

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

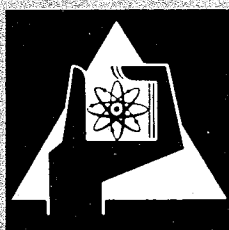
August 1968

KFK 781/I
EUR 3957 d

Institut für Reaktorentwicklung

Zur numerischen Lösung der ortsabhängigen dynamischen Gleichungen
schneller Brutreaktoren mit Hilfe eines Variationsprinzips

G. Kessler



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

August 1968

KFK 781/I

EUR 3957 d

Institut für Reaktorentwicklung

Zur numerischen Lösung der ortsabhängigen dynamischen Gleichungen
schneller Brutreaktoren mit Hilfe eines Variationsprinzips

G.Kessler

Gesellschaft für Kernforschung mbH., Karlsruhe

*) Diese Arbeit wurde im Rahmen der Assoziation zwischen der Europäischen Atomgemeinschaft und der Gesellschaft für Kernforschung mbH., Karlsruhe auf dem Gebiet der schnellen Reaktoren durchgeführt.

I n h a l t

	<u>Seite</u>
1. Einleitung	1
2. Formulierung des Gleichungssystems für die ortsabhängige Dynamik	5
2.1 Die ortsabhängigen kinetischen Gleichungen	5
2.2 Zusammenhang zwischen Neutronenfluß und Wärmeleistung	8
2.3 Die Gleichungen für das Temperaturfeld	9
2.3.1 Die Wärmeleitungsgleichung zur Bestimmung des Temperaturfeldes	10
2.3.2 Die Wärmeleitungsgleichung zur Bestimmung des Temperaturfeldes der Brennstoffhülle	11
2.3.3 Die Grundgleichung für die 1-dimensionale Strömung im Kühlkanal	13
2.3.4 Die Gleichung für das Temperaturfeld des Strukturmaterials	15
2.4 Die Rückkoppelungsgleichungen	15
2.4.1 Die Änderung des makroskopischen Transportquerschnitts	17
2.4.2 Die Änderung des makroskopischen Removalquerschnitts	19
2.4.3 Die Änderung des makroskopischen Streuquerschnitts	20
2.4.4 Die Änderung des makroskopischen Spaltquerschnitts	21
2.4.5 Änderungen der makroskopischen Querschnitte infolge Dichteänderungen des Spaltgases	22
2.4.6 Die Verschiebung der Zonenrändern	22
3. Methoden zur Lösung der ortsabhängigen kinetischen Gleichungen	24
3.1 Lösung der ortsabhängigen kinetischen Gleichungen mit Hilfe eines Variationsprinzips	24
3.1.1 Das Kantorowitsch-Verfahren	24
3.1.2 Diskussion des mit Hilfe des Kantorowitsch-Verfahrens reduzierten Differentialgleichungssystems	37
3.1.3 Bestimmung der Ortsfunktionen	41
3.1.4 Lineare Abhängigkeit der Ortsfunktionen	44

	<u>Seite</u>
3.1.5 Integration des gekoppelten Differentialgleichungs- systems	45
4. Lösung der Differentialgleichungen für das Temperaturfeld	45
4.1 Lösung der Grundgleichungen für die 1-dimensionale Strömung im Kühlkanal	46
4.1.1 Das integrale Impulsmodell	46
4.1.2 Die Differenzgleichungen für das integrale Impulsmodell	48
4.2 Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichungen für das Temperaturfeld im Brennstoff und in der Hülle	50.
4.2.1 Die Differenzgleichungen für das Temperaturfeld im Brennstoff und in der Hülle	51
4.2.2 Die Differenzgleichungen für das Temperaturfeld des Strukturmaterials	56
4.2.3 Auflösung des Differenzgleichungssystems für das Tempe- raturfeld im Brennstoff, in der Hülle und im Strukturmate- rial	57
5. Fließschema des Rechenganges	57
6. Ergebnisse	60
6.1 Beschreibung des berechneten Reaktors	60
6.2 Diskussion der Ergebnisse	63
6.2.1 Verwendung gruppenabhängiger und gruppenunabhängiger Zeitfunktionen	63
6.2.2 Abweichungen zwischen Punktkinetik und ortsabhängiger Kinetik	
6.2.3 Vergleich zwischen Punktkinetik und der "statischen Approximation"	
6.3 Zusammenfassung	

ite

45

45

6

6

8

0.

1

Anhang 1

Seite

A 1.1

A 1.1 Änderung der mittleren Brennstofftemperatur

A 1.2

A 1.2 Die Änderung der mittleren Hüllentemperatur

A 1.4

A 1.3 Die gleichzeitige Ausdehnung von Brennstoff und Hülle

A 1.5

A 1.4 Die Temperaturerhöhung des Strukturmaterials

A 1.6

A 1.5 Änderung der Kühlmitteltemperatur

A 1.9

A 1.6 Änderung der radialen Grenzen von Reaktorzonen

A 1.9

A 1.7 Änderung der axialen Grenzen von Reaktorzonen

A 1.10

Anhang 2

A 2.1

Anhang 3

A 3.1

1. Einleitung

Zur Beurteilung der Sicherheit schneller Brutreaktoren muß u.a. ihr Verhalten gegenüber Reaktivitätsstörungen diskutiert werden. Reaktivitätsstörungen führen über Änderungen des Neutronenfeldes zu instationärem Leistungsbetrieb und damit zu Änderungen des Temperaturfeldes im Reaktor, wodurch wieder Rückwirkungen auf die Reaktivität entstehen. Zur Beschreibung dieser instationären Vorgänge sind mathematische Modelle erforderlich, welche das Neutronenfeld, die örtliche Leistungsverteilung, sowie die Dichte-, Druck- und Temperaturfelder einschließlich der Geschwindigkeitsverteilung des Kühlmittels im Reaktor erfassen. Außerdem müssen durch Temperaturänderungen verursachte Änderungen der Materialeigenschaften, sowie Ausdehnungseffekte und Geometrieänderungen berücksichtigt werden.

Die exakte Beschreibung des instationären Neutronenfeldes durch die Neutronentransportgleichung führt selbst bei Anwendung der größten heute zur Verfügung stehenden digitalen Rechenanlagen auf unzulässig lange Rechenzeiten [1]. Man ist daher gezwungen auf die zeit- und energieabhängige Neutronendiffusionsgleichung zurückzugreifen, die sich als P_1 -Näherung aus der Transportgleichung ergibt [1]. Sie wird in ihrer stationären Mehrgruppenform mit Erfolg für die Berechnung des schnellen Brutreaktors verwendet [2]. Vor allem für 2- und 3-dimensionale Reaktor-geometrie erfordert aber auch die numerische Lösung der instationären Mehrgruppen-Diffusionsgleichung noch sehr lange Rechenzeiten [3]. Man muß daher in vielen Fällen noch weitere Näherungen einführen.

Ussachoff [4] und Henry [5] leiteten die bekannten Punktreaktor-kinetikkgleichungen aus der Neutronentransportgleichung ab. Im einfachsten Falle wird dabei die zusätzliche Annahme getroffen, daß die örtliche Neutronenflußverteilung während der gesamten Leistungsexkursion konstant bleibt. Die zeit-, orts- und energieabhängige Neutronenflußverteilung $\phi(\vec{r}, E, t)$ kann dann durch den Produktansatz [6]

$$\phi(\vec{r}, E, t) = \Psi(\vec{r}, E) \cdot T(t)$$

dargestellt werden, wobei $\Psi(\vec{r}, E)$ die orts- und energieabhängige Verteilung des Neutronenflusses für den ungestörten stationären Reaktor bedeutet und $T(t)$ eine reine Zeitfunktion ist.

Diese Annahme ist jedoch vor allem bei großen Reaktoren nicht mehr gerechtfertigt. Hier werden Leistungsexkursionen durch räumlich begrenzte Störun-

gen ausgelöst, welche starke örtliche Verbeulungen der Neutronenflußverteilung $\phi(\vec{r}, E, t)$ hervorrufen. Während der Leistungsexkursion beeinflußt dann die durch die örtlich begrenzte Störung sich laufend verändernde räumliche Neutronenflußverteilung wesentlich den zeitlichen Verlauf der Reaktorleistung. Diese Effekte wurden von Yasinsky und Henry [7] nachgewiesen, indem sie durch räumlich begrenzte Störungen Leistungsexkursionen ohne Temperaturrückkoppelung an thermischen Mehrschichten-Plattenreaktoren auslösten und dann die Ergebnisse der Punktreaktorkinetik mit einer exakten numerischen Lösung der 1-dimensionalen Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen verglichen. Johnson und Gyftopoulos [8] berücksichtigten für ähnliche numerische Testrechnungen zusätzlich einfache Rückkoppelungsmechanismen und erhielten ebenfalls beträchtliche Abweichungen zwischen Punktreaktorkinetik und exakter Lösung der 1-dimensionalen zeitabhängigen Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen. Die Verwendung der Punktreaktorkinetik führte außerdem immer zu einer Unterschätzung des tatsächlichen Ausmaßes der Leistungsexkursion. Die Notwendigkeit der Verwendung verbesserter Näherungsmethoden wird hierdurch besonders deutlich.

Bei den bisher bekannt gewordenen verbesserten Näherungsmethoden können im wesentlichen drei Entwicklungsrichtungen unterschieden werden:

- a) Die ursprünglich von Avery [9] entwickelte Methode zur Ableitung von kinetischen Gleichungen für gekoppelte Reaktoren wurde von Schwalm [10] und Plaza, Köhler [11] verbessert bzw. aus der Neutronentransporttheorie neu formuliert. Dyos, Heck [12] und Köhler, Plaza, Poulsen, Ho [13] haben diese Methoden für die Anwendung schwach gekoppelter schneller Brutreaktoren (modular core concept) diskutiert. Für die allgemeine Untersuchung von Leistungsexkursionen bei schnellen Brutreaktoren müßte der Reaktorkern in eine große Zahl von Unterzonen aufgeteilt werden. Die Koppelungskoeffizienten für jede dieser Unterzonen müßten bei stärkeren räumlichen Verbeulungen des Neutronenflusses öfter neu bestimmt und die Temperaturrückkoppelung in den Koppelungskoeffizienten berücksichtigt werden. Solche Untersuchungen wurden bisher nicht durchgeführt.
- b) Bei der von Henry und Curlee [14] angewendeten Methode werden im voraus für eine Reihe von während der Leistungsexkursion denkbaren Zuständen des Reaktors räumliche Neutronenflußverteilungen durch Lösung der stationären Mehrgruppen-Diffusionsgleichung errechnet. Für diese Verteilungsfunktionen des Neutronenflusses werden die integralen Größen wie die Reak-

tivität, die effektive Neutronenlebensdauer und die effektiven Anteile der verzögerten Neutronen bestimmt. Die so gewonnene Parameterschar wird durch Interpolationsformeln verknüpft und für die Lösung der Punktreaktorkinetikgleichungen derart verwendet, daß jeder auftretende Reaktorzustand durch die Interpolationsformeln wiedergegeben wird. Diese Methode hat jedoch den Nachteil, daß die Verteilungsfunktion der verzögerten Neutronen derjenigen der prompten Neutronen gleich gesetzt wird.

Das von Ott [15] entwickelte "quasistatische Modell" berücksichtigt die tatsächliche Verteilungsfunktion der verzögerten Neutronen. Durch Einführung von Entscheidungskriterien wird außerdem erst zu gewissen Zeitpunkten während der Leistungsexkursion eine Neuberechnung der örtlichen Neutronenflußverteilung vorgenommen. Dieses Modell behandelt zusätzlich die Temperaturrückkoppelung und ist zur Untersuchung der ortsabhängigen Dynamik schneller Brutreaktoren vorgesehen.

- c) Die sogenannten "synthesis methods" verwenden den direkten Zusammenhang zwischen der zeit-, orts- und energieabhängigen Neutronendiffusionsgleichung als parabolischer Differentialgleichung 2-ter Ordnung und der Forderung nach dem Verschwinden der 1. Variation eines Funktionals. Diese Methoden wurden von Kaplan [16], Köhler [17] und Yasinsky [18] in die Reaktorkinetik eingeführt und verwenden für die zeit-, orts- und energieabhängige Neutronenflußverteilung den Ansatz

$$\phi(\vec{r}, E, t) = \sum_P \Psi_P(\vec{r}, E) \cdot T_P(t)$$

wobei $\Psi_P(\vec{r}, E)$ bekannte Funktionen des orts- und energieabhängigen Neutronenflusses bedeuten und $T_P(t)$ reine Zeitfunktionen sind.

Die ursprünglich bei Kaplan [16] noch bestehenden Schwierigkeiten, daß die zu variierenden Funktionen gleichzeitig sowohl die Anfangsbedingung (stationärer ungestörter Zustand) der Leistungsexkursion, als auch deren unbekanntem Endzustand erfüllen mußten, wurden durch verbesserte Formulierung des Funktionals zuerst teilweise von Becker [19] und dann vollkommen durch Pomraning [20] ausgeräumt. Fast gleichzeitig wurde auch von Yasinsky [18] ein Funktional mit den gleichen Möglichkeiten angegeben und direkt auf die ortsabhängige Kinetik ohne Temperaturrückkoppelung für einfache numerische Testbeispiele bei thermischen Mehrschichten-Plattenreaktoren angewendet. Yasinsky [18] untersucht dabei jedoch nur Möglichkeiten, den notwendigen Rechenaufwand dadurch zu verringern, daß zu gewissen Zeitpunkten nur auf die dann jeweils günstigsten

Ortsfunktionen zurückgegriffen wird.

Der vorliegenden Arbeit liegt die mathematische Formulierung der Problemstellung zugrunde, wie sie von Pomraning [20], Yasinsky [18] und Lewins [21] zur Aufstellung der Funktionale verwendet wurde. Die dort entwickelten Methoden werden erstmalig auf die ortsabhängige Dynamik schneller Brutreaktoren angewendet. In Erweiterung früherer Arbeiten [60,61] werden Effekte der Temperaturrückwirkung in ihrer vollen Ortsabhängigkeit berücksichtigt. Als bekannte Ortsfunktionen werden P verschiedene 2-dimensionale Verteilungsfunktionen des orts- und energieabhängigen Neutronenflusses und der verzögerten Neutronen verwendet, die sich aus stationären Lösungen der Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen und der Gleichungen für die verzögerten Neutronen für bestimmte gestörte Reaktorzustände ergeben. Im Verlauf der Berechnung der Leistungsexkursion werden zu festgelegten Zeitpunkten die bereits benutzten P verschiedenen Ortsfunktionen gegen P neue Ortsfunktionen ausgetauscht. Der Austausch erfolgt dabei immer so, daß $(P-1)$ Ortsfunktionen statische Zustände des Reaktors für den im voraus bekannten Ablauf der Störung darstellen, während die restliche Ortsfunktion den zum Austauschzeitpunkt bekannten Stör- und Temperaturzustand des Reaktors repräsentiert. Dadurch wird sowohl der Einfluß der Störung als auch derjenige der Temperaturrückwirkung auf den Ablauf der Leistungsexkursion berücksichtigt.

Für den Sonderfall einer einzigen bekannten Ortsfunktion, die den ungestörten stationären Zustand repräsentiert und während der Leistungsexkursion konstant bleibt, ergibt sich die Punktreaktorkinetik mit ortsabhängigem Rückkoppelungsmechanismus. Tauscht man diese Ortsfunktion zu festgelegten Zeitpunkten gegen eine neue Ortsfunktion aus, die den gerade vorhandenen Zustand des Reaktors wiedergibt, so erhält man eine Art „statische Näherung“ mit ortsabhängiger Rückwirkung.

Die Anwendung dieser Methoden wird am Beispiel eines natriumgekühlten schnellen Brutreaktors mit räumlich begrenzter Störung gezeigt. Die Ergebnisse der Synthesemethode mit ortsabhängiger Rückwirkung und ihrer Sonderfälle werden einander gegenübergestellt.

2. Formulierung des Gleichungssystems für die ortsabhängige Dynamik

Das zur Beschreibung der ortsabhängigen Dynamik schneller Brutreaktoren notwendige Gleichungssystem muß

- die ortsabhängigen kinetischen Gleichungen mit einer Beziehung für den Zusammenhang zwischen Neutronenfluß und Leistung,
- die Gleichungen für das Temperaturfeld,
- die Rückkoppelungsgleichungen als Verbindung zwischen den zeitlichen Änderungen des Temperaturfeldes und den damit verbundenen Änderungen der makroskopischen Wirkungsquerschnitte, sowie Beziehungen zur Beschreibung der Ausdehnung des Reaktors

enthalten.

2.1 Die ortsabhängigen kinetischen Gleichungen

Die zeit-, orts- und energieabhängige Neutronendiffusionsgleichung und die Gleichungen für die Vorläufer der verzögerten Neutronen werden in Multigruppenform [22] angegeben.

Neutronenfluß

$$\begin{aligned}
 & \nabla D_1(\vec{r}, t) \cdot \nabla \phi_1(\vec{r}, t) - \Sigma_{\text{rem},1}(\vec{r}, t) \cdot \phi_1(\vec{r}, t) + \\
 & + \sum_{n=1}^{n=1-1} S \Sigma^{n-1}(\vec{r}, t) \cdot \phi_n(\vec{r}, t) + \\
 & + X_1 \cdot \sum_{n=1}^{n=L} S(1-\beta) \cdot \nu_n \cdot \Sigma_{fn}(\vec{r}, t) \cdot \phi_n(\vec{r}, t) + \\
 & + \sum_{m=1}^{m=M} S f_{m,1} \cdot \lambda_m \cdot C_m(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{\partial \phi_1(\vec{r}, t)}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Mit den Randbedingungen:

$$a) \text{ innerhalb des Reaktors } r \in R \quad \phi(\vec{r}, t) \text{ stetig} \tag{2.1a}$$

$$b) \text{ innerhalb des Reaktors } r \in R \quad J = -D_1(\vec{r}, t) \cdot \nabla \phi_1(\vec{r}, t) \text{ stetig} \tag{2.1b}$$

$$c) \text{ am äußeren Rand des Reaktors } r \in \Gamma_a \quad D_1(\vec{r}, t) \cdot \nabla \phi_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} + \gamma_1 \cdot \phi_1(\vec{r}, t) = 0 \tag{2.1c}$$

und der Anfangsbedingung $t = 0$: $\phi_1(\vec{r}, 0) = \phi_{0,1}(\vec{r})$ (2.1c)

$\phi_{0,1}(\vec{r})$ ist die stationäre Lösung der Gleichungen (2.1), (2.1a) und (2.1b).

Vorläufer der verzögerten Neutronen:

$$-\lambda_m \cdot C_m(\vec{r}, t) + \beta_m \cdot \sum_{n=1}^L \nu_n \cdot \Sigma_{f,n}(\vec{r}, t) \cdot \phi_n(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} C_m(\vec{r}, t) \quad (2.2)$$

mit der Anfangsbedingung $t = 0$: $C_m(\vec{r}, 0) = C_{0,m}(\vec{r})$ (2.2a)

$C_{0,m}(\vec{r})$ ist die stationäre Lösung der Gleichung (2.2).

Es bedeuten:

$\phi_1(\vec{r}, t)$ Neutronenfluß der Energiegruppe 1 am Orte \vec{r} zur Zeit t

$D_1(\vec{r}, t)$ Diffusionskonstante

$\Sigma_{rem,1}(\vec{r}, t)$ makroskopischer Removalquerschnitt aus der Gruppe 1

$$\text{Es gilt: } \Sigma_{rem,1}(\vec{r}, t) = \sum_{n=1+1}^L \Sigma_S^{1 \rightarrow n}(\vec{r}, t) + \Sigma_a(\vec{r}, t)$$

$\Sigma_S^{n \rightarrow 1}(\vec{r}, t)$ makroskopischer Streuquerschnitt aus der Energiegruppe n in die Gruppe 1

$\Sigma_{a,1}(\vec{r}, t)$ makroskopischer Absorptionsquerschnitt

$\Sigma_{f,n}(\vec{r}, t)$ makroskopischer Spaltquerschnitt

ν_n Zahl der im Mittel pro Spaltung durch Neutronen der Energiegruppe n freiwerdenden Spaltneutronen

v_1 Geschwindigkeit von Neutronen der Energiegruppe 1

β_m Anteil der pro Spaltneutron freiwerdenden verzögerten Neutronen der Gruppe m

β Gesamtanteil der pro Spaltneutron freiwerdenden verzögerten Neutronen

X_1 Anteil des Spaltspektrums für die Energiegruppe 1

$f_{m,1}$ Anteil des Spektrums für verzögerte Neutronen der Gruppe m , die in die Energiegruppe 1 gelangen

λ_m Zerfallskonstante der Vorläufer für verzögerte Neutronen der Gruppe m

$C_m(\vec{r}, t)$ Konzentration der Vorläufer der Gruppe m , welche beim radioaktiven β^- -Zerfall verzögerte Neutronen der Gruppe m aussenden

L Gesamtzahl der Energiegruppen

M	Gesamtzahl der Gruppen für die Vorläufer verzögerter Neutronen
\vec{n}	einen senkrecht zur Randfläche stehenden und nach außen zeigenden Einheitsvektor
γ_1	einen konstanten Faktor: $\gamma_1 = 1/2,13$

γ_1 ergibt sich für die Randbedingung (2.1b) zu $\gamma_1 = 1/2,13$, wenn gefordert wird, daß der Neutronenfluß der Energiegruppe 1 auf dem extrapolierten Reaktorrang verschwindet:

$$\phi_1 = 0 \quad \text{für} \quad R_{\text{ex},1} = R_{\text{ge}} + 0,71 \lambda_{\text{tr},1} = R_{\text{ge}} + 0,71 / \Sigma_{\text{tr},1}$$

Hier bedeuten:

$R_{\text{ex},1}$	extrapolierter Reaktorrang der Energiegruppe 1
R_{ge}	geometrischer Reaktorrang
$\Sigma_{\text{tr},1}$	makroskopischer Transportquerschnitt der Energiegruppe 1 am Reaktorrang
$\lambda_{\text{tr},1}$	Transportweglänge für die Energiegruppe 1 am Reaktorrang

Gleichung (2.1) stellt ein System von partiellen Differentialgleichungen 2-ter Ordnung (parabolischer Typ) dar, das durch die Streu- und Spaltterme in sich und durch den Quellterm der verzögerten Neutronen mit dem gewöhnlichen Differentialgleichungssystem (2.2) verkoppelt ist.

Die zu Gleichung (2.1) und (2.2) adjungierten Differentialgleichungssysteme werden in Abschnitt 3.1 zur Aufstellung eines Funktionals bei der Anwendung der Variationsrechnung gebraucht. Sie werden hier ebenfalls in Multigruppenform angegeben [17,23]:

Adjungierter Neutronenfluß

$$\begin{aligned}
 & \nabla D_1(\vec{r}, t) \cdot \nabla \phi_1^+(\vec{r}, t) - \Sigma_{\text{rem},1}(\vec{r}, t) \cdot \phi_1^+(\vec{r}, t) + \\
 & + \sum_{n=1+1}^L \Sigma^{1 \rightarrow n}(\vec{r}, t) \cdot \phi_n^+(\vec{r}, t) + \\
 & + (1-\beta) \cdot \nu_1 \cdot \Sigma_{f,1}(\vec{r}, t) \cdot \sum_{n=1}^L \chi_n \cdot \phi_n^+(\vec{r}, t) + \\
 & + \nu_1 \cdot \Sigma_{f,1}(\vec{r}, t) \cdot \sum_{m=1}^M \beta_m \cdot C_m^+(r, t) = -\frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi^+(r, t)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

mit den Randbedingungen:

a) innerhalb des Reaktors: $\vec{r} \in R$ $\phi^+(\vec{r}, t)$ stetig

$$D_1(\vec{r}, t) \cdot \nabla \phi_1^+(\vec{r}, t) \text{ stetig} \quad (2.3a)$$

b) am äußeren Reaktorrand: $\vec{r} \in \Gamma_a$

$$D_1(\vec{r}, t) \cdot \nabla \phi_1^+(\vec{r}, t) \vec{n} + \gamma_1 \phi_1^+(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.3b)$$

und der Endbedingung: für $t = t_{\text{end}}$

$$\phi_1^+(\vec{r}, t_{\text{end}}) = \phi_{\text{end}, 1}^+ \quad (2.3c)$$

Die räumlichen Randbedingungen für den adjungierten Neutronenfluß und den Neutronenfluß sind gleich.

Konzentrationen der adjungierten Vorläufer für die adjungierten verzögerten Neutronen:

$$\lambda_m \cdot \sum_{n=1}^L f_{m,n} \cdot \phi_n^+(\vec{r}, t) - \lambda_m \cdot C_m^+(\vec{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} C_m^+(\vec{r}, t) \quad (2.4)$$

$$\text{Endbedingung für } t = t_{\text{end}} : C_m^+(\vec{r}, t_{\text{end}}) = C_{\text{end}, m}^+ \quad (2.4a)$$

Die Verwendung der adjungierten Differentialgleichungssysteme (2.3) und (2.4) in dem später (Abschn. 3.1) noch aufzustellenden Funktional wird durch den stark dissipativen Charakter der nicht selbstadjungierten neutronenkinetischen Gleichungen (2.1) und (2.2) notwendig. Da die beiden Gleichungssysteme (2.1) bis (2.2) und (2.3) bis (2.4) eine gewisse Spiegelbildlichkeit aufweisen, wurde mit Erfolg vor allem von Lewins [23], [24] versucht, den zunächst rein mathematisch definierten Größen $\phi_1^+(\vec{r}, t)$ und $C_m^+(\vec{r}, t)$ die physikalische Bedeutung von Neutroneneinflußfunktionen zuzuschreiben [25].

2.2 Zusammenhang zwischen Neutronenfluß und Wärmeleistung

Die orts- und zeitabhängige Wärmeleistung ergibt sich aus:

$$q_B(r, t) = A_F \cdot \sum_{n=1}^L \Sigma_{f,n}(\vec{r}, t) \cdot \phi_n(\vec{r}, t) ,$$

wobei A_F einen Umrechnungsfaktor für die pro Spaltung im Brennstoff freiwerdende Energie und $q_B(\vec{r}, t)$ die pro sec und cm^3 Brennstoff freiwerdende Wärme bedeuten.

Die in allen Reaktormaterialien zusätzlich durch Absorption elastische und inelastische Streuung von Neutronen und durch Absorption von γ -Strahlung freiwerdende Wärme [26] wird hier nicht näher formuliert. Sie wird jedoch in den Wärmeleitungsgleichungen für die Materialtemperaturen berücksichtigt.

2.3 Die Gleichungen für das Temperaturfeld

Der Kernaufbau schneller Brutreaktoren wird für die folgenden Betrachtungen als heterogen angenommen, d.h., der Brennstoff ist in dünnen Röhrcchen angeordnet, die vom Kühlmittel umströmt werden. Eine größere Anzahl solcher Brennstoffstäbchen wird durch Abstandshalter zu einem größeren Verband zusammengefaßt und von quadratischen oder sechseckigen Kästen aus Strukturmaterial zusammengehalten. Eine Vielzahl solcher Brennelementkästen wird auf einer Trageplatte durch Steckverbindungen zu einem zylindrischen Reaktorkern zusammengebaut.

Die vollständige Bestimmung des instationären Temperaturfeldes würde die 3-dimensionale Durchrechnung jedes einzelnen Brennstoffstäbchens mit zugehörigem Kühlmittel, Abstandshalter und Strukturmaterial erfordern. Der Kern schneller Brutreaktoren enthält jedoch bis zu 10^5 solcher Brennstoffstäbchen. Um hier das gestellte Problem mit sinnvollem Rechenaufwand bewältigen zu können, muß auf einfache Modellvorstellungen zurückgegriffen werden.

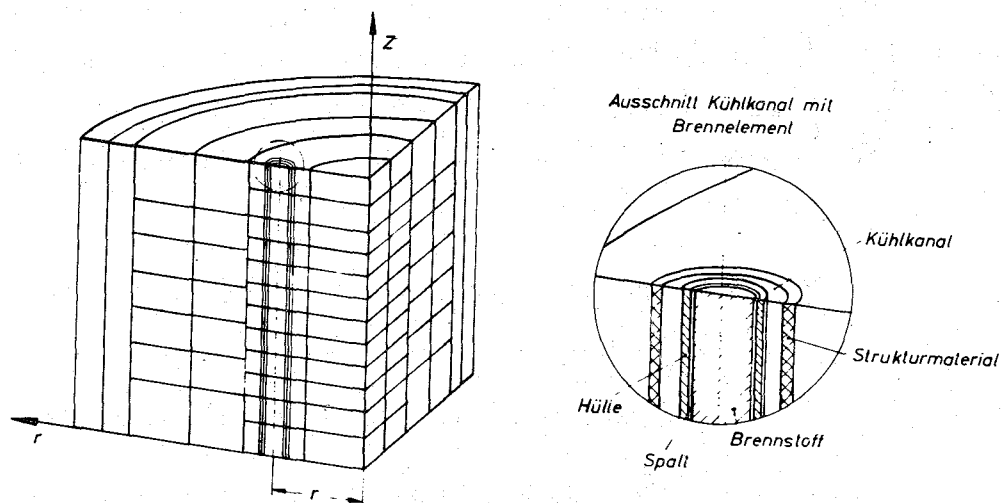


Abb. 2.1 Aufteilung des Reaktors in Ringzonen

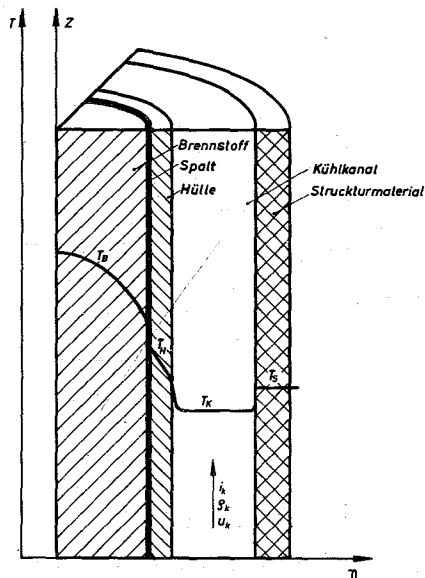


Abb. 2.2 Kühlkanal mit Brennstoffstab

Die im folgenden benutzte Modellvorstellung teilt den zylindrischen Reaktorkern in konzentrische Ringzonen auf, die jeweils wieder in axiale Segmente unterteilt werden. Für die konzentrischen Ringzonen gelten Zylindersymmetrie und die Annahme, daß die über die Ringzonen gemittelten Materialtemperaturen durch das thermodynamische Verhalten eines Brennstoffstäbchens mit dazugehörigem Kühlkanal und Strukturmaterial repräsentiert werden. Für den so definierten Kühlkanal müssen die Wärmeleitungsgleichungen für den Brennstoff, die Hülle, das Kühlmittel und das Strukturmaterial, sowie die hydrodynamischen Gleichungen für den Kühlkanal mit Rand- und Anfangsbedingungen formuliert werden (Abb. 2.2). Da die Brennstoffstäbchen, die Brennstoffhüllen und die Brennelementkästen sehr lang und dünn sind und die Temperaturgradienten in radialer Richtung sehr viel größer sind als in axialer Richtung, kann die axiale Wärmeleitung vernachlässigt werden. Axiale und radiale Wärmeleitung im Kühlkanal bleiben bei den im Reaktorkern üblichen Kühlmittelgeschwindigkeiten ebenfalls unberücksichtigt. Der Kühlkanal befindet sich an der Stelle r des Reaktorkerns (Abb. 2.1) und besitze die Koordinaten η (zur Unterscheidung von r) und z (Abb. 2.2).

2.3.1 Die Wärmeleitungsgleichung zur Bestimmung des Temperaturfeldes des Brennstoffes

2.3.2

Bei Vernachlässigung der axialen Wärmeleitung im Brennstoffstab ist:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[K_B(\eta, z, t) \frac{\partial}{\partial \eta} T_B(\eta, z, t) \right] + \frac{1}{\eta} K_B(\eta, z, t) \frac{\partial}{\partial \eta} T_B(\eta, z, t) + q_B(\eta, z, t) = \mu_B(\eta, z, t) \cdot c_{p,B}(\eta, z, t) \frac{\partial}{\partial t} T_B(\eta, z, t) \quad (2.3.1)$$

mit den Randbedingungen:

a) in Stabmitte

$$\left. \frac{\partial}{\partial \eta} T_B(\eta, z, t) \right|_{\eta=0} = 0 \quad (2.3.1a)$$

b) am äußeren Stabrand

$$-K_B(\eta_B, z, t) \frac{\partial}{\partial \eta} T_B(\eta_B, z, t) = \alpha_B \cdot [T_B(\eta_B, z, t) - T_H(\eta_{Hi}, z, t)] \quad (2.3.1b)$$

und der Anfangsbedingung:

$$\text{für } t = 0 \quad T_B(\eta, z, 0) = T_{Bo}(\eta, z) \quad (2.3.1c)$$

$T_{Bo}(\eta, z)$ ist die stationäre Lösung der Gleichungen (2.3.1), (2.3.1a) und (2.3.1b).

Es bedeuten:

$T_B(\eta, z, t)$	Brennstofftemperatur an der Stelle η, z des Brennstoffstabes zur Zeit t
$K_B(\eta, z, t)$	Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffes
$\mu_B(\eta, z, t)$	Dichte des Brennstoffes
$c_{p,B}(\eta, z, t)$	spezifische Wärme des Brennstoffes
$q_B(\eta, z, t)$	die im Brennstoff pro cm^3 und sec freiwerdende Wärme
η_B	Außenradius des Brennstoffstabes
η_{Hi}	Innenradius der Brennstoffhülle
α_B	Wärmeübergangszahl zwischen Brennstoff und Hülle
$T_H(\eta, z, t)$	Temperatur der Brennstoffhülle

Die Stoffgrößen μ_B , K_B , $c_{p,B}$ sind Funktionen der Brennstofftemperatur.

Die Wärmeübergangszahl α_B ist abhängig von der Spaltbreite zwischen Hülle und Brennstoff und den Eigenschaften des im Spalt vorhandenen Gases [27] oder Bondings.

2.3.2 Die Wärmeleitungsgleichung zur Bestimmung des Temperaturfeldes der Brennstoffhülle

Bei Vernachlässigung der axialen Wärmeleitung in der Brennstoffhülle ist:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[K_H(\eta, z, t) \frac{\partial}{\partial \eta} T_H(\eta, z, t) \right] + \frac{1}{\eta} K_H(\eta, z, t) \frac{\partial}{\partial \eta} T_H(\eta, z, t) + q_H(\eta, z, t) =$$

$$= \mu_H(\eta, z, t) \cdot c_{p,H}(\eta, z, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} T_H(\eta, z, t) \quad (2.3.2)$$

mit den Randbedingungen:

a) am Hüllen-Innenrand:

$$\alpha_B \left[T_B(\eta_B, z, t) - T_H(\eta_{Hi}, z, t) \right] = -K_H(\eta_{Hi}, z, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} T_H(\eta_{Hi}, z, t) \quad (2.3.2a)$$

b) am Hüllen-Außenrand:

$$-K_H(\eta_{Ha}, z, t) \frac{\partial}{\partial \eta} T_H(\eta_{Ha}, z, t) = \alpha_K \cdot \left[T_H(\eta_{Ha}, z, t) - T_K(z, t) \right] \quad (2.3.2b)$$

und der Anfangsbedingung:

$$t = 0 : \quad T_H(\eta, z, 0) = T_{Ho}(\eta, z) \quad (2.3.2c)$$

$T_{Ho}(\eta, z)$ ist die stationäre Lösung der Gleichungen (2.3.2), (2.3.2a) und (2.3.2b).

Es bedeuten:

α_K die Wärmeübergangszahl zwischen Brennstoffhülle und Kühlmittel
 $T_K(z, t)$ die Kühlmitteltemperatur an der Stelle z zur Zeit t
 η_{Ha} den Außenradius der Brennstoffhülle

Die Stoffgrößen K_H , μ_H und $c_{p,H}$ sind Funktionen der Hüllentemperatur. Die Wärmeübergangszahl wird i.a. als Funktion der temperaturabhängigen Stoffgrößen, der Strömungsform und der Geschwindigkeit des Kühlmittels dargestellt. Dies geschieht durch die Angabe von Gleichungen, welche die bekannten dimensionslosen Kennzahlen in der Form [28]

$$Nu = f(Re, Pr, Gr) \quad (2.3.3)$$

verknüpfen.

Es bedeuten:

Re - Reynoldszahl

Pr - Prandtl-Zahl

Gr - Grashofzahl

Nu - Nusselt-Zahl

2.3.3 Die Grundgleichungen für die 1-dimensionale Strömung im Kühlkanal

Für den von unten nach oben durchströmten Kühlkanal mit konstantem Querschnitt gelten bei Vernachlässigung von Sekundärströmungen die folgenden drei Erhaltungssätze [29]:

Kontinuität

$$\frac{\partial \mu_K(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} [\mu_K(z,t) \cdot u_K(z,t)] = 0 \quad (2.3.3.1)$$

Impuls

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\mu_K(z,t) \cdot u_K(z,t)] + \frac{\partial}{\partial z} [\mu_K(z,t) \cdot u_K^2(z,t)] = \\ & = \frac{-\partial}{\partial z} p_K(z,t) - \frac{f}{2 \cdot D_h} \cdot \mu_K(z,t) \cdot u_K(z,t) \cdot |u_K(z,t)| - \mu_K(z,t) \cdot g \end{aligned} \quad (2.3.3.2)$$

Energie

$$\begin{aligned} & \mu_K(z,t) \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + \mu_K(z,t) \cdot u_K(z,t) \cdot \frac{\partial}{\partial z} i(z,t) = \\ & = q_K(z,t) + \left[\frac{\partial p_K(z,t)}{\partial t} + u_K(z,t) \cdot \frac{\partial}{\partial z} p_K(z,t) \right] + \frac{f}{2 \cdot D_h} \cdot \mu_K(z,t) \cdot \\ & \cdot u_K^2(z,t) \cdot |u_K(z,t)| \end{aligned} \quad (2.3.3.3)$$

Hinzu kommt die Zustandsgleichung:

$$i_K(z,t) = f [\mu_K(z,t), p_K(z,t)] \quad (2.3.4)$$

Durch die Größen $i_K(z,t)$ und $p_K(z,t)$ ist auch die Kühlmitteltemperatur $T_K(z,t)$ festgelegt.

Hierzu gehören die Randbedingungen:

- a) am Kanaleintritt $z = 0$ sind $u_K(0,t)$ und $p_K(0,t)$ vorgegeben
 b) am Kanalende $z = H$ ist $p_K(H,t)$ vorgegeben. (2.3.3.5)

Die Anfangsbedingungen

für den stationären Zustand $t = 0$ sind

$$\mu_K(z,0) ; p_K(z,0) ; u_K(z,0) ; i_K(z,0) \quad (2.3.3.6)$$

als Lösungen der stationären Gleichungen von (2.3.3.1) bis (2.3.3.4) vorgegeben.

Es bedeuten:

$\mu_K(z,t)$	Kühlmitteldichte an der Stelle z zur Zeit t
$u_K(z,t)$	Kühlmittelgeschwindigkeit
$p_K(z,t)$	statischer Druck
f	Reibungsfaktor
D_h	hydraulischer Durchmesser des Kühlkanals
g	Erdbeschleunigung
i_K	Enthalpie des Kühlmittels
q_K	die dem Kühlkanal pro cm^3 und sec zu- bzw. abgeführte Wärme

Es gilt weiterhin:

$$q_K = \frac{2\pi \cdot \eta_{Ha}}{F_K} \cdot \alpha_K [T_H(\eta_{Ha}, z, t) - T_K(z, t)] + Q_K - \frac{F_S}{F_K} \cdot \alpha_S \cdot [T_K(z, t) - T_S(z, t)] \quad (2.3.3.7)$$

Der erste Term der rechten Seite dieser Gleichung berücksichtigt die von der Außenwand der Brennstoffhülle an das Kühlmittel pro cm^3 und sec übergehende Wärme, Q_K die im Kühlmittel pro cm^3 und sec freiwerdende Wärmemenge und der letzte Term die pro cm^3 und sec vom Kühlmittel an das Strukturmaterial übergehende Wärme.

Hier bedeuten:

F_K	freie Strömungsfläche des Kühlkanals
F_S	benetzte Oberfläche des Strukturmaterials pro cm Kühlkanallänge
α_S	Wärmeübergangszahl vom Kühlmittel an das Strukturmaterial
$T_S(z,t)$	die Strukturtemperatur an der Stelle z zur Zeit t

2.3.4 Die Gleichung für das Temperaturfeld des Strukturmaterials

Die Geometrie von Abstandshaltern und Kästen ist kompliziert. Wärmeleitungsvorgänge könnten nur mit großem Aufwand berücksichtigt werden. Sie werden daher für die vorliegende Aufgabenstellung vernachlässigt.

Es ist dann:

$$\alpha_S \cdot \frac{F_S}{V_S} \cdot [T_K(z,t) - T_S(z,t)] + q_S(z,t) = \mu_S(T_S) \cdot c_{p,S}(T_S) \cdot \frac{\partial}{\partial t} T_S(z,t) \quad (2.3.4.1)$$

Es bedeuten:

V_S	Strukturvolumen pro cm Kanallänge
q_S	pro cm^3 Strukturmaterial und sec freiwerdende Wärme
$\mu_S(T_S)$	Dichte des Strukturmaterials
$c_{p,S}$	spezifische Wärme des Strukturmaterials

2.4 Die Rückkoppelungsgleichungen

Temperaturänderungen der Reaktormaterialien bewirken durch Volumenausdehnung und -Verdrängung sowohl Änderungen der Dichten pro cm^3 Reaktortvolumen als auch Geometrieänderungen des Reaktors. Während sich Dichteänderungen direkt auf die makroskopischen Wirkungsquerschnitte der Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen auswirken, werden durch Geometrieänderungen die Zonenränder des Reaktors verschoben. Die als Dopplereffekt bekannte Veränderung der Resonanzbreiten bei schweren Atomkernen verursacht bei Temperaturänderungen eine Änderung der effektiven mikroskopischen Gruppenquerschnitte.

Wie in Anhang 1 gezeigt wird, muß der makroskopische Gruppenquerschnitt als Funktion der mittleren Brennstoff-, Hüllen-, Kühlmittel- und Strukturtemperatur aufgefaßt werden. Für den makroskopischen Gruppenquerschnitt der Energiegruppe 1 der Kernreaktion k gilt:

$$\begin{aligned} \Sigma_{k,1} &= \Sigma_{k,1,B} + \Sigma_{k,1,H} + \Sigma_{k,1,K} + \Sigma_{k,1,S} = \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sigma_{1,p,n}^{(k)} \cdot N_{p,n} = \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sigma_{1,p,n}^{(k)} \cdot \frac{\mu_{p,n} \cdot L}{A_{p,n}} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Hier bedeuten:

$\sigma_{1,p,n}^{(k)}$	effektiver mikroskopischer Wirkungsquerschnitt der Energiegruppe 1 und Kernreaktion k für das Element p des Materials n
$N_{p,n}$	Anzahl der Atomkerne des Elements p des Materials n pro cm^3 Reaktorvolumen
$\mu_{p,n}$	Dichte des Elements p des Materials n bezogen auf 1 cm^3 Reaktorvolumen
$A_{p,n}$	Atomzahl des Elements p des Materials n
L	Loschmidt-Zahl

Der Index n ersetzt allgemein die Indizes B,H,K,S. Da Brennstoff, Hülle, Kühlmittel und Strukturmaterial selbst wieder mehrere Elemente enthalten, wird zusätzlich der Index p eingeführt.

Die Änderung des makroskopischen Querschnitts der Gruppe 1 und Kernreaktion k infolge einer Temperaturänderung des Materials m ist dann:

$$\frac{d\Sigma_{k,1}}{dT_m} = \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P N_{p,n} \cdot \frac{d\sigma_{1,p,n}^{(k)}}{dT_m} + \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sigma_{1,p,n}^{(k)} \cdot \frac{\mu_{p,n}}{\mu_{p,n}} \cdot \frac{d\mu_{p,n}}{dT_m} \cdot \frac{L}{A_{p,n}} \quad (2.4.2)$$

Da die Ausdrücke $\frac{d\mu_{p,n}}{\mu_{p,n} \cdot dT_m}$ für alle Elemente eines Materials gleich sind (Anhang 1), geht Gleichung (2.4.2) über in:

$$\frac{d\Sigma_{k,1}}{dT_m} = \sum_{n=1}^N \frac{d\Sigma_{k,1,n}}{dT_m} + \sum_{n=1}^N \Sigma_{k,1,n} \cdot \frac{d\mu_n}{\mu_n \cdot dT_m} \quad (2.4.3)$$

Die effektiven mikroskopischen Gruppenquerschnitte $\sigma_{1,p,n}^{(k)}$ sind über die sogenannten Resonanzabschirmfaktoren [30] wieder Funktionen von $N_{p,n}$ und damit auch von T_n . Der rechte Summand der Gleichung (2.4.3) beschreibt die Querschnittsänderung infolge Dichteänderung, während der linke Term die durch Temperaturänderungen bedingten Änderungen der mikroskopischen effektiven Gruppenquerschnitte darstellt. Letztere sind jedoch nur für die Einfang- und Spaltreaktionen der schweren Brennstoffkerne von Bedeutung. Sie werden hier für den Brennstoff

durch die Beziehung [31]

$$\frac{d\Sigma_{k,1,B}}{d\bar{T}_B} = A_{k,1} \cdot \left[\frac{T_{0,B}}{\bar{T}_B} \right]^{X_{k,1}} \quad (2.4.4)$$

dargestellt.

Es bedeuten:

$T_{0,B}$	Bezugstemperatur [°K]
\bar{T}_B	mittlere Brennstofftemperatur [°K]
$A_{k,1}$	gruppenabhängige Konstante für die Reaktion k (Einfang oder Spaltung)
$X_{k,1}$	gruppenabhängiger Exponent

Die Größen $A_{k,1}$, $X_{k,1}$, \bar{T}_B sind ortsabhängig. Sie werden über die Methode der kleinsten Quadrate ermittelt, indem vorher Werte

$\frac{d\Sigma_{k,1,B}}{d\bar{T}_B}$ für verschiedene Brennstofftemperaturen \bar{T}_B und die Zusammensetzung des Reaktors errechnet werden [32].

