

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM**

**KARLSRUHE**

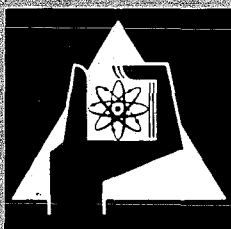
Dezember 1971

KFK 1493

Institut für Experimentelle Kernphysik

Ponderomotorische Stabilität von Hochfrequenzresonatoren  
und Resonatorregelungssystemen

D. Schulze



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.

KARLSRUHE

**Als Manuskript vervielfältigt**

**Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M.B.H.  
KARLSRUHE**

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Dez. 1971

KFK 1493

Institut für Experimentelle Kernphysik

PONDEROMOTORISCHE STABILITÄT VON  
HOCHFREQUENZRESONATOREN  
UND RESONATORREGELUNGSSYSTEMEN \*)

von

Dietrich Schulze

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe

\*) von der Fakultät für Elektrotechnik der Universität Karlsruhe genehmigte Dissertation





## Zusammenfassung

Lineare und nichtlineare Stabilitätsbedingungen für einen Hochfrequenzresonator, der starken ponderomotorischen (elektromagnetischen) Feldkräften ausgesetzt ist, werden abgeleitet und diskutiert.

Stabilisierungsmaßnahmen unter Verwendung von Amplituden- und Phasenregelkreisen werden untersucht. Es wird gezeigt, daß ponderomotorische Stabilität durch geeignete Wahl der Regelparameter sichergestellt werden kann.

Unter gewissen Bedingungen können extern angeregte mechanische Schwingungen durch die ponderomotorischen Kräfte bedämpft werden.

Die berechneten Stabilitätsschwellen, die Wirksamkeit der Stabilisierung und die Dämpfungseigenschaften des elektromagnetischen Feldes konnten experimentell bestätigt werden.

Diese Experimente wurden an einem supraleitenden Helixresonator im Zusammenhang mit dem Bau eines supraleitenden Protonenlinearbeschleunigers in Karlsruhe ausgeführt.

## Abstract

Linear and nonlinear stability conditions for a RF-cavity exposed to large ponderomotive (elektromagnetic) forces are derived and discussed.

Stabilization techniques using amplitude and phase control loops are investigated. It is shown, that ponderomotive stability can be insured by proper choice of control parameters.

Under certain conditions ponderomotive forces can damp mechanical oscillations induced by external sources.

The calculated stability thresholds, the effectiveness of stabilizing and the damping property of the electromagnetic field could be confirmed experimentally.

These experiments were carried out with a superconducting helically loaded resonator within construction of a superconducting proton linear accelerator at Karlsruhe.

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
<u>1. Einleitung</u>	1
<u>2. Differentialgleichungen und monotone Instabilität</u>	4
2.1 Eigenfrequenzänderung durch ponderomotorische Kräfte	4
2.2 Zeitverhalten des elektromagnetischen Feldes	9
2.3 Statische Kopplung und Resonanzkurve	13
2.4 Monotone Instabilität und elastisches Potential	17
<u>3. Stabilität des linearisierten Systems</u>	23
3.1 Übertragungsfunktion der offenen Schleife	24
3.2 Ortskurve und Nyquist-Kriterium	27
3.3 Kritik einer Ableitung von V.E. Shapiro	32
3.4 Näherungsdifferentialgleichung für die komplexe Resonatoramplitude und Ersatzschaltbild	36
3.5 Hurwitz-Kriterium für das genäherte Differentialgleichungssystem	39
3.6 Diskussion der linearen Stabilitätsbedingungen	44
<u>4. Stabilität des Systems für große Auslenkungen</u>	54
4.1 Störungsentwicklung der Hochfrequenzdifferentialgleichung	54
4.2 Fourierentwicklung des Integrals der Näherungsdifferentialgleichung	60
4.3 Diskussion der nichtlinearen Stabilitätsbedingungen	67
<u>5. Stabilisierung durch Regelungssysteme und zusätzliche Kopplungen</u>	80
5.1 Phasenregelung mit Frequenzsteuerung	83
5.2 Regelung und Dämpfung	92
5.3 Amplitudenregelung und Amplitudensteuerung	101
5.4 Phasen- und Amplitudenregelung	108

	Seite
6. Vergleich der Theorie mit Experimenten an einem supraleitenden Helixresonator	122
<hr/>	
6.1 Elektromechanischer Kopplungsfaktor der Helix	122
6.2 Aufbau und Eigenschaften des verwendeten Pha- senregelsystems	139
6.3 Messung der effektiven mechanischen Abkling- zeitkonstanten	148
6.4 Amplituden-Frequenz-Kopplung durch schmalban- dige Hochfrequenzbauteile	153
6.5 Phasenregelung mit Eigenfrequenz- und Genera- torphasensteuerung	155
Liste der wichtigsten Bezeichnungen	160
Literatur	167

## 1. Einleitung

Technologische Fortschritte beim Bau von leistungsstarken Hochfrequenzklystrons und in letzter Zeit auf dem Gebiet der Tieftemperaturtechnik erlauben es heute, Hochfrequenzbeschleunigerresonatoren zu bauen, die den Teilchen Energiegewinne bis zu 3 MeV/m erteilen. Dabei treten Spitzenfeldstärken bis zu 30 MV/m und 1000 Gauss auf. Die elektromagnetischen Feldkräfte, die auch als ponderomotorische Kräfte <sup>1)</sup> bezeichnet werden, können dabei beträchtliche Deformationen der Resonatorwände verursachen. Die dadurch bedingte Eigenfrequenzänderung führt zu einer Fehlanpassung zwischen Generator und Resonator, wodurch wiederum die Feldamplitude im Resonator beeinflusst wird. Genügend große Kopplung vorausgesetzt, kann dieser geschlossene Wirkungskreis zu Instabilitäten Anlaß geben.

Instabilitäten der beschriebenen Art wurden zuerst bei den normalleitenden 25-MHz-Einzelresonatoren des Nowosibirsker Speicherrings VEPP-2 beobachtet und von Karliner <sup>2)</sup> sowohl experimentell als auch theoretisch untersucht. Eine allgemeinere Darstellung der ponderomotorischen Effekte der elektromagnetischen Strahlung, die in der angelsächsischen Literatur auch als "radiation pressure" bezeichnet wird, findet man bei Shapiro <sup>3)</sup>.

In neuerer Zeit wurde die Helixstruktur, die von Wanderwellenröhren her bekannt ist, als Resonatorstruktur zur Beschleunigung von Schwerionen <sup>4)</sup> und niederenergetischen Protonen <sup>5)</sup> vorgeschlagen. Daß der genannte Rückwirkungseffekt gerade bei dieser Struktur eine größere Rolle spielen wird, ist bereits anschaulich von der im Vergleich zu zylindrischen Hohlraumresonatoren geringen Formstabilität her klar. Messungen an derartigen Testresonatoren im Zusammenhang mit dem Karlsruher Projekt eines supraleitenden Protonenlinearbeschleunigers <sup>6)</sup> sowie die genannte Arbeit von Karliner bildeten den Ausgangspunkt der eigenen Untersuchungen.

Es zeigte sich, daß die Stabilität des elektromechanisch gekoppelten Systems sehr empfindlich von der Güte der Resonatoren abhing und die in <sup>2)</sup> angegebenen Stabilitätsbedingungen des linearisierten Problems im Falle von supraleitenden Resonatoren nicht mehr gültig waren. Über eine entsprechende Verallgemeinerung wurde bereits in <sup>7)</sup> berichtet. Ähnliche Bedingungen erhielt Shapiro <sup>3)</sup> auf einem ganz anderen Wege, auf den im Abschnitt 3.3 eingegangen werden wird.

Das gesamte Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Gegenüberstellung, Präzisierung und Verallgemeinerung der in der Literatur bereits bekannten linearen Stabilitätsbedingungen. Es wurde besonderer Wert auf eine physikalisch möglichst anschauliche Deutung der mathematischen Ergebnisse gelegt. Die Stabilitätsbedingungen gelten dabei nicht nur speziell für Beschleunigerresonatoren, sondern für eine große Klasse von Systemen, bei denen ein elektromagnetischer und ein mechanischer Energiespeicher wechselwirken. Die einzig wesentliche Einschränkung besteht darin, daß die mechanischen Deformationen klein genug sein müssen, so daß die betrachtete Eigenschwingungsform (mode) des elektromagnetischen Feldes erhalten bleibt.

Die Stabilität des Systems kann aufgefaßt werden als die eines selbsterregten mechanischen Oszillators mit ausschlagabhängiger Dämpfung und Rückstellkraft. Während die aus der nichtlinearen Rückstellkraft resultierende Stabilitätsbedingung, die im Kapitel 2 unmittelbar im Anschluß an die Formulierung des Problems abgeleitet wird, recht einfach zu ermitteln und zu verstehen ist, erfordert die Ableitung der Stabilitätsbedingungen, die von der nichtlinearen Dämpfung des Oszillators herrühren, theoretisch einen etwas größeren Aufwand. Unter Verwendung zweier Näherungen, die bei den meisten elektromechanischen Systemen der betrachteten Art erfüllt sind, gelingt eine übersichtliche Darstellung, die im Kapitel 4 diskutiert wird.

Von praktischer Bedeutung sind vor allem Maßnahmen, die die Stabilität des Systems sicherstellen. An einigen wichtigen Beispielen wird im Kapitel 5 der Einfluß von meistens aus anderen Gründen sowieso vorhandenen Regelungssystemen untersucht. Ebenso wie die Stabilität des Systems durch zusätzliche, meistens unerwünschte, Amplituden-Phasen-Kopplungen in realen Bauelementen verschlechtert werden kann, läßt sich durch Einführung gezielter Kopplungen die Instabilität ganz beseitigen.

Die ponderomotorischen Kräfte lassen sich unter bestimmten Umständen sogar zur Schwingungsdämpfung verwenden. Darüber wurde im Zusammenhang mit einem speziellen Regelungssystem in <sup>8)</sup> berichtet. Ähnliche Ergebnisse für einen normalleitenden Resonator erhielt auch Karliner <sup>9)</sup>.

Mit den im Kapitel 5 diskutierten Regelungs- und Kopplungsmaßnahmen steht ein breites Spektrum von Möglichkeiten zur Verfügung, die Betriebsparameter des Resonators an die gegebene Aufgabe anzupassen und gleichzeitig durch geeignete Wahl der Regelungs- und Kopplungsparameter für Stabilität zu sorgen.

Im Kapitel 6 werden schließlich einige der theoretischen Ergebnisse mit Messungen an einem  $\lambda/2$ -Helixresonator verglichen. Typisch für ein reales Hochfrequenzregelungssystem war dabei der wesentliche Einfluß einer zusätzlichen Amplituden-Frequenz-Kopplung, der mit dem im Kapitel 5 abgeleiteten Formalismus geklärt werden konnte.

Da diese Arbeit im Zusammenhang mit dem vorhergenannten Projekt eines supraleitenden Protonenlinearbeschleunigers entstand, ist in Abschnitt 6.5 ein kurzer Ausblick auf die in diesem konkreten Anwendungsfall noch zu lösenden Probleme angefügt.

## 2. Differentialgleichungen und monotone Instabilität

### 2.1 Eigenfrequenzänderung durch ponderomotorische Kräfte

Zunächst wollen wir in Analogie zum Resonator ein mechanisches System betrachten, das eine eindimensionale periodische Bewegung ausführt und dessen Eigenschaften von einem Parameter  $\lambda$  abhängen. Ändert sich der Parameter  $\lambda$  nur geringfügig während einer Bewegungsperiode  $T$  des Systems, d.h.:

$$T \cdot \dot{\lambda} \ll \lambda \quad (2.1.1)$$

dann ist nach Landau-Lifschitz <sup>10)</sup> das Integral über die Phasenfläche eine Konstante der Bewegung. Der durch  $2\pi$  geteilte Wert dieser Konstanten wird gewöhnlich als adiabatische Invariante bezeichnet. Sie kann dargestellt werden als eine Funktion der Energie  $E$  und des Parameters  $\lambda$ . Dieses sogenannte Adiabaten-Theorem geht auf Boltzmann-Ehrenfest zurück.

Im Falle des kräftefreien harmonischen Oszillators kommt als Systemparameter  $\lambda$  nur die Eigenfrequenz  $\Omega_0$  in Betracht; die adiabatische Invariante ist  $E/\Omega_0$ . Das Analogon für elektromagnetische Schwingungen ist ein abgeschlossener verlustloser Hohlraum, in dem ein elektromagnetisches Feld mit der Frequenz  $\omega_0$  und der mittleren gespeicherten Energie  $W$  schwingt.

Unter der Voraussetzung (2.1.1), die hier lautet:

$$2\pi \dot{\omega}_0 / \omega_0 \ll \omega_0 \quad (2.1.2)$$

muß nach dem vorher Ausgeführten gelten:

$$\Delta\left(\frac{W}{\omega_0}\right) = \frac{\Delta W}{W} - \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.1.3)$$



Wenn die Wände des Resonators um den kleinen Betrag  $\xi(\vec{r})$  verschoben werden, leisten die ponderomotorischen Kräfte <sup>1)</sup>, die immer senkrecht auf der Wand stehen, die Arbeit A. Dieser Energiebetrag muß aber gerade der gespeicherten Energie W entnommen werden:

$$\Delta W + A = 0 \quad (2.1.4)$$

Die zeitlich gemittelte elektromagnetische Kraftdichte läßt sich mittels des Maxwell'schen Spannungstensors <sup>1)</sup> durch die Felder an der Oberfläche ausdrücken:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{n}(\vec{r}) \left( \frac{\mu_0}{4} H^2(\vec{r}) - \frac{\epsilon_0}{4} E^2(\vec{r}) \right) \quad (2.1.5)$$

wobei  $\vec{n}$  der nach außen weisende Oberflächennormalenvektor ist. Die gesamte Arbeit erhalten wir aus dem Oberflächenintegral über das Skalarprodukt von Kraftdichte und Weg:

$$A = \int_S \vec{F}(\vec{r}) \xi(\vec{r}) \, dS \quad (2.1.6)$$

Die zeitlich gemittelte gespeicherte Energie ist gegeben durch das Integral über das gesamte Volumen V:

$$W = \int_V \left( \frac{\mu_0}{4} H^2(\vec{r}) + \frac{\epsilon_0}{4} E^2(\vec{r}) \right) \, dv \quad (2.1.7)$$

Wenn man mit  $\vec{n} \xi \cdot dS = dv$  ein kleines Störvolumen bezeichnet und das gesamte Störvolumen abkürzt mit  $\Delta V = \int_S \vec{n} \xi \, dS$ , so erhält man unter Verwendung der bisher angegebenen  $\int_S$  Gleichungen folgende Formel für die Eigenfrequenzänderung eines Resonators:

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = - \frac{\int_V \left( \frac{\mu_0}{4} H^2(\vec{r}) - \frac{\epsilon_0}{4} E^2(\vec{r}) \right) dv}{\int_V \left( \frac{\mu_0}{4} H^2(\vec{r}) + \frac{\epsilon_0}{4} E^2(\vec{r}) \right) dv} \quad (2.1.8)$$

die wohl zuerst von Müller <sup>11,12)</sup> angegeben wurde und in der angelsächsischen Literatur als Slater's Formula <sup>13)</sup> bekannt ist.

Bei einer komplizierteren mechanischen Struktur des Resonators ist es zweckmäßig, sowohl die Auslenkungen als auch die Kräfte nach dem mechanischen Orthonormal-Modensystem  $\phi_\mu(\vec{r})$  zu entwickeln, wie es in demselben Zusammenhang auch von Karliner <sup>2)</sup> und Shapiro <sup>3)</sup> getan wurde.

Da zu dem Integral (2.1.6) sowieso nur die Kräfte in Richtung der Bewegung einen Beitrag liefern, wollen wir die Projektion der Kraft auf die Bewegungsrichtung berechnen. Mit der Definition des Bewegungseinheitsvektors:

$$\vec{\xi}(\vec{r}) = \xi(\vec{r}) \vec{e}(\vec{r}) \quad (2.1.9)$$

lautet die projizierte Kraft:

$$F_\xi(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}) \vec{e}(\vec{r}) \quad (2.1.10)$$

Die verallgemeinerten Koordinaten  $q_\mu$  und die entsprechenden Kräfte  $F_\mu$  erhalten wir durch folgende Oberflächenintegrale:

$$q_\mu = \int_S \xi(\vec{r}) \phi_\mu(\vec{r}) dS \quad (2.1.11)$$

$$F_\mu = \int_S F_\xi(\vec{r}) \phi_\mu(\vec{r}) dS \quad (2.1.12)$$

Mit der Orthonormalitätseigenschaft

$$\int_S \phi_\nu(\vec{r}) \phi_\mu(\vec{r}) dS = \delta_{\nu\mu} \quad (2.1.13)$$

(Kronecker-Symbol)

läßt sich die gesamte Arbeit der elektromagnetischen Kräfte als Summe darstellen:

$$A = \sum_{\mu} F_{\mu} \cdot q_{\mu} \quad (2.1.14)$$

Die Bewegungsgleichung für den mechanischen Mode (Eigenfunktion)  $\mu$  lautet in der Lagrange'schen Form:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_{\mu}} = F_{\mu} \quad (2.1.15)$$

unter der Voraussetzung, daß die mechanische Verlustleistung  $\Phi$  klein gegenüber der Blindleistung ist.

Dabei ist  $L = T - U$  und das elastische Potential  $U$ :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\mu} c_{\mu} q_{\mu}^2 \quad (2.1.16)$$

und die kinetische Energie  $T$ :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\mu} c_{\mu} (\dot{q}_{\mu} / \Omega_{\mu})^2 \quad (2.1.17)$$

sowie die Verlustleistung  $\Phi$ :

$$\Phi = \sum_{\mu} \frac{c_{\mu}}{\tau_{\mu}} (\dot{q}_{\mu} / \Omega_{\mu})^2 \quad (2.1.18)$$

$c_\mu$  sind die elastischen Konstanten,  $\Omega_\mu$  die mechanischen Eigenfrequenzen und  $\tau_\mu$  die Abklingzeiten der mechanischen Moden  $\mu$ . Die Zahl  $\frac{\Omega_\mu^2}{2}$  wird oft als Kreisgüte  $Q_\mu$  der mechanischen Schwingung bezeichnet. Sie gibt gerade das Verhältnis von Blindleistung zu Verlustleistung in Resonanz an und sollte sehr groß gegen 1 sein, damit (2.1.15) gültig ist.

Wenn man die vorletzten 3 Gleichungen in (2.1.15) einsetzt, erhält man die übliche Darstellung:

$$\ddot{q}_\mu + \frac{2}{\tau_\mu} \dot{q}_\mu + \Omega_\mu^2 q_\mu = \frac{\Omega_\mu^2}{c_\mu} F_\mu \quad (2.1.19)$$

Diese Differentialgleichungen wollen wir im Hinblick auf die späteren Ausführungen noch etwas umformen. Die generalisierten Bewegungskordinaten  $q_\mu$  hängen linear mit der Frequenzverschiebung zusammen. Daher können wir auch die gesamte Eigenfrequenzverschiebung  $\Delta\omega_0$  als Summe über die einzelnen mechanischen Eigenfunktionenbeiträge  $\Delta\omega_\mu$  auffassen:

$$\Delta\omega_0 = \sum_\mu \Delta\omega_\mu \quad (2.1.20)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (2.1.2, 4, 6, 11, 12, 14) erhalten wir aus (2.1.19):

$$\Delta\ddot{\omega}_\mu + \frac{2}{\tau_\mu} \Delta\dot{\omega}_\mu + \Omega_\mu^2 \Delta\omega_\mu = - \frac{\omega_0}{W} F_\mu^2 \frac{\Omega_\mu^2}{c_\mu} \quad (2.1.21)$$

Die eben erfolgte Umformung ist auch deshalb physikalisch sinnvoll, weil  $\Delta\omega_0$  bzw. einzelne  $\Delta\omega_\mu$  bis auf Meßverzögerungen, wie später gezeigt wird, direkt beobachtet werden können, die  $q_\mu$  selbst aber nicht.

Jetzt erinnern wir uns noch daran, daß die generalisierte Kraft  $F_\mu$  proportional der gespeicherten Energie  $W$  im Resonator ist, wie die Gleichungen (2.1.5, 7) ausdrücken:

Wir setzen daher als Normierung:

$$F_\mu \stackrel{!}{=} f_\mu \cdot W \quad (2.1.22)$$

Damit erhalten wir schließlich die Differentialgleichung:

$$\Delta \ddot{\omega}_\mu + \frac{2}{\tau_\mu} \Delta \dot{\omega}_\mu + \Omega_\mu^2 \Delta \omega_\mu = - \omega_0 W \frac{(f_\mu \Omega_\mu)^2}{c_\mu} \quad (2.1.23)$$

Das Produkt  $\omega_0 \cdot W$  ist nichts anderes als die elektromagnetische Blindleistung im Resonator. Bis auf dynamische Verzögerungen ist daher also die absolute Frequenzverschiebung des Resonators proportional zur elektromagnetischen Blindleistung und indirekt proportional der elastischen Konstanten.

## 2.2 Zeitverhalten des elektromagnetischen Feldes

Bei den bisherigen Betrachtungen hatten wir einen verlustlosen Resonator zugrunde gelegt, so daß die gemäß (2.1.14) auftretende Deformationsarbeit ausschließlich aus dem elektromagnetischen Speicher gespeist werden konnte.

Reale Resonatoren haben Verluste, die neben der Oberflächenbeschaffenheit des Materials sehr stark frequenz- und temperaturabhängig sind. Die auftretenden Verluste müssen von einem mit dem Resonator verkoppelten Generator gedeckt werden, wenn die Feldamplitude erhalten bleiben soll.

Durch diese Kopplung zu einem externen Energieerzeuger ist es aber möglich, die Deformationsarbeit direkt zu einem Teil aus

dem Generator zu speisen. Wie groß dieser Teil ist, entscheidet, abgesehen von Verzögerungen beim Energietransport, die Stärke der Kopplung zwischen Generator und Resonator. Diese ist aber indirekt proportional der Kreisgüte des mit dem Generator belasteten Resonators. Typische Güten für normalleitende Oberflächen sind  $10^3-10^4$  und für supraleitende Oberflächen  $10^8-10^9$ . Das bedeutet aber, der Generator ist in jedem Fall schwach angekoppelt, so daß (2.1.14) eine gute Näherung darstellt.

Die räumlich-zeitliche Verteilung der elektrischen Feldstärke  $E(\vec{r},t)$  und der magnetischen Feldstärke  $H(\vec{r},t)$  läßt sich am einfachsten wie im mechanischen Fall unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen und der Randbedingungen in Eigenfunktionen oder Moden entwickeln<sup>13,14</sup>). Für die folgenden Untersuchungen wollen wir uns auf einen elektromagnetischen Schwingungsmodus beschränken, was sicher zulässig ist, wenn der Modeabstand groß gegen die Bandbreite ist. Außerdem soll angenommen werden, daß die durch die ponderomotorischen Kräfte bewirkte Frequenzverschiebung klein gegen den Modeabstand ist, so daß der betrachtete Modus erhalten bleibt.

Die Zeitabhängigkeit des jeweiligen Modus läßt sich durch einen von einer Stromquelle gespeisten Parallelresonanzkreis beschreiben, deren Strom proportional der Wurzel aus der Generatorleistung ist. Der Spannungsabfall über dem Schwingkreis ist proportional der Feldstärke an einem beliebigen Ort innerhalb des Resonators.

Bei Beschleunigerresonatoren bietet sich als sinnvolle Normierung der Schwingkreisspannung der mittlere Energiegewinn pro Längeneinheit für ein Synchronteilchen mit der Synchronphase  $\phi_S$  gegenüber dem Wellenmaximum an:

$$\hat{V} \cos \phi_S \stackrel{!}{=} \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}(\vec{r}(p), t(p)) \vec{e}_S(p) dp \quad (2.2.1)$$

wobei  $p$  der Wegparameter der Teilchenbewegung sowie  $\vec{e}_S(p)$  der Einheitsvektor der Geschwindigkeit des Synchroneteilchens  $\vec{v}_S(p)$  ist. Die Zeit läßt sich damit noch ausdrücken:

$$t(p) = \int_{P_1}^P dp' / |v_S(p')| \quad (2.2.2)$$

Die Verluste im Resonator  $P_V$  sind proportional dem Oberflächenintegral über das Stromdichtequadrat in den Wänden, das direkt mit der parallelen H-Feldstärke zusammenhängt <sup>15)</sup>:

$$P_V = \operatorname{Re}(R) \frac{1}{2} \int_S H_{||}^2(\vec{r}) dS \quad (2.2.3)$$

$R$  ist dabei die komplexe Oberflächenimpedanz.

Ein Maß für die Güte des Beschleunigungsvorgangs ist die sogenannte Shuntimpedanz  $Z$ , die definiert wird:

$$Z = \hat{V}^2 / P_V \quad (2.2.4)$$

Andererseits wissen wir, daß die Kreisgüte des elektrischen Schwingkreises gleich dem Verhältnis von Blindleistung zu Verlustleistung ist:

$$Q = \omega_0 W / P_V \quad (2.2.5)$$

Damit wird die sogenannte normierte Shuntimpedanz ( $Z/Q$ ) eine reine Geometriegröße:

$$Z/Q = \hat{V}^2 / \omega_0 W \quad (2.2.6)$$

Die Schwingkreisgleichung kann man nun anschreiben:

$$\ddot{v} + \frac{2}{\tau} \dot{v} + \omega_c^2 v = \frac{2}{\tau} \dot{v}_g \quad (2.2.7)$$

$\omega_c$  ist die Eigenfrequenz des Resonators bei der betrachteten Feldstärke:

$$\omega_c = \omega_0 + \Delta\omega_0 \quad (2.2.8)$$

wobei  $\omega_0$  die natürliche Eigenfrequenz bei der Feldstärke 0 und  $\Delta\omega_0$  die statische Frequenzverschiebung bei der betrachteten Sollfeldstärke durch die ponderomotorischen Kräfte ist.

$\tau$  ist die Abklingzeit des Feldes im Resonator bei Belastung durch den Generator:

$$\tau = 2W/P_V (1+\beta) \quad (2.2.9)$$

Der Parameter  $\beta$  ist dabei ein Maß für die externe Belastung; er ist gleich dem Verhältnis zwischen der im Generator verbrauchten Verlustleistung zu der Verlustleistung des Resonators.

$v_g$  soll dabei proportional dem Generatorstrom sein, der mit einer Frequenz  $\omega$  den Resonator treibt:

$$v_g = \frac{1}{2} V_g e^{i\omega t} + \frac{1}{2} V_g^* e^{-i\omega t} \quad (2.2.10)$$

Mit den vorher eingeführten Definitionen ergibt sich für den Betrag der komplexen Generatoramplitude  $\hat{V}_g$ :

$$\hat{V}_g = |V_g| = \frac{2\beta}{1+\beta} \sqrt{\frac{P_g \cdot Z}{\beta}} \quad (2.2.11)$$

wobei  $P_g$  die angebotene Generatorleistung ist.

Die Normierung für den Generatorstrom wurde hier, wie man leicht sieht, so gewählt, daß  $\hat{V}_g$  gerade gleich der Resonatoramplitude  $\hat{V}$  für  $\omega = \omega_c$ , also für Resonanz, ist.



Da der Resonator von einer äußeren Kraft mit der Zwangsfrequenz  $\omega$  angeregt wird, muß sich die Lösung  $v$  darstellen lassen als:

$$v = \frac{1}{2} V e^{i\omega t} + \frac{1}{2} V^* e^{-i\omega t} \quad (2.2.12)$$

Wenn wir mit den beiden Ansätzen (2.2.10, 12) in die Differentialgleichung (2.2.7) eingehen, erhalten wir für die komplexen Amplituden folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{V} + (2i\omega + \frac{2}{\tau})\dot{V} + (\omega_c^2 - \omega^2 + \frac{2}{\tau}i\omega)V = \frac{2}{\tau}(i\omega V_g + \dot{V}_g) \quad (2.2.13)$$

Für die Betrachtungen bis einschließlich Kapitel 4 wollen wir die komplexe Generatoramplitude  $V_g$  als konstant ansehen; d.h. sowohl Generatoramplitude als auch  $-$ phase sind zeitlich unveränderlich. Außerdem wird für kleine relative Frequenzänderungen  $\Delta\omega_0/\omega_0 \ll 1$  die Näherung benutzt:

$$\omega_c^2 \approx \omega_0^2 + 2\omega_0\Delta\omega_0 \quad (2.2.14)$$

Unter Verwendung von (2.1.20) erhalten wir schließlich:

$$\ddot{V} + (2i\omega + \frac{2}{\tau})\dot{V} + (\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{2}{\tau}i\omega + 2\omega_0 \sum_{\mu} \Delta\omega_{\mu})V = \frac{2}{\tau}i\omega V_g \quad (2.2.15)$$

### 2.3. Statische Kopplung und Resonanzkurve

Zunächst wollen wir noch mit der Definition (2.2.6) und mit der Konvention  $\hat{V}^2 = |V|^2 = VV^*$  die rechte Seite der mechanischen Differentialgleichung umschreiben.

Die Größe

$$k_{\mu} \stackrel{!}{=} \frac{f_{\mu}^2}{c_{\mu} \cdot Z/Q} \quad (2.3.1)$$

ist eine reine Geometriegröße und grundsätzlich größer als Null. Sie ist ein Maß für die Frequenzverschiebung, die der mechanische Mode  $\mu$  bei gegebener Resonatoramplitude  $\hat{V}$  zur gesamten Frequenzänderung beiträgt. Wir wollen  $k_\mu$  daher als den elektromechanischen Koppelfaktor des Modes  $\mu$  bezeichnen.

Die mechanische Differentialgleichung schreibt sich damit:

$$\Delta \ddot{\omega}_\mu + \frac{2}{\tau_\mu} \Delta \dot{\omega}_\mu + \Omega_\mu^2 \Delta \omega_\mu = - k_\mu \Omega_\mu^2 \cdot V V^* \quad (2.3.2)$$

Wenn zu dem Prozeß  $n$  mechanische Moden einen wesentlichen Beitrag liefern ( $\mu = 1 \dots n$ ), dann bilden die  $n$  Differentialgleichungen 2. Ordnung (2.3.2) zusammen mit der komplexen Differentialgleichung 2. Ordnung (2.2.15) ein System von  $2n+4$  nicht-linear gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung. Zuerst untersuchen wir die statische Kopplung; vor allem auch, um die Arbeitspunkte für eine spätere Linearisierung des umfangreichen Differentialgleichungssystems zu gewinnen.

Die beiden statischen Beziehungen lauten:

$$\Delta \omega_{\mu 0} = - k_\mu V_0 V_0^* \quad (2.3.3)$$

und

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{2}{\tau} i \omega + 2 \omega_0 \sum_\mu \Delta \omega_{\mu 0}) V_0 = \frac{2}{\tau} i \omega V_g \quad (2.3.4)$$

Der Index  $0$  bei  $V$  und  $\Delta \omega_\mu$  soll die statische Beziehung anzeigen.

Wenn wir entsprechend der Gleichung (2.2.8) einführen:

$$\omega_{cc} = \omega_0 + \sum_\mu \Delta \omega_{\mu 0} \quad (2.3.5)$$

und die Generatorfrequenz  $\omega$  als normierte Abweichung von der Frequenz  $\omega_{co}$  definieren:

$$y \stackrel{!}{=} \tau(\omega - \omega_{co}) \quad (2.3.6)$$

lauten die beiden statischen Beziehungen:

$$V_o \cong V_g / (1 + iy) \quad (2.3.7)$$

und

$$\tau(\omega - \omega_o) = y - \tau V_o V_o^* \sum_{\mu} k_{\mu} \quad (2.3.8)$$

Aus (2.3.7) sehen wir, daß sich die Beziehung zwischen Phase und Amplitude der Resonatorspannung  $V_o$  gegenüber dem Fall ohne elektromechanische Kopplung  $k_{\mu} \equiv 0$  gar nicht ändert; die Ortskurve in der komplexen  $V_o$ -Ebene ist nach wie vor ein Kreis. Lediglich die Frequenzbeziehung  $\omega$  ändert sich.

Die Gleichung für die Frequenzbeziehung erhalten wir durch Einsetzen von (2.3.7) in (2.3.8):

$$\tau(\omega - \omega_o) = y - \frac{\tau \hat{V}_g^2 \sum_{\mu} k_{\mu}}{1 + y^2} \quad (2.3.9)$$

Die Resonanzkurve für die gespeicherte Energie  $W \propto \hat{V}_o^2(\omega)$  erhalten wir sehr einfach aus derjenigen ohne elektromechanische Kopplung durch Kippung zu niedriger Frequenz, wobei die Resonanzspitze bei der Frequenz

$$\omega_{res} = \omega_o - \hat{V}_g^2 \sum_{\mu} k_{\mu} \quad (2.3.10)$$

liegt; das entspricht einer normierten Verstimmung  $y = 0$ .

In Bild (2.1 a,b) sind Energie und Phase über der Frequenz aufgetragen, wobei gilt:

$$\theta = \arg \frac{V_o}{V_g} = -\arctan y \quad (2.3.11)$$

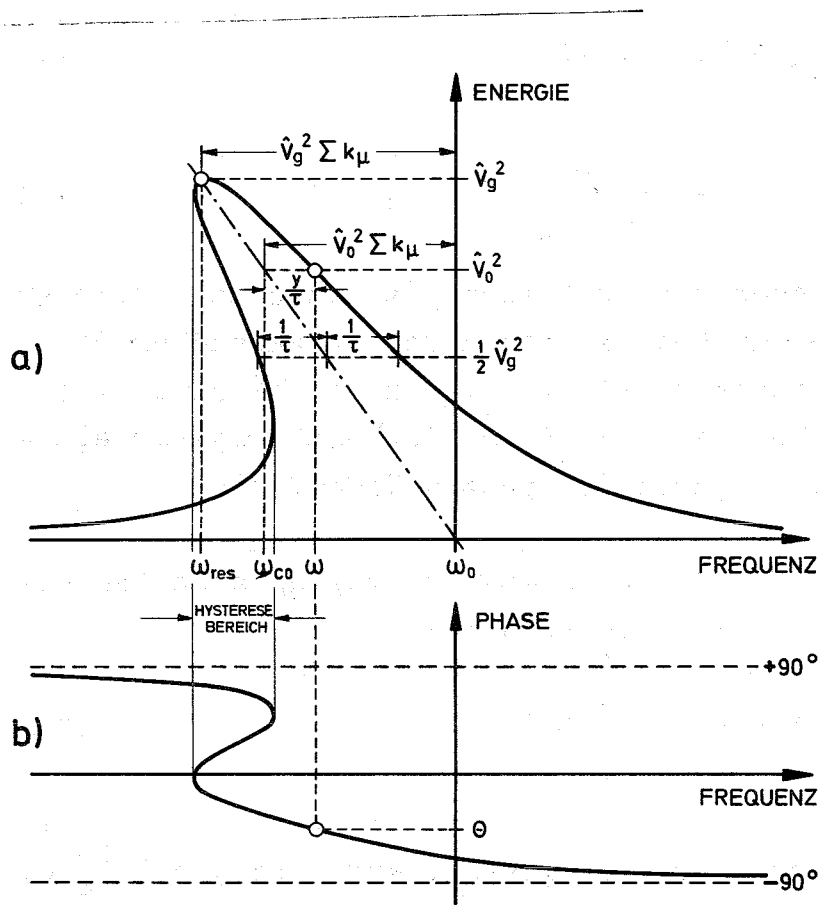


Bild 2.1: Resonanzkurven: a) Energie und b) Phase des Resonators mit elektromechanischer Kopplung als Funktion der Frequenz.

Wenn die Kippung ein bestimmtes Maß überschreitet, wird die Resonanzkurve mehrdeutig. Zu einer gegebenen Generatorfrequenz  $\omega$  gibt es innerhalb des Hysteresebereichs drei stati-

sche Arbeitspunkte. Es ist plausibel, daß nicht alle drei Arbeitspunkte gleichzeitig stabilen Ruhelagen des Systems entsprechen können.

#### 2.4 Monotone Instabilität und elastisches Potential

Die Bedingung dafür, daß keine Mehrdeutigkeit auftritt, läßt sich anhand von (2.3.9) sehr einfach formulieren: die Steigung des linearen Teils muß größer als die des nichtlinearen sein:

$$\frac{d}{dy} (y - \tau(\omega - \omega_0)) > \frac{d}{dy} \left( \frac{\tau \hat{V}_g^2 \sum_{\mu} k_{\mu}}{1+y^2} \right) \quad (2.4.1)$$

Daraus folgt sofort die Bedingung:

$$-1 < \frac{2y}{(1+y^2)^2} \tau \hat{V}_g^2 \sum_{\mu} k_{\mu} = \frac{2y}{1+y^2} \tau \hat{V}_0^2 \sum_{\mu} k_{\mu} \quad (2.4.2)$$

Für  $y > 0$ , d.h. auf dem oberen Ast der Resonanzkurve ist die Bedingung (2.4.2) immer erfüllt. Wenn überhaupt, dann kann (2.4.2) nur auf der unteren Flanke für  $y < 0$  verletzt werden. Um sicherzugehen, daß immer eine eindeutige Beziehung zwischen  $\hat{V}^2$  und  $\omega$  besteht, brauchen wir nur das Maximum der rechten Seite der Ungleichung (2.4.2) bestimmen.

Dieses Maximum liegt bei  $y = -1/\sqrt{3}$ , was einem Feldpegel entspricht, der  $\sqrt{3/4}$  des Resonanzpegels beträgt.

Die vom speziellen Arbeitspunkt  $y$  unabhängige Bedingung für die Eindeutigkeit der Resonanzkurve lautet damit:

$$\tau \hat{V}_g^2 \sum_{\mu} k_{\mu} < \frac{8}{3\sqrt{3}} \cong 1,54 \quad (2.4.3)$$

Das ist genau die Bedingung dafür, daß die Steigung der Resonanzkurve im linken Wendepunkt gerade noch positiv ist.

Wenn die Bedingung (2.4.2) nicht erfüllt ist, d.h. wenn die Resonanzkurve überkippt, beobachtet man folgendes Phänomen: bei langsamem (quasistationärem) Erniedrigen der Generatorfrequenz  $\omega$  von der oberen Flanke ausgehend springt nach Unterschreiten von  $\omega_{res}$  die Resonatoramplitude auf einen Wert, der dem zugehörigen Arbeitspunkt auf der unteren Flanke entspricht. Beim Umspringen werden Eigenschwingungen des Systems angestoßen. Entsprechendes gilt bei Erhöhung der Generatorfrequenz, wenn man von der unteren Flanke ausgeht.

Diese Erscheinung ist typisch für erzwungene Schwingungen eines nichtlinearen Oszillators und wird dort als Sprungphänomen (jump phenomenon) bezeichnet <sup>15)</sup>. Ruhelagen des Systems innerhalb des Hysteresebereichs können im Sinne der vorherigen Ausführungen nicht stabilen Arbeitspunkten entsprechen.

Der im Sinne der Stabilitätstheorie exakte Nachweis der Instabilität der Arbeitspunkte innerhalb des Hysteresebereichs kann bei erzwungenen Schwingungen auf die Stabilitätsdiskussion einer korrespondierenden Hill'schen bzw. Mathieu'schen Differentialgleichung zurückgeführt werden oder auch durch Energiebilanzen erbracht werden <sup>15,16,17)</sup>.

Die Übereinstimmung unseres Sprungphänomens mit dem in <sup>16,17)</sup> <sup>15)</sup> diskutierten ist nur formal; inhaltlich handelt es sich bei uns um einen selbst-erregten mechanischen Oszillator, der über die Größen  $\hat{V} = |V|$  bzw.  $\theta = \arg VV_g^*$  beobachtet werden kann.

Um das zu verstehen, formen wir die statischen Beziehungen (2.3.3, 4) etwas um. Ein Maß für die mechanische Auslenkung ist:

$$q = \tau(\omega_{co} - \omega_o) \quad (2.4.4)$$

die jetzt Variable sein soll, während:

$$\lambda = \tau(\omega - \omega_o) \quad (2.4.5)$$

als Frequenzparameter verwendet wird.

Wenn man (2.3.4) in (2.3.3) unter Berücksichtigung der Definitionen (2.4.4, 5) einsetzt, ergibt sich:

$$q = - \frac{k_v \tau \hat{V}_g^2}{1 + (\lambda - q)^2} \quad (2.4.6)$$

wenn man nur einen mechanischen Mode  $v$  berücksichtigt.

Zum Vergleich sei noch einmal die Gleichung der statischen Resonanzkurve angegeben:

$$\hat{V}_o^2 = \frac{\hat{V}_g^2}{1 + (\lambda + k_v \tau \hat{V}_o^2)^2} \quad (2.4.7)$$

Wenn man (2.4.6) mit  $\dot{q}$  multipliziert und über die Zeit integriert, ergibt sich bis auf unwesentliche Faktoren und Konstanten das elastische Potential:

$$U' = \frac{1}{2} q^2 + k_v \tau \hat{V}_g^2 \arctan(q - \lambda) \quad (2.4.8)$$

wobei der zweite Term ein durch die elektromechanische Rückwirkung bedingtes Störpotential darstellt. Der Zusammenhang zwischen der statischen Resonanzkurve nach (2.4.7) und dem elastischen Potential nach (2.4.8) ist in Bild 2.2 dargestellt.

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. This is essential for ensuring the integrity of the financial statements and for providing a clear audit trail. The records should be kept up-to-date and should be easily accessible to all relevant parties.

2. The second part of the document outlines the procedures for handling cash and other assets. It is crucial to ensure that all cash receipts are properly recorded and that there is a clear separation of duties between those who handle the cash and those who record the transactions. This helps to minimize the risk of fraud and error.

3. The third part of the document describes the process for reconciling bank statements with the company's records. This process involves comparing the bank's records of deposits and withdrawals with the company's own records to ensure that they match. Any discrepancies should be investigated and resolved promptly.

4. The fourth part of the document discusses the importance of regular backups of all financial data. This ensures that the data is protected in case of a system failure or disaster. Backups should be performed regularly and stored in a secure location.

5. The fifth part of the document outlines the procedures for handling payroll and other liabilities. It is important to ensure that all payroll transactions are accurately recorded and that all liabilities are paid on time. This helps to maintain the company's reputation and avoid any legal issues.

6. The sixth part of the document discusses the importance of regular reviews of the financial statements. This allows management to identify any trends or issues early on and take corrective action as needed. Regular reviews also help to ensure that the financial statements are accurate and reliable.

7. The seventh part of the document outlines the procedures for handling any changes to the financial reporting process. This includes updating the internal controls and procedures to reflect any changes in the company's operations or regulations.



Die zu den bis zu drei Arbeitspunkten gehörigen mechanischen Auslenkungen  $q$  bei gegebenem Frequenzparameter  $\lambda$  erhält man durch Spiegelung an der strichpunktierten Linie in der Resonanzkurve.

Die Potentialverläufe, die zu den  $\lambda$ -Werten innerhalb des Hysteresebereichs zwischen den Marken  $-3.4$  und  $-7.0$  gehören, zeigen neben zwei Minima ein Maximum. Für alle Frequenzen  $-3.4 < \lambda < -7.0$ , also außerhalb des Hysteresebereichs, gibt es nur ein Minimum im elastischen Potential.

Damit ist nachgewiesen, daß der mittlere Arbeitspunkt auf dem überhängenden Teil der Resonanzkurve instabil ist, da er zu einem relativen Maximum des Potentials gehört. Bei der geringsten Störung bewegen sich die Zustandsgrößen des Systems monoton von der Gleichgewichtslage weg.

In der Phasenebene entspricht diesem Maximum ein Sattelpunkt, während die beiden Potentialminima, die also zu stabilen Arbeitspunkten gehören, in der Phasenebene zu Wirbelpunkten führen.

Für den Potentialverlauf, der zu dem Frequenzparameter  $\lambda = -4.5$  in Bild 2.2 gehört, wurden in Bild 2.3 für verschiedene Gesamtenergien  $E_i$  die Phasentrajektorien gezeichnet. Dabei wurde angenommen, daß die mechanischen Verluste gerade durch die elektromechanische Rückwirkung kompensiert werden; man erhält dann geschlossene Grenzzyklen in der Phasenebene.

Die Gleichungen dieser Phasentrajektorien lauten mit (2.4.8):

$$\frac{1}{2} (\dot{q}/\Omega_v)^2 + U' = E_i \quad (2.4.9)$$

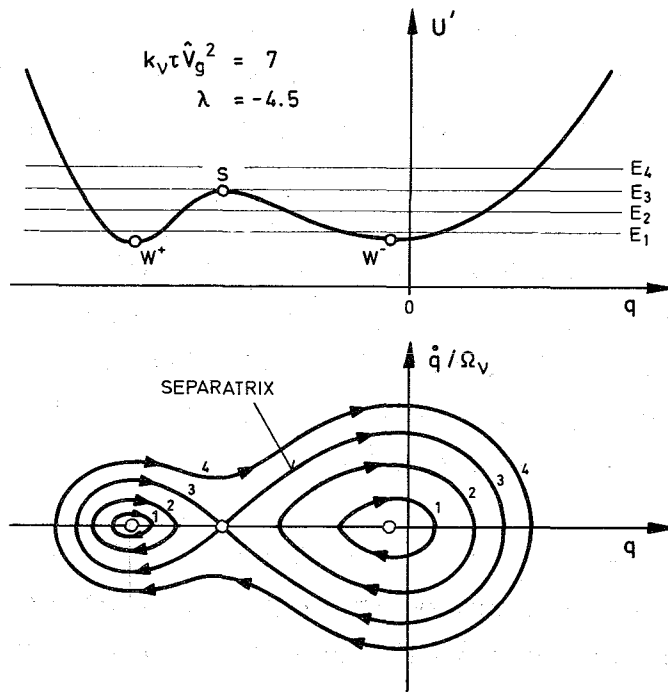


Bild 2.3:  
 Elastisches Po-  
 tential und  
 Phasenebene

Die durch den Sattelpunkt  $S$  gehende Phasentrajektorie wird als Separatrix bezeichnet; sie wird bei einer Gesamtenergie  $E_3$  durchlaufen.

Die Bedingung dafür, daß der betrachtete Potentialverlauf kein Maximum besitzt, ist identisch mit (2.4.2). Wir wollen in Zukunft diese Bedingung als monotone Stabilitätsbedingung bezeichnen, weil sich deren Verletzung in einem monotonen Anstieg oder Abfall der Zustandsgrößen bemerkbar macht.

Wenn die pro Umlauf in der Phasenebene dem mechanischen Oszillator aus dem elektromagnetischen Feld zugeführte Energie größer als die verbrauchte Energie ist, sind die Phasentrajektorien nicht mehr geschlossen, sondern streben spiralförmig von der Ruhelage weg. Die Zustandsgrößen haben die Form einer entdämpften Schwingung. Dieser Vorgang soll in Zukunft als oszillatorische Instabilität bezeichnet werden. Man vergleiche dazu die Ausführungen bei Cremer <sup>18)</sup>.

### 3. Stabilität des linearisierten Systems

Die Beantwortung der Frage nach der Stabilität des nichtlinearen Differentialgleichungssystems, das durch die Gleichungen (2.2.15) und (2.3.2) beschrieben wird, ist nicht ganz trivial. Im letzten Abschnitt wurden bereits zwei Typen von Instabilitäten diskutiert. Während die monotone Stabilitätsbedingung sehr anschaulich aus dem Verlauf des elastischen Potentials abgelesen werden kann, zeigt sich, daß die oszillatorische Stabilitätsbedingung in komplizierter Weise von der Auslenkung und den Systemparametern abhängt.

Es ist daher zweckmäßig, zunächst einmal die Stabilität "im Kleinen", d.h. die Stabilität des linearisierten Systems zu untersuchen.

Zusätzlich sprechen auch folgende Gründe für dieses Verfahren:

- I. Für die Stabilitätsdiskussion des nichtlinearen Systems wird je eine Näherung für die Ausgangsdifferentialgleichung als auch für das Stabilitätskriterium verwendet werden, deren Konsequenzen bereits in der linearen Näherung genau studiert werden können.
- II. Da die linearen in den nichtlinearen Stabilitätsbedingungen enthalten sein müssen, erlaubt ein einfacher Grenzübergang eine Überprüfung der nichtlinearen Ergebnisse.
- III. Die linearen Stabilitätskriterien können mit bereits in der Literatur bekannten verglichen werden.
- IV. Die Untersuchungen des Systems mit zusätzlichen Rückführungen in Kapitel 5 können unmittelbar an die Ergebnisse dieses Kapitels anknüpfen, da in diesem Falle die Nichtlinearitäten eine geringere praktische Bedeutung haben.

