

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM  
KARLSRUHE**

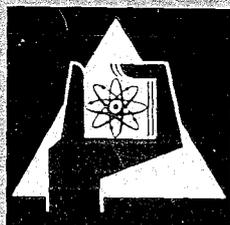
Mai 1969

KFK 844  
EUR 3980 d

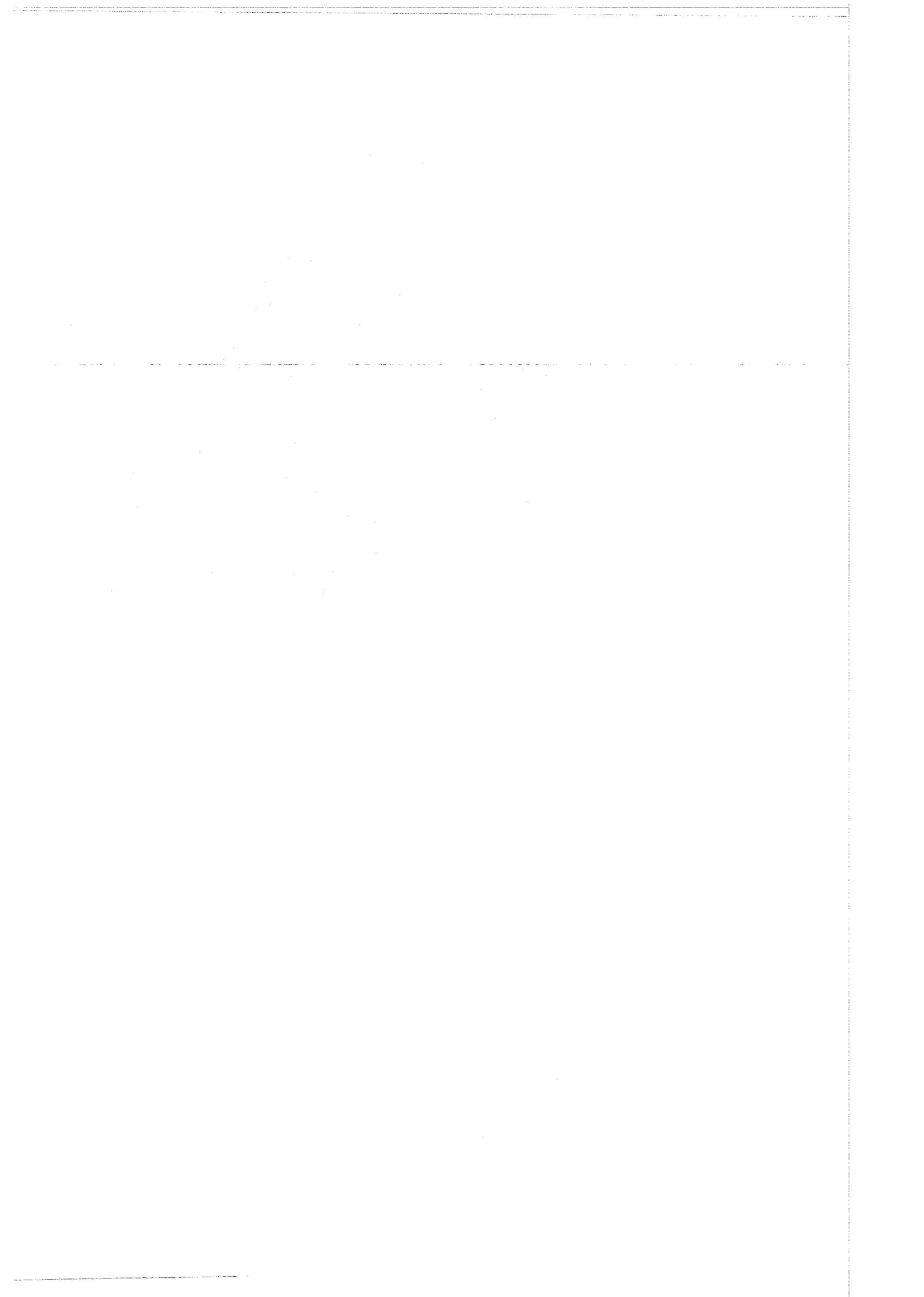
Institut für Angewandte Reaktorphysik

Interpretation von Dopplerproben-Messungen in schnellen  
kritischen Null-Energie-Anlagen

E. A. Fischer



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Mai 1969

KFK-844  
EUR 3980 d

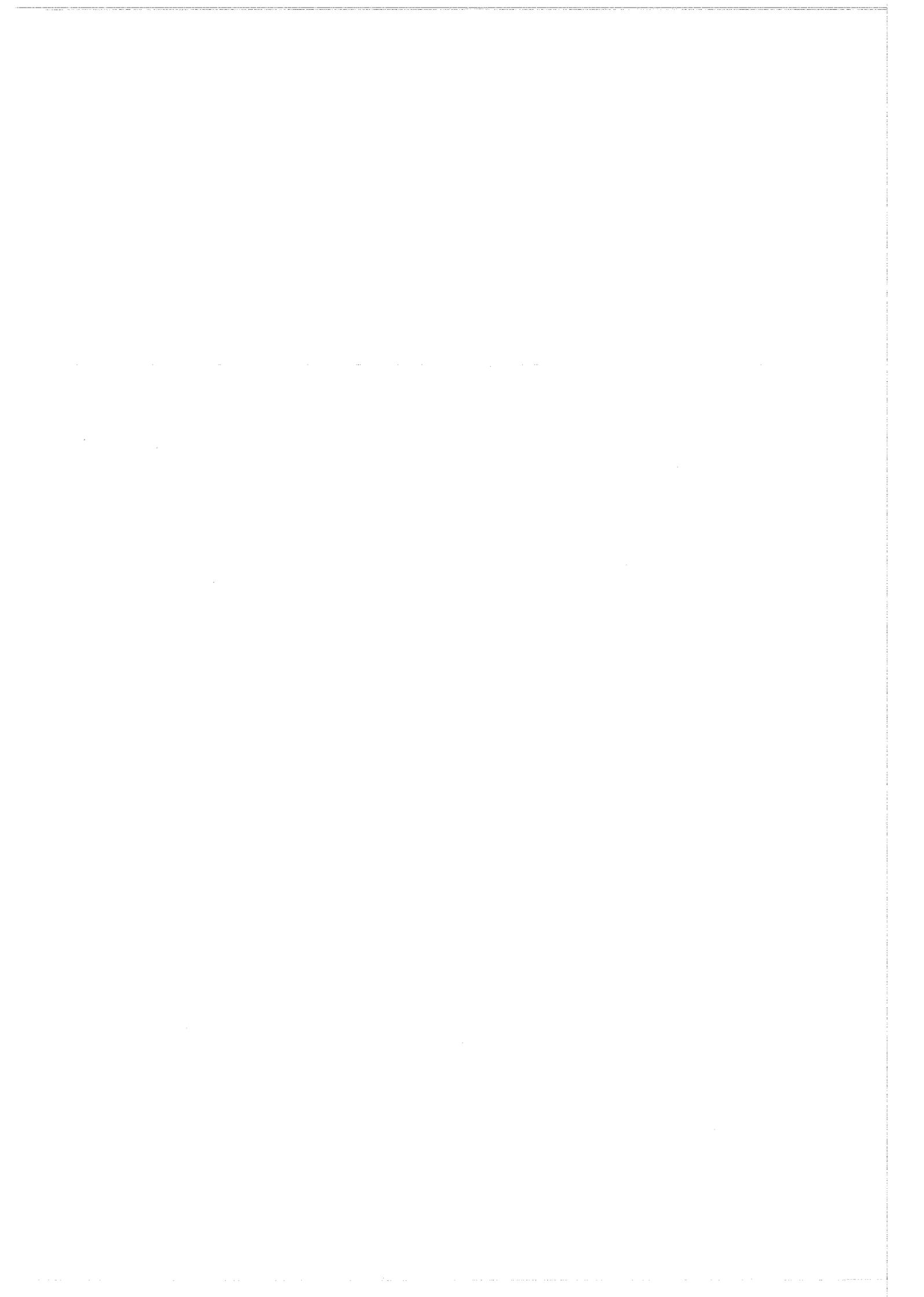
Institut für Angewandte Reaktorphysik

Interpretation von Dopplerproben-Messungen in schnellen  
kritischen Null-Energie-Anlagen\*)

E.A. Fischer

\*) Diese Arbeit wurde im Rahmen der Assoziation zwischen der Europäischen Atomgemeinschaft und der Gesellschaft für Kernforschung mbH., Karlsruhe, auf dem Gebiet der schnellen Reaktoren durchgeführt .

Als Dissertation genehmigt von der Fakultät für Maschinenbau und Verfahrenstechnik der Universität (TH) Karlsruhe.



INHALTSVERZEICHNIS

	<u>Seite</u>
1. Einleitung	3
2. Allgemeine Überlegungen zur Interpretation von Doppler-Experimenten	5
2.1 Übersicht über die bisher angewandten Methoden	5
2.2 Ziel der vorliegenden Arbeit	7
3. Störungstheoretische Lösung der integralen Transportgleichung für das Proben-Problem	8
3.1 Allgemeine Bemerkungen und Annahmen	8
3.2 Integrale Transportgleichung in Multigruppenform	9
3.3 Störungstheoretische Lösung für Probenmessungen	13
4. Berechnung der Doppler-Reaktivität beim Aufheizen einer Probe	19
4.1 Induktive Behandlung eines Spezialfalls	19
4.2 Ableitung des Spezialfalls aus der allgemeinen Störungsformel	22
4.3 Formulierung für die Auswertung praktischer Dopplerproben-Messungen	25
4.4 Berechnung der Reaktionsratenverhältnisse	30
4.5 Schwankungsbreite durch die Statistik der überlappenden Resonanzen verschiedener Isotope	33
5. Berechnung des Reaktivitätseffekts durch thermische Ausdehnung der Probe	35
6. Numerische Auswertung für Messungen an Uranproben	38
6.1 Numerische Ergebnisse und Vergleich mit dem Experiment	38
6.2 Diskussion einzelner Effekte	39

	<u>Seite</u>
7. Numerische Auswertung für Messungen an Plutoniumproben	42
7.1 Messungen an SNEAK-3B-2 - Auslegung zur Bestimmung von Alpha	42
7.2 Berechnung der Meßergebnisse und Vergleich mit dem Experiment	44
7.3 Abschätzung des Überlappungseffekts	45
7.4 Diskussion der Ergebnisse - Bestimmung von Alpha	46
8. Zusammenfassung	48
Anhang 1: Übersicht über die Theorie der Dopplerkoeffizienten schneller Reaktoren	50
Anhang 2: Berechnung der Größen $I_x$ und $H_x$	57
Literaturverzeichnis	61
Tabellen	63
Figuren	69

## 1. Einleitung

Im Oktober 1966 wurde auf einer Konferenz in Argonne vom Verfasser ein Vortrag über die Interpretation von Dopplerproben-Messungen gehalten /4/, in dem im wesentlichen der nur theoretisch interessante Spezialfall einer Probe mit derselben Zusammensetzung wie das Core diskutiert wurde. Darüber hinaus wurde ein allgemeiner theoretischer Ansatz angegeben, dessen Tragweite über diesen Spezialfall weit hinausreicht. In der vorliegenden Arbeit wird im ersten Teil dieser Ansatz zu einer allgemeinen Theorie erweitert, die in ihrer vollen Tragweite umrissen und bis zur Anwendbarkeit auf praktisch interessante Experimente fortgeführt wird. Ein zweiter Teil befaßt sich mit der Auswertung und zum Teil auch mit der Planung von Messungen mit Dopplerproben, wobei die Klärung bisher aufgetretener Diskrepanzen bei Messungen mit Plutoniumproben im Mittelpunkt steht.

Experimente zur Bestimmung des Dopplerkoeffizienten von schnellen Brutreaktoren werden meist in kritischen Nullenergieanlagen durchgeführt, die wegen ihrer Flexibilität dafür besonders geeignet sind. Unter den verschiedenen bekannten experimentellen Methoden hat die Reaktivitätsmessung mit beheizten Proben im Pile-Oszillator bei weitem die größte Bedeutung erlangt.

Die für solche Messungen verwendeten zylindrischen Dopplerproben sind typisch etwa 2 bis 3 cm dick und 10 bis 20 cm lang. Sie enthalten die Brennstoffisotope, von denen man einen wesentlichen Beitrag zum Dopplerkoeffizienten erwartet, entweder in metallischer oder keramischer Form. So wurden vielfach Messungen an Uranproben verschiedener Anreicherung und an Pu-Proben durchgeführt. In der Möglichkeit, Proben verschiedener Zusammensetzung zu messen, liegt ein wesentlicher Vorteil des Verfahrens. Die Proben können in einem elektrischen Ofen aufgeheizt werden, wobei für gute thermische Isolierung gegen die Umgebung gesorgt wird.

Da die Reaktivitätsänderungen beim Aufheizen nur klein sind, meist einige  $10^{-6}$   $\delta k/k$ , wird mit dem Pile-Oszillator gemessen, wobei eine heiße und eine damit identische kalte Probe gegeneinander oszilliert werden. Mit diesem sehr genauen Meßverfahren erhält man direkt die Reaktivitätsänderung beim Aufheizen, die sich aus der Doppler-Reaktivität und dem Reaktivitätseffekt durch thermische Ausdehnung der Probe zusammensetzt. Man muß dann eine rechnerische Korrektur für den Ausdehnungseffekt anbringen.

Dopplerproben-Experimente dieser Art, wie sie in Argonne und bei Atomics International in USA bereits in großer Anzahl durchgeführt wurden, sind in der Literatur beschrieben /1,2,3/. In Karlsruhe wurde der Doppler-Koeffizient an SNEAK in Neutronenspektren, die für dampfgekühlte schnelle Reaktoren typisch sind, gemessen /22/.

Im Rahmen der Interpretation solcher Experimente ist als erstes die Frage zu untersuchen, ob man aus dem Ergebnis einer Dopplerproben-Messung direkt auf den Dopplerkoeffizienten eines schnellen Leistungsreaktors schließen kann. Diese Frage ist zwar unter der Voraussetzung zu bejahen, daß die Doppler-Probe dieselbe Zusammensetzung wie der umgebende Reaktor hat. Praktische Experimente sind jedoch stets so angelegt, daß in demselben Reaktor Proben verschiedener Zusammensetzung gemessen werden. Damit entfällt der direkte Schluß auf den Leistungsreaktor, und die Aufgabe der Interpretation ist es, den Meßeffect zu berechnen, und aus der Güte der Übereinstimmung auf die Berechenbarkeit des Dopplerkoeffizienten zu schließen.

In diesem Zusammenhang muß betont werden, daß das Aufheizen eines einzelnen, in einer Probe vorliegenden Isotops keinem physikalisch möglichen Vorgang im Leistungsreaktor entspricht. Man wird also die Möglichkeit, solche Ergebnisse auf die Verhältnisse in einem Leistungsreaktor zu übertragen, sorgfältig prüfen müssen. Dieser Punkt wird bei der Interpretation von Messungen mit Plutonium-Proben eine Rolle spielen.

## 2. Allgemeine Überlegungen zur Interpretation von Doppler-Experimenten

### 2.1 Übersicht über die bisher angewandten Methoden

Es gibt bereits umfangreiche Arbeiten, in denen die Methoden zur Berechnung von Dopplerkoeffizienten in schnellen Reaktoren entwickelt und beschrieben werden. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien hier nur die Arbeiten von Froelich /5/ und Hwang /6/ angeführt, sowie eine zusammenfassende Darstellung von Nicholson und Fischer /7/.

Die genannten Arbeiten gehen alle davon aus, daß der gesamte Reaktor gleichmäßig aufgeheizt wird. Der Dopplereffekt besteht dann in der Verbreiterung der Resonanzen der Brennstoffisotope über dem "Untergrund" des Potentialquerschnitts, der sich für homogenes Reaktormaterial aus dem Potentialquerschnitt der Brennstoffisotope und aus dem Streuquerschnitt von Struktur- und Kühlmaterialien zusammensetzt. Für ein regelmäßiges Brennstoffgitter läßt sich der Potentialquerschnitt nach dem Äquivalenztheorem der Theorie der Resonanzabsorption /8/ berechnen.

Man könnte nun versuchen, auch für die Dopplerprobe einen äquivalenten Potentialquerschnitt zu definieren, und dann die bekannten Rechenmethoden zur Interpretation von Probenexperimenten heranzuziehen. Dieses Verfahren wurde in der Tat schon verschiedentlich angewandt /1,2/; für Messungen an U238-Proben liefert es Ergebnisse, die bereits gut in der richtigen Größenordnung liegen. Wie später ersichtlich wird, liegt dies z.T. daran, daß der Dopplerkoeffizient von U238 nur wenig vom Potentialquerschnitt abhängt.

In Wahrheit ist der Vorgang beim Aufheizen einer kleinen Probe natürlich viel komplizierter: Die Resonanzen in der Probe werden verbreitert, die in der Umgebung nicht; die aus der Probe austretenden Neutronen haben also eine andere Resonanzstruktur als die eintretenden, und man hat eine räumliche Überlagerung der beiden charakteristischen Flußspektren, die eine sorgfältige Analyse erfordert. Dieses Problem der räumlichen Überlagerung der Spektren wurde zuerst in einer Arbeit von Storrer et al. /9/ erkannt und für den Spezialfall einer Probe von Core-Zusammensetzung ausführlich diskutiert. Die Arbeit dringt jedoch nicht bis zu einer allgemeinen Formulierung der Theorie vor.

Bei einem so komplizierten Problem wie dem vorliegenden liegt es natürlich nahe, eine totalnumerische Methode zu verwenden. So wurde von Kier in Argonne ein Rechenprogramm, genannt RABBLE, entwickelt /10/, das die Stoßgleichungen für mehrere Zonen unter Verwendung einer hyperfeinen Energiegruppenstruktur löst. Die Breite einer Gruppe ist dabei klein gegen den mittleren Energieverlust bei elastischer Streuung an allen vorhandenen Isotopen, so daß ein Neutron in einer Gruppe nur einen Stoß macht. Die Brennstoffresonanzen können bei verschiedenen Temperaturen eingegeben werden, und das Programm ist so allgemein gehalten, daß es das vorliegende Problem numerisch lösen kann. Ein solches totalnumerisches Verfahren hat jedoch den Nachteil, daß dabei der Einblick in die physikalischen Zusammenhänge verloren geht. Außerdem ist die erforderliche Speicherkapazität sehr groß und die Rechenzeiten sind so lange, daß das Programm für eine routinemäßige Anwendung zu unhandlich ist.

Bei bisherigen Messungen mit Pu-Proben traten stets starke Abweichungen zwischen Theorie und Experiment auf; die gemessenen Werte sind meist negativ, während die Rechnung positive Werte ergibt /1, 35/. Im Rahmen der bisher angewendeten Methoden der Interpretation konnten diese Diskrepanzen aus folgenden Gründen nicht genauer untersucht werden:

- a) Die Berechnung der Doppler-Reaktivität wurde nach einer stark vereinfachten Methode durchgeführt, die dem Experiment nicht angepaßt war.
- b) Bei den verwendeten Proben aus reinem  $\text{PuO}_2$  war der Ausdehnungseffekt größer als der Dopplereffekt, und konnte zudem nicht gut berechnet werden. Es wurde bisher nicht erkannt, daß durch Verdünnung des  $\text{PuO}_2$  mit einem Streumaterial das Verhältnis Ausdehnungseffekt zu Dopplereffekt wesentlich günstiger wird.
- c) Beim Aufheizen eines Brennstoffgemischs aus  $\text{PuO}_2$ - $\text{UO}_2$  können die Reaktionsraten im Pu wegen des Überlappungseffektes zwischen unaufgelösten Resonanzen des Pu239 und den Resonanzen des U238 nur mit einem großen statistischen Fehler berechnet werden /19/. Es wurde bisher nicht beachtet /35/, daß beim Probenexperiment, bei dem nur das Pu aufgeheizt wird, dieser Fehler viel kleiner ist.

Aus diesen Gründen wurde aus den Experimenten nie der naheliegende Schluß gezogen, daß die angenommenen Werte für Alpha von Pu239 zu niedrig waren.

## 2.2 Ziel der vorliegenden Arbeit

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst eine geschlossene Theorie der Probenexperimente formuliert. Diese Theorie, die im Ansatz bereits in einer früheren Arbeit des Verfassers /4/ enthalten ist, beruht auf einer störungstheoretischen Lösung der integralen Transportgleichung für die Probe-Core-Anordnung.

Die Anwendung der allgemeinen Formeln auf die Berechnung der Doppler-Reaktivität führt zu einer Aufteilung des Effekts in verschiedene Terme, von denen einige direkt aus der allgemeinen Theorie des Dopplerkoeffizienten übernommen werden können. Man erhält sie in ähnlicher Form, wenn man das Äquivalenztheorem anwendet. Die übrigen Terme, die etwa durch das Stichwort "Resonanzwechselwirkung mit der Umgebung" gekennzeichnet werden können, müssen gesondert numerisch berechnet werden.

Die angegebene Theorie kann außerdem zur Berechnung des Reaktivitätswertes einer Probe als Funktion der optischen Dicke angewendet werden. Damit kann der Effekt der thermischen Ausdehnung unter Berücksichtigung der Resonanzwechselwirkung berechnet werden.

Ein weiteres Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in einer Analyse der Messungen an SNEAK, wobei die Messungen mit Pu-Proben im Vordergrund stehen. Durch Verwendung von Proben, die mit  $\text{Al}_2\text{O}_3$  verdünnt sind, wird der Ausdehnungseffekt verringert; durch Planung eines Experimentes in einer Bor-Umgebung gelingt es, den Dopplereffekt des Pu239 von den Nebeneffekten zu trennen. Für die Interpretation wird eine Analyse des Ausdehnungseffekts und des Überlappungseffekts, und außerdem eine Abschätzung der Multiniveau-Effekte durchgeführt. Damit ist es möglich, aus den Messungen auf die Resonanzparameter des Pu239, d.h. auf das Verhältnis  $\alpha = \sigma_g / \sigma_f$  des Pu239 zu schließen. Durch konsequente Anwendung der Theorie und durch geeignete Planung der Experimente ist somit eine schlüssige Interpretation von Messungen mit Pu-Proben möglich.

### 3. Störungstheoretische Lösung der integralen Transportgleichung für das Proben-Problem

#### 3.1 Allgemeine Bemerkungen und Annahmen

In diesem Abschnitt soll die für die weiteren Ausführungen grundlegende störungstheoretische Lösung der Transportgleichung für das Probenproblem entwickelt werden. Dabei wird zunächst eine allgemeine Formulierung angestrebt, die für Probenmessungen verschiedener Art gültig ist, z.B. für Dopplerproben-Messungen und für Reaktivitätswert-Messungen. Erst in den folgenden Abschnitten wird die Anwendung auf die Berechnung der Doppler-Reaktivität explizit durchgeführt.

Der bei Probenmessungen auftretende Reaktivitätseffekt ist stets so klein, daß er durch die Änderung des statischen Eigenwertes der Boltzmann'schen Transportgleichung beschrieben werden kann. Es geht also darum, für die stationäre, energieabhängige Transportgleichung eine für das vorliegende Problem geeignete Näherung zu finden. Da die Resonanzwechselwirkungen zwischen Probe und Umgebung entscheidend mitspielen, scheidet die Diffusionsnäherung und ebenso die  $S_n$ - und  $P_n$ -Näherung aus. Dagegen zeigt sich, daß die integrale Form der Boltzmann-Gleichung für das Proben-Problem besonders geeignet ist, weil die zur Lösung meist verwendete Methode der Stoßwahrscheinlichkeiten auch bei Resonanzquerschnitten gut funktioniert. Außerdem werden die Gleichungen in der Multi-gruppennäherung nicht zu kompliziert.

Die integrale Transportgleichung wurde bereits mehrfach, so z.B. von Wintzer /11/, mit gutem Erfolg auf die Behandlung von periodischen Reaktorgittern angewendet. Tatsächlich besteht ja eine enge Verwandtschaft zwischen dem Proben-Problem und dem Gitter-Problem: Es handelt sich in beiden Fällen um Anordnungen, bei denen relativ dünne Zonen (in freien Weglängen gemessen) mit gänzlich verschiedenen Wirkungsquerschnitten aneinander grenzen.

Die bei Proben-Experimenten auftretenden Reaktivitätsänderungen sind meist so klein, daß eine störungstheoretische Lösung möglich ist. Damit beschränkt man die transporttheoretische Behandlung automatisch auf die Probe und ihre unmittelbare Umgebung, da ja in die Störungsformel nur die Flüsse in der Umgebung der Probe eingehen. Es wäre auch

sicherlich wenig sinnvoll, wenn man für ein Proben-Experiment den gesamten Reaktor, der aus mehreren Zonen einschließlich Reflektor bestehen kann, nach der Transporttheorie berechnen wollte.

Im folgenden soll zunächst die integrale Transportgleichung in Multigruppennäherung formuliert werden. Die daran anschließende Störungstheorie wird speziell für die aus der Probe und dem umgebenden Core bestehende 2-Zonen-Anordnung entwickelt. Dabei wird die Umgebung als homogen vorausgesetzt, so daß also der Einfluß der bei kritischen Anordnungen stets vorhandenen heterogenen Struktur auf die Probenmessung vernachlässigt wird. Außerdem wird angenommen, daß sich die Probe im Zentrum des Reaktors befindet.

Eine störungstheoretische Behandlung ist natürlich nur sinnvoll, wenn es ein ungestörtes Problem gibt, dessen Lösung einfacher ist als die des gestörten Problems. Dies ist bei konkreten Problemen aber meist der Fall. So wird man bei Dopplerproben-Experimenten den Zustand der "kalten" Probe, d.h. der Probe bei Umgebungstemperatur, als das ungestörte Problem ansehen. Dann haben die Resonanzen eines Isotops in Probe und Umgebung dieselbe Form. Man hat dann z.B. in dem später zu diskutierenden Fall, daß die Probe dieselbe Zusammensetzung hat wie die Umgebung, einfach einen homogenen Reaktor, für den man die Flüsse im Zentrum aus den Multigruppen-Diffusionsgleichungen erhält. Aber auch für beliebige Dopplerproben läßt sich das ungestörte Problem lösen, nämlich nach dem von Wintzer stammenden Zellprogramm ZERA /11/, in dem für alle Zonen dieselbe Temperatur angenommen wird. Man hat nur die Zelle so groß zu wählen, daß die Wechselwirkung mit Nachbarzellen vernachlässigbar ist. Übrigens wird man sich in vielen Fällen, in denen die Flußverwerfung durch die Probe nur klein ist, mit einer Diffusionsrechnung begnügen können.

### 3.2 Integrale Transportgleichung in Multigruppenform

Bei der Ableitung der energieabhängigen integralen Transportgleichung wird zunächst nach /12/ die Stoßdichte im Punkt  $r$  durch die Quelledichtevertelung im ganzen Reaktor ausgedrückt

$$\sum_t (E,r) \phi (E,r) = \int_V dV' S (E,r') p (r' \rightarrow r, E) \quad (1)$$

In dieser und den folgenden Gleichungen treten die Bezeichnungen auf

$S(E,r)$	Quelldichte (oder Emissionsdichte) von Spalt- und Streuneutronen pro Energie- und Volumeneinheit
$\phi(E,r)$	Neutronenfluß
$\Sigma_t(E,r)$	totaler Wirkungsquerschnitt
$\Sigma_x(E,r)$	Wirkungsquerschnitt für die Reaktion x (f=Spaltung, a=Absorption, s=Streuung)
$\chi(E)$	Spaltneutronenspektrum
$\nu$	Zahl der Spaltneutronen pro Spaltung
$V$	Reaktorvolumen.

Die Stoßwahrscheinlichkeit  $p(r' \rightarrow r, E)$  ist gegeben durch

$$p(r' \rightarrow r, E) = \frac{\Sigma_t(E, r)}{4\pi} \frac{e^{-\tau(r', r, E)}}{|r' - r|^2} \quad (2)$$

wobei der optische Abstand  $\tau$  zwischen zwei Punkten  $r$  und  $r'$  in freien Weglängen gemessen ist.

Eine zweite Beziehung zwischen der Quelldichte und dem Neutronenfluß erhält man, wenn man die Quelldichte nach Definition in die Spalt- und Streuquelle zerlegt

$$S(E, r) = \chi(E) \int dE' \nu \Sigma_f(E', r) \phi(E', r) + \int dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E, r) \phi(E', r) \quad (3)$$

Das Gleichungssystem (1) und (3) ist bereits unter der Annahme an- geschrieben, daß die Streuung isotrop ist. Diese Annahme wird meist bei integralen Transportmethoden gemacht, da die Gleichungen sonst sehr unhandlich werden. Es treten dadurch Fehler an Stellen starker Fluß- gradienten auf, die teilweise durch Verwendung von Transportquerschnitten statt der totalen Querschnitte ("Transport-Näherung") vermieden werden können. Da hier nur Probenmessungen im Zentrum eines Reaktors diskutiert werden, sind durch die Annahme isotroper Streuung keine wesentlichen Unge- nauigkeiten zu erwarten.