Mit Hilfe der Gleichungen (2.4.3), (2.4.4) und den im Anhang 1 abgeleiteten Beziehungen für die Dichteänderungen ergeben sich folgende Rückkoppelungsgleichungen:

2.4.1 Die Änderung des makroskopischen Transportquerschnitts

Die Diffusionskonstante ist mit dem makroskopischen Transportquerschnitt durch die Beziehung

$$D_1(r, z, t) = \frac{1}{3 \cdot \Sigma_{tr,1}(r, z, t)}$$

verknüpft. Änderungen der Diffusionskonstante werden durch Änderungen des makroskopischen Transportquerschnitts bewirkt. Die gesamte Änderung des makroskopischen Transportquerschnitts wird aufgeteilt in diejenige für Brennstoff, Brennstoffhülle, Kühlmittel und Strukturmaterial.

a) Brennstoff

$$\begin{aligned} d\Sigma_{tr,1,B}(r, z, t) = & \Sigma_{tr,1,B}(r, z, t) \cdot \left[-\Gamma_{ax,B} \cdot k_B \cdot d\bar{T}_B(r, z, t) - \right. \\ & \left. - \Gamma_{ax,H} \cdot k_H \cdot d\bar{T}_H(r, z, t) - 2 \cdot \Gamma_{rad,S} \cdot d\bar{T}_S(r, \bar{z}, t) \cdot \right. \\ & \left. \cdot V(z, \bar{z}) \right] \end{aligned} \quad (2.4.5a)$$

b) Hülle

$$d\Sigma_{tr,1,H}(r,z,t) = \Sigma_{tr,1,H}(r,z,t) \cdot \left[-\Gamma_{ax,H} \cdot d\bar{T}_H(r,z,t) + \right. \\ \left. - 2 \cdot \Gamma_{rad,S} \cdot d\bar{T}_S(r,\bar{z},t) \cdot V(z,\bar{z}) \right] \quad (2.4.5b)$$

c) Kühlmittel

$$d\Sigma_{tr,1,K}(r,z,t) = \Sigma_{tr,1,K}(r,z,t) \cdot \left\{ -3 \cdot \Gamma_K \cdot d\bar{T}_K(r,z,t) - \right. \\ \left. - 2 \cdot \Gamma_{rad,H} \cdot d\bar{T}_H(r,z,t) \cdot \frac{1 - \alpha_K - \beta_{ab} - \beta_{Ka}}{\alpha_K} + \frac{1}{\alpha_K} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[(1 - \alpha_K) \cdot 2 \cdot \Gamma_{rad,S} \cdot d\bar{T}_S(r,\bar{z},t) \cdot V(z,\bar{z}) - \right. \right. \\ \left. \left. - (3 \cdot \beta_{ab} + 2 \cdot \beta_{Ka}) \cdot \Gamma_{rad,S} \cdot d\bar{T}_S(r,z,t) \right] \right\} \quad (2.4.5c)$$

2.4.2

d) Strukturmaterial

$$d\Sigma_{tr,1,S}(r,z,t) = \Sigma_{tr,1,S}(r,z,t) \cdot \left[\frac{-\beta_{Ka}}{\beta_{ab} + \beta_{Ka}} \cdot \Gamma_{ax,S} \cdot d\bar{T}_S(r,z,t) \right] \quad (2.4.5d)$$

Somit die gesamte Änderung des Transportquerschnitts:

$$d\Sigma_{tr,1}(r,z,t) = d\Sigma_{tr,1,B}(r,z,t) + d\Sigma_{tr,1,H}(r,z,t) + d\Sigma_{tr,1,K}(r,z,t) + \\ + d\Sigma_{tr,1,S}(r,z,t) \quad (2.4.5e)$$

Hier bedeuten:

Γ_n	linearer Ausdehnungskoeffizient (radial oder axial) des Materials n
$d\bar{T}_n$	Änderung der mittleren Temperatur des Materials n
α_K	ortsabhängiger Kühlmittelanteil pro cm^3 Reaktorvolumen
β_{ab}	ortsabhängiger Anteil des Strukturmaterials pro cm^3 Reaktorvolumen
β_{Ka}	ortsabhängiger Anteil des Kastens pro cm^3 Reaktorvolumen

k_B	Korrekturfaktor für das mögliche Haften von Brennstoff an der Hülle bei der axialen Ausdehnung des Brennstoffs
k_H	Korrekturfaktor für das mögliche Haften des Brennstoffs an der Hülle bei der axialen Ausdehnung der Hülle
\bar{z}	Abstand zwischen der Niveauebene für die Stütznocken und dem unteren Rand des Reaktorkerns ($z=0$)

Die Funktion $V(z, \bar{z})$ ist gegeben durch Gleichung (A 1.4.3) in Anhang 1.

$$V(z, \bar{z}) = 1 - 1,5 \cdot \frac{(\bar{z}-z)}{\bar{z}} + 0,5 \frac{(\bar{z}-z)^3}{\bar{z}^3} \quad \text{für } z < \bar{z}$$

$$V(z, \bar{z}) = 1 + 1,5 \frac{\bar{z}-z}{\bar{z}} \quad \text{für } z > \bar{z}$$

2.4.2 Die Änderung des makroskopischen Removalquerschnitts

Die gesamte Änderung des makroskopischen Removalquerschnitts wird aufgeteilt in diejenigen für Brennstoff, Brennstoffhülle, Kühlmittel und Strukturmaterial.

a) Brennstoff

$$\begin{aligned} d\Sigma_{\text{rem},1,B}(r,z,t) = & \left\{ A_{c,1}(r,z) \cdot \left[\frac{T_{O,B}}{\bar{T}_B(r,z,t)} \right]^{X_{c,1}} + A_{f,1}(r,z) \cdot \left[\frac{T_{O,B}}{\bar{T}_B(r,z,t)} \right]^{X_{f,1}} \right\} \cdot \\ & \cdot d\bar{T}_B(r,z,t) + \Sigma_{\text{rem},1,B}(r,z,t) \cdot \left[- \Gamma_{\text{ax},B} \cdot k_B \cdot d\bar{T}_B(r,z,t) \right. \\ & \left. - \Gamma_{\text{ax},H} \cdot k_H \cdot d\bar{T}_H(r,z,t) - 2 \Gamma_{\text{rad},S} \cdot d\bar{T}_S(r,\bar{z},t) \cdot V(z,\bar{z}) \right] \end{aligned} \quad (2.4.2a)$$

Die Indizes c und f stehen für Einfang und Spaltreaktionen.

Die Exponenten X sind ortsabhängig.

b) Hülle

$$\begin{aligned} d\Sigma_{\text{rem},1,H}(r,z,t) = & \Sigma_{\text{rem},1,H}(r,z,t) \cdot \left[- \Gamma_{\text{ax},H} \cdot d\bar{T}_H(r,z,t) - \right. \\ & \left. - 2 \Gamma_{\text{rad},S} \cdot d\bar{T}_S(r,\bar{z},t) \cdot V(z,\bar{z}) \right] \end{aligned} \quad (2.4.2b)$$

c) Kühlmittel

$$\begin{aligned}
d\Sigma_{\text{rem},1,K}(r,z,t) = & \Sigma_{\text{rem},1,K}(r,z,t) \cdot \left[-3 \Gamma_K \cdot d\bar{T}_K(r,z,t) - \right. \\
& - 2 \Gamma_{\text{rad},H} \cdot d\bar{T}_H(r,z,t) \cdot \frac{1 - \alpha_K - \beta_{ab} - \beta_{Ka}}{\alpha_K} + \frac{1}{\alpha_K} \cdot \\
& \cdot \left. \left[(1 - \alpha_K) \cdot 2 \Gamma_{\text{rad},S} \cdot d\bar{T}_S(r,\bar{z},t) \cdot V(z,\bar{z}) + \right. \right. \\
& \left. \left. - (3 \cdot \beta_{ab} + 2 \cdot \beta_{Ka}) \cdot \Gamma_{\text{rad},S} \cdot d\bar{T}_S(r,z,t) \right] \right]
\end{aligned}
\tag{2.4.2c}$$

d) Strukturmaterial

$$d\Sigma_{\text{rem},1,S}(r,z,t) = \Sigma_{\text{rem},1,S}(r,z,t) \cdot \left[- \frac{\beta_{Ka}}{\beta_{ab} + \beta_{Ka}} \cdot \Gamma_{\text{ax},S} \cdot d\bar{T}_S(r,z,t) \right]
\tag{2.4.2d}$$

Die gesamte Änderung des Removalquerschnitts ist:

$$\begin{aligned}
d\Sigma_{\text{rem},1}(r,z,t) = & d\Sigma_{\text{rem},1,B}(r,z,t) + d\Sigma_{\text{rem},1,H}(r,z,t) + d\Sigma_{\text{rem},1,K}(r,z,t) + \\
& + d\Sigma_{\text{rem},1,S}(r,z,t)
\end{aligned}
\tag{2.4.2e}$$

2.4.3 Die Änderung des makroskopischen Streuquerschnitts

Die gesamte Änderung des makroskopischen Streuquerschnitts ergibt sich aus den einzelnen Änderungen der Streuquerschnitte für den Brennstoff, die Brennstoffhülle, das Kühlmittel und das Strukturmaterial.

2.4.4

a) Brennstoff

$$\begin{aligned}
d\Sigma_B^{n-1}(r,z,t) = & \Sigma_B^{n-1}(r,z,t) \cdot \left[- \Gamma_{\text{ax},B} \cdot k_B \cdot d\bar{T}_B(r,z,t) - \right. \\
& - \Gamma_{\text{ax},H} \cdot k_H \cdot d\bar{T}_H(r,z,t) - 2 \cdot \Gamma_{\text{rad},S} \cdot d\bar{T}_S(r,\bar{z},t) \cdot V(z,\bar{z}) \left. \right]
\end{aligned}
\tag{2.4.3a}$$

b) Hülle

$$d\Sigma_H^{n-1}(r,z,t) = \Sigma_H^{n-1}(r,z,t) \cdot \left[-\Gamma_{ax,H} \cdot d\bar{T}_H(r,z,t) + \right. \\ \left. - 2 \cdot \Gamma_{rad,S} \cdot d\bar{T}_S(r,\bar{z},t) \cdot V(z,\bar{z}) \right] \quad (2.4.3b)$$

c) Kühlmittel

$$d\Sigma_K^{n-1}(r,z,t) = \Sigma_K^{n-1}(r,z,t) \cdot \left[-\beta \cdot \Gamma_K \cdot d\bar{T}_K(r,z,t) - 2 \cdot \Gamma_{rad,K} \cdot d\bar{T}_K(r,z,t) \cdot \right. \\ \cdot \frac{1 - \alpha_K - \beta_{ab} - \beta_{Ka}}{\alpha_K} + \frac{1}{\alpha_K} \left[(1 - \alpha_K) \cdot 2 \cdot \Gamma_{rad,S} \cdot d\bar{T}_S(r,\bar{z},t) \cdot V(z,\bar{z}) - \right. \\ \left. - (\beta_{ab} + 2 \cdot \beta_{Ka}) \cdot \Gamma_{rad,S} \cdot d\bar{T}_S(r,z,t) \right] \left. \right] \quad (2.4.3c)$$

d) Strukturmaterial

$$d\Sigma_S^{n-1}(r,z,t) = \Sigma_S^{n-1}(r,z,t) \cdot \left[\frac{-\beta_{Ka}}{\beta_{ab} + \beta_{Ka}} \cdot \Gamma_{ax,S} \cdot d\bar{T}_S(r,z,t) \right] \quad (2.4.3d)$$

Die gesamte Änderung des Streuquerschnitts ist:

$$d\Sigma^{n-1}(r,z,t) = d\Sigma_B^{n-1}(r,z,t) + d\Sigma_H^{n-1}(r,z,t) + d\Sigma_K^{n-1}(r,z,t) + d\Sigma_S^{n-1}(r,z,t) \quad (2.4.3e)$$

2.4.4 Die Änderung des makroskopischen Spaltquerschnitts

Änderungen des makroskopischen Spaltquerschnitts werden nur beim Brennstoff hervorgerufen.

$$d\Sigma_{f,1,B}(r,z,t) = A_{f,1}(r,z) \cdot \left[\frac{T_{oB}}{\bar{T}_B(r,z,t)} \right]^{X_{f,1}} \cdot d\bar{T}_B(r,z,t) + \Sigma_{f,1,B}(r,z,t) \cdot \\ \cdot \left[-\Gamma_{ax,B} \cdot k_B \cdot d\bar{T}_B(r,z,t) - \Gamma_{ax,H} \cdot k_H \cdot d\bar{T}_H(r,z,t) - \right. \\ \left. - 2 \cdot \Gamma_{rad,S} \cdot d\bar{T}_S(r,\bar{z},t) \cdot V(z,\bar{z}) \right] \quad (2.4.4)$$

2.4.5 Änderungen der makroskopischen Querschnitte infolge Dichteänderungen des Spaltgases

Die Beziehungen für die Änderungen der Spaltgas- bzw. Na-Bonding-Dichten werden im Anhang 1 abgeleitet. Ihr Einfluß auf die makroskopischen Gruppenquerschnitte ist von untergeordneter Bedeutung. Beziehungen für die Änderungen der makroskopischen Querschnitte für das Spaltgas bzw. Na-Bonding werden daher nicht angegeben.

2.4.6 Die Verschiebung von Zonenrändern

Die Verschiebung der Zonenränder infolge Temperaturexpansion des Reaktors kann nach Anhang 1 durch

$$dR(r, z, t) = V(z, \bar{z}) \cdot \int_0^r \Gamma_{\text{rad}, S} \cdot d\bar{T}_S(r', \bar{z}, t) dr' \quad (2.4.6a)$$

für zylindrische Randflächen,
und durch

$$dH(r, z, t) = \int_0^z \Gamma_{\text{ax}, B}(r, z') \cdot d\bar{T}_B(r, z', t) \cdot dz' \quad (2.4.6b)$$

für ebene Randflächen der (r, z)-Geometrie dargestellt werden.

3. Methoden zur Lösung der ortsabhängigen kinetischen Gleichungen

In Kapitel 1 wurden bereits einleitend die mathematischen Methoden angesprochen, die in dieser Arbeit zur Lösung der ortsabhängigen kinetischen Gleichungen verwendet werden. Die Anwendung eines Variationsprinzips führt in Abschnitt 3.1 zu einer Näherungsmethode, die zu genaueren Ergebnissen kommt als die Punktreaktorkinetik [6,7,8]. Entsprechend steigt aber auch der notwendige Rechenaufwand im Vergleich zur Punktreaktorkinetik.

3.1 Lösung der ortsabhängigen kinetischen Gleichungen mit Hilfe eines Variationsprinzips

Die direkte Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit den dazugehörigen Rand- und Anfangsbedingungen und die Forderung des Verschwindens der ersten Variation eines geeignet definierten Funktionals in der Variationsrechnung sind einander äquivalent, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Die partiellen Differentialgleichungen müssen aus dem Funktional beim Verschwinden der ersten Variation als Euler-Lagrange'sche Differentialgleichungen und die Rand- und Anfangsbedingungen als "natürliche Randbedingungen" hervorgehen [35,38]. In diesem Falle kann das Problem durch die Variationsrechnung mit Hilfe der bekannten Näherungsverfahren von Ritz, Galerkin oder Kantorowitsch gelöst werden [35]. Die Anwendung dieser Verfahren, die das Funktional auf approximativem Wege stationär machen, führt oft leichter zum Ziel als die direkte Lösung der partiellen Differentialgleichungen. Da das Kantorowitsch-Verfahren kein geschlossenes Funktionensystem erfordert und eine bessere Anpassung der Näherungslösung an die exakte Lösung erlaubt [35], wird es zur Behandlung des gestellten Problems ausgewählt.

3.1.1 Das Kantorowitsch-Verfahren

Beim Kantorowitsch-Verfahren wird für den zeit- und ortsabhängigen Mehrgruppen-Neutronenfluß der Ansatz

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{p=1}^P \psi_p(\vec{r}) \cdot T_p(t) \quad (3.1.1)$$

gemacht, wobei $\phi(r, t)$ als Vektor, $\psi_p(r)$ als Matrix und $T_p(t)$ als Vektor aufzufassen sind.

$$\begin{Bmatrix} \phi_1(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \phi_p(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \phi_L(\vec{r}, t) \end{Bmatrix} = \sum_{p=1}^P \begin{bmatrix} \psi_{p,1}(\vec{r}) & & & \\ & \psi_{p,e}(\vec{r}) & & \\ & & 0 & \\ & 0 & & \psi_{p,L}(\vec{r}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{p,1}(t) \\ \vdots \\ T_{p,e}(t) \\ \vdots \\ T_{p,L}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.1.1a)$$

Die $\psi_{p,l}(\vec{r})$ sind bekannte Ortsfunktionen für die Energiegruppe l , die $T_{p,l}(t)$ gruppenabhängige, noch unbekannte Zeitfunktionen. Die Berücksichtigung der Gruppenabhängigkeit bei den unbekanntem Zeitfunktionen kann z.B. durch Reaktivitätsstörungen, die das Energiespektrum verändern, durch die verschiedenen Spektren der prompten und der verzögerten Neutronen oder durch stark gruppenabhängige Rückkopplungseffekte, wie z.B. den Dopplereffekt, notwendig werden. Für Fälle, bei denen das Energiespektrum während der gesamten Leistungsexkursion konstant bleibt, geht die Diagonalmatrix $\psi_p(\vec{r})$ in einen Vektor über und $T_p(t)$ wird ein Skalar.

$$\begin{Bmatrix} \phi_1(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \phi_p(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \phi_L(\vec{r}, t) \end{Bmatrix} = \sum_{p=1}^P \begin{Bmatrix} \psi_{p,1}(\vec{r}) \\ \vdots \\ \psi_{p,e}(\vec{r}) \\ \vdots \\ \psi_{p,L}(\vec{r}) \end{Bmatrix} \cdot T_p(t) \quad (3.1.1b)$$

Darüber hinaus sind Zwischenformen derart möglich, daß mehreren Energiegruppen dieselbe einzige Zeitfunktion zugeordnet wird, während die restlichen Zeitfunktionen gruppenabhängig bleiben.

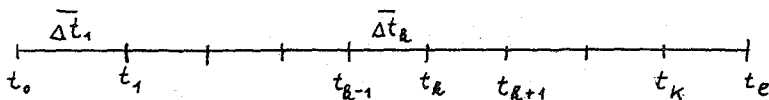
$$\begin{Bmatrix} \phi_1(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \phi_p(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \phi_L(\vec{r}, t) \end{Bmatrix} = \sum_{p=1}^P \begin{bmatrix} \psi_{p,1}(\vec{r}) & & & \\ \psi_{p,2}(\vec{r}) & 0 & & \\ & & \psi_{p,e}(\vec{r}) & \\ & 0 & & \psi_{p,L}(\vec{r}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{p,1}(t) \\ \vdots \\ T_{p,e}(t) \\ \vdots \\ T_{p,L}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.1.1c)$$

Der Ansatz für die Vorläufer der verzögerten Neutronen wird aus Gründen einer einfachen Schreibweise für das später aufzustellende Funktional nicht in Vektorform angegeben. Für die m -te Gruppe der Vorläufer der verzögerten Neutronen gilt:

$$C_m(\vec{r}, t) = \sum_{q=1}^P \xi_{m,q}(\vec{r}) \cdot \tau_{m,q}(t) \quad (3.1.2)$$

Die $\xi_{m,q}(\vec{r})$ bedeuten bekannte Ortsfunktionen und die $\tau_{m,q}(t)$ unbekannte Zeitfunktionen für die m -te Gruppe der Vorläufer der verzögerten Neutronen.

In den obigen Ansätzen (3.1.1) und (3.1.2) gelten die bekannten Ortsfunktionen $\Psi_{p,1}(\vec{r})$ und $\xi_{m,q}(\vec{r})$ für das gesamte Zeitintervall $0 \leq t \leq t_e$, in dem die Leistungsexkursion verfolgt werden soll. Man kann dieses Zeitintervall in $(K+1)$ Makrozeitschritte $\bar{\Delta t}_k$ unterteilen und annehmen, daß für jeden Makrozeitschritt ein Satz von P_k anderen bekannten Ortsfunktionen gilt



welcher derart ausgewählt ist, daß die Funktionen $\phi(\vec{r}, t)$ und $C_m(\vec{r}, t)$ während dieses Makrozeitschrittes am besten angenähert werden. Es ist dann

$$\phi_k(\vec{r}, t) = \sum_{p=1}^{P_k} \Psi_{p,k}(\vec{r}) \cdot T_{p,k}(t) \quad (3.1.3)$$

$$C_{m,k}(\vec{r}, t) = \sum_{q=1}^{P_k} \xi_{m,q,k}(\vec{r}) \cdot \tau_{m,q,k}(t) \quad (3.1.4)$$

$$t_{k-1} \leq t \leq t_k$$

Durch die feinere Aufteilung des Zeitintervalls $0 \leq t \leq t_e$ wird eine größere Flexibilität in der Auswahl der bekannten Ortsfunktionen $\Psi_{p,k}(\vec{r})$ bzw. $\xi_{m,p,k}(\vec{r})$ und eine bessere Anpassung der Näherungsfunktionen an die exakte Lösung erreicht. Allerdings werden nun die innerhalb des gesamten Zeitintervalls $0 \leq t \leq t_e$ geltenden Funktionen $\phi(\vec{r}, t)$ und $C_m(\vec{r}, t)$ durch die Näherungen (3.1.3) und (3.1.4) an den Grenzen t_k der Makrozeitschritte $\bar{\Delta t}_k$ unstetig. Das für das Kantorowitsch-Verfahren verwendete Funktional muß diese Unstetigkeiten berücksichtigen, d.h. beim Verschwinden der ersten Variation des Funktionalen müssen sich außer den partiellen Differentialgleichungen für die instationären Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen, den Differentialgleichungen für die Vorläufer der verzögerten Neutronen und allen zugehörigen Rand- und Anfangsbedingungen auch zeitliche Übergangsbedingungen an den Unstetigkeitsstellen t_k ergeben.

Solche Funktionale wurden zuerst von Pomraning [20] und dann von Yasinsky [18] und Lewins [21] angegeben. Letztere übertrugen dabei die Ergebnisse der Arbeiten von Wachspress und Becker [36] auf die

zeitabhängigen Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen. Bei der Aufstellung dieses Funktionals muß das zu den instationären Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen und den Gleichungen für die Vorläufer der verzögerten Neutronen adjungierte Gleichungssystem eingeführt werden, da der als erste Ableitung nach der Zeit auftretende Operator nicht selbstadjungiert ist [37,20]. Bei Anwendung des Kantorowitsch-Verfahrens gilt dann ähnlich wie für Gleichung (3.1.1) der Ansatz

$$\phi^+(\vec{r}, t) = \sum_{s=1}^P \Psi_s^+(\vec{r}) \cdot T_s^+(t), \quad (3.1.5)$$

wobei $\phi^+(\vec{r}, t)$ als Vektor, $\Psi_s^+(\vec{r})$ als Matrix und $T_s^+(t)$ als Vektor zu verstehen sind. Die $\Psi_s^+(\vec{r})$ sind bekannte Ortsfunktionen, die $T_s^+(t)$ unbekannte Zeitfunktionen.

Für gruppenabhängige Zeitfunktionen gilt der Ansatz:

$$\begin{Bmatrix} \phi_1^+(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \phi_e^+(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \phi_L^+(\vec{r}, t) \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^P \begin{bmatrix} \Psi_{s,1}^+(\vec{r}) & & 0 \\ & \Psi_{s,e}^+(\vec{r}) & \\ 0 & & \Psi_{s,L}^+(\vec{r}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_{s,1}^+(t) \\ \vdots \\ T_{s,e}^+(t) \\ \vdots \\ T_{s,L}^+(t) \end{Bmatrix} \quad (3.1.5a)$$

Im Falle gruppenunabhängiger Zeitfunktionen ist

$$\begin{Bmatrix} \phi_1^+(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \phi_e^+(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \phi_L^+(\vec{r}, t) \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^P \begin{Bmatrix} \Psi_{s,1}^+(\vec{r}) \\ \vdots \\ \Psi_{s,e}^+(\vec{r}) \\ \vdots \\ \Psi_{s,L}^+(\vec{r}) \end{Bmatrix} \cdot T_s^+(t) \quad (3.1.5b)$$

Für Zwischenformen, bei denen mehreren Energiegruppen dieselbe Zeitfunktion zugeordnet ist, gilt:

$$\begin{Bmatrix} \phi_1^+(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \phi_e^+(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \phi_L^+(\vec{r}, t) \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^P \begin{bmatrix} \Psi_{s,1}^+(\vec{r}) & & 0 \\ \Psi_{s,2}^+(\vec{r}) & 0 & \\ & \Psi_{s,e}^+(\vec{r}) & \\ 0 & & \Psi_{s,L}^+(\vec{r}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_s^+(t) \\ \vdots \\ T_s^+(t) \\ \vdots \\ T_s^+(t) \end{Bmatrix} \quad (3.1.5c)$$

Die Konzentrationen der adjungierten Vorläufer der adjungierten verzögerten Neutronen werden entsprechend Ansatz (3.1.2) wiedergegeben durch:

$$c_m^+(\vec{r}, t) = \sum_{t=1}^P \xi_{m,t}^+(\vec{r}) \cdot \tau_{m,t}^+(t) \quad (3.1.6)$$

Die $\xi_{m,t}^+(\vec{r})$ bedeuten bekannte Ortsfunktionen für die Konzentrationen der adjungierten Vorläufer der adjungierten verzögerten Neutronen, die $\tau_{m,t}^+(t)$ sind noch unbekannte Zeitfunktionen.

Bei der Aufteilung des Zeitintervalls $0 \leq t \leq t_e$ in $(K+1)$ Makroschritte Δt_k gilt dann entsprechend den Gleichungen (3.1.3) und (3.1.4)

$$t_{k-1} \leq t \leq t_k \quad \phi_k^+(\vec{r}, t) = \sum_{s=1}^{P_k} \psi_{s,k}^+(\vec{r}) \cdot T_{s,k}^+(t) \quad (3.1.7)$$

und

$$C_{m,k}^+(\vec{r}, t) = \sum_{t=1}^{P_k} \xi_{m,t,k}^+(\vec{r}) \cdot \tau_{m,t,k}^+(t) \quad (3.1.8)$$

Die Grenzen t_k der Makrozeitschritte sind für die Ansätze (3.1.3), (3.1.4) und (3.1.7), (3.1.8) identisch.

Nach diesen Vorbereitungen kann das Funktional, das die Näherungsfunktionen (3.1.3), (3.1.4), (3.1.7), (3.1.8) mit K Unstetigstellen zu Zeiten $t = t_k$ zuläßt (Anhang 2), angegeben werden.

$$\begin{aligned} F_k(\phi, \phi, C_m, C_m) = & \sum_{k=1}^{K+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \iiint_R dV \left[-\nabla \phi^{*T} \cdot D \nabla \phi + \phi^{*T} \cdot H \phi - \phi^{*T} \cdot v^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^M [\phi^{*T} \cdot \lambda_m \cdot f_m \cdot C_m + C_m^* \cdot \beta_m F^T \cdot \phi - C_m^* \lambda_m C_m - C_m^* \frac{\partial C_m}{\partial t}] \right] + \\ & - \sum_{k=1}^{K+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \oint_{\text{ob}} dS \phi^{*T} \cdot \Gamma \phi + \\ & + \iiint_R dV g^{*T}(\vec{r}) \cdot v^{-1} \phi(\vec{r}, t_k) + \iiint_R dV \phi^{*T}(\vec{r}, t_k) \cdot v^{-1} [\phi_0(\vec{r}) - \phi(\vec{r}, t_k)] + \\ & + \sum_{m=1}^M \left\{ \iiint_R dV h_m^*(\vec{r}) \cdot C_m(\vec{r}, t_k) + \iiint_R dV C_m^*(\vec{r}, t_k) [C_{0,m}(\vec{r}) - C_m(\vec{r}, t_k)] \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^K \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \iiint_R dV [\phi^*(\vec{r}, t_k) + \phi(\vec{r}, t_k)]^T \cdot v^{-1} [\phi(\vec{r}, t_k) - \phi(\vec{r}, t_{k-1})] + \\ & + \sum_{k=1}^K \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \iiint_R dV [C_m^*(\vec{r}, t_k) + C_m(\vec{r}, t_k)] [C_m(\vec{r}, t_k) - C_m(\vec{r}, t_{k-1})] \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Im Funktional (3.1.9) wird für die Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen und die adjungierten Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen die Matrix-Schreibweise verwendet.

ϕ bedeutet, wie in Ansatz (3.1.1), einen Spaltenvektor, ϕ^{*T} als transponierter Vektor von ϕ^+ einen Reihenvektor.

$$\phi = \begin{Bmatrix} \phi_1(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \phi_2(\vec{r}, t) \\ \vdots \\ \phi_L(\vec{r}, t) \end{Bmatrix} \quad \phi^{*T} = \left\{ \phi_1^*(\vec{r}, t) \dots \phi_2^*(\vec{r}, t) \dots \phi_L^*(\vec{r}, t) \right\}$$

D, γ und v^{-1} sind Diagonalmatrizen.

$$D = \begin{bmatrix} D_1(\vec{r}, t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_L(\vec{r}, t) \end{bmatrix} \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_L \end{bmatrix} \quad v^{-1} = \begin{bmatrix} v_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_L^{-1} \end{bmatrix}$$

Die Matrix H ist gegeben durch:

$$H = \begin{bmatrix} (1-\beta)X_1 v \Sigma_{t1}(\vec{r}, t) - \Sigma_{m1}(\vec{r}, t) & (1-\beta)X_1 v \Sigma_{c1}(\vec{r}, t) & \dots & (1-\beta)X_1 v \Sigma_{t1}(\vec{r}, t) \\ (1-\beta)X_1 v \Sigma_{t1}(\vec{r}, t) + \Sigma^{-1}(\vec{r}, t) & (1-\beta)X_1 v \Sigma_{t2}(\vec{r}, t) - \Sigma_{m2}(\vec{r}, t) & \dots & (1-\beta)X_1 v \Sigma_{t2}(\vec{r}, t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1-\beta)X_L v \Sigma_{tL}(\vec{r}, t) + \Sigma^{-1}(\vec{r}, t) & \dots & \dots & (1-\beta)X_L v \Sigma_{tL}(\vec{r}, t) - \Sigma_{mL}(\vec{r}, t) \end{bmatrix}$$

Das Energiespektrum der verzögerten Neutronen f_m wird als Spaltenvektor geschrieben, F^T ist ein Reihenvektor. $\phi_0(\vec{r})$ gibt die stationäre Neutronenflußverteilung an.

$$f_m = \begin{Bmatrix} f_{m1} \\ \vdots \\ f_{mL} \end{Bmatrix} \quad \phi_0(\vec{r}) = \begin{Bmatrix} \phi_{0,1}(\vec{r}) \\ \vdots \\ \phi_{0,L}(\vec{r}) \end{Bmatrix} \quad F^T = \{ v \Sigma_{t1}(\vec{r}, t) \dots v \Sigma_{tL}(\vec{r}, t) \dots v \Sigma_{tL}(\vec{r}, t) \}$$

Die Reihenmatrix $g^{+T}(\vec{r})$ stellt eine beliebige örtliche Verteilungsfunktion für den adjungierten Neutronenfluß zur Endzeit t_e dar.

$$g^{+T}(\vec{r}) = \left\{ g_1^+(\vec{r}) \dots g_L^+(\vec{r}) \right\}$$

$C_{0,m}(\vec{r})$ sind die stationären Konzentrationen der Vorläufer der verzögerten Neutronen. $h_m^+(\vec{r})$ sind beliebige Verteilungsfunktionen für die Konzentrationen der adjungierten Vorläufer der adjungierten verzögerten Neutronen zur Endzeit t_e .

Die Größen C_m^+ , C_m , β_m , λ_m sind Skalare und gelten für die Gruppe m der verzögerten Neutronen. Die Orts- und Zeitkoordinaten wurden nur bei Größen beibehalten, die für feste Zeitpunkte gelten. t_{k-} gilt kurz vor, t_{k+} kurz hinter der Unstetigkeitsstelle t_k . Die Volumenintegrale erstrecken sich über das gesamte Reaktorvolumen (R), das Oberflächenintegral über die äußeren Randflächen des Reaktors (Ob).

In Anhang 2 wird gezeigt, daß die erste Variation des Funktionals $F_K(\phi^+, \phi, C_m^+, C_m)$ bei unabhängiger und beliebiger Variation von ϕ^+, ϕ, C_m^+, C_m für alle Zeiten innerhalb der Makrozeitschritte $\Delta \bar{t}_k$ und an deren Grenzen t_0, t_k^-, t_k^+, t_e verschwindet, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot D \nabla \phi + H \cdot \phi + \sum_{m=1}^M \lambda_m f_m C_m &= v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi \\ \beta_m F^T \phi - \lambda_m C_m &= \frac{\partial}{\partial t} C_m \quad \text{für } m=1, \dots, M \\ \gamma \cdot \phi + D \nabla \phi \cdot \vec{n} &= 0 \quad \text{für } r \in \Gamma_a \\ J &= -D \nabla \phi \cdot \vec{n} \Big|_{\Gamma_i} \quad \text{stetig für } r \in \Gamma_i \end{aligned} \right\} \text{für alle } \Delta \bar{t}_k$$

$$\left. \begin{aligned} \phi(\vec{r}, t_k^+) &= \phi(\vec{r}, t_k^-) & C_m(\vec{r}, t_k^+) &= C_m(\vec{r}, t_k^-) & \dots & \dots & t = t_k \\ \phi(\vec{r}, t_0) &= \phi_0(\vec{r}) & C_m(\vec{r}, t_0) &= C_{0,m}(\vec{r}) & \dots & \dots & t = t_0 \end{aligned} \right\} \quad m=1, \dots, M \quad (3.1.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla D \nabla \phi^+ + H^T \cdot \phi^+ + F \cdot \sum_{m=1}^M \beta_m C_m^+ &= -v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi^+ \\ \lambda_m f_m^T \phi^+ - \lambda_m C_m^+ &= -\frac{\partial}{\partial t} C_m^+ \quad \text{für } m=1, \dots, M \\ \gamma \cdot \phi^+ + D \nabla \phi^+ \cdot \vec{n} &= 0 \quad \text{für } r \in \Gamma_a \\ J^* &= -D \nabla \phi^+ \cdot \vec{n} \Big|_{\Gamma_i} \quad \text{stetig für } r \in \Gamma_i \end{aligned} \right\} \text{für alle } \Delta \bar{t}_k$$

$$\left. \begin{aligned} \phi^*(\vec{r}, t_k^+) &= \phi^*(\vec{r}, t_k^-) & C_m^*(\vec{r}, t_k^+) &= C_m^*(\vec{r}, t_k^-) & \dots & \dots & t = t_k \\ \phi^*(\vec{r}, t_e) &= g^*(\vec{r}) & C_m^*(\vec{r}, t_e) &= h_m^*(\vec{r}) & \dots & \dots & t = t_e \end{aligned} \right\} \quad m=1, \dots, M \quad (3.1.11)$$

Die Gleichungssysteme (3.1.10) und (3.1.11) sind über die obigen Definitionen der Matrizen des Funktionals (3.1.9) identisch mit dem in Abschnitt 2.1 formulierten Gleichungssystem für den Neutronenfluß, die Konzentrationen der Vorläufer der verzögerten Neutronen und dem dazu adjungierten System. Die Differentialgleichungen gehen beim Verschwinden der 1. Variation des Funktionals als Euler-Lagrange'sche Differentialgleichungen, die Rand-, Anfangs- und Endbedingungen als "natürliche Randbedingungen" hervor. Das nicht adjungierte Gleichungssystem ist eindeutig als Anfangswertproblem, das adjungierte Gleichungssystem als Endwertproblem festgelegt. Das Funktional (3.1.9) läßt Näherungsfunktionen für ϕ^+, ϕ, C_m^+, C_m zu, die zu Zeiten $t = t_k$ unstetig sind. Nach Anhang 2 geht das Gleichungssystem für den Neutronenfluß und die verzögerten Neutronen (3.1.10) durch unabhängige und beliebige Variation der Größen ϕ^+ bzw. C_m^+ , das adjungierte Gleichungssystem (3.1.11) durch unabhängige und beliebige Variation der Größen ϕ bzw. C_m aus dem Funktional (3.1.9) hervor. Die beiden letzten Zeilen des Funktionals (3.1.9) gewährleisten die zeitlichen Stetigkeits-

bedingungen für ϕ^+ , ϕ , C_m^+ , C_m an den Stellen t_k . Sie ergeben sich nach Lewins [21], wenn im Funktional (3.1.9) die Integration von Gliedern mit zeitlichen Ableitungen über die $t=t_k$ hinweggeführt wird, wobei für ϕ^+ , ϕ , C_m^+ , C_m und deren zeitliche Ableitungen ein Ansatz nach Wachspres und Becker [36] gemacht wird (Anhang 3).

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \iiint_R dV [\phi^+(\vec{r}, t_k) + \phi^-(\vec{r}, t_k)]^T v^{-1} [\phi(\vec{r}, t_k) - \phi(\vec{r}, t_k)] = - \sum_{k=1}^K \int_{t_k^-}^{t_k^+} dt \iiint_R dV \phi^{+T} \cdot v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi$$

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \iiint_R dV [C_m^+(\vec{r}, t_k) + C_m^-(\vec{r}, t_k)] [C_m(\vec{r}, t_k) - C_m(\vec{r}, t_k)] = - \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M \int_{t_k^-}^{t_k^+} dt \iiint_R dV C_m^+ \cdot \frac{\partial}{\partial t} C_m \quad (3.1.12)$$

Das Problem der Lösung der ortsabhängigen kinetischen Gleichungen ist durch die Beziehungen (3.1.9) bis (3.1.11) auf das äquivalente Problem der Variationsrechnung zurückgeführt worden. Bei Anwendung des Kantorowitsch-Verfahrens hat man nun mit den Ansätzen (3.1.3), (3.1.4) und (3.1.7), (3.1.8) für ϕ , C_m , ϕ^+ , C_m^+ in das Funktional (3.1.9) einzugehen. Unter Berücksichtigung der Rechenregel für transponierte Matrizen

$$[\psi_{s,k}^+(r) \cdot T_{s,k}^+(t)]^T = T_{s,k}^{+T}(t) \cdot \psi_{s,k}^{+T}(r)$$

und Verwendung der obigen Beziehung (3.1.12) von Lewins [21] erhält man:

$$F_K(\phi^+, \phi, C_m^+, C_m) =$$

$$\sum_{k=1}^{K+1} \int_{t_k} dt \iiint_R dV \left\{ - \sum_{s=1}^P T_{s,k}^{+T}(t) \cdot \nabla \psi_{s,k}^{+T}(\vec{r}) \cdot D(\vec{r}, t) \cdot \sum_{p=1}^P \nabla \psi_{p,k}(\vec{r}) \cdot T_{p,k}(t) + \sum_{s=1}^P T_{s,k}^{+T}(t) \cdot \psi_{s,k}^{+T} \cdot H(\vec{r}, t) \cdot \sum_{p=1}^P \psi_{p,k}(\vec{r}) \cdot T_{p,k}(t) + \right.$$

$$\left. - \sum_{s=1}^P T_{s,k}^{+T}(t) \cdot \psi_{s,k}^{+T} \cdot v^{-1} \cdot \sum_{p=1}^P \psi_{p,k}(\vec{r}) \cdot \frac{d}{dt} T_{p,k}(t) + \sum_{m=1}^M \left[\sum_{s=1}^P T_{s,k}^{+T}(t) \cdot \psi_{s,k}^{+T}(\vec{r}) \cdot \lambda_m \cdot \rho_m \cdot \sum_{q=1}^P \xi_{m,q,k}(\vec{r}) \cdot \tau_{m,q,k}(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=1}^P \tau_{m,t,k}(t) \cdot \xi_{m,t,k}^+(\vec{r}) \cdot \beta_m \cdot F^T(\vec{r}, t) \cdot \sum_{p=1}^P \psi_{p,k}(\vec{r}) \cdot T_{p,k}(t) - \sum_{t=1}^P \tau_{m,t,k}^+(t) \cdot \xi_{m,t,k}^+(\vec{r}) \cdot \lambda_m \cdot \sum_{q=1}^P \xi_{m,q,k}(\vec{r}) \cdot \tau_{m,q,k}(t) + \right.$$

$$\left. - \sum_{t=1}^P \tau_{m,t,k}^+(t) \cdot \xi_{m,t,k}^+(\vec{r}) \cdot \sum_{q=1}^P \xi_{m,q,k}(\vec{r}) \cdot \frac{d}{dt} \tau_{m,q,k}(t) \right] \} - \sum_{k=1}^{K+1} \int_{t_k} dt \oint_{ob} ds \cdot \sum_{s=1}^P T_{s,k}^{+T}(t) \cdot \psi_{s,k}^{+T}(\vec{r}) \cdot \gamma \cdot \sum_{p=1}^P \psi_{p,k}(\vec{r}) \cdot T_{p,k}(t) +$$

$$+ \iiint_R dV g^{+T}(\vec{r}) \cdot v^{-1} \cdot \sum_{p=1}^{P_{K+1}} \psi_{p,K+1}(\vec{r}) \cdot T_p(t_k) + \iiint_R dV \sum_{s=1}^P T_{s,k}^{+T}(t) \cdot \psi_{s,k}^{+T}(\vec{r}) \cdot v^{-1} \cdot [\phi(\vec{r}) - \sum_{p=1}^P \psi_{p,k}(\vec{r}) \cdot T_p(t_k)] +$$

$$+ \sum_{m=1}^M \left\{ \iiint_R dV \cdot h_m^+(\vec{r}) \cdot \sum_{q=1}^{P_{K+1}} \xi_{m,q,K+1}(\vec{r}) \cdot \tau_{m,q}(t_k) + \iiint_R dV \sum_{t=1}^P \tau_{m,t}^+(t_k) \cdot \xi_{m,t,k}^+(\vec{r}) \cdot [C_m(\vec{r}) - \sum_{q=1}^P \xi_{m,q,k}(\vec{r}) \cdot \tau_{m,q}(t_k)] \right\} +$$

$$- \sum_{k=1}^K \int_{t_k^-}^{t_k^+} dt \iiint_R dV \left[\sum_{s=1}^P T_{s,k}^{+T}(t) \cdot \psi_{s,k}^{+T}(\vec{r}) \cdot v^{-1} \cdot \sum_{p=1}^P \psi_{p,k}(\vec{r}) \cdot \frac{d}{dt} T_{p,k}(t) + \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^P \tau_{m,t,k}^+(t) \cdot \xi_{m,t,k}^+(\vec{r}) \cdot \sum_{q=1}^P \xi_{m,q,k}(\vec{r}) \cdot \frac{d}{dt} \tau_{m,q,k}(t) \right]$$

Da die Ortsfunktionen:

$$\Psi_{p,k}(\vec{r}), \Psi_{s,k}^+(\vec{r}), \xi_{m,q,k}(\vec{r}), \xi_{m,t,k}^+(\vec{r}) \quad \text{für } k=1 \dots K+1$$

$$\phi_0(\vec{r}), g^+(\vec{r}), c_{0,m}(\vec{r}), h_m^+(\vec{r})$$

als bekannt vorausgesetzt werden, kann im Funktional (3.1.13) die Integration über das Volumen und die Oberfläche des Reaktors ausgeführt werden. Man erhält dann ortsunabhängige Matrizen bzw. skalare Größen, je nachdem, ob zwischen gruppenabhängigen oder gruppenunabhängigen Zeitfunktionen für $\phi(\vec{r}, t)$ nach Ansatz (3.1.1a) bzw. (3.1.1c) und (3.1.1b) und für $\phi^+(\vec{r}, t)$ nach Ansatz (3.1.5a) bzw. (3.1.5c) und (3.1.5b) unterschieden wird.

$$\iiint_{\mathcal{R}} dV \nabla \Psi_{s,k}^{*T}(\vec{r}) \cdot D(\vec{r}, t) \cdot \nabla \Psi_{p,k}(\vec{r}) = D_{s,p,k}(t) \quad (3.1.13a)$$

$$\iiint_{\mathcal{R}} dV \Psi_{s,k}^{*T}(\vec{r}) \cdot v^{-1} \Psi_{p,k}(\vec{r}) = V_{s,p,k}(t) \quad (3.1.13b)$$

$$\iiint_{\mathcal{R}} dV \Psi_{s,k}^{*T}(\vec{r}) \cdot v^{-1} \phi_0(\vec{r}) = V_{s,0} \quad (3.1.13c)$$

$$\iiint_{\mathcal{R}} dV g^+(\vec{r}) \cdot v^{-1} \Psi_{p,k+1}(\vec{r}) = V_{p,k+1} \quad (3.1.13d)$$

$$\iiint_{\mathcal{R}} dV \Psi_{s,k}^{*T}(\vec{r}) \cdot H(\vec{r}, t) \cdot \Psi_{p,k}(\vec{r}) = L_{s,p,k}(t) \quad (3.1.13e)$$

$$\oint_{\partial \mathcal{R}} dS \Psi_{s,k}^{*T}(\vec{r}) \cdot \gamma \cdot \Psi_{p,k}(\vec{r}) = K_{s,p,k}(t) \quad (3.1.13f)$$

$$\iiint_{\mathcal{R}} dV \Psi_{s,k}^{*T}(\vec{r}) \cdot f_m \cdot \xi_{m,q,k}(\vec{r}) = M_{m,s,q,k}(t) \quad (3.1.13g)$$

$$\iiint_{\mathcal{R}} dV \xi_{m,t,k}^+(\vec{r}) \cdot \xi_{m,q,k}(\vec{r}) = I_{m,t,q,k}(t) \quad (3.1.13h)$$

$$\iiint_{\mathcal{R}} dV \xi_{m,t,k}^+(\vec{r}) \cdot F^T(\vec{r}, t) \cdot \Psi_{p,k}(\vec{r}) = F_{m,t,p,k}^T(t) \quad (3.1.13i)$$

$$\iiint_{\mathcal{R}} dV \xi_{m,t,k}^+(\vec{r}) \cdot c_{0,m}(\vec{r}) = I_{m,t,0} \quad (3.1.13j)$$

$$\iiint_{\mathcal{R}} dV dV h_m^+(\vec{r}) \cdot \xi_{m,q,k+1}(\vec{r}) = I_{m,q,k+1} \quad (3.1.13k)$$

