

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

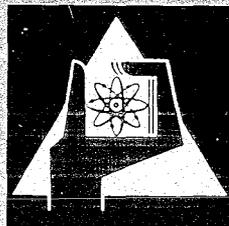
Januar 1970

KFK 1125

Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Schneller Brüter

Bestimmung der betriebsmäßigen Wärmeleitfähigkeit von keramischem
Kernbrennstoff und der Wärmedurchgangszahl des Gasspaltes zwischen
Brennstoff und Hüllrohr nach dem Balanced Oscillator Verfahren

W. Dänner



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

Januar 1970

KFK 1125

Institut für Reaktorentwicklung

Projekt Schneller Brüter

Bestimmung der betriebsmäßigen Wärmeleitfähigkeit
von keramischem Kernbrennstoff und der Wärmedurch-
gangszahl des Gasspaltes zwischen Brennstoff und
Hüllrohr nach dem Balanced Oscillator Verfahren

W. Dänner

Gesellschaft für Kernforschung mbH., Karlsruhe

Zusammenfassung

Das Balanced Oscillator Verfahren wird in seiner Anwendung als in pile-Verfahren zur gleichzeitigen Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von keramischem Kernbrennstoffmaterial und der Wärmedurchgangszahl des Spaltes zwischen Brennstoff und Hüllrohr beschrieben. Es beruht auf einem Vergleich zwischen der experimentell und analytisch ermittelten Übertragungsfunktion zwischen sinusförmigen Oszillationen in Kühlmitteldurchsatz und Prüflingsleistung unter Konstanthaltung der Kühlmitteltemperaturen.

Die analytische Lösung der Übertragungsfunktion wird aus der instationären Wärmeleitungsgleichung abgeleitet unter Berücksichtigung eines radiusabhängigen Wärmequellprofils, der Wärmekapazität des Hüllrohres und der Zeitabhängigkeit der äußeren Wärmeübergangszahl.

Die Ergebnisse von out pile-Experimenten an Kohlestäben beweisen grundsätzlich die Durchführbarkeit dieses Verfahrens und die Vollständigkeit der dem analytischen Lösungsverfahren zugrunde gelegten Voraussetzungen.

Hinweise auf die in pile-Durchführung des Verfahrens schließen den Bericht ab.

Abstract

The Balanced Oscillator Method is described in respect of in pile application for measuring the thermal conductivity of ceramic fuels and the gap conductance. It is based upon a comparison of the experimentally and analytically determined transfer function between sinusoidal oscillations in coolant flow and specimen power at constant coolant temperatures.

The analytical solution of the transfer function is deduced from the instationary differential equation for heat conduction, taking into consideration radial variation of heat source, heat capacity of the casing and time dependence of heat transfer coefficient.

The result of out pile experiments using coal as specimens prove the feasibility of such experiments and the completeness of the assumptions set up for the analytical solution.

Some hints to the in pile realization of the method are given at the end of the report.

I n h a l t

Seite

1.	Einführung	1
2.	Übersicht über Verfahren zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Kernbrennstoffen in ihrer Abhängigkeit von den in-pile-Betriebsbedingungen	3
2.1	Stationäre Meßverfahren	4
2.1.1	Out-pile-Messungen	4
2.1.1.1	Direkte Messung der Wärmeleitfähigkeit vor und nach der Bestrahlung	4
2.1.1.2	Metallographische Nachuntersuchungen	5
2.1.1.3	Untersuchungen unter hohem Temperaturgradienten	6
2.1.2	In-pile-Messungen	6
2.2	Instationäre Meßverfahren	9
2.2.1	Änderung des Wärmeflusses nach einer Sprungfunktion	10
2.2.2	Rampenförmige Änderung des Wärmeflusses	11
2.2.3	Impulsförmige Änderung des Wärmeflusses	11
2.2.4	Periodische Änderungen des Wärmeflusses	13
3.	Prinzip der Balanced Oscillator Methode	16
4.	Mathematisches Modell	20
4.1	Modellvorstellungen und Voraussetzungen	20
4.2	Analyse des radialen Problems	24
4.2.1	Lösungsweg	24
4.2.2	Lösung der Brennstoffgleichung	26
4.2.2.1	Konstante Wärmequellverteilung	27
4.2.2.2	Polynom-Ansatz für die Wärmequellverteilung	30
4.2.2.3	Wärmequellprofil im Kernbrennstoff: modifizierte Besselfunktionen	31
4.2.3	Lösung der Hüllrohrgleichung	33
4.2.4	Bestimmung der Übertragungsfunktionen für die einzelnen Modellvorstellungen	35
4.2.4.1	Übertragungsfunktion für Modell 1	36
4.2.4.2	Übertragungsfunktion für Modell 2	38
4.2.4.3	Übertragungsfunktion für Modell 3	39
4.2.4.4	Übertragungsfunktion für Modell 4	40

	<u>Seite</u>	
4.3	Strenge Fassung der Kompensationsbedingung	42
4.4	Gegenüberstellung der Modelle	43
4.4.1	Auswirkungen der Vernachlässigung der Wärmekapazität des Hüllrohres	45
4.4.2	Auswirkungen der Vernachlässigung der zeitlichen Schwankungen der äußeren Wärmeübergangszahl	46
4.4.3	Auswirkungen der Vernachlässigung beider Einflüsse	46
5:	Experimentelle Bestimmung der Übertragungsfunktion	47
5.1	Ziel der Experimente und grundlegende Gesichtspunkte für ihre Anlage	47
5.2	Versuchseinrichtung	48
5.2.1	Kühlkreislauf	49
5.2.2	Teststrecke	50
5.2.3	Erzeugung der Leistungs- und Kühlmitteldurchsatz-Oszillationen	51
5.2.4	Instrumentierung	51
5.3	Durchführung der Experimente	53
5.3.1	Einfahren des stationären Zustandes	54
5.3.2	Aufbringen der Leistungsoszillation	54
5.3.3	Kompensationsvorgang	55
5.3.4	Aufnahme der Oszillationsvorgänge	56
5.4	Auswertungsverfahren	57
5.4.1	Bestimmung der fixen Parameter	58
5.4.2	Bestimmung der Übertragungsfunktion aus den Messungen	60
5.4.2.1	Fourier-Analyse	60
5.4.2.2	Korrekturen	63
5.4.2.2.1	Phasen-Korrektur	63
5.4.2.2.2	Amplituden-Korrektur	64
5.4.3	Bestimmung der freien Parameter	65
5.4.3.1	Angenäherte Bestimmung an Hand von Parameterdiagrammen	66
5.4.3.2	Genauere Bestimmung mittels Iterationsprogramm	67
5.4.4	Beispiel eines Auswertungsprotokolls	67

	<u>Seite</u>
5.5 Ergebnisse	68
5.5.1 Tabellarische Übersicht	68
5.5.2 Physikalische Deutung der Ergebnisse	68
5.6 Fehlerbetrachtung	71
5.6.1 Genauigkeiten der fixen Parameter und die daraus resultierenden Fehler	71
5.6.2 Genauigkeiten der Meßwerte und die daraus resultierenden Fehler	73
5.6.2.1 Amplituden-Meßfehler	73
5.6.2.2 Phasen-Meßfehler	76
5.6.3 Gesamtfehler	77
5.7 Beurteilung der experimentellen Ergebnisse	78
5.7.1 Experimente an nackten Heizstäben	78
5.7.2 Experimente an umhüllten Heizstäben	79
5.7.3 Möglichkeiten zur Reduzierung der Fehler	81
6. Folgerungen für in-pile-Experimente	83
7. Zusammenfassung	85
Liste der verwendeten Symbole	87
Literatur	90

Anhang

A1:	Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung	I
A2:	Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung für konstante Wärmequellverteilung	IV
A3:	Lösung der Brennstoffgleichung für Polynom-Ansatz in der Wärmequellverteilung	IX
A4:	Wärmequellverteilung im Kernbrennstoff	XVIII
A5:	Lösung der Brennstoffgleichung für Wärmequellprofil im Kernbrennstoff	XXII
A6:	Lösung der Hüllrohrgleichung	XXVII

1. Einführung

Instationäre Verfahren zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit gewinnen heute in der Reaktortechnik, insbesondere in ihrer Anwendung auf oxydkeramische Brennstoffe, wie auch auf anderen Gebieten der Technik, immer mehr an Bedeutung. Sie unterscheiden sich von den stationären Verfahren im wesentlichen dadurch, daß auf eine Messung der absoluten Höhe des Wärmeflusses durch die Probe verzichtet werden kann. Dafür ist die Kenntnis der spezifischen Wärme c und der Dichte ρ des Probenmaterials erforderlich, da für das dynamische Verhalten der Probe nicht die Wärmeleitfähigkeit λ allein, sondern die Temperaturleitzahl $a = \frac{\lambda}{c \rho}$ maßgebend ist. Speziell in der Reaktortechnik sind die spez. Wärme und die Dichte meist genauer bekannt, als der Wärmefluß durch die Probe bestimmt werden kann.

Das Balanced Oscillator Verfahren nimmt innerhalb der Gruppe der instationären Verfahren eine besondere Stellung ein. Bei seiner Anwendung kann man außerdem auf die bei den stationären und den meisten instationären Meßverfahren unerläßliche Messung einer Temperaturdifferenz in der Probe bzw. des zeitlichen Temperaturverlaufes an einer charakteristischen Stelle der Probe verzichten. An deren Stelle ist jedoch eine Messung der Kühlmitteltemperatur (= Umgebungstemperatur) notwendig, deren dynamisches Verhalten jedoch nur dann mit ausreichender Genauigkeit verfolgt werden kann, wenn die Brennstoffprobe eine genügend hohe Leistung an das Kühlmittel abgibt. Gerade diese beiden Tatsachen, Leistungsabgabe der Probe und Verzicht auf Temperaturmessung in der Probe, machen das Balanced Oscillator Verfahren für eine in-pile-Anwendung interessant: Einerseits kann die Probe unter echten betriebsmäßigen Bedingungen untersucht werden, zum anderen kann der Meßbetrieb bis zu höchsten Temperaturen und langen Abbränden ausgedehnt werden, ohne auf die Lebensdauer von Temperaturmeßfühlern unter solchen extremen Bedingungen Rücksicht nehmen zu müssen.

Die theoretischen Grundlagen des Balanced Oscillator Verfahrens wurden von L. Caldarola [1] [2] [3] geschaffen. Das Prinzip des Verfahrens besteht in der Messung der Übertragungsfunktion zwischen sinusförmigen

Änderungen in Kühlmitteldurchsatz und Leistung einer im Betrieb befindlichen Brennstabanordnung, wobei die Kühlmitteltemperaturstörungen durch entsprechende Steuerung des Kühlmitteldurchsatzes kompensiert (aus- "balanciert") werden. Der Wert der Übertragungsfunktion, gegeben durch Amplitude und Phasenwinkel, ist dabei u.a. eine Funktion der Wärmeleitfähigkeit λ_f des Brennstoffes und der Wärmeübergangszahl α .

Die theoretischen Erörterungen Caldarolas zielen ab auf eine Realisierung des Experimentes im amerikanischen Reaktor SEFOR (Southwest Experimental Fast Oxide Reactor), einem mit schnellen Neutronen betriebenen natriumgekühlten Reaktor. Dabei steht die Bestimmung des Dopplerkoeffizienten im Vordergrund, welcher aufgrund der Messung einer der obengenannten verwandten Übertragungsfunktion ermittelt werden kann. Da sich dieser Reaktivitätskoeffizient definitionsgemäß auf den gesamten Reaktor bezieht, ist das Experiment dementsprechend auch so angelegt, daß sowohl die Leistung als auch der Kühlmitteldurchsatz des gesamten Cores sinusförmigen Oszillationen unterworfen werden. Deshalb können aus diesen Messungen für Wärmeleitfähigkeit und Wärmeübergangszahl auch nur integrale Richtwerte über das ganze Core erwartet werden. Um Informationen über die Abhängigkeit dieser beiden thermischen Parameter von definierten Betriebszuständen des Brennstoffes zu erhalten, sind die Ergebnisse aus dem SEFOR-Experiment unzureichend.

Es wird deshalb daran gedacht, am Karlsruher Forschungsreaktor FR2 mit Hilfe der dort installierten Helium-Kreislaufanlage [4] Experimente nach dem Balanced Oscillator Verfahren an einzelnen Brennstäben durchzuführen. Dieses Vorhaben erfordert zunächst eine kritische Überprüfung der theoretischen Überlegungen Caldarolas, insbesondere hinsichtlich der Tatsachen, welche sich aus dem Übergang von einem schnellen zu einem thermischen Reaktor sowie von der Natriumkühlung zur Heliumkühlung ergeben. Die Unterschiede liegen dabei einerseits in der Berücksichtigung eines radialen Wärmequellprofils, wohingegen beim schnellen Reaktor aufgrund des niedrigen Absorptionsquerschnittes für schnelle Neutronen eine konstante Wärmequellldichte über dem Brennstoffradius angenommen werden kann; zum anderen ist damit zu rechnen, daß die zeitlichen Änderungen

der Wärmeübergangszahl aufgrund der Oszillationen des Kühlmittelstromes bei Kühlung durch Helium schwerer ins Gewicht fallen als bei Natriumkühlung, da hier die absolute Höhe der Wärmeübergangszahl um wenigstens eine Größenordnung niedriger liegt. Eine dritte Erweiterung des Caldarolaschen Konzeptes wird durch die explizite Einbeziehung des Hüllrohres in das theoretische Modell erzielt, wodurch die Voraussetzung, daß die Wärmekapazität des Hüllrohres gegenüber der des Brennstoffes klein sein muß, fallengelassen werden kann. Es ist dadurch weiterhin möglich, anstelle des totalen Wärmeübergangs von der Brennstoffoberfläche zum Kühlmittel die Wärmeübergangszahl des Spaltes zwischen Brennstoff und Hüllrohr bei Kenntnis der äußeren Wärmeübergangszahl vom Hüllrohr an das Kühlmittel zu bestimmen.

Für die vorliegende Arbeit ergibt sich die folgende Aufgabenstellung:

- 1.) Erarbeitung eines neuen mathematischen Modells zur Interpretation der Meßergebnisse unter Berücksichtigung
 - a) eines radialen Wärmequellprofils in der Probe
 - b) der Wärmekapazität des Hüllrohres
 - c) der periodischen Schwankungen der äußeren Wärmeübergangszahl
 - 2.) Bestätigung des theoretischen Modells durch out-pile-Experimente
 - 3.) Erarbeitung von Schlußfolgerungen für in-pile-Messungen.
2. Übersicht über Verfahren zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Kernbrennstoffen in ihrer Abhängigkeit von den in-pile-Betriebsbedingungen

Die Wärmeleitfähigkeit von Kernbrennstoffen, insbesondere die des bisher aktuellsten unter ihnen, des Uranradioxyd UO_2 , ist innerhalb der letzten Jahre Gegenstand einer Fülle von Untersuchungen gewesen. Nachdem die Einflüsse verschiedener Größen, wie z.B. Stöchiometrie, Porenvolumen, Verunreinigungen, Herstellungsverfahren usw., auf die Wärmeleitfähigkeit des frischen, noch nicht im Reaktor eingesetzten Brennstoffes weitgehend bekannt waren, interessierten im folgenden vorwiegend die Änderungen, denen

sie während des Betriebs im Reaktor unterworfen ist. Zunächst beschränkte man sich dabei auf out-pile-Untersuchungen, um die Einflüsse verschiedener Parameter besser voneinander trennen zu können. Recht bald wurde jedoch die Notwendigkeit zusätzlicher direkter in-pile-Messungen erkannt, welche naturgemäß erst die Kenntnis über das Zusammenwirken der einzelnen Effekte bringen können.

2.1 Stationäre Meßverfahren

2.1.1 Out-pile-Messungen

Bei den out-pile-Messungen stand im wesentlichen die Verfolgung von drei Phänomenen im Vordergrund der Untersuchungen: die Einflüsse der Neutronenbestrahlung, der Strukturänderungen und des Temperaturgradienten.

2.1.1.1 Direkte Messung der Wärmeleitfähigkeit vor und nach der Bestrahlung

Der Einfluß der Neutronenbestrahlung auf die Wärmeleitfähigkeit des Kernbrennstoffmaterials ist bedingt durch Änderungen im Kristallgitter. Die dadurch verursachte Strahlenschädigung wird hauptsächlich wirksam bei niedrigen Temperaturen (bis ca. 800°C) und ist bis zu einem gewissen Grade durch eine Wärmebehandlung oberhalb der Bestrahlungstemperatur wieder ausheilbar. Der Erfolg des Ausheilprozesses ist umso geringer, je länger der Brennstoff der Bestrahlung ausgesetzt war.

Diesbezügliche Untersuchungen an UO_2 wurden durchgeführt von Ross [5], Mac Ewan [6] und Daniel [7] unter Anwendung einer stationären Axialflußmethode, bei welcher der Wärmestrom, welcher durch die Probe fließt, anschließend durch ein Material bekannter Wärmeleitfähigkeit geführt wird. Durch Vergleich der beiden Temperaturgradienten wurde die Wärmeleitfähigkeit ermittelt. Auf diese Weise ist die Messung des Wärmestroms überflüssig, dafür müssen eine Anzahl von Thermoelementen über die Länge der Prüfanordnung verteilt werden. Nach der gleichen Methode untersuchte Garlick [8] Brennstoffproben von metallischem Uran, welche aus Brennelementen des Calder Hall-Reaktors stammten. Während Ross, Mac Ewan

und Garlick die Wärmeleitfähigkeit nur bei einer Temperatur von 60°C bestimmen konnten, hatte Daniel drei Meßapparaturen für verschiedene Probenformen zur Verfügung, welche bis zu 1300°C betrieben werden konnten.

Als Alternativlösung zur stationären Axialflußmethode schlugen Smart [9] und Jaffe [10] zwei Verfahren für den gleichen Anwendungszweck vor, die jedoch beide nur einen Betrieb bei niedrigen Temperaturen ermöglichen. Smart bringt die zu untersuchende Probe mit einem durchmessergleichen Eiszylinder in Kontakt und beobachtet die Bewegung der Probe während des Schmelzvorganges, Jaffe führt die von der Probe abgegebene Wärme einer definierten Flüssigkeitsmenge zu und mißt die Zeit, welche zu deren Verdampfen benötigt wird.

Ein Verfahren zur Messung der Wärmeleitfähigkeit bei höheren Temperaturen (im Bereich 800°C - 2000°C) wurde von Spies [11] entwickelt. Eine scheibenförmige Probe wird im Hochvakuum von beiden Seiten mit Hilfe eines Elektronenstrahles beheizt; die Temperaturen werden pyrometrisch gemessen. Dieses Verfahren ist besonders deshalb interessant, weil hier zur Bestimmung des Wärmestromes durch die Probe ein Kompensationsverfahren benutzt wird. Die beidseitige Beheizung soll größere Temperaturgradienten in der Probe verhindern.

2.1.1.2 Metallographische Nachuntersuchungen

Die eben beschriebenen stationären Verfahren zur Messung der Wärmeleitfähigkeit mit Ausnahme des zuletzt genannten sind ungeeignet für die Anwendung bei hohen Temperaturen, besonders oberhalb 2000°C bis zum Schmelzpunkt des UO_2 bei 2750°C . Der Grund liegt in den unkontrollierbaren Wärmeverlusten durch Strahlung, die bei der Bestimmung des Wärmestromes einen erheblichen Fehler verursachen können.

Ein Weg, um auch in diesem Temperaturbereich zu Aussagen über die Wärmeleitfähigkeit von bestrahlten Kernbrennstoffproben zu gelangen, wurde von Robertson [12] [13], Roake [14] und De Halas [15] gewiesen. Aus der während der Bestrahlung ausgebildeten Struktur des Brennstoffes wird

das Temperaturprofil in der Probe rekonstruiert und daraus rückwärts auf die Wärmeleitfähigkeit geschlossen. Dieses Verfahren stützt sich auf drei Temperaturfixpunkte, welche für UO_2 charakteristisch sind: Beginn des Kornwachstums bei ca. $1550^\circ C$, Beginn der Zeilenkornbildung bei ca. $1800^\circ C$ und der Schmelzpunkt bei ca. $2750 - 2800^\circ C$. Die Genauigkeit für die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit ist dabei nicht allzu groß, außerdem bedarf es, ebenso wie bei den vorher erwähnten Nachbestrahlungsuntersuchungen, einer Vielzahl von Proben, um eine definitive Aussage über die Abhängigkeit vom integrierten Neutronenfluß zu erhalten. In neuerer Zeit berichtete Balfour [16] über ähnliche Untersuchungen u.a. auch an pulverförmigem Brennstoff.

2.1.1.3 Untersuchungen unter hohem Temperaturgradienten

In Erkenntnis der Tatsache, daß die Ausbildung der Brennstoffstruktur nicht allein von der Höhe der Temperatur, sondern auch stark von Temperaturgradienten beeinflusst wird, wurden Versuche unternommen, die während des Betriebs im Reaktor auftretenden hohen Temperaturgradienten out of pile zu simulieren und dabei die Wärmeleitfähigkeiten zu messen. Dazu ist die Anwendung der Radialflußmethode erforderlich. Chernock [17], Kerr [18] und Patrassi [19] berichten über Verfahren, welche übereinstimmend einen zentralen Wolfram-Heizer besitzen und die Temperatur der Probe durch verschieden tiefe Bohrungen pyrometrisch messen. Die Ergebnisse dieser Experimente scheinen darauf hinzudeuten, daß nicht nur die Struktur, sondern auch die Wärmeleitfähigkeit vom Temperaturgradienten abhängig ist.

2.1.2 In-pile-Messungen

Strahlenschädigung des Kristallgitters durch Neutronenbestrahlung, Ausheilung dieser Schäden durch längere Temperatureinwirkung, Änderungen der Mikrostruktur des Brennstoffes und die Existenz eines hohen Temperaturgradienten sind nicht alle Einflüsse, denen der Brennstoff während des Betriebs im Reaktor ausgesetzt ist. Hinzu kommen Verunreinigungen durch Spaltprodukte, welche z.T. Verbindungen mit dem Brennstoff eingehen oder an ihn gebunden werden, z.T. aber auch, sofern sie gasförmig sind, sich

in den Brennstoffporen sammeln, hinzu kommt weiterhin eine Veränderung der Makrostruktur des Brennstoffes, besonders bei längerem Betrieb unter hoher Leistungsabgabe oder beim Durchlaufen thermischer Zyklen. Diese Veränderungen äußern sich in einem Schwellen und in einer gewissen Verdichtung des Brennstoffes, was einerseits dazu führt, daß sich der ursprünglich vorhandene fertigungsbedingte Spalt zwischen Brennstoff und Hüllrohr verringert, andererseits bei hoher thermischer Belastung ein zentraler Hohlraum gebildet wird, wenn der Brennstoff im Zentrum den Schmelzpunkt erreicht hat. Eine weitere Folge ist die Bildung von Rissen, welche den Brennstoff oft, meist in radialer Richtung, bis zum Hüllrohr durchsetzen können. Darüber hinaus stellt der Brennstoff während des Betriebs nicht, wie im out-pile-Experiment, den Wärmeübertrager, sondern den Wärmeproduzenten dar. All diese Effekte in out-pile-Experimenten separat zu untersuchen, stellt ein nahezu unlösbares Problem dar, weshalb schon frühzeitig die Notwendigkeit von in-pile-Messungen erkannt wurde.

Die meisten der bisher durchgeführten Wärmeleitfähigkeitsmessungen innerhalb des Reaktors wurden nach der stationären Radialflußmethode durchgeführt. Dabei ist es notwendig, den radialen Wärmestrom und eine Temperaturdifferenz im Brennstoff in einer axialen Ebene zu bestimmen. Bei sämtlichen nach dieser Methode durchgeführten Experimenten lag eine der beiden Temperaturmeßstellen im Zentrum der Probe. Von der Lage der zweiten Temperaturmeßstelle hängt es ab, welche Größe unter der somit gemessenen Wärmeleitfähigkeit zu verstehen ist. Man unterscheidet zwischen der "realen" und der "effektiven" Wärmeleitfähigkeit, je nach dem, ob die zweite Temperaturmessung im Brennstoff selbst oder aber am Hüllrohr erfolgt. Die effektive Wärmeleitfähigkeit beinhaltet außer der realen Wärmeleitfähigkeit die Wärmewiderstände des Hüllrohres und des Spaltes zwischen Brennstoff und Hüllrohr.

Eine Messung dieser effektiven Wärmeleitfähigkeit führte Cohen [20] an UO_2 -Pellets durch, welche in einer dickwandigen Edelstahlkapsel eingeschlossen waren. Die Zentraltemperatur wurde mit einem Pt/Rh-Thermoelement gemessen, die Bestimmung des radialen Wärmeflusses erfolgte durch Messung einer Temperaturdifferenz in der Edelstahlkapsel. Untersucht wurden die Einflüsse

der ursprünglichen Spaltweite zwischen Brennstoff und Kapsel, der Füllgasatmosphäre und der Zentraltemperatur. Durch Anwendung des Pt/Rh-Thermoelementes war die Zentraltemperatur allerdings begrenzt auf 1300°C. Ähnliche Beschränkungen in der Höhe der Zentraltemperatur mußten Hawkings [21] und Stora [22] in Kauf nehmen, die sich beide die Messung der realen Wärmeleitfähigkeit zum Ziel gesetzt hatten. Während Stora zu diesem Zwecke weitere Thermoelemente in der Nähe der Brennstoffoberfläche und im Hüllrohr positionierte, verzichtete Hawkings auf jegliche weitere Temperaturmessung an der Probe und ermittelte die Brennstoffoberflächentemperatur auf rechnerischem Wege. Bei der Bestimmung der Temperaturdifferenz zwischen Brennstoff und Hüllrohr stützte er sich auf experimentelle Ergebnisse von Ross [23]. Auch zur Bestimmung des radialen Wärmeflusses wählte er den rechnerischen Weg unter Zuhilfenahme von kontinuierlicher Neutronenflußmessung, Positionskontrolle und Abbrandanalyse. Daniel [24], welcher die Experimente von Cohen weiterführte, berichtet darüber hinaus von Untersuchungen an dünnwandigen hohlzylindrischen Brennstoffproben, deren Inneres mit Aluminiumoxyd ausgefüllt war, in welchem die Zentraltemperatur gemessen wurde, und an (U, Zr)O₂-Proben. All diese Messungen bestätigten prinzipiell die Ergebnisse, welche in out-pile-Versuchen an bestrahlten Proben gewonnen wurden.

Eine Ausweitung des Zentraltemperaturbereiches bis über 2000°C hinaus brachte die Anwendung von Thermoelementen auf W/Re-Basis. Über derartige Messungen berichten Clough [25], Christensen [26] und Michelson [27]. Clough positionierte drei weitere Thermoelemente nahe der Brennstoffoberfläche und bestimmte den Wärmefluß ebenfalls durch Temperaturmessung im Zusammenhang mit einer elektrischen Kompensationsheizung. Christensen, der mit Pellets großen Durchmessers arbeitete, führte zusätzlich Temperaturmessungen in einer Ringzone des Brennstoffes durch, in welcher die äußere Grenze für die Ausbildung der Zeilenkornstruktur zu erwarten war. Der Wärmefluß wurde durch kalorimetrische Messungen in einem NaK-Ringspalt bestimmt. Michelson verließ sich bei der Ermittlung der Brennstoff-Oberflächentemperatur wiederum auf rechnerische Methoden.

Bei der Verwendung der Hochtemperatur-Thermoelemente auf Wolfram/Rhenium-Basis stellte sich heraus, daß sie nach einer gewissen Zeit Fehlanzeigen liefern. Die Ursache dafür wurde in den unter Neutronenbestrahlung beschleunigt ablaufenden Diffusionsvorgängen zwischen Ader- und Isolationsmaterial (ThO_2) erkannt [28]. Dadurch wird ihre Lebensdauer im Reaktor auf Stunden bis maximal zwei Tage begrenzt, insbesondere dann, wenn man mit ihnen Messungen im Bereich des Schmelzpunktes von UO_2 durchführen will.

Ein Ausweg aus dieser Situation wurde von Lyons [29] und Baily [30] gewiesen, die einen neuartigen Temperaturfühler, ein sog. Gasthermometer (gas-bulb), zur Messung der Zentraltemperatur verwenden. Ein mit dem Edelgas Argon gefüllter Rhenium-Zylinder wird ins Zentrum des Brennstabes eingeführt. Ein Druckgeber, welcher im Bereich niedrigerer Temperaturen angebracht und durch ein Kapillarrohr mit dem Gaszylinder verbunden ist, mißt den Druck des in der Meßanordnung befindlichen Gases, der von der Temperatur im Zylinder und damit von der Zentraltemperatur des Brennstoffes abhängt. Der Meßfühler wird vorher im Ofen geeicht. Dieses Meßverfahren ist jedoch noch nicht ausgereift, so daß bisher zuverlässige Meßergebnisse im Temperaturbereich von 2400 bis 2500°C nur über einen Zeitraum von 50 Stunden, bei Temperaturen von 2750°C nur über 2 Stunden erzielt werden konnten.

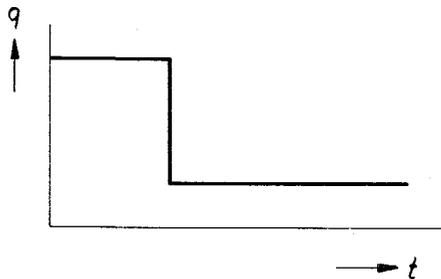
2.2 Instationäre Meßverfahren

Instationäre Wärmeleitfähigkeits-Meßverfahren unterscheiden sich von den stationären Methoden dadurch, daß der Wärmestrom durch den Prüfkörper nicht konstant, sondern mit einer zeitabhängigen Störung behaftet ist. Als Reaktion darauf weisen die Temperaturen der Probe ebenfalls Störungen auf. Der zeitliche Temperaturverlauf an einer oder mehreren Stellen der Probe wird zur Ableitung der Wärmeleitfähigkeit herangezogen.

Je nach Art der primären Störung unterscheidet man innerhalb der Gruppe der instationären Verfahren vier Methoden.

2.2.1

a) Änderung des Wärmeflusses nach einer Sprungfunktion



Der Wärmefluß durch die Probe wird plötzlich von einem niedrigeren auf ein höheres Niveau gebracht oder umgekehrt. Derartige Verfahren wurden von Lippmann [31] und Klein [32] beschrieben, die beide mit stabförmigen

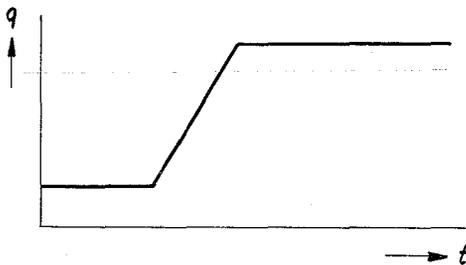
zylindrischen Proben arbeiten. Diese werden zunächst auf eine bestimmte Temperatur aufgeheizt bis stationäre Verhältnisse erreicht sind, dann wird die Wärmequelle plötzlich entfernt. Während Klein seitliche Wärmeverluste durch Anbringen von radialen Strahlenschilden vermeidet, um einen rein axialen Wärmefluß zu erhalten, und die Temperaturdifferenz zwischen zwei Stellen der Probe und der Wärmesenke verfolgt, läßt Lippmann auch radiale Wärmeverluste zu und geht in seinem theoretischen Modell von der stationären Temperaturverteilung im Prüfling aus. Als eigentliche Meßgröße benützt er die Abkühlungsgeschwindigkeit an drei verschiedenen Stellen der Probe.

Ein ähnliches Verfahren wurde von Bober [33] entwickelt, welches im Gegensatz zu den vorher beschriebenen ohne Temperaturmessung an der Probe selbst auskommt. Dies wurde als vorteilhaft erachtet im Hinblick auf das Ziel, Wärmeleitfähigkeiten an pulverförmigen Kernbrennstoffen durchzuführen. Das zu untersuchende Material, welches in einem zylindrischen Hüllrohr dicht eingeschlossen ist, wird zunächst durch Beheizung von außen auf ein bestimmtes Temperaturniveau gebracht. Wenn Temperaturgleichgewicht hergestellt ist, wird die Probe plötzlich abgeschreckt. Dies geschieht mittels eines Flüssigmetallstromes von niedrigerer als die Probentemperatur, der durch einen die Probe umgebenden Ringspalt hindurchgedrückt wird. Wenn der Prüfling vollkommen von dem Metallbad umschlossen ist, kommt der Strom zum Stagnieren. Es setzt nun ein Temperatúrausgleichsvorgang ein, welcher ebenso wie der vorhergehende Abschreckvorgang durch eine Temperaturmessung an der Außenseite des Ringspaltes, nicht an der Probe, verfolgt wird. Aus dem Verlauf dieser Temperaturkurve kann auf die Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffes und die Wärmeübergangszahl zwischen Brennstoff und Hüllrohr geschlossen werden.

Für eine allgemeinere Anwendung ist dieses Verfahren mit der in [33] beschriebenen Apparatur nicht geeignet, da es Messungen lediglich bei Temperaturen zwischen 400 und 600°C erlaubt. Jedoch ist daran gedacht, bestrahlte Brennstäbe in diesem Temperaturbereich zu untersuchen.

2.2.2

b) Rampenförmige Änderung des Wärmeflusses

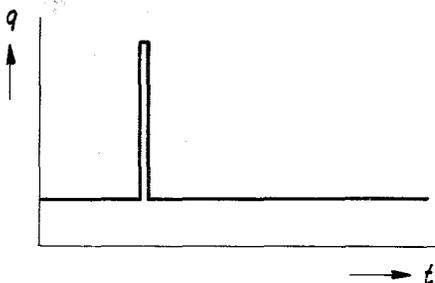


Über die Anwendung einer rampenförmigen Störfunktion in Form einer linearen Wärme-
flußsteigerung berichtet Wittenberg [34].
Er untersuchte u.a. zylindrische Proben
aus UC und (U, Pu)C bis zu Temperaturen
von 1000°C. Als auszuwertendes Signal

benützte er die Differenz zwischen zwei Temperatursignalen an verschiedenen axialen Positionen der Probe.

2.2.3

c) Impulsförmige Änderung des Wärmeflusses



In der Anwendung weiter verbreitet als
die beiden eben beschriebenen Verfahren
ist die Impuls-Methode (auch "Blitz-
Methode" genannt), die sich vor allem
sehr gut für dünne scheibenförmige Proben
eignet. Als Störfunktion wird dem Prüfling

ein kurzzeitiger Wärmeimpuls zugeführt.

Zum ersten Male wurde diese Methode von Parker [35] angewandt. Seine Mes-
sungen bezogen sich auf verschiedene Metalle und Legierungen bei 22°C und
135°C. Als Impulsquelle benützte er eine optische Blitzröhre und verfolgte
die Temperaturreaktion der Probenrückseite mit einem Thermoelement. Parker
wies bereits darauf hin, daß die Methode oberhalb von 1000°C aufgrund von
Strahlungsverlusten wahrscheinlich zu große Fehler bringen wird. Theoretische

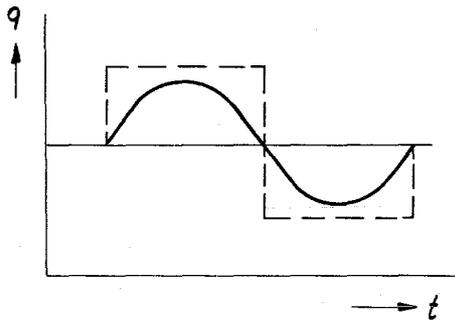
Untersuchungen von Cutler [36], Cowan [37] und Cape [38] räumten jedoch diese Schwierigkeiten aus dem Weg, indem sie Möglichkeiten zur Berücksichtigung dieses Effektes angeben konnten. Gleichzeitig führten sie eine Korrektur für die Impulsform ein, welche u.U. dann einen entscheidenden Einfluß auf die Messung haben kann, wenn sehr dünne Proben untersucht werden sollen. Auf der Basis dieser Kenntnisse entwickelte Taylor [39] eine Apparatur, welche es ermöglichen sollte, bestrahlte Materialproben zu untersuchen. Ein weiteres Problem, welches dieser Methode eigen ist, bildet die Schwierigkeit, den Wärmeimpuls gleichmäßig auf die Probenfläche zu verteilen. Moser [40] versuchte der Tatsache dadurch zu begegnen, daß er drei Thermoelemente auf der Rückseite der Probe positionierte.

Für das Erreichen hoher Temperaturen war jedoch die Korrektur der Strahlungsverluste noch nicht ausreichend. Es mußte zusätzlich eine neue Impulsquelle gefunden werden, da die optische Blitzröhre keine höheren Temperaturen als ca. 600°C aushält. Diese neue Quelle wurde von der inzwischen fortgeschrittenen Lasertechnik geliefert. Neben Moser [41] setzte auch Morrison [42] diese Wärmeimpulsquelle ein und erzielte damit Ergebnisse bis zu Temperaturen von 2200°C . Einen Laserstrahl benutzte auch Shaw [43] für Messungen an bestrahlten Kernbrennstoffproben bis 1200°C . Zur Temperaturmessung zog er die von der Probenrückseite abgestrahlte Wärme heran, welche er über ein optisches System einem PbS-Detektor zuführte. Eine weitere Variante gab Mustacchi [44] an, der einen Elektronenstrahl als Impulsquelle benutzte und die Temperatur mit Hilfe einer Photozelle maß. Er führte damit Messungen an UC im Temperaturbereich zwischen 1000°C und 2000°C aus.

Von einer in-pile-Anwendung der Impulsmethode berichtet Montgomery [45], wobei erstmals der Wärmeimpuls in der Probe - es handelte sich dabei um UO_2 - selbst erzeugt wurde. Zwei UO_2 -Zylinder unterschiedlicher Anreicherung, die miteinander in gutem Wärmekontakt stehen, wurden in den Reaktor TREAT (Transient Reactor Test Facility) eingebracht, einen Reaktor, welcher im Pulsbetrieb arbeitet. Durch die verschiedene Anreicherung wurden

in den beiden Teilen der Probe unterschiedliche Wärmemengen freigesetzt. Der zeitliche Verlauf der Temperaturdifferenz der beiden Probenteile wurde mit Hilfe von Thermoelementen registriert.

2.2.4 Periodische Änderungen des Wärmeflusses



Ähnlich verbreitet wie die Impuls-Methode und für in-pile-Messungen besonders geeignet ist das Verfahren, welches mit periodischen Störungen des Wärmeflusses arbeitet. Sie ist zugleich die älteste instationäre Wärmeleitfähigkeits-Messmethode und geht auf Angström [46] zurück.

Er führte Messungen an Kupfer und Eisen durch, wobei er die Wärmefluss-Oszillationen durch ein Wasser/Dampf-Gemisch erzeugte, welches in einem kontinuierlich rotierenden Dreiweghahn erzeugt wurde. Die Temperaturen wurden mit zwei kleinen Thermometern innerhalb der Probe gemessen, aus ihrer Phasendifferenz wurde die Wärmeleitfähigkeit bestimmt.

Erst sehr viel später wurde dieses Verfahren von van Zee [47] wieder aufgegriffen, der damit die Wärmeleitfähigkeit von Glasschmelzen im Temperaturbereich zwischen 700 und 1400°C bestimmte. Van Zee modulierte dabei die gesamte Ofenheizung und maß die Temperaturen in der Schmelze mit Hilfe von Thermoelementen.

Eine Kontrollmöglichkeit für die Messung wurde in der gleichzeitigen Bestimmung von Phasendifferenz und Amplitudenreduktion von zwei Temperatursignalen erkannt. Über derartige Messungen berichten Sidles [48] und Abeles [49]. Beide benützen stabförmige Proben und erzeugen die dem stationären Wärmefluss überlagerte Oszillation durch eine elektrische Zusatzheizung. Die Temperaturen werden mit Hilfe von Thermoelementen an mehreren axialen Stellen der Probe verfolgt.

Eine Möglichkeit zur Ausdehnung des Meßtemperaturbereichs auf über 1000°C erschloß Cowan [50], der zur Erzeugung der oszillierenden Leistung

eine Elektronenstrahl-Heizung anwandte. Zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit benützte er allein die Phasenverschiebung zwischen den Temperatursignalen von beiden Oberflächen der scheibenförmigen Probe, da diese sich mit größerer Genauigkeit ermitteln läßt als die Amplitudenreduktion. Nach dem gleichen Verfahren wurden später von Wheeler [51], van den Berg [52] und Serizawa [53] Untersuchungen an Uranradioxyd bis zu Temperaturen von über 2000°C durchgeführt, wobei die Temperaturen der Probenoberflächen pyrometrisch oder mit Hilfe von Photozellen gemessen wurden. Auch Mustacchi [44] benützte für seine Messungen an Urankarbid dieses Verfahren neben der Impuls-Methode.

Cowan [50] wandte außer einer sinusförmigen Modulation des Elektronenstrahles auch eine solche in Form von periodischen Rechteckfunktionen an. Durch Anwendung der Fourier-Analyse bei der Auswertung der Temperaturkurven kam er dabei zu den gleichen Ergebnissen wie bei einer rein sinusförmigen Oszillation. Diese Tatsache rechtfertigt die Anwendung beliebiger periodischer Funktionen als Störfunktionen für den Wärmefluß. Durch Fourier-Analyse der resultierenden Temperaturkurven können die einzelnen Harmonischen auf jeden Fall voneinander getrennt und separat zur Auswertung herangezogen werden.

Über diese out-pile-Meßverfahren hinaus sind auch bereits in-pile-Anwendungen von periodischen Störungen zum Zwecke der Wärmeleitfähigkeitsmessung bekannt geworden.

Glanz [54] beschreibt eine Kapsel, in welcher Messungen der Wärmeleitfähigkeit im Temperaturbereich 350 - 700°C u.a. an (Si, U)O₂-Proben durchgeführt wurden. Der oszillierende Wärmefluß, welcher die Probe in axialer Richtung durchsetzt, wurde dabei durch eine elektrische Widerstandsheizung erzeugt, der Temperaturverlauf an einer Stelle der Probe wurde mit einem Thermoelement gemessen. Die Gesamtleistung der Kapsel ist auf 50 W beschränkt. Dieses Verfahren, mit welchem ein genaueres Bild über die während der Bestrahlung entstandenen Effekte erhofft wird, basiert jedoch auf Voraussetzungen, welche nicht repräsentativ für die tatsächlichen Bedingungen sind, denen der Brennstoff während des Betriebs unterworfen ist. Die Differenzen sind dabei einerseits in der Wärmeerzeugung außerhalb der Probe und in dem axialen Temperaturgradienten zu sehen.

Die vollkommene Realisierung der tatsächlichen Betriebsbedingungen wurde von Burdg [55] und Perez [56] angestrebt. Beide setzten sich zum Ziel, die Wärmefreisetzung infolge des Spaltprozesses auszunützen und die Oszillationen in der Wärmeproduktion durch entsprechende Oszillationen im Neutronenfluß zu erzeugen. Als Meßobjekt sollten übliche übereinandergeschichtete Brennstoffpellets dienen, welche von einem Hüllrohr umschlossen sind, dessen Oberflächentemperatur mit Thermoelementen gemessen wird. Die Phasenverschiebung zwischen den Oszillationen dieser Temperaturen und denen des Neutronenflusses dient letztlich zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit. Während die Experimente von Burdg noch während der out-pile-Erprobung des Verfahrens abgebrochen wurden, führte Perez bereits in-pile-Messungen durch, wobei die Oszillationen des Neutronenflusses durch Bewegung des Prüflings im natürlichen Flußgradienten des Reaktors erzeugt wurden.

Der Grund für den Abbruch der Experimente von Burdg lag im wesentlichen in der relativ großen Streuung der Meßergebnisse nicht nur in axialer, sondern auch in Umfangsrichtung. Die Ursache wurde in der Tatsache erkannt, daß der Brennstoff während des Betriebs seine Makrostruktur durch Schwellen und Rißbildung verändert. Es bleibt deshalb dem Zufall überlassen, welche Struktur sich gerade in dem Querschnitt des Brennstoffes ausgebildet hat, welcher der Hüllrohr-Temperaturmeßstelle zugeordnet ist. Perez versucht diesem Problem dadurch zu begegnen, daß er zumindest die Wärmeübertragung im Spalt zwischen Brennstoff und Hüllrohr in seinem mathematischen Modell berücksichtigt.

Vor diesem Hintergrund hebt sich ein wesentlicher Vorzug des Balanced Oscillator Verfahrens, welches ebenfalls zu dieser eben beschriebenen Gruppe der instationären Meßmethoden zählt, deutlich ab: Hier kann auch auf die Messung der Hüllrohr-Oberflächentemperatur verzichtet werden, so daß dieses Verfahren von den Zufälligkeiten der Strukturausbildung in einzelnen Querschnitten unabhängig ist. Die Meßwerte für Wärmeleitfähigkeit und Spalt-Wärmeübergangszahl sind dabei als integrale Werte über das gesamte Brennstoffvolumen bzw. über die Länge der Brennstoffsäule zu verstehen.

3. Prinzip der Balanced Oscillator Methode

Ein zylindrischer Brennelementprüfling befindet sich innerhalb des Reaktors im thermischen Neutronenfluß. Im stationären Zustand soll er in einem Fluß ϕ_0 die Gesamtleistung P_0 abgeben. Diese Leistung wird durch einen Kühlmittelstrom μ_0 abgeführt, der durch einen Ringspalt, gebildet aus Prüflingsoberfläche und Gasführungsrohr, hindurchströmt. Das Kühlmittel wird dabei eine Aufheizung $(\theta_a - \theta_e)_0$ erfahren, die bei konstanter Stabileistung S_0 linear verlaufen wird. Gleichzeitig wird sich an der Prüflingsoberfläche ein Temperaturverlauf $v_{s0}^q(z)$ einstellen.

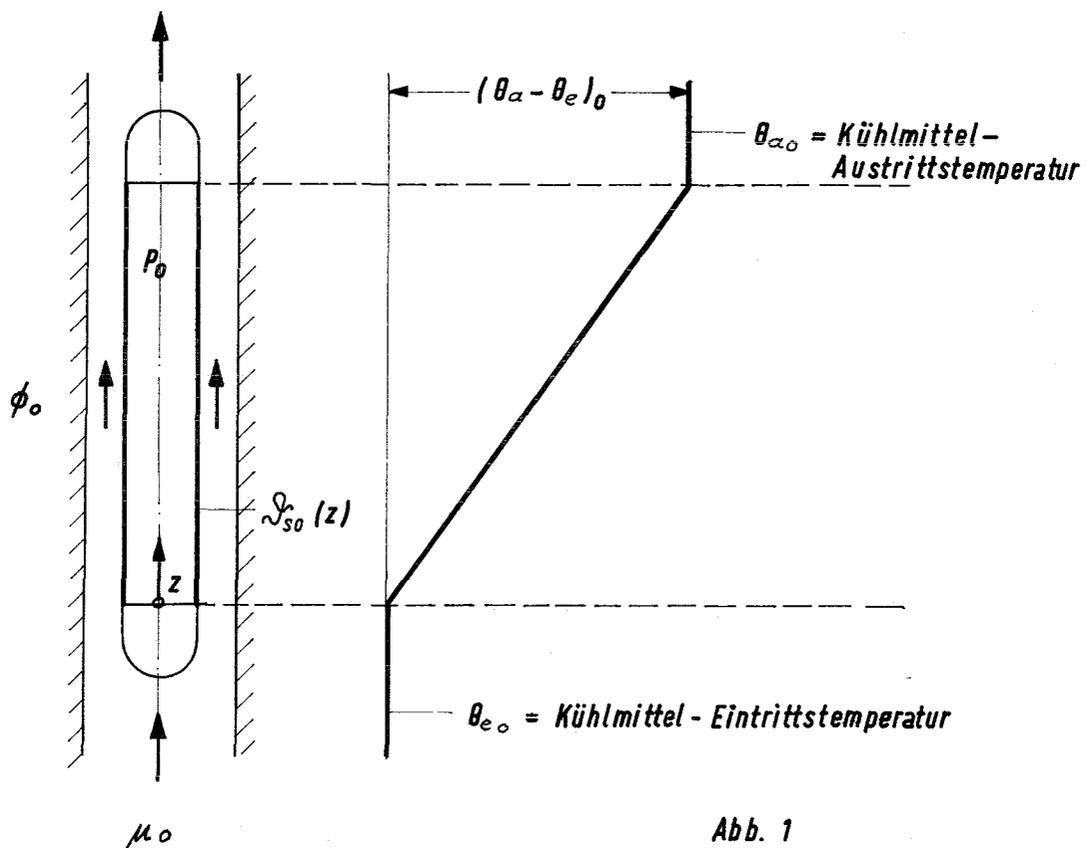
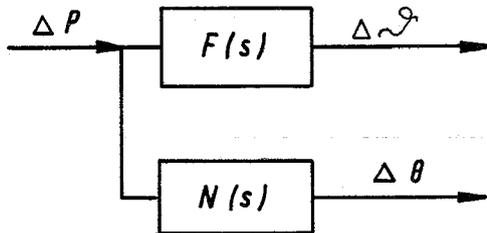


Abb. 1

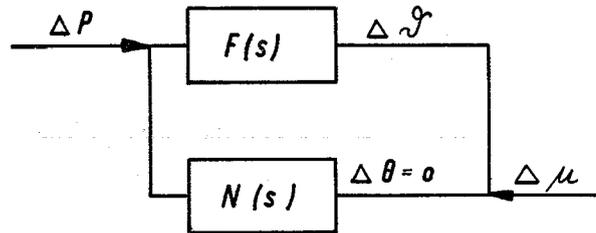
Das Gleichgewicht des so definierten stationären Systems wird nun durch eine Störung ΔP in der Leistungsentwicklung, hervorgerufen durch eine Störung $\Delta \phi$ im thermischen Neutronenfluß, verändert. Das System reagiert darauf mit Änderungen der Temperaturen im Prüfling Δt^q sowie im Kühlmittel $\Delta \theta$. Wird z.B. die Leistung P_0 um einen Betrag ΔP erhöht, so dient ein Teil der Überproduktion dazu, das Temperaturniveau

des Prüflings anzuheben, während ein anderer Teil über die Prüflingsoberfläche ins Kühlmittel abfließt.

Beim Oscillator Experiment verwendet man als Störfunktion für die Leistung eine sinusförmige Oszillation. Die Antwortfunktionen der gestörten Größen werden dann ebenfalls sinusförmig sein.



Oscillator - Experiment
Abb. 2a



Balanced Oscillator Experiment
Abb. 2b

Eine Darstellung dieses Vorgangs im Blockdiagramm zeigt Abb. 2a.

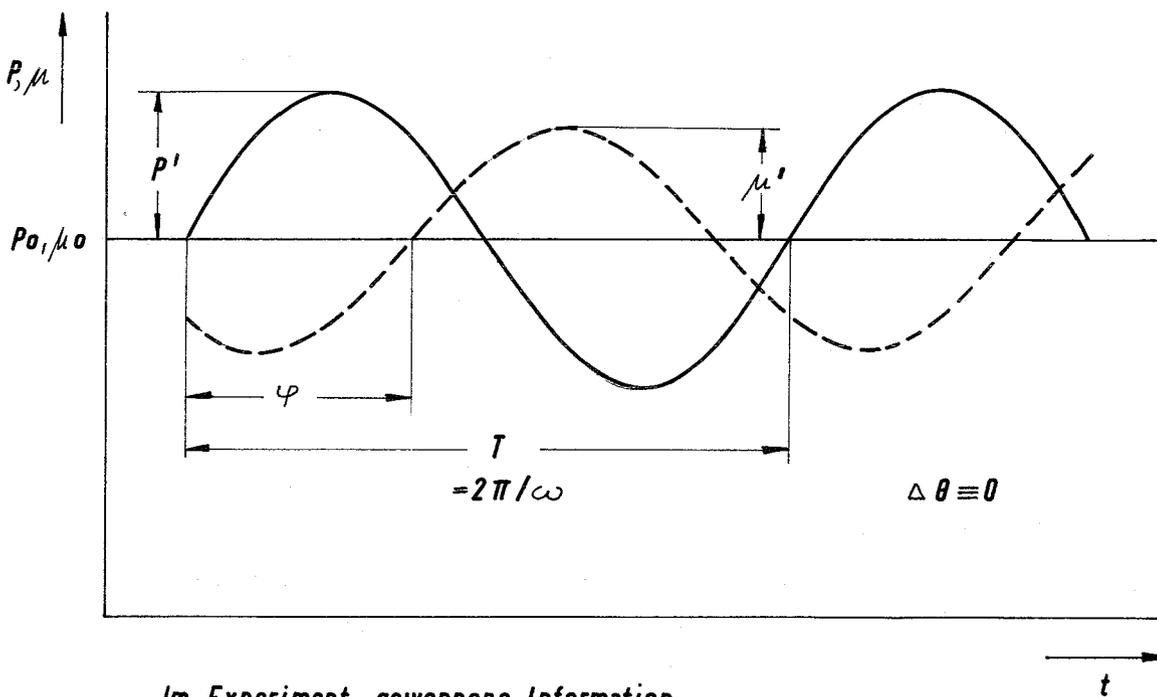
Um aus einem solchen Oszillator-Experiment Informationen über einen internen Parameter des Systems zu erhalten, ist es prinzipiell erforderlich, beide Antwortsignale zu analysieren.

Beim Balanced Oscillator Experiment (s. Abb. 2b) wird dem System von außen eine zweite Störung aufgezwungen, nämlich eine ebenfalls sinusförmige Oszillation des Kühlmitteldurchsatzes μ . Diese Oszillation wird, unter Einhaltung der gleichen Frequenz wie die der Leistungsoszillation, in ihrer Amplitude sowie ihrer Phasenlage gegenüber der Leistungsoszillation so eingerichtet, daß die Störung $\Delta\theta$ der Kühlmitteltemperatur kompensiert wird. Durch die Elimination der Kühlmitteltemperatur-Störungen wird eine eindeutige Zuordnung zwischen den bekannten, da von außen dem System aufgezwungenen Oszillationen der Leistung und des Kühlmitteldurchsatzes hergestellt, die, in Anlehnung an die Regeltechnik, als Übertragungsfunktion $F(s)$ zwischen Kühlmitteldurchsatz und Leistung bezeichnet werden soll. Sie ist abhängig von der Kreisfrequenz ω der Oszillationen sowie von den internen Parametern des gestörten Systems.

Aufgabe des Balanced Oscillator Experimentes ist es, diese Übertragungsfunktion $F(s)$ zu messen. Ihre Definition durch die im Versuch zu ermittelnden Meßdaten soll im folgenden erläutert werden.

Abb. 3 zeigt die schematische Darstellung eines Schriebs, wie er während des Experimentes gewonnen wird. Dabei sollen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

- a) Der Oszillationsvorgang soll sich im eingeschwungenen Zustand befinden.
- b) Die Kühlmitteltemperatur-Schwankungen sollen vollständig kompensiert sein.



Im Experiment gewonnene Information

Abb. 3

Leistung P und Kühlmitteldurchsatz μ sind in diesem Fall gegeben durch die Beziehungen

$$P = P_0 + P' \cdot \sin \omega t \quad (1)$$

$$\mu = \mu_0 + \mu' \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

Als Störungen ΔP bzw. $\Delta \mu$ werden die Abweichungen der Momentanwerte (P, μ) von denen des stationären Zustandes (P_0, μ_0) bezeichnet:

$$\Delta P = P - P_0 = P^{\dagger} \sin \omega t \quad (3)$$

$$\Delta \mu = \mu - \mu_0 = \mu^{\dagger} \sin (\omega t + \varphi) \quad (4)$$

Die Übertragungsfunktion $F(s)$ ist nun definiert als das Verhältnis der auf den stationären Zustand bezogenen Laplace-transformierten Störungen in Kühlmitteldurchsatz und Leistung.