Eine wesentliche Eigenschaft des betrachteten elektromechanischen Kopplungsproblems sei an dieser Stelle erwähnt. Das System wird bestimmt von einer ganzen Reihe von Parametern, deren Größe aus Optimierungsgründen frei gehalten werden muß oder die in einem großen Bereich schwanken können. Es ist da-

her notwendig, möglichst allgemeingültige algebraische Stabilitätskriterien zu finden.

### 3.1 Übertragungsfunktion der offenen Schleife

Um das vorstehende Differentialgleichungssystem zu linearisieren, variieren wir die Gleichungen (2.2.15) und (2.3.2) durch. Wegen  $\delta V_g = 0$  und  $\delta V V^* = 2 \operatorname{Re} \delta V V_o^*$  erhalten wir aus (2.2.15):

$$\delta \ddot{V} + (2i\omega + \frac{2}{\tau}) \delta \dot{V} + (\omega_o^2 - \omega^2 + \frac{2}{\tau} i\omega + 2\omega_o \sum \Delta \omega_{\mu o}) \delta V = -2\omega_o \sum \delta \omega_{\mu} \cdot V_o \quad (3.1.1)$$

und aus (2.3.2):

$$\delta \ddot{\omega}_{\mu} + \frac{2}{\tau_{\mu}} \delta \dot{\omega}_{\mu} + \Omega_{\mu}^2 \delta \omega_{\mu} = -2k_{\mu} \Omega_{\mu}^2 \operatorname{Re} \delta V V_o^* \quad (3.1.2)$$

An dieser Stelle ist es zweckmäßig, die beiden Differentialgleichungen in den Laplace-Bereich zu transformieren. Dabei wollen wir der Einfachheit halber die Bildfunktionen mit den gleichen Symbolen wie die Originalfunktionen beschreiben.

In Anlehnung an (2.2.15) für konstante  $\Delta \omega_{\mu} = \Delta \omega_{\mu o}$  können wir eine Übertragungsfunktion für die komplexe Amplitude definieren<sup>51)</sup>:

$$G_o(s) \stackrel{!}{=} \frac{\frac{2}{\tau} i\omega}{s^2 + (2i\omega + \frac{2}{\tau})s + (\omega_{co}^2 - \omega^2 + \frac{2}{\tau} i\omega)} \quad (3.1.3)$$

Mittels der Definition für die Ruhelage nach (2.3.6) erhalten wir daraus:

$$G_o(s) \cong \frac{1}{1 + iy + (\tau - \frac{i}{\omega})s - \frac{i\tau s^2}{2\omega}} \quad (3.1.4)$$

Die Übertragungsfunktion für den mechanischen Mode  $\mu$  lautet:

$$G_{\mu}(s) = \frac{\Omega_{\mu}^2}{s^2 + \frac{2}{\tau_{\mu}}s + \Omega_{\mu}^2} \quad (3.1.5)$$

Mit diesen Übertragungsfunktionen lassen sich die beiden gekoppelten Differentialgleichungen im Bildbereich schreiben:

$$\delta V(s)/V_0 = -\frac{1}{i} G_0(s) \tau \int \delta \omega_{\mu}(s) \quad (3.1.6)$$

$$\delta \omega_{\mu}(s) = -2k_{\mu} \hat{V}_0^2 G_{\mu}(s) \operatorname{Re}_i(\delta V(s)/V_0) \quad (3.1.7)$$

Um die beiden Gleichungen ineinander einsetzen zu können, müssen wir von (3.1.6) noch den Realteil bezüglich der imaginären Einheit  $i$  nehmen, wobei  $s$  selbst die komplexe Frequenzvariable ist. Bei dieser Operation kann  $s$  als reelle Größe angesehen werden. Der Grund liegt ganz einfach daran, daß das Symbol  $i$  eine Hochfrequenzphasenverschiebung von  $+90^{\circ}$  bedeutet, also die Trägerphase verschiebt, während der Imaginärteil von  $s$  verantwortlich für die Signalphase ist. Wir werden zur Unterscheidung daher im Signalbereich die imaginäre Einheit  $j$  verwenden, wenn nicht ausdrücklich eine gemeinsame Beschreibung zweckmäßig ist. Damit erhalten wir aus (3.1.6):

$$\operatorname{Re}_i(\delta V(s)/V_0) = -\operatorname{Im}_i G_0(s) \tau \int \delta \omega_{\mu}(s) \quad (3.1.8)$$

Die Gleichungen (3.1.7) und (3.1.8) bilden einen geschlossenen Wirkungskreis. In Analogie zu dem Vorgehen bei Regelkreisen schneiden wir den Kreis an einer beliebigen Stelle auf und bestimmen die Übertragungsfunktion  $F_0(s)$  des offenen Kreises. Da normalerweise bei Regelkreisen negative Rückkopplung angenommen wird, müssen wir noch das Vorzeichen ändern.

Man erhält schließlich mit  $\hat{V}_0^2 = \hat{V}_g^2 / (1+y^2)$  gemäß Gleichung (2.3.7):

$$F_0(s) = -2 \frac{\hat{V}_g^2}{1+y^2} \operatorname{Im}_i G_0(s) \int_{\mu} \tau k_{\mu} G_{\mu}(s) \quad (3.1.9)$$

Explizit erhalten wir für die "elektrische" Übertragungsfunktion  $G_e(s) = \text{Im } G_o(s)$ :

$$G_e(s) = \frac{\frac{1}{2} \frac{s^2 \tau}{\omega} + \frac{s}{\omega} - y}{\left(\frac{1}{2} \frac{s^2 \tau}{\omega} + \frac{s}{\omega} - y\right)^2 + (1 + \tau s)^2} \quad (3.1.10)$$

Die Frage nach der Stabilität des linearisierten Systems ist theoretisch sehr einfach zu beantworten. Das vorliegende System mit der Übertragungsfunktion  $F_o(s)$  des offenen Kreises ist dann und nur dann stabil, wenn alle Nullstellen der Funktion  $N(s) = 1 + F_o(s)$  negative Realteile haben.

Die Überprüfung dieser Bedingung führt selbst dann, wenn wir nur einen mechanischen Mode berücksichtigen, auf die Berechnung der Nullstellen einer Gleichung 6. Grades.

Die explizite Berechnung der Nullstellen wird bei den algebraischen Stabilitätskriterien vermieden. Die bekanntesten Verfahren sind nach Hurwitz und Routh <sup>19)</sup> benannt. Die hier vorkommenden algebraischen Ungleichungen, die die Koeffizienten des Polynoms  $N(s)$  enthalten, nehmen allerdings für Polynome mit einem Grad größer als 4 bereits so längliche Formen an, daß die Stabilitätsaussagen praktisch nicht verwertbar sind.

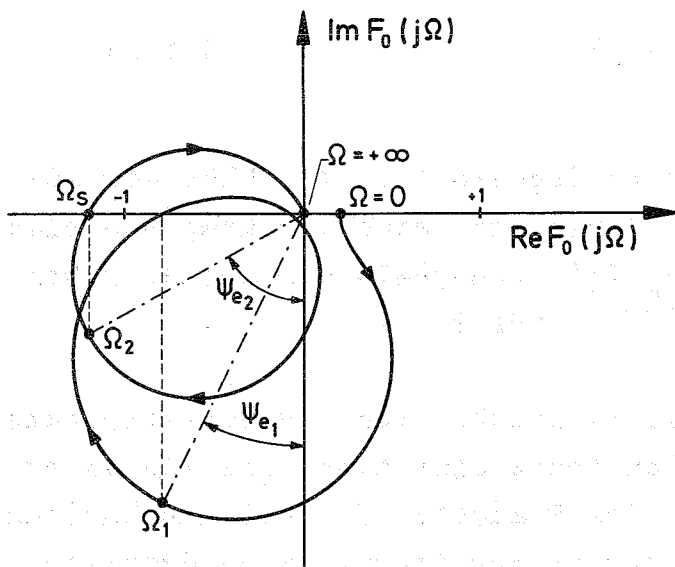
Glücklicherweise haben aber bis auf einige Ausnahmen, auf die im Abschnitt 3.5 noch eingegangen wird, die uns vorliegenden elektromechanischen Systeme eine sehr bedeutsame Eigenschaft, die letztlich aus dem sehr großen Unterschied zwischen den typischen elektrischen und mechanischen Eigenfrequenzen der Resonatoren resultiert. Die Bandbreite des elektrischen Eigenmodes ist im allgemeinen sehr groß gegen die Bandbreiten der mechanischen Moden, d.h.:

$$\tau/\tau_v \ll 1 \quad (3.1.11)$$

Das bedeutet aber, in der Nähe eines der mechanischen Eigenmoden ändert sich die Signalphasenverschiebung mit steigender Frequenz sehr rasch von  $\approx 0^\circ$  bis nahezu  $-180^\circ$ , während das Signal durch den komplexen "elektrischen" Verstärkungsfaktor  $G_e(j\Omega)$  in diesem Bereich eine nahezu konstante Verstärkung und Phasenverschiebung erfährt.

### 3.2 Ortskurve und Nyquist-Kriterium

In Bild (3.1) ist eine typische Ortskurve des komplexen Verstärkungsfaktors  $F_o(j\Omega)$  nach (3.1.9) dargestellt. Dabei wurde ein Arbeitspunkt  $y > 0$  auf der oberen Flanke der "elektrischen" Resonanzkurve gewählt und angenommen, daß nur zwei mechanische Moden einen wesentlichen Beitrag liefern, d.h. genügend große Koppelfaktoren  $k_1$  und  $k_2$  besitzen.



**Bild 3.1:** Typische Ortskurve des elektromechanischen Systems mit zwei mechanischen Moden

Aus der Lage der Ortskurve läßt sich eine eindeutige Aussage über die Stabilität des Systems machen. Nach Nyquist<sup>19)</sup> ist das System mit dem komplexen Verstärkungsfaktor  $F_o(j\Omega)$  des offenen Kreises dann und nur dann stabil, wenn der Punkt  $(-1,0)$  der komplexen  $F_o(j\Omega)$ -Ebene bei positivem Durchlauf (d.h. von  $\Omega = 0$  bis  $\Omega = +\infty$ ) der Ortskurve immer links der Ortskurve bleibt.

Dabei ist vorausgesetzt, daß  $F_o(s)$  selbst stabil ist. Diese Forderung ist, wie man an (3.1.9) sieht, bei uns erfüllt.

Für mechanische Kreisgüten  $Q_v = \frac{1}{2} \Omega_v \tau_v \gg 1$  besteht die Ortskurve aus fast idealen Kreisen mit dem Radius  $R_v$ , die um den Winkel  $-(90^\circ - \psi_{e_v})$  gegen die reelle Achse gedreht sind und in der Nähe des Ursprungs ineinander übergehen. Die Ortskurve startet bei einem im Vergleich zur Resonanzamplitude kleinen positiven Wert auf der reellen Achse und läuft für  $\Omega \rightarrow \infty$  in den Ursprung.

Die Radien sind dabei:

$$R_v \approx \frac{1}{2} |F_o(j\Omega_v)| \quad (3.2.1)$$

Die Winkel  $\psi_{e_v}$  sind identisch mit der Phasenverschiebung des elektrischen Teilsystems bei der jeweiligen mechanischen Resonanzfrequenz:

$$\psi_{e_v} = \arg G_e(j\Omega_v) \quad (3.2.2)$$

Abweichungen von der idealen Kreisgestalt in der Nähe der mechanischen Resonanzen rühren daher, daß sich der komplexe elektrische Verstärkungsfaktor  $G_e(j\Omega)$  innerhalb der mechanischen Bandbreite eben doch geringfügig ändert.

Unter der Voraussetzung (3.1.11) lassen sich die Schnittpunkte der Ortskurven mit der reellen Achse bestimmen, sie liegen annähernd bei  $\operatorname{Re} F_o(j\Omega_v)$  (Satz des Thales!). Für alle mechanischen Eigenfrequenzen  $\Omega_v$  muß nach dem vorher formulierten Nyquist-Kriterium gelten:

$$\operatorname{Re} F_o(j\Omega_v) > -1 \quad (3.2.3)$$

Dies ist eine überraschend einfache Bedingung, deren Fruchtbarkeit sich später im Kapitel 4 auch bei der nichtlinearen Stabilitätsdiskussion erweisen wird.



Die Bedingung (3.2.3) ist aufgrund der besonderen Eigenschaften des Systems, nämlich des Vorhandenseins von dominanten komplexen Polpaaren mit sehr kleiner Dämpfung ( $Q_v \gg 1$ ), eine sowohl hinreichende als auch notwendige Bedingung für die Stabilität des linearen Systems, weil sie sich direkt aus dem Nyquist-Kriterium herleitet. Die Näherungsbedingung wird umso genauer sein, je besser die Voraussetzung (3.1.11) erfüllt ist.

Bevor wir diese Bedingung näher untersuchen, sei noch eine einfache notwendige Stabilitätsbedingung angegeben, die bei einem normalen Regelkreis selbstverständlich ist. Für Frequenzen  $\Omega \rightarrow 0$  wird dort das Vorzeichen der Rückföhrfunktion immer gerade so gewöhlt, daß der Einfluß einer Störung durch eine entgegengesetzt gerichtete Steuerung verringert wird. Das bedeutet im Falle von Proportionalverhalten der Übertragungsfunktion des offenen Kreises aber, daß die Ortskurve, wie in Bild 3.1, immer auf der reellen Achse bei positiven Werten  $F_o(0) > 0$  entspringt.

Da wir es hier nicht mit einem Regelkreis, sondern mit einer Regelstrecke mit innerer Rückföhrung zu tun haben, deren Eigenschaften parameterabhängig sind, kann durchaus positive Rückkopplung eintreten, also  $F_o(0) < 0$  werden. Wenn dabei die Verstärkung genügend klein bleibt, kann das System trotzdem stabil sein.

Entsprechend dem vorher formulierten Nyquist-Kriterium ist daher eine sicherlich notwendige Stabilitätsbedingung:

$$F_o(0) > -1 \quad (3.2.4)$$

Angewendet auf die Gleichung (3.1.9) erkennen wir sofort, daß das die im Abschnitt 2.4 angegebene monotone Stabilitätsbedingung (2.4.2) ist, die nur für Arbeitspunkte auf der unteren Flanke der Resonanzkurve des Resonators verletzt werden konnte ( $y < 0$ ).

Auf der oberen Flanke hat man wie bei einem normalen Regelkreis negative Rückkopplung. Hier kann das System aber trotzdem instabil werden, wenn wie im Bild 3.1 das Kriterium (3.2.3) verletzt wird. Physikalisch tritt eine entdämpfte Schwingung mit der Frequenz  $\approx \Omega_s$  auf, die in der Nähe der Resonanz des zweiten mechanischen Modes liegt. Das Maß der Entdämpfung hängt dabei ab von der Differenz  $\operatorname{Re} F_o(j\Omega_2) + 1$ .

Interessant an diesem gewählten Beispiel ist, daß die Instabilität durch den zweiten mechanischen Mode verursacht wird, obwohl die Resonanzamplitude des offenen Kreises beim ersten mechanischen Mode erheblich größer ist. Die Ursache liegt, wie man sieht, in der größeren "elektrischen" Phasenverschiebung  $\psi_{e2} = \arg G_e(j\Omega_2)$  gegenüber  $\psi_{e1}$ .

Die Stabilitätsbedingung (3.2.3) ist gerade die im Abschnitt 2.4 bei der Diskussion der Phasenebene angesprochene oszillatorische Stabilitätsbedingung, die allerdings nur in einer kleinen Umgebung der Ruhelage gültig ist.

Wenn man den Übertragungsfaktor nach (3.1.9) in die Bedingung (3.2.3) einsetzt, erhält man näherungsweise:

$$\frac{\tau_v^2}{1+y^2} k_v \Omega_v \tau_v \operatorname{Im} G_e(j\Omega_v) < 1 \quad (3.2.5)$$

als Stabilitätsbedingung, die für jeden mechanischen Mode  $v$  erfüllt sein muß.

Die Näherung, die hier ohne Bedenken verwendet wurde, besteht darin, daß der Beitrag aller anderen Moden außer dem betrachteten vernachlässigt wurde. Das ist dann erlaubt, wenn der Frequenzabstand zweier benachbarter mechanischer Moden immer sehr groß gegen die Bandbreite ist; dann gilt:

$$\sum_{\mu} k_{\mu} G_{\mu}(j\Omega_v) \approx k_v G_v(j\Omega_v) \quad (3.2.6)$$

Mit der Abkürzung:

$$y' = y + \frac{1}{2} \Omega_v \tau \cdot \frac{\Omega_v}{\omega} \quad (3.2.7)$$

erhält man aus (3.1.10):

$$\text{Im } G_e(j\Omega_v) = \frac{2\Omega_v \tau \cdot y' + \frac{\Omega_v}{\omega} (1 - y'^2 - (\Omega_v \tau)^2 - (\frac{\Omega_v}{\omega})^2)}{(1 + y'^2 - (\Omega_v \tau)^2 - (\frac{\Omega_v}{\omega})^2)^2 + 4(\Omega_v \tau - y' \frac{\Omega_v}{\omega})^2} \quad (3.2.8)$$

In die Stabilitätsbedingung (3.2.5) gehen lediglich zwei Näherungen ein, nämlich (3.1.11) und (3.2.6), wobei die bisher nur als plausibel angenommene Näherung (3.1.11) im Abschnitt 3.5 noch ausführlich diskutiert werden wird.

Wie bereits im Abschnitt 3.1 im Zusammenhang mit der Näherung (3.1.11) ausgeführt wurde, besteht eine wesentliche Eigenschaft dieses gekoppelten elektromechanischen Systems darin, daß die mechanischen Eigenfrequenzen sehr klein gegen die elektrischen sind. Eine typische Größenordnung für  $\Omega_v/\omega_0$  ist  $10^{-6}$  (2,7). Das Verhältnis  $\Omega_v \cdot \tau$  (mechanische Eigenfrequenz/halbe elektrische Bandbreite) allerdings kann in einem großen Bereich variieren. Trotzdem wird für praktische Anwendungsfälle gelten:

$$\frac{1}{2} \frac{\Omega_v}{\omega_0} (\Omega_v \tau + \frac{1}{\Omega_v \tau}) \ll 1 \quad (3.2.9)$$

Damit läßt sich (3.2.8) erheblich vereinfachen und man erhält aus (3.2.5) die sehr übersichtliche Stabilitätsbedingung:

$$\frac{2y}{1+y^2} \frac{\hat{V}_g^2 k_v \tau_v (\Omega_v \tau)^2}{(1 + (\Omega_v \tau)^2 - y^2)^2 + 4y^2} < 1 \quad (3.2.10)$$

Die Zusatzforderung (3.2.9) ist, wie wir jetzt an (3.2.10) sehen, praktisch schon deshalb erfüllt, weil sowohl für sehr große als auch für sehr kleine  $\Omega_v \tau$  das System tendenziell in bezug auf Anfachung von Schwingungen stabil wird.

Die monotone Stabilitätsbedingung (2.4.2) und die oszillatorische Bedingung (3.2.10) werden im Abschnitt 3.6 ausführlich diskutiert werden.

### 3.3 Kritik einer Ableitung von V.E. Shapiro

Bereits von Karliner <sup>2)</sup> wurden die Stabilitätsbedingungen des Systems für  $\Omega_v \tau \ll 1$  angegeben. Er benutzte dabei eine sehr elegante Störungsentwicklung nach dem kleinen Parameter  $\Omega_v \tau$  für eine Näherungsdifferentialgleichung der komplexen Amplitude des elektromagnetischen Feldes, auf die im nächsten Abschnitt näher eingegangen werden wird.

V.E. Shapiro <sup>3)</sup> verallgemeinerte diese Ergebnisse neben einer ausführlichen physikalischen Diskussion der ponderomotorischen Effekte vor allem in zwei Richtungen. Zum einen erlaubte sein Ansatz, die Einschränkung  $\Omega_v \tau \ll 1$  fallenzulassen; zum anderen berücksichtigte er zusätzliche elektrische Moden beim Energieaustauschprozeß zwischen dem elektromagnetischen und dem mechanischen Speicher.

Weil die dort auf einem anderen Weg gefundenen Lösungen einen interessanten Vergleich mit den unseren erlauben, soll die Shapiro'sche Ableitung kurz referiert werden. Wir beschränken uns dabei, wie auch in den folgenden Ausführungen, auf einen elektromagnetischen Mode. Zur Vereinfachung der Rechnung soll wie auch bei Shapiro zusätzlich angenommen werden, daß das mechanische System hinreichend gut durch einen Mode  $v$  beschreibbar sei.

Wir gehen jetzt direkt von der Differentialgleichung (2.2.7) aus und nehmen an, daß sich die Eigenfrequenz des Resonators periodisch mit der Frequenz  $\Omega$  ändert:

$$\omega_c^2 = \omega_{co}^2 + 2\omega_{co}\Delta\omega(t)$$

$$\Delta\omega(t) = \frac{1}{2}\Delta\omega e^{j\Omega t} + \frac{1}{2}\Delta\omega^* e^{-j\Omega t} \quad (3.3.1)$$

Es läßt sich zeigen, daß die Lösung  $v$  als Reihe darstellbar ist:

$$v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (3.3.2)$$

die für  $|\Delta\omega|/\omega_{co} \ll 1$  konvergiert. Wir wollen uns hier auf die in  $\Delta\omega$  linearen Terme beschränken. Genauere Ausführungen über die Konvergenz der Reihe (3.3.2) werden im Abschnitt 4.1 gemacht werden.

Wenn man (3.3.2) in die Differentialgleichung (2.2.7) einsetzt, bekommt man

$$\ddot{v}_0 + \frac{2}{\tau} \dot{v}_0 + \omega_{co}^2 v_0 = \frac{2}{\tau} \dot{v}_g \quad (3.3.3)$$

für die nullte Näherung und:

$$\ddot{v}_1 + \frac{2}{\tau} \dot{v}_1 + \omega_{co}^2 v_1 = -2\omega_{co}\Delta\omega(t) \cdot v_0 \quad (3.3.4)$$

für die erste Näherung.

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß  $\omega_{co}$  die Eigenfrequenz des Resonators bei der Spannung  $\hat{V}_0 = \hat{V}_g / \sqrt{1+y^2}$  ist (vgl. Bild 2.1).

Für die Generatorspannung  $v_g$  wird der gleiche Ansatz wie in Gleichung (2.2.10) gemacht.

Die mechanische Differentialgleichung ist entsprechend (2.3.2):

$$\Delta\ddot{\omega} + \frac{2}{\tau_v} \Delta\dot{\omega} + \Omega_v^2 \Delta\omega = -2k_v \Omega_v^2 \langle v^2 - v_0^2 \rangle_\omega \quad (3.3.5)$$

wobei die gespitzte Klammer mit dem Index  $\omega$  eine zeitliche Mittelung über die Hochfrequenzperiode  $2\pi/\omega$  bedeutet.

Oszillatorische Instabilität tritt dann ein, wenn die während einer Niederfrequenzperiode  $2\pi/\Omega$  in die mechanische Schwingung übertragene Leistung größer wird als die durch Dämpfung verbrauchte Leistung.

Wenn man (3.3.5) mit  $\Delta\dot{\omega}$  multipliziert und über eine Niederfrequenzperiode mittelt, erhält man in linearer Näherung die Bedingung:

$$\frac{-4k_v \Omega_v^2 \langle \langle v_o v_1 \rangle_\omega \Delta\dot{\omega} \rangle_\Omega}{2 \langle \Delta\dot{\omega} \Delta\dot{\omega} \rangle_\Omega} < 1 \quad (3.3.6)$$

Die normierte Hochfrequenzimpedanz  $z_n$  für das n-te Seitenband sei:

$$z_n \stackrel{!}{=} \frac{\omega^2}{-(\omega+n\Omega)^2 + \frac{2}{\tau} j(\omega+n\Omega) + \omega_{co}^2} \quad (3.3.7)$$

Nach Ausführung der beiden Zeitmittelungen bekommt Shapiro schließlich aus (3.3.6):

$$\frac{4\hat{V}_g^2 k_v \tau_v \Omega_v^2}{\omega^3 \tau^2 \Omega} |z_o|^2 \text{Im}(z_1 - z_{-1}) < 1 \quad (3.3.8)$$

Wenn (3.3.8) eine Stabilitätsbedingung sein soll, so fällt zunächst auf, daß in der Ungleichung noch die unbekannte Frequenz  $\Omega$  enthalten ist. Da wir es mit einem linearen Stabilitätsproblem zu tun haben, muß diese Frequenz  $\Omega$  eine Funktion der Parameter des Systems sein.

Wenn man probeweise  $\Omega$  mit der Eigenfrequenz  $\Omega_v$  identifiziert, stellt man fest, daß die Bedingung (3.3.8) identisch mit der früher angegebenen oszillatorischen Bedingung (3.2.5) ist.

War diese Identifizierung noch plausibel, so wird das Ergebnis von Shapiro völlig irreführend, scheint doch (3.1.11) gar nicht benötigt zu werden; die Näherung nämlich, daß die "elektrische" Übertragungsfunktion  $G_e(s)$  breitbandig gegenüber der "mechanischen" Übertragungsfunktion  $G_v(s)$  sein muß ( $\tau/\tau_v \ll 1$ ).

Die von Shapiro verwendete zeitliche Mittelwertbildung führt offenbar nur dann zu einem richtigen Ergebnis, wenn die Energieübertragung aus dem elektrischen Speicher mit der Energie  $W$  schnell gegenüber dem Energieabbau durch mechanische Verluste erfolgt.

Wie man an diesem Beispiel ersieht, sind Energiebilanzen mit Vorsicht zu genießen, wenn es darum geht, die Stabilitätsbedingungen eines selbsterregten Systems mit komplizierter dynamischer Struktur zu bestimmen.

Trotzdem muß gesagt werden, daß der von Shapiro eingeschlagene Weg physikalisch sehr anschaulich ist. Die Beschreibung, die hier durchgängig verwendet wird, benutzt Übertragungsfunktionen<sup>51)</sup> bzw. komplexe Verstärkungsfaktoren als Vermittler zwischen Ein- und Ausgangsgrößen. Letztere lassen sich zusätzlich sehr erfolgreich zur Beschreibung des nichtlinearen Verhaltens verwenden ( $\rightarrow$  Kapitel 4).

Dieser Weg erweist sich spätestens dann als notwendig, wenn man die Beschreibung des Systemverhaltens an sich verläßt und zusätzliche Rückführungen (Regelschleifen) einführt, um das Systemverhalten zu verbessern bzw. wie hier um zunächst Instabilitäten zu beseitigen.

### 3.4 Näherungsdifferentialgleichung für die Resonatoramplitude und Ersatzschaltbild

Es soll nun genauer untersucht werden, was die Näherung (3.2.9), die das Ergebnis ja wesentlich übersichtlicher gemacht hatte, eigentlich bedeutet. Für die elektrische Übertragungsfunktion  $G_e(s)$  ist die Näherung (3.2.9) gleichbedeutend damit, daß die Terme  $\frac{s^2\tau}{2\omega}$  und  $\frac{s}{\omega}$  gegen  $y$  sowohl im Zähler als auch Nenner vernachlässigt werden. Gehen wir noch einen Schritt weiter zurück zur Übertragungsfunktion für die komplexe Amplitude  $G_o(s)$  und führen eine Partialbruchzerlegung für (3.1.3) durch, dann erhalten wir:

$$G_o(s) = \frac{\omega}{\omega_{co}} \left( \frac{1}{1+\tau s+i\tau(\omega-\omega'_{co})} - \frac{1}{1+\tau s+i\tau(\omega+\omega'_{co})} \right) \quad (3.4.1)$$

mit

$$\omega'_{co} = \sqrt{\omega_{co}^2 - \frac{1}{\tau^2}} \approx \omega_{co}$$

Der erste Partialbruch hängt von der Differenz von Generator- und Eigenfrequenz und der zweite von der Summe ab. Weil der Resonator aus rein ökonomischen Gründen immer möglichst in Resonanz betrieben wird, d.h.  $|\omega-\omega_{co}| \ll \frac{1}{\tau}$ , kann der doppelt hochfrequente Term vernachlässigt werden, und wir erhalten unter Berücksichtigung von (2.3.6) näherungsweise:

$$G_o(s) \approx \frac{1}{1+\tau s+iy} \quad (3.4.2)$$

Noch einen Schritt weiter zurück in den Zeitbereich heißt das für die komplexe Amplitude  $V$  in (2.2.15), daß die zweite Ableitung  $\ddot{V}$  und ein Teil der ersten Ableitung, nämlich  $\frac{2}{\tau} \dot{V}$  vernachlässigt werden können.

Nach Division durch  $\frac{2}{\tau}i\omega$  und Verwendung der Definition (2.2.8) erhält man:

$$\tau \dot{V} + (1+i\tau(\omega-\omega_c)) V = V_g \quad (3.4.3)$$



Für das linearisierte Differentialgleichungssystem bedeutet die Näherung zunächst eine Reduktion um zwei Ordnungen. Das heißt: in der Mindestausstattung mit je einem mechanischen und elektromagnetischen Mode wird das dynamische Problem durch eine Differentialgleichung 4. Ordnung beschrieben.

Einerseits wird jetzt die Anwendung eines der bereits im Abschnitt 3.1 in Erwägung gezogenen algebraischen Stabilitätskriterien möglich ( $\rightarrow$  nächster Abschnitt); andererseits wird aber auch das nichtlineare Problem erheblich vereinfacht, weil diese lineare Differentialgleichung erster Ordnung exakt integrierbar ist. Wir können nun auch größere dynamische Frequenzabweichungen behandeln, die die lineare Näherung verletzen würden.

Allerdings müssen wir dabei erneut prüfen, ob auch für größere Auslenkungen die Näherung ihre Gültigkeit behält. Die Bedingung dafür, daß wir den  $\ddot{V}$ -Term streichen konnten, nämlich die Bedingung (3.2.9), stammt aus dem linearisierten Problem und ist daher nicht ohne weiteres übertragbar. Einen Anhaltspunkt, in welcher Richtung die genannte Bedingung bei größeren Auslenkungen erweitert werden muß, liefert eine gedankliche Fortsetzung der Iteration im vorhergehenden Abschnitt. Wie man sich leicht überlegen kann, hat das Lösungsspektrum nach dem  $n$ -ten Iterationsschritt eine Breite von gerade  $\omega \pm n\Omega$ . Wir können hoffen, daß unter der Bedingung:

$$\frac{1}{2} \frac{n\Omega}{\omega_0} (n\Omega\tau + \frac{1}{n\Omega\tau}) \ll 1 \quad (3.4.4)$$

für eine entsprechend große Auslenkung auch die Näherungsdifferentialgleichung genügend gute Ergebnisse liefert.

Bei vielen Problemen ist es zweckmäßig, ein komplexes Wirkungsgefüge durch ein Ersatzschaltbild zu beschreiben. Nachdem durch die Einführung der Näherungsdifferentialgleichung (3.4.3) das lineare Kopplungsproblem auf die wesentlichen Bestandteile re-

duziert wurde, kann das dynamische Verhalten durch die in Bild 3.2 wiedergegebene R,L,C-Schaltung veranschaulicht werden.

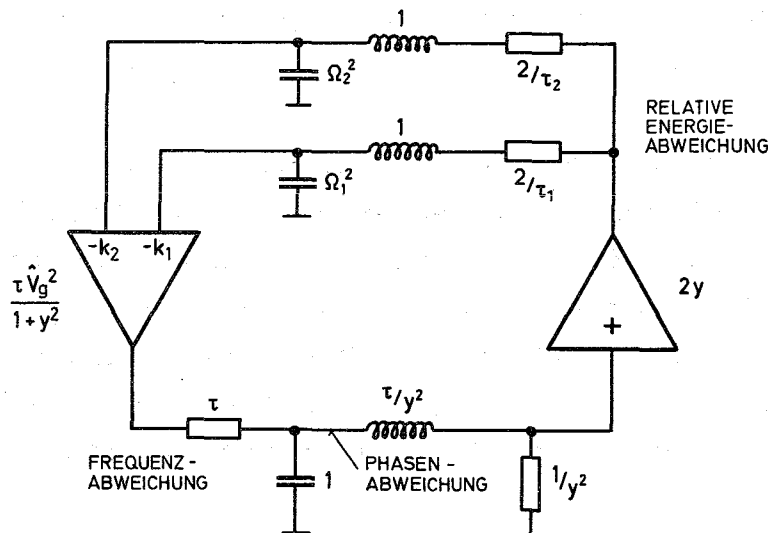


Bild 3.2: Ersatzschaltbild des elektromechanischen Systems mit 2 mechanischen Moden

Die Dreiecke sollen ideale spannungsgesteuerte Spannungsverstärker mit der nebenstehenden Verstärkung sein. Der linke Verstärker summiert die beiden Eingänge mit den Gewichten  $k_1$  und  $k_2$ . Bild 3.2 ist gerade das Ersatzschaltbild, das zur Ortskurve Bild 3.1 gehört. Der untere Teil einschließlich des rechten Entkoppelerverstärkers repräsentiert die Übertragungsfunktion von der normierten Frequenzabweichung  $\tau(\delta\omega_1 + \delta\omega_2)$  auf die relative Energieabweichung  $2\text{Re}\delta V/V_0$ , während der obere Teil das elektrische Analogon der beiden mechanischen Schwingkreise darstellt.

Die angegebene Schaltung eignet sich zu einer einfachen Simulation des Signalverhaltens für die gekoppelten Gleichungen, weil hier die Hochfrequenz explizit nicht mehr auftaucht.

### 3.5 Hurwitz-Kriterium für das genäherte Differentialgleichungssystem

Grundlage für die Anwendung des Nyquist-Kriteriums in der spezifischen Form der Gleichung (3.2.3) war die Voraussetzung (3.1.11), die bisher nur plausibel war. Wenn wir nur einen mechanischen Mode berücksichtigen und die Näherung (3.4.2) für die komplexe Übertragungsfunktion  $G_o(s)$  verwenden, ergibt sich mittels (3.1.9) die lineare Übertragungsfunktion für den offenen Kreis:

$$F_o(s) = \frac{2y}{1+y^2} \frac{\hat{V}_g^2 k_v \tau \Omega_v^2}{(s^2 + \frac{2}{\tau} s + \Omega_v^2) ((1+\tau s)^2 + y^2)} \quad (3.5.1)$$

Um das Hurwitz-Kriterium anwenden zu können, müssen wir zunächst die Koeffizienten des Polynoms  $1 + F_o(s) = 0$  berechnen.

Mit der Definition für die Polynomkoeffizienten:

$$\text{Zähler } \{1 + F_o(s)\} = \sum_{\lambda=0}^n a_\lambda s^{(n-\lambda)}, \quad n = 4 \quad (3.5.2)$$

erhalten wir die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= \tau^2 \\ a_1 &= 2\tau(1+\tau/\tau_v) \\ a_2 &= 1+y^2+4\tau/\tau_v+(\Omega_v\tau)^2 \\ a_3 &= 2/\tau_v(1+y^2)+2\Omega_v^2\tau \\ a_4 &= \Omega_v^2(1+y^2+\frac{2\hat{V}_g^2 k_v y \tau}{1+y^2}) \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Das Hurwitz-Koeffizienten-Schema hat für eine Differentialgleichung 4. Ordnung folgende Gestalt:

$$\begin{vmatrix}
 a_1 & a_3 & 0 & 0 \\
 a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\
 0 & a_1 & a_3 & 0 \\
 0 & a_0 & a_2 & a_4
 \end{vmatrix} \quad (3.5.4)$$

Das System ist nach Hurwitz stabil, wenn alle durch gestrichelte Linien gekennzeichneten "nordwestlichen" Determinanten bzw. Unterdeterminanten größer als Null sind. Es ergeben sich die folgenden 4 Bedingungen:

1.  $D_1 = a_1 > 0$
2.  $D_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$
3.  $D_3 = a_3 D_2 - a_1^2 a_4 > 0$  (3.5.4.a)
4.  $D_4 = a_4 D_3 > 0$

Die ersten beiden sind immer größer Null, liefern damit keine echten Bedingungen. Die vierte Bedingung lässt sich mit der dritten umformen zu  $a_4 > 0$ , d.h. also:

$$\frac{2y}{(1+y^2)^2} \cdot \hat{V}_g^2 k_v \tau > -1 \quad (3.5.5)$$

Das ist wieder die bekannte monotone Stabilitätsbedingung (2.4.2) bzw. (3.2.4)

Übrig bleibt die dritte Bedingung  $D_3 > 0$ ; die sich mit (3.5.3) schreibt:

$$\frac{\frac{2y}{1+y^2} \hat{V}_g^2 k_v \tau_v (\Omega_v \tau)^2 (1+\tau/\tau_v)^2}{(1+y^2 - (\Omega_v \tau)^2)^2 + 4(1+\tau/\tau_v)(\Omega_v \tau)^2 + (1+y^2)\tau/\tau_v} < 1 \quad (3.5.6)$$

Dies ist nun die verbesserte oszillatorische Stabilitätsbedingung, in der die endliche Bandbreite des elektrischen Übertragungssystems berücksichtigt ist.

Die Näherung (3.1.11), wieder angewendet auf (3.5.6), ergibt, wie es sich gehört, die alte oszillatorische Stabilitätsbedingung (3.2.10). Damit ist auf indirektem Wege die Notwendigkeit und Richtigkeit der Bedingung  $\tau/\tau_v \ll 1$  für die Anwendbarkeit des algebraischen Nyquist-Kriteriums nachgewiesen.

Daß (3.1.11) auch tatsächlich verletzt werden kann, ist am Beispiel des 2-Meilen-Linearbeschleunigers in Stanford <sup>20)</sup>, dessen Resonatoren supraleitend gemacht werden sollen, zu sehen. Dort soll ein mechanisches Eigenfrequenzstellglied mit  $\Omega_v/\omega_0 \sim 10^{-7}$  und  $Q_v \sim 10$  bei einer Resonatorgüte  $Q \gg 10^8$  betrieben werden. Für diese Parameter folgt  $\tau/\tau_v > 1$ ; die belastete Bandbreite des Resonators kann also größer als die mechanische Bandbreite werden.

Die folgenden Ausführungen verdeutlichen noch einmal den Einfluß der Näherung (3.1.11) und geben zugleich einen tieferen Einblick in das Wesen der beiden Stabilitätsbedingungen.

Die beiden aus dem Hurwitz-Kriterium abgeleiteten Bedingungen für die monotone Stabilität  $a_4 > 0$  und die oszillatorische Stabilität  $D_3 > 0$  für ein System der Ordnung  $n = 4$  sind nach Cremer <sup>18)</sup> und Magnus <sup>21)</sup> auch für den allgemeinen Fall  $n$ -ter Ordnung mit  $a_n > 0$  und  $D_{n-1} > 0$  die schärfsten Stabilitätsbedingungen, dh. diejenigen, die bei einer beliebigen Variation der Systemparameter von einem stabilen Zustand ausgehend am ehesten verletzt werden.

Interessanterweise läßt sich mittels der berechneten Hurwitzdeterminanten die kritische Frequenz  $\Omega_K$  für die oszillatorische Stabilität an der Stabilitätsgrenze  $D_{n-1} = 0$  angeben; sie errechnet sich aus:

$$\Omega_K^2 = \frac{a_n D_{n-3}}{D_{n-2}} \quad n \geq 3 \quad (3.5.7)$$

Für unser Beispiel  $n=4$  ergibt sich daraus:

$$\Omega_K = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} = \Omega_V \sqrt{\frac{1 + \frac{\tau}{\tau_V} \cdot \frac{1+y^2}{(\Omega_V \tau)^2}}{1 + \frac{\tau}{\tau_V}}} \quad (3.5.8)$$

Die kritische Frequenz ist daher nur dann annähernd gleich der Eigenfrequenz der mechanischen Schwingung, wenn (3.1.11) gilt und zusätzlich:

$$\frac{1+y^2}{(\Omega_V \tau)^2} \ll 1 \quad (3.5.9)$$

Diese letzte Bedingung ist gerade für typische Fälle bei normalleitenden Resonatoren verletzt. Für die Parameter nach <sup>2)</sup>:

$$\Omega_V = 2\pi \cdot 39 \text{ Hz}, \quad \tau = 57 \text{ usec}, \quad \tau_V = 1,63 \text{ sec} \quad \text{und} \quad y = 1$$

ergibt sich

$$\Omega_K = 1,17 \cdot \Omega_V.$$

Die beobachtbare Vibrationsfrequenz ist also 45 Hz anstatt 39 Hz. Dieses Ergebnis leuchtet auch unmittelbar ein, wenn wir uns die Ortskurve Bild 3.1 anschauen und uns überlegen, daß hier die "elektrische" Phasenverschiebung  $\psi_e$  nach (3.2.2) nur etwa  $-1^\circ$  beträgt. Die bis  $-180^\circ$  fehlende Phasenverschiebung muß vom mechanischen System übernommen werden; d.h. die kritische Frequenz muß ganz weit auf der oberen Flanke der mechanischen Resonanzkurve liegen.

Die gegenseitigen Beziehungen zwischen den in den letzten 5 Abschnitten berechneten oszillatorischen Stabilitätskriterien sind in Bild 3.3 zusammengestellt.

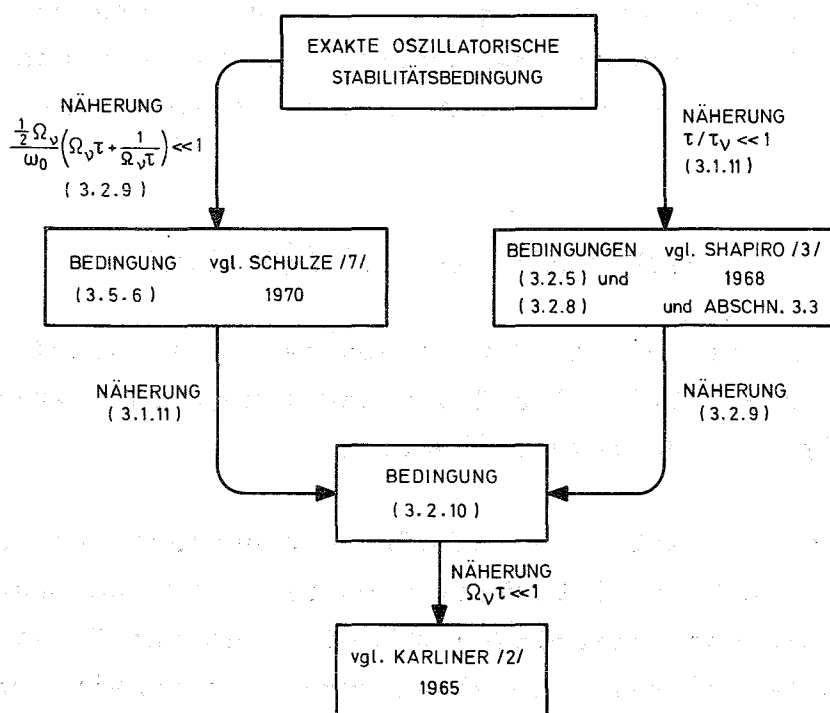


Bild 3.3: Übersichtsdarstellung der verschiedenen oszillatorischen Stabilitätskriterien

Auf die explizite Ausrechnung der exakten oszillatorischen Stabilitätsbedingung wurde wegen des großen numerischen Aufwands verzichtet. Mit den vorherigen Ausführungen können wir wenigstens die Bedingung formulieren: die aus dem Polynom 6. Grades  $1+F_0(s)$  nach (3.1.9, 10) gebildete Hurwitzdeterminante 5. Ordnung muß größer als Null sein.

Es zeigt sich, daß für typische Resonatoren die Näherung (3.2.9), die praktisch einer Streichung des doppelt hochfrequenten Terms in  $G_0(s)$  gleichkommt, gut erfüllt ist, während man das, wie das Beispiel zeigte, für die Näherung (3.1.11) nicht behaupten kann.

Zusammenfassend kann man daher sagen, daß in der bereits in <sup>7)</sup> mitgeteilten Bedingung (3.5.6) alle wesentlichen Merkmale der oszillatorischen Stabilitätsgrenze enthalten sind.

Für den Anwendungsfall, der im Kapitel 6 näher untersucht wird, ist wegen  $\tau/\tau_v \ll 1$  bereits die Bedingung (3.2.10), die man direkt aus dem Nyquist-Kriterium folgern kann, ausreichend.

### 3.6 Diskussion der linearen Stabilitätsbedingungen

Bei den folgenden Betrachtungen wird von der oszillatorischen Stabilitätsbedingung (3.2.10) und von der monotonen Stabilitätsbedingung (2.4.2) ausgegangen werden.

Zunächst soll noch einmal eine wichtige Eigenschaft, die die Relation der beiden Stabilitätskriterien betrifft, herausgestellt werden: die oszillatorische und die monotone Stabilitätsschwelle können niemals für einen gegebenen Arbeitspunkt  $y$  gleichzeitig überschritten werden. Diese Eigenschaft wird sich erst bei Einführung zusätzlicher Rückführungen (Regelschleifen) ändern. Die oszillatorische Stabilitätsgrenze kann nur auf der oberen Flanke  $y > 0$  überschritten werden und die monotone Stabilitätsgrenze nur auf der unteren Flanke  $y < 0$ . An der Grenze dieser beiden Arbeitsbereiche, für  $y = 0$  nämlich, ist das System in beiden Hinsichten stabil.

Wenn der Resonator also in Resonanz betrieben wird, sollte das System theoretisch stabil sein. Praktisch treten Störungen auf. Die Eigenfrequenz des Resonators kann durch Erschütterungen der Aufhängung, durch Temperaturdrift und durch direkte Schalleinwirkung geändert werden. Aus dem Potentialverlauf - etwa der Kurve für  $\lambda = -7.0$  in Bild 2.2 - ist zu erkennen, daß bei der geringsten Störung das System dem energetisch niedrigeren Niveau zustrebt. Wenn man andererseits, um diesen Effekt zu verhindern, einen Arbeitspunkt  $0 < y \ll 1$  auf der oberen Flanke auswählt - etwa



$\lambda = -6.0$  in Bild 2.2 -, so wird zwar der Schutzwall der potentiellen Energie größer, dafür können nun nach (3.2.10) Vibrationen angefacht werden.

Ein weiterer Grund, der einen Betrieb des Resonators auf der Flanke sinnvoll erscheinen läßt, steht in Zusammenhang mit der Forderung nach longitudinaler und transversaler Phasenstabilität<sup>2,22)</sup> des zu beschleunigenden Teilchenstrahls.

Schließlich sei noch erwähnt, daß es aus Leistungsanpassungsgründen und u.U. zur Verbesserung der Energieschärfe des Teilchenstrahls bei einem Niederenergieprotonenbeschleuniger zweckmäßig sein kann, den Resonator auf der unteren Flanke zu betreiben<sup>23)</sup>.

Die monotone Stabilitätsbedingung wurde bereits ausführlich diskutiert, wir wenden uns jetzt den Eigenschaften der oszillatorischen Stabilitätsbedingung (3.2.10) zu. Zusätzlich zu den schon in der monotonen Bedingung (2.4.2) auftretenden Parametern:  $\hat{V}_g$ -Resonanzspannung,  $\tau$ -elektrische Abklingzeit,  $y$ -Arbeitspunkt auf der Resonanzkurve (normierte Verstimmung) und  $k_v$ -Kopplungskoeffizient des mechanischen Modes  $v$  treten hier die beiden "dynamischen" Parameter des mechanischen Teilsystems:  $\Omega_v$ -mechanische Eigenfrequenz und  $\tau_v$ -Abklingzeit des mechanischen Modes  $v$  hinzu.

Um die folgende Diskussion übersichtlicher zu gestalten, wollen wir den Begriff der Schwellenresonanzspannung  $V_g$  einführen, die gerade dem Wert der Resonanzspannung  $\hat{V}_g$  entspricht, für die die Stabilitätsschwelle erreicht ist. Für die Schwellenspannung nach der oszillatorischen Bedingung (3.2.10) erhalten wir:

$$\tilde{V}_g^2 = \frac{1+y^2}{2y} \left( \frac{(1+(\Omega_v \tau)^2 - y^2)^2 + 4y^2}{k_v \tau_v (\Omega_v \tau)^2} \right) \quad (3.6.1)$$

Sowohl für sehr große  $\Omega_v \tau$  als auch für sehr kleine geht  $\tilde{V}_g$  gegen

unendlich, irgendwo dazwischen wird ein Optimum liegen. Wie läßt sich dieses Verhalten anschaulich verstehen? Dazu sehen wir uns die Ortskurve in Bild 3.1 noch einmal genauer an. Wir erkennen, daß der Schnittpunkt (bzw. die Schnittpunkte) der Ortskurve nur dann genügend weit links auf der negativ reellen Achse liegen kann, wenn bei ausreichender Verstärkung im elektrischen System auch eine Mindestphasenverschiebung  $\psi_e$  stattfindet. Ohne Phasenverschiebung, d.h. Signalverzögerung im elektrischen Übertragungssystem, ist im geschlossenen Kreis keine Instabilität möglich, weil das mechanische Schwingungsglied höchstens  $-180^\circ$  Phasenverschiebung für  $\Omega \rightarrow \infty$  erreichen kann und damit selbständig, selbst bei beliebig großer Verstärkung nicht zur oszillatorischen Instabilität des Kreises führen kann.