Setzt man diese neu definierten Matrizen bzw. Skalare in das Funktional (3.1.13) ein, so wird nach Umordnung der Summationen:

$$\begin{aligned}
F_K(T_s^+, T_p, \tau_{m,t,k}^+, \tau_{m,q,k}) = & \sum_{k=1}^{K+1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \left\{ \sum_{s=1}^R T_{s,k}^{+T}(t) \left[\sum_{p=1}^R [(-D_{s,p,k}(t) + L_{s,p,k}(t) - K_{s,p,k}(t)) \cdot T_{p,k}(t) + \right. \right. \\
& \left. \left. - V_{s,p,k}(t) \cdot \frac{d}{dt} T_{p,k}(t)] + \sum_{m=1}^M \sum_{q=1}^R \lambda_m \gamma_{m,s,q,k}(t) \tau_{m,q,k}(t) \right] + \right. \\
& + \sum_{s=1}^R \sum_{m=1}^M \tau_{m,t,k}^+(t) \cdot \left[\beta_m \sum_{p=1}^R F_{m,t,p,k}(t) \cdot T_{p,k}(t) - \lambda_m \sum_{q=1}^R I_{m,t,q,k}(t) \cdot \tau_{m,q,k}(t) + \right. \\
& \left. - \sum_{q=1}^R I_{m,t,q,k}(t) \cdot \frac{d}{dt} \tau_{m,q,k}(t) \right] \left. \right\} + \sum_{p=1}^R V_{p,k+1} \cdot T_p(t_k) + \sum_{s=1}^R T_s^{+T}(t_k) \cdot \left[V_{s,0} - \sum_{p=1}^R V_{s,p,1} \cdot T_p(t_0) \right] + \\
& + \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{q=1}^R I_{m,q,k+1} \cdot \tau_{m,q}(t_k) + \sum_{s=1}^R \tau_{m,t,k}^+(t_k) \cdot \left[I_{m,t,0} - \sum_{q=1}^R I_{m,t,q,1} \cdot \tau_{m,q}(t_0) \right] \right\} + \\
& - \sum_{k=1}^K \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \left\{ \sum_{s=1}^R T_{s,k}^{+T}(t) \cdot \sum_{p=1}^R V_{s,p,k}(t) \cdot \frac{d}{dt} T_{p,k}(t) + \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^R \tau_{m,t,k}^+(t) \cdot \sum_{q=1}^R I_{m,t,q,k}(t) \cdot \frac{d}{dt} \tau_{m,q,k}(t) \right\}
\end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Das Integral über die Unstetigkeitsstellen bei $t = t_k$ in der letzten Zeile des obigen Funktional wird im Anhang 3 nach der von Lewins [21] verwendeten Methode bestimmt. Nach Ausführung dieser Integration kann die erste Variation des Funktional (3.1.14) gebildet werden. Da das Funktional nur noch von den Funktionen $T_{s,k}^+(t)$, $T_{p,k}(t)$, $\tau_{m,t,k}^+(t)$ und $\tau_{m,q,k}(t)$ abhängt, wird die erste Variation nach diesen Funktionen gebildet. Im Anhang 2 wird gezeigt, daß die instationären Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen und die Gleichungen für die verzögerten Neutronen allein durch unabhängige und beliebige Variation von ϕ^+ und C_m^+ aus dem Funktional hervorgehen. Entsprechend genügt die unabhängige und beliebige Variation der Zeitfunktionen $T_{s,k}^+(t)$ und $\tau_{m,t,k}^+(t)$ für alle Zeiten innerhalb der Makrozeitschritte Δt_k und an deren Grenzen t_0 , t_k , t_e , wenn man sich für das adjungierte Gleichungssystem nicht weiter interessiert. Dies ergibt [38] :

$$\frac{\delta F_k}{\delta T_k^{+T}} \delta T_k^{+T} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial F_k}{\partial \tau_{m,k}^+} \delta \tau_{m,k}^+ = 0 =$$

$$= \sum_{k=1}^{K+1} \int_{\Delta t_k} dt \left\{ \sum_{s=1}^P \delta T_{s,k}^{+T}(t) \cdot \left[\sum_{p=1}^P [(-D_{s,p,k}(t) + L_{s,p,k}(t) - K_{s,p,k}(t)) \cdot T_{p,k}(t) - V_{s,p,k}(t) \cdot \frac{d}{dt} T_{p,k}(t)] + \sum_{m=1}^M \sum_{q=1}^P \lambda_m M_{m,s,q,k}(t) \cdot \tau_{m,q,k}(t) \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{s=1}^P \delta T_{s,k}^{+T}(t_0) \cdot [V_{s,0} - \sum_{p=1}^P V_{s,p,1} \cdot T_p(t_0)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \sum_{s=1}^P [\delta T_{s,k}^{+T}(t_k) + \delta T_{s,k}^{+T}(t_{k+1})] \cdot \sum_{p=1}^P [V_{s,p,k}(t_k) \cdot T_{p,k}(t_k) - V_{s,p,k+1}(t_{k+1}) \cdot T_{p,k}(t_k)] +$$

(3.1.15)

$$+ \sum_{k=1}^{K+1} \int_{\Delta t_k} dt \sum_{t=1}^M \sum_{m=1}^M \delta \tau_{m,t,k}^+(t) \left[\beta_m \sum_{p=1}^P F_{m,t,p,k}(t) \cdot T_{p,k}(t) - \lambda_m \sum_{q=1}^P I_{m,t,q,k}(t) \tau_{m,q,k}(t) - \sum_{q=1}^P I_{m,t,q,k}(t) \cdot \frac{d}{dt} \tau_{m,q,k}(t) \right] +$$

$$+ \sum_{t=1}^M \sum_{m=1}^M \delta \tau_{m,t}^+(t_0) \cdot [I_{m,t,0} - \sum_{q=1}^P I_{m,t,q,1} \tau_{m,q}(t_0)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M \frac{1}{2} \sum_{t=1}^M [\delta \tau_{m,t,k}^+(t_k) + \delta \tau_{m,t,k}^+(t_{k+1})] \cdot \sum_{q=1}^P [I_{m,t,q,k}(t_k) \tau_{m,q,k}(t_k) - I_{m,t,q,k+1}(t_{k+1}) \tau_{m,q,k}(t_k)]$$

Bei unabhängiger und beliebiger Variation von $T_{s,k}^{+T}(t)$ und $\tau_{m,t,k}^+(t)$ innerhalb der Makroschritte Δt_k , an deren Grenzen t_{k+} bzw. t_{k-} und an den Anfangs- und Endpunkten t_0 bzw. t_e verschwindet die erste Variation des Funktionals (3.1.15) nur, wenn:

a) für alle $s=1 \dots P_k$ gilt:

$$\text{Anfangsbedingung: } t=t_0 \quad V_{s,0} = \sum_{p=1}^{P_1} V_{s,p,1} \cdot T_{p,1}(t_0) \quad (3.1.16a)$$

Innerhalb der Makrozeitschritte Δt_k , $k = \dots K+1$

$$t_{k-} \leq t \leq t_k$$

$$\sum_{p=1}^P V_{s,p,k}(t) \cdot \frac{d}{dt} T_{p,k}(t) = \sum_{p=1}^P [-D_{s,p,k}(t) - K_{s,p,k}(t) + L_{s,p,k}(t)] \cdot T_{p,k}(t) + \sum_{m=1}^M \sum_{q=1}^P \lambda_m M_{m,s,q,k}(t) \tau_{m,q,k}(t) \quad (3.1.16b)$$

An den Grenzen der Makrozeitschritte (Unstetigkeitsstellen)

$$t=t_k \quad \sum_{p=1}^{P_{k+1}} V_{s,p,k+1}(t_k^+) \cdot T_p(t_k^+) = \sum_{p=1}^{P_k} V_{s,p,k}(t_k^-) \cdot T_p(t_k^-) \quad (3.1.16c)$$

b) für alle $t=1 \dots P_k$ gilt:

für alle Gruppen $m=1 \dots M$

Anfangsbedingung: $t=t_0$

$$I_{m,t,0} = \sum_{q=1}^{P_1} I_{m,t,q,1} \cdot T_{m,q}(t_0) \quad (3.1.16d)$$

Innerhalb der Makrozeitschritte $\Delta t_k, k=1 \dots K+1$

$$t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

$$\sum_{q=1}^{P_k} I_{m,t,q,k}(t) \frac{d}{dt} T_{m,q,k}(t) = -\lambda_m \sum_{q=1}^{P_k} I_{m,t,q,k}(t) \cdot T_{m,q,k}(t) + \beta_m \sum_{p=1}^{P_k} F_{m,t,q,p}^T(t) \cdot T_{p,k}(t) \quad (3.1.16e)$$

An den Grenzen der Makrozeitschritte (Unstetigkeitsstellen)

$$t=t_k \quad \sum_{q=1}^{P_k} I_{m,t,q,k+1}(t_k^+) T_{m,q}(t_k^+) = \sum_{q=1}^{P_k} I_{m,t,q,k}(t_k^-) T_{m,q}(t_k^-) \quad (3.1.16f)$$

Die Differentialgleichungen (3.1.16b) und (3.1.16e) sind die Euler-Lagrange'schen Differentialgleichungen, die Beziehungen (3.1.16a), (3.1.16c), (3.1.16d), (3.1.16f) die "natürlichen Randbedingungen", die beim Verschwinden der ersten Variation des Funktionals (3.1.13) bis (3.1.15) aus diesem hervorgehen. Damit sind die instationären Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen und die Differentialgleichungen für die Konzentrationen der Vorläufer der verzögerten Neutronen mit Hilfe des Kantorowitsch-Verfahrens auf ein gekoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Zeitfunktionen $T_{p,k}(t)$ und $T_{m,q,k}(t)$ zurückgeführt worden. Die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems (3.1.16) sind zeitabhängig.

Während die Koeffizienten

$$V_{s,p,k}(t), K_{s,p,k}(t), M_{s,q,k}(t) \text{ und } I_{m,t,q,k}(t)$$

durch die Ausdehnung des Strukturmaterials und die damit verbundene Verschiebung von Zonenrändern zeitabhängig werden, kommt bei den Koeffizienten

$$D_{s,p,k}(t), L_{s,p,k}(t) \text{ und } F_{m,p,k}(t)$$

noch die Temperatur- bzw. Zeitabhängigkeit der makroskopischen Wirkungsquerschnitte (Abschn. 2.4) hinzu.

Bei der Definition dieser Koeffizienten war bereits festgestellt worden, daß die Koeffizienten im Falle gruppenabhängiger Zeitfunktionen Matrixcharakter haben, während sie im Falle gruppenunabhängiger Zeitfunktionen skalare Größen bedeuten. Zur Vorbereitung einer Diskussion von Sonderfällen des gekoppelten Differentialgleichungssystems (3.1.16) werden die Differentialgleichungssysteme noch einmal in voller Ausführlichkeit für gruppenabhängige und gruppenunabhängige Zeitfunktionen in Abb. 3.1 dargestellt.

3.1.2 Diskussion des mit Hilfe des Kantorowitsch-Verfahrens reduzierten Differentialgleichungssystems

Das Differentialgleichungssystem (3.1.19) für gruppenunabhängige Zeitfunktionen $T_{p,k}(t)$ vereinfacht sich, wenn die Funktionen $\phi^+(\vec{r},t)$, $\phi(\vec{r},t)$, $C_m^+(\vec{r},t)$, $C_m(\vec{r},t)$ in den Ansätzen (3.1.1) bis (3.1.8) durch jeweils eine einzige bekannte Ortsfunktion

$$P_k = 1 \quad \text{für alle Makrozeitschritte } \Delta \bar{t}_k; k = 1, \dots, K+1$$

angenähert werden. Die bekannte Ortsfunktion kann zum Beispiel jeweils mit der stationären Neutronenflußverteilung, der stationären Konzentration der Vorläufer der verzögerten Neutronen und den dazu adjungierten Verteilungsfunktionen übereinstimmen.

$$\begin{aligned} \phi^+(\vec{r},t) &= \phi_o^+(\vec{r}) \cdot T^+(t) & \phi(\vec{r},t) &= \phi_o(\vec{r}) \cdot T(t) \\ C_m^+(\vec{r},t) &= C_{o,m}^+(\vec{r}) \cdot \tau_m^+(t) & C_{o,m}(\vec{r},t) &= C_{o,m}(\vec{r}) \cdot \tau_m(t) \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Das Differentialgleichungssystem (3.1.19) für die prompten Neutronen wird dann auf eine einzige Differentialgleichung reduziert.

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{\ell=1}^L \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) \cdot \vec{v}_{\ell} \cdot \phi_{0,\ell}(\vec{r}) \frac{d}{dt} T(t) = & \left\{ \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{\ell=1}^L [-\nabla \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) \cdot \mathcal{D}_{\ell}(\vec{r},t) \cdot \nabla \phi_{0,\ell}(\vec{r}) - \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) \Sigma_{rem,\ell}(\vec{r},t) \phi_{0,\ell}(\vec{r})] - \oint_{\partial \mathcal{R}} \sum_{\ell=1}^L \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) \cdot \vec{\nu}_{\ell} \phi_{0,\ell}(\vec{r}) dS \right. \\
& + \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{\ell=1}^L \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) \cdot \sum_{n=1}^{\ell-1} \Sigma^{n-\ell}(\vec{r},t) \cdot \phi_{0,n}(\vec{r}) + \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{\ell=1}^L \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) (1-\beta) \chi_{\ell} \sum_{n=1}^L \nu \Sigma_{\ell,n}(\vec{r},t) \phi_{0,n}(\vec{r}) \left. \right\} \cdot T(t) \\
& + \left\{ \sum_{m=1}^M \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{\ell=1}^L \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) \cdot \rho_{m,\ell} \beta_m \sum_{n=1}^L \nu \Sigma_{\ell,n}(\vec{r},t) \phi_{0,n}(\vec{r}) - \sum_{m=1}^M \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{\ell=1}^L \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) \rho_{m,\ell} \beta_m \sum_{n=1}^L \nu \Sigma_{\ell,n}(\vec{r},t) \phi_{0,n}(\vec{r}) \right\} \cdot T(t) \\
& + \sum_{m=1}^M \iiint_{\mathcal{R}} dV \lambda_m \sum_{\ell=1}^L \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) \cdot \rho_{m,\ell} C_{0,m}(\vec{r}) \cdot \tau_m(t) \quad (3.1.22)
\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung kann leicht in die von Henry [5,6] abgeleiteten punktkinetischen Gleichungen übergeführt werden, indem zunächst die Diffusionskonstante und die makroskopischen Wirkungsquerschnitte

$$D_1(\vec{r},t) = D_1(\vec{r},0) + \delta D(\vec{r},t) \quad \Sigma_1(\vec{r},t) = \Sigma_1(\vec{r},0) + \delta \Sigma_1(\vec{r},t)$$

in einen stationären Wert und eine zeitliche Änderung in Bezug auf diesen stationären Wert zerlegt werden. Unter Verwendung der Beziehung (A 2.3b, Anhang 2),

$$\iiint_{\mathcal{R}} dV \nabla \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) \cdot \mathcal{D}_{\ell} \cdot \nabla \phi_{0,\ell}(\vec{r}) = - \iiint_{\mathcal{R}} dV \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) \cdot \nabla \mathcal{D}_{\ell} \cdot \nabla \phi_{0,\ell}(\vec{r}) + \oint_{\partial \mathcal{R}} dS \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) \cdot \mathcal{D}_{\ell} \cdot \nabla \phi_{0,\ell}(\vec{r}) \cdot \vec{n}$$

Stetigkeit des Flusses an inneren Randflächen vorausgesetzt, können auf der rechten Seite der obigen Differentialgleichung (3.1.22) die stationären adjungierten Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen

$$\nabla \mathcal{D}_{\ell}(\vec{r},0) \cdot \nabla \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) - \Sigma_{rem,\ell}(\vec{r},0) \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) + \sum_{n=\ell+1}^L \Sigma^{\ell \rightarrow n}(\vec{r},0) \cdot \phi_{0,n}^+(\vec{r}) + \nu \Sigma_{\ell,\ell}(\vec{r},0) \sum_{n=1}^L [(1-\beta) \chi_n + \sum_{m=1}^M \beta_m \rho_{m,n}] \phi_{0,n}^+(\vec{r}) = 0$$

einschließlich der Randbedingung

$$D_1(\vec{r},t) \cdot \phi_{0,1}^+(\vec{r}) \cdot \vec{n} + \gamma_1 \phi_{0,1}^+(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } r \in \Gamma_a$$

für jede Energiegruppe 1 abgespalten und Null gesetzt werden, wenn die rechte Seite von Gleichung (3.1.22) durch

$$\left[\sum_{m=1}^M \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{\ell=1}^L \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) \rho_{m,\ell} \beta_m \sum_{n=1}^L \nu \Sigma_{\ell,n}(\vec{r},t) \phi_{0,n}(\vec{r}) - \sum_{m=1}^M \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{\ell=1}^L \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) \rho_{m,\ell} \beta_m \sum_{n=1}^L \nu \Sigma_{\ell,n}(\vec{r},t) \phi_{0,n}(\vec{r}) \right] \cdot T(t) = 0$$

ergänzt wird.

Durch Division mit

$$F = \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{\ell=1}^L [\chi_{\ell} (1-\beta) + \sum_{m=1}^M \rho_{m,\ell} \beta_m] \phi_{0,\ell}^+(\vec{r}) \cdot \sum_{n=1}^L \nu \Sigma_{\ell,n}(\vec{r},t) \phi_{0,n}(\vec{r}) = 0$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F} \iiint_{\mathcal{R}} dV \phi_{0,e}^+(\vec{r}) v_e^{-1} \phi_{0,e}(\vec{r}) \frac{d}{dt} T(t) &= \frac{1}{F} \iiint_{\mathcal{R}} dV \left[\sum_{e=1}^L [-\nabla \phi_{0,e}^+(\vec{r}) \cdot \delta D(\vec{r},t) \nabla \phi_{0,e}(\vec{r}) - \phi_{0,e}^+(\vec{r}) \delta \Sigma_{rem,e}(\vec{r},t) \phi_{0,e}(\vec{r},t)] + \right. \\
&+ \sum_{e=1}^L \phi_{0,e}^+(\vec{r}) \sum_{n=1}^{e-1} \delta \Sigma^{n \rightarrow e}(\vec{r},t) \phi_{0,n}(\vec{r}) + \sum_{e=1}^L \phi_{0,e}^+(\vec{r}) [(1-\beta) \chi_e + \sum_{m=1}^M \beta_m f_{m,e}] \sum_{n=1}^L \delta \nu \Sigma_{f,n}(\vec{r},t) \phi_{0,n}(\vec{r}) + \\
&- \left. \sum_{m=1}^M \sum_{e=1}^L \phi_{0,e}^+(\vec{r}) \beta_m f_{m,e} \sum_{n=1}^L \nu \Sigma_{f,n}(\vec{r},t) \phi_{0,n}(\vec{r}) \right] \cdot T(t) + \\
&+ \frac{1}{F} \sum_{m=1}^M \iiint_{\mathcal{R}} dV \lambda_m \sum_{e=1}^L \phi_{0,e}^+(\vec{r}) f_{m,e} C_{0,m}(\vec{r}) \cdot \tau_m(t)
\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

Die Differentialgleichungen (3.1.20) für die Konzentrationen der Vorläufer der verzögerten Neutronen wurden durch die Annahme (3.1.21) auf

$$m = 1 \dots M$$

Differentialgleichungen reduziert. Nach Division mit F erhält man unter Berücksichtigung der stationären Beziehung für die Konzentration der adjungierten Vorläufer der verzögerten Neutronen (Gleichung (3.1.11)) :

$$C_{0,m}^+(\vec{r}) = f_m^T \phi_0^+(\vec{r})$$

das folgende Gleichungssystem.

Für $m = 1 \dots M$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F} \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{e=1}^L \phi_{0,e}^+(\vec{r}) f_{m,e} C_{0,m}(\vec{r}) \frac{d}{dt} \tau_m(t) &= -\frac{1}{F} \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{e=1}^L \phi_{0,e}^+(\vec{r}) f_{m,e} \lambda_m C_{0,m}(\vec{r}) \cdot \tau_m(t) \\
&+ \frac{1}{F} \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{e=1}^L \phi_{0,e}^+(\vec{r}) f_{m,e} \beta_m \sum_{n=1}^L \nu \Sigma_{f,n}(\vec{r},t) \phi_{0,n}(\vec{r}) \cdot T(t)
\end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Diese Differentialgleichungen sind mit den von Henry abgeleiteten Punktkinetik-Gleichungen [5,6] unter der Annahme (3.1.21) im Rahmen der Diffusionstheorie identisch. Auf die dort eingeführten Definitionen für die effektive Lebensdauer der prompten Neutronen, die Reaktivität usw. wird hier nicht näher eingegangen. Für gruppenabhängige Zeitfunktionen $T(t)$ erhält man L Differentialgleichungen der Art wie Gleichung (3.1.22), wobei die Summation über die Energiegruppen entfällt. Für Zwischenformen nach Ansatz (3.1.1c) bzw. (3.1.5c) ergeben sich Gleichungen, die teils der oben beschriebenen, teils der durch Gleichung (3.1.22) dargestellten Form entsprechen, wobei nur jeweils über solche Energiegruppen summiert wird, welche gruppenabhängige Zeitfunktionen besitzen. Folgende Möglichkeiten bietet somit das mit Hilfe des Kantorowitsch-Verfahrens aus dem Funktional (3.1.9) abgeleitete reduzierte Differentialgleichungssystem:

- a) Für gruppenunabhängige Zeitfunktionen $T(t)$ und jeweils bekannte Ortsfunktionen, die mit den stationären Lösungen

$$\phi_0^+(\vec{r}) , \phi_0(\vec{r}) , C_{0,m}^+(\vec{r}) , C_{0,m}(\vec{r})$$

identisch sind und während des Zeitintervalls $0 \leq t \leq t_e$ konstant gehalten werden, erhält man die punktkinetischen Gleichungen.

- b) Für gruppenabhängige Zeitfunktionen $T_1(t)$ und jeweils eine bekannte Ortsfunktion, die mit den stationären Lösungen

$$\phi_0^+(\vec{r}) , \phi_0(\vec{r}) , C_{0,m}^+(\vec{r}) , C_{0,m}(\vec{r})$$

identisch ist und während des Zeitintervalls $0 \leq t \leq t_e$ konstant gehalten wird, ergeben sich "Mehrgruppen-Punktkinetische-Gleichungen". Man erhält für jede Energiegruppe der prompten Neutronen eine punktkinetische Gleichung [39].

- c) Sowohl für gruppenabhängige als auch für gruppenunabhängige Zeitfunktionen kann die in einem ersten Makrozeitschritt verwendete Ortsfunktion

$$\phi_0^+(\vec{r}) , \phi_0(\vec{r}) , C_{0,m}^+(\vec{r}) , C_{0,m}(\vec{r})$$

beim Übergang zum folgenden Makrozeitschritt gegen eine neue bekannte Ortsfunktion ausgetauscht werden. Dies kann sich für $(K+1)$ Makrozeitschritte innerhalb des Zeitintervalls $0 \leq t \leq t_e$ wiederholen. Man erhält dadurch eine Art "statische Approximation", die für gruppenunabhängige Zeitfunktionen auf "punktkinetische Gleichungen" führt. Diese gelten jeweils nur innerhalb des Makrozeitschrittes Δt_k . An den Grenzen t_k der Makrozeitschritte gelten Übergangsbedingungen für die Zeitfunktionen $T_k(t), \tau_{m,k}(t)$.

- d) Beim Übergang von einer auf P bekannte Ortsfunktionen können dann sowohl gruppenabhängige als auch gruppenunabhängige Zeitfunktionen $T_p(t)$ und Zwischenformen verwendet werden. Die Ortsfunktionen können in jedem Makrozeitschritt durch neue ersetzt werden. An den Unstetigkeitsstellen t_k gelten zeitliche Übergangsbedingungen.

3.1.3 Bestimmung der Ortsfunktionen

Das Verfahren zur Bestimmung der als bekannt vorausgesetzten Ortsfunktionen $\psi_{s,k}^+(\vec{r})$, $\psi_{p,k}(\vec{r})$, $\xi_{m,t,k}^+(\vec{r})$, $\xi_{m,q,k}(\vec{r})$

wird am Beispiel eines zylindrischen Reaktors gezeigt, bei dem die Störung des stationären Zustandes dadurch ausgelöst wird, daß ein Regelstabring in z-Richtung kontinuierlich herausgezogen wird.

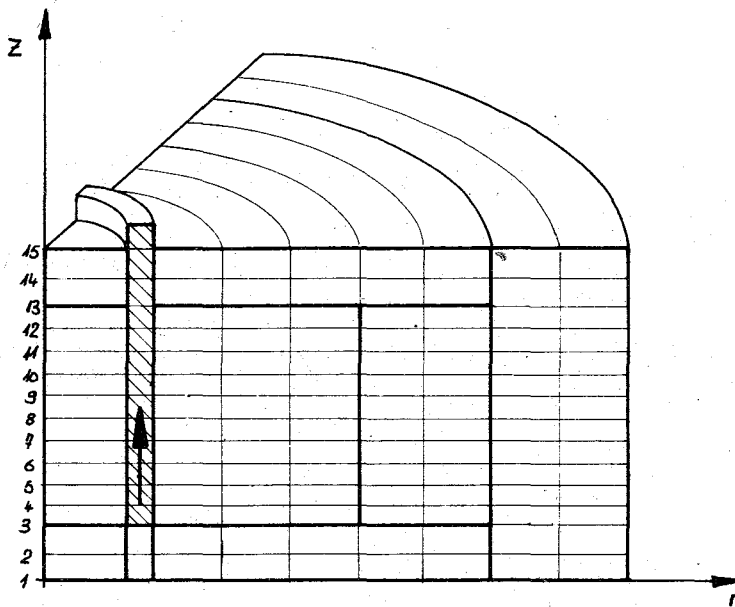
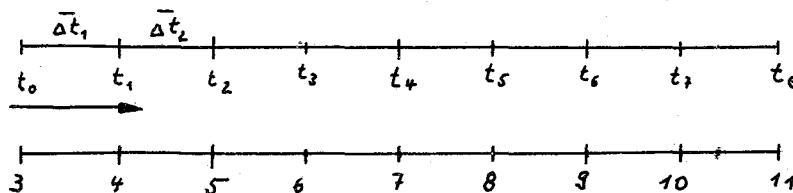


Abb. 3.2

Bestimmung der
Ortsfunktionen

Für den gesamten Reaktor wird Radialsymmetrie vorausgesetzt. Der Regelstabring sei im stationären Betriebszustand bis zur waagerechten Linie mit der Nummer 3 eingefahren. Es werden in jedem Makrozeitschritt $\Delta \bar{t}_k$ z.B. $P = 3$ Ortsfunktionen in den Ansätzen für $\phi^+(\vec{r}, t)$, $\phi(\vec{r}, t)$, $C_m^+(\vec{r}, t)$ und $C_m(\vec{r}, t)$ verwendet. Die Endzeit t_e des Zeitintervalls, über welches die Leistungsexkursion verfolgt wird, sei erreicht, wenn der Regelstabring beim Herausziehen bis zur waagerechten Linie 11 gekommen ist. Das Zeitintervall $0 \leq t \leq t_e$ wird in 8 Makrozeitschritte $\Delta \bar{t}_k$ aufgeteilt, deren Endpunkte mit dem Herausziehen des Regelstabrings bis zu den waagerechten Linien mit den Nummern 3 bis 11 zusammenfallen.



Für den ersten Makrozeitschritt $\Delta \bar{t}_1$ werden 3 Ortsfunktionen verwendet, die sich aus der stationären Lösung der Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen, der Gleichungen für die Konzentrationen der Vorläufer der verzögerten Neutronen und dem dazu adjungierten Differentialgleichungssystem für die drei Regelstabstellungen mit den Nummern 3, 4 und 5 ergeben. Die Regelstabstellung mit der Nummer 3 bezeichnet den stationären Zustand, für den das Temperaturfeld und somit die dazugehörigen Wirkungsquerschnitte und die Reaktorgeometrie bereits bekannt sind. Für die Regelstabstellungen 4 und 5 sind vorläufig nur die durch die Störung hervorgerufenen Änderungen der Wirkungsquerschnitte bekannt. Das Differentialgleichungssystem (3.1.16) kann mit den bekannten Anfangsbedingungen für $P = 3$ Ortsfunktionen integriert werden. Bei Erreichen der Grenze t_1 des Makrozeitschrittes $\Delta \bar{t}_1$ (Regelstabstellung mit Nummer 4) wird unter Berücksichtigung des dort vorhandenen Temperaturfeldes, der Wirkungsquerschnitte und der Geometrie der einzelnen Reaktorzone eine neue Diffusionsrechnung zur Bestimmung einer verbesserten Ortsfunktion durchgeführt. Hinzu kommen die Ortsfunktionen für die Regelstabstellungen mit den Nummern 5 und 6, für die wieder nur die durch die Störung hervorgerufene Änderung der Wirkungsquerschnitte bekannt ist. Mit Hilfe der zeitlichen Übergangsbedingungen (3.1.16c) und (3.1.16f) kann über die Unstetigkeitsstelle t_1 hinweg integriert und das Differentialgleichungssystem im Makrozeitschritt $\Delta \bar{t}_2$ mit Hilfe der 3 neuen Ortsfunktionen gelöst werden. Dieses Verfahren wiederholt sich für jeden folgenden Makrozeitschritt bis zum Erreichen von t_e . Allgemein geben bei P -Ortsfunktionen immer $(P-1)$ Ortsfunktionen den im voraus bekannten Stöorzustand wieder, während die restliche Ortsfunktion den Stör- und Temperaturzustand des Reaktors am Ende des vorangegangenen Makrozeitschrittes darstellt. Ähnlich wie $\phi(\vec{r}, t)$ nach jedem Makrozeitschritt kann auch $C(\vec{r}, t)$ durch Integration von Gl. (2.2) neu bestimmt werden. Soll die Leistungsexkursion über die Endzeit t_e der Störung hinaus verfolgt werden, so werden die Verteilungsfunktionen für $\phi^+(\vec{r}, t)$, $\phi(\vec{r}, t)$, $C_m^+(\vec{r}, t)$, $C_m(\vec{r}, t)$ nicht mehr durch die Störung, sondern nur noch über Temperaturänderungen beeinflusst. In diesem Falle können $(P-1)$ Ortsfunktionen im voraus geschätzte Temperaturzustände des Reaktors darstellen.

Innerhalb eines Makrozeitschrittes $\Delta \bar{t}_k$ muß das gekoppelte Differentialgleichungssystem (3.1.16) mit Hilfe numerischer Methoden in kleineren Zeitschritten (Mikrozeitschritte Δt_n) integriert werden.

Nach jedem Mikrozeitschritt Δt_n werden nacheinander die Leistungsverteilung, die Temperaturfelder, die Änderungen der Wirkungsquerschnitte, Geometrieänderungen und die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems neu bestimmt. Dazu wird, wie bereits in Abschnitt 2.2

beschrieben wurde, der Reaktor in axial segmentierte Ringzonen aufgeteilt, für welche sinnvoll gemittelte Änderungen des Temperaturfeldes und der Wirkungsquerschnitte gelten. Alle Koeffizienten des gekoppelten Differentialgleichungssystems (3.1.16) werden als Summe von Integralen über diese Zonen gebildet. Da diese Ringzonen durch die Ausdehnung des Strukturmaterials und des Brennstoffes nach jedem Mikrozeitschritt ihr Volumen und ihre Oberfläche ändern, wird angenommen, daß sich das über jeder Zone liegende Maschennetz mit den Gitterpunkten für die Werte der bekannten Ortsfunktionen homogen ausdehnen bzw. zusammenziehen kann (Abb. 3.2).

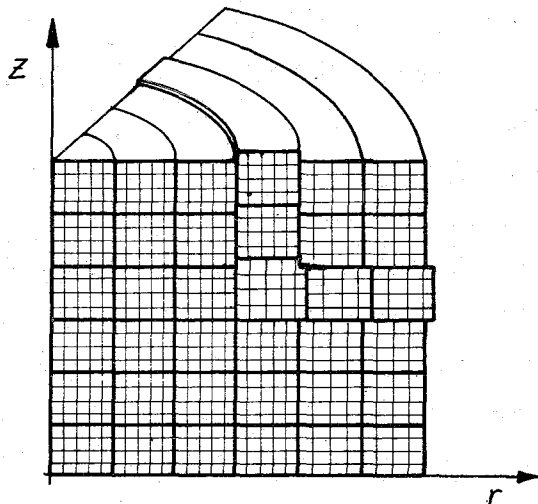


Abb. 3.3
Ausdehnung des
Maschennetzes

Obwohl die P bekannten Ortsfunktionen nur an den Grenzen von Makrozeitschritten durch Diffusionsrechnungen neu bestimmt werden, werden sie jetzt nach jedem Mikrozeitschritt durch die Ausdehnung bzw. Kontraktion des Maschennetzes verändert. Dadurch treten schon an den Grenzen eines jeden Mikrozeitschrittes Unstetigkeiten auf, welche die Anwendung der zeitlichen Übergangsbedingungen (3.1.16c) und (3.1.16f) erforderlich machen. Da die bekannten Ortsfunktionen nur die räumlichen Randbedingungen erfüllen müssen, sind diese Annahmen zulässig und erlauben eine einfache Berücksichtigung der Ausdehnungseffekte. Die Integrale für die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems müssen nur mit einem Faktor multipliziert werden, der die Brennstoffausdehnung in axialer und die Strukturausdehnung in radialer Richtung

berücksichtigt (Abschnitt 2.4). Dabei muß allerdings das Gradientenintegral

$$D_{s,r,p}(t) = \iiint_R dV \nabla_r \psi_{s,r}^{+T}(\vec{r}) \cdot D(\vec{r},t) \cdot \nabla_r \psi_{p,r}(\vec{r}) + \iiint_R dV \nabla_z \psi_{s,r}^{+T}(\vec{r}) \cdot D(\vec{r},t) \cdot \nabla_z \psi_{p,r}(\vec{r})$$

in einen axialen und einen radialen Anteil aufgespalten werden.

3.1.4 Lineare Abhängigkeit der Ortsfunktionen

Man kann sich Fälle ausdenken, in denen die P verschiedenen Ortsfunktionen innerhalb eines Makrozeitschrittes linear abhängig werden. Dies kann z.B. dadurch geschehen, daß entweder die Störung oder die Temperaturänderung des Reaktors nur einen geringen Einfluß auf die örtlichen Verteilungsfunktionen für $\psi_{s,k}^+(\vec{r})$, $\psi_{p,k}(\vec{r})$, $\xi_{m,t,k}^+(\vec{r})$ und $\xi_{m,q,k}(\vec{r})$ hat. In diesem Fall ist

$$\epsilon = c_1 \cdot \psi_{1,k}(\vec{r}) + c_2 \cdot \psi_{2,k}(\vec{r}) \dots c_p \cdot \psi_{p,k}(\vec{r})$$

eine sehr kleine Zahl. Die c_p bedeuten dabei lineare Koeffizienten. Bei der Anwendung von digitalen Rechenanlagen mit fester Stellenzahl kann ϵ sogar schon Null werden, wenn die $\psi_{p,k}(\vec{r})$ nur fast linear abhängig sind. In diesem Falle versagt die Integration des gekoppelten Differentialgleichungssystems (3.1.18), da die Koeffizienten für alle $S = 1 \dots p$ bzw. $t = 1 \dots p$ Differentialgleichungssysteme gleich werden. Es ist daher wichtig, schon vor der Integration des gekoppelten Differentialgleichungssystems zu prüfen, ob eine lineare Abhängigkeit der Ortsfunktionen vorliegt. Ist dies der Fall, so müssen entweder andere Ortsfunktionen gewählt werden, oder es liegt der Fall vor, daß die Form der örtlichen Verteilungsfunktionen während der Leistungsexkursion konstant bleibt, d.h. die punktkinetischen Gleichungen sind gültig. Nach Kaplan [39] kann die lineare Abhängigkeit durch Berechnung des kleinsten Eigenwertes der Gram-Matrix für die Ortsfunktionen nachgeprüft werden. Unterschreitet der kleinste Eigenwert eine bestimmte Schranke, welche durch numerische Testrechnungen ermittelt werden kann, so liegt lineare Abhängigkeit vor. Da sich die P verschiedenen Ortsfunktionen nach dem oben geschilderten Verfahren umso weniger unterscheiden je kürzer die Makrozeitschritte gewählt werden, ist durch die Gefahr des Auftretens linearer Abhängigkeit die minimale Größe der Makrozeitschritte festgelegt.

3.1.5 Integration des gekoppelten Differentialgleichungssystems

Das gekoppelte System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit zeitabhängigen Koeffizienten (3.1.16) kann mit Runge-Kutta-oder ähnlichen Verfahren integriert werden, wie sie z.B. von Nordsiek [40] und von Bulirsch und Stoer [41] angegeben wurden. Dabei treten jedoch die von der Integration der punktkinetischen Gleichungen her bekannten Schwierigkeiten auf, daß durch die sehr kleine Zeitkonstante der prompten Neutronen die Größe der Mikrozeitschritte aus Gründen der Stabilität des numerischen Integrationsverfahrens kaum größer als die effektive Lebensdauer der prompten Neutronen gewählt werden kann. Für die punktkinetischen Gleichungen wurden bereits eine Reihe von Näherungsverfahren entwickelt, welche diese Schwierigkeiten umgehen und zu relativ guten Ergebnissen kommen [43]. Von dem gekoppelten System gewöhnlicher Differentialgleichungen (3.1.18) ist zu erwarten, daß es wegen seiner Ähnlichkeit mit den punktkinetischen Gleichungen auch mit ähnlichen Näherungsverfahren integriert werden kann. Als besonders geeignete Näherungsverfahren bieten sich die von Henry [59] entwickelte θ -Methode und die erstmals von Vigil [43] verwendete Methode der analytischen Fortsetzung an. Näherungsverfahren müssen aber immer zuerst durch numerisch exakte Verfahren geprüft werden. Solche Untersuchungen liegen bisher nicht vor. Daher werden in dieser Arbeit die Verfahren von Nordsiek [40] und von Bulirsch und Stoer [41] verwendet, welche sowohl Stabilitätsbedingungen als auch vorgegebene Genauigkeitsschranken für die numerische Integration erfüllen.

4. Lösung der Differentialgleichungen für das Temperaturfeld

Die das Temperaturfeld im Brennstoff und in der Hülle beschreibenden instationären Wärmeleitungsgleichungen (2.3.1) und (2.3.2) sind untereinander in radialer Richtung durch die Beziehung (2.3.1b) für den Wärmeübergang zwischen Brennstoff und Hülle und mit den Grundgleichungen für die eindimensionale Strömung im Kühlkanal (2.3.3) durch die Beziehung für den Wärmestrom zwischen Hüllenaußenwand und Kühlmittel verkoppelt. In axialer Richtung besteht eine Koppelung der Brennstoff- und Hüllentemperaturen nur über die Kühlmitteltemperaturen, da die axiale Wärmeleitung im Brennstoff und in der Hülle vernachlässigt wird. Zur Lösung dieses Differentialgleichungssystems mit Hilfe von Differenzenverfahren erfolgt eine Aufteilung des Zeitintervalls $0 \leq t' \leq t$ in H Zeitschritte Δt_n . Ausgehend vom stationären Zustand werden während des ersten Zeitschrittes Δt_1 der Wärmestrom von der Hüllen-

außenwand an das Kühlmittel und alle zeitabhängigen Koeffizienten der Differentialgleichungen für die eindimensionale Strömung im Kühlkanal konstant gehalten. Mit diesen Annahmen werden die örtlichen Verteilungen für die Temperatur, die Dichte, den Druck und die Geschwindigkeit des Kühlmittels zur Zeit t_1 bestimmt. Die axiale Verteilung der Kühlmitteltemperaturen dient dann als Randbedingung für die instationären Wärmeleitungsgleichungen, die mit der Annahme konstanter Koeffizienten während des Zeitschrittes Δt_1 gelöst werden und auf die Verteilung der Brennstoff- und Hülltemperatur führen. Durch H -malige Wiederholung dieses Zyklus erhält man das Temperaturfeld zur Zeit $t = H \cdot \Delta t_h$.

4.1 Lösung der Grundgleichungen für die eindimensionale Strömung im Kühlkanal

Eine exakte numerische Lösung der in Abschnitt 2.3 angegebenen Erhaltungssätze für die Masse, den Impuls und die Energie (2.3.1) bis (2.3.3) ist sowohl mit Charakteristikenverfahren als auch mit Differenzenverfahren möglich. In der in Abschnitt 2.3 angegebenen Form wurden sie von Meyer [46] mit Hilfe der Lelevier'schen Differenzgleichungen gelöst, deren Stabilität nach Richtmyer [47] bei Einhaltung der Bedingung

$$(|u_K| + c) \frac{\Delta t_h}{\Delta z} \leq 1 \quad (4.1)$$

erfüllt ist. Dabei bedeuten u_K die Strömungsgeschwindigkeit, c die adiabate Schallgeschwindigkeit des Kühlmittels; Δz und Δt_h sind die Orts- bzw. Zeitschritte. Für die Behandlung von Verdichtungsstößen müssen bei Anwendung der Differenzenverfahren jedoch die von Richtmyer und von Neumann [47] entwickelten Näherungsmethoden verwendet werden. Im Gegensatz zu Differenzenverfahren sind die Charakteristikenverfahren nicht durch Stabilitätsbedingungen eingeschränkt, da immer längs der Charakteristiken integriert wird. Sie erlauben außerdem eine exakte Behandlung der Verdichtungsstöße [48].

4.1.1 Das integrale Impulsmodell [46]

Solange die Strömungsgeschwindigkeit des Kühlmittels

$$u_K < 0,3 \cdot c$$

bleibt [28], kann das Kühlmittel wie ein inkompressibles strömendes Medium behandelt werden, d.h. es gilt:

$$\frac{d\mu_K}{dp_K} = 0 \quad (4.2)$$

Dichte- und Druckänderungen innerhalb des Kühlkanals breiten sich dann mit unendlich großer Schallgeschwindigkeit aus, und die Kühlmittelsäule im Kühlkanal verhält sich wie ein sich frei ausdehnender starrer Körper. Die Zustandsgleichung vereinfacht sich dann zu:

$$\mu_K(z,t) = f \left[i(z,t), p_K^* \right] \quad (4.3)$$

wobei p^* einen konstanten Referenzdruck bedeutet.

In der Energiegleichung (2.3.3) entfällt dann die Verdrängungsarbeit und unter zusätzlicher Vernachlässigung der Reibungsarbeit erhält man eine vereinfachte Gleichung

$$\mu_K(z,t) \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + G_K(z,t) \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = q_K(z,t) \quad (4.4)$$

wobei

$$G_K(z,t) = \mu_K(z,t) \cdot u_K(z,t) \quad (4.4a)$$

den Kühlmitteldurchsatz bedeutet.

Durch Enthalpieänderungen hervorgerufene Dichteänderungen an der Stelle z des Kühlkanals bewirken unter der Annahme (4.2) eine Verschiebung und Beschleunigung der gesamten Flüssigkeitssäule. Ebenso führen Änderungen des dem Kühlkanal aufgeprägten Druckes dazu, daß die Flüssigkeitssäule an allen Stellen gleich beschleunigt wird. Das für die Ableitung der Impulsgleichung zu betrachtende Kontrollvolumen kann daher über die gesamte Kühlkanallänge H_K gelegt werden, oder die Impulsgleichung (2.3.2) kann über die Kühlkanallänge H_K integriert werden.

Mit der Definition des mittleren Massendurchsatzes

$$G_K(t) = \frac{1}{H_K} \int_0^{H_K} G(z,t) \cdot dz \quad (4.5)$$

erhält man mit den obigen Voraussetzungen dann die integrale Impulsgleichung.

$$\frac{d\hat{G}_K(t)}{dt} = \frac{1}{H_K} \left\{ G_K(0,t) - G_K(H_K,t) + p_K(0,t) - p_K(H_K,t) - \int_0^{H_K} \left[\frac{f}{2 \cdot D_h} G(z,t) \cdot u_K(z,t) - \mu_K(z,t) \cdot g \right] dz \right\} \quad (4.6)$$

Die Beziehung zwischen dem mittleren Massendurchsatz $\hat{G}_K(t)$ und dem orts- und zeitabhängigen Massendurchsatz $G_K(z,t)$ ist dabei durch

$$G_K(z,t) = \hat{G}_K(t) + \tilde{G}_K(z,t) \quad (4.6a)$$

wobei $\tilde{G}_K(z,t)$ die örtliche Änderung des Kühlmitteldurchsatzes um den Mittelwert herum bedeutet. Bei Verwendung der Annahme (4.2) und Erweiterung mit $\partial i(z,t)$ erhält man die vereinfachte Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial z} G_K(z,t) = \frac{\partial \tilde{G}_K(z,t)}{\partial z} = \frac{-\partial \mu_K(z,t)}{\partial i(z,t)} \Big|_{p=\text{konst.}} \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}, \quad (4.7)$$

die durch Kombination mit Gleichung (4.4) in

$$\frac{\partial \tilde{G}_K(z,t)}{\partial z} = - \frac{1}{\mu_K(z,t)} \frac{d\mu_K(z,t)}{di(z,t)} \cdot [q_K(z,t) - G_K(z,t)] \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} \quad (4.7a)$$

übergeht.

Durch die vereinfachenden Annahmen des "integralen Impulsmodells" sind aus dem ursprünglichen hyperbolischen System, bestehend aus drei untereinander gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen (2.3.1) bis (2.3.3), nun zwei partielle Differentialgleichungen (4.4) und (4.7) und eine gewöhnliche Differentialgleichung (4.6) hervorgegangen. Die Stabilitätsbedingungen bei Integration der vereinfachten partiellen Differentialgleichungen (4.4) und (4.7) mit Hilfe von Differenzenverfahren sind wesentlich günstiger als die Bedingung (4.1). Allerdings können örtliche Dichte- und Druckänderungen innerhalb des Kühlkanals, die durch die Ausbreitung von Störungen mit Schallgeschwindigkeit auftreten, durch das "Integrale Impulsmodell" nicht mehr erfasst werden.

4.1.2 Die Differenzgleichungen für das integrale Impulsmodell

Die Kühlkanallänge wird in M Ortsschritte Δz_m und das Zeitintervall $0 \leq t' \leq t$ in H Zeitschritte Δt_h unterteilt. Dadurch erhält man ein 2-dimensionales z - t -Gitternetz, an dessen Maschenpunkten die unbekanntenen Werte $G_K(z_m, t_h)$, $i(z_m, t_h)$ usw. zu bestimmen sind.

