

Magnetohydrodynamische Schmierspaltströmung bei unendlich schmaler Lagergeometrie

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

von der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Bernhard Schweizer
aus Sigmaringendorf

Tag der mündlichen Prüfung: 6. Juni 2002

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. J. Wauer

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. U. Müller

Der Verfasser möchte Herrn Professor Dr.-Ing. J. Wauer für die Anregung zu dieser Arbeit und für die verständnisvolle Förderung seinen herzlichen Dank aussprechen.

Herrn Professor Dr.-Ing. U. Müller dankt der Verfasser für die Übernahme des Korreferats und für die freundliche Aufnahme der Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Zur MHD Lagertheorie	5
1.2	Inhalt der Arbeit	6
1.3	Literaturübersicht	8
2	Bilanz- und Konstitutivgleichungen	10
2.1	Magnetogasdynamische Grundgleichungen	10
2.2	Vereinfachende Annahmen	12
3	Kompressible Strömung	19
3.1	Radiales eingepprägtes Magnetfeld	20
3.1.1	Strenge Lösung in impliziter Form	20
3.1.2	Explizite Reihendarstellung	26
3.2	Axiales eingepprägtes Magnetfeld	39
3.2.1	Strenge Lösung in impliziter Form	44
3.2.2	Explizite Reihendarstellung	44
3.3	Toroidales eingepprägtes Magnetfeld	44

3.3.1	Explizite Reihendarstellung	51
4	Inkompressible Strömung	66
4.1	Radiales eingprägtes Magnetfeld	66
4.1.1	Sommerfeldzahl der Drehung	66
4.1.2	Sommerfeldzahl der Verdrängung	70
4.2	Axiales eingprägtes Magnetfeld	71
4.2.1	Sommerfeldzahl der Drehung	71
4.2.2	Sommerfeldzahl der Verdrängung	73
4.3	Toroidales eingprägtes Magnetfeld	73
4.3.1	Sommerfeldzahl der Drehung	73
4.3.2	Sommerfeldzahl der Verdrängung	76
5	Stabilitätsanalyse eines MHD gelagerten Laval-Rotors	79
5.1	Feder- und Dämpferkonstanten des Schmierfilms	79
5.2	Stabilitätskarten	80
6	Auftrieb durch oszillierende elektrische Felder	85
6.1	Ebener Gleitschuh bei axialem harmonischen E -Feld	86
6.2	Ebener Gleitschuh bei transversalem harmonischen E -Feld	88
6.3	Radiallager bei axialem harmonischen E -Feld	94
6.4	Radiallager bei radialem harmonischen E -Feld	99
7	Zusammenfassung	102

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Zur MHD Lagertheorie

Klassische Schmierstoffe versagen bei hohen Temperaturen, sie werden instabil und verdampfen. Eine Alternative bietet die Verwendung von Flüssigmetall als Schmiermittel. Aufgrund der geringen Viskosität ist beim Einsatz von Flüssigmetall auf der einen Seite mit einer Reduktion des Auftriebes zu rechnen. Auf der anderen Seite bieten Flüssigmetalle wegen ihrer hohen Temperaturbeständigkeit und ihrer hohen Wärmeleitfähigkeit ein breites Anwendungsspektrum. Der Nachteil verminderter Tragfähigkeit gegenüber Lagern mit konventionellem Schmierstoff kann reduziert werden, indem die Strömung im Spalt durch elektromagnetische Kräfte beeinflusst wird. Durch Anlegen eingepprägter elektrischer und magnetischer Felder entstehen zusätzliche Volumenkräfte.

In der Magnetohydrodynamik ist die dominierende elektromagnetische Kraft die Lorentz-Kraft. Weitere Kräfte wie die Coulomb-Kraft, Kräfte durch Magnetostriktion oder Kräfte durch Inhomogenitäten der magnetischen Permeabilität sind in der Regel vernachlässigbar [30]. Im Gegensatz zur Magnetohydrodynamik ist in der Elektrohydrodynamik die Coulomb-Kraft die entscheidende Volumenkraft. Da diese bei Flüssigmetallströmungen meist vernachlässigt werden kann, kommt der elektrohydrodynamischen Lagertheorie praktisch keine Bedeutung zu.

Die genannten Vorteile von Flüssigmetall bzw. MHD Lagern lassen eine Anwendung bei hohen Temperaturen und hohen Drehzahlen, beispielsweise in der Raketentechnik, erkennen. Mögliche Metalle wie Quecksilber, Natrium sowie Natriumlegierungen

gen, Gallium oder auch Woodsche Legierungen zeichnen sich durch einen verhältnismäßig niedrigen Schmelzpunkt aus, so daß auch eine Anwendung bei niedrigeren Temperaturen in Frage kommt. Weitere Vorteile von Flüssigmetall gegenüber organischen Schmierstoffen wie zum Beispiel Resistenz gegen Radioaktivität, lassen vereinzelte Anwendungsbereiche wie etwa einen Einsatz in der Nukleartechnik deutlich werden. Im Gegensatz zum konventionellen Lager kann bei MHD Lagern ein Druckaufbau auch ohne Rotation der Welle allein durch Anlegen äußerer magnetischer und elektrischer Felder erzeugt werden kann. Dieses Wirkungsprinzip könnte in einigen Gebieten, eventuell auch in der Mikrotechnik, vorteilhaft angewendet werden.

1.2 Inhalt der Arbeit

Ein Schwerpunkt der Forschungsaktivitäten am Institut für Technische Mechanik stellen Mehrfeldprobleme dar. Neben klassischen Mehrfeldproblemen wie Thermomechanik und Fluid-Festkörper-Interaktion treten vermehrt elektromechanische Mehrfeldprobleme in den Vordergrund. Waren diesbezüglich in der Vergangenheit insbesondere piezoelektrische Probleme von Interesse, so bildet diese Arbeit über Schmier-spaltströmungen bei Verwendung elektrisch leitender Fluide einen ersten Beitrag zur Magnetohydrodynamik. Im Gegensatz zu früheren Arbeiten (siehe z.B. [43]) über Spaltströmungen nichtleitender Fluide wird auf strömungsmechanische Instabilitäten nicht eingegangen.

Die Berechnung von Radiallagern endlicher Breite führt schon im konventionellen Fall auf partielle Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten, die in aller Regel analytisch nicht lösbar sind. Um analytische Ergebnisse zu erhalten, werden meist zwei akademische Grenzfälle betrachtet, das unendlich breite Lager und das unendlich schmale Lager. Numerische und experimentelle Untersuchungen beim konventionellen Lager geben Aufschluß über den Anwendungsbereich dieser Grenzfälle. Wie in [13] gezeigt, liefert die unendlich breite Hypothese für ein Breiten/Durchmesser Verhältnis $\frac{B}{D} > 4$ gute Werte, während die unendlich schmale Approximation für Werte $\frac{B}{D} < \frac{1}{4}$ praktische Anwendung findet.

Die existierenden Arbeiten auf dem Feld der magnetohydrodynamischen, also inkom-

pressiblen Lagertheorie beschränken sich nach Kenntnis des Autors auf analytische Arbeiten zum unendlich breiten Lager sowie einige numerische und halbanalytische Untersuchungen zum Lager endlicher axialer Breite. Zum magnetogasdynamischen, also kompressiblen Radiallager ist nur eine Arbeit über das unendlich breite Lager bekannt.

Inhalt der vorliegenden Arbeit ist die Analyse unendlich schmaler magnetogasdynamischer und magnetohydrodynamischer Radiallager. Die Bereitstellung analytischer Ergebnisse steht dabei im Vordergrund. Es werden ausschließlich stationäre Strömungen betrachtet, da aufgrund der kleinen Reynoldszahlen selbst bei instationärer Wellenbewegung Trägheitskräfte vernachlässigt werden können. Der Berechnung liegen die bekannten hydrodynamischen Hypothesen der Schmiertheorie zugrunde. Induktionseffekte werden vernachlässigt, d.h. die magnetische Reynoldszahl R_m wird als klein angenommen. Ziel ist es, den Einfluß der Größe und der Orientierung der eingepprägten B - und E -Felder auf die Druckentwicklung zu bestimmen. Drei Grundfälle werden untersucht:

- a) äußeres eingepprägtes radiales B -Feld,
- b) äußeres eingepprägtes axiales B -Feld und
- c) äußeres eingepprägtes toroidales B -Feld.

Im Fall a) werden Lagerzapfen und Lagerschale als perfekte Isolatoren und in den Fällen b) und c) als ideale Leiter betrachtet.

Alle 3 Fälle führen bei kompressibler Strömung auf ein nichtlineares Randwertproblem. In den Fällen a) und b) wird eine strenge implizite Lösung hergeleitet. Diese hat den Nachteil, daß das Druckfeld über zwei transzendente algebraische Gleichungen ausiteriert werden muß. Eine alternative explizite Lösung in Form einer Funktionenreihe weist diesen Nachteil nicht auf. Die Konvergenz dieser Funktionenreihe wird bewiesen, eine Restgliedabschätzung hergeleitet. Im Fall c) kann keine implizite Lösung, sondern nur eine explizite Reihenlösung angegeben werden. Auch hier wird die Konvergenz nachgewiesen und eine Formel für das Restglied hergeleitet.

Aus der Lösung des kompressiblen Problems wird anschließend die Lösung des inkompressiblen Problems entwickelt. Analytische Formeln für die Sommerfeldzahlen

der Drehung und der Verdrängung werden für die 3 Grundfälle bereitgestellt. Ferner wird eine Stabilitätsanalyse eines in zwei schmalen MHD Lagern symmetrisch gelagerten Laval-Rotors durchgeführt. Hierbei gilt es, den Einfluß der angelegten B - und E -Felder auf das Stabilitätsverhalten zu untersuchen.

Wie bereits erwähnt, kann bei Verwendung elektrisch leitender Fluide als Schmiermittel ein Auftrieb auch ohne Rotation der Welle erzeugt werden. Dieses Wirkungsprinzip wird im 6. Kapitel für zeitlich konstante B -Felder und zeitlich oszillierende E -Felder untersucht.

1.3 Literaturübersicht

Die Arbeiten zur magnetohydrodynamischen Schmiertheorie lassen sich in Arbeiten zum ebenen Gleitschuh, Untersuchungen zum Radiallager und Berechnungen zum Axiallager gliedern.

Der unendlich breite Gleitschuh unter tangentialem und vertikalem eingepprägten B -Feld wird in [2, 19, 21, 29] für unterschiedliche Konstellationen hinsichtlich des äußeren elektrischen Feldes behandelt. In [3, 8, 9] wird zusätzlich der Einfluß des konvektiven Beschleunigungsterms untersucht. Der Einfluß der elektrischen Leitfähigkeit des Gleitschuhs wird in [7] diskutiert. In [3, 9, 54] wird der unendlich breite Gleitschuh für ungleichförmige, nichtkonstante Magnetfelder behandelt, wobei in [54] im speziellen auf den idealen Neigungswinkel des Gleitschuhes für optimale Tragfähigkeit eingegangen wird. Eine Analyse zum idealen Profil des Gleitschuhes bei tangentialem eingepprägten B -Feld findet sich in [48]. Berechnungen, die Induktionseffekte berücksichtigen, sind in [7, 62, 64, 65] enthalten, wobei in [64, 65] auch der Einfluß des Magnetfeldes der Zuleitungen besprochen wird. Eine Untersuchung zum anisotropen, porösen MHD Gleitschuh ist in [12] zu finden. Das MHD Kippsegmentlager wird in [6] diskutiert. Eine Reihendarstellung für den Gleitschuh endlicher Breite findet sich in [28]. Für den stufenförmigen Gleitschuh bei kompressiblem Fluid unter tangentialem B -Feld wird in [17] eine analytische Lösung angegeben.

Das unendlich breite Radiallager unter axialem und radialem eingepprägten B -Feld wird in [26, 33] abgehandelt. In [11, 41] wird ferner der Einfluß des konvektiven Beschleunigungsterms untersucht. Das Radiallager unter Verdrängungsbewegung wird

in [4] diskutiert. In [36, 68] werden Induktionseffekte berücksichtigt und in [11] wird ein mit der Welle umlaufendes Magnetfeld betrachtet. Halbanalytische und numerische Untersuchungen zum MHD Radiallager endlicher Breite sind in [18, 35, 37, 42] enthalten. Experimentelle Untersuchungen finden sich in [11, 18, 58]. [35] enthält eine numerische Stabilitätsuntersuchung einer in MHD Lagern gelagerten Welle für den Fall eines axialen eingepprägten B -Feldes. [67] behandelt die Frage der Reduzierung des Reibmomentes durch Einsatz elektrisch leitender Fluide. In [72] werden thermische Effekte bei MHD Lagern diskutiert und in [73] wird die Deformation des Schmierspaltstudiert. Die einzige Untersuchung zum magnetogasdynamischen Radiallager ist in [17] zu finden. Hier wird eine Näherungslösung für das unendlich breite Lager bei eingepprägtem radialem B -Feld vorgestellt.

Das Axiallager unter axialem, radialem und toroidalem eingepprägten B -Feld wird in [19, 27, 40] behandelt. In [47, 55] werden konvektive Beschleunigungsterme berücksichtigt. Das Axiallager unter rotierendem B -Feld wird in [15, 22] diskutiert. Das Axiallager bei variabler Spaltbreite wird in [40, 56] behandelt. Der Einfluß ungleichförmiger, nichtkonstanter B -Felder wird in [56] studiert. Untersuchungen zum kompressiblen Axiallager sind in [17, 22, 39, 53, 57] zu finden.

Kapitel 2

Bilanz- und Konstitutivgleichungen

2.1 Magnetogasdynamische Grundgleichungen

Grundlage der Berechnungen dieser Arbeit sind die magnetogasdynamischen Grundgleichungen [14, 30, 44] für lineare, isotrope Fluide betrachtet. Es sind dies im einzelnen

- die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \quad (2.1)$$

- die Impulsbilanz

$$\begin{aligned} x : \quad & \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x + j_y B_z - j_z B_y \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \quad (2.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y : \quad & \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y + j_z B_x - j_x B_z \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2 \eta \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$z : \quad \rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z + j_x B_y - j_y B_x$$

$$+\frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2 \eta \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{3} \right) \right], \quad (2.4)$$

- die Energiebilanz

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} &= \rho \dot{q} + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &\quad - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ &\quad + \eta \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (2.5) \end{aligned}$$

- die Maxwell'schen Gleichungen (Verschiebungsstrom vernachlässigt)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.9)$$

- das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz (Hall-Effekt vernachlässigt)

$$j_x = \sigma (E_x + v B_z - w B_y), \quad (2.10)$$

$$j_y = \sigma (E_y + w B_x - u B_z), \quad (2.11)$$

$$j_z = \sigma (E_z + u B_y - v B_x), \quad (2.12)$$

- die Kontinuitätsgleichung für die elektrische Ladung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.13)$$

- und die Zustandsgleichung des idealen Gases

$$p' = \rho R T. \quad (2.14)$$

u , v und w sind die Koordinaten des Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{v} in x -, y - und z -Richtung. $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ ist die resultierende Volumenkraft ohne die Lorentz-Kraft, $\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)$ das elektrische Strömungsfeld. e ist die spezifische innere Energie und T die Temperatur. Es bezeichnet η die Viskosität des Fluids, σ die elektrische

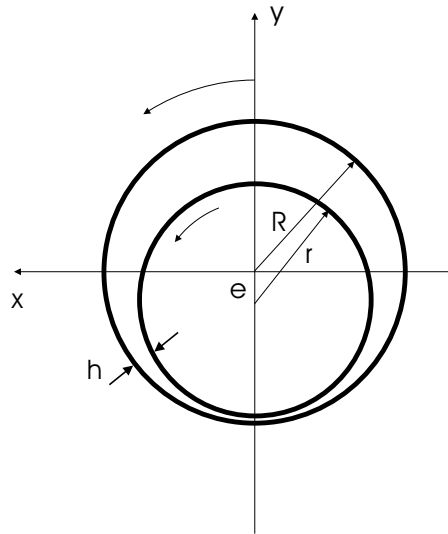


Abbildung 2.1: Lagergeometrie

Leitfähigkeit, k die Wärmeleitfähigkeit, ϵ' die dielektrische Konstante und μ die magnetische Permeabilität. Zwischen der elektrischen Feldstärke $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ und der dielektrischen Verschiebung $\mathbf{D} = (D_x, D_y, D_z)$ herrscht die Beziehung $\mathbf{D} = \epsilon' \mathbf{E}$. Zwischen der magnetischen Induktion \mathbf{B} und der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} gilt der Zusammenhang $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Ferner ist ρ_e die elektrische Ladungsdichte. ρ bezeichnet die Dichte des Fluids und $p' = p_a + p$ den Absolutdruck. p_a kennzeichnet den Umgebungsdruck und ρ_a die Referenzdichte bei Umgebungsdruck und Umgebungstemperatur.

2.2 Vereinfachende Annahmen

Abbildung 2.1 illustriert die Lagergeometrie. Der Lagerzapfen hat den äußeren Radius r , die Lagerschale den inneren Radius $R = \frac{D}{2}$. $B = 2a$ ist die axiale Breite des Lagers. Die Exzentrizität zwischen Lager- und Zapfenmittelpunkt ist e . Die Welle rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω . Zur Vereinfachung der Bilanz- und Konstitutivgleichungen werden die nachstehend aufgeführten klassischen Hypothesen der hydrodynamischen Schmiertheorie verwendet [13, 38]:

1. Die Abhängigkeit der Viskosität von Druck und Temperatur wird vernachlässigt,

d.h. $\eta \approx const.$

2. Die Strömung verläuft isotherm.
3. Die Trägheitskräfte werden gegenüber den Reibungskräften vernachlässigt, d.h. die Reynoldszahl $R_e = \frac{\rho \Delta r R \omega}{\eta} \ll 1$.
4. Das Lagerspiel $\Delta r = R - r$ zwischen Schale und Welle ist im Vergleich zum Wellenradius r und Schalenradius R klein.
5. Die Krümmung des Lagerspaltes wird vernachlässigt, d.h. man denkt sich Wellen- und Schalenumfang in die Ebene abgewickelt.
6. Die Schmierpalthöhe h sowie die Änderung der Schmierpalthöhe in Umfangsrichtung $\frac{\partial h}{\partial \varphi}$ sind klein.
7. Vernachlässigung der Geschwindigkeitskoordinate v in Richtung der Spalthöhe (y -Richtung) gegenüber den Geschwindigkeitskoordinaten u und w in x - und z -Richtung.
8. Vernachlässigung der Geschwindigkeitsgradienten erster und höherer Ordnung in x - und z -Richtung gegenüber denen in y -Richtung, d.h.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial z}, & \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\
 \frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial v}{\partial y} \gg \frac{\partial v}{\partial z}, & \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\
 \frac{\partial w}{\partial x} \ll \frac{\partial w}{\partial y} \gg \frac{\partial w}{\partial z}, & \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

9. Vernachlässigung der Druckänderung in y -Richtung gegenüber den Druckänderungen in x - und z -Richtung, d.h.

$$\frac{\partial p}{\partial x} \gg \frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial p}{\partial y} \approx 0. \tag{2.16}$$

10. Volumenkräfte mit Ausnahme der Lorentz-Kraft werden vernachlässigt.

Wie in Kapitel 1 erläutert, ist das eingeprägte Magnetfeld a) radial, b) axial oder c) toroidal orientiert. Durch die Lorentz-Kraft werden gemäß den Gln. (2.10)-(2.12) im Fall a) Ströme in axialer Richtung und in den Fällen b) und c) Ströme in radialer

Richtung induziert. Es ist daher naheliegend, Lagerschale und Lagerzapfen bei eingepprägtem radialem Magnetfeld als Isolatoren und in den beiden anderen Fällen als Leiter auszubilden. Folgende elektrodynamische Annahmen werden getroffen (vgl. [30]):

1. Lagerschale und Lagerzapfen sind entweder beide ideale Leiter oder beide perfekte Isolatoren.
2. Die magnetische Permeabilität μ , die dielektrische Konstante ϵ' und die elektrische Leitfähigkeit σ sind Konstanten.
3. Die induzierten Magnetfelder sind wesentlich kleiner als die äußeren eingepprägten Magnetfelder, d.h. die magnetische Reynoldszahl $R_m = \mu \sigma R \omega \Delta r \ll 1$.

Unter diesen Annahmen sind die y -Komponente der Impulsbilanz und die Energiebilanz hinfällig. Da induktionslos gerechnet wird, bleibt von den Maxwell'schen Gleichungen nur noch Gl. (2.7) relevant. Mit Gl. (2.6) kann nach Berechnung des E -Feldes die Ladungsverteilung ρ_e bestimmt werden. Damit reduzieren sich die Bilanzgleichungen bei stationärer Strömung auf

- die Kontinuitätsgleichung (der Term $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ wird trotz Stationarität formal beibehalten, da dieser in Kapitel 4 bei der Berechnung der Sommerfeldzahl der Verdrängung relevant wird)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \quad (2.17)$$

- die Impulsbilanz

$$x : \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + j_y B_z - j_z B_y + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.18)$$

$$z : \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + j_x B_y - j_y B_x + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (2.19)$$

- die Maxwell'schen Gleichungen

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_e, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 , \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 , \quad (2.23)$$

- das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz

$$j_x = \sigma (E_x - w B_y) , \quad (2.24)$$

$$j_y = \sigma (E_y + w B_x - u B_z) , \quad (2.25)$$

$$j_z = \sigma (E_z + u B_y) , \quad (2.26)$$

- die Kontinuitätsgleichung für die elektrische Ladung

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \quad (2.27)$$

- und die Zustandsgleichung des idealen Gases

$$\frac{p'}{\rho} = \frac{p_a}{\rho_a} = const . \quad (2.28)$$

Wie üblich in der hydrodynamischen Schmiertheorie wird die Kontinuitätsgleichung in y -Richtung über den Schmierpalt integriert:

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dy = 0 . \quad (2.29)$$

Unter Verwendung der Leibnizschen Differentiationsregel

$$\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy - f(x, b) \frac{db}{dx} + f(x, a) \frac{da}{dx} , \quad (2.30)$$

unter Beachtung der Randbedingungen $u(y = h) = 0$, $w(y = h) = 0$ und $w(y = 0) = 0$ und wegen der Voraussetzung (2.16) reduziert sich der erste Term in Gl. (2.29) auf

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dy = \frac{\partial \rho}{\partial t} h , \quad (2.31)$$

der zweite Term auf

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho u) dy - (\rho u) \Big|_{y=h} \frac{dh}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho u) dy , \quad (2.32)$$

der dritte Term auf

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy = (\rho v) \Big|_{y=0}^{y=h} = \rho [v(h) - v(0)] \approx \rho \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.33)$$

und der vierte Term auf

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dy = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h (\rho w) dy - (\rho w) \Big|_{y=h} \frac{dh}{dx} = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h (\rho w) dy . \quad (2.34)$$

Damit lautet die Kontinuitätsgleichung in integrierter Form

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho u) dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h (\rho w) dy + \frac{\partial (\rho h)}{\partial t} = 0 . \quad (2.35)$$

Es werden folgende dimensionslosen Variablen und Parameter eingeführt:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{R-r}{R} , & \epsilon &= \frac{e}{R-r} , & h &= \bar{h} R \psi , & x &= \varphi R , \\ y &= \bar{y} R \psi , & z &= \bar{z} a , & u &= \bar{u} R \omega , & w &= \bar{w} R \omega , \\ p &= \bar{p} \frac{\eta \omega}{\psi^2} , & \rho &= \bar{\rho} \rho_a , & \lambda &= \frac{\eta \omega}{\psi^2 \rho_a} , & E_x &= \bar{E}_\varphi \frac{\omega \sqrt{\eta}}{\psi \sqrt{\sigma}} , \\ E_y &= \bar{E}_y \frac{\omega \sqrt{\eta}}{\psi \sqrt{\sigma}} , & E_z &= \bar{E}_z \frac{\omega \sqrt{\eta}}{\psi \sqrt{\sigma}} , & j_x &= \bar{j}_\varphi \frac{\sqrt{\eta \sigma \omega}}{\psi} , & j_y &= \bar{j}_y \frac{\sqrt{\eta \sigma \omega}}{\psi} , \\ j_z &= \bar{j}_z \frac{\sqrt{\eta \sigma \omega}}{\psi} , & M_\varphi^2 &= \frac{\sigma R^2 \psi^2 B_x^2}{\eta} , & M_y^2 &= \frac{\sigma R^2 \psi^2 B_y^2}{\eta} , & M_z^2 &= \frac{\sigma R^2 \psi^2 B_z^2}{\eta} . \end{aligned}$$

ϵ ist die dimensionslose Exzentrizität, λ die sogenannte Kompressibilitätszahl [51, 38]. M_φ , M_y , M_z sind die Hartmannzahlen der Magnetfelder B_x , B_y , B_z . Die dimensionslose Spalthöhe ist $\bar{h}(\varphi) = 1 + \epsilon \cos \varphi$ (siehe [13, 38]). Die dimensionslosen Bilanzgleichungen sind

- die Kontinuitätsgleichung in integrierter Form

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\bar{\rho} \int_0^{\bar{h}} \bar{u} d\bar{y} \right] + \left(\frac{D}{B} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\bar{\rho} \int_0^{\bar{h}} \bar{w} d\bar{y} \right] + \frac{1}{\omega} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{h})}{\partial t} = 0 , \quad (2.36)$$

- die Impulsbilanz

$$x : \quad 0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + M_z \bar{j}_y - M_y \bar{j}_z + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} , \quad (2.37)$$

$$z : \quad 0 = -\left(\frac{B}{D} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + M_y \bar{j}_\varphi - M_\varphi \bar{j}_y + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} , \quad (2.38)$$

- die Maxwell'schen Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{D}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial \bar{D}_y}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{D}{B} \right) \frac{\partial \bar{D}_z}{\partial \bar{z}} = \bar{\rho}_e, \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{\psi} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \bar{y}} - \left(\frac{D}{B} \right) \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{z}} = 0, \quad (2.40)$$

$$\left(\frac{D}{B} \right) \frac{\partial \bar{E}_\varphi}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \varphi} - \frac{1}{\psi} \frac{\partial \bar{E}_\varphi}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (2.42)$$

- das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz

$$\bar{j}_\varphi = \bar{E}_\varphi - M_y \bar{w}, \quad (2.43)$$

$$\bar{j}_y = \bar{E}_y + M_\varphi \bar{w} - M_z \bar{u}, \quad (2.44)$$

$$\bar{j}_z = \bar{E}_z + M_y \bar{u}, \quad (2.45)$$

- die Kontinuitätsgleichung für die elektrische Ladung

$$\frac{\partial \bar{j}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial \bar{j}_y}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{D}{B} \right) \frac{\partial \bar{j}_z}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.46)$$

- und die Zustandsgleichung des idealen Gases

$$\bar{\rho} = 1 + \lambda \bar{p}. \quad (2.47)$$

Aufgrund der Haftbedingung lauten die Randbedingungen für \bar{u} und \bar{w} bei Rotation der Welle mit ω und stillstehender Lagerschale

$$\bar{u}(\bar{y} = 0) = 1 \quad \text{und} \quad \bar{u}(\bar{y} = \bar{h}) = 0 \quad (2.48)$$

sowie

$$\bar{w}(\bar{y} = 0) = 0 \quad \text{und} \quad \bar{w}(\bar{y} = \bar{h}) = 0. \quad (2.49)$$

Die Randbedingungen für den Druck sind (vgl. [38])

$$\bar{p}(\bar{z} = -1) = 0 \quad \text{und} \quad \bar{p}(\bar{z} = 1) = 0. \quad (2.50)$$

Sind Lagerschale und -zapfen ideale Leiter, gilt für das elektrische Potential \bar{V} (vgl. [30])

$$\bar{V}(\bar{y} = 0) = \text{const.} \quad \text{und} \quad \bar{V}(\bar{y} = 1) = \text{const.} \quad (2.51)$$

und für die Stromdichte

$$\vec{j}_\varphi(\bar{y} = 0) = \vec{j}_z(\bar{y} = 0) = 0 \quad \text{und} \quad \vec{j}_\varphi(\bar{y} = \bar{h}) = \vec{j}_z(\bar{y} = \bar{h}) = 0 . \quad (2.52)$$

Sind Lagerschale und -zapfen perfekte Isolatoren, gilt für die elektrische Stromdichte

$$\vec{j}_y(\bar{y} = 0) = 0 \quad \text{und} \quad \vec{j}_y(\bar{y} = \bar{h}) = 0 . \quad (2.53)$$

Kapitel 3

Kompressible Strömung

Erste analytische Arbeiten zum konventionellen unendlich breiten Gaslager stammen von *Harrison* [25], *Katto und Soda* [34] und *Ausman* [10], wobei im letzten Aufsatz ein Störungsansatz mit der Exzentrizität ϵ als Störparameter angewendet wird. Eine zentrale numerische Arbeit zum konventionellen Gaslager endlicher Breite stammt von *Raimondi* [51]. Eine Übersicht über neuere Arbeiten, insbesondere auch zu strömungsmechanischen Instabilitäten bei konventionellen kompressiblen Spaltströmungen ist in [43] zu finden.

Inhalt dieses Kapitels ist die bisher nicht durchgeführte Analyse magnetogasdynamischer Schmierspaltströmungen unter Verwendung der Hypothese für das unendlich schmale Lager. Untersucht werden die drei Grundfälle a) radiales, b) axiales und c) toroidales eingepprägtes Magnetfeld.

Die Untersuchung magnetogasdynamischer Schmierspaltströmungen ist - zumindest in Hinblick auf eine Anwendung in der Lagertechnik - von akademischem Interesse. Zum einen deshalb, weil die Kompressibilität von Flüssigmetallen vernachlässigbar ist. Zum anderen aber, weil elektrisch leitende Gase (Plasmen) auf Grund der erforderlichen hohen Temperaturen als Schmiermittel kaum in Frage kommen.

Die nachstehend entwickelten Reihenlösungen und deren Konvergenznachweis lassen sich durch geeignete Modifikationen wahrscheinlich auf ähnlich geartete Randwertprobleme übertragen.

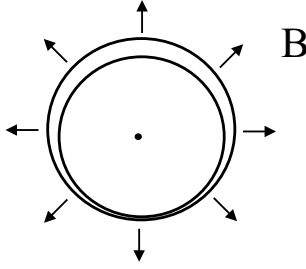


Abbildung 3.1: Eingepprägtes radiales Magnetfeld

3.1 Radiales eingepprägtes Magnetfeld

In diesem Abschnitt wird zunächst eine strenge Lösung für das unendlich schmale Lager bei eingepprägtem radialem B -Feld hergeleitet. In dieser Darstellung muß die Druckfunktion über zwei transzendente algebraische Gleichungen ausiteriert werden. Anschließend wird basierend auf einem Störungsansatz eine alternative Lösungsdarstellung in Form einer Funktionenreihe entwickelt. Die Konvergenz dieser Reihe wird untersucht, eine Restgliedabschätzung wird hergeleitet.

3.1.1 Strenge Lösung in impliziter Form

Ein konstantes externes Magnetfeld B_y sei radial orientiert (siehe Abb. 3.1). Außerdem wird ein konstantes äußeres elektrisches Feld E_z in axialer Richtung angelegt. Lager-
schale und Lagerzapfen werden als perfekte Isolatoren betrachtet. Die Strömung sei stationär. Aus der Kontinuitätsgleichung für die elektrische Stromdichte $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ folgt zunächst, daß $\frac{\partial j_z}{\partial z} \approx 0$. Damit reduziert sich die Impulsbilanz (2.37) in \bar{x} -Richtung auf

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} - M_y \bar{j}_z + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad , \quad (3.1)$$

die Impulsbilanz (2.38) in \bar{z} -Richtung auf

$$0 = -\left(\frac{B}{D}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \quad (3.2)$$

und das Ohmsche Gesetz (2.45) in \bar{z} -Richtung auf

$$\bar{j}_z = \bar{E}_z + M_y \bar{u} \quad . \quad (3.3)$$

Kombiniert man Gl. (3.1) mit Gl. (3.3), ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} - M_y^2 \bar{u} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + M_y \bar{E}_z . \quad (3.4)$$

Mit den Randbedingungen $\bar{u}(\bar{y} = 0) = 1$ und $\bar{u}(\bar{y} = \bar{h}) = 0$ liefert eine Integration von Gl. (3.4)

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \left[\frac{1}{M_y^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{E}_z}{M_y} \right] \left[\cosh(M_y \bar{y}) - \sinh(M_y \bar{y}) \coth(M_y \bar{h}) + \frac{\sinh(M_y \bar{y})}{\sinh(M_y \bar{h})} - 1 \right] \\ & + \left[\cosh(M_y \bar{y}) - \coth(M_y \bar{h}) \sinh(M_y \bar{y}) \right] . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Der dimensionslose Durchfluß $\bar{q}_\varphi = \frac{q_\varphi}{\omega \psi R^2}$ in Umfangsrichtung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \bar{q}_\varphi = \int_0^{\bar{h}} \bar{u} d\bar{y} = & \frac{1}{M_y^3} \left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + M_y \bar{E}_z \right] \left[2 \frac{(\cosh(M_y \bar{h}) - 1)}{\sinh(M_y \bar{h})} - (M_y \bar{h}) \right] \\ & + \frac{1}{M_y} \frac{(\cosh(M_y \bar{h}) - 1)}{\sinh(M_y \bar{h})} . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Aus Gl. (3.2) folgt unter Beachtung von $\bar{w}(\bar{y} = 0) = 0$ und $\bar{w}(\bar{y} = \bar{h}) = 0$

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{B} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} (\bar{y}^2 - \bar{h} \bar{y}) \quad (3.7)$$

und aus Gl. (3.7) der dimensionslose Durchfluß $\bar{q}_z = \frac{q_z}{\omega \psi R^2}$ in axialer Richtung

$$\bar{q}_z = \int_0^{\bar{h}} \bar{w} d\bar{y} = -\frac{1}{12} \left(\frac{D}{B} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \bar{h}^3 . \quad (3.8)$$

Die Kontinuitätsgleichung (2.36) lautet unter Beachtung der Konstitutivgleichung (2.47)

$$\left(\frac{B}{D} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} [(1 + \lambda \bar{p}) \bar{q}_\varphi] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [(1 + \lambda \bar{p}) \bar{q}_z] = 0 . \quad (3.9)$$

An dieser Stelle wird die Hypothese des unendlich schmalen Lagers benutzt (siehe [13, 45, 46]), d.h. es wird $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} = 0$ gesetzt. Damit ergibt sich aus Gl. (3.9)

$$\left(\frac{B}{D} \right)^2 \frac{12}{h^3} \frac{\partial \bar{q}_\varphi}{\partial \bar{\varphi}} (1 + \lambda \bar{p}) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[(1 + \lambda \bar{p}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right] = 0 . \quad (3.10)$$

Gl. (3.10) mit den Randbedingungen $\bar{p}(\bar{z} = -1) = \bar{p}(\bar{z} = 1) = 0$ bilden ein nichtlineares Randwertproblem zur Bestimmung von $\bar{p}(\varphi, \bar{z})$. Unter Verwendung der Kettenregel wird Gl. (3.10) umgeformt zu

$$\alpha(\varphi) (1 + \lambda \bar{p}) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\lambda \bar{z}^2} [(1 + \lambda \bar{p})^2] = 0 , \quad (3.11)$$

wobei sich für $\alpha(\varphi)$ mit Gl. (3.6)

$$\alpha(\varphi) = \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{12\bar{h}'}{\bar{h}^3} \left[\left(\frac{\bar{E}_z}{M_y} + 1\right) - \left(\frac{2\bar{E}_z}{M_y^2} + 1\right) \frac{[\cosh(M_y\bar{h}) - 1] \cosh(M_y\bar{h})}{\sin^2(M_y\bar{h})} \right] \quad (3.12)$$

ergibt. Mit der Substitution $g = (1 + \lambda\bar{p})^2$ geht Gl. (3.11) über in

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \bar{z}^2} - 2 \lambda \alpha(\varphi) \sqrt{g} = 0 . \quad (3.13)$$

Für die spätere Rücktransformation ist zu beachten, daß aus physikalischen Gründen (vgl. Gl. (2.47)) $(1 + \lambda\bar{p}) \geq 0$. Separation und anschließende Integration ergibt

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \pm \left[\frac{8}{3} \lambda \alpha(\varphi) g^{3/2} + c_1(\varphi) \right]^{1/2} \quad (3.14)$$

mit $c_1(\varphi)$ als Integrationsfunktion. Nochmalige Separation führt schließlich auf

$$\bar{z} = \pm \int \frac{dg}{\left[\frac{8}{3} \lambda \alpha(\varphi) g^{3/2} + c_1(\varphi) \right]^{1/2}} + c_2(\varphi) . \quad (3.15)$$

$c_2(\varphi)$ ist eine weitere Integrationsfunktion. Da der Integrand und somit das Integral stets positiv sind und $c_2(\varphi)$ wie gleich gezeigt wird identisch null ist, gilt das $+$ Zeichen für $\bar{z} > 0$ und das $-$ Zeichen für $\bar{z} < 0$. Die Integrationsfunktion $c_2(\varphi)$ kann über die Randbedingungen direkt bestimmt werden. Der Druck \bar{p} verschwindet an den Stellen $\bar{z} = -1$ und $\bar{z} = 1$, daher nimmt g dort den Wert 1 an. Also lauten die Randbedingungen

$$1 = + \int \frac{dg}{\left[\frac{8}{3} \lambda \alpha(\varphi) g^{3/2} + c_1(\varphi) \right]^{1/2}} \Bigg|_{g=1} + c_2(\varphi) \quad \text{und} \quad (3.16)$$

$$-1 = - \int \frac{dg}{\left[\frac{8}{3} \lambda \alpha(\varphi) g^{3/2} + c_1(\varphi) \right]^{1/2}} \Bigg|_{g=1} + c_2(\varphi) . \quad (3.17)$$

Beide Gleichungen können nur für $c_2(\varphi) = 0$ erfüllt sein. Die Integrationsfunktion $c_1(\varphi)$ ist durch die transzendente Gleichung

$$1 = \int \frac{dg}{\left[\frac{8}{3} \lambda \alpha(\varphi) g^{3/2} + c_1(\varphi) \right]^{1/2}} \Bigg|_{g=1} \quad (3.18)$$

bestimmt und wird ausiteriert. Es ist zweckmäßig, an dieser Stelle die Rücktransformation durchzuführen. Es ergibt sich

$$\bar{z} = \pm \int \frac{2\lambda(1 + \lambda\bar{p}) dp}{\left[\frac{8}{3} \lambda \alpha(\varphi) (1 + \lambda\bar{p})^3 + c_1(\varphi) \right]^{1/2}} . \quad (3.19)$$

Zur Lösung des Integrals muß eine Fallunterscheidung vorgenommen werden. 3 Fälle sind möglich: $\alpha(\varphi) < 0$ sowie $c_1(\varphi) > 0$, $\alpha(\varphi) > 0$ sowie $c_1(\varphi) < 0$ und $\alpha(\varphi) > 0$ sowie $c_1(\varphi) > 0$. Der letzte Fall kann aus physikalischen Überlegungen ausgeschlossen werden. Aus Symmetriegründen ist $\frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} = 0$. Dies ist wegen Gl. (3.14) für $\alpha(\varphi) > 0$ sowie $c_1(\varphi) > 0$ nicht realisierbar.

