

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

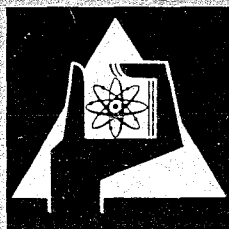
Juni 1969

KFK 992

Institut für Kernverfahrenstechnik

Berechnung der Neutronenemission eines mit einer
Hohlpincentladung erzeugten D-T-Plasmas

R. G. A. Frank



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.

KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Juni 1969

KFK 992

Institut für Kernverfahrenstechnik

Berechnung der Neutronenemission eines mit
einer Hohlpinchentladung erzeugten D-T-Plasmas.

von

R.G.A. Frank ^{x)}

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe

x) Dissertation; Universität (Techn. Hochschule) Karlsruhe
Juni 1969

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung.	4
1.1 Formulierung der Differentialgleichungen.	8
1.2 Die Wandstärke δ in der Anfahr- und Kollabierphase.	13
1.3 Die Funktionsweise von Reaktionskraft und adiabatischer Kompression. Der Übergang zur Vollpinchphase.	14
1.4 Diskussion des Hohlpinchmodelles an Hand einer Lösung der Differentialgleichungen.	17
2. Optimalisierung der Versuchsparameter in Bezug auf eine hohe Neutronenausbeute.	23
2.1 Variation des Anfangsradius R_0 bei verschiedenen Kapazitäten C .	24
2.2 Variation der Höhe l des Hohlzylinders.	31
2.3 Variation der Ladespannung U_0 .	34
2.4 Variation der Anfangswandstärke δ_0 .	36
3. Qualitative Analyse der Vorgänge bei Beginn der Entladung.	39
Anhang:	
I Separation der thermischen Energiegleichung.	41
II Die Konsistenz der Differentialgleichungen.	43
III Berechnung der Neutronenausbeute für das Modell der freien Durchdringung.	44
Literaturhinweise.	45

Einleitung.

Zur Lösung kerntechnischer und kernphysikalischer Probleme werden häufig intensive Neutronenimpulse benötigt. Solche 'Neutronenblitze' lassen sich mit verhältnismäßig geringem Aufwand unter Ausnutzung der Kernfusionsreaktion



erzeugen.

Bei einem seit längerer Zeit benutzten Verfahren werden elektrisch beschleunigte Deuteronen kurzzeitig auf ein mit Tritium beladenes Target geschossen. Entsprechende Apparaturen liefern Momentanraten in der Größenordnung von 10^{14} Neutronen pro Sekunde, denen, bei einer Impulsdauer von 10^{-6} bis 10^{-5} sec, 10^8 bis 10^9 Neutronen/Puls entsprechen¹⁾²⁾.

Merklich höhere Werte wurden kürzlich bei dem Plasma-focus-Experiment von Mather³⁾ erreicht. Er benutzt eine aus zwei Koaxialleitern bestehende Plasmakanone, die am Ende ihres Innenleiters durch radialen Kollaps des axial beschleunigten Plasmarings kurzfristig ein besonders dichtes und heisses Plasma erzeugt. Die mit einer Kondensatorenergie von 36 kJ erzielte Momentanrate beträgt $2 \cdot 10^{18}$ Neutronen pro Sekunde bei einer Impulsdauer von $1,5 \cdot 10^{-7}$ sec. Die Gesamtzahl der pro Puls emittierten Neutronen ist also $3 \cdot 10^{11}$.

Eine weitere Möglichkeit zur Erzeugung hoher Neutronenblitzraten bietet die von Linhart⁴⁾ vorgeschlagene Hohlpinchanordnung. Bei diesem Experiment wird eine Hohlzylinderförmige Plasmakonfiguration im Hochvakuum erzeugt, die unter der Wirkung des Magnetfeldes eines axialen Entladungsstromes in radialer Richtung kollabiert. In unmittelbarer Umgebung der Zylinderachse entsteht kurzfristig ein besonders heißes und dichtes Plasma.

Die Hohlpinchmethode wurde von Maisonnier, Haegi und Linhart⁵⁾ unter Verwendung von Li Al D_4 - Pulver als Ausgangsmaterial für das Plasma mit einer 50 kJ Kondensatorbatterie erprobt. Das Pulver konnte unter Ausnutzung elektrostatischer Effekte in Form eines Hohlzylinders in die Entladungskammer injiziert werden. Die Gesamtzahl der pro Puls emittierten Neutronen betrug $2 \cdot 10^7$. Die verhältnismäßig geringe Neutronenrate dürfte, außer auf der Verwendung von Deuterium anstelle eines DT - Gemisches auf der Beimischung von Al und Li beruhen.

Die Aussichten für die Erzeugung intensiver Neutronenblitze nach der Hohlpinchmethode haben sich durch die von Becker, Klingelhöfer und Lohse⁶⁾ aufgezeigte Möglichkeit zur gerichteten Einführung von Deuterium und Tritium mit Hilfe kondensierter Molekularstrahlen wesentlich verbessert. In der vorliegenden Arbeit wird daher theoretisch untersucht, welche Neutronenblitzrate bei einem mit kondensierten DT - Molekularstrahlen durchgeführten Hohlpinchexperiment zu erwarten ist.

Die von Linhart und Mitarbeitern durchgeführten Rechnungen⁴⁾ 5)7) zur Beschreibung des Hohlpinchvorganges benutzen die vereinfachende Voraussetzung verschwindender Schichtdicke des Hohlzylinders. Mit dieser Näherung lässt sich zwar ungefähr berechnen, welcher Anteil der im Kondensator gespeicherten Energie in kinetische Energie der radial beschleunigten Plasmaschicht verwandelt wird, nicht hingegen, welchen Enddurchmesser und damit welche Enddichte das Plasma erreicht. Um dennoch zu einer Aussage über diese Größen sowie zu einer Abschätzung der Reaktions- bzw. Neutronenrate zu kommen, ging Linhart davon aus, daß sich in der beschleunigten Plasmaschicht eine Boltzmannverteilung der Dichte einstellt, deren e-fel Wertsbreite als Maß für die Schichtdicke angenommen wurde⁴⁾.

In der vorliegenden Arbeit werden mit einem erweiterten Differentialgleichungssystem neben der Geschwindigkeit

der Schicht noch deren Elektronen- und Ionentemperatur beschrieben. Durch Hinzufügen eines Drucktermes in der Bewegungsgleichung wird der Kollaps des Plasmahohlzylinders zu einem Plasmafaden merklich beeinflusst. Dieser Druckterm bewirkt ohne zusätzliche Annahmen, daß der Außendurchmesser bei der Kompression der Plasmasäule nicht verschwindend klein wird.

Die Plasmatemperaturen werden in der Anfahrphase nach dem Zünden der Entladung primär durch ohm'sche Aufheizung der Elektronen und während des Kollapses durch die adiabatische Kompression des Plasmas bestimmt. Durch die Berücksichtigung der ohm'schen Aufheizung und der veränderlichen Schichtdicke wird der Hohlpinchvorgang in weiten Grenzen unabhängig von den Anfangstemperaturen und der Anfangsschichtdicke.

Damit wird die Berechnung der von dem Plasma emittierten Neutronenzahl möglich. Die Bedingungen für maximale Neutronenproduktion werden angegeben. Bei einer in der Kondensatorbatterie gespeicherten Energie von 200 kJ sind Momentanraten von 10^{22} Neutronen pro sec für etwa 10^{-8} sec, d.h. etwa 10^{14} Neutronen pro Puls zu erwarten.

Eine qualitative Analyse der Vorgänge beim Beginn der Entladung zeigt, daß die für die Plasmaerzeugung vorgesehenen kondensierten Molekularstrahlen gegenüber gewöhnlichen Gasstrahlen nicht nur wegen ihrer höheren Dichte und schärferen räumlichen Begrenzung, sondern auch wegen ihres andersartigen Verhaltens bei der Vorionisierung vorteilhaft sein dürften: bekanntlich besteht bei allen Pinchexperimenten die Gefahr, daß infolge mangelnder Vorionisierung nur ein Teil der Materie von der Lorentzkraft erfasst und radial beschleunigt wird, während der Rest zunächst als Neutralgas zurückbleibt. Wenn die Selbstinduktion des Entladekreises durch Zusammenschnüren der Plasmasäule genügend angestiegen ist, kann das restliche Neutralgas

nachzünden, was den Pinchvorgang unter Umständen erheblich stört. Bei Clustern führt dagegen die Ionisierung einer einzelnen Molekel zur Beschleunigung aller im Cluster zusammengeschlossenen Teilchen. Da die Wahrscheinlichkeit für das Anbringen einer bestimmten Ladung beim Cluster nahezu proportional zu seiner Molekelzahl ist⁸⁾, kann bei Verwendung von kondensierten Molekularstrahlen mit einer wesentlich vollständigeren Mitnahme des Strahlmaterials während des Pinchvorganges gerechnet werden, als bei normalen Gasstrahlen.

1.1 Formulierung der Differentialgleichungen.

Das Schema der Hohlpinchanordnung ist in Abb. 1 wiedergegeben: Die beiden Elektroden sind über eine Funkenstrecke mit dem Kondensator der Kapazität C und der Ladespannung U verbunden. Der Radius der äußeren Oberfläche des Plasmahohlzylinders wird mit R , die Plasmaschichtdicke mit δ bezeichnet. Die Länge des Plasmazylinders ist l . Der Entladungsstrom J erzeugt ein azimuthales Magnetfeld B_ϕ , das den Plasmahohlzylinder zu einem dünnen Plasmaschlauch komprimiert.

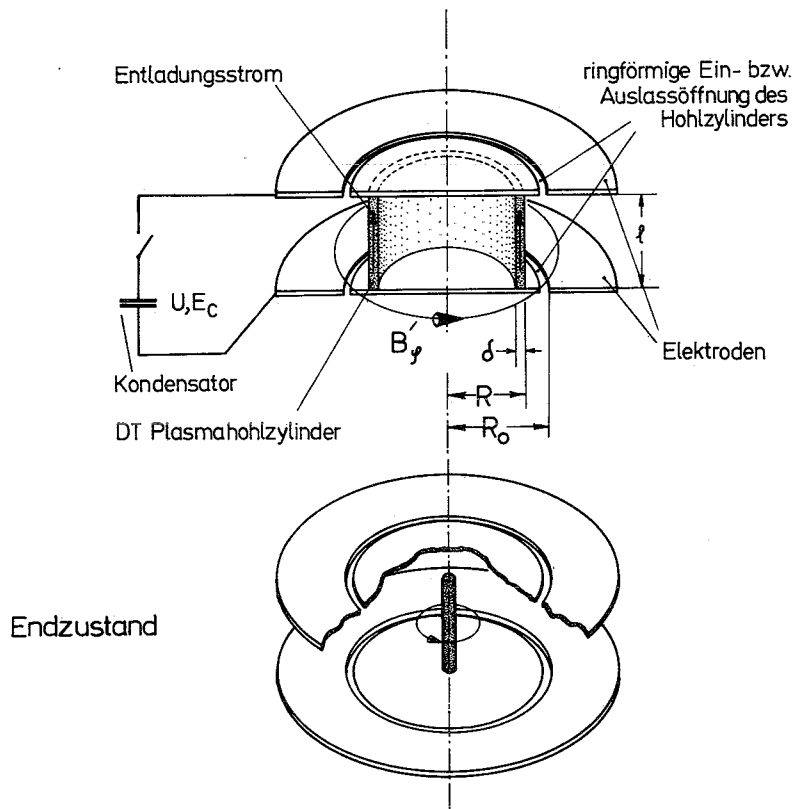


Abb. 1 Versuchsanordnung eines Hohlpinches während der Kollabierphase und im Endzustand.

Für die Rechnung wird angenommen, daß der Hohlzylinder sich von Anfang an wie ein vollionisiertes Plasma verhält. Die Berechtigung dieser Annahme wird im Abschnitt 3 überprüft werden.

Auf die während des Kollapses vom Strom durchflossenen Volumenelemente der Hohlzylinderschicht wirkt eine Lorentzkraft, die mit der induzierten Magnetfeldstärke monoton

von der äußeren Oberfläche auf Null an der inneren Oberfläche abnimmt. Dadurch werden die äußeren Massenelemente stärker beschleunigt, was zu einer Kompression der gesamten Schicht führt, bis sich ein Gleichgewicht eingestellt hat. Dieses Gleichgewicht kommt durch die bei der Kompression entstehende adiabatische Aufheizung zustande, indem sich für jedes Volumenelement ein Gleichgewicht zwischen potentieller Energie im Beschleunigungsfeld und der eigenen thermischen Energie einstellt. Beim Erreichen dieses Gleichgewichtes nimmt die Dichte radial nach innen ab gemäß dem Gesetz der barometrischen Höhenformel.

Eine strenge mathematische Beschreibung müßte daher die radialen Abhängigkeiten von Lorentzkraft und der Dichte berücksichtigen, indem für jedes Massenelement eine Bewegungsgleichung gilt (partielle Differentialgleichung). Um diese Schwierigkeit zu umgehen, soll die radiale Abhängigkeit der Dichte durch einen Mittelwert ersetzt werden mit der Begründung, daß sich die gesamte Masse im Hohlzylinder praktisch in unmittelbarer Nähe der äußeren Oberfläche befindet. Das gilt um so besser, je kleiner die Schichtdicke gegenüber dem Radius ist. Ebenso soll die Lorentzkraft, die auf die äußere Oberfläche wirkt, die Schicht als Ganzes beschleunigen. Mit dieser Näherung läßt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung formulieren, die die Bewegung der Hohlzylinderschicht beschreibt. In dieser Bewegungsgleichung muß allerdings die Kompression der Schicht berücksichtigt werden mit einer Reaktionskraft, die proportional dem Plasmadruck ist und der Lorentzkraft entgegenwirkt.