Nach Sauer [49] ist das zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen (4.4) und (4.7) verwendete Differenzenverfahren stabil, wenn der aus den bekannten Werten $i(z_{m-1}, t_{h-1})$ und $i(z_m, t_{h-1})$ oder $i(z_{m+1}, t_{h-1})$ zu errechnende unbekanntene Wert $i(z_m, t_h)$ innerhalb des Bestimmtheitsbereiches der Punkte z_{m-1} und z_m oder z_{m+1} liegt. Der Bestimmtheitsbereich ist durch die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung begrenzt, die durch die Punkte z_{m-1} und z_m oder z_{m+1} laufen.

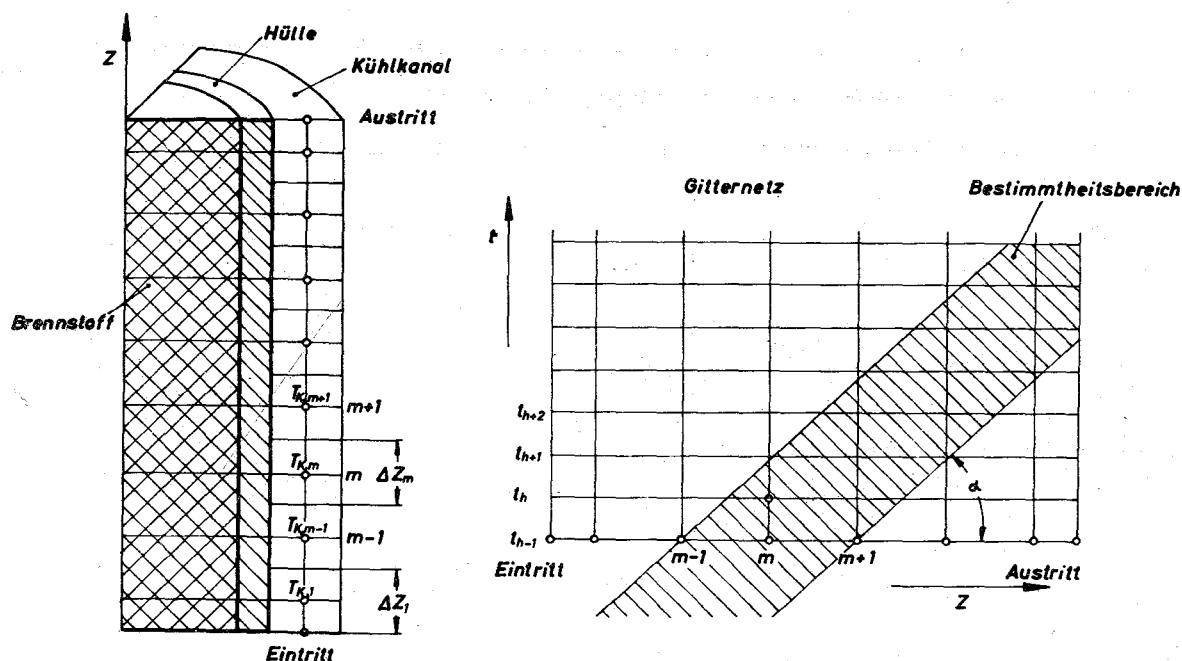


Abb. 4.1 Gitternetz für Kühlkanalgleichungen

Die Charakteristiken sind [49,50] für die partielle Differentialgleichung (4.4) durch Kurven mit der Steigung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{u_K(z, t)} \cong \frac{\Delta t_h}{\Delta z_m}$$

und für die partielle Differentialgleichung (4.7) durch Geraden mit der Steigung

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 \cong \frac{\Delta t_h}{\Delta z_m}$$

gegeben.

Die Differenzgleichungen für die Differentialgleichung (4.4) lauten dann, je nachdem ob Vorwärts- oder Zentraldifferenzen verwendet werden:

$$\begin{aligned} m=1 & \quad \mu_K(z_1, t_{h-1}) \cdot \frac{i(z_1, t_h) - i(z_1, t_{h-1})}{\Delta t_h} + G_K(z_1, t_{h-1}) \cdot 2 \cdot \frac{i(z_1, t_{h-1}) - i_e(t_{h-1})}{\Delta z_1} = q_K(z_1, t_{h-1}) \\ 1 \leq m \leq M-1 & \quad \mu_K(z_m, t_{h-1}) \cdot \frac{i(z_m, t_h) - i(z_m, t_{h-1})}{\Delta t_h} + G_K(z_m, t_{h-1}) \cdot \frac{i(z_{m+1}, t_{h-1}) - i(z_{m-1}, t_{h-1})}{2 \cdot \Delta z_m} = q_K(z_m, t_{h-1}) \quad (4.9) \\ m=M & \quad \mu_K(z_M, t_{h-1}) \cdot \frac{i(z_M, t_h) - i(z_M, t_{h-1})}{\Delta t_h} + G_K(z_M, t_{h-1}) \cdot \frac{i(z_M, t_{h-1}) - i(z_{M-1}, t_{h-1})}{\Delta z_M} = q_K(z_M, t_{h-1}) \\ \text{Austritt} & \quad \mu_K(z_a, t_{h-1}) \cdot \frac{i(z_a, t_h) - i(z_a, t_{h-1})}{\Delta t_h} + G_K(z_a, t_{h-1}) \cdot 2 \cdot \frac{i(z_a, t_{h-1}) - i(z_M, t_{h-1})}{\Delta z_M} = q_K(z_a, t_{h-1}) \end{aligned}$$

für alle Zeiten $t=t_h$ beginnend mit dem stationären Zustand t_0 , wo alle $i(z_m, 0)$, $m=1 \dots M$ bekannt sind.

Die Enthalpie $i_e(t_n)$ am Kühlkanaleintritt ist für alle Zeiten $t = t_n$ vorgegeben. Beginnend mit der Differenzgleichung für $m=1$ am Kühlkanaleintritt erhält man aus dem Differenzgleichungssystem (4.9) die örtliche Enthalpieverteilung $i(z_m, t_n)$ zur Zeit $t=t_n$. Die Werte $G_K(z_m, t_{n-1})$ ergeben sich für $h \geq 2$ aus den Gleichungen (4.6), (4.6a) und (4.7a).

Die Umformung der Differentialgleichung (4.7a) in Differenzgleichungen erfolgt mit Vorwärtsdifferenzenmethoden [50]. Unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen für $\tilde{G}_K(z, t)$ und $i(z, t)$ ergeben diese Differenzgleichungen die örtliche Verteilung der Abweichungen $\tilde{G}_K(z_m, t_{n-1})$ des Kühlmitteldurchsatzes vom Mittelwert $\hat{G}_K(t_{n-1})$, wenn die Ableitungen $\partial \mu_K / \partial i$ und $\partial i / \partial t$ in Gl. (4.7b) bzw. (4.7a) für den Zeitpunkt t_{n-1} in Vorwärtsdifferenzen angeschrieben werden. Ähnlich ergibt die Anwendung von Vorwärtsdifferenzenmethoden für die Differentialgleichung (4.6) unter Berücksichtigung zeitlicher Änderungen des Kühlmitteldurchsatzes oder des Druckes am Ein- oder Austritt des Kühlkanals und bei Auswertung des Integrals über die Kühlkanallänge für den Reibungs- und den statischen Druckverlust den mittleren Kühlmitteldurchsatz $\hat{G}_K(t_{n-1})$ zur Zeit $t=t_{n-1}$, indem die zeitliche Ableitung $\partial \hat{G}_K / \partial t$ in Gl. (4.6) für den Zeitpunkt t_{n-1} definiert wird. Durch Anwendung der Beziehung (4.6) erhält man den Kühlmitteldurchsatz $G_K(z_m, t_{n-1})$. Die Kühlmitteltemperaturen an der Stelle $z=z_m$ zur Zeit $t=t_n$ erhält man aus der Zustandsgleichung:

$$T_K(z_m, t_n) = f [i(z_m, t_n), \mu(z_m, t_n)]$$

Sie bilden die Randbedingungen für die Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichungen im Brennstoff und in der Hülle.

4.2 Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichungen für das Temperaturfeld im Brennstoff und in der Hülle

Die instationären Wärmeleitungsgleichungen (2.3.1) und (2.3.2), die das Temperaturfeld im Brennstoff und in der Hülle beschreiben, fallen, wie die instationären Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen, in die Klasse der parabolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Daher kann bei Anwendung von Differenzenverfahren auf die gleichen numerischen Methoden zurückgegriffen werden. Analytische Lösungsmethoden sind mit Hilfe der Laplace-Transformation [51, 52] oder über die Entwicklung nach Eigenfunktionen [52] möglich. Dabei müssen jedoch die Wärmeleitfähigkeit und die spezifische Wärme des Brennstoffes, die Wärmeübergangszahl zwischen Brenn-

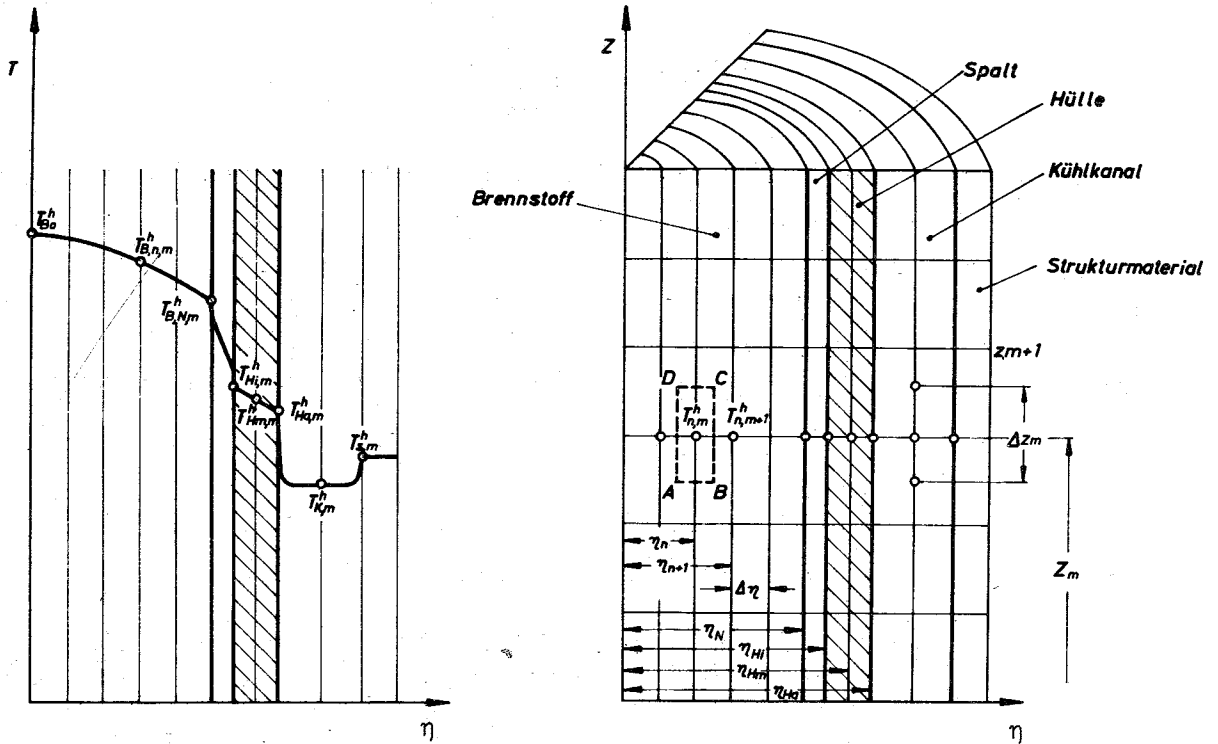


Abb. 4.3 Zoneneinteilung in Brennstoff, Hülle und Kühlkanal mit zugehörigem Temperaturverlauf in der Ebene m

Für die Temperaturen $T_{B,n,m}^h$ des Gitterpunktes (η_n, z_m) im Brennstoff zur Zeit $t = t_h$ gilt:

$$\left\{ \frac{1}{\Delta t_h} \left[\theta \cdot \mu_{n,m}^h \cdot c_{p,n,m}^h + (1-\theta) \cdot \mu_{n,m}^{h-1} \cdot c_{p,n,m}^{h-1} \right] + \frac{\theta}{\Delta \eta^2} \left[\frac{\eta_{n-1/2}}{\eta_n} \cdot K_{n-1/2,m}^h + \frac{\eta_{n+1/2}}{\eta_n} \cdot K_{n+1/2,m}^h \right] \right\} \cdot T_{B,n,m}^h - \frac{\theta}{\Delta \eta^2} \cdot \frac{\eta_{n-1/2}}{\eta_n} \cdot T_{B,n-1,m}^h + \dots \quad (4.2.1)$$

$$- \frac{\theta}{\Delta \eta^2} \cdot \frac{\eta_{n+1/2}}{\eta_n} \cdot T_{B,n+1,m}^h - \frac{1-\theta}{\Delta \eta^2} \cdot \frac{\eta_{n-1/2}}{\eta_n} \cdot K_{n-1/2,m}^{h-1} \cdot T_{B,n-1,m}^{h-1} - \left\{ \frac{1-\theta}{\Delta \eta^2} \left[\frac{\eta_{n-1/2}}{\eta_n} \cdot K_{n-1/2,m}^{h-1} + \frac{\eta_{n+1/2}}{\eta_n} \cdot K_{n+1/2,m}^{h-1} \right] \right\} \cdot T_{B,n,m}^{h-1} + \dots$$

$$- \frac{1}{\Delta t_h} \left[\theta \cdot \mu_{n,m}^h \cdot c_{p,n,m}^h + (1-\theta) \cdot \mu_{n,m}^{h-1} \cdot c_{p,n,m}^{h-1} \right] \cdot T_{B,n,m}^{h-1} + \frac{1-\theta}{\Delta \eta^2} \cdot \frac{\eta_{n+1/2}}{\eta_n} \cdot K_{n+1/2,m}^{h-1} \cdot T_{B,n+1,m}^{h-1} + \theta \cdot c_{p,n,m}^h + (1-\theta) \cdot c_{p,n,m}^{h-1}$$

$$1 \leq n \leq N-1 \quad t = t_h \quad 1 \leq m \leq M$$

Für die Stabmitte $\eta = 0$ muß die Wärmeleitungsgleichung (2.3.1) umgeformt werden.

$$K_B(\eta, z, t) \cdot \frac{\partial^2 T_B(\eta, z, t)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot K_B(\eta, z, t) \cdot \frac{\partial T_B(\eta, z, t)}{\partial \eta} + \dots \quad (4.2.2)$$

$$+ \frac{1}{\eta} K_B(\eta, z, t) \cdot \frac{\partial T_B(\eta, z, t)}{\partial \eta} + q_B(\eta, z, t) = \mu_B(\eta, z, t) \cdot c_{p,B}(\eta, z, t) \cdot \frac{\partial T_B(\eta, z, t)}{\partial t}$$

Mit der Symmetriebedingung:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \eta} T_B(\eta, z, t) \right|_{\eta=0} = 0$$

entfällt das zweite Glied der linken Seite, und das dritte Glied wird unbestimmt. Entwickelt man jedoch nach Smith [55] in eine McLaurin-Reihe um den Punkt $\eta = 0$

$$T_B'(\eta) = T_B'(0) + \eta \cdot T_B''(0) + \frac{\eta^2}{2} T_B'''(0) + \dots,$$

so kann in erster Näherung, da $T_B'(0) = 0$,

$$\text{für } \frac{1}{\eta} T_B'(\eta) = T_B''(0)$$

gesetzt werden. Gleichung (4.2.2) geht dann über in:

$$2 \cdot K_B(\eta, z, t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} T_B(\eta, z, t) + q_B(\eta, z, t) = \mu_B(\eta, z, t) \cdot c_{p,B}(\eta, z, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} T_B(\eta, z, t) \quad (4.2.2a)$$

Dies ergibt die Differenzengleichung für die Temperatur $T_{B,o,m}^h$ in Stabmitte zur Zeit $t = t_h$.

$$\left\{ \frac{1}{\Delta \eta^2} \left[c_{p,o,m}^h \cdot c_{p,o,m}^h + (1-0) \mu_{o,m}^{h-1} \cdot c_{p,o,m}^{h-1} \right] + \frac{k_{1/2,m}^h}{\Delta \eta^2} \right\} \cdot T_{B,o,m}^h - \frac{0}{\Delta \eta^2} \cdot k_{1/2,m}^h \cdot T_{B,1,m}^h - \\ - \left[\left[c_{p,o,m}^h \cdot c_{p,o,m}^h + (1-0) \mu_{o,m}^{h-1} \cdot c_{p,o,m}^{h-1} \right] \frac{1}{\Delta \eta} - \frac{1-0}{\Delta \eta^2} \cdot k_{1/2,m}^h \right] \cdot T_{B,o,m}^h + \frac{1-0}{\Delta \eta^2} \cdot k_{1/2,m}^h \cdot T_{B,1,m}^h + c_{p,o,m}^h + (1-0) \cdot c_{p,o,m}^{h-1} \quad (4.2.3)$$

Für

$$\eta = 0 \text{ bzw. } n = 0; \quad t = t_h; \quad m = 1 \dots M$$

Für die Temperatur $T_{B,N,m}^h$ am Rande (η_N, z_m) des Brennstoffstabes gilt zur Zeit $t = t_h$:

$$\left\{ \frac{1}{\Delta \eta^2} \frac{\eta_{N-1/2}}{\eta_N} \left[c_{p,N,m}^h \cdot c_{p,N,m}^h + (1-0) \mu_{N,m}^{h-1} \cdot c_{p,N,m}^{h-1} \right] + \frac{0}{\Delta \eta} \frac{\eta_{N-1/2}}{\eta_N} k_{N-1/2,m}^h + c_{p,N,m}^h \right\} \cdot T_{B,N,m}^h - \frac{0}{\Delta \eta} \frac{\eta_{N-1/2}}{\eta_N} k_{N-1/2,m}^h \cdot T_{B,N-1,m}^h - c_{p,N,m}^h \cdot T_{B,N-1,m}^h \\ - \frac{1}{\Delta \eta} \frac{\eta_{N-1/2}}{\eta_N} (1-0) k_{N-1/2,m}^h \cdot T_{B,N-1,m}^h + \left\{ \frac{\Delta \eta}{2} \frac{\eta_{N-1/2}}{\eta_N} \cdot c_{p,N,m}^h \cdot c_{p,N,m}^h + (1-0) \mu_{N,m}^{h-1} \cdot c_{p,N,m}^{h-1} \right\} \frac{(1-0) \eta_{N-1/2}}{\Delta \eta} \frac{k_{N-1/2,m}^h}{\eta_N} \\ - c_{p,N,m}^{h-1} (1-0) \cdot T_{B,N,m}^h + (1-0) \cdot c_{p,N,m}^{h-1} \cdot T_{B,N-1,m}^h + \frac{\Delta \eta}{2} \frac{\eta_{N-1/2}}{\eta_N} \left[c_{p,N,m}^h + (1-0) c_{p,N,m}^{h-1} \right] \quad (4.2.4)$$

Für

$$\eta = \eta_B = \eta_N \text{ bzw. } n = N; \quad m = 1 \dots M; \quad t = t_h$$

Für die Brennstoffhülle werden nur die Differenzgleichungen für die Hülleninnenwand, die Mitte der Hülle und die Hüllenaußenwand angegeben.

Für die Temperatur $T_{Hi,m}^h$ an der Hülleninnenwand (η_{Hi,z_m}) zur Zeit $t = t_h$ gilt:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\Delta t_h^2} \frac{\eta_{Hi+1/2}^h}{\eta_{Hi}} \left[\alpha_{p,Hi,m}^h \cdot c_{p,Hi,m}^h + (1-\theta) \mu_{Hi,m}^{h-1} \cdot c_{p,Hi,m}^{h-1} \right] + \frac{\theta}{\Delta \eta_H} \frac{\eta_{Hi+1/2}^h}{\eta_{Hi}} K_{Hi+1/2,m}^h + \alpha_{B,m}^h \right\} T_{Hi,m}^h - \alpha_{B,m}^h \cdot T_{B,N,m}^h - \frac{\eta_{Hi+1/2}^h K_{Hi+1/2,m}^h}{\eta_{Hi} \Delta \eta_H} T_{Hi,m}^h \\ & - (1-\theta) \alpha_{B,m}^{h-1} \cdot T_{B,N,m}^{h-1} + \left\{ \frac{\Delta \eta_H}{2} \frac{1}{\Delta t_h} \frac{\eta_{Hi+1/2}^h}{\eta_{Hi}} \left[\alpha_{p,Hi,m}^h \cdot c_{p,Hi,m}^h + (1-\theta) \mu_{Hi,m}^{h-1} \cdot c_{p,Hi,m}^{h-1} \right] - \frac{(1-\theta) \eta_{Hi+1/2}^h}{\Delta \eta_H} \frac{K_{Hi+1/2,m}^h}{\eta_{Hi}} \right\} T_{Hi,m}^h + \\ & + \frac{(1-\theta) \eta_{Hi+1/2}^h}{\Delta \eta_H} \frac{K_{Hi+1/2,m}^h}{\eta_{Hi}} \cdot T_{Hi,m}^{h-1} + \frac{\Delta \eta_H}{2} \frac{\eta_{Hi+1/2}^h}{\eta_{Hi}} \left[\alpha_{p,Hi,m}^h + (1-\theta) \alpha_{p,Hi,m}^{h-1} \right] \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Für

$$\eta = \eta_{Hi} ; \quad m = 1 \dots M ; \quad t = t_h$$

Für die Temperatur $T_{Hm,m}^h$ in der Mitte der Hüllenwand (η_{Hm,z_m}) zur Zeit $t = t_h$ gilt:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\theta}{\Delta \eta_H} \left[\frac{\eta_{Hm-1/2}^h}{\eta_{Hm}} K_{Hm-1/2,m}^h + \frac{\eta_{Hm+1/2}^h}{\eta_{Hm}} K_{Hm+1/2,m}^h \right] + \frac{1}{\Delta t_h} \left[\alpha_{p,Hm,m}^h \cdot c_{p,Hm,m}^h + (1-\theta) \mu_{Hm,m}^{h-1} \cdot c_{p,Hm,m}^{h-1} \right] \right\} T_{Hm,m}^h - \frac{\theta}{\Delta \eta_H} \frac{\eta_{Hm-1/2}^h}{\eta_{Hm}} K_{Hm-1/2,m}^h T_{Hm,m}^h + \\ & - \frac{\theta}{\Delta \eta_H} \frac{\eta_{Hm+1/2}^h}{\eta_{Hm}} K_{Hm+1/2,m}^h T_{Hm,m}^h - \frac{(1-\theta) \eta_{Hm-1/2}^h}{\Delta \eta_H} \frac{K_{Hm-1/2,m}^h}{\eta_{Hm}} T_{Hm,m}^{h-1} + \left[\alpha_{p,Hm,m}^h \cdot c_{p,Hm,m}^h + (1-\theta) \mu_{Hm,m}^{h-1} \cdot c_{p,Hm,m}^{h-1} \right] \frac{1}{\Delta t_h} T_{Hm,m}^h + \\ & - \frac{(1-\theta) \eta_{Hm-1/2}^h}{\Delta \eta_H} \left[\frac{\eta_{Hm-1/2}^h}{\eta_{Hm}} K_{Hm-1/2,m}^h + \frac{\eta_{Hm+1/2}^h}{\eta_{Hm}} K_{Hm+1/2,m}^h \right] T_{Hm,m}^{h-1} + \frac{(1-\theta) \eta_{Hm+1/2}^h}{\Delta \eta_H} \frac{K_{Hm+1/2,m}^h}{\eta_{Hm}} T_{Hm,m}^{h-1} + \alpha_{p,Hm,m}^h + (1-\theta) \alpha_{p,Hm,m}^{h-1} \\ & \eta = \eta_{Hm} ; \quad m = 1 \dots M ; \quad t = t_h \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Für die Temperatur $T_{Ha,m}^h$ an der Hüllenaußenwand (η_{Ha,z_m}) zur Zeit $t = t_h$ gilt:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\Delta t_h} \frac{\Delta \eta_H}{2} \frac{\eta_{Ha-1/4}^h}{\eta_{Ha}} \left[\alpha_{p,Ha,m}^h \cdot c_{p,Ha,m}^h + (1-\theta) \mu_{Ha,m}^{h-1} \cdot c_{p,Ha,m}^{h-1} \right] + \frac{\theta}{\Delta \eta_H} \frac{\eta_{Ha-1/2}^h}{\eta_{Ha}} K_{Ha-1/2,m}^h + \alpha_{K,m}^h \right\} T_{Ha,m}^h - \frac{\theta}{\Delta \eta_H} \frac{\eta_{Ha-1/2}^h}{\eta_{Ha}} K_{Ha-1/2,m}^h T_{Ha,m}^h + \\ & - \alpha_{K,m}^h \cdot T_{K,m}^h = \frac{(1-\theta) \eta_{Ha-1/2}^h}{\Delta \eta_H} \frac{K_{Ha-1/2,m}^h}{\eta_{Ha}} T_{Ha,m}^{h-1} + \left\{ \frac{\Delta \eta_H}{2 \Delta t_h} \frac{\eta_{Ha-1/4}^h}{\eta_{Ha}} \left[\alpha_{p,Ha,m}^h \cdot c_{p,Ha,m}^h + (1-\theta) \mu_{Ha,m}^{h-1} \cdot c_{p,Ha,m}^{h-1} \right] - \frac{(1-\theta) \eta_{Ha-1/2}^h}{\Delta \eta_H} \frac{K_{Ha-1/2,m}^h}{\eta_{Ha}} \right\} T_{Ha,m}^h + \\ & + (1-\theta) \alpha_{K,m}^{h-1} T_{K,m}^{h-1} + (1-\theta) \alpha_{K,m}^{h-1} \cdot T_{K,m}^{h-1} + \frac{\Delta \eta_H}{2} \frac{\eta_{Ha-1/4}^h}{\eta_{Ha}} \left[\alpha_{p,Ha,m}^h + (1-\theta) \alpha_{p,Ha,m}^{h-1} \right] \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

$$\eta = \eta_{Ha} ; \quad m = 1 \dots M ; \quad t = t_h$$

Die Kühlmitteltemperatur $T_{K,m}^h$ an der Stelle z_m zur Zeit $t = t_h$ im Kühlkanal ist von der Lösung der Gleichungen für die eindimensionale Strömung im Kühlkanal her bekannt. Umgekehrt ist das Glied für den Wärmestrom von der Hüllenaußenwand an das Kühlmittel:

$$(1-\theta) \cdot \alpha_{K,m}^{h-1} \cdot [T_{Ha,m}^{h-1} - T_{K,m}^{h-1}] \quad (4.2.8)$$

auch in der Größe $q_K(z_m, t_{h-1})$ des Differenzgleichungssystems (4.9) enthalten.

Der Integrationsparameter θ erlaubt die Aufteilung der Differenzgleichungen (4.2.1) bis (4.2.7) in drei Klassen von Differenzenmethoden. Die expliziten Differenzenverfahren mit $\theta = 0$ sind nach [45] nur konvergent und stabil, wenn

$$\frac{\Delta t_h}{\Delta \eta^2} \leq \frac{c_{po} \cdot \mu_o}{2(K_1 + \alpha_1 \cdot \Delta \eta)} \quad (4.2.9)$$

erfüllt ist, wobei $c_{po} \cdot \mu_o$ die untere, K_1 bzw. α_1 jeweils die obere Grenze für die Dichte, die spezifische Wärme, die Wärmeleitfähigkeit und die Wärmeübergangszahl im Bereich $0 \leq \eta \leq \eta_{Ha}$ bedeuten.

Bei der Auswahl des zu verwendenden Differenzenverfahrens aus den drei Klassen von Differenzenmethoden bieten sich folgende Möglichkeiten an:

$\theta = 0$ explizite Verfahren : Stabilitätsbedingung (4.2.9)

$\theta = 1/2$ Crank Nicholson } keine Stabilitätsbedingung

$\theta = 1$ implizite Verfahren }

alternierend $\left. \begin{array}{l} \theta = 0 \\ \theta = 1 \end{array} \right\}$ Saul'yev-Verfahren [44]: Keine Stabilitätsbedingung

Die expliziten Differenzenverfahren erlauben die direkte Berechnung der unbekanntenen Temperaturen $T_B(\eta_n, t_h)$ zum Zeitpunkt $t = t_h$ aus den bekannten Werten des vorangegangenen Zeitpunktes t_h . Bei oxydischem Brennstoff liegt der maximal mögliche Zeitschritt jedoch nach Bedingung (4.2.9) bei

$$\Delta t_h \approx 50 \text{ msec.}$$

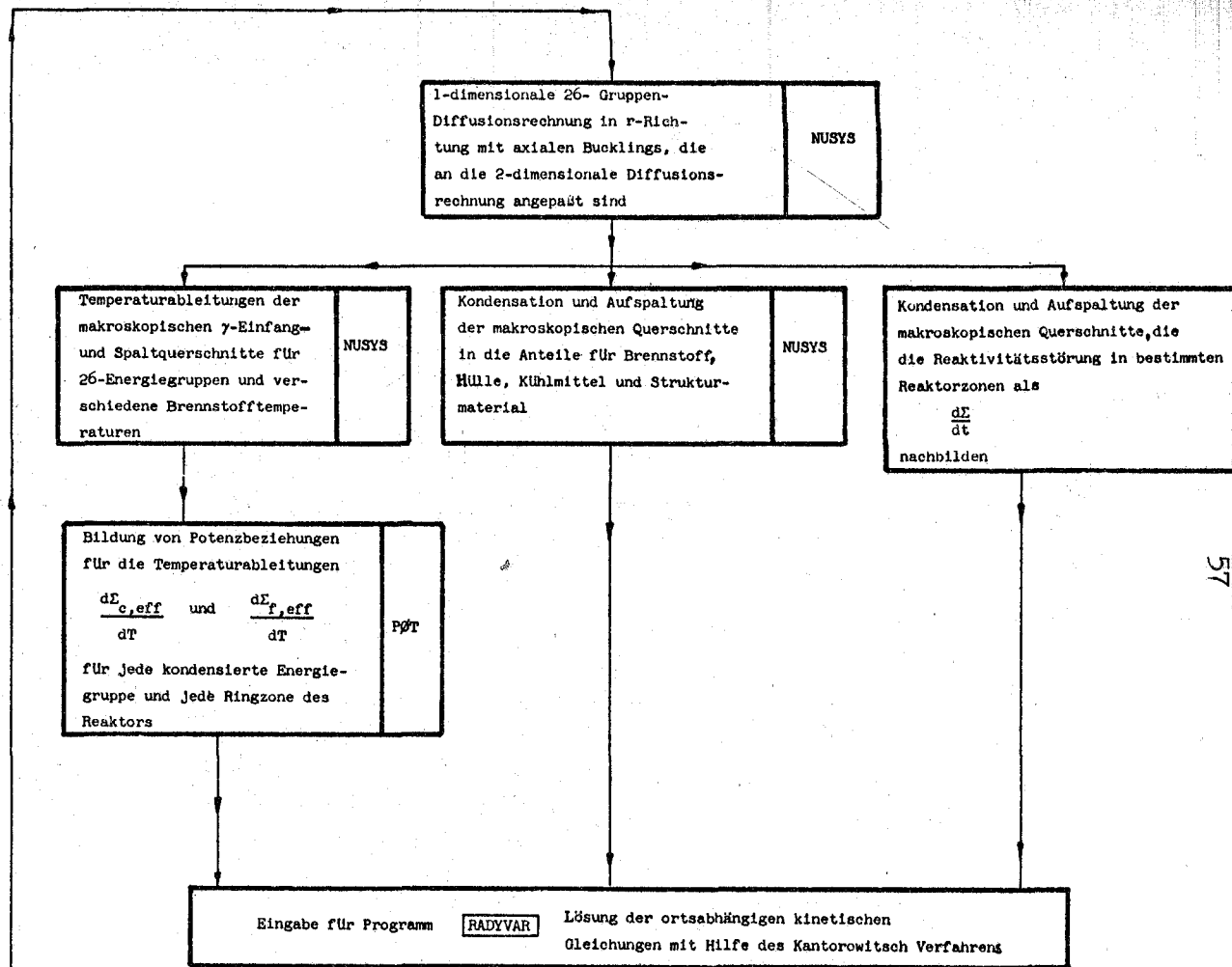
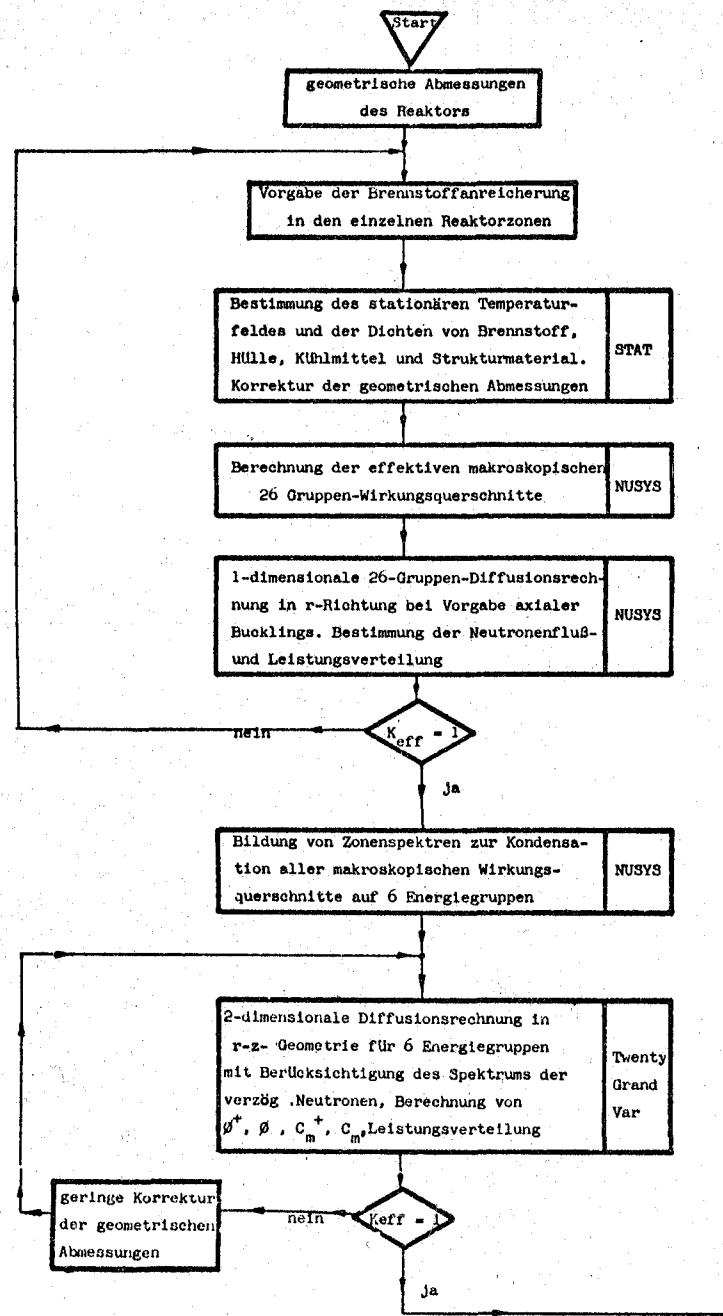
Bei der Berechnung sehr langsamer instationärer Vorgänge kann diese Bedingung zu sehr großen Rechenzeiten führen. Das Crank-Nicholson- und das implizite Differenzen-Verfahren verlangen für jeden Zeitschritt Δt_h und jede axiale Ebene m die Auflösung einer Matrix der folgenden Form:

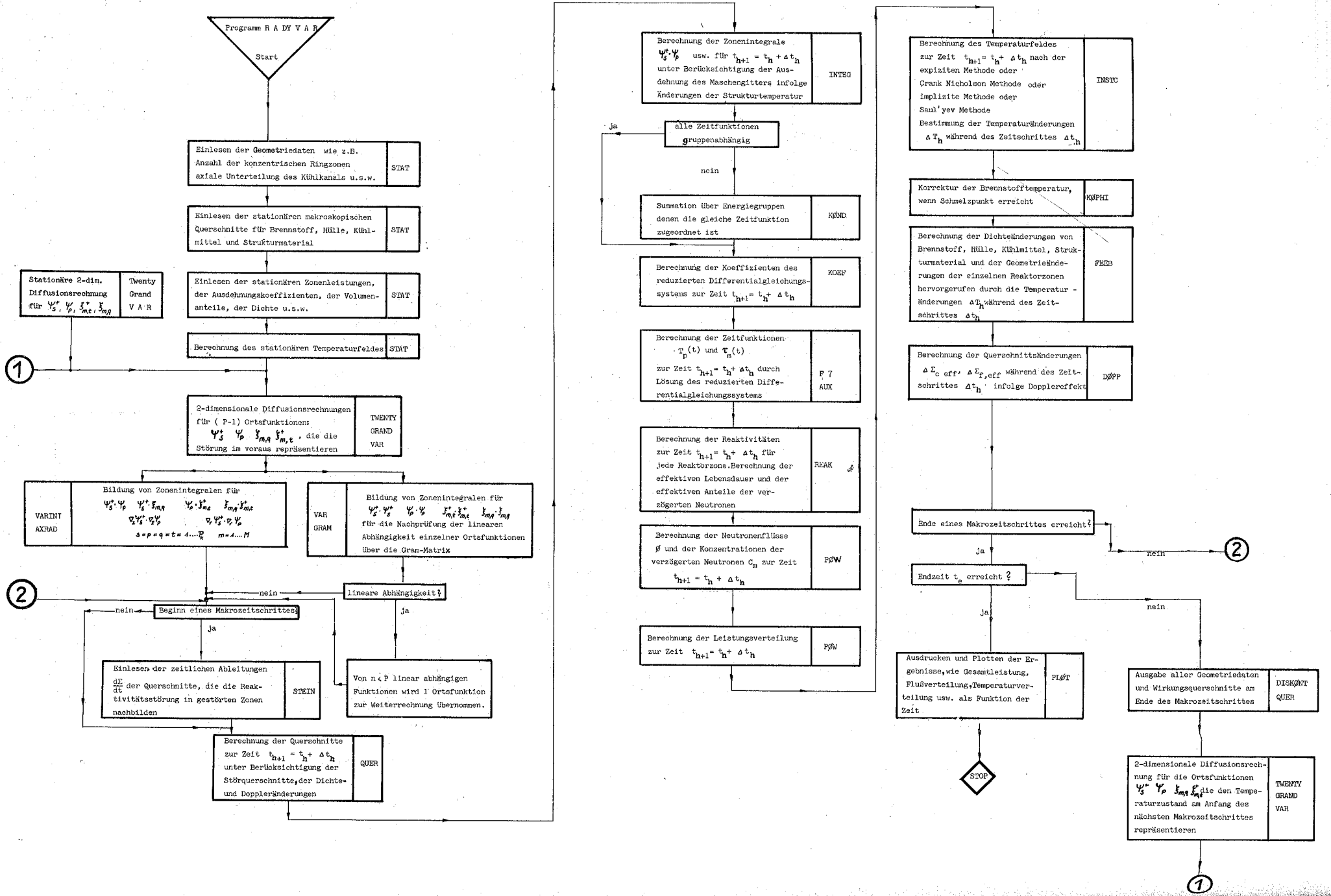
4.2.3 Auflösung des Differenzgleichungssystems für das Temperaturfeld im Brennstoff, in der Hülle und im Strukturmaterial

Nachdem die Kühlmitteltemperaturen $T_{K,m}^h$ an der Stelle z_m des Kühlkanals zur Zeit $t = t_n$ durch Auflösung der Differenzgleichungen (4.3) bis (4.9) für die eindimensionale Strömung im Kühlkanal bekannt sind, können die Strukturtemperaturen für jeden Gitterpunkt z_m durch explizite Auflösung der Gleichung (4.2.11) bestimmt werden. Die Brennstoff- und Hüllentemperaturen in der Ebene z_m erhält man durch Auflösung der gekoppelten Differenzgleichungen (4.2.1) bis (4.2.7) für alle $m = 1 \dots M$, nachdem diese in die Matrixform gebracht wurden. Wenn alle Temperaturen zur Zeit $t = t_n$ ermittelt sind, können aus den Temperaturänderungen während des Zeitschrittes Δt_n die Änderungen der Wirkungsquerschnitte und die Verschiebungen der Grenzen von Reaktorzonen nach den in Abschnitt 2.4 angegebenen Rückkoppelungsgleichungen berechnet werden.

5. Fließschema des Rechenganges

Die in den Kapiteln 3 und 4 beschriebenen numerischen Methoden sind auf die Anwendung digitaler Rechenmaschinen zugeschnitten. Für die Ausführung der in Kapitel 6 beschriebenen numerischen Rechnung wurde das Programmsystem RADYVAR [56] erstellt, dessen Fließschema mit dem dazu notwendigen Rechengang für die Bereitstellung der Eingabewerte im folgenden dargestellt wird. Die einzelnen Programmnamen werden in Kästchen getrennt angegeben. Die Programme sind in FORTRAN II für die IBM 7074 und die IBM 7094 geschrieben.





6. Ergebnisse

6.1 Beschreibung des berechneten Reaktors

Die Anwendung der in den Kapiteln 2 bis 4 entwickelten numerischen Verfahren wird an einem natriumgekühlten schnellen Brutreaktor gezeigt, bei dem das Herauslaufen eines konzentrischen Regelstabringes eine Leistungsexkursion verursacht.

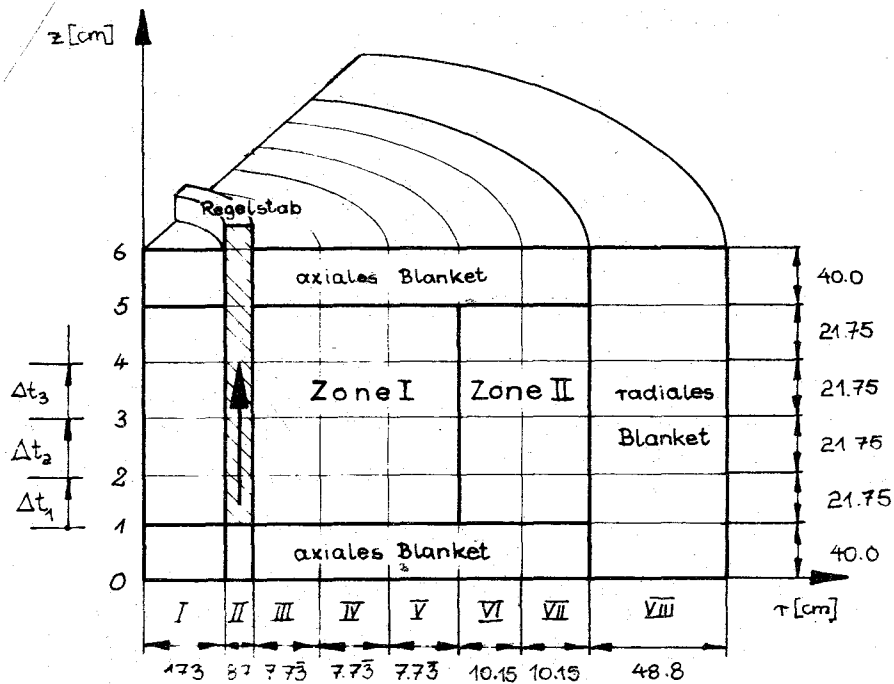


Abb. 6.0 Darstellung des Demonstrationsbeispiels

Der Reaktor ist in seiner Materialzusammensetzung und seinen geometrischen Abmessungen (Abb. 6.0 u. Tab. 6.1) dem geplanten 300 MWe Prototyp Na 2 [57] ähnlich. Um echt 2-dimensional rechnen zu können, wurden die Regelstäbe in einem konzentrischen Regelstabring zusammengezogen, der in der ersten Kernzone angeordnet ist. Die Kern- und Brutzonen einschließlich des Regelstabringes werden in 8 Kreisringzonen aufgeteilt. Jede Ringzone wird in 6 axiale Segmente unterteilt. Dadurch entsteht eine Aufteilung des Reaktors in 48 Zonen, für die mittlere Temperaturen, mittlere Temperaturänderungen, gemittelte Materialeigenschaften und mittlere makroskopische Wirkungsquerschnitte gelten.

An das Demonstrationsbeispiel werden folgende Forderungen gestellt:

Es sollen

- Flußverbeulungen während der Leistungsexkursion auftreten,
- der Reaktor während der Leistungsexkursion einen großen Temperaturbereich überstreichen,

Zusammensetzung des Reaktorkerns nach Abb.6.0 in Vol.°/o

	Kühlmittel	Struktur	Hülle	Brennstoff	Absorber
Kernzone I	0,465	0,096	0,114	0,335	-
Regelstabzone	0,538	0,221	0,05	-	0,193
Kernzone II	0,465	0,096	0,114	0,335	-
Radiale Brutzone	0,308	0,099	0,118	0,475	-
Axiale Brutzone	0,465	0,096	0,114	0,335	-

Stahl für Strukturmaterial und Hülle: X8 Cr Ni Nb 1613

Brennstoff: PuO_2/UO_2

Kernzone I Verhältnis $\frac{\text{Brutstoff}}{\text{Spaltstoff}}$ $\gamma = 5,0812$
Anreicherung $A = 0,1644$

Kernzone II Verhältnis $\frac{\text{Brutstoff}}{\text{Spaltstoff}}$ $\gamma = 2,7932$
Anreicherung $A = 0,2636$

Brutstoff: UO_2 Absorber B_4C

Lineare Ausdehnungskoeffizienten [$10^{-6}/^\circ\text{C}$]

Kühlmittel	Struktur	Hülle	Brennstoff	Absorber
93	21,5	21,5	12,9	12,9

Energiegruppenaufteilung und Spaltspektrum

Energiegruppe	obere Grenze	untere Grenze	
I	10,5 MeV	0,1 MeV	0,987
II	0,1 MeV	1 keV	0,013
III	1 keV	0,0252 eV	0,00

 β -Anteil der verzögerten Neutronengruppen

Gruppe	U 235	U 238	Pu 239 Pu 241	Pu 240 Pu 242
1	0,0016088	0,00222	0,000648	0,000801
2	0,0038140	0,00814	0,0011097	0,001442
3	0,000987	0,00440	0,000282	0,000418

 λ -Zerfallskonstante der verzögerten Neutronen [sec^{-1}]

Gruppe	U 235	U 238	Pu 239 Pu 241	Pu 240 Pu 242
1	0,02588	0,02855	0,02661	0,02763
2	0,20214	0,24452	0,20901	0,2192
3	1,56938	1,6832	1,4903	1,5507

Energiespektrum der verzögerten Neutronen nach Keepin [58]

Energiegruppe	verzögerte Gruppen		
l/m	1	2	3
I	0,89	0,88	0,94
II	0,11	0,12	0,06
III	0	0	0

c) die notwendigen Rechenzeiten in erträglichen Grenzen bleiben.