Mit den Laplace-transformierten Beziehungen

$$\Delta P^{\ddagger} = L \{ \Delta P \} = P^{\dagger} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5)$$

$$\Delta \mu^{\ddagger} = L \{ \Delta \mu \} = \mu^{\dagger} \cdot \frac{\omega \cos \varphi + s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2} \quad (6)$$

lautet die Definitionsgleichung für die Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{\Delta \mu^{\ddagger} / \mu_0}{\Delta P^{\ddagger} / P_0} = \frac{\mu^{\dagger} / \mu_0}{P^{\dagger} / P_0} \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) = A \cdot e^{j\varphi} \quad (7)$$

$F(s)$ ist im allgemeinen eine komplexe Funktion der komplexen Variablen s

$$s = \sigma + j\omega \quad (8)$$

Wenn, wie im vorliegenden Fall, nur der eingeschwungene Zustand betrachtet wird, Anlaufphänomene also aus der Untersuchung ausgeklammert werden, so kann nach [57] die komplexe Variable s durch den Imaginärteil $j\omega$ allein dargestellt werden. Die Übertragungsfunktion geht damit in den Frequenzgang über. (Im folgenden wird die Bezeichnung Übertragungsfunktion für $F(s = j\omega)$ beibehalten)

Gleichung (7) läßt erkennen, daß die im Laplace-Bereich definierte Übertragungsfunktion $F(s)$ bestimmt wird durch die im Zeitbereich gegebenen

Größen für den Quotienten der relativen Amplituden der beiden periodischen Störungen und ihre Phasenverschiebung. A und φ sind Funktionen der Kreisfrequenz ω und der Parameter des gestörten Systems. Sind A , φ und ω durch Messung bestimmt worden, so kann auf die Systemparameter zurückgeschlossen werden. Da die Übertragungsfunktion $F(s)$ eine komplexe Funktion ist, die durch zwei Werte - Real- und Imaginärteil oder Betrag und Phasenwinkel - gegeben ist, lassen sich auch zwei Parameter aus ihr bestimmen. Wie die mathematische Behandlung des Problems erkennen läßt, sind es die Wärmeleitfähigkeit λ_f des Brennstoffes und die Wärmedurchgangszahl α_g des Spaltes zwischen Brennstoff und Hüllrohr, die sich als Unbekannte aus den Meßwerten für die Übertragungsfunktion gewinnen lassen.

4. Mathematisches Modell

Um den Schluß von der gemessenen Übertragungsfunktion auf die Systemparameter zu ermöglichen, ist es notwendig, ein geeignetes mathematisches Modell zu entwickeln, welches die Übertragungsfunktion analytisch möglichst genau beschreibt. Von der Exaktheit dieses Modells hängt es ab, mit welcher Genauigkeit die gesuchten Größen aus den Meßwerten abgeleitet werden können. Die folgenden Ausführungen gelten gleichermaßen für die out-pile-Experimente wie für die in-pile-Experimente. Auf die Unterschiede in den Voraussetzungen sowie auf die sich daraus ergebenden Unterschiede in den Lösungen wird jeweils besonders hingewiesen.

4.1 Modellvorstellungen und Voraussetzungen

Den folgenden Betrachtungen soll ein gängiger Prüfling zugrunde gelegt werden, bei dem der Brennstoff in Form von übereinandergeschichteten Pellets vorliegt, die durch ein gemeinsames Hüllrohr zusammengehalten werden. Zwischen Brennstoff und Hüllrohr möge sich ein Spalt befinden, welcher durch Fertigungstoleranzen bedingt und mit dem Inertgas Helium gefüllt sei (siehe Abb. 4a).

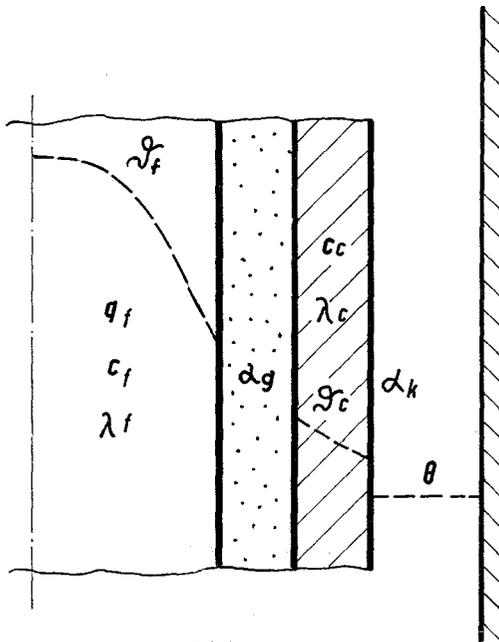


Abb. 4a

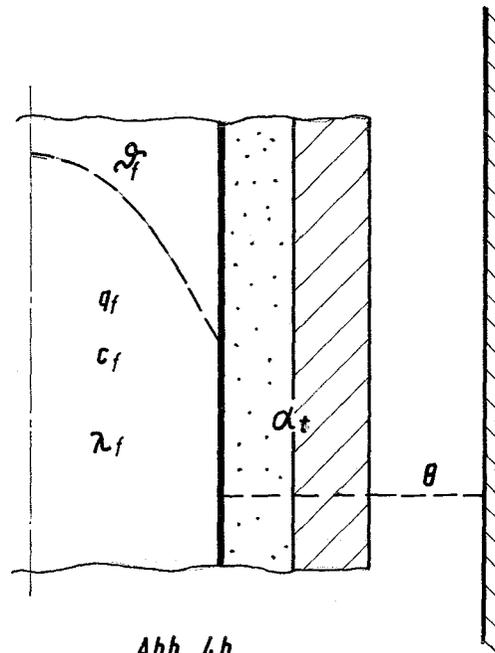


Abb. 4b

q = Wärmequellendichte

c = spez. Wärme

λ = Wärmeleitfähigkeit

α = Wärmeübergangszahl

ϑ_f = Brennstoff-Temperatur

θ = Kühlmittel-Temperatur

----- Temperaturverlauf

Indices: f: Brennstoff (fuel)

g: Spalt (gap)

c: Hüllrohr (can)

k: Kühlmittel

t: Totalwert

Das dynamische Verhalten des Brennelement-Prüflings während des Oszillationsvorganges hängt von den thermischen Eigenschaften der einzelnen Schichten, aus denen er aufgebaut ist, und vom Wärmequellprofil in der Brennstoffschicht ab. Unter den thermischen Eigenschaften sind es speziell die spezifische Wärme c und der Wärmewiderstand, charakterisiert durch die Wärmeleitfähigkeit λ oder die Wärmeübergangszahl α , welche das Wechselspiel zwischen Wärmespeicherung im Material und Wärmetransport aus dem Material heraus bestimmen.

Theoretische Voruntersuchungen haben ergeben, daß der Einfluß der spez. Wärme des den Spalt zwischen Brennstoff und Hülle ausfüllenden Gases von untergeordneter Bedeutung ist und deshalb vernachlässigt werden kann. Es ist deshalb zulässig, den Spalt allein durch seine Wärmedurchgangszahl α_g zu definieren. Anders liegen die Verhältnisse beim Hüllrohr,

dessen Wärmekapazität durchaus eine Rolle spielen kann, wenn die Periodendauer der Oszillation klein ist. Aus diesen Voraussetzungen resultiert das Modell 1, wie es in Abb. 4a dargestellt ist.

Vernachlässigt man neben der Wärmekapazität des Spalt-Füllgases auch die des Hüllrohres, so besteht die Möglichkeit, die Wärmedurch- und -übergangszahlen α des Spaltes, des Hüllrohres und des äußeren Wärmeübergangs an das Kühlmittel zu einer totalen Wärmeübergangszahl α_t zusammenzufassen. Hieraus folgt das Modell 3, dargestellt in Abb. 4b.

Diese beiden Modelle, welche sich aus der unterschiedlichen Berücksichtigung der thermischen Eigenschaften der einzelnen Schichten ergeben, werden im folgenden nochmals unterschieden unter dem Gesichtspunkt der Kühlmitteldynamik. Da die im Prüfling entstehende Wärme durch einen intensiven Kühlmittelstrom, somit also durch Zwangskonvektion, abgeführt wird, ist die äußere Wärmeübergangszahl α_k vom Kühlmitteldurchsatz μ abhängig. Der Kühlmitteldurchsatz wird nun ebenfalls Oszillationen unterworfen. Daraus folgt, daß auch die Wärmeübergangszahl α_k Schwankungen ausgesetzt ist. In der exakten Betrachtung müssen diese deshalb mit berücksichtigt werden, woraus sich die Modelle 2 bzw. 4 als Erweiterung der Modelle 1 bzw. 3 ergeben.

Unter der Voraussetzung, daß die Wärmequellverteilung im Brennstoff über dem Radius konstant ist, stimmt das Modell 3 mit der von Caldarola [1] zugrunde gelegten Vorstellung überein. Insofern bildet das Modell 4 eine Korrektur des Caldarola'schen Modells hinsichtlich der Kühlmitteldynamik. Die Modelle 1 und 2 stellen Erweiterungen dieses Modells hinsichtlich der expliziten Berücksichtigung der Wärmekapazität des Hüllrohres dar, wobei wiederum nach Einbeziehung oder Nichteinbeziehung der Kühlmitteldynamik unterschieden ist.

Die Voraussetzung einer konstanten Wärmequellverteilung über den Radius des Brennstoffes ist im allgemeinen eine Vereinfachung, deren Zulässigkeit von Fall zu Fall überprüft werden muß. Zu einer ersten Interpretation der out-of-pile-Messungen scheint diese Annahme gerechtfertigt zu sein. Sind jedoch auf Grund dieser ersten Rechnung in etwa die

Temperaturverhältnisse im Innern des Brennstabes bekannt, so erscheint es zweckmäßiger, ein den realen Verhältnissen besser entsprechendes Wärmequellprofil zugrunde zu legen, welches durch ein spezielles Polynom ausgedrückt wird. Zur Interpretation der in-pile-Meßdaten bietet sich ein Wärmequellprofil an, welches mit dem Profil des Neutronenflusses in einem Prüfling übereinstimmt, der sich im thermischen Reaktor befindet. Dieses Profil wird aus der Diffusionsgleichung abgeleitet.

Im folgenden sind die modellunabhängigen und die modellabhängigen Voraussetzungen nochmals zusammengestellt.

Modellunabhängige Voraussetzungen

1. Wärmequellprofil im Brennstoff:

1.1 in pile: $q_f = q_f(r)$

1.2 out of pile: $q_f = \text{const.}$

$$q_f = q_f(r)$$

2. Wärmequellen im Spalt: $q_g = 0$

3. Wärmequellen im Hüllrohr: $q_c = 0$

4. Spez. Wärme des Spalt-Füllgases: $c_g = 0$

5. Stoffwerte der einzelnen Zonen werden betrachtet als Mittelwerte über Ort und Zeit.

Modellabhängige Voraussetzungen

1. Spez. Wärme des Hüllrohrmaterials: $c_c \neq 0$

1.1 Kühlmitteldynamik vernachlässigt: $\Delta\alpha_k = 0 \rightarrow \text{Modell 1}$

1.2 Kühlmitteldynamik berücksichtigt: $\Delta\alpha_k \neq 0 \rightarrow \text{Modell 2}$

2. Spez. Wärme des Hüllrohrmaterials: $c_c = 0$

totale Wärmeübergangszahl:
$$\alpha_t = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_g} + \frac{1}{\alpha_c} + \frac{1}{\alpha_k}}$$

- 2.1 Kühlmitteldynamik vernachlässigt: $\Delta\alpha_k = 0 \rightarrow$ Modell 3
2.2 Kühlmitteldynamik berücksichtigt: $\Delta\alpha_k \neq 0 \rightarrow$ Modell 4

4.2 Analyse des radialen Problems

4.2.1 Lösungsweg

Die Analyse des radialen Problems basiert auf der Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichung, wie sie z.B. durch Gröber e.a. [58] in Zylinderkoordinaten angegeben ist:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{c \varrho}{\lambda} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = - \frac{q}{\lambda} \quad (9)$$

- | | | | |
|-------------|---------------|-----------|----------------------|
| ϑ | = Temperatur | λ | = Wärmeleitfähigkeit |
| r | = Radius | t | = Zeit |
| c | = spez. Wärme | q | = Wärmequellendichte |
| ϱ | = Dichte | | |

Diese Gleichung stellt eine Wärmebilanz dar in der Form, daß die örtlichen und zeitlichen Temperaturänderungen mit der Wärmeerzeugung innerhalb eines Volumenelements im Gleichgewicht stehen müssen.

Während die Stoffwerte λ , c und ϱ in dieser Beziehung als konstant betrachtet werden, gelten die Temperatur ϑ und die Wärmequellendichte q als mit zeitlichen Störungen $\Delta\vartheta$ bzw. Δq behaftet, welche sich dem stationären Zustand additiv überlagern. Nach einer sowohl geometrischen als auch zeitlichen Normierung werden die gestörten Größen in die Differentialgleichung eingeführt. Unter der Voraussetzung, daß die Differentialgleichung für den stationären Fall erfüllt ist, können die entsprechenden stationären Glieder eliminiert werden. Die dabei entstehende neue partielle Differentialgleichung wird durch Laplace-Transformation bezüglich der normierten Zeit in eine gewöhnliche Differentialgleichung übergeführt. Dabei gilt die Anfangsbedingung, daß die zeitlichen Temperaturänderungen zum Zeitpunkt Null ebenfalls Null sind.

Durch diese Maßnahme entsteht eine, im allgemeinen Fall inhomogene, Besselsche Differentialgleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 \Delta v^*}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \Delta v^*}{\partial y} - s \Delta v^* = - \frac{R_f^2}{\lambda} \cdot \Delta q^* \quad (10)$$

y = normierter Radius

s = Laplace-transformierte normierte Zeit

R_f = Brennstoff-Außenradius.

Der Stern (*) deutet, entsprechend der Konvention in Kap. 3, die Laplace-Transformation an.

Die Lösung dieser Differentialgleichung gliedert sich in die Lösung der homogenen sowie eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet nach Kamke [59]:

$$\Delta v^* = C_1 \cdot J_0(\sqrt{-s} y) + C_2 \cdot N_0(\sqrt{-s} y) \quad (11)$$

Hierin bedeuten J_0 und N_0 die Besselfunktionen 1. und 2. Art, 0. Ordnung. Die Herleitung dieser Lösung aus der Ausgangs-Differentialgleichung ist im Anhang A1 dargestellt.

Die Konstanten C_1 und C_2 lassen sich, ebenso wie die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, erst finden, wenn eine definitive Aussage über das radiale Wärmequellprofil $q(y)$ gemacht ist. Außerdem sind sie von der Wahl der Randbedingungen abhängig.

Auf die angegebene Weise werden die Wärmeleitungsgleichungen des Brennstoffes und ggf. des Hüllrohres getrennt gelöst, wobei als Randbedingungen die Wärmeübergangsbeziehungen, im Falle des Brennstoffes zusätzlich die Symmetriebedingung für das Temperaturprofil, benützt werden. Als Resultat ergeben sich dabei die Störungen der Brennstoff- bzw. der Hüllrohrtemperaturen als Funktionen der übrigen Störgrößen, welche z.T. bereits in der Differentialgleichung erfaßt sind oder über die Randbedingungen in die Lösung eingehen. Durch Spezialisierung der

Lösungsgleichungen auf die Oberflächen erhält man sodann ein Gleichungssystem, welches es gestattet, die einzelnen Störungen so miteinander zu verknüpfen, daß die außerhalb des Prüflings bemerkten Störungen in Oberflächentemperatur, Kühlmitteltemperatur und ggf. in der Wärmeübergangszahl nur mehr als Funktion der Störungen in der Wärmequellendichte gegeben sind.

Bringt man nunmehr die prüflings-externen Störgrößen mit dem Kühlmitteldurchsatz in Verbindung, so kann man schließlich, unter Berücksichtigung des Balance-Prinzips, welches die Konstanz der Kühlmitteltemperaturen fordert, die Übertragungsfunktion $F(s)$ zwischen den Störungen in Kühlmitteldurchsatz und Wärmequellendichte als zusammenhängenden Ausdruck angeben.

Im folgenden werden zunächst die Lösungen der Brennstoffgleichung für drei interessante Wärmequellprofile angegeben sowie die Lösung der Hüllrohrgleichung, für welche, im Gegensatz zur Brennstoffgleichung, die Annahme getroffen wurde, daß keine inneren Wärmequellen vorhanden sind. Im Anschluß daran werden die Lösungen in geeigneter Weise miteinander verknüpft, so daß die Übertragungsfunktionen für die vier eingangs definierten Modellvorstellungen bestimmt werden können. Im folgenden werden nur die wesentlichsten Punkte berührt, eine ausführliche mathematische Behandlung ist im Anhang zu finden.

4.2.2 Lösung der Brennstoffgleichung

Für den Brennstoff (Index f) lautet die Ausgangsdifferentialgleichung (9):

$$\frac{\partial^2 \vartheta_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta_f}{\partial r} - \frac{c_f \cdot \vartheta_f}{\lambda_f} \cdot \frac{\partial \vartheta_f}{\partial t} = - \frac{q_f}{\lambda_f} \quad (12)$$

Auf dem in Kap. 4.2.1 beschriebenen Weg erhält man als Lösung der homogenen Gleichung für die Störungen der Brennstofftemperatur $\Delta \vartheta_f^*$ im Laplace-Bereich:

$$\Delta \vartheta_f^* = C_1 \cdot J_0(\sqrt{-s_f} y) + C_2 \cdot N_0(\sqrt{-s_f} y) \quad (13)$$

Hierbei wurde der Radius r mit dem äußeren Brennstoffradius R_f , die Zeit t mit der radialen Zeitkonstanten

$$t_{rf} = \frac{R_f^2 \cdot c_f \rho_f}{\lambda_f}$$

des Brennstoffstabes normiert.

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung sowie die Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 hängt wesentlich vom vorausgesetzten Wärmequellprofil $q_f(y)$ ab. Im folgenden werden die Lösungen für die drei in Kap. 4.1 genannten Profile angegeben.

4.2.2.1 Konstante Wärmequellverteilung

Eine konstante Wärmequellverteilung über dem Radius eines Heizstabes bzw. Brennstabes ist im allgemeinen ein Idealfall. Mit ihr kann nur gerechnet werden, wenn, für den Fall eines elektrisch durch Widerstandsbeheizung betriebenen Heizstabes, der spezifische elektrische Widerstand des Heizstabmaterials von der Temperatur unabhängig ist, oder, für den Fall eines nuklearen Brennstabes, wenn die Selbstabschirmung des Brennstoffes gegenüber dem einfallenden Neutronenstrom vernachlässigbar klein ist. Diese Forderung ist mit guter Näherung erfüllt in einem mit schnellen Neutronen betriebenen Reaktor. Aus diesem Grunde ist die Annahme einer konstanten Wärmequellverteilung in [1] durchaus gerechtfertigt.

In der vorliegenden Arbeit soll diese Annahme eine Näherung an die tatsächlichen Verhältnisse in einem elektrisch beheizten Teststab sein, so lange über die Wärmeleitfähigkeit des Materials und damit über die radiale Temperaturverteilung noch keine Aussage gemacht werden kann.

Unter der Voraussetzung

$$q_f(y) = \text{const.} \quad (14)$$

lautet die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\Delta v_f^* = \frac{R_f^2}{\lambda_f \cdot s_f} \cdot \Delta q_f^* \quad (15)$$

Diese Lösung folgt direkt aus der Differentialgleichung Gl.(10), wenn man beachtet, daß die Differentialquotienten nach y für den obigen Ausdruck verschwinden.

Für die Gesamtlösung, welche sich aus der additiven Überlagerung von Gl.(15) und Gl.(13) ergibt, müssen die Konstanten C_1 und C_2 mit Hilfe von geeigneten Randbedingungen bestimmt werden. Als erste Bedingung wird dabei gefordert, daß das Temperaturprofil im Innern des Heizstabes achsensymmetrisch ist:

$$\left(\frac{\partial \vartheta_f}{\partial r} \right)_{r=r_0} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial \Delta \vartheta_f^*}{\partial y} \right)_{y=y_0} = 0 \quad (16)$$

r_0 = innerer Heizstabradius

y_0 = normierter innerer Heizstabradius

Als zweite Randbedingung wird die des äußeren Wärmeübergangs herangezogen:

$$-\lambda_f \cdot \left(\frac{\partial \vartheta_f}{\partial r} \right)_{r=R_f} = \alpha \cdot (\vartheta_{fs} - \vartheta) \quad (17)$$

ϑ_{fs} = Heizstab-Oberflächentemperatur

ϑ = Außentemperatur

α = Wärmeübergangszahl

Verfolgt man an dieser Stelle den allgemeinen Fall, der dadurch charakterisiert ist, daß außer den Brennstofftemperaturen ϑ_f und ϑ_{fs} die Außentemperatur ϑ und die Wärmeübergangszahl α störungsbehaftet sind, so schreibt sich Gl.(17) im Laplace-Bereich:

$$\left(\frac{\partial \Delta \vartheta_f^*}{\partial y} \right)_{y=1} = - \frac{R_f \alpha_0}{\lambda_f} \left[(\Delta \vartheta_{fs}^* - \Delta \vartheta^*) + \frac{\Delta \alpha^*}{\alpha_0} (\vartheta_{fso} - \vartheta_0) \right] \quad (18)$$

Der Index 0 beschreibt die entsprechenden Größen im stationären Zustand.

Bestimmt man mit diesen Randbedingungen die Konstanten C_1 und C_2 und spezialisiert man die daraus sich ergebende Lösungsgleichung auf die Heizstaboberfläche, so erhält man für die dort herrschenden Temperaturstörungen Δv_{fs}^* :

$$\Delta v_{fs}^* = F_1(s_f) \cdot \Delta q_f^* + F_2(s_f) \cdot \Delta v_{fs}^* + F_3(s_f) \cdot \Delta \alpha^* \quad (19)$$

Die Funktionen $F_1(s_f)$, $F_2(s_f)$ und $F_3(s_f)$ sind dabei gegeben durch folgende Gleichungen:

$$F_1(s_f) = \frac{\frac{R_f^2}{\lambda_f \cdot s_f}}{1 - \frac{R_f \alpha_o}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_o)} \quad (20)$$

$$F_2(s_f) = \frac{\frac{R_f \alpha_o}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_o)}{1 - \frac{R_f \alpha_o}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_o)} \quad (21)$$

$$F_3(s_f) = \frac{\frac{R_f (v_{fso} - v_o)}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_o)}{1 - \frac{R_f \alpha_o}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_o)} \quad (22)$$

mit der als Zeitfunktion bezeichneten Beziehung für f_t :

$$f_t(s_f, 1, y_o) = \frac{1}{\sqrt{-s_f}} \cdot \frac{J_o(\sqrt{-s_f}) - N_o(\sqrt{-s_f}) \cdot \frac{J_1(\sqrt{-s_f} y_o)}{N_1(\sqrt{-s_f} y_o)}}{J_1(\sqrt{-s_f}) - N_1(\sqrt{-s_f}) \cdot \frac{J_1(\sqrt{-s_f} y_o)}{N_1(\sqrt{-s_f} y_o)}} \quad (23)$$

Eine ausführliche Ableitung dieser Beziehungen ist im Anhang A2 gegeben.

4.2.2.2 Polynom-Ansatz für die Wärmequellverteilung

Wenn man im Out-of-pile-Versuch mit einem elektrischen Heizstab arbeitet, dessen Wärmeleitfähigkeit gering ist, so wird sich über dem Radius des Heizers ein ausgeprägtes Temperaturprofil einstellen. Ist darüber hinaus die Temperaturabhängigkeit des spez. elektrischen Widerstandes groß, so bildet die Annahme einer konstanten Wärmequellverteilung nur eine grobe Näherung an die realen Verhältnisse. Infolge des oft recht komplizierten Verlaufes des Widerstandes über der Temperatur ist es nahezu unmöglich, das radiale Temperatur- und Leistungsprofil als analytischen Ausdruck anzugeben. Es erweist sich als die bessere Methode, das Leistungsprofil auf iterativem Wege punktweise zu bestimmen und die so erhaltene Wärmequellverteilung durch ein Polynom zu approximieren. Dieses Polynom kann sodann zur Lösung der Brennstoffgleichung herangezogen werden.

Im Anhang A3 ist die spezielle Lösung der inhomogenen Brennstoffgleichung für diesen Fall angegeben und die dazugehörige Gesamtlösung abgeleitet. Als wesentliches Ergebnis zeigt sich dabei, daß nur ein Polynom mit geradzahligem Potenzen der unabhängig Variablen die Besselsche Differentialgleichung erfüllt:

$$q(y) = q_m \cdot \sum_{n=0}^N \alpha_{2n} \cdot y^{2n} = q_m \cdot [\alpha_0 + \alpha_2 y^2 + \alpha_4 y^4 + \dots + \alpha_{2N} y^{2N}] \quad (24)$$

q_m bedeutet dabei die mittlere Wärmequellldichte, welche sich in einfacher Weise mit der am Heizstab meßbaren Leistung in Verbindung bringen läßt.

Für eine derartige Wärmequellverteilung läßt sich die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ermitteln zu:

$$\Delta v_f^* = \frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \Delta q_m^* \cdot \sum_{n=0}^N a_{2n} y^{2n} \quad (25)$$

mit den Koeffizienten

$$a_{2n} = \sum_{i=n}^N \frac{\alpha_{2i}}{s_f} \cdot \beta_{i-n,i} \quad (26)$$

$$\beta_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{s_f^k} \cdot \prod_{m=1}^k 4(j-m+1)^2 & \text{für } k > 0 \end{cases} \quad (27)$$

Unter Zugrundelegung der gleichen Randbedingungen wie im Falle konstanter Wärmequellverteilung ergibt sich als Lösung für die Störungen Δv_{fs}^* der Heizstab-Oberflächentemperatur:

$$\Delta v_{fs}^* = F_1(s_f) \cdot \Delta q_m^* + F_2(s_f) \cdot \Delta v^* + F_3(s_f) \cdot \Delta \alpha^* \quad (28)$$

Während die Funktionen $F_2(s_f)$ und $F_3(s_f)$ gegenüber den in Kap. 4.2.2.1 ermittelten keine Veränderung erfahren, kommt in der Funktion $F_1(s_f)$ der Charakter der anderen Wärmequellverteilung zum Ausdruck:

$$F_1(s_f) = \frac{R_f^2 \cdot \left\{ \sum_{n=0}^N a_{2n} \cdot f_1(s_f, y_0) \cdot \sum_{n=0}^N 2n a_{2n} + \left[\frac{N_0(\sqrt{-s_f})}{\sqrt{-s_f} \cdot N_1(\sqrt{-s_f} \cdot y_0)} - f_1(s_f, y_0) \cdot \frac{N_1(\sqrt{-s_f})}{N_1(\sqrt{-s_f} \cdot y_0)} \right] \sum_{n=0}^N 2n a_{2n} y_0^{2n-1} \right\}}{1 - \frac{R_f d_0}{\lambda_f} \cdot f_1(s_f, y_0)} \quad (29)$$

Die hier angegebene Lösung gilt allgemein für geradzahlige Polynome mit beliebig vielen Gliedern. In der Praxis wird es jedoch zweckmäßig sein, den Grad des Polynoms zu beschränken.

Zur Beschreibung der Wärmequellverteilungen in den beiden Experimenten benützten Heizstäben hat sich ein dreigliedriges Polynom für Vollmaterial, ein sechsgliedriges für in Rohrform vorliegendes Material als hinreichend genau erwiesen. Eine weitere Steigerung der Gliederzahl ist aus Gründen der Genauigkeit der digitalen Rechenanlage IBM 7074, welche zur Berechnung der Funktionswerte herangezogen wird, unzulässig.

4.2.2.3 Wärmequellprofil im Kernbrennstoff: modifizierte Besselfunktionen

Bei in-pile-Versuchen an Kernbrennstoffen in einem thermischen Reaktor muß mit einem radialen Wärmequellprofil gerechnet werden, welches zum Zentrum hin eine Depression aufweist. Durch die Selbstabschirmung des Prüflings gegenüber dem vom Moderator einfallenden Neutronenstrom

infolge Absorption wird der Neutronenfluß und damit die ihm direkt proportionale Wärmeentwicklung mit fortschreitendem Vordringen der Neutronen ins Innere des Brennstoffes abgeschwächt. Dieser Vorgang kann näherungsweise mit Hilfe der Diffusionstheorie beschrieben werden. Für den allgemeinen Fall einer in Rohrform vorliegenden Brennstoffsäule, die entweder bereits durch die Herstellung in dieser Form gewollt oder im Laufe des Betriebs durch Ausbildung eines zentralen Hohlraumes von selbst entstanden ist, ergibt sich, nach Anhang A4, als Wärmequellverteilung:

$$q_f(y) = \frac{\Sigma_f}{c} \cdot \phi_s \cdot f_p(y) = \frac{\Sigma_f}{c} \cdot \phi_s \cdot \frac{I_0(\kappa R_f y) + K_0(\kappa R_f y) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)}}{I_0(\kappa R_f) + K_0(\kappa R_f) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)}} \quad (30)$$

Σ_f = makroskopischer Spaltquerschnitt

c = Umrechnungsfaktor

ϕ_s = therm. Neutronenfluß in unmittelbarer Umgebung der Prüflingsoberfläche

κ = Reziprokwert der thermischen Diffusionslänge

I_0, K_0, I_1, K_1 = modifizierte Besselfunktionen 1. und 2. Art, 0. und 1. Ordnung.

Nach Anhang A5 lautet dafür die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\Delta v_f^{(s)} = \frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \frac{\Sigma_f}{c} \cdot \frac{f_p(y)}{[s_f - (\kappa R_f)^2]} \cdot \Delta \phi_s^{(s)} \quad (31)$$

Bestimmt man die Konstanten C_1 und C_2 der Lösungsgleichung unter Zugrundelegung wiederum der gleichen Randbedingungen, so erhält man als Lösung für die Störungen $\Delta v_f^{(s)}$ der Brennstoff-Oberflächentemperatur im Laplace-Bereich:

$$\Delta v_{fs}^{(s)} = F_1(s_f) \cdot \Delta \phi_s^{(s)} + F_2(s_f) \cdot \Delta v_s^{(s)} + F_3(s_f) \cdot \Delta \alpha^{(s)} \quad (32)$$

Auch hier macht sich die andere Wärmequellverteilung lediglich in der Funktion $F_1(s_f)$ bemerkbar. Für sie erhält man:

$$F_1(s_f) = \frac{\frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \frac{\sum_f}{c} \cdot \frac{\sqrt{1 + f_p^*(1)} \cdot f_t(s_f, 1, y_0)}{\sqrt{s_f - (\kappa R_f)^2}}}{1 - \frac{R_f \alpha_o}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_0)} \quad (33)$$

mit dem Gradienten der Profilfunktion $f_p(y)$ an der Brennstoff-Oberfläche:

$$f_p^*(1) = (\kappa R_f) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f) - K_1(\kappa R_f) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)}}{I_0(\kappa R_f) + K_0(\kappa R_f) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)}} \quad (34)$$

4.2.3 Lösung der Hüllrohrgleichung

Die Ausgangsdifferentialgleichung für das Hüllrohr (Index c) ist wegen der Vernachlässigung innerer Wärmequellen homogen:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_c}{\partial r} - \frac{c_c \cdot \rho_c}{\lambda_c} \cdot \frac{\partial \vartheta_c}{\partial t} = 0 \quad (35)$$

Deshalb ist als Lösung allein Gl.(11) maßgebend:

$$\Delta \vartheta_c^* = C_1 \cdot J_0(\sqrt{-s_c} y) + C_2 \cdot N_0(\sqrt{-s_c} y) \quad (36)$$

Als Normierungsgrößen wurden dabei wiederum der äußere Brennstoffradius R_f sowie die Zeitkonstante des Hüllrohres in der Form $t_{rc} = R_f^2 \cdot c_c \cdot \rho_c / \lambda_c$ benutzt.

Die zur Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 notwendigen Randbedingungen werden durch die Wärmeübergangsbeziehungen an den beiden

Hüllrohr-Mantelflächen gebildet. An der Innenmantelfläche gelte:

$$-\lambda_c \cdot \left(\frac{\partial \vartheta_c^{\dot{g}}}{\partial r} \right)_{r=r_2} = \alpha_g (\vartheta_{fs}^{\dot{g}} - \vartheta_{ci}^{\dot{g}}) \quad (37)$$

α_g = Wärmedurchgangszahl des Spaltes zwischen Brennstoff u. Hülle

$\vartheta_{fs}^{\dot{g}}$ = Brennstoff-Oberflächentemperatur

$\vartheta_{ci}^{\dot{g}}$ = Hüllrohr-Innentemperatur

Im Laplace-Bereich schreibt sich diese Randbedingung unter der Voraussetzung, daß die Hüllrohrtemperaturen $\vartheta_c^{\dot{g}}$ und $\vartheta_{ci}^{\dot{g}}$ sowie die Brennstoff-Oberflächentemperatur $\vartheta_{fs}^{\dot{g}}$ als störungsbehaftet, die Wärmedurchgangszahl α_g hingegen als über die Zeit der Messung konstant betrachtet werden:

$$\left(\frac{\partial \Delta \vartheta_c^{\dot{g}*}}{\partial y} \right)_{y=y_2} = - \frac{R_f \alpha_g}{\lambda_c} (\Delta \vartheta_{fs}^{\dot{g}*} - \Delta \vartheta_{ci}^{\dot{g}*}) \quad (38)$$

An der Außenmantelfläche gelte als Randbedingung Gl.(17) bzw. Gl.(18), wobei unter der Außentemperatur $\vartheta_o^{\dot{g}}$ die Kühlmitteltemperatur θ , unter der Wärmeübergangszahl α die des äußeren Wärmeübergangs ans Kühlmittel, α_K , verstanden werden soll. An die Stelle der Brennstoff-Oberflächentemperaturen $\vartheta_{fs}^{\dot{g}}$ bzw. $\vartheta_{fso}^{\dot{g}}$ treten die Hüllrohräußentemperaturen $\vartheta_{cs}^{\dot{g}}$ bzw. $\vartheta_{cso}^{\dot{g}}$.

$$\left(\frac{\partial \Delta \vartheta_c^{\dot{g}*}}{\partial y} \right)_{y=y_3} = - \frac{R_f \alpha_{ko}}{\lambda_c} \left[(\Delta \vartheta_{cs}^{\dot{g}*} - \Delta \theta^*) + \frac{\Delta \alpha_K^*}{\alpha_{ko}} (\vartheta_{cso}^{\dot{g}} - \theta_o) \right] \quad (39)$$

Die unter diesen Bedingungen ermittelte Lösung der Hüllrohrgleichung wird sodann einmal auf die Innenmantelfläche, zum anderen auf die Außenmantelfläche spezialisiert. Es ergeben sich dabei Beziehungen der folgenden Form:

$$\Delta \vartheta_{ci}^{\dot{g}*} = C_1(s_c) \cdot \Delta \vartheta_{fs}^{\dot{g}*} + C_2(s_c) \cdot \Delta \vartheta_{cs}^{\dot{g}*} + C_3(s_c) \cdot \Delta \theta^* + C_4(s_c) \cdot \Delta \alpha_K^* \quad (40)$$

$$\Delta \dot{V}_{cs}^* = C_5(s_c) \cdot \Delta \dot{V}_{fs}^* + C_6(s_c) \cdot \Delta \dot{V}_{ci}^* + C_7(s_c) \cdot \Delta \theta^* + C_8(s_c) \cdot \Delta \alpha_k^* \quad (41)$$

Die Ableitung dieser Lösung sowie die Definition der Funktionen $C_1(s_c)$ bis $C_8(s_c)$ ist in Anhang A6 zusammengefaßt.

4.2.4 Bestimmung der Übertragungsfunktionen für die einzelnen Modellvorstellungen

Zur endgültigen Bestimmung der Übertragungsfunktion $F(s)$ wird nun noch der Zusammenhang zwischen den außerhalb des Prüflings bemerkten Störungen der Oberflächentemperatur ($\Delta \dot{V}_{cs}^*$ oder $\Delta \dot{V}_{fs}^*$), der Kühlmitteltemperaturen ($\Delta \theta^*$), der Wärmeübergangszahl ($\Delta \alpha^*$) und denen des Kühlmitteldurchsatzes ($\Delta \mu^*$) benötigt. Er ergibt sich aus der Wärmebilanz zwischen der von der Prüflingsoberfläche abgegebenen und der vom Kühlmittel aufgenommenen Wärme:

$$2\pi R_s \alpha (\dot{V}_s - \theta) = c_k \cdot \mu \cdot \frac{D\theta}{dz} \quad (42)$$

- R_s = Radius der Prüflingsoberfläche
- \dot{V}_s = Oberflächentemperatur
- c_k = spez. Wärme des Kühlmittels
- $\frac{D\theta}{dz}$ = Gradient der Kühlmitteltemperatur

Bezieht man diese Bilanzgleichung auf den stationären Zustand und betrachtet man nur die Störungen, so ergibt sich als Zusammenhang im Laplace-Bereich:

$$\frac{\Delta \mu^*}{\mu_0} = \frac{\Delta \dot{V}_s^*}{\dot{V}_{so} - \theta_0} + \frac{\Delta \alpha^*}{\alpha_0} \quad (43)$$

Dabei wurde die Erfüllung der Balance-Forderung $\Delta \theta^* \equiv 0$ vorausgesetzt, denn nur für diesen Fall ist die gesuchte Übertragungsfunktion gültig.

Mit der Lösung der Brennstoffgleichung (Gl.(19), (28) oder (32)), den Lösungen der Hüllrohrgleichung, Gl.(40) und (41) sowie Gl.(43), steht

nunmehr ein Gleichungssystem zur Verfügung, aus welchem die Übertragungsfunktion bestimmt werden kann:

$$\Delta \dot{v}_{fs}^* = F_1(s_f) \cdot \Delta P^* + F_2(s_f) \cdot \Delta \dot{v}_s^* + F_3(s_f) \cdot \Delta \alpha^* \quad (44.1)$$

$$\Delta \dot{v}_{ci}^* = C_1(s_c) \cdot \Delta \dot{v}_{fs}^* + C_2(s_c) \cdot \Delta \dot{v}_{cs}^* + C_3(s_c) \cdot \Delta \theta^* + C_4(s_c) \cdot \Delta \alpha_k^* \quad (44.2)$$

$$\Delta \dot{v}_{cs}^* = C_5(s_c) \cdot \Delta \dot{v}_{fs}^* + C_6(s_c) \cdot \Delta \dot{v}_{ci}^* + C_7(s_c) \cdot \Delta \theta^* + C_8(s_c) \cdot \Delta \alpha_k^* \quad (44.3)$$

$$\frac{\Delta \mu^*}{\mu_0} = \frac{\Delta \dot{v}_s^*}{\dot{v}_{so} - \theta_0} + \frac{\Delta \alpha^*}{\alpha_0} \quad (44.4)$$

Die Größe ΔP^* in Gl.(44.1) steht dabei stellvertretend für eine der drei Größen Δq_f^* , Δq_m^* bzw. $\Delta \dot{\theta}_s^*$, welche für die drei betrachteten Wärmequellverteilungen die leistungsproportionalen Störgrößen bedeuten.

4.2.4.1 Übertragungsfunktion für Modell 1

Das Modell 1 war charakterisiert durch die explizite Berücksichtigung des Hüllrohres; die äußere Wärmeübergangszahl α_k wurde als konstant angenommen ($\Delta \alpha_k^* = 0$).

Aus der Tatsache, daß die Hüllrohrgleichung in diesem Falle zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens mit benützt wird, ist ersichtlich, daß sich die äußere Randbedingung bei der Lösung der Brennstoffgleichung auf den Wärmeübergang zwischen Brennstoff und Hüllrohr bezieht. In Gl.(44.1) ist deshalb unter der Außentemperatur \dot{v}_s die Hüllrohr-Innentemperatur \dot{v}_{ci} , unter α die als konstant vorausgesetzte Wärmedurchgangszahl α_g des Spaltes zu verstehen. Des weiteren folgt daraus, daß als Prüflingsoberfläche die Hüllrohr-Außenmantelfläche anzusehen ist, d.h. daß als Oberflächentemperatur $\dot{\theta}_s$ bzw. \dot{v}_{so} die Hüllrohraußentemperatur \dot{v}_{cs} bzw. \dot{v}_{cso} einzusetzen ist. Das Gleichungssystem erhält dadurch das folgende Aussehen:

$$\Delta v_{fs}^* = F_1(s_f) \cdot \Delta P^* + F_2(s_f) \cdot \Delta v_{ci}^* \quad (45.1)$$

$$\Delta v_{ci}^* = C_1(s_c) \cdot \Delta v_{fs}^* + C_2(s_c) \cdot \Delta v_{cs}^* + C_3(s_c) \cdot \Delta \theta^* \quad (45.2)$$

$$\Delta v_{cs}^* = C_5(s_c) \cdot \Delta v_{fs}^* + C_6(s_c) \cdot \Delta v_{ci}^* + C_7(s_c) \cdot \Delta \theta^* \quad (45.3)$$

$$\frac{\Delta \mu^*}{\mu_o} = \frac{\Delta v_{cs}^*}{\vartheta_{cso} - \theta_o} \quad (45.4)$$

Bei Beachtung der Balance-Forderung $\Delta \theta^* = 0$ liegen damit 4 Gleichungen für 5 unbekannte Störungen vor, woraus der Zusammenhang zwischen den Störungen $\Delta \mu^*$ und ΔP^* abgeleitet werden kann:

$$\frac{\Delta \mu^*}{\mu_o} = \frac{P_o}{\vartheta_{cso} - \theta_o} \cdot G_1(s) \cdot \frac{\Delta P^*}{P_o} \quad (46)$$

mit

$$G_1(s) = F_1(s_f) \cdot \frac{C_5(s_c) \cdot [1 - C_1(s_c)]}{[1 + C_2(s_c) \cdot C_5(s_c)] - F_2(s_f) \cdot [C_1(s_c) + C_2(s_c) \cdot C_5(s_c)]} \quad (47)$$

Es erweist sich als zweckmäßig, den stationären Ausdruck $P_o / (\vartheta_{cso} - \theta_o)$ der Funktion $F_1(s_f)$ als Faktor beizugeben, da er, je nach Wahl der meßbaren Störgröße ΔP^* , ebenfalls von der Wärmequellverteilung abhängig sein kann. Die resultierende Funktion wird im folgenden mit $(F_{1,o}(s_f))$ bezeichnet:

$$F_{1,o}(s_f) = \frac{P_o}{\vartheta_{cso} - \theta_o} \cdot F_1(s_f) \quad (48)$$

Analog soll die Funktion $G_1(s)$ als $G_{1,o}(s)$ bezeichnet werden, wenn in Gl.(47) anstelle $F_1(s_f)$ die Funktion $F_{1,o}(s_f)$ benützt wird.

Mit Gl.(46) ist die Übertragungsfunktion für das Modell 1 bestimmt.

Sie lautet:

$$F(s) = G_{1,o}(s) \quad (49)$$

4.2.4.2 Übertragungsfunktion für Modell 2

Das Modell 2 ist charakterisiert durch die explizite Berücksichtigung des Hüllrohres; die Störungen der äußeren Wärmeübergangszahl, die sich durch die Kühlmitteldurchsatz-Störungen ergeben, werden mit in die Betrachtung einbezogen ($\Delta\alpha_k^* \neq 0$).

Das Gleichungssystem (44) erhält in diesem Falle bezüglich der Störgrößen das gleiche Aussehen wie bei Modell 1, die Gl.(45.2-4) sind jedoch um das Glied mit $\Delta\alpha_k^*$ erweitert:

$$\begin{aligned} \Delta v_{fs}^* &= F_1(s_f) \cdot \Delta P^* + F_2(s_f) \cdot \Delta v_{ci}^* \\ \Delta v_{ci}^* &= C_1(s_c) \cdot \Delta v_{fs}^* + C_2(s_c) \cdot \Delta v_{cs}^* + C_3(s_c) \cdot \Delta \theta^* + C_4(s_c) \cdot \Delta \alpha_k^* \\ \Delta v_{cs}^* &= C_5(s_c) \cdot \Delta v_{fs}^* + C_6(s_c) \cdot \Delta v_{ci}^* + C_7(s_c) \cdot \Delta \theta^* + C_8(s_c) \cdot \Delta \alpha_k^* \\ \frac{\Delta \mu^*}{\mu_o} &= \frac{\Delta v_{cs}^*}{v_{cso} - \theta_o} + \frac{\Delta \alpha_k^*}{\alpha_{ko}} \end{aligned} \quad (50)$$

In dieser Form ist das Gleichungssystem noch unbestimmt, da es mit der Störung $\Delta\alpha_k^*$ eine Unbekannte zu viel enthält. Diese läßt sich jedoch eliminieren, wenn man den empirischen Zusammenhang berücksichtigt, der zwischen Wärmeübergangszahl α und Kühlmitteldurchsatz μ im Falle der Zwangskonvektion gilt.

$$\alpha_k = c \cdot \mu^a \quad (51)$$

In dieser Form ist er z.B. in [58] und [62] zu finden.

Für die auf den stationären Zustand bezogenen Störungen gilt dabei

$$\frac{\Delta \alpha_k}{\alpha_{ko}} = \left[\left(1 + \frac{\Delta \mu}{\mu_o} \right)^a - 1 \right] \quad (52)$$

Entwickelt man den Ausdruck der rechten Seite dieser Beziehung in eine Potenzreihe [63],

$$\left(1 + \frac{\Delta \mu}{\mu_o} \right)^a - 1 = 1 + a \left(\frac{\Delta \mu}{\mu_o} \right) + \frac{a(a-1)}{2!} \left(\frac{\Delta \mu}{\mu_o} \right)^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} \left(\frac{\Delta \mu}{\mu_o} \right)^3 + \dots - 1 \quad (53)$$

und vernachlässigt man die Glieder höherer Ordnung, was bei Anwendung von kleinen Störungen zulässig ist, so kann man Gl.(52) durch die Laplace-transformierbare Form ersetzen:

$$\frac{\Delta \alpha_k}{\alpha_{ko}} = a \cdot \frac{\Delta \mu}{\mu_o} \rightarrow \frac{\Delta \alpha_k^*}{\alpha_{ko}} = a \cdot \frac{\Delta \mu^*}{\mu_o} \quad (54)$$

Damit ist eine fünfte Gleichung gefunden, die es erlaubt, das Gleichungssystem (50) aufzulösen. Für die Übertragungsfunktion $F(s)$ des Modells 2 findet man schließlich

$$F(s) = \frac{G_{1,o}(s)}{1 - a \sqrt{1 + G_{3,o}(s)}} \quad (55)$$

a ist der Exponent des Kühlmitteldurchsatzes im Wärmeübergangsgesetz Gl.(51). Die Funktion $G_{1,o}(s)$ ist mit der für Modell 1 angegebenen identisch. $G_{3,o}(s)$ ist gegeben durch

$$G_{3,o}(s) = \frac{\alpha_{ko}}{\sqrt[3]{\dot{V}_{CSO} - \theta_o}} \cdot \frac{C_2(s_c) \cdot [1 - C_1(s_c) \cdot F_2(s_f)] - C_4(s_c) \cdot C_5(s_c) \cdot [1 - F_2(s_f)]}{[1 + C_2(s_c) \cdot C_5(s_c)] - F_2(s_f) \cdot [C_1(s_c) + C_2(s_c) \cdot C_5(s_c)]} \quad (56)$$

Der stationäre Ausdruck $\alpha_{ko} / (\sqrt[3]{\dot{V}_{CSO} - \theta_o})$ wird hier zweckmäßigerweise den Funktionen $C_4(s_c)$ und $C_8(s_c)$ als Faktor beigegeben (siehe Anhang A6).

4.2.4.3 Übertragungsfunktion für Modell 3

Das Modell 3 war charakterisiert durch die Vernachlässigung der Wärmekapazität des Hüllrohres; die äußere Wärmeübergangszahl α_k wurde als konstant angenommen.

Da das Hüllrohr in diesem Falle allein durch seine Wärmedurchgangszahl α_c beschrieben wird, sind die Lösungen der Hüllrohrgleichung für

dieses Modell bedeutungslos. In Gl.(44.1) ist deshalb die Außentemperatur ϑ mit der Kühlmitteltemperatur θ zu identifizieren, die Oberflächentemperaturen ϑ_s und ϑ_{so} der Gl.(44.4) mit den entsprechenden Brennstoffoberflächentemperaturen ϑ_{fs} bzw. ϑ_{fso} . Zwischen ϑ_s und θ ist nun ein Wärmeübergang wirksam, der die Wärmeübergangszahlen des Spaltes zwischen Brennstoff und Hülle (α_g), der Hülle selbst (α_c) und die des äußeren Wärmeübergangs (α_k) enthält und im folgenden als totale Wärmeübergangszahl α_t bezeichnet wird:

$$\alpha_t = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_g} + \frac{1}{\alpha_c} + \frac{1}{\alpha_k}} \quad (57)$$

Im Falle eines nackten, d.h. nicht umhüllten Prüflings, wie er in der ersten Phase der Out-pile-Versuche benützt wird, ist die totale Wärmeübergangszahl α_t mit der äußeren, α_k , identisch.

Das Gleichungssystem (44) besteht nunmehr aus folgenden zwei Gleichungen:

$$\Delta \vartheta_{fs}^* = F_1(s_f) \cdot \Delta P^* + F_2(s_f) \cdot \Delta \theta^* \quad (58.1)$$

$$\frac{\Delta \mu^*}{\mu_o} = \frac{\Delta \vartheta_{fs}^*}{\vartheta_{fso} - \theta_o} \quad (58.2)$$

Nach Anwendung der Balance-Forderung, $\Delta \theta^* = 0$, wird die gesuchte Übertragungsfunktion mit Gl.(48):

$F(s) = F_{1,o}(s_f)$

(59)

4.2.4.4 Übertragungsfunktion für Modell 4

Das Modell 4 war charakterisiert durch die Vernachlässigung der Wärmekapazität des Hüllrohres; die Störungen der äußeren Wärmeübergangszahl werden berücksichtigt.

Auch in diesem Falle gelten nur die Gleichungen 1 und 4 des Gleichungssystems (44), die jedoch beide noch die Störung der Wärmeübergangszahl beinhalten. Allerdings ist unter dieser die totale, nicht die äußere Wärmeübergangszahl zu verstehen:

$$\Delta v_{fs}^{*} = F_1(s_f) \cdot \Delta P^{*} + F_2(s_f) \cdot \Delta \theta^{*} + F_3(s_f) \cdot \Delta \alpha_t^{*} \quad (60.1)$$

$$\frac{\Delta \mu^{*}}{\mu_0} = \frac{\Delta v_{fs}^{*}}{v_{fso}^{*} - \theta_0} + \frac{\Delta \alpha_t^{*}}{\alpha_{to}} \quad (60.2)$$

Wie im Falle des Modells 2 muß die Störung der Wärmeübergangszahl α_t eliminiert werden, um ein bestimmtes Gleichungssystem zu erhalten. Auch hier liegt es nahe, die Verbindung mit dem Kühlmitteldurchsatz μ herzustellen, die jedoch nur für äußere Wärmeübergangszahl α_k , nicht für totale α_t im Sinne von Gl.(51) richtig ist. Es muß deshalb zunächst erfaßt werden, inwieweit sich die Störungen der äußeren Wärmeübergangszahl α_k in der totalen Wärmeübergangszahl α_t bemerkbar machen. Durch Differentiation von Gl.(57) und anschließendem Übergang von Differentialquotienten auf Differenzenquotienten erhält man dafür

$$\frac{\Delta \alpha_t}{\alpha_{to}} = \frac{\frac{1}{\alpha_{ko}}}{\frac{1}{\alpha_g} + \frac{1}{\alpha_c} + \frac{1}{\alpha_{ko}}} \cdot \frac{\Delta \alpha_k}{\alpha_{ko}} \quad (61)$$

Für $\Delta \alpha_k / \alpha_{ko}$ gilt nun wieder Gl.(54). Unter Zuhilfenahme der Beziehung (61) kann nun das Gleichungssystem (60) aufgelöst werden. Man erhält dabei als Übertragungsfunktion $F(s)$:

$$F(s) = \frac{F_{1,o}(s_f)}{1 - b \sqrt{1 + F_{3,o}(s_f)}} \quad (62)$$

Dabei ist $F_{3,o}(s_f)$ die mit dem stationären Ausdruck $\alpha_{to} / (v_{fso}^{*} - \theta_0)$ multiplizierte Funktion $F_3(s_f)$, Gl.(22). b ist der korrigierte

Exponent des Wärmeübergangsgesetzes Gl.(51):

$$b = a \cdot \frac{1}{1 + \frac{\alpha_{ko}}{\alpha_g} + \frac{\alpha_{ko}}{\alpha_c}} \quad (63)$$

Im Falle des nicht umhüllten Prüflings ist b mit a identisch, da man α_g und α_c theoretisch als unendlich gute Wärmeübergänge deuten kann.

4.3 Strenge Fassung der Kompensations-Bedingung

Die Möglichkeit, die Übertragungsfunktion $F(s)$ zwischen den Störungen des Kühlmitteldurchsatzes μ und der leistungsproportionalen Größe P bestimmen zu können, ist gebunden an die Forderung nach Kompensation der Kühlmitteltemperaturschwankungen $\Delta\theta$, welche in der Analyse des radialen Problems als erfüllt vorausgesetzt wurde. Da die radiale Analyse in der abgeleiteten Form in jedem Querschnitt des Prüflings längs der axialen Koordinate z gilt, muß auch die Kühlmitteltemperatur an jeder Stelle z des Kühlkanals konstant sein. Die strenge Kompensationsforderung lautet deshalb:

$$\Delta\theta(z, t) \equiv 0 \quad (64)$$

Unter Voraussetzung einer konstanten Kühlmittelintrittstemperatur, $\Delta\theta(0, t) \equiv 0$, welche durch einen ausreichend bemessenen Wärmetauscher eingehalten werden kann, kann diese Forderung erfüllt werden, wenn die Kühlmitteltemperatur an einer beliebigen Stelle z_1 des Kühlkanals konstant gehalten wird. Dies gilt unabhängig von der Form der axialen Leistungsverteilung über die Prüflingslänge L , solange die Form des axialen Leistungsprofils, ebenso wie die des radialen, während des Oszillationsvorganges erhalten bleibt.

Dieses Ergebnis, dessen mathematische Beweisführung im Anhang von [1] zusammengefaßt ist und sich direkt auf das hier vorliegende Problem übertragen läßt, beruht auf der Untersuchung der Wärmebilanzgleichung

für das Kühlmittel, Gl.(42), in welche für den Kühlmitteltemperaturgradienten das totale Differential eingesetzt wurde:

$$2\pi R_s \alpha (\vartheta_s - \theta) = c_k \cdot \mu \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (65)$$

v = Kühlmittelgeschwindigkeit

Nach Einführung der Störgrößen und Elimination der stationären Glieder wird für die Oberflächentemperatur ϑ_s die Lösung aus der radialen Analyse übernommen, nachdem sie zuvor durch Anwendung des Faltungssatzes [57] in den Zeitbereich zurücktransformiert wurde. Die dadurch entstehende Integrodifferentialgleichung enthält als notwendige, da von der Kühlmitteltemperatur unabhängige Bedingung zur Erfüllung der Forderung Gl.(64), daß zwischen den Störungen des Kühlmitteldurchsatzes und der Leistung eine der Übertragungsfunktion $F(s)$ entsprechende Relation bestehen muß. Ist dieser Bedingung Rechnung getragen, so kann aus dem Rest der Gleichung nachgewiesen werden, daß die Kühlmitteltemperaturstörungen $\Delta \theta$ und ihre sämtlichen örtlichen Gradienten an einer beliebigen Stelle $z = z_1$ verschwinden. Wenn aber eine Funktion und ihre sämtlichen Ableitungen an einer Stelle identisch Null sind, dann ist, wie eine Taylorentwicklung an der Stelle z_1 beweist, die Funktion an allen Stellen z identisch Null.

4.4 Gegenüberstellung der Modelle

In Kap. 4.1 wurden vier Modellvorstellungen und die ihnen zugrunde liegenden Voraussetzungen erläutert. Im folgenden sollen die Übertragungsfunktionen $F(s)$, welche sich für eine konkrete Versuchsanordnung unter Zugrundelegung dieser Modelle ergeben, einander gegenübergestellt werden.

Als Vergleichsbasis dient eine hypothetische In-pile-Versuchsanordnung, bei welcher ein umhüllter UO_2 -Prüfling durch einen Heliumstrom gekühlt wird. Der Berechnung liegen die folgenden Werte zugrunde:

Prüflingsmaterial	UO ₂
Anreicherungsgrad	7,5 %
Brennstoff-Dichte	85 % der theor.Dichte
Brennstoff-Außendurchmesser	9,9 mm
Länge der Brennstoffsäule	250 mm
Hüllrohr-Material	Edelstahl
Hüllrohr-Außendurchmesser	12 mm
Hüllrohr-Wandstärke	1 mm
Spaltweite zwischen Brennstoff und Hülle 50 μ	
thermischer Neutronenfluß	$3,25 \cdot 10^{13}$ n/cm ² s
Gesamtleistung des Prüflings	16 kW
Stableistung	640 W/cm
Kühlmittel	He
Druckniveau	75 ata
Eintrittstemperatur	100°C
Durchsatzmenge	150 kg/h
Kühlkanal-Durchmesser	16 mm

Daraus ergeben sich die folgenden, in die Berechnung der Übertragungsfunktion $F(s)$ eingehenden thermischen Parameter:

spez. Wärmen:	Brennstoff	$c_f = 0,3507$ Ws/g grd
	Hüllrohr	$c_c = 0,5987$ Ws/g grd
Wärmeleitzahlen:	Brennstoff	$\lambda_f = 0,0248$ W/cm grd
	Hüllrohr	$\lambda_c = 0,1985$ W/cm grd
Wärmeübergangszahlen:	Spalt	$\alpha_g = 0,6383$ W/cm ² grd
	Hüllrohr	$\alpha_c = 2,1778$ W/cm ² grd
	außen	$\alpha_k = 0,7038$ W/cm ² grd
	total	$\alpha_t = 0,2901$ W/cm ² grd

Die mit diesen Daten für verschiedene Periodendauern T errechneten Werte für die Übertragungsfunktionen sind in der Abb. 5 als Ortskurve, in den Abbn. 6a und 6b als Amplituden- und Phasenverlauf über der Periodendauer dargestellt.

