

KFK-14

KERNREAKTOR

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.

- Karlsruhe -

KBB

10. 8. 1959

Institut für Neutronenphysik
und Reaktortechnik

Bericht Nr. 14

= [Interner Bericht 59/57]

Resonanzeinfang von Neutronen in heterogenen Systemen,
insbesondere in Brennstoffbündeln

von

Gerd Blässer

KERNREAKTOR

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.
Zentralbücherei

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor.

K E R N R E A K T O R

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.

TA 7.006

KERNREAKTOR

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.

- Karlsruhe -

10. 8. 1959

Institut für Neutronenphysik
und Reaktortechnik

Bericht Nr. 14

Resonanzeinfang von Neutronen in heterogenen Systemen,
insbesondere in Brennstoffbündeln

von

Gerd Blässer

KERNREAKTOR

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.
Zentralbücherei

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor.

K E R N R E A K T O R
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.

I n h a l t s v e r z e i c h n i s

A)	Einleitung	1
B I.)	Kürze Zusammenfassung der bisher durchgeführten Arbeiten auf dem Gebiete der Resonanzabsorption	
	a) Homogener Fall	3
	b) Heterogener Fall	6
	c) Ansätze zu einer exakteren Behandlung des Resonanzeinfangs in heterogenen Systemen	10
B II.)	Neue Behandlung der heterogenen Resonanztheorie	
	a) Äquivalente Darstellung der Resonanzentkommwahrscheinlichkeit	13
	b) Die Behandlung der Integralgleichung für heterogene Systeme und die Zurückführung des heterogenen Falls auf einen homogenen Fall	17
	c) Bestimmung des asymptotischen Flusses in einem nichtabsorbierenden Medium mit lethargieunabhängigen, räumlich variablen Wirkungsquerschnitten und Abbremsseigenschaften	23
	d) Grenzfälle der Gl. (70) und Beispiele	25
B III.)	Anwendung der Theorie auf die Berechnung des Resonanzeinfangs im Plattenbündel	
	a) Die Berechnung von $1 - M_1$ im Plattenbündel	29
	b) Der Begriff der effektiven Oberfläche	32
	c) Berechnung des p-Faktors im Plattenbündel für kleinen Plattenabstand bei Gültigkeit der Breitwigner-Formeln	34
	d) Abschließende Betrachtungen über den Gültigkeitsbereich der Gleichung (84)	37
B IV.)	Der Fall der Stab-Bündel	
	a) Ähnlichkeit der First-Collision-Ausdrücke auf der Basis gleichen Oberflächen/Volumen-Verhältnisses	38
	b) Vergleich der experimentellen Ergebnisse von HELLSTRAND mit der Theorie	40
C)	Abschließende Zusammenfassung	43
D)	Anhang: Tabelle der Funktionen $\varphi(z)$ und $f_r(x)$	44

E i n l e i t u n g

Für die Konstruktion von Kernreaktoren ist die Kenntnis der Resonanzentkommwahrscheinlichkeit, d.h. der Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron von der Energie, mit der es bei der Kernspaltung frei wird, auf thermische Energien abgebremst wird, ohne bei diesem Abbremsprozeß in den Resonanzlinien des Urans eingefangen zu werden, von großer Bedeutung.

Während im Falle einer homogenen Mischung von Uran und Moderator die Berechnung dieser Resonanzentkommwahrscheinlichkeit relativ einfach in der für technische Zwecke nötigen Genauigkeit möglich ist (und außerdem der Weg für eine genauere Rechnung im Prinzip bekannt ist), sind die Verhältnisse im heterogenen Fall, in dem größere Stücke aus Uranmetall oder UO_2 in den Moderator eingebettet sind, wesentlich komplizierter.

Im ersten Teil dieser Arbeit sollen zunächst noch einmal die bisherigen Versuche einer Beschreibung des Resonanzeinfangs in heterogenen Medien zusammengefaßt werden. Daran anschließend soll eine neue Behandlung des Problems diskutiert werden, die den schwierigen heterogenen Fall auf den wesentlich leichter lösbaren homogenen Fall zurückführt. Speziell unter den Voraussetzungen der Wigner-Näherung, unter denen der homogene Fall mit der für die Praxis ausreichenden Genauigkeit explizit gelöst werden kann, läßt sich auch das heterogene Problem zwanglos behandeln. Insbesondere läßt sich zeigen, daß viele der bisherigen Näherungen für die Resonanzabsorption in heterogenen Systemen aus dieser allgemeineren Behandlung abgeleitet werden können, während man andererseits feststellen kann, daß einige dieser Versuche einer anschaulichen Ableitung von Ausdrücken für die Resonanzabsorption fehlerhafte Resultate liefern, so daß sich eine deduktive Darstellung, wie sie in dieser Arbeit versucht wird, zumindest insofern lohnt, als sie eine nachträgliche Rechtfertigung für einige der bisher üblichen Beschreibungsweisen liefert, während sie es gestattet, andere auszuschließen.

Die zweite Aufgabe dieser Arbeit soll es sein, die speziellen Probleme der Erhöhung des Resonanzeinfangs durch die Anwesenheit eines moderierenden Kühlmittels in einem Bündel von Uranstäben zu studieren. Als Modell wurde dabei das Plattenbündel zugrunde gelegt; durch Vergleich mit Experimenten von HELLSTRAND über Neutroneneinfang in Stabbündeln soll sodann festgestellt werden, inwieweit die beim Plattenbündel erhaltenen Resultate auch für ein Stabbündel bezeichnend sind.

Technisch können derartige von Kühlmedium umströmte Bündel dadurch eine Bedeutung gewinnen, daß sie eine bessere Wärmeabfuhr und damit eine höhere spezifische Leistung ermöglichen, verglichen mit dem Fall, daß die gleiche Uranmenge in einem einfachen Stab vereinigt wäre. Bündelförmige Anordnungen

von Uranstäben sind daher speziell für die Konstruktion von Leistungsreaktoren von Interesse.

Im folgenden soll noch die Nomenklatur festgelegt werden:

Die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit p wird, wie allgemein üblich - für ein unendlich ausgedehntes Medium gleichförmiger (homogener Fall) oder periodisch wechselnder Zusammensetzung (heterogener Fall) definiert und ist eine eindeutige Funktion der Struktur des betrachteten Mediums. Im heterogenen Fall bildet also die Brennstoffverteilung im Moderator ein Gitter. Ist die kleinste Periode eines derartigen Gitters nicht wesentlich größer als die freie Weglänge im Moderator, so wollen wir diese Anordnung ein enges Gitter nennen.

Besteht der Brennstoff innerhalb einer Gitterzelle aus mehreren mechanisch unzusammenhängenden Stücken, so bezeichnet man diese Anordnung als Bündel. Diese Arbeit soll sich auf Platten- und Stabbündel beschränken.

Weiter sei der Winkelfluß der Neutronen wie üblich mit $\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, u)$ bezeichnet. ($\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, u)$ ist die Zahl der Neutronen pro Raumwinkel-Einheit und pro Einheit der Lethargie mit Bewegungsrichtungen um $\vec{\Omega}$ und Werten der Lethargie um u , die pro Zeiteinheit im Punkte \vec{r} die normal zur Bewegungsrichtung liegende Einheitsfläche durchsetzen.)

Der Neutronenfluß pro Lethargie-Einheit sei $\xi(\vec{r}, u) = \int \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, u) d\Omega$. Mit $\varphi(\vec{r}, u)$ sei die Stoßdichte pro Lethargie-Einheit bezeichnet:

$$\varphi(\vec{r}, u) = \Sigma(\vec{r}) \xi(\vec{r}, u).$$

Dabei ist $\Sigma(\vec{r})$ der totale makroskopische Wirkungsquerschnitt im Punkte \vec{r} .

ABSCHNITT I :

Kurze Zusammenfassung der bisher durchgeführten Arbeiten auf dem Gebiete der Resonanzabsorption

a) Homogener Fall

Die frühen Arbeiten von PLACZEK¹, WIGNER und anderen sind von MARSHAK² zusammengefaßt dargestellt worden. Im homogenen Fall gilt die Boltzmann-Gleichung für die Stoßdichte $\varphi(u)$ in der Form

$$(1) \quad \varphi(u) = \int_0^u \sum_i h_i(u') f_0^i(u-u') \varphi(u') du' + \delta(u)$$

Hierbei wurde angenommen, daß sämtliche Neutronen mit der gleichen Quell-Lethargie 0 erzeugt werden; außerdem wurde die Quellstärke auf 1 normiert.

$f_0^i(u-u')$ ist der Bremskern für ein Atom der Sorte i, der die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von der Lethargie u' auf die Lethargie u für einen Stoß angibt und im Falle der elastischen Streuung - die wir allein betrachten wollen - die Form hat:

$$(2) \quad f_0^i(u-u') = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha_i} e^{-(u-u')} & \text{für } u' \leq u \leq u' + \epsilon_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$\epsilon_i = \ln \frac{1}{\alpha_i} \quad \alpha_i = \left(\frac{M_i - 1}{M_i + 1} \right)^2$$

M_i = Massenzahl des Kerns der Sorte i

Weiter ist $h_i(u)$ die Wahrscheinlichkeit, daß eine Wechselwirkung bei der Lethargie u eine Streuung an einem Kern der Sorte i ist. Wir wollen

$$1 - \sum_i h_i(u) = g(u)$$

setzen.

Die Bremsdichte q wird definiert durch

$$(3) \quad q(u) = \int_0^u \sum_i h_i(u') G_i(u-u') \varphi(u') du'$$

mit

$$(4) \quad G_i(u-u') = \int_{u'}^{\infty} f_0^i(u''-u') du''$$

Anschaulich ist $q(u)$ die Zahl der Neutronen, die pro Zeiteinheit und pro Raumeinheit auf Lethargien $\geq u$ abgebremst werden.

Dann läßt sich die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit bis zur Lethargie u^+ auf folgende zwei Arten einführen:

Entweder als

$$(5) \quad p(u) = \varphi(u)$$

oder durch

$$(6) \quad \frac{dp(u)}{du} = -g(u)\varphi(u)$$

Beide Darstellungen sind äquivalent, denn aus den Gleichungen (1), (3) und (5) folgt Gleichung (6). Man muß bei der Rechnung nur hinsichtlich der δ -Funktion in (1) vorsichtig sein und besser statt mit $\varphi(u)$ überall mit $\varphi^*(u) = \varphi(u) - \delta(u)$ rechnen, da man sonst leicht ein falsches Resultat erhält.

Beschränkt man sich in folgendem auf den Fall, daß das homogene Medium aus einer Mischung von Uran und einem einzigen moderierenden nicht einfangenden Element besteht (eine Annahme, die auch bei U-H₂O- oder U-D₂O-Gemischen näherungsweise gilt, da die Moderierung durch den Sauerstoff im Vergleich zu der durch den Wasserstoff vernachlässigt werden kann, so erhält Gleichung (1) die spezielle Form

$$(1') \quad (1 - k_0(u))\varphi(u) = \int_0^u k_1(u') f_0(u-u')\varphi(u') du' + \delta(u)$$

Für den Fall der Moderation durch leichten Wasserstoff läßt sich die Gleichung (1') durch Differentiation nach u in eine Differentialgleichung verwandeln und als solche sofort lösen. Man erhält auf diese Weise bekanntlich

$$(7) \quad p(u) = e^{-\int_0^u \frac{g(u')}{1-k_0(u')} du'} = e^{-\int_0^u \frac{\Sigma_{a0}(u')}{\Sigma_1(u') + \Sigma_{a0}(u')} du'}$$

Hier und im folgenden soll sich der Index 0 immer auf das Uran, der Index 1 auf den Moderator beziehen. $h(0)$ wird immer gleich 1 angenommen, da bei der Quell-Lethargie praktisch noch keine Absorption vorkommt.

Bereits in Gl. (1') wurde angenommen, daß die Urankerne im Vergleich zu den Moderatorkernen unendlich schwer seien, d.h. daß man die Bremsung durch elastische Stöße in Uran vernachlässigen kann. Diese Voraussetzung ist gerade

+) Der übliche p -Faktor ist die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit bis zu thermischen Energien, also angenähert $p = p(\infty)$; es sei im folgenden unter "p" ohne Argument immer $p(\infty)$ verstanden.

in den energieniedrigsten Resonanzen gerechtfertigt, deren Breite groß ist gegen den maximalen Energieverlust eines Neutrons bei einer elastischen Streuung an einem Urankern. Da die energieniedrigsten Resonanzen beim Uran den wesentlichsten Einfluß auf die Größe der Resonanzabsorption haben (DRESNER³, VAN DER HELD⁴), ist die Annahme unendlich schwerer Urankerne zulässig. Man kann also im Falle eines U-H₂O-Gemisches die Lösung (7) als exakt ansehen. Interessanterweise kann man, wie man aus (7) sieht, im Falle der Annahme unendlich schwerer Urankerne von der Streuung am Uran ganz absehen. Definiert man also h als $\frac{\Sigma_1}{(\Sigma_1 + \Sigma_{0a})}$ und g als $1-h$, so geht der Ausdruck für p über in $p(u) = \exp(-\int^u g(u') du')$. Im Rest dieses Abschnitts sei diese Umdefinition stets durchgeführt.

Falls das moderierende Element nicht im wesentlichen leichter Wasserstoff ist, kann man bekanntlich Gl. (1') im allgemeinen Fall nur noch sukzessiv (von einem Bremsintervall ξ zum nächsten) lösen. In dem Fall, daß die Absorption nur in schmalen (schmal gegen ein Bremsintervall im Moderator) Resonanzlinien erfolgt und sich hinsichtlich der Bremsdichte nur als eine schwache Perturbation bemerkbar macht (bzw. daß die Resonanzlinien mehr als eine Bremslänge ξ auf der Lethargieachse voneinander entfernt sind), kann man allerdings annehmen, daß auf jede Resonanz der asymptotische Fluß auftrifft, der sich in einigem Abstand (hinsichtlich der Lethargie) von der vorigen Resonanz ausgebildet hat. Dann geht Gl. (6) über in

$$(8) \quad \frac{dp(u)}{du} = -g(u) \varphi_{as} = -g(u) \cdot \frac{1}{3} p(u)$$

und damit wird

$$(9) \quad p(u) = \prod_{\substack{\text{alle Reso-} \\ \text{nanzen } < u}} \left(1 - \frac{1}{3} \int_{\xi}^u g(u') du'\right) \approx e^{-\frac{1}{3} \int_0^u g(u') du'}$$

Diese Behandlung des Resonanzeinfangs (unter der Annahme schmaler und weit voneinander entfernter Resonanzlinien) nennt man die Wigner-Näherung. Die Voraussetzungen der Wigner-Näherung sind für schwerere Moderatoren wie Kohlenstoff besonders bei den niedrigsten Resonanzen ganz gut erfüllt. Andererseits geht gerade für Wasserstoff die Wigner-Näherung in die exakte Lösung über. Folglich sollte auch für die zwischen diesen beiden Grenzfällen liegenden Moderatoren die Wigner-Näherung noch brauchbar sein. In einer Arbeit von OLDEKOP⁵ wurde ein Iterationsverfahren vorgeschlagen (eine ähnliche Methode wurde auch von SPINNEY⁶ behandelt), das es erlaubt, die Wigner-Näherung noch einen Schritt weiter zu führen und dabei den Fehler der Wigner-Näherung abzuschätzen. Es ergab sich, daß selbst beim D₂O die Wigner-Näherung im allgemeinen für die praktische Anwendung genügend genau ist.