Man erhält aus den Gleichungen (1) und (3) die integrale Trans- portgleichung, wenn man entweder den Fluß oder die Quelldichte eliminiert. Zunächst scheint es gleichgültig, welche der beiden Größen eliminiert

wird. Es wird sich jedoch zeigen, daß im Rahmen der Gültigkeit der als "Narrow Resonance Approximation" bezeichneten Näherung die Quelldichte  $S(E,r)$  keine Resonanzstruktur zeigt, und daher der Übergang zur Multi-gruppennäherung in dieser Variablen besonders einfach wird.

Es soll also der Neutronenfluß eliminiert werden, und damit folgt aus (1) und (3) die Gleichung

$$S(E,r) = \int dV' \int dE' S(E',r') \left[ \frac{\chi(E) \nu \sum_f(E',r)}{\sum_t(E',r)} + \frac{\sum_s(E' \rightarrow E,r)}{\sum_t(E',r)} \right] p(r' \rightarrow r, E) \quad (4)$$

Um die Gleichung (4) in die Multigruppenform überzuführen, definiert man die über eine Energiegruppe integrierten Größen

$$S_i(r) = \int_{E_i}^{E_{i-1}} S(E,r) dE$$

$$\chi_i = \int_{E_i}^{E_{i-1}} \chi(E) dE$$

$$\sum_s(E' \rightarrow i) = \int_{E_i}^{E_{i-1}} \sum_s(E' \rightarrow E) dE$$

Außerdem wird die auf eins normierte Verteilungsfunktion

$$s(E,r) = S(E,r)/S_i(r), \quad E \text{ in Gruppe } i$$

eingeführt.

Eine einfache Integration von (4) über die  $i^{\text{te}}$  Energiegruppe führt dann auf die Multigruppengleichungen

$$S_i(r) = \sum_j \int dV' S_j(r') \left\langle s(E',r') \frac{\chi_i \nu \sum_f(E',r) + \sum_s(E' \rightarrow i,r)}{\sum_t(E',r)} p(r' \rightarrow r, E') \right\rangle_j \quad (5)$$

wobei die eckigen Klammern die Mittelung über die Energiegruppe  $j$  bezeichnen.

Bei den üblichen Multigruppenrechnungen sind die Energiegruppen so breit, daß eine Gruppe eine größere Anzahl Resonanzen enthält. Dies gilt besonders für die Absorptionsresonanzen der Brennstoffisotope, die sehr kleine Abstände haben. Die durch die Klammern bezeichnete energetische Mittelung ist also in erster Linie eine Mittelung über die Resonanzen der Gruppe  $j$ , und um sie auszuführen, muß man untersuchen, wie sich die Gewichtsfunktion  $s(E,r)$ , d.h. die Quelldichte im Bereich einer Resonanz verhält. Die Quelldichte setzt sich zusammen aus der Spaltneutronenquelle mit der offenbar resonanzfreien Verteilung  $\chi(E)$  und der Moderationsquelle, die für elastische Moderation durch ein bestimmtes Isotop die Form hat

$$S_{\text{mod}}(E) = \int_E^{E/\alpha} \frac{dE' \sum_s (E' \rightarrow E) \phi(E')}{E' (1-\alpha)} \quad (6)$$

Wird nun die Annahme eingeführt, daß die Resonanz schmal ist im Vergleich zum mittleren Energieverlust bei elastischer Streuung, dann kommt für eine Energie  $E$  in der Resonanz der Hauptanteil des Integrals (6) von Energien oberhalb der Resonanz, und daher ist die Funktion  $S(E)$  in guter Näherung im Bereich der Resonanz konstant.

Diese als "Narrow Resonance Approximation" /8/ bekannte Näherung ist für die bei schnellen Reaktoren wichtigen Absorptionsresonanzen der Brennstoffisotope sehr gut. Ebenso führt diese Näherung, wie Hwang gezeigt hat /13/, nur zu vernachlässigbar kleinen Fehlern bei der Berechnung von Dopplerkoeffizienten.

Die Gewichtsfunktion  $s(E,r)$  in (5) ist also nur schwach energieabhängig und kann somit bei der Mittelung über eine Resonanz außer acht gelassen werden. Für die Berechnung von resonanzgemittelten Wirkungsquerschnitten und Dopplerkoeffizienten nimmt man sie meist als konstant an.

In dieser Näherung können die in (5) auftretenden Reaktionswahrscheinlichkeiten wie folgt geschrieben werden

$$P_{xj}(r',r) = \left\langle \frac{\sum_x}{\sum_t} (E,r) p(r' \rightarrow r, E) \right\rangle_j \quad (7)$$

Das Gleichungssystem (5) wird dann

$$S_i(r) = \sum_j \int dV' S_j(r') \left[ P_s^{j \rightarrow i}(r', r) + \chi_i \nu P_{fj}(r', r) \right]. \quad (8)$$

Da im folgenden Abschnitt eine Störungsformel zu (8) entwickelt werden soll, werden auch die zu den Quelldichten adjungierten Größen  $S_i^+(r)$  benötigt; sie genügen den Gleichungen

$$S_i^+(r) = \sum_j \int dV' S_j^+(r') \left[ P_s^{i \rightarrow j}(r, r') + \chi_j \nu P_{fi}(r, r') \right]. \quad (9)$$

### 3.2 Störungstheoretische Lösung für Probenmessungen

Nun soll zu den integralen Transportgleichungen (8) eine Störungsformel entwickelt werden. Dazu wird angenommen, daß für ein ungestörtes Problem mit den Reaktionswahrscheinlichkeiten  $P_{x0}(r', r)$  die Lösungen  $S_0$  und der Eigenwert  $\nu_0$  bekannt ist. Gesucht ist der Eigenwert des gestörten Problems mit den Reaktionswahrscheinlichkeiten

$$P_{xi}(r', r) = P_{xio}(r', r) + \delta P_{xi}(r', r).$$

Die Ableitung der Störungsformel folgt dem üblichen Verfahren. Man multipliziert die Gleichung (8) des gestörten Problems mit den Lösungen  $S_{i0}^+$  des ungestörten Systems (9), summiert über  $i$  und integriert über das Reaktorvolumen. Ebenso multipliziert man die adjungierten Gleichungen (9) des ungestörten Problems mit den gestörten  $S_i(r)$  und verfährt ebenso. Zieht man die beiden entstehenden Gleichungen voneinander ab, so erhält man die Beziehung

$$\sum_{i,j} \int dV' \int dV S_{i0}^+(r) \delta P_s^{j \rightarrow i}(r', r) S_j(r') + \sum_{i,j} \int dV' \int dV \chi_i S_{i0}^+(r) \left[ (\nu_0 + \delta \nu) (P_{fj0} + \delta P_{fj}) - \nu_0 P_{fj0}(r', r) \right] S_j(r') = 0.$$

Durch Auflösung nach  $-\delta \nu / \nu_0$ , üblicherweise als  $\delta k / k$  interpretiert, erhält man

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{\sum_{i,j} \int dV' \int dV S_{i0}^+(r) \delta P_s^{j \rightarrow i}(r', r) S_j(r') + \sum_{i,j} \int dV' \int dV \chi_i S_{i0}^+(r) \nu_0 \delta P_{fj}(r', r) S_j(r')}{\sum_{i,j} \int dV' \int dV \chi_i S_{i0}^+(r) \nu_0 P_{fj}(r', r) S_j(r')}$$

Dies ist die Störungsformel der integralen Transporttheorie in voller Allgemeinheit. Zu betonen ist, daß in Formel (10) noch keinerlei Näherungen eingegangen sind. Man wird jedoch stets im Nenner die Größe  $P_{fj}$  näherungsweise durch die  $P_{fj0}$  des ungestörten Problems ersetzen. In der Störungsformel der Diffusionstheorie ersetzt man an dieser Stelle die gestörten Flüsse durch die ungestörten. Ein ähnliches Verfahren ist jedoch bei den Quelldichten sicher nicht immer anwendbar. So sind z.B. bei der Berechnung eines Reaktivitätswertes gegen Vakuum die ungestörten Quelldichten alle Null, und können sicher keine brauchbare Näherung für die gestörten Größen sein. Beim Doppler-Experiment sind allerdings die Änderungen in den Quelldichten so klein, daß man mit den ungestörten Größen arbeiten kann.

Wir interessieren uns nun speziell für die Anwendung auf Probenmessungen, d.h. für die aus Probe und Core bestehende 2-Zonen-Anordnung, wobei die Probe in ihren räumlichen Abmessungen klein im Vergleich zum Reaktorcore sein soll. Wir definieren eine "Störzone", die aus der Probe selbst und einer 2 bis 3 freie Weglängen dicken Umgebung besteht. Offenbar sind die  $\int P_x(r',r)$  vernachlässigbar klein, wenn  $r$  oder  $r'$  außerhalb der Störzone liegt. Um analytisch weiterzukommen, nehmen wir nun an, daß die Emissionsdichten und ihre Adjungierten sowohl in der Probe, als auch in der Störzone außerhalb der Probe, in guter Näherung konstant sind.

Dann kann man die in (10) auftretenden Doppelintegrale wie folgt aufspalten

$$\int dV' \int dV P_x(r',r) S^+(r) S(r') =$$

$$= \left\langle \frac{\sum_{t1} x1(E)}{\sum_{t1}} \int_{V_1} dV' \int_{V_1} dV p(r' \rightarrow r, E) \right\rangle S_1^+ S_1 + \left\langle \frac{\sum_{t1} x1(E)}{\sum_{t1}} \int_{V_2} dV' \int_{V_1} dV p(r' \rightarrow r, E) \right\rangle S_1^+ S_2$$

$$+ \left\langle \frac{\sum_{t2} x2(E)}{\sum_{t2}} \int_{V_1} dV' \int_{V_2} dV p(r' \rightarrow r, E) \right\rangle S_2^+ S_1 + \left\langle \frac{\sum_{t2} x2(E)}{\sum_{t2}} \int_{V_2} dV' \int_{V_2} dV p(r' \rightarrow r, E) \right\rangle S_2^+ S_2$$

(11)

Dabei ist  $V_1$  das Probenvolumen,  $V_2$  das Volumen der Störzone außerhalb der Probe.

Offenbar bedeutet  $\int_{V_a} dV' \int_{V_b} dV$  den Beitrag von Neutronen aus der

Quelle in  $V_a$  zur Rate der Reaktion in  $V_b$ .

Wir führen nun die Stoßwahrscheinlichkeit  $P_1$  in der Probe ein

$$P_1 = \frac{1}{V_1} \int_{V_1} dV' \int_{V_1} dV p(r' \rightarrow r).$$

Dann kann man das erste und das dritte Integral sofort hinschreiben

$$\int_{V_1} dV' \int_{V_1} dV p(r' \rightarrow r) = V_1 P_1$$

$$\int_{V_1} dV' \int_{V_2} dV p(r' \rightarrow r) = V_1 (1 - P_1)$$

Die anderen beiden Integrale in (11) können unter Benutzung des Reziprozitätstheorems

$$V_1 \Sigma_{t1} P_{1 \rightarrow 2} = V_2 \Sigma_{t2} P_{2 \rightarrow 1}$$

durch einfache Umformungen erhalten werden, nämlich

$$\int_{V_2} dV' \int_{V_1} dV p(r' \rightarrow r) = V_1 \frac{\Sigma_{t1}}{\Sigma_{t2}} (1 - P_1)$$

und

$$\int_{V_2} dV' \int_{V_2} dV p(r' \rightarrow r) = V_2 - V_1 \frac{\Sigma_{t1}}{\Sigma_{t2}} (1 - P_1).$$

Faßt man die vier Terme zusammen, dann erhält man für die Änderung der Integrale durch die Störung

$$\begin{aligned} & \int dV' \int dV s^+(r) \delta P_x(r'r) S(r') = \\ & = V_1 \left[ s_1^+ s_1 \delta \left\langle \frac{\Sigma_{x1}}{\Sigma_{t1}} \right\rangle + \delta \left\langle (1 - P_1) \left( \frac{\Sigma_{x2}}{\Sigma_{t2}} s_2^+ - \frac{\Sigma_{x1}}{\Sigma_{t1}} s_1^+ \right) \left( s_1 - \frac{\Sigma_{t1}}{\Sigma_{t2}} s_2 \right) \right\rangle \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Wird dieser Ausdruck in die allgemeine Störungsgleichung (10) eingesetzt, dann folgt, wenn man den Störungsnenner mit D bezeichnet, die etwas umständliche Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\delta k}{k} = & \frac{V_1}{D} \sum_j S_{1j} \left[ \sum_{i \geq j} S_{1i}^+ \delta \left\langle \frac{\sum_{s1}^{j \rightarrow i}}{\sum_{t1}} \right\rangle_j + \sum_i \chi_i S_{1i}^+ \delta \left\langle \frac{\nu \sum_{f1}}{\sum_{t1}} \right\rangle_j \right] \\ & + \frac{V_1}{D} \sum_j \delta \left\langle (1-P_1) \left( S_{1j} - \frac{\sum_{t1}}{\sum_{t2}} S_{2j} \right) \left( \sum_{i \geq j} \frac{\sum_{s2}^{j \rightarrow i}}{\sum_{t2}} S_{2i}^+ - \sum_{i \geq j} \frac{\sum_{s1}^{j \rightarrow i}}{\sum_{t1}} S_{1i}^+ \right) \right\rangle_j \\ & + \frac{V_1}{D} \sum_{i,j} \delta \left\langle (1-P_1) \left( S_{1j} - \frac{\sum_{t1}}{\sum_{t2}} S_{2j} \right) \left( \frac{\nu \sum_{f2}}{\sum_{t2}} \chi_i S_{2i}^+ - \frac{\nu \sum_{f1}}{\sum_{t1}} \chi_i S_{1i}^+ \right) \right\rangle_j \quad (13) \end{aligned}$$

Wenn man die aus der Definition

$$\sum_{tj} = \sum_{aj} + \sum_{i \geq j} \sum_s^{j \rightarrow i}$$

folgende Beziehung

$$\sum_{i \geq j} S_i^+ \frac{\sum_s^{j \rightarrow i}}{\sum_{tj}} = \sum_{i > j} \frac{\sum_s^{j \rightarrow i}}{\sum_{tj}} (S_i^+ - S_j^+) - \frac{\sum_{aj}}{\sum_{tj}} S_j^+ + S_j^+ \quad (14)$$

in die Gleichung (13) einführt, dann lassen sich die Moderationsterme umformen, und man erhält für die erste Summe in (13), die mit  $\delta k_1/k$  bezeichnet werden soll

$$\frac{\delta k_1}{k} = \frac{V_1}{D} \sum_j S_{1j} \left[ \sum_{i > j} (S_{1i}^+ - S_{1j}^+) \delta \left\langle \frac{\sum_{s1}^{j \rightarrow i}}{\sum_{t1}} \right\rangle_j - S_{1j}^+ \delta \left\langle \frac{\sum_{a1}}{\sum_{t1}} \right\rangle_j + \sum_i \chi_i S_{1i}^+ \delta \left\langle \frac{\nu \sum_{f1}}{\sum_{t1}} \right\rangle_j \right] \quad (15)$$

Man kann für das folgende die Schreibweise vereinfachen, wenn man jeder der in (15) auftretenden Reaktionsarten eine "effektive" Adjungierte  $S_{xj}^+$  zuordnet, nämlich für

$$\begin{aligned} x = \text{Absorption} & & S_{xj}^+ &= -S_j^+ \\ x = \text{Spaltneutronenerzeugung} & : & S_{xj}^+ &= \sum_i \chi_i S_i^+ \\ x = \text{Moderation } j \rightarrow i, i > j & : & S_{xj}^+ &= S_i^+ - S_j^+ \end{aligned}$$

Damit läßt sich (15) als Summe über die angegebenen Reaktionsarten schreiben

$$\frac{\delta k_1}{k} = \frac{V_1}{D} \sum_x \sum_j s_{1j} s_{x1j}^+ \delta \left\langle \frac{\sum x_1}{\sum t_1} \right\rangle_j \quad (15a)$$

Wird nun auch die zweite Summe von (13) mit Hilfe von (14) umgeformt, dann erhält man noch zwei weitere Beiträge zu  $\delta k/k$ , nämlich

$$\frac{\delta k_2}{k} = \frac{V_1}{D} \sum_x \sum_j \delta \left\langle (1-P_1) \left( s_{1j} - \frac{\sum t_1}{\sum t_2} s_{2j} \right) \left( s_{x2j}^+ \frac{\sum x_2}{\sum t_2} - s_{x1j}^+ \frac{\sum x_1}{\sum t_1} \right) \right\rangle_j \quad (15b)$$

und

$$\frac{\delta k_3}{k} = \frac{V_1}{D} \sum_j (s_{2j}^+ - s_{1j}^+) \delta \left\langle (1-P_1) \left( s_{1j} - \frac{\sum t_1}{\sum t_2} s_{2j} \right) \right\rangle_j \quad (15c)$$

Von den drei Beiträgen zur Reaktivität hat (15c) eine einfache physikalische Bedeutung, nämlich als "Diffusionsterm": Die aus der Probe austretenden Neutronen finden dort eine andere Adjungierte als in der Probe vor. Dieser Term dürfte bei den meisten Messungen im Zentrum vernachlässigbar klein sein; er spielt nur eine Rolle, wenn in einem starken Gradienten der Adjungierten gemessen wird.

Man kann versuchen, auch den Term  $\delta k_1/k$  physikalisch zu interpretieren: Die Größe  $\delta \left\langle \frac{\sum x_1}{\sum t_1} \right\rangle$  ist die Reaktionsratenänderung im Probenmedium. Der Term  $\delta k_1/k$  stellt also die Reaktivitätsänderung für den Fall dar, daß die Störung auf ein unendlich ausgedehntes Probenmedium angewandt wird. Diese Deutung dürfte sich jedoch nur in einigen speziellen Fällen als hilfreich erweisen; ein solcher Fall, nämlich eine Dopplerproben-Messung durch Aufheizen eines Teilbereichs in einem homogenen Reaktor, wird in Abschnitt 4.2 diskutiert werden.

Um in allgemeinen Fällen zu physikalisch deutbaren Ausdrücken zu kommen, formen wir die Summe von (15a) und (15b) um, wobei wir die Terme mit  $\sum_{x_1}$  und die mit  $\sum_{x_2}$  getrennt schreiben; der erste Term wird dann

$$\frac{\delta k_1'}{k} = \frac{V_1}{D} \sum_x \sum_j s_{x1j}^+ \delta \left\langle \left( s_{1j} P_1 + s_{2j} \frac{\sum t_1}{\sum t_2} (1-P_1) \right) \frac{\sum x_1}{\sum t_1} \right\rangle_j \quad (16)$$

Der Ausdruck (16) erlaubt in einigen interessanten Fällen eine einfache physikalische Deutung, wenn man nämlich die energieabhängige Stoßdichte  $F(E)$  in der Probe einführt

$$F(E) = P_1(E)S_{1j} + \frac{\Sigma_{t1}}{\Sigma_{t2}} (1-P_1)S_{2j}$$

dann nimmt die Formel (16) folgende Gestalt an

$$\frac{\delta k'_1}{k} = \frac{V_1}{D} \sum_{ij} \delta \left\langle F(E) \left[ \frac{\sum_{s1}^{j \rightarrow i}}{\Sigma_{t1}} (S_{1i}^+ - S_{1j}^+) - \frac{\Sigma_{a1}}{\Sigma_{t1}} S_{1j}^+ \delta_{ij} + \frac{\nu \Sigma_{f1}}{\Sigma_{t1}} \chi_i S_{1i}^+ \right] \right\rangle_j \quad (17)$$

In (17) ist offenbar  $F(E)$  die Stoßdichte in der Probe, die im Verhältnis  $\Sigma_{x1}/\Sigma_{t1}$  aufgeteilt wird auf die einzelnen Reaktionsarten. Wenn nun die gestörten  $S_j$  durch die ungestörten ersetzt werden können, wie beim Doppler-Experiment, oder die ungestörten  $S_j$  gleich Null sind, wie beim Reaktivitätswert gegen Vakuum, dann gilt: Der Ausdruck

$$\delta \left\langle \frac{\Sigma_{a1}}{\Sigma_{t1}} F(E) \right\rangle$$

stellt die Änderung der Absorptionsrate durch die Störung dar. Der Beitrag zur Reaktivitätsänderung erscheint dann als "Änderung der Absorptionsrate in der Probe mal adjungierter Quelldichte". Ganz analog kann man die anderen Terme verstehen. Formel (17) gibt also den Anteil des Reaktivitätseffektes, der mit den Änderungen der Reaktionsraten in der Probe zusammenhängt. Sie unterscheidet sich nur dadurch von der Störungsformel der Diffusionstheorie, daß die Reaktionsraten in der Probe durch (17) genauer erhalten werden als durch die Diffusionstheorie.

Zu (16) tritt ein zweiter Beitrag, der die Glieder mit  $\Sigma_{x2}$  enthält

$$\frac{\delta k'_2}{k} = \frac{V_1}{D} \sum_j \delta \left\langle (1-P_1) \left( S_{1j} - \frac{\Sigma_{t1}}{\Sigma_{t2}} S_{2j} \right) \left[ \sum_{i>j} (S_{2i}^+ - S_{2j}^+) \frac{\sum_{s2}^{j \rightarrow i}}{\Sigma_{t2}} - \frac{\Sigma_{a2}}{\Sigma_{t2}} S_{2j}^+ + \frac{\nu \Sigma_{f2}}{\Sigma_{t2}} \sum_i \chi_i S_{2i}^+ \right] \right\rangle_j \quad (18)$$

Diese Gleichung beschreibt den Effekt von Neutronen, die entweder aus der Quelle in der Probe stammen (Terme mit  $S_{1j}$ ) oder die Probe durch-

laufen haben (Terme mit  $S_{2j}$ ), und in der Umgebung einen Stoß machen. Auch die Terme in (18) haben die Form "Änderung der Reaktionsrate mal adjungierter Quelldichte".

Der Ausdruck verschwindet offenbar, wenn alle Wirkungsquerschnitte in der Umgebung frei von Resonanzen sind. Dann entfällt nämlich die Mittelung über Resonanzen, und die eckige Klammer stellt die adjungierte Gleichung für den homogenen Reaktor dar und verschwindet somit. Im Falle glatter Wirkungsquerschnitte sorgt also die Wichtung mit der Adjungierten dafür, daß ein Neutron, das aus der Probe austritt, nicht mehr berücksichtigt werden muß. Dasselbe gilt bei einer Reaktivitätswertmessung mit einer Probe aus Corematerial, auch wenn Resonanzen da sind. Dann besitzen die aus der Probe austretenden Neutronen dieselbe Resonanzstruktur wie in der Umgebung. Wegen  $\sum_{t1} = \sum_{t2}$  wird der Ausdruck (18) zu Null.

Im allgemeinen werden jedoch die austretenden Neutronen eine andere Resonanzstruktur zeigen als die in der Umgebung. Sie haben dann andere Reaktionswahrscheinlichkeiten, und  $\delta k_2'$  wird ungleich Null. Für das Doppler-Experiment werden diese Terme später noch ausführlich diskutiert.

#### 4. Berechnung der Doppler-Reaktivität beim Aufheizen einer Probe

##### 4.1 Induktive Behandlung eines Spezialfalls

Es soll hier die induktive, von der allgemeinen Theorie unabhängige Behandlung eines Spezialfalls an den Anfang gestellt werden. Es wird eine Probe angenommen, die dieselbe Zusammensetzung hat wie die als homogen gedachte Umgebung. Außerdem soll die Dicke der Probe (also auch deren mittlere Sehnenlänge) klein gegenüber der freien Weglänge sein, und die Probe soll sich im Zentrum des Reaktors befinden. Dieser Fall wurde bereits in einer Arbeit von Storrer et al. /9/ ausführlich diskutiert. Er wird hier noch einmal aufgegriffen, weil seine Behandlung für das Verständnis der physikalischen Vorgänge beim Aufheizen einer Dopplerprobe sehr lehrreich ist. Außerdem wird man direkt zu einer ersten Antwort auf die Frage geführt, ob man aus einer Dopplerproben-Messung in einer kritischen Anordnung direkt auf den Dopplerkoeffizienten in einem Leistungsreaktor schließen kann. Dabei ist die im folgenden gegebene Deutung anders als die in /9/, und die Argumentation ist wesentlich kürzer.

Nun soll die temperaturabhängige Absorptionsrate in einer Resonanz berechnet werden, wobei die Quelle  $S$  als konstant angenommen wird. Zu beachten ist, daß sich nicht nur die Absorption in der Probe, sondern auch die in der Umgebung mit der Probentemperatur ändert. Es sei Zone 1 die Probe, Zone 2 die Umgebung; mit  $(i,k)$  soll die Zahl der Neutronen bezeichnet werden, die in Zone  $i$  erzeugt und in Zone  $k$  absorbiert werden. Für kleine Proben wird die Stoßwahrscheinlichkeit in der Probe nach der Wigner-Näherung  $P_1 = \bar{l} \Sigma_{t1}$  ( $\bar{l}$ =mittlere Sehnenlänge) berechnet. Damit werden die 2 Terme mit Quelle in der Probe

$$(1,1) = S V_1 P_1 \frac{\Sigma_{a1}}{\Sigma_{t1}} = S V_1 \bar{l} \Sigma_{a1}$$

$$(1,2) = S V_1 (1-P_1) \frac{\Sigma_{a2}}{\Sigma_{t2}} = S V_1 \frac{\Sigma_{a2}}{\Sigma_{t2}} - S V_1 \bar{l} \Sigma_{t1} \frac{\Sigma_{a2}}{\Sigma_{t2}} .$$

Um die beiden Terme mit Quelle in der Umgebung zu erhalten, beachtet man, daß die auf die Probe einfallende Stromdichte durch  $S/4 \Sigma_{t2}$  gegeben ist. Die Durchgangswahrscheinlichkeit ist  $\Gamma = 1 - \bar{l} \Sigma_{t1}$ , die Oberfläche sei  $s$ . Damit wird

$$(2,1) = \frac{S}{4 \Sigma_{t2}} s (1-\Gamma) \frac{\Sigma_{a1}}{\Sigma_{t1}} = S V_1 \frac{\Sigma_{a1}}{\Sigma_{t2}}$$

$$(2,2) = \frac{S}{4 \Sigma_{t2}} s \Gamma \frac{\Sigma_{a2}}{\Sigma_{t2}} = S \frac{s}{4} \frac{\Sigma_{a2}}{\Sigma_{t2}^2} - S V_1 \frac{\Sigma_{a2} \Sigma_{t1}}{\Sigma_{t2}} .$$

Bei der Umformung wurde die bekannte Beziehung  $\bar{l} = 4V_1/s$  benutzt. Für die Interpretation der einzelnen Terme soll die Größenordnung der Reaktionsraten in der Probe, nämlich  $SV_1$ , als die 1. Ordnung bezeichnet werden. Alle Terme, die im Vergleich dazu den Faktor  $\bar{l} \Sigma_{t1}$  tragen, sind demgegenüber klein von 2. Ordnung und sollen vernachlässigt werden. Dann ist zunächst der Term  $(1,1)$  von 2. Ordnung, offenbar deshalb, weil von den in der Probe erzeugten Neutronen nur sehr wenige dort einen Stoß machen. Der Term  $(1,2)$  liefert einen Beitrag erster Ordnung, der aber von der Temperatur unabhängig ist, und einen Beitrag 2. Ordnung, der mit der Probentemperatur veränderlich ist. Die Probe hat also den entkommenden Neutronen ihre Resonanzstruktur nur so schwach aufgeprägt, daß sie sich erst in 2. Ordnung bemerkbar macht. Damit spielen die in der Probe er-

zeugten "heißen" Neutronen für die temperaturabhängige Absorptionsrate überhaupt keine Rolle. Erst im Term (2,1) tritt ein Beitrag 1. Ordnung auf; er stellt einfach die Absorptionsrate der Probe in dem zu  $1/\Sigma_{t2}$  proportionalen Spektrum der "kalten" Neutronen dar. Der Term (2,2) ist etwas umständlicher zu deuten; der erste Beitrag stammt von dem Strom der Neutronen, die bei Abwesenheit der Probe das Probenvolumen durchlaufen; er ist offenbar temperaturunabhängig. Der zweite Beitrag stellt die Zahl der Neutronen dar, die durch die Probe aus dem Strom der durchlaufenden Neutronen entfernt werden; er beschreibt also die Filterwirkung der Probe, die demnach von 1. Ordnung ist.

