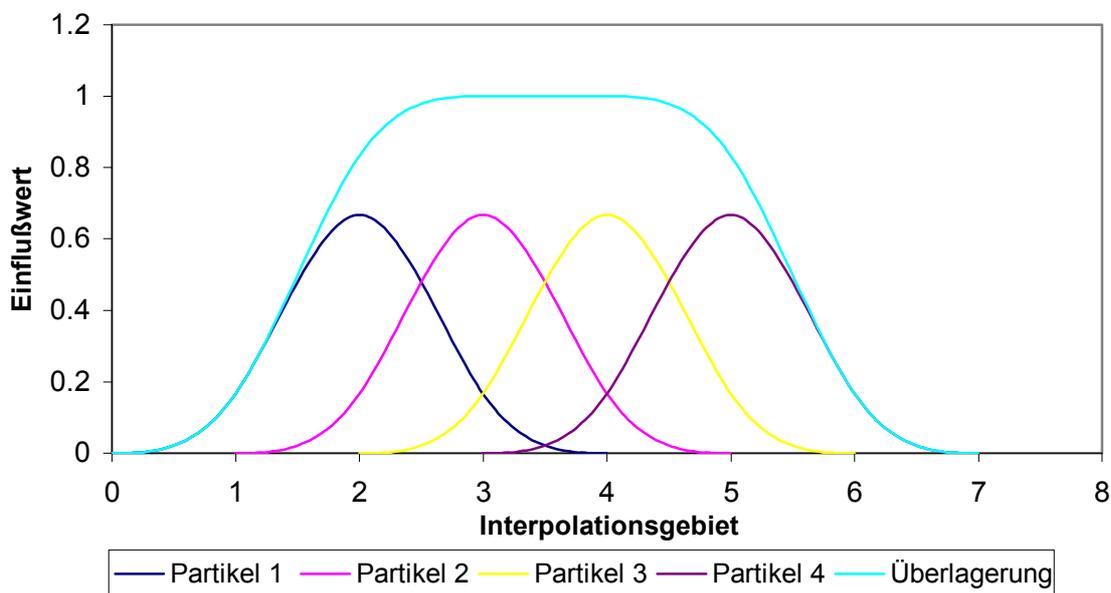


Bild 3.6: Interpolationsfunktionen einzelner Partikel und deren Summation bei gleichmäßiger Partikelanordnung sowie konstantem Interpolationsradius

Sehr gut zu erkennen ist hier der Unterschied zwischen der Überlagerung im Innern des untersuchten Intervalls $[0,7]$ und am Rand. Während im Zentrum eine konstante Funktion exakt reproduziert wird, fallen die Werte an den Rändern stark ab. Soll nun ein Kontinuum mit konstanter Dichte abgebildet werden, so wird also bei gleichmäßiger Partikelanordnung die Dichte am Rand unterschätzt.

Um dieses Defizit zu beheben, weist Trease [255] darauf hin, daß die Dichteberechnung auch über die Kontinuitätsgleichung erfolgen könnte. Jedoch sind dann auch die Impuls- und die Energieerhaltungsgleichung anzupassen, so daß eine korrekte Normalisierung eingehalten wird. Eine

weitere Lösungsmöglichkeit ist in der Einführung sogenannter „Ghost“-Partikel zu sehen, also mit der Schaffung von virtuellen Netzpunkten, deren einziger Sinn die Kompensation der Randeffekte ist (siehe auch Kapitel 3.6). Diese Partikel sind demnach in einem Programmcode von den regulären Partikeln zu unterscheiden. Ein weiterer Ansatz besteht in der Zuweisung einer gesonderten Dichte für Randpartikel.

Zusammenfassend kann im Falle von gleichmäßigem Partikelabstand sowie von konstantem Interpolationsradius festgestellt werden, daß abgesehen von den Randeffekten Konsistenz nullter Ordnung gegeben ist.

- **Gleichmäßiger Abstand der Netzpunkte bei veränderlichem Interpolationsradius**

Als Variation zum Beispiel aus dem vorigen Abschnitt wird nun die Interpolationslänge von Partikel 2 zu $h=0,5$ gesetzt. Für die Massen soll anfangs wieder $m^i = 1$ gelten. Diese kleine Änderung verursacht zunächst bei isolierter Betrachtung von Partikel 2 einen kleineren Einflußbereich (rosa Linie in Bild 3.7). Da die Normalisierungsbedingung Gl. 3.28, d.h. die Fläche unter der Kurve muß den Flächeninhalt 1 besitzen, nach wie vor gilt, ist auch der Maximalwert im Vergleich zu den Nachbarpartikeln größer.

Im Unterschied zu vorangehenden Ergebnissen des vorigen Abschnitts erzeugt die Interpolation nun selbst im Innern des betrachteten Intervalls $[0,7]$ keine konstante Funktion mehr. Vielmehr kann man das Verhalten der Summenfunktion (Überlagerung) als oszillierend charakterisieren.

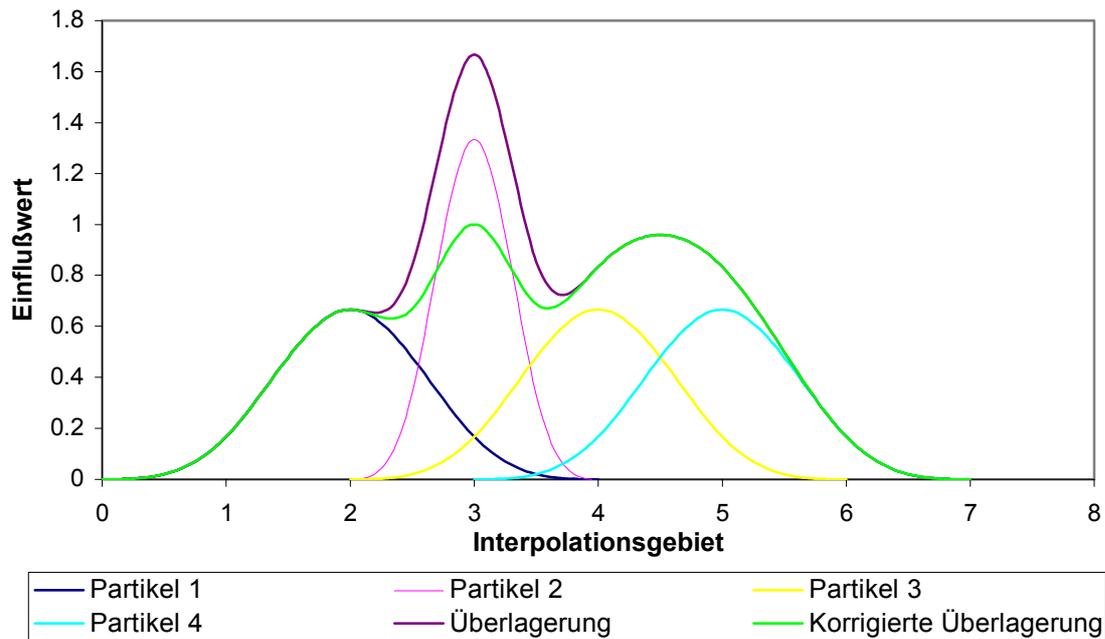


Bild 3.7: Effekt verschiedener Interpolationsradien, es gilt $h=0,5$ für Partikel 2, sonst $h=1$. Die Partikelanordnung ist nach wie vor regelmäßig

Natürlich ist die eingangs gemachte Annahme, $m^i = 1$, unrealistisch, weil damit genau am Netzpunkt 2 (Abszissenwert=3) eine Massenkonzentration mit der Folge einer überschätzten Dichte generiert würde. Doch selbst wenn man etwa als Korrektur die Masse $m^2 = 0,5$ wählt, bleibt immer noch der oszillierende Charakter der Summenfunktion erhalten, wie die grüne Überlagerungskurve zeigt. Die Konsistenz ist also auch hier nicht gegeben. Es ist an dieser Stelle zu bemerken, daß die rosa Kurve in Bild 3.7 für Partikel 2 nicht der nun veränderten Masse angepaßt wurde.

Gleichwohl ist deutlich zu sehen, daß die Interpolation an Qualität gewinnt. Dilts [83] betont in diesem Zusammenhang die Abhängigkeit der Interpolationsgüte von der Massenwahl für die einzelnen Partikel. Er nennt diese Zuordnung der Massen einen der „heikelsten“ Punkte bei der SPH-Methode. Wie Beobachtungen zeigen, können dadurch sehr große Fehler in der Berechnung entstehen. Für ungleichmäßige Partikelanordnung gelten diese Zusammenhänge analog.

- **Gleichmäßiger Abstand der Netzpunkte bei gemitteltem Interpolationsradius**

Da bei der praktischen Anwendung ein veränderlicher Interpolationsradius aus den zu Beginn des Kapitels 3.3.2 genannten Gründen erwünscht ist, wird oftmals eine Mittelwertbildung der Interpolationsradien benachbarter Netzpunkte durchgeführt, um die Qualität der Interpolation zu verbessern. Die Mittelung betrifft in Weiterführung des vorherigen Beispiels die Partikel 1,2,3, für die dann jeweils $h = 0,75$ gilt. Partikel 4 bleibt mit $h = 1$ unverändert. In Bezug auf die Massen wird $m^i = 1$ gesetzt.

Offensichtlich tritt durch die Mittelung eine gewisse Glättung der Summenfunktion im Intervall $[2,4]$ auf, ein Bereich, der genau den an der Modifikation beteiligten Netzpunkten entspricht (siehe Bild 3.8). Dort bewegt sich die Überlagerung in einem engen Band um den Wert 1 herum, was eine deutliche Verbesserung gegenüber Bild 3.7 darstellt. Dennoch wurde auch hier die Konsistenz letztlich nicht erreicht.

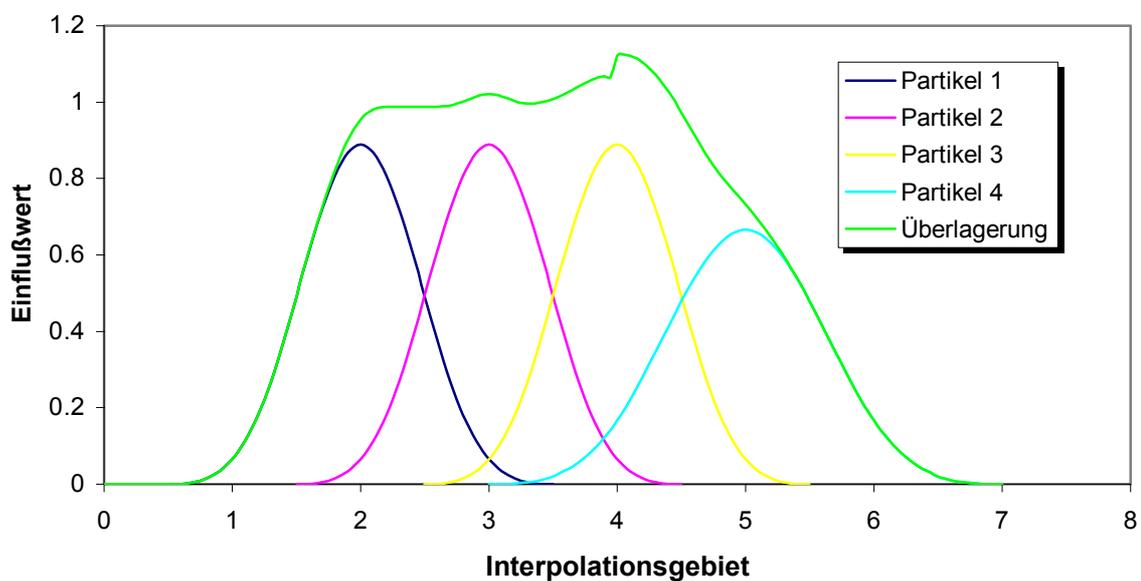


Bild 3.8: Einfluß gemittelter Interpolationsradien bei gleichmäßiger Partikelanordnung

3.3.3 Variable Interpolationslänge

Aufgrund der in Abschnitt 3.3.2 angesprochenen Problematik ist es erforderlich, die Interpolationslänge h variabel zu lassen. Dadurch kann ein „numerisches“ Fragmentieren verhindert werden. Hiermaier [146] verwendet sogar eine Partikelteilung, mit der eine höhere Dichteauflösung erzielt wird. Bei Verwendung von sehr großen „Anfangs“-Partikelanzahlen stößt man damit allerdings recht schnell wegen des hohen Speicherplatzbedarfes und der ansteigenden Rechenzeit auf Grenzen. Deshalb wird dieser Ansatz im Rahmen der Arbeit nicht weiter verfolgt. Erfolgt die Dichteberechnung nach Gl. 3.59, also nicht über die Kontinuitätsgleichung, ergibt sich nach Benz [26]:

$$h = h_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3}, \quad (3.49)$$

wobei h_0 und ρ_0 die Anfangsinterpolationslänge bzw. -dichte sind. Da zur Berechnung der neuen Interpolationslänge die aktuelle Dichte erforderlich ist, die wiederum ebenso die aktuelle Interpolationslänge h benötigt, wird der Zusammenhang in Gl. 3.49 implizit. Eine Vereinfachung ist, die neue Interpolationslänge aus der Dichte des vorherigen Zeitschrittes zu bestimmen. Dies kann unter starker Expansion eines Körpers allerdings zu einer Überschätzung der Dichte führen. Eine bessere Methode wird von Benz [26] vorgeschlagen. Zuerst erfolgt eine Abschätzung der neuen Interpolationslänge basierend auf der des vorherigen Zeitschrittes. Dann wird die Anzahl der Nachbarpartikel bestimmt, die in dem Einflußbereich der neuen Interpolationslänge liegen. Überschreitet diese einen bestimmten vorgegebenen Wert, wird h modifiziert und diese Prozedur so oft wiederholt, bis die richtige Anzahl von Nachbarpartikeln erhalten wird.

Eine andere Methode, eine variable Interpolationslänge zu erhalten, geht von Gleichung

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{3} \frac{h}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (3.50)$$

aus. Die Kontinuitätsgleichung eingesetzt in Gl. 3.50 ergibt:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{3} h \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} \quad (3.51)$$

Somit kann die Interpolationslänge in jeder Zeitschleife nach Ermittlung des Geschwindigkeitsgradienten inkrementell aktualisiert werden.

Bei Verwendung einer variablen Interpolationslänge ist zu beachten, daß die Einflußbereiche zweier Partikel i und j nicht mehr denselben Interpolationsradius besitzen. Um dennoch den Erhaltungsgleichungen zu genügen, ist es notwendig, entweder eine symmetrische Interpolationslänge h oder eine symmetrische Interpolationsfunktion W zu verwenden. Dies kann einfach durch Mittelwertbildung der Interpolationslängen h^i und h^j geschehen.

3.4 Die Erhaltungsgleichungen in SPH-Formulierung

- **Massenerhaltung**

Im Laufe dieses Kapitels sei $W^{ij} = W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h)$. Obere Indizes kennzeichnen Partikel, untere Indizes (griechische Buchstaben) Tensoren. Wird die Kontinuitätsgleichung auf beiden Seiten durch eine Kernelabschätzung ersetzt, erhält man :

$$\left\langle \frac{d\rho^i}{dt} \right\rangle = \int W^{ij} \frac{d\rho^j}{dt} d\Omega^j = - \int W^{ij} \rho^j \frac{\partial \dot{x}_\beta^j}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j \quad (3.52)$$

Durch Linearisierung, d.h. unter der Annahme, das Integral des Produktes in Gl. 3.52 sei gleich dem Produkt der Integrale, und Herausnahme von Größen, die keiner räumlichen Ableitung unterliegen, kann Gl. 3.52 umformuliert werden zu:

$$\left\langle \frac{d\rho^i}{dt} \right\rangle = -\rho^i \int W^{ij} \frac{\partial \dot{x}_\beta^j}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j \quad (3.53)$$

Fulk [98] zeigt, daß der Fehler, der durch die Linearisierung entsteht, einen unbedeutenden Einfluß auf die Konsistenz und Genauigkeit der SPH-Methode besitzt. Partielle Integration liefert:

$$\left\langle \frac{d\rho^i}{dt} \right\rangle = -\rho^i \left[\int \frac{\partial}{\partial x_\beta^j} (W^{ij} \dot{x}_\beta^j) d\Omega^j - \int \dot{x}_\beta^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j \right] \quad (3.54)$$

Der erste Term im Klammerausdruck der rechten Seite kann mit Hilfe des Divergenztheorems in ein Oberflächenintegral transformiert werden:

$$\left\langle \frac{d\rho^i}{dt} \right\rangle = -\rho^i \left[\int W^{ij} \dot{x}_\beta^j n_\beta dS - \int \dot{x}_\beta^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j \right] \quad (3.55)$$

Unter der Annahme, daß Oberflächenintegrale vernachlässigt werden, vereinfacht sich Gl. 3.55 zu:

$$\left\langle \frac{d\rho^i}{dt} \right\rangle = \rho^i \int \dot{x}_\beta^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j \quad (3.56)$$

In Summenformulierung lautet die Kontinuitätsgleichung :

$$\frac{d\rho^i}{dt} = \rho^i \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} (\dot{x}_\beta^j - \dot{x}_\beta^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} \quad (3.57)$$

Noch zu erwähnen wäre, daß zur Erhaltung der Gallileischen Invarianz der Term

$$\rho^i \dot{x}_\beta^i \int \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j \cong \rho^i \dot{x}_\beta^i \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} = 0 \quad (3.58)$$

von Gl. 3.56 subtrahiert wurde, um auf Gl. 3.57 zu gelangen. Gallileische Invarianz sichert, daß bei der Simulation ein Körper bei einer reinen Translation keine Störungen durch Rundungsfehler erfährt. Gl. 3.58 ist im Allgemeinen nur ungefähr null, wie in Kapitel 3.3.2 ausführlich diskutiert wurde.

Eine andere Methode, die Dichte zu ermitteln, ist:

$$\rho^i = \sum_j m^j W^{ij} \quad (3.59)$$

Hier werden nur Partikelkoordinaten und die Masse benötigt, um die Dichte zu bestimmen und die Kontinuitätsgleichung ist automatisch erfüllt. Ein Nachteil dieser Dichtermittlung ist der, daß Randpartikel eine geringere Dichte aufweisen und somit kommt es zu Randeffekten. Partikel nahe freier Oberflächen geraten unter Zugspannungen und in Bewegung. Benz [26] gibt für dieses Problem Lösungsvorschläge an, indem er Ghost-Partikel einführt und die Partikelabstände geschickt modifiziert. Libersky und Randles [184] lösen dieses Problem durch Berücksichtigung von Randbedingungen. Für Randpartikel benutzen sie folgende normalisierte Formel zur Dichteberechnung (siehe auch Kapitel 3.5.1):

$$\rho^i = \left(\sum_{j \in \mathbf{I}(i)} m^j W^{ij} \right) / \left(\sum_{j \in \mathbf{I}(i)} m^i W^{ij} / \rho^i \right) \quad (3.60)$$

Eine andere Möglichkeit ist den Randpartikeln im Programm gleich zu Beginn eine niedrigere Anfangsdichte ρ_0 gemäß Gl. 3.59 zuzuweisen. Da diese Methode keine aufwendige Oberflächenkennung benötigt wie die zuvor beschriebenen Methoden, wird sie in diesem SPH-Code verwendet. Mehr zu Methoden, Randpartikel aufzufinden siehe Kapitel 3.6.

• Impulserhaltung

Im Gegensatz zu Libersky [179] werden die Zugspannungen als positiv und Druckspannungen als negativ angenommen. Somit lautet die Impulserhaltung in SPH –Formulierung (siehe Gl. 3.24):

$$\left\langle \frac{d\dot{x}_\alpha^i}{dt} \right\rangle = \int W^{ij} \frac{1}{\rho^j} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^j}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j \quad (3.61)$$

Durch Anwendung der Quotientenregel kann die rechte Seite der Impulserhaltung zu

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho} \right) + \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_\beta} \quad (3.62)$$

umgeformt werden, so daß sich

$$\left\langle \frac{d\dot{x}_\alpha^i}{dt} \right\rangle = \int W^{ij} \frac{\partial}{\partial x_\beta^j} \left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^j} \right) d\Omega^j + \int W^{ij} \frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{(\rho^j)^2} \frac{\partial \rho^j}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j \quad (3.63)$$

ergibt. Analog zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung erhält man nach der Linearisierung und Herausnahme von Größen, die keiner räumlichen Ableitung unterliegen:

$$\left\langle \frac{d\dot{x}_\alpha^i}{dt} \right\rangle = \int W^{ij} \frac{\partial}{\partial x_\beta^j} \left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^j} \right) d\Omega^j + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{(\rho^i)^2} \int W^{ij} \frac{\partial \rho^j}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j \quad (3.64)$$

Partielle Integration der Gl. 3.64 liefert:

$$\left\langle \frac{d\dot{x}_\alpha^i}{dt} \right\rangle = \int \frac{\partial}{\partial x_\beta^j} \left(W^{ij} \frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^j} \right) d\Omega^j - \int \frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^j} \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{(\rho^i)^2} \left[\int \frac{\partial}{\partial x_\beta^j} (W^{ij} \rho^j) d\Omega^j - \int \rho^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x} d\Omega^j \right] \quad (3.65)$$

Durch Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes lassen sich der erste und dritte Term in Gl. 3.65 in ein Oberflächenintegral umwandeln:

$$\left\langle \frac{d\dot{x}_\alpha^i}{dt} \right\rangle = \int_S W^{ij} \frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^j} n_\beta dS - \int \frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^j} \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{(\rho^i)^2} \left[\int W^{ij} \rho^j n_\beta dS - \int \rho^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j \right] \quad (3.66)$$

Vernachlässigung der Oberflächenintegrale liefert:

$$\left\langle \frac{d\dot{x}_\alpha^i}{dt} \right\rangle = - \int \frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^j} \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j - \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{(\rho^i)^2} \int \rho^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j \quad (3.67)$$

Überführt man die kontinuierliche Form der Impulserhaltung in die diskrete Form, erhält man:

$$\frac{d\dot{x}_\alpha^i}{dt} = - \sum_j m^j \left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{(\rho^i)^2} + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{(\rho^j)^2} \right) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} \quad (3.68)$$

Dies ist nicht die einzige Form der Impulserhaltungsgleichung in einem SPH-Code. Sauer [235] verwendet eine symmetrisierte Form der Bewegungsgleichung, die auch in diesem SPH-Code wahlweise zur Verfügung steht:

$$\frac{d\dot{x}_\alpha^i}{dt} = - \sum_j m^j \left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}^i + \sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^i \rho^j} \right) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} \quad (3.69)$$

Andere Formen der SPH-Erhaltungsgleichungen sind übersichtlich in Fulk [98] dargestellt.

• Energieerhaltung

Die Energieerhaltungsgleichung in SPH-Formulierung kann wie folgt geschrieben werden:

$$\left\langle \frac{de^i}{dt} \right\rangle = \int W^{ij} \frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^j} \frac{\partial \dot{x}_{\beta}^j}{\partial x_{\alpha}^j} d\Omega^j \quad (3.70)$$

Nach Monaghan [205] bzw. Petschek, Libersky [181] lässt sich die rechte Seite der Energieerhaltung zu

$$\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial \dot{x}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\rho \dot{x}_{\alpha}) - \dot{x}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \rho \right] \quad (3.71)$$

umformulieren. Geht man wie bei der Impuls- bzw. Massenerhaltung vor, erhält man zunächst

$$\left\langle \frac{de^i}{dt} \right\rangle = \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{(\rho^i)^2} \int W^{ij} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}^j} (\rho^j \dot{x}_{\alpha}^j) d\Omega^j - \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i \dot{x}_{\alpha}^i}{(\rho^i)^2} \int W^{ij} \frac{\partial \rho^j}{\partial x_{\beta}^j} d\Omega^j, \quad (3.72)$$

nach partieller Integration

$$\left\langle \frac{de^i}{dt} \right\rangle = \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{(\rho^i)^2} \left[\int_S \frac{\partial}{\partial x_{\beta}^j} (W^{ij} \rho^j \dot{x}_{\alpha}^j) d\Omega^j - \int \rho^j \dot{x}_{\alpha}^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\beta}^j} d\Omega^j \right] - \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i \dot{x}_{\alpha}^i}{(\rho^i)^2} \left[\int_S \frac{\partial}{\partial x_{\beta}^j} (W^{ij} \rho^j) d\Omega^j - \int \rho^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\beta}^j} d\Omega^j \right] \quad (3.73)$$

und Anwendung des Divergenztheorems

$$\left\langle \frac{de^i}{dt} \right\rangle = \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{(\rho^i)^2} \left[\int_S W^{ij} \dot{x}_\alpha^j \rho^j n_\beta dS - \int \rho^j \dot{x}_\alpha^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j \right] - \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i \dot{x}_\alpha^i}{(\rho^i)^2} \left[\int_S \rho^j W^{ij} n_\beta dS - \int \rho^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j \right] \quad (3.74)$$

Unter Vernachlässigung der Oberflächenintegrale vereinfacht sich die Energieerhaltungsgleichung zu :

$$\left\langle \frac{de^i}{dt} \right\rangle = -\frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{(\rho^i)^2} \int \rho^j \dot{x}_\alpha^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i \dot{x}_\alpha^i}{(\rho^i)^2} \int \rho^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} d\Omega^j \quad (3.75)$$

Über Gl. 3.38 kann die integrale Form der Energieerhaltung in eine Summenformulierung überführt werden:

$$\frac{de^i}{dt} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{(\rho^i)^2} \sum_j m^j (\dot{x}_\alpha^i - \dot{x}_\alpha^j) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} \quad (3.76)$$

Die symmetrisierte Form der Energieerhaltung nach Sauer [235] lautet:

$$\frac{de^i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}^i + \sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^i \rho^j} \right) m^j (\dot{x}_\alpha^i - \dot{x}_\alpha^j) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} \quad (3.77)$$

Die SPH-Erhaltungsgleichungen lassen sich auch auf andere Weise herleiten. Dilts [71] faßt die Kernelfunktion als Approximationsfunktion eines Galerkin-Verfahrens auf und wendet die Kernelfunktion auf beiden Seiten der Erhaltungsgleichungen an. Dies entspricht einer Kollokations-Galerkin-Methode, d.h. einem Petrov-Galerkin-Verfahren, bei dem die Wichtungsfunktionen aus Dirac-Delta-Funktionen bestehen. Der Unterschied eines Petrov-Galerkin-Verfahrens zu einem Galerkin-Verfahren ist, daß beim Petrov-Galerkin-Verfahren für die Testfunktionen und die Ansatzfunktionen unterschiedliche Approximationsfunktionen gewählt werden. In der schwachen Form der Impulserhaltung dienen die Testfunktionen zur Approximation der virtuellen Verschiebungen und die An-

satzfunktionen zur Approximation der Beschleunigungen bzw. Geschwindigkeiten. Näheres dazu, wie man die Erhaltungsgleichungen erhält, wenn man die SPH-Methode als Galerkin-Verfahren auffaßt, ist dem Anhang A2 zu entnehmen. Es sei im Voraus schon erwähnt, daß die SPH-Methode nicht wirklich ein Galerkin-Verfahren ist.

3.4.1 Die künstliche Viskosität

Wird ein Körper durch einen Hoch-Geschwindigkeits-Impakt oder durch eine Kontaktdetonation belastet, kommt es zur Ausbreitung von Schockwellen. Schockwellen entstehen immer dann, wenn Belastungen mit einer Geschwindigkeit in das Kontinuum eingeleitet werden, die größer ist als diejenige, mit der sich elastische Störungen im Material ausbreiten. Sie entstehen auch bei Materialien mit Entfestigung. Durch die abnehmende Tangentensteifigkeit verringert sich die Schallgeschwindigkeit im Kontinuum. Später eingeleitete Wellen holen die früher „gestarteten“ Wellenanteile ein, wodurch die Wellenfront immer steiler wird, bis sich eine Diskontinuität im Geschwindigkeitsfeld, Druck und innerer Energie einstellt (siehe Bild 3.9).

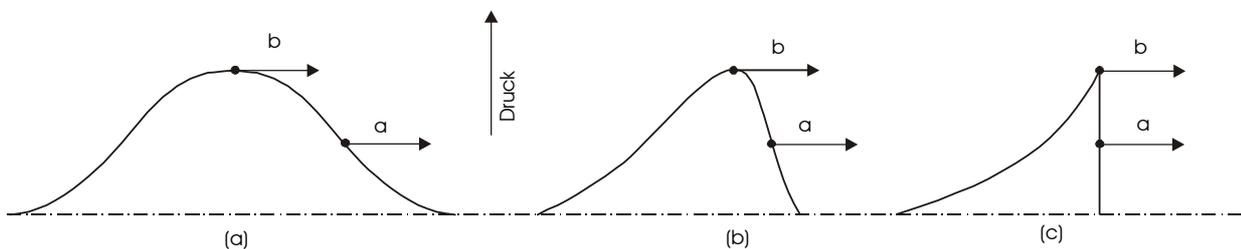


Bild 3.9: Entstehung von Schockwellen

Bei numerischen Rechenverfahren, die selber von kontinuierlichen Ansätzen ausgehen, treten bei der Abbildung der Diskontinuität numerische Probleme auf. Um diese zu vermeiden, wurde in den meisten Hydrocodes eine künstliche Viskosität eingeführt, die auch in einem SPH-Programm unabdingbar ist. Theoretisch wäre eine genaue Bestimmung der Zustandsgrößen in der Schockfront möglich. Ein Problem bei der Anwendung mit finiten Elementen ist, daß die Lage der Schockfront innerhalb des Elementes nicht bekannt ist. Die künstliche Viskosität verschmiert die diskontinuierliche Schockfront über eine kleine Region. Somit wird ein kontinuierlicher Übergang geschaffen. Die Sprungbedingung

im Bereich des Schocks bleibt insgesamt aber erfüllt. Desweiteren dämpft die künstliche Viskosität Oszillationen an der Schockfront.

Die künstliche Viskosität unterteilt sich in einen linearen und quadratischen Anteil. LS DYNA [130] verwendet folgende künstliche Viskosität:

$$q = -\alpha\rho\Delta x c_s \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \beta\rho\Delta x^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3.78)$$

Von Neumann und Richtmyer [257] verwendeten ursprünglich nur den quadratischen Term.

Analysen haben ergeben, daß es bei der Verwendung der für Hydrocodes typischen Viskosität bei der SPH-Methode zu Oszillationen an der Schockfront kommt, die durch die Verwendung einer Viskosität gerade vermieden werden sollte. 1983 gelang es Monaghan, Gingold [204] eine für die SPH-Methode geeignete künstliche Viskosität zu formulieren, so daß die Behandlung von Schockwellen auch in einem SPH-Code möglich ist:

$$\Pi^{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{-\alpha\bar{c}^{ij}\mu^{ij} + \beta(\mu^{ij})^2}{\bar{\rho}^{ij}} & \dot{x}_\alpha^{ij} x_\alpha^{ij} \leq 0 \\ 0 & \dot{x}_\alpha^{ij} x_\alpha^{ij} > 0 \end{array} \right\} \quad (3.79)$$

mit

$$\mu^{ij} = \frac{h(\dot{x}_\alpha^i - \dot{x}_\alpha^j)(x_\alpha^i - x_\alpha^j) f^i + f^j}{\|x_\alpha^i - x_\alpha^j\|^2 + \omega h^2} \quad (3.80)$$

$$f^i = \frac{|\nabla \cdot \dot{\mathbf{x}}^i|}{|\nabla \cdot \dot{\mathbf{x}}^i| + \|\nabla \otimes \dot{\mathbf{x}}^i\| + 0,0001c^i/h}$$

$$\bar{\rho}^{ij} = (\rho^i + \rho^j)/2 \quad (3.81)$$

$$\bar{c}^{ij} = (c^i + c^j)/2$$

α und β sind hierbei zwei Parameter. Wen et al. [264] empfiehlt $1 < \alpha < 2,5$ und $2 < \beta < 2,5$ zu wählen. ω in Gl. 3.80 wird gewöhnlich zu 0,1 gesetzt und dient nur dazu, Singularitäten zu vermeiden. Die Bedingung $\dot{x}_{\alpha}^{ij} x_{\alpha}^{ij} \leq 0$ in Gl. 3.79 trägt Rechnung, daß die künstliche Viskosität nur unter Druckbeanspruchung verwendet wird. Der Korrekturterm f^i gewährleistet, daß bei reinem Schub keine viskosen Druckterme auftreten.

Ein Nachteil bei der Verwendung einer skalaren Viskosität ist die zu starke dissipative Wirkung in höheren Dimensionen. Libersky et al. [180] und Caramara, Shashkov, Whalen [37] leiteten daher eine tensorielle Viskosität her, um zu große Dissipationen zu vermeiden.

Nach Einbau der künstlichen Viskosität lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\dot{x}_{\alpha}^i}{dt} = - \sum_j m^j \left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{(\rho^i)^2} + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{(\rho^j)^2} + \Pi^{ij} \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\beta}^j} \quad (3.82)$$

und die Energieerhaltungsgleichung

$$\frac{de^i}{dt} = \sum_j m^j (\dot{x}_{\alpha}^i - \dot{x}_{\alpha}^j) \left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{(\rho^i)^2} + \frac{1}{2} \Pi^{ij} \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\beta}^j}, \quad (3.83)$$

wobei $\delta_{\alpha\beta}$ das Kronecker-Delta ist.

3.4.2 Conservative smoothing

Eine weitere Alternative zur künstlichen Viskosität bietet das sog. „conservative smoothing“ (CSA). Hierbei wird auf eine Erweiterung einer viskosen Druckspannung in der Impulserhaltung verzichtet. Für eindimensionale Probleme entwickelten Guenther et al. [129], Wen [264], Swegle [252] und Hicks [144] einen conservative smoothing approach:

$$S_{cs}(\dot{\mathbf{x}}^i, \alpha_{cs}) = \dot{\mathbf{x}}^i + \alpha_{cs} [0.5(\dot{\mathbf{x}}^{i-1} + \dot{\mathbf{x}}^{i+1}) - \dot{\mathbf{x}}^i] \quad (3.84)$$

Dieser CSA filtert nicht nur Oszillationen einer Wellenlänge von $2h$, sondern er behebt auch die für die SPH-Methode typische Zuginstabilität, auf die in Kapitel 3.10 näher eingegangen wird.

Libersky und Randles [184] erweiterten diesen CSA auf dreidimensionale Probleme:

$$S_{CS}(\dot{\mathbf{x}}^i, \alpha_{CS}) = \dot{\mathbf{x}}^i + \alpha_{CS} \left[\left(\sum_{j \neq i} m^j \dot{\mathbf{x}}^j W^{ij} / \rho^j \right) / \left(\sum_{j \neq i} m^j W^{ij} / \rho^j \right) - \dot{\mathbf{x}}^i \right] \quad (3.85)$$

mit

$$\alpha_{CS} \cong 0,5.$$

Diesen Term verwendeten sie, um die Geschwindigkeiten, Dichte und innere Energie zu glätten. Im Hinblick auf diese Arbeit ist interessant, daß sie mit dieser SPH-Formulierung und durch Einbau von skalaren Schädigungsgesetzen die Fragmentierung von Stahlzylindern recht gut simulieren konnten. Da sich der CSA als sehr dissipativ erwies, wurde jedoch ausschließlich die künstliche Viskosität in den in Kapitel 5 beschriebenen Berechnungen verwendet.

3.5. Verbesserung des Approximationsverfahrens

In Kapitel 3.3.2 wurden die Grundlagen der SPH-Interpolation erläutert:

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \Phi^j(\mathbf{x}) u^j \quad (3.86)$$

Die dabei erhobene Forderung, daß bei konstanten u^j der genäherte Wert $u_h(\mathbf{x})$ an jeder Stelle gleich u^j sein soll, führte unmittelbar auf die Konsistenzbedingung 0. Ordnung (Gl. 3.28). Diese Forderung wird allerdings nicht für die Randpartikel erfüllt, da diese weniger Nachbarn besitzen und ist auch nur zu Beginn der Rechnung erfüllt, wenn die Partikel noch eine äquidistante Anordnung besitzen. Für die Konvergenz von numerischen Lösungsansätzen, d.h. genauer von Galerkin-Verfahren für partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, ist aber eine lineare Konsistenz notwendig (siehe Belytschko [20]). Obwohl das ursprüngliche SPH-Verfahren diese Anforderungen nicht befriedigt, konnten dennoch für Anwendungen in der Kurzzeitdynamik sehr gute Ergebnisse erzielt werden. Belytschko et al. [19] sprechen nicht von der Erfüllung einer Konsistenzbedingung, sondern von „Vollständigkeit“. Die Konsistenzanalysen werden hauptsächlich bei Finiten-Differenzen-Verfahren durchgeführt. Hierbei heißt ein Differenzenschema $L_h u = f$ mit den Differentialgleichungen $Lu = f$ konsistent p -ter Ordnung, wenn für jede ausreichend glatte Funktion v gilt:

$$Lv - L_h v = O(h^p) \quad (3.87)$$

Hierbei ist h der Gitterabstand, L der Differential- und L_h der Differenzoperator. Näheres siehe Strikwerda [249]. Die Konsistenz ist eine notwendige Bedingung für die Konvergenz von Finiten-Differenzen-Verfahren. Ein Finite-Differenzen-Verfahren ist erst konvergent, wenn es sowohl konsistent als auch stabil ist. Stabilität gewährleistet, daß Fehler über die Zeit gering bleiben. Die „Vollständigkeit“ ersetzt also die Konsistenz bei der Konvergenzanalyse von Galerkin-Verfahren, d.h. die Erfüllung von Reproduktionsbedingungen. In der Regel fordert man die Reproduzierbarkeit von konstanten, linearen oder quadratischen Funktionen, z.B. Gl. 3.88 und Gl. 3.89. Im Folgenden aber wird in dieser Arbeit

der Begriff „Konsistenz“ beibehalten. Die SPH-Methode ist eigentlich kein Galerkin-Verfahren, bei dem die diskreten Gleichungen aus der schwachen Form der Differentialgleichungen erhalten werden, sondern eine Kollokationsmethode. Belytschko et al. [19] zeigen, daß die diskreten SPH-Gleichungen den Gleichungen der Galerkin-Methode mit einer 1-Punkt Quadratur sehr ähneln. Sie diskutieren zwei Möglichkeiten, die SPH-Methode dahingehend zu modifizieren, daß sie die Bedingungen Gl. 3.88 und/oder Gl. 3.89 erfüllen:

1. Korrektur der approximierten Funktion (MLS-Interpolation, Shepardfunktion)
2. Korrektur der Ableitungen der approximierten Funktion (Symmetrisierung, Normalisierung)

Sie berichten, daß nicht integrierbare Ableitungen von Testfunktionen zur Divergenz des Galerkin-Verfahrens führen. Die Symmetrisierung aus Kapitel 3.3.2 modifiziert nur die Ableitungen der approximierten Funktion. Sie sind somit nicht integrierbar, d.h. die Diskretisierung ist nicht konvergent. Nochmals sei darauf hingewiesen, daß trotz der vielen Defizite des ursprünglichen SPH-Verfahrens es trotzdem sehr gute Ergebnisse bei Anwendungen für partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung erzielt hat. Desweiteren beweisen Belytschko et al. [19], daß konstant reproduzierbare Funktionen die lineare Impulserhaltung, linear reproduzierbare Funktionen die Drehimpulserhaltung sichern. Eine gute Diskussion über die Stabilität und Konvergenz des SPH-Verfahrens geben Fulk [98] und Belytschko et al. [17].

Belytschko et al. [19] stellen fest, daß das Standard SPH-Verfahren zur Simulation von Schädigung und "strain-softening" wenig geeignet ist, was an dem zu großen Einflußbereich der Partikel liegt. Eine Materialinstabilität äußert sich durch eine Lokalisierung von großen Dehnungen. Ist der Einflußbereich eines Partikels zu groß, werden sich aufgrund der Beeinträchtigung der Nachbarpartikel keine großen Deformationen lokalisieren können. Hierfür ist der Einflußbereich zu verringern.

Nachfolgend werden zwei Verbesserungen des Approximationsverfahrens zur Bestimmung des Funktionswertes $u_h(x)$ erläutert, so daß die lineare Konsistenz des Interpolationsverfahrens erfüllt wird. Für die lineare Konsistenz muß folgende Bedingung gelten:

$$\sum_{j=1}^N \Phi^j(\mathbf{x}) x^j = x, \sum_{j=1}^N \Phi^j(\mathbf{x}) y^j = y, \sum_{j=1}^N \Phi^j(\mathbf{x}) z^j = z \quad (3.88)$$

Außerdem sind folgende Bedingungen bei linearer Konsistenz exakt erfüllt, auch für Randpartikel:

$$\sum_{j=1}^N \Phi^j(\mathbf{x}) = 1, \sum_{j=1}^N \nabla \Phi^j(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.89)$$

Man nimmt an, daß die ungenaue Art der SPH-Interpolation auch Ursache für die Zuginstabilität dieses Verfahrens ist, auf die in Kapitel 3.10 eingegangen wird.

3.5.1 Normalisierung

Ändert sich die Partikelanordnung im Laufe der Berechnung, verliert die Kernelabschätzung und deren Ableitungen an Genauigkeit. Dies liegt daran, daß die Normalisierungsbedingung, Gl. 3.28, im Laufe der Berechnung nicht mehr exakt erfüllt ist. Sie ist, wie bereits erwähnt, lediglich zu Beginn der Rechnung bei äquidistanter Partikelanordnung erfüllt und dort auch nur im Körperinnern. Um diese Fehler an den Rändern zu beheben, wurde eine sog. Normalisierung eingeführt (siehe z.B. Johnson und Beissel [160]). Grundgedanke ist der, die Summation über die Nachbarpartikel derart zu erweitern, daß die Konsistenzbedingung, Gl. 3.28, bei beliebiger Partikelanordnung und auch an den Rändern erfüllt ist. Dies geschieht durch Gl. 3.90:

$$u_h = \frac{\sum_j u^j W^{ij} m^j / \rho^j}{\sum_j W^{ij} m^j / \rho^j} \quad (3.90)$$

Um auch der linearen Konsistenzforderung zu genügen, muß die Approximation der Ableitungen an den Rändern modifiziert werden. Libersky und Randles [183] entwickelten eine mathematisch konsistente Formulierung der Normalisierung für allgemeine Tensorfelder. Sie normalisierten sowohl die Dehnraten als auch die Spannungsgradienten. Die Kerne-

abschätzung des Spannungsgradienten nach Libersky und Randles [183] lautet:

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^i}{\partial x_{\beta}^i} = - \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} (\sigma_{\alpha\beta}^j - \sigma_{\alpha\beta}^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\beta}^j} \quad (3.91)$$

Damit das Verfahren für lineare Spannungsfelder $\sigma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta\gamma} x_{\gamma}$ konsistent (Konsistenz 1. Ordnung) ist, muß der Spannungsgradient noch mit einem Tensor zweiter Stufe multipliziert werden,

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^i}{\partial x_{\beta}^i} = \left[- \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} (\sigma_{\alpha\gamma}^j - \sigma_{\alpha\gamma}^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\gamma}^j} \right] B_{\chi\gamma}, \quad (3.92)$$

wobei für lineare Spannungsfelder

$$b_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\beta\gamma} = -b_{\alpha\beta\gamma} \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} (x_{\gamma}^j - x_{\gamma}^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\gamma}^j} B_{\chi\beta} \quad (3.93)$$

gilt. Gl. 3.93 ist für beliebige $b_{\alpha\beta\gamma}$ nur dann erfüllt, wenn $B_{\chi\gamma}$ die Inverse des Klammerausdrucks in Gl. 3.92 ist:

$$B_{\chi\gamma} = \left[- \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} (x_{\chi}^j - x_{\chi}^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\gamma}^j} \right]^{-1} \quad (3.94)$$

Somit ändert sich die Impulserhaltungsgleichung zu:

$$\frac{d\dot{x}_{\alpha}^i}{dt} = \left[- \sum_j \frac{m^j}{\rho^i \rho^j} (\sigma_{\alpha\gamma}^j - \sigma_{\alpha\gamma}^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\gamma}^j} \right] B_{\chi\gamma} \quad (3.95)$$

Um die Spannungen zu normalisieren ist es wichtig, diese Form der Impulserhaltung zu verwenden anstelle von Gl. 3.68 oder 3.69.

Die normalisierte Partikelgleichung für den Geschwindigkeitsgradienten, der Zeitableitung der Dichte und inneren Energie lautet (siehe [183]):

$$\frac{\partial \dot{x}_\alpha^i}{\partial x_\beta^i} = \left[- \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} (\dot{x}_\alpha^j - \dot{x}_\alpha^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\gamma^j} \right] B_{\gamma\beta} \quad (3.96)$$

$$\frac{d\rho^i}{dt} = \rho^i \left[\sum_j \frac{m^j}{\rho^j} (\dot{x}_\alpha^j - \dot{x}_\alpha^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^j} \right] B_{\alpha\beta} \quad (3.97)$$

$$\frac{de^i}{dt} = -\frac{1}{\rho^i} \sigma_{\alpha\beta}^i \left[\left(\sum_j \frac{m^j}{\rho^j} (\dot{x}_\alpha^j - \dot{x}_\alpha^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\gamma^j} \right) B_{\gamma\beta} \right] \quad (3.98)$$

Ein Nachteil der Impulserhaltung nach Gl. 3.95 ist, daß aber keine spannungsfreien Randbedingungen korrekt abgebildet werden. Die Randspannungen müssen im Programm „künstlich“ gleich null gesetzt werden. Dies erfordert eine aufwendige Oberflächenkennung, die besonders im Dreidimensionalen äußerst schwierig zu realisieren ist. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit die normalisierte Bewegungsgleichung nach Johnson et al. [163] verwendet:

$$\frac{d\dot{x}_\alpha^i}{dt} = \left[- \sum_j \frac{m^j}{\rho^i \rho^j} (\sigma_{\alpha\gamma}^j + \sigma_{\alpha\gamma}^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\chi^j} \right] B_{\chi\gamma} \quad (3.99)$$

Mit dieser Formulierung können spannungsfreie Randbedingungen näherungsweise abgebildet werden. Noch zu erwähnen wäre, daß bei Verwendung dieser Normalisierung die Wechselwirkung der Partikel nicht mehr symmetrisch ist. Dies hat zur Folge, daß die Erhaltungsgleichungen nicht mehr lokal, sondern nur noch global erfüllt sind. Die Erhöhung der Konsistenz ging also auf Kosten der Erhaltung.

3.5.2 Die Moving Least Squares (MLS)-Interpolation

Die MLS-Interpolation wurde erstmalig von Lancaster/Salkauskas [175] dargestellt. In numerischen Rechenverfahren wurde sie zuerst von Naylor [217] verwendet. Weiterführende Arbeiten wurden von Belytschko et al. [21], [22], [23] vorgenommen. In vielen netzfreien Methoden, wie

z.B. dem EFG-Verfahren, wird schon seit langer Zeit eine MLS-Interpolation benutzt. Für die SPH-Methode führte sie Dilts [71] erstmals ein. Scheffer, Hiermaier [237] bauten eine leicht modifizierte MLS-Interpolation in ihren SPH-Code ein.

Im nachfolgenden Abschnitt seien die Grundlagen der MLS-Interpolation dargestellt. Es gilt $u^j = u(\mathbf{x}^j)$ und $\mathbf{p}^j = \mathbf{p}(\mathbf{x}^j)$.

Der grundlegende Ansatz für die MLS-Interpolation ist durch

$$u_h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (3.100)$$

gegeben. Hierbei ist \mathbf{a} keine Konstante, sondern hängt von \mathbf{x} ab. Die Funktionen \mathbf{p} können frei gewählt werden. Um die Konsistenzbedingungen, Gl. 3.88 und 3.89, zu erfüllen, werden für die Funktionen \mathbf{p} folgende Annahmen getroffen

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = (1 \ x \ y \ z) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3, \quad (3.101)$$

so daß die linearen Konsistenzbedingungen, Gl. 3.88 und 3.89, exakt erfüllt sind. Es ist auch möglich, eine quadratische Konsistenz zu erhalten, indem man die Funktionen \mathbf{p} dementsprechend modifiziert:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = (1 \ x \ y \ z \ x^2 \ y^2 \ z^2 \ xy \ xz \ yz) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \quad (3.102)$$

Da bei Verwendung einer quadratischen Interpolation der Rechenaufwand erheblich wird, begnügt man sich mit der Erfüllung der linearen Konsistenz. Die verbleibenden Werte $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ sind so zu bestimmen, daß die Interpolation nach Gl. 3.100 möglichst genau wird. Hierzu ist das Fehlerquadrat

$$J = \sum_j (\mathbf{p}^j \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u^j)^2 W^j(\mathbf{x}) \quad (3.103)$$

zu minimieren. $J(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ soll nun bezüglich \mathbf{a} ein Minimum annehmen. Unter der Bedingung

$$\frac{\partial J(\mathbf{a}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{p} W \cdot \mathbf{a} - \mathbf{p} W \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.104)$$

folgt:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{p} W)^{-1} \cdot \mathbf{p} W \cdot \mathbf{u} \quad (3.105)$$

Schließlich ergibt sich mit Gl. 3.100 der endgültige Interpolationsansatz:

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_j \Phi^j(\mathbf{x}) u^j$$

$$\Phi^j = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} \cdot \mathbf{p}^j W^j(\mathbf{x}) \quad (3.106)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_j \mathbf{p}^j (\mathbf{p}^j)^T W^j(\mathbf{x})$$

Betrachtet man Gl. 3.106 wird nun leicht ersichtlich, warum der quadratische Interpolationsansatz erheblich mehr Rechenzeit in Anspruch nimmt, denn nicht nur die Vektoren \mathbf{p} sind wesentlich höher besetzt, auch die Matrix \mathbf{A} ist anstelle einer $4 \otimes 4$ -Matrix bei der linearen Interpolation eine $10 \otimes 10$ -Matrix bei der quadratischen Interpolation. Wird anstelle der linearen Konsistenz lediglich Konsistenz 0. Ordnung gefordert, d.h. $\mathbf{p}^T = (1)$, erhält man für die Ansatzfunktion

$$\Phi^i = W^i / \sum_j W^j, \quad (3.107)$$

die auch als Shepard-Funktion bekannt ist.

Die Ableitung des Interpolationsansatzes ergibt sich einfach durch formales Differenzieren:

$$\nabla \Phi^i = \left[\nabla(\mathbf{p}^T) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}^i + \mathbf{p}^T \cdot \nabla \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}^i \right] W^i + \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}^i \nabla W^i$$

mit (3.108)

$$\nabla \mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Es wird ersichtlich, daß die Auswertung der räumlichen Ableitungen der Ansatzfunktion Φ , die Invertierung der Matrix \mathbf{A} erfordert. Ist die Anzahl

der Nachbarn eines Partikels kleiner als die Anzahl der Funktionen in \mathbf{p} , dann wird die Matrix \mathbf{A} singulär. Für den Fall der linearen Interpolation benötigt ein Partikel also mindestens vier Nachbarn. Die Existenz von genügend Nachbarpartikeln ist notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Invertierbarkeit der Matrix \mathbf{A} . Näheres dazu siehe Dilts [71] und Häußler [135]. Angenommen, die Matrix \mathbf{A} wird im Laufe der Berechnung singulär, so wird im Programm anstelle der MLS-Interpolation die Shepard-Funktion verwendet. Scheffer, Hiermaier [237] und Dilts [71] bezeichnen dies als Variable-Ranking-MLS-Interpolation. Für die numerische Anwendung sei noch erwähnt, daß es auch bei fast regulären Matrizen \mathbf{A} zu numerischen Problemen kommt. Deshalb wird im Programm auch bei sehr kleinen Werten auf der Hauptdiagonalen in der Matrix \mathbf{A} anstelle der MLS-Interpolation die Shepard-Funktion verwendet. Ein weiteres Kriterium für eine gut konditionierte Matrix \mathbf{A} ist die Konditionalzahl $\kappa(\mathbf{A})$, die für positiv definite Matrizen \mathbf{A} das Verhältnis des maximalen Eigenwertes zum minimalen bestimmt:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A})}{\lambda_{\min}(\mathbf{A})} \quad (3.109)$$

Der Grenzwert $\kappa(\mathbf{A}) \rightarrow \infty$ entspricht einer singulären Matrix \mathbf{A} . Die Konditionalzahl ist ein Maß für die numerische Stabilität des Rechenverfahrens. Große Konditionalzahlen führen zu numerischen Instabilitäten. Deswegen wird im Programm bei großen Konditionalzahlen $\kappa(\mathbf{A})$ auch auf die Shepardfunktion lokal „umgeschaltet“. Näheres dazu siehe Zurmühl, Falk [277]. Häußler [135] weist darauf hin, daß es durch die Erniedrigung der Interpolationsordnung zu unplanmäßigen Diskontinuitäten kommt. Im Rahmen der in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen erwies sich diese Methode jedoch als hinreichend genau. Des weiteren ist zu erwähnen, daß der rechenintensivste Schritt die Bildung des Matrizenproduktes im zweiten Term der Gl. 3.108 ist. In [18] geben Belytschko et al. Lösungsvorschläge zur schnelleren Ermittlung des Gradienten der Ansatzfunktion an.

Es ist noch zu klären, wie die MLS-Interpolation in den bestehenden SPH-Code einzubauen ist. Dilts [72], [73] führte diverse Untersuchungen bezüglich der Konsistenz und Erhaltung der verschiedenen MLS-

Interpolationsmethoden in einem SPH-Code durch. Trotzdem gelang es ihm nicht, die lokale Erhaltung der grundlegenden Gleichungen der Kontinuumsmechanik unter Erhöhung der Konsistenz zu erfüllen. Nur auf Kosten der linearen Konsistenz gelang es ihm, die lokale Erhaltung wieder sicherzustellen. In [73] untersucht Dilts das Konvergenzverhalten der MLSPH-Methode. Er berichtet, daß bei ungleichmäßiger Partikelanordnung das MLSPH-Verfahren 0. Ordnung genauso gute Ergebnisse wie die MLSPH-Verfahren höherer Ordnung erzielt. Er stellt sogar fest, daß mit zunehmender Interpolationsordnung das Verfahren um so langsamer konvergiert. Scheffer, Hiermaier [237] substituieren einfach die Standard-Interpolation

$$\Phi^i(\mathbf{x}) = \frac{m^i}{\rho^i} W^i(\mathbf{x}) \quad (3.110)$$

durch die MLS-Interpolation

$$\Phi^i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}^i W^i(\mathbf{x}) \quad (3.111)$$

und erhalten hierbei für den Rotations- und Taylortest wesentlich bessere Ergebnisse. Der Korrektionsfaktor $\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}^i$ ist als „numerisches“ Partikelvolumen anzusehen. Der Nachteil dieser MLSPH-Version besteht in der Problematik, die Ränder korrekt abzubilden (siehe Sauer et al. [234]). Durch Vernachlässigung des zentralen Partikels in den MLS-Summen gelangen es Sauer et al. [234] für einige Anwendungen ähnlich wie beim Standard SPH-Verfahren freie Ränder zu erzeugen, wodurch beispielsweise eine korrekte Spannungswellenreflektion ermöglicht wurde. Sie berichten, daß bei weit fortschreitender Berechnung numerische Probleme an den Rändern und Ecken auftreten. Ein weiterer Nachteil besteht in dem Verlust der lokalen Impuls- und Energieerhaltung. Dieser MLS-Interpolationsansatz wird auch im Rahmen dieses SPH-Codes verwendet. Mit dieser neuen Art der Interpolation werden auch für die in Kapitel 5 beschriebenen Berechnungen bessere Ergebnisse erzielt, vor allem in Hinblick auf die Fragmentgrößenverteilungen. Für Standardtests des Betonstoffgesetzes aus Kapitel 4, z.B. dem statischen Druck- oder Zugversuch ermöglicht das MLSPH sinnvolle Ergebnisse, die mit der Standard SPH-Methode nicht erzielt wurden. Ihr großer Nachteil liegt in

der erheblich längeren Rechenzeit gegenüber den anderen Interpolationsverfahren. Je nach Partikelanzahl steigt die Rechenzeit gegenüber der ursprünglichen SPH-Methode um den Faktor 7 bis 8 an. Ein großer Vorteil des MLSPH-Verfahrens gegenüber der Standard oder der normierten SPH-Methode hingegen liegt in der Möglichkeit, Bereiche eines Körpers feiner bzw. gröber zu diskretisieren, ohne die Konsistenzbedingungen zu verletzen.

3.5.3 Beispiele

In diesem Abschnitt soll das Verhalten der MLS-Interpolation und ihres Gradienten bei der Reproduktion ausgewählter Funktionen mit ebenem Definitionsbereich betrachtet werden (siehe auch Merzbacher [199]). Dabei werden sowohl die Partikelanzahl und deren Anordnung als auch der zugrunde gelegte Interpolationsradius variiert. Darüberhinaus steht der Vergleich zwischen der MLS- und der Standard-SPH-Interpolation sowie die Diskussion der daraus gewonnenen Ergebnisse im Mittelpunkt der nachfolgenden Ausführungen. Des Weiteren werden zwei Modifikationen der SPH und MLSPH-Methode untersucht, zum einen eine sog. Symmetrisierung zur Verbesserung der Approximation eines Funktionsgradienten (siehe Kapitel 3.3.2, Gl. 3.47), die in einem SPH bzw. MLSPH-Hydrocode eigentlich immer verwendet wird, zum anderen der modifizierte MLSPH-Ansatz nach Sauer et al. [234], bei dem bei der Summenbildung das zentrale Partikel vernachlässigt wird. Motivation hierfür sind beobachtete Verbesserungen bei Wellenreflexionsproblemen.

3.5.3.1 Untersuchung ausgewählter Funktionen bei regelmäßiger Partikelanordnung

Wie bereits in Kapitel 3.3.2 und zu Beginn von Kapitel 3.5 gezeigt wurde, ermöglicht die Standard-SPH-Methode die Reproduktion einer konstanten Funktion nur für den Spezialfall einer gleichmäßigen Partikelanordnung. Zudem müssen auch noch die Partikelvolumina gleich sein.

Weiterhin kann gezeigt werden [71], daß die MLS-Interpolation die im Ansatzvektor \mathbf{p} enthaltenen Basisfunktionen exakt reproduziert, und

zwar unabhängig von der Partikelanordnung und vom Interpolationsradius. Für die folgenden Untersuchungen sei nun angenommen, daß gilt:

$$\mathbf{p}^T = [1 \quad x \quad y] \quad (3.112)$$

Es erfolgt also eine Beschränkung auf lineare Basisfunktionen. Der Grund hierfür ist der stark anwachsende Rechenaufwand für Ansätze höherer, etwa quadratischer oder kubischer Ordnung, wie in Kapitel 3.5.2 bereits erwähnt. Von Interesse ist in diesem Zusammenhang nun, inwieweit die Standard SPH- bzw. die MLS-Interpolation nichtlineare Funktionen approximieren können.

- Die quadratische Funktion $F(x,y)=x^2+y^2$

Als einfachste Variation zum linearen Problem wird im folgenden exemplarisch die quadratische Funktion $F(x,y) = x^2 + y^2$ untersucht. Ausgegangen wird dabei von einer gleichmäßigen Anordnung von 25 x 25 Partikeln (gegenseitiger Abstand 0,511). Bild 3.10 zeigt den analytisch berechneten Funktionsverlauf von $F(x,y)$.

Bei der Darstellung ist jeweils zu beachten, daß die Berechnung der Funktionswerte nur an den Netzknoten erfolgt, welche in den Graphen als Knotenpunkte erscheinen. Zwischen diesen Stützstellen wird linear interpoliert, um ein flächiges Erscheinungsbild zu erzeugen.

Vergleicht man nun die Approximation der MLS- mit der Standard-Interpolation (SPH), so stellt man als Gemeinsamkeit das Auftreten von Randeffekten fest. Dies ist in Bild 3.11 und Bild 3.12 zu erkennen. Die Funktionswerte am Rand weichen deutlich von den analytisch berechneten Werten ab, da dort die Anzahl der Nachbarpartikel im Vergleich zum Inneren des Interpolationsgebietes geringer ist. Besonders deutlich wird dies bei den Eckpartikeln, die die wenigsten Nachbarn besitzen (Bild 3.12).

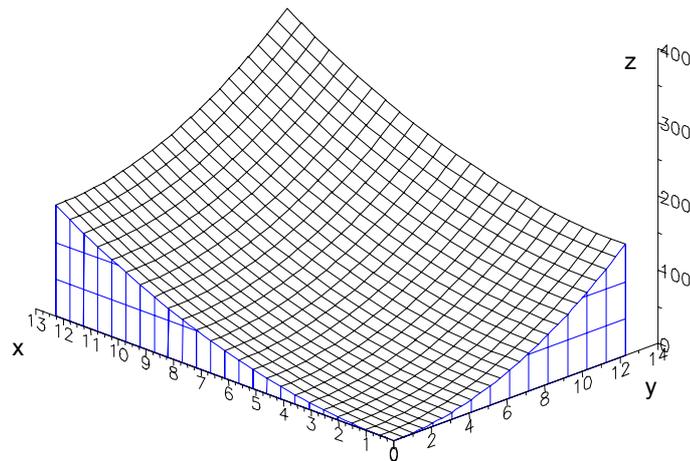


Bild 3.10: Graphische Darstellung der Funktion $F(x,y) = x^2 + y^2$

Die Genauigkeit der beiden Verfahren betreffend ist festzuhalten, daß MLS die quadratische Funktion wesentlich besser annähert als SPH. Der bei MLS auftretende, absolute Fehler verschwindet nahezu, während SPH zu recht deutlichen Abweichungen von den analytischen Werten führt. Wie Bild 3.11 und Bild 3.12 zu entnehmen ist, unterscheidet sich der Fehler zwischen MLS und SPH um einige Größenordnungen. Relativ gesehen beträgt der Defekt bei SPH etwa 10%, während dieser bei MLS 0,05% nicht überschreitet. Ein weiteres Charakteristikum bei SPH liegt in der Ähnlichkeit des Fehlerverlaufes (Bild 3.12) mit der analytischen Lösung (Bild 3.10). Mit zunehmender Steigung der Ausgangsfunktion ist ein Anwachsen des Fehlers zu beobachten.

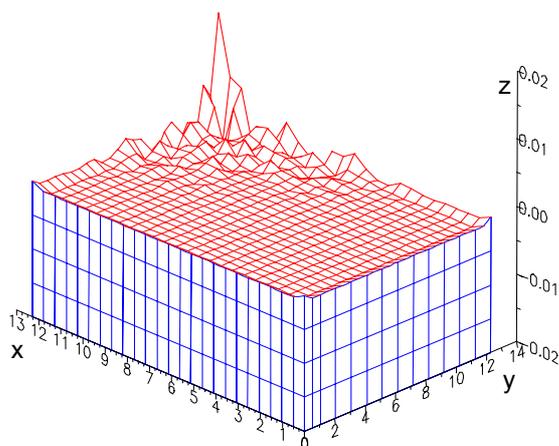


Bild 3.11: Absoluter Fehler der MLS-Interpolation mit $h=0,30$

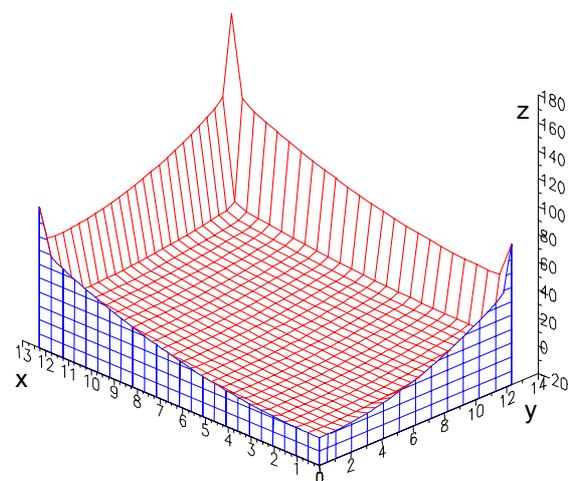


Bild 3.12: Absoluter Fehler der SPH-Interpolation mit $h=0,80$

In diesem Zusammenhang ist unbedingt zu erwähnen, daß die Wahl von h einen wesentlichen Einfluß auf die Ergebnisse besitzt. Auf dieses Phänomen wird später noch einmal genauer eingegangen. Jedoch sei zur Erklärung der Bilder 3.11 und 3.12 bemerkt, daß für MLS $h=0,30$ gewählt wurde, so daß abgesehen vom Rand die Partikel jeweils vier Nachbarn besitzen. Dies ist bei regelmäßiger Anordnung die minimale Anzahl, um die Matrix \mathbf{A} aus Gl. 3.106 gerade nicht-singulär werden zu lassen. SPH betreffend wurde $h=0,80$ gesetzt. Diese Zahl ist mehr oder weniger willkürlich gewählt, führt aber zu besseren Ergebnissen als für $h=0,30$; das Partikelvolumen wurde zu $V = m/\rho = \Delta x^2 = 0,51^2 = 0,26$ bestimmt. Dadurch wird das Gesamtvolumen zwar leicht überschätzt, jedoch sind die sich daraus ergebenden Effekte vernachlässigbar klein.

Interessanter für die praktische Anwendung sind nun die partiellen Ableitungen, da nur sie in einem MLSPH-bzw. SPH-Code Verwendung finden. Hierbei werden sowohl die nicht symmetrisierte SPH und MLSPH-Variante gem. Gl. 3.45 als auch die symmetrisierte SPH und MLSPH-Version gem. Gl. 3.47 betrachtet. Exemplarisch wird die partielle Ableitung nach x (Bild 3.13) und deren Approximation betrachtet (Bild 3.14 und Bild 3.15).

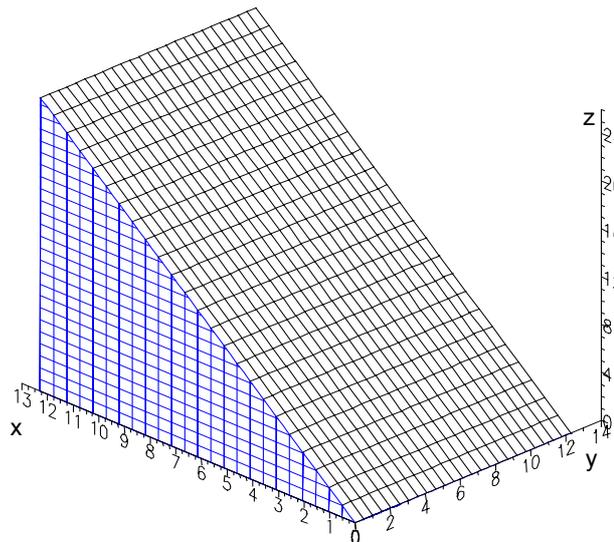


Bild 3.13: Partielle Ableitung der Funktion $F(x,y) = x^2 + y^2$ nach x

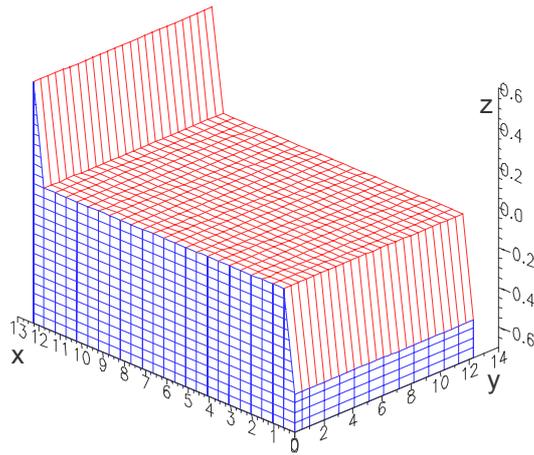


Bild 3.14: Absoluter Fehler der *nicht symmetrisierten* MLS-Interpolation ($h=0,30$) zur partiellen Ableitung nach x

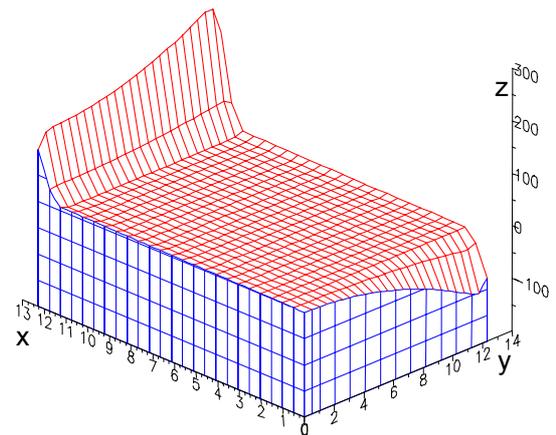


Bild 3.15: Absoluter Fehler der *nicht symmetrisierten* SPH-Interpolation ($h=0,80$) zur partiellen Ableitung nach x

Die zugehörigen absoluten Fehler der nicht symmetrisierten MLS- bzw. der SPH-Interpolation sind in Bild 3.14 und Bild 3.15 dargestellt. Auch hier gelten die schon oben gemachten Anmerkungen über sich einstellende Randeffekte und über die Fehlerevolution. Einzig die Genauigkeit von SPH hat sich deutlich verbessert; die prozentuale Abweichung vom exakten Verlauf im Innern beschränkt sich hier auf 0,2% (entsprechender MLS-Wert: 0,005%). Bei regelmäßiger Partikelanordnung sind die Ergebnisse der nicht symmetrisierten und symmetrisierten SPH bzw. MLSPH-Versionen nahezu identisch, deshalb wird auf eine Darstellung des absoluten Fehlers der symmetrisierten SPH und MLSPH-Methode verzichtet.

- Die Sinusfunktion $F(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$

Wesentlich komplexer als die quadratische Funktion stellt sich die Sinusfunktion mit quadratischem Argument dar. Um eine Vorstellung von ihrem Verlauf zu bekommen, wird zunächst $y \equiv 0$ gesetzt. Der eigentlich zweidimensionale Definitionsbereich wird somit auf einen eindimensionalen reduziert. Desweiteren ist zu entscheiden, welche Anzahl an Stützstellen eine sinnvolle Darstellung des Funktionsverlaufs erwarten läßt. Einen Anhaltspunkt zur Beantwortung dieser Frage gibt Bild 3.16. Hier ist die geglättete Kurve für die Verwendung von regelmäßig angeordneten

Stützstellen zu sehen. Durch diese Vorgehensweise wird aufgrund des quadratischen Arguments eine mit wachsendem Abszissenwert abnehmende Auflösung erzielt. Während die ersten Sinushalbwellen noch nahezu exakt abgebildet werden, verschlechtert sich im weiteren Verlauf die Darstellung erheblich.

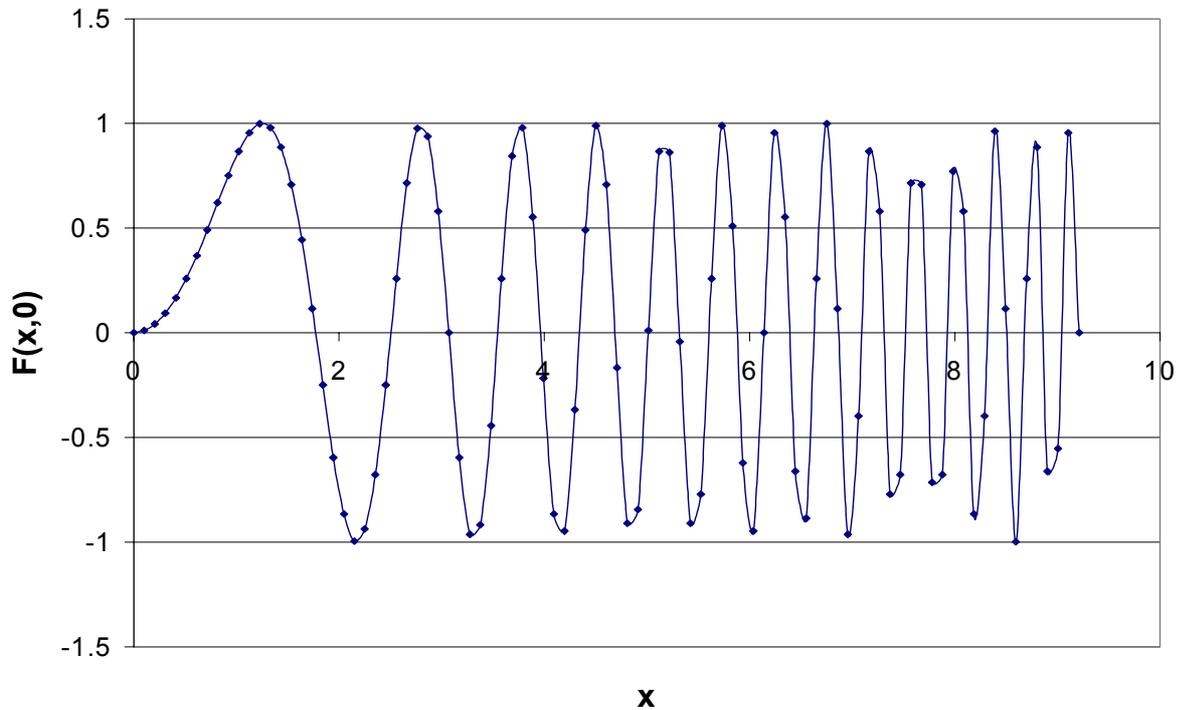


Bild 3.16: Graphische Darstellung von $F(x,0) = \sin(x^2)$, ausgewertet an diskreten Punkten mit jeweils gleichem Abstand

Speziell für dieses Beispiel wurde ein Partikelabstand von $\sqrt{\pi/300}$ gewählt, nicht zuletzt um die für die Sinusfunktion charakteristischen Argumentwerte von $\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2 \dots$ zu durchlaufen. Erst dadurch ist eine sinnvolle graphische Darstellung möglich. Da nun die Auflösung mit wachsendem x sehr stark abnimmt, wird zur Überprüfung der Approximationsqualität der MLS- bzw. SPH-Interpolation lediglich ein quadratischer Definitionsbereich der Kantenlänge $1,57 \approx \pi/2$ betrachtet. Weiterhin soll die Diskussion hier auf den Gradienten bzw. stellvertretend auf die partielle Ableitung nach x beschränkt sein. Die Partikel sind in einem konstanten Abstand $\sqrt{\pi/300}$ angeordnet und der Interpolationsradius ist konstant.

Bild 3.17 zeigt den Funktionsverlauf der partiellen Ableitung nach x . Er ist charakterisiert durch die einhüllenden Ebenen $z(x,y) = \pm 2x$ und der innerhalb dieser Grenzen wellenförmig verlaufenden Gestalt.

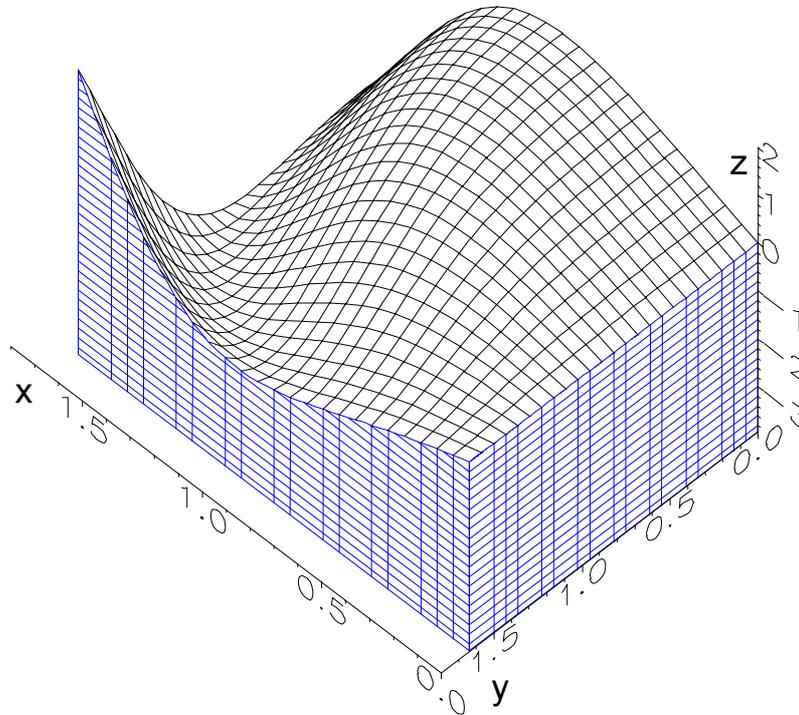


Bild 3.17: Partielle Ableitung $F_x(x,y) = 2x \cdot \cos(x^2 + y^2)$

Aus Gründen der Darstellbarkeit wird im weiteren wiederum nur der bei der Approximation auftretende absolute Fehler gezeigt. In Bild 3.18 und Bild 3.19 ist deutlich zu erkennen, daß sich der Fehler sowohl bei der nicht symmetrisierten MLSPH- als auch bei der nicht symmetrisierten SPH-Version parallel zum Verlauf der untersuchten Ausgangsfunktion entwickelt. Von rechts nach links betrachtet wächst dieser zunächst an, fällt dann und steigt später wieder an. Von den auch hier sich einstellenden Randeffekten einmal abgesehen, schneidet der nicht symmetrisierte MLS-Ansatz hinsichtlich der Größe des Fehlers wesentlich besser ab. Während der nicht symmetrisierte SPH-Ansatz zu einem globalen, d.h. über das gesamte Interpolationsgebiet aufsummierten und durch die Partikelanzahl geteilten Fehler von $-0,42$ je Partikel führt, erhält man für MLS einen Wert von $-0,01$. Diese beiden Zahlen veranschaulichen

durchaus den qualitativen Unterschied zwischen beiden Verfahren. Sie dürfen jedoch nicht als absolutes, quantitatives Maß angesehen werden, da sie lokale Fehler nicht angemessen berücksichtigen. Bei den in dieser Arbeit untersuchten Fragmentierungsproblemen, die praktisch immer lokal stattfinden bzw. zumindest lokal beginnen, würde eine rein globale Betrachtungsweise nicht gerecht werden.

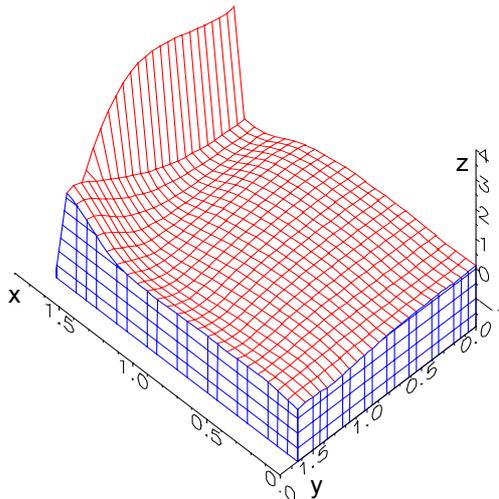


Bild 3.18: Absoluter Fehler der *nicht symmetrisierten* MLS-Interpolation ($h=0,30$) zur partiellen Ableitung nach x

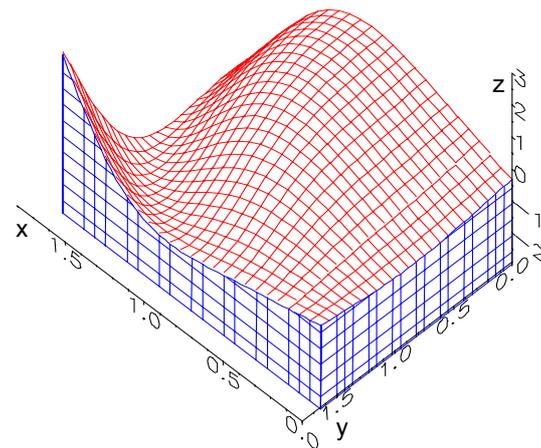


Bild 3.19: Absoluter Fehler der *nicht symmetrisierten* SPH-Interpolation ($h=0,80$) zur partiellen Ableitung nach x

Bei den symmetrisierten SPH- und MLSPH-Verfahren ist eine deutliche Verbesserung bei der Approximation des Funktionsgradienten in x -Richtung zu verzeichnen. Der maximale lokale Fehler liegt bei der symmetrisierten MLSPH-Version im Innern bei ca. 8% (siehe Bild 3.20), bei symmetrisierter SPH-Methode bei ca. 12% (siehe Bild 3.21). Auch hier ist wieder eine Ähnlichkeit des Fehlerverlaufs zur analytischen Lösung zu beobachten.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die MLS-Interpolation die untersuchten Testfunktionen genauer zu approximieren vermag als die SPH-Methode. Sowohl qualitativ als auch quantitativ sehr gute Ergebnisse sind bei der Abbildung der quadratischen Funktion erzielt worden. Im Wesentlichen beläuft sich die prozentuale MLS-Abweichung in der Größenordnung von 0,05%, wohingegen die entsprechenden SPH-

Ergebnisse etwa um 10% streuen. Deutlich geringer fällt die Differenz bei der Annäherung der partiellen Ableitung aus. Hier beträgt der MLS-Defekt 0,005%. Der entsprechende SPH-Wert sinkt auf etwa 0,2%. Als Einflußparameter kommen hierfür in Frage die Wahl von h , die Anzahl der Partikel oder etwa allgemeine Eigenschaften der verwendeten Kernelfunktion. Diese Fragen sind im weiteren zu klären.

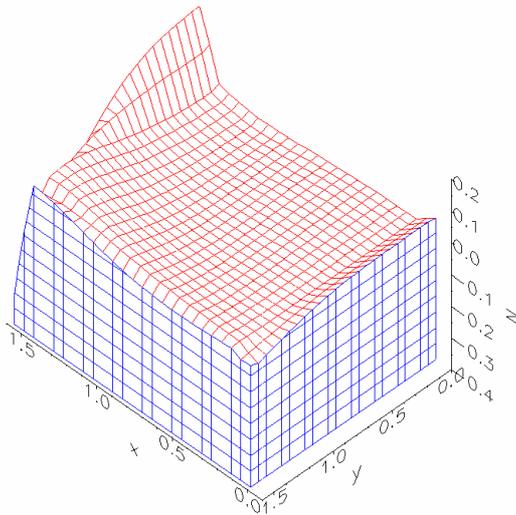


Bild 3.20: Absoluter Fehler der *symmetrisierten* MLS-Interpolation ($h=0,30$) zur partiellen Ableitung nach x

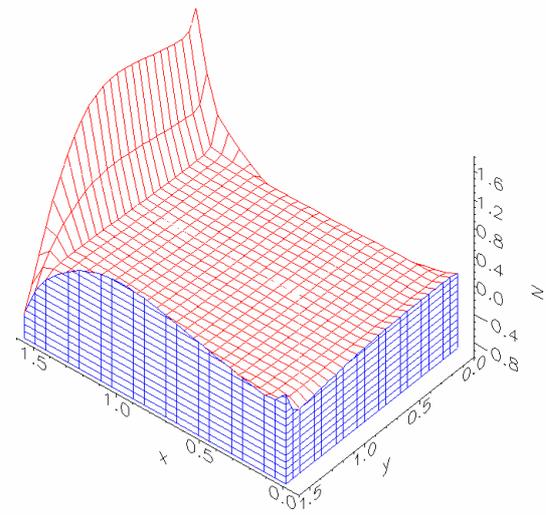


Bild 3.21: Absoluter Fehler der *symmetrisierten* SPH-Interpolation ($h=0,80$) zur partiellen Ableitung nach x

Bei der komplizierteren Sinusfunktion verliert auch die MLS-Approximation an Genauigkeit. Es kann dabei die Tendenz beobachtet werden, daß der Fehler mit abnehmender Auflösung der Diskretisierung zunimmt. Die prozentuale Abweichung überschreitet hier zum Teil sehr deutlich 10%. Auffällig ist zudem die Ähnlichkeit des absoluten Defektverlaufes mit der anzunähernden, analytisch berechneten Funktion. Dieses Phänomen tritt bei MLS und SPH gleichermaßen auf. Mögliche Gründe sind die gleichmäßige Partikelanordnung, die Verwendung der B-Spline-Funktion als Kernelfunktion sowie etwaige besondere Eigenschaften der untersuchten Testfunktionen. Da die Beantwortung dieser Fragen in allgemeiner Weise für die MLS-Interpolation weitaus schwieriger ist als für die SPH-Interpolation, wird zunächst vom einfachen Problem, d.h. der Diskussion des SPH-Ansatzes ausgegangen, um dann möglicherweise auch Rückschlüsse auf MLS ziehen zu können. Letzt-

endlich kann noch beobachtet werden, daß durch die Symmetrisierung die Approximationsergebnisse deutlich verbessert werden. Die symmetrisierte SPH-Variante approximiert die Ableitung der Sinusfunktion hierbei nicht bedeutend schlechter als die nicht symmetrisierte MLSPH-Methode.

In Bezug auf die oben erwähnten Genauigkeiten, die mit beiden Ansätzen bei der Approximation der quadratischen Funktion erzielt wurden, mag der Unterschied als gering erscheinen. Allerdings muß dabei beachtet werden, daß mit der (ML-) SPH-Methode dynamische Vorgänge mit Hilfe eines Zeitintegrationschemas berechnet werden, so daß die Interpolation sehr häufig durchzuführen ist. Damit können sich natürlich jeweils geringe Fehler in einem einzigen Integrationsschritt zu insgesamt großen Fehlern am Ende einer Simulation addieren.

3.5.3.2 Die Fehlerevolution bei der zweidimensionalen SPH-Interpolation

- Vereinfachende Annahmen

Gegenstand der Betrachtung ist die partielle Ableitung nach x . Um das Problem nun in seiner einfachsten, zweidimensionalen Form zu beschreiben, sei eine gleichmäßige Partikelanordnung mit einem Partikelabstand von d angenommen. Dies impliziert auch jeweils gleiche Partikelvolumina $V^i = m^i / \rho^i \approx d^2$. Weiterhin soll zunächst h so gewählt werden, daß nur die Partikel 2,4,6,8 das Zentralpartikel 5 beeinflussen (Bild 3.22). Deshalb muß für h gelten $d < 2h < \sqrt{2}d$, wobei h für alle Partikel konstant sein soll.

Desweiteren kann aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Kernelfunktion ohne Einschränkung der Allgemeinheit ein Koordinatensystem so gewählt werden, daß das in Bild 3.22 dargestellte Verbindungsraaster zwischen den Partikeln parallel zum Koordinatensystem liegt.

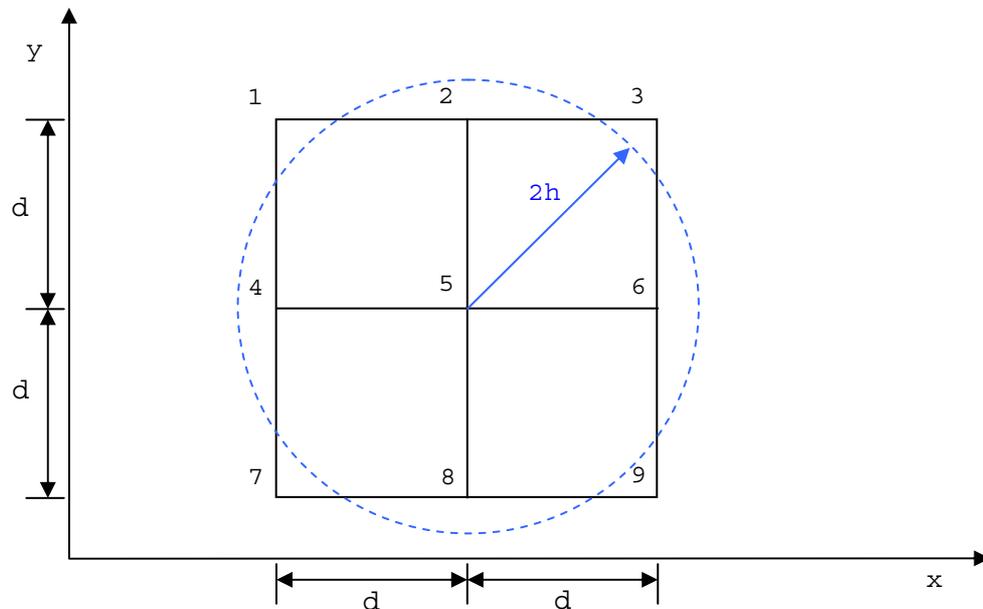


Bild 3.22: Gleichmäßige Partikelanordnung

Gemäß Gl. 3.34 berechnet sich nun die partielle Ableitung der Kernelfunktion nach x für das zweidimensionale Problem zu

$$\frac{d}{dx} W = - \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^j}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^j\|} \right) \cdot \left. \begin{cases} \frac{10}{7\pi \cdot h^3} \left(-3z + \frac{9}{4}z^2 \right) & 0 \leq z < 1 \\ \frac{-15}{14\pi \cdot h^3} (2-z)^2 & 1 \leq z \leq 2 \\ 0 & z > 2 \end{cases} \right\} \quad (3.113)$$

wobei $z = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^j\|}{h}$ gilt.

Gl. 3.45 folgend läßt sich die nicht symmetrisierte SPH-Approximation jetzt schreiben als

$$\frac{d}{dx} u(\mathbf{x}^i) \cong - \sum_{j=1}^n V^j \cdot \frac{d}{dx} W^{ij} \cdot u(\mathbf{x}^j) \quad (3.114)$$

Somit ergibt sich für Partikel 5 (Bild 3.22)

$$\frac{d}{dx}u(\mathbf{x}^5) \cong -V^i \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{d}{dx}W^{25} \cdot u(\mathbf{x}^2) + \frac{d}{dx}W^{45} \cdot u(\mathbf{x}^4) + \frac{d}{dx}W^{55} \cdot u(\mathbf{x}^5) + \\ \frac{d}{dx}W^{65} \cdot u(\mathbf{x}^6) + \frac{d}{dx}W^{85} \cdot u(\mathbf{x}^8) \end{array} \right] \quad (3.115)$$

Aufgrund der oben gemachten Annahmen gilt $\frac{d}{dx}W^{25} = \frac{d}{dx}W^{55} = \frac{d}{dx}W^{85} = 0$, da die x-Koordinaten der Partikel 4,5 und 8 identisch sind und somit der erste Faktor in Gl. 3.113 zu Null wird. Wegen der Symmetrieeigenschaften des Kerns dürfen auch die Indizes von W^{ij} zusammen mit dem jeweiligen Vorzeichen vertauscht werden. Nebenbei sei bemerkt, daß gerade diese Eigenschaft die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie sichert. Dadurch wird Gl. 3.115 nun zu

$$\frac{d}{dx}u(\mathbf{x}^5) \cong V^i \cdot \left[\frac{d}{dx}W^{54} \cdot u(\mathbf{x}^4) + \frac{d}{dx}W^{56} \cdot u(\mathbf{x}^6) \right] \quad (3.116)$$

- Fehlerevolution bei der quadratischen Funktion

Es soll nun die partielle Ableitung einer quadratischen Funktion, beschrieben durch die Gleichung

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (3.117)$$

mit der nicht symmetrisierten SPH-Interpolation approximiert werden. Das eigentlich zum zweidimensionalen Problem gehörige Argument y kann hier entfallen, da y entlang der maßgebenden Partikel 4 und 6 konstant bleibt.

Die bei der Berechnung entscheidenden Größen sind in Bild 3.23 graphisch veranschaulicht.

Die blaue Kurve stellt $f(x)$ aus Gl. 3.117, die rote Kurve dW^5/dx aus Gl. 3.113 dar, deren Wert an den Partikelpositionen 4 und 6 grün bzw. gelb hervorgehoben ist. Dabei ist w immer positiv.

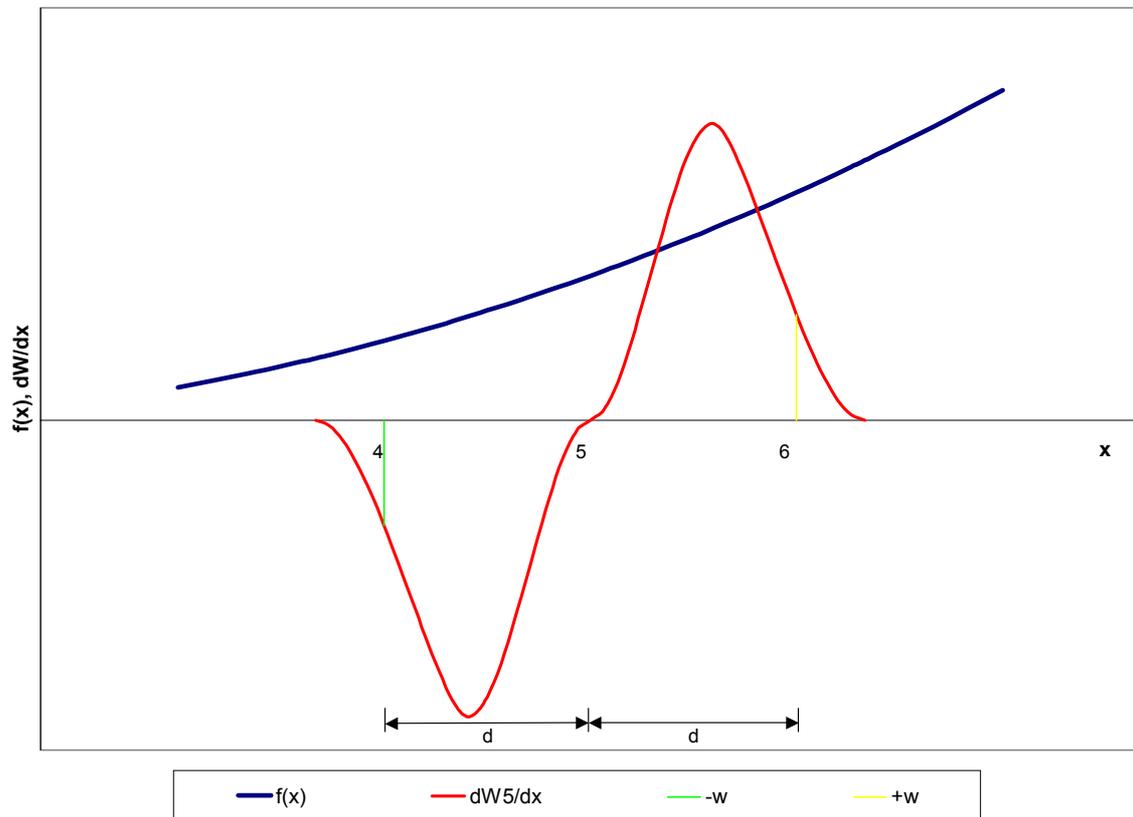


Bild 3.23: Maßgebende Größen und Funktionsverläufe zur Berechnung der partiellen Ableitung nach x an der Stelle von Partikel 5 nach der *nicht symmetrischen* SPH-Methode

Gemäß Gl. 3.116 ergibt sich jetzt für $\frac{d}{dx} f(\mathbf{x}^5)$

$$\left[\frac{d}{dx} f(\mathbf{x}^5) \right]_{\text{SPH}} \cong V^i \cdot \left[\frac{d}{dx} W^{54} \cdot f(\mathbf{x}^4) + \frac{d}{dx} W^{56} \cdot f(\mathbf{x}^6) \right] =$$

$$V^i \cdot \left[-w(a(x^4)^2 + bx^4 + c) + w(a(x^6)^2 + bx^6 + c) \right] =$$

$$V^i \cdot w \cdot \left\{ \begin{array}{l} a \cdot [(x^5 + d)^2 - (x^5 - d)^2] + \\ b \cdot [(x^5 + d) - (x^5 - d)] \end{array} \right\} =$$

$$V^i \cdot w \cdot (4a dx^5 + 2bd) = 2 \frac{m^i}{\rho^i} wd \cdot (2ax^5 + b)$$

(3.118)

Mit $V^i = m^i / \rho^i = d^2$ läßt sich dann Gl. 3.118 allgemein für Partikel i schreiben als

$$\left[\frac{d}{dx} f(\mathbf{x}^i) \right]_{\text{SPH}} \cong 2wd^3 \cdot (2ax^i + b) = 2w(d,h) \cdot d^3 \cdot (2ax^i + b) \quad (3.119)$$

Dieses Ergebnis stellt zumindest eine lineare Funktion dar wie sie auch bei der Differentiation von Gl. 3.117 erhalten wird. Weiterhin erkennt man in der Formulierung Gl. 3.119 sehr einfach die Einflußparameter auf das Approximationsergebnis. Während a und b durch $f(x)$ festgelegt, also nicht variabel, sind, können d und h frei gewählt werden. Es stellt sich also die interessante Frage, für welche Wahl von d und h die SPH-Näherung mit der exakten Lösung übereinstimmt, d.h. wann verschwindet der absolute Defekt Δ_{abs} . Letzterer ist eine Funktion von d , h , x^i und beträgt

$$\Delta_{\text{abs}}(d,h,x^i) = \frac{2ax^i + b - 2w(d,h) \cdot d^3 \cdot (2ax^i + b)}{(2ax^i + b) \cdot (1 - 2 \cdot w(d,h) \cdot d^3)} = \quad (3.120)$$

Der Vollständigkeit halber sei auch der relative Defekt Δ_{rel} angegeben

$$\Delta_{\text{rel}}(d,h,x^i) = \frac{(2ax^i + b) \cdot (1 - 2w(d,h) \cdot d^3)}{2ax^i + b} = 1 - 2w(d,h) \cdot d^3 \quad (3.121)$$

Um letztlich den Fehler verschwinden zu lassen, muß gelten:

$$1 - 2w(d,h) \cdot d^3 \cong 0 \quad \Leftrightarrow \quad w(d,h) \cdot d^3 = 0,5 \quad (3.122)$$

Es läßt sich aber sehr leicht zeigen, daß unter den oben gemachten Voraussetzungen kein Wertepaar (d,h) gefunden werden kann, um Gl. 3.122 zu genügen. Jedoch kann eine bestmögliche Approximation für $d/h = \sqrt{2}$ erreicht werden, der relative Fehler beträgt dann 34%.

- Einfluß eines vergrößerten Interpolationsradius

Wie bereits im vorherigen Kapitel beobachtet, verbessert sich die Approximation mit zunehmendem h . So wurde bei einer Anzahl von 28 Nachbarpartikeln eine relative Abweichung von nur 0,2% ermittelt. Dies bedeutet eine wesentliche Verbesserung der Interpolationsergebnisse. Auf eine analytische Berechnung der Fehlerentwicklung wird hier verzichtet, da sie aufgrund ihrer Komplexität nur sehr schwierig durchführbar ist.

- Unregelmäßige Partikelanordnung

Um eine unregelmäßige Partikelanordnung realisieren zu können, ohne einen aufwendigen Algorithmus für die Bestimmung der einzelnen Partikelvolumina entwickeln zu müssen, wird folgende Vereinfachung durchgeführt. Alle Randpartikel bleiben an ihrer ursprünglichen Position, lediglich die Lage der Partikel im Innern des Interpolationsgebietes wird zufällig, leicht variiert. Dabei findet die Variation ausgehend von dem in Abschnitt 3.5.3.1 verwendeten, regelmäßigen Gitter statt. Der Begriff „leicht“ trägt dem Umstand Rechnung, daß näherungsweise die Annahme konstanter Partikelvolumen gerechtfertigt ist.

Untersucht wird nun wiederum die partielle Ableitung nach x der in Abschnitt 3.5.3.1 eingeführten, quadratischen Funktion. Bild 3.24 zeigt dafür den relativen Fehler unter der Prämisse identischer Partikelvolumen für verschiedene Abweichungsgrade des Gitternetzes der nicht symmetrisierten SPH-Methode. Dieser Abweichungsgrad ist als Prozentsatz vom ursprünglich konstanten Partikelabstand angegeben und zeigt somit die maximal mögliche Abweichung von einem regelmäßigen Gitter je Achsenrichtung an. Hier wurde eine um 5% bzw. 10% variierte Netzpunktanordnung untersucht (siehe Bild 3.24).

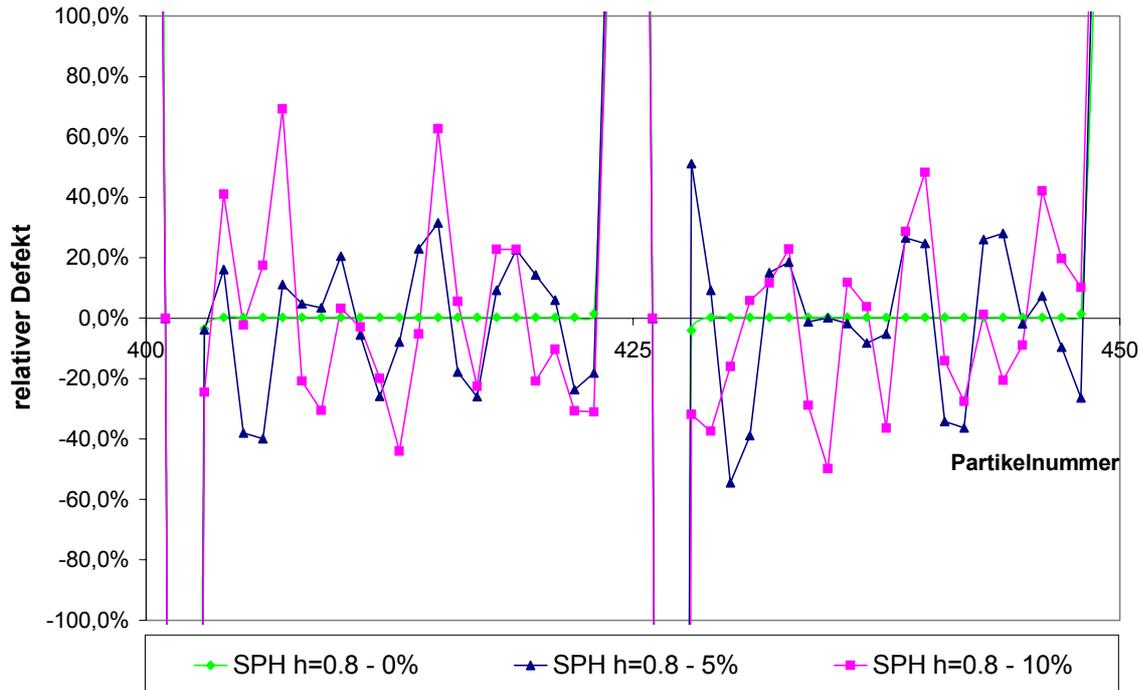


Bild 3.24: Relativer Fehler der *nicht symmetrisierten* SPH-Methode bei unregelmäßiger Partikelanordnung für unterschiedlich starke Abweichungen von der gleichmäßigen Anordnung mit $h=0,80$

Zunächst erkennt man in Bild 3.24 die Randpartikel, die durch betragsmäßig sehr große Defekte auffallen. Für die Umgebung der Partikel 400, 425 und 450 ist dies jeweils der Fall. Dazwischen herrscht die Tendenz vor, daß mit zunehmenden Abweichungsgrad auch der relative Defekt wächst. Begründet werden könnte dies einerseits mit der weniger zutreffenden Annahme über konstante Partikelvolumina. Eine einfache Abschätzung dieses Effektes für ein einzelnes Partikel führt z.B. im Falle einer 10%-igen Abweichung zu

$$V_{\text{neu,max}} = (1,1 \cdot d)^2 = 1,21 \cdot d^2 = 1,21 \cdot V_{\text{alt}} \quad (3.123)$$

Bei einem isoliert betrachteten Partikel beträgt der maximale Fehler für die Größe des Volumens also 21%. Da die SPH-Approximation jedoch auf einer Summation beruht, bei der die einzelnen Summenglieder nicht dasselbe Vorzeichen (vgl. Abschnitt 3.5.3.2) besitzen, darf der in Gl. 3.123 abgeschätzte Volumenfehler nicht direkt auf die Approximation der partiellen Ableitung übertragen werden. Leider gestaltet es sich äußerst schwierig, eine allgemeine Fehlergrenze für die interessierende Größe,

die Approximation der partiellen Ableitung, anzugeben. Tatsächlich treten, wie Bild 3.24 illustriert, Defekte von bis zu 70% auf. Diese überschreiten sehr deutlich die für ein einzelnes Partikel abgeschätzten 21%.

Von Bedeutung ist nun, ob der in Bild 3.24 zu beobachtende Fehler allein auf die eingangs gemachte Näherung konstanter Partikelvolumen zurückzuführen ist oder ob noch andere Effekte die Größe des sich einstellenden Defekts beeinflussen.

Zur Beantwortung dieser Frage könnte die Betrachtung der Approximation der Funktion selbst, also nicht ihrer partiellen Ableitung, nützlich sein. Der Grund hierfür liegt in der Übereinstimmung der Summenglieder aus Gl. 3.39 in Bezug auf ihr Vorzeichen. Sowohl die Formfunktion Φ (immer) als auch die Stützwerte u^i (im Fall der hier untersuchten quadratischen Funktion) besitzen ein positives Vorzeichen. Deswegen darf auch die durch Gl. 3.123 gemachte Abschätzung direkt auf die Summe bezogen werden.

Das Ergebnis dieses Ansatzes ist in Bild 3.25 zu sehen. Für die regelmäßige Partikelanordnung stellt sich ein nahezu konstanter Fehler von etwa 10% ein. Zu beachten ist, daß der Verlauf linear erscheint, die Steigung dieser Gerade jedoch sehr klein ist. Die Ergebnisse für die zufällige Anordnung der Partikel streuen nun um diesen Fehlerwert, und zwar um so mehr, je größer der Abweichungsgrad ist. Erwähnenswert ist die geringe Größe des beobachteten Defekts, der der unregelmäßigen Partikelanordnung zugemessen werden könnte. Bei einem Abweichungsgrad von 10% überschreitet der Fehler einen Wert von 14% nicht. Subtrahiert man den Anteil von etwa 10%, der schon bei regelmäßiger Anordnung auftritt, so verbleiben ungefähr 4% für die unregelmäßige Partikelanordnung. Das heißt, daß die in Gl. 3.123 angegebene obere Schranke von 21% signifikant unterschritten ist. Theoretisch könnte deswegen aufgrund der bisherigen Ergebnisse allein die ungenaue Volumenzuweisung als Erklärung für den beobachteten Defekt herangezogen werden. Jedoch ist dieser Erklärungsansatz sehr unwahrscheinlich. Die folgenden Argumente stützen diese These.

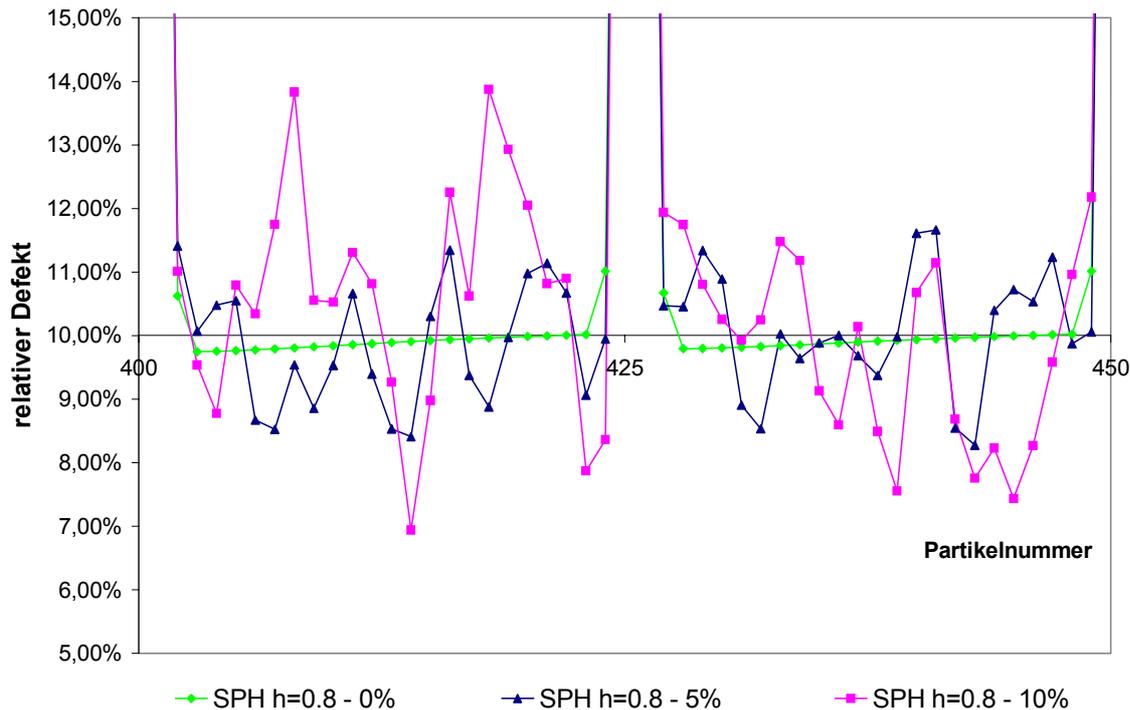


Bild 3.25: Relativer Fehler bei unregelmäßiger Partikelanordnung für unterschiedlich starke Abweichungen von der gleichmäßigen Anordnung mit $h=0,80$. Es ist die Approximation der Funktion selbst und nicht etwa der partiellen Ableitung nach x dargestellt.

Erstens, Volumenfehler heben sich teilweise gegenseitig auf. Da der Volumenfehler bei den Partikeln nicht immer gleichgerichtet ist, tritt ein gewisser Ausgleichseffekt auf. Für die einen Partikel wird also ein zu großes Volumen, für die anderen ein zu kleines Volumen in Ansatz gebracht. Dies führt schließlich dazu, daß sich bei der Volumenzuweisung gemachte Einzelfehler teilweise ausgleichen.

Zweitens, die Abschätzung Gl. 3.123 ist möglicherweise zu ungenau. In diesem Fall ergäbe sich als Schlußfolgerung, daß die Beibehaltung konstanter Volumen keinen nennenswerten Einfluß auf die Größe des auftretenden Defekts hat. Dann verwundert allerdings die Größe des bei der Untersuchung der partiellen Ableitung nach x (Bild 3.24) beobachteten Defekts. Demnach müssen noch andere Gründe für die großen Fehler, welche bei unregelmäßiger Partikelanordnung auftreten, existieren.

Um diese Effekte zu ergründen, wird noch einmal die partielle Ableitung nach x und im Detail ein einziges Partikel, nämlich Partikel 407, betrach-

tet, bei dem ein sehr großer relativer Defekt von etwa 70% (Bild 3.24) auftritt. Bild 3.26 zeigt zunächst alle Partikel, die Beiträge zur Berechnung der partiellen Ableitung an der Stelle 407 liefern, und zwar einmal für die regelmäßige und einmal für die unregelmäßige Anordnung der Netzpunkte.

Ohne eine Aussage über die Größe der einzelnen Beiträge zu machen, fällt unmittelbar auf, daß die Partikel 332, 333, 357, 382, 432, 457, 482 keinen Beitrag bei regelmäßiger Anordnung leisten, sehr wohl aber einen bei einem Abweichungsgrad von 10%. Dabei ist zu beachten, daß Partikel 333 am Rand des Einflußbereichs von Partikel 407 liegt und durch die zufällig generierte Abweichung in diesen Einflußbereich „hineingeschoben“ wurde. Dagegen liegen die Partikel 332, 357, 382, 432, 457, 482 genügend weit vom Rand entfernt, um die Grenze des Einflußbereichs aufgrund der Abweichung von der gleichmäßigen Anordnung zu überschreiten. Ihr Beitrag kommt dadurch zustande, daß der Faktor dW/dx in Gl. 3.114 nicht mehr verschwindet. Der Grund hierfür liegt in der nicht verschwindenden Differenz (siehe auch Gl. 3.113) zwischen den x -Koordinaten der zuvor genannten Partikel und der x -Koordinate des Zentralpartikels (407). Dieser Aspekt ist für die Größe der Partikelbeiträge bedeutend.

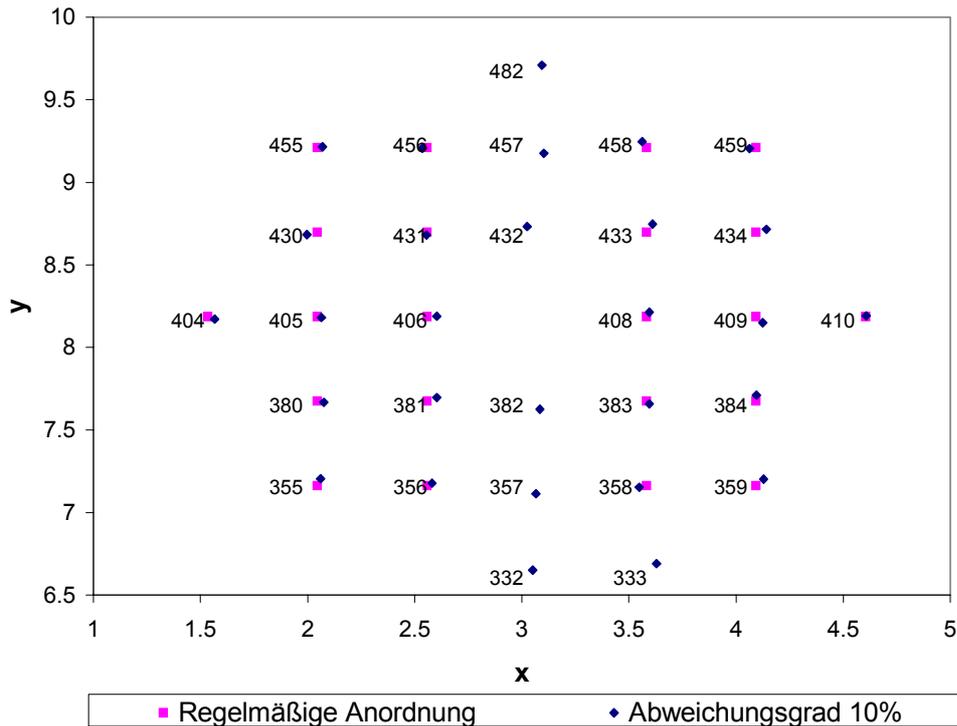


Bild 3.26: Partikel, die einen Beitrag zur Berechnung der partiellen Ableitung nach x an der Stelle 407 (zwischen 406 und 408) liefern

Um nun die Ausgangsfrage, die Untersuchung des Einflusses einer ungenauen Volumenzuweisung zu den Partikeln, beantworten zu können, wird Gl. 3.114 unter der Annahme konstanter Partikelvolumen V^i umgeformt zu:

$$\frac{1}{V^i} \cdot \frac{d}{dx} u(\mathbf{x}^{407}) \cong - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx} W^{j,407} \cdot u(\mathbf{x}^j) \quad (3.124)$$

Ergeben sich nun für die Summanden der rechten Seite unabhängig von der Partikelanordnung etwa gleiche Werte, dann muß der in Bild 3.24 zu beobachtende Defekt tatsächlich von der für die Volumina gemachten Näherung verursacht worden sein. Andernfalls ist der Defekt speziellen Eigenschaften der Kernelabschätzung zuzuschreiben.