Ein besonders bequemes Iterationsverfahren für die Gl. (1) hat CORNGOLD⁷ vorgeschlagen: Man kann über eine Laplace-Transformation die Gl. (1) in eine bequemere Integralgleichung überführen. Wir beschränken uns hier wieder auf einen einzigen Moderator, d.h. auf Gl. (1') statt Gl. (1). Durch Laplace-Transformation ergibt sich aus Gl. (1')

$$(10) \quad \hat{\varphi}^*(s) = \frac{\hat{f}_0(s)}{1 - \hat{f}_0(s)} \frac{\hat{f}_0(s) \mathcal{L}(g\varphi^*)}{1 - \hat{f}_0(s)} \quad \text{mit} \quad \hat{\varphi}^*(s) \equiv \mathcal{L}(\varphi^*) \equiv \int_0^\infty \varphi^*(u) e^{-su} du$$

und $\varphi^*(u) = \varphi(u) - \delta(u)$

nun ist $\hat{f}_0(s)/(1 - \hat{f}_0(s))$ die Transformierte der Lösung φ_0 der Gl. (1') in einem nichtabsorbierenden Medium. Inversion der Gl. (10) liefert also

$$(11) \quad \varphi^*(u) = \varphi_0^*(u) - \int_0^u \varphi_0^*(u-u') g(u') \varphi^*(u') du'$$

Die Integralgleichung (11) läßt sich in eine im allgemeinen schnell konvergierende Neumannsche Reihe entwickeln, und zwar nach aufsteigenden Potenzen der Absorptionswahrscheinlichkeit $g(u)$:

$$(12) \quad \varphi^*(u) = \varphi_0^*(u) - \int_0^u du' \varphi_0^*(u-u') g(u') \varphi_0^*(u') + \int_0^u du' \varphi_0^*(u-u') g(u') \left\{ \int_0^{u'} du'' \varphi_0^*(u'-u'') g(u'') \right\} \varphi_0^*(u') + \dots$$

Ersetzen wir darin $\varphi_0^*(u)$ durch den asymptotischen Wert

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi_0^*(u) = 1/3$$

so erhalten wir wieder die Wigner-Näherung, wie zu erwarten war:

$$(13) \quad \varphi^*(u) = \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3} \int_0^u g(u') du'} \quad p(u) = e^{-\frac{1}{3} \int_0^u g(u') du'}$$

Aufgrund der Integralgleichung (11) läßt sich auch ein Variationsprinzip aufstellen, das direkt die Berechnung des p-Faktors im homogenen Fall gestattet. Darauf soll jedoch in diesem Zusammenhang nicht weiter eingegangen werden.

Man kann jedenfalls abschließend feststellen, daß man im wesentlichen das Problem der Berechnung des Resonanzeinfangs in homogenen Mischungen als gelöst betrachten kann.

b) Heterogener Fall

Die Trennung von Uran und Moderator reduziert den Resonanzeinfang, da die äußeren Schichten des Uranblocks hinsichtlich der Resonanzneutronen eine Abschirmwirkung auf die inneren Schichten ausüben. Diese Abschirmwirkung tritt allerdings nur dort in Erscheinung, wo die Resonanzlinien hoch sind.

In den Gebieten schwachen Resonanzeinfangs, wie z.B. bei den energiehöheren (über 300 eV), nicht mehr im einzelnen aufgelösten Linien des Urans, fällt der Abschirmeffekt weg, so daß die Wahrscheinlichkeit des Einfanges in diesen Linien durch den Übergang zum heterogenen Fall praktisch nicht beeinflusst wird.

Diese Überlegungen führten zu einer Unterscheidung von einem Oberflächeneffekt, der von den hohen und scharfen Resonanzlinien herrührt, und einem von den Gebieten schwacher Resonanzabsorption stammenden Volumeneffekt (WIGNER⁸); man setzte (mit V_0 = Volumen des Urans, N_0 = Atomdichte im Uran, S = Oberfläche des Urans, V_1 = Volumen des Moderators, $\bar{\xi}_i$ = räumlich gemittelter Fluß im i-ten Medium)

$$-l_n \rho = \frac{V_0 N_0 \text{"RI"}}{3 \sqrt{V_1} \Sigma_1} \cdot \frac{\bar{\xi}_0}{\bar{\xi}_1}$$

mit

$$\text{"RI"} = A \left(1 + \mu \frac{S}{M} \right)$$

wobei man die Konstanten A und μ im "Resonanzintegral" "RI" experimentell bestimmte. Der Ansatz für das Resonanzintegral wäre in Strenge gerechtfertigt, wenn die starken Resonanzen, die für den Oberflächeneffekt verantwortlich sind, hinsichtlich der Lethargie eine Rechteckfunktion darstellten. Der Flußfaktor $\bar{\xi}_0 / \bar{\xi}_1$ ist dagegen nur für den nicht aufgelösten Teil der Resonanzlinien sinnvoll und kann in diesem Bereich mit einer Gruppendiffusionsmethode ermittelt werden.

Nimmt man jedoch an, daß die eigentliche Form der Resonanzlinien durch die Breit-Wigner-Formel gegeben wird, so kommt man (GUREVICH und POMERANCHUK⁹) auf einen Ausdruck der Form

$$\text{"RI"} = A' \left(1 + \mu' \sqrt{S/M} \right)$$

Ein Ausdruck wie der ursprünglich Wignersche ist von diesem Standpunkt aus nur als eine innerhalb eines gewissen Bereichs mögliche Näherung für den den Wurzelterm enthaltenden Ausdruck anzusehen. Die experimentellen Untersuchungen (EGIAZAROV et al.¹⁰, HELLSTRAND¹¹) bestätigten diese Erwartung: Ein Ausdruck der Form $A'(1 + \mu' \sqrt{S/M})$ liefert für einen wesentlich weiteren Bereich eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten als ein Ausdruck der Form $A(1 + \mu S/M)$. Die Vergleiche zwischen den beiden Beschreibungen sind sehr eingehend in einer Arbeit von MEMMERT¹² durchgeführt worden.

Hier soll kurz die Ableitung des gebräuchlichen Ausdrucks für den heterogenen Fall wiedergegeben werden (GUREVICH und POMERANCHUK, loc.cit., GALANIN¹³), da man dabei die Art und die Grenzen einer Argumentation erkennen kann, die

anschaulich vorgeht, statt eine Ableitung der Resonanztheorie aus der Boltzmann-Gleichung zu versuchen: Die Uran-Blöcke (Platten, Stäbe oder Kugeln) seien gleichmässig im Moderator verteilt; die Zahl der Blöcke pro Volumeneinheit des Moderators sei N ($N = 1/V_1$, $V_1 =$ Moderator-Volumen pro Zelle). Man führt nun eine Stoßlänge Λ für den Zusammenstoß eines Neutrons mit einem solchen Block ein; außerdem definiert man eine "Steckwahrscheinlichkeit" ζ , daß das Neutron beim Durchfliegen eines Uran-Blocks von einem Urankern absorbiert wird. Dann ist

$$(18) \quad \zeta(u) = \int_{\text{alle Weglängen}} (1 - e^{-\Sigma_0 \ell}) w(\ell) d\ell$$

Dabei ist $w(\ell)$ die Verteilungsfunktion der Weglängen, die ein Neutron beim Durchfliegen eines Uranblocks zurücklegen muß. Damit wird die Wahrscheinlichkeit für den Einfang eines Neutrons der Lethargie u

$$(19) \quad W(u) = \frac{1/\Lambda_a}{1/\Lambda_a + \Sigma_1}$$

Dabei ist $\Lambda_a = \Lambda/\zeta$ die effektive Absorptionslänge in dem Gemisch von Moderator und Uranblöcken. Macht man von der Beziehung

$$(20) \quad \bar{\ell} = \frac{4V_0}{S}$$

($V_0 =$ Volumen des Blocks, $S =$ Oberfläche des Blocks)

Gebrauch, deren Ableitung man bei GALANIN (loc.cit.) findet, so ergibt sich aus (19) wegen

$$\Lambda = \frac{1}{N \Sigma_{\text{Block}}} \quad \Sigma_{\text{Block}} = V_0 / \bar{\ell} = \frac{S}{4}$$

der Ausdruck

$$(21) \quad W(u) = \frac{\zeta(u)}{\zeta(u) + \frac{4V_1 \Sigma_1}{S}}$$

Nun betrachtet man den Fall der Wigner-Näherung, daß auf die Resonanzen der asymptotische Fluß auftritt, von dem angenommen wird, daß er im ganzen Raum konstant ist. (Daß dies wirklich der Fall ist, wird im Rahmen dieser Arbeit im nächsten Abschnitt bewiesen werden.) Dann tritt jetzt $W(u)$ an die Stelle des früheren $g(u)$, und es wird

$$(22) \quad p = e^{-\psi} \quad \psi = \frac{1}{S} \int_0^{\infty} W(u) du$$

Betrachten wir zunächst den Fall, daß die Blöcke weit voneinander entfernt seien, d.h. daß das Volumenverhältnis Moderator/Uran groß gegen 1 sei. Dann geht Gl. (22) über in

$$(23) \quad \psi = \frac{S}{4V_1 \Sigma_1} \int_0^\infty \frac{\xi(u)}{\Sigma_1} du$$

Wir betrachten eine einzelne Resonanzlinie. Dann ist

$$\Sigma_0(E) = \Sigma_{0, \max}(E) \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_r)^2 + \Gamma^2/4}$$

und

$$\psi \approx \frac{1}{4E_r \Sigma_1} \frac{S}{V_1} \int \int_{\text{res alle } l} (1 - e^{-\Sigma_0(E)l}) w(l) dl dE$$

Hier führt man als Integrationsvariable $x = 2(E - E_r)/\Gamma$ ein und erstreckt die Integrationsgrenzen hinsichtlich x von $-\infty$ bis $+\infty$, was man wegen der geringen Breite, für die der Integrand einen Beitrag liefert, tun kann. Schließlich vertauscht man die Integrationsreihenfolge. Im Integral

$$(24) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-\frac{a}{1+x^2}}) dx$$

ist die e-Funktion nur für Werte von $x^2 \gg a$ von Bedeutung, also kann man für $a \gg 1$ statt des Integrals auch

$$(25) \quad J(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-\frac{a}{x^2}}) dx$$

betrachten. Es ist

$$\frac{dJ}{da} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{x^2}} \frac{dx}{x^2} = 2 \int_0^\infty e^{-az^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

also

$$J(a) = 2\sqrt{\pi a}$$

und damit ergibt sich

$$(26) \quad \psi = \sum_{\text{alle Resonanzen}} \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\Sigma_{0, \max}} \Gamma \sqrt{e}}{4 E_r \Sigma_1 V_1}$$

wobei

$$\sqrt{e} = \int_{\text{alle } l} \sqrt{l} w(l) dl$$

PETRO

in e

ausg

Fall

lung

Gitt

man

enge

Anha

Form

Es i

nen G

macht

c) Ar

ir

Unte

die

Das

ter

tegr

i un

räu

sch

(vo

ric

sic

ψ

(

(27

mit

Δ

(1)

qu

Δ

(0)

fernt

. Dann

PETROV¹⁴ berechnete nach dem angegebenen Verfahren die Resonanzabsorption in einem engen Gitter, indem er von der ursprünglichen Form der Gl. (22) ausging. Es wird sich aber zeigen (im Abschnitt III), daß gerade in diesem Fall die hier entwickelte Theorie falsch wird, wenn man die gleiche Verteilungsfunktion $w(l)$ der Neutronenwege im Uran-Block, wie im Fall des weiten Gitters verwendet (dies wurde aber in der Arbeit von PETROV getan!). Will man dagegen eine neue Verteilungsfunktion der Neutronenweglängen für das enge Gitter verwenden, so gibt das hier beschriebene Verfahren dafür keine Anhaltspunkte. Andererseits zeigt sich, daß in einem weiten Gitter die Formel (23) auch vom Standpunkt der allgemeineren Theorie anwendbar ist. Es ist also offenbar notwendig, die heterogene Theorie so aus den allgemeinen Gleichungen der Neutronentransporttheorie abzuleiten, daß die dabei gemachten Annahmen klar zu übersehen sind.