Fall 1:

Im Fall $\alpha(\varphi) < 0$ sowie $c_1(\varphi) > 0$ wird Gl. (3.19) in die Form

$$\bar{z} = \pm \frac{2\lambda}{\sqrt{c_1(\varphi)}} \int \frac{(1 + \lambda\bar{p}) dp}{\left[-\frac{8}{3} \frac{\lambda}{c_1(\varphi)} \lambda |\alpha(\varphi)| (1 + \lambda\bar{p})^3 + 1\right]^{1/2}} \quad (3.20)$$

überführt. Dieses Integral wird über die Substitution

$$y = \left(\frac{8 \lambda |\alpha(\varphi)|}{3 c_1(\varphi)}\right)^{1/3} (1 + \lambda\bar{p}) \quad (3.21)$$

auf die Form

$$\bar{z} = \pm \frac{2}{\sqrt{c_1(\varphi)}} \left(\frac{c_1(\varphi)}{\frac{8}{3} \lambda |\alpha(\varphi)|}\right)^{2/3} \int \frac{y dy}{[-y^3 + 1]^{1/2}} \quad (3.22)$$

gebracht. Dabei ist $y < 1$. Somit erhält man

$$\begin{aligned} \bar{z} = & \pm \frac{2}{\sqrt{c_1(\varphi)}} \left(\frac{c_1(\varphi)}{\frac{8}{3} \lambda |\alpha(\varphi)|}\right)^{2/3} \left[\frac{2 \sqrt{1-y^3}}{y-1-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}-1}{3^{1/4}} F\left(\sqrt{1-\frac{y-1+\sqrt{3}}{1-y+\sqrt{3}}}, \sin \frac{5\pi}{12}\right) \right. \\ & \left. + 2 \cdot 3^{1/4} E\left(\sqrt{1-\frac{y-1+\sqrt{3}}{1-y+\sqrt{3}}}, \sin \frac{5\pi}{12}\right) \right] \quad (3.23) \end{aligned}$$

und nach Rücksubstitution schließlich

$$\begin{aligned} \bar{z}(\varphi, \bar{p}) = & \pm \frac{2}{\sqrt{c_1(\varphi)}} \left(\frac{c_1(\varphi)}{\frac{8}{3} \lambda |\alpha(\varphi)|}\right)^{2/3} \left[\frac{2 \sqrt{1-\frac{8 \lambda |\alpha(\varphi)|}{3 c_1(\varphi)} (1 + \lambda\bar{p})^3}}{\left(\frac{8 \lambda |\alpha(\varphi)|}{3 c_1(\varphi)}\right)^{1/3} (1 + \lambda\bar{p}) - 1 - \sqrt{3}} \right. \\ & - \frac{\sqrt{3}-1}{3^{1/4}} F\left(\sqrt{1-\frac{\left(\frac{8 \lambda |\alpha(\varphi)|}{3 c_1(\varphi)}\right)^{1/3} (1 + \lambda\bar{p}) - 1 + \sqrt{3}}{1-\left(\frac{8 \lambda |\alpha(\varphi)|}{3 c_1(\varphi)}\right)^{1/3} (1 + \lambda\bar{p}) + \sqrt{3}}}, \sin \frac{5\pi}{12}\right) \\ & \left. + 2 \cdot 3^{1/4} E\left(\sqrt{1-\frac{\left(\frac{8 \lambda |\alpha(\varphi)|}{3 c_1(\varphi)}\right)^{1/3} (1 + \lambda\bar{p}) - 1 + \sqrt{3}}{1-\left(\frac{8 \lambda |\alpha(\varphi)|}{3 c_1(\varphi)}\right)^{1/3} (1 + \lambda\bar{p}) + \sqrt{3}}}, \sin \frac{5\pi}{12}\right) \right]. \quad (3.24) \end{aligned}$$

Die Funktion $c_1(\varphi)$ muß über die transzendente Gleichung

$$1 = \frac{2}{\sqrt{|c_1(\varphi)|}} \left(\frac{c_1(\varphi)}{\frac{8}{3} \lambda |\alpha(\varphi)|} \right)^{2/3} \left[\frac{2 \sqrt{1-y_1^3}}{y_1-1-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}-1}{3^{1/4}} F\left(\sqrt{1-\frac{y_1-1+\sqrt{3}}{1-y_1+\sqrt{3}}}, \sin \frac{5\pi}{12}\right) \right. \\ \left. + 2 \cdot 3^{1/4} E\left(\sqrt{1-\frac{y_1-1+\sqrt{3}}{1-y_1+\sqrt{3}}}, \sin \frac{5\pi}{12}\right) \right] \quad (3.25)$$

mit $y_1 = \left(\frac{8 \lambda |\alpha(\varphi)|}{3 c_1(\varphi)} \right)^{1/3}$

ausiteriert werden. Es bezeichnet $F(p, q)$ das Elliptische Integral erster Art und $E(p, q)$ das Elliptische Integral zweiter Art [1].

Fall 2:

Im Fall $\alpha(\varphi) > 0$ sowie $c_1(\varphi) < 0$ wird Gl. (3.19) in die Form

$$\bar{z} = \pm \frac{2\lambda}{\sqrt{|c_1(\varphi)|}} \int \frac{(1 + \lambda\bar{p}) dp}{\left[\frac{8}{3 |c_1(\varphi)|} \lambda \alpha(\varphi) (1 + \lambda\bar{p})^3 - 1 \right]^{1/2}} \quad (3.26)$$

umgeschrieben und über die Substitution

$$y = \left(\frac{8 \lambda \alpha(\varphi)}{3 |c_1(\varphi)|} \right)^{1/3} (1 + \lambda\bar{p}) \quad (3.27)$$

auf die Form

$$\bar{z} = \pm \frac{2}{\sqrt{|c_1(\varphi)|}} \left(\frac{|c_1(\varphi)|}{\frac{8}{3} \lambda \alpha(\varphi)} \right)^{2/3} \int \frac{y dy}{[y^3 - 1]^{1/2}} \quad (3.28)$$

überführt, wobei jetzt $y > 1$. Es ergibt sich

$$\bar{z} = \pm \frac{2}{\sqrt{|c_1(\varphi)|}} \left(\frac{|c_1(\varphi)|}{\frac{8}{3} \lambda \alpha(\varphi)} \right)^{2/3} \left[\frac{2 \sqrt{y^3-1}}{y-1+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}+1}{3^{1/4}} F\left(\sqrt{1-\frac{1-y+\sqrt{3}}{y-1+\sqrt{3}}}, \sin \frac{\pi}{12}\right) \right. \\ \left. - 2 \cdot 3^{1/4} E\left(\sqrt{1-\frac{1-y+\sqrt{3}}{y-1+\sqrt{3}}}, \sin \frac{\pi}{12}\right) \right] \quad (3.29)$$

und mit Gl. (3.27)

$$\bar{z}(\varphi, \bar{p}) = \pm \frac{2}{\sqrt{|c_1(\varphi)|}} \left(\frac{|c_1(\varphi)|}{\frac{8}{3} \lambda \alpha(\varphi)} \right)^{2/3} \left[\frac{2 \sqrt{\frac{8 \lambda \alpha(\varphi)}{3 |c_1(\varphi)|} (1 + \lambda\bar{p})^3 - 1}}{\left(\frac{8 \lambda \alpha(\varphi)}{3 |c_1(\varphi)|} \right)^{1/3} (1 + \lambda\bar{p}) - 1 + \sqrt{3}} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{3}+1}{3^{1/4}} F\left(\sqrt{1 - \frac{1 - \left(\frac{8}{3} \frac{\lambda \alpha(\varphi)}{|c_1(\varphi)|}\right)^{1/3} (1 + \lambda \bar{p}) + \sqrt{3}}{\left(\frac{8}{3} \frac{\lambda \alpha(\varphi)}{|c_1(\varphi)|}\right)^{1/3} (1 + \lambda \bar{p}) - 1 + \sqrt{3}}}, \sin \frac{\pi}{12}\right) \\
& - 2 \cdot 3^{1/4} E\left(\sqrt{1 - \frac{1 - \left(\frac{8}{3} \frac{\lambda \alpha(\varphi)}{|c_1(\varphi)|}\right)^{1/3} (1 + \lambda \bar{p}) + \sqrt{3}}{\left(\frac{8}{3} \frac{\lambda \alpha(\varphi)}{|c_1(\varphi)|}\right)^{1/3} (1 + \lambda \bar{p}) - 1 + \sqrt{3}}}, \sin \frac{\pi}{12}\right) \Big]. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Die Integrationsfunktion $c_1(\varphi)$ ist implizit durch die transzendente Gleichung

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{2}{\sqrt{|c_1(\varphi)|}} \left(\frac{|c_1(\varphi)|}{\frac{8}{3} \lambda \alpha(\varphi)}\right)^{2/3} \left[\frac{2 \sqrt{y_1^3 - 1}}{y_1 - 1 + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}+1}{3^{1/4}} F\left(\sqrt{1 - \frac{1 - y_1 + \sqrt{3}}{y_1 - 1 + \sqrt{3}}}, \sin \frac{\pi}{12}\right) \right. \\
& \left. - 2 \cdot 3^{1/4} E\left(\sqrt{1 - \frac{1 - y_1 + \sqrt{3}}{y_1 - 1 + \sqrt{3}}}, \sin \frac{\pi}{12}\right) \right] \quad (3.31) \\
\text{mit } y_1 &= \left(\frac{8}{3} \frac{\lambda \alpha(\varphi)}{|c_1(\varphi)|}\right)^{1/3}
\end{aligned}$$

bestimmt und wird iterativ berechnet.

In beiden Fällen muß das Druckfeld $\bar{p}(\varphi, \bar{z})$ über zwei nichtlineare Gleichungen ausiteriert werden. Praktisch ist dies sehr zeitintensiv und das Auffinden der Nullstellen nicht unproblematisch, da je nach Wahl der Parameter, insbesondere bei Variation des Winkel φ , unter Umständen unterschiedliche Lösungsverfahren verwendet werden müssen. Bei der Erstellung von Kurven des Typs $\bar{p}(\varphi = const, \bar{z})$ ist für jeden Punkt je Parametersatz eine nichtlineare Gleichung iterativ zu lösen sowie einmalig eine der Gleichungen (3.25) und (3.31). Bei der Erstellung von Kurven des Typs $\bar{p}(\varphi, \bar{z} = const)$ sind für jeden Punkt je Parametersatz 2 nichtlineare Gleichungen zu lösen, was sich als besonders aufwendig erweist. Daher wurden nur Kurven vom ersten Typ erstellt.

Die Abbildungen 3.2-3.4 zeigen Funktionsverläufe $\bar{z}(\bar{p})$ für $\left(\frac{B}{D}\right) = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.9$ und $\varphi = 0.93 \pi$. In Abbildung 3.2 sind Kurven $\bar{z}(\bar{p})$ für verschiedene Hartmannzahlen M_y dargestellt. Es zeigt sich, daß für Hartmannzahlen $M_y < 2$ eine Druckerhöhung eintritt, während für $M_y > 2$ der Druck abnimmt. Folglich existiert bei Fixierung der übrigen Paramtern eine definierte Hartmannzahl für optimale Druckentwicklung. Grund hierfür sind die induzierten Ströme durch die Lorentz-Kraft. Bei kleinen B-Feldern (Hartmannzahlen) ist der durch das E -Feld verursachte Anteil des Stromes $\bar{j}_{z,E} = \bar{E}_z$ größer als der entgegengerichtete induzierte Anteil $\bar{j}_{z,B} = M_y \bar{u}$, so daß die Lorentz-Kraft $M_y \bar{j}_z$ zu einer Vergrößerung des Durchflusses \bar{q}_φ und somit zu einer

Druckerhöhung führt. Bei großen B-Feldern dominiert der induzierte Strom $\bar{j}_{z,B}$, was zu einer Verkleinerung des Durchflusses \bar{q}_φ und damit zu einer Reduzierung des Druckes führt. Abbildung 3.3 zeigt Kurven $\bar{z}(\bar{p})$ für verschiedene dimensionslose E -Felder \bar{E}_z . Eine kontinuierliche Erhöhung des E -Feldes führt zu einer stetigen Vergrößerung des Stromes $\bar{j}_{z,E} = \bar{E}_z$ und daher bei fester Hartmannzahl zu einer monotonen Erhöhung des Durchflusses \bar{q}_φ sowie des Druckes. In Abbildung 3.4 sind Funktionen $\bar{z}(\bar{p})$ in Abhängigkeit der Kompressibilitätszahl λ dargestellt. Wie man sieht, steigt der Druck mit wachsendem λ . Bei größeren Werten von λ ist der Zuwachs allerdings gering.

3.1.2 Explizite Reihendarstellung

Ein Nachteil der im letzten Abschnitt entwickelten impliziten Lösung ist der numerische Aufwand zur Ausiteration des Druckfeldes. Für jeden Punkt müssen im allgemeinen zwei komplizierte nichtlineare Gleichungen ausiteriert werden. Zum Lösen dieser Gleichungen müssen bei festen Parametern für verschiedene Punkte teilweise unterschiedliche Iterationsverfahren verwendet werden. Es zeigt sich, daß die Integrationsfunktion $c_1(\varphi)$ für verschiedene Winkel φ sehr kleine und sehr große Werte annimmt, so daß kommerzielle Gleichungslöser ohne Einschränkung des Lösungsgebietes teilweise versagen. Ein weiterer Nachteil ist, daß die Lösung in der Form $\bar{z} = \bar{z}(\bar{p}, \varphi)$ und nicht in der Form $\bar{p} = \bar{p}(\varphi, \bar{z})$ vorliegt, wodurch eine Integration über die Winkelkoordinate φ zur Berechnung des Auftriebs analytisch nicht möglich ist.

Die genannten Nachteile gaben Anlaß, eine alternative Darstellung der Lösung des Randwertproblems (3.11) zu suchen. Auf der Grundlage eines Störungsansatzes mit der Kompressibilitätszahl λ als Störparameter wird die Lösung des Randwertproblems (3.11) in Form einer Funktionenreihe angegeben. Dabei wird der Reihenansatz nicht wie üblich in die Differentialgleichung eingesetzt und eine rekursive Folge von Differentialgleichungen erzeugt. Aus der Ausgangsdifferentialgleichung wird durch zweifache Integration zunächst eine Integralgleichung entwickelt, in die dann der Reihenansatz eingesetzt wird. Es entsteht ein rekursives Schema aus Integralgleichungen, das aufgrund seiner einfachen Struktur vollständig algebraisiert werden kann, so daß als Ergebnis ein matrizieller Rekursionsalgorithmus entsteht. Eine rechner-

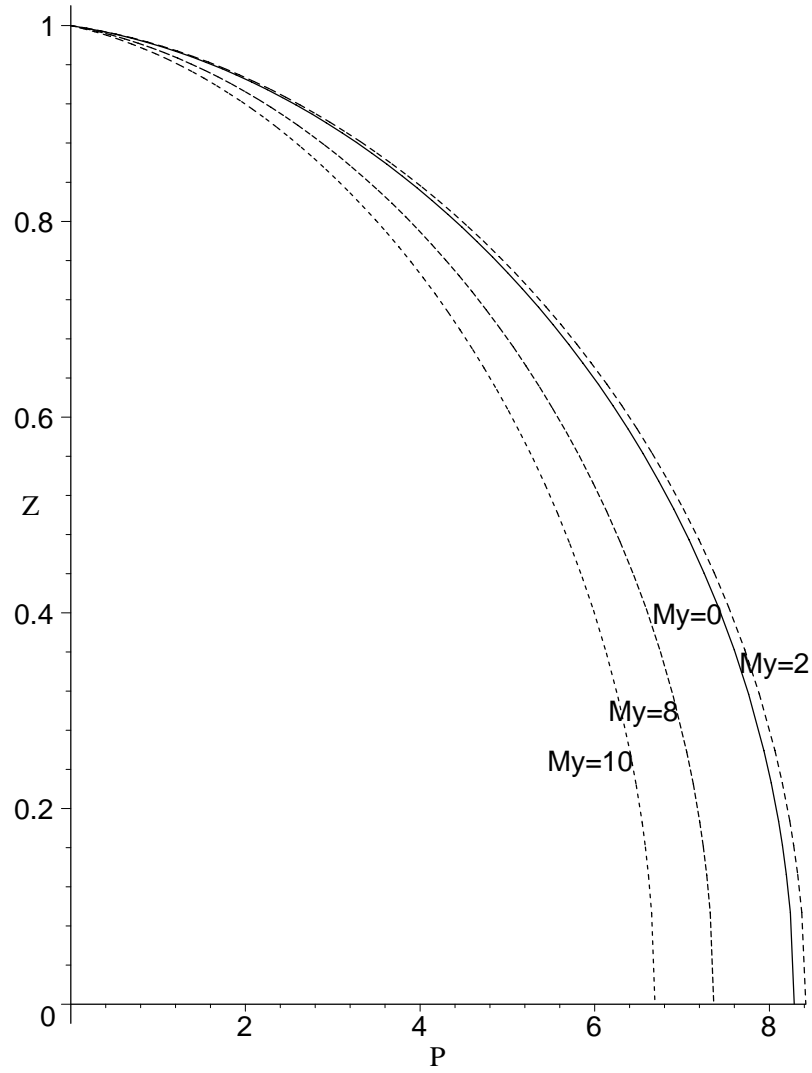


Abbildung 3.2: $\bar{z}(\bar{p})$ für verschiedene Hartmannzahlen M_y ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.9$, $\varphi = 0.93 \pi$, $\bar{E}_z = -2$, $\lambda = 1$.

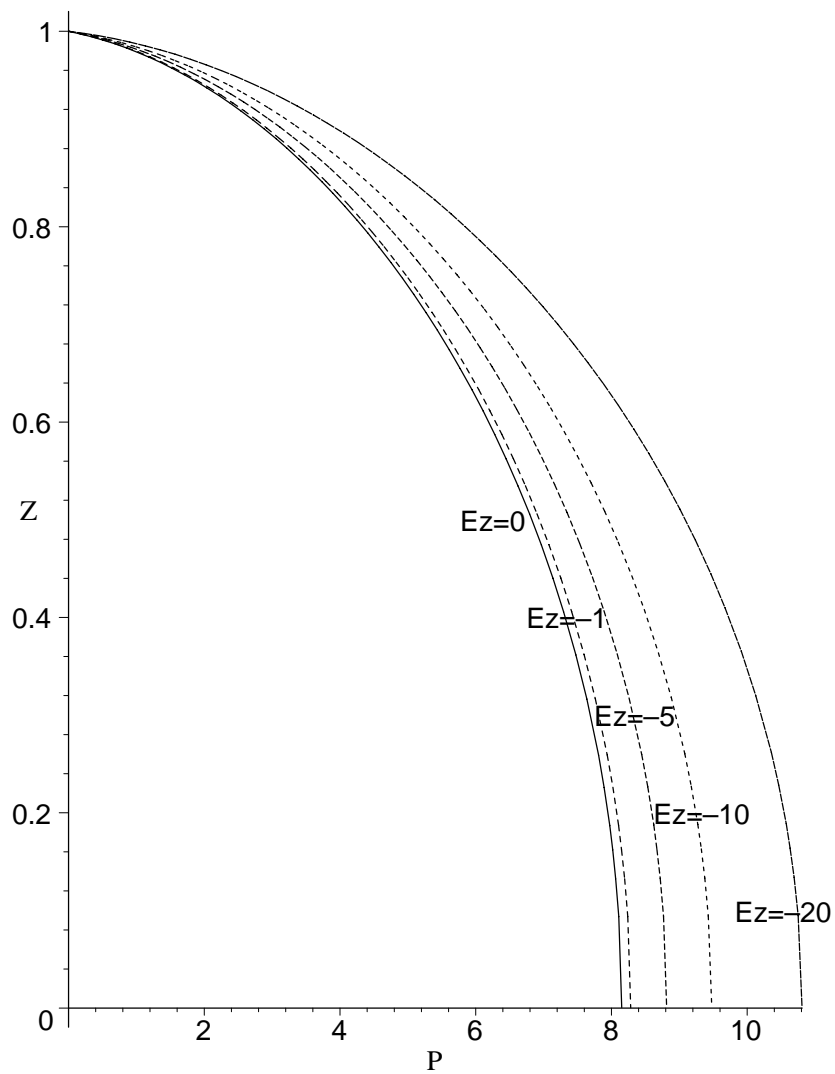


Abbildung 3.3: $\bar{z}(\bar{p})$ für verschiedene E -Felder \bar{E}_z ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.9$, $\varphi = 0.93 \pi$, $M_y = 2$, $\lambda = 1$.

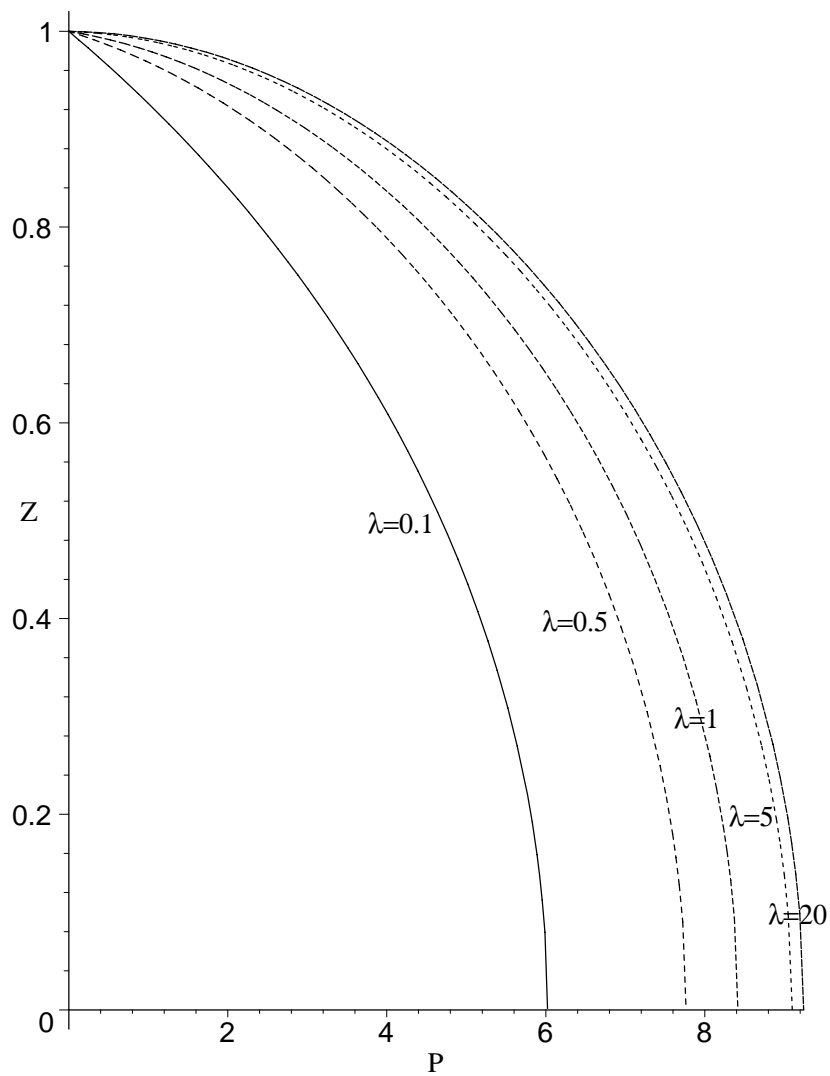


Abbildung 3.4: $\bar{z}(\bar{p})$ für verschiedene Kompressibilitätszahlen λ ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.9$, $\varphi = 0.93 \pi$, $M_y = 2$, $\bar{E}_z = -2$.

unterstützte exakte Berechnung beispielsweise der ersten 1000 Störungsgleichungen ist problemlos möglich. Die Konvergenz der Funktionenreihe wird gezeigt und eine Restgliedabschätzung hergeleitet.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die nichtlineare Differentialgleichung (3.11)

$$\alpha(\varphi) (1 + \lambda \bar{p}) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[(1 + \lambda \bar{p}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right] = 0 . \quad (3.32)$$

Diese Gleichung formal über \bar{z} integriert ergibt

$$\alpha(\varphi) \int (1 + \lambda \bar{p}) d\bar{z} + c_1(\varphi) - (1 + \lambda \bar{p}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = 0 . \quad (3.33)$$

Nochmalige Integration in \bar{z} -Richtung liefert

$$\alpha(\varphi) \int \int (1 + \lambda \bar{p}) d\bar{z} d\bar{z} + c_1(\varphi) \bar{z} + c_2(\varphi) - \underbrace{\int (1 + \lambda \bar{p}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} d\bar{z}}_{\frac{1}{2\lambda}(1+\lambda\bar{p})^2} = 0 . \quad (3.34)$$

Der letzte Term wird mittels Produktintegration wie angedeutet direkt integriert. Es ergibt sich schließlich

$$2 \alpha(\varphi) \int \int (\lambda + \lambda^2 \bar{p}) d\bar{z} d\bar{z} + c_1(\varphi) \bar{z} + c_2(\varphi) - (1 + \lambda \bar{p})^2 = 0 . \quad (3.35)$$

Die Druckfunktion $\bar{p}(\varphi, \bar{z})$ sowie die Integrationsfunktionen $c_1(\varphi)$ und $c_2(\varphi)$ werden im Sinne eines Störungsansatzes nach dem Parameter λ entwickelt:

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \lambda \bar{p}_1 + \lambda^2 \bar{p}_2 + \dots , \quad (3.36)$$

$$c_1 = c_{10} + \lambda c_{11} + \lambda^2 c_{12} + \dots , \quad (3.37)$$

$$c_2 = c_{20} + \lambda c_{21} + \lambda^2 c_{22} + \dots . \quad (3.38)$$

Eingesetzt in die Integralgleichung (3.35) folgt

$$2 \alpha(\varphi) \int \int (\lambda + \lambda^2 \bar{p}_0 + \lambda^3 \bar{p}_1 + \lambda^4 \bar{p}_2 + \dots) d\bar{z} d\bar{z} + (c_{10} + \lambda c_{11} + \lambda^2 c_{12} + \dots) \bar{z} + (c_{20} + \lambda c_{21} + \lambda^2 c_{22} + \dots) - (1 + \lambda \bar{p}_0 + \lambda^2 \bar{p}_1 + \lambda^3 \bar{p}_2 + \dots)^2 = 0 . \quad (3.39)$$

Wegen der Symmetrie zur \bar{x} - \bar{y} -Ebene sind die Integrationsfunktionen $c_{1i}(\varphi)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) identisch null. Nach Potenzen von λ sortiert, ergibt sich das Rekursionschema

λ^0 :

$$c_{20} - 1 = 0 , \quad (3.40)$$

$$\lambda^1: \quad 2\alpha(\varphi) \int \int 1 \, d\bar{z} \, d\bar{z} + c_{21} - (\bar{p}_0 + \bar{p}_0) = 0 , \quad (3.41)$$

$$\lambda^2: \quad 2\alpha(\varphi) \int \int \bar{p}_0 \, d\bar{z} \, d\bar{z} + c_{22} - (\bar{p}_1 + \bar{p}_0^2 + \bar{p}_1) = 0 , \quad (3.42)$$

$$\lambda^3: \quad 2\alpha(\varphi) \int \int \bar{p}_1 \, d\bar{z} \, d\bar{z} + c_{23} - (\bar{p}_2 + \bar{p}_0 \bar{p}_1 + \bar{p}_1 \bar{p}_0 + \bar{p}_2) = 0 , \quad (3.43)$$

$$\lambda^4: \quad 2\alpha(\varphi) \int \int \bar{p}_2 \, d\bar{z} \, d\bar{z} + c_{24} - (\bar{p}_3 + \bar{p}_0 \bar{p}_2 + \bar{p}_1 \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \bar{p}_0 + \bar{p}_3) = 0 \quad (3.44)$$

und allgemein

$$\lambda^{i+2}: \quad 2\alpha(\varphi) \int \int \bar{p}_i \, d\bar{z} \, d\bar{z} + c_{2(i+2)} - \frac{1}{2} (\bar{p}_{i+1} + \bar{p}_0 \bar{p}_i + \bar{p}_1 \bar{p}_{i-1} + \dots + \bar{p}_{i-1} \bar{p}_1 + \bar{p}_i \bar{p}_0 + \bar{p}_{i+1}) = 0 . \quad (3.45)$$

Mit der Substitution $\bar{p}_i = \alpha(\varphi)^{i+1} \tilde{p}_i$ vereinfachen sich die Rekursionsgleichungen weiter. Es ergibt sich ein Rekursionsschema für die Funktionen \tilde{p}_i , nämlich

$$\lambda^0: \quad c_{20} - 1 = 0 , \quad (3.46)$$

$$\lambda^1: \quad \int \int 1 \, d\bar{z} \, d\bar{z} + c_{21} = \tilde{p}_0 , \quad (3.47)$$

$$\lambda^2: \quad \int \int \tilde{p}_0 \, d\bar{z} \, d\bar{z} + c_{22} - \frac{1}{2} \tilde{p}_0^2 = \tilde{p}_1 , \quad (3.48)$$

$$\lambda^3: \quad \int \int \tilde{p}_1 \, d\bar{z} \, d\bar{z} + c_{23} - \frac{1}{2} (\tilde{p}_0 \tilde{p}_1 + \tilde{p}_1 \tilde{p}_0) = \tilde{p}_2 , \quad (3.49)$$

$$\lambda^4: \quad \int \int \tilde{p}_2 \, d\bar{z} \, d\bar{z} + c_{24} - \frac{1}{2} (\tilde{p}_0 \tilde{p}_2 + \tilde{p}_1 \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 \tilde{p}_0) = \tilde{p}_3 , \quad (3.50)$$

⋮

$$\lambda^{i+2}: \quad \int \int \tilde{p}_i \, d\bar{z} \, d\bar{z} + c_{2(i+2)} - \frac{1}{2} (\tilde{p}_0 \tilde{p}_i + \tilde{p}_1 \tilde{p}_{i-1} + \dots + \tilde{p}_{i-1} \tilde{p}_1 + \tilde{p}_i \tilde{p}_0) = \tilde{p}_{i+1} . \quad (3.51)$$

Vorteil der eingeführten Substitution ist, daß jetzt nur noch Polynome $\tilde{p}_i(\bar{z})$ berechnet werden müssen, die von den Systemparametern unabhängig sind. Somit muß das Rekursionsschema nur einmal gelöst werden. Die Lösung des Randwertproblems (3.11) kann in der Form

$$\bar{p}(\varphi, \bar{z}) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \alpha(\varphi)^{i+1} \tilde{p}_i(\bar{z}) \quad (3.52)$$

dargestellt werden. Die Lösungsdarstellung (3.52) läßt erkennen, daß trotz des Störungsansatzes (3.36) für die Konvergenz der Reihe nicht der Parameter λ , sondern das Produkt $\lambda \alpha(\varphi)$ maßgeblich ist. Konvergente Lösungen lassen sich deshalb, wie der Störungsansatz (3.36) vermuten läßt, nicht ausschließlich für $\lambda < 1$ generieren, sondern auch für $\lambda > 1$. Die Konvergenz der Funktionenreihe (3.52) wird nun untersucht.

Hilfssatz 1:

Sei $h(z) \in C^1(z \in \mathbf{R})$ eine gerade Funktion mit $h(z = -1) = h(z = 1) = 0$. Die Funktion $F(z)$, definiert über

$$F(z) = \int \int h(z) dz dz + c_1 z + c_2 \quad (c_1, c_2 = const) , \quad (3.53)$$

erfülle die Randbedingungen $F(z = 1) = F(z = -1) = 0$. Dann ist $c_1 = 0$ und $F(z)$ eine gerade Funktion mit $F'(z = 0) = 0$, und es gilt die Abschätzung

$$|F(z)| \leq \frac{1}{2} \max\{|h(z)|\} , \quad \forall z \in [-1, 1] . \quad (3.54)$$

Beweis:

Da $|h(z)| \leq \max\{|h(z)|\}$ und $F'(z = 0) = 0$ ist, gilt

$$|F'(z)| \leq \max\{|h(z)|\} \cdot |z| . \quad (3.55)$$

Da $F(z = 1) = F(z = -1) = 0$, folgt

$$|F(z)| \leq \max\{|h(z)|\} \cdot \frac{1}{2} |z^2 - 1| , \quad \forall z \in [-1, 1] \quad (3.56)$$

und daher die Behauptung (3.54).