Dazu sind alle Partikel j mit einem maximalen Abweichungsgrad von 10%, für die gilt

$$\frac{d}{dx} W^{j,407} \cdot u(\mathbf{x}^j) \neq 0 \quad (3.125)$$

in Bild 3.27 mit ihrem volumenbereinigten Defekt

$$\frac{d}{dx} W^{j,407} \cdot u(\mathbf{x}^j) \Bigg/ \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx} W^{k,407} \cdot u(\mathbf{x}^k) \quad (3.126)$$

Abw.grad 0%

sowie mit ihren relativen Abweichungsgraden von einem regelmäßigen Gitter, nach Achsenrichtung getrennt, dargestellt. Man erkennt sofort, daß der oben angegebene maximale Abweichungsgrad von 10% in beiden Richtungen gleichzeitig nur sehr selten erreicht wird. Lediglich Partikel 434 kommt einer solchen Abweichung sehr nahe. Damit bewahrheitet sich die oben gemachte Vermutung, daß Gl. 3.123 eine schlechte Abschätzung für die Mehrzahl der Partikelvolumina darstellt.

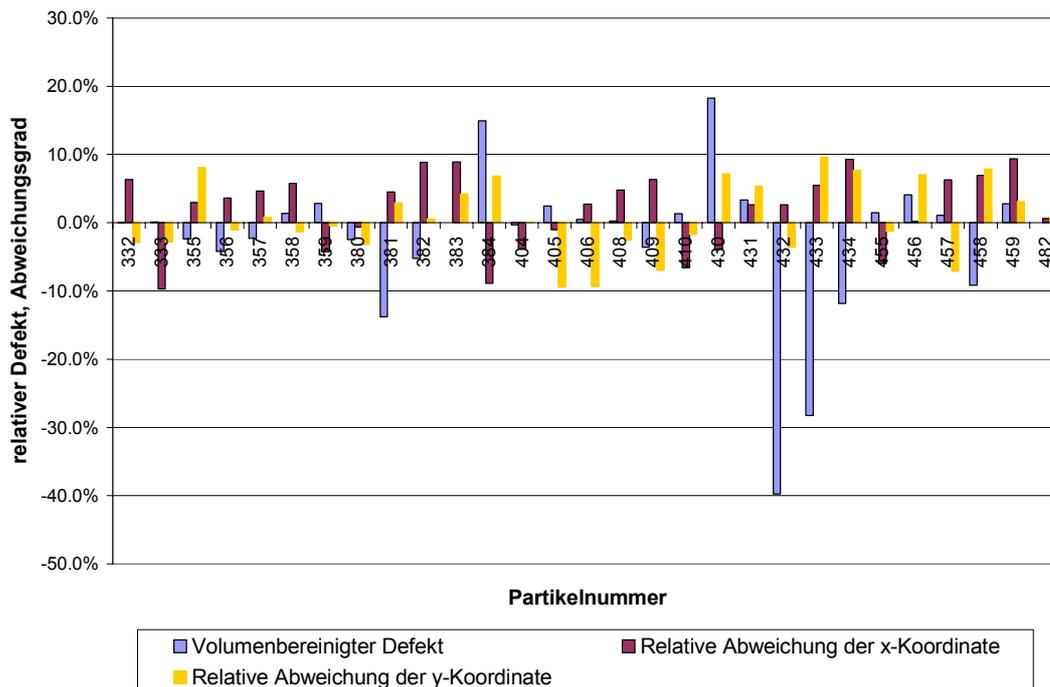


Bild 3.27: Volumenbereinigter, relativer Defekt und Abweichungsgrade der Partikelpositionen getrennt nach Achsenrichtungen

Betrachtet man überdies den durch Gl. 3.126 definierten, volumenbereinigten Defekt, so wird klar, daß nicht etwa die Volumenzuweisung, sondern vielmehr die Kernelapproximation maßgeblich den bei Partikel 407 auftretenden, relativen (Gesamt-) Fehler bestimmt. Von der in Bild 3.24 beobachteten, relativen Größe dieses Fehlers von 70% entfallen allein 40% auf Partikel 432, obwohl dort der Abweichungsgrad in Bezug auf beide Achsenrichtungen klein ist. Addiert man weiterhin die volumenbereinigten Defekte aller Einzelpartikel, so erhält man als Summe einen Wert von 69%, welcher sehr gut mit den oben angeführten 70% übereinstimmt.

Diese Ergebnisse lassen nur den Schluß zu, daß die Annahme gleicher Volumina für alle Partikel eine sehr gute Näherung darstellt. Der Grund für den im Fall von Partikel 407 beobachteten Defekt von 70% muß also in den Eigenschaften der Interpolation selbst, welche von einer Kernelabschätzung dominiert wird, begründet sein. Wichtig ist in diesem Zusammenhang auch die Tatsache, daß der bei einem einzelnen Partikelbeitrag auftretende relative Defekt (Bild 3.27) nicht so sehr vom Abweichungsgrad dieses Partikels, als vielmehr von der Lage dieses Partikel im Einflußbereich des Zentralpartikels abhängig ist. Die Wirkung einer kleinen Lageänderung wird bestimmt durch die Größe der partiellen Ableitungen d^2W/dx^2 bzw. $d^2W/dxdy$, d.h. durch das totale Differential von dW/dx .

Bild 3.28 zeigt die Approximation der Ableitung in x-Richtung der Funktion $F=x^2+y^2$ für die unregelmäßigen Partikelkonfigurationen mit der symmetrisierten SPH-Version gem. Gl. 3.47. Hier wird die durch die Symmetrisierung hervorgerufene erhebliche Verbesserung deutlich. Der relative Defekt bei einer 10% Abweichung zur Ausgangspartikelkonfiguration überschreitet bei der symmetrisierten SPH-Methode die 8%-Marke nicht. Auf eine detaillierte Fehleranalyse wird daher verzichtet.

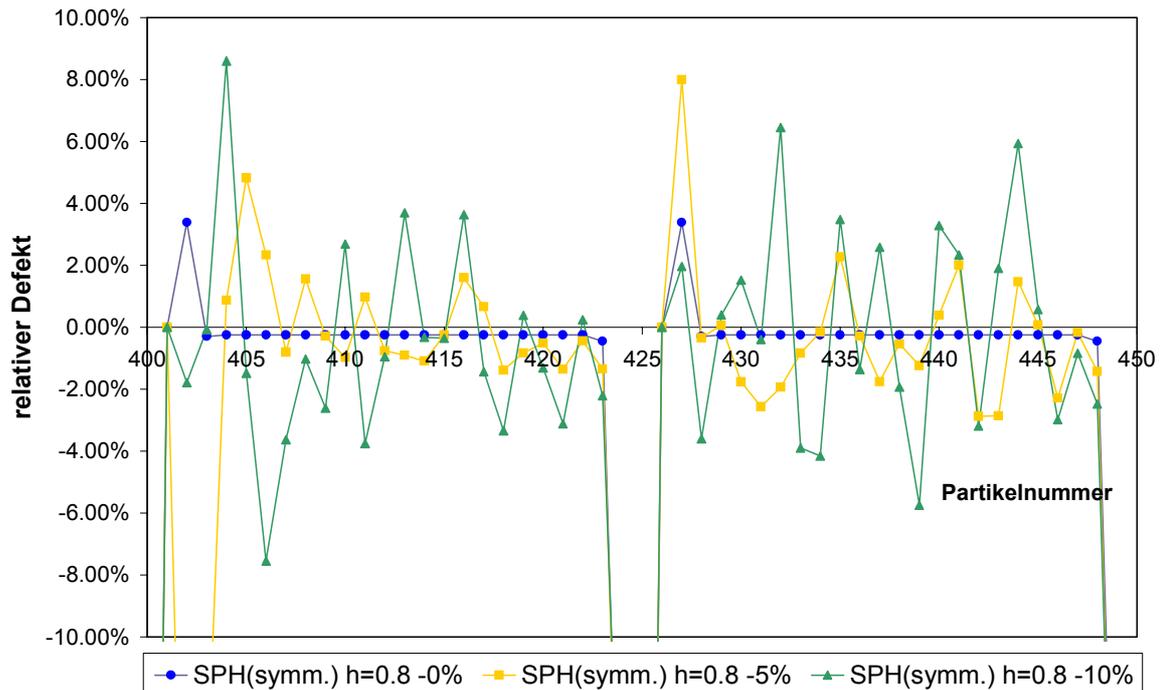


Bild 3.28: Relativer Fehler der *symmetrisierten* SPH-Methode bei unregelmäßiger Partikelanordnung für unterschiedlich starke Abweichungen von der gleichmäßigen Anordnung mit $h=0,80$

- Zusammenfassung

Ausgehend vom einfachen Fall der minimalen Anzahl von Nachbarpartikeln bei regelmäßiger Partikelanordnung, zeigt sich das grundsätzliche Verhalten der Standard-SPH-Interpolation, einen gleichbleibenden relativen Fehler zu verursachen, wenn eine quadratische Funktion reproduziert werden soll. Nur der Spezialfall der konstanten Funktion, die im allgemeinen quadratischen Ansatz bereits enthalten ist, kann fehlerfrei abgebildet werden. Weiterhin ist ersichtlich geworden, daß der Interpolationsradius so groß gewählt werden sollte, daß nicht nur die kleinstmögliche Anzahl von Nachbarpartikeln von diesem erfaßt wird. Dadurch wird eine erheblich bessere Approximation erreicht. Des weiteren kann festgehalten werden, daß bei regelmäßiger Partikelanordnung die nicht symmetrisierte und die symmetrisierte SPH-Methode zur Reproduktion des Funktionsgradienten der quadratischen Funktion nahezu identische Ergebnisse liefern.

Einen wesentlichen Einfluß auf die Approximationsgüte übt auch die Partikelanordnung aus. Wie am Beispiel der partiellen Ableitung der in Ab-

schnitt 3.5.3.1 eingeführten, quadratischen Funktion gezeigt wurde, wächst der relative Defekt sehr stark an, wenn man von einer regelmäßigen zu einer unregelmäßigen, zufälligen Partikelanordnung übergeht. Dabei übt die Annahme eines konstanten Volumens für alle Partikel lediglich einen vernachlässigbaren Einfluß auf die Approximationsqualität aus. Stattdessen erweist sich die Änderung des Faktors dW/dx als maßgebende Einflußgröße. Sie ist bestimmt durch die im gewählten Interpolationsverfahren enthaltene Kernelabschätzung. Der Defekt bei der nicht symmetrisierten SPH-Version bei unregelmäßiger SPH-Variante ist erheblich, mit einer Symmetrisierung kann jedoch eine deutliche Verbesserung erzielt werden.

3.5.3.3. Modifizierte MLS-Interpolation nach Sauer et al. [234]

Nach einem kurzen Vergleich zwischen den SPH- und MLS-Ergebnissen für eine unregelmäßige Partikelanordnung ist der Fokus in diesem Kapitel auf die modifizierte MLS-Interpolation nach Sauer et al. [234] gerichtet, die in speziellen Anwendungen mit Wellenreflexion bessere Resultate als der originäre MLS-Ansatz ermöglichte. Ziel ist es nun herauszufinden, welche Möglichkeiten zur Begründung für dieses Verhalten in Frage kommen bzw. welchen Einfluß diese Variation auf die Approximationsgüte besitzt.

- Die MLS-Interpolation bei unregelmäßiger Partikelanordnung

In Rückgriff auf das vorherige Kapitel werden hier die bereits vorher beschriebenen Partikelanordnungen mit einem Abweichungsgrad von 5% bzw. 10% untersucht. Als repräsentativ werden ebenfalls wieder die Partikel 400-450 angesehen.

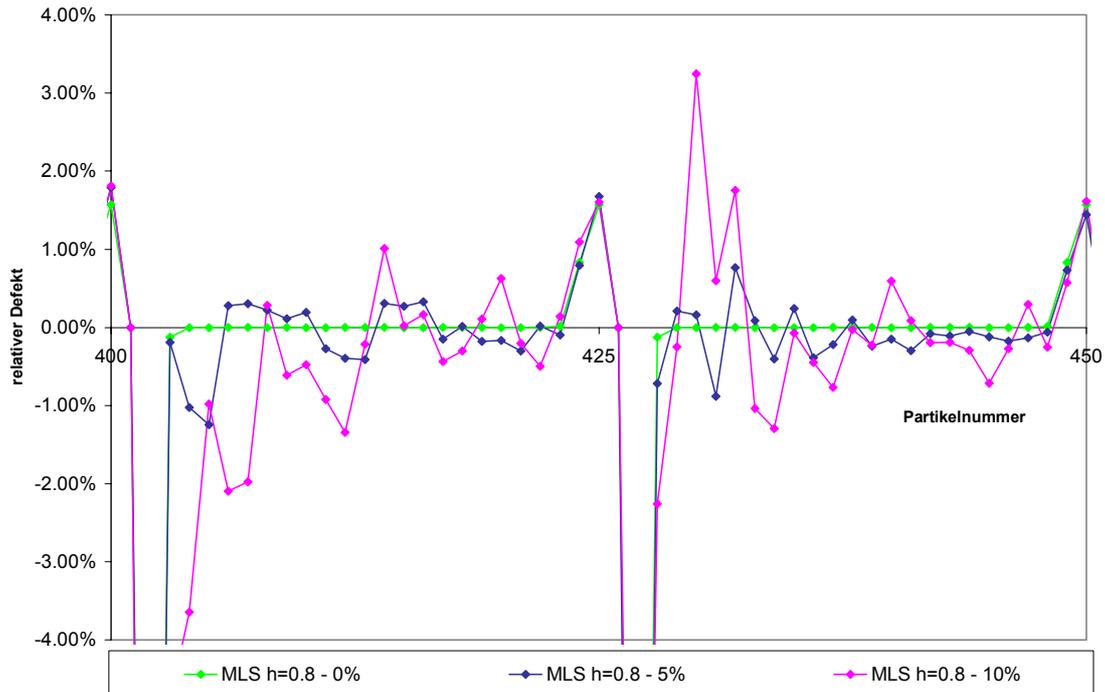


Bild 3.29: Relativer Fehler der *nicht symmetrisierten* MLSPH-Methode bei unregelmäßiger Partikelanordnung für unterschiedlich starke Abweichungen von der gleichmäßigen Anordnung mit $h=0.80$.

Wie schon vorher mehrmals betont, sind sich die MLS- und die SPH-Interpolationsergebnisse in ihren charakteristischen Eigenschaften abermals ähnlich. Dazu gehören die ausgeprägten Randeffekte sowie die größere Streubreite der Approximationsresultate für eine erhöhte Abweichung von der regelmäßigen Partikelanordnung. Bild 3.29 zeigt diese Ergebnisse für die nicht symmetrisierte MLSPH-Methode. Die erwähnten Randpartikel befinden sich in der Umgebung von Partikel 400, 425 und 450. Sehr unterschiedlich sind die beiden Verfahren in ihrer Güte. Während bei nicht symmetrisierter MLS die Fehlerbandbreite $\pm 3,5\%$ beträgt, liegt der entsprechende (nicht symmetrisierte) SPH-Wert bei etwa $\pm 70\%$.

- Variation der MLS-Interpolation nach Sauer et al. [234]

Die hier ausschließlich betrachtete Variation besteht darin, den Beitrag des Partikels i zur Approximation an der Stelle i nicht zu berücksichtigen. Leider lassen sich aus dieser Form keine weiteren, einfachen Zusammenhänge erkennen. Deswegen wird jetzt das Interpolationsverhalten anhand der bereits zuvor untersuchten quadratischen Funktion überprüft.

- Verhalten bei regelmäßiger Partikelanordnung

Ausgangspunkt ist ein regelmäßig angeordnetes Gitter, für welches der relative Defekt der partiellen Ableitung nach x im Vergleich zum analytisch berechneten Wert betrachtet werden soll. Anschließend an die vorherigen Kapitel ist auch hier $h=0,80$ gewählt, ebenso werden die Partikel 400-450 als repräsentativ angesehen.

Bild 3.30 zeigt einerseits das Ergebnis für den originären, andererseits auch die entsprechenden Werte für den modifizierten MLS-Ansatz. Abgesehen von den Randeffekten ist zuerst einmal die Größe des relativen Defekts bemerkenswert klein. Mit einer Fehlerbandbreite von nur etwa $\pm 0,00002\%$ wird die partielle Ableitung der quadratischen Funktion sehr gut approximiert, insbesondere wenn man bedenkt, daß ausschließlich lineare Basisfunktionen für den Interpolanten angesetzt wurden. Aus diesem Grund sollten auch lediglich lineare Funktionen exakt reproduziert werden, was gleichbedeutend mit konstanten partiellen Ableitungen ist. In Anbetracht des nur geringen Fehlers kann aber auch bei der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 + y^2$ von einer praktisch exakten Reproduktion gesprochen werden.

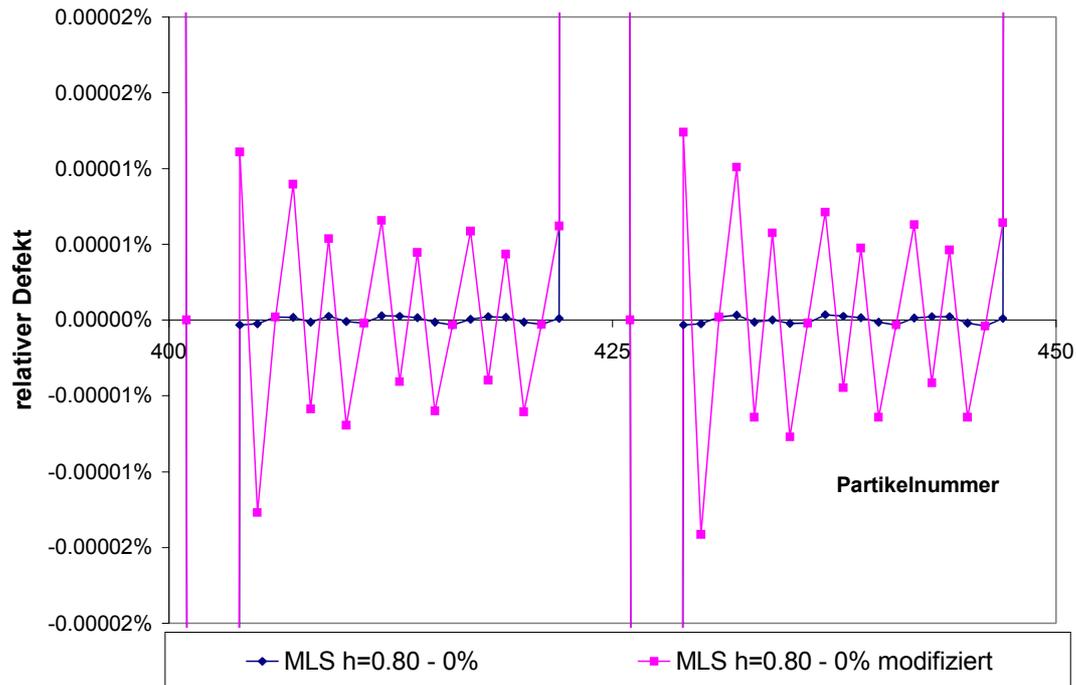


Bild 3.30: Relativer Defekt der *nicht symmetrisierten* modifizierten MLSPH-Version nach Sauer et al. [234] der partiellen Ableitung nach x bei regelmäßiger Partikelanordnung (Abweichungsgrad 0%) für die ursprüngliche sowie für die modifizierte MLS-Interpolation

Trotz der Gemeinsamkeit eines sehr kleinen Defekts ist dennoch auch ein deutlicher Unterschied zwischen den beiden Kurven aus Bild 3.30 zu erkennen. Während die modifizierte MLS-Approximation einen sägezahnartigen Verlauf mit großer Streubreite bezüglich des relativen Fehlers besitzt, ergibt sich für die ursprüngliche MLS-Interpolation eine glattere Kurve, die viel enger am exakten Wert der partiellen Ableitung liegt.

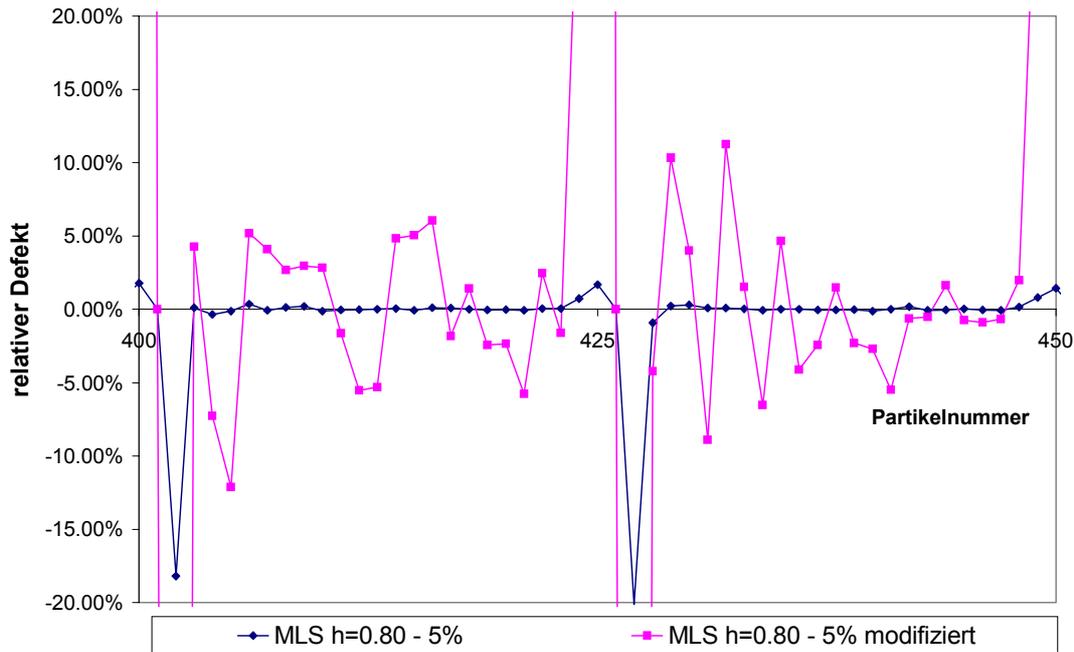


Bild 3.31: Relativer Defekt der *nicht symmetrisierten* modifizierten MLSPH-Methode nach Sauer et al. [234] der partiellen Ableitung nach x bei unregelmäßiger Partikelanordnung (Abweichungsgrad 5%) für die ursprüngliche sowie für die modifizierte MLS-Interpolation

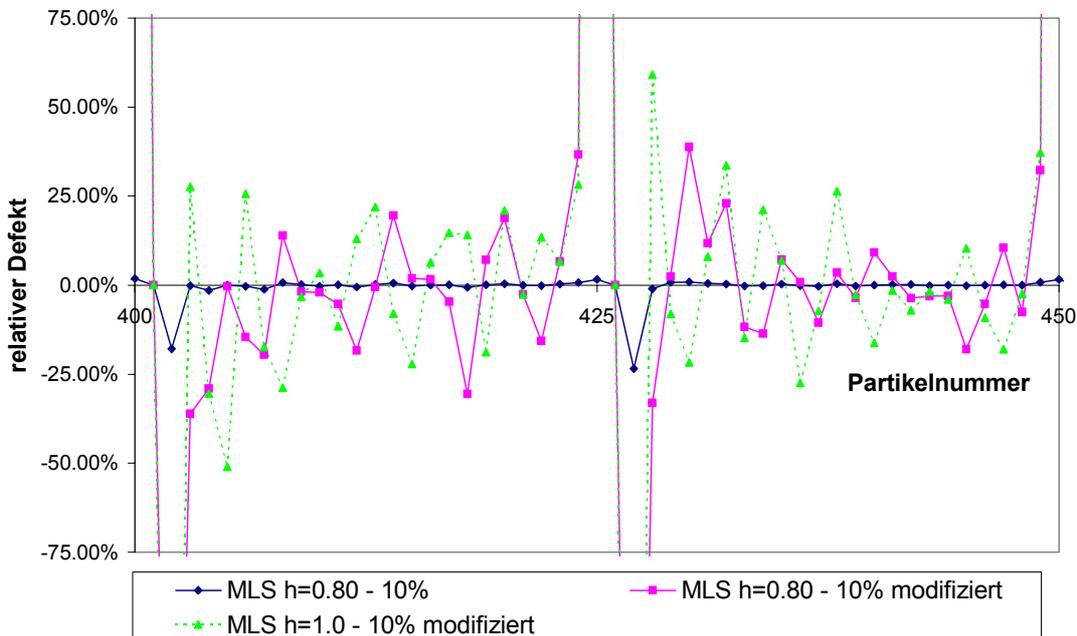


Bild 3.32: Relativer Defekt der *nicht symmetrisierten* MLSPH-Version nach Sauer et al. [234] der partiellen Ableitung nach x bei unregelmäßiger Partikelanordnung (Abweichungsgrad 10%) für die ursprüngliche sowie für die modifizierte MLS-Interpolation. Zum Vergleich ist auch der relative Defekt für einen größeren Interpolationsradius ($h=1,0$) dargestellt.

- Verhalten bei unregelmäßiger Partikelanordnung

Unter Verwendung der oben eingeführten Terminologie des Abweichungsgrades erfolgt eine Beurteilung der Interpolationsqualität für eine 5%- bzw. 10%-ige, zufällig generierte Abweichung von einem regelmäßig aufgebauten Gitter. Grundlage des Vergleichs bildet abermals die partielle Ableitung nach x , die sowohl nach dem Original-MLS-, als auch nach dem modifizierten MLS-Ansatz in nicht symmetrisierter und symmetrisierter Form berechnet wurde. Völlig analog zu den Ergebnissen des vorherigen Kapitels verursacht eine Zunahme des Abweichungsgrades einerseits eine Zunahme der Streubreite, andererseits aber auch ein betragsmäßiges Anwachsen des relativen Defekts. Bild 3.31 und Bild 3.32 zeigen dieses Verhalten für die modifizierte nicht symmetrisierte MLSPH-Methode sehr deutlich auf.

Was den Unterschied zwischen der Berechnung nach der nicht symmetrisierten MLS- und nach der modifizierten nicht symmetrisierten MLS-Vorschrift betrifft, bleiben die schon bei der Untersuchung eines gleichmäßigen Gitters gemachten Feststellungen über den qualitativen Fehlerverlauf gültig. Dieser ist bei der modifizierten nicht symmetrisierten Variante durch eine vergrößerte Streubreite wie auch durch betragsmäßig größere Fehlerwerte gekennzeichnet. Die unregelmäßige Partikelanordnung verursacht also eine quantitative, nicht aber eine qualitative Veränderung des Defektverlaufes. Durch die Symmetrisierung (siehe Kapitel 3.3.2, Gl. 3.47) verbessern sich die Ergebnisse des modifizierten MLSPH-Ansatzes nach Sauer et al. [234] erheblich (siehe Bild 3.33). Für die 10%-ige Abweichung zur Ausgangspartikelkonfiguration liegt der relative Defekt der symmetrisierten modifizierten MLSPH-Methode unterhalb von 2%. Es ist zu erwähnen, daß durch die Symmetrisierung die modifizierte MLSPH-Version nach Sauer et al. [234] und der originäre MLS-Ansatz identisch werden. Unterschiede in der praktischen Anwendung ergeben sich bei der Symmetrisierung der Impulserhaltung, bei der der zusätzliche "0-Term" addiert und nicht subtrahiert wird, so daß der Beitrag des zentralen Partikels in der Impulserhaltung nicht verschwindet (siehe auch Kapitel 3.3.2, Gl. 3.48).

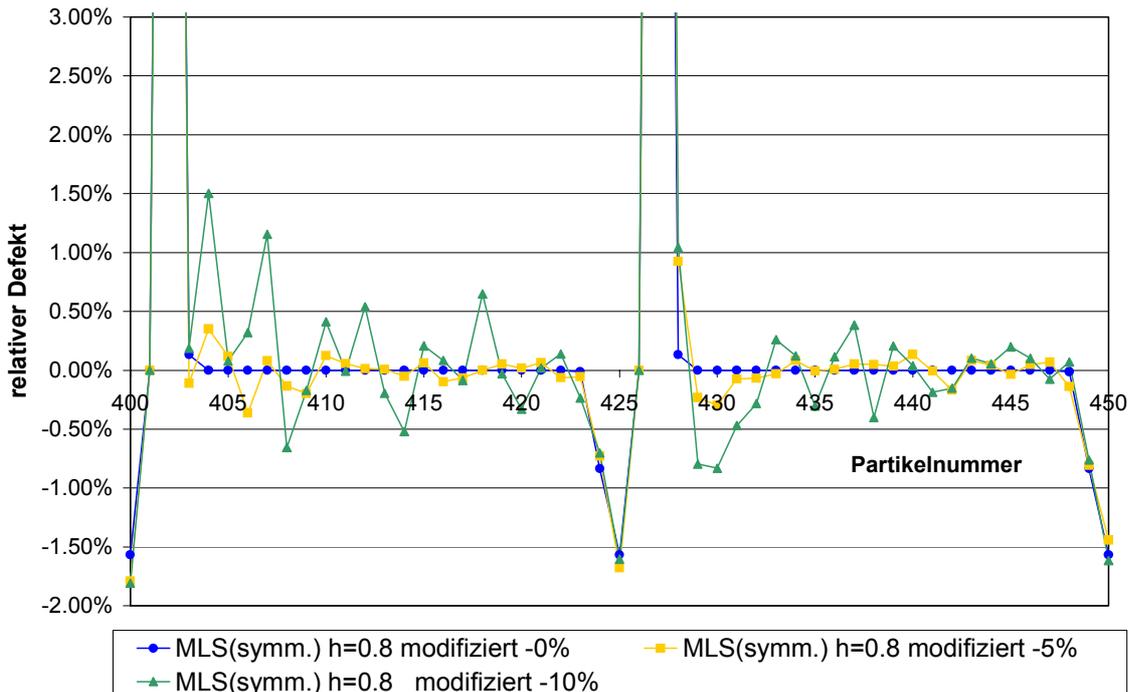


Bild 3.33: Relativer Fehler der *symmetrisierten* MLSPH-Methode bei unregelmäßiger Partikelanordnung für unterschiedlich starke Abweichungen von der gleichmäßigen Anordnung mit $h=0.80$

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß der modifizierte nicht symmetrisierte MLSPH-Ansatz nach Sauer et al. [234] eine wesentliche Verschlechterung der Interpolationsergebnisse zur Approximation eines Funktionsgradienten einer quadratischen Funktion mit sich bringt. Eine Symmetrisierung kann diese Verschlechterung allerdings kompensieren. Es werden sogar bessere Ergebnisse als mit dem nicht symmetrisierten originären MLSPH-Ansatz erzielt.

3.5.3.4 Ein Beispiel aus der Statik

Um die teilweise recht theoretischen Ergebnisse der vorherigen Kapitels noch einmal anschaulich darzustellen, wird das Interpolationsverhalten der SPH-Methode an einem einfachen, statischen Beispiel vorgeführt. Dabei werden auch die Unterschiede zwischen der zwei- und der dreidimensionalen Modellierung diskutiert.

- Der Einfeldträger mit mittiger Einzellast

Das der Untersuchung zugrundegelegte System ist in Bild 3.34 dargestellt. Dabei wird unterstellt, daß die Abmessung in x-Richtung viel größer als in den beiden anderen Richtungen ist.

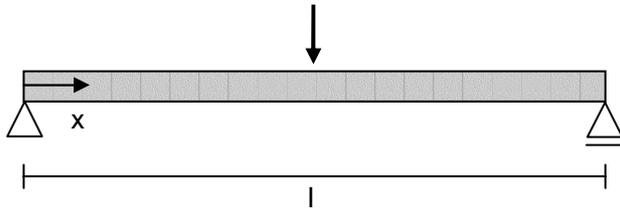


Bild 3.34: Einfeldträger mit mittiger Einzellast F

Läßt man Schubverformungen außer acht, so folgt für die Biegelinie w

$$w(x) = \frac{F \cdot l^3}{48EI} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} -4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{l}\right) & \text{für } \frac{x}{l} < 0,5 \\ 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 12\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 9\left(\frac{x}{l}\right) - 1 & \text{für } \frac{x}{l} \geq 0,5 \end{array} \right\} \quad (3.127)$$

und die Durchbiegung kann für alle Punkte entlang der x-Achse bestimmt werden. Vorteilhafter für die Darstellung als Gl. 3.127 ist jedoch die dimensionslose Form Gl. 3.128, bei der die Durchbiegung auf ihren Maximalwert, also auf die Durchbiegung in Feldmitte bezogen ist. Dadurch liegen die Werte $u(x)$ unabhängig von Geometrie, Steifigkeit und Belastung immer im Intervall $[0,1]$.

$$u(x) = \frac{w(x)}{w_{\max}} = \left\{ \begin{array}{ll} -4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{l}\right) & \text{für } \frac{x}{l} < 0,5 \\ 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 12\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 9\left(\frac{x}{l}\right) - 1 & \text{für } \frac{x}{l} \geq 0,5 \end{array} \right\} \quad (3.128)$$

- Zweidimensionale Diskretisierung

Da die Balkentheorie im Grunde genommen als eindimensionales Problem formuliert ist, wäre es auch möglich, die eindimensionale Variante der (ML)SPH-Interpolation zu verwenden. Weil aber praktische Anwendungen fast immer mindestens eine zweidimensionale Betrachtungsweise erfordern, wird hier zunächst eine ebene Diskretisierung durchgeführt. Wie sich in den vorherigen Kapiteln zeigte, liefert eine gleichmäßige Partikelanordnung die beste Approximation im Sinne eines betragsmäßig minimalen Defekts. Der qualitative Fehlerverlauf hängt jedoch nicht von der Partikelanordnung ab, zumindest für geringe Abweichungen vom regelmäßigen Gitter.

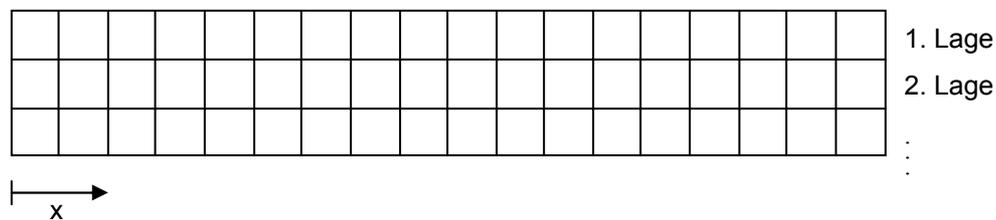


Bild 3.35: Zweidimensionale Diskretisierung mit regelmäßigem Gitter. Kreuzungspunkte stellen jeweils ein Partikel dar.

Aus diesem Grund wurde eine regelmäßige Partikelanordnung gewählt wie Bild 3.35 zeigt. Kreuzungspunkte im Gitter repräsentieren dabei die Positionen der Partikel; der eingeführte Begriff der Lage verdeutlicht die Partikelgenerierung, welche durch Verschiebung entlang der x-Achse angeordneten Partikel nach unten stattfindet.

Es stellt sich nun die Frage, wieviele Lagen notwendig sind, um Randeffekte in den mittleren Lagen zu vermeiden. Dies impliziert auch gleichzeitig, daß es wegen der Randeffekte keinen Sinn macht, Näherungswerte am Rand mit den analytischen Werten aus Gl. 3.128 zu vergleichen. Es werden also im Folgenden immer (ML)SPH-Interpolationswerte für Partikel der mittleren Lage oder der dieser am nächsten gelegenen betrachtet. Schließlich ist als letzter Parameter zur vollständigen Beschreibung der Diskretisierung noch die Anzahl "n" der über die Länge l verteilten Partikel einer Lage einzuführen.

Untersucht wurden nun drei bis fünf Lagen mit $n=21$ bzw. $n=41$, d.h. der Einfeldbalken wurde mit 63, 105, 123 und 205 Partikeln repräsentiert. Dabei konnte festgestellt werden, daß für das Interpolationsergebnis weniger die Anzahl der Partikel als vielmehr die Wahl des Interpolationsradius ($2h$) maßgebend ist. Quantitativ ist der Einfluß des bestimmenden Parameters h in Bild 3.36 für die Durchbiegung in Feldmitte ($x=0,5$) dargestellt. Zu beachten ist dabei, daß h mit dem kleinstmöglichen, sinnvollen Wert beginnt (der durch den Interpolationsradius definierte Kreis enthält gerade Nachbarpartikel).

Der analytisch ermittelte Sollwert $u(0,5)=1$ wird durch die MLS-Interpolation nahezu unabhängig von sowohl h als auch von der Partikelanzahl erreicht. Nicht zu sehen in Bild 3.36 ist der Umstand, daß MLS im Fall sehr großer Werte für h etwas zu kleine Approximationsergebnisse liefert. Begründet werden kann dies durch die Geometrie des Balkens. Ein Balken ist laut Definition sehr viel länger als breit und hoch, so daß der Interpolationsradius mit wachsendem h irgendwann die Balkenhöhe übertrifft. Genau dann gewinnen die Partikel in Längsrichtung mit ihrer geringeren Durchbiegung relativ an Einfluß und führen zu dem oben erwähnten Fehler.

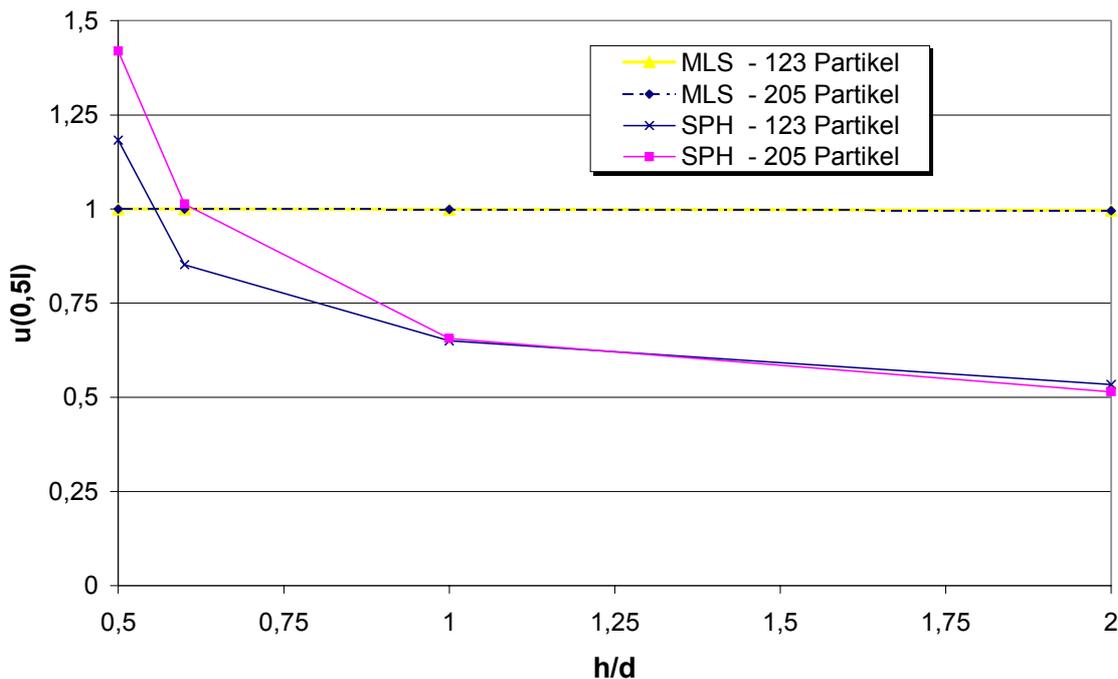


Bild 3.36: Einfluß des Interpolationsradius ($2h$) und der Partikelanzahl auf die MLS- bzw. SPH-Approximation für die Durchbiegung in Feldmitte. Der analytische Wert für diese Durchbiegung beträgt wegen der oben durchgeführten Normalisierung $u(0,5)=1$.

Grundsätzlich verschieden davon ist das Verhalten der SPH-Interpolation. Es wird bestimmt durch die Parameter Partikelanzahl und h . Wie Bild 3.36 zeigt, existiert offensichtlich ein ganz bestimmtes, von der Anzahl der Partikel abhängiges h , für welches der Sollwert von $u(0,5)=1$ exakt getroffen wird. Bemerkenswert ist auch der Verlauf der SPH-Kurven in Bild 3.36, deren Gradient mit wachsendem h betragsmäßig abnimmt. Da nun der Gradient beim Durchgang des Sollwerts sehr groß ist, ergibt sich auch eine entsprechende Sensitivität der SPH-Approximation bezüglich h . Dies ist als großer Nachteil zu werten, weil eine kleine Variation der Partikelanzahl bzw. von h eine große Änderung des SPH-Näherungswertes verursacht. Außerdem sei daran erinnert, daß der den Fehler minimierende Wert für h bei einer realen Simulation nicht bekannt ist.

Abschließend sei noch bemerkt, daß die Ergebnisse für 63 und 105 Partikel den oben beschriebenen sowohl quantitativ als auch qualitativ sehr

ähnlich sind und daß deswegen auf eine graphische Darstellung derselben verzichtet wird.

- Dreidimensionale Diskretisierung

Aufbauend auf den Ergebnissen der zweidimensionalen Diskretisierung, wird nun ein Balken mit quadratischer Querschnittsfläche betrachtet. Die Partikelanordnung sei regelmäßig und $n=41$ (Partikelabstand 0,025). Schließlich muß noch der Begriff der Lagen um eine Dimension erweitert werden: aus 3 bzw. 5 Lagen werden 3x3 bzw. 5x5 Lagen (Bild 3.37). Somit folgen Partikelzahlen von 369 bzw. 1025 für die zu Bild 3.36 äquivalenten Diskretisierungen im Dreidimensionalen.

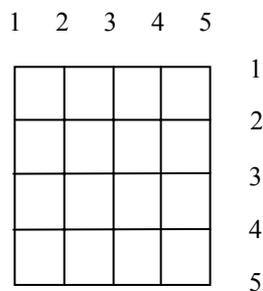


Bild 3.37: Partikelanordnung in einem Schnitt orthogonal zur x-Achse

Betrachtet man nun wieder die Durchbiegung in Feldmitte in Abhängigkeit des Parameters h (Bild 3.38) so stellt man fest, daß für genügend große Interpolationsradien ($2h > 0,03$) in qualitativer Hinsicht kein Unterschied zum zweidimensionalen Fall besteht. Die MLS-Näherung trifft ihren Sollwert $u(0,5)=1$ praktisch genau und ein Unterschied zwischen den beiden Diskretisierungen mit 369 bzw. 1025 Partikeln ist nicht feststellbar.

Im Gegensatz dazu zeigt sich die SPH-Interpolation sensitiver gegenüber der Feinheit der Diskretisierung. Während sich bei schwacher Auflösung des Balkens (369 Partikel) die Durchbiegung kontinuierlich mit h verändert, nimmt sie bei feinerer Auflösung für $0,025 < h < 0,050$ einen nahezu stationären Wert von etwa 0,60 an. In Bild 3.38 entspricht dieser Bereich dem waagrecht verlaufenden Teil der pinkfarbenen Kurve. Im Allgemeinen ist diese Eigenschaft des stationären Verhaltens als sehr

positiv zu werten, da der rein auf die Wahl von h entfallende Anteil des Approximationsdefekts verschwindet. Die Größe des Defekts ist hier also unabhängig von h . Somit reduziert sich die Zahl der den Defekt bestimmenden Parameter um eins. Besonders vorteilhaft erscheint dies im Zusammenhang mit der Veränderlichkeit von h im Verlauf einer dynamischen Berechnung. Im stationären Bereich treten dann also keine nur durch h bedingte Verzerrungen der Resultate auf.

Neben dieser durch die feinere Diskretisierung erzeugten qualitativen Verbesserung ist auch eine deutlich höhere Interpolationsgenauigkeit zu beobachten. Im oben beschriebenen stationären Bereich unterscheiden sich die beiden Diskretisierungen sehr deutlich, nämlich etwa um einen Faktor von $1,4 \div 2,0$. Dabei liegen die Ergebnisse für die feinere Auflösung stets näher am Sollwert von $u(0,5)=1$.

Läßt man den Interpolationsradius schrumpfen ($h < 0,025$), so ähneln sich die Verläufe der SPH-Kurven für den zwei- und den dreidimensionalen Fall sehr stark (Bild 3.36 und Bild 3.38). Charakteristisch ist die mit kleiner werdendem h wachsende Sensitivität der Approximation. Diese nachteilige Erscheinung wurde bereits oben diskutiert.

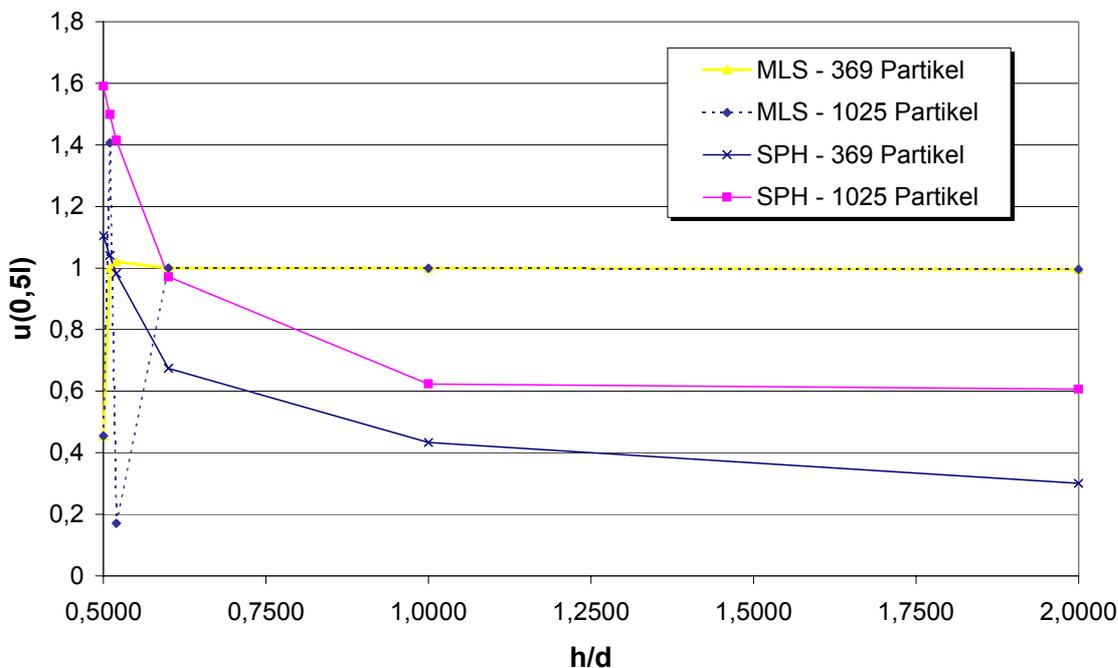


Bild 3.38: Einfluß des Interpolationsradius ($2h$) und der Partikelanzahl auf die MLS- bzw. SPH-Approximation für die Durchbiegung in Feldmitte. Der Balken ist nun als ein dreidimensionaler Körper diskretisiert.

Neue Effekte stellen sich jedoch bei der MLS-Interpolation ein. Für nahe am halben Partikelabstand (0,125) gelegene Werte von h beginnt die Approximation mit großen Amplituden zu oszillieren. Dies ist der Bereich, in dem ein betrachtetes Partikel gerade noch Nachbarn besitzt. In diesem Fall nimmt die Wichtungsfunktion W sehr große Werte an, was letztlich zu einer schlechten Konditionierung der Matrix \mathbf{A} führt. Die Invertierung von \mathbf{A} ist aus den genannten Gründen als problematischer Rechenschritt anzusehen. Diese numerischen Instabilitäten können sogar den Verlust des richtigen Vorzeichens, also negative Durchbiegungen, erzeugen. Deshalb sollte h im allgemeinen nicht zu klein gewählt werden, um sinnvolle Ergebnisse zu erhalten. Im übrigen würde ein nahe am Partikelabstand liegender Interpolationsradius auch zu einem verschwindenden Gradienten führen, sofern im Singularitätsfall die Shepard-Funktion zur Berechnung dieses Gradienten dient.

- Zusammenfassung

Am einfachen Beispiel eines Einfeldträgers mit statischer Belastung wurden Verhalten und Eigenschaften der (ML-)SPH-Interpolation veranschaulicht. Dabei zeigten sich die Auswirkungen verschiedener Diskretisierungen auf das zwei- sowie auch auf das dreidimensionale Modell.

Quantitativ ergaben sich keine nennenswerten Unterschiede zwischen der zwei- und der dreidimensionalen Problemformulierung. Hinsichtlich der Feinheit der Diskretisierung war beim dreidimensionalen Fall lediglich für die SPH-Interpolation eine Verbesserung des Ergebnisses mit wachsender Anzahl der Partikel festzustellen. Die MLS-Interpolation konnte die vorher analytisch berechneten Werte für die Durchbiegung jeweils praktisch genau reproduzieren.

Qualitativ betrachtet erwiesen sich die SPH-Ergebnisse bei feiner Diskretisierung in einem bestimmten Intervall für h als konstant (3D-Fall). Somit existiert ein Bereich, in welchem die Approximationsergebnisse keine starken Verzerrungen bedingt durch die Wahl von h erfahren. Für einen sich während einer dynamischen Simulation ständig ändernden Wert h ist diese Eigenschaft durchaus vorteilhaft.

Die dreidimensionale MLS-Interpolation betreffend ist zu bemerken, daß bei kleinem h numerische Instabilitäten auftreten. Davon ist insbesondere die Berechnung der Inversen der Matrix \mathbf{A} betroffen. Somit sind in einem MLSPH-Code unbedingt Sicherungsmaßnahmen für diesen Fall einzubauen, da ansonsten die Ergebnisse nicht einmal mehr hinsichtlich des Vorzeichens richtig sein müssen.

3.5.4 Weitere Verbesserungen der SPH-Methode

In der Literatur gibt es noch weitere Ansätze, die SPH-Methode zu verbessern, die der Vollständigkeit wegen hier noch kurz genannt werden.

Dyka [85], [86] baute zusätzliche Spannungspunkte für den eindimensionalen Fall ein. Libersky und Randles [185] übertrugen dieses Konzept ins Dreidimensionale, siehe Kapitel 3.10.

Chen et al. [39], [40] entwickelten eine Formulierung für die SPH-Interpolation aus dem Einsetzen der Kernel-Näherung in eine Taylorreihe. Die Anzahl der betrachteten Reihenglieder bestimmt hierbei die Konsistenzordnung. Für die lineare Konsistenz führt ihr sog. CSPM auf gleiche Ausdrücke, wie sie in der normalisierten SPH-Methode verwendet werden.

Bonet et al. [31], [32] [33] führten drei Korrekturen zur Verbesserung der Bestimmung des Gradienten ein. Sie korrigierten die Wichtungsfunktion selbst, die Summation, d.h. die numerische Integration und verwenden einen Stabilisierungsterm, der das Auftreten von Oszillationen verhindern soll. Sie bezeichnen ihre Methode als CSPH.

Belytschko et al. [19] zeigten gleich mehrere Möglichkeiten auf, die SPH-Interpolation zu verbessern. Einerseits verbessern sie die Interpolation eines Funktionsgradienten, andererseits die Interpolation der Funktion selbst.

Johnson et al. [159] entwickelten den Generalized Particle Algorithm (GPA), bei dem zwischen Knotenverbundenheit ähnlich den Finiten Dif-

ferenzen Verfahren und einer netzfreien Diskretisierung gewählt werden kann.

3.6 Randbedingungen

Durch die Vernachlässigung der Oberflächenintegrale kommt es zu den in Kapitel 3.3.2 angesprochenen Problemen bei der Behandlung von Randbedingungen. Libersky et al. [183] teilten die Partikel in Randpartikel, innere Partikel und fehlende äußere Partikel auf (siehe Bild 3.39).

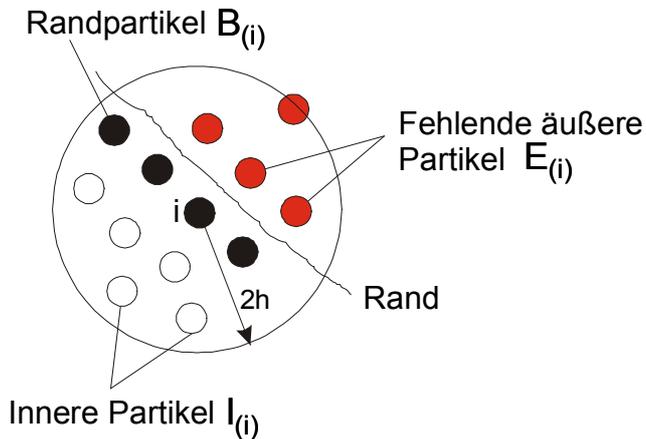


Bild 3.39: Berücksichtigung von Randbedingungen

Somit konnten sie spannungsfreie Randbedingungen simulieren. Das größte Problem bei der Behandlung von Randbedingungen stellt das Auffinden der Randpartikel dar. Hierzu bedienten sie sich einer Technik aus dem FLIP Code [250]. Der Gradient einer Konstanten, z.B. Eins, ist für alle Partikel innerhalb eines Körpers gleich null. In die SPH-Methode übersetzt bedeutet dies:

$$\frac{\partial 1}{\partial x_{\alpha}^i} = \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} (1) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\alpha}^j} = 0 \quad (3.129)$$

Für die Randpartikel unterscheidet sich der Gradient der Konstanten Eins deutlich von null, zumindest beim Standard SPH-Verfahren. So lassen sich leicht die Randpartikel finden und deren Oberflächennormalen bestimmen. Die Randbedingungen können nun direkt dem Spannungstensor auferlegt werden. Ein Nachteil dieser Art der Oberflächenkennung ist der, daß der Gradient der Konstanten Eins nicht nur für Randpartikel ungleich null ist. Partikel nahe der freien Oberfläche besitzen ebenfalls orthogonal zur Oberfläche ungleiche Anzahlen von Nachbarpartikeln, so daß auch für sie der Gradient der Konstanten Eins un-

gleich null wird. Ändert sich im Laufe der Berechnung die Partikelanordnung, so ist der Gradient der Konstanten auch im Innern des Körpers nicht mehr gleich null. Somit ist diese einfache Art der Oberflächenkennung eigentlich unbrauchbar.

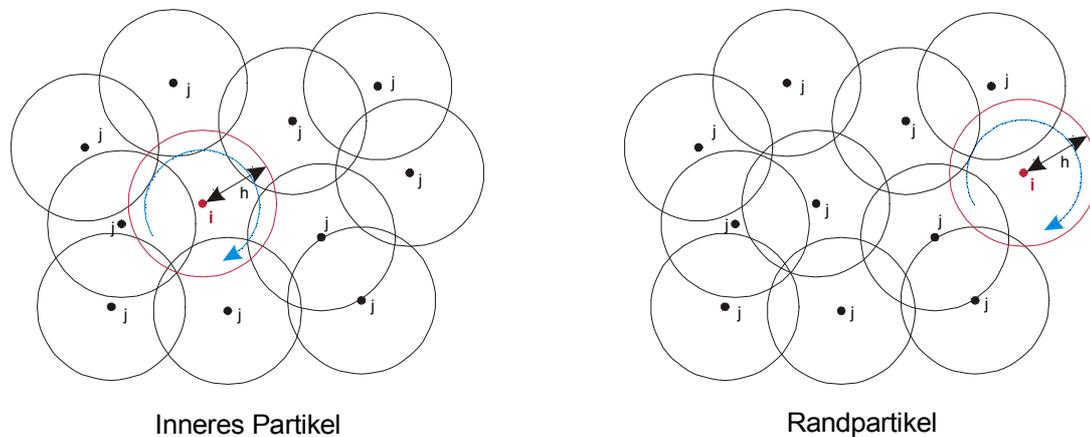


Bild 3.40: geometrische Randbestimmung

Eine bessere Methode, die auf rein geometrischen Betrachtungen beruht, wird von Dilts [72] vorgeschlagen. Der Grundgedanke ist der, den Umfang des Kreises von Partikel i mit einem Interpolationsradius von $1h$ abzufahren und zu untersuchen, ob ein Kreisabschnitt dieses Kreises von den Kreisen mit dem Interpolationsradius von $1h$ der Nachbarpartikel abgedeckt wird (siehe Bild 3.40).

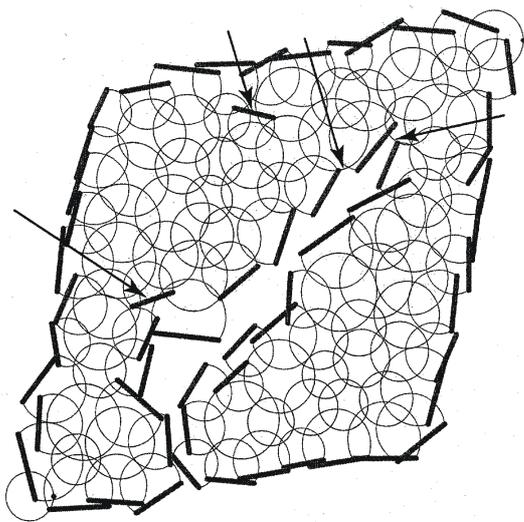


Bild 3.41: innere Diskontinuität, aus [69]

Ist dies nicht der Fall, handelt es sich um ein Randpartikel. Somit können auch Diskontinuitäten innerhalb eines Körpers gefunden werden (siehe Bild 3.41). Diese Vorgehensweise bezieht sich allerdings lediglich auf den zweidimensionalen Fall. In einem Nachfolgepaper erweitert Dilts [69] die zweidimensionale Randpartikelsuche auch auf den dreidimensionalen Fall. In seinem Artikel erläutert er sehr ausführlich die Implementierung der zwei- und dreidimensionalen Oberflächenkennung. In diesem SPH-Code steht sie allerdings noch nicht zur Verfügung.

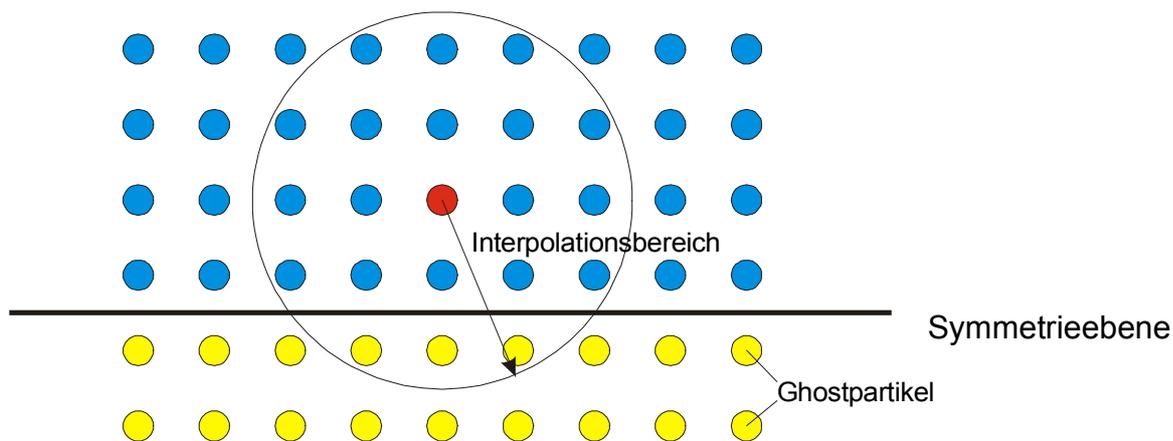


Bild 3.42: Berücksichtigung von Randbedingungen durch Ghost-Partikel

Eine einfachere Methode, Randbedingungen zu berücksichtigen bietet die Methode der Ghost-Partikel. Die Ghost-Partikel entstehen durch Spiegelung vorhandener Partikel an der Symmetrieebene. Es werden nur Partikel gespiegelt, deren Einflußbereich auch in die Symmetrieebene fallen (siehe Bild 3.42). Die Ghost-Partikel werden zu Beginn jeden Zeitschrittes neu erzeugt und ihnen werden die gleichen Zustandsgrößen wie ihren gespiegelten Kontrahenten zugewiesen. Nur die Geschwindigkeitskomponente normal zur Symmetrieebene erhält das entgegengesetzte Vorzeichen. Somit können Auflager simuliert und Symmetrieebenen ausgenutzt werden. Bei der Ausnutzung von Symmetrieebenen hat sich allerdings gezeigt, daß die Ergebnisse zum Gesamtmodell teilweise deutlich abweichen können, vor allem bei Ermittlung der Fragmentgrößen und -anzahlen. Deshalb wurden in Kapitel 5 die Sprengrechnungen der Betonplatten am Gesamtmodell durchgeführt.

3.7 Das Interface-Problem

Die SPH-Methode hat Probleme, den Kontakt zweier Körper stark unterschiedlicher Dichte exakt zu simulieren. Libersky und Petschek [183] lösen dieses Problem durch Anwendung von „Kontakt“-Randbedingungen. Der Kontakt geschieht nicht mehr einfach durch Anwenden der Interpolationsfunktion auf alle Partikel, sondern eben durch diese „Kontakt“-Randbedingungen. Es sei f ein Skalar oder die Komponente eines Tensors und f_{bc} die auferlegte Randbedingung. Die Werte der Randpartikel werden nun durch Anwendung von Gl. 3.130 überschrieben:

$$f^i \cong f_{bc} + \left(\sum_{j \in I(i)} (f^j - f_{bc}) m^j W^{ij} / \rho^j \right) / \left(1 - \sum_{j \in B(i)} m^j W^{ij} / \rho^j \right) \quad (3.130)$$

Da die Dichteunterschiede der kontaktierenden Körper in dieser Arbeit eher gering sind, wird auf eine derartige Erweiterung verzichtet.

3.8 Berechnung von Spannungen und Dehnungen

Für die konstitutive Beziehung müssen zunächst die Dehnraten bestimmt werden. Durch Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten in einen symmetrischen und antisymmetrischen Teil erhält man:

$$D_{\alpha\beta} = \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{x}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial \dot{x}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) \quad (3.131)$$

$$\dot{r}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{x}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} - \frac{\partial \dot{x}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right)$$

Hierbei sind $D_{\alpha\beta}$ die Deformationsraten, die für kleine Verzerrungen den Dehnraten $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ entsprechen, die für das Stoffgesetz erforderlich sind, $\dot{r}_{\alpha\beta}$ sind die Rotationsraten, die die reine Starrkörperrotation beschreiben. Geometrisch betrachtet beschreibt der Spintensor $\dot{r}_{\alpha\beta}$ die Winkelgeschwindigkeit des Kontinuums. In SPH-Formulierung lauten die Gleichungen :

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} \left[(\dot{x}_{\alpha}^j - \dot{x}_{\alpha}^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\beta}^j} + (\dot{x}_{\beta}^j - \dot{x}_{\beta}^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\alpha}^j} \right] \quad (3.132)$$

$$\dot{r}_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} \left[(\dot{x}_{\alpha}^j - \dot{x}_{\alpha}^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\beta}^j} - (\dot{x}_{\beta}^j - \dot{x}_{\beta}^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\alpha}^j} \right]$$

Das Dehnungsinkrement, das für die konstitutive Beziehung erforderlich ist, kann nun nach Gl. 3.133 bestimmt werden :

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} \Delta t \quad (3.133)$$

Um die Invarianz der Spannungen gegenüber einer Starrkörperrotation zu berücksichtigen, ist die Verwendung eines objektiven Spannungstensors notwendig. Die einfachste Methode, dies zu tun, geht über den Jaumann'schen Tensor der Spannungsgeschwindigkeiten:

$$\Gamma_{ij} = (\sigma_{ik} \dot{r}_{kj} + \sigma_{jk} \dot{r}_{ki}) \Delta t \quad (3.134)$$

Der Spannungsupdate geschieht folgender Maßen: Als erstes wird die Spannungsrotation durchgeführt. Das Stoffgesetz liefert dann den neuen Spannungstensor:

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + \Gamma_{ij}^n + \Delta \sigma_{ij}^{n+1/2} \quad (3.135)$$

mit

$$\Delta \sigma_{ij} = C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}. \quad (3.136)$$

Eine andere Möglichkeit, Starrkörperrotationen zu berücksichtigen, bietet die Green-Naghdi-Spannungsrate. Sie ist definiert als:

$$\sigma_{ij}^{\nabla} = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ik} \Omega_{kj} + \sigma_{jk} \Omega_{ki} = R_{ik} R_{jl} \dot{\tau}_{kl} \quad (3.137)$$

mit

$$\Omega_{ij} = \dot{R}_{ik} R_{jk}. \quad (3.138)$$

Die Rotationsmatrix \mathbf{R} erhält man durch polare Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} :

$$F_{ij} = R_{ik} U_{kj} = V_{ik} R_{kj} \quad (3.139)$$

\mathbf{U} ist hierbei der Rechts-Streck-, \mathbf{V} der Links-Streck-Tensor. Eine Prozedur zur direkten polaren Zerlegung findet man im ABAQUS-Manual [2]. Als erstes muß das Eigenwertproblem

$$(F_{ij} F_{jk} - \lambda^2 I_{ik}) N_k = 0 \quad (3.140)$$

gelöst werden. Als Ergebnis erhält man die drei Eigenwerte $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$ der Hauptstreckungen und die dazugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}, \mathbf{N}_{III}$. Die zu $\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}, \mathbf{N}_{III}$ gehörigen Eigenvektoren $\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}$ in der aktuellen Konfiguration lassen sich durch Tensorkontraktion des Deformationsgradienten mit den jeweiligen Eigenvektoren dividiert durch ihre Eigenwerte bestimmen:

$$(n_I)_i = \frac{1}{\lambda_I} F_{ij} (N_I)_j$$

$$(n_{II})_i = \frac{1}{\lambda_{II}} F_{ij} (N_{II})_j \quad (3.141)$$

$$(n_{III})_i = \frac{1}{\lambda_{III}} F_{ij} (N_{III})_j$$

Der Links-Streck-Tensor läßt sich nach einigen algebraischen Umformungen wie folgt bestimmen:

$$V_{ij} = \lambda_I (n_I)_i (n_I)_j + \lambda_{II} (n_{II})_i (n_{II})_j + \lambda_{III} (n_{III})_i (n_{III})_j \quad (3.142)$$

Die eigentlich gesuchte Rotationsmatrix \mathbf{R} läßt sich nun durch Invertieren der Matrix \mathbf{V} und einer einfachen Matrizenmultiplikation bestimmen:

$$R_{ij} = V_{ik}^{-1} F_{kj} \quad (3.143)$$

mit

$$V_{ij}^{-1} = \frac{1}{\lambda_I} (n_I)_i (n_I)_j + \frac{1}{\lambda_{II}} (n_{II})_i (n_{II})_j + \frac{1}{\lambda_{III}} (n_{III})_i (n_{III})_j. \quad (3.144)$$

Nähere Herleitungen sind dem ABAQUS-Manual [2] zu entnehmen.

Die Spannungen können in der unrotierten Konfiguration aktualisiert werden (siehe LS-DYNA [130]):

$$\tau_{ij}^n = R_{ik}^n R_{jl}^n \sigma_{kl}^n$$

$$\Delta \tau_{ij}^{n+1/2} = C_{ijkl} \Delta d_{kl}^{n+1/2} \quad (3.145)$$

$$\Delta d_{kl}^{n+1/2} = R_{ki}^{n+1/2} R_{lj}^{n+1/2} \Delta \varepsilon_{kl}^{n+1/2}$$

Somit erhält man die neuen unrotierten Cauchy-Spannungen:

$$\tau_{ij}^{n+1} = \tau_{ij}^n + \Delta \tau_{ij}^{n+1/2} \quad (3.146)$$

Über die Rotationsmatrix können die Cauchy-Spannungen wieder in die aktuelle Konfiguration zurückgedreht werden:

$$\sigma_{ij}^{n+1} = R_{ik}^{n+1} R_{jl}^{n+1} \tau_{kl}^{n+1} \quad (3.147)$$

Anstelle der aufwendigen und rechenintensiven polaren Zerlegung entwickelten Flanagan und Taylor [96] einen inkrementellen update des Links-Streck-Tensors \mathbf{V} . Hierbei müssen zunächst die Vektoren \mathbf{z} und $\boldsymbol{\omega}$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} z_i &= e_{ikj} \dot{\epsilon}_{jm} V_{mk} \\ \omega_i &= w_i + [I_{ij} \operatorname{tr}(V_{ij}) - V_{ij}]^{-1} z_j \\ \Omega_{ij} &= e_{ijk} \omega_k \\ \dot{r}_{ij} &= e_{ijk} w_k \end{aligned} \quad (3.148)$$

Es wird ersichtlich, daß $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\Omega}$ nur dann gilt, wenn das Tensorprodukt aus Deformationsrate $\dot{\epsilon}$ und Links-Streck-Tensor \mathbf{V} symmetrisch ist. e_{ijk} ist der Permutationstensor. Auswerten des Gleichungssystemes

$$\left(I_{ij} - \frac{1}{2} \Delta t \Omega_{ij}\right) R_{jk}^{n+1} = \left(I_{ij} + \frac{1}{2} \Delta t \Omega_{ij}\right) R_{jk}^n \quad (3.149)$$

liefert den neuen Rotationstensor \mathbf{R}^{n+1} . Um die gleiche Prozedur für den nächsten Zeitschritt wiederholen zu können, muß noch der Links-Streck-Tensor aktualisiert werden:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ij} &= (\dot{\epsilon}_{ik} + \dot{r}_{ik}) V_{kj} - V_{ik} \Omega_{kj} \\ V_{ij}^{n+1} &= V_{ij}^n + \Delta t \dot{V}_{ij} \end{aligned} \quad (3.150)$$

Der Spannungsupdate geschieht nun gemäß den Gleichungen 3.145 bis 3.147. Eine ausführliche Herleitung ist dem Artikel von Taylor und Flanagan [96] zu entnehmen.

Einen guten Überblick über die verschiedenen Formen, Starrkörperrotationen zu berücksichtigen, findet man bei Herrmann [139].

Der Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor $\mathbf{E} = 1/2(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I})$ und der ihm konjugierte Spannungstensor, der 2. Piola Kirchhoff-Tensor, sind zwei starrkörperinvariante Tensoren. Da für das Stoffgesetz nicht der 2. Piola Kirchhoff-Tensor interessiert, sondern die Cauchy-Spannung, muß der 2. Piola Kirchhoff-Tensor in den Cauchy-Spannungstensor transformiert werden:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{\rho_t} \mathbf{F} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{F}^T \quad (3.151)$$

Wird das Dehnungsinkrement über den Geschwindigkeitsgradienten berechnet, wird damit automatisch angenommen, daß innerhalb eines Zeitschrittes Δt das Dehnungsinkrement konstant sei. Dies führt auf den Begriff der inkrementellen Objektivität. Inkrementelle Objektivität ist eine aufgrund physikalischer Überlegungen anzustrebende Eigenschaft eines Integrationsverfahrens, die sich bei rein mathematischer Betrachtung lediglich im Grenzfall verschwindend kleiner Zeitschritte Δt wegen der Konsistenzforderung ergeben muß. In der Literatur findet man verschiedene Definitionen für den Begriff der inkrementellen Objektivität (siehe Hughes, Winget [152], Rubinstein, Atluri [233], Reed, Atluri [229], Weber et al. [261]). Es sei der Begriff der inkrementellen Objektivität nach Hughes und Winget [152] erklärt. Sie betrachten folgenden Algorithmus zur Integration der konstitutiven Gleichungen:

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1} + \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad (3.152)$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}^n \mathbf{Q}^T \quad (3.153)$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \alpha \Delta t \mathbf{r})^{-1} (\mathbf{I} + (1 - \alpha) \Delta t \mathbf{r}) \quad (3.154)$$

mit

$$\alpha \in [0, 1].$$

Es sei \mathfrak{R} eine Menge orthogonaler Tensoren. Der Algorithmus, beschrieben durch die Gleichungen 3.152 bis 3.154 heißt inkrementell objektiv bezüglich \mathfrak{R} , wenn für alle $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}$ gilt:

$$\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{R} \mathbf{y}^n \quad (3.155)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma}^n \mathbf{R}^T \quad (3.156)$$

Durch Anwendung der verallgemeinerten Mittelpunktsregel sei $\alpha=0,5$. Ist $\mathbf{R}+\mathbf{I}$ nicht singular, dann muß \mathbf{Q} orthogonal sein, und der Algorithmus gegeben durch Gleichungen 3.152 bis 3.154 ist bezüglich \mathfrak{R} inkrementell objektiv. Es gilt $\mathbf{Q}=\mathbf{R}$. Der orthogonale Tensor \mathbf{Q} ist nur bei Anwendung der verallgemeinerten Mittelpunktsregel orthogonal und ergibt sich zu:

$$\mathbf{Q} = \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{r}} \right) \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{r}} \right) \quad (3.157)$$

Für alle anderen $\alpha \neq 0,5$ ist \mathbf{Q} kein orthogonaler Tensor mehr. Hughes und Winget führen in [152] den mathematischen Beweis für ihre Theorie. Jansohn [157] weist darauf hin, daß der Algorithmus von Hughes und Winget nur einen schwachen Grad an inkrementeller Objektivität gewährleistet. Er schlägt vor, Integrationsverfahren, die auf einer mit Oldroyd-Ableitungen formulierten Materialtheorie basieren, zu verwenden (siehe auch Simo, Ortiz [242], Simo, Miehe [243], Simo [244], Auricchio, Taylor [9], Lühns, Hartmann, Haupt [191]). Bei diesen Verfahren werden im Gegensatz zum Winget-Hughes-Algorithmus keine Annahmen über den Verlauf der unabhängigen Variablen im Zeitinkrement benötigt. Der Almansi-Verzerrungstensor läßt sich explizit aus dem Deformationsgradienten berechnen und die Transformation der tensorwertigen Variablen erfolgt mit dem inkrementellen Deformationsgradienten.

3.9 Explizite Zeitintegration

Die verwendeten Differentialgleichungen werden mit dem modifizierten leap–frog-Algorithmus über die Zeit integriert. Im Gegensatz zum Prädiktor-Korrektor-Verfahren, das zunächst alle Größen zum Zeitpunkt $t + \Delta t/2$ bestimmt, um anschließend auf die Werte von $t + \Delta t$ zu schließen, werden beim leap–frog-Algorithmus die Geschwindigkeiten nur zu den halben Zeitpunkten, der Ortsvektor zu den ganzen Zeitpunkten ermittelt:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i^{n+1/2} &= \dot{x}_i^{n-1/2} + \frac{1}{2}(\Delta t^n + \Delta t^{n-1})\ddot{x}_i^n \\ x_i^{n+1} &= x_i^n + \dot{x}_i^{n+1/2} \Delta t^n\end{aligned}\tag{3.158}$$

Alle anderen Feld- und Zustandsgrößen werden nun zu den dementsprechenden Zeitpunkten ermittelt. Der Geschwindigkeitsgradient wird beispielsweise zum Zeitpunkt $n+1/2$ berechnet, da der Spannungstensor zu den vollen Zeitschritten ermittelt wird. Für die räumliche Ableitung bedarf es somit eines Zwischenschrittes, d.h. der Ortsvektor ist zum Zeitpunkt $n+1/2$ zu interpolieren. Weitere Literatur zur expliziten Zeitintegration findet man z.B. bei Benson [24].

Das leap–frog-Schema ist in der Zeit von Genauigkeit 2. Ordnung. Die Stabilität wird durch die Verwendung des CFL-Kriteriums gewährleistet:

$$\Delta t \leq \varpi h / (c + s)\tag{3.159}$$

Das CFL-Kriterium sichert, daß sich eine Welle in einem Zeitschritt nur innerhalb eines Elementes fortpflanzt. Hierbei ist $\varpi = 0,3$ und s ist die relative Partikelgeschwindigkeit.

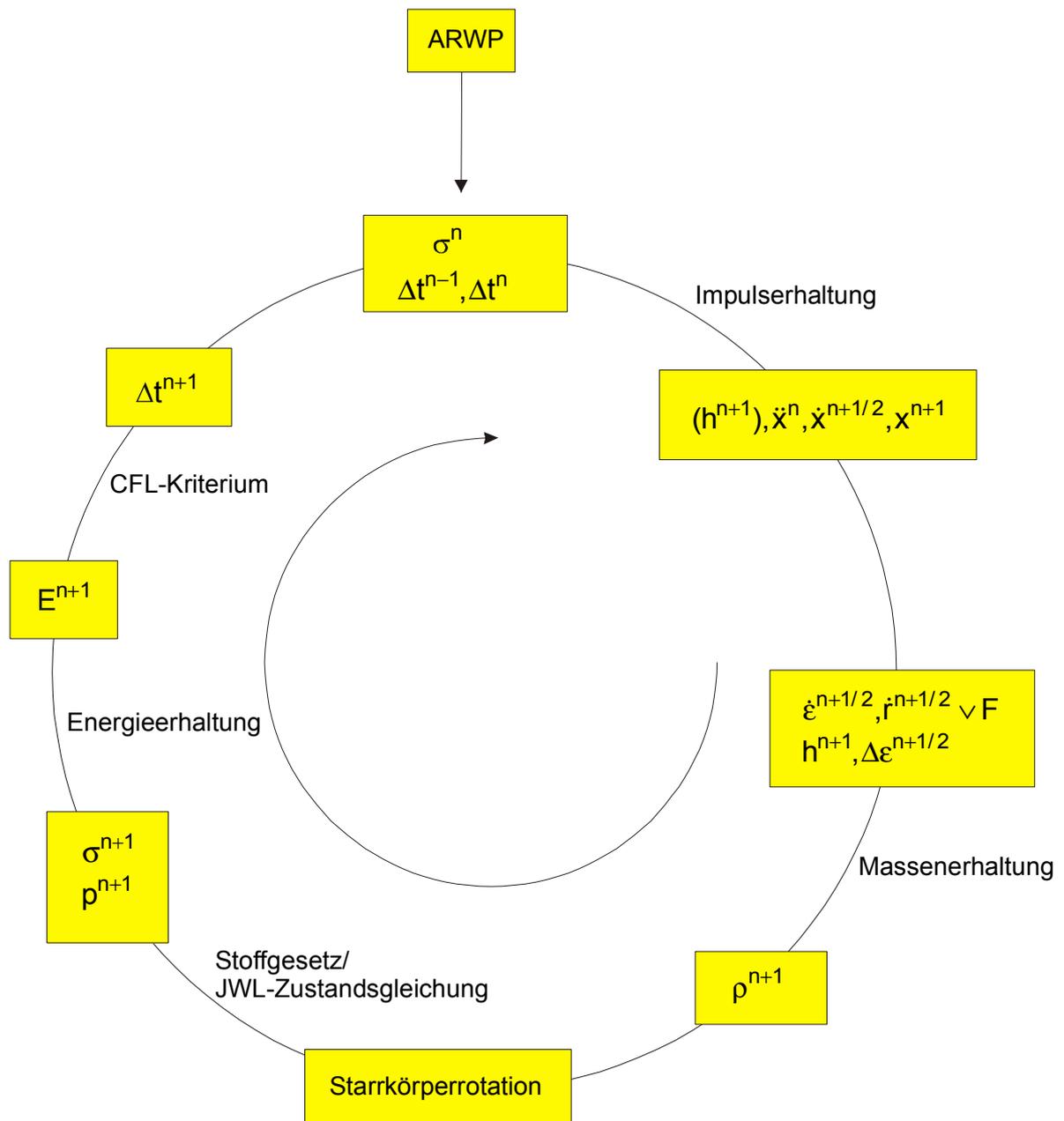


Bild 3.43: SPH-Flußdiagramm

In Bild 3.43 ist das SPH-Programm als Flußdiagramm dargestellt.

Ausgangspunkt sind die Spannungen zum Zeitpunkt n . Durch Anwendung der Bewegungsgleichung lassen sich die Beschleunigungen berechnen. Durch Integration der Beschleunigungen erhält man die Geschwindigkeiten zur Zeit $n+1/2$, die nach erneuter Integration den neuen Ortsvektor zur Zeit $n+1$ liefern. Wird in der Bewegungsgleichung keine künstliche Viskosität benutzt, müssen noch die Geschwindigkeiten durch den CSA (siehe Kapitel 3.4.2) geglättet werden, der dann ebenso auf die

Dichte und innere Energie angewendet wird. Wie in Kapitel 3.4.2 bereits erwähnt erwies sich der CSA als äußerst dissipativ und wurde deswegen in den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen nicht weiter benutzt. Über Gl. 3.49 bzw. 3.51 wird die neue Interpolationslänge berechnet. Dies geschieht entweder direkt zu Beginn des neuen Zeitschrittes (Gl. 3.49) oder nach Ermittlung des Geschwindigkeitsgradienten (Gl. 3.51) über eine inkrementelle Aktualisierung. Die Dehnraten, aus denen auf das Dehnungsinkrement geschlossen werden kann, sowie die Rotationsraten, die zur Berechnung des Jaumann'schen Spannungsgeschwindigkeitstensors erforderlich sind, lassen sich durch Aufspalten des Geschwindigkeitsgradienten in einen symmetrischen und antisymmetrischen Teil ermitteln. Gegebenenfalls muß noch der Deformationsgradient \mathbf{F} zur Berücksichtigung der Starrkörperrotation oder zur Ermittlung des Green Lagrange'schen Verzerrungstensors bestimmt werden. Bei finiten Elementen wird er über die Ableitung der Ansatzfunktion ermittelt (siehe Bathe [15]). Wird die FE-Ansatzfunktion durch die SPH-Ansatzfunktion substituiert, kann auch in einem Partikelcode der Deformationsgradient bestimmt werden:

$$F_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial^t x_\alpha^i}{\partial^0 x_\beta^i} = \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} \frac{\partial W^{ij}}{\partial^0 x_\beta^j} ({}^0 x_\alpha^i - {}^t x_\alpha^j) \quad (3.160)$$

Beim Standard SPH-Verfahren läßt sich der Deformationsgradient nicht hinreichend genau ermitteln, so daß es bei der Bestimmung der Rotationsmatrix \mathbf{R} zu Fehlern kommt, was zu unkorrekten Starrkörperrotationen führt. Ein einfaches und anschauliches Beispiel wird in Anhang A4 diskutiert. Über die Kontinuitätsgleichung wird die neue Dichte ermittelt. Die andere Methode zur Dichteberechnung wurde aufgrund der etwas längeren Rechenzeit und der Randprobleme nur zu Vergleichszwecken verwendet. Bevor die konstitutive Beziehung den neuen Spannungstensor liefert, muß noch die Starrkörperrotation berücksichtigt werden. Dies geschieht über den Jaumann'schen Spannungsgeschwindigkeitstensor oder den Green-Naghdi-Tensor, wobei hier zwischen der direkten polaren Zerlegung und dem inkrementellen Update gewählt werden kann. Einen schwachen Grad an inkrementeller Objektivität sichert der Algorithmus von Hughes und Winget. Es hat sich jedoch gezeigt, daß der Hughes-Winget-Algorithmus einen unbedeutenden Einfluß auf die Er-

gebnisse bei Explosionsberechnungen und Impaktberechnungen mit hohen Impaktgeschwindigkeiten besitzt. Vor Beginn der Rechnung müssen noch Optionen gesetzt werden, welche Gleichungen bei der Simulation verwendet werden sollen. Obwohl das MLSPH-Verfahren die längste Rechenzeit benötigt, wurde es hauptsächlich zur Simulation des Betons verwendet, da hiermit eine saubere Abbildung des Werkstoffverhaltens ermöglicht wurde. Bei Detonationsberechnungen wird die JWL-Zustandgleichung ausgewertet. Die Energieerhaltungsgleichung liefert die neue spezifische innere Energie. Da alle Partikelgrößen in Gl. 3.25 bekannt sind, läßt sich darüber die innere Energie direkt berechnen. So kann von einer erneuten rechenintensiven Summenbildung abgesehen werden. Da die JWL-Zustandgleichung von der Anfangsdetonationsenergie und nicht der aktuellen inneren Energie abhängt, erfolgt keine Iteration zwischen Druck und innerer Energie. Wird beispielsweise eine Mie-Grüneisen-Zustandsgleichung benutzt, muß zwischen Druck und innerer Energie iteriert werden, da dieser Zusammenhang implizit ist. Dann erfolgt die Berechnung des Druckes und der inneren Energie in derselben Subroutine. Das CFL-Kriterium gibt für den nächsten Berechnungszyklus den neuen Zeitschritt vor.

3.10 Instabilitäten

Bei der SPH-Methode gibt es eine sog. Zuginstabilität, die für dieses Verfahren typisch ist. Sie macht sich dadurch bemerkbar, daß die Partikelgeschwindigkeiten unphysikalisch um ein Vielfaches zunehmen. Es kommt zu Partikelverklumpungen. Swegle [251] untersuchte die SPH-Methode bezüglich dieser Instabilität. In seiner Untersuchung verwendete er den kubischen B-Spline, der auch in dieser Arbeit benutzt wird. Er stellte fest, daß diese Zuginstabilität auch unter Druckbeanspruchung auftreten kann. Betrachtet man die 1. Ableitung der Interpolationsfunktion (siehe Bild 3.5), ist dies nicht verwunderlich, denn der Einfluß des Gradienten der Wichtungsfunktion des Partikels j auf das Partikel i nimmt ab einem gewissen Punkt mit zunehmender Partikelnähe wieder ab. Als letztendliches Ergebnis erhielt Swegle ein Stabilitätskriterium, das besagt, daß die Rechnung stabil bleibt, solange das Produkt aus Spannung und der zweiten Ableitung der Interpolationsfunktion größer als null ist:

$$W''\sigma > 0 \quad (3.161)$$

In Bild 3.44 ist dargestellt, für welche Fälle die Rechnung stabil bzw. instabil bleibt.

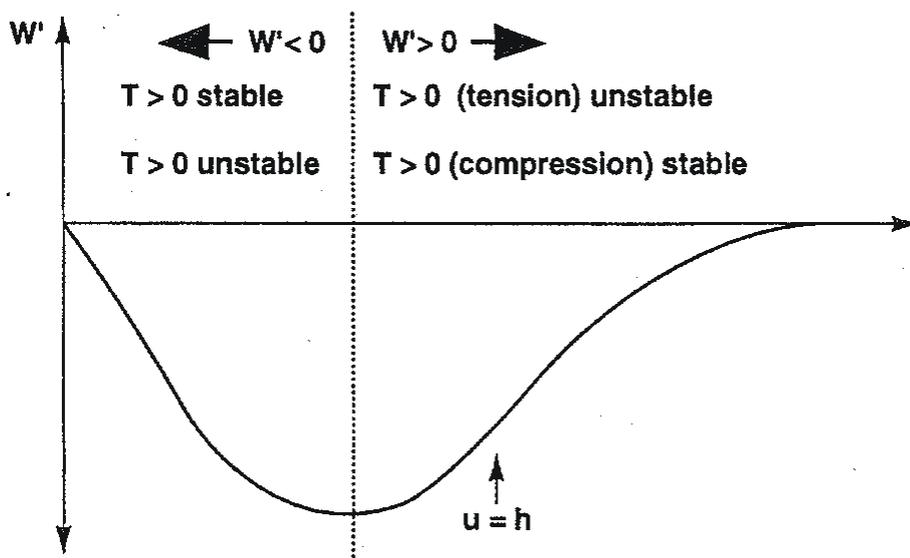


Bild 3.44: SPH-Instabilitäten, aus [252]

Viele Wissenschaftler haben sich seither bemüht, diese Instabilität zu beheben (siehe z.B. Dyka [85], [86], Wen [264], Hicks [142]).

Dyka [85] versuchte die Instabilität durch Einbau von zusätzlichen Spannungspunkten zu beheben (siehe Bild 3.45), tat dies allerdings nur für den eindimensionalen Fall. Libersky und Randles [185], [228] erweiterten dieses Modell auf den dreidimensionalen Fall. Durch die zusätzlichen Spannungspunkte ist es prinzipiell auch möglich, Diskontinuitäten wie Risse innerhalb eines Kontinuums abzubilden. Häußler [135] zeigt, wie man erfolgreich Diskontinuitäten interpolieren kann. Der Nachteil der Einführung von Spannungspunkten liegt in der ansteigenden Rechenzeit und dem erhöhten Speicherplatzbedarf.

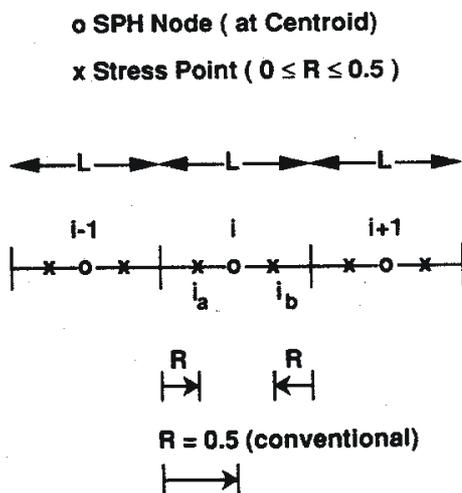


Bild 3.45: Spannungspunkte, aus [86]

Libersky et al. [184] behoben die Zuginstabilität durch Verwendung des CSA. Hicks und Liebrock [143] fanden heraus, daß die SPH-Instabilität zwar durch den CSA kontrolliert werden kann, die kurzen Wellen allerdings mehr als gewünscht geglättet werden können. Durch ein sog. Shape-shifting, das die Form der Interpolationsfunktion W und somit das Vorzeichen deren zweiten Ableitung verändert, kann die zu starke Dissipation behoben werden.

Andere Wissenschaftler, siehe Kapitel 3.5.4, verbesserten die SPH-Methode hinsichtlich ihrer Interpolation und ihres Konsistenzverhaltens. Somit kann auch die SPH-Instabilität besser kontrolliert werden.

Benz [25] untersuchte das Fragmentierungsverhalten von Fels und stellte fest, daß keine Instabilitäten auftreten, wenn sich die Zugspannungen abbauen, bevor die Dehnungen sehr groß werden.

Da sich bei Beton sowohl Zug- als auch Druckspannungen abbauen, bevor die Dehnungen sehr groß werden, treten auch bei den hier durchgeführten Berechnungen keine Instabilitäten auf. Sauer [236] beschreibt das Phänomen der SPH-Instabilität sehr anschaulich, daß es offensichtlich wird, warum bei Materialien mit Entfestigung im Zug- und Druckbereich keine Instabilitäten auftreten.

3.11 Vergleich: FEM ↔ SPH

Abschließend seien hier die wesentlichen Unterschiede und Gemeinsamkeiten der FE- und SPH-Methode dargestellt. Es wird vorausgesetzt, daß die Grundlagen der FEM bekannt sind.

Die Bestimmung einer exakten Lösung von Randwertaufgaben ist in den wenigsten Fällen möglich. Diskretisierungsverfahren, wie die Methode der finiten Elemente oder die Methode der Smooth-Particle Hydrodynamics dienen dazu, das gegebene Differentialgleichungssystem auf die Lösung eines Problems mit einer endlichen Zahl von Unbekannten zurückzuführen, in der Regel auf ein System von linearen Gleichungen. Die Diskretisierung erfolgt sowohl im Raum als auch in der Zeit.

Beide Verfahren sind dadurch gekennzeichnet, daß sie eine Näherungslösung des Differentialproblems $Lu=f$ in der Form

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n a_k \Phi_k(\mathbf{x}) \quad (3.162)$$

suchen, wobei a_k zunächst unbekannte Parameter und Φ_k linear unabhängige Ansatzfunktionen sind (siehe Sauer [236]). Der entscheidende Unterschied beider Verfahren besteht in der Interpolation, d.h. in der Wahl der Ansatzfunktionen Φ . Für die Interpolation mit finiten Elementen wird die Delta-Eigenschaft (siehe Anhang A) vorausgesetzt. Die Elemente sind untereinander "vernetzt" und können sich nur durch Erosion einzelner Elemente oder durch Einführung von Federn an den Elementengrenzen voneinander trennen. Einen Einfluß auf einen Knoten können nur direkt benachbarte Knoten ausüben. Bei der SPH-Interpolation gilt die Delta-Eigenschaft nicht. Über eine Interpolationsfunktion, dessen Einflußbereich sich über mehrere auch nicht benachbarte Knoten erstreckt, tauschen die Partikel untereinander Impulse aus. Es ist von vornherein nicht klar, wieviele Knoten sich in einem Einflußbereich befinden. Die Anzahl der Knoten in einem Einflußbereich kann sich im Laufe der Berechnung ändern, was eine "Nachbarsuche" in jedem Zeitschritt für jeden Knoten mit sich bringt. Dies erklärt den höheren Rechenaufwand der SPH-Methode.

Ein weiterer wesentlicher Unterschied zwischen SPH- und FE-Methode besteht in der räumlichen Diskretisierung des Kontinuums. Während die Methode der finiten Elemente von der schwachen Form der Differentialgleichungen ausgeht, die die Differentialgleichungen in einem Kontrollvolumen erfüllt, geht die SPH-Methode von der starken Form der Differentialgleichungen aus, bei der die Differentialgleichungen in diskreten Punkten erfüllt werden. Unter Vernachlässigung von Massenkräften läßt sich beispielsweise die Impulserhaltung in FE-Formulierung wie folgt schreiben:

$$\left[\int_V \rho N^i N^j dV \right] \ddot{\mathbf{x}}^j = - \int_V \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial N^i}{\partial \mathbf{x}} dV + \int_S \boldsymbol{\tau} N^i dS + \sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(\mathbf{X}^k, t) N^i(\mathbf{X}^k) \quad (3.163)$$

Hierbei sind N die Formfunktionen und $\boldsymbol{\tau}$ die Randspannungen. Der letzte Term der rechten Seite resultiert aus den äußeren Kräften auf die jeweiligen Knoten.

Die Impulserhaltung in SPH-Formulierung lautet:

$$\frac{d\dot{x}_\alpha^i}{dt} = - \sum_j m^j \left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}^i + \sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^i \rho^j} \right) \frac{\delta W^{ij}}{\delta x_\beta^j} \quad (3.164)$$

Betrachtet man beide Formulierungen wird das Problem der SPH-Methode deutlich, wenn die Randspannungen nicht Null sind.

Bei finiten Elementen werden Größen wie Spannungen, Dehnungen und die Dichte an den Integrationspunkten der jeweiligen Elemente, Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Verschiebungen in den Knoten bestimmt. Die Genauigkeit der Ergebnisse kann bei der FEM durch eine p - und h -Adaptivität verbessert werden. Unter der p -Adaptivität versteht man die Erhöhung der Integrationsordnung, unter h -Adaptivität die Verfeinerung des "Netzes". Die SPH-Methode dagegen ermittelt alle Größen in den Partikeln. Um die Güte einer Berechnung zu verbessern, muß also das "SPH-Netz" verfeinert werden (h -Adaptivität). Eine p -Adaptivität wurde bei der SPH-Methode noch nicht eingeführt, die MLSPH-Methode hingegen kennt die p -Adaptivität.

Zur Simulation von Impaktvorgängen oder Kontaktdetonationen müssen bei der numerischen Berechnung die verschiedenen Körper in Kontakt treten. Bei finiten Elementen geschieht die Modellierung des Kontaktes beispielsweise über das Penaltyverfahren oder die Lagrange-Multipliiert-Methode. Dringt ein Knoten eines Körpers in das FE-Netz eines anderen Körpers ein, so werden den beteiligten Knoten zumeist Kräfte auferlegt, so daß in diesem Zeitschritt eine Durchdringung beider Körper ausgeschlossen wird. Der Kontakt beim SPH-Verfahren erfolgt einfach durch Anwendung der Interpolationsfunktion der in Kontakt tretenden Körper, wobei hier nur eine Übertragung einer Druckspannung erlaubt ist, so daß es nicht zu einem unphysikalischen Verschmelzen der beiden Körper kommt.

Der letzte Unterschied besteht in der Art der künstlichen Viskosität. FEM und SPH verwenden zwei unterschiedliche Viskositäten, die jedoch demselben Zweck dienen, der Verschmierung der Schockfront über eine kleine Region. Näheres siehe Kapitel 3.4.1.

Neben der Tatsache, daß mit beiden Verfahren beispielsweise die Erhaltungsgleichungen gelöst werden können, gibt es noch ein paar weitere Gemeinsamkeiten.

Die wichtigste Gemeinsamkeit ist wohl die Tatsache, daß FE- und SPH-Methode die Struktur als ein homogenes Kontinuum abbilden. Somit können auch dieselben Spannungs- und Dehnungsgrößen verwendet werden.

Für Probleme in der Kurzzeitdynamik verwenden die SPH- und FE-Methode einen expliziten Zeitintegrationsalgorithmus, da dieser im Gegensatz zu den impliziten Verfahren wesentlich stabiler und schneller ist, da er keine Gleichgewichtsiterationen zwischen inneren und äußeren Kräften durchführen muß. Um die Stabilität des Integrationsverfahrens zu gewährleisten, ist die Einhaltung eines minimalen Zeitschrittes eine notwendige Voraussetzung (siehe [44]):

$$\frac{c \Delta t}{r_E} \leq 1, \quad (3.165)$$

wobei c die Schallgeschwindigkeit, Δt das Zeitinkrement und r_E die kleinste Element- bzw. "Partikellänge" bezeichnen. Somit wird gewährleistet, daß sich eine Welle während eines Zeitschrittes nur innerhalb eines Elementes bzw. Partikels ausbreitet.

Nachfolgend sind die wesentlichen Unterschiede beider Verfahren noch einmal übersichtlich dargestellt.

SPH

FEM

Gemeinsamkeiten

- Grundgleichungen: Erhaltung der Masse, Energie und des Impulses
- Zeitschrittkriterium
- Dehnungen und Spannungen

Unterschiede

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| • starke Form der DGI. | • schwache Form der DGI. |
| • Viskosität | • Viskosität |
| • nur Partikel | • Integrationspunkte und Knoten |
| • Kontakt über Kernelfunktion | • Kontakt über slide-line Verfahren |
| • Interpolationsfunktion | • Interpolationsfunktion |

3.12 Ein eigenes SPH-Programm

Wie ein FE-Programm läßt sich auch das SPH-Programm in drei Teile untergliedern:

3.12.1 Preprocessing

Beim Preprocessing werden die Geometrie- und die Stoffparameter von einer externen Datei aus in das Berechnungsprogramm eingelesen. Hierzu wurde ein Modul implementiert, mit dem folgende Geometrien diskretisiert werden können:

- ein Zylinder
- ein Kegel
- ein Quader
- eine Kugel

```

*problem
3d
*datacheck
no
*restart
0          // kein restart
*loading
impact
*body
1          // Koerper 1
*geometry
zylinder
*geodata
// Mittelpkts.ko. , Durchm./Hoehe, Part.abst., Part.anz.
0.0, 0.0, 0.0, 100.0, 300.0, 1.0, 1.0, 10000
*material
1          // Material 1 = Stahl
*material_data
// Dichte, EModul, Querkont., Fließsp., min. Druck, max. pl. Dehnung
0.0087, 210000.0, 0.3, 2000.0, 1500.0, 0.2
*boundary
no          // keine Ausnutzung von Symmetriebedingungen
*body      // Koerper 2
2
.
.
.
*awp
// Flugrichtung, Anfangsgeschw.
x2, 2000.0
*numeric
// Parameterwahl fuer die Berechnung
1.5,1.0,2.0,0.3,0,0.02,1,1,0
*job_id
job1
*time
0.2
*fileout
u1,1000     // Ausgabe der Geschw. von Partikel Nr. 1000
*end_fileout

```

Bild 3.46: Eingabedatei

Der erforderliche Eingabedatensatz für das SPH-Programm wurde ähnlich dem FE-Code ABAQUS gewählt, bei dem sog. Befehle mit einem vorangehenden * gekennzeichnet werden, bevor in der nächsten Zeile die erforderlichen Daten eingegeben werden müssen. Ein Beispiel für einen Datensatz zeigt Bild 3.46.

3.12.2 Lösungsphase

Der Rechenablauf im Programm ist in Bild 3.43 dargestellt und im Laufe dieses Kapitels hinreichend erörtert worden.

Der CODE ist in FORTRAN 90 geschrieben, der objektorientierten Version von FORTRAN, in der vor allem die Vorzüge der Datenkapselung, Vererbung und Polymorphie genutzt werden können. Es sei hier auf einschlägige Literatur verwiesen ([219], [16], [226], [227], [201], [137]). Die Strukturierung der Daten in einem objektorientierten FE-Code ist den Artikeln von Dubois-Pelerin, Zimmermann [81], [82], [83] zu entnehmen, die Datenstruktur bei einer netzfreien Methode wird in Häußler-Combe [135] und Sauer [236] gut erläutert und wird in dieser Arbeit nur kurz in Kapitel 3.12.2.4 erklärt. Eine ausführliche Diskussion würde den Umfang dieser Arbeit sprengen. Stattdessen wird prinzipiell auf die verschiedenen Probleme bei der Programmierung eingegangen. Das Ziel dieser Arbeit ist, das Fragmentierungsverhalten von Beton zu untersuchen. Deshalb müssen die Berechnungen bis zu einem sehr späten Zeitpunkt durchgeführt werden, um die Vorteile der SPH-Methode zu nutzen. Dazu ist das Programm so zu optimieren, daß es mit möglichst vielen Partikeln in kurzer Zeit das Ergebnis berechnet. Somit muß ein sinnvoller Kompromiß zwischen Speicherplatzanforderung und Laufzeitverhalten geschlossen werden. Da im Rahmen dieser Arbeit Systeme mit sehr großen Partikelanzahlen (>100.000) berechnet werden, wird die Speicherplatzverwaltung dynamisch gestaltet, d.h. daß Felder, die nur kurzzeitig zur Berechnung benötigt werden, im Laufe der Berechnung allokiert und bei Bedarf wieder deallokiert werden. Somit kann eine enorme Einsparung an Speicherplatz erreicht werden. Auf das Thema Speicherplatz und Laufzeitverhalten wird später noch näher eingegangen.

3.12.2.1 Nachbarsuche

Zur Berechnung der Größen, die einer Aufsummierung über ihre Nachbarn bedürfen wie der Beschleunigungen, der Dehnungen, der Dichte, etc., muß die Wechselwirkung der Partikel i mit den Partikeln j ermittelt werden. Eine Möglichkeit wäre, die Wechselwirkung jedes Partikels mit jedem zu ermitteln. Bei einer Anzahl von N Partikel müßten also $N \cdot N$ Schleifen durchlaufen werden, was zu einer unzumutbaren Rechenzeit

führen würde. Deshalb ist die Verwendung eines geeigneten Suchalgorithmus der Schlüssel für die Effektivität eines SPH-Programmes. In der Literatur findet man zahlreiche Such- und Sortieralgorithmen ([240], [150], [226], [265], [215], [102], [212], [270], [153], [253]). In dieser Arbeit wurde ein Algorithmus verwendet, der in Swegle [252] näher erklärt wird. Das Problem ist, Partikel zu finden, die innerhalb eines gewissen Einflußbereichs liegen. Alle weiteren Partikel liefern keinen Beitrag zu den entsprechenden Gleichungen mehr. Für diese ist die Wichtungsfunktion sowie deren Gradient gleich null. Der Sortieralgorithmus besteht aus individuellen jeweils eindimensionalem Sortieren der Partikel. Zunächst werden die Partikel nach ihren Koordinaten sortiert. Anschließend erfolgt eine Binärsuche in jeder sortierten Liste, um die untere und obere Grenze zu bestimmen (siehe Bild 3.47).

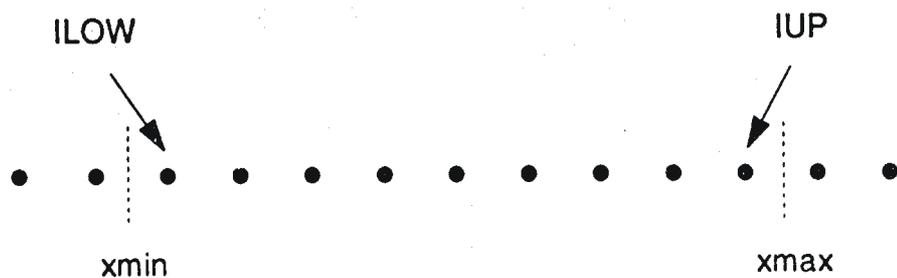


Bild 3.47: Bestimmung der Maxima und Minima bei der Kontaktsuche, aus [252]

Die letztendliche Liste, in der alle Partikeladressen enthalten sind, entsteht, indem die Liste mit der niedrigsten Partikelanzahl mit den Grenzen der Liste der jeweils orthogonalen Koordinatenrichtungen verglichen wird. In Bild 3.48 ist dies für den zweidimensionalen Fall dargestellt. Somit erfordert der letzte Check nur schnelle INTEGER-Vergleiche.

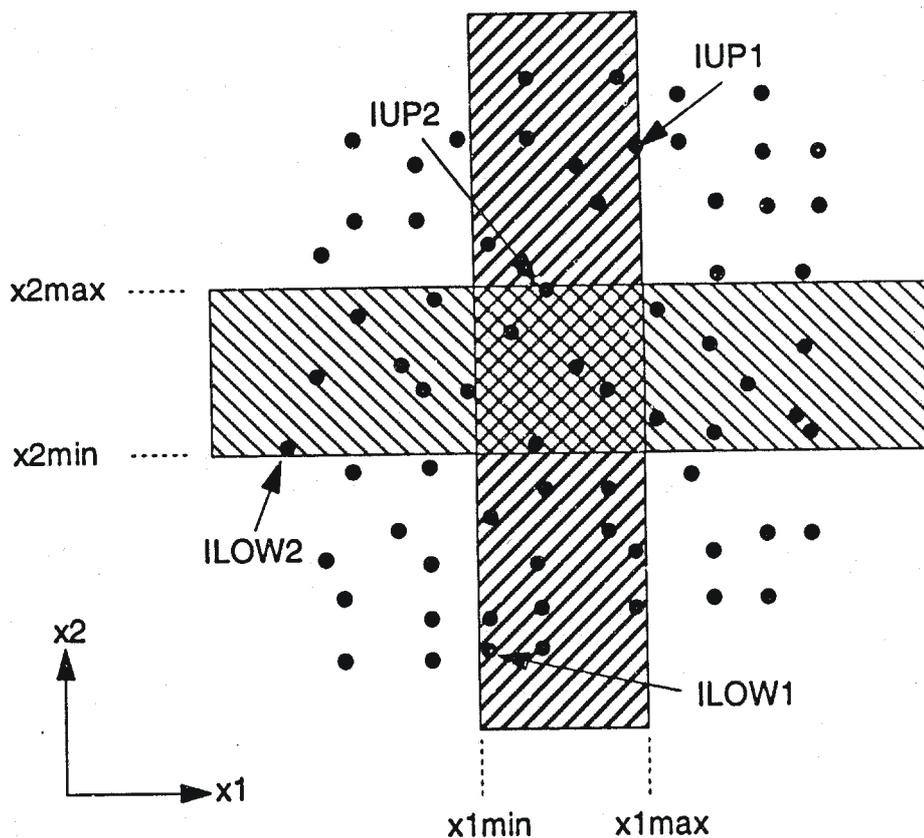


Bild 3.48: Listen bei der Kontaktsuche, aus [252]

Es muß Speicherplatz für $7 \cdot N$ Partikel bereitgestellt werden und der Suchalgorithmus ist von $N \cdot \log_2 N$ -ter Ordnung für N Partikel und N Suchregionen. Ein wesentlicher Vorteil besteht darin, daß es keines Hintergrundnetzes bedarf, dessen Zellen bei starker Expansion eines Körpers zum großen Teil gar nicht mit Partikeln besetzt sind.

3.12.2.2 Parallelisierung

Die Berechnungen wurden auf der IBM RS6000/SP-256 und IBM RS6000/SP-smp durchgeführt, einem Parallelrechner mit ‚distributed memory‘. Deshalb wurde das Programm parallelisiert. Somit konnte das Laufzeitverhalten drastisch verbessert werden. Benutzt wurde hierzu das Message Passing Interface (MPI), das von FORTRAN 90 aus aufgerufen werden kann, und der "mpxlf"-Compiler. Das Prinzip besteht darin, daß mehrere Prozessoren gleichzeitig, also parallel, entsprechende Rechenoperationen, Programmteile oder Unterprogramme ausführen. Auf der SP stehen entsprechende tools wie der "xprofiler", der "hpmcount"

oder der "VAMPIR" zur Verfügung, um das Laufzeitverhalten des Programmes zu analysieren. Hierbei hat sich gezeigt, daß die meiste Zeit das Suchen der Partikel, sowie die Berechnung des Geschwindigkeitsgradienten, der Beschleunigung und der Dichte in Anspruch nimmt, also Berechnungen bei denen eine Aufsummierung durchgeführt werden muß.

%	cumulative	self	self	self	total	
time	seconds	seconds	calls	ms/call	ms/call	name
33.4	4681.34	4681.34	8750412	0.53	0.53	.mklst3 [5]
26.6	8405.64	3724.30	418	8909.81	20109.19	.@2@erh_gleichung [4]
8.0	9531.69	1126.05				.kickpipes [6]
8.0	10646.19	1114.50				.readsocket [7]
6.7	11585.55	939.36	1254	749.09	749.09	.indexx [8]
3.8	12124.02	538.47				.__mcount [9]
3.4	12605.10	481.08				.mpci_recv [10]
1.3	12789.27	184.17				.flush [18]
1.1	12946.29	157.02	418	375.65	375.65	.@2@boundary [20]
1.1	13094.68	148.39	67133899	0.00	0.00	.free_y [14]
0.7	13193.89	99.21	418	237.34	237.34	.vumat [21]
0.7	13285.88	91.99	259956911	0.00	0.00	.leftmost [22]
0.6	13372.43	86.55	256265353	0.00	0.00	.splay [23]
0.5	13448.02	75.59	67133904	0.00	0.00	.malloc_y [19]
0.3	13491.12	43.10				.__xlf61allocg [15]
0.3	13532.94	41.82				.writesocket [24]
0.3	13567.97	35.03				._pow [25]
0.2	13601.06	33.09	67133904	0.00	0.00	.malloc [17]
0.2	13631.88	30.82				.__xlfdeallocg [11]
0.2	13662.19	30.31				._fast_copy [26]
0.2	13691.06	28.87	67133899	0.00	0.00	.free [13]
0.2	13716.73	25.67				.qincrement1 [27]

Bild 3.49: Laufzeitanalyse des Programmes

Durch die Leistungssteigerung der heutigen Rechner ist es möglich, auch größere Strukturen abzubilden. Auf der IBM RS6000/SP-256 dauert beispielsweise eine Zeitschleife unter Verwendung des in Kapitel 3.3 beschriebenen Betonstoffgesetzes und einer Anzahl von 120.000 Partikeln ca. 14 CPU-Sekunden pro Prozessor bei Verwendung von 16 Prozessoren. Hierbei ist noch zu beachten, daß im Dreidimensionalen gegenüber einer zweidimensionalen Simulation natürlich ein Vielfaches an Partikeln bei der Kontaktsuche beteiligt ist. In Bild 3.49 ist das Laufzeitverhalten des Programmes unter Verwendung von 120.000 Betonpartikeln dargestellt. Hier ist zu erkennen, daß die meiste Zeit die Suchroutine "mklst3" mit über 30% in Anspruch nimmt. Die Subroutine, in der die Erhaltungsgleichungen und Dehn- sowie Rotationsraten ausgewertet

werden, nimmt ca. 27% in Anspruch. Die Systemkommunikation ".kickpipe", ".readsocket" nimmt mit insgesamt 16% einen relativ hohen Prozentsatz in Anspruch, was mittlerweile allerdings behoben werden konnte.

Im Folgenden sei die grundlegende Vorgehensweise der Parallelisierung erläutert.

Zunächst muß dem Programm die Anzahl "NPROC" der verwendeten Prozessoren mitgeteilt werden. Dies geschieht durch Setzen einer Option beim Starten des jobs und durch Aufruf der dementsprechenden Subroutinen innerhalb des Programmes. Da die Beschleunigungen nicht während der gesamten Berechnung benötigt werden, werden sie als allozierbarer array $a_{1,2,3}[LAENGE]$ deklariert, wobei "LAENGE" **nicht** der Gesamtpartikelanzahl "N" entspricht. Bei der Simulation wird nun die Berechnung der Beschleunigungen auf "NPROC" Prozessoren verteilt. Jeder Prozessor hat also $ANTEIL=(N+(NPROC-1))/NPROC$ Berechnungen durchzuführen. Die Feldlänge "LAENGE" der Beschleunigungsvektoren entspricht der Feldlänge "ANTEIL", d.h. die Daten werden auf die einzelnen Prozessoren aufgeteilt. Somit ist eine optimale Speicherplatznutzung gewährleistet. Näheres siehe im nächsten Abschnitt. Jeder Prozessor hat innerhalb des Programmes eine Nummer RANK, die von 0 bis NPROC-1 läuft.

Am Einfachsten wäre es, allen Prozessoren auch alle Daten zur Verfügung zu stellen. Somit müßten keine Daten über MPI-Subroutinen der unterschiedlichen Prozessoren ausgetauscht werden. Vor den rechenintensiven Schleifen, wie z.B. zur Ermittlung der Beschleunigungen oder des Geschwindigkeitsgradienten, könnten dann die zu bestimmenden Größen auf die einzelnen Prozessoren aufgeteilt und anschließend wieder zusammengefügt werden (siehe Bild 3.50). Dies sei kurz anhand der Beschleunigungsberechnung erläutert.