Das Produkt von Masse des Hohlzylinders (pro Längeneinheit) mal der Beschleunigung der Schicht ist gleich:

$$N m_i \frac{du}{dt} = - \frac{H_0}{4\pi} \frac{J^2}{R} + N (kT_e + kT_i) \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} \frac{1}{u} \quad (1)$$

Dabei ist N die Zahl der Ionen pro Längeneinheit gleich dem Produkt aus Ionendichte n mal Querschnittsfläche F

des Hohlzylinders eine Konstante:

$$N = F \cdot n \quad (2)$$

Die Geschwindigkeit des Hohlzylinders sei u . Der erste Term der rechten Seite stellt die Lorentzkraft, der zweite die Reaktionskraft dar, wobei $kT_{e,i}$ die thermische Elektronen- bzw. Ionenenergie ist.

Die mit der Bewegungsgleichung (1) erzielte Näherung ist um so besser, je kleiner die Änderungsgeschwindigkeit der Schichtdicke gegenüber der Geschwindigkeit u der ganzen Schicht ist. Das ist während des eigentlichen Kollapses (Kollabierphase) erfüllt.

Bevor sich dieser Zustand eingestellt hat - in der sogenannten Anfahrphase -, wäre die größte Abweichung zu erwarten. Die Ergebnisse der Rechnung zeigen jedoch, daß die relative Änderung des Radius während der Anfahrphase klein gegen Eins ist (Abb. 2a). In der Anfahrphase würde als Folge der vorangegangenen ohm'schen Aufheizung die Schicht zu Beginn der Entladung nach außen und innen thermisch expandieren. Die Expansion der äußeren Oberfläche wird mit steigender Stromstärke über die Lorentzkraft aufgehalten. Dadurch wird die äußere Oberfläche radial nach innen beschleunigt. Die innere Oberfläche hingegen bewegt sich solange ungehindert in Richtung Zylinderachse, bis die Geschwindigkeit der äußeren Oberfläche größer wird als die der inneren. Letzteres führt zu einer Kompression der Schicht, die physikalisch nicht zu einer unendlich dünnen Schicht führen kann, sondern zu dem eingangs erwähnten Gleichgewicht zwischen thermischer und potentieller Energie des Plasmas im Beschleunigungsfeld.

Diese Näherung ist schließlich um so besser, je größer der Anfangsradius R_0 gegenüber der Anfangswandstärke δ_0 ist. Denn für $\delta_0/R_0 \ll 1$ wird die freie Expansion der inneren Oberfläche, d.h. die Anfahrphase eine kurze Zeit ausmachen

im ganzen Kollabierprozess. Bei gleicher Hohlzylindermasse sind kleine Werte für δ_0 mit der Forderung nach hohen Anfangsdichten n_0 im Hohlzylinder äquivalent.

In der Bewegungsgleichung (1) stehen die thermischen Energien von Elektronen und Ionen. Beides sind während des Kollapses veränderliche Größen. Es interessiert besonders der zeitliche Verlauf der thermischen Ionenenergie im Zustand maximaler Kompression zur Berechnung der Reaktionsrate für Kernfusionsprozesse. Die zeitliche Änderung der thermischen Energien ist gleich der Summe der pro Zeiteinheit geleisteten adiabatischen Expansions- bzw. Kompressionsarbeit und dem durch ohm'sche Aufheizung der Elektronen erzeugten Wärmeinstrom. Die Differentialgleichung, die das beschreibt, lautet:

$$\frac{d}{dt}(kT_e + kT_i) = - 2/3 (kT_e + kT_i) \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} + 2/3 \frac{\eta j^2}{n} \quad (3)$$

Der spezifische Widerstand η nimmt mit wachsender Elektronentemperatur¹⁰⁾ ab (Anhang I). Die ohm'sche Aufheizung hat daher die Eigenschaft mit wachsender Elektronentemperatur kleiner zu werden, wodurch sich in der Anfahrphase der zeitliche Verlauf der Elektronentemperatur unabhängig vom gewählten Anfangswert in kürzester Zeit einpendelt, solange dieser Anfangswert nicht größer als einige eV oder zu klein gewählt wird, so daß die Leitfähigkeit verschwindet. j ist die elektrische Stromdichte und hängt mit der Stromstärke J zusammen:

$$j = \frac{J}{F} \quad (4)$$

Schließlich ist in beiden Differentialgleichungen (1) und (3) die elektrische Stromstärke J enthalten, die mit der Kondensatorladung Q , der Kondensatorkapazität C , der Induktivität L und dem ohm'schen Widerstand R_h durch folgende Differentialgleichung für den elektrischen Entladekreis verknüpft ist:

$$\frac{d}{dt}(LJ) = -R_h J - \frac{Q}{C} \quad (5)$$

Der ohm'sche Widerstand R_h hängt mit dem spezifischen Widerstand zusammen:

$$R_h = \frac{\eta \ell}{F} \quad (6)$$

Die Induktivität L hängt vom Radius des Plasmahohlzylinders ab und ist eine Funktion der Zeit. Wenn L_0 die Induktivität des Kreises ist, bevor sich der Hohlzylinder bewegt, und R_0 der Anfangsradius, dann lässt sich L ausdrücken zu:

$$L = L_0 + \frac{\mu_0}{2\pi} \ell \ln \frac{R_0}{R} \quad (7)$$

Die Induktivität L nimmt also während des Kollapses mit kleiner werdendem Radius R zu. Mit der Ableitung von L nach der Zeit geht (5) über in:

$$\frac{d}{dt} J = - \frac{1}{L_0 - \frac{\mu_0}{2\pi} \ell \ln \frac{R}{R_0}} \left\{ \left(R_h - \frac{\mu_0}{2\pi} \ell \frac{u}{R} \right) J + \frac{Q}{C} \right\} \quad (8)$$

Man erkennt, daß sich die Zeitabhängigkeit von der Induktivität L als Ableitung wie ein zusätzlicher (induktiver) Widerstand verhält.

Die Gleichungen (1) (Bewegungsgleichung des Hohlzylinders), (3) (thermische Energiegleichung) und (8) (Stromkreisgleichung) sind die dem Plasmamodell zugrunde liegenden gewöhnlichen Differentialgleichungen. Sie beschreiben den Hohlpinchvorgang bei gegenseitiger Beeinflussung durch die Bewegung des Hohlzylinders, den thermischen Energieinhalt des Plasmas und den elektrischen Entladekreis. Wie in Anhang II gezeigt wird, sind die Gleichungen untereinander konsistent.

1.2 Die Wandstärke δ in der Anfahr- und Kollabierphase.

Die Bewegungsgleichung (1) reicht nicht aus, beide Größen, den Radius R und die Wandstärke δ als Funktion der Zeit zu liefern. Die Aufgabe besteht darin, im Einklang mit dem physikalischen Modell, das zur Formulierung einer gewöhnlichen Differentialgleichung für die Bewegungsgleichung der gesamten Plasmaschicht führte, die Wandstärke δ zu bestimmen. In der Anfahrphase richtet sich die Wandstärke δ im wesentlichen nach der thermischen Expansion der inneren Oberfläche. Unter Berücksichtigung der Relativgeschwindigkeit lässt sich mit der thermischen Geschwindigkeit u_{th} die Änderungsgeschwindigkeit der Wandstärke angeben:

$$\frac{d}{dt} \delta = \left(1 - \frac{\delta}{2R} \right) u + u_{th}, \quad (9)$$

wobei die thermische Geschwindigkeit von der thermischen Elektronen- und Ionenenergie abhängt:

$$u_{th} = \left(\frac{2}{3} \frac{kT_e + kT_i}{m_i} \right)^{1/2} \quad (10)$$

Die Differentialgleichung (9) legt die Wandstärke δ zusammen mit den bereits formulierten Differentialgleichungen fest.

Sobald sich der Gleichgewichtszustand zwischen potentieller Energie der Ionen im Beschleunigungsfeld und des thermischen Energieinhaltes der Schicht eingestellt hat, wird das Modell der Anfahrphase durch die Kollabierphase abgelöst. Es sollte sich eine radiale Dichteverteilung gemäß der barometrischen Höhenformel einstellen, die exponentiell nach innen abnimmt, unter der Voraussetzung, daß die relative Änderung der Beschleunigung klein gegen Eins ist:

$$\frac{\left| \Delta \frac{du}{dt} \right|}{\left| \frac{du}{dt} \right|} \ll 1 \quad (11)$$

Die Lösungen des Differentialgleichungssystem zeigen, daß die Beschleunigung während der Anfahrphase Werte von 10^{13} cm/sec² annimmt und daß dieser Wert während der gesamten Kollabierphase höchstens um ein paar Zehntel dieses Wertes schwankt. Als Maß für die Wandstärke δ soll die e-tel Länge angegeben werden:

$$\delta = \frac{kT_e + kT_i}{m_i \left| \frac{du}{dt} \right|} \quad (12)$$

An die Kollabierphase schliesst sich die Vollpinchphase an, in der der Hohlzylinder zum Vollzylinder verschmilzt und die Wandstärke gegenstandslos wird.

1.3 Die Funktionsweise von Reaktionskraft und adiabatischer Kompression. Der Übergang zur Vollpinchphase.

Die Reaktionskraft in der Bewegungsgleichung (1) und der Term, der die adiabatische Kompression in der Differentialgleichung (3) beschreibt, sind miteinander eng gekoppelt. Wächst die durch adiabatische Kompression erzeugte thermische Plasmaenergie, dann nimmt auch die Reaktionskraft zu. In beiden Termen geht das Produkt der relativen, zeitlichen Änderung der Fläche F mal der Summe der thermischen Energie der Elektronen und Ionen ein.

Es ist die Fläche F während der beiden ersten Phasen:

$$F = 2\pi R\delta \left(1 - \frac{\delta}{2R}\right) \quad (13)$$

Die relative, zeitliche Änderung der Fläche F ist mit (13):

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dt} = \frac{1}{1 - \frac{\delta}{2R}} \left\{ \frac{u}{R} + \left(1 - \frac{\delta}{R}\right) \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dt} \right\} \quad (14)$$

Durch Einsetzen von (14) in die Bewegungsgleichung (1) sieht man, daß sich die Reaktionskraft aus zwei Komponenten zusammensetzt. Der erste Term ist proportional $1/R$. Er gibt den Einfluss der radialen Kompression wieder,

die dadurch entsteht, daß das Volumen der Schicht mit konstanter Schichtdicke δ durch Verkleinern des Radius R komprimiert wird. Für eine ebene Wand ($1/R \rightarrow 0$) würde dieser Beitrag zur Reaktionskraft verschwinden. Die Reaktionskraft wird also mit kleiner werdendem Radius immer größer. Das gilt auch für die Erhöhung der thermischen Plasmaenergien durch adiabatische Kompression. Diese $1/R$ -Abhängigkeit hat zur Folge, daß die Thermalisierung der kinetischen Energie der Ionen und die gleichzeitige Abbremsung des Kollapses erst merklich bei kleinen Radien einsetzt.

Der zweite Term in (14) berücksichtigt die relative, zeitliche Änderung der Wandstärke. Die Änderung von δ beruht einerseits auf der Kompression der Schicht infolge der Trägheit der Ionen und andererseits auf einer Aufweitung infolge der thermischen Bewegung der Ionen und Elektronen. Während der Kollabierphase sind die Beschleunigung der Schicht und die Temperaturen von Ionen und Elektronen nahezu konstant. Erst gegen Ende der Kollabierphase stellt der zweite Term in (14) einen Korrekturfaktor gegenüber dem ersten dar. Zu diesem Zeitpunkt setzt auch die radiale Kompression, durch den $1/R$ Term beschrieben, ein, so daß die thermischen Energien im Plasma wachsen. Rückwirkend führt das zu einer leichten Aufweitung der Schicht.

Die Lösungen zeigen außerdem, daß gegen Ende der Kollabier- und in der Vollpinchphase die Skintiefe merklich kleiner wird als die Schichtdicke bzw. der Radius. Während der Anfahrphase trägt das in der Plasmaschicht eingeschlossene Magnetfeld gerade dazu bei, die Schicht gleichmässig zu beschleunigen. In der Vollpinchphase hingegen wird das Plasma magnetfeldfrei, so daß die Kompression nicht durch eingeschlossene Magnetfelder behindert wird.

In der Vollpinchphase wird die Fläche F nur durch den Radius R bestimmt:

$$F = \pi R^2 \quad (15)$$

Die relative Flächenänderung ist gleich:

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dt} = 2 \frac{u}{R} \quad (16)$$

Ein Vergleich dieses Ergebnisses mit der radialen Abhängigkeit während der beiden ersten Phasen (14) zeigt, daß in der Vollpinchphase die Abhängigkeit der radialen Kompression in (3) bzw. Abbremsung durch die Reaktionskraft in (1) gerade doppelt so groß ist (Faktor 2) als in den beiden ersten Phasen, solange $\delta/R \ll 1$. Das ist darauf zurückzuführen, daß in der Vollpinchphase der Effekt des ersten Termes in (14) also der radialen Kompression und der des zweiten Termes, die Kompression der Schicht, zusammenfallen.