+ ∞,
lie-

c) Ansätze zu einer exakteren Behandlung des Resonanzeinfangs in heterogenen Systemen

Unter der Beschränkung auf Wasserstoff als Moderator ermittelte CORNGOLD¹⁵ die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit in einem einfachen engen Plattengitter. Das von ihm verwendete Verfahren besteht darin, die Boltzmann-Gleichung unter Ausnutzung der Periodizität des betrachteten Plattengitters in eine Integralgleichung für den Winkelfluß $\psi_{(i)}(\vec{r}, \vec{\Omega}, u)$ umzuschreiben (der Index i unterscheidet den Fluß im Uran ($i=0$) und Moderator ($i=1$)), bei der die räumliche Integration sich nur noch auf eine Einheitszelle erstreckt. Anschließend wird der Winkelfluß sowohl in seiner räumlichen Abhängigkeit (von der Koordinate x) wie auch in der Abhängigkeit von der Neutronenflugrichtung (von der Koordinate μ) nach Legendre-Polynomen entwickelt, so daß sich folgendes System von Integralgleichungen in u für die Momente

$\psi_{(i)}^{lm}(u)$ ergibt:

$$(27) \quad \psi_{(i)}^{lm}(u) = \sum_{l,m} \frac{2l+1}{2} \frac{2m+1}{2} \Delta_{(i)sl}^{qm} T^l \psi_{(i)}^{lm} + \sum_m \frac{2m+1}{2} \Delta_{(i)sl}^{qm} \frac{1}{2} \left(\sum_b h \psi_{(b)}^{om} + \bar{S}_{om} \right)$$

mit

$$\Delta_{(i)sl}^{qm} = \frac{4}{b} \int_0^1 d\mu \int_0^{a+l} dx P_s(\mu) P_l(\mu) P_q\left(\frac{2x-(2a+b)}{b}\right) \left\{ \frac{T_l^s P_l}{1-T_l^s} \int_a^{a+b} \frac{dx'}{\mu} e^{-\frac{\Sigma_1}{\mu}(x-x')} \right. \\ \left. P_m\left(\frac{2x'-(2a+b)}{b}\right) + \int_a^x \frac{dx'}{\mu} e^{-\frac{\Sigma_1}{\mu}(x-x')} P_m\left(\frac{2x'-(2a+b)}{b}\right) \right\}$$

$$\Delta_{(0)sl}^{qm} = \frac{4}{b} \int_0^1 d\mu \int_0^a dx P_s(\mu) P_l(\mu) P_q\left(\frac{2x-a}{a}\right) \frac{1}{1-T_l^s} \int_a^{a+b} \frac{dx'}{\mu} e^{-\frac{\Sigma_1}{\mu}(a+b-x')} - \frac{\Sigma_0}{\mu} P_m\left(\frac{2x'-(2a+b)}{b}\right)$$

$$(28) \Lambda_{(1)S}^{qm} = \frac{4}{a} \int_0^a dx \int_0^{a+b} dx' P_S(p) P_q \left(\frac{2x-(2a+b)}{b} \right) \frac{1}{1-T_0 T_1} \int_0^a \frac{dx'}{x'} e^{-\frac{\Sigma_0}{v}(a-x')} P_m \left(\frac{2x'-a}{a} \right) e^{-\frac{\Sigma_0}{v}(a-x')}$$

$$\Lambda_{(1)S}^{qm} = \frac{4}{a} \int_0^a dx \int_0^a dx' \left\{ \frac{T_0 T_1}{1-T_0 T_1} \int_0^a \frac{dx'}{x'} e^{-\frac{\Sigma_0}{v}(x-x')} P_m \left(\frac{2x'-a}{a} \right) + \int_0^x \frac{dx'}{x'} e^{-\frac{\Sigma_0}{v}(x-x')} P_m \left(\frac{2x'-a}{a} \right) \right\}$$

Dabei ist a die Dicke der Uranplatte, b die Dicke der Moderatorschicht zwischen zwei Uranplatten und $\bar{S}_0(\vec{r}, u)$ der Quellterm der Spaltneutronen. Weiter wurde zur Abkürzung

$$(29) T_{(1)}^{lm} \psi_{(1)}^{lm}(u) = \int_0^u du' f_e(u' \rightarrow u) \psi_{(1)}^{lm}(u')$$

und $T_0 = e^{-\frac{\Sigma_0 a}{v}}$ $T_1 = e^{-\frac{\Sigma_0 b}{v}}$

gesetzt.

Bricht man das System (27) in der nullten Näherung ab, so erhält man

$$(27') \psi_{(1)}^{00} = \frac{1}{4} \Delta_{(1)}^{00} T \psi_{(1)}^{00} + \frac{1}{4} \Lambda_{(1)0}^{00} (\sum_0 h \psi_0^{00} + \bar{S}_{00})$$

bzw.

$$(27'') (1 - \frac{F}{\alpha}) (h \psi_{(1)}^{00} + \bar{S}_{00}) + v \frac{F}{\alpha} T \psi_{(1)}^{00} = \psi_0^{00}$$

$$\frac{F}{v\beta} (h \psi_{(1)}^{00} + \bar{S}_{00}) + (1 - \frac{F}{\alpha}) T \psi_{(1)}^{00} = \psi_1^{00}$$

mit

$$F = \int_0^1 dx \mu \frac{(1-T_0)(1-T_1)}{1-T_0 T_1} \quad \bar{S}_{00} = \sum_0 \bar{S}_{00} \quad \sum_0 a = \alpha \quad \sum_0 b = \beta \quad v = \frac{a}{b} \quad T = \frac{T_0 T_1}{\sum_1}$$

Diese Gleichungen werden dadurch gelöst, daß mit Hilfe der 2. Gleichung zunächst $\psi_{(1)}^{00}$ durch ψ_1^{00} ersetzt wird und dann das Ergebnis in die erste Gleichung eingesetzt wird. Damit erhält man eine Gleichung, die sich zu einer Differentialgleichung in u reduzieren läßt, und schließlich ergibt sich für die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit $p(u) = \frac{\int_0^u \sum_0 g \psi_1^{00} du'}{\int_0^u \sum_0 \bar{S}_{00} du'}$

$$p(u) = \left[\frac{F}{\alpha g + h F} \right]_{u=0} e^{-\int_0^u du' \frac{g F/\beta}{g + h F/\alpha}}$$

Ein ähnlicher Ausdruck wird von CHERNICK¹⁶ für die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit in Uran-Wasser-Gittern angegeben.

(a-x')

Es ist das Ziel des Abschnitts II, eine Methode zu entwickeln, die etwas durchsichtiger ist als die hier behandelte Methode von CORNGOLD, die sich auch auf Bündel von Brennstoffelementen anwenden lässt und die schließlich nicht nur auf die Moderation durch Wasserstoff beschränkt ist.

zwi-
iter

Ebenfalls auf die Moderation durch Wasserstoff beschränkt sich eine Arbeit von STEIN¹⁷; in dieser Arbeit wird jedoch im Moderator die Diffusionstheorie innerhalb eines so schmalen Lethargie-Intervalls, wie es einer Resonanzlinie entspricht, angewandt. Es scheint daher dieser Weg nicht sehr erfolgversprechend zu sein, wenn man ihn auf Systeme mit kleinen gegenseitigen Abständen anwendet.

$\frac{T_0}{\Sigma_1}$

e

w'

Abschnitt II :

Neue Behandlung der heterogenen Resonanztheorie

a) Äquivalente Darstellungen der Resonanzentkommwahrscheinlichkeit

Die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit läßt sich auch in heterogenen Medien entsprechend Gl. (6) sofort durch

$$(28) \quad \frac{dp(u)}{du} = -g(u) \bar{\phi}_0(u)$$

bzw.

$$(29) \quad p(u) = 1 - \int_0^u g(u') \bar{\phi}_0(u') du'$$

definieren. Dabei ist $\bar{\phi}_0(u)$ die über das gesamte Uranvolumen (zur Definition der Volumenintegrale siehe II b) integrierte Stoßdichte; das Volumenintegral der Quellstärke sei wieder, wie im homogenen Fall, auf 1 normiert.

Wir wollen nur noch die Gl. (5) so verallgemeinern, daß sie ebenfalls im heterogenen Fall gilt. Dazu betrachten wir das Zwei-Medien-Problem in der allgemeinsten Form, das durch die Boltzmann-Gleichung

$$(30a) \quad \vec{\Omega} \cdot \text{grad} \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, u) + \Sigma_0(u) \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, u) = T_0 \psi_0 + \frac{Q(\vec{r})}{4\pi} \delta(u)$$

und

$$(30b) \quad \vec{\Omega} \cdot \text{grad} \psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}, u) + \Sigma_1(u) \psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}, u) = T_1 \psi_1$$

beschrieben wird; dabei bezieht sich der Index 0 wieder auf den Resonanz-Absorber (Uran) und der Index 1 auf den Moderator. Die Atome des Resonanz-Absorbers seien wieder als unendlich schwer angenommen. Dann ist

$$T_0 \psi_0 = h(u) \Sigma_0(u) \int \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, u) \frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$T_1 \psi_1 = \int du' \int d\Omega' R_1(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}', u, u') \Sigma_1(u') \psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}', u')$$

Dabei ist wieder $h(u) = 1 - g(u)$ gesetzt worden; außerdem wurde die Absorption im Moderator vernachlässigt.

Den T_1 -Term entwickeln wir nach Kugelfunktionen in $\mu_0 = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}'$:

$$(31) \quad R_1(\mu_0, u, u') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} f_l(u, u') P_l(\mu_0)$$

Damit geht (30b) über in

$$(32) \vec{\Omega} \cdot \text{grad} \psi_n(\vec{r}, \vec{\Omega}, u) + \sum_n \psi_n(\vec{r}, \vec{\Omega}, u) = \int_0^u du' \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_1(u') f_{\ell}(u, u') \int d\Omega' P_{\ell}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \psi_n(\vec{r}, \vec{\Omega}', u')$$

Integration der Gleichungen (30a) und (32) über $d\Omega$ gibt

$$(33a) \text{div} \vec{j}_0(\vec{r}, u) + \Sigma_0(u) \rho_0(\vec{r}, u) = h(u) \Sigma_0(u) \rho(\vec{r}, u) + Q(\vec{r}) \delta(u)$$

und

$$(33b) \text{div} \vec{j}_1(\vec{r}, u) + \Sigma_1(u) \rho_1(\vec{r}, u) = \int_0^u du' \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} f_{\ell}(u, u') \Sigma_1(u') \iint d\Omega d\Omega' P_{\ell}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \psi_n(\vec{r}, \vec{\Omega}, u')$$

mit

$$\vec{j}_0(\vec{r}, u) = \int d\Omega \vec{\Omega} \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, u)$$

$$\rho_1(\vec{r}, u) = \int d\Omega \psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}, u)$$

Nun ist

$$(34) \iint d\Omega d\Omega' P_{\ell}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \psi_n(\vec{r}, \vec{\Omega}, u) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} d\mu \int_{-1}^{+1} d\mu' P_{\ell}(\mu) \psi_n(\vec{r}, \mu, \varphi, u)$$

$P_{\ell}(\mu)$ schreiben wir nach dem Additionstheorem der Kugelfunktionen als

$$(35) P_{\ell}(\mu) = \sum_{m=0}^{\ell} (2 - \delta_{0m}) \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell}^m(\mu) P_{\ell}^m(\mu') \cos[m(\varphi - \varphi')]$$

Die Integration über φ gibt uns $2\pi \delta_{m0}$, und wir erhalten

$$\iint d\Omega d\Omega' P_{\ell}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \psi_n(\vec{r}, \vec{\Omega}, u) = 2\pi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_{-1}^{+1} d\mu P_{\ell}(\mu) P_{\ell}(\mu') \psi_n(\vec{r}, \mu, \varphi', u)$$

Nun ist

$$\int_{-1}^{+1} P_{\ell}(\mu) d\mu = 2\delta_{0\ell}$$

und folglich

$$(36) \iint d\Omega d\Omega' P_{\ell}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \psi_n(\vec{r}, \vec{\Omega}, u) = 4\pi \delta_{0\ell} \rho_0(\vec{r}, u)$$

Damit wird (33b)

$$(37) \text{div} \vec{j}_1(\vec{r}, u) + \Sigma_1(u) \rho_1(\vec{r}, u) = \int_0^u du' \Sigma_1(u') f_0(u-u') \rho_0(\vec{r}, u')$$

Integration der Gleichungen (33a) und (37) über die jeweilige Volumina von Uran und Moderator gibt unter Berücksichtigung der Kontinuität des Stromes am Rande:

$$(38) \quad \Sigma_0 \bar{\phi}_0(u) = -\Sigma_1 \bar{\phi}_1(u) + \int_0^u du' \Sigma_1 f_0(u-u') \bar{\phi}_1(u') + \bar{\delta}(u)$$

mit $\bar{\phi}_0(u) = \int_{V_0} \phi_0(\vec{r}, u) d^3r$ und $\bar{\phi}_1(u) = \int_{V_1} \phi_1(\vec{r}_1, u) d^3r_1$

(Die Quelle wurde gemäss $\int_{V_0} Q(\vec{r}) d^3r = 1$ normiert.)

Die Gleichung (38) stellt die makroskopische (d.h. auf das Gesamtsystem bezogene) Bilanz der Neutronen im Lethargie-Intervall $(u, u+du)$ dar.

Wir wollen nun statt der Flüsse $\bar{\phi}_0(u)$ und $\bar{\phi}_1(u)$ die integrierten Stoßdichten

$$\Phi_0(u) = \Sigma_0(u) \bar{\phi}_0(u) \quad \text{und} \quad \Phi_1(u) = \Sigma_1(u) \bar{\phi}_1(u)$$

betrachten. Dann erhalten wir anstelle von Gl.(38)

$$(39) \quad \Phi_0(u) = -\Phi_1(u) + \int_0^u du' f_0(u-u') \Phi_1(u') + \delta(u)$$

Setzt man hier die Gl.(28) ein, so ergibt sich

$$(40) \quad \frac{d\Phi(u)}{du} = \Phi_1(u) - \int_0^u du' f_0(u-u') \Phi_1(u') - \delta(u)$$

$f_0(u-u')$ hat folgende explizite Form (vergl. Gl.(2)):

$$f_0(u-u') = \int_0^{+\infty} \frac{(M+1)^2}{4M_1} e^{-(u-u')} \left\{ \left[\frac{M+1}{2} e^{-\frac{u-u'}{2}} - \frac{M-1}{2} e^{\frac{u-u'}{2}} \right] \right\} p_0(\mu) d\mu =$$

$$= \begin{cases} \frac{(1+M_1)^2}{4M_1} e^{-(u-u')} & \text{für } u-u' < \varepsilon \\ 0 & \text{für } u-u' > \varepsilon \end{cases}$$

mit

$$\varepsilon = \ln \frac{1}{\alpha} = \ln \left(\frac{M+1}{M-1} \right)^2$$

Infolgedessen gilt speziell für Wasserstoff als Moderator ($\varepsilon = \infty$):

$$\frac{df_0(u-u')}{du} = \frac{d}{du} e^{-(u-u')} = -e^{-(u-u')} = -f_0(u-u')$$

Folglich ist in diesem Fall

$$(41) \quad \Phi(u) = \int_0^u du' f_0(u-u') \Phi_1(u')$$

eine Lösung der Gl.(40).

Im allgemeinen Fall eines beliebigen Moderators erhalten wir durch Laplace-Transformation der Gl. (40):

$$\hat{\Phi}_1(s) = \hat{F}(s) \hat{\Phi}_1(s) + \int_0^{\infty} \frac{df(u)}{du} e^{-su} du + 1$$

mit

$$\hat{\Phi}_1(s) = \int_0^{\infty} \Phi_1(u) e^{-su} du \quad \hat{F}(s) = \int_0^{\infty} f(u) e^{-su} du$$

Es ist

$$\int_0^{\infty} \frac{dp(u)}{du} e^{-su} du = \left[p(u) e^{-su} \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} p(u) e^{-su} du = -1 + s \hat{p}(s)$$

wenn wir berücksichtigen, daß $p(0) = 1$ ist.