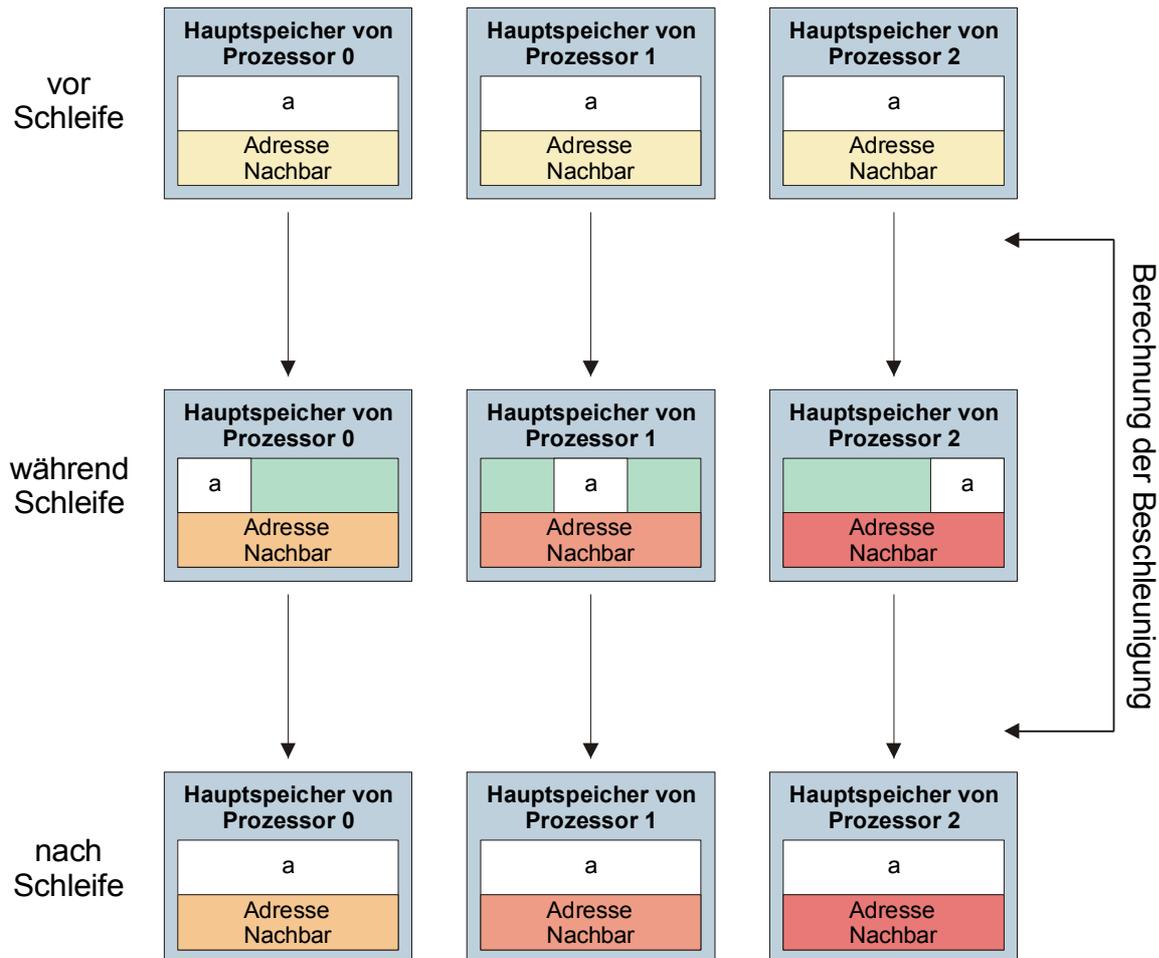


Bild 3.50: Parallelisierungsvariante 1

Würden beispielsweise drei Prozessoren verwendet, würden bei einer Anzahl von 900 Partikeln von Prozessor 0 die Ermittlung der Beschleunigungsvektoren der Partikel 1 bis 300, sowie das Suchen deren Nachbarpartikel, von Prozessor 1 die Berechnung der Beschleunigungen der Partikel 301 bis 600, sowie das Suchen deren Nachbarpartikel und von Prozessor 2 die Ermittlung der Beschleunigungen der Partikel 601 bis 900 und deren Nachbarsuche durchgeführt. Dies ist möglich, da zur Berechnung der Beschleunigung $a_{1,2,3}$ des Partikels i keine weiteren Beschleunigungen $a_{1,2,3}$ der Partikel j erforderlich sind. Alle übrigen Größen, wie z.B. der Ortsvektor, wären allen Prozessoren in voller Größe bekannt, so daß die Aufsummierung korrekt erfolgt. Nach der Berechnung soll das Programm wieder in serieller Berechnungsweise fortfahren. Dies würde durch Aufruf der entsprechenden Subroutine im Programm geschehen. Der schematische Ablauf dieser Parallelisierungsvariante ist in Bild 3.50 unter Verwendung von drei Prozessoren dargestellt. Es sei noch ange-

merkt, daß die Liste mit den Nachbarpartikeln nicht dieselbe Größe wie das Feld besitzt, in der die Beschleunigungen abgespeichert sind, wie man vielleicht aus Bild 3.50 schließen könnte. Die verkettete Liste, in der die Adressen der Nachbarpartikel und weitere Daten abgespeichert sind, wird nach der Berechnung der Beschleunigungen nicht wieder „zusammengesetzt“ und deren Inhalt ist natürlich für jeden Prozessor verschieden. Dies sollen die unterschiedlichen Farben in Bild 3.50 verdeutlichen. Die Parallelisierung der übrigen Programmteile geschieht dementsprechend.

Eine bessere Methode, die letztendlich auch gewählt wurde, ist die jeweiligen Daten schon vor Beginn der Rechnung auf die einzelnen Prozessoren zu verteilen (siehe Bild 3.51). Somit kann enorm an Speicherplatz gespart werden, vor allem unter Verwendung vieler Prozessoren, was sich auch auf das Laufzeitverhalten günstig auswirkt, da Daten, die mehrmals im Laufe eines Zeitschrittes benötigt werden, abgespeichert werden können und nicht aus Speicherplatzproblemen erneut berechnet werden müssen. Näheres dazu ist in Kapitel 3.12.2.3 zu finden. Das Problem bei der Aufteilung der Daten auf die verschiedenen Prozessoren ist, daß zur korrekten Summenbildung Daten der jeweiligen Prozessoren ausgetauscht werden müssen. Um das Laufzeitverhalten des SPH-Codes nicht zu verschlechtern, wurde ein aufwendiger Datenaustausch der Prozessoren über MPI-Unterprogramme vermieden. Stattdessen wurde vor Berechnungen, bei denen Daten der Prozessoren ausgetauscht werden müssen, Hilfsfelder angelegt, in denen die erforderlichen Daten allen Prozessoren zugänglich gemacht wurden. Nach diesen Berechnungen wurde der Speicherplatz für die Hilfsfelder wieder freigegeben (siehe Bild 3.51).

Der Nachteil dieser Parallelisierung besteht darin, daß eine Nachbarsuche im gesamten Problemgebiet, d.h. für sämtliche Partikel durchgeführt wird. Sinnvoller wäre es, eine Nachbarsuche nur in Untergebieten durchzuführen, z.B. gemäß Bild 3.52. Hierbei ist das Problem zu lösen, Untergebiete zu finden, so daß bei gleichmäßiger Partikelteilung auf die Prozessoren der Datenaustausch minimiert wird. Um dies zu gewährleisten, müssen die Untergebiete sich überschneiden. Das Problem ist, daß aufgrund der großen Deformationen der Struktur die Untergebiete wäh-

rend der Berechnung sehr oft (dynamisch) bestimmt werden müssen. Enorm zeitintensiv ist die Neuauflteilung der Partikeldaten auf die einzelnen Prozessoren.

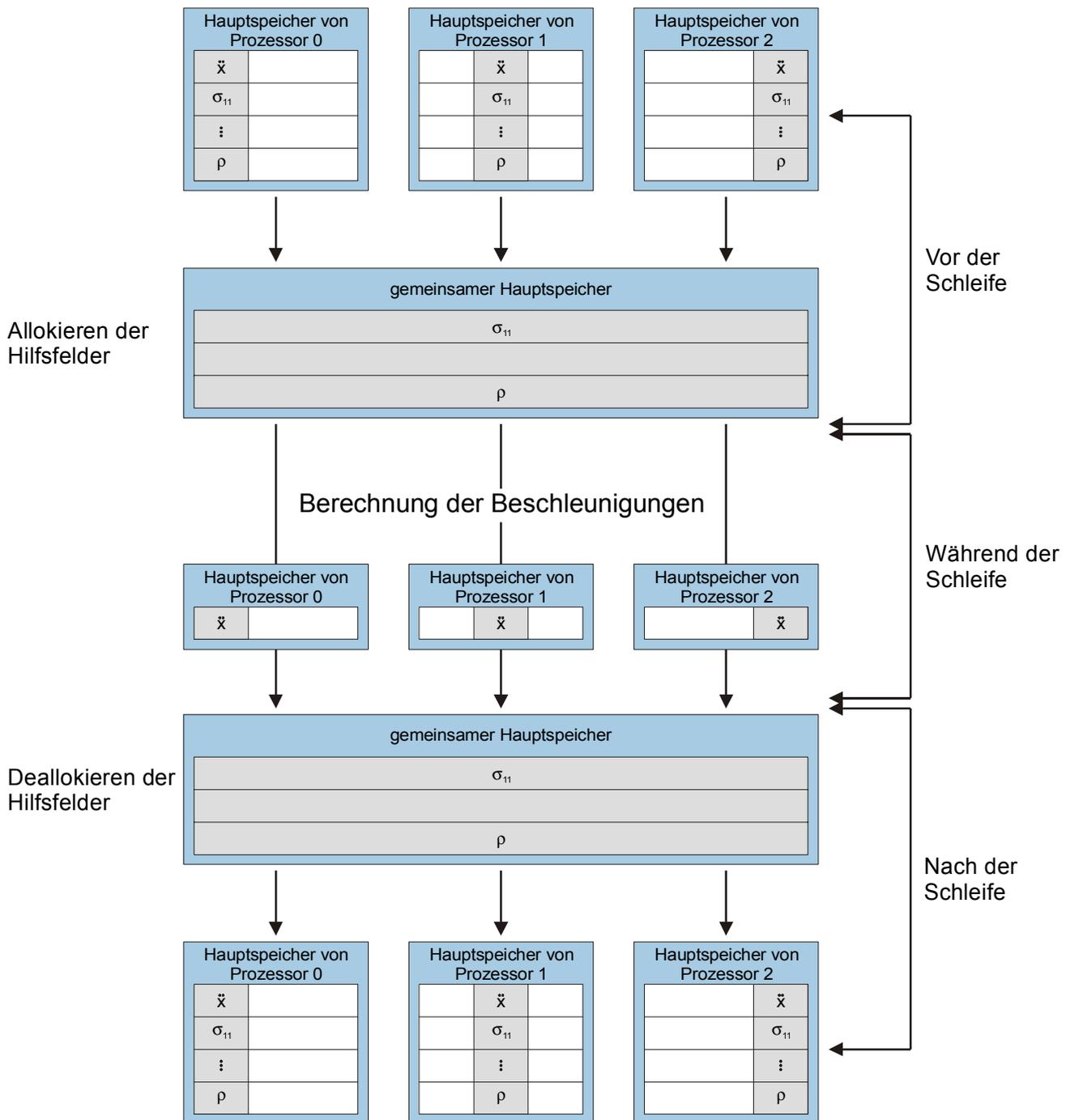


Bild 3.51: Parallelisierungsvariante 2

Har [132] schlägt vor, einen Prozessor (Prozessor 0) nur für den Datenaustausch bereitzustellen. Hierbei werden alle Informationen an diesen Prozessor geschickt, der die Daten sammelt und dann zu den anderen Prozessoren sendet. Diese Technik hat zwei Nachteile, erstens muß der

Prozessor 0 genügend Hauptspeicher zur Verfügung haben und zweitens ist der Datenaustausch enorm. Wenn die Daten statisch gemäß Bild 3.52 ausgehend von der Anfangspartikelkonfiguration auf die einzelnen Prozessoren verteilt werden, hat sich gezeigt, daß die Systemkommunikation mehr CPU-Zeit in Anspruch nimmt als sämtliche Berechnungen einschließlich der Nachbarsuche. Dies liegt darin begründet, daß die Untergebiete bei der Verformung der Struktur sich gemäß der ihnen zugeordneten Partikel vergrößern, was aufgrund der Eindringung von Partikeln der benachbarten Prozessoren zu einem enormen Datenaustausch führt. Besonders bei steigender Prozessoranzahl und großen Deformationen wird das Laufzeitverhalten des Programmes drastisch schlechter. Brown et al. [35] gelang es mithilfe RCB-Technik (recursive coordinate bisectioning), die Neuverteilung der Partikeldaten auf die einzelnen Prozessoren drastisch zu minimieren. RCB teilt das gesamte Problemgebiet in rechteckige bzw. quaderförmige Untergebiete auf, so daß jeder Prozessor gleich viele Partikeldaten enthält. RCB hat den großen Vorteil, daß die Neuauflistung der Daten auf die einzelnen Prozessoren bei kleineren Partikelbewegungen gering bleibt. Aufgrund des enormen Programmieraufwandes wird von einer solchen Variante jedoch abgesehen.

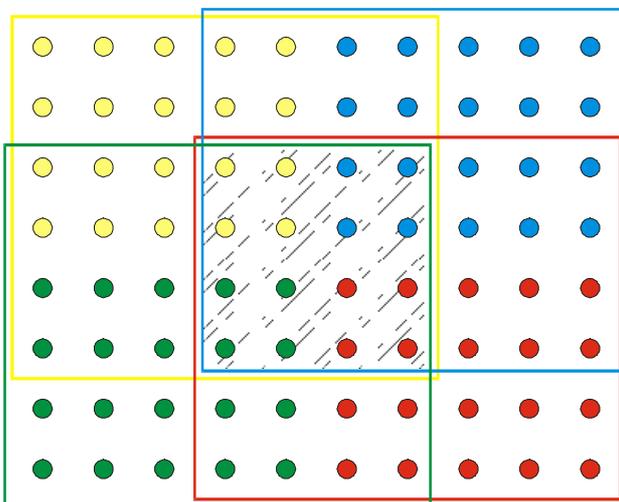


Bild 3.52: Statische Aufteilung der Partikeladressen und -daten auf die verschiedenen Prozessoren

3.12.2.3 Laufzeitverhalten und Speicherplatz

In Kapitel 3.12.2.2 ist der Ablauf der Berechnungen der Beschleunigungen schematisch erläutert worden. Die Adressen und gegebenenfalls noch weitere Daten der Nachbarpartikel werden in einer verketteten Liste abgespeichert. Der Inhalt der Liste könnte auch in ein Feld gespeichert werden. Hier wird schneller auf die Daten zugegriffen, was die Laufzeit des Programmes verbessert. Der Nachteil der Speicherung der Nachbarpartikel in ein Feld ist der, daß vor Beginn der Nachbarsuche noch nicht bekannt ist, wie viele Nachbarpartikel es insgesamt gibt, so daß großzügig Speicherplatz allokiert werden müßte, was vor allem bei großen Partikelzahlen zu akuten Speicherplatzproblemen führt. Deshalb werden die Partikeladressen nicht in einem Feld, sondern in einer verketteten Liste gespeichert. Hierfür wird ein selbstdeklariertes Datentyp verwendet:

```

TYPE neighbor
  REAL(KIND = param)    :: parp, pars, parq
  INTEGER                :: pari
  TYPE(neighbor)        :: next
END TYPE neighbor

TYPE(neighbor), TARGET  :: first
TYPE(neighbor), POINTER :: temp, last

```

Bild 3.53: Selbstdeklariertes Datentyp

Bei der verketteten Liste handelt es sich um eine dynamische Datenstruktur, die beliebig wachsen und schrumpfen kann. Ihre Elemente sind Strukturen mit einem rekursiv definierten Datentyp, d.h. einem Datentyp mit einer Zeigerkomponente gleichen Typs. Diese Zeigerkomponente zeigt in jedem Element der Liste auf das jeweils nachfolgende Objekt, sofern eines existiert. Ist die Liste einmal erstellt - dies geschieht in jeder Zeitschleife neu - erfolgt der Zugriff über den Zeiger „last“ (siehe Bild 3.53) bis die Liste vollständig durchlaufen ist. Das Prinzip der verketteten Liste ist in Bild 3.54 dargestellt.

Die Parallelisierung wurde so durchgeführt, daß alle Daten auf die einzelnen Prozessoren verteilt wurden. So konnte nicht nur der benötigte Hauptspeicher optimal ausgenutzt, sondern auch das Laufzeitverhalten

optimiert werden. Es können neben den Adressen der Nachbarpartikel auch noch die Ableitungen der Wichtungsfunktion in der verketteten Liste abgespeichert werden. Somit stehen in der Liste eine INTEGER und drei REAL, die 4 bzw. jeweils 8 Byte in Anspruch nehmen. Geht man davon aus, daß jedes Partikel ca. 120 Nachbarpartikel besitzt – dies entspricht ungefähr der maximalen Anzahl der Nachbarpartikel in der Ausgangssituation –, müßten für jedes Partikel $120 \cdot (4 + 3 \cdot 8) = 3360$ Byte zur Verfügung stehen. Auf der SP-256 stehen 250 MByte im "general-pool" bzw. 500 MByte Hauptspeicher im "production-pool" zur Verfügung. Man kann auf Kosten hoher Wartezeiten auch noch mehr Speicherplatz allokalieren. Würde man allen Prozessoren sämtliche Partikeldaten zur Verfügung stellen, dürften unter oben genannten Speicherplatzanforderungen im "general-pool" mit maximal 74.704 und im "production-pool" 148.808 Partikeln gerechnet werden. Es kommt noch der Speicherplatz der anderen Felder wie Spannungen, Dehnungen, Dichte, etc. hinzu, die für die Simulation erforderlich sind. Ein Ausweg wäre, den Speicherplatz für die verkettete Liste nur in Programmteilen temporär anzufordern, in dem er auch benötigt wird. So kann der Speicherplatz für die „linked list“ während der Berechnung der Beschleunigungen, Dehnraten, etc. allokiert und direkt anschließend deallokiert werden. Dies würde allerdings bedeuten, daß eine zeitintensive Nachbarsuche im Programm während einer Zeitschleife mehrmals durchlaufen werden müßte. Durch die Aufteilung der Daten auf die jeweiligen "NPROC" Prozessoren wird der Speicherplatzbedarf um $1/\text{NPROC}$ reduziert. Somit können im oben beschriebenen Beispiel bei Verwendung von 16 Prozessoren – weniger wurden in der Regel nicht verwendet – die maximale Partikelanzahl auf ca. 1.195.264 im "general-pool" und 2.380.928 im "production-pool" erhöht werden.

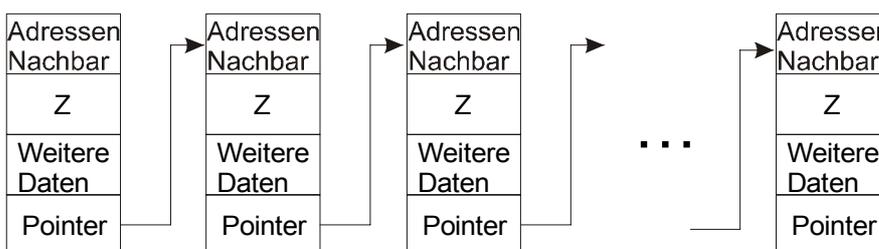


Bild 3.54: Verkettete Liste

Des Weiteren kann das Laufzeitverhalten durch eine geschickte Partikelnummerierung verbessert werden. Hierzu sei zunächst die Architektur eines Knotens auf der SP-SMP betrachtet (siehe Bild 3.55). Der Knoten enthält eine CPU-Karte mit 2 voneinander unabhängigen CPUs vom Typ POWER3. Jede CPU verfügt über einen level 1- und level 2-Cache (siehe Bild 3.55). Bei der Berechnung werden die benötigten Daten in 128 Byte-Blöcken (Cachelines) vom Hauptspeicher zunächst in den level 1-Cache und gleichzeitig in den level 2-Cache geladen. Die für die Berechnung notwendigen Adressen und Daten werden mit der Taktfrequenz des Prozessors (375 MHz) *einzel*n aus dem 64 KB großen level 1-Cache geholt. Geänderte Daten wandern mit einer Taktfrequenz von 250 MHz in den 8 MB großen level 2-Cache (siehe Bild 3.55). Müssen Daten und Adressen für die Berechnung aus dem level 2-Cache oder sogar aus dem Hauptspeicher geholt werden, so geschieht dies in *128 Byte-Blöcken* mit einer Frequenz von 250 MHz vom level 2-Cache und 93,75 MHz vom Hauptspeicher. Beim Zugriff auf den Hauptspeicher müssen sich beide CPUs die Hauptspeicherbandbreite teilen. Es ist also geschickt, möglichst viele Daten, die für einen Rechenzyklus benötigt werden im level 1-Cache zu lagern. Bei der Berechnung der SPH-Summen sind die Nachbarpartikel so zu numerieren, daß sie im Hauptspeicher nahe beieinander liegen, damit möglichst viele Partikel, die für die Aufsummierung benötigt werden, bei der Berechnung im level 1-Cache liegen.

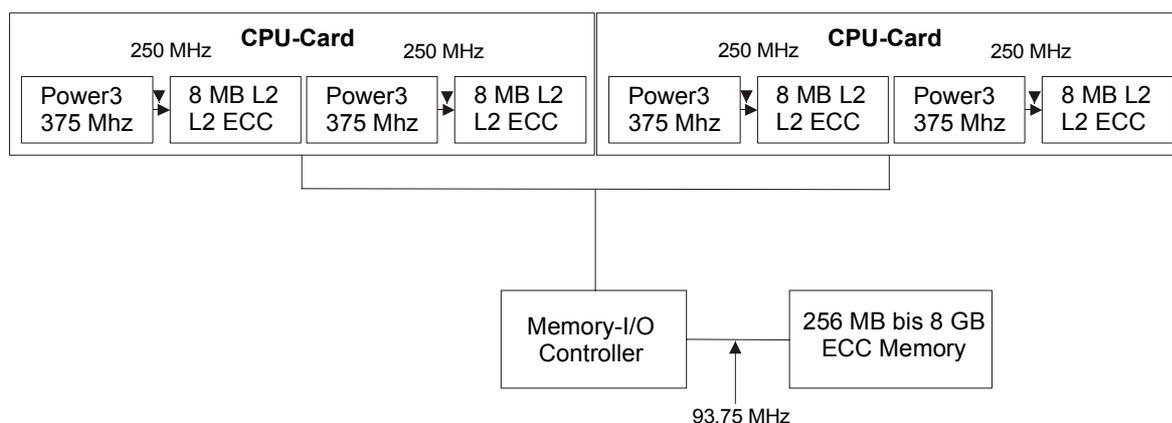


Bild 3.55: Systemarchitektur eines Knotens auf der IBM RS 6000 SP-SMP

Diese Problematik entspricht einer Bandbreitenoptimierung bei der FE-Methode. Die Grundidee der Bandbreitenoptimierung ist das Aufteilen des generierten Netzes in eine Stufenstruktur. Hierzu wählt man ein

Startpartikel, das die Partikelnummer 1 enthält. Zu einer ersten Stufe werden die Partikel zusammengefaßt, die dem Partikel 1 benachbart sind. Sie werden fortlaufend durchnummeriert. Zur zweiten Stufe werden die Partikel zusammengefaßt, die den Partikeln der ersten Stufe benachbart sind. Sie werden fortlaufend weaternummeriert. Die einzelnen Stufen sind somit kreisförmig um das Anfangspartikel angelegt. Allgemein kann gesagt werden, daß die Bandbreite um so geringer ist, je mehr Stufen zur Erfassung aller Knoten erforderlich sind. Die entscheidende Aufgabe besteht darin, mit möglichst wenig Aufwand ein Startpartikel mit zugehöriger Zahl an Stufen zu finden. Einen geeigneten Algorithmus zur Bandbreitenoptimierung findet man in fast jeder FE-Literatur, siehe z.B. Duddeck [84].

Wie bereits erwähnt, wurden die Berechnungen auf der "alten" IBM RS6000/SP-256 und der "neuen" IBM RS6000/SP-smp durchgeführt. Gerechnet wurde hauptsächlich auf den "wide nodes", die teilweise bis zu 2 GB Hauptspeicher zur Verfügung haben. Es besteht die Möglichkeit, mit maximal 64 Prozessoren die Berechnung durchzuführen. Bild 3.56 zeigt die benötigte Rechenzeit pro Zeitschleife jeweils zu Beginn der Simulationen für verschiedene Partikelanzahlen unter Verwendung von 16 Prozessoren für das Standard SPH-Verfahren. Bild 3.57 zeigt die Laufzeit exemplarisch für 380.000 Betonpartikel unter Verwendung unterschiedlicher Prozessorenanzahlen für die "alte" und "neue" IBM RS6000/SP. Gut erkennbar ist, daß eine Verdopplung der Prozessorenanzahl besonders unter Benutzung vieler Prozessoren leider keine Halbierung der Rechenzeit mit sich bringt.

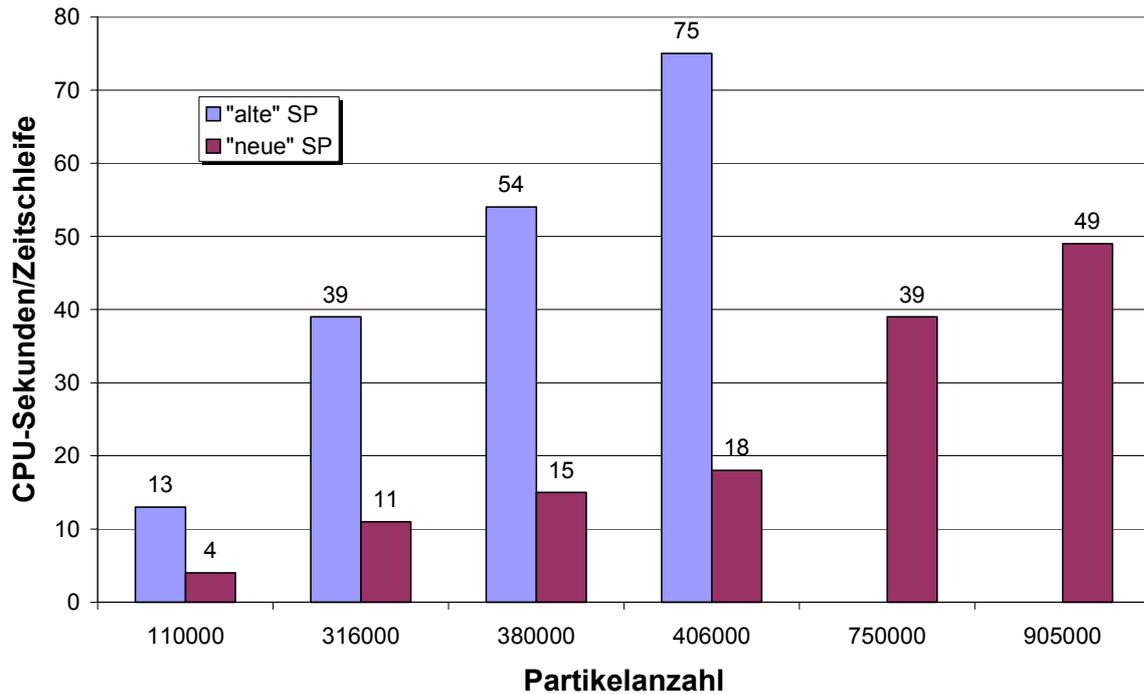


Bild 3.56: Benötigte CPU-Zeit pro Zeitschleife zu Beginn der Simulation für unterschiedliche Partikelanzahlen unter Verwendung der Standard SPH-Methode und 16 Prozessoren

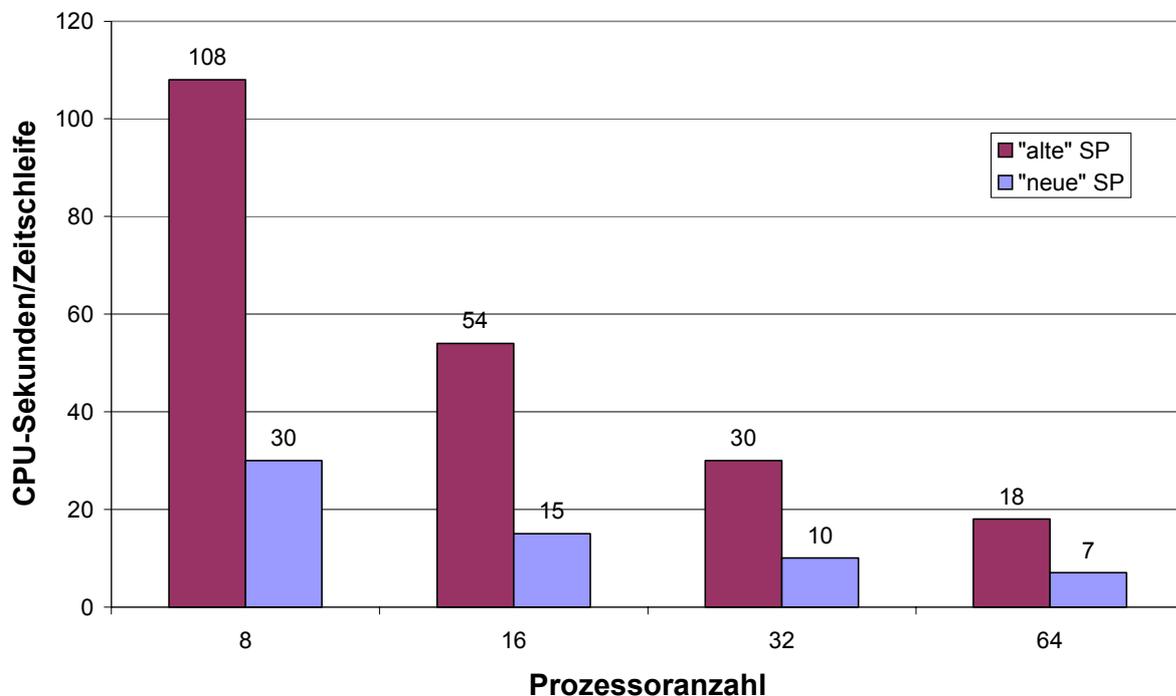


Bild 3.57: Benötigte CPU-Zeit pro Zeitschleife für 380.000 Betonpartikel unter Verwendung der Standard SPH-Methode und verschiedener Prozessoranzahlen

Bei Verwendung sehr vieler (>20) Prozessoren kann die Wartezeit so lange andauern, daß es effektiver ist, mit weniger (<20) Prozessoren zu rechnen. In der Regel wurden 16 Prozessoren verwendet. Da jeder Knoten nicht mit einem anderen Benutzer geteilt werden muß, entspricht die CPU-Zeit eines Knotens ungefähr der gesamten REAL-Zeit, wenn der job sofort anläuft. Ein Nachteil ist der, daß die Berechnung max. 240 CPU-Minuten pro Knoten dauern darf. Anschließend wird der job automatisch abgebrochen. Hierfür müssen alle für die Fortsetzung des Rechenjobs benötigten Informationen, wie z.B. die Spannungen, die Dichte, die Interpolationslänge, etc. auf ein "restart-file" herausgeschrieben und bei Fortsetzung des jobs ins Rechenprogramm wieder eingelesen werden. Da die Prozessoren nicht alle exakt dieselbe Rechenzeit benötigen, ist es wichtig, den job abzurechnen, wenn der „langsamste“ Prozessor die maximale CPU-Zeit erreicht hat. Der Aufruf eines Kettenjobs kann z.B. durch folgendes Shell-Skript realisiert werden:

```
# Hier steht der eigentliche job
# Wenn der Return-Code des zuletzt aufgerufenen Programms gleich 0 ist, wird der
# Nachfolgejob gestartet. Anderenfalls wird die Jobkette abgebrochen
#
if [ $? = „0“ ]
then
#
# Evtl. noch Ein-/Ausgabedateien kopieren
#
# Start des naechsten Jobs in der Jobkette mittels job_submit
#
    job_submit ....
else
    echo „Fehler im vorhergehenden Job“
    echo „Abbruch der Jobkette“
fi
```

Bild 3.58: Realisierung einer Jobkette, aus [99]

3.12.2.4 Datenstrukturen

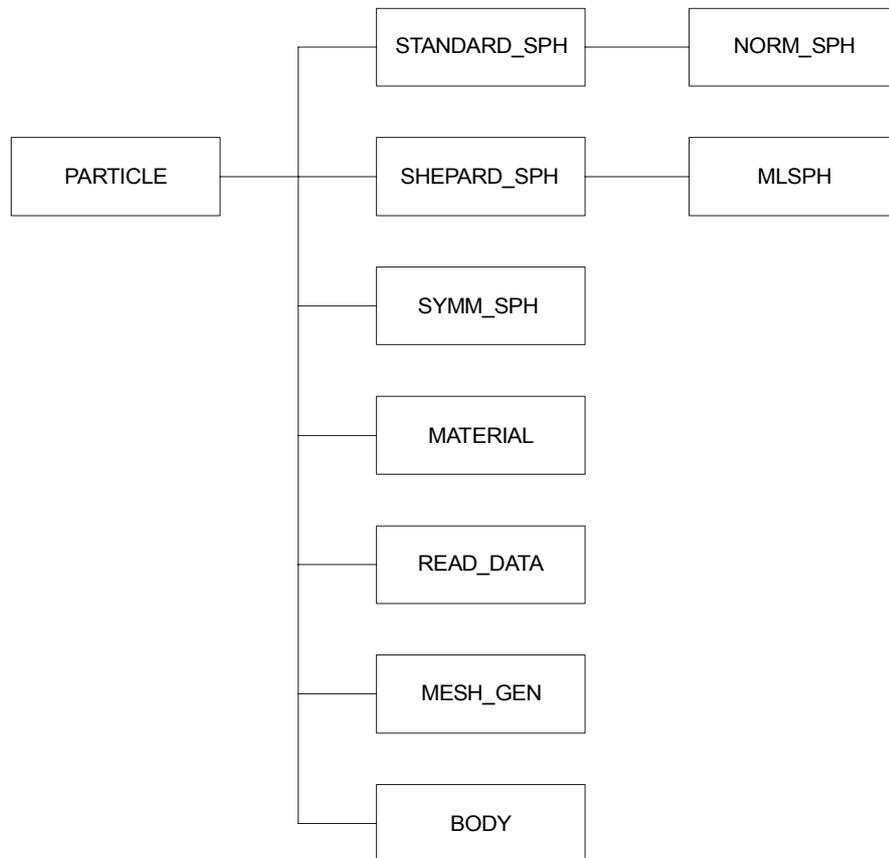


Bild 3.59: Implementierte Module

Es sei gleich zu Beginn erwähnt, daß die Organisation und die Strukturierung der Daten und Unterprogramme sich im Laufe der Programmierung des SPH-Codes recht häufig verändert hat und noch verändert. Wie schon eingangs erwähnt, wird auf die Datenstruktur nur kurz eingegangen. Alle Daten und die Unterprogramme, die von allen SPH-Methoden benötigt werden, wie z.B. die Subroutine zur Nachbarsuche, werden im Modul PARTICLE definiert. Diese Daten und Unterprogramme werden allen weiteren Modulen zur Verfügung gestellt. In den Modulen STANDARD_SPH, SYMM_SPH und SHEPARD_SPH sind alle für diese SPH-Verfahren notwendigen Unterprogramme implementiert. Die Methoden des STANDARD_SPH Moduls bzw. des SHEPARD_SPH Moduls werden in die Module NORM_SPH bzw. MLSPH vererbt. Dort sind alle für diese Methoden benötigten Unterprogramme implementiert. Im Modul MATERIAL sind alle in Kapitel 5 erläuterten Stoffgesetze implementiert. Desweiteren existiert eine Schnittstelle für weitere Materialgesetze. Das

Programm für das Einlesen der für die Berechnung benötigten Daten ist im Modul READ_DATA vorhanden. Daten wie die Dichte, die Interpolationslänge, die Partikelmasse oder die Schallgeschwindigkeit der verschiedenen Körper stellt der Modul BODY bereit. In einem Modul MESH_GEN sind die Subroutinen zur Erzeugung der Netze implementiert. Die Struktur der einzelnen Module ist in Bild 3.59 abgebildet.

3.12.3 Postprocessing

Im Postprocessing werden die Ergebnisse aus der Berechnung visualisiert. Zur Darstellung von "Contour-Plots" wurde das Programm UNIRAS benutzt. Soll beispielsweise der Spannungsverlauf eines bestimmten Referenzknotens über die Zeit oder über die Dehnung dargestellt werden, geschieht dies mit Hilfe des Tabellenkalkulationsprogrammes EXCEL.

Ein Vorzug der SPH-Methode ist der, daß sich durch die Trennung der Partikel die Fragmentierung automatisch ergibt. Ein Problem ist nun, daß die Berechnung nicht lange genug durchgeführt werden kann, um die vollkommene Fragmentierung simulieren zu können, da durch die Verschmierung der Dichte im Raum es zu einer starken volumetrischen Expansion einzelner Partikel kommen kann. Es wird hier ein Fragment-suchalgorithmus verwendet, der dem Suchalgorithmus zum Auffinden von Nachbarpartikeln sehr ähnelt.

Im Laufe der Berechnung kann aufgrund der hohen Beanspruchung die Interpolationslänge einzelner Partikel sehr stark zunehmen (auch abnehmen). Physikalisch bedeutet dies, daß der Einflußbereich, d.h. das Volumen, des Partikels ebenfalls stark expandiert. Aufgrund der Massenerhaltung nimmt somit die Dichte des Partikels bedeutend ab. Das Problem eines großen Einflußbereiches bei der Fragmentsuche liegt darin, daß wegen der begrenzten Rechenzeit sich die Partikel nicht weit genug voneinander entfernen können. Somit würden sich zu große Fragmente ergeben, obwohl wegen der geringen Dichte einzelner Partikel man lediglich von "Staubkörnern" sprechen kann, die während einer Explosion entstehen. Diese "Staubkörner" sind derart geschädigt, daß sie nicht mehr in der Lage sind, Zug- und Druckspannungen aufzunehmen. Somit können sie als einzelnes Fragment, als sog. "Staubkorn" identi-

ziert werden. Um die zu starke Volumenexpansion einzelner Partikel zu vermeiden, benutzt Hiermaier [146] eine Partikelteilung zur höheren Dichteauflösung, auf die wie in Kapitel 3.3.3 bereits erwähnt hier verzichtet wird. Im Gegensatz zu Mandell et al. [193] werden die "Staubkörner" erst zum Schluß der Berechnung entfernt, wenn sie einen gewissen Abstand von den Außenabmessungen der fragmentierten Struktur haben. Mandell et al. [193] löschen Partikel, dessen skalares Schädigungsmaß D gleich 1 beträgt, um innere Risse sichtbar zu machen. Da hier weniger die entstehenden Risse, sondern vielmehr die Größe der Trümmer interessieren, wird eine andere Prozedur gewählt. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß während der Berechnung keine Partikel gelöscht werden, so daß die Massenerhaltung während der gesamten Berechnung erfüllt ist. Lediglich zur Fragmentsuche werden Partikel nach bestimmten Kriterien, die im Folgenden erläutert werden, gelöscht.

Die Fragmentsuche geschieht nun folgendermaßen:

Zunächst wird ein Feld "flag[N]" für jedes Partikel definiert und initialisiert, das zur Identifikation der Fragmente dient. "N" ist hierbei die Partikelanzahl. Als Wert wird ihm während der Suche ein INTEGER-Wert zugewiesen. Gleiche INTEGER-Werte bedeuten, es handelt sich um dasselbe Fragment. Um sog. "Staubkörner" aus der Fragmentsuche herauszunehmen, erfolgt zuerst eine "Dichte-Abfrage". Unterschreitet die Dichte einen bestimmten vorgegebenen Wert, so werden diese Partikel aus der Fragmentsuche herausgenommen, d.h. dem Feld "flag" wird ein sehr großer INTEGER-Wert zugewiesen, der die Partikelanzahl übersteigt.

Die Fragmentsuche geschieht nun ähnlich der Kontaktsuche während der Berechnung. Es wird überprüft, ob die Partikel j in den Einflußbereich des Partikels i fallen. Ist dies der Fall, so wird dem Feld "flag" der Partikel j der gleiche INTEGER-Wert zugewiesen wie dem Partikel i . "Staubkörner" werden bei der Fragmentsuche durch eine Abfrage ausgeschlossen. Bei der Fragmentsuche in den in Kapitel 5 durchgeführten Berechnungen hat sich gezeigt, daß das „numerische“ Volumen zu zu großen Fragmenten führt. Statt des numerischen Volumens wurde nun das materielle Volumen zur Fragmentsuche herangezogen, d.h. anstelle des Interpolationsradius von $2h$ wurde bei der Nachbarsuche der geometrische Kugelradius r benutzt. Kennt man das Volumen $V=m/\rho$, läßt sich der Ra-

dius r leicht bestimmen. Die genaue Anwendung wird in Kapitel 5 erläutert.

Ist die Suche abgeschlossen, muß nur noch die Anzahl der Partikel mit dem gleichen "flag"-Wert ermittelt und aufsummiert werden. Da die Masse jedes einzelnen Partikels bekannt ist, erhält man somit die jeweilige Fragmentmasse.

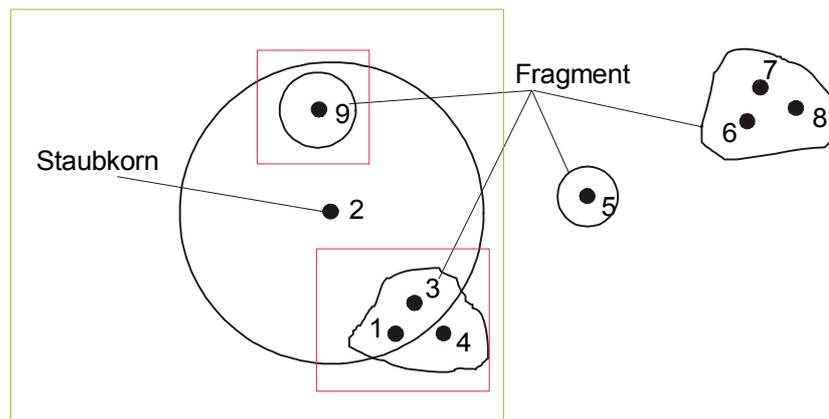


Bild 3.60: Beispiel einer Fragmentsuche

Anhand eines Beispiels soll die Fragmentsuche einmal kurz erläutert werden. In Bild 3.60 sind 4 Fragmente und der materielle Interpolationsbereich des "Staubkorns" 2 schematisch dargestellt. Würde Partikel 2 nicht als Staubkorn aufgefaßt werden, würden die Partikel 1,2,3,4 und 9 als ein einzelnes Fragment betrachtet werden. Statt dessen existieren drei Fragmente, Partikel 1,3,4, das Partikel 9 und das "Staubkorn", Partikel 2. In Bild 3.61 sind die Werte des Feldes "flag" zur Fragmentidentifizierung aufgelistet.

Partikel $i = 1$ flag(i) = 1
 Partikel $i = 2$ flag(i) = 9999999
 Partikel $i = 3$ flag(i) = 1
 Partikel $i = 4$ flag(i) = 1
 Partikel $i = 5$ flag(i) = 5
 Partikel $i = 6$ flag(i) = 6
 Partikel $i = 7$ flag(i) = 6
 Partikel $i = 8$ flag(i) = 6
 Partikel $i = 9$ flag(i) = 9

Bild 3.61: Fragmentidentifikationsfeld

3.13 Verifikationsrechnungen

Um das Programm zu testen, wurden verschiedene Rechnungen durchgeführt. Zum einen wurden Berechnungen gemacht, die mit analytischen Ergebnissen verglichen werden können, wie beispielsweise ein Stab mit Geschwindigkeitsrandbedingung oder ein elastischer Stoß. Zum anderen wurden Impakt- und Explosionsberechnungen mit einem einfachen linear-elastisch ideal-plastischen Werkstoffmodell durchgeführt, um die generelle Einsatzfähigkeit des SPH-Codes zu zeigen. Deren Ergebnisse werden den dementsprechenden Ergebnissen des kommerziellen FE-Programmes ABAQUS gegenübergestellt. In Anhang B werden die Ergebnisse dargestellt und diskutiert. Es sei noch erwähnt, daß es bei diesen Berechnungen lediglich um Verifikationsrechnungen des Programmes handelt. Es galt hier nicht, konkrete Versuche mit möglichst realistischem Werkstoffverhalten abzubilden. Dies ist Gegenstand des 5. Kapitels. Die Berechnungen dort beschränken sich auf den Werkstoff Beton.

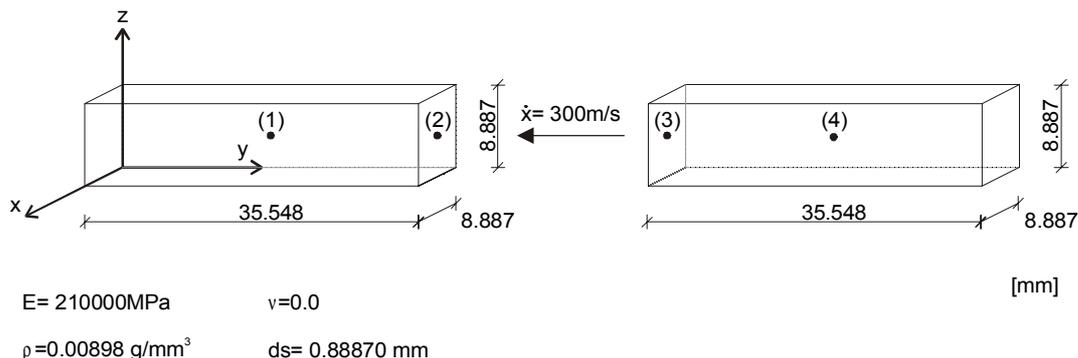


Bild 3.62: Elastischer Stoß

Zunächst wird der elastische Stoß zweier Körper betrachtet. Die Körper haben sowohl gleiche Abmessungen als auch gleiche Materialparameter. Die Abmessungen und Materialparameter sind Bild 3.62 zu entnehmen. Der Partikelabstand beträgt $dx=dy=dz=0.87 \text{ mm}$. Dem ersten Körper wird eine Anfangsgeschwindigkeit von $v=300 \text{ m/s}$ zugewiesen. Bild 3.63 und Bild 3.64 zeigen die Geschwindigkeitsverläufe der beiden Körper exemplarisch in den 4 Referenzknoten für zwei verschiedene Dämpfungen. Es ist gut zu erkennen, daß durch die stärkere numerische Dämpfung der gestoßene Körper die Geschwindigkeit von 300 m/s nicht

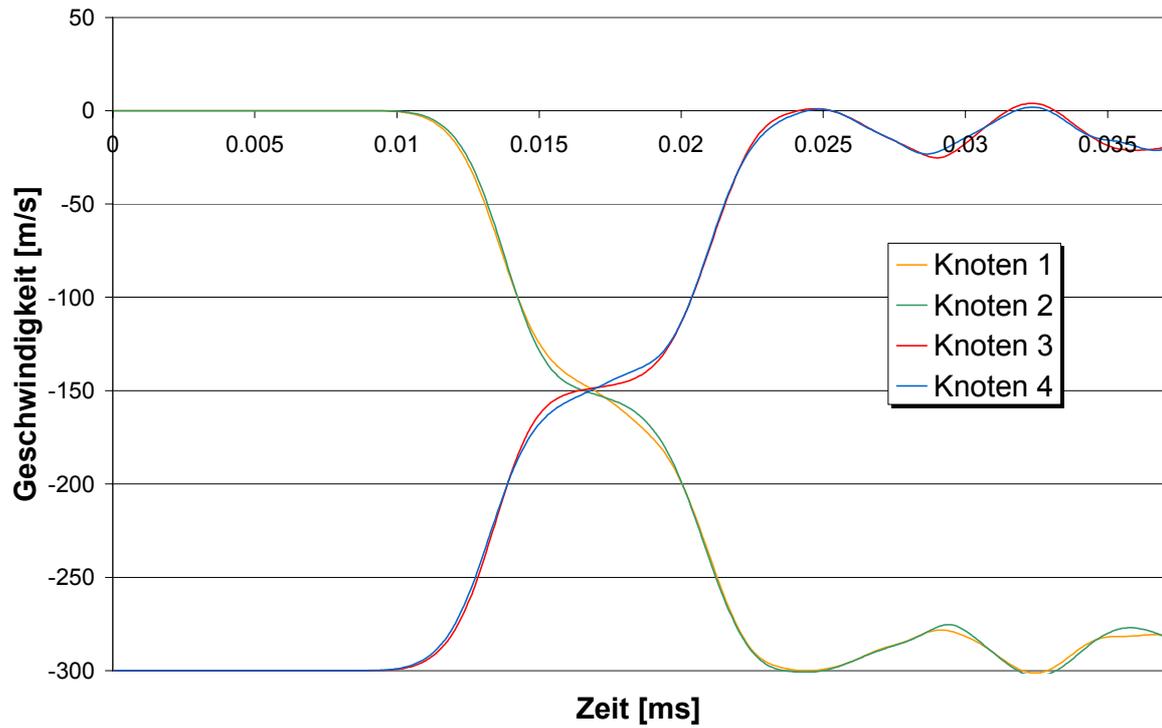


Bild 3.63: Geschwindigkeitsverlauf in den Referenzknoten bei einer Dämpfung von $\alpha=1,0$ und $\beta=2,0$

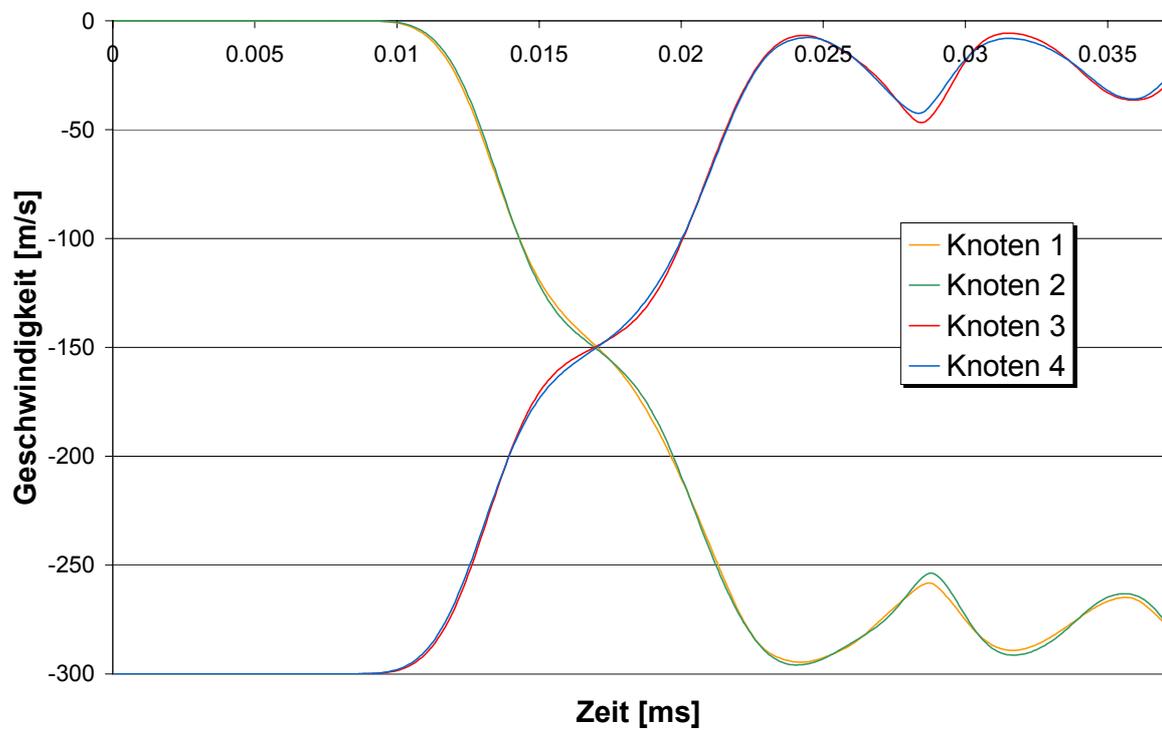


Bild 3.64: Geschwindigkeitsverlauf in den Referenzknoten bei einer Dämpfung von $\alpha=2,0$ und $\beta=2,5$

exakt erreicht bzw. der stoßende Körper nicht zum Stillstand kommt (siehe Bild 3.64). Setzt man die Parameter α zu 1 und β zu 2 kann der elastische Stoß besser simuliert werden. Hierbei wird schon deutlich, daß die Parameter der künstlichen Viskosität möglichst klein zu wählen sind, um zu starke Dissipationen zu vermeiden.

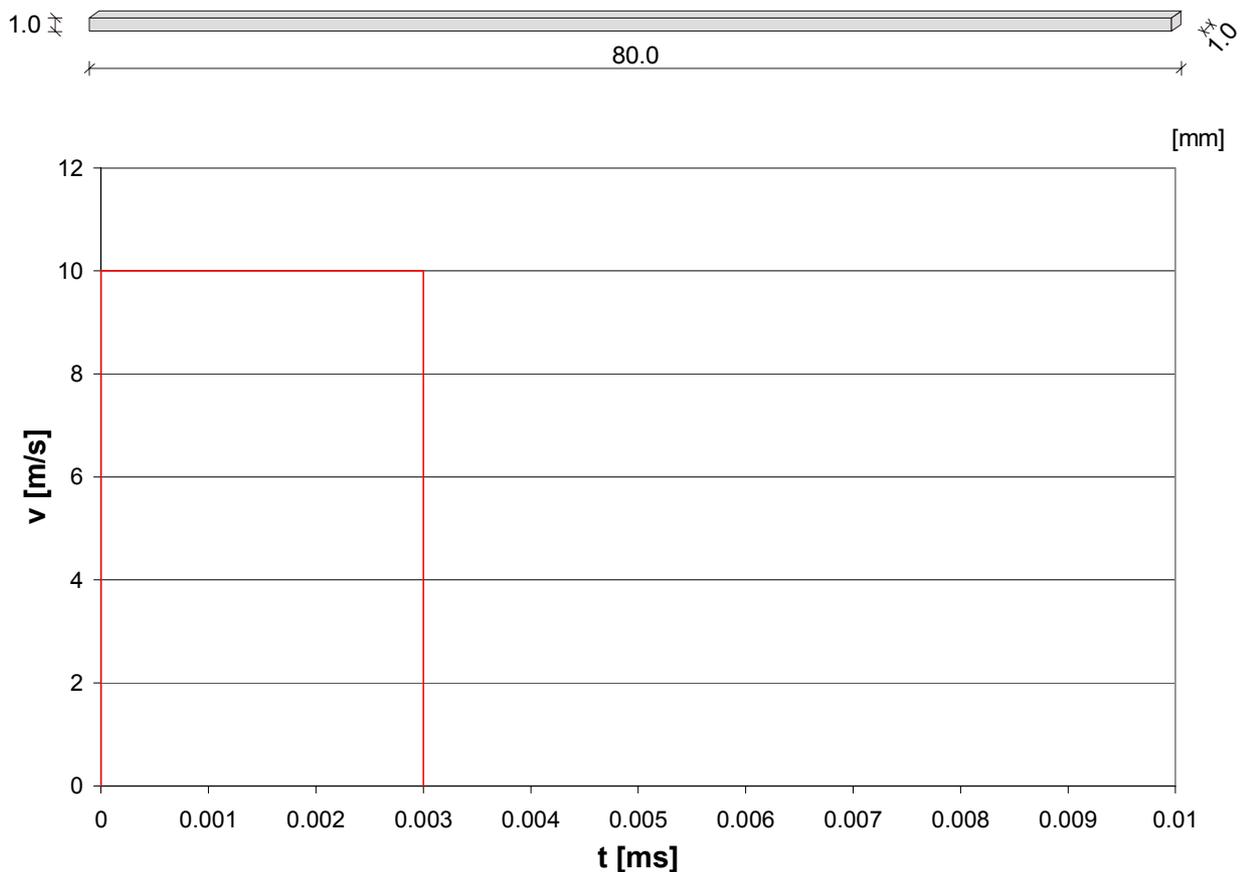


Bild 3.65: Stab mit Geschwindigkeitsrandbedingung

Als nächstes Beispiel wird ein 80 mm langer Stab mit einer Geschwindigkeitsrandbedingung gemäß Bild 3.65 belastet. Es wird wieder linear elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Der E-Modul wird wie auch im ersten Beispiel zu 210.000 MPa und die Poisson-Zahl zu 0.0 angenommen. Der Stab wird mit ABAQUS und dem SPH-Code dreidimensional diskretisiert, obwohl es sich hierbei eigentlich nur um ein eindimensionales Problem handelt. Die Geometriedaten sind Bild 3.65 zu entnehmen. Der Partikelabstand wird zu 1,0 mm gewählt, ebenso werden in ABAQUS quadratische reduziert integrierte Kontinuumselement mit einer Kantenlänge von 1,0 mm verwendet.

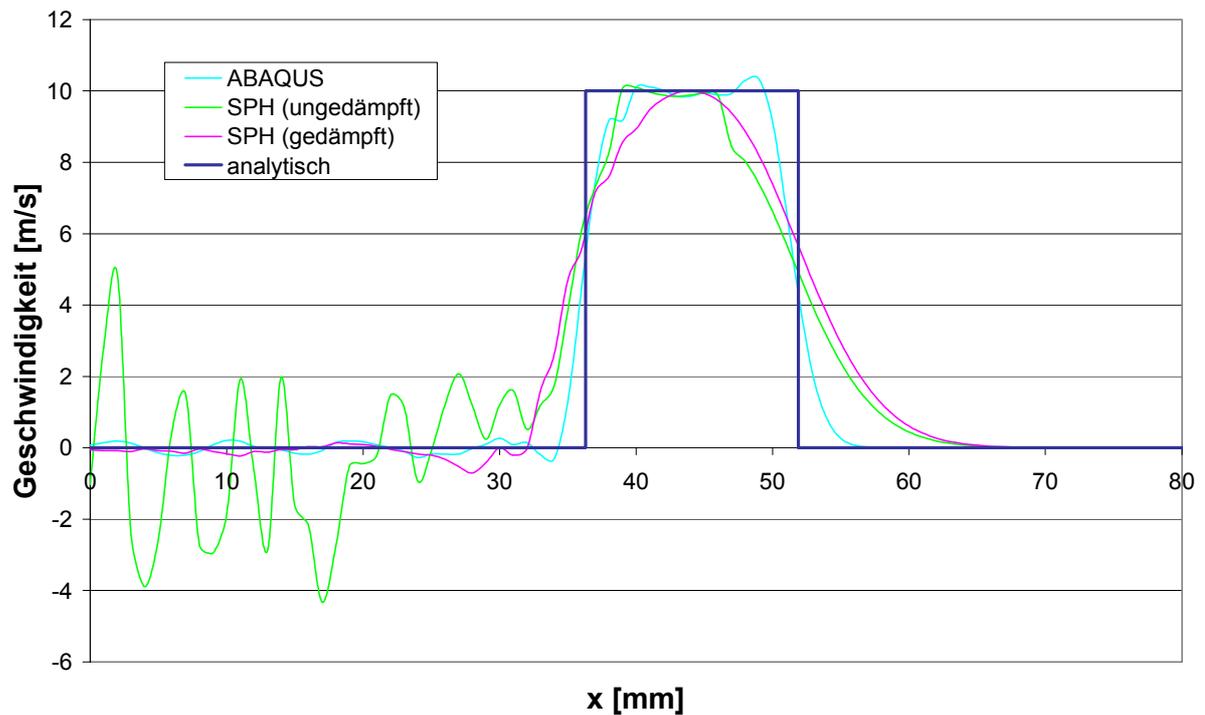


Bild 3.66: Geschwindigkeitsprofil im Stab nach 0,01 ms

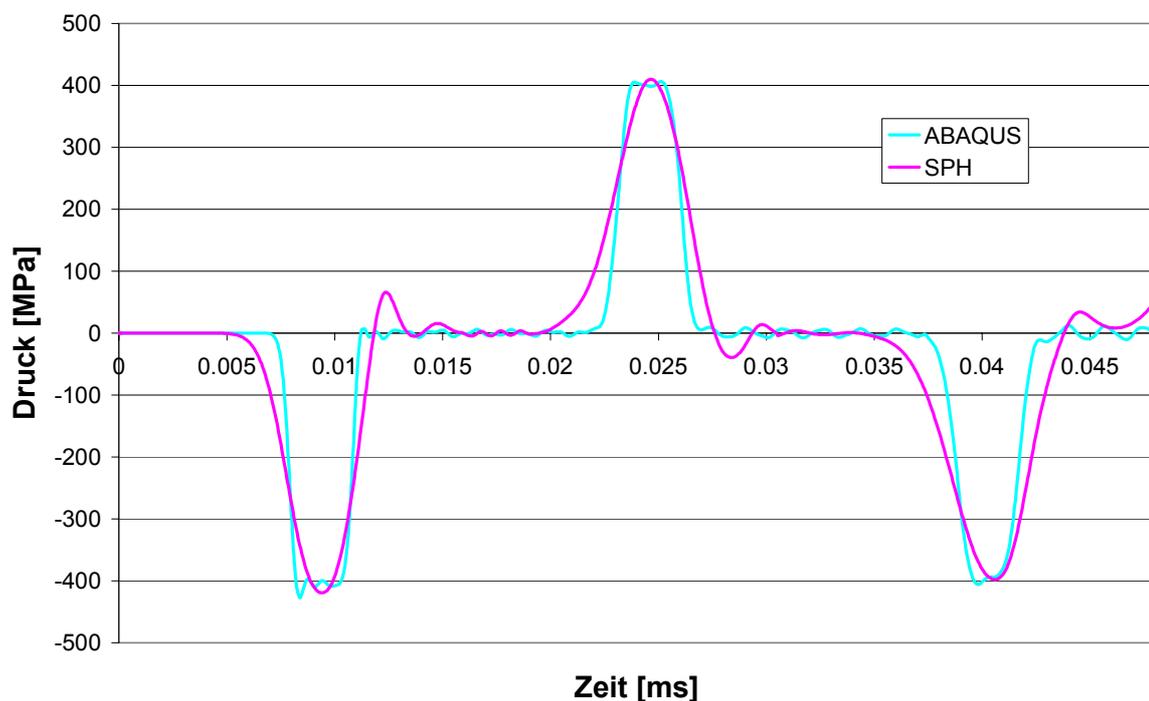


Bild 3.67: Druckverlauf von einem Partikel in Querschnittsmitte und einem z=43 mm

Bild 3.66 zeigt den Geschwindigkeitsverlauf im Stab nach 0,01 ms. Bei der SPH-Simulation ohne Verwendung einer künstlichen Viskosität treten starke Oszillationen auf. Bei der zweiten Simulation (grüne Kurve) wer-

den die Parameter α und β jeweils zu 1,0 gesetzt. In Bild 3.67 ist der Druckverlauf an der Stelle $z=43$ mm dargestellt.

4 Stoffgesetze

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den verwendeten Werkstoffgesetzen für Metalle, dem Sprengstoff und vor allem dem Beton. Bevor auf die Stoffgesetze im Einzelnen eingegangen wird, soll ein kurzer Überblick, siehe Kapitel 4.1 und 4.2, über die theoretischen Grundlagen bei der Stoffgesetzentwicklung gegeben werden, da sie insbesondere bei der Entwicklung des Betonstoffgesetzes von Schmidt-Hurtienne [238] eine wesentliche Rolle spielen (siehe Kapitel 4.5). Eine detailliertere Darstellung der Voraussetzung dafür findet man beispielsweise bei Chen et al. [41].

4.1 Das elastoplastische Format

Unter Plastizität versteht man die irreversible Verformung eines Materials. Die klassische Plastizitätstheorie wurde zunächst für Metalle entwickelt und später auf andere Werkstoffe, wie z.B. Beton übertragen. Die Plastizität basiert auf folgenden Grundlagen (siehe Häußler-Combe [135]):

1. Einer Grenzfunktion, die alle zulässigen Spannungs- bzw. Dehnungszustände eingrenzt, und die als sog. Fließbedingung diejenigen Spannungs- und Dehnungszustände bestimmt, die mit einer plastischen Verformung verbunden sein können.
2. Einer Potentialfunktion, deren Gradienten als sog. Fließregel die Richtung von plastischen Dehnungszuwächsen angibt.
3. Einem sog. Belastungskriterium, das den Fall der Be- und Entlastung festlegt.

Des Weiteren werden zur Beschreibung des plastischen Materialverhaltens sog. interne Zustandsvariablen eingeführt, die von Spannungen bzw. Dehnungen abhängen. Der Zusammenhang zwischen ihnen wird durch sog. Evolutionsgleichungen hergestellt. Häufig wird versucht, den internen Zustandsvariablen unter Einbeziehung phänomenologischer Aspekte eine mechanische Deutung zu geben. Sie sind damit theoretisch im Versuch meßbar, da jede mechanische Größe letztendlich auf

Kraft, Weg und Zeit zurückgeführt werden kann. Praktisch scheitert dies in der Regel an meßtechnischen Schwierigkeiten.

Die Beschreibung der Plastizität erfolgt hier nicht im Spannungsraum, sondern im Dehnungsraum in Anlehnung an das in Kapitel 4.5 beschriebene Betonstoffgesetz. Die Darstellung der Fließbedingung und der Fließregel erfolgt in Abhängigkeit der Dehnungen und einer internen Zustandsvariablen q_p . Abweichend von der allgemeinen Terminologie bestimmt hier die plastische Fließregel ($\dot{\boldsymbol{\sigma}}_p = \dot{\lambda}_p : \mathbf{m}_p$) nicht die Relaxationsspannung, sondern direkt das plastische Dehnungsinkrement $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ (vgl. Gl. 4.4). Diese Form ermöglicht eine sehr schnelle Ermittlung der neuen plastischen Dehnungen innerhalb des Stoffgesetzes ohne zusätzliche Iteration. Bei der Zustandsvariablen q_p kann es sich sowohl um eine skalare sowie tensorielle Größe handeln. Somit ergibt sich die Fließbedingung:

$$F_p(\boldsymbol{\epsilon}, q_p) = 0 \quad (4.1)$$

Unter Voraussetzung der Konvexität der Fließfläche F_p läßt sich das Belastungskriterium formulieren:

$$\mathbf{n}_p = \frac{\partial F_p(\boldsymbol{\epsilon}, q_p)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.2)$$

$$F_p(\boldsymbol{\epsilon}, q_p) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{n}_p > 0$$

wogegen sich mit

$$F_p(\boldsymbol{\epsilon}, q_p) = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{n}_p \leq 0 \quad (4.3)$$

die Entlastung abgrenzt.

Für den Fall der Belastung ergibt sich die Potentialfunktion G_p mit der Fließregel

$$\mathbf{m}_p = \frac{\partial G_p(\boldsymbol{\epsilon}, q_p)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\lambda}_p : \mathbf{m}_p$$

wobei der sog. plastische Lagrangemultiplikator $\dot{\lambda}_p$ über die Kuhn-Tucker-Bedingung

$$F_p \leq 0, \quad \dot{\lambda}_p \geq 0, \quad F_p \dot{\lambda}_p = 0 \quad (4.5)$$

an die Grenzfunktion gekoppelt ist. Im Falle $F_p \equiv G_p$ spricht man von einer assoziierten Plastizität. Diese Gleichungen werden um ein Evolutionsgesetz für die interne Zustandsvariable q_p in Abhängigkeit der plastischen Dehnungen ergänzt:

$$q_p = q_p(\boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (4.6)$$

Aus den angegebenen Basisgleichungen ist das plastische Dehnungsincrement $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ bzw. ein Wert für $\dot{\lambda}_p$ abzuleiten. Zunächst ergibt sich aus der Kuhn-Tucker-Bedingung für den Fall einer fortlaufenden plastischen Verformung, d.h. $\dot{\lambda}_p > 0$, daß auch die Fließbedingung fortlaufend einzuhalten ist. Damit ist die Konsistenzbedingung

$$\dot{F}_p = 0 \quad \text{falls} \quad \dot{\lambda}_p > 0 \quad (4.7)$$

einzuhalten. Die in \dot{F}_p implizierte zeitliche Abhängigkeit von F_p ergibt sich indirekt über die zeitliche Entwicklung von $\boldsymbol{\varepsilon}$ und q_p . Damit kann die Konsistenzbedingung unter Berücksichtigung von Gleichung 4.4 und 4.6 in der Form

$$\frac{\partial F_p(\boldsymbol{\varepsilon}, q_p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p(\boldsymbol{\varepsilon}, q_p)}{\partial q_p} \frac{\partial q_p(\boldsymbol{\varepsilon}_p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} : \mathbf{m}_p = 0 \quad (4.8)$$

dargestellt werden.

Hierin werden die Bestandteile des zweiten Anteils zum Parameter

$$H_p = - \frac{\partial F_p(\boldsymbol{\varepsilon}, q_p)}{\partial q_p} \frac{\partial q_p(\boldsymbol{\varepsilon}_p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} : \mathbf{m}_p \quad (4.9)$$

zusammengefaßt. Offensichtlich gibt H_p an, wie sich die Fließbedingung in Abhängigkeit von dem akkumulierten Betrag λ_p der plastischen Deh-

nung ändert. Aus Gleichung 4.8 folgt unter Berücksichtigung von Gleichung 4.9:

$$\dot{\lambda}_p = \frac{1}{H_p} \mathbf{n}_p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.10)$$

und mit Gleichung 4.4 das plastische Dehnungsinkrement

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{1}{H_p} (\mathbf{m}_p \otimes \mathbf{n}_p) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} . \quad (4.11)$$

Mit der Forderung, daß die Dissipation im Falle einer plastischen Verformung positiv ist, ergeben sich gewisse Forderungen an die Gestalt des plastischen Potentials. Näheres dazu siehe Häußler-Combe [135].

4.2 Das Schädigungsformat

Schädigungskonzepte basieren auf der Beobachtung einer abnehmenden Materialsteifigkeit mit zunehmender Beanspruchung wie sie z.B. der Werkstoff Beton aufweist. Durch die Bildung von Mikrorissen verringert sich der effektive Betonquerschnitt (siehe Bild 4.1). Bei gleicher äußerer Belastung nimmt die effektive Beanspruchung und damit die Dehnung zu. Somit verringert sich die makroskopisch beobachtete Steifigkeit. Im Folgenden soll ein kurzer Überblick über die Kontinuumsschädigungsmechanik gegeben werden, der für das Verständnis des in Kapitel 4.5 erläuterten Betonstoffgesetzes wesentlich ist. Eine nähere Diskussion ist dem Artikel von Carol et al. [38] zu entnehmen.

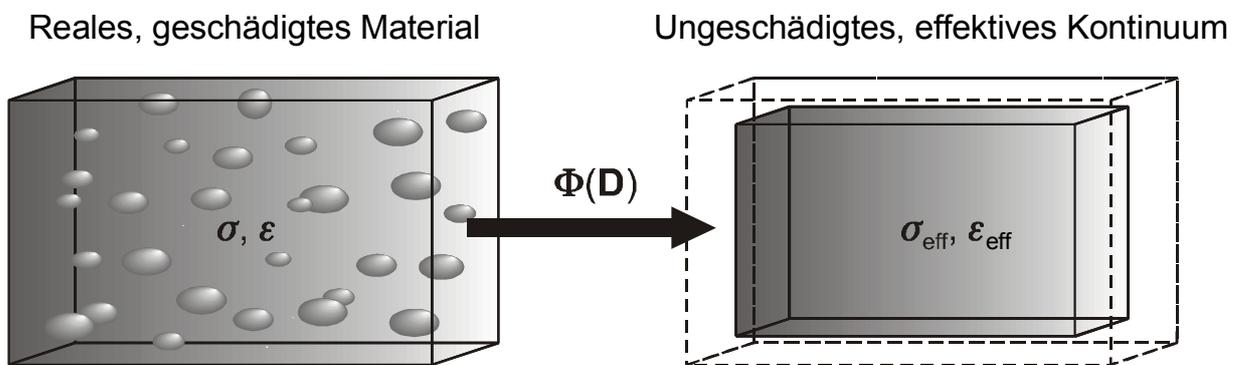


Bild 4.1: Äquivalenzprinzip der Schädigungsmechanik, aus [238]

Die Grundlage des Schädigungskonzeptes ist die Aufteilung des Dehnungstensors in einen elastischen und einen schädigenden Anteil:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d \quad (4.12)$$

Desweiteren wird ein nichtlineares elastisches isotropes Werkstoffverhalten vorausgesetzt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_d : \boldsymbol{\varepsilon} , \quad (4.13)$$

Damit ergeben sich die Spannungsinkremente durch

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\mathbf{E}}_d : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{E}_d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.14)$$

Darin beschreibt der erste Term der rechten Seite in Gleichung 4.14 den schädigenden Dehnungsanteil $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d$. Mit der Beziehung

$$\mathbf{E}_d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d = -\dot{\mathbf{E}}_d : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.15)$$

kann Gleichung 4.14 wie folgt formuliert werden:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_d : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d) \quad (4.16)$$

Damit ist bei einem gegebenen aktuellen Tensor \mathbf{E}_d das Inkrement $\dot{\mathbf{E}}_d$ festzulegen, um $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d$ zu erhalten. Unter der Annahme isotropen Materialverhaltens läßt sich folgende Beziehung zwischen der geschädigten Steifigkeitsrate und der Anfangsteifigkeit angeben:

$$\dot{\mathbf{E}}_d = -\dot{D}\mathbf{E} \quad (4.17)$$

Hierbei bezeichnet D ein skalares Schädigungsmaß. Nimmt man \mathbf{E} als isotropen, linear elastischen Stofftensor an, uns setzt man im Anfangszustand $D=0$, erhält man den geschädigten Steifigkeitstensor über Integration von Gleichung 4.17:

$$\mathbf{E}_d = (1 - D)\mathbf{E} \quad (4.18)$$

Löst man Gleichung 4.15 nach $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d$ auf, ergibt sich mit Gleichung 4.18 folgende Beziehung:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d = \frac{\dot{D}}{1 - D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.19)$$

Damit ist zunächst die Richtung der Schädigungsdehnung gegeben. Es fehlt noch der Betrag von $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d$. Hierzu wird die Schädigung D betrachtet, die als interne Zustandsvariable dem Material ein quantitatives Maß an Schädigung zuordnet. Dabei wird angenommen, daß die Schädigungsvariable D nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Der Fall $D=0$ beschreibt den Zustand ohne Schädigung, der Fall $D=1$ den voll geschädigten Zustand. Ansonsten wird in Analogie zur Plastizitätstheorie vorgegangen.

Es wird eine "Fließbedingung" für die Schädigung in Abhängigkeit der Dehnungszustände und der internen Zustandvariablen D formuliert:

$$F_d(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = 0 \quad (4.20)$$

In Analogie zur Plastizitätstheorie läßt sich das Belastungskriterium bestimmen:

$$\mathbf{n}_d = \frac{\partial F_d(\boldsymbol{\varepsilon}, D)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.21)$$

$$F_d(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{n}_d > 0$$

Schließlich wird mit $\dot{D} = \dot{\lambda}_d$ (siehe [238]) angenommen, daß sich das Inkrement der Schädigungsspannung, aus dem sich nach einer einfachen Umformung das Inkrement der Schädigungsdehnung errechnen lässt, im Fall der Belastung aus

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_d = \dot{D} \mathbf{m}_d, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d = -\dot{D} \mathbf{E}^{-1} : \mathbf{m}_d \quad (4.22)$$

ergibt, wobei für eine skalaren Schädigung mit Gl. 4.15

$$\mathbf{m}_d = \frac{1}{1-D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.23)$$

ist. Das Schädigungsinkrement ist wiederum über die Kuhn-Tucker-Bedingung

$$F_d \leq 0, \quad \dot{D} \geq 0, \quad F_d \dot{D} = 0 \quad (4.24)$$

an die Belastungsfläche gekoppelt.

In Analogie zur Plastizität läßt sich wiederum eine Potentialfunktion G_d konstruieren, so daß

$$\mathbf{m}_d = \frac{\partial G_d(\boldsymbol{\varepsilon}, D)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.25)$$

gilt. Es fehlt noch ein Evolutionsgesetz für die interne Zustandsvariable D , die in Abhängigkeit der Schädigungsdehnung $\boldsymbol{\varepsilon}_d$ ausgedrückt werden kann:

$$D = D(\boldsymbol{\varepsilon}_d) \quad (4.26)$$

Geht man wie bei der Plastizitätstheorie vor, erhält man letztendlich:

$$H_d = - \frac{\partial F_d(\boldsymbol{\varepsilon}, D)}{\partial D} \quad (4.27)$$

$$\dot{\lambda}_d = \dot{D} = \frac{1}{H_d} \mathbf{n}_d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.28)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_d = \frac{1}{H_d} (\mathbf{m}_d \otimes \mathbf{n}_d) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.29)$$

Abschließend sei noch angemerkt, daß die Plastizitätstheorie und die Schädigungsmechanik zur Stoffgesetzentwicklung gekoppelt werden können. In Kapitel 4.5 wird ein solches gekoppeltes Betonstoffgesetz vorgestellt. Eine allgemeinere und ausführlichere Darstellung über die Verknüpfung von der Plastizität mit der Schädigung kann beispielsweise in Carol et al. [38] und Schmidt-Hurtienne [238] nachgelesen werden.

4.3 Zustandsgleichung für den Sprengstoff

Sprengstoffe lassen sich in zwei Gruppen, in deflagrierende und detonierende Sprengstoffe unterteilen. Bei einer Deflagration ist die Wärmeleitung Ursache für die Ausbreitung der Reaktionsfront, unter einer Detonation versteht man die Ausbreitung einer Stoßwelle, die mit einer exothermen chemischen Reaktion verbunden ist. Zu letzteren gehören die brisanten Sprengstoffe, die sich durch hohe Detonationsgeschwindigkeiten, 1500 bis 9000 m/s, und sehr hohe Drücke, 50 MPa bis 4000 MPa, auszeichnen. Die Gruppe der detonierenden Sprengstoffe läßt sich nochmals aufteilen in die Gruppen der Primär-, Sekundär- und Tertiärsprengstoffe. Die Primärsprengstoffe detonieren bereits durch Zündung mit Funken, Flammen oder durch Stoß. Sekundärsprengstoffe sind stoßunempfindlich und brauchen einen Zünder, um die Detonation auszulösen. In den von Herrmann [138] durchgeführten Versuchen wurde hauptsächlich Trinitrotoluol (TNT) verwendet, der mit einem Sprengstoff aus Composition B ummantelt war, welcher dazu dient, eine ebene Spannungswelle in die Struktur einzuleiten. TNT und Composition B gehören zu den Sekundärsprengstoffen. Durch Initialsprengstoffe können TNT und Composition B zur Detonation gebracht werden. Als Zündmittel wird meistens eine Sprengkapsel verwendet. Sprengkapseln explodieren oft durch eine heiße Flamme, die mit Hilfe einer Zündschnur übertragen wird. Diese erhitzt eine kleine Ladung eines Sprengstoffes, der empfindlich auf thermische Einflüsse reagiert, bis er zündet. Die Energie der Explosion wirkt auf das nachfolgende Glied der Sprengkapsel ein. Diese Hauptladung löst dann die Detonation des Sprengstoffes aus, der die Sprengkapsel umgibt. Der Gruppe der tertiären Sprengstoffe werden solche Stoffe zugeordnet, deren Explosionsfähigkeit kein primäres Verwendungsmerkmal darstellt. Einen guten Überblick über die verschiedenen Sprengstoffarten geben Klomfass et al. [169].

Der Sprengstoff im SPH-Programm wird durch Verwendung einer JWL-Zustandsgleichung abgebildet. Der Druck wird hierzu in Abhängigkeit der Anfangsdetontationsenergie E_{m0} pro Masseneinheit berechnet:

$$p = A \left(1 - \frac{\omega \rho}{R_1 \rho_0} \right)^{-R_1 \frac{\rho_0}{\rho}} + B \left(1 - \frac{\omega \rho}{R_2 \rho_0} \right)^{-R_2 \frac{\rho_0}{\rho}} + \frac{\omega \rho^2}{\rho_0} E_{m0} \quad (4.30)$$

A, B, R_1 , R_2 , ω und E_{m0} sind Materialparameter, die beispielsweise dem Dobratz [74] entnommen werden können. Zu beachten ist noch, daß gewöhnlich die Anfangsdetonationsenergie pro Volumeneinheit und nicht pro Masseneinheit angegeben wird. Indem E_{m0} durch die Anfangsdichte ρ_0 dividiert wird, kann man beide Energien ineinander umrechnen. Diese Form der Zustandsgleichung wurde in Anlehnung an das FE-Programm ABAQUS verwendet. LS-DYNA benutzt eine andere Formulierung der JWL-Zustandsgleichung:

$$p = A \left(1 - \frac{\omega}{R_1 V} \right) e^{-R_1 V} + B \left(1 - \frac{\omega}{R_2 V} \right) e^{-R_2 V} + \frac{\omega E}{V} \quad (4.31)$$

Die JWL-Zustandsgleichung wurde als sog. programmierter Abbrand implementiert, d.h. die Druckausbreitung des Sprengstoffes wird über Geometriebedingungen simuliert. Über die Detonationsgeschwindigkeit und den Zündort kann der Reaktionszeitpunkt t_d^P bestimmt werden:

$$t_d^P = \min \left[t_d^N, \sqrt{(\mathbf{x}^P - \mathbf{x}_d^N) \cdot (\mathbf{x}^P - \mathbf{x}_d^N)} / c_d \right], \quad (4.32)$$

wobei t_d^N der Zündzeitpunkt, \mathbf{x}_d^N der Zündort ist. Erreicht im Laufe der Berechnung die Zeit den Reaktionszeitpunkt t_d^P , so wird für dieses Partikel die JWL-Zustandsgleichung angewendet. Zuvor ist der Druck gleich null.

Der Druck im Sprengstoff kann einen gewissen maximalen Druck, den CJ-Druck, nicht überschreiten. In Bild 4.2 ist die p - ρ -Beziehung von TNT graphisch dargestellt. ABAQUS [1] verwendet eine sog. burn-fraction, um den Druck über mehrere Elemente zu verschmieren:

$$F_b = \min \left[1, \frac{(t - t_d^P) c_d}{B_s l_e} \right] \quad (4.33)$$

Wird diese burn-fraction auf das SPH-Programm übertragen, so werden die Drücke im SPH-Programm unterschätzt.

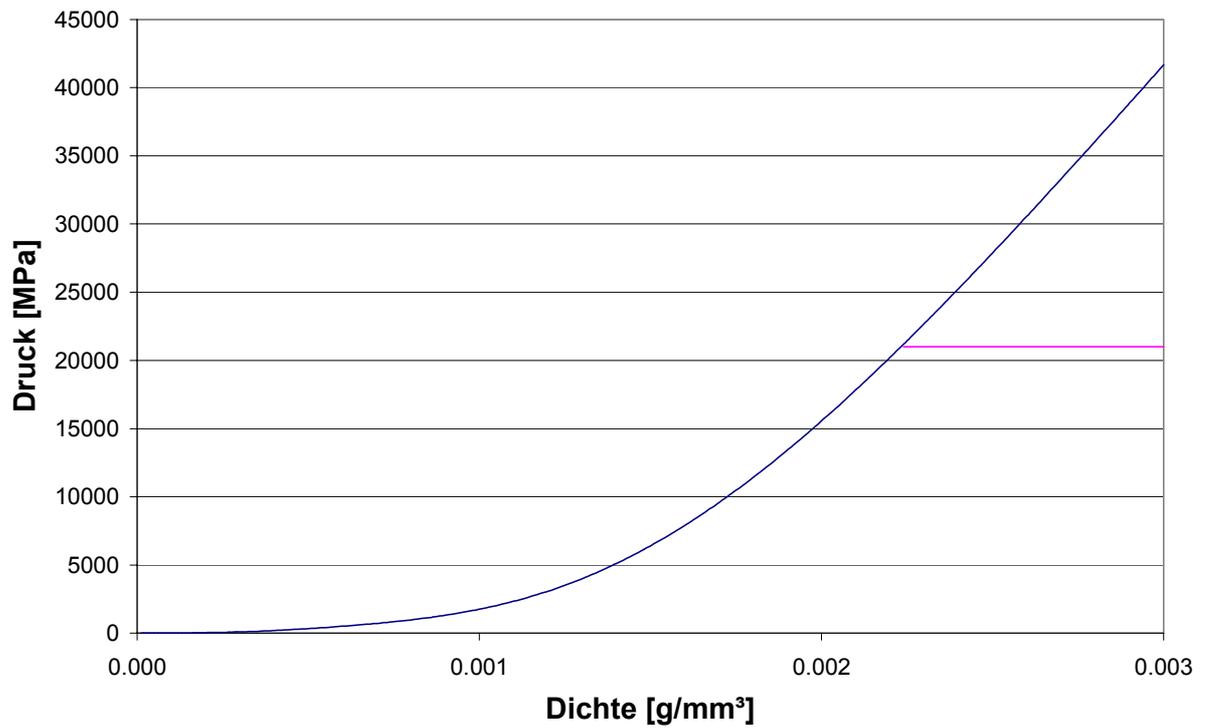


Bild 4.2: JWL-Zustandsgleichung für TNT

4.4 Elasto-plastisches Stoffgesetz

Um das SPH-Programm zu verifizieren, wurde zusätzlich zum linear elastischen Stoffgesetz noch ein linear-elastisch ideal-plastisches Werkstoffgesetz implementiert.

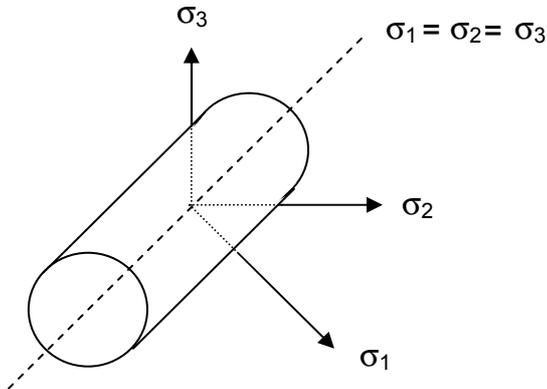


Bild 4.3: Versagensfläche für Metalle

Bei dem hier verwendeten Stoffgesetz wird der Spannungstensor in einen hydrostatischen und deviatorischen Anteil aufgespalten. Der E-Modul bzw. die Querkontraktionszahl lassen sich in einen Kompressionsmodul K und Schubmodul G umrechnen:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.34)$$

So lassen sich der hydrostatische Druck und die Deviatorspannungen bestimmen:

$$p = -K \delta_{ij} \varepsilon_{kk}$$

$$\Delta S_{ij} = G \left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{kk} \right) \Delta t \quad (4.35)$$

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n + \Delta S_{ij}$$

Als Plastizitätsfläche (siehe Bild 4.3) wird die 2. Invariante der Deviatorspannungen verwendet:

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (4.36)$$

$$F_p = J_2 - \frac{1}{3} \sigma_y^2 = 0$$

σ_y ist die einachsige Fließspannung. Bei Spannungszuständen außerhalb der Fließfläche wird der Spannungszustand wieder auf die Fließfläche projiziert. Somit lassen sich die neuen Deviatorspannungen ermitteln:

$$S_{ij,\text{red}} = S_{ij} \left(\frac{\sigma_y^2}{3J_2} \right)^{1/2} \quad (4.37)$$

Das plastische Vergleichsdehnungsinkrement ergibt sich zu:

$$d\varepsilon_{\text{eff}}^{\text{pl}} = \frac{\sqrt{3J_2 - \sigma_y^2}}{3G} \quad (4.38)$$

Materialversagen kann durch eine einfache Erweiterung simuliert werden. Hydrodynamisches Zugversagen entsteht, wenn der Druck einen gewissen minimalen Druck p_{min} unterschreitet:

$$p < p_{\text{min}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p > 0 \\ S_{ij} = 0 \\ \sigma_y = 0 \end{array} \right\}$$

Dann ist das Material nicht mehr in der Lage, Zugspannungen aufzunehmen. Die einachsige Fließspannung σ_y und somit auch die Deviatorspannungen werden für den weiteren Berechnungsablauf zu null gesetzt. Ebenso kann ein dehngestütztes Versagen simuliert werden. Hier tritt Versagen ein, wenn die effektive plastische Dehnung einen gewissen Wert überschreitet:

$$\varepsilon_{\text{eff}}^{\text{pl}} > \varepsilon_{\text{eff,max}}^{\text{pl}}$$

4.5 Das Betonstoffgesetz

Das Fragmentierungsverhalten von Beton soll im Rahmen dieser Arbeit mit Hilfe der SPH-Methode unter Verwendung eines kontinuumsmechanischen Betonstoffgesetzes untersucht werden. Hierzu wurde ein Stoffgesetz verwendet, das am Institut für Massivbau für hochdynamische Belastungen entwickelt wurde. Eine ausführliche Herleitung sowie Vorzüge gegenüber anderen Modellen findet man bei Schmidt-Hurtienne [238]. Das Stoffgesetz wurde in einigen Punkten vereinfacht.

Das Betonstoffgesetz ist ein kombiniertes Schädigungs-Plastizitäts-Modell, das die Festigkeitssteigerung, d.h. den Dehnrateneinfluß von Beton unter dynamischer Belastung berücksichtigt. Es wird im Laufe dieses Kapitels erläutert. Zunächst wird jedoch ein kurzer Überblick über das dynamische Materialverhalten von Beton gegeben, um den Bezug zur Praxis herzustellen.

4.5.1 Dynamisches Materialverhalten von Beton

Mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit ist beim Beton eine Festigkeitssteigerung zu verzeichnen. Diese Festigkeitssteigerung ist keine typische Betoneigenschaft. Sie tritt auch bei anderen Materialien auf. Allerdings ist sie bei heterogenen Werkstoffen wie Beton wesentlich ausgeprägter als bei homogenen Werkstoffen wie beispielsweise Stahl. Es wurde eine große Anzahl von Versuchen durchgeführt, um die Festigkeitssteigerung zu untersuchen. Die Ergebnisse weichen teilweise sehr stark voneinander ab. In Bild 4.4 ist die relative Zunahme der Druckfestigkeit in Abhängigkeit der Dehnrates dargestellt. Bei Dehnraten von ca. 50 s^{-1} ist eine stark überproportionale Festigkeitssteigerung zu erkennen. Auch im Zugbereich findet eine Festigkeitssteigerung statt. Hier ist sie sogar deutlich ausgeprägter (siehe Bild 4.5).

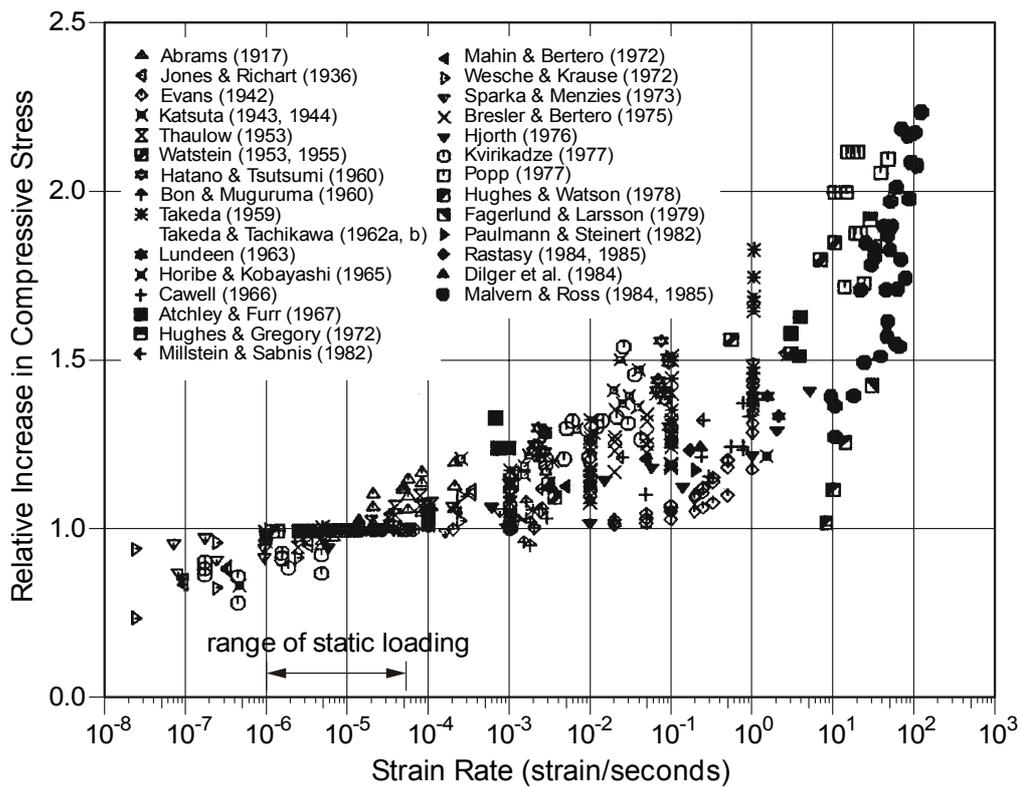


Bild 4.4: Dynamische Druckfestigkeitssteigerung von Beton

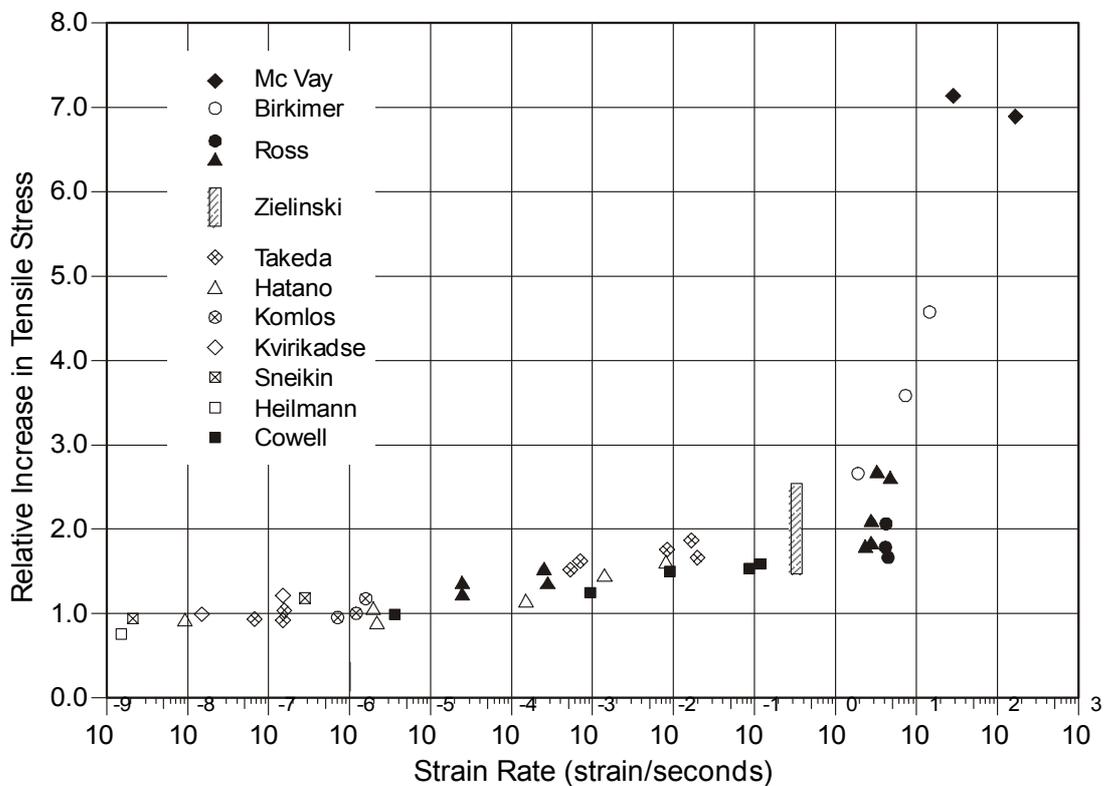


Bild 4.5: Dynamische Zugfestigkeitssteigerung von Beton

Eibl [87], Curbach [59], Rheinhardt [230] und Weerheim [262] führen die Festigkeitssteigerung auf Trägheitseffekte bei der Ausbreitung von Mikrorissen zurück. Curbach [59] stellte fest, daß die dynamische Rißausbreitungsgeschwindigkeit mit $v_{cr}=200\text{--}500\text{ m/s}$ deutlich unterhalb der Rayleigh-Wellengeschwindigkeit von $v_{\text{Rayleigh}}=2300\text{ m/s}$ bleibt. Diese verzögerte Schädigungsentwicklung unter dynamischer Belastung stellte auch Bischoff [27] bei Schallemissionsmessungen an Betonproben fest. Gödde [108] untersuchte numerisch die Rißausbreitung unter statischer und dynamischer Belastung von Beton, indem er den Beton auf Mesoebene diskretisierte. In Bild 4.6 ist zu erkennen, daß bei statischer Belastung die Risse sich durch die Betonmatrix und um das Zuschlagkorn langsam fortpflanzen, bis sie sich schließlich vereinigen. Unter dynamischer Beanspruchung läuft der Riß direkt durch das Zuschlagkorn, noch ehe er sich mit dem Riß der Betonmatrix vereinigen kann. Solche Korn-trennbrüche waren auch vermehrt bei den von Hermann [138] durchgeführten Sprengversuchen zu beobachten.

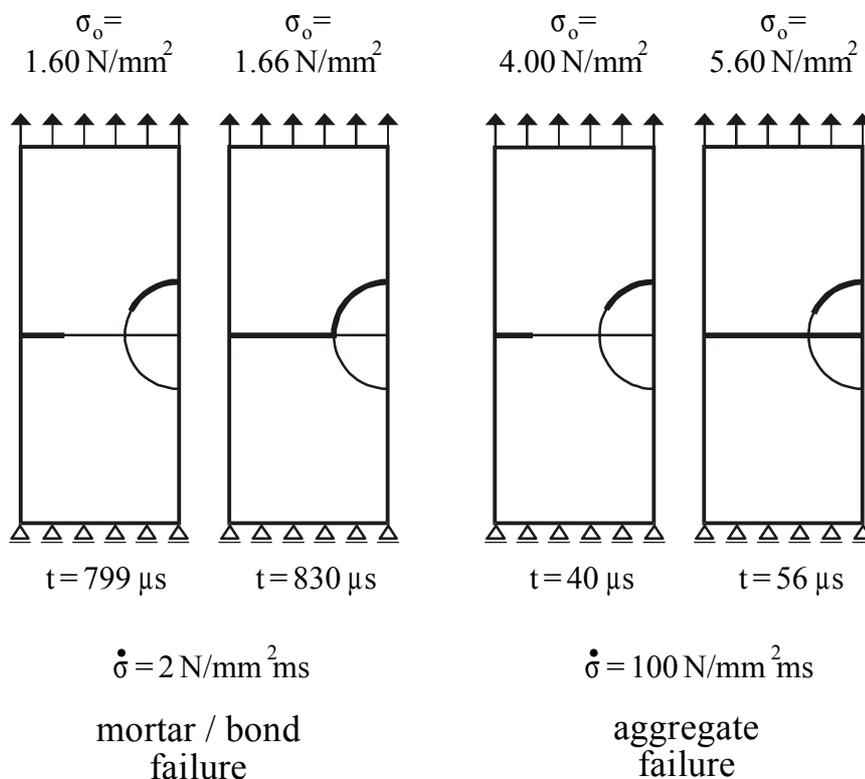


Bild 4.6: Rißbildung von Beton unter a) statischer b) dynamischer Belastung, aus [108]

Einen weiteren Einfluß auf die Festigkeitssteigerung im Beton spielt der Feuchtegehalt. Versuche an wassergesättigten und ofengetrockneten Betonproben haben gezeigt, daß die wassergesättigten Proben im Gegensatz zu den ofengetrockneten eine erhebliche Festigkeitssteigerung aufwiesen.

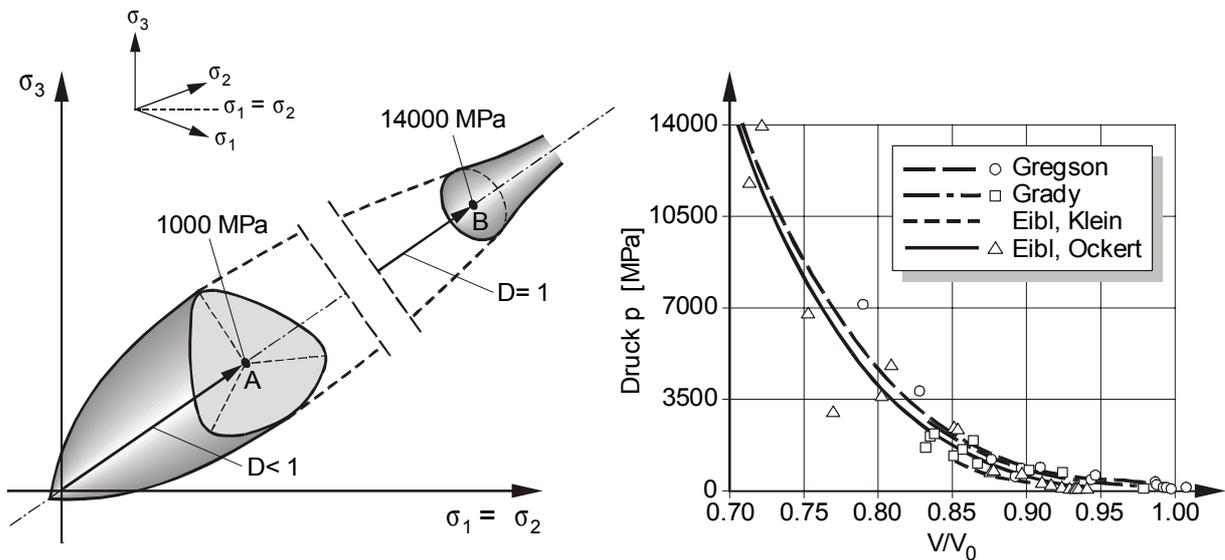


Bild 4.7: a) Dreidimensionale Beton-Versagensfläche; b) Hugoniot-Beziehung, aus [238]

Unter sehr großen hydrostatischen Drücken erfährt der Werkstoff Beton durch das Zerquetschen der Poren eine isotrope Gefügeschädigung. Der Dehnrateneffekt reduziert sich zu einem Kompaktierungseffekt. Der Übergang zu einem granularen kohäsionslosen Material unter hydrostatischen Drücken müßte nach Eibl zu einer Reduzierung der deviatorischen Festigkeit führen (siehe auch Riedel [231]). In Bild 4.7a ist die Versagensfläche für Beton schematisch dargestellt. Im unteren Druckbereich ist sowohl die deviatorische Festigkeit als auch die Druck-Volumen-Beziehung bekannt (siehe Punkt A). Ockert [221] konnte in Schockwellenexperimenten die Druck-Volumen-Beziehung bis 14000 MPa bestimmen, Daten über den deviatorischen Radius ab dem Bereich Punkt A gibt es bisher allerdings noch keine. In Bild 4.7b ist die aus den Schockwellenexperimenten gewonnene Beton-Hugoniot in Beziehung zu Ergebnissen anderer Autoren gesetzt.

4.5.2 Schädigung

Schmidt-Hurtienne [238] unterscheidet zwischen isotroper Druckschädigung und einer anisotropen Zugschädigung. Im gleichen Zeitschritt werden die Schädigungsvariablen im Druck- und Zugbereich entwickelt. Im Rahmen dieser Arbeit wird sowohl der Zug- als auch der Druckbereich durch isotropes Werkstoffverhalten abgebildet. Für die isotrope Druck- und Zugschädigung wird im Stoffgesetz die HSIEH-TING-CHEN Invariantendarstellung [151] gewählt:

$$\begin{aligned} F_{d,c} &= c_1 J_2^e + \kappa_{d,c} \left[c_2 \sqrt{J_2^e} + c_3 \varepsilon_{e,\max}^{(\alpha)} + c_4 I_1^e \right] - \kappa_{d,c}^2 = 0 \\ F_{d,t} &= c_1 J_2^e + \kappa_{d,t} \left[c_2 \sqrt{J_2^e} + c_3 \varepsilon_{e,\max}^{(\alpha)} + c_4 I_1^e \right] - \kappa_{d,t}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

mit

$c_1 \dots c_4$ Parameter der Fläche

I_1^e, J_2^e 1. Invariante von ε_e , 2. Invariante von $dev \varepsilon_e$

$\varepsilon_{e,\max}^{(\alpha)}$ größter (α -ter) Eigenwert von ε_e

κ_d äquivalentes schädigungserzeugendes Dehnungsmaß

Diese dehngestützte Formulierung hat die Vorteile, daß Be- von Entlastung eindeutig zu unterscheiden ist. Die Belastungsfläche expandiert immer im Gegensatz zur spannungsgestützten Formulierung, bei der durch die Entfestigung des Materials die Belastungsfläche nach Erreichen der Maximalspannung sich wieder verkleinert.

Die Normale auf die Schädigungsfläche, die zur Berechnung der Tangentensteifigkeit notwendig ist, ergibt sich zu:

$$(n_d)_{ij} = \left(c_1 + \frac{\kappa_d c_2}{2\sqrt{J_2^e}} \right) dev(\varepsilon_e)_{ij} + \kappa_d \left(c_3 d_i^{(\alpha)} d_j^{(\alpha)} + c_4 I_{ij} \right) \quad (4.40)$$

$\mathbf{d}^{(\alpha)}$ α -ter Eigenvektor des elastischen Dehnungstensors ε_e

Sie gilt aufgrund der Isotropie sowohl für den Zug- als auch für den Druckbereich. Die Belastungsfläche F_d zeigt an, ob neue Schädigung

entsteht, indem sie den dreiaxialen Dehnungszustand auf ein äquivalentes skalares Dehnungsmaß transformiert. Die Evolution der inneren Schädigung erfolgt nach folgender Entwicklungsgleichung:

$$D(\kappa_d) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{\kappa_d - e_0}{e_d}\right)^{g_d}} & \forall \kappa_d \geq e_0 \\ 0 & \forall \kappa_d \leq e_0 \end{cases}, \quad (4.41)$$

mit

κ_d äquivalentes schädigungserzeugendes Dehnungsmaß

D generalisierte Schädigung

e_0 Dehnungsschwellwert

e_d Modalwert der Weibullverteilung

g_d Weibull-Exponent

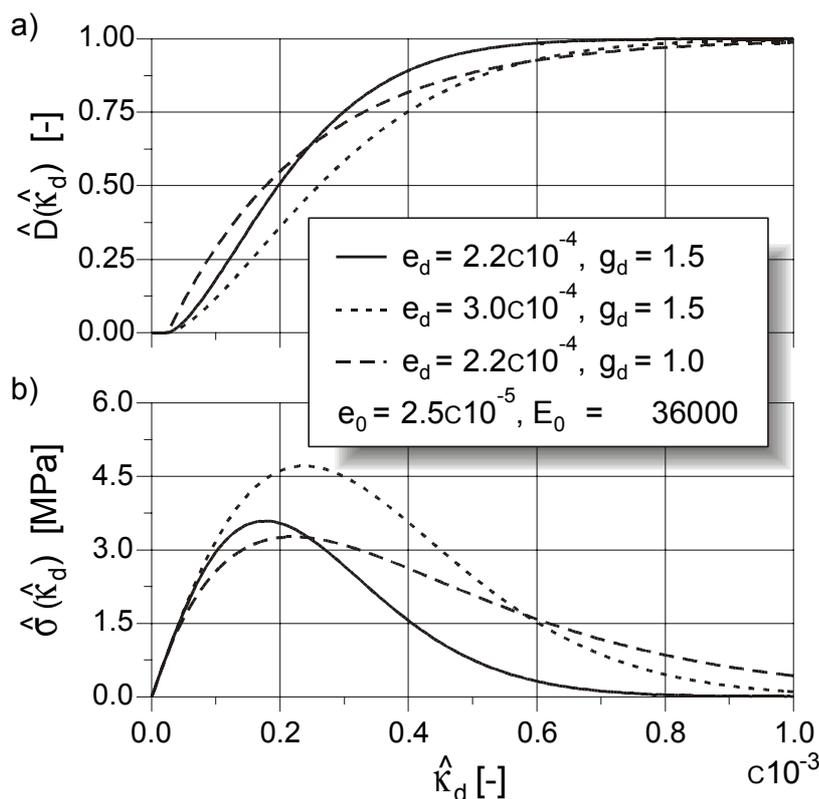


Bild 4.8: Generalisierte Schädigungsevolution: a) Schädigungsfunktion, b) äquivalente Spannungs-Dehnungs-Beziehung, aus [238]

Bild 4.8 zeigt die generalisierte Schädigungsevolution und den Einfluß der Parameter. So bestimmt e_d maßgeblich die Breite der Funktion, wäh-

rend g_d die Form verzerrt. e_0 ist der Schwellwert, der den Beginn der Schädigungsevolution festsetzt. Im Gegensatz zu Bachmann [10] wird er nicht negativ gewählt, da die Vorschädigung des Betons beim Herstellungsprozeß bereits durch den Anfangselastizitätsmodul berücksichtigt wird. Die einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehung lautet:

$$\sigma(\kappa_d) = (1 - D)E_0 \kappa_d \quad (4.42)$$

Isotrope Druckschädigung entsteht vor allem unter Druckbeanspruchung. Hier bestimmt D_c die Sekantensteifigkeit. Zu einem geringen Maß findet eine isotrope Druckschädigung auch unter Zugbeanspruchung statt, die sich allerdings erst bei Belastungsumkehr zeigt. Die Schädigungsentwicklung für die skalare Druckschädigung lautet:

$$\begin{aligned} D_c^{t+dt} &= \max\{D(\kappa_{d,c}), D_c^t\} && \text{Druck} \\ D_c^{t+dt} &= \max\{D(\kappa_{d,t}/r_c), D_c^t\} && \text{Zug} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Der Reduktionsfaktor r_c mindert die äquivalente schädigungserzeugende Dehnung $\kappa_{d,t}$ ab, so daß sich die Abnahme der Druckfestigkeit erst bei sehr großen Zugdehnungen einstellt ($r_c \approx 100$), wenn bereits ein Diskontinuum entstanden ist.

Die isotrope Zugschädigungsevolution erfolgt analog zur Evolution der Druckschädigung:

$$\begin{aligned} D_t^{t+dt} &= \max\{D(\kappa_{d,t}), D_t^t\} && \text{Zug} \\ D_t^{t+dt} &= \max\{D(\kappa_{d,c}/r_t), D_t^t\} && \text{Druck} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Im Gegensatz zur anisotropen Zugschädigung, bei der beispielsweise bei einer einaxialen Druckbeanspruchung durch die Querkontraktion gleichzeitig die Zugschädigung auch unter Druckbelastung einen Einfluß besitzt, zeigt sich bei der isotropen Zugschädigung der Abfall der Zugfestigkeit erst bei Belastungsumkehr. Anders als bei der Druckschädigung wird der Reduktionsfaktor r_t recht klein belassen ($r_t \approx 2$), d.h. schon bei kleinen Druckschädigungen des Materials wird die Zugfestigkeit herab-

gesetzt. Bei sehr großen Druckbeanspruchungen, wie sie bei Explosionen entstehen, verliert der Werkstoff jegliche Zugfestigkeit.

Die Ver- bzw. Entfestigungsvariable H_d ergibt sich zu:

$$H_d = \frac{\partial F_d}{\partial D} = \frac{\partial F_d}{\partial \kappa_d} \frac{\partial \kappa_d}{\partial D} \quad (4.45)$$

Sie gilt sowohl für den Zug- als auch für den Druckbereich.

4.5.3 Plastizität

Beim Werkstoff Beton entstehen inelastische Verformungen durch Bildung von Mikrorissen und Verschiebung der Rißufer. Da sich Mikrorisse vor allem senkrecht zur Richtung der positiven elastischen Zugdehnungen ausbreiten, bestimmt die positive Projektion des elastischen Dehnungstensors maßgeblich die Plastizitätsfläche. Die Entwicklung von irreversiblen Verzerrungen wird über den Druckanteil des elastischen Dehnungstensors multipliziert mit einer Konstanten c_c berücksichtigt. Man erhält somit folgende Plastizitätsfläche:

$$F_p = \frac{1}{2} \left((\varepsilon_e^+)_{ij} (\varepsilon_e^+)_{ij} + c_c (\varepsilon_e^-)_{ij} (\varepsilon_e^-)_{ij} \right) - \frac{1}{2} \kappa_p^2 = 0 \quad (4.46)$$

mit

$$(\varepsilon_e^+)_{ij} = P_{ijkl}^+ (\varepsilon_e)_{kl} \quad , \quad P_{ijkl}^+ = \sum_{\alpha} H_v((\varepsilon_e^{(\alpha)})_{ij}) d_i^{(\alpha)} d_j^{(\alpha)} d_k^{(\alpha)} d_l^{(\alpha)}$$

H_v Heaviside – Sprungfunktion

$$(\varepsilon_e^-)_{ij} = P_{ijkl}^- (\varepsilon_e)_{kl} \quad , \quad P_{ijkl}^- = I_{ijkl} - P_{ijkl}^+$$

Die Normale zur Plastizitätsfläche lautet:

$$(n_p)_{ij} = (\varepsilon_e^+)_{ij} + c_c (\varepsilon_e^-)_{ij} \quad (4.47)$$

Eine ausführliche Herleitung findet man bei Schmidt-Hurtienne [238].

Es wird eine assoziierte Fließregel gewählt, d.h. $\mathbf{m}_p = \mathbf{n}_p$.

Wie auch bei der Formulierung der Schädigung wird bei der Plastizität eine interne plastische Variable q_p eingeführt, die den dreiaxialen plastischen Dehnungstensor auf ein äquivalentes einaxiales Maß projiziert. Sie wird wie folgt definiert:

$$q_p = \int_t \sqrt{(\dot{\varepsilon}_p)_{ij} (\dot{\varepsilon}_p)_{ij}} dt \quad (4.48)$$

Die Beziehung zwischen äquivalenter plastischer Dehnung κ_p und der inneren plastischen Variablen q_p legt fest, in welchem Verhältnis zum aktuellen Dehnungszustand die inelastischen Verzerrungen zunehmen. Es wird eine empirische Evolutionsgleichung definiert. Plastische Dehnungen entstehen erst, wenn die äquivalente plastische Dehnung größer ist als der Schädigungsparameter e_d . Da e_d näherungsweise der Schädigungsdehnung entspricht, bei der die Zugfestigkeit in der äquivalenten Spannungs-Dehnungs-Beziehung erreicht wird, wird damit implizit die physikalische Bedingung erfüllt, nach der erst das Öffnen von Zugrissen plastische Verformungen verursacht. Die weiteren Parameter bestimmen das maximale Verhältnis zur äquivalenten plastischen Dehnung ($c_p < 1$), das Aufklingen (e_{p1}) und bei sehr großen Verzerrungen das Abklingen (e_{p2}) der internen Variablen:

$$q_p(\kappa_p) = \left\{ \begin{array}{ll} c_p (\kappa_p - e_d) \left(1 - e^{-\frac{\kappa_p - e_d}{e_{p1}}} \right) e^{-\frac{\kappa_p}{e_{p2}}} & \forall \kappa_p \geq e_d \\ 0 & \forall \kappa_p < e_d \end{array} \right\} \quad (4.49)$$

Der Entfestigungsmodul ergibt sich zu:

$$H_p = \kappa_p \frac{\partial \kappa_p}{\partial q_p} \sqrt{\left((\varepsilon_e^+)_{ij} + c_c (\varepsilon_e^-)_{ij} \right) \left((\varepsilon_e^+)_{ij} + c_c (\varepsilon_e^-)_{ij} \right)} \quad (4.50)$$

4.5.4 Ent- Wiederbelastung

Bei Schmidt-Hurtienne [238] geschieht die Ent- und Wiederbelastung auf zwei verschiedenen Ästen. Somit wird der Energiedissipation, die durch die Reibung der Rißufer entsteht, Rechnung getragen. In dieser Arbeit findet die Ent- und Wiederbelastung vereinfacht auf dem selben Pfad statt.