Diese Forderungen werden durch den folgenden angenommenen Störfall erfüllt:

Bei dem mit 50 MWth stationär betriebenen schnellen Brutreaktor (Abb.6.0) wird der Regelstabring mit konstanter Geschwindigkeit innerhalb 0,1 sec herausgezogen. Es wird mit maximal 3 kondensierten prompten Energiegruppen und 3 verzögerten Gruppen gerechnet. Bei Anwendung des Kantorowitsch-Verfahrens werden maximal 2 Schätzfunktionen verwendet. Die Leistungsexkursion wird über zwei Makrozeitschritte $\Delta \bar{t}_1$ und $\Delta \bar{t}_2$ verfolgt.

Obwohl die in Kap.5 beschriebenen Rechenprogramme für 6 Gruppen und 3 Schätzfunktionen ausgelegt sind, wurde die 3 Gruppen - und 2 Schätzfunktionen-darstellung im Hinblick auf eine übersichtliche Darstellung für den Vergleich der möglichen Näherungsverfahren ausgewählt. Die Kondensation der 3 Gruppen-Wirkungsquerschnitte erfolgt dabei mit den vorhandenen Zonenspektren aus 26 Gruppenquerschnitten (Kap.5) der 1-dimensionalen Rechnungen.

Folgende nach Kap. 3 und 4 mögliche Rechenmethoden werden angewendet und einander gegenübergestellt.

- 1) Punktkinetik mit gruppenunabhängigen Zeitfunktionen und ortsabhängiger Rückkoppelung. Die kritische Neutronenflußverteilung wird während der gesamten Leistungsexkursion (Makrozeitschritte $\Delta \bar{t}_1$ und $\Delta \bar{t}_2$) beibehalten.
- 2) Punktkinetik mit gruppenabhängigen Zeitfunktionen und ortsabhängiger Rückkoppelung. Die kritische Neutronenflußverteilung wird beibehalten bis der Regelstabring um 1/4 seiner wirksamen Höhe bis zum Markierungspunkt 2 (Abb.6.0) herausgezogen ist. Am Ende dieses ersten Makrozeitschrittes $\Delta \bar{t}_1$ erfolgt eine Neuberechnung der Flußverteilung mit den nun vorhandenen Wirkungsquerschnitten und Geometriedaten. Mit diesen neuen Daten wird der Makrozeitschritt $\Delta \bar{t}_2$ begonnen, der bis zum Herausziehen des Regelstabrings um 1/2 seiner wirksamen Höhe (Markierungspunkt 3) reicht. Dieser Fall wird im folgenden als "statische Approximation" bezeichnet.
- 3) Ortsabhängige Kinetik mit gruppenunabhängigen Zeitfunktionen (P=2) und ortsabhängiger Rückkoppelung. Als Ortsfunktionen während des ersten Makrozeitschrittes werden die Verteilungsfunktionen des stationären Zustandes und diejenigen der Regelstabstellung am Markierungspunkt 2 verwendet.

- 4) Ortsabhängige Kinetik mit gruppenabhängigen Zeitfunktionen ($P=2$) und ortsabhängiger Rückkoppelung. Die Ortsfunktionen während des ersten Makrozeitschrittes $\Delta \bar{t}_1$ (Markierungspunkt 1 bis 2) werden wie unter 3) bestimmt. Wenn der Regelstabring bis zum Markierungspunkt 2 hochgezogen ist, erfolgt eine Neuberechnung der Ortsfunktionen für den nun herrschenden Temperaturzustand. Im anschließenden Makrozeitschritt $\Delta \bar{t}_2$ werden die Neuberechneten und die zum Markierungspunkt 3 gehörenden Ortsfunktionen verwendet.

6.2 Diskussion der Ergebnisse

Mit Beginn des Herausziehens des Regelstabringes wird Absorbermaterial B_4C aus der zweiten axialen Zone des Regelstabkanals II herausgenommen. Dadurch steigt die Reaktivität an, der Reaktor wird überkritisch. Es kommt zu einem zunächst langsamen Anstieg der Reaktorleistung. Bis zum Zeitpunkt $t_{ü1}$ ist soviel positive Reaktivität eingelaufen, daß der Reaktor zum erstenmal prompt überkritisch wird (Abb. 6.2a). Es kommt zu einem sehr scharfen Leistungsanstieg (Abb. 6.1a), dem eine schnelle Erhöhung der Brennstofftemperaturen in allen Ringzonen I bis VIII folgt (Abb. 6.8a). Die Hüllen-, Kühlmittel- und Strukturmaterialtemperaturen bleiben zunächst fast unverändert, da die Wärmeleitung aus dem Brennstoff über die Hülle zum Kühlmittel und dem Strukturmaterial mit im Sekundenbereich liegenden Zeitkonstanten erfolgt. Durch die Erhöhung der Brennstofftemperatur wird über die axiale Brennstoffausdehnung und den Dopplereffekt negative Reaktivität (Feedback) frei, die zu einem schnellen Abbau der Gesamtreaktivität führt (Abb. 6.2a). Der Reaktor wird unterprompt-kritisch- die gesamte Reaktorleistung fällt etwas ab. Dieser Vorgang wiederholt sich bei weiterem Herauslaufen des Regelstabrings mehrmals (Abb. 6.1a bis 6.1c).

6.2.1 Verwendung gruppenabhängiger und gruppenunabhängiger Zeitfunktionen

Durch einen Vergleich der Fälle 1 und 2 sowie 3 und 4 sollten die Abweichungen bei der Verwendung gruppenabhängiger und gruppenunabhängiger Zeitfunktionen für die Punktkinetik und die ortsabhängige Kinetik herausgestellt werden. Abb. 6.1a zeigt, daß solche Abweichungen auf den Leistungsverlauf während des ersten Makrozeitschrittes $\Delta \bar{t}_1$ von untergeordneter Bedeutung sind. Die gleiche Aussage gilt für den Verlauf der Reaktivitäten und der Temperaturen.

6.2.2 Abweichungen zwischen Punktkinetik und ortsabhängiger Kinetik

Der zeitliche Verlauf der gesamten Reaktorleistung Q_{th} führt bei der ortsabhängigen Kinetik (Fall 3 und 4) zu einem stärkeren Anstieg als bei der Punktkinetik (Abb. 6.1a). Es kommt für die Fälle 3 und 4 bei $t_{ü_1} = 15,9$ msec zu einer ersten Leistungsspitze, die einen starken Anstieg der Brennstofftemperaturen (Abb. 6.8a) zur Folge hat. Die dadurch freiwerdende negative Reaktivität (Abb. 6.2a) führt zunächst zu einer Leistungsabnahme. Die durch das kontinuierliche Herausziehen des Regelstabrings weiter einlaufende positive Störreaktivität verursacht jedoch schon bei $t_{ü_2} = 23,4$ eine zweite Leistungsspitze, die die Brennstofftemperaturen wieder stark ansteigen läßt. Die Punktreaktorkinetik (Fall 1 und 2) ergibt dagegen einen schwächeren Leistungsanstieg, der erst bei $t_{ü_1} = 19,4$ msec zu einer ersten etwas geringeren Leistungsspitze führt und die zweite Leistungsspitze erst im zweiten Makrozeitschritt Δt_2 bei $t_{ü_2} = 28,9$ msec erreicht (Abb. 6.1b). Der zeitliche Verlauf der Brennstofftemperaturen ist in diesem Millisekundenbereich im wesentlichen durch das Zeitintegral über die Leistung gegeben. Daher liegen die maximalen Brennstofftemperaturen der Ringzone VI (Abb. 6.8a) am Ende des ersten Makrozeitschrittes $t_1 = 25,39$ msec im Falle der ortsabhängigen Kinetik (Fall 3 und 4) mit 1950°C um 1025°C höher als bei der Punktreaktorkinetik.

Ein Vergleich der Reaktivitäten (Abb. 6.2a) zeigt, daß am Ende des ersten Makrozeitschrittes Δt_1 bei der Punktreaktorkinetik insgesamt $1,85 \text{ } \beta$ Störreaktivität (mittlere Reaktivitätsrampe $73,5 \text{ } \beta/\text{sec}$), bei der ortsabhängigen Kinetik dagegen insgesamt $2,85 \text{ } \beta$ eingelaufen sind, was einer mittleren Reaktivitätstampe von $113 \text{ } \beta/\text{sec}$ entspricht. Diese Unterschiede sind im wesentlichen auf die sich während des ersten Makrozeitschrittes bei der ortsabhängigen Kinetik laufend ändernde örtliche Neutronenflußverteilung im Regelstabling zurückzuführen. Nach Henry [5,6] ist die Reaktivität $\rho(t)$ gegeben durch:

$$\rho(t) = \frac{1}{\beta(t)} \cdot \int \int \int_{\text{Regelst.}} dV \left\{ \sum_{l=1}^L -\nabla \phi_{o,l}^+(\vec{r}) \delta D_{l,1}(\vec{r},t) \nabla \phi_1(\vec{r},t) + \right.$$

$$\left. - \sum_{l=1}^L \phi_{o,l}^+(\vec{r}) \cdot \delta \Sigma_{\text{rem},l}(\vec{r},t) \phi_1(\vec{r},t) + \sum_{l=1}^L \phi_{o,l}^+(\vec{r}) \sum_{n=1}^{l-1} \Sigma^{n-1}(\vec{r},t) \phi_n(\vec{r},t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^L X_l^* \phi_{o,l}^+(\vec{r}) \sum_{n=1}^L \delta \nu \Sigma_{f,n}(\vec{r},t) \phi_n(\vec{r},t) \right\}$$

wobei:

$$X_l^* = (1-\beta) \cdot X_l + \sum_{m=1}^M f_{m,l} \cdot \beta_m$$

Der effektive Anteil der verzögerten Neutronen:

$$\beta_{\text{eff}}(t) = \frac{1}{F(t)} \sum_{m=1}^M \iiint_R dV \sum_{l=1}^L \phi_{o,l}^+(\vec{r}) \cdot \beta_m \cdot f_{m,l} \sum_{n=1}^L \nu \Sigma_{f,n}(\vec{r},t) \phi_n(\vec{r},t)$$

Die effektive Lebensdauer der prompten Neutronen:

$$l_{\text{eff}}(t) = \frac{1}{F(t)} \iiint_R dV \sum_{l=1}^L \phi_{o,l}^+(\vec{r}) \cdot \frac{1}{v_l} \phi_l(\vec{r},t) ,$$

wobei die Konstante F durch

$$F(t) = \iiint_R dV \sum_{l=1}^L \left[\lambda_1(1-\beta) + \sum_{m=1}^M f_{m,l} \cdot \beta_m \right] \phi_{o,l}^+(\vec{r}) \sum_{n=1}^L \nu \Sigma_{f,n}(\vec{r},t) \phi_n(\vec{r},t)$$

wiedergegeben wird.

$\phi_o^+(\vec{r})$ bedeutet die stationäre adjungierte Neutronenflußverteilung, $\phi(\vec{r},t)$ die sich während der Leistungsexkursion laufend verändernde Neutronenflußverteilung.

Bei Anwendung der ortsabhängigen Kinetik (Fall 3 und 4) ändert sich die Neutronenflußverteilung $\phi(\vec{r},t)$ durch das Herausziehen des Regelstabbrings in der zweiten axialen Zone des Regelstabkanals so, daß die Flußeinbeulung für alle 3 Neutronengruppen nach und nach aufgehoben wird; d.h. $\phi(\vec{r},t)$ wird in diesem Regelstabbereich größer (Abb. 6.3a bis 6.3c). Die Größe F ändert sich dadurch nur geringfügig, da die Integration über den gesamten Reaktorbereich zu erstrecken ist. Noch geringer ist die Änderung der integralen Größen β_{eff} und l_{eff} (Tabelle 6.2), da die Integration ebenfalls über den gesamten Reaktorbereich läuft und die Änderung der Flußverbeulung sowohl im Zähler als auch im Nenner berücksichtigt wird (Tab. 6.2). Dagegen ist der Integrationsbereich für $S(t)$ im Zähler nur über die zweite axiale Zone des Regelstabkanals zu erstrecken. Da sich $\phi(\vec{r},t)$ hier nach und nach vergrößert (Abb. 6.3a bis 6.3c) macht $S(t)$ diese relativ große Änderung von $\phi(\vec{r},t)$ voll mit. $\phi(\vec{r},t)$ wird in den Fällen 3 und 4 durch 2 Schätzfunktionen

$$\phi(\vec{r},t) = \Psi_1(\vec{r}) \cdot T_1(t) + \Psi_2(\vec{r}) \cdot T_2(t)$$

angenähert, wobei $\Psi_1(\vec{r})$ während des ersten Makrozeitschrittes $\Delta \bar{t}_1$ identisch $\phi_o(\vec{r})$ ist. Die Punktreaktorkinetik verwendet dagegen statt $\phi(\vec{r},t)$ nur die kritische Neutronenflußverteilung $\phi_o(\vec{r})$, während des gesamten Makrozeitschrittes $\Delta \bar{t}_1$ (Gln. 3.1.24 und 3.1.25). Dadurch entsteht bei

der Punktreaktorkinetik eine dauernde Unterschätzung der Reaktivität $\beta(t)$ gegenüber der ortsabhängigen Kinetik (Abb. 6.2a).

Tabelle 6.2

Änderungen von β_{eff} und l_{eff} während der Leistungsexkursion

Fall/Zeit		Makrozeitschritt $\Delta \bar{t}_1$		Makrozeitschritt $\Delta \bar{t}_2$		
		t = 0	t = 25,39 msec	t = 35,64 msec	t = 39,55 msec	
Fall 1	β_{eff}	$3,61365 \cdot 10^{-3}$	—————→			
	l_{eff}	$4,02471 \cdot 10^{-7}$	—————→			
Fall 2	β_{eff}	$3,61350 \cdot 10^{-3}$	—————→	$3,61911 \cdot 10^{-3}$	—————→	
	l_{eff}	$4,01322 \cdot 10^{-7}$	—————→	$4,14268 \cdot 10^{-7}$	—————→	
Fall 3	β_{eff}	$3,61343 \cdot 10^{-3}$	$3,60990 \cdot 10^{-3}$	—	—	
	l_{eff}	$4,01585 \cdot 10^{-7}$	$4,09678 \cdot 10^{-7}$	—	—	
Fall 4	β_{eff}	$3,61369 \cdot 10^{-3}$	$3,6141 \cdot 10^{-3}$	$3,62048 \cdot 10^{-3}$	$3,61935 \cdot 10^{-3}$	
	l_{eff}	$4,01333 \cdot 10^{-7}$	$4,06485 \cdot 10^{-7}$	$4,14564 \cdot 10^{-7}$	$4,14167 \cdot 10^{-7}$	

Die Abb. 6.4 gibt den zeitlichen Verlauf der Zeitfunktionen $T(t)$ für die Punktkinetik mit einer gruppenunabhängigen Zeitfunktion (Fall 1) und für die ortsabhängige Kinetik mit gruppenunabhängigen Zeitfunktionen $T_1(t)$ und $T_2(t)$ (Fall 3) während des ersten Makrozeitschrittes $\Delta \bar{t}_1$ wieder. Im Falle 1 ist $T(t)$ dem Verlauf der gesamten thermischen Reaktorleistung Q_{th} (Abb. 6.1a) proportional. Im Falle 3 erkennt man, daß

$$\phi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}) \cdot T_1(t) + \psi_2(\vec{r}) \cdot T_2(t)$$

am Anfang des Makrozeitschrittes $\Delta \bar{t}_1$ allein durch $T_1(t)$ (Anfangsbedingung) und am Ende von $\Delta \bar{t}_1$ im wesentlichen durch $T_2(t)$ wiedergegeben wird. Die örtliche Neutronenflußverteilung läuft von der Anfangsverteilung $\psi_1(\vec{r}) = \phi_0(\vec{r})$ in Flußverteilungen über, die das Funktional (Gln. (3.1.9) und (3.1.13) unter Benutzung von $\psi_1(\vec{r})$ und $\psi_2(\vec{r})$ stationär machen und dazu am Ende von $\Delta \bar{t}_1$ im wesentlichen die Schätzfunktion $\psi_2(\vec{r})$ verwenden. Wenn $\psi_2(\vec{r})$ im voraus als exakte Neutronenflußverteilung für das Ende von $\Delta \bar{t}_1$ bekannt wäre und verwendet würde, müßte $T_1(\Delta \bar{t}_1) = 0$ sein.

In den Abb. 6.5a bis 6.5c sind die Zeitfunktionen $T_1(t)$ und $T_2(t)$ für den Fall 4: ortsabhängige Kinetik mit 3 gruppenabhängigen Zeitfunktionen und 2 Schätzfunktionen dargestellt. Sie zeigen im wesentlichen den gleichen Verlauf wie die Abb. 6.4. Die Zeitfunktionen $T_1^{(3)}(t)$ und $T_2^{(3)}(t)$ der dritten Energiegruppe (Abb. 6.5c) besitzen eine etwas stärkere Tendenz, gegen Ende von $\bar{\Delta t}_1$ die Flußverteilung $\phi_3(\vec{r}, t)$ durch $\psi_2^{(3)}(\vec{r}) \cdot T_2^{(3)}(t)$ anzunähern.

In den Abb. 6.3a bis 6.3c sind mit Hilfe dieser Zeitfunktionen die Verteilungsfunktionen des Neutronenflusses in den 3 Energiegruppen für den Anfang $t = 0$, für $t = 18,066$ msec und das Ende des ersten Makrozeitschrittes $\bar{\Delta t}_1 = 25,39$ msec aufgezeichnet worden. Die Verteilungsfunktionen gelten für einen axialen Schnitt durch die Mitte der axialen Zone 2. Die Abnahme der Flußverbeulung in den Energiegruppen 1 und 2 und die Aufwölbung des Neutronenflusses der Energiegruppe 3 (Absorber wird durch Natrium ersetzt) wird durch die Rechnung gut wiedergegeben.

Abb. 6.6 gibt die zeitliche Änderung der Spaltratenverteilung für den gleichen axialen Schnitt zu verschiedenen Zeiten wieder.

Die Zeitfunktionen $\tau_{m,1}(t)$ und $\tau_{m,2}(t)$ zeigen einen ähnlichen zeitlichen Verlauf wie die Zeitfunktionen $T_1(t)$ und $T_2(t)$ während $\bar{\Delta t}_1$. In Abb. 6.7 wurde die örtliche Verteilungsfunktion für die verzögerte Gruppe 2 dargestellt. Der Zerfall der Mutterkerne der verzögerten Neutronen macht sich in dem betrachteten Millisekundenbereich noch nicht bemerkbar, so daß die örtliche Verteilungsfunktion einen ähnlichen Verlauf hat wie die Spaltratenverteilung.

Beim Übergang vom Makrozeitschritt $\bar{\Delta t}_1$ zum Makrozeitschritt $\bar{\Delta t}_2$ werden die Schätzfunktionen ausgetauscht. Die neue dem Temperaturzustand des Reaktors an der Übergangsstelle t_1 entsprechende Schätzfunktion besitzt durch die Temperaturerhöhung am Außenrand der Reaktorzone 1 und am Innenrand der Reaktorzone 2 nun eine etwas flachere Verteilung (Abb. 6.3a bis 6.3c).

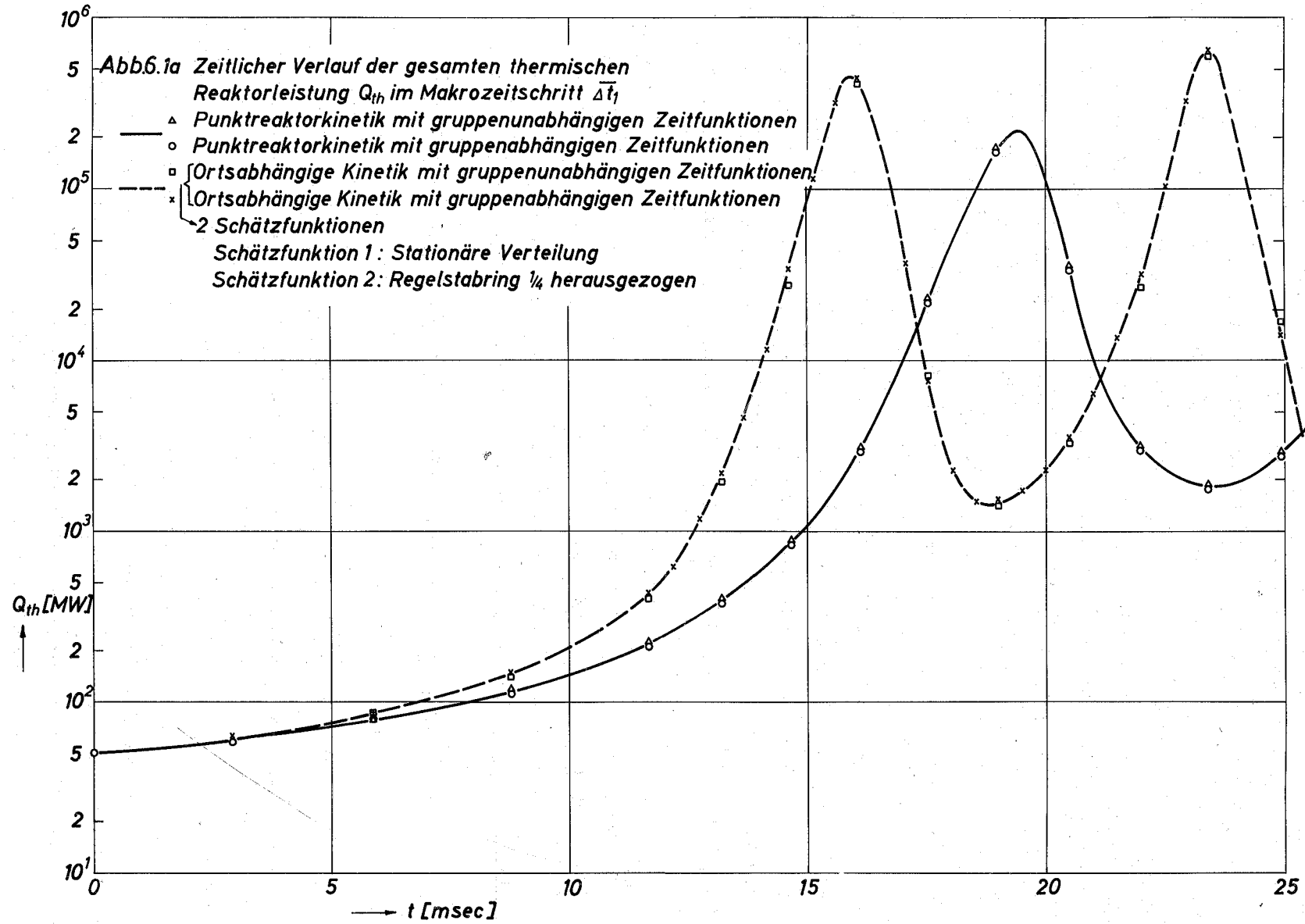
Dadurch wird die negative Feedbackreaktivität an der Übergangsstelle t_1 etwas erhöht. Die Verteilungsfunktion in der Regelstabzone war dagegen schon am Ende von $\bar{\Delta t}_1$ gut durch $\psi_2(\vec{r})$ des ersten Makrozeitschrittes wiedergegeben worden und ändert sich durch die Neuberechnung nicht mehr merklich. Deshalb ändert sich die Störreaktivität nicht merklich. Durch die geringe Erhöhung der Feedbackreaktivität wird jedoch die Gesamtreaktivität (Abb. 6.2a) etwas herabgedrückt (Sprungstelle). Dies macht sich im Leistungsverlauf durch einen zunächst stärkeren Abfall der gesamten thermischen Leistung bemerkbar (Abb. 6.1b). Die Zeitfunktionen $T_1(t)$ und $T_2(t)$ (Abb. 6.5d bis 6.5f) zeigen

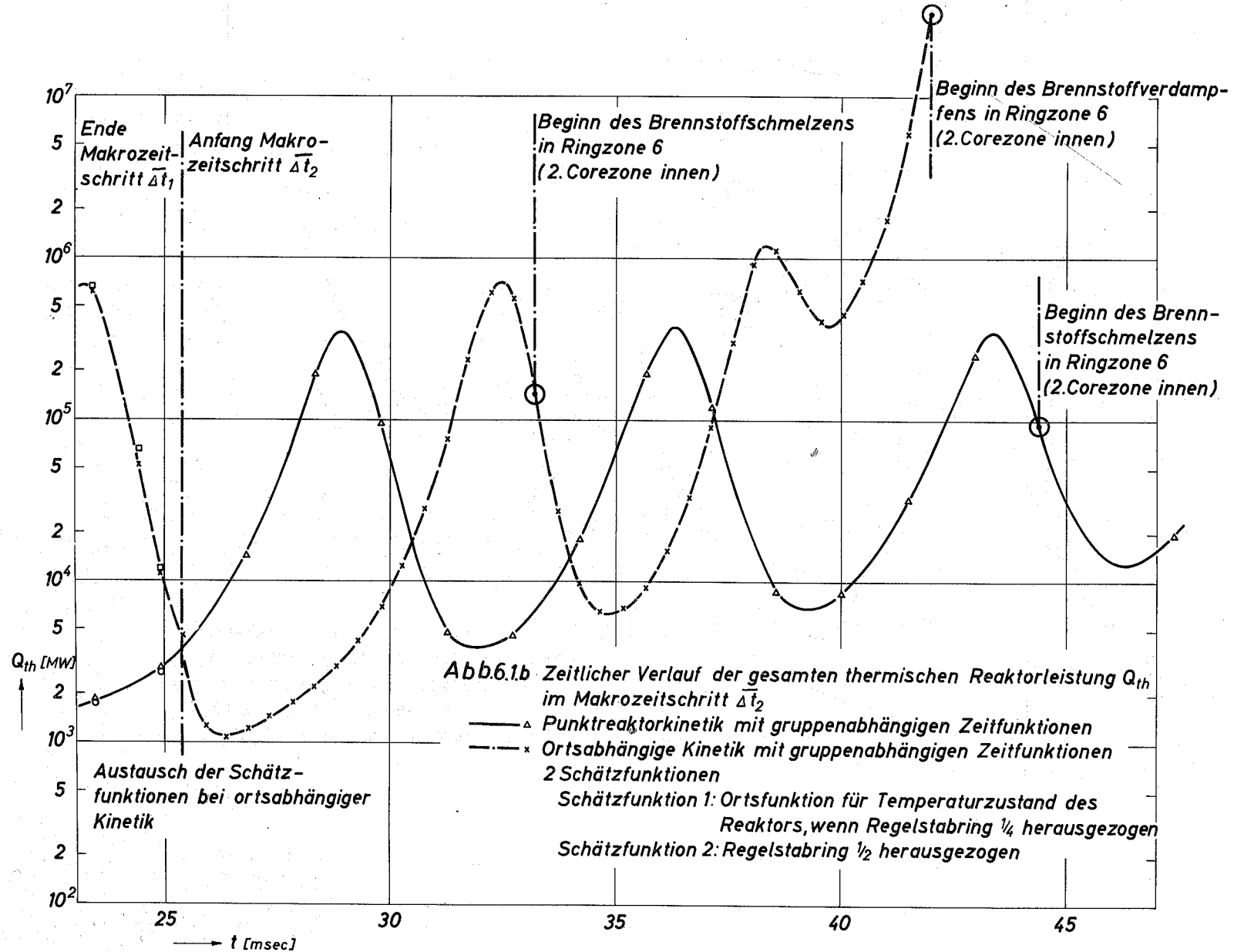
nach einem Sprung an der Übergangsstelle im wesentlichen ein ähnliches Verhalten wie während $\bar{\Delta}t_1$. Die Spaltratenverteilung und die Verteilung der Mutterkerne der verzögerten Neutronen sind in Abb. 6.6 und 6.7 dargestellt. Die Punktreaktor-kinetik behält dagegen die stationäre Verteilung $\phi_0(\vec{r})$ bei, was zu einer weiteren Unterschätzung des Reaktivitätsverlaufes führt. Als Folge wird die Schmelztemperatur in der Ringzone VI bei der ortsabhängigen Kinetik nach 33,2 msec erreicht (Abb. 6.8b), während bei der Punktreaktor-kinetik erst nach 44,4 msec Brennstoffschmelzen eintritt. Zu diesem Zeitpunkt hat jedoch nach der ortsabhängigen Kinetik (Fall 4) bereits bei 42 msec in der Ringzone VI das Verdampfen des Brennstoffes eingesetzt, d.h. der Reaktor wird zerstört.

6.2.3 Vergleich zwischen Punkt-kinetik und der "statischen Approximation"

Am Ende des Makrozeitschrittes $\bar{\Delta}t_1$ werden auch für den Fall 2 mit Punkt-kinetik und 3 gruppenabhängigen Zeitfunktionen die dem nun vorhandenen Temperaturzustand entsprechenden Wirkungsquerschnitte und Geometriedaten der Rechnung entnommen und mit Hilfe einer 2-dimensionalen Diffusionsrechnung die neue Neutronenflußverteilung bestimmt.

Die Verwendung dieser neuen Verteilungsfunktion, die in der zweiten axialen Zone des Regelstabkanals nun plötzlich größere Flußwerte (keine Flußeinbeulung) besitzt (Abb. 6.9a bis 6.9c), führt zu einem Reaktivitätssprung, der für die Störreaktivität $\approx 1 \text{ \$}$ ausmacht. Da auch die Feedbackreaktivitäten durch eine etwas flachere und erhöhte Flußverteilung gewichtet werden, ergibt sich für die Gesamtreaktivität ein Sprung von $+ 0,9 \text{ \$}$ (Abb. 6.2b). Die "statische Approximation" holt also den durch die Punktreaktor-kinetik (Fall 1 und 2) gegenüber der ortsabhängigen Kinetik (Fall 3 und 4) während des gesamten ersten Makrozeitschrittes $\bar{\Delta}t_1$ unterschätzten Reaktivitätsbeitrag in einem Sprung an der Übergangsstelle t_1 nach. Dadurch entsteht sofort eine scharfe Leistungsspitze (Abb. 6.1c), die die Brennstofftemperatur in der Ringzone VI in sehr kurzer Zeit bei $t = 26,8 \text{ msec}$ und früher als im Falle 4 zum Schmelzen bringt (Abb. 6.8c). Die durch die starke Temperaturerhöhung aufgebaute negative Feedbackreaktivität bringt die Gesamtreaktivität in sehr kurzer Zeit auf einen negativen Betrag (Abb. 6.2b). Es kommt aber bei $t_3 = 37,9 \text{ msec}$ noch einmal zu einer Leistungsspitze und bei $t = 44,2 \text{ msec}$ zur Zerstörung des Reaktors infolge Brennstoffverdampfens im Kanal VI. Während des Makrozeitschrittes $\bar{\Delta}t_2$ wird die einlaufende Störreaktivität wieder wie während des ersten Makrozeitschrittes $\bar{\Delta}t_1$ unterschätzt. Sie könnte erst an der Übergangsstelle t_2 wieder nachgeholt werden.





70

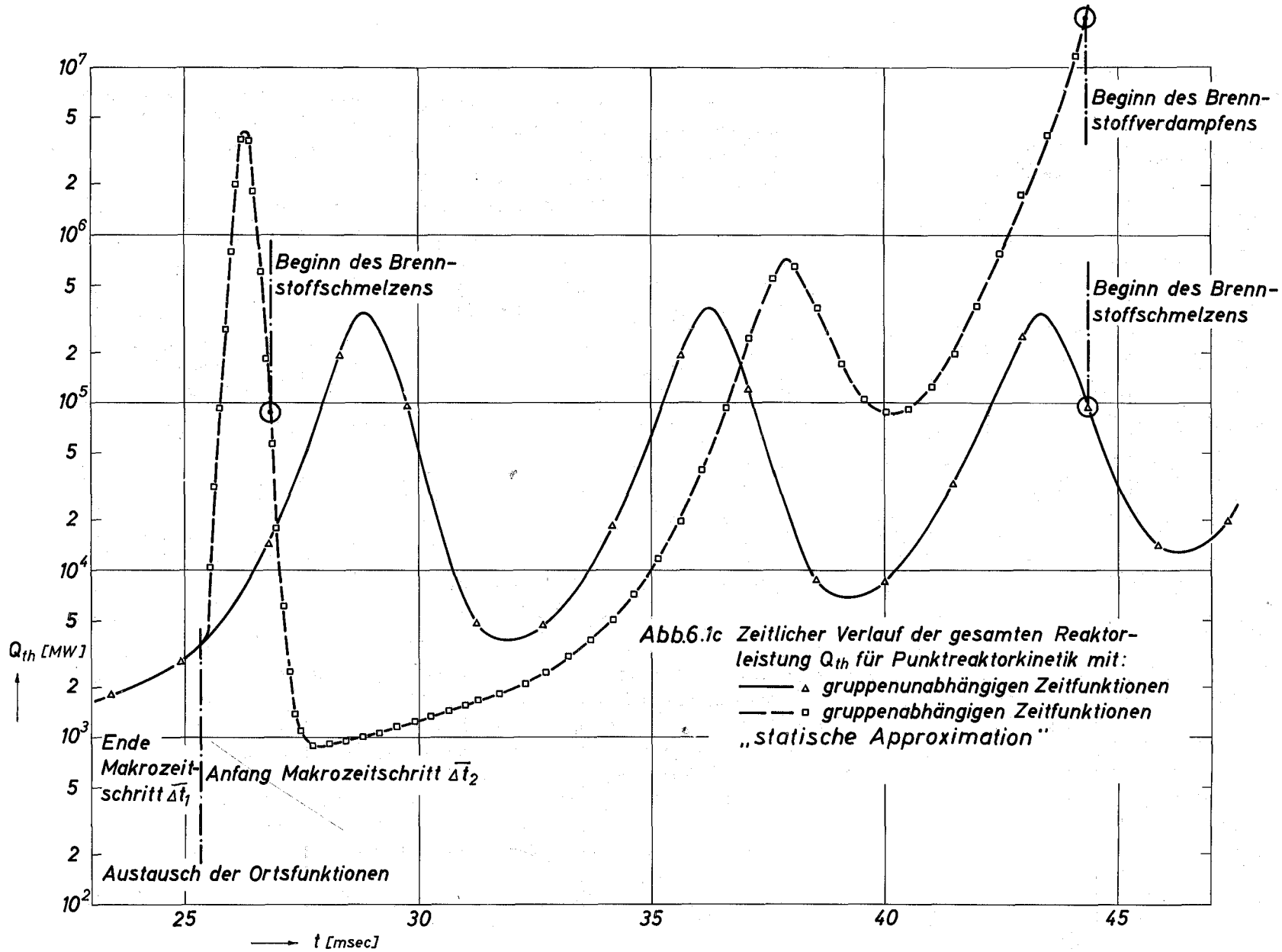


Abb.6.1c Zeitlicher Verlauf der gesamten Reaktorleistung Q_{th} für Punktreaktorkinetik mit:
 — Δ gruppenunabhängigen Zeitfunktionen
 - - \square gruppenabhängigen Zeitfunktionen
 „statische Approximation“

Abb. 6.2.a

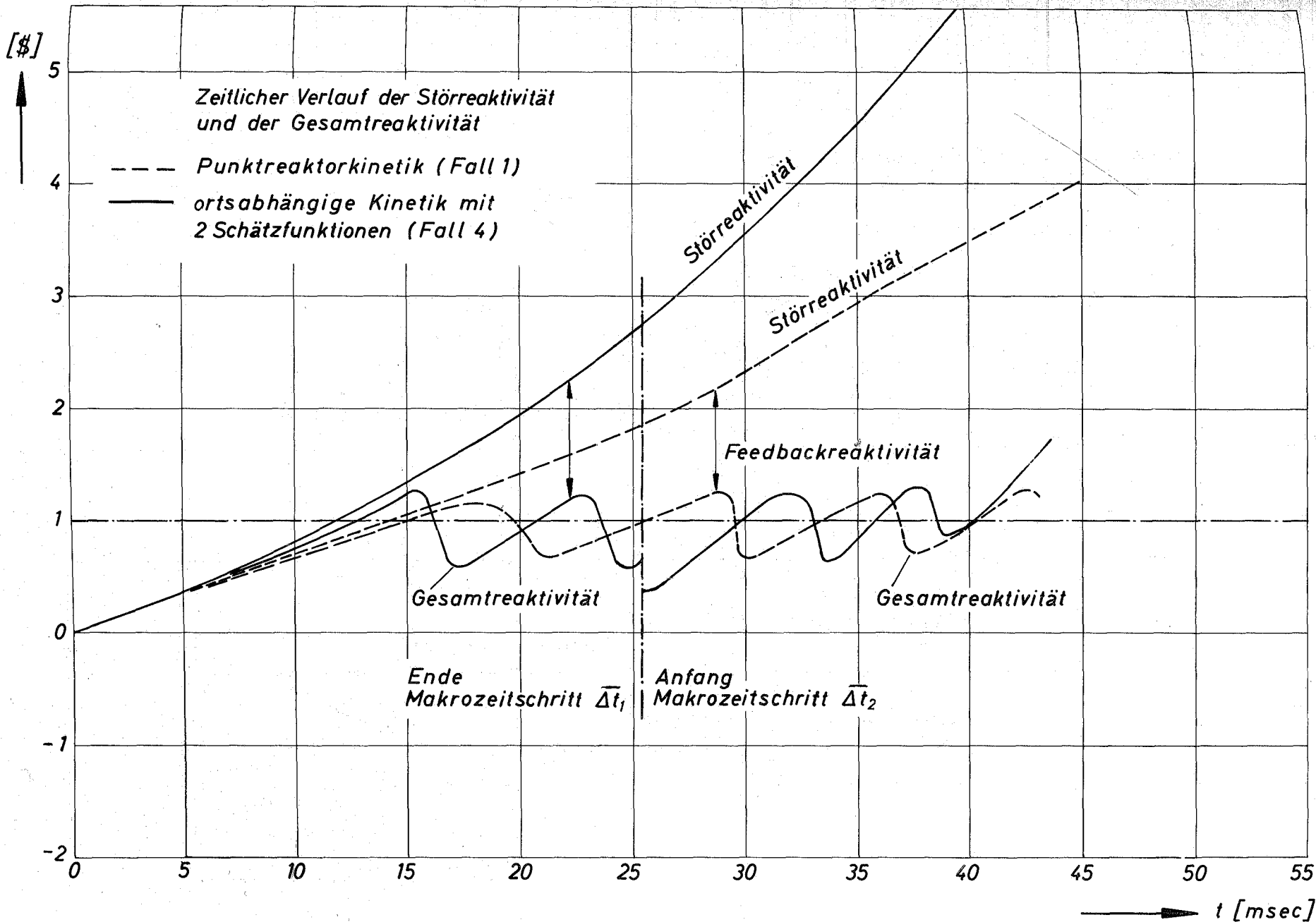
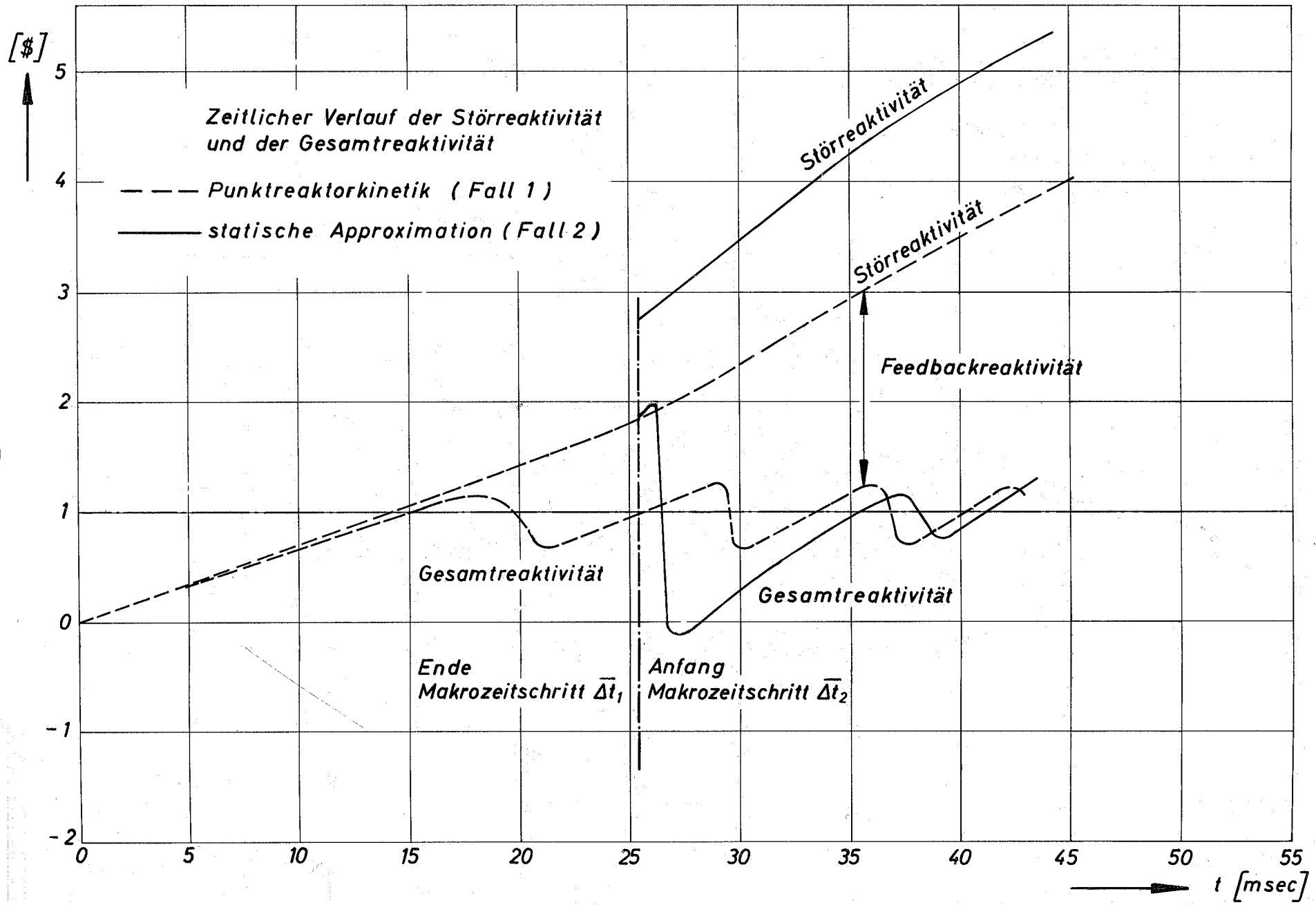
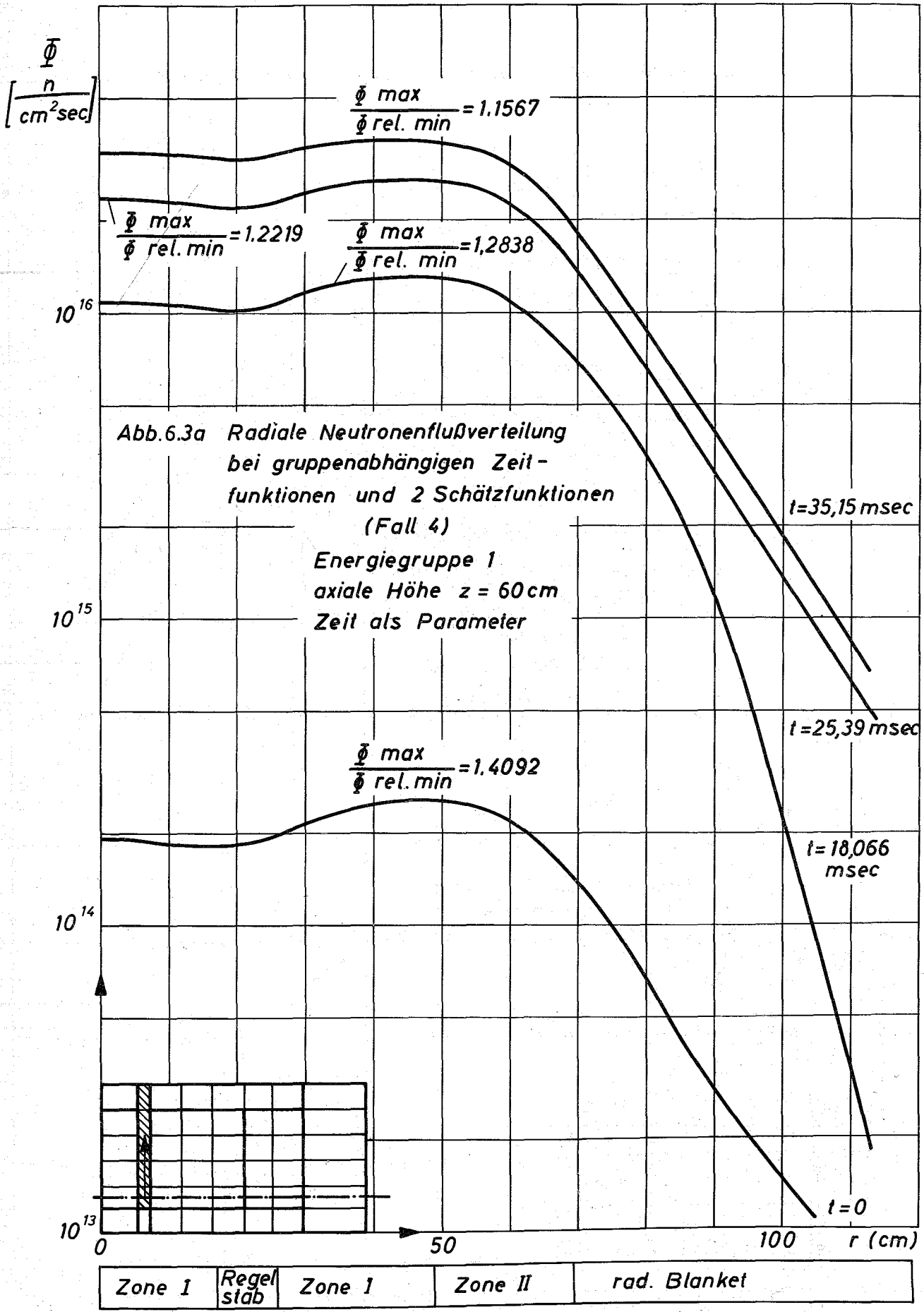


