

Thermische Konvektion in einem Zweischichtsystem bei horizontalem Temperaturgradienten

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften

der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Karlsruhe (TH)
genehmigte

Dissertation

von

Torsten Schenkel

aus Hardheim/Odw.

Datum der mündlichen Prüfung:
19. April 2002

Hauptreferent: Professor Dr.-Ing. H. Oertel
Koreferent: Professor Dr.-Ing. U. Müller

Vorwort

There is a theory which states that if ever anybody discovers exactly what the Universe is for and why it is here, it will instantly disappear and be replaced by something even more bizarre and inexplicable.

There is another theory which states that this has already happened.

Douglas Adams

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Strömungslehre an der Universität Karlsruhe (TH).

An dieser Stelle gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Oertel jr. mein Dank für das mir von ihm entgegengebrachte Vertrauen, die Möglichkeit in einer lehrreichen Umgebung zu wirken sowie die Übernahme des Hauptreferates. Bei Herrn Prof. U. Müller bedanke ich mich für die Übernahme des Koreferates.

Für die Unterstützung der Angehörigen des Instituts, der Studien- und Diplomarbeiten und der Kooperationspartner aus der Industrie und besonders Dr. J. Becker von der ESA möchte ich mich an dieser Stelle ebenfalls bedanken.

Besonderer Dank gebührt Dr. M. Stoykov, Akademie der Wissenschaften, Moskau, für sein mathematisches Genie bei der Implementierung der DNS Solver und die fruchtbaren Diskussionen, in denen ein Ingenieur und ein Mathematiker stundenlang aneinander vorbeireden konnten.

Mein besonderer Dank gilt meinen Angehörigen, die in letzter Zeit weniger Aufmerksamkeit von mir bekamen, als sie verdient hätten.

Danke Tina!

Erklärung

Ich versichere, die Dissertation bis auf die dort angegebenen Hilfen selbständig angefertigt, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer und eigenen Veröffentlichungen unverändert oder mit Änderungen entnommen wurde.

Torsten Schenkel

Karlsruhe, den 19. April 2002

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Zielsetzung	3
1.3	Struktur	6
2	Physikalische Grundlagen	9
2.1	Strömungsmechanische Grundgleichungen	9
2.1.1	Die Kontinuitätsgleichung	9
2.1.2	Die Navier-Stokes Gleichungen	9
2.1.3	Die Energiegleichung	10
2.1.4	Vereinfachung der Grundgleichungen	11
2.1.5	Boussinesq Approximation	13
2.2	Stabilität	13
2.3	Thermische Konvektion mit vertikalen Temperaturgradienten	14
2.3.1	Rayleigh-Benard-Konvektion, oder auftriebsgetriebene Konvektion	15
2.3.2	Marangoni-Konvektion, oder oberflächenspannungsgradientengetriebene Konvektion	16
2.4	Grenzflächenkopplung in Mehrschichtsystemen	18
3	Simulation der gemischten Konvektion	21
3.1	Mathematische Modellierung der dreidimensionalen Strömung	21
3.1.1	Gleichungen der thermischen Konvektion (Boussinesq Approximation)	21
3.1.2	Randbedingungen	22

3.2	Grundströmung im unendlich ausgedehnten Kanal	23
3.2.1	Mathematische Modellierung	23
3.2.2	Linearisierte Stabilitätsanalyse	26
3.2.3	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile der eindimensionalen analytischen Lösung	28
3.3	Zwei- und dreidimensionale Strömung	34
3.3.1	Numerischer Algorithmus	35
3.3.2	Zweidimensionale Simulation der Grundströmung	36
3.3.3	Dreidimensionale Simulation der Grundströmung	45
3.4	Diskussion der Ergebnisse der Simulation der Grundströmung	54
3.5	Instationäres Verhalten	59
3.5.1	Stabilität der zweidimensionalen Grundströmung	59
3.5.2	Abklingverhalten einer lokalen Störung in der unterkritischen zwei- und dreidimensionalen Grundströmung	62
4	Verifikation	65
4.1	Numerische Verifikation	66
4.1.1	Anzahl der Stützpunkte	66
4.1.2	Vergleich 2-dimensionale numerische Lösung und Analytik	66
4.1.3	Vergleich 2-dimensionale und 3-dimensionale Numerik	67
4.2	Konzeption des Verifikationsexperimentes	70
4.2.1	Erzeugung der Grundströmung	70
4.2.2	Einbringen der Störung	70
4.2.3	Auswahl der Experimentfluide	71
4.2.4	Technische Details für Mikrogravitationsexperiment	71
4.3	Messverfahren Tomographische Interferometrie	72
4.3.1	Optische Dichtemessung	72
4.3.2	Differentialinterferometrie	74
4.3.3	Tomographie	76
4.3.4	Funktionsnachweis	80
4.4	Experimentelle Untersuchung der Grundströmung	98
4.4.1	Messaufbau	98

4.4.2	Physikalische Parameter	98
4.4.3	Ergebnisse	99
4.4.4	Qualitativer Vergleich	99
4.4.5	Projizierte Temperaturverteilung	100
4.4.6	Dreidimensionale Rekonstruktion der Temperaturverteilung .	102
4.5	Abklingverhalten einer lokalen Störung	106
4.5.1	Messaufbau	106
4.5.2	Physikalische Parameter	106
4.5.3	Ergebnisse	108
4.5.4	Auswertung	109
5	Zusammenfassung	111
5.1	Ausblick	113
	Literaturverzeichnis	115
	Abbildungsverzeichnis	121
	Tabellenverzeichnis	127

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Thermisch getriebene Konvektionsvorgänge bestimmen zahlreiche physikalische Vorgänge in Natur und Technik. Hier interessieren z. B. die Strömungen im Erdinnern, die für die Plattenbewegung der Erde und die Magnetfeldentstehung verantwortlich sind, sowie die globalen und lokalen Strömungen in Ozeanen und der Atmosphäre im Bereich der Naturphänomene. Konvektionsvorgänge im Bereich der Technik bestimmen, um nur einige zu nennen, z.B. das Kristallwachstum, die Filmbildung, die Erstarrung von Schmelzen in der Giessereitechnik sowie Fertigungsprozesse unter Mikrogravitation und die Strömung und Struktur von Flüssigkeitsoberflächen in Oberflächentanks, wie sie in Satelliten und anderen Raumflugkörpern eingesetzt werden.

Die Problematik der thermischen Konvektion in der modernen Wissenschaft wurde im ausgehenden 19. Jahrhundert von Benard aufgegriffen, der in einer dünnen Schicht Walrat, die von unten beheizt wurde, hexagonale Zellen entdeckte [2]. Lord Rayleigh nahm sich 16 Jahre später als erster dieses Problems an und erklärte die Konvektionsmuster, die von Benard im Experiment entdeckt wurden, alleine durch Auftrieb [42]. Erst weitere 40 Jahre später identifizierten Block und Pearson unabhängig voneinander den Antriebsmechanismus des Phänomens als Gradienten der Oberflächenspannung [3, 37]. Auf einen Vorschlag von Scriven und Sternling [47] hin wurde die oberflächenspannungsgetriebene Konvektion als *Marangoni*-Effekt bezeichnet, da Blocks Erklärung einer qualitativen Erklärung entsprach, die Marangoni sehr viel früher gab. Eine rein vom Marangoni-Effekt hervorgerufene Konvektionsströmung wird daher *Benard-Marangoni*-Konvektion, eine rein auftriebsgetriebene Konvektion *Rayleigh-Benard*-Konvektion genannt. Das von Benard beschriebene Phänomen wird seither als *Rayleigh-Marangoni-Benard*-Konvektion bezeichnet.

Lange Zeit blieb dieses Phänomen der einzige interessierende Konvektionsvorgang,

bei dem die Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung eine maßgebliche Rolle spielt, wenn auch das wissenschaftliche Interesse rein akademischer Natur war. Erst in jüngerer Zeit wurde auch vom technischen Standpunkt die Betrachtung der oberflächenspannungsgetriebenen Konvektion interessant. Hierzu tragen zwei Aspekte bei:

- Zum einen wurde das Verhältnis Auftrieb zu Oberflächenspannungskräften verschoben, da die relevanten Abmessungen kleiner wurden. Hierfür zeichnet die Mikrotechnik sowie die genauere wissenschaftliche Betrachtung der Vorgänge bei der Oberflächenbeschichtung verantwortlich.
- Zum anderen wurden nach eingehender Untersuchung der auftriebsgetriebenen Konvektion hohe Erwartungen in die Fertigung von Silikonkristallen unter Schwerelosigkeit gesetzt, die nicht erfüllt werden konnten, da trotzdem Konvektionsströmungen auftraten, die durch den Oberflächenspannungsgradienten hervorgerufen wurden.

Mehrschichtsysteme sind von Bedeutung in der Technik, um Wärmeübergänge zu erzwingen oder zu unterbinden, z.B. in der *gekapselten* Kristallisation, bei der durch eine hochviskose Deckschicht die Konvektion in der Hauptschicht unterdrückt wird. Ausserdem können Mehrschichtsysteme zur Modellierung von großskaligen geophysikalischen Prozessen benutzt werden [6]

Zweischichtsysteme wurden mit erzwungenen Geschwindigkeits- und Druckgradienten (erzwungene Konvektion) von Yih [53] und Hooper und Boyd [19] untersucht.

Freie thermische Konvektion im Zweischichtsystem wurde für einen vertikalen Temperaturgradienten in der Vergangenheit extensiv erforscht. Hier kann nur eine kurze Zusammenfassung des Literaturstandes gegeben werden. Zeren und Reynolds [54] untersuchten ein von unten beheiztes Zweischichtsystem mit der linearisierten Stabilitätstheorie, Joseph [23] mit der Energiemethode. Detailliertere Beschreibungen finden sich bei Renardy und Joseph [44], Renardy [43] und Nepomnyashchii und Simanovskii [28]. Extensive Studien dieser Konfigurationen mit besonderem Augenmerk auf die oberflächenspannungsgetriebene Konvektion wurden von Johnson und Narayanan [20, 21], und im Hinblick auf die Grenzflächenstabilität von Gershuni und Zhukhovitskii [13] und Degen et.al. [7] durchgeführt.

Die thermische Konvektion bei horizontalem Temperaturgradienten war in der Vergangenheit weitaus weniger Gegenstand der Forschung, so dass keine grundlegende Arbeit als Basis zur Auslegung solcher Konfigurationen zur Verfügung steht. Diese Konfiguration wurde experimentell von Villers und Platten [52], in ersten numerischen Ansätzen von Golia und Viviani [15] und analytisch von Napolitano et.al. [27] studiert. Ähnliche Konfiguration wurden von Koster et.al. [38, 39] und Georis,

LeGros et.al. [12] numerisch und experimentell untersucht. Alle diese Arbeiten beschränken sich jedoch auf die zweidimensionale Strömung und behandeln lediglich Teilaspekte, bzw. sehr spezielle Probleme.

Während in der Vergangenheit hauptsächlich die thermische Konvektion mit einem Temperaturgradienten parallel zum Kraftvektor der Erdbeschleunigung erforscht wurde, da diese ein Regime der ruhenden Strömung kennt, soll in dieser Arbeit die von Oberflächenspannung und Auftrieb getriebene Konvektion in einem Zweischichtensystem bei horizontalem, d.h. zum Schwerkraftvektor orthogonalen, Temperaturgradienten untersucht werden. Diese Konfiguration ist z.B. bei Giesserei- und Schmelzvorgängen sowie bei der sogenannten *gekapselten* Kristallisation relevant.

Eine weitere Anwendung findet sich in der Konzeption von Mikrogravitationsexperimenten zur Untersuchung von Grenzflächenphänomenen, in denen durch die oberflächenspannungsgetriebene Konvektion im sogenannten *closed loop*-System, i.e. im geschlossenen Kreislauf ohne Zu- und Abströmung unterschiedliche Geschwindigkeitsprofile erzeugt werden können. Ein solches System ist der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit.

1.2 Zielsetzung

Von Oertel et. al. wurde die Stabilität von Strömungen intensiv untersucht [29, 30, 5, 31, 34]. Hauptpunkte sind hier die Einteilung der reibungsbehafteten Strömung in konvektiv und absolut instabile Bereiche und die Ausbreitung räumlich und zeitlich lokaler Störungen. Die Erkenntnisse aus diesen Arbeiten konnten erfolgreich zur Nachlaufbeeinflussung [9, 32, 17] und zur Berechnung der Transition in dreidimensionalen Grenzschichten [11, 48] eingesetzt werden.

Die Ansätze der oben genannten Arbeiten sollen in folgenden Projekten auf die Instabilität von Scherschichten in Flüssigkeitsgrenzflächen angewandt werden. Die Stabilität solcher Grenzflächen ist insbesondere unter Mikrogravitationsbedingungen interessant, da der stabilisierende Einfluss der Schwerkraft auf der Erde eine dämpfende Wirkung hat, was zu einer konvektiven Charakteristik von Instabilitäten führt. Ohne den Einfluss der Gravitation kann die Grenzfläche jedoch absolut instabil werden, was zu ihrer Zerstörung führt und in technischen Anwendungen, wie Satelliten-Oberflächenspannungstanks, um jeden Preis zu vermeiden ist.

In diesem Zusammenhang sind experimentelle Untersuchungen zur Ausbreitung lokaler Störungen in Fluidgrenzschichten unter Scherung sowohl mit als auch ohne Gravitationseinfluss, sowie die Berechnung der Störungsausbreitung mittels direkter numerischer Simulation, geplant. In Abbildung 1.1 ist das Konzept des geplanten Experiments zur Erzeugung einer gescherten Fluidgrenzschicht unter Mikrogravitation dargestellt. In einem geschlossenen System werden zwei geschichtete

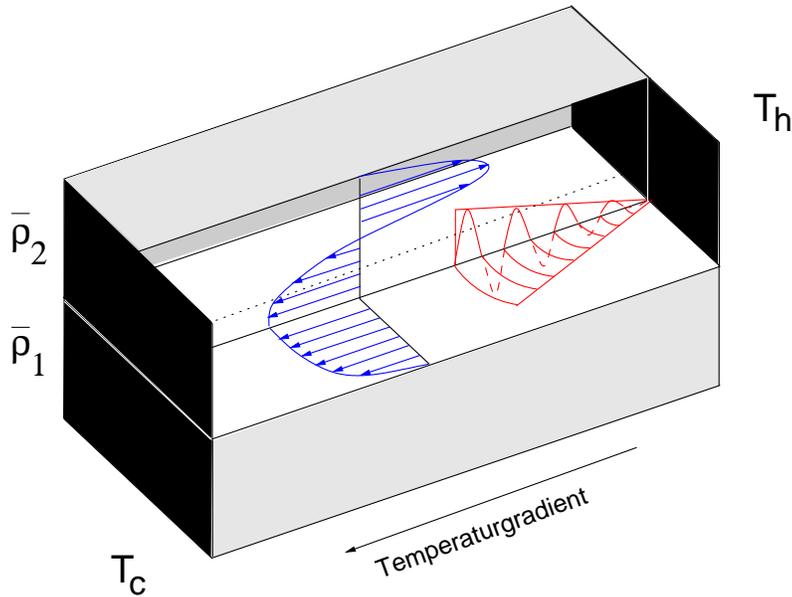


Abbildung 1.1: Experimentkonzept

Flüssigkeiten, die zwischen sich eine Grenzfläche bilden, mit einem Temperaturgradienten entlang der Trennfläche beaufschlagt. Durch die temperaturabhängige Oberflächenspannung wird sich eine Konvektionsströmung einstellen. In die so erzeugte Scherschicht wird eine Störung eingebracht, die auf ihr Ausbreitungsverhalten hin untersucht werden soll.

Da die in der Literatur verfügbare Wissensbasis nicht ausreicht, um ein solches Experiment auszulegen, soll in dieser Arbeit die Grundlage zur Berechnung der gemischten thermischen Konvektion in Zweischichtsystemen nichtmischbarer Fluide unter horizontalen Temperaturgradienten geschaffen werden.

Abbildung 1.2 zeigt die in dieser Arbeit behandelte Fragestellung. In einem Zweischichtsystem mit horizontalem Temperaturgradienten existieren zwei eine Konvektion treibende Kräfte: Die Auftriebskraft aufgrund der thermischen Volumenausdehnung und die Oberflächenkraft, die aus der Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung resultiert. Diese beiden Kräfte sind in der Unteren der beiden Schichten gleichgerichtet, in der Oberen gegen einander. Ein Kernpunkt der Untersuchung soll der Übergang zwischen den beiden reinen Konvektionstypen (auftriebs- bzw. oberflächenspannungsgetrieben) in Abhängigkeit des Verhältnisses der konvektionstreibenden Kräfte sein. Ein weiterer die Stabilität der entstehenden Konvektionsströmung.

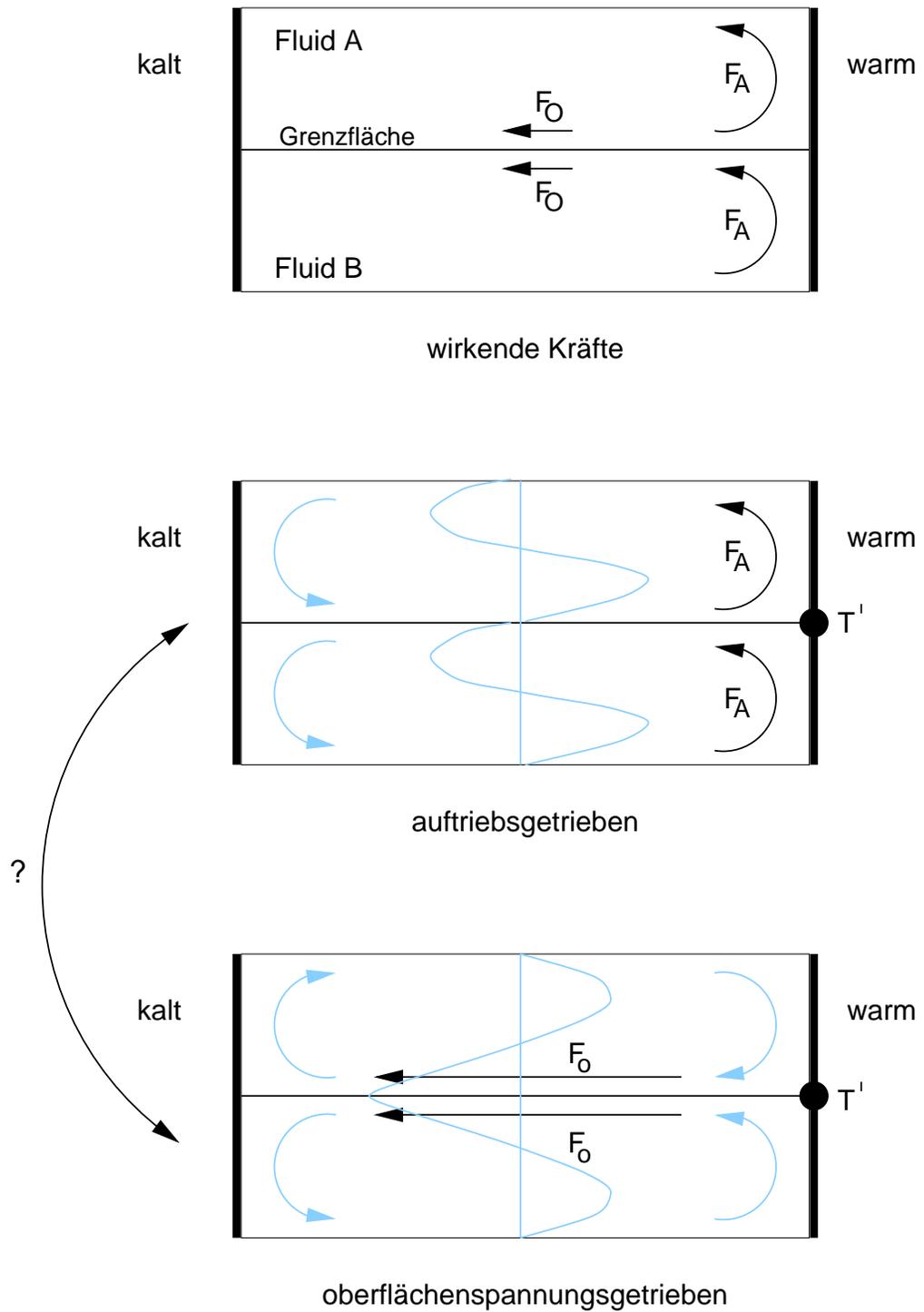


Abbildung 1.2: Fragestellung

1.3 Struktur

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung der gemischten thermischen Konvektion in einem Zweischichtsystem bei horizontalem Temperaturgradienten. Es wird die Abhängigkeit der Grundströmungsform vom Verhältnis des Auftriebs zum Oberflächenspannungsgradienten sowie die Stabilität der sich einstellenden stationären Konvektionsströmung untersucht.

Abbildung 1.3 zeigt die Gliederung der Arbeit als Schaubild.

Zunächst sollen die physikalischen Grundlagen dargelegt werden. Dies sind im Besonderen die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik mit der speziellen Dichtevervariabilität der Boussineq-Approximation, der Stabilitätsbegriff, die Grundlagen der thermischen Konvektion sowie die Kopplungsmechanismen zwischen den Schichten eines Mehrschichtsystems.

Den ersten Hauptteil der Arbeit nimmt die Berechnung und Simulation der gemischten Konvektion ein. Hier wird ein allgemeines mathematisches Modell der betrachteten Strömung entwickelt. Von diesem wird für den eindimensionalen Fall ein spezielles Modell abgeleitet, anhand dessen die linearisierte Stabilitätsanalyse durchgeführt wird. Dieses Modell ist analytisch lösbar und liefert erste Ergebnisse, die der stationären Konvektionsströmung im unendlich ausgedehnten Kanal entsprechen. Ebenfalls wird ein Modell zur direkten numerischen Simulation der Konvektion abgeleitet. Mit diesem wird die zweidimensionale und dreidimensionale Grundströmung berechnet. Die Ergebnisse werden mit den analytischen, eindimensionalen Ergebnissen verglichen. Für die zweidimensionale Strömung wird die Stabilität untersucht, und die Ergebnisse mit denen der linearen Stabilitätstheorie verglichen. Eine Berechnung von überkritischen Konfiguration im dreidimensionalen Fall war aufgrund des Arbeitsspeicherbedarfs nicht möglich. Daher wird für eine unterkritische, dreidimensionale Strömung die Abklingzeit einer lokalen Störung berechnet und mit der einer lokalen Störung in der zweidimensionalen Grundströmung verglichen.

Der zweite Teil ist der Verifikation der durchgeführten Berechnungen gewidmet.

Zunächst wird die Konsistenz der numerischen Lösungen überprüft. Hierzu wird das berechnete Strömungsfeld einer Rechnung mit grosser geometrischer Ausdehnung in zwei Richtungen mit der analytischen Lösung für den unendlichen Kanal verglichen. Ausserdem wird die Konsistenz zwischen zwei- und dreidimensionalen Ergebnissen geprüft.

Für die experimentelle Verifikation wird ein Experiment konzipiert. Mit der „Optischen Tomographie“ oder „Tomographischen Interferometrie“ wird ein Messverfahren zur berührungsfreien, quantitativen und dreidimensionalen Dichte- oder Temperaturmessung in durchsichtigen Medien mit dichte- oder temperaturabhängigem

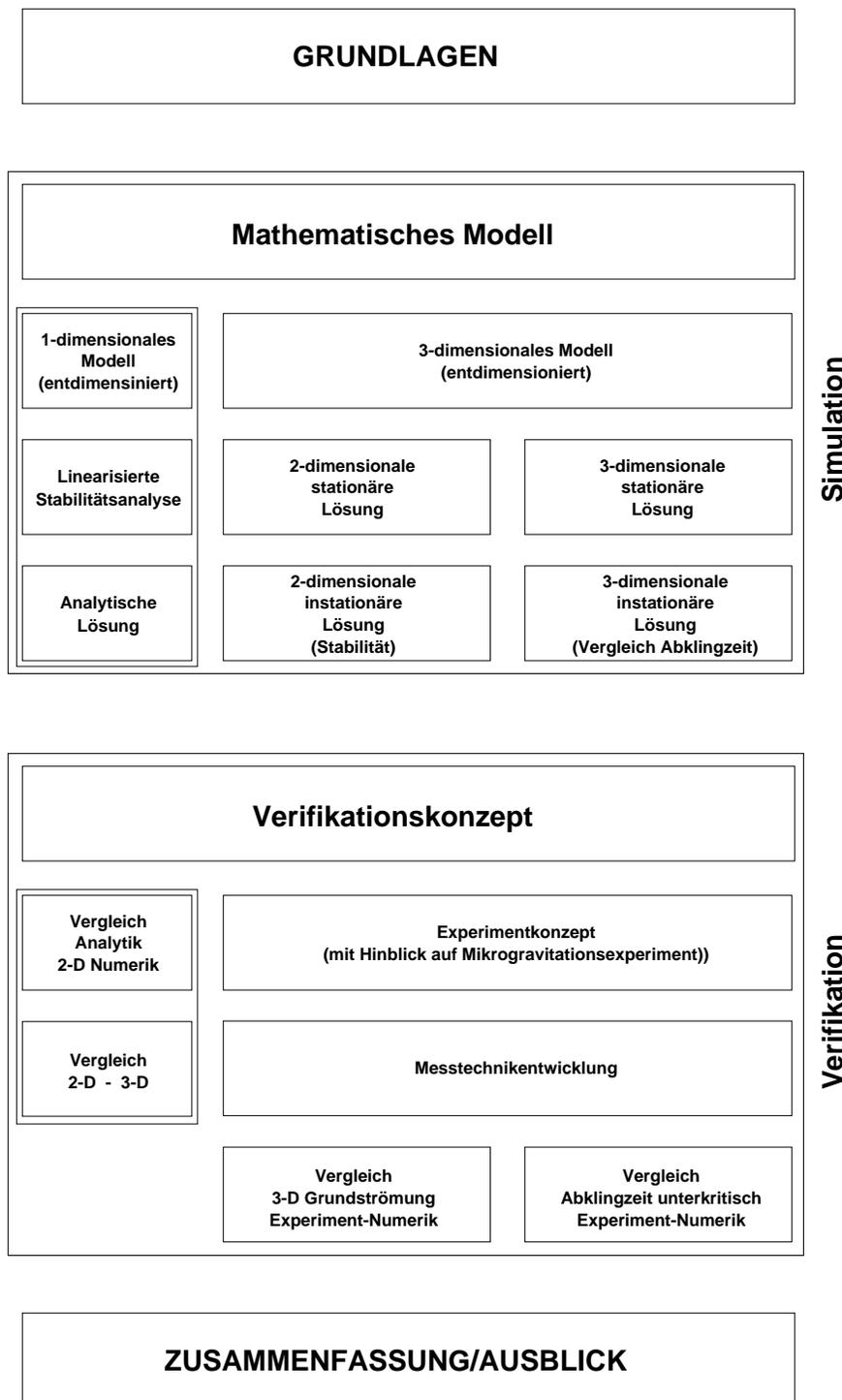


Abbildung 1.3: Gliederung

Brechungsindex vorgestellt. Das dreidimensionale Temperaturfeld des Experiments wird mit dem der dreidimensionalen Simulation verglichen.

Da eine überkritische Situation weder im Experiment noch 3-D-numerisch realisiert werden konnte wird zur Verifikation der instationären Berechnung die Abklingzeit einer lokalen Störung im Experiment mit der der dreidimensionalen Berechnung verglichen.

Die Arbeit schliesst mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf weiterführende, aufbauende Arbeiten.

Kapitel 2

Physikalische Grundlagen

2.1 Strömungsmechanische Grundgleichungen

In dieser Arbeit werden Strömungsphänomene von Flüssigkeiten untersucht. Bei Strömungsberechnungen soll die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (u, v, w)^T$, die Dichte ρ , der Druck p und die Temperatur T der Strömung in Abhängigkeit der drei kartesischen Koordinaten x, y und z ermittelt werden.

Es gelten die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie für ein infinitesimales, raumfestes Volumenelement an der Stelle (x, y, z) in einem kartesischen Koordinatensystem. Es wird von einem Kontinuum ausgegangen.

2.1.1 Die Kontinuitätsgleichung

Sie gibt die Erhaltung der Masse wieder. Die zeitliche Änderung der Masse in einem Volumenelement ist die Summe der ein- und ausströmenden Massenströme aus diesem Volumenelement. Die ausströmenden Massenströme werden mit negativem Vorzeichen versehen.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1)$$

2.1.2 Die Navier-Stokes Gleichungen

In den Navier-Stokes Gleichungen werden die Impulsströme betrachtet. Sinngemäß besagt sie, dass die zeitliche Änderung des Impulses in einem Volumenelement der Summe der ein- und austretenden Impulsströme zuzüglich der Summe der Kräfte, die auf die Masse im Volumenelement wirken, entspricht.

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu [\nabla \mathbf{v} + \nabla^t \mathbf{v}]) - \frac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \mathbf{v}) - \rho g \mathbf{e}_z \quad (2.2)$$

Hierin bezeichnet ρ die Dichte, \mathbf{v} die Geschwindigkeit, p den Druck, μ die dynamische Viskosität und $g\mathbf{e}_z$ die Erdbeschleunigung in z -Richtung des Koordinatensystems. Es folgt eine kurze phänomenologische Beschreibung der einzelnen Terme dieser Gleichung. Auf der linken Seite steht die *substantielle* oder *mitbewegte Ableitung* der Geschwindigkeit \mathbf{v} mal der Dichte. Diese Ableitung gibt die Veränderung der Geschwindigkeit eines kleinen Volumenelementes in einem sich mit der Flüssigkeit bewegendem Bezugssystem an. Auf der rechten Seite stehen die Ursachen dieser Beschleunigung. Diese kann durch eine Druckdifferenz $-\nabla p$ hervorgerufen werden oder durch äußere Einflüsse wie die Gravitation $\rho g\mathbf{e}_z$. Der Term $\nabla \cdot (\mu [\nabla \mathbf{v} + \nabla^t \mathbf{v}]) - \frac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \mathbf{v})$ gibt die Reibung nach dem Stokes'schen Reibungsansatz wieder.

2.1.3 Die Energiegleichung

Die Energiegleichung besagt, dass die zeitliche Änderung der inneren und kinetischen Energie im Volumenelement der Summe der durch Strömung und Wärmeleitung ein- und ausfließenden Energieströme zuzüglich der durch Druck, Volumen-, Normalspannungs- und Schubspannungskräften am Volumenelement geleisteten Arbeit pro Zeit und der von außen zugeführten Energie entspricht..

$$\rho c_v \left(\frac{\partial}{\partial t} T + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi \quad (2.3)$$

$$\Phi = \mu \left(\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + \nabla^t \mathbf{v}]^2 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right) \quad (2.4)$$

Die neu hinzugekommenen Variablen sind T für die Temperatur, c_v für die Wärmekapazität bei konstantem Volumen und λ für den Wärmeleitkoeffizienten. Bei der Funktion Φ handelt es sich um die Dissipationsfunktion. Diese ergibt sich aus den Normal- und Schubspannungen nach einsetzen des Stokes'schen Reibungsansatzes.

Diese Gleichungen sind die kompressiblen Grundgleichungen der Strömungsmechanik. Mit ihnen können alle Strömungsphänomene beschrieben werden. Allerdings sind sie in dieser Form nur in ganz speziellen Fällen lösbar. Um eine Beschreibung der hier interessierenden Strömungsvorgänge zu erreichen, müssen diese deutlich vereinfacht werden.

2.1.4 Vereinfachung der Grundgleichungen

In dieser Arbeit werden Flüssigkeiten untersucht, deren Dichte nur von der Temperatur, nicht aber vom Druck abhängt..

Es gilt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0 \quad (2.5)$$

Für den Volumenausdehnungskoeffizienten β einer Flüssigkeit mit obiger Annahme gilt:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \quad (2.6)$$

Des weiteren ergibt sich für die zeitliche Änderung der Dichte folgendes:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{d\rho}{dT} \frac{dT}{dt} \\ &= -\beta \rho \frac{dT}{dt} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Das totale Differential der Temperatur durch die Zeit lässt sich weiter umformen:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial T}{\partial t} \mathbf{v} \cdot \nabla T \end{aligned} \quad (2.8)$$

Setzt man Gleichung 2.8 in Glg. 2.7 ein und das Ergebnis wiederum in die Kontinuitätsgleichung, erhält man die folgende Gleichung:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \beta \left(\frac{\partial}{\partial t} T + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) \quad (2.9)$$

Des weiteren kann die Zähigkeit μ des Mediums als konstant angesehen werden. Damit vereinfachen sich die Impulsgleichungen zu:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \left(\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) - \rho g \mathbf{e}_z \quad (2.10)$$

Wird auch die Wärmeleitfähigkeit λ als konstant vorausgesetzt, ergibt sich für die Energiebilanz von Medien nichtkonstanter Dichte:

$$\rho c_v \left(\frac{\partial}{\partial t} T + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \lambda \Delta T - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi \quad (2.11)$$

Um weitere Berechnungen anstellen zu können wird noch eine thermische Zustandsgleichung benötigt, die die Dichte und Temperatur in Verbindung bringt. Hier wird

eine lineare Näherung um die mittlere Temperatur des jeweiligen Problems angenommen.

$$\rho(T) = \rho_m (1 - \beta_m(T - T_m)) \quad (2.12)$$

ρ_m ist die mittlere Dichte des betrachteten Problems und β_m der mittlere Volumenausdehnungskoeffizient.

Dies stellt ein Differentialgleichungssystem mit 6 Gleichungen (Kontinuitätsgleichung, 3 Impulsgleichungen, Energiegleichung, Dichte in Abhängigkeit von Temperatur) für 6 Unbekannte ρ, \mathbf{v}, p, T dar. Zur weiteren Bearbeitung werden die Gleichungen durch die in [35] beschriebenen Zuordnungen entdimensioniert ¹:

$$\begin{aligned} \text{Länge } (x, y, z) &= d \cdot (x^*, y^*, z^*) \\ \text{Zeit } t &= \frac{d^2}{k} \cdot t^* \\ \text{Geschwindigkeit } \mathbf{v} &= \frac{k}{d} \mathbf{v}^* \\ \text{Temperatur } (T - T_m) &= \Delta T \cdot T^* \\ \text{Druck } p + \rho_m g z &= \frac{\rho_m \nu k}{d^2} \cdot p^* \\ \text{Dichte } \rho &= \rho_m \cdot \rho^* \end{aligned}$$

Tabelle 2.1: Zuordnung der Variablen zur Entdimensionierung

Vom Druck wurde zusätzlich der hydrostatische Anteil $p_h s = -\rho_m g z$ abgespalten. Durch einsetzen erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$\rho^* \nabla \cdot \mathbf{v}^* = (\beta_m \Delta T) \left(\frac{\partial}{\partial t^*} T^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla T^* \right) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \rho^* \left(\frac{\partial}{\partial t^*} \mathbf{v}^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla \mathbf{v}^* \right) &= \Delta \mathbf{v}^* + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}^*) \\ &\quad - \nabla p^* + Ra \cdot T^* \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\rho^* \left(\frac{\partial}{\partial t^*} T^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla T^* \right) = \Delta T^* \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{k\nu}{c_v \Delta T d^2} \left[\left(\frac{gd^3}{k\nu} z^* - p^* \right) \nabla \cdot \mathbf{v}^* + \Phi^* \right] \\ \rho^* &= 1 - (\beta_m \Delta T) T^* \end{aligned} \quad (2.16)$$

Hier wurden auch gleich die dimensionslosen Kennzahlen Prandtlzahl $Pr = \frac{\nu}{k}$ und Rayleighzahl $Ra = \frac{\beta_m \Delta T g d^3}{k\nu}$ eingesetzt.

¹Die Kennzeichnung der dimensionslosen Größen mit * wird nur in diesem Kapitel vorgenommen. Im weiteren wird die vereinfachte Schreibweise ohne * verwendet, da die entdimensionierten Gleichungen durch das Vorhandensein der entsprechenden dimensionslosen Kennzahlen ausreichend gekennzeichnet sind

2.1.5 Boussinesq Approximation

Bei Annahme sehr kleiner relativer Dichteänderungen gilt

$$\frac{(\rho - \rho_m)}{\rho_m} = -(\beta_m \Delta T) T^* \ll 1 \quad (2.17)$$

und damit ist auch $(\beta_m \Delta T) \ll 1$. Das Differentialgleichungssystem lässt sich mit dieser Annahme weiter vereinfachen. Diese Näherung wird *Boussinesq Approximation* genannt.

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial}{\partial t^*} \mathbf{v}^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla \mathbf{v}^* \right) = \Delta \mathbf{v}^* - \nabla p^* + Ra T^* \mathbf{e}_z \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^*} T^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla T^* \right) = \Delta T^* + \frac{k\nu}{c_v \Delta T^* d^2} \Phi^* \quad (2.20)$$

Diese Gleichungen dienen als Grundlage der weiteren Berechnungen.

2.2 Stabilität

Ein stationärer Strömungszustand $U_0(x, y, z)$ ist durch die Dichteverteilung ρ_0 , die Temperaturverteilung T_0 und den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} = (u_0, v_0, w_0)^t$ an jeder räumlichen Position $(x, y, z)^t$ vollständig definiert. Dieser 5 dimensionale Vektor $U_0(x, y, z) = (\rho_0, u_0, v_0, w_0, T_0)$ erfüllt die im vorigen Abschnitt aufgeführten Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik für Masse (Kontinuitätsgleichung), Impuls (Navier-Stokes Gleichung) und Energie. Eine physikalisch mögliche Störung des Strömungszustandes zum Zeitpunkt $t = 0$ ergibt einen neuen Strömungszustand $U(x, y, z, t = 0)$. Dieser muss den Randbedingungen des Strömungsproblems genügen. Der neue Strömungszustand muss sich nicht zwangsläufig zurück zum Grundzustand U_0 entwickeln.

Verfolgt man

$$U' = U(x, y, z, t) - U_0(x, y, z) \quad (2.21)$$

in der Zeit, kann beurteilt werden, ob der alte Zustand U_0 wieder eingenommen wird.

$$\|U'\| = \int_V |U'(x, y, z, t)|^2 dV \quad (2.22)$$

wird als „Größe der Störung“ bezeichnet [35]. Sofern $\|U'\| < \epsilon$ für alle $t \geq 0$ erfüllt ist, heißt die Grundströmung stabil. Die Größe der Störung darf für alle

Zeiten nicht über eine feste Zahl ϵ wachsen. Andernfalls heißt die Strömung instabil.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U'(t)\| = 0 \quad (2.23)$$

wird als asymptotische Stabilität bezeichnet. Sie ist ein Spezialfall einer stabilen Strömung. In diesem Fall klingt eine beliebige Störung auf Dauer ab.

Diese Aussagen beziehen sich auf die zeitliche Entwicklung der Störenergie im gesamten Strömungsfeld. Zur Beschreibung der räumlich-zeitlichen Ausbreitung einer Störung benötigt man ein Maß für die lokale Größe der Störung.

$$A^2(x, y, z, t) = \frac{d\|U'\|}{dV} = |U'|^2 \quad (2.24)$$

ist ein Maß für die Größe der Störung am Ort x, y, z zum Zeitpunkt t . A stellt eine Störenergiedichte dar. Die instabilen Strömungen werden damit in 2 Gruppen unterteilt:

- Klingt die Störenergiedichte A am Ort ihrer Einleitung zeitasymptotisch ab, heißt die Strömung *lokal konvektiv instabil*
- Bleibt die Störenergiedichte A am Ort der Einbringung erhalten oder wächst sie noch weiter an (indem Energie aus der Grundströmung die Störung verstärkt), wird die Strömung als *lokal absolut instabil* bezeichnet.

2.3 Thermische Konvektion mit vertikalen Temperaturgradienten

In diesem Kapitel werden die Grundlagen und Kennzahlen der thermischen Konvektion für vertikale, d.h. parallel zum Schwerkraftvektor orientierte, Temperaturgradienten eingeführt. Obwohl sich die Strömungsformen für diese Konfigurationen von den in dieser Arbeit behandelten deutlich unterscheiden, sind die Grundlagen zum Verständnis nötig. Es soll eine phänomenologische Beschreibung dieser Grundlagen gegeben werden, ohne die Mathematik der Konvektion mit vertikalen Gradienten explizit auszuführen.

2.3.1 Rayleigh-Benard-Konvektion, oder auftriebsgetriebene Konvektion

Auftriebsgetriebene Konvektion, oft als natürliche Konvektion oder Rayleigh Konvektion bezeichnet, tritt auf, wenn ein Fluid im Gravitationsfeld einem Temperaturgradienten ausgesetzt wird und wenn die Dichte des Fluids mit der Temperatur variiert.

Wir betrachten eine Flüssigkeitsschicht, die in vertikaler Richtung von zwei starren Wänden begrenzt wird, von denen die untere eine höhere Temperatur aufweist, als die obere. Im Normalfall wird die Dichte des Fluids, aufgrund der Volumenausdehnung, mit steigender Temperatur sinken. Daher ist die Flüssigkeit an der oberen, kälteren Platte schwerer als die Flüssigkeit an der unteren, wärmeren Platte. Dieses System stellt eine im Gravitationsfeld instabile Dichteschichtung dar. Für kleine Temperaturdifferenzen wird die Flüssigkeit die Wärme durch Wärmeleitung transportieren, es stellt sich ein linearer Temperaturgradient ein. Wird durch eine Störung ein Flüssigkeitselement nach unten verschoben, so ist seine Dichte, durch seine niedrigere Temperatur, höher als die der es umgebenden Flüssigkeitselemente. Es erfährt eine Volumenkraft in Gravitationsrichtung, die in Richtung der ursprüngliche Auslenkung wirkt, und wird die abwärtsgerichtete Bewegung beibehalten. Aufgrund der Massenerhaltung muss an anderer Stelle ein Fluidelement nach oben bewegt werden. Dieses Element hat im Vergleich zu den es umgebenden eine geringere Dichte und wird ebenfalls eine Kraft in Bewegungsrichtung erfahren. Diese Bewegung führt zu einer Konvektionsströmung, es sei denn, die Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit sind groß genug im Verhältnis zu den entstehenden Kräften, um durch Reibung und Temperatúrausgleich die entstehenden mechanischen und thermischen Störungen zu dämpfen, wodurch der ursprüngliche, ruhende Zustand wiederhergestellt wird.

Dieses Gedankenexperiment zeigt, dass dieses Problem, im Gegensatz zu anderen klassischen Problemen nicht reibungsfrei (verschwindende Viskosität), isotherm oder adiabat betrachtet werden kann, da die Störungen durch die Viskosität und Wärmeleitung gedämpft und durch Auftriebskräfte angeregt werden. Für stationäre Bedingungen existiert ein Gleichgewicht zwischen diesen Effekten, das durch die Rayleighzahl, die bei der Entdimensionierung der Grundgleichungen auftaucht, charakterisiert wird:

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\nu k} \quad (2.25)$$

mit β , dem volumetrischen Ausdehnungskoeffizienten, g der Erdbeschleunigung, ΔT der vertikalen Temperaturdifferenz über die Fluidschicht (positiv für von unten beheizte Schicht), L der Dicke der Fluidschicht, ν der kinematischen Viskosität und k der thermischen Diffusivität.