4.5.5 Beton-Hugoniot

Aufgrund der heterogenen Struktur und der Poren des Betons erfährt der Werkstoff unter hohen hydrostatischen Drücken eine volumetrische isotrope Schädigung, die auf das Zusammenfallen der Poren zurückzuführen ist. In der HSIEH-TING-CHEN Schädigungsfläche wird ein derartiger Schädigungsmechanismus allerdings nicht berücksichtigt. Deshalb wird die Steifigkeitsmatrix über den Steifigkeitsfaktor Ξ modifiziert, der in Abhängigkeit der volumetrischen elastischen Dehnung definiert wird:

$$E_{\text{tot}} = \Xi(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}_e) E(D) \quad (4.51)$$

Dieser Faktor entspricht der Anpassung des Kompressionsmoduls an die Beton-Hugoniot-Kurve, wie sie Ockert [221] im Rahmen seiner Untersuchungen vorgenommen hat. Anstelle eines Polygons wird die Funktion Ξ kontinuierlich definiert und an die von Ockert [221] gemessene Hugoniot-Kurve angepaßt

$$\Xi = \left\{ \begin{array}{ll} \left[1 - a_v \left(1 - e^{-\frac{|\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}_e| - e_{v,\text{th}}}{e_v}} \right) \right] \left[1 + \left(\frac{|\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}_e| - e_{v,\text{th}}}{b_v e_v} \right)^2 \right] & \forall \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}_e < -e_{v,\text{th}} \\ 1 & \forall \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}_e \geq -e_{v,\text{th}} \end{array} \right\} \quad (4.52)$$

mit a_v , b_v , e_v und $e_{v,\text{th}}$ als Materialparameter. Der Temperatureinfl wird in der Beton-Hugoniot-Kurve vernachlässigt.

4.5.6 Tangentensteifigkeit

In [238] wird das Stoffgesetz als Sekantenformulierung benutzt. Über Gl. 4.53 kann die Sekantensteifigkeit in eine Tangentensteifigkeit umgerechnet werden

$$(E_t)_{ijmn} = (E_{ijkl} + (T_d)_{ijkl})(I_{klmn} + (T_p)_{klmn}), \quad (4.53)$$

wobei I der Einheitstensor 4. Stufe ist. Somit kann der neue Spannungstensor auch inkrementell aktualisiert werden:

$$\dot{\sigma}_{ij} = (E_t)_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (4.54)$$

Die beiden Tensoren T_d und T_p lassen sich wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} (T_d)_{ijkl} &= \frac{(m_d)_{ij} (n_d)_{kl}}{H_d} \\ (T_p)_{ijkl} &= \frac{(m_p)_{ij} (n_p)_{kl}}{H_p} \end{aligned} \quad (4.55)$$

4.5.7 Der Dehnrateneinfluß

Der Dehnrateneinfluß ist der Grund für die dynamische Festigkeitssteigerung von Beton. Eine Festigkeitssteigerung ist auch bei anderen Werkstoffen unter dynamischer Beanspruchung zu verzeichnen, allerdings ist sie bei heterogenen Materialien wesentlich ausgeprägter. In der Literatur gibt es zahlreiche Ansätze, diesen Dehnrateneffekt in der Stoffgesetzformulierung zu berücksichtigen. Vor- und Nachteile der verschiedenen Modelle sind in Schmidt-Hurtienne [238] eingehend erörtert und werden hier nicht näher erläutert. Die Dehnratensensibilität von Beton kann nach Eibl [92] auf folgende Mechanismen zurückgeführt werden:

- Bei Dehngeschwindigkeiten bis $\dot{\epsilon} < 1,0 \text{ s}^{-1}$ wird die Festigkeitssteigerung vor allem durch den Einfluß der Feuchte und eine Zunahme von Zuschlagkornrissen verursacht.
- Der exponentielle Anstieg der dynamischen Festigkeit ab $\dot{\epsilon} > 1,0 \text{ s}^{-1}$ hängt mit Trägheitseffekten bei der Mikrorißbildung zusammen.

- Die Trägheit der Mikrorißbildung hat eine Rißausbreitungsgeschwindigkeit zur Folge, die weit unter der theoretischen, elastischen Wellengeschwindigkeit liegt $v_{cr} \cong 100 - 500 \text{ m/s}$.
- Als Struktureffekt entsteht durch die Dehnratensensivität eine multiple Rißbildung unter dynamischer Beanspruchung.
- Die Druckfestigkeitssteigerung ist zu einem großen Teil über den POISSON-Effekt phänomenologisch mit der Zugfestigkeitssteigerung gekoppelt.

4.5.7.1 Der Homogenisierungs- und Verzögerungsmechanismus

Die Besonderheit des Dehnrateneffekts auf makroskopischer Betrachtungsebene ist auf zwei physikalische Gegebenheiten zurückzuführen: Dies sind der Homogenisierungs- sowie der Verzögerungsmechanismus.

An dieser Stelle ist der Unterschied einer Diskretisierung einer Struktur auf Makro- und auf Meso- oder Mikroebene zu verdeutlichen. Soll eine dynamisch beanspruchte Betonstruktur analysiert werden, so wird man üblicherweise ein stofflich nichtlineares Kontinuum zugrunde legen, das bei Überschreitung einer bestimmten Zugspannung in Form eines Risses versagt. Aus materialtechnischer Sicht handelt es sich um die Bildung eines Makrorisses, vor dessen Auftreten das Material bereits eine entsprechend große Schädigung durch Mikrorisse erfahren hat. Es ist zwischen einem Kontinuum auf Makroebene nach Bild 4.9 und einer heterogenen Struktur mit Mikrorißbildung auf Mesoebene zu unterscheiden. Letztere bestimmt das Stoffgesetz für das homogene Kontinuum. In einer weiteren Ebene darunter wäre gegebenenfalls ein Mikromodell bestehend aus Zuschlag, Mörtel und Poren zu definieren. Als Analogon kann das Verhalten eines idealen Gases in einem abgeschlossenen Kontinuum angeführt werden, das einer Beziehung $p=f(V,T)$ auf Makroebene gehorcht, während auf Mikroebene der Druck durch die Stoßdynamik der Gasmoleküle bestimmt wird (siehe Eibl [92]).

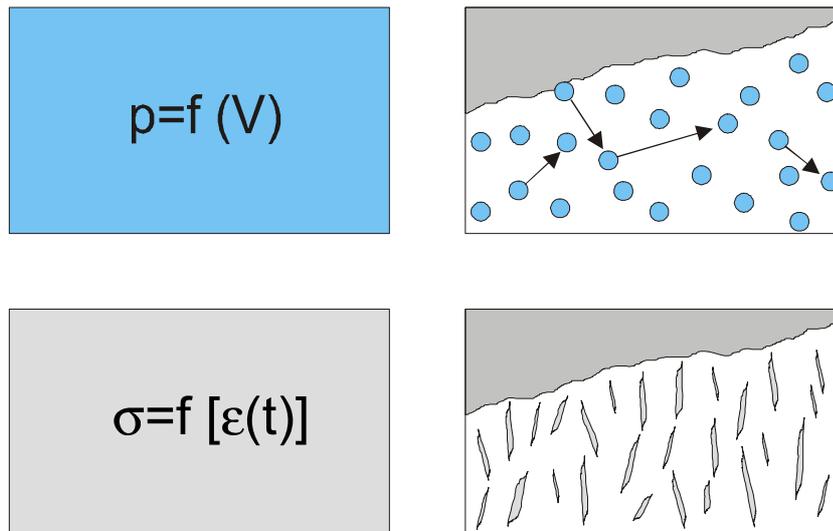


Bild 4.9: Homogenes Modell auf Makroebene – heterogenes Modell auf Meso- bzw. Mikroebene

Curbach [59] verdeutlicht mit einem dehnratenunabhängigen Stoffgesetz auf Makroebene, daß die Spannungsverteilung im Rißquerschnitt unter dynamischer Zugbelastung gleichmäßiger ist als unter quasistatischer Belastung, siehe Bild 4.10. Dieser von der Wellenausbreitung verursachte Effekt baut die Spannungsspitze in der Rißwurzel relativ zum Spannungsniveau des Rißquerschnittes ab und wird als dynamischer Homogenisierungsmechanismus bezeichnet.

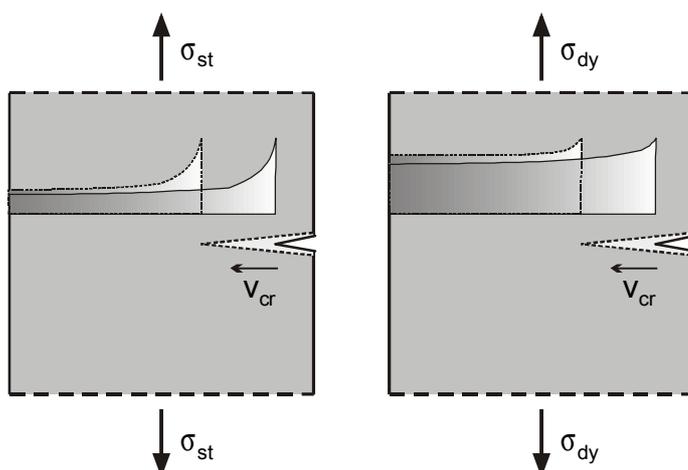


Bild 4.10: Dynamische Homogenisierung

Eine Änderung des Materialverhaltens auf der Makroebene wird durch die heterogene Struktur des Betons, d.h. die Eigenschaften und Interak-

tion der Bestandteile und Defekte auf den nächst kleineren Modellebenen eingeleitet. Bild 4.11 verdeutlicht die Wirkung der dynamischen Homogenisierung auf der Mesoebene. Innerhalb der unterschiedlichen Betonphasen, bestehend aus Zuschlagkörnern, der Mörtelmatrix und Mikrodefekten, stellt sich aufgrund einer dynamischen Beanspruchung eine gleichmäßigere Spannungsverteilung ein. Im Bereich der Zuschlagkörner wird wegen der höheren Wellengeschwindigkeit das Spannungsniveau bei dynamischer Belastung im Vergleich zur quasistatischen Belastung noch gesteigert. Die dynamische Homogenisierung ist deshalb ein Struktureffekt und keine eigentliche Materialeigenschaft. Somit darf bei der Abbildung des Materials auf der Mesoebene im Stoffgesetz der Anteil der dynamischen Homogenisierung des Dehnrateneffektes nicht mit eingebaut werden, da er bereits durch die Diskretisierung der Struktur und die Wellenausbreitung im heterogenen Werkstoffgefüge berücksichtigt wird (siehe auch Curbach [59], Bachmann [10] und Eibl [90]). Auf Makroebene muß aber im Stoffgesetz der Anteil der dynamischen Homogenisierung des Dehnrateneffektes verankert sein, da die unterschiedlichen Werkstoffphasen nicht berücksichtigt werden.

Während der Homogenisierungsmechanismus den dynamischen Effekt bereits vorhandener stofflicher Heterogenitäten im Rahmen der Kontinuumsmechanik beschreibt, wird durch den Verzögerungsmechanismus die verspätete Schädigungsaktivierung im Kontinuum, d.h. die verzögerte Entstehung und das Wachstum von Mikrodefekten resp. Mikrorissen erfaßt. Dieses Phänomen ist wie in Kapitel 2 schon ausführlich diskutiert im Wesentlichen auf die Massenträgheit der sich entfernenden Rißufer zurückzuführen.

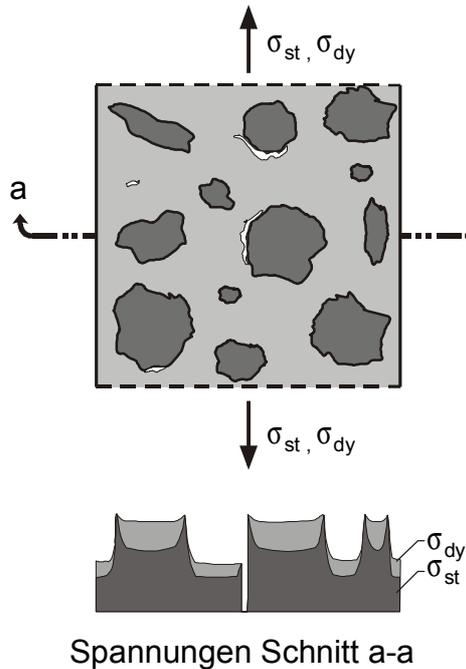


Bild 4.11: Betongefüge auf Mesoebene

4.5.7.2 Exponentielle Schädigungsrelaxation

Zengh [274] und Eibl [90] stellen verschiedene Varianten vor, den Dehnrateneffekt zu berücksichtigen. In dieser Arbeit wird die Maxwell-Relaxation verwendet. Der Vorteil gegenüber anderen Modellen ist, daß die Belastungsgeschichte bei der Festigkeitssteigerung berücksichtigt wird. Dieser Effekt wird über eine Geschichtsfunktion im Stoffgesetz verankert, die die Aktivierung der Schädigung beschreibt. Mit diesem dynamischen Schädigungsmodell für Beton wird ein Werkzeug für die realistische Simulation von Wellenausbreitungsvorgängen in Beton verwendet, das den Dehnrateneffekt als dynamisches Erinnerungsvermögen auf kontinuumsmechanischer Ebene enthält. Es gilt mit

$$h(t - \tau) = e^{-\frac{t-\tau}{\vartheta}} \quad (4.56)$$

für eine Schadensverzögerung

$$D_{\text{dyn}}(t) = \int_{\tau=0}^t \frac{\partial D(\kappa_d)}{\partial \tau} h(t - \tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t \frac{\partial D(\kappa_d)}{\partial \tau} e^{-\frac{t-\tau}{\vartheta}} d\tau \quad (4.57)$$

Die Relaxationszeit ϑ bestimmt den Zeitraum des Abklingens. Durch Verwendung einer 1-Parameter-Funktion kann das Faltungsintegral in Gl. 4.57 analytisch in eine inkrementelle Form überführt werden:

$$D_{\text{dyn}}^{t+\Delta t} = D_{\text{dyn}}^t e^{-\frac{\Delta t}{\vartheta}} + \vartheta \frac{\Delta D}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\vartheta}} \right) \quad (4.58)$$

Der Nachteil der Verwendung einer 1-Parameter-Funktion besteht in der Tatsache, daß nur bestimmte Dehnrateneinflüsse realitätsnah abgebildet werden können. Ist die Belastung wesentlich kleiner als die Relaxationszeit wird die dynamische Festigkeitssteigerung überschätzt. Um auch die Festigkeitssteigerung von Beton in einem breiten Dehnratenspektrum zu approximieren, wird die Relaxationszeit ϑ in Abhängigkeit der äquivalenten Dehnrade zum Zeitpunkt der Mikroschädigung $\dot{\kappa}_d(\tau)$ definiert. Hierfür wird die Verfallsfunktion h mit einem Formexponenten erweitert:

$$h(t - \tau) = e^{-\left(\frac{t - \tau}{\vartheta(\dot{\kappa}_d(\tau))} \right)^{g_h}} \quad (4.59)$$

Die Relaxationszeit wird als Funktion der bezogenen äquivalenten Dehnrade $\dot{\kappa}_d^*$ definiert:

$$\vartheta(\dot{\kappa}_d^*) = \vartheta_0 \cdot \dot{\kappa}_d^{*c_{t1} \ln \dot{\kappa}_d^* - c_{t2}} \quad \wedge \quad \dot{\kappa}_d^* = \frac{\dot{\kappa}_d(\tau)}{\dot{\kappa}_0}, \quad \dot{\kappa}_0 = 1 \text{ s}^{-1} \quad (4.60)$$

Die verallgemeinerte Maxwellrelaxation hat den großen Vorteil, die Festigkeitssteigerung von Beton in einem breiten Dehnratenspektrum realitätsnah zu approximieren. Da das Faltungsintegral in Gl. 4.57 nicht mehr analytisch gelöst werden kann, muß die Schädigung in eine Anzahl von "n_{dam}" Schädigungsinkremente aufgeteilt werden, die dann für sich entwickelt werden. Da für jedes Partikel der Rißzeitpunkt τ , die Verfallsfunktion ϑ für jedes Schädigungsinkrement und jedes Schädigungsinkrement ΔD abgespeichert werden müssen, erhöht sich der Speicherplatzbedarf drastisch. Durch die dynamische Datenverwaltung bekommt man dieses Problem jedoch recht gut in den Griff, da vor allem im Lasteinleitungsbereich die Schädigung innerhalb weniger Zeitschritte den Wert $D=1$ er-

langt und der Zeitpunkt der Rißbildung der verschiedenen Partikel stark abweicht. Für Partikel, die eine Schädigung von $D=1$ nie oder ziemlich langsam erreichen, gibt die Anzahl der Schädigungsinkremente " n_{dam} " den Grad der numerischen Genauigkeit vor. Bild 4.12 zeigt Geschichtsfunktionen h für verschiedene äquivalente Dehnraten.

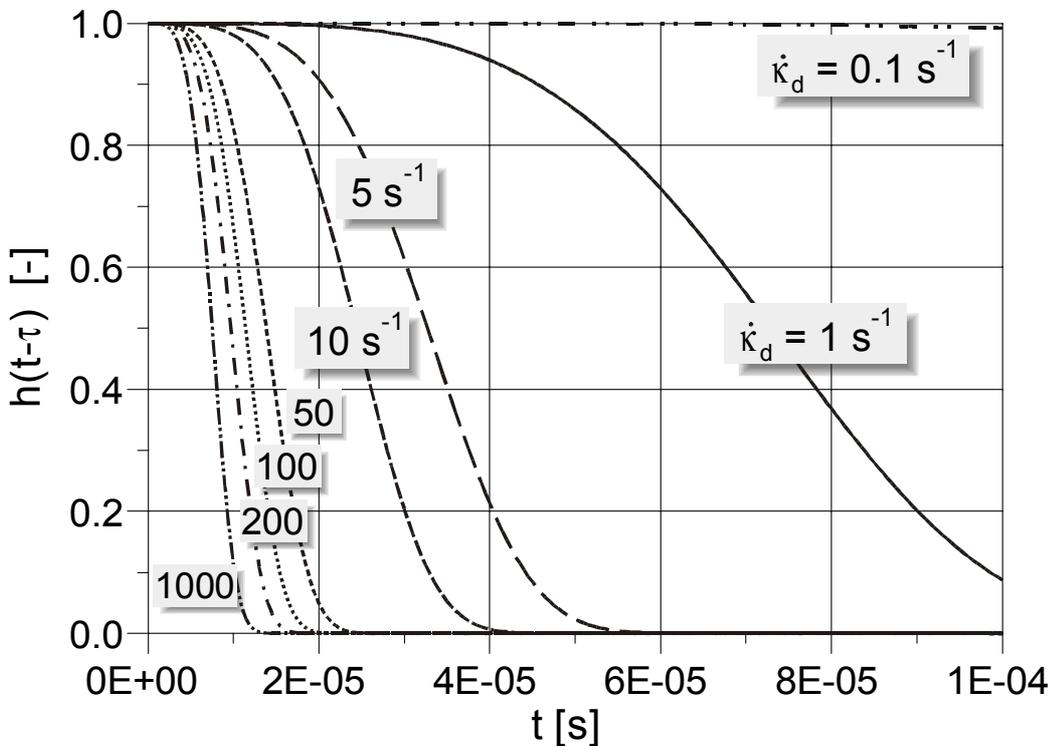


Bild 4.12: Geschichtsfunktion h für unterschiedliche äquivalente Dehnraten, aus [238]

Das Stoffgesetz erhält das letztendliche Format:

$$\sigma_{ij} = \left[1 - (D(\kappa_d) - D_{\text{dyn}}) \right] \Xi(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_e) (E_o)_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.61)$$

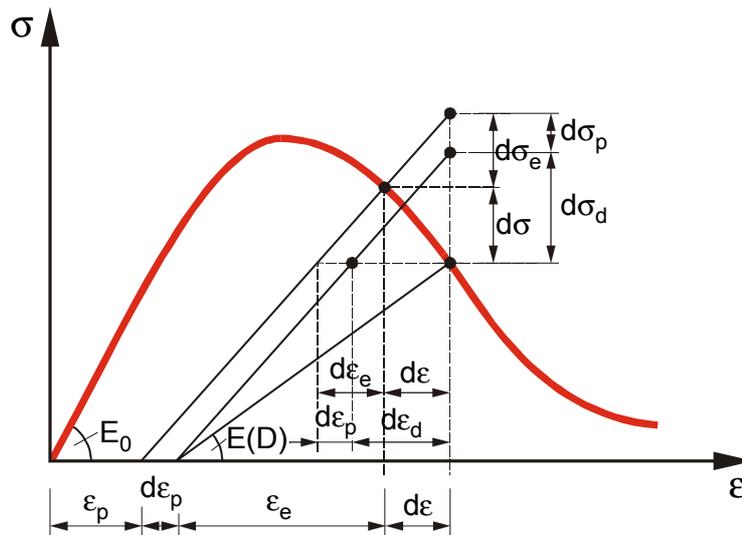


Bild 4.13: Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betonstoffgesetzes

Bild 4.13 zeigt das Prinzip des Stoffgesetzes. Es wird ersichtlich, daß lediglich der elastische Teil des Dehnungstensors die Gestalt der Spannungs-Dehnungs-Kurve bestimmt, der plastische Anteil kommt nur bei der Entlastung zum Tragen.

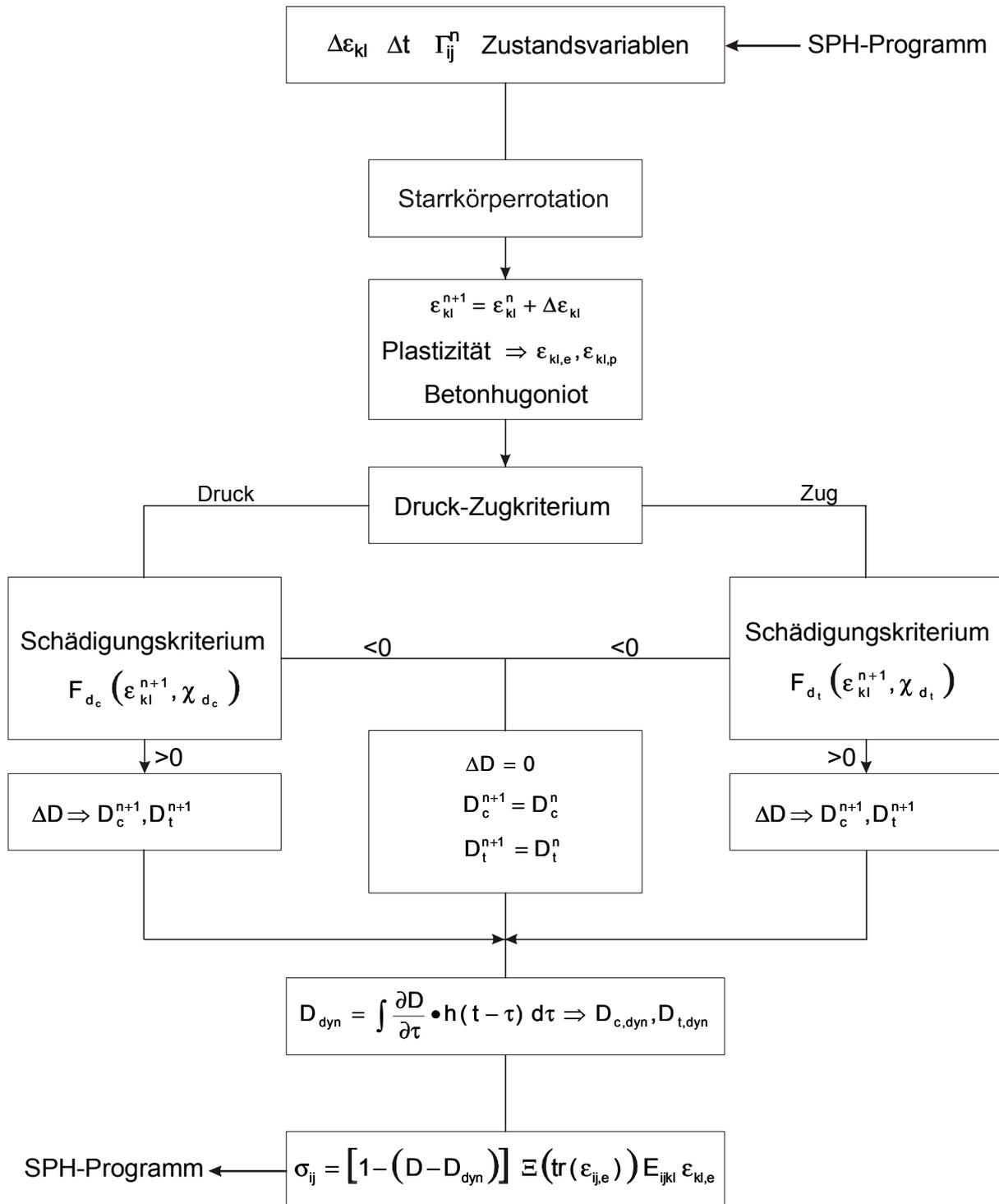


Bild 4.14: Stoffgesetz-Flußdiagramm

In Bild 4.14 ist der Ablauf des Stoffgesetzes anhand eines Flußdiagrammes dargestellt.

4.5.8 Verifikationsrechnungen

Bei finiten Elementen wird das Stoffgesetz zunächst am sog. 1-Element-Test verifiziert, um es anschließend für größere Systeme einzusetzen. Durch die unterschiedliche Art der Diskretisierung macht es wenig Sinn, das Stoffgesetz anhand eines 1-Partikel-Testes zu verifizieren. Statt dessen werden Würfel mit unterschiedlichen Partikelanzahlen zur Stoffgesetzverifikation verwendet. Die schnellste Methode ist, ein Würfel mit 2 Partikeln pro Seite = 8 Partikel insgesamt zu diskretisieren. Da hierbei allerdings ausschließlich Randpartikel vorhanden sind, wird das Stoffgesetz noch an drei weiteren Würfeln getestet:

- $3 \otimes 3 \otimes 3 = 27$ Partikel
- $5 \otimes 5 \otimes 5 = 125$ Partikel
- $10 \otimes 10 \otimes 10 = 1000$ Partikel

Beim Würfel mit 27 Partikel gibt es lediglich ein inneres Partikel. Dafür ist der Rechenaufwand etwas geringer. In der Regel wurde das Stoffgesetz anhand des Würfels mit 1000 Partikeln getestet. Zur Verifikation des Stoffgesetzes anhand von Standardversuchen wie dem einaxialen Zug- oder Druckversuch, wurde das MLSPH-Verfahren verwendet, da ansonsten keine zufriedenstellenden Ergebnisse erzielt wurden. Bei den Testrechnungen wurde dem Würfel ein lineares Geschwindigkeitsfeld auferlegt.

In den in Kapitel 5 beschriebenen Detonationsversuchen wurden Platten zweier unterschiedlicher Betongüten verwendet, einem Beton B35 und B200. In den Verifikationsrechnungen werden nun die für die Rechnung benötigten Werkstoffparameter an den Versuchskurven geeicht. Da Schmidt-Hurtienne [238] die Verifikationsrechnung an Split-Hopkinson-Bar Versuchen für einen Beton der Festigkeitsklasse B35 durchführte, können diese Werkstoffparameter übernommen werden. Nur die Parameter des B200 werden neu kalibriert. Eine Übersicht über die Parameter ist in Kapitel 5 zu finden.

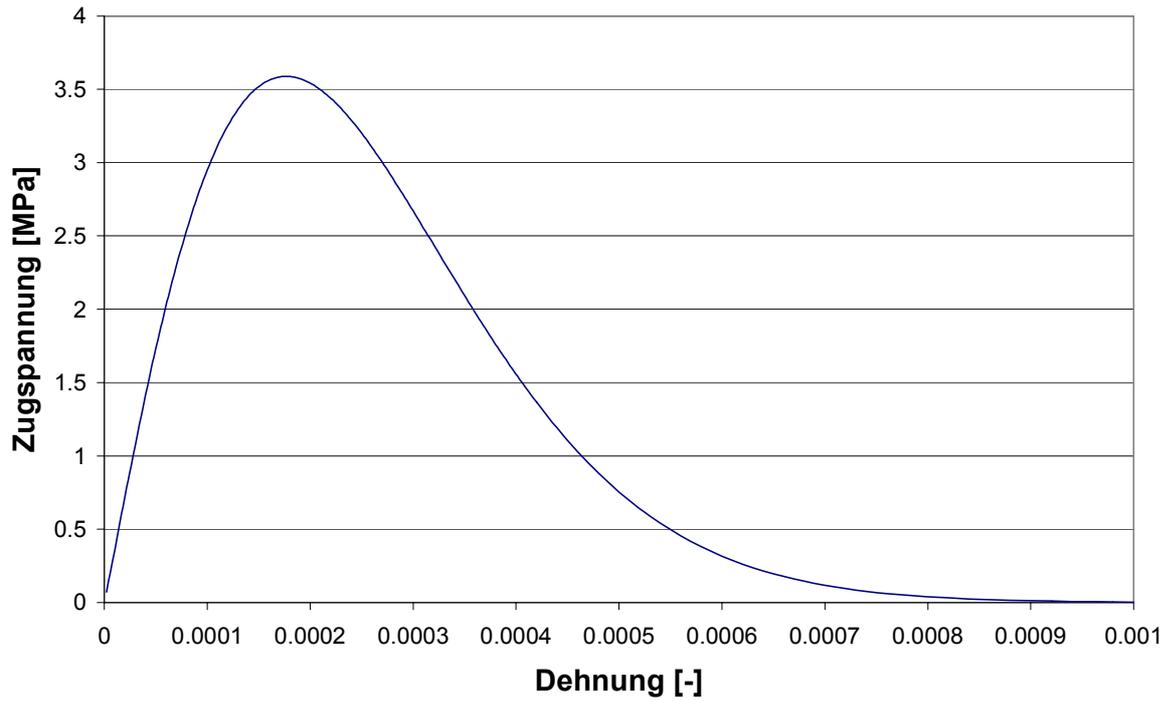


Bild 4.15 : Einaxiale Zugspannung-Dehnungs-Beziehung des B35

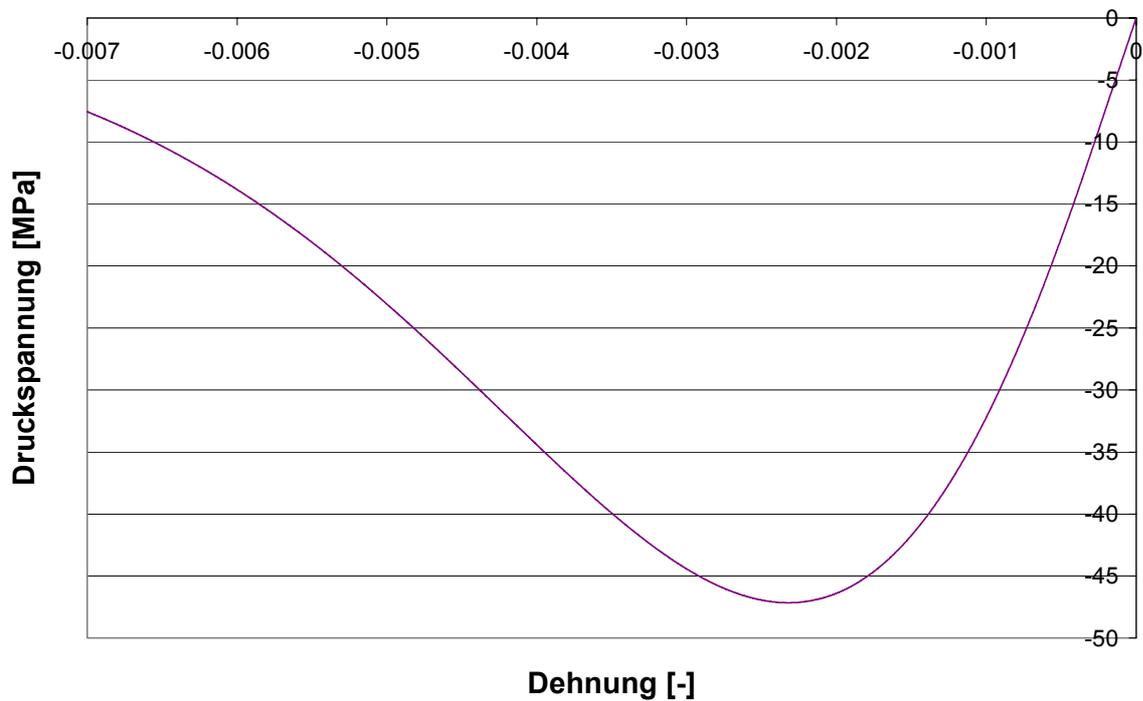


Bild 4.16: Einaxiale Druckspannungs-Dehnungs-Beziehung des B35

Es werden exemplarisch für den Beton der Festigkeitsklasse B35 einige Ergebnisse aus den Verifikationsrechnungen gezeigt.

In Bild 4.15 und Bild 4.16 sind für den B35 der einaxiale Zug- und Druckversuch der Rechnung dargestellt. Bild 4.17 zeigt für eine Abklingzeit von $\vartheta=70 \mu\text{s}$ unter Verwendung der 1-Parameter-Funktion für h (Gl. 4.56) die Zugspannungs-Dehnungs-Beziehungen für unterschiedliche Belastungsgeschwindigkeiten. Es ist zu erkennen, daß nicht nur durch die erhöhte Belastungsgeschwindigkeit die Zugfestigkeiten anwachsen, auch die Bruchdehnung wird signifikant beeinflusst. In Bild 4.18 sind die Spannungs-Dehnung-Beziehungen für den Druckbereich für eine Abklingzeit von $\vartheta=70 \mu\text{s}$ bei unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten abgebildet. Durch die Wahl einer 1-Parameter-Funktion zur Beschreibung des Dehnrateneinflusses hat sich bei den im Kapitel 5 durchgeführten numerischen Berechnungen eine unrealistische Festigkeitssteigerung gezeigt. Deswegen wurde dort die verallgemeinerte Maxwellrelaxation (Gl. 4.58) verwendet. Bild 4.19 und Bild 4.20 verdeutlicht den Einfluß der unterschiedlichen Abklingzeiten auf die Festigkeitssteigerungen im Zug- bzw. Druckbereich bei unterschiedlichen Dehnraten für die 1-Parameter-Funktion.

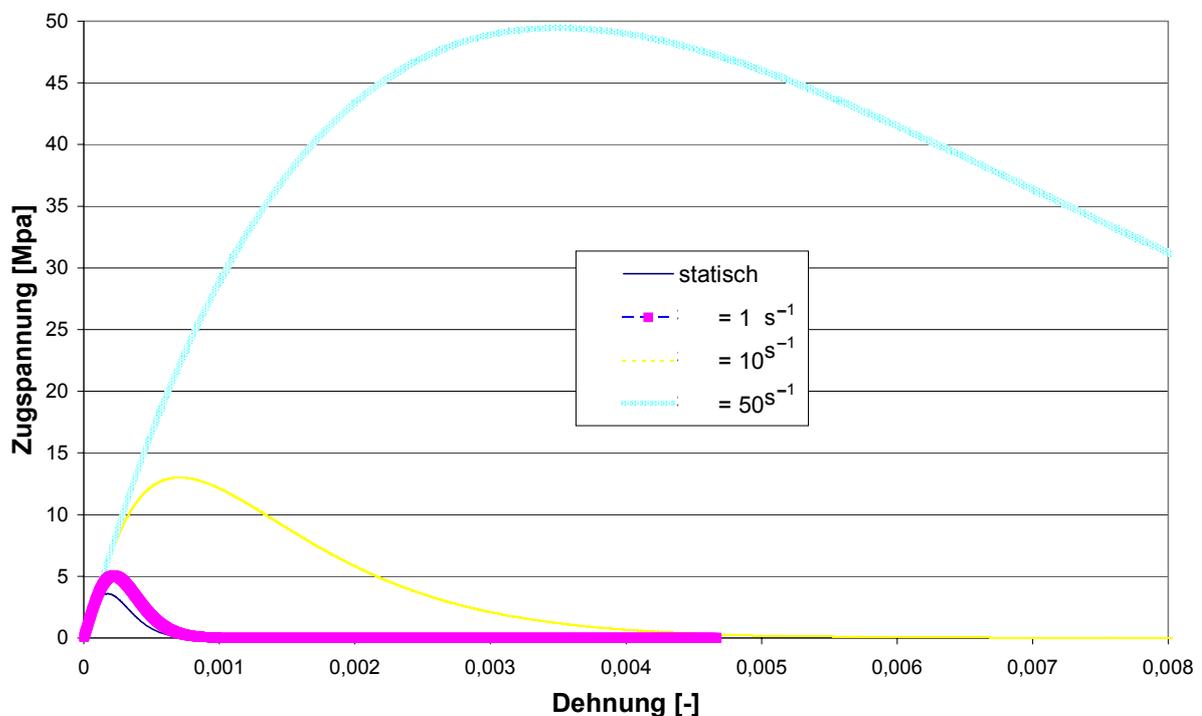


Bild 4.17: Zugspannungs-Dehnungs-Beziehung des Beton B35 bei unterschiedlichen Dehnraten für ein $\vartheta=70 \mu\text{s}$

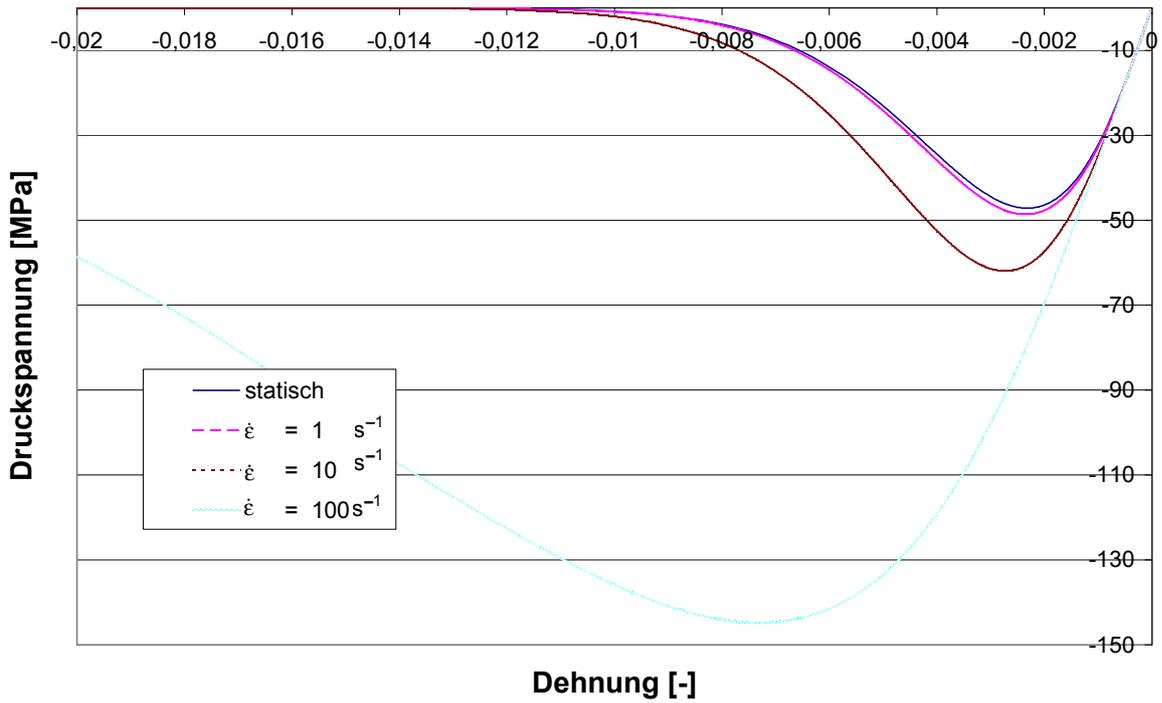


Bild 4.18: Druckspannungs-Dehnungs-Beziehung des Beton B35 bei unterschiedlichen Dehnraten für ein $\vartheta=70 \mu\text{s}$

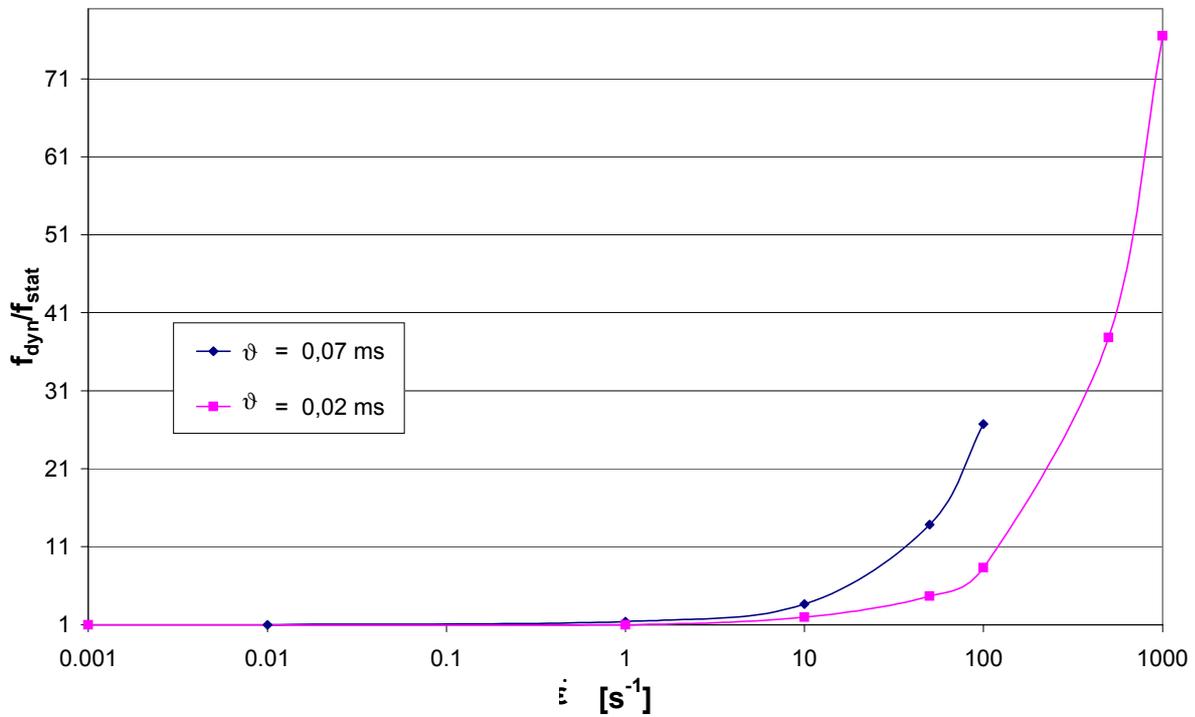


Bild 4.19: Zugfestigkeitssteigerung des Beton B35

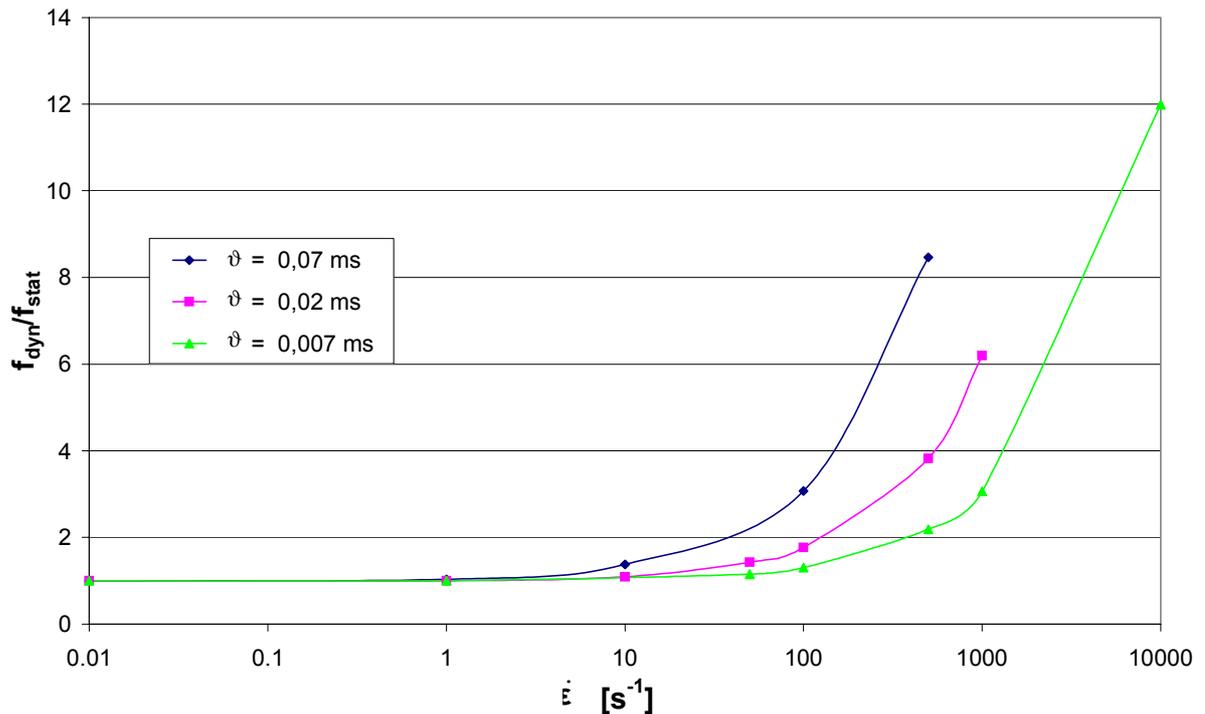


Bild 4.20: Druckfestigkeitsteigerung des Beton B35

In Bild 4.21 und Bild 4.22 ist die Beziehung zwischen hydrostatischem Druck und volumetrischer Dehnung graphisch dargestellt. Aus Bild 4.22 ist deutlich der lineare Ast vor dem überproportionalen Anstieg zu erkennen.

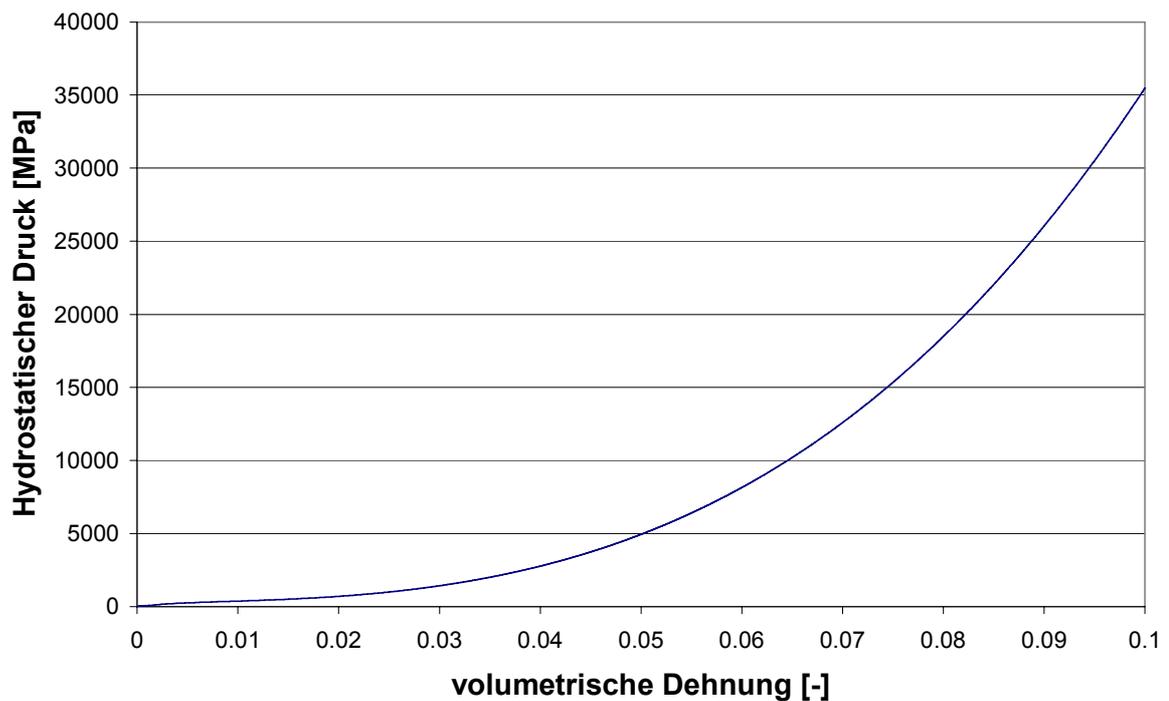


Bild 4.21: Beton-Hugoniot-Kurve

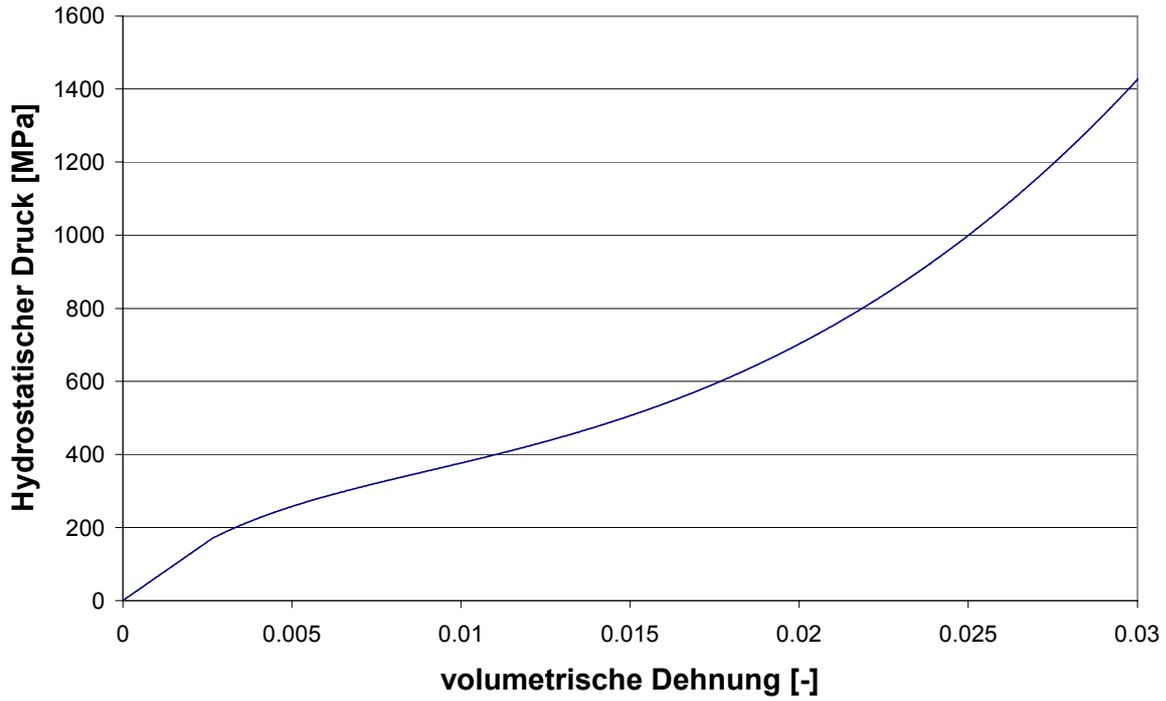


Bild 4.22: Beton-Hugoniot Kurve

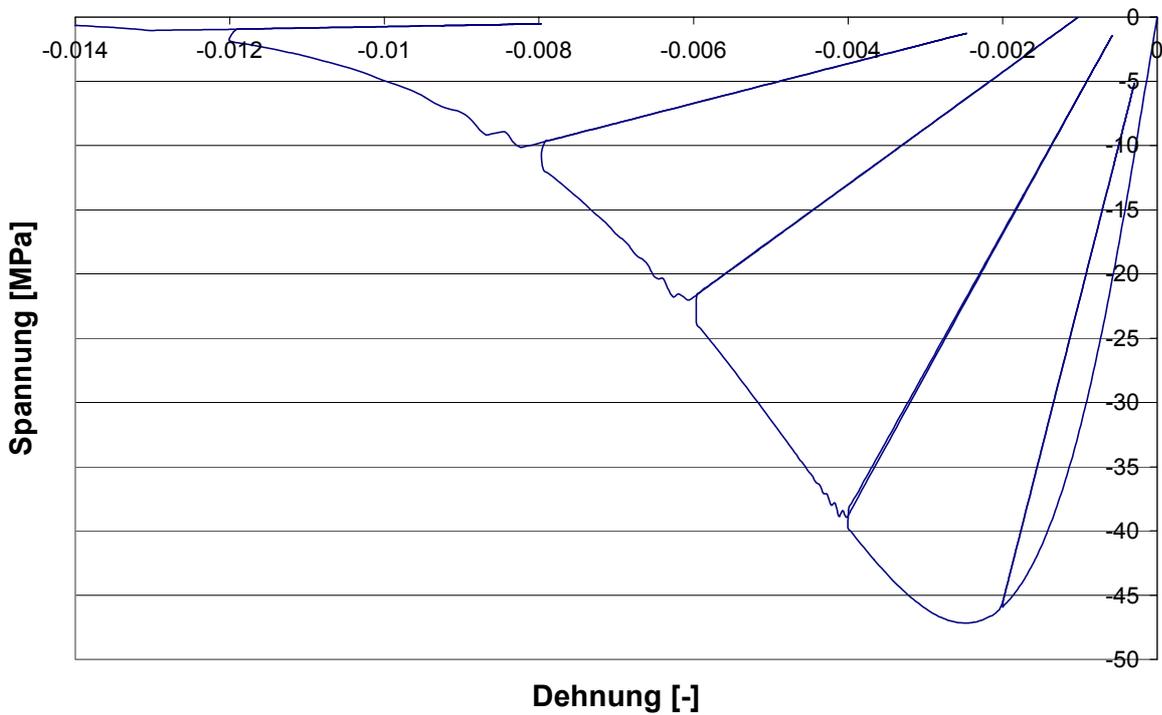


Bild 4.23: Zyklische Spannungs-Dehnungs-Linie des B35 ermittelt mit dem MLSPH-Verfahren

Bild 4.23 zeigt das Materialverhalten des B35 unter zyklischer Beanspruchung. Es ist zu erkennen, daß bei Wiederbelastung der Belastungspfad nicht exakt getroffen wird. Dies ist allerdings auch bei Simulationen mit finiten Elementen zu beobachten. Ansonsten approximiert das SPH-Programm den Werkstoff Beton sehr gut.

5 Numerische Simulation

In Kapitel 5.1 wird für den fiktiven Belastungsfall "Zylinder unter Innendruck" getestet, ob das SPH-Programm in der Lage ist, die wichtigsten Fragmentierungsmechanismen, wie sie schon in Kapitel 2 diskutiert wurden, prinzipiell abzubilden. Zur Approximation des Werkstoffes wird der statische Anteil des in Kapitel 4 beschriebenen Betonstoffgesetzes verwendet. Versuchsdaten liegen für das vorhandene Problem nicht vor. Kapitel 5.2 beschäftigt sich mit der numerischen Reproduktion von Versuchsergebnissen. In Kapitel 5.2.2 werden konkrete Betonplatten unter Kontaktsimulation mit dem SPH-Programm simuliert und mit den Versuchen aus Kapitel 5.2.1 verglichen. Es wird gezeigt, daß das SPH-Programm unter Verwendung des Betonmodells in der Lage ist, sowohl den Schadensprozeß und die gemessenen Druckverläufe als auch die Fragmentverteilung zu reproduzieren.

5.1 Theoretische Untersuchungen zum Fragmentierungsverhalten

Bild 5.1 zeigt den hohlen Zylinder unter Innendruck. Zur Modellierung des Innendruckes wurde ein steifer Kern generiert, dem radial eine Geschwindigkeit zugewiesen wurde (siehe Bild 5.1), so daß die mittlere Betonzugfestigkeit gemäß Bild 5.2 mit verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten erreicht wurde.

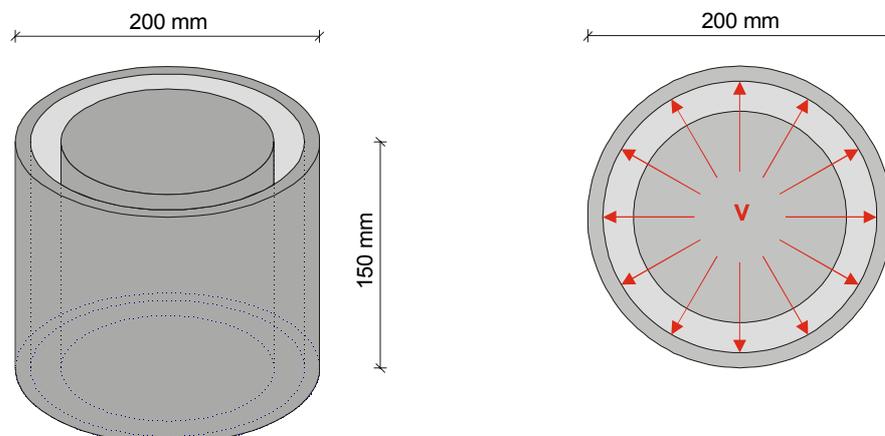


Bild 5.1: Zylinder unter Innendruck

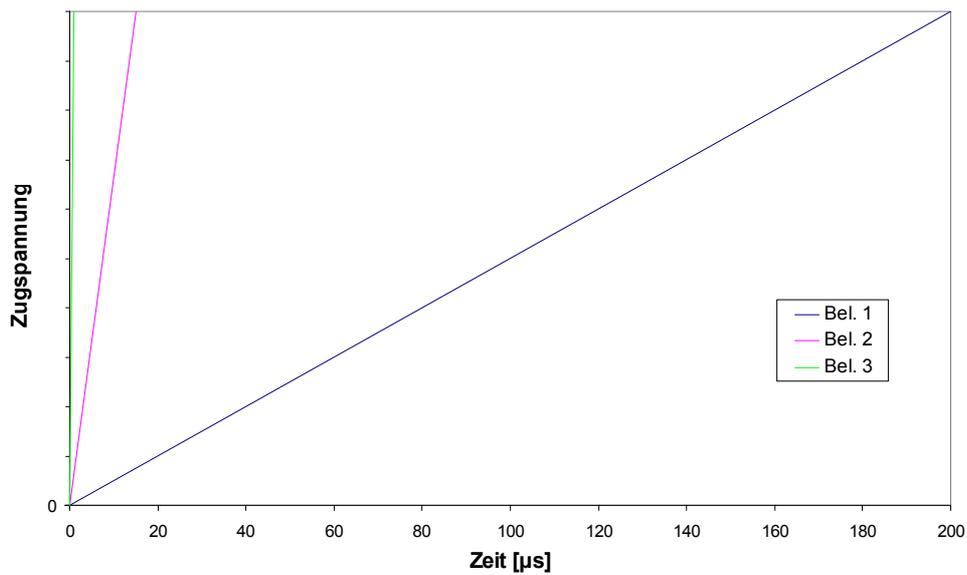


Bild 5.2: Aufbringung des Innendruckes mit unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten

Bild 5.3 zeigt den hohlen Betonzylinder mit dem Zylinder für den Innendruck.

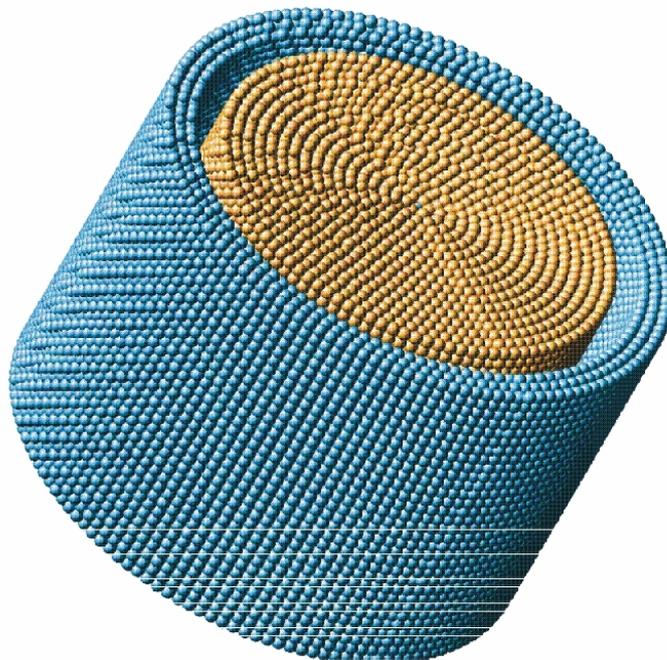


Bild 5.3: SPH-Diskretisierung des Beton- und Innenzylinders

Es wurde die Partikelauflösung modifiziert, um den Einfluß der Netzfeinheit zu testen. Die unterschiedliche Belastungsgeschwindigkeit wurde durch verschiedene Geschwindigkeiten des radial expandierenden Innenzylinders simuliert. Die Heterogenität des Werkstoffes wurde mithilfe einer Festigkeitsstreuung der Betonzug- und -druckfestigkeit realisiert. Hierzu wurde das statische Betonstoffgesetz mit einem Vorfaktor α multipliziert, der aus einer log-normal Verteilung mit unterschiedlicher Streuung um den Mittelwert 1 erhalten wurde:

$$\sigma_{ij} = \alpha (1 - D) E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.1)$$

Die Parameter α der log-normal Verteilung mit unterschiedlichen Streuungen sind in Bild 5.4 grob skizziert. Aus Versuchen (siehe z.B. Mirza et al. [203] und Harada et al. [133]) ist bekannt, daß die Festigkeit des Beton bis zu ca. 20% um die mittlere Zugfestigkeit streuen kann. Da bei derartigen Streuungen keine signifikanten Unterschiede bei der Fragmentverteilungen in den durchgeführten Simulationen auftraten, wurde die Streuung noch bis auf 100% erhöht. Derartige Streuungen sind in der Realität nicht zu erwarten. Zur Erzeugung der Parameter α wurde die von FORTRAN zur Verfügung stehende NAG-Bibliothek herangezogen. Es hat sich gezeigt, daß bei sehr großen Streuungen die räumliche Korrelation einen nicht unerheblichen Einfluß besitzt. Die Art der Verteilung wurde nicht modifiziert.

Der 1 cm dicke Hohlzylinder wurde mit 12.214 Partikeln diskretisiert, dies entspricht 3 Partikeln in Dickenrichtung. Für den Werkstoff Beton mit Zuschlagkörnern bis zu 16 mm ist eine derartige Dicke natürlich unrealistisch. Um generell den Einfluß der in Kapitel 2 erwähnten Parameter auf das Fragmentierungsverhalten zu untersuchen, ist eine derartige Annahme jedoch gerechtfertigt.

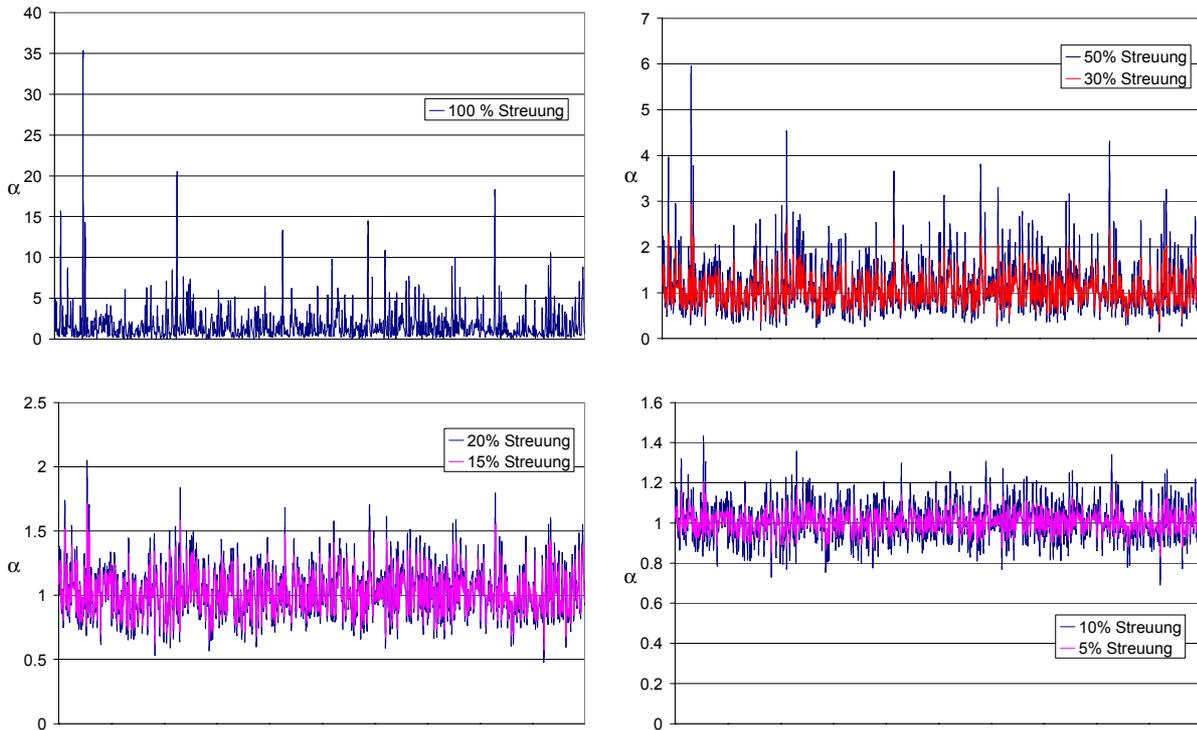


Bild 5.4: Festigkeitsstreuung des Beton über den Vorfaktor α

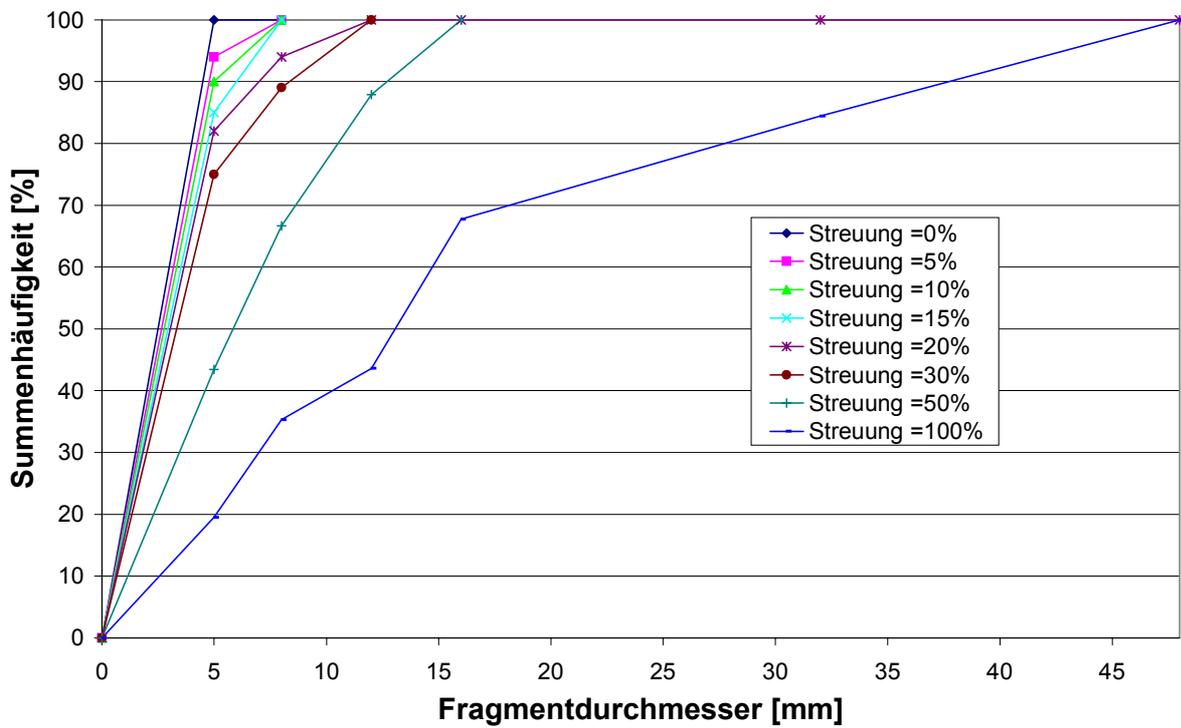


Bild 5.5: Fragmentverteilung des Betonzylinder 1 unter Bel. 1 (quasi statische Beanspruchung) und verschiedenen Festigkeitsstreuungen

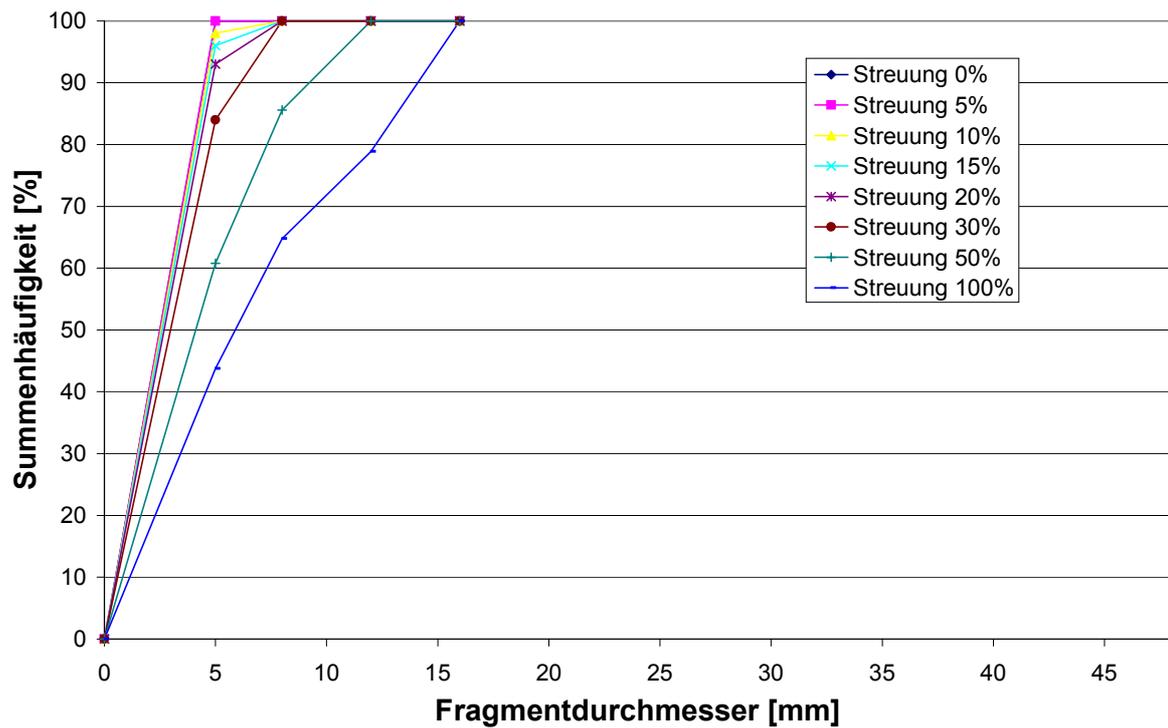


Bild 5.6: Fragmentverteilung des Betonzylinder 1 unter Bel. 2 und verschiedenen Festigkeitsstreuungen

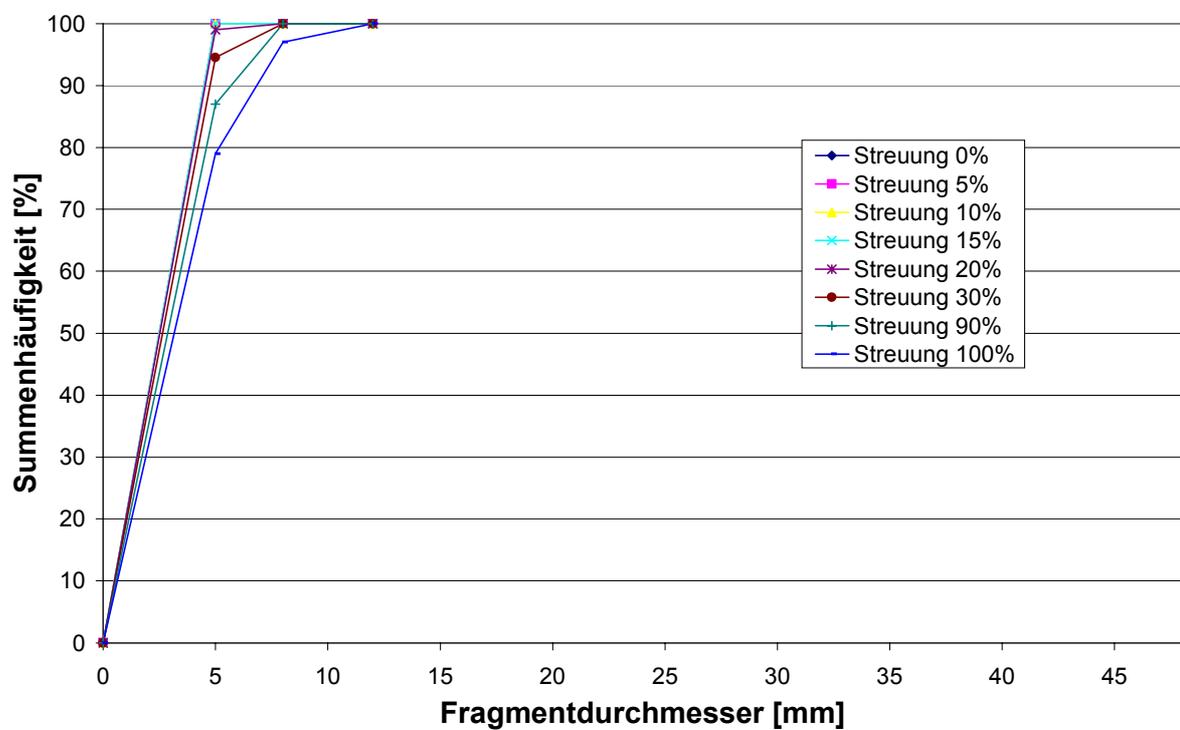


Bild 5.7: Fragmentverteilung des Betonzylinder 1 unter Bel. 3 (hochdynamische Belastung) und verschiedenen Festigkeitsstreuungen

Den starken Einfluß der Belastungsgeschwindigkeit auf die Reißdichte stellte schon Bachmann [10] fest. Obwohl wegen der geringen Dicke des Zylinders der Einfluß der Wellen- und Reißausbreitung nahezu verschwindet, zeigt sich, daß bei der Fragmentbildung die Belastungsgeschwindigkeit ein wesentlicher Parameter ist. Bild 5.5, Bild 5.6 und Bild 5.7 zeigen die Fragmentverteilungen für die unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten und Streuungen. Es ist deutlich zu erkennen, wie mit steigender Belastungsgeschwindigkeit die Fragmente kleiner werden und der Einfluß der Streuung immer mehr an Bedeutung verliert. Beim quasi statischen Versuch sind deutliche Abweichungen in der Fragmentverteilung bei unterschiedlicher Festigkeitsstreuung zu erkennen. Mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit nähern sich die Kurven immer stärker einander an, bis der Einfluß der Streuung nahezu verschwindet. Mit steigender Belastungsgeschwindigkeit wird der Einfluß "Belastungsgeschwindigkeit" auf die Fragmentverteilung immer signifikanter. In Bild 5.8 ist deutlich der stark überproportionale Einfluß der Belastungsgeschwindigkeit auf die Fragmentverteilung, exemplarisch für zwei Streuungen dargestellt, zu erkennen.

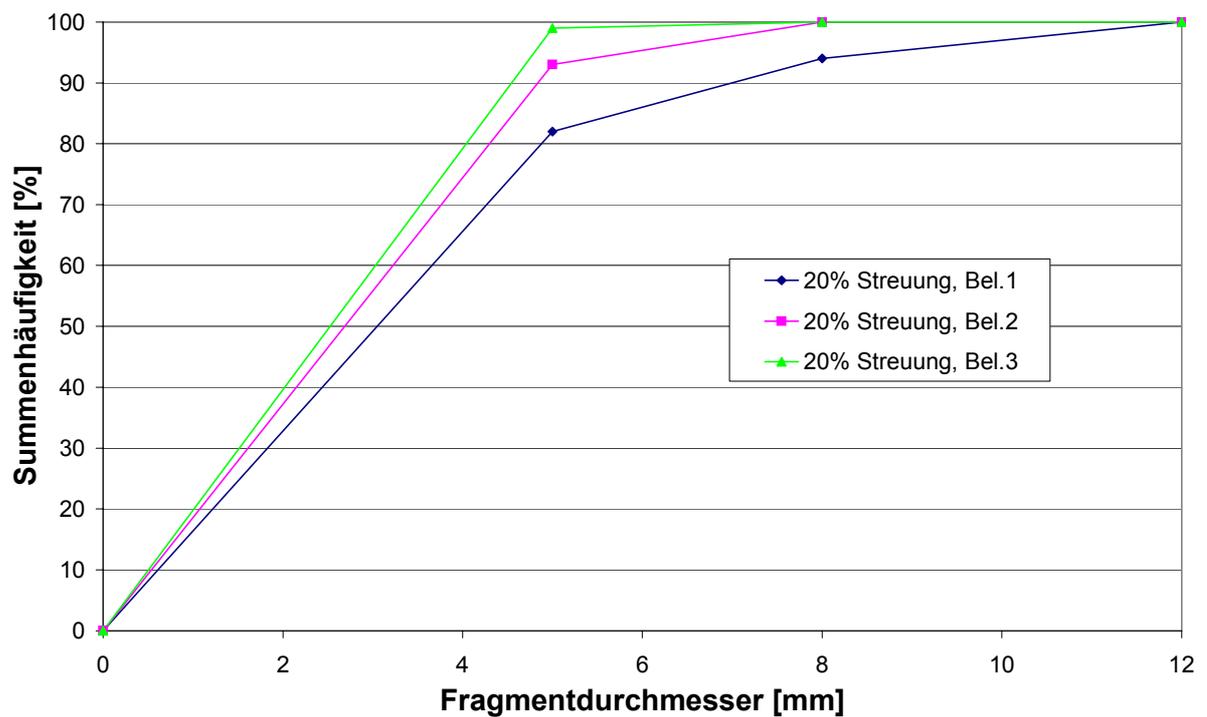
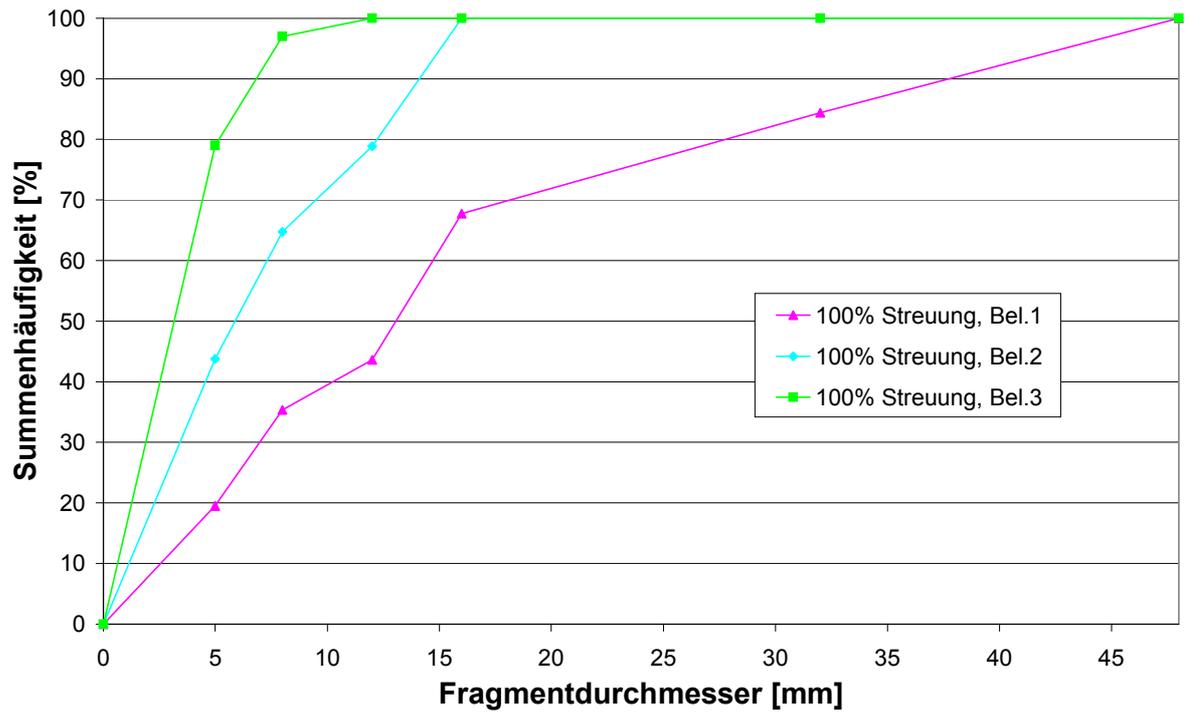


Bild 5.8: Fragmentverteilung des Betonzylinder 1 für die verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten für eine Festigkeitsstreuung von a) 100%, b) 20%

Bei quasi statischer Belastung war die Schädigungsrate \dot{D} sehr klein, d.h. die maximale Schädigung von $D=1,0$ wurde erst nach Durchlaufen zahlreicher Zeitschritte erreicht. Aufgrund dieser langsamen Schädigungsevolution trennten sich Partikel niedriger Festigkeit ($\alpha \ll 1,0$) von Partikeln mit hoher Festigkeit ($\alpha \gg 1,0$). Dadurch entstanden teilweise sehr große Fragmente. Mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit wurde auch für Partikel mit einer relativ hohen Festigkeit die maximale Schädigung von $D=1,0$ rasch erreicht -teilweise innerhalb von drei Zeitschleifen-, so daß sich wesentlich feinere Fragmente ausbildeten.

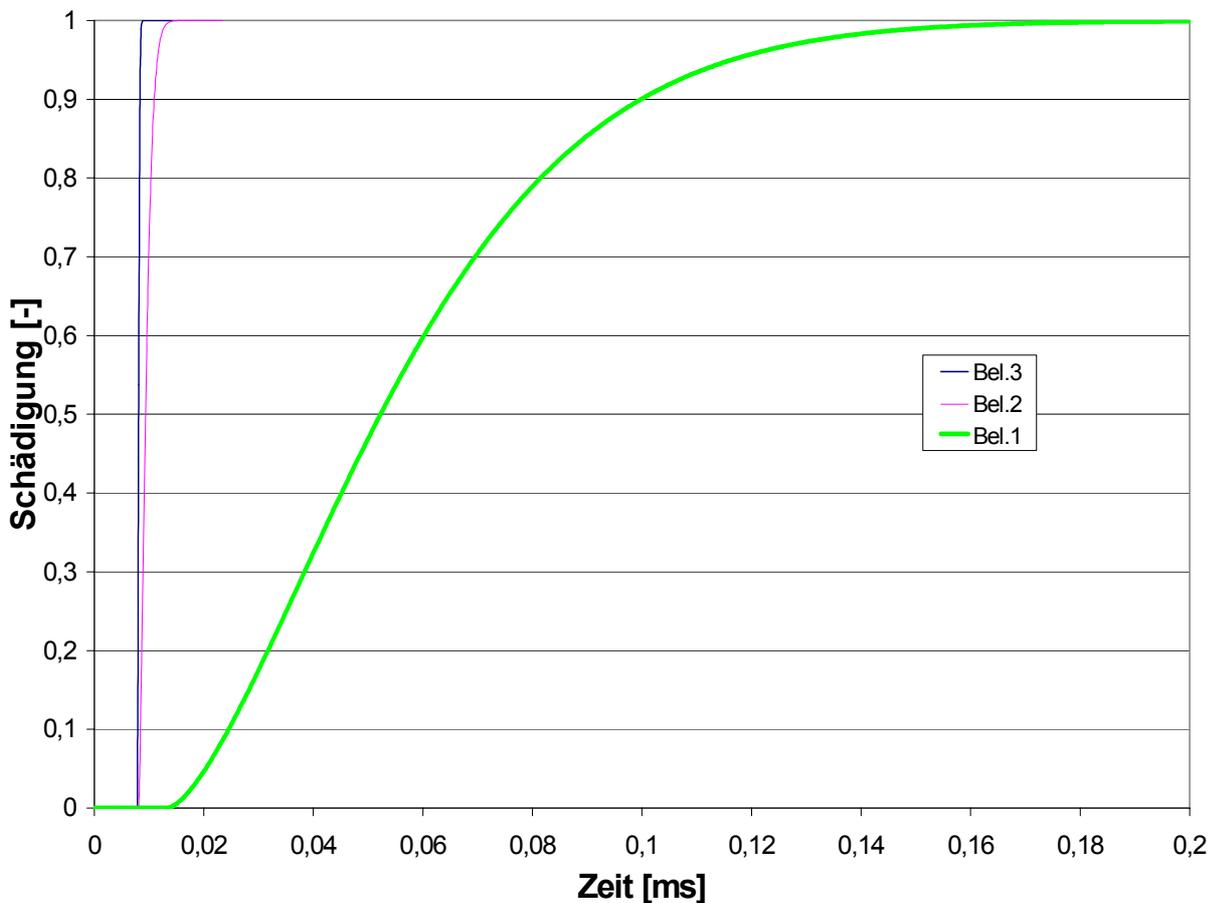


Bild 5.9: Schädigungsevolution des Betonzylinders 1 bei unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten

Bild 5.9 zeigt die Schädigungsentwicklung für unterschiedliche Belastungsgeschwindigkeiten. Bei den sehr hohen Belastungsgeschwindigkeiten entspricht die Schädigungsentwicklung fast einer Heaviside-Funktion. An dieser Stelle läßt sich der Schluß ziehen, daß die Fragmentgröße mit der Schädigungsrate in Bezug gebracht werden kann. Es läßt sich prinzipiell auch bestätigen, daß die großen Fragmente Partikel

mit einer sehr geringen maximalen Schädigungsrate \dot{D} enthalten und die feinen Fragmente bzw. Staubkörner eine sehr hohe Schädigungsrate aufweisen. Eine quantitative Aussage, d.h. eine Formel, die allgemein die Fragmentgröße mit der Schädigungsrate in Bezug bringt, ist allerdings äußerst schwierig zu treffen, zumal diese Formel sich auch lediglich für das hier ausgewählte vereinfachte Betonstoffgesetz eignet. Unter Einbeziehung einer dynamischen Schädigungsrelaxation hat sich bei den in Kapitel 5.2.2 durchgeführten Berechnungen gezeigt, daß die statische Schädigung von $D=1,0$ im Lasteinleitungsbereich zwar sehr schnell erreicht wird, durch den dynamischen Anteil jedoch teilweise recht stark verzögert einsetzt.

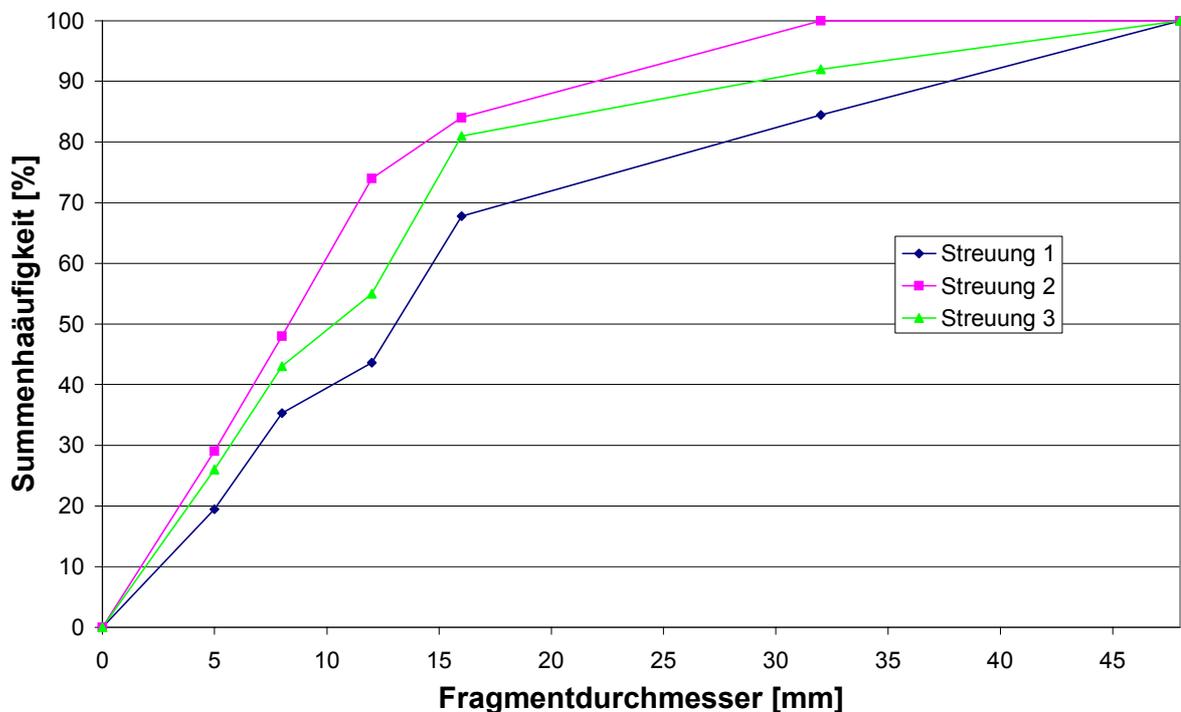


Bild 5.10: Fragmentverteilung des Betonzylinder 1 unter Bel. 1 (quasi statischer Innendruck) und unterschiedlichen 100% Streuungen

Des weiteren hat sich gezeigt, daß die Festigkeiten schon stark streuen müssen, um überhaupt einen Einfluß auf die Fragmentverteilung zu nehmen. Streuungen von 100% sind für den Beton in der Realität sicherlich nicht zu erwarten. Qualitativ kann jedoch gezeigt werden, daß die Streuung einen Einfluß auf die Fragmentverteilung besitzt. Dieser Einfluß beschränkt sich allerdings auf den statischen Belastungsfall, für hochdynamische Vorgänge wird der Einfluß der Festigkeitsstreuung zunehmend

unrelevant. Hierbei ist noch zu beachten, daß durch das einfache Modell, dem Zylinder unter Innendruck, eine homogene und gleichmäßige Spannungsverteilung im gesamten Zylinder erreicht wird. Bei komplexen Geometrien und Belastungen, bei denen innerhalb eines Körpers unterschiedliche Spannungsmaximas erreicht werden, wird sich der Einfluß der Streuung wahrscheinlich deutlicher bemerkbar machen. Ebenfalls ist der Einfluß der räumlichen Korrelation nicht zu vernachlässigen. Gerade bei großen Streuungen spielt die räumliche Korrelation eine entscheidende Rolle. Bild 5.10 zeigt für drei verschiedene 100%-Streuungen unter quasi statischer Belastung die unterschiedlichen Fragmentverteilungen. Auch hier sind deutliche Abweichungen zu erkennen. Um quantitative Aussagen machen zu können, bedarf es hierbei zahlreicher Untersuchungen für die räumliche Korrelation, die im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht durchgeführt wurden.

Betonzylinder	Partikelanz. Betonzylinder	Partikelanz. Innenzylinder	Partikelanz. in Dickenrichtung	Partikelmasse [g]	Min. Frag. \varnothing [mm]
1	12214	29543	3	0,216	5,6
2	80337	227042	5	0,033	3,0
3	249030	718830	7	0,011	2,05

Tabelle 5.1: Zylinder mit verschiedenen Partikelanzahlen

Um den Einfluß der Partikelauflösung auf die Fragmentverteilung zu studieren, wurde der Betonzylinder verfeinert. Die Partikelanzahlen und Partikelanzahlen in Dickenrichtung sind in Tabelle 5.1 aufgelistet. Für den statischen und hochdynamischen Fall sind für eine Streuung von 20% bzw. 100% die Ergebnisse in Bild 5.11 bzw. Bild 5.12 dargestellt. Mit zunehmender Partikeldichte werden die Fragmente vor allem unter quasi statischer Beanspruchung auch feiner, siehe Bild 5.11. Interessant ist der schwache Einfluß der Partikelauflösung auf die Fragmentverteilung bei niedriger Festigkeitsstreuung und zunehmender Belastungsgeschwindigkeit. An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, daß die Untersuchungen an einem einfachen Beispiel mit einer homogenen Spannungsverteilung durchgeführt wurden. Bei einer Netzverfeinerung ist zu beachten, daß durch die größere Partikelanzahl die Partikelmasse und somit

auch das Partikelvolumen abnimmt, was eine bessere Auflösung in der Sieblinie ermöglicht. Zur einheitlichen Darstellung wird jedoch die Sieblinienauflösung des am größten diskretisierten Zylinders verwendet. Der Einfluß der Partikelauflösung auf die Fragmentverteilung ist generell jedoch nicht signifikant.

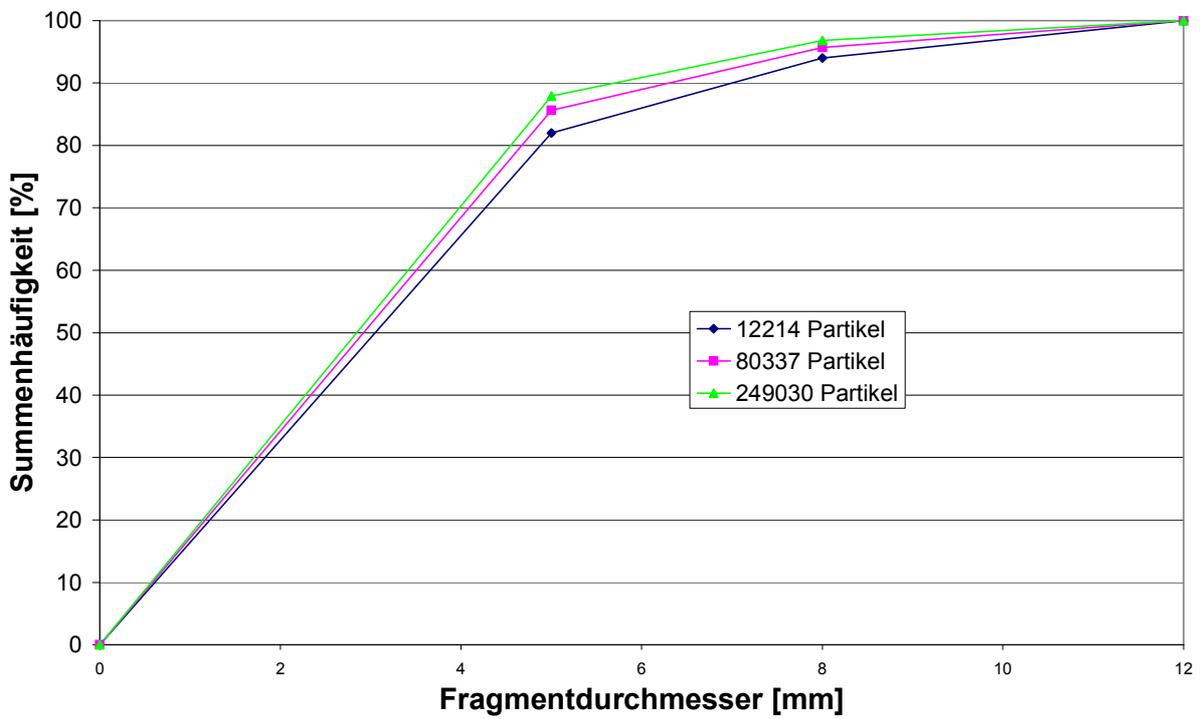
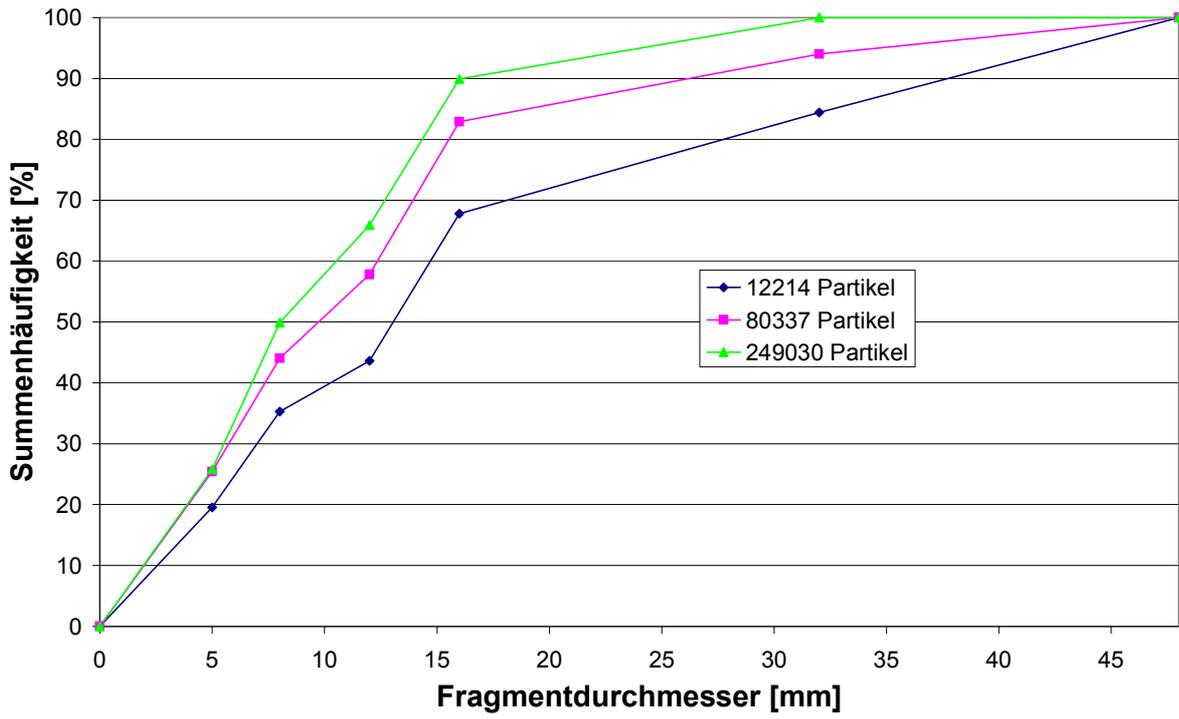


Bild 5.11: Fragmentverteilung der Betonzylinder 1 bis 3 unter Bel. 1 (quasi statischer Innendruck) und einer Streuung von a) 100%, b) 20%

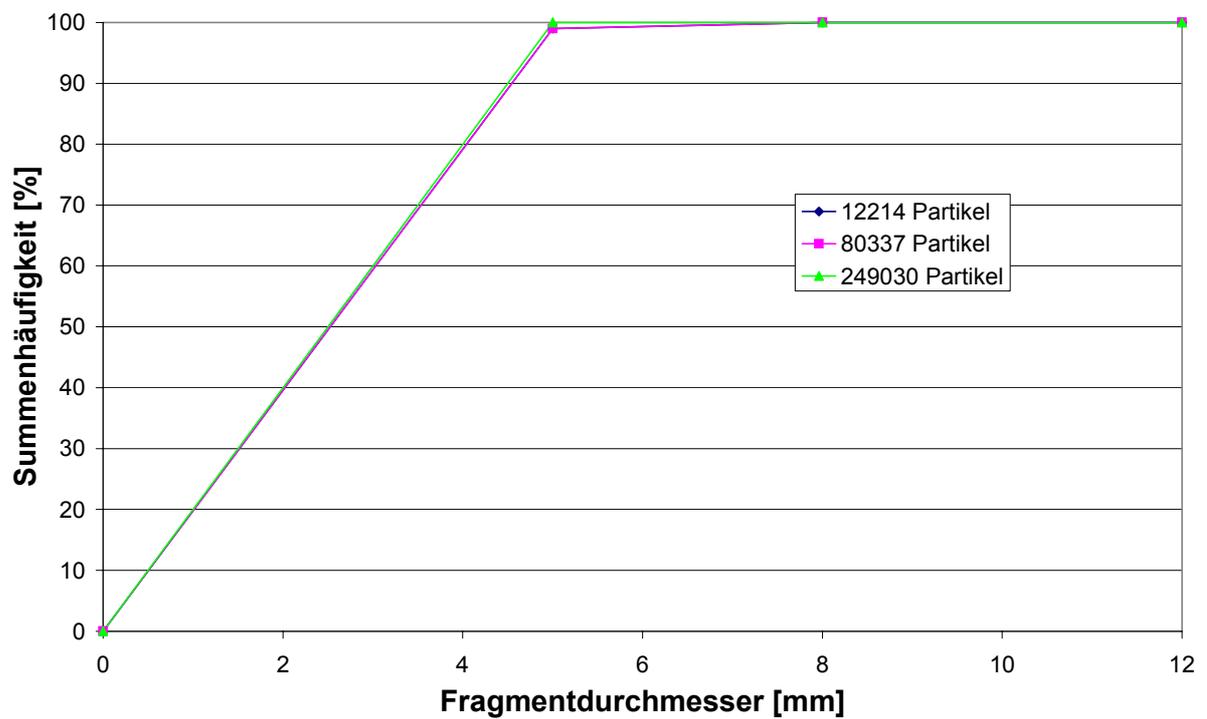
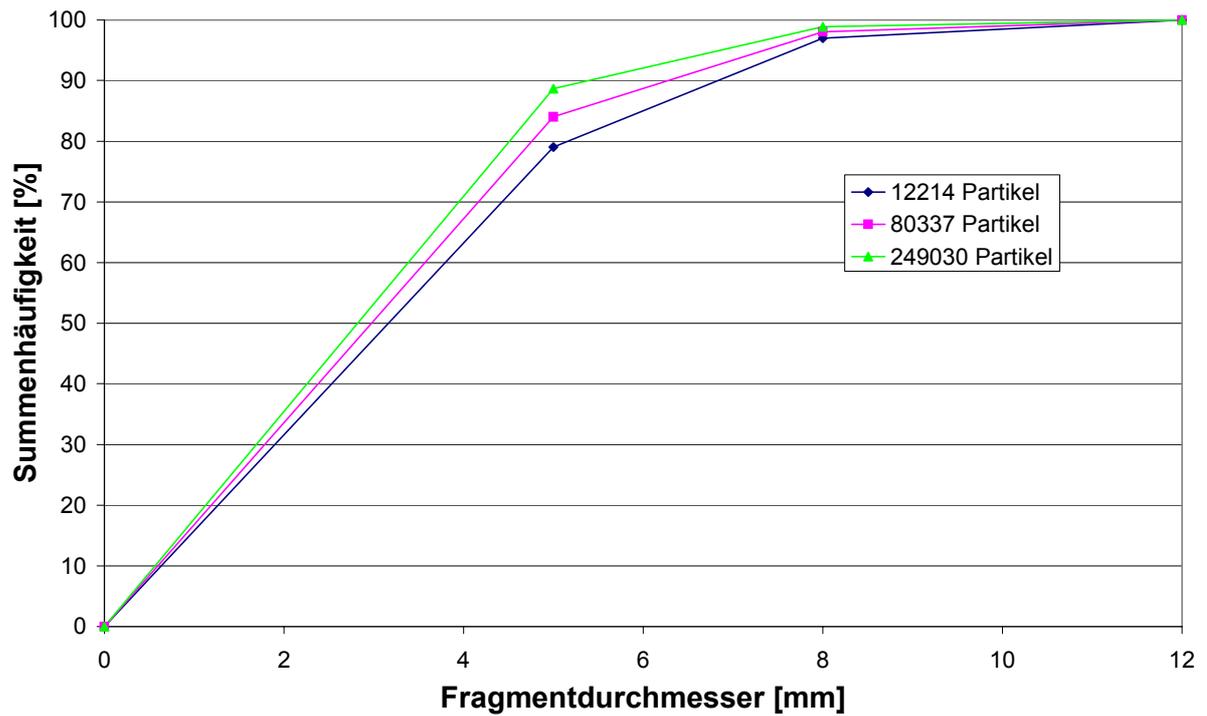


Bild 5.12: Fragmentverteilung der Betonzylinder 1 bis 3 unter Bel. 3 (hochdynamische Belastung) und einer Streuung von a) 100%, b) 20%

5.2 Verifikation anhand von Versuchen

5.2.1 Versuche

Um den Fragmentierungsprozeß von Beton unter hochdynamischer Beanspruchung auch quantitativ beurteilen zu können, wurden verschiedene Versuchsergebnisse herangezogen. Zum einen wurden die Versuchsergebnisse von Herrmann [138] verwendet. Bei den Sprengversuchen von Herrmann [138] wurden Betonplatten unterschiedlicher Plattendicke und Festigkeit mit einem Sprengstoffkegel beaufschlagt. Hierbei wurde neben der Ladungsmenge des Sprengstoffes ebenso der verwendete Sprengstoff selber modifiziert. In der Regel wurde als Sprengstoff TNT verwendet, der mit einem Außenkegel aus Composition B ummantelt war. Aufgrund der höheren Detonationsgeschwindigkeit des Composition B läuft die Druckwelle an der Kegelaußenseite vor und zündet dort den TNT. Somit wird erreicht, daß eine ebene Belastungswelle in den Beton eingeleitet wird.

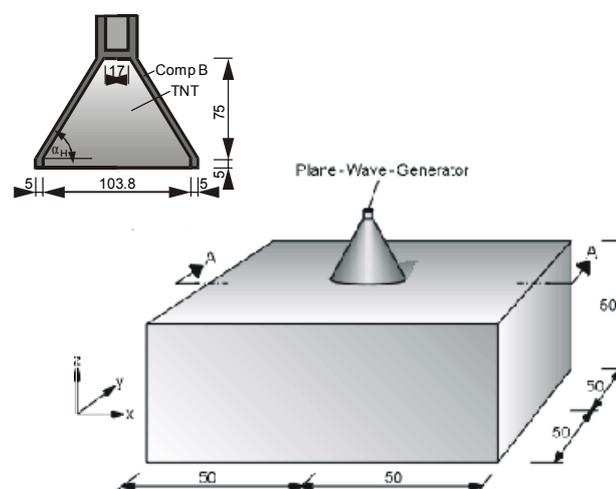


Bild 5.13: Versuchsaufbau der gesprengten Platten

Der prinzipielle Versuchsaufbau ist Bild 5.13 zu entnehmen. Bild 5.14 zeigt in Plattenmitte die Lage der Druckaufnehmer sowie den Schnitt durch den benutzten Sprengstoff. Die Plattenabmessungen und die Daten des verwendeten Sprengstoffkegels sind in Tabelle 5.2 aufgelistet. Zum anderen wurden weitere Versuchsergebnisse von Ockert [221] hinzugezogen.

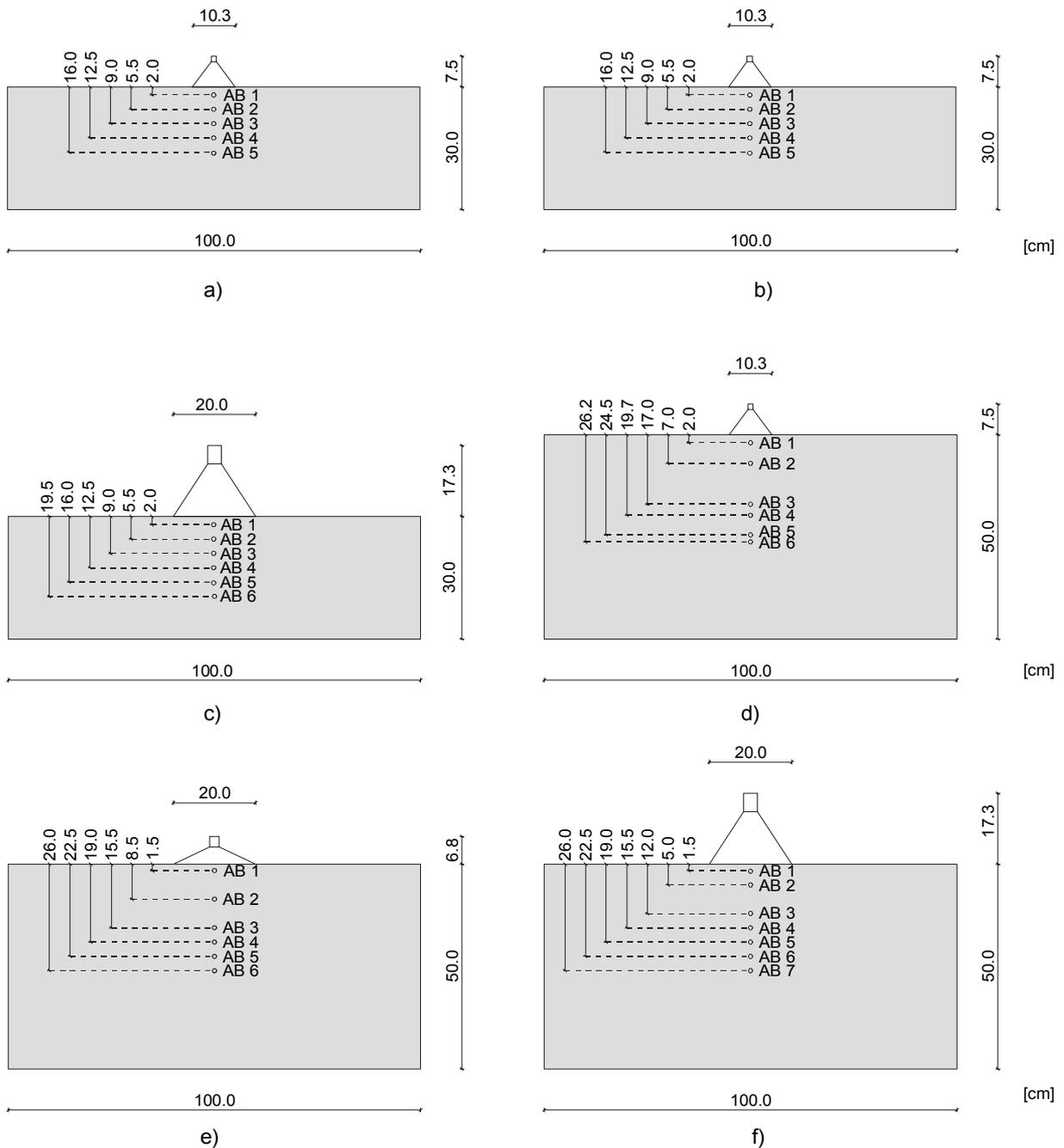


Bild 5.14: Lage der Meßaufnehmer bei den Platten a) S1, b) S2, c) S3, d) P3, e) P4, f) P5

Bei den Versuchen von Herrmann [138] wurden neben den Druckverläufen im Beton und dem Schädigungsgrad nach dem Versuch auch Fragmentverteilungen ermittelt. Der Schädigungsgrad wurde nach dem Versuch quantifiziert, indem die Betonplatte in der Mitte zersägt wurde. Bei den Versuchen von Ockert [221] stand nur der Schädigungsgrad der Platte nach dem Versuch zur Verfügung. Der prinzipielle Versuchsaufbau blieb erhalten. Die Daten der Platten O1 bis O3 sowie der verwendeten Sprengstoffkegel sind Tabelle 5.2 zu entnehmen. Detailliertere Infor-

mationen über die Meßtechnik findet man bei Hermann [138] bzw. Ockert [221].

Platte	Grundriß [cm⊗cm]	Dicke [cm]	Festigkeit	Sprengkegel		
				∅ [cm]	h [cm]	Material
S1	100⊗100	30	B200	10,4	7,5	TNT/Comp. B
S2	100⊗100	30	B200	10,4	7,5	TNT/Comp. B
S3	100⊗100	30	B200	20,0	17,3	TNT/Comp. B
P3	100⊗100	50	B35	10,4	7,5	TNT/Comp. B
P4	100⊗100	50	B35	20,0	6,8	Phleg. TNT
P5	100⊗100	50	B35	20,0	17,3	TNT/Comp. B
O1	100⊗100	25	B35	10,4	7,5	TNT/Comp. B
O2	120⊗120	32	B35	10,4	7,5	TNT/Comp. B
O3	100⊗100	40	B35	10,4	7,5	TNT/Comp. B

Tabelle 5.2: Daten der verwendeten Platten und Sprengstoffkegel

Bei den Versuchen von Hermann [138] wurden zur Bestimmung der Fragmentsieblinien die Trümmer nach der Sprengung erfaßt. Trümmer bis zu einem Durchmesser von 64 mm konnten maschinell sortiert, größere Trümmer mußten von Hand ausgezählt werden. Ursprünglich war noch vorgesehen, die Lage der Trümmer in der Umgebung zu erfassen. Zu diesem Zweck wurden die Betonoberflächen farbig gekennzeichnet (siehe Bild 5.23 und Bild 5.49). Durch die teilweise erheblichen Zerstörungsgrade der Betonplatten und dem damit verbundenen hohen Aufwand, wurde von einer Erfassung der geometrischen Lage der Oberflächentrümmern in der Umgebung abgesehen.

5.2.2 Vergleich: Versuch-Rechnung

Bei der numerischen Simulation wurden die Betonplatten und Sprengstoffkegel mit dem SPH-Code diskretisiert. Bild 5.15 zeigt exemplarisch für den Versuch S3 das SPH-Netz in der Ausgangskonfiguration. Die Materialdaten für die verwendeten Sprengstoffkegel und Betone sind Tabelle 5.3, Tabelle 5.4 und Tabelle 5.5 zu entnehmen. Zur Simulation wurde das Betonstoffgesetz aus Kapitel 4 verwendet. Eine Streuung der Betonfestigkeiten wurde nicht berücksichtigt. Die Parameter des Betonmodells wurden an den in Kapitel 4.3.8 erläuterten Standardversuchen kalibriert. Die SPH-Simulation wurde teilweise mit unterschiedlichen

Netzfeinheiten durchgeführt, um den Einfluß der Partikelauflösung auf die Ergebnisse festzustellen. Die entsprechenden Betonplatten mit den unterschiedlichen Partikelzahlen sind in Tabelle 5.6 aufgeführt.