In dieser Phase wird nun die kinetische Energie der Ionen vollständig thermalisiert (Anhang I). Wenn die Plasmaoberfläche zum Stillstand kommt, wird der Endzustand, der maximale Wert für die thermische Ionenenergie kT_i sowie die höchste Dichte erreicht. Man erhält thermische Energien von einigen keV und Kompressionsfaktoren von einigen 10^3 .

Während der Vollpinchphase gilt es nun, aus dem zeitlichen Verlauf der Iontemperatur und Dichte die Neutronenrate⁹⁾ zu ermitteln:

$$\alpha = 1/4 n^2 (\overline{\sigma v}) \text{ Neutronen/cm}^3 \text{ sec} \quad (17)$$

Dabei ist σ der Wirkungsquerschnitt der D-T Reaktion und v die relative Geschwindigkeit von D und T Ionen. In Formel (17) steht der über die Maxwell-Verteilung der thermischen Ionenenergie gemittelte Wert $(\overline{\sigma v})$. Die Neutronenrate liefert - integriert über das Reaktionsvolumen und die Zeit - die Neutronenausbeute N_p . Die Neutronenausbeute wiederum ist ein Maß für die pro Puls durch Kernfusion frei gewordene Energie.

Die Integration der den Hohlpinch beschreibenden Differen-

tialgleichungen wurde numerisch mit Hilfe der IBM 7074 Karlsruhe durchgeführt. Das Differentialgleichungssystem wurde mit Hilfe des Runge - Kutta Verfahrens¹¹⁾ gelöst. Die Integration der Reaktionsrate erfolgte nach der Simpson - Regel. Der Abrundungsfehler beider Verfahren ist fünfter Ordnung. Es wurde eine veränderliche Schrittweite eingeführt, um die starken Schwankungen der Variablen im Endzustand aufzufangen und die Rechenzeit im übrigen Bereich zu verkürzen.

1.4 Diskussion des Hohlpinchmodells an Hand einer Lösung der Differentialgleichungen.

Die Lösung und das Hohlpinchmodell sollen hier an Hand eines ausgewählten Beispielles erläutert werden. Die folgenden Daten des Plasmas, Hohlzylinders und der Kondensatorbatterie, deren Wahl in Abschnitt 2 begründet wird, ergeben eine Neutronenausbeute von $N_p \sim 2,5 \cdot 10^{13}$ Neutronen.

Die Abmessung des Hohlzylinders ist:

$$\begin{aligned} R_0 &= 30 \text{ cm} \\ l &= 10 \text{ cm} \\ \delta_0 &= 0,5 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Das Plasma besitzt eine Anfangsdichte $n_0 = 7,1 \cdot 10^{16}$ Ionen/cm³ und die Anfangstemperaturen entsprechend $kT_e = 1$ eV und $kT_i = 0,95$ eV. In der angeschlossenen Kondensatorbatterie ist eine Energie $E_c = 200$ kJ gespeichert bei einer Ladespannung $U_0 = 100$ kV und einer Kapazität $C = 40$ μ F. Die Anfangsinduktivität ist $L_0 = 10$ nH.

Mit diesen Anfangswerten und Randbedingungen erhält man als Lösung der Differentialgleichungen den in Abb. 2 skizzierten Verlauf der Variablen. Aufgetragen ist über der Zeit in μ sec in Teil a) der Radius R der äußeren Oberfläche in cm und im Abstand δ von R die innere Oberflächenbegrenzung, so daß beide Kurven die Begrenzung der Plasmaschicht wieder-

geben,- in Teil b) in eV die kinetische Energie der Ionen E_{kin} , sowie die thermischen Energien von Elektronen kT_e und Ionen kT_i , - in Teil c) die durch das Plasma fließende Stromstärke J in MA und die Kondensatorladung Q in Coul.

In Teil a) sind ferner die einzelnen Bewegungsphasen angedeutet. Während der Anfahrphase wird die zunächst durch den Plasmadruck bedingte thermische Expansion der äußeren Oberfläche bereits nach $0,063 \mu\text{sec}$ aufgehalten durch die Lorentzkraft. Das dazu notwendige rasche Anwachsen der Magnetfeldstärke an der Plasmaoberfläche ist durch den steilen Stromanstieg gegeben (Teil c). Die innere Oberfläche expandiert währenddessen ungehindert mit einer Geschwindigkeit, die durch den thermischen Energieinhalt des Plasmas gegeben ist. Die von der Lorentzkraft vorangetriebene äußere Oberfläche wird allmählich schneller als die innere, so daß eine Kompression der Schicht einsetzt. Elektronen und Ionen werden dabei adiabatisch aufgeheizt (Teil b), bis nach $0,27 \mu\text{sec}$ die Elektronen und Ionen in der Plasmaschicht eine thermische Energie besitzen, die vergleichbar ist mit der potentiellen Energie im Beschleunigungsfeld der Schicht. Die eigentliche Kollabierphase setzt ein. Anfangs derselben bleibt die Wandstärke der Schicht nahezu konstant. Die thermischen Energien nehmen schwach zu von etwa 8 auf 30 eV. Während der Kollabierphase erreicht hingegen die kinetische Energie der Ionen E_{kin} bereits nach $0,45 \mu\text{sec}$ die keV-Grenze. Das Plasma bleibt also während des Beschleunigungsprozesses kalt im Vergleich zur kinetischen Energie.

Der Anstieg der thermischen Energien gegen Ende der Kollabierphase und die Aufweitung der Schicht sind durch die bei kleinen Radien sehr wirksame radiale Kompression bedingt. Die Kollabierphase geht in die Vollpinchphase nach $0,881 \mu\text{sec}$ über. Während derselben wird der kinetische Energieinhalt der Ionen durch adiabatische Kompression vollständig thermalisiert. Die Dichte und thermische Energie der Ionen nehmen stark zu. Der sich schnell aufbauende Plasmadruck bringt die Bewegung der Oberfläche bereits nach $0,893$

a)

$$R_0 = 30 \text{ cm}$$

$$\delta_0 = 0,5 \text{ cm}$$

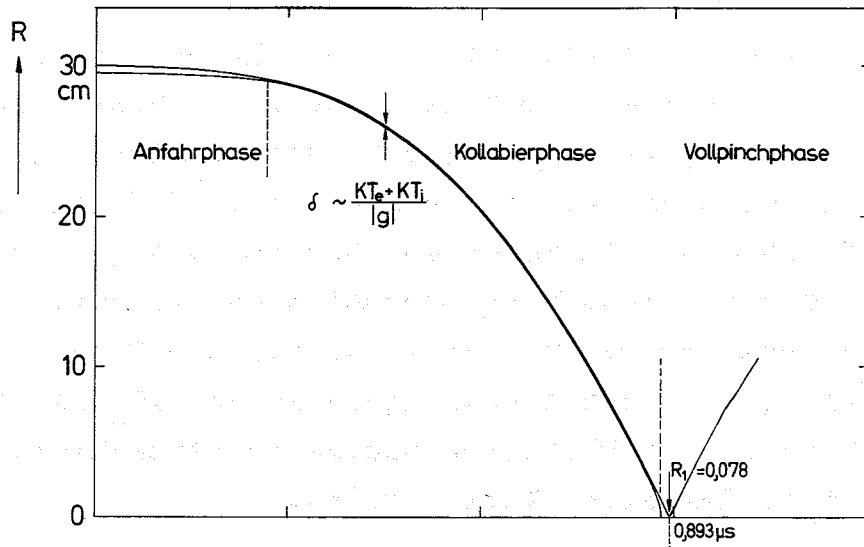
$$l = 10 \text{ cm}$$

$$U_0 = 100 \text{ kV}$$

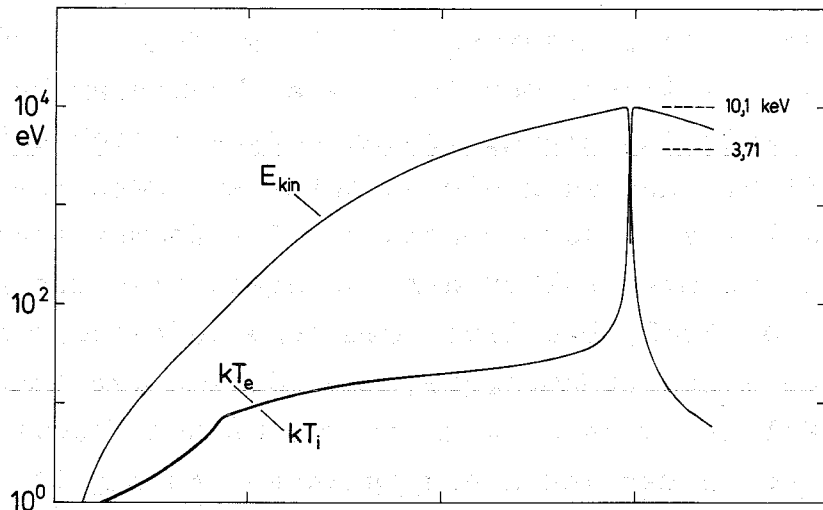
$$C = 40 \text{ } \mu\text{F}$$

$$L_0 = 10 \text{ nH}$$

$$n_0 = 7,1 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$



b)



c)

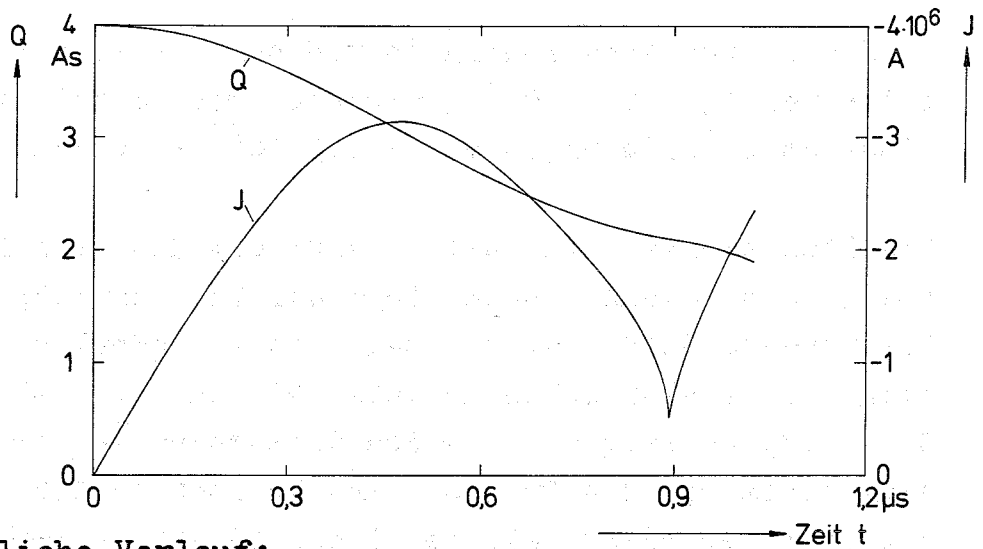


Abb. 2 Der zeitliche Verlauf:

- a) des den Hohlzylinder begrenzenden äußeren bzw. inneren Radius,
- b) der kinetischen Energie E_{kin} der Ionen in der Plasmaschicht und der thermischen Elektronen- und Ionenenergie $kT_{e,i}$,
- c) der elektrischen Stromstärke J und der Ladung Q im Kondensator.

μsec zum Stillstand. Das sind nur 12 nsec nach Einsetzen der Vollpinchphase. Der kleinste Durchmesser des Endzustandes ist 0,156 cm, was einen Kompressionsfaktor von 4920 und die maximal erreichbare Dichte $n = 3,5 \cdot 10^{20}$ Ionen/cm³ ergibt. Das Maximum der thermischen Ionenenergie ist $kT_i = 3,71$ keV. Bei der anschliessenden Expansion der Plasmasäule wird die thermische Energie wieder in kinetische Energie umgesetzt. In Teil b) ist das starke Abnehmen von kT_e und kT_i nach Durchlaufen des kleinsten Radius zu beobachten, während E_{kin} fast den alten Wert erreicht.

Bei der Volumenänderung der Plasmasäule in der Vollpinchphase werden Elektronen und Ionen gleichermassen komprimiert. Die kinetische Energie der Ionen verteilt sich daher auf Ionen und Elektronen zu gleichen Anteilen, wenn die thermische Energie beider Komponenten vor der Kompression gleich war. In den meisten Fällen der durchgeführten Rechnungen ist das auch der Fall. Die durch ohm'sche Aufheizung erzeugte thermische Elektronenenergie wird während der langen Anfahr- und Kollabierphase durch einen zweiten Thermalisierungsprozess an den Ionen ausgeglichen (Anhang I).

Im Endzustand wird innerhalb von ca. 1 nsec ein Neutronenblitz von $N_p = 2,3 \cdot 10^{13}$ Neutronen erzeugt bei einer Reaktionsrate, deren Maximum $\alpha = 1,2 \cdot 10^{23}$ Neutronen/cm³ sec ist.