Damit ergibt sich schließlich

$$(42) \quad \hat{\Phi}_1(s) (1 - \hat{F}(s)) = s \hat{p}(s)$$

bzw.

$$(42') \quad \hat{p}(s) = \hat{\Phi}_1(s) \frac{1}{s} (1 - \hat{F}(s))$$

Aus (42') folgt durch Umkehrung des Faltungssatzes, daß

$$(43) \quad p(u) = \int_0^u G(u-u') \Phi_1(u') du'$$

Dabei ist

$$(44) \quad \hat{G}(s) = \frac{1}{s} (1 - \hat{F}(s))$$

Folglich ist

$$(45) \quad G(u) = 1 - \int_0^u f(u') du' = \int_u^{\infty} f(u') du'$$

wobei offensichtlich

$$G(0) = 1$$

gilt.

$G(u-u')$ ist also die gleiche Funktion, die im homogenen Fall den Zusammenhang zwischen Stoßdichte und Bremsdichte liefert, so daß die Gl. (43) als das heterogene Gegenstück der Gleichung (5) aufzufassen ist.

Allgemein hat $G(u-u')$ die Form

$$(46) \quad G(u-u') = \begin{cases} 0 & u \geq u' + \epsilon \\ \frac{e^{-(u-u')/\alpha} - \alpha}{1-\alpha} & u + \epsilon \geq u' > u \\ 1 & u \leq u' \end{cases}$$

Für Wasserstoff ($E = \infty$) ist $f_0(u-u') = e^{-(u-u')} = G(u-u')$, und damit geht der Ausdruck (43) in den speziellen Ausdruck (41) über.

b) Die Behandlung der Integralgleichung für heterogene Systeme und die Zurückführung des heterogenen Falls auf einen homogenen Fall

Wir betrachten wieder ein unendlich ausgedehntes, regelmässig aus Uranplatten oder -stäben und Moderator aufgebautes Medium. In ihm gilt in Lethargie-Bereichen weit oberhalb der Quell-Lethargie 0 die der Boltzmann-Gleichung äquivalente Integralgleichung für die Stoßdichte:

$$(47) \quad \varphi(\vec{r}, u) = \int_{v_a}^u \int_{v_a}^u K(\vec{r}, \vec{r}'; u) f_0(u-u') \varphi(\vec{r}', u') d^3r' d^3u' + \int_u^\infty h(u) K(\vec{r}, \vec{r}'; u) \varphi(\vec{r}, u) d^3r'$$

Der Kern $K(\vec{r}, \vec{r}'; u)$ ist eine im allgemeinen komplizierte, jedoch prinzipiell bekannte Funktion von \vec{r} , \vec{r}' und u und entspricht anschaulich der Wahrscheinlichkeit, daß ein in \vec{r}' zuletzt gestreutes Neutron - das nach der Streuung mit der Lethargie u weiterfliegt - die nächste Wechselwirkung im Punkte \vec{r} erfährt. Explizit ist

$$(48) \quad K(\vec{r}, \vec{r}'; u) = \frac{\Sigma(\vec{r}, u)}{4\pi} \frac{e^{-\tau(\vec{r}, \vec{r}'; u)}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

Dabei ist $\tau(\vec{r}, \vec{r}'; u)$ der über die Wirkungsquerschnitte von der Lethargie abhängige optische Weg:

$$(49) \quad \tau(\vec{r}, \vec{r}'; u) = |\vec{r} - \vec{r}'| \cdot \int_0^1 \Sigma(\vec{r}' + x(\vec{r} - \vec{r}'), u) dx$$

Für alle \vec{r}' und u gilt:

$$(50) \quad \int_{v_0+v_a}^u K(\vec{r}, \vec{r}'; u) d^3r' = 1$$

$h(u)$ ist wieder das Verhältnis von Streuquerschnitt zu gesamtem Wirkungsquerschnitt im Uran ($h = 1 - g$). Die Absorption im Moderator wurde wieder vernachlässigt - was man ja bei den hier interessierenden Energien (über 1 eV) ohne weiteres annehmen kann. Die Anisotropie der Streuung der Neutronen (im Laborsystem) im Moderator wird nur durch Ersetzen des Streuquerschnitts durch den Transportquerschnitt berücksichtigt. Diese Annahme ist im Grenzfall der räumlichen Gleichverteilung der Neutronen aller Energien im Moderator korrekt; da wir, wie weiter unten gezeigt wird, nur eine relativ kleine Abweichung von der räumlichen Gleichverteilung der Neutronen im Moderator zu erwarten haben - die im Falle der Wigner-Näherung sogar ganz

verschwindet, kann der durch diese Näherung bedingte Fehler nicht erheblich sein.

Nun sind wir nicht an der räumlichen Verteilung der Stoßdichte $\psi(\vec{r}, u)$ interessiert, sondern lediglich an der Resonanzentkommwahrscheinlichkeit, d.h. nach Gl.(43) nur an $\phi_i(u)$.

Es ist daher zweckmässig, aus Gl.(47) eine Gleichung für die volumenintegrierten Stoßdichten in Uran und Moderator zu gewinnen. Wir erhalten aus Gl.(47)

$$(51) \quad \phi_0(u) = \int_{V_0} \int_0^u K_0(\vec{r}, u) f_0(u-u') \psi(\vec{r}, u') d^3 r' du' + \int_{V_0} K_0(\vec{r}, u) h(u) \psi(\vec{r}, u) d^3 r'$$

$$\text{mit } \phi_i(u) = \int_{V_i} \int_0^u K_i(\vec{r}, u) f_i(u-u') \psi(\vec{r}, u') d^3 r' du' + \int_{V_i} K_i(\vec{r}, u) h(u) \psi(\vec{r}, u) d^3 r'$$

$$(52) \quad K_i(\vec{r}, u) \equiv \int_{V_i} K(\vec{r}, \vec{r}', u) d^3 r'$$

Wegen Gl.(50) gilt

$$(53) \quad K_i(\vec{r}, u) + K_0(\vec{r}, u) = 1$$

Die Größen $K_i(\vec{r}, u)$ geben die Wahrscheinlichkeiten dafür an, daß ein Neutron nach einem Stoß im Punkte \vec{r} die nächste Wechselwirkung im i-tem Medium erfährt.

Hier sei noch eine Bemerkung zur Definition der Volumenintegrale eingefügt: Wir betrachten ein unendliches Medium, in dem die Stoßdichte periodisch und überall größer als Null ist. Damit existieren also streng genommen die Integrale ϕ_i nicht. Man muß daher die Integrationsvorschrift so auffassen, daß zunächst über ein sehr großes (so daß Ausflußverluste vernachlässigt werden können), aber endliches Volumen zu integrieren ist. Bei der Berechnung des p-Faktors heben sich schließlich die Volumina - absolut genommen - heraus; es gehen in den p-Faktor nur noch die Verhältnisse der Volumina ein. (Vergl. auch die an die Gl.(62) anknüpfende Diskussion!)

Die Gleichungen (51) lassen sich nun noch in einer Form schreiben, die auch auf der rechten Seite die Raumintegrationen nicht mehr explizit enthält:

Wir schreiben

$$(54) \quad C_i(\vec{r}, u) = \frac{\psi(\vec{r}, u)}{\phi_i(u)}$$

Falls der Fluß hinsichtlich Orts- und Lethargieabhängigkeit separabel ist, hängt offensichtlich c_i nicht mehr von u ab. Nun ist im Innern von Moderator und Uran - also überall, mit Ausnahme der Nähe von Grenzflächen zwischen den beiden Medien - die Bedingung der Separabilität gut erfüllt; folglich hängt $c_i(\vec{r}, u)$ im allgemeinen nur wenig von u ab. Speziell im Falle der Wigner-Näherung ist - wie unten gezeigt wird - $c_i = 1/V_i$ und damit überhaupt konstant.

Wir bilden nun

$$(55) \quad K_{ij} = \int_V K_i(\vec{r}, u) c_j(\vec{r}, u) d^3r$$

Diese Größen sind zunächst, im Gegensatz zu den $K_i(\vec{r}, u)$, im allgemeinen Fall noch unbekannt, da die $c_i(\vec{r}, u)$ unbekannt sind. Lediglich in der Wigner-Näherung kann man die $K_{ij}(u)$ berechnen, da man dann zur Wichtung lediglich die im ganzen Moderator konstanten asymptotischen Stoßdichten heranzieht. Eine Verbesserung der Theorie über die Wigner-Näherung hinaus ist also im heterogenen Fall schwieriger als im homogenen, da man hier auch noch die $K_{ij}(u)$ verbessern muß. Wir werden auf dieses Problem weiter unten noch eingehen. Hier nehmen wir zunächst einmal an, die $K_{ij}(u)$ seien bekannt.

Die Gleichungen (51) gehen nun über in

$$(56) \quad \begin{aligned} \Phi_0(u) &= K_{01}(u) \int_0^u \Phi_1(u') f_0(u-u') du' + K_{00}(u) h(u) \Phi_0(u) \\ \Phi_1(u) &= K_{11}(u) \int_0^u \Phi_1(u') f_0(u-u') du' + K_{10}(u) h(u) \Phi_0(u) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$(57) \quad \begin{aligned} \Phi_0(u) &= \frac{K_{01}(u)}{1 - K_{00}(u) h(u)} \int_0^u \Phi_1(u') f_0(u-u') du' \\ \Phi_1(u) &= \left\{ K_{11}(u) + \frac{K_{01}(u) K_{10}(u) h(u)}{1 - K_{00}(u) h(u)} \right\} \int_0^u \Phi_1(u') f_0(u-u') du' \end{aligned}$$

Nun berücksichtigen wir, daß wegen (53) die Beziehung gilt

$$(58) \quad K_{11}(u) + K_{01}(u) = 1$$

Man kann diese Beziehung physikalisch leicht interpretieren:

$K_{ij}(u)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Neutron der Lethargie u seine nächste Wechselwirkung im Medium i erlebt, nachdem es den letzten Stoß im Medium j erfahren hat.

Wir erhalten, wenn wir nur noch $M_0(u) = K_{00}(u)$ und $M_1(u) = K_{11}(u)$ als unabhängige Größen einführen, die Beziehungen

$$\bar{\Phi}_0(u) = \frac{1 - M_1(u)}{1 - M_0(u)h(u)} \int_0^u \bar{\Phi}_1(u') f_0(u-u') du'$$

$$\bar{\Phi}_1(u) = \frac{M_1(u) - M_0(u)M_1(u)h(u) + (1 - M_0(u))(1 - M_1(u))h(u)}{1 - M_0(u)h(u)} \int_0^u \bar{\Phi}_1(u') f_0(u-u') du'$$

Die letzte Gleichung läßt sich in der Form schreiben:

$$(59) \quad \bar{\Phi}_1(u) = R(u) \int_0^u f_0(u-u') \bar{\Phi}_1(u') du'$$

mit

$$(60) \quad R(u) = \frac{h(u)(1 - M_0(u)) + g(u)M_1(u)}{1 - M_0(u)h(u)}$$

Wenn wir in Gl. (59)

$$(61) \quad \bar{\Psi}(u) = \frac{\bar{\Phi}_1(u)}{R(u)}$$

schreiben, erhalten wir die bekannte Integralgleichung des homogenen Mediums mit einer "effektiven Streuwahrscheinlichkeit" $R(u)$

$$(62) \quad \bar{\Psi}(u) = \int_0^u R(u') f_0(u-u') \bar{\Psi}(u') du' + \bar{S}(u)$$

Hier haben wir auf der rechten Seite noch den normierten Quellterm wieder hingeschrieben, so daß die Gleichung (62) für alle Werte der Lethargie gilt. Es wäre unnötig gewesen, den Quellterm durch die ganzen Rechnungen mitzuschleppen.

Aus Gleichung (62) kann man auch die Invarianz der Theorie gegen die Wahl des Normierungsvolumens $V = V_0 + V_1$ ablesen, da sich bei einer anderen Wahl V' sowohl $\bar{\Psi}$ wie auch der Quellterm \bar{S} mit V'/V multiplizieren, während R ungeändert bleibt. Letzteres folgt daraus, daß die K_{ij} sich bei einem derartigen Übergang nicht ändern, denn sowohl V wie auch V' ist so zu wählen,

daß praktisch

$$\int_V K(\vec{r}, \vec{r}', u) d^3r' \approx \int_{\text{Gesamter Raum}} K(\vec{r}, \vec{r}', u) d^3r' = 1$$

ist, so daß für die Integration über \vec{r}' wegen der Konvergenz des Integrals der Übergang von V zu V' nichts ausmacht. Andererseits ist das Integral über \vec{r}' , das an sich proportional V'/V wäre, noch mit c gewichtet, und c erhält beim Übergang von V zu V' den Faktor V/V' ; damit bleibt K_{ij} tatsächlich ungeändert.

Die Gl. (62) kann mit den bekannten, im Abschnitt I erwähnten Methoden näherungsweise gelöst werden - im Prinzip sogar exakt (PLACZEK¹), wenn man sich die Mühe macht.

Damit ist aber auch p bekannt:

$$(63) \quad p(u) = \int_0^u R(u') \psi(u') G(u-u') du'$$

Stattdessen kann man auch p über die Gleichung (28) berechnen:

Aus (61), (57) und (59) erhalten wir

$$(64) \quad \psi_0(u) = \frac{1 - M_2(u)}{1 - M_0(u) h(u)} \psi(u)$$

und das liefert, in Gl. (28) eingesetzt,

$$(65) \quad \frac{dp(u)}{du} = -g(u) \frac{1 - M_2(u)}{1 - M_0(u) h(u)} \psi(u) = -W(u) \psi(u)$$

Dabei ist

$$(66) \quad W(u) = g(u) \frac{1 - M_2(u)}{1 - M_0(u) h(u)} = 1 - R(u)$$

die "effektive Absorptionswahrscheinlichkeit".

Als Beispiel sei hier zunächst die Moderation mit Wasserstoff behandelt:

Die Gleichung (62) läßt sich in eine Differentialgleichung für

$$T(u) = \psi(u) - \delta(u)$$

überführen:

$$T'(u) = (R-1)T(u) = -W(u)T(u)$$

d.h.

$$T(u) = e^{-\int_0^u W(u') du'}$$

da $T(0) = 1$ sein muß, wenn in der Umgebung der Quell-Lethargie 0 keine Absorption vorkommt.

Damit wird

$$p(u) = e^{-u} \int_0^u R(u') e^{-\int_0^{u'} R(u'') du''} du' + e^{-u} = e^{-u} \int_0^u e^I dI + e^{-u}$$

(mit $I(u) = \int_0^u R(u') du'$)

$$= e^{-u} e^{\int_0^u (1-R(u')) du'} = e^{-\int_0^u W(u') du'}$$

also schließlich

$$p(u) = e^{-\int_0^u W(u') du'}$$

Wir kehren nun wieder zum allgemeinen Fall zurück und lösen die Gleichung für ψ in der Wigner-Näherung, d.h. für den Fall weit getrennter schmaler Resonanzen bzw. für den Fall schmaler Resonanzen und schwachen Gesamteinfangs pro Resonanz. Da im heterogenen Fall die Einfangwahrscheinlichkeit für eine bestimmte Resonanz infolge des "shielding"-Effektes kleiner ist als im homogenen Fall bei der gleichen Resonanz, so kann man erwarten, daß die Wigner-Näherung im heterogenen Fall eher bessere Resultate liefert als im homogenen Fall. Da nun die Wigner-Näherung bereits im homogenen Fall für praktische Anwendungen befriedigend ist (vergl. Abschnitt I), so kann man sie im heterogenen Fall als hinreichend ansehen.