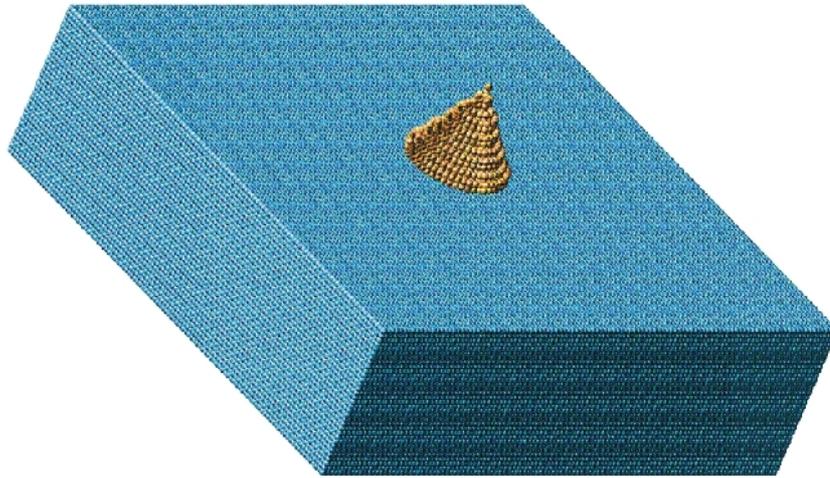


Bild 5.15: SPH-Diskretisierung der Platte S3 in der Ausgangskonfiguration

Bei den Versuchen mit leichten Abplatzungen an Plattenoberkante hat sich gezeigt, daß es ausreicht, die Berechnung bis zu einem Zeitpunkt von 2 bis 3 ms auszudehnen. Gerade bei den Platten mit massiven Abplatzungen an Plattenober- und -unterkante sowie bei den Sprengversuchen, bei denen die Platten total zerstört worden sind, stellte sich heraus, daß die Berechnungen zur Bestimmung einer Fragmentgrößenverteilung bis zu einem extrem späten Zeitpunkt durchgeführt werden müssen, damit sich die Partikel weit genug voneinander entfernen können. Bei den Platten S1 und S2 wurde die Berechnung beispielsweise bis zu einem Zeitpunkt von 6 ms fortgeführt. Hierzu waren weit über 20.000 Zeitschleifen erforderlich, was eine enorm lange Rechenzeit zur Folge hatte. Es sei hierbei erwähnt, daß zur Ermittlung des Schädigungsgrades der Platten die Rechnung erheblich früher beendet werden kann.

Anfangselastizität		Schädigungsevolution		e_{p2}	0.4
E_0	36000 N/mm ²	e_0	$2.5 \cdot 10^{-5}$	Dichte	
ν	0.22	e_d	$2.2 \cdot 10^{-4}$	ρ	$2.4 \cdot 10^{-3}$
Schädigungsfläche		g_d	1.5	Maxwell Relaxation	
c_1	0.012324	Reduktionsfaktor		n_{dam}	50-90
c_2	0.025166	r_t	1.2	Hugoniot-Funktion	
c_3	0.782058	r_c	20	a_v	0.7
c_4	0.346484	Platische Evolution		b_v	3.5
Platizitätsfläche		c_p	0.9	e_v	0.02
c_c	0.08	e_{p1}	$1.1 \cdot 10E-3$	$e_{v,th}$	0.008

Tabelle 5.3: Materialparameter für den Beton B35

Anfangselastizität		Schädigungsevolution		e_{p2}	0.4
E_0	73000 N/mm ²	e_0	$1.0 \cdot 10^{-4}$	Dichte	
ν	0.22	e_d	$2.9 \cdot 10^{-4}$	ρ	$2.8 \cdot 10^{-3}$
Schädigungsfläche		g_d	2.5	Maxwell Relaxation	
c_1	0.012324	Reduktionsfaktor		n_{dam}	50-70
c_2	0.025166	r_t	1.2	Hugoniot-Funktion	
c_3	0.782058	r_c	20	a_v	0.7
c_4	0.346484	Platische Evolution		b_v	3.5
Platizitätsfläche		c_p	0.9	e_v	0.02
c_c	0.08	e_{p1}	$1.1 \cdot 10E-3$	$e_{v,th}$	0.008

Tabelle 5.4: Materialparameter für den Beton B200

Material	ρ_0 [g/mm ³]	P_{max} [MPa]	C_d [m/s]	E_0 [MPa]	A [MPa]	B [MPa]	C [MPa]	R_1	R_2	ω
TNT	0,00163	21000	6930	70000	37120	3231	1045	4,15	0,95	0,30
Comp. B	0,001717	29500	7980	85000	52420	7678	1082	4,2	1,1	0,34
Ph. TNT	0,000838	21000	3800	37000	37120	3231	1045	4,15	0,95	0,30

Tabelle 5.5: Materialparameter der verwendeten Sprengstoffe, aus [74]

Platte	Partikelanzahl Beton
S1/S2 (grob)	110.902
S1/S2 (fein)	316.231
S3 (grob)	316.231
S3 (fein)	406.593
P3	380.926
P4 (grob)	119.164
P4 (fein)	380.926
P5	380.926
O1 (grob)	265.226
O1 (fein)	736.164
O2 (grob)	344.549
O2 (fein)	900.000
O3	298.116

Tabelle 5.6: Partikelanzahlen der unterschiedliche Platten und Sprengstoffkegel bei der SPH-Simulation

Die Fortführung der Simulation zu einem derart späten Zeitpunkt bringt neben der langen Rechenzeit noch ein weiteres Problem mit sich. Durch die ungenaue Art der Interpolation kann es zu einem unphysikalischen, d.h. numerischen, Trennen von Partikeln kommen. Durch Verwendung der MLS-Interpolation kann diese Instabilität zumindest verzögert werden. Während der Berechnung wurde kontrolliert, daß die Partikelgeschwindigkeiten nicht unphysikalisch anstiegen, um das Aufkommen von Instabilitäten zu vermeiden. Bei allen Platten wurde prinzipiell der in Kapitel 3.12.3 beschriebene Fragmentsuchalgorithmus verwendet. Als Kriterium für ein "Staubkorn" wurde jedoch noch eine zusätzliche Bedingung benutzt. Betonpartikel, deren Zug- und Druckschädigung D_t und D_c den Wert 1 annahmen, wurden ebenfalls als Staubkorn identifiziert. Da ein Rechenjob auf der IBM RS6000/SP lediglich 240 CPU-Minuten andauern darf, wurden alle für die Fortsetzung des Rechenjobs benötigten Daten auf eine Datei geschrieben. Bevor die Simulation nun fortgeführt wurde, wurde eine Fragmentsuche durchgeführt. Als Staubkorn identifizierte Partikel wurde lediglich aus der Fragmentsuche genommen, nicht aus der weiteren Berechnung, so daß die Massenerhaltung erfüllt wurde. Diese Technik hat den Vorteil, daß die Fragmentsuche noch zu einem Zeitpunkt geschieht, bei dem die Partikel sich nicht unphysikalisch voneinander trennen. Dies wurde durch Beobachtung der Schädigungsevo-

lution kontrolliert. In der Realität wird nach Durchlaufen der ersten oder zumindest der ersten beiden Druck- und Zugwellen die Schädigungsentwicklung weitgehend abgeschlossen sein und die einzelnen Fragmente, die sich gebildet haben, werden den Rest der Zeit benötigen, um sich zu trennen. Es hat sich gezeigt, daß zu einem Zeitpunkt, bei dem sich noch keine Partikel von der Platte gelöst hatten, die Schädigungsevolution auch in der Rechnung weitgehend abgeschlossen war. Danach entwickelte sich die Schädigung unbedeutend, auch bei Partikeln, deren Schädigungsgrad nicht sehr hoch war, wie beispielsweise im Randbereich, oder die sich schon teilweise von der Platte gelöst hatten. Natürlich konnte eine weitere Schädigungsevolution von nicht vollkommen geschädigten Partikeln nicht verhindert werden, besonders bei den Platten S3 und P5, die bis zu einem Zeitpunkt von 15 ms (über 100.000 Zeitschleifen) durchgeführt wurden. Ihr Schädigungsgrad konnte zumindest so stabil gehalten werden, daß er zumeist den Wert von $D_t=D_c=1$ nicht erreichte. Somit konnte eine unphysikalische Bildung von "Staubkörnern" verhindert werden. Näheres dazu, wie man Informationen über die Güte der Berechnungsergebnisse durch Betrachtung der Schädigungsevolution erhält, siehe Platte S1 und S2.

Nun zu den Ergebnissen:

Der erste Teil dieses Kapitels beschäftigt sich mit dem Vergleich der Rechenergebnisse mit den Versuchsergebnissen von Herrmann [138].

- Platten S1 und S2

Zunächst seien die Versuchsergebnisse der Platten S1 und S2 den Ergebnissen der SPH-Simulation gegenübergestellt. Anzumerken ist, daß bei Platte S1 im Versuch die Druckaufnehmer ausgefallen sind. Bei der SPH-Simulation wurde die Netzfeinheit gemäß Tabelle 5.6 variiert.

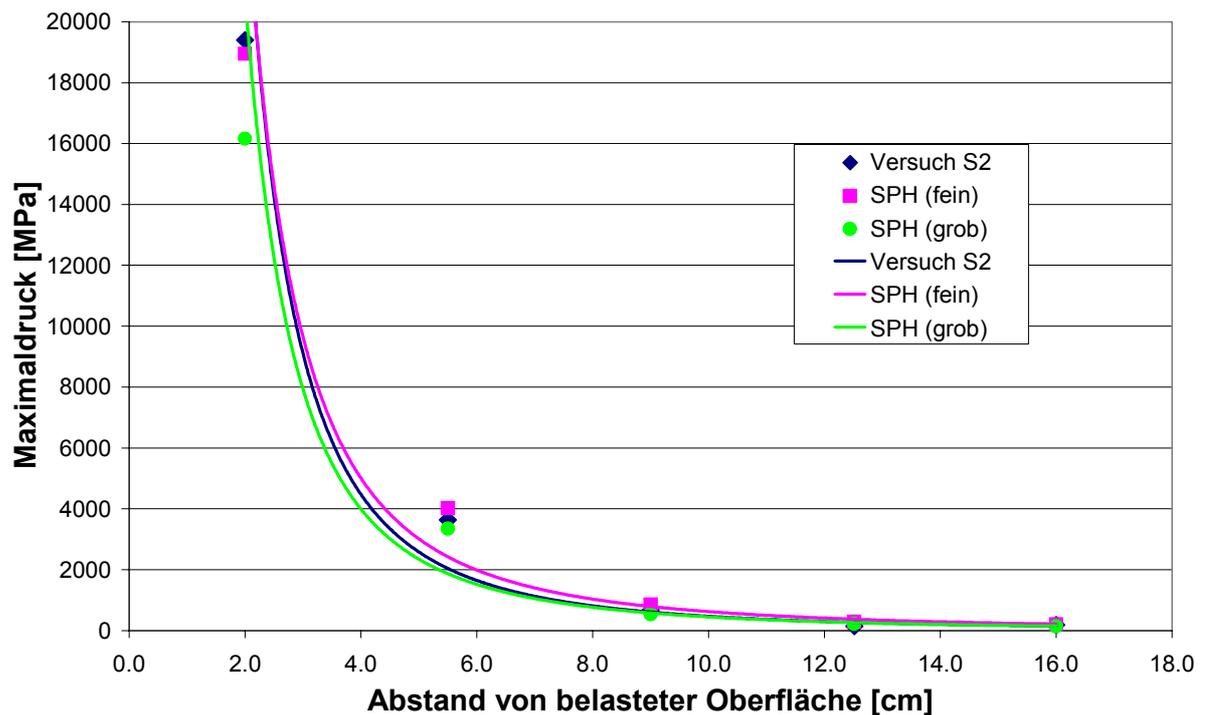


Bild 5.16: Druckmaximas über die Einbautiefe der Meßaufnehmer der Platte S2 aus Versuch und Rechnung

Bild 5.16 zeigt die Druckmaxima von Versuch und Rechnung. Es ist gut zu erkennen, daß mit steigender Partikelanzahl die Druckwerte des Versuches besonders im Lasteinleitungsbereich besser abgebildet werden. Den qualitativen Druckverlauf über die Plattendicke reproduziert das SPH-Programm auch für die geringe Partikelanzahl sehr gut. Bild 5.17 bis Bild 5.21 zeigen den Fragmentierungsprozeß anhand der SPH-Simulation zu unterschiedlichen Zeitpunkten für die beiden Netzgeometrien. In Anhang C ist der Fragmentierungsprozeß anhand eines Ausschnittes in Plattenmitte ebenfalls dargestellt. In Bild C.1 und Bild C.2 ist gut zu sehen, wie die zerstörten Betonpartikel nach der Kompression im Lasteinleitungsbereich direkt unter dem Sprengstoffkegel aus dem Krater wieder herausgeschleudert werden. Bild 5.20 und Bild 5.21 zeigen den Fragmentierungsprozeß zu zwei verschiedenen Zeiten beim "fein" diskretisierten SPH-Modell. Wichtig für die Darstellung ist, daß es sich bei den "Kugeln" um Integrationspunkte handelt, denen ein konstantes Volumen zur übersichtlichen Darstellung zugewiesen wurde. Es werden somit keine wirklichen Fragmente sichtbar gemacht, es handelt sich bei der graphischen Darstellung vielmehr um ein "Fragmentieren der Integ-

rationspunkte". Was sichtbar wird, ist der Schädigungsgrad der Platte. Deutlich wird, daß die Fragmentierung beim fein diskretisierten Modell schneller voranschreitet als beim grob diskretisierten. Dies liegt in der besseren Auflösung des Sprengstoffkegels begründet, bei dem sich durch die höhere Netzfeinheit auch größere Drücke aufbauen konnten. Auch hier ist in Plattenmitte zur besseren Verdeutlichung der Fragmentierungsprozeß dargestellt (siehe Anhang C). Es hat sich gezeigt, daß an Plattenunterkante schon nach 1 ms viele Partikel, die sich allmählich von der Platte lösten, einen Schädigungsgrad von $D_t=D_c=1$ besitzen.

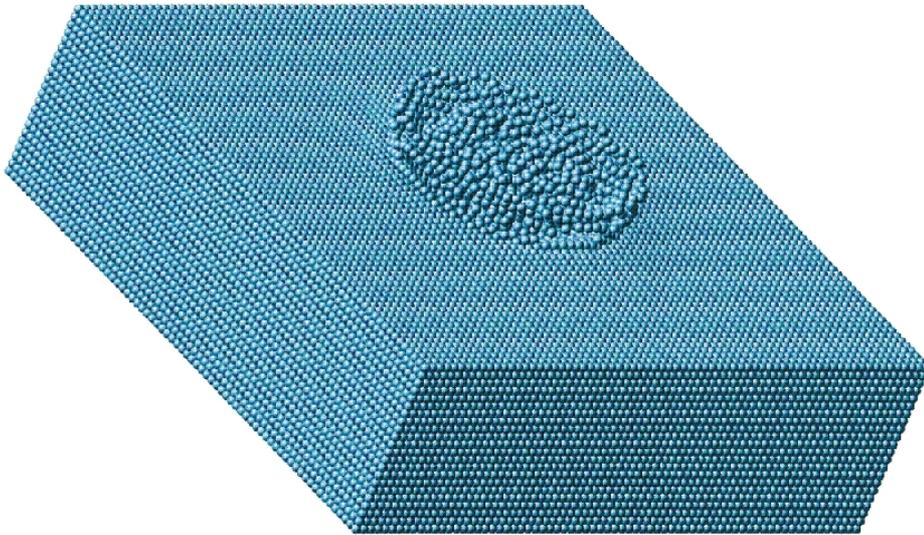


Bild 5.17: Fragmentierungsprozeß an Plattenoberkante der grob diskretisierten SPH-Platte S1 bzw. S2 nach 0,5 ms

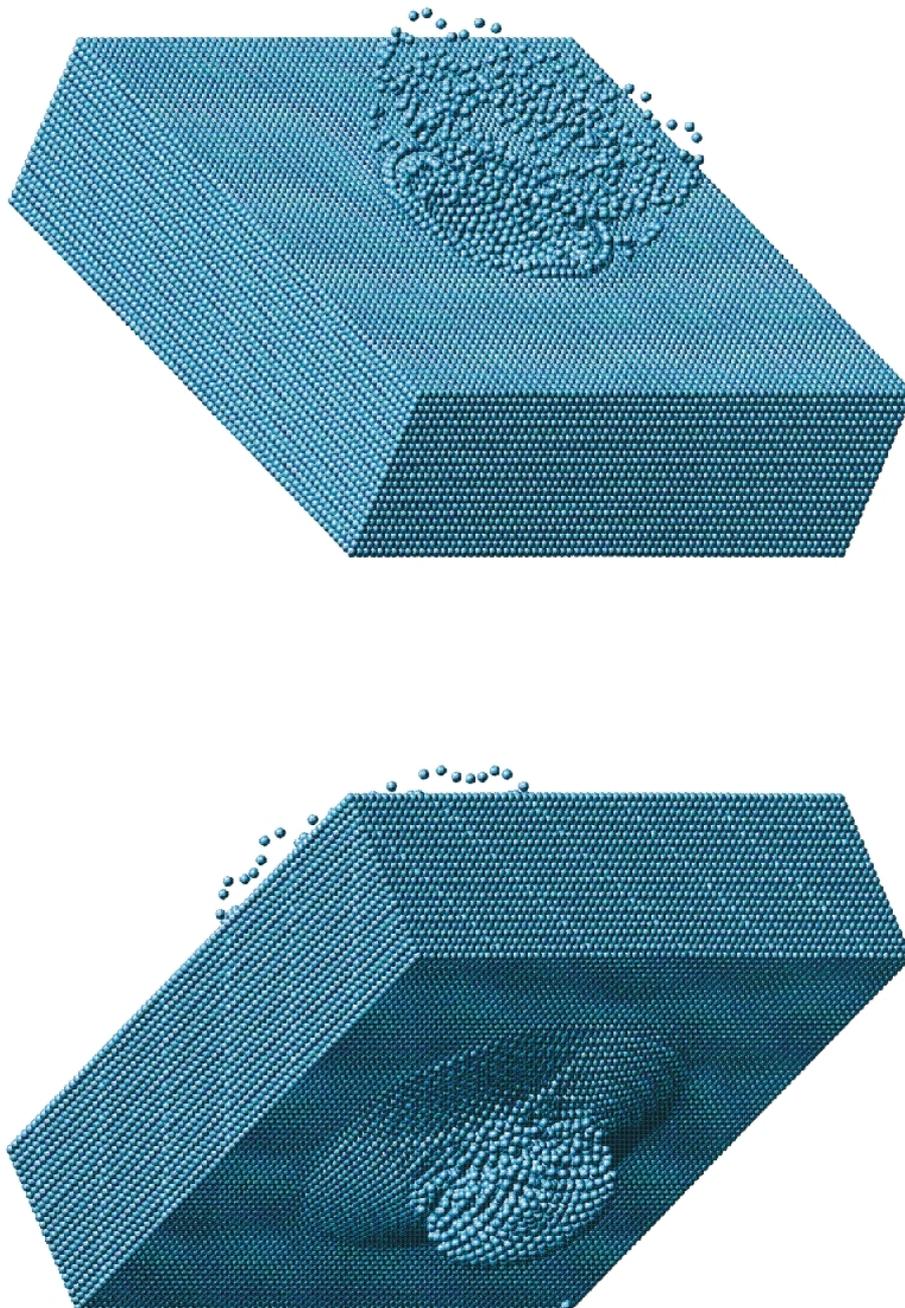


Bild 5.18: Fragmentierungsprozeß der grob diskretisierten SPH-Platte S1 bzw. S2 nach 1,0 ms an a) Plattenoberkante, b) Plattenunterkante

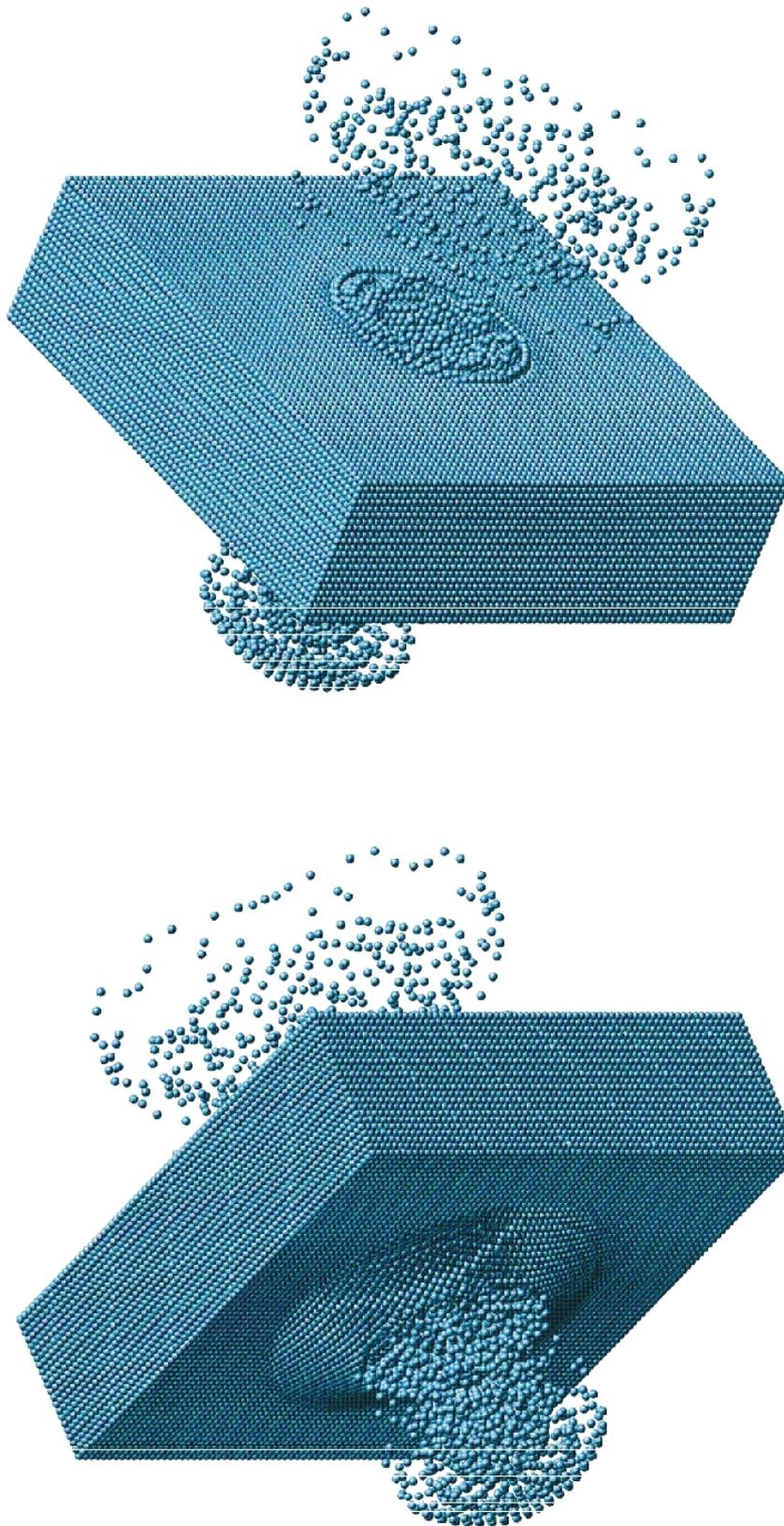


Bild 5.19: Fragmentierungsprozeß der grob diskretisierten SPH-Platte S1 bzw. S2 nach 2,0 ms an a) Plattenoberkante, b) Plattenunterkante

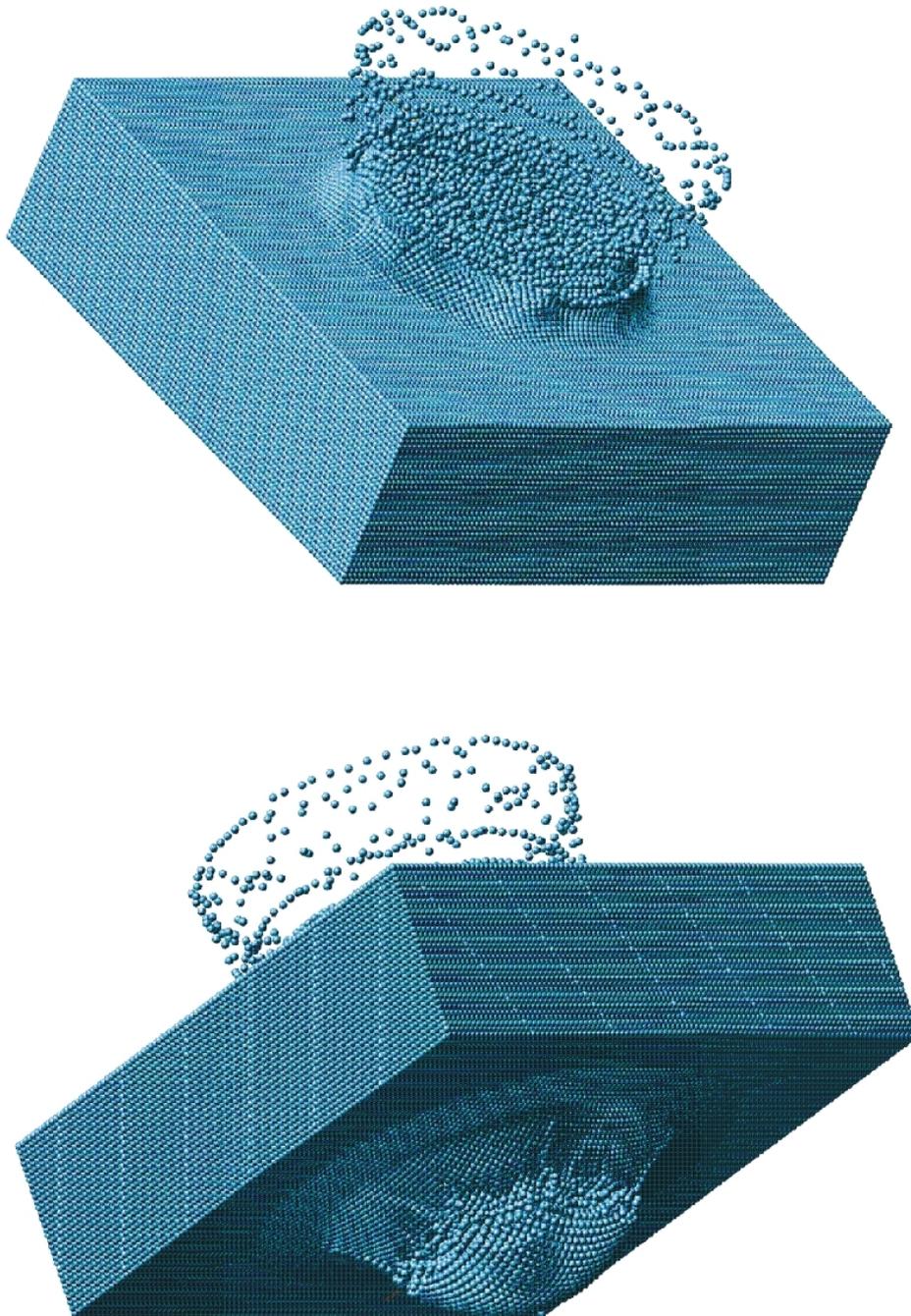


Bild 5.20: Fragmentierungsprozeß der fein diskretisierten SPH-Platte S1 bzw. S2 nach 0,8 ms an a) Plattenoberkante, b) Plattenunterkante

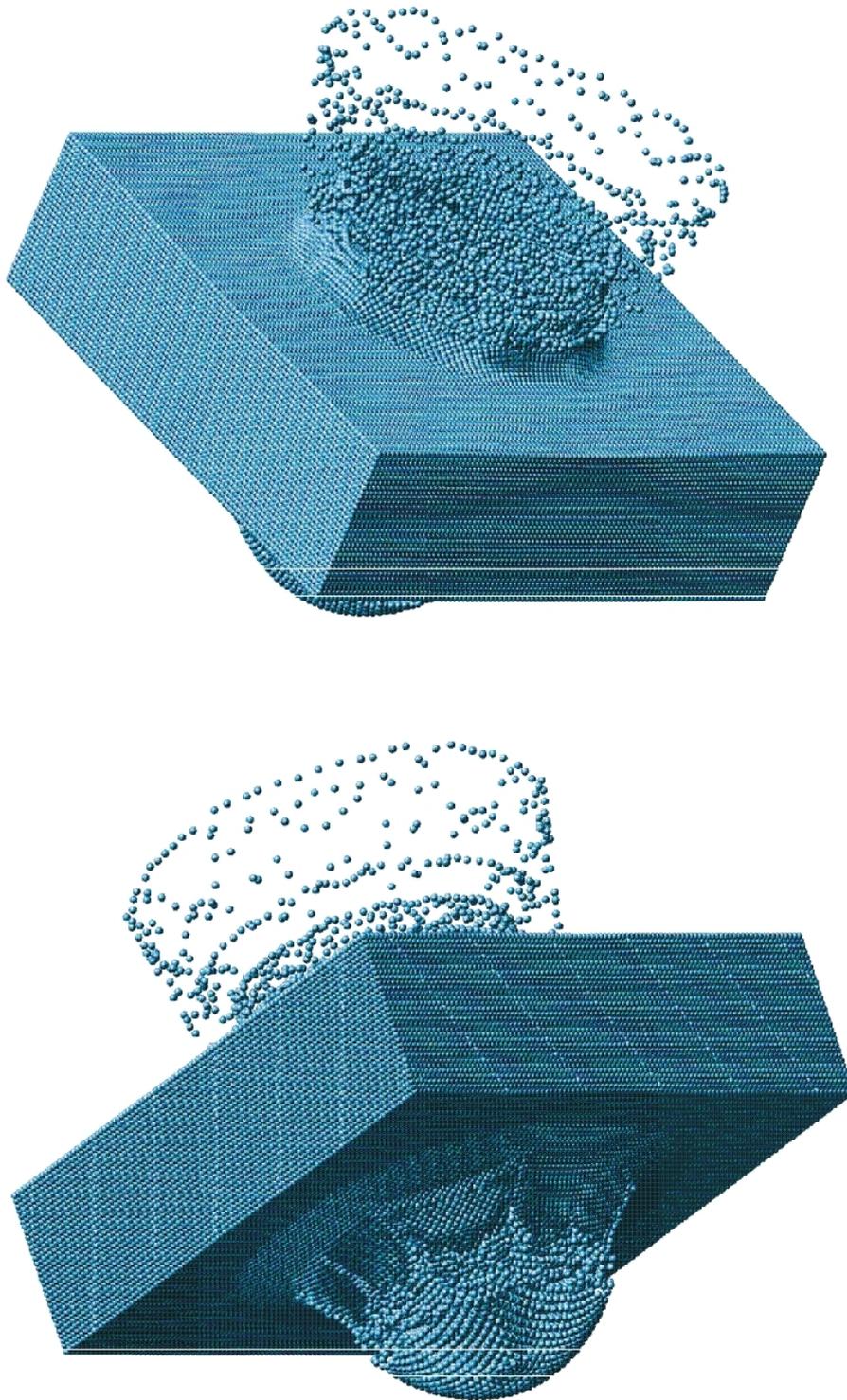


Bild 5.21: Fragmentierungsprozeß der fein diskretisierten SPH-Platte S1 bzw. S2 nach 1,0 ms an a) Plattenoberkante, b) Plattenunterkante

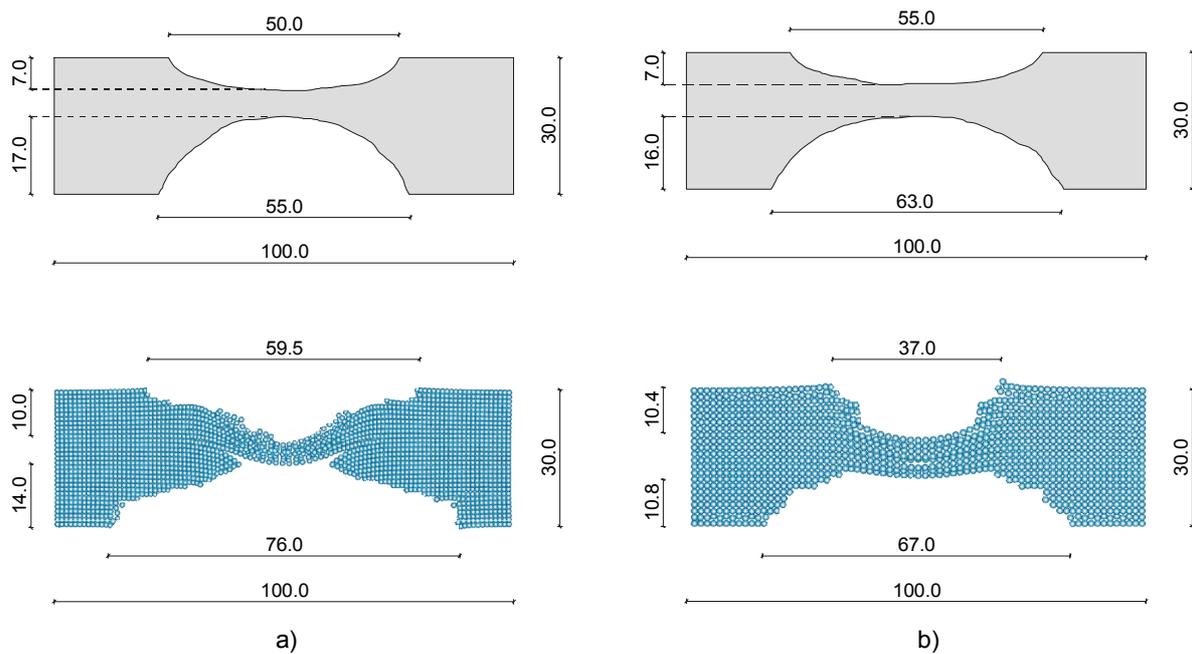


Bild 5.22: a) Betonplatte S1 aus Versuch verglichen mit der fein diskretisierten SPH-Platte nach 6 ms, b) Betonplatte S2 aus Versuch verglichen mit der grob diskretisierten SPH-Platte nach 6 ms, anhand des Schnittes in Plattenmitte

Bild 5.22 zeigt anhand des Ausschnittes in Plattenmitte den letztendlichen Zerstörungsgrad der Platte aus Versuch und Rechnung. Die SPH-Simulation wurde bis zu einem Zeitpunkt von 6 ms durchgeführt. Deutlich ist zu erkennen, daß aufgrund der besseren Auflösung die Simulation mit der höheren Partikelanzahl den Schädigungsgrad der Platte besser reproduzieren kann. Jedoch auch schon mit einer Partikelanzahl von ca. 110.000 Partikeln kann das prinzipielle Verhalten qualitativ gut abgebildet werden. In Tabelle 5.7 sind für alle Platten aus Versuch und Rechnung die Daten der Schädigung tabellarisch aufgelistet. Die großen Verformungen in Plattenmitte weisen auf einen hohen Schädigungsgrad der Partikel hin. Dies war auch im Versuch zu beobachten. Bild 5.23 zeigt ein Photo der Platte, das nach der Sprengung aufgenommen wurde.

Platten		Plattenoberseite		Plattenunterseite		Fragmentmasse [kg]
		Krater Ø	-tiefe	Krater Ø	-tiefe	
S1/S2	Versuch S1	50 cm	7 cm	55 cm	17 cm	90
	Versuch S2	55 cm	7 cm	63 cm	16 cm	87
	MLS (grob)	37 cm	10,4 cm	67 cm	10,8 cm	79
	MLS (fein)	59,5 cm	10 cm	76 cm	14 cm	86
S3	Versuch	Vollständige Fragmentierung				
	MLS (grob)	Vollständige Fragmentierung				
	MLS (fein)	Vollständige Fragmentierung				
P3	Versuch	56 cm	11 cm	-	-	36,8
	MLS	47 cm	12 cm	-	-	28,9
P4	Versuch	30 cm	9 cm	-	-	9,1
	MLS (grob)	28,5 cm	10 cm	-	-	9,2
	MLS (fein)	37 cm	12 cm	-	-	17,3
P5	Versuch	Vollständige Fragmentierung				
	MLS	Vollständige Fragmentierung				
O1	Versuch	51 cm	perforiert	62 cm	perforiert	nicht ermittelt
	MLS (grob)	55 cm	perforiert	77 cm	perforiert	
	MLS (fein)	30,4 cm	perforiert	74,6 cm	perforiert	
O2	Versuch	56 cm	12 cm	71 cm	15 cm	nicht ermittelt
	MLS (grob)	56 cm	perforiert	73 cm	perforiert	
	MLS (fein)	35,8 cm	perforiert	86,4 cm	perforiert	
O3	Versuch	53 cm	8,4 cm	70 cm	-	nicht ermittelt
	MLS	55,5 cm	10,4 cm	-	-	

Tabelle 5.7: Schädigungs- und Fragmentierungsdaten aller Platten

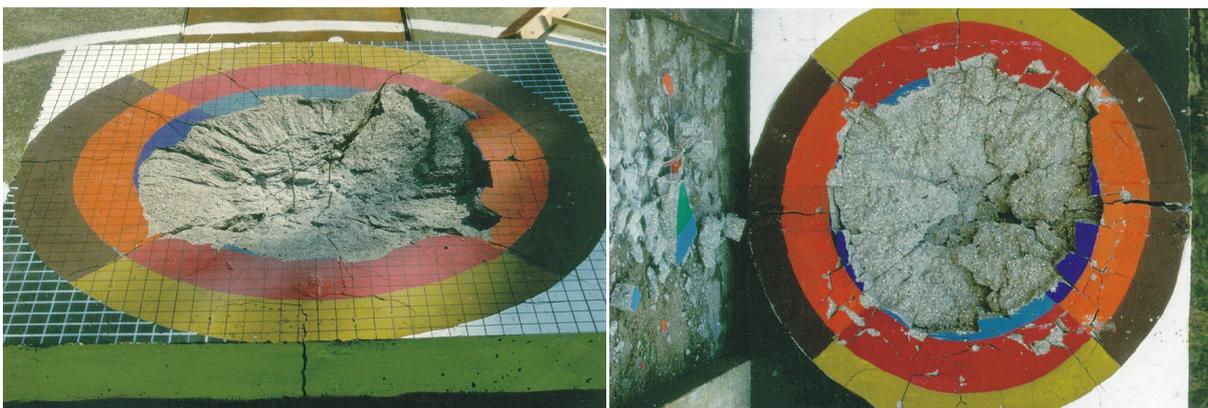
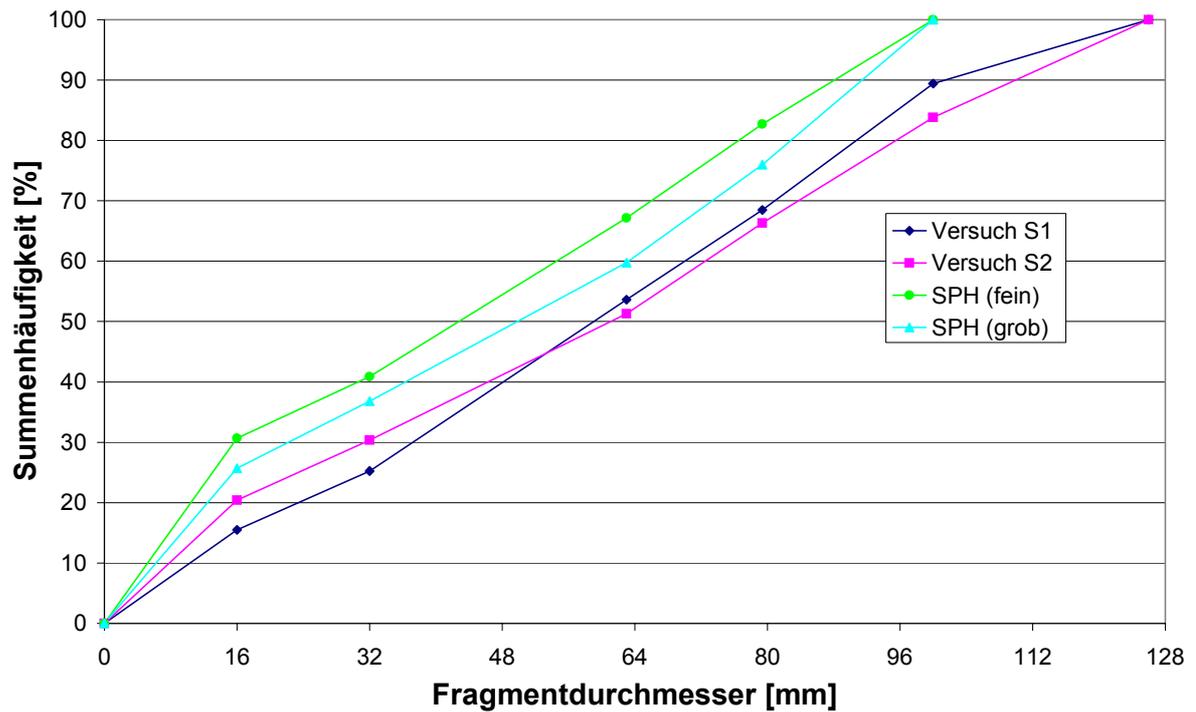
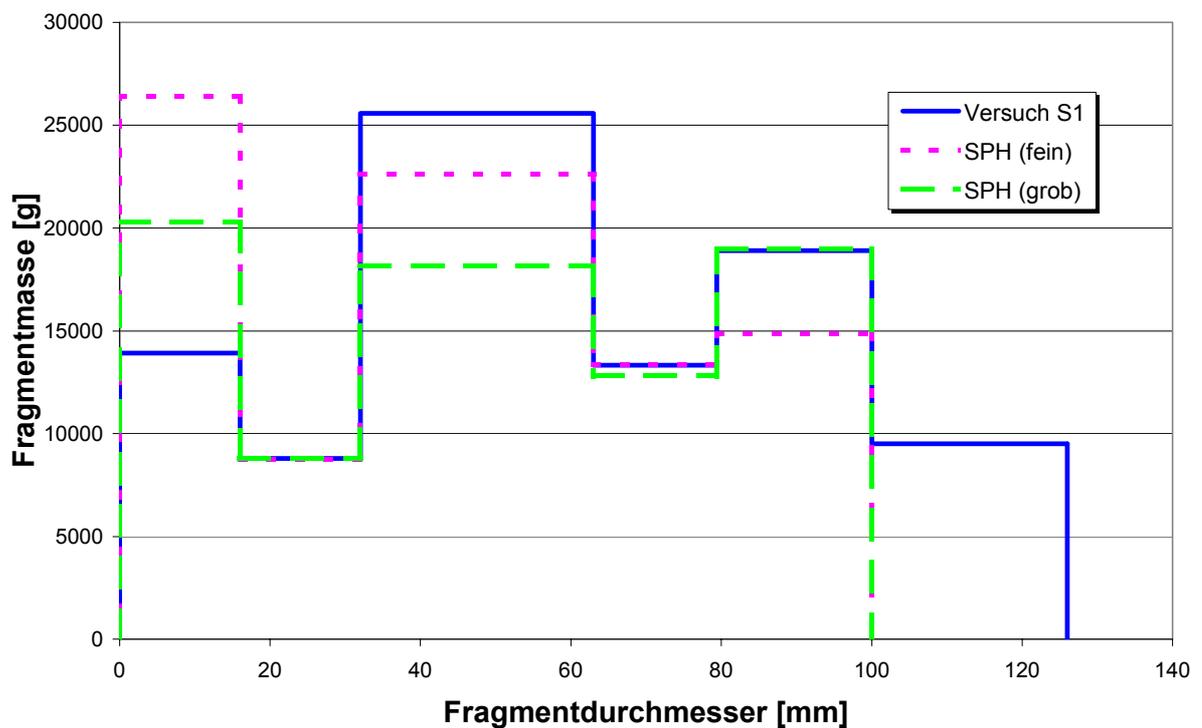


Bild 5.23: Platte S1 nach Versuch an a) Plattenoberkante, b) Plattenunterkante



a)



b)

Bild 5.24: Fragmentverteilung der Platten S1 und S2 aus Versuch und Rechnung nach 6 ms Simulationszeit, a) Summenhäufigkeit, b) Dichteverteilung

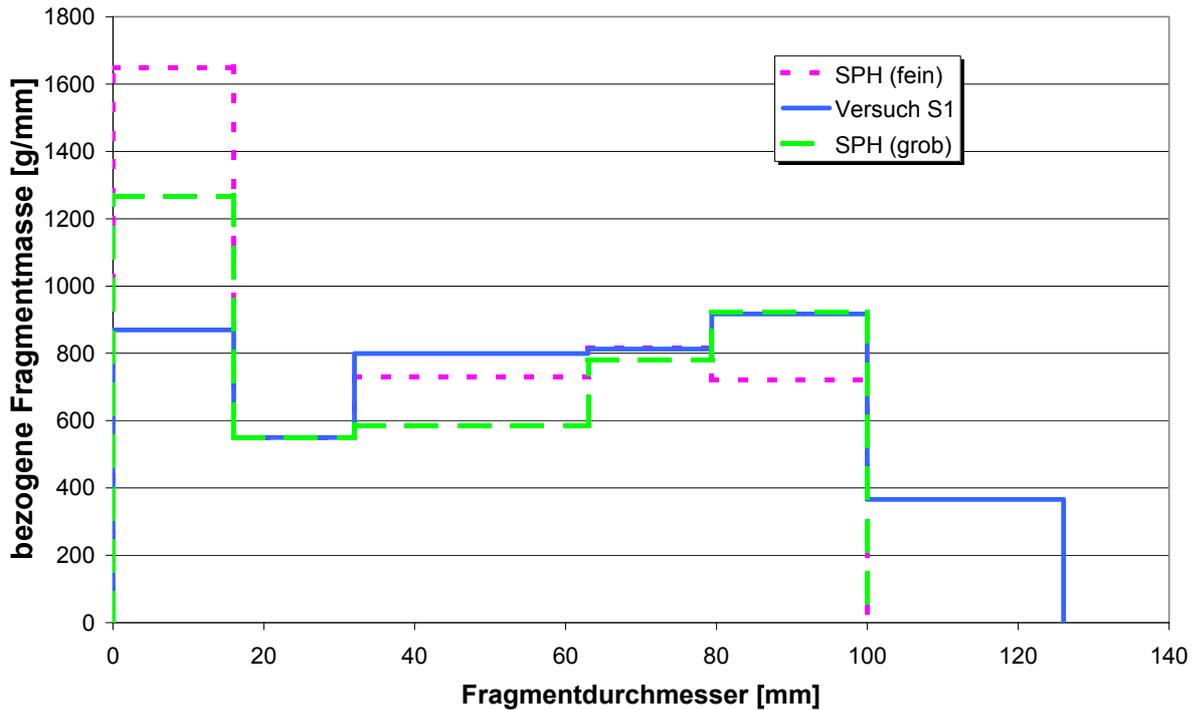


Bild 5.25: Fragmentverteilung der Platten S1 und S2 aus Versuch und Rechnung nach 6 ms Simulationszeit: bezogene Dichteverteilung

Bild 5.24 stellt die Fragmentverteilung aus Versuch und Rechnung gegenüber. Hierbei wird deutlich, daß die grob diskretisierte SPH-Platte die Fragmentverteilung des Versuches etwas besser reproduziert, was allerdings auch an der niedrigeren Partikelauflösung, d.h. höheren Partikelmasse, liegt.

Fragment \varnothing [mm]	Fragmentmasse [g]	Partikelanzahl pro Fragment	
		Grobes Netz	Feines Netz
16	6	~1	2
32	48	6	18
63	366,6	48	138
79,4	733,9	96	276
100	1466	193	551

Tabelle 5.8: Benötigte Partikelanzahlen für verschieden große Fragmente der grob und fein diskretisierten SPH-Platte S1 und S2

In Tabelle 5.8 ist die Anzahl der Partikel für die Fragmente unterschiedlichen Durchmessers dargestellt. Einer Partikelmasse von 2,656 g bei der

fein diskretisierten SPH-Platte stehen 7,57 g Partikelmasse bei dem groben SPH-Netz gegenüber, was sich in der Fragmentgrößenauflösung widerspiegelt. Für das fein diskretisierte Modell ergibt sich somit ein minimaler Fragmentdurchmesser von ca. 12 mm, beim grob diskretisierten Modell von ungefähr 17 mm. Um die Staubkornbildung besser verfolgen zu können, wurde deshalb bei der fein diskretisierten Platte im unteren Bereich der Sieblinie eine feinere Aufteilung vorgenommen. Die fein diskretisierte SPH-Platte errechnet die gesamte Fragmentmasse aus dem Versuch besser (siehe Tabelle 5.7). Ebenso streuen die Versuchsergebnisse der beiden gesprengten Platten S1 und S2. Aus diesem Grunde liefern die SPH-Simulationen zufriedenstellende Ergebnisse.

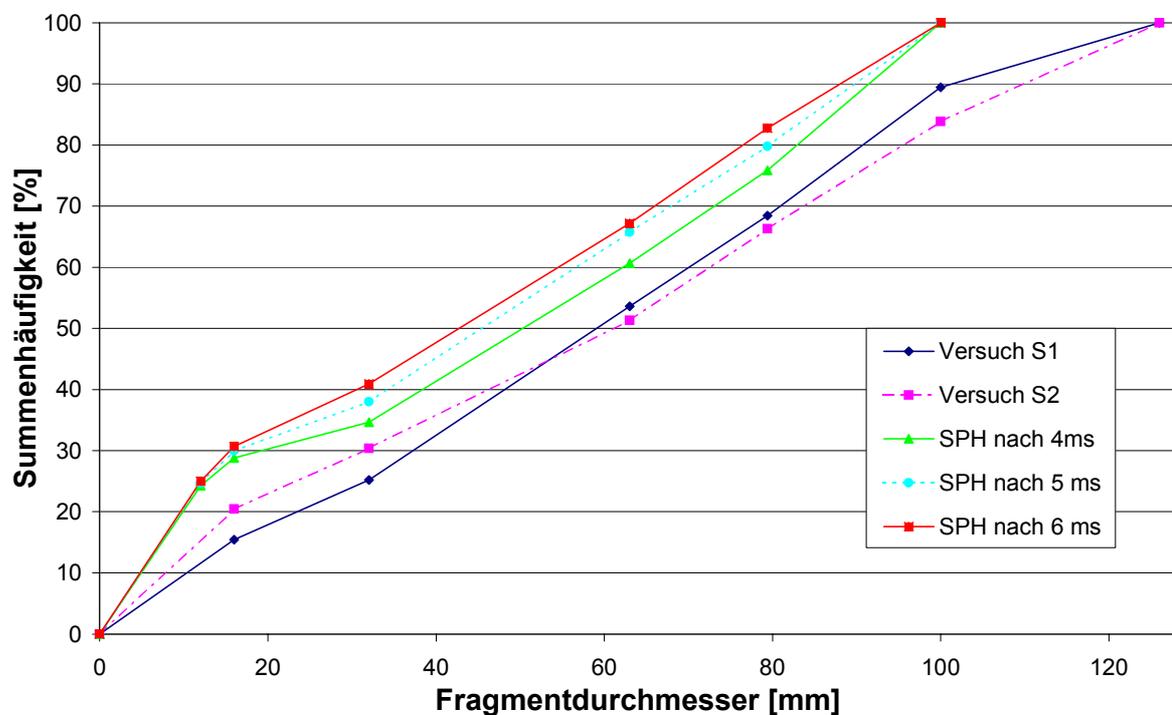


Bild 5.26: Fragmentverteilung der Platten S1 und S2 aus Versuch und Rechnung nach unterschiedlichen Zeitpunkten bei der Simulation

Eine wesentliche Frage ist, bis zu welchem Zeitpunkt muß man die SPH-Simulation fortführen, um die Sieblinien aus den Versuchen reproduzieren zu können und kann man nicht jede Sieblinie reproduzieren, wenn man die Berechnung nur lange genug laufen läßt. Deshalb wurde exemplarisch für die fein diskretisierte Platte zu verschiedenen Zeitpunkten eine komplette Fragmentsuche durchgeführt. Bild 5.26 zeigt das Ergebnis der Fragmentsuche zu den unterschiedlichen Zeitpunkten. Hierbei ist

deutlich zu erkennen, wie die Fragmente mit zunehmender Rechenzeit immer feiner werden. Unter der Bedingung, daß mit zunehmender Rechenzeit sich keine weiteren Staubkörner bilden dürfen, ist der Einfluß der Rechenzeit jedoch nicht wesentlich. Schon nach einem Zeitpunkt von 4 ms erhält man für die Fragmentverteilung gute Ergebnisse. Zu diesem Zeitpunkt stimmen die Ergebnisse mit den Versuchsergebnissen sogar besser überein. Auch die gesamte Fragmentmasse von 86 kg wird zu diesem Zeitpunkt schon erreicht. Aus der Fragmentverteilung ist zu erkennen, daß die Bildung von Staubkörnern (Fragmente $< \varnothing 16$ mm) nach 4 ms schon abgeschlossen ist, was ein Zeichen für den weitgehend physikalischen Fragmentierungsprozeß ist. Aufgrund der großen Streuung des Beton, der bei verschiedenen Versuchen auch unterschiedliche Fragmentverteilungen aufweist, sind die gewonnenen Ergebnisse mehr als ausreichend. In Tabelle 5.7 ist die erhaltene Gesamtfragmentmasse aus Versuch und Rechnung gegenübergestellt. Auch sie zeigt eine sehr gute Übereinstimmung. Im Gegensatz zu den Berechnungen an den Platten S3 und P5 befanden sich keine Fragmente innerhalb der Platte. Die Schädigungsevolution konnte bis zu Ende der Berechnung so stabil gehalten werden, daß alle anfangs nicht vollständig zerstörten Partikel, einen Schädigungswert von $D_t=D_c=1$ nie erreichten.

Um einen Eindruck über die Qualität der gewonnenen Ergebnisse vor allem im Hinblick auf die Fragmentverteilung zu bekommen, wurde die Schädigungsevolution beobachtet. Eine Betrachtung der Energiebilanz ist wegen der zu erwartenden hohen Dissipation aufgrund plastischer Verformungen wenig aussagekräftig. Im Allgemeinen kann behauptet werden, daß mit zunehmendem Zerstörungsgrad der Betonplatten auch eine zunehmende Energiedissipation durch plastische Verformung zu erwarten ist, was die Rechnung auch bestätigte.

Durch Beobachtung der Schädigungsevolution konnte qualitativ kontrolliert werden, ob die Fragmentierung weitgehend physikalische oder hauptsächlich numerische Ursachen hatte. Die durchgeführten Beobachtungen sollen hier näher erläutert werden.

Ab einem bestimmten Zeitpunkt t_{dam} wurde die Schädigungsvariable $D_{c,\text{stat.}}$ und $D_{t,\text{stat.}}$ abgespeichert und mit dem Schädigungsgrad $D_{c,\text{stat.}}$ und

$D_{t,stat.}$ zum Schluß der Berechnung (t_{Ende}) oder zu ausgewählten Zeitpunkten verglichen. Als Vergleich diene sowohl die Differenz $D_{c/t,stat.}(t_{Ende}) - D_{c/t,stat.}(t_{dam})$ als auch das Verhältnis von $D_{c/t,stat.}(t_{Ende})/D_{c/t,stat.}(t_{dam})$. Ist das Verhältnis $D_{c/t,stat.}(t_{Ende})/D_{c/t,stat.}(t_{dam})$ groß, so kann von einer starken numerischen Schädigungsevolution ausgegangen werden und die Güte der Ergebnisse ist eher schlecht. Die Anzahl der Partikel mit einem Verhältnis von $D_{c/t,stat.}(t_{Ende})/D_{c/t,stat.}(t_{dam}) > \Omega$ wurde ermittelt und ausgewertet. Bei den Simulationen der Platte S1 und S2 hat sich gezeigt, daß das Verhältnis von $D_{c/t,stat.}(t_{Ende})/D_{c/t,stat.}(t_{dam})$ für alle Partikel kleiner als 1,6 war. Nur für Randpartikel lag für solche Partikel, die zu Beginn der Berechnung kaum Schädigung aufwiesen, das Verhältnis von $D_{c/t,stat.}(t_{Ende})/D_{c/t,stat.}(t_{dam})$ zwischen 1,3 und 1,6. Somit kann hier von einer recht guten Qualität der erhaltenen Ergebnisse ausgegangen werden.

Entscheidend bei der Ermittlung des Schädigungsverhältnisses ist der Zeitpunkt t_{dam} . Der Zeitpunkt t_{dam} wurde folgendermaßen berechnet. Zunächst wurde ermittelt, wieviel Zeit t_{ew} eine elastische Welle von Plattenmitte an der Oberkante bis zum weit entferntesten Partikel der Platte benötigt. Zum Zeitpunkt der ersten Schädigungsbildung eines Partikels ($D_{c/t} > 0$) wurde die Zeit $4 \cdot t_{ew}$ addiert, so daß für das von der Lasteinleitungsstelle am weitesten entfernte Partikel jeweils zwei elastische Druck- und Zugwellen durchlaufen werden konnten. Für diesen Zeitpunkt wurden für alle Partikel die statischen Schädigungswerte $D_{c,stat.}$ und $D_{t,stat.}$ abgespeichert. Die Zeit t_{ew} für die Platte S1 bzw. S2 ergab sich zu 159 μ s.

Exemplarisch für die Platten S1/S2 sei der Einfluß der Partikelanzahl bezüglich der Schädigung und Fragmentmasse in Bild 5.27 dargestellt. Mit zunehmender Partikelanzahl konvergieren die Kurven gegen einen stationären Wert, was als sehr positiv zu beurteilen ist. Es sei noch angemerkt, daß eine Konvergenz bei einer derart komplizierte Problemstellung "Beton unter Kontaktdetonation" mit nichtlinearem und plastischem Materialverhalten sehr schwer zu erreichen ist, da mit steigender Partikelanzahl auch die Drücke im Sprengstoff zunehmen.

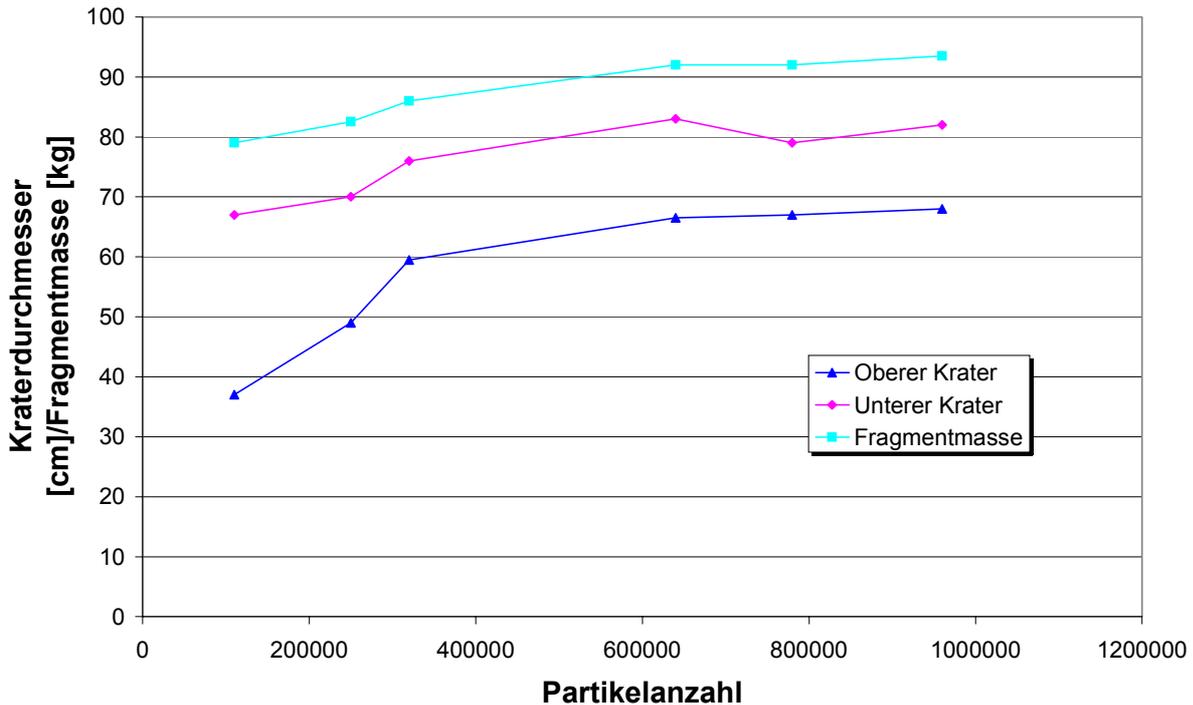


Bild 5.27: Einfluß der Partikelanzahl und der Interpolationslänge auf die Schädigung und Fragmentmasse

- Platte S3

Auch für die Platte S3 wurden zwei verschiedene Netzfeinheiten gewählt. Aufgrund des hohen Zerstörungsgrades der Platte hat sich gezeigt, daß eine Partikelanzahl von 110.000 Partikel unzureichende Ergebnisse liefert. Deshalb wurde auf eine feinere Plattenauflösung zurückgegriffen (siehe Tabelle 5.6). Eine noch höhere Partikelanzahl wie in Tabelle 5.6 würde zu unzumutbaren Rechenzeiten führen. Die Berechnung wurde bis zu einem Zeitpunkt von 15 ms durchgeführt.

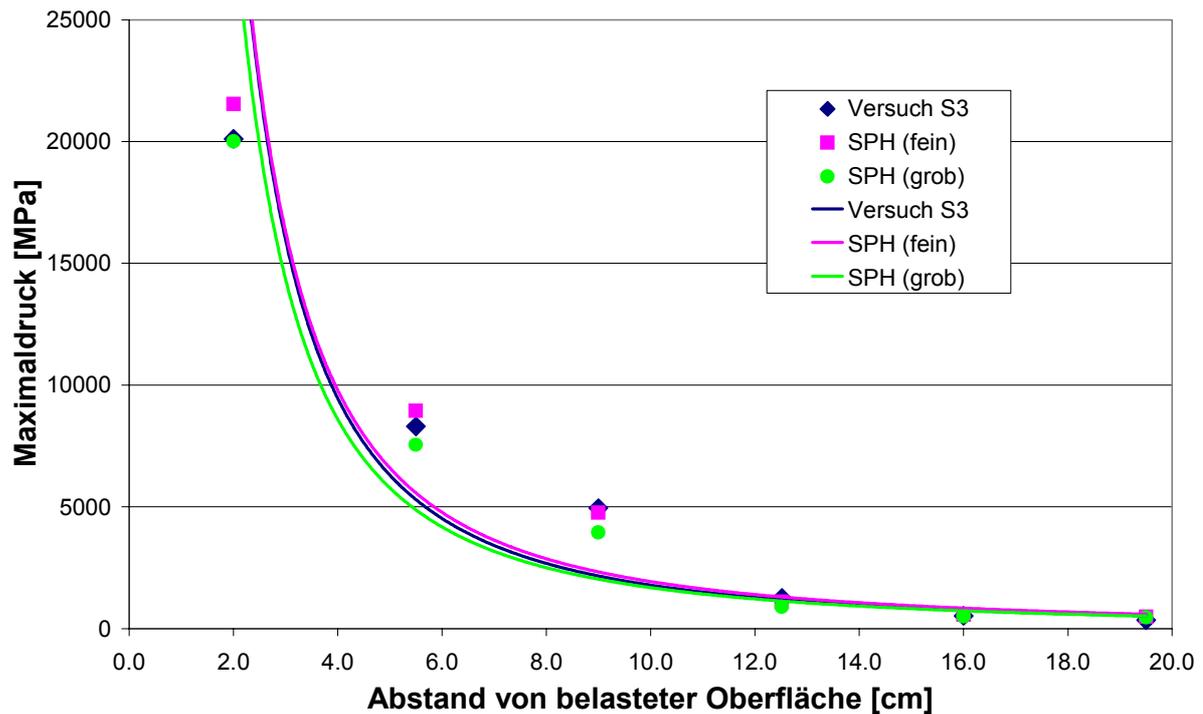


Bild 5.28: Druckmaximas über die Einbautiefe der Meßaufnehmer der Platte S3 aus Versuch und Rechnung

In Bild 5.28 sind die Maximaldrücke über die Plattendicke aufgetragen. Sie zeigen eine sehr gute Übereinstimmung. Vor allem bei der fein diskretisierten SPH-Platte wird der Druckverlauf auch im unteren Bereich der Platte sehr gut angenähert. Dafür überschätzt das fein diskretisierte Modell die Druckmaximas im Lasteinleitungsbereich. Den Fragmentierungsprozeß nach 600 μ s zeigt Bild 5.29. In Bild 5.30 ist die Platte aus der "groben" SPH-Simulation nach 5 und 15 ms dargestellt. Wie man deutlich erkennen kann, ist die Platte nahezu vollständig zerstört. Das Verformungsbild der Platte nach 15 ms sieht etwas diffus aus. Weitere Verformungsplots zu unterschiedlichen Zeitpunkten sind Anhang C zu entnehmen. Wie auch im Versuch bildet die SPH-Simulation den Prozeß der vollständigen Zerstörung der Platte ab. Bild 5.31 zeigt das, was von der Platte nach dem Versuch noch übrig geblieben ist.

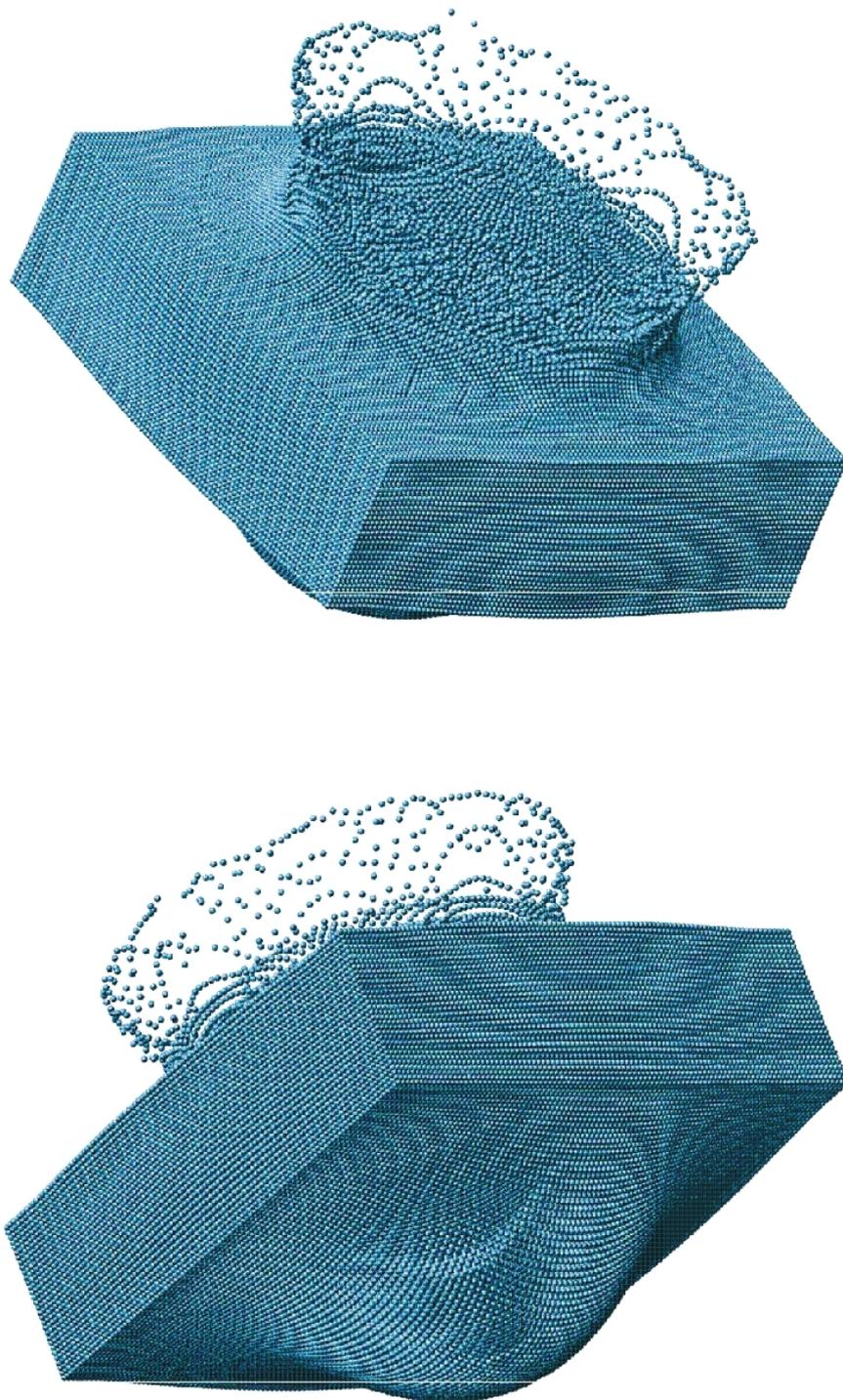


Bild 5.29: Fragmentierungsprozeß der grob diskretisierten SPH-Platte S3 nach 0,6 ms an a) Plattenoberkante, b) Plattenunterkante



Bild 5.30: Verformung der grob diskretisierten SPH-Platte S3 nach a) 5 ms und b) 15 ms



Bild 5.31: Platte S3 nach dem Versuch

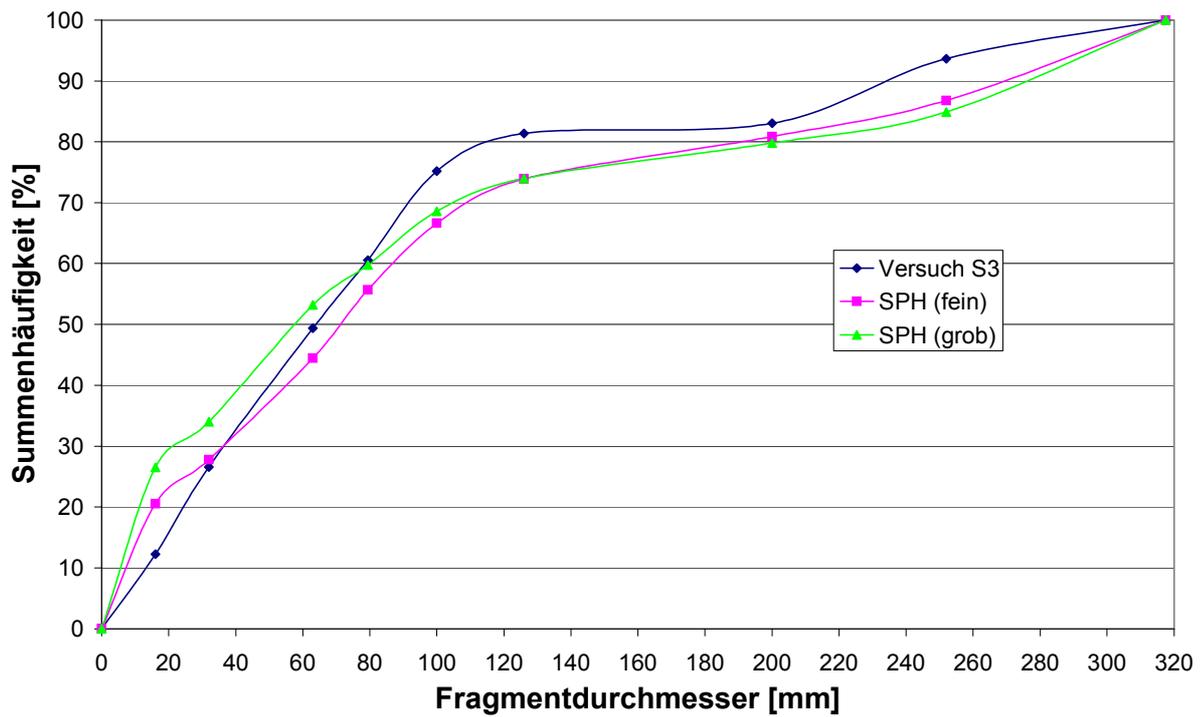
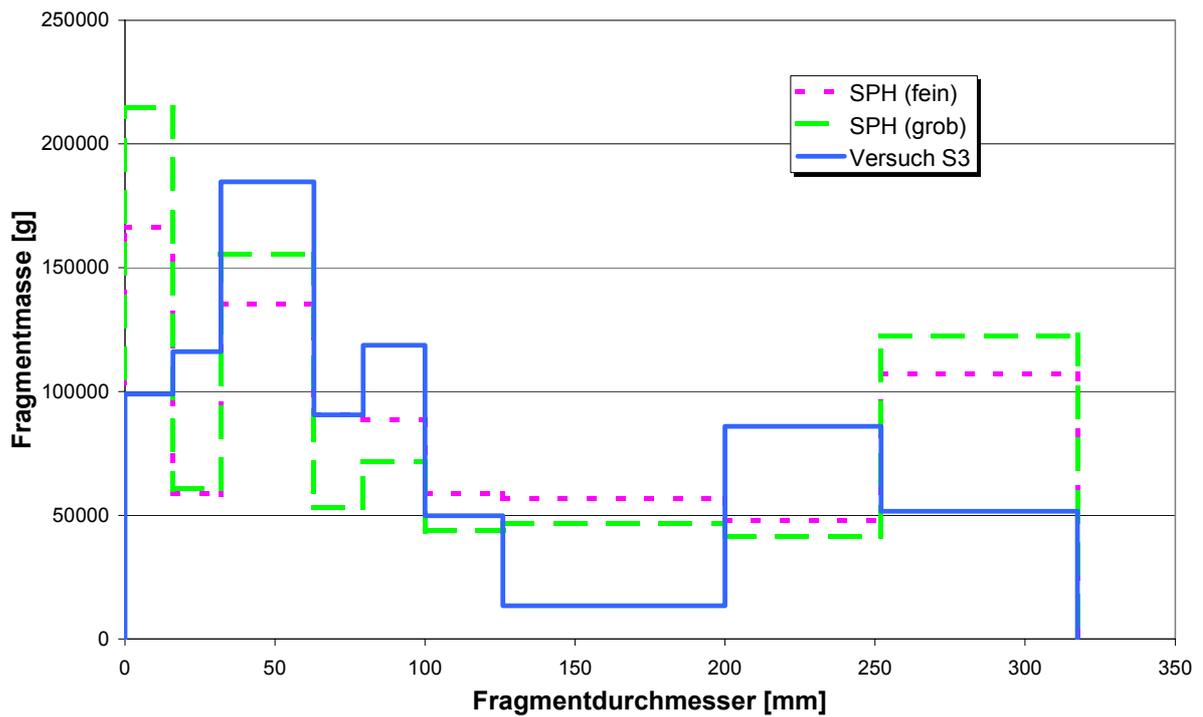
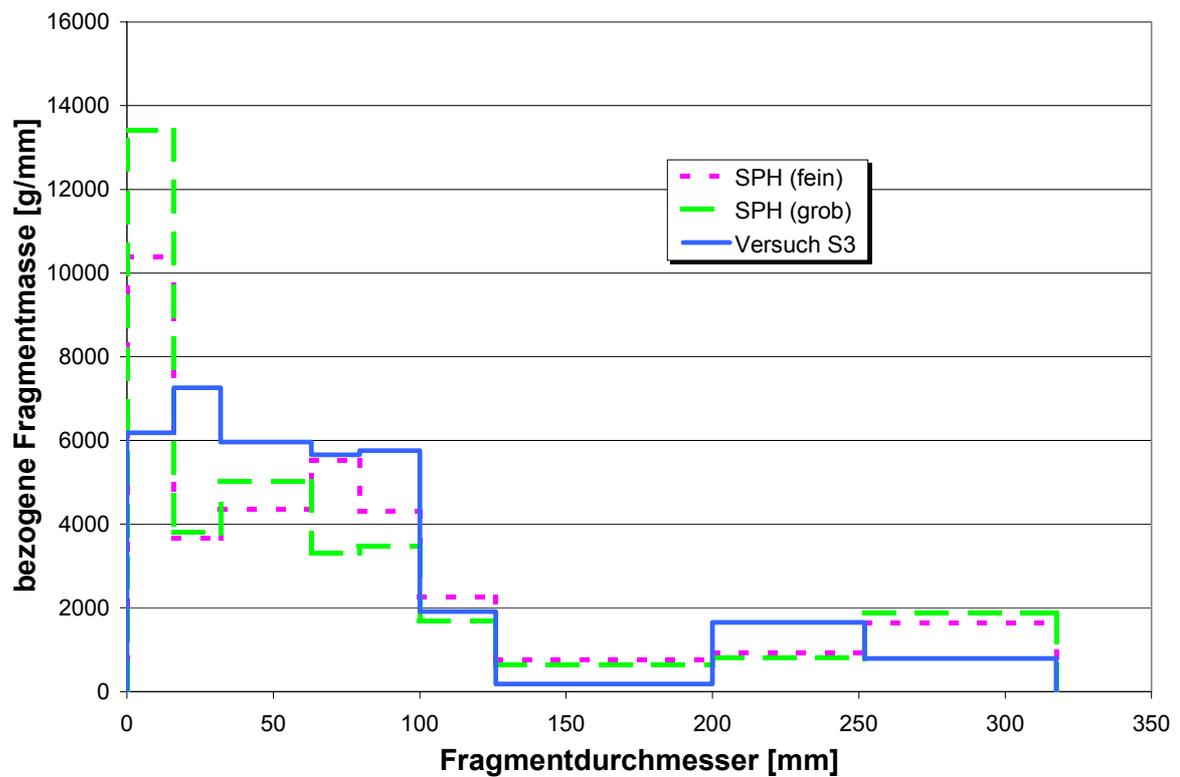


Bild 5.32: Fragmentverteilung der Platte S3 aus Versuch und Rechnung nach nach 15 ms



a)



b)

Bild 5.33: Fragmentverteilung der Platte S3 aus Versuch und Rechnung nach 15 ms, a) Dichteverteilung, b) bezogene Dichteverteilung

In Bild 5.32 sind die Fragmentverteilungen aus Versuch und Rechnung gegenübergestellt. Hier ist nun zu erkennen, daß aufgrund des starken Zerstörungsprozesses die "grob" diskretisierte SPH-Platte zu massive Fragmente berechnet. Die "fein" diskretisierte Platte reproduziert die Fragmentsieblinie des Versuche recht gut. Auch bei dieser Simulation wurde die Schädigungsevolution über die Zeit verfolgt. Da die Berechnung bis zu einem Zeitpunkt von 15 ms durchgeführt wurde, konnte eine teilweise erhebliche Schädigungsevolution einzelner Partikel nicht verhindert werden. Die Schädigung von Partikeln, deren Schädigungsgrad zu Beginn der Berechnung noch recht gering war, verdoppelte bis verdreifachte sich teilweise bis zum Schluß der Berechnung. Nach fast 10 ms war das Verhältnis $D_{c/t,stat.}(t_{Ende})/D_{c/t,stat.}(t_{dam})$ für ca. 7000 Partikel größer als 2,0. Zum Schluß der Simulation waren es schon beinahe 18.000 Partikel. Für über 4000 Partikel verdreifachte sich sogar die Schädigungsvariable D_c und/oder D_t . Trotzdem konnte der Schädigungsgrad größtenteils so stabil gehalten werden, daß es zu keiner numerischen Staubkornbildung gekommen ist.

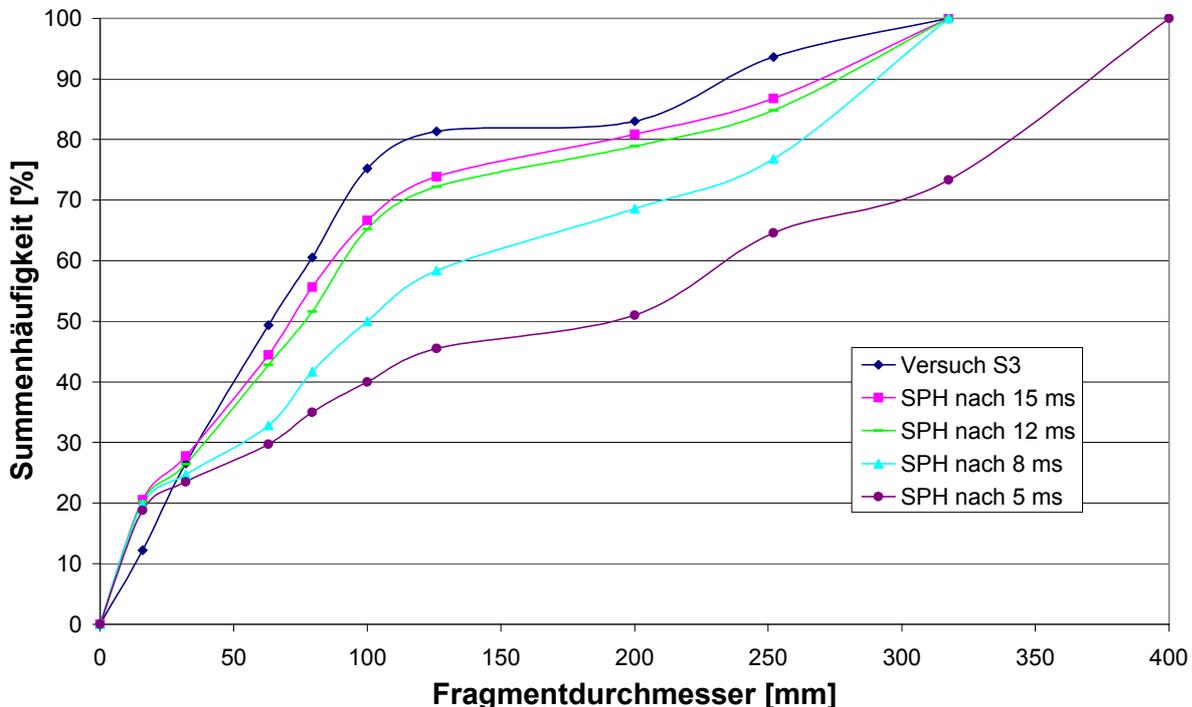


Bild 5.34: Fragmentverteilung der Platte S3 aus Versuch und Rechnung zu unterschiedlichen Zeitpunkten

Bild 5.34 zeigt die Fragmentverteilung der fein diskretisierten SPH-Platte zu verschiedenen Zeitpunkten. Gut ist zu erkennen, daß sich bereits nach 5 ms keine weiteren Staubkörner mehr bildeten. Es wird ersichtlich, wie die Fragmente immer feiner werden. Ebenso wird deutlich, daß mit zunehmender Rechenzeit die Fragmentverteilung zu konvergieren scheint. Die richtige Interpretation der Ergebnisse bei einem derartigen Zerstörungsprozeß ist bei der Bestimmung der Fragmentverteilung nicht ganz trivial. Betrachtet man die Schädigungsevolution oder die Evolution der Dichte der einzelnen Partikel, kann man jedoch über die Qualität der Ergebnisse Rückschlüsse ziehen. Es wird deutlich, daß bei einem solchen Zerstörungsgrad der Platte die Bestimmung einer genauen Fragmentverteilung unmöglich ist. Dennoch läßt sich abschätzen, in welchem Rahmen die Fragmente liegen werden. Abschließend läßt sich sagen, daß die numerische Simulation gute Ergebnisse bezüglich der Fragmentverteilung liefert, da eine numerische Staubkornbildung weitgehend verhindert werden konnte. Die über die Zeit stark zunehmende unphysikalische Schädigungsevolution einzelner Partikel ist zwar von numerischer Natur, hat aber auf die Fragmentverteilung einen unwesentlichen Einfluß, da sie die Trennung der Fragmente nicht beeinflußt.

- Platte P5

Für die Platte P5 wurde lediglich eine Netzfeinheit verwendet. Die maximalen Druckwerte über die Plattendicke zeigt Bild 5.38. Versuch und Rechnung zeigen eine sehr gute Übereinstimmung.

Die SPH-Simulation bildete qualitativ die totale Fragmentierung der Platte ab. Von Bild 5.35 bis Bild 5.37 ist der Fragmentierungsprozeß der Platte zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. Weitere Verformungsbilder aus der Rechnung sind in Anhang C zu finden.

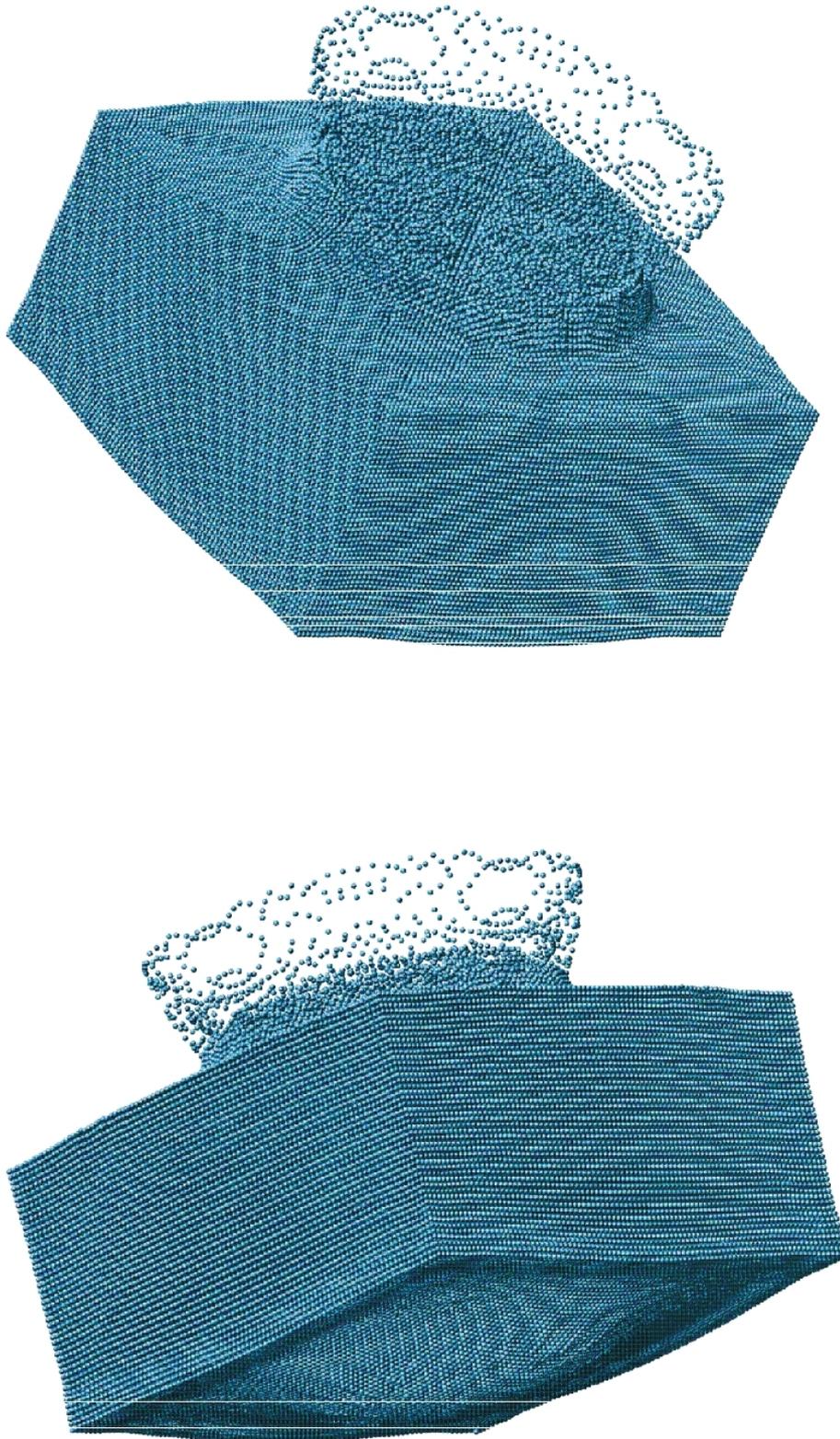


Bild 5.35: Fragmentierungsprozeß der SPH-Platte P5 nach 0,6 ms an a) Plattenoberkante, b) Plattenunterkante

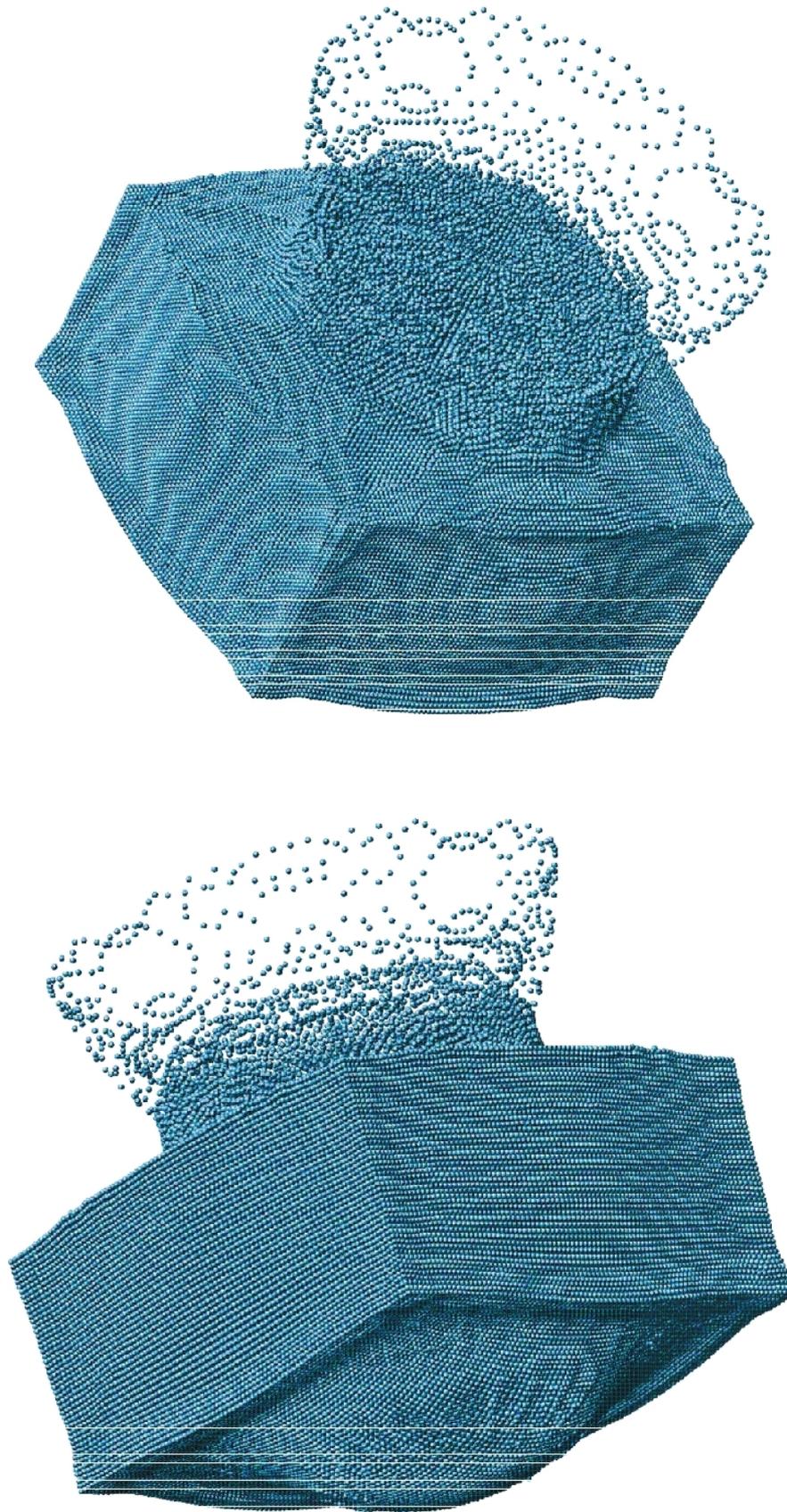


Bild 5.36: Fragmentierungsprozeß der SPH-Platte P5 nach 1 ms an a) Plattenoberseite, b) Plattenunterseite

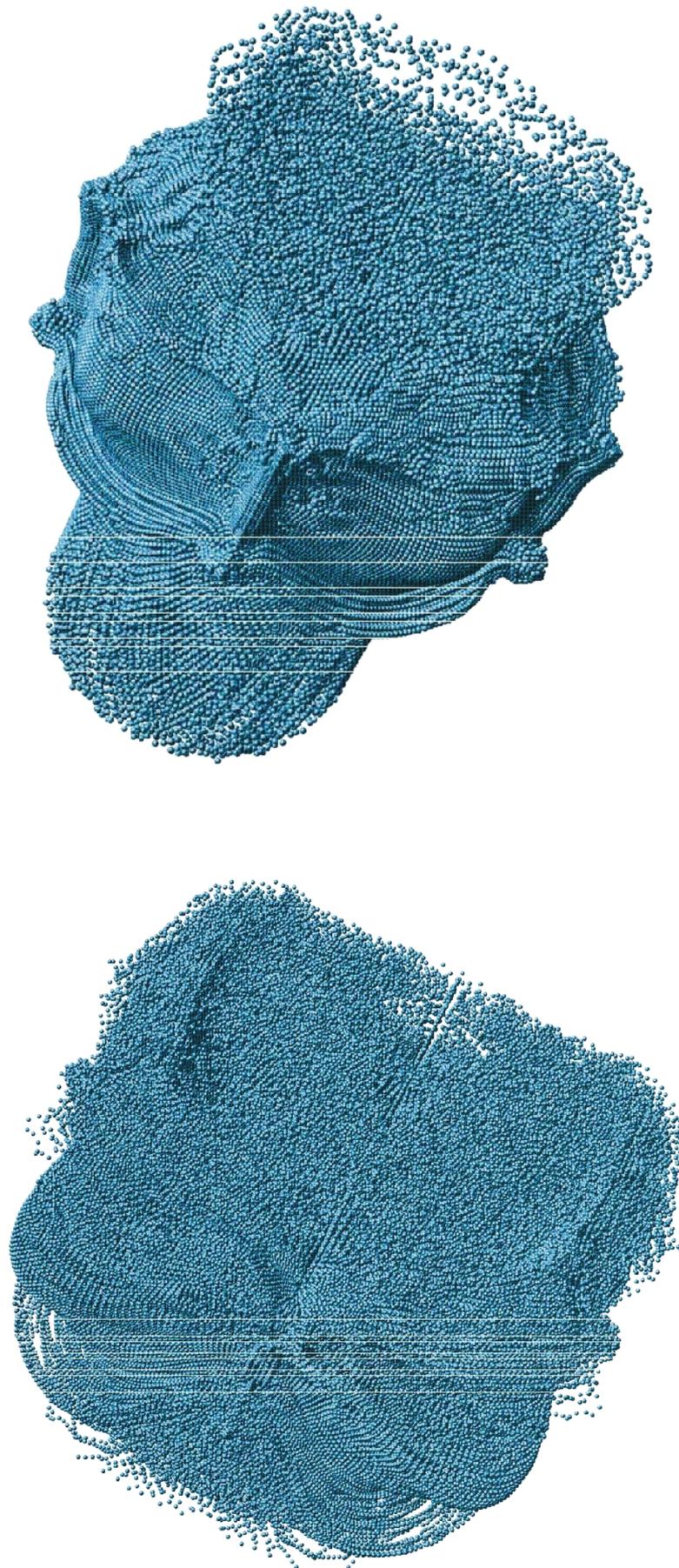


Bild 5.37: Fragmentierungsprozeß der SPH-Platte P5 nach a) 5 ms b) 15 ms

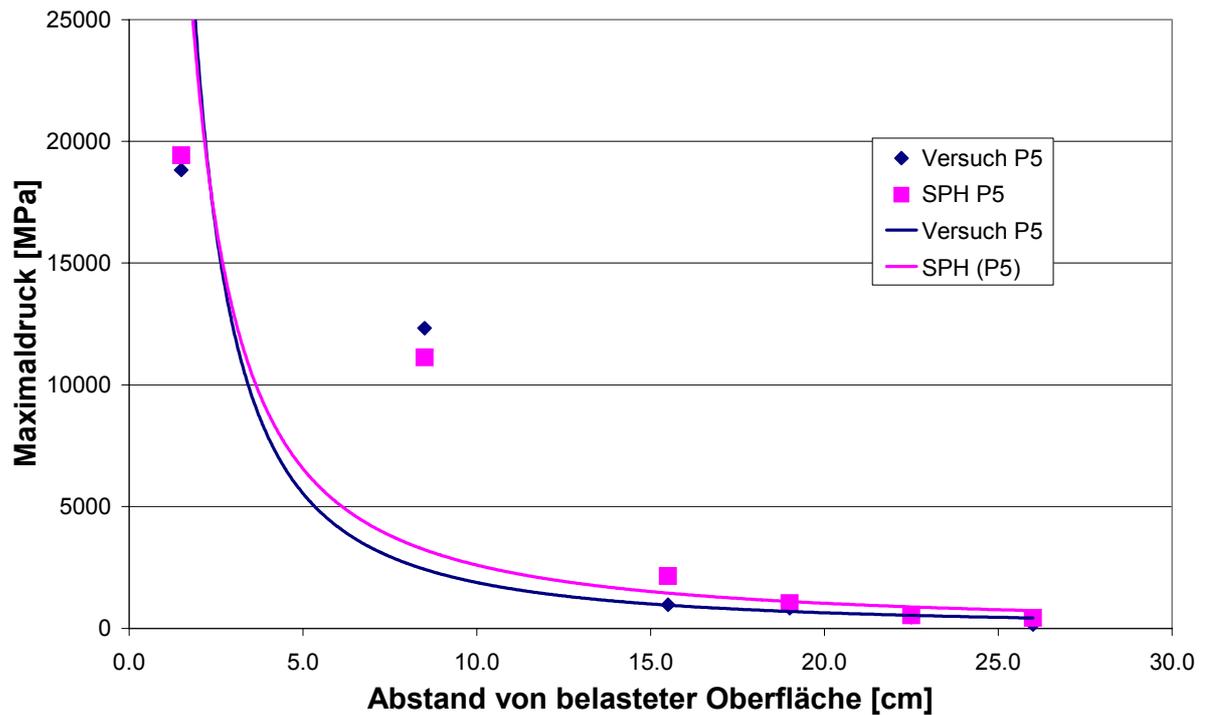


Bild 5.38: Druckmaximas über die Einbautiefe der Meßaufnehmer der Platte P5 aus Versuch und Rechnung

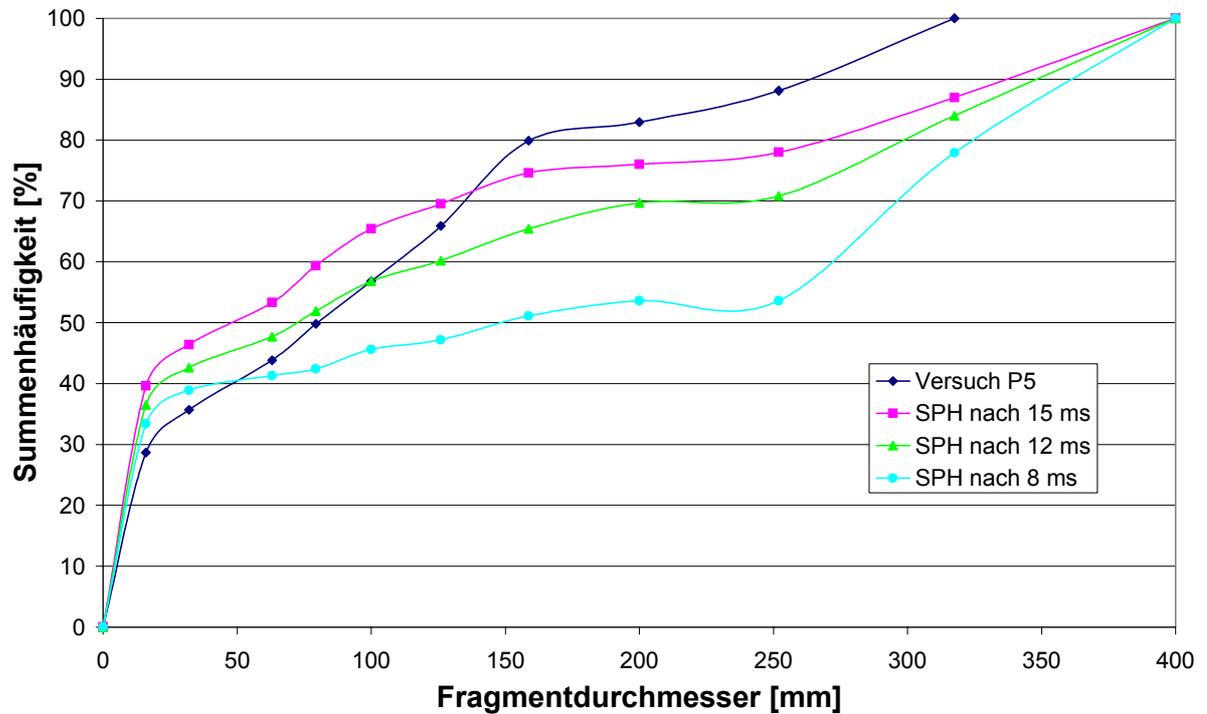
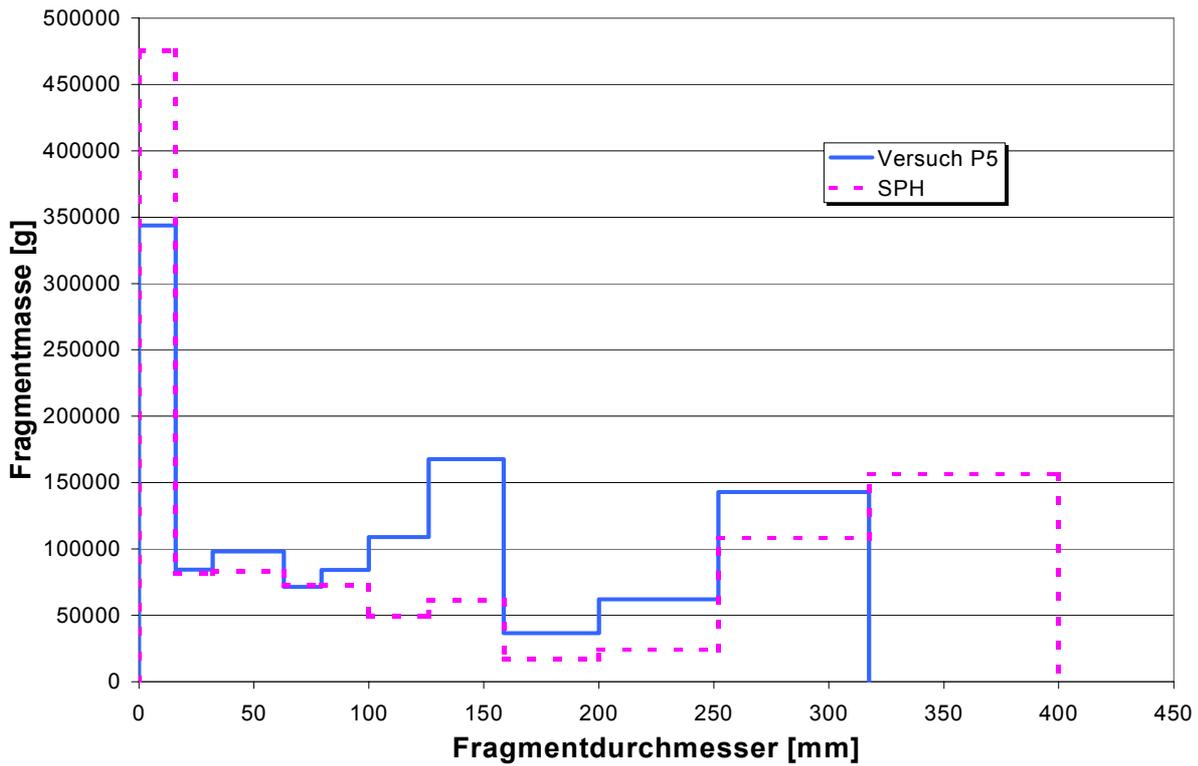
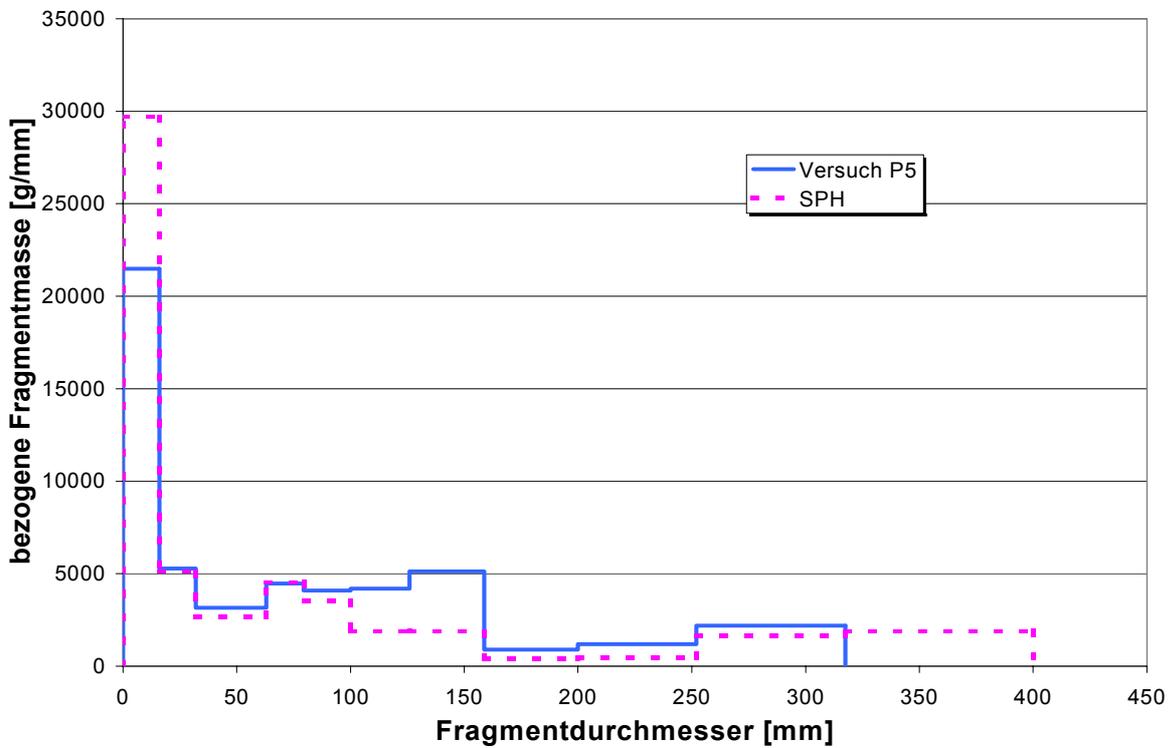


Bild 5.39: Fragmentverteilung der Platte P5 aus Versuch und Rechnung zu unterschiedlichen Zeitpunkten



a)



b)

Bild 5.40: Fragmentverteilung der Platte P5 aus Versuch und Rechnung nach 15ms, a) Dichteverteilung, b) bezogene Dichteverteilung

Die Fragmentverteilung zu verschiedenen Zeitpunkten ist in Bild 5.39 grafisch aufgetragen. Die Übereinstimmung aus Versuch und Rechnung ist quantitativ nicht sehr gut. Qualitativ schätzt das SPH-Programm wenigstens die Größe der Trümmer richtig ab. Gut zu erkennen ist, daß 8 ms nicht ausreichen, damit sich die gebildeten Fragmente voneinander trennen können. Ebenfalls wird deutlich, daß nach weiteren 7 ms durch die unphysikalische Schädigungsevolution sich weitere Staubkörner gebildet haben. Mit ca. 7 %, dies entspricht beinahe 27.000 Partikeln, ist die numerische Staubkornbildung erheblich.

Betrachtet man die Schädigungsevolution, sind auch hier die größten Diskrepanzen festzustellen. Nach Beendigung der Simulation haben über 25.000 Partikel ein Verhältnis von $D_{c/t,stat.}(t_{Ende})/D_{c/t,stat.}(t_{dam})$ größer als 2, obwohl weniger Partikel als bei der feinen SPH-Platte S3 verwendet wurden. Auch eine Staubkornbildung konnte nicht ausgeschlossen werden. Nach 10 ms haben sich schon erkennbar die ersten Staubkörner numerisch gebildet. Die Fragmentverteilung aus Versuch und Rechnung zeigen zu diesem Zeitpunkt noch keine allzu große Übereinstimmung. Nach 15 ms approximiert die Simulation die Fragmentverteilung aus dem Versuch schon recht gut. Eine bessere Reproduktion der Versuchsergebnisse wäre voraussichtlich mit einer besseren Auflösung der Betonplatte zu erreichen. Aufgrund der enorm hohen Rechenzeit wurde eine derartige Berechnung nicht mehr durchgeführt. An dieser Stelle sei betont, daß auch die Versuchsergebnisse erheblich streuen, vor allem bei derartig hohen Zerstörungsprozessen. Somit liefert die SPH-Simulation qualitativ ausreichende Ergebnisse. Es geht zumindest die maximale Trümmergröße aus der Rechnung richtig hervor. An dieser Stelle wird ersichtlich, wie schwierig und unsicher eine korrekte Fragmentgrößenermittlung sein kann.

- Platte P3

Auch für die Platte P3 wurde nur mit einer Netzfeinheit gerechnet. Die Druckwerte über die Plattendicke zeigt Bild 5.41, Bilder zum Fragmentierungsprozeß sind in Anhang C zu finden. Das letztendliche Zerstörungsmuster aus Versuch und Rechnung ist für den Schnitt in Plattenmit-

te in Bild 5.42 aufgetragen. Die SPH-Simulation bestimmt den Schädigungsgrad qualitativ sehr gut.

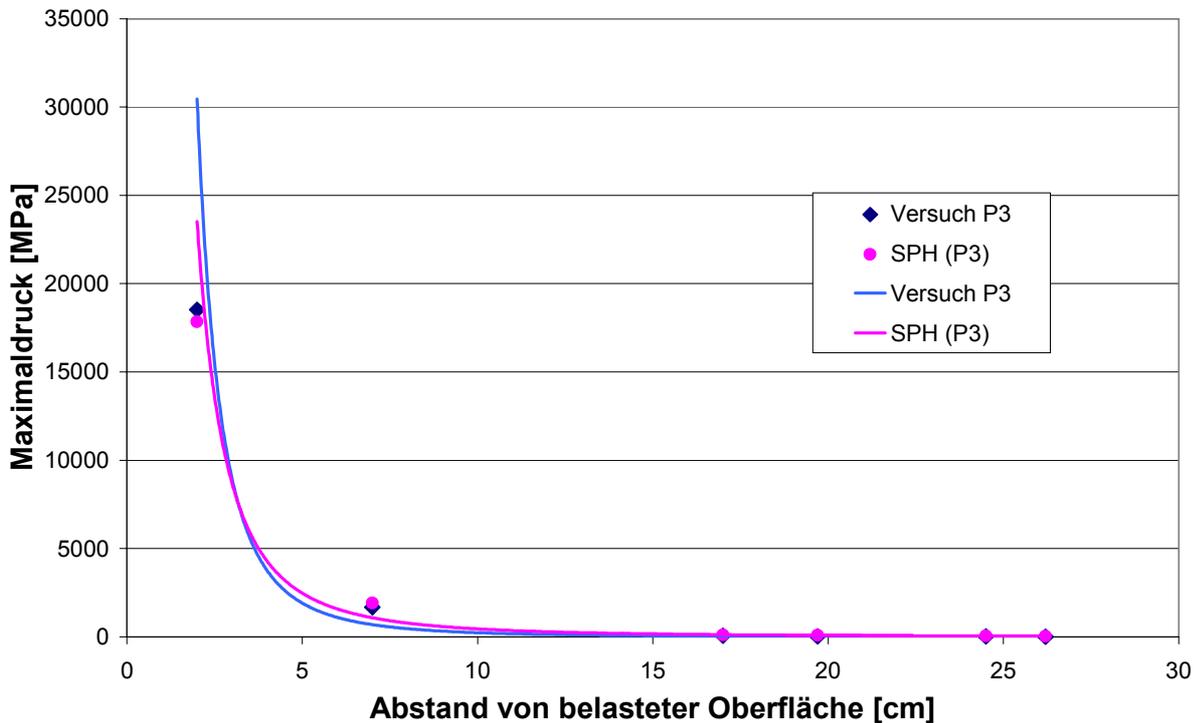


Bild 5.41: Druckmaximas über die Einbautiefe der Meßaufnehmer der Platte P3 aus Versuch und Rechnung

Die Fragmentverteilung ist Bild 5.43 zu entnehmen. Die Auflösung der Sieblinie ist bei der SPH-Simulation nicht sehr gut. Um einen geringeren minimalen Fragmentdurchmesser aus der Simulation zu erhalten, ist die Auflösung der Platte enorm zu erhöhen. Für einen minimalen Fragmentdurchmesser von 8 mm sind ca. 1.800.000 Betonpartikel, für einen Durchmesser von 4 mm schon 15.000.000 Betonpartikel erforderlich. Da Fragmente mit einem Durchmesser kleiner 1 cm nicht von Interesse sind, ist die hier gewählte Auflösung ausreichend. Auch die Gesamtfragmentmasse von 28,9 kg reproduziert die Simulation recht gut (siehe Tabelle 5.7).