Die Stromstärke J in Teil c) verläuft über ein Maximum, obwohl die Ladung Q noch nicht auf Null zurückgefallen ist. Die Ursache dafür ist die zeitlich veränderliche Induktivität des elektrischen Kreises. Die Induktivität geht in der Differentialgleichung des Entladekreises in den Nenner ein, indem sie die Frequenz des Kreises in Abhängigkeit von der Zeit verändert. Als zeitliche Ableitung verhält sie sich im Zähler wie ein induktiver Widerstand. Die Zunahme der Induktivität ist gegen Ende des Kollapses so stark, daß die Stromstärke abnehmen muß. Das Maximum $J_m = 3,15$ MA wird bei 0,47 μsec erreicht. Die Stromstärke fällt während der Vollpinchphase auf Werte unterhalb 0,52 MA.

Abschließend gilt es zu untersuchen, in wie weit die zum Plasmamodell getroffenen Annahmen durch die Lösungen erfüllt werden.

Es wurde angenommen, daß die Materie in der Schicht stets im Plasmazustand ist. Ein Kriterium dafür ist der Vergleich der Debylänge mit einer charakteristischen Referenzlänge, die in diesem Fall die Schichtdicke sein soll. Die Debylänge wird aus dem Verhältnis von Temperatur und Dichte gebildet und gibt den Radius einer Kugel an, innerhalb der sich die Dichteschwankungen von Elektronen und Ionen ausgleichen, so daß das Plasma sich nach außen elektrisch neutral verhält. Die Debylänge ist während des ganzen Pinchvorganges stets einige 10^{-6} cm groß, was sehr klein ist gegen die Schichtdicke. Die magnetohydrodynamische Beschreibung des Plasmas ist daher korrekt.

Ferner wurde vorausgesetzt, daß die kinetische Energie, die die Ionen durch den Beschleunigungsprozess erhalten, im Endzustand vollständig thermalisiert. Dazu müssen die Thermalisierungszeiten t_c stets kleiner sein als die Halbwertszeit von kT_i in Teil b). Die Haltezeit Δt soll definiert werden als die Halbwertsbreite des zeitlichen Verlaufes der thermischen Ionenenergie kT_i , der sich unter der Annahme vollständiger Thermalisierung ergibt, und verglichen werden mit der Thermalisierungszeit t_c . Diese lässt sich berechnen¹⁰⁾ zu:

$$t_c = \frac{m_i^{1/2} (3 kT_i)^{3/2}}{8 \cdot 0,71 \pi n e^4 \ln \Lambda} \quad (18)$$

Für das hier gewählte Beispiel ist mit

$$\Delta t = 2,9 \text{ nsec} > t_c = 1,3 \text{ nsec}$$

die Bedingung der Thermalisierung im Endzustand erfüllt. In Abschnitt 2 wird gezeigt, daß bei anderer Wahl der Versuchsparameter nicht immer die Bedingung $\Delta t > t_c$ erfüllt ist.

Wenn die Thermalisierungszeit größer ist als die berechnete Haltezeit, dann durchdringt sich die Plasmaschicht an der Achse mit niedriger Enddichte, ohne daß eine Thermalisierung der kinetischen Ionenenergie einsetzt. Die Neutronenausbeute N_p ergibt sich ebenfalls über die Reaktionsrate (17). Nur darf in diesem Fall bei der Berechnung des in der Reaktionsrate eingehenden Faktors ($\overline{\sigma v}$) keine Maxwell-Verteilung, sondern die Relativgeschwindigkeit $2u$ der Ionen bei Beendigung der Kollabierphase eingesetzt werden. Insgesamt ergibt sich, daß die Neutronenausbeute für dieses Modell der freien Durchdringung (Anhang III) trotz kleinerer Enddichte um nur etwa eine Größenordnung kleiner ist als unter der Annahme vollständiger Thermalisierung.

Die Thermalisierungszeit der Elektronen (Formel (18) mit Index e statt i) ist um die Wurzel des Massenverhältnisses immer kleiner als die der Ionen (18). Die Thermalisierung der Elektronen ist bei Thermalisierung der Ionen immer gewährleistet.

2. Optimalisierung der Versuchsparameter in Bezug auf eine hohe Neutronenausbeute.

In Abschnitt 1 wurde ein Plasmamodell entwickelt, das den Hohlpinchvorgang beschreibt und als Ergebnis die Neutronenausbeute N_p in Abhängigkeit von den Anfangswerten und Randbedingungen (Parameter) liefert. In den folgenden Abschnitten werden als Anwendungsbeispiel diese Parameter variiert und ihre Optimalwerte in Bezug auf eine hohe Neutronenausbeute bestimmt.

Zu den bei allen Variationen konstant gehaltenen Größen gehören die Anfangswerte der thermischen Energien im Plasma (Abschnitt 1):

$$kT_e = 1 \text{ eV}$$

$$kT_i = 0,95 \text{ eV}$$

und die Induktivität L_0 des Entladekreises, bevor sich der Hohlzylinder bewegt. Mit Angaben aus der Industrie und Abschätzungen über die Induktivitäten von Kondensatoren, Funkenstrecken und Zuleitungen kann als herstellbarer Anfangswert der Induktivität, der möglichst klein sein sollte, $L_0 = 10 \text{ nH}$ angenommen werden.

Variiert werden die Parameter:

Ladespannung	U_0	Anfangsradius	R_0
Kondensatorkapazität	C	Hohlzylinderhöhe	l
		Anfangswandstärke	δ_0
		Anfangsdichte	n_0

Der Variationsbereich der Parameter wird nach diversen Gesichtspunkten beschränkt. In Bezug auf die Parameter der Kondensatorbatterie ergibt sich ein monotoner Anstieg von N_p mit wachsender Kapazität und Ladespannung, so daß man zunächst versucht ist, diese Parameter und durch sie die gespeicherte Energie im Kondensator beliebig zu vergrößern. Die Erhöhung

der Ladespannung führt direkt zu einer starken Zunahme der Stromstärke ohne den elektrischen Kreis, gekennzeichnet durch L und C zu verändern. Im Rahmen des technisch Möglichen lässt sich U_0 bis zu 100 kV erhöhen, während der Wahl von C zunächst keine Grenzen gesetzt zu sein scheinen. Eine Vergrößerung von C verlangsamt aber den Entladekreis, indem die Eigenfrequenz desselben erniedrigt und dadurch der Anteil der gespeicherten Energie, die während des Kollapses ins Plasma umgewandelt wird, immer kleiner wird. Demzufolge steigt N_p nur langsam mit wachsendem C verglichen mit der Zunahme von N_p bei größer werdender Ladespannung. Die Kondensatorbatterie würde durch eine zu große Erhöhung der Kapazität unwirtschaftlich im Vergleich mit anderen Neutronengeneratoren. Die Optimalisierung weist darauf hin, daß z.B. $C = 40 \mu\text{F}$ ein sinnvoller Wert ist (Abb. 6).

Der Anfangsdurchmesser soll im Hinblick auf das Strahlerzeugungssystem bei der Variation nicht den Wert $2R_0 = 100 \text{ cm}$ überschreiten.

2.1 Variation des Anfangsradius bei verschiedenen Kapazitäten C .

Zu den konstanten Größen gehören die Ladespannung $U_0 = 100 \text{ kV}$, die Höhe des Hohlzylinders $l = 10 \text{ cm}$ und die Anfangswandstärke $\delta_0 = 0,5 \text{ cm}$.

Tabelle 2.1

Konstant: $U_0 = 100 \text{ kV}$, $l = 10 \text{ cm}$, $\delta_0 = 0,5 \text{ cm}$

R_0 cm	C μF	n_0 cm^{-3}
20	20, 40, 60	$10^{16} - 10^{18}$
30	20, 40, 60	
40	20, 40, 60	
50	20, 40, 60	

Die Variation des Anfangsradius $R_0 = 20, 30, 40$ und 50 cm wird bei drei verschiedenen Kapazitäten $C = 20, 40$ und 60 μF durchgeführt. Die entsprechende gespeicherte Energie ist $E_c = 100, 200$ und 300 kJ. Bei jedem Wertepaar von C und R_0 wird durch Variation der Anfangsdichte n_0 von 10^{16} bis 10^{18} Ionen/cm³ die maximale Neutronenausbeute und die optimale Anfangsdichte bestimmt.

Im folgenden soll die bei allen weiteren Variationen angewandte Systematik zur Ermittlung der optimalen Anfangsdichte erläutert werden.

Die Neutronenausbeute besitzt ein Maximum bei Variation der Anfangsdichte n_0 (i.a. zwischen $10^{15} - 10^{18}$ Ionen/cm³) und festgehaltenen anderen Parametern, (siehe z.B. Abb. 4 Kurve 2) und was wie folgt zu erklären ist. Bei kleiner Anfangsdichte ist die gesamte zu beschleunigende Masse ebenfalls klein, wodurch der Hohlpinch hohe Endgeschwindigkeiten und über die Thermalisierung der kinetischen Energie auch hohe Iontemperaturen erreicht. Während aber die hohe Iontemperatur günstig in das Produkt $(\bar{\sigma v})$ der Reaktionsrate (17) eingeht, ist die Enddichte klein. Vor allem aber verkürzt sich die Haltezeit wegen der hohen Iontemperatur derart, daß die Neutronenausbeute insgesamt kleiner wird. Bei hoher Anfangsdichte hingegen wird die Endgeschwindigkeit, bzw. Iontemperatur klein, was stark den Wirkungsquerschnitt σ herabsetzt. Die nun kleinere Reaktionsrate wird nicht mehr von der längeren Haltezeit kompensiert. Die Neutronenausbeute wird wieder kleiner. Im Zwischenbereich liegt das Maximum der Neutronenausbeute.

Die Untersuchung, wie sich Haltezeiten und Thermalisierungszeiten zueinander verhalten (siehe z.B. Abb. 3 Kurve 2 und 4), führt zur Feststellung, daß das Maximum der unter der Voraussetzung der Thermalisierung errechneten Neutronenausbeute bereits bei Dichten liegt, für die diese Thermalisierung während der kurzen Haltezeit noch nicht eingesetzt haben kann. Die Bereiche der Anfangsdichten, in denen mit

Abb. 3

$\ell = 10 \text{ cm}$
 $\delta_0 = 0,5 \text{ cm}$
 $U_0 = 100 \text{ kV}$

	C μF
1	60
2	40
3	20

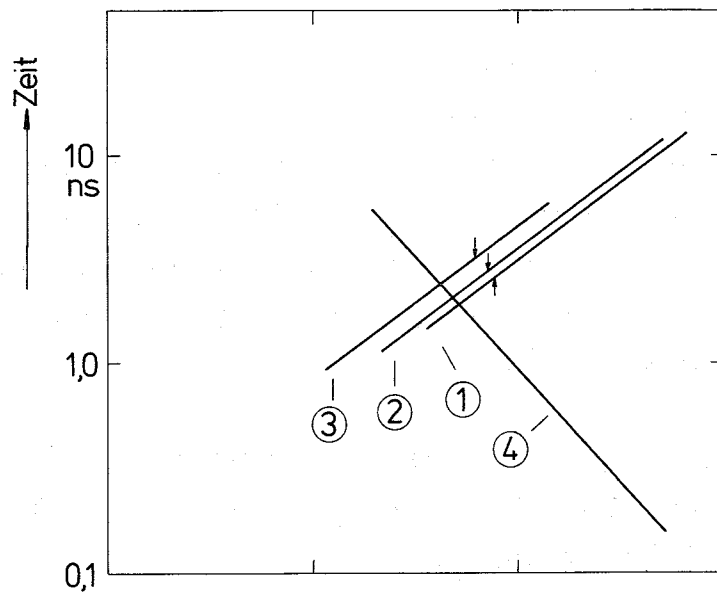


Abb. 4

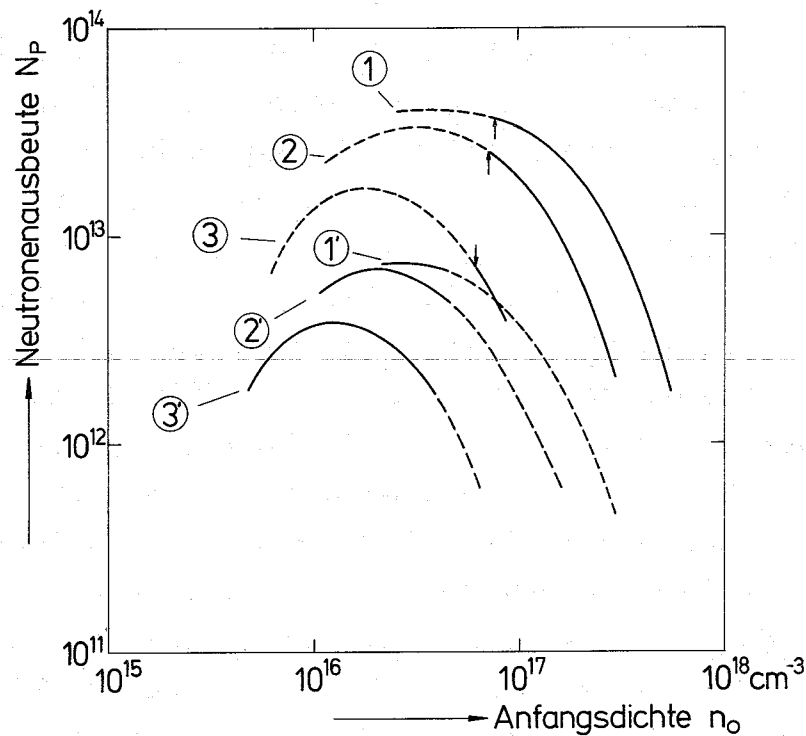


Abb. 3 Für einen $R_0 = 30 \text{ cm}$ Hohlzylinder sind über der Anfangsdichte n_0 aufgetragen die Haltezeit Δt mit der Kapazität $C = 60 \mu\text{F} \hat{=} 1$, $40 \mu\text{F} \hat{=} 2$, $20 \mu\text{F} \hat{=} 3$ als Parameter. 4 ist die Thermalisierungszeit t_c (siehe Text).