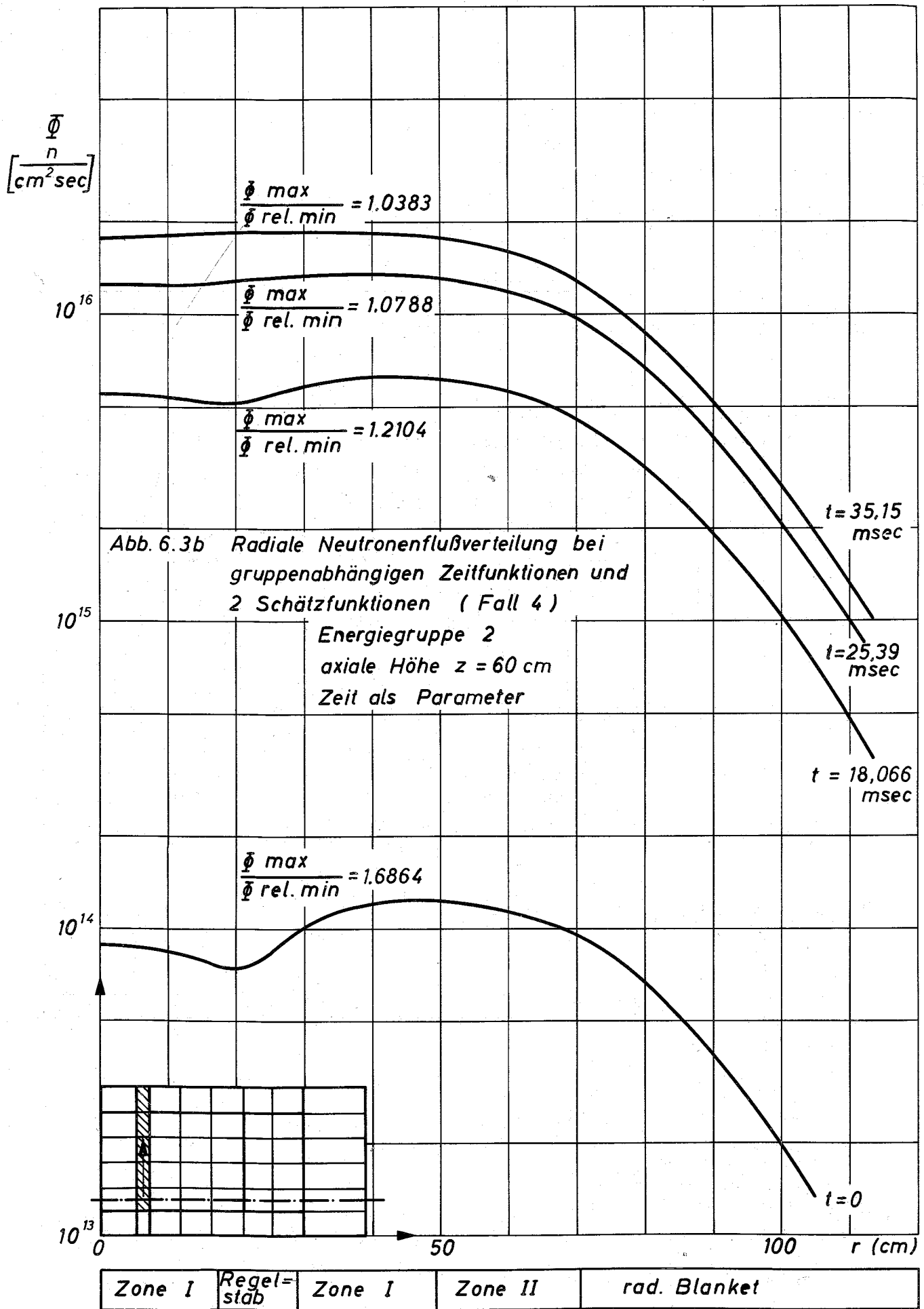
Abb. 6.2. b

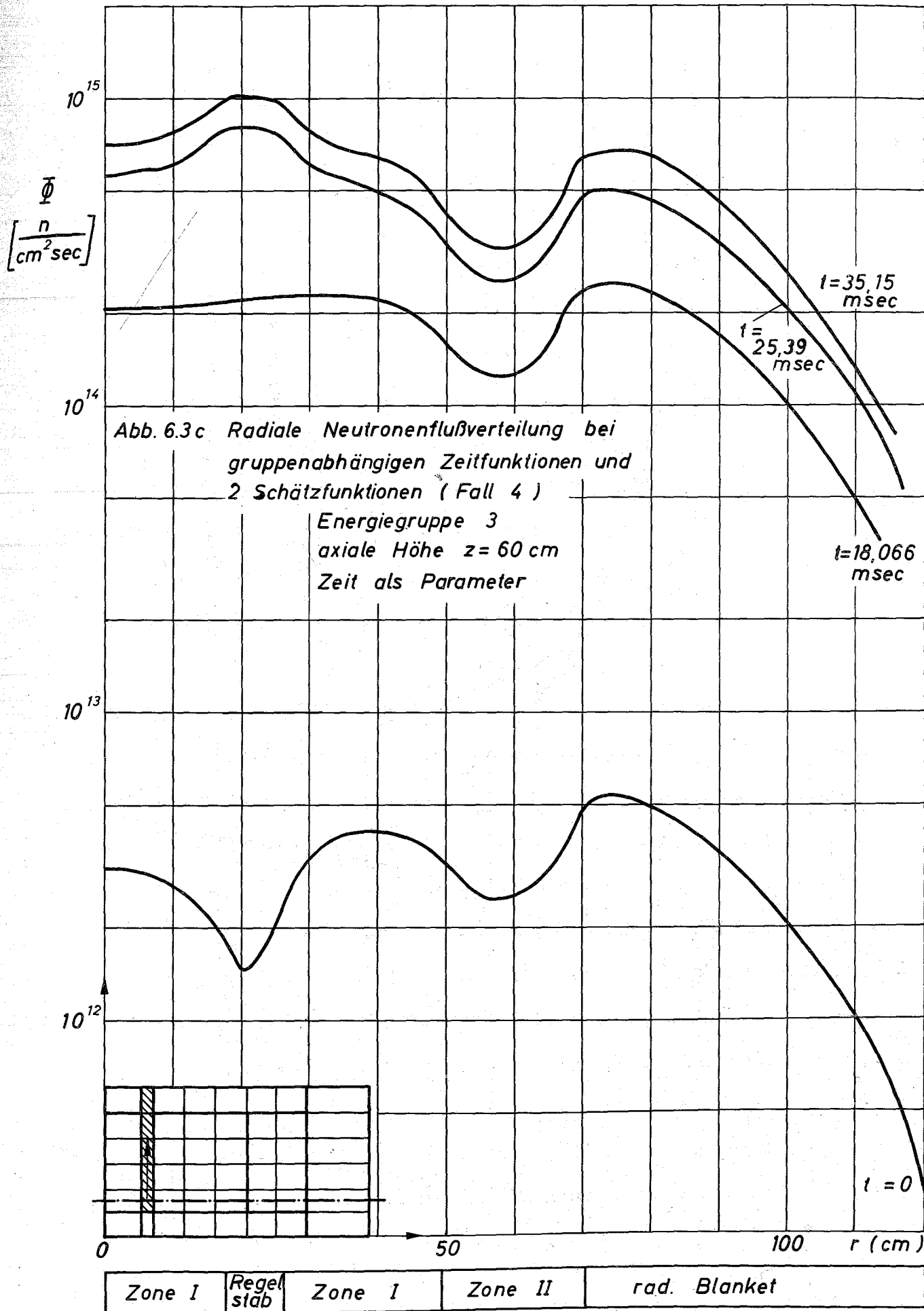


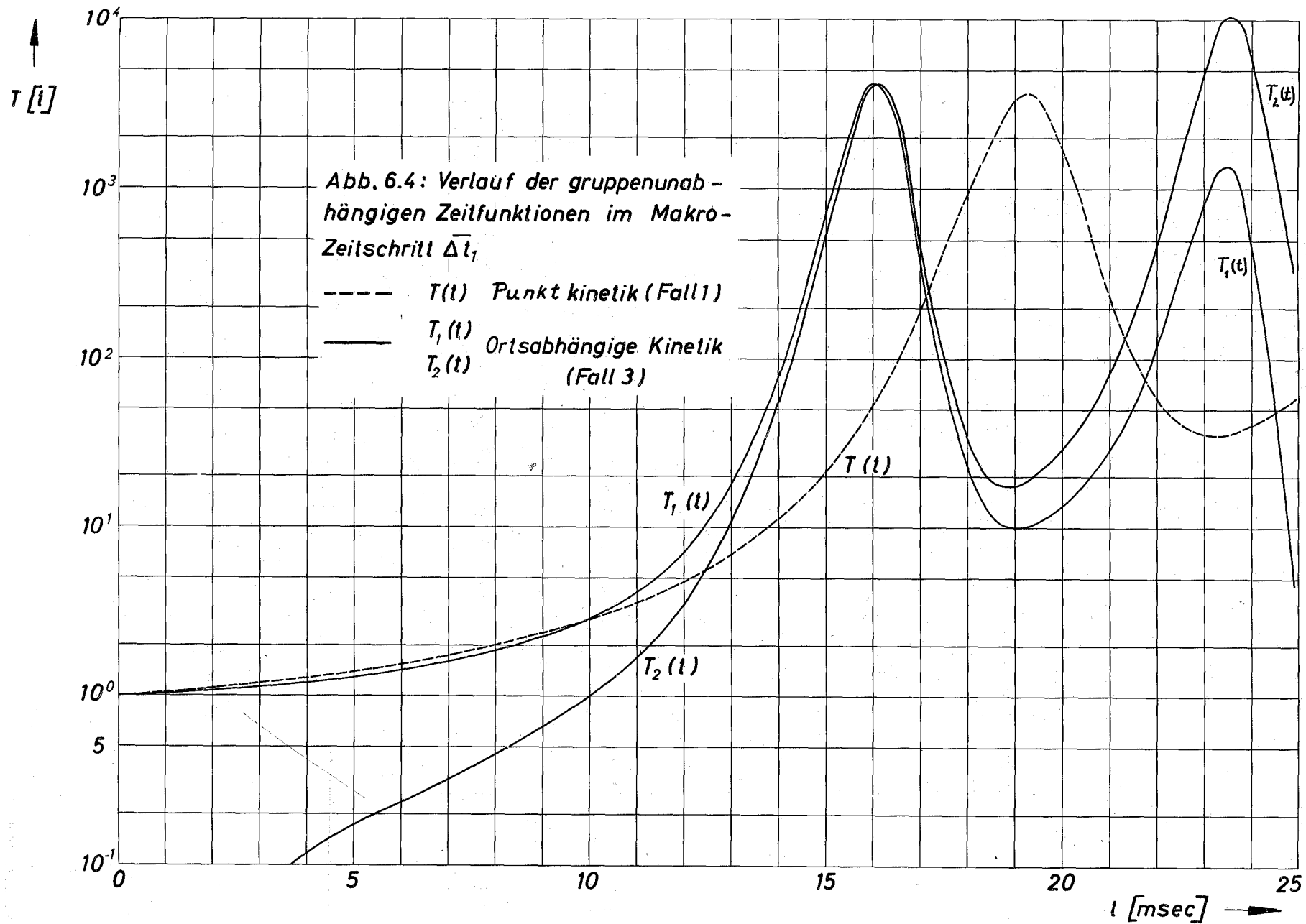
72

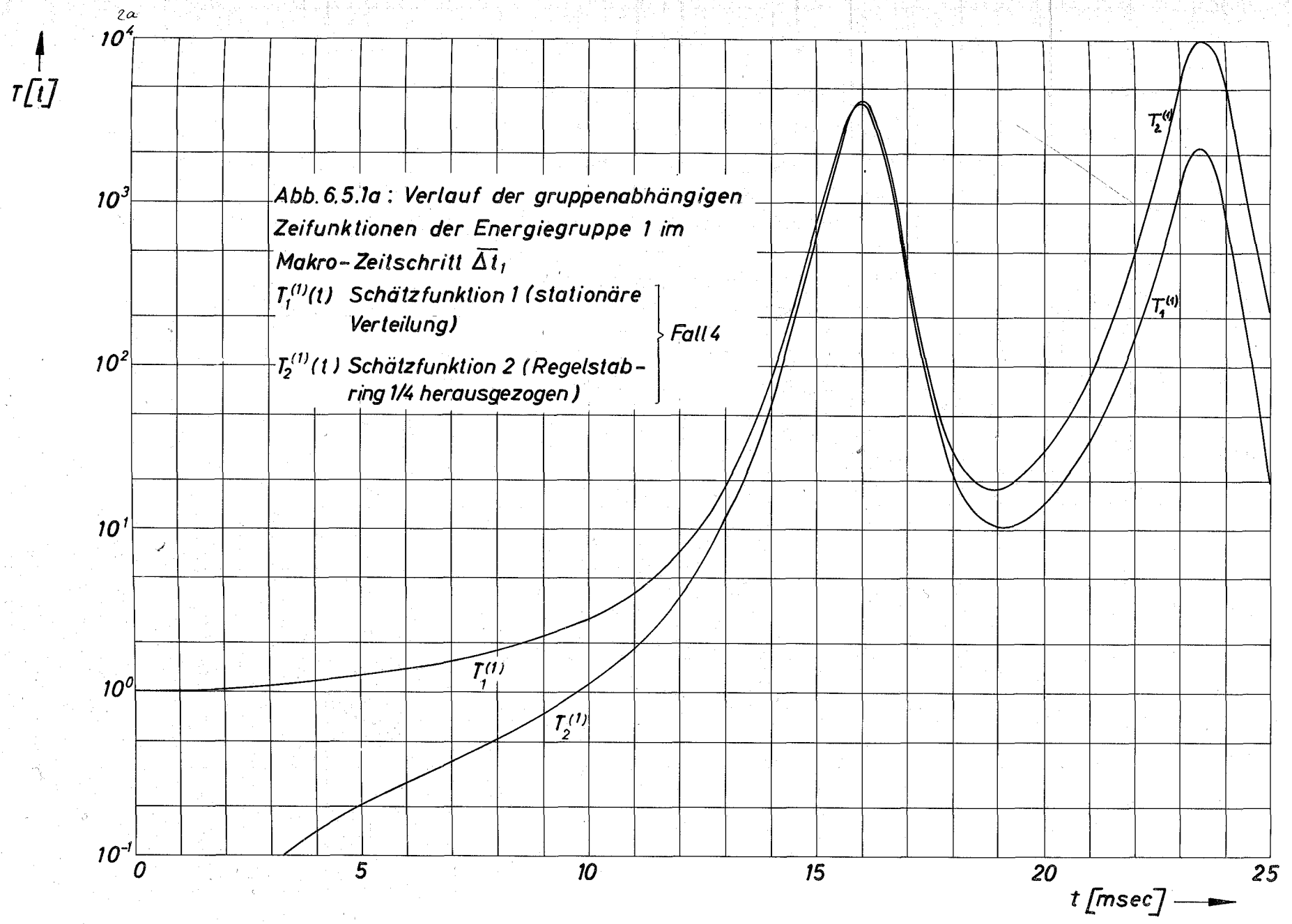
Abb. 6.2.b











3a

$\tau[t]$

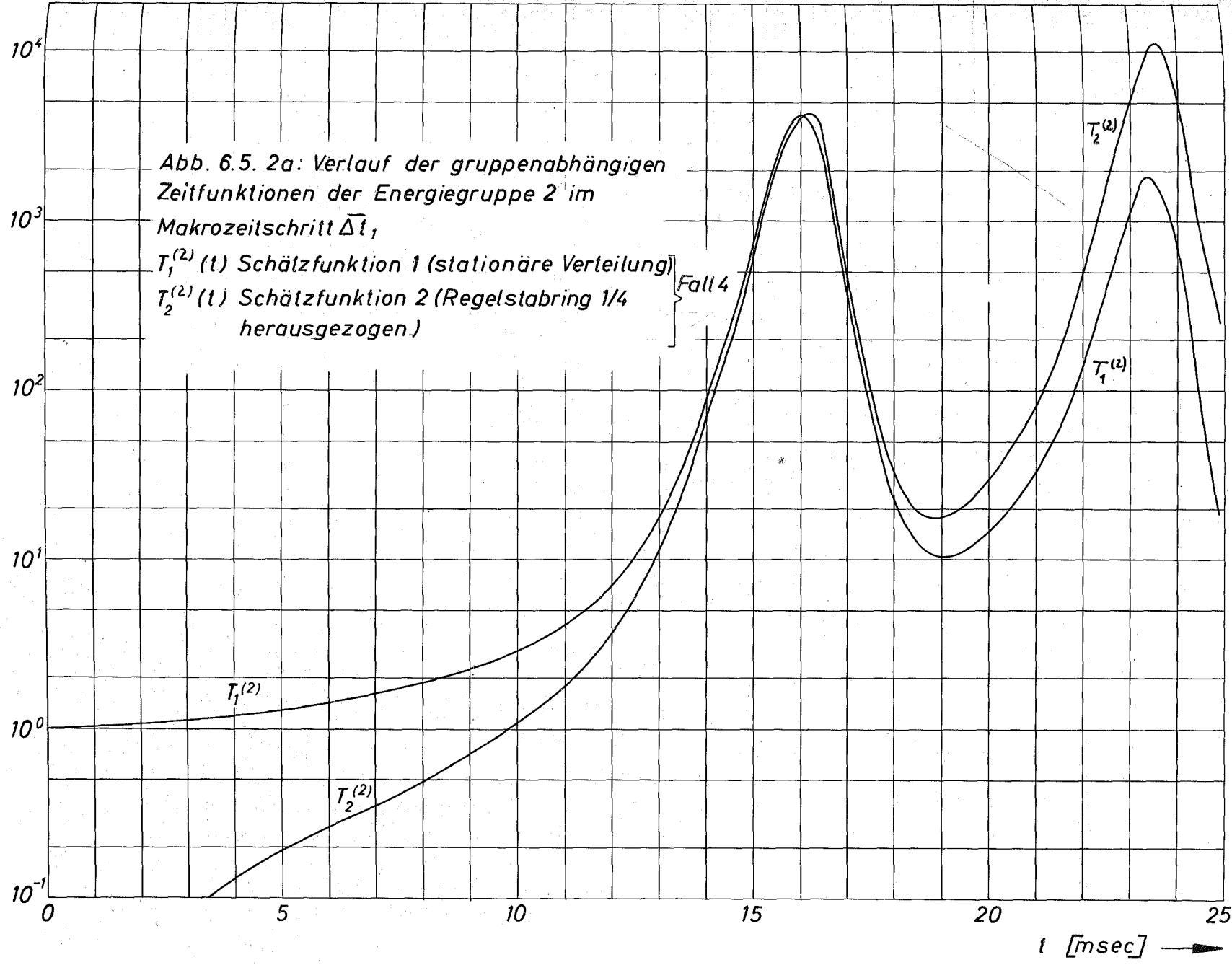


Abb. 6.5. 2a: Verlauf der gruppenabhängigen Zeitfunktionen der Energiegruppe 2 im Makrozeitschritt $\bar{\Delta}t$,
 $T_1^{(2)}(t)$ Schätzfunktion 1 (stationäre Verteilung)
 $T_2^{(2)}(t)$ Schätzfunktion 2 (Regelstabring 1/4 herausgezogen.)

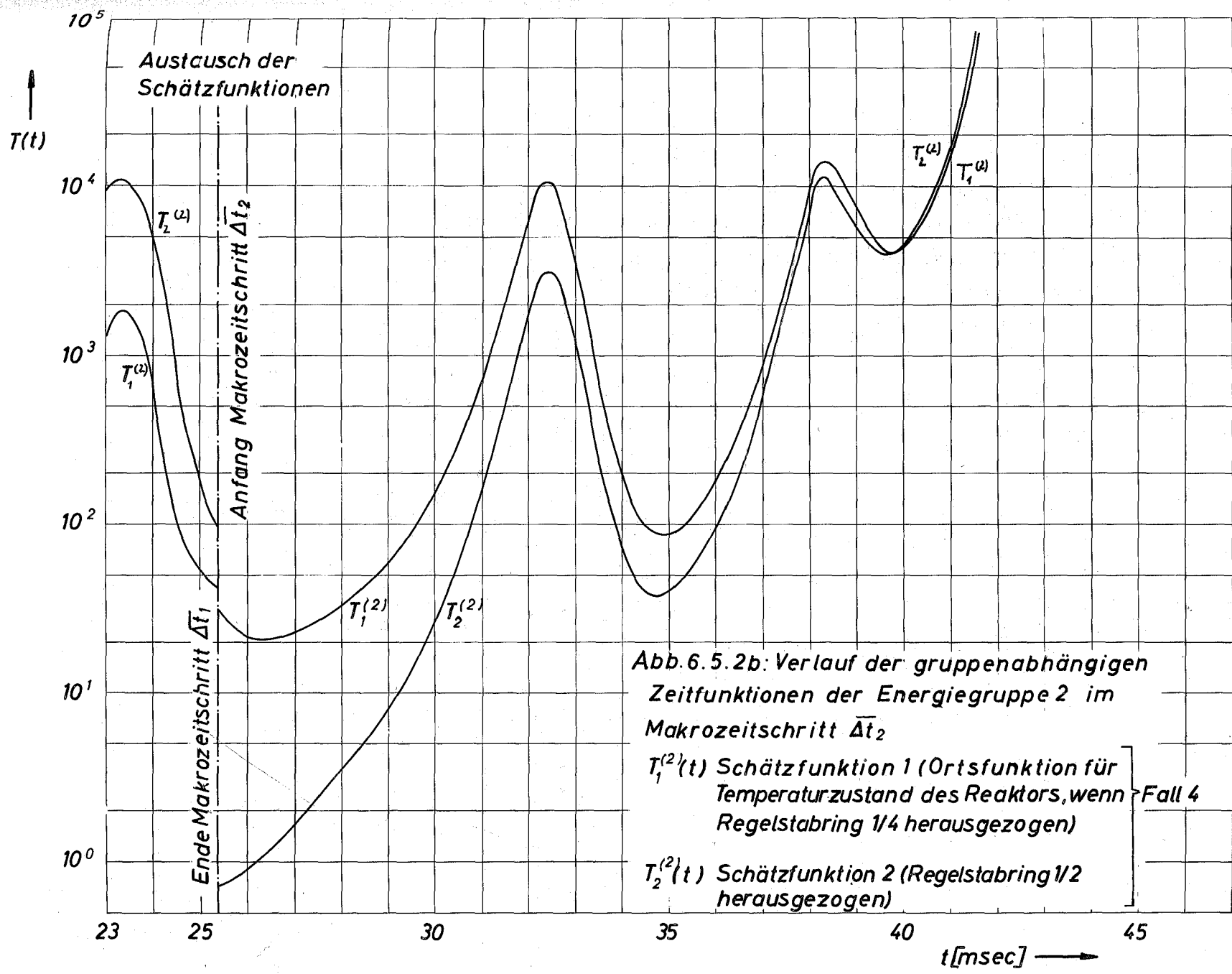


Abb. 6.5.2b: Verlauf der gruppenabhängigen Zeitfunktionen der Energiegruppe 2 im Makrozeitschritt $\bar{\Delta t}_2$

$T_1^{(2)}(t)$ Schätzfunktion 1 (Ortsfunktion für Temperaturzustand des Reaktors, wenn Regelstabling 1/4 herausgezogen) } Fall 4
 $T_2^{(2)}(t)$ Schätzfunktion 2 (Regelstabling 1/2 herausgezogen)

4a

$\tau [t]$

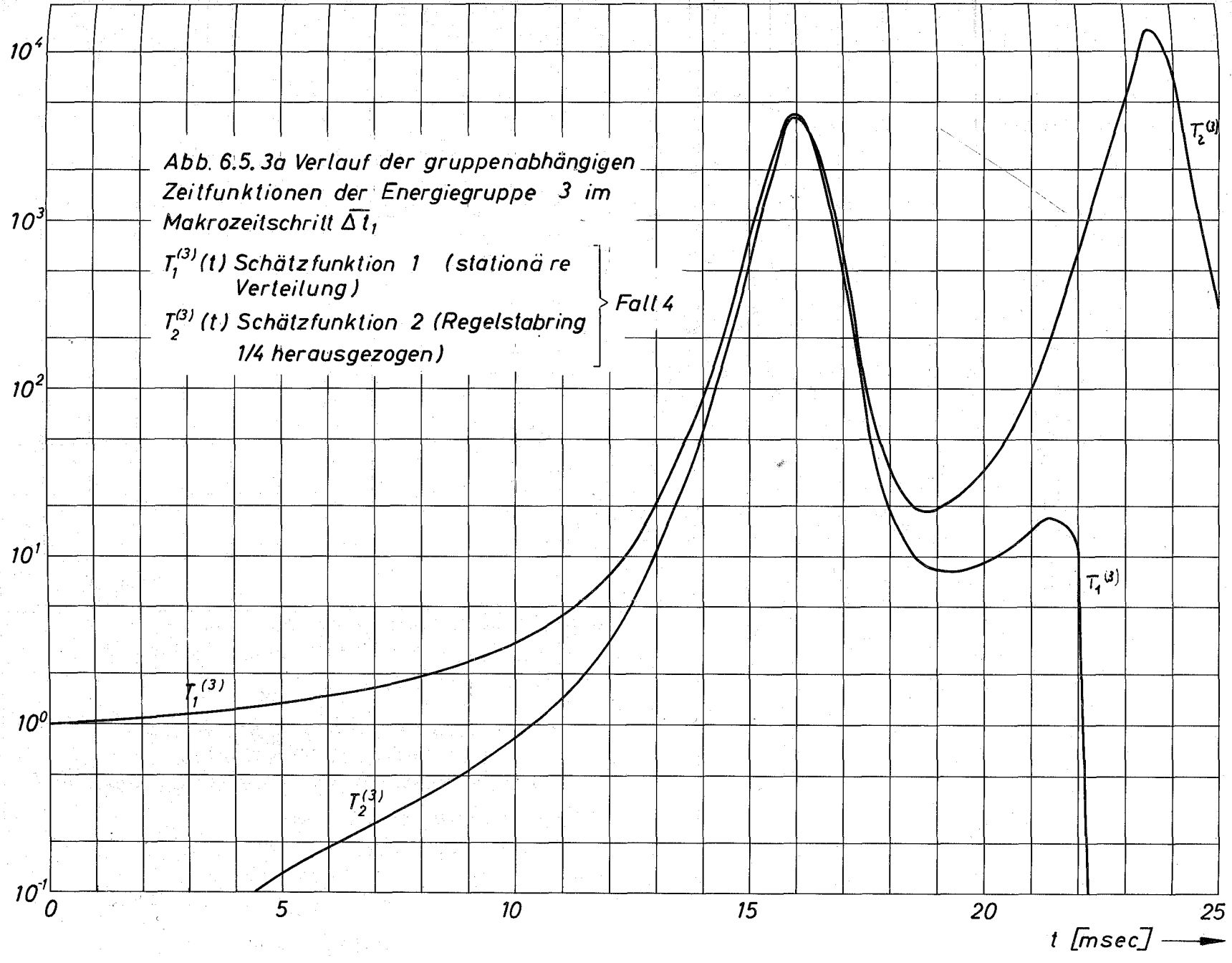


Abb. 6.5. 3a Verlauf der gruppenabhängigen
Zeitfunktionen der Energiegruppe 3 im
Makrozeitschritt Δt_1

$T_1^{(3)}(t)$ Schätzfunktion 1 (stationäre
Verteilung)

$T_2^{(3)}(t)$ Schätzfunktion 2 (Regelstabring
1/4 herausgezogen)

Fall 4

$T_1^{(3)}$

$T_2^{(3)}$

$T_1^{(3)}$

$T_2^{(3)}$

$t [msec]$

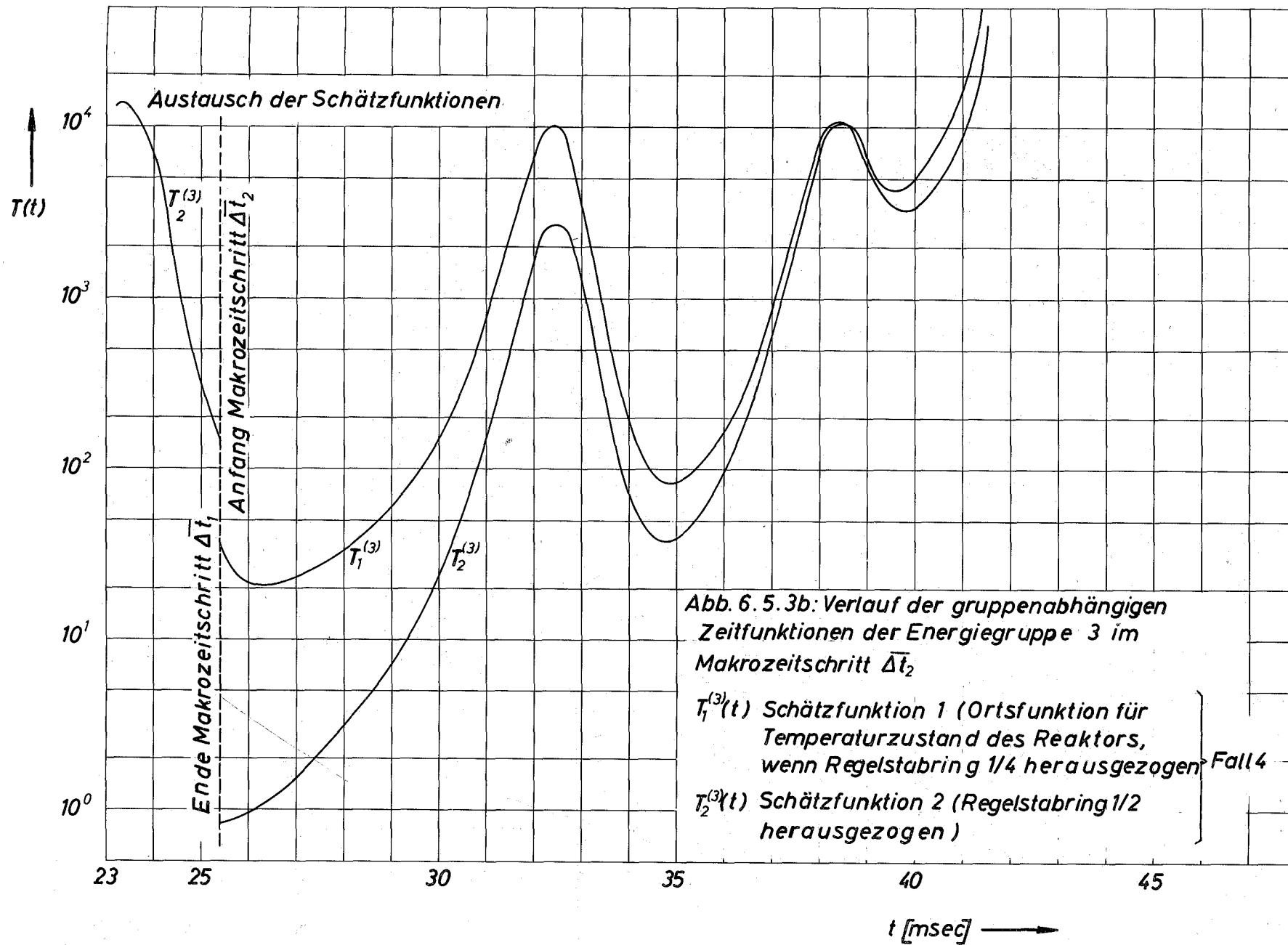


Abb. 6.5.3b: Verlauf der gruppenabhängigen Zeitfunktionen der Energiegruppe 3 im Makrozeitschritt Δt_2

$T_1^{(3)}(t)$ Schätzfunktion 1 (Ortsfunktion für Temperaturzustand des Reaktors, wenn Regelstabling 1/4 herausgezogen) Fall 4
 $T_2^{(3)}(t)$ Schätzfunktion 2 (Regelstabling 1/2 herausgezogen)

$$\phi \cdot \Sigma_f [\text{cm}^{-3} \text{sec}^{-1}]$$

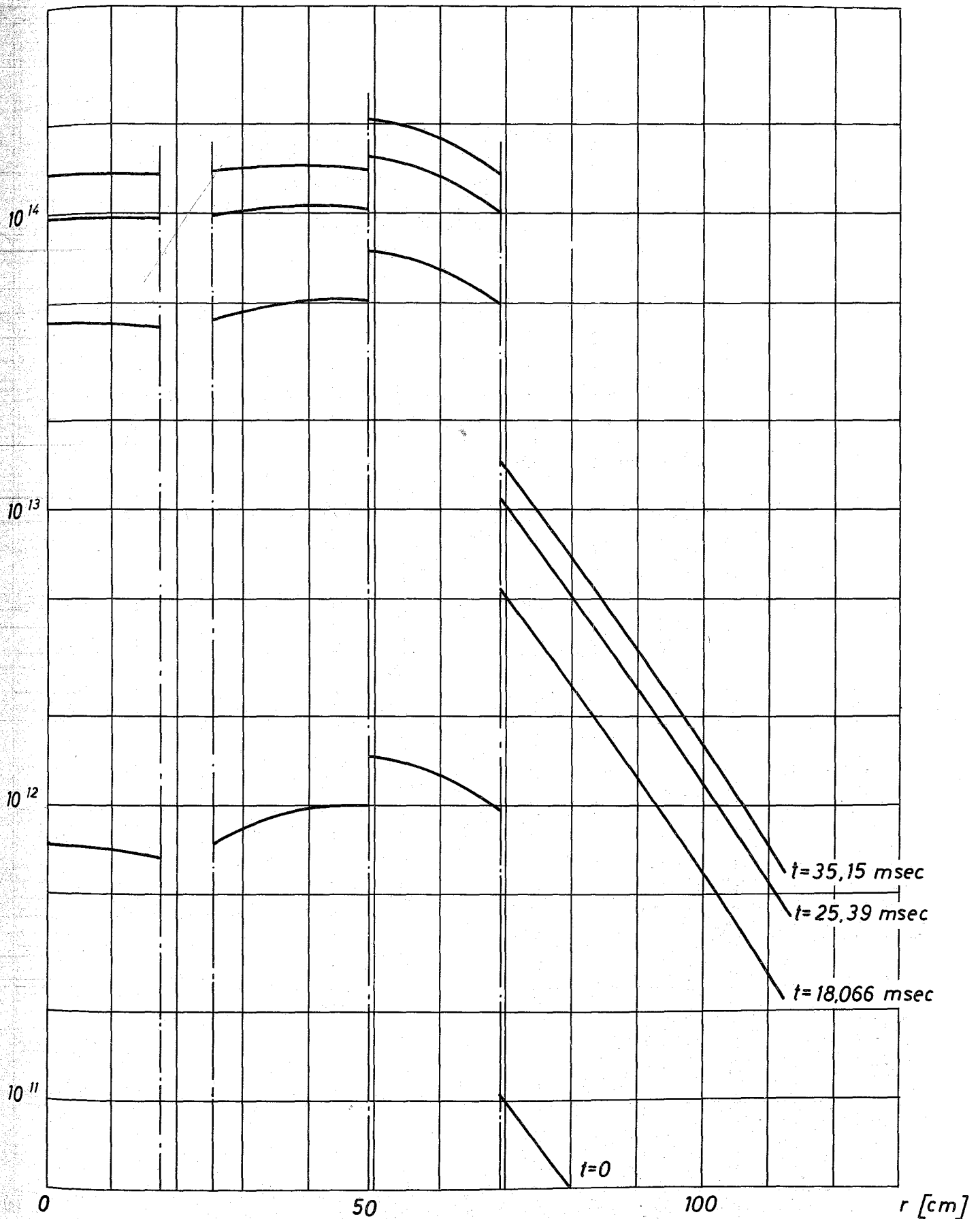
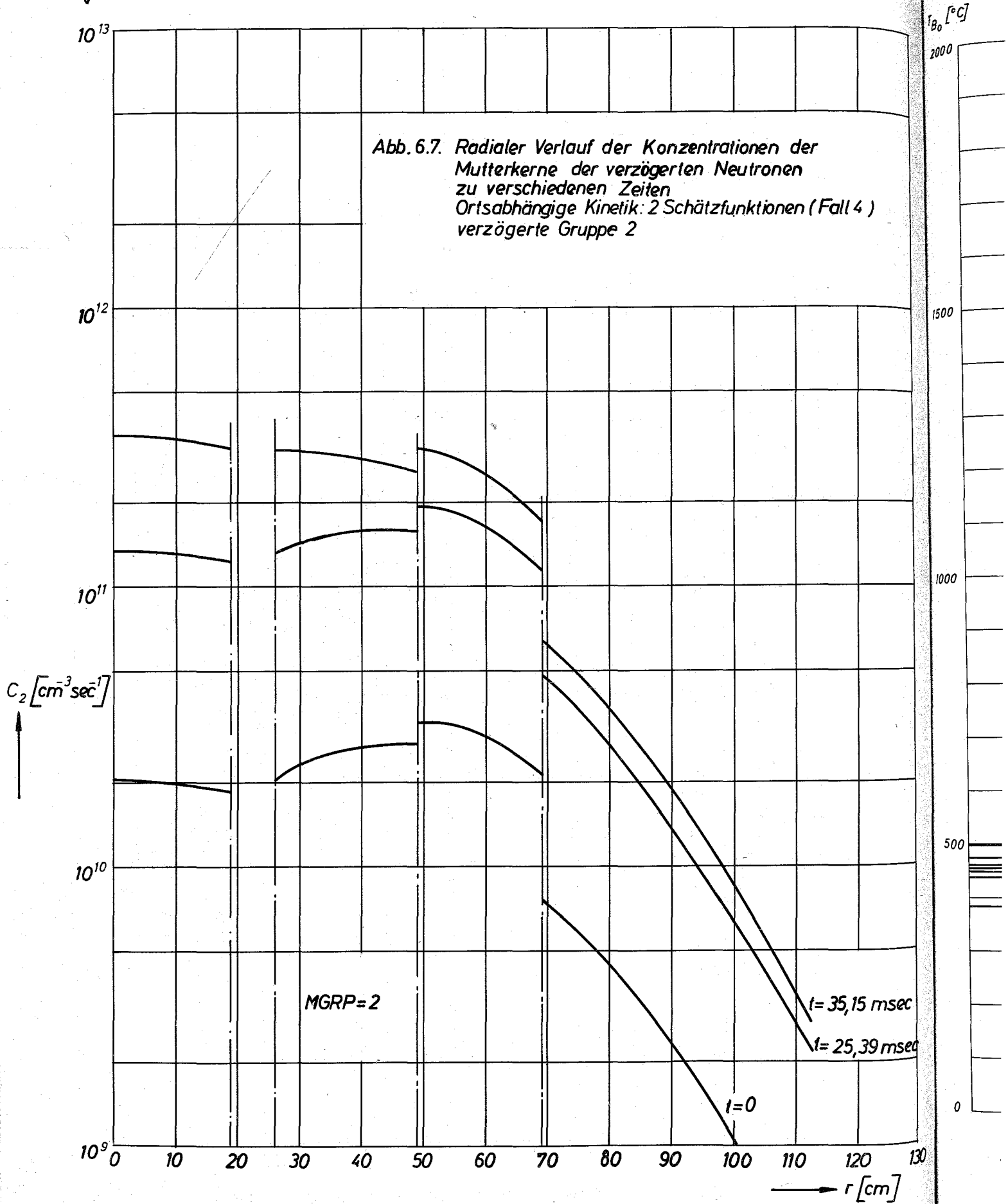


Abb. 6.6 Radiale Spaltratenverteilung zu verschiedenen Zeiten
Ortsabhängige Kinetik (Fall 4)
Schnitt durch axiale Zone 2

7



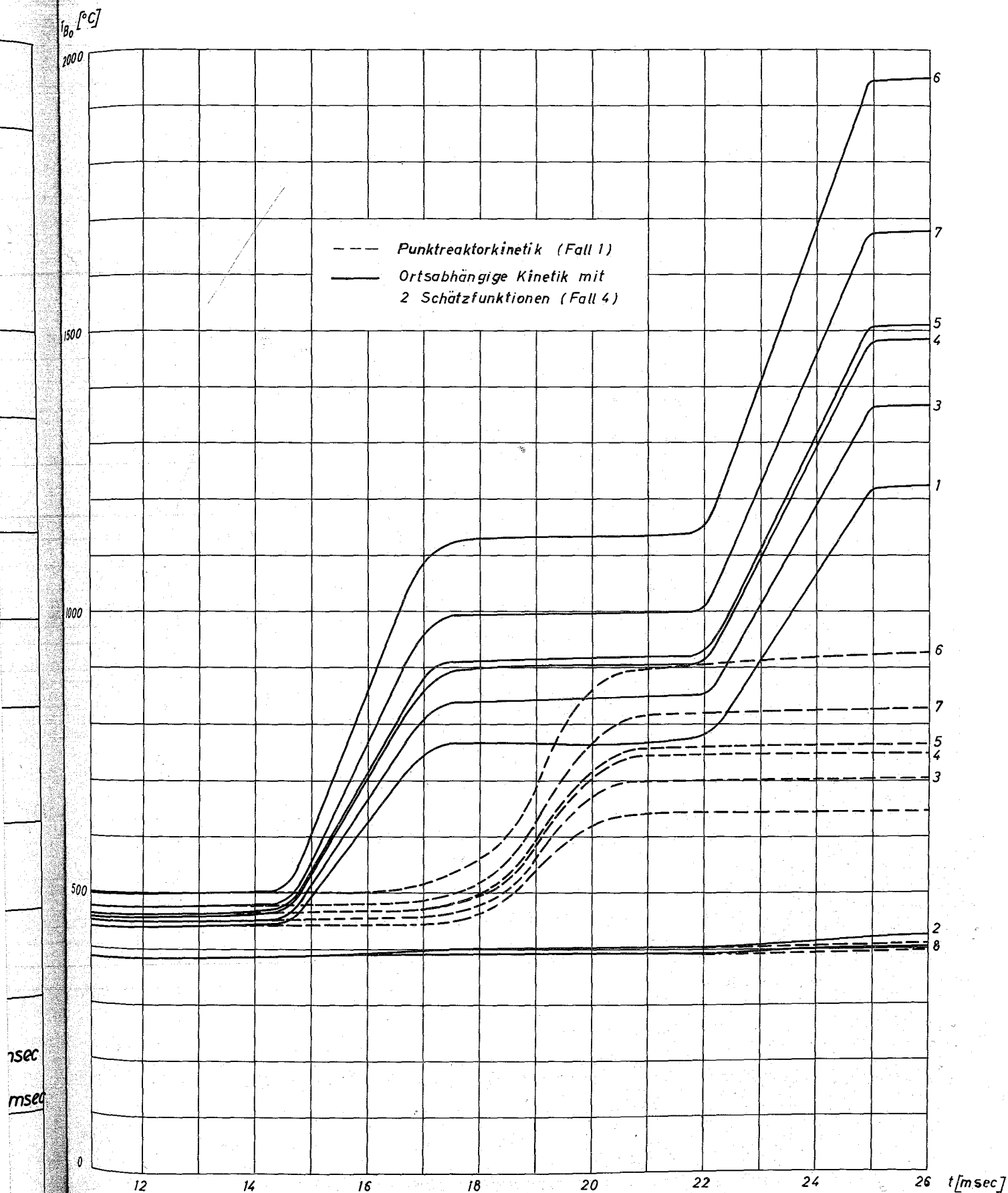


Abb. 6.8.a Zeitlicher Verlauf der maximalen Brennstofftemperatur T_{B_0} in der dritten axialen Zone der Kühlkanäle I bis VIII während des Makrozeitabschnittes Δt_1

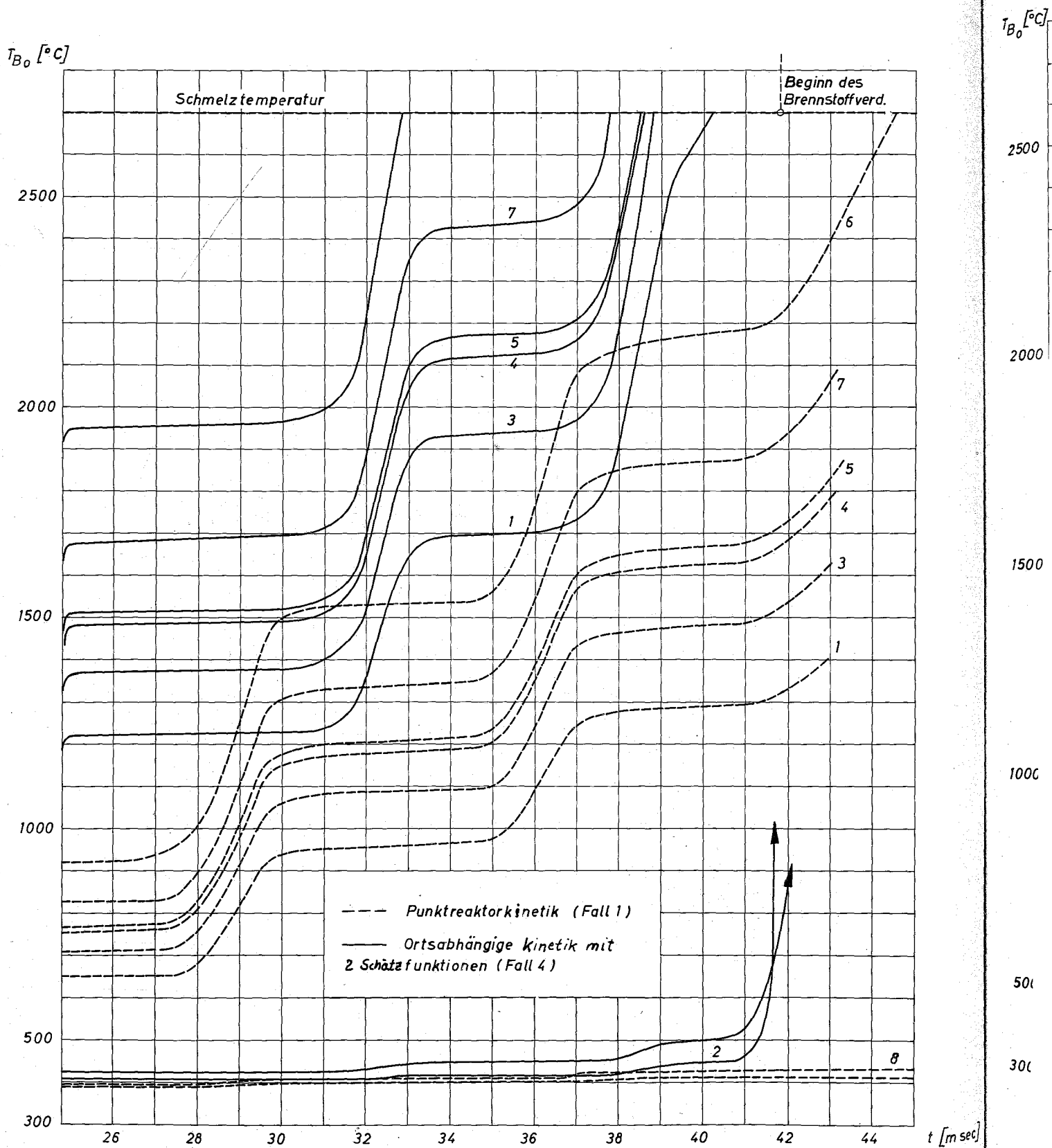


Abb. 6.8.b Zeitlicher Verlauf der maximalen Brennstofftemperatur in der dritten axialen Zone der Kühlkanäle I bis VIII während des Makrozeitabschnittes $\Delta \bar{t}_2$