Es zeigen sich dabei erhebliche Differenzen zwischen den einzelnen Modellen, was die Bedeutung der möglichst exakten Erfassung des

dynamischen Verhaltens während des Oszillationsvorganges unterstreicht. Von dieser Seite besehen kann das Modell 2 für die berechnete Anordnung als das genaueste bezeichnet werden, da es gegenüber den übrigen Modellen die meisten möglichen Einflüsse berücksichtigt. Die Exaktheit dieses Modells selbst kann jedoch analytisch nicht erfaßt werden. Eine Aussage über die Güte der mit ihm erzielten Näherung kann nur mit Hilfe eines entsprechenden Experimentes gemacht werden. Die Güte der übrigen Modelle kann jedoch zumindest in der Relation zu dem wahrscheinlich exaktesten Modell 2 beurteilt werden.

Die Auswirkungen der vereinfachenden Annahmen, welche zu den Modellen 1, 3 und 4 führen, können aus Abb. 7 erkannt werden. Sie liegen, setzt man Modell 2 als exakt voraus, in einer fehlerhaften Bestimmung der gesuchten Wärmeleitfähigkeit λ_f des Brennstoffes sowie der Wärmedurchgangszahl α_g des Spaltes zwischen Brennstoff und Hülle. Abb. 7 stellt die Lage des Parameternetzes für $\lambda_f = 0,018 \pm 0,030$ W/cm grd und $\alpha_g = 0,4 \pm 0,8$ W/cm² grd dar, wie sie sich für die einzelnen Modelle unter Konstanthaltung sämtlicher übrigen Parameter bei einer Periodendauer von $T = 50$ Sekunden ergibt.

4.4.1 Auswirkungen der Vernachlässigung der Wärmekapazität des Hüllrohres

Setzt man voraus, daß das Modell 2 das dynamische Verhalten des Prüflings richtig beschreibt, so ist zu erwarten, daß sich der Meßpunkt für die Übertragungsfunktion $F(s)$ innerhalb des Parameternetzes für dieses Modell befindet (s. Abb. 7). Vernachlässigt man nun bei der Auswertung, d.h. bei der Bestimmung der zu dem Meßwert gehörenden Parameter λ_f und α_g , die Wärmekapazität des Hüllrohres, so bedeutet dies eine Anwendung von Modell 4 anstelle von Modell 2. Aus den Abb. (6a) und (6b) sowie aus Abb. (7) ist jedoch ersichtlich, daß Modell 4 für die gleichen Parameter eine höhere Amplitude und einen kleineren Phasenwinkel erwartet. Für die Bestimmung der gesuchten Parameter hat dies zur Folge, daß die Wärmeleitfähigkeit λ_f des Brennstoffes

überschätzt, die Wärmedurchgangszahl α_g des Spaltes zwischen Brennstoff und Hüllrohr erheblich unterschätzt wird. Die Auswirkungen bezüglich der Wärmeleitfähigkeit sind dabei weniger gravierend als die bezüglich der Wärmedurchgangszahl.

4.4.2 Auswirkungen der Vernachlässigung der zeitlichen Schwankungen der äußeren Wärmeübergangszahl

Umgekehrt liegen die Verhältnisse, wenn man die Schwankungen der äußeren Wärmeübergangszahl vernachlässigt; d.h., wenn man zur Auswertung das Modell 1 zugrunde legt. Da dieses Modell kleinere Amplituden und größere Phasenwinkel erwartet, wird die Wärmeleitfähigkeit λ_f des Brennstoffes unterschätzt, die Wärmedurchgangszahl α_g des Spaltes zwischen Brennstoff und Hüllrohr hingegen erheblich überschätzt. Auch hier sind die Auswirkungen auf die Wärmedurchgangszahl α_g bedeutend schwerwiegender als die auf die Wärmeleitfähigkeit λ_f .

4.4.3 Auswirkungen der Vernachlässigung beider Einflüsse

Vernachlässigt man bei der Auswertung sowohl die Wärmekapazität des Hüllrohres als auch die zeitlichen Schwankungen der äußeren Wärmeübergangszahl, d.h., wendet man Modell 3 an, so gleichen sich die als gegenläufig erkannten Effekte in gewissem Maße einander aus, ohne jedoch eine ausreichende Annäherung an das Modell 2 zu erreichen (s. Abb. 7). Es ist letztlich eine Frage der Hüllrohrwandstärke und der Wärmekapazität $c_c \cdot \rho_c$ des Hüllrohrmaterials, wie genau die Näherung an das exakte Modell 2 ist. Infolge des überaus großen Einflusses der Modellwahl auf die Wärmedurchgangszahl α_g muß festgestellt werden, daß die Anwendung eines der vereinfachten Modelle zur Auswertung der Meßergebnisse nicht befriedigen kann.

5. Experimentelle Bestimmung der Übertragungsfunktion

5.1 Ziel der Experimente und grundlegende Gesichtspunkte für ihre Anlage

Im Hinblick auf die Anwendung des Balanced Oscillator Verfahrens zur Messung der Wärmeleitfähigkeit von Kernbrennstoffen sowie der Wärmedurchgangszahl des Spaltes zwischen Brennstoff und Hülle innerhalb des Reaktors ist es zunächst erforderlich, out-pile-Versuche durchzuführen. Diese Notwendigkeit ergibt sich aus zwei Gründen:

- a) Die Güte des mathematischen Modells, welches zur Interpretation der Meßergebnisse, insbesondere zur Bestimmung der gesuchten thermischen Parameter, unerlässlich ist, kann nur durch Experimente an einem möglichst gut bekannten Material beurteilt werden.
- b) Die Neuartigkeit dieses Experimentes läßt es als zweckmäßig erscheinen, zunächst in out-pile-Versuchen Erfahrungen zu sammeln, besonders hinsichtlich der Instrumentierung und deren dynamischen Verhaltens, um vorhersehbare Schwierigkeiten bei in-pile-Experimenten zu vermeiden.

Aus diesen Zielsetzungen leiten sich einige grundlegende Gesichtspunkte für die Anlage der out-pile-Experimente ab, welche sich in der Wahl von Heizstabmaterial und Kühlmittel sowie im Versuchsprogramm äußern.

Heizstabmaterial:

Als Heizstabmaterial bietet sich amorphe Elektrokohle an, welche in Form von Rundmaterial und Rohren in relativ guter Qualität von verschiedenen Firmen angeboten wird. Die thermischen Eigenschaften dieses Werkstoffes, insbesondere seine Wärmeleitfähigkeit, sind denen von Uranradioxyd (UO_2) sehr ähnlich. Überdies ist die Wärmeleitfähigkeit nach Angabe der Lieferfirmen im Bereich zwischen Raumtemperatur und ca. $1000^{\circ}C$ nahezu temperaturunabhängig. Die Werte für den spez. elektrischen Widerstand liegen mit ca. $30 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ z.B. gegenüber Graphit so günstig, daß, unter Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Möglichkeiten, zur Beheizung Gleichstrom verwendet werden kann.

Kühlmittel:

Als Kühlmittel wurde für die out-pile-Versuche Helium gewählt, da auch die Planung der in-pile-Versuche auf dieses Kühlmittel abgestellt ist. Dabei soll die im Karlsruher Reaktor FR2 installierte Helium-Kreislaufanlage [4] zur Anwendung kommen. Darüber hinaus ist Helium als Inertgas gerade bei Verwendung von Kohleheizstäben äußerst zweckmäßig.

Versuchsprogramm:

Das Versuchsprogramm gliederte sich in zwei Teile.

In den ersten beiden Versuchsserien wurden nackte, d.h. nicht mit einem Hüllrohr versehene Heizstäbe eingesetzt. Da hier der Einfluß der Wärmekapazität des Hüllrohres ausgeschaltet ist, besteht die Möglichkeit, den Nachweis dafür zu erbringen, daß die Berücksichtigung der zeitlichen Schwankungen der Wärmeübergangszahl für die Auswertung der Meßergebnisse bedeutungsvoll ist. Für diese Versuchsanordnung kann das Modell 4 als das exakte Modell betrachtet werden.

In den anschließenden zwei Versuchsreihen wurden Heizstäbe eingesetzt, welche mit konzentrischen Hüllrohren versehen waren. Hierbei sollte der Beweis für das exakte Modell 2 geliefert werden.

In Ergänzung zu diesen Versuchsreihen wurde eine Reihe von Testversuchen durchgeführt, welche das dynamische Verhalten der Instrumentierung aufzeigen sowie die Empfindlichkeit des Verfahrens testen sollten.

5.2 Versuchseinrichtung

Zur Durchführung der Experimente wurde ein im IRE existierender Gaskreislauf benutzt, für den eine entsprechende Teststrecke konzipiert wurde. Die Instrumentierung wurde auf die speziellen Erfordernisse des Experimentes abgestimmt.

5.2.1 Kühlkreislauf (s. Abb. 8)

Der von einem Drehstrommotor angetriebene einstufige Rotationsverdichter (1) - Drehzahl: 1450 U/min, Fördermenge: 150 m³/h, max. Förderhöhe: 3 at - wälzt das unter 9 ata Druck stehende Helium im Kreislauf um. Nach Passieren eines Sicherheitsventils (2) wird das durch die Verdichtung erwärmte Gas rückgekühlt (3) und in einem anschließenden Ölabscheider (4) sowie einem nachgeschalteten Keramikfilter mit Aktivkohlebett (5) von Öl gereinigt. Von da tritt es in einen Pufferbehälter (6) ein, um eventuelle, vom Verdichter herrührende Pulsationen der Strömung zu glätten.

Vom Pufferspeicher (6) aus strömt das Gas über ein Regelventil (7), ein Drosselventil (8) und eine Meßblende (9) zur Teststrecke (10), wo es die vom Heizstab erzeugte Wärme aufnimmt. Über ein Absperrventil (11) wird es sodann dem Wärmetauscher (12) zugeführt, von wo es über ein mechanisches Filter (13) wieder dem Verdichter (1) zugeführt wird.

Da der Rotationsverdichter bei konstanter Drehzahl und Fördermenge betrieben wird, muß ein Teil der umgewälzten Gasmenge, welche nicht in der Teststrecke benötigt wird, über einen Bypass geleitet werden, in dem sich ebenfalls ein Regelventil (14) und ein Drosselventil (15) befinden.

Im Bedarfsfalle steht in einem weiteren Bypass ein zweiter Wärmetauscher (17) zur Verfügung, der durch Öffnen des Absperrventils (16) zugeschaltet werden kann.

Die Helium-Einspeisung geschieht von einer Flaschenbatterie (18) aus. Über ein Absperrventil (19), ein Reduzierventil (20), ein Magnetventil (21) sowie ein Drosselventil (23) wird das frische Gas dem Pufferbehälter (6) zugeführt. Das Magnetventil (21) wird dabei durch einen Druckregler automatisch geöffnet, wenn der Kreislaufdruck sinkt. Umgekehrt wird das Magnetventil (22) geöffnet, wenn der Druck im Kreislauf

ansteigt. Das überschüssige Gas wird dabei in die Atmosphäre abgeblasen. Auf diese Weise ist eine Druckkonstanthaltung mit einer Genauigkeit von $\pm 0,5\%$ möglich.

5.2.2 Teststrecke

Die in Abb. 9 dargestellte Teststrecke besteht aus dem Teststreckenkopf (2), welcher mit dem Gasein- (1) und -austrittsrohr (12) waagrecht in die Rohrleitung des Kühlkreislaufes eingebaut wird. An ihm ist das senkrechte Druckrohr (4) angeflanscht, welches ein dem jeweils eingesetzten Heizstab (10) angepaßtes System von Rohren, inneres Gasführungsrohr (6) und Zwischenrohr (5), aufnimmt. Die beiden Zentrier- ringe (7) dienen ebenfalls der Anpassung des Heizstabes an die festen Teststreckenabmessungen. Der Heizstab ist mit zwei kupfernen Stromanschlüssen (9) versehen, welche druckdicht aus der Teststrecke herausgeführt sind. Der Heizstab ist im oberen Zentrierring axial fixiert, das untere Stromanschlüsse ist zum Ausgleich von Längenänderungen axial frei beweglich. Sämtliche Verbindungsstellen des Teststreckeninneren mit der Atmosphäre sind durch temperaturfeste O-Ringe abgedichtet.

Als inneres Gasführungsrohr (6) wird ein dünnwandiges Aluminiumrohr benutzt, um die Einflüsse von Wärmekapazitäten außer der des Heizstabes selbst möglichst gering zu halten. In dem durch Zwischenrohr (5) und innerem Gasführungsrohr (6) gebildeten Ringspalt befindet sich stehendes Kühlgas, welches eine ebenfalls weitgehend kapazitätsfreie radiale Wärmeisolation bewirkt.

Das Kühlmittel tritt durch das Gaseintrittsrohr (1) in die Eintrittskammer (3) des Teststreckenkopfes (2) ein und strömt in dem aus Druckrohr (4) und Zwischenrohr (5) gebildeten Ringspalt nach unten. In der Umlenkammer (8) erfährt es eine Richtungsumkehr. Es strömt nun im inneren Gasführungsrohr (6) nach oben, wobei es die im Heizstab freigesetzte Wärme aufnimmt. Nach einer für die Austrittstemperaturmessung notwendigen Verwirbelung in der Gasaustrittskammer (11) wird es durch das Gasaustrittsrohr (12) wieder dem Kreislauf zugeführt.

Die Meßstellen für die Gasein- bzw. -austrittstemperatur befinden sich in der Umlenk- bzw. Gasaustrittskammer.

5.2.3 Erzeugung der Leistungs- und Kühlmitteldurchsatz-Oszillationen

Die für den Heizstab benötigte elektrische Leistung wird dem 380 V-Drehstromnetz entnommen (s. Abb. 10). Da es bei direkter Verwendung des Drehstromes zu unsymmetrischen Belastungen in den einzelnen Phasen kommen kann, wurde es als zweckmäßiger erachtet, mit Gleichstrom zu arbeiten, was darüber hinaus aus meßtechnischen Gründen günstiger ist. Die Leistung wird über einen Transformator einem Gleichrichter, von dort über einen Shunt dem Heizstab zugeführt. Die der stationären Leistung überlagerte Oszillation wird mit Hilfe eines Funktionsgenerators gesteuert. An ihm kann die gewünschte Frequenz bzw. Periodendauer und die Amplitude der Leistungsoszillation vorgewählt werden. Das sinusförmige Signal wirkt über ein Steuergerät auf die Thyristor-Steuerung des Netzteils ein.

Der Funktionsgenerator liefert außerdem ein zweites sinusförmiges Signal gleicher Frequenz, dessen Amplitude jedoch getrennt vom ersten eingestellt werden kann. Außerdem kann zwischen beiden eine Phasenverschiebung hervorgerufen werden. Dieses Signal wird auf die Steuereinheit des Regelventils vor der Teststrecke (Abb. 8, Nr. 7) gegeben, wodurch der Ventil-Hub zu periodischen Oszillationen veranlaßt wird. Unter der Voraussetzung, daß diese Oszillationen sinusförmig sind und ihre Amplituden den linearen Bereich der Ventil-Kennlinie nicht überschreiten, kann auf diese Weise eine sinusförmige Kühlmitteldurchsatz-Oszillation erreicht werden.

5.2.4 Instrumentierung (s. Abb. 10)

Die Hauptkomponenten der Instrumentierung sind auf den 3-Kanal-Schreiber abgestimmt. Die simultane Registrierung der für die Auswertung der Experimente benötigten periodischen Vorgänge auf diesem Gerät gewährleistet dabei einerseits eine eindeutige Zeitskala, zum anderen spielen

die durch die Zeitkonstante des Schreibers zu erwartenden Verfälschungen der Signale hinsichtlich der Amplitude sowohl als auch hinsichtlich der Phasenlage so lange keine Rolle, wie die Amplituden der später in Relation zu setzenden Signale einen Schreiberausschlag von etwa gleicher Größenordnung hervorrufen. Diese Bedingung einzuhalten wird dadurch ermöglicht, daß, zumindest bei zwei der drei Kanäle, ein Teil des gesamten Meßbereiches unterdrückt, der nicht unterdrückte Bereich zusätzlich gespreizt werden kann. Die Variationsmöglichkeit der Vorschubgeschwindigkeit in weiten Grenzen wirkt sich darüber hinaus ebenfalls vorteilhaft auf die Genauigkeit aus.

Auf dem ersten Kanal des 3-Kanal-Schreibers wird das Signal der Leistung aufgenommen. Es wird geliefert von einem Leistungsmeßumformer, welcher die dem Heizstab vom Gleichrichter zugeführte Leistung durch Strom- und Spannungsmessung bestimmt.

Auf dem zweiten Kanal wird der Kühlmittel-Massendurchsatz registriert. Seine Messung erfolgt über eine geeichte Blende (Abb. 8, Nr. 9), welche, unter Einhaltung der normgerechten Einbau-Richtlinien, in die Rohrleitung zwischen Regelventil und Teststrecke eingebaut ist. Das Differenzdrucksignal der Meßblende wird in einer Bartonzelle mit selbsttätiger Radiziereinrichtung in ein durchsatzproportionales elektrisches Signal umgewandelt. Dieses wird sodann, mit der als Fixwert betrachteten Kühlmitteltemperatur vor der Blende und dem konstant gehaltenen Systemdruck geeicht, dem 3-Kanal-Schreiber zugeführt.

Diese Art der Durchsatz-Messung ist mit einer gewissen Trägheit behaftet, welche im wesentlichen durch die Umsetzung des Differenzdrucksignals in ein elektrisches Signal in der Bartonzelle bedingt ist. Dadurch wird sowohl die Amplitude des Durchsatzsignals als auch die Phasenlage auf dem 3-Kanal-Schreiber verfälscht wiedergegeben. Während man bezüglich der Amplitude auf eine entsprechende Korrektur angewiesen ist (siehe Kap. 5.4.2.2.2), besteht bezüglich der Phase eine Möglichkeit zur direkten Messung. Da die Durchsatz-Oszillation durch

Steuerung eines Regelventils erzeugt wird, bei welchem der Ventil-Querschnitt periodisch mehr oder weniger freigegeben wird, ist praktisch auch der Ventil-Hub ein Maß für den Durchsatz. Die Phasenlage dieses Signals, welches von einem Positionsgeber aufgenommen wird, ist, unter der Voraussetzung, daß das Kühlmittel als inkompressibel angesehen wird, mit der Phasenlage des Durchsatzes in der Teststrecke identisch. Die Vernachlässigung der Kompressibilität ist dabei nach [64] durchaus gerechtfertigt, wenn man berücksichtigt, daß die dafür verantwortlichen relativen Dichteänderungen, welche dem Quadrat der Machschen Zahl proportional sind, unter den gegebenen Verhältnissen in der Größenordnung von 10^{-4} liegen. Das Signal des Ventil-Hubs wird auf dem dritten Kanal des 3-Kanal-Schreibers registriert.

Mit Hilfe eines Meßstellen-Umschalters kann dieser Kanal auch mit dem Signal der bereits unterdrückten Kühlmittel-Austrittstemperatur bzw. -Aufheizspanne versorgt werden. Da die Empfindlichkeit des 3-Kanal-Schreibers wesentlich größer ist als die des parallel-geschalteten Kompensations-Linienschreibers, ist es möglich, die Kompensation der Kühlmitteltemperatur-Schwankungen durch Nachsteuerung des Durchsatzes mit weitaus größerer Genauigkeit zu vollziehen. Der Kompensations-Linienschreiber dient, nach erfolgter Temperaturkompensation, zur Überwachung des Signals, wenn der dritte Kanal auf das Signal des Ventil-Hubs geschaltet ist.

Die Instrumentierung wird durch einen digitalen Zeitmesser vervollständigt, welcher die Phasendifferenz der beiden vom Funktionsgenerator abgegebenen sinusförmigen Steuersignale mißt. Die Messung erfolgt durch Bestimmung der Zeitdifferenz zwischen den Nulldurchgängen zweier parallel zu den Sinussignalen gelieferten Rechteck-Signale.

5.3 Durchführung der Experimente

Die durchgeführten Experimente erstreckten sich auf insgesamt vier Versuchsserien, bei welchen mit verschiedenen Heizstäben aus

Elektrokohle gearbeitet wurde:

- Serie A: Vollmaterial, äußerer Durchmesser ca. 12,5 mm
Serie B: Rohr, äußerer Durchmesser ca. 19,5 mm
 innerer Durchmesser ca. 10 mm
Serie C: Heizstab wie Serie A
 mit Edelstahl-Füllrohr 17,4 x 1 mm
Serie D: Heizstab wie Serie B
 mit Stahl-Füllrohr 22 x 0,5 mm

Innerhalb der einzelnen Versuchsserien wurden mehrere Versuchsreihen bei verschiedenen Leistungsniveaus durchgeführt, wobei die Periodendauer T der Oszillationen variiert wurde.

5.3.1 Einfahren des stationären Zustandes

Zu Beginn jeder Versuchsserie muß zunächst der stationäre Ausgangszustand hergestellt werden. Dabei wird durch geeignete Drosselung an den Handventilen (s. Abb. 8, Nr. 8 bzw. 15) ein Kühlmitteldurchsatz μ eingestellt, welcher, entsprechend dem jeweiligen Druckabfall in der Teststrecke, ein Arbeiten des Regelventils im linearen Bereich seiner Charakteristik erwarten läßt. Das Niveau der Heizleistung P wird durch entsprechende Wahl des Arbeitspunktes des Transformators und eine diesem Arbeitspunkt angepaßte Aussteuerung des Thyristor-gesteuerten Netzteils eingestellt. Wenn die Kühlmittelaustrittstemperatur Θ_a einen konstanten Wert erreicht hat, was am Kompensations-Linienschreiber kontrolliert wird, ist der stationäre Zustand hergestellt.

5.3.2 Aufbringen der Leistungsoszillation

Nach Erreichen des stationären Zustandes wird der stationären Leistung P eine Oszillation überlagert. Dies geschieht durch Wahl der Oszillationskreisfrequenz ω und langsames Vergrößern der Amplitude A_1 am Funktionsgenerator (s. Abb. 10). Dieser Vorgang kann am Mehrkanalschreiber verfolgt werden. Die Leistungsamplitude wird so lange erhöht, bis ein Ausschlag von ca. $\pm 10\%$ der stationären Leistung erreicht ist. Dieser

Wert wird als sinnvoller Kompromiß betrachtet zwischen den gegensätzlichen Forderungen von möglichst kleinen Störungen von seiten der theoretischen Erwägungen (Linearisierung) einerseits und möglichst großen Störungen von seiten der Experimentiertechnik (Genauigkeit) andererseits. Aufgrund der Leistungszosillationen führt die Kühlmittelaustrittstemperatur bzw. -aufheizspanne ebenfalls sinusförmige Oszillation aus. Diese werden auf dem Kompensations-Linienschreiber und, in vergrößertem Maßstab, auch auf dem Mehrkanalschreiber sichtbar.

5.3.3 Kompensationsvorgang

Das Ziel des Experimentes ist erreicht, wenn die Oszillationen der Kühlmitteltemperaturen durch Nachsteuerung des Kühlmitteldurchsatzes kompensiert sind. Zu diesem Zwecke wird durch Hochregeln der Amplitude A_2 am Funktionsgenerator ein sinusförmiges Steuersignal auf den Antrieb des Regelventils (s. Abb. 8, Nr. 7) gegeben, wodurch der Ventilquerschnitt periodisch mehr oder weniger geöffnet wird. Dadurch ändert sich der Durchsatz durch die Teststrecke ebenfalls periodisch. Durch diese Maßnahme können die Amplituden der Kühlmitteltemperatur-Oszillation bis zu einem gewissen Grade abgebaut werden. Eine weitere Reduzierung ist sodann nur mehr möglich, wenn eine Regulierung der Phasenverschiebung zwischen dem Ventil-Steuersignal und der Leistungs-Oszillation erfolgt. Dieser Phasenwinkel kann ebenfalls mit dem Funktionsgenerator vorgegeben werden. Im allgemeinen ist ein mehrmaliges Nachstellen von Amplitude und Phase notwendig, bis eine vollkommene Kompensation erreicht ist. Der Erfolg dieser Eingriffe in den Ablauf der Kühlmitteldurchsatz-Oszillationen ist direkt am Mehrkanalschreiber abzulesen, wenn das Signal der Kühlmitteltemperatur auf den dritten Kanal geschaltet ist. Eine vollkommene Kompensation wäre dann erreicht, wenn dieses Signal auf dem Schreiber als absolut gerade Linie wiedergegeben würde. In der Praxis ist dies allerdings nicht möglich, da das Temperatursignal mit Störungen behaftet ist. In einem Testversuch bei konstanter Leistung und konstantem Kühlmitteldurchsatz wurde festgestellt, daß die Störungen im Temperatursignal etwa $\pm 0,1$ bis $\pm 0,2^\circ\text{C}$ betragen. Es ist daher sinnlos, beim Versuch der

Kompensation diese Grenze unterschreiten zu wollen. Es wurde daher das Kriterium aufgestellt, daß die Kompensation dann erfolgt ist, wenn die Restamplituden in der Kühlmitteltemperatur-Oszillation den Wert $\pm 0,2^{\circ}\text{C}$ nicht überschreiten.

Der Kompensationsvorgang erfordert infolge der Handsteuerung eine geraume Zeit, welche umso länger ist, je größer die Periodendauer T der Oszillationsvorgänge gewählt wird. Während man bei einer Periodendauer von 10 Sekunden damit rechnen kann, die Kompensation innerhalb von 5 - 10 Minuten erreicht zu haben, kann die Zeit bei einer Periodendauer von 40 Sekunden und mehr 30 Minuten und mehr betragen. Eine Verkürzung dieser Zeitspanne ist bei dem angewandten Handsteuersystem nur durch die Ausnützung von Erfahrungen aus vorhergehenden Versuchen möglich.

5.3.4 Aufnahme der Oszillationsvorgänge

Während der relativ langen Zeit, welche der Kompensationsvorgang erfordert, wird der Mehrkanalschreiber mit kleinem Papiervorschub betrieben. Durch Bereichsunterdrückung und geeignete Spreizung werden die Signale außerdem so angeordnet, daß eine größtmögliche Übersichtlichkeit gegeben ist.

Ist die Kompensation durchgeführt, so wird zunächst anstelle des Kühlmitteltemperatursignals das Signal des Ventil-Hubs auf den Mehrkanalschreiber geschaltet. Die Kühlmitteltemperatur kann dabei auf dem parallel geschalteten Kompensations-Linienschreiber weiterverfolgt werden. Sodann werden die Meßbereiche der einzelnen Kanäle so umgeschaltet, daß eine größtmögliche Empfindlichkeit für die einzelnen Signale erreicht wird. Gleichzeitig wird die Geschwindigkeit des Papiervorschubs wesentlich erhöht. Die dabei mit hoher Genauigkeit aufgenommenen Signale der Oszillationen von Leistung, Kühlmitteldurchsatz und Ventilhub bilden die Grundlage für die Auswertung der Messungen. Eine für sämtliche Experimente charakteristische Aufzeichnung des Mehrkanalschreibers ist in Abb. 11 wiedergegeben.

5.4 Auswertungsverfahren

Der Weg des Auswertungsverfahrens ist gekennzeichnet durch das Ziel, die aus den Messungen zu gewinnende Übertragungsfunktion $F(s)$ mit der auf analytischem Wege nach einem bestimmten Modell zu berechnenden Übertragungsfunktion in Übereinstimmung zu bringen. Speziell sind dabei die beiden freien Parameter des mathematischen Ausdrucks, die Wärmeleitfähigkeit λ und die Wärmeübergangszahl α , so zu bestimmen, daß der durch sie und die fixen Parameter gegebene Wert für die Übertragungsfunktion mit der Messung übereinstimmt.

Im folgenden soll das Auswertungsverfahren an Hand der Versuchsreihe B5 dargestellt werden. In dieser Versuchsreihe war ein nicht umhüllter rohrförmiger Heizstab mit einem Innendurchmesser von 9,9 mm, einem Außendurchmesser von 19,65 mm und einer Heizlänge von 864 mm eingesetzt. Die gemessene Übertragungsfunktion $F(s)$ zwischen Kühlmitteldurchsatz- und Leistungsoszillation soll den nach Modell 4 ermittelten analytischen Ausdruck erfüllen, wobei zunächst eine konstante Wärmequellverteilung vorausgesetzt werden soll. Für das Modell 4 gilt die in Kap. 4.2.4.4 abgeleitete Übertragungsfunktion, Gl.(62):

$$F(s) = \frac{F_{1,o}(s_f)}{1-b \sqrt{1 + F_{3,o}(s_f)}} \quad (66)$$

Mit der Funktion $F_1(s_f)$ nach Gl.(20) und $F_3(s_f)$ nach Gl.(22) ergeben sich unter Berücksichtigung von Gl.(48) sowie der dieser Beziehung entsprechenden Maßnahme für $F_3(s_f)$ die Funktionen $F_{1,o}(s_f)$ und $F_{3,o}(s_f)$ zu

$$F_{1,o}(s_f) = \frac{\frac{2 R_f \alpha_{ko}}{(1-y_o^2) \cdot \lambda_f \cdot s_f}}{1 - \frac{R_f \alpha_{ko}}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_o)} \quad (67)$$

$$F_{3,0}(s_f) = \frac{\frac{R_f \alpha_{ko}}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_0)}{1 - \frac{R_f \alpha_{ko}}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_0)} \quad (68)$$

wobei s_f die normierte Frequenz bedeutet entsprechend der Beziehung

$$s_f = j\omega \cdot \frac{R_f^2 \cdot c_f \cdot \rho_f}{\lambda_f} \quad (69)$$

Die Größe b in Gl.(66) ist im vorliegenden Fall eines nicht umhüllten Heizstabes mit dem Exponenten des Wärmeübergangsgesetzes identisch und zu setzen:

$$b = 0,8 \quad (70)$$

Aus den Gln.(67) bis (69) ist zu entnehmen, daß folgende Parameter in die analytische Bestimmung der Übertragungsfunktion eingehen:

R_f	Heizstab-Außenradius
y_0	auf R_f bezogener Heizstab-Innenradius
c_f	mittl. spez. Wärme des Heizstabmaterials
ρ_f	Dichte des Heizstabmaterials
ω	Kreisfrequenz der Oszillation
λ_f	Wärmeleitfähigkeit des Heizstabmaterials
α_{ko}	mittlere Wärmeübergangszahl

Die Größen R_f , y_0 , c_f , ρ_f und ω werden im folgenden als "fixe Parameter", die Größen λ_f und α_{ko} als "freie Parameter" bezeichnet.

5.4.1 Bestimmung der fixen Parameter

Die geometrischen Größen des Heizstabes wurden durch direkte Messung von Außen- und Innen-Durchmesser vor bzw. nach dem Versuch bestimmt.

Die Stoffwerte des Heizstabmaterials, c_f und ρ_f , können nicht von vornherein vorausgesagt werden, da es sich hierbei um temperaturabhängige Größen handelt, die mittlere Temperatur aber durch die zu ermittelnden Werte für λ_f und α_{ko} erst bestimmt wird. Es existieren jedoch zwei Größen, welche außer den zu bestimmenden freien Parametern das Temperaturniveau des Heizstabes mitbestimmen, nämlich

θ_m die mittlere Kühlmitteltemperatur

Q die Wärmestromdichte an der Heizstab-Oberfläche

Die mittlere Kühlmitteltemperatur wird dabei aus der Kühlmittel-Eintrittstemperatur θ_e und der -Aufheizspanne ($\theta_a - \theta_e$) ermittelt:

$$\theta_m = \theta_e + \frac{\theta_a - \theta_e}{2} \quad (71)$$

Die Wärmestromdichte Q an der Heizstaboberfläche wird aus der Gesamtleistung bestimmt. Dabei wird jedoch nicht die elektrische Leistung, sondern die vom Kühlmittelstrom μ aufgenommene Wärme zugrunde gelegt:

$$Q = \frac{c_k \cdot \mu_o \cdot (\theta_a - \theta_e)}{2 \pi R_f \cdot L} \quad (72)$$

c_k = spez. Wärme des Kühlmittels

L = Heizlänge

Der Grund dafür liegt in der Tatsache, daß infolge der angewandten Technik der Thyristor-Steuerung die absolute Höhe der Heizleistung von den eingesetzten Meßgeräten nicht unbedingt richtig angezeigt wird. Je nach Wahl des Arbeitspunktes für den Transformator sowie der Aussteuerung des Netzteiles können dabei erhebliche Abweichungen im Absolutwert auftreten. Für die Relativwerte hingegen ist diese Messung durchaus repräsentativ.

Der mittlere Kühlmitteldurchsatz μ_o wird aus der Aufzeichnung des Mehrkanalschreibers bestimmt.

Obwohl die Oszillationsfrequenz ω am Funktionsgenerator mit relativ großer Genauigkeit eingestellt werden kann, erfolgt die Bestimmung der Kreisfrequenz ω ebenfalls aus der Aufzeichnung des Mehrkanalschreibers. Aus der präzise bekannten Geschwindigkeit v des Papiervorschubs und der Länge l_T [mm], welche eine Periode auf dem Papierstreifen einnimmt, ergibt sich die Kreisfrequenz ω nach der Beziehung

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{v}{l_T} \quad (73)$$

5.4.2 Bestimmung der Übertragungsfunktion aus den Messungen

Der Wert der Übertragungsfunktion $F(s)$ ist bestimmt durch das Amplitudenverhältnis der Oszillationen in Kühlmitteldurchsatz μ und Leistung P

$$A = \frac{\mu^*/\mu_0}{P^*/P_0} \quad (74)$$

und die zwischen ihnen auftretende Phasenverschiebung ψ . Die Grundlage für die Ermittlung dieser Größen bildet die Aufzeichnung des Mehrkanalschreibers.

5.4.2.1 Fourier-Analyse

Bereits ein flüchtiger Blick auf Abb. 11 zeigt, daß zumindest der Ventil-Hub und daraufhin auch der Kühlmitteldurchsatz im allgemeinen keine absolut sinusförmige Oszillationen ausführen. Die Ursache dafür liegt im wesentlichen darin begründet, daß der lineare Bereich der Charakteristiken des Ventilquerschnitts einerseits und des Positionsgabers, welcher den Hub anzeigt, andererseits bei dem für die Experimente erforderlichen Durchsatz z.T. überschritten werden.

Abweichungen von einer echt sinusförmigen Oszillation können darüber hinaus auch in der Leistung auftreten, wenn die Aussteuerung des Netzteils und der Arbeitspunkt des Transformators ungenügend aufeinander abgestimmt sind.

Da es sich jedoch bei sämtlichen Oszillationen um periodische Vorgänge handelt, ist es zulässig, die Abweichungen von der reinen Sinusform als Oberwellenproblem aufzufassen. Im Zuge der Auswertung werden deshalb sämtliche vom Schreiber aufgezeichneten Kurven einer Fourier-Analyse unterzogen.

Aus jeder Kurve $f(x)$ werden dabei über die Länge einer Periode $2m$ Funktionswerte $y_i(x_i)$ entnommen, wobei die Abstände zwischen den Abszissenwerten $[(x)_{i+1} - (x)_i]$ gleich groß gewählt werden. Nach [65] werden sodann die Fourier-Koeffizienten nach den folgenden Formeln bestimmt:

$$a_0 = \frac{1}{2m} \cdot \sum_{i=0}^{2m-1} y_i \quad (75)$$

$$a_n = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=0}^{2m-1} y_i \cdot \cos \frac{ni}{m} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots, m \quad (76)$$

$$b_n = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=0}^{2m-1} y_i \cdot \sin \frac{ni}{m} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots, (m-1) \quad (77)$$

Mit Hilfe dieser Koeffizienten kann die Funktion $f(x)$ dargestellt werden durch den Ausdruck

$$f(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{2m-1} (a_n \cdot \cos n \omega t + b_n \cdot \sin n \omega t) + a_m \cdot \cos m \omega t \quad (78)$$

Da das mathematische Modell die periodischen Vorgänge bei einer ganz bestimmten Frequenz beschreibt, wird zur Auswertung auch nur die aus der harmonischen Analyse sich ergebende Grundwelle herangezogen ($n=1$). Dies ist unter der Voraussetzung möglich, daß bei der Kompensation der Kühlmitteltemperatur-Oszillationen ebenfalls nur die Grundwelle kompensiert wurde. Die Oberwellenanteile der einzelnen Funktionen müssen sich dann theoretisch als Reststörungen in der Kühlmitteltemperatur bemerkbar machen. Diese Störungen sind jedoch, wie bereits in Kap. 5.3.3 erwähnt wurde, relativ klein.

Die auf dem eben beschriebenen Wege gewonnene Grundwelle ist gegeben durch

$$f_1(\omega t) = a_1 \cdot \cos \omega t + b_1 \sin \omega t \quad (79)$$

Bei der praktischen Durchführung der Fourier-Analyse werden die drei periodischen Vorgänge auf den Nulldurchgang der Leistungsozillation bezogen, bei welchem der zeitliche Gradient positiv ist. Aus den dadurch sich ergebenden Sinus- und Cosinus-Anteilen läßt sich nach [63] eine neue Schwingung definieren, welche nur durch die Sinusfunktion dargestellt werden kann:

$$f_1(\omega t) = \Delta A \cdot \sin(\omega t + \psi) \quad (80)$$

Dabei sind die neue Amplitude ΔA und die Phasenverschiebung ψ gegenüber dem Bezugspunkt durch folgende Beziehungen bestimmt:

$$\Delta A = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (81)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b_1}{a_1} \quad (82)$$

Die Abbildungen 12, 13 und 14 zeigen das Ergebnis einer solchen Analyse für die Oszillationen von Leistung, Kühlmitteldurchsatz und Ventilhub. Dabei sind neben den aus der Schreiberaufzeichnung entnommenen Punkten die Sinus- und Cosinus-Anteile der Grundwelle und der ersten Oberwelle dargestellt.

Aus der Analyse der Leistungsozillation folgt dabei die Amplitude der Grundwelle zu $(P')_G$ nach Gl.(81). Bezieht man diesen Wert auf den Koeffizienten a_o , so erhält man sofort die relative Amplitude $(P'/P_o)_G$. Auf dem gleichen Wege wird die relative Amplitude $(\mu'/\mu_o)_G$ der Kühlmitteldurchsatz-Oszillation bestimmt. Die dadurch für Grundwellen sich ergebende Amplitude A_G der Übertragungsfunktion wird dann

$$A_G = \frac{(\mu'/\mu_o)_G}{(P'/P_o)_G} \quad (83)$$

Die Amplitude der Ventilhub-Oszillation ist für das Auswertungsverfahren uninteressant.

Die neben den Amplitudenwerten aus der Analyse resultierenden Phasenwinkel werden wie folgt bezeichnet:

$\tilde{\varphi}_P$	für die Leistungs-Oszillation
$\tilde{\varphi}_S$	für die Kühlmitteldurchsatz-Oszillation
$\tilde{\varphi}_H$	für die Ventilhub-Oszillation.

$\tilde{\varphi}_P$ gibt dabei direkt die Phasenverschiebung der Grundwelle gegenüber der vom Schreiber registrierten Leistungs-Oszillation an. $\tilde{\varphi}_S$ und $\tilde{\varphi}_H$ bezeichnen die Phasenwinkel zwischen den Grundwellen der Schreiber-aufzeichnungen für den Kühlmitteldurchsatz bzw. den Ventilhub und den positiven Nulldurchgang der aufgezeichneten Leistungs-Oszillation.

5.4.2.2 Korrekturen

Die aufgrund der Fourier-Analyse ermittelten Werte für die Amplitude und die einzelnen Phasenwinkel bedürfen noch gewisser Korrekturen, um als wirkliche, die Übertragungsfunktion bestimmende Werte interpretiert werden zu können.

5.4.2.2.1 Phasen-Korrektur

Unter der Voraussetzung, daß sich die durch die Änderungen des Ventilhubes hervorgerufenen Änderungen des Kühlmitteldurchsatzes mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten, ist die Phasendifferenz zwischen Leistung und Ventilhub mit der zwischen Leistung und Kühlmitteldurchsatz in der Teststrecke gleichzusetzen. Das bedeutet, daß die Differenz zwischen den Phasenwinkeln der Grundwellen von Ventilhub und Leistung direkt den Phasenwinkel φ der Übertragungsfunktion angibt. Eine Korrektur ist in diesem Falle nur notwendig, da die Ventilhub-Oszillation, bedingt durch die Konstruktion des Mehrkanalschreibers, um eine gewisse

Strecke versetzt hinter der Leistungsoszillation aufgezeichnet wird. Diese Korrektur bezüglich des Federversatzes läßt sich jedoch leicht aus dem Verhältnis dieses Versatzes zur Länge l_T , welche eine Periode auf dem Papierstreifen einnimmt, berechnen. Bezeichnen wir diese Korrektur mit $\Delta\psi_{F1}$, so ist der Phasenwinkel ψ der Übertragungsfunktion bestimmt durch

$$\psi = \tilde{\psi}_H - \tilde{\psi}_P - \Delta\psi_{F1} \quad (84)$$

Entsprechendes gilt für die Phasendifferenz zwischen den Grundwellen von Leistung und aufgezeichnetem Kühlmitteldurchsatz:

$$\psi_S = \tilde{\psi}_S - \tilde{\psi}_N - \Delta\psi_{F2} \quad (85)$$

5.4.2.2.2 Amplituden-Korrektur

Die Notwendigkeit einer Amplituden-Korrektur folgt aus dem Umstand, daß die Messung des Kühlmittel-Durchsatzes mit einer gewissen Trägheit behaftet ist. Diese Tatsache ist daraus zu erkennen, daß die vom Mehrkanalschreiber aufgezeichneten Signale des Ventilhubs und des gemessenen Kühlmitteldurchsatzes eine Phasenverschiebung gegeneinander aufweisen.

Setzt man voraus, daß die Störungen, welche durch die Änderung des Ventilhubs verursacht werden, sich mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten, so folgt daraus, daß sich der Kühlmitteldurchsatz in der Teststrecke praktisch im selben Augenblick ändert, in dem durch Änderung des Ventilhubs der Ventilquerschnitt geändert wird. Im gleichen Augenblick müßte dann auch die Meßblende eine Änderung des Differenzdrucksignals feststellen. Offenbar vergeht jedoch eine gewisse Zeit, bis dieses Signal von der Blende bis zum Schreiber gelangt.

Untersucht man diese auftretenden Phasendifferenzen $\Delta\psi_\mu$, welche gegeben sind durch

$$\Delta\psi_\mu = \psi_S - \psi \quad (86)$$

für alle durchgeführten Experimente, so stellt man fest, daß sie sich näherungsweise durch eine Zeitkonstante τ_{μ} der Durchsatz-Meßeinrichtung im Sinne einer in der Regeltechnik geläufigen Verzögerung 1. Ordnung [66] deuten lassen. Die Zeitkonstante τ_{μ} ist dabei bestimmt durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi_{\mu} = \omega \cdot \tau_{\mu} \quad (87)$$

Tatsächlich stimmen die auf diesem Wege zu ermittelnden Zeitkonstanten, zumindest innerhalb jeder Versuchsserie, bis auf ca. $\pm 10\%$ überein.

Nach [66] tritt bei einer Verzögerung 1. Ordnung mit der durch Gl.(85) definierten Phasenverschiebung gleichzeitig eine äquivalente Reduzierung der Amplitude auf, welche nach der Beziehung

$$\frac{A_G}{A_G + \Delta A} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau_{\mu})^2}} \quad (88)$$

bestimmt werden kann.

Ist A_G die Amplitude der vom Schreiber aufgezeichneten Grundwelle der Durchsatz-Oszillation, so wäre die an der Meßblende tatsächlich wirk-same Amplitude A um den Faktor K_{μ} größer:

$$A = K_{\mu} \cdot A_G \quad (89)$$

Der Korrekturfaktor K_{μ} ergibt sich aus den Gln.(84) und (85) nach einer trigonometrischen Umformung zu

$$K_{\mu} = \frac{1}{\cos \Delta\varphi_{\mu}} \quad (90)$$

5.4.3 Bestimmung der freien Parameter

Das Ziel des Auswertungsverfahrens ist in der Bestimmung der sog. freien Parameter zu sehen. Darunter sind die gesuchten Größen, nämlich

λ_f die Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffes
 α_{ko} die äußere Wärmeübergangszahl
bzw. α_g die Wärmedurchgangszahl des Spaltes zwischen Brennstoff und Hülle bei bekanntem α_{ko}

zu verstehen. Das Verfahren für ihre Bestimmung besteht praktisch darin, unter Verwendung der fixen Parameter die beiden freien Parameter so zu bestimmen, daß der mathematische Ausdruck für die Übertragungsfunktion $F(s)$ genau die durch Messung ermittelten Werte für die Amplitude A und den Phasenwinkel ψ liefert.

5.4.3.1 Angenäherte Bestimmung anhand von Parameterdiagrammen

Eine erste anschauliche Möglichkeit zu einer angenäherten Bestimmung der freien Parameter λ_f und α_{ko} ist gegeben durch die Darstellung der Übertragungsfunktion $F(s)$ in Form von Parameterdiagrammen. Fünf derartige charakteristische Bilder sind in den Abbn. (15) bis (19) wiedergegeben. Sie gelten für fünf Versuche der Reihe B5.

Der Entstehung dieser Diagramme liegt der folgende Weg zugrunde: Unter Konstanthaltung der fixen Parameter R_f , y_o , θ_m , Q und ω wurde die Übertragungsfunktion nach dem Modell 4 für eine Reihe von Kombinationen der freien Parameter λ_f und α_{ko} berechnet. Dabei wurden die in die Berechnungen eingehenden Stoffwerte c_f und ρ_f jeweils bei der Temperatur eingesetzt, welche sich aufgrund der Wahl der freien Parameter zusammen mit der mittleren Außentemperatur θ_m und der Wärmestromdichte Q ergibt. Durch Verbinden der so gewonnenen Punkte erhält man die Linien gleicher Wärmeleitfähigkeit und die gleicher Wärmeübergangszahl.

In das dadurch entstandene Parameternetz kann man nun den jeweils durch Amplitude A und Phasenwinkel ψ bzw. Realteil $\text{Re} \{F(s)\}$ und Imaginärteil $\text{Im} \{F(s)\}$ definierten Punkt eintragen und die zugehörigen Parameter λ_f und α_{ko} annähernd ablesen.

5.4.3.2 Genauere Bestimmung mittels Iterationsprogramm

Eine exaktere Bestimmung der freien Parameter innerhalb des oben beschriebenen Parameternetzes ist durch Anwendung eines Iterationsverfahrens möglich.

Den Ausgangspunkt für die Iteration bildet eine vorzugebende Schätzung für das gesuchte Parameterpaar. Von diesem Punkt aus werden abwechselnd die beiden Parameter mit einer ebenfalls vorzugebenden Schrittweite so lange geändert, bis das Konvergenzkriterium erfüllt ist. Als solches wird dabei die Übereinstimmung entweder in den Real- oder den Imaginärteilen der mit den Parametern berechneten und der gemessenen Übertragungsfunktion benützt. Dabei ist die Zuordnung zwischen Parameter und Koordinatenachse von vornherein festgelegt.

Wird bereits beim ersten Iterationsschritt innerhalb einer Parametervariation eine Divergenz festgestellt, so wird automatisch eine Richtungsumkehr bewirkt. Wird eine Divergenz innerhalb einer Parametervariation erst bei einem späteren Iterationsschritt bemerkt, so wird die nächste Schätzung innerhalb der Schrittweite durch Verhältnissbildung durchgeführt. Wird nach einer durch Änderung des ersten Parameters erfolgreich abgeschlossenen Iteration eine Divergenz nach dem Umschalten auf den zweiten Parameter festgestellt, welche sich in beiden Richtungen bemerkbar macht, so wird automatisch die Zuordnung zwischen Parameter und Koordinatenachse vertauscht. Die zweckmäßige Zuordnung ist dabei abhängig von der Lage der Parameternetze in der Gaußschen Zahlenebene.

Das beschriebene Iterationsverfahren erfordert zwar bei einer Genauigkeit von 10^{-4} eine relativ große Anzahl von Iterationsschritten, es hat sich aber im Laufe der Auswertung der Messungen als zuverlässiges Werkzeug erwiesen.

5.4.4 Beispiel eines Auswertungsprotokolls

Die folgende Tabelle 1 zeigt den Gang der Auswertung in übersichtlicher Form. Sie gilt für die Versuchsreihe B5.

TABELLE 1

AUSWERTUNG DER VERSUCHSREIHE B5

Größe	Bezeichnung	Versuch Nr.				
		B5/10	B5/15	B5/25	B5/30	B5/40
D_{fa}	Heizstab-Außendurchmesser $[mm]$	19.65	19.65	19.65	19.65	19.65
d_{fi}	Heizstab-Innendurchmesser $[mm]$	9.90	9.90	9.90	9.90	9.90
γ_o	relativer Heizstab-Innendurchmesser	0.504	0.504	0.504	0.504	0.504
L	Heizlänge $[mm]$	864	864	864	864	864
θ_e	Kühlmittel-Eintrittstemperatur $[^{\circ}C]$	20	20	20	20	20
$\theta_a - \theta_e$	Kühlmittel-Aufheizspanne $[^{\circ}C]$	74.0	74.0	72.5	72.5	75.0
θ_m	mittlere Kühlmitteltemperatur $[^{\circ}C]$	57.0	57.0	56.2	56.2	57.5
P_o	mittlere Heizleistung $[kW]$	10.66	10.60	10.41	10.32	10.71
μ_o	mittlerer Kühlmitteldurchsatz $[kg/h]$	99.05	98.75	99.0	98.1	98.5
c_k	spez. Wärme des Kühlmittels $[Ws/kg \text{ grad}]$	5237	5237	5237	5237	5237
Q	Wärmestromdichte an Heizstab-Oberfläche $[W/cm^2]$	20.0	19.90	19.56	19.40	20.10
T	Periodendauer der Oszillation $[s]$	10.0	14.90	24.75	29.90	39.75
ω	Kreisfrequenz $[s^{-1}]$	0.628	0.4205	0.254	0.210	0.158
μ_s' / μ_o	Durchsatz-Amplitude aus Schreiberaufzeichnung	0.0281	0.0342	0.0610	0.0704	0.0774
P_s' / P_o	Leistungs-Amplitude aus Schreiberaufzeichnung	0.0949	0.0875	0.1010	0.103	0.102
A_s	Amplitude der ÜF nach Schreiberaufzeichnung	0.2980	0.3915	0.6030	0.6830	0.7590
μ' / μ_o	Durchsatz-Amplitude nach Fourier-Analyse	0.027080	0.034540	0.063164	0.073812	0.081680
P' / P_o	Leistungs-Amplitude nach Fourier-Analyse	0.09446	0.090660	0.100824	0.101879	0.101700
A_G	Amplitude der ÜF nach Fourier-Analyse	0.2870	0.3810	0.6275	0.7250	0.8050
ψ_Z	Phasenlage des Ventil-Steuersignals	-38.90	-38.90	-31.30	-26.75	-24.30
ψ_H	Phasenlage des Ventil-Hubs nach Schreiber	-51.20	-52.25	-44.55	-39.45	-32.40
ψ_S	Phasenlage des Durchsatzes nach Schreiber	-91.50	-91.00	-64.10	-60.70	-50.40
ψ_P	Phasenlage der Leistung nach Fourier-Analyse	-2.99	-2.55	-10.16	-9.34	-7.92
ψ_H'	Phasenlage des Ventil-Hubs nach Fourier-Analyse	-66.65	-63.57	-58.86	-51.63	-44.04
ψ_S'	Phasenlage des Durchsatzes nach Fourier-Analyse	-98.66	-92.36	-72.31	-62.93	-53.28
ψ_S	tats. Phasendifferenz zw. Leistung u. Durchsatz	-90.05	-86.03	-57.60	-44.83	-42.54
ψ	tats. Phasendifferenz zw. Leistung u. Ventilhub	-52.45	-53.45	-39.60	-34.77	-30.47
$\Delta\psi_v$	Phasenverzögerung im Ventil	-13.52	-14.57	-8.30	-8.02	-6.17
$\Delta\psi_\mu$	Phasenverzögerung der Durchsatzmessung	-37.63	-32.56	-18.00	-15.06	-12.07
τ_μ	Zeitkonstante der Durchsatzmessung $[s]$	1.230	1.515	1.281	1.281	1.352
K_μ	Amplituden-Korrekturfaktor	1.263	1.189	1.052	1.037	1.024
A	Amplitude der Übertragungsfunktion	0.3625	0.4530	0.6600	0.7515	0.8240
Re	Realteil der Übertragungsfunktion	0.2210	0.2695	0.5085	0.6180	0.7100
Im	Imaginärteil der Übertragungsfunktion	-0.2870	-0.3640	-0.4200	-0.4290	-0.4175
λ	Wärmeleitfähigkeit $[W/cm \text{ grad}]$	0.03573	0.04431	0.03226	0.03745	0.04164
α	Wärmeübergangszahl $[W/cm^2 \text{ grad}]$	0.14223	0.09618	0.19781	0.16989	0.13030

5.5 Ergebnisse

5.5.1 Tabellarische Übersicht

Die in den Experimenten gewonnenen Ergebnisse sind in zweifacher Hinsicht interessant. Neben der Übereinstimmung in den Meßwerten für Wärmeleitfähigkeit λ und Wärmeübergangszahl α ist des weiteren die Relation zwischen den exakten und den vereinfachten Modellen von Bedeutung.

In den Tabellen 2 bis 5 sind die wesentlichsten Versuchsbedingungen (mittlere Leistung und mittlerer Kühlmitteldurchsatz sowie die Periodendauer der Oszillation), die korrigierten Meßwerte für Amplitude und Phase der Übertragungsfunktion und die aus dem Auswertungsverfahren resultierenden Ergebnisse für die Wärmeleitfähigkeit λ_f des Heizstabmaterials und die äußere Wärmeübergangszahl α_{ko} zwischen Heizstaboberfläche und Kühlmittel bzw. die Wärmedurchgangszahl α_g des Spaltes zwischen Heizstab und Hüllrohr für die einzelnen Versuchsreihen zusammengestellt. Aus den einzelnen Resultaten für λ und α wurden sodann für jede Versuchsreihe die Mittelwerte und die mittlere Streuung der Meßwerte bestimmt. Für diese Mittelwerte wurde anschließend die Übertragungsfunktion $F(s)$ nach den exakten und den vereinfachten Modellen rechnerisch ermittelt. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind neben den entsprechenden Meßpunkten in Ortskurvenform sowie als Amplituden- und Phasenverlauf über der Periodendauer T in den angegebenen Abbildungen graphisch dargestellt.

5.5.2 Physikalische Deutung der Ergebnisse

Die experimentell bestimmten Übertragungsfunktionen zeigen, wie aus den Abb. 20 ./ 37 ersichtlich ist, grundsätzlich den erwarteten Verlauf: mit steigender Periodendauer T wird die Amplitude A größer, der Phasenwinkel φ dagegen nimmt ab.