Zwischen den Resonanzen ist $h = 1$, also $R = 1$. Die Gebiete, in denen $R \neq 1$ ist, sind schmal verglichen mit einem Bremsintervall, und der Gesamtbetrag der Absorption einer Resonanzlinie ist klein.

Dann gilt

$$(67) \quad \psi_{as}(u) = \psi_0 \prod_{\substack{\text{alle} \\ \text{Resonanzen}} < u} \left(e^{-\frac{1}{3} \int_{res} W(u') du'} \right) = \psi_0 e^{-\frac{1}{3} \int_0^u W(u') du'}$$

und da nach Voraussetzung die Intervalle zwischen den Resonanzen groß oder die Abweichung vom asymptotischen Fluß klein ist, gilt

$$(68) \quad p(u) = \int_0^u R(u') G(u-u') \psi(u') du' \approx \int_0^u R(u') G(u-u') \psi_{as}(u') du'$$

bzw.

$$(69) \quad \frac{dp(u)}{du} \approx -W(u) \psi_{as}(u) = -\psi_0 e^{-\frac{1}{3} L(u)} \frac{dL(u)}{du}$$

mit

$$L(u) = \int_0^u W(u') du'$$

Also ist

$$p(u) = \int \psi_0 e^{-\frac{1}{\xi} L(u)} = \int \psi_0 e^{-\frac{1}{\xi} \int_0^u W(u') du'}$$

Für $p(0) = 1$ muß $\psi_0 = \frac{1}{\xi}$ gelten, d.h. wir erhalten

$$(70) \quad p(u) = e^{-\frac{1}{\xi} \int_0^u W(u') du'} = e^{-\frac{1}{\xi} \int_0^u \frac{g(1-M_1)}{1-M_0 h} du'}$$

Für Wasserstoff als Moderator ($\xi = 1$) ergibt sich wieder der richtige Wert, wie es ja nach den entsprechenden Beziehungen im homogenen Fall zu erwarten war.

Durch die Gl. (70) ist auch für den Fall beliebiger Moderatoren die Berechnung der Resonanzentkommwahrscheinlichkeit für heterogene Systeme auf die Berechnung der Größen $M_0(u)$ und $M_1(u)$ zurückgeführt.

Um eine Konsistenz in der Methode zu wahren, sind bei Anwendung der Wigner-Näherung auch diese Größen unter Verwendung der asymptotischen Stoßdichte zu bilden. Diese ist zu berechnen für ein Gebiet weit unterhalb der Quell-Lethargie bzw. weit unterhalb der jeweils letzten Resonanzlinie. In diesem Zwischenraum zwischen Resonanzlinien kann man auch im Uran den Einfang praktisch vernachlässigen und die Wirkungsquerschnitte, die ja lediglich durch Potentialstreuung bedingt sind, in Moderator und Uran jeweils konstant setzen. Für ein solches nicht-einfangendes heterogenes Medium mit hinsichtlich der Lethargie konstanten Wirkungsquerschnitten, die jedoch beliebige Funktionen der räumlichen Koordinaten sein können, wollen wir nun den asymptotischen Fluß ermitteln.

c) Bestimmung des asymptotischen Flusses in einem nicht-absorbierenden Medium mit lethargieunabhängigen, räumlich variablen Wirkungsquerschnitten und Abbremsseigenschaften

Behauptung: Der asymptotische Fluß in einem solchen Medium ist räumlich und hinsichtlich der Lethargie konstant.

Der Beweis besteht einfach darin, zu zeigen, daß $f = \text{const.}$ eine Lösung der Integralgleichung

$$f(\vec{r}, u) = \int_{v_0+v_1}^u \int_0^u K^+(\vec{r}, \vec{r}') f_0(\vec{r}', u-u') f(\vec{r}', u) d^3 u' du'$$

für den Fluß ist. Dabei ist $K^+(\vec{r}, \vec{r}')$ der zu $K(\vec{r}, \vec{r}')$ adjungierte Kern und $K(\vec{r}, \vec{r}')$ der Kern aus der Integralgleichung für die Stoßdichte, der jetzt wegen der Konstanz der Wirkungsquerschnitte ja nicht mehr von u abhängt.

K lautet ja

$$K(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\Sigma(\vec{r})}{4\pi} \frac{e^{-\tau(\vec{r}, \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

und der in der Transportgleichung für den Fluß vorkommende Kern ist

$$\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\tau(\vec{r}, \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \Sigma(\vec{r}')$$

also tatsächlich gleich K^+ !

Weiter ist

$$f_0(\vec{r}, u-u') = \left(k(u) \Sigma_0(\vec{r}) \delta(u-u') + \Sigma_1(\vec{r}) f_0(u-u') \right) \frac{1}{\Sigma_0(\vec{r}) + \Sigma_1(\vec{r})}$$

Nun ist der Beweis einfach. Man muß nur zeigen, daß

$$1 = \int_{V_0+V_1} \int_0^u K^+(\vec{r}, \vec{r}') f_0(\vec{r}', u-u') d^3r' du'$$

Wir integrieren zunächst hinsichtlich u' . Dann muß unabhängig von \vec{r}

$$\int_0^u f_0(\vec{r}, u-u') du' = 1$$

gelten, Es bleibt also nur noch

$$\int_{V_0+V_1} K^+(\vec{r}, \vec{r}') d^3r' = \int_{V_0+V_1} K(\vec{r}, \vec{r}') d^3r = 1$$

wegen Gl. (50).

Wir haben also gezeigt, daß $\varphi = \text{const.}$ eine Lösung der Integralgleichung für φ ist. Dann ist es aber auch die asymptotische Lösung, denn diese muß ja gegen eine Verschiebung der Lethargie-Skala invariant, also lethargie-unabhängig sein, reduziert sich damit aber auf die Lösung eines Eingruppenproblems. Da hier von Absorption abgesehen wurde, können sich alle Flußunterschiede durch Diffusion ausgleichen, und wir erhalten auch räumliche Konstanz. Formaler könnte man auch so argumentieren: Für den Fall verschwindender Absorption gibt in einem Eingruppenproblem die Diffusionstheorie befriedigende Resultate. Sie liefert in diesem Fall $\varphi = \text{const.}$ Folglich ist $\varphi = \text{const.}$ tatsächlich die asymptotische Lösung.

Wenn die Flüsse konstant sind, so können es die Stoßdichten nicht sein, da ja die Wirkungsquerschnitte von Medium zu Medium verschieden sind. Jedoch sind dann auch die Stoßdichten innerhalb jedes Mediums konstant, und das ist ja alles, was wir für die Berechnung der $M_{\perp}(u)$ brauchen. Es kommt dabei nicht einmal auf den absoluten Wert dieser Konstanten an, obgleich dieser aus Kontinuitätsüberlegungen einfach ermittelt werden könnte; es sei

der konstante Wert φ_i , so ist $\Phi_i = \varphi_i V_i$, und wir erhalten

$$(71) \quad c_i = \frac{1}{V_i}$$

wie oben schon behauptet.

Der asymptotische Fluß stellt sich spätestens für Werte von u ein, die in der Größenordnung von 2 bis 3 liegen, da der Einfluß der Quelle mindestens mit e^{-u} abnimmt. Für schlechtere Moderatoren, bei denen die Abbremsintervalle kleiner als 1 sind, stellt er sich noch schneller ein. Die späteren Resonanzeinfänge wirken wie negative Quellen; da sie jedoch im einzelnen klein sein sollen, überlagert sich dem asymptotischen Fluß nur eine unbedeutende räumliche Welligkeit, die man für die Berechnung der M_1 vernachlässigen kann und im Rahmen der Wigner-Näherung auch vernachlässigt.

d) Grenzfälle der Gl.(70) und Beispiele

Trivial ist natürlich der Fall, daß innerhalb des Bereiches von 0 bis u keine Resonanzabsorption vorkommt. Dann ist in diesem Bereich $h = 1$, also $g = 0$ und $p(u) = 1$.

Als nächstes betrachten wir den Fall der reinen Absorption im Uran:
 $h(u) = 0$. Dann wird

$$(72) \quad - \int_0^u \ln p(u) = \int_0^u [1 - M_1(u')] du'$$

Den gleichen Ausdruck erhalten wir für $M_0 = 1$, d.h. wenn die Wirkungsquerschnitte im Uran so groß werden, daß ein Neutron im Uran kaum die Möglichkeit hat, aus dem Block zu entweichen. Das ist aber in den Resonanzen der Fall. Da außerdem in den Resonanzen auch noch g im allgemeinen über 0,5 ansteigt - es gibt nur relativ wenige Ausnahmen (Streuressonanzen), die für die Berechnung des p -Faktors außerdem unwesentlich sind -, so kann man innerhalb der Resonanz ohne weiteres $W(u)$ durch $1 - M_1(u)$ ersetzen. Setzt man außerhalb der Resonanzen $W = 0$, so erhält man die bequeme und trotzdem genügend genaue Beziehung

$$(73) \quad - \int \ln p(u) = \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Resonanz} < u}} \int [1 - M_1(u')] du'$$

Nun wollen wir noch den Übergang zur homogenen Mischung vollziehen und uns dabei überzeugen, daß sowohl Gl.(70) wie auch Gl.(73) diesen Grenzübergang korrekt wiedergeben:

Im Fall der homogenen Mischung wird

$$M_1 = \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0 + \Sigma_1} \quad M_0 = \frac{\Sigma_0}{\Sigma_0 + \Sigma_1}$$

folglich wird

$$W(u) = \frac{g(u) \frac{\Sigma_0}{\Sigma_0 + \Sigma_1}}{1 - h(u) \frac{\Sigma_0}{\Sigma_0 + \Sigma_1}} = \frac{g(u) \Sigma_0}{\Sigma_1 + g(u) \Sigma_0}$$

und Gl.(70) liefert

$$-\int \ln p(u) = \int_0^u \frac{g(u') \Sigma_0(u')}{\Sigma_1(u') + g(u') \Sigma_0(u')} du' = \int_0^u \frac{\Sigma_{a0}(u')}{\Sigma_1(u') + \Sigma_{a0}(u')} du'$$

Andererseits ist, wenn man in den Resonanzen $h = 0$ setzt,

$$W(u) = \frac{\Sigma_{a0}(u)}{\Sigma_1(u) + \Sigma_{a0}(u)}$$

und damit erhält man aus Gl.(73) denselben Wert:

$$-\int \ln p(u) = \int_0^u \frac{\Sigma_{a0}(u')}{\Sigma_1(u') + \Sigma_{a0}(u')} du'$$

Als Beispiel soll hier zunächst $1 - M_1$ für ein einfaches enges Plattengitter berechnet werden; die entsprechenden Rechnungen für ein Plattenbündel sind umständlicher und werden im nächsten Abschnitt behandelt. Natürlich werden sich die hier erhaltenen Ausdrücke aus denen des Bündels durch den Grenzübergang (Zahl der Platten nach ∞) ableiten lassen, aber da das Verfahren beim Plattengitter etwas durchsichtiger ist, soll es hier noch gesondert behandelt werden. Das Resultat sollte das gleiche sein, das CORNGOLD in seiner Arbeit über den Resonanzeinfang im Plattengitter erhalten hat.

Die Uranplatten befinden sich im Abstand b und besitzen die Dicke a . Aus Symmetrie-Gründen spielen nur die entlang der Platten-Normalen gemessenen Koordinaten x und ω , die Projektion der Geschwindigkeitsrichtung des Neutrons auf diese Normale, eine Rolle als physikalische Bestimmungsgrößen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron nach der letzten Wechselwirkung im Punkt x' (wobei x' ein Punkt im Moderator ist) die nächste Wechselwirkung im Punkte x erfährt (x liegt im Uran), ist gegeben durch

$$(74) \quad \sum_0 \frac{1}{2} e^{-\frac{w(\alpha+\beta)}{w} - \frac{\sum_1 y'}{w} - \frac{\sum_0 y}{w}} d(y'/w) dw dy \cdot \theta$$

Dabei ist y'/w die Entfernung von x' zum Rand der betreffenden Moderatorzelle, gemessen entlang der Bahn des Neutrons, ebenso y/w die Entfernung vom Rand der betreffenden Uranplatte zum Punkt x , und schließlich n die Zahl der Zellen zwischen x und x' . Zur Abkürzung wurde wieder $\alpha = \sum_0 a$ und $\beta = \sum_1 b$ gesetzt. Zunächst betrachten wir ein sehr großes, aber endliches Volumen $V = N(a+b)O$, wobei O die als groß angenommene Fläche der Platten und N eine große natürliche Zahl ist. Wir erhalten dann, entsprechend Gl.(52) und (55) folgenden Ausdruck für $K_{01} = 1 - M_1$:

$$(75) \quad 1 - M_1 = K_{01} = 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{NO}{Nb\theta} \frac{\sum_0}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^1 \sum_{n=0}^N e^{-\frac{n(\alpha+\beta)}{w} - \frac{\sum_1 y'}{w} - \frac{\sum_0 y}{w}} dy' dy \frac{dw}{w}$$

$$= \frac{1}{\beta} \int_0^1 w dw \frac{(1 - e^{-\alpha/w})(1 - e^{-\beta/w})}{1 - e^{-(\alpha+\beta)/w}}$$

Nach PETROV (loc.cit.) hätte man statt dessen erhalten:

$$(1 - M_1)_{\text{Petrov}} = \frac{\sum_{\text{Block}} \int_0^\infty (1 - e^{-\sum_0 x}) f(x) dx}{V_1 \sum_1 + \sum_{\text{Block}} \int_0^\infty (1 - e^{-\sum_0 x}) f(x) dx}$$

mit

$$\sum_{\text{Block}} = \frac{V_0}{l} = \frac{V_0}{2a} = \frac{V_1}{2b} \quad x = \frac{a}{w} \quad f(x) dx = 2w dw$$

d.h.

$$(1 - M_1)_{\text{Petrov}} = \frac{\frac{1}{b} \int_0^1 (1 - e^{-\alpha/w}) w dw}{\sum_1 + \frac{1}{b} \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha/w}) w dw}$$

Diese Formel stimmt aber nur im Grenzfall $\beta \rightarrow \infty$ mit (75) überein, d.h. für den von GUREVICH und POMERANCHUK (loc.cit.) behandelten Fall des weiten Gitters, denn dann wird in beiden Fällen

$$(76) \quad (1 - M_1) = \frac{1}{\beta} \int_0^1 w dw (1 - e^{-\alpha/w})$$

Um einen Vergleich mit der Arbeit von CORNGOLD zu bekommen, müssen wir auch noch die Streuung im Uran berücksichtigen, d.h. von Gl.(66) für $W(u)$ ausgehen. Das Integral in Gl.(75) kürzen wir mit $F(u)$ ab. Analog zu K_{01} erhält man wegen der hier vorliegenden Symmetrie des ebenen Plattengitters $K_{10} = 1 - M_0$ durch einfaches Vertauschen von a mit b und Σ_1 mit Σ_0 . Es wird also

$$(77) \quad W(u) = \frac{g(u)F(u)/\beta}{1 - h(u)(1 - F(u)/\alpha)} = \frac{g(u)F(u)/\beta}{g(u) + h(u)F(u)/\alpha(u)}$$

$$p(u) = e^{-\frac{1}{\xi} \int_0^u \frac{gF/\beta}{g + hF/\alpha} du'}$$

d.h. wir erhalten - bis auf die Tatsache, daß wir im Gegensatz zu CORNGOLD $p(0) = 1$ angenommen hatten - im speziellen Fall des Wasserstoff-Moderators ($\xi = 1$) genau den gleichen Ausdruck wie CORNGOLD, jedoch aus einer Methode, die physikalisch sehr viel durchsichtiger ist und die sich zudem auf beliebige Gitter und beliebige Moderatoren anwenden läßt.