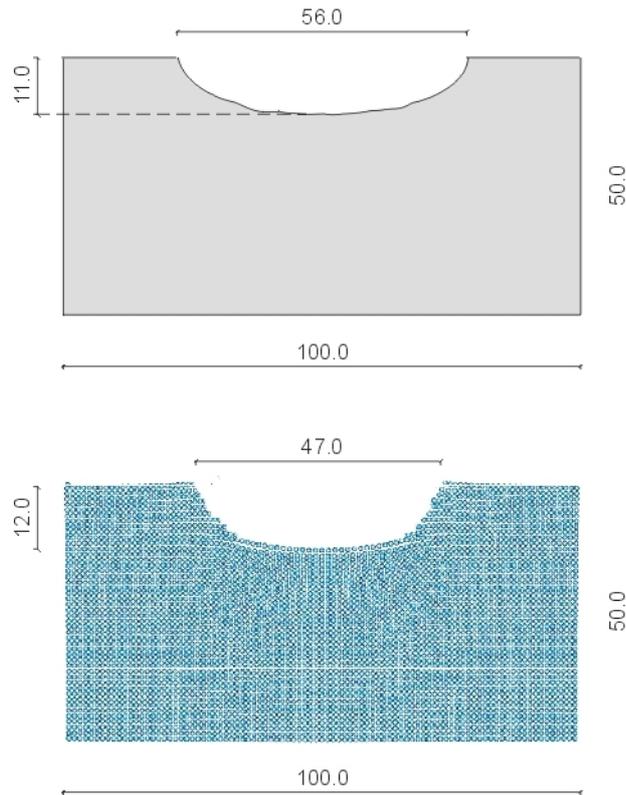


Bild 5.42: a) Betonplatte P3 aus Versuch verglichen mit b) der SPH-Platte anhand des Schnittes in Plattenmitte

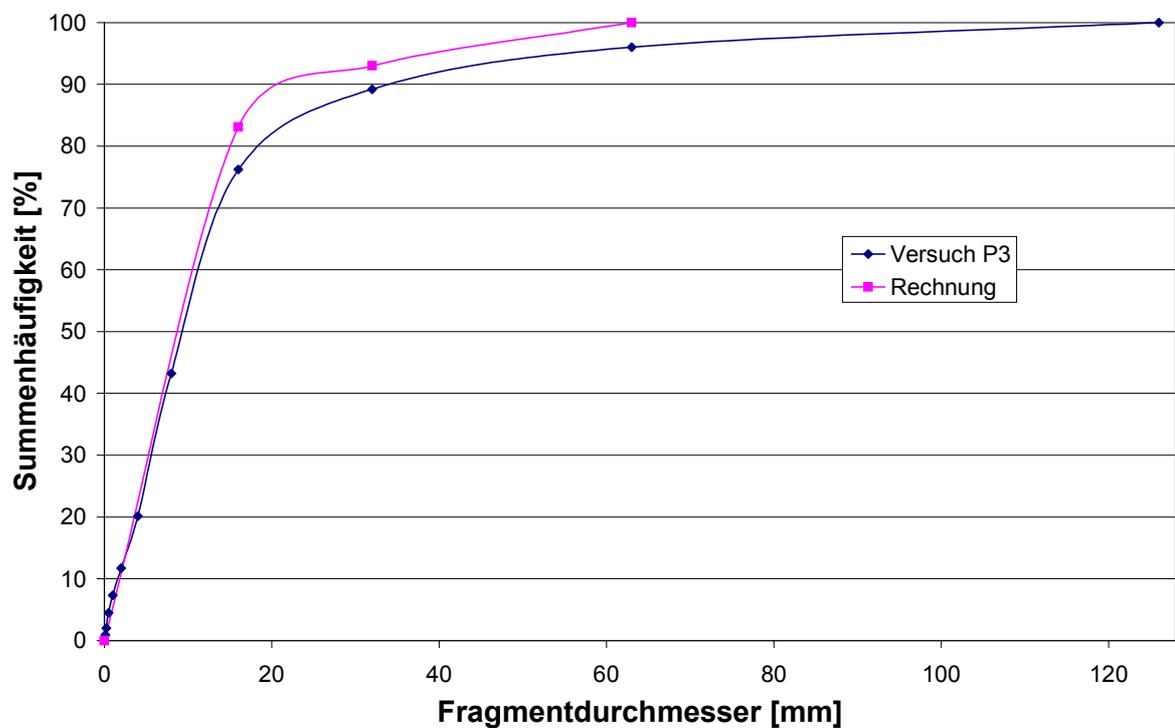
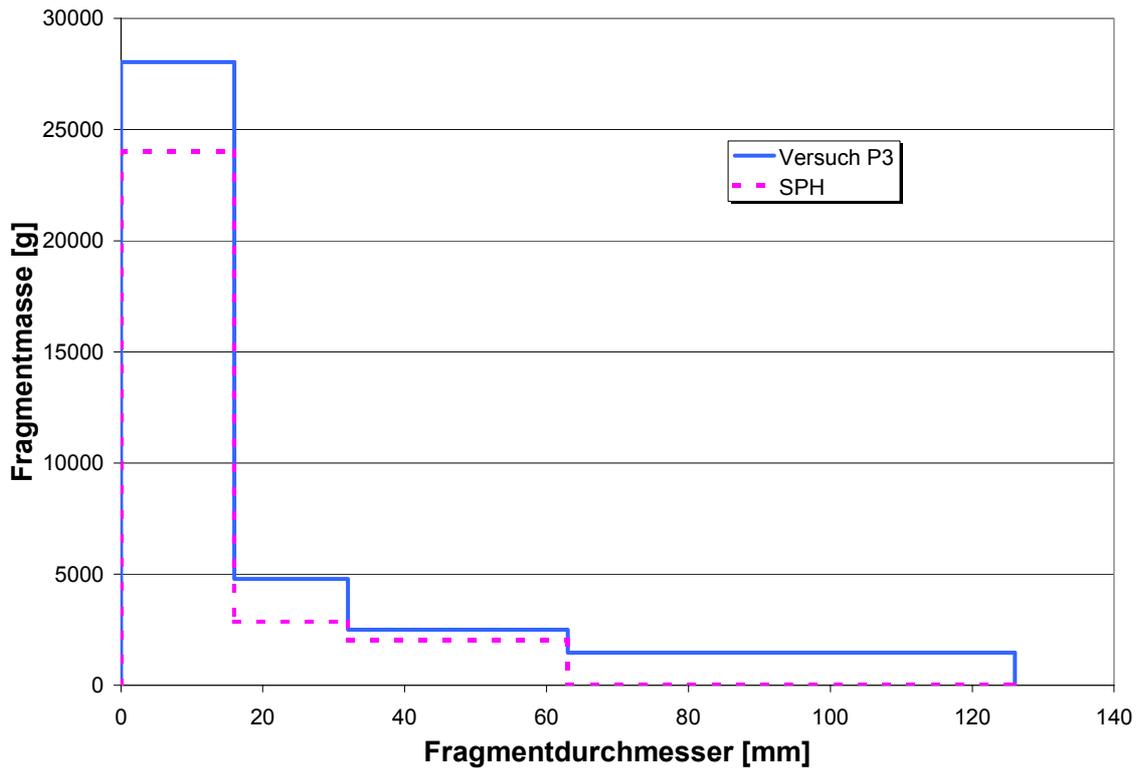
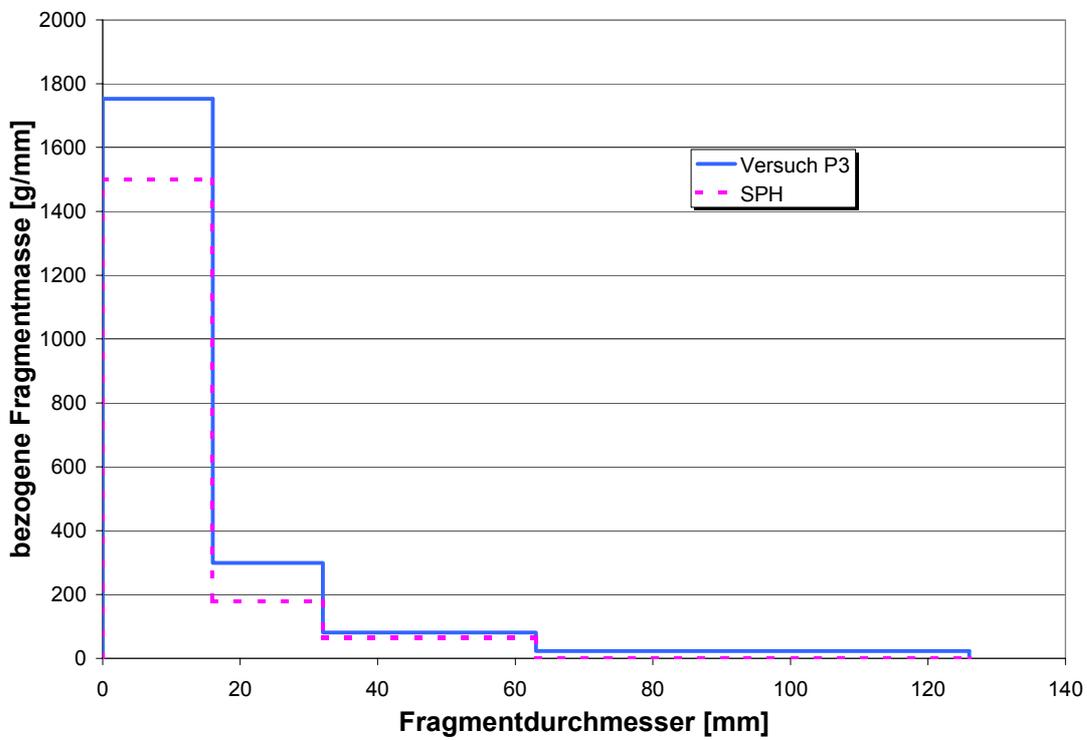


Bild 5.43: Fragmentverteilung der Platte P3 aus Versuch und Rechnung



a)



b)

Bild 5.44: Fragmentverteilung der Platte P3 aus Versuch und Rechnung, a) Dichteverteilung, b) bezogene Dichteverteilung

Aufgrund des niedrigen Zerstörungsgrades der Platte und der Durchführung der Berechnung bis zu einem Zeitpunkt von 2,5 ms war die Güte der Berechnung qualitativ sehr gut. Die Schädigungsevolution erfolgte weitgehend physikalisch.

- Platte P4

Die Platte P4 wurde mit einem phlegmatisierten Sprengstoff beaufschlagt. Hierzu wurde dem TNT kleine Styroporkugeln beigemischt. Seine Detonationsgeschwindigkeit verlangsamte sich auf 3800 m/s. Es wurde wieder mit zwei unterschiedlichen Netzfeinheiten gerechnet (siehe Tabelle 5.6). Die maximalen Druckpeaks werden von der fein diskretisierten SPH-Platte wesentlich stärker überschätzt als vom grob diskretisierten SPH-Modell.

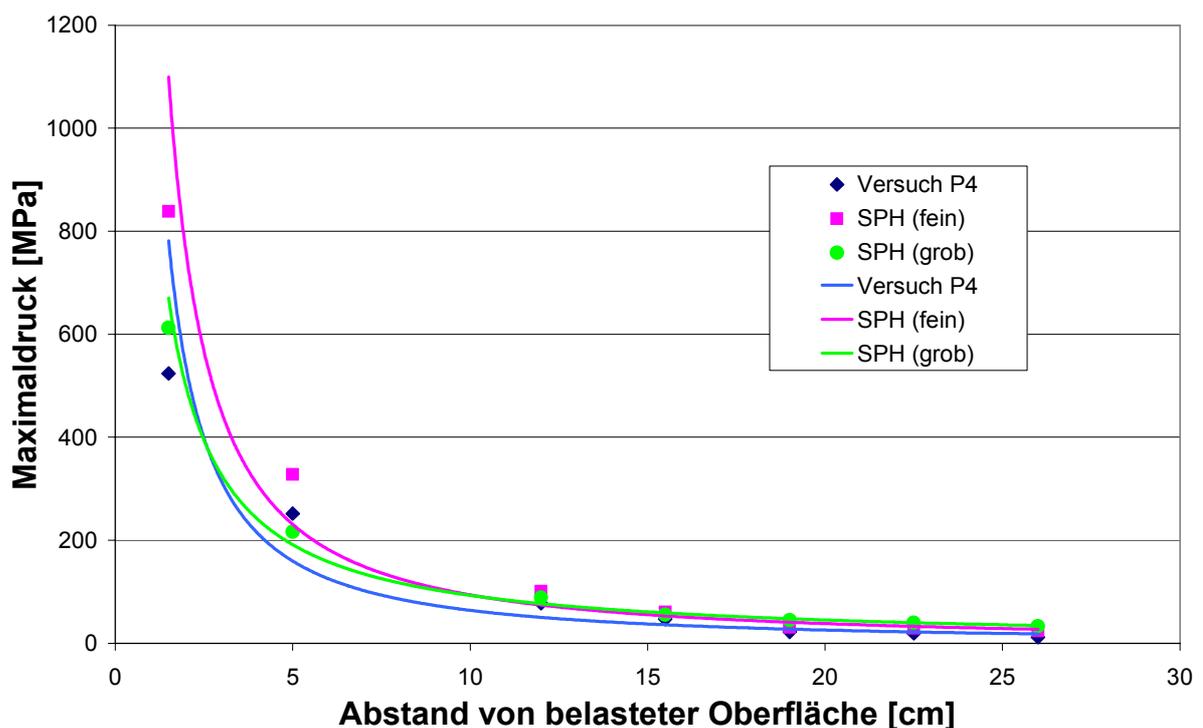


Bild 5.45: Druckmaximas über die Einbautiefe der Meßaufnehmer der Platte P4 aus Versuch und Rechnung

Die Platte P4 war die am wenigsten geschädigte Platte (siehe Bild 5.47). Es traten lediglich geringe Abplatzungen an Plattenoberkante auf. Deshalb ist die Reproduktion der Fragmentsieblinie nicht sehr schwierig. Bild 5.46 zeigt, daß die grob diskretisierte SPH-Platte die Sieblinie deutlich besser trifft als die fein diskretisierte SPH-Platte, bei der sich fast aus-

schließlich Staubkörner bildeten, was an der höheren Druckentwicklung im Sprengstoff liegt (siehe Bild 5.45). Auch die gesamte Fragmentmasse approximieren beide Simulationen gut (siehe Tabelle 5.7). Interessant sind die großen Unterschiede zwischen dem groben und dem feinen Modell in der Art der Fragmentierung (siehe Bilder C.15 bis C.17). Während bei der grob diskretisierten SPH-Platte die Fragmente fast ausschließlich direkt aus dem Krater geschleudert werden, ist bei der fein diskretisierten Platte eine deutliche seitliche Verdrängung des Materials in Kraternähe zu beobachten, bevor die restlichen Trümmer auch aus dem Krater geschleudert werden.

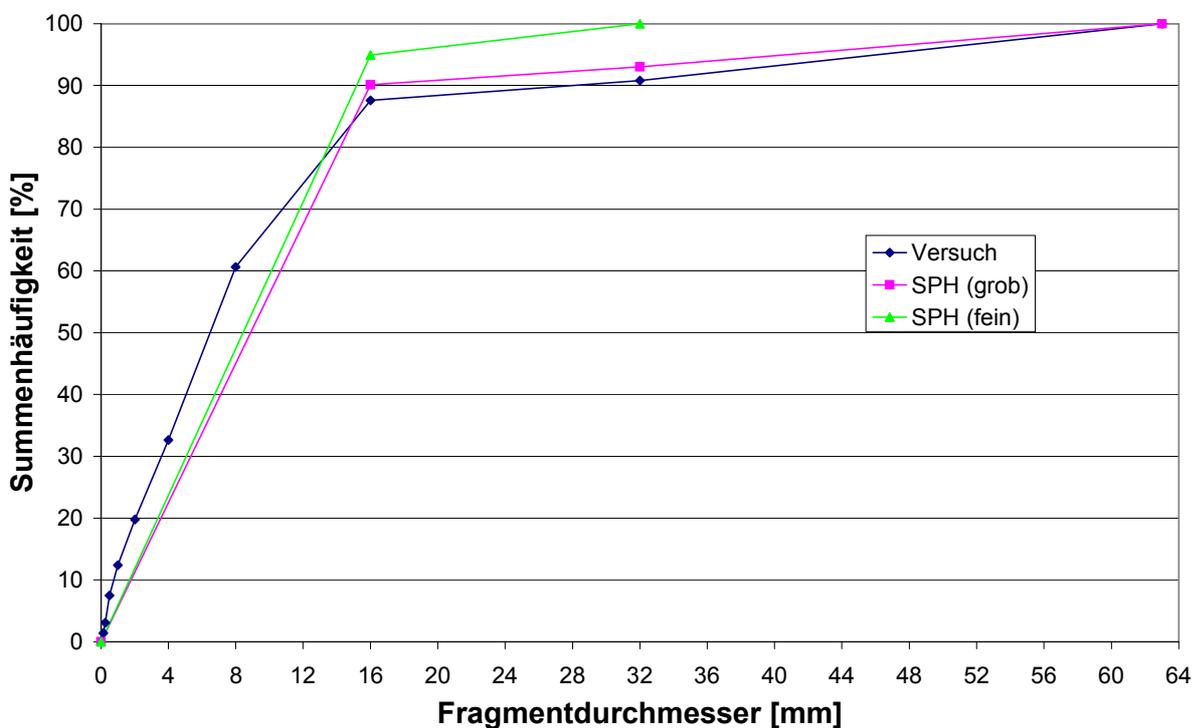


Bild 5.46: Fragmentverteilung der Platte P4 aus Versuch und Rechnung

Interessant ist, daß die fein diskretisierte SPH-Platte den Zerstörungsgrad aus Versuch schlecht quantitativ reproduziert, hingegen die grobe Platte das Zerstörungsmuster fast exakt wiedergibt (siehe Bild 5.47). Dies liegt an der größeren Partikelmasse des Beton und dem niedrigeren Druckaufbau im Lasteinleitungsbereich beim groben Modell. Den 291 Sprengstoffpartikeln des groben Modells stehen über 2.000 Sprengstoffpartikel des feinen Netzes gegenüber. Aufgrund der leichten Abplatzungen kann man jedoch bei beiden Platten von einer recht guten Übereinstimmung sprechen. In der Regel ist schon davon auszugehen, daß bei

steigender Partikelanzahl auch bessere Ergebnisse erzielt werden. In Bild 5.49 ist die Platte P4 nach dem Versuch abgebildet.

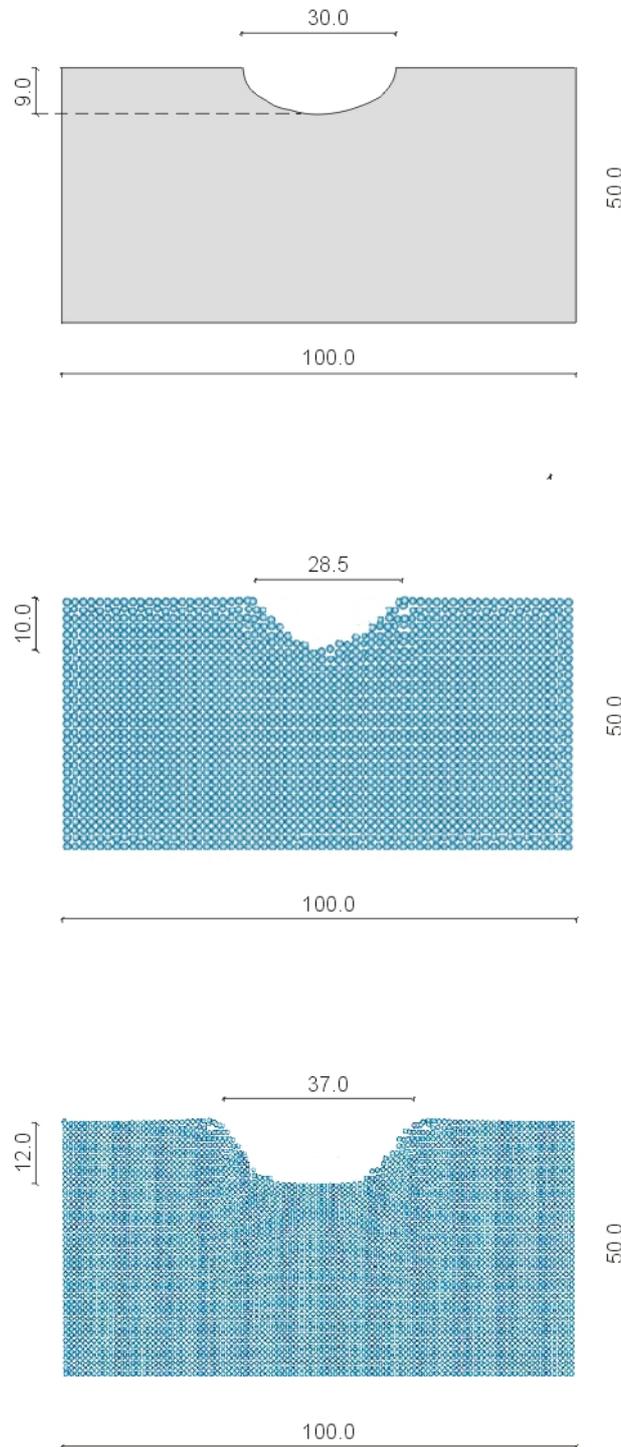
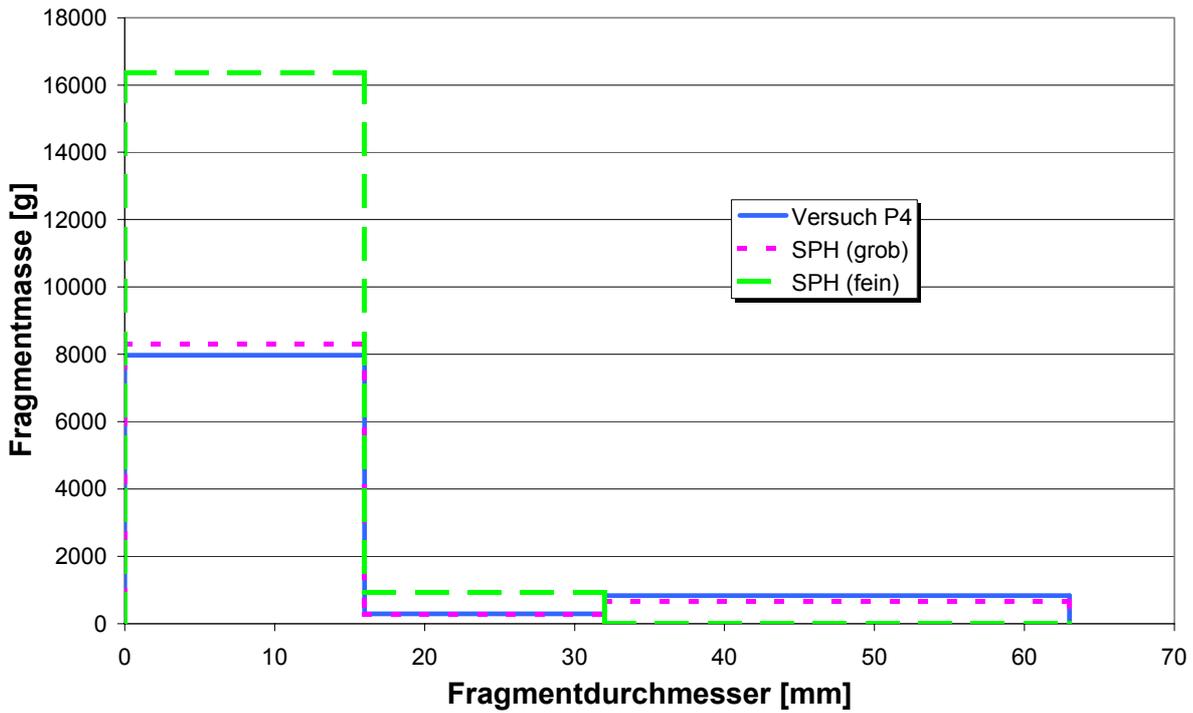
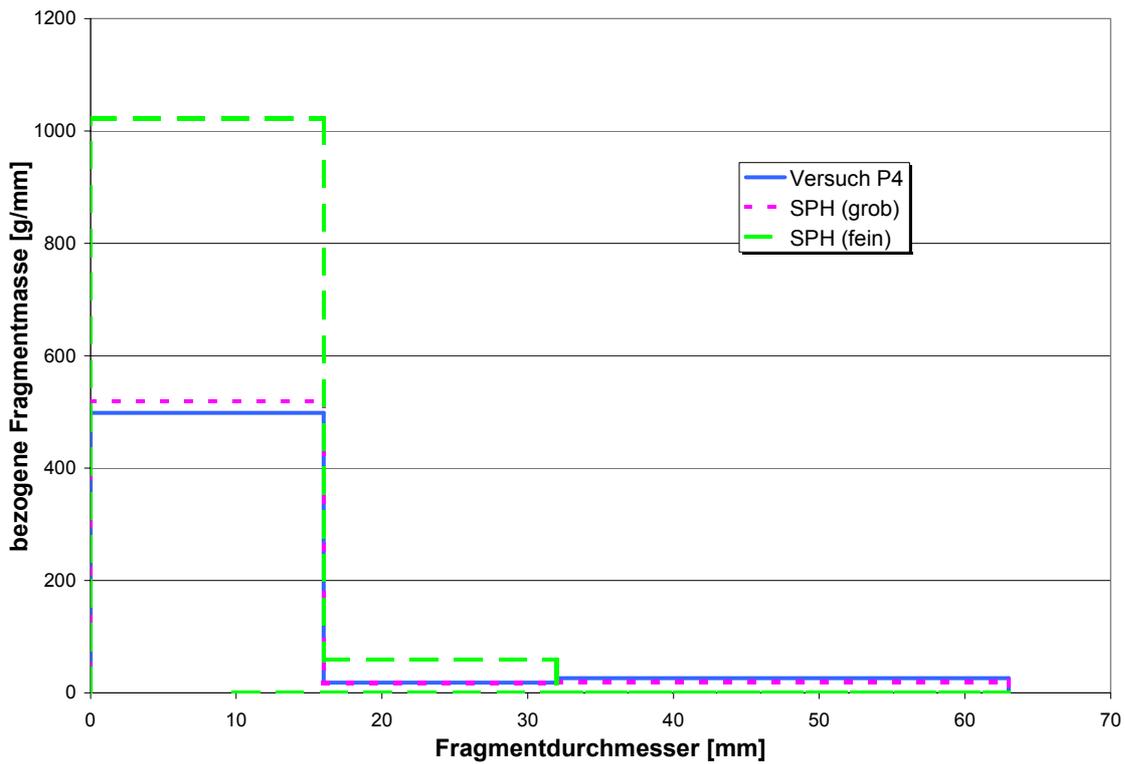


Bild 5.47: a) Betonplatte P4 aus Versuch verglichen mit der b) groben SPH-Platte, c) feinen SPH-Platte, anhand des Schnittes in Plattenmitte



a



b)

Bild 5.48: Fragmentverteilung der Platte P4 aus Versuch und Rechnung, a) Dichteverteilung, b) bezogene Dichteverteilung

Auch bei dieser Simulation traten keine Probleme in der Schädigungsevolution auf.



Bild 5.49: Platte P4 nach dem Versuch

Abschließend seien hier noch kurz drei Berechnungen mit den von Ockert [221] durchgeführten Versuchen verglichen. Da bei den Versuchen keine Fragmentverteilungen ermittelt worden sind, werden lediglich die Verformungsbilder der Platten gezeigt.

Stellt man die Versuchsergebnisse von Ockert [221] und Hermann [138] gegenüber, so bestätigt sich die These, daß bei extrem hohen Belastungsamplituden die Materialfestigkeit keinen Einfluß auf den Perforationswiderstand der Betonplatten besitzt. Die 30 cm dicken Betonplatten aus dem Beton B200 wiesen ungefähr dieselben Schäden wie die nur 2 cm dickeren B35-Platten aus den Versuchen von Ockert [221] auf. Die 25 cm Betonplatte O1 wurde vollständig perforiert. Bei einer Plattendicke von 40 cm traten lediglich noch leichte Abplatzungen an Plattenoberkante auf, die mit den Schäden der 10 cm dickeren Platte aus dem Versuch von Hermann [138] zu vergleichen sind. In den kommenden drei Verifikationrechnungen soll gezeigt werden, daß das SPH-Programm mit dem Betonmodell in der Lage ist, den Schädigungsprozeß wiederzugeben. Für das Betonstoffgesetz wurden die Parameter aus Tabelle 5.3 gewählt.

- Platten O1 bis O3

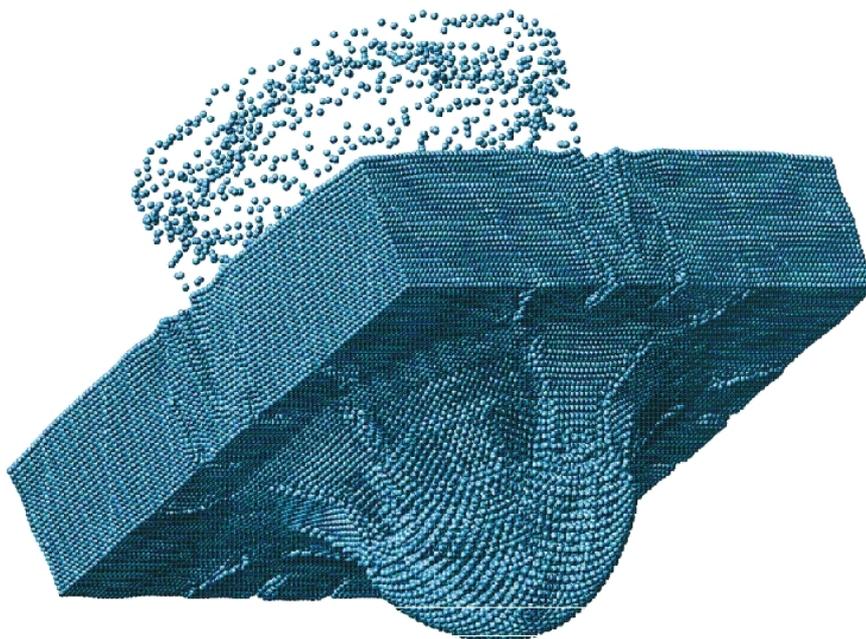
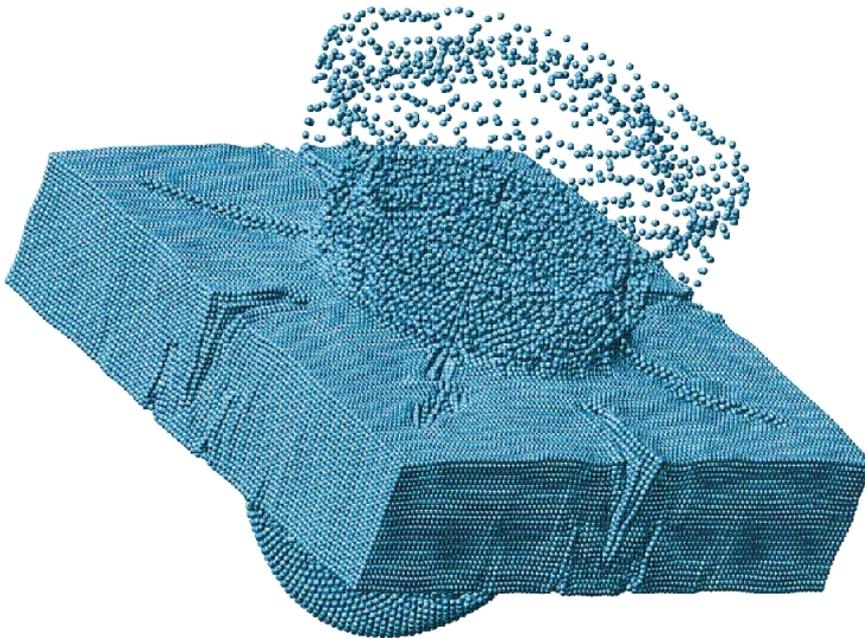


Bild 5.50: Fragmentierungsprozeß der groben SPH-Platte O1 nach 1,0 ms an a) Plattenoberkante, b) Plattenunterkante

Bei den Plattensprengungen von Ockert wurde lediglich eine Betongüte und dieselbe Kegelabmessung gewählt. Variiert wurden die Plattengeo-

metrien (siehe Tabelle 5.2). Bei den Versuchen wurde ersichtlich, daß die Dicke der Platte maßgeblich den Perforationswiderstand bestimmt. Die 25 cm dicke Platte O1 wurde vollständig perforiert. Ebenso war die 7 cm dickere Platte O2 stark geschädigt. Die 40 cm dicke Platte O4 wies nur Schäden an Plattenoberkante auf, an Plattenunterseite befanden sich zahlreiche Risse, ein Krater bildete sich jedoch nicht aus.

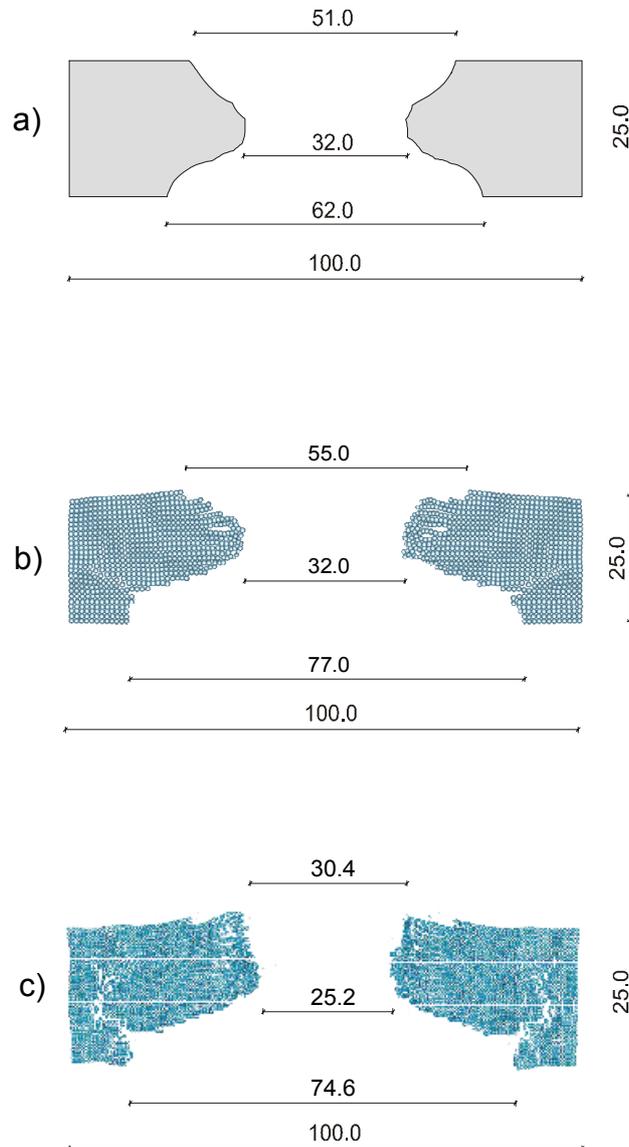


Bild 5.51: a) Betonplatte O1 aus Versuch verglichen mit der b) groben SPH-Platte und c) feiner SPH-Platte anhand des Schnittes in Plattenmitte

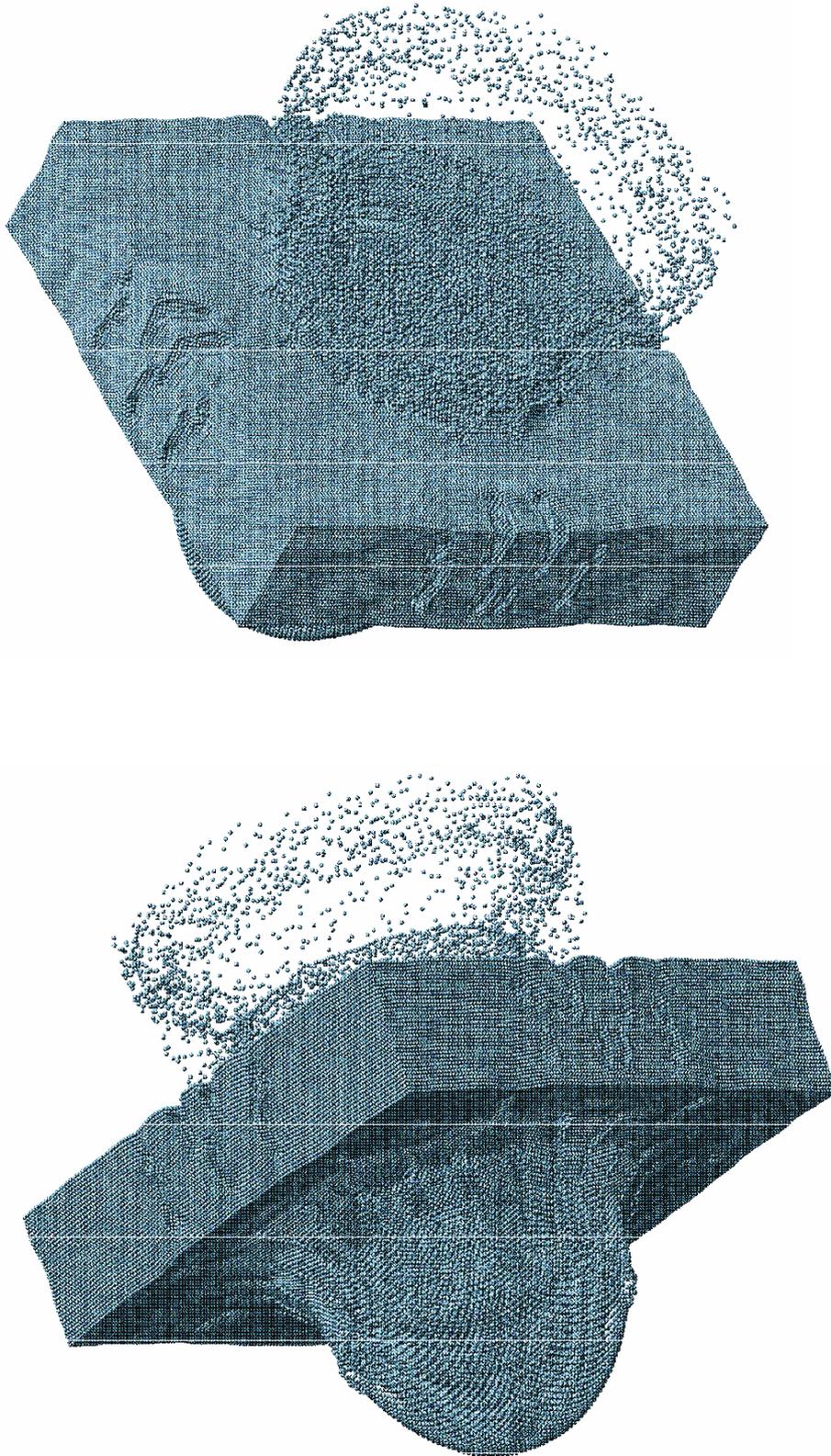


Bild 5.52: Fragmentierungsprozeß der feinen SPH-Platte O1 nach 1,0 ms an a) Plattenoberkante, b) Plattenunterkante

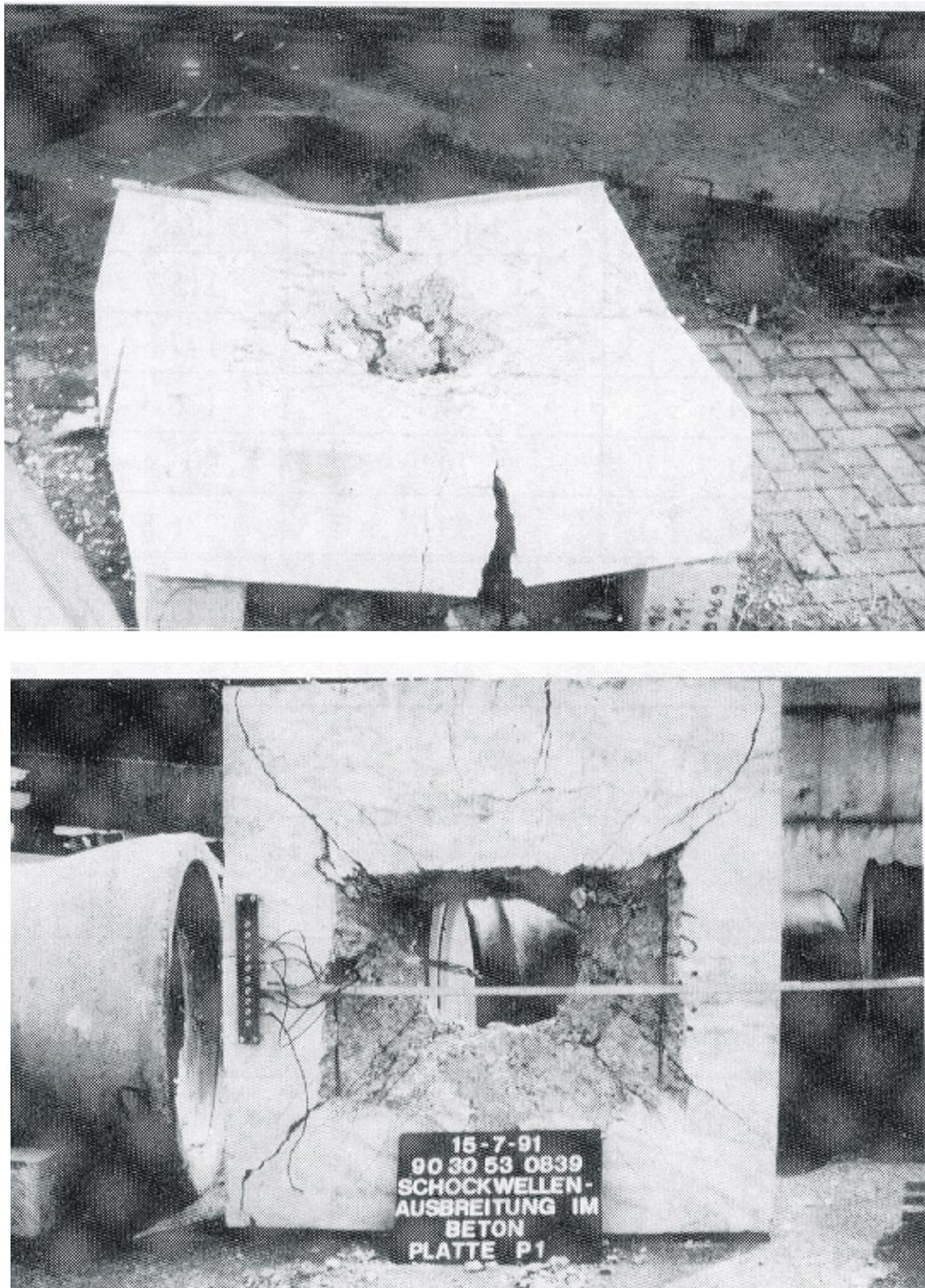


Bild 5.53: Platte O1 nach dem Versuch

Bild 5.50 und Bild 5.52 zeigen die Verformungen der grob bzw. fein diskretisierten Platte O1 aus der SPH-Simulation nach 1,0 ms. Gut zu erkennen ist die Ausbildung von radialen Diskontinuitäten an Plattenober- und -unterseite, die ebenfalls im Versuch auftraten (siehe Bild 5.53). Die

Abplatzungen an Plattenunterkante sind in der "feinen" Rechnung weiter fortgeschritten, ansonsten bilden beide Rechnungen den Fragmentierungsprozeß nahezu identisch ab. In Bild 5.51 ist in Plattenmitte das Zerstörungsmuster aus Versuch und den beiden Rechnungen gegenübergestellt. Wie auch im Versuch wird die Platte in der Rechnung vollständig perforiert. Der Rest der Platte bleibt nahezu erhalten. Beobachtet man die Schädigungsevolution, so bestätigt dies auch die Rechnung. Im Randbereich sind die Partikel größtenteils nicht allzu stark geschädigt.

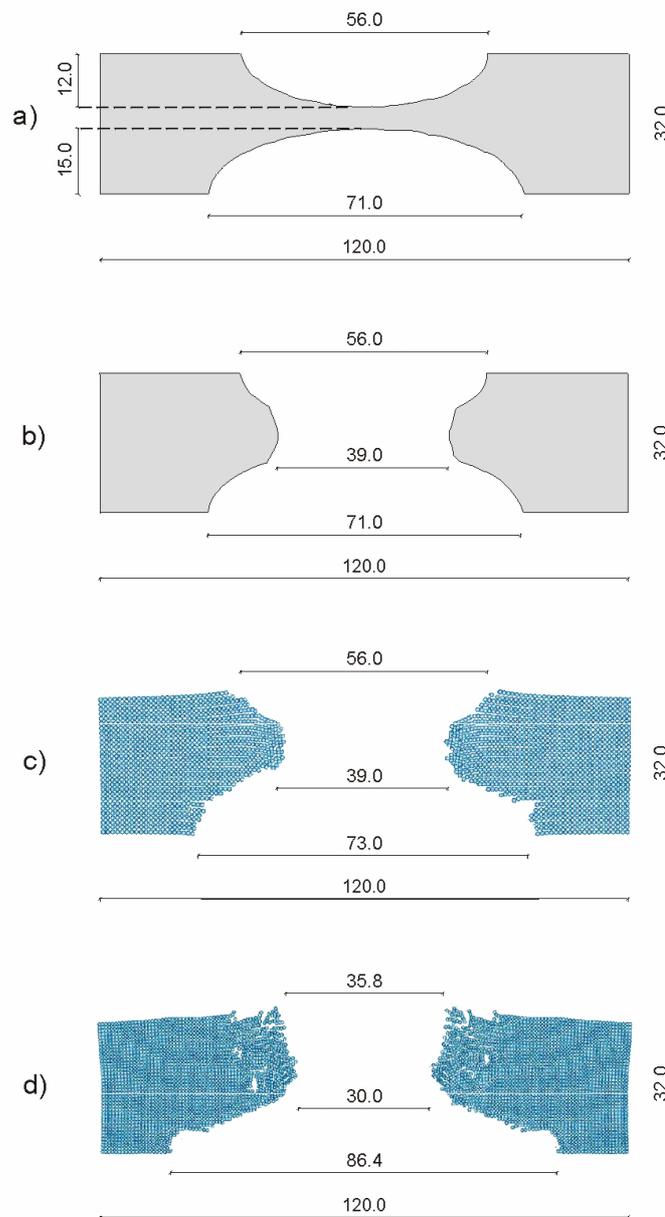


Bild 5.54: a) Betonplatte O2 aus Versuch vor dem Transport, b) nach dem Transport verglichen mit c) der groben SPH-Platte und d) der feinen SPH-Platte anhand des Schnittes in Plattenmitte

Die Platte O2 war in der Grundfläche jeweils 20 cm breiter als alle übrigen Platten. Im Versuch wurde die Platte nicht vollständig perforiert. Erst beim Transport erfolgte die "Perforation" der Platte, was ein deutliches Anzeichen des hohen Schädigungsgrades in Plattenmitte ist. Bild 5.54 zeigt das Verformungsbild aus Versuch und den beiden Rechnungen in Plattenmitte. Im Gegensatz zum Versuch wurde die Platte in den SPH-Simulationen perforiert, was jedoch aufgrund der "Transportperforation" eine zufriedenstellende Näherung darstellt. In Tabelle 5.7 sind die Kratertiefen und Kraterdurchmesser aufgelistet. Rechnung und Versuch zeigen eine gute Übereinstimmung. Der Fragmentierungsprozeß der fein diskretisierten SPH-Platte O2 ist in Bild 5.56 dargestellt.

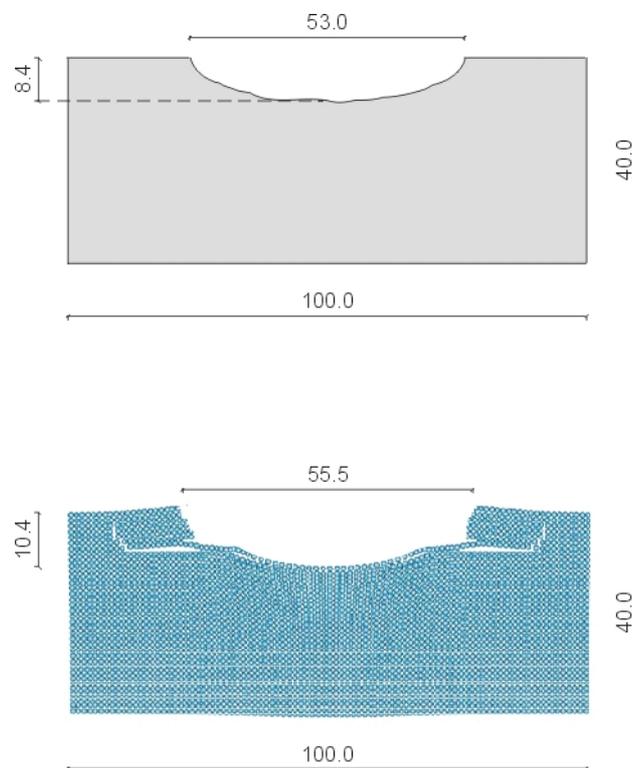


Bild 5.55: a) Betonplatte O3 aus Versuch verglichen mit der b) SPH-Platte, anhand des Schnittes in Plattenmitte

Den Zerstörungsgrad von Platte O3 in Plattenmitte gibt Bild 5.55 wieder. Auch hier stimmen die Verformungen aus Rechnung und Versuch gut überein. An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, daß alle Berechnungen der B35 Platten mit denselben Stoffgesetzparametern durchgeführt wurden. Der Schadensprozeß kann mit dem SPH-Programm unter Verwendung des Betonmodells ebenso quantitativ gut abgebildet werden.

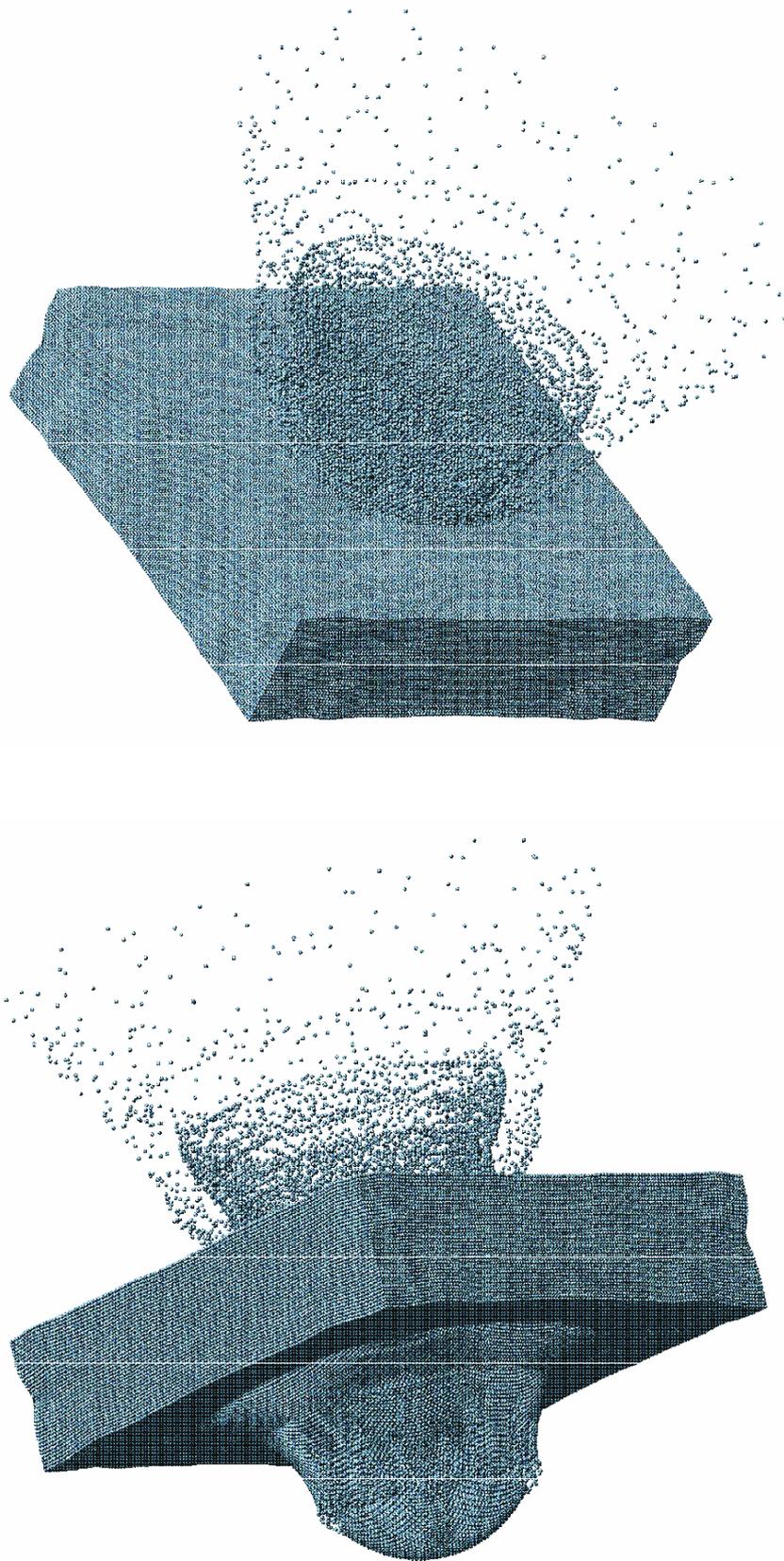


Bild 5.56: Fragmentierungsprozeß der feinen SPH-Platte O2 nach 1 ms, a) Plattenoberseite, b) Plattenunterseite

6 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, die wesentlichen Einflüsse des Fragmentierungsverhaltens von Beton aufzuzeigen und eine Methode bereitzustellen, mit der der dynamische Fragmentierungsprozeß auch quantitativ abgebildet werden kann.

In der Literatur gibt es zahlreiche Fragmentierungstheorien für unterschiedliche Werkstoffe, die im Prinzip lediglich eine Erweiterung der mikro- oder makromechanischen Plastizitäts- oder Schädigungstheorien sind. Hierbei werden nach einer Berechnung Variablen wie die Dehnrage, die Bruchzähigkeit, die Temperatur, etc. ausgewertet, um einen mittleren Fragmentdurchmesser zu erhalten. Über statistische Betrachtungen wird dann auf die Fragmentverteilung geschlossen. In dieser Arbeit wurde ein anderer Weg gewählt, um den Fragmentierungsprozeß von Beton mit Hilfe einer numerischen Simulation zu analysieren. Es wurde ein Diskretisierungsverfahren benutzt, das unter Verwendung eines geeigneten Werkstoffgesetzes den Fragmentierungsprozeß von Beton explizit abbilden kann.

Ein Diskretisierungsverfahren, das zur Abbildung der dynamischen Fragmentierung besser geeignet ist als die netzbasierte FE-Methode, ist die sog. Methode der Smooth Particle Hydrodynamics. Die SPH-Methode ist ein Lagrange-Verfahren, das das Kontinuum mit Hilfe von sog. Partikeln diskretisiert, die untereinander Impulse austauschen und sich frei im Raum bewegen können. Der große Vorteil der SPH-Methode liegt in der netzfreien Art der Diskretisierung. Durch die netzfreie Diskretisierung können leicht große Deformationen simuliert werden. Da die SPH-Methode bezüglich der Konsistenzanforderungen Defizite aufweist, wurden zahlreiche Verbesserungen dieses Verfahrens entwickelt. In dieser Arbeit wurde ein MLS-Ansatz (MLSPH) übernommen, der die exakte Einhaltung der Konsistenzforderungen gewährleistet. Es wurde ein eigener dreidimensionaler SPH/MLSPH-Code entwickelt und anhand einfacher Beispiele verifiziert. Im Rahmen der Untersuchungen zur Fragmentierung von Beton wurde ein am Institut für Massivbau und Baustofftechnologie entwickeltes Betonstoffgesetz in den SPH/MLSPH-Code imple-

mentiert. Es approximiert nicht nur das Betonverhalten unter statischer Belastung, sondern berücksichtigt auch die Festigkeitssteigerung von Beton unter hohen Belastungsgeschwindigkeiten realitätsnah. Ebenso ist es in der Lage, das Verhalten von Beton unter hoher hydrostatischer Beanspruchung wiederzugeben. Die Fragmentierung geschieht "numerisch" durch die Trennung der Partikel und "physikalisch" durch das verwendete Materialmodell. Ein Problem liegt in der Beurteilung, ob die Fragmentierung physikalischen oder numerischen Ursprungs ist. Hierzu wurde die Evolution der Druck- und Zugschädigungsvariable des Betonstoffgesetzes hinzugezogen. Es läßt sich zeigen, daß nach dem Durchlaufen von maximal zwei Druck- und Zugwellen die Schädigungsevolution abgeschlossen ist. Eine anschließende Schädigungsentwicklung kann auf ausschließlich numerische Ursachen zurückgeführt werden.

Es wurden zunächst anhand eines einfachen Beispiels, einem Zylinder unter Innendruck, qualitativ die Parameter untersucht, die das Fragmentierungsverhalten von Beton im Wesentlichen beeinflussen. Dies sind die Belastungsgeschwindigkeit und die Heterogenität. Hierbei wurde offensichtlich, daß die Belastungsgeschwindigkeit maßgeblich die Fragmentgröße bestimmt. Mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit werden die Fragmente immer kleiner. Des Weiteren hat sich gezeigt, daß die Heterogenität des Werkstoffes lediglich unter quasi statischer Beanspruchung einen Einfluß auf die Fragmentgrößen besitzt. Mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit und -amplitude verringert sich der Einfluß des Parameters "Heterogenität" auf die Fragmentgröße.

Der SPH/MLSPH-Code wurde unter Verwendung des Betonstoffgesetzes zur Verifikation anhand von Versuchen validiert. Hierzu wurden die Versuchsdaten von verschiedenen Sprengungen von Betonplatten unterschiedlicher Dicke und Festigkeit herangezogen. Es wurde gezeigt, daß der SPH/MLSPH-Code unter Benutzung des Betonmodells in der Lage ist, den Zerstörungsprozeß bis hin zur konkreten Fragmentverteilung abzubilden. Es wurde festgestellt, je höher der Schädigungsgrad einer Struktur ist, desto unphysikalischer wird der Fragmentierungsprozeß in einer Simulation abgebildet. Generell reproduziert die Berechnung die Versuchsergebnisse sehr gut.

Mit Abschluß dieser Arbeit steht ein SPH/MLSPH-Code zur Verfügung, mit dem nicht nur die Fragmentierung von Betonstrukturen rechnerisch gut erfaßt werden kann. Er kann auch auf anderen Gebieten in der Kurzzeitdynamik z.B. den Beschuß von Metallstrukturen eingesetzt werden. Durch die portable Programmstruktur ist er auf verschiedenen Parallelrechnern einsetzbar, die Parallelisierung ermöglicht eine dreidimensionale numerische Simulation größerer Strukturen mit einer ausreichenden Auflösung der zu untersuchenden Struktur.

In Zukunft ist es wünschenswert, die Untersuchungen nicht nur auf den Werkstoff Beton zu beschränken, sondern weitere Untersuchungen für Stahlbetonstrukturen durchzuführen. Dabei kommt vor allem dem Verbund zwischen Stahl und Beton große Bedeutung zu.

Ein weiterer Schritt wäre die Verfolgung der Trümmerbahnen der gebildeten Fragmente. Hierzu könnte der SPH/MLSPH-Code mit anderen Diskretisierungsverfahren, z.B. der diskreten Element Methode gekoppelt werden, um nach der Fragmentbildung auch die Flugbahn der "diskreten" Fragmente verfolgen zu können.

7 Literaturverzeichnis

- [1] ABAQUS EXPLICIT/ USER'S VOLUME I 5.8, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, 1998
- [2] ABAQUS THEORY MANUEL 5.8, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, 1998
- [3] Aimone C.T., Meyers M.A. et al.: *Rock Mechanics in Productivity Design*, eds. Dowding D.H., Singh M.M., AIME, Warrendale, PA, 1982, 979
- [4] Altenbach J., Altenbach H.: *Einführung in die Kontinuums-mechanik*, Teubner, Stuttgart, 1994
- [5] Anderson F.L.: *An Overview of the Theory of Hydrocodes*, International Journal of Impact Engineering, 5, 1987, 33-59
- [6] Argyris J., Mlejnek H.P.: *Die Methode der Finiten Elemente*, Band III. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1988
- [7] Asgian M.I., Cundall P.A.: *The Mechanical Stability of Propped Hydraulic Fractures: A Numerical Study*, Publications of the International Society of Petroleum Engineers, SPE 28510, 475-489, 1994
- [8] Attaway S.W., Heinstein M.W. et al.: *Coupling of smooth particle hydrodynamics with the finite element method*, Nuclear Engineering and Design 150 (1994), 199-205
- [9] Auricchio F., Taylor R.L.: *Two material models for cyclic plasticity: Nonlinear kinematic hardening and generalized plasticity*, Int. J. Plasticity, 11, 1995, 65-98
- [10] Bachmann H.: *Die Massenträgheit in einem Pseudo-Stoffgesetz für Beton bei schneller Zugbeanspruchung*, Dissertation 1993, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie der Universität Karlsruhe
- [11] Balsara D.S.: *Von Neumann Stability Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics-Suggestions for Optimal Algorithms*, Journal of Computational Physics, 121, (1995), 357-372
- [12] Barbosa R., Ghaboussi J.: *Discrete Finite Element Method*, Engng. Comput., 9, 1992
- [13] Barbosa R.E.: *Discrete Element Models for granular materials and rock masses*, Dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1990
- [14] Batdorf S.B.: Nucl. Eng. And Design 35 (1975), 349
- [15] Bathe K.J.: *Finite-Element-Methoden*, Springer Verlag, Berlin
- [16] Bäumer H.P.: *Programmieren mit Fortran 90*, 1997
- [17] Belytschko T. et al.: A unified stability analysis of meshless particle methods, Int. J. Numer. Meth. Engng 2000, 48, 1359-1400
- [18] Belytschko T. et al.: Smoothing and accelerated computations in the element free Galerkin method, Journal of Computational and Applied Mathematics 74 (1996), 111-126

- [19] Belytschko T., Krongauz Y., et al.: *On the completeness of Meshfree Particle Methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 43 (1998), 785-819
- [20] Belytschko T., Krongauz Y. et al.: *Meshless methods: An overview and recent developments*, Comput. Methods Appl. Engng. 139, 1996, 3-47
- [21] Belytschko T., Lu Y.Y. et al.: *Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture*, Int. J. Solids Structures 32 (1995), 2547-2570
- [22] Belytschko T., Lu Y.Y. et al.: *Element-free Galerkin Methods*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 37 (1994), 229-256
- [23] Belytschko T.: *Crack Propagation by element-free Galerkin methods*, Engineering fracture mechanics, 51/2 (1995), 295-315
- [24] Benson D.J.: *Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 99 (1992), 235-394, North-Holland
- [25] Benz W., Asphaug E.: *Simulations of brittle solids using smooth particle hydrodynamics*, Computer Physics Communications 87 (1995), 253-265
- [26] Benz W.: *Smooth Particle Hydrodynamics: A Review*, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, Preprint No. 2884, 1989
- [27] Bischoff P., Bachmann H., Eibl J.: *Microcrack development during high strain rate loading of concrete in compression*, Proc. Of Eurodyn'90 European Conf. on Struct. Dynamics, W.B. Krätzig et al. (Eds.), A.A. Balkema, Rotterdam, Netherlands, Vol. 1, 59-66
- [28] Bischoff P.H., Bachmann H., Eibl J.: *Microcrack Development during High Strain Loading of Concrete in Compression*, Proc. Of the Europ. Conference on Structural Dynamics, Eurodyn'90, Bochum, A.A. Balkema Rotterdam Brookfield, 1991
- [29] Bischoff P.H.: *Compressive Response of Concrete to hard Impact*, Dept. Of Civil. Eng., Imperial College of Science and Technology, Ph.D. Thesis, London, 1988
- [30] Blumenauer H.: *Technische Bruchmechanik*, 1993, Dt. Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart
- [31] Bonet J., Kulasegaram S.: *Corrected Smooth Particle Hydrodynamics Methods for Fluid and Solid Mechanics Computations*, European Conference on Computational Mechanics, August 31-September 3, 1999, München, Germany
- [32] Bonet J., Kulasegaram S.: *Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 47, 2000, 1189-1214
- [33] Bonet J., Lok T.-S.L.: *Variational and momentum preservation aspects of Smooth Particle Hydrodynamic formulation*, Comp. Methods in Appl. Mech. Engrg. 180 (1999), 97-115

- [34] Brathurst R.J., Rothenburg L.: *Investigations of micromechanical features of idealized granular assemblies using DEM*, Engng. Comput., 9, 1992
- [35] Brown K. et al.: Parallel strategies for crash and impact simulations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 184 (2000), 375-390
- [36] Butkovich T.R. et al.: *Insights in cratering phenomenology provided by the discrete element modeling*, Key Questions in Rock Mechanics, Cundall et al. (eds.), 1988, Balkema, Rotterdam
- [37] Caramara E.J., Shashkov M.J., Whalen P.P.: *Formulation of Artificial Viscosity for Multi-dimensional Shock Wave Computations*, International Journal of Computational Physics, 144, 70-97 (1998)
- [38] Carol I., Rizzi E., Willam K.: *A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface*, Int. J. Solids Structures, Vol. 31, 2835-2865
- [39] Chen J.K., Beraun J.E., Jih J.C.: *An Improvement for Tensile Instability in Smoothed Particle Hydrodynamics*, Comput. Mech. 23 (1999), 279-287
- [40] Chen J.K., Beraun J.E.: A generalized smoothed particle hydrodynamics method for nonlinear dynamic problems, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2000), 225-239
- [41] Chen W.-F., Saleeb A.F.: *Constitutive equations for engineering materials*, Vol.1: *Elasticity and modeling*, Vol.2: *Plasticity and modeling*, Elsevier, Amsterdam, 1994
- [42] Choi S.K.: *Application of the distinct element method for rock mechanics problems*, Engng. Comput., 9, 1992
- [43] Cloutman L.D.: *An Evaluation of Smoothed Particle Hydro-dynamics*, Advances in the Free Lagrange Method, Lecture Notes in Physics, 395, 1990
- [44] Courant R., Friedrichs K.O., Lewy H.: Über die partiellen Differenzengleichung der mathematischen Physik, Math. Ann., Vol. 100, 32-74, 1928
- [45] Cummins S.J., Rudman M.: *An SPH Projection Method*, Journal of Computational Physics 152, 1999, 584-607
- [46] Cundall P.A., Hart R.D.: *Development of generalized 2-D and 3-D distinct element programs for modeling jointed rock*, Misc. Paper SL-85-1, US Army Corps of Engineers (1985)
- [47] Cundall P.A., Hart R.D.: *Numerical modeling of discontinua*, Engng. Comput., 9, 1992
- [48] Cundall P.A., Jenkins J.T. et al.: *Evolution of elastic moduli in a deforming granular assembly*, Powders and Grains, Biarez & Goues (eds), 1989 Balkema, Rotterdam
- [49] Cundall P.A., Konietzky H. et al.: *PFC-ein neues Werkzeug für numerische Modellierungen*, Bautechnik 73 (1996), Heft 8
- [50] Cundall P.A., Strack O.D.L.: *A discrete numerical model for granular assemblies*, Geotechnique 29, No.1, 1979, 47-65

- [51] Cundall P.A.: *A computer model for simulating progressive, large-scale movements in blocky rock systems*, Symposium Soc. Internat. Mecanique des Roches, Nancy 1971
- [52] Cundall P.A.: *Adaptive density-scaling for time-explicit calculations*, Proc. 4th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton, 23-26, 1982
- [53] Cundall P.A.: *Computer Simulations of dense Sphere Assemblies*, Micro-mechanics of Granular Materials, Satake M. und Jenkins J.T. (eds.), Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 113-123, 1988
- [54] Cundall P.A.: *Distinct element models of rock and soil structure*, Analytical and Computational Methods in Engineering Rock Mechanics, Chap. 4, 129-163, Allen & Unwin, London 1987
- [55] Cundall P.A.: *Formulation of a Three-dimensional Distinct Element Model-Part I. A Scheme to Detect and Represent Contacts in a System Composed of Many Polyhedral Blocks*, Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech., Vol. 25. No. 3, 1988, 107-116
- [56] Cundall P.A.: *Formulation of a Three-dimensional Distinct Element Model-Part II. Mechanical Calculations for Motion and Interaction of a System Composed of Many Polyhedral Blocks*, Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech., Vol 25. No 3, 1988, 117-125
- [57] Cundall P.A., Strack O.D.L.: *The distinct element method as a tool for research in granular media, Part II*, Rep. NSF Grant ENG76-20771, Dept. of Civil & Mineral Eng., Univ. of Minnesota (1979)
- [58] Cundall P.A.: *UDEC-A generalized distinct element program for modeling jointed rock*, Final Tech. Rep. Eur. Res. Office (US Army Contract DAJA37-79-C-0548); NTIS order No. AD-A087 610/2 (1980)
- [59] Curbach M.: *Festigkeitssteigerung von Beton bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten*, Schriftenreihe Inst. Massivbau u. Baustofftechnologie, Heft 11, Dissertation Universität Karlsruhe, 1987
- [60] Curran D.R., Seaman L. et al.: *Computational models for ductile and brittle fracture*, J. Appl. Physics, Vol. 47, No. 11, 1976
- [61] Curran D.R., Seaman L. et al.: *Dynamic failure in solids*, Physics Today / January 1977,
- [62] Curran D.R., Seaman L. et al.: *Dynamic fracture criteria for ductile and brittle metals*, Journal of Materials, JMLSA, Vol. 7, No. 3, 1972, 393-401
- [63] Curran D.R., Seaman L. et al.: *Fragmentation of rock under dynamics loads*, Int. J. Rock Mech. Sci. & Geom. Abstr., 1974, 303-317, Vol. 11
- [64] Curran D.R., Seaman L.: *Dynamic failure of solids*, Physics Report 147, Nos. 5 & 6 (1987), 253-388, North-Holland, Amsterdam
- [65] Curran D.R., Seaman L.: *Simplified models of fracture and fragmentation*, Chapter 13, in: High-Pressure Shock Compression of Solids II, Dynamic fracture and fragmentation, L. Davison, D.E. Grady, M. Shahinpoor (eds.), Springer, 1993

- [66] Di Lisio R., Grenier E.: *The Convergence of the SPH Method*, Computers Math. Applic., 35, 1998, 95-102
- [67] Dienes J.K., Margolin L.G.: *A statistical model of anisotropic fragmentation*, Explosively Produced Fracture of Oil Shale, Annual Report, April 1978-March 1979, LA-8104-PR,
- [68] Dienes J.K.: *A Unified Theory of Flow, Hot Spots and Fragmentation with an Application to Explosive Sensitivity*, Chapter 14, in: High-Pressure Shock Compression of Solids II, Dynamic fracture and fragmentation, L. Davison, D.E. Grady, M. Shahinpoor (eds.), Springer, 1993
- [69] Dilts G.A., Aamer I.H.: *Three-dimensional Boundary Detection for Smooth Particle Methods*, Preprint 2000, Submitted to: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering
- [70] Dilts G.A.: *Equivalence of the SPH Method and a Space-Time Galerkin Moving Particle Method*, Los Alamos National Laboratory, Unlimited Release LA-UR 96-134, 1996
- [71] Dilts G.A.: *Moving Least Squares Particle Hydrodynamics I: Consistency and Stability*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 44, 1999, 1115-1155
- [72] Dilts G.A.: *Moving Least Squares Particle Hydrodynamics II: Conservation and Boundaries*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 1503-1524
- [73] Dilts G.A.: *Some Recent Developments for Moving-Least-Squares Particle Methods*, First M.I.T. Conference on Computational Fluid and Soil Mechanics, June 12-14, 2001, Preprint, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139 USA
- [74] Dobratz B.M.: *Properties of Chemical Explosives and Explosive Simulants*, Livermore: Lawrence Livermore Laboratory, 1974
- [75] Dobry et al.: *Discrete Modelling of stress-strain behaviour of granular media at small and large strains*, Engng. Comput., 9, 1992
- [76] Donze F., Magnier S.A.: *Formulation of a 3-D numerical model of brittle behaviour*, Geophys. J. Int. (1995) 122, 790-802
- [77] Donze F., Magnier S.A.: *Numerical modeling of a highly explosive source in an elastic-brittle rock mass*, Journal of Geo. Research, Vol. 101, No. B2, 1996, 3103-3112
- [78] Donze F.V. et al.: *Modeling Fractures in Rock Blasting*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol. 34, No. 8, 1997, 1153-1163
- [79] Donze F.V. et al.: *Numerical Study of Compressive Behaviour of Concrete at High Strain Rates*, Journal of Eng. Mechanics, October 1999
- [80] Drlik G.J.: *Simulation of the crushing of a two-dimensional particle bed due to compressive loading*, Msc Thesis, Mech. Eng. Dept. MIT (1985)
- [81] Dubois-Pelerin Y., Zimmermann T. et al.: *Object-oriented finite element programming: I Governing principles*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 98 (1991), 291-303, North-Holland

- [82] Dubois-Pelerin Y., Zimmermann T.: *Object-oriented finite element programming: II A prototype program in Smalltalk*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 98 (1992), 361-397, North-Holland
- [83] Dubois-Pelerin Y., Zimmermann T.: *Object-oriented finite element programming: III An efficient implementation in C++*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 108 (1993), 165-183, North-Holland
- [84] Duddeck, Ahrens H. Dinkler D.: *Finite-Element-Methoden Teil I*, Bericht Nr. 88-50, Institut für Statik, Universität Braunschweig, 1991
- [85] Dyka C.T., Ingel R.P.: *An Approach for Tension Instability in Smoothed Particle Hydrodynamics*, Computers & Structures, 57, 573-580, 1995
- [86] Dyka C.T., Ingel R.P.: *Addressing Tension Instability in SPH Method*, Naval Research Laboratory, Washington, 1994
- [87] Eibl J. et al.: *Detailed numerical models of bearings*, Technical Report No. 6 of Brite-EuRam II, Project BE 70104, 1996
- [88] Eibl J., Curbach M.: *An attempt to explain strength increase due to high loading rates*, Nuclear Engrg. And Des., 112, 1989, 45-50
- [89] Eibl J., Schmidt-Hurtienne B.: *Betonstoffgesetze für hochdynamische Beanspruchungen*, Beton- und Stahlbetonbau, 1999, Vol.94, 278-288
- [90] Eibl J., Schmidt-Hurtienne B.: *Strain rate sensitive constitutive law for concrete*, J. Engrg. Mech., ASCE, 125(12), 1411-1420, 1999
- [91] Eibl J., Schmidt-Hurtienne B.: *Stress history versus strain history*, Computational Modeling of Concrete Structures, de Borst, Bicanic, Mang & Mischke (eds), 1998 Balkema, Rotterdam
- [92] Eibl J.: *Ein neuer Ansatz für ein Stoffgesetz zur Berücksichtigung großer Dehngeschwindigkeiten bei zugbeanspruchten Beton*, Waubke Festschrift, BMI 9/96, Schriftenreihe des Inst. Für Baustofflehre und Mat.-Prüfung der univ. Innsbruck, Austria 1996
- [93] Englman R. et al.: *Percolation theoretical treatment of two-dimensional fragmentation in solids*, Philosophical Magazine B, 1984, Vol. 50, No. 2, 307-315
- [94] Englman R.: *Maximum Entropy Principles in Fragmentation Data Analysis*, Chapter 11, in: High-Pressure Shock Compression of Solids II, Dynamic fracture and fragmentation, L. Davison, D.E. Grady, M. Shahinpoor (eds.), Springer, 1993
- [95] Evans D.J., Murad S.: *Singularity free algorithm for molecular dynamics simulations of rigid polyatomics*, Mol. Phys., 42, 1355-1365, 1981
- [96] Flanagan D.P., Taylor L.M.: *An accurate numerical algorithm for stress integration with finite rotations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 62 (1987), 305-320
- [97] Fourny W.L., Dick R.D.: *Explosive fragmentation*, Chapter 5, in: High-Pressure Shock Compression of Solids II, Dynamic fracture and fragmentation, L. Davison, D.E. Grady, M. Shahinpoor (eds.), Springer, 1993

- [98] Fulk D.A.: *A numerical analysis of smoothed particle hydrodynamics*, Thesis, Air Force Institute of Technology, 1994
- [99] Geers: Benutzerhandbuch IBM RS/6000 SP Version 1.3, 1998, <http://www.uni-karlsruhe.de/~SP/Handbuch/>, Universität Karlsruhe, Rechenzentrum
- [100] Gen-Hua Shi, Goodamn R.E.: *Discontinuous deformation analysis- A new method for computing stress, strain and sliding of block systems*, Key Questions in Rock Mechanics, Cundall et al. (eds.), 1988 Balkema, Rotterdam
- [101] Gen-Hua Shi: *Discontinuous deformation analysis: A new numerical model for the statics and dynamics of deformable block structures*, Engng. Comput., 9, 1992
- [102] Ghaboussi J., Barbosa R.: *Three-Dimensional Discrete Element Method for Granular Materials*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 14, 1990, 451-472
- [103] Ghaboussi J.: *Fully deformable discrete element analysis using a finite element approach*, Computers and Geotechnics 5 (1988), 175-195
- [104] Gingold R.A., Monaghan J.J.: *Kernel Estimates as a Basis for General Particle Methods in Hydrodynamics*, Journal of Computational Physics 46 (1982), 429-453
- [105] Gingold R.A., Monaghan J.J.: *Smoothed particle hydro-dynamics: theory and applications to non-spherical stars*, Mon. Not. R. astr. Soc., 181, 1977, 375-389
- [106] Glenn L.A., Chudnovsky A.: *Strain-energy effects on dynamic fragmentation*, J. Appl. Phys. 59(4), 1986
- [107] Glenn L.A.: *The fracture of a glass half-space by projectile impact*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 24, 1973, 93-106
- [108] Gödde P.: *Rechnerische Untersuchungen zur Betonzug-festigkeit unter hoher Belastungsgeschwindigkeit*, Dissertation, Dortmund 1986
- [109] Goudsmit S.: *Random Distribution of Lines in a Plane*, Rev. Mod. Phys., 17, 321-322, 1945
- [110] Grady D.E. et al.: *Impact Fragmentation of Lead and Uranium Plates*, Sandia Lab. (Tech. Rep.) SAND85-1545, 1985
- [111] Grady D.E., Kipp M.E. et al.: *Strain-rate dependent fracture initiation*, International Journal of Fracture, Vol.1 6, No. 5, 1980, 471-478
- [112] Grady D.E., Kipp M.E.: *Continuum modelling of Explosive Fracture in Oil Shale*, Int. J. Rock mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol.17, 1980, 147-157
- [113] Grady D.E., Kipp M.E.: *Dynamic fracture growth and interaction in one dimension*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 33, No. 4, 1985, 399-415
- [114] Grady D.E., Kipp M.E.: *Dynamic Rock Fragmentation*, Chapter 10, in: Fracture Mechanics of Rock, B.K. Atkinson (eds.), Academic Press. Inc., London, 1987, 429-475

- [115] Grady D.E., Kipp M.E.: *Fragmentation of Solids under dynamic Loading*, Chapter 1, in: Structural Failure, T. Wierzbicki und N. Jones (eds.), John Wiley & Sons, 1989
- [116] Grady D.E., Kipp M.E.: *Fragmentation properties of metals*, Int. J. Impact Engng. Vol. 20, 1997, 293-308
- [117] Grady D.E., Kipp M.E.: *Geometric statistics and dynamic fragmentation*, J. Appl. Phys. 58(3), 1. August 1985
- [118] Grady D.E., Kipp M.E.: Proc. 20th Symposium on Rock Mechanics, Austin, Texas, 1979, 403
- [119] Grady D.E., Kipp M.E.: *The Growth of Unstable Thermoplastic Shear with Application to steady-wave Shock Compression in Solids*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 35, No. 1, 1987, 95-118
- [120] Grady D.E., Passman S.L.: *Stability and fragmentation of ejecta in hypervelocity impact*, Int. J. Impact Engng., 10, 1990, 197-212
- [121] Grady D.E.: *Application of survival statistics to the impulsive fragmentation of ductile rings*, Chapter 11, Sandia National Laboratories, 1981
- [122] Grady D.E.: *Fragmentation of rapidly expanding jets and sheets*, Int. J. Impact Engng. 5, 285-292, 1987
- [123] Grady D.E.: *Local inertia effects in dynamic fragmentation*, J. Appl. Phys. 53(1), 1982
- [124] Grady D.E.: *Particle size statistics in dynamic fragmentation*, J. Appl. Phys. 68 (12), 15 December 1990
- [125] Grady D.E.: *Spall and Fragmentation in High-Temperature Metals*, Chapter 9, in: High-Pressure Shock Compression of Solids II, Dynamic fracture and fragmentation, L. Davison, D.E. Grady, M. Shahinpoor (eds.), Springer, 1993
- [126] Grady D.E.: *The spall strength of condensed matter*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 36, No. 3, 1988, 353-384
- [127] Groenenboom P.H.L.: *Numerical Simulation of 2D and 3D Hypervelocity Impact using the SPH Option in PAM-Shock*, Int. J. Impact Engng. 20, 1997, 309-323
- [128] Gross D.: *Bruchmechanik*, Springer 1996, Heidelberg
- [129] Guenther C., Hicks D.L.: *Conservative smoothing versus Artificial viscosity*, Sandia Report SAND94-1853, 1994, Albuquerque
- [130] Hallquist, J.O.: *LS-DYNA Theoretical Manuel*, LSTC Livermore Software Technology Corporation, Livermore, CA 94550, USA, Rev. 2, 1998
- [131] Hanchack S.J. et al.: *Perforation of concrete slabs with 48 MPa (7 ksi) and 140 MPa (20 ksi) unconfined compressive strengths*, Int. J. Impact Engng., Vol. 12, No.1, 1-7, 1992
- [132] Har J.A.: *New Scalable Parallel Finite Element Approach for Contact Impact Problems*, Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, 1998

- [133] Harada T., Shinozuka M.: Scale and Correlation of Stochastic Fields, Technical Report, Department of Civil Engng. And Engng. Mechanics, Columbia University, New York, 1988
- [134] Harter G.: *Simulation von Explosionen mithilfe der Methode der Smooth Particle Hydrodynamics*, Diplomarbeit, 2000, Universität Karlsruhe, Lehrstuhl für Massivbau und Baustofftechnologie
- [135] Häußler-Combe: *Elementfreie Galerkin-Verfahren, Grundlagen und Einsatzmöglichkeiten zur Berechnung von Stahlbeton-tragwerken*, Habilitation, Universität Karlsruhe, Institut für Massivbau, 2000
- [136] Hayhurst C.J., Clegg R.A.: *Cylindrically symmetric SPH Simulations of Hypervelocity Impacts on thin Plates*, Int. J. Impact Engng. 20, 1997, 337-348
- [137] Heisterkamp M.: *Fortran 90*, 1991
- [138] Herrmann N.: Dissertation in Vorbereitung
- [139] Herrmann W.: *Constitutive Equations for Large Dynamic Deformations*,
- [140] Hertzberg R.W.: *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*, 3rd ed., Wiley, New York, 1989
- [141] Hicks D.A., Swegle L.W. et al.: *Conservative Smoothing stabilizes Discrete-Numerical Instabilities in SPH Material Dynamics Computations*, Applied Mathematics and Computations 85, 1997, 209-226
- [142] Hicks D.L., Liebrock L.M.: *SPH Hydrocodes can be stabilized with Shape-Shifting*, Computers and Mathematics with Applications 38 (1999), 1-16
- [143] *Hicks D.L., Swegle J.W. et al.: SPH: Instabilities, Wall Heating, and Conservative Smoothing, Workshop on Advances in Smooth Particle Hydrodynamics, September 1993*
- [144] Hicks D.L., Swegle J.W.: *Discrete-Numerical Instabilities in SPH Computational Material Hyperdynamics stabilized by conservative smoothing*, Communications in Applied Analysis 1 (1997), No.2, 191-212
- [145] Hiermaier S., Könke D. et al.: *Computational Simulation of the Hypervelocity Impact of Al-Spheres of thin Plates of different Materials*, Int. J. Impact Engng. 20, 1997, 363-374
- [146] Hiermaier S.: *Numerische Simulation von Impactvorgängen mit einer netzfreien Lagrangemethode (Smooth Particle Hydro-dynamics)*, Dissertation, 1996, Universität der Bundeswehr München, Institut für Mechanik und Statik
- [147] Hocking G. et al.: *Dynamic analysis for generalized three dimensional contact and fracturing of multiple bodies*, NUMETA 87 Conf., Swansea, U.K., July 6-10, 1987
- [148] Hocking G., Mustoe G.G.W., Williams J.R.: *CICE discrete element analysis code-theoretical manual*, Applied Mechanics Inc., Lakewood, CO (1985)
- [149] Hocking G.: *The discrete Method for analysis of fragmentation of discontinua*, Engng. Comput., 9, 1992

- [150] Hockney R.W., Eastwood J.W.: *Computer Simulation Using Particles*, McGraw-Hill, New York, 1981
- [151] Hsieh S.S., Ting E.C., Chen W.F.: *A plasticity-fracture model for concrete*, Int. J. Solids Struct. 18,1982, 181-197
- [152] Hughes T.J., Winget J.: *Finite Rotations Effects in Numerical Integration of Rate Constitutive Equations Arising in Large-Deformation Analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15, 1980, 1862-1867
- [153] Ikegawa Y., Hudson J.A.: *A Novel Automatic Identification System for Three-Dimensional Multi-Block Systems*, Engineering Computations, 9 (1992), 167-179
- [154] Issa J.A., Nelson R.B.: *Numerical analysis of micromechanical behaviour of granular materials*, Engng. Comput., 9, 1992
- [155] ITASCA Consulting Group, Inc.: PFC^{2D} (Particle Flow Code in 2 Dimensions), 1995a, Version 1.0, Minneapolis, Minnesota
- [156] ITASCA Consulting Group, Inc.: PFC^{3D} (Particle Flow Code in 3 Dimensions), 1995b, Version 1.0, Minneapolis, Minnesota
- [157] Jansohn W.: *Formulierung und Integration von Stoffgesetzen zur Beschreibung großer Deformationen in der Thermo-plastizität und Viskoplastizität*, Forschungszentrum Karlsruhe, Institut für Materialforschung, Wissenschaftliche Berichte FZKA 6002, 1998
- [158] Jirasek M, Bazant Z.P.: *Discrete Element Modeling of Fracture and Size Effect in Quasibrittle Materials: Analysis of Sea Ice*, Proc. 2nd Int. Conf. Discrete Element Methods: 357-368, Cambridge, Massachusetts: IESL Publications
- [159] Johnson G.R., Beissel S.R. et al.: *A generalized particle algorithm for high velocity impact computations*, Computational Mechanics, 25, 2000, 245-256
- [160] Johnson G.R., Beissel S.R.: *Normalized Smoothing functions for SPH Impact Computations*, International Journal for Numerical methods in Engineering, 39, 1996, 2725-2741
- [161] Johnson G.R., Peterson E.H. et al.: *Incorporation of an SPH Option into the EPIC Codes for a wide range of High Velocity Impact Computations*, International Journal of Impact Engineering, 14, 1993, 385-394
- [162] Johnson G.R., Stryk R.A. et al.: *Recent Epic Code Development for high velocity impact: 3D Element Arrangement and 2D Fragment Distribution*, Int. J. Impact Engng., Vol.10, 1990, 281-294
- [163] Johnson G.R., Stryk R.A. et al.: *SPH for high velocity impact computations*, Comp. Methods Appl. Mech. Engng., 139, 1996, 347-373
- [164] Johnson W.: *Impact strength of materials*, Edward Arnold, London, 1983
- [165] Kachanov M.: J. Eng. Mech. Division, ASCE 106 (1980), 1039
- [166] Kerkhof F.: *Bruchvorgänge in Gläsern*, Frankfurt/Main: Verlag der Deutschen Glastechnischen Gesellschaft 1970

- [167] Kipp M.E., Grady D.E. et al.: *Numerical and Experimental Studies of High-Velocity Impact Fragmentation*, Int. J. Impact Engng., 14, 1993, 427-438
- [168] Kipp M.E., Grady D.E.: *Experimental and Numerical Studies of High-Velocity Impact Fragmentation*, Chapter 12, in: High-Pressure Shock Compression of Solids II, Dynamic fracture and fragmentation, L. Davison, D.E. Grady, M. Shahinpoor (eds.), Springer, 1993
- [169] Klomfass A., Thoma K.: *Ausgewählte Kapitel der Kurzzeitdynamik, Teil 3: Sprengstoffe*, 14/1997, Fraunhofer Institut für Kurzzeitdynamik, Ernst-Mach-Institut Freiburg
- [170] Konietzky H., Hart R.: *Mathematische Modellierung von geklüftetem Fels*, Felsbau 12 (1994), Nr. 6
- [171] Kuhn M.R., Mitchell J.K.: *Modelling of soil creep with the discrete element method*, Engng. Comput., 9, 1992
- [172] Kühnle T.: *Simulation von Impactvorgängen mithilfe der Methode der Smooth-Particle-Hydrodynamics*, Diplomarbeit, 2000, Universität Karlsruhe, Lehrstuhl für Massivbau und Baustofftechnologie
- [173] Kun F., Ramm E. et al.: *Micromechanical modelling of concrete cracking*, European Conference on Computational Mechanics, 31.08-03.09, 1999
- [174] Kupfer H., Hilsdorf H.K., Rüsç H.: *Behavior of concrete under biaxial stresses*, J. Am. Concrete Inst., 66, 1969, 656-666
- [175] Lancaster P., Salkauskas K.: *Surfaces generated by moving least-squares methods*, Math. Comput. 37 (1981), 141-158
- [176] Lattanzio J.C., Monaghan J.J. et al.: *Interstellar cloud collisions*, Monthly Notations of the Royal Astronomical Society 215 (1985), 125-147
- [177] Lewis M.W., Schreyer H.L.: *A Thermodynamic Consistent Description of Dynamic Continuum Damage*, Chapter 16, in: High-Pressure Shock Compression of Solids II, Dynamic fracture and fragmentation, L. Davison, D.E. Grady, M. Shahinpoor (eds.), Springer, 1993
- [178] Liao C.L., Chang C.S.: *A microstructural finite element model for granular solids*, Engng. Comput., 9, 1992
- [179] Libersky L.D., Petschek A.G. et al.: *High Strain Lagrangian Hydrodynamics*, Journal of Computational Physics 109 (1993), 67-75
- [180] Libersky L.D., Petschek A.G. et al.: *On Neighbors, Derivatives, and Viscosity in Particle Codes*, European Conference on Computational Mechanics, August 31-September 3, 1999, München, Germany
- [181] Libersky L.D., Petschek A.G.: *Cylindrical Smoothed Particle Hydrodynamics*, Journal of Computational Physics 109, 1993, 76-83
- [182] Libersky L.D., Petschek A.G.: *Smooth Particle Hydrodynamics with Strength of Materials*, Advances in the Free Lagrange Method, Lecture Notes in Physics, 395, 1990
- [183] Libersky L.D., Randles P.W. et al.: *Recent Improvements in SPH Modeling of Hypervelocity Impact*, Int. J. Impact Engng., 20, 1997, 525-532

- [184] Libersky L.D., Randles P.W.: *Smoothed Particle Hydro-dynamics: Some recent improvements and applications*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996), 375-408
- [185] Libersky L.D., Randles R.W.: *The stress point technique as a meshless Method*, 1999, Fifth US National Congress on Computational Mechanics, University of Colorado, Boulder, Colorado
- [186] Lorig L.J., Board M.P. et al.: Computer applications in the mineral industry, Proceedings of the Third Canadian Conference on Computer Applications in the Mineral industry, Montreal, Quebec, 22-25 October 1995 / ed.: Hani Sabri Mitri
- [187] Lorig L.J., et al.: *Numerical modeling of caving using continuum and micro-mechanical models*, Computer applications in the mineral industry: Proceedings of the Third Canadian Conference on Computer applications in the Mineral Industry, Montreal, Quebec, 22-25 Oct. 1995, ed.: Hani Sabri Mitri, 416-425
- [188] Louro L.H.L, Meyers M.A.: J. Mater. Sci., 24 (1989), 2516
- [189] Louro L.H.L, Meyers M.A.: *Stress Wave Induced Damage in Alumina*, Proc. DYMAT 88 (Ajaccio, France), J. Phys., 49, 1988, C3-333 (Colloque-3)
- [190] Lucy: *A numerical Approach to the Testing of Fission Hypothesis*, Astronomical Journal, 82, 1977, 1013-1024
- [191] Lührs G., Hartmann S. et al.: *On the numerical treatment of finite deformations in elastoviscoplasticity*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 144, 1997, 1-21
- [192] Malvern L.E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, 1969, Prentice Hall, New Jersey
- [193] Mandell D.A., Wingate C.A. et al.: *Computational Brittle Fracture Using Smooth Particle Hydrodynamics*, 14th U.S. Army Symposium on Solid Mechanics, October 16-18, 1996, Myrtle Beach, South Carolina
- [194] Mandell D.A., Wingate C.A. et al.: *Simulation of a Ceramic Impact Experiment Using the SPHINX Smooth Particle Hydrodynamic Code*, 16th International Symposium on Ballistics, San Francisco, CA, 23-28 September, 1996
- [195] Margolin L.G., Adams T.F.: *Numerical simulation of fracture*, Issues in Rock Mechanics, R.E. Goodman and F.E. Heuze, Eds., 1982
- [196] Mc Glaun J.M., Thompson S.L. et al.: *CTH: a three-dimensional shock wave physics code*, Int. J. Impact Engng., 10, 351-360 (1990)
- [197] Meguro K., Iwashita K.: *Fracture Analysis of media composed of irregular shaped Regions by the extended Distinct Element Method*, Structural Eng./ Earthquake Eng. Vol. 8, No. 3, 1991, 131-142
- [198] Meguro K., Kakuno M.: *Fracture Analysis of Concrete Structures by the Modified Distinct Element Method*, Structural Eng./ Earthquake Eng. Vol. 6, No. 2, 1989, 283-294

- [199] Merzbacher M.: Untersuchungen zum Konsistenzverhalten des MLSPH-Verfahrens, Diplomarbeit, 2001, Inst. Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe
- [200] Meyers M.A.: *Dynamic behaviour of materials*, 1994, John Wiley & Sons, Inc., University of California, San Diego
- [201] Michel T.: *FORTRAN 90*, 1994
- [202] Mindlin R.D.: *Compliance of elastic bodies in contact*, J. Appl. Mech., 16, 259-268, 1949
- [203] Mirza S.A. et al.: Variability of mechanical properties of reinforcing bars, Journal of Structural Division, 105, 921-397, 1979
- [204] Monaghan J.J., Gingold R.A.: *Shock Simulation by the Particle Method SPH*, Journal of Computational Physics 52 (1983), 374-389
- [205] Monaghan J.J.: *An introduction to SPH*, Computer Physics Communications, 48, 1988, 89-96
- [206] Monaghan J.J.: *Extrapolating B Splines for Interpolation*, Journal of Computational Physics, 60, 1985, 253-262
- [207] Monaghan J.J.: *Particle Methods for Hydrodynamics*, Computer Physics Reports 3 (1985), North-Holland, 71-124
- [208] Monaghan J.J.: *Smoothed Particle Hydrodynamics*, Annual Reviews of Astrn. Astrophys. 30 (1992), 543-574
- [209] Morikawa H. et al.: *Local fracture analysis of a reinforced concrete slab by the discrete element method*, Proc. 2nd Int. Conf. Discrete Element Methods: 357-368, Cambridge, Massachusetts: IESL Publications
- [210] Mott N.F., Linfoot E.H.: *A Theory of Fragmentation*, Extra-Mural Res. No. F72/80, Ministry of Supply, England, 1943
- [211] Mott N.F.: Proc. Roy. Soc. Lond., 300 (1947), 300
- [212] Munjiza A., Owen D.R.J. et al.: *A Combined Finite-Discrete Element Method in Transient Dynamics of Fracturing Solid*, Engineering Computations, 12, 1995, 145-174
- [213] Munjiza D.R.J. et al.: *On a rational approach to rock blasting*, Computer Methods and Advances in Geomechanics, Siriwardane Zaman (eds.) 1994 Balkema, Rotterdam
- [214] Mustoe G.G.W., Williams J.R. et al.: *Penetration and fracturing of brittle plates under dynamic impact*, NUMETA 87, Swansea, U.K., 1987
- [215] *Mustoe G.G.W., Williams J.R.: The discrete Element Method in Geotechnical Engineering, in Developments in Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 3, (Eds P.K. Benerjee and R. Butterfield, 233-263, Elsevier, New York, 1987*
- [216] Mustoe G.G.W.: *A generalized formulation of the discrete element method*, Engng. Comput., 9, 1992
- [217] Nayroles B. et al.: *Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements*, Comput. Mech. 10 (1992), 307-318

- [218] Nilson R.H. et al.: *Modelling of gas-driven fractures induced by propellant combustion within a borehole*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 22, 1985, 3-19
- [219] Nyhoff L.: *Fortran 90 for engineers and scientists*, Leestma, Stanford, 1997
- [220] O'Connor K.M., Dowding C.H.: *Hybrid discrete element code for simulations of mining-induced strata movements*, Engng. Comput., 9, 1992
- [221] Ockert J.: *Ein Stoffgesetz für die Schockwellenausbreitung in Beton*, Dissertation, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe, 1997
- [222] Oda M. et al.: *A Crack Tensor and its Relation to Wave Velocity Anisotropy in Jointed Rock Masses*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 23, No. 6, 1986, 387-397
- [223] Plotzitz A., Eibl, J.: *Ein Verfahren zur Simulation von Betonstrukturen beim Abbruch durch Sprengen*, Dissertation in Vorbereitung
- [224] Pottyondy D.O. et al.: *Modelling rock using bonded assemblies of circular particles*, Rock Mechanics, Aubertin, Hassani & Mitri (eds.) 1996 Balkema, Rotterdam
- [225] Potyondy D.O., Cundall P.A. et al.: *Modeling of shock- and gas-driven fractures induced by a blast using bonded assemblies of spherical particles*, Rock Fragmentation by Blasting, Mohanty (ed.), 1996 Balkema, Rotterdam
- [226] *Press W.H., Flannery B.P. et al.: Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing, 1988, Cambridge University Press*
- [227] Rabenstein D.: *Fortran 90*, 1995
- [228] Randles P.W., Libersky L.D.: *Normalized SPH with stress points*, Int. J. Num. Meth. Eng., 48, 2000, 1445-1462
- [229] Reed, K.W., Atluri S.N.: *Analysis of large quasistatic deformations of inelastic bodies by a new hybrid-stress finite element algorithm*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 39, 1983, 245-295
- [230] Reinhardt H.W.: *Concrete under impact loading, tensile strength and bond*, Heron, Vol. 27, 1-48, 1982
- [231] Riedel W.: *Beton unter dynamischen Lasten, Meso- und makromechanische Modell und ihre Parameter*, Dissertation, EMI-Bericht 6/00, Fraunhofer Institut Kurzzeitdynamik, Ernst-Mach-Institut, Freiburg
- [232] Rossi P.: *A physical phenomenon which can explain the mechanical behaviour of concrete under high strain rates*, Materials and Structure, 1991, 24, 422-424
- [233] Rubinstein R., Atluri S.N.: *Objectivity of incremental constitutive relations over finite time steps in computational finite deformation analysis*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 36, 1983, 277-290
- [234] Sauer M, Hiermaier S., Scheffer U.: *Modeling Penetration Events using FE/MLSPH Adaptive Coupling*, 6th International Congress on Computational Mechanics, Dearborn Michigan USA, August 1-4, 2001,

- [235] Sauer M., Hiermaier S.: *Berechnungsverfahren für hochdynamisch belastete Bauwerke mit hybrider (netzbasierter/ netzfreier) Diskretisierung*, Baustatik-Baupraxis 7, Meskouris (Hrsg.), 1999 Balkema, Rotterdam
- [236] Sauer M.: *Adaptive Kopplung des netzfreien SPH-Verfahrens mit finiten Elementen zur Berechnung von Impaktvorgängen*, Dissertation, 2000, Universität der Bundeswehr München, Institut für Mechanik und Statik
- [237] Scheffer U., Hiermaier S.: *Improving a SPH code by alternative interpolation schemes*, Baustatik-Baupraxis 7, Meskouris (Hrsg.), 1999 Balkema, Rotterdam
- [238] Schmidt-Hurtienne: *Ein dreiaxiales Schädigungsmodell zur Beschreibung des Dehnrateneffektes von Beton*, Dissertation, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe, 2000
- [239] Seaman L., Curran D.A.: *TROTT Computer Program for Two-Dimensional Stress Wave Propagation*, SRI Intern. Final Report for U.S. Army Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, Maryland (August 1978)
- [240] Sedgewick: *Algorithms*, Addison Wesley 1992
- [241] Selhammar M.: *Modified artificial viscosity in Smooth Particle Hydrodynamics*, Astron. Astrophys. 325, 1997, 857-865
- [242] Simo J.C., Miehe C.: *Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 98, 1992, 41-104
- [243] Simo J.C., Ortiz M.: *A unified approach to finite deformations elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 49, 1985, 221-245
- [244] Simo J.C.: *Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory*, Int. J. Plasticity, 1, 1985, 63-87
- [245] Song J., Kim K.: *Micromechanical Modeling of the Dynamic Fracture Process During Rock Blasting*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 33, No. 4, 1996, 387-394
- [246] Stauffer D.: *Introduction to percolation theory*, London: Taylor & Francis, 1985
- [247] Stauffer D.: *Scaling theory of percolation clusters*, Phys. Rep 1979; 54:1-74
- [248] Stellingwerf R.F.: *Smooth Particle Hydrodynamics*, Advances in the Free Lagrange Method, Lecture Notes in Physics, 395, 1990
- [249] Strikwerda J.C.: *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Wadsworth & Brooks, Pacific Grove, Californien
- [250] Sulsky D.: *The material point method for large deformation solid mechanics*, Third U.S Congress on Computational Mechanics, USACM, Dallas, TX, 1995, 214 ff
- [251] Swegle J.W., Hicks D.A. et al.: *Smooth Particle Hydrodynamics Stability Analysis*, Journal of Computational Physics 116 (1995), 123-134

- [252] Swegle L.W., Attaway S.W. et al.: *An Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics*, Sandia Report SAND93-2513, 1994, SNL, Albuquerque, NM 87185
- [253] Taylor L.M., Preece D.S.: *Simulation of blasting induced rock motion using spherical element models*, Engineering Computations, 9 (1992), 243-252
- [254] Thornton C.: *Applications of DEM to Process Engineering Problems*, Engng. Comput., 9, 1992
- [255] Trease H.E.: *Advances in the free Lagrange Method: including Contribution on Adaptive Gridding and the Smooth Particle Hydrodynamics Method*; Proceedings of the next Free-Lagrange Conference, held at Jackson Lake Lodge, Moran YW, USA, 3-7 June 1990, Springer-Verlag Berlin, 1991
- [256] Trent B.C., Margolin, L.G.: *A numerical laboratory for granular solids*, Engng. Comput., 9, 1992
- [257] von Neumann J., Richtmyer R.D.: *A Method for the Numerical calculation of hydrodynamic shocks*, Journal of Applied Physics 21 (1950)
- [258] Vonk R.A.: *A micromechanical investigation of softening materials of concrete loaded in compression*, Heron, Vol. 38, No. 3, 1993, Netherlands
- [259] Walton O.R., et al.: *Particle-dynamics calculations of gravity flows of inelastic, frictional spheres*, Micromechanics of Granular Material, (Eds M. Satake & J.T. Tenkins), 153-161, Elsevier, Amsterdam (1988)
- [260] Walton O.R.: *Particle dynamics modeling of geological materials*, Rep. UCRL-52915, Lawrence Livermore National Laboratory (1980)
- [261] Weber G.G., Lush A.M. et al.: *An objective time-integration procedure for isotropic rate-independent and rate-dependent elastic-plastic constitutive equations*, Int. J. Plasticity, 6, 1990, 701-704
- [262] Weerheijm J.: *Concrete under impact tensile loading and lateral compression*, Doctoral thesis, Delft University of Technology, 1992
- [263] Weibull W.: Ing. Vetensk. Akad. Handl. (1939) 151 und 153
- [264] Wen Y., Hicks D.L.: *Stabilizing SPH with conservative Smoothing*, Sandia Report SAND94-1932, 1994, Albuquerque
- [265] Wensel O.: *A search Algorithm for Geometric Overlapping in a Discrete Element Context*, M.Sc. thesis, University College of Swansea, 1992
- [266] Wesenberg D.L., Sargatz M.J.: J. Appl. Mech., 44, 643, 1977
- [267] William H.: *Numerical recipes in Fortran 90*, Press, 1996
- [268] Williams J.R., Hocking G. et al.: *The theoretical basis of the discrete element method*, Proceedings of the NUMETA '85 Conference /Swansea/ 7-11 Jan.
- [269] Williams J.R., Mustoe G.G.W.: *Modal methods for the analysis of discrete systems*, Comp. Geotechnics, 4, 1-19 (1987)
- [270] Williams J.R., Pentland A.P.: *Superquadrics and modal dynamics for discrete elements in interactive design*, Engng. Comput., 9, 1992, 115-127
- [271] Yarin A.L. et al.: *Model for ballistic fragmentation and behind-armor debris*, International Journal of Impact Engineering 24 (2000), 171-201

-
- [272] Yarin A.L.: *Free liquid jets and films, hydrodynamics and rheology*, Longman, New York, 1993, 338-348
- [273] Zheng S., Häußler-Combe U., Eibl J.: *New Approach to Strain Rate Sensitivity Of Concrete In Compression*, Journ. of Mechanics, 1403-1410, 1999
- [274] Zheng S.: *Beton bei variierender Dehngeschwindigkeit, untersucht mit einer neuen modifizierten Split-Hipkinson-Bar-Technik*, Dissertation und Heft 26 der Schriftenreihe des Inst. f. Massivbau u. Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe, 1996
- [275] Zienkiewicz O.C.: *Methode der Finiten Elemente*, Wien: Hanser 1984
- [276] Zukas J.A.: *Impact Dynamics*, John Wiley & Sons, 1982
- [277] Zurmühl R., Falk S.: *Matrizen und ihre Anwendungen, Teil 1: Grundlagen*, Springer Verlag Berlin, 1984

8 Notation

Große lateinische Buchstaben

A	Bruchfläche	G	Schubmodul
\mathbf{B}, B_{ij}	Normalisierungsmatrix	H_d	Ver-/Entfestigungsvariable
\mathbf{C}, C_{ijkl}	Steifigkeitsmatrix	H_v	Heaviside-Sprungfunktion
C_g	Rißausbreitungsgeschwindigkeit	I_1^e	1. Invariante des elastischen Dehnungstensors
D	Dimension, Schädigung	\mathbf{I}, I_{ij}	Einheitstensor 2. Stufe
$\mathbf{D}, D_{\alpha\beta}$	Deformationsrate	\mathbf{I}, I_{ijkl}	Einheitstensor 4. Stufe
D_{dyn}	dynamische Schädigung	J	Fehlerquadrat
E	Elastizitätsmodul	J_2	2. Invariante der Deviatorspannung
\mathbf{E}, E_{ij}	Green-Lagrange Verzerungstensor	J_2^e	2. Invariante des elastischen Deviatordehnungstensors
$\mathbf{E}_0, (E_0)_{ijkl}$	Anfangselastizitätsmodul-tensor	K	kinetische Energie, Kompressionsmodul
E_k	kinetische Energie	K_f	Sekantenkompressionsmodul
E_0	Anfangselastizitätsmodul	K_{IC}	Bruchzähigkeit
E'_k	kinetische Energie in Abhängigkeit von der Bruchfläche	K_1	modifizierte Bessel-Funktion
E_t	Tangentensteifigkeit	L	Differentialoperator
E_{total}	Gesamtenergie	L_m	mittlere Fragmentierungsgröße
\mathbf{F}, F_i	Kraftvektor	\mathbf{M}, M_i	Moment
ΔF^n	Normalkraftinkrement	M	Masse
F^n	Normalkraft	$\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}, \mathbf{N}_{III}$	Eigenvektoren
F_i^s	Schubkraftvektor	N_{I0}	Fragmentdichte
F_b	burn fraction	N_g	Anzahl Mikrorisse
F_{dc}	Schädigungsfläche für Druck	N_t	Rissanzahl pro Einheitsvolumen
F_{dt}	Schädigungsfläche für Zug	\dot{N}_g^w	Risswachstumsrate
\mathbf{F}, F_{ij}	Deformationsgradient	\dot{N}_g^n	Rissentwicklungsrate
F_i^s	Schubkraft	\dot{N}_t	Rissentwicklungsrate pro Einheitsvolumen
F_p	Plastizitätsfläche		

N_f	Fragmentzahl		
O	Oberfläche	T	Temperatur
\mathbf{P}^+, P_{ijkl}^+	positive Projektion des elastischen Dehnungstensors	T_m	Schmelzpunkt
\mathbf{P}^-, P_{ijkl}^-	negative Projektion des elastischen Dehnungstensors	\mathbf{T}, T_{ij}	2. Piola-Kirchhoff-Tensor
P_{input}	mechanischer Leistungseintrag	U	innere Energie
P	Wahrscheinlichkeit	\mathbf{U}, U_{ij}	Rechts-Streck-Tensor
\mathbf{Q}	Transformationstensor	$\Delta U, \Delta U_i$	Verschiebungsinkrement
Q_{input}	Wärmefluß	ΔU^n	Normalanteil des Verschiebungsinkrement
R_c	Rißradius	ΔU_i^s	Schubanteil
\mathbf{R}, R_{jl}	Rotationsmatrix	V_f	Fragmentvolumen
R	Durchschnittlicher Radius einer Fehlstelle	V	Volumen
R_f	Fragmentradius	\dot{V}	Änderung des Volumens nach der Zeit
S	Oberfläche	V_i	Kontaktgeschwindigkeit
\mathbf{S}, S_{ij}	Deviatorspannungstensor	V	Kontrollvolumen
$\Delta \mathbf{S}, \Delta S_{ij}$	Deviatorspannungsinkrement	\mathbf{V}, V_{ij}	Links-Streck-Tensor
		W	Interpolationsfunktion
		\mathbf{X}, X_i	Ortsvektor
		Y	Fließspannung
		Y_0	Anfangsfließspannung

Kleine lateinische Buchstaben

b	Fragmentkantenlänge		Energie
\mathbf{b}, b_i	Massenkraftvektor	e_{ijkl}	Permutationstensor
c	Schallgeschwindigkeit	\dot{e}	deviatorische Dehnrate
\bar{c}	mittlere Schallgeschwindigkeit	e_d	Schädigungsparameter
c_d	Detonationsgeschwindigkeit	\mathbf{g}, g_i	Eigengewicht
c_s	Schallwellengeschwindigkeit	h	Interpolationsradius
$\mathbf{d}^\alpha, d_i^\alpha$	α -ter Eigenvektor des elastischen Dehnungstensors	h_0	Anfangsinterpolationslänge
d	Fragmentdurchmesser	k_s	Schubsteifigkeit
e	spezifische innere	k_n	Normalsteifigkeit
		l	Länge
		m	Masse

$\mathbf{m}_d, (m_d)_{ij}$	Richtungstensoren im Dehnungsraum	$\dot{r}_{\alpha\beta}$	Spintensor
n	Anzahl der Bruchstellen	r_c	Reduktionsfaktor Druck
\mathbf{n}, n_i	Einheitsvektor orthogonal zur Rissebene	r_t	Reduktionsfaktor Zug
\mathbf{n}, n_i	Normalenvektor	s	relative Partikelgeschwindigkeit
$\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}$	Eigenvektoren	t	Zeit
$\mathbf{n}_p, (n_p)_{ij}$	Normale zur Plastizitätsfläche	t_f	Zeitpunkt, zu dem die Fragmentierung auftritt
$\mathbf{n}_d, (n_d)_{ij}$	Normalenvektor auf die Versagensfläche	\mathbf{t}, t_i	Spannungsvektor
p	Wahrscheinlichkeit, Druck	Δt	Zeitinkrement
\mathbf{p}	Basisfunktion	u	Testfunktion
q	künstliche Viskosität	\bar{u}	Partikelabstand
\mathbf{q}, q_i	Wärmeeintrag	v_{cr}	theoretische elastische maximal mögliche Reißgeschwindigkeit
q_p	interne, plastische Variable	$\ddot{\mathbf{x}}, \ddot{x}_i$	Beschleunigung
r	Kugelradius, Wärmequelle pro Masseneinheit	$\dot{\mathbf{x}}, \dot{x}_i$	Geschwindigkeit
r_m	mittlerer Kugelradius	\mathbf{x}, x_i	Ortsvektor
		$\partial\dot{x}_i/\partial x_j$	Geschwindigkeitsgradient

Große griechische Buchstaben

Γ_{ij}	Jaumann'scher Tensor der Spannungsgeschwindigkeit	Γ	Oberflächenenergie
		Ξ	Steifigkeitsfaktor
		Π	künstliche Viskosität

Kleine griechische Buchstaben

δ	Dirac-Delta	ε_{eff}^{pl}	plastische, effektive Vergleichsdehnung
$\delta_{\alpha\beta}$	Kronecker-Delta	$d\varepsilon_{eff}^{pl}$	plastisches, effektives Vergleichsdehnungsinkrement
ε	Dehnung	ϑ	Relaxationszeit
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$	Dehnungstensor	κ	Konditionalzahl
ε_f	mittlere Bruchdehnung	κ_d	äquivalente Schädigungsdehnung
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\varepsilon}_{ij}$	Dehnrate		
$\bar{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$	äquivalente Dehnrate		
$\bar{\varepsilon}_f$	äquivalente, plastische Deviatordehnung		

$\kappa_{d,c}$	äquivalentes, einachsiges, schädigungserzeugendes Dehnungsmaß für Druck	$\dot{\rho}_f$	Rißdichtenrate
		σ	Spannung
		σ, σ_{ij}	Spannungstensor
$\kappa_{d,t}$	äquivalentes, einachsiges, schädigungserzeugendes Dehnungsmaß für Zug	σ_f	Bruchspannung
		σ_m	maximale Zugspannung
		σ_{ij}^∇	Green-Naghdi-Rate
$\dot{\kappa}_d$	bezogene, äquivalente Dehnrage	$\dot{\sigma}_{ij}$	Spannungsrate
		σ_y	einachsige Fließspannung
λ_{\max}	maximaler Eigenwert	τ	Zeitpunkt der Rißbildung
λ_{\min}	minimaler Eigenwert		
ν	Querkontraktionszahl	τ_{kl}	Spannungsrate in der rotierten Konfiguration
ρ	Dichte		Winkelgeschwindigkeitstensor
ρ_0	Anfangsinterpolationsdichte	ω, ω_i	
$\dot{\rho}$	Zeitableitung der Dichte		
ρ_f	Rißdichte		

Indizes

c	Druck	k	kinetisch
d	Schädigung, Detonation	max	maximal
dyn	dynamisch	min	minimal
e	elastisch	p	plastisch
f	Bruch-, Fragment-	t	Zug, Tangente
g	gesamt	y	Fließ-

Kopfzeiger

N	Nukleation-, Zünd-	i	Partikel
W	Wachstums-	j	Partikel
p	plastisch		

Symbole

$\partial(\cdot)/\partial t$	Ableitung nach der Zeit	$\text{dev}(\cdot)$	Deviator
$(\dot{\cdot})$	Ableitung nach der Zeit	$\text{tr}(\cdot)$	Spur eines Tensors
$\langle \cdot \rangle$	Kernelabschätzung,	$\bar{(\cdot)}$	Mittelwert
	Mc Auley-Klammern	\otimes	dyadisches Produkt
∇	Nabla-Operator	$d(\cdot)/dx$	totales Differential
$\partial(\cdot)/\partial x$	Nabla-Operator		



euklidische Norm

Anhang A: Ergänzungen zu Kapitel 3

A1 Die Delta-Eigenschaft

Bei netzfreien Verfahren werden die Funktionen oder Funktionsgradienten durch Anwendung einer sog. Wichtungs- oder Interpolationsfunktion ermittelt. Hierbei handelt es sich im Gegensatz zu den finiten Elementen, bei denen im streng mathematischen Sinn tatsächlich eine Interpolation vorliegt, eigentlich um eine Approximation. Für die Formfunktion der SPH-Methode gilt:

$$\Phi^i(x^j) \neq 0 \quad \forall i \neq j \quad (\text{A.1})$$

Unter Beachtung der diskreten Konsistenzbedingung 0. Ordnung ergibt sich für die Formfunktion des Knotens i:

$$\Phi^i(x^i) \neq 1 \quad (\text{A.2})$$

Zusammengefaßt erhält man:

$$\Phi^i(x^j) \neq \delta_{ij}, \quad (\text{A.3})$$

was ein entscheidender Unterschied zur Interpolation mit finiten Elementen ist, für die die Delta-Eigenschaft

$$\Phi_{\text{FE}}^i(x^j) = \delta_{ij} \quad (\text{A.4})$$

gilt. Somit liegt bei der SPH-Interpolation eigentlich eine Approximation vor, da $u_h(x^i) \neq u^i$ ist. In Bild A1 ist für eine lineare Ansatzfunktion die FE-Interpolation dargestellt, um grafisch den Unterschied zur SPH-Interpolation bzw. -Approximation sichtbar zu machen.