Überschreitet die Temperaturdifferenz die im weiteren als kritische Temperaturdif-

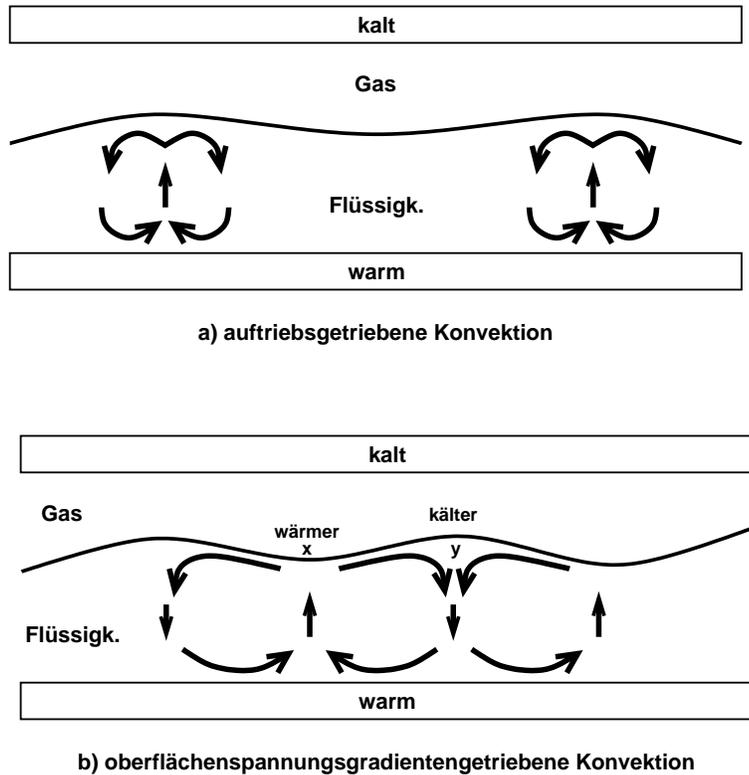


Abbildung 2.1: Physik der Rayleigh-Marangoni-Konvektion

ferenz bezeichnete, übersteigt die Anregung durch die Auftriebskraft die Dämpfung durch Reibung und Wärmeleitung und das Fluid setzt sich in Bewegung, auftriebsgetriebene Konvektion entsteht.

2.3.2 Marangoni-Konvektion, oder oberflächenspannungsgradientengetriebene Konvektion

Durch den Oberflächenspannungsgradienten getriebene Konvektion oder Marangoni-Konvektion kann, im Gegensatz zur auftriebsgetriebenen, auch ohne ein Gravitations- oder Beschleunigungsfeld existieren.

Wir betrachten eine Fluidschicht, die von unten durch eine feste, isotherme Wand, und von oben durch eine freie Grenzfläche zu einem passiven Gas begrenzt wird (Abb. 2.1). Ein passives Gas ist in diesem Zusammenhang ein Gas, in dem sich keine mechanischen oder thermischen Störungen ausbreiten. Über dem Gas befindet sich eine weitere isotherme Wand. Um die Vergleichbarkeit mit Absatz 2.3.1 zu erhalten wird die Temperatur der unteren Wand höher als die der oberen ange-

nommen. Wird nun die Oberfläche lokal gestört, erfahren die nach oben bewegten Regionen der Oberfläche eine niedrigere, die nach unten bewegten eine höhere Temperatur. Da die Oberflächenspannung typischerweise mit steigender Temperatur sinkt, erfahren die nach oben bewegten Bereiche eine höhere Oberflächenspannung. Die höhere Oberflächenspannung zieht Fluid entlang der freien Oberfläche an, das in den Tälern durch warmes Fluid von unten ersetzt wird. Die treibende Kraft wird verstärkt. Die Wärmeleitung schafft einen Ausgleich im Temperaturfeld entlang der Oberfläche, während die Reibung die Bewegung bremst. Diese beiden Effekte dämpfen die Störung. Wie im Fall der auftriebsgetriebenen Konvektion existiert eine kritische Temperaturdifferenz, bei deren Überschreiten die vom Oberflächenspannungsgradienten erzeugte Strömung nicht mehr durch die Reibung und Wärmeleitung herausgedämpft wird und die Konvektion einsetzt.

Die Entdimensionierung der Modellgleichungen des Kräftegleichgewichts entlang der Oberfläche führt zu einer dimensionslosen Kennzahl, die das Gleichgewicht zwischen den dissipativen Effekten Reibung und Wärmeleitung und den treibenden Kräften des Oberflächenspannungsgradienten. Diese Kennzahl wird Marangonizahl genannt:

$$Ma = \frac{\sigma_T \Delta T L}{\mu k} \quad (2.26)$$

mit $\sigma_T = \frac{\partial \sigma}{\partial T}$, der Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung (linear) und μ der dynamischen Viskosität.

Während in obigen Ausführungen entsprechend [3, 47] eine verformbare Oberfläche vorausgesetzt wurde, ist es für theoretische Untersuchungen interessant, dass diese bewegliche Oberfläche nicht nötig ist, damit die Marangoni-Konvektion einsetzt. Hierzu betrachten wir Abb. 2.1 b) unter der Annahme einer ebenen Oberfläche. Die Punkte x und y liegen auf der selben Höhe. Ein an der Stelle y nach unten bewegtes Fluidelement wird von einem Fluidelement ersetzt, das näher an x liegt. Infolgedessen wird wärmere Flüssigkeit an x aufsteigen. Wenn die Oberflächenspannung mit steigender Temperatur sinkt, wie es für die meisten Fluide der Fall ist, strömt das Fluid von warmen Gebieten entlang der Oberfläche zu kühleren Gebieten, also im betrachteten Fall von x nach y , wodurch die ursprüngliche Bewegung verstärkt und aufrechterhalten wird, sofern Reibung und Wärmeleitung die Störung nicht herausdämpfen. Dies bedeutet, dass die Marangoni-Konvektion unter der Annahme starrer Oberflächen, d.h. Oberflächen mit unendlicher Oberflächenspannung, untersucht werden kann. Die Stärke der Konvektion ist nur noch von Gradienten $\sigma_T = \frac{\partial \sigma}{\partial T}$ abhängig. Diese Vereinfachung wurde von Pearson [37] in der ersten theoretischen Analyse der Marangoni-Konvektion mit einer der von Rayleigh im Falle der auftriebsgetriebenen Konvektion verwendeten ähnlichen Methode geliefert.

Das Auftreten der Rayleigh-Konvektion einerseits und der Marangoni-Konvektion andererseits wird bei konstantem Gravitationsfeld hauptsächlich durch die Höhe der Fluidschicht bestimmt. Aus Gleichungen (2.25) und (2.26) ist ersichtlich, dass

die Stärke der Rayleigh-Konvektion proportional zu L^3 und die der Marangoni-Konvektion direkt zu L proportional ist. Aus dieser Dimensionsbetrachtung lässt sich ableiten, dass für große Schichtdicken, die Rayleigh-Konvektion und für geringe Schichtdicken die Marangoni-Konvektion überwiegt. Dies ist der Grund für das in jüngerer Zeit verstärkte Interesse an Konvektionsströmungen vom Marangonityp, da die relevanten Abmessungen in der Mikrosystemtechnik und Beschichtungstechnologie immer kleiner werden, und Auftriebsphänomene in den Hintergrund treten.

Bei gleichbleibenden Stoffgrößen ist aus (2.25) und (2.26) eine weitere Möglichkeit ersichtlich, um das Verhältnis zwischen Auftriebs- und Oberflächenspannungskräften zu verschieben: Bei Verringerung der Gravitationskraft ist einleuchtenderweise eine Verringerung des Auftriebs zu erwarten, was für Anwendungen unter μ -, bzw. 0-g-Bedingungen zu einer Vorherrschaft der Marangoni-Konvektion führt, die lange Zeit vernachlässigt wurde.

Eine dimensionslose Kennzahl, die das Verhältnis zwischen Auftriebs- und Oberflächenspannungskräften angibt, ist die Bond-Zahl:

$$Bo = \frac{Ra}{Ma} = \frac{\beta \rho g L^2}{\sigma_T} \quad (2.27)$$

Für $Bo \gg 1$ herrscht die auftriebsgetriebene, für $Bo \ll 1$ die vom Oberflächenspannungsgradienten getriebene Konvektion vor. Für Bond-Zahlen in der Größenordnung von 1 wird gemischte Konvektion auftreten.

2.4 Grenzflächenkopplung in Mehrschichtsystemen

In Zweischichtsystemen unmischbarer Flüssigkeiten gibt es fünf unterschiedliche Arten auf die die Konvektion in den beiden Flüssigkeiten über die Grenzfläche koppeln können. Eine ausführliche Beschreibung dieser Kopplungsmechanismen geben Johnson und Narayanan [20, 21].

Betrachtet wird ein vertikales Schichtsystem aus zwei nichtmischbaren Fluiden unterschiedlicher Dichte, das vertikal von zwei festen, isothermen Wänden begrenzt und von unten beheizt wird.

Die erste Kopplung (lower dragging mode) tritt auf, wenn die untere Schicht instabil für auftriebsgetriebene Konvektion wird, und die obere Schicht über Reibung mitzieht (Abb. 2.2 a).

Der gegensätzliche Mechanismus tritt auf, wenn in der oberen Schicht auftriebsgetriebene Konvektion einsetzt, die die untere Schicht mitzieht (lower dragging mode, Abb. 2.2 d)

Diese beiden Arten der Kopplung sind typischerweise zu finden, wenn die Schichtdicken bei ähnlicher Viskosität und thermischer Ausdehnung der Fluide unterschiedlich sind. Für Konfigurationen mit gleichmäßigen Schichtdicken, in denen beide Schichten instabil werden, und auftriebsgetriebene Konvektion entwickeln, können zwei unterschiedliche Kopplungen auftreten.

Die erste wird mechanische oder Reibungskopplung (viscous coupling, Abb. 2.2 b) genannt, und wird durch gegenläufige Konvektionsrollen charakterisiert. Die beiden Fluidschichten strömen unabhängig, die Grenzfläche wird für reine Reibungskopplung zur Isothermen.

Das zweite Kopplungsszenario ist die thermische Kopplung (thermal coupling, Abb. 2.2 c) und zeigt gleichläufige Konvektionsrollen. Da in der Grenzfläche kein Schlupf auftreten kann, muss für die reine thermische Kopplung die Geschwindigkeit in der Grenzfläche Null werden.

Zwischen diesen beiden Kopplungsmechanismen kann beim Einsetzen der Konvektion eine Oszillation eintreten, da jeweils nur eine der beiden Kopplungen möglich ist. Diese Oszillation wurde von Gershuni und Zhukhovitskii [13] numerisch und später experimentell von Degen et al. [7, 8] beobachtet.

Die letzte Abbildung 2.2 e) zeigt die sogenannte oberflächengetriebene thermische Kopplung (surface-driven thermal coupling). Diese Kopplung tritt typischerweise in einem Flüssigkeits-Gas-System auf, wenn die auftriebsgetriebene Konvektion in der Gasschicht auftritt. Die Konvektionsströmung im Gas erzeugt ein ungleichförmiges Temperaturprofil in der Grenzfläche, das die Konvektion in der Flüssigkeitsschicht auslöst [22]. Die Konvektion in der unteren Schicht ist in diesem Fall alleine durch horizontale Temperaturgradienten an der Grenzfläche erzeugt.

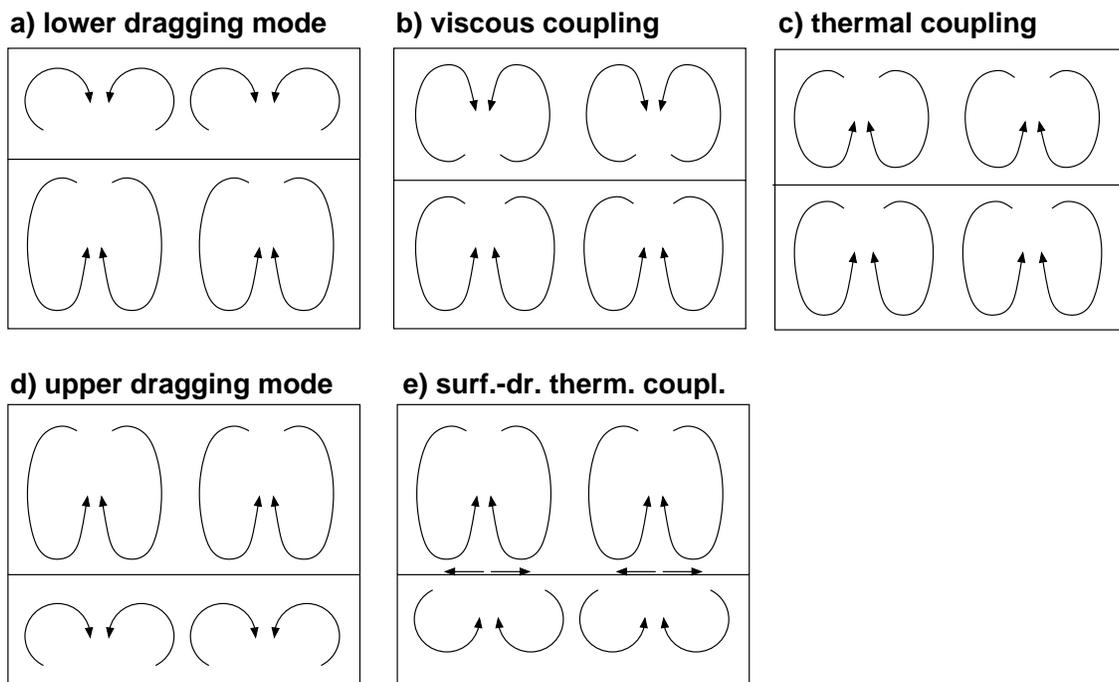


Abbildung 2.2: Formen der konvektiven Kopplung, von a) nach e) steigt die Auftriebskraft in der oberen Schicht

Kapitel 3

Simulation der gemischten Konvektion

3.1 Mathematische Modellierung der dreidimensionalen Strömung

Entsprechend dem in Kapitel 4.2 definierten Experiment, wird die thermische Konvektion in einer dreidimensionalen Box $B = \mathbf{x} = (x, y, z)$: $x \in [0, 4L], y \in [0, 2L], z \in [0, 2L]$, die mit zwei nicht mischbaren Boussinesq Fluiden gefüllt ist, untersucht. Die Fluid-Fluid-Grenzfläche wird durch die Oberfläche $z = \zeta(x, y, t)$ (at $t = 0$ $\zeta(x, y, 0) = L$) gebildet. Die Grenzfläche trennt B in zwei Bereiche: $B = B_1 \cup B_2$. Die Parameter der Fluide in den jeweiligen Bereichen seien konstant, Indizes 1 und 2 bezeichnen den unteren (FC70) bzw. oberen (M10) Bereich. Die rechte und linke Wand sind isotherm mit T_h and T_c ($T_h > T_c$). Alle anderen Wände sind adiabat.

3.1.1 Gleichungen der thermischen Konvektion (Boussinesq Approximation)

Diese Strömung wird beschrieben durch die Gleichungen der thermischen Konvektion (Boussinesq Gleichungen, Boussinesq Approximation) [51, 14]:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{3.1}$$

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + g\beta\theta \mathbf{k} \tag{3.2}$$

$$\Theta_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \Theta = k \Delta \Theta \quad (3.3)$$

mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (u, v, w)$, Temperatur Θ und Druck p (wobei Θ und p die Abweichung von mittleren hydrostatischen Werten T_0 und p_0 darstellen), der mittleren Dichte ρ_0 , Erdbeschleunigung g mit Gravitationsrichtungsvektor $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ und volumetrischer thermischer Ausdehnungskoeffizient β .

$$\vartheta, k, \lambda, \beta, \rho_0 = \begin{cases} \vartheta_1, k_1, \lambda_1, \beta_1, \rho_{0,1} = \text{const}, & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbf{B}_1 \\ \vartheta_2, k_2, \lambda_2, \beta_2, \rho_{0,2} = \text{const}, & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbf{B}_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

3.1.2 Randbedingungen

Für die Wände und die Grenzfläche werden folgende Randbedingungen gesetzt:

- Haft- und Nichtdurchdringungsbedingung an den Wänden

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(0, y, z) &= 0, \\ \mathbf{v}(4L, y, z) &= 0, \\ \mathbf{v}(x, y, 0) &= 0, \\ \mathbf{v}(x, y, 2L) &= 0, \\ \mathbf{v}(x, 0, z) &= 0, \\ \mathbf{v}(x, 2L, z) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

- Isotherme und adiabate Wände:

$$\begin{aligned} \Theta(0, y, z) &= \Theta_c, \\ \Theta(4L, y, z) &= \Theta_h \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \Theta_z(x, y, 0) &= 0, \\ \Theta_z(x, y, 2L) &= 0, \\ \Theta_y(x, 0, z) &= 0, \\ \Theta_y(x, 2L, z) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

- Kontinuität der Geschwindigkeit, Temperatur und Wärmeströme an der Grenzfläche $\partial \mathbf{B}_{12}$ ($z = \zeta(x, y, t)$):

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \quad \Theta_1 = \Theta_2, \quad \lambda_1 \Theta_{z,1} = \lambda_2 \Theta_{z,2}; \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial \mathbf{B}_{12} \quad (3.8)$$

- und das Schubspannungsgleichgewicht entlang der Grenzfläche $\partial\mathbf{B}_{12}$ [55, 25, 35]:

$$\left[p_1 - p_2 - \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] n_i = (\sigma_{ik,1} - \sigma_{ik,2}) n_k + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}; \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial\mathbf{B}_{12}$$

mit dem Spannungstensor $\sigma_{ik,1}$, den Krümmungsradien der Oberfläche R_1 und R_2 , der Oberflächenspannung σ und dem Einheitsnormalenvektor der Oberfläche \mathbf{n} . Bei linearer Abhängigkeit der Oberflächenspannung σ von der Temperatur: $\sigma = \sigma_0 - \sigma_1 \Theta$, mit konstanten σ_0 und σ_1 wird diese Randbedingung zu:

$$\left[p_1 - p_2 - \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] n_i = (\sigma_{ik,1} - \sigma_{ik,2}) n_k - \sigma_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}, \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial\mathbf{B}_{12} \quad (3.9)$$

3.2 Grundströmung im unendlich ausgedehnten Kanal

3.2.1 Mathematische Modellierung

Als erster Schritt zur numerischen Simulation der gemischten Konvektion wird die Grundströmung im in x- und y-Richtung unendlich ausgedehnten Kanal $B = \{\mathbf{x} = (x, y, z) : x, y \in (-\infty, \infty), z \in [-L, L]\}$ betrachtet. Die Grenzfläche $z = 0$ trennt B in zwei Bereiche $B = B_1 \cup B_2$. Der Temperaturgradient $\delta T = T_x$ ist konstant in x-Richtung, $\delta T = \Delta T \cdot L/4L$. Die Wände an $z = \pm L$ sind adiabat.

Länge, Zeit, Geschwindigkeit, Druck und Temperatur in Gleichungen (3.1) bis (3.3) werden mit

$$L, \quad L^2/\nu_1, \quad k_1/L, \quad \rho_{0,1}\vartheta_1 k_1/L^2, \quad \delta T L$$

entdimensionalisiert.

Die Strömung wird beschrieben durch:

$$1/Pr(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -1/\gamma_\rho \nabla p + \gamma_\nu \Delta \mathbf{v} + Ra\gamma_\beta \Theta \mathbf{k} \quad (3.10)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\Theta = \gamma_k \Delta \Theta \quad (3.11)$$

In diesen Variablen werden die Randbedingungen (3.5) bis (3.9) repräsentiert durch:

- Haftbedingung, Nichtdurchdringung:

$$\mathbf{v}_1(-1) = \mathbf{v}_2(1) = 0 \quad (3.12)$$

- Adiabate Wände:

$$\Theta_z(\pm 1) = 0 \quad (3.13)$$

- Kontinuität über die Grenzfläche:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(0) &= \mathbf{v}_2(0), \\ w_1(0) &= 0, \\ \Theta_1(0) &= \Theta_2(0), \\ T_{z,1}(0) - \gamma_\lambda T_{z,2}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

- Schubspannungsgleichgewicht entlang der Grenzfläche:

$$\begin{aligned} -u_{z,1} + \gamma_\nu \gamma_\rho u_{z,2} - Ma \Theta_x &= 0, \\ -v_{z,1} + \gamma_\nu \gamma_\rho v_{z,2} - Ma \Theta_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Diese Bewegungsgleichungen haben eine exakte Lösung der Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0(z) &= (U(z), 0, 0) \\ T_0(x, z) &= x + T(z) \\ P_0(x, z) &= xP_a(z) + P_b(z). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Damit ergibt sich ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen in z -Richtung:

$$-P_a + \gamma_\rho \gamma_\nu U'' = 0 \quad (3.17)$$

$$-P_a' + \gamma_\rho \gamma_\beta Ra = 0 \quad (3.18)$$

$$-P_b' + \gamma_\rho \gamma_\beta Ra T = 0 \quad (3.19)$$

$$\gamma_k \hat{T}'' - U = 0 \quad (3.20)$$

$$\int_{-1}^0 U(z) dz = \int_0^1 U(z) dz = 0 \quad (3.21)$$

mit den Randbedingungen:

$$U_1(-1) = U_2(1) = DT_1(-1) = DT_2(1) = 0 \quad (3.22)$$

$$T_1(0) = T_2(0); \quad DT_1(0) = \gamma_\lambda DT_1(0) \quad (3.23)$$

$$-DU_1(0) + \gamma_\nu \gamma_\rho DU_2(0) = Ma \quad (3.24)$$

mit

$$Pr = \vartheta_1/k_1 \quad \text{Prandtlzahl}$$

$$Ra = (L^4 g \beta_1 \delta T) / (\vartheta_1 k_1) \quad \text{Rayleighzahl}$$

$$Ma = (L^2 \delta T \sigma_1) / (\rho_1 \vartheta_1 k_1) \quad \text{Marangonizahl}$$

$$D = d/dz$$

$$\gamma_\nu, \gamma_k, \gamma_\beta, \gamma_\rho = \begin{cases} 1, & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbf{B}^1 \\ \vartheta_2/\vartheta_1, k_2/k_1, \beta_2/\beta_1, \rho_{0,2}/\rho_{0,1}, & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbf{B}^2 \end{cases}$$

Um diese Grundlagenuntersuchung so einfach und vergleichbar wie möglich zu halten, sind die γ -Verhältnisse der physikalischen Parameter für die Untersuchungen in diesem Kapitel identisch gleich 1, d.h. die physikalischen Parameter unterscheiden sich für die beiden Fluidschichten nicht. Lediglich die Berechnungen im Kapitel „Verifikation“ sind für die realen γ -Werte durchgeführt.

Dieses System lässt sich analytisch lösen und liefert für die Geschwindigkeit und die Temperatur folgende Funktionen:

$$\begin{aligned}
 u_1(z) = & \left(\frac{1}{6} \frac{\gamma_\nu \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{1}{6} \frac{Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} \right) z^3 \\
 & + \left(\frac{1}{16} \frac{\gamma_\beta \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} - \frac{3}{4} \frac{Ma}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{1}{4} \frac{\gamma_\nu \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{3}{16} \frac{Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} \right) z^2 \\
 & + \left(-\frac{Ma}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{1}{12} \frac{\gamma_\nu \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{1}{12} \frac{\gamma_\beta \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} \right) z \\
 & + \frac{1}{48} \frac{\gamma_\beta \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{1}{4} \frac{Ma}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{1}{48} \frac{Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1}, \quad \text{für } z \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
 u_2(z) = & \left(\frac{1}{6} \frac{\gamma_\beta \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{1}{6} \frac{\gamma_\beta Ra}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1)\gamma_\nu} \right) z^3 \\
 & + \left(-\frac{3}{16} \frac{\gamma_\beta \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} - \frac{3}{4} \frac{Ma}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} - \frac{1}{4} \frac{\gamma_\beta \gamma_\rho Ra}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1)\gamma_\nu} - \frac{1}{16} \frac{Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} \right) z^2 \\
 & + \left(-\frac{Ma}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{1}{12} \frac{Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{1}{12} \frac{\gamma_\beta Ra}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1)\gamma_\nu} \right) z \\
 & + \frac{1}{48} \frac{\gamma_\beta \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} - \frac{1}{4} \frac{Ma}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} - \frac{1}{48} \frac{Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1}, \quad \text{für } z \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
 T_1(z) = & \left(\frac{1}{120} \frac{Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{1}{120} \frac{\gamma_\nu \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} \right) z^5 \\
 & + \left(\frac{1}{192} \frac{\gamma_\beta \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} - \frac{1}{16} \frac{Ma}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{1}{64} \frac{Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{1}{48} \frac{\gamma_\nu \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} \right) z^4 \\
 & + \left(\frac{1}{6} \frac{Ma}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{1}{72} \frac{\gamma_\nu \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} + \frac{1}{72} \frac{\gamma_\beta \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} \right) z^3 \\
 & + \left(\frac{1}{96} \frac{\gamma_\beta \gamma_\rho Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} - \frac{1}{8} \frac{Ma}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} - \frac{1}{96} \frac{Ra}{\gamma_\nu \gamma_\rho + 1} \right) z^2, \quad \text{für } z \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
 T_2(z) = & - \left(\frac{1}{120} \frac{\gamma_\beta \gamma_\rho Ra}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1) \gamma_k} + \frac{1}{120} \frac{\gamma_\beta Ra}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1) \gamma_\nu \gamma_k} \right) z^5 + \left(\frac{1}{192} \frac{Ra}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1) \gamma_k} \right. \\
 & - \frac{1}{16} \frac{Ma}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1) \gamma_k} + \frac{1}{64} \frac{\gamma_\beta \gamma_\rho Ra}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1) \gamma_k} + \frac{1}{48} \frac{\gamma_\beta Ra}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1) \gamma_\nu \gamma_k} \left. \right) z^4 \\
 & - \left(\frac{1}{6} \frac{Ma}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1) \gamma_k} + \frac{1}{72} \frac{\gamma_\beta Ra}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1) \gamma_\nu \gamma_k} + \frac{1}{72} \frac{Ra}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1) \gamma_k} \right) z^3 \\
 & + \left(\frac{1}{96} \frac{\gamma_\beta \gamma_\rho Ra}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1) \gamma_k} - \frac{1}{8} \frac{Ma}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1) \gamma_k} - \frac{1}{96} \frac{Ra}{(\gamma_\nu \gamma_\rho + 1) \gamma_k} \right) z^2, \quad \text{für } z \geq 0 \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

3.2.2 Linearisierte Stabilitätsanalyse

Die linearisierte Stabilitätsanalyse der Grundströmung (Glg. 3.16) gegenüber Störungen der Form

$$(\mathbf{v}(z), \Theta(z), p(z)) e^{i(\omega t + \alpha x)}$$

ergibt folgendes Spektralproblem

$$\omega A w = \gamma_\nu A^2 w - \gamma_\beta Ra \alpha^2 \Theta + i\alpha / Pr (U_0'' w - U_0 A w) \quad (3.29)$$

$$i\omega \Theta = \gamma_k / Pr A \Theta - 1 / Pr (-w_z / (i\alpha) + i\alpha U \Theta + T' w), \quad (3.30)$$

mit $A = D^2 - \alpha^2$ und den Randbedingungen:

$$w^1(\pm 1) = 0, \quad w^2(\pm 1) = 0, \quad D w^1(-1) = D w^2(1) = 0; \quad (3.31)$$

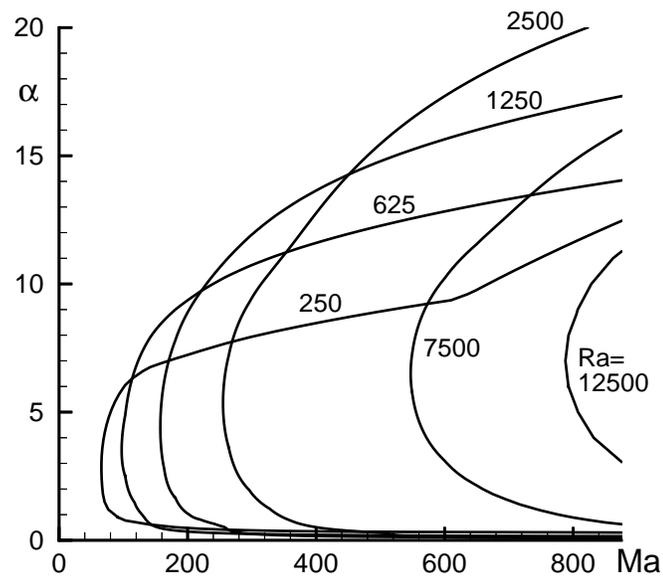
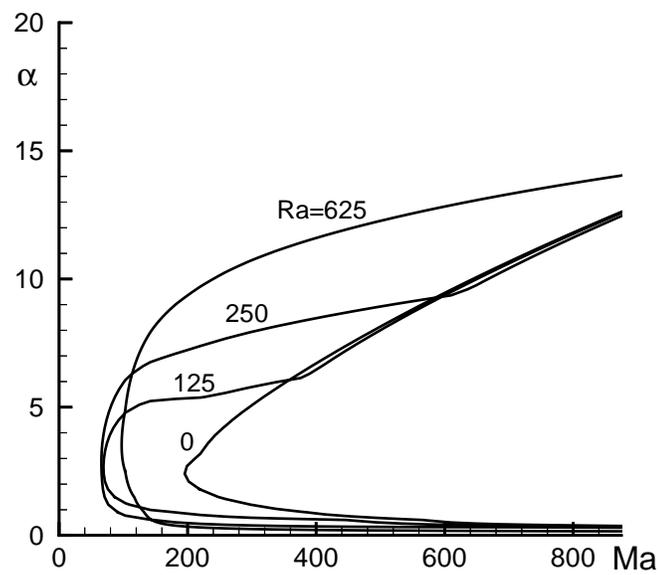
$$D w^1(0) = D w^2(0), \quad D^2 w^1(0) - \gamma_\nu \gamma_\rho D^2 w^2(0) = -Ma \alpha^2 \Theta^1(0); \quad (3.32)$$

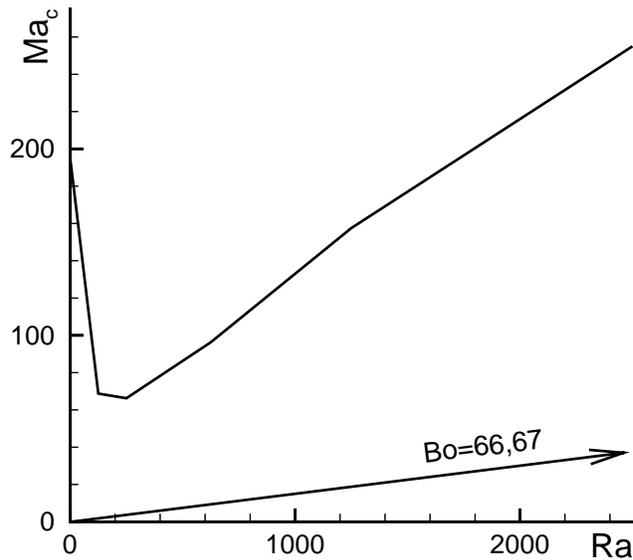
$$\Theta_z^1(-1) = 0, \quad \Theta^2(1) = 0, \quad \Theta^1(0) = \Theta^2(0), \quad D \Theta^1(0) = \gamma_\lambda D \Theta^2(0) \quad (3.33)$$

Abbildungen 3.1 und 3.2 zeigen das Stabilitätsdiagramm für die Grundströmung für verschiedene Rayleigh-Zahlen von $Ra = 0$ bis $Ra = 12500$. Es zeigt sich eine Stabilisierung für hohe Rayleighzahlen und ein Stabilitätsminimum. Dieses Stabilitätsminimum ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Dieses Minimum befindet sich im Bereich $Bo \approx 1.5$.

Dieser Bereich soll im folgenden näher untersucht werden.

In Abbildung 3.3 ist zusätzlich die Gerade $Bo = 66,7$, die ungefähr den im geplanten Experiment realisierbaren Zuständen entspricht, eingezeichnet. Ein überkritischer Zustand kann im Verifikationsexperiment nicht erzeugt werden. Diese Arbeit soll die Grundlagen liefern, um ein solches Experiment auch zur Untersuchung überkritischer (oszillativer) Zustände fundiert auslegen zu können.

Abbildung 3.1: Stabilitätsdiagramm lineare Stabilitätsanalyse $250 \leq Ra \leq 12500$ Abbildung 3.2: Stabilitätsdiagramm lineare Stabilitätsanalyse $0 \leq Ra \leq 625$

Abbildung 3.3: Kritische Marangoni-Zahl Ma_c , $0 \leq Ra \leq 2500$

3.2.3 Geschwindigkeits- und Temperaturprofile der eindimensionalen analytischen Lösung

Das in der linearisierten Stabilitätsanalyse auftretende Stabilitätsminimum muss seine Ursache in einer Änderung der Struktur der Grundströmung und der Grenzflächenkopplung haben. Abbildung 3.4 zeigt die beiden Grenzfälle $Bo = 0$ und $Bo \rightarrow \infty$. Diese beiden Fälle zeigen die erwarteten gegensätzlichen Kopplungen in der Grenzfläche.

Für verschwindende Bond-Zahl zeigt sich eine rein oberflächenspannungsgradientengetriebene Konvektion mit viskoser Kopplung in der Grenzfläche. Es stellen sich zwei gegenläufige Konvektionsrollen mit hohen Geschwindigkeiten in der Grenzfläche ein. Das Geschwindigkeitsprofil zeigt in der Grenzfläche eine Diskontinuität durch das Schubspannungsgleichgewicht. Die Strömung ist symmetrisch zur Grenzfläche.

Für eine gegen unendlich gehende Bondzahl, bzw. verschwindende Oberflächenspannungskräfte, stellt sich die thermisch gekoppelte, rein auftriebsgetriebene Konvektion ein. Sie ist charakterisiert durch zwei gleichläufige Konvektionsrollen mit verschwindender Geschwindigkeit in der Grenzfläche. Die Grenzfläche kann als Isotherme betrachtet werden. Die Strömung ist punktsymmetrisch.

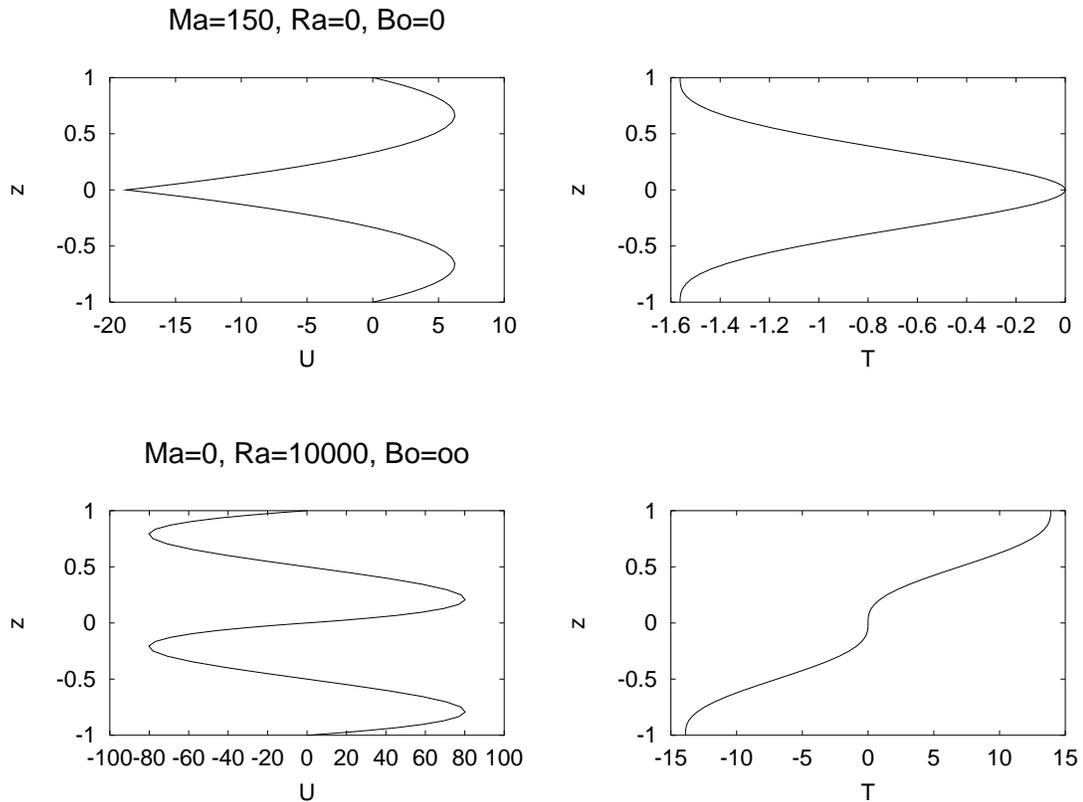


Abbildung 3.4: Geschwindigkeits- und Temperaturprofile, eindimensionale analytische Lösung $Ma = 150, Ra = 0$ ($Bo = 0$) und $Ma = 0, Ra = 10000$ ($Bo \rightarrow \infty$)

Die Abbildungen 3.5 bis 3.7 zeigen die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile für steigende Bondzahlen. Abb. 3.5a) zeigt nochmals die Ausgangsform $Bo = 0$. Bei einer Bondzahl von $Bo = 1,533$ zeigt sich an der oberen Berandung ein Wendepunkt im Geschwindigkeitsprofil (Abb. 3.5b). Für steigende Bondzahlen wandert der Wendepunkt ins Strömungsfeld, bis bei $Bo = 2,5$ ein Minimum im Geschwindigkeitsprofil entsteht. Hier macht sich der steigende Anteil des Auftriebs als in der oberen Schicht der Oberflächenkraft entgegenwirkende Kraft bemerkbar, ohne bisher eine wandnahe Rückströmung auszulösen. Für weiter steigende Bondzahlen entsteht eine zur bisherigen Hauptrolle gegenläufige auftriebsgetriebene Konvektionsrolle, die die Hauptrolle zur Grenzfläche hin verdrängt, bis diese für $Bo \rightarrow \infty$ verschwindet.

Abbildung 3.8 zeigt die Strömungskonfigurationen der eindimensionalen Grundströmung im Ma-Ra-Diagramm aufgetragen.