Satz 1:

Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \alpha(\varphi)^{i+1} \tilde{p}_i(\bar{z})$ konvergiert absolut, falls $\lambda |\alpha(\varphi)| \leq 4 - 2\sqrt{3}$. Bei

Abbruch der Reihe nach dem n -ten Glied gilt für den Fehler Δy die Restgliedabschätzung

$$|\Delta y| \leq \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1} \lambda^{n+1} |\alpha(\varphi)|^{n+2}}{1 - \left(\frac{a}{2}\right) \lambda |\alpha(\varphi)|} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^{n+1} \lambda^{n+1} |\alpha(\varphi)|^{n+2} \quad (3.57)$$

$$\text{mit } a = \frac{2 + \lambda \alpha(\varphi) - \sqrt{\lambda^2 \alpha(\varphi)^2 - 8\lambda \alpha(\varphi) + 4}}{2 \lambda \alpha(\varphi)}. \quad (3.58)$$

Beweis:

Zum Beweis der Behauptung wird eine Majorante zur Funktionenreihe (3.52) konstruiert. Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \tilde{p}_{i+1}(\bar{z}) \right| &= \left| \int \int \tilde{p}_i(\bar{z}) d\bar{z} d\bar{z} + c_{2(i+2)} - \frac{1}{2} \left[\tilde{p}_0(\bar{z}) \tilde{p}_i(\bar{z}) + \tilde{p}_1(\bar{z}) \tilde{p}_{i-1}(\bar{z}) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{p}_{i-1}(\bar{z}) \tilde{p}_1(\bar{z}) + \tilde{p}_i(\bar{z}) \tilde{p}_0(\bar{z}) \right] \right| \\ &\leq \left| \int \int \tilde{p}_i(\bar{z}) d\bar{z} d\bar{z} + c_{2(i+2)} \right| + \frac{1}{2} \left[|\tilde{p}_0(\bar{z})| |\tilde{p}_i(\bar{z})| + |\tilde{p}_1(\bar{z})| |\tilde{p}_{i-1}(\bar{z})| + \dots \right. \\ &\quad \left. + |\tilde{p}_{i-1}(\bar{z})| |\tilde{p}_1(\bar{z})| + |\tilde{p}_i(\bar{z})| |\tilde{p}_0(\bar{z})| \right] \\ &\leq \max_{z \in [-1,1]} \left\{ \left| \int \int \tilde{p}_i(\bar{z}) d\bar{z} d\bar{z} + c_{2(i+2)} \right| + \frac{1}{2} \left[|\tilde{p}_0(\bar{z})| |\tilde{p}_i(\bar{z})| + |\tilde{p}_1(\bar{z})| |\tilde{p}_{i-1}(\bar{z})| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots + |\tilde{p}_{i-1}(\bar{z})| |\tilde{p}_1(\bar{z})| + |\tilde{p}_i(\bar{z})| |\tilde{p}_0(\bar{z})| \right] \right\}. \quad (3.59) \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen $\tilde{p}_{i,max} = \max_{z \in [-1,1]} \{|\tilde{p}_i(\bar{z})|\}$ sowie $\tilde{\lambda} = \lambda |\alpha(\varphi)|$ folgt mit der Abschätzung (3.59) und Hilfssatz 1

λ^1 :

$$\frac{1}{2} \geq \tilde{p}_{0,max} \geq \tilde{p}_0(\bar{z}), \quad (3.60)$$

λ^2 :

$$\frac{1}{2} \tilde{\lambda} \left[\tilde{p}_{0,max} + \tilde{p}_{0,max} \tilde{p}_{0,max} \right] \geq \tilde{\lambda} \tilde{p}_{1,max} \geq \tilde{\lambda} \tilde{p}_1(\bar{z}), \quad (3.61)$$

λ^3 :

$$\frac{1}{2} \tilde{\lambda}^2 \left[\tilde{p}_{1,max} + \tilde{p}_{0,max} \tilde{p}_{1,max} + \tilde{p}_{1,max} \tilde{p}_{0,max} \right] \geq \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{2,max} \geq \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_2(\bar{z}), \quad (3.62)$$

λ^4 :

$$\frac{1}{2} \tilde{\lambda}^3 \left[\tilde{p}_{2,max} + \tilde{p}_{0,max} \tilde{p}_{2,max} + \tilde{p}_{1,max} \tilde{p}_{1,max} + \tilde{p}_{2,max} \tilde{p}_{0,max} \right] \geq \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_{3,max} \geq \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_3(\bar{z}) \quad (3.63)$$

⋮

und allgemein

λ^{i+2} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^{i+1} \left[\tilde{p}_{i,max} + \tilde{p}_{0,max} \tilde{p}_{i,max} + \tilde{p}_{1,max} \tilde{p}_{i-1,max} + \cdots \right. \\ \left. + \tilde{p}_{i-1,max} \tilde{p}_{1,max} + \tilde{p}_{i,max} \tilde{p}_{0,max} \right] \geq \tilde{\lambda}^{i+1} \tilde{p}_{i+1} \geq \tilde{\lambda}^{i+1} \tilde{p}_{i+1}(\bar{z}). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Addiert man die ersten $i + 2$ Ungleichungen, ergibt sich nach Umsortieren

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[1 + \tilde{\lambda} \tilde{p}_{0,max} + \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{1,max} + \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_{2,max} + \tilde{\lambda}^4 \tilde{p}_{3,max} + \cdots + \tilde{\lambda}^{i+1} \tilde{p}_{i,max} \right] \\ & + \frac{1}{2} \tilde{p}_{0,max} \left[\tilde{\lambda} \tilde{p}_{0,max} + \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{1,max} + \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_{2,max} + \tilde{\lambda}^4 \tilde{p}_{3,max} + \cdots + \tilde{\lambda}^{i+1} \tilde{p}_{i,max} \right] \\ & + \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \tilde{p}_{1,max} \left[\tilde{\lambda} \tilde{p}_{0,max} + \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{1,max} + \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_{2,max} + \tilde{\lambda}^4 \tilde{p}_{3,max} + \cdots + \tilde{\lambda}^i \tilde{p}_{i-1,max} \right] \\ & + \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{2,max} \left[\tilde{\lambda} \tilde{p}_{0,max} + \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{1,max} + \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_{2,max} + \tilde{\lambda}^4 \tilde{p}_{3,max} + \cdots + \tilde{\lambda}^{i-1} \tilde{p}_{i-2,max} \right] \\ & + \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_{3,max} \left[\tilde{\lambda} \tilde{p}_{0,max} + \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{1,max} + \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_{2,max} + \tilde{\lambda}^4 \tilde{p}_{3,max} + \cdots + \tilde{\lambda}^{i-2} \tilde{p}_{i-3,max} \right] \\ & + \cdots \\ & + \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^{i-2} \tilde{p}_{i-2,max} \left[\tilde{\lambda} \tilde{p}_{0,max} + \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{1,max} + \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_{2,max} \right] \\ & + \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^{i-1} \tilde{p}_{i-1,max} \left[\tilde{\lambda} \tilde{p}_{0,max} + \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{1,max} \right] \\ & + \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^i \tilde{p}_{i,max} \left[\tilde{\lambda} \tilde{p}_{0,max} \right] \\ & \geq \left[\tilde{p}_{0,max} + \tilde{\lambda}^1 \tilde{p}_{1,max} + \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{2,max} + \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_{3,max} + \cdots + \tilde{\lambda}^i \tilde{p}_{i,max} + \tilde{\lambda}^{i+1} \tilde{p}_{i+1,max} \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Werden auf der linken Seite von Gl. (3.65) in den eckigen Klammern positive Terme geeignet ergänzt, so erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[1 + \tilde{\lambda} \sum_{n=0}^i \tilde{\lambda}^n \tilde{p}_{n,max} \right] + \frac{1}{2} \tilde{p}_{0,max} \tilde{\lambda} \sum_{n=0}^i \tilde{\lambda}^n \tilde{p}_{n,max} + \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \tilde{p}_{1,max} \tilde{\lambda} \sum_{n=0}^i \tilde{\lambda}^n \tilde{p}_{n,max} \\ & + \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{2,max} \tilde{\lambda} \sum_{n=0}^i \tilde{\lambda}^n \tilde{p}_{n,max} + \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_{3,max} \tilde{\lambda} \sum_{n=0}^i \tilde{\lambda}^n \tilde{p}_{n,max} \\ & + \cdots + \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^{i-2} \tilde{p}_{i-2,max} \tilde{\lambda} \sum_{n=0}^i \tilde{\lambda}^n \tilde{p}_{n,max} + \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^{i-1} \tilde{p}_{i-1,max} \tilde{\lambda} \sum_{n=0}^i \tilde{\lambda}^n \tilde{p}_{n,max} \\ & + \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^i \tilde{p}_{i,max} \tilde{\lambda} \sum_{n=0}^i \tilde{\lambda}^n \tilde{p}_{n,max} \geq \sum_{n=0}^{i+1} \tilde{\lambda}^n \tilde{p}_{n,max} \end{aligned} \quad (3.66)$$

oder nach Ausklammern

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[1 + \tilde{\lambda} \tilde{p}_{0,max} + \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{1,max} + \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_{2,max} + \tilde{\lambda}^4 \tilde{p}_{3,max} + \cdots + \tilde{\lambda}^{i+1} \tilde{p}_{i,max} \right] \\
& + \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \left[\tilde{p}_{0,max} + \tilde{\lambda} \tilde{p}_{1,max} + \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{2,max} + \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_{3,max} + \cdots + \tilde{\lambda}^i \tilde{p}_{i,max} \right]^2 \\
& \geq \left[\tilde{p}_{0,max} + \tilde{\lambda} \tilde{p}_{1,max} + \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{2,max} + \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_{3,max} + \cdots + \tilde{\lambda}^i \tilde{p}_{i,max} + \tilde{\lambda}^{i+1} \tilde{p}_{i+1,max} \right]. \quad (3.67)
\end{aligned}$$

Gleichung (3.67) stellt eine Abschätzung für das Maximum der $(i+1)$ -sten Partialsumme der Reihe (3.52) dar. Im weiteren wird die i -te Partialsumme mit

$$P_{i,max} = \left[\tilde{p}_{0,max} + \tilde{\lambda} \tilde{p}_{1,max} + \tilde{\lambda}^2 \tilde{p}_{2,max} + \tilde{\lambda}^3 \tilde{p}_{3,max} + \cdots + \tilde{\lambda}^i \tilde{p}_{i,max} \right] \quad (3.68)$$

abgekürzt. Damit schreibt sich Gl. (3.67) zu

$$\frac{1}{2} \left[1 + \tilde{\lambda} P_{i,max} + \tilde{\lambda} P_{i,max}^2 \right] \geq P_{i+1,max}. \quad (3.69)$$

Die durch

$$\frac{1}{2} \left[1 + \tilde{\lambda} \hat{P}_i + \tilde{\lambda} \hat{P}_i^2 \right] = \hat{P}_{i+1} \quad \text{mit} \quad \hat{P}_0 = \frac{1}{2} \quad (3.70)$$

rekursiv bestimmten Partialsummen \hat{P}_i sind wegen $\tilde{\lambda} > 0$ größer gleich den Partialsummen $P_{i,max}$. Die Fixpunkte der durch Gl. (3.70) bestimmten Folge sind über die Gleichung

$$\frac{1}{2} \left[1 + \tilde{\lambda} \hat{P} + \tilde{\lambda} \hat{P}^2 \right] = \hat{P} \quad (3.71)$$

bestimmt. Es ergeben sich die beiden Fixpunkte

$$\hat{P}_{a,b} = -\frac{\tilde{\lambda} - 2}{2\tilde{\lambda}} \pm \frac{\sqrt{(\tilde{\lambda} - 2)^2 - 4\tilde{\lambda}}}{2\tilde{\lambda}}. \quad (3.72)$$

Reelle Fixpunkte existieren, falls $(\tilde{\lambda} - 2)^2 - 4\tilde{\lambda} \geq 0$, also für

$$\tilde{\lambda}_{1,2} \leq 4 \pm 2\sqrt{3}. \quad (3.73)$$

Von den beiden Wurzeln ist nur $\tilde{\lambda}_1 = 4 - 2\sqrt{3}$ sinnvoll, da $\tilde{\lambda}_2 = 4 + 2\sqrt{3} > 1$. Mit $\tilde{\lambda}_1$ ergibt sich der reelle Fixpunkt $\hat{P}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Es ist offensichtlich, daß für $\tilde{\lambda} < 4 - 2\sqrt{3}$ zwei reelle Fixpunkte entstehen, wobei $\hat{P}_a = -\frac{\tilde{\lambda}-2}{2\tilde{\lambda}} - \frac{\sqrt{(\tilde{\lambda}-2)^2-4\tilde{\lambda}}}{2\tilde{\lambda}}$ positiv und kleiner als \hat{P}_1 ist. Es bleibt zu zeigen, daß die Folge \hat{P}_i nach Gl. (3.70) für $\tilde{\lambda} \leq \tilde{\lambda}_1$ gegen den Fixpunkt \hat{P}_a konvergiert. Dazu wird gezeigt, daß die Folge

monoton wächst und nach oben beschränkt ist. Die Monotonie ist offensichtlich. Zum Beweis der Beschränktheit wird die Folge (3.70) nach oben abgeschätzt:

$$\begin{aligned}\hat{P}_{i+1} &= \frac{1}{2} \left[1 + \tilde{\lambda} \hat{P}_i + \tilde{\lambda} \hat{P}_i^2 \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[1 + a \tilde{\lambda} \hat{P}_i \right].\end{aligned}\quad (3.74)$$

a ist eine reelle, noch unbekannte Konstante, die anschließend so bestimmt wird, daß die Abschätzung (3.74) für alle \hat{P}_i ($i = 0, 1, \dots, \infty$) gültig ist. Aus Gl. (3.74) folgt durch rekursives Einsetzen

$$\begin{aligned}\hat{P}_{i+1} &\leq \frac{1}{2} \left[1 + a \tilde{\lambda} \hat{P}_i \right] \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} \right) \tilde{\lambda} + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \tilde{\lambda}^2 \hat{P}_{i-1} \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} \right) \tilde{\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^2 \tilde{\lambda}^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^3 \tilde{\lambda}^3 \hat{P}_{i-2} \\ &\quad \vdots \\ &\leq \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{a}{2} \right) \tilde{\lambda} + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \tilde{\lambda}^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^3 \tilde{\lambda}^3 + \dots + \left(\frac{a}{2} \right)^i \tilde{\lambda}^i \right] \\ &\quad + \left(\frac{a}{2} \right)^{i+1} \tilde{\lambda}^{i+1} \hat{P}_0.\end{aligned}\quad (3.75)$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt die Beziehung

$$\hat{P}_a \leq \hat{P}^* = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{2} \right) \tilde{\lambda}}. \quad (3.76)$$

Damit ist die Beschränktheit der Folge (3.70) gezeigt, d.h. die Folge (3.70) konvergiert gegen den Fixpunkt \hat{P}_a . Es verbleibt noch die Bestimmung der Konstanten a . a wird so bestimmt, daß

$$\frac{1}{2} \left[1 + \tilde{\lambda} \hat{P}_i + \tilde{\lambda} \hat{P}_i^2 \right] \leq \frac{1}{2} \left[1 + a \tilde{\lambda} \hat{P}_i \right] \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \infty) \quad (3.77)$$

erfüllt ist. Setzt man in Gl. (3.77) für \hat{P}_i den maximalen Wert \hat{P}^* ein (ein noch kleinerer Wert für a würde sich ergeben, wenn man statt dessen \hat{P}_a einsetzte), führt dies auf die quadratische Gleichung

$$2 (a - 1) \left(1 - \left(\frac{a}{2} \right) \tilde{\lambda} \right) - 1 = 0 \quad (3.78)$$

zur Bestimmung von a . Diese Gleichung hat die relevante Lösung

$$a_1 = \frac{2 + \tilde{\lambda} - \sqrt{\tilde{\lambda}^2 - 8 \tilde{\lambda} + 4}}{2 \tilde{\lambda}}. \quad (3.79)$$

Für $\tilde{\lambda} = 4 - 2\sqrt{3}$ ergibt sich die doppelte Nullstelle $a_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$. Die Konvergenz der Funktionenreihe (3.52) ist damit bewiesen. Denn für $\tilde{\lambda} = \lambda |\alpha(\varphi)| \leq 4 - 2\sqrt{3}$ gilt

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \alpha(\varphi)^i \tilde{p}_i(\bar{z}) \right| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i |\alpha(\varphi)^i| |\tilde{p}_i(\bar{z})| \\
&\leq \max_{z \in [-1,1]} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i |\alpha(\varphi)^i| |\tilde{p}_i(\bar{z})| \right\} \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i |\alpha(\varphi)^i| \max_{z \in [-1,1]} |\tilde{p}_i(\bar{z})| \\
&\leq \hat{P}_a \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{3.80}
\end{aligned}$$

Die Abschätzung (3.75) eignet sich für eine Restgliedabschätzung der Reihe (3.52). Bricht man die Reihe $|\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \alpha(\varphi)^i \tilde{p}_i|$ nach dem n -ten Glied ab, so gilt für den Fehler ΔP

$$\begin{aligned}
|\Delta P| &\leq \hat{P}^* - \hat{P}_{n+1} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{2}\right) \tilde{\lambda}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{a}{2}\right) \tilde{\lambda} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tilde{\lambda}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^3 \tilde{\lambda}^3 + \dots + \left(\frac{a}{2}\right)^n \tilde{\lambda}^n \right] - \left(\frac{a}{2}\right)^{n+1} \tilde{\lambda}^{n+1} \hat{P}_0 \\
&= \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1} \tilde{\lambda}^{n+1}}{1 - \left(\frac{a}{2}\right) \tilde{\lambda}} - \left(\frac{a}{2}\right)^{n+1} \tilde{\lambda}^{n+1} \hat{P}_0 \quad \text{mit} \quad \hat{P}_0 = \frac{1}{2}. \tag{3.81}
\end{aligned}$$

Eine Abschätzung für das Restglied der Reihe (3.52) erhält man einfach, indem ΔP mit $|\alpha(\varphi)|$ multipliziert wird.

Das System (3.46) - (3.51) kann vollständig algebraisiert werden, so daß ein matrizielles Rekursionsschema zur Berechnung der Funktionen $\tilde{p}_i(\bar{z})$ entsteht. Das Rekursionsschema (3.46) - (3.51) läßt erkennen, daß alle $\tilde{p}_i(\bar{z})$ gerade Funktionen sind und daß $\tilde{p}_i(\bar{z})$ Potenzen bis zum Grad $2i + 2$ enthält, d.h.

$$p_i = a_{i,0} + a_{i,2} \bar{z}^2 + a_{i,4} \bar{z}^4 + \dots + a_{i,2i+2} \bar{z}^{2i+2}. \tag{3.82}$$

Die Produkte $\tilde{p}_m \tilde{p}_n$ lassen sich mit dem $((n+2) \times 1)$ -Vektor

$$\mathbf{p}_n = \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,2} \\ a_{n,4} \\ \vdots \\ a_{n,2n+2} \end{pmatrix}, \tag{3.83}$$

dem $((m + n + 3) \times 1)$ -Vektor

$$\mathbf{z}_{2m+2n+4} = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{z}^2 \\ \bar{z}^4 \\ \vdots \\ \bar{z}^{2m+2n+4} \end{pmatrix}, \quad (3.84)$$

und der $((m + n + 3) \times (n + 2))$ -Matrix

$$\mathbf{P}_m = \begin{pmatrix} a_{m,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{m,2} & a_{m,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{m,4} & a_{m,2} & a_{m,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & & & \vdots & & & & & & \\ a_{m,2m+2} & a_{m,2m} & \cdots & a_{m,2} & a_{m,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{m,2m+2} & a_{m,2m} & \cdots & a_{m,2} & a_{m,0} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_{m,2m+2} & a_{m,2m} & \cdots & a_{m,2} & a_{m,0} & 0 & 0 & \cdots \\ & & & \vdots & & & & & & \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

formal als

$$\tilde{p}_m \tilde{p}_n = (\mathbf{P}_m \cdot \mathbf{p}_n)^T \cdot \mathbf{z}_{2m+2n+4} \quad (3.86)$$

darstellen. Das Integral

$$\int \int \tilde{p}_i d\bar{z} d\bar{z} + c_{2(i+2)} \quad (3.87)$$

kann mit der $((i + 3) \times (i + 2))$ -Matrix

$$\mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 \cdot 2} & \frac{1}{3 \cdot 4} & \frac{1}{5 \cdot 6} & \cdots & \frac{1}{(2i+1) \cdot (2i+2)} & \frac{1}{(2i+3) \cdot (2i+4)} \\ \frac{1}{1 \cdot 2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3 \cdot 4} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(2i+1) \cdot (2i+2)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{(2i+3) \cdot (2i+4)} \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

algebraisch auf die Form

$$\int \int \tilde{p}_i d\bar{z} d\bar{z} = (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{p}_i)^T \mathbf{z}_{2i+4} \quad (3.89)$$

gebracht werden. Durch die erste Zeile der Matrix \mathbf{S}_i wird die Anpassung an die Randbedingungen $\tilde{p}_i(\bar{z} = -1) = \tilde{p}_i(\bar{z} = 1) = 0$ gewährleistet. Damit lautet die

algebraisierte Rekursionsvorschrift gemäß Gl. (3.51)

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{i+1} &= \int \int \tilde{p}_i d\bar{z} d\bar{z} + c_{2(i+2)} - \frac{1}{2}(\tilde{p}_0 \tilde{p}_i + \tilde{p}_1 \tilde{p}^i - 1 + \cdots + \tilde{p}_{i-1} \tilde{p}_1 + \tilde{p}_i \tilde{p}_0) \\
&= (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{p}_i)^T \mathbf{z}_{2i+4} - \frac{1}{2} \left[(\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{p}_i)^T \cdot \mathbf{z}_{2i+4} + (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{p}_{i-1})^T \cdot \mathbf{z}_{2i+4} + \cdots \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{P}_{i-1} \cdot \mathbf{p}_1)^T \cdot \mathbf{z}_{2i+4} + (\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{p}_0)^T \cdot \mathbf{z}_{2i+4} \right]. \quad (3.90)
\end{aligned}$$

Die Abbildungen 3.5-3.7 zeigen Funktionsverläufe $\bar{p}(\varphi)$. Variiert wird die Hartmannzahl M_y , das dimensionslose E -Feld \bar{E}_z und die Kompressibilitätszahl λ . Abbildung 3.8 zeigt das gesamte Druckfeld $\bar{p}(\varphi, \bar{z})$. Zur Diskussion der Kurven sei auf Abschnitt 3.1.1 verwiesen.

3.2 Axiales eingepprägtes Magnetfeld

Nun wird der Fall betrachtet, daß das äußere eingepprägte Magnetfeld axial, d.h. in \bar{z} -Richtung orientiert ist (Abb. 3.9). V_y ist das konstante elektrische Potential zwischen Lagerschale und Zapfen. Beide werden aus den in Kapitel 2 genannten Gründen als ideale Leiter angesehen. Eine Dimensionsanalyse der Maxwell'schen Gleichung $\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = 0$ unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \bar{\mathbf{j}} = 0$ zeigt, daß $\bar{j}_\varphi \ll \bar{j}_y$, $\bar{j}_z \ll \bar{j}_y$, $\frac{\partial \bar{j}_y}{\partial \bar{y}} \approx 0$, $\bar{E}_\varphi \ll \bar{E}_y$, $\bar{E}_z \ll \bar{E}_y$, $\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \varphi} \ll \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{y}}$ und $\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{z}} \ll \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{y}}$. Daher werden \bar{j}_φ , \bar{j}_z , \bar{E}_φ , \bar{E}_z , $\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{z}}$ und $\frac{\partial \bar{j}_y}{\partial \bar{y}}$ im weiteren vernachlässigt. Mit den übrigen Annahmen aus Abschnitt 2.2 ergibt sich die Impulsbilanz in \bar{x} -Richtung zu

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + M_z \bar{j}_y + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \quad (3.91)$$

die Impulsbilanz in \bar{z} -Richtung zu

$$0 = -\left(\frac{B}{D}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \quad (3.92)$$

und das Ohmsche Gesetz in \bar{y} -Richtung zu

$$\bar{j}_y = \bar{E}_y - M_z \bar{u}. \quad (3.93)$$

Unter Beachtung der Randbedingungen $\bar{u}(\bar{y} = 0) = 1$ und $\bar{u}(\bar{y} = \bar{h}) = 0$ erhält man durch eine Integration von Gl. (3.91)

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} - M_z \bar{j}_y \right] (\bar{y}^2 - \bar{h} \bar{y}) + \left(1 - \frac{\bar{y}}{\bar{h}}\right). \quad (3.94)$$

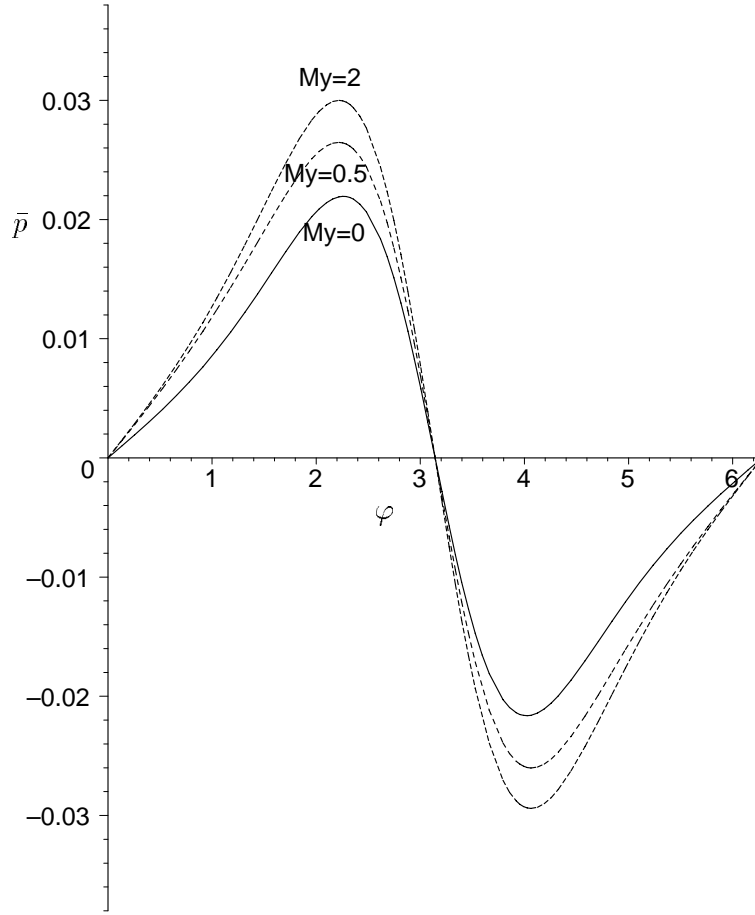


Abbildung 3.5: $\bar{p}(\varphi)$ für verschiedene Hartmannzahlen M_y ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.3$, $\bar{z} = 0$, $\bar{E}_z = -2$, $\lambda = 1$.

Nochmalige Integration in \bar{y} -Richtung gibt den dimensionslosen Durchfluß

$$\bar{q}_\varphi = \int_0^{\bar{h}} \bar{u} d\bar{y} = -\frac{\bar{h}^3}{12} \left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} - M_z \bar{j}_y \right] + \frac{\bar{h}}{2}. \quad (3.95)$$

Das Ohmsche Gesetz über den Spalt integriert liefert

$$\int_0^{\bar{h}} \bar{j}_y d\bar{y} = \int_0^{\bar{h}} \bar{E}_y d\bar{y} - M_z \int_0^{\bar{h}} \bar{u} d\bar{y} \quad \rightarrow \quad \bar{j}_y \bar{h} = -\bar{V}_y - M_z \bar{q}_\varphi. \quad (3.96)$$

Gl. (3.95) in Gl. (3.96) eingesetzt führt auf

$$\bar{q}_\varphi = -\frac{\bar{h}^3}{12 + (M_z \bar{h})^2} \left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + \frac{M_z \bar{V}_y}{\bar{h}} \right] + \frac{6\bar{h}}{12 + (M_z \bar{h})^2}. \quad (3.97)$$

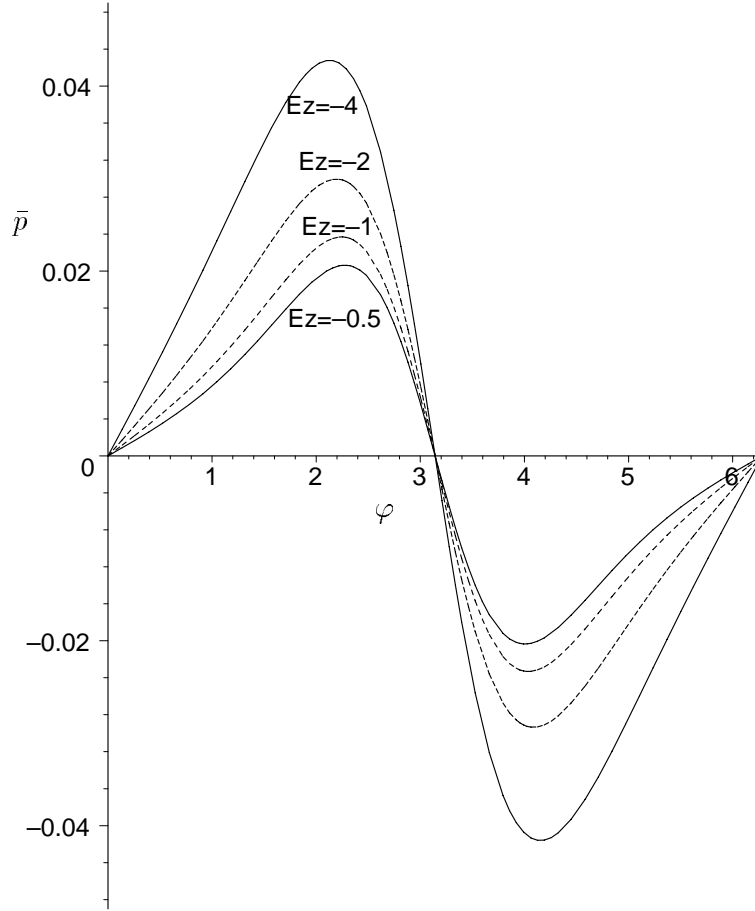


Abbildung 3.6: $\bar{p}(\varphi)$ für verschiedene Potentiale \bar{E}_z ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.3$, $\bar{z} = 0$, $M_y = 1$, $\lambda = 1$.

Aus Gl. (3.92) folgt durch zweimalige Integration wie in Abschnitt 3.1.1

$$\bar{q}_z = \int_0^{\bar{h}} \bar{w} d\bar{y} = -\frac{1}{12} \left(\frac{D}{B} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \bar{h}^3. \quad (3.98)$$

Die Kontinuitätsgleichung (2.36) liefert unter Verwendung der Hypothese für schmale Lager ($\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} \approx 0$) die Differentialgleichung zur Bestimmung des Druckfeldes $\bar{p}(\varphi, \bar{z})$

$$\left(\frac{B}{D} \right)^2 \frac{12}{\bar{h}^3} \frac{\partial \bar{q}_\varphi}{\partial \varphi} (1 + \lambda \bar{p}) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[(1 + \lambda \bar{p}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right] = 0 \quad (3.99)$$

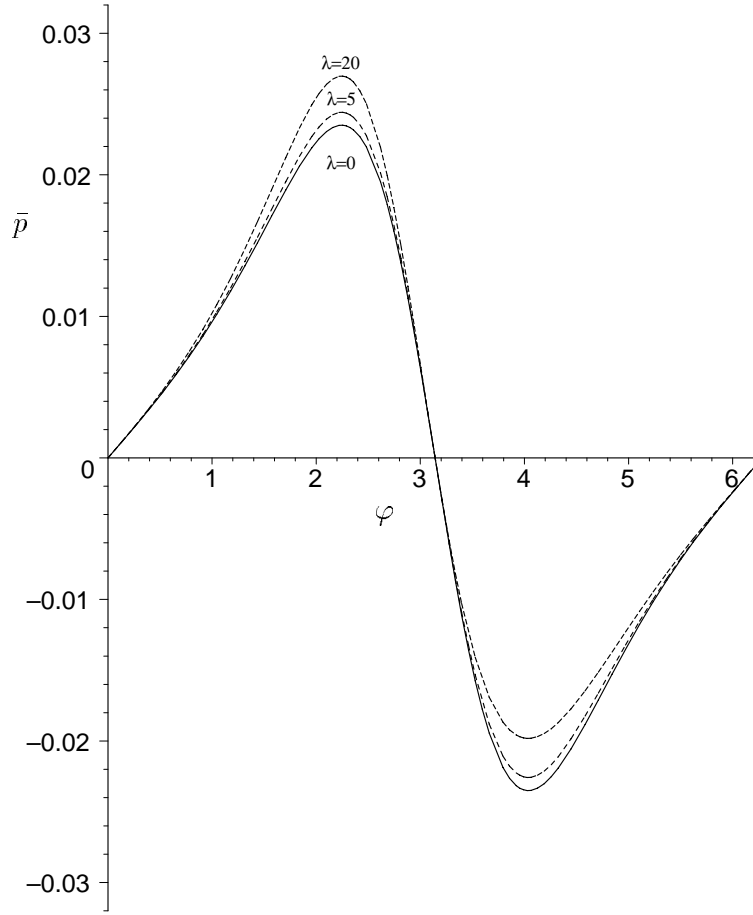


Abbildung 3.7: $\bar{p}(\varphi)$ für verschiedene Kompressibilitätszahlen λ ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.3$, $\bar{z} = 0$, $M_y = 1$, $\bar{E}_z = -1$.

bzw. umgeschrieben

$$\beta(\varphi) (1 + \lambda \bar{p}) - \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} [(1 + \lambda \bar{p})^2] = 0, \quad (3.100)$$

wobei nach Gl. (3.97)

$$\beta(\varphi) = \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{72}{\bar{h}^3} \frac{[12 - M_z^2 \bar{h}^2 - 4M_z \bar{V}_y \bar{h}] \bar{h}'}{(12 + M_z^2 \bar{h}^2)^2} \quad (3.101)$$

folgt.

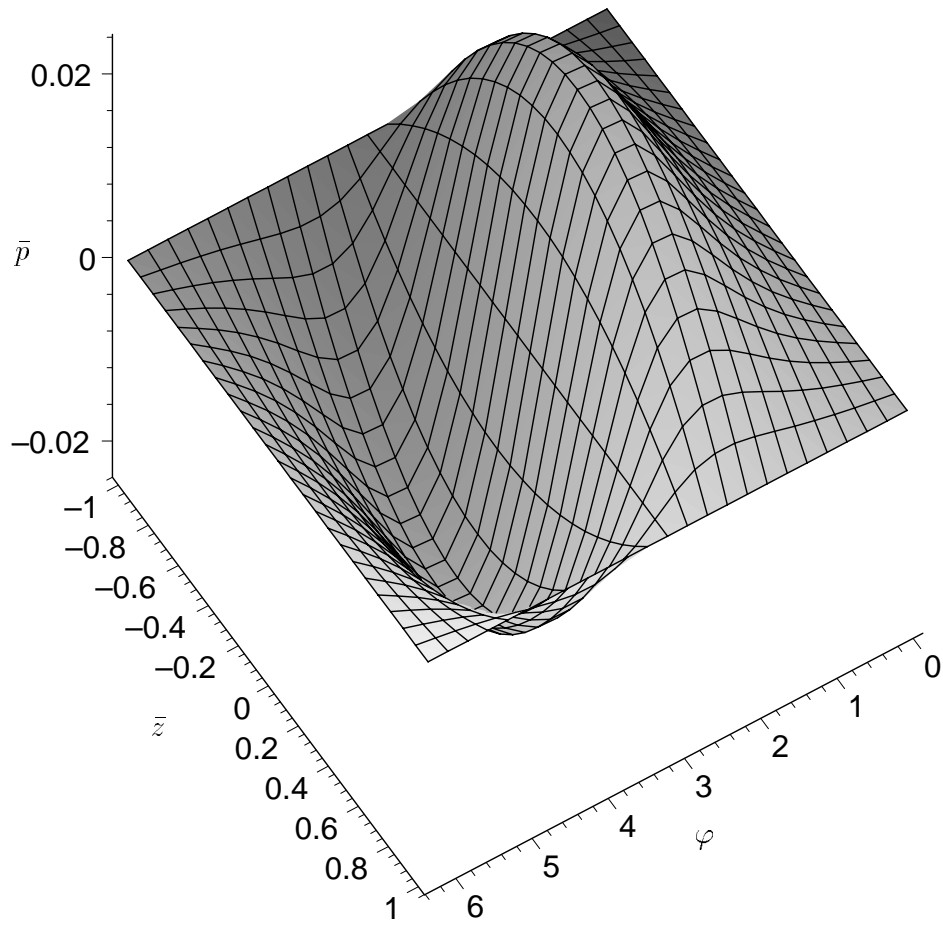


Abbildung 3.8: Druckverteilung $\bar{p}(\varphi, \bar{z})$; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.3$, $M_y = 1$, $\bar{E}_z = -1$, $\lambda = 1$.

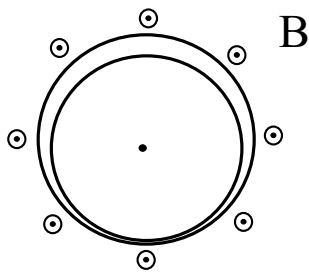


Abbildung 3.9: Eingprägtes axiales Magnetfeld

3.2.1 Strenge Lösung in impliziter Form

Die Differentialgleichung (3.100) hat dieselbe Struktur wie die Differentialgleichung (3.11) in Abschnitt 3.1.1. Es ist in den Gleichungen in Abschnitt 3.1.1 nur $\alpha(\varphi)$ durch $\beta(\varphi)$ zu ersetzen. Die implizite Lösung der Differentialgleichung (3.100) ist für $\beta(\varphi) < 0$ durch die Gleichungen (3.24) sowie (3.25) und für $\beta(\varphi) > 0$ durch die Gleichungen (3.30) und (3.31) gegeben.

Die Abbildungen 3.10 - 3.12 zeigen Kurven vom Typ $\bar{p}(\varphi, \bar{z} = const)$. In Abb. 3.10 sind Lösungskurven für verschiedene Hartmannzahlen M_z dargestellt. Für $M_z < 10$ ist bei Erhöhung des B -Feldes eine Druckerhöhung zu beobachten. Für $M_z > 10$ sinkt der Druck bei weiterer Vergrößerung des B -Feldes ab. Folglich gibt es eine optimale Hartmannzahl M_z für maximale Druckentwicklung. Ursache dafür ist wie im Fall des eingepprägten radialen B -Feldes (Abschnitt 3.1.1) die Zunahme der induzierten Ströme bei steigender Hartmannzahl und die damit verbundene Richtungsumkehr der Lorentz-Kraft. Abb. 3.11 zeigt Kurven für unterschiedliche Potentiale \bar{V}_y . Hier zeigt sich wie im Fall des eingepprägten radialen Magnetfeldes, daß eine stetige Erhöhung des E -Feldes zu einer stetigen Erhöhung des Druckes führt. In Abb. 3.12 sind Kurven für verschiedene Kompressibilitätszahlen λ zu sehen. Es zeigt sich, daß der Druck mit wachsendem λ steigt. Der Zuwachs bei Werten von $\lambda > 5$ ist aber gering. Die Drucksteigerung durch Anbringen externer B - und E -Felder ist im Falle des axialen B -Feldes erkennbar größer als im Falle des radialen B -Feldes.

3.2.2 Explizite Reihendarstellung

Eine explizite Darstellung der Lösung von Gl. (3.100) in Form einer Funktionenreihe analog zu Abschnitt 3.1.2 kann wieder durch Ersetzen von $\alpha(\varphi)$ durch $\beta(\varphi)$ in den entsprechenden Gleichungen in Abschnitt 3.1.2 gewonnen werden. Die Abbildungen 3.13 - 3.15 zeigen Druckverläufe $\bar{p}(\varphi)$ für verschiedene Parameterkonstellationen.