Die gesamte Änderung der Absorptionsrate in der Resonanz, die von den Termen (2,1) und (2,2) kommt, ist also

$$A' = SV_1 \int dE \left( \frac{\Sigma_{a1}}{\Sigma_{t2}} - \frac{\Sigma_{t1}\Sigma_{a2}}{\Sigma_{t2}^2} \right) .$$

Es ist interessant, damit die Absorptionsänderung zu vergleichen, die im Volumen  $V_1$  beim Aufheizen des gesamten Reaktors eintritt; sie beträgt

$$A'' = SV_1 \int dE \left( \frac{\Sigma_{a1}}{\Sigma_{t1}} - \frac{\Sigma_{a2}}{\Sigma_{t2}} \right) .$$

Nimmt man nun an, daß die Temperaturänderung klein ist, dann kann man  $\Sigma_1 = \Sigma_2 + \delta\Sigma$  setzen und Terme höherer Ordnung in  $\delta\Sigma$  vernachlässigen. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \delta A' &= SV_1 \int dE \left( \frac{\Sigma_{a2} + \delta\Sigma_a}{\Sigma_{t2}} - \frac{(\Sigma_{t2} + \delta\Sigma_t) \Sigma_{a2}}{\Sigma_{t2}^2} \right) \\ &= SV_1 \int dE \left( \frac{\delta\Sigma_a}{\Sigma_{t2}} - \frac{\Sigma_{a2} \delta\Sigma_t}{\Sigma_{t2}^2} \right) . \end{aligned}$$

Dies ist zu vergleichen mit

$$\delta A'' = SV_1 \int dE \left( \frac{\Sigma_{a2} + \delta\Sigma_a}{\Sigma_{t2} + \delta\Sigma_t} - \frac{\Sigma_{a2}}{\Sigma_{t2}} \right) = SV_1 \int dE \left( \frac{\delta\Sigma_a}{\Sigma_{t2}} - \frac{\Sigma_{a2} \delta\Sigma_t}{\Sigma_{t2}^2} \right) .$$

Beide Ausdrücke sind einander gleich. Damit ist folgendes gezeigt: Die vom Dopplereffekt herrührende Änderung der Absorptionsrate in einem kleinen Teilvolumen des Reaktors ist dieselbe, unabhängig davon, ob nur das Probenvolumen oder der gesamte Reaktor aufgeheizt wird. Diese Aussage gilt in erster Näherung für kleine Temperaturänderungen.

Dabei kommt beim Aufheizen des gesamten Reaktors natürlich der Effekt von den "heißen" Neutronen mit der Resonanzstruktur  $1/\Sigma_{t1}$ , da ja Probe und Umgebung aufgeheizt werden. Beim Probenexperiment dagegen tragen nur die "kalten" Neutronen, die aus der Umgebung stammen und die Resonanzstruktur  $1/\Sigma_{t2}$  haben, wesentlich bei. "Heiße" und "kalte" Neutronen liefern also denselben Dopplereffekt.

Damit ist auch bewiesen, daß man, jedenfalls im Prinzip, aus einer Probenmessung den Dopplerkoeffizienten eines Leistungsreaktors erhalten kann.

Die Aussage gilt zunächst nur für eine kleine Probe. Da man jedoch bei einer Probe beliebiger Größe auch ein Gemisch von heißen und kalten Neutronen hat, die beide denselben Effekt liefern, ist zu vermuten, daß dieselbe Aussage auch für beliebige Probengrößen gilt. Man könnte dies in der Tat nach demselben Verfahren wie oben zeigen, wenn man beachtet, daß zwischen der Entkommwahrscheinlichkeit  $1-P_1$  und der Durchgangswahrscheinlichkeit  $\Gamma$  eine einfache Beziehung besteht. Statt dessen soll jedoch ein anderer Weg beschritten werden. Da die hier angewandte induktive Methode zunächst nicht über die Ratenberechnung bei konstanter Quelldichte hinausführt, während letzten Endes eine Berechnung der Reaktivitätsänderung durchgeführt werden soll, wird im nächsten Abschnitt wieder auf die allgemeine Störungsformel zurückgegriffen.

#### 4.2 Ableitung des Spezialfalls aus der allgemeinen Störungsformel

Der im vorigen Abschnitt diskutierte Fall einer zentralen Probe, die dieselbe Zusammensetzung hat wie die Umgebung, kann sehr einfach im Anschluß an die allgemeine Störungsformel von Abschnitt 3 behandelt werden. Dabei ergibt sich auch eine Aussage darüber, wie aus den oben berechneten Änderungen der Absorptionsrate die Reaktivitätsänderung erhalten

werden kann. Die vielleicht etwas intuitiv anmutende Argumentation des vorigen Abschnitts wird also von der allgemeinen Theorie als legitim erwiesen, vorausgesetzt, daß ihre Ergebnisse richtig weiter verarbeitet werden.

Die Probengröße sei jetzt nur noch durch die Forderung eingeschränkt, daß innerhalb der Störzone die Flußkrümmung keine wesentliche Rolle spielen soll. Da der ungestörte Reaktor homogen ist, sind dann die Quelledichten und ihre Adjungierten in der gesamten Störzone konstant.

Es liegt nahe, in dem vorliegenden Fall von der Formulierung (15a), (15b) und (15c) der Störungsgleichung auszugehen. Offenbar ist (15c) exakt Null. (15a) und (15b) lassen sich zusammenfassen und besonders einfach schreiben, wenn man die Bezeichnung

$$\tilde{P}_x = \left\langle \frac{\sum x_1}{\sum t_1} + (1-P_1) \left( \frac{\sum x_2}{\sum t_2} - \frac{\sum x_1}{\sum t_1} \right) \left( 1 - \frac{\sum t_1}{\sum t_2} \right) \right\rangle \quad (19)$$

einführt. Da in dem Energiebereich, der für den Dopplereffekt wichtig ist, nur die elastische Moderation in die nächstfolgende Gruppe eine Rolle spielt, erhält man für die Doppler-Reaktivität

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{V_1}{D} \left[ \sum_{ij} \chi_i s_i^+ \delta \tilde{P}_{fj} s_j - \sum_j s_j^+ \delta \tilde{P}_{aj} s_j + \sum_j (s_{j+1}^+ - s_j^+) \delta \tilde{P}_{s \rightarrow j+1} s_j \right]. \quad (20)$$

Damit ist es gelungen, einen analytischen Ausdruck für die beim Aufheizen der Probe auftretende Doppler-Reaktivität zu finden. Der Aufbau der Formel (20) ist sehr einfach: Die  $\tilde{P}_x$  sind Reaktionswahrscheinlichkeiten, die Produkte  $\delta \tilde{P}_x \cdot S$  sind Reaktionsratenänderungen von der Art, wie sie im vorigen Abschnitt berechnet wurden. Um den Reaktivitätseffekt zu erhalten, muß man sie mit den adjungierten Quellstärken multiplizieren. In den meisten Fällen kann der Moderationsterm in (20) vernachlässigt werden, da die Adjungierte mit der Energie nur langsam veränderlich ist, und daher  $s_{j+1}^+ - s_j^+$  klein ist gegen  $s_j^+$ .

Im vorliegenden Fall ist der ungestörte Reaktor homogen und auf konstanter Temperatur. Deshalb sind die ungestörten Flüsse besonders einfach zu berechnen. Da am Ort der Probe die asymptotische Lösung gilt, erhält man die richtigen Flüsse nach der Diffusionstheorie. Dies gilt offenbar auch, wenn der Reaktor reflektiert ist.

Für die Störungsrechnung ist natürlich die Kenntnis der Quelldichten notwendig. Da diese aber als Summe aus der Stoßdichte und der Leckrate aufgefaßt werden können, sind sie im wesentlichen durch  $\sum_t \phi + DB^2 \phi$  gegeben. In allen homogenen Reaktoren, die für Doppler-Messungen infrage kommen, kann  $DB^2$  gegenüber  $\sum_t$  vernachlässigt werden. Wenn man in derselben Näherung  $S^+$  durch den adjungierten Fluß ersetzt, dann kann man die Terme in (20) wie folgt durch die gewöhnlichen Flüsse ausdrücken

$$S^+ \delta \tilde{P}_x S \approx \phi^+ \delta \tilde{P}_x \frac{\phi}{\langle 1/\Sigma_{t2} \rangle} \quad (21)$$

In dem Grenzfall einer sehr großen Probe, für die  $1-P_1$  praktisch gleich Null ist, geht  $\tilde{P}_x$  einfach in das Reaktionsratenverhältnis  $\langle \Sigma_{x1}/\Sigma_{t1} \rangle$  über. Mit der Näherung (21) erhalten dann die Beiträge zu  $\delta k/k$  die Form

$$\frac{\phi^+ \phi}{\langle 1/\Sigma_{t2} \rangle} \delta \left\langle \frac{\Sigma_{x1}}{\Sigma_{t1}} \right\rangle \quad (21a)$$

Dies ist nichts anderes als der Dopplerkoeffizient des Reaktors, der zum erstenmal von Froelich /5/ nach der Formel (21a) berechnet wurde. Froelich bezeichnet diese Methode als "Reaktionsratenmethode"; sie wurde von Froelich und Ott /14/ und von Hummel und Hwang /15/ diskutiert und der üblichen Methode der effektiven Wirkungsquerschnitte gegenübergestellt. Der Unterschied zwischen den beiden Methoden wird im Anhang 1 erläutert. Hier sei nur festgehalten, daß durch die Formel (20) die für homogene Systeme gültige Reaktionsratenmethode auf die heterogene Anordnung einer Probenmessung erweitert wird.

Es liegt nun nahe, die Reaktionswahrscheinlichkeit  $\tilde{P}_x$  in die folgenden zwei Terme

$$\left\langle \frac{\Sigma_{x1}}{\Sigma_{t1}} \right\rangle \text{ und } \left\langle (1-P_1) \left( \frac{\Sigma_{x2}}{\Sigma_{t2}} - \frac{\Sigma_{x1}}{\Sigma_{t1}} \right) \left( 1 - \frac{\Sigma_{t1}}{\Sigma_{t2}} \right) \right\rangle \quad (22)$$

aufzuspalten. Der erste Term stellt dann den Effekt beim Aufheizen des gesamten Reaktors dar, während der zweite Term die Wechselwirkung einer endlichen Probe mit ihrer Umgebung beschreibt. Der erste Term steigt offenbar linear mit der Temperatur an; der Wechselwirkungsterm dagegen

enthält zwei linear veränderliche Faktoren, und ist demnach von zweiter Ordnung in der Temperaturdifferenz. Damit ist also, allgemeiner als im vorigen Abschnitt, gezeigt, daß man beim Aufheizen der Probe und beim Aufheizen des gesamten homogenen Reaktors denselben Reaktivitätseffekt erhält, abgesehen von einem Korrekturterm zweiter Ordnung, und abgesehen von einem statistischen Gewichtungsfaktor.

#### 4.3 Formulierung für die Auswertung praktischer Dopplerproben-Messungen

In diesem Abschnitt soll eine Formulierung der Störungsformel ausgearbeitet werden, die direkt auf die meisten Dopplerproben-Messungen anwendbar ist. Sie gestattet es, für die üblichen Probenzusammensetzungen und Anordnungen den Meßeffect zu berechnen. Dabei wollen wir uns der Einfachheit halber auf einige Einschränkungen festlegen, die einerseits bei den meisten Experimenten erfüllt sind, andererseits aber nicht prinzipieller Natur sind, und daher mit etwas mehr Aufwand auch vermieden werden können. Es wird also angenommen:

- a) Die Dopplerprobe ist so dünn, daß man die Quelldichte und ihre Adjungierte in der Probe als konstant annehmen kann.
- b) Die Probe soll nicht mehr als 2 Brennstoffisotope enthalten.  
In praktischen Fällen ist dies, in wechselnder Konzentration, meist ein Spaltstoff- und ein Brutstoffisotop.
- c) Es sollen maximal 3 Zonen verschiedener Zusammensetzung angenommen werden: Die Probe, ein Probenbehälter aus Strukturmaterial, der keinen Brennstoff enthält (in diese Zone können Schichten aus irgendeinem Streumaterial einbezogen werden), und das umgebende Core, das die Isotope der Probe enthalten kann.

Punkt c) erfordert zunächst eine einfache Erweiterung der Formulierung für den 2-Zonen-Fall in Abschnitt 3. Man hat analog zu (17) und (18), wenn man die Terme, die zu derselben Reaktionsart gehören, zusammenfaßt, und den vernachlässigbar kleinen Term (15c) unterdrückt, folgenden Beitrag in einer Energiegruppe j zur Reaktivität

$$\frac{\delta k_j}{k} = \sum_x \sum_{m,n=1}^3 s_{xm}^+ \delta P_{xnm} s_n v_n \quad . \quad (23)$$

Dabei laufen die Indices  $m$  und  $n$  über die 3 Zonen,  $x$  über die drei Reaktionsarten Spaltung, Absorption und Moderation in die folgende Gruppe, und es ist für

$$\begin{aligned} x = \text{Spaltung} \quad S_{xm}^+ &= \sum_i \chi_i S_{mi}^+ \\ x = \text{Absorption} \quad S_{xm}^+ &= -S_{mj}^+ \\ x = \text{Moderation} \quad S_{xm}^+ &= S_{m,j+1}^+ - S_{mj}^+ \end{aligned}$$

Da der Moderationseffekt meist vernachlässigbar ist, und die Zone 2 den Resonanzabsorber nicht enthält, fallen die Terme  $m=2$  und die Terme mit  $x=\text{Moderation}$  weg. Die Änderung der Reaktionswahrscheinlichkeit  $\delta P_{xnm}$  ist gegeben durch folgenden energetischen Mittelwert

$$\delta P_{xnm} = \delta \left\langle \frac{\sum_{xm} (E)}{\sum_{tm} (E)} p_{nm} (E) \right\rangle. \quad (24)$$

Die  $p_{nm}$  sollen nun explizit berechnet werden, wobei an jeder Grenzfläche isotrope Winkelverteilung der einfallenden Neutronen angenommen wird. Bezeichnet man mit  $\Gamma_2$  die Durchgangswahrscheinlichkeit durch die Zone 2 bei Einfall von innen, und mit  $P_1$  die Stoßwahrscheinlichkeit in der Probe, dann wird

$$\begin{aligned} p_{11} &= P_1 \\ p_{12} &= (1-P_1)(1-\Gamma_2) \\ p_{13} &= (1-P_1)\Gamma_2 \end{aligned}$$

Nach dem Reziprozitätstheorem wird

$$\begin{aligned} p_{21} &= \frac{V_1 \Sigma_{t1}}{V_2 \Sigma_{t2}} (1-P_1)(1-\Gamma_2) \\ p_{31} &= \frac{V_1 \Sigma_{t1}}{V_3 \Sigma_{t3}} (1-P_1)\Gamma_2 \end{aligned}$$

Nun fehlt noch die Wahrscheinlichkeit  $p_{23}$ . Es sei  $P_{2 \rightarrow 1}$  die Wahrscheinlichkeit, daß ein in 2 erzeugtes Neutron die Zone nach innen verläßt, und  $\Gamma_1$  die Durchgangswahrscheinlichkeit durch die Probe. Da die Zahl der Neutronen, die aus Zone 2 direkt nach Zone 3 austreten, von der Probentemperatur unabhängig ist, wird

$$P_{23} = P_{2 \rightarrow 1} \Gamma_1 \Gamma_2 + \text{temperaturunabh. Term}$$

$$= -P_{2 \rightarrow 1} (1 - \Gamma_1) \Gamma_2 + \text{temperaturunabh. Term.}$$

Nun läßt sich  $p_{21}$  durch  $P_{2 \rightarrow 1}$  und  $\Gamma_1$  ausdrücken

$$P_{2 \rightarrow 1} (1 - \Gamma_1) = p_{21} = \frac{V_1 \Sigma_{t1}}{V_2 \Sigma_{t2}} (1 - P_1) (1 - \Gamma_2) .$$

Also wird der temperatur abhängige Teil von  $p_{23}$

$$P_{23} = -p_{21} \Gamma_2 = - \frac{V_1 \Sigma_{t1}}{V_2 \Sigma_{t2}} (1 - P_1) \Gamma_2 (1 - \Gamma_2) .$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (23) und (24) erhält man

$$\frac{\delta k_x}{k} = s_{x1}^+ V_1 s_1 \delta \left\langle \frac{\Sigma_{x1}}{\Sigma_{t1}} \right\rangle$$

$$+ V_1 \delta \left\langle (1 - P_1) \left( -s_1 + \frac{\Sigma_{t1}}{\Sigma_{t2}} (1 - \Gamma_2) s_2 + \Gamma_2 \frac{\Sigma_{t1}}{\Sigma_{t3}} s_3 \right) \left( \frac{\Sigma_{x1}}{\Sigma_{t1}} s_{x1}^+ - \Gamma_2 \frac{\Sigma_{x3}}{\Sigma_{t3}} s_{x3}^+ \right) \right\rangle . \quad (25)$$

Dies ist die Erweiterung von (15a) und (15b) auf den vorliegenden Fall einer 3-Zonen-Anordnung.

Zur weiteren Auswertung von (25) werden die Klammern ausmultipliziert; benutzt man noch die Zerlegung

$$\Sigma_t = \Sigma_p + \Sigma_c$$

( $\Sigma_c$  = Wirkungsquerschnitt für die Compoundkernbildung,  $\Sigma_p$  = Potentialquerschnitt), dann erhält man

$$\frac{\delta k_x}{k} = V_1 s_{x1}^+ \left[ s_1 \delta \left\langle \frac{\Sigma_{x1}}{\Sigma_{t1}} P_1 \right\rangle + (s_2 (1 - \Gamma_2) \frac{1}{1 \Sigma_{t2}} + s_3 \frac{\Gamma_2}{1 \Sigma_{p3}}) \delta \left\langle 1 \Sigma_{x1} (1 - P_1) \right\rangle \right]$$

$$+ V_1 \left[ -s_{x1}^+ s_3 \frac{\Gamma_2}{1 \Sigma_{p3}} \delta \left\langle \frac{1 \Sigma_{x1} \Sigma_{p3}}{\Sigma_{t3}} (1 - P_1) \right\rangle + s_{x3}^+ s_1 \Gamma_2 \delta \left\langle \frac{\Sigma_{x3}}{\Sigma_{t3}} (1 - P_1) \right\rangle \right]$$

$$- s_{x3}^+ s_2 \frac{\Gamma_2 (1 - \Gamma_2)}{1 \Sigma_{t2}} \delta \left\langle \frac{1 \Sigma_{t1} \Sigma_{x3}}{\Sigma_{t3}} (1 - P_1) \right\rangle - s_{x3}^+ \Gamma_2^2 s_3 \delta \left\langle \frac{\Sigma_{t1} \Sigma_{x3}}{\Sigma_{t3}^2} (1 - P_1) \right\rangle . \quad (26)$$

In Gleichung (26) sind in der ersten Klammer die drei Terme zusammengefaßt, die die Resonanzabsorption (für  $x$ -Absorption) in der Probe beschreiben, unabhängig von etwa vorhandenen Resonanzeffekten in der Umgebung. Sie seien als "Normalterme" bezeichnet.

Wenn man an dieser Stelle die Wigner'sche rationale Näherung für die Entkommwahrscheinlichkeit einführt, dann kann man ein äquivalentes  $\sigma_p$  (Potentialquerschnitt pro Absorberatom) für die Probe definieren, und die Berechnung dieser "Normalterme" kann direkt nach der im Anhang beschriebenen Theorie der Dopplerkoeffizienten erfolgen.

Einige Autoren haben sich bei der Interpretation von Probenmessungen an U238 damit begnügt, die "Normalterme" in der angegebenen Näherung zu berechnen, und die übrigen Terme zu vernachlässigen. Solche Rechnungen liefern Ergebnisse, die bereits in der richtigen Größenordnung liegen.

Dies ist zunächst erstaunlich, wenn man an eine Probe denkt, die dasselbe  $\sigma_p$  wie die Umgebung hat. Nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts wäre dann der Meßeffect mit dem  $\sigma_p$  der Probe zu berechnen, und die Rechnung mit dem größeren äquivalenten  $\sigma_p$  müßte ein falsches Ergebnis liefern. Nun ist allerdings in typischen Fällen der Dopplerkoeffizient des U238 nur schwach von  $\sigma_p$  abhängig, so daß man mit dem äquivalenten  $\sigma_p$  die richtige Größenordnung erhält. Dieser Schluß läßt sich an Hand von (26) auch einfacher ausdrücken: Für eine U238-Probe sind die Terme in der zweiten Klammer klein, in typischen Fällen etwa 10% des gesamten Ausdrucks.

Physikalisch beschreiben die Terme in der zweiten Klammer die Resonanzwechselwirkung der Probe mit der Umgebung. So berücksichtigt der erste Term die Änderung der Absorption in der Probe durch die Resonanzstruktur der einfallenden Neutronen; der zweite Term trägt der Tatsache Rechnung, daß die aus der Probe austretenden Neutronen nicht die Gleichgewichts-Resonanzstruktur der Umgebung haben. Die übrigen Terme lassen sich ähnlich einfach deuten.

Die weitere Auswertung gestaltet sich einfacher, wenn an dieser Stelle für die Entkommwahrscheinlichkeit  $1-P_1$  eine rationale Näherung eingeführt wird. Nun ist die einfachste Näherung, nämlich die von Wigner, für praktische Rechnungen zu ungenau, da sie bis zu 25% von der exakten

Entkommwahrscheinlichkeit abweicht. Man kann jedoch, wie z.B. Leslie, Hill und Jonsson /16/ gezeigt haben, etwas erweiterte rationale Näherungen angeben, die die Entkommwahrscheinlichkeit aus einem Zylinder bis auf einige Prozent genau wiedergeben. In dieser Arbeit soll eine 2-Term-Näherung der Form

$$1-P_1 = \frac{a_1}{c_1+1 \sum t_1} + \frac{a_2}{c_2+1 \sum t_1} \quad (27)$$

gewählt werden, die bei Beachtung der Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} a_1+a_2 &= 1 \\ \frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2} &= 1 \end{aligned} \quad (28)$$

in den Grenzfällen großer und kleiner  $\bar{I}$  das Verhalten von  $1-P_1$  richtig wiedergibt. Man erhält z.B. mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_1 &= -1.455 & a_2 &= 2.455 \\ c_1 &= 1.8 & c_2 &= 4.0 \end{aligned}$$

die in Fig. 1 dargestellte Näherung für  $1-P_1$ , die maximal um 3% vom exakten Wert abweicht, und damit den Genauigkeitsanforderungen der meisten Rechnungen genügt.

Aus (27) und (28) folgt

$$P_1 = \frac{a_1}{c_1} \frac{\sum t_1}{\sum t_1+c_1/1} + \frac{a_2}{c_2} \frac{\sum t_1}{\sum t_1+c_2/1} .$$

Damit lassen sich die in (26) vorkommenden energetischen Mittelwerte wie folgt schreiben

$$\int \left\langle \frac{\sum x_1}{\sum t_1} P_1 \right\rangle = \sum_{m=1,2} \frac{a_m}{c_m} \int \left\langle \frac{\sum t_1}{\sum t_1+c_m/1} \right\rangle \quad (29a)$$

$$\int \left\langle 1 \sum x_1 (1-P_1) \right\rangle = \sum_{m=1,2} a_m \int \left\langle \frac{\sum x_1}{\sum t_1+c_m/1} \right\rangle \quad (29b)$$

$$\int \left\langle \frac{1 \sum x_1 \sum c_3}{\sum t_3} (1-P_1) \right\rangle = \sum_{m=1,2} a_m \int \left\langle \frac{\sum c_3 \sum x_1}{\sum t_3 (\sum t_1+c_m/1)} \right\rangle \quad (29c)$$

$$\delta \left\langle \frac{\Sigma_{x3}}{\Sigma_{t3}} (1-P_1) \right\rangle = - \sum_{m=1,2} \frac{a_m}{1 \bar{\Sigma}_{pm}} \delta \left\langle \frac{\Sigma_{x3} \Sigma_{c1}}{\Sigma_{t3} (\Sigma_{t1+c_m}/1)} \right\rangle \quad (29d)$$

$$\delta \left\langle \frac{1 \Sigma_{t1} \Sigma_{x3}}{\Sigma_{t3}} (1-P_1) \right\rangle = \sum_{m=1,2} \frac{a_m c_m}{1 \bar{\Sigma}_{pm}} \delta \left\langle \frac{\Sigma_{x3} \Sigma_{c1}}{\Sigma_{t3} (\Sigma_{t1+c_m}/1)} \right\rangle \quad (29e)$$

$$\delta \left\langle \frac{\Sigma_{t1} \Sigma_{x3}}{\Sigma_{t3}^2} (1-P_1) \right\rangle = - \sum_{m=1,2} a_m c_m \delta \left\langle \frac{\Sigma_{x3}}{1^2 \Sigma_{t3}^2 (\Sigma_{t1+c_m}/1)} \right\rangle \quad (29f)$$

mit  $\bar{\Sigma}_{pm} = \Sigma_{p1+c_m}/1$ .

Da (29a) und (29b) und ebenso (29d) und (29e) bis auf numerische Faktoren übereinstimmen, treten in diesen Formeln noch vier verschiedene, über die Energie gemittelte Reaktionsratenverhältnisse auf. Sie werden im nächsten Abschnitt berechnet.

#### 4.4 Berechnung der Reaktionsratenverhältnisse

Die Berechnung der in (29a) bis (29f) vorkommenden Reaktionsratenverhältnisse folgt weitgehend den aus der Theorie der Dopplerkoeffizienten bekannten Methoden, wie sie in Form einer kurzen Übersicht in Anhang 1 zusammengestellt sind. Eine ausführliche Darstellung der allgemeinen Theorie würde über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen; es wird deshalb auf die bereits zitierte Literatur /5, 6, 7/ verwiesen. Bei den im folgenden auftretenden Entwicklungen ist darauf zu achten, daß sie nicht nur die Reaktionsratenverhältnisse bei einer bestimmten Temperatur, sondern auch ihre Änderungen beim Aufheizen der Probe genügend genau wiedergeben müssen.

Wie bereits erwähnt, lassen sich die in (29a) und (29b) auftretenden Reaktionsratenverhältnisse, die den "Normaltermen" in (26) entsprechen, direkt nach den Methoden in Anhang 1 auswerten. Da nach Voraussetzung die Probe zwei Brennstoffisotope enthalten kann, muß die in (A-13) angegebene Näherung herangezogen werden, die für die Reaktionsart x im Isotop 1 direkt liefert

$$\left\langle \frac{\sum x_1^{(1)}}{\sum_{t_1+c_m/1}^{(1)}} \right\rangle = \left\langle \frac{\sum x_1^{(1)}}{\sum_{p_m+\sum_{c_1}^{(1)}+\sum_{c_1}^{(2)}}} \right\rangle = \left\langle \frac{\sum x_1^{(1)}}{\sum_{p_m+\sum_{c_1}^{(1)}}} \right\rangle \left[ 1 - \left\langle \frac{\sum_{c_1}^{(2)}}{\sum_{p_m+\sum_{c_1}^{(2)}}} \right\rangle \right]. \quad (30)$$

Dabei bezieht sich der obere Index auf das Isotop, und es ist  $\sum_{p_m} = \sum_{p_1+c_m/1}$ . Eine ähnliche Formel gilt für die Reaktionsrate im Isotop 2.

Der Ausdruck für ein einzelnes Isotop wird nun unter der Voraussetzung weiter entwickelt, daß das Isotop eine starke und mehrere schwache Resonanzserien hat. Unterdrückt man den Isotopenindex und bezeichnet die starke Seite mit  $s=1$ , dann erhält man nach Anhang 1 sofort

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\sum x_1}{\sum_{p_m+\sum_{c_1}} \right\rangle &= \left\langle \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_{p_m+\sigma_{c_1}}} \right\rangle = \left\langle \frac{\sigma_{x_1,s=1}}{\sigma_{p_m}^* + \sigma_{c_1,s=1}} \right\rangle + \frac{\sum_{s \neq 1} \langle \sigma_x \rangle_s}{\sigma_{p_m}^*} \left( 1 - \left\langle \frac{\sigma_{c_1,s=1}}{\sigma_{p_m}^* + \sigma_{c_1,s=1}} \right\rangle \right) \\ &+ \sum_{s \neq 1} \frac{\langle \sigma_{x_1} \sigma_{c_1} \rangle_s - \langle \sigma_{x_1} \rangle_s \langle \sigma_{c_1} \rangle_s}{\sigma_{p_m}^{*2}} \left\langle \frac{\sigma_{p_m}^{*2}}{(\sigma_{p_m}^* + \sigma_{c_1,s=1})^2} \right\rangle \end{aligned} \quad (31)$$

wobei  $\sigma_{p_m}^* = \sigma_{p_m} + \sum_{s \neq 1} \sigma_c s$  ist.

Für ein Isotop, das zwei starke Serien enthält, wird der Ausdruck etwas komplizierter, kann aber nach derselben Methode erhalten werden.