In Bild (3.4 a,b) sind Phasen- und Amplitudenfrequenzgänge des elektrischen Übertragungssystems für verschiedene Arbeitspunkte  $y = \tau(\omega - \omega_{co})$  aufgezeichnet. Für  $G_e(j\Omega) = |G_e(j\Omega)| e^{j\psi_e}$  erhalten wir mit der Näherung (3.2.9) aus (3.1.10):

$$|G_e(j\Omega)| = \frac{y}{\sqrt{(1+(\Omega\tau)^2 - y^2)^2 + 4y^2}} \quad (3.6.2)$$

$$\tan \psi_e = \frac{-2\Omega\tau}{1+y^2 - (\Omega\tau)^2} \quad (3.6.3)$$

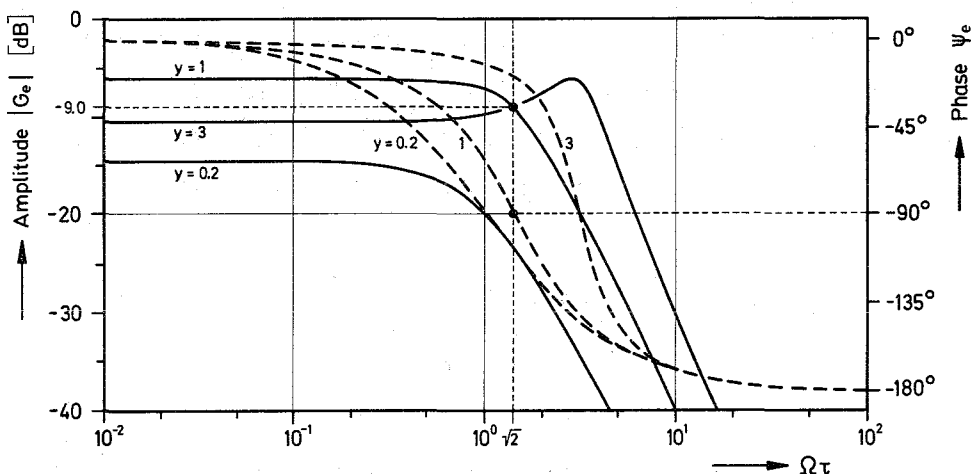


Bild 3.4: Amplituden- und Phasenfrequenzgang der elektrischen Teilübertragungsfunktion  $G_e(j\Omega)$

Bei festgehaltenem  $\Omega = \Omega_v$  sehen wir nun sehr deutlich, daß bei kleiner elektrischer Abklingzeit  $\tau$  die Phasenverschiebung sehr klein ist, während andererseits für sehr große Abklingzeiten  $\tau$  die Verstärkung  $|G_e(j\Omega_v\tau)|$  sehr klein wird. In beiden Richtungen wird die Instabilitätsschwelle also unterschritten.

Das Minimum der Stabilitätsschwellenspannung  $\tilde{V}_g$  in bezug auf die Parameter  $y$  und  $\Omega_v\tau$  läßt sich leicht berechnen aus den beiden Bedingungsgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial y} \tilde{V}_g \stackrel{!}{=} 0 \quad \frac{\partial}{\partial(\Omega_v\tau)} \tilde{V}_g \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.6.4)$$

Man erhält:

$$y_{\text{opt}} = 1 \quad (\Omega_v\tau)_{\text{opt}} = \sqrt{2} \quad (3.6.5)$$

und die zugehörige minimale Stabilitätsschwellenspannung für Vibrationsanregung des Modes  $v$ :

$$(\tilde{V}_g)_{\text{min}} = \frac{2}{\sqrt{k_v\tau_v}} \quad (3.6.6)$$

Diese Parameter entsprechen, wie auch im Bild (3.4) hervorgehoben, gerade einer Phasenverschiebung von  $-90^\circ$  im elektrischen Teilübertragungssystem. In der Ortskurve nach Bild (3.1) dreht sich der zum mechanischen Mode gehörende Kreis ganz in die linke Halbebene, und zwar so, daß die Schnittpunktsfrequenz  $\Omega_s$  gleich der Eigenfrequenz  $\Omega_v$  wird.

Im Falle "maximaler Instabilität" des Systems erteilt jedes der beiden Teilsysteme, das mechanische sowohl als auch das elektrische, dem Signal mit der Frequenz  $\Omega_v$  eine Phasenverschiebung von je  $-90^\circ$ , was im geschlossenen Kreis optimaler Mitkopplung entspricht.

An einem praktischen Beispiel soll gezeigt werden, unter welchen Bedingungen man in dem durch (3.6.5) definierten Minimum der Stabilitätsschwellspannung  $\tilde{V}_g$  liegt. Wie schon mehrfach erwähnt, ist die typische Größenordnung für das Eigenfrequenzverhältnis  $\frac{\Omega v}{\omega} \sim 10^{-6}$ . Wegen (3.6.5) heißt das aber, daß der pessimistischste Wert für die elektrische Kreisgüte etwa  $Q \sim 10^6$  ist. Eine solche Güte kann nur von einem supraleitenden Resonator erreicht werden. Die reinen Resonatorgüten liegen sogar wesentlich höher:  $Q > 10^8$ . Will man jedoch einen supraleitenden Resonator zur Beschleunigung eines sehr intensiven Teilchenstrahls einsetzen, so muß aus Leistungsanpassungsgründen <sup>23)</sup> die Güte durch externe Bedämpfung mit dem Generator (starke Ankopplung des Generators an den Resonator) stark herabgesetzt werden. Die belastete Güte  $Q_L$  wird in diesem Fall völlig unabhängig von der unbelasteten Güte  $Q$ , und ist:

$$Q_L = \frac{\hat{V}_0}{(Z/Q)I_0 \cos \phi_s} \quad (3.6.7)$$

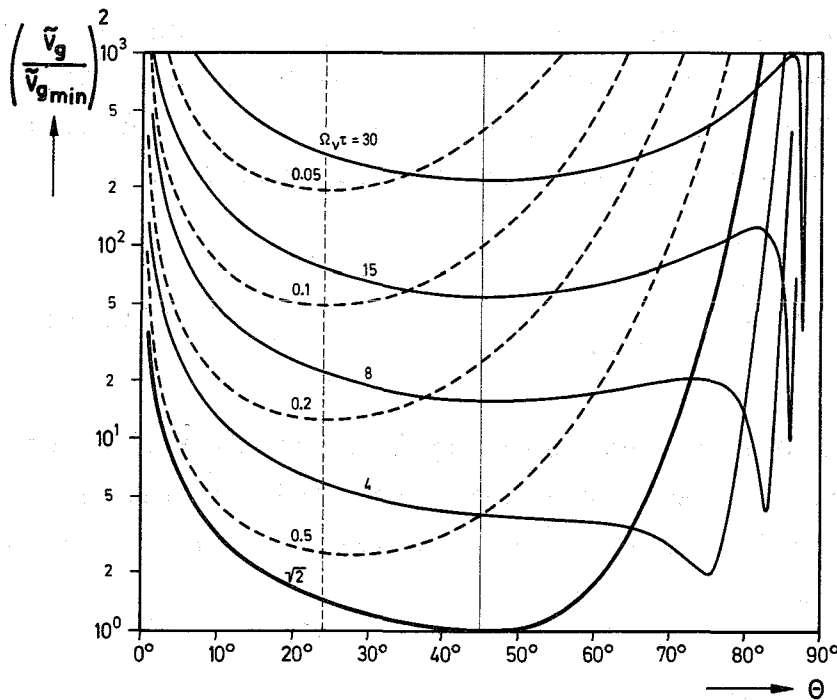
Dabei ist  $e\hat{V}_0 \cos \phi_s$  gerade der mittlere Energiegewinn eines Teilchens mit der Synchronphase  $\phi_s$  (vgl. (2.2.1)),  $I_0$  der mittlere Teilchenstrom und  $Z/Q$  die von der Güte unabhängige normierte Shuntimpedanz (vgl. (2.2.6)). Parameter für eine typische Struktur, auf die im Kapitel 6 noch näher eingegangen wird, sind:  $\phi_s = 30^\circ$ ,  $\hat{V}_0 = 2$  MV/m,  $I_0 = 0,5$  mA und  $Z/Q = 5$  k $\Omega$ /m. Damit fällt die belastete Güte genau in den Bereich maximaler oszillatorischer Instabilität.

Für die nach (3.6.6) auf den minimalen Wert bezogene Generator-schwellspannung erhält man aus (3.6.1) folgenden Ausdruck:

$$\frac{\tilde{V}_g}{V_{gmin}} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{1}{2}\Omega v \tau - \frac{1}{2\Omega v \tau \cos^2 \theta}\right)^2}{-\sin 2\theta}} \quad (3.6.8)$$

Das Quadrat von (3.6.8) entspricht der bezogenen Generatorleistung und ist in Bild 3.4 als Funktion von  $\theta$  mit dem Parameter

$\Omega_v \tau$  aufgetragen.



**Bild 3.5:** Bezogene Generatorschwelleistung als Funktion von  $\theta$  mit  $\Omega_v \tau$  als Parameter.

Für  $\Omega_v \tau \ll 1$  liegen die Minima bei  $\theta \approx -24^\circ$ , und es gilt  $\tilde{V}_g \propto (\Omega_v \tau)^{-1}$ . Dieses Ergebnis findet man auch bei Karliner<sup>2)</sup>. Für  $\Omega_v \tau \gg 1$  liegt ein Minimum bei  $\theta \approx -45^\circ$ , für das  $\tilde{V}_g \propto \Omega_v \tau$  gilt und ein zweites bei  $\theta = -\arctan(\sqrt{1 + (\Omega_v \tau)^2})$ , das nur mit  $\tilde{V}_g \propto \sqrt{\Omega_v \tau}$  ansteigt. Diese Erscheinung hängt damit zusammen, daß die elektrische Übertragungsfunktion  $G_e(s)$ , wie aus den Bildern (3.3 a, b) hervorgeht, für Verstimmungswinkel  $\theta < -45^\circ$  bzw.  $y > 1$  Bandpaßcharakter bekommt mit einer "Resonanzfrequenz"  $\Omega = \frac{1}{\tau} \sqrt{y^2 - 1}$ . Ganz abgesehen von ökonomischen Gründen ist daher ein Betrieb des Resonators weit außerhalb der Resonanz sicher kein adäquates Mittel, um die Stabilitätsschwelle für einen mechanischen Mode  $v$  zu erhöhen, weil dann der nächsthöhere  $v+1$  gerade in diese Resonanz fallen könnte.

Wir wollen uns jetzt noch mit der Relation zwischen monotoner und oszillatorischer Stabilitätsschwelle beschäftigen. Dabei soll zur Vereinfachung der Diskussion angenommen werden, daß zum gesamten Rückwirkungsprozess nur ein mechanischer Mode  $v$  einen entscheidenden Beitrag liefert. Gemäß (2.4.3) erhalten wir für die minimale monotone Stabilitätsschwelspannung:

$$(\tilde{V}_{go})_{\min} = \frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{k_v \cdot \tau}} \quad (3.6.9)$$

bei  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ , was einer Hochfrequenzphasenverschiebung von  $\theta = +30^\circ$  entspricht. Das Verhältnis von oszillatorischer zu monotoner Schwelle ist unter Berücksichtigung von (3.6.5) im ungünstigsten Fall:

$$\frac{(\tilde{V}_g)_{\min}}{(\tilde{V}_{go})_{\min}} = \frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{Q_v}} \approx \frac{1,36}{\sqrt{Q_v}} \quad (3.6.10)$$

wobei  $Q_v$  die Kreisgüte des betrachteten mechanischen Modes  $v$  ist.

Um wieder eine Vorstellung von den praktischen Größenordnungen zu bekommen, wollen wir das vorher behandelte Beispiel etwas weiterführen. Wie wir gesehen hatten, konnte bei der angegebenen Geometrie ( $\frac{\Omega v}{\omega} \approx 10^{-6}$ ) nur ein supraleitender Resonator mit einer Güte von etwa  $10^6$  in den Bereich der maximalen oszillatorischen Instabilität kommen. Unglücklicherweise zeigen typische Supraleiter (Niob) bei sehr tiefen Temperaturen auch eine drastische Verringerung der inneren mechanischen Reibungsverluste<sup>24)</sup>. An einer typischen Struktur (Helix) wurden mechanische Güten von bis zu  $5 \cdot 10^4$  bei Temperaturen  $< 4,2$  K gemessen<sup>8)</sup>; das ist ein Faktor 50 mehr als bei Raumtemperatur. Das bedeutet wegen (3.6.10), daß bereits bei 1 % der Feldstärke, die ausreichen würde, um die statische Resonanzkurve des Resonators gerade zum Überkippen zu bringen, bereits auf der oberen Flanke bei

$\theta = -45^\circ$  Vibrationen angefacht werden können; in dem gewählten Beispiel also bereits bei einer äquivalenten Beschleunigungsfeldstärke von nur 20 kV/m.

Es kann auch der umgekehrte Fall eintreten, daß nämlich die oszillatorische Schwellspannung  $\tilde{V}_g$  größer als die monotone Schwellspannung  $\tilde{V}_{go}$  ist. Das liegt daran, daß für  $\Omega_v \tau \gg 1$  die dynamische Schwelle proportional  $\tau$  steigt, während die statische Schwelle mit  $1/\sqrt{\tau}$  fällt und auf der anderen Seite für  $\Omega_v \tau \ll 1$  die dynamische Schwelle bei kleiner werdendem  $\tau$  mit  $1/\tau$  ansteigt, während die statische Schwelle nur mit  $1/\sqrt{\tau}$  ansteigt. Eine genauere Rechnung zeigt, daß der Bereich, in dem die oszillatorische Schwelle unter der monotonen liegt ( $\tilde{V}_g < \tilde{V}_{go}$ ) gegeben ist für:

$$0,62/Q_v < \Omega_v \tau < 1,26 \sqrt[3]{Q_v} \quad (3.6.11)$$

Man kann demnach drei unterschiedliche Situationen bezüglich der Stabilität des Systems unterscheiden:

- I. Das System ist monoton stabil, aber oszillatorisch instabil, d.h.  $\tilde{V}_g < \hat{V}_g < \tilde{V}_{go}$ .
- II. Das System ist oszillatorisch stabil, aber monoton instabil, d.h.  $\tilde{V}_{go} < \hat{V}_g < \tilde{V}_g$ .
- III. Das System ist sowohl monoton als auch oszillatorisch instabil, d.h.  $\hat{V}_g > \tilde{V}_{go}$  und  $\hat{V}_g > \tilde{V}_g$ .

Im Fall I ist natürlich, wie aus den bisherigen Ausführungen hervorgeht, das System nur für Arbeitspunkte auf der oberen Flanke  $y > 0$  oszillatorisch instabil. Wenn keine anderen Gründe, etwa die am Anfang dieses Abschnitts genannten gegen die Wahl der unteren Flanke sprechen, kann man das lineare Stabilitätsproblem als gelöst betrachten, wenn wir uns einen Arbeitspunkt  $y < 0$  vorgeben. Wie wir im nächsten Kapitel aus den

nichtlinearen Rechnungen sehen werden, wird diese Aussage eine gewisse Einschränkung erfahren.

Abgesehen davon, daß der Fall II wohl relativ selten anzutreffen sein wird, gilt genau das Umgekehrte wie im Fall I. Stabilität läßt sich erreichen, wenn wir uns auf Arbeitspunkte auf der oberen Flanke beschränken. Hier gibt es insofern ebenfalls nichtlineare Einschränkungen, als bei einer genügend großen Störung das System in eine andere Ruhelage springen kann, was man sich an Bild 2.2 klarmachen kann. Globale monotone Stabilität existiert nur für Arbeitspunkte außerhalb des Hysteresebereichs auf der oberen Flanke. Wenn der Hysteresebereich groß gegen die Bandbreite ist, ist der Betrieb wie vorgeschlagen ohne zusätzliche Maßnahmen auch ökonomisch nicht vertretbar; denn, um den Feldpegel  $\hat{V}_0$  zu halten, braucht man eine um den Faktor  $(1+y^2)$  größere Generatorleistung. Im Falle III sind von vornherein beide Flanken der Resonanzkurve instabil.

Im allgemeinen läßt sich der elektromechanische Koppelfaktor  $k_v \propto f_v^2 / c_v$  nur wenig verändern, weil sich entweder aus anderen Gründen die Geometrie gar nicht ändern läßt oder weil eine Verstärkung der Wände ( $\rightarrow$  Vergrößerung der Federkonstante  $c_v$ ) bzw. Veränderung der Formgebung ( $\rightarrow$  Verkleinerung des Entwicklungskoeffizienten  $f_v$ ) nur geringe Gewinnfaktoren einbringt.

Eine wesentlich elegantere Lösung für das Problem im Falle II und III besteht darin, daß zusätzliche elektrische Rückführungen vorgesehen werden. Damit werden wir uns im Kapitel 5 ausführlich befassen.

Zum Schluß sei noch auf eine interessante Symmetrieeigenschaft der Kopplung hingewiesen. Dazu erinnern wir uns an die von Shapiro gegebene Darstellung des Kopplungsproblems, die im Abschnitt 3.3 behandelt wurde. Danach gab es gerade dann eine Aufschaukelung einer mechanischen Eigenschwingung, wenn die in diese Schwingung aus dem elektrischen Energiereservoir übertra-



gene Leistung größer als die Verlustleistung wurde. Das Vorzeichen der übertragenen Leistung ist aber, wie wir aus (3.2.10) schließen, gleich dem Vorzeichen der normierten Verstimmung  $y = \tau(\omega - \omega_{co})$ . Auf der unteren Flanke ist diese Leistung wegen  $\omega < \omega_{co}$  negativ, d.h. die mechanische Schwingung wird durch die elektrische Rückwirkung zusätzlich bedämpft. Damit läßt sich eine effektive mechanische Dämpfung bzw. Abklingzeit  $\tau_{eff}$  definieren:

$$\frac{1}{\tau_{eff}} = \frac{1}{\tau_v} (1 + \text{Re } F_o(j\Omega_v)) \quad (3.6.12)$$

woraus sich mit (3.2.10) ergibt:

$$\frac{1}{\tau_{eff}} = \frac{1}{\tau_v} - \frac{2y}{1+y^2} \frac{\hat{V}_g^2 k_v (\Omega_v \tau)^2}{(1+(\Omega_v \tau)^2 - y^2)^2 + 4y^2} \quad (3.6.13)$$

Die Dämpfung  $\tau_{eff}^{-1}$  wird sogar umso größer, je größer die Kopplung an den elektromagnetischen Energiespeicher ist. Zur Veranschaulichung dieser Situation wählen wir die Parameter für die maximale oszillatorische Instabilität nach (3.6.5) für eine Spannung  $\hat{V}_g$ , die das System gerade an die monotone Stabilitätsgrenze bringt und setzen uns jetzt auf die untere Flanke auf  $y = -1$  (d.h.  $\theta = +45^\circ$ ). Die effektive mechanische Güte ist dann:

$$\frac{1}{Q_{eff}} = \frac{1}{Q_v} + \frac{4}{3\sqrt{6}} \quad (3.6.14)$$

Wegen  $Q_v \gg 1$  bedeutet das: durch die elektromagnetische Bedämpfung kann man im Optimalfall zu einer effektiven mechanischen Güte von  $Q_{eff} \approx 1,84$  kommen.

Auf die Problematik der Bedämpfung im Zusammenhang mit zusätzlichen Rückführungen wird im Abschnitt 5.2 zurückzukommen sein.

#### 4. Stabilität des Systems für große Auslenkungen

Obwohl die konsequente Fortführung der linearen Stabilitätsdiskussion des letzten Abschnittes die Untersuchung des Systemverhaltens in Gegenwart zusätzlicher Rückführungen wäre, sollen an dieser Stelle zunächst nichtlineare Betrachtungen eingefügt werden, die einerseits eine genaue Abschätzung der Güte der linearen Näherung erlauben und andererseits zu einer Präzisierung der Stabilitätsaussagen führen.

##### 4.1 Iteration der Hochfrequenzdifferentialgleichung

Die im Abschnitt 3.3 begonnene Methode der sukzessiven Verbesserung der Näherungslösung der Differentialgleichung (2.2.7), die einer Potenzreihenentwicklung der exakten Lösung nach dem Störfrequenzhub entspricht, soll im folgenden mit einer geringen Modifikation fortgesetzt werden. Und zwar wollen wir jetzt direkt von der Differentialgleichung (2.2.15) für die komplexe Amplitude der Resonatorspannung ausgehen. Damit läßt sich das Ergebnis wesentlich übersichtlicher formulieren; allerdings müssen wir zwischen zwei verschiedenen komplexen Operationen streng unterscheiden. Im Hochfrequenz- oder Trägerbereich soll eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$  durch eine Multiplikation mit  $i$  ( $i^2 = -1$ ), die konjugiert komplexe Spannung durch einen hochgestellten Stern ( $*$ ) sowie die Real- bzw. Imaginärteilbildung durch einen Index  $i$  ( $\text{Re}()$ ,  $\text{Im}()$ ) dargestellt werden. Entsprechend soll im Niederfrequenz- oder Signalbereich eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$  durch eine Multiplikation mit  $j$  ( $j^2 = -1$ ), das konjugiert komplexe Signal durch einen hochgestellten eingekreisten Stern ( $\textcircled{*}$ ) sowie die Real- bzw. Imaginärteilbildung durch einen Index  $j$  ( $\text{Re}()$ ,  $\text{Im}()$ ) ausgedrückt werden.

Wir nehmen wie früher eine periodisch sinusförmig mit  $\Omega$  der Frequenz  $\Omega$  modulierte Eigenfrequenz an:

$$\omega_c = \omega_{co} + \frac{1}{2} \Delta\omega e^{j\Omega t} + \frac{1}{2} \Delta\omega^* e^{-j\Omega t} \quad (4.1.1)$$

wobei  $\omega_{co}$  die statische Eigenfrequenz bei der Resonatorspannung  $\hat{V}_0$  und  $|\Delta\omega|$  der Eigenfrequenzhub ist.

Die Ausgangsdifferentialgleichung lautet damit:

$$-\frac{i\tau}{2\omega} \ddot{V} + (\tau - \frac{i}{\omega}) \dot{V} + (1 + iy - \frac{i\tau}{2} [\Delta\omega e^{j\Omega t} + \Delta\omega^* e^{-j\Omega t}]) V = V_g \quad (4.1.2)$$

wobei  $\omega$  die Generatorfrequenz,  $\tau$  die elektrische Abklingzeit und  $y$  der Parameter für den statischen Arbeitspunkt ist.

Die Struktur der Differentialgleichung (4.1.2) kann man darstellen durch

$$DV - \lambda x(t) V = V_g \quad (4.1.3)$$

wobei  $D$  ein komplexer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten,  $x(t)$  die oben angegebene Zeitfunktion und  $\lambda$  ein Entwicklungsparameter sind.

Der Iterationsansatz für die Lösung sei eine Potenzreihe für  $\lambda$ :

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n V_n \quad (4.1.4)$$

Einsetzen des Ansatzes in (4.1.3) und Vergleich nach Potenzen von  $\lambda$  führt auf die beiden Gleichungen:

$$DV_0 = V_g \quad \text{Iterationsstart } n = 0 \quad (4.1.5.a)$$

$$DV_n = x(t)V_{n-1} \quad n \geq 1 \quad (4.1.5.b)$$

Uns interessiert aber eigentlich gar nicht die komplexe Amplitude, sondern nur deren Betragsquadrat, weil dieses ein Maß für die auf die Wände des Resonators wirkende Kraft ist.

$$VV^* = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{n+m} V_n V_m^* \quad (4.1.6)$$

Eine Umordnung in eine Potenzreihe für  $\lambda$  ergibt schließlich:

$$VV^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{m=0}^n V_{n-m} V_m^* \quad (4.1.7)$$

wobei  $n$  die Ordnung der Iteration angibt.

Wir können nun den Entwicklungsparameter in die Störfunktion einbeziehen und ihn formal gleich 1 setzen <sup>50)</sup>.

Wenn wir uns an den Abschnitt 3.1 zurückerinnern, so ist doch die Laplace-Transformierte des inversen Differentialoperators gerade gleich der in Gleichung (3.1.4) definierten Übertragungsfunktion für die komplexe Amplitude:

$$\mathcal{L}(D^{-1}) = G_0(s) \quad (4.1.8)$$

Als weitere Abkürzung wollen wir die komplexe Impedanz für das  $n$ -te Seitenband des modulierten Trägersignals einführen:

$$G_0(jn\Omega) \stackrel{!}{=} Z_n \quad (4.1.9)$$

In dieser Darstellung enthält die komplexe Impedanz zwei verschiedene komplexe Symbole  $i$  und  $j$ . Da Träger- und Signalphase nichts miteinander zu tun haben, sind die entsprechenden komplexen Operatoren vertauschbar; insbesondere gilt auch  $ij \neq -1$ . Bei der Anwendung der komplexen Signaloperatoren ist  $i$  als reell zu betrachten und umgekehrt bei der Anwendung der komplexen Trägeroperatoren ist  $j$  als reell anzusehen.

Für  $Z_n$  erhält man:

$$Z_n = \frac{1}{1 + iy + (\tau - \frac{i}{\omega})jn\Omega + \frac{i\tau n^2 \Omega^2}{2\omega}} \quad (4.1.10)$$

Bei der Anwendung der Iterationsvorschrift (4.1.5) erhalten wir aus (4.1.2) sukzessive die folgenden ersten drei Summenglieder:

$$V_0 = V_g / (1 + iy)$$

$$V_1 = V_0 \left( \frac{i\tau}{2} \right) \cdot 2 \operatorname{Re}_j [\Delta \omega e^{j\Omega t} Z_1] \quad (4.1.11)$$

$$V_2 = V_0 \left( \frac{i\tau}{2} \right)^2 \cdot 2 \operatorname{Re}_j [\Delta \omega^2 Z_1 Z_2 e^{j2\Omega t} + \Delta \omega \Delta \omega^* Z_0 Z_1]$$

$$V_3 = V_0 \left( \frac{i\tau}{2} \right)^3 \cdot 2 \operatorname{Re}_j [\Delta \omega e^{j\Omega t} (\Delta \omega^2 Z_1 Z_2 Z_3 e^{j2\Omega t} + \Delta \omega \Delta \omega^* Z_1 (Z_1 Z_2 + 2Z_0 \operatorname{Re}_j Z_1))] ]$$

Wir müssen bereits an dieser Stelle abbrechen, weil die höheren Teillösungen unübersichtlich lang werden. Die Breite des Lösungsspektrums ist gerade  $\omega \pm n\Omega$ , wenn  $n$  die Iterationsordnung angibt; bei (un)gerader Ordnung tauchen nur (un)geradzahlige Vielfache der Grundfrequenz in der Zusatzspannung auf. Die Reihe konvergiert sicherlich gut für  $|\tau\Delta\omega| \ll 1$ , d.h. dann, wenn der Modulationshub klein gegen die Resonatorbandbreite ist. Die Reihe konvergiert aber auch dann noch, wenn diese Bedingung verletzt ist. Wie früher bereits ausgeführt wurde, genügt die Bedingung  $|\Delta\omega/\omega_{co}| \ll 1$ , d.h. Modulationshub klein gegen die Resonatoreigenfrequenz (vgl. dazu die Ausführungen bei Wagner<sup>25</sup>). Wie man in (4.1.11) sieht, muß dann aber eine große Anzahl von Gliedern berechnet werden.

Zur Berechnung der Kraftmodulation muß (4.1.11) in (4.1.7) eingesetzt werden, wobei man sich die Vertauschbarkeit der komplexen Operationen zunutze machen kann. Diese Kraft wirkt auf eine Kette von parallelgeschalteten hochselektiven mechanischen Schwingkreisen mit den Eigenfrequenzen  $\Omega_\mu$  und den Bandbreiten  $1/\tau_\mu$ . Wenn wir voraussetzen, daß nicht gerade eine Oberwelle  $n\Omega$  der Modulationsfrequenz  $\Omega$ , die den Mode  $v$  anregt, innerhalb der Bandbreite eines der höheren mechanischen Moden  $\mu$  liegt, also:

$$|\Omega_\mu - n\Omega| \gg 1/\tau_\mu \quad \text{für alle } n \text{ und } \mu \neq \nu \quad (4.1.12)$$

gilt, brauchen wir in dem Ausdruck für die Kraftmodulation nur den konstanten Term und den mit der Grundwellenfrequenz  $\Omega$  berücksichtigen. Wir erhalten dann für die jeweiligen Iterationsordnungen entsprechend (4.1.11):

$$\begin{aligned} (VV^*)_0 &= \hat{V}_g^2 / (1+y^2) = \hat{V}_0^2 \\ (VV^*)_1 &= -2\tau \hat{V}_0^2 \operatorname{Re} \Delta \omega_e^{j\Omega t} \operatorname{Im} Z_1 \\ (VV^*)_2 &= \frac{1}{2} \tau^2 \hat{V}_0^2 \Delta \omega \Delta \omega^* \operatorname{Re} (Z_1 Z_1^* - 4 \operatorname{Re} Z_0 Z_1) \\ (VV^*)_3 &= \frac{1}{2} \tau^3 \hat{V}_0^2 \Delta \omega \Delta \omega^* \operatorname{Re} \Delta \omega_e^{j\Omega t} \operatorname{Im} (Z_1 Z_2 (Z_1 + Z_1^*) + 4i Z_0 (\operatorname{Re} Z_1) (\operatorname{Im} Z_1)) \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Die gesamte Lösung ist die Summe aller dieser Iterationsbeiträge

$$VV^* = \sum_{n=0}^{\infty} (VV^*)_n$$

Wenn man sich daran erinnert, daß die Eingangsgröße für diesen Iterationsprozeß in der Differentialgleichung (4.1.2)  $\tau \cdot \operatorname{Re} \Delta \omega_e^{j\Omega t}$  war, erkennt man, daß sich die ungeraden Iterationsschritte als amplitudenabhängige komplexe Verstärkungsfaktoren interpretieren lassen, die einen Zusammenhang zwischen der komplexen Eingangsamplitude  $\Delta \omega$  und der komplexen Kraftamplitude herstellen. Man erhält damit einen Verstärkungsfaktor des elektrischen Teilsystems  $F_e(j\Omega)$ , der für  $|\tau \Delta \omega| \ll 1$  mit dem in (3.1.10) angegebenen  $G_e(j\Omega)$  identisch ist:

$$F_e(j\Omega) = \operatorname{Im} Z_1 - \operatorname{Im} \frac{1}{4} |\Delta \omega \tau|^2 (Z_1 Z_2 (Z_1 + Z_1^*) + 4i Z_0 (\operatorname{Re} Z_1) (\operatorname{Im} Z_1)) + \dots \quad (4.1.14)$$

$G_e(j\Omega) = \operatorname{Im} Z_1$  ist der lineare Übertragungsfaktor in Übereinstimmung mit (3.1.10).

Abgesehen davon, daß wir bisher nur den ersten nichtlinearen Term ausgerechnet haben, besteht die Schwierigkeit bei der Interpretation des nichtlinearen Systemverhaltens mittels dieses amplitudenabhängigen Verstärkungsfaktors darin, daß die Amplitudenabhängigkeit im allgemeinen nicht von der Frequenzabhängigkeit separiert werden kann. Das ist eine typische Erscheinung, die meistens bei nichtlinearen Gliedern mit Verzögerungsverhalten auftritt.

Einen Vorteil hat diese Darstellung trotzdem, wir können entsprechend den Ausführungen im Abschnitt 3.2 unter Berücksichtigung der Näherung (3.1.11) auch hier das Nyquist-Stabilitätskriterium in der algebraischen Form der Gleichung (3.2.3) anwenden. Man erhält so einen der Bedingung (3.2.5) völlig analogen Ausdruck:

$$\frac{\tau \hat{V}^2}{1+y^2} k_v \Omega_v \tau_v \operatorname{Im} F_e(j\Omega_v) < 1 \quad (4.1.15)$$

Wenn diese Bedingung für die gegebene Parameterkombination und für beliebige Auslenkungen  $|\Delta\omega|$  des Systems erfüllt ist, bezeichnet man das nichtlineare System als global stabil.

Ein typischer nichtlinearer Effekt ist die Veränderung der mittleren Resonatorspannung mit wachsendem Ausschlag. In der Lösungsdarstellung (4.1.13) erkennt man, daß bei allen geraden Iterationsschritten Beiträge zur mittleren Resonatorspannung  $\hat{V}_m$  entstehen, die ebenso wie der komplexe Übertragungsfaktor  $F_e$  von der Vibrationsfrequenz  $\Omega$  und der Energie des mechanischen Oszillators  $\propto |\Delta\omega|^2$  abhängen. Das bedeutet, daß sich der Arbeitspunkt infolge eines "Gleichrichtereffekts" mit wachsender Schwingamplitude  $|\Delta\omega|$  verschiebt. Die mittlere Resonatorspannung  $\hat{V}_m$  ist nach (4.1.13):

$$\hat{V}_m^2 = \frac{\hat{V}^2}{1+y^2} \left( 1 + \frac{1}{2} |\Delta\omega\tau|^2 \operatorname{Re}(Z_1 Z_1^*) - 4 \operatorname{Re} Z_o Z_1 \right) + \dots \quad (4.1.16)$$

Eine detailliertere Diskussion des nichtlinearen Verstärkungsfaktors erfordert eine explizite Darstellung für  $F_e$ , die wir nach der Iterationsmethode nur unter sehr großer Mühe erhalten können. Auf eine Möglichkeit, diese Darstellung zu gewinnen, hatten wir bereits im Abschnitt 3.4 hingewiesen. Die Näherungsdifferentialgleichung (3.4.3) nämlich läßt sich exakt integrieren.

#### 4.2 Fourierentwicklung des Integrals der Näherungsdifferentialgleichung

---

Die Ausführungen des letzten Abschnitts erlauben nun genau anzugeben, unter welchen Voraussetzungen die exakte komplexe Differentialgleichung (2.2.13) bzw. (4.1.2) durch die komplexe Näherungsdifferentialgleichung (3.4.3) ersetzt werden kann. Die Vernachlässigung der zweiten Ableitung und eines Teils der ersten ist gleichbedeutend damit, daß im  $n$ -ten Iterationsschritt die komplexe Impedanz  $Z_n$  (4.1.10) in folgender Weise genähert werden kann:

$$\frac{1}{1+iy+jn\Omega\tau+in\frac{\Omega}{\omega}(\frac{1}{2}n\Omega\tau-j)} \approx \frac{1}{1+iy+jn\Omega\tau} \quad (4.2.1)$$

Dazu ist die früher angegebene Bedingung (3.4.4) Voraussetzung. Formal bekommt die komplexe Differentialgleichung erster Ordnung die Gestalt:

$$\tau(\dot{V} + a(t)V) = V_g \quad (4.2.2)$$

wobei  $a(t)$  eine zeitvariante komplexe Dämpfungsgröße ist, deren Imaginärteil gleich der Differenz zwischen Generator- und Eigenfrequenz ist.

Die Differentialgleichung (4.2.2) läßt sich exakt integrieren; die Lösung ist:



$$V(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(t') dt'} \left( V(t_0) + \frac{1}{T} \int_{t_0}^t V_g(t') e^{+\int_{t_0}^{t'} a(t'') dt''} dt' \right) \quad (4.2.3)$$

$V(t_0)$  ist die komplexe Amplitude bei der Integrationsstartzeit  $t_0$ .  $V(t_0)$  repräsentiert zwei reelle Anfangswerte  $|V(t_0)|$  und  $\arg V(t_0)$ .

Für die komplexe Dämpfungsgröße  $a(t)$  wird wieder wie in (4.1.1) ein Cosinus-Ansatz gewählt:

$$a(t) = \frac{1}{T} (1+iy) - \frac{1}{2} i (\Delta\omega e^{i\Omega t} + \Delta\omega^* e^{-i\Omega t}) \quad (4.2.4)$$

Hier wird nicht mehr die Unterscheidung in Signal- u. Trägerphase benötigt; daher fallen auch die Unterscheidungen in den komplexen Operationen weg.

Wir interessieren uns für den eingeschwungenen Zustand, d.h. für die periodische Lösung von  $V$ . Dazu brauchen wir nur die Integrationsstartzeit in (4.2.3) in die unendlich entfernte Vergangenheit ( $t_0 \rightarrow -\infty$ ) zu verlegen. Der Einfluß des Startwertes entfällt dann und man kann im Exponenten das unbestimmte Integral verwenden. Bei konstanter Generatorspannung  $V_g$  erhalten wir die Lösung, die wegen (4.2.4) periodisch mit der Frequenz  $\Omega$  ist:

$$V(t) = V\left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right) = \frac{V_g}{T} e^{-\int_{-\infty}^t a(t) dt} \int_{-\infty}^t e^{+\int_{-\infty}^{t'} a(t') dt'} dt' \quad (4.2.5)$$

mit

$$\int a(t) dt = \frac{t}{T} (1+iy) - \frac{1}{2\Omega} (\Delta\omega e^{i\Omega t} - \Delta\omega^* e^{-i\Omega t}) \quad (4.2.6)$$

Der Imaginärteil von (4.2.6) ist bis auf eine Konstante identisch mit der Absolutphase des hochfrequenten Feldes. Es ist

zweckmäßig folgende Abkürzung einzuführen:

$$\frac{\Delta\omega}{\Omega} = \frac{|\Delta\omega|}{\Omega} e^{i\alpha} = \eta e^{i\alpha} \quad (4.2.7)$$

$\eta$  wird gewöhnlich als Modulationsindex einer frequenzmodulierten Schwingung bezeichnet,  $\alpha$  ist der Signalphasenwinkel.

Das Integral (4.2.5) läßt sich ausrechnen, wenn man folgende komplexe Fourierdarstellung verwendet:

$$e^{i\eta \sin(\Omega t + \alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) e^{in(\Omega t + \alpha)} \quad (4.2.8)$$

$J_n(\eta)$  ist die Besselfunktion 1. Art und  $n$ -ter Ordnung mit dem Argument  $\eta$ .

Man erhält damit für die komplexe Resonatorspannung:

$$V = V_g e^{i\eta \sin(\Omega t + \alpha)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) X_n e^{-in(\Omega t + \alpha)} \quad (4.2.9)$$

mit

$$X_n = \frac{1}{1 + i(\gamma - n\Omega\tau)} \quad (4.2.10)$$

Die Kraftamplitude läßt sich ebenfalls wieder als Fourierreihe darstellen. Es ergibt sich:

$$VV^* = \hat{V}_g^2 \left[ A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} A_n e^{in(\Omega t + \alpha)} \right] \quad (4.2.11)$$

mit dem komplexen Entwicklungskoeffizienten

$$A_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(\eta) J_{m+n}(\eta) X_m X_{m+n}^* \quad (4.2.12)$$

Im Sinne der Ausführungen des vorangegangenen Abschnitts filtert die stark selektive mechanische Übertragungsfunktion aus diesem Spektrum den konstanten Term und die Grundwelle aus.

Der Koeffizient  $A_1$  läßt sich noch etwas anders darstellen:

$$A_1 = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(\eta) J_{m+1}(\eta) [X_m X_{m+1}^* - X_{-m} X_{-(m+1)}^*] \quad (4.2.13)$$

Hier sind alle Glieder mit den gleichen Besselfunktionen zusammengefaßt worden. Der komplexe Verstärkungsfaktor entsprechend der Potenzreihendarstellung in (4.1.14) ist damit gegeben durch:

$$H_e(i\Omega, \eta) = - \frac{1+y^2}{\Omega\tau} \cdot \frac{1}{\eta} A_1(i\Omega, \eta) \quad (4.2.14)$$

Zur Unterscheidung vom korrekten Verstärkungsfaktor  $F_e$ , dessen erste Glieder im letzten Abschnitt berechnet wurden, soll hier die Näherung mit  $H_e$  bezeichnet werden.

Einsetzen von (4.2.10, 13) in (4.2.14) ergibt schließlich eine neue Reihendarstellung für den komplexen Verstärkungsfaktor:

$$H_e(i\Omega, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{\eta} J_m(\eta) J_{m+1}(\eta) \left( \frac{-(2m+1)y(1+y^2)}{((1-im\Omega\tau)^2 + y^2)((1+i(m+1)\Omega\tau)^2 + y^2)} \right) \quad (4.2.15)$$

Wir wollen den Gang der Rechnung an dieser Stelle kurz unterbrechen und die sich hier fast zwangsläufig ergebende Rechenmethode mit in der Literatur bekannten vergleichen.

Die Methode, für den Eingang des nichtlinearen Teilsystems einen harmonischen Ansatz zu wählen und aus dem Ausgangsspektrum nur die Grundwelle weiterzuverwenden, geht auf Krylow-Bogoljubow<sup>26)</sup> zurück und wird als Harmonische Linearisierung bzw. Harmonische

Balance <sup>27)</sup> bezeichnet. Der komplexe Verstärkungsfaktor, bei uns  $H_e$  genannt, wird gewöhnlich als Beschreibungsfunktion bezeichnet. Die einzig wesentliche Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Harmonischen Linearisierung ist, daß die vernachlässigten Oberwellen im linearen Teilsystem auch wirklich stärker als die Grundwelle gedämpft werden.

Für Produkt- und potenzförmige Nichtlinearitäten, wie sie hier auftreten, gibt es zwei prinzipiell verschiedene Verfahren. Nach dem Verfahren von Magnus <sup>21)</sup> werden für die nichtlinearen Differentialgleichungen lineare Ersatzkoeffizienten berechnet. Diese Koeffizienten sind aber im Gegensatz zu denjenigen, die man nach der "Methode der kleinen Schwingungen", der im Kapitel 3 verwendeten echten Linearisierung also, erhält, amplitudenabhängig. Für die Stabilitätsanalyse können nun die im Kapitel 3 angewendeten linearen Stabilitätskriterien herangezogen werden.

Die Methode von Lauber <sup>28)</sup> dagegen gestattet die Berechnung der Beschreibungsfunktion im Frequenzbereich aus einem Satz von linearen Gleichungen mit komplexen Koeffizienten. Eine explizite Darstellung der Beschreibungsfunktion erhält man jedoch nur in den allereinfachsten Fällen.

Wir hatten uns bereits für die Frequenzbereichsanalyse entschieden, weil uns mit dem Nyquist-Kriterium aufgrund des Bandpaßcharakters des linearen Teilsystems ein außerordentlich einfaches Stabilitätskriterium zur Verfügung steht.

Die Lauber'sche Methode hätte in unserem Falle zu den gleichen Schwierigkeiten wie die im Abschnitt 4.1 dargelegte Potenzreihenentwicklung geführt. Der Grund, warum sich in unserem Fall eine recht übersichtliche Reihendarstellung für die Beschreibungsfunktion  $H_e$  ergab, ist lediglich darin zu suchen, daß die nichtlineare Ausgangsdifferentialgleichung integrierbar war.

Ein weiterer Vorzug der Besselfunktionen-Reihendarstellung der Beschreibungsfunktion (4.2.15) liegt darin, daß für einen bestimmten Frequenzbereich, nämlich  $\Omega \gg 1/\tau$ , die Reihe genügend gut durch den Term  $m=0$  beschrieben wird. In diesem Fall werden die Amplituden- und die Frequenzabhängigkeit separiert.

An einer Potenzreihenentwicklung des amplitudenabhängigen Teilfaktors  $N_m(\eta) = \frac{2}{\eta} J_m(\eta) J_{m+1}(\eta)$  sehen wir, daß  $N_m$  von  $\eta^2$  abhängt, d.h. von Potenzen der mechanischen Schwingungsenergie.

$$N_m(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{4}\eta^2\right)^{m+n} \Gamma(2m+2n+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+n+1)\Gamma(m+n+2)\Gamma(2m+n+2)} \quad (4.2.16)$$

$\Gamma$  ist die Gamma-Funktion <sup>29)</sup>.

Die Bedingung für die Stabilität des mechanischen Modes  $\nu$  nach dem Nyquist-Kriterium lautet entsprechend (4.1.15):

$$\frac{\tau \hat{V}_g^2}{1+y^2} k_\nu \Omega_\nu \tau_\nu \operatorname{Im} H_e(i\Omega_\nu, \eta) < 1 \quad (4.2.17)$$

Der Imaginärteil der Beschreibungsfunktion  $H_e$  für die Frequenz  $\Omega = \Omega_\nu$  ist proportional der elektrischen Zusatzbedämpfung der mechanischen Schwingung mit der Frequenz  $\Omega_\nu$ .

Für den Imaginärteil der Beschreibungsfunktion ergibt sich:

$$\operatorname{Im} H_e(i\Omega_\nu, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} N_m(\eta) \frac{2\Omega_\nu \tau y (1+y^2) (2m+1) (1+y^2 + m(m+1) (\Omega_\nu \tau)^2)}{((1+m^2 (\Omega_\nu \tau)^2 - y^2)^2 + 4y^2) ((1+(m+1)^2 (\Omega_\nu \tau)^2 - y^2)^2 + 4y^2)} \quad (4.2.18)$$

Für Zustände des Systems, bei der die linke Seite von (4.2.17) gleich 1 wird, befindet man sich im Sinne der vorhergegangenen Ausführungen im Zustand der Harmonischen Balance; in der Phasenebene ergeben sich geschlossene Grenzzyklen.

Hier muß noch eine Bedingung erfüllt sein, auf die bisher nicht eingegangen wurde. Wenn wir uns an die Phasenebene nach Bild 2.3 zurückerinnern, so wird die Harmonische Linearisierung sicherlich nur vernünftige Ergebnisse liefern, wenn sich der Grenzzyklus nicht zu weit von dem jeweiligen Wirbelpunkt entfernt.

Die Berechnung des nichtlinearen Schwingungszustandes wird weiterhin dadurch kompliziert, daß die nichtlineare "elektrische" Übertragungsfunktion neben einer Verstärkung der Grundwelle auch noch einen konstanten Term erzeugt, der von der Grundwellenamplitude  $\eta$  abhängt und der den Arbeitspunkt auf der Resonatorflanke verschiebt.

Entsprechend (4.2.11) ist die mittlere Resonatorspannung  $\hat{V}_m$  gegeben durch  $\hat{V}_m = \hat{V}_g \cdot \sqrt{A_0}$ . Nach Einsetzen von (4.2.10) in (4.2.12) erhält man:

$$\hat{V}_m^2 = \hat{V}_g^2 \left[ \frac{J_0^2(\eta)}{1+y^2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m^2(\eta)(1+y^2+m^2(\Omega\tau)^2)}{(1+y^2+m^2(\Omega\tau)^2)^2 - 4y^2 m^2 (\Omega\tau)^2} \right] \quad (4.2.19)$$

Dabei ist  $\Omega$  die Momentanfrequenz der Schwingung mit dem Modulationsindex  $\eta$ . Wie wir aus der Ortskurve 3.1 entnehmen, ist diese Frequenz praktisch identisch mit  $\Omega_v$ , wenn die mechanische Kreisgüte  $Q_v$  sehr groß gegen 1 ist.

Bei fest vorgegebener Generatorfrequenz  $\omega$  läßt sich der vollständige Anschwingvorgang also nur richtig wiedergeben, wenn man iterativ entsprechend dem jeweiligen Modulationshub  $|\Delta\omega|$  den Arbeitspunkt  $y$  neu bestimmt.

Wenn man sich für die korrekte Dynamik des Anschwingvorgangs interessiert, wird man am zweckmäßigsten wieder direkt von der Differentialgleichung (4.2.3) ausgehen.

Für unsere Betrachtungen genügt es, die Grenzzyklen zu kennen. Bei gegebener Generatorfrequenz  $\omega$  wird dieser Grenzzyklus charakterisiert durch eine mittlere Resonanzfrequenz  $\omega_{cm}$  und einen Resonanzfrequenzhub  $|\Delta\omega|$ . Wegen der Eindeutigkeit der Beziehungen können wir aber auch so vorgehen: Wir geben den Arbeitspunkt  $y = \tau(\omega - \omega_{cm})$  vor, berechnen aus der Bedingung für den Grenzzyklus:

$$\frac{\tau \hat{V}^2}{1+y^2} k_{\nu} \Omega_{\nu} \tau_{\nu} \operatorname{Im} H_e(i\Omega_{\nu}, \eta) = 1 \quad (4.2.20)$$

den Modulationsindex  $\eta$  und erhalten die zugehörige Generatorfrequenz entsprechend (2.3.9) aus:

$$(\omega - \omega_0) \tau = y - \tau \sum_{\mu} k_{\mu} \hat{V}_m^2(y, \eta) \quad (4.2.21)$$

wobei  $\omega_0$  die natürliche Eigenfrequenz des Resonators bei  $\hat{V}_0 = 0$  ist und  $\hat{V}_m^2$  der Gleichung (4.2.19) zu entnehmen ist.