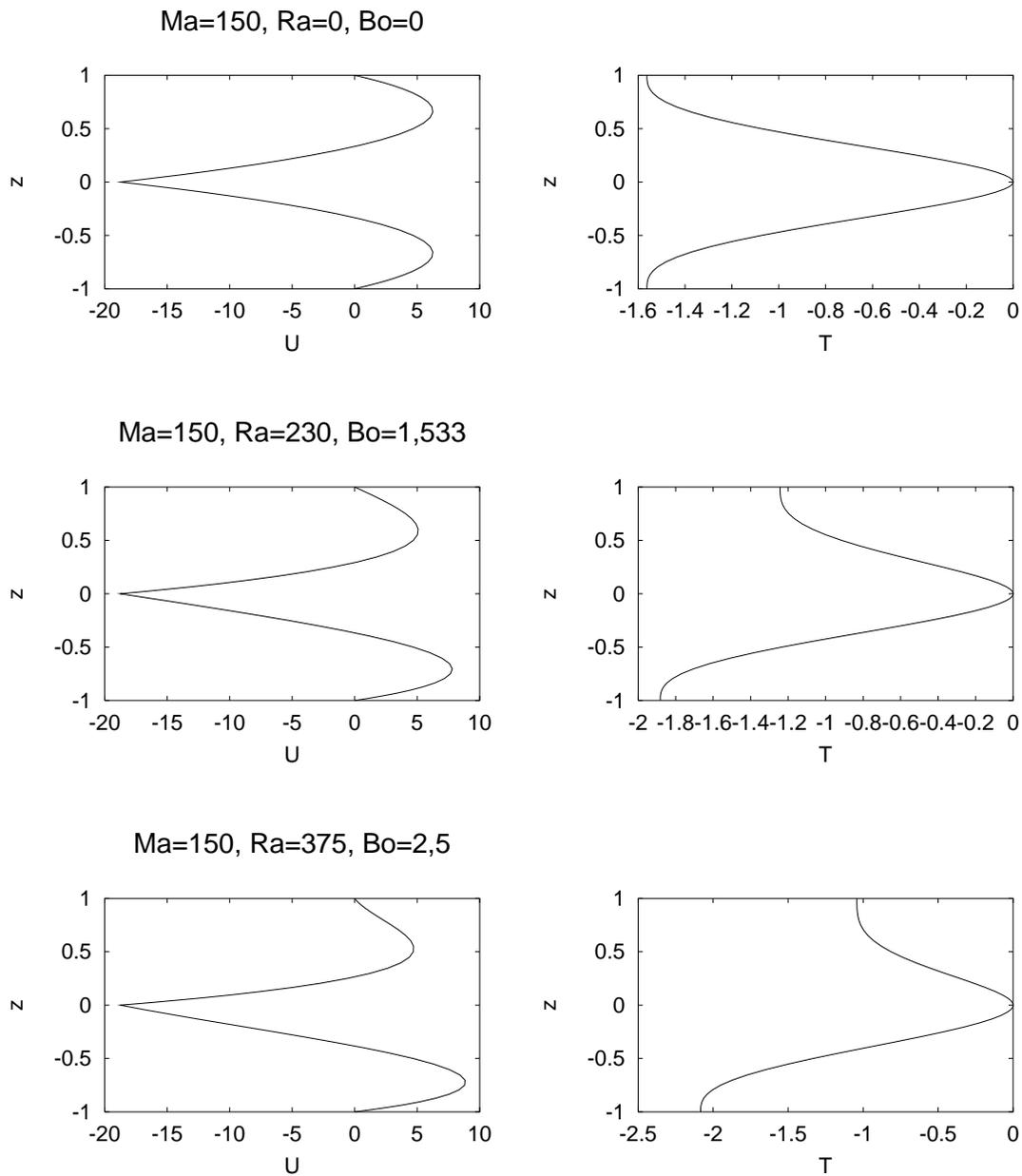


Abbildung 3.5: Geschwindigkeits- und Temperaturprofile, eindimensionale analytische Lösung $Ma = 150, 0 \leq Ra \leq 375, 0 \leq Bo \leq 2, 5$

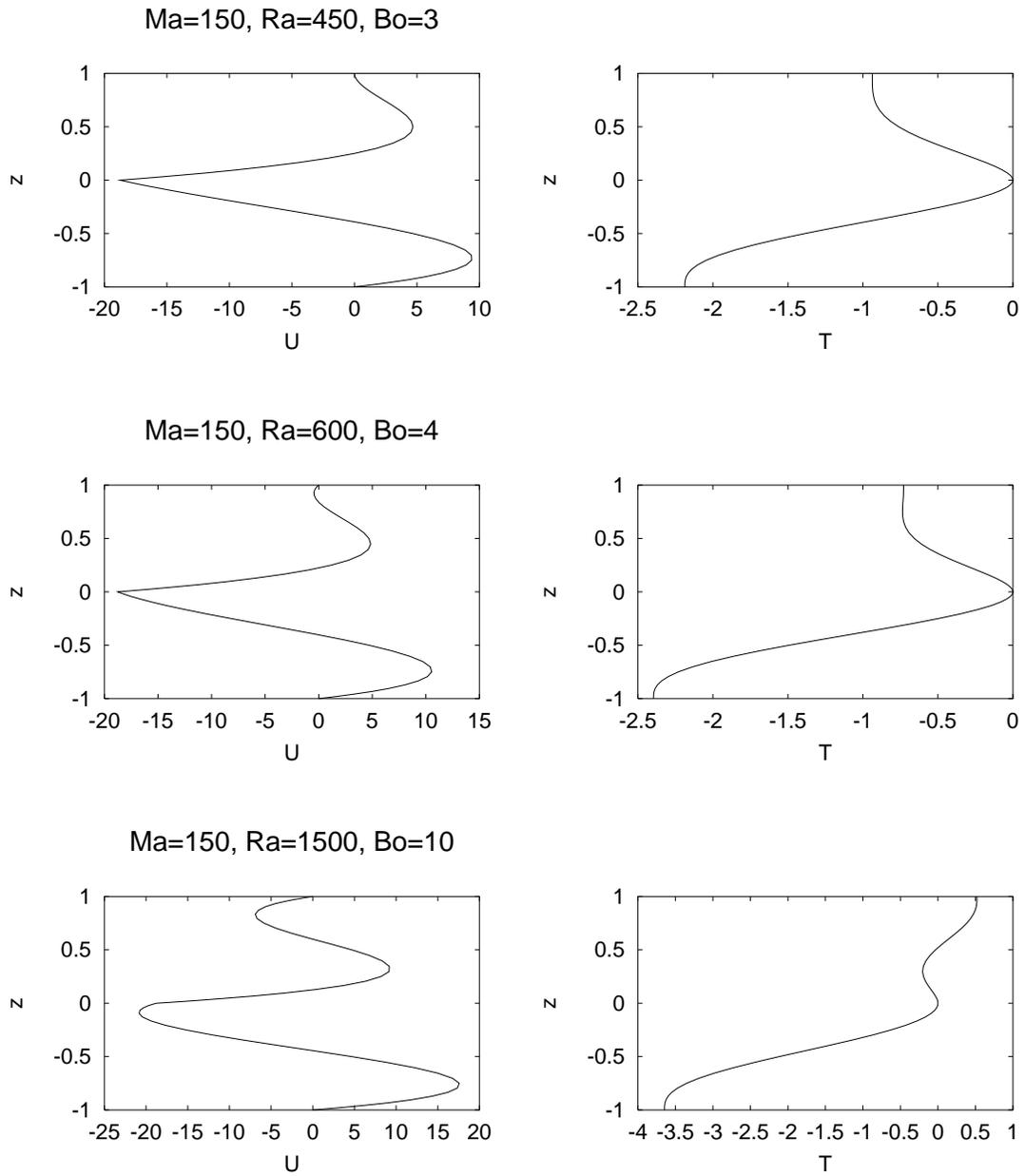


Abbildung 3.6: Geschwindigkeits- und Temperaturprofile, eindimensionale analytische Lösung $Ma = 150$, $450 \leq Ra \leq 1500$, $3 \leq Bo \leq 10$

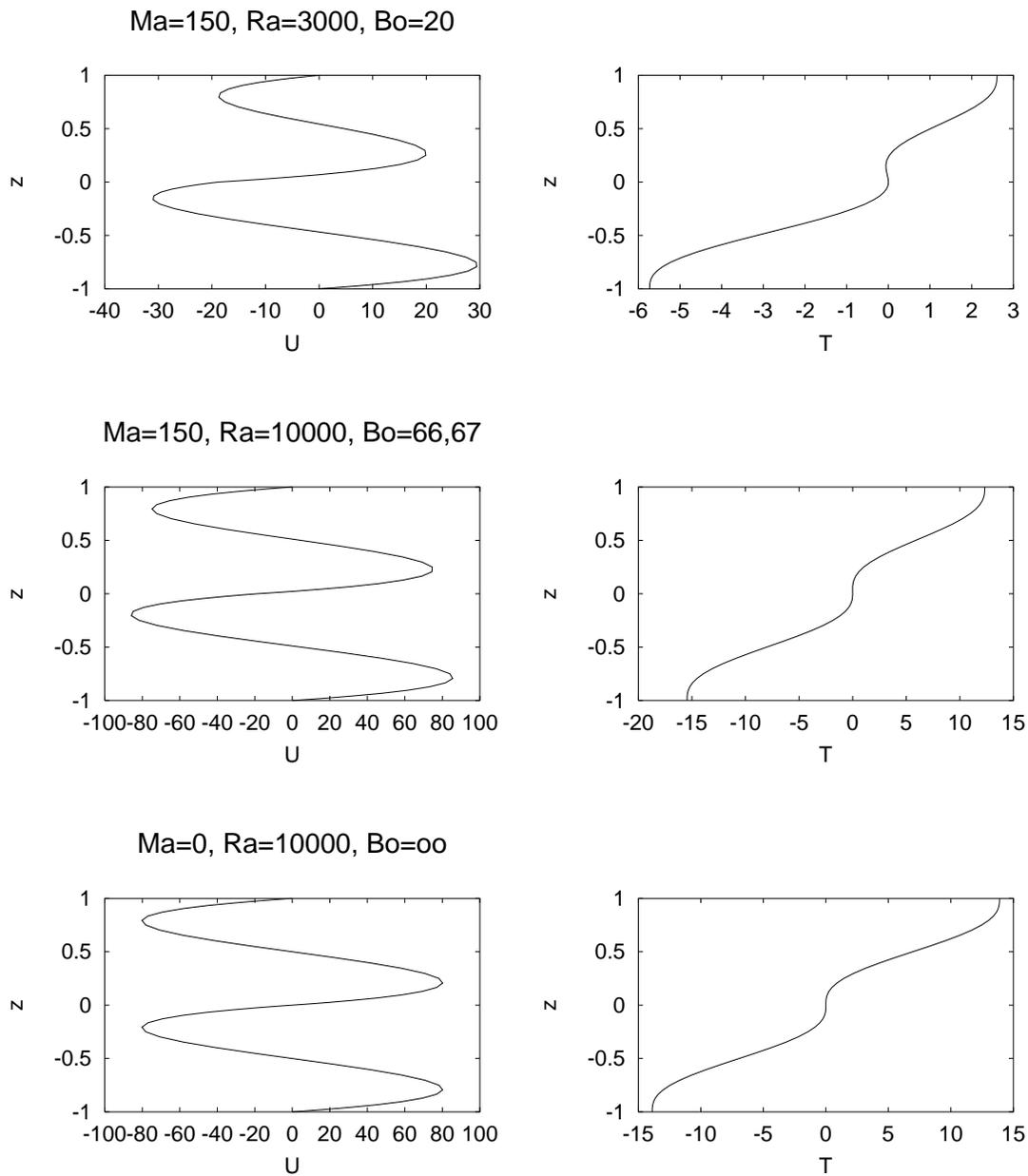


Abbildung 3.7: Geschwindigkeits- und Temperaturprofile, eindimensionale analytische Lösung $Ma = 150$, $3000 \leq Ra \leq 10000$, $20 \leq Bo \leq 66,67$ und $Bo \rightarrow \infty$

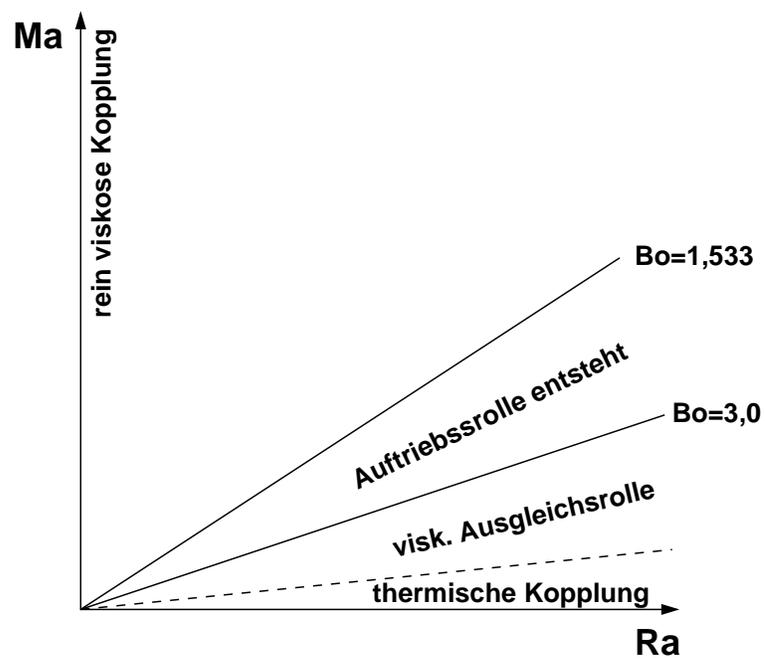


Abbildung 3.8: Strömungskonfigurationen der eindimensionalen Grundströmung in Abhängigkeit von Marangoni- und Rayleighzahl

3.3 Zwei- und dreidimensionale Strömung

Länge, Zeit, Geschwindigkeit, Druck und Temperatur in Gleichungen (3.1) bis (3.3) werden mit

$$L, \quad L^2/\nu_1, \quad k_1/L, \quad \rho_{0,1}\vartheta_1 k_1/L^2, \quad \delta TL$$

entdimensioniert. Die Entdimensionierung der Temperatur erfolgt analog zur eindimensionalen Modellierung mit dem mittleren Temperaturgradienten, obwohl der Gradient in der zwei- und dreidimensionalen Strömung nicht als konstant über x vorausgesetzt werden kann. Die in der Literatur oft vorgenommene Entdimensionierung der Temperatur mit ΔT wurde nicht übernommen, da die Stärke der konvektionstreibenden Kräfte vom Gradienten der Temperatur, und lediglich durch die Geometrie von der absoluten Temperaturdifferenz abhängt. Auf diese Weise ist eine bessere Vergleichbarkeit für Konvektionsströmungen in verschiedenen Geometrien gegeben.

Mit der Variablentransformation

$$x \rightarrow x\gamma_x - 1; \quad y \rightarrow y\gamma_y - 1; \quad z \rightarrow z\gamma_z - 1,$$

mit

$$\gamma_x = 1/2, \gamma_y = 1, \gamma_z = 2.$$

wird die Box B in

$$B_n = \{\mathbf{x} = (x, y, z): \quad x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], z \in [-1, 3]\}$$

überführt ¹

Die Strömung wird dann vom folgenden System von Gleichungen beschrieben.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{3.34}$$

$$\mathbf{v}_t = -\frac{1}{\gamma_\rho} \nabla \Pi + \gamma_\nu \Delta \mathbf{v} + \gamma_\beta RaT \mathbf{k} + \frac{1}{Pr} [\mathbf{v}, \text{rot} \mathbf{v}] \tag{3.35}$$

$$PrT_t + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \gamma_k \Delta T \tag{3.36}$$

mit den Randbedingungen:

$$\mathbf{v}(\pm 1, y, z) = \mathbf{v}(x, \pm 1, z) = \mathbf{v}(x, y, -1) = \mathbf{v}(x, y, 3) = 0 \tag{3.37}$$

$$u_1 = u_2; \quad v_1 = v_2; \quad w_1 = w_2 = 0 \tag{3.38}$$

$$-\gamma_z u_{z,1} + \gamma_z \gamma_v \gamma_\rho u_{z,2} - Ma \gamma_x T_x = 0; \quad -\gamma_z v_{z,1} + \gamma_z \gamma_v \gamma_\rho v_{z,2} - Ma \gamma_y T_y = 0 \tag{3.39}$$

¹Diese transformierten Koordinaten sind unabhängig von der realen Geometrie. Der einfacheren Vorstellung wegen werden in der Darstellung der Ergebnisse die realen Koordinaten verwendet.

$$T(-1, y, z) = 0; \quad T(1, y, z) = 1 \quad (3.40)$$

$$T_y(x, \pm 1, z) = T_z(x, y, -1) = T_z(x, y, 3) = 0; \quad (3.41)$$

$$T_1 = T_2; \quad T_{z,1} = \gamma_\lambda T_{z,2}; \quad (3.42)$$

mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (u, v, w)$ und Temperatur T , $\Pi = p + \frac{1}{2\text{Pr}}\mathbf{v}^2$ und Druck p , sowie:

$$\text{Pr} = \frac{\vartheta_1}{k_1} \quad - \quad \text{Prandtlzahl,}$$

$$\text{Ra} = \frac{L^4 g \beta_1 \delta T}{\vartheta_1 k_1} \quad - \quad \text{Rayleighzahl,}$$

$$\text{Ma} = \frac{L^2 \delta T \sigma_1}{\rho_{0,1} \vartheta_1 k_1} \quad - \quad \text{Marangonzahl,}$$

In der Bildung der dimensionslosen Kennzahlen ist ebenso der Temperaturgradient eingesetzt. Da die Dimension des Temperaturgradienten $\frac{T}{L}$ ist, sind die Kennzahlen um eine Ordnung höher von der charakteristischen Länge abhängig, als bei der häufig in der Literatur verwendeten Bildung mit der Temperaturdifferenz.

$$\sigma_{ik} = \frac{\gamma_v}{\gamma_\rho} \left(\gamma_{x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \gamma_{x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right),$$

$$\nabla = (\gamma_x \partial_x, \gamma_y \partial_y, \gamma_z \partial_z),$$

$$\Delta = \gamma_x^2 \partial_x^2 + \gamma_y^2 \partial_y^2 + \gamma_z^2 \partial_z^2,$$

$$\gamma_v, \gamma_k, \gamma_\beta, \gamma_\rho = \begin{cases} 1, & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbf{B}^1 \\ \vartheta_2/\vartheta_1, k_2/k_1, \beta_2/\beta_1, \rho_{0,2}/\rho_{0,1}, & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbf{B}^2 \end{cases}.$$

Wie bereits bei der eindimensionalen Untersuchung der Grundströmung sind auch bei der zwei- und dreidimensionalen Untersuchung $\gamma_v, \gamma_k, \gamma_\beta, \gamma_\rho = 1$ für beide Fluidschichten.

3.3.1 Numerischer Algorithmus

Die Gleichungen (3.34)-(3.42) werden räumlich mit der Pseudo-Spektralmethode integriert.

Für die Zeitdiskretisierung kommen zwei Verfahren zum Einsatz:

- Implizites Euler Verfahren erster Ordnung (A)

- Implizites Crank-Nicholson Verfahren zweiter Ordnung (B)

Die numerische Lösung basiert auf einer auf die einzelnen Schichten getrennten Polynomexpansion:

$$\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}, t)\} = \quad (3.43)$$

$$\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^P \{\hat{\mathbf{v}}_{mnp}(t), \hat{T}_{mnp}(t), \hat{\Pi}_{mnp}(t)\} \cdot T_m(x)T_n(y)T_p(z),$$

mit den Chebyshev-Polynomen $T_m(x)$, $T_n(y)$ und $T_p(z)$. Hierauf wird zur räumlichen Diskretisierung eine Kollokationsmethode mit Gauss-Lobatto-Punkten

$$\{(x_r, y_s, z_l)\} = \{(\cos(\pi r/M), \cos(\pi s/N), \cos(\pi l/P))\}, \quad (3.44)$$

mit $r \in [0, M]$, $s \in [0, N]$, $l \in [0, P]$, angewandt.

Durch die räumliche und zeitliche Diskretisierung wird das System auf ein algebraisches Gleichungssystem reduziert, das durch die Einflussmatrizenmethode [26] gelöst wird.

Eine ausführliche Beschreibung des verwendeten Algorithmus findet sich in [49, 50].

3.3.2 Zweidimensionale Simulation der Grundströmung

Es wurde die zweidimensionale Grundströmung simuliert, d.h. die Strömung in einem in y-Richtung unendlich ausgedehnten Kanal. Abbildung 3.9 zeigt Stromlinien und Isothermen für die beiden Grenzfälle $Bo = 0$ und $Bo \rightarrow \infty$, Abbildung 3.10 die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile für die Mitte der Konvektionszelle $x = x_m$ für diese beiden Fälle. Es zeigen sich die erwarteten gegensätzlichen Kopplungen in der Grenzfläche ein.

Für $Bo = 0$ ergibt sich rein oberflächenspannungsgetriebene Konvektion mit viskoser Kopplung. Es stellen sich die zwei gegenläufigen Konvektionsrollen ein.

Für $Bo \rightarrow \infty$ zeigt sich die thermisch gekoppelte, rein auftriebsgetriebene Konvektion mit zwei gleichläufigen Konvektionsrollen mit verschwindender Geschwindigkeit in der Grenzfläche.

Die Abbildungen 3.11 bis 3.13 zeigen die Stromlinien und Isothermen der zweidimensionalen Grundströmung für steigende Bondzahlen. In den Abbildungen 3.14 bis 3.16 sind die entsprechenden Geschwindigkeits- und Temperaturprofile dargestellt.

Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der zweidimensionalen Lösung der DNS mit der analytischen Lösung. Bei $Bo = 1, 533$ entsteht an der oberen Berandung ein

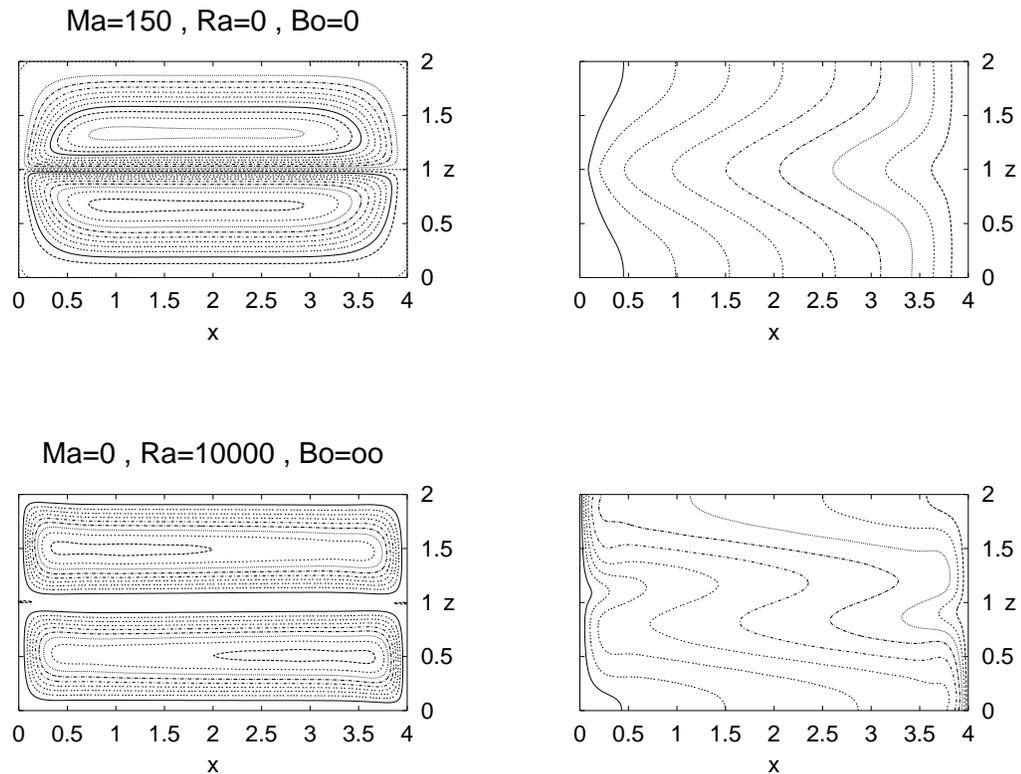


Abbildung 3.9: Stromlinien und Isothermen, zweidimensionale Grundströmung, $Ma = 150, Ra = 0$ ($Bo = 0$) und $Ma = 0, Ra = 10000$ ($Bo \rightarrow \infty$)

Wendepunkt im Geschwindigkeitsprofil, der ins Strömungsfeld hineinwandert. Bei $Bo = 2,5$ ist das Minimum an der oberen Berandung zu identifizieren. Es entsteht an der oberen Wand von den Seiten zur Mitte hin die auftriebsgetriebene Konvektionsrolle, die für steigende Bondzahlen die bisherige oberflächenspannungsgetriebene Hauptrolle zur Grenzfläche hin verdrängt, bis diese für $Bo \rightarrow \infty$ vollständig verdrängt ist.

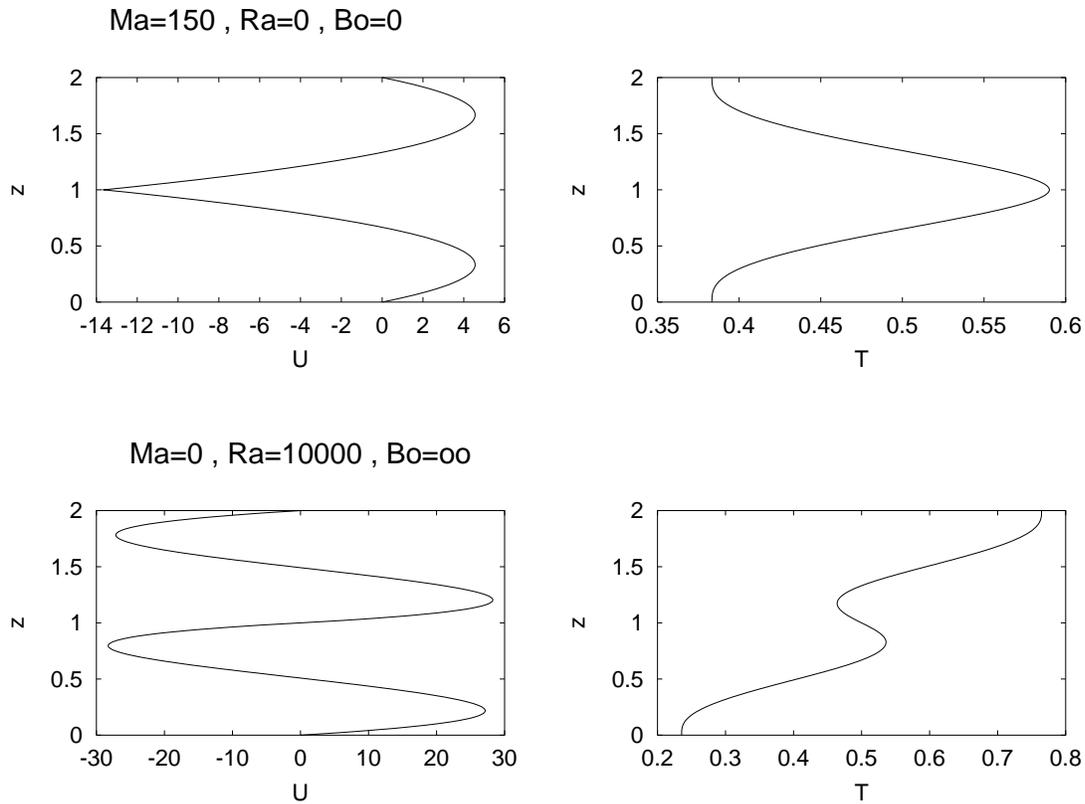


Abbildung 3.10: Geschwindigkeits- und Temperaturprofile $x = x_m$, zweidimensionale Grundströmung $Ma = 150$, $Ra = 0$ ($Bo = 0$) und $Ma = 0$, $Ra = 10000$ ($Bo \rightarrow \infty$)

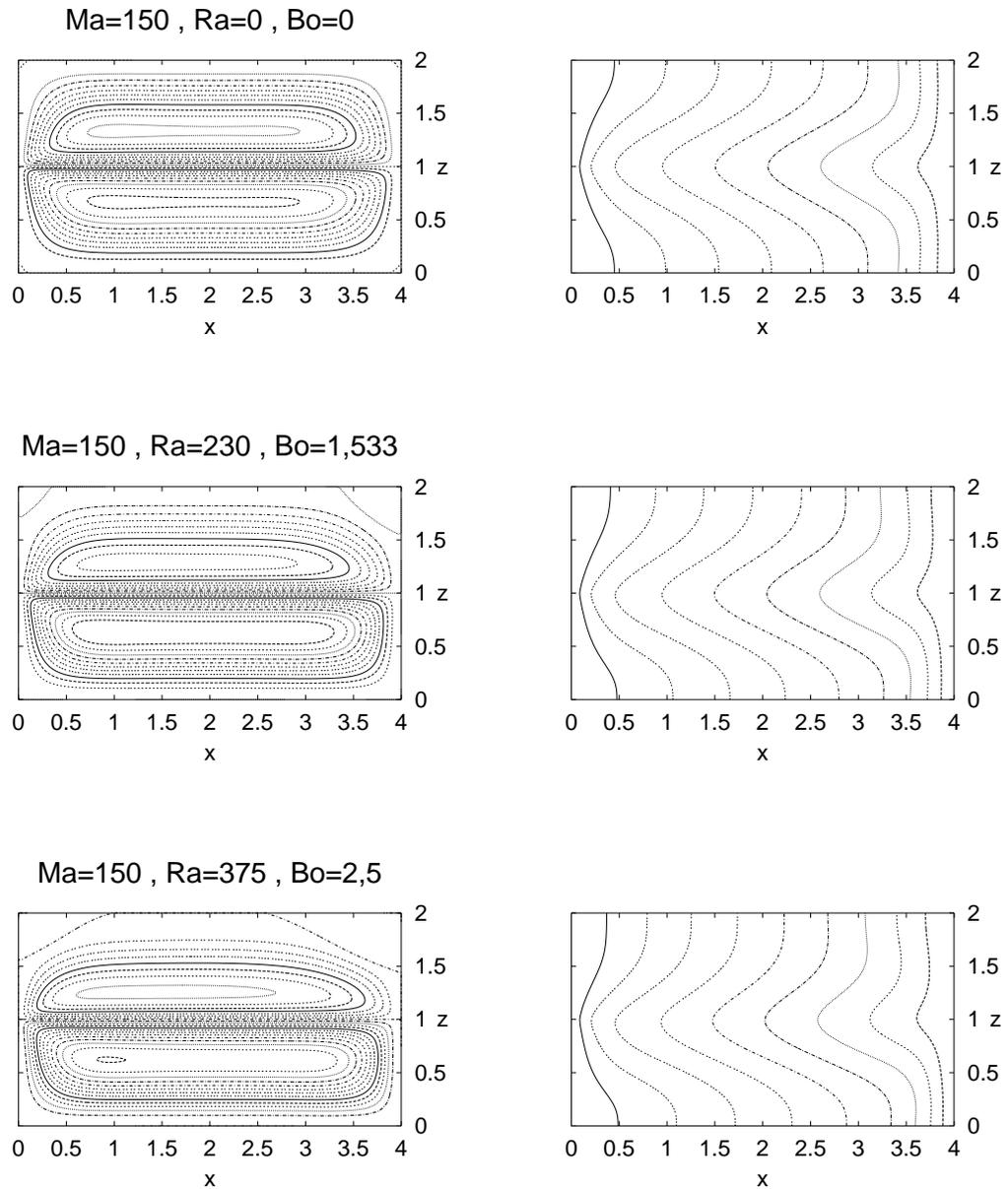


Abbildung 3.11: Stromlinien und Isothermen, zweidimensionale Grundströmung $Ma = 150$, $0 \leq Ra \leq 375$, $0 \leq Bo \leq 2,5$

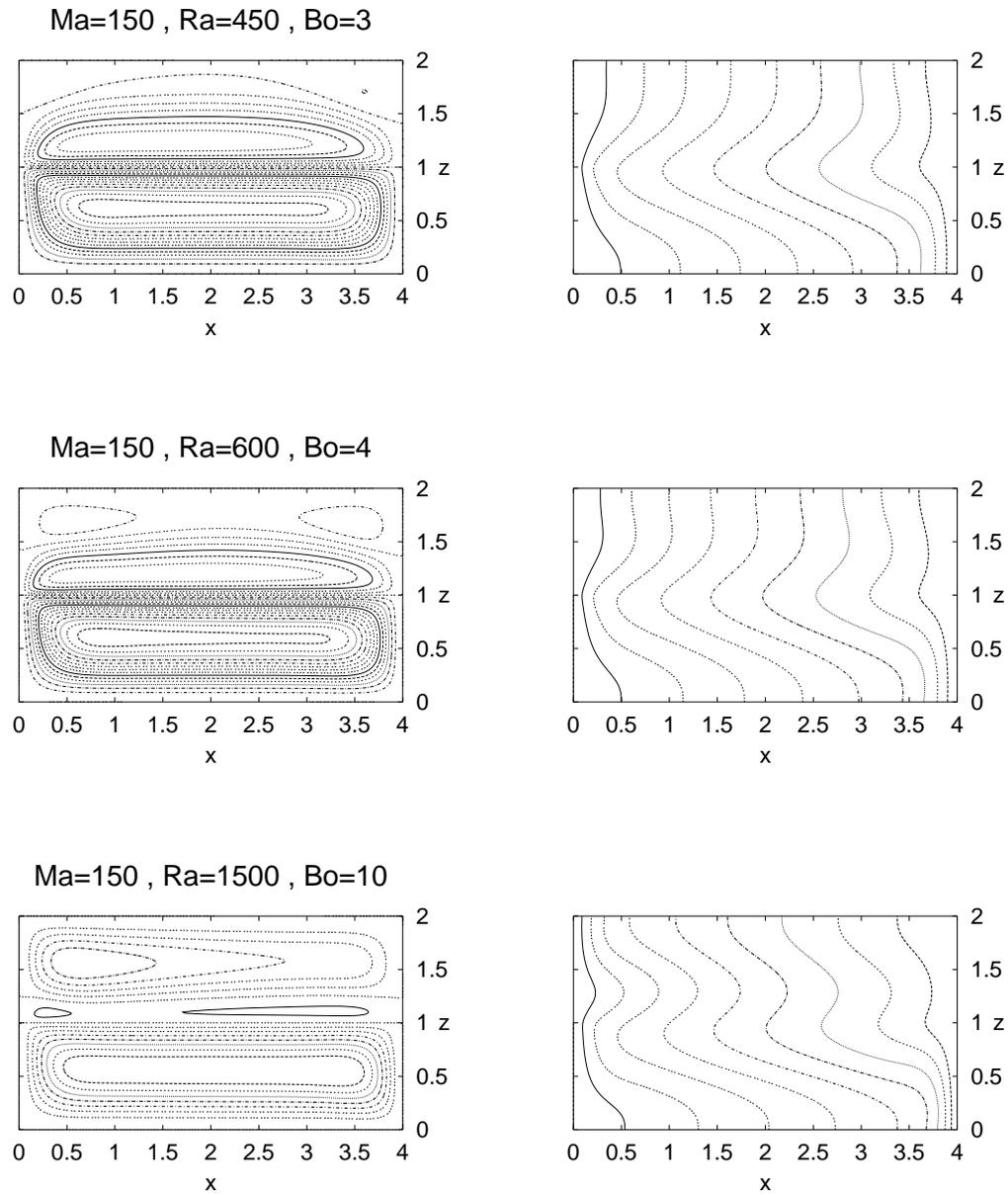


Abbildung 3.12: Stromlinien und Isothermen, zweidimensionale Grundströmung
 $Ma = 150, 450 \leq Ra \leq 1500, 3 \leq Bo \leq 10$

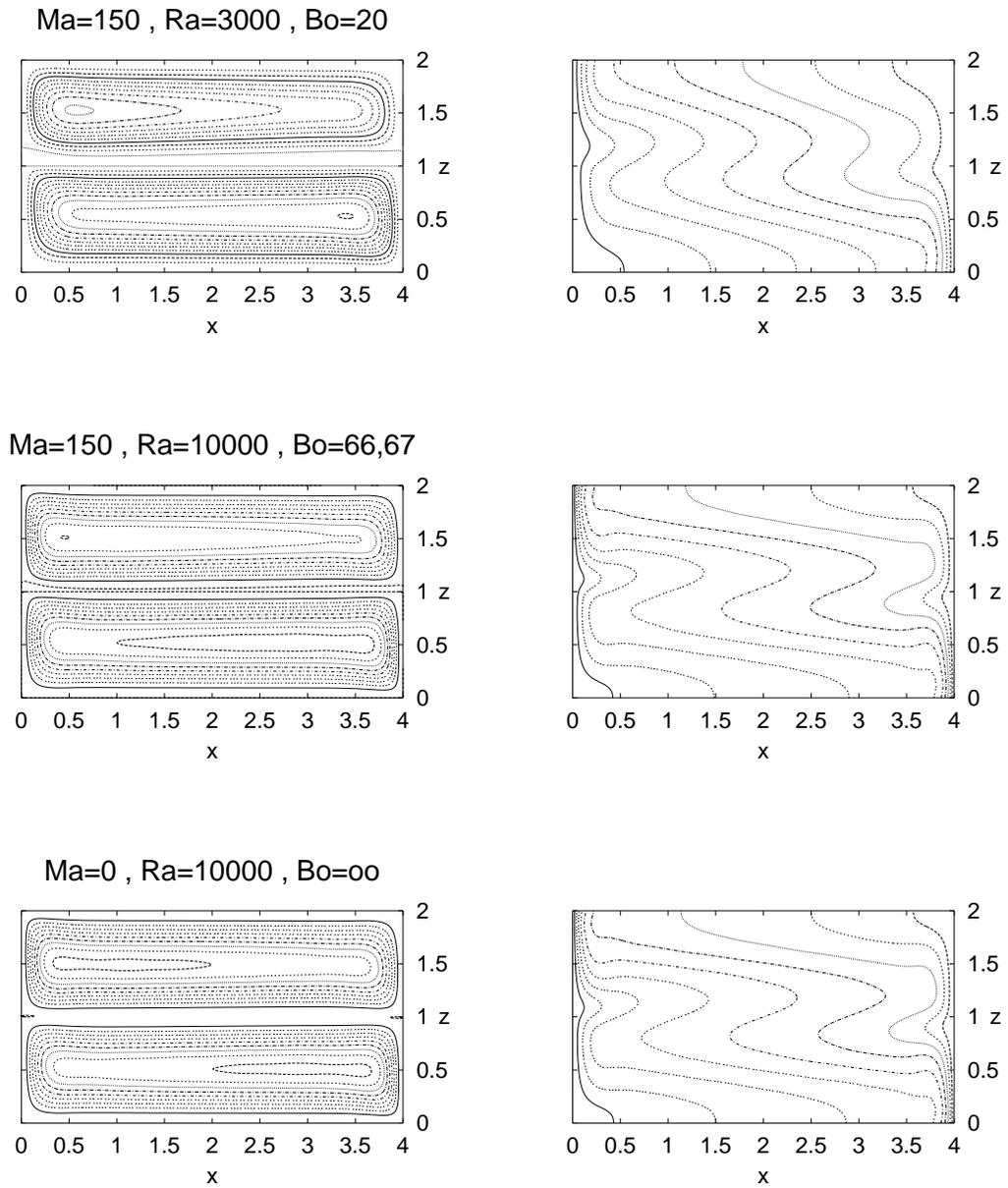


Abbildung 3.13: Stromlinien und Isothermen, zweidimensionale Grundströmung $Ma = 150, 3000 \leq Ra \leq 10000, 20 \leq Bo \leq 66,67$ und $Bo \rightarrow \infty$

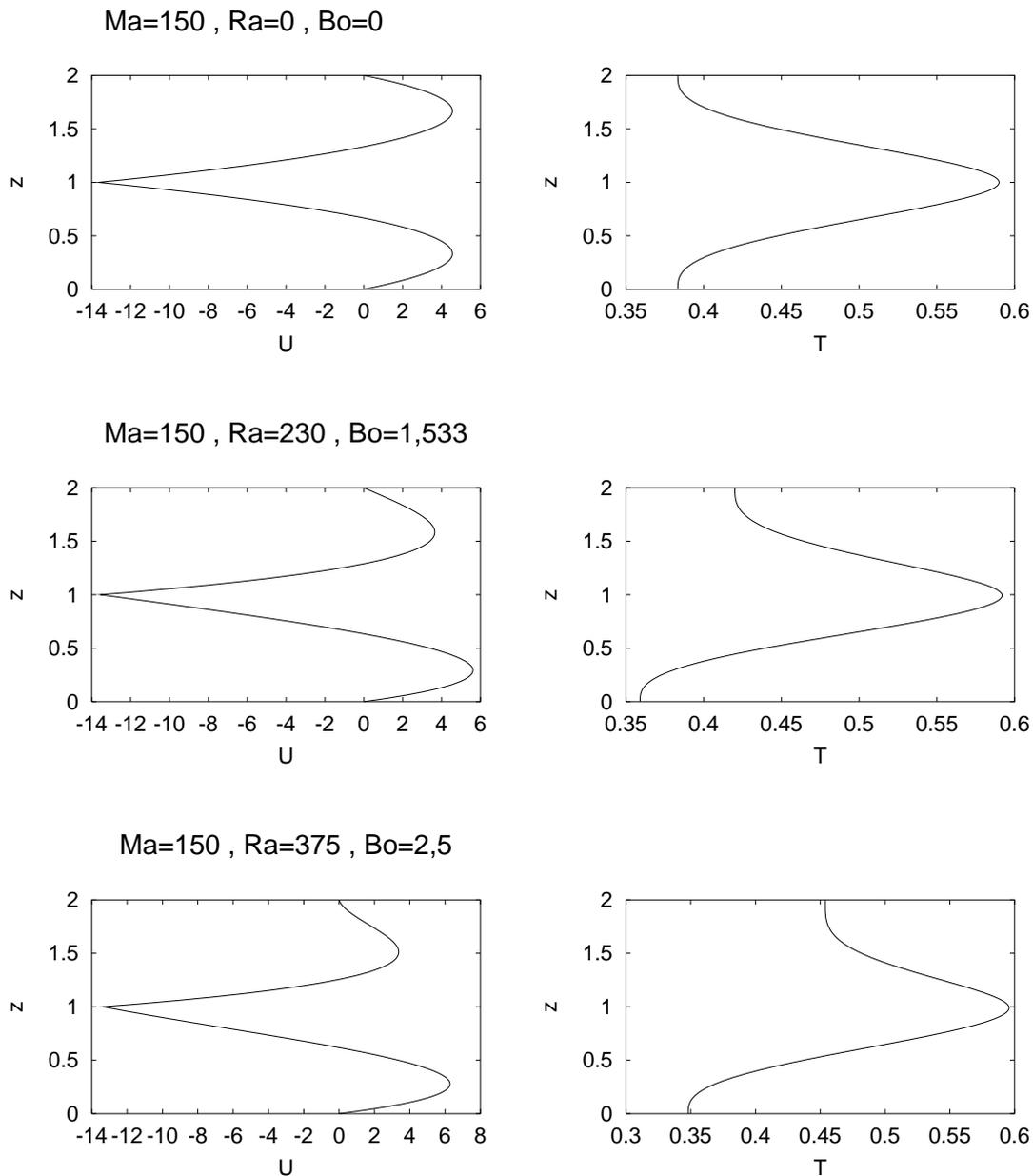


Abbildung 3.14: Geschwindigkeits- und Temperaturprofile $x = x_m$, zweidimensionale Grundströmung $Ma = 150, 0 \leq Ra \leq 375, 0 \leq Bo \leq 2,5$

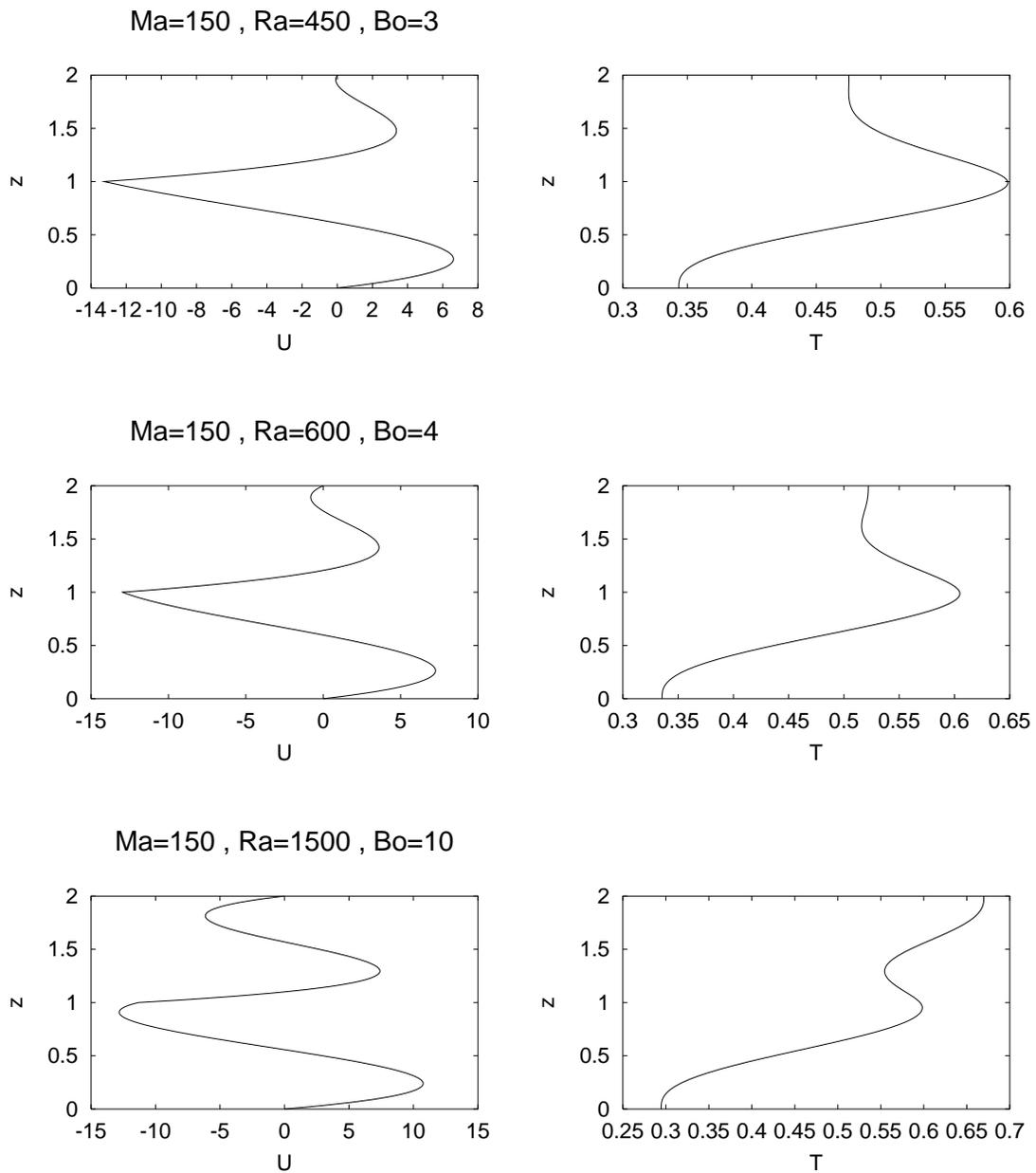


Abbildung 3.15: Geschwindigkeits- und Temperaturprofile $x = x_m$, zweidimensionale Grundströmung $Ma = 150$, $450 \leq Ra \leq 1500$, $3 \leq Bo \leq 10$

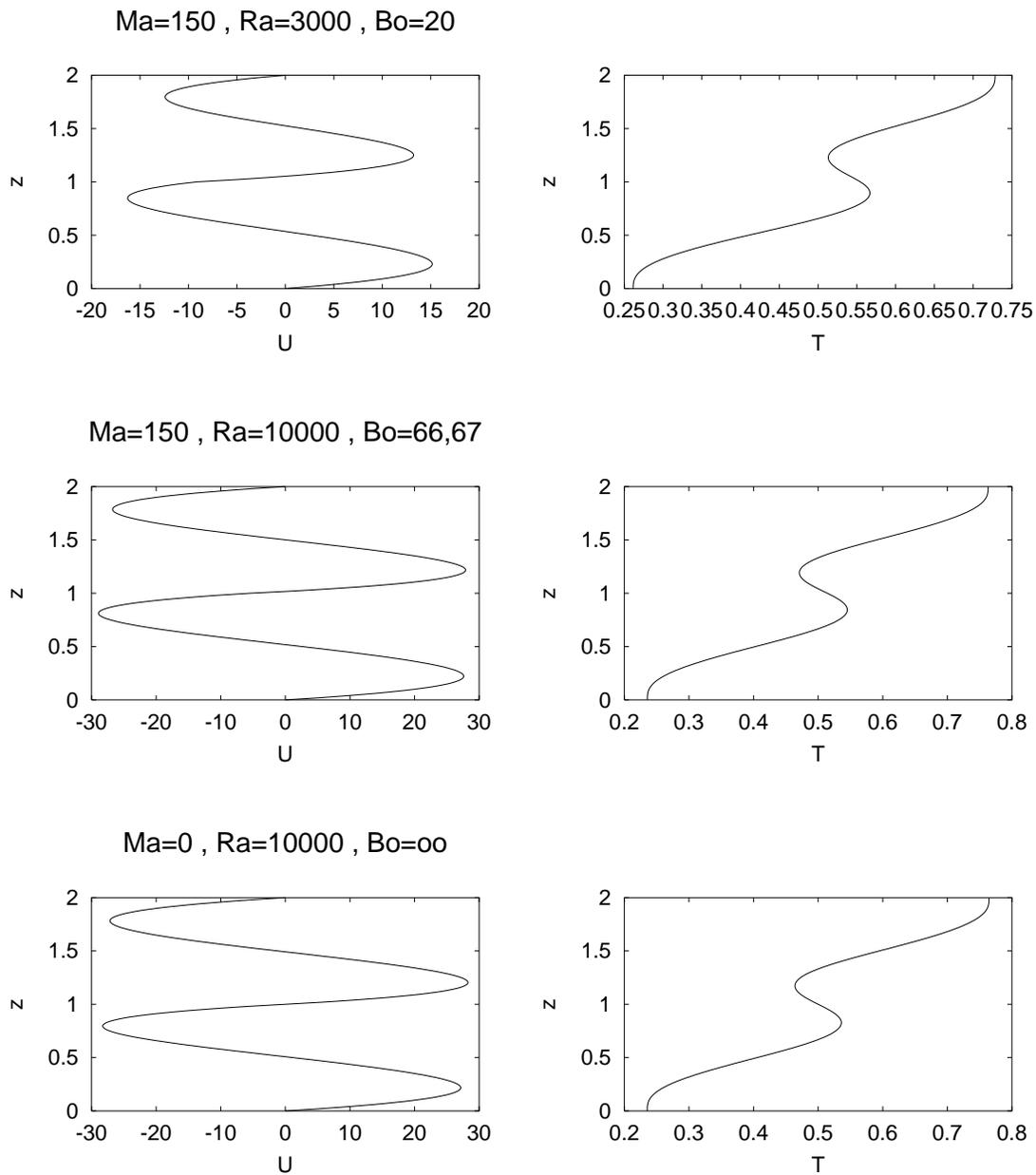


Abbildung 3.16: Geschwindigkeits- und Temperaturprofile $x = x_m$, zweidimensionale Grundströmung $Ma = 150, 3000 \leq Ra \leq 10000, 20 \leq Bo \leq 66,67$ und $Bo \rightarrow \infty$

3.3.3 Dreidimensionale Simulation der Grundströmung

Die zweidimensionale Lösung entspricht physikalisch der Strömung im Mittelschnitt $y = y_m$ eines Behälters, dessen Ausdehnung in y -Richtung deutlich größer ist, als seine Ausdehnung in x - und z -Richtung. Ein solcher Behälter ist technisch und experimentell meist nicht realisierbar. Insbesondere in Weltraumlabor ist die räumliche Ausdehnung begrenzt. Die Vergleichbarkeit einer zweidimensionalen Simulation mit experimentellen Ergebnissen ist nur bedingt gegeben, da im Experiment zum einen zusätzliche Reibung durch die Wände in y -Richtung, zum anderen dreidimensionale Ausgleichströmungen, die die Struktur der Strömung verändern, auftreten. Daher wird die Grundströmung in der dreidimensionalen Box $L_x = 2L_y = 2L_z = 4L$ simuliert.