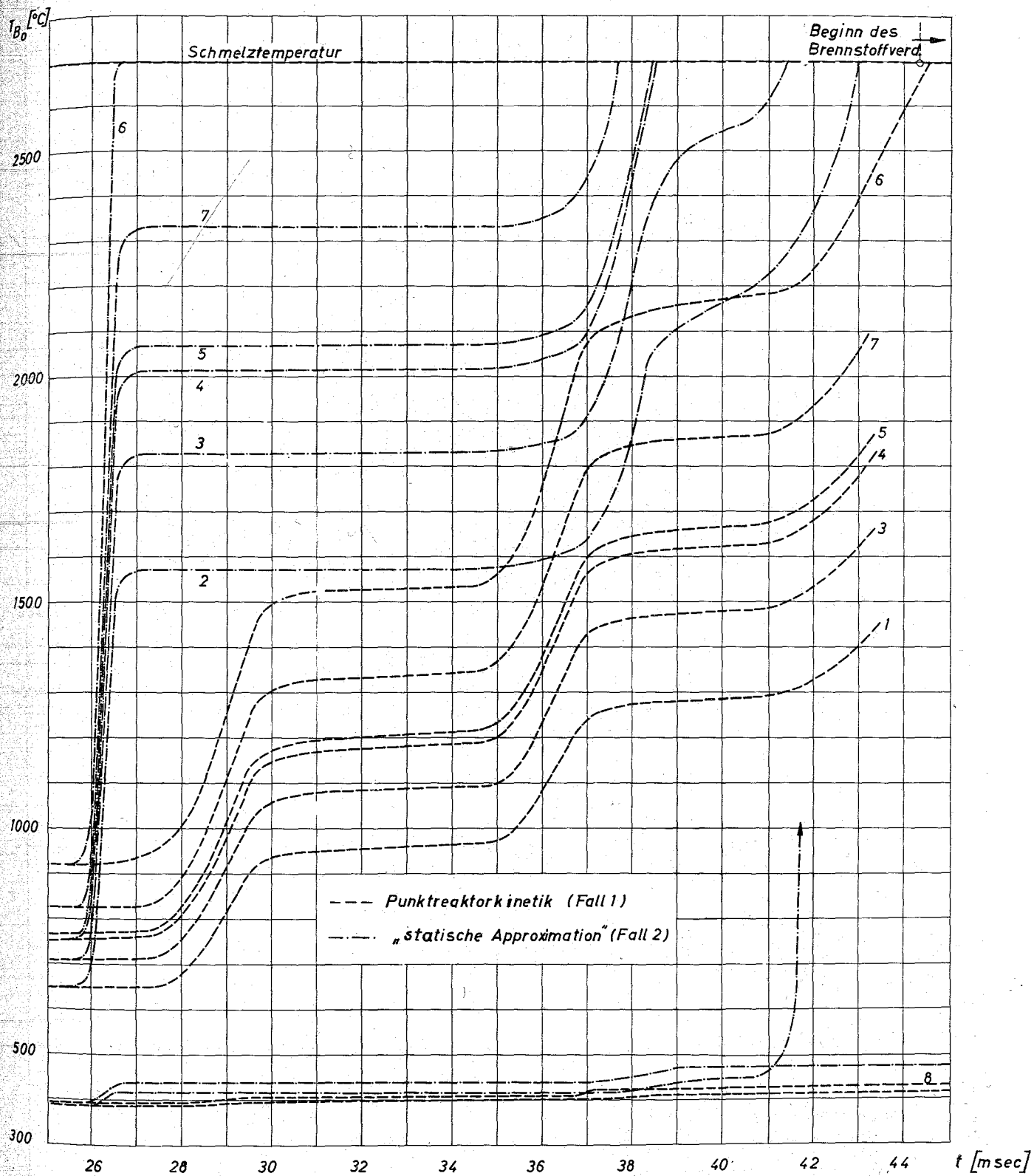
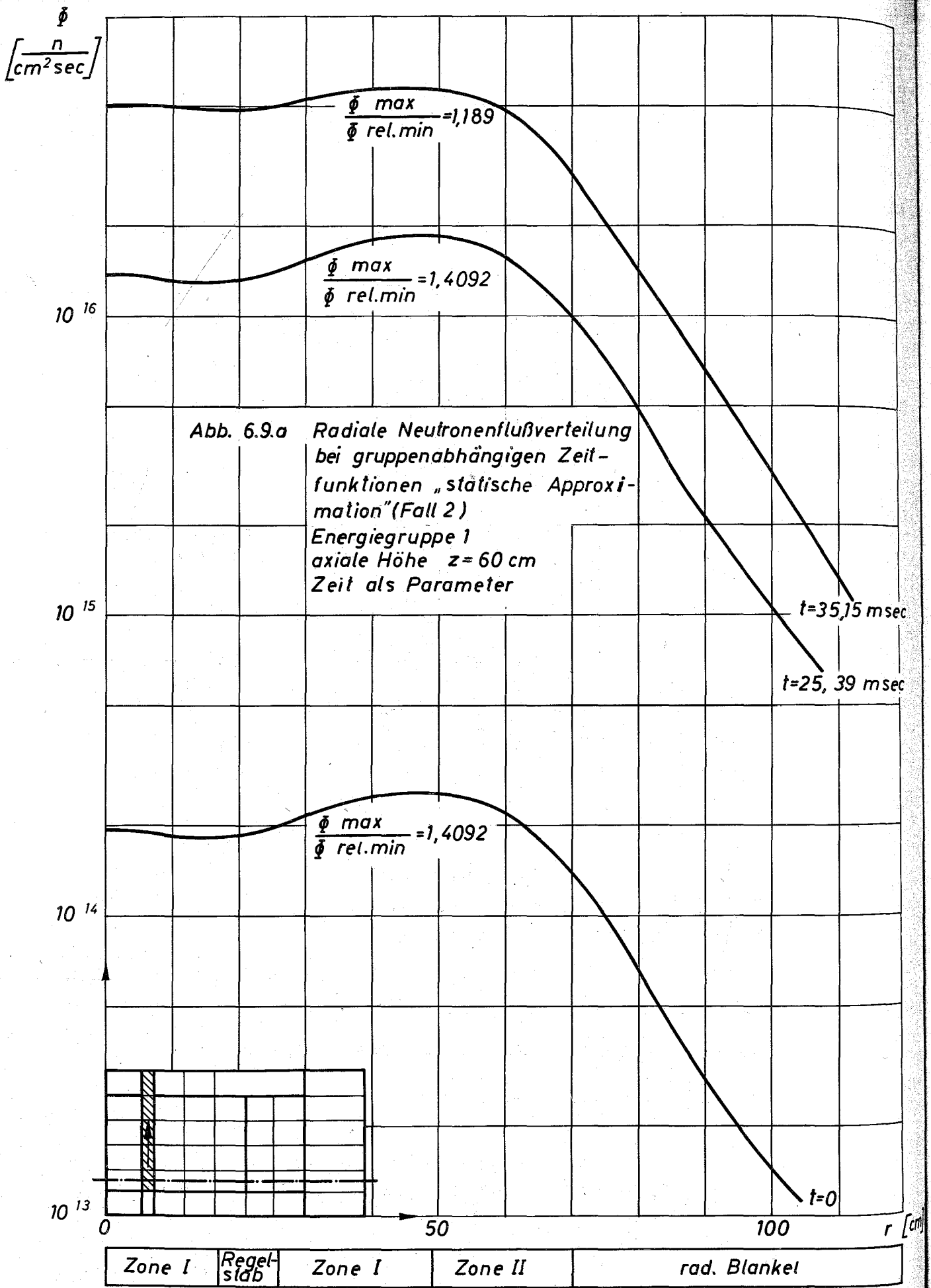
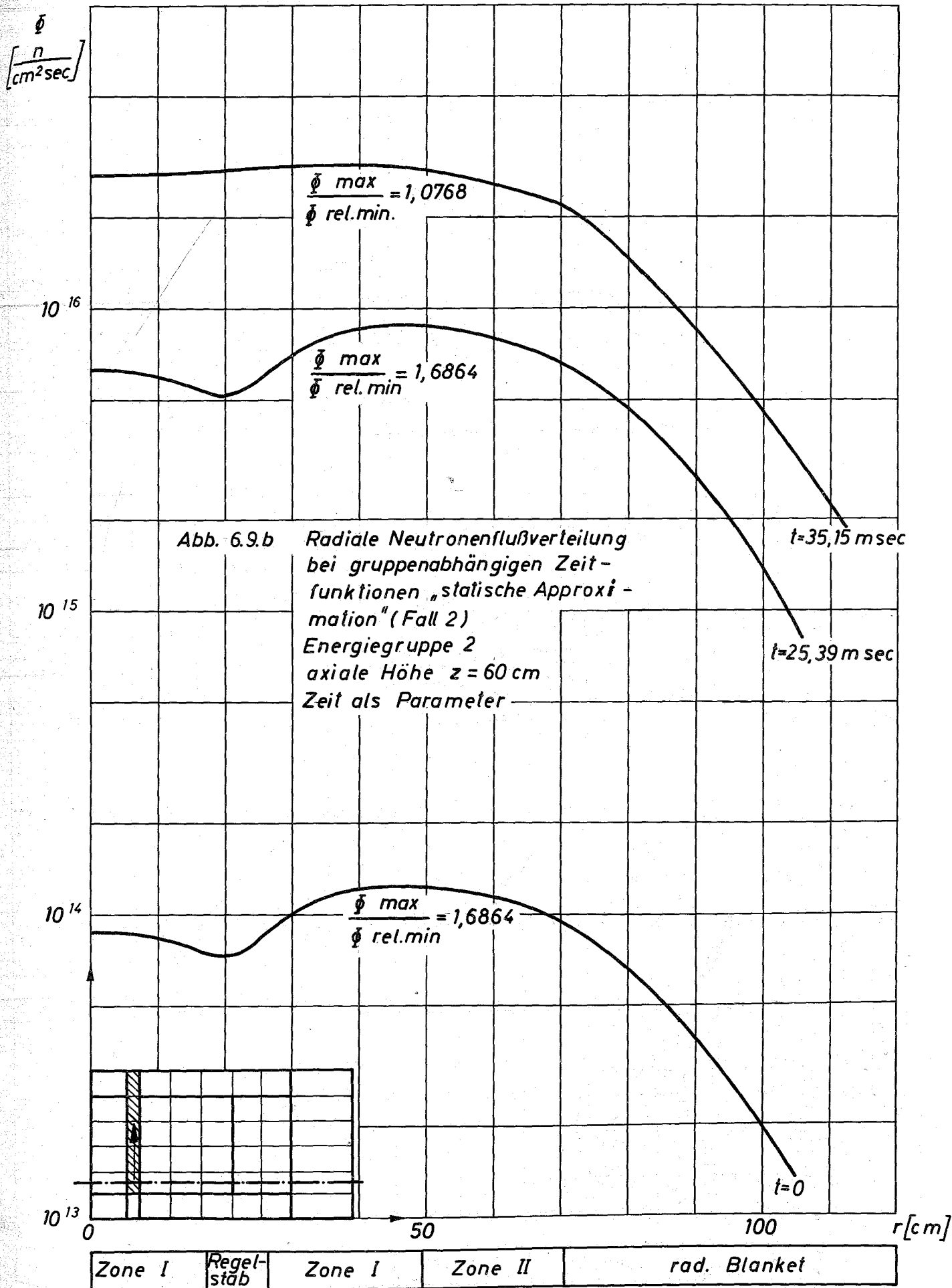
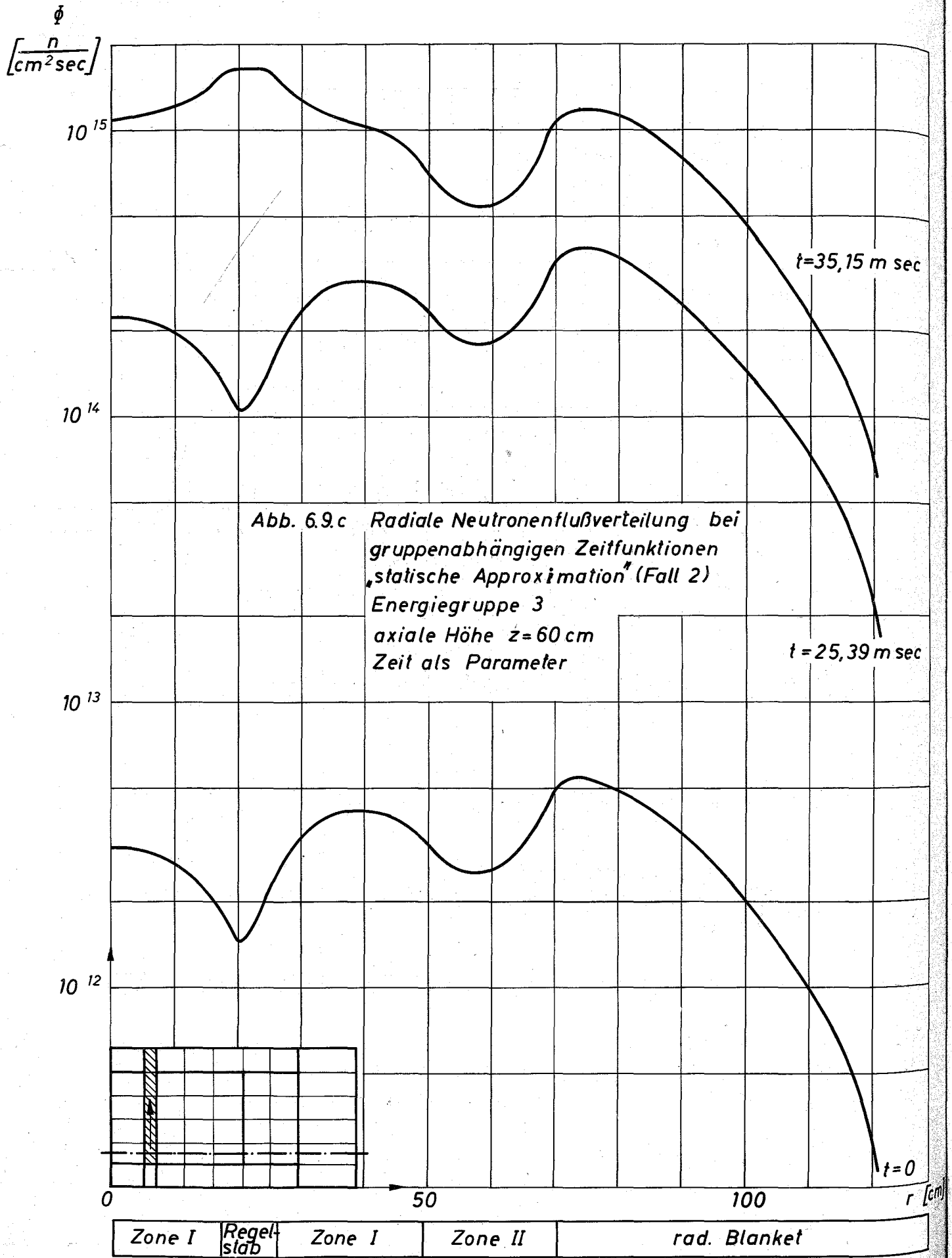


Abb. 6.8.c Zeitlicher Verlauf der maximalen Brennstofftemperatur in der dritten axialen Zone der Kühlkanäle I bis VIII während des Makrozeitschrittes Δt_2







6.3 Zusammenfassung

Durch die Anwendung eines Funktionals, welches Unstetigkeiten der gewählten Schätzfunktionen zuläßt, kann die ortsabhängige Dynamik schneller Brutreaktoren mit Hilfe des Kantorowitsch-Verfahrens behandelt werden.

Die Verwendung 2-dimensionaler Schätzfunktionen für den Neutronenfluß und für die Konzentrationen der Mutterkerne der verzögerten Neutronen und die Aufteilung des Reaktors in konzentrische Ringzonen erlaubt die 2-dimensionale Berechnung des Neutronenflusses, der Wärmequellen und der Temperaturfelder. Der Sonderfall der Verwendung einer einzigen Schätzfunktion, die mit derjenigen des stationären Reaktors übereinstimmt, führt auf die Punktreaktorkinetik mit ortsabhängiger Rückkoppelung. Wird diese Schätzfunktion nach gewissen Makrozeitschritten ausgetauscht, so ergibt sich eine Art "statische Approximation". Bei Verwendung gruppenabhängiger Zeitfunktionen erhält man die Mehrgruppen-Punktkinetik oder eine Näherung für die mehrgruppen-ortsabhängige Kinetik mit ortsabhängiger Rückkoppelung.

Die Gegenüberstellung der einzelnen Methoden durch vergleichende Berechnung eines Demonstrationsbeispiels führt zu folgenden Ergebnissen und Folgerungen:

- 1) Die Verwendung gruppenabhängiger und gruppenunabhängiger Zeitfunktionen führt zu dem gleichen zeitlichen Leistungs- und Temperaturverlauf. Der Mehraufwand an Rechenzeit bei Verwendung gruppenabhängiger Zeitfunktionen ist für die untersuchten Regelstabstörung nicht gerechtfertigt.
- 2) Die durch die Regelstabstörung verursachten Flußverbeulungen führen beim Vergleich zwischen Punktreaktorkinetik und der Näherung für die ortsabhängige Kinetik mit 2 Schätzfunktionen auf beträchtliche Abweichungen im zeitlichen Verlauf der Reaktivitäten, der gesamten thermischen Reaktorleistung und der Temperaturen.
- 3) Bei Verwendung der "statischen Approximation" wird die während des Makrozeitschrittes laufend vorhandene Unterschätzung der Reaktivität beim Übergang zum nächsten Makrozeitschritt abrupt nachgeholt. Dies führt, wenn der Makrozeitschritt wie im untersuchten Fall zu groß gewählt wird, zwar zu einem völlig anderen Verlauf der Reaktorleistung, der zeitliche Verlauf der Temperaturen ist dem der Näherung für die ortsabhängige Kinetik mit 2 Schätzfunktionen jedoch besser angenähert als bei der Punktreaktorkinetik.

- 4) Bei einem Vergleich zwischen der "statischen Approximation" und der ortsabhängigen Kinetik mit 2 Schätzfunktionen kann festgestellt werden, daß eine Neuberechnung des Neutronenflusses bei der "statischen Approximation" öfter notwendig ist. Das Kantorowitsch-Verfahren nähert die tatsächliche örtliche Verteilungsfunktion des Neutronenflusses für jeden Zeitpunkt durch optimale Verwendung der Schätzfunktionen an. Dies kann von der "statischen Approximation" nur durch öftere Neuberechnung der Verteilungsfunktionen für den Neutronenfluß nachvollzogen werden. Vor allem bei der Berechnung der ortsabhängigen Dynamik für 2- und 3-dimensionale Reaktorgeometrie ergibt sich dann für die "statische Approximation" ein höherer Rechenaufwand.

Bei Verwendung von **zwei** und **mehr** Schätzfunktionen beschreibt das Kantorowitsch-Verfahren als Näherung die ortsabhängige Dynamik am besten.

Literatur

- [1] M.Ash: Nuclear Reactor Kinetics. Mc Graw Hill Book Co., New York, 1965
- [2] E.Kiefhaber: Konfiguration und nukleare Kenngrößen eines dampfgekühlten schnellen Brutreaktors.
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Ext.Bericht INR-4/67-13, Juli 1967
- [3] M.A.Perks: FREAK - A Fast Reactor Multigroup Kinetics Programm
Proc.Int.Conf.Application of Computing Methods to Reactor Problems,
ANL 7050, 1965
- [4] L.N.Ussachoff: Equation for the Importance of Neutrons, Reactor Kinetics and the Theory of Perturbation.
Proc. Int.Conf.on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Genf 1955, Vol.5,
p. 503-510, United Nations, New York, 1956
- [5] A.F.Henry: The Application of Reactor Kinetics to the Analysis of Experiments. Nuclear Science and Engineering 3, p.52-70, 1958
- [6] A.F.Henry: Reactor Kinetics, Chapter 5.
Naval Reactor Physics Handbook, Vol.1, Selected Basic Techniques,
Editor: A.Radkowsky, Naval Reactors, Division of Reactor Development
United States Atomic Energy Commission, 1964
- [7] J.B.Yasinsky, A.F.Henry: Some Numerical Experiments Concerning Space Time Reactor Kinetics Behaviour.
Nuclear Science and Engineering 22, p.171-181, 1965
- [8] S.O.Johnson, E.P.Gyftopoulos, M.E.Radd: Effects of Flux Shape Changes on Power Excursion Behaviour.
Trans.Am.Nucl.Soc., Vol.8, No.1, p.221, Juni 1965
- [9] R.Avery: Theory of Coupled Reactors.
2nd United Nations Internat.Conf.on the Peaceful Uses of Atomic Energy,
Vol.12, p.151, 1958
- [10] D.Schwalm: On a Derivation of the Multigroup Kinetics Equation of Coupled Reactors. EUR 2416e., 1965
- [11] H.Plaza, W.H.Köhler: Coupled-Reactor Kinetics Equations.
Nuclear Science and Engineering, Vol.26, p.419, 1966

- [12] M.W.Dyos, F.M.Heck: The Current Status of Analytical Methods for Calculating the Kinetic Behaviour of Loosely Coupled Fast Reactor Cores. Conference Internationale sur la Sureté des Reacteurs à Neutrons Rapides, Aix en Provence, Sept.1967
- [13] W.H.Köhler, C.Y.Ho, H.Plaza, N.B.Poulsen: The Influence of Time Dependent Coupling Coefficients and Delay Times on the Kinetics of a Modular Fast Reactor Core. SM-101/51
IAEA-Symposium on Fast Reactor Physics and Related Safety Problems, Karlsruhe, Nov. 1967
- [14] A.F.Henry, N.J.Curlee: Verification of a Method for Treating Neutron Space Time Problems.
Nuclear Science and Engineering, Vol.4, p.727-744, 1958
- [15] K.Ott: Quasistatic Treatment of Spatial Phenomena in Reactor Dynamics. Nuclear Science and Engineering, Vol.26, p.559-577, 1966
K.Ott, D.A.Meneley, E.S.Wiener: Quasistatic Treatment of Space Dependent Reactor Transients. ANL 7210 ,1967
- [16] S.Kaplan, O.J.Marlowe, J.Bewick: Application of Synthesis Techniques to Problems Involving Time Dependence.
Nuclear Science and Engineering, Vol.18, p.163-176, 1964
- [17] W.H.Köhler: Variational Method for Prompt Neutron Kinetics.
Nukleonik, 8.Jahrgang, Heft 4, 1966
- [18] J.B.Yasinsky: The Solution of the Space Time Neutron Group Diffusion Equations by a Time Discontinuous Synthesis Method.
Nuclear Science and Engineering, Vol.29, p.381-391, 1967
- [19] M.Becker: On the Inclusion of Boundary Terms in Time Dependent Synthesis Techniques.
Nuclear Science and Engineering, Vol.22, p.385-386, 1965
- [20] G.C.Pomraning: A Variational Description of Dissipative Processes.
Journal of Nuclear Energy, Parts A/B, Vol.20, p.617-634, 1966
- [21] J.Lewins: Time Dependent Variational Theory.
Nuclear Science and Engineering, Vol.31, p.160-163, 1968

- [33] Y.S.Hoang: Struktur-Ausdehnungs- und Verbiegungseffekte in schnellen Reaktoren. KFK 539, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1967
- [34] DUBBEL: Taschenbuch für den Maschinenbau, Teil I
Herausgeber F.Sass, Ch. Bouché, Springer-Verlag, 1955
- [35] L.W. Kantorowitsch, W.L. Krylow: Näherungsmethoden der höheren Analysis
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956
- [36] E.L. Wachspress, M.Becker: Variational Synthesis with Discontinuous Trial Functions. ANL 7050, Proc. Internat.Conf. "Application of Computing Methods to Reactor Problems", 1965
- [37] J.Lewins: Importance, The Adjoint Function. Pergamon Press, 1965
- [38] Courant-Hilbert: Methoden der mathematischen Physik I
Heidelberger Taschenbücher, Springer Verlag, Berlin, 1968
- [39] S.Kaplan: Synthesis Methods in Reactor Analysis
Advances in Nuclear Science and Technology, Vol.3, 1966
- [40] A.Nordsiek: On Numerical Integration of Ordinary Differential Equations.
Journal of Mathematics and Computations, Vol.16, Jan.1962
- [41] R.Bulirsch, J.Stoer: Fehlerabschätzung und Extrapolation mit rationalen Funktionen bei Verfahren von Richardson Typus
Numerische Mathematik, Bd.6, Pg.413-427, 1964
- [43] J.C.Vigil: Solution of the Nonlinear Reactor Kinetics Equations by Continuous Analytic Continuation.
Los Alamos Report LA-3518, UC 38 Mathematics and Computers TID 4500, 1966
- [44] V.K.Saul'yev: Integration of Equations of Parabolic Type by the Method of Nets.
Pergamon Press, 1964

- [45] I. Babuska, M. Prager, E. Vitasek: Numerical Processes in Differential Equations.
SNTL-Publishers of Technical Literature, Prague
Interscience Publishers. A. Division of John Wiley, 1966
- [46] J.E. Meyer: Hydrodynamic Models for the Treatment of Reactor Thermal Transients.
Nuclear Science and Engineering, Vol.10, Pg.269-277, 1961
- [47] Richtmyer: Difference Methods of Initial Value Problems.
Interscience Publishers Inc. New York, 1957
- [48] M. Fischer. Zur Dynamik der Wellenausbreitung in der Zweiphasenströmung unter Berücksichtigung von Verdichtungsstößen.
Dissertation, Technische Hochschule Karlsruhe, 1967
- [49] R. Sauer: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellung. Springer Verlag, Berlin, 1952
- [50] S. Collatz: Numerical Treatment of Differential Equations. Springer Verlag, Berlin, 1966
- [51] L. Caldarola, E.G. Schlechtendahl: Reactor Temperature Transients with Spatial Variables.
KFK 223, Kernforschungszentrum Karlsruhe
- [52] R. Palinski: Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichung mit zeitabhängiger Umgebungstemperatur und zeitlich veränderlicher und räumlich ungleichmäßig verteilter Wärmequelle.
Nukleonik, Bd.6, Heft 6, S.289-303, 1964
- [53] R. Palinski: Lösung der instationären Wärmeleitungsprobleme für hohlzylindrische Körper mit zeitabhängiger Umgebungstemperatur und Flächenbelastung.
Nukleonik, Bd.7, Heft 2, 1965

- [54] A.Birkhofer, F.Heyman: Zur Berechnung der Temperaturverteilung in zylindrischen Reaktorbrennelementen.
Nukleonik, Bd.6, Heft 2, S. 77-87
- A.Birkhofer, F.Heyman: Instationäre Temperaturverteilung in voll- und hohlzylindrischen Reaktorbrennstäben unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit von Wärmequelle, Kühlmitteltemperatur und Wärmeübergangsverhältnissen.
Nukleonik, Bd.8, Heft 1, S.51-56, 1966
- [55] G.D.Smith: Numerical Solution of Partial Differential Equations.
Oxford Mathematical Handbooks, London, 1965
- [56] G. Kessler: RADYVAR-Programm zur Behandlung der raumabhängigen Dynamik schneller Brutreaktoren mit Hilfe des Variationsverfahrens von Kantorowitsch
Kernforschungszentrum Karlsruhe, KFK 781/II, 1968
- [57] K.Gast, E.G.Schlechtendahl: Schneller natriumgekühlter Reaktor Na 2
Kernforschungszentrum Karlsruhe, KFK 660, 1967
- [58] G.R.Keepin: Physics of Nuclear Kinetics. Addison-Wesley Publ.Company, 1965
- [59] A.F.Henry, A.V.Vota: WIGLE 2 - A Program for the Solution of the one-dimensional Two Group Space Time Diffusion Equations Accounting Temperature Xenon and Control Feedback. WAPD-TM-532, Oktober 1965
- [60] Greebler, Sherer, Walton: FØRE - A Computational Program for the Analysis of Fast Reactor Excursions. October 1962
- [61] D.Smidt et al.: Systemanalyse eines 1000 MWe natriumgekühlten schnellen Leistungsreaktors. Kernforschungszentrum Karlsruhe, Ext.Bericht 8/66-6

Anhang 1

Für die folgenden Überlegungen wird ein Brennelementkasten, dessen Lage im Reaktorkern durch den Radius r gekennzeichnet sei, als Einheitszelle aufgefaßt. An der Außenfläche des Kastens sind Nocken angebracht, die ein gegenseitiges Abstützen mehrerer Kästen im Verband ermöglichen. Alle Nocken sind auf einer einzigen Niveaubene angebracht, die so in der oberen Hälfte des Reaktorkerns angeordnet sein sollte, daß durch radiale Temperaturgradienten ausgelöste Verbiegungen der Kästen keinen positiven Temperaturkoeffizienten [33] erzeugen (Bowling effect).

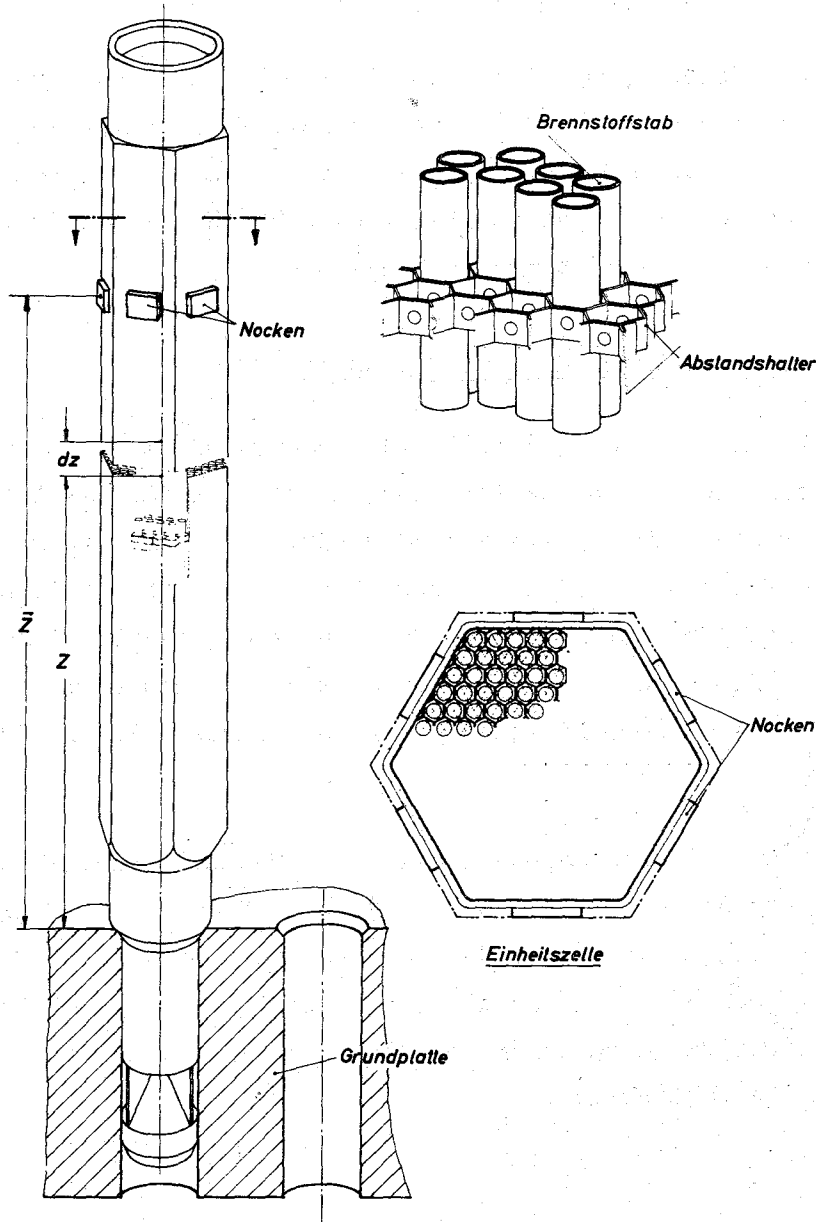


Abb. A 1.1 Subassemblykasten als Einheitszelle

Der durch die Nocken zwischen den Kästen entstehende Zwischenraum sei mit Kühlmittel ausgefüllt. Alle in einem konzentrischen Ring angeordneten Kästen (Einheitszellen) besitzen den gleichen geometrischen Aufbau und erleiden die gleichen Temperatur- und Dichteänderungen.

Für die Berechnung der makroskopischen Wirkungsquerschnitte müssen die auf 1 cm^3 Reaktorvolumen bezogenen Materialdichten herangezogen werden. Sie sind mit den tatsächlichen Materialdichten durch die einfache Beziehung

$$\mu_R = a \cdot \mu \quad (\text{A 1.1})$$

verknüpft, wobei a den Materialanteil in cm^3 pro cm^3 Reaktorvolumen, μ_R die bezogene und μ die tatsächliche Materialdichte bedeuten.

Die in den nachfolgenden Abschnitten abgeleiteten Dichteänderungen sind immer als Mittelwerte über die betrachtete Einheitszelle aufzufassen. Obwohl diese Einheitszelle durch die obige Definition in ihrer Ortsabhängigkeit festliegt, werden in den folgenden Gleichungen die Orts- und Zeitkoordinaten aus Gründen der Vereinfachung weggelassen.

A 1.1 Änderung der mittleren Brennstofftemperatur

Eine Erhöhung der radial gemittelten Temperatur im Brennstoffstab verursacht eine axiale und radiale Ausdehnung. Die radiale Ausdehnung kann eine Verdrängung des Spaltgases oder des Na-Bondings zwischen Brennstoff und Hülle oder gar eine Aufweitung der Hülle und dann eine Verdrängung von Kühlmittel hervorrufen. Da im oxydischen Brennstoff während des Anfahr- und Leistungsbetriebes jedoch Hohlraum und Rißbildung auftreten, sind diese Effekte schwer zu erfassen. Sie werden in Abschn. 3 behandelt.

Ähnlich führt die Behandlung der axialen Brennstoffausdehnung auf Schwierigkeiten, da der Brennstoff durch Haften an der Hülleninnenwand an seiner freien axialen Ausdehnung gehindert werden kann. Zunächst wird daher nur die freie axiale Brennstoffausdehnung betrachtet und dann mögliche Zwischenstufen des Brennstoffhaftens durch einen Korrekturfaktor berücksichtigt.

Die freie axiale Brennstoffausdehnung:

Die auf die Einheitszelle bezogene Brennstoffdichte ergibt für einen Ausgangszustand

$$\mu_{R,B} = \frac{Z \cdot \eta_B^2 \cdot \pi \cdot \mu_B \cdot dz}{F \cdot dz}$$

und nach einer Temperaturänderung des Brennstoffes $d\bar{T}_B$

$$\mu_{R,B} + d\mu_{R,B} = \frac{Z \cdot \eta_B^2 \cdot \pi \cdot \mu_B \cdot dz}{F \cdot dz (1 + \Gamma_{ax,B} \cdot d\bar{T}_B)}$$

Hier bedeuten:

Z	Zahl der Brennstoffstäbe pro Einheitszelle
η_B	Radius des Brennstoffstabes
F	Querschnittsfläche der Einheitszelle
$\Gamma_{ax,B}$	axialer linearer Ausdehnungskoeffizient des Brennstoffes (temperaturabhängig)
$d\bar{T}_B$	Änderung der radial gemittelten Brennstofftemperatur
μ_B	Brennstoffdichte

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$(1 + \Gamma_{ax,B} \cdot d\bar{T}_B)^{-1} \approx 1 - \Gamma_{ax,B} \cdot d\bar{T}_B$$

ergibt sich:

$$\frac{d\mu_{R,B}}{\mu_{R,B}} = - \Gamma_{ax,B} \cdot d\bar{T}_B \quad (\text{A 1.1.1})$$

Ähnlich ergibt sich für irgendwelche Zwischenstufen des Haftens von Brennstoff an der Hülle

$$\frac{d\mu_{R,B}}{\mu_{R,B}} = - k_B \cdot \Gamma_{ax,B} \cdot d\bar{T}_B \quad (\text{A 1.1.1a})$$

wobei k_B das Volumenverhältnis des sich frei ausdehnenden zum gesamten Brennstoffvolumen bedeutet.

A 1.2 Die Änderung der mittleren Hüllentemperatur

Änderungen der mittleren Hüllentemperatur führen zu axialer und radialer Ausdehnung der Hülle, wobei eventuelles Haften des Brennstoffes an der Hülle berücksichtigt werden muß.

a) Für die freie axiale Ausdehnung der Hülle gilt:

$$\frac{d\mu_{R,H}}{\mu_{R,H}} = - \Gamma_{ax,H} \cdot d\bar{T}_H \quad (A 1.2.1)$$

wobei der Index H für die Hülle steht.

Für irgendwelche Zwischenstufen des Brennstoffhaftens an der Hülle ist:

$$\frac{d\mu_{R,B}}{\mu_{R,B}} = - k_H \cdot \Gamma_{ax} \cdot d\bar{T}_H \quad (A 1.2.1a)$$

k_H ist das Volumenverhältnis des sich mit der Hülle axial ausdehnenden zum gesamten Brennstoffvolumen.

b) Die radiale Ausdehnung der Hülle verursacht (Abb. A 1):

- 1) die Verdrängung von Kühlmittel
- 2) Spannungen und Verformungen in den Abstandshaltern ohne irgendwelche Dichteänderungen hervorzurufen.

Es gilt für einen angenommenen Ausgangszustand

$$\mu_{R,K} = \alpha_K \cdot \mu_K = (F - Z \eta_{Ha}^2 \pi - F_S) \cdot \frac{\mu_K}{F}$$

und nach einer Änderung der mittleren Hüllentemperatur

$$\mu_{R,K} + d\mu_{R,K} = (\alpha_K + d\alpha_K) \cdot \mu_K = \left[F - Z \eta_{Ha}^2 \pi (1 + \Gamma_{rad,H} \cdot d\bar{T}_H)^2 - F_S \right] \cdot \frac{\mu_K}{F}$$

Hieraus erhält man:

$$\frac{d\mu_{R,K}}{\mu_{R,K}} = \frac{d\alpha_K}{\alpha_K} \cdot \frac{\mu_K}{\mu_K} = -2 \cdot \Gamma_{\text{rad,H}} \cdot d\bar{T}_H \cdot \frac{1 - \alpha_K - \beta_{\text{ab}} - \beta_{\text{Ka}}}{\alpha_K} \quad (\text{A 1.2.2})$$

Hier bedeuten:

$\Gamma_{\text{rad,H}}$	linearer radialer Ausdehnungskoeffizient der Hülle
μ_K	Kühlmitteldichte
α_K	Kühlmittelanteil pro cm^3 Reaktorvolumen
β_{ab}	Anteil der Abstandshalter pro cm^3 Reaktorvolumen
β_{Ka}	Anteil des Kastens pro cm^3 Reaktorvolumen

c) Für den Fall, daß der Brennstoff die Hülle aufweitet, gilt:

$$\frac{d\mu_{R,K}}{\mu_{R,K}} = \frac{d\alpha_K \cdot \mu_K}{\alpha_K \cdot \mu_K} = -2 \cdot \Gamma_{\text{rad,B}} \cdot \frac{\eta_B}{\eta_{\text{a}}} d\bar{T}_B \cdot \frac{1 - \alpha_K - \beta_{\text{ab}} - \beta_{\text{Ka}}}{\alpha_K} \quad (\text{A 1.2.2a})$$

A 1.3 Die gleichzeitige Ausdehnung von Brennstoff und Hülle

Die gleichzeitige Ausdehnung von Brennstoff und Hülle verursacht infolge Volumenverdrängung eine Dichteänderung des zwischen Brennstoff und Hülle befindlichen Spaltgases oder Na-Bondings. Mit Hilfe geometrischer Beziehungen erhält man:

$$\frac{d\mu_{R,\text{Bo}}}{\mu_{R,\text{Bo}}} = \frac{2 \cdot \Gamma_{\text{rad,H}} \cdot d\bar{T}_H \cdot \eta_{\text{Hi}}^2 - 2 \cdot \Gamma_{\text{rad,B}} \cdot d\bar{T}_B \cdot \eta_B^2}{\eta_B^2 - \eta_{\text{Hi}}^2} \quad (\text{A 1.3.1})$$

Diese Gleichung gilt unter der Bedingung, daß der Brennstoff die Hülle nicht berührt (diametrales Spiel > 0).

Es bedeuten:

$\Gamma_{\text{rad,H}}$	linearer radialer Ausdehnungskoeffizient der Hülle
η_{Hi}	Innenradius der Hülle

Die Änderung der mittleren Spaltgastemperatur ergibt durch freie Volumenausdehnung:

$$\frac{d\mu_{R,\text{Bo}}}{\mu_{R,\text{Bo}}} = -3 \cdot \Gamma_{\text{Bo}} \cdot d\bar{T}_{\text{Bo}} \quad (\text{A 1.3.2})$$

wobei

$3 \int_{Bo} \Gamma_{Bo}$ den räumlichen Ausdehnungskoeffizienten für das Spaltgas
 $d\bar{T}_{Bo}$ die mittlere Temperaturänderung des Spaltgases

bedeuten.

A 1.4 Die Temperaturerhöhung des Strukturmaterials

Temperaturänderungen des Strukturmaterials hätten nur eine Verdrängung von Kühlmittel zur Folge, wenn an den Brennelementkästen keine Nocken angebracht wären und die Kästen dadurch lediglich mit einem gewissen Spiel in der Grundplatte fixiert wären.

Durch das Anbringen von Nocken auf einer bestimmten Niveauebene wird ein gegenseitiges Abstützen der Kästen im Verband ermöglicht. Temperaturänderungen des Kastens bewirken dann zusätzliche Dichteänderungen (Abb. A 1.2). Mit der Annahme, daß die Kästen in Höhe der Nocken verformungssteif ausgebildet sind und sich zum Reaktorrand hin ausdehnen können, führt eine Kastenausdehnung in dieser Niveauebene zu einer radialen Ausbiegung des ganzen Kastens (Abb. A 1.2). Bei Vorliegen von Radialsymmetrie wird aber nicht nur der gerade sich ausdehnende konzentrische Ring mit Brennelementkästen ausgebogen, sondern auch alle im Radius weiter außen angeordnete Kästen erleiden Ausbiegungen. Während aber nur der sich ausbiegende Kastening auch die Fläche seiner Einheitszelle verändert und dadurch die Brennstoffstäbchen weiter auseinanderstellt, bleibt in allen übrigen Kasteningen die Einheitszelle unverändert. Die Grenzen einzelner Reaktorzonen und der Reaktorrand werden jedoch nach außen verschoben.