### 4.3 Diskussion der nichtlinearen Stabilitätsbedingungen

Wie wir das auch schon bei den linearen Stabilitätsbedingungen im Kapitel 3 gesehen hatten, ist auch hier eine ausgeprägte Abhängigkeit der Bedingungen (4.2.17, 18) von dem Parameter  $\Omega_{\nu} \tau$  festzustellen. Zunächst wollen wir uns mit dem Bereich  $\Omega_{\nu} \tau \gg 1$  beschäftigen, weil sich dann - wie bereits erwähnt - die Beschreibungsfunktion ganz erheblich vereinfachen läßt. Aus (4.2.18) erhält man:

$$\operatorname{Im} H_e(i\Omega_{\nu}, \eta) \approx \frac{2}{\eta} J_0(\eta) J_1(\eta) \frac{2y}{(\Omega_{\nu} \tau)^3} \quad (4.3.1)$$

unter der genaueren Bedingung

$$\Omega_v \tau \gg \sqrt{1+y^2}$$

Der Phasenhub  $\eta$  war die Eingangsvariable des nichtlinearen Gliedes; man kann daher die Funktion  $2J_0(\eta)J_1(\eta)$  als Schwingkennlinie bezeichnen. Die Anfangssteigung der Schwingkennlinie ist gerade 1.

Den dynamischen Anteil in (4.3.1) können wir mit dem elektromechanischen Kopplungsfaktor und den dynamischen Faktoren der mechanischen Übertragungsfunktion nach (4.2.17) in der Steigung  $m$  der "Arbeitsgeraden" zusammenfassen:

$$m = \frac{1+y^2}{2y} \frac{(\Omega_v \tau)^2}{\hat{V}_g^2 k_v \tau_v} \quad (4.3.2)$$

In Bild 4.1 sind die Schwingkennlinie und verschiedene Arbeitsgeraden dargestellt.

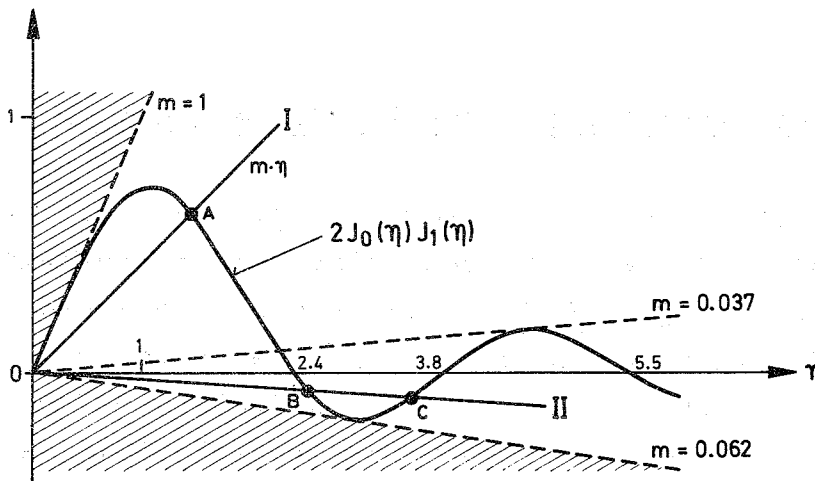


Bild 4.1: Schwingkennlinie für  $\Omega_v \tau \gg \sqrt{1+y^2}$



Wir sehen, daß für  $m > 1$  der Ursprung 0 für beliebig große Auslenkungen  $\eta$  stabil ist. Diese Aussage entspricht genau dem linearen Stabilitätskriterium unter der Voraussetzung  $m > 0$ . Wird diese Grenze etwas unterschritten, wie mit der Geraden I charakterisiert, so schwingt der nichtlineare mechanische Oszillator infolge der elektrischen Entdämpfung an und läuft aufgrund des nichtlinearen Charakters dieser elektrischen Entdämpfung im Punkt A in einen stabilen Grenzzyklus. Für Steigungen der Arbeitsgeraden  $0.037 > m > 0$  gibt es weitere stabile Grenzzyklen mit größeren Phasenhüben, die jeweils durch instabile Grenzzyklen voneinander getrennt sind. Um zu diesen höheren stabilen Schwingungsformen des nichtlinearen mechanischen Oszillators zu gelangen, muß das System solch starken Anfangsauslenkungen unterworfen werden, daß die jeweiligen instabilen Grenzzyklen, die wie eine Scheide zwischen den stabilen wirken, überwunden werden.

Im Abschnitt 3.6 hatten wir uns überlegt, daß bei kleinen Auslenkungen  $\eta \ll 1$  (linearer Fall) für  $m < 0$  das mechanische System nicht nur nicht entdämpft, sondern sogar zusätzlich bedämpft werden konnte. In Bild 4.1 sieht man sehr anschaulich die Einschränkung, die für große Auslenkungen gemacht werden muß. Im Bereich  $-0.062 < m < 0$  kann das mechanische System entdämpft werden, wenn eine genügend große Anfangsauslenkung auftritt, die den instabilen Grenzzyklus B (Gerade II) überwindet. Das System schwingt dann mit einem dem stabilen Punkt C entsprechenden Phasenhub.

Unter der Voraussetzung, daß die gewählte Ruhelage einem Arbeitspunkt außerhalb des Hysteresebereichs nach Bild 2.1,2,3 entspricht, wird man, ohne daß hier genauer auf die mathematischen Implikationen eingegangen werden soll, erwarten dürfen, daß die Ruhelage global asymptotisch stabil ist, wenn es keine Dauerschwingungen gibt <sup>27)</sup>. In der Darstellung nach Bild 4.1 treten keine Dauerschwingungen auf, wenn es keine Schnittpunkte der Arbeitsgeraden mit der Schwingkennlinie gibt. Die Bedingung dafür lautet:

$$-16,2 < \frac{2y}{1+y^2} \frac{\hat{V}_g^2 k_v \tau_v}{(\Omega_v \tau)^2} < 1 \quad (4.3.3)$$

Das bedeutet, die oszillatorische Stabilitätsschwellspannung  $\tilde{V}_g^-$  auf der unteren Flanke der elektrischen Resonanzkurve ist nur um einen Faktor  $\sqrt{16,2} \approx 4,0$  größer als die Stabilitätsschwellspannung  $\tilde{V}_g^+$  auf der oberen Flanke bei dem gleichen Betrag der normierten Verstimmung  $|y|$ .

Die Ordinate des stabilen Grenzzyklus A in Bild 4.1 ist ein Maß für die Amplitudenmodulation des elektromagnetischen Feldes. Aus (4.2.11) erhalten wir für den Amplitudenmodulationsindex  $\theta_n(\eta)$  der n-ten Harmonischen:

$$\theta_n(\eta) = \sqrt{1 + 2 \left| \frac{A_n(\eta)}{A_0(\eta)} \right|} - 1 \quad (4.3.4)$$

Für die erste Harmonische ( $n=1$ ) sowie  $\Omega_v \tau \gg \sqrt{1+y^2}$  erhält man unter Verwendung von (4.2.14, 15):

$$\theta_1(\eta) \approx \sqrt{1 + \frac{4y}{\Omega_v \tau} \left| \frac{J_1(\eta)}{J_0(\eta)} \right|} - 1 \quad (4.3.5)$$

Man erkennt an (4.3.5), daß trotz beträchtlicher Phasenhübe  $\eta$  für  $\Omega_v \tau \gg 1$  die Amplitudenmodulationstiefe sehr klein sein kann. Für Anwendungsfälle, bei denen die Phase des elektromagnetischen Feldes nicht interessiert, ist es daher möglich, den Resonator in einem mechanischen Grenzzyklus zu betreiben, wenn man eine geringfügige Amplitudenmodulation zuläßt.

Für einen Arbeitspunkt  $y=1$ , das entspricht  $-45^\circ$  Hf-Phasenverschiebung, und einem absoluten Phasenhub  $\eta = 0,785$  hat die Feldamplitude nur 1 % Amplitudenmodulation, wenn die Resonatorbreite etwa  $1/80$  der betrachteten mechanischen Vibrationsfrequenz

ist. Die mittlere Resonatorspannung, die in dem betrachteten Grenzfall proportional zu  $|J_0(\eta)|$  ist, wie man der Gleichung (4.2.19) entnehmen kann, ist bei dem gewählten Absolutphasenhub von  $\eta = 0,785$  etwa 15 % kleiner als im linearen Fall ( $\eta \ll 1$ ).

Wir wollen nun den zweiten Grenzfall untersuchen, bei dem die mechanische Vibrationsfrequenz  $\Omega_\mu$  sehr klein gegen die Resonatorbandbreite ist ( $\Omega_\mu \tau \ll 1$ ). Das ist ein für normalleitende Beschleunigungsresonatoren typischer Fall. Wenn wir uns auch hier wieder sofort der für die Stabilitätsbetrachtungen wichtigen Gleichung (4.2.18) zuwenden, erkennen wir, daß für genügend großes  $\eta$  sehr viele Summanden berücksichtigt werden müssen, wobei allerdings die frequenzabhängigen Faktoren vereinfacht werden können.

Für  $m\Omega_\mu \tau \ll 1$ , wobei  $m$  für den  $m$ -ten Summanden in (4.2.18) steht, der gerade keinen wesentlichen Beitrag zu der Summe mehr liefert, erhalten wir:

$$\operatorname{Im} H_e(i\Omega_\nu, \eta) = \frac{2y\Omega_\nu \tau}{(1+y^2)^2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) N_m(\eta) \quad (4.3.6)$$

Die Reihe von Produkten aus Besselfunktionen läßt sich explizit summieren; das Ergebnis ist gerade gleich 1.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2J_m(\eta)J_{m+1}(\eta)}{\eta} (2m+1) \equiv 1 \quad (4.3.7)$$

Auf den Beweis soll verzichtet werden, hierzu sei auf Watson <sup>30)</sup> verwiesen.

Wenn man dieses Ergebnis in die Stabilitätsbedingung (4.2.17) einsetzt, erkennt man, daß es sich hierbei gerade um die lineare Stabilitätsbedingung (3.2.10) für  $\Omega_\nu \tau \ll 1$  handelt:

$$\frac{2y}{(1+y^2)^3} (\Omega_v \tau)^2 \hat{V}_g^2 k_v \tau_v < 1 \quad (4.3.8)$$

die schon von Karliner <sup>2)</sup> angegeben wurde. Entsprechend erhält man für die mittlere Resonatorspannung  $\hat{V}_m$  nach Gleichung (4.2.19):

$$\hat{V}_m = \hat{V}_g / \sqrt{1+y^2} \equiv \hat{V}_0 \quad (4.3.9)$$

wobei die Identität:

$$J_0^2(\eta) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m^2(\eta) \equiv 1 \quad (4.3.10)$$

verwendet wurde. Die beiden Ergebnisse (4.3.8, 9) sind eigentlich nicht überraschend, wenn man bedenkt, daß für festgehaltenes  $\eta$  die angewendete Näherung  $|\Delta\omega|\tau \ll 1$  impliziert, was seinerseits aber bedeutet, daß der Frequenzmodulationshub klein gegen die Bandbreite des Resonators ist ( $\rightarrow$  lineare Näherung).

Wenn wir die Näherung  $\Omega_v \tau \ll 1$  nicht so streng wie bisher anwenden und in Gleichung (4.2.18) wenigstens die Terme mit  $(\Omega_v \tau)^2$  im Nenner und Zähler mitnehmen, ergibt sich für die Schwingkennlinie:

$$\eta \operatorname{Im} H_e(i\Omega_v, \eta) = \frac{2y}{1+y^2} \left( \frac{\eta \Omega_v \tau}{1+y^2} - \frac{3}{4} \left( \frac{\eta \Omega_v \tau}{1+y^2} \right)^3 (3-5y^2) + \dots \right) \quad (4.3.11)$$

Das sind die ersten beiden Glieder einer Potenzreihendarstellung für  $\Omega_v \tau \ll 1$ . Wir sehen hier bereits zwei charakteristische Unterschiede gegenüber der Potenzreihendarstellung (4.2.16) für  $\Omega_v \tau \gg 1$ . Erstens hängt der nichtlineare Charakter der Kennlinie nicht mehr vom Phasenhub  $\eta = |\Delta\omega|/\Omega_v$ , sondern vom Frequenzhub bezogen auf die Bandbreite  $|\Delta\omega|\tau$  ab und zweitens sind die Entwicklungskoeffizienten keine Konstanten, wie in (4.2.16), sondern Funktionen des Arbeitspunktes  $y$ .

Für die mittlere Resonatorspannung bekommt man eine ähnliche Darstellung:

$$\hat{V}_m^2 = \frac{\hat{V}_g^2}{1+y^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\eta \Omega_v \tau}{1+y} \right)^2 (1-3y^2) + \dots \right) \quad (4.3.12)$$

Aus der Potenzreihendarstellung (4.3.11) können wir einen neuen Typus der nichtlinearen Systemeigenschaften ablesen. Für  $y > \sqrt{3/5}$ , das entspricht einer Hochfrequenzphasenverschiebung von  $\theta < -53^\circ$ , wird das kubische Glied positiv. Das bedeutet: selbst wenn für kleine Ausschläge  $|\Delta\omega|\tau$  die Schwinggrenze noch nicht erreicht war, kann unter der angegebenen Bedingung für größere Ausschläge die Schwinggrenze überschritten werden. Während früher bei  $\Omega_v \tau \gg 1$  (jedenfalls im Bereich  $0 < \eta < 2.4$  im Bild 4.1) die elektrische Entdämpfung des mechanischen Oszillators für  $y > 0$  mit zunehmendem Ausschlag abnahm, kann für  $\Omega_v \tau \ll 1$  die elektrische Entdämpfung mit zunehmendem Ausschlag in einem gewissen Anfangsbereich zunehmen. Qualitativ ist diese Situation im Bild 4.2 dargestellt.

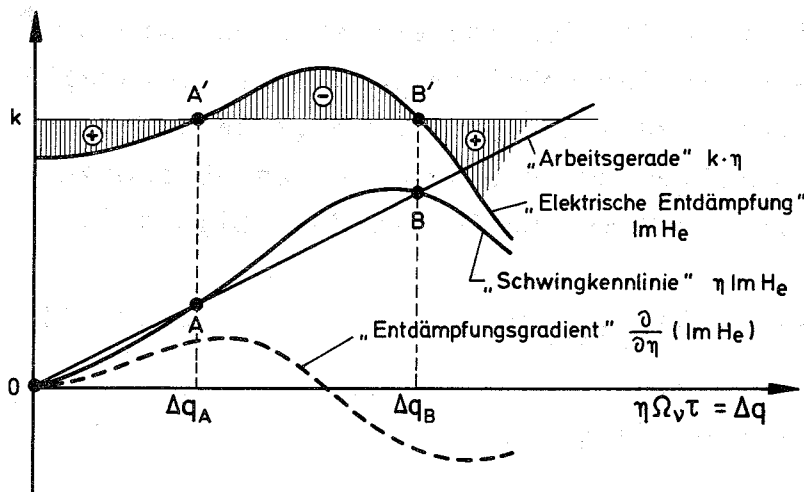


Bild 4.2: Schwingkennlinie für  $\Omega_v \tau \ll 1$

Neben der Schwingkennlinie und der Arbeitsgeraden ist als oberste Kurve die elektrische Entdämpfung als Funktion der normierten Schwingamplitude eingezeichnet. Der schraffierte Bereich

ist ein Maß für die amplitudenabhängige elektrische Zusatzdämpfung. Die Steigung  $k$  der Arbeitsgeraden wurde gerade so gewählt, daß für sehr kleine Auslenkungen der geschlossene Kreis gedämpft ist; d.h. die Ruhelage  $0$  ist stabil. Der Einzugsbereich der stabilen Ruhelage ist allerdings nicht unendlich groß, sondern reicht nur bis  $\Delta q_A$ , zu der Amplitude also, die zu dem ersten Grenzyklus gehört (Schnittpunkte  $A$  bzw.  $A'$ ). Wie wir bereits früher gesehen hatten, wechseln auch hier stabile und instabile Grenzyklen einander ab. Daß der Punkt  $A$  bzw.  $A'$  zu einem instabilen Grenzyklus gehört, ist sehr leicht einzusehen: Für  $\Delta q < \Delta q_A$  nimmt die Dämpfung mit abnehmender Amplitude zu, d.h. die Schwingamplitude tendiert gegen die stabile Amplitude  $0$ ; für  $\Delta q > \Delta q_A$  nimmt die Dämpfung mit zunehmender Amplitude ab, was wiederum zu einem weiteren Amplitudenzuwachs führt; d.h. die Schwingamplitude tendiert gegen die stabile Amplitude  $\Delta q_B$ .

Mit dieser anschaulichen Vorstellung läßt sich ein einfaches Kriterium für die Stabilität der Grenzyklen formulieren: Der betrachtete Grenzyklus mit der Amplitude  $\eta_i$  bzw.  $\Delta q_i$  ist stabil, wenn die Steigung der Schwingkennlinie bei dieser Amplitude kleiner als die der Arbeitsgeraden ist, vorausgesetzt, die Kennliniensteigung ist positiv (das bedeutet in unserer Konvention: negative Rückkopplung im geschlossenen Kreis). In Formeln ausgedrückt, heißt das nach Bild 4.2:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \operatorname{Im} H_e(i\Omega_v, \eta)) \right|_{\eta=\eta_i} < k \quad (4.3.13)$$

Mit der Schnittpunktsbedingung:

$$\operatorname{Im} H_e(i\Omega_v, \eta_i) = k \quad (4.3.14)$$

aus der man die Schwingamplitude  $\eta_i$  berechnen kann, erhält man die Bedingung:

$$y \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \operatorname{Im} H_e(i\Omega_v, \eta) \Big|_{\eta=\eta_i} < 0 \quad (4.3.15)$$

für die Stabilität des Grenzyklus mit der Amplitude  $\eta_i$ . Der Faktor  $y$  wurde nachträglich dazugesetzt; er berücksichtigt die Tatsache, daß sich Dämpfung und Entdämpfung auf der unteren Flanke des Resonators wegen positiver Rückkopplung gerade umkehren.

Die Bedingung (4.3.15) läßt sich anschaulich zusammenfassen: Der Grenzyklus ist stabil bei negativem Entdämpfungsgradienten bzw. positiven Dämpfungsgradienten für die betrachtete Amplitude und instabil im umgekehrten Falle ( $\rightarrow$  gestrichelte Kurve im Bild 4.2).

In Bild 4.2 war bereits mehr Information eingeflossen, als wir aus dem Stand der Potenzreihenentwicklung in Gleichung (4.3.11) wissen konnten. Um den Verlauf der Schwingkennlinie auch für größere Auslenkungen des Systems zu berechnen, müssen abhängig von der Größe von  $\Delta q/(1+y^2)$  die höheren Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung ermittelt werden. Der bisher beschrittene Weg erweist sich als äußerst mühselig.

Wir erinnern uns an die von Karliner <sup>2)</sup> verwendete Störungsentwicklung der Näherungsdifferentialgleichung nach dem kleinen Parameter  $\Omega_v \tau$ . Da wir uns bei den bisherigen Betrachtungen auf  $\tau/\tau_v \ll 1$  beschränkt hatten, läßt sich aus den Ausdrücken von Karliner mit dem Shapiro'schen Energieübertrag direkt die Schwingkennlinie ausrechnen. Das Energieübertrags-Integral läßt sich zwar durch analytische Funktionen ausdrücken. Dieser Ausdruck ist aber so umfangreich, daß hier nur eine Potenzreihendarstellung angegeben werden soll, die man aus einer Taylorentwicklung des Integranden gewinnen kann.

$$\eta \operatorname{Im} H_e(i\Omega_v, \eta) = \frac{2y}{1+y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\eta \Omega_v \tau}{1+y^2} \right)^{2n+1} P_{2n}(y) \quad (4.3.16)$$

wobei  $P_{2n}(y)$  ein Polynom vom Grade  $2n$  ist:

$$P_{2n}(y) = \frac{(1+y^2)^{2n}}{n!(n+1)!4^n} \frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}} \left( \frac{z}{y} \left( \frac{1+y^2}{1+z^2} \right)^3 \right) \Big|_{z=y} \quad (4.3.17)$$

Der entsprechende Ausdruck für die mittlere Resonatorspannung  $\hat{V}_m$  lautet:

$$\hat{V}_m^2 = \frac{\hat{V}_g^2}{1+y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\eta \Omega_v \tau}{1+y^2} \right)^{2n} Q_{2n}(y) \quad (4.3.18)$$

mit dem Polynom:

$$Q_{2n}(y) = \frac{(1+y^2)^{2n}}{(n!)^2 4^n} \frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}} \left( \frac{1+y^2}{1+z^2} \right) \Big|_{z=y} \quad (4.3.19)$$

Die ersten 4 Polynome für die Schwingkennlinie lauten:

$$P_0 = +1$$

$$P_2 = - \frac{3}{4} (3-5y^2) \quad (4.3.20)$$

$$P_4 = + \frac{5}{4} (3-14y^2+7y^4)$$

$$P_6 = - \frac{35}{32} (5-45y^2+63y^4-15y^6)$$

Auch die vollständige Potenzreihendarstellung hat den Nachteil, daß man für  $\eta \Omega_v \tau / (1+y^2) > 1$  noch sehr viele Glieder berechnen muß.



Da wir deswegen sowieso auf einen Rechner angewiesen sind, kann man auch gleich von der Besselfunktionendarstellung (4.2.18) ausgehen, wenn ein genügend genaues Programm zur Berechnung der Besselfunktionen zur Verfügung steht.

Bild 4.3 zeigt einige mit einer IBM 360/65 berechnete Schwingkennlinien für  $\Omega_v \tau = 0.3$ .

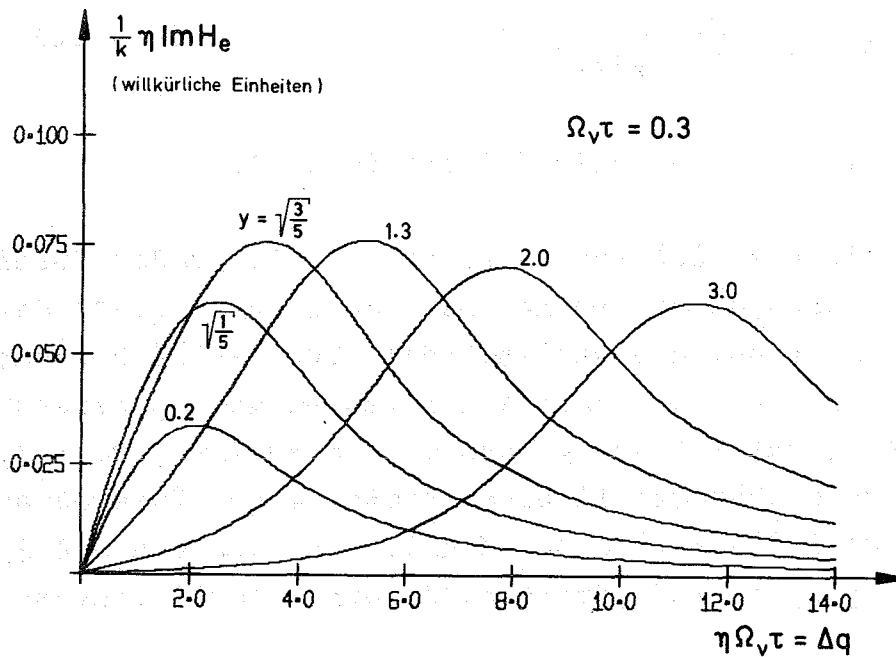


Bild 4.3: Nichtlineare Schwingkennlinien für  $\Omega_v \tau = 0.3$  und verschiedene Arbeitspunkte  $y$ .

In dieser Darstellung wurde die Kennlinie normiert mit der Steigung  $k$  der Arbeitsgeraden, die nach Gl. (4.2.17) ebenfalls eine Funktion des Arbeitspunktes ist:

$$k = \frac{1+y^2}{V_g^2 k_v \tau_v \Omega_v \tau} \quad (4.3.21)$$

Die 6 Arbeitspunkte wurden so gewählt, daß man direkt einige charakteristische Eigenschaften ablesen kann. Zunächst fällt auf, daß im Gegensatz zu  $\Omega_v \tau \gg 1$  im Bild 4.1 keine der Kennli-

nien die Nulllinie unterschreitet. Das bedeutet, für alle Arbeitspunkte auf der unteren Flanke des Resonators ist das System hier auch für große Auslenkungen stabil. Die größte Anfangssteigung ist für eine normierte Verstimmung von  $y = \sqrt{1/5}$  zu beobachten. Dieses Ergebnis, das direkt aus dem linearen Systemverhalten gefolgert werden kann, wurde bereits von Karliner<sup>2)</sup> angegeben. Man erhält dieses Ergebnis aus:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\eta \text{Im} H_e}{k} \right)_{\Delta q \ll 1} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{(1+y^2)^3} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.3.22)$$

(vgl. Formel (3.2.10) bzw. Bild 3.5 für  $\Omega_v = 24^\circ$ ).

Die Kennlinie für  $y = \sqrt{3/5}$  ist in einem relativ großen Bereich nicht von einer Geraden unterscheidbar, weil in (4.3.11) der kubische Term der Kennlinie verschwindet. Für  $y > \sqrt{3/5}$  bekommen die Schwingkennlinien das vorher schon besprochene progressive Anfangsverhalten, das mit steigendem  $y$  noch zunimmt, weil der kubische Term gegenüber dem linearen größer wird. Interessanterweise fallen dabei die Maxima der Kennlinien, die ein Maß für die maximale Amplitudenmodulation sind, nur relativ langsam mit  $y$ .

Wir haben jetzt die beiden Grenzfälle  $\Omega_v \tau \gg 1$  und  $\Omega_v \tau \ll 1$  behandelt, die sich offenbar erheblich unterscheiden. Im Übergangsbereich  $\Omega_v \tau \approx 1$ , d.h. die mechanische Schwingungsfrequenz ist etwa in der Größe der Resonatorbandbreite, können die Kennlinien beide typischen nichtlinearen Effekte zeigen. Die Schwingkennlinien können sowohl in den negativen Bereich kommen wie bei  $\Omega_v \tau \gg 1$  als auch im Anfangsbereich ein progressives Verhalten wie für  $\Omega_v \tau \ll 1$  zeigen.

Im Bild 4.4 wurden einige Kennlinien für  $\Omega_v \tau = \sqrt{2}$  gerechnet und gezeichnet. Die Kennlinie für  $y=1$  hat dabei gegenüber allen anderen mit anderen Parameterwerten  $\Omega_v \tau$  bzw.  $y$  die maximale

Anfangssteigung, wie aus der linearen Theorie nach Abschnitt 3.6 hervorgeht (vgl. 3.6.5).

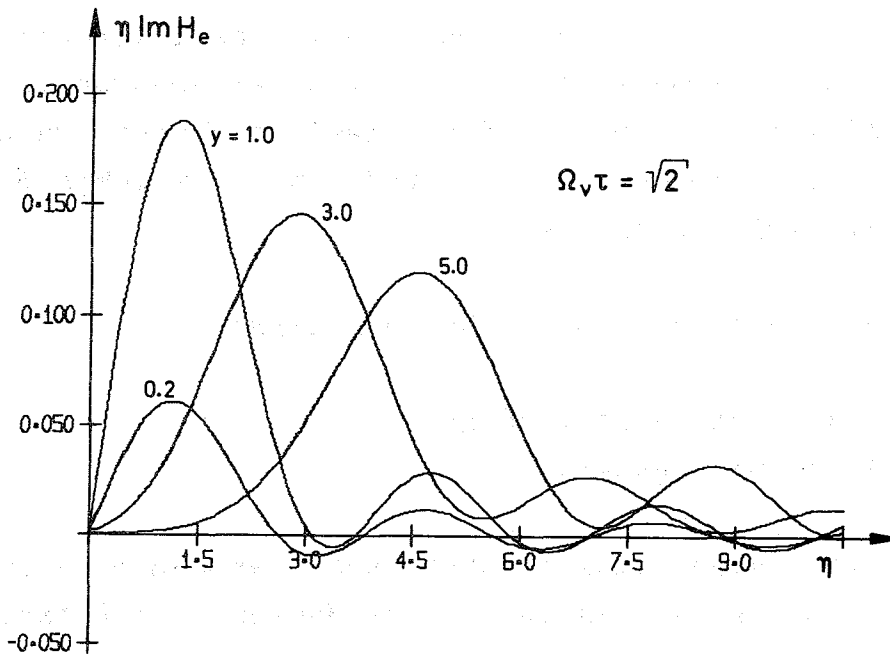


Bild 4.4: Nichtlineare Schwingenkennlinien im Übergangsbereich für  $\Omega_v \tau = \sqrt{2}$  und verschiedene Arbeitspunkte  $y$ .

Die Ergebnisse der nichtlinearen Stabilitätsbetrachtungen für die oszillatorische Stabilität lassen sich so zusammenfassen:

- I. Für  $\Omega_v \tau \gg 1$  ist das System global asymptotisch stabil im Bereich  $y > 0$ , wenn das linearisierte System asymptotisch stabil ist.  
Im Bereich  $y < 0$  kann der Einzugsbereich der Ruhelage aus einer graphischen Konstruktion nach Bild 4.1 gewonnen werden.
- II. Für  $\Omega_v \tau \ll 1$  ist das System global asymptotisch stabil im Bereich  $y < \sqrt{3/5}$ , wenn das linearisierte System asymptotisch stabil ist.  
Im Bereich  $y > \sqrt{3/5}$  kann der Einzugsbereich der Ruhelage aus einer graphischen Konstruktion nach Bild 4.2 bzw. 4.3 gewonnen werden.
- III. Für  $\Omega_v \tau \approx 1$  lassen sich aus dem linearisierten System keine Rückschlüsse auf das Verhalten im Großen ziehen. Für den gesamten  $y$ -Bereich ist man auf eine graphische Konstruktion entsprechend Bild 4.4 angewiesen.

## 5. Stabilisierung durch Regelungssysteme

Im Abschnitt 3.6 hatten wir gesehen, daß für die Fälle II und III, wenn das System monoton oder monoton und oszillatorisch instabil ist, zusätzliche stabilisierende Rückführungen vorgesehen werden müssen. Dazu muß zunächst geklärt werden, welche Größen durch Messung zugänglich sind und mittels welcher Größe das System beeinflußt werden kann.

Die beiden einzigen Meßgrößen des Systems sind:

- a) Resonatoramplitude und
- b) Resonatorphase,

wobei die letztere gegen eine Absolutphase oder nur relativ zur Eingangsphase gemessen werden kann. Eine Messung von Position und Geschwindigkeit der mechanischen Deformation kommt bei geometrisch komplizierten Strukturen praktisch nicht in Betracht.

Mögliche Einfluß- oder Stellgrößen sind:

- c) Generatoramplitude
- d) Generatorphase
- e) Generatorfrequenz
- f) Eigenfrequenz
- g) mechanische Kräfte auf die Wände

Rein theoretisch gibt es  $\binom{5}{2}$  mögliche Kombinationen von Meß- und Stellgrößen. Diese Anzahl reduziert sich, wenn wir als sicher sinnvolle Auswahlregeln beachten, daß

- I. ausreichende Kopplung zwischen Stell- und Meßgröße vorhanden sein muß und
- II. die Verzögerung der Regelstrecke zwischen Stell- und Meßgröße möglichst gering sein soll sowie
- III. Meß- bzw. Stellglieder mit ausreichendem Meß- bzw. Stellbereich und ausreichender Meß- bzw. Stellgeschwindigkeit realisiert werden können.

Die letztgenannte Forderung ist theoretisch zwar überflüssig, wenn wir nur die interne Streckeninstabilität beseitigen wollen, da durch die zusätzlichen Rückführungen nur die Startschwelle für den mechanischen Oszillator erhöht wird. Solange der Oszillator nicht schwingt, sind alle Meß- und Stellgrößen auf einem festen Sollwert; man benötigt daher auch nur einen Meßbereich 0 und einen Stellbereich 0. In der Praxis gibt es aber im allgemeinen nur gestörte "Sollwerte" bzw. Streckenparameter, so daß im Falle unakzeptabel großer Störungen bereits Regelungssysteme eingesetzt werden müssen, um die Auswirkung der Störung auf die sogenannte Regelgröße, die die Stelle des unregulierten gestörten "Sollwerts" einnimmt, zu vermindern.

Um uns nicht allzuweit von der praktischen Fragestellung zu entfernen, sollen daher einige im Sinne der letzten Ausführungen typische Kombinationen von Meß- und Stellgrößen in ihrer Eigenschaft als Stabilisierungsmöglichkeit für den Resonator unter dem Einfluß der elektromagnetischen Kräfte untersucht werden. An anderer Stelle wurde bereits betont, daß im Prinzip die Ausführungen der Kapitel 1-3 auf alle resonanten Systeme anwendbar sind, bei denen der Strahlungsdruck der gespeicherten Energie genügend groß ist, um die Geometrie und damit die Eigenfrequenz des Resonators merklich zu beeinflussen. Meß- und Stellmöglichkeiten sind andererseits aber sehr erheblich strukturspezifisch, so daß zwangsläufig auch die Stabilisierungsmaßnahmen und -ergebnisse strukturbedingt sind. Die folgenden Ausführungen werden sich in weit stärkerem Maße als bisher auf die speziellen Erfordernisse eines Beschleunigerresonators beziehen. Letztlich kam der Anstoß zu dieser Untersuchung aus der Beobachtung, daß die elektromechanische Kopplung bei einer supraleitenden Beschleunigungsstruktur eine erhebliche Funktionsbeeinträchtigung bewirken kann. Näheres dazu wird im Kapitel 6 ausgeführt.

Aus der Sicht der Teilchenbeschleunigung ist es notwendig, daß die Resonatorspannung eine möglichst konstante Amplitude und Relativphase gegenüber den Teilchenpaketen hat. Aus der Fülle an Literatur über Amplituden- und Phasenregelungssysteme seien als typisch für einen normalleitenden Beschleuniger die Arbeit von

Jameson <sup>31)</sup> sowie für einen supraleitenden Beschleuniger die von Suelzle <sup>32)</sup> angeführt. Die Forderungen I - III sind dort selbstverständlich als Mindestvoraussetzung erfüllt. In bezug auf die Auswahl der Stellgrößen sind eigentlich nur zwei Klassen von Störgrößen zu unterscheiden. Amplituden- und Phasenstörungen, die vom HF-Generator selbst oder aber bei großen Stromstärken von den Teilchen induziert werden, lassen sich immer durch Steuerung der Generatoramplitude (c) bzw. der Generatorphase (d) ausregeln. Der Effekt von Eigenfrequenzstörungen des Resonators auf die Resonatoramplitude und -phase dagegen läßt sich mit ökonomisch vertretbarem Aufwand nur dann beseitigen, wenn der Frequenzmodulationshub innerhalb der Resonatorbandbreite liegt. Bei größeren Hüben muß die Generatorfrequenz (e) nachgezogen werden; das ist aber nur möglich, wenn ein einziger Resonator betrieben wird. Will man eine Kette von hochfrequenzmäßig unabhängigen Resonatoren betreiben, so arbeitet die Kette bei einer gemeinsamen Oszillatorfrequenz; hier muß deswegen die Eigenfrequenz (f) selbst beeinflußt werden.

Unter der Eigenfrequenzstellmöglichkeit (f) wird dabei eine schnell steuerbare Reaktanz verstanden, die genügend stark an den Resonator angekoppelt ist und deren Stellverzögerungszeit klein gegen eine Periodendauer des Frequenzmodulationsstörsignals ist (vgl. Forderung III). Da die genannte Anforderung vor allem bei großen zu steuernden Blindleistungen technologisch erhebliche Probleme aufwirft, kann man versuchen, einen Eigenfrequenzsteuereffekt dadurch zu erzielen, daß man eine mechanische Kraft auf die Resonatorwände (g) wirken läßt, wobei man natürlich mit der Forderung II Schwierigkeiten bekommt. Dieses Stellprinzip wirkt genauso wie ein langsames Eigenfrequenzstellglied, das Forderung III verletzt. Auf diese Zusammenhänge wird im Abschnitt 5.2 eingegangen werden.

Es läßt sich zeigen, daß bei kleinen relativen Frequenzhüben Generatorfrequenzsteuerung (e) und Eigenfrequenzsteuerung (f) in bezug auf die Amplitude (a) und die Relativphase zwischen Resonatorspannung und Generatorspannung (b) bis auf das Vorzei-

chen völlig gleich wirken. In der Differentialgleichung für die komplexe Amplitude (3.4.3) scheint dieser Sachverhalt sehr deutlich auf; der komplexe Dämpfungskoeffizient hängt nur von der Differenz zwischen Generatorfrequenz und Eigenfrequenz ab. Daraus folgt aber, daß die Streckenübertragungsfunktion für die Meßstellkombination b-e und b-f identisch sind. Dieser Fall soll als Prototyp für die möglichen Stabilisierungsmaßnahmen zuerst untersucht werden. Unter der Einschränkung  $\Omega_v \tau \ll 1$  für die Regelstrecke, d.h. für typische Parameter einer normalleitenden Struktur, wurde das Verhalten des Gesamtsystems bereits von Karliner <sup>9)</sup> untersucht. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, wie diese Ergebnisse zu verallgemeinern sind.

### 5.1 Phasenregelung mit Frequenzsteuerung

Im folgenden wird nur das linearisierte System betrachtet werden. Für kleine Phasenabweichungen  $\delta\phi$  vom Sollzustand der komplexen Resonatorspannung erhalten wir:

$$\delta\phi = \arg \underset{i}{V V_0^*} \approx \underset{i}{\text{Im}} (\delta V / V_0) \quad (5.1.1)$$

Mit der bereits im Abschnitt 3.1 berechneten Übertragungsfunktion für die komplexe Amplitude  $G_0(s)$  erhalten wir entsprechend der Gleichung (3.1.8) im Bildbereich:

$$\delta\phi(s) = \underset{i}{\text{Re}} G_0(s) \tau \sum_{\mu} \delta\omega_{\mu}(s) \quad (5.1.2)$$

Die Regelstreckenübertragungsfunktion  $\underset{i}{\text{Re}} G_0(s)$  von der normierten Frequenzabweichung  $\tau\delta\omega$  auf die Phasenabweichung  $\delta\phi$  soll in Zukunft mit  $G_{\phi}(s)$  abgekürzt werden. Die Realteilbildung auf (3.1.4) angewendet, ergibt:

$$G_{\phi}(s) = \frac{1 + \tau s}{\left(\frac{\tau s^2}{2\omega} + \frac{s}{\omega} - y^2\right)^2 + (\tau s + 1)^2} \quad (5.1.3)$$

Der Frequenzgang für Phase und Amplitude der Hochfrequenzphasenabweichung  $\delta\phi$  bei einem niederfrequenten frequenzmodulierten Signal mit der Frequenz  $\Omega$  ist entsprechend (3.6.2, 3) unter Berücksichtigung der Näherung (3.2.9):

$$|G_\phi(j\Omega)| = \sqrt{\frac{1+(\Omega\tau)^2}{(1+(\Omega\tau)^2 - y^2)^2 + 4y^2}} \quad (5.1.4)$$

$$\tan\psi_\phi = -\Omega\tau \left( \frac{1+(\Omega\tau)^2 - y^2}{1+(\Omega\tau)^2 + y^2} \right) \quad (5.1.5)$$

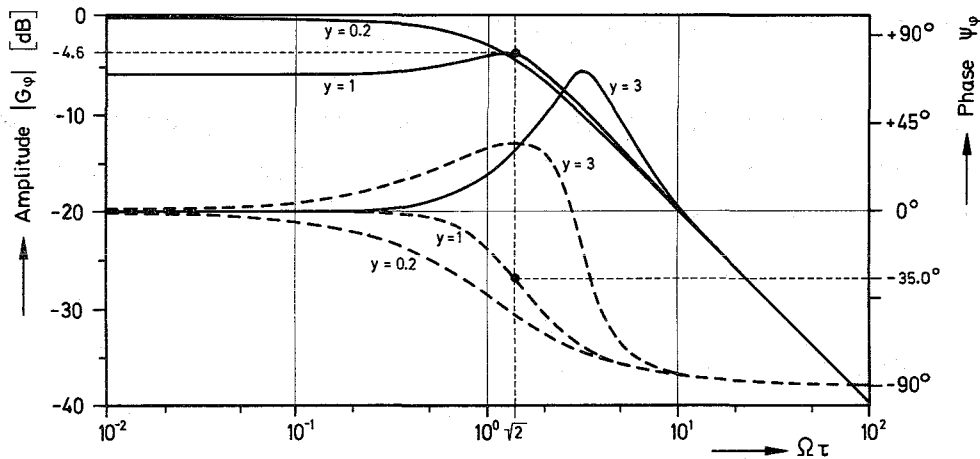


Bild 5.1: Amplituden- und Phasenfrequenzgang der elektrischen Teilübertragungsfunktion  $G_\phi(s)$

Da Eigenfrequenzen nicht direkt gemessen werden können, läßt sich  $G_\phi(j\Omega)$  als Meßfrequenzgang eines Eigenfrequenzmeßgerätes interpretieren. Der in Bild 5.1.a gezeichnete Betrag dieser Funktion entspricht dann der Meßempfindlichkeit und  $\tau_\phi = -\psi_\phi/\Omega$  (Bild 5.1.b) ist die Meßverzögerungszeit für eine periodisch sinusförmige Eigenfrequenzvariation mit der Frequenz  $\Omega$ .



Für Signalfrequenzen  $\Omega$ , die sehr klein gegen die Resonatorbandbreite sind, d.h.  $\Omega\tau \ll 1$ , der typische Fall für normalleitende Resonatoren also, ist die Meßverzögerungszeit unabhängig von der Frequenz  $\Omega$ :

$$\tau_{\phi} = \tau \cos 2\theta \quad (5.1.6)$$

und proportional der Resonatorabklingzeit  $\tau$ .

Der Phasenwinkel  $\theta$  steht für den Arbeitspunkt der Meßanordnung auf der Resonatorflanke;  $\theta$  ist die statische Hochfrequenzphasenverschiebung ( $y = -\tan\theta$ ).

Für Signalfrequenzen dagegen, die großen gegen die Resonatorbandbreite sind  $\Omega\tau \gg 1$ , zeigt das Eigenfrequenzmeßgerät reines Integralverhalten, praktisch unabhängig vom gewählten Arbeitspunkt, d.h.  $G_{\phi} \approx \frac{1}{j\Omega\tau}$ . Im Zeitbereich erhalten wir daraus für periodisch mit der Frequenz  $\Omega$  modulierte Eigenfrequenzabweichungen

$$\delta\phi(t) = \tau \int_{\mu} \sum \delta\omega_{\mu}(t) dt \quad (5.1.7)$$

Dieser Sachverhalt ist sehr anschaulich.  $\Omega\tau \gg 1$  ist typisch für supraleitende Resonatoren. Wegen der großen Trägheit des elektromagnetischen Feldes ist die momentane Feldfrequenz praktisch identisch mit der Eigenfrequenz; das Feld kann aufgrund der großen Trägheit innerhalb einer Periodendauer  $2\pi/\Omega$  nicht auf die Zwangsfrequenz des Generators einschwingen.

Die gemessene Phasenabweichung  $\delta\phi$  wird über ein Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion  $F_{\phi}(s)$ , die die Charakteristiken aller Verstärker, des realen Frequenzstellgliedes sowie einer dynamischen Korrektur enthalten möge, in ein Eigen- oder Generatorfrequenzstellsignal  $\delta\omega_{\text{steuer}}$  umgewandelt, das der durch die elektromechanische Kopplung erzeugten Frequenzabweichung  $\sum_{\mu} \delta\omega_{\mu}$  entgegengewirkt. Im Bildbereich erhalten wir:

$$\delta\omega'(s) = \sum_{\mu} \delta\omega_{\mu}(s) - \delta\omega_{\text{steuer}}(s) \quad (5.1.8)$$

mit

$$\delta\omega_{\text{steuer}}(s) = \frac{1}{\tau} F_{\phi}(s) \delta\phi'(s)$$

und

$$\delta\phi'(s) = \tau G_{\phi}(s) \delta\omega'(s) \quad (5.1.9)$$

$\delta\omega'$  ist die mit Regelung noch verbleibende Frequenzabweichung;  $\delta\phi'$  ist die mit Regelung noch verbleibende Phasenabweichung. Wenn man (5.1.9) in (5.1.8) einsetzt und nach  $\delta\phi'$  auflöst, erhält man die zur Übertragungsgleichung (5.1.2) analoge Gleichung für den geregelten Fall:

$$\delta\phi'(s) = \frac{G_{\phi}(s)}{1 + G_{\phi}(s)F_{\phi}(s)} \cdot \tau \sum_{\mu} \delta\omega_{\mu}(s) \quad (5.1.10)$$

Voraussetzung dafür, daß diese neue Übertragungsfunktion existiert, ist, wie bereits an einem ähnlichen Fall in Abschnitt 3.1 diskutiert wurde, daß alle Wurzeln des Polynoms  $N_{\phi} = 1 + G_{\phi}F_{\phi}$  in der linken s-Halbebene liegen oder, anders ausgedrückt, daß alle Wurzeln positive Realteile haben.

Als wesentlich sei hier festgehalten, daß bei der Einführung einer Phasenregelschleife, die die Stabilität des elektromechanischen Systems beeinflussen soll, zunächst einmal ein zusätzliches Stabilitätsproblem auftritt, nämlich die Stabilität des Phasenregelkreises selbst. Bei gegebener Streckenübertragungsfunktion hängt das Stabilitätsverhalten von den realen verwendeten Bauelementen ab und kann deshalb allgemein nicht weiter diskutiert werden; im Kapitel 6 wird ein Anwendungsbeispiel durchgerechnet werden. Hier wollen wir einfach unterstellen, daß  $F_{\phi}(s)$  so gewählt werden konnte, daß der Phasenregelkreis im obigen Sinne stabil ist.

Wenn man berücksichtigt, daß die relative Amplitudenabweichung zur Phasenabweichung  $\delta\phi'$  sich verhält wie  $G_e$  zu  $G_{\phi}$ , erhalten wir entsprechend den Gleichungen (3.1.6, 7, 8) die Übertragungsfunktion des offenen elektromechanischen Kreises mit Phasenregelung:

$$F_o(s) = -2 \frac{\hat{V}_g^2}{1+y^2} \left( \frac{G_e(s)}{1+G_\phi(s)F_\phi(s)} \right) \sum_{\mu} \tau k_{\mu} G_{\mu}(s) \quad (5.1.11)$$

Die neue monotone Stabilitätsbedingung entsprechend der Gleichung (3.2.4) lautet nun:

$$\frac{2y\hat{V}_g^2 \tau \sum_{\mu} k_{\mu}}{(1+y^2)(1+y^2+F_{\phi}(o))} > -1 \quad (5.1.12)$$

$F_{\phi}(o)$  ist die statische Verstärkung der Phasenrückkoppelschleife von der Phasenmessung bis zur normierten Frequenzverstimmung. Die für die monotone Instabilität wirksame Generatoramplitude  $\hat{V}'_g$  kann also bei genügend großer Verstärkung erheblich verringert werden:

$$\hat{V}'_g = \hat{V}_g \left( \sqrt{1 + \frac{F_{\phi}(o)}{1+y^2}} \right)^{-1} \quad (5.1.13)$$

wie ein Vergleich von (5.1.12) mit (2.3.13) zeigt. Die Wirkung der Phasenregelung ist selbstverständlich nicht gleichbedeutend damit, daß  $\hat{V}_g$  auf  $\hat{V}'_g$  reduziert wird; die statische Resonanzkurve nach Bild 2.1 wird durch die Phasenregelung nicht geändert. Eine echte Verringerung der Generatoramplitude würde eine Verkleinerung des Hysteresebereichs bewirken.

Die Stabilitätsbedingung (5.1.12) sagt aus, daß für Arbeitspunkte innerhalb des Hysteresebereichs, die im unregulierten System grundsätzlich instabil waren, Stabilität erreicht werden kann, wenn nur die statische Regelverstärkung des Phasenregelkreises groß genug ist.