Zum Schluß überzeugen wir uns noch, daß auch speziell die Gl.(75) den richtigen Grenzübergang zum homogenen Fall liefert: Wir halten a/b fest und lassen a und b gemeinsam gegen Null gehen. Wir erhalten

$$-\xi \ln p(u) = \int_0^u \frac{\alpha}{\alpha + \beta} du' = \int_0^u du' \frac{\Sigma_0'}{\Sigma_1' + \Sigma_0'}$$

Dabei sind $\Sigma_0' = \Sigma_0 \frac{V_0}{V_0 + V_1}$ und $\Sigma_1' = \Sigma_1 \frac{V_1}{V_0 + V_1}$

die makroskopischen Wirkungsquerschnitte von Uran und Moderator in der Mischung, während Σ_0 und Σ_1 , die Wirkungsquerschnitte im reinen Uran bzw. im reinen Moderator sind.

Abschnitt III :

Anwendung der Theorie auf die Berechnung des Resonanzeinfangs im Plattenbündel

a) Die Berechnung von $1 - M_1$ im Plattenbündel

Wir betrachten ein Bündel von Brennstoff-Platten. Die Zahl der Platten im Bündel sei N , ihre Dicke a , ihr gegenseitiger Abstand (Oberfläche zu Oberfläche) sei b . Die x -Achse falle mit der Platten-Normalen zusammen; senkrecht zur x -Achse seien die Platten unendlich ausgedehnt.

Der Abstand zwischen den einzelnen Bündeln betrage D (von Oberfläche zu Oberfläche); er sei so groß gegenüber der freien Weglänge im Moderator, daß man die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Bündeln vernachlässigen kann.

Da die Platten im Bündel je nach ihrer Lage verschieden stark dem Neutronenfluß ausgesetzt sind, ist es zweckmässig, diesmal das Problem nicht ganz so direkt anzugehen, wie am Ende des vorigen Abschnitts den Fall des Platten-gitters.

Wir führen zunächst folgende Größen ein:

$P_{i,r}^N$ sei die Stoßwahrscheinlichkeit für von rechts einfallende Neutronen in der i -ten Platte des aus N Platten bestehenden Bündels (die Platten seien einfach von links nach rechts durchnummeriert).

Entsprechend sei $P_{i,l}^N$ der gleiche Ausdruck für die von links kommenden Neutronen.

Dann ist

$$P_i^N = P_{i,r}^N + P_{i,l}^N$$

die Stoßwahrscheinlichkeit für Neutronen in der i -ten Platte des Bündels und folglich

$$P^N = \sum_i P_i^N = \text{gesamte Stoßwahrscheinlichkeit im Bündel} = 1 - M_1 \text{ für das Bündel.}$$

Offenbar gilt

$$P_{i,r}^N = P_{N+1-i,l}^N$$

da aus Symmetrie-Gründen beispielsweise die Stoßwahrscheinlichkeit für von rechts kommende Neutronen in der vorletzten Platte gleich der für von links

kommende Neutronen in der zweiten Platte sein muß.

Folglich ist

$$P^N = \sum_i (P_{i,r}^N + P_{i,l}^N) = \sum_i (P_{i,l}^N + P_{N+1-i,l}^N)$$

Nun ist es gleichgültig, ob man bei der Summation der einzelnen Beiträge von links nach rechts oder von rechts nach links zählt, d.h.

$$\sum_i P_{N+1-i,l}^N = \sum_j P_{j,l}^N$$

Also ist

$$P^N = 2 \sum_i P_{i,l}^N$$

Wir brauchen also zur Berechnung von $1-M_1$ lediglich die $P_{i,l}^N$ zu kennen, d.h. uns nur auf die von links kommenden Neutronen zu beschränken.

Die Gesamtzahl der von links kommenden Neutronen, die pro Flächeneinheit in der i -ten Platte im Abstand x (d.h. zwischen x und $x+dx$) von der linken Oberfläche eine Wechselwirkung mit einem Uranatom erfahren, ist gegeben durch

$$\sum_0 dx \frac{\varphi}{2} \int_0^1 \frac{dw}{w} e^{-\frac{\sum_0 x}{w}} \left\{ \sum_{n=1}^{i-1} \int_0^b dy e^{-\frac{\sum_0 y}{w}} e^{-\frac{(n-1)(\alpha+\beta)}{w}} + e^{-\frac{(i-1)(\alpha+\beta)}{w}} \int_0^{cb-\sum_0 y} dy e^{-\frac{\sum_0 y}{w}} \right\}$$

Dabei soll \sum' bedeuten, daß die Summe wegzulassen ist, wenn $i < 2$ ist. Der erste Term in der Klammer enthält die Anteile der Neutronen, die ihre letzte Wechselwirkung im Moderator des Bündels (d.h. im Kühlmedium zwischen den Uranplatten) hatten, während der zweite Term die von außerhalb des Bündels kommenden Neutronen berücksichtigt. Eigentlich hätte die Integration im zweiten Term sich nur bis zum nächsten Bündel erstrecken dürfen, von wo dann wieder ähnliche Ausdrücke wie der erste Term hinzugekommen wären, jedoch ist nach Voraussetzung $\sum_1 D \gg 1$, und folglich macht es praktisch nichts aus, wenn man als obere Integrationsgrenze ∞ einsetzt. Ausführung der y -Integration liefert:

$$\frac{\sum_0}{\sum_1} dx \frac{\varphi}{2} \int_0^1 dw e^{-\frac{\sum_0 x}{w}} \left\{ \sum_{n=1}^{i-1} e^{-\frac{(n-1)(d+\beta)}{w}} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{w}} \right) + e^{-\frac{(i-1)(d+\beta)}{w}} \right\}$$

wobei wieder $\beta = \sum_1 b$ gesetzt wurde. Die Gesamtzahl der von links kommenden Neutronen, die in der i -ten Platte pro Flächeneinheit eine Wechselwirkung mit einem Uranatom erfahren, ergibt sich durch anschließende Integration über x als

$$\frac{\varphi}{2 \sum_1^1} \int_0^1 w dw (1 - e^{-\alpha/w}) \left\{ \sum_{n=1}^{i-1} e^{-\frac{(n-1)(\alpha+\beta)}{w}} (1 - e^{-\beta/w}) + e^{-\frac{(i-1)(\alpha+\beta)}{w}} \right\}$$

mit $\alpha = \sum_0 a$.

Die Summation lässt sich unter Verwendung der bekannten Beziehung

$$\sum_{k=1}^r q^{k-1} = \frac{1 - q^r}{1 - q}$$

ebenfalls durchführen und ergibt

$$\frac{\varphi}{2 \sum_1^1} \int_0^1 w dw (1 - e^{-\alpha/w}) \left\{ \frac{(1 - e^{-\beta/w}) (1 - e^{-\frac{(i-1)(\alpha+\beta)}{w}})}{1 - e^{-\frac{\alpha+\beta}{w}}} + e^{-\frac{(i-1)(\alpha+\beta)}{w}} \right\}$$

Die Wahrscheinlichkeit $P_{i,1}^N$ ist also dieser Zahl proportional und ergibt sich durch Division durch die Zahl der im Einzugsgebiet des Bündels überhaupt gestreuten Neutronen.

Der gegenseitige Abstand der Bündel ist D ; also ist die Zahl der im Einzugsgebiet eines Bündels gestreuten Neutronen - bezogen auf die Flächeneinheit - gleich

$$\varphi (D + (N-1)b)$$

und wir erhalten mit

$$\delta = \sum_1 D$$

für $P_{i,1}^N$ den Ausdruck

$$P_{i,1}^N = \frac{1}{2[\delta + (N-1)b]} \int_0^1 w dw (1 - e^{-\alpha/w}) \left\{ \frac{(1 - e^{-\beta/w}) (1 - e^{-\frac{(i-1)(\alpha+\beta)}{w}})}{1 - e^{-\frac{\alpha+\beta}{w}}} + e^{-\frac{(i-1)(\alpha+\beta)}{w}} \right\}$$

Damit ergibt sich für $1 - M_1$ der Wert:

$$(78) \quad 1 - M_1 = P^N = \frac{1}{\delta + (N-1)b} \int_0^1 w dw (1 - e^{-\alpha/w}) \left\{ \frac{(1 - e^{-\beta/w}) (N - \frac{1 - e^{-\frac{N(\alpha+\beta)}{w}}}{1 + e^{-\frac{\alpha+\beta}{w}}})}{1 - e^{-\frac{\alpha+\beta}{w}}} + \frac{1 - e^{-\frac{N(\alpha+\beta)}{w}}}{1 - e^{-\frac{\alpha+\beta}{w}}} \right\}$$

für $N = 1$ erhalten wir daraus

$$P^1 = \frac{1}{\delta} \int_0^1 w dw (1 - e^{-\alpha/w})$$

wie zu erwarten war, denn für $N = 1$ geht ja das Doppelgitter in ein weites Einfachgitter über, und für dieses kannten wir ja bereits den angegebenen Wert (Vergl. Gl.76).

Für $N \rightarrow \infty$ ergibt sich der Ausdruck

$$P^\alpha = \frac{1}{\beta} \int_0^1 w dw \frac{(1 - e^{-\alpha/w})(1 - e^{-\beta/w})}{1 - e^{-\frac{\alpha+\beta}{w}}}$$

und dies ist genau die Gl. (75).

Die Gl. (78) geht also in den Grenzen gerade in die Ausdrücke über, die bei den betreffenden Grenzfällen auch zu erwarten sind. Man kann auch $N \rightarrow \infty$ und $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ gehen lassen und erhält unter den Nebenbedingungen $N\beta = \text{const.}$ und $\alpha/\beta = \text{const.}$ einen Ausdruck für $1 - M_1$ für Platten, in denen das Uran homogen mit einer moderierenden Substanz gemischt ist und die selbst in Form eines Plattengitters heterogen in den reinen Moderator eingebettet sind.

b) Der Begriff der effektiven Oberfläche

Wenn wir in der Gleichung (73) für die Berechnung des p-Faktors den Ausdruck (78) für $1 - M_1$ einsetzen, so haben wir eine Formel für den p-Faktor erhalten, die noch unabhängig von der speziellen Form der Resonanzlinien gilt, solange wenigstens, als die Bedingung für die Gültigkeit der Wigner-Näherung erfüllt ist, daß die Resonanzlinien scharf, d.h. schmal gegen ein Bremsintervall im Moderator seien. Wenn wir nun weiter annehmen - entsprechend der Darstellung des Resonanzintegrals mit einem der Uran-Oberfläche proportionalen Term -, daß die Resonanzlinien Rechteckform haben, d.h. wenn wir von der Gültigkeit der Breit-Wigner-Formel zunächst absehen, dann ist in allen Bereichen, die zum Oberflächenterm im Resonanzintegral einen Beitrag leisten können, der Wirkungsquerschnitt im Uran so hoch, daß wir $e^{-\alpha}$ in Gl. (78) Null setzen können. Wir erhalten dann für $1 - M_1$ innerhalb einer solchen "Kastenresonanz":

$$(79) \quad P^N = \frac{1}{\delta + (N-1)\beta} \int_0^1 w dw + \frac{1}{\delta + (N-1)\beta} \int_0^1 w dw (1 - e^{-\beta/w}) (N-1)$$

$$= \frac{1}{2\{\delta + (N-1)\beta\}} + \frac{N-1}{2\{\delta + (N-1)\beta\}} (1 - 2E_3(\beta))$$

Der erste Term wäre auch im Falle einer einzelnen Platte vorhanden und ergäbe folglich in einer Beschreibung des Resonanzeinfangs, die von einer "Kastenresonanz" ausgeht, den Oberflächenterm. Der zweite Term ist dem ersten proportional; im Falle des Bündels muß man also noch einen Zusatzterm in dem der Oberfläche proportionalen Ausdruck erwarten, der sich durch Multiplikation des Oberflächenterms des freien Stabes mit dem Faktor

$$(N - 1) (1 - 2E_3(\cdot))$$

ergibt. Man interpretiert das, indem man sagt, die "effektive Oberfläche" setze sich zusammen aus den 2 äußeren Oberflächen und den $2(N-1)$ inneren Oberflächen, wobei letztere noch mit dem Faktor $1 - 2E_3(\beta)$ multipliziert sind, der zum Ausdruck bringt, daß nur die im anliegenden Kühlsplatt gestreuten Neutronen zu dem betreffenden Oberflächeneffekt einen Beitrag leisten können.

Man hat also

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{außen}} + (1 - 2E_3(\beta))S_{\text{innen}}$$

Diese Beziehung (siehe z.B. CRITOPH¹⁸, Appendix A) bildete bisher die einzige Methode, beliebige Systeme von Uranblöcken, wie z.B. Bündel und dergleichen, zu behandeln. In der Gleichung (78) ist diese Beschreibung mit der "effektiven Oberfläche" als ein Grenzfall mit enthalten; die Gleichung (78) liefert darüber hinaus jedoch auch die Möglichkeit, andere Verläufe der Resonanzlinien zu berücksichtigen, speziell auch die Breit-Wigner-Form zugrunde zu legen.