3.3 Toroidales eingepprägtes Magnetfeld

Das konstante äußere Magnetfeld sei nun toroidal orientiert (Abb. 3.16). Lagerschale

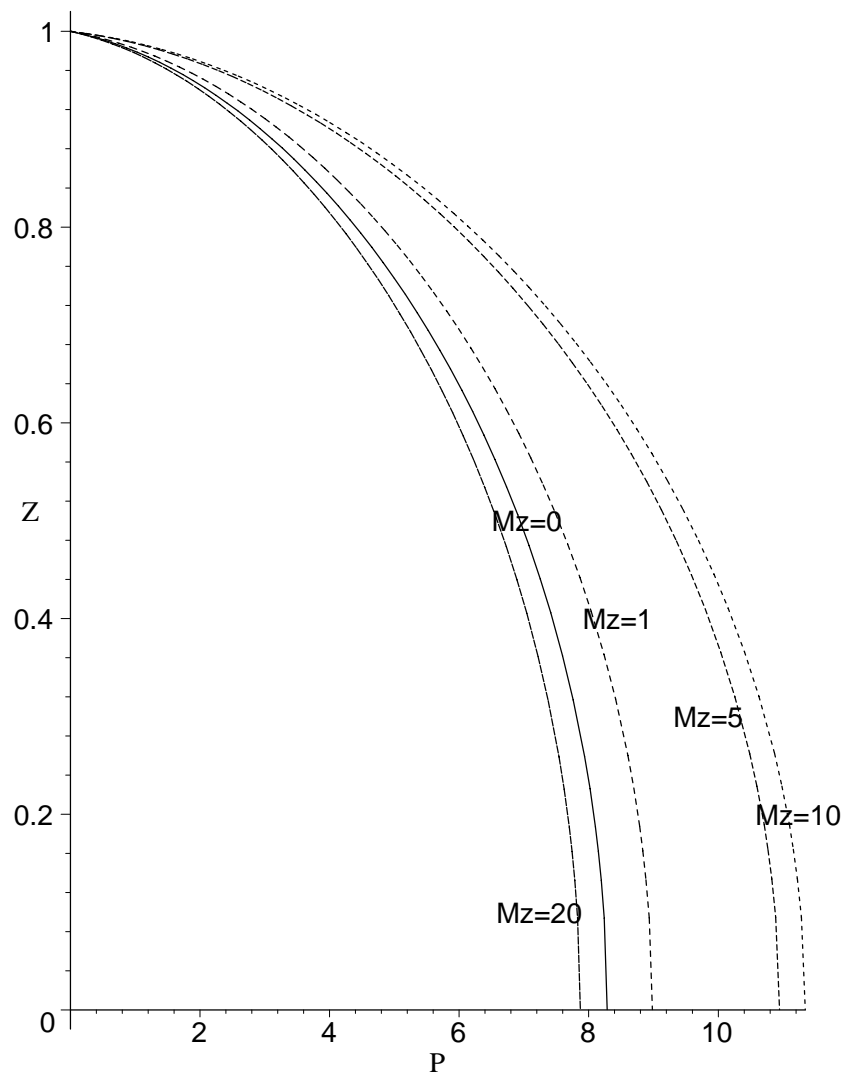


Abbildung 3.10: $\bar{z}(\bar{p})$ für verschiedene Hartmannzahlen M_z ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.9$, $\varphi = 0.93 \pi$, $\bar{V}_y = -2$, $\lambda = 1$.

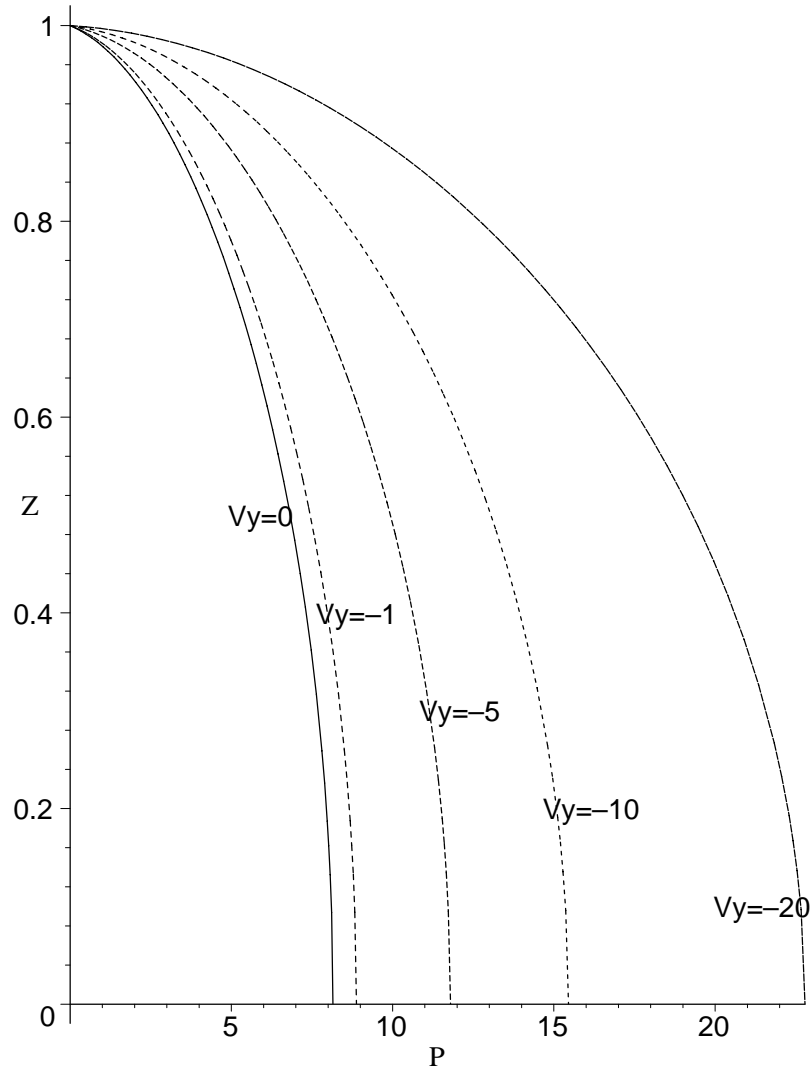


Abbildung 3.11: $\bar{z}(\bar{p})$ für verschiedene Potentiale \bar{V}_y ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.9$, $\varphi = 0.93 \pi$, $M_z = 2$, $\lambda = 1$.

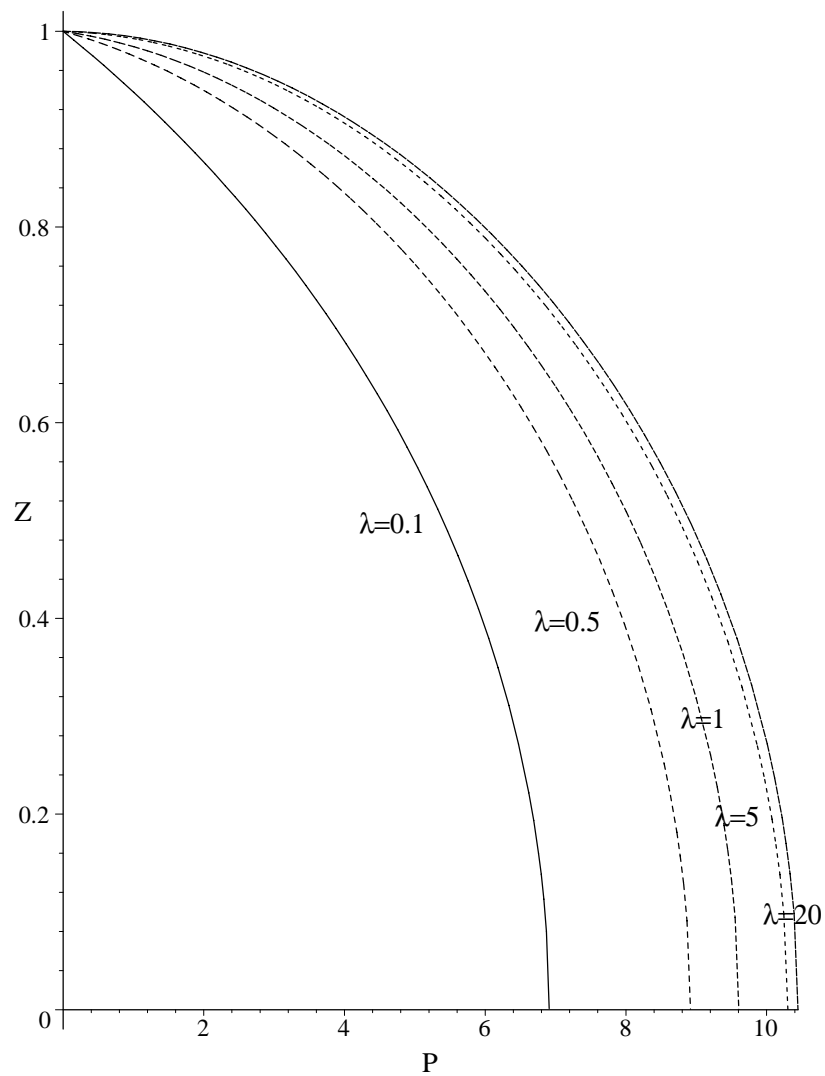


Abbildung 3.12: $\bar{z}(\bar{p})$ für verschiedene Kompressibilitätszahlen λ ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.9$, $\varphi = 0.93 \pi$, $M_z = 2$, $\bar{V}_y = -2$.

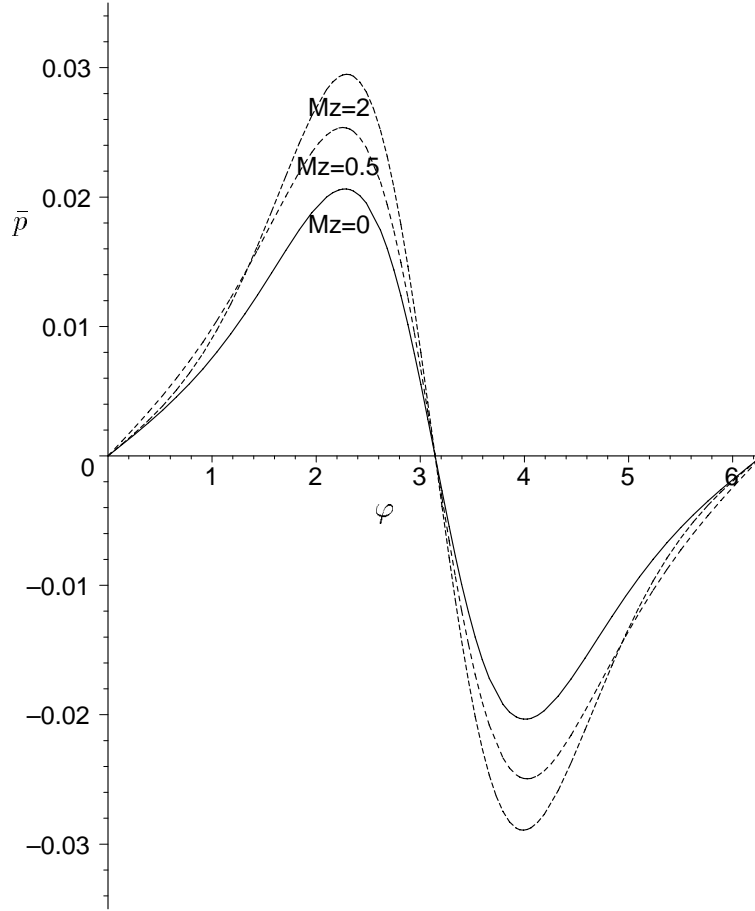


Abbildung 3.13: $\bar{p}(\varphi)$ für verschiedene Hartmannzahlen M_z ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.3$, $z = 0$, $\bar{V}_y = -2$, $\lambda = 1$.

und -zapfen werden als ideale Leiter angesehen, zwischen denen das konstante Potential \bar{V}_y angelegt wird (vgl. Abschnitt 2.2). Mit den Annahmen aus Abschnitt 2.2 und Abschnitt 3.2 lautet die Impulsbilanz in \bar{x} -Richtung

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad , \quad (3.102)$$

die Impulsbilanz in \bar{z} -Richtung

$$0 = -\left(\frac{B}{D}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - M_\varphi \bar{j}_y + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \quad (3.103)$$

und das Ohmsche Gesetz in \bar{y} -Richtung

$$\bar{j}_y = \bar{E}_y + M_\varphi \bar{w} \quad . \quad (3.104)$$

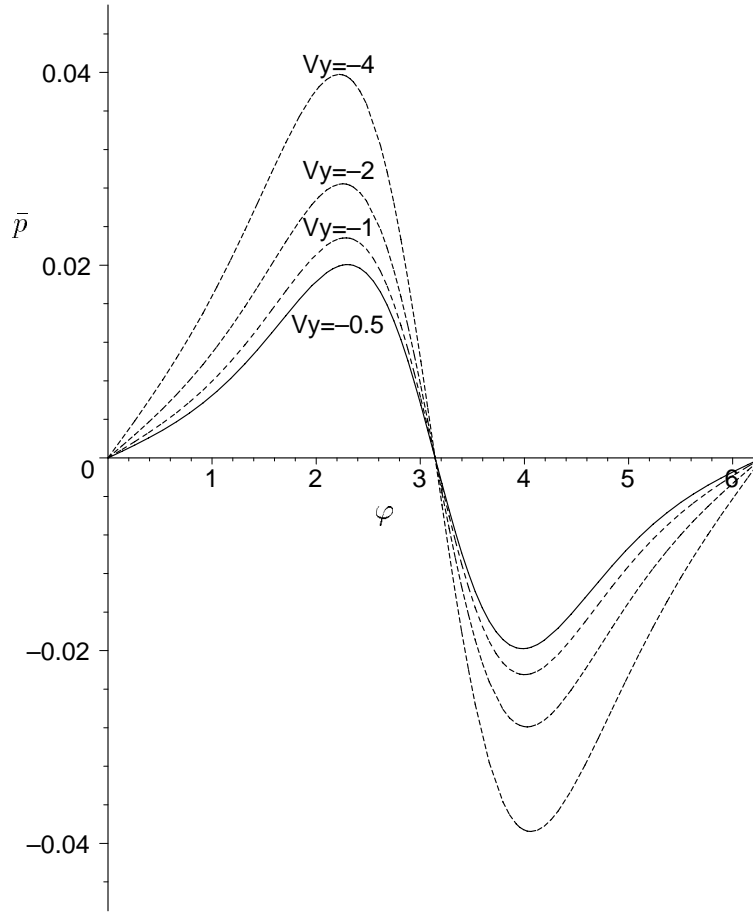


Abbildung 3.14: $\bar{p}(\varphi)$ für verschiedene Potentiale \bar{V}_y ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.3$, $z = 0$, $M_z = 1$, $\lambda = 1$.

Integriert man Gl. (3.102) unter Beachtung der entsprechenden Randbedingungen in \bar{y} -Richtung, erhält man

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} (\bar{y}^2 - \bar{h} \bar{y}) + \left(1 - \frac{\bar{y}}{\bar{h}}\right). \quad (3.105)$$

Gl. (3.103) integriert liefert

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{D}{B}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + M_\varphi \bar{j}_y \right] (\bar{y}^2 - \bar{h} \bar{y}). \quad (3.106)$$

Der dimensionslose Durchfluß in Umfangsrichtung ist damit

$$\bar{q}_\varphi = \int_0^{\bar{h}} \bar{u} \, d\bar{y} = -\frac{\bar{h}^3}{12} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{h}}{2} \quad (3.107)$$

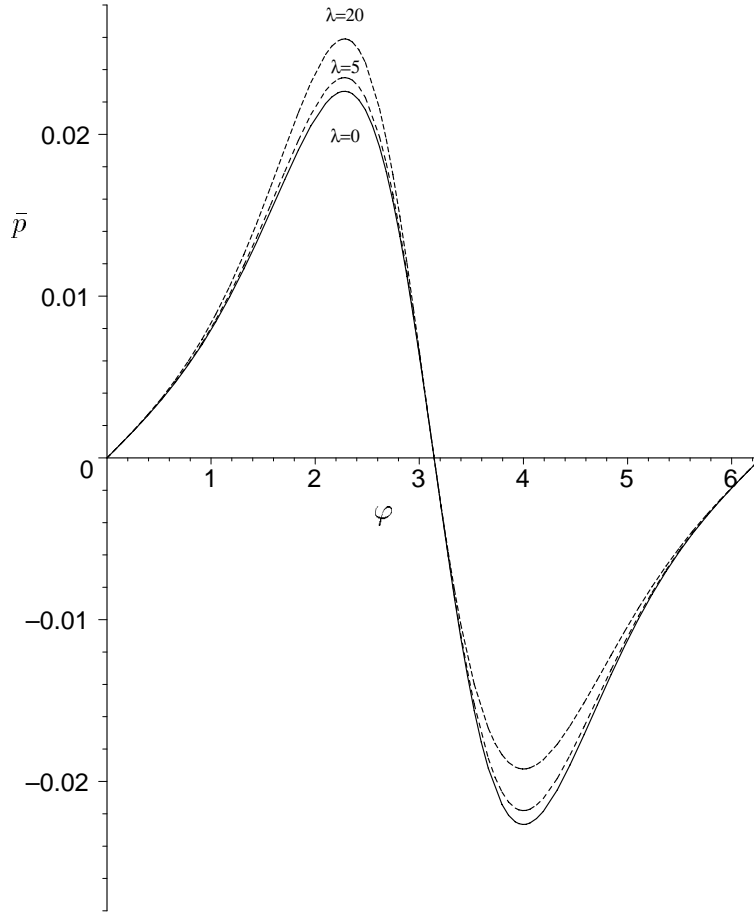


Abbildung 3.15: $\bar{p}(\varphi)$ für verschiedene Kompressibilitätszahlen λ ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.3$, $z = 0$, $M_z = 1$, $\bar{V}_y = -1$.

und in axialer Richtung

$$\bar{q}_z = \int_0^{\bar{h}} \bar{w} \, d\bar{y} = -\frac{\bar{h}^3}{12} \left[\left(\frac{D}{B} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + M_\varphi \bar{j}_y \right]. \quad (3.108)$$

Wird das Ohmsche Gesetz über den Spalt integriert, ergibt sich

$$\int_0^{\bar{h}} \bar{j}_y \, d\bar{y} = \int_0^{\bar{h}} \bar{E}_y \, d\bar{y} + M_\varphi \int_0^{\bar{h}} \bar{w} \, d\bar{y} \quad \rightarrow \quad \bar{j}_y \bar{h} = -\bar{V}_y + M_\varphi \bar{q}_z. \quad (3.109)$$

Setzt man Gl. (3.109) in (3.108) ein, erhält man

$$\bar{q}_z = -\frac{\bar{h}^3}{12 + (M_\varphi \bar{h})^2} \left[\left(\frac{D}{B} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - \frac{M_\varphi \bar{V}_y}{\bar{h}} \right]. \quad (3.110)$$

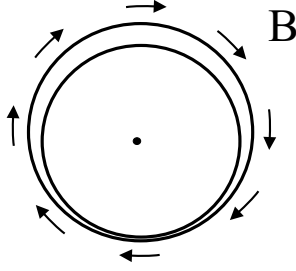


Abbildung 3.16: Eingprägtes toroidales Magnetfeld

Mit \bar{q}_φ aus Gl. (3.107) und \bar{q}_z aus Gl. (3.110) folgt aus der Kontinuitätsgleichung (2.36) mit $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} = 0$ die Differentialgleichung für das Druckfeld

$$\gamma(\varphi) (1 + \lambda \bar{p}) + \delta(\varphi) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (1 + \lambda \bar{p}) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[(1 + \lambda \bar{p}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right] = 0 \quad (3.111)$$

mit

$$\gamma(\varphi) = \left(\frac{B}{D} \right)^2 \frac{[12 + (M_\varphi \bar{h})^2] \bar{h}'}{2\bar{h}^3} \quad \text{und} \quad \delta(\varphi) = \left(\frac{B}{D} \right) \frac{M_\varphi \bar{V}_y}{\bar{h}} . \quad (3.112)$$

Die Randbedingungen sind wieder $\bar{p}(\bar{z} = -1) = \bar{p}(\bar{z} = 1) = 0$.

3.3.1 Explizite Reihendarstellung

Das nichtlineare Randwertproblem (3.111) ist streng nicht lösbar. Wie in Abschnitt 3.1.2 wird eine Reihenlösung über einen Störungsansatz entwickelt. Dazu wird (3.111) durch zweimalige Integration zunächst in eine Integralgleichung überführt. Eine erste Integration von Gl. (3.111) liefert

$$\gamma(\varphi) \int (1 + \lambda \bar{p}) d\bar{z} + \delta(\varphi) (1 + \lambda \bar{p}) + c_1(\varphi) - (1 + \lambda \bar{p}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = 0 . \quad (3.113)$$

Nochmalige Integration führt auf

$$\begin{aligned} \gamma(\varphi) \int \int (1 + \lambda \bar{p}) d\bar{z} d\bar{z} + \delta(\varphi) \int (1 + \lambda \bar{p}) d\bar{z} + c_1(\varphi) \bar{z} + c_2(\varphi) \\ - \underbrace{\int (1 + \lambda \bar{p}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} d\bar{z}}_{\frac{1}{2\lambda}(1+\lambda\bar{p})^2} = 0 . \end{aligned} \quad (3.114)$$

Durch Produktintegration wird das letzte Integral direkt berechnet. Die Druckfunktion $\bar{p}(\varphi, \bar{z})$ sowie die Integrationsfunktionen $c_1(\varphi)$ und $c_2(\varphi)$ werden wieder im Sinne eines Störungsansatzes nach Potenzen in λ entwickelt:

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \lambda \bar{p}_1 + \lambda^2 \bar{p}_2 + \dots , \quad (3.115)$$

$$c_1 = c_{10} + \lambda c_{11} + \lambda^2 c_{12} + \dots , \quad (3.116)$$

$$c_2 = c_{20} + \lambda c_{21} + \lambda^2 c_{22} + \dots . \quad (3.117)$$

Dieser Reihenansatz in Gl. (3.114) eingesetzt liefert

$$\begin{aligned} 2 \gamma(\varphi) \int \int (\lambda + \lambda^2 \bar{p}_0 + \lambda^3 \bar{p}_1 + \lambda^4 \bar{p}_2 + \dots) d\bar{z} d\bar{z} \\ + 2 \delta(\varphi) \int (\lambda + \lambda^2 \bar{p}_0 + \lambda^3 \bar{p}_1 + \lambda^4 \bar{p}_2 + \dots) d\bar{z} \\ + (c_{10} + \lambda c_{11} + \lambda^2 c_{12} + \dots) \bar{z} + (c_{20} + \lambda c_{21} + \lambda^2 c_{22} + \dots) \\ - (1 + \lambda \bar{p}_0 + \lambda^2 \bar{p}_1 + \lambda^3 \bar{p}_2 + \dots)^2 = 0 . \end{aligned} \quad (3.118)$$

Die Integrationsfunktionen $c_{1i}(\varphi)$ ($i = 1, 2, 3 \dots$) sind im Gegensatz zu Abschnitt 3.1.2 nicht notwendigerweise null. Dadurch geht die Symmetrie des Problems verloren. Ordnen nach Potenzen von λ ergibt das rekursive Integralgleichungsschema

λ^0 :

$$c_{10} \bar{z} + c_{20} - 1 = 0 , \quad (3.119)$$

λ^1 :

$$\gamma(\varphi) \int \int 1 d\bar{z} d\bar{z} + \delta(\varphi) \int 1 d\bar{z} + c_{11} \bar{z} + c_{21} = \bar{p}_0 , \quad (3.120)$$

λ^2 :

$$\gamma(\varphi) \int \int \bar{p}_0 d\bar{z} d\bar{z} + \delta(\varphi) \int \bar{p}_0 d\bar{z} + c_{12} \bar{z} + c_{22} - \frac{1}{2} \bar{p}_0^2 = \bar{p}_1 , \quad (3.121)$$

λ^3 :

$$\gamma(\varphi) \int \int \bar{p}_1 d\bar{z} d\bar{z} + \delta(\varphi) \int \bar{p}_1 d\bar{z} + c_{13} \bar{z} + c_{23} - \frac{1}{2} (\bar{p}_0 \bar{p}_1 + \bar{p}_1 \bar{p}_0) = \bar{p}_2 , \quad (3.122)$$

λ^4 :

$$\gamma(\varphi) \int \int \bar{p}_2 d\bar{z} d\bar{z} + \delta(\varphi) \int \bar{p}_2 d\bar{z} + c_{14} \bar{z} + c_{24} - \frac{1}{2} (\bar{p}_0 \bar{p}_2 + \bar{p}_1 \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \bar{p}_0) = \bar{p}_3 \quad (3.123)$$

\vdots

und allgemein

λ^{i+2} :

$$\begin{aligned} \gamma(\varphi) \int \int \bar{p}_i d\bar{z} d\bar{z} + \delta(\varphi) \int \bar{p}_i d\bar{z} + c_{1(i+2)} \bar{z} + c_{2(i+2)} \\ - \frac{1}{2} (\bar{p}_0 \bar{p}_i + \bar{p}_1 \bar{p}_{i-1} + \cdots + \bar{p}_{i-1} \bar{p}_1 + \bar{p}_i \bar{p}_0) = \bar{p}_{i+1} . \end{aligned} \quad (3.124)$$

Das Randwertproblem (3.111) hat die Reihenlösung

$$\bar{p}(\varphi, \bar{z}) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \bar{p}_i(\varphi, \bar{z}) . \quad (3.125)$$

Die Konvergenz dieser Funktionenreihe wird gezeigt, eine Restgliedabschätzung wird durchgeführt.

Hilfssatz 2:

Sei $h(z) \in C^1(z \in \mathbf{R})$ eine ungerade Funktion mit $h(z = -1) = h(z = 1) = 0$. Die Funktion $F(z)$, definiert über

$$F(z) = \int \int h(z) dz dz + c_1 z + c_2 \quad (c_1, c_2 = const) , \quad (3.126)$$

erfülle die Randbedingungen $F(z = -1) = F(z = 1) = 0$. Dann ist $c_2 = 0$ und $F(z)$ eine ungerade Funktion, und es gilt die Abschätzung

$$|F(z)| \leq \frac{1}{2} \max\{|h(z)|\} , \quad \forall z \in [-1, 1] . \quad (3.127)$$

Beweis:

Da $F(z)$ ungerade ist und $F(z = 0) = F(z = 1) = 0$ existiert eine Stelle $z_0 \in [0, 1]$ mit $\left. \frac{\partial F(z)}{\partial z} \right|_{z=z_0} = 0$. Daher folgt

$$|F'(z)| \leq \max\{|h(z)|\} , \quad \forall z \in [-1, 1] . \quad (3.128)$$

Da $F(z = 1) = 0$, gilt

$$|F(z)| \leq \begin{cases} \max\{|h(z)|\} \cdot |z| & \forall z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ \max\{|h(z)|\} \cdot (1 - |z|) & \forall |z| \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (3.129)$$

und daher die Behauptung (3.127).

Hilfssatz 3:

Sei $h(z) \in C^1(z \in \mathbf{R})$ eine ungerade Funktion mit $h(z = -1) = h(z = 1) = 0$. Die Funktion $F(z)$, definiert über

$$F(z) = \int h(z) dz + c_1 z + c_2 \quad (c_1, c_2 = const) , \quad (3.130)$$

erfülle die Randbedingungen $F(z = -1) = F(z = 1) = 0$. Dann ist $c_1 = 0$ und $F(z)$ eine gerade Funktion, und es gilt die Abschätzung

$$|F(z)| \leq \max\{|h(z)|\}, \quad \forall z \in [-1, 1]. \quad (3.131)$$

Beweis:

Da $|F'(z)| \leq \max\{|h(z)|\}$ und $F(z = -1) = F(z = 1) = 0$ ist, gilt

$$|F(z)| \leq \max\{|h(z)|\} \cdot (1 - |z|), \quad \forall z \in [-1, 1] \quad (3.132)$$

und daher die Behauptung (3.131).

Hilfssatz 4:

Sei $h(z) \in C^1(z \in \mathbf{R})$ eine gerade Funktion mit $h(z = -1) = h(z = 1) = 0$. Die Funktion $F(z)$, definiert über

$$F(z) = \int h(z) dz + c_1 z + c_2 \quad (c_1, c_2 = \text{const}), \quad (3.133)$$

erfülle die Randbedingungen $F(z = -1) = F(z = 1) = 0$. Dann ist $c_2 = 0$ und $F(z)$ eine ungerade Funktion, und es gilt die Abschätzung

$$|F(z)| \leq \frac{1}{2} \max\{|h(z)|\}, \quad \forall z \in [-1, 1]. \quad (3.134)$$

Beweis:

Da $F(z = 0) = 0$, ist

$$|F(z)| \leq \max\{|h(z)|\} \cdot |z|. \quad (3.135)$$

Da außerdem $F(z = 1) = 0$ sein muß, gilt

$$|F(z)| \leq \begin{cases} \max\{|h(z)|\} \cdot |z| & \forall z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ \max\{|h(z)|\} \cdot (1 - |z|) & \forall |z| \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (3.136)$$

und daher die Behauptung (3.134).

Satz 2:

Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \bar{p}_i(\varphi, \bar{z})$ konvergiert absolut, falls $\lambda \tilde{\alpha}(\varphi) = \lambda (|\delta(\varphi)| + 2 |\gamma(\varphi)|) \leq 4 - 2\sqrt{3}$. Bei Abbruch der Reihe nach dem n -ten Glied gilt die Restgliedabschätzung

$$|\Delta y| \leq \frac{\tilde{\alpha}(\varphi)}{2} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1} \tilde{\alpha}(\varphi)^{n+1} \lambda^{n+1}}{1 - \left(\frac{a}{2}\right) \tilde{\alpha}(\varphi) \lambda} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^{n+1} \tilde{\alpha}(\varphi)^{n+2} \lambda^{n+1} \quad (3.137)$$

$$\text{mit } a = \frac{2 + \lambda \tilde{\alpha}(\varphi) - \sqrt{\lambda^2 \tilde{\alpha}(\varphi)^2 - 8 \lambda \tilde{\alpha}(\varphi) + 4}}{2 \lambda \tilde{\alpha}(\varphi)}. \quad (3.138)$$

Beweis:

Analog zu Abschnitt 3.1.2 wird eine Majorante zur Reihe (3.125) gebildet. Die Dreiecksungleichung liefert zunächst

$$\begin{aligned}
\left| \bar{p}_{i+1}(\bar{z}) \right| &= \left| \delta(\varphi) \int \int \bar{p}_i(\bar{z}) \, d\bar{z} \, d\bar{z} + \gamma(\varphi) \int \bar{p}_i(\bar{z}) \, d\bar{z} + c_{1(i+2)} \bar{z} + c_{2(i+2)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left[\bar{p}_0(\bar{z}) \bar{p}_i(\bar{z}) + \bar{p}_1(\bar{z}) \bar{p}_{i-1}(\bar{z}) + \cdots \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \bar{p}_{i-1}(\bar{z}) \bar{p}_1(\bar{z}) + \bar{p}_i(\bar{z}) \bar{p}_0(\bar{z}) \right] \right| \\
&\leq \left| \delta(\varphi) \int \int \bar{p}_i(\bar{z}) \, d\bar{z} \, d\bar{z} + \gamma(\varphi) \int \bar{p}_i(\bar{z}) \, d\bar{z} + c_{1(i+2)} \bar{z} + c_{2(i+2)} \right| \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\left| \bar{p}_0(\bar{z}) \right| \left| \bar{p}_i(\bar{z}) \right| + \left| \bar{p}_1(\bar{z}) \right| \left| \bar{p}_{i-1}(\bar{z}) \right| + \cdots \right. \\
&\quad \quad \left. + \left| \bar{p}_{i-1}(\bar{z}) \right| \left| \bar{p}_1(\bar{z}) \right| + \left| \bar{p}_i(\bar{z}) \right| \left| \bar{p}_0(\bar{z}) \right| \right] \\
&\leq \max_{\bar{z} \in [-1,1]} \left\{ \left| \delta(\varphi) \int \int \bar{p}_i(\bar{z}) \, d\bar{z} \, d\bar{z} + \gamma(\varphi) \int \bar{p}_i(\bar{z}) \, d\bar{z} + c_{1(i+2)} \bar{z} + c_{2(i+2)} \right| \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\left| \bar{p}_0(\bar{z}) \right| \left| \bar{p}_i(\bar{z}) \right| + \left| \bar{p}_1(\bar{z}) \right| \left| \bar{p}_{i-1}(\bar{z}) \right| + \cdots \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \left| \bar{p}_{i-1}(\bar{z}) \right| \left| \bar{p}_1(\bar{z}) \right| + \left| \bar{p}_i(\bar{z}) \right| \left| \bar{p}_0(\bar{z}) \right| \right] \right\} \\
&\leq \max_{\bar{z} \in [-1,1]} \left\{ \left| \delta(\varphi) \int \int \bar{p}_i(\bar{z}) \, d\bar{z} \, d\bar{z} + \gamma(\varphi) \int \bar{p}_i(\bar{z}) \, d\bar{z} + c_{1(i+2)} \bar{z} + c_{2(i+2)} \right| \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \max_{\bar{z} \in [-1,1]} \left\{ \left[\left| \bar{p}_0(\bar{z}) \right| \left| \bar{p}_i(\bar{z}) \right| + \left| \bar{p}_1(\bar{z}) \right| \left| \bar{p}_{i-1}(\bar{z}) \right| + \cdots \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \left| \bar{p}_{i-1}(\bar{z}) \right| \left| \bar{p}_1(\bar{z}) \right| + \left| \bar{p}_i(\bar{z}) \right| \left| \bar{p}_0(\bar{z}) \right| \right] \right\}. \quad (3.139)
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Abkürzung $\bar{p}_{i,max} = \max_{\bar{z} \in [-1,1]} \{|\bar{p}_i(\bar{z})|\}$ und mit den Hilfssätzen 1-4 folgt mit der Abschätzung (3.139)

λ^1 :

$$\frac{1}{2} (|\gamma(\varphi)| + 2 |\delta(\varphi)|) \geq \bar{p}_{0,max} \geq \bar{p}_0(\bar{z}), \quad (3.140)$$

λ^2 :

$$\frac{1}{2} \lambda \left[(|\gamma(\varphi)| + 2 |\delta(\varphi)|) \bar{p}_{0,max} + \bar{p}_{0,max} \bar{p}_{0,max} \right] \geq \lambda \bar{p}_{1,max} \geq \lambda \bar{p}_1(\bar{z}), \quad (3.141)$$

λ^3 :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \lambda^2 \left[(|\gamma(\varphi)| + 2 |\delta(\varphi)|) \bar{p}_{1,max} + \bar{p}_{0,max} \bar{p}_{1,max} + \bar{p}_{1,max} \bar{p}_{0,max} \right] \\
&\geq \lambda^2 \bar{p}_{2,max} \geq \lambda^2 \bar{p}_2(\bar{z}), \quad (3.142)
\end{aligned}$$

λ^4 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda^3 \left[(|\gamma(\varphi)| + 2 |\delta(\varphi)|) \bar{p}_{2,max} + \bar{p}_{0,max} \bar{p}_{2,max} + \bar{p}_{1,max} \bar{p}_{1,max} + \bar{p}_{2,max} \bar{p}_{0,max} \right] \\ \geq \lambda^3 \bar{p}_{3,max} \geq \lambda^3 \bar{p}_3(\bar{z}) \end{aligned} \quad (3.143)$$

⋮

und

λ^{i+2} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda^{i+1} \left[(|\gamma(\varphi)| + 2 |\delta(\varphi)|) \bar{p}_{i,max} + \bar{p}_{0,max} \bar{p}_{i,max} + \bar{p}_{1,max} \bar{p}_{i-1,max} + \dots \right. \\ \left. + \bar{p}_{i-1,max} \bar{p}_{1,max} + \bar{p}_{i,max} \bar{p}_{0,max} \right] \geq \lambda^{i+1} \bar{p}_{i+1,max} \geq \lambda^{i+1} \bar{p}_{i+1}(\bar{z}) . \end{aligned} \quad (3.144)$$

Werden die ersten $i + 2$ Gleichungen aufaddiert, so folgt nach einer geeigneten Zusammenfassung von Termen die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (|\gamma(\varphi)| + 2 |\delta(\varphi)|) \left[1 + \lambda \bar{p}_{0,max} + \lambda^2 \bar{p}_{1,max} + \lambda^3 \bar{p}_{2,max} + \dots + \lambda^{i+1} \bar{p}_{i,max} \right] \\ & + \frac{1}{2} \bar{p}_{0,max} \left[\lambda \bar{p}_{0,max} + \lambda^2 \bar{p}_{1,max} + \lambda^3 \bar{p}_{2,max} + \lambda^4 \bar{p}_{3,max} + \dots + \lambda^{i+1} \bar{p}_{i,max} \right] \\ & + \frac{1}{2} \lambda \bar{p}_{1,max} \left[\lambda \bar{p}_{0,max} + \lambda^2 \bar{p}_{1,max} + \lambda^3 \bar{p}_{2,max} + \lambda^4 \bar{p}_{3,max} + \dots + \lambda^i \bar{p}_{i-1,max} \right] \\ & + \frac{1}{2} \lambda^2 \bar{p}_{2,max} \left[\lambda \bar{p}_{0,max} + \lambda^2 \bar{p}_{1,max} + \lambda^3 \bar{p}_{2,max} + \lambda^4 \bar{p}_{3,max} + \dots + \lambda^{i-1} \bar{p}_{i-2,max} \right] \\ & + \frac{1}{2} \lambda^3 \bar{p}_{3,max} \left[\lambda \bar{p}_{0,max} + \lambda^2 \bar{p}_{1,max} + \lambda^3 \bar{p}_{2,max} + \lambda^4 \bar{p}_{3,max} + \dots + \lambda^{i-2} \bar{p}_{i-3,max} \right] \\ & + \dots \\ & + \frac{1}{2} \lambda^{i-2} \bar{p}_{i-2,max} \left[\lambda \bar{p}_{0,max} + \lambda^2 \bar{p}_{1,max} + \lambda^3 \bar{p}_{2,max} \right] \\ & + \frac{1}{2} \lambda^{i-1} \bar{p}_{i-1,max} \left[\lambda \bar{p}_{0,max} + \lambda^2 \bar{p}_{1,max} \right] \\ & + \frac{1}{2} \lambda^i \bar{p}_{i,max} \left[\lambda \bar{p}_{0,max} \right] \\ & \geq \left[\bar{p}_{0,max} + \lambda^1 \bar{p}_{1,max} + \lambda^2 \bar{p}_{2,max} + \lambda^3 \bar{p}_{3,max} + \dots + \lambda^i \bar{p}_{i,max} + \lambda^{i+1} \bar{p}_{i+1,max} \right] . \end{aligned} \quad (3.145)$$