Wie ändert sich nun die oszillatorische Stabilitätsbedingung im Vergleich zu (3.2.3)? Bevor diese Frage beantwortet werden kann, muß noch eine wichtige Vorbemerkung gemacht werden. Voraussetzung für die Anwendbarkeit der vereinfachten Stabili-

tätsbedingung (3.2.3) war (vgl. Abschnitt 3.5): Sowohl Phase als auch Amplitude des komplexen elektrischen Verstärkungsfaktors  $G_e(j\Omega)$  dürfen sich innerhalb der Bandbreite des betrachteten mechanischen Schwingungssystems nur geringfügig ändern. Das gleiche gilt auch für den durch die Phasenregelung modifizierten Verstärkungsfaktor  $G_e(j\Omega)/(1+F_\phi(j\Omega)G_\phi(j\Omega))$ . Insbesondere muß also auch das Rückkopplungsübertragungssystem mit dem Verstärkungsfaktor  $F_\phi(j\Omega)$  breitbandig gegenüber der Bandbreite des mechanischen Oszillators sein, wenn wir das vereinfachte Nyquist-Kriterium anwenden wollen.

Unter dieser Voraussetzung erhält man einen zu (3.2.10) analogen Ausdruck für die oszillatorische Stabilität des mechanischen Modes  $\nu$  mit Phasenregelung:

$$\frac{y}{1+y^2} \hat{V}_g^2 \Omega_\nu \tau k_\nu \tau_\nu \left( \frac{Z_0 + \nu Z_1}{N_0 + \nu N_1 + \nu^2 N_2} \right) < 1 \quad (5.1.14)$$

mit  $Z_0 = 2 \Omega_\nu \tau$

$$Z_1 = \sin\sigma + \Omega_\nu \tau \cos\sigma \quad (5.1.15)$$

$$N_0 = (1 + (\Omega_\nu \tau)^2 - y^2)^2 + 4y^2$$

$$N_1 = 2\cos\sigma(1 + (\Omega_\nu \tau)^2 + y^2) + 2\Omega_\nu \tau \sin\sigma(1 + (\Omega_\nu \tau)^2 - y^2)$$

$$N_2 = 1 + (\Omega_\nu \tau)^2$$

Dabei ist  $\nu$  die Verstärkung der Regelschleife bei der Eigenfrequenz des mechanischen Modes und  $\sigma$  deren Phasendrehung für diese Frequenz  $\Omega_\nu$ :

$$\begin{aligned} \nu &\stackrel{!}{=} |F_\phi(j\Omega_\nu)| \\ \sigma &\stackrel{!}{=} \arg F_\phi(j\Omega_\nu) \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

Interessant an dieser neuen Stabilitätsbedingung ist der Zähler in der Klammer von (5.1.14). Für  $v = 0$ , d.h. für offenen Phasenregelkreis, ist der Zähler positiv. Wegen  $N_0 > 0$  hieß das: Instabilität ist nur möglich auf der oberen Flanke des Resonators für  $y > 0$ . Für genügend große Verstärkung  $v$  sowie genügend große negative Phasenverschiebung  $\sigma$  kann der Zähler Null oder sogar negativ werden. Das bedeutet aber: die oszillatorische Instabilität kann bei geeigneter Wahl der Reglerparameter ganz beseitigt werden oder sie kann auf die untere Flanke des Resonators geschoben werden. Im Bild 5.2 sind die Bedingungen dafür graphisch veranschaulicht.

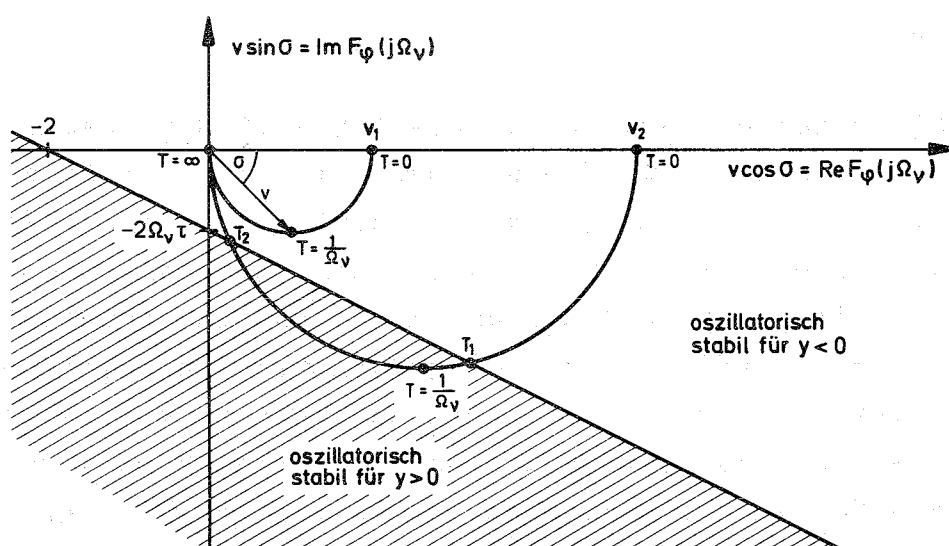


Bild 5.2: Oszillatorischer Stabilitätsbereich als Funktion der komplexen Regelverstärkung

Die Gerade kennzeichnet die Werte des komplexen Regelverstärkungsfaktors  $F_\phi(j\Omega_v)$ , für die der Zähler  $Z_0 + vZ_1$  verschwindet und für die daher das System unabhängig vom Arbeitspunkt  $y$  oszillatorisch stabil ist. Im schraffierten Bereich ist der Zähler negativ; dort ist das linearisierte System auf der oberen Flanke  $y > 0$  stabil.

Wenn im einfachsten Fall die Rückföhrfunktion durch ein einfaches Verzögerungsglied erster Ordnung angenähert wird:

$$F_{\phi}(j\Omega_{\nu}) = \frac{v_{1,2}}{1+j\Omega_{\nu}T} \quad (5.1.17)$$

$v_1$  (bzw.  $v_2$ ) ist der statische Verstärkungsfaktor;  $T$  die Verzögerungszeit, die von  $T = 0$  bis  $T = \infty$  variiert wird.  $F_{\phi}(jT)$  beschreibt dann einen Halbkreis in der komplexen Ebene. Die Verstärkung  $v_1$  genügt offenbar nicht, um das Stabilitätsverhalten in der beschriebenen Weise zu ändern. Bei der Verstärkung  $v_2$  aber ist das System für  $T_2 > T > T_1$  im Gegensatz zum unregulierten System auf der oberen Flanke des Resonators oszillatorisch stabil!

Für sehr große Regelverstärkung  $v$ , vorausgesetzt der Phasenregelkreis ist noch stabil, wird die linke Seite der Ungleichung (5.1.14), die nach den vorangegangenen Überlegungen proportional der elektrischen Entdämpfung des mechanischen selbsterregten Oszillators ist, sehr klein. Wenn man daran interessiert ist, den Entdämpfungseffekt des elektromagnetischen Feldes völlig zu beseitigen, so muß entweder die Regelverstärkung  $v$  sehr groß gemacht werden oder aber bei relativ kleiner Verstärkung  $v$  eine geeignete Phasenverzögerung nach Bild 5.2 gewählt werden. Die letztgenannte dynamische Kompensation hat allerdings den Nachteil, daß die Wirksamkeit sehr stark sowohl von den Systemparametern  $\Omega_{\nu}$  und  $\tau$  als auch von Regelparametern  $v$  und  $\sigma$  abhängen, weswegen diese Methode wohl keine praktische Bedeutung haben dürfte.

Wie bereits am Ende des Abschnitts 3.6 ausgeführt wurde, ist es gar nicht notwendig, die elektromechanische Rückwirkung zu beseitigen. Man kann diese Kopplung im Gegenteil dazu benutzen, um einen zusätzlichen Bedämpfungseffekt für extern angeregte mechanische Eigenschwingungen zu erzielen. Dazu ist nur eine geeignete Flanke des Resonators zu wählen, damit das Vorzeichen der Entdämpfungsfunktion (linke Seite von (5.1.14)) negativ wird. Jetzt müssen wir geradezu bestrebt sein, die Entdämpfung

möglichst groß zu machen, damit auch auf der jeweils anderen Flanke die Bedämpfung groß wird. Die Wirksamkeit der Zusatzdämpfung hängt natürlich, wie man sich aus dem Nyquist-Kriterium mit Hilfe der Ortskurve des offenen Kreises  $F_o(j\Omega)$  sowie den komplexen Verstärkungsfaktoren  $G_e(j\Omega)$  nach Bild 3.3,  $G_\phi(j\Omega)$  nach Bild 5.1 und dem komplexen Regelverstärkungsfaktor  $F_\phi(j\Omega)$  klarmachen kann, entscheidend vom Systemparameter  $\Omega_v\tau$  ab.

Um die Bedingung für maximale Bedämpfung zu ermitteln, müßte bei gegebenem Systemparameter  $\Omega_v\tau$  eigentlich die normierte Dämpfungsfunktion:

$$D = - \frac{y\Omega_v\tau}{1+y^2} \left( \frac{Z_o + vZ_1}{N_o + vN_1 + v^2N_2} \right) \quad (5.1.18)$$

nach den Parametern  $y$ ,  $v$  und  $\sigma$  optimiert werden. Um sich eine ausreichende Übersicht zu verschaffen, genügt es, zwei typische Grenzfälle für die Phasenverschiebung  $\sigma$  zu betrachten.  $\sigma = 0$  bedeutet reines Proportionalverhalten und  $\sigma = -\frac{\pi}{2}$  bedeutet reines Integralverhalten von  $F_\phi(j\Omega)$  in der Nähe der mechanischen Eigenfrequenz. In der Tabelle 5.1 sind typische Systemparameter bzw. Parameterbereiche, optimale Reglerparameter sowie die erzielten normierten Dämpfungen zusammengestellt.

	1	2	3	4	5	6
SYSTEM-PARAMETER	$\Omega_v\tau = \sqrt{2}$ $y = -1$	$\Omega_v\tau \ll 1$ $y = -1$	$\Omega_v\tau \ll 1$ $y = +1$	$\Omega_v\tau \gg 1$ $y = -1$	$\Omega_v\tau \gg 1$ $y = -1$	$\Omega_v\tau \gg 1$ $y = +1$
REGLER-PARAMETER	$v = 0$	$v = 0$	$\sigma = -\pi/2$ $v = 2 + 2\Omega_v\tau$	$v = 0$	$\sigma = 0$ $v = \Omega_v\tau - 2$	$\sigma = -\pi/2$ $v = 3\Omega_v\tau$
ELEKTRISCHE ZUSATZ-DÄMPFUNG D	$D = \frac{1}{4}$	$D = \frac{(\Omega_v\tau)^2}{4}$	$D = \frac{\Omega_v\tau}{8}$	$D = \frac{1}{(\Omega_v\tau)^2}$	$D = \frac{1}{4(\Omega_v\tau)}$	$D = \frac{1}{8(\Omega_v\tau)^2}$

Tabelle 5.1: Systemparameter und Reglerparameter für optimale elektrische Bedämpfung.

Für die normierte Verstimmung wurde grundsätzlich  $|y| = 1$  gewählt, obwohl diese Wahl nur für  $\Omega_v \tau \gg 1$  dem optimalen Wert entspricht. Für  $\Omega_v \tau \ll 1$  lag das Optimum bei  $y = \sqrt{1/5}$ .

In der Spalte 1 der Tabelle 5.1 ist zunächst zum Vergleich die Dämpfung für den optimalen Systemparameter  $\Omega_v \tau = \sqrt{2}$  (vgl. Abschnitt 3.6) im unregulierten Fall eingetragen. Beiderseits dieses Optimalwerts läßt die Wirksamkeit der Dämpfung sehr nach (Spalten 2 und 4). Im normalleitenden Falle  $\Omega_v \tau \ll 1$  kann man die Dämpfung durch integral wirkende Rückkopplung bei relativ kleiner Verstärkung ( $v \approx 2$ ) um etwa einen Faktor  $(2\Omega_v \tau)^{-1}$  vergrößern (Spalte 3), wenn ein Betrieb des Resonators auf der oberen Flanke möglich ist. Dieses Ergebnis wurde bereits von Karliner<sup>9)</sup> berichtet. Proportional wirkende Rückkopplung ( $\sigma \approx 0$ ) dagegen mit einem Arbeitspunkt auf der unteren Flanke verkleinert die Dämpfung höchstens gegenüber dem unregulierten Fall (Spalte 2).

Ganz anders sind die Verhältnisse bei einem supraleitenden Resonator mit  $\Omega_v \tau \gg 1$ . Wegen der großen Phasenverschiebung  $\psi_\phi$  (vgl. Bild 5.1.b) bekommt man hier für integral wirkende Rückkopplung (Spalte 6) selbst im günstigsten Fall für  $v \approx 3\Omega_v \tau$  auf der oberen Flanke des Resonators eine kleinere Dämpfung als im unregulierten Fall auf der unteren Flanke (Spalte 4). Deswegen ist hier eindeutig eine proportional wirkende Regelung vorzuziehen, wobei man allerdings einen Arbeitspunkt auf der unteren Flanke wählen muß. Bei optimaler Verstärkung  $v \approx \Omega_v \tau$  (Spalte 5) erhält man hierbei eine um einen Faktor  $\Omega_v \tau/4$  größere Dämpfung als im unregulierten Fall (Spalte 4).

## 5.2 Dämpfung und Regelung

Wir hatten im letzten Abschnitt gesehen, daß man die durch die elektromechanische Kopplung bewirkte Instabilität nicht nur beseitigen kann, sondern bei geeigneter Wahl der Parameter der Phasenregelung sogar die Kopplung dazu verwenden kann, mecha-



nische Eigenschwingungen zu bedämpfen. Diese Eigenschwingungen können dadurch entstehen, daß stoßartige oder resonante Kräfte auf die Wände des Resonators einwirken. Die Kräfte werden von Erschütterungen des Bodens verursacht, die über die Aufhängung übertragen werden, oder sind auf direkte akustische Einwirkung zurückzuführen.

Sobald diese externen Kräfte Arbeit gegen die elektromagnetischen Kräfte leisten, wird eine Eigenfrequenzänderung des Resonators bewirkt. Das bedeutet, wenn die externen Kräfte Auslenkungen des Resonators an solchen Stellen verursachen, an denen es weder elektrisches noch magnetisches Feld gibt, können im Sinne der Slater-Formel (2.1.8) auch keine Eigenfrequenzstörungen auftreten.

Im Gegensatz zu den in Abschnitt 2.1 beschriebenen Eigenfrequenzänderungen durch die ponderomotorischen Kräfte, die immer nur die Eigenfrequenz erniedrigen konnten, wenn die Kräfte vergrößert wurden, gilt dies für die externen Kräfte nicht mehr. Aus der Gleichung (2.1.8) können wir ablesen, daß sich die Eigenfrequenz des Resonators erhöht, wenn von außen an Stellen mit dominantem Magnetfeld gedrückt wird ( $\Delta V < 0$ ) oder an Stellen mit dominantem elektrischen Feld gezogen wird ( $\Delta V > 0$ ), weil sich dadurch nämlich die gespeicherte Energie erhöht.

Wenn wir entsprechend (2.1.12) die räumlich verteilten externen Kräfte  $\delta K_{ex}(\vec{r}, t)$  nach den mechanischen Eigenfunktionen  $\phi_{\mu}(\vec{r})$  entwickeln, erhalten wir analog dem Vorgehen in Abschnitt 2.1 sowie der Gleichung (2.3.2) mit der mechanischen Übertragungsfunktion  $G_{\mu}(s)$  aus Gleichung (3.1.5) im Bildbereich:

$$\tau \delta \omega_{ex}(s) = \delta K_{ex}(s) \sum_{\mu} h_{\mu} G_{\mu}(s) \quad (5.2.1)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $h_{\mu}$  sind nicht unbedingt alle negativ, wie im Falle der Eigenfrequenzänderung durch die ponderomotorischen Kräfte.

Wir wollen nun das Zusammenwirken von internen und externen Frequenzänderungen etwas genauer betrachten, nicht zuletzt, um auch die Ausführungen des letzten Abschnitts besser zu verstehen. Dazu brauchen wir die Gleichung (5.1.8) nur um die eben angegebenen extern verursachten Frequenzstörungen zu erweitern:

$$\delta\omega' = \sum_{\mu} \delta\omega_{\mu} + \delta\omega_{\text{ex}} - \delta\omega_{\text{steuer}} \quad (5.2.2)$$

$\delta\omega'$  ist die Frequenzdifferenz zwischen Eigenfrequenz des Resonators und der Generatorfrequenz;  $\sum \delta\omega_{\mu}$  ist der totale Eigenfrequenzänderungsbeitrag der ponderomotorischen Kräfte,  $\delta\omega_{\text{ex}}$  derjenige der externen Kräfte und  $\delta\omega_{\text{steuer}}$  der Beitrag des Frequenzstellgliedes, das von der Phasenregelschleife angesteuert wird.

Die Frequenzstörungen bewirken Phasen- und Amplitudenstörungen der Resonatorspannung, die jeweils über die Phasenregelschleife bzw. über die elektromagnetische Kopplung zu Rückwirkungen auf die Frequenz führen. Das vollständige Wirkungsschema ist im Blockschaltbild 5.3.a zusammengefaßt.

Die tatsächlich in Erscheinung tretenden mechanischen Deformationen  $\delta\omega_{\text{mech}}$  sind infolge der Rückwirkung über die ponderomotorischen Kräfte bereits um einen Faktor  $1+F_0(j\Omega)$  gegenüber dem Falle ohne Rückwirkung verringert.

Der schließlich auftretende Phasenfehler  $\delta\phi'$ , der sich im Falle eines Beschleunigerresonators direkt in einem Energiefehler der beschleunigten Partikel bemerkbar macht, ist proportional der Frequenzdifferenz  $\delta\omega'$  zwischen Generator- und Eigenfrequenz, die in Gegenwart der Phasenregelung um einen weiteren Faktor  $(1+F_{\phi}(j\Omega)G_{\phi}(j\Omega))$  kleiner als  $\delta\omega_{\text{mech}}$  ist.

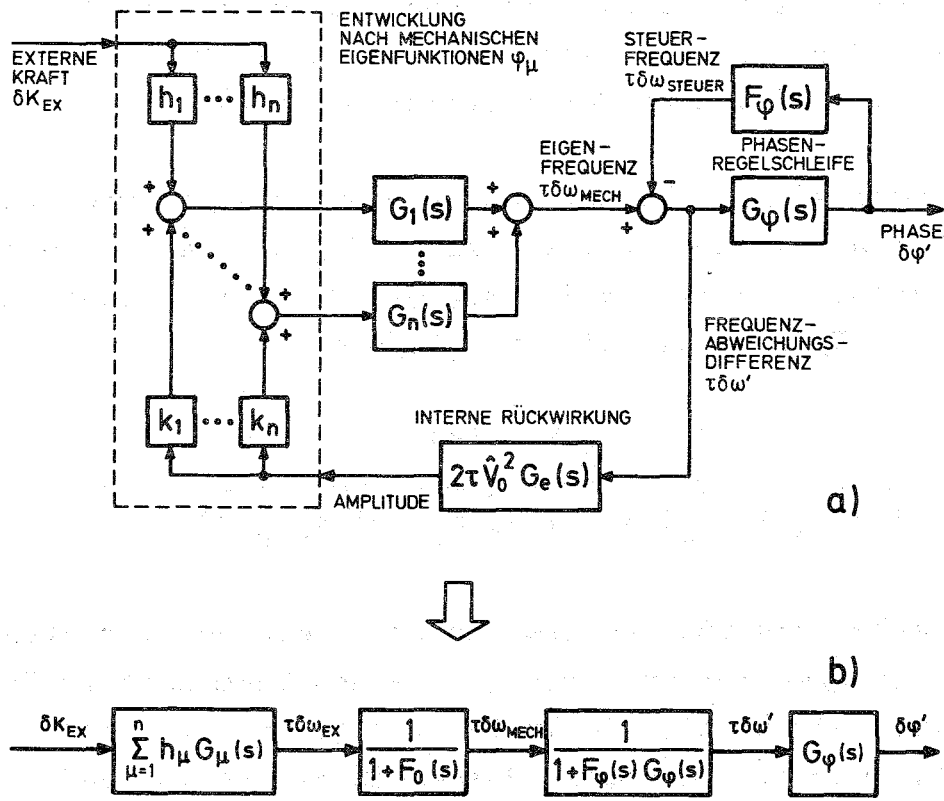


Bild 5.3: Blockschaltbild des Resonators mit ponderomotorischer Rückwirkung und Phasenregelschleife

Im Bild 5.3.b ist die Wirkungskette von den äußeren Kräften  $\delta K_{EX}$  bis zur Phasenstörung  $\delta \phi'$  noch einmal zusammengefaßt. Diese Kette ist völlig äquivalent dem Bild 5.3.a, wenn wir noch den offenen Verstärkungsfaktor  $F_0$  des inneren Rückwirkungskreises nach Gleichung (5.1.11) berücksichtigen.  $F_0(j\Omega)$  selbst hängt noch von  $F_\phi(j\Omega)$  ab; und zwar wird  $F_0(j\Omega)$  umso kleiner, je größer  $F_\phi(j\Omega)$  wird. Das bedeutet qualitativ: der Dämpfungseffekt wird umso geringer je größer die Regelverstärkung im Phasenregelkreis ist. Das war ein Ergebnis der Betrachtungen des letzten Abschnitts. An Bild 5.3.a läßt sich diese Feststellung anschaulich begründen: die Verbindung zwischen  $\delta \omega_{mech}$  und  $\delta \omega'$  ist bei großer Regelverstärkung praktisch offen; anders ausgedrückt: trotz großer mechanischer Deforma-

tionen  $\propto \delta \omega_{\text{mech}}$  treten nur kleine Amplitudenänderungen  $\delta \hat{V}$  auf, weswegen der innere Rückwirkungsmechanismus wirkungslos ist. Obwohl der Dämpfungsmechanismus nicht mehr wirkt, ist der Phasenfehler  $\delta \phi'$  bei großer Regelverstärkung klein.

Das wird noch einmal klarer, wenn wir uns die gesamte Übertragungsfunktion von der externen Kraft  $\delta K_{\text{ex}}$  auf den Phasenfehler  $\delta \phi'$  anschauen. Nach Bild 5.3.b mit der Definitionsgleichung (5.1.11) für  $F_o$  erhalten wir im Bildbereich:

$$\frac{\delta \phi'(s)}{\delta K_{\text{ex}}(s)} = \frac{G_\phi(s) \sum_{\mu} h_{\mu} G_{\mu}(s)}{1 + F_{\phi}(s) G_{\phi}(s) - 2\tau \hat{V}_o^2 G_e(s) \sum_{\mu} k_{\mu} G_{\mu}(s)} \quad (5.2.3)$$

Bei der Bekämpfung von schockartig oder resonant erregten Eigenschwingungen konkurrieren die beiden Summanden im Nenner von (5.2.3), wobei, wie im letzten Abschnitt ausführlich dargestellt wurde, die beiden Phasenwinkel  $\arg F_{\phi} G_{\phi}$  und  $\arg G_e \sum_{\mu} G_{\mu}$  eine wesentliche Rolle spielen.

Welchem der beiden Effekte, nämlich entweder Dämpfung oder Regelung, in der Praxis der Vorzug zu geben ist, läßt sich sehr einfach beantworten. Sind bei optimaler Dämpfungseinstellung der Regelparameter nach Tabelle 5.1 die noch verbleibenden Phasenstörungen  $\delta \phi'$  für den Beschleunigerbetrieb des Resonators unakzeptabel groß, muß zwangsläufig die Regelverstärkung für die entsprechenden Störfrequenzen erhöht werden. Damit wird der Dämpfungsmechanismus tendenziell unwirksam. Wenn keine anderen Gründe, etwa die zu Beginn des Abschnitts 3.6 genannten, dagegen sprechen, kann man den Resonator dann auch wieder in der Gegend der Resonanz ( $\gamma \approx 0$ ) betreiben.

Zusammenfassend kann man den Unterschied in der Wirkungsweise von Resonanzdämpfung und Regelung auf folgende Weise beschreiben: Die Phasenregelung wirkt im gesamten Signalfrequenzbereich

von Null bis zur sogenannten Durchtrittsfrequenz, das ist die Frequenz, bei der die Kreisverstärkung auf eins abgesunken ist, wie eine starke Gegenkopplung; der "Dämpfungsregelkreis" dagegen wird gerade so eingestellt, daß der Kreis nur für die jeweiligen mechanischen Eigenfrequenzen eine effektive Gegenkopplung darstellt, während für Frequenzen weit außerhalb der Resonanzfrequenz die Kreisverstärkung kleiner als ein sein muß, d.h. unwirksam sein muß, damit die durch die großen Phasendrehungen des mechanischen Schwingungsgliedes bedingte Mitkopplung keine Instabilität des Kreises verursachen kann.

Anstelle der elektromagnetischen Kräfte können unter den oben genannten Voraussetzungen auch andere auf die Wände des Resonators einwirkende, steuerbare Kräfte verwendet werden. Die Wirksamkeit des Dämpfungseffektes würde in diesem Fall nicht mehr von den Resonatorgrößen:  $y$ -Arbeitspunkt,  $\hat{V}_0$ -Resonatorspannung sowie  $k_\mu$ -Kopplungsfaktoren abhängen, sondern lediglich von den Kenngrößen der äußeren Rückwirkungsschleife.

Wesentliche Anforderungen an diese Kenngrößen sind dabei:

- I. Der Steuerhub des Stellmechanismus muß genügend groß sein, d.h. der Krafthub  $|\delta K_{\text{steuer}}|$  muß größer als der Betrag der externen Störkräfte  $|\delta K_{\text{ex}}|$  sein.
- II. Der Stellmechanismus muß genügend schnell sein, d.h. das Kraftstellglied soll im Bereich der mechanischen Eigenfrequenzen des Resonators möglichst Proportionalverhalten haben.
- III. Die elektromechanischen Kopplungskoeffizienten  $g_\mu$  der wesentlichen mechanischen Eigenschwingungen müssen alle gleiches Vorzeichen haben.

Die ersten beiden Forderungen sind ziemlich durchsichtig; die dritte Forderung muß näher erläutert werden. Unter den Kopplungskoeffizienten wird auch hier wieder wie bei der entsprechenden Entwicklung der externen Störkräfte nach Gleichung (5.2.1) der Übertragungskoeffizient von der i.a. räumlich verteilt wirkenden Steuerkraft  $\delta K_{\text{steuer}}$  auf die Frequenzverschie-

bungsbeiträge der einzelnen mechanischen Eigenschwingungen:

$$\tau \delta \omega_{\text{steuer}}(s) = \delta K_{\text{steuer}}(s) \sum_{\mu} g_{\mu} G_{\mu}(s) \quad (5.2.4)$$

verstanden. Im Gegensatz zu den Kopplungskoeffizienten  $k_{\mu}$  der ponderomotorischen Kräfte, die grundsätzlich alle größer oder gleich Null waren, können hier die Koeffizienten genauso wie die Koeffizienten der externen Störkräfte  $h_{\mu}$  verschiedenes Vorzeichen haben. Das bedeutet aber, bei annähernd gleich großen Beträgen zweier Kopplungskoeffizienten mit verschiedenen Vorzeichen würde jeweils die eine Eigenschwingung entdämpft werden, wenn die andere gedämpft werden soll. Wie auch immer man die Rückkopplungsbedingungen wählt, das System wäre grundsätzlich instabil.

Im Bild 5.4 ist die dynamische Situation dargestellt.

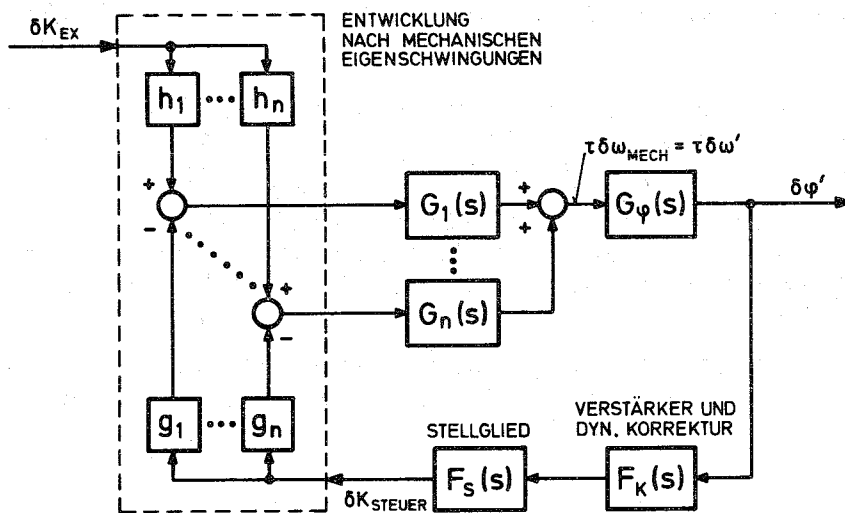


Bild 5.4: Resonanzdämpfung mit äußerer Rückführung.

Die effektiv in Erscheinung tretende Frequenzstörung  $\delta \omega_{\text{mech}}$ , die in diesem Falle mit der Regelabweichung  $\delta \omega'$  identisch ist, ist gegeben durch:

$$\delta\omega' = \delta\omega_{\text{mech}} = \delta\omega_{\text{ex}} - \delta\omega_{\text{steuer}} \quad (5.2.5)$$

Die Frequenzstörung  $\delta\omega'$  wird über eine Phasenmessung mit der früher schon verwendeten Meßübertragungsfunktion  $G_\phi(s)$  nach Gleichung (5.1.3) ermittelt und über einen Verstärker und eine dynamische Korrektur mit der Übertragungsfunktion  $F_k(s)$  in ein Signal umgewandelt, das über ein Stellglied mit der Übertragungsfunktion  $F_s(s)$  eine Steuerkraft  $\delta K_{\text{steuer}}$  erzeugt, die der Störkraft  $\delta K_{\text{ex}}$  entgegenwirkt.

Die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Kreises ist damit:

$$F_o(s) = G_\phi(s)F_k(s)F_s(s) \sum_{\mu} g_\mu G_\mu(s) \quad (5.2.6)$$

Unter der Voraussetzung (ähnlich der bereits im Abschnitt 3.6 bei der Diskussion des ponderomotorischen Dämpfungsmechanismus angegebenen), daß die Meß-Korrektur- und Stellübertragungsfunktion breitbandig gegenüber den mechanischen Schwingungsgliedern sind, ist auch hier die effektive mechanische Dämpfung für den mechanischen Mode  $v$  (vgl. Gleichung (3.6.12)):

$$\left(\frac{1}{\tau_v}\right)_{\text{eff}} = \frac{1}{\tau_v} (1 + \text{Re}F_o(j\Omega_v)) \quad (5.2.7)$$

Wenn wir zunächst einmal unterstellen, daß die statischen Verstärkungsfaktoren des Korrektur- und des Steuergliedes größer Null und alle Koppelfaktoren kleiner Null sind, dann lautet die monotone Stabilitätsbedingung  $F_o(o) > -1$  hier:

$$F_k(o) F_s(o) \frac{\sum |g_\mu|}{1+y^2} < 1 \quad (5.2.8)$$

Bei großer Verstärkung  $F_k(o)$  kann diese Bedingung verletzt werden, d.h. die Steuerkraft ist der elastischen Rückstell-

kraft entgegengesetzt gerichtet und dem Betrage nach größer als diese, was eine ständige Vergrößerung einer einmal vorhandenen Auslenkung bewirkt. Die Bewegung kommt in Wirklichkeit aufgrund von Nichtlinearitäten zur Ruhe. Das kann dadurch geschehen, daß die Steuerkraft eine mit der Auslenkung degressive Kennlinie hat oder daß die elastische Rückstellkraft eine progressive Kennlinie hat bzw. dadurch, daß der Stellhub begrenzt ist.

Um optimale Resonanzdämpfung zu bekommen, verfahren wir genauso wie im Abschnitt 3.6 für das System mit innerer Rückführung über die ponderomotorischen Kräfte. Während dort die optimale Phasenbedingung nur durch Auswahl der Flanke ( $y < 0$ ) und der günstigsten Abklingzeit  $\tau$  des Resonators erhalten werden konnte, kann man hier bei beliebiger Abklingzeit  $\tau$  und beliebigem  $y$  das Korrekturglied mit der Übertragungsfunktion  $F_k(s)$  zur Optimierung heranziehen. Unter der Voraussetzung, daß  $F_s(s)$  und  $F_k(s)$  im Bereich der mechanischen Eigenfrequenzen durch einfache Tiefpässe approximiert werden können, lassen sich zwei einfache Einstellregeln für optimale Resonanzdämpfung einer Eigenschwingung der Frequenz  $\Omega_v$  angeben:

- I. Die statische Verstärkung des Korrekturgliedes  $F_k(0)$  wird so groß gewählt, daß die monotone Stabilitätsbedingung (5.2.8) noch nicht verletzt ist. Das Vorzeichen ist dabei so zu wählen, daß die Rückführung statisch als Mitkopplung wirkt!
- II. Die Zeitkonstanten des Korrekturgliedes werden so gewählt, daß die Phasenverschiebung im gesamten "elektrischen" Teil der offenen Kette nach Bild 5.4 für die zu bedämpfende Eigenschwingung gerade  $-90^\circ$  beträgt:

$$\arg(F_k(j\Omega_v)F_s(j\Omega_v)G_\phi(j\Omega_v)) \stackrel{!}{=} -\frac{\pi}{2} \quad (5.2.9)$$

Weil die Phasenverschiebung im "mechanischen" Teil der offenen Kette ebenfalls  $-90^\circ$  ist ( $\arg G_v(j\Omega_v) = -\frac{\pi}{2}$ ), wirkt die Rückführung wegen I und II für ein Signal der Frequenz  $\Omega_v$



wie eine Gegenkopplung. Wenn das Band der beteiligten mechanischen Eigenschwingungen nicht allzu breit ist, wird die Einstellung (5.2.9) auch noch genügende Dämpfung für benachbarte Eigenfrequenzen liefern.

Bei den Ausführungen ganz zu Anfang ab Gleichung (5.2.8) hatten wir die am Anfang dieses Abschnittes aufgestellte Forderung III, nämlich alle  $g_{\mu} > 0$ , als erfüllt angesehen. Nun ist sofort klar, wenn nur einer der Koeffizienten, z.B.  $g_{\lambda} > 0$  ist, wirkt die Rückführung nach Bild 5.4 für die Frequenz  $\Omega_{\lambda}$  wie eine Mitkopplung. Die Schaltung wird damit zum Oszillator, wenn  $|g_{\lambda}|$  genügend groß oder genauer wenn nach Gleichung (5.2.7)  $(\tau_{\lambda})_{\text{eff}} < 0$  wird.

Ob bei gegebener Resonatorgeometrie erreicht werden kann, daß alle Koeffizienten  $g_{\mu} > 0$  werden, muß im Einzelfall durch Variation der Steuerkraftverteilung  $\delta K_{\text{steuer}}(\vec{r})$  geprüft werden.

### 5.3 Amplitudenregelung und Amplitudensteuerung

In den letzten beiden Abschnitten hatten wir gesehen, wie das elektromechanisch gekoppelte System durch direkte oder indirekte Frequenzsteuerung beeinflusst werden konnte. Da es sich bei der Rückwirkung um eine Amplituden-Frequenz-Kopplung handelt, sollte man annehmen, daß auch eine geeignete Steuerung der Generatorspannung ähnlich wie die Frequenzsteuerung wirkt.

Zunächst müssen jetzt zwei neue Übertragungsfunktionen für das linearisierte System abgeleitet werden, nämlich die Übertragungsfunktionen von einer Generatoramplitudenvariation auf die Resonatoramplitudenvariation und die Resonatorphasenvariation. Dazu gehen wir wieder von der komplexen Näherungsdifferentialgleichung (3.4.3) im Bildbereich aus:

$$(1 + \tau s + iy) V = V_g \quad (5.3.1)$$

Für kleine Abweichungen um den Sollzustand  $(1+iy) V_0 = V_g$  erhält man:

$$(1 + \tau s + iy) \delta V + i\delta y V_0 = \delta V_g \quad (5.3.2)$$

Bei konstanter Generatorphase = Bezugsphase gilt, wie auch in den Abschnitten 3.1 und 5.1:

$$\frac{\delta V}{V_0} = \frac{\delta |V|}{|V_0|} + i\delta\phi \stackrel{!}{=} \delta v + i\delta\phi \quad (5.3.3)$$

wobei  $\delta\phi$  eine kleine Abweichung von der Sollphasenverschiebung zwischen Resonatorspannung  $V$  und Generatorspannung  $V_g$  ist. Für die relative Resonatoramplitudenänderung wurde die Abkürzung  $\delta v = \delta |V| / |V_0|$  eingeführt. Entsprechend soll für die relative Generatoramplitudenänderung

$$\delta v_g = \delta |V_g| / |V_g| \quad (5.3.4)$$

eingeführt werden.

Wenn man berücksichtigt, daß  $\delta y = -\tau\delta\omega$  ist, wobei  $\delta\omega$  eine Eigenfrequenzabweichung bedeutet, erhält man aus (5.3.2):

$$(1 + \tau s + iy) (\delta v + i\delta\phi) = (1+iy) \delta v_g + i\tau\delta\omega \quad (5.3.5)$$

in  
Mit der/Gleichung (3.1.4) definierten Übertragungsfunktion für die komplexe Amplitude  $G_0(s)$  läßt sich die Lösung im Bildbereich anschreiben:

$$\delta v + i\delta\phi = (1+iy) G_0(s) \delta v_g + iG_0(s)\tau\delta\omega \quad (5.3.6)$$

Nach Real- und Imaginärteilbildung, die sich nur auf  $i$  bezieht ( $\rightarrow$  Trägerphase!), erhält man die beiden reellen Gleichungen:

$$\delta v = G_a(s) \delta v_g - G_e(s)\tau\delta\omega \quad (5.3.7)$$

$$\delta\phi = G_{a\phi}(s)\delta v_g + G_{\phi}(s)\tau\delta\omega \quad (5.3.8)$$

Dabei wurden die bereits früher definierten Übertragungsfunktion  $G_e(s) = \text{Im}G_o$  (Gleichung (3.1.10) bzw. 3.6.2, 3)) sowie  $G_{\phi}(s) = \text{Re}G_o^i$  (Gleichung (5.1.3) bzw. (5.1.4, 5)) benutzt.

Mit  $G_a(s)$  wollen wir im folgenden die Übertragungsfunktion von der Generatoramplitudenänderung auf die Resonatoramplitudenänderung bezeichnen und mit  $G_{a\phi}(s)$  die Übertragungsfunktion von der Generatoramplitudenänderung auf die Resonatorphasenänderung.

Aufgrund der Eigenschaften von (5.3.6) lassen sich die beiden neuen Übertragungsfunktionen durch die bereits bekannten ausdrücken:

$$G_a(s) = G_{\phi}(s) - yG_e(s) \approx \frac{1+\tau s+y^2}{(1+\tau s)^2 + y^2} \quad (5.3.9)$$

$$G_{a\phi}(s) = G_e(s) + yG_{\phi}(s) \approx \frac{y\tau s}{(1+\tau s)^2 + y^2} \quad (5.3.10)$$

Als erstes soll der Einfluß einer Amplitudenregelschleife auf die elektromechanische Kopplung untersucht werden.

Das Verhalten aller realen Bauelemente in der Rückkoppelschleife von der Resonatoramplitudenmessung bis zur Generatoramplitudensteuerung soll ähnlich wie bei der Phasenregelschleife in der Übertragungsfunktion  $F_a(s)$  zusammengefaßt werden. Wegen  $G_a(o) = 1$  ist  $F_a(o)$  identisch mit der statischen Regelverstärkung des aufgeschnittenen Amplitudenregelkreises, wenn man eine proportional wirkende Regelung unterstellt. Die Kennlinien für die Resonatoramplitudenmessung (i.a. mit einer Diode) und für die Generatoramplitudensteuerung (i.a. durch PIN-Dioden oder Modulation der Senderöhre) sind im allgemeinen nichtlinear. Bei kleinen Auslenkungen um einen Sollwert können wir uns auf die linearen Terme der Taylorreihenentwicklung der Kennlinien beschrän-

ken.  $F_a(o)$  ist dann proportional dem Produkt der Empfindlichkeiten der Meß- und der Steuerkennlinie. Die Übertragungsgleichung für die Amplitudenschleife lautet:

$$\delta v_g = - F_a(s) \delta v \quad (5.3.11)$$

Das negative Vorzeichen entsteht beim Sollwertvergleich, wobei  $F_a(o) > 0$  gewählt wurde.

Der Übersichtlichkeit halber soll die "mechanische" Übertragungsgleichung mit  $\tau \delta \omega \stackrel{!}{=} - G_m(s) \delta v$  abgekürzt werden. Daraus folgt die "mechanische" Übertragungsfunktion:

$$G_m(s) \stackrel{!}{=} 2\tau \hat{V}_o^2 \sum_{\mu} k_{\mu} G_{\mu}(s) \quad (5.3.12)$$

In Bild 5.5 a) ist ein Blockschaltbild der Amplitudenregelung gezeichnet, wobei nur die vom Sollwert (hier formal 0) abweichenden Größen berücksichtigt wurden. Zum Vergleich ist in Bild 5.5 b) noch einmal die Phasenregelung ohne externe Störungen (vgl. Bild 5.3. a)) dargestellt.

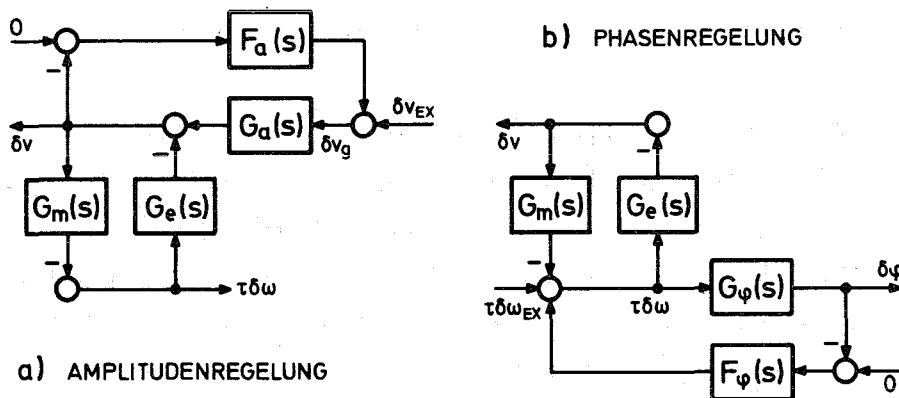


Bild 5.5.: a) Amplitudenregelung und  
b) Phasenregelung mit elektromechanischer Rückwirkung.

Auch hier wieder ist  $F_a(s)$  nicht beliebig wählbar. Die Verstärkung  $F_a(o)$  und die dynamische Korrektur müssen so gewählt werden, daß der Amplitudenregelkreis selbst stabil ist.

Die Übertragungsfunktion der offenen Schleife nach Bild 5.5. a) ist:

$$F_o(s) = - \frac{G_m(s)G_e(s)}{1+F_a(s)G_a(s)} \quad (5.3.13)$$

wobei vor oder hinter  $G_m$  aufzuschneiden ist.

Für den Phasenregelkreis galt zum Vergleich (siehe Gleichung (5.1.11)):

$$F_o(s) = - \frac{G_m(s)G_e(s)}{1+F_\phi(s)G_\phi(s)} \quad (5.3.14)$$

Die Ergebnisse des gesamten Abschnitts 5.1, in dem die Wirkung einer Phasenregelschleife auf die betrachtete Instabilität beschrieben wurde, insbesondere auch die Ausführungen über das Dämpfungsverhalten, gelten aufgrund der Analogie der Gleichungen (5.3.13, 14) mit geringen Modifikationen auch für die Amplitudenregelschleife. Auf eine weitere Erörterung soll deshalb verzichtet werden.

Bei realen Hochfrequenz-bauelementen ist im allgemeinen eine Kopplung zwischen Trägerphase und -amplitude zu beobachten. Bei einer realen Schaltung mit Amplituden- und/oder Phasenregelung spielen deswegen sicherlich solche zusätzlichen Kopplungen eine bedeutsame Rolle. Die Kopplung muß nicht in jedem Falle das Systemverhalten, d.h. im wesentlichen die Stabilität, verschlechtern, sondern kann sich sogar günstig auswirken.

Als Prototyp für eine derartige Kopplung soll im folgenden eine Steuerung der Generatoramplitude  $\delta v_g$  durch die Phase  $\delta\phi$  betrachtet werden. Die Kleinsignal-Übertragungsfunktion sei  $K(s)$ . Die Verbindung zwischen Phase  $\delta\phi$  und Frequenz  $\tau\delta\omega$  wird durch  $G_\phi$  vermittelt. Zusätzlich müssen wir eine Rückkopplung von der Generatoramplitude auf die Phase berücksichtigen, die durch  $G_{a\phi}(s)$  gegeben ist (vgl. die Gleichungen (5.3.7, 9)). Ohne sämtliche Gleichungen sammeln zu müssen, können wir mit diesen Angaben sofort das Strukturbild 5.5 a) erweitern.

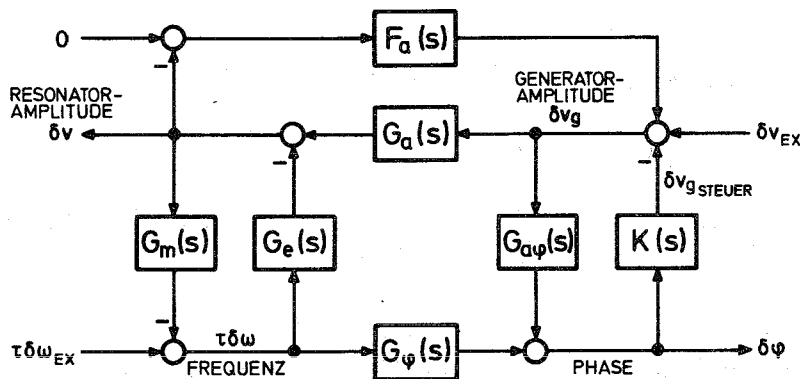


Bild 5.6: Strukturbild mit Amplitudenregelung und Amplitudensteuerung.

Durch Umformung der Gleichungen, die man direkt aus dem Strukturbild ablesen kann, erhält man sehr leicht die Übertragungsfunktion des vor oder hinter  $G_m(s)$  aufgeschnittenen Kreises:

$$F_o(s) = \frac{G_m(s) (y - K(s))}{(1 + \tau s)^2 + y^2 + (1 + \tau s + y^2) F_a(s) + y \tau s K(s)} \quad (5.3.15)$$

Dabei wurden die folgenden Beziehungen, die hier noch einmal zusammengestellt seien, benutzt:

$$\begin{aligned} G_a &= (1 + \tau s + y^2) / N & G_e &= -y / N \\ G_{a\phi} &= y \tau s / N & G_\phi &= (1 + \tau s) / N \\ N &= (1 + \tau s)^2 + y^2 & G_a G_\phi + G_e G_{a\phi} &= 1 / N \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

Aus der Gleichung (5.3.15) läßt sich direkt ein überraschendes Ergebnis ablesen. Wenn

$$K(s) = y \quad (5.3.17)$$

gewählt wird, verschwindet  $F_o(s)$ ; d.h. die elektromechanische Kopplung wird völlig wirkungslos, und zwar unabhängig von dem gewählten Arbeitspunkt  $y$ !

Die Auswahl der Steuerfunktion  $K(s)$  nach (5.3.17) bedeutet, daß man eine verzögerungsfreie Kopplung von der Resonatorphase auf die Generatoramplitude realisieren muß. Das ist natürlich praktisch nicht möglich, es genügt aber, daß die typische Verzögerungszeit  $T$  dieser Steuerschleife klein gegen die Abklingzeit  $\tau$  des Resonators ist. Diese Forderung ist insbesondere für supraleitende Resonatoren beliebig gut erfüllbar.

$1+F_o(s) = 0$  ist die charakteristische Gleichung des Systems, aus deren Eigenschaften auf die Stabilität des Systems geschlossen werden kann. Für  $K(s) = y$  ergibt sich:

$$(1+\tau s+y^2) (1+\tau s + F_a(s)) = 0 \quad (5.3.18)$$

Die Stabilität des Gesamtsystems hängt wie behauptet nicht mehr von der elektromechanischen Rückwirkung, sondern nur noch von den Eigenschaften der Amplitudenregelschleife ab.

Interessanterweise ist das verbleibende Stabilitätsproblem identisch mit dem einer Amplitudenregelung für einen in Resonanz ( $y=0$ ) betriebenen Resonator<sup>32)</sup>.