Abb. 4 Für einen $R_0 = 30 \text{ cm}$ Hohlzylinder ist über der Anfangsdichte n_0 aufgetragen die Neutronenausbeute N_p (Parameter C wie oben). Die apostrophierten Kurven gelten für das Modell der freien Durchdringung eines unthermalisierten Plasmas.

Thermalisierung gerechnet werden kann, liegen in Richtung höherer Anfangsdichten und damit auch längerer Haltezeiten. In Bereichen kleiner Anfangsdichten, in denen die Thermalisierungszeiten wesentlich größer als die Haltezeiten sind, gilt für die Vollpinchphase das Modell der freien Durchdringung (Abschnitt 1.4). Die Neutronenausbeute für dieses Modell lässt sich berechnen, wie in Anhang III gezeigt wird (Abb. 4 Kurve 2'). Sie ist um etwa eine Größenordnung kleiner als der Wert, der sich ergeben würde bei vollständiger Thermalisierung. Deshalb ist dieser Wert i.a. noch immer kleiner als die höchste Neutronenausbeute, die sich im thermalisierten Bereich ergibt. Im Zwischenbereich, wo Thermalisierungszeit und Haltezeit sich überkreuzen, lässt sich keine genauere Angabe zur Neutronenausbeute machen, als daß sie nicht größer sein wird als unter der Annahme vollständiger Thermalisierung.

Zusammenfassend kann also festgehalten werden:

1. Die höchste zu erwartende Neutronenausbeute liegt im Bereich des vollständig thermalisierten Plasmas.
2. Für den Einsatz der vollständigen Thermalisierung soll angenommen werden, daß dieser bei einer Haltezeit beginnt, die doppelt so lang ist wie die entsprechende Thermalisierungszeit.
3. Der Wert der entsprechenden Anfangsdichte ($\Delta t = 2 \cdot t_c$) ist bereits der optimale Wert in Bezug auf die höchste Neutronenausbeute und für den entsprechenden Satz festhaltener Parameter.

In Abb. 3 sind über der Anfangsdichte n_0 die Haltezeiten Δt in nsec (Kurven 1, 2, 3) aufgetragen. Parameter für jede Kurve ist die Kapazität C . Außerdem sind aufgetragen die Thermalisierungszeiten t_c in nsec (Kurve 4), die in diesem Fall für alle C übereinstimmen. Die Thermalisierungszeiten t_c nehmen mit zunehmender Anfangsdichte n_0 stark ab, während die Haltezeiten Δt länger werden. Die Abnahme der Thermalisierungszeiten bei großen Anfangsdichten hängt damit zusammen, daß ebenfalls die Ionentemperatur stark abnimmt, die ihrerseits über den Wirkungsquerschnitt der Coulomb-

Abb. 5

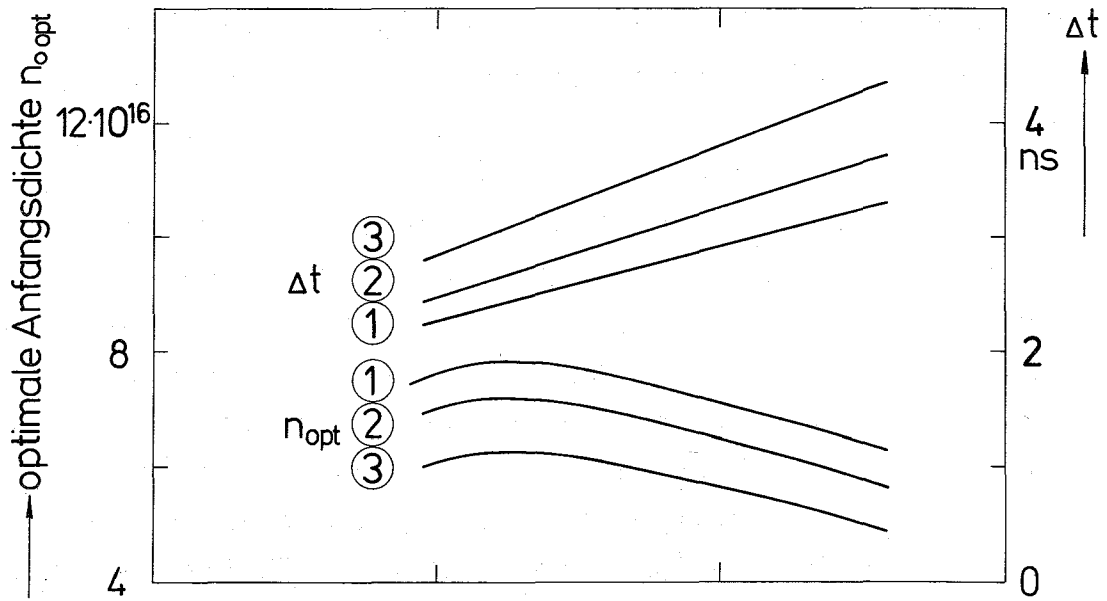


Abb. 6

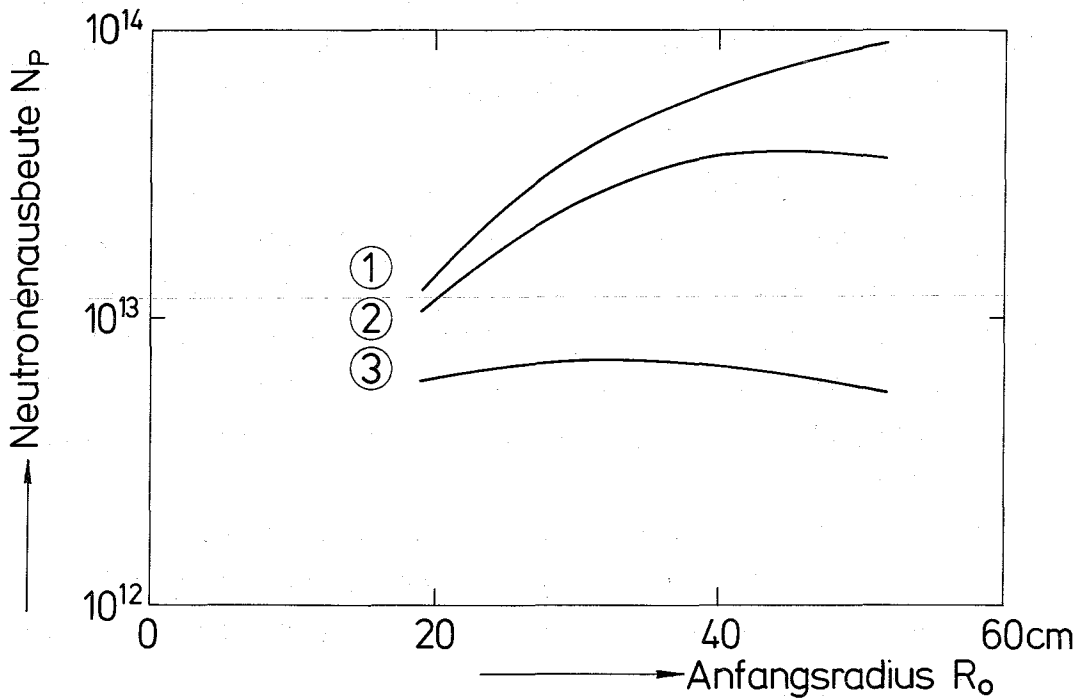


Abb. 5 Die der maximalen Neutronenausbeute N_p (siehe Abb. 4) entsprechende optimale Anfangsdichte $n_{0,opt}$ und Haltezeit Δt über verschiedene Anfangsradien R_0 (Parameter C wie oben).

Abb. 6 Die zu jedem Anfangsradius R_0 maximale Neutronenausbeute N_p (Parameter C wie oben).

Streuung in die Thermalisierungszeit eingeht (siehe (18)). Die mit Pfeilen gekennzeichneten Punkte geben die Haltezeit Δt an, für die $\Delta t = 2 \cdot t_c$ gilt, und legen somit die optimale Anfangsdichte fest.

In Abb. 4 ist die Neutronenausbeute über der Anfangsdichte n_0 aufgetragen. Parameter ist wieder die Kapazität C. Zu jedem Wert C gehören zwei Kurven: die Neutronenausbeute für das thermalisierte Plasma rechts der eingezeichneten Pfeile, die über den optimalen Anfangsdichten aus Abb. 3 liegen, (jeweils Kurve 1, 2 und 3) und die Neutronenausbeute (nach Anhang III) für das unthermalisierte Plasma, links der eingezeichneten Pfeile (jeweils Kurve 1', 2' und 3'). In dem Zwischenbereich, in dem Thermalisierungszeiten gleich Haltezeiten sind, lässt sich keine genauere Aussage machen. Die beiden Kurven sind daher in diesem Bereich und ausserhalb ihres eigentlichen Gültigkeitsbereiches gestrichelt weitergeführt.

Den Abb. 3 und 4 lassen sich somit für den Anfangsradius $R_0 = 30$ cm die optimale Anfangsdichte, die Haltezeit und die höchste Neutronenausbeute entnehmen. Die entsprechenden Werte werden aus ähnlichen Diagrammen für die übrigen Anfangsradien entnommen. In den Abb. 5 und 6 sind diese aufgetragen über den Anfangsradius R_0 in cm. Abb. 5 gibt die optimale Anfangsdichte in cm^{-3} und die entsprechende Haltezeit in nsec wieder, wobei wieder die Kapazität C als Parameter eingeht.

In den Differentialgleichungen (1) und (3) geht nicht die Anfangsdichte sondern die Zahl N der Ionen pro Längeneinheit (2) ein. N hängt mit der Anfangsdichte über das Produkt

$$N = 2\pi R_0 \delta_0 n_0 \quad (19)$$

zusammen. Mit (19) und Abb. 5 lässt sich leicht prüfen, daß die Zahl N der Ionen pro Längeneinheit, d.h. die gesamte zu beschleunigende Masse des Hohlzylinders zunimmt,

obwohl die optimale Anfangsdichte mit steigendem Anfangsradius kleiner wird. Dennoch soll im folgenden nicht die Größe N benutzt werden, sondern die Anfangsdichte, weil diese eine anschaulichere Bedeutung hat.

Die optimale Anfangsdichte schwankt um $7 \cdot 10^{16}$ Ionen/cm³ und nimmt bei festem R_0 mit fallender Kapazität C wegen der gleichzeitigen Verkleinerung der gespeicherten Energie E_c ab. Die optimale Haltezeit nimmt mit wachsendem Radius linear zu und schwankt um 3 nsec, wie aus Abb. 5 zu entnehmen ist. In Abb. 6 ist über dem Anfangsradius R_0 für jede der drei Kapazitäten C als Parameter die für jedes R_0 maximale Neutronenausbeute $N_{p \max}$ aufgetragen. Sie liegt zwischen $9 \cdot 10^{13}$ und $5 \cdot 10^{12}$ Neutronen/Puls. Man erkennt sofort, daß jedem Wert der Kapazität C genau ein Anfangsradius R_0 gehört, bei dem die Neutronenausbeute maximal wird. Dieses Maximum liegt bei niedriger Kapazität bei kleinen Radien R_0 (z.B. 20 μ F und 35 cm) und wandert mit höherer Kapazität zu größeren Radien (z.B. 60 μ F und >50 cm). Der Absolutwert des Maximums nimmt dabei zu von $7,2 \cdot 10^{12}$ auf $\sim 10^{14}$ Neutronen/Puls.

Die Abnahme der Kurven bei großen Radien (z.B. Abb. 6 Kurve 2) ist dadurch zu erklären, daß ein Hohlpinch mit großem Anfangsradius zwar mit einer längeren Beschleunigungsstrecke und geeigneter Wahl der Anfangsdichte die Ionen auf eine höhere kinetische Energie bringen kann, dafür sich aber die Haltezeit stark verkürzt, so daß mit den ohnehin länger werdenden Thermalisierungszeiten das Plasma im Endzustand nicht thermalisiert. Um in den Bereich der Thermalisierung zu gelangen, muß die Zahl der zu beschleunigenden Ionen erhöht werden. Das verkleinert die Iontemperatur im Endzustand, so daß Reaktionsrate und Neutronenausbeute abnehmen.

Die Abnahme der Neutronenausbeute hingegen bei kleinen Radien ist dadurch bedingt, daß nunmehr die Beschleunigungsstrecke zu kurz wird und die ungünstige Energieübertragung kleinere Iontemperaturen liefert.