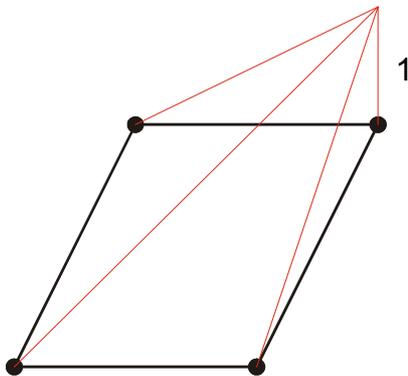


Bild A.1: Interpolation bei finiten Elementen

A2 Die SPH-Methode als Galerkin-Verfahren

Die Erhaltungsgleichungen in der SPH-Methode lassen sich auch herleiten, wenn die SPH-Methode als ein Galerkin-Verfahren betrachtet wird. Die Herleitungen nehmen Bezug auf die Artikel von Dilts [71], [72], [73] und sind wesentlich für die Herleitung der MLSPH-Methode. Ausgangspunkt sind die drei Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik, die der Übersicht halber hier nochmals dargestellt sind:

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.6})$$

$$\rho \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \otimes \dot{\mathbf{x}}) \quad (\text{A.7})$$

Die oberen Indizes beziehen sich auf die Partikel. Tensoren werden fett gedruckt. Die Formfunktionen der Standard SPH-Methode lassen sich durch das Produkt aus materiellem Partikelvolumen und Wichtungsfunktion bestimmen:

$$\Phi^i(\mathbf{x}) = \frac{m^i}{\rho^i} W^i(\mathbf{x}) \quad (\text{A.8})$$

Um eine Galerkinapproximation zu erhalten, werden die drei Erhaltungsgleichungen mit der Formfunktion Φ^i multipliziert und über das Partikelvolumen integriert. Gleichzeitig werden die räumlichen Ableitungen in den Erhaltungsgleichungen mit dem Gradienten der Formfunktion

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_j f^j \nabla \Phi^j(\mathbf{x}) \quad (\text{A.9})$$

angenähert, so daß sich die Erhaltungsgleichungen in der integralen Form formulieren lassen:

$$\int \Phi^i \frac{\dot{\rho}}{\rho} = \int \Phi^i \sum_j -\dot{\mathbf{x}}^j \nabla \Phi^j \quad (\text{A.10})$$

$$\int \Phi^i \rho \ddot{\mathbf{x}} = \int \Phi^i \sum_j \boldsymbol{\sigma}^j \cdot \nabla \Phi^j \quad (\text{A.11})$$

$$\int \Phi^i \rho \dot{\mathbf{e}} = \int \Phi^i \boldsymbol{\sigma} : \sum_j \dot{\mathbf{x}}^j \otimes \nabla \Phi^j \quad (\text{A.12})$$

Bei der Standard Galerkin-Prozedur würde man an dieser Stelle partiell integrieren, um die schwache Form der Differentialgleichungen zu erhalten. Stattdessen wird die SPH Kernelapproximation angewendet:

$$\int \Phi^i f \approx \frac{m^i}{\rho^i} f(\mathbf{x}^i) \equiv \frac{m^i}{\rho^i} f^i; \quad \int \Phi^i \nabla f \approx \frac{m^i}{\rho^i} \nabla f(\mathbf{x}^i) \equiv \frac{m^i}{\rho^i} \nabla^i f \quad (\text{A.13})$$

Somit ergeben sich die Erhaltungsgleichungen zu:

$$\frac{\dot{\rho}^i}{\rho^i} = \sum_j -\frac{m^j}{\rho^j} \dot{\mathbf{x}}^j \cdot \nabla^i W^j \quad (\text{A.14})$$

$$\rho^i \dot{\mathbf{x}}^i = \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} \boldsymbol{\sigma}^j \cdot \nabla^i W^j \quad (\text{A.15})$$

$$\rho^i \dot{\mathbf{e}}^i = \boldsymbol{\sigma}^i : \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} \dot{\mathbf{x}}^j \otimes \nabla^i W^j \quad (\text{A.16})$$

Da die Gleichungen A.10 bis A.12 nicht partiell integriert wurden, verschwindet die Formfunktion Φ^i auf beiden Seiten und somit sind die SPH-Erhaltungsgleichungen A.14 bis A.16 tatsächlich eine Kollokations-Galerkin-Form mit den Partikelkoordinaten als Kollokationspunkte. Führt man eine Symmetrisierung durch, siehe Kapitel 3.3.2, bekommen die Erhaltungsgleichungen folgendes Format:

$$\frac{\dot{\rho}^i}{\rho^i} = \sum_j -\frac{m^j}{\rho^j} (\dot{\mathbf{x}}^j - \dot{\mathbf{x}}^i) \nabla^i W^j \quad (\text{A.17})$$

$$\rho^i \ddot{\mathbf{x}}^i = \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} (\boldsymbol{\sigma}^j + \boldsymbol{\sigma}^i) \cdot \nabla^i W^j \quad (\text{A.18})$$

$$\rho^i \dot{\mathbf{e}}^i = \boldsymbol{\sigma}^i : \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} (\dot{\mathbf{x}}^j - \dot{\mathbf{x}}^i) \otimes \nabla^i W^j \quad (\text{A.19})$$

Diese Erhaltungsgleichungen entsprechen genau den Erhaltungsgleichungen in Kapitel 3.4, nur das die räumlichen Ableitungen der Wichtungsfunktion nicht von der Stelle \mathbf{x}^j , sondern von der Stelle \mathbf{x}^i aus betrachtet werden. Mit der Symmetriebedingung der Wichtungsfunktion

$$\nabla^i W^j = -\nabla^j W^i \quad (\text{A.20})$$

erhält man die SPH-Erhaltungsgleichungen aus Kapitel 3.4. Es sei noch erwähnt, daß bei der Impulserhaltung, Gl. A.18, der „Nullterm“ gemäß Kapitel 3.3.2 nicht subtrahiert, sondern addiert wurde. Diese symmetrisierte Form der Erhaltungsgleichungen sichert auch gallileische Invarianz, d.h bei einer reinen Translation eines Körpers entstehen keine Störungen in der Dichte oder inneren Energie.

A3 Der Deformationsgradient und die Rotationsmatrix

Die Starrkörperrotation läßt sich wie in Kapitel 4.8 bereits beschrieben auf verschiedene Weisen durchführen. Bei der Verwendung des Jaumann'schen Tensors der Spannungsgeschwindigkeiten benötigt man nur den Geschwindigkeitsgradienten. Für den Green-Naghdi-Tensor ist die Rotationsmatrix \mathbf{R} erforderlich, die sich aus dem Deformationsgradienten bestimmen läßt. Der Deformationsgradient läßt sich mit finiten Elementen wie folgt formulieren (Bathe [15]):

$$F_{ij} = \frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^0 x_j} = \sum_k \left(\frac{\partial h_k}{\partial {}^0 x_j} \right) {}^t x_i^k \quad (\text{A.21})$$

Summiert wird über die Anzahl der Elementknoten k des jeweiligen Elementes, h ist die Formfunktion des Elementes. In der Standard SPH-Methode läßt sich der Deformationsgradient berechnen, indem man die Ableitungen der FE-Formfunktion durch die Ableitungen der SPH-Formfunktion substituiert und eine Summation über alle Nachbarpartikel durchführt:

$$F_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial {}^t x_\alpha^i}{\partial {}^0 x_\beta^i} = \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} \frac{\partial W^{ij}}{\partial {}^0 x_\beta^j} ({}^0 x_\alpha^i - {}^t x_\alpha^j) \quad (\text{A.22})$$

Im Folgenden soll gezeigt werden, daß sich bei der Standard SPH-Methode der Deformationsgradient und vor allem die Rotationsmatrix \mathbf{R} nicht exakt bestimmen läßt. Dies führt bei Verwendung der Green-Naghdi-Rate zu falschen Spannungsrotationen.

Anhand von zwei Beispielen im Zweidimensionalen soll die Bestimmung des Deformationsgradienten und der Rotationsmatrix erläutert werden. Hierzu werden die Ergebnisse der beiden SPH-Tests den Ergebnissen eines FE-Tests gegenübergestellt.

A3.1 Starrkörpertranslation

Das erste Beispiel ist die Simulation einer reinen Starrkörpertranslation mit der SPH-Methode und anhand eines finiten Elementes.

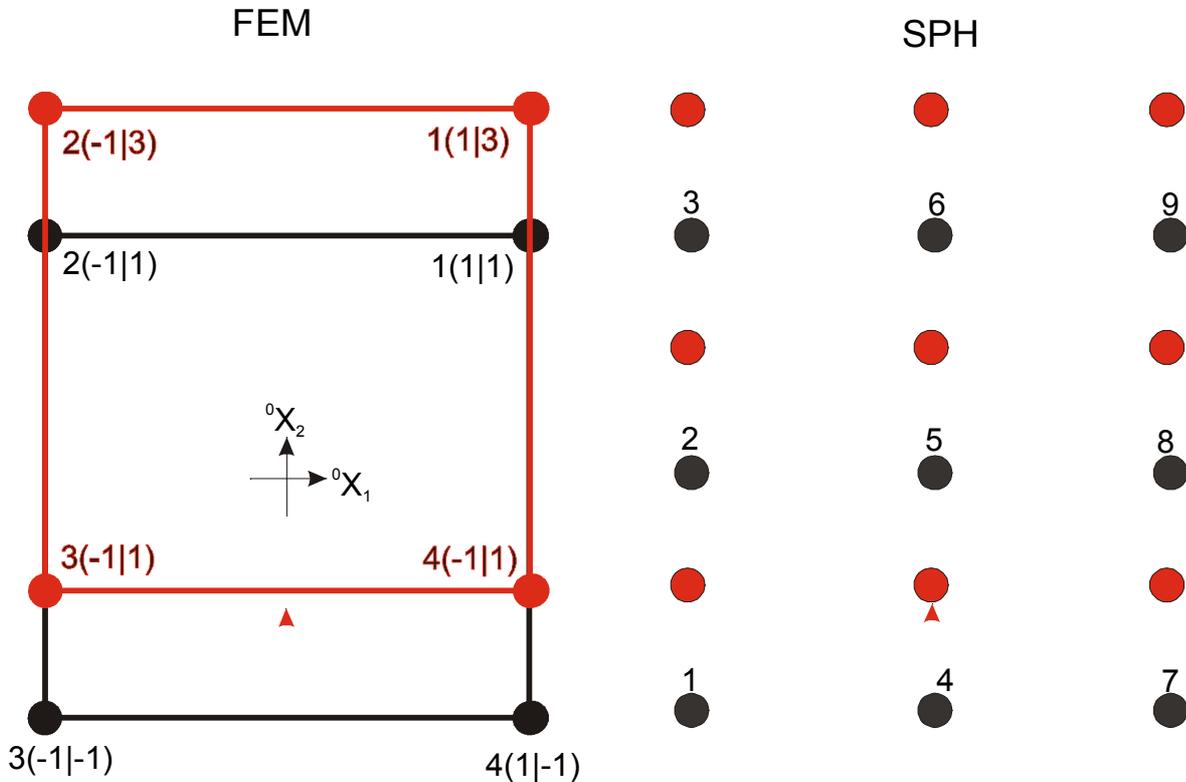


Bild A.2: Starrkörpertranslation

Bild A.2 zeigt schematisch die Translation des finiten Elementes und des SPH-Körpers. Der SPH-Körper wird mit 9 Partikeln und zu Vergleichszwecken mit 81 Partikeln diskretisiert. In Bild A.2 ist der SPH-Körper mit den 9 Partikeln abgebildet. Für das finite Element werden lineare Formfunktionen gewählt:

$$h_1 = \frac{1}{4} (1 + {}^0x_1) (1 + {}^0x_2)$$

$$h_2 = \frac{1}{4} (1 - {}^0x_1) (1 + {}^0x_2)$$

$$h_3 = \frac{1}{4} (1 - {}^0x_1) (1 - {}^0x_2)$$

$$h_4 = \frac{1}{4} (1 + {}^0x_1) (1 - {}^0x_2)$$

(A.23)

Die räumlichen Ableitungen der Formfunktionen lauten:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_1} &= \frac{1}{4} (1 + {}^0 x_2) & \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_2} &= \frac{1}{4} (1 + {}^0 x_1) \\
 \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_1} &= -\frac{1}{4} (1 + {}^0 x_2) & \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_2} &= \frac{1}{4} (1 - {}^0 x_1) \\
 \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_1} &= -\frac{1}{4} (1 - {}^0 x_2) & \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_2} &= -\frac{1}{4} (1 - {}^0 x_1) \\
 \frac{\partial h_4}{\partial^0 x_1} &= \frac{1}{4} (1 - {}^0 x_2) & \frac{\partial h_4}{\partial^0 x_2} &= -\frac{1}{4} (1 + {}^0 x_1)
 \end{aligned}
 \tag{A.24}$$

Das lokale Elementkoordinatensystem des finiten Elementes liegt anfangs genau im Ursprung. Nach der Starrkörpertranslation haben sich die Knotenkoordinaten des finiten Elementes gemäß Bild A.2 verschoben. Setzt man die Koordinaten und die Ableitungen der Formfunktionen des finiten Elementes in Gl. A.21 ein, erhält man den Deformationsgradienten:

$$\mathbf{F}^{\text{FE}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{\text{FE}}
 \tag{A.25}$$

Die Rotationsmatrix \mathbf{R} läßt sich nach der polaren Zerlegung von \mathbf{F} bestimmen und ist mit dem Deformationsgradienten identisch, d.h. für die reine Starrkörpertranslation wird die Rotationsmatrix korrekt berechnet.

Bei der SPH-Methode gibt es bei der Berechnung des Deformationsgradienten einen wesentlichen Unterschied. Beim finiten Element wurde der Deformationsgradient an dem Integrationspunkt des Elementes –dies entspricht einem reduziert integrierten Element– bestimmt. Da bei der SPH-Methode alle Größen an den Partikeln selbst bestimmt werden, erhält man für jedes Partikel auch einen Deformationsgradienten. So ergibt sich für den 9-Partikel Körper der Deformationsgradient in Körpermitte (Partikel 5) zu:

$$\mathbf{F}^{\text{SPH},5} = \begin{pmatrix} 0,988498 & 0 \\ 0 & 0,988498 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Für das Randpartikel, Partikel 4, wird der Deformationsgradient noch schlechter approximiert:

$$\mathbf{F}^{\text{SPH},4} = \begin{pmatrix} 0,7829 & 0 \\ 0 & 0,6891 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Bei verfeinertem SPH-„Netz“, also bei dem 81-Partikel Körper ergibt sich der Deformationsgradient an der Randstelle (Partikel 4) zu:

$$\mathbf{F}^{\text{SPH},4} = \begin{pmatrix} 0,90565 & 0,0007756 \\ 0,0007756 & 0,511248 \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

Trotz des feineren „Netzes“ konnte der Deformationsgradient nicht exakt approximiert werden. Obwohl er nicht exakt berechnet werden konnte, lieferte das SPH-Programm die korrekte Rotationsmatrix \mathbf{R} nach der polaren Zerlegung:

$$\mathbf{R}^{\text{SPH}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Für die Starrkörpertranslation liefert die Standard SPH-Methode also die richtige Rotationsmatrix. Dehnungsgrößen aus dem Deformationsgradienten können jedoch nicht korrekt abgebildet werden.

A3.2 Zugversuch

Als zweites und letztes Beispiel wird die Ermittlung der Rotationsmatrix \mathbf{R} bei einem einaxialem Zugversuch ohne Querkontraktion untersucht.

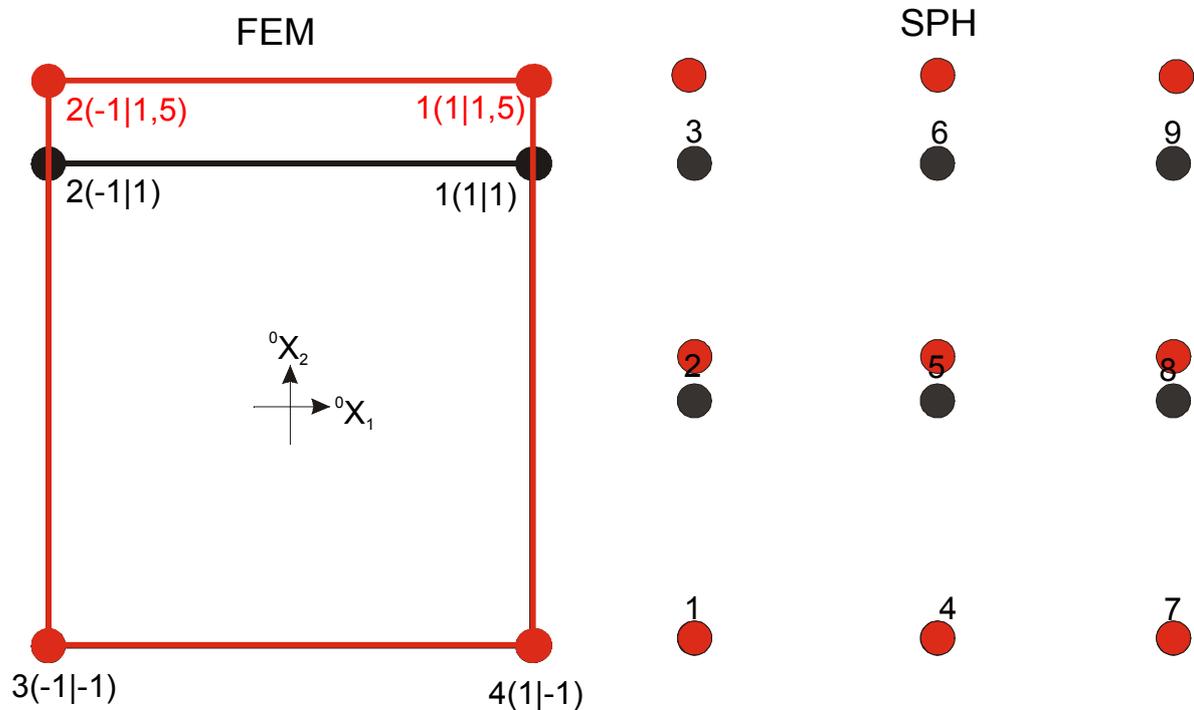


Bild A.3: Zugversuch

Hierzu wird das finite Element und das SPH-„Netz“ gemäß Bild A.3 verformt. Für das finite Element ergibt sich der Deformationsgradient wieder nach Einsetzen der neuen Knotenkoordinaten, siehe Bild A.3, und der Ableitungen der Formfunktionen zu:

$$\mathbf{F}^{\text{FE}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,25 \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Die Rotationsmatrix nach der polaren Zerlegung lautet:

$$\mathbf{R}^{\text{FE}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

Bei der SPH-Methode erhält man den Deformationsgradienten des 81-Partikel Körpers aus der polaren Zerlegung in Körpermitte zu:

$$\mathbf{R}^{\text{SPH},5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

Im Randbereich weicht die Rotationsmatrix bei der SPH-Simulation von der korrekten Lösung jedoch deutlich ab. So ergibt sich für Randpartikel 2 beim 81-Partikel Körper die Rotationsmatrix:

$$\mathbf{R}^{\text{SPH},2} = \begin{pmatrix} 0,960295 & -0,27898 \\ 0,27898 & 0,960295 \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Also kann beim einaxialem Zugversuch die Rotationsmatrix \mathbf{R} beim Standard SPH-Verfahren nicht exakt berechnet werden. Um dennoch die Starrkörperrotationen richtig zu berücksichtigen, kann entweder die Jaumann-Rate verwendet werden oder der Deformationsgradient ist mithilfe der in Kapitel 3.5 beschriebene Methoden zu korrigieren.

Anhang B: Verifikationsrechnungen

B1 Simulation von Impaktvorgängen

In diesem Kapitel wird das SPH-Programm anhand von Berechnungen von Impaktvorgängen auf Aluminiumplatten mit unterschiedlichen Impaktgeschwindigkeiten verifiziert. Hierzu wurden Vergleichsrechnungen mit dem FE-Code ABAQUS herangezogen. Die Maße der Platte betragen 72,5 x 72,5 x 10 mm, die des Impaktkörpers 7,5 x 7,5 x 30 mm, die Anzahl der Elemente bzw. Partikel wurde jeweils variiert. Zum Vergleich der Ergebnisse dienen die in Bild B1.2, Tabelle B1.1 und Tabelle B1.2 aufgeführten Referenzknoten, an denen die Druck und Geschwindigkeitsverläufe verglichen wurden. Plattenmitte und Impaktmitte waren direkt übereinander angeordnet. Eine detailliertere Diskussion sowie weitere Berechnungsbeispiele findet man bei Kühnle [172].

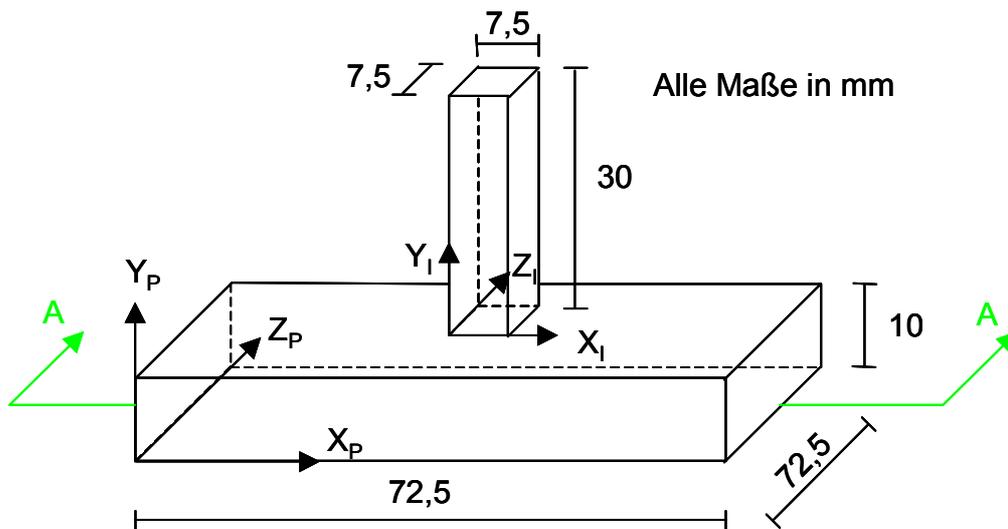


Bild B1.1: Abmessungen der Körper, Maße in [mm]

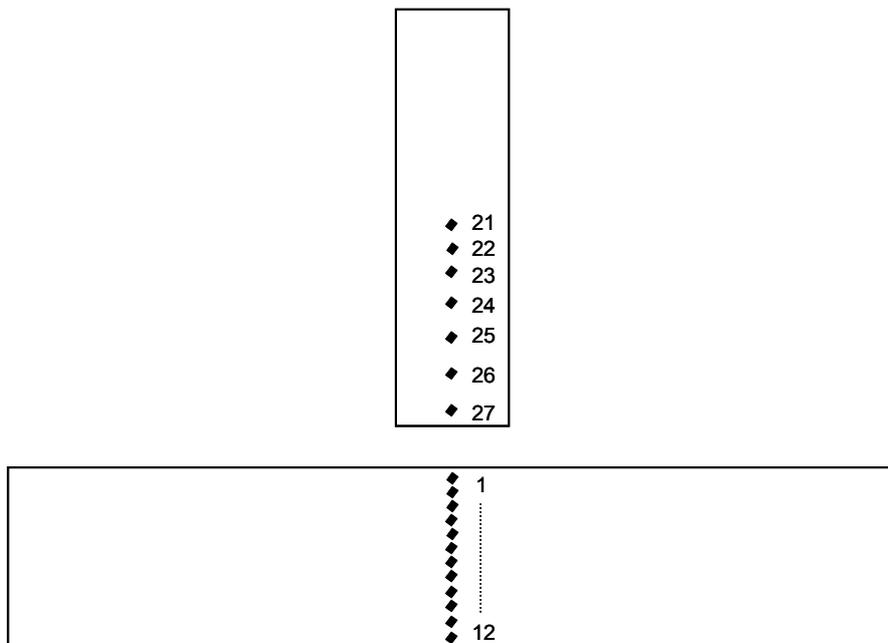


Bild B1.2: Referenzpunkte im Schnitt A-A

Punkt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X_P	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2
Y_P	9,58	8,75	7,91	7,08	6,25	5,41	4,58	3,75	2,91	2,08	0,83	0,41
Z_P	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,2	36,5

Tabelle B1.1: Koordinaten der Referenzpunkte der Platte, Maße in [mm]

Punkt	21	22	23	24	25	26	27
X_I	3,75	3,75	3,75	3,75	3,75	3,75	3,75
Y_I	14,578	12,912	11,246	8,747	6,248	3,749	1,245
Z_I	3,75	3,75	3,75	3,75	3,75	3,75	3,75

Tabelle B1.2: Koordinaten der Referenzpunkte des Impactkörpers, Maße in [mm]

Die Platte bestand aus Aluminium. Das Material des Impactkörpers bestand bei niedriger Geschwindigkeit auch aus Aluminium, bei den Hochgeschwindigkeits-Impakts wurde zwischen Aluminium und Stahl variiert.

E [MPa]	ν [-]	σ_y [MPa]	ρ [g/mm ³]	p_{\min} [MPa]
72200	0,034	200	0,0027	-150

Tabelle B1.3: Materialdaten der verwendeten Aluminiumkörper

E [MPa]	ν [-]	σ_y [MPa]	ρ [g/mm ³]
210000	0,03	1200	0,0078

Tabelle B1.4: Materialdaten des verwendeten Stahlkörpers

Es wurde ein linear-elastisch ideal-plastisches Werkstoffgesetz, siehe Kapitel 5.2, mit und ohne Zugversagen verwendet. Der Impaktkörper wurde zum einen mit 800 m/s und zum anderen mit 2000 m/s auf die Platte geschossen.

In ABAQUS wurden zwei verschiedene Netzgeometrien verwendet. Sie sind Bild B1.3, Bild B1.4 und Tabelle B1.5 zu entnehmen. Für die Simulation P2 wurde das Netz im Kontaktbereich verfeinert.

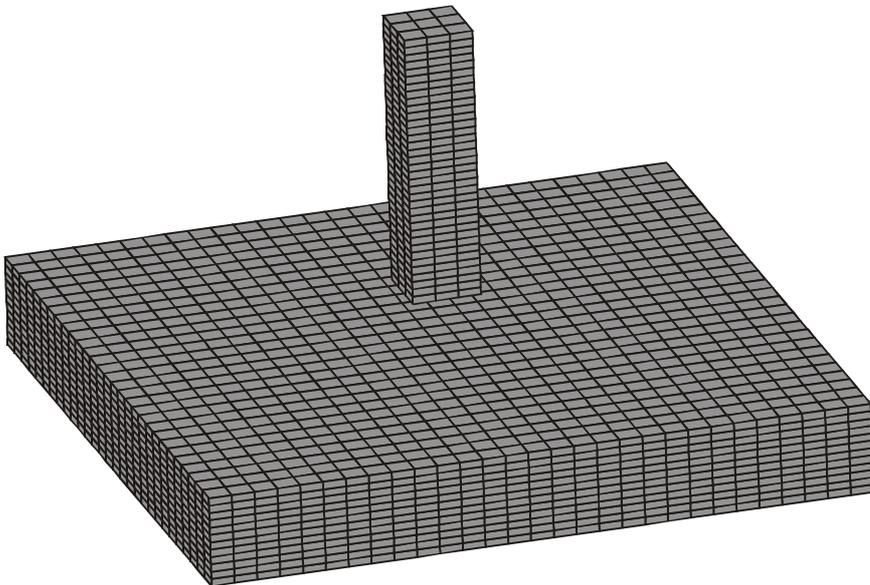


Bild B1.3: Diskretisierung der ABAQUS-Simulation P1

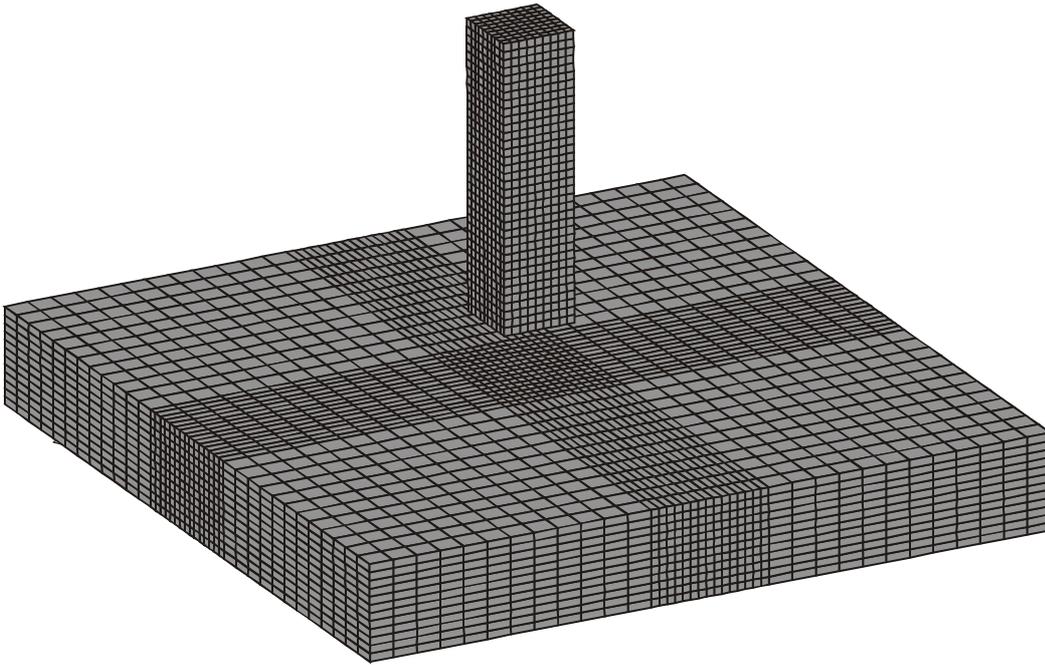


Bild B1.4: Diskretisierung der ABAQUS-Simulation P2

Bei den SPH-Simulationen wurden ebenfalls zwei verschiedene Netzgeometrien verwendet, die Bild B1.5, Bild B1.6 und Tabelle B1.5 zu entnehmen sind. Im Gegensatz zu der ABAQUS-Berechnung P2 wurde die SPH-Platte im Kontaktbereich nicht verfeinert.

Simulation	Partikel/Elementanzahl	
	Platte	Impaktkörper
P1	10092	324
P2	19252	2916
S1	90828	2916
S2	372400	11172

Tabelle B1.5: Partikelanzahlen für die durchgeführten Berechnungen

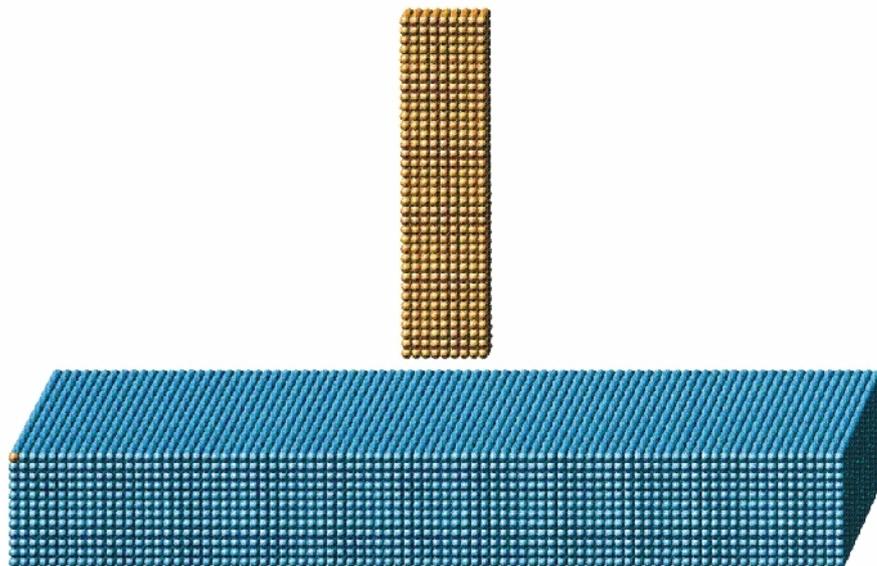


Bild B1.5: Diskretisierung der SPH-Simulation S1

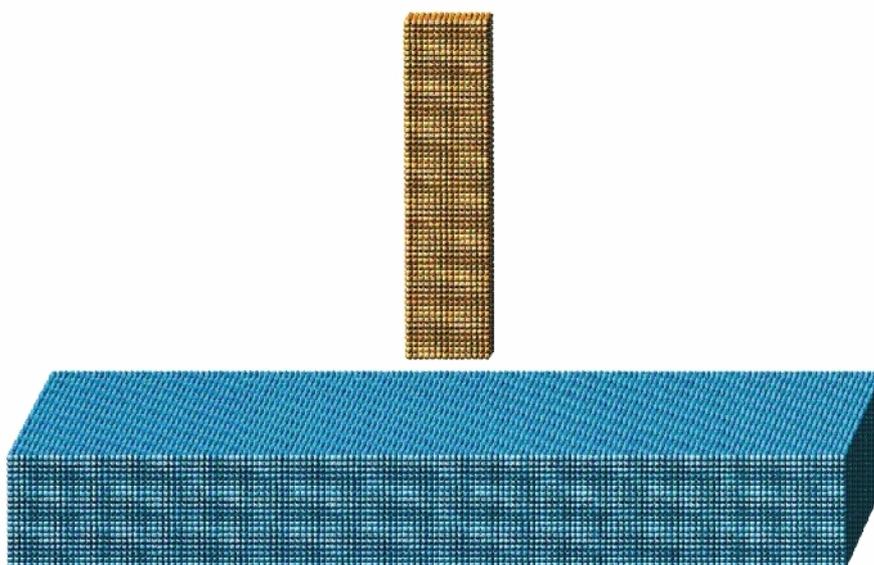


Bild B1.6: Diskretisierung der SPH-Simulation S2

B1.1 Impactvorgänge mit niedriger Geschwindigkeit (800 m/s)

Die Simulationen mit niedriger Impactgeschwindigkeit wurden mit unterschiedlichen Netzfeinheiten durchgeführt. Desweiteren wurde bei den SPH-Rechnungen verschiedene Methoden verwendet, zum einen die Standard Formulierung und die symmetrisierte Standard Formulierung nach Sauer, siehe Kapitel 4, zum anderen die normalisierten SPH-Gleichungen. Es kam das linear-elastisch ideal-plastische Werkstoffmodell ohne Zugversagen zur Anwendung. Zu Beginn des Kapitels werden zunächst die SPH-Rechnungen gegenübergestellt bevor für die Standard-Methode der Vergleich mit ABAQUS folgt.

In Bild B1.7 sind die Maximaldrücke aus der Standard, der normalisierten und der symmetrisierten Standard Methode für Simulation S1 über die Plattendicke dargestellt. Es ist deutlich erkennbar, daß die Maximaldrücke der Standard und der symmetrisierte Standard Berechnung fast völlig übereinstimmen. Die Werte der normalisierten Methode sind im oberen und mittleren Bereich der Platte kleiner als bei den anderen beiden Berechnungen, im unteren Bereich sind sie etwa identisch. An der Plattenunterseite ist der Druck nahezu Null.

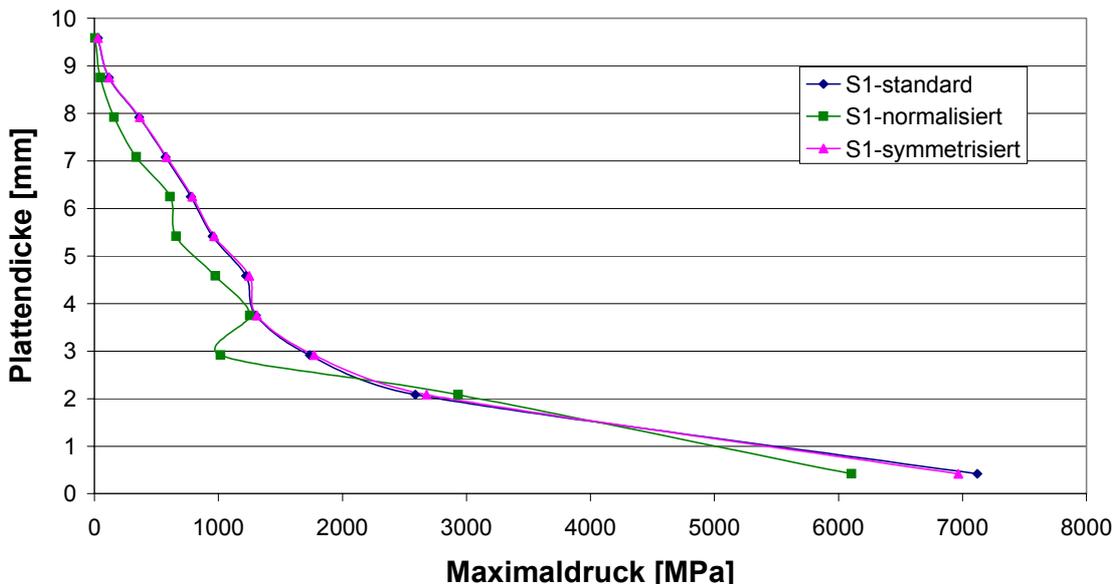


Bild B1.7: Maximaldruck über die Plattendicke, S1

In den folgenden Diagrammen werden im Druck-Zeit-Verlauf nur die Werte bis zu einem Zeitpunkt von etwa 0,01 ms dargestellt, da bis zu diesem Zeitpunkt der erste Spitzenwert und das erste Minimum erreicht wurden und die weiteren Verläufe der Kurven eher von geringem Interesse sind.

Bild B1.8 zeigt die Druckverläufe der verschiedenen SPH-Methoden exemplarisch im Referenzpunkt 8. Auch im Druck-Zeit-Verlauf sind die Kurven der Standard und der symmetrisierten Standard Methode nahezu identisch, der Spitzenwert des Drucks liegt etwa bei 790 MPa. Der Peak der normalisierten Methode liegt mit ungefähr 180 MPa 77 % unterhalb des Peaks der beiden anderen Kurven. Die Wellenausbreitung erfolgt bei der normalisierten Methode deutlich schneller.

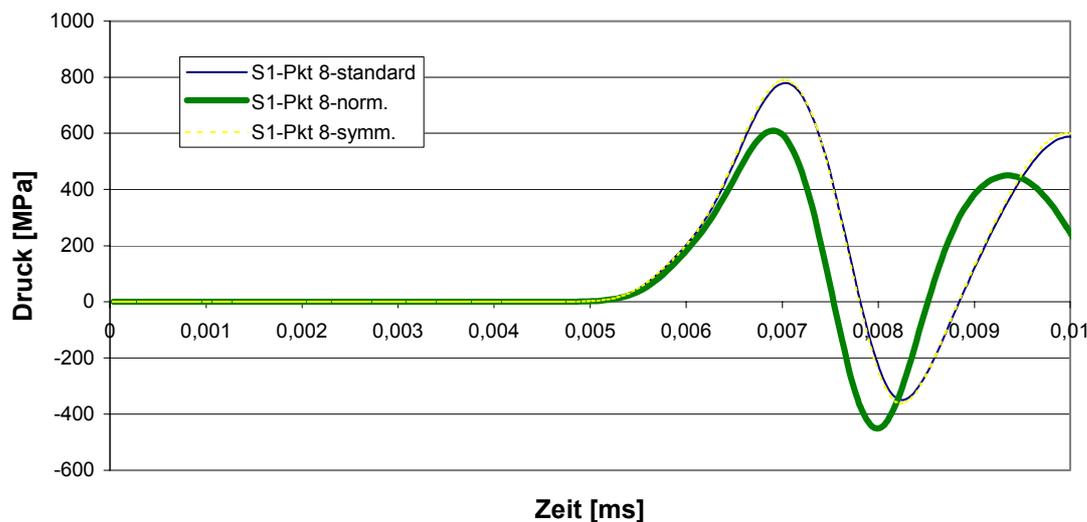


Bild B1.8: Vergleich des Druck-Zeit-Verlaufes der versch. Methoden in Punkt 8, S1

In Bild B1.9 und Bild B1.10 sind die Druck-Zeit-Verläufe der SPH-Simulationen S1 und S2 mit verschiedenen Partikelanzahlen dargestellt. Die Zeitachse fängt erst bei 0,004 ms an, damit die unterschiedlichen Verläufe der Kurven deutlicher zu erkennen sind. Erwartungsgemäß zeigt sich, dass die Drücke bei S2 (372400 Partikel) gegenüber S1 (93744 Partikel) wesentlich größer sind. Mit S1 werden etwa 50-60 % der Spitzenwerte von S2 erreicht. Zudem kann man sehen, daß sich die Druckwelle bei S2 wesentlich schneller ausbreitet als bei S1.

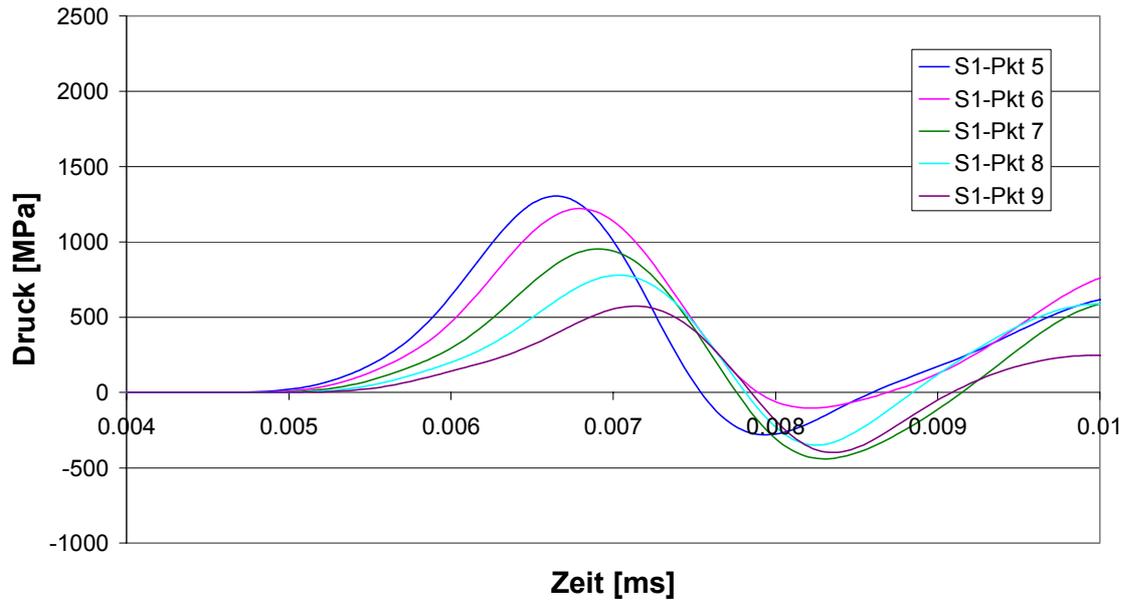


Bild B1.9: Druck-Zeit-Verlauf, Standard, S1

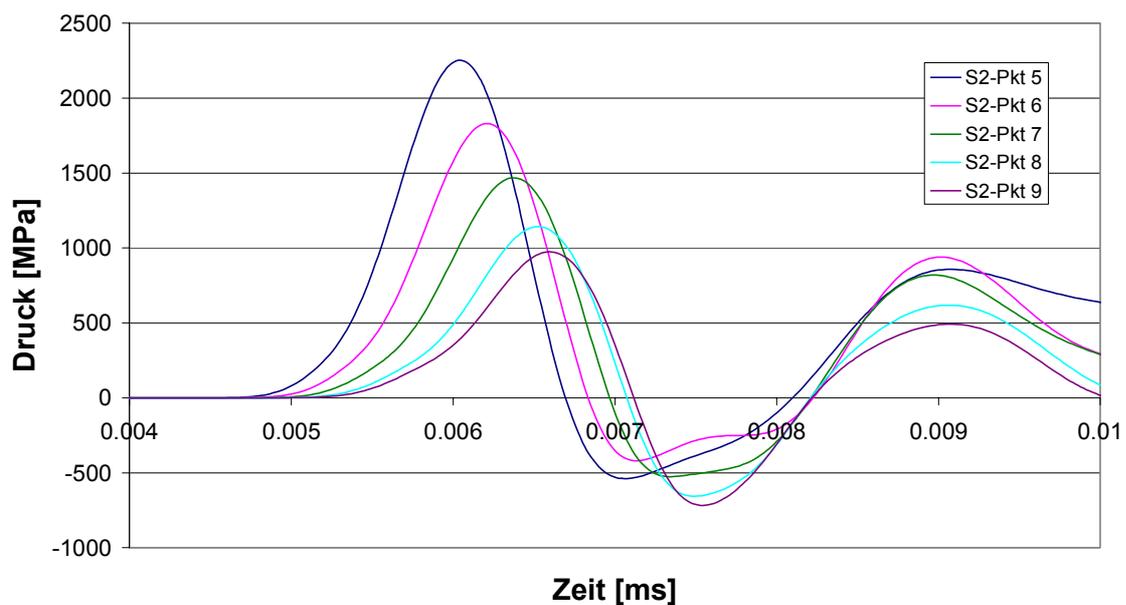


Bild B1.10: Druck-Zeit-Verlauf, Standard, S2

Der Druckanstieg bei steigender Netzfeinheit ist kein SPH-spezifischer Effekt, er entsteht auch bei FE-Programmen, wie man später noch erkennen wird.

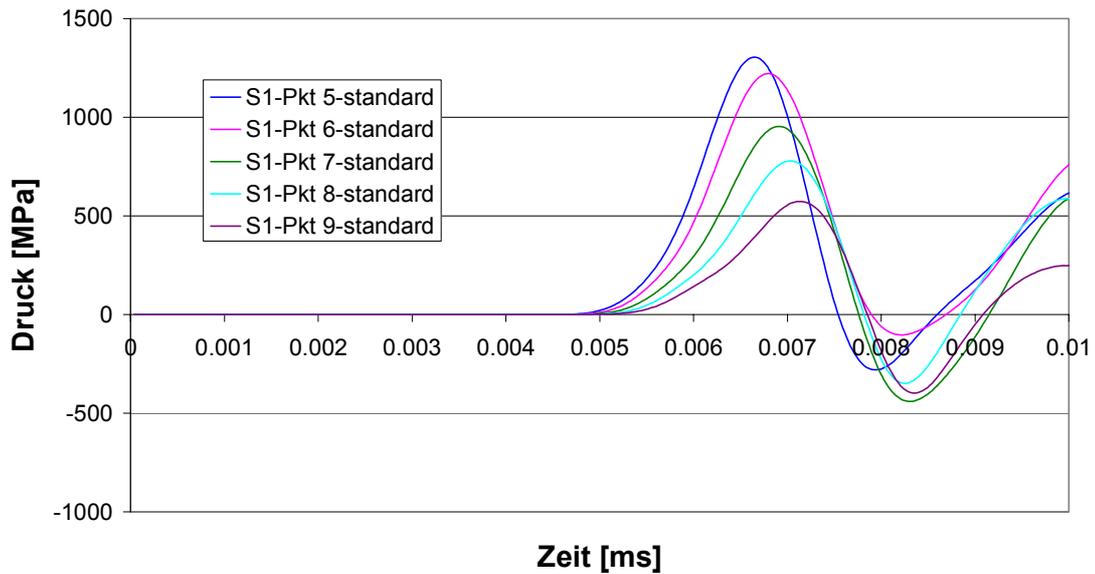


Bild B1.11: Vergleich des Druck-Zeit-Verlaufes, Gl. 4.57 (Kontinuitätsgleichung)

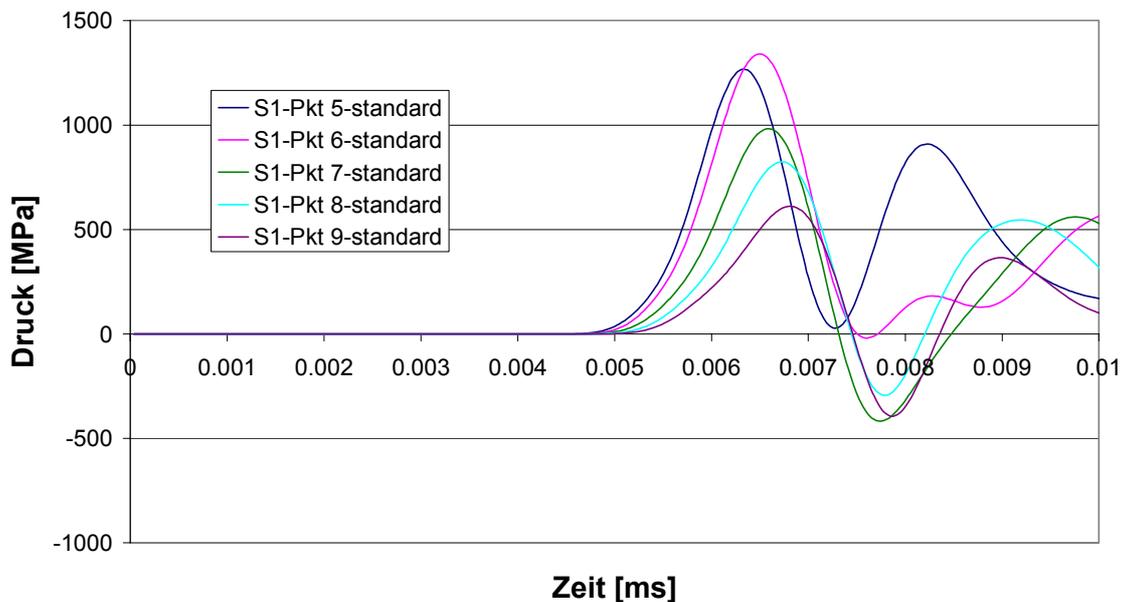


Bild B1.12: Vergleich des Druck-Zeit-Verlaufes, Gl. 4.59

In Bild B1.11 und Bild B1.12 sind nun die Druck-Zeit-Verläufe der Simulation S1 mit den zwei verschiedenen Gleichungen, die Dichte zu ermitteln, siehe Kapitel 4, dargestellt. Die Spitzendrücke sind ungefähr gleich groß, die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit ist unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung etwas langsamer. Für die Partikel in Nähe der freien Oberfläche ist zu erkennen, daß die Drücke kaum in den Zugbereich

nach Durchlaufen der ersten Druckwelle gelangen. Diese Effekte treten unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung nicht auf.

In diesem Abschnitt werden nun die Maximaldrücke, die Druck-Zeit-Verläufe und die Geschwindigkeitsverläufe der Standard SPH-Simulation mit den ABAQUS-Berechnungen verglichen.

Bild B1.13 zeigt, daß die Maximaldrücke über die Plattendicke beide Programme nahezu identisch approximieren.

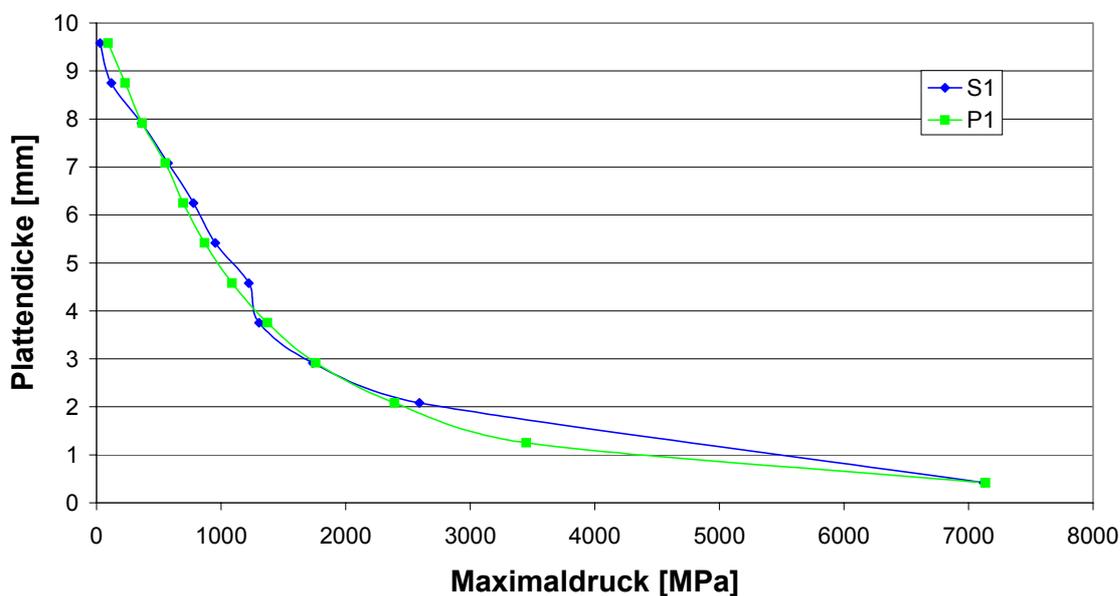


Bild B1.13: Vergleich der Maximaldruckverläufe SPH-ABAQUS

Zum Vergleich der Druckverläufe an verschiedenen Referenzpunkten wurden zum einen Simulation P1 (ABAQUS) und S1 (SPH) und zum anderen P2 und S2 gegenübergestellt.

Beim Vergleich P1-S1 ist deutlich erkennbar, daß die Kurven der ABAQUS-Rechnung wesentlich steiler verlaufen als die der SPH-Rechnung, d.h. die Druckwelle breitet sich schneller aus. Die Maximaldrücke sind jedoch fast gleich groß, lediglich am Referenzpunkt 9 wird eine Abweichung von 10% festgestellt, ansonsten liegt die Abweichung bei 1-3%.

Bei den Simulationen P2 und S2 ergaben sich ebenfalls nahezu gleichgroße Spitzendrücke, die maximale Abweichung betrug 6% bei Punkt 4

und 8. In der Regel wurden bei der SPH-Rechnung die kleineren Drücke errechnet.

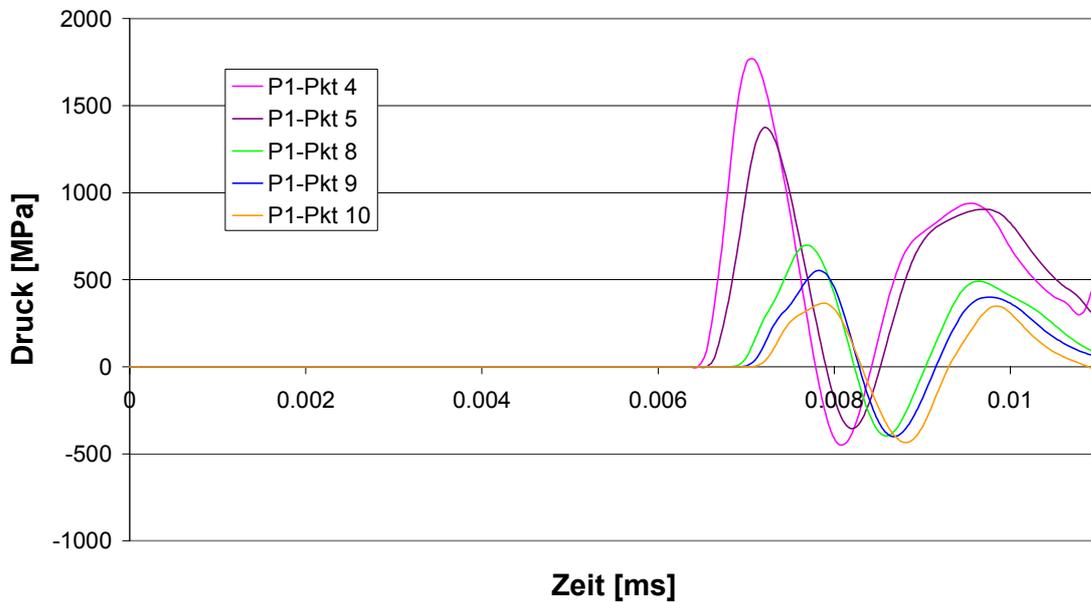


Bild B1.14: Druck-Zeit-Verläufe in der Platte, P1

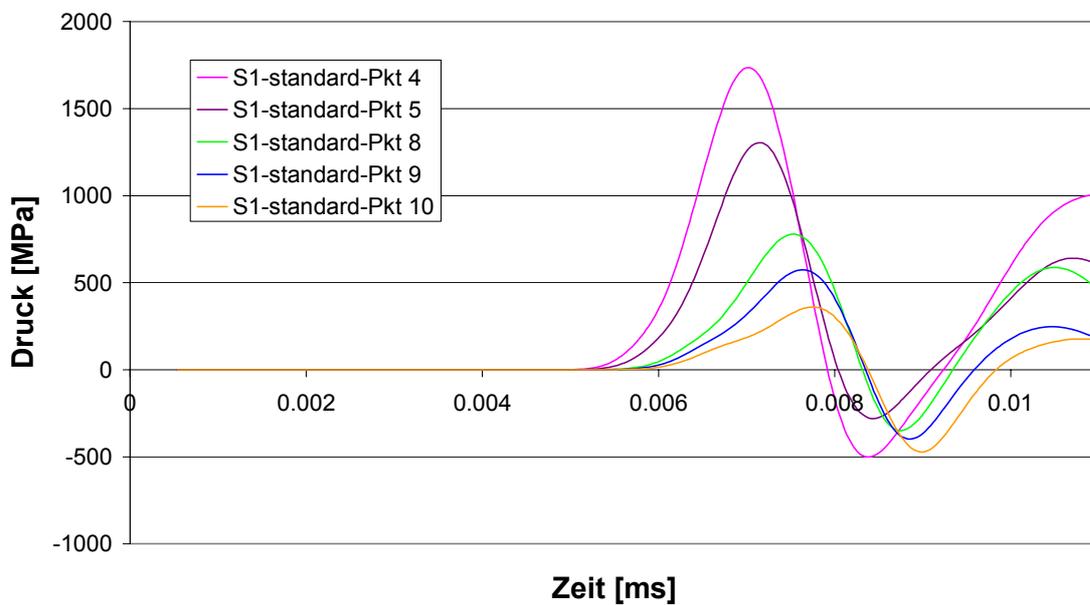


Bild B1.15: Druck-Zeit-Verläufe in der Platte, S1

Auffällig ist hierbei, daß bei der ABAQUS-Rechnung der Peak wesentlich schneller erreicht wird, als bei der SPH-Rechnung, d.h. der ansteigende Ast der Kurve ist wesentlich steiler als der der SPH-Kurve.

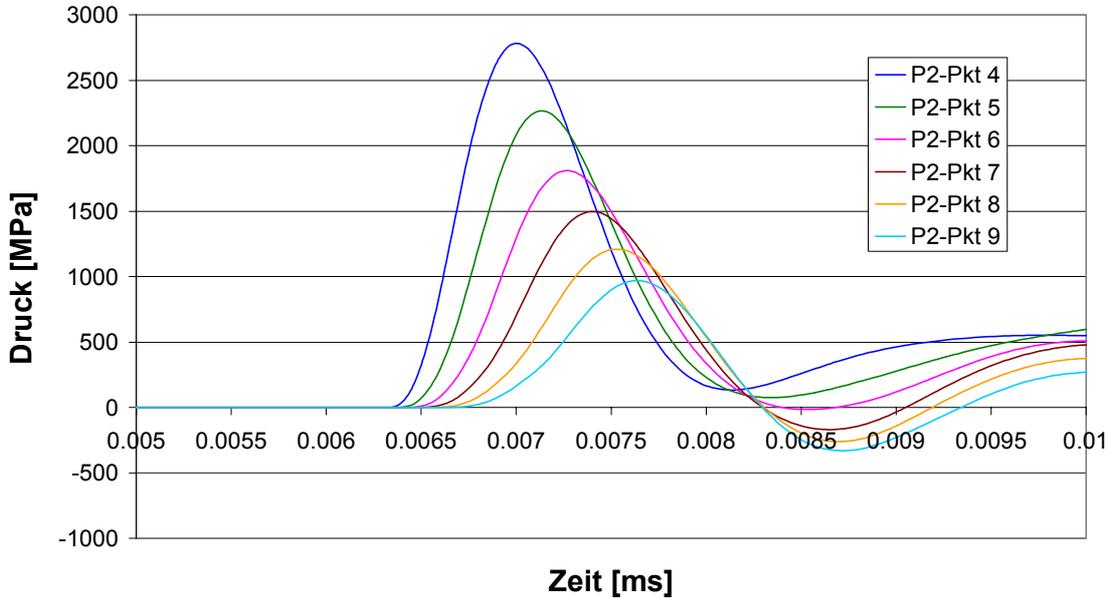


Bild B1.16: Druck-Zeit-Verläufe in der Platte, P2

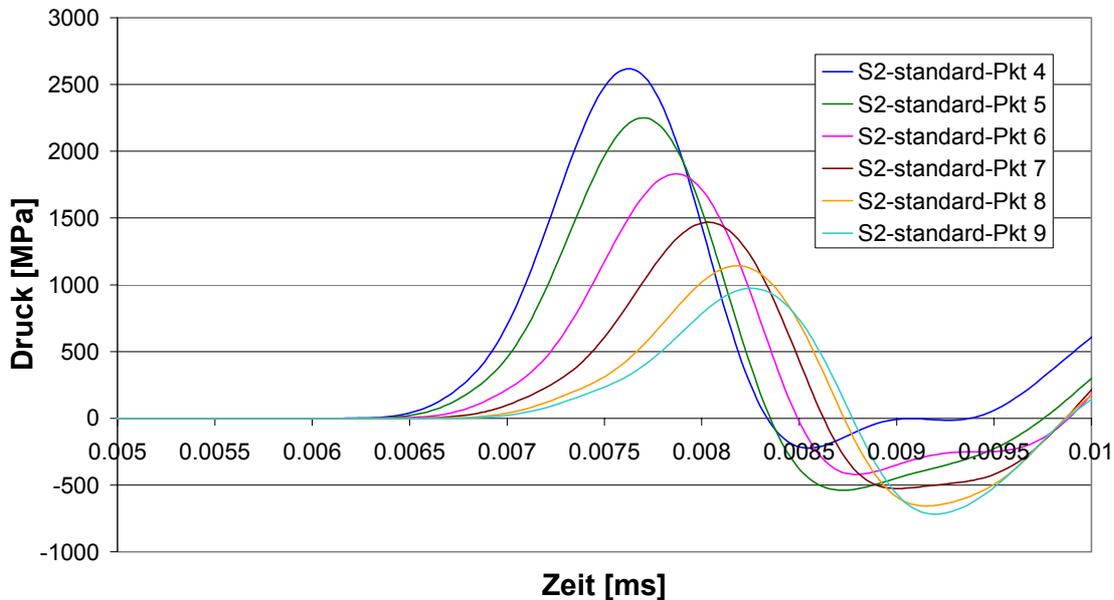


Bild B1.17: Druck-Zeit-Verläufe in der Platte, S2

In Bild B1.18 und Bild B1.19 sind die Geschwindigkeitsverläufe des Impaktkörpers bei den Simulationsvorgängen P1 und S1 dargestellt. In beiden Vorgängen perforiert der Impaktkörper die Platte, bei P1 wird der Impaktkörper auf ca. 50 m/s, bei S1 auf ca. 20 m/s abgebremst.

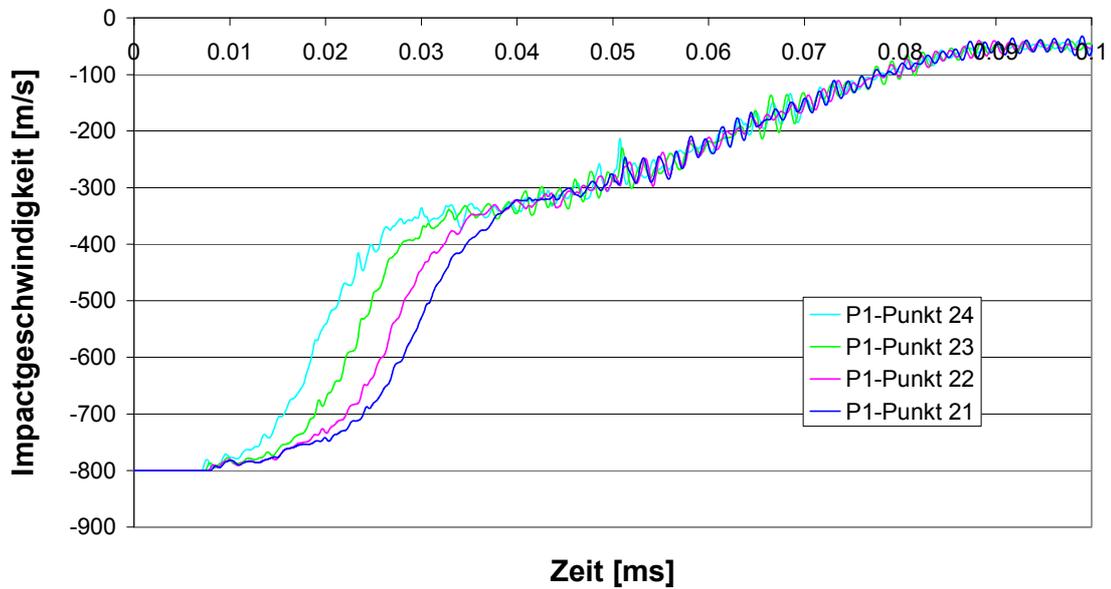


Bild B1.18: Geschwindigkeitsverläufe im Impact, P1

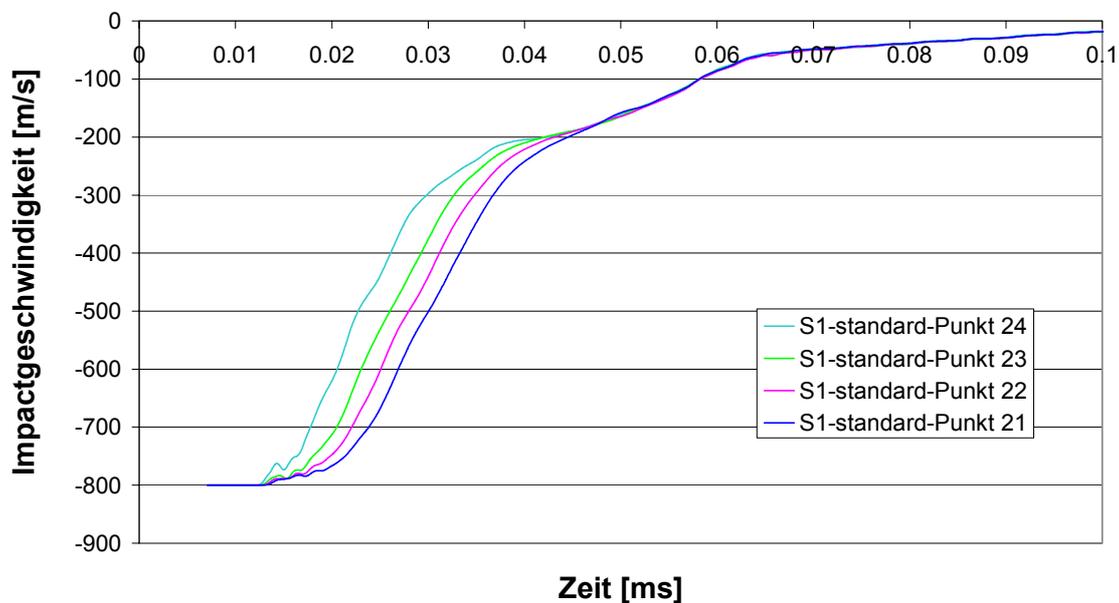


Bild B1.19: Geschwindigkeitsverläufe im Impact, S1

B1.2 Impactvorgänge mit hoher Geschwindigkeit (2000 m/s)

- Simulation Aluminium-Aluminium

In diesem Kapitel werden die Simulationsvorgänge mit einer Impaktgeschwindigkeit von 2000 m/s untersucht, wobei zunächst sowohl der Impaktkörper als auch die Platte aus Aluminium bestanden. Hierzu wurden die Ergebnisse der Berechnungen mit dem Standard SPH-Verfahren mit dem elasto-plastischen Stoffgesetz ohne Zugversagen und der normalisierten Methode mit dem elasto-plastischen Stoffgesetz mit Zugversagen den entsprechenden Ergebnissen der ABAQUS-Simulation gegenübergestellt. Im Druckverlauf spielt das spannungsgestützte Zugversagen zur Reproduktion des ersten Druckpeakes keine Rolle. Es wurden hier nur noch die Simulationen S1 und P1 betrachtet.

Stellt man die Druckverläufe der SPH- und ABAQUS-Rechnungen gegenüber, so erkennt man sowohl beim Vergleich der Berechnungen mit Zugversagen (Bild B1.20 und Bild B1.21) als auch ohne Zugversagen (Bild B1.22 und Bild B1.23), daß die Spitzendrücke bei der ABAQUS-Simulation 10-20 % unter denen der SPH-Rechnungen liegen. Sowohl die ersten Druckmaxima als auch den Druckverlauf approximieren beide Programme zumindest qualitativ identisch. Die stärkeren Abweichungen der Druckverläufe der Berechnungen lassen sich durch die größeren Verformungen und somit ungenauere Interpolation sowohl im ABAQUS-Programm als auch bei der SPH-Methode erklären.

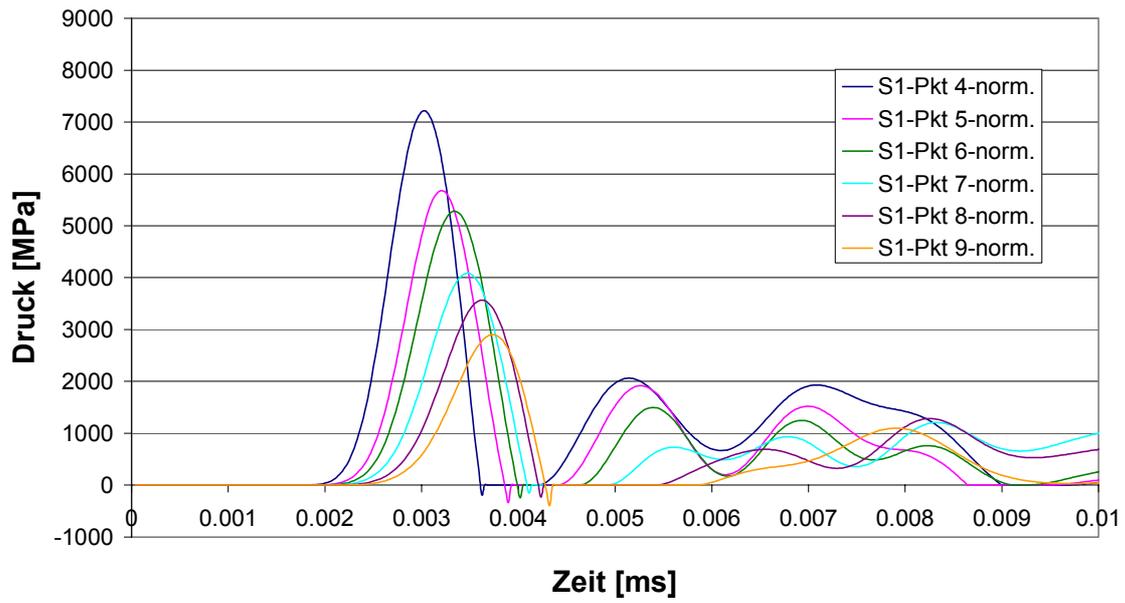


Bild B1.20: Druck-Zeit-Verläufe, mit Zugversagen, S1

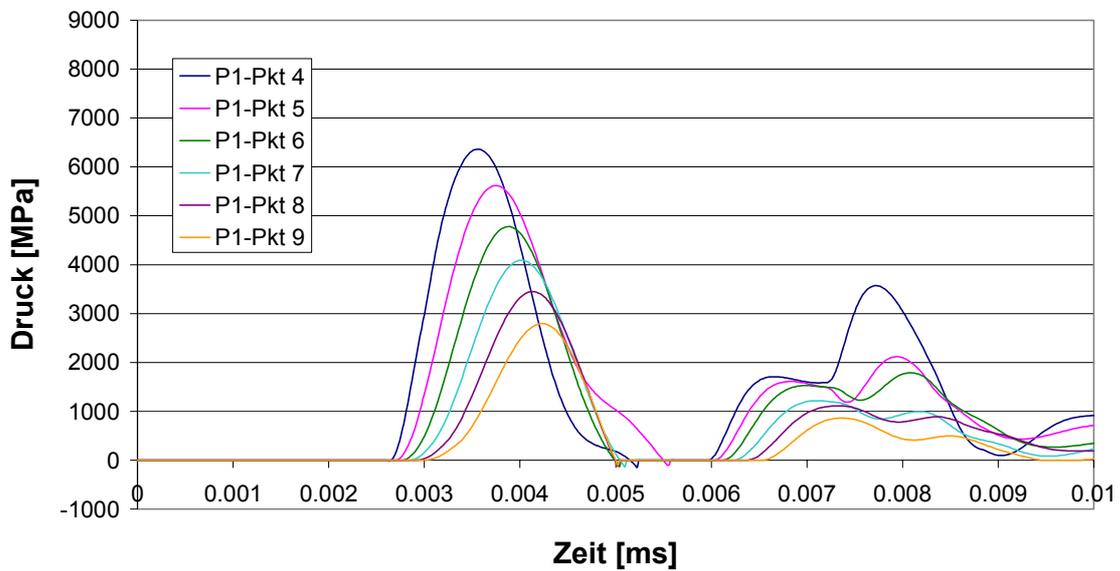


Bild B1.21: Druck-Zeit-Verläufe, mit Zugversagen, P1

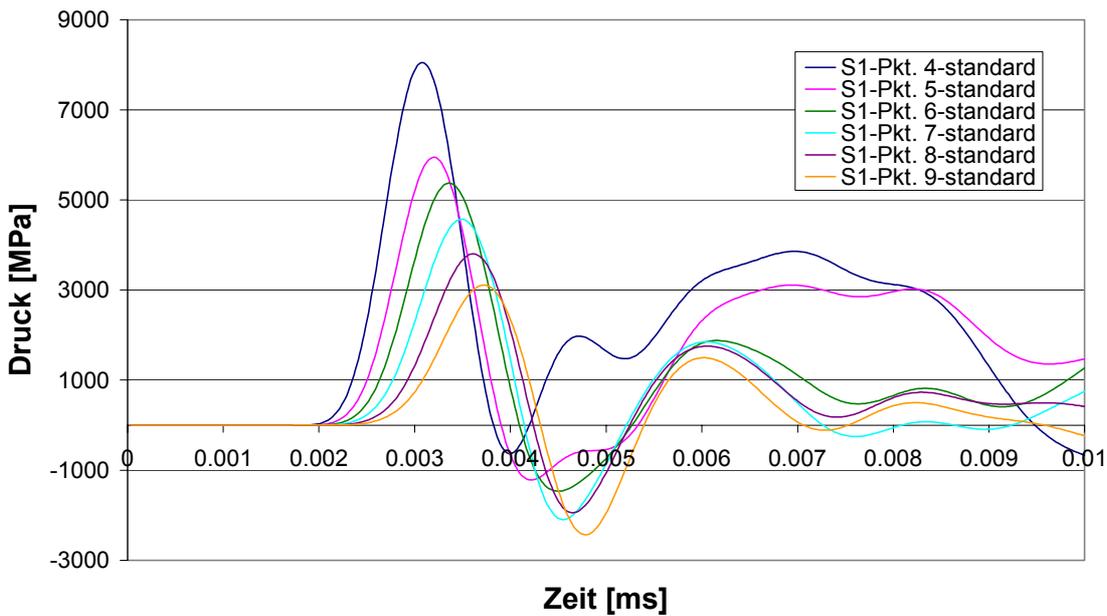


Bild B1.22: Druck-Zeit-Verläufe, ohne Zugversagen, S1

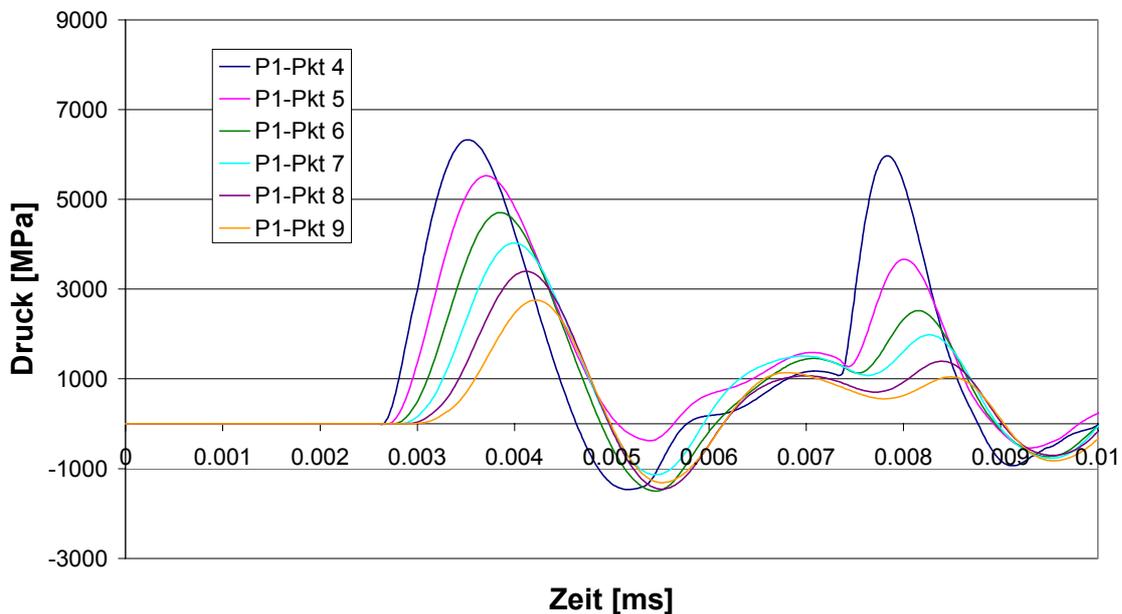


Bild B1.23: Druck-Zeit-Verläufe, ohne Zugversagen, P1

In Bild B1.24 und Bild B1.25 sind die Geschwindigkeitsverläufe des Impaktkörpers bei der SPH- und ABAQUS- Simulation mit Zugversagen dargestellt. Es zeigt sich, daß beide Impaktkörper die Platte durchdrin-

gen und mit einer Geschwindigkeit von ca. 1550 m/s (S1) bzw. 1400 m/s (P1) weiterfliegen. Da das ABAQUS-Programm die Rechnung aufgrund zu großer Elementverformungen abbrach, konnte der weitere Geschwindigkeitsverlauf leider nicht dargestellt werden. Auch die Verwendung eines Rezoning konnte die ABAQUS-Rechenzeit nicht verlängern.

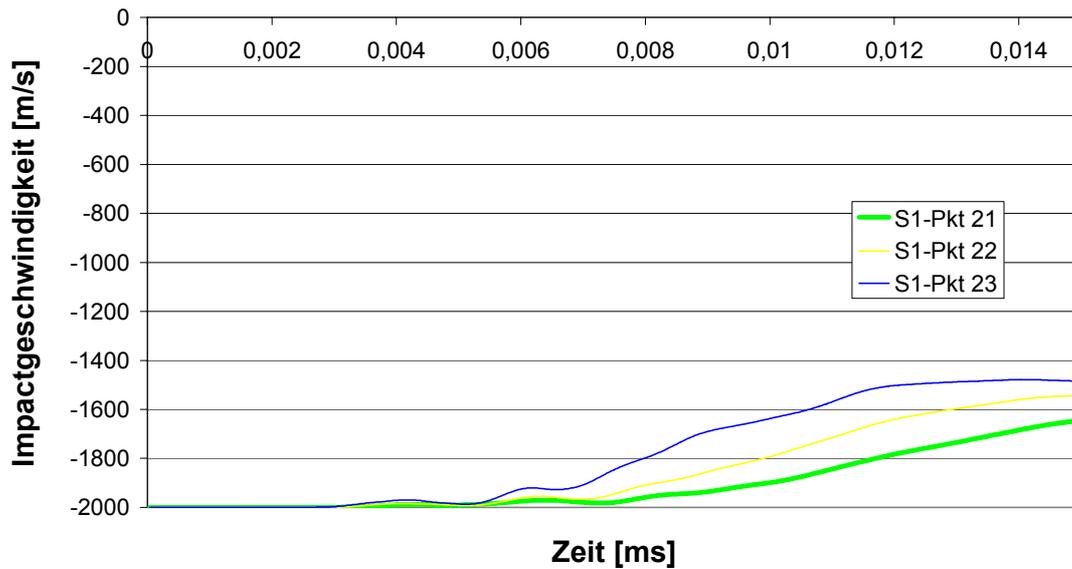


Bild B1.24: Geschwindigkeitsverläufe im Impact, S1

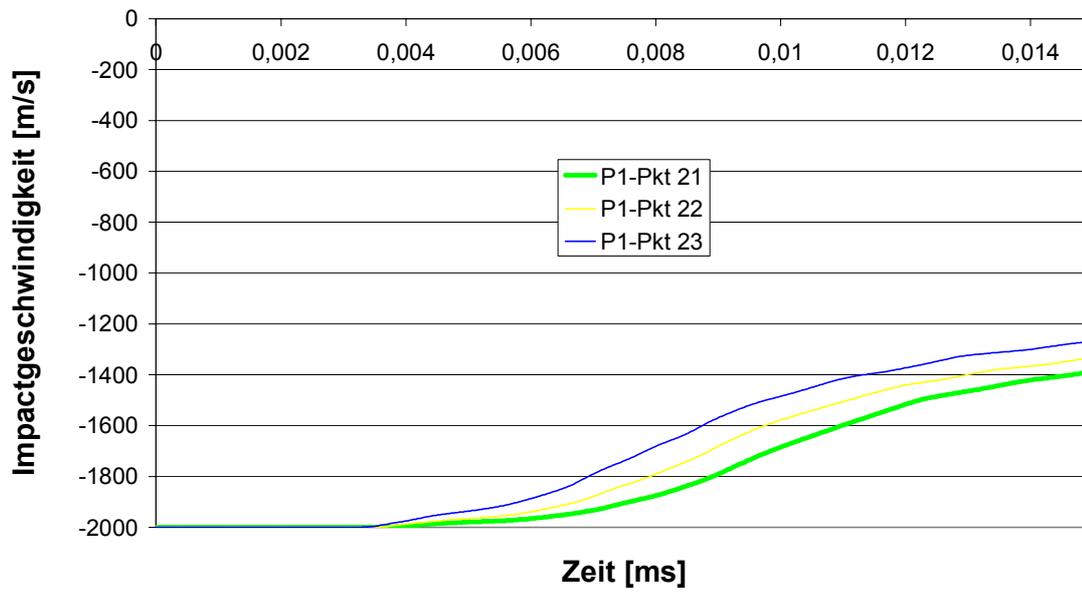


Bild B1.25: Geschwindigkeitsverläufe im Impact, P1

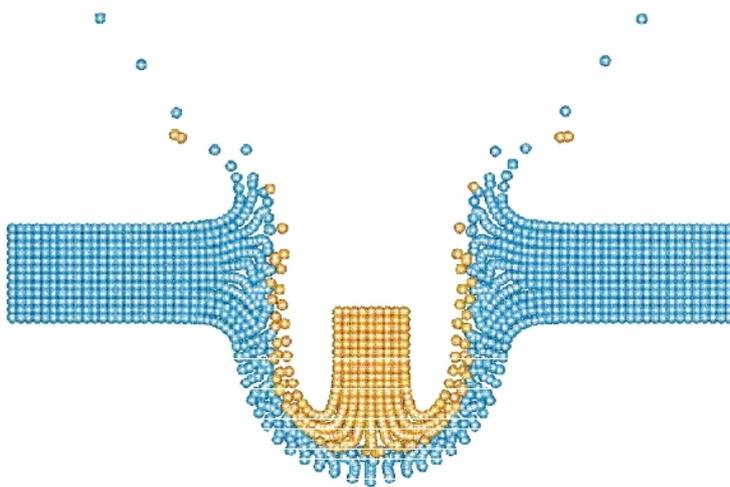


Bild B1.26: Verformung der Mittelscheiber (SPH)

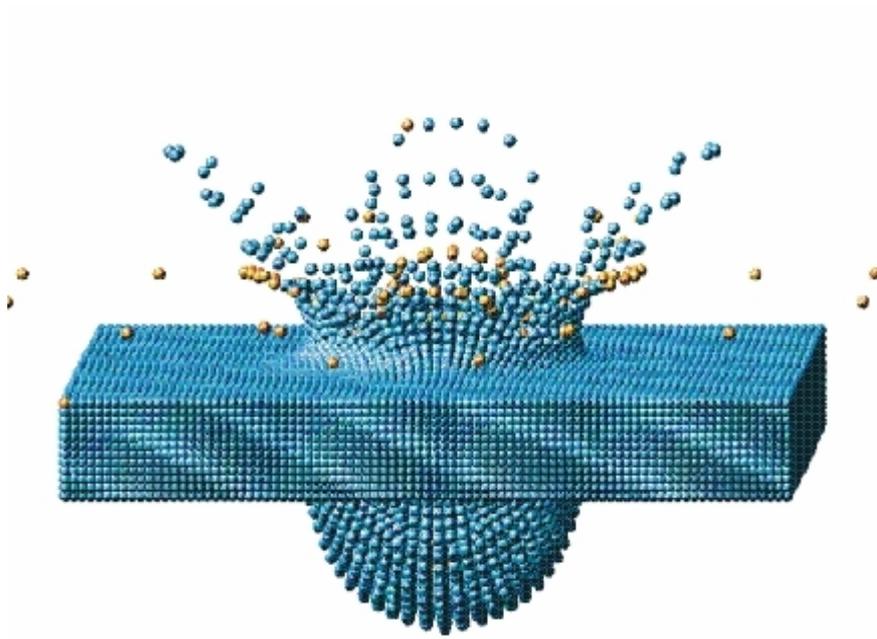


Bild B1.27: Verformungen der Platte und des Impacts (SPH)

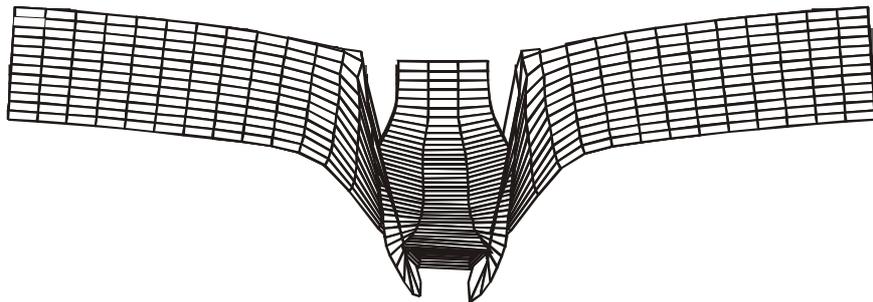


Bild B1.28: Verformung der Mittelscheibe (ABAQUS)

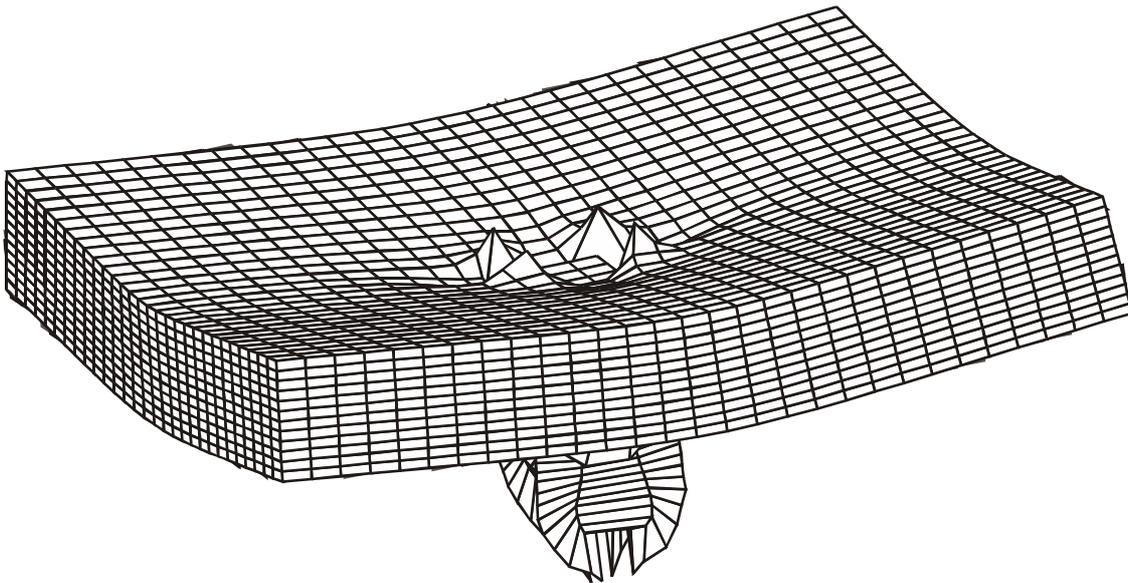


Bild B1.29: Verformungen der Platte und des Impacts (ABAQUS)

Bild B1.26 bis Bild B1.29 zeigen die Verformungen der Aluminiumplatte und des Impaktkörpers nach ca 15 μ s. Bei der SPH-Methode ist deutlich das Abplatzen von Randpartikeln des Impaktkörpers zu erkennen. Bei beiden Simulationen ist sowohl die starke Verformung der Platte als auch des Impaktkörpers zu erkennen. Ein anderes Verformungsverhalten erhält man, wenn man für den Impaktkörper ein steiferes Material mit einer höheren Materialfestigkeit verwendet. Deshalb wurde die Berechnung mit einem Impaktkörper aus Stahl wiederholt.

- Simulation Stahl-Aluminium

Wie bereits erwähnt wurde dem Impaktkörper als Material Stahl zugewiesen. Da Stahl eine höhere Steifigkeit als Aluminium besitzt, wurde erwartet, daß der Impaktkörper sich schwächer verformt und die Platte stärker perforiert wird. Hierfür wurden für den Stahl die Materialparameter aus Tabelle B1.4 verwendet. Die Aluminiumplatte wurde mit dem elasto-plastischen Stoffgesetz mit Zugversagen abgebildet. Neben der Standard SPH-Formulierung wurden noch die normalisierten Gleichungen benutzt.

In Bild B1.30 und Bild B1.31 sind die Druck-Zeit-Verläufe der SPH-Simulationen dargestellt. Mit der normalisierten Methode wurden 5-9 % niedrigere Drücke errechnet als mit dem Standard-Verfahren.

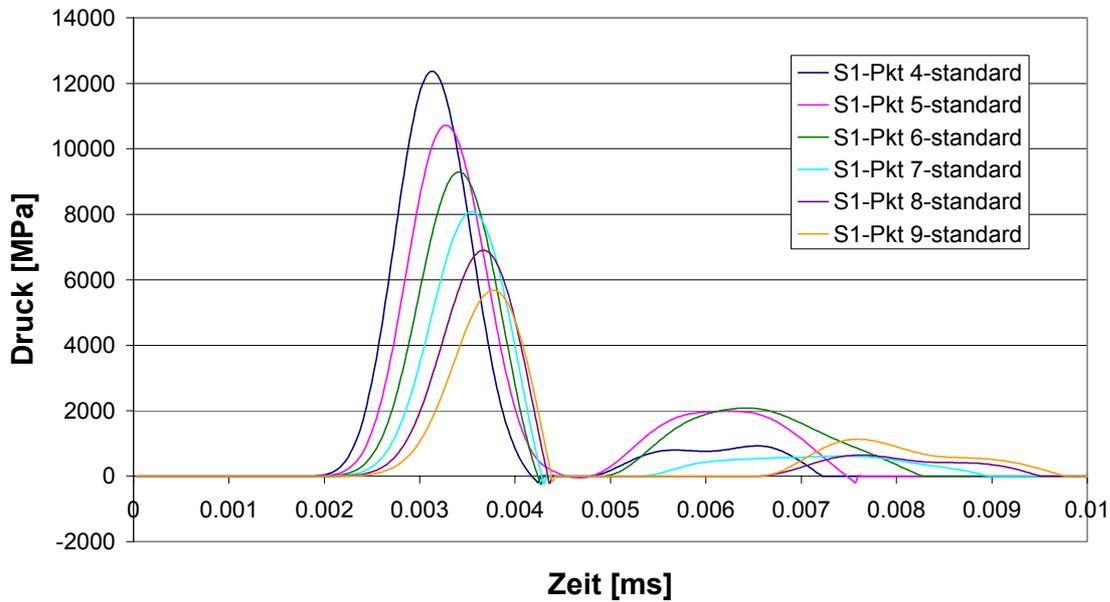


Bild B1.30: Druck-Zeit-Verläufe, S1

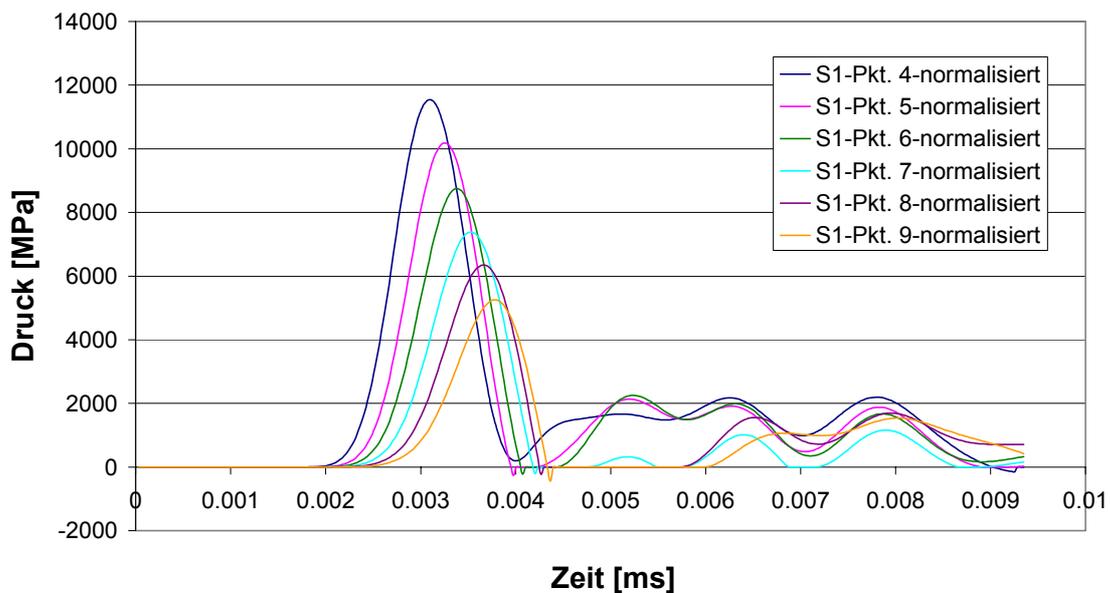


Bild B1.31: Druck-Zeit-Verläufe, S1

Im Vergleich zur ABAQUS-Simulation P1 ergeben sich Abweichungen bis zu 20 %. Auch hier stimmen die ersten Druckmaximas gut überein. Die ABAQUS-Rechnung brach nach ca. 10 μ s aufgrund zu großer Elementverformungen wieder ab, die SPH-Rechnung wurde bis zu einem Zeitpunkt von 25 μ s fortgeführt.

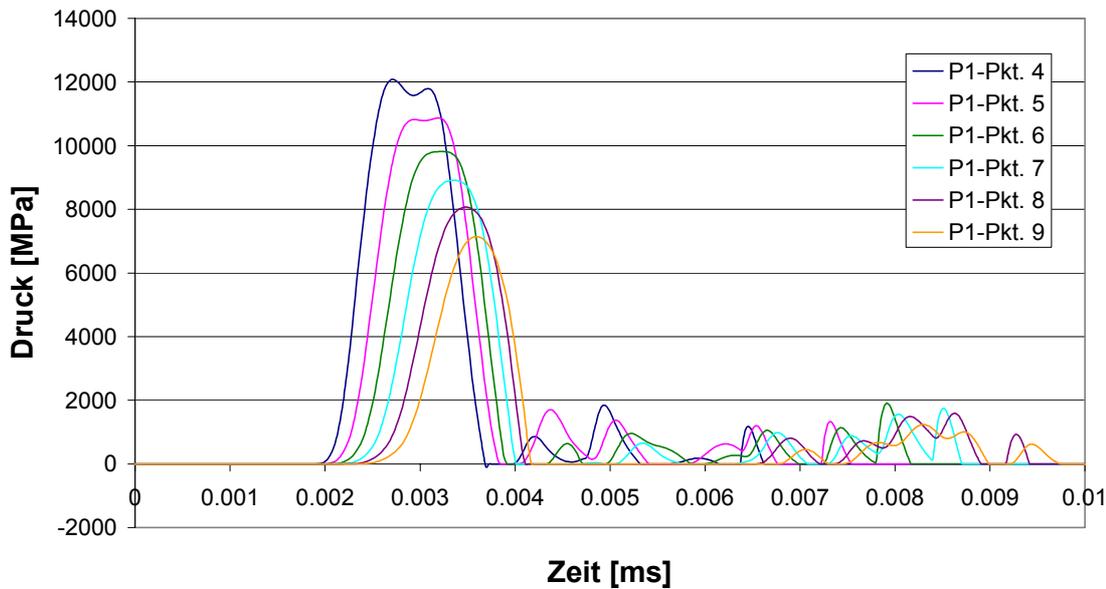


Bild B1.32: Druck-Zeit-Verläufe, P1

In Bild B1.33 und Bild B1.34 sind die Verformungen der Platte und des Impaktkörpers dargestellt.

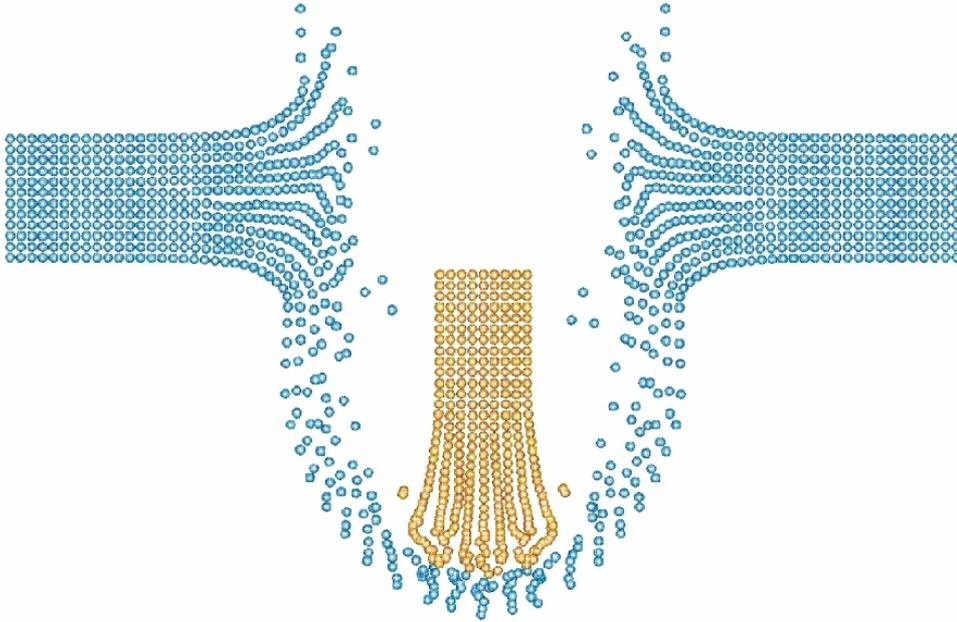


Bild B1.33: Verformungen der Mittelscheibe (SPH) nach $25 \mu\text{s}$

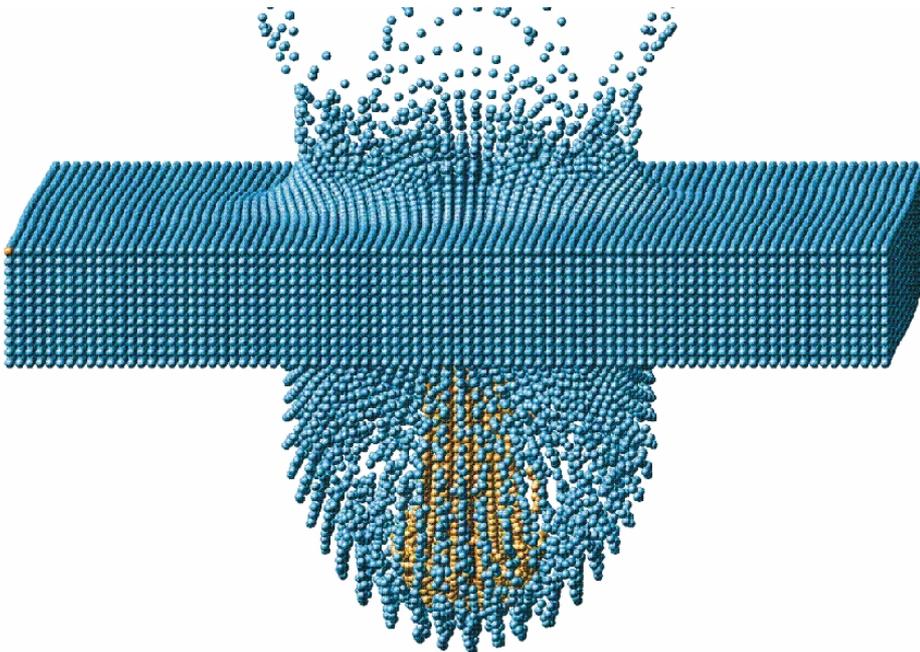


Bild B1.34: Verformungen des Gesamtmodells (SPH) nach $25 \mu\text{s}$

B2 Simulation von Explosionen

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß die SPH-Methode in der Lage ist, sehr große Verformungen abzubilden, die kommerzielle FEM Lagrange Codes nicht mehr simulieren können. Hierfür wurden Berechnungen durchgeführt, bei denen eine Aluminiumplatte mit einem Sprengstoff beaufschlagt wurde. Detailliertere Ergebnisse und Diskussionen findet man bei Harter [134]. Es wurden zunächst mit dem SPH-Code und dem FE-Programm ABAQUS reine Sprengsimulationen durchgeführt, um zu testen, ob beide Programme dieselben Drücke aufbauen. Dies ist notwendig, wenn man später die Druckverläufe in der Aluminiumplatte vergleichen möchte.

Als Sprengstoff für die numerische Simulation wurde TNT verwendet, dessen Materialparameter dem Dobratz [74] entnommen wurden. Der Sprengstoff wurde als Kegel diskretisiert. Seine Abmessungen sind Bild B2.1, die verwendeten Materialparameter Tabelle B2.1 zu entnehmen.

ρ_0 [g/mm ³]	P_{\max} [MPa]	C_d [m/s]	E_0 [MPa]	A [MPa]	B [MPa]	C [MPa]	R_1	R_2	ω
0,00163	21000	6930	70000	37120	3231	1045	4,15	0,95	0,30

Tabelle B2.1: Materialdaten von TNT

Um die Ergebnisse später auch mit der SPH-Methode vergleichen zu können, wurden zwei Elemente ausgewählt, deren Integrationspunkte mit den Koordinaten zweier Partikel übereinstimmen (siehe Bild B2.1). Die Druckverläufe der beiden Referenzknoten aus der SPH- und ABAQUS-Rechnung sind Bild B2.3 zu entnehmen. Es ist zu erkennen, daß im Randbereich die ABAQUS-Drücke vom SPH-Programm deutlich überschätzt werden. In Kegelmittle stimmen die Drücke sehr gut überein. Bild B2.2 zeigt die maximalen Druckwerte an der Kontaktfläche. Im Randbereich des Kegels werden die Drücke von der ABAQUS-Rechnung stark unterschätzt, ansonsten stimmen die Drücke sehr gut überein.

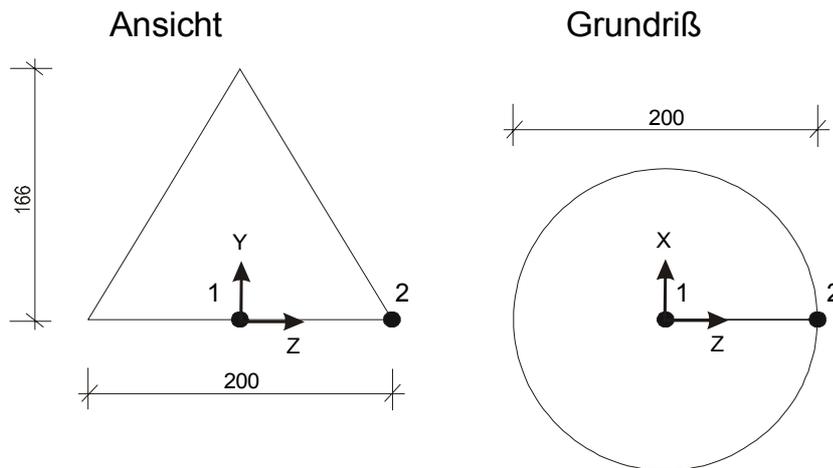


Bild B2.1: Lage der beiden ausgewählten Punkte

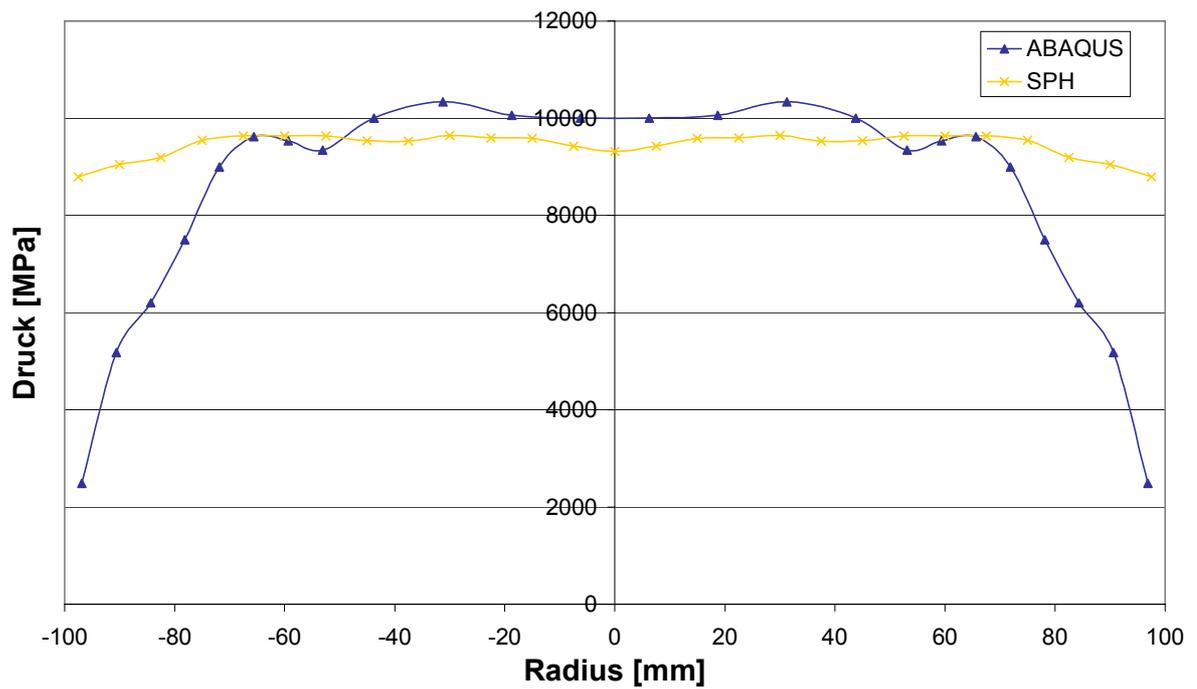


Bild B2.2: Maximaldruck an der Kontaktfläche

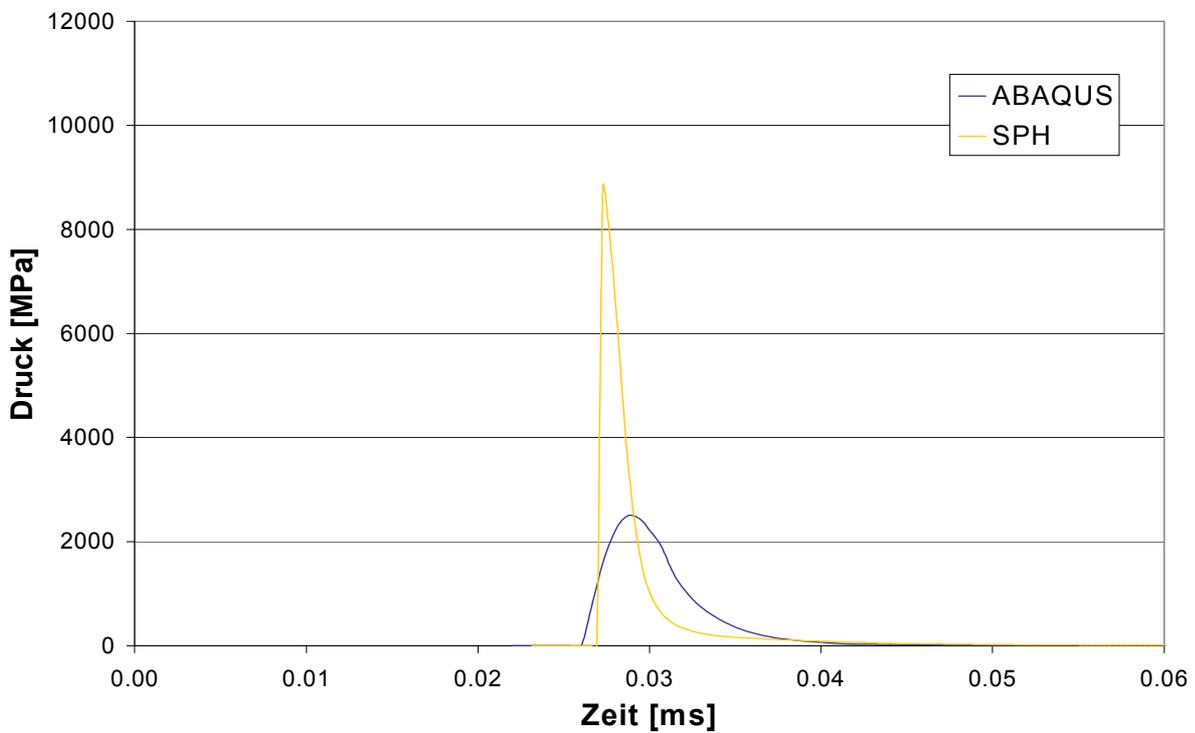
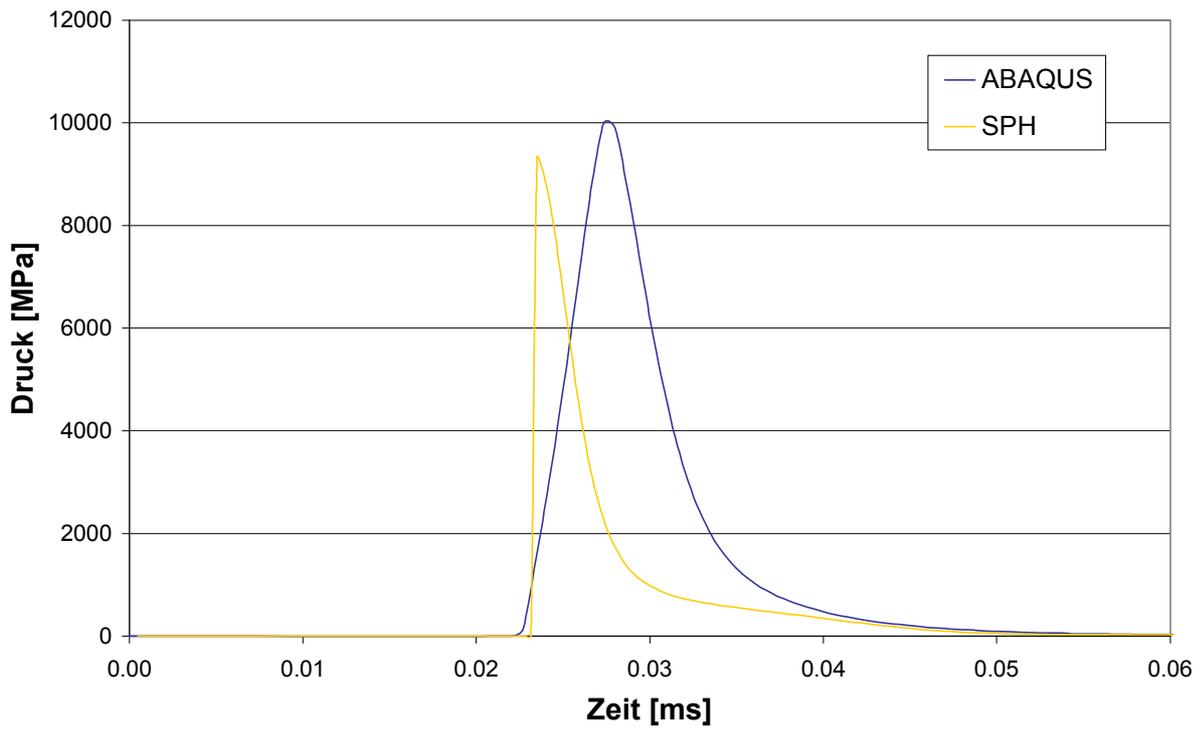


Bild B2.3: Druck-Zeit-Verlauf im Sprengstoff

Die Abmessungen und Materialparameter der gesprengten Aluminiumplatte sind Bild B2.4 bzw. Tabelle B2.2 zu entnehmen. Bei der Simulation wurden 45.591 Partikel verwendet. Der Sprengstoffkegel war mittig auf der Plattenoberkante platziert.