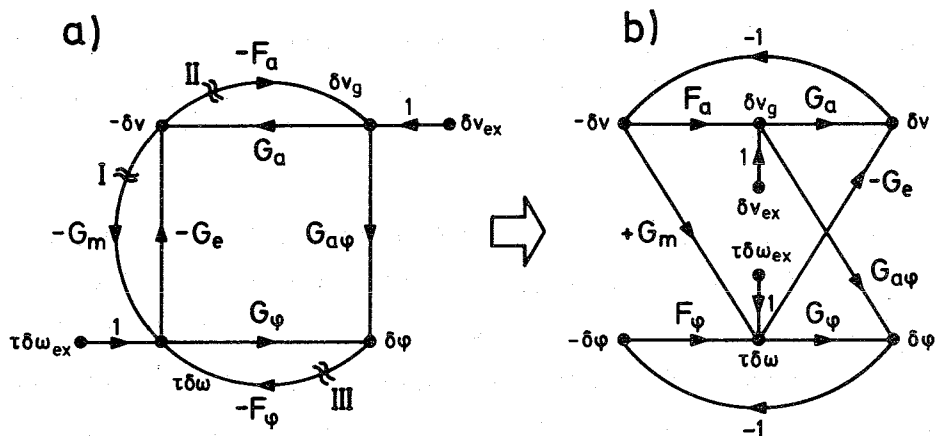
Die zusätzliche Kopplung  $K(s) = y$  kann man als Entkopplung bezeichnen, weil sie die elektrische Rückwirkung für die mechanischen Eigenschwingungen völlig aufhebt, und zwar sowohl in bezug auf die monotone als auch auf die oszillatorische Instabilität. Im folgenden Abschnitt wird dieses Ergebnis noch zu verallgemeinern sein.

### 5.4 Phasen- und Amplitudenregelung

Jede neu hinzukommende Regelschleife macht zunächst einmal das Stabilitätsproblem des Gesamtsystems unübersichtlicher, weil i.a. alle Kreise miteinander verkoppelt sind. Die Phasen- als auch die Amplitudenregelschleife und deren Wirkung auf die mechanische Stabilität des Resonators wurden in den letzten drei Abschnitten bereits einzeln behandelt. Untersuchungen über das Zusammenwirken der beiden Regelschleifen haben nicht etwa akademischen Charakter, wie man vermuten könnte, sondern sind der realen Aufgabenstellung beim Betrieb eines Resonators eher besser angepaßt. Bei Beschleunigerresonatoren gilt es, sowohl die Feldphase gegenüber den Teilchen als auch die Feldamplitude gegen externe Störungen zu verteidigen, da beide Größen den Energiegewinn der Teilchen im Hochfrequenzfeld beeinflussen.

Um die kompliziertere Struktur des Systems ohne Mehraufwand angemessen beschreiben zu können, werden anstelle der bisherigen Übertragungsgleichungen Matrizengleichungen<sup>33)</sup> und anstelle der graphischen Darstellung des Systems durch das Struktur- oder Blockschaltbild Signalflußgraphen<sup>34)</sup> gewählt.

Wenn man zunächst einmal in Bild 5.6 die Amplitudensteuerung über  $K(s)$  wegläßt und entsprechend Bild 5.5. b) die Phasenregelschleife hinzufügt, erhält man den in Bild 5.7 a) dargestellten Signalflußgraphen.



**Bild 5.7:** Signalflußgraphen für den amplituden- und phasengeregelten Resonator mit elektromechanischer Rückkopplung.



Die Umformung des Graphen 5.7 a) in eine für den Regeltechniker gebräuchliche Darstellung ist in 5.7 b) abgebildet.

Um eine saubere Trennung in Regler und Regelstrecke durchzuführen, hätte eigentlich der elektromechanische Rückwirkungs-  
zweig mit dem Gewicht  $G_m(s)$  antiparallel zum Zweig mit  $-G_e(s)$  gezeichnet werden müssen. Die Kopplung über  $G_m(s)$  nimmt aber im Gegensatz zu der Kopplung über  $-G_e(s)$  bzw.  $G_a(s)$  insofern eine Sonderrolle ein, als man nicht hoffen kann, den Einfluß der Kopplung durch Einfügen einer Kompensation völlig zu beseitigen. Das würde nämlich bedeuten, daß eine Parallelschaltung der sehr schmalbandigen mechanischen Filter (vgl. die Definitionsgleichungen (5.3.12) und (3.1.5) für  $G_m(s)$ ) nachgebildet werden müßte, was praktisch nicht möglich ist; allein schon aus Stabilitätsgründen.

Es ist zweckmäßig, diese nicht hebbare Kopplung zu einer jeweils passenden Übertragungsmatrix hinzuzuzählen; diese Matrix wird dann mit einem Strich gekennzeichnet.

In dem Bild 5.7. b) läßt sich  $G_m$  am einfachsten der Reglerdiagonalmatrix  $\underline{R}$  zuordnen:

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} F_a & 0 \\ 0 & F_\phi \end{pmatrix} \rightarrow \underline{R}' = \begin{pmatrix} F_a & 0 \\ G_m & F_\phi \end{pmatrix} \quad (5.4.1)$$

sowohl die Reglermatrix als auch die Regelstreckenmatrix  $\underline{G}$ :

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} G_a & -G_e \\ G_{a\phi} & G_\phi \end{pmatrix} \quad (5.4.2)$$

wurden dabei in der sogenannten P-kanonischen Form dargestellt<sup>35)</sup>, bei der die jeweiligen Ausgänge nur von allen anderen Eingängen abhängen. Das ist die physikalisch anschaulichste Darstellungs-

form; d.h. das sind gerade die Übertragungsfunktionen, die man ohne Kenntnis der inneren Struktur der Strecke aus der Messung des Klemmenverhaltens des Systems synthetisieren würde. Alle 4 Teilfunktionen der Strecke, definiert in (5.3.16), wurden einzeln in den früheren Kapiteln bereits verwendet, weil dort gerade die Wirkung-Ursache-Beziehung zwischen Eingang und Ausgang gebraucht wurde. Die vorliegende Strecke ist, wie später gezeigt wird, geradezu ein Musterbeispiel dafür, daß bei bestimmten Fragestellungen eine andere, die sogenannte V-kanonische Darstellung, zur Beschreibung des Systemverhaltens besser geeignet ist und u.U. Lösungsmöglichkeiten direkt erkennen läßt.

Zur Vervollständigung der Matrizenbeschreibung müssen noch die Spaltenvektoren der Variablen definiert werden.

$$\begin{aligned}
 \text{Regelgröße } \underline{X} &= \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta \phi \end{pmatrix} \\
 \text{Stellgröße } \underline{Y} &= \begin{pmatrix} \delta v_g \\ \tau \delta \omega \end{pmatrix} \\
 \text{Störgröße } \underline{Z} &= \begin{pmatrix} \delta v_{ex} \\ \tau \delta \omega_{ex} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

Mit diesen Festlegungen ergibt sich aus Bild 5.7, das in Bild 5.8 dargestellte Zweifachregelsystem in Matrixdarstellung:

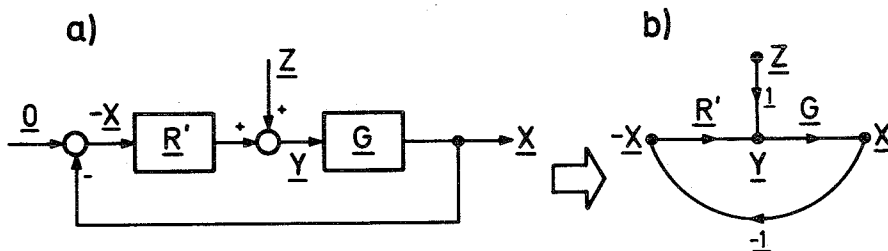


Bild 5.8: Darstellung der gekoppelten Regelkreise als  
a) Matrixblockschaltbild und  
b) Matrix-Signalflußgraph.

Die Matrix-Übertragungsgleichungen des Systems lauten:

$$\underline{X} = \underline{G} \underline{Y} \quad \underline{Y} = - \underline{R}' \underline{X} + \underline{Z} \quad (5.4.4)$$

woraus man durch Einsetzung erhält:

$$(\underline{1} + \underline{G} \underline{R}') \underline{X} = \underline{G} \underline{Z} \quad (5.4.5)$$

Die Stabilität dieses linearen Systems hängt nicht von den Störungen ab. Das System kann für  $\underline{Z} = \underline{0}$  nur nichttriviale Lösungen haben, wenn die Determinante der Matrix auf der linken Seite von (5.4.5) verschwindet:

$$\det (\underline{1} + \underline{G} \underline{R}') \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.4.6)$$

Das ist die Matrixschreibweise für die charakteristische Gleichung des Systems. Man erhält unter Verwendung von (5.4.1, 2) aus (5.4.6):

$$1 + F_a G_a + F_\phi G_\phi + F_a F_\phi \det \underline{G} - G_m G_e = 0 \quad (5.4.7)$$

Neu an dieser charakteristischen Gleichung ist, daß neben der mechanischen Übertragungsfunktion  $G_m$  und den beiden Reglern  $F_a$  und  $F_\phi$  auch noch das Produkt der beiden Reglerübertragungsfunktionen  $F_a \cdot F_\phi$  mit der Determinanten der Strecke  $\underline{G}$  als Gewichtsfaktor auftritt. Diese Determinante tauchte schon im letzten Abschnitt im Zusammenhang mit der Amplitudensteuerung auf (vgl. (5.3.16)):

$$\det \underline{G}(s) = \frac{1}{N(s)} = \frac{1}{(1+rs)^2 + y^2} \quad (5.4.8)$$

Sie ist gleichzeitig die Nennerfunktion aller 4 Teilübertragungsfunktionen der Strecke  $\underline{G}(s)$ .

Es gibt jetzt drei Schleifen, deren Stabilität aus den jeweiligen Übertragungsfunktionen der aufgeschnittenen Kreise er-

mittelt werden kann. Für die Schnittstelle I in Bild 5.7 a) bekommt man:

$$F_o = \frac{-G_m G_e}{1 + F_a G_a + F_\phi G_\phi + F_a F_\phi / N} \quad (5.4.9)$$

Für die Schnittstelle II im Amplitudenregelkreis ergibt sich:

$$F_{oa} = \frac{F_a (G_a + F_\phi / N)}{1 + F_\phi G_\phi - G_m G_e} \quad (5.4.10)$$

und schließlich für die Schnittstelle III im Phasenregelkreis:

$$F_{o\phi} = \frac{F_\phi (G_\phi + F_a / N)}{1 + F_a G_a - G_m G_e} \quad (5.4.11)$$

Die Nullstellen aller drei um Eins vermehrten offenen Schleifenverstärkungen sind selbstverständlich identisch mit denen von (5.4.7), da die Stabilitätsbedingungen des geschlossenen Systems sicherlich von jeder Schleife aus betrachtet gleich sein müssen.

In einer Hinsicht sind die Stabilitätsbetrachtungen dennoch entkoppelt. Die Bandbreiten der beiden Regelschleifen sind bei Verwendung genügend schneller Meß- und Stellglieder (Dioden, Varactordioden, PIN-Dioden) groß gegen die mechanischen Frequenzen; typisch ist ein Unterschied von 3 Dekaden. Der Frequenzgang  $G_m(j\Omega)$  des mechanischen Übertragungsgliedes hat aber eine Amplitudenabsenkung von -40 dB/Dekade. Das bedeutet: in der Gegend der Durchtritts- oder Schnittfrequenz  $\Omega_D$  der jeweiligen Regelschleife, die allein maßgebend für die Stabilität der Schleife ist, kann der Einfluß der elektromechanischen Kopplung vernachlässigt werden. Für die Untersuchung der Regelschleifenstabilität kann daher der Term  $G_m G_e$  im Nenner von (5.4.10) und (5.4.11) gestrichen werden. Unangenehm ist trotzdem noch die gegenseitige Kopplung von Amplituden- und Phasenregler.

Nehmen wir zunächst an, daß die beiden Regler  $F_a$  und  $F_\phi$  so eingestellt worden seien, daß das System für  $G_m = 0$  stabil ist und außerdem genügend Stabilitätsreserve besitzt. Die monotone Stabilitätsbedingung lautet jetzt:

$$F_o(o) = \frac{2y\tau\hat{V}_o^2 \sum_{\mu} k_{\mu}}{(1+F_a(o))(1+y^2+F_\phi(o))} > -1 \quad (5.4.12)$$

In bezug auf die Beseitigung der monotonen Instabilität wirken die beiden Kreise für  $F_{a,\phi}(o) \gg 1$  in Serie; d.h. die Stabilitätsschwellspannung ist proportional dem Produkt der beiden statischen Verstärkungsfaktoren.

Für die oszillatorische Stabilität der mechanischen Eigenschwingung  $v$  bekommt man entsprechend (3.2.3) für den Fall  $|F_{a,\phi}(j\Omega_v)| \gg 1$ :

$$\frac{k_v\tau\hat{V}_o^2 y\Omega_v\tau}{v_a \cdot v_\phi} \left( \frac{1}{v_a} (\Omega_v\tau \cos\sigma_\phi + \sin\sigma_\phi) + \frac{1}{v_\phi} (\Omega_v\tau \cos\sigma_a + \sin\sigma_a) + \sin(\sigma_a + \sigma_\phi) \right) < 1 \quad (5.4.13)$$

wobei  $F_{a,\phi}(j\Omega_v) = v_{a,\phi} \exp(j\sigma_{a,\phi})$  verwendet wurde. Man sieht, daß auch die oszillatorische Instabilität selbst bei kleinen Verstärkungsfaktoren  $v_a, v_\phi$  sehr kräftig unterdrückt wird; und zwar für  $\sigma_a + \sigma_\phi = 90^\circ$  proportional  $v^{-2}$  und für  $\sigma_a + \sigma_\phi = 0^\circ, -180^\circ$  sogar proportional  $v^{-3}$ .

Abgesehen von der für den dynamischen Entwurf unangenehmen Regelschleifenverkopplung erscheint es ungünstig, ein System, wie es eben beschrieben wurde, einzusetzen. Wenn man daran interessiert ist, die elektromechanische Rückwirkung völlig zu beseitigen, scheint ein im folgenden beschriebener Weg attraktiver. Will man andererseits die Dämpfungseigenschaften des elektromagnetischen Feldes benutzen, so ist die durch den Produktterm  $F_a F_\phi$  entstehende große Verstärkung eher hinderlich.

Die Verkopplung der beiden Regelkreise kann durch Einführung geeigneter Entkopplungsnetzwerke aufgehoben werden. Aufgrund der Sonderrolle von  $G_m(s)$  kann es sich bei uns allerdings nur um eine teilweise Entkopplung handeln, weil  $G_m(s)$  praktisch nicht hebbar ist. Wir verfahren daher probeweise so: zuerst wird versucht, das Regelsystem für  $G_m(s) = 0$  vollständig zu entkoppeln und anschließend wird zu dieser Struktur wieder  $G_m(s)$  hinzugefügt.

Unter Entkopplung soll im folgenden verstanden werden, daß die Übertragungsmatrix  $F_o(s)$  des bei der Regelgröße  $X$  aufgeschnittenen Kreises diagonalisiert wird. Die Regelkreise lassen sich dann in bezug auf die Stabilitätsuntersuchung als getrennte Einzelregelkreise behandeln. Dieser Zustand des Mehrfachregelsystems wird auch als Eigenautonomie bezeichnet <sup>33)</sup>. Aus der Eigenautonomie folgt i.a. jedoch nicht Autonomie bezüglich der Störgröße  $Z$ .

in  
Für das/Bild 5.7 b) wiedergegebene System in P-kanonischer Darstellung bietet sich als einfachste Maßnahme das Einfügen eines P-kanonischen Serienkopplers  $\underline{K}$  zwischen Regler  $\underline{R}$  und Strecke  $\underline{G}$  an.

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} 1 & K_{12} \\ K_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.4.14)$$

Die Entkopplungsbedingung lautet:

$$\underline{G} \underline{K} \stackrel{!}{=} \underline{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{pmatrix} \quad (5.4.15)$$

Daraus erhält man die Übertragungsfunktionen der beiden Kopplungsnetzwerke:

$$K_{12}(s) = \frac{G_e(s)}{G_a(s)} = \frac{-y}{1+ts+y^2} \quad (5.4.16)$$

und

$$K_{21}(s) = - \frac{G_{a\phi}(s)}{G_{\phi}(s)} = \frac{-y\tau s}{1+\tau s} \quad (5.4.15)$$

In Bild 5.9. a) ist der zugehörige Signalflußgraph dargestellt; die Entkopplungsbedingungen lassen sich dort direkt ablesen. Im zweiten Schritt fügen wir nun wieder  $G_m(s)$  hinzu: dieses Mal am besten durch Modifikation des Kopplers:

$$\underline{K}' = \begin{pmatrix} 1 & K_{12} \\ K_{21} + G_m / F_a & 1 \end{pmatrix} \quad (5.4.18)$$

Die charakteristische Gleichung des Gesamtsystems ist damit:

$$\det(\underline{1} + \underline{G} \underline{K}' \underline{R}) = 0 \quad (5.4.19)$$

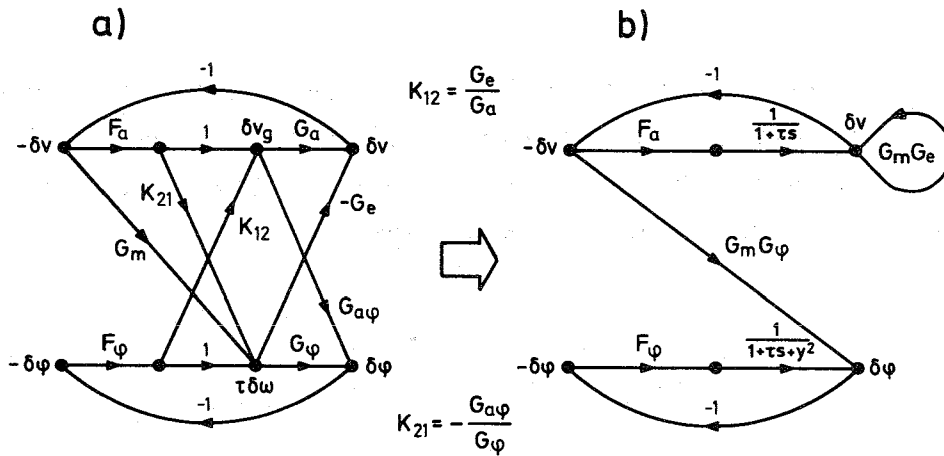
woraus sich durch Umformung ergibt:

$$(1 + \tau s + y^2 F_{\phi}) (1 + \tau s + F_a) + (y - K_{12} F_{\phi}) (G_m + K_{21} F_a - y \tau s) = 0 \quad (5.4.20)$$

Wenn man die beiden Entkopplungsbedingungen (5.4.16, 17) in (5.4.20) einsetzt, ergibt sich schließlich:

$$\left(1 + \frac{F_{\phi}}{1 + \tau s + y^2}\right) \left(1 + \frac{F_a}{1 + \tau s} - G_m G_e\right) = 0 \quad (5.4.21)$$

Die entsprechende Umformung des Signalflußgraphen ist in Bild 5.9 b) festgehalten.



**Bild 5.9:** Signalflußgraph für den Amplituden-Phasenregelkreis mit Serientkoppler a) vor und b) nach der Entkopplung

Sowohl aus der charakteristischen Gleichung (5.4.21) als auch aus dem Signalflußgraphen des teilentkoppelten Systems in Bild 5.9 b) lassen sich folgende drei wichtige Eigenschaften ablesen:

- I. der Phasenregelkreis ist vollständig entkoppelt, er kann also wie eine völlig unabhängige Regelschleife behandelt werden.
- II. der Amplitudenregelkreis enthält keine Elemente des Phasenreglers, sondern nur die mechanische Rückwirkung.
- III. Die Streckenübertragungsfunktionen haben beide nur noch reines Verzögerungsverhalten; d.h. die Übertragungsfunktionen haben nur noch einen Pol, gegenüber vorher einer Nullstelle und einem komplexen Polpaar.



Die Übertragungsfunktion des bei  $G_m$  aufgeschnittenen Kreises läßt sich aus (5.4.21) direkt ablesen.

$$F_o(s) = - \frac{G_m(s)G_e(s)}{1+F_a(s)/(1+\tau s)} \quad (5.4.22)$$

Aufgrund der Ähnlichkeit dieser Übertragungsfunktion zu denen für einen einzelnen Amplituden- oder Phasenregelkreis (vgl. (5.3.13, 14) können wir auch ähnliche Ergebnisse für das Dämpfungsverhalten erwarten; auf eine weitere Diskussion kann daher verzichtet werden. Die Realisierung der Koppelnetzwerke ist außerordentlich einfach, wie Bild 5.10 zeigt.

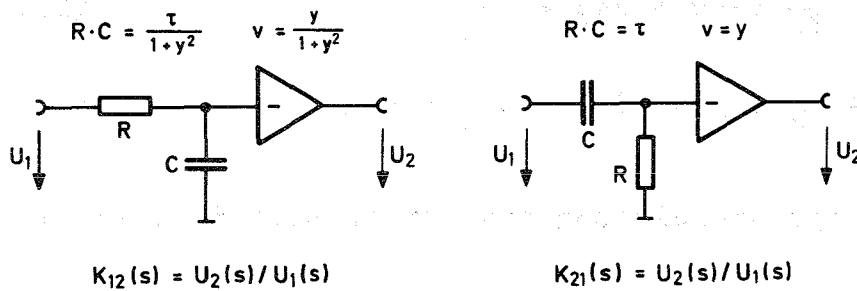


Bild 5.10: Realisierung für die Koppelnetzwerke

Bei dem Koppelnetzwerk  $K_{12}$  von der Phase auf die Amplitude handelt es sich um ein einfaches Verzögerungsglied erster Ordnung (lag filter) und bei dem Koppelnetzwerk  $K_{21}$  von der Amplitude auf die Phase um ein Differenzierglied (lead filter).

Wenn ein Betrieb des Resonators auf der Flanke  $y \neq 0$  notwendig ist, erhöht einerseits das vorgeschlagene Entkoppelungsnetzwerk die Übersichtlichkeit des Stabilitätsentwurfes und erlaubt andererseits mittels der Amplitudenschleife in der hinlänglich beschriebenen Weise mechanische Vibrationen zu dämpfen.

Eine zweite Möglichkeit der Entkopplung kann man direkt aus der charakteristischen Gleichung (5.4.20) ablesen. Für  $K_{12}F_\phi = y$  verschwindet der ganze zweite Term und die Stabilität des Gesamtsystems hängt überhaupt nicht mehr von den mechanischen Eigenschaften ab. Um diesen Effekt besser zu verstehen, ist es zweckmäßig, sich die Regelstreckenmatrix  $G$  noch einmal genauer anzusehen.

Dazu gehen wir zurück zu der linearisierten Näherungsdifferentialgleichung der Regelstrecke in (5.3.4). Wenn man die Aufgabe hätte, die Differentialgleichung als Analogrechen-schaltung aufzubauen, würde man am einfachsten in folgender Weise auflösen:

$$\delta v = \frac{1}{\tau s} (-\delta v + y\delta\phi + \delta v_g) \quad (5.4.23)$$

$$\delta\phi = \frac{1}{\tau s} (-y\delta v - \delta\phi + y\delta v_g + \tau\delta\omega)$$

Der zugehörige Signalflußgraph ist in Bild 5.11 a) gezeichnet.

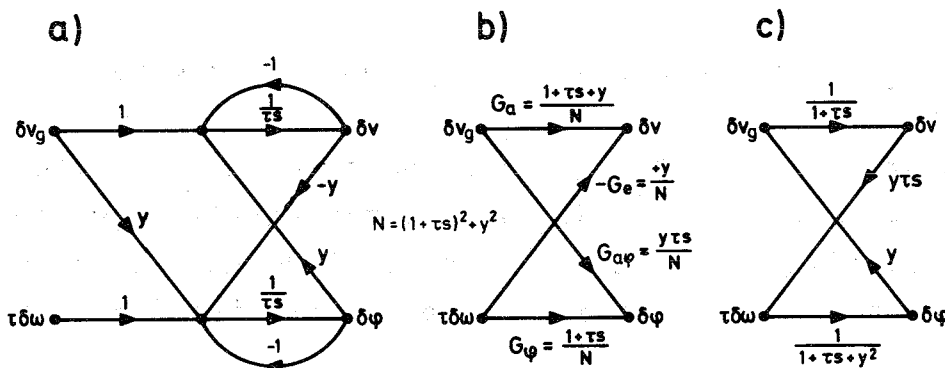


Bild 5.11: Verschiedene Signalflußgraphen für die Regelstrecke  $G(s)$  ohne elektromechanische Rückwirkung.

Bis auf eine Vorwärtskopplung am Eingang sind alle Kopplungen von den Ausgängen auf die Eingänge gerichtet, gerade im Gegensatz zu der in Bild 5.11 b) noch einmal wiedergegebenen P-kanonischen Struktur. Das ist der Grund dafür, daß die sogenannte V-kanonische Struktur, bei der jeder Ausgang Kopplungen zu allen anderen Eingängen hat, bei der vorliegenden Strecke zu wesentlich einfacheren Übertragungsfunktionen führt. Die sich ergebende V-kanonische Struktur der Strecke ist im Bild 5.11 c) dargestellt. Der Vorwärtszweig wird durch eine Diagonalmatrix  $\underline{H}$ :

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\tau s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\tau s+y^2} \end{pmatrix} \quad (5.4.24)$$

gebildet und der Rückwärtszweig durch eine Matrix  $\underline{Q}$ , deren Diagonalelemente Null sind:

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ y\tau s & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4.25)$$

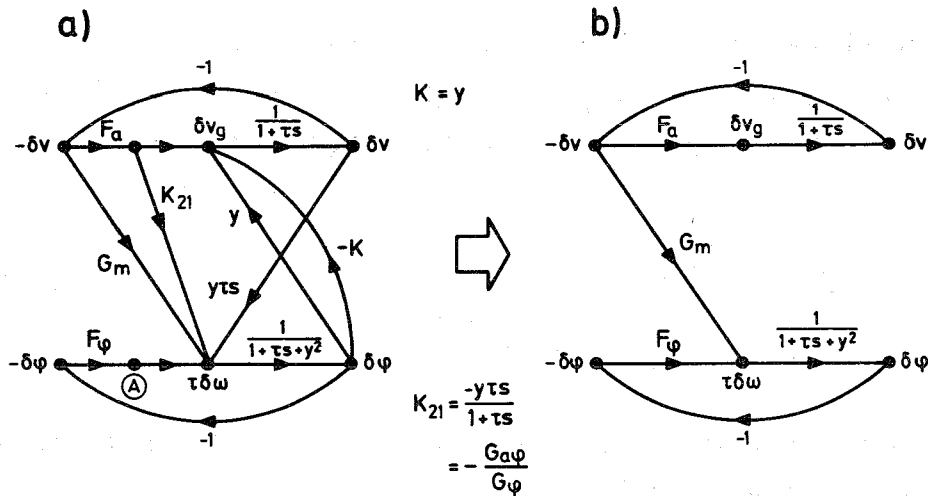
Der mathematische Zusammenhang mit der P-kanonischen Struktur ist gegeben durch:

$$\underline{G} = (\underline{1} - \underline{H} \underline{Q})^{-1} \underline{H} \quad (5.4.26)$$

Es ist natürlich kein Zufall, daß die Diagonalelemente der Matrix  $\underline{H}$  gerade identisch mit den jeweiligen Streckenübertragungsfunktionen nach erfolgter Entkopplung sind (vgl. Bild 5.9. b)).

Wenn man zu  $\underline{Q}$  eine Koppelmatrix parallel schaltet, die gerade die Rückkopplung  $Q_{12} = y$  von der Phase  $\delta\phi$  auf die Generatoramplitude  $\delta v_g$  aufhebt, kann ein Störsignal, das aus der Amplitudenschleife kommend den Zweig  $G_m$  passiert und so in die Phasenschleife gelangt, auf keinem Wege wieder zurück in die Amplitudenschleife kommen. Das bedeutet aber: die elektrome-

chanische Rückkopplung ist völlig unterbrochen, gerade so, als ob der Resonator in Resonanz bei  $y = 0$  betrieben würde. In Bild 5.12 a) ist diese Situation mit einem Signalflußgraphen illustriert.



**Bild 5.12:** Signalflußgraph für das Amplituden-Phasenregelsystem mit Rückwärtsentkopplung  
 a) vor und b) nach der Entkopplung

Die Änderung gegenüber Bild 5.9 a) besteht lediglich darin, daß der Koppelzweig  $K_{12}$  vom Punkte A zunächst auf  $-\delta\phi$  zurückverlegt wurde und anschließend unter Vorzeichenwechsel auf  $+\delta\phi$  geschwenkt und gesetzt wurde:

$$K(s) \stackrel{!}{=} F_\phi(s) K_{12}(s) \quad (5.4.27)$$

Für  $K(s) = y$  ergibt sich die oben beschriebene zweite Form der Entkopplung, die zu dem Signalflußgraphen in Bild 5.12 b) führt. Die charakteristische Gleichung zerfällt ebenso wie bei der ersten Methode in zwei unabhängige Teile (vgl. (5.4.20)):

$$(1+\tau s+y^2+F_\phi) (1+\tau s+F_a) = 0 \quad (5.4.28)$$

Diese zweite Entkopplungsmöglichkeit ist identisch mit der bereits im Abschnitt 5.3 im Zusammenhang mit einer Amplitudenregelschleife diskutierten.

Wenn es zweckmäßig ist, den Resonator auf einer Flanke zu betreiben, etwa aus den zu Beginn des Abschnitts 3.6 genannten Gründen, haben wir mit der zweiten Entkopplungsmethode nach Bild 5.12 ein wirkungsvolles Instrument in der Hand, die mit dem Flankenbetrieb verbundene ponderomotorische Instabilität, und zwar sowohl die monotone als auch die oszillatorische Instabilität, zu beseitigen.

Zusammenfassend kann man sagen: Mit den in den Abschnitten 5.1 bis 5.4 abgeleiteten und diskutierten Rückführungen sowie Entkopplungsmaßnahmen, steht ein breites Spektrum an Möglichkeiten zur Verfügung, die ponderomotorische Stabilität eines gegebenen Resonators sicherzustellen bzw. die ponderomotorischen Kräfte als Dämpfungskräfte zu verwenden.

Von den im gegebenen Anwendungsfall vorliegenden Zusatzbedingungen hängt es ab, welche Kombination der vorgeschlagenen Maßnahmen Verwendung finden wird.

Auf eine derartige Zusatzanforderung im Falle eines Helixresonators für einen supraleitenden Protonenlinearbeschleuniger<sup>6)</sup> wird im Abschnitt 6.5 zurückzukommen sein.

## 6. Vergleich der Theorie mit Experimenten an einem supra- leitenden Helixresonator

Von entscheidender Bedeutung für die Wirksamkeit der elektromechanischen Rückkopplung ist die Größe des äquivalenten Feldpegels  $V_0$  sowie der elektromechanischen Kopplungsfaktoren  $k_\mu$ . Zunächst ist es daher interessant, sowohl theoretisch als auch experimentell den (die) Kopplungsfaktor(en) der Helix zu ermitteln.

### 6.1 Elektromechanischer Kopplungsfaktor der Helix

Der grundsätzliche Aufbau eines  $\lambda/2$ -Helixresonators für einen Teilchenbeschleuniger ist in Bild 6.1 dargestellt. Die Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes werden hier im Gegensatz zu Koaxial- und Topfresonatoren nicht so sehr vom Außenleiter mit dem Durchmesser  $2b$ , sondern im wesentlichen von den geometrischen Abmessungen des Helixkörpers selbst bestimmt.

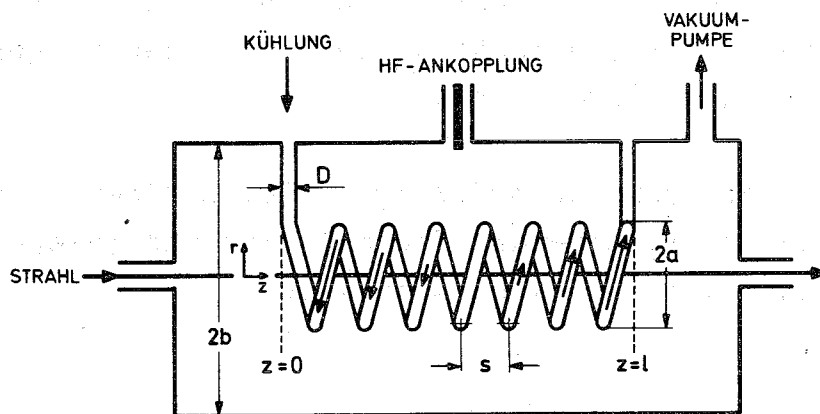


Bild 6.1: Prinzipskizze eines  $\lambda/2$ -Helix-Resonators zur Teilchenbeschleunigung

Mit  $2a$  soll der Durchmesser des Helixkörpers, mit  $l$  dessen Länge und mit  $s$  die Steigung bezeichnet werden. Die eingezeichneten Pfeile geben die Richtung und den Betrag des Hochfrequenzstroms für die Grundschwingung ( $\lambda/2$ ) an.

Die zum Beschleunigen der Teilchen benötigte elektrische z-Feldstärke auf der Achse  $r = 0$  (typisch 2 MV/m) ist mit Hochfrequenzströmen von der Größenordnung 500 A verbunden, die die Helix im wesentlichen in Achsrichtung deformieren.

Um die aus dieser Deformation resultierende statische Frequenzverschiebung  $\Delta\omega_0$  berechnen zu können, müssen wir uns ein möglichst genaues Bild von den elektromagnetischen und den mechanischen Eigenfunktionen der Helix machen. Dazu wird zunächst nach dem im Kapitel 2 dargestellten Formalismus mit zwei einfachen Modellen ein grober Ausdruck für die Frequenzverschiebung abgeleitet; anschließend wird der Ausdruck mit experimentellen Ergebnissen verglichen und der Einfluß der verschiedenen Näherungen genauer diskutiert.

Die einfachste Näherung für das elektromagnetische Verhalten der Helix ist das sogenannte Schichtmodell (sheath model)<sup>36</sup>. Die Helix wird hierbei durch einen in Achsrichtung unendlich ausgedehnten unendlich dünnen Metallzylinder mit dem Radius  $a$  ersetzt, in dem die Ströme nur in der ursprünglichen Drahtrichtung fließen können.

Zunächst soll angenommen werden, daß aufgrund der metallischen Stützen der Helix bei  $z = 0$  und  $z = 1$  nach Bild 6.1 an den Helixenden maximaler Strom fließt. Daraus folgt, daß an den Enden auch die  $H_z$ -Feldstärke maximal ist. Aus den Randbedingungen an der Schicht kann man sich klarmachen, daß an den Enden auch die  $E_z$ -Komponente maximal ist. Daß es sich hier nicht um eine echte Kurzschlußebene senkrecht zur Helixachse handeln kann, macht man sich leicht daran klar, daß dann die  $H_z$ -Komponente verschwinden müßte, was im Widerspruch zu der obigen Annahme steht. Die wichtigsten Feldkomponenten der stehenden Welle sind in Tabelle 6.1 zusammengestellt. Die radiale Wellenzahl

$$\gamma_v = \sqrt{\kappa_v^2 - (\omega_v/c)^2}$$

ist bei kleinem Steigungswinkel praktisch gleich der Wellenzahl  $\kappa_v$  in Achsrichtung.

	$0 \leq r < a$	$r > a$
$E_z/2E_0$	$I_0(\kappa_v r) \cos \kappa_v z \cos \omega_v t$	$\frac{I_0(\kappa_v a)}{K_0(\kappa_v a)} K_0(\kappa_v r) \cos \kappa_v z \cos \omega_v t$
$E_r/2E_0$	$I_1(\kappa_v r) \sin \kappa_v z \cos \omega_v t$	$-\frac{I_0(\kappa_v a)}{K_0(\kappa_v a)} K_1(\kappa_v r) \sin \kappa_v z \cos \omega_v t$
$H_z/2H_0$	$I_0(\kappa_v r) \cos \kappa_v z \sin \omega_v t$	$-\frac{I_1(\kappa_v a)}{K_1(\kappa_v a)} K_0(\kappa_v r) \cos \kappa_v z \sin \omega_v t$
$H_r/2H_0$	$I_1(\kappa_v r) \sin \kappa_v z \sin \omega_v t$	$\frac{I_1(\kappa_v a)}{K_1(\kappa_v a)} K_1(\kappa_v r) \sin \kappa_v z \sin \omega_v t$

Tabelle 6.1: Feldkomponenten der Helix nach der Schichttheorie

In dem für die Beschleunigeranwendung wichtigen Parameterbereich sind die azimuthalen Feldkomponenten gegenüber den axialen und radialen vernachlässigbar. I und K sind die modifizierten Besselfunktionen erster und zweiter Art.  $E_0$  ist die elektrische Achsfeldstärke der laufenden Welle und  $H_0$  die magnetische Achsfeldstärke, deren Relation zu  $E_0$  lautet:

$$H_0 = \frac{E_0}{Z_0} \sqrt{\frac{I_0(\kappa_v a) K_1(\kappa_v a)}{I_1(\kappa_v a) K_0(\kappa_v a)}} \quad (6.1.1)$$

wobei  $Z_0$  die Vakuumwellenimpedanz mit  $Z_0 = 120 \pi \Omega$  ist. Die Beziehung zwischen den Eigenfrequenzen  $\omega_v$  und den zugehörigen Wellenzahlen  $\kappa_v$  (Dispersionsrelation) ist gegeben durch:

$$\omega_v \approx \frac{s \cdot c \cdot \kappa_v}{2\pi a} \sqrt{\frac{I_0(\kappa_v a) K_0(\kappa_v a)}{I_1(\kappa_v a) K_1(\kappa_v a)}} \quad (6.1.2)$$

wobei  $c$  die Wellengeschwindigkeit im Vakuum ist.



Auffallend an den stehenden Helixwellen ist, daß die zum Beschleunigen benötigte TM-Welle immer von einer TE-Welle begleitet ist, wobei die beiden z-Komponenten die gleiche z-Abhängigkeit besitzen.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde der Einfluß des endlichen Außenleiterradius  $b$  nicht berücksichtigt. Es würden sich nur Feldänderungen im Außenraum  $a < r < b$  ergeben, die für  $b/a > 2$  in bezug auf alle wichtigen Kenngrößen 20 % nicht übersteigen.

Der  $H_z$ -Sprung an der Schicht  $r = a$  wird durch die Schichtströme und der  $E_r$ -Sprung durch die Schichtladungen verursacht. Damit lassen sich die Lorentzkräfte in Achsrichtung sehr einfach angeben:

$$F'(z, t) = 2\pi a (\epsilon_0 E_z(\kappa_\nu a) \Delta E_r(\kappa_\nu a) + \mu_0 H_r(\kappa_\nu a) \Delta H_z(\kappa_\nu a)) \quad (6.1.3)$$

Der Strich soll andeuten, daß es sich hierbei um den in der Schicht wirkenden Kraftgradienten handelt. Für den elektrischen Feldstärkesprung gilt genauer:

$$\Delta E_r(\kappa_\nu a) = E_r(\kappa_\nu r) \Big|_{r=a-\epsilon} - E_r(\kappa_\nu r) \Big|_{r=a+\epsilon} \quad (6.1.4)$$

und entsprechend für die magnetische Feldstärke:

$$\Delta H_z(\kappa_\nu a) = H_z(\kappa_\nu r) \Big|_{r=a-\epsilon} - H_z(\kappa_\nu r) \Big|_{r=a+\epsilon} \quad (6.1.5)$$

Wenn man die Feldstärken nach Tabelle 6.1 einsetzt und (6.1.1) benutzt, erkennt man, daß der zeitlich gemittelte Beitrag der elektrischen Felder zum Kraftgradienten in z-Richtung gleich dem der magnetischen Felder ist. Man erhält dann:

$$F'(z) = 4\pi a \epsilon_0 E_0^2 \frac{1}{\kappa_\nu a} \frac{I_0(\kappa_\nu a)}{K_0(\kappa_\nu a)} \sin 2\kappa_\nu z; \quad \kappa_\nu = \frac{\nu\pi}{l} \quad (6.1.6)$$

Nach (2.1.12) soll nun der Kraftgradient in das System der mechanischen Eigenlösungen zerlegt werden.

Das einfachste dem Problem angepaßte mechanische Modell der Helix ist das eines "weichen" Stabs mit fest eingespannten Enden. Für die Eigenlösungen ergibt sich mit der Orthonormalitätsbedingung entsprechend (2.1.13)

$$\frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \phi_{\mu}(z) \phi_{\nu}(z) dz = \delta_{\mu\nu}$$

sowie

$$\phi_{\mu} \equiv 0 \text{ für } z=0 \text{ und } z=\ell$$

$$\phi_{\mu}(z) = \sqrt{2} \sin \kappa_{\mu} z; \kappa_{\mu} = \frac{\mu\pi}{\ell}; \mu = 1, 2 \dots \quad (6.1.7)$$

Die mechanische Dispensionsrelation ist in diesem einfachen Fall rein linear; für die elektrische Dispensionsrelation (6.1.2) galt das nur für  $\kappa_{\nu} a \gg 1$ :

$$\Omega_{\mu} = \kappa_{\mu} \cdot v_L = \kappa_{\mu} \sqrt{\frac{c'}{m'}} \quad (6.1.10)$$

$v_L$  ist die Geschwindigkeit der Schallwelle längs der Helixachse. Dabei ist  $c'$  der Federkonstantenbelag:

$$c' = \frac{(D^4 - d^4)G}{64 \cdot w a^3} \quad (6.1.11)$$

- G - Schubmodul
- D - Drahtaußendurchmesser
- d - Drahtinnendurchmesser
- w - Windungszahl ( $w = \ell/s$ ) und
- $m'$  der Massenbelag:

$$m' = \pi^2 a w \rho \left( \frac{D^2 - d^2}{2} \right) \quad (6.1.12)$$

- $\rho$  - Dichte des Materials

Die Ortsabhängigkeit von  $F'(z)$  ist gerade identisch mit der einer der mechanischen Eigenfunktionen. Daher erhält man in der Entwicklung nach (2.1.12):

$$F'_\mu = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell F'(z) \phi_\mu(z) dz \quad (6.1.8)$$

in diesem idealisierten Falle nur einen Term, nämlich:

$$F'_{2\nu} = \frac{4\pi a}{\sqrt{2}} \epsilon_0 E_0^2 \frac{1}{\kappa_\nu a} \frac{I_0(\kappa_\nu a)}{K_0(\kappa_\nu a)} \quad (6.1.9)$$

Da die Dichtemodulation des Materials proportional dem Kraftgradienten ist, ergibt sich aus einem Koeffizientenvergleich von  $\xi = \sum q_\mu \phi_\mu$  und  $F' = \sum F'_\mu \phi_\mu$  für den Deformationsbeitrag des Modes  $\mu$ :

$$q_\mu = \frac{F'_\mu}{c' \kappa_\mu^2} \quad (6.1.10)$$

Die gesamte Arbeit der elektromagnetischen Kräfte ist entsprechend (2.1.14):

$$A = \ell \sum_\mu q_\mu F'_\mu = \sum_\mu \frac{\ell F_\mu'^2}{c' \kappa_\mu^2} \quad (6.1.11)$$

Die Arbeit  $A$  ist doppelt so groß wie die der Auslenkung zugeordnete potentielle Energie  $U$ . Sie läßt sich daher auch in der üblichen Form anschreiben:

$$A = 2U = 2 \cdot \frac{1}{2} c' \int_0^\ell \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 dz \quad (6.1.12)$$

Nach Einsetzen von (6.1.9) in (6.1.11) ergibt sich:

$$A = \frac{2\ell}{c'} (\pi a^2 \epsilon_0 E_0^2 \sigma_1(\kappa_\nu a))^2 \quad (6.1.13)$$

mit

$$\sigma_1(\kappa_\nu a) = \frac{1}{(\kappa_\nu a)^2} \frac{I_0(\kappa_\nu a)}{K_0(\kappa_\nu a)} \quad (6.1.14)$$

Die in dem Zylinder  $0 \leq z \leq \ell$ ,  $0 \leq r \leq a$  und  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  gespeicherte elektromagnetische Energie  $W$  lässt sich nach (2.1.7) mittels Tabelle 6.1 berechnen. Es ergibt sich näherungsweise:

$$W = 2\ell \cdot \pi a^2 \cdot \epsilon_0 E_0^2 \sigma_1(\kappa_\nu a) \quad (6.1.15)$$

Wegen (2.1.3, 4) ergibt sich damit für die relative Frequenzverschiebung des Resonators für den elektrischen Mode  $\nu$ :

$$\left(\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}\right)_\nu = -\frac{A}{W} = -\frac{1}{c\tau} \pi a^2 \epsilon_0 E_0^2 \sigma_1(\kappa_\nu a) \quad (6.1.16)$$

Die Modeabhängigkeit der relativen Frequenzverschiebung ist damit die gleiche wie für die gespeicherte Energie. Die absolute Frequenzverschiebung erhält man durch Einsetzen von (6.1.2) in (6.1.16):

$$(\Delta\omega_0)_\nu = -\frac{sE_0^2}{2c'Z_0} \sigma_2(\kappa_\nu a) \quad (6.1.17)$$

mit

$$\sigma_2(\kappa_\nu a) = \frac{I_0(\kappa_\nu a)}{\kappa_\nu a} \sqrt{\frac{I_0(\kappa_\nu a)}{I_1(\kappa_\nu a)K_0(\kappa_\nu a)K_1(\kappa_\nu a)}} \quad (6.1.18)$$

$Z_0$  - Vakuumwellenimpedanz,  $s$  - Steigung.

In Bild 6.2 sind die beiden Funktionen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  dargestellt.

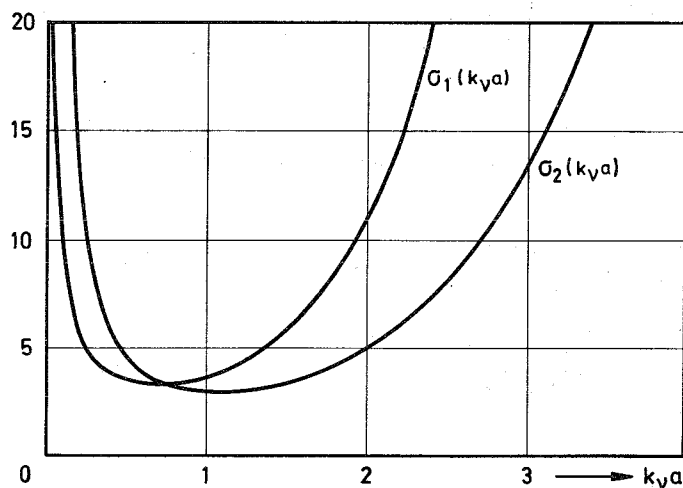


Bild 6.2:  
Normierte relative Frequenzverschiebung  $\sigma_1$  und absolute Frequenzverschiebung  $\sigma_2$  als Funktion der Wellenzahl

Das Minimum der relativen Frequenzverschiebung liegt bei  $\kappa_{\nu} a \approx 1.1$  und das der absoluten Frequenzverschiebung bei  $\kappa_{\nu} a \approx 0.7$ . Das ist glücklicherweise gerade der Bereich, der aus ganz anderen Gründen für die Beschleunigeranwendung optimal ist. Und zwar ist man bestrebt, den Resonator so auszuliegen, daß man bei gegebener Achsenfeldstärke  $E_0$  eine möglichst kleine gespeicherte Energie  $W$  erhält, d.h. nach (2.2.6) eine möglichst große Shuntimpedanz  $Z$ . Wegen der gleichen Abhängigkeit von der Wellenzahl für  $W$  (6.1.15) und  $(\Delta\omega_0)_{\nu}$  (6.1.17) fallen die Bedingungen nach möglichst großem  $Z$  und möglichst kleinem  $(\Delta\omega_0)_{\nu}$  gerade zusammen.

Nach der Definition (2.3.3) erhält man für die idealisierte Helix für  $E_0 = \hat{V}_0$  unter Verwendung von (6.1.11) schließlich einen elektromechanischen Koppelfaktor  $k$ :

$$k = \frac{32}{Z_0 G} \frac{a^3}{D^4 - d^4} \sigma_2(\kappa_{\nu} a) \quad (6.1.19)$$

Für eine Helix mit den Parametern:

$$a = 4.2 \text{ cm}, \quad s = 1 \text{ cm}, \quad l = 9 \text{ cm}, \quad D = 0.6 \text{ cm}, \quad d = 0.4 \text{ cm}$$

aus Niob wurde für eine Achsenfeldstärke der laufenden Welle  $E_0 = 1 \text{ MV/m}$  im Grundmode  $\nu = 1$  eine Frequenzverschiebung von 500 kHz gemessen<sup>37)</sup>. Die Frequenzverschiebung war dabei so streng proportional  $E_0^2$ , daß sie als Meßgröße für die Feldstärke benutzt werden konnte.