Als Ergebnis kann vermerkt werden, daß durch die Wahl von Ladespannung und Kapazität, die die Kondensatorbatterie bestimmen, bereits optimale Werte von Radius und Anfangsdichte des Hohlzylinders festgelegt werden.

Als praktisches Ergebnis lässt das Diagramm (Abb. 6) nun für einen Hohlpinchversuch die folgende Wahl der Parameter als günstig erscheinen:

Ladespannung $U_0 = 100 \text{ kV}$
Kapazität $C = 40 \text{ } \mu\text{F}$ } gespeicherte Energie $E_c = 200 \text{ kJ}$
Anfangsradius $R_0 = 30 \text{ cm.}$

Gegenüber $C = 20 \text{ } \mu\text{F}$ gewinnt man in der Neutronenausbeute einen Faktor 3,5, wogegen bei gleichem Anfangsradius R_0 die Neutronenausbeute mit einer Kapazität $C = 60 \text{ } \mu\text{F}$ um nur 1,9 mal höher wäre, höchstens aber ebenfalls 3,5 mal, wenn man in Kauf nimmt, den Anfangsradius von $R_0 = 30 \text{ cm}$ auf $R_0 = 50 \text{ cm}$ zu vergrößern. Andererseits liefert die Wahl von $R_0 = 30 \text{ cm}$ bei gleicher Kapazität $C = 40 \text{ } \mu\text{F}$ gegenüber $R_0 = 20 \text{ cm}$ einen Faktor 2,2 in der Neutronenausbeute. Der Absolutwert der Neutronenausbeute für die vorgeschlagene Schar von Parametern liegt bei $2,5 \cdot 10^{13}$ Neutronen/Puls. Die zugehörige optimale Anfangsdichte entnimmt man Abb. 5: $n_0 = 7,1 \cdot 10^{16}$ Ionen/cm³.

2.2 Variation der Höhe λ des Hohlzylinders.

Konstant gehalten werden die in Abschnitt 2.1 vorgeschlagenen Werte der Kondensatorbatterie sowie Anfangsradius und -wandstärke des Hohlzylinders (Tabelle 2.2). Variiert wird die Höhe λ des Hohlzylinders von 2,5, 5, 10, 15 auf 20 cm. Für jeden dieser Werte wird die Anfangsdichte variiert, um wie in Abschnitt 2.1 die optimale Anfangsdichte zu ermitteln, bei der die Thermalisierung im Endzustand gewährleistet ist und die eine maximale Neutronenausbeute N_p liefert.

Abb. 7

$U_o = 100 \text{ kV}$
 $C = 40 \text{ } \mu\text{F}$
 $R_o = 30 \text{ cm}$
 $\delta_o = 0,5 \text{ cm}$

	l	cm
1	2,5	
2	5	
3	10	
4	15	
5	20	

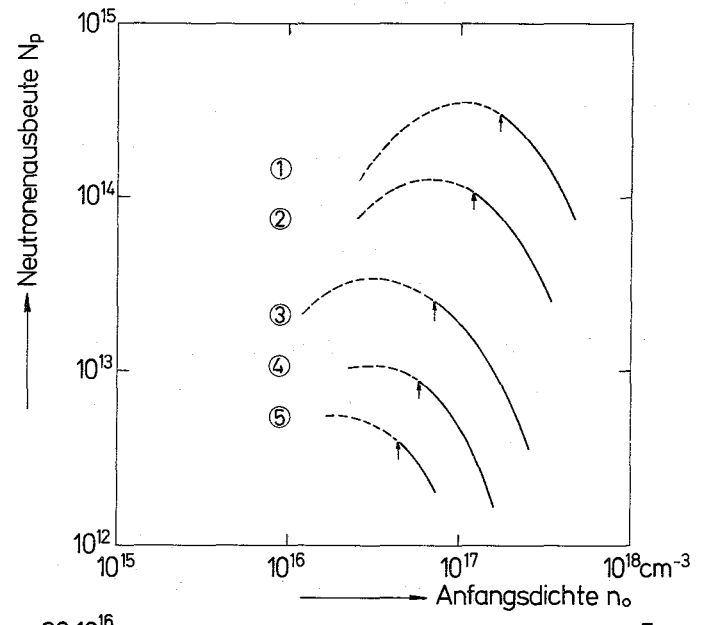


Abb. 8

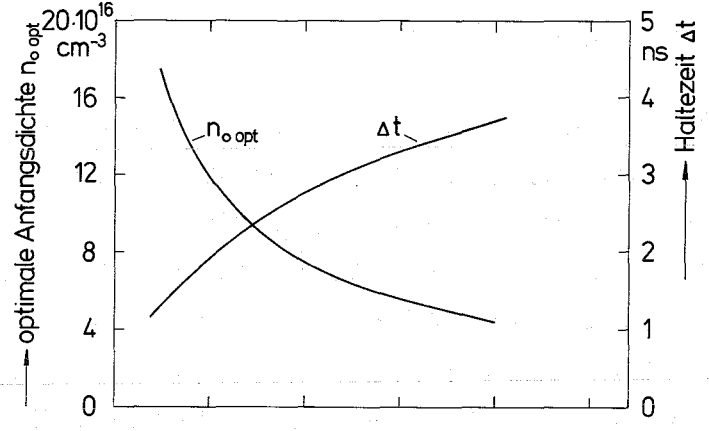


Abb. 9

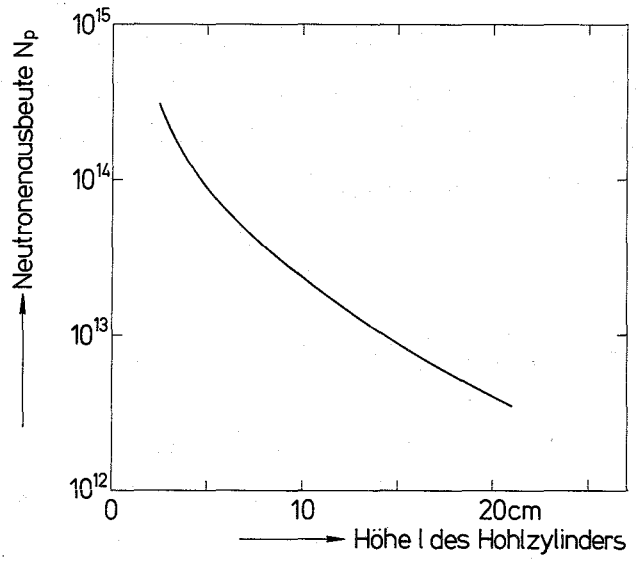


Abb. 7 Die Neutronenausbeute N_p über der Anfangsdichte n_o bei verschiedenen Hohlzylinderhöhen l .

Abb. 8 Die der maximalen Neutronenausbeute N_p (siehe Abb. 7) entsprechende optimale Anfangsdichte $n_{o \text{ opt}}$ und die Haltezeit Δt aufgetragen über die Hohlzylinderhöhe l .

Abb. 9 Die zu jeder Hohlzylinderhöhe l maximale Neutronenausbeute N_p .

Tabelle 2.2

Konstant: $U_0 = 100 \text{ kV}$ $R_0 = 30 \text{ cm}$
 $C = 40 \text{ } \mu\text{F}$ $\delta_0 = 0,5 \text{ cm}$

l cm	n_0 cm^{-3}
2,5	$10^{16} - 10^{18}$
5	
10	
15	
20	

In Abb. 7 ist nun N_p in Abhängigkeit von der Anfangsdichte n_0 aufgetragen, wobei die Kurven 1, 2, 3, 4 und 5 den Höhen $l = 2.5, 5, 10, 15$ und 20 cm entsprechen. Die eingezeichneten Pfeile liegen wieder über den optimalen Anfangsdichten und geben gleichzeitig die höchste Neutronenausbeute an für jeden Wert von l . Die Abhängigkeit der Neutronenausbeute von der Anfangsdichte wird mit größer werdender Höhe l eine immer steilere Funktion von n_0 , was darauf zurückzuführen ist, daß die Gesamtmasse des Hohlzylinders bei gleicher Anfangsdichte um das Verhältnis der Höhen zunimmt. Wird die Gesamtmasse größer, dann ergibt das wieder kleinere Iontemperaturen im Endzustand und mit ihr kleinere Reaktionsraten.

Abb. 8 ist die optimale Anfangsdichte zu entnehmen, die zusammen mit der entsprechenden Haltezeit Δt über der Höhe l in cm aufgetragen ist. Während die Haltezeit in Richtung kleiner Hohlzylinderhöhen von 4 auf 1 nsec abnimmt, wird die optimale Anfangsdichte größer, was man wie folgt qualitativ verstehen kann. Die Höhe l geht direkt proportional in die Induktivität des Entladekreises ein. Eine Verminderung der Induktivität durch Verkleinerung von l bedeutet einen steilen Anstieg der Lorentzkraft, so daß mit abnehmender Höhe l eine zunehmende Ionenzahl auf dieselbe Endtemperatur

gebracht werden kann. Tatsächlich nimmt auch die der optimalen Anfangsdichte entsprechende Neutronenausbeute stark zu mit kleiner werdender Höhe l (Abb. 9). Die Zunahme der Neutronenausbeute beträgt von $l = 10$ auf 5 cm $N_p = 2,5 \cdot 10^{13}$ auf $1,05 \cdot 10^{14}$ Neutronen, was einem Faktor 4 entspricht, während von $l = 15$ auf 10 cm mit $N_p = 8,8 \cdot 10^{12}$ Neutronen bei $l = 15$ cm nur ein Faktor 2,8 gewonnen wird.

Demzufolge erscheint es zunächst sinnvoll die Höhe l beliebig klein zu wählen. Eine praktische untere Grenze wird dadurch gesetzt, daß Verunreinigungen des Plasmas durch Elektrodenmaterial vermieden werden müssen. Die untere Grenze für l muß deshalb experimentell bestimmt werden. Das den Rechnungen zugrunde liegende Modell macht in dieser Richtung keine Aussage. Da das Plasma aber nach diesem Modell während des Kollapses relativ kalt bleibt, werden vermutlich auch kaum Bremsstrahlverluste an eventuellen Verunreinigungen auftreten. Vermutlich wird die kleinste Höhe l kleiner als 10 cm sein. Um sicherheitshalber von diesen Einflüssen unabhängig zu bleiben, werden die Variationen der Abschnitte 2.1 und 2.3 bei $l = 10$ cm durchgeführt.

2.3 Variation der Ladespannung U_0 .

Wegen der schwierigen Handhabung von 100 kV soll der Einfluß kleinerer Ladespannungen auf die Neutronenausbeute vergleichbarer Hohlpinchparameter untersucht werden. Es wurde die Ladespannung von $U_0 = 60$ kV bis $U_0 = 100$ kV für zwei Fälle variiert: a) bei konstant gehaltener gespeicherter Energie $E_c = 200$ kJ, wozu die Kondensatorkapazität zusammen mit der Ladespannung geändert werden muß, und b) bei konstant gehaltener Kapazität $C = 40$ μ F, wobei die gespeicherte Energie E_c mit der Ladespannung U_0 abnimmt.

Für beide Fälle werden die optimalen Anfangsdichten durch Variation derselben wie in den vorangegangenen Abschnitten ermittelt. Konstant gehalten werden die Abmessungen:

Höhe des Hohlzylinders $l = 10 \text{ cm}$
 Anfangsradius $R_0 = 30 \text{ cm}$
 Anfangswandstärke $\delta_0 = 0,5 \text{ cm}$.

a) Konstant gehaltene Kondensatorenergie $E_c = 200 \text{ kJ}$.