Diese Tatsache erklärt sich aus der thermischen Trägheit des Systems, welche letztlich durch Wärmeleitfähigkeit λ , spezifische Wärme c und Dichte ρ des Heizstabmaterials bestimmt wird, bzw. durch die aus diesen drei Stoffwerten

TABELLE 2

VERSUCHSREIHE A: nackter Heizstab i./ä. $\phi = 0./12,5$ mm

Bez.	T	A	φ	Re	Im	λ_f	α_{k0}	Mittelwerte	Vergl.wert	Abbn.
Reihe A1: $P_0 \approx 7.85$ kW $\mu_0 \approx 72.5$ (6) kg/h										
A1/10	10	0.465	-51.3°	0.290	-0.362	0.0557	0.123	$\lambda_f = (0.0444 \pm 31\%)$ W/cm grd	0.042	20
A1/15	15	0.498	-43.6°	0.360	-0.344	0.0292	0.209	$\alpha_{k1} = (0.166 \pm 22\%)$ W/cm ² grd	0.307	
A1/20	20	0.753	-33.3°	0.630	-0.413	0.0465	0.225	$\alpha_{k2} = (0.219 \pm 3\%)$ W/cm ² grd	0.261	
A1/25	25	0.807	-29.7°	0.702	-0.400	0.0463	0.213		21	
Reihe A2: $P_0 \approx 8$ kW $\mu_0 \approx 60$ kg/h										
A2/8	8	0.342	-56.2°	0.190	-0.284	0.0477	0.103	$\lambda_f = (0.0453 \pm 14\%)$ W/cm grd	0.042	22
A2/12.5	12.5	0.526	-48.8°	0.347	-0.396	0.0555	0.119	$\alpha_k = (0.167 \pm 34\%)$ W/cm ² grd	0.260	
A2/15	15	0.576	-42.2°	0.426	-0.388	0.0419	0.189		23	
A2/20	20	0.680	-36.5°	0.546	-0.405	0.0363	0.259			
Reihe A3: $P_0 \approx 10$ kW $\mu_0 \approx 60$ kg/h										
A3/8	8	0.342	-57.7°	0.183	-0.289	0.0574	0.103	$\lambda_f = (0.0518 \pm 21\%)$ W/cm grd	0.042	24
A3/10	10	0.501	-47.3°	0.340	-0.368	0.0553	0.184			
A3/12.5	12.5	0.589	-44.7°	0.419	-0.415	0.0640	0.168	$\alpha_k = (0.215 \pm 38\%)$ W/cm ² grd	0.256	
A3/15	15	0.564	-41.0°	0.426	-0.369	0.0366	0.307		25	
A3/20	20	0.659	-36.6°	0.528	-0.393	0.0352	0.370			
A3/30	30	0.850	-27.5°	0.754	-0.392	0.0623	0.161			

TABELLE 3

VERSUCHSREIHE B: nackter Heizstab i./ä. $\phi = 10./19.6$ mm

Bez.	T	A	φ	Re	Im	λ_f	α_{ko}	Mittelwerte	Vergl.wert	Abbn.
Reihe B4: $P_o \approx 8$ kW $\mu_o \approx 100$ kg/h										
B4/20	20	0.656	-44.1°	0.430	-0.416	0.0631	0.094	$\lambda_f = (0.0447 \pm 26\%)$ W/cm grd $\alpha_k = (0.142 \pm 32\%)$ W/cm ² grd	0.042	26
B4/25	25	0.700	-36.9°	0.521	-0.391	0.0309	0.230		0.154	
B4/30	30	0.805	-32.8°	0.645	-0.416	0.0558	0.109			27
B4/40	40	0.825	-30.7°	0.692	-0.410	0.0429	0.106			
B4/50	50	0.860	-26.1°	0.763	-0.374	0.0310	0.170			
Reihe B5: $P_o \approx 10,5$ kW $\mu_o \approx 100$ kg/h										
B5/10	10	0.363	-52,4°	0.175	-0.227	0.0357	0.142	$\lambda_f = (0.0383 \pm 10\%)$ W/cm grd $\alpha_k = (0.147 \pm 20\%)$ W/cm ² grd	0.042	28
B5/15	15	0.453	-53.5°	0.227	-0.306	0.0443	0.096		0.150	
B5/25	25	0.660	-39.6°	0.483	-0.400	0.0323	0.198			29
B5/30	30	0.752	-34.8°	0.596	-0.413	0.0375	0.170			
B5/40	40	0.824	-30.5°	0.695	-0.408	0.0416	0.130			

TABELLE 4

VERSUCHSREIHE C: Heizstab i./ä. $\phi = 0./12.5$ mm, Hüllrohr 17,4 x 1 mm

Bez.	T	A	φ	Re	Im	λ_f	α_g	Mittelwerte	Vergl.wert	Abbn.
Reihe C6: $P_o \approx 3.6$ kW $\mu_o \approx 100$ kg/h										
C6/50	50	0.214	-83.0	0.0264	-0.212	0.015	0.0255	$\lambda_f = ?$ $\alpha_g = (0.0283 \pm 11\%)$ W/cm ² grd	0.042	30
C6/66.6	66.6	0.314	-80.2	0.0535	-0.310	0.050	0.0230		0.018	
C6/80	80	0.354	-72.2	0.109	-0.337	0.010	0.0320			31
C6/100	100	0.479	-68.2	0.178	-0.445	0.016	0.0310			
C6/125	125	0.460	-65.6	0.191	-0.419	0.010	0.0300			

TABELLE 5 VERSUCHSREIHE D: Heizstab i./ä. $\phi = 10./19.6$ mm, Hüllrohr 22 x 0,5 mm

Bez.	T	A	φ	Re	Im	λ_f	α_g	Mittelwert	Vergl.wert	Abbn.
Reihe D7: $P_o \approx 3.25$ kW $\mu_o \approx 72.5$ kg/h										
D7/50	50	0.162	-82.3°	0.0217	-0.160	0.016	0.020	$\lambda_f = (0.0215 \pm 26\%)$ W/cm grd $\alpha_g = 0.020$ W/cm ² grd	0.042	32
D7/66.6	66.6	0.214	-79.3°	0.0398	-0.210	0.016	0.020			
D7/80	80	0.263	-76.6°	0.0610	-0.255	0.027	0.020			
D7/100	100	0.326	-72.8°	0.0964	-0.311	0.027	0.020			
D7/125	125	(0.325)	(-69.2°)	(0.115)	(-0.304)	(0.008)	(0.022)			
Reihe D8: $P_o \approx 6$ kW $\mu_o \approx 72.5$ kg/h										
D8/50	50	0.184	(-92.6°)	-	-	-	-	$\lambda_f = (0.034 \pm 32\%)$ W/cm grd $\alpha_g = (0.030 \pm 10\%)$ W/cm ² grd	0.042	34
D8/66.6	66.6	0.273	(-82.1°)	-	-	-	-			
D8/80	80	0.318	-73.5°	0.0950	-0.304	0.031	0.029			
D8/100	100	0.455	-65.9°	0.186	-0.415	0.050	0.027			
D8/125	125	0.516	-61.0°	0.250	-0.401	0.020	0.035			
Reihe D9: $P_o \approx 7,5$ kW $\mu_o \approx 95$ kg/h										
D9/40	40	0.209	-79.2°	0.0392	-0.205	0.028	0.038	$\lambda_f = (0.038 \pm 47\%)$ W/cm grd $\alpha_g = (0.0355 \pm 3\%)$ W/cm ² grd	0.042	36
D9/50	50	0.257	-77.4°	0.0560	-0.251	0.050	0.035			
D9/66.6	66.6	0.303	-73.5°	0.0860	-0.290	0.025	0.035			
D9/80	80	0.375	-70.5°	0.125	-0.353	0.080	0.034			
D9/100	100	0.440	-65.9°	0.180	-0.400	0.028	0.036			
D9/125	125	0.474	-63.0°	0.215	-0.421	0.017	0.035			

gebildete Temperaturleitzahl $a = \frac{\lambda}{c \rho}$. Je größer die Temperaturleitzahl a ist, umso schneller wird die "Temperatur", und damit auch eine Temperaturstörung, "weitergeleitet", d.h. umso schneller wird die im System erzeugte Wärme nach außen abgeführt. Es ist offensichtlich, daß dabei auch die Entfernung, über welche die Wärme transportiert werden muß um abgeführt werden zu können, eine Rolle spielt. Je größer diese Entfernung (hier der Heizstabradius R_f) ist, umso längere Zeit dauert es, bis die Wärme nach außen gebracht ist. Die Geschwindigkeit v , mit der die Wärme an die Heizstaboberfläche transportiert wird, ist demnach proportional zur Temperaturleitzahl a und umgekehrt proportional zum Heizstabradius R_f . Eine Dimensionsanalyse des Ausdrucks $v = \frac{a}{R_f} = \frac{\lambda}{c \rho R_f}$ beweist, daß es sich hier tatsächlich um eine Geschwindigkeit handelt. Sie ist eine für den Heizstab charakteristische Größe.

Wendet man bei der Oszillation der Heizleistung sehr lange Periodendauern an, d.h. ist die Leistungsänderungsgeschwindigkeit sehr klein, so steht dem Heizstab genügend Zeit zur Verfügung, die gesamte mehr produzierte Leistung an die Oberfläche zu bringen und von dort an das Kühlmittel abzugeben. In diesem Falle werden die Kühlmitteltemperaturschwankungen am größten sein und es sind daher auch die maximalen Amplituden in der Kühlmitteldurchsatz-Oszillation anzuwenden, um diese zu kompensieren. Nimmt die Periodendauer ab, so wird einmal der Punkt erreicht, wo die Leistungsänderungsgeschwindigkeit gleich der Transportgeschwindigkeit im Heizstab ist. Wird dieser Punkt überschritten, so nimmt der Betrag der nach außen transportierten Wärme stetig ab, die Kühlmitteltemperaturschwankungen und damit die zu ihrer Kompensation aufzuwendenden Durchsatzschwankungen werden geringer. Infolge der relativ geringeren Transportgeschwindigkeit wird die nach außen abgeführte Leistung mit einer gewissen Verzögerung (= Phasenverschiebung) an der Oberfläche ankommen. Diese Verzögerung nimmt ebenso stetig zu wie der Betrag abnimmt. Sind die Periodendauern schließlich sehr kurz, so treten die Leistungsoszillationen nach außen überhaupt nicht mehr in Erscheinung, sie dienen dann lediglich noch zur periodischen Aufheizung bzw. Abkühlung des Heizstabes.

Der Wärmeübergang zwischen Heizstab und Kühlmittel wirkt ebenfalls als thermischer Widerstand und geht in die Transportgeschwindigkeit mit ein. Aus dieser Tatsache erklärt sich auch der Unterschied zwischen den Modellen, welche die Schwankungen der Wärmeübergangszahl berücksichtigen, und denen, die sie vernachlässigen. Steigt die Leistung im Verlauf einer Periode an, so muß auch der Kühlmitteldurchsatz gesteigert werden. Die dabei ebenfalls steigende Wärmeübergangszahl verringert den Wärmewiderstand und kommt damit dem Heizstab in seinem Bestreben die Wärme abzuführen entgegen. Dadurch sind in diesem Modell höhere Amplituden und geringere Verzögerungen zu erwarten, was durch die Experimente eindeutig bestätigt wird.

Ähnliches gilt beim Vorhandensein eines Hüllrohres. Hier wird der thermische Widerstand durch das Hüllrohr selbst und durch den zwischen Heizstab und Hüllrohr existierenden Gasspalt erhöht. Dies führt bereits zu einer gewissen Reduzierung der nach außen abgeführten Wärmemenge und zu einer erhöhten Verzögerung gegenüber den Experimenten, bei denen der gleiche Heizstab ohne Hüllrohr unter ähnlichen Bedingungen betrieben wurde. Unterstützt wird dieser Effekt noch durch die Wärmekapazität des Hüllrohres, welche einen weiteren Betrag der vom Heizstab zur Abgabe nach außen angebotenen Wärme aufnimmt. Hieraus erklärt sich, daß die Ergebnisse der Versuchsreihen C und D gegenüber denen der Reihen A und B bei gleichen Periodendauern bedeutend niedrigere Werte für die Amplitude und höhere für die Phasenverzögerung der Übertragungsfunktion aufzeigen.

5.6 Fehlerbetrachtung

Die in Kap. 5.5 angegebenen Ergebnisse weisen z.T. eine erhebliche Streuung auf. Es erscheint daher zweckmäßig, einige Überlegungen zur Fehleranalyse anzustellen, um die wesentlichen Ursachen dieser Streuung ergründen und Maßnahmen zu ihrer Reduzierung definieren zu können.

Der Grundgedanke der Fehleranalyse besteht darin festzustellen, welcher Fehler in den zu bestimmenden freien Parametern λ und α aufgrund von Fehlern in den fixen Parametern sowie in den Meßwerten hervorgerufen wird. Eine anschauliche Erklärung dieses Gedankens läßt sich an Hand der zur Auswertung herangezogenen Parameterdiagramme geben. Aufgrund von Abweichungen in den fixen Parametern wird sich das Netz der Parameterkurven verschieben; dadurch werden einem festen Meßpunkt für die Übertragungsfunktion andere freie Parameter zugeordnet. Umgekehrt bedeuten Abweichungen in den Meßwerten eine Verschiebung des Meßpunktes innerhalb des festen Parameternetzes, was die gleichen Auswirkungen auf die Bestimmung der freien Parameter hat.

In der Fehleranalyse werden für jede mögliche Fehlerursache die Auswirkungen auf die freien Parameter untersucht. Dadurch ergeben sich eine Reihe von Einzelfehlern, welche die Feststellung der hauptsächlichen Fehlerursachen ermöglichen. Der Gesamtfehler wird sodann durch quadratische Mittelung aus den Einzelfehlern bestimmt. Die Berechnung stützt sich dabei auf die Ergebnisse der Versuchsreihe B5.

5.6.1 Genauigkeiten der fixen Parameter und die daraus resultierenden Fehler

Der Heizstab-Außendurchmesser wurde vor dem Einbau in die Teststrecke durch Messung an mehreren axialen Stellen bestimmt zu

$$D_f = 19.65 \pm 0.10 \text{ mm}$$

Der Heizstab-Innendurchmesser wurde nach den Experimenten durch mehrere Messungen an Bruchstücken bestimmt zu

$$d_f = 9.9 \pm 0.05 \text{ mm}$$

Als mögliche Abweichung der Außentemperatur von der mittleren Kühlmitteltemperatur wurde die halbe Kühlmittel-Aufheizspanne festgelegt:

$$\delta \theta_m = \theta_m \pm \frac{\theta_a - \theta_e}{2}$$

Der Fehler in der mittleren Wärmestromdichte Q ergibt sich aus Gl.(72) durch logarithmisches Differenzieren zu

$$\frac{\delta Q}{Q} = \frac{\delta \mu_o}{\mu_o} + \frac{\delta(\theta_a - \theta_e)}{(\theta_a - \theta_e)} + \frac{\delta D_f}{D_f} + \frac{\delta L}{L} \quad (91)$$

mit den Einzelfehlern im Kühlmitteldurchsatz $\left(\frac{\delta \mu_o}{\mu_o} = 1.3 \%\right)$, in der Aufheizspanne $\left(\frac{\delta(\theta_a - \theta_e)}{(\theta_a - \theta_e)} = \frac{0.25^\circ}{72^\circ} = 0.36 \%\right)$, im Heizstab-Außendurchmesser $\left(\frac{\delta D_f}{D_f} = \frac{0.1}{19.65} = 0.5 \%\right)$ und in der Heizlänge $\left(\frac{\delta L}{L} = \frac{1}{864} = 0.16 \%\right)$ wird der Fehler in der Wärmestromdichte $\frac{\delta Q}{Q} \approx 3 \%$.

Die Genauigkeit der Periodendauer kann mit $\pm 0.5 \%$ angenommen werden.

Damit ergeben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Fehler in λ und α für die Versuchsreihe B5:

$\frac{\delta \lambda}{\lambda}$	D_f	d_f	θ_m	Q	T	Gesamt $\xi_{\lambda \text{ fix}}$
B5/10	1.65	0.79	5.34	2.43	1.93	6.45
B5/15	1.71	0.79	3.59	2.01	2.27	5.07
B5/25	1.71	0.84	5.67	2.29	2.28	6.80
B5/30	1.71	0.83	5.81	2.30	2.67	7.05
B5/40	1.70	0.82	5.31	2.45	3.06	6.87
$\frac{\delta \alpha}{\alpha}$						$\xi_{\alpha \text{ fix}}$
B5/10	0.47	0.09	5.16	2.43	1.99	6.06
B5/15	0.55	0.17	3.56	1.99	1.80	4.50
B5/25	0.32	0.04	6.10	2.13	5.19	8.28
B5/30	0.40	0.03	5.74	2.25	4.87	7.86
B5/40	0.44	0.09	5.25	2.39	4.06	7.05

Die absolute Höhe des Gesamtfehlers infolge von Abweichungen in den fixen Parametern wird im vorliegenden Fall wesentlich bestimmt durch die Abweichungen in der Kühlmitteltemperatur Θ , welche sich auf das Temperaturniveau und damit auf die Wärmekapazität des Heizstabes auswirkt. Da mit zunehmender Periodendauer der nach außen abgeführte Teil der Wärme zu-, der im Heizstab gespeicherte Teil jedoch abnimmt, ist aus dieser Ursache mit einer Abnahme des Fehlers mit wachsender Periodendauer zu rechnen. Diesem Effekt entgegen wirkt die Tatsache, daß das Netz der Parameterkurven, wie aus den Abb. 15 bis 19 zu ersehen ist, mit steigender Periodendauer immer engmaschiger wird, wodurch die Auflösung für die freien Parameter verschlechtert wird. Dies wirkt sich in einer steigenden Tendenz für den Fehler aus. Die Überlagerung der beiden Effekte führt schließlich zu einem Fehlerverlauf, wie er aus der vorstehend angeführten Tabelle zu erkennen ist; Abb. 38 zeigt seine graphische Darstellung.

5.6.2 Genauigkeiten der Meßwerte und die daraus resultierenden Fehler

Die Lage des Meßpunktes im Netz der Parameterkurven wird bestimmt durch die Meßwerte von Amplitude und Phasenwinkel der Übertragungsfunktion, welche beide fehlerbehaftet sind.

5.6.2.1 Amplituden-Meßfehler

Der Amplituden-Meßfehler setzt sich aus vier Einzelfehlern zusammen, welche sich aus dem Verfahren zur Bestimmung der Amplitude ergeben:

Fehler der Leistungs-Amplitude:	ϵ_P
Fehler der Durchsatz-Amplitude:	ϵ_μ
Fehler der Amplituden-Korrektur:	ϵ_K
Kompensations-Fehler:	ϵ_B

Der Fehler in der Leistungs-Amplitude ergibt sich aus der Meßgenauigkeit von Strom- und Spannungsmessung. Bei Verwendung von Meßgeräten der Klasse 0.5 ergibt sich ein relativer Fehler für den Momentanwert

der Leistung von $\frac{\delta P}{P} = \pm 1 \%$. Da die Berechnung der Leistungs-Amplitude praktisch durch die Verhältnisbildung zweier Momentanwerte (P_{\max} und P_0), vermindert um 1, gewonnen wird, ist unter der Voraussetzung, daß aufgrund der durchgeführten Fourier-Analyse mit 36 Meßpunkten kein weiterer Fehler eingeführt wird, mit einem Fehler in der Leistungsamplitude von $\xi_P = \pm 2 \%$ zu rechnen.

In der gleichen Weise kann der Fehler ξ_μ der Durchsatz-Amplitude für eine Meßgenauigkeit von $\frac{\delta \mu}{\mu} = \pm 1.3 \%$ zu $\xi_\mu = \pm 2.6 \%$ bestimmt werden.

Die Amplituden-Korrektur K_μ ergab sich aus der Phasendifferenz, welche zwischen den Signalen des Ventilhubs und des aufgezeichneten Kühlmitteldurchsatzes auftritt (s. Kap. 5.4.2.2) und durch eine Zeitkonstante τ_μ der Durchsatzmessung erklärt wurde. Über sämtliche durchgeführte Experimente betrachtet, betragen die Abweichungen in τ_μ bis zu $\pm 50 \%$. Betrachtet man hingegen nur die Experimente einer einzelnen Versuchsreihe, so betragen die Abweichungen lediglich $\pm 10 \%$. Es liegt deshalb der Schluß nahe, daß die Zeitkonstante τ_μ äußeren Einflüssen unterworfen ist, welche zumindest über die Dauer einer Versuchsreihe als unveränderlich betrachtet werden können. Insofern erscheint es gerechtfertigt, den Fehler in der Zeitkonstanten τ_μ zu $\pm 10 \%$ anzunehmen. Der daraus sich ergebende Fehler in der Amplitude, ξ_K , ist in untenstehender Tabelle für die Versuchsreihe B5 angegeben.

Über diese reinen Meßfehler hinaus ist mit einer weiteren Ungenauigkeit zu rechnen, welche sich daraus ergibt, daß eine vollständige Kompensation der Kühlmitteltemperaturschwankungen in der experimentellen Praxis nicht erreicht werden kann (s. Kap. 5.3.3). Innerhalb des Störungspegels von $\delta \theta = \pm 0.2^\circ\text{C}$ in der Kühlmitteltemperatur kann deshalb eine Amplitudenabweichung nicht mehr festgestellt werden. Aufgrund von theoretischen Erörterungen dieses Problems ergibt sich der damit verbundene Amplitudenfehler ξ_B zu

$$\xi_B = \frac{\sqrt{2} \cdot \delta \theta}{(\theta_a - \theta_e)} \cdot \frac{1}{N(s)} \cdot \frac{1}{P^r/P_0} \quad (92)$$

$N(s)$ bedeutet dabei die Übertragungsfunktion zwischen den Kühlmitteltemperatur- und den Leistungs-Oszillationen. Auf ihre Ableitung wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet. Die daraus für die Versuchsreihe B5 zu errechnenden Fehler sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Versuch	ϵ_P	ϵ_μ	ϵ_K	ϵ_B	Gesamt ϵ_A
B5/10	2.00	2.60	4.60	3.95	6.90
B5/15	2.00	2.60	2.80	3.29	5.41
B5/25	2.00	2.60	1.20	2.08	4.06
B5/30	2.00	2.60	0.40	1.80	3.85
B5/40	2.00	2.60	0.70	1.60	3.72

Die Abhängigkeit der Werte ϵ_K , ϵ_B und ϵ_A sind in Abb. 39 graphisch dargestellt.

Die Auswirkungen des Amplituden-Meßfehlers auf die Genauigkeit der Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit lassen sich aus dem Diagramm, Abb. 40, ablesen.

Diese Abbildung zeigt deutlich, daß der Fehler in der Wärmeleitfähigkeit äußerst stark vom Amplituden-Meßfehler abhängig ist. Diese Abhängigkeit wird umso stärker, je höher die Periodendauer der Oszillationsvorgänge ist. Dies ist zu erklären mit dem zunehmend engmaschiger werdenden Netz der Parameterkurven mit steigender Periodendauer.

Ähnliches gilt in noch verstärktem Maße für die Genauigkeit der Wärmeübergangszahl, wie aus Abb. 41 zu ersehen ist. Aus dieser Abbildung wird jedoch deutlich, daß es einen gewissen Frequenzbereich gibt, in welchem der Fehler in α , der aus dem Amplituden-Meßfehler resultiert, ein Minimum wird. Dies ist dort der Fall, wo die Linien konstanter Wärmeübergangszahl im Parameternetz annähernd die gleiche Richtung haben wie der Vektor der Übertragungsfunktion.

Nach diesen Abhängigkeiten ergeben sich für die vorstehend ermittelten Gesamt-Amplituden-Meßfehler folgende Fehler für Wärmeleitfähigkeits- und Wärmeübergangs-Werte der Versuchsreihe B5:

	B5/10	B5/15	B5/25	B5/30	B5/40
$\epsilon_{\lambda A}$	$\pm 11.5 \%$	$\pm 13.6 \%$	$\pm 19.9 \%$	$\pm 35.8 \%$	$> \pm 50 \%$
$\epsilon_{\alpha A}$	$\pm 2.2 \%$	$\pm 2.8 \%$	$\pm 37.9 \%$	$> \pm 50 \%$	$\gg \pm 50 \%$

5.6.2.2 Phasen-Meßfehler

Der Phasenwinkel ψ wird durch direkte Messung des Ventilhubes bestimmt. Setzt man die mit 36 Punkten durchgeführte Fourier-Analyse als korrekt voraus, so ist ein Meßfehler nur zu erwarten durch die nachträglich erforderliche Korrektur des Federversatzes am Mehrkanalschreiber. Dieser konstruktionsbedingte Versatz beträgt bezüglich der für die Phasenbestimmung heranzuziehenden Signale 5.2 mm. Der Korrekturwinkel in Grad ergibt sich dabei aus der Relation zu der von einer Periode eingenommenen Länge l_T . Beide Werte sind jedoch so genau zu bestimmen, daß sich diesbezüglich die mögliche Phasenabweichung innerhalb der Grenzen von $\delta\psi = \pm 0.25^\circ$ bewegt.

Ein weiterer Fehler im Phasenwinkel ist, ähnlich wie bei der Amplitude, durch ungenügende Kompensation der Kühlmitteltemperatur-Schwankungen zu erwarten. Trotz des Störungspegels von $\pm 0.2^\circ\text{C}$ reagiert das System auf Änderungen des Phasenwinkels so empfindlich, daß kaum mit einer größeren Abweichung als $\pm 0.5^\circ$ zu rechnen ist.

Es ergibt sich daraus ein möglicher Gesamtfehler im Phasenwinkel von $\delta\psi = \pm 0.75^\circ$.

In den Abb. 42 und 43 ist die Abhängigkeit der Fehler in Wärmeleitfähigkeit und Wärmeübergangszahl von den Phasenabweichungen dargestellt.

Daraus ergeben sich folgende Werte für Versuchsreihe B5:

	B5/10	B5/15	B5/25	B5/30	B5/40
$\epsilon_{\lambda\psi}$	$\pm 4.5 \%$	$\pm 5.8 \%$	$\pm 7.5 \%$	$\pm 9.8 \%$	$\pm 13.4 \%$
$\epsilon_{\alpha\psi}$	$\pm 7.0 \%$	$\pm 7.0 \%$	$\approx \pm 28.0 \%$	$\approx \pm 28.0 \%$	$\approx \pm 28.0 \%$

5.6.3 Gesamtfehler

Da alle vorstehend ermittelten Fehler voneinander unabhängig sind, ist es zulässig, den mittleren Gesamtfehler durch quadratische Mittelung zu bilden:

$$\epsilon_{\lambda} = \sqrt{\epsilon_{\lambda \text{ fix}}^2 + \epsilon_{\lambda A}^2 + \epsilon_{\lambda \psi}^2} \quad (93)$$

$$\epsilon_{\alpha} = \sqrt{\epsilon_{\alpha \text{ fix}}^2 + \epsilon_{\alpha A}^2 + \epsilon_{\alpha \psi}^2} \quad (94)$$

Dabei ergeben sich die folgenden Gesamtfehler für die Versuchsreihe B5 (siehe auch Abb. 44).

	B5/10	B5/15	B5/25	B5/30	B5/40
ϵ_{λ}	$\pm 13.9 \%$	$\pm 15.6 \%$	$\pm 22.3 \%$	$\pm 37.8 \%$	$> \pm 50 \%$
ϵ_{α}	$\pm 9.5 \%$	$\pm 8.8 \%$	$\pm 47.8 \%$	$> \pm 50 \%$	$\gg \pm 50 \%$

Versieht man die zu den einzelnen Messungen der Versuchsreihe B5 gehörenden Werte für Wärmeleitfähigkeit und Wärmeübergangszahl mit diesen Fehlergrenzen und trägt man sie über der Periodendauer auf (s. Abb. 45), so

erkennt man, daß der Mittelwert aus den Einzelmessungen innerhalb der Fehlergrenzen liegt. Eine Ausnahme bildet der Wert für die Wärmeübergangszahl bei einer Periodendauer von 15 Sekunden. Wie aus den Abbn. 28 und 29 jedoch ersichtlich ist, handelt es sich hier um eine eindeutige Fehlmessung.

5.7 Beurteilung der experimentellen Ergebnisse

Die Beurteilung der experimentell gewonnenen Ergebnisse hat sich an der Zielsetzung zu orientieren. Diese beinhaltete (s. Kap. 5.1) einerseits den Nachweis für die Richtigkeit des zugrunde gelegten mathematischen Modells, zum anderen sollten Erfahrungen bezüglich der Instrumentierung gesammelt werden.

5.7.1 Experimente an nackten Heizstäben

Für die Interpretation der Versuchsergebnisse an nackten, d.h. nicht mit einem Hüllrohr versehenen Heizstäben wurde das Modell 4 vorgeschlagen, welches durch die Berücksichtigung der Schwankungen in der äußeren Wärmeübergangszahl gekennzeichnet war.

Wie die Abbildungen 20 ./ 29 beweisen, können die Meßergebnisse trotz ihrer relativ großen Streuung recht gut durch das Modell 4 dargestellt werden. Die diesbezügliche Übereinstimmung ist in jedem Fall weitaus besser als die mit dem vereinfachten Modell 3. Die graphisch dargestellten Ergebnisse lassen neben einigen Mißerfolgen bei dem Versuch, die Auswertung unter Zugrundelegung des vereinfachten Modells durchzuführen, sogar die Schlußfolgerung zu, daß eine Vernachlässigung der zeitlichen Schwankungen der äußeren Wärmeübergangszahl eine Auswertung der gewonnenen Meßergebnisse unmöglich macht.

Die Korrektheit des Modells 4 wird bewiesen durch die Ergebnisse für die Werte der Wärmeleitfähigkeit und der Wärmeübergangszahl. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Wärmeleitfähigkeit des Heizstabmaterials bis zu einer Temperatur von ca. 1000°C nahezu konstant ist, können die

Ergebnisse aus den Versuchsserien A und B ohne Rücksicht auf das Temperaturniveau mit nach anderen Methoden gewonnenen Ergebnissen verglichen werden. Dabei zeigt sich eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit den Messungen, welche am gleichen Material bei etwa 100°C nach dem konventionellen Axialfluß-Verfahren im Institut für Material- und Festkörperforschung (IMF), Karlsruhe, durchgeführt wurden. Die hiernach ermittelten Werte liegen innerhalb der Streugrenzen, welche für die nach dem Balanced Oscillator Verfahren durchgeführten Messungen festgestellt wurden. Die Angaben der Lieferfirma des Heizstabmaterials liegen hingegen um ca. 100 % höher.

Bezüglich der Wärmeübergangszahl ist ebenfalls, von wenigen Ausnahmen abgesehen, eine gute Übereinstimmung zwischen den Meßwerten und den rechnerisch ermittelten Werten festzustellen, wenn man die Streuung der Meßwerte und die Genauigkeit der rechnerischen Ermittlung berücksichtigt.

5.7.2 Experimente an umhüllten Heizstäben

Für die Interpretation der Versuchsergebnisse an umhüllten Heizstäben wurde das Modell 2 vorgeschlagen, welches die Zeitabhängigkeit der äußeren Wärmeübergangszahl und die Wärmekapazität des Hüllrohres berücksichtigt. Die Experimente wurden mit Heizstäben des gleichen Materials und der gleichen Geometrie wie die Versuche an nackten Heizstäben durchgeführt, um den Einfluß des Hüllrohres und des Gasspalt zwischen Heizstab und Hüllrohr unmittelbar erkennen zu können.

Es zeigte sich, daß zur Erzielung annähernd gleicher Werte für die Übertragungsfunktion bedeutend längere Periodendauern angewandt werden mußten als bei den Versuchen an nicht umhüllten Heizstäben. Unglücklicherweise erwies sich die Messung der Heizleistung als unzureichend. Oberhalb einer Periodendauer von 50 Sekunden wurde eine mit steigender Periodendauer wachsende Phasenverschiebung zwischen dem Leistungs-Steuersignal und der auf dem 3-Kanal-Schreiber registrierten Heizleistung beobachtet, welche sich mit steigendem Leistungsniveau verringerte. Da beim eigentlichen

Meßvorgang sämtliche Kanäle des Schreibers besetzt waren, konnte dieser Effekt nicht unmittelbar mit erfaßt werden. Durch eine nachträgliche Eichmessung unter gleichen Leistungsbedingungen konnte zwar eine Korrektur für dieses Signal ermittelt werden, jedoch wurde dadurch eine gesamte Phasenungenauigkeit von $2,5^{\circ}$./ 3° hervorgerufen. Ein Phasenfehler von dieser Größenordnung hat aber in dem bei den Versuchsreihen C und D überstrichenen Periodenbereich eine sehr große Bestimmungsungenauigkeit für die Wärmeleitfähigkeit zur Folge. Weniger gravierend sind die Auswirkungen dieses Fehlers auf die Genauigkeit der Wärmedurchgangszahl des Spaltes zwischen Heizstab und Hüllrohr.

Aufgrund der notwendigerweise großen Korrektur bei niedrigem Leistungsniveau machen sich die diesbezüglichen Fehler in den Versuchsreihen C6 und D7 besonders stark bemerkbar, für welche eine Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit aufgrund der Meßergebnisse nicht sinnvoll war bzw. zu ungenügenden Ergebnissen führte. Lediglich in der Reihe D9 konnte eine befriedigende Übereinstimmung zwischen den einzelnen Messungen sowie mit den Ergebnissen der Versuche der Reihen B4 und B5 an nackten Heizstäben gefunden werden. Eine Leistungserhöhung innerhalb der Versuchsreihe C war wegen konstruktiver Mängel nicht möglich.

Für die Wärmedurchgangszahl des Spaltes zwischen Heizstab und Hüllrohr wurden, wie aus den Tabellen 4 und 5 ersichtlich ist, recht gut übereinstimmende Werte gefunden, welche ausnahmslos höher liegen als die angegebenen Vergleichswerte. Diese Differenz erklärt sich aus der Tatsache, daß für die Vergleichswerte lediglich die Wärmeleitung im Spalt zugrunde gelegt wurde, während in Wirklichkeit aufgrund der merklichen Temperaturdifferenzen zwischen Heizstaboberfläche und Hüllrohr mit einem konvektiven Anteil zum Wärmetransport gerechnet werden muß. Einen weiteren, wenn auch relativ geringen Beitrag liefert ein Spüleffekt (= Zwangskonvektion), welcher durch die Druckdifferenz über die Heizstablänge hervorgerufen wird, da der Spalt zwischen Heizstab und Hüllrohr gegenüber dem Kühlmittleringspalt nicht völlig abgedichtet werden konnte.

Trotz der beschriebenen Unzulänglichkeiten ist die Übereinstimmung der Meßwerte mit den rechnerisch nach dem Modell 2 ermittelten Werten als gut zu bezeichnen. Ebenso wie bei den Experimenten an nackten Heizstäben kann festgestellt werden, daß die vereinfachten Modellvorstellungen zur Interpretation der Versuchsergebnisse unzureichend sind.

5.7.3 Möglichkeiten zur Reduzierung der Fehler

Eventuelle Unzulänglichkeiten in der Instrumentierung äußern sich in erster Linie in der Streuung der Meßergebnisse. Aufgrund der durchgeführten Fehlerbetrachtung ist diesbezüglich festzustellen, daß die bei den Experimenten ermittelte Streuung der Meßwerte in der Größenordnung der analytisch ermittelten möglichen Fehler liegt. Für Versuche im Bereich längerer Periodendauern scheint die Fehleranalyse allzu pessimistische Werte zu liefern.

Diese Tatsache rechtfertigt die Folgerung, daß durch Beeinflussung der aus der Fehleranalyse ersichtlichen hauptsächlichsten Fehlerquellen die Streuung der Meßwerte vermindert und damit ihre Genauigkeit gesteigert werden kann.

Zu diesem Zwecke werden folgende Maßnahmen als sinnvoll erachtet:

- a) Dem außerordentlich starken Anstieg des Gesamtfehlers im Bereich langer Periodendauern, welcher auf die fortwährend geringer werdende Auflösung des Parameternetzes zurückzuführen ist, läßt sich nur dadurch begegnen, daß man diese Bereiche bei den Experimenten meidet.

Den größten Beitrag zum Gesamtfehler liefert der Amplituden-Meßfehler. Dieser setzt sich aus einem konstanten und einem perioden-abhängigen Teil zusammen. Der konstante Anteil ist bestimmt durch die Meßgenauigkeiten von Leistung und Kühlmitteldurchsatz. Eine Steigerung dieser Genauigkeiten über die angenommenen Werte hinaus erscheint kaum möglich.

Einen Ansatzpunkt bieten hier nur die periodenabhängigen Fehler, welche allerdings eine Tendenz aufweisen, die der Maßnahme nach a) entgegenwirken.

- b) Im Hinblick auf eine größtmögliche Reduzierung des gesamten Amplituden-Meßfehlers wäre es zweckmäßig, den Fehler ξ_K , welcher infolge der notwendigen Amplitudenkorrektur eingeführt wird, völlig auszuschalten. Dies ist jedoch nur durch Anwendung eines besseren, trägheitsfreieren Durchsatzmeßverfahrens möglich. Abhilfe würde hier bereits der Einsatz eines elektrischen Differenzdruckgebers anstelle der Barton-Zelle schaffen, dessen Zeitkonstante im Bereich weniger Millisekunden liegt gegenüber ca. 1 Sekunde bei dem hier angewandten Meßverfahren.
- c) Eine Beeinflussung des Kompensationsfehlers ξ_B ist in dreifacher Richtung möglich, wie aus Gl.(92) zu erkennen ist.
- c1) Einer wesentlichen Vergrößerung der Aufheizspanne steht dabei die dadurch gesteigerte Abweichung des Temperaturniveaus und der damit verbundene Fehler entgegen. Diese Maßnahme ist nur dann als sinnvoll zu bezeichnen, wenn das Temperaturniveau des Heizstabes mehr durch die im Heizstab umgesetzte Leistung als durch den Wärmeübergang bestimmt wird.
- c2) Eine Steigerung der Leistungsamplitude bringt die Gefahr von Nichtlinearitäten mit sich. Es ist jedoch wahrscheinlich, daß diese durch die ohnehin notwendige Durchführung der Fourier-Analyse bis zu einem gewissen Grade entschärft wird.
- c3) Eine Steigerung der Genauigkeit der Kühlmitteltemperaturmessung ist nur möglich durch eine geeignete Entstörung des Temperatursignals. Diese, sollte sie sich überhaupt durchführen lassen, könnte sich allerdings sehr stark auf die Genauigkeit der Ergebnisse auswirken, weil dadurch nicht nur der Amplituden-, sondern auch der Phasen-Meßfehler beträchtlich herabgesetzt werden könnte. Eine solche Maßnahme erfordert jedoch einen erheblichen experimentellen Aufwand, da die Entstörung des Signals keinesfalls mit der Empfindlichkeit erkaufte werden darf.

6. Folgerungen für in-pile-Experimente

Bei der Übertragung des Balanced Oscillator Experiments auf in-pile-Verhältnisse sind an die Stelle der Heizleistungsoszillationen Oszillationen im Neutronenfluß zu setzen. Als Bezugssignal dient dabei der Fluß in unmittelbarer Umgebung der Prüflingsoberfläche, der mit einer geeigneten Sonde gemessen werden muß. Wie die Fehleranalyse der vorstehend beschriebenen out-pile-Experimente ergeben hat, ist die Bestimmungsgenauigkeit für die freien Parameter sehr stark abhängig vom Amplitudenmeßfehler. Aus diesem Grunde sollte der Fehler in der Neutronenflußmessung den für die Heizleistungsmessung angenommenen Fehler von 1 % nicht wesentlich überschreiten.

Bei Anwendung eines Differenzdruckgebers mit Radiziereinrichtung zur Kühlmittel-Durchsatzmessung, welcher eine schnelle Signalübertragung garantiert, kann eine Korrektur der Durchsatzamplitude unterbleiben. Dadurch wird der Amplitudenmeßfehler nur mehr durch den Kompensationsfehler erhöht. Durch geeignete Wahl des Kühlmitteldurchsatzes kann die Aufheizspanne über die Prüflingslänge so eingerichtet werden, daß dieser Fehler in vernünftigen Grenzen bleibt.

In den Kompensationsfehler geht die Genauigkeit der Kühlmitteltemperaturmessung linear ein. Da weniger die Ansprechempfindlichkeit des Temperaturfühlers als vielmehr Störungen, welche sich dem Temperatursignal überlagern, diese Genauigkeit bestimmen, sollte für eine weitgehende Entstörung dieses Signals Sorge getragen werden. Dazu gehört auch eine möglichst genaue Einhaltung der Sinusform bei den Neutronenfluß-Oszillationen, welche mit der Sinusform im Kühlmitteldurchsatz korrespondieren muß. Prinzipiell sind zwar periodische Funktionen jeglicher Art verwendbar. Dies gilt streng genommen jedoch nur für das einfache Oszillator-Experiment. Durch die Kompensation mit einem zweiten periodischen Signal können Restamplituden in dem zu kompensierenden Temperatursignal verbleiben, wenn die Form der beiden periodischen Signale nicht übereinstimmt. Diese Reststörungen haben den Charakter von Oberwellen.

Die Einflüsse von Hüllrohr und Gasspalt zwischen Brennstoff und Hüllrohr dürften beim in-pile-Experiment relativ geringer sein als bei den durchgeführten out-pile-Messungen. Die Ursache liegt einerseits in dem höheren Verhältnis der Wärmekapazitäten $c \cdot \rho$ zwischen Brennstoff und Hüllrohr begründet (ca. 20 % bei einer mittleren Brennstofftemperatur von 1000°C), zum anderen sind die Spaltweiten bei nuklearen Brennstäben wesentlich geringer als diejenigen, mit denen im out-pile-Experiment aus Gründen einer ausreichenden elektrischen Isolation gearbeitet werden mußte.

Der Verlauf der Parameterkurven in der Gaußschen Zahlenebene zeigt eindeutig, daß die Bestimmungsgenauigkeit für Wärmeleitfähigkeit und Wärmedurchgangszahl umso besser ist je niedriger diese Werte sind. Das bedeutet, daß im in-pile-Experiment grundsätzlich höhere Genauigkeiten für die Wärmeleitfähigkeit zu erwarten sind als im out-pile-Experiment, da die absolute Höhe der Wärmeleitfähigkeit von UO_2 um einen Faktor 1.5 \cdot 2 niedriger liegt als die der Elektrokohle. Für die Wärmedurchgangszahl des Spaltes zwischen Brennstoff und Hüllrohr hingegen ist mit einer geringeren Genauigkeit zu rechnen.

Die im in-pile-Experiment zu erwartenden Ergebnisse für Wärmeleitfähigkeit und Wärmedurchgangszahl können u.U. infolge der Veränderungen, welchen der Brennstoff während des Betriebs unterworfen ist, verfälscht werden. Bezüglich der Wärmeleitfähigkeit spielen dabei im wesentlichen die geometrischen Veränderungen - Brennstoffschwellen, Bildung eines zentralen Hohlraums - sowie das Phänomen der mit den geometrischen Änderungen einhergehenden Brennstoffverdichtung eine Rolle. Dazu kommt die Anreicherung des Füllgases mit gasförmigen Spaltprodukten. Bezieht man die Meßergebnisse bei der Auswertung auf das gesamte Volumen innerhalb des Hüllrohres, so wird als Ergebnis die "technische" Wärmeleitfähigkeit gewonnen, welche die Effekte der geometrischen und Dichte-Änderungen unberücksichtigt läßt. Kann man aufgrund einer geeigneten Theorie über das Abbrandverhalten Aussagen über diese Veränderungen machen, so ist es möglich, durch Einbeziehung dieser Theorie in das Auswertungsverfahren die "reale" Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffes abzuleiten. Die eingangs

erwähnte "effektive" Wärmeleitfähigkeit hingegen ist nur im Zusammenhang mit der gemessenen Wärmedurchgangszahl des Spaltes sowie des Wärmewiderstandes des Hüllrohres zu bestimmen.

Aus dem gemessenen Wert für die Wärmedurchgangszahl des Spaltes zwischen Brennstoff und Hüllrohr ist ein unmittelbarer Rückschluß auf die Spaltweite möglich. Dies gilt im strengen Sinne jedoch nur, wenn das Maß der Verunreinigungen des Füllgases durch gasförmige Spaltprodukte und die Gesetzmäßigkeiten für Wärmeleitung in solchen Gasgemischen bekannt sind. Da konvektive Anteile am Wärmetransport in engen Spalten praktisch nicht auftreten, kann eine Verfälschung des Ergebnisses nur durch Auftreten von Wärmestrahlung zwischen Brennstoff und Hüllrohr eintreten. Eine sinnvolle Aussage über die Spaltweite auf dem Umweg über die Wärmeleitung wird deshalb am besten im Bereich geringer Prüflingsleistungen gewonnen. In diesem Bereich, der durch niedrige Temperaturen im Spalt und damit auch geringere Wärmeleitfähigkeiten des Füllgases gekennzeichnet ist, wird die Bestimmungsgenauigkeit für die Wärmedurchgangszahl ohnehin besser als im Bereich hoher Leistungen sein.

Das Ziel des Balanced Oscillator Experimentes in seiner in-pile-Anwendung ist letztlich gerichtet auf das Studium der Abhängigkeit von Wärmeleitfähigkeit und Wärmedurchgangszahl vom Brennstoff-Abbrand. Die zu erwartenden Änderungen bewegen sich, insbesondere bei der Wärmedurchgangszahl des Spaltes, in weiten Grenzen. Mit der absoluten Höhe dieser beiden Parameter ändert sich jedoch in ebenso weiten Grenzen ihre Bestimmungsgenauigkeit. Bei der Vorbereitung derartiger Experimente kann deshalb auf eine sorgfältige Optimierung der Versuchsbedingungen unter der Berücksichtigung der Gegebenheiten seitens des Reaktors und seitens des Kühlkreislaufes unter keinen Umständen verzichtet werden.

7. Zusammenfassung

Das Balanced Oscillator Verfahren ist eine instationäre Methode, mit deren Hilfe die Wärmeleitfähigkeit eines nuklearen Brennstabes und die Wärmedurchgangszahl des Spaltes zwischen Brennstoff und Hüllrohr während

des Betriebs im Reaktor experimentell bestimmt werden können. Die von L.Caldarola erarbeiteten theoretischen Grundlagen, die sich auf eine Anwendung dieses Verfahrens in einem schnellen natriumgekühlten Reaktor beziehen, wurden in zwei wesentlichen Punkten erweitert, welche bei einer Anwendung in einem thermischen Reaktor unter Heliumkühlung unzulässige Vereinfachungen bedeutet hätten. Eine weitere einschränkende Voraussetzung, welche extreme Forderungen an die Brennstabherstellung beinhaltete, konnte fallengelassen werden.

Zur Erhärtung der analytischen Überlegungen wurden out-pile-Versuche an elektrisch beheizten Kohleprüflingen durchgeführt. Die erstmals in dieser Art ausgeführten Experimente haben das zugrunde gelegte neue mathematische Modell in zufriedenstellender Weise bestätigt. Sie haben darüber hinaus den Beweis dafür erbracht, daß eine Beibehaltung der von Caldarola eingeführten Vereinfachungen und Beschränkungen unter den angewandten Versuchsbedingungen, wenn überhaupt, so zu fehlerhaften Resultaten geführt hätte.

Die Genauigkeit der erzielten Ergebnisse, welche in den out-pile-Experimenten durch eine teilweise unzulängliche Instrumentierung beeinträchtigt wurde, kann durchaus mit anderen in-pile-Verfahren konkurrieren, wenn gleich nicht übersehen werden darf, daß bei der hier angewandten Handsteuerungsmethode die Subjektivität des Experimentators die Genauigkeit der Messung mit beeinflußt. Durch Verbesserung der meßtechnischen Einrichtung und durch Optimierung der Versuchsbedingungen ist es jedoch möglich, die Genauigkeit so weit zu steigern, daß auch bei einer in-pile-Anwendung des Balanced Oscillator Verfahrens unter Bedingungen, welche bisher eine experimentelle Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffes und der Wärmedurchgangszahl des Spaltes zwischen Brennstoff und Hüllrohr vereitelten, neue und durchaus repräsentative Ergebnisse erzielt werden können.

Liste der verwendeten Symbole

Deutsche Symbole

A	Amplitude
C	Konstante
$C_i(s_c)$	Hüllrohr-Funktion
D	Außen-Durchmesser
D	Diffusionskonstante
F(s)	Übertragungsfunktion zwischen Kühlmitteldurchsatz und Leistung
$F_i(s_f)$	Brennstoff-Funktion
$G_i(s)$	kombinierte Funktion
I_ν	modifizierte Besselfunktion 1. Art ν Ordnung
J_ν	Besselfunktion 1. Art ν Ordnung
K_ν	modifizierte Besselfunktion 2. Art ν Ordnung
L	Heizlänge
L { }	Laplace-Transformation
N_ν	Besselfunktion 2. Art ν Ordnung
N(s)	Übertragungsfunktion zwischen Kühlmittel-Aufheizspanne und Leistung
P	Leistung
Q	Wärmestromdichte
R	Außenradius
S	Stableistung
T	Periodendauer
a	Temperaturleitzahl

a	Koeffizient
a	Exponent des Wärmeübergangsgesetzes
b	mod. Exponent des Wärmeübergangsgesetzes
b	Koeffizient
c	spez. Wärme
c	Umrechnungsfaktor
d	Innen-Durchmesser
j	imaginäre Einheit = $\sqrt{-1}$
q	Wärmequellendichte
r	radiale Koordinate
s	Laplace-Variable
t	Zeit-Koordinate
t_r	radiale Zeitkonstante
v	Geschwindigkeit
y	normierte radiale Koordinate
z	axiale Koordinate

Griechische Symbole

Δ	Abweichung vom stationären Zustand
θ	Kühlmittel-Temperatur
Σ_a	Absorptions-Wirkungsquerschnitt
Σ_f	Spaltungs-Wirkungsquerschnitt
Σ_s	Streu-Wirkungsquerschnitt
ϕ	thermischer Neutronenfluß
α	Wärmeübergangszahl, Wärmedurchgangszahl
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Koeffizienten
$\int x$	Genauigkeit der Größe x
ϵ	Fehler
ϑ	Prüflingstemperatur
k	Reziprokwert der thermischen Diffusionslänge
λ	Wärmeleitfähigkeit
μ	Kühlmittel-Massendurchsatz

ρ	Dichte
τ	normierte Zeit-Koordinate
τ_{μ}	Zeitkonstante der Durchsatzmessung
φ	Phasenwinkel
ω	Kreisfrequenz

Indices

a	Austritt
a	außen
c	Hüllrohr
e	Eintritt
f	Brennstoff
g	Spalt zwischen Brennstoff und Hüllrohr
i	innen
k	Kühlmittel
m	Mittelwert
s	Oberfläche
t	Totalwert
0	stationärer Zustand
0	Brennstoff innen
1	Brennstoff außen
2	Hüllrohr innen
3	Hüllrohr außen

Sonstige Symbole

*	Laplace-Transformation
∂	Differential-Operator

Hiervon abweichende Bedeutungen sowie weitere Symbole sind jeweils im Text erläutert.

Literatur

- [1] L.Caldarola: The Balanced Oscillator Experiment, Nukleonik 7, 3 (1965)
- [2] L.Caldarola, E.G.Schlechtendahl: Reactor Temperature Transients with Spatial Variables. First Part: Radial Analysis, KFK 223 (1964)
- [3] L.Caldarola, W.Niedermeyr, J.Woit: Reactor Temperature Transients with Spatial Variables. Second Part: Axial Analysis, KFK 618 (1967)
- [4] E.Bojarsky: Helium-Kreislaufanlage für Bestrahlungsversuche mit Brennstoffstäben im Reaktor FR2, Kerntechnik 10, 6 (1968)
- [5] A.M.Ross: The Dependence of the Thermal Conductivity of Uranium Dioxide on Density, Microstructure, Stoichiometry and Thermal-Neutron Irradiation, AECL-1096 (1960)
- [6] J.R. Mac Ewan, R.L.Stoute: Effect of Irradiation on the Thermal Conductivity of UO_{2-x} and UO_{2+x} at 60°C, Journ.of.Nucl.Mat. 21 (1967)
- [7] J.L.Daniel, J.Matolich, Jr. and H.W.Deem: Thermal Conductivity of UO_2 , HW-69945 (1962)
- [8] A.Garlick, D.Shaw: The Thermal Conductivity of Irradiated Uranium, Journ.of.Nucl.Mat. 16 (1965)
- [9] D.Smart: A Method Suitable for the Measurement of the Thermal Diffusivity of Irradiated Materials, Journ. of Nucl.Mat. 2, 4 (1960)
- [10] D.Jaffe: An Apparatus for the Measurement of the Thermal Conductivity of Unirradiated and (Remotely) of Irradiated Solids in the Range 100 to 200°C, WAPD-291 (1965)

- [11] J.Spies: Zur Messung der Wärmeleitfähigkeit von Festkörpern insbesondere von keramischen Kernbrennstoffen bei höchsten Temperaturen, KFK 415 (1966)
- [12] J.A.L.Robertson: High Temperature Properties of Ceramic Fuels: Their Significance and Measurement, AECL-1529 (1962)
- [13] J.A.L.Robertson, A.M.Ross, M.J.F.Notley, J.R. Mac Ewan: Temperature Distribution in UO_2 Fuel Elements, Journ. of Nucl. Mat. 7, 3 (1962)
- [14] W.E.Roake: Irradiation Alteration of Uranium Dioxide, HW-73072 (1962)
- [15] D.R.De Halas, G.R.Horn: Evolution of Uranium Dioxide Structure During Irradiation of Fuel Rods, Journ. of Nucl. Mat. 8, 2 (1963)
- [16] M.G.Balfour, H.M.Ferrari: Comparative Irradiation Performance of Pellet and Vibratory Compacted UO_2 , Trans. ANS 8, 1 (1966)
- [17] W.P.Chernock, A.J.Anthony, C.E.Burdg e.a.: Development and Testing of UO_2 Fuel Systems for Water Reactor Applications, CEND-2863-243 (1965)
- [18] J.M.Kerr: Thermal Simulation of In-Reactor Microstructures in ThO_2-UO_2 , Journ. of the Americ.Ceram.Soc. 50, 9 (1967)
- [19] E.Patrassi: Die Wärmeleitfähigkeit von Urandioxid bei sehr hohen Temperaturgradienten, KFK 561 (1967)
- [20] I.Cohen, B.Lustman, J.D.Eichenberg: Measurement of the Thermal Conductivity of Metal-Clad Uranium Oxide Rods During Irradiation, Journ. of Nucl.Mat. 3, 3 (1961)
- [21] R.C.Hawkings, J.A.L.Robertson: The Thermal Conductivity of UO_2 Under Irradiation: Some Early Results, AECL-1733 (1963)

- [22] J.-P.Stora, B.de Bernardy de Sigoyer, R.Delmas e.a.:
Conductibilité Thermique de l'Oxyde d'Uranium Fritte Dans Les
Conditions d'Utilisation en Pile, CEA-R 2586 (1964)
- [23] A.M.Ross, R.L.Stoute: Heat Transfer Coefficient Between UO_2
and Zircaloy-2. AECL-1552 (1962)
- [24] R.C.Daniel, I.Cohen: In-Pile Effective Thermal Conductivity of
Oxide Fuel Elements to High Fission Depletions, WAPD-246 (1964)
- [25] D.J.Clough, J.B.Sayers: The Measurement of the Thermal
Conductivity of UO_2 Under Irradiation in the Temperature Range
 $150^{\circ}C - 1600^{\circ}C$. AERE-R 4690 (1964)
- [26] J.A.Christensen, R.J.Allio: In-Pile Measurement of Uranium Dioxide
Fuel-Temperature Distribution, Trans. of ANS 8, 1 (1966)
- [27] C.Michelson, J.L.Scott, E.L.Long: An Evaluation of UO_2 Irradiated
at 1600 to $2400^{\circ}C$, Trans. of ANS 8,1 (1966)
- [28] E.Patrassi: Persönliche Mitteilung
- [29] M.F.Lyons, D.H.Coplin, H.Hausner, B.Weidenbaum, T.J.Pashos:
 UO_2 Powder and Pellet Thermal Conductivity During Irradiation.
GEAP-5100-1 (1966)
- [30] W.E.Baily, D.P.Hines, E.L.Zebroski: In-Pile Thermal Conductivity
of UO_2 and 20:80 (Pu:U) O_2 Specimens, Trans. of ANS, 8, 1 (1966)
- [31] S.Lippmann: Ein Verfahren zur Bestimmung der Temperaturleit-
fähigkeit von festen Körpern bei höheren Temperaturen,
Experimentelle Technik der Physik XV,2 (1967)
- [32] P.H.Klein: Thermal Conductivity, Thermal Diffusivity, and Specific
Heat of Solids from a Single Experiment, with Application to
 $Y_{1.98}Nd_{0.02}O_3$, Journ. of Appl.Phys. 38,4 (1967)

- [33] M.Bober: Entwicklung einer dynamischen Radialflußmethode zur Wärmeleitfähigkeitsmessung und ihre Anwendung auf Kernbrennstoffproben aus Urandioxyd, INR-4/68-18, Ext.Ber. (1968)
- [34] L.J.Wittenberg, G.R.Grove: Reactor Fuels and Materials Development, Plutonium Research: 1964 Annual Report, MLM-1244 (1964)
- [35] W.J.Parker, R.J.Jenkins, C.P.Butler, G.L.Abbott: Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity, Journ. of Appl.Phys. 32,9 (1961)
- [36] M.Cutler, G.T.Cheney: Heat Wave Methods for the Measurement of Thermal Diffusivity, Journ. of Appl.Phys. 34,7 (1963)
- [37] R.D.Cowan: Pulse Method of Measuring Thermal Diffusivity at High Temperatures, Journal of Appl. Phys. 34,4 (1963)
- [38] J.A.Cape, G.W.Lehman: Temperature and Finite Pulse-Time Effects in the Flash Method for Measuring Thermal Diffusivity, Journ. of Appl.Phys. 34,7 (1963)
- [39] R.Taylor: An Investigation of the Heat Pulse Method for Measuring Thermal Diffusivity, Brit. Journ. of Appl.Phys. 16 (1965)
- [40] J.B.Moser, O.L.Kruger: Heat Pulse Measurements on Uranium Compounds, Journ. of Nucl.Mat. 17 (1965)
- [41] J.B.Moser, O.L.Kruger: Thermal Conductivity and Heat Capacity of the Monocarbide, Monophosphide, and Monosulfide of Uranium. Journ. of Appl. Phys. 38,8 (1967)
- [42] B.H.Morrison, D.J.Klein, L.R.Cowder: High Temperature Thermal Diffusivity Measurements By the Flash Technique. LA-DC-7456
- [43] D.Shaw, L.A.Goldsmith: An Apparatus to Measure the Thermal Diffusivity of Irradiated Fuel Specimens at Temperatures up to 1200°C by the Flash Method. Journ. of Sci.Instr. 43 (1966)

- [44] C.Mustacchi, S.Giuliani: Development of Methods for the Determination of the High Temperature Thermal Diffusivity of UC, EUR 337.e (1963)
- [45] L.D.Montgomery: A New Technique for Experimental Investigation of High Temperature Thermal Diffusivity of Uranium Dioxide Under Transient Conditions, ANL-7116 (1965)
- [46] A.J.Angström: New Method of Determining the Thermal Conductibility of Bodies. Phil. Magazine XXV. (1863)
- [47] A.F.van Zee, C.L.Babcock: A Method for the Measurement of Thermal Diffusivity of Molten Glass. Journ. of the Americ.Ceram.Soc. 34,8 (1951)
- [48] P.H.Sidles, G.C.Danielson: Thermal Diffusivity of Metals at High Temperatures, Journ. of Appl.Phys. 25,1 (1954)
- [49] B.Abeles, G.D.Cody, D.S.Beers: Apparatus for the Measurement of the Thermal Diffusivity of Solids at High Temperatures. Journ. of Appl.Phys. 31,9 (1960)
- [50] R.D.Cowan: Proposed Method of Measuring Thermal Diffusivity at High Temperatures. Journ. of Appl.Phys. 32,7 (1961)
- [51] M.J.Wheeler: Thermal Diffusivity at Incandescent Temperatures by a Modulated Electron Beam Technique. Brit.Journ. of Appl.Phys. 16 (1965)
- [52] M.Van den Berg, H.E.Schmidt: Dispositif de Mesure de la Diffusivite a Haute Temperatures. EUR 2424.f (1965)
- [53] M.Serizawa, K.Inone, K.Taniguchi: UO₂ Thermal Diffusivity Measurements with a Modulated Electron Beam Technique. Journ. of Nucl.Sci.a.Tech.(Tokyo) 3 (1966)
- [54] G.Glanz: Methode zur Bestimmung der Temperaturleitfähigkeit von Kernbrennstoffproben während Bestrahlung im Kernreaktor. Rev.Roum.Phys. 13,10 (1967)

- [55] C.E.Burdg, I.R.Parette, R.F.Brockett, W.P.Chernock: Development and Testing of a Temperature Transient Method for Performing In-Pile Thermal Conductance Testing. CEND-3336-218 (-223, -229, -237, -241, -251, -260) (1964-66)
- [56] R.B.Perez, R.M.Carroll, O.Sisman, I.G.Morgan: In Pile Thermal Conductivity of Uranium Dioxide. ORNL-4076 (-4133, -4229) (1966-67)
- [57] G.Doetsch: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation. R.Oldenbourg, München, Wien, 1967
- [58] H.Gröber, S.Erk, U.Grigull: Grundgesetze der Wärmeübertragung, Springer-Verlag, Berlin/Göttigen/Heidelberg, 1961
- [59] E.Kamke: Differentialgleichungen I, Akademische Verlagsges. Geest u. Portig KG, Leipzig, 1961
- [60] Jahnke, Emde, Lösch: Tafeln höherer Funktionen. B.G.Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart, 1960
- [61] S.Glasstone, M.C.Edlund: Kernreaktortheorie. Deutsch von W.Glaser, H.Grümm, Springer-Verlag Wien, 1961
- [62] E.Schmidt: Thermodynamik, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1960
- [63] I.N.Bronstein, K.A.Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Zürich/Frankfurt a.M., 1966
- [64] H.Schlichting, E.Truckenbrodt: Aerodynamik des Flugzeuges, I.Band, Grundlagen der Strömungsmechanik. Springer-Verlag, Berlin/Göttigen/Heidelberg, 1959
- [65] Großes Handbuch der Mathematik. Buch und Zeit Verlagsges.m.b.H. Köln, 1967
- [66] G.Pressler: Regelungstechnik I, Grundelemente. BI-Hochschul-taschenbuch Nr. 63/63a, Mannheim, 1964

Anhang 1

Lösung der homogenen instationären Wärmeleitungsgleichung mittels
Laplace-Transformation

Die Fourier'sche Wärmeleitungsgleichung lautet in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{c \varrho}{\lambda} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 \quad (\text{A1})$$

ϑ = Temperatur	c = spez. Wärme
r = Radius	ϱ = Dichte
t = Zeit	λ = Wärmeleitfähigkeit

Die Stoffwerte c , ϱ und λ werden als konstant vorausgesetzt und sind deshalb stets als Mittelwerte über Ort und Zeit zu verstehen, für die Gl. (A1) gilt. Die Temperatur ϑ wird als zeitabhängig betrachtet und durch einen stationären Wert ϑ_0 und einen davon abweichenden Wert $\Delta \vartheta$ beschrieben:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Delta \vartheta \quad (\text{A2})$$

Zur Vereinfachung werden dimensionslose Koordinaten eingeführt. Der Radius r wird auf den äußeren Brennstoffradius R_f bezogen:

$$y = \frac{r}{R_f} \quad (\text{A3})$$

die Zeit t auf die radiale Zeitkonstante t_r :

$$\tau = \frac{t}{t_r} \quad (\text{A4})$$

welche gegeben ist durch

$$t_r = \frac{R_f^2 \cdot c \cdot \varrho}{\lambda} \quad (\text{A5})$$

Während für die Stoffwerte c , ϱ und λ jeweils die entsprechenden Werte der Zone einzusetzen sind, für welche die Differentialgleichung angesetzt

wurde, tritt der äußere Brennstoffradius R_f aus Gründen einer einheitlichen Normierung sowohl bei der Lösung der Brennstoffgleichung als auch bei der Lösung der Hüllrohrgleichung auf.