Wie in Abschnitt 3.1.2 werden nun in den eckigen Klammern auf der linken Seite von Gl. (3.145) positive Terme dazu addiert. Dadurch erhält man nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (|\gamma(\varphi)| + 2 |\delta(\varphi)|) \left[1 + \lambda \bar{p}_{0,max} + \lambda^2 \bar{p}_{1,max} + \lambda^3 \bar{p}_{2,max} + \dots + \lambda^{i+1} \bar{p}_{i,max} \right] \\ & + \frac{1}{2} \lambda \left[\bar{p}_{0,max} + \lambda \bar{p}_{1,max} + \lambda^2 \bar{p}_{2,max} + \lambda^3 \bar{p}_{3,max} + \dots + \lambda^i \bar{p}_{i,max} \right]^2 \\ & \geq \left[\bar{p}_{0,max} + \lambda^1 \bar{p}_{1,max} + \lambda^2 \bar{p}_{2,max} + \lambda^3 \bar{p}_{3,max} + \dots + \lambda^i \bar{p}_{i,max} \lambda^{i+1} \bar{p}_{i+1,max} \right] . \end{aligned} \quad (3.146)$$

Diese Gleichung erlaubt die rekursive Abschätzung der Partialsummen der Reihe (3.125). Zur Abkürzung wird

$$P_{i,max} = \left[\bar{p}_{0,max} + \lambda \bar{p}_{1,max} + \lambda^2 \bar{p}_{2,max} + \lambda^3 \bar{p}_{3,max} + \cdots + \lambda^i \bar{p}_{i,max} \right] \quad (3.147)$$

eingeführt. Gl. (3.146) lautet damit

$$\frac{1}{2} \left[(|\gamma(\varphi)| + 2 |\delta(\varphi)|) (1 + \lambda P_{i,max}) + \lambda P_{i,max}^2 \right] \geq P_{i+1,max} . \quad (3.148)$$

Wird das \geq -Zeichen durch ein $=$ -Zeichen ersetzt, dann sind die durch

$$\frac{1}{2} \left[(|\gamma(\varphi)| + 2 |\delta(\varphi)|) (1 + \lambda \hat{P}_i) + \lambda \hat{P}_i^2 \right] = \hat{P}_{i+1} \quad \text{mit} \quad \hat{P}_0 = \frac{1}{2} (|\gamma(\varphi)| + 2 |\delta(\varphi)|) \quad (3.149)$$

definierten Partialsummen \hat{P}_i größer gleich den Partialsummen $P_{i,max}$. Konvergiert die Folge (3.149), sind die Partialsummen $P_{i,max}$ beschränkt und die Reihe (3.125) konvergiert. Zum Konvergenzbeweis der Folge (3.149) werden deren Fixpunkte bestimmt. Anschließend wird gezeigt, daß die Folge gegen einen der Fixpunkte konvergiert. Nach Gl. (3.149) lautet die Bestimmungsgleichung für die Fixpunkte

$$\frac{1}{2} \left[(|\gamma(\varphi)| + 2 |\delta(\varphi)|) (1 + \lambda \hat{P}) + \lambda \hat{P}^2 \right] = \hat{P} . \quad (3.150)$$

Diese quadratische Gleichung liefert mit der Abkürzung $\tilde{\alpha}(\varphi) = (|\gamma(\varphi)| + 2 |\delta(\varphi)|)$ die beiden Fixpunkte

$$\hat{P}_{a,b} = -\frac{\lambda \tilde{\alpha}(\varphi) - 2}{2\lambda} \pm \frac{\sqrt{(\lambda \tilde{\alpha}(\varphi) - 2)^2 - 4\lambda \tilde{\alpha}(\varphi)}}{2\lambda} . \quad (3.151)$$

Diese sind reell, wenn $(\lambda \tilde{\alpha}(\varphi) - 2)^2 - 4\lambda \tilde{\alpha}(\varphi) \geq 0$, also falls

$$\lambda_{1,2} \leq \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{\tilde{\alpha}(\varphi)} . \quad (3.152)$$

Da $\lambda_2 > 1$, ist aus Konvergenzgründen nur $\lambda_1 = \frac{4-2\sqrt{3}}{\tilde{\alpha}(\varphi)} < 1$ brauchbar. λ_1 liefert den reellen Fixpunkt $\hat{P}_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tilde{\alpha}(\varphi)$. Für $\lambda \tilde{\alpha}(\varphi) < 4 - 2\sqrt{3}$ ergeben sich zwei reelle Fixpunkte, von denen nur

$$\hat{P}_a = -\frac{\lambda \tilde{\alpha}(\varphi) - 2}{2\lambda} - \frac{\sqrt{(\lambda \tilde{\alpha}(\varphi) - 2)^2 - 4\lambda \tilde{\alpha}(\varphi)}}{2\lambda} \quad (3.153)$$

positiv und kleiner \hat{P}_1 ist. Zum Beweis, daß die Folge \hat{P}_i gegen den Fixpunkt \hat{P}_a konvergiert, wird gezeigt, daß die Folge monoton wächst und nach oben beschränkt

ist. Da $\lambda\tilde{\alpha}(\varphi) > 0$, ist die Monotonie offensichtlich. Zum Beweis der Beschränktheit wird die Folge nach oben abgeschätzt:

$$\begin{aligned}\hat{P}_{i+1} &= \frac{1}{2} \left[\tilde{\alpha}(\varphi) (1 + \lambda) \hat{P}_i + \lambda \hat{P}_i^2 \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \tilde{\alpha}(\varphi) \left[1 + a \lambda \hat{P}_i \right].\end{aligned}\quad (3.154)$$

Die reelle Konstante a wird so bestimmt, daß Gl. (3.154) für alle \hat{P}_i ($i = 0, 1, 2, \dots, \infty$) erfüllt ist. Wiederholte Anwendung der Abschätzung (3.154) liefert die Ungleichung (vgl. Gl. (3.75))

$$\begin{aligned}\hat{P}_{i+1} &\leq \frac{\tilde{\alpha}(\varphi)}{2} \left[1 + \left(\frac{a}{2}\right) \tilde{\alpha}(\varphi)\lambda + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tilde{\alpha}(\varphi)^2 \lambda^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^3 \tilde{\alpha}(\varphi)^3 \lambda^3 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a}{2}\right)^i \tilde{\alpha}(\varphi)^i \lambda^i \right] + \left(\frac{a}{2}\right)^{i+1} \tilde{\alpha}(\varphi)^{i+1} \lambda^{i+1} \hat{P}_0.\end{aligned}\quad (3.155)$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt

$$\hat{P}_a \leq \hat{P}^* = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\alpha}(\varphi)}{1 - \left(\frac{a}{2}\right) \tilde{\alpha}(\varphi)\lambda}.\quad (3.156)$$

Schließlich wird noch die Konstante a berechnet. Nach Gl. (3.154) muß a so bestimmt werden, daß

$$\frac{1}{2} \left[\tilde{\alpha}(\varphi) (1 + \lambda \hat{P}_i) + \lambda \hat{P}_i^2 \right] \leq \frac{1}{2} \tilde{\alpha}(\varphi) \left[1 + a \lambda \hat{P}_i \right] \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \infty) \quad (3.157)$$

erfüllt ist. Da $\hat{P}_i < \hat{P}_a < \hat{P}^*$, ist die letzte Gleichung sicher erfüllt, wenn \hat{P}_i durch \hat{P}^* ersetzt wird. Dies ergibt als Bestimmungsgleichung für a die quadratische Gleichung

$$2(a-1) \left(1 - \left(\frac{a}{2}\right) \tilde{\alpha}(\varphi)\lambda \right) - 1 = 0.\quad (3.158)$$

Es ist leicht einzusehen, daß von den beiden Wurzeln dieser Gleichung nur

$$a_1 = \frac{2 + \lambda\tilde{\alpha}(\varphi) - \sqrt{\lambda^2\tilde{\alpha}(\varphi)^2 - 8\lambda\tilde{\alpha}(\varphi) + 4}}{2\lambda\tilde{\alpha}(\varphi)}\quad (3.159)$$

sinnvoll ist. Für $\lambda\tilde{\alpha}(\varphi) = 4 - 2\sqrt{3}$ erhält man die doppelte Nullstelle $a_1 = a_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Für $\lambda\tilde{\alpha}(\varphi) \leq 4 - 2\sqrt{3}$ gilt nun die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left| \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \bar{p}_i(\bar{z}) \right| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i |\bar{p}_i(\bar{z})| \\ &\leq \max_{z \in [-1,1]} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i |\bar{p}_i(\bar{z})| \right\} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \max_{z \in [-1,1]} |\bar{p}_i(\bar{z})| \\ &\leq \hat{P}_a \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \tilde{\alpha}(\varphi).\end{aligned}\quad (3.160)$$

Die Konvergenz der Reihe (3.125) ist damit gezeigt. Mit Gl. (3.155) kann leicht eine Formel für das Restglied der Reihe (3.125) konstruiert werden. Für den Fehler Δy bei Abbruch der Reihe (3.125) nach dem n -ten Glied gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\Delta y| &\leq \hat{P}^* - \hat{P}_{n+1} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\tilde{\alpha}(\varphi)}{1 - \left(\frac{a}{2}\right) \tilde{\alpha}(\varphi) \lambda} \\
&\quad - \frac{\tilde{\alpha}(\varphi)}{2} \left[1 + \left(\frac{a}{2}\right) \tilde{\alpha}(\varphi) \lambda + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tilde{\alpha}(\varphi)^2 \lambda^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^3 \tilde{\alpha}(\varphi)^3 \lambda^3 + \dots \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{a}{2}\right)^i \tilde{\alpha}(\varphi)^i \lambda^i \right] - \left(\frac{a}{2}\right)^{i+1} \tilde{\alpha}(\varphi)^{i+1} \lambda^{i+1} \hat{P}_0 \\
&= \frac{\tilde{\alpha}(\varphi)}{2} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1} \tilde{\alpha}(\varphi)^{n+1} \lambda^{n+1}}{1 - \left(\frac{a}{2}\right) \tilde{\alpha}(\varphi) \lambda} - \left(\frac{a}{2}\right)^{n+1} \tilde{\alpha}(\varphi)^{n+1} \lambda^{n+1} \hat{P}_0 . \quad (3.161)
\end{aligned}$$

Für das Konvergenzverhalten der Reihe (3.125) ist ähnlich wie in Abschnitt 3.1.2 nicht der Störungsparameter λ entscheidend, sondern das Produkt $\lambda (|\delta(\varphi)| + 2 |\gamma(\varphi)|)$. Das heißt, es sind auch konvergente Lösungen für $\lambda > 1$ realisierbar.

Die Abbildungen 3.17-3.21 zeigen Funktionsverläufe $\bar{p}(\varphi = const, \bar{z})$ und $\bar{p}(\varphi, \bar{z} = const)$. Variiert werden wie zuvor die Hartmannzahl M_φ , das dimensionslose Potential \bar{V}_y und die Kompressibilitätszahl λ . Zu erkennen ist, daß der Druck für wachsende Hartmannzahlen M_φ kontinuierlich zunimmt. Für $M_\varphi = 4$ steigt der Druck gegenüber $M_\varphi = 0$ um ca. 100 %. Im Gegensatz zu den Fällen radiales und axiales eingprägtes B -Feld führt hier eine kontinuierliche Erhöhung des B -Feldes zu einer kontinuierlichen Erhöhung des Druckes. Außerdem ist zu erkennen, daß der Einfluß der Kompressibilitätszahl λ sehr gering ist. Der quantitative Einfluß des Potentials \bar{V}_y auf den Druck ist im Gegensatz zu Abschnitt 3.1 und 3.2 ebenfalls gering. Das Potential \bar{V}_y bewirkt eine zusätzlich Strömung in axialer Richtung, die wenig Einfluß auf den Druckverlauf hat. Aus den Abbildungen 3.17-3.19 wird ersichtlich, daß durch Anlegen eines Potentials die Symmetrie der Strömung zur \bar{x} - \bar{y} -Ebene verloren geht. Es kommt zu einer leichten Schiefstellung der Kurven. In Abschnitt 4.3 wird gezeigt, daß \bar{V}_y im inkompressiblen Fall (unter den getroffenen Annahmen) überhaupt keinen Einfluß auf den Druckverlauf hat.

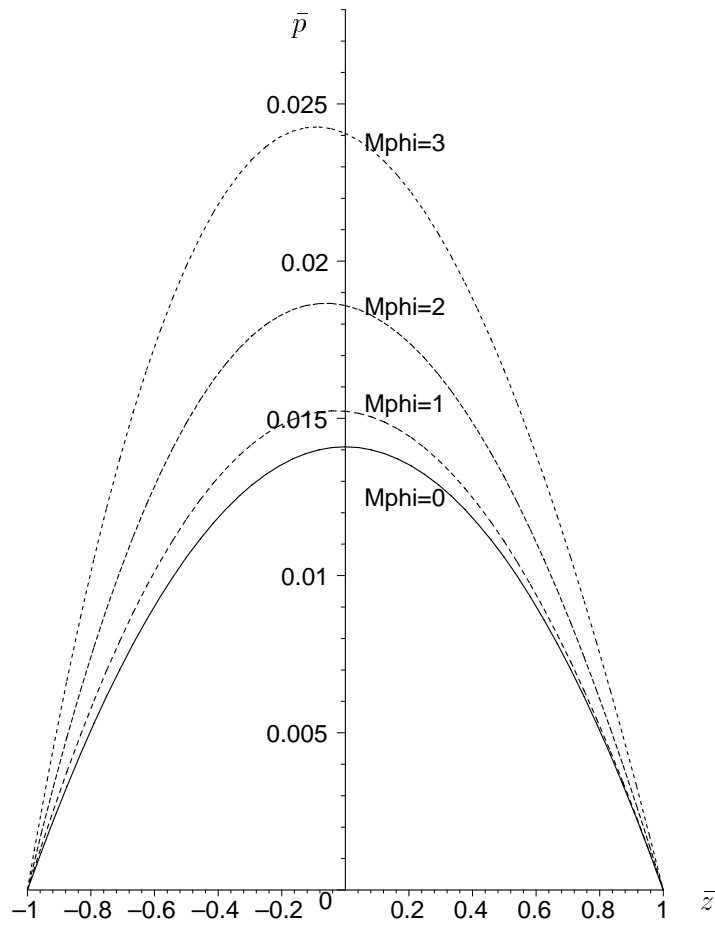


Abbildung 3.17: Druckverteilung $\bar{p}(\bar{z})$ für verschiedene Hartmannzahlen M_φ ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.3$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\bar{V}_y = -3$, $\lambda = 0.5$.

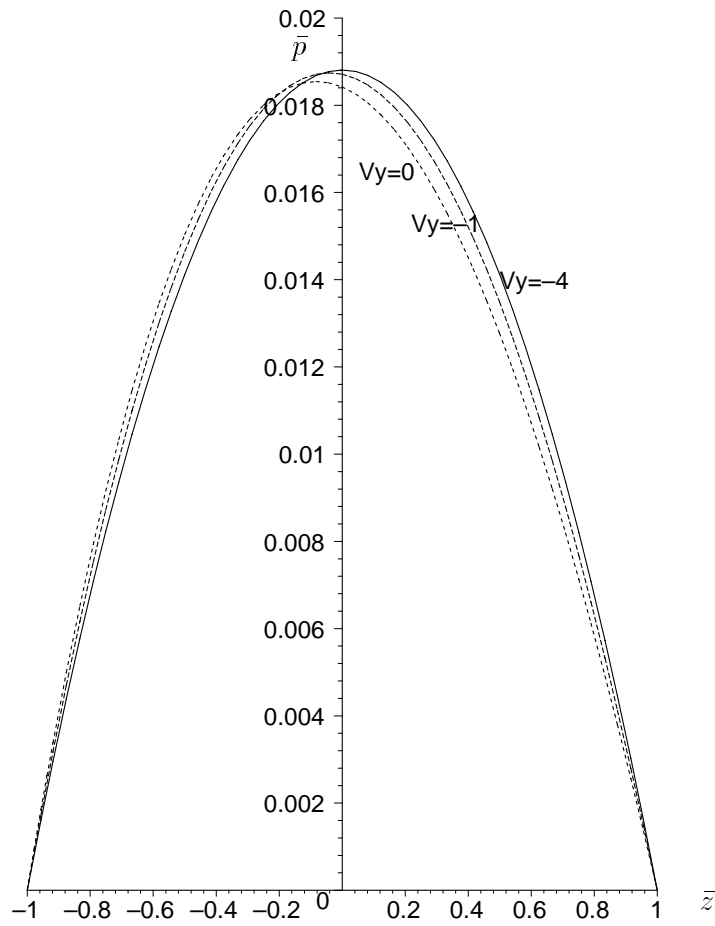


Abbildung 3.18: Druckverteilung $\bar{p}(\bar{z})$ für verschiedene Potentiale \bar{V}_y ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.3$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $M_\varphi = 2$, $\lambda = 0.5$.

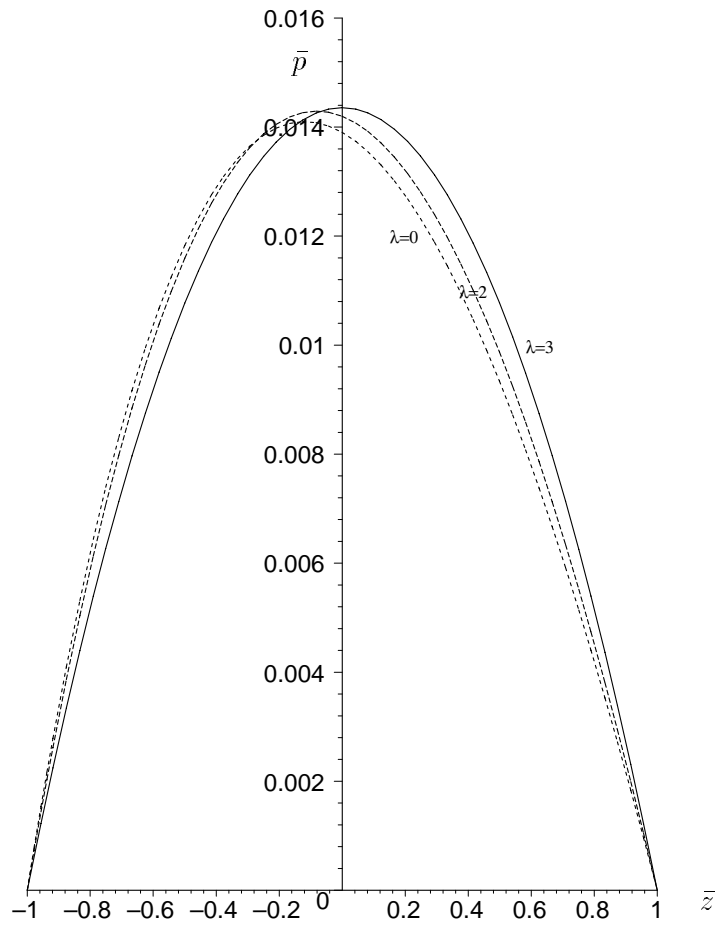


Abbildung 3.19: $\bar{p}(\bar{z})$ für verschiedene Kompressibilitätszahlen λ ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.3$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $M_\varphi = 0.5$, $\bar{V}_y = -4$.

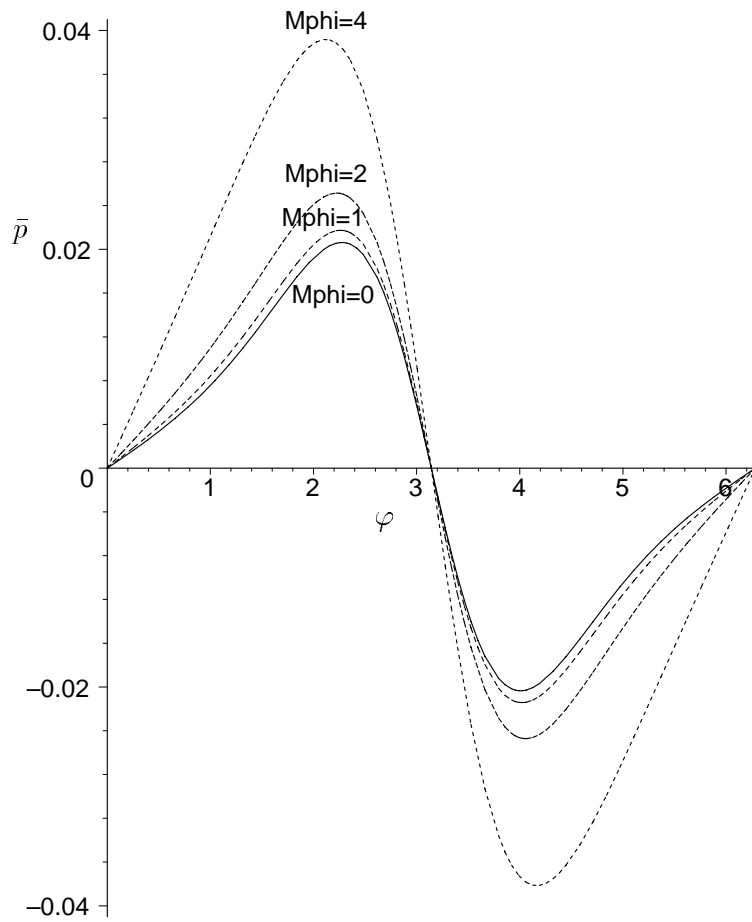


Abbildung 3.20: $\bar{p}(\varphi)$ für verschiedene Hartmannzahlen M_φ ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.3$, $\bar{z} = 0$, $\bar{V}_y = -2$, $\lambda = 1$.

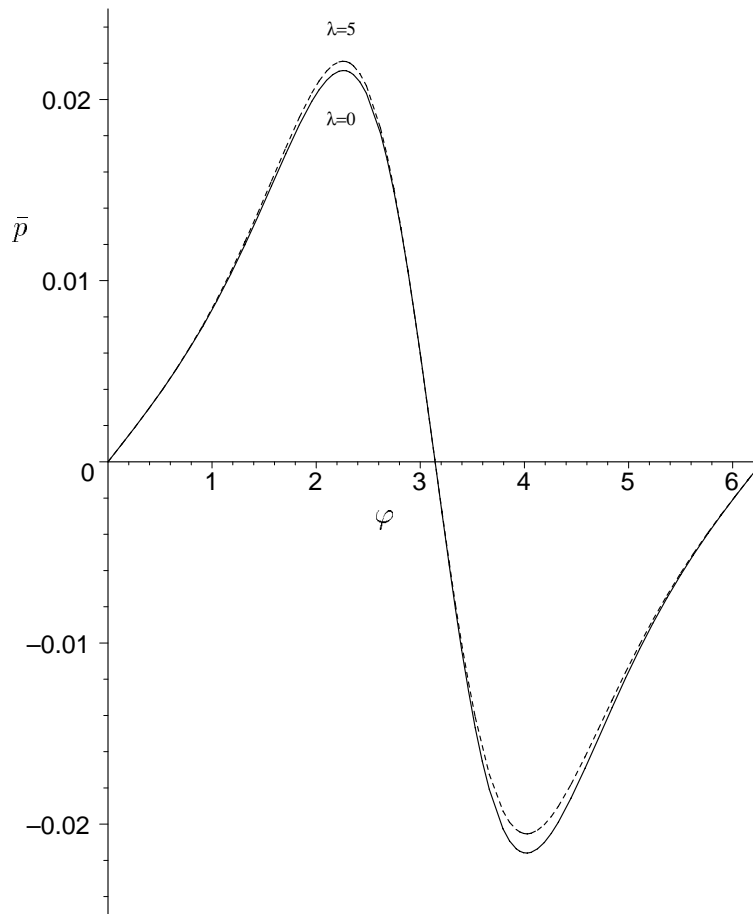


Abbildung 3.21: $\bar{p}(\varphi)$ für verschiedene Kompressibilitätszahlen λ ; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.3$, $\bar{z} = 0$, $M_\varphi = 1$, $\bar{V}_y = -1$.

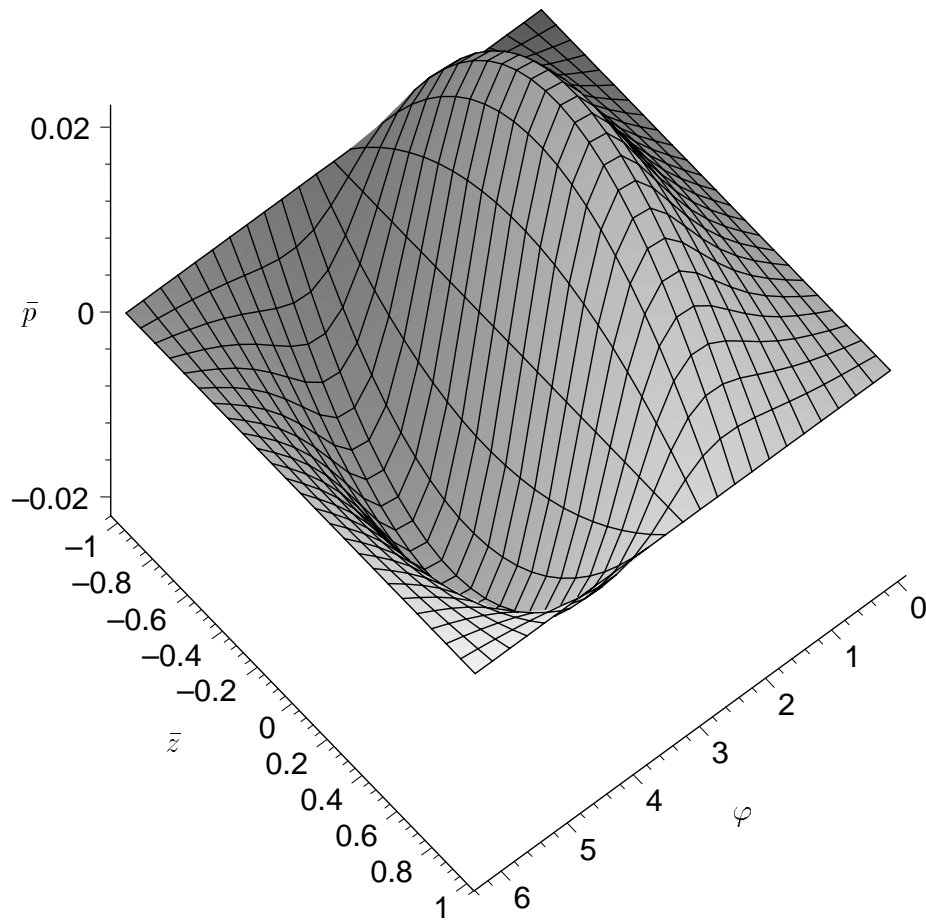


Abbildung 3.22: Druckverteilung $\bar{p}(\varphi, z)$; Parameter: $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\epsilon = 0.3$, $M_\varphi = 1$, $\bar{V}_y = -1$ $\lambda = 1$.

Kapitel 4

Inkompressible Strömung

In diesem Kapitel wird die inkompressible (magnetohydrodynamische) Strömung im unendlich schmalen Lager untersucht. Im Vordergrund steht die Berechnung der Sommerfeldzahlen der Drehung und der Verdrängung, die für die Stabilitätsanalyse eines in zwei schmalen MHD-Lagern gelagerten Laval-Rotors benötigt werden. Die inkompressible Strömung kann als Grenzfall der kompressiblen Strömung aufgefaßt werden. Der Druckverlauf der inkompressiblen Strömung ergibt sich aus den entsprechenden Gleichungen des vorangehenden Kapitels, indem der Grenzwert $\lambda \rightarrow 0$ gebildet bzw. $\lambda = 0$ gesetzt wird.

4.1 Radiales eingepprägtes Magnetfeld

4.1.1 Sommerfeldzahl der Drehung

Für $\lambda = 0$ folgt aus Gl. (3.52) und Gl. (3.47) unter Beachtung der Randbedingungen $\bar{p}(\bar{z} = 1) = \bar{p}(\bar{z} = -1) = 0$

$$\bar{p} = \bar{p}_0 = \alpha(\varphi) \int \int 1 \, d\bar{z} \, d\bar{z} + c_{21} = \alpha(\varphi)(\bar{z}^2 - 1) . \quad (4.1)$$

Zur Berechnung der Sommerfeldzahl werden die radiale und die tangential Koordinate der resultierenden Auftriebskraft gemäß

$$S_\varphi = \frac{1}{4} \int_0^\pi \int_{-1}^1 \bar{p} \sin(\varphi) d\bar{z} d\varphi, \quad S_r = \frac{1}{4} \int_0^\pi \int_{-1}^1 \bar{p} \cos(\varphi) d\bar{z} d\varphi \quad (4.2)$$

gebildet. Mit $\alpha(\varphi)$ nach Gl. (3.12) entstehen Integrale, die analytisch nicht integriert werden können. Um dennoch geschlossene Lösungen zu erhalten, werden Näherungslösungen für kleine und sehr große Hartmannzahlen hergeleitet. Für kleine Hartmannzahlen wird die Funktion $\alpha(\varphi)$ bezüglich des Parameters M_y bis zum kubischen Glied in eine Taylorreihe entwickelt. Es ergibt sich dann als Näherung

$$\alpha(\varphi) \approx \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{12 \bar{h}'}{\bar{h}^3} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} M_y \bar{E}_z \bar{h}^2 - \frac{1}{8} M_y^2 \bar{h}^2 + \frac{1}{24} M_y^3 \bar{E}_z \bar{h}^4 \right]. \quad (4.3)$$

Für große Hartmannzahlen liefert eine Grenzwertbetrachtung mit Gl. (3.12)

$$\alpha(\varphi) \approx - \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{12 \bar{E}_z \bar{h}'}{M_y \bar{h}^3}. \quad (4.4)$$

Die Koordinaten der dimensionslosen Auftriebskraft ergeben sich für kleine Hartmannzahlen M_y zu

$$S_\varphi \approx \frac{\pi}{24} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{1}{\epsilon (1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \left[12\epsilon^2 + (6M_y^2 + 12M_y \bar{E}_z) (1 - \epsilon^2)^2 + (-12M_y \bar{E}_z + M_y^3 \bar{E}_z \epsilon^2 - 6M_y^2) (1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}} \right], \quad (4.5)$$

$$S_r \approx \frac{1}{36} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{1}{\epsilon (1 - \epsilon^2)^2} \left[-72\epsilon^3 + (18M_y \bar{E}_z + 9M_y^2) (1 - \epsilon^2)^2 \ln \frac{(1 - \epsilon)}{(1 + \epsilon)} + (2M_y^3 \bar{E}_z \epsilon^2 - 18M_y^2 - 36M_y \bar{E}_z) \epsilon (1 - \epsilon^2)^2 \right]. \quad (4.6)$$

Für große Hartmannzahlen M_y folgt

$$S_\varphi \approx \pi \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{\bar{E}_z}{M_y} \frac{\epsilon}{(1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad S_r \approx -4 \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{\bar{E}_z}{M_y} \frac{\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^2}. \quad (4.7)$$

Somit sind die Sommerfeldzahl $S_D(\epsilon, M_y, \bar{E}_z, \frac{B}{D}) = \sqrt{S_\varphi^2 + S_r^2}$ und der Wellenverlagerungswinkel $\beta(\epsilon, M_y, \bar{E}_z, \frac{B}{D}) = \arctan \left| \frac{S_\varphi}{S_r} \right|$ als Funktion der Systemparameter bestimmt. Die Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen den Verlauf der Sommerfeldzahl S_D

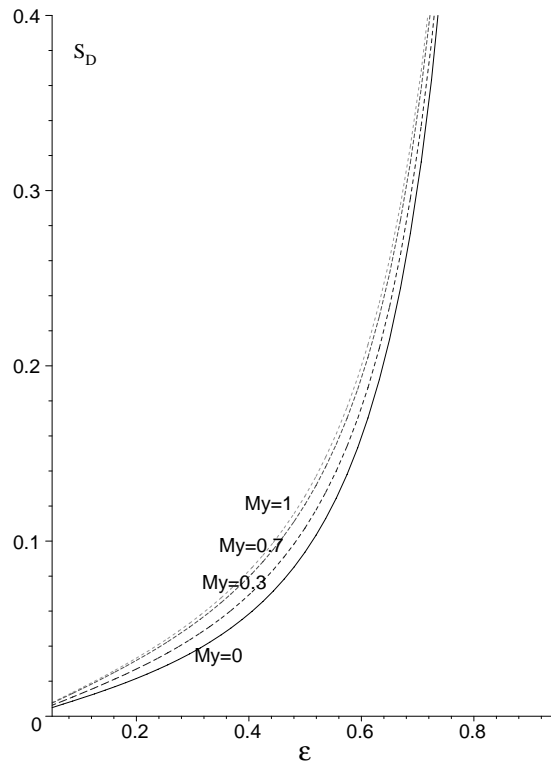


Abbildung 4.1: Sommerfeldzahl S_D für kleine Hartmannzahlen M_y bei eingprägtem radialen B -Feld mit $\bar{E}_z = -2$, $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$.

über der Exzentrizität für unterschiedliche Hartmannzahlen M_y mit $\bar{E}_z = -2$ und $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$. Für kleine Hartmannzahlen M_y ergibt sich nur eine geringe Erhöhung der Tragfähigkeit. Bei großen Hartmannzahlen tritt der gegenteilige Effekt ein, der resultierende Auftrieb wird reduziert und verschwindet für $M_y \rightarrow \infty$. Die physikalische Ursache dieses Verhaltens wurde bereits in Abschnitt 3.1.1 für den kompressiblen Fall erläutert. Das Absenken des Auftriebes für $M_y \rightarrow \infty$ ist beim unendlich breiten Lager nicht zu beobachten [19, 26, 29]. Für $M_y \rightarrow 0$ ergeben sich im übrigen die Formeln der konventionellen Lagertheorie [13, 38].

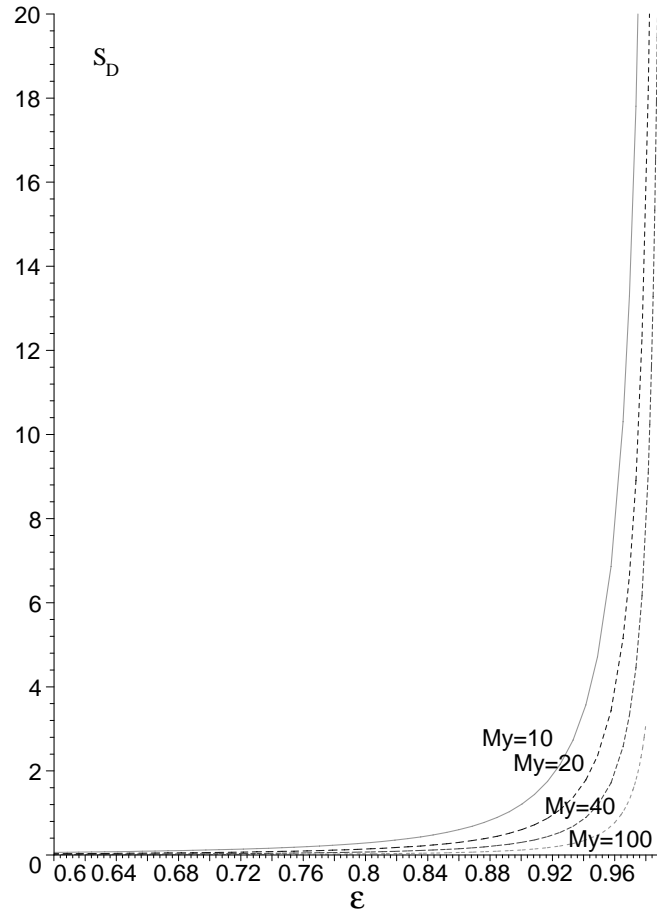


Abbildung 4.2: Sommerfeldzahl S_D für große Hartmannzahlen M_y bei eingprägtem radialen B -Feld mit $\bar{E}_z = -2$, $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$.