Die Kapazität nimmt ab von $C = 110 \mu\text{F}$ bei einer Ladespannung $U_0 = 60 \text{ kV}$ auf $C = 40 \mu\text{F}$ bei $U_0 = 100 \text{ kV}$. In Abb. 10 Kurve 1 ist gleich das Ergebnis der Variation in Bezug auf die Neutronenausbeute wiedergegeben. Aufgetragen ist die jeweils

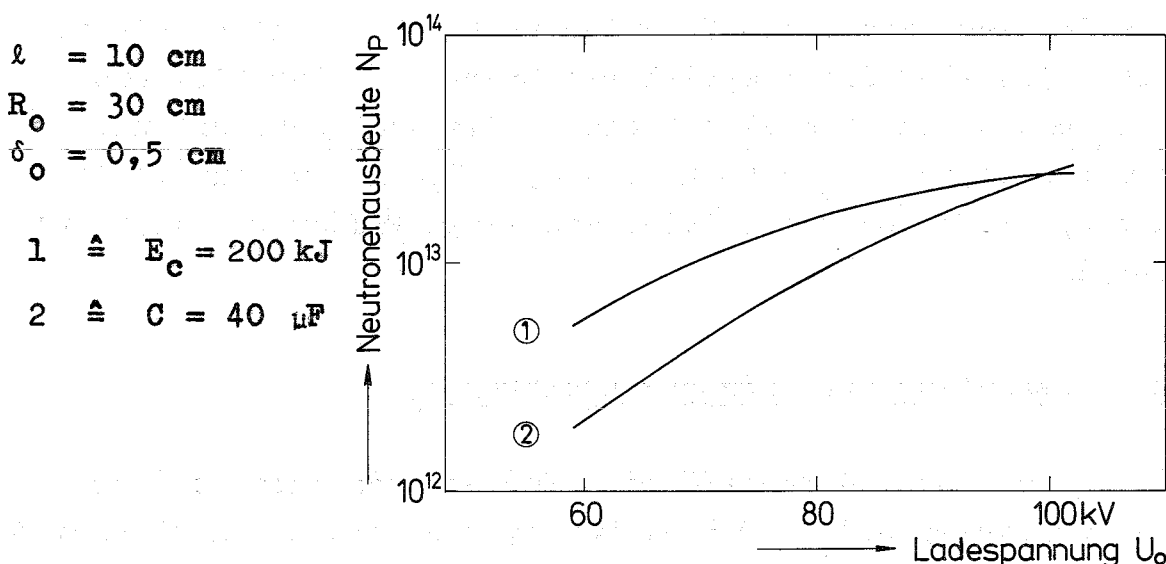


Abb. 10 Die der jeweils optimalen Anfangsdichte $n_{0, \text{opt}}$ entsprechendenmaxilale Neutronenausbeute N_p in Abhängigkeit von der Ladespannung U_0 für 1 $\hat{=}$ $E_c = 200 \text{ kJ} = \text{const.}$ und 2 $\hat{=}$ $C = 40 \mu\text{F} = \text{const.}$

höchste Neutronenausbeute über der Ladespannung U_0 , wobei jedem Wert genau eine optimale Anfangsdichte entspricht. Die Neutronenausbeute nimmt mit steigender Ladespannung von $5,8 \cdot 10^{12}$ auf $2,5 \cdot 10^{13}$ Neutronen/Puls um etwa den Faktor 4,3 zu. Diese Zunahme der Neutronenausbeute ist darauf zurückzuführen, daß mit größer werdender Ladespannung die Kapazität verkleinert wird, Was die Eigenfrequenz des elektrischen Kreises erhöht. Das wiederum führt zu einem steileren Stromanstieg und über den Magnetdruck zu einer effektiveren Beschleunigung. Derselbe Mechanismus trat bei kleiner wer-

dender Höhe l (Abschnitt 2.2) auf.

b) Konstant gehaltene Kapazität $C = 40 \mu\text{F}$.

Dieser Fall ist interessant für das Zünden eines Hohlpinches mit einer fest installierten Kondensatorbatterie bei verschiedenen Ladespannungen. In Abb. 10 Kurve 2 ist das Ergebnis der Optimalisierung aufgezeichnet zusammen mit der in a) besprochenen Variation. Wie zu erwarten ist, bleibt die Neutronenausbeute kleiner als im Falle a), wenn die Ladespannung kleiner als $U_0 = 100 \text{ kV}$ bleibt. Die Eigenfrequenz des Kreises wird durch Veränderung von U_0 nicht geändert, dafür ist aber die gespeicherte Energie E_c für kleinere Ladespannungen ebenfalls kleiner. Die Neutronenausbeute nimmt zwischen $U_0 = 60 \text{ kV}$ und $U_0 = 100 \text{ kV}$ zu von $2 \cdot 10^{12}$ auf $2,5 \cdot 10^{13}$ Neutronen/Puls, was einem Faktor von 12,5 entspricht.

2.4 Variation der Anfangswandstärke δ_0 .

In allen bisher durchgeführten Variationen wurde die Anfangswandstärke $\delta_0 = 0,5 \text{ cm}$ konstant gehalten. In Abschnitt 1.1 wurde darauf hingewiesen, daß die Wahl von δ_0 die Länge

Tabelle 2.4

δ_0 cm	n_0 cm^{-3}
0,5	$5,4 \cdot 10^{16}$
1	$2,7 \cdot 10^{16}$
2	$1,35 \cdot 10^{16}$
4	$6,75 \cdot 10^{15}$

der Anfahrphase bestimmt, die ihrerseits im Sinne einer guten Näherung möglichst kurz sein sollte gemessen an der gesamten Kollabierzeit. Diese Forderung war mit $\delta_0 / R_0 \ll 1$ äquivalent. Bei der Variation der Anfangswandstärke soll

diese Forderung nicht verletzt werden. Es soll nun untersucht werden, welchen Einfluss die Vergrößerung der Anfangswandstärke auf die Anfahrphase und insbesondere auf den Endzustand in Bezug auf die Neutronenausbeute hat.

Das Interesse die Anfangswandstärke zu vergrößern erwächst daraus, die relativ hohen Anfangsdichten im gleichen Maße verkleinern zu können, da in die Plasmagleichungen nicht die Dichte sondern die Zahl N der Ionen pro Längeneinheit eingeht. N ist eine Konstante und wird aus dem Produkt $n_0 \cdot \delta_0$ gebildet (19).

Für einen Hohlzylinder mit einem Anfangsradius $R_0 = 20$ cm und einer Höhe $l = 20$ cm soll $N = 3,39 \cdot 10^{18}$ Ionen/cm sein.

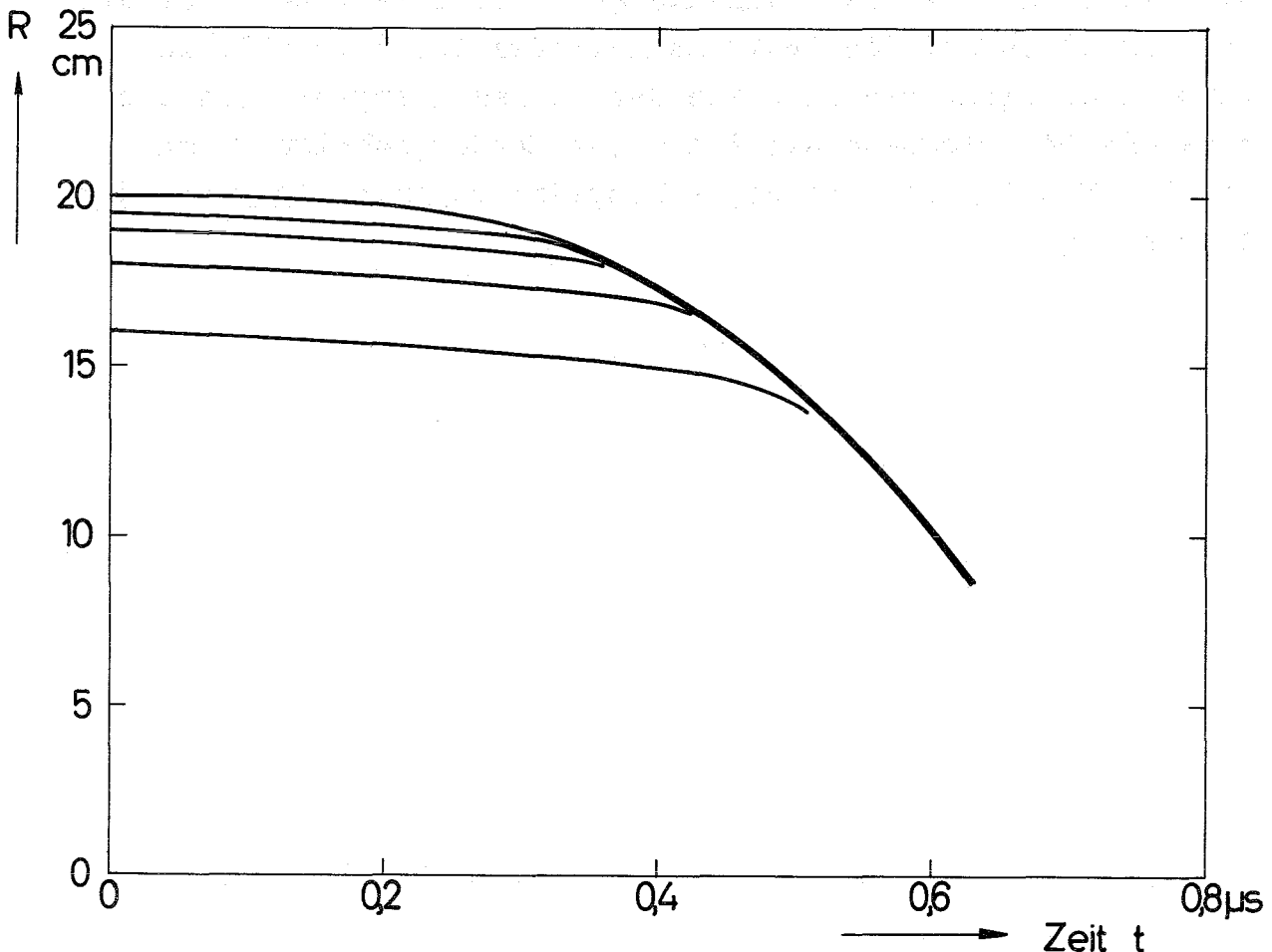


Abb. 11 Der zeitliche Verlauf der Hohlzylinderschicht in der Anfahrphase mit verschiedenen Anfangswandstärken $\delta_0 = 0.5, 1, 2$ und 4 cm.

Tabelle 2.4 gibt die verschiedenen Werte von δ_0 entsprechenden Anfangsdichten n_0 wieder. Die Parameter der Kondensatorbatterie sind:

Ladespannung $U_0 = 100 \text{ kV}$
Kapazität $C = 30 \text{ } \mu\text{F}$ } gespeicherte Energie $E_0 = 150 \text{ kJ}$

In Abb. 11 ist die Anfahrphase wie in Abb. 2a) eingezeichnet für die verschiedenen Werte der Anfangswandstärke δ_0 . Aufgetragen ist der Radius R der äußeren Oberfläche und im Abstand δ die innere Oberflächenbegrenzung über der Zeit in μsec . Die Rechnung für die verschiedenen Werte von δ_0 ergibt, daß die verschiedenen Anfahrphasen in dieselbe Kollabierphase einmünden. Der Radius R bleibt durch die Variation innerhalb der Zeichengenauigkeit erhalten. Der Einfluss der Variation auf die Neutronenausbeute ist ebenfalls zu vernachlässigen, wie sich aus der Rechnung ergibt. Mit dem entwickelten Plasmamodell ist unter Berücksichtigung von $\delta_0 / R_0 \ll 1$ der Kollaps des Hohlzylinders unabhängig von der Anfahrphase.

3. Qualitative Analyse der Vorgänge bei Beginn der Entladung.

Mit dem vorangegangenen Modell konnte gezeigt werden, daß die Kollabierphase zu einem relativ frühen Zeitpunkt des Hohlpinchvorganges erreicht wird. Infolgedessen sind Enddichte und -temperatur unabhängig von der Anfangsschichtdicke, wenn diese nur klein gegen den Anfangsradius ist. Man könnte deshalb daran denken, zur Herstellung des Materiehohlzylinders nicht unbedingt Clusterstrahlen, die sich durch eine besonders scharfe Lokalisierung relativ dichter Materie auszeichnen, sondern normale Gasstrahlen zu verwenden. Es ist jedoch von anderen Z-Pinchexperimenten¹²⁾ bekannt, daß sich vor der Hauptentladung nur ein Teil des neutralen Gases ionisieren lässt. Als Folge davon wird bei der Hauptentladung nur ein Teil des Gases von der stromführenden Front eingeschnürt. Während das zurückbleibende Neutralgas nachzündet, weitet sich die Stromverteilung erneut über das ganze Entladungsgefäß auf.

Die Schwierigkeit einen Materiehohlstrahl in den Zeiten vollständig zu ionisieren, in denen sich die Geometrie nicht wesentlich geändert hat, sollte sich mit der Verwendung kondensierter Molekularstrahlen umgehen lassen. Der Vorteil besteht einmal darin, daß sich Cluster mit N_c Molekeln pro Teilchen wegen ihrer ausserordentlich großen Trägheit gegenüber einfachen Molekeln in den in Frage kommenden Zeiten der Vorionisierung praktisch nicht bewegen, und zum anderen, daß die Vorionisierungszeit wesentlich kürzer ist. Es genügt nämlich an einem Cluster eine einzige Ladung anzubringen, damit dieser am Beschleunigungsprozess teilnehmen kann. Die Zeit für die einfache Ionisierung eines Clusterstrahles, dessen Ionisierungsquerschnitt pro Cluster etwa $N_c^{2/3}$ mal größer ist als der eines einzelnen Molekuls, ist bei gleicher Stromstärke um etwa $N_c^{2/3}$ kürzer.

Messungen an kondensierten Wasserstoffstrahlen¹³⁾ haben gezeigt, daß bereits ein Ionisierungsgrad von 25% erzielt werden konnte bei einer in 0,3 μ sec vom Kondensator abge-

flossenen Ladung von etwa $7,5 \cdot 10^{-4}$ A sec. In dem in Abschnitt 1.4 gezeigten Beispiel eines Hohlpinchexperimentes fließt nach 100 nsec schon ein Strom von 1 MA durch das Plasma, wobei der Hohlstrahl seine Geometrie durch ohm'sche Aufheizung noch nicht wesentlich geändert hat (Abb. 2 Teil a und c). Die vom Kondensator abgeflossene Ladung beträgt zu diesem Zeitpunkt etwa $5 \cdot 10^{-2}$ A sec. Für die zu Anfang der Entladung neutralen Cluster würde das heißen, daß mit dem Einsetzen des Stromes und nach etwa 20 nsec alle Cluster bereits mindestens einfach ionisiert sind.