Mit den dimensionslosen Größen, definiert durch die Gln.(A3) bis (A5), vereinfacht sich die Differentialgleichung (11) zu:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{A6})$$

Ersetzt man den Momentanwert ϑ der Temperatur durch die stationäre Temperatur ϑ_0 und die zeitabhängige Abweichung $\Delta \vartheta$ nach Gl.(A2), und betrachtet man die Differentialgleichung (A6) für den rein stationären Fall als erfüllt, d.h.

$$\frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} \equiv 0 ; \quad \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \tau} \equiv 0 \quad (\text{A7})$$

so erhält man die Differentialgleichung für die Temperaturstörungen:

$$\frac{\partial^2 \Delta \vartheta}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Delta \vartheta}{\partial y} - \frac{\partial \Delta \vartheta}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{A8})$$

Diese partielle Differentialgleichung ist in der Zeit linear und kann somit nach [57] mittels Laplace-Transformation in eine gewöhnliche Differentialgleichung übergeführt werden. Bezeichnen wir die Laplace-transformierten Größen mit einem Stern,

$$\mathcal{L} \{ \Delta \vartheta \} = \Delta \vartheta^* \quad (\text{A9})$$

und berücksichtigen wir die Regel

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial \Delta \vartheta}{\partial \tau} \right\} = s \cdot \mathcal{L} \{ \Delta \vartheta \} - \Delta \vartheta_0 \quad (\text{A10})$$

wobei als Anfangsbedingung

$$\Delta \vartheta_0 = \Delta \vartheta(\tau = 0) = \Delta \vartheta(t = 0) \equiv 0 \quad (\text{A11})$$

gelten soll, so erhalten wir als neue Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Delta \vartheta^*}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Delta \vartheta^*}{\partial y} - s \cdot \Delta \vartheta^* = 0 \quad (\text{A12})$$

s ist die neue, komplexe Laplace-Variable, welche aus der dimensionslosen Zeit τ hervorgegangen ist.

Bei Gl.(A 12) handelt es sich um eine Besselsche Differentialgleichung, welche nach Kamke [59] die folgende Lösung hat:

$$\Delta \vartheta^* = C_1 J_0(\sqrt{-s} \cdot y) + C_2 \cdot N_0(\sqrt{-s} y) \quad (\text{A13})$$

J_0 und N_0 sind die Besselfunktionen 1. bzw. 2. Art, 0.Ordnung. Die Konstanten C_1 und C_2 , welche zur vollständigen Lösung erforderlich sind, sind aus Randbedingungen zu bestimmen. Sie hängen, ebenso wie eine eventuelle partikuläre Lösung für eine inhomogene Differentialgleichung, vom Wärmequellprofil, d.h. vom inhomogenen Teil der Gleichung selbst ab.

Anhang 2

Gesamtlösung der Wärmeleitungsgleichung für konstante Wärmequellverteilung im Brennstoff: $q_f = \text{const.}$

Die Ausgangsdifferentialgleichung für den Brennstoff, Gl.(12),

$$\frac{\partial^2 v_f^{q_f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_f^{q_f}}{\partial r} - \frac{c_f \cdot \rho_f}{\lambda_f} \cdot \frac{\partial v_f^{q_f}}{\partial t} = - \frac{q_f}{\lambda_f} \quad (\text{A14})$$

wird durch die in Kap. 4.2.1 beschriebenen Maßnahmen auf die Form gebracht

$$\frac{\partial^2 \Delta v_f^{q_f^*}}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Delta v_f^{q_f^*}}{\partial y} - s_f \cdot \Delta v_f^{q_f^*} = - \frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \Delta q_f^* \quad (\text{A15})$$

Zu der in Anhang 1 abgeleiteten Lösung der homogenen Gleichung tritt die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung additiv hinzu. Diese lautet:

$$\Delta v_f^{q_f^*} = \frac{R_f^2}{\lambda_f \cdot s_f} \cdot \Delta q_f^* \quad (\text{A16})$$

Diese Lösung folgt direkt aus der Differentialgleichung, Gl.(A15), wenn man berücksichtigt, daß die Differentialquotienten bezüglich des normierten Radius y für diesen Ausdruck verschwinden.

In der sich nun ergebenden Gesamtlösung

$$\Delta v_f^{q_f^*} = \frac{R_f^2}{\lambda_f \cdot s_f} \cdot \Delta q_f^* + C_1 J_0(\sqrt{-s_f} y) + C_2 N_0(\sqrt{-s_f} y) \quad (\text{A17})$$

sind noch die Konstanten C_1 und C_2 mit Hilfe geeigneter Randbedingungen zu bestimmen. Als erstes wird die Achsensymmetrie des Temperaturprofils gefordert:

$$\left(\frac{\partial v_f^{q_f}}{\partial r} \right)_{r=r_0} = 0 \quad (\text{A18})$$

Ersetzt man auch hier den Momentanwert ϑ_f der Temperatur durch den stationären Wert ϑ_{fo} und die ihm überlagerte Störung $\Delta\vartheta_f$

$$\vartheta_f = \vartheta_{fo} + \Delta\vartheta_f \quad (\text{A19})$$

und setzt man die Randbedingung im stationären Fall als erfüllt voraus, so ergibt sich aus Gl.(A18) nach Durchführung der Laplace-Transformation

$$\left(\frac{\partial \Delta\vartheta_f^*}{\partial y} \right)_{y=y_0} = 0 \quad (\text{A20})$$

Als zweite Randbedingung wird die des äußeren Wärmetransfers herangezogen: der Temperaturgradient an der Brennstoff- bzw. Heizstab-Oberfläche ist bestimmt durch den Wärmetransfer und die Wärmeleitfähigkeit des Heizmaterials:

$$-\lambda_f \cdot \left(\frac{\partial \vartheta_f}{\partial r} \right)_{r=R_f} = \alpha (\vartheta_{fs} - \vartheta) \quad (\text{A21})$$

- ϑ_{fs} = Heizer-Oberflächentemperatur
- ϑ = Außentemperatur
- α = Wärmetransferkoeffizient

Im allgemeinsten Fall können außer den Heizertemperaturen ϑ_f und ϑ_{fs} auch die Außentemperatur ϑ und die Wärmetransferkoeffizient α störungsbehaftet sein:

$$\vartheta_f = \vartheta_{fo} + \Delta\vartheta_f \quad (\text{A22})$$

$$\vartheta_{fs} = \vartheta_{fso} + \Delta\vartheta_{fs} \quad (\text{A23})$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Delta\vartheta \quad (\text{A24})$$

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \quad (\text{A25})$$

Bezüglich der Wärmeübergangszahl gilt dies speziell für den Fall eines nackten, d.h. nicht mit einem Hüllrohr versehenen Heizstabes, bei dem der Wärmeübergang allein durch den ebenfalls störungsbehafteten Kühlmitteldurchsatz bestimmt ist. Für den Fall eines umhüllten Prüflings gilt Gl.(A21) für den Wärmeübergang im Spalt zwischen Brennstoff und Hülle, der im allgemeinen als konstant über die Zeit der Messung angesehen werden kann. In den folgenden Betrachtungen werden die Störungen im Wärmeübergang mitverfolgt, der Fall eines konstanten α läßt sich leicht aus der allgemeinen Lösung separieren.

Löst man Gl.(A21) nach dem Temperaturgradienten auf und führt man die geometrische Normierung durch, so erhält man mit den Gln.(A22) bis (A25):

$$\left(\frac{\partial v_{fo}^{q_1}}{\partial y}\right)_{y=1} + \left(\frac{\partial \Delta v_f^{q_1}}{\partial y}\right)_{y=1} = -\frac{R_f}{\lambda_f} [\alpha_0 + \Delta\alpha] \cdot \left[(v_{fso}^{q_1} + \Delta v_{fs}^{q_1}) - (v_o^{q_1} + \Delta v) \right] \quad (A26)$$

Betrachtet man die Randbedingung als im stationären Fall erfüllt und vernachlässigt man Störungen höherer Ordnung, so ergibt sich nach Durchführung der Laplace-Transformation

$$\left(\frac{\partial \Delta v_f^{q_1^*}}{\partial y}\right)_{y=1} = -\frac{R_f \alpha_0}{\lambda_f} \left[(\Delta v_{fs}^{q_1^*} - \Delta v^{q_1^*}) + \frac{\Delta \alpha^*}{\alpha_0} (v_{fso}^{q_1} - v_o^{q_1}) \right] \quad (A27)$$

Die damit definierten Randbedingungen Gln.(A20) und (A27) müssen die 1. Ableitung der Lösungsgleichung, Gl.(A17), erfüllen:

$$\frac{\partial \Delta v_f^{q_1^*}}{\partial y} = -C_1 \sqrt{-s_f} \cdot J_1(\sqrt{-s_f} y) - C_2 \sqrt{-s_f} \cdot N_1(\sqrt{-s_f} y) \quad (A28)$$

J_1 und N_1 sind die Besselfunktionen 1. und 2. Art, 1. Ordnung.

Bei Anwendung der Symmetriebedingung Gl.(A20) ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Konstanten C_1 und C_2 zu:

$$C_2 = -C_1 \cdot \frac{J_1(\sqrt{-s_f} y_0)}{N_1(\sqrt{-s_f} y_0)} \quad (A29)$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehung gewinnt man aus der Wärmeübergangsbedingung die Konstante C_1 :

$$C_1 = \frac{\frac{R_f \alpha_o}{\lambda_f} \left[(\Delta v_{fs}^{q*} - \Delta v^{q*}) + \frac{\Delta \alpha^*}{\alpha_o} (v_{fso}^{q*} - v_o^{q*}) \right]}{\sqrt{-s_f} \left[J_1(\sqrt{-s_f}) - N_1(\sqrt{-s_f}) \cdot \frac{J_1(\sqrt{-s_f} y_o)}{N_1(\sqrt{-s_f} y_o)} \right]} \quad (A30)$$

Damit wird die Gesamtlösung

$$\Delta v_{fs}^{q*}(s_f, y) = \frac{R_f^2}{\lambda_f s_f} \cdot \Delta q_f^* + \frac{R_f \alpha_o}{\lambda_f} \cdot \left[(\Delta v_{fs}^{q*} - \Delta v^{q*}) + \frac{\Delta \alpha^*}{\alpha_o} (v_{fso}^{q*} - v_o^{q*}) \right] \cdot f_t(s_f, y, y_o) \quad (A31)$$

mit der als "Zeitfunktion" bezeichneten Abkürzung

$$f_t(s_f, y, y_o) = \frac{1}{\sqrt{-s_f}} \cdot \frac{J_0(\sqrt{-s_f} y) - N_0(\sqrt{-s_f} y) \cdot \frac{J_1(\sqrt{-s_f} y_o)}{N_1(\sqrt{-s_f} y_o)}}{J_1(\sqrt{-s_f}) - N_1(\sqrt{-s_f}) \cdot \frac{J_1(\sqrt{-s_f} y_o)}{N_1(\sqrt{-s_f} y_o)}} \quad (A32)$$

Setzt man in Gl.(A31) den normierten Radius $y = 1$, so erhält man die Störungen Δv_{fs}^{q*} der Brennstoff- bzw. Heizstaboberflächentemperatur. Durch Zusammenfassen der zu dieser Störung gehörenden Glieder kann diese spezialisierte Lösung auf die Form gebracht werden

$$\Delta v_{fs}^{q*} = F_1(s_f) \cdot \Delta q_f^* + F_2(s_f) \cdot \Delta v^{q*} + F_3(s_f) \cdot \Delta \alpha^* \quad (A33)$$

wobei die Funktionen $F_1(s_f)$, $F_2(s_f)$ und $F_3(s_f)$ durch folgende Ausdrücke gegeben sind:

$$F_1(s_f) = \frac{\frac{R_f^2}{\lambda_f s_f}}{1 - \frac{R_f \alpha_o}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_o)} \quad (A34)$$

$$F_2(s_f) = - \frac{\frac{R_f \alpha_0}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_0)}{1 - \frac{R_f \alpha_0}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_0)} \quad (A35)$$

$$F_3(s_f) = \frac{\frac{R_f (\vartheta_{fso} - \vartheta_0)}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_0)}{1 - \frac{R_f \alpha_0}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_0)} \quad (A36)$$

Anhang 3

Partikuläre und Gesamtlösung der Wärmeleitungsgleichung für Polynom-Ansatz für die Wärmequellverteilung

A.3.1 Partikuläre Lösung

Für die inhomogene Bessel'sche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Delta \vartheta_f^*}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Delta \vartheta_f^*}{\partial y} - s_f \cdot \Delta \vartheta_f^* = - \frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \Delta q_m^* \cdot f(y) \quad (A37)$$

ist eine partikuläre Lösung zu finden für den Fall, daß $f(y)$ ein beliebiges Polynom ist:

$$f(y) = \sum_{n=0}^N \alpha_n y^n \quad (A38)$$

Als Ausgangspunkt für die Auffindung des partikulären Integrals der obigen Differentialgleichung dient der von Kamke [59] angegebene Ansatz:

$$\Delta \vartheta_f^* = \frac{\pi}{2} \left\{ N_\nu(y) \cdot \int y \cdot J_\nu(y) \cdot f(y) dy - J_\nu(y) \cdot \int y N_\nu(y) \cdot f(y) dy \right\} \quad (A39)$$

Für die weitere mathematische Behandlung erweist es sich im Hinblick auf die Entwicklung einer geeigneten Rekursionsformel für die in diesem Ansatz enthaltenen Integrale als zweckmäßig, das Polynom $f(y)$ in ein Polynom $f_g(y)$ mit geradzahligen Potenzen von y und ein zweites Polynom $f_u(y)$ mit ungeradzahligen Potenzen von y aufzuspalten, mit dem Ziel, die für beide Teilpolynome gefundenen Lösungen additiv zu überlagern.

$$f_g(y) = \sum_{n=0}^N \alpha_{2n} y^{2n} \quad (\text{A40})$$

$$f_u(y) = \sum_{n=0}^N \alpha_{2n+1} y^{2n+1} \quad (\text{A41})$$

Beide Polynome führen unter Verwendung der Besselfunktionen 0. Ordnung ($\nu = 0$) in Gl.(A39) für die Behandlung von $f_g(y)$, sowie der Besselfunktionen 1. Ordnung ($\nu = 1$) für die Behandlung von $f_u(y)$ zu übersichtlichen Rekursionsformeln, deren weitere Bearbeitung unter Berücksichtigung der in [60] angegebenen Funktionalgleichungen die folgenden Lösungen ergeben:

für das geradzahlige Polynom:

$$\Delta_{fg}^{(y)} \approx \frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \Delta_m^{(q)} \cdot \sum_{n=0}^N a_{2n} y^{2n} \quad (\text{A42})$$

mit

$$a_{2n} = \sum_{i=n}^N \frac{\alpha_{2i}}{s_f} \cdot \beta_{i-n,i} \quad (\text{A43})$$

$$\beta_{k,j} = \frac{1}{s_f^k} \cdot \prod_{m=1}^k 4(j-m+1)^2 ; \quad \beta_{0,j} = 1 \quad (\text{A44})$$

für das ungeradzahlige Polynom:

$$\Delta_{fn}^{(y)} \approx \frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \Delta_m^{(q)} \cdot \sum_{n=0}^N b_{2n+1} y^{2n+1} \quad (\text{A45})$$

mit

$$b_{2n+1} = \sum_{i=n}^N \frac{\alpha_{2i+1}}{s_f} \cdot \gamma_{i-n,i} \quad (\text{A46})$$

$$\mathcal{K}_{k,j} = \frac{1}{s_f^k} \cdot \prod_{m=1}^k \left\{ 4 j(j+1) - 8 \left[(m-1)(j-m) + \left(\sum_{i=1}^m i \right) - 1 \right] \right\} \quad (\text{A47})$$

Beweisführung für das geradzahlige Polynom:

Die spezielle Lösung für das geradzahlige Polynom, Gl.(A42), soll in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\Delta v_{fg}^{(0)*} = C \cdot \sum_{n=0}^N a_{2n} y^{2n} \quad (\text{A48})$$

Soll diese Lösung richtig sein, so muß sie die Differentialgleichung, Gl.(A37), erfüllen. Zur Probe werden die beiden ersten Ableitungen benötigt:

$$\frac{\partial \Delta v_{fg}^{(0)*}}{\partial y} = C \sum_{n=0}^N 2n \cdot a_{2n} y^{2n-1} \quad (\text{A49})$$

$$\frac{\partial^2 \Delta v_{fg}^{(0)*}}{\partial y^2} = C \sum_{n=0}^N 2n (2n-1) \cdot a_{2n} \cdot y^{2n-2} \quad (\text{A50})$$

Setzen wir nun die Ausdrücke (A48), (A49) und (A50) in (A37) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & C \sum_{n=0}^N 2n (2n-1) \cdot a_{2n} y^{2n-2} + \frac{1}{y} \cdot C \sum_{n=0}^N 2n a_{2n} y^{2n-1} - \\ & - s_f \cdot C \sum_{n=0}^N a_{2n} y^{2n} = - C \sum_{n=0}^N \alpha_{2n} y^{2n} \end{aligned} \quad (\text{A51})$$

Nach Division durch die Konstante C können die beiden ersten Summen zusammengefaßt werden, wenn man den Faktor $\frac{1}{y}$ der zweiten Summe unter

das Summenzeichen bringt:

$$\sum_{n=0}^N (2n)^2 a_{2n} y^{2n-2} - s_f \sum_{n=0}^N a_{2n} y^{2n} = - \sum_{n=0}^N \alpha_{2n} y^{2n} \quad (A52)$$

Ausgeschrieben lautet diese Gleichung

$$\begin{aligned} & 4 a_2 + 16 a_4 y^2 + 36 a_6 y^4 + 64 a_8 y^6 + \dots \\ & - s_f [a_0 + a_2 y^2 + a_4 y^4 + a_6 y^6 + \dots] = \\ & = - \alpha_0 - \alpha_2 y^2 - \alpha_4 y^4 - \alpha_6 y^6 - \dots \end{aligned} \quad (A53)$$

Diese Beziehung kann dann als erfüllt gelten, wenn die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von y auf der rechten und linken Seite übereinstimmen, d.h., wenn gilt:

$$[2(n+1)]^2 a_{2(n+1)} - s_f \cdot a_{2n} = - \alpha_{2n} \quad (A54)$$

Setzen wir für die Koeffizienten a die Definitionsgleichung (A43) ein, so wird aus Gl.(A54):

$$[2(n+1)]^2 \sum_{i=n+1}^N \frac{\alpha_{2i}}{s_f} \cdot \beta_{i-n-1,i} = \sum_{i=n}^N \alpha_{2i} \beta_{i-n,i} = - \alpha_{2n} \quad (A55)$$

Zur besseren Übersicht der weiteren Beweisführung spalten wir zunächst den Koeffizienten $\beta_{k,j}$, Gl.(A44) auf:

$$\beta_{k,j} = \frac{1}{s_f^k} \cdot \delta_{k,j} \quad (A56)$$

Dies wird in Gl.(A55) eingeführt:

$$[2(n+1)]^2 \sum_{i=n+1}^N \frac{\alpha_{2i} \cdot \delta_{i-n-1,i}}{s_f^{i-n}} - \sum_{i=n}^N \frac{\alpha_{2i} \cdot \delta_{i-n,i}}{s_f^{i-n}} = - \alpha_{2n} \quad (A57)$$

Nun spalten wir von der zweiten Summe das erste Glied ab, so daß diese ebenfalls mit dem (n+1)-ten Glied beginnt:

$$\left[2(n+1) \right]^2 \cdot \sum_{i=n+1}^N \frac{\alpha_{2i} \cdot \delta_{i-n-1,i}}{s_f^{i-n}} - \sum_{i=n+1}^N \frac{\alpha_{2i} \cdot \delta_{i-n,i}}{s_f^{i-n}} - \frac{\alpha_{2n} \cdot \delta_{0,n}}{s_f^0} = -\alpha_{2n} \quad (\text{A58})$$

Da nach Definition Gl.(A44) $\delta_{0,n} = 1$ ist, ist bereits ein Teil der Gleichung erfüllt und es bleibt zu lösen:

$$\left[2(n+1) \right]^2 \cdot \sum_{i=n+1}^N \frac{\alpha_{2i} \cdot \delta_{i-n-1,i}}{s_f^{i-n}} - \sum_{i=n+1}^N \frac{\alpha_{2i} \cdot \delta_{i-n,i}}{s_f^{i-n}} = 0 \quad (\text{A59})$$

Diese beiden Summen können zusammengefaßt werden:

$$\sum_{i=n+1}^N \frac{\alpha_{2i}}{s_f^{i-n}} \left\{ \left[2(n+1) \right]^2 \cdot \delta_{i-n-1,i} - \delta_{i-n,i} \right\} = 0 \quad (\text{A60})$$

Da die Koeffizienten α_{2i} als von Null verschieden vorausgesetzt sind, ist Gl.(A60) dann erfüllt, wenn der Klammerausdruck identisch Null ist. Daraus folgt:

$$\frac{\delta_{i-n,i}}{\delta_{i-n-1,i}} = \left[2(n+1) \right]^2 \quad (\text{A61})$$

Setzen wir nun für die $\delta_{k,j}$, definiert durch Gl.(A56), die Produktbeziehungen, Gl.(A44) ein, so erhalten wir:

$$\frac{\prod_{m=1}^k 4(k+n-m+1)^2}{\prod_{m=1}^{k-1} 4(k+n-m+1)^2} = \left[2(n+1) \right]^2 \quad (\text{A62})$$

wenn wir setzen

$$k = i-n \quad \longleftrightarrow \quad i=k+n \quad (\text{A63})$$

Läßt man nun in den in Gl.(A62) enthaltenen Produktausdrücken in Zähler und Nenner m laufen von $m=1$ bis $m=k-1$, so kürzen sich die entsprechenden Faktoren heraus. Da das Produkt im Zähler um ein Glied länger ist, nämlich um das, bei welchem $m=k$ gesetzt ist, bleibt dieses Glied allein auf der linken Seite stehen und Gl.(A62) wird:

$$4(n+1)^2 = [2(n+1)]^2 \quad (A64)$$

Diese beiden Ausdrücke sind identisch, womit der Beweis für die Richtigkeit der Lösung erbracht ist.

Das ungeradzahlige Polynom:

Die Lösung für das ungeradzahlige Polynom lautete, entsprechend Gl.(A48)

$$\Delta^{\frac{1}{2}} v_{fu}^* = \left(\sum_{n=0}^N b_{2n+1} y^{2n+1} \right) \quad (A65)$$

Bilden wir hiervon die Ableitungen,

$$\frac{\partial \Delta^{\frac{1}{2}} v_{fu}^*}{\partial y} = \left(\sum_{n=0}^N (2n+1) \cdot b_{2n+1} \cdot y^{2n-1} \right) \quad (A66)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta^{\frac{1}{2}} v_{fu}^*}{\partial y^2} = \left(\sum_{n=0}^N (2n)(2n+1) \cdot b_{2n+1} y^{2n-1} \right) \quad (A67)$$

Soll die Lösung, Gl.(A65), richtig sein, so muß die Differentialgleichung, Gl.(A37) erfüllt sein. Wir erhalten entsprechend Gl.(A52):

$$\sum_{n=0}^N (2n+1)^2 b_{2n+1} y^{2n-1} - s_f \sum_{n=0}^N b_{2n+1} \cdot y^{2n+1} = - \sum_{n=0}^N \alpha_{2n+1} \cdot y^{2n+1} \quad (A68)$$

Führen wir für diese Gleichung den Koeffizientenvergleich entsprechend Gl.(A54) durch, so sehen wir, daß für $n=0$ auf der linken Seite ein Glied mit y^{-1} auftritt, für welches auf der rechten Seite kein Äquivalent vorhanden ist. Daraus würde folgen:

$$b_1 = 0 \quad (A69)$$

oder, mit der Definitionsgleichung für b_{2n+1} Gl.(A46)

$$\sum_{i=0}^N \frac{\alpha_{2i+1}}{s_f} \cdot \gamma_{i-n,i} = 0 \quad (A70)$$

Daraus ist zu folgern:

Die Lösung für das ungeradzahlige Polynom ist dann als richtig anzusehen, wenn Gl.(A70) erfüllt ist. Dies würde jedoch bedeuten, daß sämtliche α_{2i+1} identisch Null sein müssen, da die $\gamma_{k,j}$, abgesehen von den Potenzen von s_f , reine Zahlenfaktoren darstellen. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung. Es ist deshalb der Schluß zu ziehen, daß ein Polynom mit ungeradzahligen Potenzen von y für die Funktion $f(y)$ im inhomogenen Teil der zu lösenden instationären Wärmeleitungsgleichung nicht zu einer Lösung der Differentialgleichung führt.

Für die Praxis ist daraus die Folgerung zu ziehen, daß man versuchen muß, eine punktweise gegebene Wärmequellverteilung durch ein Polynom mit geradzahligen Exponenten zu approximieren.

A.3.2 Gesamtlösung

Die Gesamtlösung ergibt sich mit der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (s. Anhang 1) und der oben ermittelten speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung (A42) zu

$$\Delta \vartheta_f^* = \frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \Delta q_m^* \cdot \sum_{n=0}^N a_{2n} y^{2n} + C_1 \cdot J_0(\sqrt{-s_f} y) + C_2 \cdot N_0(\sqrt{-s_f} y) \quad (A71)$$

Zur Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 wird Gl.(A71) den gleichen Randbedingungen unterworfen, die im Falle örtlich konstanter Wärmequellverteilung benutzt wurden (s. Anhang 2).

Symmetriebedingung des Temperaturprofils:

$$\left(\frac{\partial \Delta \vartheta_f^*}{\partial y} \right)_{y=y_0} = 0 \quad (A72)$$

Wärmeübergangsbedingung

$$\left(\frac{\partial \Delta \vartheta_f^*}{\partial y} \right)_{y=1} = - \frac{R_f \alpha_o}{\lambda_f} \left[(\Delta \vartheta_{fs}^* - \Delta \vartheta^*) + \frac{\Delta \alpha^*}{\alpha_o} (\vartheta_{fso} - \vartheta_o) \right] \quad (A73)$$

Damit ergeben sich für C_1 und C_2 die folgenden Gleichungen:

$$C_1 = \frac{\frac{R_f \alpha_o}{\lambda_f} \left[(\Delta \vartheta_{fs}^* - \Delta \vartheta^*) + \frac{\Delta \alpha^*}{\alpha_o} (\vartheta_{fso} - \vartheta_o) \right] + \frac{R_f^2}{\lambda_f} \Delta q_m^* \left[\sum_{n=0}^N 2n a_{2n} - \frac{N_1(\sqrt{-s_f})}{N_1(\sqrt{-s_f} y_0)} \cdot \sum_{n=0}^N 2n a_{2n} y_0^{2n-1} \right]}{\sqrt{-s_f} \cdot \left[J_1(\sqrt{-s_f}) - N_1(\sqrt{-s_f}) \cdot \frac{J_1(\sqrt{-s_f} y_0)}{N_1(\sqrt{-s_f} y_0)} \right]} \quad (A74)$$

$$C_2 = - C_1 \cdot \frac{J_1(\sqrt{-s_f} y_0)}{N_1(\sqrt{-s_f} y_0)} + \frac{\frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \Delta q_m^* \cdot \sum_{n=0}^N 2n a_{2n} y_0^{2n-1}}{\sqrt{-s_f} \cdot N_1(\sqrt{-s_f} y_0)} \quad (A75)$$

Als Gesamtlösung erhält man damit

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta_f^*(s_f, y) &= \frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \Delta q_m^* \cdot \left\{ \sum_{n=0}^N a_{2n} y^{2n} + f_t(s_f, y, y_0) \cdot \sum_{n=0}^N 2n a_{2n} + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{N_0(\sqrt{-s_f} y)}{\sqrt{-s_f} \cdot N_1(\sqrt{-s_f} y_0)} - f_t(s_f, y, y_0) \cdot \frac{N_2(\sqrt{-s_f})}{N_1(\sqrt{-s_f} y_0)} \right] \cdot \sum_{n=0}^N 2n a_{2n} y_0^{2n-1} \right\} + \\ &+ \frac{R_f \alpha_o}{\lambda_f} \left[(\Delta \vartheta_{fs}^* - \Delta \vartheta^*) + \frac{\Delta \alpha^*}{\alpha_o} (\vartheta_{fso} - \vartheta_o) \right] \cdot f_t(s_f, y, y_0) \quad (A76) \end{aligned}$$

Dabei ist die Zeitfunktion $f_t(s_f, y, y_0)$ nach Gl. (A32) definiert. Diese Beziehung lässt sich ebenfalls durch Setzen von $y=1$ auf die Brennstoff- bzw. Heizstab-Oberfläche spezialisieren, wobei sich ein der Gl. (A33) entsprechender Ausdruck ergibt:

$$\Delta q_{fs}^{*} = F_1(s_f) \cdot \Delta q_m^{*} + F_2(s_f) \cdot \Delta \eta^{*} + F_3(s_f) \cdot \Delta \alpha^{*} \quad (A77)$$

Während $F_2(s_f)$ und $F_3(s_f)$ dieselben Funktionen sind, wie sie im Anhang 2 für konstante Wärmequellverteilung ermittelt wurden, kommt in der Funktion $F_1(s_f)$ der Charakter der anderen Wärmequellverteilung zum Ausdruck:

$$\bar{F}_1(s_f) = \frac{\frac{R_f^2}{\lambda_f} \left\{ \sum_{n=0}^N a_{2n} + f_t(s_f, 1, y_0) \sum_{n=0}^N 2n a_{2n} + \left[\frac{N_0(\sqrt{-s_f})}{\sqrt{-s_f} \cdot N_1(\sqrt{-s_f} y_0)} - f_t(s_f, 1, y_0) \cdot \frac{N_1(\sqrt{-s_f})}{N_1(\sqrt{-s_f} y_0)} \right] \cdot \sum_{n=0}^N 2n a_{2n} y_0^{2n-1} \right\}}{1 - \frac{R_f d_0}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_0)} \quad (A78)$$

Anhang 4

Wärmequellverteilung im Kernbrennstoff

Die radiale Wärmequellverteilung in einem zylindrischen Brennstoffstab ist der Neutronenflußverteilung direkt proportional:

$$q_f(y) = \frac{\Sigma_f}{c} \cdot \phi(y) \quad (A79)$$

- Σ_f = makroskopischer Spaltquerschnitt
- $\phi(y)$ = radiale Verteilung des thermischen Neutronenflusses
- y = mit Brennstoffradius normierte radiale Koordinate
- c = Umrechnungsfaktor

Zur Bestimmung der Neutronenflußverteilung soll im folgenden die Diffusionstheorie herangezogen werden. Mit ihr können zwar im vorliegenden Fall keine exakten Ergebnisse gewonnen werden, da die in [61] zitierten Kriterien für ihre Anwendbarkeit nur zum Teil erfüllt sind. Die relativ einfache mathematische Handhabung jedoch rechtfertigt ihre Anwendung zur Erzielung einer brauchbaren Näherung.

Die Diffusionsgleichung lautet nach [61]

$$D \left[\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right] - \Sigma_a \cdot \phi = 0 \quad (A80)$$

- D = Diffusionskonstante
- Σ_a = makroskopischer Absorptionsquerschnitt
- r = radiale Koordinate

Ihr liegt die Vorstellung zugrunde, daß der von außen in den zylindrischen Brennstoffstab eindringende monoenergetische thermische Neutronenfluß durch Absorption fortwährend abgebaut wird. Die in Gl.(A80) eingehende Diffusionskonstante D des Spaltstoff-Materials ist gegeben durch die Beziehung

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s} \quad (A81)$$

Σ_s = makroskopischer Streuquerschnitt

Gl.(A81) gilt in dieser Form zwar nur für schwache Absorber. Da dies jedoch eine grundlegende Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Diffusionstheorie überhaupt darstellt, ist diese Annahme auch an dieser Stelle gerechtfertigt.

Zur Lösung der Differentialgleichung (A80) wird zunächst die Abkürzung κ eingeführt nach der Beziehung

$$\frac{\Sigma_a}{D} = \kappa^2 = 3 \Sigma_s \cdot \Sigma_a \quad (A82)$$

κ hat dabei die Bedeutung des Reziprokwertes der thermischen Diffusionslänge.

Führen wir κ in dieser Form in Gl.(A80) ein, so erhalten wir mit

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \kappa^2 \phi = 0 \quad (A83)$$

eine homogene Besselsche Differentialgleichung. Ihre Lösung lautet nach [9]

$$\phi = C_1 \cdot I_0(\kappa r) + C_2 \cdot K_0(\kappa r) \quad (A84)$$

Hierin sind I_0 und K_0 die modifizierten Besselfunktionen 1. und 2. Art, 0. Ordnung. Die Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich aus den Randbedingungen.

Als erste Randbedingung definieren wir den Neutronenfluß an der Oberfläche des Brennstoffes als den Fluß in der unmittelbaren Umgebung der Brennstoffoberfläche:

$$(\phi)_{r=R_f} = \phi_s \quad (A85)$$

Diese Definition bietet den Vorteil, eine im Experiment direkt meßbare Größe einführen zu können anstelle eines integralen Leistungswertes. Sie ist außerdem dadurch gerechtfertigt, daß der Prüfling im Reaktor nicht unmittelbar vom Moderator umgeben ist.

Als zweite Randbedingung soll die Symmetriebedingung an der inneren Brennstoffoberfläche dienen. Da im zentralen Hohlraum des Prüflings keine Absorption mehr stattfinden möge, muß der Flußgradient an dieser Stelle verschwinden:

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{r=r_0} = 0 \quad (\text{A86})$$

Mit der 1. Ableitung der Lösungsgleichung (A84)

$$\frac{d\phi}{dr} = C_1 \cdot \kappa I_1(\kappa r) - C_2 \cdot \kappa K_1(\kappa r) \quad (\text{A87})$$

folgt aus Gl.(A86)

$$C_2 = C_1 \cdot \frac{I_1(\kappa r_0)}{K_1(\kappa r_0)} \quad (\text{A88})$$

Führen wir diesen Zusammenhang zwischen den beiden Konstanten C_1 und C_2 in die Lösungsgleichung ein und wenden wir darauf die erste Randbedingung, Gl.(A85), an, so erhalten wir für C_1 :

$$C_1 = \frac{\phi_s}{I_0(\kappa R_f) + K_0(\kappa R_f) \cdot \frac{I_1(\kappa r_0)}{K_1(\kappa r_0)}} \quad (\text{A89})$$

Damit ergibt sich als Gesamtlösung

$$\phi(r) = \phi_s \cdot \frac{I_0(\kappa r) + K_0(\kappa r) \cdot \frac{I_1(\kappa r_0)}{K_1(\kappa r_0)}}{I_0(\kappa R_f) + K_0(\kappa R_f) \cdot \frac{I_1(\kappa r_0)}{K_1(\kappa r_0)}} \quad (\text{A90})$$

Mit dem dimensionslosen Radius y

$$y = \frac{r}{R_f} \quad (A91)$$

und unter Berücksichtigung von Gl.(A79) erhalten wir sodann für die Wärmequellverteilung

$$\begin{aligned} q_f(y) &= \frac{\Sigma_f}{c} \cdot \varnothing_s \cdot \frac{I_0(\kappa R_f y) + K_0(\kappa R_f y) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)}}{I_0(\kappa R_f) + K_0(\kappa R_f) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)}} \\ &= \frac{\Sigma_f}{c} \cdot \varnothing_s \cdot f_p(y) \end{aligned} \quad (A92)$$

Anhang 5

Partikuläre und Gesamtlösung der Wärmeleitungsgleichung für Wärmequellverteilung im Kernbrennstoff

A.5.1 Partikuläre Lösung

Mit der aus der Diffusionstheorie abgeleiteten Wärmequellverteilung im Kernbrennstoff (siehe Anhang 4),

$$q_f(y) = \frac{\Sigma_f}{c} \cdot \phi_s \cdot f_p(y) \quad (A93)$$

$$f_p(y) = \frac{I_0(\kappa R_f y) + K_0(\kappa R_f y) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)}}{I_0(\kappa R_f) + K_0(\kappa R_f) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)}} \quad (A94)$$

in welcher der Neutronenfluß ϕ_s in unmittelbarer Umgebung der Prüflingsoberfläche als störungsbehaftet angesehen wird

$$\phi_s = \phi_{s0} + \Delta\phi_s \quad (A95)$$

erhält die zu lösende Wärmeleitungsgleichung das Aussehen:

$$\frac{\partial^2 \Delta\psi_f^*}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Delta\psi_f^*}{\partial y} - s_f \cdot \Delta\psi_f^* = - \frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \frac{\Sigma_f}{c} \cdot f_p(y) \cdot \Delta\phi_s^* \quad (A96)$$

Bei Anwendung des von Kamke [59] zitierten Ansatzes für die Auffindung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (Anhang 3, Gl.(A39)) ergibt sich

$$\Delta\psi_f^* = \frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \frac{\Sigma_f}{c} \cdot \frac{f_p(y)}{[s_f - (\kappa R_f)^2]} \cdot \Delta\phi_s^* \quad (A97)$$

Die Richtigkeit dieser Lösung ist im folgenden zu beweisen. Nach den von Jahnke u.a. [60] angegebenen Differentiationsregeln für Zylinderfunktionen erhält man für die Ableitungen von Gl.(A97):

$$\frac{\partial \Delta \vartheta_f^*}{\partial y} = B \cdot f_p'(y) = B(\kappa R_f) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y) - K_1(\kappa R_f y) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)}}{I_0(\kappa R_f) + K_0(\kappa R_f) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)}} \quad (A98)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta \vartheta_f^*}{\partial y^2} &= B \cdot f_p''(y) = \\ &= B \cdot (\kappa R_f)^2 \cdot \frac{\left[I_0(\kappa R_f y) - \frac{I_1(\kappa R_f y)}{\kappa R_f y} \right] + \left[K_0(\kappa R_f y) - \frac{K_1(\kappa R_f y)}{\kappa R_f y} \right] \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)}}{I_0(\kappa R_f) + K_0(\kappa R_f) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)}} \end{aligned} \quad (A99)$$

mit der Abkürzung

$$B = \frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \frac{\Sigma_f}{c} \cdot \frac{\Delta \vartheta_s^*}{[s_f - (\kappa R_f)^2]} \quad (A100)$$

Drückt man den inhomogenen Teil von Gl.(A96) durch Gl.(A100) aus und führt man zunächst der Übersicht wegen die abgekürzte Schreibweise der eben ermittelten Differentialquotienten ein, so wird Gl.(A96)

$$B \cdot f_p''(y) + \frac{1}{y} B \cdot f_p'(y) - s_f \cdot B \cdot f_p(y) = - B \cdot f_p(y) \cdot [s_f - (\kappa R_f)^2] \quad (A101)$$

In dieser Beziehung lassen sich zunächst die Abkürzungen B herauskürzen. Betrachtet man des weiteren die Ausdrücke für $f_p(y)$, $f_p'(y)$ und $f_p''(y)$, so stellt man fest, daß sie alle den gleichen Nenner haben; somit kürzt sich dieser ebenfalls heraus. Im folgenden braucht man deshalb nur mehr die Zähler der Ausdrücke (A97), (A98) und (A99) zu betrachten. Als drittes ist festzustellen, daß sich der dritte Summand auf der linken Seite von Gl.(A101) gegen einen entsprechenden Ausdruck auf der rechten Seite aufhebt.

Bezeichnet man den Zähler der Funktionen $f_p(y)$, $f_p'(y)$ und $f_p''(y)$ mit $z(y)$, $z'(y)$ bzw. $z''(y)$, so ist nunmehr zu beweisen, daß

$$z''(y) + \frac{1}{y} z'(y) = (\kappa R_f)^2 \cdot z(y) \quad (\text{A102})$$

Setzt man nun die entsprechenden Beziehungen aus den Gln.(A94), (A98) und (A99) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & (\kappa R_f)^2 \left[I_0(\kappa R_f y) - \frac{I_1(\kappa R_f y)}{(\kappa R_f y)} \right] + a (\kappa R_f)^2 \left[K_0(\kappa R_f y) + \frac{K_1(\kappa R_f y)}{(\kappa R_f y)} \right] \\ & + \frac{(\kappa R_f)}{y} \left[-I_1(\kappa R_f y) - a K_1(\kappa R_f y) \right] = (\kappa R_f)^2 \left[I_0(\kappa R_f y) + a K_0(\kappa R_f y) \right] \end{aligned} \quad (\text{A103})$$

mit der Abkürzung

$$a = \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)} \quad (\text{A104})$$

Mit Gl.(A104) ist der Beweis bereits erbracht. Bei näherer Betrachtung ist zu erkennen, daß sich die einzelnen Glieder der Beziehung gegenseitig aufheben.

A.5.2 Gesamtlösung

Mit der oben angegebenen partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, Gl.(A97), lautet die Gesamtlösung für die Störungen der Brennstofftemperatur

$$\Delta \vartheta_f^* = \frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \frac{\Sigma_f}{c} \cdot \frac{f_p(y)}{[-s_f - (\kappa R_f)^2]} \cdot \Delta \vartheta_s^* + C_1 \cdot J_0(\sqrt{-s_f} y) + C_2 N_0(\sqrt{-s_f} y) \quad (\text{A105})$$

Zur Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 werden wiederum die gleichen Randbedingungen herangezogen:

$$\left(\frac{\partial \Delta \vartheta_f^*}{\partial y} \right)_{y=y_0} = 0 \quad (\text{A106})$$

$$\left(\frac{\partial \Delta \vartheta_f^*}{\partial y} \right)_{y=1} = - \frac{R_f \alpha_o}{\lambda_f} \left[(\Delta \vartheta_{fs}^* - \Delta \vartheta_s^*) + \frac{\Delta \alpha^*}{\alpha_o} (\vartheta_{fso} - \vartheta_o) \right] \quad (A107)$$

Bildet man die 1. Ableitung der Lösungsgleichung

$$\frac{\partial \Delta \vartheta_f^*}{\partial y} = \frac{R_f^2 \Sigma_f}{\lambda_f c} \cdot \frac{f_p^*(y)}{[s_f - (\kappa R_f)^2]} \cdot \Delta \vartheta_s^* - C_1 \sqrt{-s_f} \cdot J_1(\sqrt{-s_f} y) - C_2 \sqrt{-s_f} \cdot N_1(\sqrt{-s_f} y) \quad (A108)$$

und wendet man auf diese Beziehung die erste Randbedingung, Gl.(A106) an, so erhält man als Zusammenhang zwischen den beiden Konstanten C_1 und C_2

$$C_2 = - C_1 \cdot \frac{J_1(\sqrt{-s_f} y_o)}{N_1(\sqrt{-s_f} y_o)} \quad (A109)$$

Die Ursache für diesen relativ einfachen Ausdruck ist die Tatsache, daß die 1. Ableitung der Profilfunktion $f_p(y)$, $f_p^*(y)$, an der Stelle $y = y_o$ nach Voraussetzung verschwindet (siehe Anhang 4, Gl.(A86)).

Durch Anwendung der zweiten Randbedingung, Gl.(A107) ergibt sich die Konstante C_1 unter Berücksichtigung von Gl.(A109) zu

$$C_1 = \frac{\frac{R_f^2 \Sigma_f}{\lambda_f c} \cdot \frac{f_p^*(1)}{[s_f - (\kappa R_f)^2]} \cdot \Delta \vartheta_s^* + \frac{R_f \alpha_o}{\lambda_f} \left[(\Delta \vartheta_{fs}^* - \Delta \vartheta_s^*) + \frac{\Delta \alpha^*}{\alpha_o} (\vartheta_{fso} - \vartheta_o) \right]}{\sqrt{-s_f} \left[J_1(\sqrt{-s_f}) - N_1(\sqrt{-s_f}) \cdot \frac{J_1(\sqrt{-s_f} y_o)}{N_1(\sqrt{-s_f} y_o)} \right]} \quad (A110)$$

Die Lösungsgleichung für die Störungen der Brennstofftemperatur $\Delta \vartheta_f^*$ lautet damit:

$$\Delta \vartheta_f^* = \frac{R_f^2 \Sigma_f}{\lambda_f c} \cdot \frac{[f_p^*(y) + f_p^*(1) \cdot f_t(s_f, y, y_o)]}{[s_f - (\kappa R_f)^2]} \cdot \Delta \vartheta_s^* + \frac{R_f \alpha_o}{\lambda_f} \left[(\Delta \vartheta_{fs}^* - \Delta \vartheta_s^*) + \frac{\Delta \alpha^*}{\alpha_o} (\vartheta_{fso} - \vartheta_o) \right] \cdot f_t(s_f, y, y_o) \quad (A111)$$

wobei unter $f_t(s_f, y, y_0)$ wiederum die durch Gl.(A32) definierte Zeitfunktion zu verstehen ist.

Spezialisiert man diese Lösung, ebenso wie in den vorausgegangenen Beispielen, auf die Brennstoffoberfläche, indem man $y = 1$ setzt, so erhält man die Störung der Brennstoffoberflächentemperatur Δv_{fs}^* . Durch geeignete Zusammenfassung der Glieder kann Gl.(A111) auf die Form gebracht werden

$$\Delta v_{fs}^* = F_1(s_f) \cdot \Delta \theta_s^* + F_2(s_f) \cdot \Delta v_s^* + F_3(s_f) \cdot \Delta \alpha^* \quad (A112)$$

Auch in diesem Falle ändern sich die Funktionen $F_2(s_f)$ und $F_3(s_f)$ gegenüber den in Anhang 2, Gln.(A35) und (A36) nicht. In $F_1(s_f)$ hingegen kommt wiederum der von den beiden vorab beschriebenen Fällen verschiedene Charakter der Wärmequellverteilung zum Ausdruck:

$$F_1(s_f) = \frac{\frac{R_f^2}{\lambda_f} \cdot \frac{\Sigma_f}{c} \cdot \frac{[1 + f_p^*(1) \cdot f_t(s_f, 1, y_0)]}{[s_f - (\kappa R_f)^2]}}{1 - \frac{R_f \alpha_0}{\lambda_f} \cdot f_t(s_f, 1, y_0)} \quad (A113)$$

Der Gradient der Profilkurve $f_p(y)$ an der Brennstoffoberfläche, $f_p^*(1)$, ist dabei gegeben durch

$$f_p^*(1) = (\kappa R_f) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f) - K_1(\kappa R_f) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)}}{I_0(\kappa R_f) + K_0(\kappa R_f) \cdot \frac{I_1(\kappa R_f y_0)}{K_1(\kappa R_f y_0)}} \quad (A114)$$

Anhang 6

Lösung der Hüllrohrgleichung

Für die Berechnung der Änderungen der Hüllrohrtemperaturen ϑ_c bildet die Hüllrohrgleichung Gl.(35) den Ausgangspunkt:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_c}{\partial r} - \frac{c_c \cdot \rho_c}{\lambda_c} \cdot \frac{\partial \vartheta_c}{\partial t} = 0 \quad (\text{A115})$$

Auf dem in Kap. 4.2.1 aufgezeigten und in Anhang 1 näher beschriebenen Weg erhält man als Lösung

$$\Delta \vartheta_c^* = C_1 J_0(\sqrt{-s_c} y) + C_2 N_0(\sqrt{-s_c} y) \quad (\text{A116})$$

Dabei wurden die radiale Koordinate r mit dem äußeren Brennstoffradius R_f , die Zeit mit der Zeitkonstanten $t_{rc} = R_f^2 \cdot c_c \cdot \rho_c / \lambda_c$ normiert.

Für die Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 werden die Wärmeübergangsbeziehungen an der Hüllrohrinnen- sowie an der Hüllrohraußenmantelfläche herangezogen.