Etwas schwieriger als die "Normalterme" sind die Terme (29c) bis (29f) zu berechnen, da sie nicht direkt auf bekannte Ausdrücke zurückgeführt werden können, und die Formeln für 2 Isotope schon etwas verwickelt werden. Die Darstellung wird am übersichtlichsten, wenn man folgende Bezeichnung einführt

$$\begin{aligned} J_{x_m}^{(i)} &= \left\langle \frac{\sum x_1^{(i)}}{\sum_{p_m+\sum_{c_1}^{(i)}}} \right\rangle \\ J_{x_3}^{(i)} &= \left\langle \frac{\sum x_3}{\sum_{p_3+\sum_{c_3}^{(i)}}} \right\rangle \\ I_{x_m}^{(i)} &= \left\langle \frac{\sum_{c_3}^{(i)} \sum_{x_1}^{(i)}}{(\sum_{p_3+\sum_{c_3}^{(i)}})(\sum_{p_m+\sum_{c_1}^{(i)}})} \right\rangle \\ H_{x_m}^{(i)} &= \left\langle \frac{\sum_{p_3} \sum_{c_3}^{(i)} \sum_{x_1}^{(i)}}{(\sum_{p_3+\sum_{c_3}^{(i)}})^2 (\sum_{p_m+\sum_{c_1}^{(i)}})} \right\rangle \end{aligned} \quad (32)$$

$$I_{cm}^{**}(i) = \left\langle \frac{\sum_{p3} \bar{\sum}_{pm}}{(\sum_{p3} + \sum_{c3}^{(i)}) (\sum_{pm} + \sum_{c1}^{(i)})} \right\rangle = 1 - J_{cm}^{(i)} - J_{c3}^{(i)} + I_{cm}^{(i)}$$

$$H_{cm}^{**}(i) = \left\langle \frac{\sum_{p3}^2 \bar{\sum}_{pm}}{(\sum_{p3} + \sum_{c3}^{(i)})^2 (\bar{\sum}_{pm} + \sum_{c1}^{(i)})} \right\rangle = H_{cm}^{(i)} + I_{cm}^{**}(i) - \left\langle \frac{\sum_{p3} \sum_{c3}^{(i)}}{(\sum_{p3} + \sum_{c3}^{(i)})^2} \right\rangle. \quad (32)$$

Wendet man nun die in (A-11) angegebene Entwicklung für 2 Isotope auf den Term (29c) an und bricht nach dem ersten Glied ab, dann erhält man mit den obigen Bezeichnungen

$$\left\langle \frac{\sum_{c3} \sum_{x1}^{(1)}}{\sum_{t3} (\sum_{t1} + c_m/1)} \right\rangle = \left\langle \frac{(\sum_{c3}^{(1)} + \sum_{c3}^{(2)}) \sum_{p3} \bar{\sum}_{pm} \sum_{x1}^{(1)}}{(\sum_{p3} + \sum_{c3}^{(1)}) (\sum_{p3} + \sum_{c3}^{(2)}) (\bar{\sum}_{pm} + \sum_{c1}^{(1)}) (\bar{\sum}_{pm} + \sum_{c1}^{(2)})} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\sum_{c3}^{(1)} \sum_{x1}^{(1)}}{(\sum_{p3} + \sum_{c3}^{(1)}) (\bar{\sum}_{pm} + \sum_{c1}^{(1)})} \right\rangle \left\langle \frac{\sum_{p3} \bar{\sum}_{pm}}{(\sum_{p3} + \sum_{c3}^{(2)}) (\bar{\sum}_{pm} + \sum_{c1}^{(2)})} \right\rangle$$

$$+ \left\langle \frac{\sum_{p3} \sum_{x1}^{(1)}}{(\sum_{p3} + \sum_{c3}^{(1)}) (\bar{\sum}_{pm} + \sum_{c1}^{(1)})} \right\rangle \left\langle \frac{\sum_{c3}^{(2)} \bar{\sum}_{pm}}{(\sum_{p3} + \sum_{c3}^{(2)}) (\bar{\sum}_{pm} + \sum_{c1}^{(2)})} \right\rangle$$

$$= I_{cm}^{**}(2) I_{xm}^{(1)} + (J_{xm}^{(1)} - I_{xm}^{(1)}) (J_{c3}^{(2)} - I_{cm}^{(2)}).$$

Ähnliche Umformungen ergeben für das in (29d) und (29e) vorkommende Reaktionsratenverhältnis

$$\left\langle \frac{\sum_{x3} \sum_{c1}^{(1)}}{\sum_{t3} (\sum_{t1} + c_m/1)} \right\rangle = I_{cm}^{**}(2) I_{xm}^{(1)} + (J_{x3}^{(1)} - I_{xm}^{(1)}) (J_{cm}^{(2)} - I_{cm}^{(2)}),$$

und analog für (29f)

$$\left\langle \frac{\sum_{x3}^{(1)}}{1^2 \sum_{t3}^2 (\sum_{t1} + c_m/1)} \right\rangle = \frac{1}{1^2 \bar{\sum}_{pm} \sum_{p3}} \cdot H_{cm}^{**}(2) \left( \left\langle \frac{\sum_{p3} \sum_{x3}^{(1)}}{(\sum_{p3} + \sum_{c3}^{(1)})^2} \right\rangle - H_{xm}^{(1)} \right).$$

Damit ist die Berechnung der Terme (29) auf die Größen (32) zurückgeführt, die sich alle nur auf ein Isotop beziehen. Durch die Formel (31) ist außerdem  $J_x^{(i)}$  durch die Beiträge der einzelnen Serien ausgedrückt. Eine ähnliche Aufspaltung in Beiträge einzelner Serien ist auch für  $I_x$  und  $H_x$  möglich; sie wird im Anhang 2 durchgeführt.

Nach den Formeln im Anhang ist damit die Berechnung von  $J_x^{(i)}$  auf Integrale über die bekannte J-Funktion, außerdem auf die Mittelwerte  $E_x^{(s)}$  und die Überlappungs-Funktion  $\xi(\Delta/D)$  zurückgeführt. Dagegen tritt bei der Berechnung von  $I_x^{(i)}$  und  $H_x^{(i)}$  für die "starke" Serie noch ein Term

$$I_{x,s=1} = \left\langle \frac{\sigma_{c3,s=1} \sigma_{x1,s=1}}{(\sigma_{p3} + \sigma_{c3,s=1})(\sigma_{pm} + \sigma_{c1,s=1})} \right\rangle \quad (33a)$$

bzw.

$$H_{x,s=1} = \left\langle \frac{\sigma_{p3} \sigma_{c3,s=1} \sigma_{x1,s=1}}{(\sigma_{p3} + \sigma_{c3,s=1})^2 (\sigma_{pm} + \sigma_{c1,s=1})} \right\rangle \quad (33b)$$

auf, der durch direkte numerische Integration berechnet werden muß.

Zur numerischen Auswertung des hier entwickelten Formalismus wurde ein FORTRAN-Programm DOPRO geschrieben, das im wesentlichen die Ausdrücke  $\delta P_{xmn}$  in (24) für eine bestimmte Umgebungstemperatur und Proben temperatur nach der beschriebenen Methode berechnet. Die Mittelwerte  $\langle \Gamma_x J \rangle$  über die statistische Verteilung der Resonanzbreiten werden nach einem Unterprogramm erhalten, das im wesentlichen die Tabelle der J-Funktion von Bell et al. /17/ benützt. Die Überlappungsfunktion  $\xi(\Delta/D)$  wurde nach der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $\nu=8$  berechnet, vergl. /7/. Die Ausdrücke (33a) und (33b) werden durch numerische Integration unter Verwendung eines Unterprogramms für die  $\gamma$ -Funktion erhalten.

#### 4.5 Schwankungsbreite durch die Statistik der überlappenden Resonanzen verschiedener Isotope

Die Beiträge der Resonanzen verschiedener Isotope konnten im vorigen Abschnitt unter der Voraussetzung separiert werden, daß innerhalb einer Energiegruppe mit der statistischen Verteilung der Resonanzpositionen gerechnet werden kann. Diese Voraussetzung ist jedoch, wie Hutchins /18/ und Kelber und Kier /19/ gezeigt haben, in dem für schnelle Brüter typischen Gemisch aus Pu239 und U238 nicht gut erfüllt.

Betrachtet man zunächst nur die Wechselwirkung je einer Resonanz mit mittleren Parametern eines jeden Isotops, dann wird die Absorption im Isotop 1

$$\left\langle \frac{\sum_a^{(1)}}{\sum_t} \right\rangle = \frac{1}{\Delta E} \int \frac{dE N_1 \sigma_{oa1} \gamma_1 (E-E_1, t_1)}{\sum_p + N_1 \sigma_{o1} \gamma_1 (E-E_1, t_1) + N_2 \sigma_{o2} \gamma_2 (E-E_2, t_2)} \quad (34)$$

Dabei sind  $E_1$  und  $E_2$  die Positionen der Resonanzmaxima. Die Breite beider Resonanzen ist etwa dieselbe, nämlich die Dopplerbreite. Dagegen ist die Resonanz des U238 viel größer und verursacht eine erheblich stärkere Flußabsenkung. Danach ist es verständlich, daß die Absorption im U238 und ihre Doppleränderung nur wenig von der Lage der Resonanz des Pu239 abhängt. Dagegen kann die Absorption im Pu239 wesentlich durch die starke Resonanz des U238 beeinflusst werden; sie ist also eine Funktion des Abstandes der beiden Resonanzen. Fig. 2 zeigt diese Funktion für zwei verschiedene Temperaturen. Die Absorption im Plutonium wird im Bereich der Uranresonanz erheblich reduziert; ihre Doppleränderung wechselt in einem bestimmten Bereich in der Flanke der Uranresonanz sogar ihr Vorzeichen.

Eine Energiegruppe im Doppler-Bereich enthält typisch etwa 20 aufgelöste Resonanzen des U238 und ungefähr sechsmal soviel des Pu239, die nicht einzeln aufgelöst sind; ihre Abstände von den Resonanzen des U238 sind also nicht bekannt. Wenn die tatsächliche Verteilung der Abstände für die statistische Verteilung charakteristisch ist, dann gilt das im vorigen Abschnitt angewandte Mittelungsverfahren. Es ist aber denkbar, daß mehr starke Pu-Resonanzen in den Bereich mit negativer Doppleränderung fallen, als dem statistischen Mittelwert entspricht; dann weicht auch die gesamte Doppleränderung vom Erwartungswert ab. In den beiden zitierten Arbeiten /18,19/ wird der Schluß gezogen, daß der beschriebene Überlappungseffekt zu erheblichen Schwankungen in der Doppleränderung der Absorption des Pu239 führen kann; Kelber und Kier geben eine Unsicherheit von +60% an. Bei der gegenwärtigen Kenntnis der Wirkungsquerschnitte kann die Änderung nur mit dieser Schwankungsbreite berechnet werden.

Daraus ist zunächst die Folgerung zu ziehen, daß der "Dopplerkoeffizient des Pu239" als solcher nicht gut definiert ist, da er möglicherweise stark von der Konzentration und der Temperatur des vorhandenen U238 abhängt. Man könnte diese Abhängigkeit durch geeignet angelegte Doppler-Experimente bestimmen. Weiter ist zu folgern, daß Doppler-Messungen mit Pu-Proben möglicherweise nicht den Dopplerkoeffizienten des Pu im Leistungsreaktor liefern, da bei der Messung die Temperatur des Urans in der Umgebung der Probe konstant bleibt, während im Leistungsreaktor das Uran mit aufgeheizt wird.

Für die Auswertung von Messungen an Pu-Proben kommt es zunächst darauf an, den Überlappungseffekt für diesen Fall abzuschätzen. Man erhält für die Absorption in einer Pu-Resonanz, wenn man die Wigner'sche Näherung für die Entkommwahrscheinlichkeit einführt, den Ausdruck

$$A_0 = \int dE \frac{\sum_a^{(39)}(E)}{\sum_{p1} + \sum_c^{(39)}(E)} \left[ \sum_{p1} + \frac{1}{\bar{l}} \frac{\sum_{p2}}{\sum_{p2} + \sum_c^{(38)}(E)} \right]. \quad (35)$$

Dabei ist  $\bar{l} = \sum_{p1} + 1/\bar{l}$ . Es wurde ein Programm geschrieben, das dieses Integral für eine Reihe von Resonanzen berechnet, deren Parameter aus der statistischen Verteilung ausgewürfelt werden. Die Ergebnisse für einige typische Fälle werden später diskutiert.

#### 5. Berechnung des Reaktivitätseffektes durch thermische Ausdehnung der Probe

Grundsätzlich tritt bei allen Dopplerproben-Experimenten neben der Dopplerreaktivität ein Reaktivitätseffekt durch thermische Ausdehnung der Probe auf, für den das Meßergebnis korrigiert werden muß. Bei manchen Experimenten wurden Probenkonstruktionen verwendet, die eine Ausdehnung der Probe in axialer Richtung, oder auch vollständig, verhindern sollten /2/. Wenn auch damit in einigen Fällen der Ausdehnungseffekt experimentell bestimmt werden konnte, ist es doch notwendig, im Rahmen der Interpretation von Doppler-Experimenten eine Analyse der Ausdehnungseffekte durchzuführen.

Bei einer Probe, die sich frei ausdehnen kann, sind zwei verschiedene Effekte auf die Reaktivität zu erwarten. Einmal dehnt sich die Probe in axialer Richtung in ein Gebiet anderen statistischen Gewichts aus. Außerdem ändert sich durch die Ausdehnung die mittlere optische Dicke der Probe, und damit auch die räumliche Selbstabschirmung.

Der erste Effekt, in der Literatur als "axialer Effekt" bezeichnet, ist bei den üblichen Experimenten meist vernachlässigbar klein. Da er außerdem durch einfache Diffusions- und Störungsrechnungen abgeschätzt werden kann, wird hier nicht näher darauf eingegangen. Dagegen bringt der zweite Effekt, meist "radialer Effekt" genannt, bei Proben aus Spaltmaterial eine deutliche Korrektur des Meßeffectes, und erfordert daher eine genauere Analyse.

Nun läßt sich die in Abschnitt 3 entwickelte Störungstheorie für Probenmessungen direkt auf die Berechnung dieses Effektes anwenden. Die optische Dicke der Probe ist durch  $\bar{I}N\sigma_t$  gegeben. Bei der Ausdehnung ändert sich der Faktor  $\bar{I}N$ . Man hat also einfach den Reaktivitätswert der Probe für verschiedene optische Dicken zu berechnen, um den "radialen Effekt" zu erhalten. Die im folgenden beschriebene Methode wurde in einfacherer Form, ohne Berücksichtigung von Resonanzeffekten, schon von Hwang /2/ verwendet.

Die Änderung von  $\bar{I}N$  läßt sich für eine zylindrische Probe, deren Länge groß ist gegen den Durchmesser, sehr einfach bestimmen. Mit der Wärmeausdehnungszahl  $\alpha$  wird der Durchmesser  $\bar{I}$  der ausgedehnten Probe

$$\bar{I} = \bar{I}_0 (1 + \alpha \delta T)$$

Die Atomzahl pro  $\text{cm}^3$  ist proportional zu  $1/V$ , so daß

$$N = \frac{N_0}{(1 + \alpha \delta T)^3}$$

wird. Daraus erhält man

$$\bar{I}N = \frac{\bar{I}_0 N_0}{(1 + \alpha \delta T)^2} \approx \bar{I}_0 N_0 (1 - 2\alpha \delta T).$$

Der Reaktivitätswert der Probe gegen Vakuum wird nun nach den Formeln des Abschnitts 3 berechnet. Die Adjungierte des ungestörten Problems ist konstant, so daß (15c) gleich Null wird. Die Anteile (16) und (18) können als Summe über Reaktionsarten wie folgt beschrieben werden

$$\frac{\delta k'_1}{k} = \frac{V_1}{D} \sum_x \sum_j S_{xj}^+ \left\langle (P_1 S_{1j} + \frac{\sum_{t1}}{\sum_{t2}} (1 - P_1) S_{2j}) \frac{\sum_{x1}}{\sum_{t1}} \right\rangle_j \quad (16)$$

und

$$\frac{\delta k'_2}{k} = \frac{V_1}{D} \sum_x \sum_j S_{xj}^+ \left\langle (1 - P_1) (S_{1j} - \frac{\sum_{t1}}{\sum_{t2}} S_{2j}) \frac{\sum_{x2}}{\sum_{t2}} \right\rangle_j \quad (18)$$

Dabei bezieht sich (16) auf die Reaktionsraten in der Probe, (18) auf die in der Umgebung. Es ist zweckmäßig, für die Berechnung von Reaktivitätswerten den Ausdruck (18) durch Abziehen der (sich zu Null ergänzenden) adjungierten Gleichung in der Klammer umzuformen. Damit wird

$$\frac{\delta k_2'}{k} = \frac{V_1}{D} \sum_x \sum_j S_{xj}^+ \left\langle (1-P_1) \left( S_{1j} - \frac{\Sigma_{t1}}{\Sigma_{t2}} S_{2j} \right) \frac{\Sigma_{x2} - \tilde{\Sigma}_{x2j}}{\Sigma_{t2}} \right\rangle_j, \quad (18a)$$

wobei  $\tilde{\Sigma}_{x2}$  der selbstabgeschirmte Wirkungsquerschnitt ist.

Die Schreibweise (18a) hat den rechentechnischen Vorteil, daß für einen resonanzfreien Gruppenquerschnitt  $\Sigma_{x2j}$  der zugehörige Term wegfällt. Eine weitere Vereinfachung besteht darin, daß für eine rein streuende Probe ohne Resonanzen der Faktor mit  $S_{1j}$  verschwindet. Dies ist verständlich, da es sich dabei um Neutronen aus einer resonanzfreien Quelle handelt, die dieselben Reaktionswahrscheinlichkeiten haben wie Neutronen aus der Moderationsquelle. Der Term mit  $S_{2j}$  ist der Beitrag von Neutronen, die durch die Probe hindurchgehen. Sie zeigen zwar dieselbe Resonanzstruktur wie in der Umgebung, haben aber beim Durchgang durch die Probe durch Streustöße an Intensität verloren und liefern deshalb einen Beitrag, der als "teilweise Aufhebung der Selbstabschirmung" durch die streuende Probe gedeutet werden kann.

Die Berechnung des Reaktivitätswertes einer Probe gegen Vakuum nach (16) und (18) erfordert die Kenntnis der gestörten Quelldichten in der Probe. Im Rahmen des 2-Zonen-Modells werden sie aus den Gleichungen

$$S_{1j} = \sum_i \left\langle \frac{\Sigma_{s1}^{i \rightarrow j} + \chi_j \nu \Sigma_{f1}}{\Sigma_{t1}} P_1 \right\rangle_i S_{1i} + \sum_i \left\langle \frac{\Sigma_{s1}^{i \rightarrow j} + \chi_j \nu \Sigma_{f1}}{\Sigma_{t2}} (1-P_1) \right\rangle_i S_{2i} \quad (25)$$

erhalten. Die Lösung kann nach einem rasch konvergierenden Iterationsverfahren erfolgen. Zur numerischen Berechnung von Reaktivitätswerten wurden die Gleichungen (25) und die Ausdrücke (16) und (18a) für die IBM-7074 programmiert.

Dazu wurde das zuerst von Abagjan et al. /34/ vorgeschlagene Konzept der Selbstabschirmungsfaktoren eingeführt. Wenn man sich auf die in diesem Konzept enthaltene Näherung festlegt, kann man die in den Gleichungen auftretenden energetischen Mittelwerte durch Partialbruchzerlegung auswerten, d.h. auf die bekannten Querschnitte und die Selbstabschirmungsfaktoren zurückführen /21/.

## 6. Numerische Auswertung für Messungen an Uranproben

### 6.1 Numerische Ergebnisse und Vergleich mit dem Experiment

Doppler-Experimente mit Uranproben, deren Anreicherung etwa 25% nicht überschreitet, liefern einen relativ großen, gut zu messenden Effekt. Die Berechnung des Meßeffekts wird dadurch erleichtert, daß die Resonanzen des U<sup>238</sup> bis 4keV gemessen sind, so daß man in einem großen Teil des interessanten Energiebereichs mit bekannten Resonanzdaten arbeiten kann. Außerdem sind bei diesen Messungen die Ausdehnungseffekte klein. Für die Übertragung der Meßergebnisse auf den Dopplerkoeffizienten eines Leistungsreaktors ist es wichtig, daß der Dopplereffekt im U<sup>238</sup> von Überlappungserscheinungen mit Resonanzen anderer Isotope weitgehend unabhängig ist. Man wird also eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment erwarten, die i.a. auch erzielt wird.

Die numerische Auswertung wird zunächst für die Messungen an dem Karlsruher Reaktor SNEAK durchgeführt. In der Anordnung 3A-2 wurden Dopplermessungen mit drei verschiedenen Uranoxid-Proben durchgeführt. Die Anreicherung der Proben war 0.4%, 15% und 25%. Bei allen überwiegt der Dopplereffekt im U<sup>238</sup>.

SNEAK-3A-2 ist die Nachbildung eines dampfgekühlten schnellen Reaktors mit 510 l Corevolumen /22/. Das Spektrum ist dementsprechend sehr weich. Der Brennstoff war Uran mit 20% Anreicherung. Einige der wichtigen Core-Daten sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Tabelle 2 enthält Angaben über die Dopplerproben.

Es ist interessant, auch für eine Probenmessung im Spektrum eines Natrium-gekühlten schnellen Reaktors die Rechnung nach der hier entwickelten Methode durchzuführen. Von den zahlreichen bekannten Messungen wurde eine am ZPR-6, Anordnung 4Z, in Argonne gewählt. Die Anordnung war ein Mehrzonen-Core, wobei die innere Zone die Zusammensetzung eines Urankarbid-Cores mit Natriumkühlung hatte. Genaue Angaben sind in /2/ zu finden. Die Dopplerprobe war Natururan-Oxid; die Daten sind in Tabelle 2 gegeben.

Fig. 3 zeigt die Ergebnisse der Messungen an SNEAK. Rechnung und Experiment stimmen gut überein, außer bei der Probe mit 15% Anreicherung. Doch auch bei dieser Probe ist die Abweichung nur etwa gleich dem zweifachen statistischen Fehler der Messung. Die eingezeichneten Fehlergrenzen der

Meßpunkte beziehen sich nur auf die statistischen Fehler. Die Ergebnisse der Messungen am ZPR-6 sind in Fig. 4 dargestellt. Hier liegen die Meßpunkte etwa 10% höher als die berechnete Kurve.

In allen Rechnungen wurden die von Garg et al. /24/ gemessenen Resonanzparameter des U238 verwendet, der Gruppenstruktur entsprechend jedoch nur bis 2.2 keV. Da die Resonanzen des U235 in dem hier interessanten Bereich nicht aufgelöst sind, wurde im übrigen mit den statistischen Resonanzparametern von Schmidt /23/ gerechnet; sie sind in Tabelle 3 zusammengestellt. Die ungestörten Flüsse wurden für SNEAK nach dem SNEAK-Satz /25/ mit 26 Energiegruppen berechnet. Für ZPR-6 wurde der KFK-Satz /20/, ebenfalls mit 26 Energiegruppen, verwendet. Ausdehnungseffekte wurden vernachlässigt, doch wurde eine Korrektur für Kristalleffekte im  $UO_2$  angebracht, die das Ergebnis um etwa 10% verkleinert.

Die Rechenergebnisse stimmen etwa so gut mit dem Experiment überein, wie man es nach der derzeitigen Kenntnis der Spektren und Normierungsintegrale erwarten kann. Die gute Übereinstimmung bei SNEAK ist sicher zufällig; doch ist bemerkenswert, daß auch der Effekt des U235, der bei der Probe mit 25% Anreicherung etwa 10% ausmacht, gut wiedergegeben wird. Die Abweichungen bei der Messung am ZPR-6 können auf ein zu hartes Spektrum zurückzuführen sein. Insgesamt kann man also mit den hier verwendeten Resonanzparametern den Dopplereffekt eines Uranreaktors gut berechnen.

## 6.2 Diskussion einzelner Effekte

### Flußverwerfung durch die Probe

Fig. 5 zeigt die Flüsse in einigen für den Dopplereffekt wichtigen Energiegruppen beim Einsetzen verschiedener Proben.

Bei der Probe mit 0.4% U235 sind die Verwerfungen so klein, daß sie in guter Näherung nach der Diffusionstheorie berechnet werden können. Für die Probe mit 25% Anreicherung wurden die Flüsse außer nach der Diffusionstheorie noch mit dem Zellprogramm ZERA /11/ berechnet, das die integrale Transportgleichung unter Berücksichtigung von Resonanzeffekten löst. Der Zellradius wurde so groß angenommen, daß die Wechselwirkung zwischen den Zellen vernachlässigbar klein ist. Da die Diffusionstheorie und Transporttheorie verschiedene Flüsse liefern, ist es notwendig, für die angereicherten Proben das ungestörte Problem mit ZERA zu berechnen.

Resonanzwechselwirkung zwischen Probe und Umgebung

Die Resonanzwechselwirkung wird durch die Terme in der zweiten Klammer in Gleichung (26) beschrieben. Für die Auswertung wurden sie durch numerische Integration berechnet; nun soll versucht werden, ihr Verhalten qualitativ zu verstehen. Dazu wird angenommen, daß die Probe nur das Isotop U238 enthält. Dann können die fraglichen Terme in der rationalen Näherung der Gleichung (26) durch  $I_{xm}$  und  $H_{xm}$

$$I_{xm} = \left\langle \frac{\sigma_{c3} \sigma_{x1}}{(\sigma_{p3} + \sigma_{c3})(\bar{\sigma}_{pm} + \sigma_{c1})} \right\rangle = \left\langle \frac{\sigma_{x3} \sigma_{c1}}{(\sigma_{p3} + \sigma_{c3})(\bar{\sigma}_{pm} + \sigma_{c1})} \right\rangle$$

$$H_{xm} = \left\langle \frac{\sigma_{p3} \sigma_{c3} \sigma_{x1}}{(\sigma_{p3} + \sigma_{c3})^2 (\bar{\sigma}_{pm} + \sigma_{c1})} \right\rangle$$

bzw. durch deren Doppleränderungen  $\Delta I_{xm}$  und  $\Delta H_{xm}$  ausgedrückt werden.

In dem Grenzfall hoher Energien, wenn  $\sigma_{p3}$  und  $\bar{\sigma}_{pm}$  beide groß sind gegen  $\sigma_c$ , können  $I_x$  und  $H_x$  nach den Gleichungen (B-12) und (B-13) in Anhang 2 durch bekannte Funktionen ausgedrückt werden. Diese Ausdrücke nehmen monoton mit der Temperatur ab. Das typische Verhalten bei niedrigen Energien ist aus Fig. 6 zu entnehmen; die Figur zeigt  $\Delta I_y$  für eine Probe aus U238-Oxid mit  $\bar{\sigma}_{pm} = 30b$  bei  $E = 1.47keV$ . Die Konzentration von U238 in der Umgebung, d.h.  $\sigma_{p3}$ , ist variabel. Es ist zunächst erstaunlich, daß  $\Delta I_y$  nicht monoton mit wachsendem  $\sigma_{p3}$  abnimmt. Die Erklärung dafür liegt in einer Art Interferenzeffekt zwischen Probe und Umgebung. Greift man etwa den Term (29d) heraus, dann stellt der Faktor  $\sigma_{c1}/(\bar{\sigma}_{pm} + \sigma_{c1})$  den temperaturabhängigen Teil des Spektrums der aus der Probe austretenden Neutronen dar. Dieser Faktor nimmt in den Flanken der Resonanz mit der Temperatur zu, in der Spitze ab. Dabei überwiegt die Zunahme, so daß der "normale" Dopplereffekt zu einer Zunahme der Reaktionsraten führt. In diesem Spektrum absorbiert nun die Umgebung mit der Wahrscheinlichkeit  $\sigma_{a3}/\sigma_{t3}$ , die in der Resonanzspitze am größten ist. Durch die starke Wichtung der Spitze wird bei schwacher Selbstabschirmung der Gesamteffekt negativ, wie in Fig. 7a veranschaulicht ist. Dies entspricht dem Grenzfall hoher Energien, also der Formel (B-12). Der betrachtete Term ist von derselben Größenordnung wie ein "Normalterm" in (26). Bei niedrigen Energien, d.h. im Fall der Fig. 6, sind die Resonanzen des U238 so stark, daß eine Sättigung der Selbstabschirmung eintritt.  $\bar{\sigma}_{pm}$  ist in der Spitze der Resonanz klein

gegen  $\bar{\sigma}_{c1}$ , und der Faktor  $\bar{\sigma}_{c1}/(\bar{\sigma}_{pm} + \bar{\sigma}_{c1})$  ist konstant und von der Temperatur unabhängig (Fig. 7b). Es bleibt nur der positive Effekt in den Flanken, der wegen des Gewichtsfaktors sehr klein ist. Der Effekt der Resonanzwechselwirkung bei niedrigen Energien und kleinen  $\bar{\sigma}_{p3}$  ist also eine Art destruktiver Interferenz: Die Beiträge zum Dopplereffekt sind sehr klein und können, je nach den Werten der Parameter, positiv oder negativ sein.

Zu dem Verhalten von  $\delta H_x$  kann man ganz ähnliche Überlegungen anstellen, die jedoch hier nicht im einzelnen ausgeführt werden sollen.

#### Spektrale Aufteilung, Einfluß der Wechselwirkungsterme

Tabelle 4 zeigt die Aufteilung des Dopplereffekts bei Aufheizung um  $500^\circ$ . Während in dem weichen SNEAK-Spektrum der Hauptbeitrag unter 10 keV liegt, liefert im ZPR-6 der Bereich über 10 keV noch gut die Hälfte des Effekts. Die Wechselwirkungsterme tragen über 10 keV bis zu 30% bei, darunter werden sie sehr klein, was nach dem oben Gesagten unmittelbar verständlich ist.