E [N/mm ²]	ν [-]	σ_y [N/mm ²]	ρ [g/mm ³]	ρ_{\min} [N/mm ²]
72200	0,34	200	0,0027	150

Tabelle B2.2: Materialdaten der verwendeten Aluminiumplatte

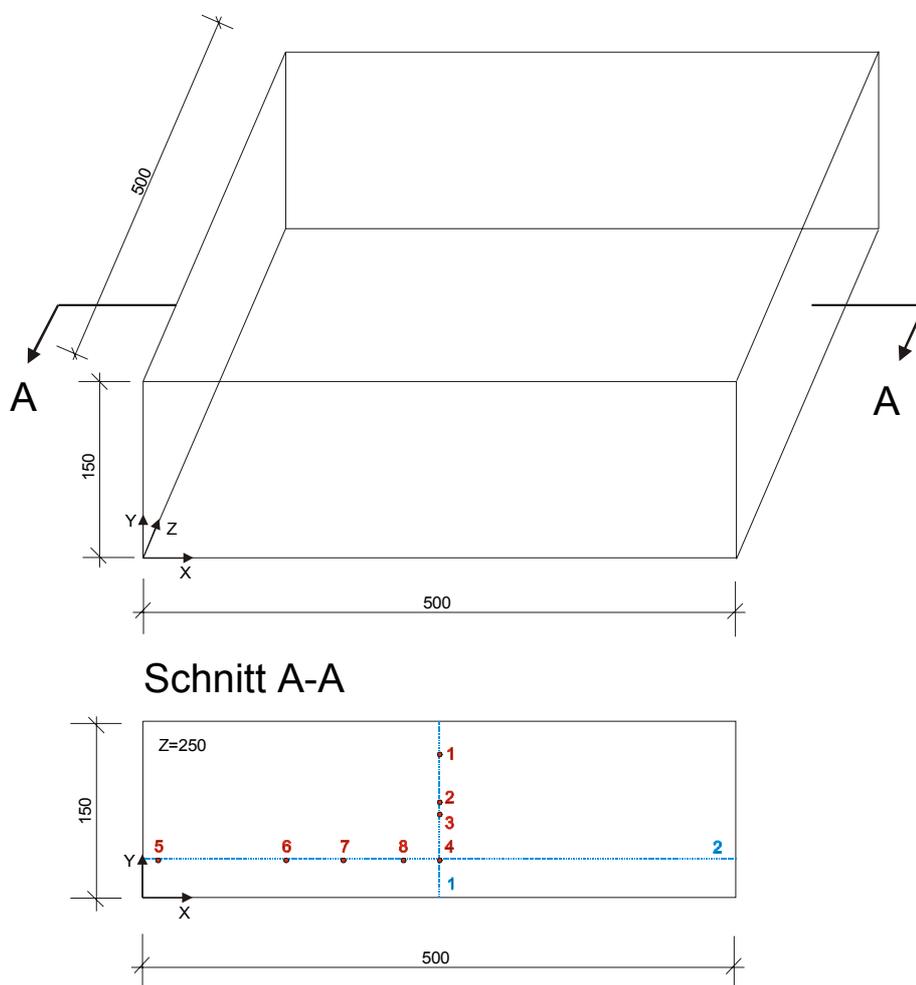


Bild B2.4: Schnitt durch die Platte

Es wurde das linear-elastisch ideal-plastische Werkstoffmodell aus Kapitel 5.2 verwendet, zunächst ohne, später mit Zugversagen. An den Referenzknoten gemäß Bild B2.4 wurden die Druckverläufe aus beiden

Rechnungen miteinander verglichen. Die Koordinaten der Referenzknoten sind in Tabelle B2.3 aufgelistet.

Punkt	1	2	3	4	5	6	7	8
X	250	250	250	250	10	120	170	220
Y	120	80	70	30	30	30	30	30
Z	250	250	250	250	250	250	250	250

Tabelle B2.3: Knotenkoordinaten der Referenzpunkte, Maße in [mm]

Bild B2.15 zeigt die maximalen Druckwerte im Schnitt A-A (siehe Bild B2.4) in Plattenmitte. Am oberen Rand überschätzt das SPH-Programm den Druck von ABAQUS deutlich, ansonsten ist eine sehr gute Übereinstimmung zu erkennen.

In Bild B2.5 sind die Druck-Zeit Verläufe der Referenzpunkte 1 bis 4 dargestellt. Bild B2.6 zeigt die Druckverläufe der Partikel 5 bis 8. Hier weichen die Ergebnisse stärker voneinander ab, was aufgrund des höheren Randdruckes im Sprengstoff bei der SPH-Simulation auch zu erwarten war. Nach 94 μ s bricht die ABAQUS-Rechnung aufgrund zu großer Elementverformungen ab. Auch unter Verwendung einer großen Dämpfung und mithilfe eines Rezoning konnte die Rechenzeit nicht verlängert werden.

Bild B2.7 und Bild B2.8 zeigt die Verformung der Aluminiumplatte aus beiden Simulationen. In Bild B2.9 ist die Deformation in Plattenmitte dargestellt. Die Verformungen approximieren beide Programme fast identisch. Zuletzt ist noch der Verlauf der Maximalgeschwindigkeiten an Plattenunterkante wieder im Schnitt A-A dargestellt. Auch hier liefern ABAQUS und das SPH-Programm nahezu identische Ergebnisse.

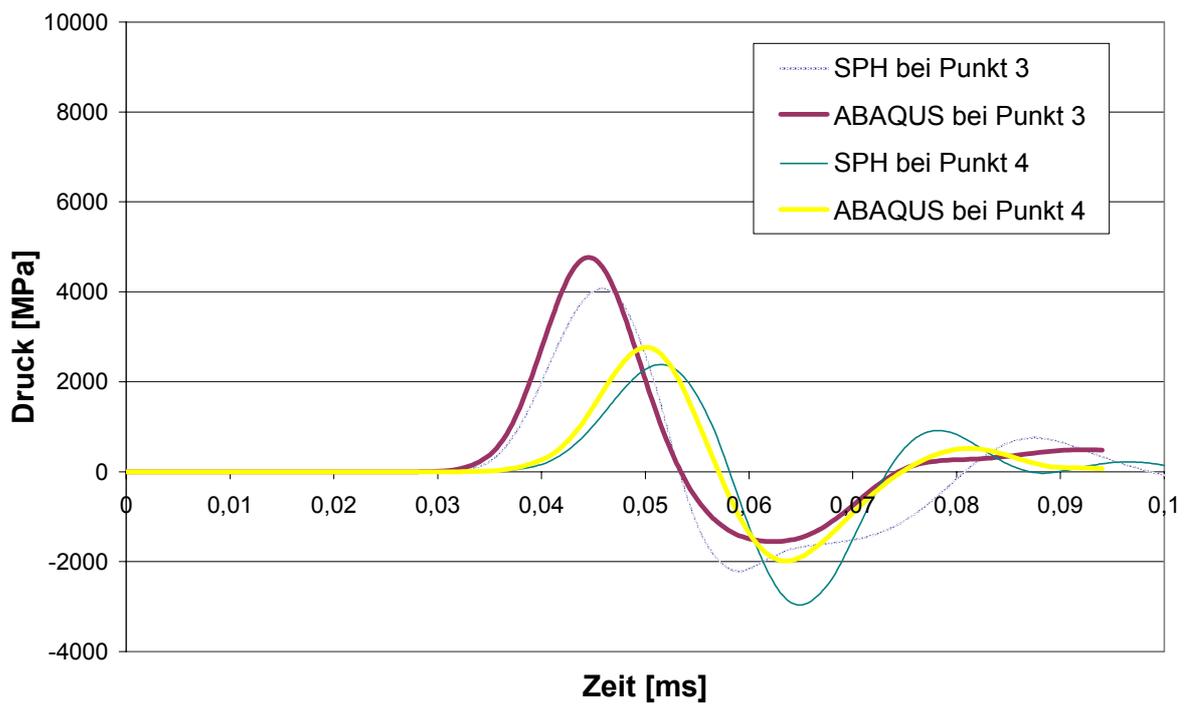
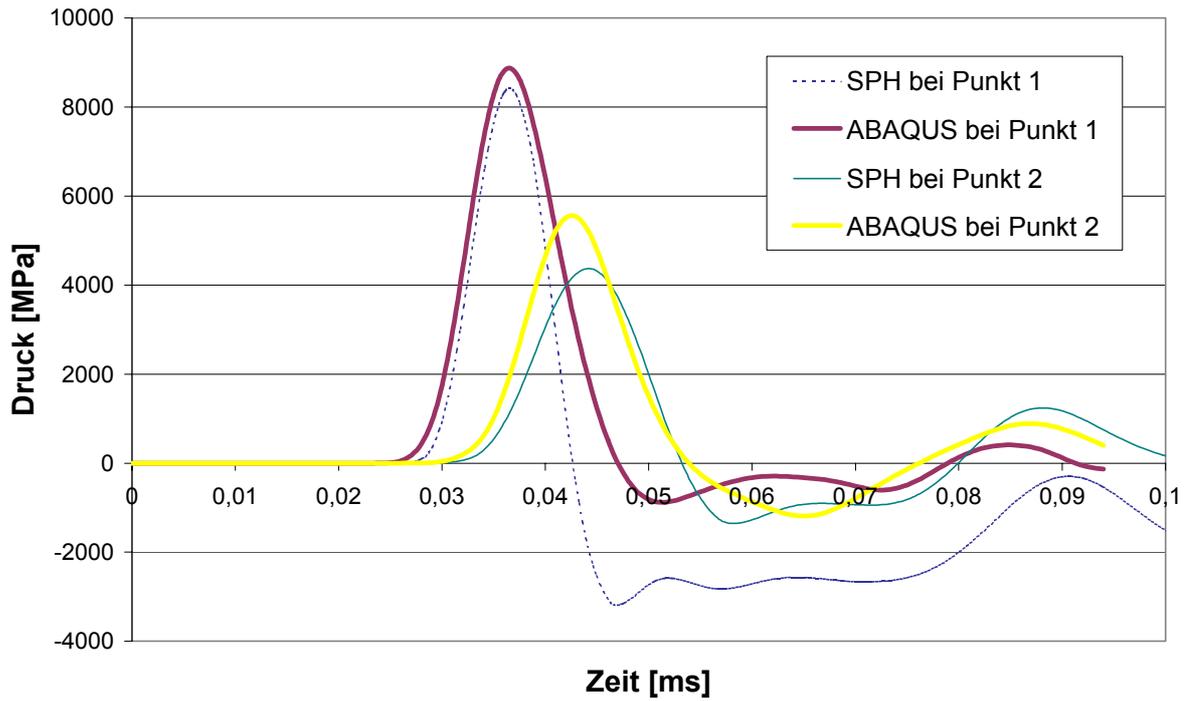


Bild B2.5: Druck-Zeit-Verlauf auf der Mittelachse der Platte

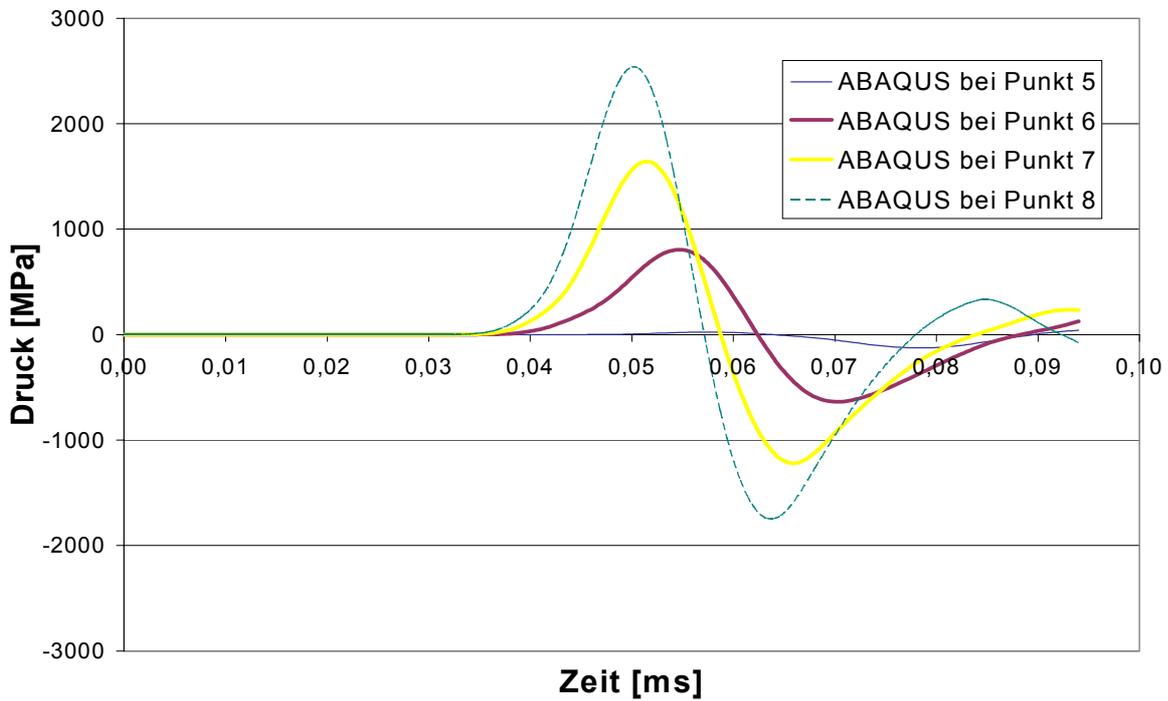
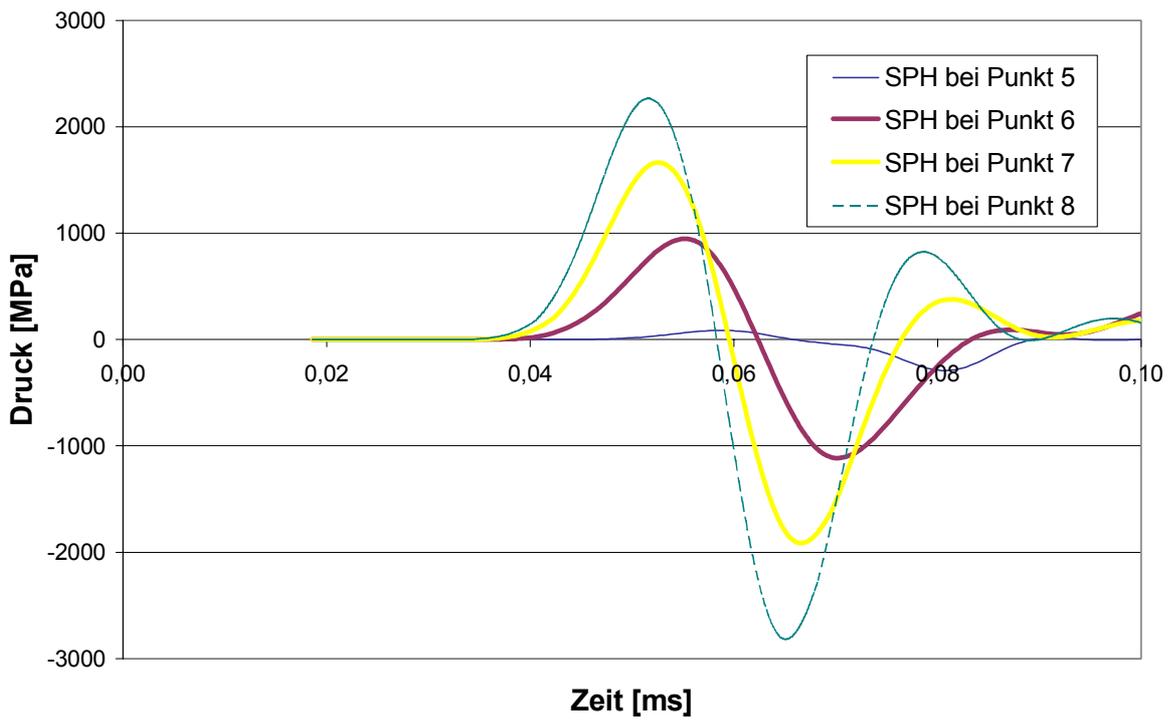


Bild B2.6: Druckausbreitung in der Platte bei $y=30\text{mm}$

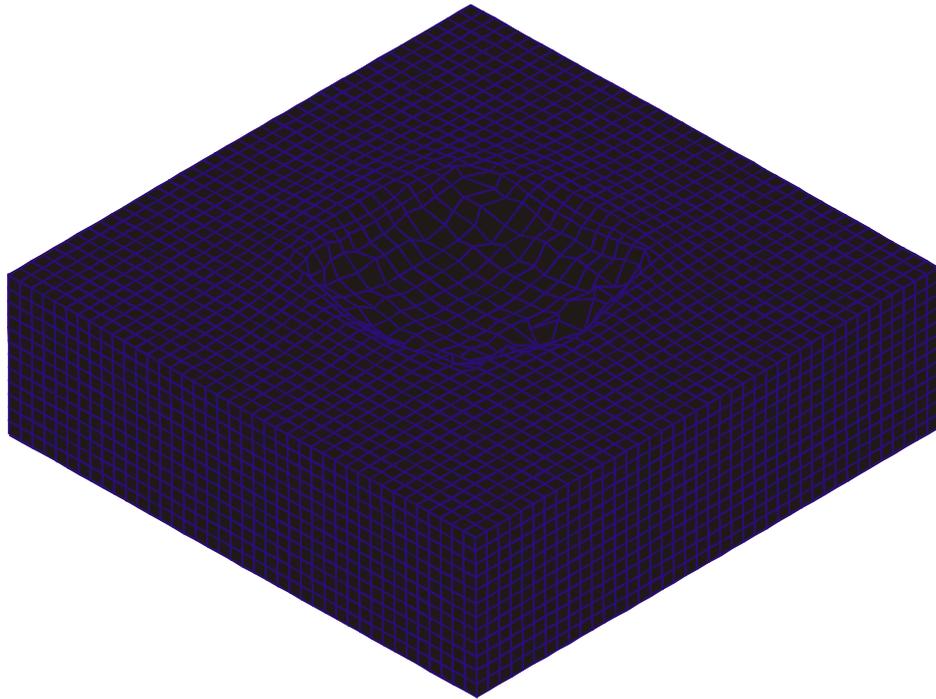


Bild B2.7: verformte Platte aus der ABAQUS-Rechnung bei $t=0,094\text{ms}$

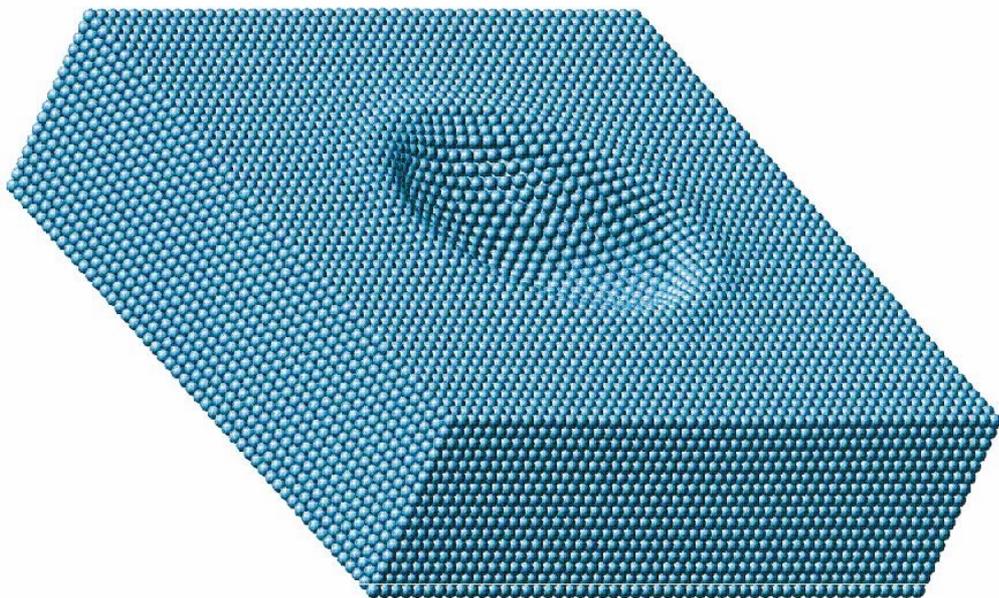


Bild B2.8: verformte Platte mit der SPH-Methode bei $t=0,094\text{ms}$

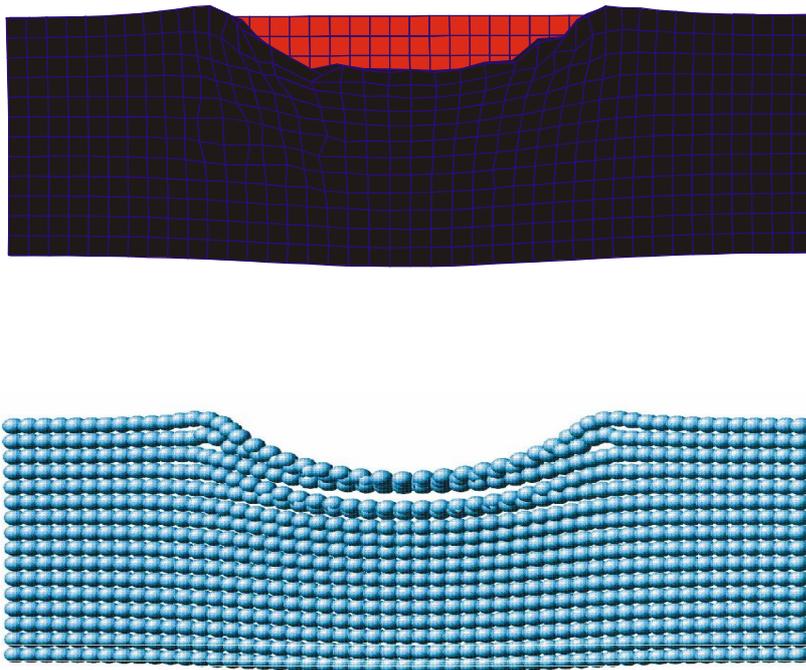


Bild B2.9: verformte Scheibe zum Zeitpunkt $t=0,094\text{ms}$

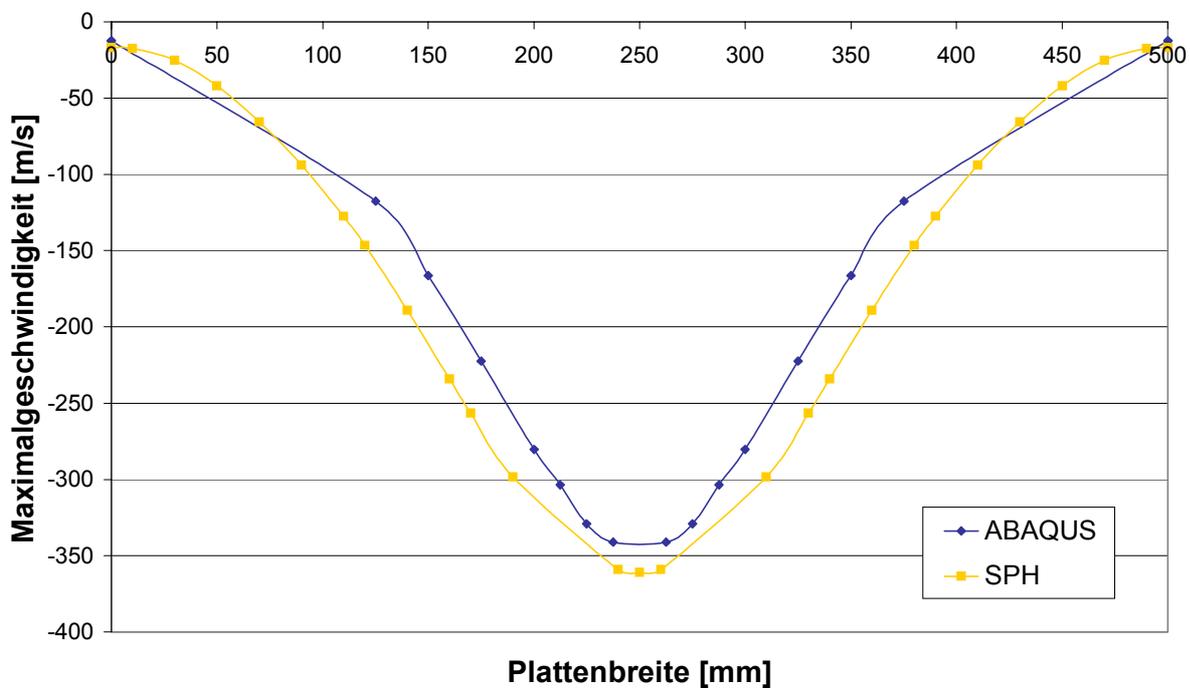


Bild B2.10: Geschwindigkeitsverteilung an der Plattenunterkante

Abschließend wurden noch Berechnungen mit einem spannungsgestützten Zugversagen durchgeführt. Die Materialparameter sind in

Tabelle B2.2 zu finden. Zu Beginn waren keine Diskrepanzen bezüglich der Platte ohne Zugversagen im Druck-Zeit Verlauf zu erkennen. Exemplarisch sind hier die Druck-Zeit Verläufe der ersten vier Referenzknoten dargestellt. Es ist gut zu erkennen wie nach Überschreiten der Zugfestigkeit die Drücke auf Null gesetzt werden und auch im weiteren Verlauf der Berechnung keine Drücke mehr im Zugbereich entstehen können.

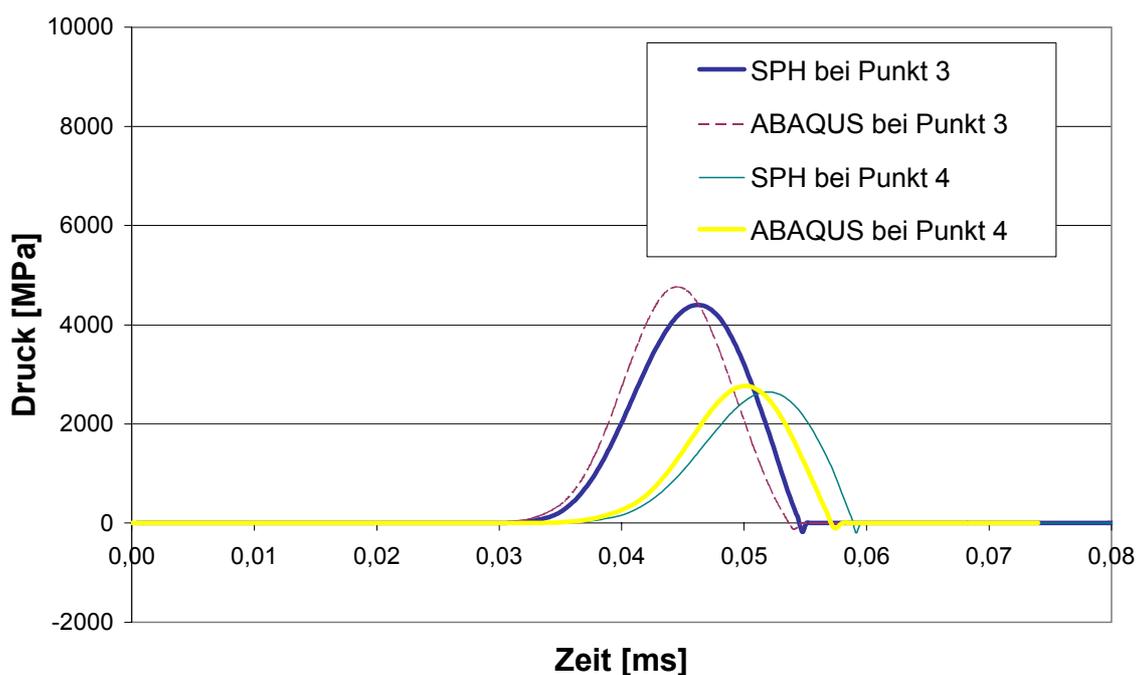
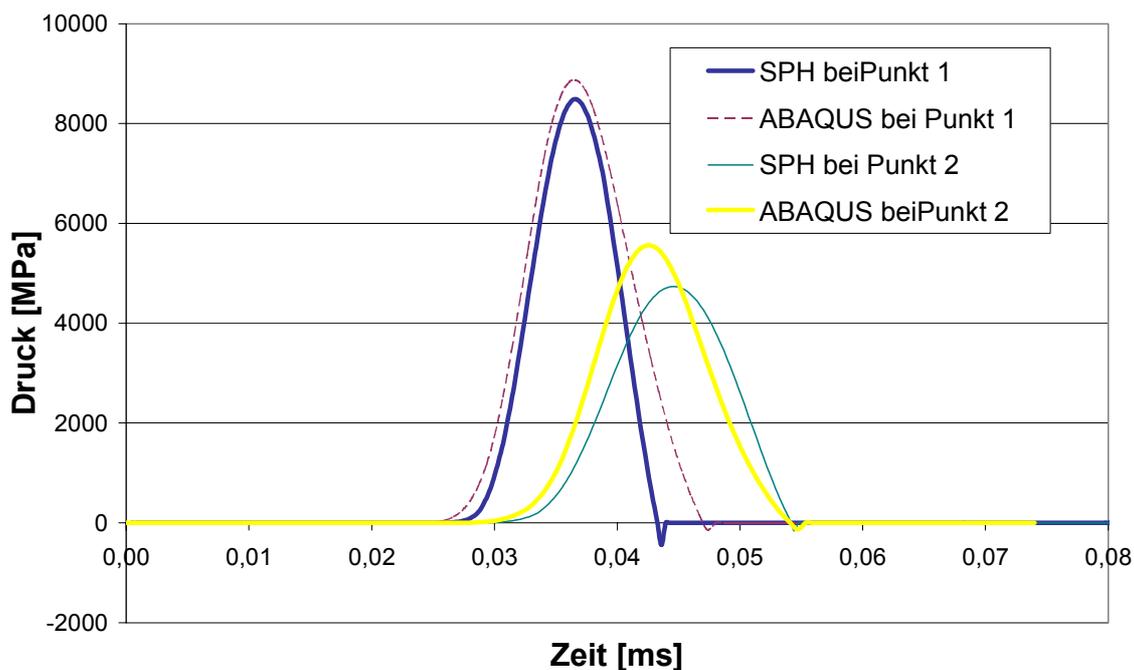


Bild B2.11: Druck-Zeit-Verlauf auf der Mittelachse der Platte

Die Verwendung eines Zugversagens hatte zur Folge, daß die ABAQUS-Rechnung noch früher zum Abbruch kam. Schon nach 74 μ s beendete ABAQUS aufgrund zu großer Elementdeformationen die Rechnung. In Bild B2.12 und Bild B2.13 sind die Verformungen der Aluminiumplatte beider Berechnungen gegenübergestellt. Es sind keine großen Veränderungen zur Berechnung ohne Zugversagen zu verzeichnen.

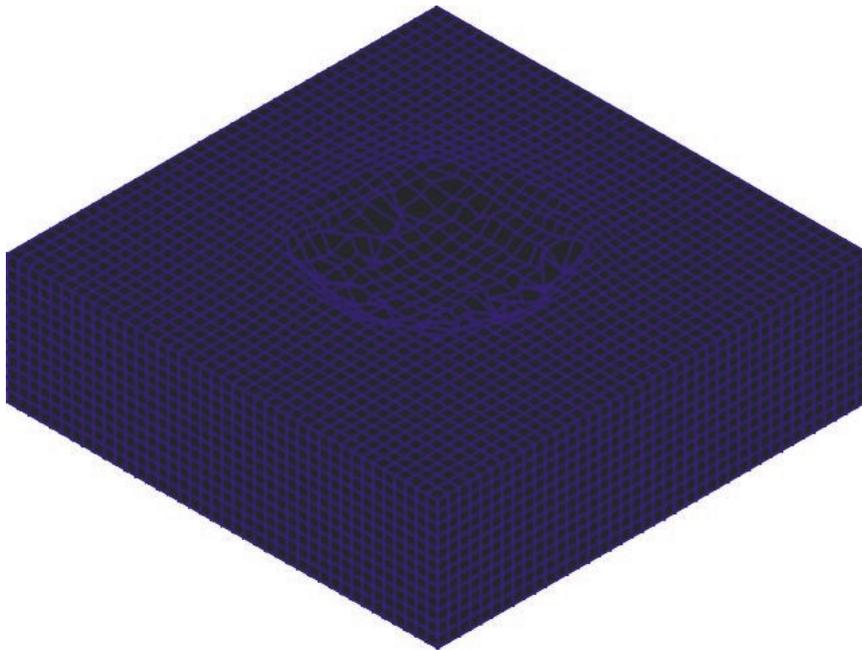


Bild B2.12: verformte Platte der ABAQUS-Rechnung zum Zeitpunkt $t=0,074$ ms

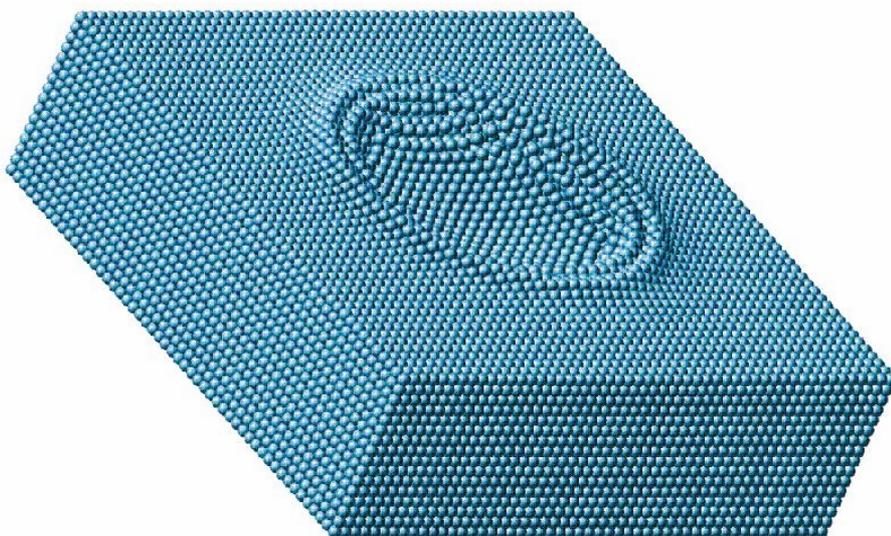


Bild B2.13: verformte Platte mit der SPH-Methode zum Zeitpunkt $t=0,074$ ms

Bild B2.14 zeigt die Deformation der Aluminiumplatte nach 218 μs bei der SPH-Simulation. Die Platte ist zu diesem Zeitpunkt weitgehend zerstört. Die Berechnung ist auch zu diesem wesentlich späteren Zeitpunkt noch stabil und könnte weiter fortgeführt werden.

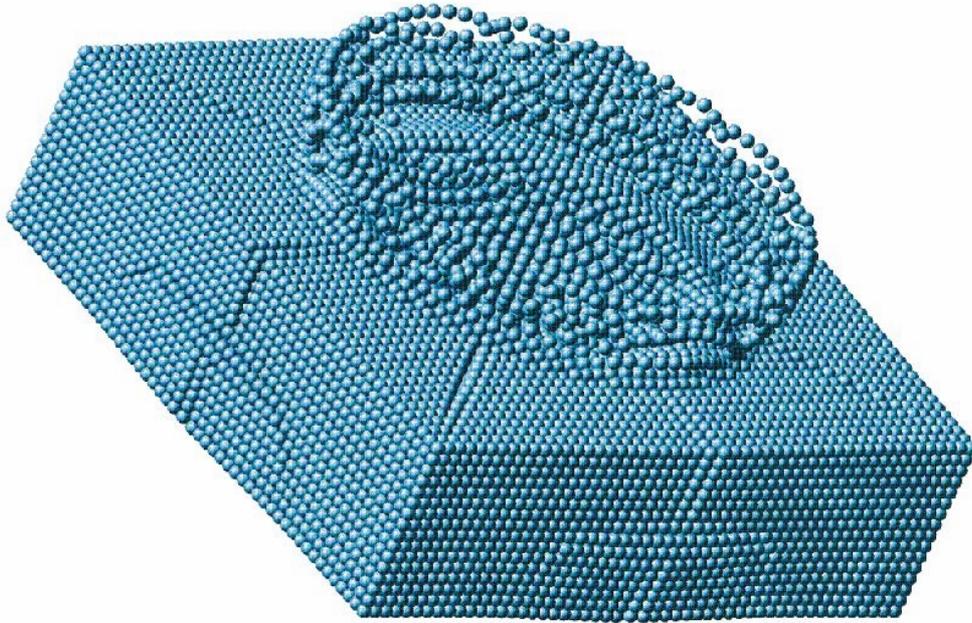


Bild B2.14: verformte Platte mit der SPH-Methode nach 0,218ms

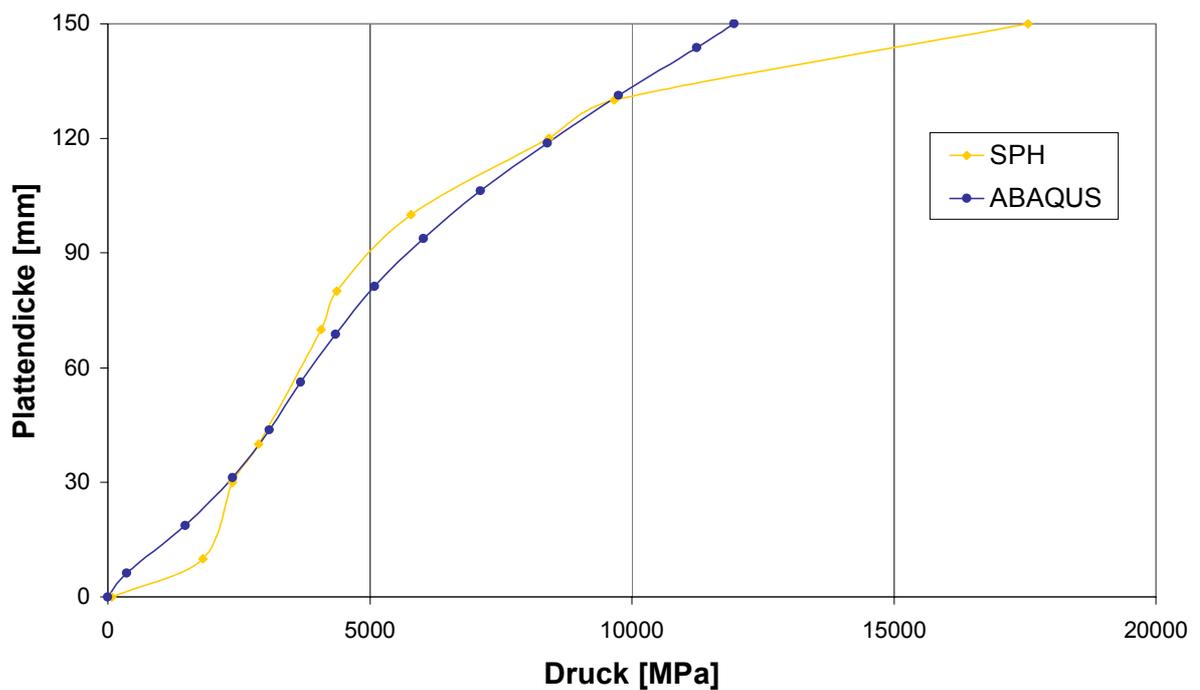


Bild B2.15: Maximaldruck in der Plattenmitte

Anhang C: Verformungsbilder

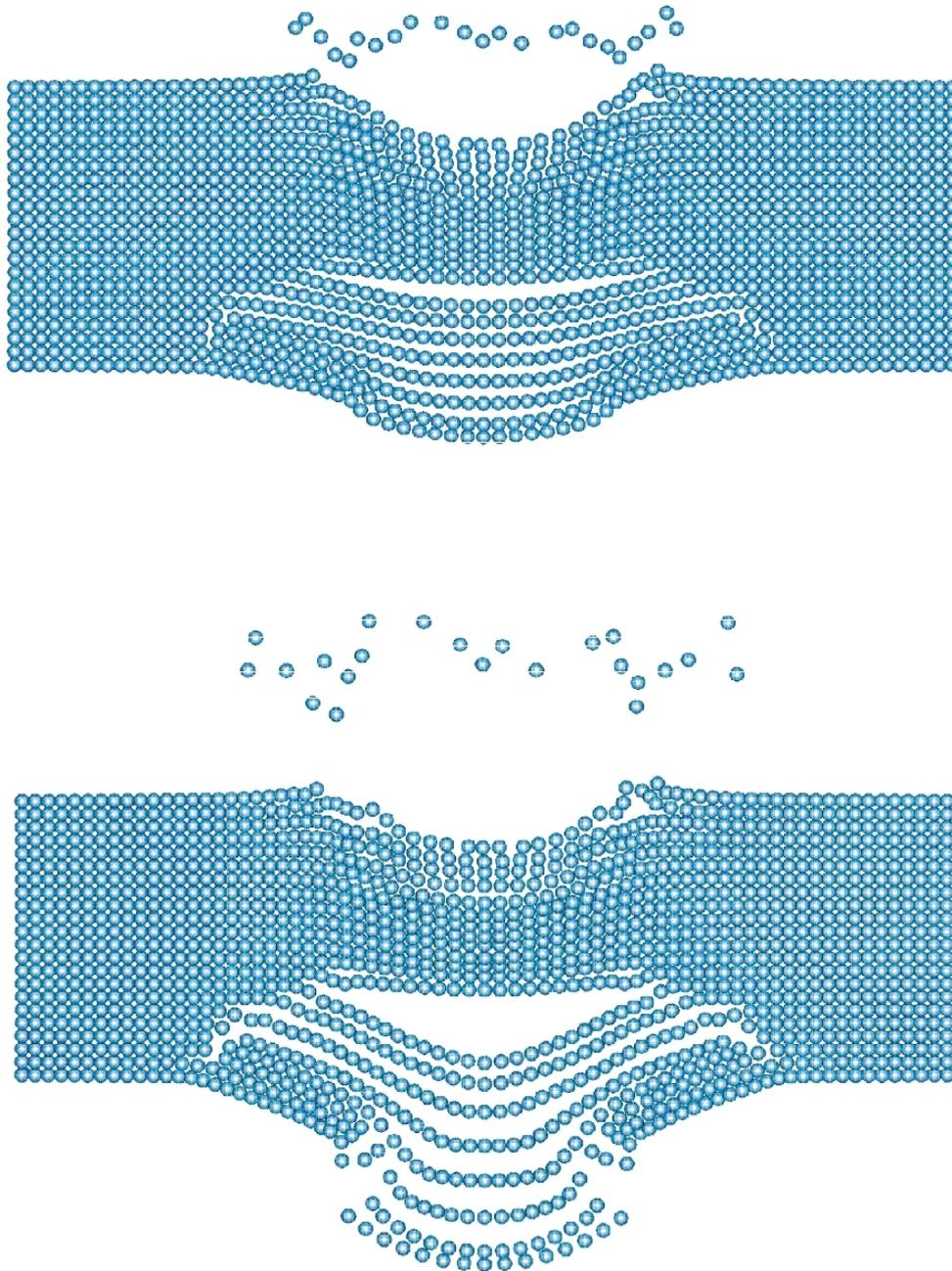


Bild C.1: Fragmentierungsprozeß der groben SPH-Platte S1 bzw. S2 nach a) 0,5 ms und b) 1,0 ms, in Plattenmitte

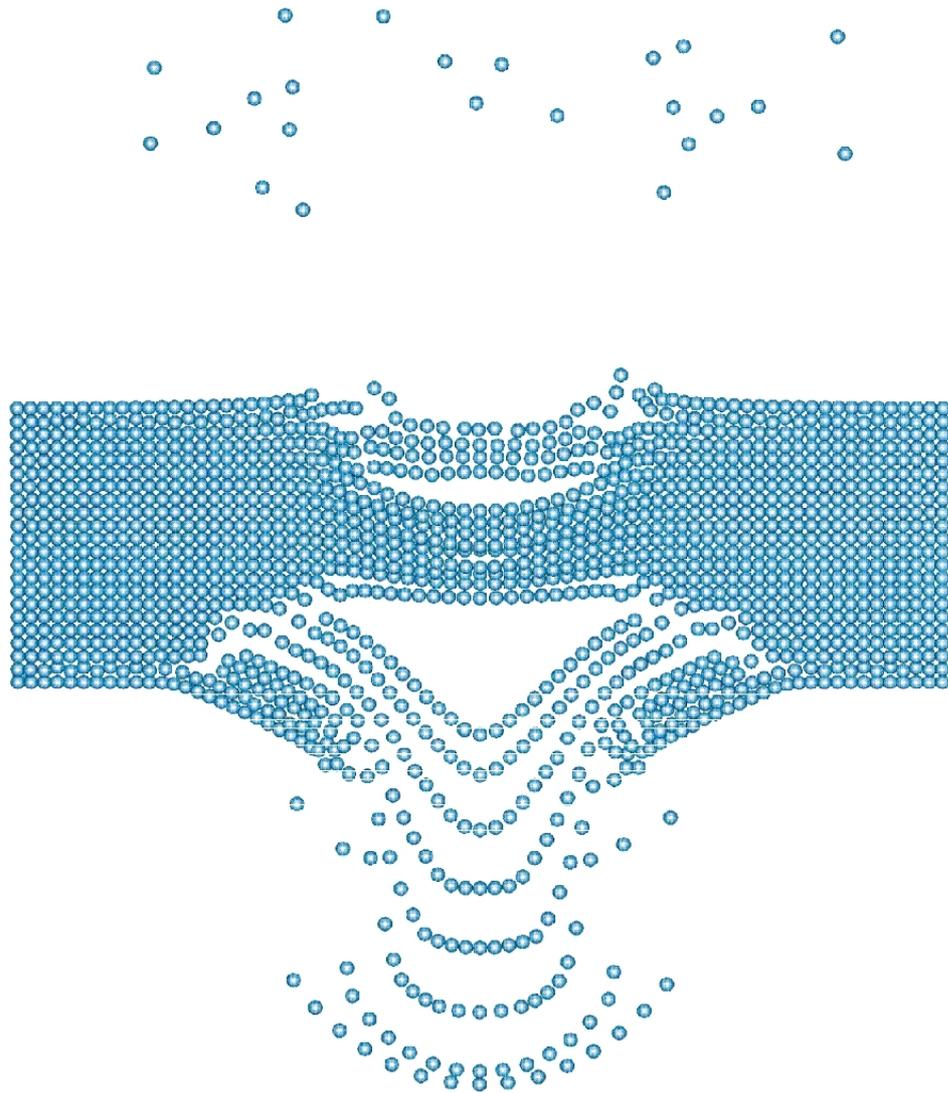


Bild C.2: Fragmentierungsprozeß der groben SPH-Platte S1 bzw. S2 nach 2,0 ms in Plattenmitte

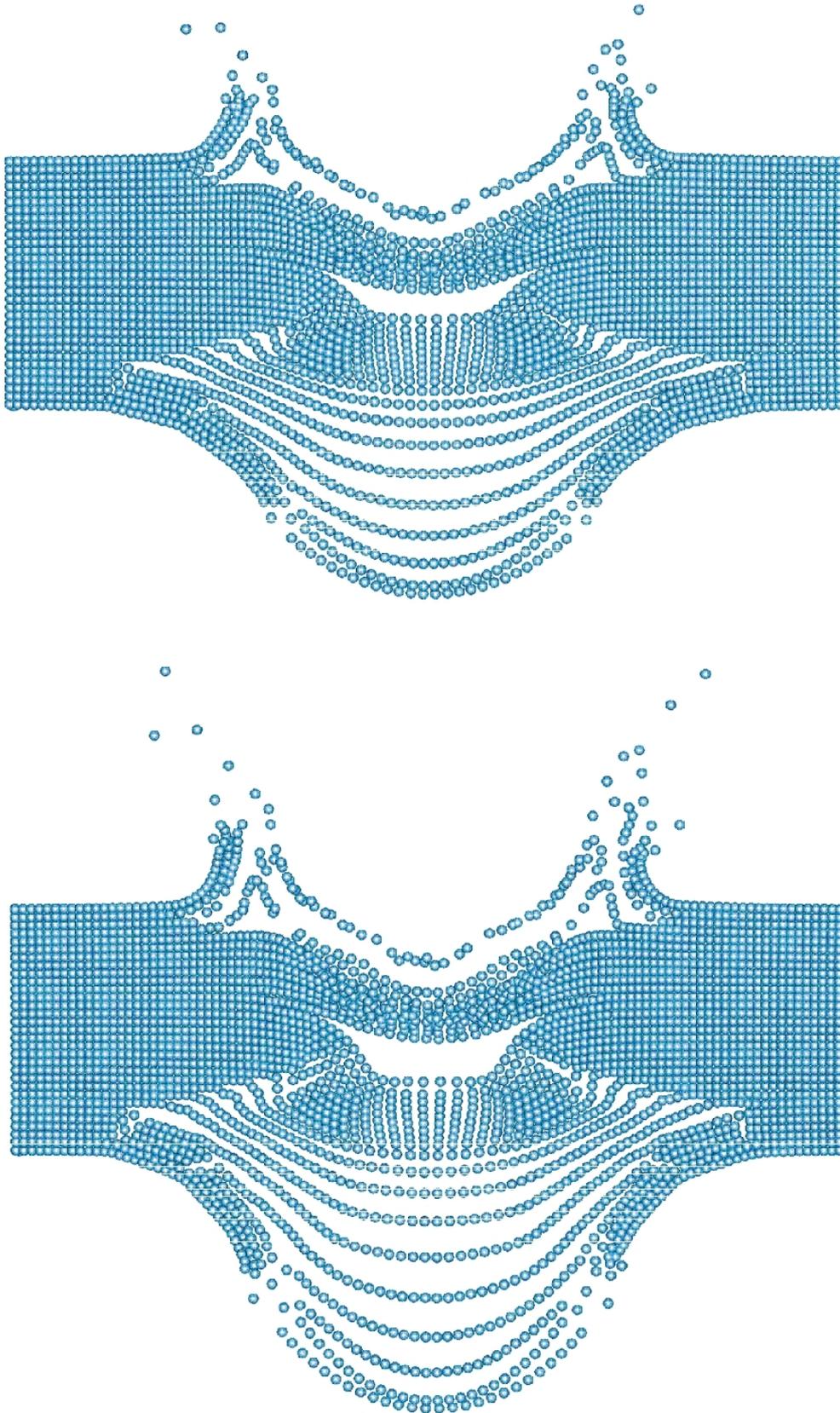


Bild C.3: Fragmentierungsprozeß der feinen SPH-Platte S1 bzw. S2 nach a) 0,8 ms und b) 1,0 ms, in Plattenmitte

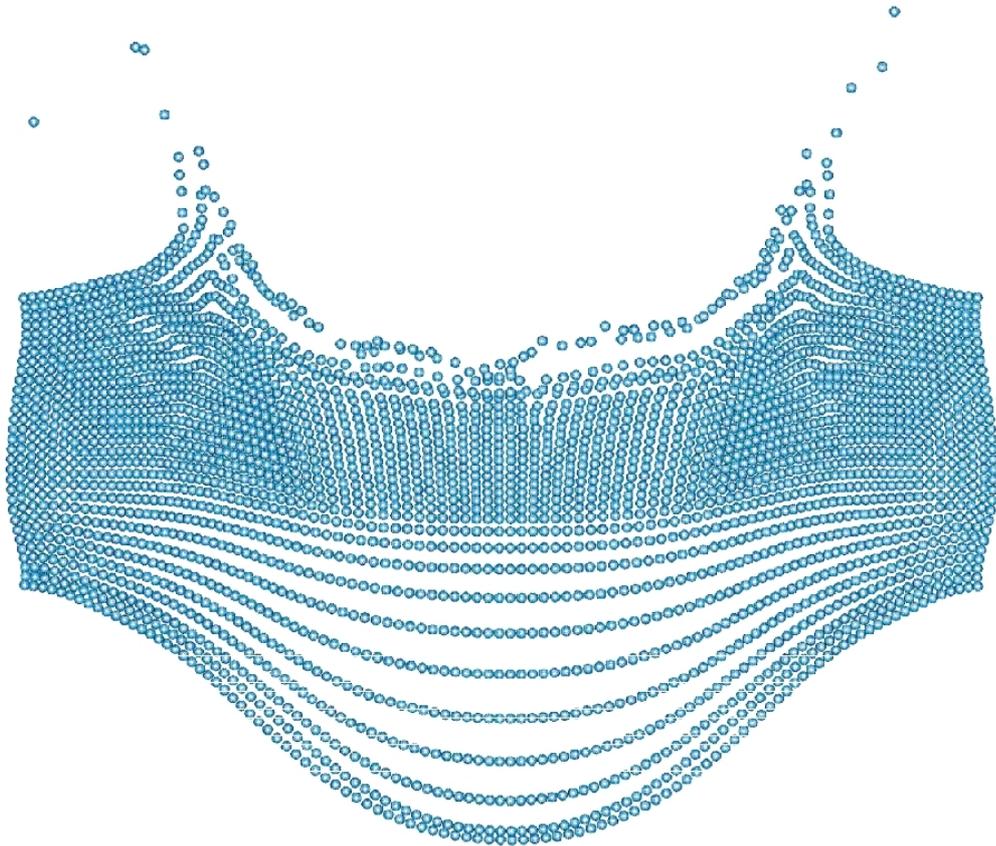


Bild C.4: Fragmentierungsprozeß der groben SPH-Platte S3 nach 0,6 ms in Plattenmitte

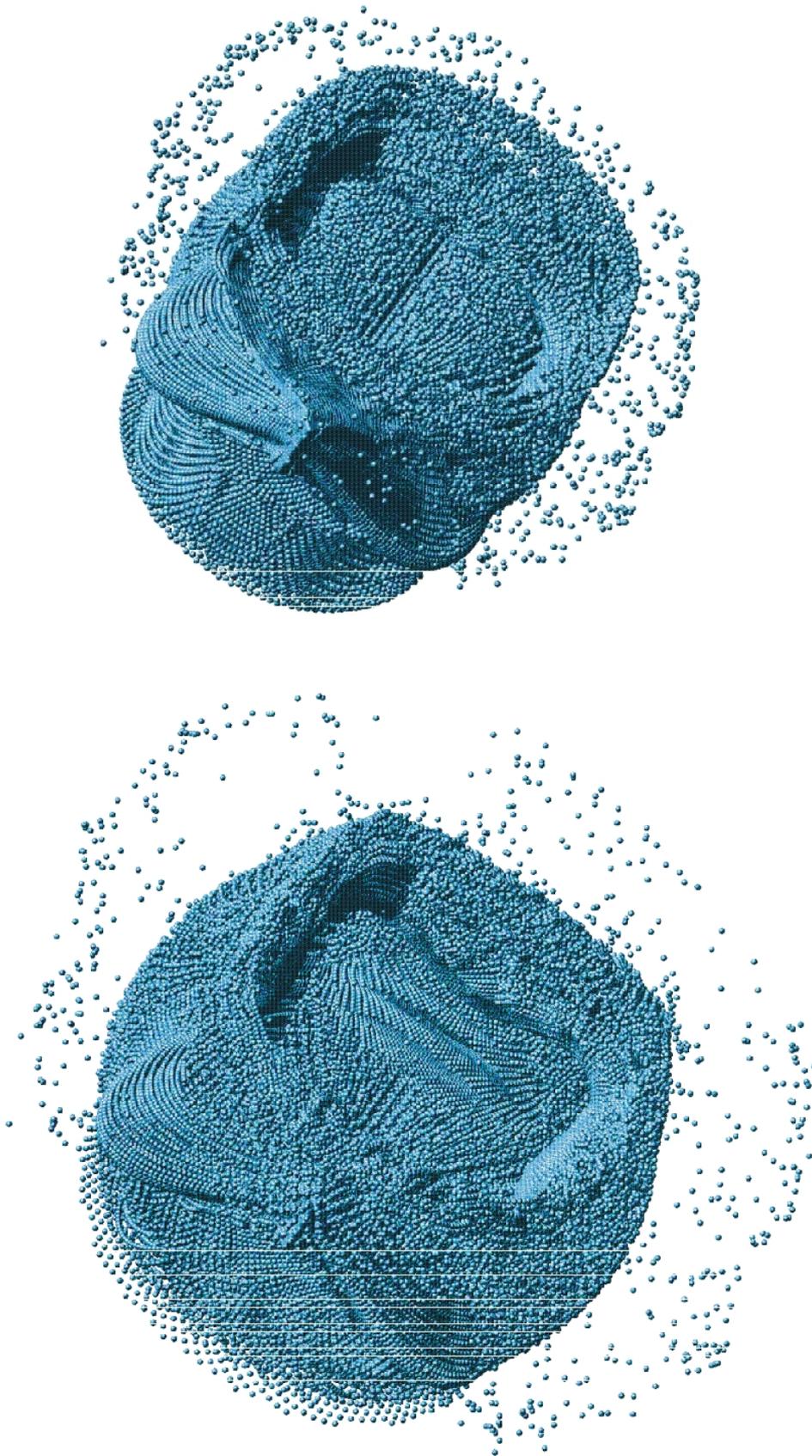


Bild C.5: Verformung der groben SPH-Platte S3 nach a) 8 ms und b) 12 ms

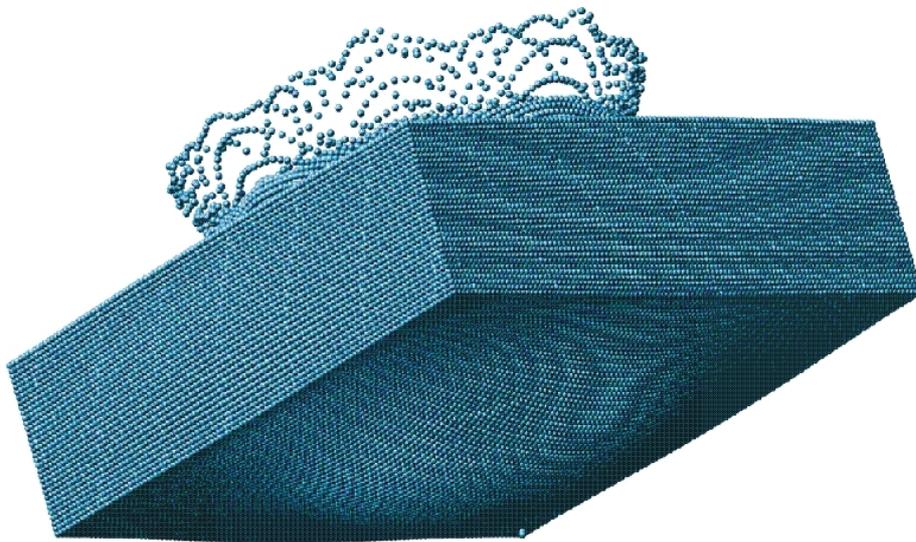
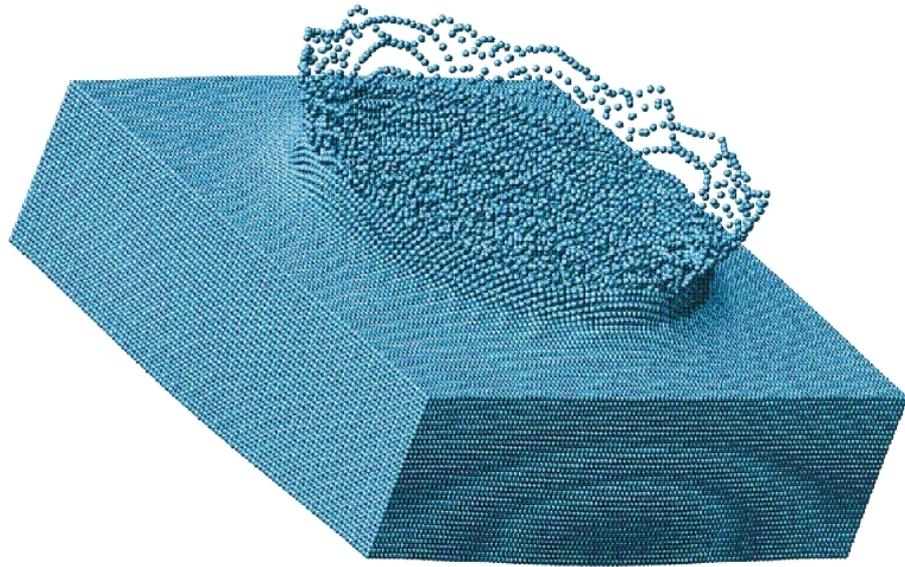


Bild C.6: Verformung der feinen SPH-Platte S3 nach 0,4 ms an a) Plattenoberkante und b) Plattenunterkante

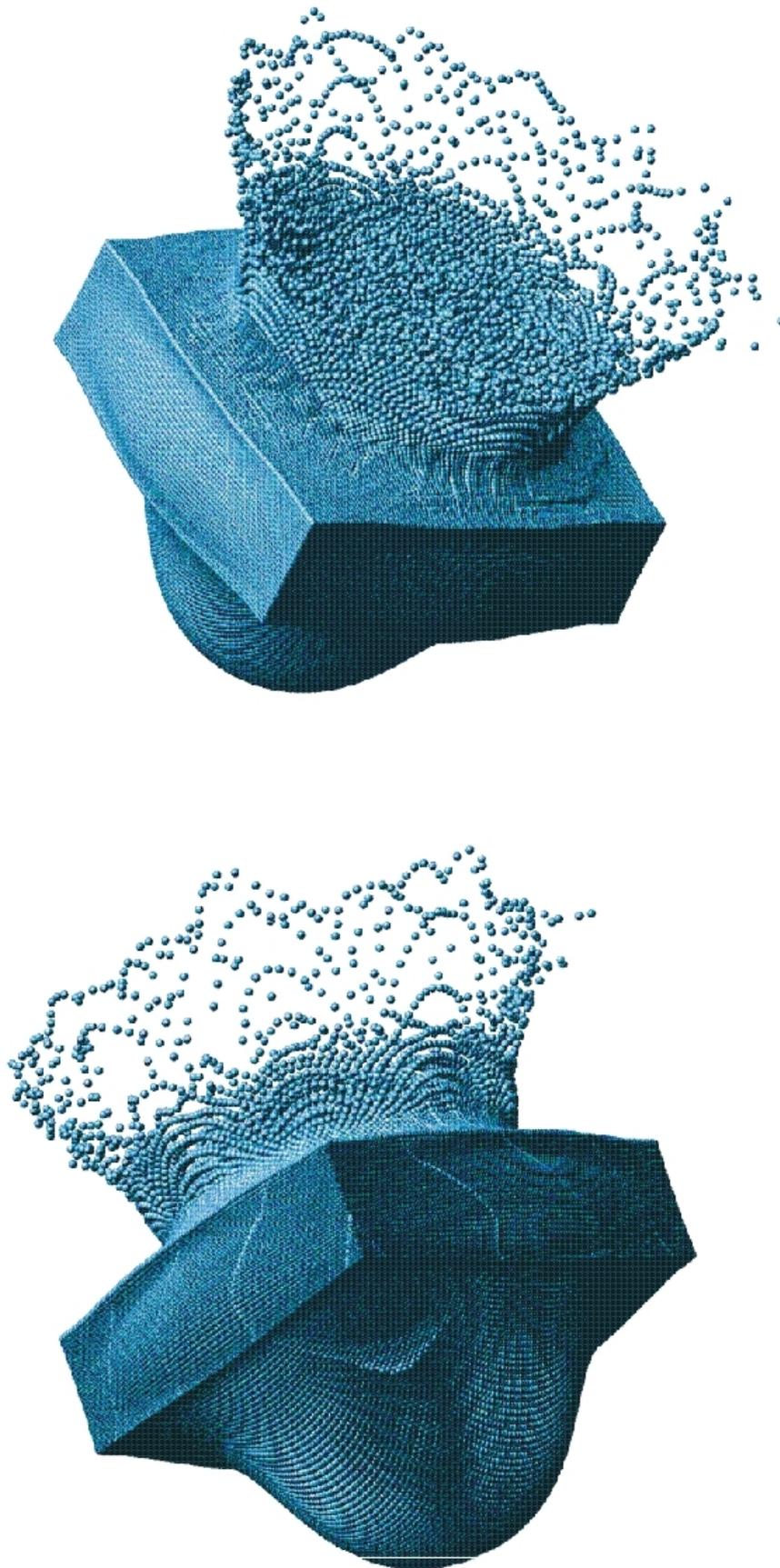


Bild C.7: Verformung der feinen SPH-Platte S3 nach 1,0 ms an a) Plattenoberkante und b) Plattenunterkante

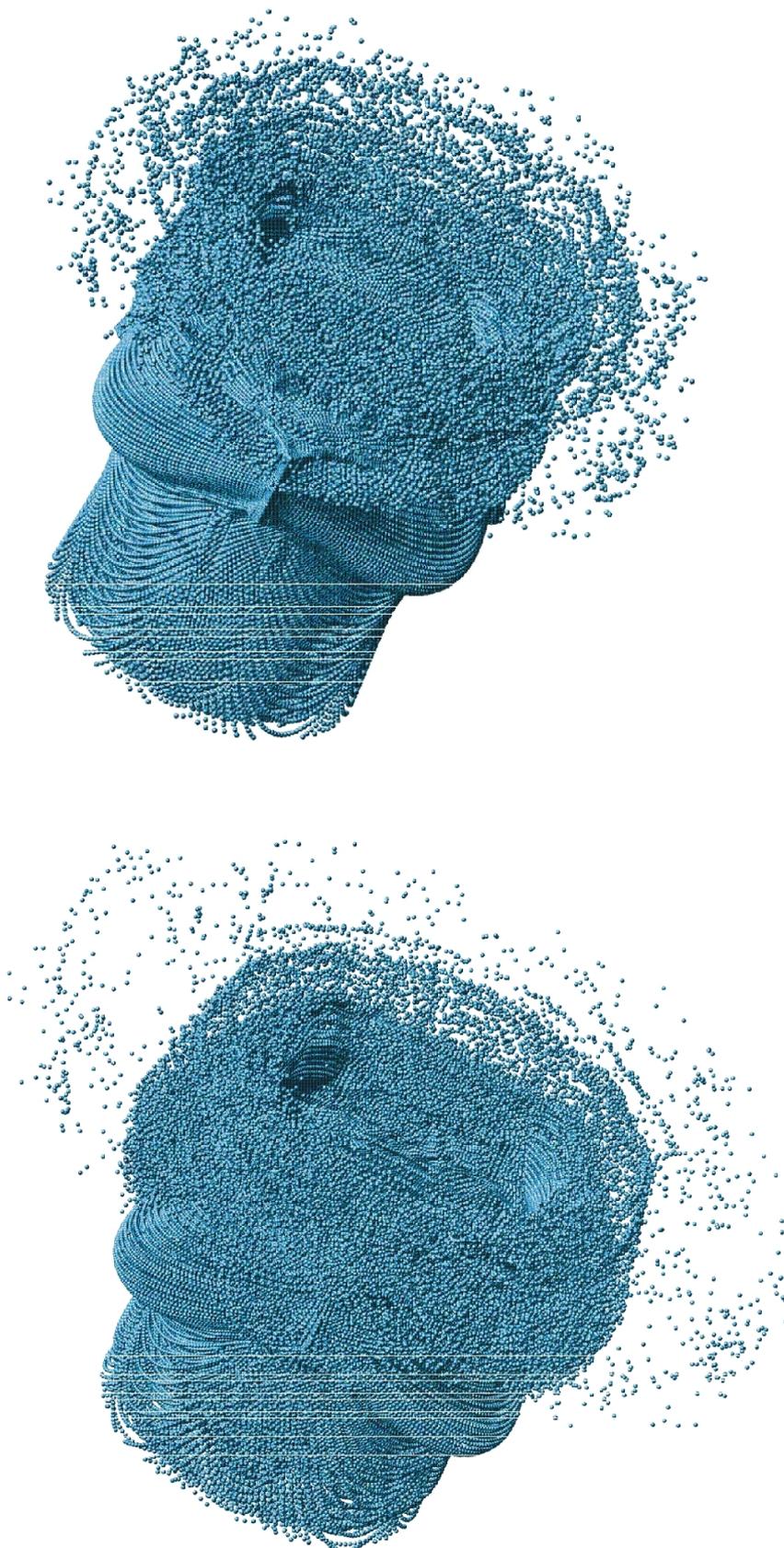


Bild C.8: Verformung der feinen SPH-Platte S3 nach a) 5 ms und b) 8 ms

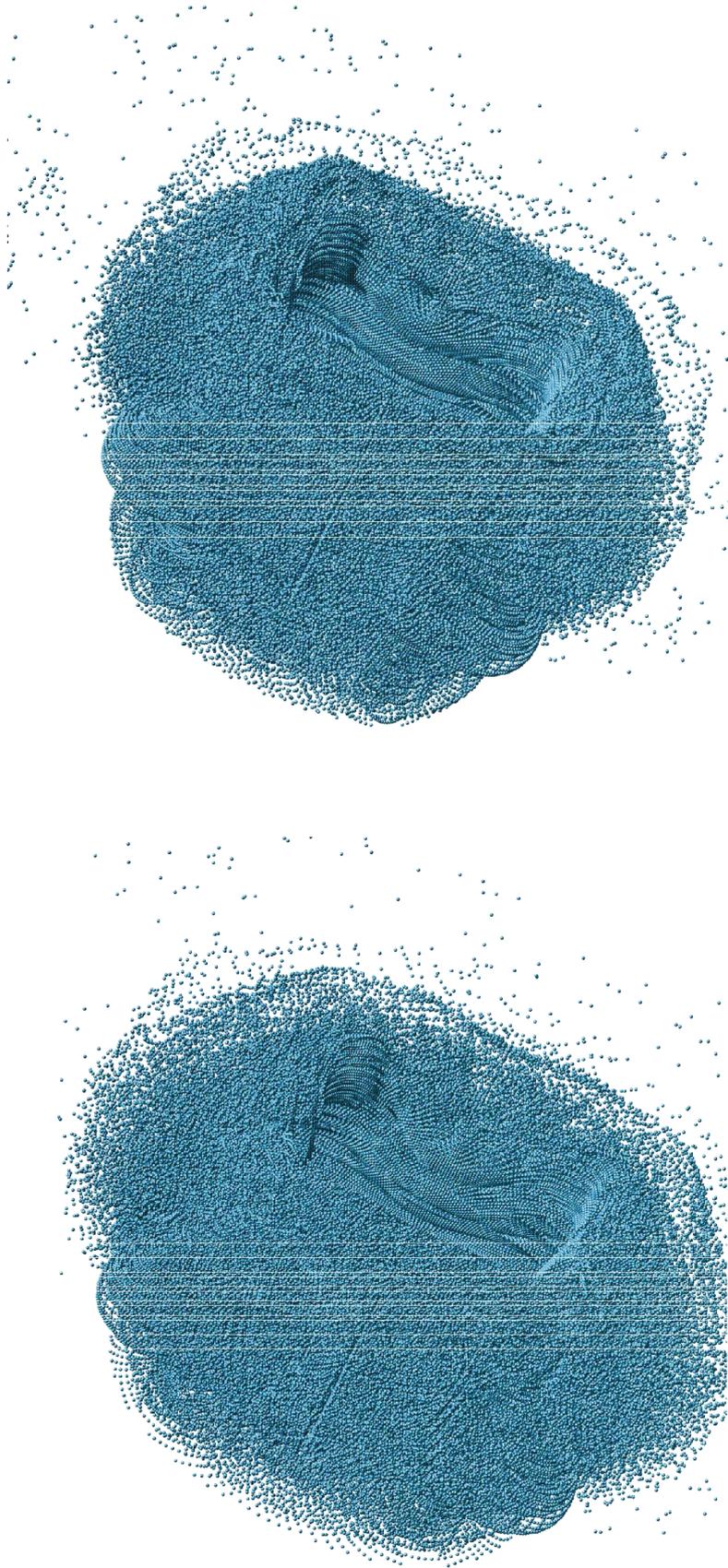


Bild C.9: Verformung der feinen SPH-Platte S3 nach a) 12 ms und b) 15 ms



Bild C.10: Versuchsaufbau der Platte S3

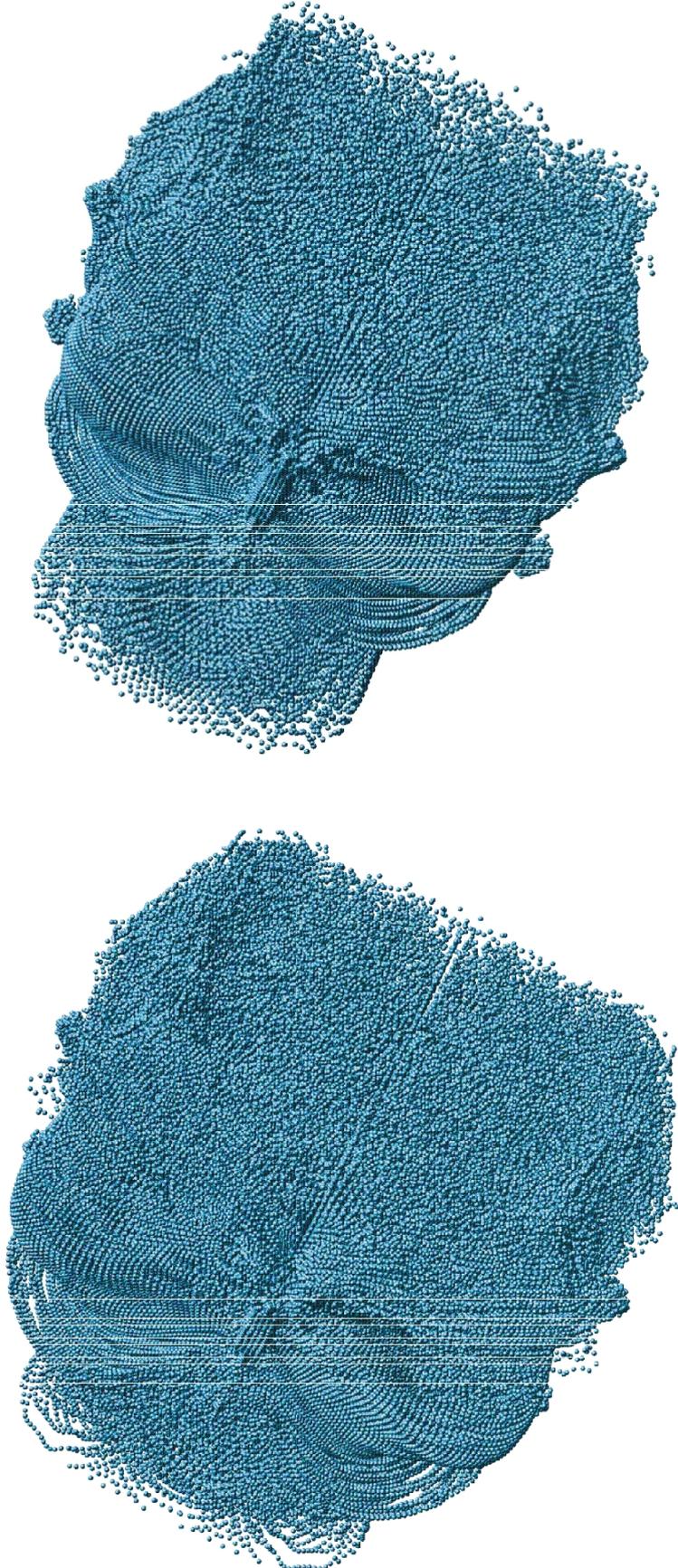


Bild C.11: Verformung der SPH-Platte P5 nach a) 8 ms, b) 12 ms



Bild C.12: Platte P5 a) vor dem Versuch, b) nach dem Versuch

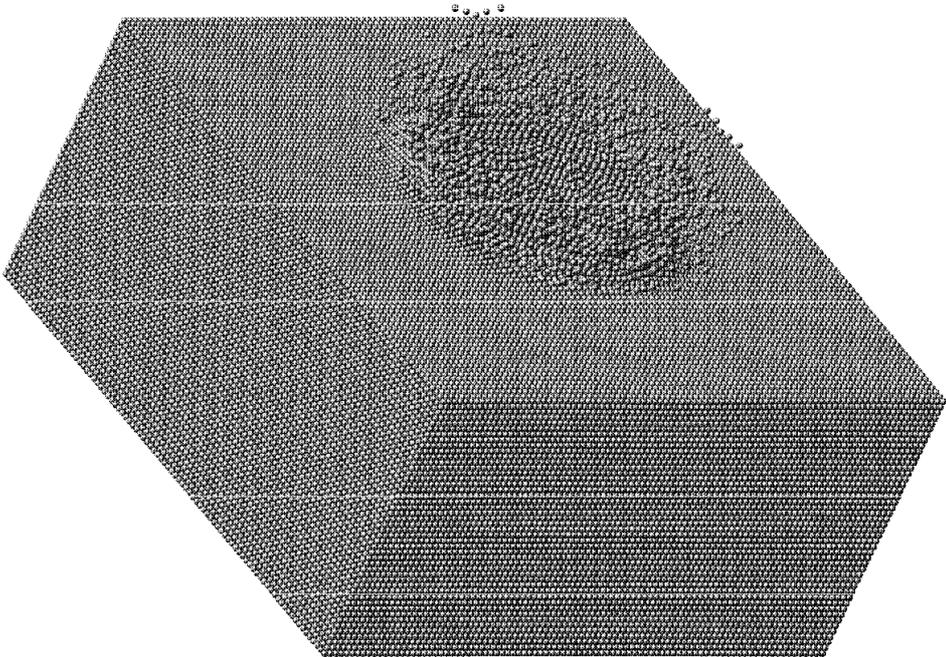
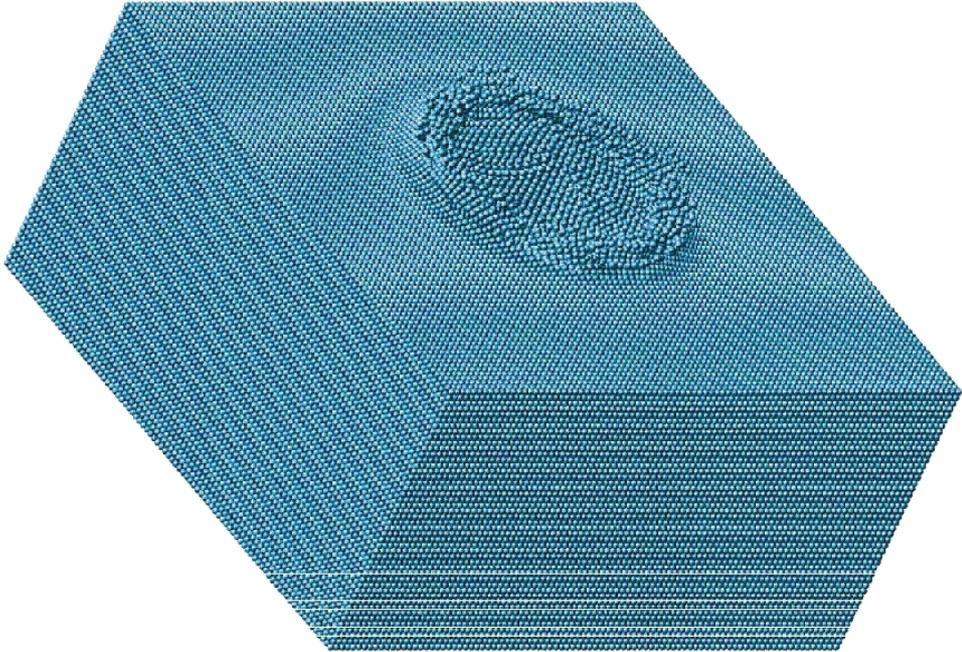


Bild C.13: Verformung der SPH-Platte P3 nach a) 0,5 ms, b) 1 ms

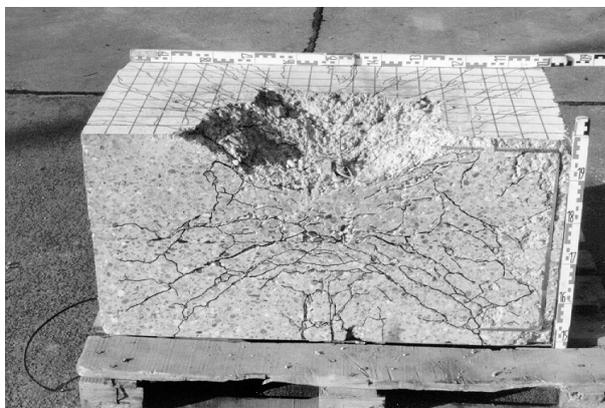


Bild C.14: Platte P3 nach dem Versuch

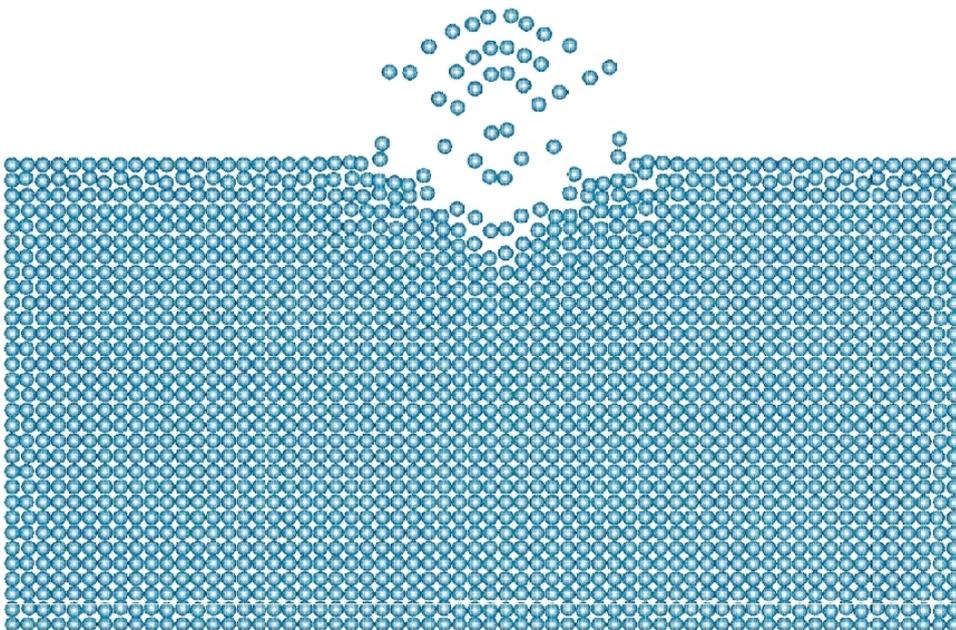
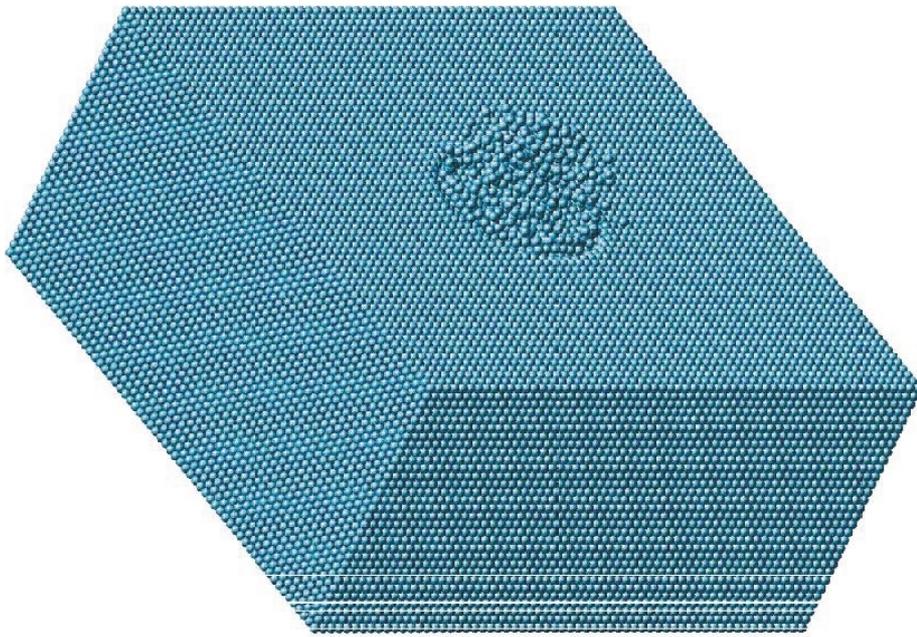


Bild C.15: Verformung der groben SPH-Platte P4 nach 1.0 ms

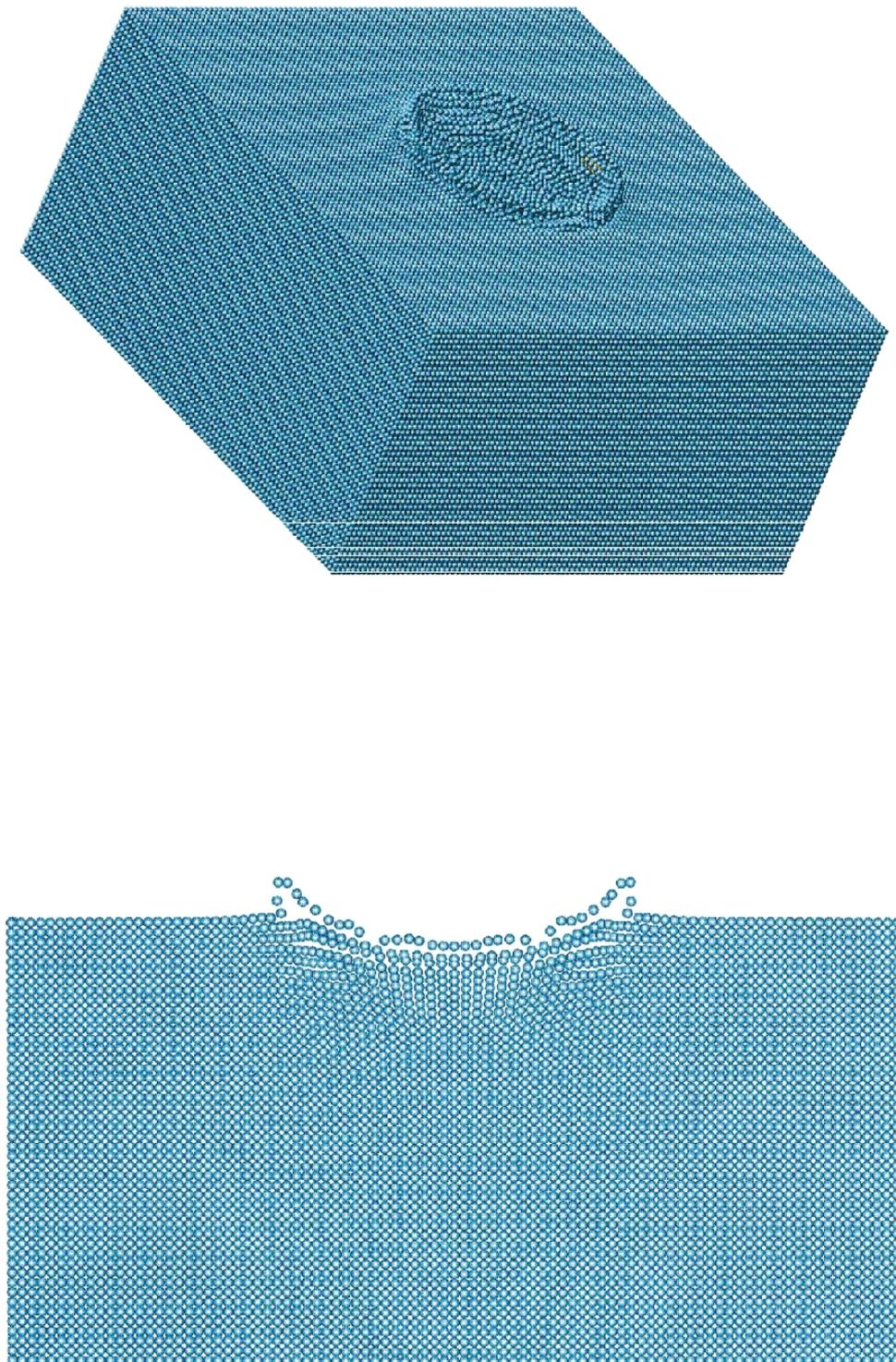


Bild C.16: Verformung der feinen SPH-Platte P4 nach 0,3 ms

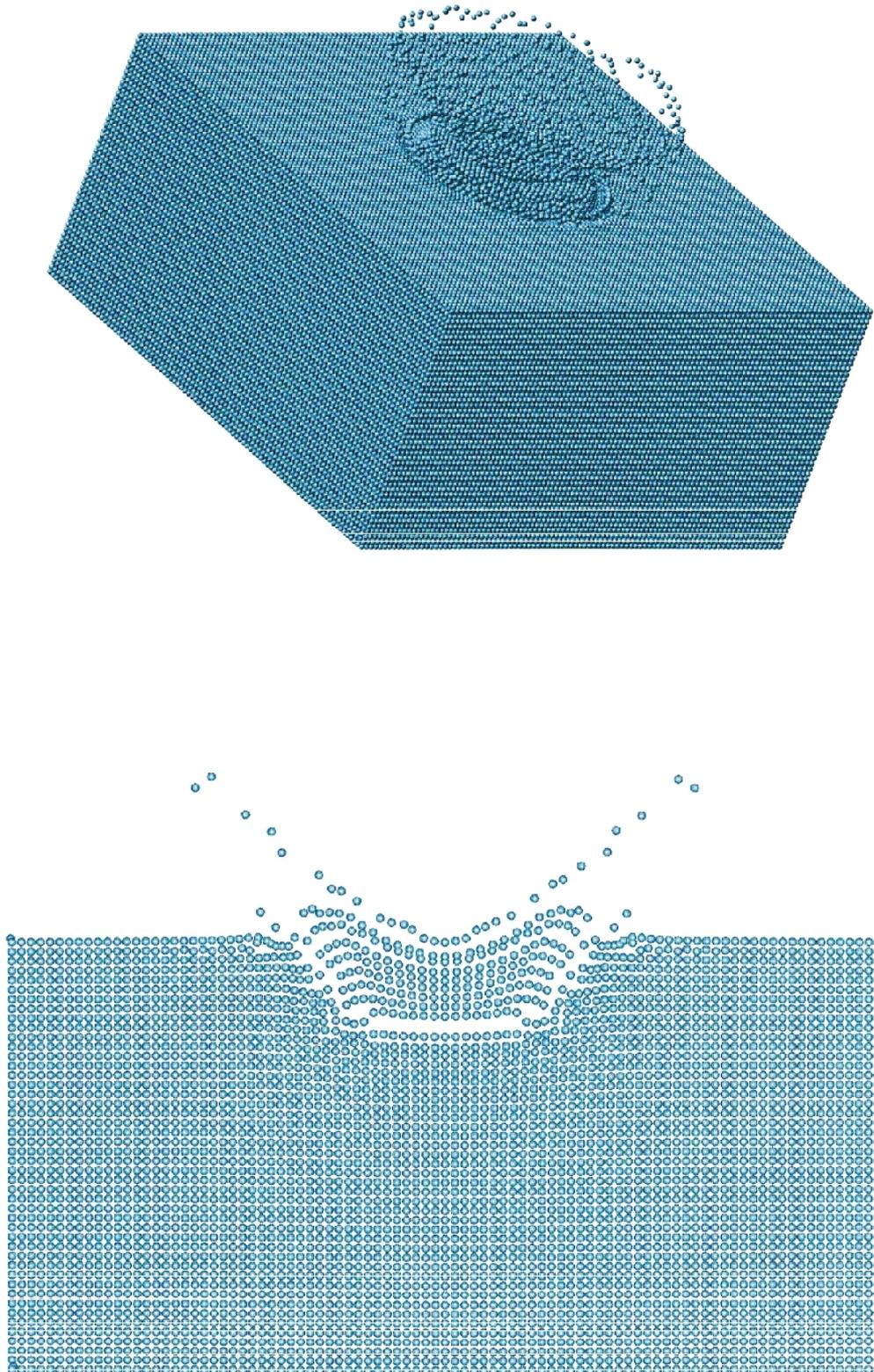


Bild C.17: Verformung der feinen SPH-Platte P4 nach 1,0 ms

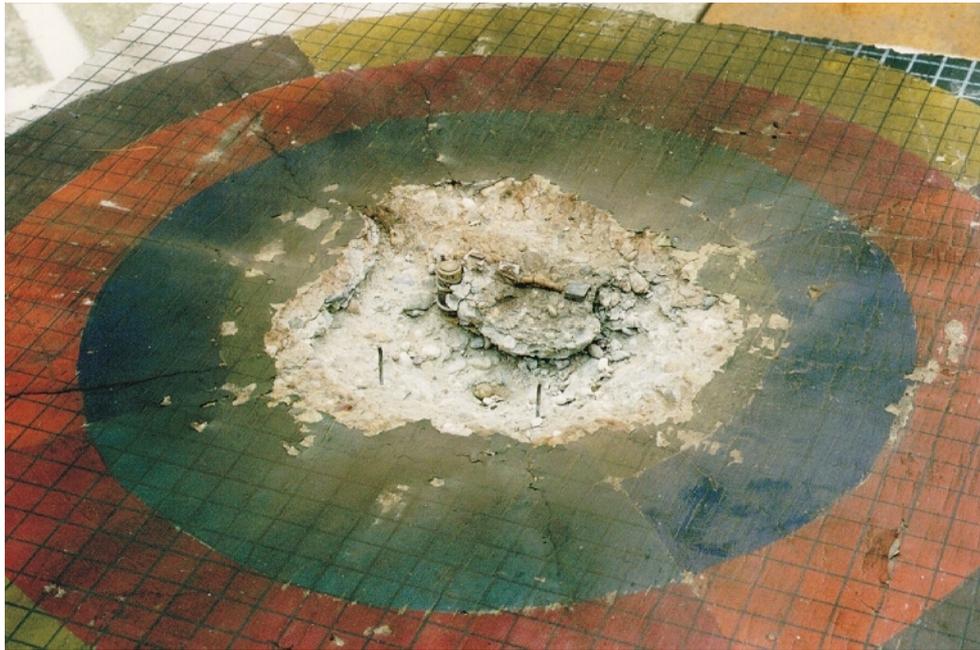


Bild C.18: Platte P4 nach dem Versuch

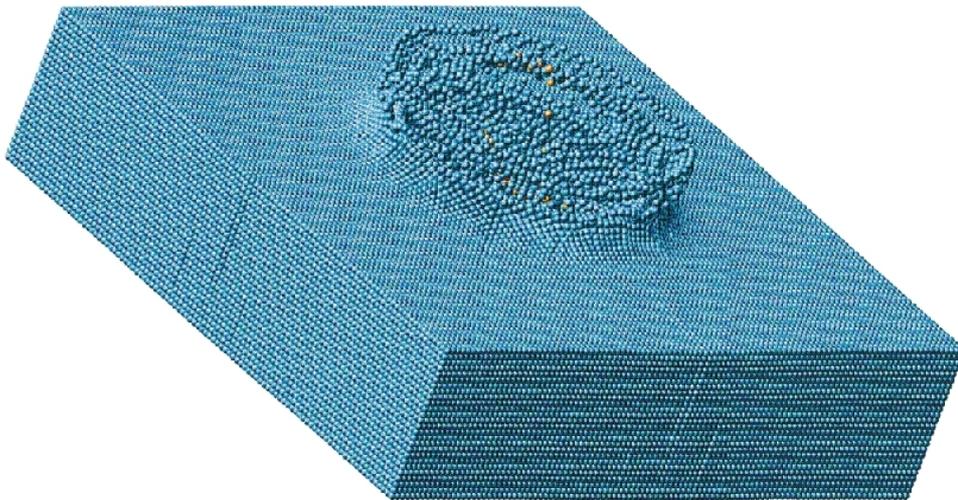


Bild C.19: Verformung der SPH-Platte O1 nach 0,4 ms

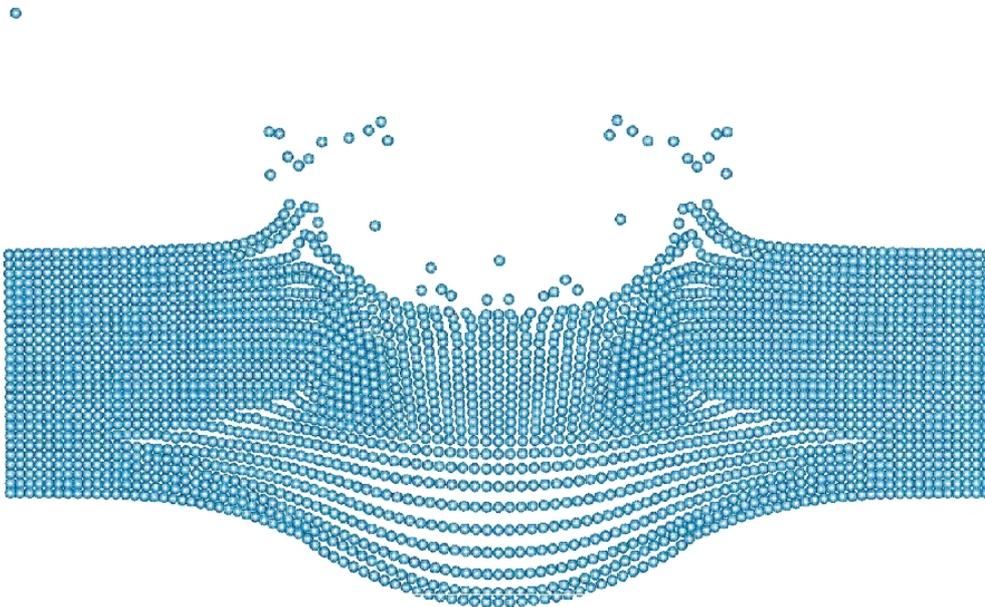


Bild C.20: Verformung der SPH-Platte O1 nach 0,4 ms in Plattenmitte

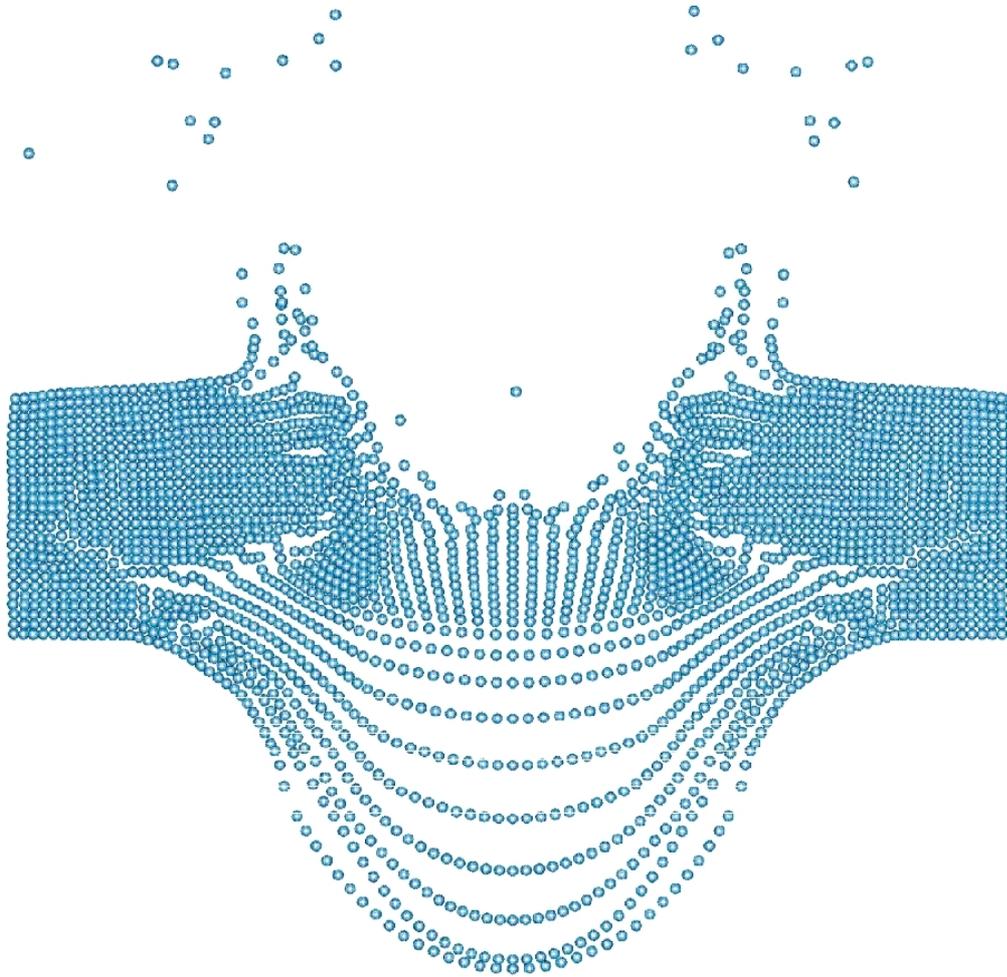


Bild C.21: Verformung der SPH-Platte O1 nach 1,0 ms in Plattenmitte

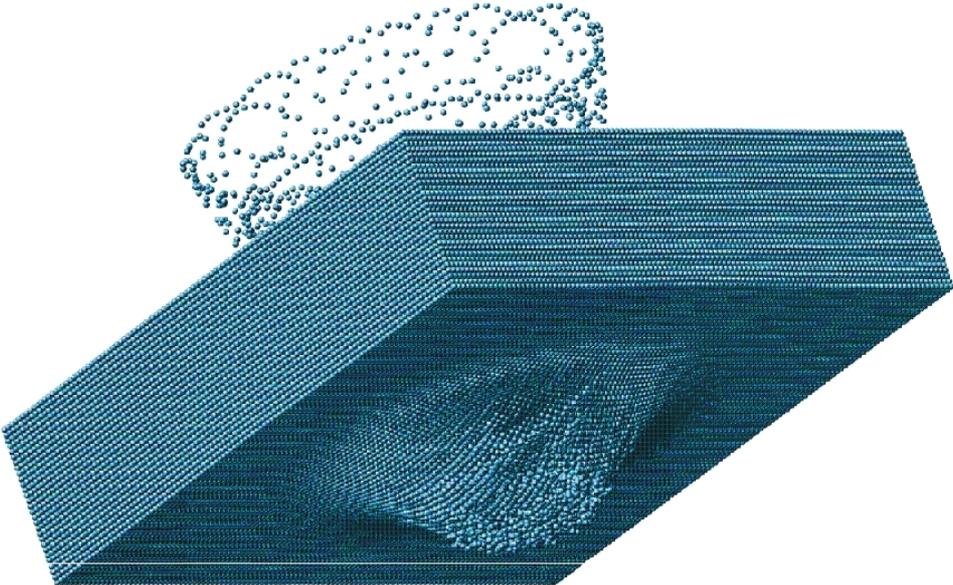
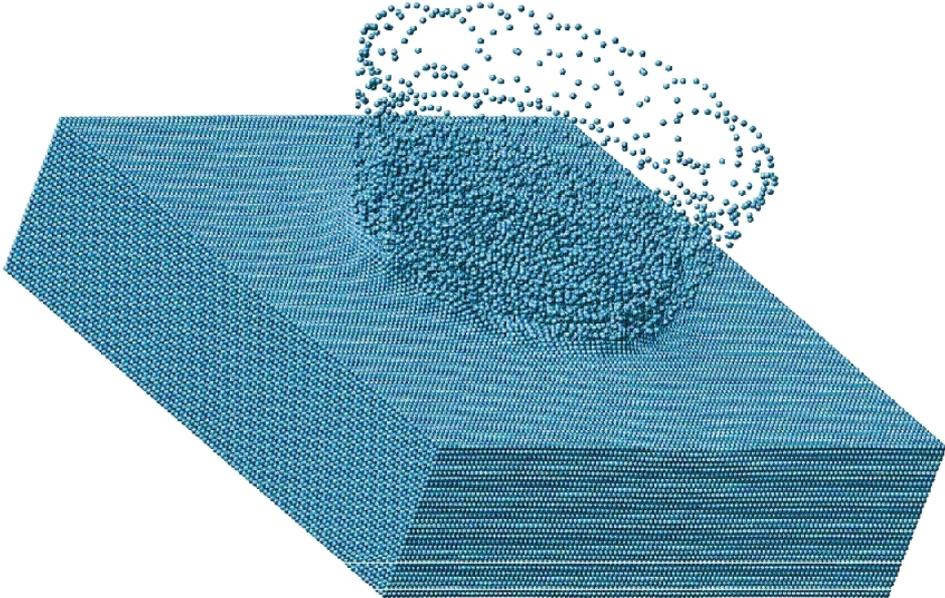


Bild C.22: Verformung der SPH-Platte O2 nach 1,0 ms an a) Plattenoberkante, b) Plattenunterkante

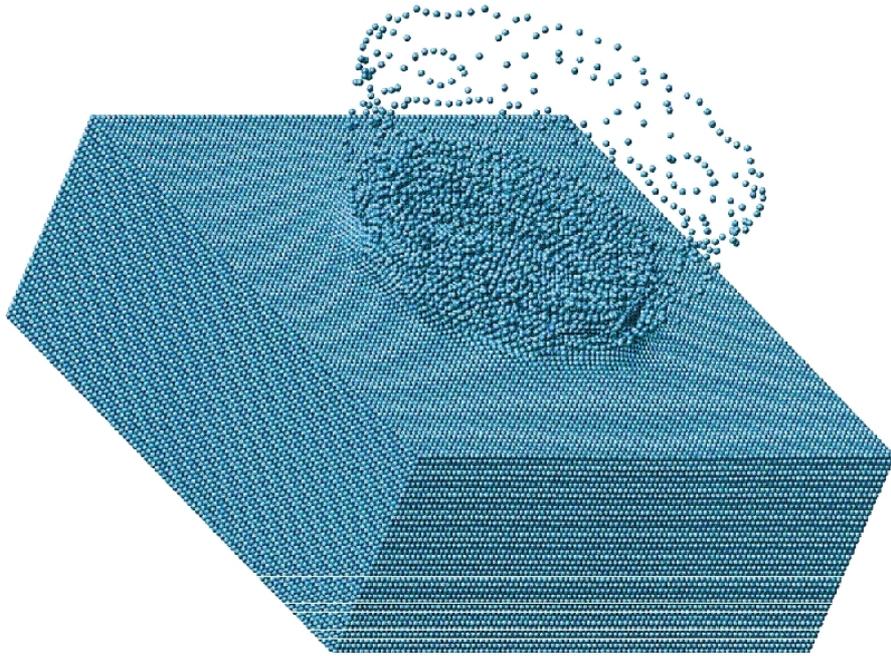


Bild C.23: Verformung der SPH-Platte O3 nach 1 ms

**Schriftenreihe des
Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie**

Herausgeber:

Prof. Dr.-Ing. Harald S. Müller und Prof. Dr.-Ing. Lothar Stempniewski

ISSN 0933-0461

- Heft 1** Manfred Curbach: *Festigkeitssteigerung von Beton bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten*. 1987
- Heft 2** Franz-Hermann Schlüter: *Dicke Stahlbetonplatten unter stoßartiger Belastung - Flugzeugabsturz*. 1987
- Heft 3** Marlies Schieferstein: *Der Zugflansch von Stahlbetonplattenbalken unter Längsschub und Querbiegung bei kritischer Druckbeanspruchung von Beton*. 1988
- Heft 4** Thomas Bier: *Karbonatisierung und Realkalisierung von Zementstein und Beton*. 1988
- Heft 5** Wolfgang Brameshuber: *Bruchmechanische Eigenschaften von jungem Beton*. 1988
- Heft 6** Bericht DFG-Forschungsschwerpunkt: *Durability of Non-Metallic Inanorganic Building Materials*. 1988
- Heft 7** Manfred Feyerabend: *Der harte Querstoß auf Stützen aus Stahl und Stahlbeton*. 1988
- Heft 8** Klaus F. Schönlin: *Permeabilität als Kennwert der Dauerhaftigkeit von Beton*. 1989
- Heft 9** Lothar Stempniewski: *Flüssigkeitsgefüllte Stahlbetonbehälter unter Erdbebeneinwirkung*. 1990
- Heft 10** Jörg Weidner: *Vergleich von Stoffgesetzen granularer Schüttgüter zur Silodruckermittlung*. 1990
- Heft 11** Pingli Yi: *Explosionseinwirkungen auf Stahlbetonplatten*. 1991
- Heft 12** Rainer Kunterding: *Beanspruchung der Oberfläche von Stahlbetonsilos durch Schüttgüter*. 1991

- Heft 13** Peter Haardt: *Zementgebundene und kunststoffvergütete Beschichtungen auf Beton*. 1991
- Heft 14** Günter Rombach: *Schüttguteinwirkungen auf Silozellen - Exzentrische Entleerung*. 1991
- Heft 15** Harald Garrecht: *Porenstrukturmodelle für den Feuchtehaushalt von Baustoffen mit und ohne Salzbefrachtung und rechnerische Anwendung auf Mauerwerk*. 1992
- Heft 16** Violandi Vratsanou: *Das nichtlineare Verhalten unbewehrter Mauerwerksscheiben unter Erdbebenbeanspruchung - Hilfsmittel zur Bestimmung der q-Faktoren*. 1992
- Heft 17** Carlos Rebelo: *Stochastische Modellierung menschengenerierter Schwingungen*. 1992
- Heft 18** Seminar 29./30. März 1993: *Erdbebenauslegung von Massivbauten unter Berücksichtigung des Eurocode 8*. 1993
- Heft 19** Hubert Bachmann: *Die Massenträgheit in einem Pseudo-Stoffgesetz für Beton bei schneller Zugbeanspruchung*. 1993
- Heft 20** DBV/AiF-Forschungsbericht: H. Emrich: *Zum Tragverhalten von Stahlbetonbauteilen unter Querkraft- und Längszugbeanspruchung*. 1993
- Heft 21** Robert Stolze: *Zum Tragverhalten von Stahlbetonplatten mit von den Bruchlinien abweichender Bewehrungsrichtung - Bruchlinien-Rotationskapazität*. 1993
- Heft 22** Jie Huang: *Extern vorgespannte Segmentbrücken unter kombinierter Beanspruchung aus Biegung, Querkraft und Torsion*. 1994
- Heft 23** Rolf Wörner: *Verstärkung von Stahlbetonbauteilen mit Spritzbeton*. 1994
- Heft 24** Ioannis Retzepis: *Schiefe Betonplatten im gerissenen Zustand*. 1995
- Heft 25** Frank Dahlhaus: *Stochastische Untersuchungen von Silobeanpruchungen*. 1995
- Heft 26** Cornelius Ruckenbrod: *Statische und dynamische Phänomene bei*

der Entleerung von Silozellen. 1995

- Heft 27** Shishan Zheng: *Beton bei variierender Dehngeschwindigkeit, untersucht mit einer neuen modifizierten Split-Hopkinson-Bar-Technik. 1996*
- Heft 28** Yong-zhi Lin: *Tragverhalten von Stahlfaserbeton. 1996*
- Heft 29** DFG: *Korrosion nichtmetallischer anorganischer Werkstoffe im Bauwesen. 1996*
- Heft 30** Jürgen Ockert: *Ein Stoffgesetz für die Schockwellenausbreitung in Beton. 1997*
- Heft 31** Andreas Braun: *Schüttgutbeanspruchungen von Silozellen unter Erdbebeneinwirkung. 1997*
- Heft 32** Martin Günter: *Beanspruchung und Beanspruchbarkeit des Verbundes zwischen Polymerbeschichtungen und Beton. 1997*
- Heft 33** Gerhard Lohrmann: *Faserbeton unter hoher Dehngeschwindigkeit. 1998*
- Heft 34** Klaus Idda: *Verbundverhalten von Betonrippenstäben bei Querszug. 1999*
- Heft 35** Stephan Kranz: *Lokale Schwind- und Temperaturgradienten in bewehrten, oberflächennahen Zonen von Betonstrukturen. 1999*
- Heft 36** Gunther Herold: *Korrosion zementgebundener Werkstoffe in mineral-sauren Wässern. 1999*
- Heft 37** Mostafa Mehrfza: *Entleerungsdrücke in Massefluss-Silos - Einflüsse der Geometrie und Randbedingungen. 2000*
- Heft 38** Tarek Nasr: *Druckentlastung bei Staubexplosionen in Siloanlagen. 2000*
- Heft 39** Jan Akkermann: *Rotationsverhalten von Stahlbeton-Rahmen-ecken. 2000*
- Heft 40** Viktor Mechtcherine: *Bruchmechanische und fraktologische Untersuchungen zur Rißausbreitung in Beton. 2001*

- Heft 41** Ulrich Häußler-Combe: *Elementfreie Galerkin-Verfahren – Grundlagen und Einsatzmöglichkeiten zur Berechnung von Stahlbetontragwerken*. 2001
- Heft 42** Björn Schmidt-Hurtienne: *Ein dreiaxiales Schädigungsmodell für Beton unter Einschluß des Dehnrateneffekts bei Hochgeschwindigkeitsbelastung*. 2001
- Heft 43** Nazir Abdou: *Ein stochastisches nichtlineares Berechnungsverfahren für Stahlbeton mit finiten Elementen*. 2002
- Heft 44** Andreas Plotzitz: *Ein Verfahren zur numerischen Simulation von Betonstrukturen beim Abbruch durch Sprengen*. 2002
- Heft 45** Timon Rabczuk: *Numerische Untersuchungen zum Fragmentierungsverhalten von Beton mit Hilfe der SPH-Methode*. 2002

Frühere Berichte des
Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie

Ulrich Häußler: *Geschwindigkeits- und Spannungsfelder beim Entleeren von Silozellen.* 1984

Wilfried Gladen: *Numerische Untersuchungen der Lasten in Silozellen beim exzentrischen Entleeren.* 1985

Bezug der Hefte: Institut für Massivbau und Baustofftechnologie
Universität Karlsruhe
Postfach 6980, **D - 76128 Karlsruhe**
Tel. 0721/608-2263; Fax 0721/608-2265

Druckkostenzuschuss incl. Porto: je Heft DM 30,-

Außerdem noch erhältlich:

Festschrift
Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr.techn. h.c. Josef Eibl

Aus dem Massivbau und seinem Umfeld

788 Seiten, Preis incl. Versand: DM 50,-