An der Hüllrohrinnenseite gelte

$$-\lambda_c \cdot \left(\frac{\partial \vartheta_c}{\partial r} \right)_{r=r_2} = \alpha_g (\vartheta_{fs} - \vartheta_{ci}) \quad (\text{A117})$$

λ_c = Wärmeleitfähigkeit des Hüllrohrmaterials

α_g = Wärmedurchgangszahl des Spaltes zwischen Brennstoff und Hülle

ϑ_{ci} = Temperatur an der Hüllrohr-Innenmantelfläche

r_2 = Innenradius des Hüllrohres

Während sämtliche Temperaturen in Gl.(A117) als störungsbehaftet angenommen werden,

$$\dot{v}_c = \dot{v}_{co} + \Delta \dot{v}_c \quad (\text{A118})$$

$$\dot{v}_{fs} = \dot{v}_{fso} + \Delta \dot{v}_{fs} \quad (\text{A119})$$

$$\dot{v}_{ci} = \dot{v}_{cio} + \Delta \dot{v}_{ci} \quad (\text{A120})$$

wird die Wärmedurchgangszahl α_g des Spaltes zwischen Brennstoff und Hüllrohr als über die Dauer der Messung konstant betrachtet. Führt man die Beziehungen (A118) bis (A120) in (A117) ein und eliminiert man sodann den stationären Fall, so erhält man nach erfolgter Laplace-Transformation die Randbedingung gegeben durch

$$\left(\frac{\partial \Delta \dot{v}_c^*}{\partial y} \right)_{y=y_2} = - \frac{R_f \alpha_g}{\lambda_c} (\Delta \dot{v}_{fs}^* - \Delta \dot{v}_{ci}^*) \quad (\text{A121})$$

An der Hüllrohräußenseite gelte wiederum die Bedingung des äußeren Wärmeübergangs in der Form von Gl.(A27), in der jetzt die Hüllrohrtemperaturen \dot{v}_c an die Stelle der Brennstofftemperaturen \dot{v}_f treten. Die Außentemperatur \dot{v} ist durch die Kühlmitteltemperatur θ gegeben. Die Wärmeübergangszahl α wird als äußere Wärmeübergangszahl α_k als störungsbehaftet angesehen. Es ergibt sich sodann

$$\left(\frac{\partial \Delta \dot{v}_c^*}{\partial y} \right)_{y=y_3} = - \frac{R_f \cdot \alpha_{ko}}{\lambda_c} \left[(\Delta \dot{v}_{cs}^* - \Delta \theta^*) + \frac{\Delta \alpha_k^*}{\alpha_{ko}} (\dot{v}_{cso} - \theta_o) \right] \quad (\text{A122})$$

Mit der 1. Ableitung der Lösungsgleichung, Gl.(A116),

$$\frac{\partial \Delta \dot{v}_c^*}{\partial y} = - C_1 \sqrt{-s_c} \cdot J_1(\sqrt{-s_c} y) - C_2 \sqrt{-s_c} \cdot N_1(\sqrt{-s_c} y) \quad (\text{A123})$$

ergibt sich aus der ersten Randbedingung Gl.(A121) der Zusammenhang zwischen C_1 und C_2 zu

$$C_2 = \frac{\frac{R_f \alpha_g}{\lambda_c} (\Delta \dot{v}_{fs}^* - \Delta \dot{v}_{ci}^*)}{\sqrt{-s_c} \cdot N_1(\sqrt{-s_c} y_2)} - C_1 \cdot \frac{J_1(\sqrt{-s_c} y_2)}{N_1(\sqrt{-s_c} y_2)} \quad (\text{A124})$$

Aus der zweiten Randbedingung Gl.(A122) erhält man unter Berücksichtigung von Gl.(A124) die Konstante C_1 :

$$C_1 = \frac{\frac{R_f \alpha_{ko}}{\lambda_c} \left[(\Delta \vartheta_{cs}^*) - \Delta \theta^* \right] + \frac{\Delta \alpha_k^*}{\alpha_o} (\vartheta_{cso}^* - \theta_o)}{\sqrt{-s_c} \cdot \left[J_1(\sqrt{-s_c} y_3) - N_1(\sqrt{-s_c} y_3) \cdot \frac{J_1(\sqrt{-s_c} y_2)}{N_1(\sqrt{-s_c} y_2)} \right]} - \frac{R_f \alpha_y}{\lambda_c} (\Delta \vartheta_{fs}^* - \Delta \vartheta_{ci}^*) \cdot \frac{N_1(\sqrt{-s_c} y_3)}{N_1(\sqrt{-s_c} y_2)} \quad (A125)$$

Die Gesamtlösung kann sodann durch den folgenden Ausdruck dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta_c^* = & \frac{R_f \alpha_g}{\lambda_c} \cdot \frac{1}{\sqrt{-s_c}} \left[\frac{N_o(\sqrt{-s_c} y)}{N_1(\sqrt{-s_c} y_2)} - f_t(s_c, y, y_3, y_2) \cdot \frac{N_1(\sqrt{-s_c} y_3)}{N_1(\sqrt{-s_c} y_2)} \right] (\Delta \vartheta_{fs}^* - \Delta \vartheta_{ci}^*) + \\ & + \frac{R_f \alpha_{ko}}{\lambda_c} \cdot f_t(s_c, y, y_3, y_2) \cdot [\Delta \vartheta_{cs}^* - \Delta \theta^*] + \\ & + \frac{R_f (\vartheta_{cso}^* - \theta_o)}{\lambda_c} \cdot f_t(s_c, y, y_3, y_2) \cdot \Delta \alpha_k^* \end{aligned} \quad (A126)$$

Hierin bedeutet $f_t(s_c, y, y_3, y_2)$ die Zeitfunktion für das Hüllrohr

$$f_t(s_c, y, y_3, y_2) = \frac{1}{\sqrt{-s_c}} \cdot \frac{J_o(\sqrt{-s_c} y) - N_o(\sqrt{-s_c} y) \cdot \frac{J_1(\sqrt{-s_c} y_2)}{N_1(\sqrt{-s_c} y_2)}}{J_1(\sqrt{-s_c} y_3) - N_1(\sqrt{-s_c} y_3) \cdot \frac{J_1(\sqrt{-s_c} y_2)}{N_1(\sqrt{-s_c} y_2)}} \quad (A127)$$

Um im Anschluß an die Lösung des Brennstoff- und des Hüllrohrproblems eine Verknüpfung der Lösungen zu ermöglichen, ist es notwendig, die mit Gl.(A124) für eine beliebige Hüllrohrtemperatur ϑ_c^* zwischen y_2 und y_3 gegebene Lösungsgleichung zu spezialisieren.

Setzen wir in Gl.(A126) $y = y_2$, so erhalten wir die Störung $\Delta \vartheta_{ci}^*$ der Hüllrohr-Innentemperatur als Funktion der Störungen von Brennstoff-Oberflächentemperatur ($\Delta \vartheta_{fs}^*$), Hüllrohr-Oberflächentemperatur ($\Delta \vartheta_{cs}^*$), Kühlmitteltemperatur ($\Delta \theta^*$) und Wärmeübergang ($\Delta \alpha_k^*$) in der Form

$$\Delta \vartheta_{ci}^* = C_1(s_c) \cdot \Delta \vartheta_{fs}^* + C_2(s_c) \cdot \Delta \vartheta_{cs}^* + C_3(s_c) \cdot \Delta \theta^* + C_4(s_c) \cdot \Delta \alpha_k^* \quad (A128)$$

Mit der Abkürzung

$$c_1(s_c, y_3, y_2) = \frac{1}{\sqrt{-s_c}} \cdot \frac{N_0(\sqrt{-s_c} y_2)}{N_1(\sqrt{-s_c} y_2)} - f_t(s_c, y_2, y_3, y_2) \cdot \frac{N_1(\sqrt{-s_c} y_3)}{N_1(\sqrt{-s_c} y_2)} \quad (A129)$$

werden die Funktionen $C_1(s_c)$ bis $C_4(s_c)$:

$$C_1(s_c) = \frac{\frac{R_f \alpha}{\lambda_c} \cdot c_1(s_c, y_3, y_2)}{1 + \frac{R_f \alpha}{\lambda_c} \cdot c_1(s_c, y_3, y_2)} \quad (A130)$$

$$C_2(s_c) = \frac{\frac{R_f \alpha_{ko}}{\lambda_c} \cdot f_t(s_c, y_2, y_3, y_2)}{1 + \frac{R_f \alpha}{\lambda_c} \cdot c_1(s_c, y_3, y_2)} = -C_3(s_c) \quad (A131)$$

$$C_4(s_c) = \frac{\frac{R_f (\vartheta_{cso} - \theta_0)}{\lambda_c} \cdot f_t(s_c, y_2, y_3, y_2)}{1 + \frac{R_f \alpha}{\lambda_c} \cdot c_1(s_c, y_3, y_2)} \quad (A132)$$

Setzen wir $y = y_3$, so erhalten wir die Störung $\Delta \vartheta_{cs}^*$ der Hüllrohr-Oberflächentemperatur als Funktion der Störungen von Brennstoff-Oberflächentemperatur ($\Delta \vartheta_{fs}^*$), Hüllrohr-Innentemperatur ($\Delta \vartheta_{ci}^*$), Kühlmitteltemperatur ($\Delta \theta^*$) und Wärmeübergang ($\Delta \alpha_k^*$):

$$\Delta \vartheta_{cs}^* = C_5(s_c) \cdot \Delta \vartheta_{fs}^* + C_6(s_c) \cdot \Delta \vartheta_{ci}^* + C_7(s_c) \cdot \Delta \theta^* + C_8(s_c) \cdot \Delta \alpha_k^* \quad (A133)$$

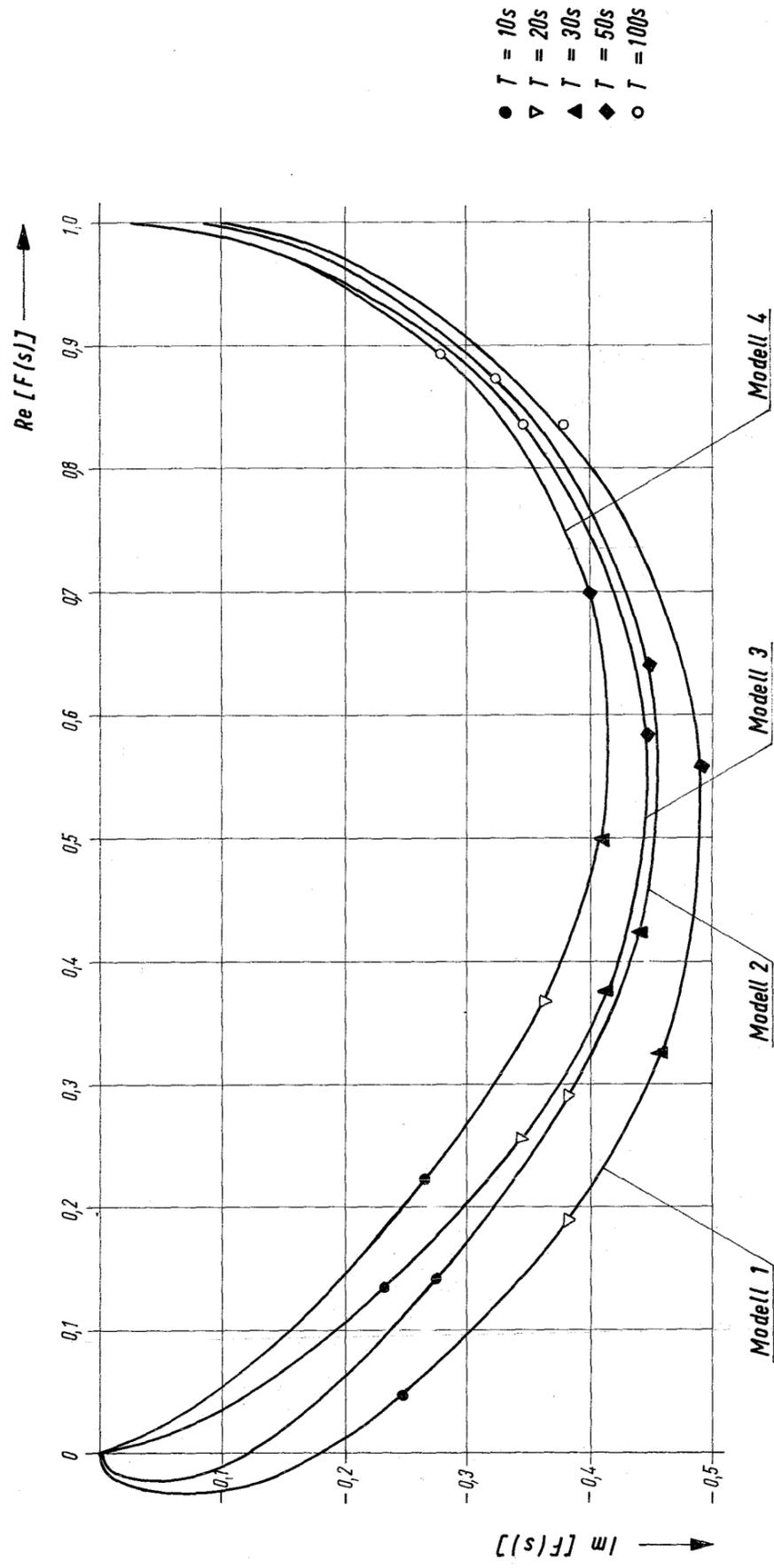
Die Funktionen $C_5(s_c)$ bis $C_8(s_c)$ werden mit der Abkürzung

$$c_a(s_c, y_3, y_2) = \frac{1}{\sqrt{-s_c}} \cdot \frac{N_0(\sqrt{-s_c} y_3)}{N_1(\sqrt{-s_c} y_2)} - f_t(s_c, y_3, y_3, y_2) \cdot \frac{N_1(\sqrt{-s_c} y_3)}{N_1(\sqrt{-s_c} y_2)} \quad (A134)$$

$$C_5(s_c) = \frac{\frac{R_f \alpha}{\lambda_c} \cdot c_a(s_c, y_3, y_2)}{1 - \frac{R_f \alpha_{ko}}{\lambda_c} \cdot f_t(s_c, y_3, y_3, y_2)} = - C_6(s_c) \quad (A135)$$

$$C_7(s_c) = - \frac{\frac{R_f \alpha_{ko}}{\lambda_c} \cdot f_t(s_c, y_3, y_3, y_2)}{1 - \frac{R_f \alpha_{ko}}{\lambda_c} \cdot f_t(s_c, y_3, y_3, y_2)} \quad (A136)$$

$$C_8(s_c) = \frac{\frac{R_f (\phi_{cso} - \theta_o)}{\lambda_c} \cdot f_t(s_c, y_3, y_3, y_2)}{1 - \frac{R_f \alpha_{ko}}{\lambda_c} \cdot f_t(s_c, y_3, y_3, y_2)} \quad (A137)$$



Übertragungsfunktion $F(s)$ in Ortskurvendarstellung für verschiedene Modelle bei Zugrundelegung der gleichen Versuchsanordnung

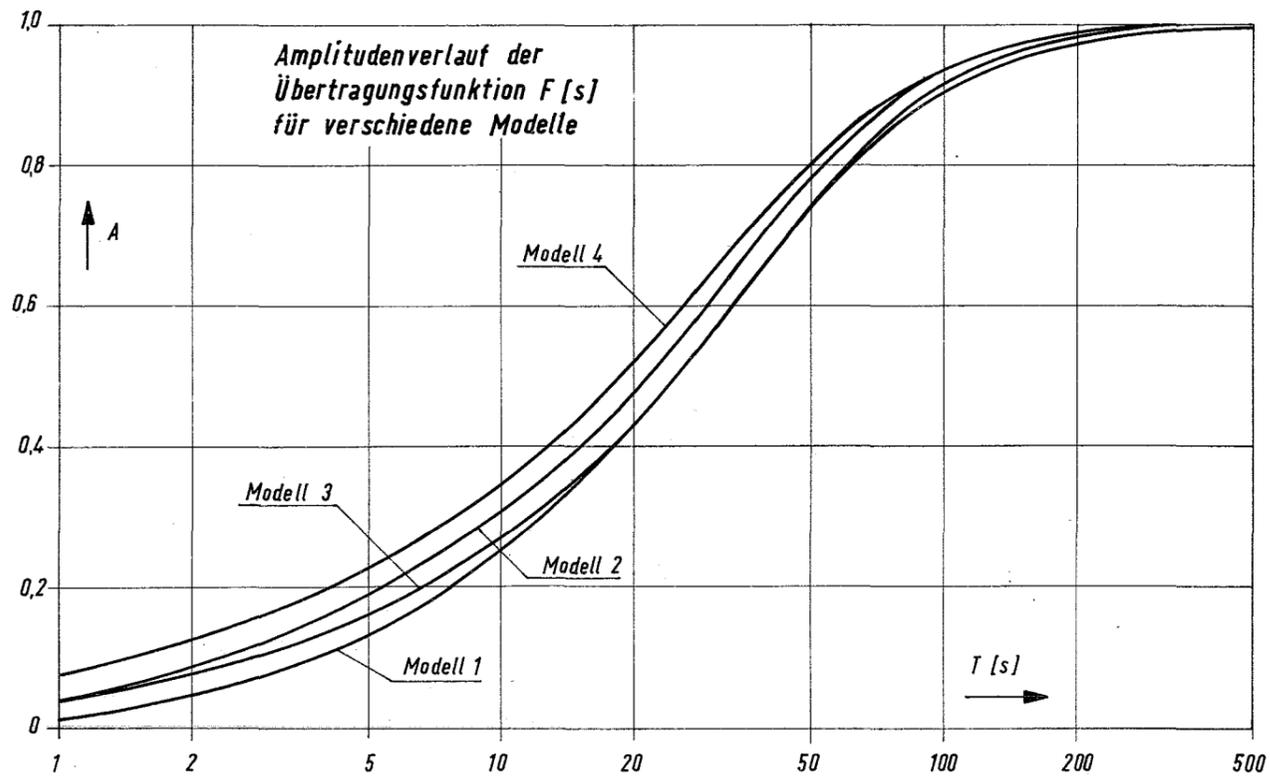


Abb. 6a

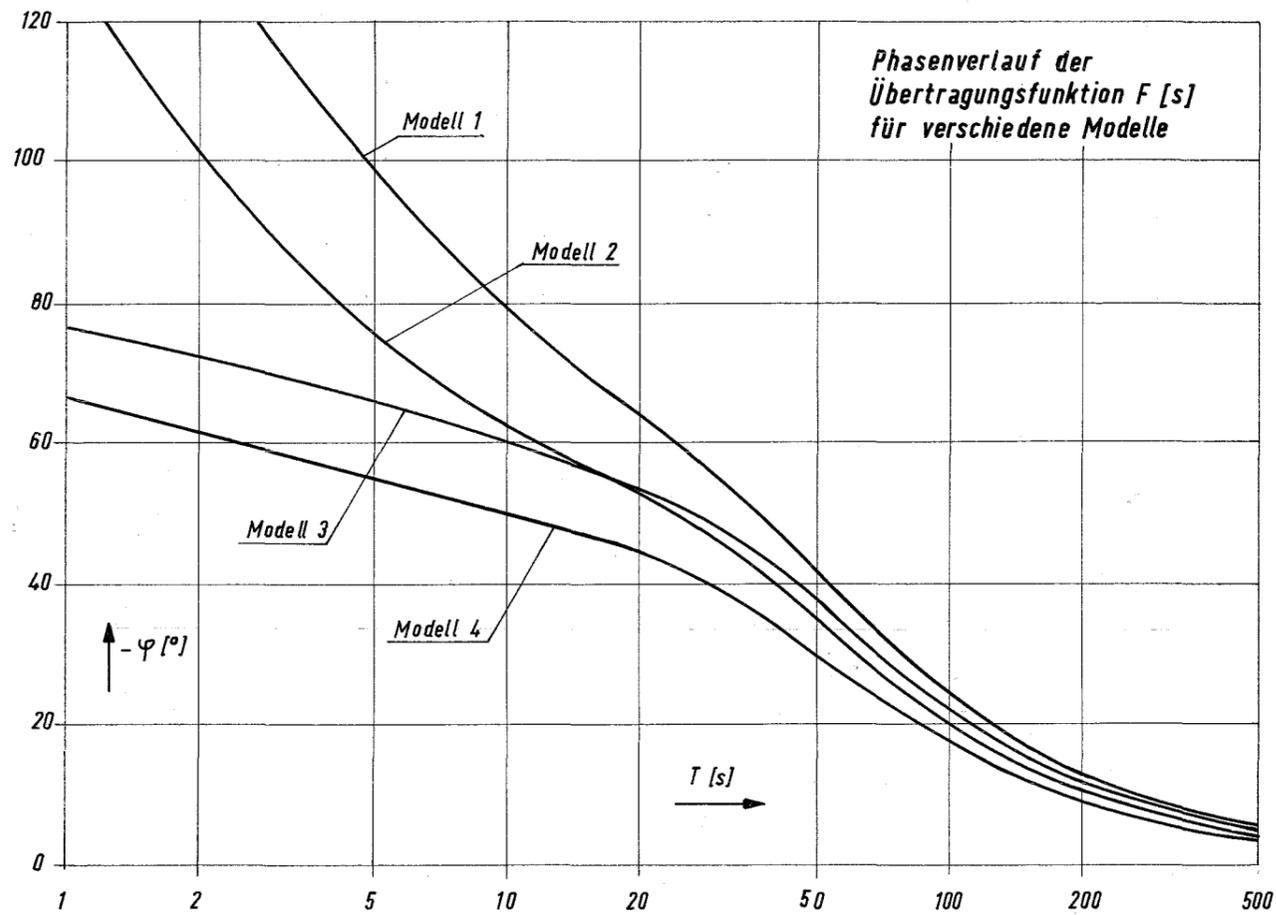
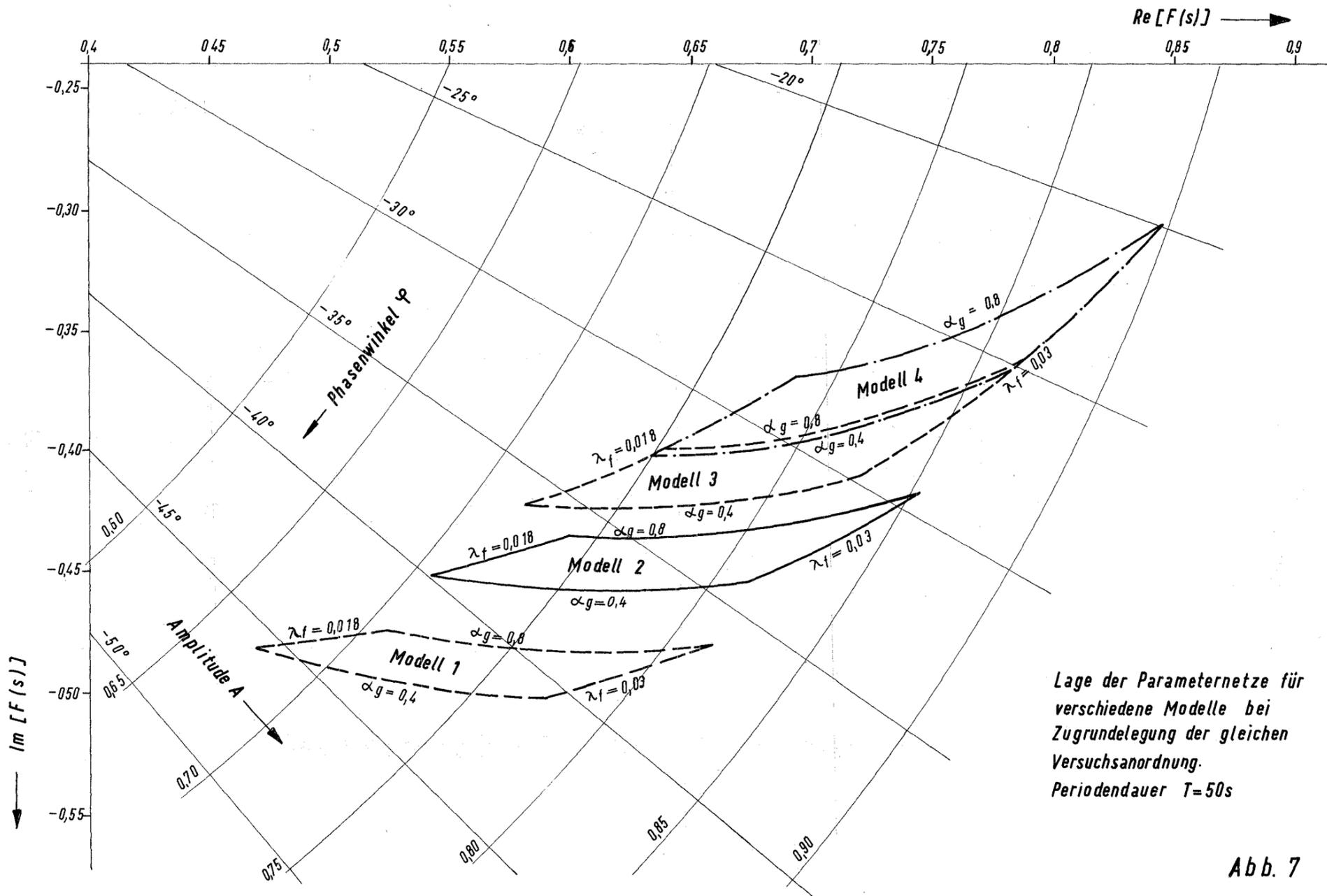
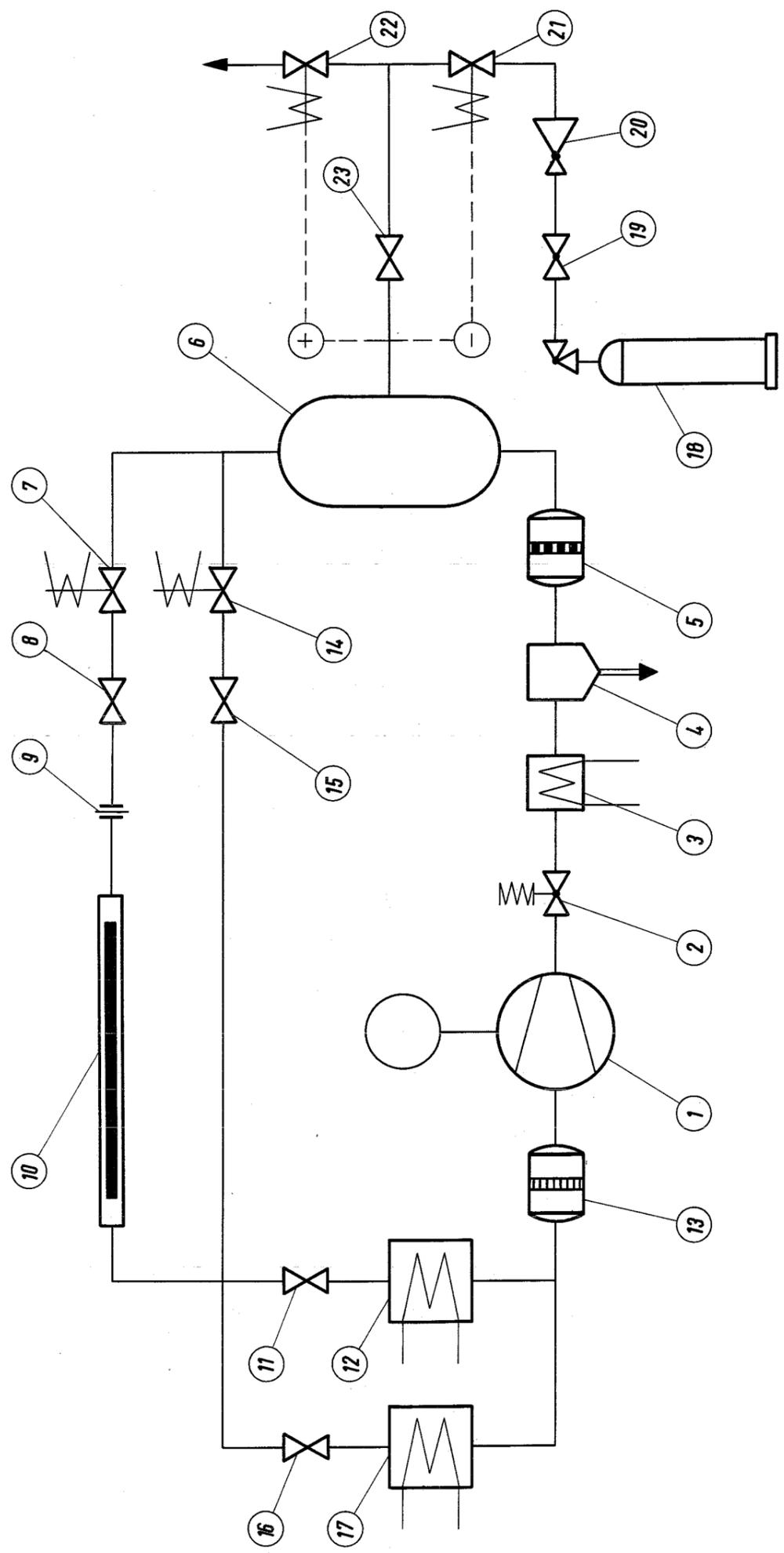


Abb. 6b



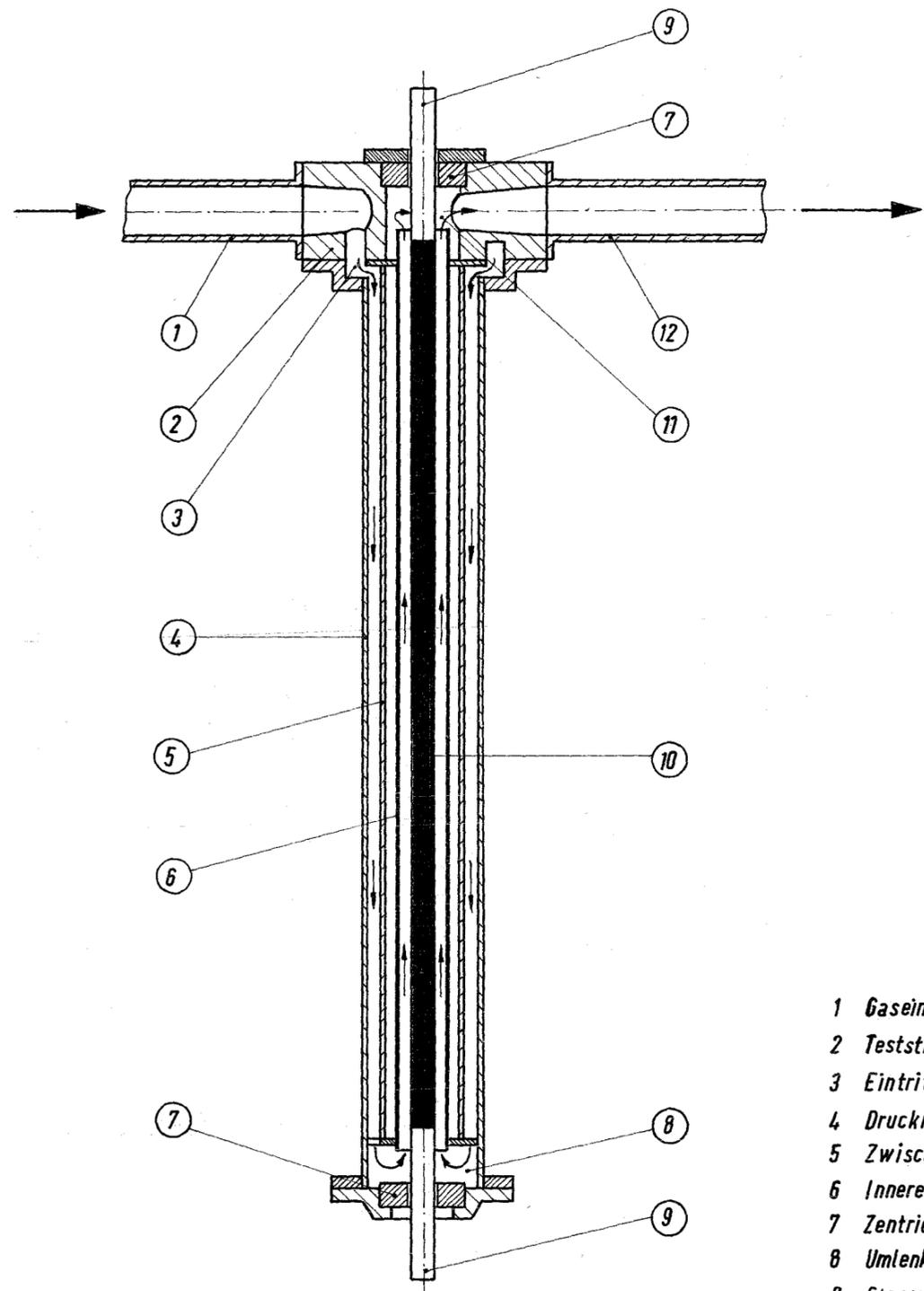
Lage der Parameternetze für
 verschiedene Modelle bei
 Zugrundelegung der gleichen
 Versuchsanordnung.
 Periodendauer $T=50s$

Abb. 7



Versuchskreislauf

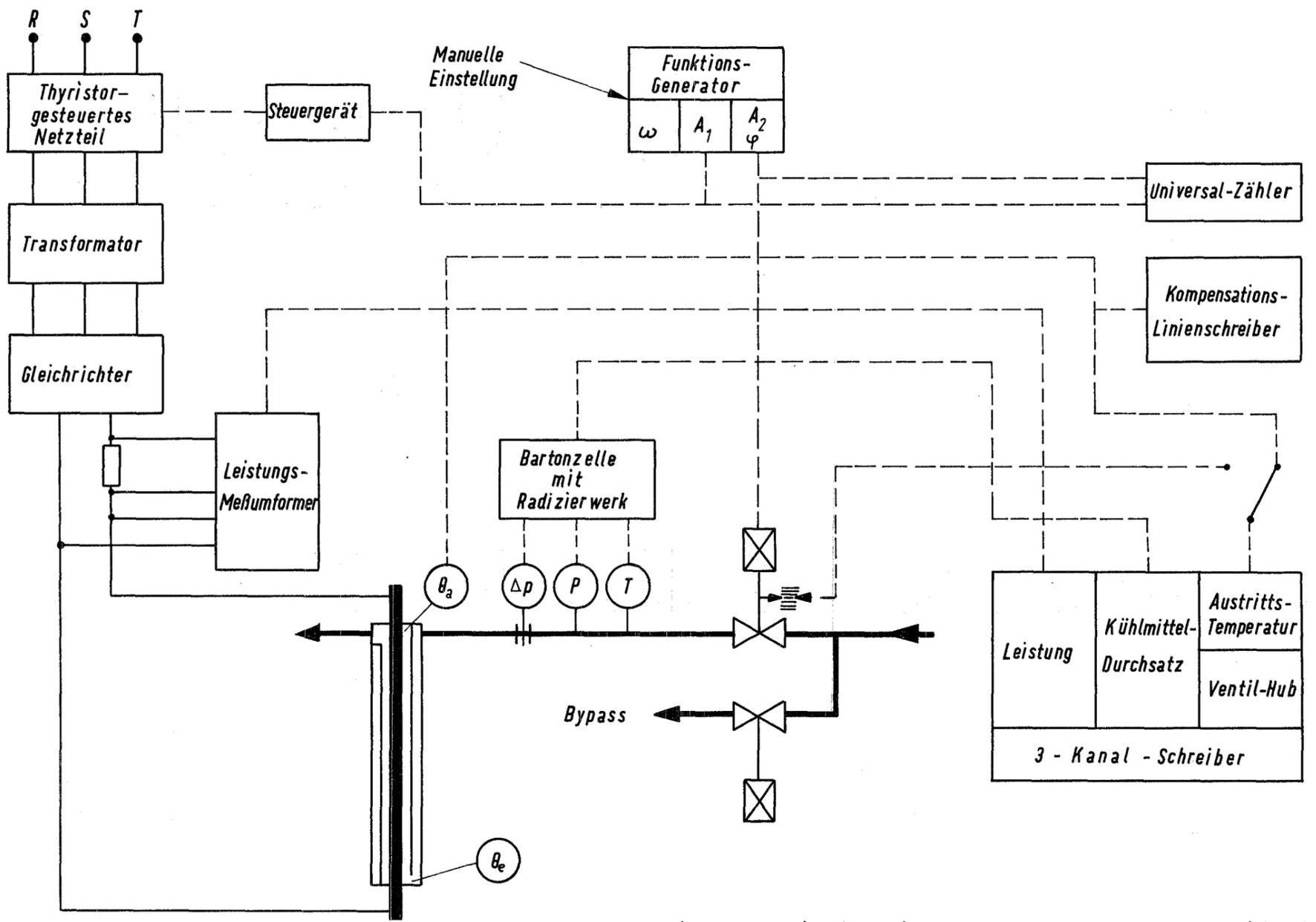
Abb. 8



- 1 Gaseintrittsrohr
- 2 Teststreckenkopf
- 3 Eintritts-Ringkammer
- 4 Druckrohr
- 5 Zwischenrohr
- 6 Inneres Gasführungsrohr
- 7 Zentrierring
- 8 Umlenkammer
- 9 Stromdurchlaßende
- 10 Heizstab
- 11 Austrittskammer
- 12 Gasaustrittsrohr

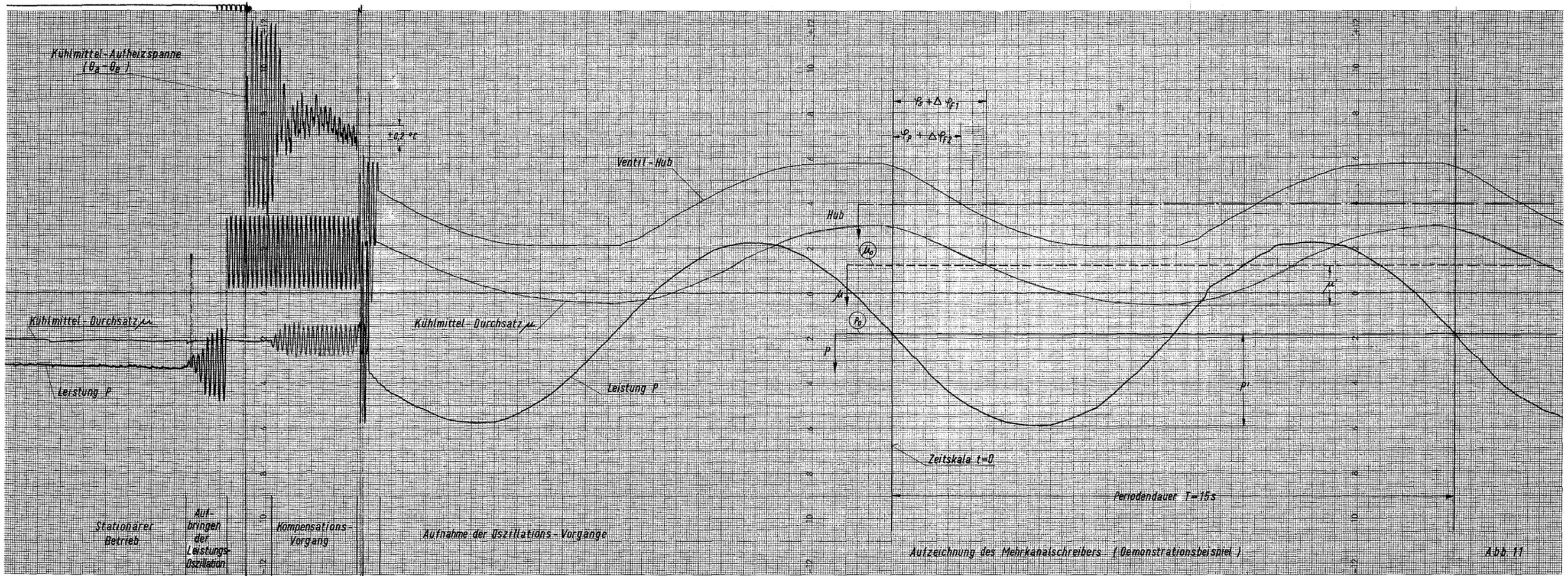
Teststrecke

Abb. 9



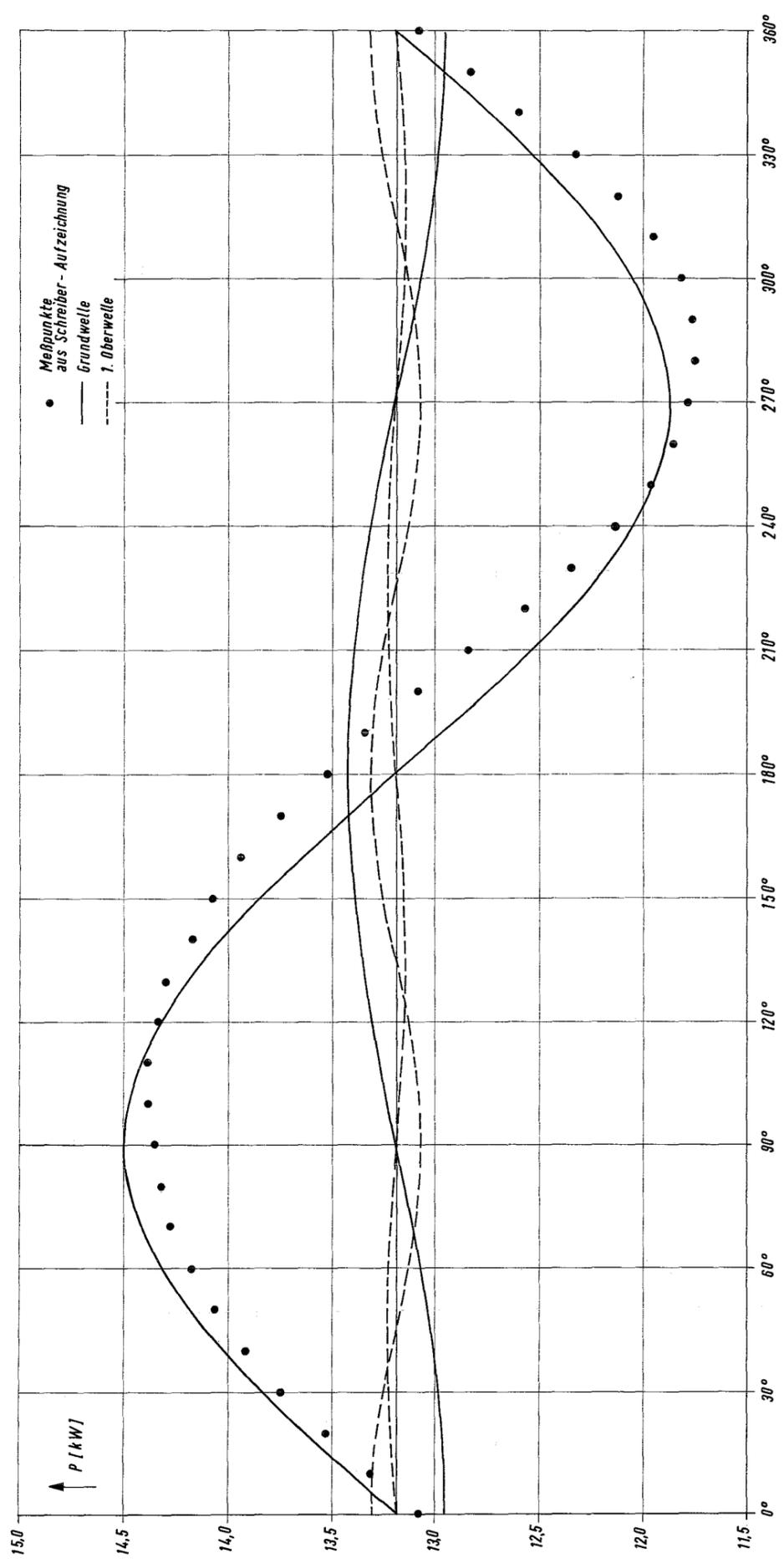
Instrumentierungsschema

Abb. 10



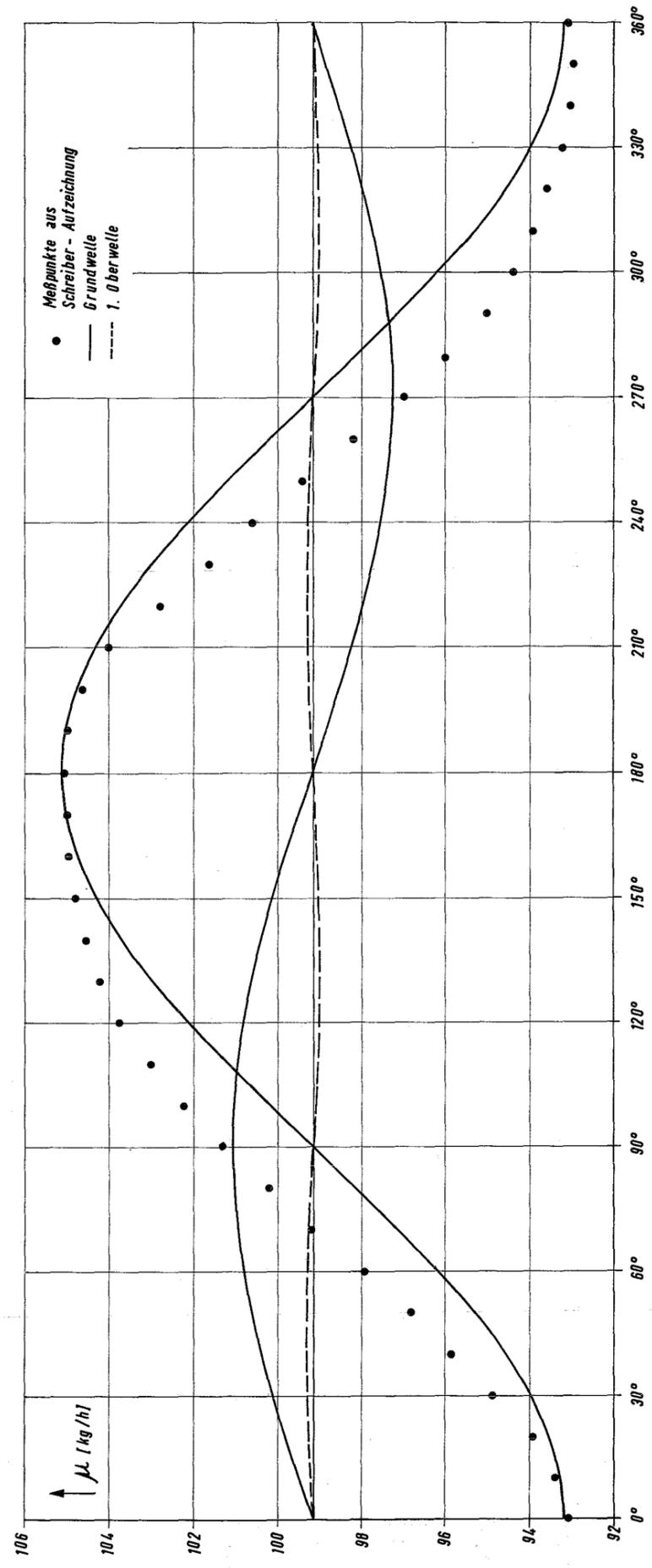
WENZEL ELEKTRONIK

Abb. 11



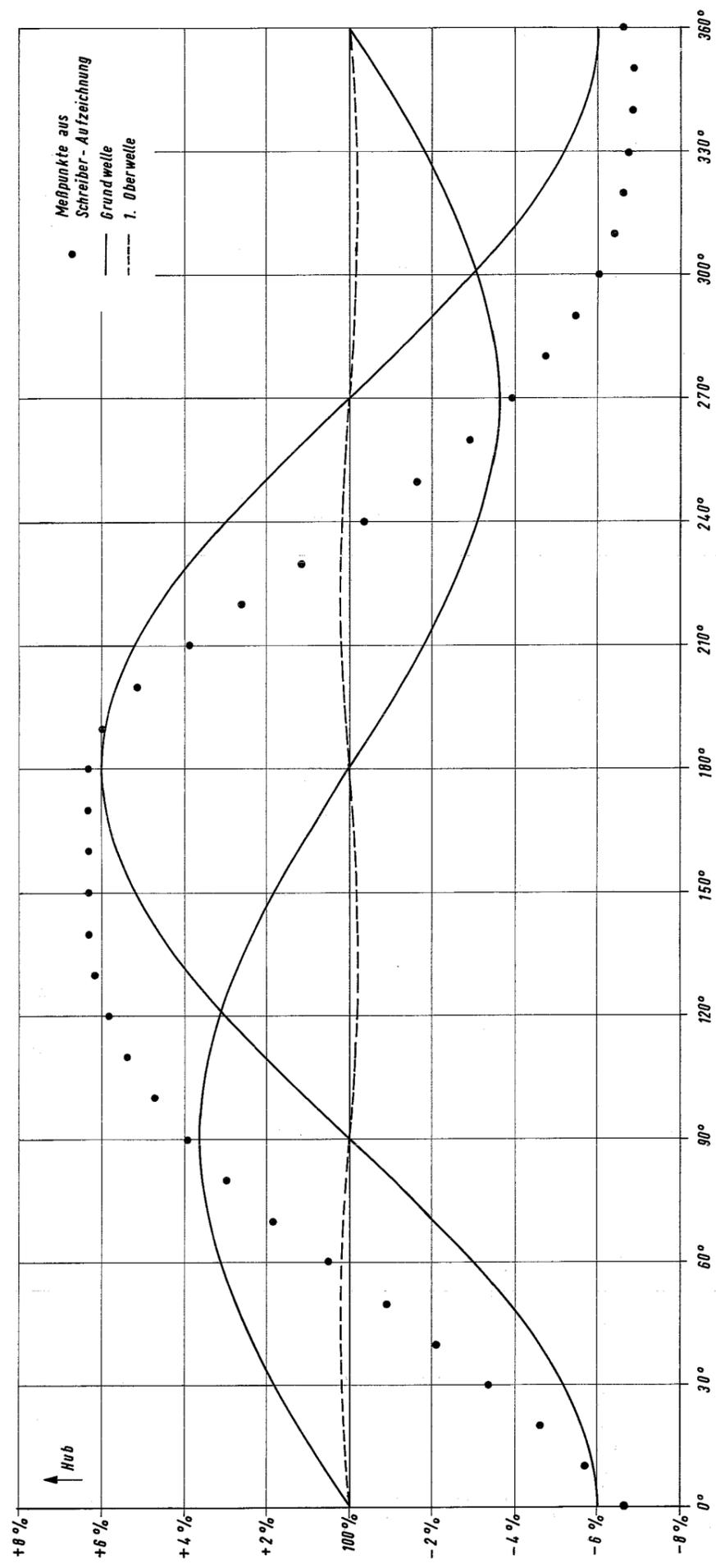
Fourier - Analyse der Leistungs - Oszillation

Abb. 12



Fourier - Analyse der Kühlmitteldurchsatz - Oszillation

Abb. 13



Fourier - Analyse der Ventilhub - Oszillation

Abb. 14

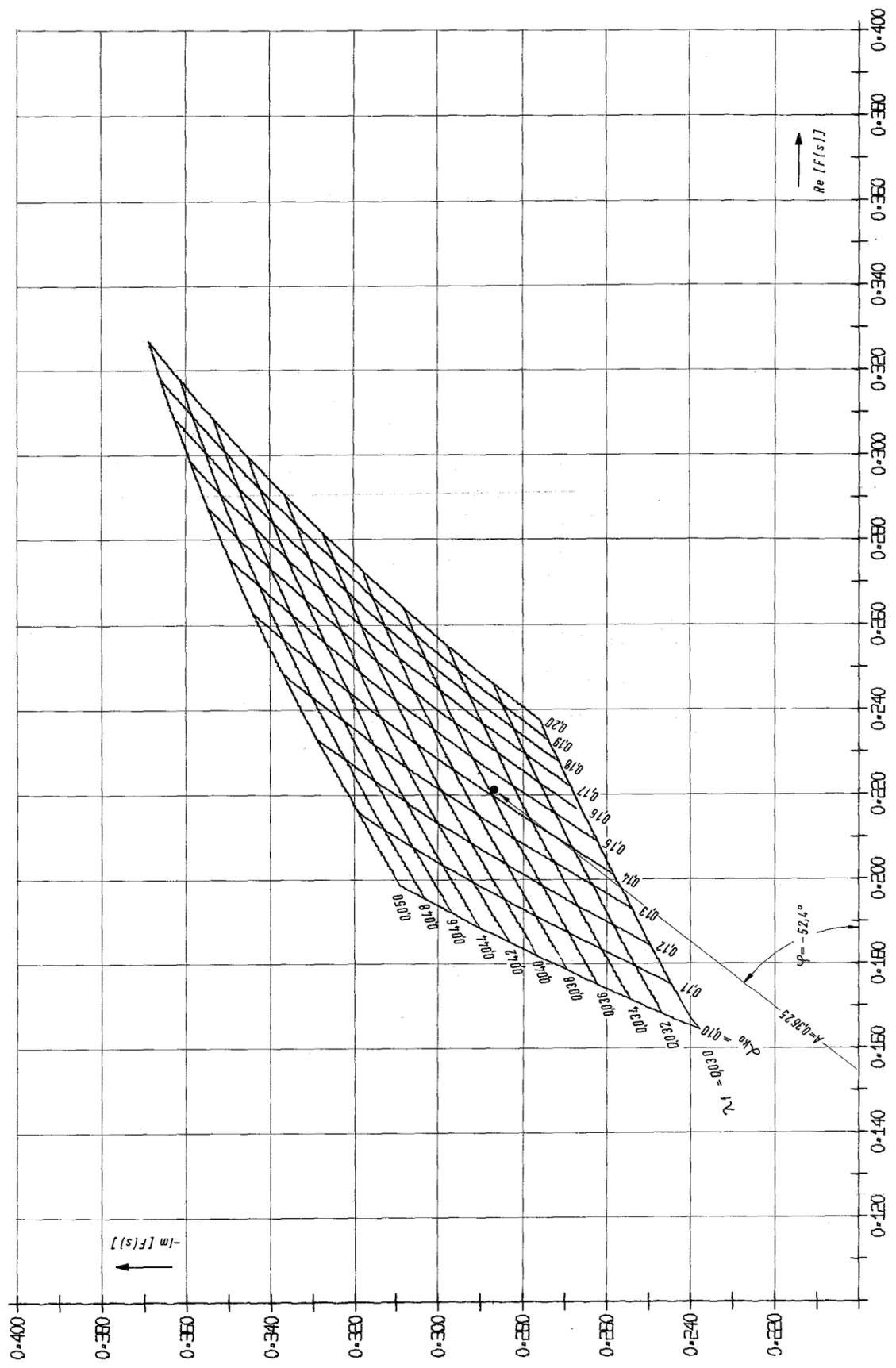


Abb. 0001 PARAMETERDARSTELLUNG DER UEBERTRAGUNGSFUNKTION $F(\lambda, \alpha)$, V. B 5/10