4.1.2 Sommerfeldzahl der Verdrängung

Die Differentialgleichung für die Verdrängungsbewegung ergibt sich aus Gl. (2.36)

zu

$$\left(\frac{D}{B}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\int_0^{\bar{h}} (\bar{w}) d\bar{y} \right] + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 0 . \quad (4.8)$$

Mit \bar{q}_z nach Gl. (3.8) folgt

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{12}{\omega} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}^3} . \quad (4.9)$$

Mit $\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \dot{\epsilon} \cos \varphi$ liefert eine Integration unter Beachtung der Randbedingungen $\bar{p}(\bar{z} = 1) = \bar{p}(\bar{z} = -1) = 0$

$$\bar{p} = 6 \frac{\dot{\epsilon}}{\omega} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{\cos \varphi}{\bar{h}^3} (\bar{z}^2 - 1) . \quad (4.10)$$

Für $\dot{\epsilon} > 0$, also Verdrängung in den engen Spalt, ergibt sich die Sommerfeldzahl der Verdrängung S_V zu

$$\begin{aligned} S_V^+ &= \frac{1}{4} \frac{\omega}{\dot{\epsilon}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{-1}^1 \bar{p} \cos(\varphi) d\bar{z} d\varphi \\ &= -\frac{4}{(1-\epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \left[\frac{3\epsilon}{2} \sqrt{(1-\epsilon^2)} + (1+2\epsilon^2) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \right) \right] , \quad (4.11) \end{aligned}$$

und für $\dot{\epsilon} < 0$, also Verdrängung in den weiten Spalt, folgt

$$\begin{aligned} S_V^- &= \frac{1}{4} \frac{\omega}{\dot{\epsilon}} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \int_{-1}^1 \bar{p} \cos(\varphi) d\bar{z} d\varphi \\ &= \frac{4}{(1-\epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \left[\frac{-3\epsilon}{2} \sqrt{(1-\epsilon^2)} + (1+2\epsilon^2) \arctan \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \right] . \quad (4.12) \end{aligned}$$

Wie man sieht, hat weder M_y noch \bar{E}_z Einfluß auf die Druckentwicklung. Durch die Verdrängungsbewegung wird beim schmalen Lager nur ein Durchfluß in axialer Richtung erzeugt. Durch das radiale B -Feld und das axiale E -Feld wirken aber keine Lorentz-Kräfte in axialer Richtung, so daß die äußeren Felder die Strömung in \bar{z} -Richtung und somit den Druckaufbau nicht beeinflussen.

4.2 Axiales eingepprägtes Magnetfeld

4.2.1 Sommerfeldzahl der Drehung

Für $\lambda = 0$ folgt aus Gl. (3.52) nach Ersetzen von $\alpha(\varphi)$ durch $\beta(\varphi)$ unter Beachtung der Randbedingungen $\bar{p}(\bar{z} = 1) = \bar{p}(\bar{z} = -1) = 0$

$$\bar{p} = \bar{p}_0 = \beta(\varphi) \int \int 1 \, d\bar{z} \, d\bar{z} + c_{21} = \beta(\varphi)(\bar{z}^2 - 1) . \quad (4.13)$$

Mit $\beta(\varphi)$ nach Gl. (3.101) entstehen wie im letzten Abschnitt Integrale, die analytisch nicht berechnet werden können. Um geschlossene Lösungen zu erhalten, wird eine Näherungslösung für kleine Hartmannzahlen hergeleitet. Für kleine Hartmannzahlen wird die Funktion $\beta(\varphi)$ bezüglich des Parameters M_z bis zum quadratischen Glied in eine Taylorreihe entwickelt. Es ergibt sich dann unter Beachtung von $\frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \varphi} \approx 0$ (vgl. Abschnitt 3.2.1) als Näherung

$$\beta(\varphi) = \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{12 \bar{h}'}{\bar{h}^3} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \bar{V}_y M_z \bar{h} - \frac{1}{8} M_z^2 \bar{h}^2 \right] . \quad (4.14)$$

Für große Hartmannzahlen zeigt eine Grenzwertbetrachtung, daß $\lim_{M_z \rightarrow \infty} \beta(\varphi) = 0$, was bedeutet, daß der Auftrieb für große Hartmannzahlen verschwindet. Die Komponenten der dimensionslosen Auftriebskraft ergeben sich mit Gl. (4.14) für kleine Hartmannzahlen M_z zu

$$S_\varphi = \frac{1}{12} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{\pi}{\epsilon (1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \left[6\epsilon^2 + (3M_z^2 - 4\bar{V}_y M_z) (1 - \epsilon^2) - (3M_z^2 - 4\bar{V}_y M_z) (1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}} \right] , \quad (4.15)$$

$$S_r = -\frac{1}{12} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{1}{\epsilon (1 - \epsilon^2)^2} \left[24\epsilon^3 + (3M_z^2 - 4\bar{V}_y M_z) (1 - \epsilon^2)^2 \ln \frac{(1 - \epsilon)}{(1 + \epsilon)} + 6M_z^2 \epsilon (1 - \epsilon^2)^2 - 8\bar{V}_y M_z \epsilon (1 - \epsilon^2) \right] . \quad (4.16)$$

Damit können die Sommerfeldzahl $S_D(\epsilon, M_z, \bar{V}_y, \frac{B}{D}) = \sqrt{S_\varphi^2 + S_r^2}$ und der Wellenverlagerungswinkel $\beta(\epsilon, M_z, \bar{V}_y, \frac{B}{D}) = \arctan \left| \frac{S_\varphi}{S_r} \right|$ berechnet werden. In Abbildung 4.3 ist die Sommerfeldzahl über der Exzentrizität für unterschiedliche Hartmannzahlen M_z mit $\bar{V}_y = -4$ und $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$ aufgetragen. Man sieht, daß der Einfluß der Hartmannzahl auf die Tragfähigkeit gering ist. Das Verschwinden des Auftriebes für $M_z \rightarrow \infty$ ist beim unendlich breiten Lager nicht zu beobachten [19].

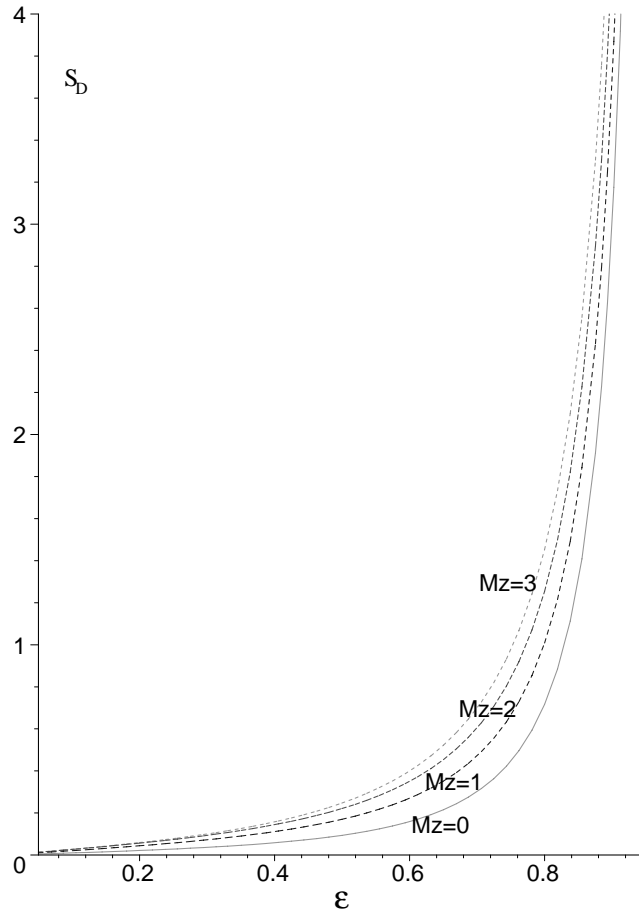


Abbildung 4.3: Sommerfeldzahl S_D für kleine Hartmannzahlen M_z bei eingprägtem axialen B -Feld mit $\bar{V}_y = -4$, $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$.

4.2.2 Sommerfeldzahl der Verdrängung

Es ergeben sich dieselben Gleichungen wie in Abschnitt 4.1.2.

4.3 Toroidales eingepprägtes Magnetfeld

4.3.1 Sommerfeldzahl der Drehung

Mit Gl. (3.125) und Gl. (3.120) folgt für $\lambda = 0$ unter Beachtung von $\bar{p}(\bar{z} = 1) = \bar{p}(\bar{z} = -1) = 0$ das Druckfeld

$$\bar{p} = \bar{p}_0 = \gamma(\varphi) \int \int 1 \, d\bar{z} \, d\bar{z} + \delta(\varphi) \int 1 \, d\bar{z} + c_{11} \bar{z} + c_{21} = \gamma(\varphi)(\bar{z}^2 - 1) . \quad (4.17)$$

Mit $\gamma(\varphi)$ nach Gl. (3.112) lauten die Komponenten der dimensionslosen Auftriebskraft für beliebige Hartmannzahlen M_φ

$$\begin{aligned} S_\varphi &= -\frac{1}{12} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{\pi}{\epsilon(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \left[-6\epsilon^2 + M_\varphi^2 (1-\epsilon^2)^2 - M_\varphi^2 (1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}} \right] , \quad (4.18) \\ S_r &= \frac{1}{12} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{1}{\epsilon(1-\epsilon^2)^2} \left[-24\epsilon^3 + 2M_\varphi^2 \epsilon (1-\epsilon^2)^2 \right. \\ &\quad \left. + M_\varphi^2 (1-\epsilon^2) \ln \frac{(1-\epsilon)}{(1+\epsilon)} \right] , \quad (4.19) \end{aligned}$$

so daß die Sommerfeldzahl $S_D(\epsilon, M_\varphi, \frac{B}{D}) = \sqrt{S_\varphi^2 + S_r^2}$ und der Wellenverlagerungswinkel $\beta(\epsilon, M_\varphi, \frac{B}{D}) = \arctan \left| \frac{S_\varphi}{S_r} \right|$ in Abhängigkeit der Systemparameter berechnet werden können. Im inkompressiblen Fall hat das Potential \bar{V}_y unter den gemachten Voraussetzungen keinen Einfluß auf den Druckverlauf. Die Abbildungen 4.4 und 4.5 zeigen den Verlauf der Sommerfeldzahl über der Exzentrizität für unterschiedliche Hartmannzahlen M_φ mit $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$. Beim unendlich breiten Lager hat ein toroidales B -Feld keinen Einfluß auf die Strömung, da beim unendlich breiten Spalt die Geschwindigkeitskomponente in axialer Richtung verschwindet und daher keine Lorentz-Kraft erzeugt wird.

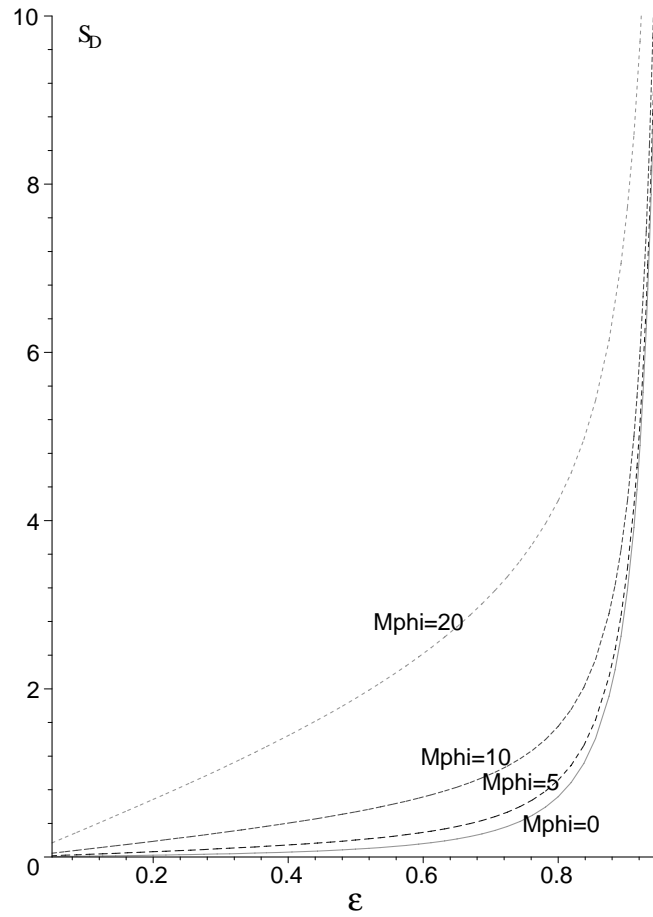


Abbildung 4.4: Sommerfeldzahl S_D für verschiedene Hartmannzahlen M_φ bei eingepägtem toroidalen B -Feld mit $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$.

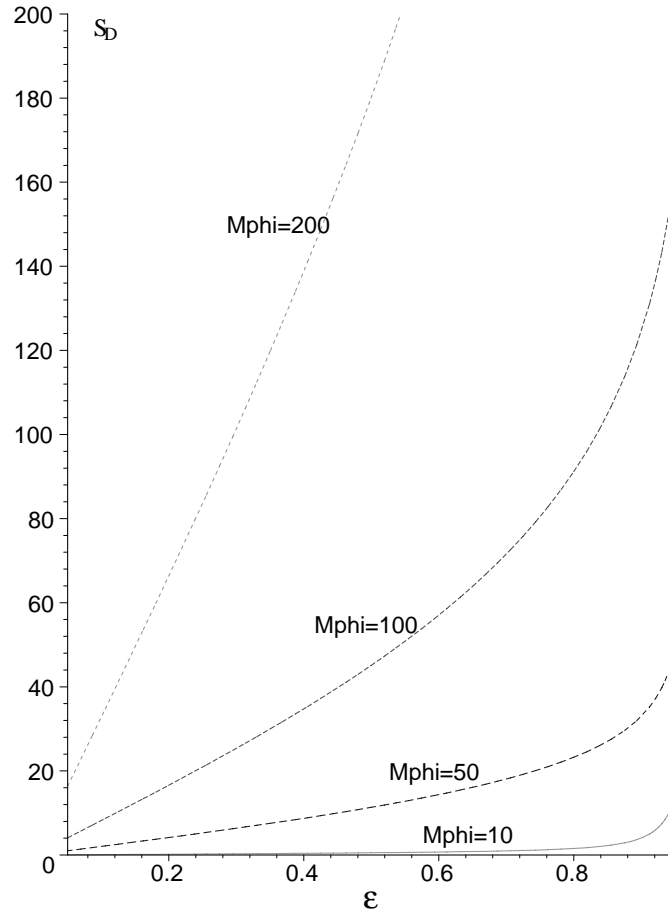


Abbildung 4.5: Sommerfeldzahl S_D für verschiedene Hartmannzahlen M_φ bei eingepägtem toroidalem B -Feld mit $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$.

4.3.2 Sommerfeldzahl der Verdrängung

Die Kontinuitätsgleichung (2.36) lautet für die Verdrängungsbewegung

$$\left(\frac{D}{B}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\int_0^{\bar{h}} (\bar{w}) d\bar{y} \right] + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 0 . \quad (4.20)$$

Mit dem axialen Durchfluß \bar{q}_z nach Gl. (3.110) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\dot{\epsilon}}{\omega} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{(12 + M_\varphi \bar{h}^2) \cos \varphi}{\bar{h}^3} . \quad (4.21)$$

Unter Beachtung von $\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \dot{\epsilon} \cos \varphi$ wird Gl. (4.21) integriert. Man erhält

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\epsilon}}{\omega} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{(12 + M_\varphi \bar{h}^2) \cos \varphi}{\bar{h}^3} (\bar{z}^2 - 1) . \quad (4.22)$$

Bei Verdrängung in den engen Spalt ($\dot{\epsilon} > 0$), ergibt sich

$$\begin{aligned} S_V^+ &= \frac{1}{4} \frac{\omega}{\dot{\epsilon}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{-1}^1 \bar{p} \cos(\varphi) d\bar{z} d\varphi \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{1}{\epsilon^2 (1 - \epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left[4M_\varphi^2 (1 - \epsilon^2)^2 \arctan \sqrt{\frac{(1 - \epsilon)}{(1 + \epsilon)}} \right. \\ &\quad + 24\epsilon^2 (1 + 2\epsilon^2) \arctan \sqrt{\frac{(1 - \epsilon)}{(1 + \epsilon)}} + \pi M_\varphi^2 (1 - \epsilon^2)^{\frac{5}{2}} + 2M_\varphi^2 \epsilon (1 - \epsilon^2)^{\frac{5}{2}} \\ &\quad \left. - 2\pi M_\varphi^2 (1 - \epsilon^2)^2 - 36\epsilon^3 \sqrt{1 - \epsilon^2} - 12\pi \epsilon^2 (1 + 2\epsilon^2) \right] . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Bei Verdrängung in den weiten Spalt ($\dot{\epsilon} < 0$) folgt

$$\begin{aligned} S_V^- &= \frac{1}{4} \frac{\omega}{\dot{\epsilon}} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \int_{-1}^1 \bar{p} \cos(\varphi) d\bar{z} d\varphi \\ &= -\frac{1}{6} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{1}{\epsilon^2 (1 - \epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left[-4M_\varphi^2 (1 - \epsilon^2)^2 \arctan \sqrt{\frac{(1 - \epsilon)}{(1 + \epsilon)}} \right. \\ &\quad - 24\epsilon^2 (1 + 2\epsilon^2) \arctan \sqrt{\frac{(1 - \epsilon)}{(1 + \epsilon)}} + \pi M_\varphi^2 (1 - \epsilon^2)^{\frac{5}{2}} - 2M_\varphi^2 \epsilon (1 - \epsilon^2)^{\frac{5}{2}} \\ &\quad \left. + 36\epsilon^3 \sqrt{1 - \epsilon^2} \right] . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Im Gegensatz zu den beiden anderen Fällen beeinflusst das externe B -Feld die Stömung im unendlich schmalen Spalt.

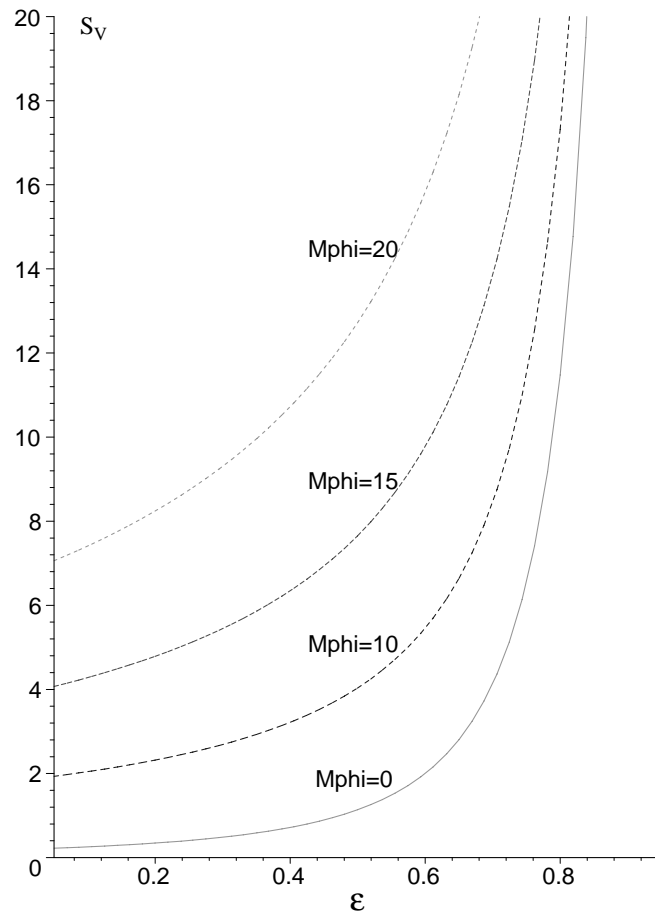


Abbildung 4.6: Sommerfeldzahl S_V^{\dagger} ($\dot{\varepsilon} > 0$) für verschiedene Hartmannzahlen M_{ϕ} bei eingprägten toroidalem B -Feld mit $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$.

Für $M_{\phi} \rightarrow 0$ ergeben sich im übrigen die Formeln der konventionellen Lagertheorie [13, 38]. In den Abbildungen 4.6 - 4.7 sind Sommerfeldzahlen der Verdrängung für verschieden Hartmannzahlen dargestellt.

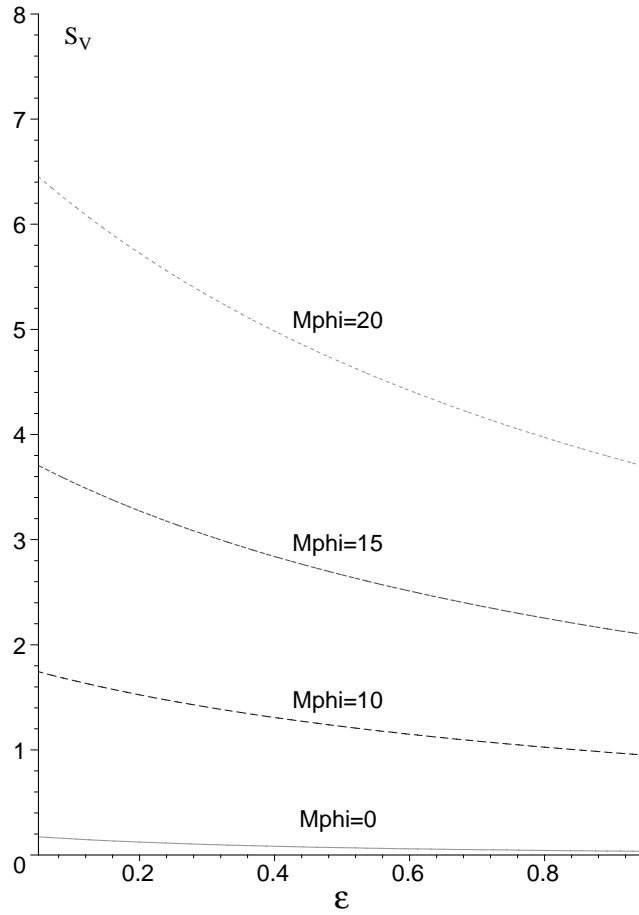


Abbildung 4.7: Sommerfeldzahl S_V^- ($\dot{\epsilon} < 0$) für verschiedene Hartmannzahlen M_φ bei eingprägten toroidalem B -Feld mit $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$.

Kapitel 5

Stabilitätsanalyse eines MHD gelagerten Laval-Rotors

5.1 Feder- und Dämpferkonstanten des Schmierfilms

Im Rahmen einer linearen Theorie, d.h. für kleine Änderungen in ϵ , existiert näherungsweise ein linearer Zusammenhang zwischen dem Auftrieb und der Exzentrizität ϵ bzw. $\dot{\epsilon}$. Dieser lineare Zusammenhang führt zur Definition der Feder- und Dämpferkonstanten des Schmierfilms. Wie die Formeln für die Sommerfeldzahlen in Kapitel 4 zeigen, führt eine horizontale Auslenkung des Wellenmittelpunktes zu einer Änderung der horizontalen und vertikalen Komponente der Auftriebskraft. Entsprechend entstehen durch Auslenkung in horizontaler Richtung geschwindigkeitsproportionale horizontale und vertikale Dämpferkräfte. Auch eine Bewegung des Wellenmittelpunktes in vertikaler Richtung hat eine Änderung sowohl der horizontalen als auch der vertikalen Komponente der Auftriebskraft zur Folge. Eine detaillierte Diskussion dieses Sachverhaltes ist in [38, 63] zu finden. Die dimensionslosen Feder- und Dämpferkonstanten können als Funktionen von S_D , S_r , S_φ , $S'_r = \frac{\partial S_r}{\partial \epsilon}$, $S'_\varphi = \frac{\partial S_\varphi}{\partial \epsilon}$ und S_V

berechnet werden. Nach [38, 63] ergibt sich für die dimensionslosen Federkonstanten

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \frac{S_r}{\epsilon S_D} + \frac{-S_r S'_\varphi + S'_r S_\varphi}{S_D^3} S_\varphi, & \gamma_{12} &= \frac{-S_\varphi}{\epsilon S_D} + \frac{-S_r S'_\varphi + S'_r S_\varphi}{S_D^3} S_r, \\ \gamma_{21} &= \frac{S_r S'_r + S_\varphi S'_\varphi}{S_D^3} S_\varphi, & \gamma_{22} &= \frac{S_r S'_r + S_\varphi S'_\varphi}{S_D^3} S_r\end{aligned}$$

und für die dimensionslosen Dämpferkonstanten

$$\begin{aligned}\beta_{11} &= \frac{S_V S_\varphi^2}{S_D^3}, & \beta_{12} &= \frac{S_V S_r S_\varphi}{S_D^3}, \\ \beta_{21} &= \frac{2S_r}{\epsilon S_D} + \frac{S_r S_\varphi S_V}{S_D^3}, & \beta_{22} &= -\frac{2S_\varphi}{\epsilon S_D} + \frac{S_r^2 S_V}{S_D^3}.\end{aligned}$$

Die Indizes 1 und 2 bezeichnen die horizontale und vertikale Richtung. γ_{ij} und β_{ij} geben die Änderung der Kraft in i -Richtung bei Auslenkung des Wellenmittelpunktes in j -Richtung an. In der Literatur werden die Feder- und Dämpferkonstanten in der Regel numerisch bestimmt. Mit den Formeln für die Sommerfeldzahlen der Drehung und Verdrängung aus Kapitel 4 können γ_{ij} und β_{ij} als Funktionen der Systemparameter hier analytisch ermittelt werden.

5.2 Stabilitätskarten

Mit Hilfe der Feder- und Dämpferkonstanten des letzten Abschnitts wird nun eine Stabilitätsanalyse eines in zwei schmalen MHD Lagern symmetrisch gelagerten Laval-Rotors durchgeführt [38, 63]. Die einzige in der Literatur bekannte Arbeit behandelt nur den Fall des eingepprägten axialen B -Feldes [35].

Das Aufstellen der Bewegungsgleichungen für den anisotrop gleitgelagerten Rotor ist in [38, 63] enthalten. Die Stabilitätsuntersuchung der linearisierten Gleichungen basiert auf einer Eigenwertanalyse unter Verwendung des Cremerschen Lagenkriteriums [74]. Für die kritische Winkelgeschwindigkeit ω^* ergibt sich dabei [38, 63]

$$\omega^* = \frac{\omega_k}{\sqrt{\frac{m S_D}{\mu} + n}} \quad (5.1)$$

mit

$$\begin{aligned}m &= n \frac{-\epsilon S_V + 2S_\varphi}{S_r S_V - 2S'_r S_\varphi + 2S_r S'_\varphi}, \\ n &= \frac{(S_r S_V - 2S'_r S_\varphi + 2S_r S'_\varphi)(2S_r S_\varphi + 2\epsilon S_r S'_\varphi - \epsilon^2 S'_r S_V)}{-2S_V S_\varphi (\epsilon S_V - 2S_\varphi)^2} + (S_r S'_r + S_\varphi S'_\varphi),\end{aligned}$$

$$\omega_k = \sqrt{C/M_W} ,$$

$$\mu = \frac{M_W g}{C(R-r)} .$$

ω_k ist die erste Biegeeigenkreisfrequenz der Welle, C die Federkonstante der Welle und M_W die Masse der Scheibe. μ ist die bezogene Wellendurchbiegung und g die Gravitationskonstante. Die Abbildungen 5.1 - 5.4 zeigen das Verhältnis $\lambda = \frac{\omega^*}{\omega_k}$ für die drei Grundfälle a) radiales, b) axiales und c) toroidales B -Feld für verschiedene Hartmannzahlen. Sämtliche Kurven wurden für $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$ und $\mu = 0.1$ erstellt. Im

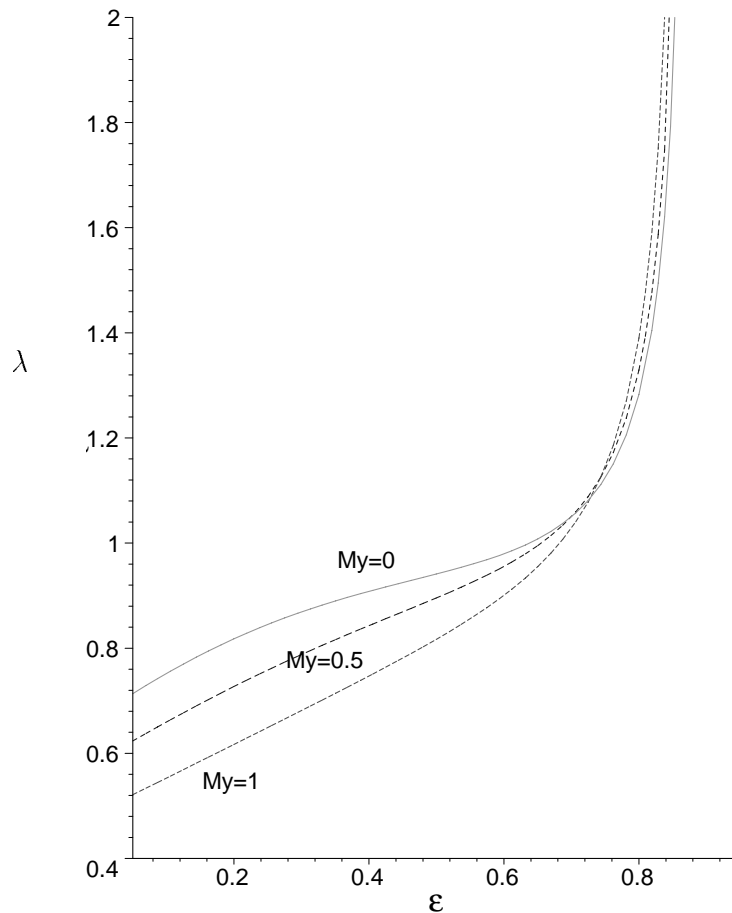


Abbildung 5.1: $\frac{\omega^*}{\omega_k}$ bei eingprägtem radialem B -Feld für kleine Hartmannzahlen M_y mit $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$, $\mu = 0.1$ und $\bar{E}_z = -2$.

Fälle des eingprägten radialem B -Feldes sinkt die kritische Winkelgeschwindigkeit ω^* für kleine Hartmannzahlen M_y bei kleineren Werten von ϵ und steigt bei größeren

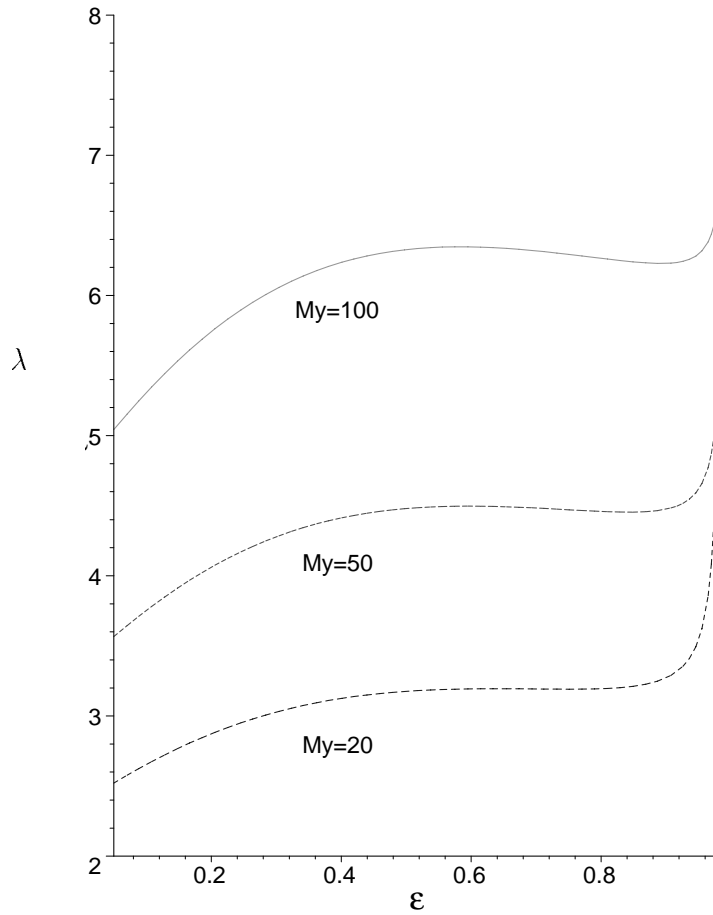


Abbildung 5.2: $\frac{\omega^*}{\omega_k}$ bei eingprägtem radialen B -Feld für große Hartmannzahlen M_y mit $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$, $\mu = 0.1$ und $\bar{E}_z = -2$.

Werten von ϵ . Bei großen Hartmannzahlen M_y erhöht sich die kritische Winkelgeschwindigkeit ω^* . Im Falle des eingprägten axialen und toroidalen B -Feldes sinkt die kritische Winkelgeschwindigkeit ω^* bei kleineren Werten von ϵ und steigt bei größeren Werten von ϵ .

Aufgrund der komplizierten Abhängigkeit der Feder- und Dämpferkonstanten von den Parametern (Exzentrizität, Hartmannzahl und dimensionsloses E -Feld) ist eine anschauliche Erklärung des Stabilitätsverhaltens nicht ohne weiteres möglich.

Eine Stabilitätsanalyse bei kompressibler Betrachtung ist nicht ohne weiteres möglich. Da in diesem Fall keine geschlossenen Lösungen für den Druckverlauf $\bar{p}(\varphi, \bar{z})$ und

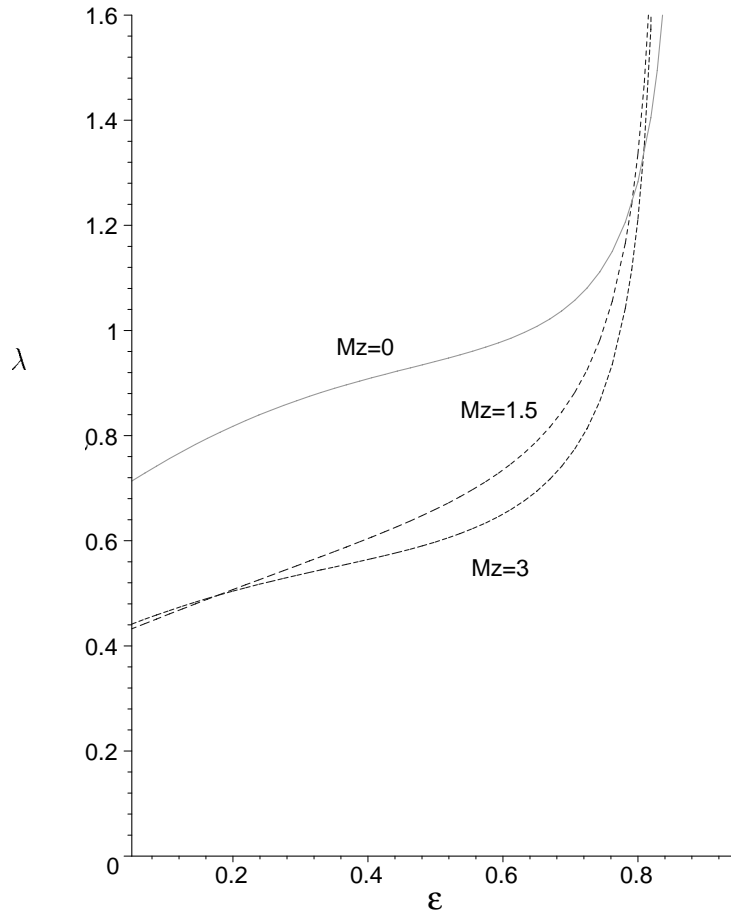


Abbildung 5.3: $\frac{\omega^*}{\omega_k}$ bei eingprägtem axialen B -Feld für kleine Hartmannzahlen M_z mit $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$, $\mu = 0.1$ und $\tilde{V}_y = -4$.

damit für die Sommerfeldzahlen S_D und S_V existieren, müssen die Feder- und Dämpferkonstanten näherungsweise numerisch bestimmt werden. Da der Einfluß der Kompressibilität auf die Druckentwicklung nicht sehr groß ist (vgl. Kapitel 3), werden sich die Stabilitätskarten bei kompressibler Rechnung wohl nicht wesentlich von denen bei inkompressibler Betrachtung unterscheiden.

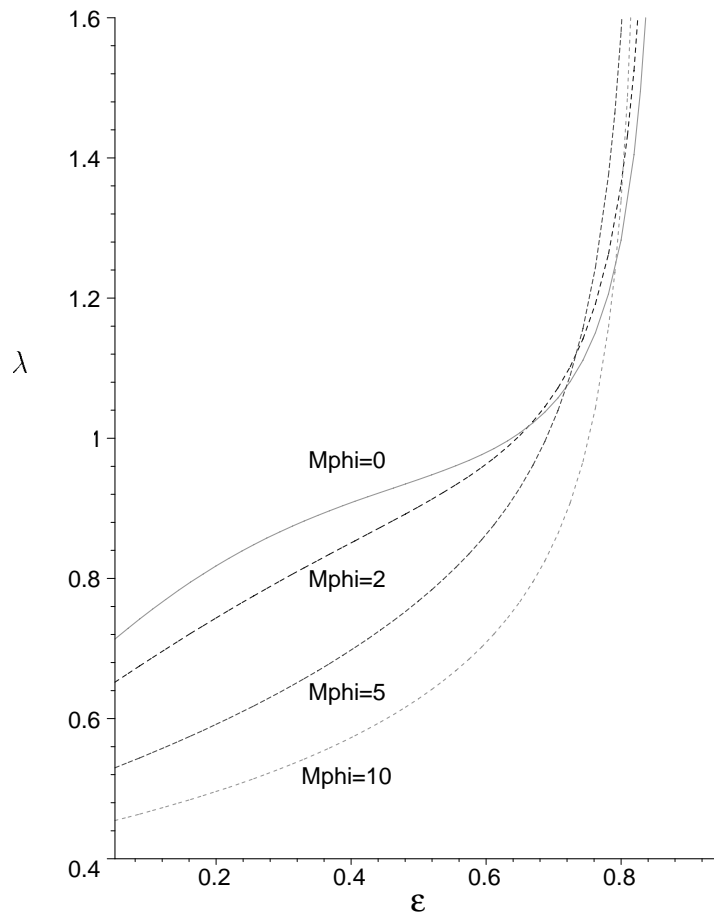


Abbildung 5.4: $\frac{\omega^*}{\omega_k}$ bei eingprägtem toroidalen B -Beld für beliebige Hartmannzahlen M_φ mit $\frac{B}{D} = \frac{1}{4}$, $\mu = 0.1$.