Es ist allerdings zu erwarten, daß in dem Bereich der Uran-Dimensionen, für den die Konstanten A und μ in $RI = A(1 + \mu S/M)$ angepaßt sind, auch die Beschreibung mit Hilfe der effektiven Oberfläche gute Resultate liefert. Das ist in der Tat der Fall und wird auch durch Vergleich mit Experimenten (HELLSTRAND, loc.cit.) gestützt. In diesem Bereich stimmen auch die Werte für das Resonanzintegral aus Gl. (78) für Breit-Wigner-Linien mit dem für Kastenresonanz aus Gl. (79) berechneten Werten gut überein (siehe Kap.IV). Überall, wo dies der Fall ist, ist es sehr bequem, mit effektiven Oberflächen zu rechnen, weil man auf diese Weise auch komplizierte Geometrien relativ einfach erfassen kann.

Man muß jedoch grundsätzlich feststellen, daß die Methode der effektiven Oberfläche nicht allgemeine Gültigkeit besitzt, da die ihr zugrunde liegende Gl.(79) z.B. für kleine Plattendicken nicht mehr gilt. Dagegen gilt die Gl.(78) allgemein: Sie gibt ja auch den richtigen Grenzübergang zum homogenen Fall.

c) Berechnung des p-Faktors im Plattenbündel für kleinen Plattenabstand bei Gültigkeit der Breit-Wigner-Formeln

Die Tatsache, daß das experimentell bestimmte Resonanzintegral in weiten Bereichen der Uran-Dimensionen statt eines S/M proportionalen Terms einen $\sqrt{S/M}$ proportionalen Term enthält, ist ein starkes Argument für die Gültigkeit der Breit-Wigner-Formel. Deswegen soll hier noch eine Formel für den p-Faktor aus Gl.(78) abgeleitet werden, bei der für den Verlauf des Uran-Wirkungsquerschnitts in einer Resonanz die Breit-Wigner-Formel zugrunde gelegt wird.

Da bei Verwendung der Breit-Wigner-Formel die Absorption in den Flanken der Resonanz eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielt, können wir nicht mehr $e^{-\alpha} \ll 1$ annehmen, denn das gilt nur im Zentrum der Resonanzlinie. Dagegen wollen wir unsere Rechnungen auf die Gültigkeit der schwächeren Voraussetzung $\alpha \gg \beta$ beschränken, die bei den üblichen Kühlspaltdimensionen meist auch noch in den Flanken der Resonanz erfüllt sein dürfte. Eine Abschätzung des Gültigkeitsbereiches dieser Voraussetzung wird weiter unten gegeben werden.

Unter der Voraussetzung $\alpha \gg \beta$ vereinfacht sich die Gl.(78) wesentlich; wir erhalten

$$(81) 1 - M_1 = \frac{1}{\delta + (N-1)\beta} \int_0^1 w dw \left\{ (1 - e^{-\beta/w}) \left(N - \frac{1 - e^{-N\alpha/w}}{1 - e^{-\alpha/w}} \right) + 1 - e^{-N\alpha/w} \right\}$$

Hier darf man nicht etwa den Term $e^{-\beta/w}$ entwickeln, obwohl meist $\beta \ll 1$ sein muß, damit die Voraussetzung $\alpha \gg \beta$ für alle zum Resonanzintegral beitragenden Werte von x gilt (s.u.). Die Entwicklung nach β/w wäre ja nicht im ganzen Integrationsbereich gleichmäßig konvergent.

Es ist jedoch zweckmässig, in Gl.(81) die Summation, die zu Gl.(78) führte, wieder rückgängig zu machen, d.h. den Ausdruck

$$\frac{1 - e^{-N\alpha/w}}{1 - e^{-\alpha/w}}$$

wieder zu entwickeln. Wir erhalten dann

$$(82) 1 - M_1 = \frac{1}{\delta + (N-1)\beta} \int_0^1 w dw \left\{ (1 - e^{-\beta/w}) \left[(1 - e^{-\alpha/w}) + (1 - e^{-2\alpha/w}) + \dots + (1 - e^{-N\alpha/w}) \right] + 1 - e^{-N\alpha/w} \right\}$$

Auch in diesem Ausdruck ist übrigens die Methode der effektiven Oberfläche noch voll enthalten; das ist ja auch klar, denn $\alpha \gg \beta$ war eine Bedingung, die für die Kastenresonanz trivialerweise in der ganzen Resonanzlinie erfüllt ist.

Wir beschränken uns nun auf eine einzelne Resonanzlinie und setzen für α die Breit-Wigner-Formel ein:

$$\alpha = \frac{\alpha_{\max}}{1+x^2}$$

Dabei ist (vergl. Abschn. I, Teil b)

$$x = \frac{2(E-E_r)}{\Gamma}$$

Wir wenden hier wieder die gleiche Argumentation an, die von Gl. (32) auf Gl. (26) führte, d.h. wir setzen

$$\int_{\text{res}} \left(1 - e^{-k \frac{\alpha_{\max}}{w} \cdot \frac{1}{1+x^2}}\right) dx \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - e^{-\frac{k \alpha_{\max}/w}{x^2}}\right) dx = 2 \sqrt{\frac{\pi k \alpha_{\max}}{w}} \quad (k=1, 2, \dots, N-1)$$

Das gilt natürlich für alle k und w nur unter der Bedingung $\alpha_{\max} \gg 1$; diese Bedingung wird aber nur bei den schwachen, meist nicht weiter aufgelösten Resonanzen verletzt, die dann zum reinen Volumenterm beitragen, der jedoch unabhängig von der Geometrie bekannt ist. Wir erhalten also

$$(83) \int_{\text{res}} (1 - M_1) du = \frac{\sqrt{\pi} \frac{\Gamma}{E_r} \sqrt{\sigma_{\text{res}}} \sqrt{Na}}{\delta + (N-1)\beta} \left[\int_0^1 dw \sqrt{w} + \frac{(1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{N-1})}{\sqrt{N}} \int_0^1 \sqrt{w} dw \left(1 - e^{-\beta/w}\right) \right]$$

d.h.

$$(84) \int_{\text{res}} (1 - M_1) du = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\pi} \frac{\Gamma}{E_r} \sqrt{\sigma_{\text{res}}} \sqrt{Na}}{\delta + (N-1)\beta} \left[1 + \frac{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} f_r(\beta) \right]$$

mit

$$(85) f_r(x) = \frac{3}{2} \int_0^1 \sqrt{w} dw \left(1 - e^{-\frac{x}{w}}\right)$$

Der zweite Term in der eckigen Klammer in Gl. (84) gibt den Anteil der Kühlspalte relativ zum Anteil des äußeren Moderators als Quelle von Resonanzneutronen an.

Da in dem Klammersausdruck in Gl. (84) alle vorkommenden Größen unabhängig von der speziellen Resonanz sind, erhält man durch Summation über alle Resonanzen für das Resonanzintegral im Plattenbündel mit engen Kühlspalten den Ausdruck

$$(86) {}^{\circ}R^I = A' \left(1 + \beta' \sqrt{\frac{S}{M}} \left[\sqrt{N} + (1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{N-1}) f_r(\beta) \right] \right)$$

Dabei ist $\sqrt{S/M}$ für eine einzelne Platte des Bündels zu berechnen. Die Funktion (85) kann man folgendermaßen auf bekannte Funktionen zurückführen:

Differentiation der Gl. (85) nach x liefert

$$f_r'(x) = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{w}} e^{-\frac{x}{w}} = 3 \int_0^1 ds e^{-\frac{x}{s^2}}$$

und

$$\begin{aligned} f_r''(x) &= -3 \int_0^1 \frac{ds}{s^2} e^{-\frac{x}{s^2}} = -3 \int_1^\infty du e^{-xu^2} \\ &= -\frac{3}{\sqrt{x}} \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^\infty dv e^{-v^2} = -\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \Phi(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

mit

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y dv e^{-v^2}$$

Damit wird

$$f_r(x) = 3x - 2\sqrt{\pi} x^{3/2} + 6\sqrt{\pi} \int_0^{\sqrt{x}} d\eta \eta \int_0^\eta d\xi \Phi(\xi)$$

Durch partielle Integration läßt sich das Doppelintegral umformen, und man erhält schließlich

$$(87) \quad f_r(x) = 3x - 2\sqrt{\pi} x^{3/2} + 3\sqrt{\pi} x \int_0^{\sqrt{x}} \Phi(\xi) d\xi - 3\sqrt{\pi} \int_0^{\sqrt{x}} \xi^2 \Phi(\xi) d\xi$$

Die Funktionen $f_r(x)$ und

$$\varphi(u) = \frac{u^2}{\sqrt{\pi}} - \frac{2}{3} u^3 + 2 \int_0^u d\eta \eta \int_0^\eta d\xi \Phi(\xi)$$

sind im Anhang tabelliert.

Da man sich doch nur auf kleine Werte des Arguments x in der Funktion $f_r(x)$ beschränkt, kann man auch folgende Reihenentwicklung sehr bequem verwenden, die im wesentlichen durch gliedweise Integration der Reihenentwicklung der Fehlerfunktion gewonnen wurde:

$$(88) \quad f_r(x) = 3 \left(x - \frac{2}{3} \sqrt{\pi} x^{3/2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{18} + \dots \right)$$

d) Abschließende Betrachtungen über den Gültigkeitsbereich der Gleichung (84)

Bei der Ableitung der Gl.(84) wurde $\alpha \gg \beta$ vorausgesetzt und damit die Möglichkeit des Herausstreuens von Resonanzneutronen durch Stöße im Kühlmedium vernachlässigt; folglich gilt Gl.(84) nur im Grenzfall enger Kühlspalte. Diese Einschränkung soll hier genauer präzisiert werden:

Bei der Integration über den Breit-Wigner-Ausdruck, d.h. beim Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - e^{-\frac{a}{x^2}}\right) dx$$

spielt praktisch nur der Bereich bis $x^2 \approx a$ eine Rolle, d.h. mit $a = N\alpha_{\max}^2/\omega$ der Bereich bis

$$x_0 = \sqrt{\frac{N\alpha_{\max}}{\omega}}$$

Andererseits wird die Bedingung $\alpha \gg \beta$ für Werte von x von der Größenordnung

$$x_1 = \sqrt{\frac{d_{\max}}{\beta}}$$

verletzt. Ist der Kühlspalt so schmal, daß $x_1 > x_0$ für mittlere Werte von ω gilt, so ist die Vernachlässigung von β gegen α zulässig. Auch wenn $x_1 < x_0$ ist, kann man Gl.(84) noch so lange verwenden, wie $(x_0 - x_1)/x_0 \ll 1$, d.h.

$$1 - \sqrt{\frac{\omega}{N\beta}} \ll 1$$

gilt.

Für $\bar{\omega} \approx 0,5$, $N = 5$ und $\beta = 0,2$ ergibt sich bereits

$$\frac{x_0 - x_1}{x_0} \approx 0,3$$

Dort ist also die Gl.(84) nicht mehr anwendbar, während sie unter den gleichen Bedingungen für $\beta = 0,1$ noch ihre Gültigkeit behält.

Abschnitt IV :

Der Fall der Stab-Bündel

a) Ähnlichkeit der First-Collision-Ausdrücke auf der Basis gleichen Oberflächen/Volumen-Verhältnisses

Eine charakteristische Eigenschaft der First-Collision-Wahrscheinlichkeiten wie $1 - M_1$ scheint es zu sein, daß die betreffenden Ausdrücke meist von der speziellen Form der Uranblöcke fast unabhängig sind, soweit alle betrachteten Blöcke den gleichen Wert des Verhältnisses Oberfläche/Volumen aufweisen. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man ja auch nicht das Resonanzintegral für beliebige konvexe Körper einfach in der Form "RI" = $A'(1 + \mu' \sqrt{\frac{S}{M}})$ schreiben, wobei A' und μ' feste Materialkonstanten sind, sondern man müßte diese Konstanten für jede Geometrie gesondert bestimmen. Tatsächlich erhält man durch explizites Ausrechnen der Größe \sqrt{e} in Gl.(26) (vergl. GALANIN, loc.cit.)

für Zylinder (Radius ρ) :	$1,375 \sqrt{\rho}$	=	$1,95 \sqrt{V/S}$
für unendlich ausgedehnte Platten (Dicke a) :	$1,33 \sqrt{a}$	=	$1,89 \sqrt{V/S}$
für Kugeln (Radius ρ) :	$1,13 \sqrt{\rho}$	=	$1,95 \sqrt{V/S}$

Da, wie wir gesehen haben, für große Abstände der Uranblöcke die Theorie von GUREVICH und POMERANCHUK die korrekten Ergebnisse liefert, ergeben sich durch Einsetzen dieser Ausdrücke in Gl.(26) tatsächlich Werte für das Resonanzintegral, die nur ganz unwesentlich von der wirklichen geometrischen Form der Uranblöcke abhängen. Das gleiche ergibt sich bei den Berechnungen der Ausflußwahrscheinlichkeit aus Platten, Stäben und Kugeln, wie sie für die Berechnung des Schnell-Spaltungsfaktors ξ durchgeführt wurden. Auch dort wird ja eine First-Collision-Wahrscheinlichkeit, und zwar $1 - M_0$ bzw. M_0 ausgerechnet. Die entsprechenden Werte für Platten, Zylinder und Kugeln sind bei CASE, De HOFFMANN und PLACZEK¹⁹ auf S. 24 graphisch dargestellt. Man kann dabei sofort sehen, daß die Kurven auf der Basis gleichen Oberflächen/Volumen-Verhältnisses ineinander übergehen: Man hat dazu nur als Variable beim Zylinder den Radius, bei der Platte die Dicke und bei der Kugel $3/2$ mal Radius zu verwenden.

Im Falle des Schnell-Spaltungsfaktors ξ sind entsprechende Vergleiche auch hinsichtlich des Wechselwirkungsanteils verschiedener Uranblöcke im Gitter zwischen dem Fall eines einfachen engen Plattengitters und eines einfachen engen Stabgitters durchgeführt worden. (CHERNIK, loc.cit.). Auch dort wurde

eine sehr gute Übereinstimmung beider Werte auf der Basis gleichen Oberflächen/Volumen-Verhältnisses gefunden - wenigstens innerhalb des betrachteten Parameter-Bereichs. Da die Verhältnisse bei dem uns interessierenden Faktor $1 - M_1$ aber nicht wesentlich anders liegen können als beim Faktor M_0 , ist zu erwarten, daß auch für die Berechnung der Resonanzabsorption das enge Plattengitter eine gute Näherung für das enge Stabgitter bildet.