Nach der Reaktionsratenmethode /14/ führt nach (A-13) die Aufheizung des U238 zu zwei Effekten, nämlich

$$\left[ 1 - \left\langle \frac{\Sigma_{c35}}{\Sigma_p + \Sigma_{c35}} \right\rangle \right] \delta \left\langle \frac{\Sigma_{x38}}{\Sigma_p + \Sigma_{c38}} \right\rangle \quad (36)$$

und

$$- \left\langle \frac{\Sigma_{x35}}{\Sigma_p + \Sigma_{c35}} \right\rangle \delta \left\langle \frac{\Sigma_{c38}}{\Sigma_p + \Sigma_{c38}} \right\rangle . \quad (37)$$

Der zweite Term beschreibt die Verschiebung des Reaktionsratenanteils zuungunsten des U235 beim Aufheizen des U238. Die Terme dieser Art werden in Tabelle 4 als "Wirkung auf U235" bezeichnet. Sie liefern in allen Fällen merkliche Beiträge.

#### Einfluß der Wigner-Näherung

Verwendet man statt der 2-Term-Näherung (27) die Wigner'sche Näherung für die Entkommwahrscheinlichkeit, dann werden die Beiträge bei hohen Energien zu groß, bei niedrigen Energien zu klein. Der Gesamteffekt wird bis auf einige Prozent richtig erhalten. In vielen Fällen genügt es deshalb, mit der Wigner-Näherung zu rechnen.

Korrektur für Kristalleffekte im  $UO_2$

Die  $\psi$ -Funktion als Form der dopplerverbreiterten Resonanzen wurde unter der Annahme abgeleitet, daß die stoßenden Kerne eine Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung haben /5/. Dies ist im  $UO_2$ -Kristall sicher nicht der Fall. Lamb /26/ hat jedoch gezeigt, daß die Resonanzabsorption in einem Kristall durch die  $\psi$ -Funktion bei einer effektiven Temperatur beschrieben wird, wenn die Voraussetzung der "schwachen Bindung", nämlich

$$\Gamma + \Delta \gg 2 \omega_{\max} \quad (38)$$

erfüllt ist.  $\omega_{\max}$  ist dabei die obere Grenze des Phononenspektrums, das nicht unbedingt eine Debye'sche Verteilung haben muß. Die Bedingung (38) ist bei Zimmertemperatur in dem Energiebereich, der für den Dopplereffekt wichtig ist, gut erfüllt. Die effektive Temperatur ist nach Lamb

$$T_{\text{eff}} (T) = \frac{1}{3NK} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega \omega N(\omega) \left[ \frac{1}{e^{\omega/KT} - 1} + \frac{1}{2} \right] \quad (39)$$

wobei  $N(\omega)$  das Phononenspektrum ist;  $K$  ist die Boltzmann'sche Konstante. Das Phononenspektrum für  $UO_2$  wurde von Dolling et al. /27/ durch inelastische Streuung von Neutronen gemessen. Aus den Meßergebnissen hat Schenter /28/ die effektive Temperatur berechnet. Es zeigt sich, daß man für  $T \geq 300^\circ K$  die effektive Temperatur gut erhält, wenn man ein Debye'sches Spektrum  $N(\omega)$  mit  $\Theta_{\text{Debye}} = 620^\circ K$  annimmt. Die Kurve aus /28/ ist in Fig. 8 wiedergegeben. Mit Hilfe dieser Kurve wurden die Rechenergebnisse für die Dopplerproben auf den  $UO_2$ -Kristall umgerechnet.

7. Numerische Auswertung für Messungen an Plutoniumproben

7.1 Messungen an SNEAK-3B-2 - Auslegung zur Bestimmung von Alpha

Bisher gemessene Doppler-Effekte von Pu-Proben waren meist negativ, während die Rechnung positive Werte ergab /1/. Solche starken Abweichungen, bei denen nicht einmal das Vorzeichen des Effekts richtig berechnet wird, sind nur möglich, weil der Dopplereffekt im Pu239 sich aus einem positiven Spalteffekt und einem negativen Absorptionseffekt zusammensetzt, die beide von gleicher Größenordnung sind. Der Nettoeffekt ist deshalb klein, und es

ist zu erwarten, daß er je nach dem Fluß- und Adjungiertenspektrum positiv oder negativ sein kann. Außerdem ist der Ausdehnungseffekt größer als bei Uranproben, und bei Messungen in einer Umgebung, die U238 enthält, treten Überlappungseffekte auf. Deshalb ist bei Messungen mit Plutoniumproben nicht so gute Übereinstimmung zu erwarten wie bei Uranproben.

Im Spektrum eines dampfgekühlten schnellen Reaktors kommt der Hauptbeitrag zum Dopplereffekt von dem Bereich 200 bis 5000 eV. Dort kennt man das Verhältnis  $\alpha = \bar{\sigma}_g / \bar{\sigma}_f$  für Pu239 nur sehr schlecht.

Fig. 9 zeigt verschiedene Werte für Alpha im Bereich 0.1 bis 10 keV. Die bis vor kurzem allgemein verwendeten Werte, die aus /23/ entnommen sind, liegen um 0.5. Ebenfalls eingezeichnet sind Meßpunkte von Schomberg et al. /32/, die z.T. um einen Faktor 3 höher liegen und starke Streuung zeigen. Der schraffierte Bereich entspricht einer Abschätzung von Alpha aus den relativ gut bekannten  $\bar{\sigma}_f$  und  $\bar{\sigma}_t$ , wie sie von Pitterle et al. und von Barré et al. durchgeführt wurde /29/.

Da der Dopplereffekt über die Resonanzparameter ein Indikator für Alpha ist, liegt die Vermutung nahe, daß die oben genannten Diskrepanzen zwischen Rechnung und Experiment ganz oder teilweise auf falsche Alpha-Werte zurückzuführen sind. Die Messungen mit Pu-Proben an SNEAK-3B-2 wurden deshalb mit dem Ziel ausgelegt, zu untersuchen, ob man bei Verwendung geeigneter Resonanzparameter, d.h. geeigneter Alpha-Werte, Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment erzielen kann. Dabei muß die Analyse der oben genannten Nebeneffekte zeigen, welcher Grad von Übereinstimmung erwartet werden kann.

Die Anordnung SNEAK-3B-2 unterschied sich dadurch von 3A-2, daß sie eine zentrale Plutonium-Zone enthielt. Die Atomzahldichten sind in Tabelle 1 angegeben. In 3B-2 wurde zunächst eine Messung im normalen Core durchgeführt. Sie liefert die Differenz zwischen Spalt- und Absorptionseffekt nach der Gleichung

$$\frac{\Delta k}{k} = (\chi \phi^+) \nu \bar{\sigma}_f \phi - \phi^+ (\bar{\sigma}_f + \bar{\sigma}_g) \phi .$$

Dabei ist  $\phi^+$  die Adjungierte im Doppler-Bereich und  $(\chi \phi^+)$  die Spaltneutronen-Adjungierte. Daran schloß eine zweite Messung an, bei der in der Umgebung der Probe das Pu239 durch eine äquivalente Menge Bor-Absorber ersetzt wurde. Die Zusammensetzung der Bor-Zone ist ebenfalls in Tabelle 1 gegeben. Damit wurde bei den Energien, die zum Dopplereffekt

beitragen, die Adjungierte stark abgesenkt. Dagegen blieben die Flüsse und die Spaltneutronenadjungierte etwa dieselben, abgesehen von der Änderung im Normierungsintegral, da ja der Reaktor wieder kritisch gemacht werden mußte. Damit wurde der negative Absorptionsterm teilweise unterdrückt, und man konnte ein stärker positives Meßergebnis erwarten.

Fig. 10 zeigt die Flüsse und Adjungierten in einigen Dopplergruppen und die Spaltneutronenadjungierte in der Bor-Umgebung. Aus den Kurven geht hervor, daß diese Größen das beschriebene Verhalten zeigen. Dadurch unterscheidet sich die Messung an SNEAK von früheren Messungen in einer Bor-Umgebung am ZPR-3 /1/. Dort betrug die Atomdichte des B10 etwa  $0.01 \times 10^{24}$ , war also groß genug, um den Fluß im Bereich um 1 keV stark abzusenken. Dagegen war die Atomdichte in SNEAK gerade so gewählt, daß im interessanten Bereich die Flüsse erhalten blieben. In SNEAK wurden also beide Messungen mit denselben Neutronen durchgeführt; in der Bor-Umgebung wurde nur durch Absenken von  $\phi^+$  der Absorptionseffekt teilweise unwirksam gemacht.

Die beiden Proben, die in SNEAK-3B-2 gemessen wurden, enthielten  $\text{PuO}_2$ , das mit Aluminiumoxid verdünnt war. Der Gehalt an  $\text{Pu}240$  betrug 8.2%. Durch den Zusatz an Streumaterial wird der Ausdehnungseffekt stark verringert. Er ist bei einer reinen  $\text{PuO}_2$ -Probe doppelt so groß wie der Dopplereffekt, macht aber bei den SNEAK-Proben nur etwa 20% bzw. um 2% aus (Tabelle 6). Die Daten der Proben sind in Tabelle 5 angegeben.

## 7.2 Berechnung der Meßergebnisse und Vergleich mit dem Experiment

Die Meßergebnisse für die beiden Proben und die Rechenergebnisse sind in Fig. 11a und 11b zusammengestellt. Es sind zwei berechnete Kurven eingezeichnet. Die eine wurde mit den Resonanzparametern nach Schmidt ("alte Daten") /23/ erhalten, die andere mit Resonanzparametern, die etwa den von Pitterle und von Barré /29/ aus  $\sigma_t$  und  $\sigma_f$  bestimmten entsprachen ("neue Daten").  $\text{Pu}239$  hat zwei s-Wellen-Resonanzserien, mit  $J=0$  und  $J=1$ . Die Resonanzen der Serie  $J=0$  sind beinahe ausschließlich Spaltresonanzen; sie sind so breit, daß die Dopplerverbreiterung kaum zur Wirkung kommt, und liefern deshalb keinen nennenswerten Beitrag zum Dopplereffekt. Da auch die p-Wellen nur kleine Beiträge liefern, kommt der größte Teil des Effekts

von der Serie  $l=0$ ,  $J=1$ . Deshalb wurden nur die Daten dieser Serie geändert (Fig. 13). Der radiale Ausdehnungseffekt wurde nach der Methode in Abschnitt 5 berechnet, und eine entsprechende Korrektur angebracht. Um die Multiniveau-Effekte abzuschätzen, wurde die in der R-Matrix-Theorie /30/ auftretende "Level-Matrix"  $\mathcal{M}$  nach Potenzen der Diagonalglieder entwickelt, was im wesentlichen einer Entwicklung nach Potenzen von  $\Gamma/D$  gleichkommt. Da der erste Korrekturterm nur einen vernachlässigbar kleinen Beitrag zum Dopplereffekt liefert, wurde angenommen, daß Multiniveau-Effekte bei den vorliegenden Messungen vernachlässigt werden können. Dieses Ergebnis deckt sich mit dem in /31/. Der Überlappungseffekt bringt eine Unsicherheit in das Ergebnis, die wie ein statistischer Fehler zu behandeln ist. Eine Abschätzung wird im folgenden beschrieben.

### 7.3 Abschätzung des Überlappungseffekts

Der in Abschnitt 4.5 beschriebene Überlappungseffekt zwischen den Resonanzen des Pu239 und des U238 soll nun nach einem einfachen Verfahren für die Probenmessung abgeschätzt werden. Kelber und Kier /19/ haben für eine homogene Brennstoffmischung gefunden, daß die Unsicherheit in  $\delta\sigma_f$  bzw.  $\delta\sigma_a$  des Pu239 in einer Energiegruppe typisch von der Ordnung 60% ist. Dies ist mit den Ergebnissen von Hutchins /18/ verträglich; letztere reichen jedoch nicht aus, um daraus eine unabhängige Schätzung durchzuführen.

Für die Probenmessungen sind jedoch wesentlich kleinere Unsicherheiten zu erwarten. Einmal werden nämlich die Resonanzen des U238 in der Umgebung nicht verbreitert, und zum anderen werden etwa 50% der absorbierten Neutronen in der Probe selbst moderiert und daher von den Resonanzen des U238 nicht beeinflusst. Fig. 12 zeigt die Absorption in einer mittleren Resonanz als Funktion des Abstandes von einer U238-Resonanz. Die Doppleränderung der Absorption schwankt wesentlich weniger als im Fall der Fig. 2.

Für eine quantitative Abschätzung wurde ein einfaches Rechenprogramm geschrieben. Das Programm würfelt für eine Energiegruppe einen Satz von Positionen und Resonanzparametern aus den statistischen Verteilungen aus und erzeugt so eine "Leiter" von Pu-Resonanzen. Die Daten der aufgelösten Resonanzen des U238 werden eingegeben. Die Absorption im Pu und ihre

Doppleränderung wird dann nach Formel (35) berechnet, wobei die gegenseitige Abschirmung der Pu-Resonanzen vernachlässigt wird. Aus einer größeren Anzahl von "Leitern" kann man die Varianz dieser Größen abschätzen.

Für den von Kelber und Kier /19/ behandelten Fall erhält man in der Energiegruppe 700 bis 900 eV für das Spalt-Resonanzintegral und seine Doppler-Änderung

$$I_f = 3.87 \pm 0.29 \text{ b}$$
$$\delta I_f = 0.038 \pm 0.017 \text{ b.}$$

Für die Messung mit der größeren Pu-Probe ergibt sich in derselben Energiegruppe

$$I_f = 3.21 \pm 0.21 \text{ b}$$
$$\delta I_f = 0.213 \pm 0.032 \text{ b,}$$

wobei nur die aus der Umgebung einlaufenden Neutronen berücksichtigt werden. Die Unsicherheit durch den Überlappungseffekt reduziert sich also bei der Probenmessung auf etwa 1/3, oder, wenn man die in der Probe moderierten Neutronen einschließt, auf 1/6 des Wertes beim homogenen Brennstoffgemisch. Wenn also Kelber und Kier in ihrem Fall für die Doppler-Reaktivität eine Schwankung von  $\pm 100\%$  angeben, dann sind bei der Probenmessung etwa 15% zu erwarten. Bei dieser Schlußweise handelt es sich natürlich nur um eine Abschätzung, die keine große Genauigkeit beansprucht. Für den hier verfolgten Zweck dürfte sie jedoch ausreichen.

#### 7.4 Diskussion der Ergebnisse - Bestimmung von Alpha

Die Ergebnisse der Messung an Pu-Proben sind in Fig. 11a und 11b dargestellt; Tabelle 6 zeigt die Aufspaltung des Rechenergebnisses in die einzelnen Beiträge für eine Aufheizspanne von  $400^\circ$ . Qualitativ zeigt sich zunächst, daß, wie erwartet, die Messungen in der Bor-Umgebung stärker positive Effekte liefern. Quantitativ stimmen die Rechnungen mit den "neuen Daten" /29/ innerhalb von 20% mit den Meßergebnissen überein; die noch bessere Übereinstimmung für die größere Probe in der Normalumgebung ist wohl zufällig. Dagegen weichen die mit den "alten Daten" /23/ gerechneten Kurven weit von den Messungen ab. Damit bestätigt also das Doppler-Experiment die neuen Daten.

Aus der Tabelle 6 geht hervor, daß in der normalen Umgebung der Spalt- und Absorptionsanteil sich weitgehend kompensieren. Bei der größeren Probe beträgt der Netto-Effekt des Pu239 weniger als 10% des Spaltanteils. Dagegen ist in der Bor-Umgebung der Absorptionsanteil so stark reduziert, daß der Nettoeffekt etwa 30% des Spaltanteils beträgt. Da außerdem, wie aus Tabelle 6 ersichtlich, der Beitrag des Pu240 und die Korrektur für die Ausdehnung klein sind, trägt diese Messung wesentlich zur Schlüssigkeit der obigen Aussage bei.

Für die Analyse der vorliegenden Experimente ist die Abschätzung der Nebeneffekte, insbesondere des Ausdehnungseffekts und des Überlappungseffekts, von großer Bedeutung. Wie die Tabelle zeigt, trägt der Ausdehnungseffekt in einem Fall (größere Probe, normale Umgebung) etwa 20%, in den anderen Fällen wesentlich weniger zum Gesamtergebnis bei; er kann also als Korrektoreffekt angesehen werden. Der Überlappungseffekt bringt nach dem oben Gesagten eine Unsicherheit von etwa 15%. Insgesamt kann man die Unsicherheit für das berechnete Gesamtergebnis auf 20 bis 30% schätzen, und in der Tat sind die Abweichungen von dieser Größenordnung. Damit ist es also gelungen, die Ergebnisse von Messung und Rechnung innerhalb der zu erwartenden Fehlergrenzen in Einklang zu bringen. Es ist daher auch möglich, aus der Messung einen Schluß auf das Alpha des Pu239 bzw. die Resonanzparameter zu ziehen. Der Schluß fällt eindeutig zugunsten der Werte aus, die aus  $\sigma_f$  und  $\sigma_t$  bestimmt wurden, also für das schraffierte Gebiet in Fig. 9. Andererseits ist es bei den geschätzten Fehlergrenzen nicht möglich, über diese Alternativentscheidung hinaus das Alpha noch genauer zu bestimmen.

Es muß noch betont werden, daß ein Schluß von den Meßergebnissen auf den Dopplerkoeffizienten des Pu239 in einem Leistungsreaktor notwendig nur mit einem relativen Fehler möglich ist, der wegen des Überlappungseffekts in der Ordnung von  $\pm 100\%$  liegen wird. Da jedoch im Leistungsreaktor der Effekt des U238 dominiert, ist dieser Fehler akzeptabel, und absolut auch nicht größer als der im U238.

## 8. Zusammenfassung

Auf der Basis eines Ansatzes, der bereits in einer früheren Arbeit des Verfassers enthalten ist /4/, wird in der vorliegenden Arbeit eine geschlossene Theorie der Dopplerexperimente mit geheizten Proben formuliert, die auf überschaubaren Näherungen und physikalischen Annahmen beruht. Die Methode besteht in einer störungstheoretischen Lösung der integralen Transportgleichung für die aus Probe und Umgebung bestehende Zwei-Zonen-Anordnung. Dabei treten neben den Termen, die aus der Theorie der Dopplerkoeffizienten bekannt sind, weitere kompliziertere Terme auf, die die Resonanzwechselwirkung zwischen Probe und Umgebung beschreiben. Ihre physikalische Bedeutung wird ausführlich diskutiert.

Die Auswertung der allgemeinen Formeln wurde im Hinblick auf praktische Anwendungen für den Fall einer Probe mit zwei Brennstoffisotopen durchgeführt. Die sich ergebenden Gleichungen können auf der IBM-7074 mit vertretbarem Aufwand gelöst werden, so daß eine routinemäßige Auswertung der Probenexperimente möglich ist.

Bei der Interpretation der bisher von Argonne und Atomic International veröffentlichten Messungen /1 bis 3/ begnügte man sich meist damit, eine Rechnung mit einem äquivalenten Potentialquerschnitt der Probe durchzuführen. Diese Methode ist theoretisch unbefriedigend, da sie die physikalischen Vorgänge beim Aufheizen der Probe nicht erfaßt. In der Praxis führt sie zu Fehlern, die bis zu 20% betragen können. Durch die in dieser Arbeit angewandten Methoden ist es somit möglich, Fehler durch unzureichende theoretische Behandlung auszuschalten, und Messungen mit Dopplerproben innerhalb der Genauigkeit, mit der Spektren und Wirkungsquerschnitte bekannt sind, zu interpretieren.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde außerdem die Interpretation und teilweise die Planung der Dopplerproben-Messungen an SNEAK-3 durchgeführt. Dabei waren die Messungen mit Pu-Proben von besonderem Interesse. Die mit  $\text{Al}_2\text{O}_3$  verdünnten Proben haben einen kleinen Reaktivitätseffekt der Ausdehnung. Im Hinblick auf eine Bestimmung von Alpha des Pu239 wurden die Messungen im normalen Core und in einer Bor-Umgebung durchgeführt. Mit Hilfe einer Analyse der Nebeneffekte, insbesondere des Ausdehnungseffekts und des Überlappungseffekts zwischen den Resonanzen des Pu239 und des U238, konnte gezeigt werden, daß diese doppelten Messungen

einen Schluß auf das Alpha des Pu239 im Bereich 0.1 bis 10 keV zulassen. Die Meßergebnisse bestätigen die Alpha-Werte von Pitterle et al. /29/ und zeigen, daß die Werte von Schmidt /23/ zu niedrig liegen. Damit gelang es zu zeigen, daß Dopplermessungen mit Pu-Proben in Spektren schneller Brutreaktoren bei geeigneter Auslegung der Experimente und bei konsequenter Anwendung der angegebenen theoretischen Methoden schlüssig interpretiert werden können.

Der Verfasser dankt Herrn Prof. Dr. W. Häfele, der das Thema vorschlug, für viele hilfreiche Diskussionen und für die stete Förderung dieser Arbeit.

Der Verfasser dankt außerdem Herrn Dr. P. Engelmann für wertvolle Anregungen und Herrn A. Wickenhäuser für die Durchführung der Programmierarbeiten.

A n h a n g 1

Übersicht über die Theorie der Dopplerkoeffizienten schneller  
Reaktoren

In der vorliegenden Arbeit wird häufig auf die bekannten Methoden zur Berechnung von Dopplerkoeffizienten Bezug genommen. Deshalb soll hier ein knapp gehaltener Überblick über diese Methoden gegeben werden. Ausführliche Darstellungen sind in den Arbeiten /5 bis 7/ zu finden.

Die Berechnung des Dopplerkoeffizienten im Rahmen der üblichen Multigruppentheorie stützt sich meist auf den Begriff des effektiven, über das Flußspektrum einer Energiegruppe gemittelten Wirkungsquerschnitts. Er ist für die Reaktion x definiert durch

$$\tilde{\Sigma}_x = \frac{\int_{E_i}^{E_{i-1}} \Sigma_x(E) \phi(E) dE}{\int_{E_i}^{E_{i-1}} \phi(E) dE} \quad (A-1)$$

Der Querschnitt  $\Sigma_x(E)$  für eine Resonanzreaktion setzt sich aus Beiträgen der einzelnen Isotope zusammen

$$\Sigma_x(E) = \sum_m N_m \sigma_{xm}(E)$$

und diese sind wieder Summen über die Beiträge einzelner Resonanzen

$$\sigma_x(E) = \sum_k \sigma_{xk}(E) \quad (A-2)$$

wobei der dopplerverbreiterte Querschnitt der k<sup>ten</sup> Resonanz gegeben ist durch

$$\sigma_{xk}(E) = \sigma_{oxk} \gamma_k(E).$$

Der Querschnitt  $\sigma_{oxk}$  in der Spitze der unverbreiterten Resonanz ist

$$\sigma_{oxk} = 4\pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma_x}{\Gamma^2} .$$

Insbesondere ist der Compoundquerschnitt

$$\sigma_{ok} = 4\pi\lambda^2 g \frac{\Gamma_n}{\Gamma} .$$

Die Funktion  $\gamma$  ist definiert durch

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \quad (A-3)$$

wobei

$$x = \frac{E-E_k}{\Gamma_k/2}, \quad t = \frac{\Delta^2}{\Gamma_k^2}$$

und die Dopplerbreite ist gegeben durch

$$\Delta^2 = 4EKT/A .$$

Der totale Querschnitt eines Isotops setzt sich aus dem energieunabhängigen Potentialstreuquerschnitt  $\sigma_p$ , dem symmetrischen Resonanzquerschnitt und dem Interferenzquerschnitt  $\sigma_{int}$  zusammen

$$\sigma_t(E) = \sigma_p + \sum_k \sigma_{ok} \gamma_k(E) + \sum_k \sigma_{int k}(E) \quad (A-4)$$

wobei  $\sigma_{int k}$  gegeben ist durch

$$\sigma_{int k}(E) = 2\sigma_{ok} \left[ \sin\delta_1 \cos\delta_1 \phi_k(E) - \sin^2\delta_1 \gamma_k(E) \right]$$

mit der antisymmetrischen Funktion

$$\phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ydy}{1+y^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} . \quad (A-5)$$

In der als "Narrow Resonance Approximation" /8/ bekannten Näherung wird

$$\phi(E) \sim 1/\Sigma_t(E) \quad (A-6)$$

so daß man für den effektiven Wirkungsquerschnitt (A-1) erhält

$$\tilde{\Sigma}_x = \frac{\langle \frac{\Sigma_x}{\Sigma_t} \rangle}{\langle 1/\Sigma_t \rangle} \quad (A-7)$$

wobei die Klammern die Mittelung über eine Energiegruppe bezeichnen.

Wegen der Dopplerverbreiterung und Selbstabschirmung der Resonanzen sind die effektiven Wirkungsquerschnitte Funktionen der Temperatur. Damit ändert sich aber auch der Multiplikationsfaktor mit der Temperatur, man hat einen Dopplerkoeffizienten der Reaktivität. Im schnellen Reaktor liefern jedoch nur die Spalt- und Einfangquerschnitte der Brennstoffisotope im Resonanzbereich einen merklichen Beitrag zum Dopplerkoeffizienten. Im folgenden werden also nur die genannten Reaktionsarten berücksichtigt.

Man kann nun den Dopplerkoeffizienten nach der Störungstheorie aus der Änderung der effektiven Wirkungsquerschnitte (A-7) berechnen. Die auf den Multigruppen-Diffusionsgleichungen aufgebaute Störungstheorie liefert die Formel

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{1}{D} \sum_i \int dV \left[ \left( \sum_j \chi_j \phi_j^+ \right) \nu \delta \tilde{\Sigma}_{fi} \phi_i - \left( \delta \tilde{\Sigma}_{fi} + \delta \tilde{\Sigma}_{\gamma i} \right) \phi_i^+ \phi_i \right], \quad (A-8)$$

wobei D das Störungsintegral ist.

Man kann jedoch anstatt von den effektiven Wirkungsquerschnitten (A-7) auch von den Reaktionsratenverhältnissen

$$\frac{R_x}{R_{ges}} = \left\langle \frac{\Sigma_x}{\Sigma_t} \right\rangle \quad (A-9)$$

ausgehen.  $R_x$  ist dabei die Reaktionsrate vom Typ x,  $R_{ges}$  die Stoßrate in einer Energiegruppe. Auch die Verhältnisse (A-9) sind natürlich Funktionen der Temperatur, und man kann aus ihnen den Dopplerkoeffizienten berechnen. Die Störungstheorie ergibt

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{1}{D} \sum_i \int dV \frac{\phi_i}{\langle 1/\Sigma_t \rangle_i} \left[ \left( \sum_j \chi_j \phi_j^+ \right) \nu \delta \left\langle \frac{\Sigma_f}{\Sigma_t} \right\rangle_i - \phi_i^+ \left( \delta \left\langle \frac{\Sigma_f}{\Sigma_t} \right\rangle_i + \delta \left\langle \frac{\Sigma_s}{\Sigma_t} \right\rangle_i \right) + \left( \phi_{i+1}^+ - \phi_i^+ \right) \delta \left\langle \frac{\Sigma_s^{i \rightarrow i+1}}{\Sigma_t} \right\rangle_i \right]. \quad (A-10)$$

Diese Gleichung wurde zum erstenmal von Froelich /5/ abgeleitet. Er bezeichnet die Methode als "Reaktionsratenmethode". Ihre Äquivalenz mit der "Methode der effektiven Wirkungsquerschnitte" wurde von Froelich und Ott /14/ und von Hummel und Hwang /15/ gezeigt. Der Moderationsterm in

(A-10) ist größer als der entsprechende in (A-8), der hier gleich weggelassen wurde. Man kann ihn jedoch auch in (A-10) meist vernachlässigen; vergl. dazu Hummel und Hwang /15/. Für die vorliegende Arbeit ist die Reaktionsratenmethode besonders wichtig; sie wird auf heterogene Probleme verallgemeinert.

Die Resonanzen der Brennstoffisotope sind nur im unteren Energiebereich experimentell aufgelöst. Für ein Gemisch von Pu239 und U238 kennt man die Resonanzen des U238 bis 4 keV /24/, die des Pu239 nur bis etwa 300 eV /23/. Darüber müssen die Mittelwerte (A-7) bzw. (A-9) nach der statistischen Methode berechnet werden.

Diese Methode geht davon aus, daß die Resonanzen eines Isotops in Serien mit denselben Drehimpuls-Quantenzahlen eingeteilt werden. Die Resonanzparameter von Resonanzen derselben Serie genügen einer  $\chi^2$ -Verteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden. Für  $\Gamma_n$  ist  $\nu=1$ , für  $\Gamma_y$  hat man  $\nu \approx \infty$ , für  $\Gamma_f$  liegt  $\nu$  zwischen 1 und 3. Die Abstände der Resonanzen genügen einer Wigner-Verteilung.