Abbildung 3.17 zeigt Stromlinien und Isothermen für die beiden Grenzfälle $Bo = 0$ und $Bo \rightarrow \infty$, Abbildung 3.18 die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile für die Mitte der Konvektionszelle $x = x_m, y = y_m$ für diese beiden Fälle. Es ergeben sich die bereits von der analytischen und der zweidimensionalen Simulation bekannten Grenzfälle:

Für $Bo = 0$ die rein oberflächenspannungsgetriebene Konvektion mit viskoser Kopplung und zwei gegenläufigen Konvektionsrollen.

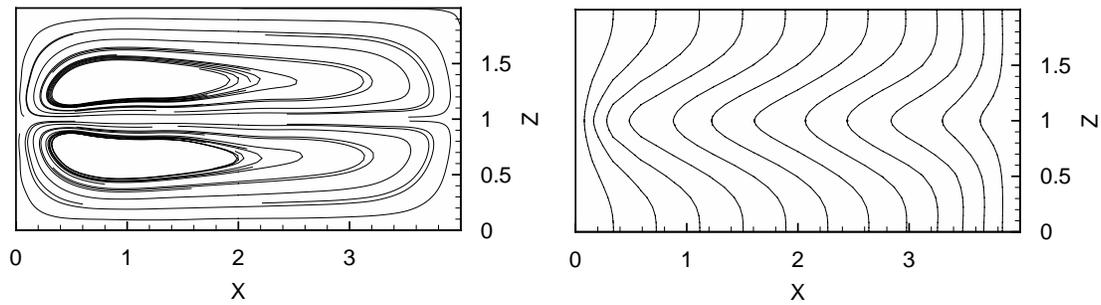
Für $Bo \rightarrow \infty$ die thermisch gekoppelte, rein auftriebsgetriebene Konvektion mit zwei gleichläufigen Konvektionsrollen und verschwindender Geschwindigkeit in der Grenzfläche.

Die Abbildungen 3.19 bis 3.21 zeigen die Stromlinien und Isothermen der zweidimensionalen Grundströmung für steigende Bondzahlen, die Abbildungen 3.22 bis 3.24 die entsprechenden Geschwindigkeits- und Temperaturprofile.

Im Vergleich mit der analytischen und der zweidimensionalen Lösung zeigt sich eine gute Übereinstimmung bezüglich der entscheidenden Bondzahlen beim Entstehen der auftriebsgetriebenen Konvektionsrolle in der oberen Schicht. Es ist jedoch im Vergleich zur zweidimensionalen eine deutliche Asymmetrie und Verschiebung in Richtung der beheizten Wand festzustellen, die durch Ausgleichströmungen in y -Richtung hervorgerufen wird. Die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile für $x = x_m, y = y_m$ zeigen nur geringfügige Abweichungen von denen der zweidimensionalen Lösung, insbesondere eine Abflachung der Geschwindigkeitsprofile im wandnahen Bereich für niedrige Bondzahlen.

Die auftriebsgetriebene Rolle entsteht in Übereinstimmung mit der zweidimensionalen Lösung mit der Entstehung des Wendepunkts an der oberen Berandung bei $Bo \approx 1,5$. Bei $Bo \approx 2,5$ ist dieser ins Strömungsfeld hineingewandert und das Minimum an der oberen Berandung entsteht. Die entstandene Auftriebsrolle verlagert sich weiter in Richtung Grenzfläche und verdrängt die oberflächenspannungsgetriebene Rolle.

$Ma=150, Ra=0, Bo=0$



$Ma=0, Ra=10000, Bo=\infty$

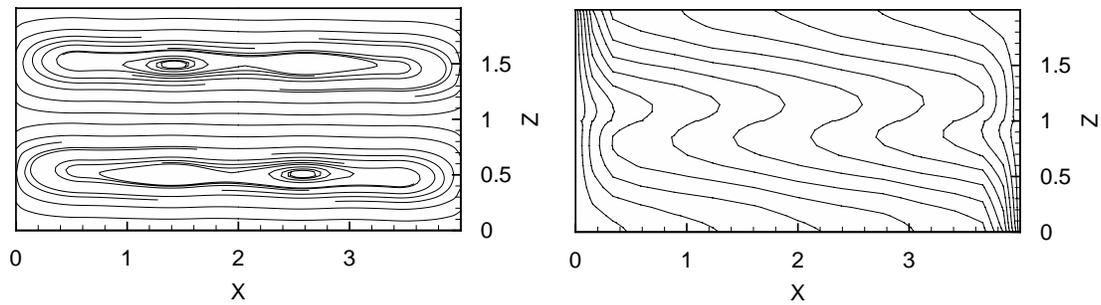


Abbildung 3.17: Stromlinien und Isothermen, dreidimensionale Grundströmung, Mittelschnitt $y = y_m$, $Ma = 150$, $Ra = 0$ ($Bo = 0$) und $Ma = 0$, $Ra = 10000$ ($Bo \rightarrow \infty$)

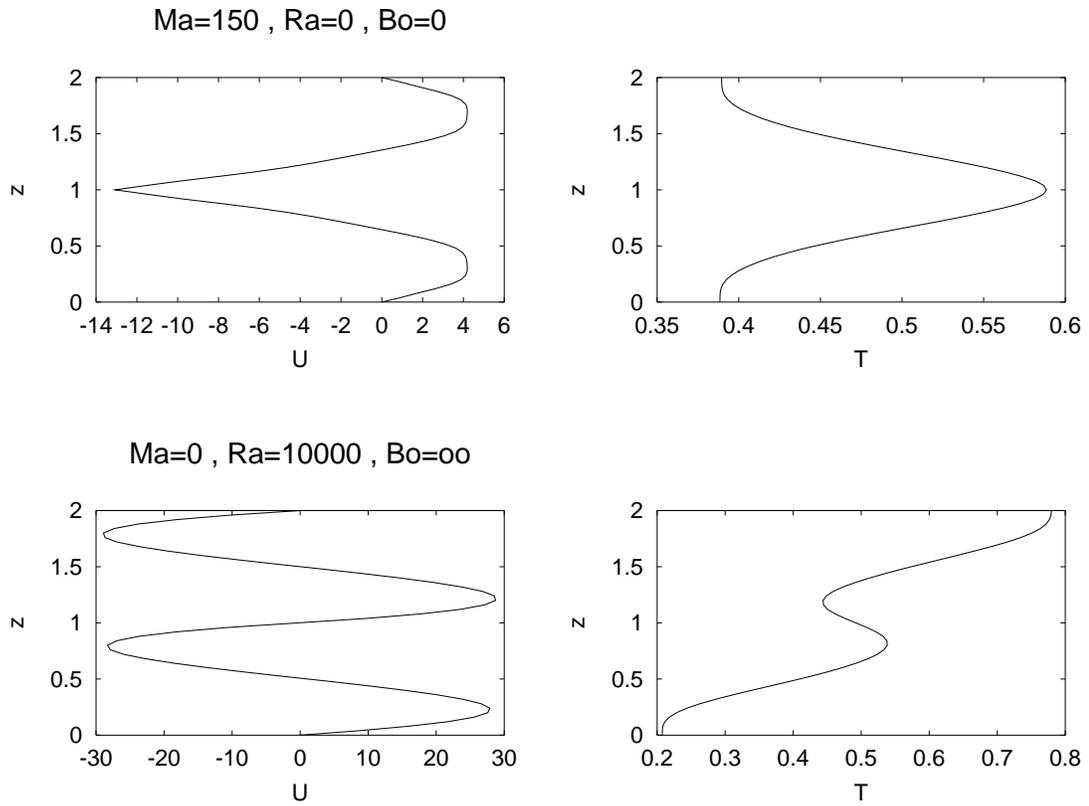
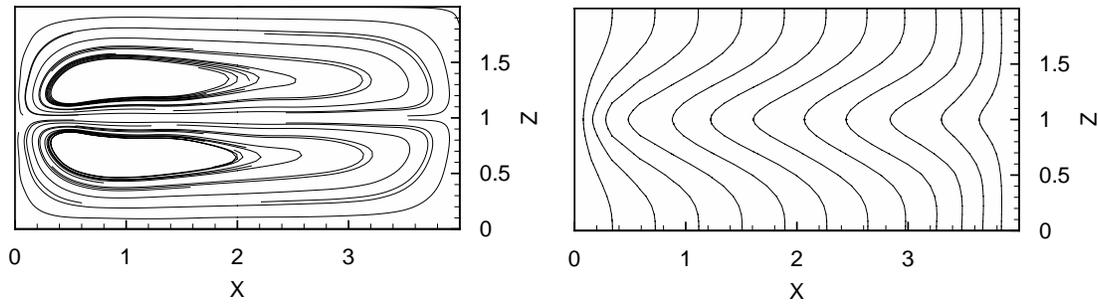
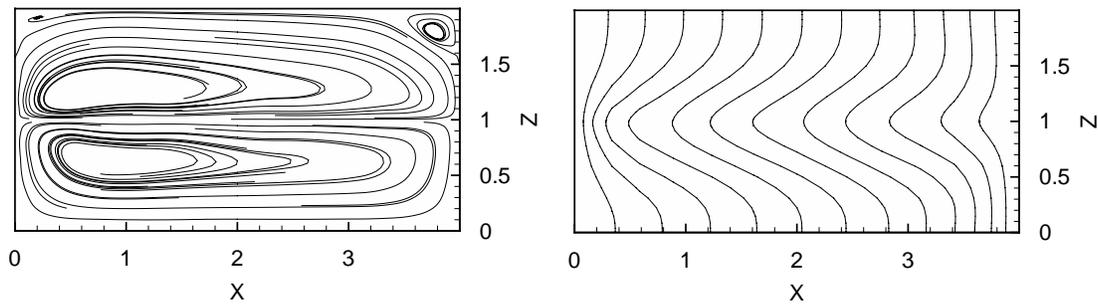


Abbildung 3.18: Geschwindigkeits- und Temperaturprofile, dreidimensionale Grundströmung, Mittelschnitt $x = x_m, y = y_m$, $Ma = 150, Ra = 0$ ($Bo = 0$) und $Ma = 0, Ra = 10000$ ($Bo \rightarrow \infty$)

$Ma=150, Ra=0, Bo=0$



$Ma=150, Ra=230, Bo=1,533$



$Ma=150, Ra=375, Bo=2,5$

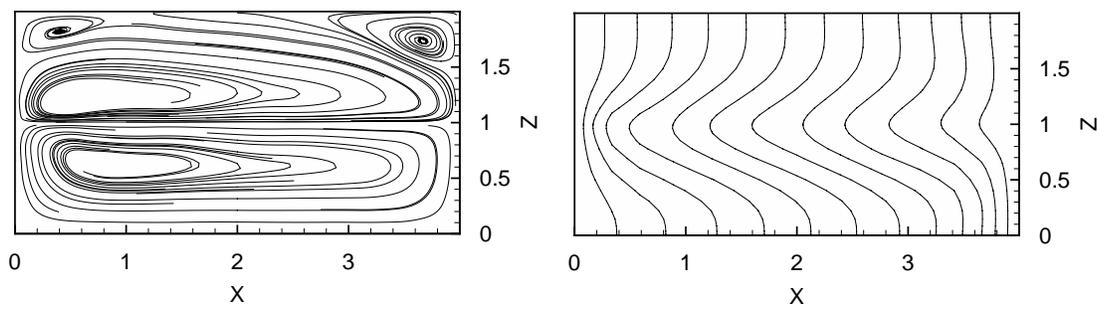
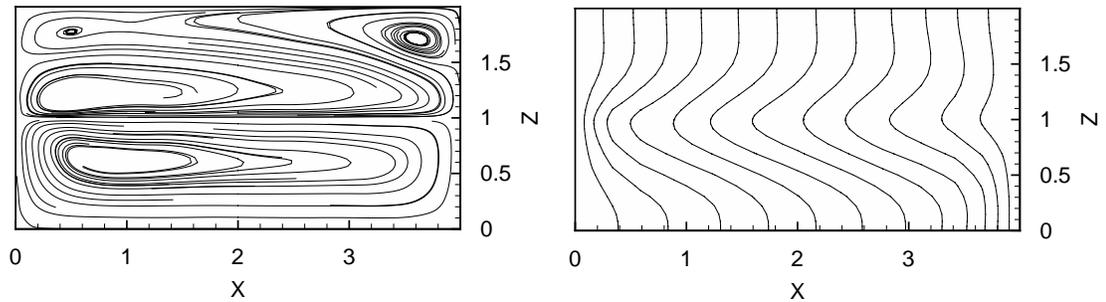
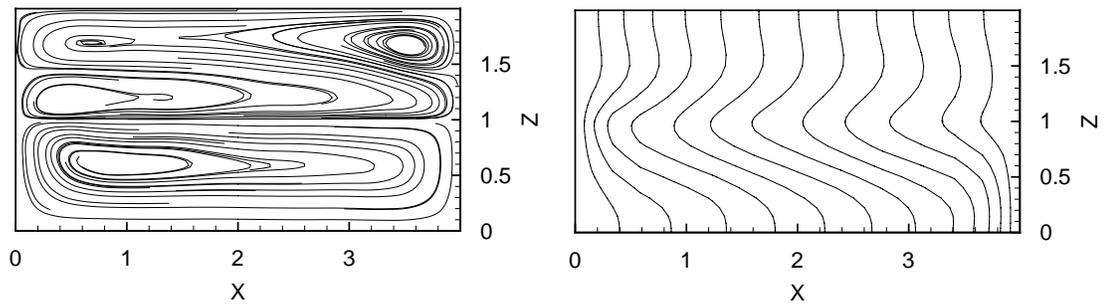


Abbildung 3.19: Stromlinien und Isothermen, dreidimensionale Grundströmung, Mittelschnitt $y = y_m$, $Ma = 150$, $0 \leq Ra \leq 375$, $0 \leq Bo \leq 2,5$

$Ma=150, Ra=450, Bo=3$



$Ma=150, Ra=600, Bo=4$



$Ma=150, Ra=1500, Bo=10$

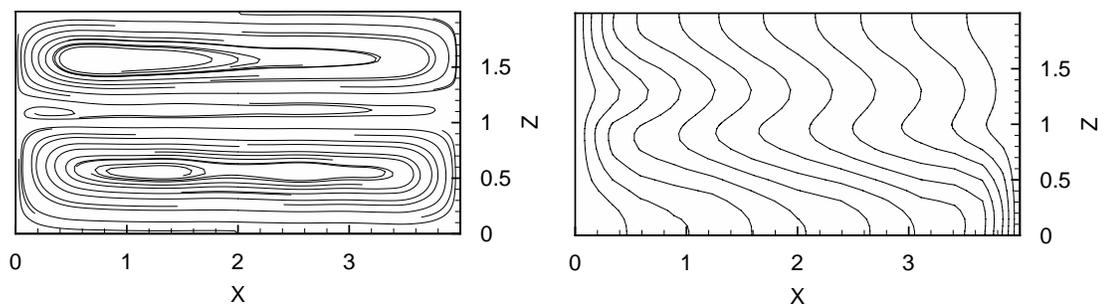
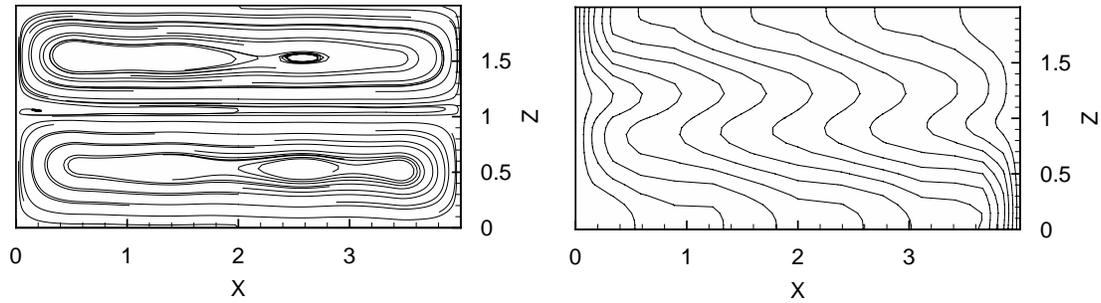
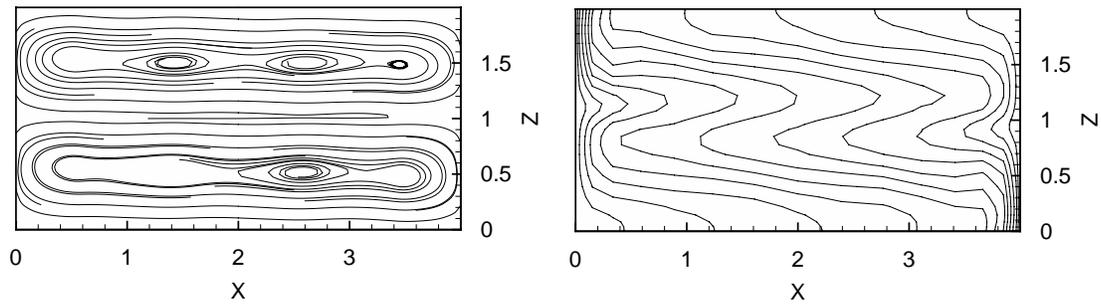


Abbildung 3.20: Stromlinien und Isothermen, dreidimensionale Grundströmung, Mittelschnitt $y = y_m$, $Ma = 150$, $450 \leq Ra \leq 1500$, $3 \leq Bo \leq 10$

$Ma=150, Ra=3000, Bo=20$



$Ma=150, Ra=10000, Bo=66,67$



$Ma=0, Ra=10000, Bo=\infty$

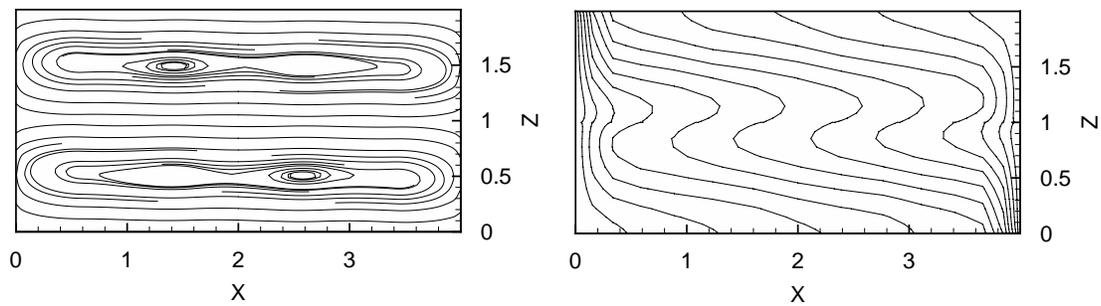


Abbildung 3.21: Stromlinien und Isothermen, dreidimensionale Grundströmung, Mittelschnitt $y = y_m$, $Ma = 150$, $3000 \leq Ra \leq 10000$, $20 \leq Bo \leq 66,67$ und $Bo \rightarrow \infty$

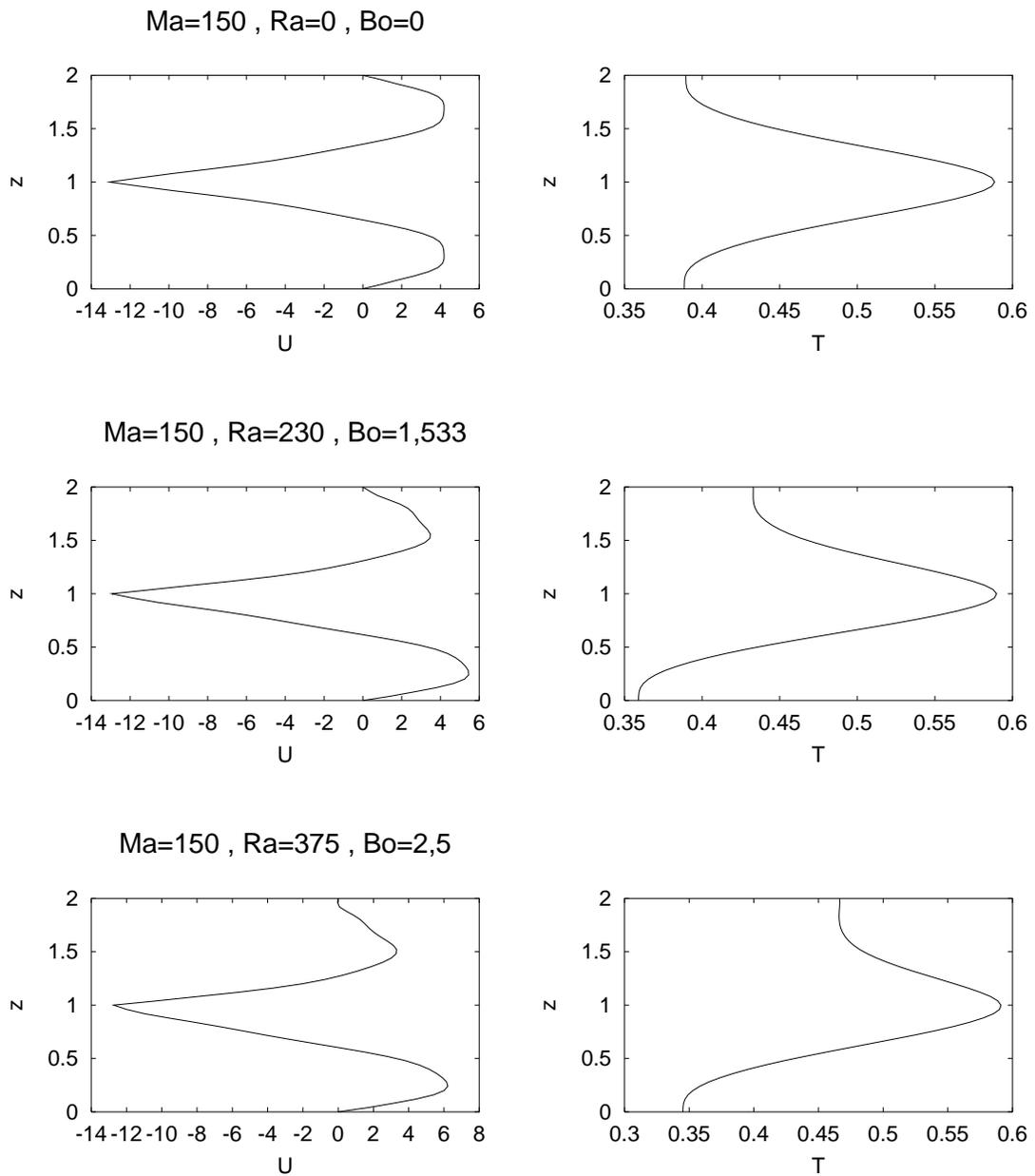


Abbildung 3.22: Geschwindigkeits- und Temperaturprofile $x = x_m, y = y_m$, dreidimensionale Grundströmung, $Ma = 150, 0 \leq Ra \leq 375, 0 \leq Bo \leq 2,5$

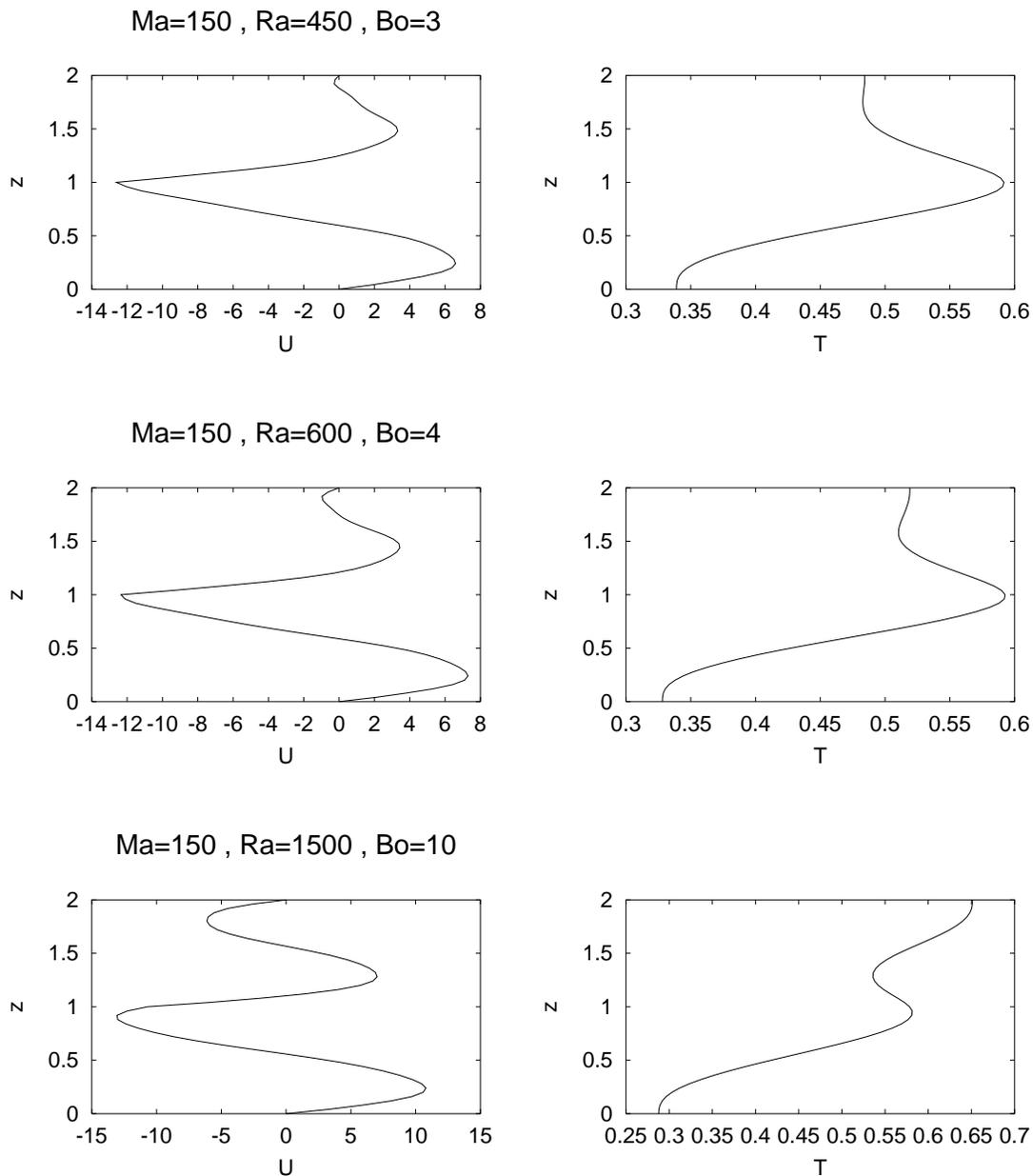


Abbildung 3.23: Geschwindigkeits- und Temperaturprofile $x = x_m, y = y_m$, dreidimensionale Grundströmung $Ma = 150, 450 \leq Ra \leq 1500, 3 \leq Bo \leq 10$

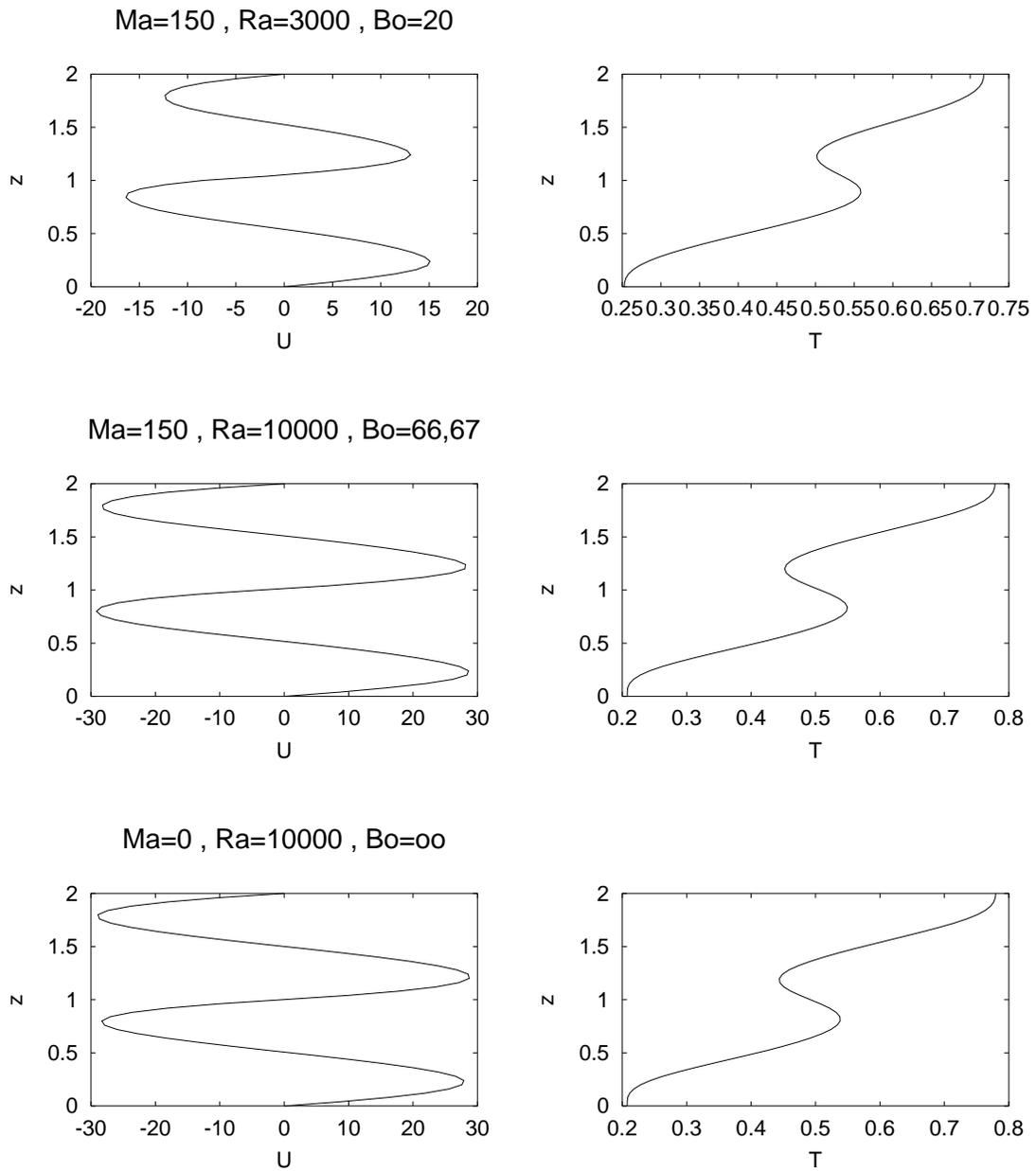


Abbildung 3.24: Geschwindigkeits- und Temperaturprofile $x = x_m, y = y_m$, dreidimensionale Grundströmung $Ma = 150, 3000 \leq Ra \leq 10000, 20 \leq Bo \leq 66,67$ und $Bo \rightarrow \infty$

3.4 Diskussion der Ergebnisse der Simulation der Grundströmung

Der Vergleich der Ergebnisse der eindimensionalen analytischen Lösung mit denen der zwei- und dreidimensionalen numerischen Simulation zeigt eine gute Übereinstimmung für die Struktur der Strömung, d.h. für die Entstehung der auftriebsgetriebenen Konvektionsrolle und die Verdrängung der oberflächenspannungsgetriebenen Rolle in der oberen Schicht für steigende Bond-Zahlen.

Die direkte Gegenüberstellung der Geschwindigkeitsprofile $u(z)$ der eindimensionalen mit den entsprechenden Profilen für $y = y_m$ und $z = z_m$ der zwei- und dreidimensionalen Lösung ergibt jedoch eine deutlich höhere Geschwindigkeit für die eindimensionalen Ergebnisse, während die Profile in der zwei- und dreidimensionalen Simulation sehr gut übereinstimmen. Diese Überhöhung ist zu groß, als dass sie alleine dem Energieinhalt der in der eindimensionalen Lösung nicht berücksichtigten u - und v -Komponenten der Geschwindigkeit zugehörig sein könnten.

Die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile der eindimensionalen Lösung sind linear von der Marangoni- und Rayleighzahl, und damit dem Temperaturgradienten $\frac{\partial T}{\partial x}$ abhängig. Der Temperaturgradient wurde für die eindimensionale analytische Lösung als konstant angenommen, was für den unendlichen Kanal zulässig ist. Die Marangoni- und Rayleighzahlen der zwei- und dreidimensionalen werden mit dem mittleren Temperaturgradienten $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\Delta T}{L_x}$, mit $L_x = 4L$ gebildet.

Die Auswertung der Temperatur $T(x, y = y_m, z = z_m)$ ergibt hohe Gradienten an den isothermen Wänden (thermische Grenzschicht) und einen dementsprechend niedrigeren Gradienten im Zentrum. Ein Vergleich der Geschwindigkeitsprofile $u(x = x_m, y = y_m, z)$ der zwei- und dreidimensionalen Ergebnisse mit der Lösung der eindimensionalen Gleichungen für $\frac{\partial T}{\partial x}$ für $x = x_m, y = y_m, z = z_m$ ergibt eine deutlich bessere Übereinstimmung.

Abbildung 3.25 zeigt diese Korrektur für den Grenzfall $Ma = 150, Ra = 0, Bo = 0$. Der mittlere Temperaturgradient ist für alle Berechnungen $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{4L} = \frac{0,25}{L}$. Der Temperaturgradient im Zentrum der Box $x = x_m, y = y_m, z = z_m$ ergibt sich aus den zwei- und dreidimensionalen Berechnungen zu $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{0,182}{L}$. Die um den Faktor $\frac{0,182}{0,25}$ korrigierte Marangonizahl ist $Ma = 109$. Für diese Marangonizahl stimmt das Geschwindigkeitsprofil der eindimensionalen Lösung mit dem der zwei- und dreidimensionalen überein.

In Abbildung 3.26 ist diese Korrektur für den entgegengesetzten Grenzfall $Ma = 0, Ra = 10000, Bo = \infty$ dargestellt. Der Temperaturgradient im Zentrum $x = x_m, y = y_m, z = z_m$ ist $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{0,10}{L}$. Hieraus ergibt sich die korrigierte Rayleighzahl zu $Ra = 4000$. Das aus der eindimensionalen Berechnung resultierende Geschwindigkeitsprofil stimmt deutlich besser mit denen der zwei- und dreidimensionalen

Simulation überein, die Abweichung liegt in der Größenordnung des Energieanteils der w -Komponente der Geschwindigkeit, die für diesen Fall höher ist, als für $Bo = 0$.

Abbildung 3.26 stellt die entsprechende Korrektur für den Fall $Ma = 150$, $Ra = 10000$, $Bo = 66,7$ dar. Es gilt das bereits für den Fall $Bo = \infty$ gesagte.

Ob diese Korrektur direkt in das eindimensionale Modell einfließen kann, d.h. ob die Dicke der thermischen Grenzschicht in direktem Zusammenhang mit dem mittleren Temperaturgradienten und dem geometrischen Verhältnis der Box steht konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht geklärt werden und soll im Rahmen einer Parameterstudie geklärt werden.

Bei der Auslegung einer Konvektionszelle ist diese Korrektur im Hinblick auf die nötigen Temperaturdifferenzen zu beachten. Unter Einbeziehung der in Kapitel 4 durchgeführten Verifikation des dreidimensionalen Codes ergibt sich aufgrund der sehr guten Übereinstimmung der zwei- und dreidimensionalen Lösung im Mittelschnitt $y = y_m$ die Möglichkeit die zu erwartende Grundströmung mit der eindimensionalen Analytik abzuschätzen, und die notwendigen Korrekturen anhand der zweidimensionalen Lösung vorzunehmen. Die aufwändige dreidimensionale Simulation ist lediglich zur Bestimmung eventueller Sekundärstrukturen notwendig.