Nach (6.1.9) ist die Kraftdichte  $F_2' = 1,7 \frac{\text{kp}}{\text{m}}$ , nach (6.1.10) die maximale Auslenkung 0,06 mm, nach (6.1.13) die Arbeit der elektromagnetischen Kräfte  $9 \cdot 10^{-5}$  Joule und nach (6.1.15) die gespeicherte Energie  $3 \cdot 10^{-3}$  Joule. Damit erhält man eine relative Frequenzverschiebung von  $3 \cdot 10^{-3}$ . Bei einer Grundfrequenz  $\omega_1 = 72 \text{ MHz}$  nach (6.1.2) ergibt sich eine theoretische Frequenzverschiebung von 220 kHz. Die tatsächliche Eigenfrequenz war 90 MHz; damit würden sich sogar 270 kHz Frequenzverschie-

bung ergeben. In Anbetracht des recht groben Modells muß die Übereinstimmung bis auf einen Faktor 2 mit dem experimentellen Wert 500 kHz als gut bezeichnet werden.

Zwei praktische Fehlerquellen müssen dabei noch bedacht werden. Zum einen ist die Feldstärke  $E_0 = 1 \text{ MV/m}$  nicht direkt gemessen worden, sondern über ein verbessertes Schichtmodell aus der Messung der Güte und der im Resonator verbrauchten Leistung berechnet worden. Zum anderen wurde bei der Berechnung der Federzahl  $c'$  der Schubmodul von Niob benötigt, für den es keine genauen Werte gibt; außerdem lassen sich die Rohrdurchmesser  $D$  und  $d$  nicht sehr genau messen. Daher wurde die Federzahl direkt statisch und dynamisch experimentell bestimmt. Es ergab sich in unserem Beispiel  $c' = 5.9 \text{ kp}$ . Diese Messung korrespondiert zu einem Schubmodul für Niob von  $3000 \text{ kp/mm}^2$ . Der elektromechanische Koppelfaktor ist nach (6.1.19)  $k = 0,2 \frac{\text{MHz}}{(\text{MV/m})^2}$ .

An dieser Stelle sei erwähnt, daß die statische Frequenzverschiebung der Helix bereits in zwei Arbeiten behandelt wurde. In einer älteren Arbeit des Autors <sup>7)</sup> ist  $\Delta\omega$  zwar proportional  $E_0^2$ , aber der Betrag ist um 2-3 Größenordnungen zu klein. Nach einer Arbeit von Sierk <sup>38)</sup> ist  $\Delta\omega$  nicht nur viel zu klein, sondern auch noch proportional  $E_0^4$ , was nach den bisherigen Erfahrungen ausgeschlossen werden kann.

Die wichtigsten theoretischen Fehlerquellen für die relative Frequenzverschiebung nach (6.1.16) sind:

- I. Feldverzerrungen aufgrund der endlichen Helixlänge  $l$
- II. Feldüberhöhungen zwischen den Windungen
- III. Feldveränderung durch den endlichen Außenleiter-radius  $b$ .
- IV. Störung der mechanischen Eigenschwingungen durch die federnde Aufhängung (Helixbeine)
- V. Anregung von mechanischen Transversalschwingungen.

Eine anschauliche Vorstellung von dem Randfeldeffekt I kann ein frei Hand gezeichnetes Bild der elektrischen und magnetischen Feldlinien vermitteln (nicht gerechnet!).

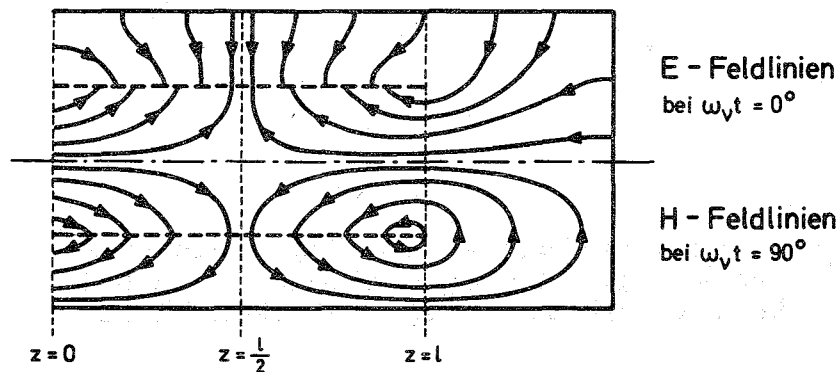


Bild 6.3: Feldlinien eines Helixresonators.

Der linke Teil in Bild 6.3 von  $z = 0$  bis  $z = l/2$  entspricht den in Tabelle 6.1 aufgeführten Feldkomponenten, wenn man einen Außenleiter hinzunimmt. Dabei wurden oberhalb der Symmetrieachse nur die elektrischen und unterhalb nur die magnetischen Feldlinien eingezeichnet. Weil es im Raum für  $z > l$ ,  $r < b$  weder Ladungen noch Ströme gibt, werden sich die magnetischen Feldlinien schon früher schließen und die elektrischen von der Wand angezogen. In beiden Fällen wandern die Maxima der  $H_z$ - bzw.  $E_z$ -Feldstärke in den Helixkörper  $z < l$  hinein.

Für die theoretische Behandlung sei auf zwei Arbeiten hingewiesen. G. Rotter<sup>39)</sup> berechnet die realen Felder durch Hinzunahme von Dämpfungsmoden im Innenraum  $0 < z < l$  und Außenraum. E. Sauter<sup>40)</sup> berechnet die Stromverteilung aus einer auf Hallén zurückgehende Integralgleichung und der Randbedingung für den Strom bei  $z=0$  und  $z=l$ , die zu der gemessenen Frequenz der Helix (mit den vorhergenannten Parametern) von 90 MHz paßt. Er erhält etwa die in Bild 6.3 a) wiedergegebene Stromverteilung.

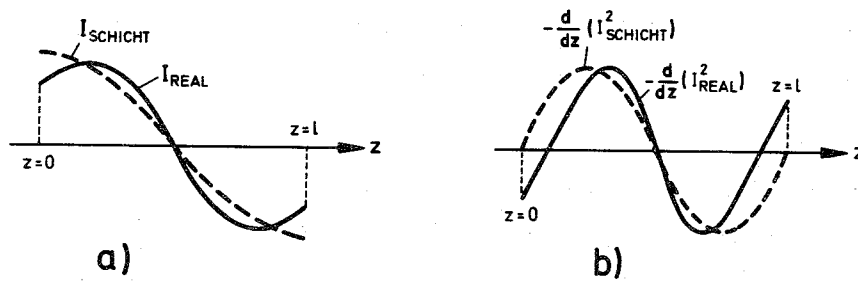


Bild 6.4: Stromverteilung a) und Kraftgradienten b) nach dem Schichtmodell und bei Berücksichtigung der endlichen Länge

Zum Vergleich ist die  $\cos$ -Verteilung nach dem Schichtmodell eingezeichnet. Das Maximum der Stromstärke  $I$  auf der Helix rückt, wie es nach Bild 6.3 zu erwarten dar, nach innen. Daraus ergeben sich die in Bild 6.4 b) dargestellten Kraftgradienten, die proportional zu  $\frac{d}{dz}(I^2)$  sind. Im Gegensatz zu dem idealen Fall der  $\sin$ -Verteilung ergeben sich nun im Integral (6.1.8) auch Beiträge für die höheren mechanischen Harmonischen mit geradzahligem Index. In Abschnitt 6.3 wird darauf zurückzukommen sein.

Die Fehlerquelle II, der Einfluß der Feldüberhöhung in der Nähe der Windungen, wurde bereits von Sierk<sup>38)</sup> an dem Modell einer unendlich langen Helix mit realen Drähten untersucht. Nach diesem Modell, das direkt auf den Schichtmodellfeldern aufbaut, ergibt sich im praktisch interessanten Bereich  $D/s \approx 0.5$  annähernd der gleiche Kraftgradient  $F'(z)$  wie der in (6.1.6) direkt aus dem Schichtmodell berechnete. Unter der Voraussetzung, daß sich der Effekt der endlichen Helixlänge  $l$  und der Effekt des endlichen Durchmessers  $D$  des Helixdrahtes nicht sehr stark beeinflussen, sollte man daher die Fehlerquelle II ausschließen können.

Der Einfluß des endlichen Außenleiterradius  $b$  kann, wie bereits erwähnt, nach dem Schichtmodell prinzipiell berücksichtigt werden und bringt für  $b/a > 2$  sicherlich Abweichungen  $< 20\%$ .



Eine genauere Diskussion ist wegen des unbekanntes Fehlers in Punkt I nicht sinnvoll.

Die Annahme  $\phi_\mu = 0$  für  $z=0$  und  $z=l$  ist eine Näherung, da die Helixbeine, die etwa die Länge  $b$  haben, eine endliche Federkonstante  $c_b$  besitzen.

Für einen Stab der Länge  $b$  gilt:

$$c_b = \frac{3E I}{b^3} \quad (6.1.20)$$

$E$  ist der Elastizitätsmodul und  $I$  das Flächenträgheitsmoment. Wenn das Bein aus dem gleichen Rohr wie die Helix besteht, gilt:

$$I = \pi(D^4 - d^4)/64 \quad (6.1.21)$$

Die Annahme von mechanisch festen Enden bei  $z=0$  und  $z=l$  bedeutet hier  $c_b \rightarrow \infty$ . Bei kleinen Eigenfrequenzen wird man daher nur dann eine geringfügige Frequenzänderung erwarten können, wenn  $c_b \gg c'/\frac{l}{2}$ . Da die Beine bei kleinen Frequenzen nur potentielle Energie aufnehmen, werden die Helixeigenfrequenzen erniedrigt.

Das elektrische Analogon der federnd abgestützten Helix ist ein schwach kapazitiv belasteter Leitungsresonator. Dabei gelten die Korrespondenzen:

Kraft - Spannung, Geschwindigkeit - Strom, Masse - Induktivität, Federkonstante - 1/Kapazität, feste Einspannung - Leerlauf und loses Ende - Kurzschluß.

Die technische Helix kann man als näherungsweise symmetrisch zur Mitte  $z = l/2$  ansehen. Daher gibt es auch hier zwei Sorten von mechanischen Eigenschwingungen: die symmetrischen mit

$\xi'(\ell/2) = 0$  sollen mit  $\mu = 1, 3, 5, 7 \dots$  abgezählt werden und die unsymmetrischen mit  $\xi(\ell/2) = 0$  mit  $\mu = 2, 4, 6, 8 \dots$ . Die Eigenwertgleichung des in Bild 6.5 a) dargestellten Modells erhält man aus der Bedingung, daß sowohl die Lage  $\xi(z)$  als auch die Geschwindigkeit  $\dot{\xi}(z)$  an der aufgeschnittenen Stelle gleich sein müssen.

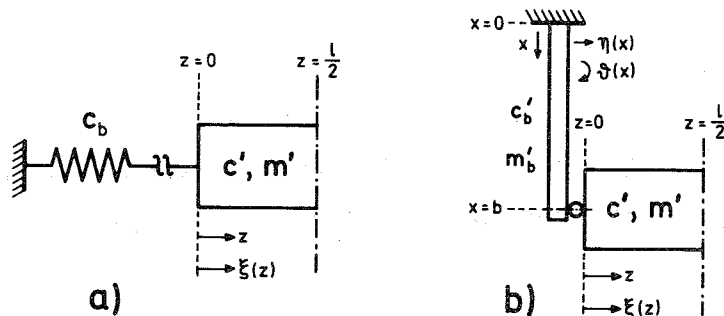


Bild 6.5: Mechanische Modelle der federnd aufgehängten Helix.

Mit anderen Worten: die mechanischen Impedanzen, die hier wegen der zunächst angenommenen Verlustfreiheit reine Reaktanzen sind, müssen an der aufgeschnittenen Stelle übereinstimmen. Zweckmäßigerweise verwenden wir hier die mechanischen Leitwerte  $Y$ . Der Leitwert der Feder  $Y_b$  ist:

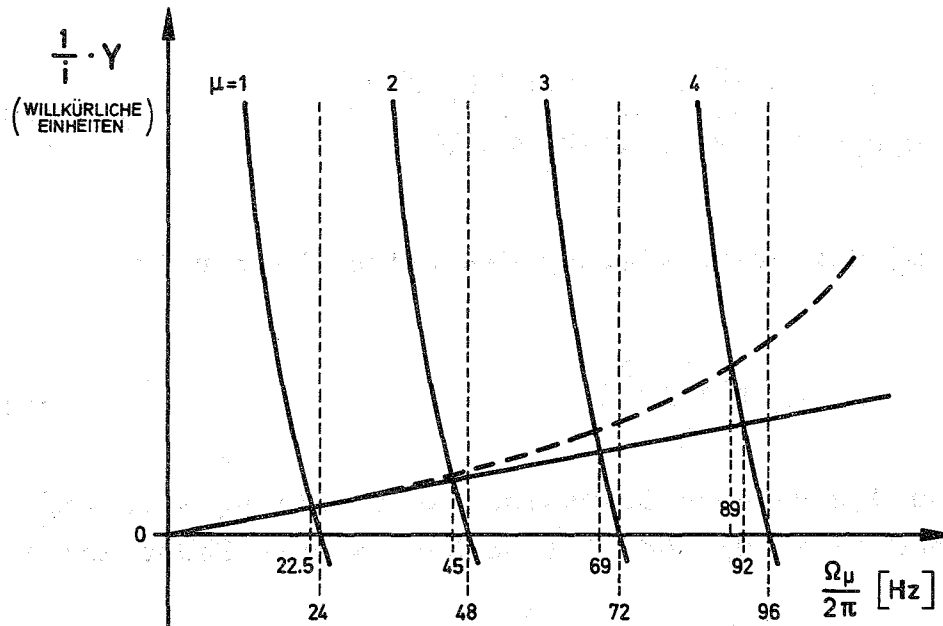
$$Y_b = \frac{i\Omega \mu}{c_b} \quad (6.1.22)$$

Der an die Stelle  $z = 0$  transformierte Leitwert der Helix ist:

$$Y_h = i \frac{1}{\sqrt{c' \cdot m'}} \cotan \left( \frac{\Omega \mu \ell}{2v_L} - \frac{\pi}{4} (1 + (-1)^\mu) \right) \quad (6.1.23)$$

Mit  $m' = 234 \text{g/cm}$  für die Helix mit dem vorhergenannten Parametersatz, das direkt aus einer Wägung gewonnen wurde, ergeben sich theoretisch für  $Y_b = 0$ , also feste Enden, Eigenfrequenzen von  $\Omega_\mu = 2\pi\mu \cdot 24 \text{ Hz}$ ,  $\mu = 1, 2, 3 \dots$ . Mit einem Elastizitätsmodul für Niob von  $E = 10700 \text{ kp/mm}^2$  und einer Beinlänge  $b = 15 \text{ cm}$  er-

hält man aus  $Y_h = Y_b$  nach Bild 6.6 für die ersten 4 Eigenfrequenzen:  $\Omega_1 = 2\pi \cdot 22,5$  Hz,  $\Omega_2 = 2\pi \cdot 45$  Hz,  $\Omega_3 = 2\pi \cdot 69$  Hz und  $\Omega_4 = 2\pi \cdot 92$  Hz.



**Bild 6.6:** Graphische Konstruktion zur Berechnung der Eigenfrequenzen der federnd aufgehängten Helix nach Bild 6.5

Tatsächlich wurden bei dieser Helix gemessen:  $\Omega_1/2\pi = 23$  Hz,  $\Omega_2/2\pi = 46$  Hz und  $\Omega_4/2\pi = 89$  Hz.  $\Omega_1$  wurde durch externe Kräfte angeregt (z.B. Vakuumpumpe), während  $\Omega_2$  und  $\Omega_4$  aufgrund der geeigneten Symmetrie nach Gleichung (6.1.8) durch die elektromagnetischen Kräfte angeregt werden konnte (vgl. dazu Abschnitt 6.3).

Zum Vergleich wurde in Bild 6.6 ein verbesserter Beinleitwert gestrichelt eingezeichnet. Zur Berechnung dieses Verlaufs muß die Massenverteilung des Beins berücksichtigt werden. In Bild 6.5 b) ist ein verbessertes Modell der Aufhängung der Helix gezeichnet. Wenn die Helix Longitudinalschwingungen ausführt, wird das Bein auf Biegung beansprucht. Der Zustand des Beins wird beschrieben durch die 4 Koordinaten: Transversalauslenkung  $\eta(x)$ , Transversalgeschwindigkeit  $\dot{\eta}(x)$ , den Drehwinkel  $\theta(x)$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}(x)$ .

Wenn man die Drehmomenten-Kopplung bei  $x = b$  bzw.  $z = 0$  vernachlässigt, erhält man mit dem Rayleigh-Ansatz <sup>25)</sup> nach einigen Umformungen für  $\eta(0) = 0$  und  $\theta(0) = 0$  folgenden verbesserten Ausdruck für den mechanischen Leitwert des Beins:

$$Y_b = \frac{i}{\Omega_\mu m'_b} \frac{\operatorname{Re} \sqrt{i \Omega_\mu^2 b / v_b} \sin \sqrt{i \Omega_\mu^2 b / v_b}}{1 + \operatorname{Re} \cos \sqrt{i \Omega_\mu^2 b / v_b}} \quad (6.1.24)$$

Dabei ist  $m'_b$  die Massebelegung des Beins; hier gilt:

$$m'_b = \rho \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \quad (6.1.25)$$

$v_b$  ist eine äquivalente Geschwindigkeit mit:  $v_b = \sqrt{c'_b / m'_b}$  entsprechend (6.1.10) und  $c'_b$  eine äquivalente Federzahl mit:

$$c'_b = \frac{EI}{b^2} = \frac{E\pi(D^4 - d^4)}{64 b^2} \quad (6.1.26)$$

Die Geschwindigkeit  $v_b$  hängt daher mit der transversalen Wellengeschwindigkeit  $v_\perp$  auf folgende Weise zusammen:

$$v_b = v_\perp \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4b} \quad (6.1.27)$$

Für kleine Argumente  $\Omega \frac{2b}{\mu v_b} \ll 1$  geht selbstverständlich (6.1.24) in (6.1.22) über, was sich wegen  $c_b = 3 c'_b / b$  nach (6.1.20, 26) leicht zeigen läßt.

In Bild 6.7 ist der normierte mechanische Leitwert (Suszeptanz) des Beines aufgetragen.

Die Pole des Leitwerts  $Y_b$  entsprechen im elektrischen Analogon einer Serienresonanz und die Nullstellen einer Parallelresonanz.

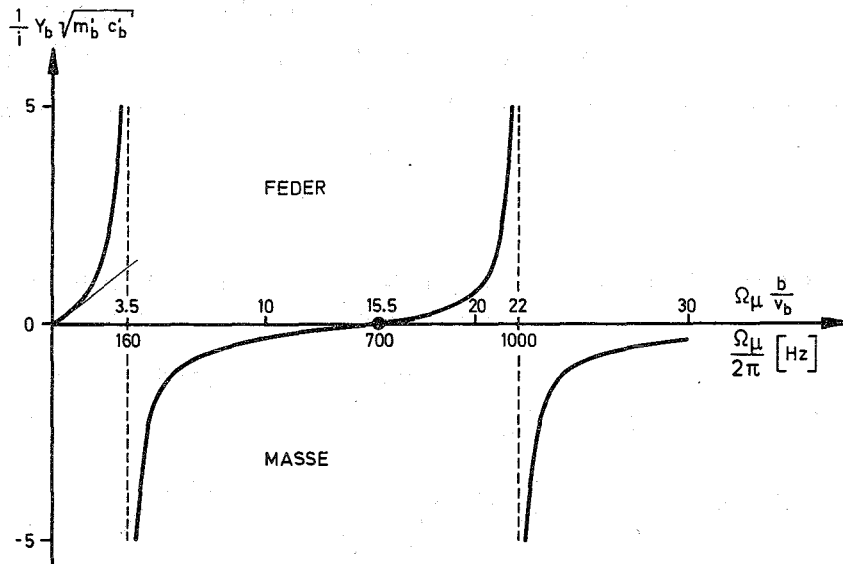


Bild 6.7: Mechanischer Leitwert eines transversal schwingenden Stabs nach (6.1.24).

Im Gegensatz zu den Helixresonanzen gehorchen die Beinresonanzen wegen der Biegedifferentialgleichung 4. Ordnung einer annähernd quadratischen Dispersionsrelation. In unserem konkreten Anwendungsfall ist nur der Bereich unterhalb der ersten Beinresonanz, der bei 160 Hz liegt, interessant. Wenn man den Frequenzgang des Beinleitwertes nach Bild 6.7 mit dem richtigen Maßstab in 6.6 einzeichnet, ergibt sich gerade die gestrichelte Kurve und damit gute Übereinstimmung mit den Meßwerten. Für höhere mechanische Eigenfrequenzen, die z.B. über die elektromechanische Kopplung beim Betrieb der Helix in einer elektrischen Oberharmonischen angeregt werden können, kann die Aufhängung sogar wie eine Masse wirken ( $\rightarrow$  induktiv belastete Leitung).

Für unser Beispiel ist das der Fall im Bereich  $160 \text{ Hz} \leq \frac{\Omega}{2\pi} \leq 700 \text{ Hz}$  (vgl. Bild 6.7). In diesem Bereich sind die tatsächlichen Eigenfrequenzen kleiner als die Leerlauf Frequenzen bei  $Y_b = 0$ .

In Bild 6.8 sind abschließend noch einmal die ersten vier mechanischen Eigenfunktionen  $\phi_\mu(z)$  zu dem behandelten Beispiel zusammengestellt. Als Vergleich wurden auch die Eigenfunktionen für die beiden Grenzfälle  $Y_b = 0$  (feste Enden) und  $Y_b = \infty$  (lose Enden) eingezeichnet.

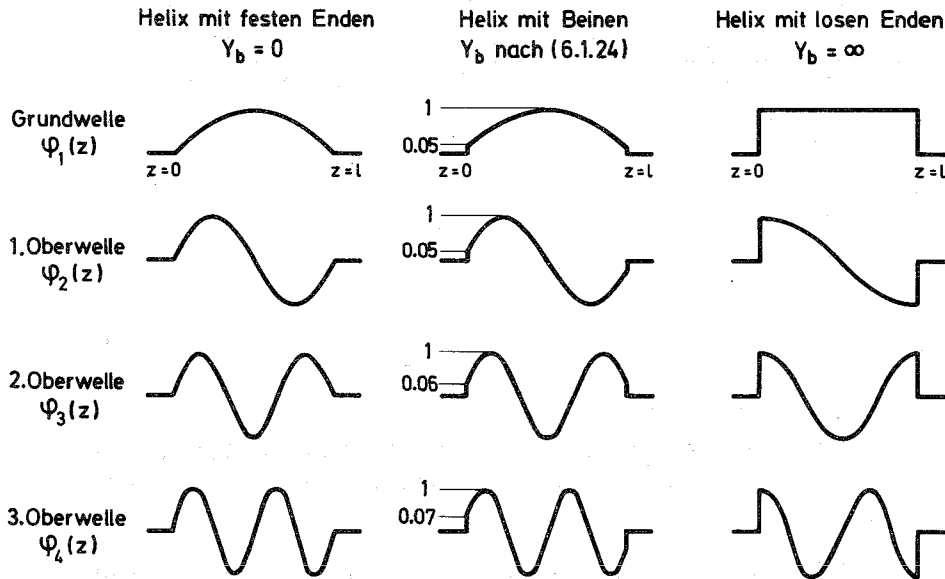


Bild 6.8: Mechanische Eigenfunktionen der Helix für verschiedene Abschlußimpedanzen  $Y_b$ .

Wenn man die Maximalausschläge der Auslenkung  $|\phi_\mu|_{\max} = 1$  setzt, ergibt sich für die Auslenkungen am Rande:  $\phi_1(0) = \phi_1(l) = 0.05$ ,  $\phi_2(0) = -\phi_2(l) = 0.05$ ,  $\phi_3(0) = \phi_3(l) = 0.06$ ,  $\phi_4(0) = -\phi_4(l) = 0.07$ . Für die betrachtete Helix mit  $b/a = 3.6$ ,  $b/l = 1.65$  und  $w = 9$  wird die Näherung  $Y_b = 0$  für das Integral (6.1.8) auf etwa 10 % genau sein.

Die Fehlerquelle  $\underline{V}$  ergibt sich unmittelbar aus der der Berechnung des mechanischen Leitwerts der Aufhängung zugrundeliegenden Annahme, daß an den Enden  $z = 0$  und  $z = l$  keine Momente vom Bein auf die Helix übertragen werden. Die relativ gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung deutet darauf hin, daß die genannte Voraussetzung erfüllt ist. Die korrekte Berücksichtigung der Momente an den Rändern würde

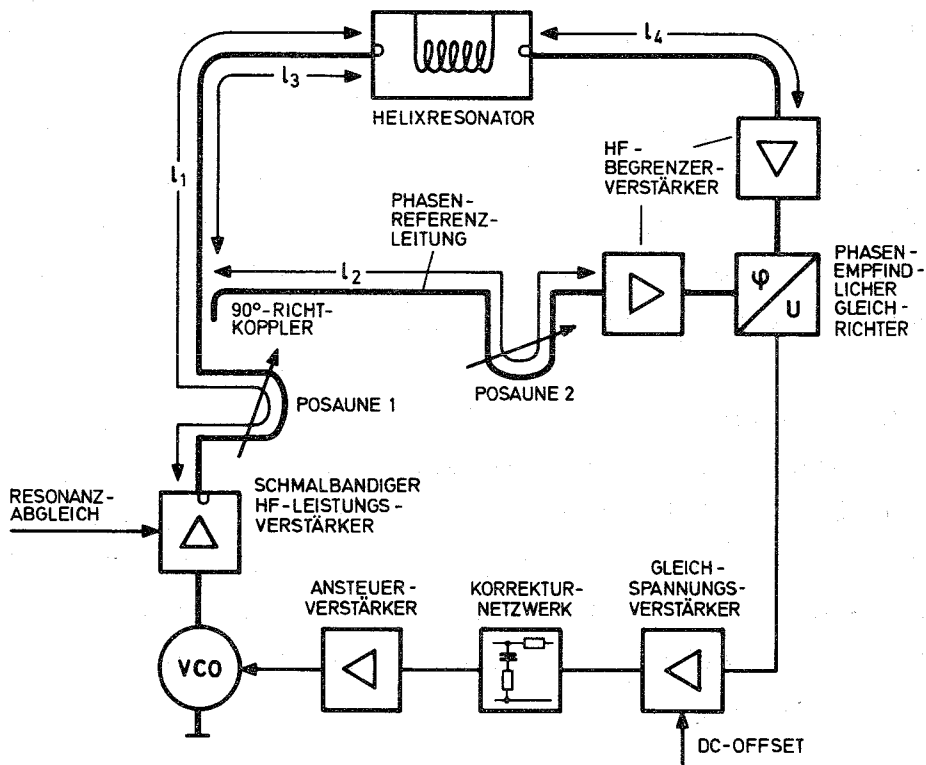
den Rahmen dieser Arbeit erheblich übersteigen, da nun die Transversalbewegung der Helix mit in Betracht gezogen werden muß. Bei der Biegedifferentialgleichung der Helix kann, wie das bei schlanken Stäben der Fall ist, der Querkraftterm nicht mehr vernachlässigt werden <sup>41)</sup>. Außerdem würde man dann auch noch den Einfluß der statischen Durchhängung der Helix infolge ihres Eigengewichts sowie durch Axialkräfte parametererregte Transversalschwingungen <sup>42)</sup> betrachten müssen.

Zusammenfassend kann man sagen: Die wichtigste Fehlerquelle für die statische Frequenzverschiebung nach (6.1.16) liegt in dem nicht berücksichtigten elektrischen Randfeldeffekt. Eine Korrektur nach dem von Sauter <sup>40)</sup> verwendeten Modell sollte genügend genaue Vorhersagen für die bei gegebener Beschleunigungsfeldstärke  $E_0$  zu erwartenden statischen Frequenzverschiebungen ermöglichen.

## 6.2 Aufbau und Eigenschaften des verwendeten Phasenregelsystems

Der grundsätzliche Unterschied zwischen den Anforderungen an Amplituden- und Phasenregelkreise für normalleitende und supraleitende Resonatoren liegt darin, daß bei normalleitenden Resonatoren vor allem das Führungsverhalten wichtig ist, weil wegen der hohen Verlustleistungen nur im Pulsbetrieb gefahren werden kann, während supraleitende Resonatoren im Dauerstrich betrieben werden können. Bei den letzteren wird aufgrund der sehr geringen relativen Bandbreite ( $10^{-6}$  -  $10^{-9}$ ) das Störverhalten wichtig, weil bereits bei sehr kleinen Generator- oder Eigenfrequenzstörungen die Leistungsanpassung verloren gehen kann.

In Bild 6.9 ist der für die folgenden Messungen benutzte Phasenregelkreis dargestellt. Hierin wurden nur die wichtigsten für das Verständnis der Wirkungsweise notwendigen Baugruppen eingezeichnet. Eine ausführliche Darstellung findet man bei H. Strube <sup>43)</sup>.



**Bild 6.9:** Phasenregelkreis mit spannungsgeregelter Oszillator (VCO).

Starke Linien: Trägerfrequenzleitungen  
Dünne Linien: Signalfrequenzleitungen.

Der Oszillator treibt über einen Leistungsverstärker einen bei 90 MHz schwingenden  $\lambda/2$ -Helixresonator. Die Resonatorphase wird mit der Eingangsphase mittels eines phasempfindlichen Gleichrichters verglichen, dessen verstärkte Ausgangsspannung dem Frequenzsteuereingang des Oszillators zugeführt wird.

Die wichtigsten Daten der verwendeten Geräte sind:

VCO:

Bandbreite  $0 \div 400$  kHz ( $45^\circ$  Phasenverschiebung aber bereits bei 80 kHz); Empfindlichkeit im Arbeitspunkt 77 kHz/Volt; Stellbereich  $<2$  MHz bei 90 MHz Mittenfrequenz; Ausgangsleistung 20 mW an  $50 \Omega$ .



Hf-Leistungsverstärker:

Bandbreite 1 MHz; abstimbar, Ausgangsleistung 5 W; Ausgangs-impedanz  $\gg 50\Omega$ .

Phasenempfindlicher Gleichrichter:

Bandbreite 0,2 ÷ 500 MHz; Empfindlichkeit im Arbeitspunkt 0,5 Volt/60°; Meßbereich  $|\phi| < 90^\circ$ .

Ansteuerverstärker:

Bandbreite 0 ÷ 100 kHz; Spannungsverstärkung 1:20 bis 1:100.

Die wahlweise zusätzlich verwendeten Gleichspannungsverstärker haben bei 200 kHz eine Phasenverschiebung von  $\approx 45^\circ$ . Die 3 dB-Punkte der Verstärkung liegen ähnlich wie beim VCO wegen induktiver Kompensation erheblich höher.

Mit der Posaune 2 wird die Leitungslänge  $l_2$  so eingestellt, daß im Sollzustand der Phasendetektor 0 Volt Ausgangsspannung hat. Da dessen Ausgangsspannung proportional  $\cos\phi$  ist und die Referenzphase aus einem  $90^\circ$ -Richtkoppler der Hauptleitung entnommen wird, muß nach den Bezeichnungen in Bild 6.8 gelten:

$$l_2 = l_3 + l_4 + \frac{\theta}{2\pi} \cdot \lambda_l \quad (6.2.1)$$

wobei  $\lambda_l$  die Wellenlänge auf den Leitungen und  $\theta$  die Resonatorphasenverschiebung  $\theta = -\arctan y$  ist. VCO und Leistungsverstärker sind möglichst gut auf Resonanz abzugleichen. Da sowohl der Sender als auch im allgemeinen der Resonator nicht an die Leitung mit dem Wellenwiderstand  $50\Omega$  angepaßt sind, ist zur Vermeidung von Amplitudenmodulation auch die Leitungslänge  $l_1$  mit der Posaune 1 auf Resonanz abzugleichen.

An der Häufung der Bauelemente mit einer Bandbreite von etwa 100 kHz kann man bereits ablesen, daß die Durchtritts- oder Schnittfrequenz (unity gain frequency) des offenen Regelkreises kleiner oder höchstens gleich 100 kHz sein wird. Durch dynamische Korrekturen kann die Stabilitätsgrenze in diesem Fall



nur geringfügig höher geschoben werden. Das dynamische Verhalten und insbesondere die Stabilität des Regelkreises werden wesentlich nur von dem Verlauf von Amplitude und Phase des offenen Kreises in der Nachbarschaft der Durchtrittsfrequenz  $\Omega_D$  bestimmt<sup>19),44),45)</sup>. Es genügt daher, das Übertragungsverhalten der Bauelemente in der Nähe von  $\Omega_D$  zu kennen, um aus den Frequenzkennlinien die maximale Verstärkung für stabiles Verhalten ablesen zu können.

Das Übertragungsverhalten des Resonators selbst konnte nicht gemessen werden, da die externen Störungen so groß waren, daß der Resonator ohne Phasenregelung nicht betreibbar war. Wir können aber auf die im Abschnitt 5.1 berechnete Übertragungsfunktion  $G_\phi(s)$  zurückgreifen. Aus (5.1.3 - 5) sieht man, daß für große Modulationsfrequenzen  $\Omega \gg 1/\tau$  die Phase das Integral der Modulationsfrequenz ist (vgl. (5.1.7)).

In Bild 6.10 sind die aus Messung und Rechnung kombinierten Amplituden-Phasenkennlinien des offenen Kreises gezeichnet. Die Verstärkung wurde dabei so gewählt, daß die Phasenreserve  $\gamma$  genügend groß ist, damit man einen hinreichend gedämpften Einschwingvorgang erhält. Für  $\Omega_D/2\pi = 50$  kHz war  $\gamma = 70^\circ$ . Wenn keine weiteren dynamischen Korrekturen verwendet werden, läßt sich aus der Bedingung:

$$|F_{o\phi}(j\Omega_D)| = \frac{K_I \cdot V^o}{\Omega_D} \stackrel{!}{=} 1 \quad (6.2.2)$$

die maximale statische Verstärkung (Gleichspannungsverstärkung)  $V^o$  berechnen.  $K_I$  - die Zeitkonstante des I-Gliedes - ist gleich dem Produkt der Empfindlichkeit der Meß- und der Stellkennlinie im Arbeitspunkt. Mit den vorherigen Angaben ist hier  $K_I = 77 \frac{\text{kHz}}{\text{V}} \cdot 0,5 \text{ V} = 38,5 \text{ kHz}$  und damit  $V^o = 1,3$ .

Der zu diesem  $V^o = 1,3$  gehörige Übergangsvorgang bei sprungartiger Frequenzstörung war auch tatsächlich gut gedämpft.

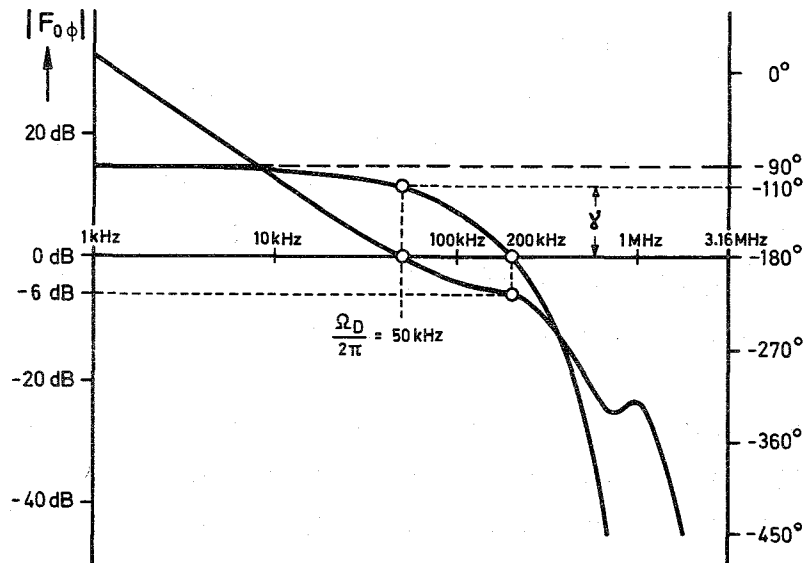


Bild 6.10: Logarithmische Amplituden- und Phasenfrequenzkennlinien der offenen Phasenregelschleife eines supraleitenden Resonators

Bei dieser Messung wurde der supraleitende Resonator gar nicht benötigt. In bezug auf das dynamische Verhalten der Regelung kann der supraleitende Resonator nämlich durch einen zweiten Oszillator ersetzt werden. Das kann man verstehen, wenn man die Regelstrecke nach Bild 5.5 b) etwas umformt. Die elektromechanische Rückwirkung brauchen wir nicht zu berücksichtigen, da sie für  $\Omega_D \gg \Omega_\mu$  in der Gegend der Durchtrittsfrequenz vernachlässigbar klein ist.

In Bild 6.11 a) ist zum Vergleich zunächst noch einmal die übliche Darstellung wiedergegeben. Mit  $F_\phi(s) \stackrel{!}{=} \tau F_\omega(s)$  ergibt sich die dem Signalfluß nach Bild 6.9 besser angepaßte Darstellung in Bild 6.11 b). Aus der Frequenzänderung wird über eine Integration die absolute Phase erzeugt, die einmal direkt über die Referenzleitung übertragen wird und zum anderen parallel über den Resonator zum Phasenvergleich führt.

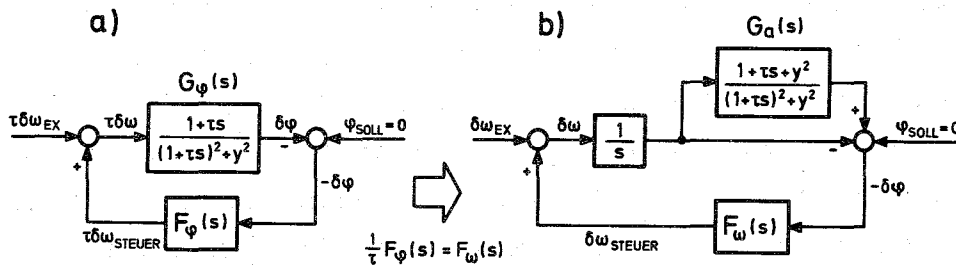


Bild 6.11: Umformung des Blockschaltbildes für die Phasenregelung

Die Signalverzögerung über den Resonator wird durch die Übertragungsfunktion  $G_a(s)$  dargestellt, die bereits für die Übertragung von der Generatoramplitudenänderung auf die Resonatoramplitudenänderungen verantwortlich war (vgl. (5.3.8)). Daß das kein Zufall ist, wird an den Ausführungen des Abschnittes 6.5 klar werden.

Hier interessiert uns zunächst nur der Grenzübergang:  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} G_a(s) = 0$ . Das bedeutet: ein Resonator mit einer Güte  $Q \rightarrow \infty$  läßt sich vom Generator her nicht beeinflussen, wirkt daher wie ein unabhängiger Oszillator. Der andere Extremfall  $\lim_{\tau \rightarrow 0} G_a(s) = 1$  ist ebenso einleuchtend. Das Signal über den Resonator ist gleich schnell und gleich stark wie das über die Referenzleitung direkt übertragene. An der Vergleichsstelle heben sich die beiden Wirkungen gerade auf; der Regelkreis ist offen. Ein Resonator mit der Bandbreite  $\infty$  liefert eben keine Phaseninformation mehr. Der supraleitende Resonator liegt nahe am ersten und der normalleitende nahe am zweiten Extremfall.

Die dynamische Struktur des Regelkreises im Bild 6.11 b) für  $\tau = \infty$  ist identisch mit der einer üblichen VCO-Schleife, bei der ein frequenzsteuerbarer Generator an die Phase eines Referenzsignals angebunden wird. Eine Übersicht über die wichtigsten Erscheinungen bei dem Anbinden des VCO (phase lock in) sowie zahlreiche Literaturangaben findet man bei Gardner<sup>46)</sup>.

Das Einfangen der Phasenregelung ist aufgrund der Kennlinie  $U \propto \cos \phi$  des Phasenmessers, ein wesentlich nichtlinearer Vorgang, auf den hier nicht näher eingegangen werden soll. Nur so viel sei im Unterschied zur reinen VCO-Schleife erwähnt: das Problem beim Einfangen mit einem supraleitenden Resonator ist nicht so sehr die zu große Frequenzdifferenz zwischen VCO-Frequenz und Referenzfrequenz, also der Fangbereich <sup>47)</sup>, sondern die Tatsache, daß die Amplitude des Resonators zum Einschaltzeitpunkt normalerweise Null ist und keine über dem Rauschpegel liegende Resonatorspannung entsteht, wenn der Eigenfrequenzstörhub sehr groß gegen die Resonatorbandbreite ist. Das Einfangen kann dadurch erleichtert werden, daß man entweder für die Dauer des Einfangvorgangs die Generatorleistung und durch überkritische Kopplung die Bandbreite erhöht oder den Resonator durch selbsterregte Hochfrequenzrückkopplung <sup>48)</sup> anfährt und dann innerhalb der Abklingzeit auf Generatorbetrieb mit Phasenregelung umschaltet.

Eingangs wurde bereits erwähnt, daß bei einem Phasenregelkreis für einen supraleitenden Resonator vor allem das Störverhalten interessiert. Die Übertragungsgleichung von den externen Frequenzstörungen auf die resultierende Phasenabweichung des Resonators vom Sollwert ist nach Bild 6.11 bzw. Gleichung (5.1.10) für  $y = 0$ :

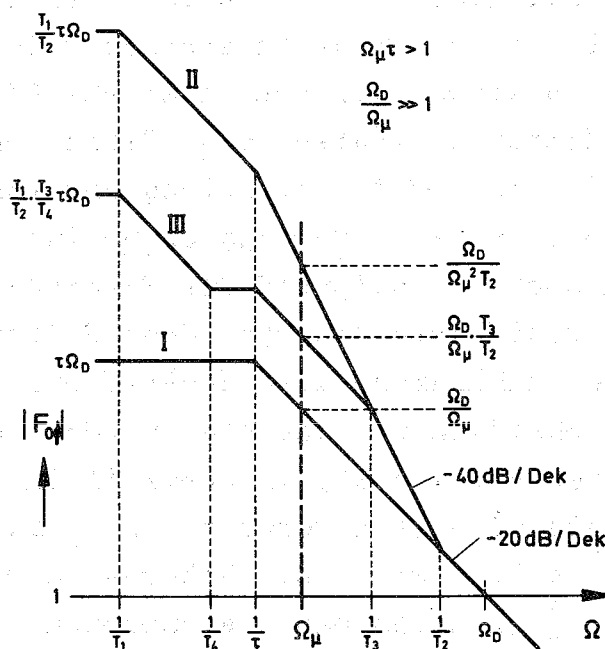
$$\delta \phi = \frac{\delta \omega_{ex}}{\frac{1}{\tau} + s + F_{\omega}(s)} \quad (6.2.3)$$

Wenn man eine einfache proportionale Rückführung wählt und die Verstärkung nach Bild 6.10 gerade so einstellt, daß der offene Kreis eine Durchtrittsfrequenz  $\Omega_D$  hat, ergibt sich im Bereich  $\Omega < \Omega_D$  die in Bild 6.12 als Kurve I gezeichnete logarithmische Amplitudenknickkennlinie des offenen Regelkreises. Zur Interpolation des exakten Verlaufs im Bereich der Knickfrequenz  $1/\tau$  sei auf Bild 5.1 a) hingewiesen. Für  $\Omega < \Omega_D$  gilt damit  $F_{\omega}(j\Omega) = \Omega_D$ . Für eine sinusförmige Störung der Generator- bzw. Eigenfrequenz

$$\delta\omega_{ex} = \hat{\delta\omega}_{ex} \sin \Omega_{\mu} t \quad (6.2.4)$$

ergibt sich damit eine Phasenmodulation:

$$\hat{\delta\phi} = \frac{\hat{\delta\omega}_{ex}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\tau} + \Omega_D\right)^2 + \Omega_{\mu}^2}} \quad (6.2.5)$$



**Bild 6.12:** Logarithmische Amplitudenknickkennlinien des offenen Phasenregelkreises für verschiedene Tiefenanhebungen.

Für  $F_{\omega}(j\Omega) = \Omega_D = 0$  ist (6.2.5) der Phasenhub um unregulierten System. Um eine Vorstellung von den Größenordnungen zu bekommen, seien einige typische Werte für einen 100 MHz-Helixresonator angegeben:

Belastete Bandbreite bei Normalleitung:  $\frac{1}{\pi T} = 100 \text{ kHz}$

Belastete Bandbreite bei Supraleitung:  $\frac{1}{\pi T} = 20 \text{ Hz}$

Modulationsfrequenz:  $\Omega_{\mu}/2\pi = 100 \text{ Hz}$

Modulationshub:  $\delta\hat{\omega}_{ex}/2\pi = 50 \text{ Hz}$

Durchtrittsfrequenz:  $\Omega_D/2\pi = 50 \text{ kHz}$

Für den unregulierten normalleitenden Resonator erhält man mit diesen Zahlen nach (6.2.5) einen Phasenhub von  $6/100^\circ$ , während sich bei Supraleitung unreguliert  $30^\circ$  ergeben. Wird dagegen im letzten Fall eine einfache proportionale Rückführung verwendet mit einer Durchtrittsfrequenz des offenen Kreises von 50 kHz, so kommen wir auch hier auf  $6/100^\circ$ . Bei kräftigen externen Störungen traten sogar Vibrationen der Resonatorfrequenz mit einer Modulationsfrequenz von 25 Hz und einem Hub bis zu 1 kHz auf. Der Phasenhub ist dann selbst mit Regelung noch  $5^\circ$ . Aufgrund der Tatsache, daß die Durchtrittsfrequenz groß gegen die typischen Störfrequenzen ist, kann man in die Rückführung eine zusätzliche Tiefenanhebung einbauen. Hierbei muß nur beachtet werden, daß die Anhebung auf  $-40\text{dB/Dekade}$ , wie sie in Kurve II im Bild 6.12 dargestellt ist, genügend weit unterhalb von  $\Omega_D$  beginnt, damit die Stabilität des Systems nicht gefährdet wird. Als Richtwert kann gelten  $\frac{1}{T^2} \leq \frac{1}{5} \Omega_D$ . Wenn man die Anhebung bei  $\Omega = \frac{1}{T^2}$  abbricht, ergibt sich für die Rückföhrfunktion  $F_{\omega}(s)$  folgender Ausdruck:

$$F_{\omega}(s) = \Omega_D \frac{s + \frac{1}{T^2}}{s + \frac{1}{T_1}} ; \quad \Omega \leq \Omega_D \quad (6.2.6)$$

wobei die Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $F_o(s) = F_{\omega}(s)/(s + \frac{1}{T})$  für  $y = 0$  ist. Durch diese Maßnahme wird nicht nur der Störphasenhub weiter verkleinert, sondern auch eine hohe statische Regelverstärkung erzielt. Für die Verstärkung bei  $\Omega_{\mu}$  gewinnt man mit dieser Anhebung bei den gegebenen Parametern einen Faktor 100, so daß der Phasenfehler wieder  $\frac{5}{100}$  beträgt. Die Regelverstärkung in der Gegend der Bandbrei-



te  $1/\tau$  wird sogar um einen Faktor  $10^3$  vergrößert. Dadurch ist die Phasenregelung in der Lage, genügend schnell eine große "statische" Frequenzverschiebung auszuregulieren, die als Folge einer drastischen Resonatorfeldänderung durch die elektromagnetischen Kräfte auftreten kann.

Der Regler nach (6.2.6) wurde passiv realisiert. Bild 6.13 a) zeigt die zugehörige Schaltung. Zum Vergleich ist in Bild 6.13 b) die entsprechende aktive Realisierung dargestellt.