Abb. 15

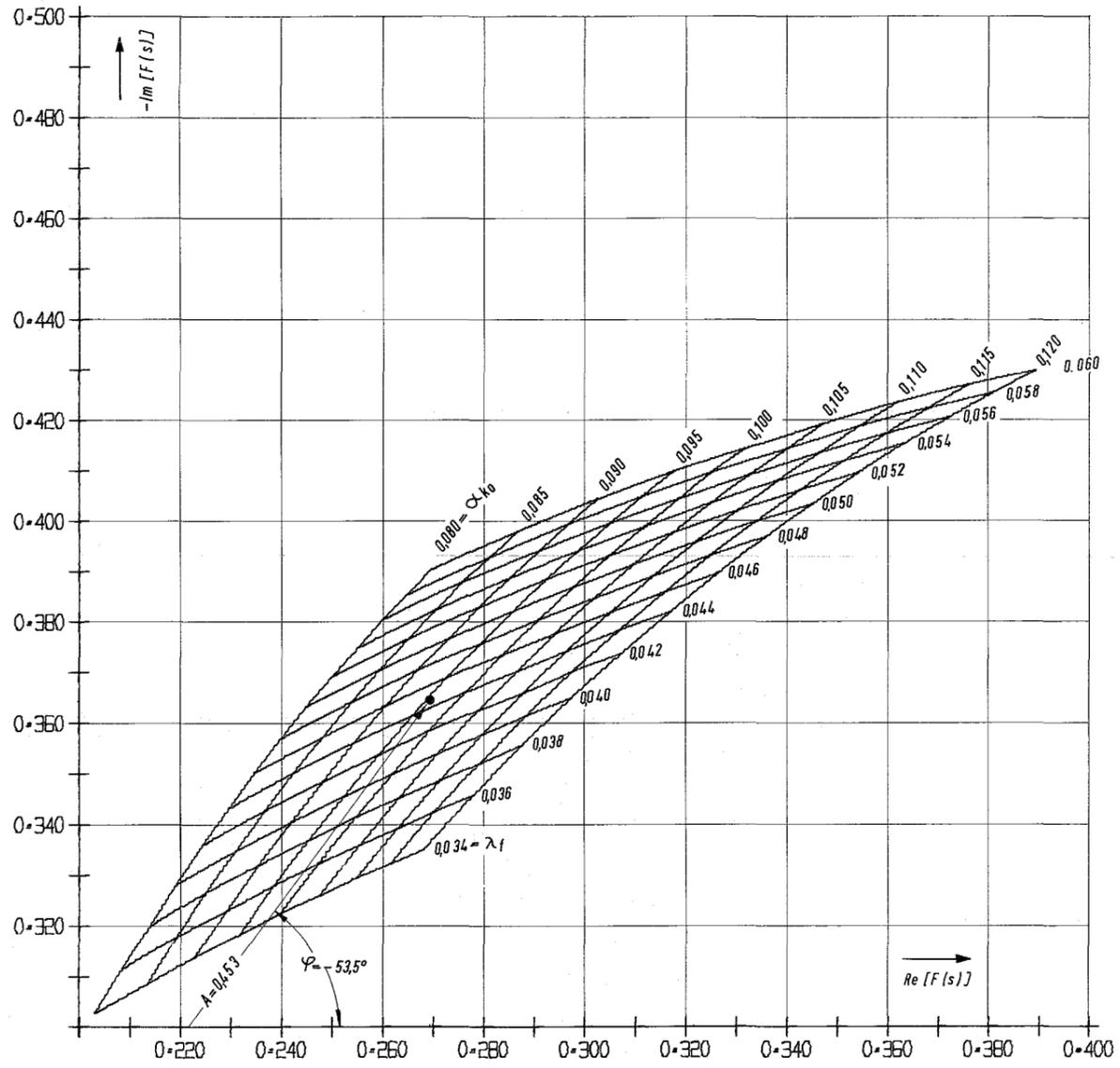


ABB. 0001 PARAMETERDARSTELLUNG DER UEBERTRAGUNGSFUNKTION $F(\lambda, \alpha)$; V. B5/15

Abb. 16

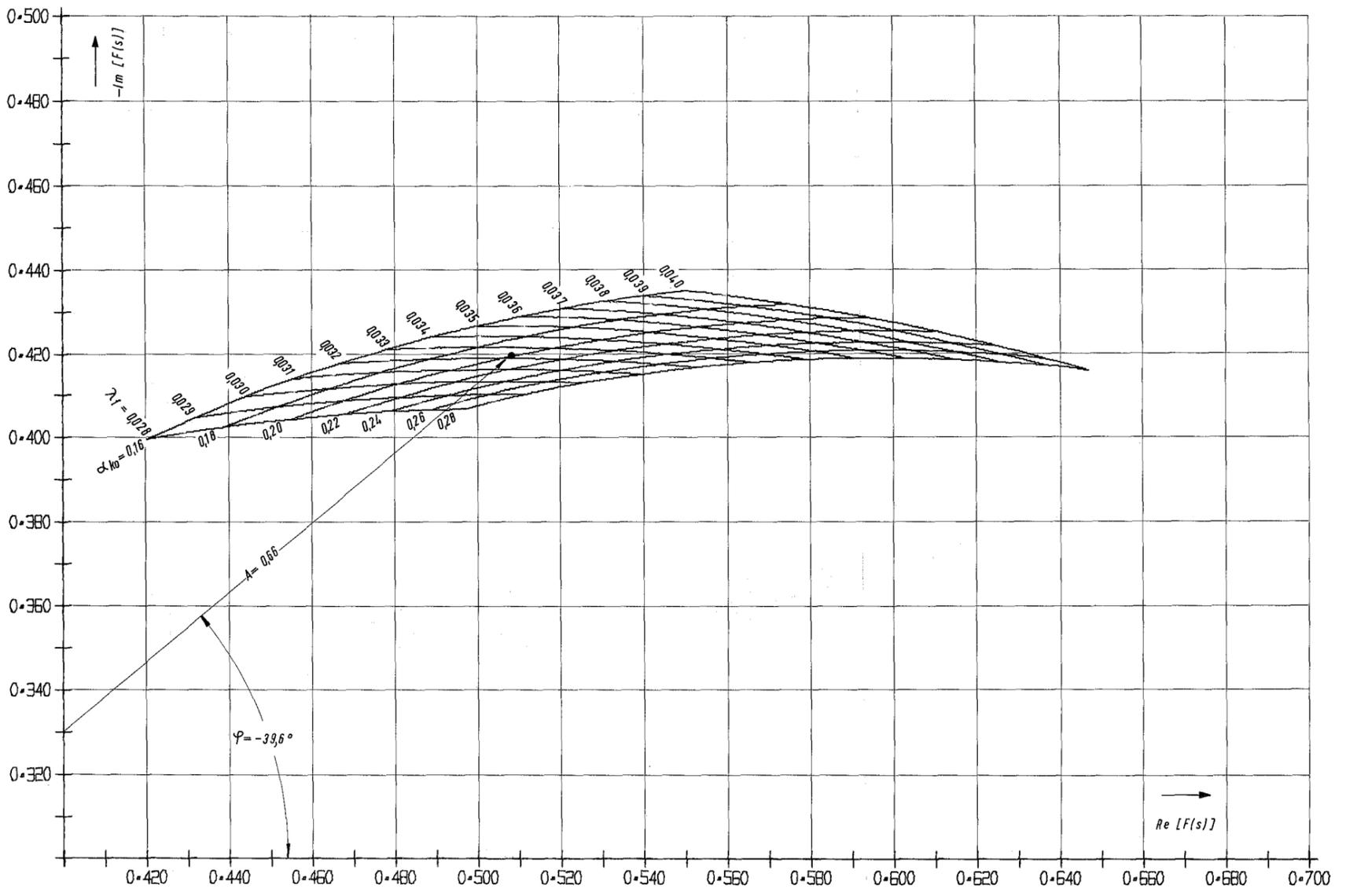


ABB. 0001 PARAMETERDARSTELLUNG DER UEBERTRAGUNGSFUNKTION $F(\lambda, \alpha)$, $V = 85/25$

Abb. 17

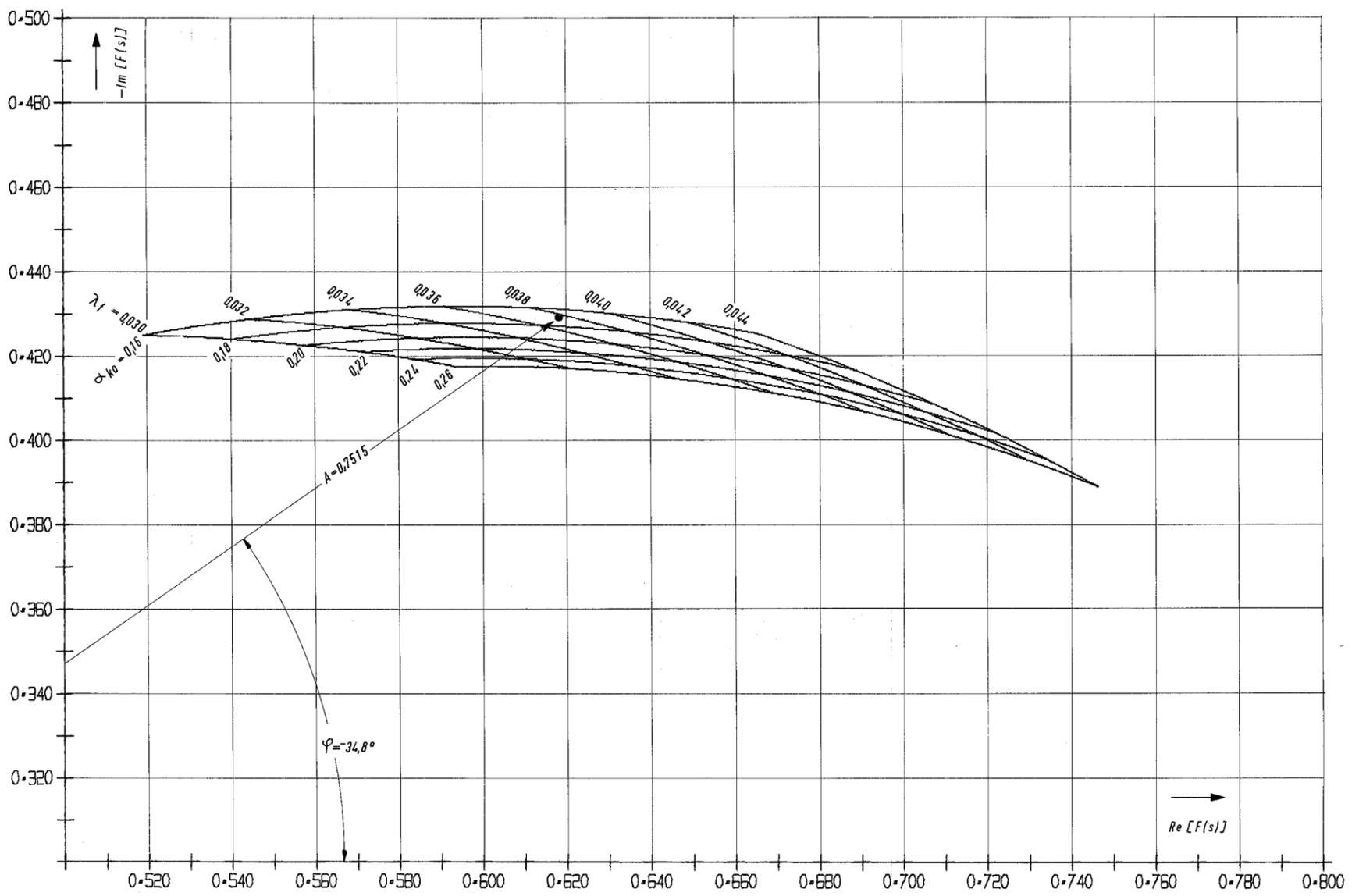


ABB. 0001. PARAMETERDARSTELLUNG DER UEBERTRAGUNGSFUNKTION $F(\lambda, \alpha)$, V. B 5/30

Abb. 18

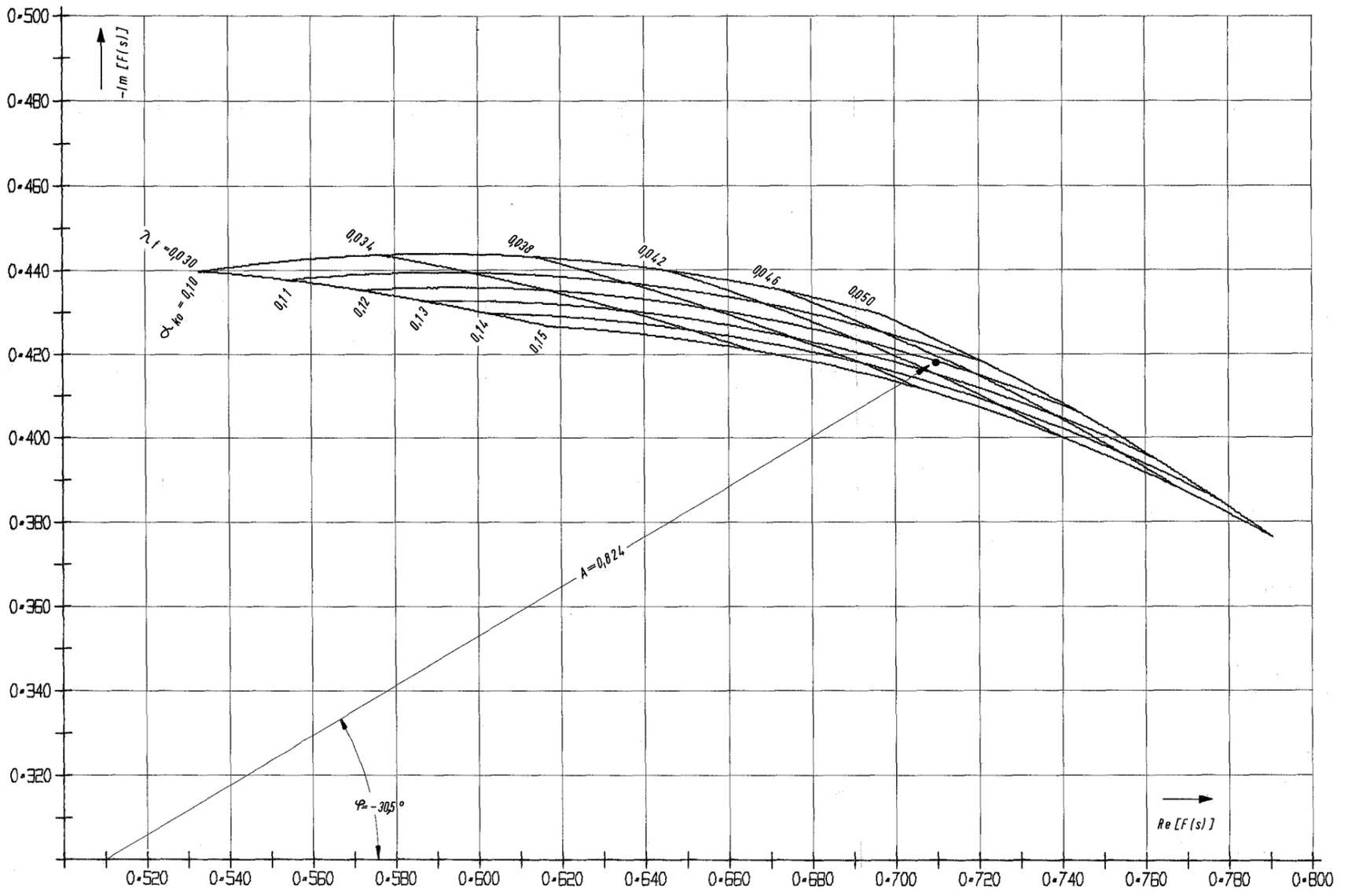
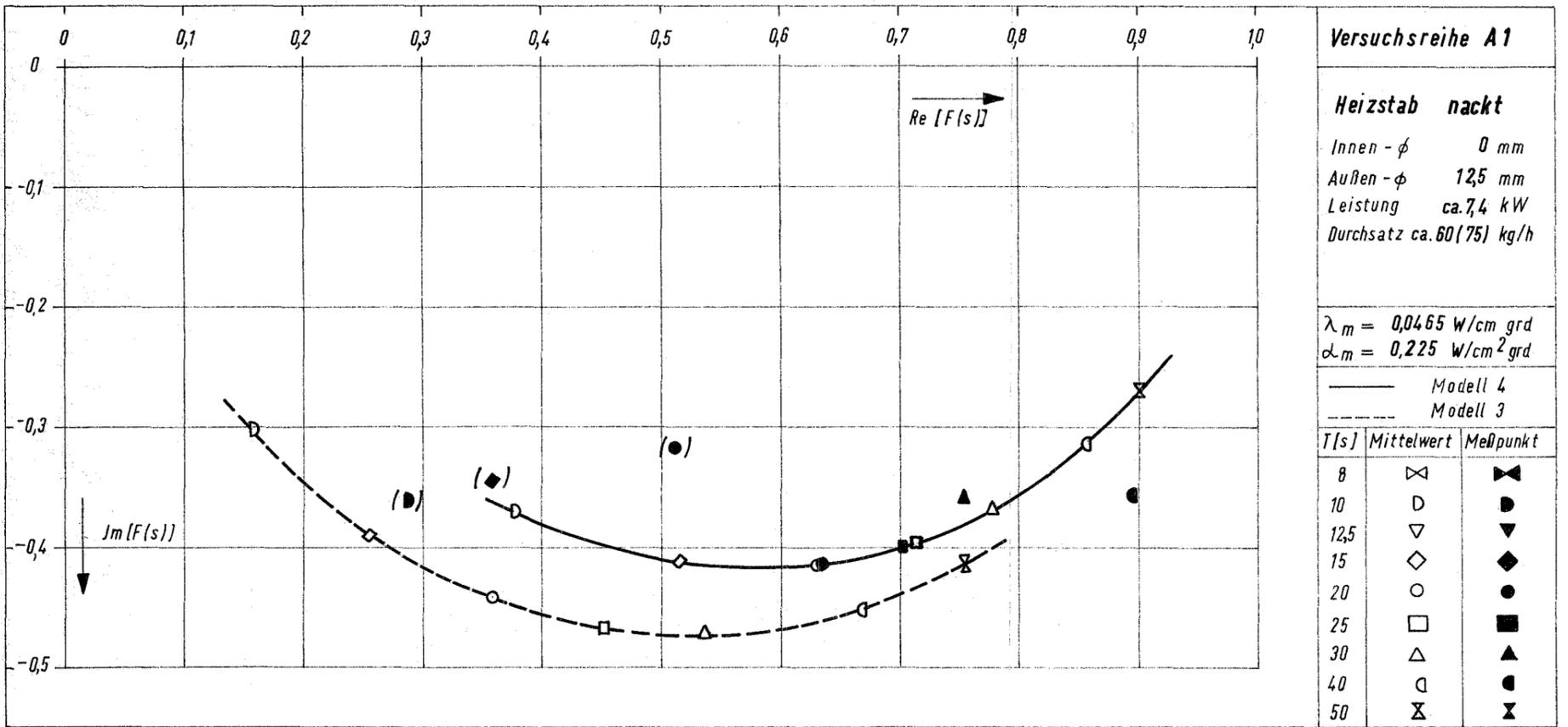


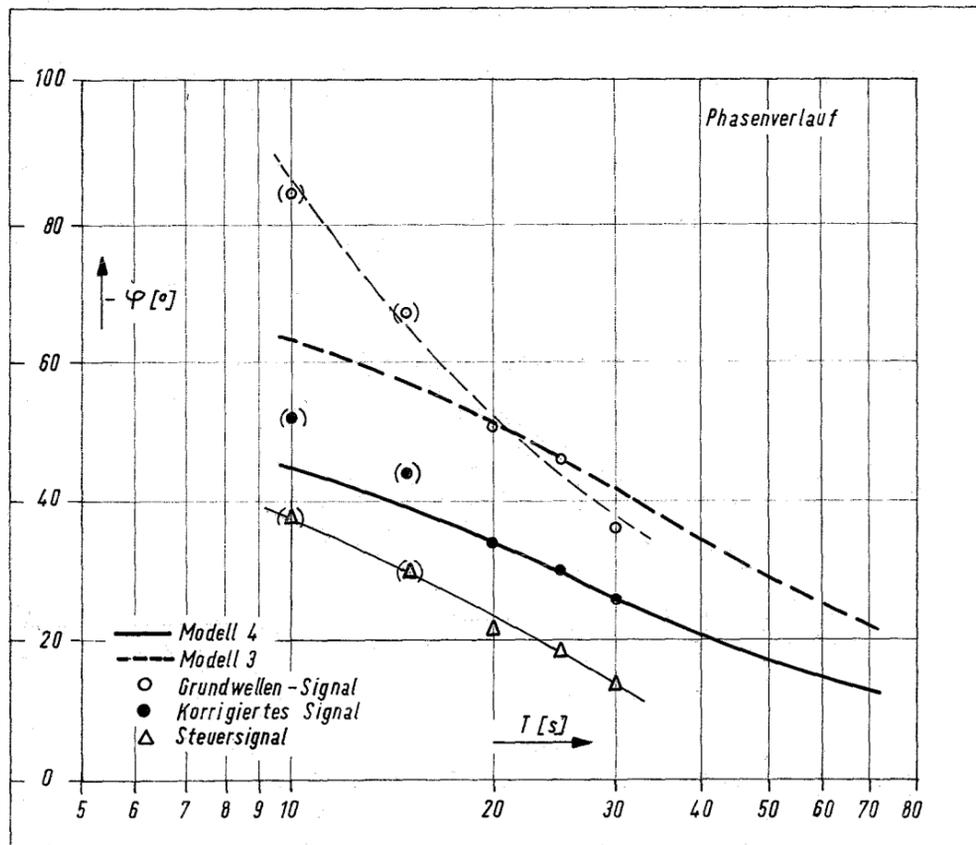
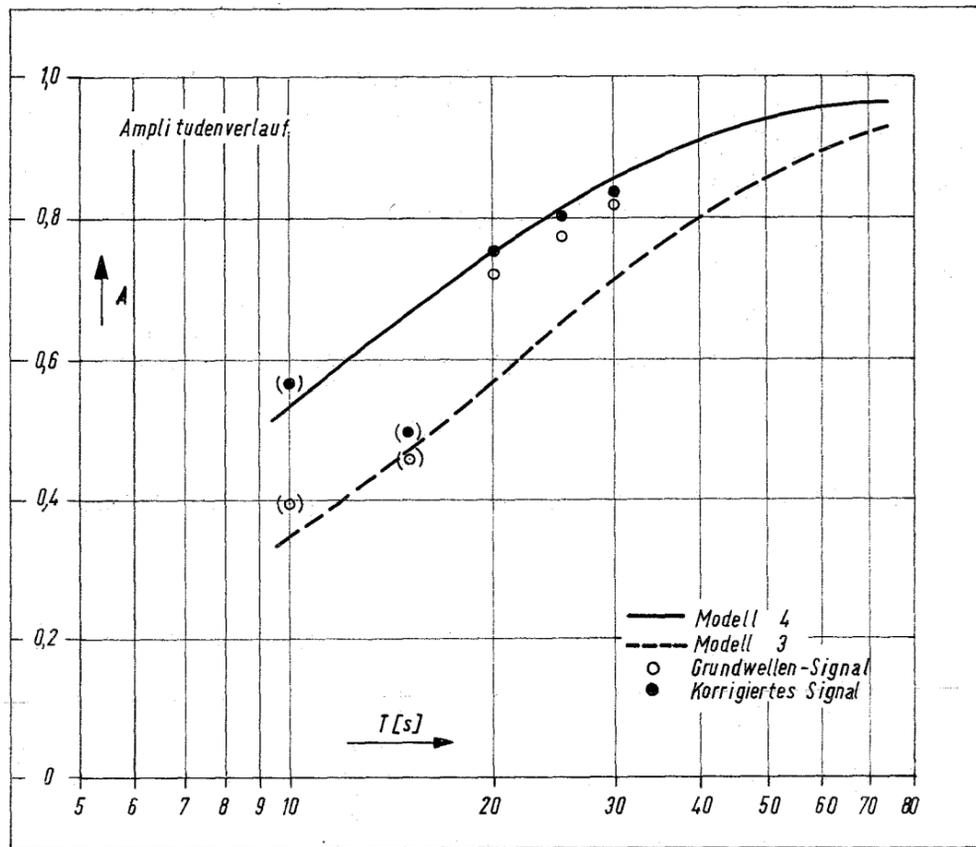
ABB. 0001 PARAMETERDARSTELLUNG DER UEBERTRAGUNGSFUNKTION $F(\lambda, \alpha)$, $V = B5/40$

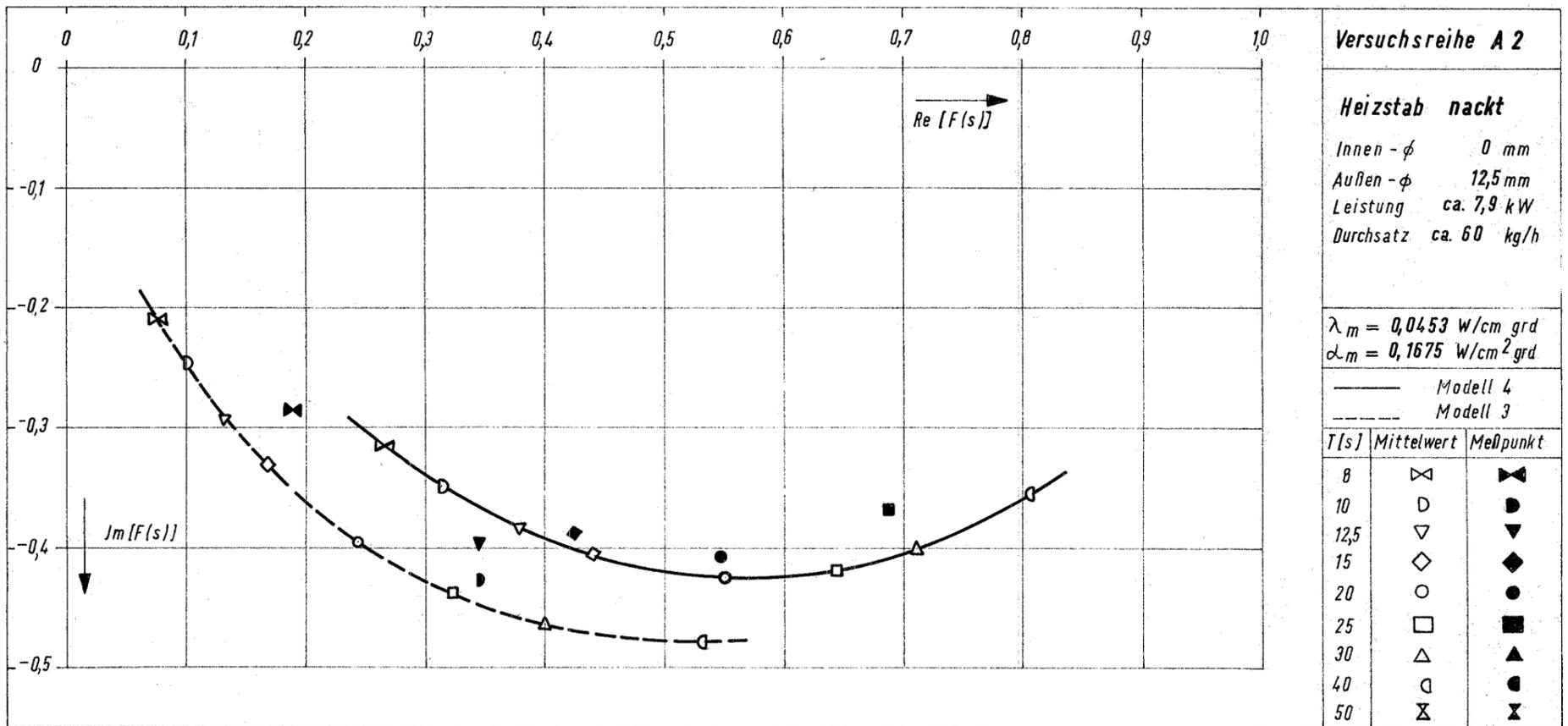
Abb. 19



Übertragungsfunktion $F(s)$ zwischen Kühlmitteldurchsatz μ und Leistung P

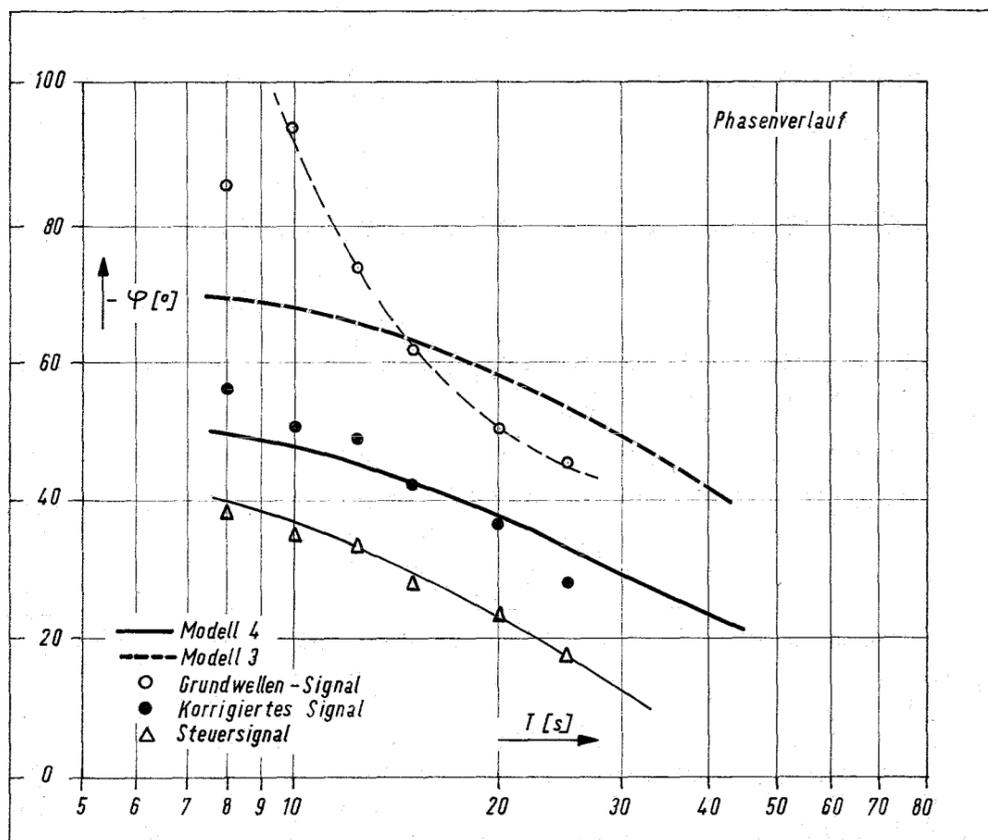
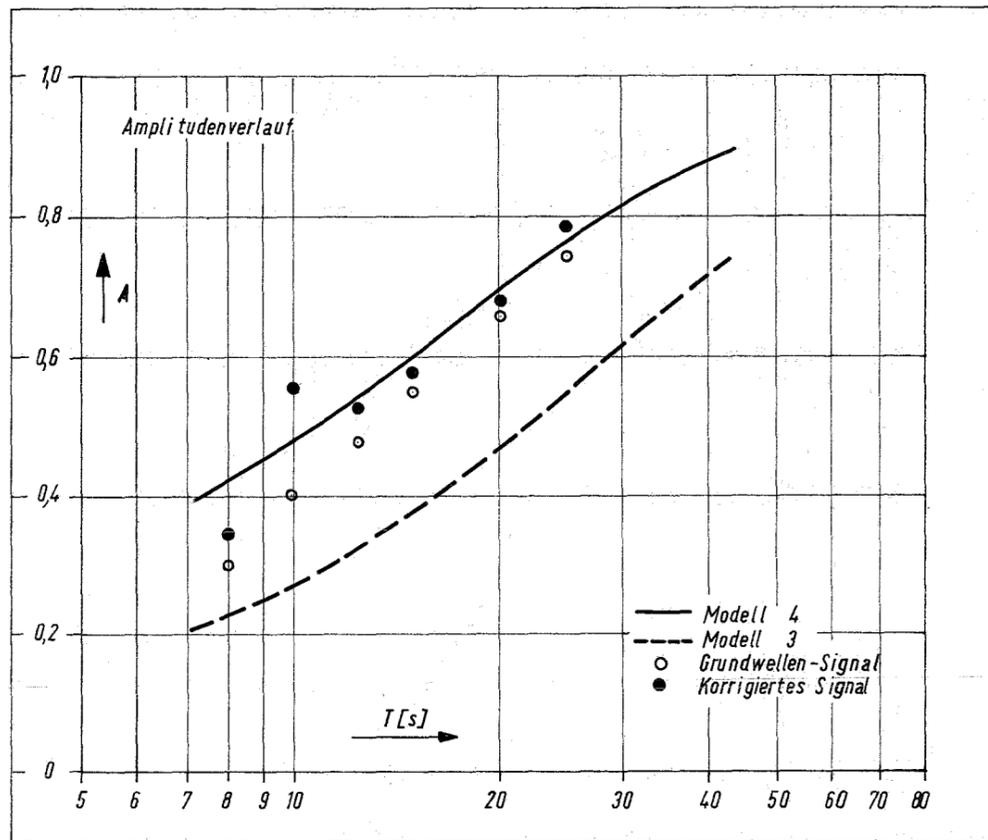
Abb. 20

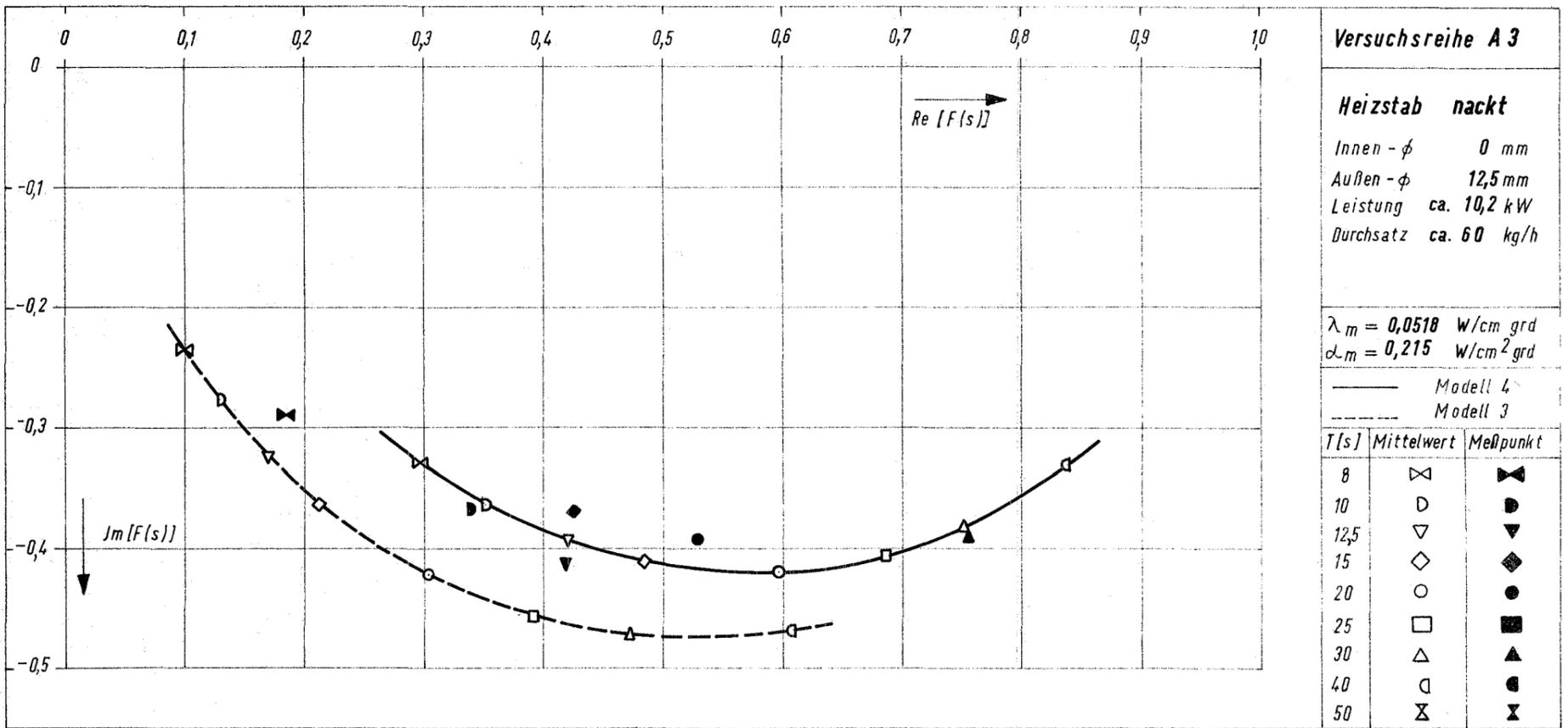




Übertragungsfunktion $F(s)$ zwischen Kühlmitteldurchsatz μ und Leistung P

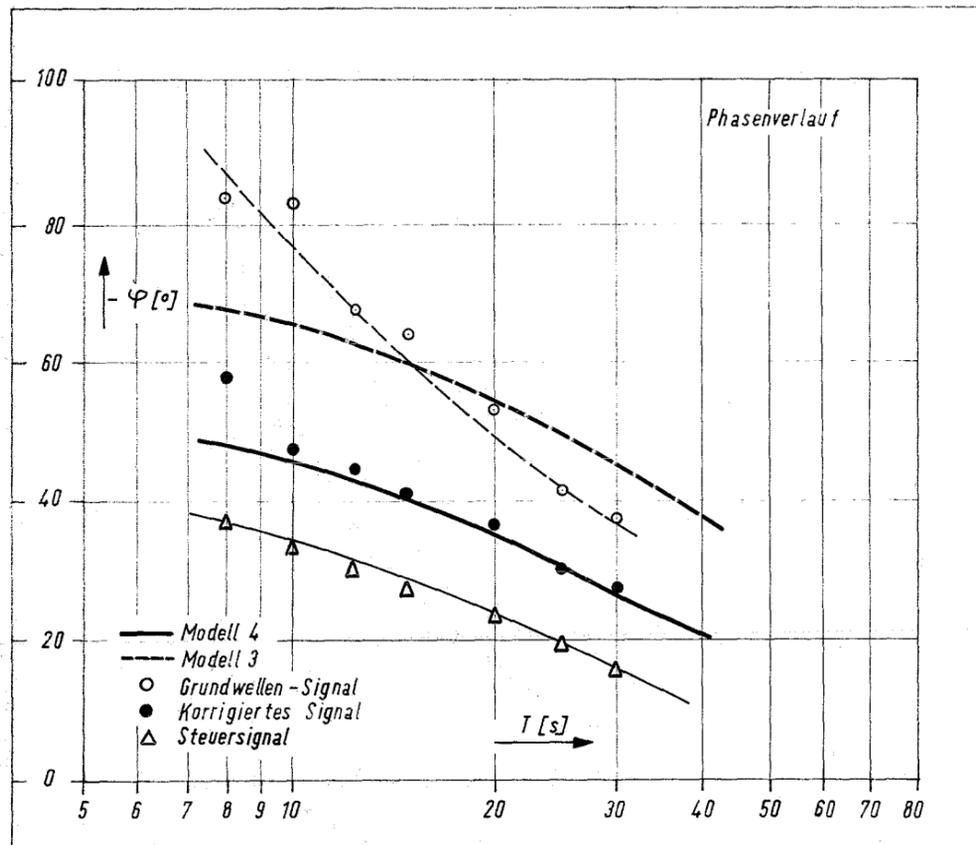
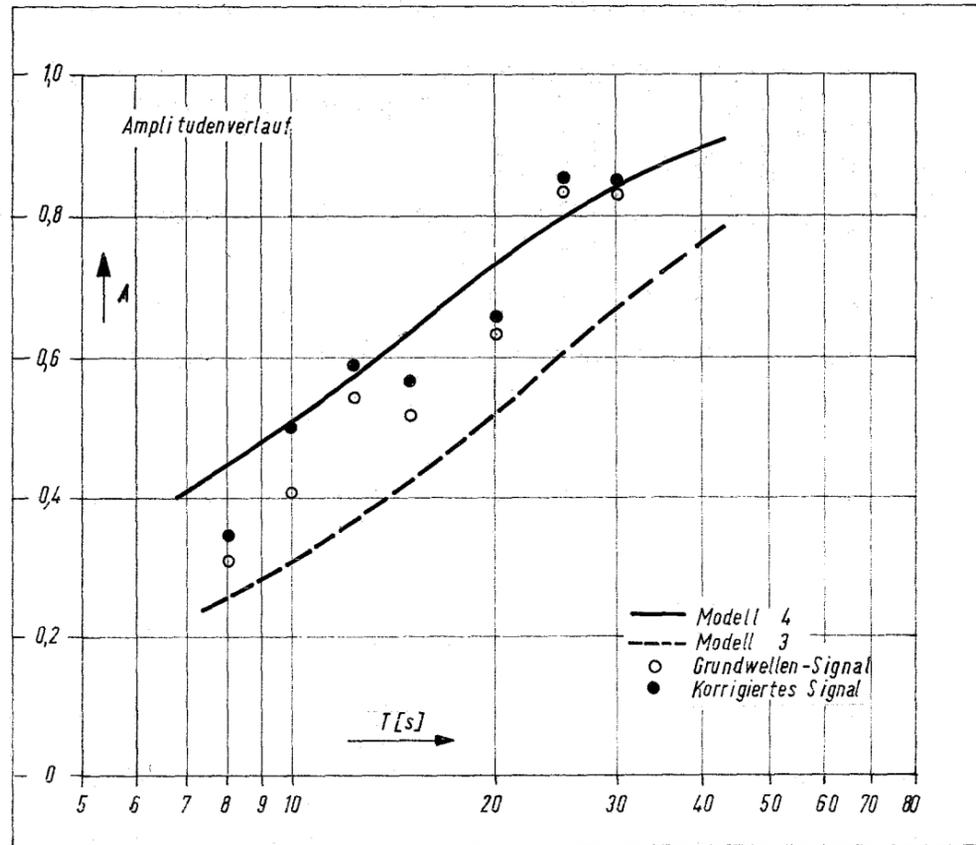
Abb. 22

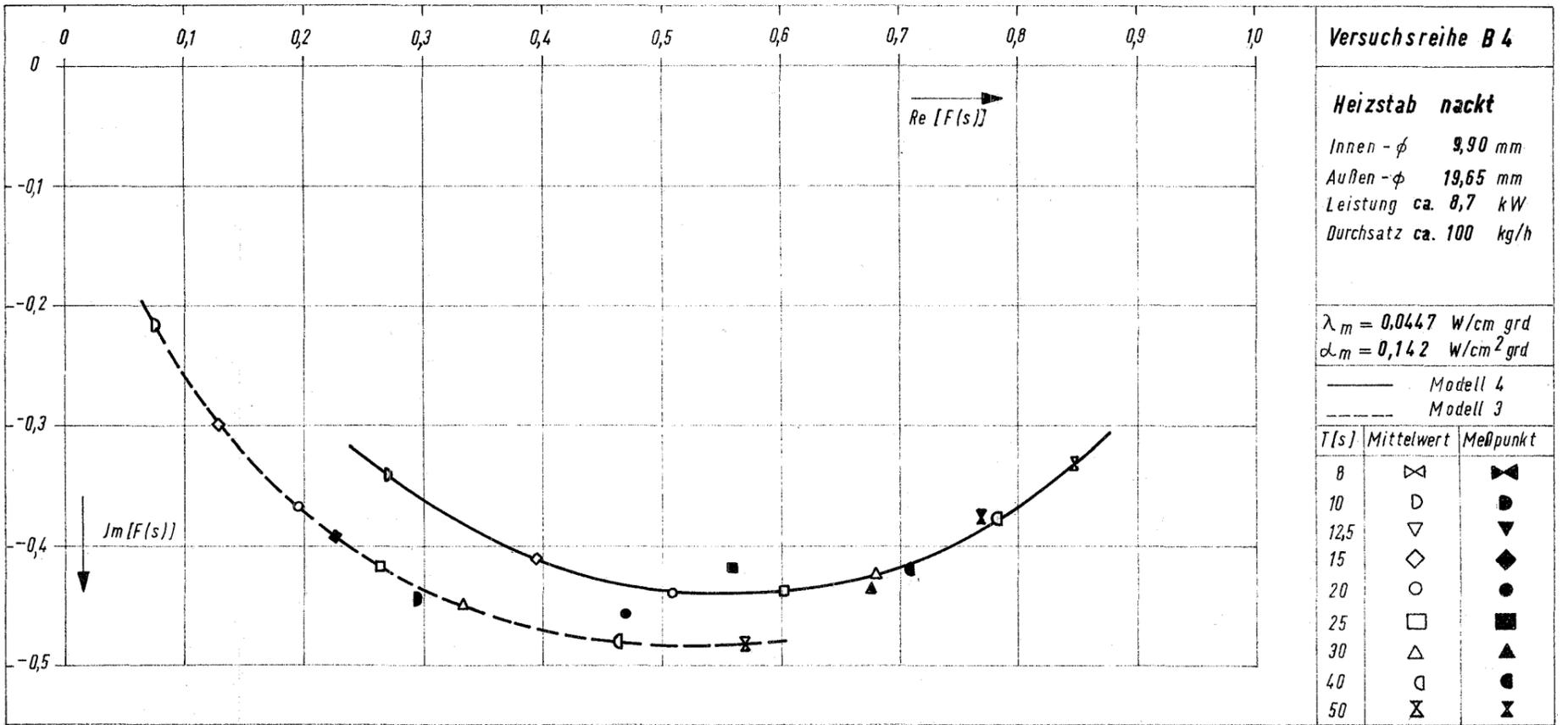




Übertragungsfunktion $F(s)$ zwischen Kühlmitteldurchsatz μ und Leistung P

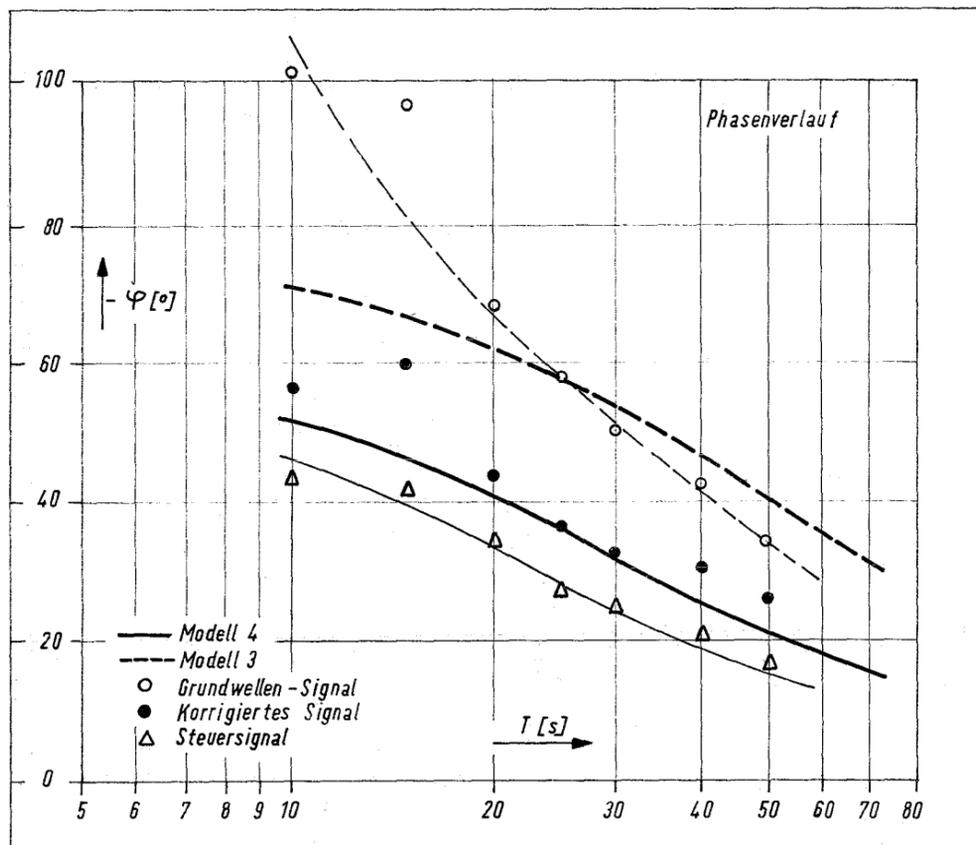
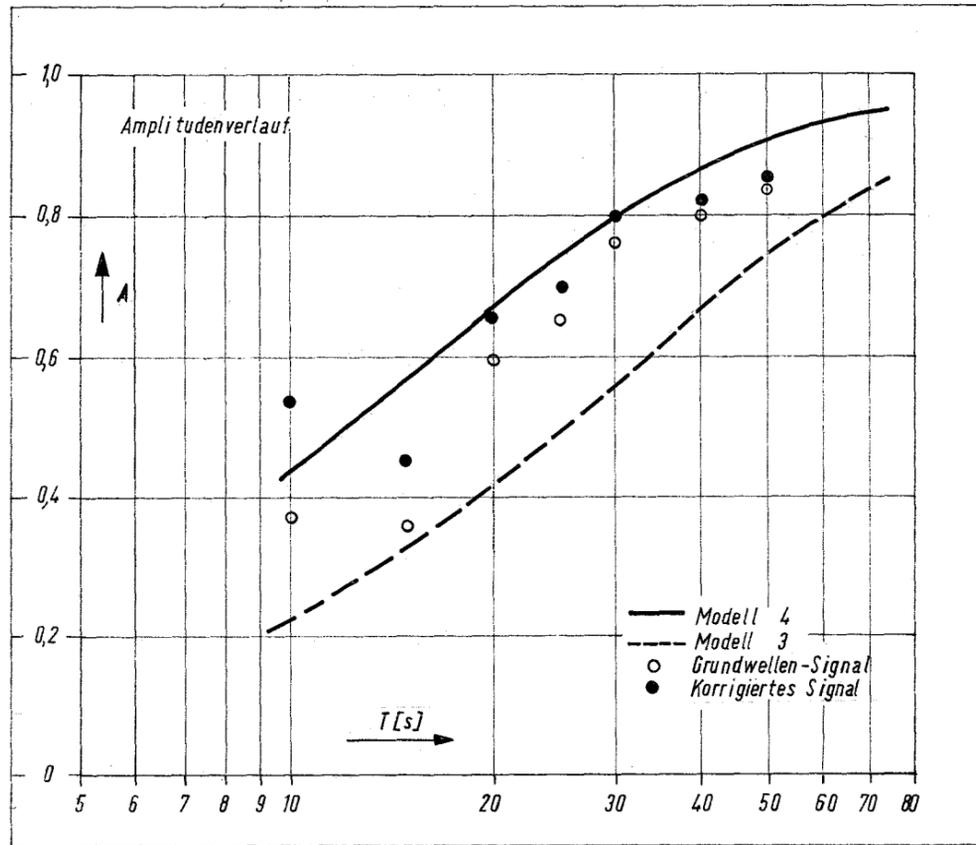
Abb. 24

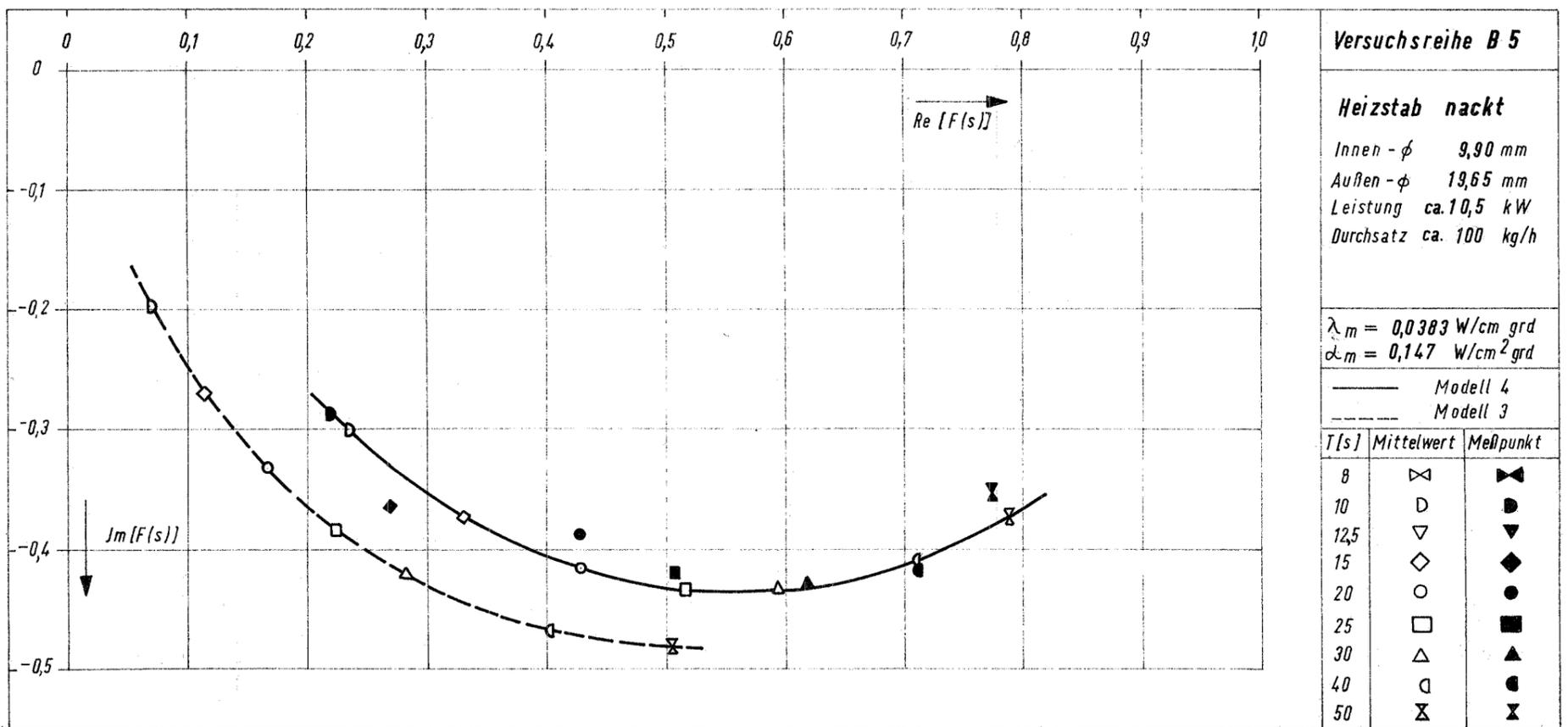




Übertragungsfunktion $F(s)$ zwischen Kühlmitteldurchsatz μ und Leistung P

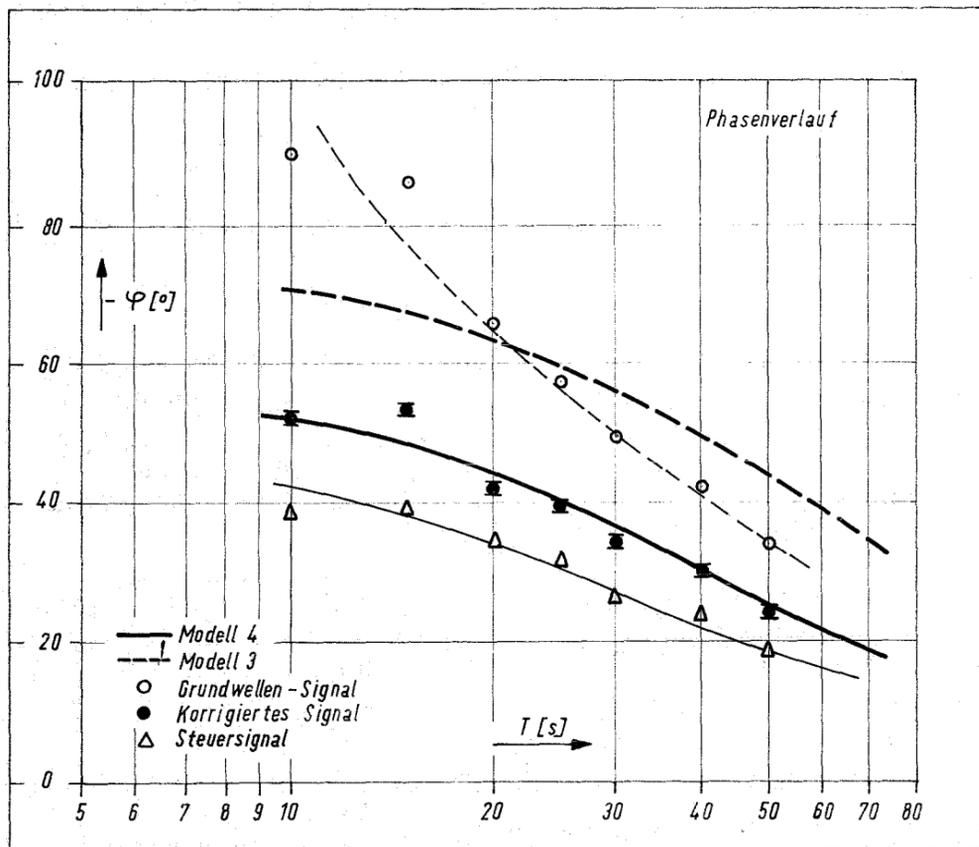
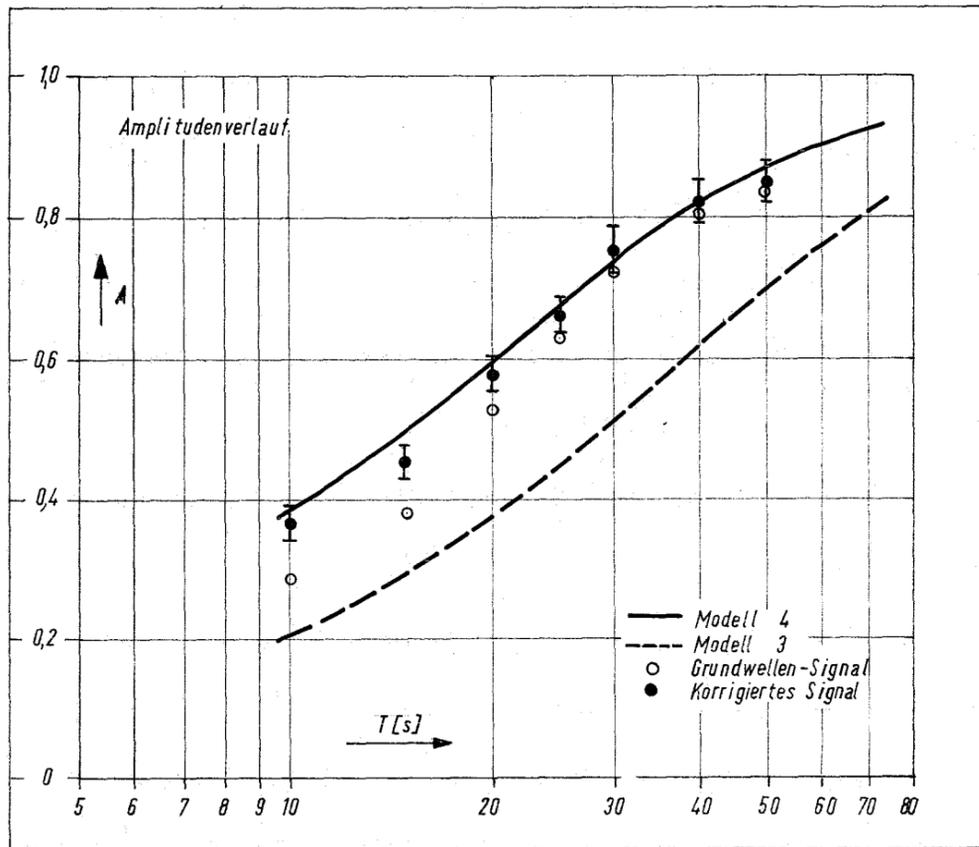
Abb. 26