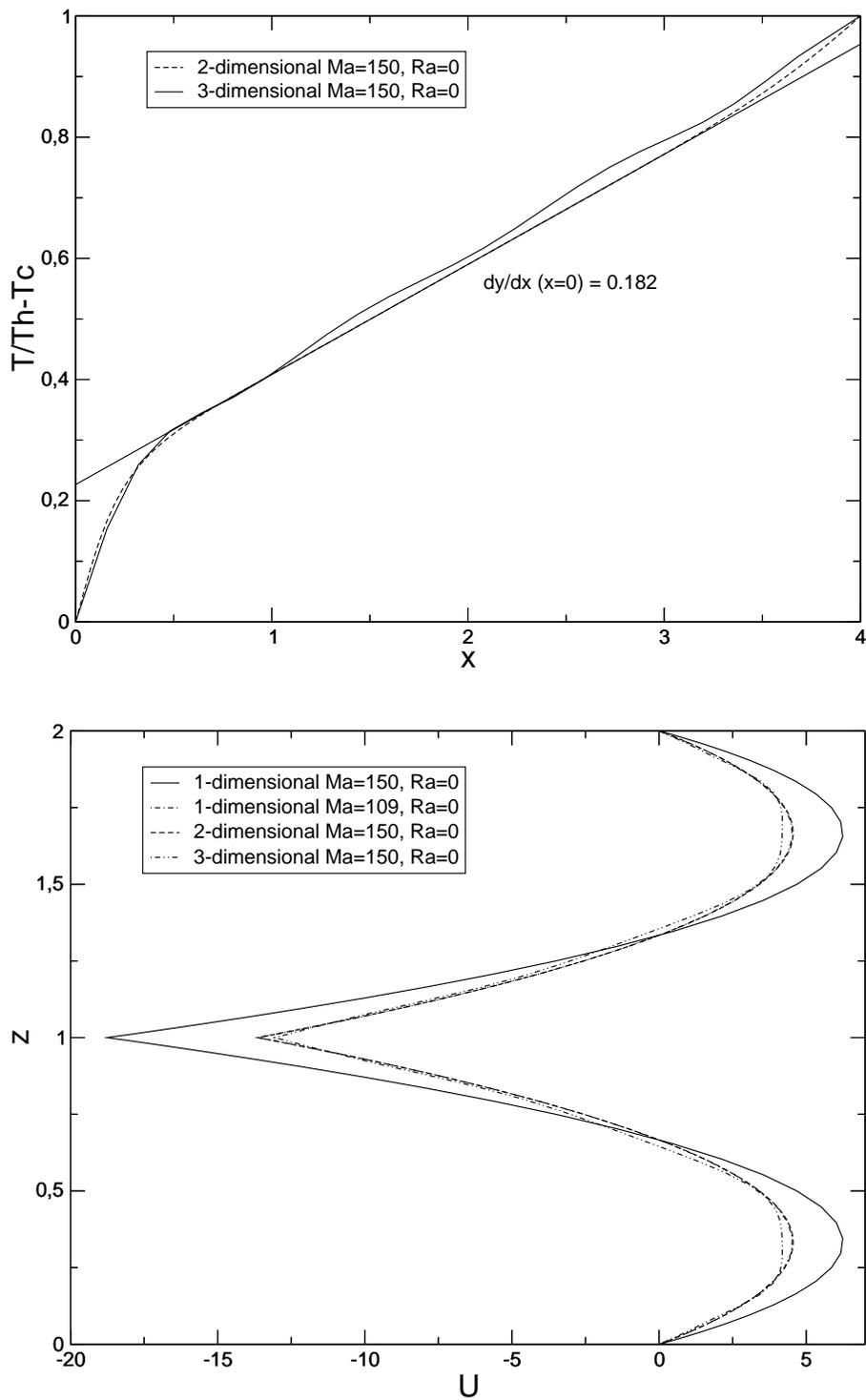
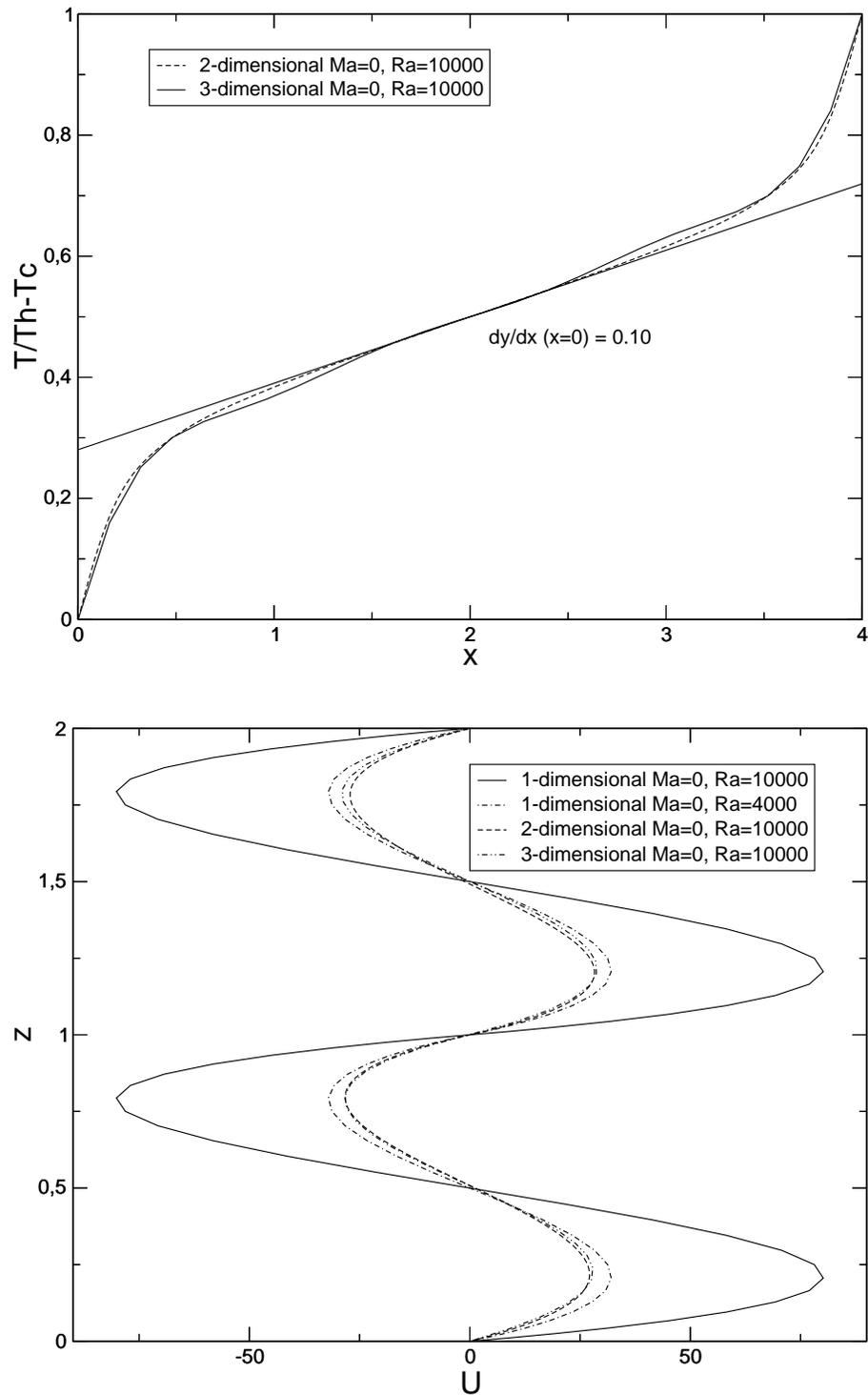


Abbildung 3.25: Korrektur der eindimensionalen Lösung, $Ma = 150, Ra = 0$

Abbildung 3.26: Korrektur der eindimensionalen Lösung, $Ma = 0, Ra = 10000$

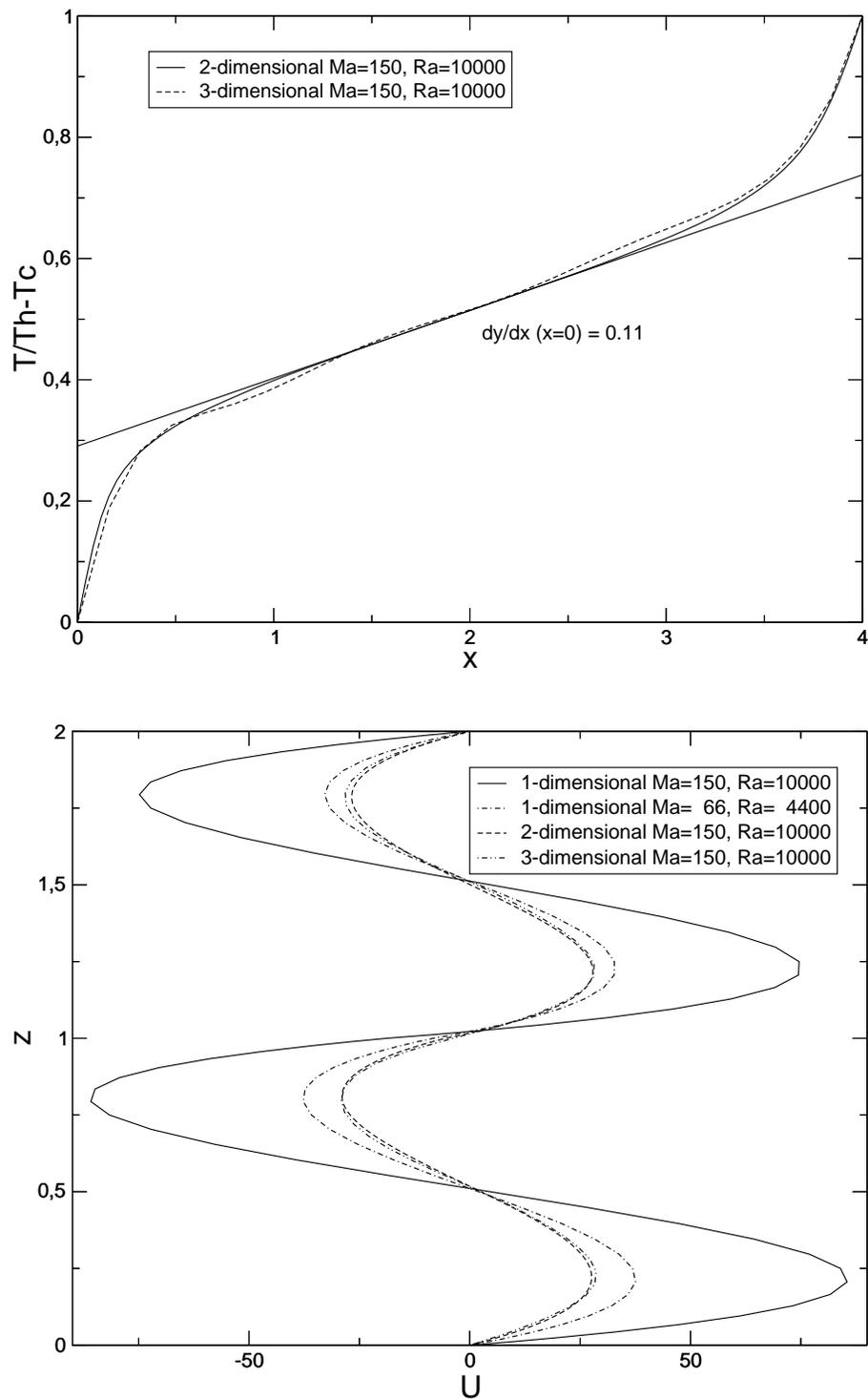


Abbildung 3.27: Korrektur der eindimensionalen Lösung, $Ma = 150, Ra = 10000$

3.5 Instationäres Verhalten

Die bis hierhin durchgeführten Berechnungen konzentrieren sich auf den Bereich der unterkritischen, stationären Konvektionsströmung. Die Stationarität dieser Strömungen zeigt sich zum einen im Experiment, als auch in der Simulation, die, obwohl mit zeitlicher Auflösung durchgeführt, keine zeitliche Abhängigkeit der Strömung erkennen lässt.

Instationäres Verhalten stellt sich in einer solchen stationären Strömung ein, wenn diese entweder in einen instabilen Zustand kommt, oder von außen lokal gestört wird. Im ersten Fall wird die stationäre thermische Konvektion in ein Regime der oszillativen Instabilität eintreten [55, 35, 33], im zweiten wird die lokale Störung mit einer für die betrachtete Strömung charakteristischen Dämpfungsrate abklingen.

3.5.1 Stabilität der zweidimensionalen Grundströmung

Die linearisierte Stabilitätsanalyse liefert für gegebene Rayleighzahl eine kritische Marangonizahl. Für eine Marangonizahl oberhalb dieser kritischen Marangonizahl wird aus der stationären Konvektionsströmung eine instationäre, oszillierende Strömung. Für fast alle Instabilitäten [10, 35, 55, 33] ist die, aus der linearisierten Stabilitätsanalyse gewonnene, kritische Kennzahl deutlich kleiner als die aus numerischen Simulationen für den zwei- oder dreidimensionalen Fall bzw. Experimenten gewonnene kritische Kennzahl. Es ist davon auszugehen, dass dies auch auf die in dieser Arbeit untersuchte Strömung zutrifft. Daher soll die kritische Marangonizahl für eine feste Rayleighzahl durch zeitgenaue Simulationen mit steigender Marangonizahl bestimmt werden, um daraus die gegenüber dem linearisierten Fall auftretende Überstabilität abschätzen zu können.

Die linearisierte Stabilitätsanalyse für die Konvektion im unendlichen Kanal ergibt für eine Rayleighzahl von $Ra = 10000$ eine kritische Marangonizahl $Ma_{c,1dim} = 675$ (siehe 3.2.2). Es wurden für $Ra = 10000$ Simulationen mit steigender Marangonizahl durchgeführt.

Abbildung 3.28 zeigt den zeitlichen Verlauf der Temperaturabweichung von der stationären Temperatur ($Ma = 2500$) im Mittelpunkt des Rechengebiets $x = 0, z = 1$ für die zeitgenaue Simulation der Konvektion für $Ma = 2500$ und $Ma = 2600$, Abbildung 3.29 den integralen Energiegehalt der Temperaturfluktuationen. Für eine Marangonizahl bis $Ma = 2500$ ist kein instationäres Verhalten festzustellen. Für höhere Marangonizahlen stellt sich eine oszillatorische Instationarität ein. Die kritische Marangonizahl liegt also bei $Ma = 2500$, was einer Überstabilität von Faktor 3,7 entspricht.

Werden die Kennzahlen entsprechend dem Temperaturgradienten im Zentrum der Box (Abb. 3.30) korrigiert, ergibt sich eine Rayleighzahl von $Ra = 3520$ und eine

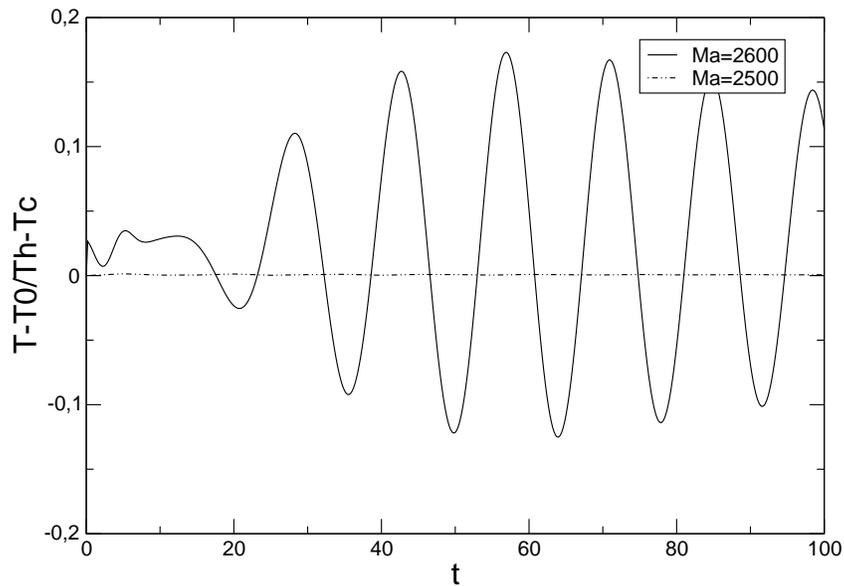


Abbildung 3.28: Temperaturabweichung $\frac{T-T_0}{\Delta T}$, $x = x_m, z = z_m$, $Ma = 2500, Ra = 10000$ und $Ma = 2600, Ra = 10000$

Marangonzahl von $Ma = 880$. Die linearisierte Stabilitätsanalyse ergibt für $Ra = 3520$ eine kritische Marangonzahl von $Ma_{cr} = 315$. Für die korrigierten Werte wird die Stabilität der Grundströmung um den Faktor 2,8 unterschätzt.

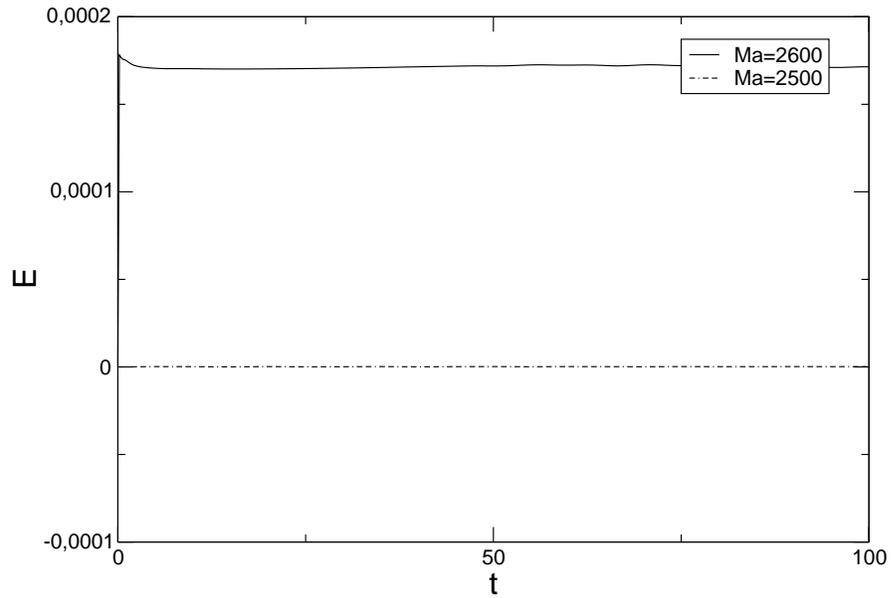


Abbildung 3.29: Energieinhalt der Temperaturfluktuationen, $Ma = 2500, Ra = 10000$ und $Ma = 2600, Ra = 10000$

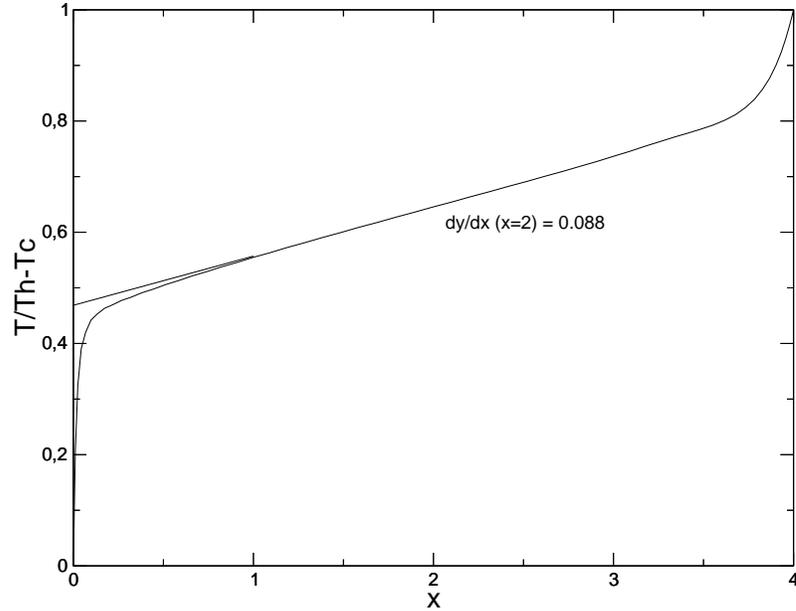


Abbildung 3.30: Temperaturprofile, $Ma = 2500, Ra = 10000, y = y_m, z = z_m$, Temperaturgradient im Zentrum der Box

3.5.2 Abklingverhalten einer lokalen Störung in der unterkritischen zwei- und dreidimensionalen Grundströmung

Für den dreidimensionalen Fall konnte im Rahmen dieser Arbeit wegen des hohen Speicherplatzbedarfs durch die hohe Anzahl an Stützpunkten, die für die Simulation nötig sind (siehe Kapitel 4.1.1), keine überkritische Strömung berechnet werden. Um diese Simulation durchführen zu können, sind Optimierungen am Code, bzw. ein Rechner mit deutlich größerem Hauptspeicher erforderlich.

Da auch im erdgebundenen Experiment aufgrund der Stabilisierung der Strömung für steigende Rayleighzahl (steigender Gravitationseinfluss) in der gegebenen Geometrie keine überkritische Strömung erzeugt werden kann, muss die Stabilität der dreidimensionalen Strömung anderweitig aus der der zweidimensionalen abgeschätzt werden.

Da das Dämpfungsverhalten eines Systems für dessen Stabilität verantwortlich ist, soll hierfür das Abklingverhalten einer lokalen Störung in der unterkritischen zwei-dimensionalen und dreidimensionalen Grundströmung verglichen werden.

Ausgangspunkt ist die zwei-, bzw. dreidimensionale Grundströmung für $Ma = 150$, $Ra = 1000$, $Bo = 66.7$, $\gamma_{\nu,k,\beta,\rho} = 1$.

An der Stelle $x = 0, y = y_m, z = y_m$, i.e. dem Mittelpunkt der heißen, isothermen Wand, wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eine räumlich und zeitlich begrenzte Temperaturstörung T_{dist} der Form

$$T_{dist} = A e^{\frac{(\Delta t)^2}{\epsilon}} \sin(\omega t) H(2\pi - \omega t) \quad (3.45)$$

mit H , der Heavyside-Funktion und ϵ , der räumlichen Ausdehnung der Störung, eingebracht.

In der unterkritischen Grundströmung wird diese lokale Störung abklingen und die Störenergie der Temperatur

$$E_T = \frac{1}{L_x L_y L_z} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} (T - T_0)^2 dx dy dz$$

auf 0 zurückgehen.

Das Abklingverhalten dieser Störenergie ist in Abbildung 3.31 dargestellt. Der Verlauf folgt der Energie der eingebrachten Periode einer sinusförmigen Welle und klingt dann schnell ab. Die dimensionslosen Parameter der eingebrachten Störung sind: $A = 0.1$, $\epsilon_z = 0.1$, $\omega = 1$. Dies entspricht einer Periode einer Sinuswelle der Frequenz $1/\omega$. Die Frequenz der Störung liegt in der Größenordnung der bei der überkritischen Strömung auftretenden Resonanz.

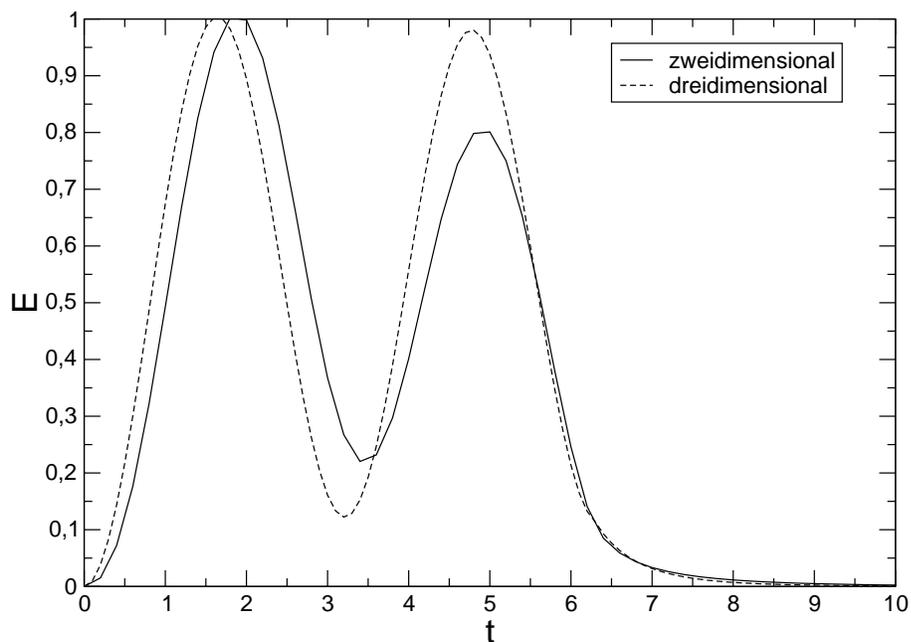


Abbildung 3.31: Abklingverhalten einer lokalen Störung, Störenergie

Der Vergleich zwischen zwei- und dreidimensionaler Simulation zeigt eine sehr gute Übereinstimmung in der Abklingzeit. Dies legt den Schluss nahe, dass die Stabilität der dreidimensionalen Grundströmung nicht maßgeblich von der zweidimensionalen abweicht.

Kapitel 4

Verifikation

Die Verifikation der numerischen Lösung erfolgt in zwei Stufen:

- Nachweis der Konsistenz der numerischen Lösung durch Vergleich mit der analytischen Lösung und der zwei- mit der dreidimensionalen numerischen Lösung (Numerische Verifikation):
 - Zweidimensionale Lösung für große Geometriefaktoren (langer Kanal) mit analytischer Lösung für unendlichen Kanal.
 - Zweidimensionale Lösung mit einem Mittelschnitt der dreidimensionalen Lösung.
- Vergleich der numerischen Lösung mit experimentellen Daten (Experimentelle Verifikation):
 - Dreidimensionale Temperaturverteilung im Experiment mit Ergebnissen der dreidimensionalen Simulation.
 - Abklingzeit einer lokalen Störung in der unterkritischen Strömung.

Eine überkritische Strömung konnte weder im Experiment, noch dreidimensional numerisch erzeugt werden, daher wird zur Verifikation der instationären Simulation die Abklingzeit einer lokal eingebrachten Störung in der unterkritischen Strömung herangezogen.

Die Berechnungen zum Vergleich mit Experimentergebnissen und des Abklingverhaltens wurden mit Experimentparametern durchgeführt (Tabelle 4.1)

$$Ma = 130, Ra = 9200, Pr_1 = 390, Bo = 70,8$$

4.1 Numerische Verifikation

4.1.1 Anzahl der Stützpunkte

Die Gleichungen werden mit einer Kollokationsmethode gelöst [49, 50, 26]. Die Genauigkeit der Lösung hängt von der Anzahl der Stützpunkte ab. Eine zu niedrige Anzahl an Stützpunkten führt zu räumlichen, in der zu niedrigen Ordnung der Lösungspolynome bedingten, Oszillationen.

Abbildung 4.1 zeigt die Temperatur-, und Geschwindigkeitsprofile der u- und w-Komponente der Geschwindigkeit für die Experimentparameter $Ma = 130$, $Ra = 9200$, $Pr_1 = 390$. Kurve 1 zeigt die Verläufe für 9 Stützpunkte in den beiden Raumrichtungen x und z, Kurve 2 für 19 und Kurve 3 für 29 Stützpunkte. Für 9 Stützpunkte sind deutliche Oszillationen zu erkennen. Für 19 Stützpunkte stellt sich eine Konvergenz ein. Für mehr als 29 Stützpunkte ist keine Änderung in den Profilen mehr festzustellen. Man erkennt außerdem, dass sich die Konvergenz für die Hauptkomponente der Geschwindigkeit (u-Komponente) deutlich schneller einstellt, als für die um über eine Größenordnung kleinere Nebenkompente.

Die Anzahl der Stützpunkte ist jedoch durch den verfügbaren Arbeitsspeicher begrenzt. Die Berechnungen dieser Arbeit wurden auf der IBM-SP2 der Rechenzentrums Karlsruhe durchgeführt. Diese Maschine stellt derzeit maximal 2 GB Arbeitsspeicher je Berechnung zur Verfügung. Für dreidimensionale Berechnungen ist die Anzahl der Stützpunkte daher auf $10 \times 10 \times 10$ begrenzt. Für die Auswertung der Hauptkomponente der Geschwindigkeit und des Temperaturfeldes ist dies ausreichend bis zu einer Rayleigh-Zahl von 15000. Eine quantitative Auswertung der Strömungsstruktur ist aufgrund der bei dieser Anzahl Stützstellen auftretenden räumlichen Oszillationen in der v- und w-Komponente der Geschwindigkeit nicht sinnvoll.

4.1.2 Vergleich 2-dimensionale numerische Lösung und Analytik

Zum Vergleich der zweidimensionalen numerischen Lösung mit der analytischen Lösung für den unendlichen Kanal wurde die zweidimensionale Konvektionsströmung in einem langen Kanal $L_x = 40L_z = 80L$ simuliert. Um eine konvergente Lösung zu erhalten, wurde diese Simulation mit den niedrigeren Werten $Ma = 75$, $Ra = 5000$, $Pr_1 = 390$ durchgeführt. Die γ -Verhältnisse entsprechen den Experimentfluiden. Die Strömungskonfiguration ist daher mit den Verhältnissen im Experiment vergleichbar. In Abbildung 4.2 sind die Geschwindigkeitsprofile im Vergleich dargestellt. Es zeigt sich eine exzellente Übereinstimmung der numerischen

Ergebnisse für den langen Kanal mit der analytischen Lösung für den unendlichen Kanal.

4.1.3 Vergleich 2-dimensionale und 3-dimensionale Numerik

Abbildung 4.3 zeigt den Vergleich der x-Komponente der Geschwindigkeit und der Temperatur im Mittelschnitt $x = x_m, y = y_m$ für die zweidimensionale und die dreidimensionale numerische Simulation. Es ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit der leichten, erwarteten Abweichung aufgrund der zusätzlichen Reibungseinflüsse der Wände in y-Richtung und dreidimensionaler Ausgleichsströmungen. Die Ergebnisse sind konsistent.

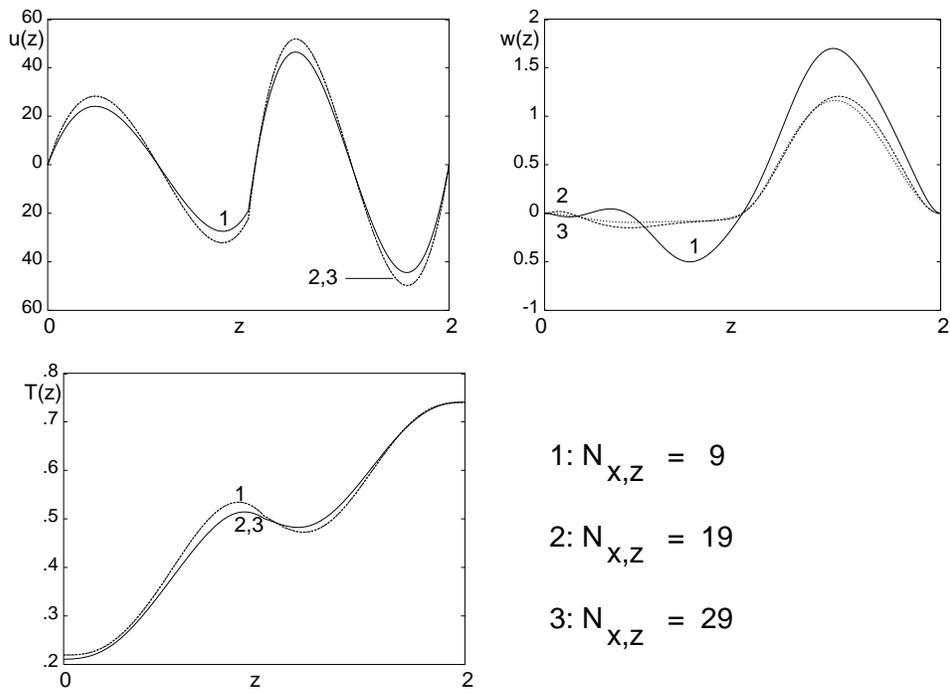


Abbildung 4.1: Konvergenzverhalten für steigende Anzahl von Stützpunkten, $Ma = 130$, $Ra = 9200$, $Pr_1 = 390$

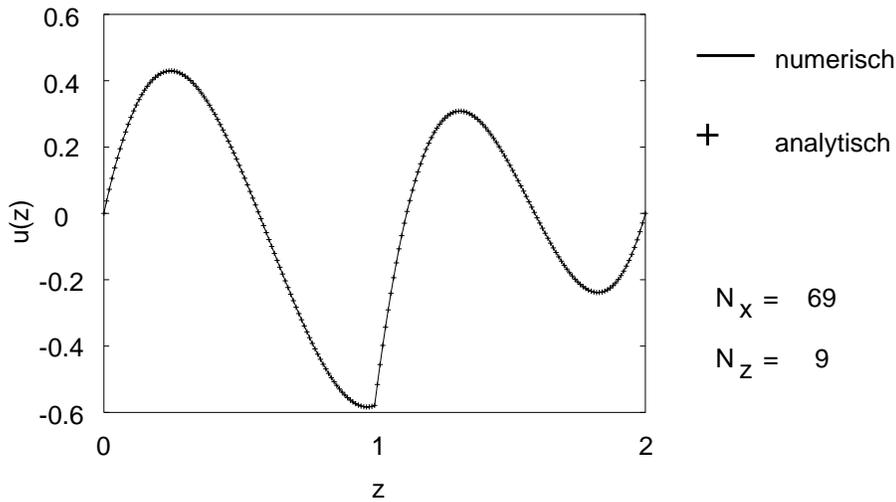


Abbildung 4.2: Vergleich zweidimensionale numerische Lösung $L_x = 40L_z = 2L$ mit analytischer Lösung, $Ma = 75$, $Ra = 5000$, $Pr_1 = 390$

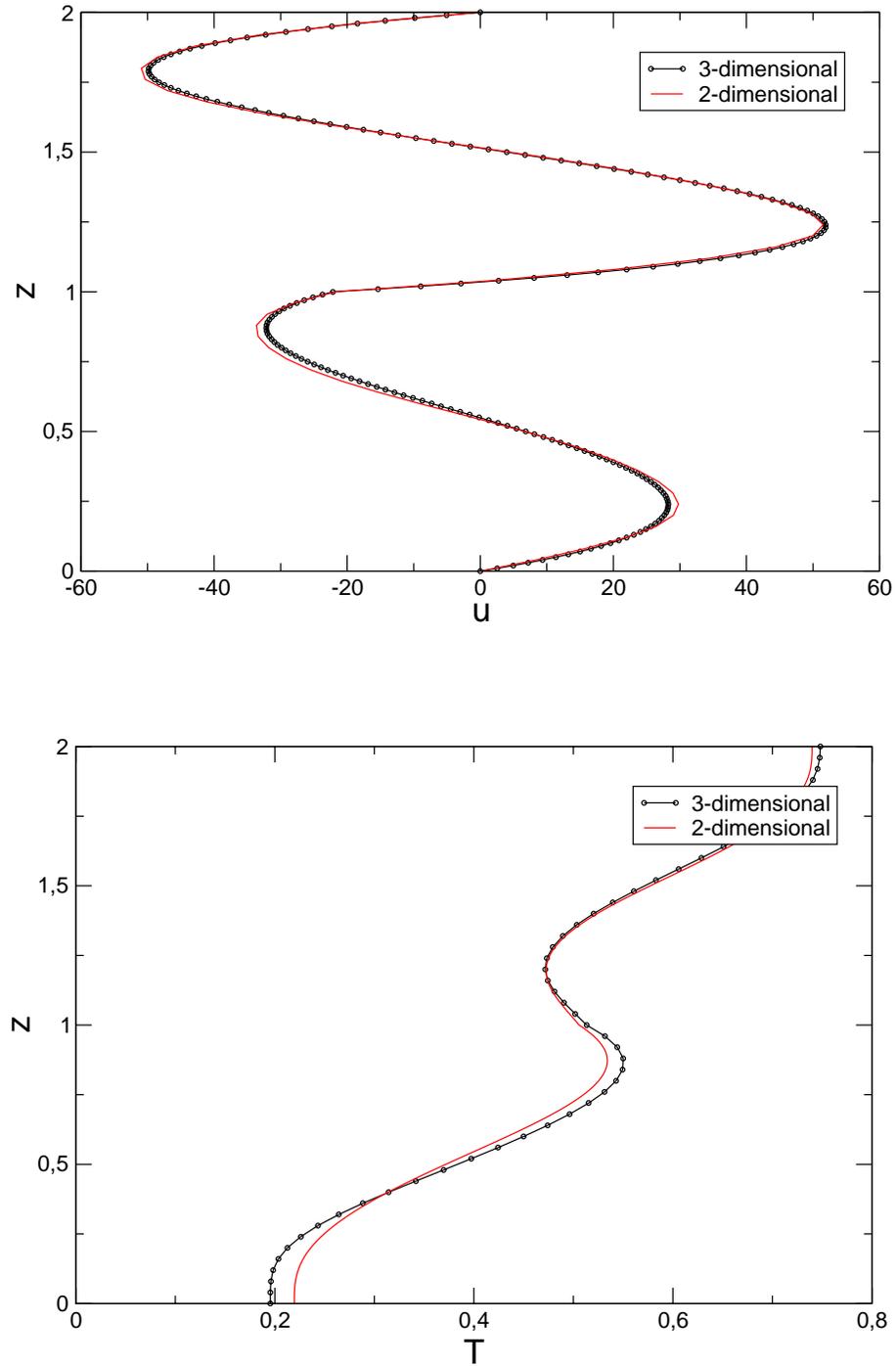


Abbildung 4.3: Vergleich zweidimensionale und dreidimensionale numerische Lösung
 $Ma = 130, Ra = 9200, Pr_1 = 390$

4.2 Konzeption des Verifikationsexperimentes

Zur Verifikation des numerischen Codes wird ein Experiment konzipiert. Da die oberflächenspannungsgetriebene Konvektion unter Schwerkrafteinfluss von Auftriebskonvektion überlagert wird, und der Code in Folgeprojekten auch für die reine oberflächenspannungsgetriebene Konvektion verifiziert werden soll, muss dieses Experiment auch unter Mikrogravitation durchführbar sein. Dieser Umstand muss bei der Konzeption des Experiments berücksichtigt werden.

4.2.1 Erzeugung der Grundströmung

Die freie Oberfläche wird nicht zwischen einer Flüssigkeits- und einer Gasphase, sondern zwischen zwei Flüssigkeiten erzeugt, da eine Fixierung der Grenzfläche mit einem kompressiblen Gas im Weltraumlabor nicht sicher, bzw. nur für geringe Schichtstärken zu erzielen ist.

Entlang der Grenzfläche wird ein Temperaturgradient angelegt. Hierzu werden zwei gegenüberliegende Kupferwände auf konstante Temperaturen $T_1 > T_2$ gebracht, diese Wände werden in der Simulation als isotherm betrachtet. Alle anderen Wände bestehen aus Quarzglas und werden im Simulationsmodell adiabat betrachtet.

Die Abmessungen des Containers betragen $4L \times 2L \times 2L$, mit der Schichtdicke $L = 10\text{mm}$. Dies ergibt eine Abmessung von $40\text{mm} \times 20\text{mm} \times 20\text{mm}$.

4.2.2 Einbringen der Störung

Um eine räumlich und zeitlich lokalisierte (*lokale Störung*) in die Grundströmung einzubringen kommen grundsätzlich zwei Prinzipien in Frage:

- Störung der Geschwindigkeit
- Störung der Temperatur

Für das Verifikationsexperiment wurde die thermische Störung gewählt, da diese messtechnisch bedingt genauer nachzuweisen ist.

Hierzu wird in der heißen, isothermen Wand ein Heizdraht in die Grenzfläche geführt, über den lokal und zeitlich begrenzt ein Störwärmefluss eingebracht werden kann.

		FC70	M10	γ_i
dynamische Viskosität	ν $\left[\frac{m^2}{s}\right]$	14.0×10^{-6}	10.0×10^{-6}	0,68
Dichte	ρ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	1930	940	0,49
kinematische Viskosität	μ $\left[\frac{kg}{ms}\right]$	2.702×10^{-2}	9.4×10^{-3}	
thermische Diffusivität	κ $\left[\frac{m^2}{s}\right]$	3.44×10^{-8}	9.51×10^{-8}	2,76
volumetrischer Ausd.koeff.	β $\left[\frac{1}{K}\right]$	1.0×10^{-3}	1.06×10^{-3}	1,06
Prandtl Zahl	Pr [1]	390	95	
Oberflächenspannung	σ $\left[\frac{N}{m}\right]$	6.9×10^{-3} [38]		
Oberflächenspannungsgradient	σ_T $\left[\frac{N}{mK}\right]$	-2.7×10^{-5} [38]		

Tabelle 4.1: Physikalische Eigenschaften der Experimentfluide bei 25°C

4.2.3 Auswahl der Experimentfluide

Im Experiment werden M3 FluorInert® FC70 und Silikonöl M10 verwendet. Diese Flüssigkeiten sind für den Einsatz an Bord bemannter Raumfahrzeuge qualifiziert. Sie wurden in Experimenten mit vergleichbarem Aufbau [12, 38] verwendet und gewährleisteten die Vergleichbarkeit der Ergebnisse. Tabelle 4.1 zeigt die relevanten physikalischen Eigenschaften dieser Fluide.

4.2.4 Technische Details für Mikrogravitationsexperiment

4.2.4.1 Trennung der Flüssigkeiten

Die freie Oberfläche muss während des Starts und vor Experimentbeginn geschützt werden, um eine Durchmischung durch mechanische Erschütterungen zu verhindern. Dies wird durch einen Vorhang, bzw. eine Folie aus rostfreiem Stahl erreicht, die die Flüssigkeiten trennt, und unmittelbar vor Beginn des Experiments langsam eingezogen wird.

4.2.4.2 Grenzflächenfixierung (Surface Pinning)

In den bodenbasierten Experimenten unter Schwerkrafteinfluss orientiert sich die Grenzfläche aufgrund der unterschiedlichen Dichte selbst in horizontaler Richtung. In einer Mikrogravitationsumgebung ist die Orientierung lediglich durch das Bestreben der Oberflächenspannung, eine möglichst geringe Fläche zu bilden, unterstützt. Diese wird, falls eine Flüssigkeit eine deutlich bessere Benetzung der Wand aufweist, eine Kapselung der Flüssigkeit mit der geringeren Wandadhäsion zur Folge haben, da der Dichteunterschied keine Schichtung hervorrufen kann. Selbst wenn die Benetzungen gleich sind, kann keine ausgezeichnete Vorzugsrichtung der Grenzfläche sichergestellt werden.

Daher muss eine Fixierung der Oberfläche künstlich erzwungen werden (*pinning*). Dieses Pinning wird durch umlaufende Klingenkanten, zwischen denen die Oberfläche aufgespannt wird, erreicht. Zusätzlich zu dieser mechanischen Fixierung werden die Klingenkanten einseitig mit PTFE (Teflon) beschichtet. Da FC70 eine deutlich höhere Affinität zur PTFE-Oberfläche als Silikonöl hat, wird eine Benetzung der PTFE-beschichteten Seite und damit ein Kriechen des Silikonöls wirksam verhindert. Diese Methode zur Fixierung von Flüssigkeitsgrenzflächen ist im Weltraumlabor erprobt und qualifiziert [12].

4.3 Messverfahren Tomographische Interferometrie

In der experimentellen Strömungsuntersuchung kommen zur Messung der Dichte und der Temperatur in transparenten Medien interferometrische Methoden zum Einsatz. Ein wesentlicher Nachteil dieser Messverfahren ist es, dass sie lediglich entlang des Strahlengangs integrierte Werte liefern.

Um die Dichte oder Temperatur in bestimmten Punkten oder Ebenen bzw. im gesamten Feld zu erhalten ist eine Methode nötig, die es ermöglicht, aus den integralen Projektionen eine dreidimensionale Verteilung zu rekonstruieren.

Dass es sich bei den Messdaten der Interferometrie um *projezierte Daten* handelt, legt die Verwendung eines tomographischen Ansatzes zur Lösung dieses Problems nahe. In Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein solches Verfahren entwickelt, dass in diesem Kapitel vorgestellt werden soll [46, 45].

4.3.1 Optische Dichtemessung

Bei der optischen Dichtemessung nutzt man das Phänomen, dass sich der Brechungsindex eines Mediums mit seiner Dichte bzw. seiner Temperatur ändert.

Aus der Definition des Brechungsindex

$$n = \frac{c_0}{c} \quad (4.1)$$

wird deutlich, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit c eines Lichtstrahls direkt von diesem abhängt. Für zwei Strahlen, die das Messobjekt an unterschiedlichen Positionen durchlaufen ergeben sich also unterschiedliche Zeiten, in denen sie die Messstrecke durchlaufen:

$$t(x, y) = \frac{1}{c_0} \left[n_\infty (s - l(x, y)) + \int_0^{l(x, y)} n(x, y, z) dz \right] \quad (4.2)$$

Die daraus resultierende Phasenverschiebung zwischen einem Strahl durch das Messobjekt und einem Referenzstrahl ergibt sich daher zu:

$$\Delta\phi = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{l(x, y)} n(x, y, z) - n_\infty dz \quad (4.3)$$

Beim in dieser Arbeit verwendeten Messverfahren, der Differentialinterferometrie (Kap. 4.3.2) durchlaufen beide Messstrahlen das Messobjekt in einem Abstand ϵ die Phasenverschiebung zwischen den beiden Strahlen ergibt sich für diesen Fall zu:

$$\Delta\phi = \frac{1}{\lambda_0} \left[\int_0^{l(x_1, y_1)} n_1(x_1, y_1, z) dz - \int_0^{l(x_2, y_2)} n_2(x_2, y_2, z) dz \right] \quad (4.4)$$

Interferometrische Messverfahren machen diesen Phasenunterschied durch Überlagerung der beiden Messstrahlen und die dadurch entstehende Interferenz messbar.

Für Gase ist der Brechungsindex direkt mit der Dichte gekoppelt:

$$(n - 1) = k\rho \quad (4.5)$$

$k(\lambda)$ ist hier die Gladstone-Dale Konstante, welche für eine Wellenlänge konstant ist.