Unter der zusätzlichen Annahme, daß die auftretenden Dichteänderungen immer Mittelwerte über die angenommene Einheitszelle sind, bestimmt die Form der axialen Biegelinie des Kastens gleichzeitig die Flächenänderung seiner Einheitszelle. Die Ausbiegung des Brennelementkastens kann vereinfacht durch die Ausbiegung eines einfach eingespannten Balkens mit konstantem Flächenträgheitsmoment dargestellt werden. In Höhe der Nocken ergibt sich dann die Ausbiegung

$$f = D \cdot \int_{rad,S} \Gamma_{rad,S} \cdot d\bar{T}_S(\bar{z}) \quad (A 1.4.1)$$

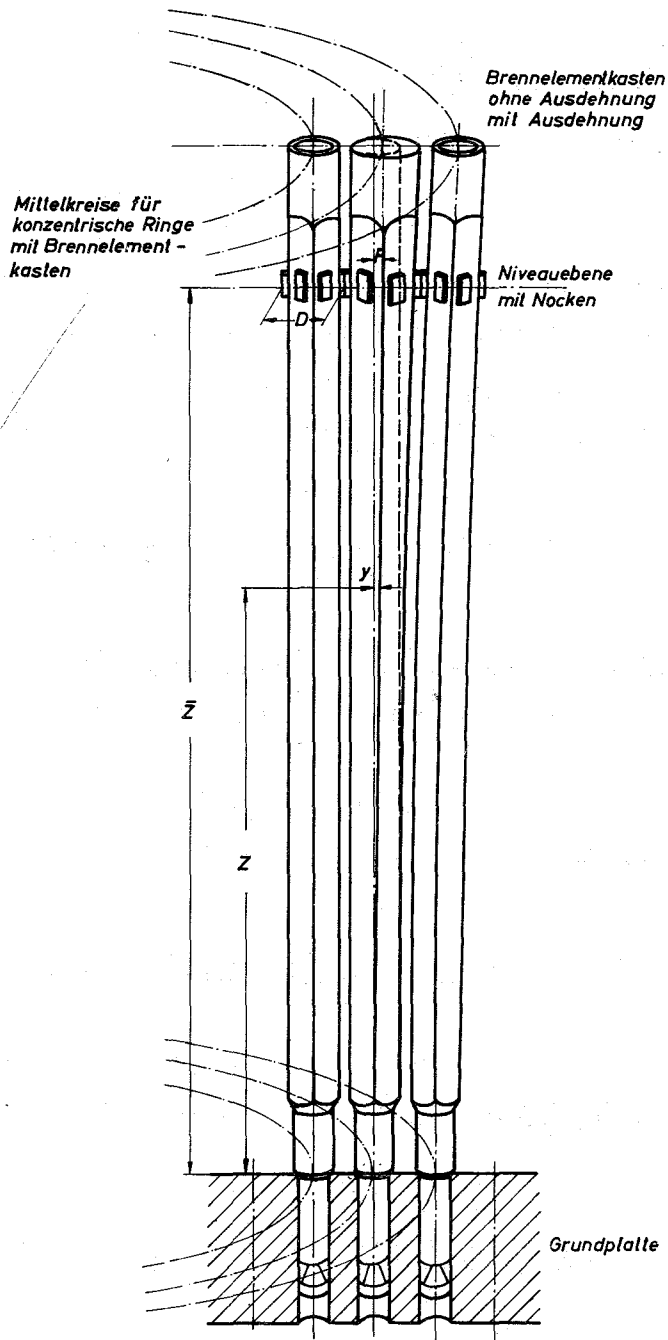


Abb. A 1.2

Ausbiegung der Brennelementkästen infolge Temperaturerhöhung des Strukturmaterials in der Niveaubene

Es bedeuten:

D die Kastenbreite

$\Gamma_{\text{rad},S}$ linearer radialer Ausdehnungskoeffizient des Strukturmaterials

$d\bar{T}_S$ Änderung der mittleren Temperatur des Strukturmaterials

\bar{z} Abstand zwischen der Ebene für die Nocken und der Grundplatte

Die Ausbiegung des Kastens an irgendeiner Stelle z ist gegeben durch [34]:

$$y(z) = f \cdot V(z, \bar{z}) = D \cdot \Gamma_{\text{rad},S} \cdot d\bar{T}_S(\bar{z}) \cdot V(z, \bar{z}) \quad (\text{A 1.4.2})$$

mit

$$V(z, \bar{z}) = 1 - 1,5 \left(\frac{\bar{z}-z}{z}\right) + 0,5 \left(\frac{\bar{z}-z}{z}\right)^3 \quad \text{für } z < \bar{z} \quad (\text{A 1.4.3})$$

$$V(z, \bar{z}) = 1 + 1,5 \left(\frac{z-\bar{z}}{z}\right) \quad \text{für } z > \bar{z}$$

Durch Anwendung einfacher geometrischer Beziehungen erhält man für die vergrößerte Querschnittsfläche der Einheitszelle an der Stelle z

$$F \left(1 + \frac{y}{D}\right)^2 = F \left[1 + \Gamma_{\text{rad,S}} \cdot d\bar{T}_S(\bar{z}) \cdot V(z, \bar{z})\right] \quad (\text{A 1.4.4})$$

wobei F die Querschnittsfläche der Einheitszelle für den unverbogenen Ausgangszustand ist.

Hiermit findet man nun durch Anwendung analoger Betrachtungsweisen wie in den Abschnitten A 1.1 bis A 1.3 leicht Beziehungen für die Dichteänderungen der Materialien:

a) Änderung der Brennstoffdichte:

$$\frac{d\mu_{R,B}}{\mu_{R,B}} = -2 \cdot \frac{y}{D} = -2 \cdot \Gamma_{\text{rad,S}} \cdot d\bar{T}_S(\bar{z}) \cdot V(z, \bar{z}) \quad (\text{A 1.4.5})$$

b) Dichteänderung der Brennstoffhülle

$$\frac{d\mu_{R,H}}{\mu_{R,H}} = \frac{-2y}{D} = -2 \cdot \Gamma_{\text{rad,S}} \cdot d\bar{T}_S(\bar{z}) \cdot V(z, \bar{z}) \quad (\text{A 1.4.6})$$

Beide Dichteänderungen unter a) und b) werden durch eine Änderung des Volumenanteils hervorgerufen.

c) Änderung der Kühlmitteldichte

Sie erfolgt einmal durch eine Erweiterung des Kühlkanals, zum anderen durch Volumenausdehnung der Abstandshalter und der Kastenwand. Beide Effekte sind gegenläufig.

$$\frac{d\mu_{R,K}}{\mu_{R,K}} = \frac{1}{\alpha_K} \left[(1-\alpha_K) \cdot 2 \cdot \Gamma_{\text{rad,ST}} \cdot d\bar{T}_{\text{ST}}(\bar{z}) \cdot V(z, \bar{z}) - \beta_{\text{ab}} \cdot \Gamma_{\text{rad,ST}} \cdot d\bar{T}_{\text{ST}}(z) - 2 \beta_{\text{Kast}} \cdot \Gamma_{\text{rad}} \cdot d\bar{T}_{\text{ST}}(z) \right] \quad (\text{A 1.4.7})$$

d) Änderung der Dichte des Strukturmaterials

$$\frac{d\mu_{R,ST}}{\mu_{R,ST}} = - \Gamma_{ax,ST} \cdot d\bar{T}_{ST} \cdot \frac{\beta_{Kast}}{(\beta_{ab} + \beta_{Kast})} \quad (A 1.4.8)$$

Nur die axiale Ausdehnung der Kastenwände führt zur Änderung der Strukturmaterialdichte.

Die radiale Ausdehnung der Kastenwände und die Volumenausdehnung der Abstandshalter bewirken eine Kühlmittelverdrängung.

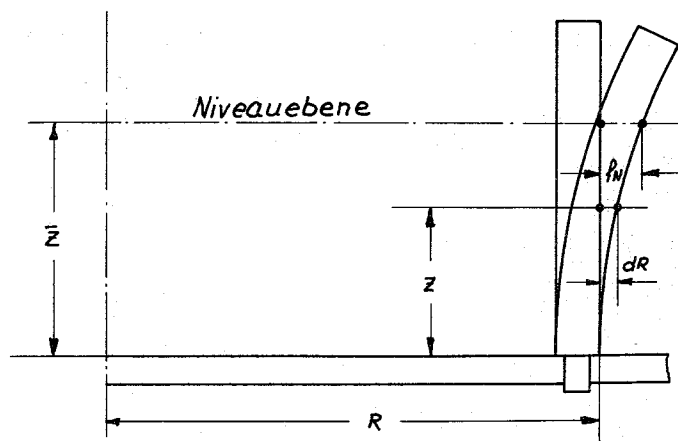
A 1.5 Änderung der Kühlmitteltemperatur

Eine Erhöhung der Kühlmitteltemperatur hat die freie räumliche Ausdehnung des Kühlmittels zur Folge.

$$\frac{d\mu_{R,K}}{\mu_{R,K}} = - 3 \cdot \Gamma_K \cdot dT_K$$

A 1.6 Änderung der radialen Grenzen von Reaktorzonen

Die durch Temperaturänderungen auf den beschriebenen Niveauebenen hervorgerufene Ausbiegung verschiebt die radialen Grenzen der Reaktorzonen um:



$$dR(r, z, t) = f_N \left[1 - \frac{3(\bar{z}-z)}{2\bar{z}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(\bar{z}-z)^3}{\bar{z}^3} \right] \quad z < \bar{z}$$

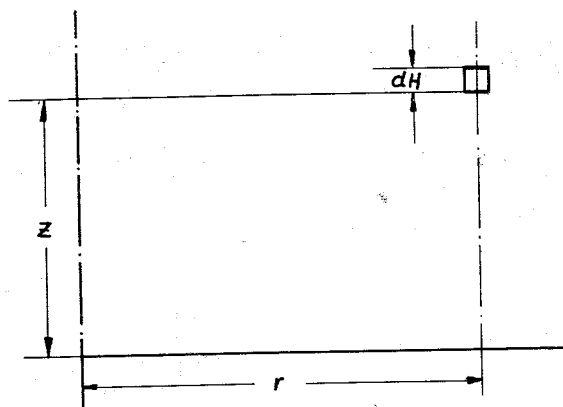
$$dR(r, z, t) = f_N \left[1 + 1,5 \cdot \frac{z-\bar{z}}{\bar{z}} \right] \quad z > \bar{z}$$

wobei

$$f_N = \int_0^r \Gamma_{\text{rad},S} \cdot d\bar{T}_S(r', \bar{z}, t) dr'$$

A 1.7 Änderung der axialen Grenzen von Reaktorzonen

Die axialen Grenzen von Reaktorzonen werden nur durch die axiale Brennstoffausdehnung verschoben. Es wird dabei angenommen, daß eine Dichteänderung am Orte z' sofort eine Verschiebung an der Stelle z ergibt. Diese Annahme ist bei den hier behandelten Leistungsexkursionen zulässig.



$$dH(r, z, t) = \int_0^z \Gamma_{\text{ax},B} \cdot d\bar{T}_B(r, z', t) \cdot dz'$$

Da bei der praktischen Durchführung der Rechnungen der Reaktor immer in eine endliche Zahl rechteckiger Zonen aufgeteilt werden muß, werden längs der Zonenränder Mittelwerte der obigen Verschiebungen dR und dH gebildet.

Anhang 2

Ausgehend von den theoretischen Überlegungen und mathematischen Formulierungen von Lewins [21] und Pomraning [20] wird zunächst das Funktional für den einfachen Fall angeschrieben, daß keine Unstetigkeiten innerhalb des Zeitintervalls $0 \leq t \leq t_e$ auftreten. Dieses Funktional enthält die Zeitableitungen in etwas anderer Form als das von Yasinsky [18] angegebene. Es enthält außerdem ein zusätzliches Oberflächenintegral, das von Köhler [17] eingeführt wurde und eine bessere Behandlung der räumlichen Randbedingungen erlaubt. Zunächst wird die Ableitung der ersten Variation dieses Funktionals in kurzer Form dargestellt. Danach wird dieses Funktional auf die Fälle mit einer und dann mit K Unstetigkeitsstellen erweitert.

Das Funktional lautet:

$$\begin{aligned}
 F(\phi^*, \phi, C_m^*, C_m) = & \int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_R dV \left\{ -v \phi^{*T} D v \phi + \phi^{*T} H \phi - \phi^{*T} v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \right. \\
 & + \sum_{m=1}^M \left[\phi^{*T} \lambda_m \rho_m C_m + C_m^* \beta_m F^T \phi - C_m^* \lambda_m C_m - C_m^* \frac{\partial}{\partial t} C_m \right] \Big\} t \\
 & - \int_{t_0}^{t_e} dt \oint_{\partial b} dS \phi^{*T} v \phi + \iiint_R dV g^{*T}(\vec{r}) v^{-1} \phi(\vec{r}, t_e) + \iiint_R dV \phi^{*T}(\vec{r}, t_0) v^{-1} [\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}, t_0)] \quad (\text{A 2.1}) \\
 & + \sum_{m=1}^M \left\{ \iiint_R dV h_m^*(\vec{r}) C_m(\vec{r}, t_e) + \iiint_R dV C_m(\vec{r}, t_0) [C_{0m}(\vec{r}) - C_m(\vec{r}, t_0)] \right\}
 \end{aligned}$$

Die obige Form des Funktionals kann für stetige Funktionen im Bereich $0 \leq t \leq t_e$ durch partielle Integration der Glieder, die partielle Ableitungen nach der Zeit enthalten, bis auf das Oberflächenintegral in das von Yasinsky angegebene Funktional übergeführt werden.

Die Bedeutung der einzelnen Größen wird in Abschnitt 3.1 erläutert. Die Orts- und Zeitabhängigkeit der auftretenden Funktionen wurde mit dem Ziel einer vereinfachten Schreibweise nur bei Größen zu Zeiten $t = t_0$ bzw. $t = t_e$, d.h. der Anfangs- und Endzeit der betrachteten Änderung des Systems angeschrieben.

Es wird nun vorausgesetzt, daß

$$\begin{aligned}
 & \phi(\vec{r}, t) \\
 & \phi^+(\vec{r}, t) \\
 & C_m(\vec{r}, t) \\
 & C_m^+(\vec{r}, t)
 \end{aligned}$$

diejenigen Funktionen aus der Klasse der zulässigen Funktionen

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\vec{r}, t) &= \phi(\vec{r}, t) + \epsilon_1 \cdot \eta(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) + \delta\phi(\vec{r}, t) \\ \bar{\phi}^+(\vec{r}, t) &= \phi^+(\vec{r}, t) + \epsilon_2 \cdot \mathcal{V}(\vec{r}, t) = \phi^+(\vec{r}, t) + \delta\phi^+(\vec{r}, t) \\ \bar{C}_m(\vec{r}, t) &= C_m(\vec{r}, t) + \epsilon_{3,m} \cdot \mathcal{Y}(\vec{r}, t) = C_m(\vec{r}, t) + \delta C_m(\vec{r}, t) \\ \bar{C}_m^+(\vec{r}, t) &= C_m^+(\vec{r}, t) + \epsilon_{4,m} \cdot \mathcal{X}(\vec{r}, t) = C_m^+(\vec{r}, t) + \delta C_m^+(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

darstellen, die bei unabhängiger und beliebiger Variation das Funktional (A 2.1) stationär machen, bzw. dessen erste Variation zum Verschwinden bringen. Für die erste Variation [17,38] des Funktionals gilt dann:

$$\delta F(\phi^+, \phi, C_m^+, C_m) = \epsilon_1 \frac{\partial F}{\partial \phi^{+T}} \cdot \frac{\partial \phi^{+T}}{\partial \epsilon_1} \Big|_{\epsilon_1=0} + \epsilon_2 \frac{\partial F}{\partial \phi^T} \cdot \frac{\partial \phi^T}{\partial \epsilon_2} \Big|_{\epsilon_2=0} + \sum_{m=1}^M \left\{ \epsilon_{3,m} \frac{\partial F}{\partial C_m^+} \cdot \frac{\partial C_m^+}{\partial \epsilon_{3,m}} \Big|_{\epsilon_{3,m}=0} + \epsilon_{4,m} \frac{\partial F}{\partial C_m} \cdot \frac{\partial C_m}{\partial \epsilon_{4,m}} \Big|_{\epsilon_{4,m}=0} \right\} = 0$$

oder in der allgemein üblichen Schreibweise [38]:

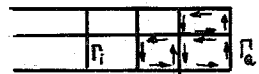
$$\delta F(\phi^+, \phi, C_m^+, C_m) = \frac{\partial F}{\partial \phi^{+T}} \delta \phi^{+T} + \frac{\partial F}{\partial \phi^T} \delta \phi^T + \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{\partial F}{\partial C_m^+} \delta C_m^+ + \frac{\partial F}{\partial C_m} \delta C_m \right\} = 0 \quad (A 2.2)$$

Bevor die erste Variation gebildet wird, werden einige notwendige Umformungen bereitgestellt:

a) über die Vektorbeziehung $\nabla(\alpha \cdot c) = \alpha \cdot \nabla c + c \nabla \alpha$ ergibt das Volumenintegral:

$$-\int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \nabla \phi^{+T} \nabla \phi = -\int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \nabla [\phi^{+T} \nabla \phi] + \int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \phi^{+T} \nabla \nabla \phi \quad (A 2.3a)$$

Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes durch Integration über alle innere Zonen i mit Konstanten D folgt [17]:



$$-\int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \nabla \phi^{+T} \nabla \phi = -\int_{t_0}^{t_e} dt \oint_{\Gamma_i} dS [\phi^{+T} \nabla \phi \vec{n}_i - \phi^{+T} \nabla \phi \vec{n}_i] - \int_{t_0}^{t_e} dt \oint_{\Gamma_e} dS \phi^{+T} \nabla \phi \vec{n} + \int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \phi^{+T} \nabla \nabla \phi \quad (A 2.3b)$$

Da D eine Diagonalmatrix ist (Abschnitt 3.1) ergibt sich nach der gleichen Methode auch die Umformung

$$-\int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \nabla \phi^T \nabla \phi = -\int_{t_0}^{t_e} dt \oint_{\Gamma_i} dS [\phi^T \nabla \phi \vec{n}_i - \phi^T \nabla \phi \vec{n}_i] - \int_{t_0}^{t_e} dt \oint_{\Gamma_e} dS \phi^T \nabla \phi \vec{n} + \int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \phi^T \nabla \nabla \phi \quad (A 2.3c)$$

b) durch partielle Integration ergibt, da v^{-1} eine Diagonalmatrix

$$-\int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \phi^{+T} v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi = -\iiint_{\mathcal{R}} dV \phi^{+T} v^{-1} \phi^+ \Big|_{t_0}^{t_e} + \int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \phi^T v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi^+ \quad (A 2.4a)$$

und

$$-\int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV C_m^+ \frac{\partial}{\partial t} C_m = -\iiint_{\mathcal{R}} dV C_m C_m^+ \Big|_{t_0}^{t_e} + \int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV C_m \frac{\partial}{\partial t} C_m^+ \quad (A 2.4b)$$

Bei Verwendung dieser Umformungen ergibt dann die erste Variation des Funktionals:

$$\begin{aligned}
 \delta F(\phi^+, \phi, C_m^+, C_m) = & \int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \cdot \delta \phi^{+T} \left\{ \nabla D \nabla \phi + H \phi - v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \sum_{m=1}^M \lambda_m \cdot f_m C_m \right\} + \\
 & - \int_{t_0}^{t_e} dt \oint_{\Gamma_a} dS \delta \phi^{+T} [\gamma \phi + D \nabla \phi \vec{n}] - \sum_{i=1}^i \int_{t_0}^{t_e} dt \oint_{\Gamma_i} dS \delta \phi^{+T} [D \nabla \phi \vec{n} \Big|_{\Gamma_{i+1}} - D \nabla \phi \vec{n} \Big|_{\Gamma_{i-1}}] + \\
 & + \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta \phi^{+T}(\vec{r}, t_0) v^{-1} [\phi_0(\vec{r}) - \phi(\vec{r}, t_0)] + \\
 & + \int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta \phi^T \left\{ \nabla D \nabla \phi^+ + H^T \phi^+ + v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi^+ + \sum_{m=1}^M C_m \beta_m \cdot F \right\} + \tag{A 2.5} \\
 & - \int_{t_0}^{t_e} dt \oint_{\Gamma_a} dS \delta \phi^T [\gamma \cdot \phi^+ + D \nabla \phi^+ \vec{n}] - \sum_{i=1}^i \int_{t_0}^{t_e} dt \oint_{\Gamma_i} dS \delta \phi^T [D \nabla \phi^+ \vec{n} \Big|_{\Gamma_{i+1}} - D \nabla \phi^+ \vec{n} \Big|_{\Gamma_{i-1}}] + \\
 & + \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta \phi^T(\vec{r}, t_e) v^{-1} [g^+(\vec{r}) - \phi^+(\vec{r}, t_e)] \\
 & + \int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{m=1}^M \delta C_m^+ [\beta_m F^T \cdot \phi - \lambda_m C_m - \frac{\partial}{\partial t} C_m] + \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta C_m^+(\vec{r}, t_0) [C_{0,m}(\vec{r}) - C_m(\vec{r}, t_0)] \\
 & + \int_{t_0}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{m=1}^M \delta C_m [\lambda_m f_m^T \phi^+ - \lambda_m C_m^+ + \frac{\partial}{\partial t} C_m^+] + \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta C_m(\vec{r}, t_e) [h_m^+(\vec{r}) - C_m^+(\vec{r}, t_e)]
 \end{aligned}$$

Bei unabhängiger und beliebiger Variation der Größen ϕ^{+T} , $\phi^{+T}(\vec{r}, t_0)$, ϕ^T , $\phi^T(\vec{r}, t_e)$, C_m^+ , $C_m^+(\vec{r}, t_0)$, C_m^+ und $C_m^+(\vec{r}, t_e)$ wird das Funktional $F(\phi^+, \phi, C_m^+, C_m)$ nur stationär, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) die instationären Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen als Euler-Lagrange'sche Differentialgleichungen

$$\nabla D \cdot \nabla \phi + H \cdot \phi + \sum_{m=1}^M \lambda_m \cdot f_m \cdot C_m = v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi \tag{A 2.6}$$

$$\gamma \phi + D \nabla \phi \vec{n} = 0 \quad \text{für } r \in \Gamma_a \quad \text{äußere Randbedingung} \tag{A 2.6a}$$

$$J = - D \nabla \phi \vec{n} \quad \text{stetig für } r \in \Gamma_i \quad \text{an inneren Randflächen} \tag{A 2.6b}$$

$$\phi(\vec{r}, t_0) = \phi_0 \quad \text{Anfangsbedingung} \tag{A 2.6c}$$

b) die Vorläufer der verzögerten Neutronen als Euler-Lagrange'sche Differentialgleichungen

$$\beta_m \cdot F^T \phi - \lambda_m C_m = \frac{\partial}{\partial t} C_m \quad \text{für alle Gruppen } m=1 \dots M \quad (\text{A 2.7})$$

$$C_m(\vec{r}, t_0) = C_{m,0} \quad \text{Anfangsbedingung} \quad (\text{A 2.7a})$$

c) die instationären adjungierten Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen als Euler-Lagrange'sche Differentialgleichungen

$$\nabla D \cdot \nabla \phi^+ + H^T \phi^+ + F \cdot \sum_{m=1}^M \beta_m C_m = -v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi^+ \quad (\text{A 2.8})$$

$$\gamma \phi^+ + D \nabla \phi^+ \vec{n} = 0 \quad \text{für } r \in \Gamma_a \quad \text{äußere Randbedingung} \quad (\text{A 2.8a})$$

$$J = -D \nabla \phi^+ \quad \text{stetig für } r \in \Gamma_i \quad \text{an inneren Randflächen} \quad (\text{A 2.8b})$$

$$\phi^+(\vec{r}, t_e) = g^+(\vec{r}) \quad \text{Endbedingung} \quad (\text{A 2.8c})$$

$g^+(\vec{r})$ ist eine beliebige Ortsfunktion.

d) die Konzentrationen der adjungierten Vorläufer der adjungierten verzögerten Neutronen

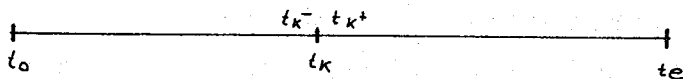
$$\lambda_m f_m^T \cdot \phi^+ - \lambda_m C_m^+ = -\frac{\partial}{\partial t} C_m^+ \quad \text{für alle Gruppen } m \quad (\text{A 2.9})$$

$$C_m^+(\vec{r}, t_e) = h_m^+(\vec{r}) \quad \text{Endbedingung} \quad (\text{A 2.9a})$$

die $h_m^+(\vec{r})$ sind beliebige Ortsfunktionen.

Die Differentialgleichungen (A 2.6) bis (A 2.9) sind unter Berücksichtigung der in Abschnitt 3.1 eingeführten Matrixschreibweise mit den in Abschnitt 2.1 formulierten ortsabhängigen kinetischen Gleichungen identisch. Sie ergeben sich als Euler-Lagrange'sche Differentialgleichungen, die zugehörigen Rand-, Anfangs- und Endbedingungen als natürliche Randbedingungen aus dem Funktional. Damit ist die Äquivalenz zwischen der Lösung der partiellen Differentialgleichungen mit Randbedingungen und der Forderung nach dem Verschwinden der ersten Variation des Funktionals (A 2.1) nachgewiesen. Man erkennt außerdem aus der ersten Variation des Funktionals (A 2.5), daß die instationären Diffusionsgleichungen und die Differentialgleichungen für die Vorläufer der verzögerten Neutronen durch Variation von ϕ^+ bzw. C_m^+ und umgekehrt das adjungierte System durch Variation von ϕ und C_m aus dem Funktional hervorgehen. Die Variation hätte auch für jede Größe getrennt erfolgen können [38].

Das Funktional, welches Unstetigkeiten der Versuchs-Funktionen für ϕ , ϕ^+ , C_m , C_m^+ an einer Stelle t_k zuläßt,



kann nach Pomraning [20] dadurch gebildet werden, daß der zeitliche Integrationsbereich des Funktionals in zwei Bereiche von $t_0 \leq t \leq t_k^-$ und von $t_k^+ \leq t \leq t_e$ aufgeteilt wird. Außerdem müssen Zusatzterme addiert werden, welche gewährleisten, daß sich die zeitlichen Übergangsbedingungen für t_k^- und t_k^+ als "natürliche Stetigkeitsbedingungen" beim Verschwinden der ersten Variation ergeben. Das Funktional lautet dann:

$$\begin{aligned}
 F_1(\phi^+, \phi, C_m^+, C_m) = & \int_{t_0}^{t_k^-} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \left\{ -\nabla \phi^{*T} \mathcal{D} \nabla \phi + \phi^{*T} H \phi - \phi^{*T} v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \right. \\
 & + \sum_{m=1}^M \left[\phi^{*T} \lambda_m f_m C_m + C_m^+ \beta_m F^T \phi - C_m^+ \lambda_m C_m - C_m^+ \frac{\partial}{\partial t} C_m \right] \left. + \right. \\
 & - \int_{t_0}^{t_k^-} dt \oint_{\partial \mathcal{V}} ds \phi^{*T} \nu \phi + \\
 & + \int_{t_k^+}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \left\{ -\nabla \phi^{*T} \mathcal{D} \nabla \phi + \phi^{*T} H \phi - \phi^{*T} v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \right. \\
 & + \sum_{m=1}^M \left[\phi^{*T} \lambda_m f_m C_m + C_m^+ \beta_m F^T \phi - C_m^+ \lambda_m C_m - C_m^+ \frac{\partial}{\partial t} C_m \right] \left. + \right. \\
 & - \int_{t_k^+}^{t_e} dt \oint_{\partial \mathcal{V}} ds \phi^{*T} \nu \phi + \\
 & + \iiint_{\mathcal{R}} dV g^{*T}(\vec{r}) v^{-1} \phi(\vec{r}, t_e) + \iiint_{\mathcal{R}} dV \phi^{*T}(\vec{r}, t_0) v^{-1} [\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}, t_0)] + \\
 & + \sum_{m=1}^M \left[\iiint_{\mathcal{R}} dV h_m^*(\vec{r}) C_m(\vec{r}, t_e) + \iiint_{\mathcal{R}} dV C_m^*(\vec{r}, t_0) [C_{0,m}(\vec{r}) - C_m(\vec{r}, t_0)] \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{R}} dV [\phi^*(\vec{r}, t_k^-) + \phi^*(\vec{r}, t_k^+)]^T v^{-1} [\phi(\vec{r}, t_k^-) - \phi(\vec{r}, t_k^+)] + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \iiint_{\mathcal{R}} dV [C_m^*(\vec{r}, t_k^-) + C_m(\vec{r}, t_k^+)] [C_m(\vec{r}, t_k^-) - C_m(\vec{r}, t_k^+)]
 \end{aligned} \tag{A 2.10}$$

Die beiden letzten Zeilen dieses Funktionals stellen die durch die Unstetigkeit geforderten Zusatzterme dar. Diese von Pomraning [20] noch durch einen "trial and error"-Prozeß eingeführten Zusatzterme erhält auch Lewins [21], indem er die zeitliche Integration im "Funktional ohne Unstetigkeitsstellen" (A 1.1), einem Vorschlag von Wachspress und Becker [36] folgend, über die Unstetigkeitsstelle zur Zeit t_k hinwegführt. Alle Versuchs-funktionen ϕ^+ , ϕ ,

C_m^+ , C_m können dabei gleichzeitig Unstetigkeitsstellen besitzen.

Bei Verwendung der in Gl. (A 2.3a) bis (A 2.4b) angegebenen Umformungen, wobei die zeitliche Integration von $t_0 \dots t_k^-$ und $t_k^+ \dots t_e$ zu erstrecken ist, erhält man für die erste Variation des Funktionals $F_1(\phi^+, \phi, C_m^+, C_m)$:

$$\begin{aligned}
 \delta F_1(\phi^+, \phi, C_m^+, C_m) = & \int_{t_0}^{t_k^-} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta \phi^{*T} \left\{ \nabla D \nabla \phi + H \phi - v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \sum_{m=1}^M \lambda_m f_m C_m \right\} + \\
 & - \int_{t_0}^{t_k^-} dt \oint_{\mathcal{R}} \delta \phi^{*T} [r \phi + D \nabla \phi \bar{n}]_{\mathcal{R}_k^-} - \int_{t_0}^{t_k^-} dt \oint_{\mathcal{R}} \delta \phi^{*T} [D \nabla \phi \bar{n}]_{\mathcal{R}_k^-} - D \nabla \phi \bar{n} \Big|_{\mathcal{R}_k^-} \\
 & + \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta \phi^{*T}(\bar{r}, t_k^-) v^{-1} [\phi(\bar{r}) - \phi(\bar{r}, t_k^-)] + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta \phi^{*T}(\bar{r}, t_k^-) v^{-1} [\phi(\bar{r}, t_k^-) - \phi(\bar{r}, t_k^+)] + \\
 & + \int_{t_0}^{t_k^-} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta \phi^T \left\{ \nabla D \nabla \phi^* + H^T \phi^* + v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi^* + F \sum_{m=1}^M C_m \beta_m \right\} + \\
 & - \int_{t_0}^{t_k^-} dt \oint_{\mathcal{R}} \delta \phi^T [r \phi^* + D \nabla \phi^* \bar{n}]_{\mathcal{R}_k^-} - \int_{t_0}^{t_k^-} dt \oint_{\mathcal{R}} \delta \phi^T [D \nabla \phi^* \bar{n}]_{\mathcal{R}_k^-} - D \nabla \phi^* \bar{n} \Big|_{\mathcal{R}_k^-} + \\
 & + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta \phi^T(\bar{r}, t_k^-) v^{-1} [\phi^*(\bar{r}, t_k^-) - \phi^*(\bar{r}, t_k^+)] + \\
 & + \int_{t_0}^{t_k^-} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{m=1}^M \delta C_m^* [\beta_m F^T \phi - \lambda_m C_m - \frac{\partial}{\partial t} C_m] + \sum_{m=1}^M \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta C_m^*(\bar{r}, t_k^-) [C_m(\bar{r}) - C_m(\bar{r}, t_k^-)] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta C_m^*(\bar{r}, t_k^-) [C_m(\bar{r}, t_k^-) - C_m(\bar{r}, t_k^+)] + \\
 & + \int_{t_0}^{t_k^-} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{m=1}^M \delta C_m [\lambda_m f_m^T \phi^* - \lambda_m C_m^* + \frac{\partial}{\partial t} C_m^*] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta C_m(\bar{r}, t_k^-) [C_m^*(\bar{r}, t_k^-) - C_m^*(\bar{r}, t_k^+)] + \\
 & + \int_{t_k^+}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta \phi^{*T} \left\{ \nabla D \nabla \phi + H \phi - v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \sum_{m=1}^M \lambda_m f_m C_m \right\} + \\
 & - \int_{t_k^+}^{t_e} dt \oint_{\mathcal{R}} \delta \phi^{*T} [r \phi + D \nabla \phi \bar{n}]_{\mathcal{R}_k^+} - \int_{t_k^+}^{t_e} dt \oint_{\mathcal{R}} \delta \phi^{*T} [D \nabla \phi \bar{n}]_{\mathcal{R}_k^+} - D \nabla \phi \bar{n} \Big|_{\mathcal{R}_k^+} + \\
 & + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta \phi^{*T}(\bar{r}, t_k^+) v^{-1} [\phi(\bar{r}, t_k^+) - \phi(\bar{r}, t_k^-)] + \\
 & + \int_{t_k^+}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta \phi^T \left\{ \nabla D \nabla \phi^* + H^T \phi^* + v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi^* + F \sum_{m=1}^M \beta_m C_m^* \right\} + \\
 & - \int_{t_k^+}^{t_e} dt \oint_{\mathcal{R}} \delta \phi^T [r \phi^* + D \nabla \phi^* \bar{n}]_{\mathcal{R}_k^+} - \int_{t_k^+}^{t_e} dt \oint_{\mathcal{R}} \delta \phi^T [D \nabla \phi^* \bar{n}]_{\mathcal{R}_k^+} - D \nabla \phi^* \bar{n} \Big|_{\mathcal{R}_k^+} + \\
 & + \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta \phi^T(\bar{r}, t_k^+) v^{-1} [\phi^*(\bar{r}) - \phi^*(\bar{r}, t_k^+)] - \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta \phi^T(\bar{r}, t_k^+) v^{-1} [\phi^*(\bar{r}, t_k^+) - \phi^*(\bar{r}, t_k^-)] \\
 & + \int_{t_k^+}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{m=1}^M \delta C_m^* [\beta_m F^T \phi - \lambda_m C_m - \frac{\partial}{\partial t} C_m] + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta C_m^*(\bar{r}, t_k^+) [C_m(\bar{r}, t_k^+) - C_m(\bar{r}, t_k^-)] \\
 & + \int_{t_k^+}^{t_e} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \sum_{m=1}^M \delta C_m [\lambda_m f_m^T \phi^* - \lambda_m C_m^* + \frac{\partial}{\partial t} C_m^*] + \\
 & + \sum_{m=1}^M \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta C_m(\bar{r}, t_k^+) [h_m^*(\bar{r}) - C_m(\bar{r}, t_k^+)] - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \iiint_{\mathcal{R}} dV \delta C_m(\bar{r}, t_k^+) [C_m^*(\bar{r}, t_k^+) - C_m^*(\bar{r}, t_k^-)]
 \end{aligned} \tag{A 2.11}$$

Bei unabhängiger und beliebiger Variation der Funktionen ϕ^+ , ϕ , C_m^+ , C_m für t innerhalb und an den Grenzen der Makrozeitschritte $t_0 \leq t \leq t_{k-}$ und $t_{k+} \leq t \leq t_e$ verschwindet die erste Variation des Funktionals $F_1(\phi^+, \phi, C_m^+, C_m)$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) die instationären Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen als Euler-Lagrange'sche Differentialgleichungen

$$D \cdot \nabla \phi + H\phi + \sum_{m=1}^M \lambda_m \cdot f_m \cdot C_m = v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi \quad \text{für} \quad (A 2.12a)$$

$$\gamma \phi + D \cdot \nabla \phi \cdot \vec{n} = 0 \quad r \in \Gamma_a \quad t_0 \leq t \leq t_{k-} \quad (A 2.12b)$$

$$J = -D \cdot \nabla \phi \quad \text{stetig für } r \in \Gamma_i \text{ an inneren Randflächen} \quad t_{k+} \leq t \leq t_e \quad (A 2.12c)$$

$$\phi(\vec{r}, t_0) = \phi_0 \quad \text{Anfangsbedingung} \quad (A 2.12d)$$

$$\phi(\vec{r}, t_{k-}) = \phi(r, t_{k+}) \quad \text{zeitliche Stetigkeitsbedingung} \quad (A 2.12e)$$

b) die Vorläufer der verzögerten Neutronen als Euler-Lagrange'sche Differentialgleichung

$$\beta_m \cdot F_m^T \phi - \lambda_m C_m = \frac{\partial}{\partial t} C_m \quad \text{für} \quad t_0 \leq t \leq t_{k-} \quad \text{und alle} \quad (A 2.13a)$$

$$t_{k+} \leq t \leq t_e \quad \text{Gruppen } m$$

$$C_m(\vec{r}, t_0) = C_{m,0} \quad \text{Anfangsbedingung} \quad (A 2.13b)$$

$$C_m(\vec{r}, t_{k-}) = C_m(\vec{r}, t_{k+}) \quad \text{zeitliche Stetigkeitsbedingung} \quad (A 2.13c)$$

c) die instationären adjungierten Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen als Euler-Lagrange'sche Differentialgleichungen

$$D \cdot \nabla \phi^+ + H^{+T} \phi^+ + F \cdot \sum_{m=1}^M \beta_m C_m^+ = -v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi^+ \quad (A 2.14a)$$

$$\gamma \phi^+ + D \cdot \nabla \phi^+ \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{für } r \in \Gamma_a \quad \text{für} \quad t_0 \leq t \leq t_{k-} \quad (A 2.14b)$$

$$J = -D \cdot \nabla \phi^+ \quad \text{stetig für } r \in \Gamma_i \text{ an inneren Randflächen} \quad t_{k+} \leq t \leq t_e \quad (A 2.14c)$$

$$\phi^+(\vec{r}, t_e) = g^+(\vec{r}) \quad \text{Endbedingung} \quad (A 2.14d)$$

$$\phi^+(\vec{r}, t_{k-}) = \phi^+(\vec{r}, t_{k+}) \quad \text{zeitliche Stetigkeitsbedingung}$$

d) die adjungierten Vorläufer der adjungierten verzögerten Neutronen als Euler-Lagrange'sche Differentialgleichungen

$$\lambda_m f_m^{+T} \phi^+ - \lambda_m C_m^+ = -\frac{\partial}{\partial t} C_m^+ \quad \text{für} \quad t_0 \leq t \leq t_{k-} \quad \text{und alle} \quad (A 2.15a)$$

$$t_{k+} \leq t \leq t_e \quad \text{Gruppen } m$$

Anhang 3

Die Zusatzterme:

$$\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{R}} dV \cdot [\varphi^+(r, t_{k-}) + \varphi^+(r, t_{k+})] \cdot v^{-1} \cdot [\varphi(r, t_{k-}) - \varphi(r, t_{k+})] \quad (\text{A 3.1})$$

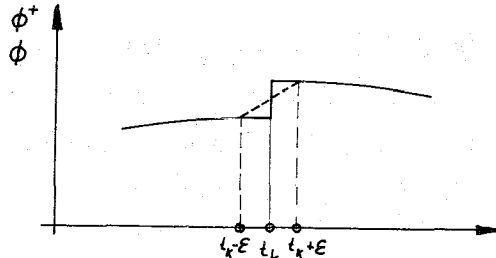
und

$$\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{R}} dV \cdot [C_m^+(r, t_{k-}) + C_m^+(r, t_{k+})] \cdot [C_m(r, t_{k-}) - C_m(r, t_{k+})],$$

die im Funktional (A 2.10) für die zeitlichen Übergangsbedingungen an der Unstetigkeitsstelle $t = t_k$ verantwortlich sind, können nach Lewins [21] hergeleitet werden, indem die Glieder mit zeitlichen Ableitungen

$$\int_{t_{k-}}^{t_{k+}} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \cdot \varphi^{+T} \cdot v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \varphi \quad \text{und} \quad \int_{t_{k-}}^{t_{k+}} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \cdot C_m^+ \cdot \frac{\partial}{\partial t} C_m$$

über die Unstetigkeitsstelle hinweg integriert werden. Hierzu wird nach Wachspress und Becker [36] angenommen, daß sowohl φ^+ als auch φ für $t_{k-} - \varepsilon \leq t \leq t_{k+} + \varepsilon$ durch



den folgenden Ansatz wiedergegeben werden können.

$$\varphi^+ = \frac{\varphi^+(t_{k-}) + \varphi^+(t_{k+})}{2} + \frac{t - t_k}{2 \cdot \varepsilon} [\varphi^+(t_{k+} + \varepsilon) - \varphi^+(t_{k-} - \varepsilon)] \quad (\text{A 3.2a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} [\varphi(t_{k+} + \varepsilon) - \varphi(t_{k-} - \varepsilon)] \quad (\text{A 3.2b})$$

Zunächst wird die Integration in den Grenzen von $t_{k-} - \varepsilon \leq t \leq t_{k+} + \varepsilon$ ausgeführt und daran anschließend der Grenzwert des Integrals für $\varepsilon = 0$ bestimmt.

$$\begin{aligned} - \int_{t_{k-}}^{t_{k+}} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \varphi^{+T} v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \varphi &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_{k-} - \varepsilon}^{t_{k+} + \varepsilon} dt \iiint_{\mathcal{R}} dV \left\{ \frac{1}{2} [\varphi^{+T}(t_{k-} - \varepsilon) + \varphi^{+T}(t_{k+} + \varepsilon)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t - t_k}{2 \cdot \varepsilon} [\varphi^{+T}(t_{k+} + \varepsilon) - \varphi^{+T}(t_{k-} - \varepsilon)] \right\} v^{-1} \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} [\varphi(t_{k+} + \varepsilon) - \varphi(t_{k-} - \varepsilon)] \end{aligned}$$

Dies ergibt:

$$-\int_{t_k^-}^{t_k^+} dt \iiint_R \phi^{+T} v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi = \iiint_R dV \cdot \frac{1}{2} [\phi^+(t_k^-) + \phi^+(t_k^+)]^T v^{-1} [\phi(t_k^-) - \phi(t_k^+)] \quad (A 3.3a)$$

Ähnlich ergibt sich:

$$-\int_{t_k^-}^{t_k^+} dt \iiint_R dV C_m^+ \frac{\partial}{\partial t} C_m = \iiint_R dV \cdot \frac{1}{2} [C_m^+(t_k^-) + C_m^+(t_k^+)] [C_m(t_k^-) - C_m(t_k^+)] \quad (A 3.3b)$$

t_k^- ist der linke, t_k^+ der rechte Grenzwert der Unstetigkeitsstelle.

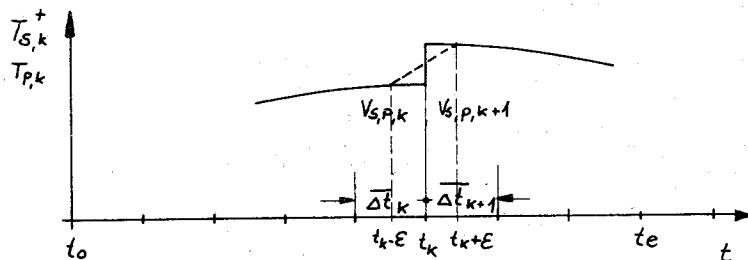
Bei Anwendung des Kantorowitsch-Verfahrens erhält man nach Einsetzen der Näherungen für ϕ^+ , ϕ , C_m^+ und C_m in das Funktional (3.19) die folgenden, Gl.(A 3.1) entsprechenden Zusatzterme, die aus den zeitlichen Übergangsbedingungen an Unstetigkeitsstellen $t = t_k$ im Funktional (3.24) folgen.

$$-\sum_{k=1}^K \int_{t_k^-}^{t_k^+} dt \sum_{s=1}^P T_{s,k}^{+T}(t) \cdot \sum_{p=1}^P V_{s,p,k} \frac{\partial}{\partial t} T_{p,k}(t) \quad (A 3.4a)$$

und

$$-\sum_{k=1}^K \int_{t_k^-}^{t_k^+} dt \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^P \tau_{m,t,k}^+(t) \cdot \sum_{q=1}^P I_{m,t,q,k} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \tau_{m,q,k}(t) \quad (A 3.4b)$$

Entsprechend Gleichungen (A 3.2a), (A 3.2b) können auch $T_{s,k}^+(t)$ und $T_{p,k}(t)$ im Bereich $t_k - \epsilon \leq t \leq t_k + \epsilon$ in eine Taylorreihe bis zum zweiten Glied entwickelt werden. Berücksichtigt man weiter, daß die Matrizen $V_{s,p,k}$ an der Unstetigkeitsstelle t_k sprunghaft in $V_{s,p,k+1}$ übergehen,



so kann man ansetzen

$$T_{s,k}^+(t) = \frac{1}{2} [T_{s,k}^+(t_k - \epsilon) + T_{s,k}^+(t_k + \epsilon)] + \frac{t - t_k}{2 \cdot \epsilon} [T_{s,k}^+(t_k + \epsilon) - T_{s,k}^+(t_k - \epsilon)]$$

$$V_{s,p,k} \frac{\partial}{\partial t} T_{p,k}(t) = \frac{1}{2 \epsilon} [V_{s,p,k+1}(t_k^+) T_{p,k}(t_k + \epsilon) - V_{s,p,k}(t_k^-) T_{p,k}(t_k - \epsilon)]$$

Man erhält dann für das Integral (A 3.4a):

$$\begin{aligned}
 - \sum_{R=1}^K \int_{t_R^-}^{t_R^+} dt \left[\sum_{S=1}^{P_R} T_{S,R}^{+T}(t) \cdot \sum_{P=1}^{P_R} V_{S,P,R} \frac{\partial}{\partial t} T_{P,R}(t) \right] &= \\
 = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{R=1}^K \int_{t_R-\epsilon}^{t_R+\epsilon} dt \sum_{S=1}^{P_R} \left\{ \frac{1}{2} [T_{S,R}^+(t_R-\epsilon) + T_{S,R}^+(t_R+\epsilon)] + \frac{t-t_R}{2\epsilon} [T_{S,R}^+(t_R+\epsilon) - T_{S,R}^+(t_R-\epsilon)] \right\} & \\
 \cdot \sum_{P=1}^{P_R} \frac{1}{2\epsilon} [V_{S,P,R+1}(t_R^+) \cdot T_P(t_R+\epsilon) - V_{S,P,R}(t_R^-) \cdot T_P(t_R-\epsilon)] &
 \end{aligned}$$

Dies ergibt:

$$\begin{aligned}
 - \sum_{R=1}^K \int_{t_R^-}^{t_R^+} dt \left[\sum_{P=1}^{P_R} T_{S,R}^{+T}(t) \cdot \sum_{P=1}^{P_R} V_{S,P,R} \frac{\partial}{\partial t} T_{P,R}(t) \right] &= \quad (A 3.5a) \\
 = \sum_{R=1}^K \sum_{S=1}^{P_R} \frac{1}{2} [T_{S,R}^+(t_R^-) + T_{S,R}^+(t_R^+)] \sum_{P=1}^{P_R} [V_{S,P,R}(t_R^-) \cdot T_{P,R}(t_R^-) - V_{S,P,R+1}(t_R^+) \cdot T_{P,R}(t_R^+)] &
 \end{aligned}$$

t_k^- ist der linke, t_k^+ der rechte Grenzwert der Unstetigkeitsstelle.

Durch einen ähnlichen Ansatz für C_m^+ und C_m erhält man:

$$\begin{aligned}
 - \sum_{R=1}^K \int_{t_R^-}^{t_R^+} dt \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^{P_R} \tau_{m,t,R}^+(t) \cdot \sum_{q=1}^{P_R} I_{m,t,q,R} \frac{\partial}{\partial t} \tau_{m,q,R}(t) &= \quad (A 3.5b) \\
 = \sum_{R=1}^K \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^{P_R} \frac{1}{2} [\tau_{m,t,R}^+(t_R^-) + \tau_{m,t,R}^+(t_R^+)] \sum_{q=1}^{P_R} [I_{m,t,q,R}(t_R^-) \cdot \tau_{m,q,R}(t_R^-) - I_{m,t,q,R+1}(t_R^+) \cdot \tau_{m,q,R}(t_R^+)] &
 \end{aligned}$$