Im Rahmen der statistischen Methode ist es nun möglich, die Beiträge der Resonanzen zweier Serien  $s_1$  und  $s_2$  durch die folgende Reihenentwicklung /7/ zu separieren

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Sigma_t} &= \frac{1}{\Sigma_p + \Sigma_{c1} + \Sigma_{c2}} = \frac{\Sigma_p}{(\Sigma_p + \Sigma_{c1})(\Sigma_p + \Sigma_{c2}) - \Sigma_{c1}\Sigma_{c2}} \\ &= \frac{\Sigma_p}{(\Sigma_p + \Sigma_{c1})(\Sigma_p + \Sigma_{c2})} \left[ 1 + \frac{\Sigma_{c1}\Sigma_{c2}}{(\Sigma_p + \Sigma_{c1})(\Sigma_p + \Sigma_{c2})} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (A-11)$$

In praktisch wichtigen Fällen genügt es, für die Berechnung von Dopplerkoeffizienten den Hauptterm zu berücksichtigen. Man hat dann in dieser Näherung

$$\left\langle \frac{\Sigma_{x1}}{\Sigma_t} \right\rangle = \left\langle \frac{\Sigma_p \Sigma_{x1}}{(\Sigma_p + \Sigma_{c1})(\Sigma_p + \Sigma_{c2})} \right\rangle. \quad (A-12)$$

Im Rahmen der statistischen Theorie wird nun angenommen, daß die Mittelung über die Resonanzen für jede Serie getrennt durchgeführt werden kann. Dann wird

$$\left\langle \frac{\Sigma_{x1}}{\Sigma_t} \right\rangle = \left\langle \frac{\Sigma_{x1}}{\Sigma_p + \Sigma_{c1}} \right\rangle \left[ 1 - \left\langle \frac{\Sigma_{c2}}{\Sigma_p + \Sigma_{c2}} \right\rangle \right], \quad (A-13)$$

Berechnet man die effektiven Wirkungsquerschnitte in derselben Näherung, so erhält man

$$\tilde{\Sigma}_{x1} = \sum_p \frac{\left\langle \frac{\Sigma_{x1}}{\Sigma_p + \Sigma_{c1}} \right\rangle}{1 - \left\langle \frac{\Sigma_{c1}}{\Sigma_p + \Sigma_{c1}} \right\rangle} \quad (A-14)$$

In der angegebenen Näherung ist also der effektive Wirkungsquerschnitt einer Serie von den anderen Serien unabhängig. Dasselbe gilt auch in guter Näherung für die Temperaturänderung der effektiven Wirkungsquerschnitte. Bei Berechnung der Reaktionsratenverhältnisse muß jedoch der Einfluß der übrigen Serien durch einen Korrekturterm berücksichtigt werden.

Man hat also für eine Serie Ausdrücke der Form  $\left\langle \frac{\Sigma_x}{\Sigma_p + \Sigma_c} \right\rangle$  zu berechnen. Nach (A-2) wird dies (der Serienindex wird nun weggelassen)

$$\left\langle \frac{\Sigma_x}{\Sigma_p + \Sigma_c} \right\rangle = \frac{1}{\langle D \rangle} \sum_k \left\langle \left( \frac{\sigma_{xk}(E) dE}{\sigma_p + \sigma_{ck}(E) + \sum_{k' \neq k} \sigma_{ck'}(E)} \right) \right\rangle \quad (A-15)$$

Die Auswertung von (A-15) erfolgt wieder nach einer Reihenentwicklung, und zwar nach dem Parameter

$$\frac{\sum_{k' \neq k} \sigma_{ck'}(E)}{\sigma_p + \sigma_{ck}(E)} \quad .$$

Die Entwicklung ist nach /7/ semikonvergent, aber die Glieder nehmen am Anfang so schnell ab, daß man mit dem ersten Überlappungsglied abbrechen kann; damit wird

$$\left\langle \frac{\sigma_x}{\sigma_p + \sigma_c} \right\rangle = \frac{1}{\langle D \rangle} \left\langle \left( \frac{\sigma_{xk} dE}{\sigma_p + \sigma_{ck}} \right) \right\rangle - \frac{1}{\langle D \rangle} \left\langle \left( \frac{\sigma_{xk} \sum_{k' \neq k} \sigma_{ck'} dE}{(\sigma_p + \sigma_{ck})^2} \right) \right\rangle \quad .$$

Hieraus erhält man durch einige Umformungen

$$\left\langle \frac{\sigma_x}{\sigma_p + \sigma_c} \right\rangle = \frac{1}{\langle D \rangle} \left[ \langle \Gamma_x J \rangle - \frac{\langle D \rangle^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\langle \sigma_x \rangle \langle \sigma_c \rangle}{\sigma_p^2 \Delta} \varepsilon(4/D) \right] \quad (A-16)$$

Dabei enthält der erste Term in der Klammer die Selbstabschirmung jeder Resonanz; sie wird durch die Funktion J ausgedrückt, die wie folgt definiert ist

$$J(\beta, t) = \int_0^{\infty} \frac{\gamma(x, t) dx}{\beta + \gamma(x, t)} \quad (\text{A-17})$$

mit  $\beta = \sigma_p / \sigma_{ok}$ . Der zweite Term berücksichtigt näherungsweise die gegenseitige Abschirmung der Resonanzen derselben Serie. Die Funktion  $\varepsilon$  ist definiert durch

$$\varepsilon(\Delta/D) = 2 \int_0^{\infty} dx \Omega(x) e^{-\frac{D^2 x^2}{2\Delta^2}} \quad (\text{A-18})$$

Dabei ist  $\Omega(x)$  die Wahrscheinlichkeit, im Abstand  $D = x \cdot \bar{D}$  von einer gegebenen Resonanz wieder eine Resonanz (nicht notwendig die benachbarte) zu finden. Die Funktion  $\Omega(x)$  wird in der Literatur berechnet und diskutiert.

In dem speziellen Fall, daß die Resonanzen einer Serie nur wenig den konstanten Untergrund  $\sigma_p$  herausragen, kann man (A-16) noch weiter auswerten. Dann ist nämlich  $\gamma/\beta \ll 1$ , und man kann den Integranden in (A-16) entwickeln. Damit wird

$$\left\langle \frac{\sigma_x^{(s)}}{\sigma_p + \sigma_c^{(s)}} \right\rangle = \frac{\langle \sigma_t \rangle \langle \sigma_x \rangle^{(s)}}{\sigma_p^2} - \frac{\cos 2\delta_1 \langle D \rangle^{(s)} \langle \sigma_t \rangle \langle \sigma_c \rangle^{(s)} \langle \sigma_x \rangle^{(s)}}{\sqrt{2\pi} \Delta \sigma_p^3} \left[ E_x^{(s)} + \frac{\sigma_p}{\langle \sigma_t \rangle} \varepsilon\left(\frac{\Delta}{D}\right) \right] \quad (\text{A-19})$$

wobei  $E_x$  durch

$$E_x^{(s)} = \frac{\left\langle \frac{\Gamma_x \Gamma_n^2}{\Gamma} \right\rangle^{(s)}}{\left\langle \Gamma_n \right\rangle^{(s)} \left\langle \frac{\Gamma_x \Gamma_n}{\Gamma} \right\rangle^{(s)}} \quad (\text{A-20})$$

definiert ist.

Die Formel (A-19) gilt bei hohen Neutronenenergien, und insbesondere auch für alle Beiträge von Resonanzen mit  $l=1$ . Sie ist sehr einfach anzuwenden, weil die Temperaturabhängigkeit nur noch in dem Faktor  $\Delta$  im Nenner und in der Funktion  $\varepsilon$  steckt. Bei der Anwendung von (A-16) steckt ein großer Teil der numerischen Arbeit in der Berechnung der Mittelwerte  $\langle \Gamma_x \rangle$  über die statistische Verteilung der Resonanzparameter, die für jede Energie, Temperatur und Kombination von Resonanzparametern gesondert durchgeführt werden muß.

Nach (A-13) und (A-14) kann man zwar bei Berechnung effektiver Wirkungsquerschnitte den gegenseitigen Einfluß der Resonanzserien vernachlässigen, nicht aber bei Berechnung der Reaktionsratenverhältnisse. Man kann daher die letzteren in bestimmten Fällen nach einer andersartigen

Methode erhalten, die zuerst in ähnlicher Form von Froelich /5/ angegeben worden ist. Dabei ist jedoch die Voraussetzung unumgänglich, daß von allen zum Dopplerkoeffizienten beitragenden Serien nur eine einzige "starke" Resonanzen besitzt, die wesentlich über den Untergrund hinausragen. Für alle anderen Serien wird die Annahme gemacht

$$\left| \frac{\sum_{s \neq 1} [\sigma_c^{(s)}(E) - \langle \sigma_c \rangle^{(s)}]}{\sigma_p + \sum_{s \neq 1} \langle \sigma_c \rangle^{(s)}} \right| \ll 1 \quad . \quad (A-21)$$

Eine Entwicklung nach dem Parameter (A-21) ergibt dann

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\sigma_x}{\sigma_p + \sigma_c} \right\rangle &= \left\langle \frac{\sigma_x^{(1)}}{\sigma_p^* + \sigma_c^{(1)}} \right\rangle + \frac{1}{\sigma_p^*} \left[ 1 - \left\langle \frac{\sigma_c^{(1)}}{\sigma_p^* + \sigma_c^{(1)}} \right\rangle \right] \sum_{s \neq 1} \langle \sigma_x \rangle^{(s)} \\ &- \left\langle \frac{1}{(\sigma_p^* + \sigma_c^{(1)})^2} \right\rangle \sum_{s \neq 1} \left[ \langle \sigma_x \sigma_c \rangle^{(s)} - \langle \sigma_x \rangle^{(s)} \langle \sigma_c \rangle^{(s)} \right] \quad . \quad (A-22) \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\sigma_p^* = \sigma_p + \sum_{s \neq 1} \langle \sigma_c \rangle^{(s)} .$$

Die auf die Serie 1 bezogenen Größen können nach (A-16) berechnet werden, wenn man die Beziehung

$$\left\langle \frac{1}{(\sigma_p^* + \sigma_c^{(1)})^2} \right\rangle = \frac{-d}{d\sigma_p^*} \left\langle \frac{1}{\sigma_p^* + \sigma_c^{(1)}} \right\rangle = + \frac{d}{d\sigma_p^*} \left\langle \frac{\sigma_c^{(1)}}{\sigma_p^* + \sigma_c^{(1)}} \right\rangle$$

beachtet. Für die Mittelwerte  $\langle \sigma_x \sigma_c \rangle^{(s)}$  erhält man nach einigen Umformungen

$$\langle \sigma_x \sigma_c \rangle^{(s)} = \frac{\langle D \rangle^{(s)} \langle \sigma_x \rangle^{(s)} \langle \sigma_c \rangle^{(s)}}{\sqrt{2\pi} \Delta} \left[ E_x^{(s)} + \xi(\Delta/D) \right] \quad . \quad (A-23)$$

Damit sind die Größen, die für die Berechnung des Dopplerkoeffizienten gebraucht werden, auf berechenbare Ausdrücke zurückgeführt. Die auftretenden Funktionen sind in der Literatur berechnet und tabelliert.

A n h a n g 2

Berechnung der Größen  $I_x$  und  $H_x$

Die Größen  $I_x$  und  $H_x$ , die für ein einzelnes Isotop durch die in (32) enthaltenen Gleichungen

$$I_{xm} = \left\langle \frac{\sigma_{c3} \sigma_{x1}}{(\sigma_{p3} + \sigma_{c3})(\bar{\sigma}_{pm} + \sigma_{c1})} \right\rangle \quad (B-1)$$

$$H_{xm} = \left\langle \frac{\sigma_{p3} \sigma_{c3} \sigma_{x1}}{(\sigma_{p3} + \sigma_{c3})^2 (\bar{\sigma}_{pm} + \sigma_{c1})} \right\rangle \quad (B-2)$$

definiert sind, sollen nun berechnet werden. Dabei wird angenommen, daß das Isotop eine starke und mehrere schwache Serien enthält.

Man hat zunächst

$$I_{xm} = \sum_s \left\langle \frac{\sigma_{c3s} \sigma_{x1s}}{(\sigma_{p3} + \sigma_{c3})(\bar{\sigma}_{pm} + \sigma_{c1})} \right\rangle + \sum_{s' \neq s} \left\langle \frac{\sigma_{c3s} \sigma_{x1s'}}{(\sigma_{p3} + \sigma_{c3})(\bar{\sigma}_{pm} + \sigma_{c1})} \right\rangle. \quad (B-3)$$

Die erste Summe ergibt nach der in Anhang 1 beschriebenen Methode

$$\left\langle \frac{\sigma_{c3,s=1} \sigma_{x1,s=1}}{\sigma_{t3}^* \sigma_{tm}^*} \right\rangle + \sum_{s \neq 1} \langle \sigma_{c3} \sigma_{x1} \rangle_s \left\langle \frac{1}{\sigma_{t3}^* \sigma_{tm}^*} \right\rangle \quad (B-4)$$

mit  $\sigma_{t3}^* = \sigma_{p3}^* + \sigma_{c3,s=1}$ ,  $\sigma_{tm}^* = \sigma_{pm}^* + \sigma_{c1,s=1}$ .

In der zweiten Summe werden nun die Nenner wie folgt entwickelt

$$\frac{1}{\sigma_p + \sigma_c} = \frac{1}{\sigma_p^* + \sigma_{c,s=1}} \left( 1 - \frac{\sum_{s \neq 1} (\sigma_{cs} - \langle \sigma_c \rangle_s)}{\sigma_p^* + \sigma_{c,s=1}} \right).$$

Eine numerische Untersuchung zeigt, daß man sich stets mit der Berücksichtigung des ersten Terms begnügen kann. Dies gilt auch für die Berechnung der  $\int I$  und  $\int H$ . Damit vereinfacht sich die obige Entwicklung zu der Näherung

$$\frac{1}{\sigma_p + \sigma_c} = \frac{1}{\sigma_p^* + \sigma_{c,s=1}} = \frac{1}{\sigma_t^*}. \quad (B-5)$$

Für die zweite Summe in (B-3) erhält man dann

$$\begin{aligned} \sum_{s' \neq s} &= \left\langle \frac{\sigma_{c3, s=1}}{\sigma_{t3}^* \sigma_{tm}^*} \right\rangle \sum_{s' \neq 1} \langle \sigma_x \rangle_{s'} + \frac{\sigma_{x1, s=1}}{\sigma_{t3}^* \sigma_{tm}^*} \sum_{s' \neq 1} \langle \sigma_c \rangle_{s'} \\ &+ \left\langle \frac{1}{\sigma_{t3}^* \sigma_{tm}^*} \right\rangle \sum_{s \neq s' \neq 1} \langle \sigma_c \rangle_s \langle \sigma_x \rangle_{s'}. \end{aligned} \quad (B-6)$$

Die in (B-6) vorkommenden Terme, die sich auf die Serie  $s=1$  beziehen, können offenbar alle durch den Grundterm

$$I_{m, s=1} = \left\langle \frac{\sigma_{c3, s=1} \sigma_{x1, s=1}}{\sigma_{t3}^* \sigma_{tm}^*} \right\rangle$$

ausgedrückt werden. Dieser Grundterm muß durch numerische Integration berechnet werden. Die noch unbekanntenen Größen in (B-4) und (B-6), nämlich die Mittelwerte  $\langle \sigma_{c3} \sigma_{x1} \rangle_s$ , werden später behandelt.

Die Berechnung von  $H_x$  erfolgt ganz analog. Man hat

$$H_{xm} = \sum_s \left\langle \frac{\sigma_{p3} \sigma_{c3s} \sigma_{x1s}}{(\sigma_{p3} + \sigma_{c3})^2 (\bar{\sigma}_{pm} + \sigma_{c1})} \right\rangle + \sum_{s' \neq s} \left\langle \frac{\sigma_{p3} \sigma_{c3s} \sigma_{x1s'}}{(\sigma_{p3} + \sigma_{c3})^2 (\bar{\sigma}_{pm} + \sigma_{c1})} \right\rangle. \quad (B-7)$$

Die erste Summe wird

$$\sum_s = \left\langle \frac{\sigma_{p3} \sigma_{c3, s=1} \sigma_{x1, s=1}}{\sigma_{t3}^{*2} \sigma_{tm}^*} \right\rangle + \left\langle \frac{\sigma_{p3}}{\sigma_{t3}^{*2} \sigma_{tm}^*} \right\rangle \sum_{s' \neq 1} \langle \sigma_{c3} \sigma_{x1} \rangle_{s'}. \quad (B-8)$$

In der zweiten Summe wird wieder die Näherung (B-5) eingeführt, und damit wird

$$\begin{aligned} \sum_{s \neq s'} &= \left\langle \frac{\sigma_{p3} \sigma_{c3, s=1}}{\sigma_{t3}^{*2} \sigma_{tm}^*} \right\rangle \sum_{s' \neq 1} \langle \sigma_x \rangle_{s'} + \left\langle \frac{\sigma_{p3} \sigma_{x1, s=1}}{\sigma_{t3}^{*2} \sigma_{tm}^*} \right\rangle \sum_{s' \neq 1} \langle \sigma_c \rangle_{s'} \\ &+ \left\langle \frac{\sigma_{p3}}{\sigma_{t3}^{*2} \sigma_{tm}^*} \right\rangle \sum_{s' \neq s \neq 1} \langle \sigma_c \rangle_s \langle \sigma_x \rangle_{s'}. \end{aligned} \quad (B-9)$$

Nun sind noch die Ausdrücke  $\langle \sigma_{c3} \sigma_{x1} \rangle_s$  unbekannt. Sie enthalten  $\sigma_x$  bei der Proben temperatur  $T'$  und  $\sigma_c$  bei der Umgebungstemperatur  $T''$ . Die zugehörigen  $\Delta$ -Werte seien  $\Delta'$  und  $\Delta''$ . Dann wird

$$\langle \sigma_{c3} \sigma_{x1} \rangle_s = \langle \sigma_{ck}(\Delta'') \sigma_{xk}(\Delta') \rangle + \left\langle \sum_{k' \neq k} \sigma_{ck}(\Delta'') \sigma_{xk'}(\Delta') \right\rangle. \quad (B-10)$$

Den ersten Term kann man schreiben

$$\langle \sigma_{ck}(\Delta'') \sigma_{xk}(\Delta') \rangle = \frac{1}{\langle D \rangle} \langle \sigma_{ok} \sigma_{ok} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \psi_k(\Delta') \psi_k(\Delta'') \rangle.$$

Mit der asymptotischen Formel für die  $\psi$ -Funktion

$$\psi \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma}{\Delta} e^{-\frac{(E-E_k)^2}{\Delta^2}}$$

die für kleine  $\Gamma/\Delta$  gilt, und für Brennstoffresonanzen eine gute Näherung ist, kann man die Integration ausführen und erhält

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE \psi(\Delta') \psi(\Delta'') = \frac{\pi^{3/2}}{4} \frac{\Gamma^2}{\Delta''}$$

mit

$$\Delta'''^2 = \frac{1}{2} (\Delta'^2 + \Delta''^2).$$

Damit wird der erste Term in (B-10)

$$\langle \sigma_{ck}(\Delta'') \sigma_{xk}(\Delta') \rangle_s = \frac{\langle \sigma_x \rangle_s \langle \sigma_c \rangle_s}{\sqrt{2\pi}} \frac{\langle D \rangle_s}{\Delta''} E_x^{(s)}.$$

Für den zweiten Term erhält man

$$\langle \sigma_{ck}(\Delta'') \sigma_{xk'}(\Delta') \rangle_s = \frac{1}{\langle D \rangle_s} \left\langle \sum_{k' \neq k} \sigma_{ok} \sigma_{ok'} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \psi_k(\Delta'') \psi_{k'}(\Delta') \right\rangle_s.$$

Die Einführung der asymptotischen Formel für  $\psi$  gibt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE \psi(\Delta') \psi(\Delta'') = \frac{\pi^{3/2}}{4\sqrt{2}} \frac{\Gamma_k \Gamma_{k'}}{\Delta''} e^{-\frac{\delta^2}{2\Delta''^2}}$$

wobei  $\delta = E_k - E_{k'}$ , ist.

Damit wird der zweite Term in (B-10)

$$\langle \sigma_{ck}(\Delta'') \sigma_{xk'}(\Delta') \rangle_s = \frac{\langle \sigma_x \rangle_s \langle \sigma_c \rangle_s}{\sqrt{2\pi}} \frac{\langle D \rangle_s}{\Delta''} \mathcal{E}(\Delta''/D)$$

und man hat

$$\langle \sigma_{c3} \sigma_{x1} \rangle_s = \frac{\langle \sigma_x \rangle_s \langle \sigma_c \rangle_s}{\sqrt{2\pi}} \frac{\langle D \rangle_s}{\Delta''} \left[ E_x^{(s)} + \mathcal{E}(\Delta''/D) \right]. \quad (B-11)$$

Damit ist der gesuchte Mittelwert durch bekannte Funktionen ausgedrückt.

Im Grenzfall hoher Energien wird die Berechnung von  $I_x$  und  $H_x$  besonders einfach; man kann dann die Nenner in (B-1) und (B-2) durch ihre Mittelwerte ersetzen und erhält

$$I_{xm} = \sum_s \frac{\langle \sigma_{c3} \sigma_{x1} \rangle_s}{\langle \sigma_{t3} \rangle \langle \sigma_{tm} \rangle} + \sum_{s' \neq s} \frac{\langle \sigma_c \rangle_s \langle \sigma_x \rangle_{s'}}{\langle \sigma_{t3} \rangle \langle \sigma_{tm} \rangle} \quad (B-12)$$

und

$$H_{xm} = \sum_s \frac{\bar{\sigma}_{p3} \langle \bar{\sigma}_c \bar{\sigma}_{x1} \rangle_s}{\langle \bar{\sigma}_{t3} \rangle^2 \langle \bar{\sigma}_{tm} \rangle} + \sum_{s' \neq s} \frac{\bar{\sigma}_{p3} \langle \bar{\sigma}_c \rangle_s \langle \bar{\sigma}_x \rangle_{s'}}{\langle \bar{\sigma}_{t3} \rangle^2 \langle \bar{\sigma}_{tm} \rangle} \quad (\text{B-13})$$

Literaturverzeichnis

- /1/ G.J. Fischer et al., Nucl. Sci. and Eng. 25, 37 (1966)
- /2/ C.E. Till, R.A. Lewis und R.N. Hwang, ANL-7320, Seite 319 (1966)
- /3/ T.H. Springer, S.G. Carpenter und R.J. Tuttle, Nucl. Sci. and Eng. 17, 194 (1963) und 20, 272 (1964)
- /4/ E.A. Fischer, "Interpretation of Doppler Coefficient Measurements in Fast Critical Assemblies", ANL-7320, Seite 350 und KFK-473 (1966)
- /5/ R. Froelich, "Theorie der Dopplerkoeffizienten schneller Reaktoren unter Berücksichtigung der gegenseitigen Abschirmung der Resonanzen", KFK-367 (1965)
- /6/ R.N. Hwang, Nucl. Sci. and Eng. 21, 523 (1965)
- /7/ R.B. Nicholson und E.A. Fischer, "The Doppler Effect in Fast Reactors", Advances of Nucl. Science and Technology, Vol. IV, Academic Press 1968
- /8/ L. Dresner, "Resonance Absorption in Nuclear Reactors", Pergamon Press 1960
- /9/ F. Storrer, A. Khairallah and J. Ozeroff, ANL-6792, Seite 823 (1963)
- /10/ P. Kier, "A Method of Computing Resonance Integrals in Multiregion Reactor Cells", Int. Conf. on Research Reactor Utilization and Reactor Mathematics, Mexico City 1967
- /11/ D. Wintzer, "Zur Bestimmung von Heterogenitätseffekten in periodischen Zellstrukturen thermischer und schneller Reaktoren", KFK-743, im Druck
- /12/ E. P. Wigner and A.M. Weinberg, "The Physical Theory of Neutron Chain Reactors", The University of Chicago Press 1958
- /13/ R.N. Hwang, ANL-7120, Seite 449 (1965)
- /14/ R. Froelich und K. Ott, Nucl. Sci. and Eng. 22, 487 (1965)
- /15/ H.H. Hummel und R.N. Hwang, Nucl. Sci. and Eng. 23, 98 (1965)
- /16/ D.C. Leslie, G.J. Hill und A. Jonsson, Nucl. Sci. and Eng. 22, 178 (1965)
- /17/ V.J. Bell, P.A.C. Buckler und I.C. Pull, "The Calculation of Generalized Doppler Functions", AEEW-R266 (1963)
- /18/ B.A. Hutchins, "The Effects of Resonance Overlap on the Doppler Coefficient in a Fast Ceramic Reactor", GEAP-4630 (1964)
- /19/ C.N. Kelber und P.H. Kier, Nucl. Sci. and Eng. 24, 389 (1966) und 26, 67 (1968)
- /20/ H. Küsters und M. Metzenroth, ANL-7120, Seite 423 (1965)

- /21/ E.A. Fischer, unveröffentlichte Notiz
- /22/ R. Schröder et al., "Physics Investigations of Uranium Fueled Fast Steam-Cooled Reactors in SNEAK-Assemblies 3A-0, 3A-2, and 3A-3", KFK-847 (im Druck)
- /23/ J.J. Schmidt, "Neutron Cross Sections for Fast Reactor Materials", KFK-120 (1966)
- /24/ J.B. Garg et al., Phys. Rev. 134, B985 (1964)
- ~~/25/ H. Bachmann et al., "The Group Cross Section Set KFK-SNEAK - Preparation and Results", KFK-628 (1967)~~
- /26/ W.E. Lamb, Phys. Rev. 55, 190 (1939)
- /27/ G. Dolling et al., Can. Journal of Phys. 43, 1397 (1965)
- /28/ R.E. Schenter, "Effects of UO<sub>2</sub> Crystalline Binding on Doppler Coefficient Calculations for <sup>2</sup>Fast Reactor Systems", BNWL-442 (1967)
- /29/ T.A. Pitterle, E.M. Page, M. Yamamoto, Second Conf. on Neutron Cross Section Technology, Washington, March 1968;  
J.Y. Barré et al., "Examen critique des valeurs de  $\alpha = \sigma_c / \sigma_f$  pour le Pu239", CEA-N-989, Sept. 1968
- /30/ A.M. Lane und R.G. Thomas, Rev. Mod. Phys. 30, 257 (1958)
- /31/ J. Codd et al., Proceedings of the United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Genf 1964, Vol. 2, P/172
- /32/ M.G. Schomberg et al., Proceedings of a Symposium on Fast Reactor Physics and Related Safety Problems held by the IAEA in Karlsruhe, 30 Oct. - 3 Nov. 1967, Vol. I, p. 289
- /33/ S. Yiftah et al., Proceedings of a Symposium on Fast Reactor Physics and Related Safety Problems held by the IAEA in Karlsruhe, 30 Oct. - 3 Nov. 1967, Vol. I, p. 123
- /34/ L.P. Abagyan et al., "Gruppenkonstanten schneller und intermediärer Neutronen für die Berechnung von Kernreaktoren" KFK-tr-144 (Übersetzung)
- /35/ P. Greebler et al., "Implications of Recent Fast Critical Experiments on Basic Fast Reactor Design", ANL-7320, Seite 66 (1966)

Tabelle 1: Atomzahldichten für SNEAK-3A-2 und SNEAK-3B-2  
(in  $10^{20} \text{ cm}^{-3}$ )

	SNEAK-3A-2		SNEAK-3B-2		Strukturmaterial
	Zone 1	Zone 2	Pu-Zone	Bor-Zone	
Radius, cm	33.76	44.66	29.91	6.14 cm Dicke	1.75-3.07cm
Al	129.10	129.36	125.6	197.0	
B10	-	-	-	7.73	
B11	-	-	-	31.3	
C	9.32	9.08	9.73	18.93	
Cr	34.53	34.36	33.72	20.11	102.8
Fe	121.85	121.33	119.7	67.1	293.8
H	17.92	17.45	18.49	17.93	
Mg	0.64	0.64	1.31	-	
Mn	1.94	1.96	2.23	-	
Mo+Nb	0.39	0.39	0.38	-	
Ni	18.54	18.27	17.55	11.30	95.4
O	145.29	145.67	122.2	144.6	
Pu239	-	-	14.76	-	
Pu240	-	-	1.33	-	
Pu241	-	-	0.11	-	
Si	1.88	1.86	2.54	1.01	
Ti	0.40	0.39	0.30	0.14	
U235	20.31	20.25	0.56	0.73	
U238	81.04	81.21	81.86	100.65	

Corehöhe : 80.54 cm

Tabelle 2: Daten der Uranoxid-Dopplerproben

Anreicherung	Länge cm	Durchmesser cm	Urangewicht g	Gewicht UO <sub>2</sub> g	Reaktor
0.4%	9.0	3.5	774	878	SNEAK
15 %	9.0	3.5	760	862	SNEAK
25 %	9.0	3.5	770	873	SNEAK
0.714%	30.5	2.54	1116	1265	ZPR-6/4Z

Tabelle 3:

Statistische Resonanzparameter (nach /23/)