Bei Flüssigkeiten kann der Zusammenhang zwischen Dichte und Brechungsindex nicht allgemein angegeben werden. Für die Experimentfluide muss daher sichergestellt werden, dass für den betrachteten Temperaturbereich der Brechungsindex als Funktion der Temperatur bekannt ist. Diese Stoffwerte sind für die üblichen Fluide bekannt und werden vom Hersteller bereitgestellt. Für den Fall einer normierten Auswertung muss dieser Zusammenhang ausserdem im betrachteten Temperaturbereich linear sein. Ist $n(T)$ bekannt, kann über die volumetrische Ausdehnung der Flüssigkeiten auf die Dichte zurückgeschlossen werden:

$$\rho(T) = \frac{\rho_0}{1 + \beta\Delta T} \quad (4.6)$$

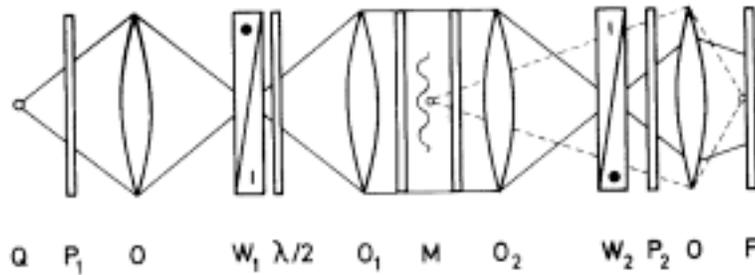


Abbildung 4.4: Optischer Aufbau des Differentialinterferometers

4.3.2 Differentialinterferometrie

Das Differentialinterferometer nutzt die Phasenverschiebung (Gangunterschied) die bei auftretenden Dichteunterschieden auftritt. Prinzipiell wird ein Lichtstrahl in 2 Strahlen aufgeteilt, welche in einem gewissen Abstand zueinander durch die Messstrecke parallel geführt werden. Überlagert man diese zwei Lichtstrahlen nach dem sie die Messstrecke durchlaufen haben, so interferieren sie miteinander. Entsprechend dem realisierbaren Abstand der zwei Strahlen kann man die Phaseninformation der Strömung auflösen. Abb. 4.4 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Differentialinterferometers. Der Strahlengang des Strahlenbündel ist wie folgt:

- Ausgehend von einer Punktlichtquelle (Quecksilberdampfampe) wird das Licht auf einen Winkel von 45° zur Vertikalen polarisiert (P)
- Das Wollastonprisma (W1) befindet sich im Brennpunkt der Linse (O0); dort wird jeder Lichtstrahl in zwei Teilstrahlen mit dem Strahltrennungswinkel $\epsilon = 2(n_{ex} - n_{or})\alpha$ und somit bei kleinen Winkel um $e = 2f\epsilon$ getrennt und kann z.B. im μm Bereich realisiert werden
- Die $\lambda/2$ Platte dient dazu, Fehler der optischen Bauteile zu kompensieren. Sie dreht die Polarisationsrichtung um 90° ; dadurch muss das Wollastonprisma (W2) ebenfalls gedreht werden. Die paarweise benutzen Linsen und Wollastonprismen welche bei gleicher Polarisation eine Phasenverfälschung in gleiche Richtung erzeugen, heben sich somit gegenseitig auf
- Mit der Linse (O1), deren Brennpunkt sich ebenfalls im Wollaston-Prisma (W1) befindet, wird in der Messstrecke ein paralleler Strahlengang erzeugt
- Die Linse (O2) fokussiert die Teilstrahlen im zweiten Wollaston-Prisma (W2), in dem die Teilstrahlen wieder zu einem Strahl vereinigt werden

- Der Polarisationsfilter (P2) dient dazu, die Polarisationsrichtung um 45° zu drehen, so dass die vereinigten Teilstrahlen interferieren können. Die Komponenten der Teilstrahlen interferieren in der Polarisationssebene. Der erzeugte Gangunterschied entlang des optischen Weges (O1 bis O2) beträgt

$$\Delta S = K \int_{O1}^{O2} (\bar{\rho}_{(z,y,x)} - \rho_\infty) dx = m\lambda \quad (4.7)$$

Mit ρ_∞ als Referenzdichte und $\rho \neq \rho(x)$ und $b = O2 - O1$ als Tiefe des Phasenobjektes wird

$$\Delta S = Kb(\bar{\rho}_{(z,y)} - \rho_\infty) = m\lambda \quad (4.8)$$

Mit $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ergeben sich Interferenzstreifen unterschiedlicher Ordnung entsprechend m , z.B. Interferenzstreifen 0. Ordnung mit $m=0$ sind diese schwarz. Die Dichte bezüglich der Referenzdichte ergibt sich aus:

$$\rho_{(z,y)} = \rho_\infty + \frac{m\lambda}{Kb} \quad (4.9)$$

Gemessen wird $m\lambda$ über die Strahlentrennung e und somit $\int_{O1}^{O2} \frac{\partial \rho}{\partial z} dx$ über e

- Die Linse (O4) dient zur Abbildung und wird so eingestellt, dass die Mitte der Messstrecke scharf abgebildet wird

Durch das geringfügige Verschieben des Wollastonprismas W2 kann man die Streifenbreite der Interferenzgitter einstellen. Folgende Möglichkeiten bestehen

- Interferometer auf Streifenbreite ∞
 - Die Wollastonprismen befinden sich genau im Brennpunkt der Linsen.
 - Die auftretenden Streifen sind direkt proportional zur Dichtedifferenz. Abb. 4.5(1) zeigt Aufnahmen bei dieser Einstellung. Beim ersten Beispiel Abb. 4.5(1) ist unten die Aufnahme bei vertikaler Strahltrennung aufgezeigt (direkt die Stromlinien) und oben bei horizontaler Strahltrennung (Gebiete der Auf und Abströmbewegung).
- Interferometer mit Streifen
 - Die Wollastonprismen bzw. eines davon sind, ist nicht im Brennpunkt der Linse

- Die auftretende Streifenverschiebung ist direkt proportional zur Dichtedifferenz. Abb. 4.5 (2)(3) zeigt einige Beispiele von Aufnahmen bei dieser Einstellung. Beim zweiten Beispiel Abb. 4.5(2) wird die Aufnahme einer umströmten Kugel gezeigt. Das Verschmieren der Streifen im rechten Bild kommt von der Integration entlang des Weges, so dass Dichteveränderungen von mehreren Schnittebenen des Verdichtungsstoßes sichtbar werden. Abb. 4.5 (3) zeigt, wie die Strahlverschiebung ausgewertet wird, um somit direkt den Dichtegradienten zu ermitteln. Durch die Strahltrennung e kommt es zu einer doppelten Abbildung, was in Abb. 4.5 (3) gut zu erkennen ist; mit kleiner werdenden Aufweitung e kann die Streifenbreite verkleinert werden.

Mit diesem Verfahren wird die Dichtedifferenz über die Strahltrennung e gemessen. Ist e hinreichend klein, so ist $\frac{\partial n}{\partial z} \sim \frac{\partial \rho}{\partial z}$ und es kann der integrale Dichtegradient entlang des optischen Weges (von der Aufspaltung in zwei Teilstrahlen bis zum Überlagern der Teilstrahlen, wenn die Dichte nur eine Funktion von der Vertikalen ist, so ist der optisch effektive Weg zur Phasenverschiebung zwischen O1 und O2) gemessen werden. Die Vorteile dieses Verfahrens sind:

- Unempfindlich gegenüber mechanischen Vibrationen
- Selektive Gradientenempfindlichkeit
- Empfindlichkeit ist anpassbar

4.3.3 Tomographie

Tomographie ist eine Methode zur Rekonstruktion dreidimensionaler Verteilungen einer physikalischen Größe aus ihren projizierten zweidimensionalen Verteilungen in mehreren Projektionsrichtungen.

Die interessierende Größe sei:

$$Q = f(x, y, z) \quad (4.10)$$

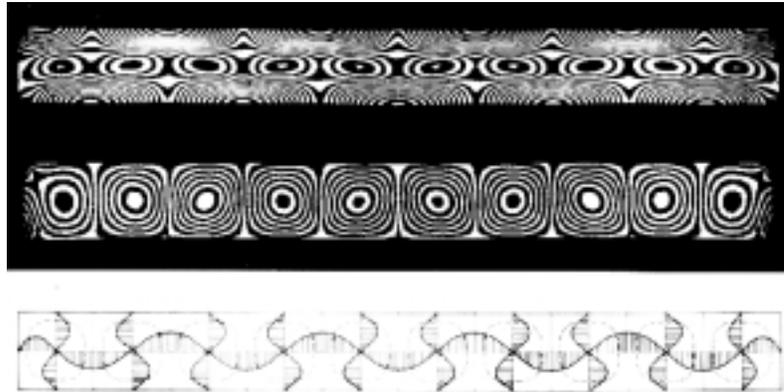
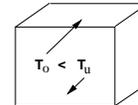
Betrachtet man die dreidimensionale Verteilung in z -Richtung dieser Größe als Stapel zweidimensionaler Schichten, kann jede Schicht separat rekonstruiert werden. Das Problem reduziert sich auf ein zweidimensionales:

$$Q = f(x, y) \quad (4.11)$$

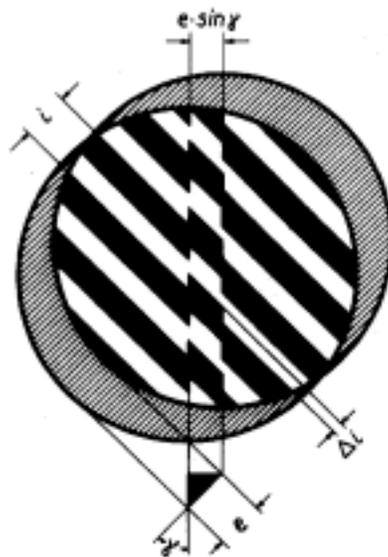
Die projizierte Größe ist proportional zum Linienintegral entlang des Messstrahls (Abb. 4.6a)

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (4.12)$$

(1) Konvektionszellen in einem von unten beheizten Behälter bei überkritischer $Ra > Ra_{krit}$



(2) Streifenverschiebung bei einer Kugelumströmung



(3) Strahlenverschiebung

Abbildung 4.5: Beispiele von Aufnahmen mit dem Differential Interferometer [36]

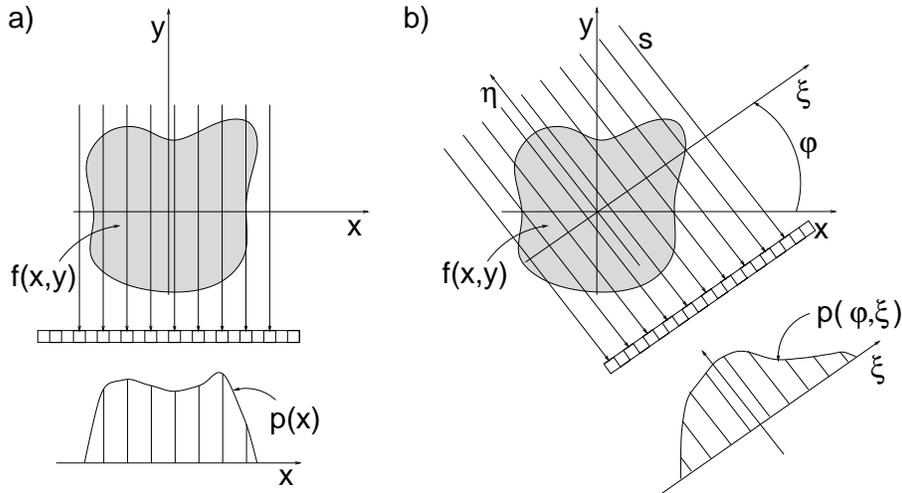


Abbildung 4.6: Radon Projektion

Um Projektionen unter unterschiedlichen Winkeln beschreiben zu können, werden die kartesischen Koordinaten (x, y) um ein mitdrehendes Koordinatensystem (ξ, ϕ) erweitert (Fig. 4.6b):

$$p(\xi, \phi) = \int_s f(x, y) ds \quad (4.13)$$

Zur Rekonstruktion von $f(x, y)$ aus $p(\xi, \phi)$ wird die *inverse Projektion* benötigt [18, 40]:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-R}^R \frac{1}{x \cos \phi + y \sin \phi - \xi} \frac{\partial p(\xi, \phi)}{\partial \xi} d\xi d\phi \quad (4.14)$$

Diese Inversion ist, wie aus 4.14 ersichtlich ist, nur eindeutig wenn unendlich viele Projektionen kontinuierlich im Intervall $0 < \phi < \pi$ vorliegen. In technischen Anwendungen wird man jedoch mit einer begrenzten Anzahl an Richtungen auskommen müssen.

4.3.3.1 Tomographiealgorithmus

Tomographiealgorithmen können grob in zwei Kategorien unterteilt werden: *Direkte* und *algebraische* Methoden. Zu den direkten Methoden gehören z.B. die *Direkte Fourier Rekonstruktion* [4] und die *Gefilterte Rückprojektion* [41]. Die gebräuchlichsten algebraischen Methoden sind die *ART (Algebraic Reconstruction Technique)* und die *MART (Multiplicative Algebraic Reconstruction Technique)* [16].

Die Ergebnisse der Vorbereitungsstudie und Arbeiten von Bahl und Liburdy [1] zeigen, dass die algebraischen Methoden für die Rekonstruktion des Dichtefeldes

einer typischen Konvektionsströmung aus einer geringen Zahl an Blickrichtungen am geeignetsten sind. In dieser Arbeit wurde ein modifizierter ART Algorithmus verwendet.

Diese iterative Methode berechnet die Projektionen aus einem diskreten Ausgangsfeld und vergleicht diese mit diskretisierten Messdaten. Aus der Differenz zwischen berechneten und gemessenen Projektionen wird eine Korrektur des 3D-Feldes berechnet. Das korrigierte Feld dient als Ausgangsfeld für die nächste Iteration.

Der ART Algorithmus ist relativ unempfindlich gegenüber verrauschten Messdaten, da während des Iterationsprozesses Filter und Normalisierungen angewandt werden können. Darüber hinaus kann a-priori Wissen über das Strömungsfeld eingebracht werden, um die Konvergenz zu beschleunigen und ein Aufschwingen von Störungen zu unterdrücken.

4.3.3.2 Implementation der ART

Die interessierende physikalische Größe im diskretisierten Rekonstruktionsgebiet sei:

$$Q^* = \gamma(i, j, k) \quad (4.15)$$

Das Ausgangsfeld ist:

$$Q_0^* = \gamma_0(i, j, k) \quad (4.16)$$

Dieses Feld kann mit a-priori Wissen oder mit 0 initialisiert werden. Die gemessenen Projektionen sind ein 2D-Feld $m_{\phi_a}(m, n)$ für jede Blickrichtung ϕ_a . Für jeden Punkt m, n wird eine Belegungsmatrix $B_{\phi_a}^{n,m}(i, j, k)$ berechnet; die 2D-Elemente dieser Matrix haben den Wert 1, falls das 3D-Element im Rekonstruktionsvolumen zum Wert im Projektionspunkt m, n beiträgt, und 0, falls nicht.

Die berechneten Projektionen sind also:

$$p_{\phi_a}(m, n) = \frac{\sum_{i,j,k} B_{\phi_a}^{n,m}(i, j, k) \gamma_s(i, j, k)}{\sum_{i,j,k} B_{\phi_a}^{n,m}} \quad (4.17)$$

Die angenommene 3D-Verteilung $\gamma_s(i, j, k)$ wird um die Differenz zwischen gemessenem und berechnetem Projektionswert korrigiert:

$$\gamma_{s+1} = \gamma_s - (p_{\phi_a}(m, n) - m_{\phi_a}(m, n)) B_{\phi_a}^{n,m}(i, j, k) \quad (4.18)$$

Diese Schritte werden für jede Blickrichtung ϕ_a wiederholt und iteriert bis das Konvergenzkriterium erfüllt ist.

4.3.4 Funktionsnachweis

4.3.4.1 Generische Modelle

In den Vorstudien zur tomographischen Interferometrie [46] wurden verschiedene generische Verteilungen in Bezug auf die Möglichkeit der Rekonstruktion aus verschiedenen Blickrichtungen untersucht.

In dieser Arbeit möchte ich exemplarisch auf eine dieser Verteilungen eingehen.

4.3.4.1.1 Modell 5: Konvektionsrollen in binärem System mit Temperaturgradienten Dieses Modell repräsentiert zwei Konvektionsrollen in einem geschichteten System aus unmischbaren Flüssigkeiten mit einem Temperaturgradienten entlang der Trennfläche. Dies entspricht der erwarteten Strömung im Mikrogravitationsexperiment.

Abb. 4.7 zeigt das generische Dichtefeld, aus dem 8 bzw. 12 Projektionen berechnet wurden, in ISO-Flächendarstellung und in zwei ebenen Schnitten in der xy - und der yz -Ebene durch die Mitte des Volumens als Konturplot.

Abb. 4.8 zeigt das rekonstruierte Feld in 3D-Darstellung für Rekonstruktionen aus 4, 6, 8 und 12 Blickrichtungen.

Auswertung:

Die Rekonstruktion aus

- 4 Blickrichtungen zeigt großskalige wellenartige Störungen entlang der Wände des Rekonstruktionsvolumens, die mit der \sin^2 -Charakteristik der ursprünglichen Verteilung korrelieren.
- 6 und 8 Blickrichtungen zeigt eine ausreichende Genauigkeit wobei die Störungen an den Wänden geringer werden, jedoch nicht verschwinden.
- 12 Blickrichtungen zeigt eine weitere Verringerung in der Amplitude der Störungen.

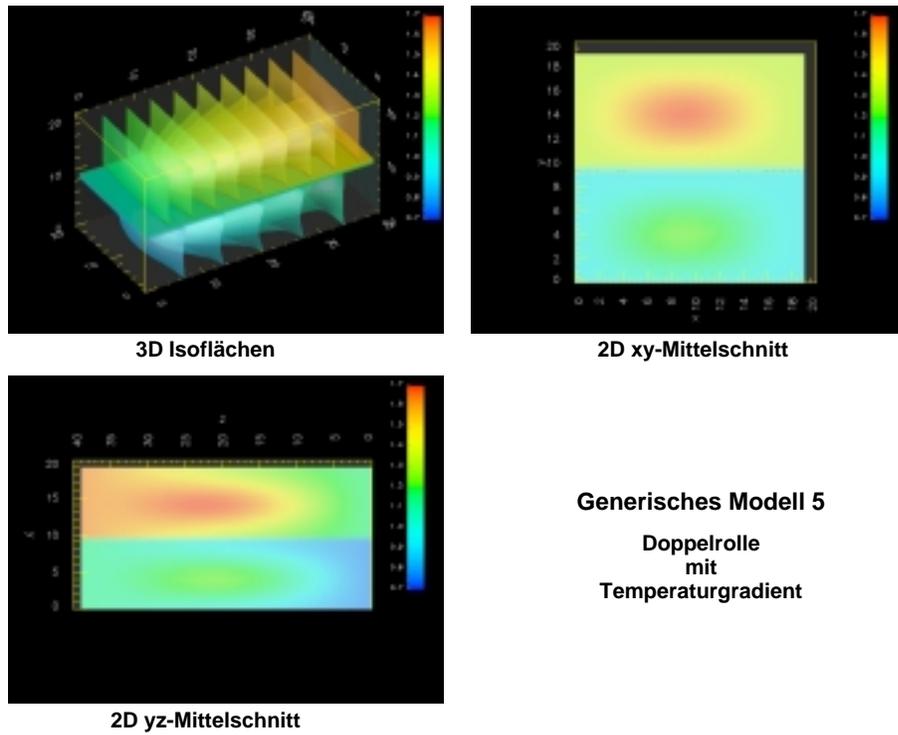


Abbildung 4.7: Generisches Dichtefeld, Modell 5

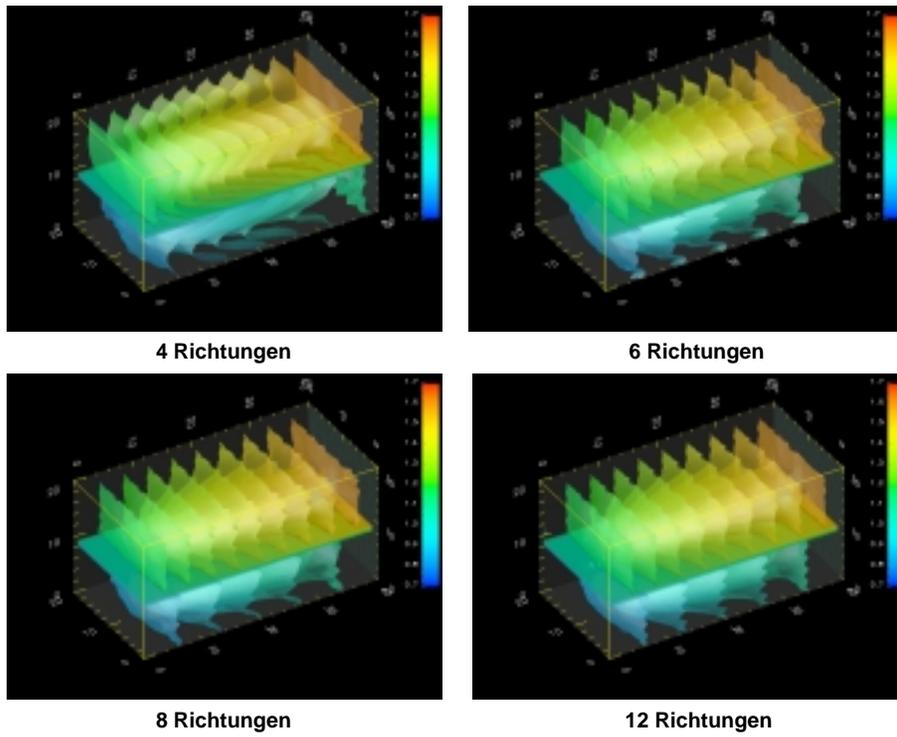


Abbildung 4.8: Rekonstruierte Dichteverteilung, Modell 5, Isoflächen

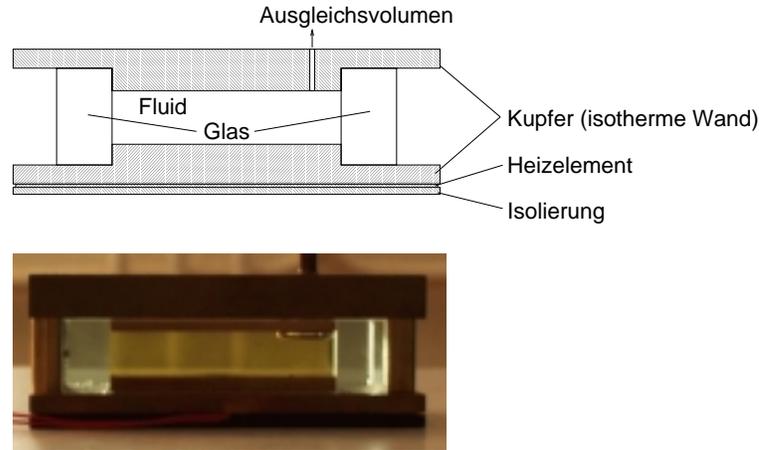


Abbildung 4.9: Rayleigh-Benard Konvektionszelle

4.3.4.2 Modellexperiment

Als Modellexperiment für den Funktionsnachweis der tomographischen Interferometrie wurde die thermische Konvektion einer einzelnen Flüssigkeit in einer quaderförmigen Zelle mit vertikalem Temperaturgradienten gewählt (Rayleigh-Benard-Typ). Die Strömung für diese Zelle wurde ausgiebig untersucht [24] und eignet sich daher als Testobjekt. Abb. 4.9 zeigt die verwendete Zelle.

4.3.4.3 Interferometer

Das in dieser Arbeit benutzte Interferometer wurde im Hinblick auf eine Anwendung des Verfahrens im Fluid Science Laboratory (FSL) der Internationalen Raumstation als Gegenstück des dort eingesetzten Interferometertyps aufgebaut. Sein Layout weicht daher vom oben vorgestellten Zweiprismen-Differentialinterferometer ab (Abb. 4.10).

Der Strahl eines 8mW HeNe-Lasers ($\lambda = 632nm$) wird kontrahiert und aufgeweitet, um ein zweites Mal zu einer Punktlichtquelle gebündelt zu werden. Eine $\lambda/4$ polarisiert das Laserlicht zirkular. Der Kern des divergierenden Strahlenbündels wird mit einer Lochblende herausgeschnitten und mittels eines $f = 500mm$ Achromaten in ein paralleles Strahlenbündel überführt. Das parallele Licht durchläuft die Messstrecke, und wird von einem zweiten $f = 500mm$ Achromaten auf das Wollaston-Prisma (Strahlwinkel $2' - 5'$, abhängig von Brechungsindex/Temperatur-Verlauf und Auflösung der Kamera) fokussiert. Das nachfolgende Linsensystem bildet die Mitte der Messstrecke auf der CCD-Kamera ab. Die Aufnahme erfolgt mit einer CCD-Kamera "Streak-Star" mit einer Auflösung von 384x286 Pixel bei 12bpp Graustufen der Fa. LA Vision 2D-Meßsysteme GmbH.

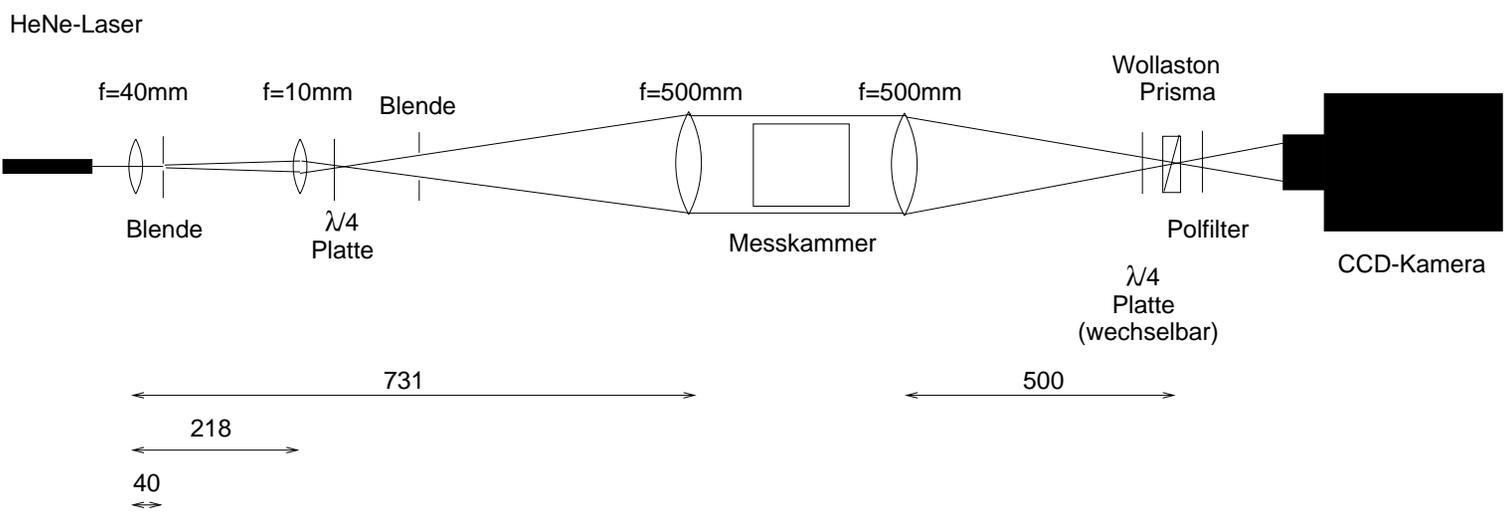


Abbildung 4.10: Layout des Differentialinterferometers



Abbildung 4.11: Interferometer auf optischer Bank

Die zweite $\lambda/4$ Platte vor dem Wollaston-Prisma wird im Strahlengang ein- und ausgeblendet um einen Phasenversatz zwischen den orthogonal polarisierten Teilstrahlen zu erreichen.

Tabelle 4.2 zeigt die technischen Daten des Interferometers.

Lichtquelle	HeNe-Laser 8mW, 632nm
Blickfeld	100mm diam.
Brennweite	500mm
Strahltrennwinkel	2' - 5'
Strahltrennung	0.29mm - 0.73mm
Kameraauflösung	384x286 Pixel, 12bpp

Tabelle 4.2: Technische Daten, Interferometer

Das Interferometer wurde mit dem Macrobank System der Fa. Spindler & Hoyer aufgebaut (Abb. 4.11).

Für eine vertikale Orientierung der Blickrichtungen war das Interferometer fest auf der optischen Bank montiert, während die Messzelle auf einem Drehtisch befestigt war. Für eine horizontale Drehachse, wie in den Experimenten mit horizontalem Temperaturgradienten wurde das Interferometer auf einer drehbaren optischen Bank installiert.

Da die verschiedenen Blickrichtungen nacheinander aufgenommen werden, ist diese Anordnung auf die Untersuchung stationärer Strömungen begrenzt.

4.3.4.4 Definition der Blickrichtungen

Die Anzahl der Blickrichtungen, die für eine Rekonstruktion der 3D-Dichteverteilung notwendig, bzw. zulässig sind sind abhängig von:

- Der Geometrie des Messvolumens
- Den Längenskalen des zu untersuchenden Phänomens
- Dem Rauschanteil in den Messdaten
- Der Notwendigkeit, die Bereiche, aus denen keine Messdaten gewonnen werden können, zu minimieren

4.3.4.4.1 Verrauschte Messdaten Rauschen ist ein statistischer Fehler, bzw. eine Ungewissheit im quantitativen Wert an einem bestimmten Punkt. In der Auswertung einer differentialinterferometrischen Aufnahme kann Rauschen auftreten aufgrund von:

- Optischen Störungen
- Kleinskaligen Instationaritäten in der Strömung
- Der diskreten Auswertung der Interferogrammmuster z.B. 2π -Diskontinuität
- Zu niedriger Auflösung in der Bilderfassung und -bearbeitung

Während in der Auswertung der Projektionen das Rauschen kein schwerwiegendes Problem darstellt, ist es dies für die Rekonstruktion der dreidimensionalen Verteilung, da sich die Ungenauigkeiten nicht nur auf einen Punkt in der Projektion, sondern auf eine Linie entlang des Integrationspfades auswirken. Die resultierenden Fehler werden von Blickrichtung zu Blickrichtung weitergetragen und während des Iterationsprozesses verstärkt.

Abb. 4.12 zeigt den Einfluss von Rauschen in den projizierten Daten auf die Rekonstruktionsgenauigkeit über der Anzahl der Blickrichtungen auf. Die Rekonstruktion erfolgte für ein simuliertes dreidimensionales Temperaturfeld der Rayleigh-Benard-Zelle. Die Projektionen wurden berechnet und mit statistischem, weißen Rauschen mit einem Rauschpegel von 10% von ΔT_{max} überlagert. Abb. 4.12a zeigt den maximalen, relativen Fehler für unverrauschte, Abb. 4.12b für verrauschte Daten..

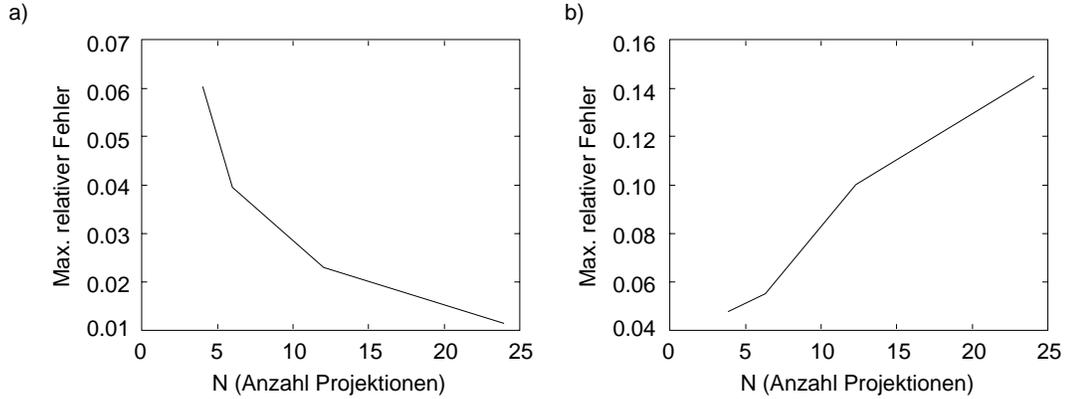


Abbildung 4.12: Einfluss von Rauschen auf Rekonstruktionsgenauigkeit

Während für unverrauschte Daten wie theoretisch vorhergesagt ein Anstieg in der Rekonstruktionsgenauigkeit mit steigender Anzahl der Blickrichtungen zu verzeichnen ist, hat das Rauschen einen gegenläufigen Effekt. Dieser Zusammenhang wurde von Bahl et. al. ausgiebig studiert [1]. In unseren Studien waren 6 Blickrichtungen eine sinnvolle Anzahl. Mit 4 Blickrichtungen konnten Details nicht aufgelöst werden, während mit mehr als 8 Blickrichtungen keine stabile Rekonstruktion möglich war.

4.3.4.4.2 Informationsverlust durch Totalreflektion Konvektionsphänomene werden typischerweise auch in rechteckigen Experimentvolumen untersucht. Ein Hauptgrund hierfür ist die einfache Diskretisierung für die numerische Simulation, sowie der einfache experimentelle Aufbau.

Der rechteckige Querschnitt mit ebenen Wänden führt zur Totalreflektion des Messstrahls. Daher ist es nicht möglich Information aus den Ecken der Messzelle zu erhalten. Abb. 4.13 zeigt die Brechung der Messstrahlen und die Bereiche für die keine Information vorliegt. Da die Reflektion beim Übergang vom höherbrechenden Material (Glas, Fluid) zum niedrigbrechenden (Luft) auftritt wäre es möglich die Größe dieser Bereiche durch die Verwendung dickerer Scheiben zu verringern. Andererseits führt dies zu unterschiedlichen Integrationsweglängen in der Projektion, was in zu intensivem Rauschen in diesen Bereichen führt und die Rekonstruktionsqualität vermindert. Dieser Ansatz wäre möglich für Flüssigkeiten mit dem Glas angepasstem Brechungsindex [36]. Diese Anpassung ist jedoch nur selten möglich, daher wurde diese Lösung nicht weiterverfolgt.

4.3.4.4.3 Eingeschränkter Blickwinkel Um die Bereiche der Totalreflektion gering zu halten wurde anstelle des gesamten Blickwinkels π , wie in der Theorie gefordert ein engerer Blickwinkel von maximal $\pi/4$ gewählt. Die tomographische

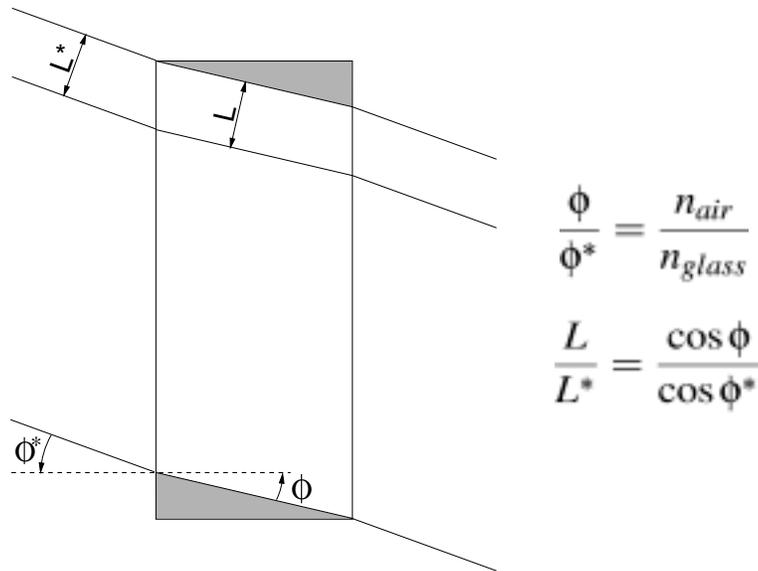


Abbildung 4.13: Brechung der Messstrahlen und Bereiche der Totalreflexion

Rekonstruktion mit begrenzten Blickwinkeln und verrauschten Messdaten wurde in [1] untersucht, eine zusätzliche Blickrichtung orthogonal zur Hauptblickrichtung, bzw. zwei orthogonal orientierte Sätze von Projektionen erhöhen die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Rekonstruktionen.

Daher wurde ein Aufbau mit 5+1 und 3+3 Blickrichtungen gewählt. Abb. 4.14 zeigt diese Anordnungen für den rechteckigen Querschnitt der Rayleigh-Benard Zelle. Es ist offensichtlich, dass die 3+3 Konfiguration für diese Geometrie nicht geeignet ist. Abb. 4.15 zeigt die 3+3 Anordnung für quadratische Querschnitte, hier kann mit dieser Anordnung der Bereich für den alle Blickrichtungen Informationen liefern vergrößert werden.

Bei den Winkeln handelt es sich um korrigierte Winkel, d.h. die Winkel, unter denen die Messstrahlen das Messvolumen durchlaufen, nicht die Kamerawinkel

4.3.4.5 Numerischer Testfall

Der Numerische Testfall entspricht der Rayleigh-Benard Zelle des Modellexperiments (Kap. 4.3.4.2).

Das Längenverhältnis der Zelle ist $L * D * H = 5 * 2 * 1$. mit der Höhe $H = 15mm$. Alle Wände sind adiabatisch, mit Ausnahme der unteren und oberen isothermen Berandung mit $T_l > T_u$ (Index: l - lower, u - upper). Die Rayleigh Zahl ist $Ra = 5400$, die Prandtl Zahl $Pr = 1000$. Es stellt sich eine Konvektionsströmung im ersten, stationären Regime der begrenzten Rayleigh-Benard Instabilität mit der Wellenlänge 1

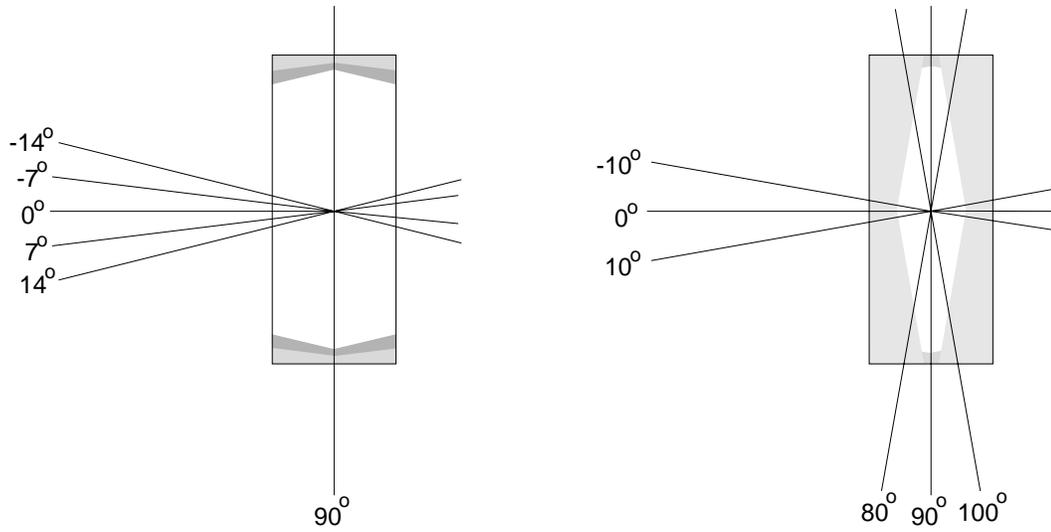


Abbildung 4.14: Blickwinkel und Bereiche der Totalreflektion für 5+1 und 3+3 Anordnung

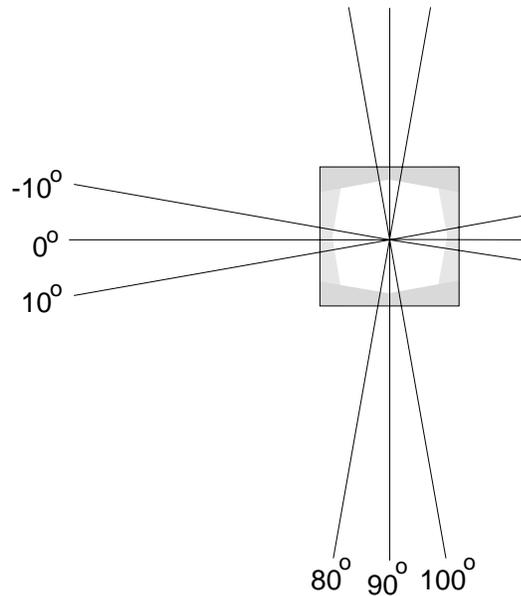


Abbildung 4.15: Blickwinkel und Bereiche der Totalreflektion für 5+1 und 3+3 Anordnung, quadratischer Querschnitt

ein (5 Längsrollen). Das Strömungsfeld wurde mit dem kommerziellen CFD Paket Star-CD 3.1 durch Lösung der Boussinesq-Gleichungen errechnet. Abb. 4.16 zeigt die dreidimensionale Temperaturverteilung der simulierten Rayleigh-Benard Kon-

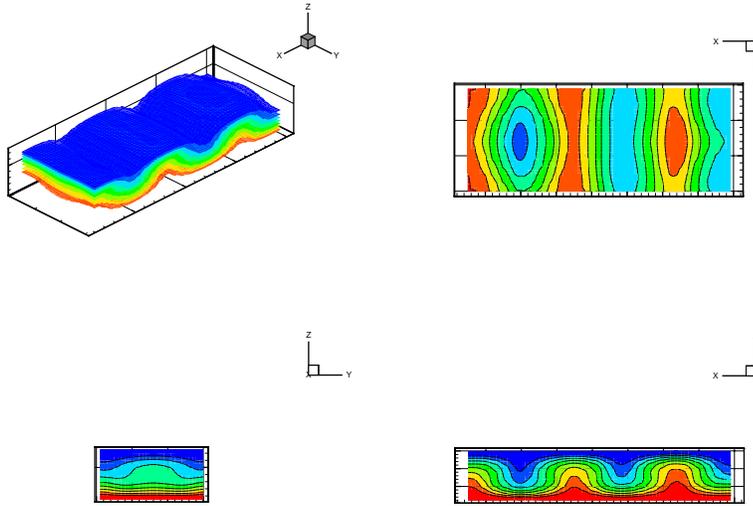


Abbildung 4.16: Berechnete Temperaturverteilung, Rayleigh-Benard Instabilität, $Ra = 5400$, $Pr = 1000$

vektion.

4.3.4.5.1 Berechnung der Projektionen für numerischen Testfall Aus der berechneten dreidimensionalen Temperaturverteilung wurden die 6 (5+1) Radon-Projektionen unter den Winkeln ϕ_a : -14° , -7° , 0° , 7° , 14° und 90° berechnet. Wobei die Rotationsachse $(0, 0, 1)$ und die Winkel 0° bzw. 90° den Richtungen $(0, 1, 0)$ bzw. $(-1, 0, 0)$ im Punkt $(L/2, D/2, H/2)$ entsprachen. Diese berechneten Winkel entsprechen aufgrund der Lichtbrechung an den Glaswänden mit den Brechungsindizes $n_{glass} = 1.45$, $n_{air} = 1$ den Messstrahlwinkeln ϕ_a^* : -20° , -10° , 0° , 10° , 20° und 90° .

$$\frac{\phi}{\phi^*} = \frac{n_{air}}{n_{glass}} \quad (4.19)$$

4.3.4.5.2 Rekonstruktion aus kompletten Projektionen Zunächst wurde die dreidimensionale Temperaturverteilung aus kompletten Projektionen rekonstruiert, d.h. die Totalreflektion wurde nicht berücksichtigt. 50 Iterationen wurden durchgeführt.