Mit steigender Stromstärke wächst während des Ionisierungsprozesses auch die Lorentzkraft, die primär auf die Elektronen wirkt. Ein Abwandern der Elektronen aus dem Clustergebiet ohne Mitnahme von Clusterionen ist aber nicht möglich, da sonst ein Elektronenpinch auftreten müßte, der grundsätzlich nicht möglich ist. Die Kompensation der Raumladungsabstoßung der Elektronen durch Stromanziehung ist erst bei Lichtgeschwindigkeit der Elektronen gegeben. Dagegen ist es denkbar, daß Elektronen zusammen mit Clustern großer spezifischer Ladung nach innen abwandern und dabei Ionen mit kleiner spezifischer Ladung, die ebenfalls vom äquivalenten Elektronenstrom durchflossen werden, zurücklassen. Dadurch könnte eine räumliche Separation nach spezifischen Ladungen eintreten. Der Effekt kann die Materieschicht allerdings nur bis zur Skintiefe aufweiten, da der Skineffekt zu einer größeren beschleunigenden Kraft in den Außengebieten führt. Die Skintiefe läßt sich an Hand der durchgeführten Rechnungen bestimmen. Sie beträgt bei Beginn der Entladung ca. 1,5 cm und nimmt während des Kollapses monoton ab. Die Skintiefe ist auf jeden Fall klein gegen den Radius des Hohlzylinders und wird gegen Ende der Kollabierphase auch klein gegen die Schichtdicke.

Anhang I Separation der thermischen Energiegleichung.

Die thermische Energiegleichung (3) gibt die zeitliche Änderung der Summe beider Größen, der thermischen Energie der Elektronen und der Ionen wieder. Es muß die Differentialgleichung (3) separiert werden, sollen die einzelnen thermischen Energien bestimmt werden. Der in Abschnitt 1 diskutierte Mechanismus der Thermalisierung soll mathematisch formuliert werden.

Besitzt eine der beiden Plasmakomponenten, Elektronen oder Ionen eine höhere thermische Energie, so wird die kältere Komponente durch Stöße thermische Energie auf Kosten der wärmeren aufnehmen. Die pro Zeiteinheit aufgenommene (bzw. abgegebene) thermische Energie ist proportional zu⁹⁾:

$$R^{ei} = 3 n v \frac{m_e}{m_i} (kT_e - kT_i) \quad (I.1)$$

In (I.1) ist v die Stoßfrequenz der Elektronen:

$$v = \frac{4}{3} \sqrt{2} \pi n \frac{e^4}{m_e^{1/2} (kT_e)^{3/2}} \ln \Lambda \quad (I.2)$$

Dabei ist m_e die Elektronenmasse und e die Elementarladung. Λ ist das in 10) angegeben Verhältnis von Debylänge zur kleinsten Streulänge. Durch Einsetzen von (I.2) in (I.1) erhält man:

$$R^{ei} = 4 \sqrt{2} \pi \frac{n^2 m_e^{1/2} e^4}{m_i} \ln \Lambda \frac{kT_e - kT_i}{(kT_e)^{3/2}} \quad (I.3)$$

Die Rate, mit der thermische Energie ausgetauscht wird, ist also direkt proportional zur Differenz der thermischen Energien von Elektronen und Ionen und umgekehrt proportional zum Absolutbetrag der thermischen Elektronenenergie.

Es werden durch den fließenden elektrischen Strom die Elektronen ohm'sch aufgeheizt, was durch das Produkt der Stromdichte zum Quadrat und des spezifischen Widerstandes in (3) wiedergegeben ist. Nun hängt der spezifische Wider-

stand wie folgt von der thermischen Elektronenenergie ab:

$$\eta = \frac{m_e v}{n e} = 4/3 \sqrt{2\pi} m_e^{1/2} e^2 \frac{\ln \Lambda}{(kT_e)^{3/2}} \quad (\text{I.4})$$

Der spezifische Widerstand wird also mit wachsender thermischer Elektronenenergie kleiner und damit auch der Einfluss der ohm'schen Aufheizung in (3). Daraus folgt, daß die ohm'sche Aufheizung in der Anfahrphase am wirksamsten ist, in der die thermische Elektronenenergie noch klein ist. Abschnitt 1 ist ohnehin zu entnehmen, daß die adiabatische Kompression der Schicht während der Anfahr- und Kollabierphase ein langsamer Vorgang ist, verglichen mit der Thermalisierung im Endzustand.

Es soll also bei der Separation von Gleichung (3) berücksichtigt werden, daß die zeitliche Änderung der thermischen Energie der Elektronen sowie die der Ionen durch die adiabatische Volumenänderung bestimmt wird. Darüber hinaus werden die Elektronen im Gegensatz zu den Ionen ohm'sch aufgeheizt. Differenzen in den thermischen Energien müssen daher über die Austauschrate (I.3) ausgeglichen werden. Die zeitlichen Änderungen der thermischen Elektronen- bzw. Ionenenergie muß lauten:

$$\frac{d}{dt}(kT_e) = - 2/3 (kT_e) \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} - 2/3 \frac{R^{ei}}{n} + 2/3 \frac{\eta j^2}{n} \quad (\text{I.5})$$

$$\frac{d}{dt}(kT_i) = - 2/3 (kT_i) \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} + 2/3 \frac{R^{ei}}{n} \quad (\text{I.6})$$

Anhang II Die Konsistenz der Differentialgleichungen.

Es soll gezeigt werden, daß die Differentialgleichungen (1), (3) und (8) in sich konsistent sind. Dazu soll der Energieerhaltungssatz formuliert werden. Die Summe von thermischer und kinetischer Energie im Plasma sowie der Energie im Magnetfeld und elektrischer Energie im Kondensator muß zu jedem Zeitpunkt gleich der elektrischen, anfangs im Kondensator gespeicherten Energie sein. Mit $M = \ell N m_i$ der Gesamtmasse des Hohlzylinders lautet der Energieerhaltungssatz:

$$\ell F (E_e + E_i) + 1/2 M u^2 + 1/2 L J^2 + 1/2 \frac{Q^2}{C} = 1/2 C U_0^2 \quad (\text{II.1})$$

Dabei ist:

$$E_{e,i} = 3/2 n k T_{e,i} \quad (\text{II.2})$$

Die Größen $E_{e,i}$, u , J und Q sind bereits die Integrale der Differentialgleichungen, die noch unbekannt sind. Die Differentialgleichungen wurden numerisch gelöst. Ein analytischer Ausdruck für die Integrale liegt daher nicht vor. Um dennoch (II.1) zu prüfen, wird die zeitliche Ableitung des Energieerhaltungssatzes gebildet:

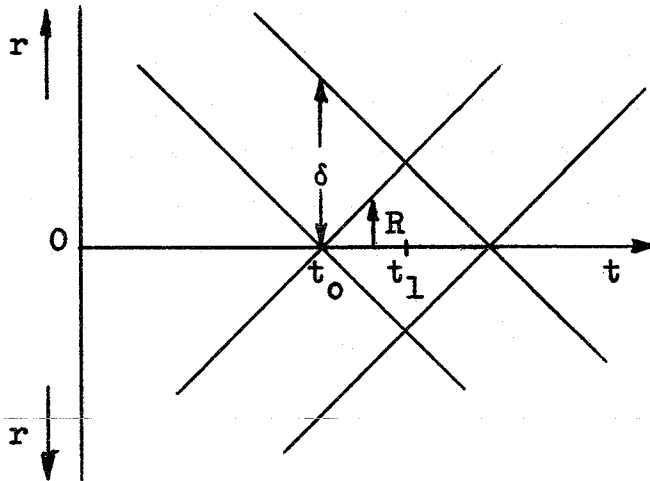
$$\begin{aligned} 3/2 N \frac{d}{dt} (k T_e + k T_i) + u N m_i \frac{du}{dt} + \frac{1}{\ell} \left(L \frac{dJ}{dt} \right) J - \\ \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{J^2}{R} u + \frac{1}{\ell} \frac{Q}{C} J = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

In (II.3) stehen nun die Ableitungen der Integrale $k T_{e,i}$, u und J , die andererseits durch die Differentialgleichungen (1), (3) und (8) gegeben sind. Durch Einsetzen dieser ergibt sich die Identität:

$$\begin{aligned} - N (k T_e + k T_i) \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} + \frac{R_h J^2}{\ell} - \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{J^2}{R} u + N (k T_e + k T_i) \cdot \\ \cdot \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} - \frac{R_h}{\ell} J^2 + \frac{\mu_0}{2 \pi} \frac{J^2}{R} u - \frac{Q}{\ell C} J + \frac{Q}{\ell C} J - \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{J^2}{R} u = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Womit bewiesen ist, daß die Differentialgleichungen in sich konsistent sind.

Anhang III Berechnung der Neutronenausbeute für das Modell der freien Durchdringung.



Zur Zeit $t = t_0$ ist $R = \delta$ und die Geschwindigkeit $u = v$. Vorausgesetzt wird, daß die Geschwindigkeit v sich während der Durchdringungszeit nicht ändert. Die Zeit t_1 ist so gewählt, daß $R = \delta/2$ am grössten ist:

$$t_1 = t_0 - \frac{\delta}{2v} \quad (\text{III.1})$$

Die Reaktionsrate α bestimmt sich aus:

$$\alpha = 1/4 \ n^2 \ \sigma \ v_{\text{rel}} \quad (\text{III.2})$$

wobei der Wirkungsquerschnitt $\sigma = \sigma(E_{\text{rel}})$ abhängt von der relativen Energie der Ionen. Aus (III.2) lässt sich die Neutronenausbeute bestimmen zu:

$$\begin{aligned} N_p &= \int_T \int_V \alpha \ dV \ dt = 2 \frac{N^2}{4\pi^2} (\sigma \ v_{\text{rel}}) \ 2\pi \ell \int \int \frac{r \ dr}{R^4} \ dt = \\ &= 2/3 \ \frac{\ell \ N^2}{2 \ \pi} \ \frac{(E_{\text{rel}})}{\delta} \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Literaturhinweise.

- 1) KFK 304, W. Eyrich, A. Schmidt, Two Compact High Intensity Pulsed Neutron Sources (1965).
- 2) Conf. 660925, Intense Neutron Sources, S 581 u. 589 (1966).
- 3) J.W. Mather, Plasma Phys. and Thermonucl. Reactions, Proc. of Culham Conf., Vol II S 389 - 404 (1965),- J.W. Mather, P.J. Bottoms, H.H. Williams, Proc. of the APS Topical Conf. on Pulsed High Density Plasmas, C 1, LA 3770 (1967).
- 4) J.G. Linhart, Nuovo Cimento, 17, S 850-863 (1960),- Nucl. Fusion, 1, S 78 (1961).
- 5) Ch. Maisonnier, M. Haegi, J.G. Linhart, CN 21/79 Frascati,- Plasma Phys. and Thermonucl. Reactions, Proc. of Culham Conf., Vol II, S 345 (1965), siehe dort auch weitere Literaturangaben.
- 6) E.W. Becker, R. Klingelhöfer, P. Lohse, Z. Naturforschung, 15a, S 645-647, (1960). Die Verwendbarkeit kondensierter Molekularstrahlen bei Hohlpinchexperimenten wurde inzwischen experimentell mit Stickstoff-Cluster nachgewiesen, vgl. E.W. Becker, H. Burghoff, R. Klingelhöfer, Z. Naturforschung, 22a, S 589 (1967).
- 7) Ch. Maisonnier, J.G. Linhart, M. Haegi, Nucl. Fusion, 2 Suppl. Part 2, S 727-732 (1962),- M. Bineau, Ch. Maisonnier, Gas Discharges and the electr. Suppl. Industry, London, S 517-528 (1962).
- 8) O.F. Hagen, W. Henkes, Z. Naturforschung, 20a, S 1344-1348 (1965).
- 9) W.B. Kunkel ed., Plasma Phys. in Theory and Appl., (1966),- S. Glastone, R.H. Lovberg, Contr. Thermonucl. Reactions (1960),- D.J. Rose, M. Clark, Plasmas and Contr. Fusion (1961).
- 10) L. Spitzer, Phys. of Fully Ionized Gases, (1956).

- 11) Modern Computing Methods, (1961),- R. Richtmyer, Difference Methods for Initial Value Problems, (1957),- M. Abramovitz, I. Stegun, Hdb. of Math. Funct., Dover (1965).
- 12) A.M. Andrianov et al., Plasma Phys., Leontovich ed., Vol IV (1960),- I.R. Jones, A. Lietti, J.M. Peiry, Plasma Phys., 10p, S 213 (1968).
- 13) R. Klingelhöfer, H. Röhl, J. Wüst, Z. Naturforschung, 21a, S 1967 (1966),- R. Klingelhöfer, Beitr. Plasma-phys., 6, S 259 (1966),- R. Klingelhöfer, H. Röhl, Z. Naturforschung, 23a, S 1418 (1968).

Herrn Prof. Dr. E.W. Becker bin ich für sein stetes Interesse an dieser Arbeit sowie für seine fortwährende Förderung sehr zu Dank verpflichtet. Herrn Doz. Dr. R. Klingelhöfer danke ich vielmals für seine rege Anteilnahme an der vorliegenden Arbeit, die sich in anregenden und ideenreichen Diskussionen und nicht zuletzt in der Hilfe bei der Abfassung und Durchsicht dieser Arbeit widerspiegelte. Mein Dank gilt besonders Frau J. Vogelsang für die rasche und vollendete Anfertigung der zahlreichen Zeichnungen.