	<u>U235</u>	<u>U238</u>	<u>Pu239</u>	<u>Pu240</u> *)
$s_0$	$0.915 \times 10^{-4}$	$0.90 \times 10^{-4}$	$1.07 \times 10^{-4}$	$1.38 \times 10^{-4}$
$s_1$	$2.0 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-4}$
$\bar{D}$	1.23eV(J=2)	20.8eV(J=1/2)	8.78eV(J=0)	13.2eV(J=1/2)
	1.06eV(J=3,4)	11.4eV(J=3/2)	3.12eV(J=1)	7.26eV(J=3/2)
	1.18eV(J=5)		2.12eV(J=2)	
$\Gamma_g$	0.0479eV	0.0248eV	0.0387eV	0.032eV
$\langle \Gamma_f \rangle$	0.0651eV(E 50eV)	-	2.8eV(l=0, J=0)	-
			0.057eV(l=0, J=1)	
$\nu_f$	4		2 (l=0, J=0)	
			1 (l=0, J=1)	

\*) nach /33/

Tabelle 4: Aufspaltung des Effekts für Uranoxidproben bei Aufheizung um 500°

SNEAK-3A-2-Probe mit 25% Anreicherung

Energiebereich	U238			Ges.U238	U235	Gesamt
	Normalterme	Wechselw. Terme U238	Wirkung auf U235			
über 10 keV	-16.5	-3.5	-7.5	-27.5	+0.7	
1 bis 10 keV	-42.4	-2.6	-6.9	-51.9	+3.3	
unter 1 keV	-28.1	+1.2	-3.0	-29.9	+5.3	
Gesamt	-87.0	-4.9	-17.4	-109.3	+9.3	-100.0

ZPR-6, Anordnung 4Z

Energiebereich	U238			Ges.U238	U235	Gesamt
	Normalterme	Wechselw. Terme U238	Wirkung auf U235			
über 10 keV	-25.5	-11.8	-10.1	-47.4		
unter 10 keV	-46.1	-3.2	-3.4	-52.9		
Gesamt	-71.6	-15.0	-13.5	-100.1	+0.1	-100.0

Tabelle 5:      Daten der Plutonium-Proben (SNEAK)

Länge cm	Durch- messer cm	Gewicht PuO <sub>2</sub> g	Gewicht Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> g	Gehalt an Pu240 %	$\sigma_p$ , barn
15.0	3.5	154.5	481.3	8.2	300
15.0	3.5	451.7	365.0	8.2	100

Tabelle 6: Aufspaltung des Dopplereffekts der Pu-Proben in SNEAK-3B-2 bei Aufheizung von 370° auf 770°K,  $\delta k/k$  in  $10^{-6}$

Probe mit 154.5 g PuO<sub>2</sub>

	<u>Normale Umgebung</u>		<u>Bor-Umgebung</u>	
	<u>Alte Daten</u>	<u>Neue Daten</u>	<u>Alte Daten</u>	<u>Neue Daten</u>
Spaltung	+6.80	+6.94	+4.28	+3.77
Absorption	<u>-6.25</u>	<u>-7.47</u>	<u>-1.92</u>	<u>-2.03</u>
	+0.55	-0.53	+2.36	+1.74
Pu-240	<u>-0.49</u>	<u>-0.46</u>	<u>-0.12</u>	<u>-0.12</u>
	+0.06	-0.99	+2.24	+1.62
Ausdehnung	<u>-0.02</u>	<u>-0.02</u>	<u>+0.04</u>	<u>+0.04</u>
	+0.04	-1.01	+2.28	+1.66
Gemessen	-1.35 <u>±0.10</u>		+1.40 <u>±0.10</u>	

Probe mit 451.7 g PuO<sub>2</sub>

	<u>Normale Umgebung</u>		<u>Bor-Umgebung</u>	
	<u>Alte Daten</u>	<u>Neue Daten</u>	<u>Alte Daten</u>	<u>Neue Daten</u>
Spaltung	+21.2	+19.9	+13.4	+11.0
Absorption	<u>-18.7</u>	<u>-21.4</u>	<u>- 7.1</u>	<u>-7.4</u>
	+ 2.5	- 1.5	- 6.3	+ 3.6
Pu-240	<u>- 1.3</u>	<u>- 1.2</u>	<u>- 0.4</u>	<u>- 0.4</u>
	+ 1.2	- 2.7	+ 5.9	+ 3.2
Ausdehnung	<u>- 0.6</u>	<u>- 0.6</u>	<u>- 0.1</u>	<u>- 0.1</u>
	+ 0.6	- 3.3	+ 5.8	+ 3.1
Gemessen	-3.7 <u>±0.1</u>		+2.5 <u>±0.1</u>	

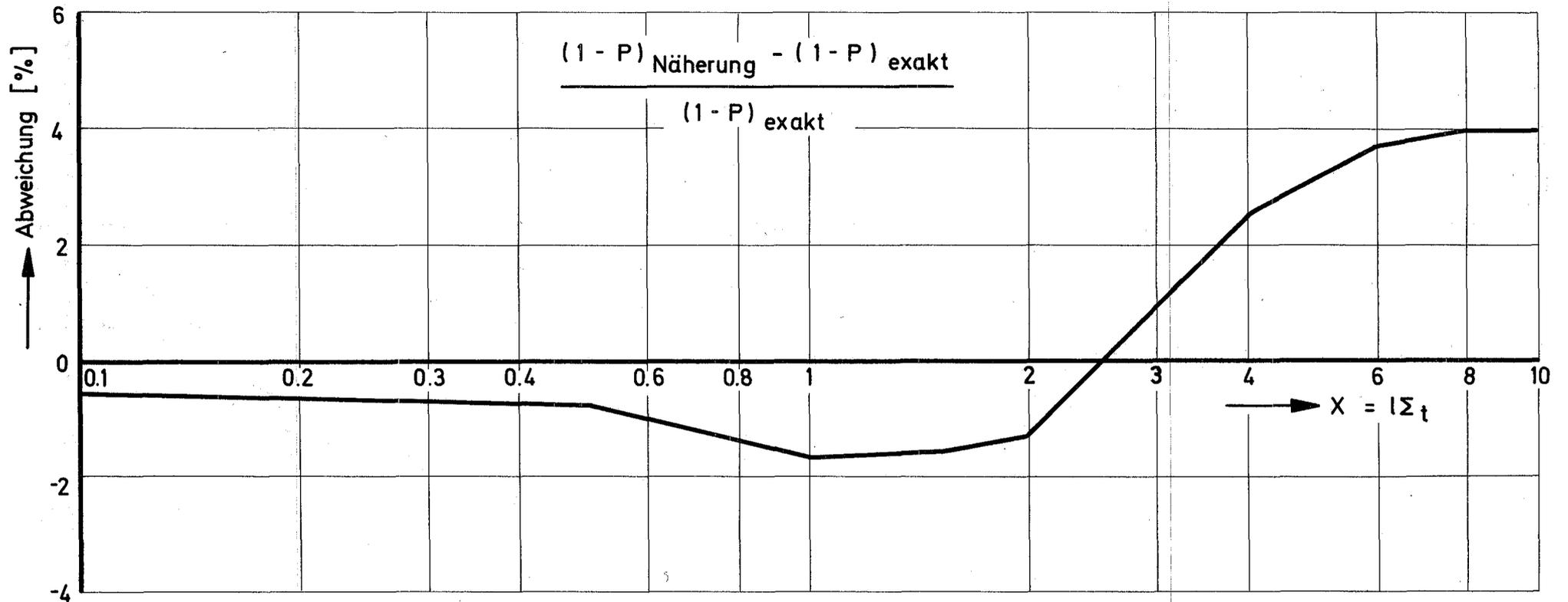


Fig. 1 2-Term - Anpassung für die Entkommwahrscheinlichkeit aus einem Zylinder

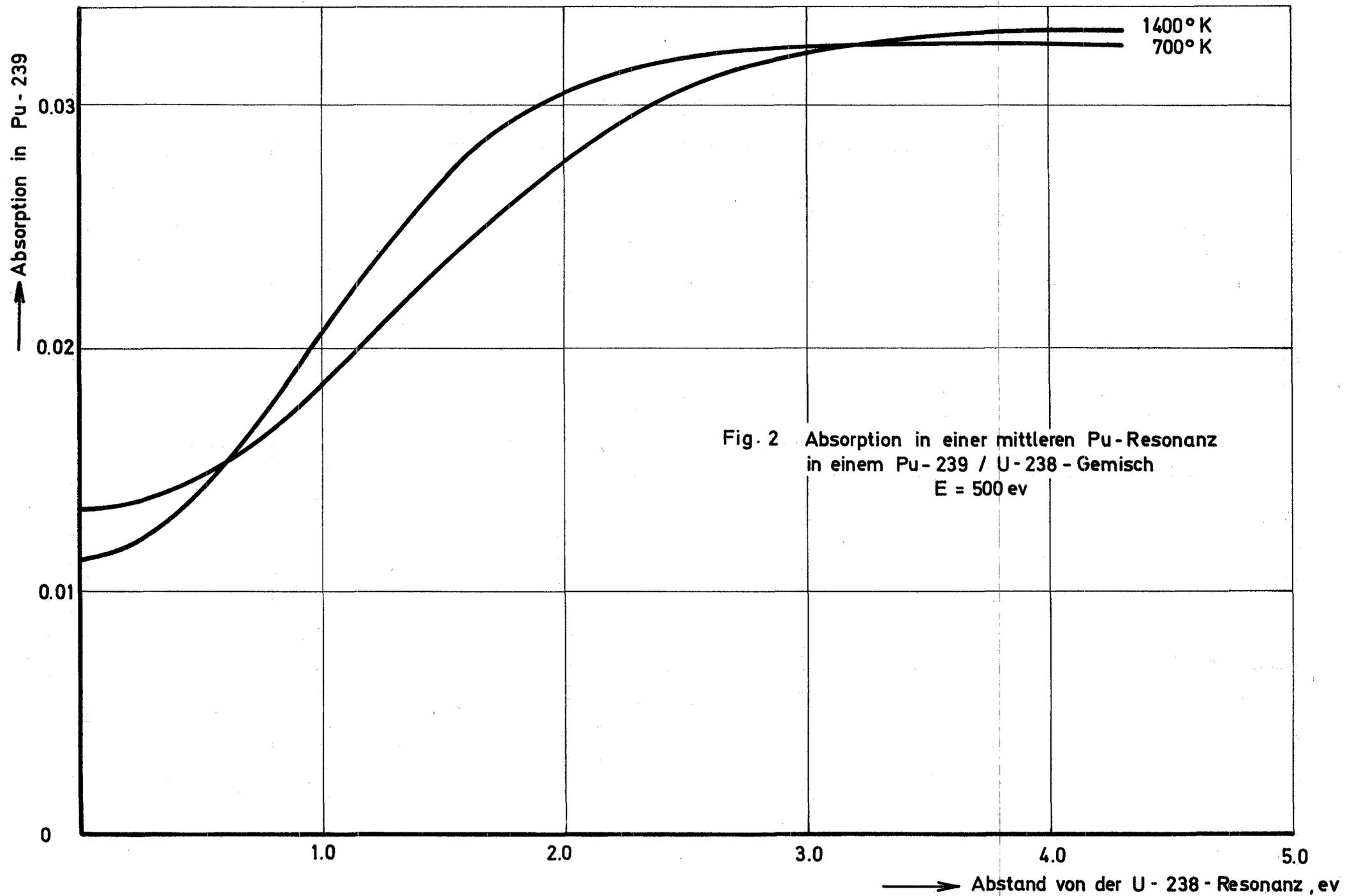


Fig. 2 Absorption in einer mittleren Pu-Resonanz  
in einem Pu-239 / U-238 - Gemisch  
E = 500 ev

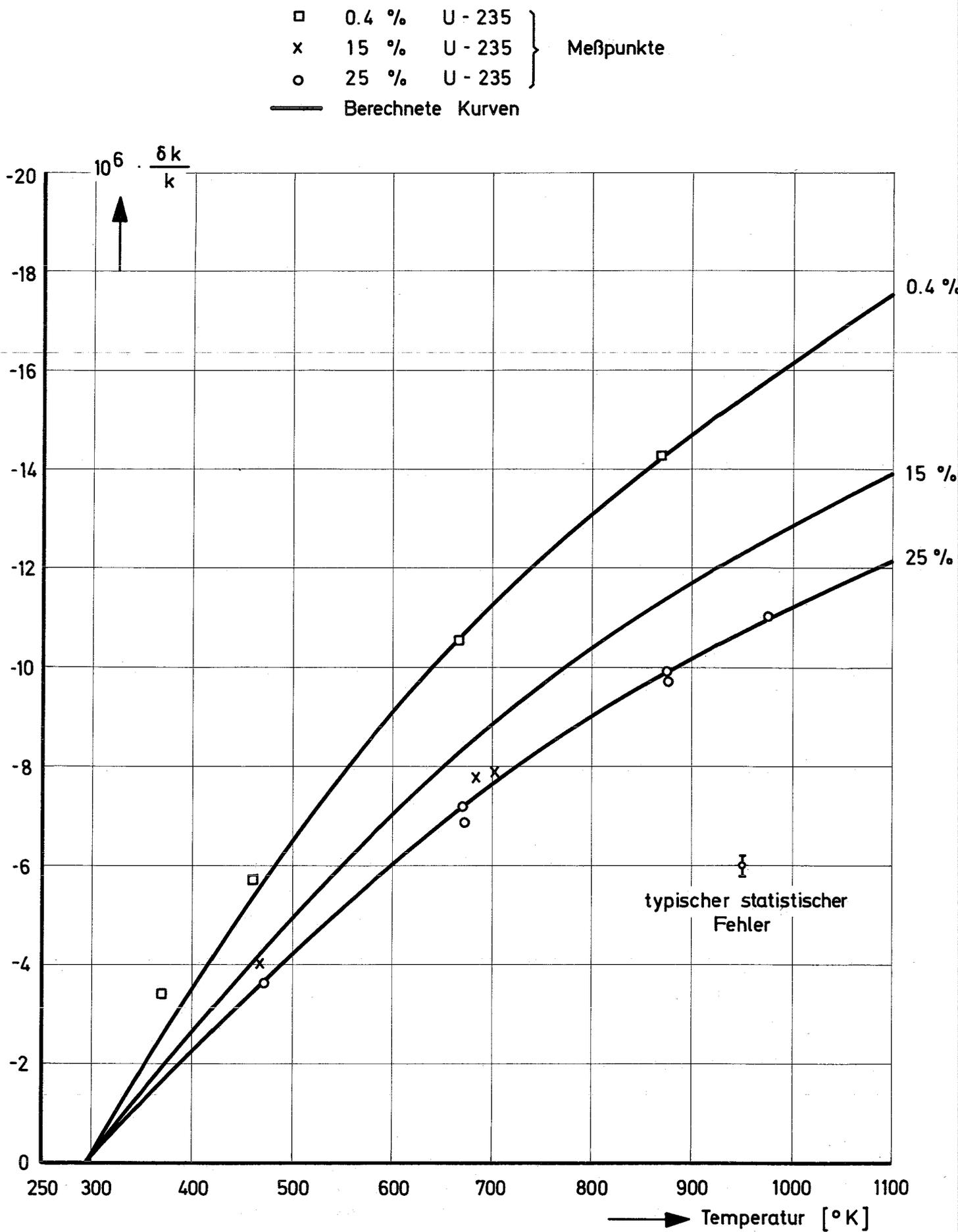


Fig. 3 Dopplereffekt - Messungen mit  $\text{UO}_2$  -  
 Proben in SNEAK 3A - 2

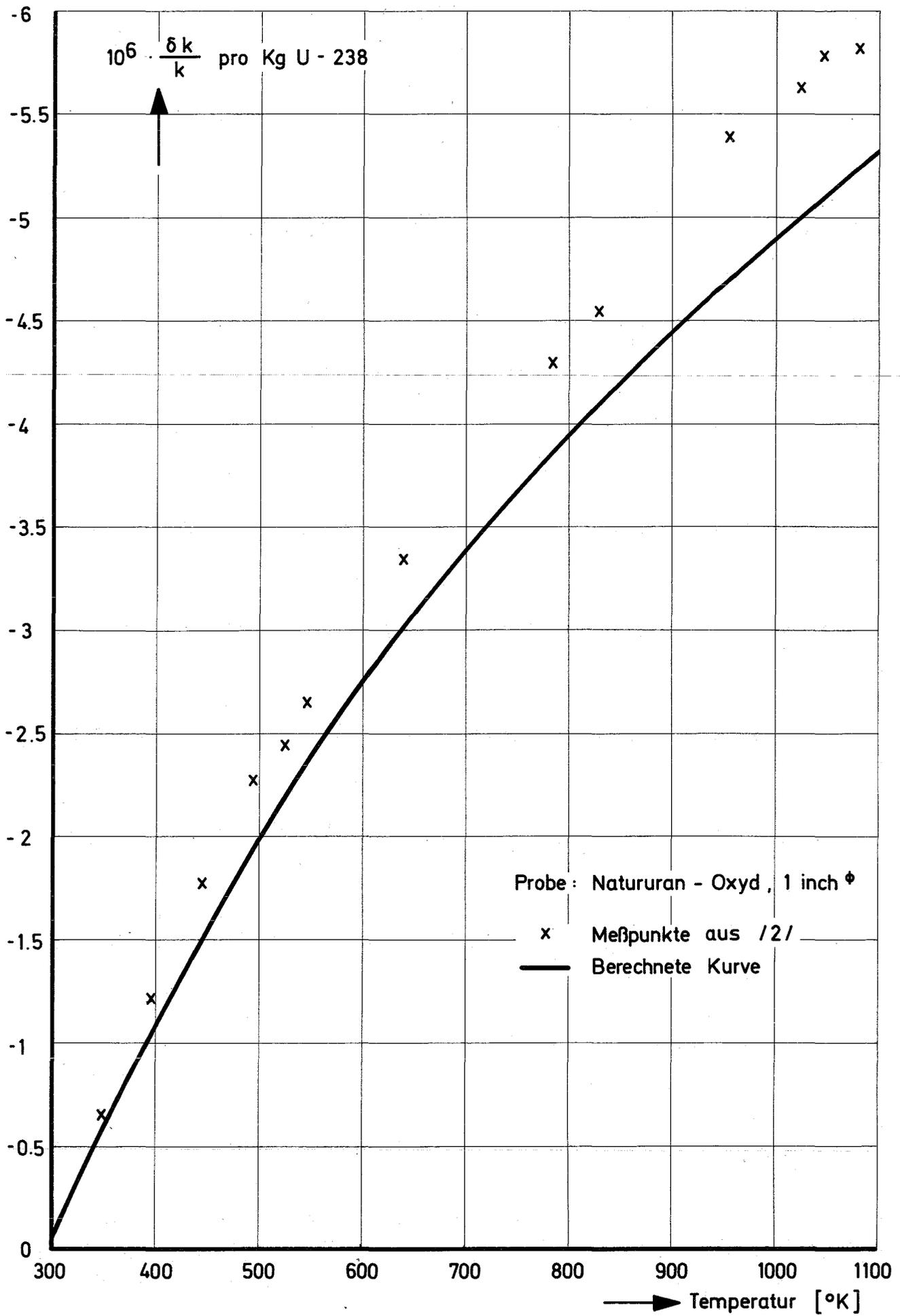


Fig. 4 Dopplereffekt - Messungen einer  $\text{UO}_2$  -  
 Probe im ZPR - 6 / 4 Z

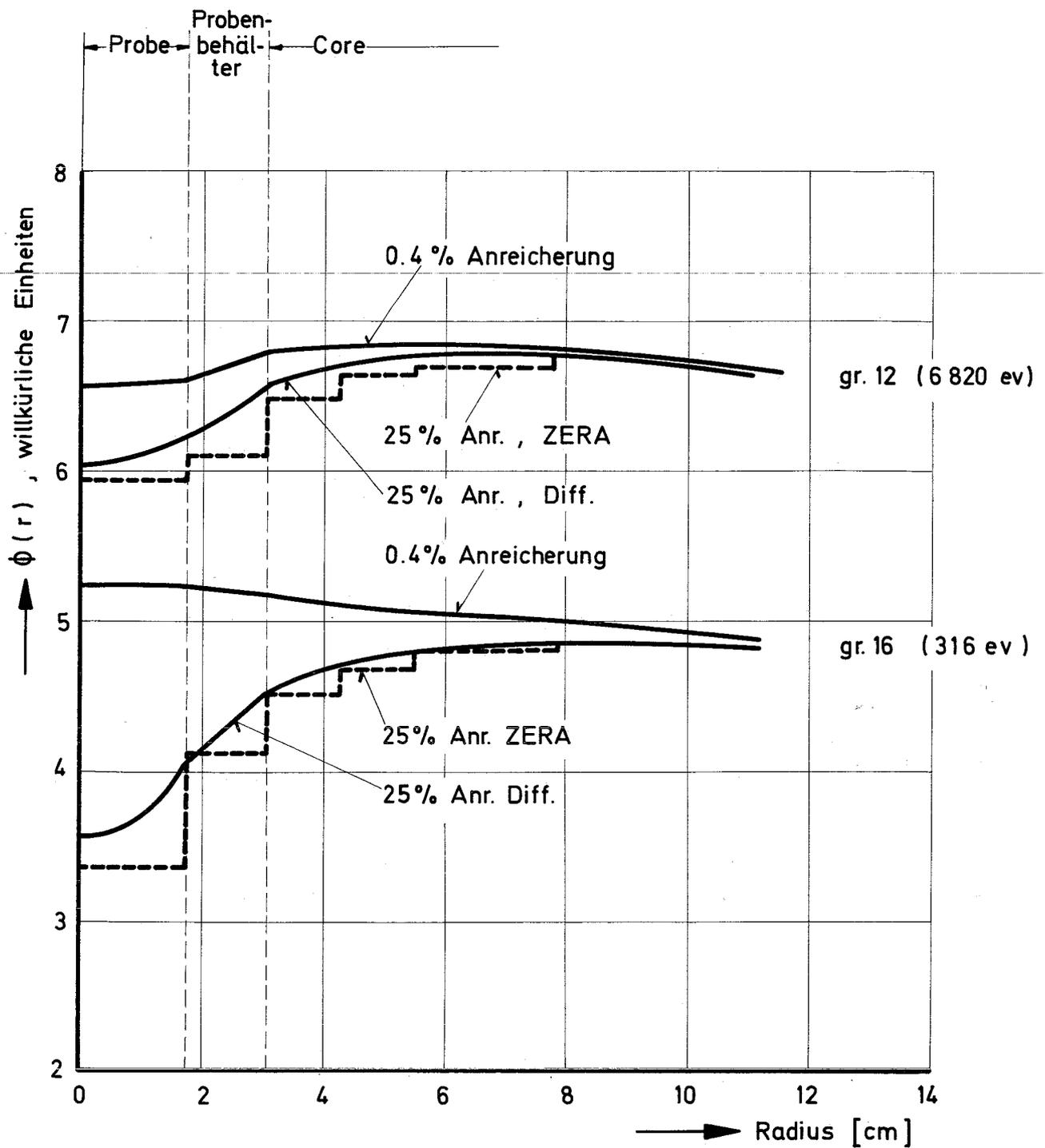


Fig. 5 Flüsse in einigen Dopplergruppen.  
SNEAK 3A-2 mit  $UO_2$  - Proben

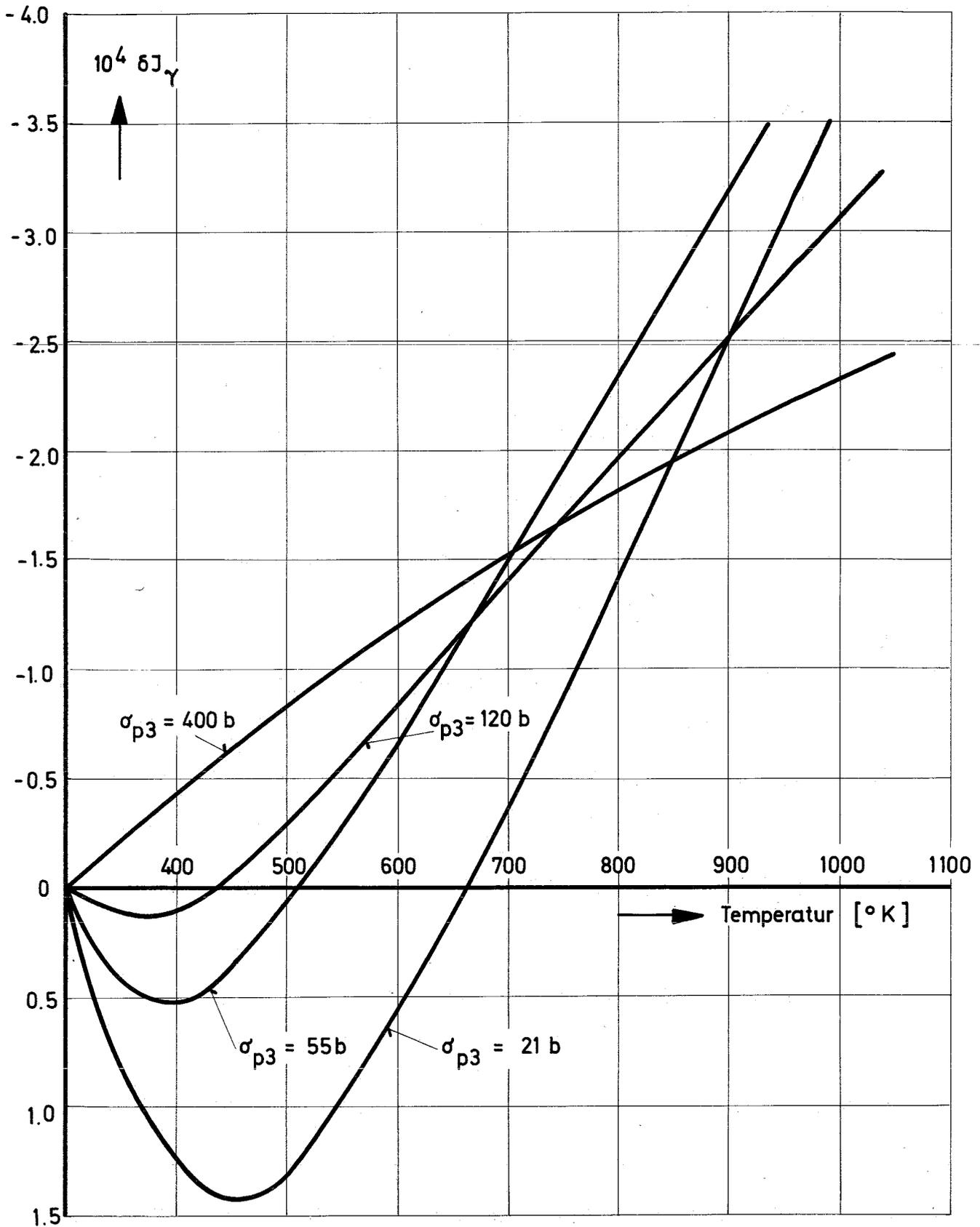


Fig. 6  $\delta J_\gamma$  für eine  $U(238)O_2$  - Probe  
 $E = 1.47 \text{ KeV}$