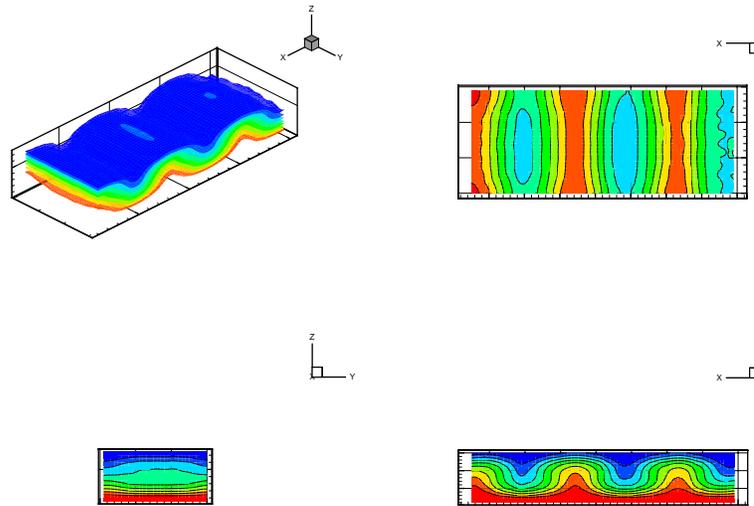


Abbildung 4.17: Rekonstruiertes Temperaturfeld, Rayleigh-Benard Instabilität, 5+1 komplette Projektionen

Abb.4.17 zeigt das rekonstruierte Temperaturfeld, Abb. 4.18 den Konvergenzverlauf der Rekonstruktion und die relative Abweichung vom Originalfeld. Eine zufriedenstellende Genauigkeit konnte erzielt werden. Die größten Fehler sind in den Ecken und entlang der kurzen Kanten zu finden, da dort die Integrationslänge am kürzesten ist, während im Kern des Rekonstruktionsvolumens nur minimale Fehler auftreten.

4.3.4.5.3 Rekonstruktion aus Teilprojektionen In diesem Fall wurde bei der Erstellung der Radonprojektionen die Totalreflektion berücksichtigt, d.h. die Randbereiche in denen im Experiment keine Information zu erhalten ist, wurden als ungültig markiert und in der Rekonstruktion nicht berücksichtigt.

Abb. 4.19 zeigt das aus diesen Projektionen rekonstruierte Temperaturfeld. Es fällt auf, dass für diesen Fall weniger Störungen entlang der kurzen Kanten des Rekonstruktionsvolumens auftreten. Dies liegt daran, dass hier die Integrationsweglängen konstant sind, und die Randbereiche hauptsächlich aus den beiden Hauptblickrichtungen rekonstruiert werden. Dennoch müssen in diesem Bereich die Werte mit Bedacht ausgewertet werden. Abb. 4.20 zeigt den Konvergenzverlauf der Rekonstruktion und die relative Abweichung vom Originalfeld. Der maximale, relative Fehler und Standardabweichung sind nur unwesentlich höher als für die Rekonstruktion

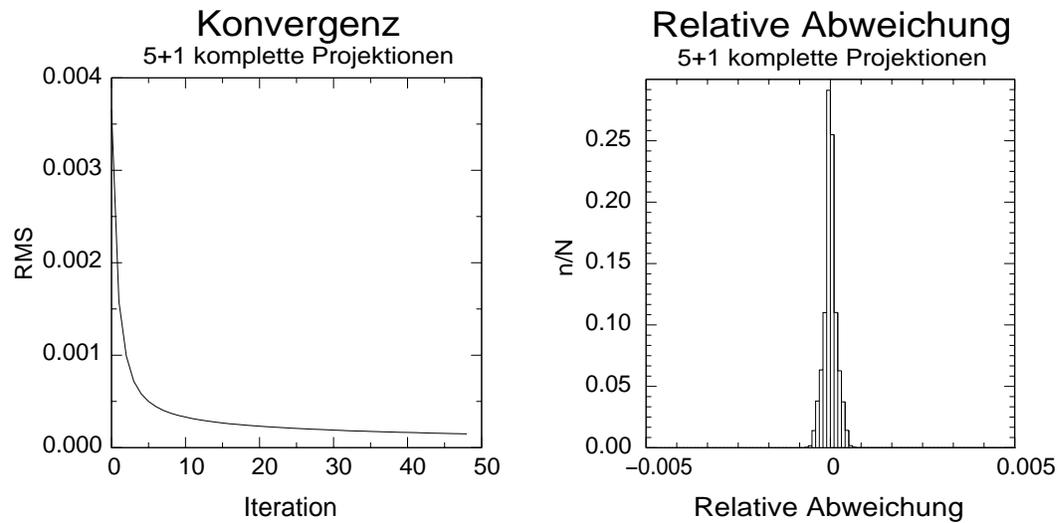


Abbildung 4.18: Konvergenz und relative Abweichung, RB Instabilität, 5+1 komplette Projektionen

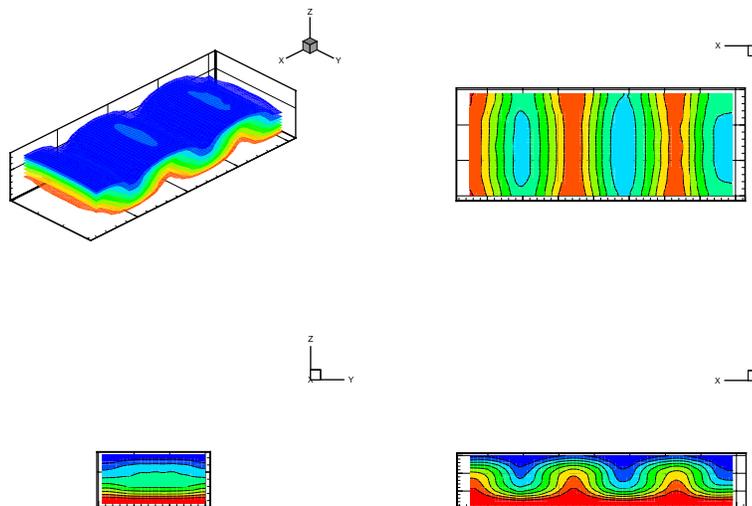


Abbildung 4.19: Rekonstruiertes Temperaturfeld, Rayleigh-Benard Instabilität, 5+1 Teilprojektionen

ohne Totalreflektion.

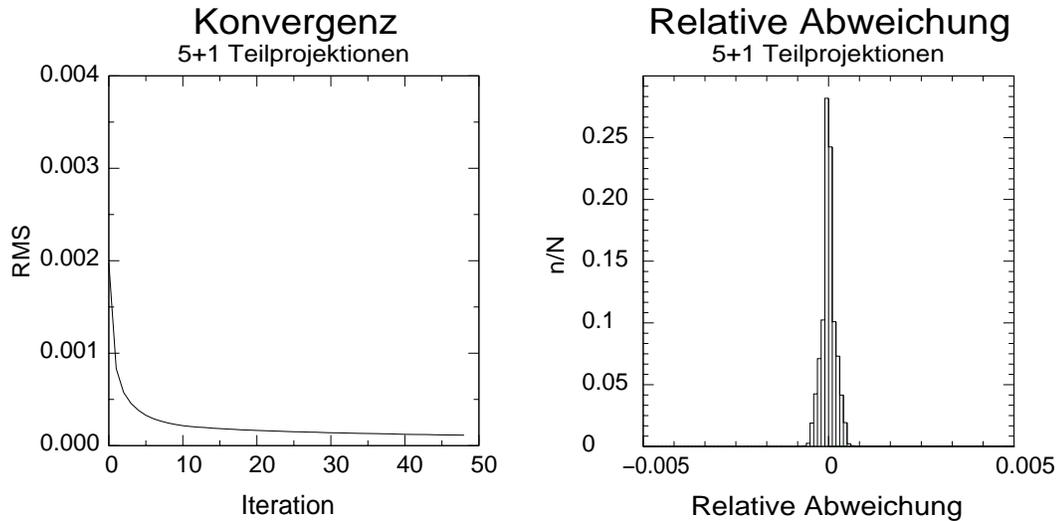


Abbildung 4.20: Konvergenz und relative Abweichung, RB Instabilität, 5+1 Teilprojektionen

4.3.4.6 Rekonstruktion des Temperaturfeldes aus experimentellen Daten

4.3.4.6.1 Aufnahme der Interferogramme Für jeden Blickwinkel wurden 2 Interferogramme aufgenommen. Für eines dieser Interferogramme wurde die Phasenlage einer Polarisationsrichtung um $\lambda/4$ verschoben. Die Interferogramme wurden geometrisch entzerrt und zentriert, um die Strahlbrechung an der Messzelle auszugleichen.

Abb. 4.21 zeigt die 12 Interferogramme.

4.3.4.6.2 Auswertung der projizierten Dichte-/Temperaturverteilungen

Ein Differentialinterferometer misst die Phasenverschiebung zwischen zwei Lichtstrahlen, die in einem definierten Abstand die Messstrecke durchqueren. Die Phasenverschiebung ist daher ein Maß für die integrale Brechungsindexdifferenz über der Strahltrennung, oder bei kleiner Strahltrennung für den integralen Brechungsindexgradienten in Strahltrennungsrichtung. Der Brechungsindex ist in erster Näherung linear von der Dichte, und diese linear von der Temperatur abhängig. Daher kann indirekt die Temperatur bestimmt werden.

Bei unendlichem Streifenabstand entsprechen die Streifenmuster Isolinien des Brechungsindex-, Dichte- oder Temperaturgradienten. Die Intensität des Interferenzmusters ist eine periodische *cos*-Funktion, die ohne Zusatzinformation über die zweite Ableitung des Brechungsindex, der Dichte oder Temperatur nicht eindeutig umkehrbar ist.

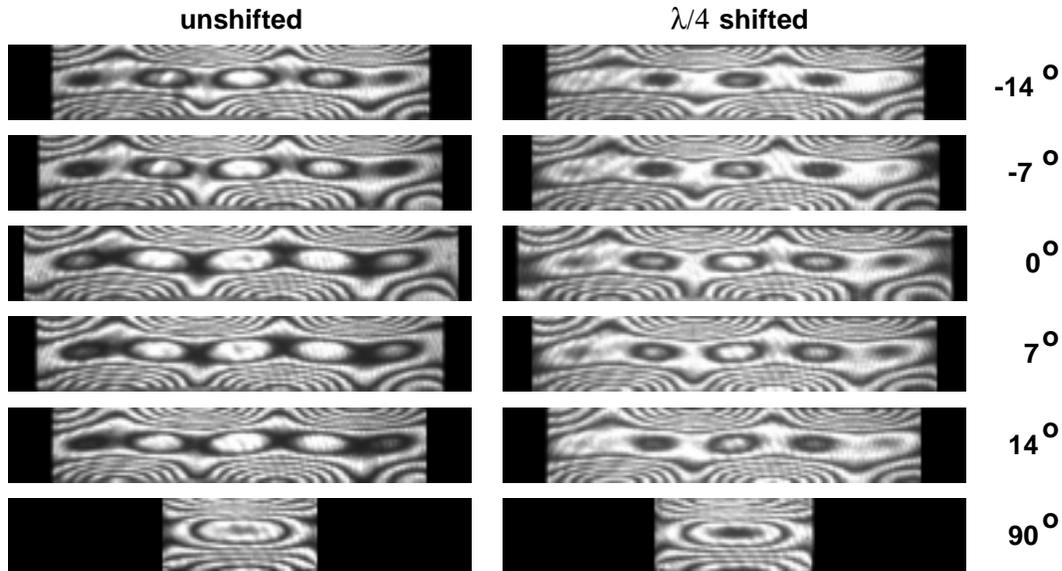


Abbildung 4.21: Interferogramme, Rayleigh Benard Zelle (5+1 Konfiguration)

Die Differenz im Brechungsindexgradienten zwischen zwei benachbarten Streifen unterschiedlicher Ordnung ist bekannt. Um Information über den Verlauf der Ordnung im Interferogramm bzw. des Vorzeichens dieser Gradientendifferenz zu erhalten wird das zweite, phasenverschobene Interferogramm benötigt. Abb. 4.22 zeigt die Intensität im Interferogramm über der Phasenverschiebung für das Original und das phasenverschobene Interferogramm. Durch Vergleich der Intensität der Interferogramme an den Streifenübergängen kann die Position am steigenden oder fallenden Ast bestimmt werden.

Die Gebietserkennung und Nummerierung der Streifen ergibt eine Gradientenverteilung, die entlang der Strahltrennungsrichtung (vertikal) integriert werden muss. Hierzu ist eine Randbedingung entlang einer Linie nötig, die durch die bekannte Temperatur an den isothermen Wänden gegeben ist. Da die Temperatur an beiden Integrationsberandungen bekannt ist, kann auf diese Temperaturen normiert werden.

Abb.4.23 zeigt die Auswertung im Überblick.

Abb. 4.24 zeigt die ausgewerteten Temperaturverteilungen für die 6 Blickrichtungen.

4.3.4.6.3 Rekonstruktion der dreidimensionalen Temperaturverteilung

Die aus den Interferogrammen gewonnenen normalisierten zweidimensionalen Temperaturverteilungen sind die Ausgangsdaten für die tomographische Rekonstruktion des Temperaturfeldes.

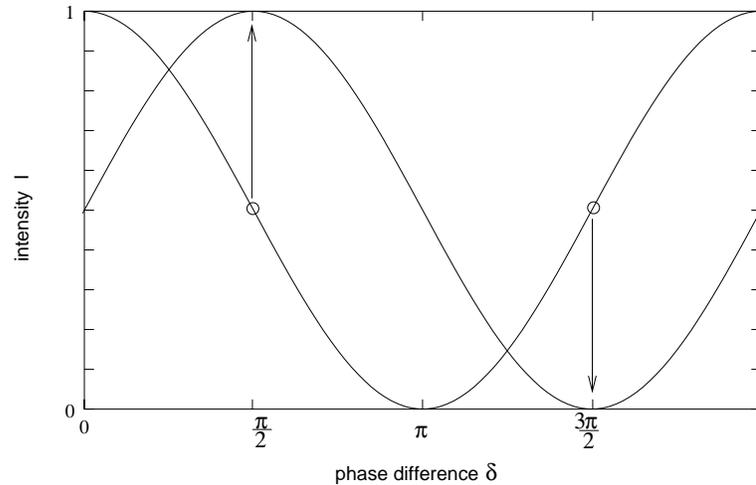


Abbildung 4.22: Intensität über Phasenverschiebung für unverschobenes und $\lambda/4$ verschobenes Interferogramm

Da die experimentell erhaltenen Projektionen einen höheren Rauschpegel aufweisen wurden nur 10 Iterationen ausgeführt. Mit rauschbehafteten Ausgangsdaten ist für höhere Iterationszahlen eine Divergenz in der Rekonstruktion zu beobachten. Eine Abschätzung der nötigen Anzahl an Iterationen findet sich in [1].

Die Konvergenz kann verbessert werden, wenn in der ersten Iteration ein vorläufiges Feld aus den beiden Hauptrichtungen berechnet wird und die rekonstruierten Werte auf das bekannte Temperaturintervall begrenzt werden.

Abb. 4.25 zeigt das rekonstruierte Temperaturfeld.

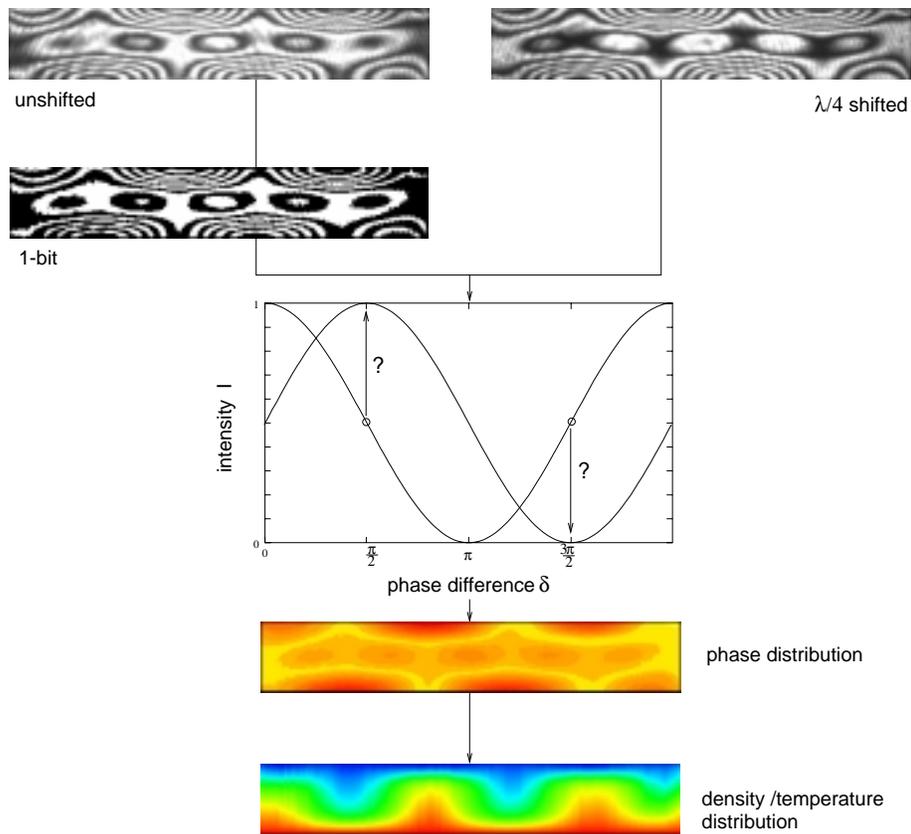


Abbildung 4.23: Auswertung der Dichte-/Temperaturverteilung anhand eines Interferogramm-Sets

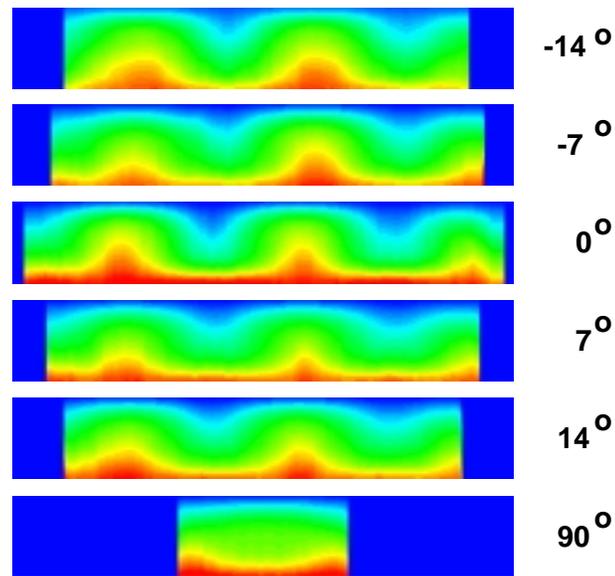


Abbildung 4.24: Dichte-/Temperaturverteilungsprojektionen, Rayleigh Benard Cell

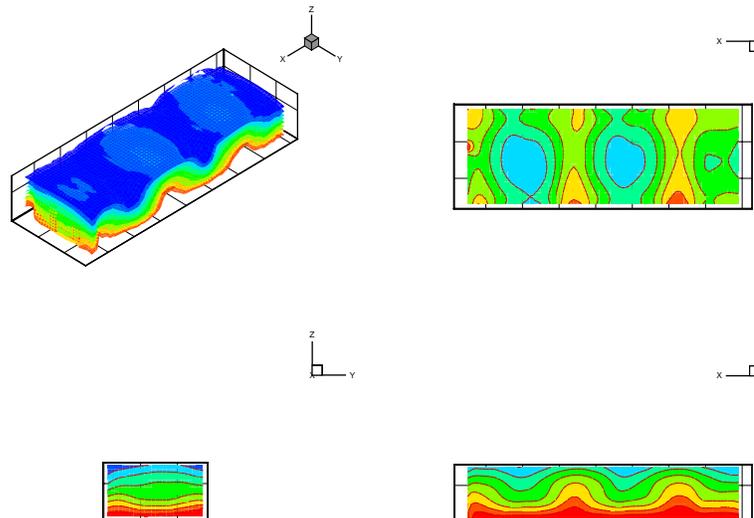


Abbildung 4.25: Rekonstruiertes Temperaturfeld, Rayleigh-Benard Zelle, 5+1 gemessene Projektionen, 5 Iterationen ART-algorithmus, *EXPERIMENT*

4.4 Experimentelle Untersuchung der Grundströmung

Zur Verifikation der stationären Lösung des numerischen Codes wird das dreidimensionale Temperaturfeld in einer Messzelle mit der tomographischen Interferometrie vermessen. Die experimentellen Ergebnisse werden mit denen der dreidimensionalen Simulation verglichen.

4.4.1 Messaufbau

Zur Untersuchung der Grundströmung wurde eine Messkammer aufgebaut. Die Abmessungen des Fluidvolumens sind $B = 40\text{mm} \times 20\text{mm} \times 20\text{mm}$, die Schichthöhe beträgt $L = 10\text{mm}$. Abbildung 4.26 zeigt die Messzelle als Skizze und die realisierte Messzelle. Die isothermen Wände sind als Kupferblöcke ausgeführt. Die übrigen bestehen aus Quarzglas. Die Glaswände stellen gleichzeitig den optischen Zugang sicher. Im Laborexperiment wird auf die mikrogravitations-spezifischen Einbauten, wie Grenzflächenfixierung und Schichtentrennung verzichtet. Die rechte isotherme Wand ist mit einem Heizelement (Widerstandsheizfolie, Fa. Winkler Wärmetechnik, Heidelberg) versehen. Die Wärmeabfuhr an der gegenüberliegenden Wand erfolgt mittels eines Peltierelements dessen Abwärme durch eine aktive Kühler-Lüfterkombination an die Umgebung abgegeben wird. Wärme- und Kühlelement werden mit jeweils einem Temperaturregler Jumo iTron32 auf eine konstante Temperatur geregelt.

Die Messzelle ist in der Drehachse des Interferometers angebracht, um die nötigen Messwinkel nacheinander abmessen zu können (Abb. 4.11).

4.4.2 Physikalische Parameter

Als Experimentfluide wurden M3 FluorInert® FC70 und Silikonöl M10 verwendet. Tabelle 4.1 zeigt die relevanten physikalischen Eigenschaften dieser Flüssigkeiten.

Die Temperaturdifferenz beträgt $1,8\text{K}$, der mittlere Temperaturgradient $0,45\frac{\text{K}}{L}$. Mit diesem Temperaturgradienten, den physikalischen Parametern der Fluide und der Länge $L = 10\text{mm}$ ergibt sich eine Marangonzahl von $Ma = 130$ und eine Rayleighzahl von $Ra = 9200$, die Prandtlzahlen der Fluide sind $Pr_{FC70} = 390$, $Pr_{M10} = 95$.

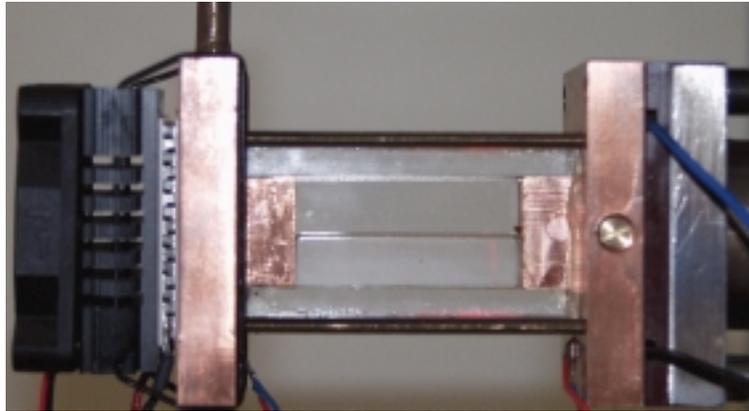
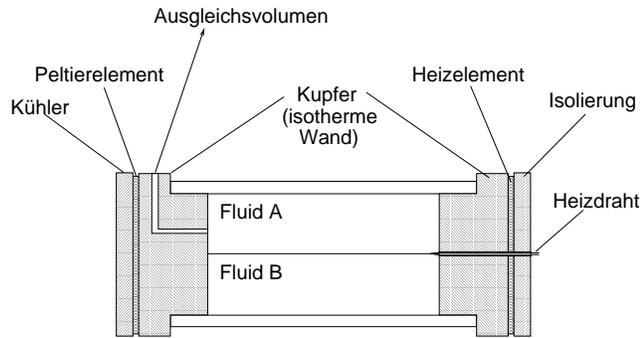


Abbildung 4.26: Messzelle

4.4.3 Ergebnisse

4.4.4 Qualitativer Vergleich

Zum qualitativen Vergleich der experimentellen mit den simulierten Temperaturverteilungen wurde das Ergebnis der dreidimensionalen Simulation in ein berechnetes Interferogramm umgewandelt. Zur Umwandlung des berechneten Temperaturfeldes in dieses Interferogramm wurde das Feld zunächst in Strahlrichtung integriert und das integrierte Feld in Richtung der Strahltrennung differenziert. Der resultierende Temperaturgradient wurde dann entsprechend dem verwendeten Interferometer in ein Intensitätsfeld umgerechnet. Abbildung 4.27 zeigt eine Falschfarbendarstellung des berechneten Interferogramms im Vergleich mit im Experiment aufgenommenen Interferogramm in Rohdarstellung.

In der oberen rechten Ecke zeigt sich eine starke Abweichung zwischen den beiden Interferogrammen. Ansonsten ist eine qualitativ gute Übereinstimmung zwischen dem Experiment und Simulation zu erkennen.

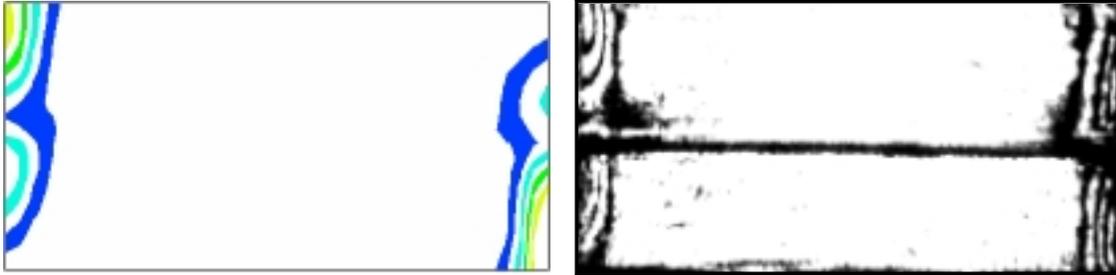


Abbildung 4.27: Vergleich eines aus Simulationsdaten gewonnenen Interferogramms mit dem im Experiment aufgenommenen

4.4.5 Projizierte Temperaturverteilung

Zum ersten quantitativen Vergleich der Experiment- und Simulationsergebnisse wird das projizierte Temperaturfeld, das direkt aus der Auswertung des aufgenommenen Differentialinterferogramms (Abb. 4.27, Kap. 4.3.4.6.2) hervorgeht mit dem in Messrichtung integrierten Temperaturfeld der dreidimensionalen Simulation verglichen. Abbildung 4.28 zeigt das integrierte Feld aus der Simulation im direkten Vergleich zum aus dem gemessenen Interferogramm gewonnenen. Wie im qualitativen Vergleich schon festgestellt, zeigt sich auch hier eine starke Abweichung im wandnahen Bereich, speziell in der oberen Schicht.

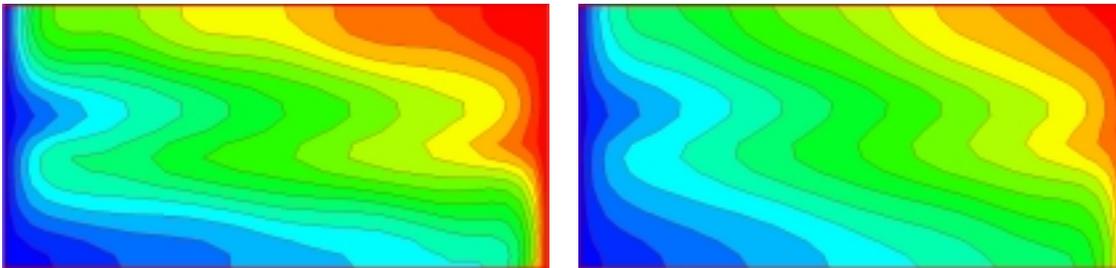


Abbildung 4.28: Vergleich projiziertes Temperaturfeld, Simulation (links) und Experiment (rechts)

Abbildungen 4.29–4.30 zeigen die Temperaturprofile entlang der beiden Mittelachsen der projizierten Temperaturfelder im Vergleich. Die Übereinstimmung liegt im Bereich von $\pm 10\%$. Auch hier zeigt sich besonders in z -Richtung die schon festgestellte starke Abweichung in Wandnähe. Diese Abweichung ist auf die Diskrepanz zwischen Quarzglas und adiabater Modellierung der Wände zurückzuführen. Im folgenden soll daher eine dreidimensionale Rekonstruktion des gemessenen Temperaturfeldes den Vergleich im Kernbereich des Messvolumens erlauben.

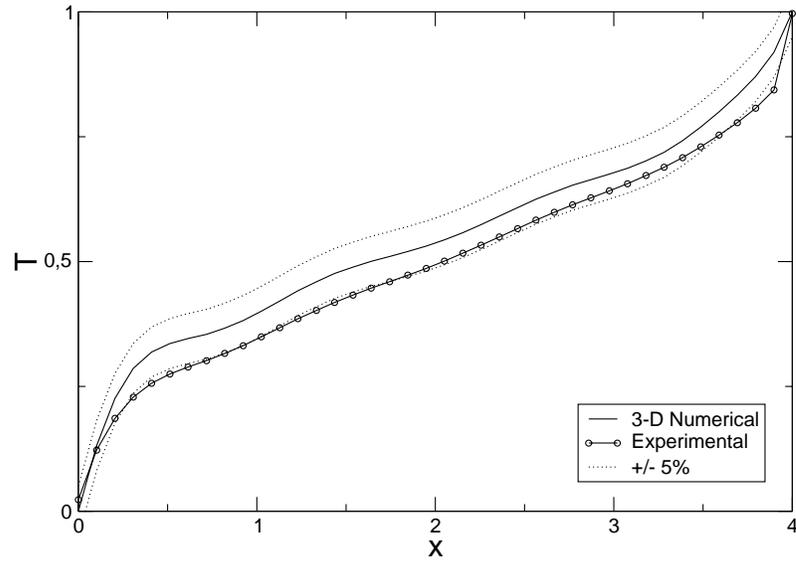


Abbildung 4.29: Temperaturverlauf entlang der Mittellinie der Projektion in x -Richtung, $z = z_m$, Vergleich 3-D Numerik, Experiment

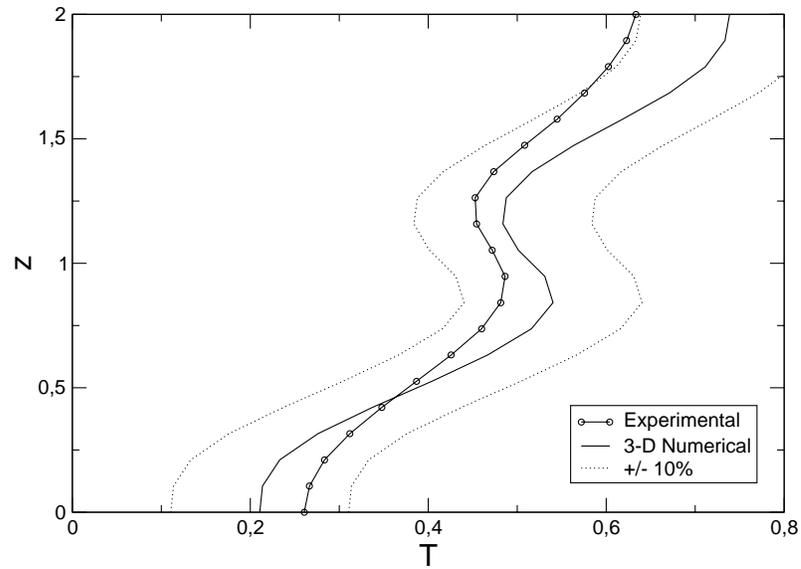


Abbildung 4.30: Temperaturverlauf entlang der Mittellinie der Projektion in z -Richtung, $x = x_m$, Vergleich 3-D Numerik, Experiment

4.4.6 Dreidimensionale Rekonstruktion der Temperaturverteilung

Die Rekonstruktion der dreidimensionalen Temperaturverteilung erfolgte aus den Projektionen des Dichtegradienten in den 6 Richtungen -10° , 0° , 10° , 80° , 90° und 100° . In Abbildung 4.31 ist die dreidimensionale, normierte Temperaturverteilung sowie deren Mittelschnitte dargestellt.

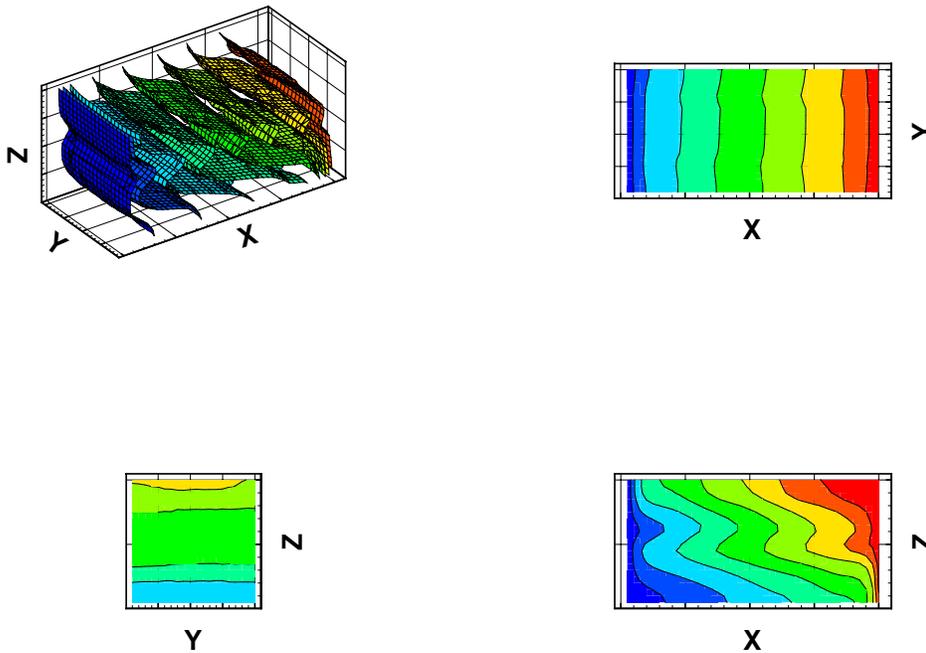


Abbildung 4.31: Dreidimensionale Temperaturverteilung, Experiment, tomographische Interferometrie, $Ma = 130$, $Ra = 9200$, Isoflächen und Konturplots der Mittelebenen

Abbildung 4.32 zeigt die dreidimensionale Temperaturverteilung sowie die Mittelschnitte des Ergebnisses der numerischen Simulation für die Experimentparameter. Die Übereinstimmung mit der experimentellen Verteilung ist gut. Es gibt allerdings leichte Abweichungen der Temperaturprofile im x/y-Schnitt und geringfügig kleinere Gradienten im x/z-Schnitt für die experimentellen Resultate. Außerdem ist eine leichte Assymetrie im y/z-Schnitt festzustellen.

Diese Abweichungen sind auch in den Temperaturprofilen entlang der Mittelachsen

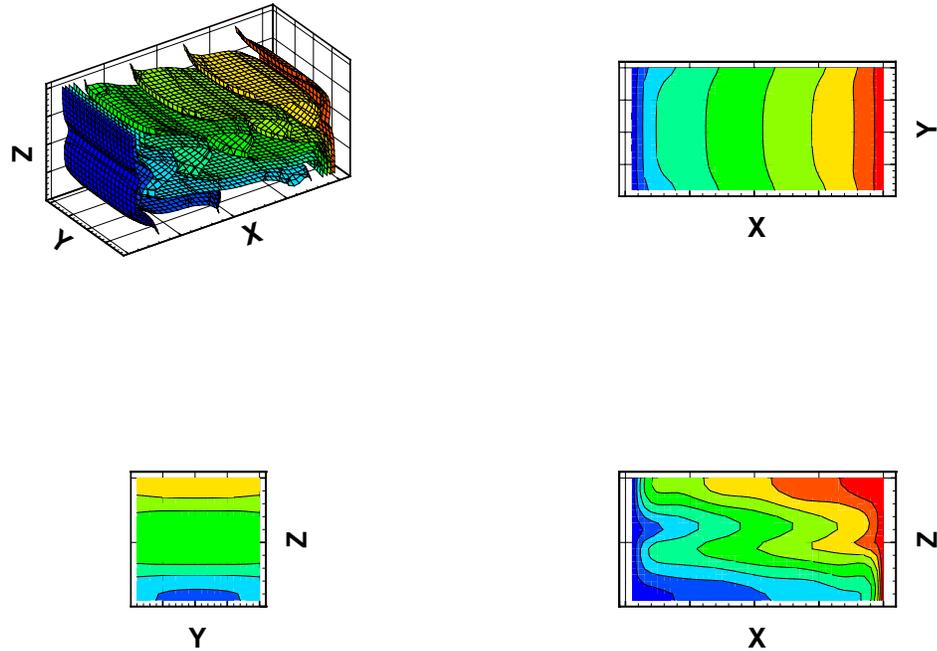


Abbildung 4.32: Dreidimensionale Temperaturverteilung, 3-D Numerik, $Ma = 130$, $Ra = 9200$, Isoflächen und Konturplots der Mittelebenen

in Abbildungen 4.33 bis 4.34 festzustellen. Insbesondere ist hier das Profil entlang der y -Achse interessant. Hier zeigt sich eine Charakteristik, die auf eine höhere relative Grenzflächengeschwindigkeit in Wandnähe schließen lässt. Das experimentelle Profil entlang der z -Achse hingegen lässt auf eine niedrigere Geschwindigkeit in Wandnähe schließen.

Insgesamt liegt die Abweichung zwischen Experiment und Numerik im Rahmen der Messgenauigkeit von $\pm 5\%$. Die darüberhinausgehenden Abweichungen und die Diskrepanz in der Charakteristik der Profile sind aller Wahrscheinlichkeit und Erfahrung nach auf einen in der mathematischen Modellierung nicht berücksichtigten Störwärmefluss durch die nicht ideal adiabaten Quarzglaswände zurückzuführen. Im Vergleich zu den projizierten Temperaturfeldern fällt die Abweichung jedoch deutlich geringer aus.

Insgesamt ist die Übereinstimmung zwischen Experiment und Numerik als gut zu bezeichnen.

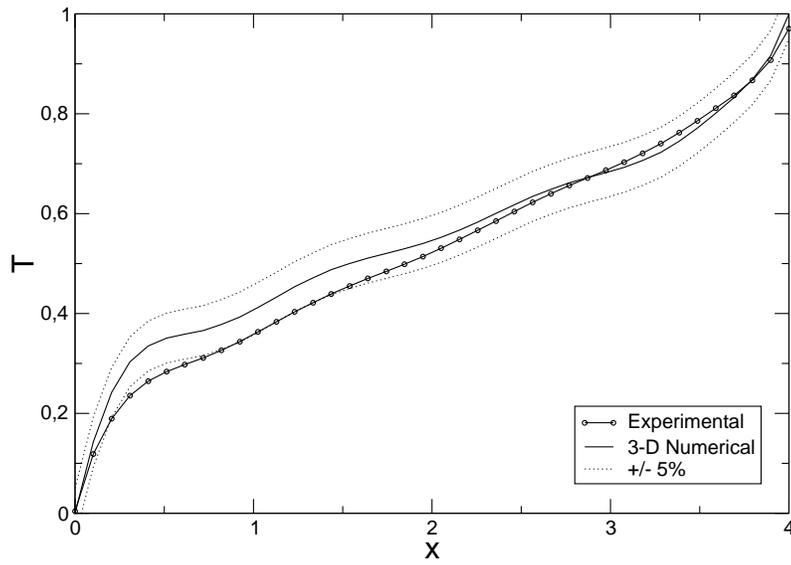


Abbildung 4.33: Temperaturverlauf entlang Mittellinie in x-Richtung, $y = y_m, z = z_m$, Vergleich 3-D Numerik, Experiment

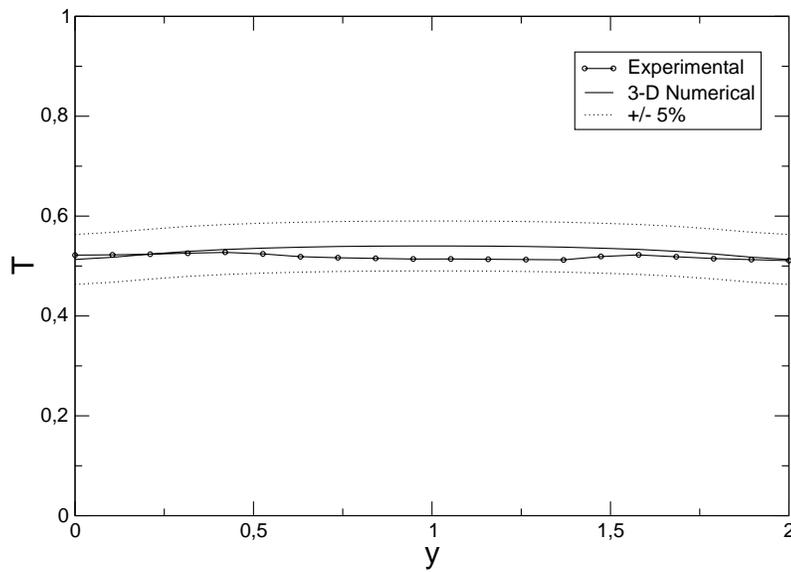


Abbildung 4.34: Temperaturverlauf entlang Mittellinie in y-Richtung, $x = x_m, z = z_m$, Vergleich 3-D Numerik, Experiment

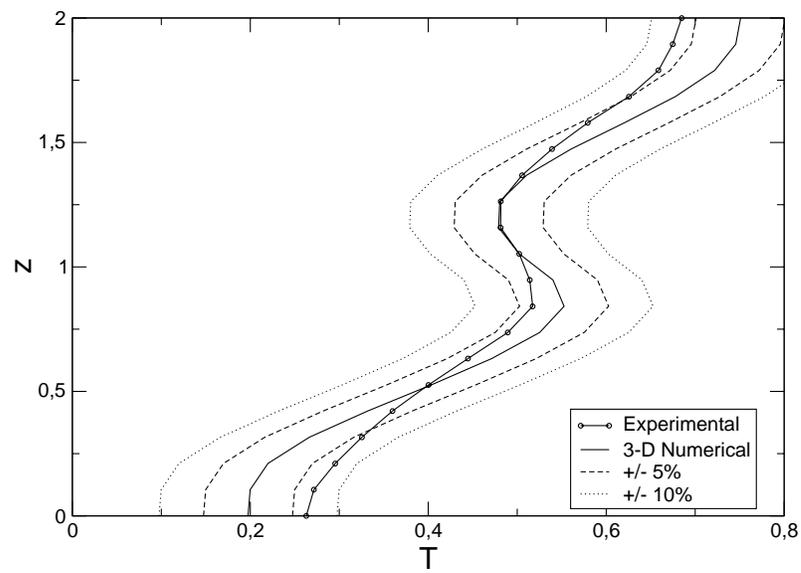


Abbildung 4.35: Temperaturverlauf entlang Mittellinie in z -Richtung, $x = x_m, y = y_m$, Vergleich 3-D Numerik, Experiment

4.5 Abklingverhalten einer lokalen Störung

Zur Verifikation des instationären Verhaltens soll die Abklingzeit einer lokalen Störung, die einer Störung

$$T_{dist} = A e^{\frac{(\Delta l)^2}{\epsilon}} \sin(\omega t) H(\pi - \omega t) \quad (4.20)$$

mit H , der Heavyside-Funktion und ϵ , der räumlichen Ausdehnung der Störung, entspricht, untersucht werden.

Für die Verifikation wurde eine halbe Periode der Sinusschwingung als Störung gewählt, da mit dem realisierten Aufbau keine negative Temperaturstörung eingebracht werden kann.