Das Bündel nimmt eine Mittelstellung zwischen einzelstem Block und unendlich ausgedehntem Gitter ein. Wir können also erwarten, daß auch eine Überführung von Stab-Bündeln in Plattenbündel auf der Basis gleichen Oberflächen/Volumen-Verhältnisses keinen allzugroßen Fehler mit sich bringen kann.

In Teil b dieses Abschnittes werden wir sehen, daß diese Vermutung tatsächlich näherungsweise zutrifft. Hier soll nur noch angegeben werden, wie die Umwandlung von Stab-Bündeln in äquivalente Plattenbündel zu erfolgen hat:

Wir wollen uns dabei auf den Fall beschränken, daß die Stäbe kreisförmigen Querschnitt haben und auch das Bündel selbst angenähert kreisförmig und vor allem überall mit gleichen Stababständen aufgebaut ist. Denkt man sich die im Bündel vorliegende Anordnung nach allen Seiten ins Unendliche fortgesetzt, so erhält man ein Stabgitter. Zu diesem bildet man das äquivalente Plattengitter, wobei man die Dicke der Platten gleich dem Radius der Stäbe (entsprechend gleichem S/V-Verhältnis für das Uran) wählt und anschließend die Moderatordicke zwischen den Platten dadurch bestimmt, daß auch für den Moderator in beiden Fällen das gleiche S/V-Verhältnis gilt. Um nun aus dem sich bis ins Unendliche erstreckenden Plattengitter wieder ein endliches Bündel herausgreifen zu können, beschränken wir uns auf N Platten, wobei N gleich der Anzahl der Stäbe ist, die ein Durchmesser durch das ursprüngliche Stabbündel berührt.

Als Beispiel sei hier kurz die Umwandlung eines Bündels von 7 Stäben mit einem zentralen und 6 symmetrisch darum herum angeordneten Stäben in ein äquivalentes Plattenbündel behandelt:

Der Stabdurchmesser betrage 14,8 mm, der Abstand von Stabachse zu Stabachse sei 18,9 mm. Um das Brennelement sei noch eine Umhüllung von 1,1 mm Al angeordnet, die wir zwar nicht weiter zu berücksichtigen brauchen, da das Al nicht nennenswert moderiert, die wir jedoch vom Moderator noch mit abziehen müssen. Die äquivalente Plattendicke ist dann gleich dem Uranradius, d.h. gleich 7,4 mm. Der Querschnitt der Einheitszelle im entsprechenden unendlichen (hexagonalen) Gitter ist $(18,9)^2 \sin 60^\circ = 308,6 \text{ mm}^2$. Damit wird der Moderatorquerschnitt pro Einheitszelle gleich $308,6 - \pi (17)^2/4 = 81,7 \text{ mm}^2$. Die Moderator-Oberfläche ist $17\pi = 53,4 \text{ mm}$; also wird $(V/S)_{\text{mod}} = b/2 = 1,53 \text{ mm}$, d.h. $b = 3,1 \text{ mm}$. Da maximal 3 Stäbe in dem Bündel auf einem Durchmesser

liegen, haben wir also schließlich ein äquivalentes Plattenbündel von 3 Uranplatten der Dicke 7,4 mm, getrennt durch 3,1 mm Moderator.

b) Vergleich der experimentellen Ergebnisse von HELLSTRAND mit der Theorie

In der schon mehrfach zitierten Arbeit von HELLSTRAND wurden auch Resonanzintegrale für bündelförmige Anordnungen von Stäben aus Uranoxyd gemessen. Die so erhaltenen Werte wurden mit Werten verglichen, die unter Verwendung der "Methode der effektiven Oberfläche" folgendermaßen ermittelt wurden:

Man denke sich um das Bündel ein Band gelegt; dann sei, pro Einheit der Stablänge, die äußere Oberfläche gleich der Länge des Bandes zu wählen. Die inneren Oberflächen werden dadurch bestimmt, daß man statt des Stabbündels einen massiven Zylinder betrachtet, in den parallel zur Achse mit Moderator gefüllte Rohre angebracht sind, deren Radius gleich dem des zwischen je drei Bündelstäben einzubeschreibenden Kreises zu wählen ist. Die so erhaltenen Werte stimmen mit den experimentell gefundenen Werten überein, was allerdings auch nicht weiter verwunderlich ist, da wir es hierbei ja mit Stabdimmensionen zu tun haben, für die die Konstanten im Resonanzintegral des einzelnen Stabes gerade angepaßt sind, und für diesen Fall sollte ja die Beschreibung mittels effektiver Oberflächen auch befriedigende Werte liefern. Was wir hier noch prüfen wollen, ist zweierlei:

Erstens können wir durch Vergleich mit den experimentellen Werten feststellen, ob der Resonanzeinfang in Bündeln wirklich näherungsweise geometrieunabhängig ist, denn dann müßten sich auch für das äquivalente Plattengitter ungefähr die gleichen Werte ergeben. Zweitens soll noch überprüft werden, wie weit in diesem speziellen Fall die Werte für das Resonanzintegral im Bündel auf der Basis der reinen Breit-Wigner-Formel von den entsprechenden mit der Annahme einer Kastenresonanz ermittelten Werten der Methode der effektiven Oberfläche abweichen.

Die Bündeldimensionen in der Hellstrand'schen Arbeit sind folgende:

Stabdurchmesser (Uranoxyd)	14,8 mm
Dicke der Al-Hülle	1,1 mm
Stababstand (Achse-Achse)	18,9 mm
Zahl der Stäbe im Bündel	a) 7 b) 19
Kühlmedium	H ₂ O oder D ₂ O

Für einzelne Stäbe aus Uranoxyd gilt nach HELLSTRAND

$$"RI" = 11,6 + 22,8 \frac{S}{M} \text{ oder } "RI" = 4,15 + 26,6 \sqrt{\frac{S}{M}}$$

Damit ist also für einen einzelnen Stab vom Durchmesser 14,8 mm

"RI" = 17,8 b. Für die Mittelwerte pro Stab des Resonanzintegrals im Stab-
bündel ergeben sich folgende Werte:

Fall	RI, exp.	RI, theor. I	RI, theor. II	RI, theor. III
a) H ₂ O	15,6 ^{+0,5}	15,5	14,9	15,4
D ₂ O	14,5 ^{+0,3}	14,2	14,3	14,2
b) H ₂ O	13,8 ^{+0,3}	14,1	14,2	(15,5)
D ₂ O	12,8 ^{+0,3}	12,7	13,5	13,1

Dabei ist RI, theor. I der nach dem bei HELLSTRAND angegebenen Verfahren ermittelte Wert, während theor. II und theor. III aus dem äquivalenten Platten-
gitter abgeleitet wurden, und zwar II mit der Methode der effektiven Ober-
fläche und III mit reiner Breit-Wigner-Resonanz nach Gl. (86).

Für Σ_1 wurden in II und III folgende Werte (Transportquerschnitte) verwendet:

$$H_2O : 0,58 \text{ cm}^{-1}$$

$$D_2O : 0,28 \text{ cm}^{-1}$$

Man sieht an diesen Ergebnissen, daß man tatsächlich mit befriedigender
Genauigkeit das äquivalente Plattenbündel zur Beschreibung eines Stabbündels
heranziehen kann und daß außerdem in dem betrachteten Bereich die Methode
der effektiven Oberfläche ziemlich gut mit der Methode der Gl. (86) überein-
stimmt, mit Ausnahme des eingeklammerten Wertes für 19 Stäbe und H₂O-Modera-
tor, bei dem aber damit gerechnet werden mußte, daß die Gl. (86) dort nicht
mehr genau sein kann, weil in diesem Fall in den noch zum Integral

$(1 - e^{-\alpha/x^2}) dx$ beitragende Flanken die Beziehung $\beta \ll \alpha/x^2$ nicht mehr
erfüllt ist.

Der Unterschied in den Werten der Methoden I und II für D_2O im Falle von 19 Stäben rührt daher, daß man im Falle I den Volumenterm des Resonanzintegrals verkleinert hat, um einer Flußdepression Rechnung zu tragen. Führt man die entsprechende Korrektur auch in II durch, so erhält man 12,6 statt 13,5. Die gleiche Korrektur würde im Falle des H_2O den nach II berechneten Wert auf 13,7 herabdrücken.

Die Notwendigkeit derartiger Korrekturen für die Flußdepression bei der Bestimmung des Volumenterms kann man als eine nachträgliche Kompensation für die Fehler ansehen, die man begeht, wenn man die nur für kleine Variation von S/M gültige Ersetzung von $A'(1 + \mu' \sqrt{S/M})$ durch $A(1 + \mu S/M)$ auf größere Bereiche von S/M auszudehnen versucht. Im Gültigkeitsbereich der Annahme $\alpha \gg \beta$ liefert dagegen die Gl.(86) befriedigende Werte für das Resonanzintegral ohne zusätzliche Berücksichtigung von Flußdepressionen, die ja, wenigstens im Bereich der scharfen Resonanzen, auch nicht zu erwarten sind.

Zusammenfassend kann man also sagen, daß im vorliegenden Fall die Behandlung von Stabbündeln durch äquivalente Plattenbündel hinreichend genau ist und daß im Bereich $\alpha \gg \beta$ die Gl.(86) sehr gute Resultate liefert, während man bei der Verwendung der Methode der effektiven Oberfläche bei größeren Bündeln immer noch eine Art "Flußdepression" berücksichtigen muß, die eigentlich der exakten Resonanztheorie im Bereich scharfer Resonanzlinien fremd ist.

Wenn allerdings die Bedingung $\alpha \gg \beta$ nicht mehr innerhalb des wesentlich zum Integral beitragenden Bereichs einer Resonanzlinie erfüllt ist, müßte man die Gleichung (78) numerisch integrieren. In diesem Fall ist es einfacher, auf die Methode der effektiven Oberfläche zurückzugreifen; der dadurch bedingte Fehler ist bei den üblichen Stabdimensionen im Rahmen der im allgemeinen benötigten Genauigkeit tragbar.

ABSCHLIESSENDE ZUSAMMENFASSUNG

Der Resonanzeinfang von Neutronen in heterogenen Systemen läßt sich für scharfe Resonanzen in der Wigner-Näherung mit der gleichen Genauigkeit behandeln wie in homogenen Systemen. Man erhält die Gleichung (70), die alle bisherigen Ansätze zu einer Behandlung des Resonanzeinfanges in heterogenen Systemen als Spezialfälle mit einschließt. Darüber hinaus gibt der allgemeine Formalismus des Abschnitts II eine Anleitung für die Berechnung der Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Uranblöcken für kleine gegenseitige Abstände der Uranblöcke, ein Problem, das bisher erst für den Fall eines engen Einfachgitters von Uranplatten gelöst wurde. Im Kapitel III wurde dieses Problem für Plattenbündel durch die Gl. (78) allgemein gelöst. Diese Gleichung gilt unabhängig von der speziellen Form der Resonanzlinien unter der einzigen Einschränkung, daß die Resonanzlinien schmal sind im Vergleich zu einem Bremsintervall im Moderator. Die Gleichung (78) enthält als einen Grenzfall die Methode der effektiven Oberfläche, die als einzige bisher für eine Behandlung des Resonanzeinfangs in Doppelgittern von Brennstoffelementen verwendet wurde, für die es aber keine Begründung im Rahmen einer allgemeinen Resonanztheorie gab. Die Methode der effektiven Oberfläche hängt an der Gültigkeit der "Rechteck-Resonanz". Für kleine Abstände der Platten im Bündel wurde auch der Fall der Breit-Wigner-Resonanz im Abschnitt III behandelt. Die so erhaltenen Werte ließen sich ebenfalls auf Stabbündel von gleichem Oberflächen/Volumen-Verhältnis anwenden und stimmten im Rahmen der Meßgenauigkeit mit Experimenten von HELLSTRAND überein.

ANHANG

Tabelle der Funktionen $\varphi(z)$ und $f_r(x)$ ($x = z^2$)

z	$\varphi(z)$	x	$f_r(x)$
0,02	0,000220	0,0004	0,00117
0,04	0,000860	0,0016	0,00458
0,06	0,001888	0,0036	0,01004
0,08	0,00328	0,0064	0,0174
0,10	0,00500	0,0100	0,0266
0,12	0,00702	0,0144	0,0374
0,14	0,00833	0,0196	0,0497
0,16	0,01188	0,0256	0,0632
0,18	0,01467	0,0324	0,0780
0,20	0,01766	0,0400	0,0939
0,22	0,0208	0,0484	0,1109
0,24	0,0242	0,0576	0,1286
0,26	0,0277	0,0676	0,1472
0,28	0,0313	0,0784	0,1665
0,30	0,0350	0,0900	0,1860
0,32	0,0388	0,1024	0,207
0,34	0,0427	0,1156	0,227
0,36	0,0466	0,1296	0,248
0,38	0,0506	0,1444	0,269
0,40	0,0546	0,1600	0,291
0,42	0,0587	0,1764	0,312
0,44	0,0627	0,1936	0,333
0,46	0,0667	0,212	0,356
0,48	0,0708	0,230	0,377
0,50	0,0748	0,250	0,398

LITERATUR

- 1) G. PLACZEK, Phys.Rev. 69, 423 (1946)
- 2) R.E. MARSHAK, Rev.Mod.Phys. 19, 185 (1947)
- 3) L. DRESNER, Nucl.Sci.and Eng. 1, 68 (1956)
- 4) E.F.M. VAN DER HELD, Genfer Ber. P/948 (1955)
- 5) W. OLDEKOP, Nukleonik 1, 19 (1958)
- 6) K. SPINNEY, J.Nucl.En.I, 6, 53 (1957)
- 7) N. CORNGOLD, Proc.Phys.Soc,A., 70, 793 (1957)
- 8) E. CREUTZ, H. JUPNIK, T. SNYDER und E.P.WIGNER,
J.Appl.Phys. 26, 257 ff (1955)
- 9) I.I. GUREVICH und I.Y.POMERANCHUK, Genfer Ber. P/649 (1955)
- 10) V.B. EGIZAROV et al., Conf.Acad.Sci.USSR (1955)
- 11) E. HELLSTRAND, J.Appl.Phys. 28, 1493 (1957)
- 12) G. MEMMERT, Nukleonik 1, 48 (1958)
- 13) M.D. GALANIN, "Theory of Thermal Neutron Reactors",
Consultants Bureau, N.Y. 1958
- 14) G.V. PETROV, J.Nucl.En.II, 6, 251 (1958)
- 15) N. CORNGOLD, J. Nucl.En.I, 4, 293 (1957)
- 16) J. CHERNICK, Genfer Ber. P/603 (1955)
- 17) S. STEIN, WAPD-139, (1955)
- 18) E. CRITOPH, CRRP-655 (1956)
- 19) K.M. CASE, F. DE HOFFMANN, G. PLACZEK,
"Introd. to Theory of Neutron Diff.", Los Alamos 1953