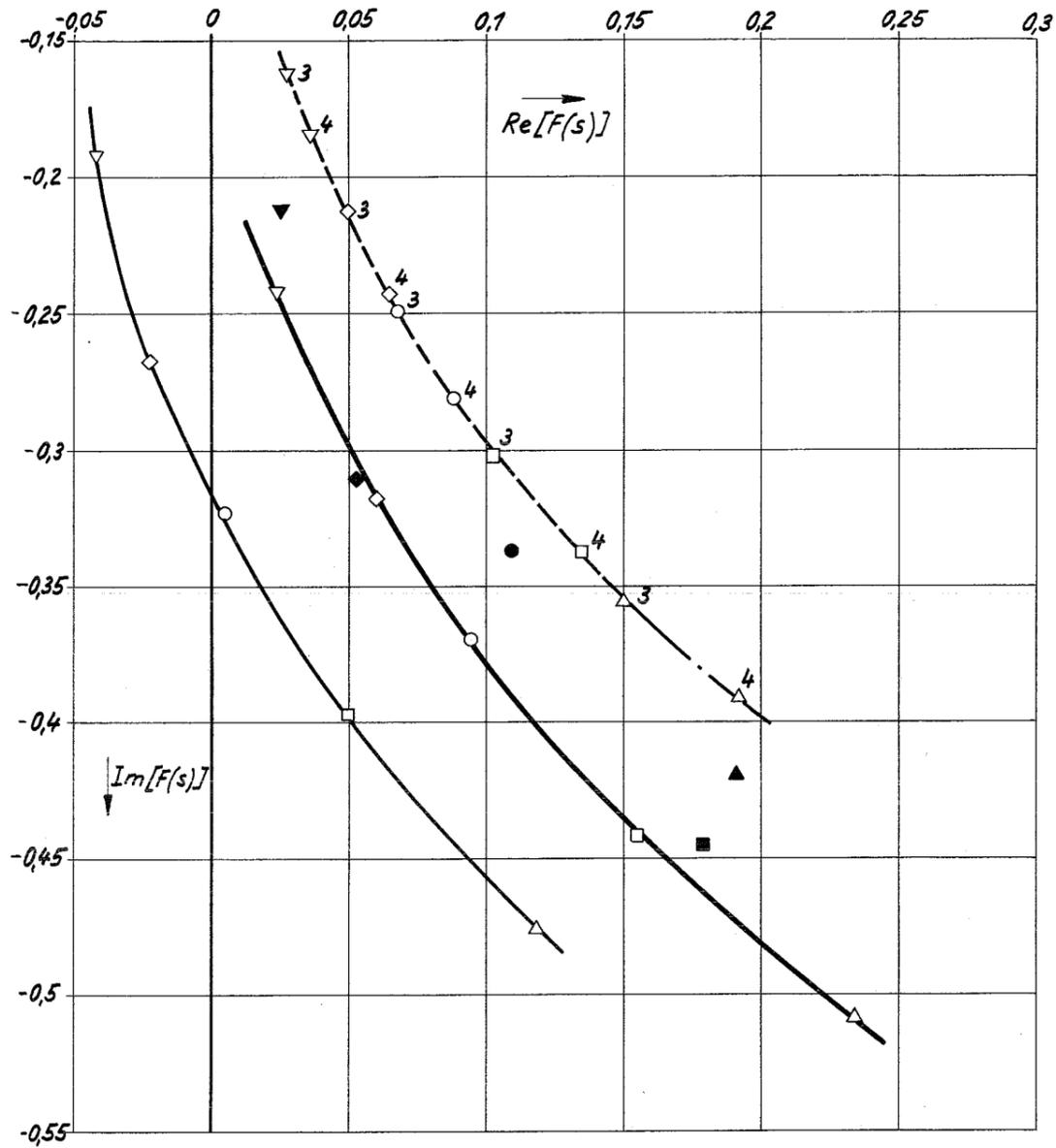




Übertragungsfunktion $F(s)$ zwischen Kühlmitteldurchsatz μ und Leistung P

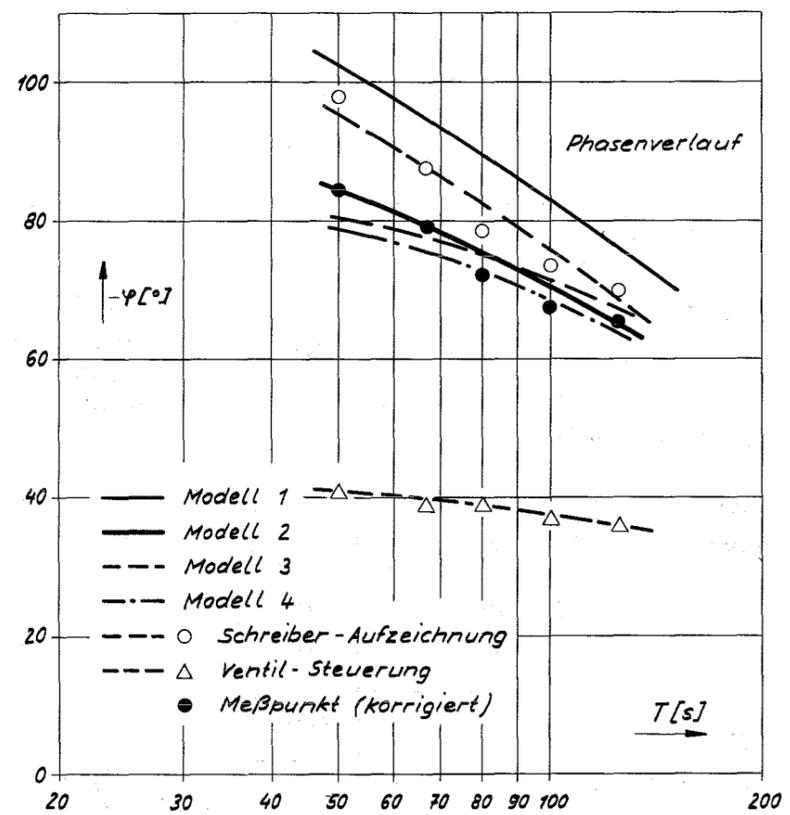
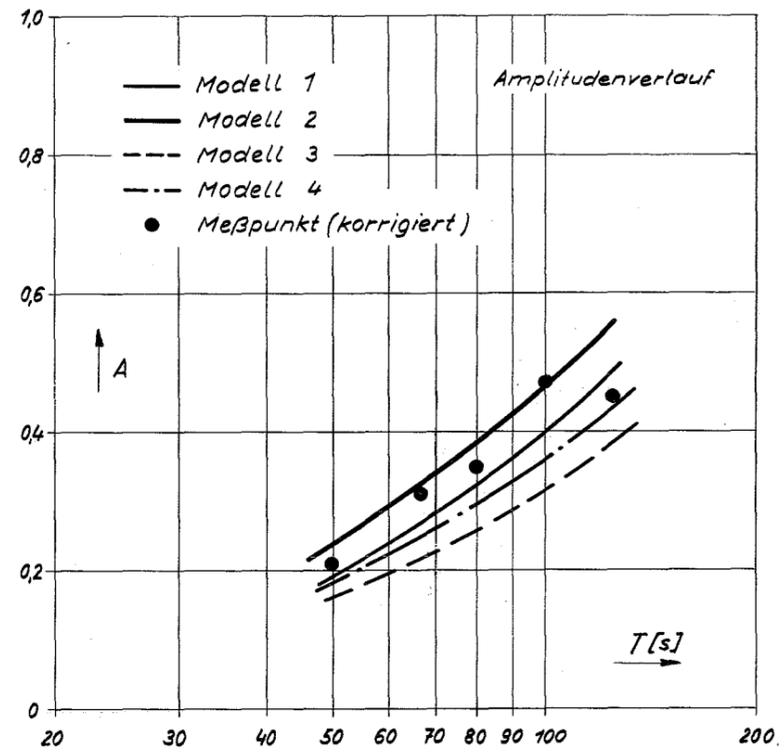
Abb. 28

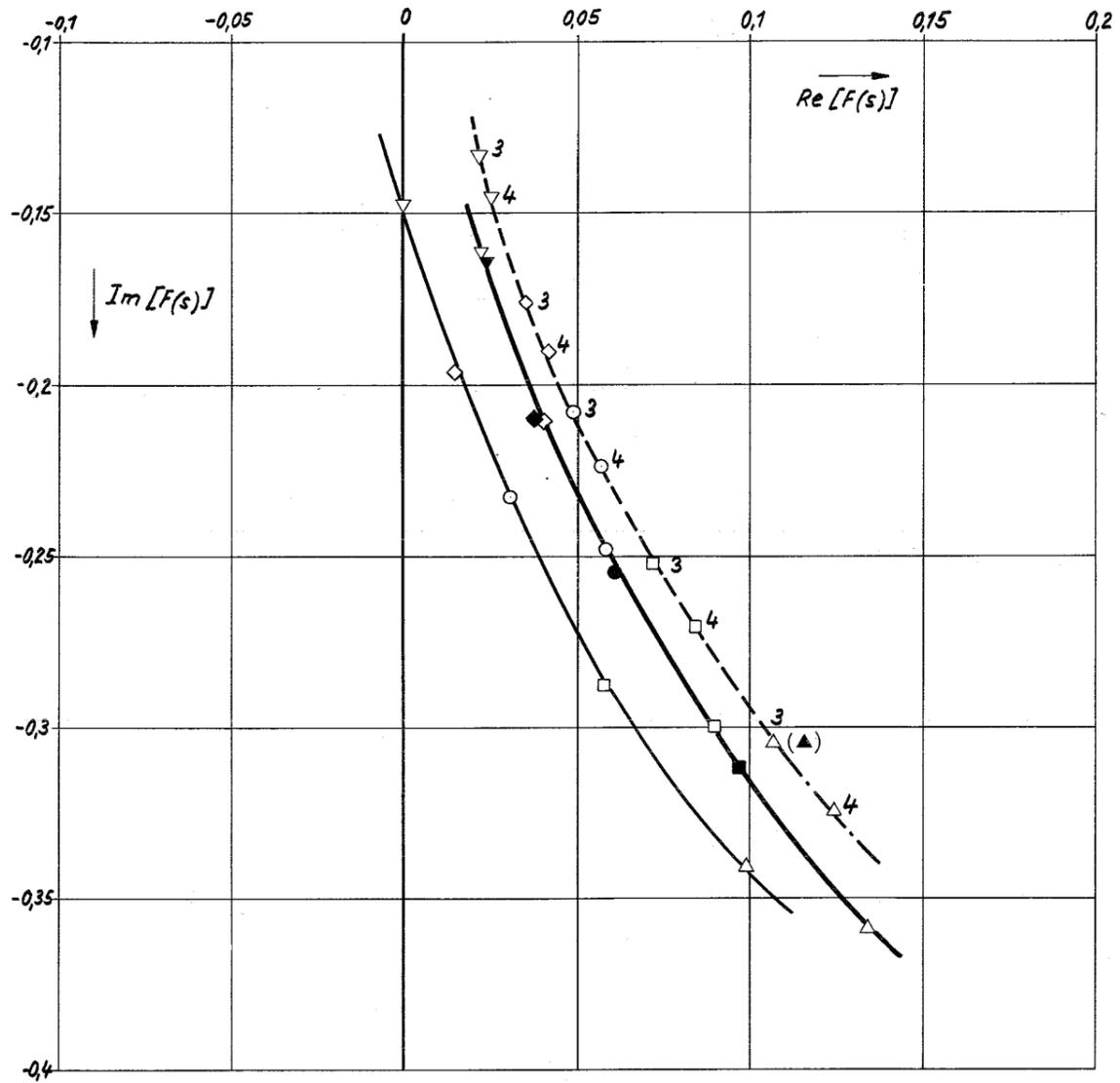




Versuchsreihe C6		——— Modell 1 - - - Modell 2 ····· Modell 3 - · - · Modell 4	
Heizstab: Innen- ϕ 0 Außen- ϕ 12,5 mm		T [s]	Mittelwert
Hüllrohr: Innen- ϕ 15,4 mm Außen- ϕ 17,4 mm		50	▼
Leistung ca. 3,6 kW Durchsatz ca. 100 kg/h		66,6	◆
$\lambda_f = 0,04 \text{ W/cm grad (angenommen)}$ $\alpha_g = 0,0283 \text{ W/cm}^2 \text{ grad}$		80	●
		100	■
		125	▲
Abb. 30			

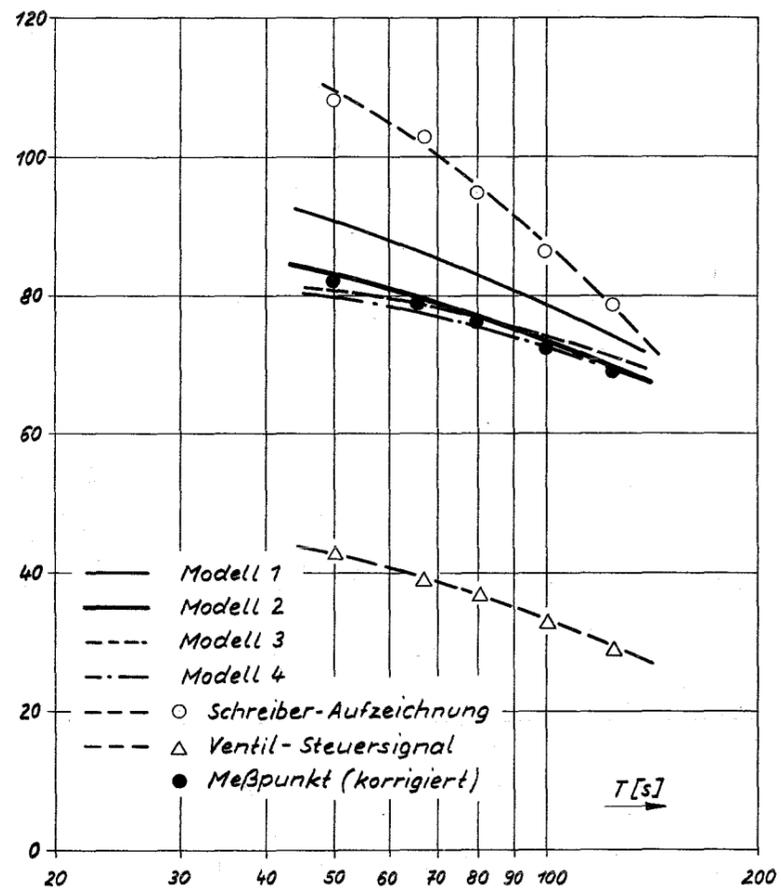
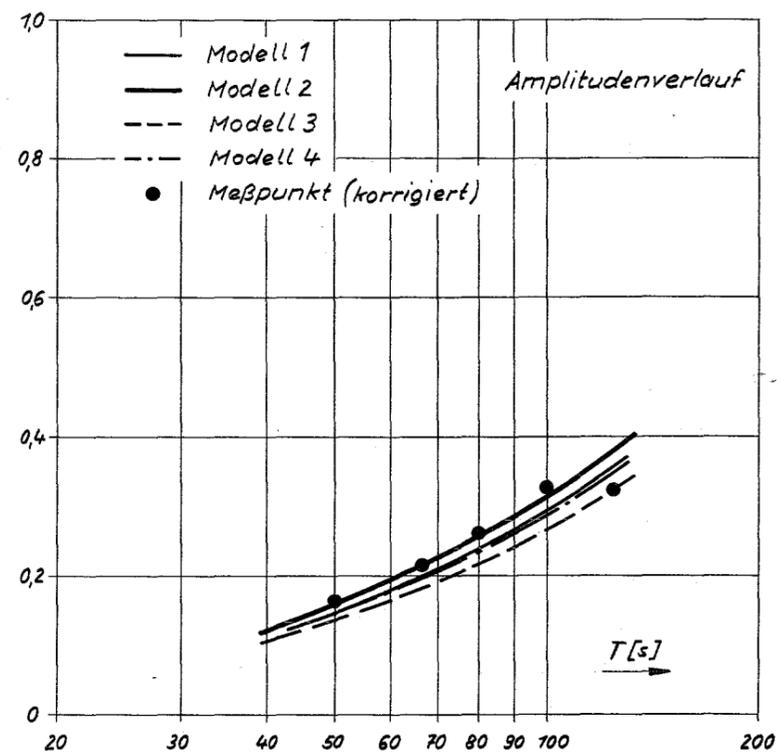
Übertragungsfunktion $F(s)$ zwischen Kühlmitteldurchsatz μ und Leistung P .

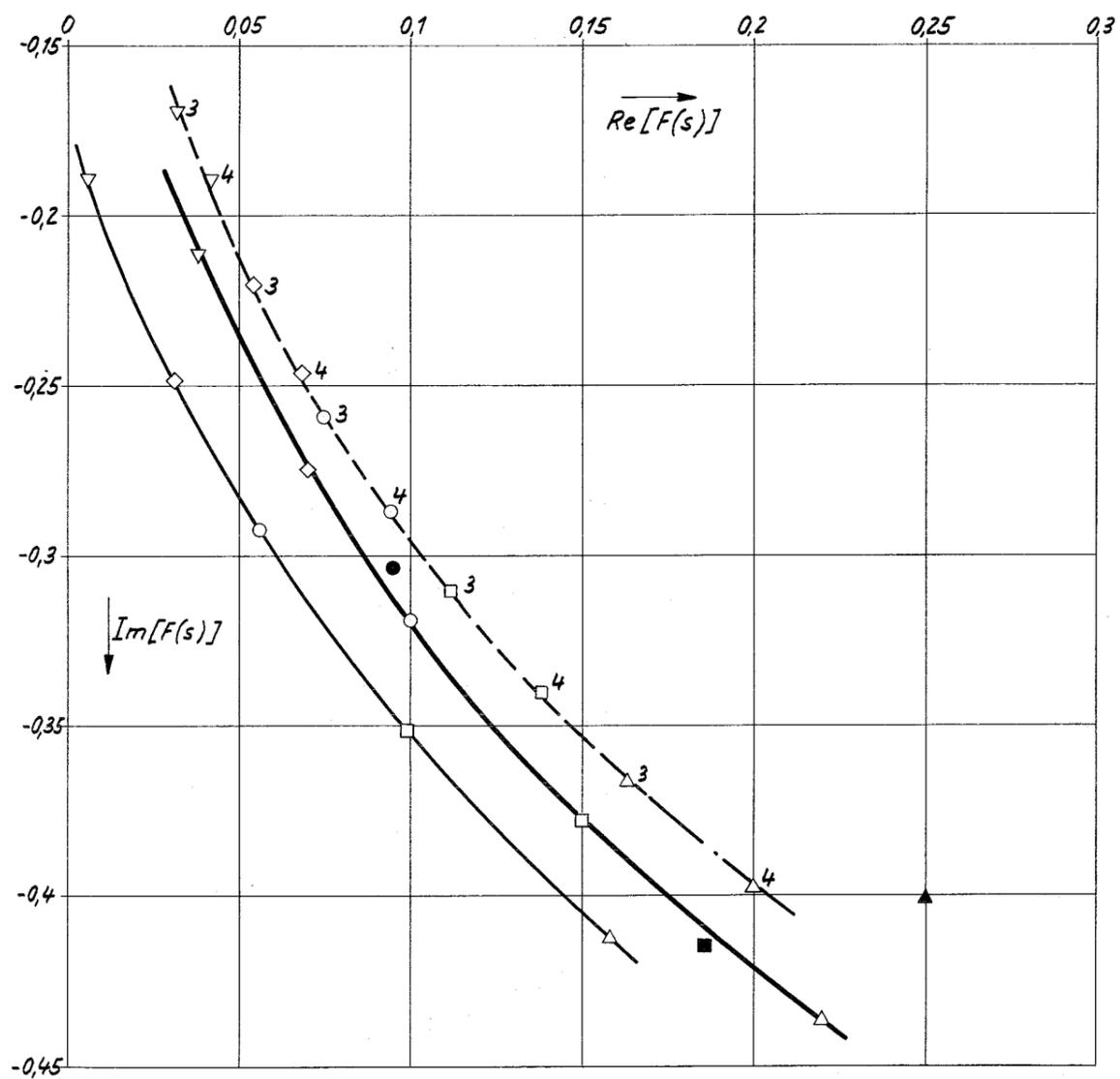




Versuchsreihe D7																					
Heizstab: Innen- ϕ 9,9 mm Außen- ϕ 19,6 mm																					
Hüllrohr: Innen- ϕ 21,0 mm Außen- ϕ 22,0 mm																					
Leistung ca. 3,25 KW Durchsatz ca. 72,5 kg/h		<table border="1"> <thead> <tr> <th>T [s]</th> <th>Mittelwert</th> <th>Meßpunkt</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>50</td> <td>▽</td> <td>▼</td> </tr> <tr> <td>66,6</td> <td>◇</td> <td>◆</td> </tr> <tr> <td>80</td> <td>○</td> <td>●</td> </tr> <tr> <td>100</td> <td>□</td> <td>■</td> </tr> <tr> <td>125</td> <td>△</td> <td>▲</td> </tr> </tbody> </table>	T [s]	Mittelwert	Meßpunkt	50	▽	▼	66,6	◇	◆	80	○	●	100	□	■	125	△	▲	
T [s]	Mittelwert	Meßpunkt																			
50	▽	▼																			
66,6	◇	◆																			
80	○	●																			
100	□	■																			
125	△	▲																			
$\lambda_f = 0,0215 \text{ W/cm grad}$ $\alpha_g = 0,0200 \text{ W/cm}^2 \text{ grad}$		Abb. 32																			

Übertragungsfunktion $F(s)$ zwischen Kühlmitteldurchsatz μ und Leistung P .

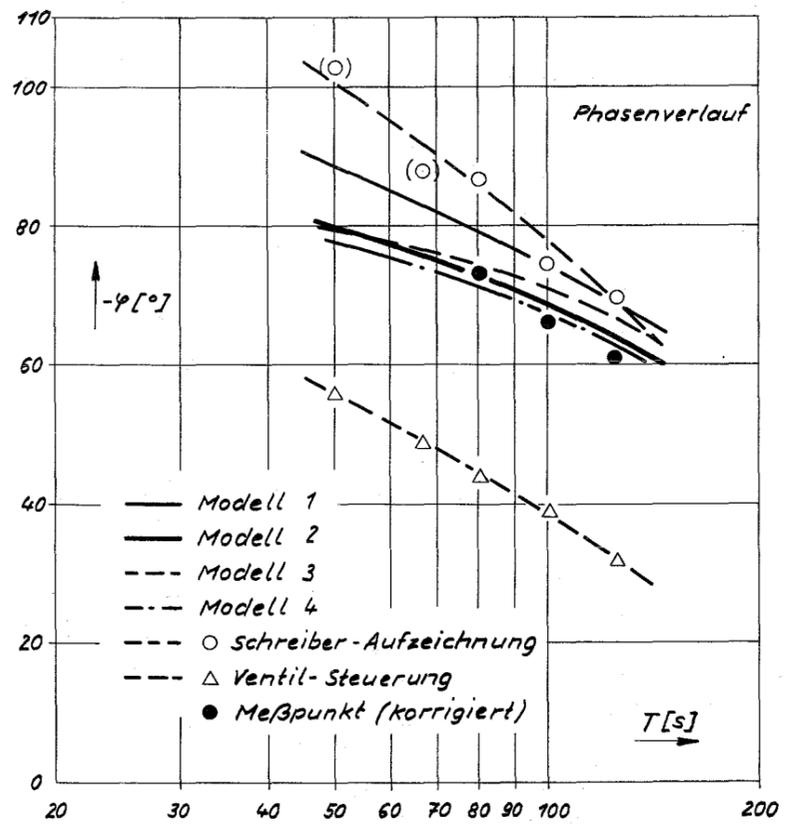
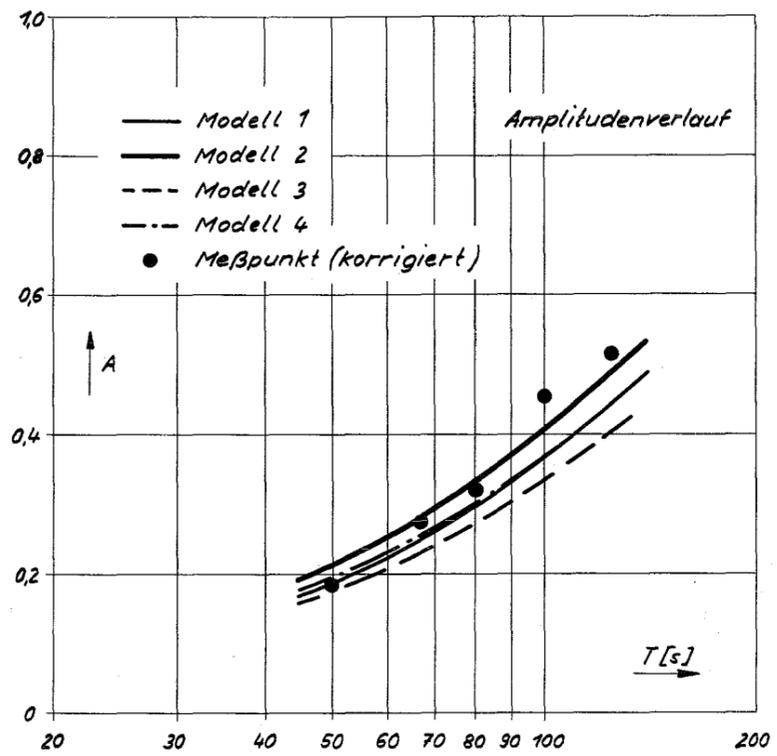


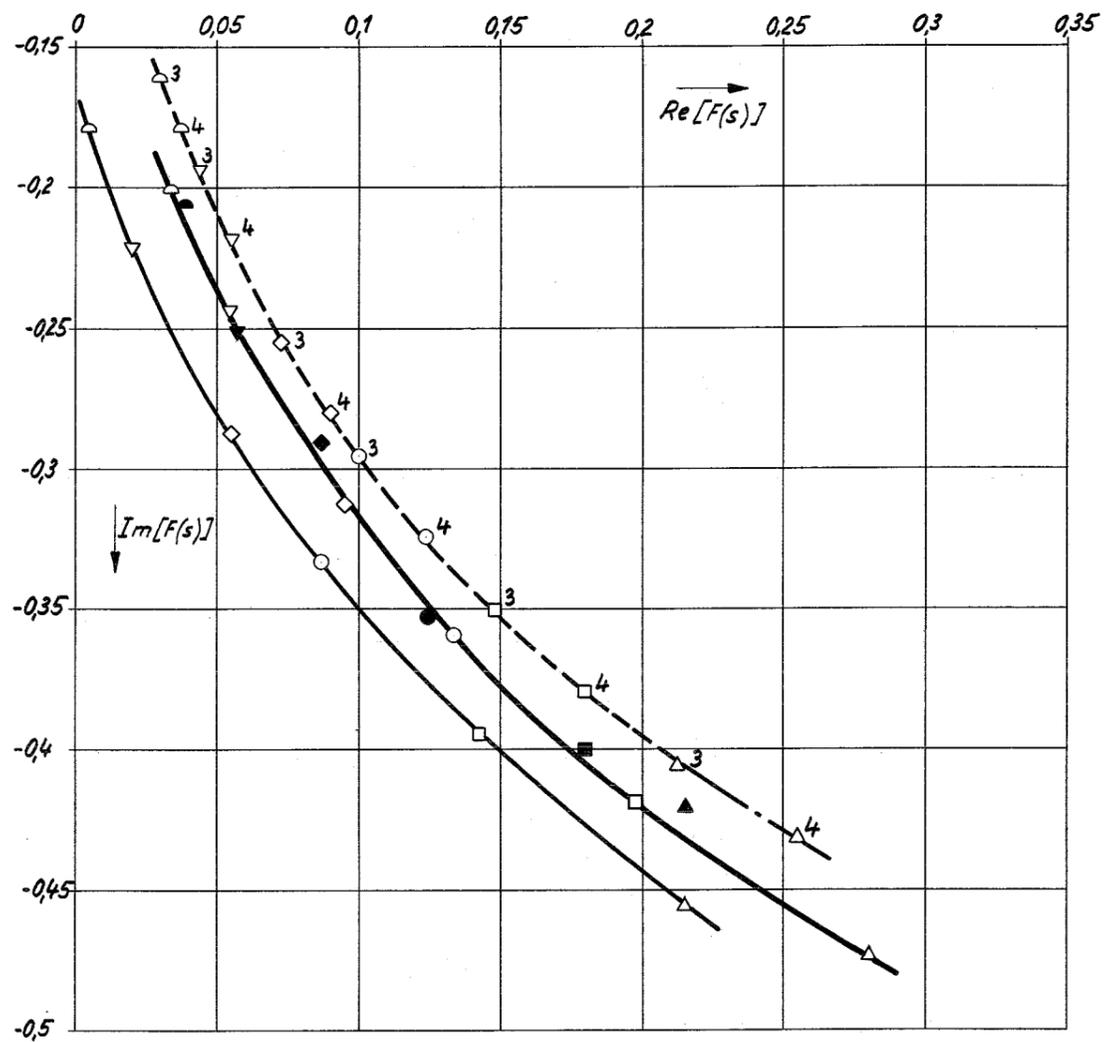


Versuchsreihe D8		—	Modell 1
Heizstab: Innen- ϕ 9,9 mm Außen- ϕ 19,6 mm		—	Modell 2
Hüllrohr: Innen- ϕ 21,0 mm Außen- ϕ 22,0 mm		- - - 3	Modell 3
Leistung ca. 6 kW		- . - 4	Modell 4
Durchsatz ca. 72,5 kg/h		T [s]	Mittelwert
$\lambda_f = 0,034 \text{ W/cm grad}$		50	▼
$\alpha_g = 0,030 \text{ W/cm}^2 \text{ grad}$		66,6	◆
		80	●
		100	□
		125	△
			▲

Abb. 34

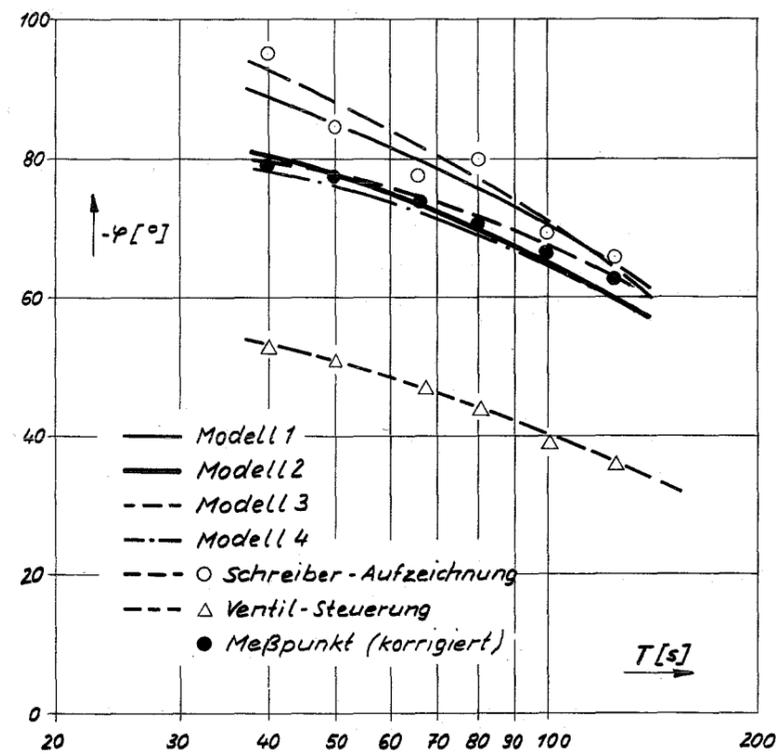
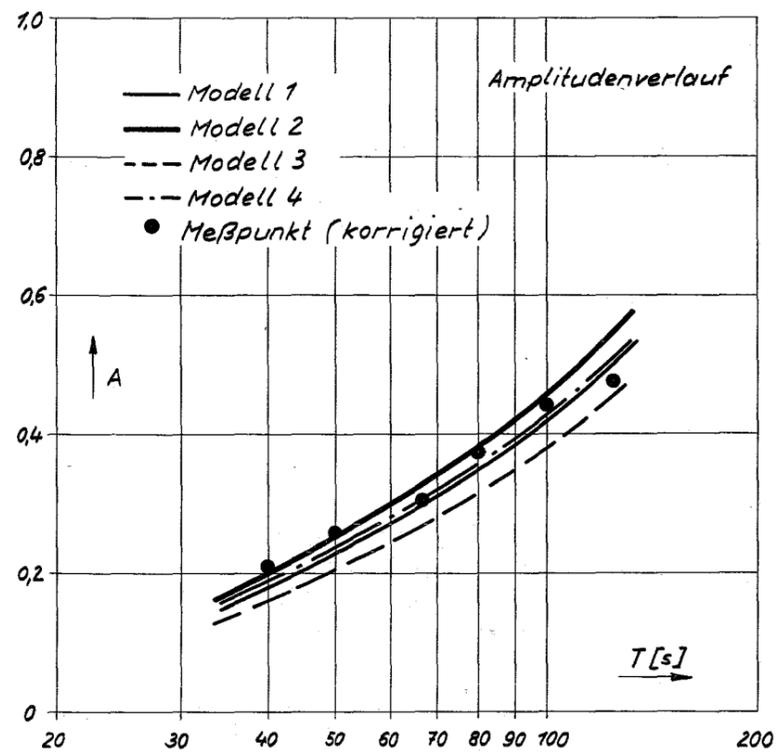
Übertragungsfunktion $F(s)$ zwischen Kühlmitteldurchsatz μ und Leistung P .





Versuchsreihe D9		<ul style="list-style-type: none"> — Modell 1 - - - Modell 2 · · · Modell 3 - · - · Modell 4 		
Heizstab:	Innen- ϕ 9,9 mm Außen- ϕ 19,6 mm	T [s]	Mittelwert	Meßwert
Hüllrohr:	Innen- ϕ 21,0 mm Außen- ϕ 22,0 mm	40	△	●
Leistung	ca. 7,5 kW	50	▽	▼
Durchsatz	ca. 95 kg/h	66,6	◇	◆
		80	○	●
		100	□	■
		125	△	▲
$\lambda_f = 0,038 \text{ W/cm grad}$ $\alpha_g = 0,0355 \text{ W/cm}^2 \text{ grad}$		Abb. 36		

Übertragungsfunktion $F(s)$ zwischen Kühlmitteldurchsatz μ und Leistung P .



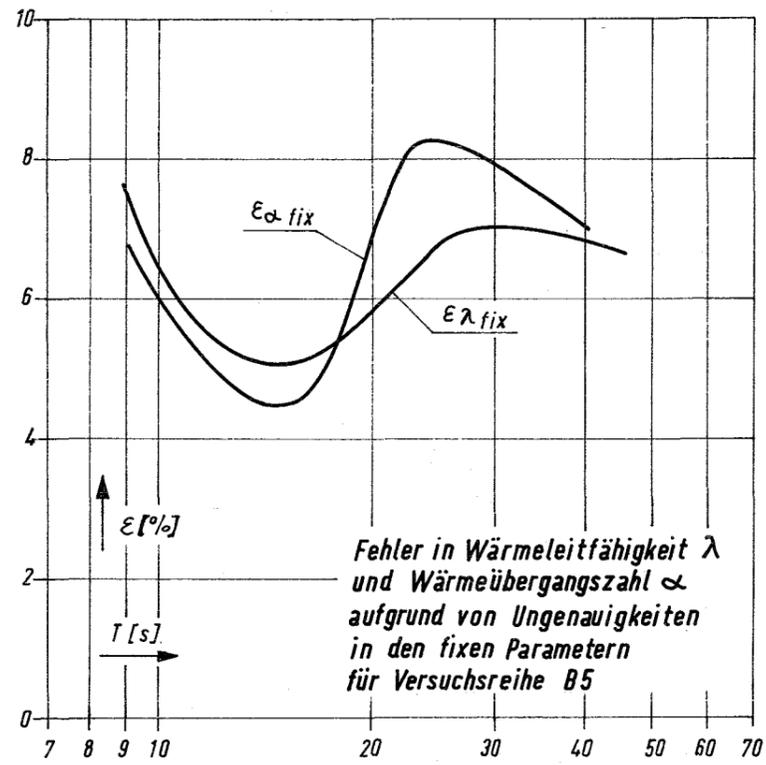


Abb. 38

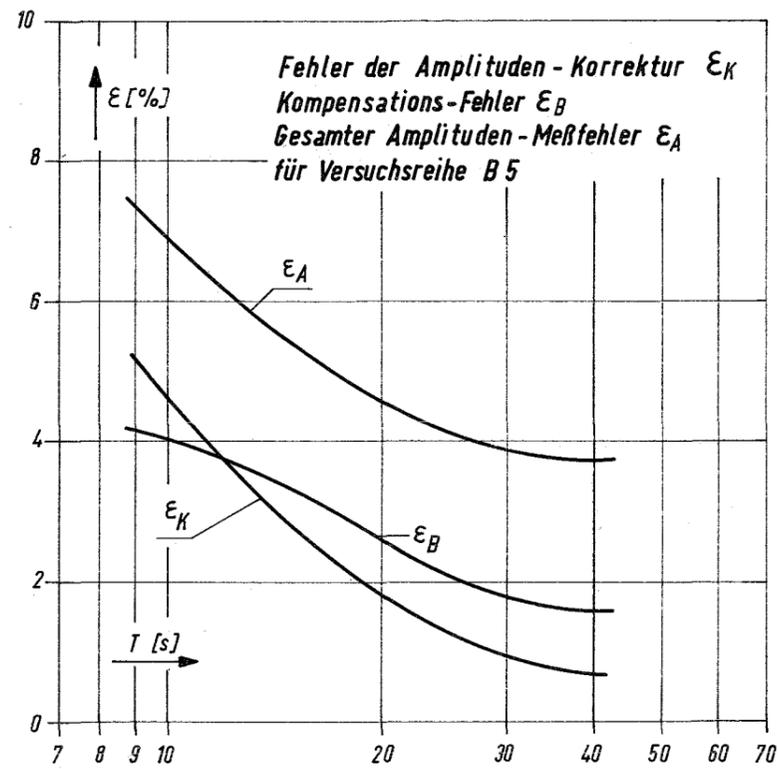


Abb. 39

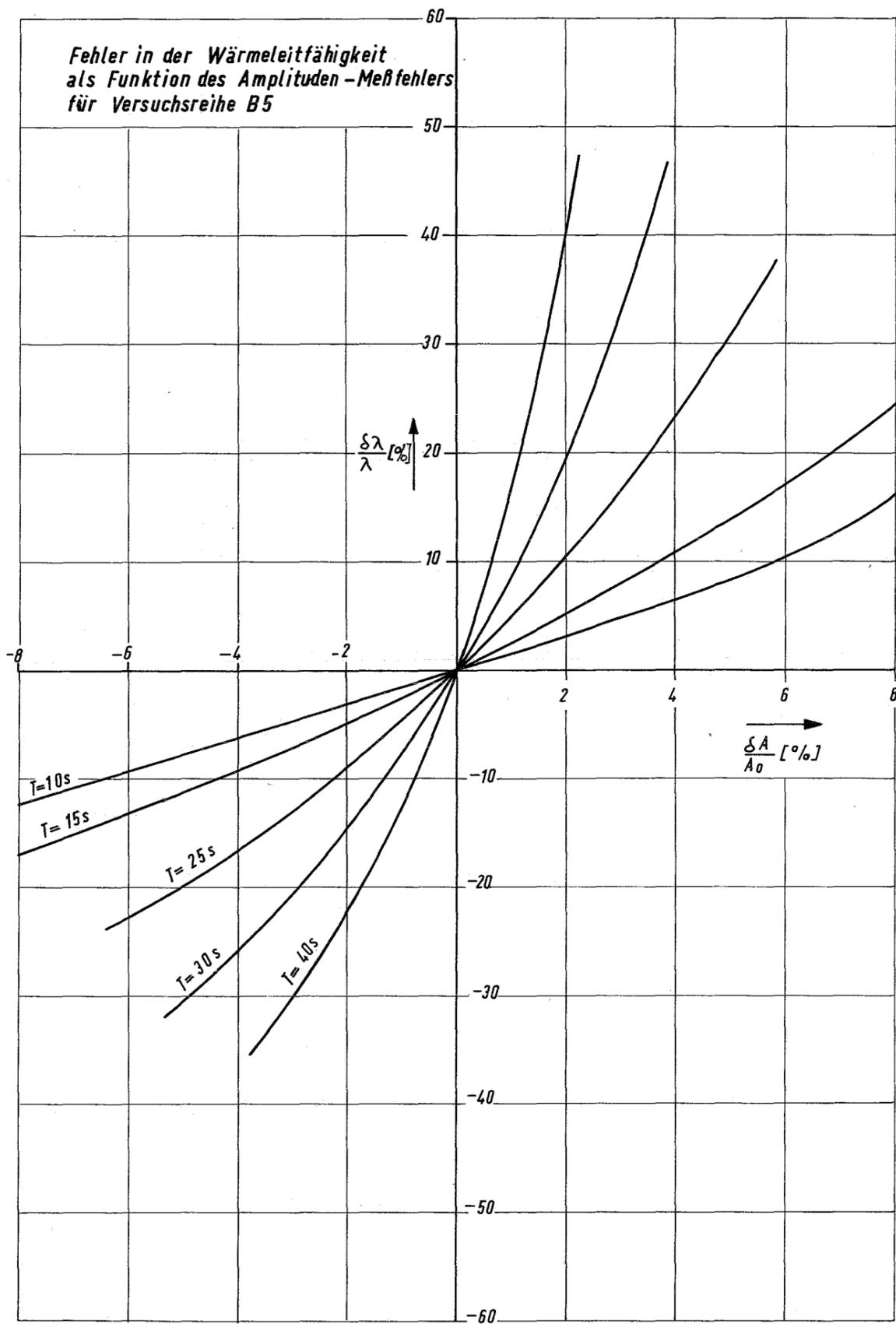


Abb. 40

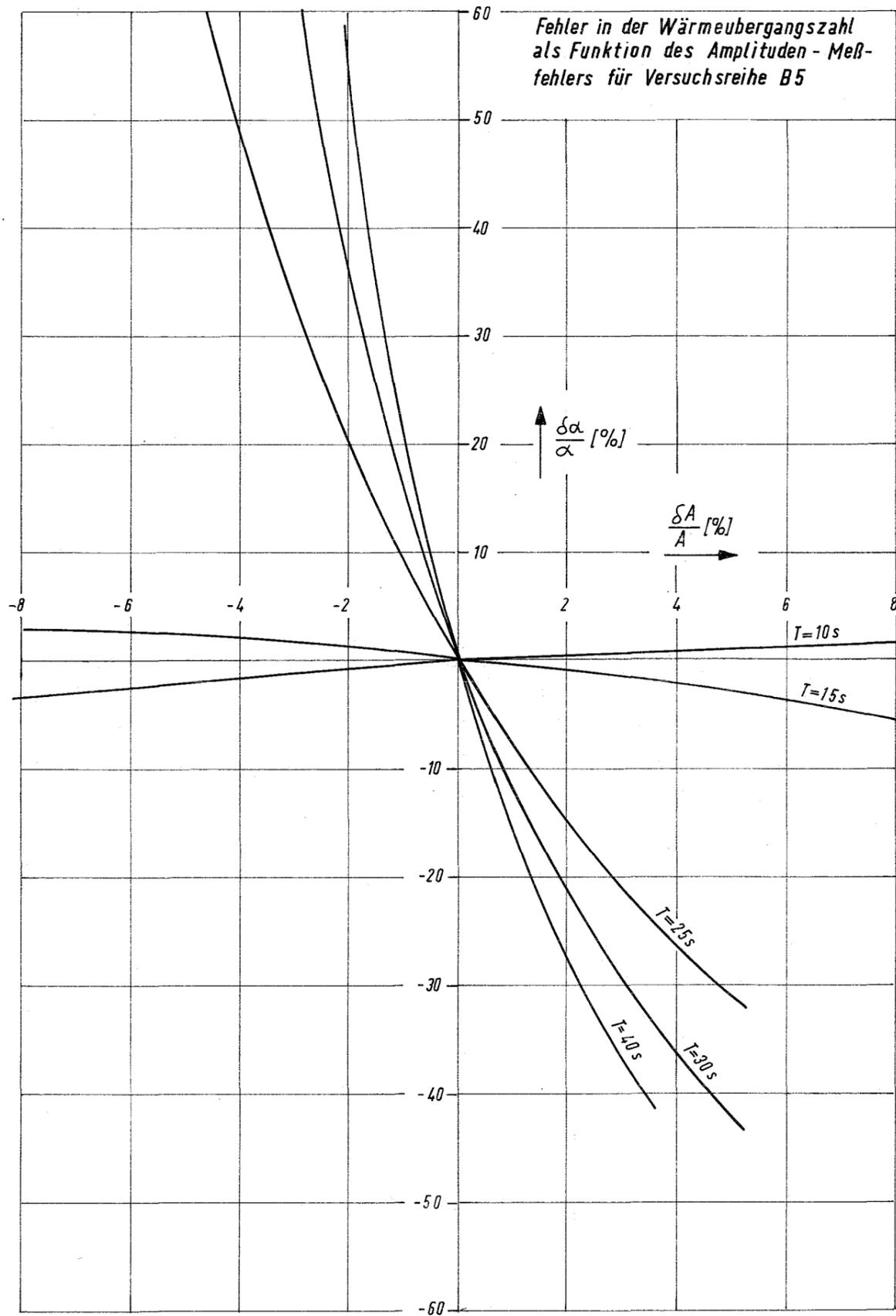


Abb. 41

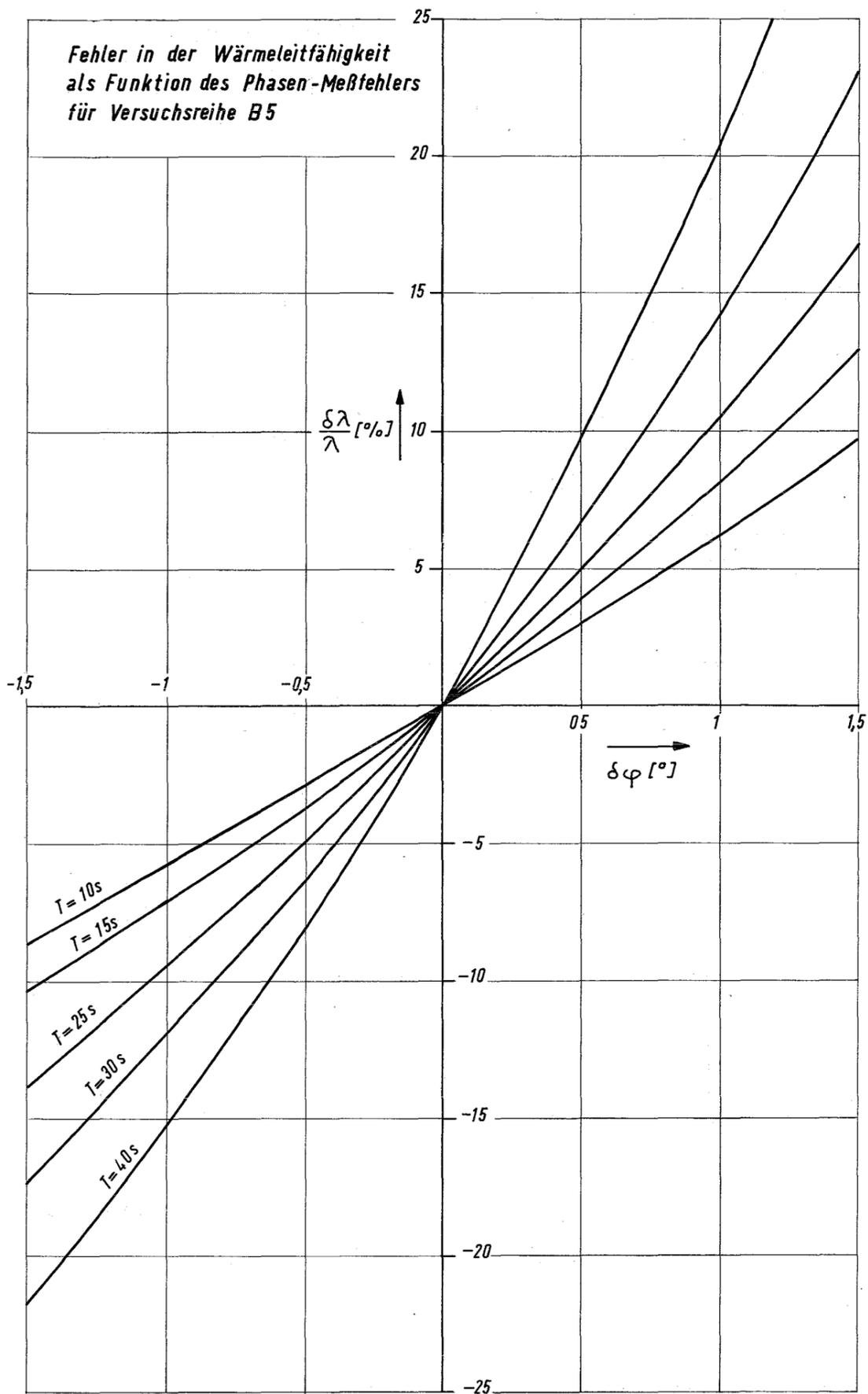


Abb. 42

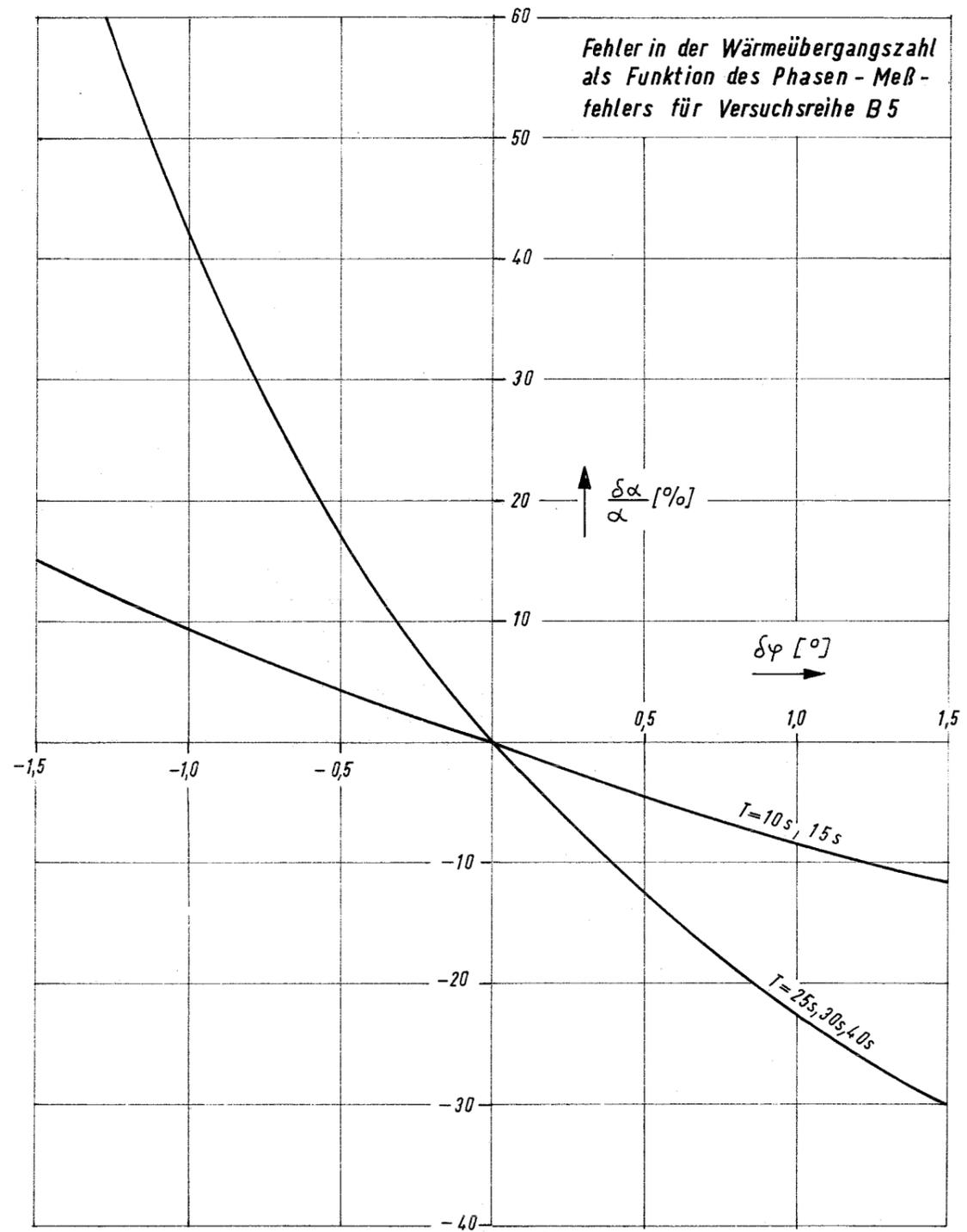


Abb. 43

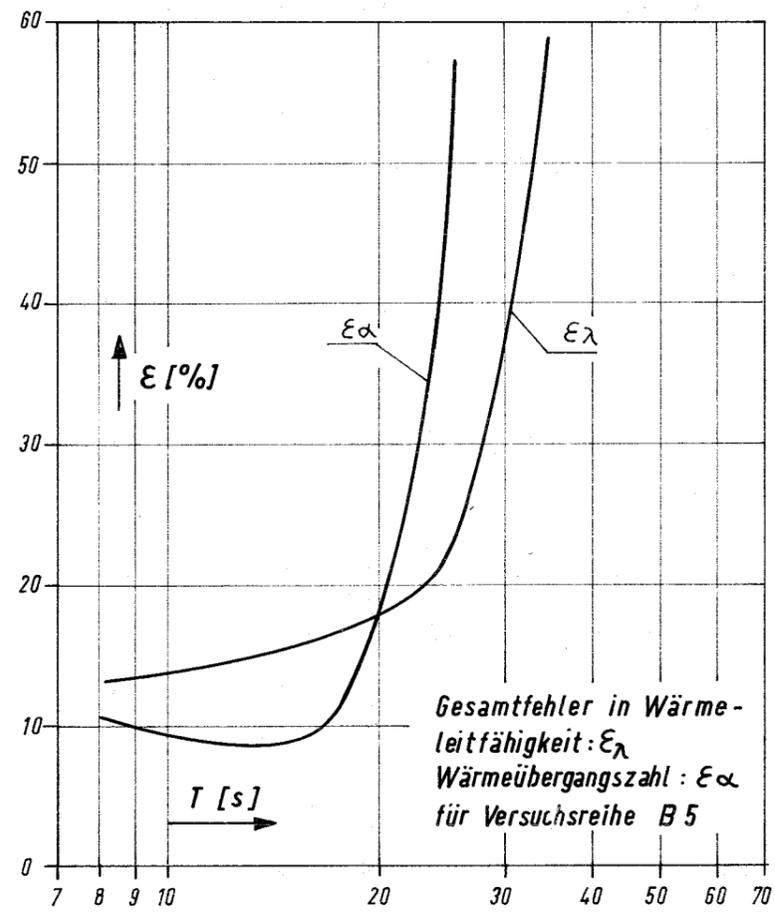
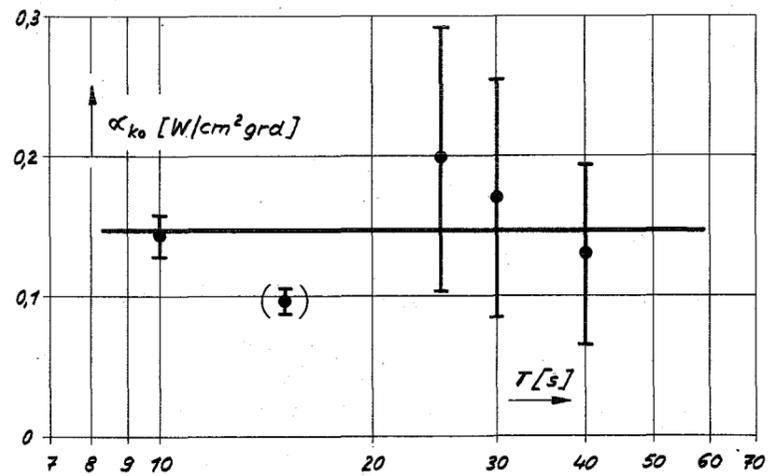
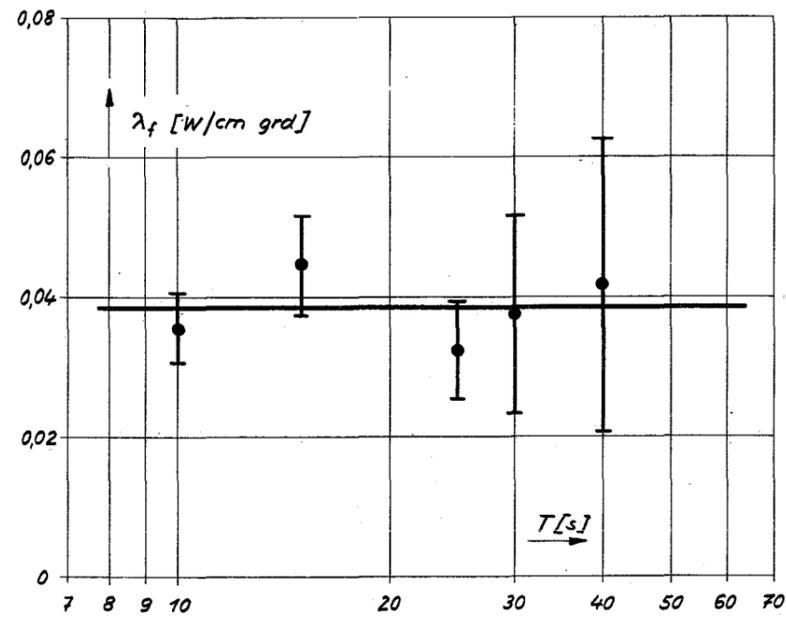


Abb. 44



Wärmeleitfähigkeit λ_f
 und Wärmeübergangszahl α_{ko}
 als Funktion der Periodendauer T
 mit ihren Gesamtfehlergrenzen
 dargestellt für Versuchsreihe B5

Abb. 45