4.5.1 Messaufbau

Der Aufbau der Zelle entspricht dem zur Messung der Grundströmung. Zusätzlich ist durch Mitte der beheizten Kupferwand ein Widerstandsheizdraht geführt, der ca. $0,5mm$ in die Grenzfläche hineinragt. Mit diesem Draht wird die Temperaturstörung eingebracht. Abbildung 4.36 zeigt die Temperaturstörung im Experiment im Vergleich zur mathematisch modellierten. Die Form der Störung wird durch eine stückweise konstante Spannung am Heizdraht erzeugt. Die Aufheizspannung $V_1 = 0,5V$ liegt bis zum Punkt 1 ($t = 714,3s, t^* = 1$) an, bis Punkt 2 ($t^* = 2$) wird die Haltespannung $V_2 = 0,3V$ angelegt. Danach wird eine minimale Spannung $V_3 = 0.1V$ gehalten, bis bei Punkt 3 ($t^* = 3$) die Spannung abgeschaltet wird. Die nötigen Spannungen wurden in einem Vorabexperiment, bei dem der Heizdraht direkt mit einem PT100 Temperaturfühler verbunden war, bestimmt.

Gemessen wurde der Verlauf der in z -Richtung integrierten Temperaturdifferenz an einem Punkt $1mm$ stromab und einem Punkt in $7mm$ Entfernung vom Einleitungspunkt der Störung. Der zweite Messpunkt war einmal quer zur Hauptströmungsrichtung seitlich (lateral) und einmal in Hauptströmungsrichtung stromab (longitudinal) versetzt (Abb. 4.37). Diese Temperaturdifferenz wurde mittels eines Laserdifferentialinterferometers gemessen. Dieses Messverfahren ist eingeführt und soll daher in dieser Arbeit nicht näher beschrieben werden [36].

4.5.2 Physikalische Parameter

Die Parameter der simulierten Störung sind $A = 0.1, \epsilon_z = 0.1, \omega = 1$. Das entspricht einer Sinus-Halbwellen der Frequenz $1/\omega$.

Die physikalischen Parameter im Experiment entsprechen denen zur Messung der Grundströmung, die Amplitude der Störung ist $0.11 * \Delta T = 0,2K$, also geringfügig

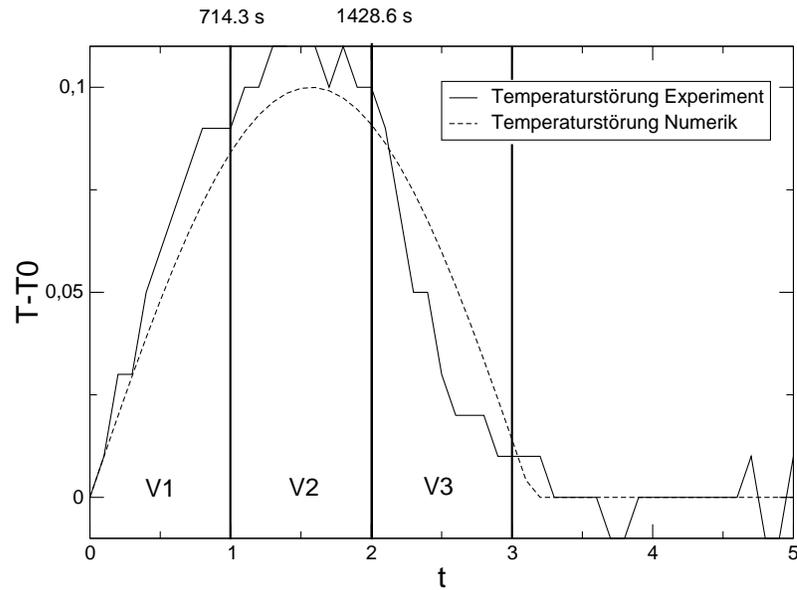


Abbildung 4.36: Temperaturstörung, Experiment und Numerik

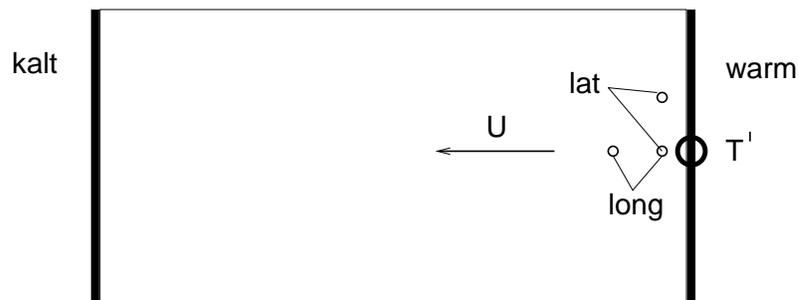


Abbildung 4.37: Anordnung der Messstrahlen, lateral und longitudinal

höher als in der numerischen Simulation, wobei hier durch die nicht vorhandene Temperaturregelung mit einem Fehler in der Größenordnung von 10 – 15% zu rechnen ist. Mit den physikalischen Eigenschaften der Experimentfluide ergibt sich die dimensionslose Zeit $t = 1$ zu 714.3s. Die Stördauer ist also 2244s.

4.5.3 Ergebnisse

Zum Vergleich der Abklingzeit der Störung in der numerischen Simulation wird entsprechend der Messung die Temperatur entlang der beiden Messstrahlengänge integriert und die Differenz dieser beiden Temperaturen ausgewertet. In Abbildung 4.38 ist das Zeitverhalten dieser Differenz als gestrichelte Linie dargestellt. Im Vergleich hierzu ist die aus der Phasenverschiebung der beiden Messstrahlen resultierende Intensität des interferierenden Laserlichts am Sensor dargestellt. Die dargestellte Kurve entspricht damit nicht direkt der Temperaturdifferenz, sondern dem \cos^2 der resultierenden Phasenverschiebung.

Die Intensität des Differentialinterferometers ist eine periodische \cos^2 -Verteilung (Abb. 4.22), bei kontinuierlicher Steigerung der Temperaturdifferenz wird evtl. mehr als eine Phase durchlaufen. Dies führt zu Intensitätsverläufen wie im lateralen Fall in Abbildung 4.38.

Im lateralen Fall ist für den Ruhezustand keine Phasenverschiebung vorhanden, da die Temperatur in y-Richtung nahezu konstant ist (Abb. 4.25). Im longitudinalen Fall ist eine Grunddifferenz vorhanden, die bereits im Ruhezustand zu einer Phasendifferenz führt.

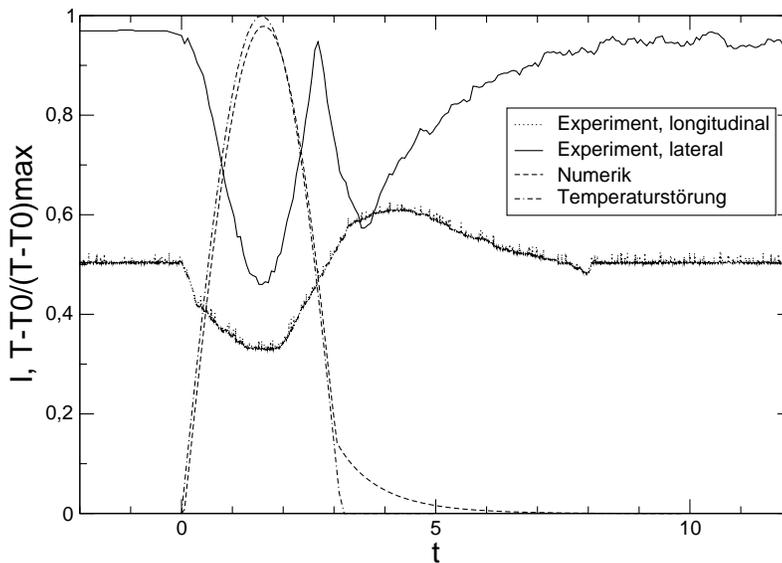


Abbildung 4.38: Abklingverhalten, Experiment und Numerik

4.5.4 Auswertung

Der zeitliche Verlauf der Temperaturstörung in der Simulation folgt der eingebrachten Störung mit geringem Zeitversatz und klingt hyperbolisch ab. Der experimentell gemessene Verlauf zeigt einen etwas höheren Versatz und ein ebenfalls leicht verzögertes Abklingverhalten. Während die Störung in der Simulation bereits bei $t = 7$ abgeklungen ist, ist im Experiment erst bei $t = 8$ der Ausgangswert der Intensität erreicht.

Besonders auffällig ist ein Knick im Intensitätsverlauf bei $t = 3, 14$, was dem Ende der Temperaturstörung entspricht. Nach diesem Knick steigt die Intensitätsdifferenz bis $t \approx 4$ weiter an, um dann in die Abklingphase überzugehen. Diese Hysterese in der Verzögerung des Abklingbeginns und die etwas längere Abklingzeit sind wahrscheinlich die Folge einer Aufheizung der isothermen Wand in der Umgebung des Heizdrahtes, die sich im Experiment nicht verhindern lässt, dadurch verschiebt sich der Zeitverlauf der eingebrachten Störung. Außerdem ist die räumliche Lokalisierung nicht so scharf wie im simulierten Fall, obwohl der Heizdraht zur Einbringung der Störung gegenüber der umgebenden Kupferwand thermisch isoliert ist.

Zur Auswertung der Abklingzeit wurden die Intensitätsverläufe ab Störungsende $t = 3.14$ auf die maximale Intensitätsdifferenz normiert. Abbildung 4.39 zeigt die normierten Verläufe.

Um die Hysterese durch den Experimentaufbau auszugleichen wurde zusätzlich eine Korrektur um die jeweilige Hysteresezeit durchgeführt. Die korrigierten Zeitverläufe sind in Abbildung 4.40 dargestellt und geben das bereinigte Abklingverhalten wieder. Der Vergleich des um die Hysterese des experimentellen Aufbaus bereinigten Abklingverhaltens zeigt eine gute Übereinstimmung mit der Vorhersage der Simulation.

Obwohl der Abklingvorgang einer lokalen Störung in der unterkritischen Strömung im Rahmen der experimentellen Ungenauigkeiten von der Simulation gut wiedergegeben wird, können diese Ergebnisse nicht als Verifikation des instationären Lösers gelten, wenn sie auch dessen Validität nahelegen. Zur abschließenden Verifikation ist ein Vergleich der überkritischen, oszillatorischen Instabilität (Abb. 3.28) nötig.

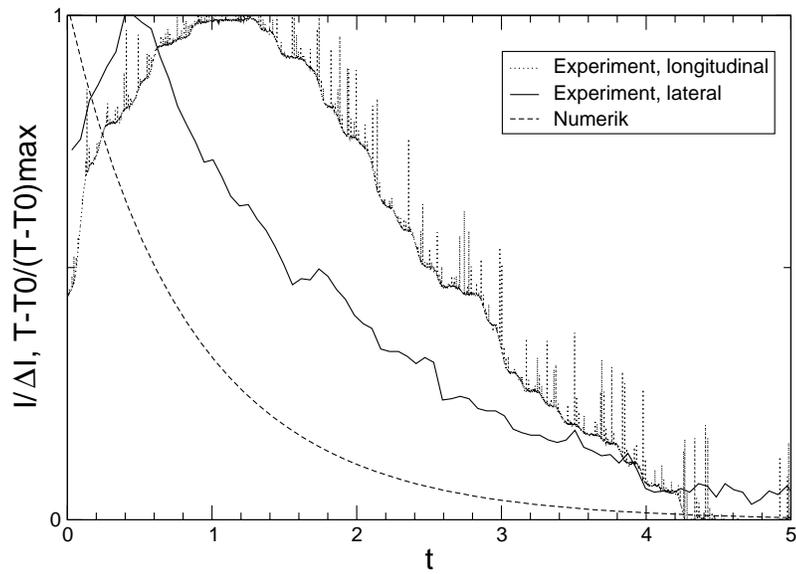


Abbildung 4.39: Abklingverhalten, normiert, Experiment und Numerik

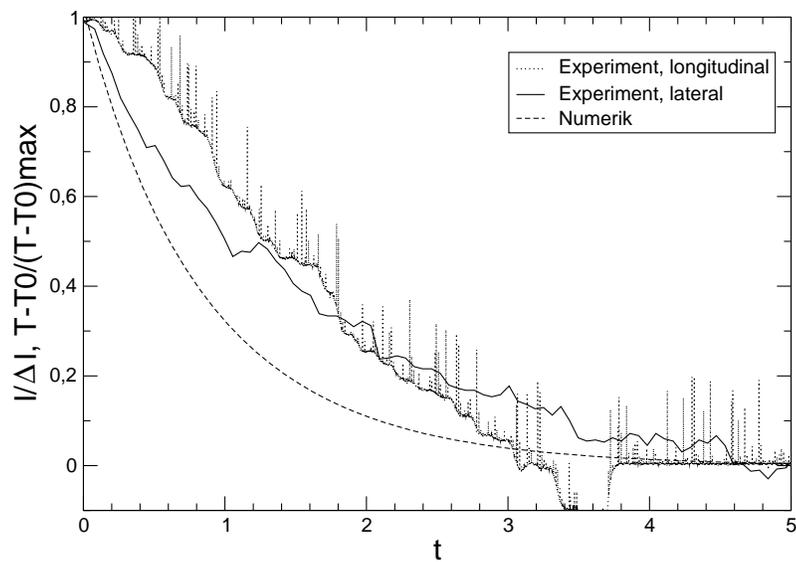


Abbildung 4.40: Abklingverhalten, normiert und um Hysterese korrigiert, Experiment und Numerik

Kapitel 5

Zusammenfassung

Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit war die unzureichende Wissensbasis über gemischte Konvektionsströmungen in Zweischichtsystemen, um diese Konvektion als treibende Kraft zur Erzeugung einer Scherschicht in einem geplanten Mikrogravitationsexperiment zu nutzen. Da auf der in der Literatur verfügbaren Basis die Auslegung eines solchen Experiments nicht möglich war, mussten diese Grundlagen und die Möglichkeit zur Berechnung der gemischten thermischen Konvektion in einem Zweischichtsystem bei horizontalem Dichtegradienten geschaffen werden.

Hierzu wurden die strömungsmechanischen Grundgleichungen auf das interessierende Problem angewandt und vereinfacht und so ein mathematisches Modell der Konvektion mit den entsprechenden Randbedingungen entwickelt.

Dieses Modell wurde zunächst für die eindimensionale stationäre Grundströmung im in zwei Richtungen unendlich ausgedehnten Kanal entdimensioniert und analytisch gelöst. Auf diese Lösung wurde die linearisierte Stabilitätstheorie angewandt, um eine Abschätzung der Stabilität der Grundströmung zu erhalten. Hierbei wurde ein Stabilitätsminimum entdeckt, dessen nähere Untersuchung für die entsprechenden Kennzahlen einen Wechsel der konvektionstreibenden Kräfte in der oberen Schicht, in der die Auftriebskraft und die Oberflächenspannungsänderung eine entgegengesetzte Wirkung zeigen, ergab.

Für die Simulation der Grundströmung und deren instationären Verhaltens im überkritischen bzw. gestörten Fall wurde das mathematische Modell in 3 Dimensionen entdimensioniert. Dieses Modell bildet die Grundlage für den verwendeten numerischen Löser.

Die zwei- und dreidimensionale Simulation der Grundströmung zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung, was die Struktur der Strömung und die Entstehung der Konvektionsrollen angeht. Die analytische Lösung überschätzt jedoch die Geschwindigkeiten in einem Maße, das das, aufgrund der Vernachlässigung der v - und w -Komponente der Geschwindigkeit, erwartete bei weitem

übersteigt. Durch eine Anpassung des als Randbedingung der analytischen Lösung vorgegebenen Temperaturgradienten an den sich im dreidimensionalen Fall einstellenden konnte diese Abweichung korrigiert werden.

Die Stabilität der Grundströmung in der 2-dimensionalen Simulation ist bei Formfaktor 4×2 um den Faktor 2,8 höher als von der linearisierten Theorie vorhergesagt. Eine Simulation der 3-dimensionalen überkritischen Strömung war wegen des Hauptspeicherbedarfs nicht möglich. Die Auswertung der Abklingzeit einer lokalen Störung im unterkritischen Zustand legt jedoch eine ähnlich erhöhte Stabilität nahe.

Zur Verifikation des numerischen Codes wurden die Ergebnisse der unterschiedlichen Simulationen untereinander, und die der dreidimensionalen Berechnung mit denen eines Verifikationsexperiments verglichen.

Der Vergleich der Ergebnisse der DNS für große Formfaktoren mit der analytischen Lösung für den unendlichen Kanal zeigt exzellente Übereinstimmung und Konsistenz der Lösungen.

Die Resultate der zwei- und dreidimensionalen Simulation stimmen im Mittelschnitt sehr gut überein.

Zur Messung der dreidimensionalen Temperaturverteilung im Experiment wurde die Messmethode der Differentialinterferometrie mit tomographischen Methoden gekoppelt und zur Tomographischen Interferometrie entwickelt, die die Rekonstruktion des dreidimensionalen Temperaturfeldes aus den integralen Werten der Interferometrie erlaubt. Der Funktionsnachweis für die neue Messtechnik wurde mit der simulierten Rekonstruktion eines generischen Modells und der simulierten Temperaturverteilung in einer Rayleigh-Benard-Konvektionszelle, sowie der Messung des dreidimensionalen Temperaturfeldes für diese Zelle geführt.

Der Vergleich der dreidimensionalen Temperaturverteilung im Experiment mit der 3D Lösung der DNS zeigt gute Übereinstimmung. Die Abweichungen im Zentrum sind im Rahmen der Toleranz der Messmethode. An den Wänden ist eine etwas höhere Abweichung festzustellen, die vermutlich auf das nicht ideal adiabatische Quarzglas zurückzuführen ist.

Die Erzeugung eines überkritischen, instabilen Zustands im Experiment war nicht möglich. Zur Überprüfung der Genauigkeit des instationären Lösung wurde die Abklingzeit einer lokalen Störung in der unterkritischen Grundströmung mit der experimentell gemessenen verglichen. Diese Messungen wurden mit einem hochempfindlichen Laser-Differential-Interferometer durchgeführt und geben den Zeitverlauf der Temperaturschwankungen in der Umgebung des Einleitungspunktes der Störung wieder. Im Vergleich zur Simulation stellt sich ein verzögerter Abklingbeginn (Hysterese) und eine etwas längere Abklingzeit ein. Diese Abweichungen sind vermutlich auf den nicht ideal lokalen Charakter der im Experiment eingebrachten Störung zurückzuführen. Der Vergleich der um diese Hysterese bereinigten Abklingzeiten zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen Vorhersage und Experiment.

Aufgrund der Konsistenz der numerischen Lösungen untereinander und mit der analytischen Lösung sowie der guten Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen kann das Berechnungsverfahren für die stationäre, auftriebsdominierte, gemischte Konvektion als verifiziert betrachtet werden. Die Ergebnisse der Auswertung des Abklingverhaltens einer lokalen Störung legen die Gültigkeit auch für den instationären Bereich nahe.

5.1 Ausblick

Wenngleich der benutzte Code unter Laborbedingungen für die gravitationsbehaftete, auftriebsdominierte gemischte Konvektion verifiziert werden konnte, kann noch keine Aussage über die Gültigkeit für rein oder stark oberflächenspannungsgetriebene Strömungszustände getroffen werden. Hierzu soll die Durchführung eines Weltraumexperiments vorgeschlagen werden, dass als Musterexperiment für die Tomographieeinheit des Fluid Science Lab (FSL) an Bord der Internationalen Raumstation geplant ist.

In diesem Zusammenhang soll auch die mit Unterstützung der ESA/ESTEC entwickelte Messtechnik von der Rekonstruktion stationärer Dichtefelder zur Messung instationärer Vorgänge und zum Einsatz im FSL weiterentwickelt werden.

Nach der Verifikation für Mikrogravitationsbedingungen steht ein Musterexperiment mit Auslegungsverfahren zur Erzeugung von Scherschichten in Flüssigkeitsgrenzschichten zur Verfügung. Dieses kann dann für vielfältige Untersuchungen bezüglich des Wärme- und Stofftransports sowie der Störungsausbreitung in Grenzflächen eingesetzt werden.

Eine Verifikation des instationären Lösers konnte nicht abschließend durchgeführt werden, da weder experimentell noch numerisch eine überkritische Strömung erzeugt werden konnte. Mit den Ergebnissen dieser Arbeit soll eine Parameterstudie durchgeführt werden, die Aufschluss über die Realisierbarkeit eines bodenbasierten Experiments zur Untersuchung des überkritischen oszillativen Verhaltens geben soll. Außerdem muss der Code im Hinblick auf die Speicherausnutzung optimiert, bzw. auf die nächste Rechnergeneration portiert werden, die ausreichend Speicher zur Verfügung stellt.

Das Mikrogravitationsexperiment zur Stabilitätsuntersuchung wird mit den durch diese Arbeit zur Verfügung stehen Auslegungsmitteln konzipiert. Parallel zum Experiment soll eine nichtlineare Analyse der Stabilität der gemischten thermischen Konvektion durchgeführt werden.

Im Rahmen der Arbeit sind auch weitere interessante Fragen aufgetaucht, die den Einfluss der Geometrie auf die Stabilität der Grundströmung betreffen. Hier ist

davon auszugehen, dass sich die Stabilität für grössere Geometriefaktoren der linearisierten Stabilitätstheorie annähert. Auch auf diese Fragen soll die oben genannte Parameterstudie Antworten liefern.

Literaturverzeichnis

- [1] BAHL, S. ; LIBURDY, J.A.: Three-dimensional image reconstruction using interferometric data from a limited field of view with noise. In: *Applied Optics* 30 (1991), Nr. 29, S. 4218–4226
- [2] BENARD, H.: Les tourbillons Cellulaires dans une Nappe Liquide. In: *Rev. Gen. Sci. Pures Appl.* 11 (1900), S. 1261ff
- [3] BLOCK, M.: Surface tension as the cause of Benard cells and surface deformation in a liquid film. In: *Nature (London)* 178 (1956), S. 650ff
- [4] BRACEWELL, R.N.: Strip Integration in Radio Astronomy. In: *Aust. J. Phys.* 9 (1956), S. 198–217
- [5] BREVDO, L. ; BOHNSACK, E. ; OERTEL JR., H.: Absolute und konvektive Orr-Sommerfeld-Stabilitätsanalyse von Nachlaufprofilen eines Kraftfahrzeuges. In: *ZAMM* (1994)
- [6] BUSSE, F.H.: On the aspect ratios of two-layer mantle convection. In: *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 34 (1981), S. 340ff
- [7] DEGEN, M ; COLOVAS, P. ; ANDERECK, C. ; RENARDI, Y.: Instabilities in two layer Rayleigh-Bénard convection. In: *Int. J. of Eng. Science* 36 (1998), Nr. 12-14, S. 1451–1470
- [8] DEGEN, M ; J., Kahle W. ; ANDERECK, C.: Time-dependent states in the Weissenberg effect. In: *Phys. Rev. E* 57 (1998), Nr. 2, S. 1761–1771
- [9] DELFS, J. ; ERHARD, J. ; MEIBURG, E. ; OERTEL JR., H.: Lagrange Identification of Absolutely Unstable Regimes in Wakes. In: *ACTA MECHANICA* 122 (1997), S. 89–97
- [10] DRAZIN, P.G. ; REID, W.H.: *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 1981

- [11] EGAMI, Y. ; STOYNOV, M. ; OERTEL JR., H.: Linear and nonlinear dynamics of localized disturbances in three-dimensional boundary layers. In: *Bericht 99/1, Institut für Strömungslehre, Universität Karlsruhe (TH)* (1999)
- [12] GEORIS, Ph. ; HENNENBERG, M. ; LEBON, G. ; LEGROS, J.C.: Investigation of thermocapillary convection in a three-liquid-layer system. In: *J. Fluid Mechanics* 389 (1999), S. 209ff
- [13] GERSHUNI, G.Z. ; ZHUKHOVITSKII: Monotonic and oscillatory instabilities of a two-layer-system of immiscible liquids heated from below. In: *Sov. Phys. Dokl.* 27 (1982), S. 531ff
- [14] GERSHUNY, G.Z. ; ZHUKHOVITSKII, E.M.: *Convective instability of incompressible fluids*. Jerusalem, 1976
- [15] GOLIA, C. ; VIVIANI, A.: Numerical modelling of the interface conditions in coupled Marangoni flows. In: *Acta Astronautica* 15 (1987), S. 1063ff
- [16] GORDON, R. ; BENDER, R. ; HERMAN, G.T.: Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for Three-dimensional Electron Microscopy and X-Ray Photography. In: *J. theor. Biol.* 29 (1970), S. 471–481
- [17] HANNEMANN, K. ; OERTEL JR., H.: Numerical Simulation of the absolutely and convectively unstable wake. In: *J. Fluid. Mech.* 199 (1989), S. 55–88
- [18] HERMAN, G.T.: *Image Reconstruction from Projections. The Fundamentals of Computerized Tomography*. 1. Academic Press, 1980
- [19] HOOPER, A.P. ; BOYD, W.: Shear-flow instability at the interface between two viscous fluids. In: *J. Fluid Mech.* 128 (1983), S. 507ff
- [20] JOHNSON, D ; NARAYANAN, R.: Geometric effects on convective coupling and interfacial structures in bilayer convection. In: *Phys. Rev. E* 56 (1997), S. 5462ff
- [21] JOHNSON, D. ; NARAYANAN, R.: Marangoni convection in multiple bounded fluid layers and its application to materials processing. In: *Proc. R. Soc. London, Series A* 356 (1998), S. 885ff
- [22] JOHNSON, D ; NARAYANAN, R. ; DAUBY, P. C.: The effect of air on the pattern formation in liquid air bilayer convection, How passive is air? In: *Fluid at Interfaces A Symposium in Memory of C-S Yih, Cambridge University Press, Cambridge* (1998)
- [23] JOSEPH, D.D.: Two fluids heated from below. In: *Meeting on Energy Stability Theory and Convection, Capri* (1986)

- [24] KIRCHARTZ, R. ; OERTEL JR., H.: Threedimensional thermal cellular convection in rectangular boxes. In: *Journal of Fluid Mechanics* 192 (1988), S. 249–286
- [25] LANDAU, L.D. ; E.M., Lifschitz: *Ahnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre*. Karlsruhe, 1976
- [26] MADABRUSHI, R. ; BALACHANDAR, S. ; VANKA, S.P.: A divergence-free chebyshev collocation procedure for incompressible flows with two non-periodic directions. In: *J. Comp. Physics* 105 (1993), S. 199–206
- [27] NAPOLITANO, L.G. ; VIVIANI, A. ; SAVINO, R.: Natural and Marangoni convection in two superposed immiscible liquid layers with horizontal heating. In: *Proceedings First Europ. Symp. Fluids in Space, Ajaccio ESA SP-353* (1991), S. 79ff
- [28] NEPOMNYASHCHII, A.A. ; SIMANOVSKII, I.B.: Thermocapillary convection in two-layer systems in the presence of a surface active agent at the interface. In: *Mekhanika zhidkosti i gaza* 2 (1986)
- [29] OERTEL JR., H.: Nachlaufströmungen. In: *Kolloquiumsvortrag, DFVLR-AVA Göttingen* (1985)
- [30] OERTEL JR., H.: Wakes behind blunt bodies. In: *Ann. Rev. Fluid Mech.* 218 (1990), S. 71–107
- [31] OERTEL JR., H.: Bereiche der reibungsbehafteten Strömung. In: *Z. Flugwiss. Weltraumforschung* 19 (1995), S. 119–128
- [32] OERTEL JR., H.: Local Disturbances in Boundary Layers. In: *Festschrift Vol. II, anlässlich des 60. Geburtstages von Herrn Prof. Ziegler* (1996)
- [33] OERTEL JR., H.: *Prandtl, Ein Führer durch die Strömungslehre*. 10. Springer, Berlin, New York, 2001
- [34] OERTEL JR., H. ; DELFS, J.: Mathematische Analyse der Bereiche reibungsbehafteter Strömungen. In: *ZAMM* 75 (1995), Nr. 7, S. 491–505
- [35] OERTEL JR., H. ; DELFS, J.: *Strömungsmechanische Instabilitäten*. 1. Springer, Berlin, New York, 1996
- [36] OERTEL SEN., H. ; OERTEL JR., H.: *Optische Strömungsmesstechnik*. 1. G. Braun, Karlsruhe, 1989
- [37] PEARSON, J. R. A.: On convection cells induced by surface tension. In: *J. Fluid Mech.* 4 (1958), S. 489ff

- [38] PRAKASH, A. ; KOSTER, J.N.: Steady natural convection in a double layer of immiscible liquids with density inversion. In: *Int. J. Heat Mass Transfer* 39 (1996), Nr. 3, S. 467ff
- [39] PRAKASH, A. ; KOSTER, J.N.: Steady natural convection in a two-layer system of immiscible liquids. In: *Int. J. Heat Mass Transfer* 40 (1997), Nr. 12, S. 2799ff
- [40] RADON, J.: Über die Bestimmung von Funktionen durch Ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. In: *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften* 29 (1917), S. 162–179
- [41] RAMACHANDRAN, G.N. ; LAKSHMINARAYANYAN: Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: Application of Convolution instead of A.V. fourier transforms. In: *Proc. Nat. Ac. Sci. USA* 9 (1971), Nr. 68, S. 2236–2240
- [42] RAYLEIGH, Lord: On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. In: *Philos. Magazine* 32 (1916), S. 529ff
- [43] RENARDY, Y.: Interfacial stability in a two-layer Benard problem. In: *Phys. Fluids* 29 (1986), S. 356ff
- [44] RENARDY, Y. ; JOSEPH, D.D.: Oscillatory instability in a Benard problem of two fluids. In: *Phys. Fluids* 28 (1985), S. 788ff
- [45] SCHENKEL, T. ; DEBATIN, K.: Reconstruction of 3-dimensional density distributions by tomographic interferometry. In: *CD Rom Proceedings, The Millennium 9th International Symposium on Flow Visualisation, Edinburgh, 2000*
- [46] SCHENKEL, T. ; OERTEL, H.: Optical Tomography for Fluid Science Convection Experiments. In: *Summary Report, TN 1-4, ESA-ESTEC Contract No. 13027/98/NL/MV* (September 2001)
- [47] SCRIVEN, L. E. ; STERNLING, C. V.: Interfacial turbulence, hydrodynamic instability and the Marangoni effect. In: *AIChE J.* 5 (1959), S. 514ff
- [48] STOYNOV, M. ; OERTEL JR., H.: Localized Linear and Nonlinear Dynamics of Disturbances in Three-Dimensional Boundary Layers. In: *ZAMM (to be published)* (2002)
- [49] STOYNOV, M.I.: *Three-dimensional thermal convection in a two-layer system of immiscible liquids in rectangular container. Formulation and numerical algorithm.* Institutsbericht 99/2, Institut für Strömungslehre, Universität Karlsruhe, 1999

- [50] STOYNOV, M.I.: *Solver for Direct Numerical Simulation of Incompressible 3D Flows in Rectangular Containers*. Institutsbericht, Institut für Strömungslehre, Universität Karlsruhe, 2002
- [51] TURNER, J.S.: *Buoyancy effects in fluids*. University Press, Oxford, 1961
- [52] VILLERS, D. ; PLATTEN, J.K.: Thermal convection in superposed immiscible liquid layers. In: *J. Appl. Scientific Research* 45 (1988), S. 145ff
- [53] YIH, C.S.: Instability due to viscosity stratification. In: *J. Fluid Mech.* 27 (1967), S. 337ff
- [54] ZEREN, R.W. ; REYNOLDS, W.C.: Thermal instabilities in two-fluid horizontal layers. In: *J. Fluid Mech.* 53 (1972), S. 305ff
- [55] ZIEREP, J. ; OERTEL JR., H.: *Convective Transport and Instability Phenomena*. 1. G. Braun, Karlsruhe, 1982

Abbildungsverzeichnis

1.1	Experimentkonzept	4
1.2	Fragestellung	5
1.3	Gliederung	7
2.1	Physik der Rayleigh-Marangoni-Konvektion	16
2.2	Formen der konvektiven Kopplung, von a) nach e) steigt die Auftriebskraft in der oberen Schicht	20
3.1	Stabilitätsdiagramm lineare Stabilitätsanalyse $250 \leq Ra \leq 12500$	27
3.2	Stabilitätsdiagramm lineare Stabilitätsanalyse $0 \leq Ra \leq 625$	27
3.3	Kritische Marangoni-Zahl Ma_c , $0 \leq Ra \leq 2500$	28
3.4	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile, eindimensionale analytische Lösung $Ma = 150$, $Ra = 0$ ($Bo = 0$) und $Ma = 0$, $Ra = 10000$ ($Bo \rightarrow \infty$)	29
3.5	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile, eindimensionale analytische Lösung $Ma = 150$, $0 \leq Ra \leq 375$, $0 \leq Bo \leq 2,5$	30
3.6	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile, eindimensionale analytische Lösung $Ma = 150$, $450 \leq Ra \leq 1500$, $3 \leq Bo \leq 10$	31
3.7	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile, eindimensionale analytische Lösung $Ma = 150$, $3000 \leq Ra \leq 10000$, $20 \leq Bo \leq 66,67$ und $Bo \rightarrow \infty$	32
3.8	Strömungskonfigurationen der eindimensionalen Grundströmung in Abhängigkeit von Marangoni- und Rayleighzahl	33
3.9	Stromlinien und Isothermen, zweidimensionale Grundströmung, $Ma = 150$, $Ra = 0$ ($Bo = 0$) und $Ma = 0$, $Ra = 10000$ ($Bo \rightarrow \infty$)	37
3.10	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile $x = x_m$, zweidimensionale Grundströmung $Ma = 150$, $Ra = 0$ ($Bo = 0$) und $Ma = 0$, $Ra = 10000$ ($Bo \rightarrow \infty$)	38

3.11	Stromlinien und Isothermen, zweidimensionale Grundströmung $Ma = 150, 0 \leq Ra \leq 375, 0 \leq Bo \leq 2,5$	39
3.12	Stromlinien und Isothermen, zweidimensionale Grundströmung $Ma = 150, 450 \leq Ra \leq 1500, 3 \leq Bo \leq 10$	40
3.13	Stromlinien und Isothermen, zweidimensionale Grundströmung $Ma = 150, 3000 \leq Ra \leq 10000, 20 \leq Bo \leq 66,67$ und $Bo \rightarrow \infty$. .	41
3.14	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile $x = x_m$, zweidimensionale Grundströmung $Ma = 150, 0 \leq Ra \leq 375, 0 \leq Bo \leq 2,5$	42
3.15	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile $x = x_m$, zweidimensionale Grundströmung $Ma = 150, 450 \leq Ra \leq 1500, 3 \leq Bo \leq 10$	43
3.16	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile $x = x_m$, zweidimensionale Grundströmung $Ma = 150, 3000 \leq Ra \leq 10000, 20 \leq Bo \leq 66,67$ und $Bo \rightarrow \infty$	44
3.17	Stromlinien und Isothermen, dreidimensionale Grundströmung, Mit- telschnitt $y = y_m, Ma = 150, Ra = 0 (Bo = 0)$ und $Ma = 0,$ $Ra = 10000 (Bo \rightarrow \infty)$	46
3.18	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile, dreidimensionale Grund- strömung, Mittelschnitt $x = x_m, y = y_m, Ma = 150, Ra = 0$ $(Bo = 0)$ und $Ma = 0, Ra = 10000 (Bo \rightarrow \infty)$	47
3.19	Stromlinien und Isothermen, dreidimensionale Grundströmung, Mit- telschnitt $y = y_m, Ma = 150, 0 \leq Ra \leq 375, 0 \leq Bo \leq 2,5$	48
3.20	Stromlinien und Isothermen, dreidimensionale Grundströmung, Mit- telschnitt $y = y_m, Ma = 150, 450 \leq Ra \leq 1500, 3 \leq Bo \leq 10$	49
3.21	Stromlinien und Isothermen, dreidimensionale Grundströmung, Mit- telschnitt $y = y_m, Ma = 150, 3000 \leq Ra \leq 10000, 20 \leq Bo \leq 66,67$ und $Bo \rightarrow \infty$	50
3.22	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile $x = x_m, y = y_m$, dreidi- mensionale Grundströmung, $Ma = 150, 0 \leq Ra \leq 375, 0 \leq Bo \leq 2,5$	51
3.23	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile $x = x_m, y = y_m$, dreidi- mensionale Grundströmung $Ma = 150, 450 \leq Ra \leq 1500, 3 \leq Bo \leq 10$	52
3.24	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile $x = x_m, y = y_m$, drei- dimensionale Grundströmung $Ma = 150, 3000 \leq Ra \leq 10000,$ $20 \leq Bo \leq 66,67$ und $Bo \rightarrow \infty$	53
3.25	Korrektur der eindimensionalen Lösung, $Ma = 150, Ra = 0$	56
3.26	Korrektur der eindimensionalen Lösung, $Ma = 0, Ra = 10000$	57
3.27	Korrektur der eindimensionalen Lösung, $Ma = 150, Ra = 10000$	58

3.28	Temperaturabweichung $\frac{T-T_0}{\Delta T}$, $x = x_m, z = z_m$, $Ma = 2500, Ra = 10000$ und $Ma = 2600, Ra = 10000$	60
3.29	Energieinhalt der Temperaturfluktuationen, $Ma = 2500, Ra = 10000$ und $Ma = 2600, Ra = 10000$	61
3.30	Temperaturprofile, $Ma = 2500, Ra = 10000$, $y = y_m, z = z_m$, Temperaturgradient im Zentrum der Box	61
3.31	Abklingverhalten einer lokalen Störung, Störenergie	63
4.1	Konvergenzverhalten für steigende Anzahl von Stützpunkten, $Ma = 130, Ra = 9200, Pr_1 = 390$	68
4.2	Vergleich zweidimensionale numerische Lösung $L_x = 40L_z = 2L$ mit analytischer Lösung, $Ma = 75, Ra = 5000, Pr_1 = 390$	68
4.3	Vergleich zweidimensionale und dreidimensionale numerische Lösung $Ma = 130, Ra = 9200, Pr_1 = 390$	69
4.4	Optischer Aufbau des Differentialinterferometers	74
4.5	Beispiele von Aufnahmen mit dem Differential Interferometer [36]	77
4.6	Radon Projektion	78
4.7	Generisches Dichtefeld, Modell 5	81
4.8	Rekonstruierte Dichteverteilung, Modell 5, Isoflächen	82
4.9	Rayleigh-Benard Konvektionszelle	83
4.10	Layout des Differentialinterferometers	84
4.11	Interferometer auf optischer Bank	85
4.12	Einfluss von Rauschen auf Rekonstruktionsgenauigkeit	87
4.13	Brechung der Messstrahlen und Bereiche der Totalreflektion	88
4.14	Blickwinkel und Bereiche der Totalreflektion für 5+1 und 3+3 Anordnung	89
4.15	Blickwinkel und Bereiche der Totalreflektion für 5+1 und 3+3 Anordnung, quadratischer Querschnitt	89
4.16	Berechnete Temperaturverteilung, Rayleigh-Benard Instabilität, $Ra = 5400, Pr = 1000$	90
4.17	Rekonstruiertes Temperaturfeld, Rayleigh-Benard Instabilität, 5+1 komplette Projektionen	91
4.18	Konvergenz und relative Abweichung, RB Instabilität, 5+1 komplette Projektionen	92

4.19	Rekonstruiertes Temperaturfeld, Rayleigh-Benard Instabilität, 5+1 Teilprojektionen	92
4.20	Konvergenz und relative Abweichung, RB Instabilität, 5+1 Teilprojektionen	93
4.21	Interferogramme, Rayleigh Benard Zelle (5+1 Konfiguration)	94
4.22	Intensität über Phasenverschiebung für unverschobenes und $\lambda/4$ verschobenes Interferogramm	95
4.23	Auswertung der Dichte-/Temperaturverteilung anhand eines Interferogramm-Sets	96
4.24	Dichte-/Temperaturverteilungsprojektionen, Rayleigh Benard Cell	97
4.25	Rekonstruiertes Temperaturfeld, Rayleigh-Benard Zelle, 5+1 gemessene Projektionen, 5 Iterationen ART-algorithmus, <i>EXPERIMENT</i>	97
4.26	Messzelle	99
4.27	Vergleich eines aus Simulationsdaten gewonnenen Interferogramms mit dem im Experiment aufgenommenen	100
4.28	Vergleich projiziertes Temperaturfeld, Simulation (links) und Experiment (rechts)	100
4.29	Temperaturverlauf entlang der Mittellinie der Projektion in x-Richtung, $z = z_m$, Vergleich 3-D Numerik, Experiment	101
4.30	Temperaturverlauf entlang der Mittellinie der Projektion in z-Richtung, $x = x_m$, Vergleich 3-D Numerik, Experiment	101
4.31	Dreidimensionale Temperaturverteilung, Experiment, tomographische Interferometrie, $Ma = 130$, $Ra = 9200$, Isoflächen und Konturplots der Mittelebenen	102
4.32	Dreidimensionale Temperaturverteilung, 3-D Numerik, $Ma = 130$, $Ra = 9200$, Isoflächen und Konturplots der Mittelebenen	103
4.33	Temperaturverlauf entlang Mittellinie in x-Richtung, $y = y_m, z = z_m$, Vergleich 3-D Numerik, Experiment	104
4.34	Temperaturverlauf entlang Mittellinie in y-Richtung, $x = x_m, z = z_m$, Vergleich 3-D Numerik, Experiment	104
4.35	Temperaturverlauf entlang Mittellinie in z-Richtung, $x = x_m, y = y_m$, Vergleich 3-D Numerik, Experiment	105
4.36	Temperaturstörung, Experiment und Numerik	107
4.37	Anordnung der Messstrahlen, lateral und longitudinal	107
4.38	Abklingverhalten, Experiment und Numerik	108

4.39	Abklingverhalten, normiert, Experiment und Numerik	110
4.40	Abklingverhalten, normiert und um Hysterese korrigiert, Experiment und Numerik	110

Tabellenverzeichnis

2.1	Zuordnung der Variablen zur Entdimensionierung	12
4.1	Physikalische Eigenschaften der Experimentfluide bei $25^{\circ}C$	71
4.2	Technische Daten, Interferometer	85

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Torsten Schenkel
Geburtstag: 21.04.1971
Geburtsort: Hardheim/Odw.
Familienstand: verheiratet mit Martina Tenzer, Tanzpädagogin
Vater: Helmut Schenkel, 25.02.1948
Dipl.Ing.(FH) Architekt
Mutter: Dolores Bauer, gesch. Schenkel, geb. Edinger, 23.07.1952
Verwaltungsfachangestellte
Schwester: Marion Schenkel, 26.11.1974
Studentin der Biologie, Universität Kaiserslautern

Ausbildungsdaten

1977-1981 Erich-Kästner-Grundschule in Mannheim
1981-1990 Ludwig-Frank-Gymnasium in Mannheim.
1990-1991 Grundwehrdienst 3./251, Calw
1991-1998 Studium des Maschinenbaus an der Universität Karlsruhe.
seit 11.98. Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Strömungslehre,
Universität Karlsruhe (TH)
seit 01.01 kommissarischer Laborleiter des Instituts für Strömungslehre, Uni-
versität Karlsruhe

Sonstiges

06.91.-09.91. Praktikum Mercedes-Benz AG, Mannheim
1993-1995 Nebentätigkeit bei Fa. CSAT, Karlsruhe
1995 Studienarbeit bei Fa. Leica, Nußloch
1996 Praktikum bei Fa. Leica, Nußloch