Fig. 7 Resonanzwechselwirkung zwischen Probe und Umgebung

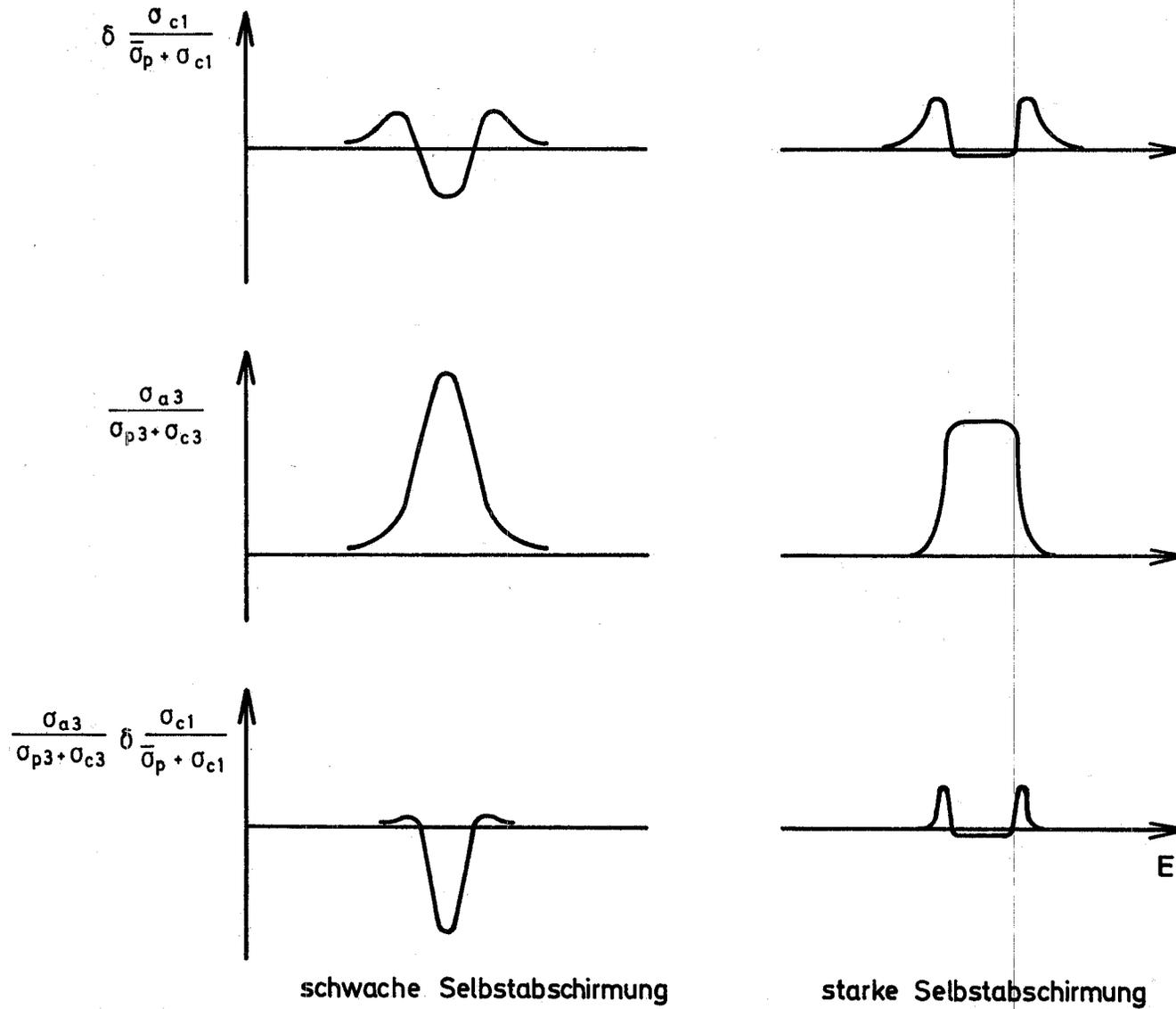
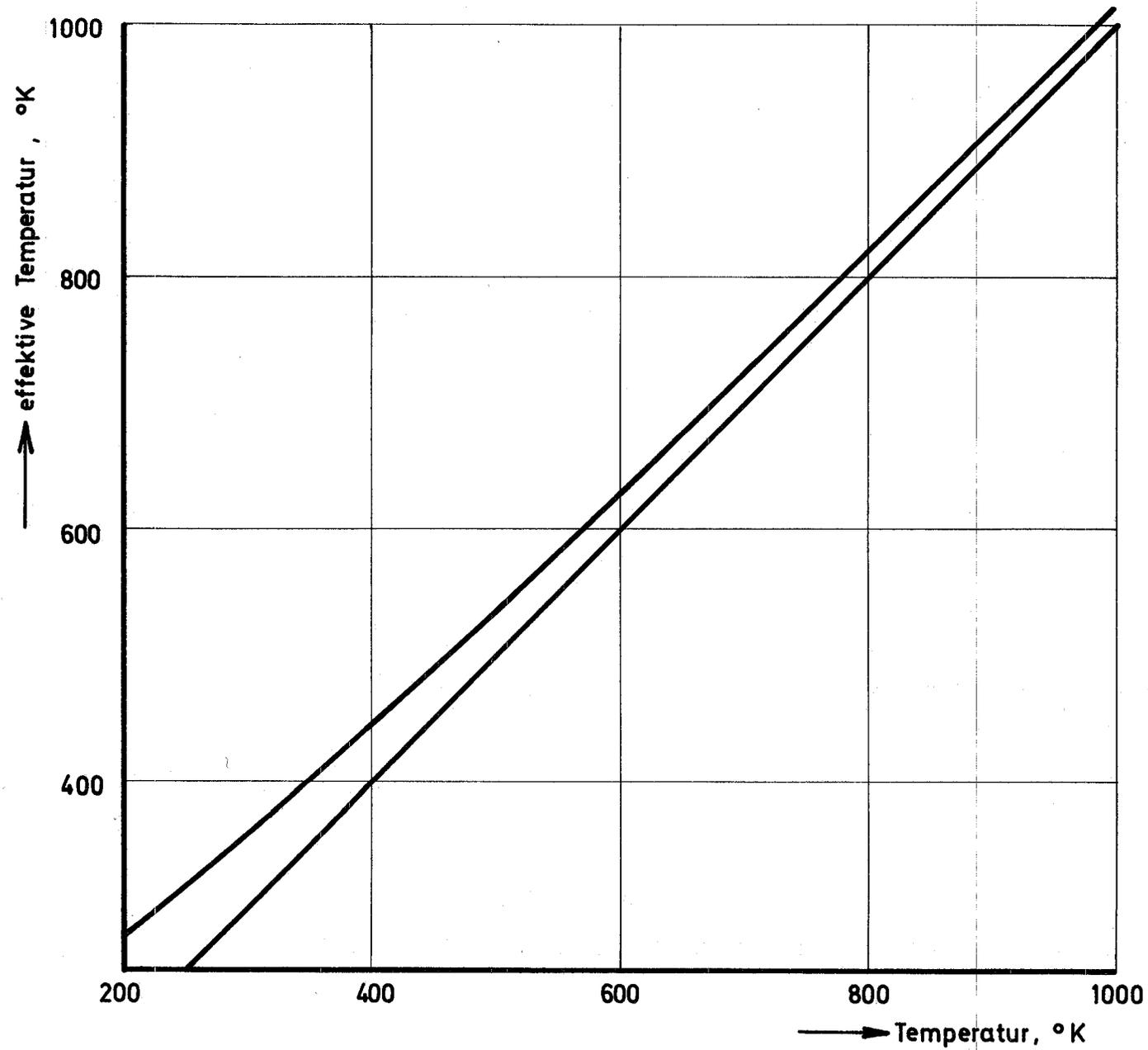


Fig. 8 Effektive Temperatur für das Phononen -  
spektrum nach Dolling ( nach 1301 )



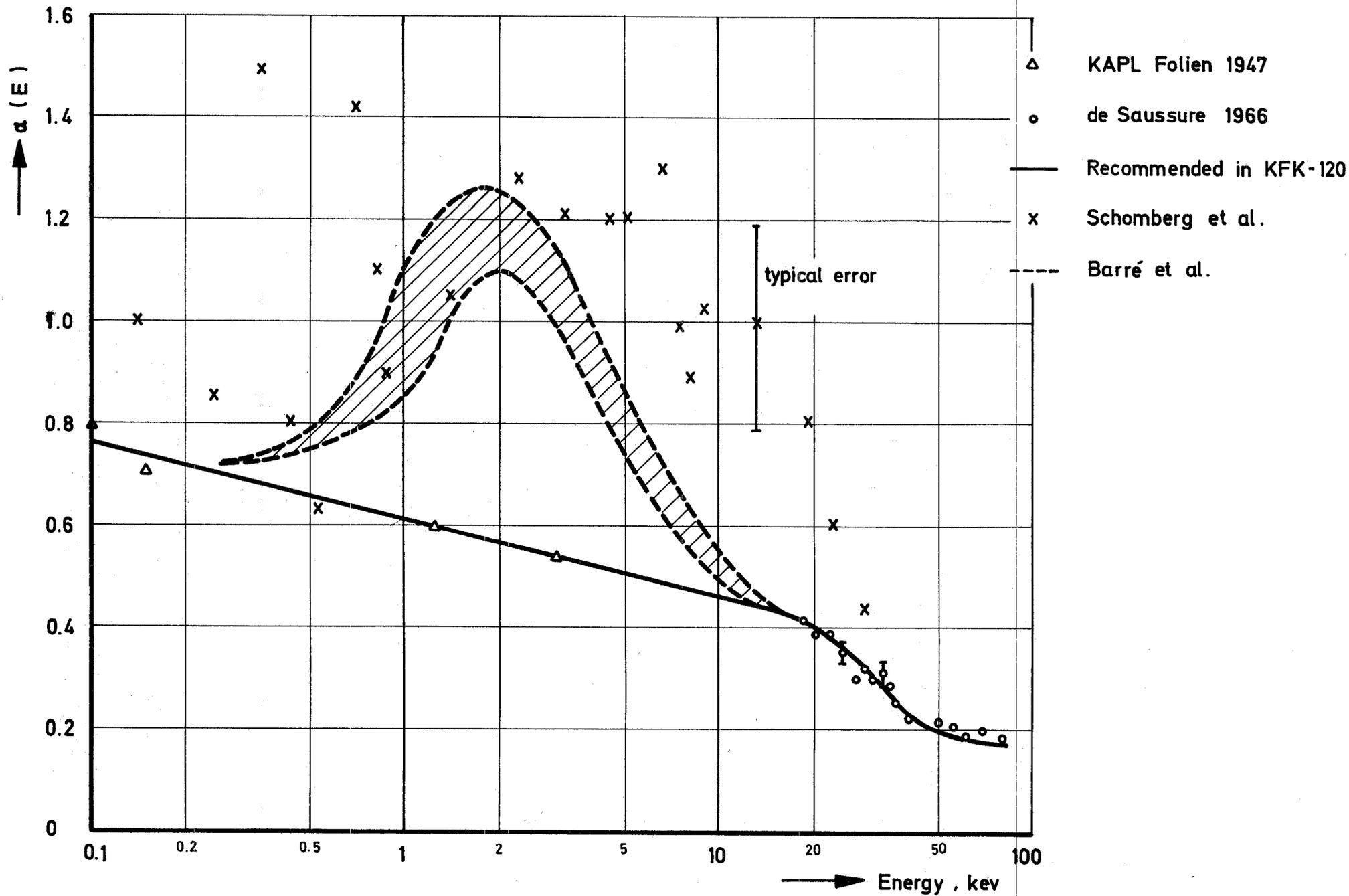


Fig.9  $\alpha(E)$  für Pu-239

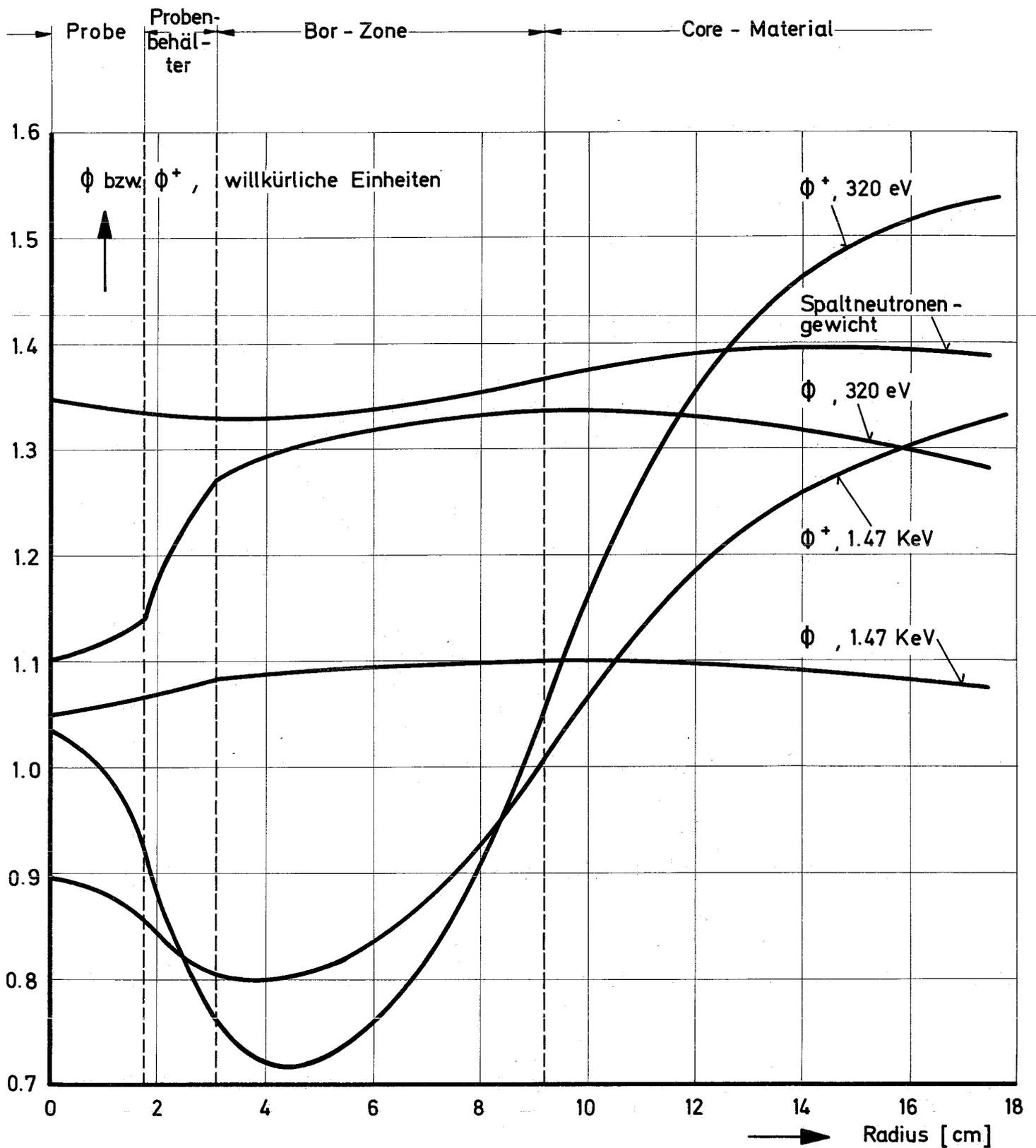


Fig. 10 Einige Flüsse und adjungierte Flüsse  
Pu - Probe (451.7 g PuO<sub>2</sub>) in Bor-  
Umgebung, SNEAK 3B - 2

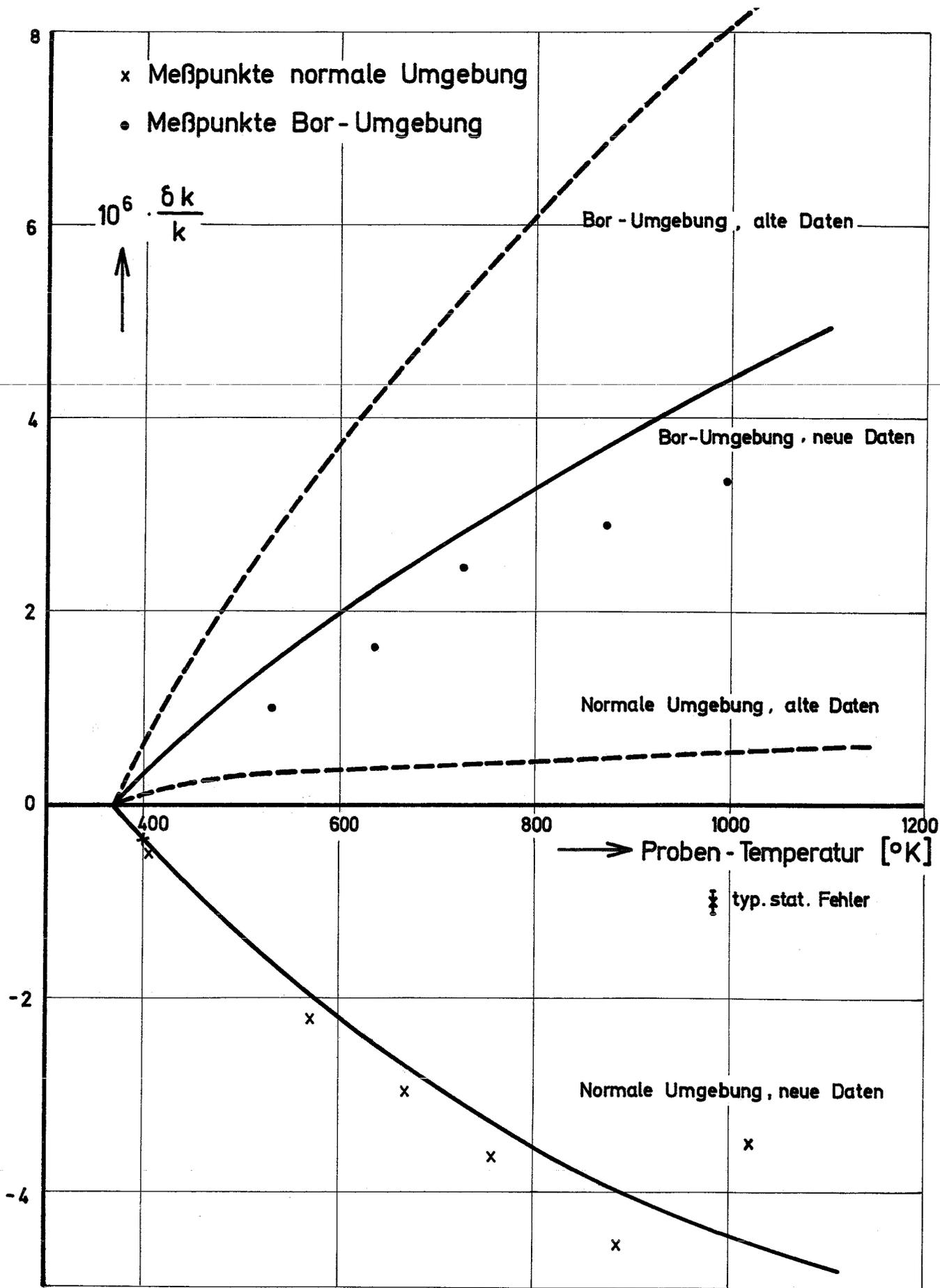


Fig. 11 a DOPPLER-EFFEKT MESSUNGEN MIT EINER PuO<sub>2</sub>-PROBE (451.7 g) IN SNEAK 3B-2

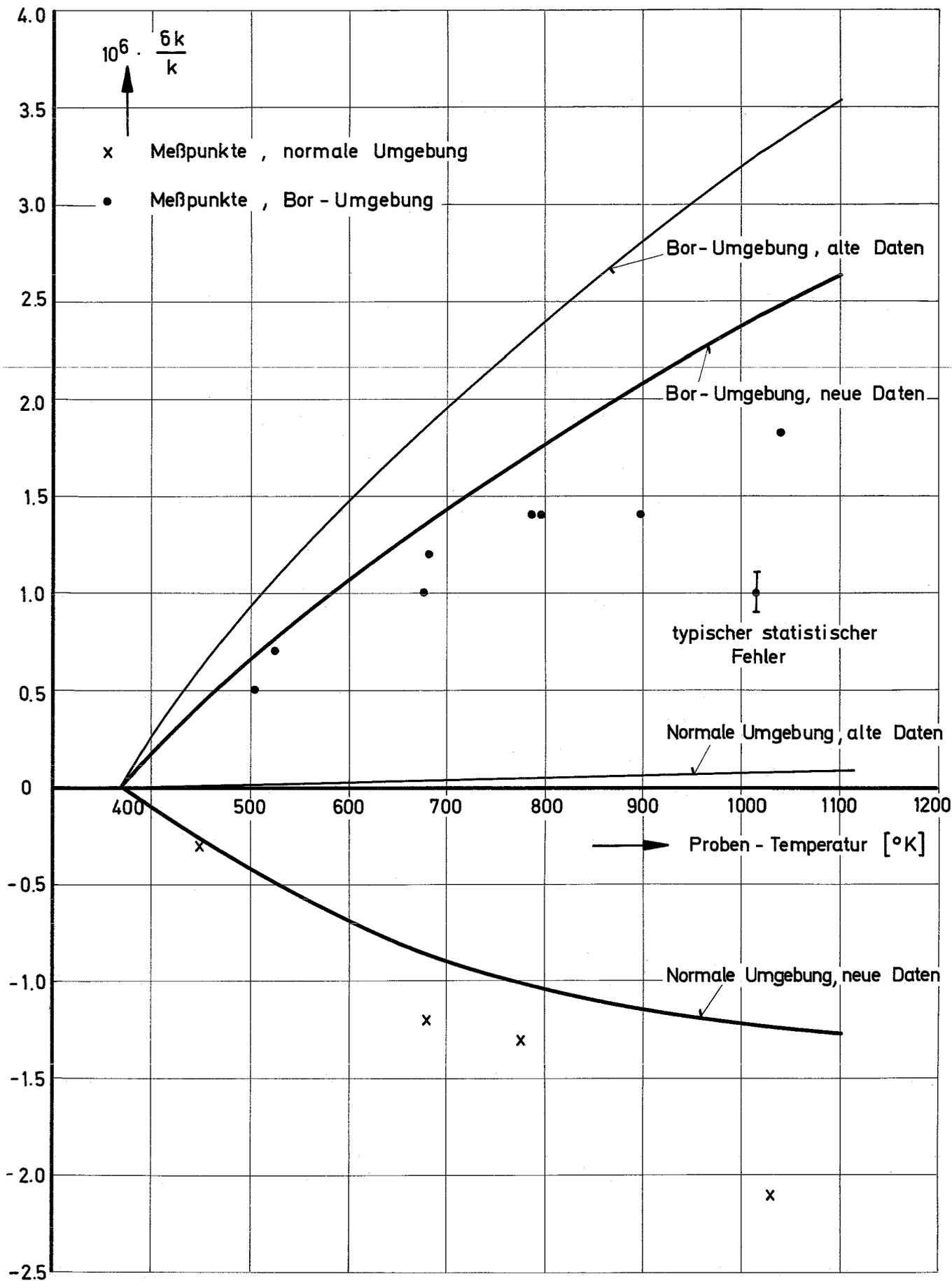


Fig. 11 b Dopplereffekt - Messungen mit einer  $\text{PuO}_2$  - Probe (154.5 g) in SNEAK 3B - 2

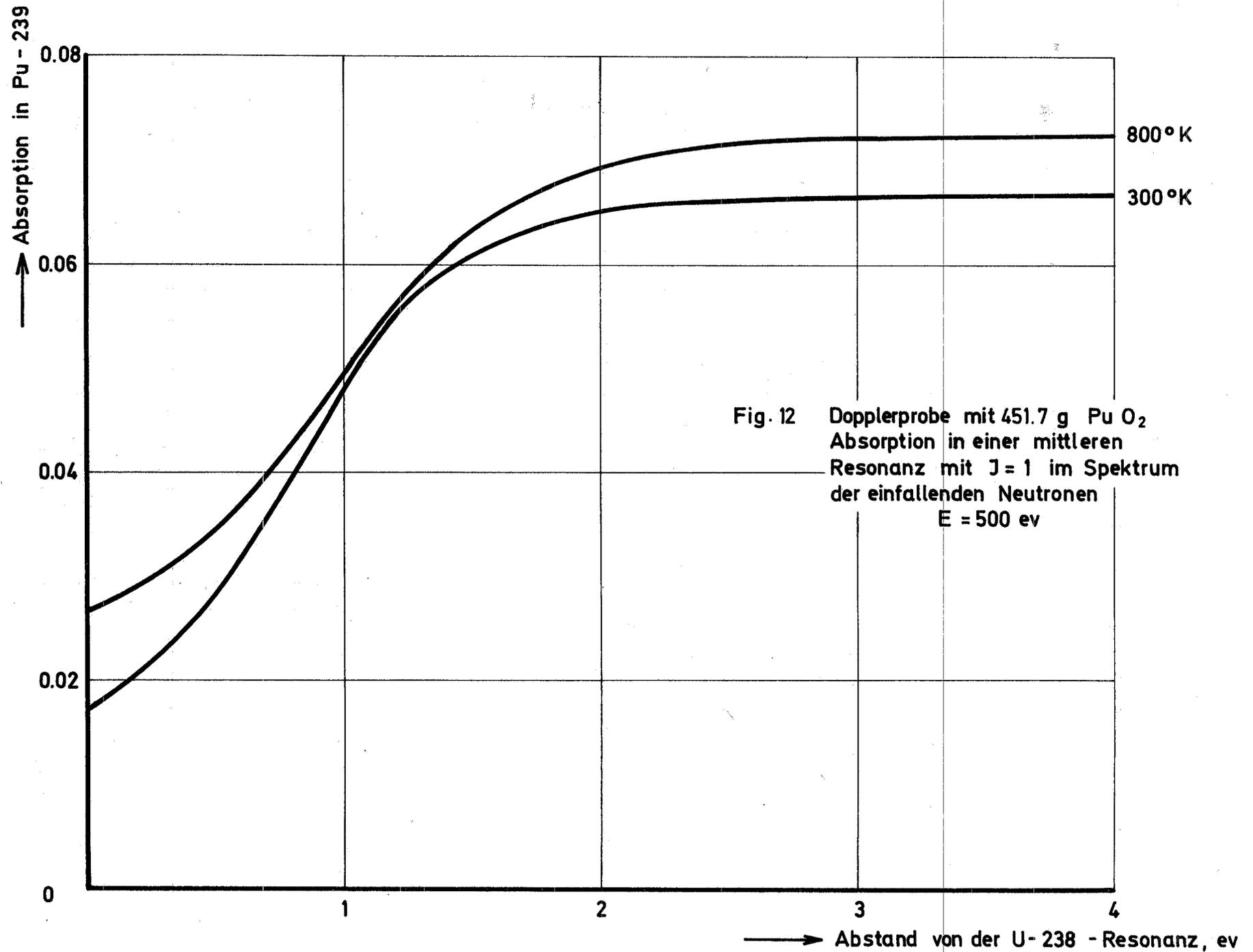


Fig. 12 Dopplerprobe mit 451.7 g  $\text{Pu O}_2$   
Absorption in einer mittleren  
Resonanz mit  $J = 1$  im Spektrum  
der einfallenden Neutronen  
 $E = 500 \text{ eV}$

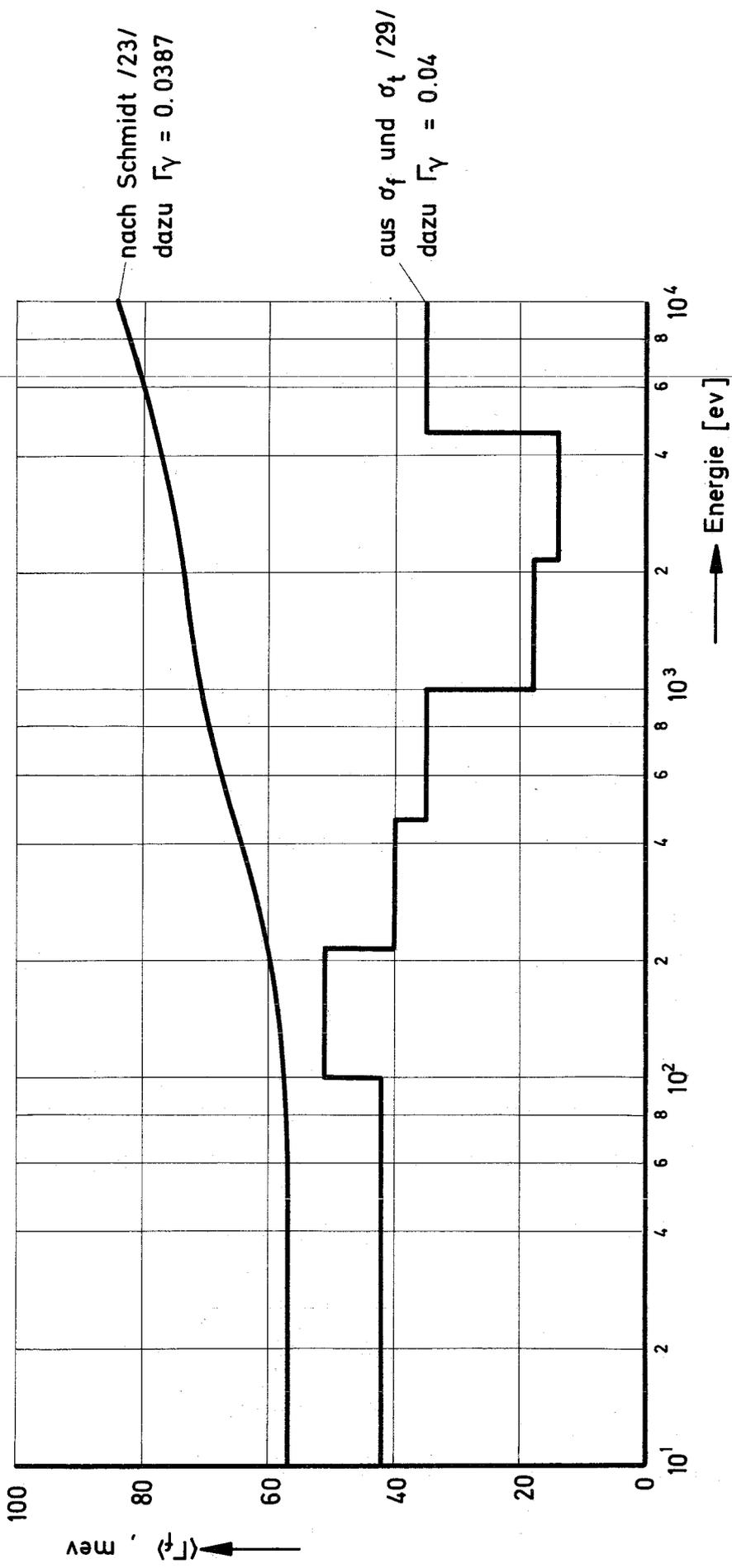


Fig. 13  $\langle \Gamma_f \rangle$  für Pu 239,  $l=0$ ,  $J=1$