Kapitel 6

Auftrieb durch oszillierende elektrische Felder

Die Verwendung elektrisch leitender Fluide als Schmiermittel bietet die Möglichkeit, Auftrieb ohne Rotation der Welle allein durch Anlegen externer E - und B -Felder zu produzieren. Untersucht wird die Druckentwicklung bei zeitlich konstantem eingepprägten B -Feld und zeitlich oszillierendem E -Feld bzw. zeitlich oszillierendem elektrischen Potential. Das Fluid sei inkompressibel. Da bei kompressibler Betrachtung - wie im letzten Kapitel bereits erwähnt - keine geschlossenen Lösungen für den Druckverlauf vorliegen, würde dies die Rechnung wesentlich komplizieren. Die resultierenden Auftriebskräfte müßten dann bei jedem Zeitschritt numerisch integriert werden, was zu einer eklatanten Vergrößerung der Rechenzeit führte. Wieder wird die Hypothese des schmalen Lagers verwendet. Betrachtet werden der ebene Gleitshuh und das Radiallager unter radialem (transversalem) und axialem B -Feld. Der Fall des eingepprägten toroidalen B -Feldes führt im inkompressiblen Fall bei nicht rotierender Welle zu keiner Druckentwicklung (siehe Abschnitt 4.3).

6.1 Ebener Gleitschuh bei axialem harmonischen E -Feld

Betrachtet wird der ebene Gleitschuh nach Abbildung 6.1. Gleitschuh und Stator seien perfekte Isolatoren (siehe Kapitel 2.2). Der Gleitschuh sei nur in y -Richtung beweglich. Der Stator ist fixiert. Das äußere konstante Magnetfeld sei transversal,

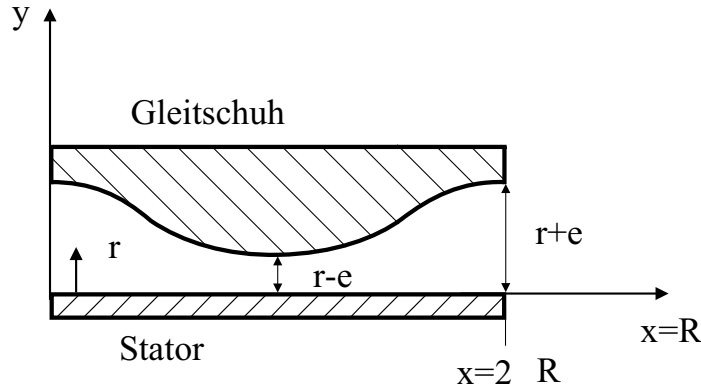


Abbildung 6.1: Ebener Gleitschuh

d.h. in y -Richtung orientiert. Ein zeitlich harmonisches E -Feld $E_z = \hat{E}_z \cos(\Omega t)$ ist axial in \bar{z} -Richtung gerichtet. Durch das oszillierende E -Feld werden infolge der Maxwell'schen Gleichungen E - und B -Felder induziert. Diese sind, wie eine Untersuchung am Plattenkondensator zeigt, bei kleinen Frequenzen Ω vernachlässigbar. Beim Plattenkondensator unter Wechselspannung ist das induzierte E -Feld in erster Näherung proportional zu $\left(\frac{\Omega}{c}\right)^2$ (c ist die Lichtgeschwindigkeit) und das induzierte B -Feld proportional zu $\frac{\Omega}{c^2}$ (siehe [20]).

In Anlehnung an das Radiallager wird als Spaltfunktion $h = \Delta r + e \cos \varphi$ benutzt, so daß teilweise auf Ergebnisse aus Kapitel 4 zurückgegriffen werden kann. Der Gleitschuh hat die Länge $L = 2\pi R$ und die axiale Breite $B = 2a$. Folgende dimensionslose Variablen werden eingeführt:

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{\epsilon}{R}, & \bar{\Delta}r &= \frac{\Delta r}{e}, & h &= \bar{h} e, & x &= \varphi R, \\
 y &= \bar{y} R \psi, & z &= \bar{z} a, & u &= \bar{u} R \Omega, & w &= \bar{w} R \Omega, \\
 p &= \bar{p} \frac{\eta \Omega}{\psi^2}, & E_y &= \bar{E}_y \frac{\Omega \sqrt{\eta}}{\psi \sqrt{\sigma}}, & E_z &= \bar{E}_z \frac{\Omega \sqrt{\eta}}{\psi \sqrt{\sigma}}, & j_y &= \bar{j}_y \frac{\sqrt{\eta \sigma} \Omega}{\psi}, \\
 j_z &= \bar{j}_z \frac{\sqrt{\eta \sigma} \Omega}{\psi}, & M_y^2 &= \frac{\sigma R^2 \psi^2 B_y^2}{\eta}, & M_z^2 &= \frac{\sigma R^2 \psi^2 B_z^2}{\eta}, & t &= \bar{t} \frac{1}{\Omega}.
 \end{aligned}$$

Die Impulsbilanz in \bar{x} - und \bar{z} -Richtung sowie das Ohmsche Gesetz in \bar{z} -Richtung sind durch die Gleichungen (3.1)-(3.3) gegeben. Integration von Gl. (3.1) unter Beachtung, daß sowohl Stator als auch Gleitschuh feststehen, d.h. $\bar{u}(\bar{y} = 0) = 0$ und $\bar{u}(\bar{y} = \bar{h}) = 0$, ergibt das Geschwindigkeitsfeld \bar{u} . Dieses über den Schmierspalt integriert führt auf den dimensionslosen Durchfluß

$$\bar{q}_\varphi = \frac{q_\varphi}{\Omega\psi R^2} = \frac{1}{M_y^3} \left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + M_y \bar{E}_z(t) \right] \left[2 \frac{(\cosh(M_y \bar{h}) - 1)}{\sinh(M_y \bar{h})} - (M_y \bar{h}) \right]. \quad (6.1)$$

Eine Taylorentwicklung bezüglich M_y liefert für kleine Hartmannzahlen unter Verwendung der Hypothese für den schmalen Spalt die Näherung

$$\frac{\partial \bar{q}_\varphi}{\partial \varphi} \approx M_y \bar{E}_z(t) \left[-\frac{1}{4} \bar{h}^2 + \frac{1}{24} M_y^2 \bar{h}^4 \right] \bar{h}'. \quad (6.2)$$

Der dimensionslose Durchfluß $\bar{q}_z = \frac{q_z}{\Omega\psi R^2}$ ist identisch mit Gl. (3.8). Integration der Kontinuitätsgleichung (2.36) mit den Randbedingungen $\bar{p}(\bar{z} = -1) = \bar{p}(\bar{z} = 1) = 0$ ergibt das Druckfeld

$$\bar{p} = \left(\frac{B}{D} \right)^2 \frac{6}{h^3} \frac{\partial \bar{q}_\varphi}{\partial \varphi} (\bar{z}^2 - 1). \quad (6.3)$$

Der dimensionslose Auftrieb S_y ist gegeben durch

$$S_y = \int_0^\pi \int_{-1}^1 \bar{p} \, d\bar{z} \, d\varphi = 2 \left(\frac{B}{D} \right)^2 M_y \bar{E}_z(t) \left[\ln \frac{(\bar{\Delta}r - 1)}{(\bar{\Delta}r + 1)} + \frac{1}{3} M_y^2 \bar{\Delta}r \right]. \quad (6.4)$$

Da das Fluid als inkompressibel angenommen wird, kann kein negativer Druck entstehen (siehe [38]). Aufgrund der Symmetrie der Anordnung wird wegen des oszillierenden E -Feldes nach Gl. (6.3) entweder in der linken ($x \in [0, \pi]$) oder in der rechten Hälfte ($x \in [\pi, 2\pi]$) Druck erzeugt. Deshalb wird nicht über den gesamten Gleitschuh integriert, sondern nur über die halbe Fläche. Für den Auftrieb durch Verdrängung liefert eine Rechnung analog zu Abschnitt (4.1.2)

$$S_{y,V} = 16 \left(\frac{B}{D} \right)^2 \bar{\Delta}r' \frac{\pi(2\bar{\Delta}r^2 + 1)}{(\bar{\Delta}r^2 - 1)^{5/2}} \quad \text{mit} \quad \bar{\Delta}r' = \frac{\partial \bar{\Delta}r}{\partial \bar{t}}. \quad (6.5)$$

Die Formel (6.5) gilt nur für $\bar{\Delta}r' < 0$, d.h. für den Fall, daß sich der Gleitschuh auf den Stator zubewegt. Für $\bar{\Delta}r' > 0$ wird $S_{y,V} = 0$ gesetzt. Die Bewegungsgleichung für den Gleitschuh lautet unter der Voraussetzung, daß sich dieser nur translatorisch in y -Richtung bewegt

$$\bar{\Delta}r'' - \kappa \left[|S_y(\bar{\Delta}r', \bar{t})| + |S_{y,V}| \frac{(|\bar{\Delta}r'| - \bar{\Delta}r')}{2\bar{\Delta}r'} \right] - \bar{G} = 0. \quad (6.6)$$

Hierbei ist m die Masse des Gleitschuhs inklusive der mitbeschleunigten Last, $\kappa = \frac{\eta Ra}{\psi^2 m e \Omega}$ und $\bar{G} = \frac{g}{e \Omega^2}$. Einen Näherungswert für die dimensionslose äußere Last \bar{G} ergibt sich über die statische Kräftebilanz

$$\bar{G} = \kappa \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |S_y(\bar{\Delta}r', \bar{t})| d\bar{t} \quad (6.7)$$

zu

$$\bar{G} \approx \frac{4\kappa}{\pi} \left(\frac{B}{D}\right)^2 M_y \hat{E}_z \left| \left[\ln \frac{(\bar{\Delta}r - 1)}{(\bar{\Delta}r + 1)} + \frac{1}{3} M_y^2 \bar{\Delta}r \right] \right|. \quad (6.8)$$

Eine analytische Integration der nichtlinearen Differentialgleichung (6.6) ist nicht möglich. Da die Koeffizienten der Differentialgleichung explizit die Zeit enthalten, existiert keine Ruhelage $\Delta r = konst.$ Wie die numerische Untersuchung zeigt, besitzt die DGL einen Grenzykel. Dieser kann analytisch nicht berechnet werden. Eine Linearisierung der DGL um eine bekannte Lösung zur Stabilitätsanalyse ist demzufolge unmöglich. Stabilitätsaussagen lassen sich daher nur durch numerische Berechnung der Lyapunov-Exponenten machen. Darauf wird hier aber verzichtet. Zur numerischen Integration wird Gl. (6.6) auf Zustandsform gebracht und mittels Runge-Kutta-Fehlberg-4(5)-Verfahren gelöst [60]. Die Abbildungen 6.2 und 6.3 zeigen den Verlauf von $\bar{\Delta}r$ und $\bar{\Delta}r'$ über der Zeit sowie das Phasendiagramm $\bar{\Delta}r'$ über $\bar{\Delta}r$. Die Rechnungen wurden mit $\hat{E}_z = 2$, $M_y = 0.5$, $\kappa = 2$ und $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$ erstellt. Abbildung 6.2 zeigt Kurven für $\bar{G} = 0.044$ und Abbildung 6.3 für $\bar{G} = 0.022$. In beiden Fällen stellen sich stabile Schwingungen mit ellipsenförmigen Grenzykeln ein. Wie man sieht, liegt der Schwingungsmittelpunkt bei $\bar{G} = 0.044$ deutlich unter dem bei $\bar{G} = 0.022$. Die Amplituden sind in beiden Lastfällen verhältnismäßig klein. Simulationen mit anderen Parametern liefern ähnliche Ergebnisse. Instabile Grenzykel wurden nicht festgestellt.

6.2 Ebener Gleitschuh bei transversalem harmonischen E -Feld

Das eingeprägte B -Feld sei nun axial, also in z -Richtung orientiert. Zwischen fixiertem Stator und Gleitschuh wird das harmonische Potential $V_y(t) = \hat{V}_y \cos(\Omega t)$ angelegt. Gleitschuh und Stator werden als ideale Leiter behandelt (siehe Kapitel 2.2). Die Impulsbilanz in \bar{x} - und \bar{z} -Richtung ist durch Gl. (3.91) und Gl.(3.92) gege-

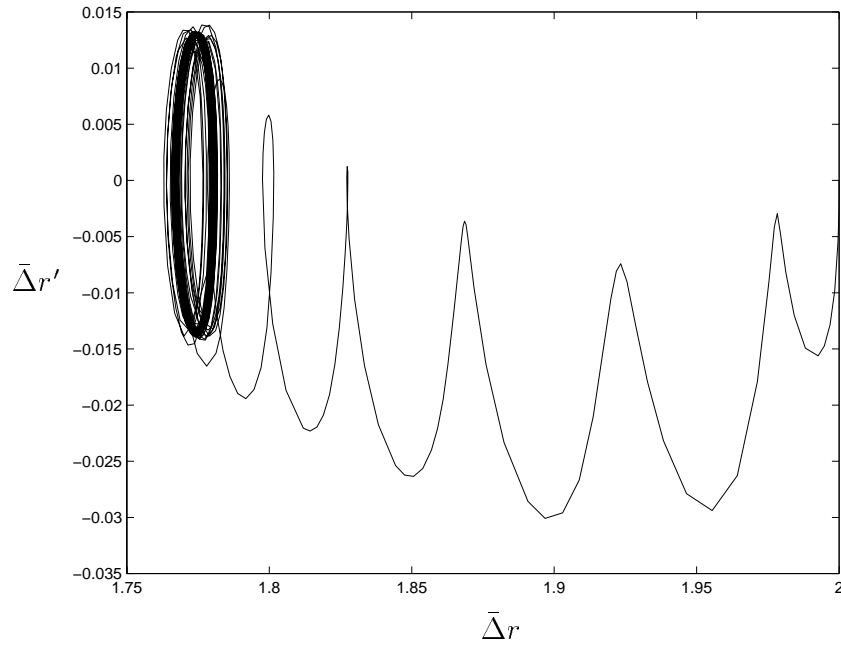
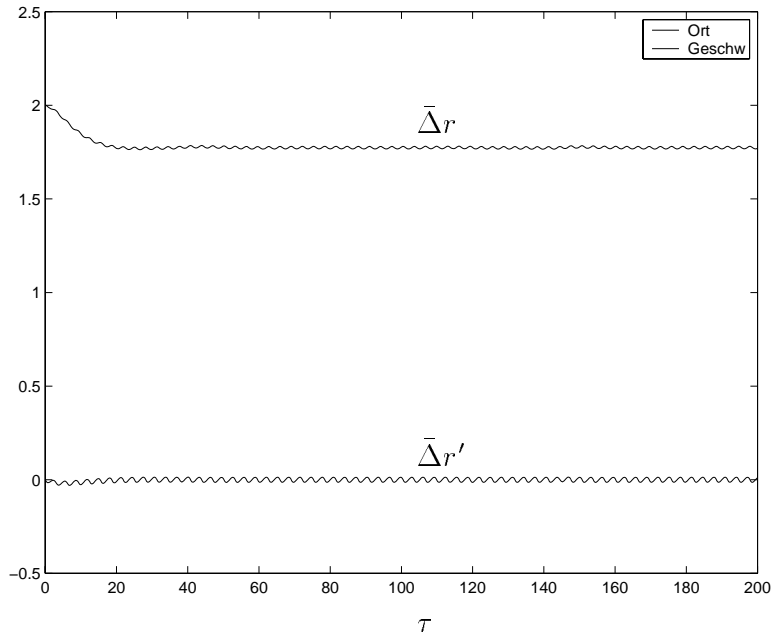


Abbildung 6.2: Gleitschuh unter transversalem B -Feld, Zeitschrieb und Phasendiagramm; Parameter: $\hat{E}_z = 2$, $M_y = 0.5$, $\kappa = 2$, $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\bar{G} = 0.044$.

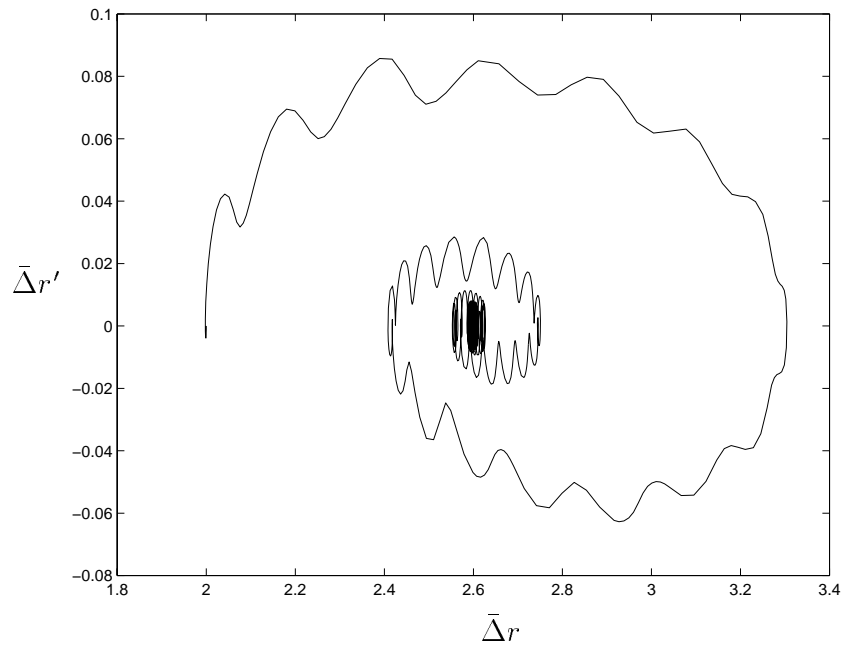
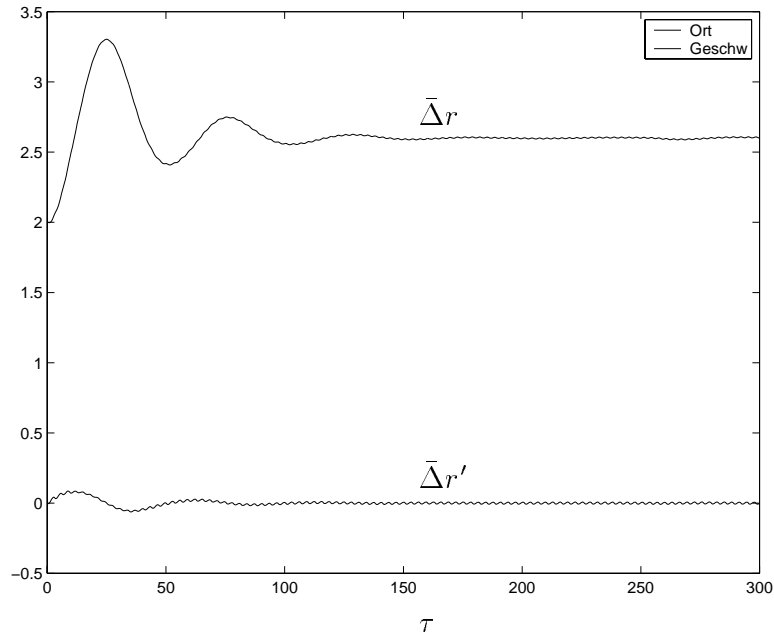


Abbildung 6.3: Gleitschuh unter transversalem B -Feld, Zeitschrieb und Phasendiagramm; Parameter: $\hat{E}_z = 2$, $M_y = 0.5$, $\kappa = 2$, $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\bar{G} = 0.022$.

ben. Aus Gl. (3.91) folgt durch Integration unter Beachtung von $\bar{u}(\bar{y} = 0) = 0$ und $\bar{u}(\bar{y} = \bar{h}) = 0$ das Geschwindigkeitsfeld \bar{u} . Dieses über den Schmierspalt integriert liefert in Kombination mit dem über den Spalt integrierten Ohmschen Gesetz (3.96) den dimensionslosen Durchfluß

$$\bar{q}_\varphi = -\frac{\bar{h}^3}{12 + (M_z \bar{h})^2} \left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + \frac{M_z \bar{V}_y}{\bar{h}} \right]. \quad (6.9)$$

Eine Taylorentwicklung bezüglich M_z liefert für kleine Hartmannzahlen unter Verwendung der Hypothese für den schmalen Spalt die Näherung

$$\frac{\partial \bar{q}_\varphi}{\partial \varphi} \approx M_z \bar{V}_y(t) \left[-6 \bar{h} + M_z \bar{h}^3 \right] \frac{\bar{h}'}{36}. \quad (6.10)$$

Der dimensionslose Durchfluß $\bar{q}_z = \frac{q_z}{\Omega \psi R^2}$ ist wieder durch Gl. (3.8) gegeben. Wie im vorigen Abschnitt führt eine Auswertung der Kontinuitätsgleichung auf das Druckfeld (6.3). Die resultierende Auftriebskraft S_y ergibt sich zu

$$S_y = \int_0^\pi \int_{-1}^1 \bar{p} \, d\bar{z} \, d\varphi = \frac{4}{9} \left(\frac{B}{D} \right)^2 \frac{M_z \bar{V}_y(t)}{(\bar{\Delta} r^2 - 1)} \left[-6 + M_z^2 (\bar{\Delta} r^2 - 1) \right]. \quad (6.11)$$

Der dimensionslose Auftrieb infolge Verdrängung ist identisch mit Gl. (6.5). Freischnitt des Gleitschuhes führt formal auf die Bewegungsgleichung (6.6). Eine statische Kräftebilanz wie in Abschnitt 6.1 ergibt als Startwertwert für die numerische Integration den Näherungswert

$$\bar{G} \approx \kappa \frac{8}{9\pi} \left(\frac{B}{D} \right)^2 \frac{M_z \hat{V}_y}{(\bar{\Delta} r^2 - 1)} \left[-6 + M_z^2 (\bar{\Delta} r^2 - 1) \right]. \quad (6.12)$$

Die numerische Integration der nichtlinearen Schwingungsdifferentialgleichung verläuft wie im letzten Abschnitt. Die Abbildungen 6.4 und 6.5 zeigen Schwingungen des Gleitschuhes für $\hat{V}_y = 2$, $M_z = 0.5$, $\kappa = 2$ und $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$. Abb. 6.4 zeigt Kurven für die dimensionslose Last $\bar{G} = 0.088$ und Abb. 6.5 für $\bar{G} = 0.88$. In beiden Lastfällen stellen sich stabile Schwingungen ein. Für $\bar{G} = 0.88$ ist der Grenzykel herzförmig, für $\bar{G} = 0.088$ ellipsenförmig. Erwartungsgemäß liegt der Schwingungsmittelpunkt bei größerer Last unter dem bei kleinerer Belastung. Auffallend sind die deutlich größeren Amplituden bei $\bar{G} = 0.88$. Auch im Fall des transversalen E -Feldes zeigten Simulationen mit veränderten Parametern nur stabile Grenzykel.

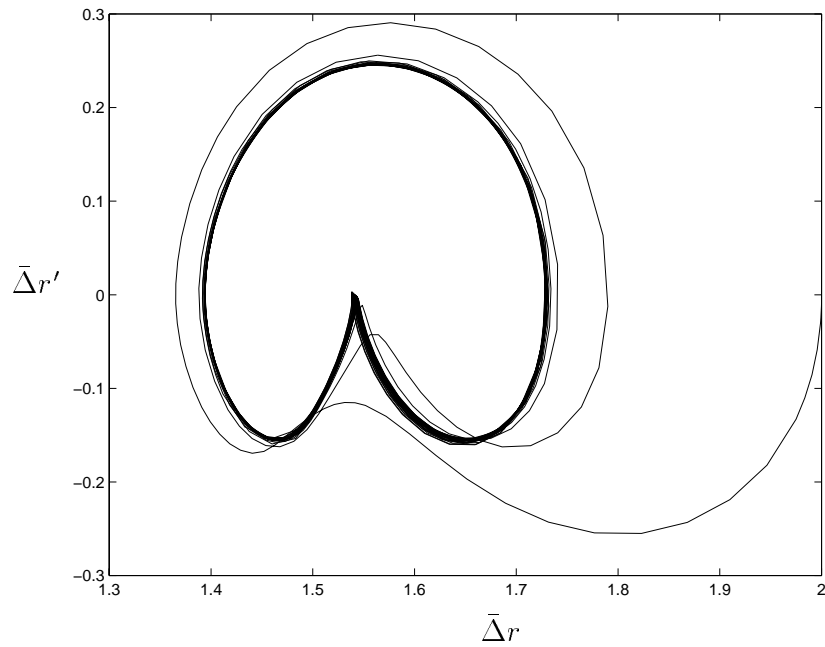
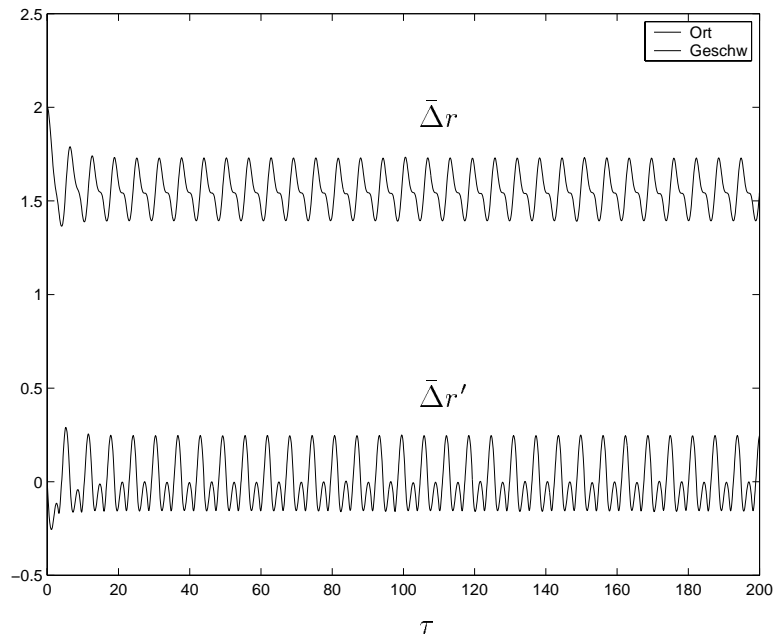


Abbildung 6.4: Gleitschuh unter axialem B -Feld, Zeitschrieb und Phasendiagramm;
 Parameter: $\hat{V}_y = 2$, $M_z = 0.5$, $\kappa = 2$, $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\bar{G} = 0.88$.

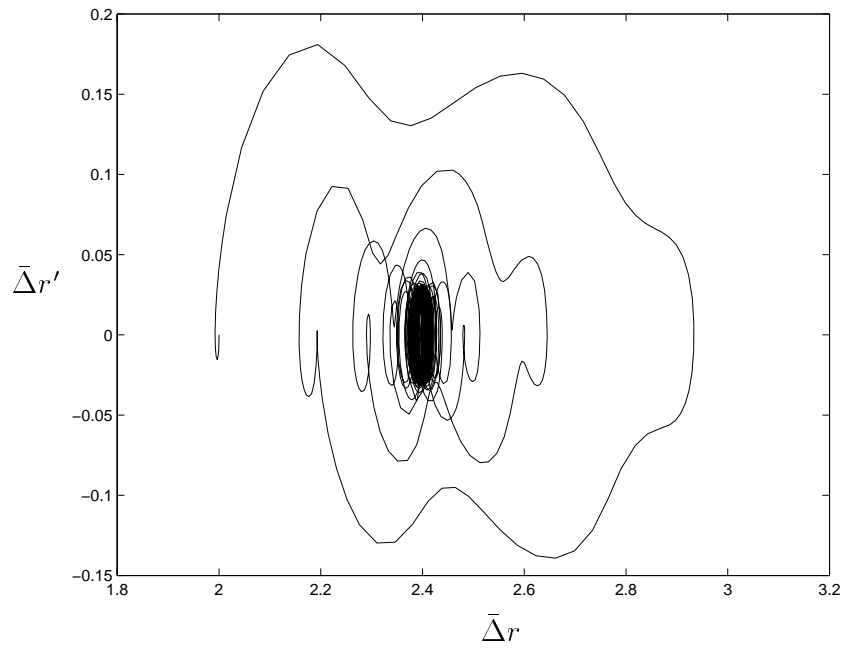
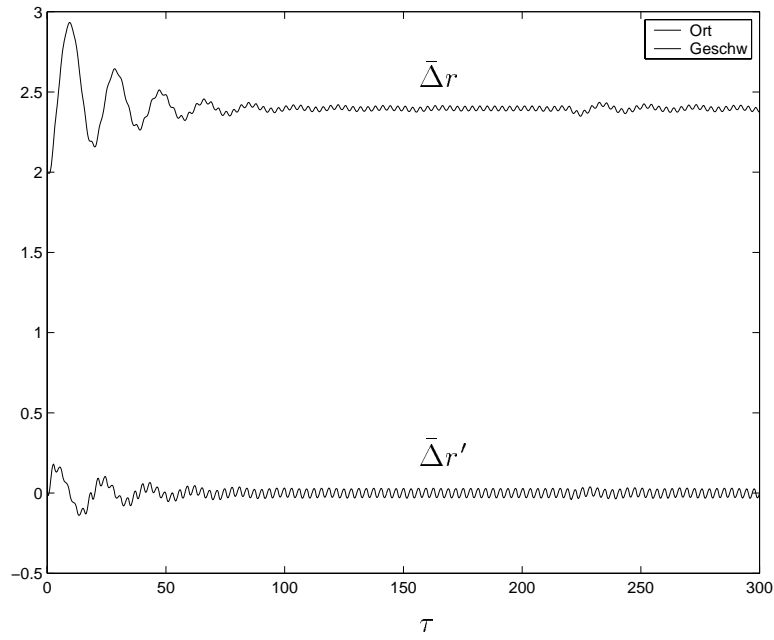


Abbildung 6.5: Gleitschuh unter axialem B -Feld, Zeitschrieb und Phasendiagramm;
 Parameter: $\hat{V}_y = 2$, $M_z = 0.5$, $\kappa = 2$, $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\bar{G} = 0.088$.

6.3 Radiallager bei axialem harmonischen E -Feld

Als 2-dimensionale Erweiterung wird nun das schmale Radiallager bei konstantem eingepprägten radialen B -Feld B_y und harmonischem axialem E -Feld $E_z = \hat{E}_z \cos(\Omega t)$ betrachtet. Lagerschale und Lagerzapfen seien perfekte Isolatoren. Im Unterschied zu Kapitel 3 wird die Winkelgeschwindigkeit des Lagerzapfens $\omega = 0$ gesetzt. Durch das E -Feld wird im Spalt ein periodischer Strom generiert. Die durch das B -Feld induzierte Lorentz-Kraft erzeugt im Spalt eine Strömung, wodurch der Zapfen in Bewegung kommt. Aufgrund dieser Bewegung entstehen zwei geschwindigkeitsproportionale Auftriebskräfte (Dämpfungskräfte). Infolge der tangentialen Bewegung des Zapfens (Drehbewegung der Spaltlage mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\delta}$, siehe Abb. 6.6) wird die hydrodynamische Auftriebskraft $S_{\dot{\delta}}$ erzeugt (vgl. [38]). Die radia-

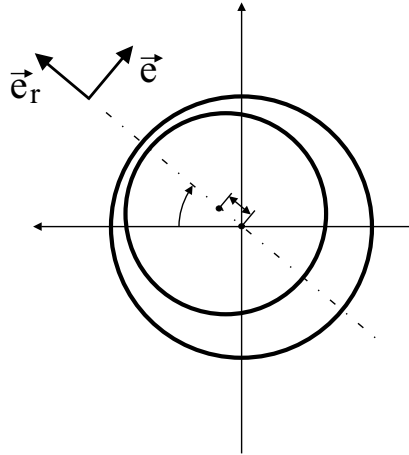


Abbildung 6.6: Spaltwinkel δ

le Verdrängungsbewegung des Zapfens mit $\dot{\delta}$ verursacht die Auftriebskraft S_V (siehe Abschnitt 4.1.2). Die durch die Schubspannungen verursachte Drehung des Zapfens wird vernachlässigt.

Integration der Impulsbilanz (3.1) in \bar{x} -Richtung unter Beachtung der Randbedingungen $\bar{u}(\bar{y} = 0) = \frac{\dot{\delta}}{\omega}$ und $\bar{u}(\bar{y} = \bar{h}) = \frac{\dot{\delta}}{\omega}$, ergibt

$$\bar{u} = \left[\frac{1}{M_y^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{E}_z}{M_y} \right] \left[\cosh(M_y \bar{y}) - \sinh(M_y \bar{y}) \coth(M_y \bar{h}) + \frac{\sinh(M_y \bar{y})}{\sinh(M_y \bar{h})} - 1 \right] + \frac{\dot{\delta}}{\omega} \left[\cosh(M_y \bar{y}) - \sinh(M_y \bar{y}) \coth(M_y \bar{h}) + \frac{\sinh(M_y \bar{y})}{\sinh(M_y \bar{h})} \right]. \quad (6.13)$$

Integration über den Spalt, Differentiation nach φ und Taylorentwicklung nach Potenzen in M_y , liefert für die Änderung des Durchflusses in Umfangsrichtung für kleine Hartmannzahlen die Näherung

$$\frac{\partial \bar{q}_\varphi}{\partial \bar{\varphi}} \approx \underbrace{M_y \bar{E}_z \left[-\frac{1}{4} \bar{h}^2 + \frac{1}{24} M_y^2 \bar{h}^4 \right]}_{\frac{\partial \bar{q}_{\varphi,1}}{\partial \bar{\varphi}}} \bar{h}' + 2 \frac{\dot{\delta}}{\omega} \underbrace{\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{24} M_y^2 \bar{h}^2 \right]}_{\frac{\partial \bar{q}_{\varphi,2}}{\partial \bar{\varphi}}} \bar{h}' . \quad (6.14)$$

Mit \bar{q}_z nach Gl. (3.8) führt eine Integration der Kontinuitätsgleichung schließlich auf

$$\bar{p} = \underbrace{\left(\frac{B}{D} \right)^2 \frac{6}{h^3} \frac{\partial \bar{q}_{\varphi,1}}{\partial \bar{\varphi}} (\bar{z}^2 - 1)}_{\bar{p}_1} + \underbrace{\left(\frac{B}{D} \right)^2 \frac{6}{h^3} \frac{\partial \bar{q}_{\varphi,2}}{\partial \bar{\varphi}} (\bar{z}^2 - 1)}_{\bar{p}_2} . \quad (6.15)$$

Die durch \bar{p}_1 erzeugte radiale und tangentielle Auftriebskomponente ergeben sich durch Integration über die Lagerfläche zu

$$\begin{aligned} S_{E,\delta} &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \int_{-1}^1 \bar{p}_1 \sin(\varphi) d\bar{z} d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{B}{D} \right)^2 \frac{M_y \bar{E}_z(\bar{t})}{\epsilon (1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(1 - \epsilon^2)^2 - (1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}} \right] , \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} S_{E,r} &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \int_{-1}^1 \bar{p}_1 \cos(\varphi) d\bar{z} d\varphi \\ &= \frac{1}{36} \left(\frac{B}{D} \right)^2 \frac{M_y \bar{E}_z(\bar{t})}{\epsilon (1 - \epsilon^2)^2} \left[72\epsilon^3 - 18 (1 - \epsilon^2)^2 \ln \frac{(1 - \epsilon)}{(1 + \epsilon)} \right. \\ &\quad \left. - 36\epsilon (1 - \epsilon^2)^2 \right] . \end{aligned} \quad (6.17)$$

Entsprechend erhält man die durch \bar{p}_2 , also durch die tangentielle Verdrängungsbewegung mit $\dot{\delta}$ erzeugten Auftriebskomponenten als

$$\begin{aligned} S_{\dot{\delta},\delta} &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \int_{-1}^1 \bar{p}_2 \sin(\varphi) d\bar{z} d\varphi \\ &= \frac{\pi}{24} \left(\frac{B}{D} \right)^2 \frac{1}{\epsilon (1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \left[12\epsilon^2 + 6M_y^2 (1 - \epsilon^2)^2 - 6M_y^2 (1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}} \right] , \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} S_{\dot{\delta},r} &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \int_{-1}^1 \bar{p}_2 \cos(\varphi) d\bar{z} d\varphi = \frac{1}{36} \left(\frac{B}{D} \right)^2 \frac{1}{\epsilon (1 - \epsilon^2)^2} \left[72\epsilon^3 \right. \\ &\quad \left. - 9M_y^2 (1 - \epsilon^2)^2 \ln \frac{(1 - \epsilon)}{(1 + \epsilon)} - 18M_y^2 \epsilon (1 - \epsilon^2)^2 \right] . \end{aligned} \quad (6.19)$$

Die dimensionslosen Auftriebskräfte S_V^\pm durch die radiale Verdrängungsbewegung mit ϵ sind durch Gl. (4.11) und Gl. (4.12) gegeben. Da sich je nach Vorzeichen von $\dot{\epsilon}$ verschiedene Funktionen ergeben, enthalten die Bewegungsgleichungen nichtkonstante Koeffizienten (Die Fallunterscheidung bezüglich des Vorzeichens von $\dot{\epsilon}$ wird durch die Signum-Funktion realisiert.).

Beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen ist zu beachten, daß die Radialkomponenten $S_{E,r}$ und $S_{\dot{\delta},r}$ für beliebige Zapfenbewegung stets in negativer r -Richtung wirken. Die Richtung der tangentialen Komponente $S_{E,\delta}$ oszilliert entsprechend dem Vorzeichen des äußeren E -Feldes. Die tangentiale Auftriebskomponente $S_{\dot{\delta},\delta}$ wirkt der tangentialen Bewegung immer entgegen (Dämpfungskraft). Die Bewegungsgleichungen der Welle (inklusive mitbeschleunigter Last) lauten somit in Polarkoordinaten

$$r : \quad \epsilon'' - \epsilon \cdot \delta'^2 = -\nu \left[|S_{E,r}| + |S_V^\pm| \cdot \epsilon' + |S_{\dot{\delta},r}| \cdot |\delta'| \right] - \bar{g} \cdot \sin \delta \quad (6.20)$$

$$\delta : \quad \epsilon \cdot \delta'' + 2\epsilon' \cdot \delta' = -\nu \left[S_{E,\delta} + |S_{\dot{\delta},\delta}| \cdot \delta' \right] - \bar{g} \cdot \cos \delta \quad (6.21)$$

mit $\nu = \frac{BD\eta}{\psi^2 m \Omega \Delta r}$ und $\bar{g} = \frac{g}{\Omega^2 \Delta r}$, wobei m die Masse der Welle samt aufgebrachtener Last ist.

Die Bewegungsgleichungen (6.20) und (6.21) sind nichtlineare, gekoppelte Differentialgleichungen mit nichtkonstanten und unstetigen Koeffizienten. Zur Lösung werden diese auf Zustandsform gebracht und numerisch mittels Runge-Kutta-Fehlberg-4(5)-Verfahren integriert. Ein Näherungswert (Startwert für die numerische Integration) für die Tragfähigkeit bei vorgegebenen Systemparametern liefert eine Mittelwertbildung. Dazu werden die Bewegungsgleichungen (6.20) und (6.21) über eine Periode integriert. Es ergibt sich dann

$$\nu \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{S_{E,r}^2 + S_{E,\delta}^2} d\bar{t} = \bar{g} . \quad (6.22)$$

Die Abbildungen 6.7 und 6.8 zeigen Schwingungen des Zapfenmittelpunktes. Links sind $\epsilon(\bar{t})$ und $\delta(\bar{t})$ aufgetragen, rechts die Bahnkurve des Zapfenmittelpunktes. Betrachtet werden die Lastfälle $\bar{g} = 0.013$ und $\bar{g} = 0.0032$. Beobachtet werden stabile Schwingungen. Der Grenzykel ähnelt in beiden Lastfällen einer liegenden Acht. Die radiale Amplitude ist in beiden Fällen deutlich kleiner als die Winkelamplitude. Simulationen mit anderen Systemparametern zeigen ähnliche Ergebnisse. Wie beim Gleitschuh wurden auch beim Radiallager nur stabile Grenzykel festgestellt. Instabile oder chaotische Attraktoren wurden nicht beobachtet.

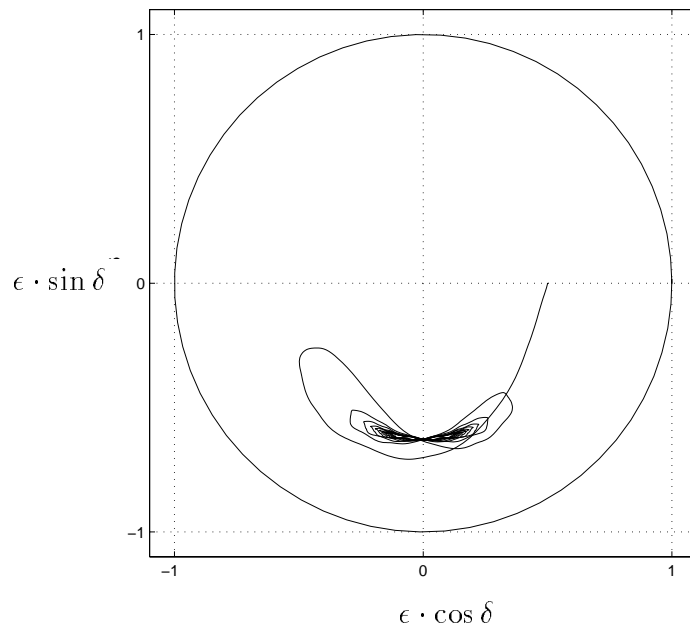
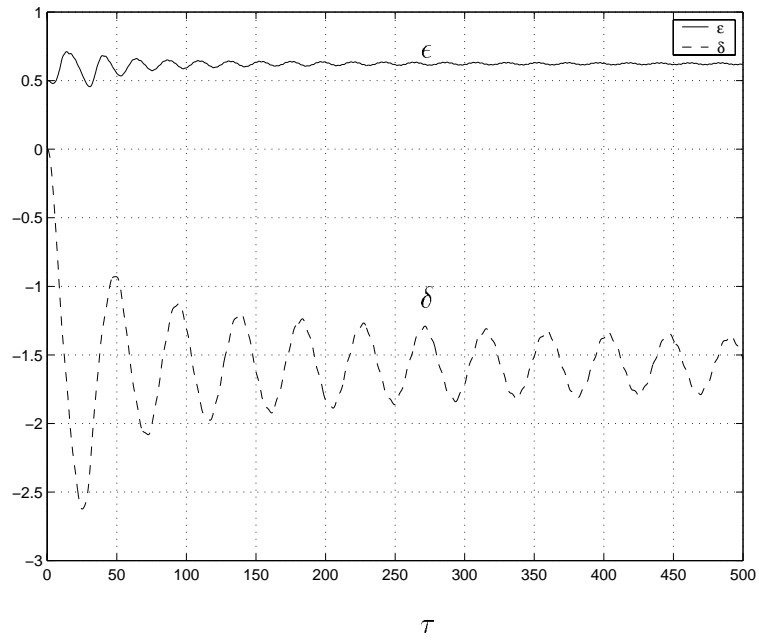


Abbildung 6.7: Radiallager unter radialem B -Feld; rechts Zeitschrieb, links Bahnkurve des Zapfenmittelpunktes; Parameter: $\hat{E}_z = 2$, $M_y = 0.5$, $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\nu = 0.775$, $\bar{g} = 0.013$.

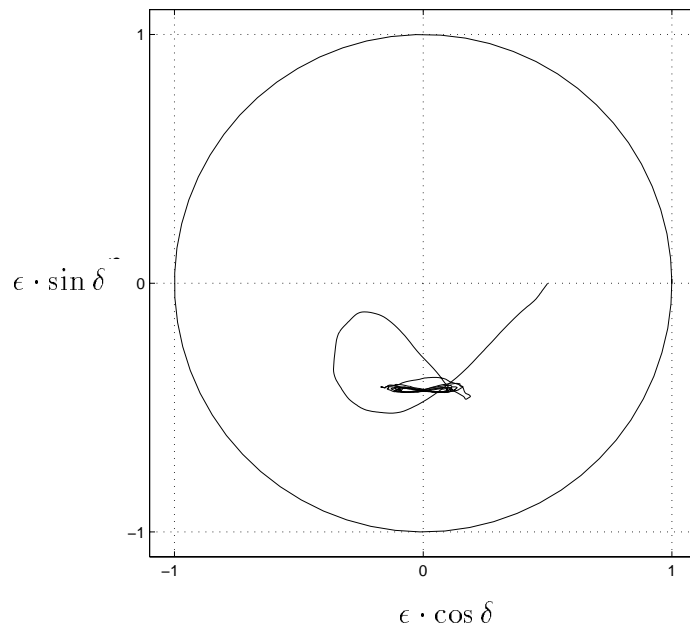
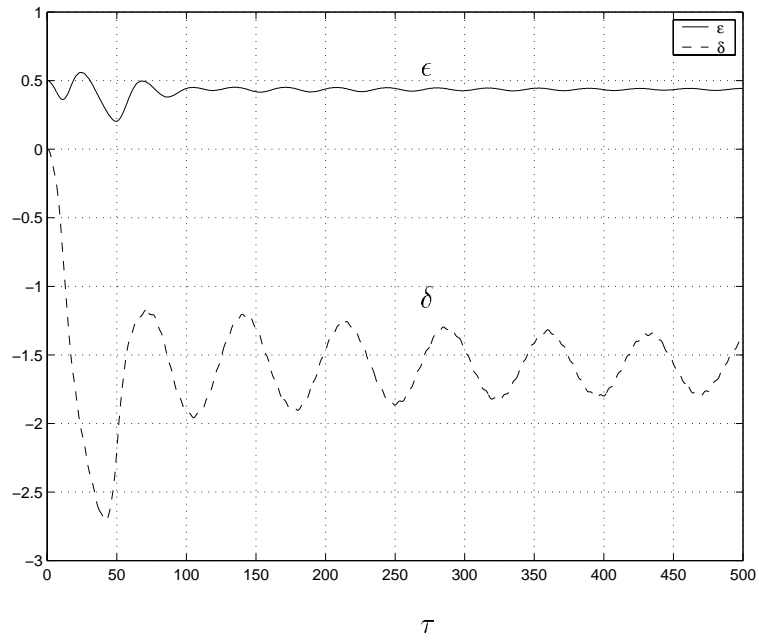


Abbildung 6.8: Radiallager unter radialem B -Feld; rechts Zeitschrieb, links Bahnkurve des Zapfenmittelpunktes; Parameter: $\hat{E}_z = 2$, $M_y = 0.5$, $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\nu = 0.775$, $\bar{g} = 0.0032$.

6.4 Radiallager bei radialem harmonischen E -Feld

Das konstante eingeprägte B -Feld sei nun axial orientiert. Zwischen Lagerschale und Lagerzapfen - beide werden als ideale Leiter betrachtet - wird das harmonische Potential $V_y(t) = \hat{V}_y \cos(\Omega t)$ angelegt. Die Rechnung erfolgt analog zum letzten Abschnitt. Einziger Unterschied sind die dimensionslosen Komponenten $S_{E,\delta}$ und $S_{E,r}$ sowie $S_{\delta,\delta}$ und $S_{\delta,r}$. Diese ergeben sich zu

$$S_{E,\delta} = -\frac{1}{3} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{\pi}{\epsilon(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} M_z \bar{V}_y(\bar{t}) \left[(1-\epsilon^2) + (1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}} \right], \quad (6.23)$$

$$S_{E,r} = \frac{1}{3} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{1}{\epsilon(1-\epsilon^2)^2} M_z \bar{V}_y(\bar{t}) \left[(1-\epsilon^2)^2 \ln \frac{(1-\epsilon)}{(1+\epsilon)} + 2\epsilon(1-\epsilon^2) \right], \quad (6.24)$$

$$S_{\delta,\delta} = \frac{1}{12} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{\pi}{\epsilon(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \left[6\epsilon^2 + 3M_z^2(1-\epsilon^2) - 3M_z^2(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}} \right], \quad (6.25)$$

$$S_{\delta,r} = -\frac{1}{12} \left(\frac{B}{D}\right)^2 \frac{1}{\epsilon(1-\epsilon^2)^2} \left[24\epsilon^3 + 3M_z^2(1-\epsilon^2)^2 \ln \frac{(1-\epsilon)}{(1+\epsilon)} + 6M_z^2\epsilon(1-\epsilon^2)^2 \right]. \quad (6.26)$$

Abbildung 6.9 und Abbildung 6.10 zeigen numerisch berechnete Schwingungen des Zapfenmittelpunktes für die Belastungsfälle $\bar{g} = 0.028$ und $\bar{g} = 0.0056$. Wie im letzten Abschnitt stellen sich stabile Schwingungen ein. Die Winkelamplituden sind verglichen mit den Ergebnissen des vorherigen Abschnittes deutlich kleiner.

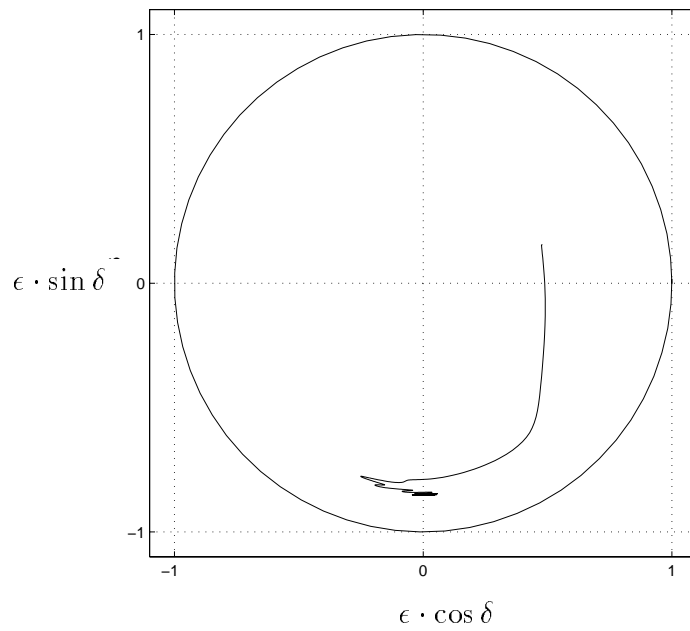
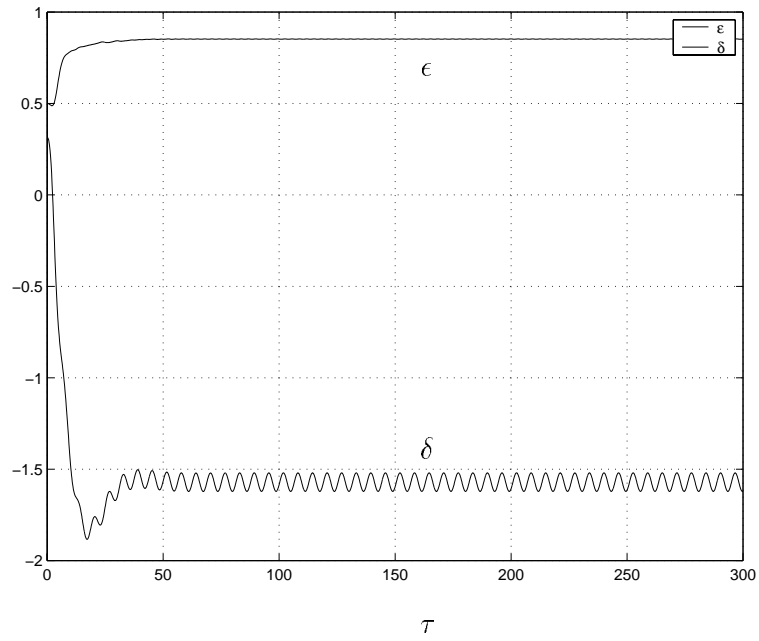


Abbildung 6.9: Radiallager unter axialem B -Feld; rechts Zeitschrieb, links Bahnkurve des Zapfenmittelpunktes; Parameter: $\hat{V}_y = 2$, $M_z = 0.5$, $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\nu = 0.775$, $\bar{g} = 0.028$.

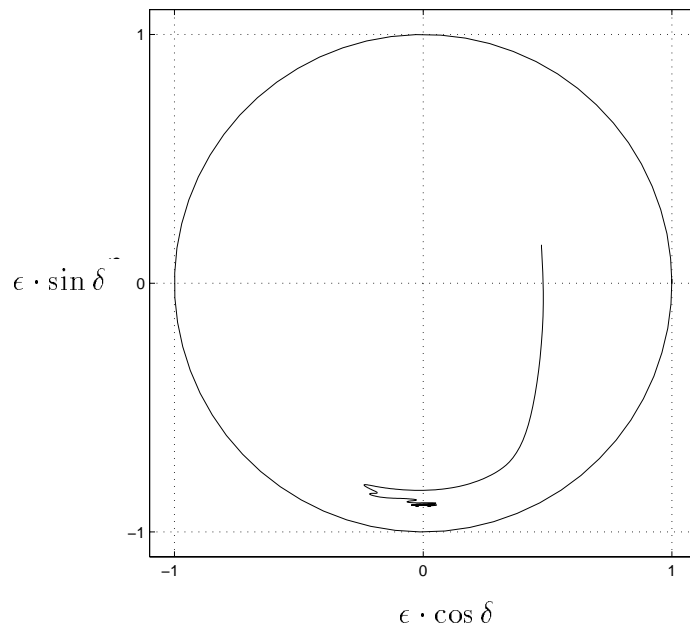
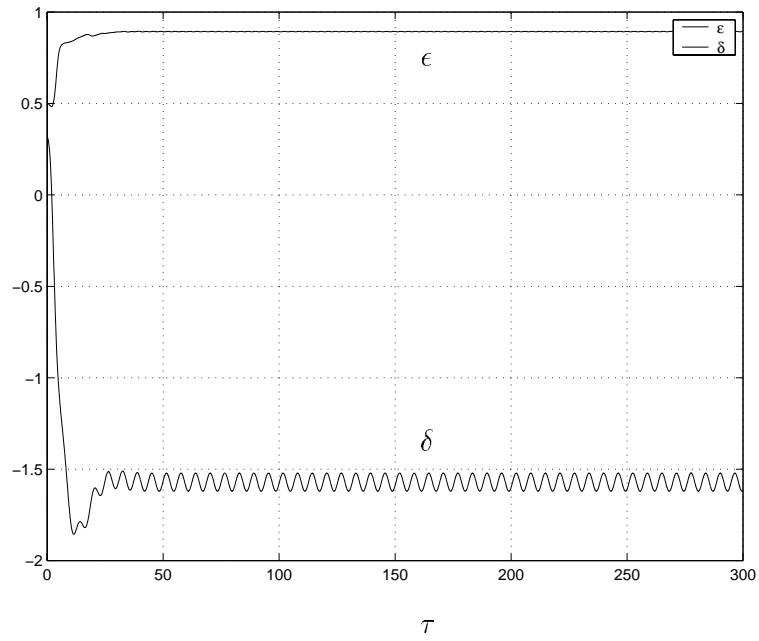


Abbildung 6.10: Radiallager unter axialem B -Feld; rechts Zeitschrieb, links Bahnkurve des Zapfenmittelpunktes; Parameter: $\hat{V}_y = 2$, $M_z = 0.5$, $\frac{B}{D} = \frac{1}{8}$, $\nu = 0.775$, $\bar{g} = 0.0056$.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Auf der Grundlage der magnetogasdynamischen Bilanzgleichungen wurde unter Anwendung der konventionellen Hypothesen der hydrodynamischen Schmiertheorie die Strömung bei schmalen Lagern untersucht. Induktive Effekte wurden nicht berücksichtigt ($R_m \approx 0$). Betrachtet wurden drei Basisfälle: das äußere eingeprägte B -Feld ist a) radial, b) axial und c) toroidal orientiert. In allen drei Fällen entsteht ein nichtlineares Randwertproblem zur Bestimmung des Druckfeldes.

Für die ersten beiden Fälle wurden zwei Lösungsvarianten vorgestellt. Die erste, implizite Lösungsdarstellung liefert zwei transzendente algebraische Gleichungen über die das Druckfeld ausiteriert werden muß. Das Ausiterieren gestaltet sich numerisch aufwendig und nicht unproblematisch. Außerdem ist eine analytische Integration des Druckes zur Bestimmung des Auftriebes nicht möglich. Die zweite Lösungsdarstellung in Form einer Funktionenreihe, basiert auf einem Störungsansatz mit der Kompressibilitätszahl λ als Störparameter und liefert das Druckfeld explizit in Form einer Funktionenreihe. Die Konvergenz dieser Reihe wurde bewiesen. Eine Abschätzung für das Restglied wurde hergeleitet. Das Konvergenzkriterium zeigt, daß bei geeigneter Wahl der übrigen Systemparameter konvergente Lösungen selbst für $\lambda > 1$ existieren. Die Reihenglieder der Funktionenreihe sind rekursiv über Integralgleichungen bestimmt. Diese Integralgleichungen können vollständig algebraisiert werden. Ergebnis ist ein matrizielles Rekursionsschema, mit dem die Reihenglieder einfach programmiert werden können. Die Berechnung des Auftriebes ist in dieser expliziten Darstellung unter Verwendung des Residuensatzes besonders ein-

fach. Auch im Fall c) wurde eine explizite Lösung in Form einer Funktionenreihe hergeleitet. Deren Konvergenz wurde gezeigt und eine Formel für das Restglied hergeleitet. Eine strenge Lösung in impliziter Form wie in den beiden anderen Fällen existiert nicht.

Aus der Reihenlösung des kompressiblen Problems wurde die Lösung des inkompressiblen Strömungsproblems bestimmt und Formeln für die Sommerfeldzahlen der Drehung und der Verdrängung entwickelt.

Eine Parameterstudie in den Fällen a) und b) zeigt, daß der Druck bei kleinen Hartmannzahlen durch Erhöhen des B -Feldes gesteigert wird. Bei größeren Hartmannzahlen tritt der gegenteilige Effekt auf, d.h. der Druck wird reduziert. Bei Fixierung der übrigen Systemparameter existiert folglich eine definierte Hartmannzahl für optimalen Auftrieb. Im Gegensatz dazu führt eine stetige Erhöhung eines geeignet angelegten E -Feldes zu einer stetigen Druckerhöhung. Im Fall c) führt eine Erhöhung des B -Feldes zu einer stetigen Steigerung des Druckes. Das Anlegen eines elektrischen Potentials hat im Fall c) im Gegensatz zu den ersten beiden Fällen im kompressiblen Fall nur einen geringen und im inkompressiblen Fall unter den gemachten Voraussetzungen keinen Einfluß auf die Druckentwicklung. Bei kompressibler Rechnung geht die Symmetrie des Problems im Fall c) durch Anlegen eines elektrischen Potentials verloren.

Im Fall a) und b) zeigt ein Vergleich mit den Untersuchungen zum unendlich breiten Spalt, daß beim schmalen Spalt eine Erhöhung der Hartmannzahl nicht zu einer kontinuierlichen Erhöhung des Druckes führt. Während sich beim unendlich breiten Lager für große Hartmannzahlen ein nahezu linearer Anstieg des Druckes mit der Hartmannzahl ergibt, sinkt der Druck beim schmalen Lager ab einer bestimmten kritischen Hartmannzahl wieder ab und geht für $M \rightarrow \infty$ gegen null. Beide Modelle zeigen aber eine stetige Erhöhung des Druckes bei Erhöhung des elektrischen Potentials. Das Anbringen eines toroidalen Magnetfeldes hat beim unendlich breiten Spalt keinen Einfluß auf die Strömung, da beim Modell des unendlich breiten Lagers die axiale Geschwindigkeitskomponente verschwindet und daher keine Lorentz-Kraft in Umfangsrichtung induziert werden kann.

Anschließend wurde das Stabilitätsverhalten eines in zwei schmalen MHD Lagern symmetrisch gelagerten Laval-Rotors diskutiert. Die Stabilitätsanalyse zeigt, daß im Fall a) die kritische Winkelgeschwindigkeit für kleine Hartmannzahlen bei kleineren

Exzentrizitäten sinkt und bei größeren Exzentrizitäten steigt. Bei großen Hartmannzahlen tritt eine Erhöhung der kritischen Winkelgeschwindigkeit ein. Im Fall b) und im Fall c) sinkt die kritische Winkelgeschwindigkeit bei Anbringen eines externen Magnetfeldes bei kleinen Exzentrizitäten und steigt bei größeren Exzentrizitäten.

Die Arbeit schließt mit numerischen Berechnungen bei eingprägten harmonisch oszillierenden E -Feldern. Die durch die Lorentz-Kraft erzeugte Strömung führt selbst bei verschwindender Winkelgeschwindigkeit der Welle zu einem Druckaufbau. Durch das oszillierende E -Feld wird der Zapfen zu Schwingungen angeregt, welche numerisch berechnet wurden. Bei den untersuchten Fällen wurden ausschließlich stabile Grenzyklen beobachtet. Instabilitäten oder chaotische Attraktoren wurden nicht festgestellt.

Literaturverzeichnis

- [1] Abramowitz, M.; Stegun, I.A.: *Handbook of mathematical functions*. Dover Publ., 9. Ed., 1972.
- [2] Agrawal, V.K.: *Magnetohydrodynamic Effects in Lubrication*. ZAMM 43 (1963) Heft 4/5, Seite 181-189.
- [3] Agrawal, V.K.: *Inertia effects in hydromagnetic slider bearing*. Japanese Journal of Applied Physics, vol.8, no.9, 1969, pp. 1069-1073.
- [4] Agrawal, V.K.: *Hydromagnetic noncyclic squeeze films in journal bearing with radial magnetic field*. Japanese Journal of Applied Physics, vol.8, no.12, 1969, pp. 1372-1376.
- [5] Agrawal, V.K.: *Effect of Lubricant Inertia in Bearings*. Journal of Applied Physics, vol.8, no.9, 1969, pp. 1065-1068.
- [6] Agrawal, V.K.: *Hydromagnetic pivoted slider bearing with a convex pad surface*. Journal of Applied Physics, vol.9, no.8, 1970, pp. 997-1001.
- [7] Agrawal, V.K.: *The effect of conductivity on the load capacity of hydromagnetic composite slider bearing*. Japanese Journal of Applied Physics, vol.9, no.11, 1970, pp. 1415-1419.
- [8] Agrawal, V.K.: *Inertia effects in hydromagnetic inclined slider bearing*. Japanese Journal of Applied Physics, vol.9, no.8, 1970, pp. 820-824.
- [9] Anwar, M.I.; Rodkiewicz, C.M.: *Nonuniform Magnetic Field Effects in MHD Slider Bearing*. J. Lubrication Technol., Trans ASME, Ser. F, 94 (3), 1972, pp. 101-105.

- [10] Ausman, J.S.: *The Fluid Dynamic Theory of Gas Lubricated Bearings*. Trans. ASME 79 (6), 1957, pp. 1218-1224.
- [11] Barral, J.; Bonnefille, R.; Schoenhenz, D.: *Theoretical and experimental study of a bearing in a rotating magnetohydrodynamic field*. Revue de Physique Appliquee, vol.13, no.10, 1978, pp. 513-531.
- [12] Bhat, M.V.: *Hydromagnetic lubrication equation for an anisotropic porous slider with slip velocity*. Wear, vol.61, no.1, 1980, pp. 43-48. Switzerland.
- [13] Cameron, A.: *The Principles of Lubrication*. London: Longmans Green 1966.
- [14] Cap, F.: *Lehrbuch der Plasmaphysik und Magnetohydrodynamik*. Springer-Verlag, 1994.
- [15] Chow, C.; Brunell, R.D.: *A Rotating Field MHD Hydrostatic Thrust bearing*. Appl. Sci. Res. 21, 1969, pp. 206-217.
- [16] Cole, J.A.; Kerr, J.: *Observations on the Performance of Air-Lubricated Bearings*. Paper 95, Hydrodynamic Lubrication, Conference on Lubrication and Wear, London, October 1-3, 1957. Inst. Mech. Engrs., London.
- [17] Constantinescu, V.N.; Dimofte, F.: *On the influence of magnetic and electrical fields on gas lubrication..* Revue Roumaine des Sciences Techniques, Serie de Mecanique Appliquee, vol.12, no.4, 1967, pp. 1201-1215.
- [18] Dudzinsky, S.J.; Young, F.J.; Hughes, W. F.: *On the load capacity of the MHD journal bearing*. ASME Paper No. 67-Lub-H, 1967.
- [19] Elco, R.A.; Hughes, W.F.: *Magnetohydrodynamic Pressurization of Liquid Metal Bearings*. Wear, 5, 1962, pp. 198-212.
- [20] Feynman, R.P.; Leighton, R.B.; Sands, M.: *Vorlesungen über Physik, Band II*. Oldenbourg Verlag, 1987.
- [21] Fucks, W.; Uhlenbusch, J.: *Magnetohydrodynamic Theory of Lubrication*. Phys. Fluids, 5, 1962, pp. 498-499.
- [22] Ganju, K.L.; Agrawal, V.K.: *A rotating field magnetogasdynamic externally pressurized bearing*. Wear, 26, 1973, pp. 143-146.

- [23] Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M.: *Table of Integrals, Series, and Products*. 4.Ed., Academic Press 1980.
- [24] Gupta, M; Babu, B.: *MHD squeeze film lubrication of a viscous fluid*. Acta Scientia India, Vol. XIII, No. 3, 137, 1987.
- [25] Harrison, W.J.: *The Hydrodynamical Theory of Lubrication with Special Reference to Air as a Lubricant*. Trans. Cambridge Phil. Soc. 22, 39, 1913.
- [26] Hughes, W.F.; Elco, R.A.: *Magnetohydrodynamic Journal Bearing*. J. Amer. Rocket Soc., 32, 1962, p. 776.
- [27] Hughes, W.F.; Elco, R.A.: *Magnetohydrodynamic lubrication flow between parallel rotating disks*. J. Fluid Mech., 13, 1962, pp. 21-32.
- [28] Hughes, W.F.: *The Magnetohydrodynamic Finite Step Slider Bearing*. J. Basic Engineering, Trans. ASME, 85, 1963, pp. 129-136.
- [29] Hughes, W.F.: *The Magnetohydrodynamic Inclined Slider Bearing with a Transverse Magnetic Field*. Wear, 6, 1963, pp. 315-324.
- [30] Hughes, W.F.; Young, F.J.: *The Electromagnetodynamics of Fluids*. Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1989.
- [31] Kadchenko, S.I.: *Investigating nonsteady liquid-metal flow in the magnetohydrodynamic slip bearing of a unipolar energy cell*. Magnitnaya Gidrodinamika, No.1, 1989, pp. 110-116.
- [32] Kadchenko, S.I.: *PhD-thesis*. Russia, 1983.
- [33] Kamiyama, S.: *Magnetohydrodynamic journal bearing*. ASME Paper No. 68-Lub-6, 1969.
- [34] Katto, Y.; Soda, N.: *Theory of Lubrication by Compressible Fluid with Special Reference to Air Bearings*. Proc. Second Japanese Nat. Congr. on Appl. Mech., Natl. Comm. for Theoret. and Appl. Mech., 1952, pp. 267-270.
- [35] Kulkarni, P.A.; Rao, B.V.A.: *Stability Behaviour of Finite MHD Journal Bearings*. Mechanism and Machine theory, 1977, Vol. 12, pp. 293-302.

- [36] Kuzma, D.C.: *The Magnetohydrodynamic Journal Bearing*. J. Basic Engineering, Trans. ASME, 85, p. 424, 1963.
- [37] Kuzma, D.C.: *The Finite Magnetohydrodynamic Journal Bearing*. J. Basic Engineering, Trans. ASME, p. 445, 1964.
- [38] Lang, O.R.; Steinhilper, W.: *Gleitlager*. Springer -Verlag 1978.
- [39] Mahanti, A.; Ramanaiah, G.: *Magnetogasdynamic inclined thrust bearings*. Wear, 29, 1974, pp. 209-217.
- [40] Mahanti, A.; Ramanaiah, G.: *The Magnetohydrodynamic thrust bearing with variable film thickness*. Wear, 29, 1974, pp. 301-308.
- [41] Mahanti, A.: *The magnetostatic partial journal bearing with inertia effect*. Japanese Journal of Applied Physics, vol.14, no.12, 1975, pp. 2063-2068.
- [42] Malik, M.; Singh, D.V.: *Analysis of finite Magnetohydrodynamic journal bearings*. Wear, 64, 1980, pp. 273-280.
- [43] Mehl, V.: *Stabilitätsverhalten eines elastisch gelagerten Rotors bei Berücksichtigung der Fluid-Festkörper-Wechselwirkung*. VDI Fortschrittsberichte, Reihe 11, Schwingungstechnik, Nr. 239.
- [44] Müller, U.; Bühler, L.: *Magnetohydrodynamics in Channels and Containers*. Springer-Verlag, 2001.
- [45] Ocvirk, F.W.: *Short Bearing Approximation for Full Journal Bearings*. NACA Technical Note 2808, 1952.
- [46] Ocvirk, F.W.; Dubois, G.B.: *Analytical Derivation and Experimental Evaluation of Short Bearing Approximation for Full Journal Bearings*. NACA Techn. Report, 1953, Nr. 1157.
- [47] Osterle, J.F.; Hughes, W.F.: *The effect of lubricant Inertia in hydrostatic thrust-bearing lubrication*. Wear, 1, 1958, p. 465.
- [48] Osterle, J.F.; Young, F.J.: *On the load capacity of the hydromagnetically lubricated slider bearing*. Wear, 5, 1962, pp. 227-234.

- [49] Petrosyan, L.G.: *The theory of hydromagnetic compression of fluid films with azimuthal magnetic field*. Magnitnaya Gidrodinamika, No. 1, 1989, pp. 128-131.
- [50] Prudnikov, A.P.; Brychkov, Yu.A.; Marichev, O.I.: *Integrals and Series*. Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
- [51] Raimondi, A.A.: *A Numerical Solution for the Gas Lubricated Full Journal Bearing of Finite Length*. ASLE Transactions 4, 1961, pp. 131-155.
- [52] Ramanaiah, G.: *The hydromagnetic squeeze film bearing with an azimuthal magnetic field*. Wear, 39, 1976, pp. 219-226.
- [53] Ramanaiah, G.: *Magnetogasdynamic thrust bearing with an axial pinch*. J. Fluid Mech., 1969, 38, part 4, pp. 673-677.
- [54] Rodkiewicz, C.M.; Anwar, M.I.: *Effects of Step-Type Magnetic Field in Slider Bearing*. Wear, 21, 1972, pp. 223-229.
- [55] Salem, E.A.; Khalil, M.F.; Hakim, S.A.: *An investigation of velocity distribution in rotating magnetohydrodynamic bearings*. Wear, Vol. 62, 1980, 2, pp. 315-327.
- [56] Salem, E.A.; Khalil, M.F.; Hakim, S.A.: *Externally pressurized magnetohydrodynamic bearings under a non-uniform magnetic field*. Lubrication and Wear, 86, 1983, pp. 257-265.
- [57] Sarkar, P.; Ramanaiha, G.: *A Magnetogasdynamic thrust bearing with an azimuthal magnetic field*. Wear, 48, 1978, pp. 1-7.
- [58] Sasada, T.; Kurosaki, Y.; Honda, K.; Kamijo, K.: *MHD Journal Bearing in a Magnetic Field Perpendicular to Its Axis*. Bulletin of JSME, Vol. 17, No. 114, 1974, pp. 1645-1656.
- [59] Schweizer, B.; Wauer, J.: *Analysis of infinitely short MHD Journal bearings with toroidal magnetic field*. Proceedings GAMM-Tagung Zürich, 2001.
- [60] Shampine, L.F.; Reichelt, M.W.: *The MATLAB ode suite*. SIAM J. on Scientific Computing, Vol. 18, pp. 1-22, 1997.
- [61] Shukla, J.B.: *Principles of hydromagnetic lubrication*. Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 18, No. 7, 1963, pp. 1086-1088.

- [62] Snyder, W.T.: *The Magnetohydrodynamic Slider Bearing*. J. Basic Engineering, Trans. ASME, 84, 1962, p. 197.
- [63] Someya, T.: *Stabilität einer in zylindrischen Gleitlagern laufenden, unwucht-freien Welle*. Ing.-Archiv 33, 1963, H.2, S. 85.
- [64] Soundalgekar, V.: *Effects of an external circuit on a MHD slider bearing*. Wear, 21, 1972, pp. 17-25.
- [65] Soundalgekar, V.: *A note on the effects of external circuit on a MHD composite slider bearing*. Wear, 25, 1973, pp. 129-132.
- [66] Sternlicht, B.; Elwell, R.C.: *Theoretical and Experimental Analysis of Hydrodynamic Gas-Lubricated Journal Bearings*. Trans. ASME 80 (4), 1958, pp. 865-878.
- [67] Svarts: *Investigation of basic characteristics of MHD bearings*. Izv. AN SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza, Vol. 1, No. 4, 1966, pp. 189-191.
- [68] Tarapov, I.E.: *Conductive fluid lubrication of a cylindrical bearing*. Magnitnaya Hidrodinamika, Vol. 5, No. 2, 1969, pp. 127-136.
- [69] Wada, S.; Hayashi, H.; Migita, M.: *Application of the finite element method to hydrodynamic lubrication problems (Parts 1 and 2)*. Bulletin of JSME 14, 1971, pp. 1222-1244.
- [70] Wauer, J.; Schweizer, B.: *Analysis of short magnetohydrodynamic journal bearings*. Proceedings Iscorma-1, International Symposium on Stability Control of Rotating Machinery 2001, Lake-Tahoe.
- [71] Whitley, S.; Betts, C.: *Study of Gas-Lubricated, Hydrodynamic, Full Journal Bearings*. Brit. J. Appl. Phys. 10, 1959, pp. 455-463.
- [72] Wierzcholski, K.: *The estimation of solutions of the equations for the magneto-hydrodynamic flow of lubricant through the gap of a journal bearing*. Mecanique Appliquee, vol.24, no.4, 1979, pp. 665-682.
- [73] Wierzcholski, K.: *The flow of lubricant in a deformed curvilinear gap in a slide bearing in a magnetic field*. Revue Roumaine des Sciences Techniques, Serie de Mecanique Appliquee, vol.29, no.2, 1984, pp. 193-209.

- [74] Zurmühl, R.: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. 3. Auflage, Springer-Verlag, 1961.