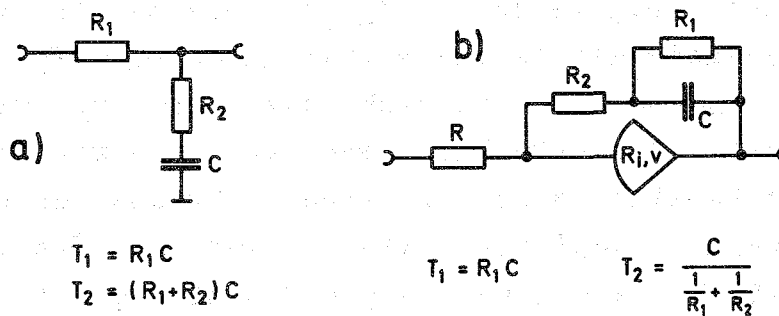


Bild 6.13: Korrektornetze für die Phasenregelung

Wenn man den Widerstand  $R_1$  in Bild 6.13 b) wegläßt, erhält man den üblichen PI-Regler, dessen Verstärkung bei kleinen Frequenzen  $\Omega \rightarrow 0$  nur durch die endliche Verstärkung und die Eingangsbeschaltung des Operationsverstärkers begrenzt ist.

Wie im Abschnitt 5.1 gezeigt wurde, hängt die elektrische Dämpfung der mechanischen Schwingungen entscheidend von der Signalphasenverschiebung  $\sigma = \arg F_\omega(j\Omega_\mu)$  (vgl. 5.1.16) ab. Es zeigte sich, daß für  $\sigma = -\pi/2$ , wie es nach Kurve II im Bild 6.12 gilt, die obere Flanke des Resonators ( $y > 0$ ) stabil ist. Wenn man auf der unteren Flanke arbeiten will, was ja bei genügend großer statischer Regelverstärkung  $F_\omega(0)$  möglich ist, muß die Tiefenanhebung in einem genügend großen Bereich um  $\Omega_\mu$  herum unterbrochen werden, damit die Phase  $\sigma$  bei  $\Omega = \Omega_\mu$  annähernd auf Null zurückgeht. Kurve III in Bild 6.12 zeigt die nun entstehende Amplitudenknickkennlinie des offenen Regelkreises. Die

Zeitkonstanten  $T_3$  und  $T_4$  sind dabei so zu wählen:  $T_3 T_4 \approx 1/\Omega_\mu^2$  und  $T_4/T_3 > 50$ .

### 6.3 Messung der effektiven mechanischen Abklingzeitkonstanten

In Abschnitt 3.6 wurde gezeigt, daß die oszillatorische Instabilität durch eine anschauliche Kennzahl - die effektive mechanische Abklingzeitkonstante  $\tau_{\text{eff}}$  - beschrieben werden konnte (vgl. (3.6.12,13)). Bei einem unregelmäßigem Resonator kann man  $\tau_{\text{eff}}$  unter der Voraussetzung  $\tau/\tau_{\text{eff}} \ll 1$  aus der An- bzw. Abklingzeit des Phasensignals  $\delta\phi$  messen. Der zugehörige Frequenzhub darf hierbei den linearen Bereich nicht überschreiten, da sonst der Anklingverlauf keine e-Funktion mehr ist. Was man in diesem Sinne als linearen Bereich betrachten kann, geht aus den nichtlinearen Untersuchungen des Kapitels 4 klar hervor. Der Frequenzhub muß z.B. nach Bild 4.1 klein sein gegen den zu dem nichtlinearen Grenzyklus (Punkt A) gehörigen Hub; oder anders gesagt, die Schwingkennlinie muß noch annähernd linear verlaufen.

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß die durch externe Störquellen verursachten Frequenzhübe klein gegen die Bandbreiten sein müssen. Da diese Voraussetzung gerade bei der supraleitenden Helix normalerweise nicht erfüllt ist, mußte für diese Messung von vornherein der im vorhergehenden Abschnitt beschriebene phasengeregelte Meßaufbau verwendet werden. Nun wird es einerseits möglich, das Frequenzsteuersignal  $\delta\omega_{\text{steuer}}$ , das nach (5.1.8, 9) bei großer Regelverstärkung praktisch gleich  $\sum_\mu \delta\omega_\mu$  ist, als direktes Maß für die mechanische Auslenkung zu verwenden. Andererseits spielt im Gegensatz zu dem unregelmäßigem Fall zusätzlich zu den Resonatorparametern noch die Regelverstärkung  $v$  und die Phasenverschiebung  $\sigma$  eine Rolle.

Für  $v \gg 1$  erhält man aus (5.1.14) entsprechend (3.6.12):

$$\frac{1}{\tau_{\text{eff}}} = \frac{1}{\tau_\mu} + \frac{|\Delta\omega_\mu| \tan\theta}{v} \left( \frac{\Omega_\mu \tau \sin\sigma + (\Omega_\mu \tau)^2 \cos\sigma}{1 + (\Omega_\mu \tau)^2} \right) \quad (6.3.1)$$

Die beiden rein mechanischen Parameter: Eigenfrequenz  $\Omega_\mu$  und natürliche Abklingzeitkonstante  $\tau_\mu$  sind praktisch nicht variabel. Die belastete elektrische Abklingzeit  $\tau$  kann durch Veränderung der Ankopplung variiert werden; wegen der geringen Generatorleistungsreserve von 5 W war der Variationsbereich stark begrenzt. Die statische Frequenzverschiebung  $|\Delta\omega_\mu|$  des mechanischen Modes  $\mu$ , die proportional der Blindleistung des Resonators ist (vgl. (2.1.23)), ist wegen feldbegrenzenden Phänomenen<sup>37)</sup> ebenfalls nicht ohne weiteres variabel. Die Regelverstärkung  $v$  ist nach oben durch die Stabilitätsgrenze des Phasenregelkreises und nach unten durch die Mindestverstärkung zur Ausregelung der externen Störungen begrenzt. Die beiden einzigen freien Parameter, die gleichzeitig einen signifikanten Einfluß auf die Stabilität haben, sind die statische Hochfrequenzphasenverschiebung  $\theta$  und die Signalphasenverschiebung  $\sigma$ .

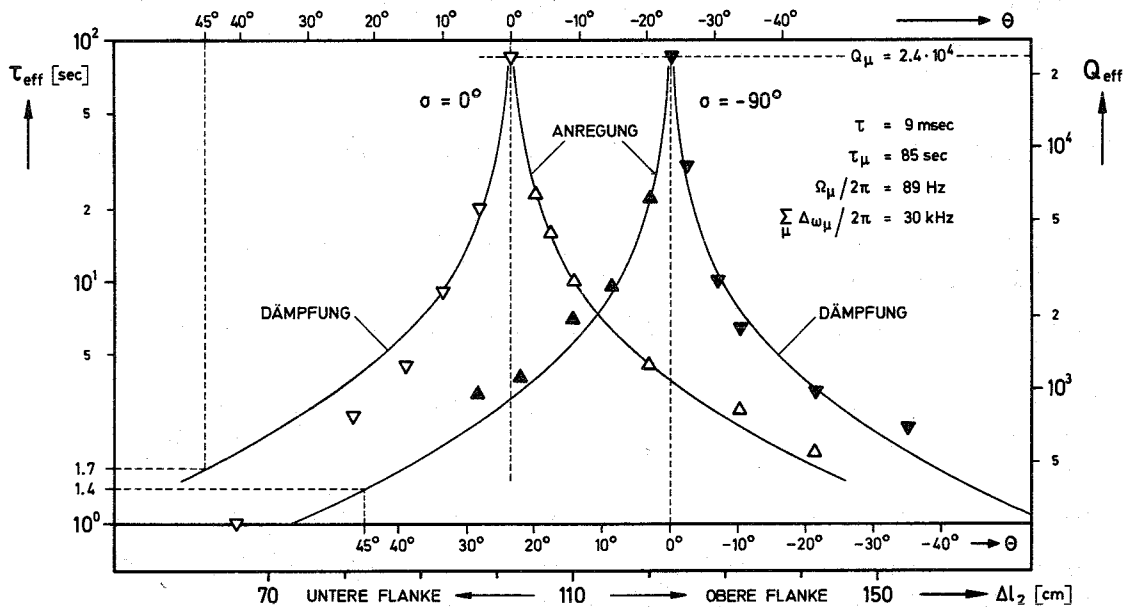
Die Hf-Phase  $\theta$  wurde nach Bild 6.8 durch Ändern der Leitungslänge  $l_2$  mittels Posaune 2 eingestellt. In einer früheren Arbeit<sup>8)</sup> wurde bereits für eine  $\lambda/2$ -Helix mit den im Abschnitt 6.1 angegebenen Parametern über die Messung von  $\tau_{\text{eff}}$  in Abhängigkeit von  $\theta$  für  $\sigma = -90^\circ$  berichtet.

Die Meßprozedur ging dabei in folgenden Schritten vor sich:

- I. Hf-Phase  $\theta$  mittels  $l_2$  bei kleiner Leistung auf der instabilen Flanke einstellen.
- II. Leistung auf den Sollwert hochfahren und die Anklingzeit messen.
- III. Leistung wieder verringern bis unter die Stabilitätsgrenze; die mechanische Schwingung klingt langsam mit der natürlichen Zeitkonstanten ab.
- IV. Neue Phasenlage  $\theta$  auf der stabilen Flanke einstellen.
- V. Leistung auf den alten Sollwert erhöhen und Abklingzeit der mechanischen Schwingung messen.
- VI. Leistung wieder verringern und neue Phase auf der instabilen Flanke einstellen  $\rightarrow$  I.

Bei den verschiedenen Phasenlagen  $\theta$  wurde die Generatorleistung jeweils so eingestellt, daß sich die gleiche statische Frequenzverschiebung  $\Delta\omega_0$  einstellte. Wegen  $\Delta\omega_0 = \hat{V}_0^2 \sum k_\mu$  ist das gleichbedeutend mit einem konstantgehaltenen Resonatorspannungspegel  $\hat{V}_0$ . Um einen genügend großen Abstand von dem durch externe Störungen verursachten Frequenzhub zu bekommen, wurde die An- bzw. Abklingzeit aus der Zeitdifferenz zwischen einem Frequenzhub von 30 kHz und 90 kHz bestimmt.

Die durch Erschütterung der Aufhängung des Resonators verursachten Frequenzstörungen hatten einen Hub bis zu 1 kHz mit typischen Modulationsfrequenzen von 23 Hz ( $\rightarrow$  Grundwelle) und 46 Hz ( $\rightarrow$  1. Harmonische). Durch die elektromagnetischen Kräfte konnten in verschiedenen Versuchsreihen nur die 1. Harmonische von 46 Hz und die 3. Harmonische von 89 Hz angeregt werden. Das entspricht genau den im Abschnitt 6.1 diskutierten theoretischen Vorstellungen. Im Bild 6.14 sind die gemessenen effektiven mechanischen Abklingzeiten als Funktion der Hochfrequenzphase  $\theta$  für zwei typische Signalphasenverschiebungen  $\sigma$  aufgetragen.



**Bild 6.14:** Effektive mechanische Abklingzeit als Funktion der Hf-Phase  $\theta$  und der Signalphase  $\sigma$

Als Vergleichskurven wurden zwei theoretische Kurven eingezeichnet, die den Meßwerten am besten angepaßt sind. Für diese Kurven gilt nach (6.3.1) für vernachlässigbares  $1/\tau_\mu$ :

$$\tau_{\text{eff}} \approx \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\tan 2\pi\Delta\ell_2/\lambda_\ell} \quad (6.3.2)$$

wobei  $\lambda_\ell$  die Leitungswellenlänge bei der Betriebsfrequenz  $\omega_0/2\pi = 89,85$  MHz ist. Bei der Messung der abgebildeten Kurve mit den Meßwerten  $\nabla$  ( $\rightarrow$  Dämpfung) und  $\Delta$  ( $\rightarrow$  Anregung) wurde ein Phasenregler mit einer Amplitudenfrequenzkennlinie entsprechend Kurve II in Bild 6.12 verwendet. Es zeigt sich tatsächlich, wie nach der Theorie zu erwarten, daß bei  $\sigma = -90^\circ$  im Gegensatz zum ungerегelten Fall bzw.  $\sigma \approx 0^\circ$  die untere Flanke oszillatorisch instabil war, während man auf der oberen Flanke zusätzliche Dämpfung erhielt. Bei  $\theta = -45^\circ$  ist das gemessene  $\tau_{\text{eff}} = 1.4$  sec. Der theoretische Wert nach (6.3.1) ist für:

$$\begin{array}{ll} \Omega_\mu = 2\pi \cdot 89 \text{ Hz} & \tau_\mu = 89 \text{ sec} \\ |\Delta\omega_\mu| = 2\pi \cdot 30 \text{ kHz} & (\rightarrow \hat{V}_0 = 0,25 \text{ MV/m}) \\ \tau = 9 \text{ sec} & \Omega_\mu \tau = 5 \\ \Omega_D = 2\pi \cdot 70 \text{ kHz} & T_1 = 0,22 \text{ sec} \quad T_2 = 10 \text{ } \mu\text{sec} \\ \rightarrow v = 7 \cdot 10^5 & \sigma = -90^\circ \end{array}$$

bei  $\theta = -45^\circ$   $\tau_{\text{eff}} = 17$  sec und damit etwa eine Größenordnung höher als der Meßwert. Für  $\tau \approx 0$  ergibt eine entsprechende Messung bei  $\theta = +45^\circ$ , die im Bild 6.14 links wiedergegeben ist mit den Reglerparametern nach Kurve III in Bild 6.12:

$$\begin{array}{lll} \Omega_D = 2\pi \cdot 34 \text{ kHz} & T_1 = 50 \text{ sec} & T_2 = 4,7 \mu\text{sec} \\ T_3 = 0,47 \text{ msec} & T_4 = 0,11 \text{ sec} & \\ \rightarrow v = 1,9 \cdot 10^5 & & \end{array}$$

eine Abklingzeit von  $\tau_{\text{eff}} = 1$  sec, die relativ gut mit dem Meßwert 1,7 sec übereinstimmt.

Die Versetzung der beiden Kurven in Bild 6.14 ist auf eine unterschiedliche Einstellung der Gleichspannungsunterdrückung (dc-offset) zurückzuführen. Zu dem bei  $\sigma = -90^\circ$  erheblichen Unterschied zwischen Theorie und Messung sollte man bedenken, daß sehr viele Parameter nicht mehr als auf 100 % genau sind und zudem die Schwingamplituden recht groß waren, so daß eine nichtlineare Meßverfälschung in Betracht kommen könnte.

Die Messungen zeigen jedenfalls den in (6.3.1) vorhergesagten Flankenwechsel der Instabilität beim Übergang von  $\sigma = 0^\circ$  zu  $\sigma = -90^\circ$  und eine recht gute Übereinstimmung mit der Theorie bezüglich der  $\theta$ -Abhängigkeit.

Die der natürlichen Abklingzeit  $\tau_\mu = 85$  sec zugeordnete Güte  $Q_\mu = 2,4 \cdot 10^4$  der Niobhelix bei  $T \leq 4,2^\circ$  ist um etwa einen Faktor 25 höher als bei Zimmertemperatur, wie durch Vergleichsmessungen durch Anregung einer normalleitenden Helix mit einem modulierten Gleichstrom ermittelt wurde. Dieser starke Anstieg ist auf einen Festkörpertieftemperatureffekt zurückzuführen. In Nb-Einkristallen wurden sogar mechanische Güten bis zu einigen  $10^6$  beobachtet<sup>24)</sup>. Eine supraleitende bleibeschichtete Kupferhelix mit den gleichen Abmessungen zeigte keine Verbesserung der mechanischen Güte bei tiefen Temperaturen.

In bezug auf die im Abschnitt 5.2 ausführlich diskutierte Schwingungsdämpfung ist in diesem Zusammenhang folgende Beobachtung wichtig: der typische Störmodulationshub  $\delta\hat{\omega}_{ex} \approx 2\pi \cdot 1$  kHz stieg weder bei tiefen Temperaturen an, wie es bei resonanter Anregung wegen des Anwachsens der mechanischen Güte hätte sein müssen, noch verkleinerte sich der Hub beim Betrieb des Resonators auf der Flanke bei etwa  $|\theta| = 45^\circ$ , wie es wegen  $\tau_\mu/\tau_{eff} \approx 50$  nach Bild 6.14 ebenfalls hätte sein müssen.

Eine mögliche Interpretation dieses Ergebnisses ist, daß die Störanregung im wesentlichen statistisch und nicht resonant ist, woraus aber folgen würde, daß der Störfrequenzhub durch Bedämpfung, welcher Art auch immer, nicht wesentlich beeinflußt

werden kann, wenn die spektrale Leistungsdichte der Störung konstant in einem Bereich größer als die jeweilige mechanische Bandbreite ist.

#### 6.4 Amplituden-Frequenz-Kopplung durch schmalbandige Hf-Bauteile

Aus der Fülle an Kopplungen, die bei jeder realen Hochfrequenzschaltung eine Rolle spielen, soll in diesem Abschnitt eine Kopplung diskutiert werden, der bei der in Bild 6.8 dargestellten Phasenregelung in bezug auf die elektromechanische Kopplung eine große praktische Bedeutung zukommt.

Wenn der Leistungsverstärker bzw. der mit der Posaune 1 abstimmbare Leitungsresonator zwischen Verstärkerausgang und Resonatorankopplung nicht auf Resonanz abgestimmt sind, bekommt man eine frequenzabhängige Modulation der Generatoramplitude  $\hat{V}_g$ . Diese Kopplung wurde in Bild 5.9 a) mit der Übertragungsfunktion  $K_{12}(s)$  bezeichnet.

Wenn das betrachtete Hf-Bauteil durch einen einfachen Schwingkreis mit der Resonanzfrequenz  $\omega_s$  und der Abklingzeit  $\tau_s$  angenähert werden kann, erhält man für  $K_{12}(s)$  ganz entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.1 näherungsweise:

$$K_{12}(s) = - \frac{\tau_s}{\tau} \frac{y_s}{(1 + \tau_s s)^2 + y_s^2} \quad (6.4.1)$$

wobei  $y_s$  die normierte Verstimmung ist:

$$y_s = \tau_s (\omega - \omega_s) = -\tan\theta_s \quad (6.4.2)$$

$\omega$  - Generatorfrequenz

$\theta_s$  - Hf-Phasenverschiebung des Schwingkreises

Die Übertragungsfunktion des bei  $G_m(s)$  aufgeschnittenen Kreises ist direkt aus der charakteristischen Gleichung (5.4.20)

für  $F_a \equiv 0$  und  $K_{21} \equiv 0$  bestimmbar:

$$F_o(s) = \frac{G_m(s)(y - K_{12}(s)F_\phi(s))}{(1 + \tau s)^2 + y^2 + F_\phi(s)(1 + \tau s + y\tau s K_{12}(s))} \quad (6.4.3)$$

Eine ähnliche Gleichung ergab sich mit (5.3.15) bei der Betrachtung der direkt phasengesteuerten Amplitude.

Die Übertragungsfunktion (6.4.3) für  $s = j\Omega_\mu$  ist wegen  $\tau_s/\tau \ll 1$  für einen supraleitenden Resonator bei großer Regelverstärkung näherungsweise:

$$F_o(j\Omega_\mu) = \frac{|\Delta\omega_\mu| \tau_\mu \Omega_\mu \tau}{1 + j\Omega_\mu \tau} \left( \frac{y}{v} e^{-j\sigma} - K_{12}(j\Omega_\mu) \right) \quad (6.4.4)$$

Weil die Modulationsfrequenz  $\Omega_\mu$  sehr klein gegen die Bandbreite des betrachteten normalleitenden Hf-Schwingkreises ist ( $\Omega_\mu \tau_s \ll 1$ ), ist  $K_{12}(j\Omega_\mu)$  annähernd reell:

$$K_{12}(j\Omega_\mu) \approx - \frac{\tau_s}{\tau} \frac{y_s}{1 + y_s^2} \frac{1}{x} \quad (6.4.5)$$

Die effektive mechanische Abklingzeit ist nun im Vergleich zu (6.3.1):

$$\frac{1}{\tau_{\text{eff}}} = \frac{1}{\tau_\mu} + \frac{|\Delta\omega_\mu| \Omega_\mu \tau}{v(1 + (\Omega_\mu \tau)^2)} (\tan\theta(\sin\sigma + \Omega_\mu \tau \cos\sigma) + x \cdot v) \quad (6.4.6)$$

Für  $x > 0$ , d.h.  $y_1 < 0$ , also auf der unteren Flanke des Schwingkreises wirkt diese zusätzliche Kopplung bedämpfend auf die mechanische Vibration, und zwar unabhängig davon, auf welcher Flanke der Resonator betrieben wird und wie groß die Signalphasenverschiebung  $\sigma$  im Rückkoppelzweig ist. Im Vergleich zu der Dämpfung durch die Resonatorflanke wird die Wirksamkeit dieser Kopplung vergleichbar stark, wenn die Regelverstärkung  $v$  in die gleiche



Größenordnung kommt wie das Verhältnis von Schwingkreisbandbreite zu Resonatorbandbreite, d.h.  $v = \tau/\tau_s$ .

Mit den Zahlen für das Beispiel aus dem vorhergehenden Abschnitt war die Verstärkung  $v = 7 \cdot 10^5$  für den Fall  $\sigma = -90^\circ$ . Die Bandbreite des schmalbandigen Leistungsverstärkers in Bild 6.8 betrug  $\frac{1}{\pi\tau} \approx 1$  MHz; für  $y_s = 1$  ergibt sich  $x = 1,8 \cdot 10^{-5}$  und damit  $x \cdot v = 12,5$ . Das bedeutet in diesem speziellen Fall, eine Verstimmung des Schmalbandverstärkers wirkt stärker auf Dämpfung bzw. Entdämpfung der mechanischen Vibration als eine Verstimmung des Resonators. Genau dieses Verhalten wurde bei den Messungen im letzten Abschnitt beobachtet. Der Schmalbandverstärker als auch die Leitung  $l_1$  mußten sehr genau auf Resonanz abgestimmt werden, damit die  $\theta$ -Abhängigkeit der Abklingzeiten  $\tau_{\text{eff}}$  sichtbar wurde. Karliner<sup>49)</sup> berichtet über ähnliche Erscheinungen beim Betrieb der normalleitenden Einzelresonatoren am Nowosibirsker Speicherring VEPP-2.

### 6.5 Phasenregelung mit Eigenfrequenz- und Generatorphasensteuerung

---

In diesem letzten Abschnitt soll der Stellenwert der bisherigen Betrachtungen für das Karlsruher Projekt eines supraleitenden Protonenbeschleunigers<sup>6)</sup> diskutiert werden. Die speziellen Eigenschaften der Anfangsstufe dieses Beschleunigers von 0,8 - 20 MeV, die aus Helixresonatoren aufgebaut werden soll, erfordern eine weitere Verallgemeinerung der Ausführungen des Abschnitts 5.4.

Eine ganze Reihe von Gründen spricht dafür, einen Linearbeschleuniger aus einzelnen hochfrequenzmäßig unabhängigen Sektionen aufzubauen. Vor allem auch Strahl-Feld-Stabilitätsgründe<sup>22)</sup> sprechen dafür, die Sektionen eines supraleitenden Protonenbeschleunigers bei niedrigen Energien ( $\sim 1$  MeV) und hohen Strömen ( $\sim 1$  mA) nicht sehr lang werden zu lassen ( $\sim 1$  m).

Die im Abschnitt 6.2 beschriebene Phasenregelung mit Generatorfrequenzsteuerung kann dann insofern nicht Prototyp einer Regelung für eine solche Hf-Sektion sein, als es hier gilt, die Absolutphase  $\phi_r$  des Resonators und nicht die Relativphase  $\phi = \phi_r - \phi_g$  zwischen Resonator- und Generatorphase  $\phi_g$  konstant zu halten. Das bedeutet aber: alle Sektionen erhalten ihre absolute Sollphase  $\phi_r$  soll von einem gemeinsamen Oszillator (master oscillator). Bei allen konventionellen Linearbeschleunigern, zu denen in diesem Zusammenhang auch supraleitende Elektronen- oder Protonenbeschleuniger mit Topf- oder Koaxialresonatoren gezählt werden, ist der Störfrequenzhub  $\delta\omega_{ex}$  kleiner als die Bandbreite ( $\delta\omega_{ex} \tau \ll 1$ ). Daher genügt es hier, die Absolutphase mit einem konventionellen elektronischen Phasenschieber und die aus der Fehlanpassung resultierende Amplitudenänderung durch eine entsprechende Generatorleistungssteuerung konstant zu halten. Für Frequenzstörungen, die groß gegen die Resonatorbandbreite sind, das ist gerade der typische Fall für eine supraleitende Helix, wäre der oben genannte Betriebszustand ökonomisch nicht vertretbar, da eine Generatorleistungsreserve von  $1 + (\delta\omega_{ex} \cdot \tau)^2$  zur Verfügung stehen müsste. Zunächst würde man durch überkritische Ankopplung des Generators dafür sorgen, daß die Störungen wieder innerhalb der neuen belasteten Bandbreite  $\frac{1}{\pi\tau_{\underline{u}}}$  liegen, d.h.  $\delta\omega_{ex} \tau_{\underline{u}} \approx 1$  wählen. Auch hier braucht man immer noch eine um einen Faktor  $\tau/\tau_{\underline{u}}$  größere Generatorleistung als zur Deckung von Hochfrequenzverlusten und zur Strahlbeschleunigung nötig wäre.

Unnötiger Aufwand an Generatorleistung kann nur vermieden werden, wenn es gelingt, eine genügend stark an den Resonator ankoppelnde schnell steuerbare Reaktanz zu finden. Auf die sehr vielschichtige Problematik kann in diesem Rahmen nicht eingegangen werden. Unter "schnell steuerbar" ist zu verstehen, daß die zugehörige Regelschleife wenigstens eine so große Durchtrittsfrequenz und damit Regelverstärkung bei  $\Omega_{\mu}$  besitzt, daß die verbleibenden Frequenzstörungen innerhalb der belasteten Bandbreite des Resonators liegen. Die verbleibenden Phasenstörungen können dann durch die Absolutphasenregelschleife auf die gewünschte Phasenabweichung ausgeregelt werden.

Bei der Relativphasenregelung, die in der einschlägigen Literatur auch als Frequenzregelung bezeichnet wird, ist  $\phi$  die Regelgröße und  $\omega_0$  die Stellgröße, während bei der Absolutphasenregelung  $\phi_r$  die Regelgröße und  $\phi_g$  die Stellgröße ist.

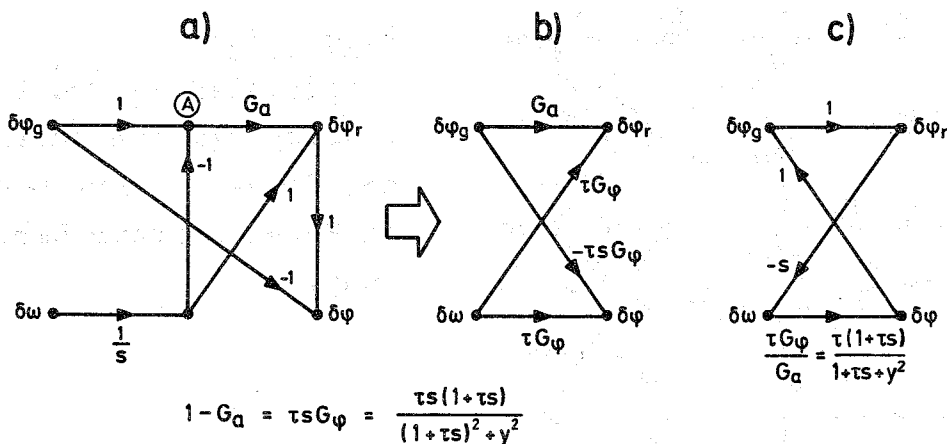
Das Strukturbild, aus dem das Zusammenwirken dieser beiden Regelkreise klar wird, läßt sich aus der im obigen Sinne erweiterten linearisierten komplexen Näherungsdifferentialgleichung im Bildbereich entsprechend (5.3.4) gewinnen:

$$(1+\tau s+iy)(\delta v+i\delta\phi_r) = (1+iy)(\delta v_g+i\delta\phi_g) + i\tau\delta\omega$$

und

$$\delta\phi = \delta\phi_r - \delta\phi_g \tag{6.5.1}$$

Wenn man zunächst einmal den Amplitudenkreis wegläßt, kann man die Regelstrecke mit dem in Bild 6.15 a) dargestellten Signalflußgraphen beschreiben, der für den Sonderfall  $\delta\phi_g \equiv 0$  gerade mit der in Bild 6.11 b) gezeichneten Streckendarstellung identisch ist. Der Summierpunkt A in Bild 6.15 a) ist die absolute Eingangsphase  $\delta\phi_{\text{ein}}$  des Resonators. Sie setzt



**Bild 6.15:** Signalflußgraphen für die Strecke der Absolut- und Relativphasenregelung (Phasen- u. Frequenzregelung).

sich zusammen aus dem Integral über die Eigenfrequenzänderung  $\delta\omega$  und der Generatorphasenänderung  $\delta\phi_g$ :

$$\delta\phi_{\text{ein}} = - \int \delta\omega dt + \delta\phi_g \quad (6.5.2)$$

Die Übertragungsfunktion  $G_a(s)$  beschreibt das Übertragungsverhalten sowohl von der Generatoramplitude  $\delta v_g$  auf die Resonatoramplitude  $\delta v$  als auch von der absoluten Eingangsphase  $\delta\phi_{\text{ein}}$  auf die absolute Resonatorphase  $\delta\phi_r$ .

In den Bildern 6.15 b) und c) sind die entsprechenden P- und V-kanonischen Darstellungen gegenübergestellt. Man sieht auch hier wieder, daß diese gekoppelte Strecke in der V-kanonischen Darstellung wesentlich übersichtlicher wird.

Wenn man nun als dritte Regelschleife wieder die Amplitudenregelung hinzunimmt, erhält man schließlich die in Bild 6.16 dargestellte Beschreibung der vollständigen Dreifachregelung mit Amplituden-, Phasen- und Frequenzregelung, bei der neben den gegebenen Kopplungen nur die drei Hauptregler  $F_a$ ,  $F'_\phi$  und  $F_\omega$  eingezeichnet wurden.

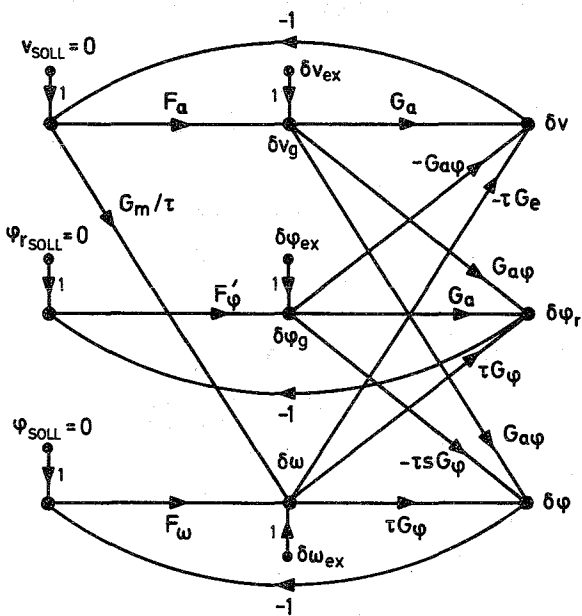
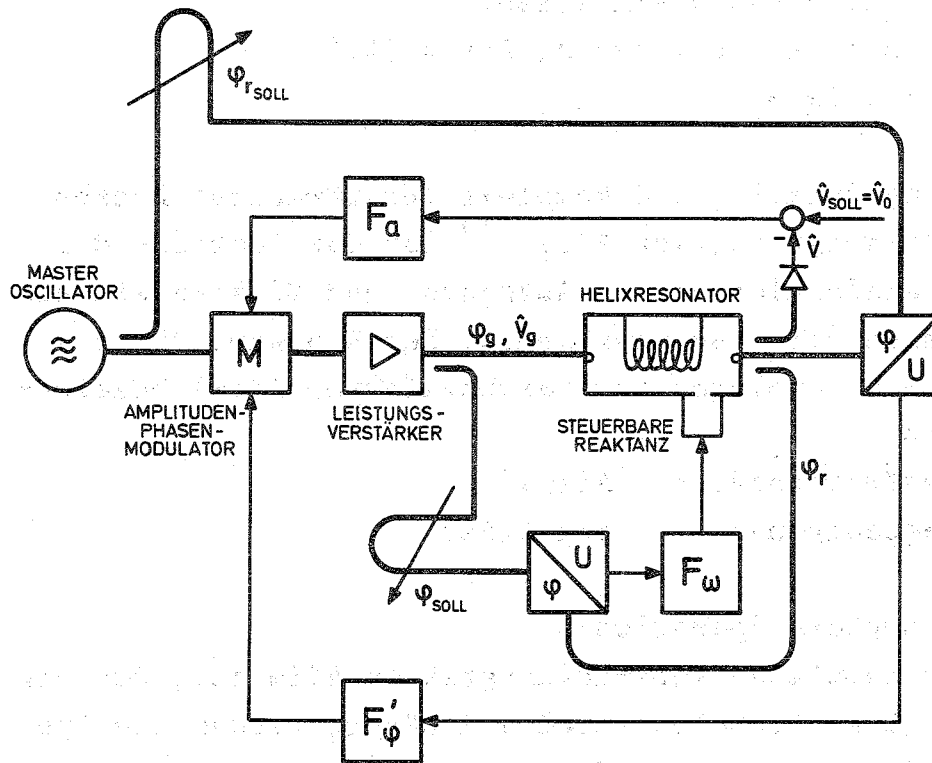


Bild 6.16:  
Linearisiertes Dreifachregelsystem für Amplitude, Phase und Frequenz in P-kanonischer Darstellung.

Eine Blockschaltung des realen Dreifachregelsystems, das Prototyp für die Regelung einer unabhängigen Hochfrequenz-  
 sektion ist, wurde zum Vergleich noch einmal in Bild 6.17  
 dargestellt.



**Bild 6.17:** Blockschaltbild des Regelungssystems einer unabhängigen Hf-Sektion

Das Verhalten des Gesamtsystems nach Bild 6.16 hängt neben der elektromechanischen Kopplung über  $G_m$  wesentlich ab von dem Übertragungsverhalten des Eigenfrequenzsteuergliedes, das man sich zu  $F_\omega$  hinzugerechnet denken kann. Erst wenn dessen Eigenschaften bekannt sind, kann darüber entschieden werden, welche Entkopplungsmaßnahmen gewählt werden, um das Dreifachregelungs-  
 system auch ponderomotorisch stabil zu bekommen. Diese Maßnahmen werden sich nicht prinzipiell von denen unterscheiden, die im Kapitel 5 ausführlich diskutiert wurden.

Liste der wichtigsten Bezeichnungen

A. Allgemeine Konventionen

1. Komplexe Zahlen und Operationen:

$$A = \hat{A} e^{i\phi}; \hat{A} = |A|; \phi = \arg A, AA^* = |A|^2$$

$$A = \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A.$$

2. Übertragungsfunktion und komplexe Verstärkungsfaktoren:

Die Übertragungsfunktion  $A(s)$  <sup>51)</sup> ist der Quotient der Laplacetransformierten von Ausgangs- und Eingangssignal des linearen Übertragungsgliedes. Der Randwert für  $s = i\omega$  soll als komplexer Verstärkungsfaktor  $A(i\omega)$  bezeichnet werden.

Amplitudenfrequenzgang:  $|A(i\omega)|$

Phasenfrequenzgang:  $\arg A(i\omega)$

3. Doppelt komplexe Operationen:

Für einen komplexen Verstärkungsfaktor  $A(i\omega, j\Omega)$ , der von zwei komplexen Symbolen  $i$  und  $j$  abhängt, werden die Operationen  $\operatorname{Re}_i$ ,  $\operatorname{Im}_i$ ,  $\arg_i$  mit dem komplexen Symbol gekennzeichnet, auf das sich die Operation bezieht:

$\operatorname{Re}_i A$ ,  $\operatorname{Im}_i A$ ,  $\arg_i A$ ,  $A_i^*$  bzw.

$\operatorname{Re}_j A$ ,  $\operatorname{Im}_j A$ ,  $\arg_j A$ ,  $A_j^*$

Dabei wird  $j$  bei Operationen, die sich auf  $i$  beziehen, als reelle Zahl behandelt und umgekehrt. Beide Operationen sind vertauschbar.

4. Zeitliche Mittelwertbildung:

$$\langle A(t) \rangle_\omega = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} A(t) dt$$

5. Matrizen A werden durch Unterstreichung gekennzeichnet, die Determinante durch  $\det \underline{A}$ .

6. Für kleine Auslenkungen um eine Ruhelage  $A$  wird das Symbol  $\delta A$  verwendet; die Ruhelage wird dabei oft mit dem Index  $0$  gekennzeichnet  $\delta A = A - A_0$ .

7.  $\vec{A}$  - räumlicher Vektor,  $\vec{A}(\vec{r})$  - vektorielles Vektorfeld

### B. Spezielle Symbole

Die Zahlen in der rechten Spalte verweisen auf die Definitionsgleichung oder die Seite, auf der die Abkürzung eingeführt wird.

$A$	Arbeit der ponderomotorischen Kräfte	(2.1.6)
$A_n$	komplexer Entwicklungskoeffizient	(4.2.12)
$a$	Helixradius	122
$a_n$	Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der offenen Schleife	(3.5.2)
$a(t)$	komplexe Dämpfungsgröße	(4.2.4)
$b$	Außenleiterradius der Helix	122
$c$	Lichtgeschwindigkeit	124
$c_\mu (c_\nu)$	Federkonstante des mechanischen Modes $\mu(\nu)$	(2.1.16)
$c'$	Federkonstantenbelag der Helix	(6.1.11)
$c_b$	Federkonstante des Helixbeins	(6.1.20)
$c'_b$	Äquivalenter Federkonstantenbelag des Helixbeins	(6.1.26)
$D$	Dämpfungsfunktion	(5.1.18)
	Helixdrahtaußendurchmesser	126
	komplexer Differentialoperator	(4.3.1)
$D_n$	Hurwitzdeterminante $n$ -ter Ordnung	(3.5.4.a)
$\underline{D}$	Diagonalmatrix	(5.4.15)
$d$	Helixdrahtinnendurchmesser	126
$E$	Elastizitätsmodul	133
$\vec{E}(\vec{r})$	elektrische Feldstärke)	5
$E_0$	elektrische Achsenfeldstärke der Helix (laufende Welle)	124
$\vec{F}(\vec{r})$	ponderomotorische Kraft	(2.1.5)
$F_\xi(\vec{r})$	Projektion der ponderomotorischen Kraft in Bewegungsrichtung der Wand	(2.1.10)

$F'(z)$	ponderomotorischer Kraftgradient der Helix in z-Richtung	(6.1.3)
$F_\mu$	generalisierte ponderomotorische Kraft	(2.1.12)
$F'_\mu$	generalisierter ponderomotorischer Kraftgradient der Helix	(6.1.8)
$F_o(s)$	Übertragungsfunktion (Ü.) der offenen Schleife der ponderomotorischen Rückwirkung	(3.1.9)
$F_a(s)$	Ü. des Amplitudenreglers	(5.3.11)
$F_\phi(s)$	Ü. des Relativphasenreglers	(5.1.8)
$F'_\phi(s)$	Ü. des Absolutphasenreglers	158
$F_\omega(s) =$		
$\tau F_\phi(s)$	Ü. des renormierten Relativphasenreglers (Frequenzreglers)	142
$F_{oa}(s)$	Ü. der offenen Amplitudenregelschleife	(5.4.10)
$F_{o\phi}(s)$	Ü. der offenen Relativphasenregelschleife	(5.4.11)
$F_e(j\Omega)$	exakte Beschreibungsfunktion (äquivalenter komplexer Verstärkungsfaktor)	(4.1.14)
$f_\mu$	normierte ponderomotorische Kraft	(2.1.22)
$G$	Schubmodul der Helix	126
$G_o(s, i\omega)$	Ü. für die komplexe Amplitude	(3.1.3)
$G_\mu(s)$	Ü. für den mechanischen Mode $\mu$	(3.1.5)
$G_m(s)$	mechanische Ü.	(5.3.12)
$G_e(s)$	Ü. von einer Frequenzänderung auf eine Resonatoramplitudenänderung	(3.1.10)
$G_\phi(s)$	Ü. von einer Frequenzänderung auf eine Relativphasenänderung	(5.1.3)
$G_a(s)$	Ü. von einer Generatoramplitudenänderung auf eine Resonatoramplitudenänderung	(5.3.9)
$G_{a\phi}(s)$	Ü. von einer Generatoramplitudenänderung auf eine Relativphasenänderung	(5.3.10)
$\underline{G}$	Streckenmatrix des Amplituden-Phasenregelkreises (Zweifachregelkreis)	(5.4.2)
$g_\mu$	Fourierentwicklungskoeffizienten der Steuerkräfte	(5.2.4)
$\underline{H}$	Diagonalmatrix der V-kanonischen Regelstrecke	(5.4.24)
$H_o$	magnetische Achsenfeldstärke der Helix (laufende Welle)	(6.1.1)
$\vec{H}(\vec{r})$	magnetische Feldstärke	5
$H_e(j\Omega, \eta)$	genäherte Beschreibungsfunktion	(4.2.15)
$h_\mu$	Fourierentwicklungskoeffizienten der externen Störkräfte	(5.2.1)



I	Flächenträgheitsmoment	(6.1.21)
$I_0$	mittlere Teilchenstromstärke	48
i, j	imaginäre Einheiten	12
K(s)	Ü. einer Kopplung von der Relativphasen- änderung auf Generatoramplitudenänderung	106
$K_{12}(s),$ $K_{21}(s)$	Elemente des Serienkopplers	(5.4.14)
$k_\mu$	elektromechanischer Kopplungsfaktor des mechanischen Modes $\mu$	(2.3.1)
$l$	Helixlänge	122
$m'$	Massebelegung der Helix	(6.1.12)
$m'_b$	Massebelegung des Helixbeins	(6.1.25)
N(s)	Charakteristische Nennerfunktion der Zweifachregelstrecke	(5.3.16)
$N_m(n)$	Entwicklungskoeffizient m-ter Ordnung der genäherten Beschreibungsfunktion $H_e$	(4.2.16)
$P_v$	Resonatorverlustleistung	(2.2.3)
$P_g$	angebotene Generatorleistung	12
$P_{2n}(y)$	Entwicklungspolynom der Schwingkennlinie für $\Omega_v \tau \ll 1$	(4.3.17)
Q	Kreisgüte des unbelasteten Resonators	(2.2.5)
$Q_L = \frac{Q}{1+\beta}$	Kreisgüte des belasteten Resonators	48
$Q_\mu(Q_\nu)$	Kreisgüte des mechanischen Modes $\mu(\nu)$	8, 28
$Q_{eff}$	effektive mechanische Kreisgüte	53
$Q_{2n}(y)$	Entwicklungspolynom der mittleren Resona- torspannung für $\Omega_v \tau \ll 1$	(4.3.19)
q	normierte mechanische Auslenkung	(2.4.4)
$q_\mu$	generalisierte mechanische Koordinate (Auslenkung des Modes $\mu$ )	(2.1.11)
$\vec{r}$	Radiusvektor	5
s	Laplacevariable	24
	Helixsteigung	122
$T_1, T_2,$ $T_3, T_4$	Reglerzeitkonstanten	145
U	elastisches Potential	(2.1.16)
U'	gestörtes elastisches Potential	(2.4.8)
$V, V_0$	komplexe Resonatoramplitude	(2.2.12)
$V_g$	normierte komplexe Generator- bzw. Reso- nanzamplitude	(2.2.10, 11)
$V_m = \langle V \rangle_\Omega$	über eine Modulationsperiode gemittelte Resonatoramplitude	(4.1.16)

$\tilde{V}_g$	Generatoramplitude für die oszillatorische Stabilitätsschwelle	(3.6.1)
$\tilde{V}_{go}$	Generatoramplitude für die monotone Stabilitätsschwelle	50
$v$	Resonatorspannung	12/13
$v_L$	Schallwellengeschwindigkeit längs der Helixachse	(6.1.10)
$v_{\perp}$	transversale Schallgeschwindigkeit	(6.1.27)
$v_b$	äquivalente Schallgeschwindigkeit im Helixbein	136
$v(v_{\phi})$	Phasenreglerverstärkung bei $\Omega = \Omega_v$	(5.1.16)113
$v_a$	Amplitudenreglerverstärkung bei $\Omega = \Omega_v$	113
$W$	gespeicherte elektromagnetische Energie	(2.1.7)
$w$	Anzahl der Helixwindungen	126
$X_n$	normierte Impedanz n-ter Ordnung	(4.2.10)
$Y_h$	mechanischer Leitwert der Helix	(6.1.23)
$Y_b$	mechanischer Leitwert der Helixbeine	(6.1.22,24)
$y$	normierte Verstimmung des Resonators	(2.3.6)
$y_s$	normierte Verstimmung des Hf-Verstärkers	(6.4.2)
$Z$	Shuntimpedanz des Resonators	(2.2.4)
$Z/Q$	normierte Shuntimpedanz	(2.2.6)
$Z_n$	doppelt komplexe Impedanz des n-ten Seitenbandes	(4.1.9)
$z_n$	Impedanz des n-ten Seitenbandes	(3.3.7)
$\alpha$	Signalphasenwinkel der Eigenfrequenzmodulation	(4.2.7)
$\beta$	Wirkleistungskoppelfaktor = $Q/Q_L - 1$	12
$\gamma_v$	radiale Wellenzahl des elektromagnetischen Helixmodes $v$	123
$\Delta q =  \Delta\omega  \tau$	normierte mechanische Schwingweite	73
$\Delta\omega$	komplexe Amplitude der Eigenfrequenzmodulation	(3.3.1) (4.1.11) (4.2.4)
$\Delta\omega_o$	Eigenfrequenzverschiebung durch die ponderomotorischen Kräfte für den Pegel $\tilde{V}_o$	(2.1.20) (2.2.8)
$\Delta\omega_{\mu}$	Beitrag des mechanischen Modes $\mu$ zur Eigenfrequenzverschiebung $\Delta\omega_o$	(2.1.20,23)
$\delta v$	relative Resonatoramplitudenänderung	(5.3.3)
$\delta v_g$	relative Generatoramplitudenänderung	(5.3.4)
$\delta v_{ex}$	Amplitudenstörung	158

$\delta\phi =$		
$\delta\phi_r - \delta\phi_g$	Resonatorphasenänderung gegenüber der Generatorphase	(5.1.1) (5.3.3)
$\delta\phi'$	Geregelte Resonatorrelativphasenänderung	86
$\delta\phi_r$	Resonatorabsolutphasenänderung	(6.5.1)
$\delta\phi_g$	Generatorabsolutphasenänderung	(6.5.1)
$\delta\phi_{ex}$	Absolutphasenstörung	158
$\delta\omega = \sum_{\mu} \delta\omega_{\mu}$	Eigenfrequenzänderung	86, 102, 157
$\delta\omega_{\mu}$	Eigenfrequenzänderungsbeitrag des mechanischen Modes $\mu$	86
$\delta\omega_{ex}$	Eigenfrequenzstörung durch externe Kraftquellen	93
$\delta\omega'$	geregelte Frequenzabweichung	(5.1.8)
$n$	Phasenmodulationsindex	(4.2.7)
$\eta_i$	normierte Schwingamplitude eines nichtlinearen Grenzyklus	74
$\theta$	Trägerphasenverschiebung des Resonators	(2.3.11)
$\theta_s$	Trägerphasenverschiebung des Hf-Verstärkers	(6.4.2)
$\theta_n(\eta)$	Amplitudenmodulationsindex der n-ten Oberwelle	(4.3.4)
$\kappa_{\mu}$	Wellenzahl der Helix für den mechanischen Mode $\mu$	(6.1.7)
$\kappa_{\nu}$	axiale Wellenzahl der Helix für den elektrischen Mode $\nu$	(6.1.6)
$\lambda$	normierte Generatorfrequenz	(2.4.5)
	Helixwellenlänge	122
$\lambda_{\ell}$	Leitungswellenlänge	140a
$\xi(\vec{r})$	mechanische Auslenkung der Resonatorwände	(2.1.9)
$\xi(z)$	mechanische Auslenkung der Helixwindungen in z-Richtung	(6.1.12)
$\rho$	Massendichte des Helixmaterials	126
$\sigma(\sigma_{\phi})$	Phasenverschiebung des Phasenreglers bei $\Omega = \Omega_{\nu}$	(5.1.16) 113
$\sigma_a$	Phasenverschiebung des Amplitudenreglers bei $\Omega = \Omega_{\nu}$	113
$\tau$	Abklingzeit des elektrischen Feldes beim belasteten Resonator	(2.2.9)
$\tau_{\mu}(\tau_{\nu})$	Abklingzeit des mechanischen Modes $\mu(\nu)$	8
$\tau_{eff}$	effektive mechanische Abklingzeit bei elektrischer Be- oder Entdämpfung	(3.6.12)

$\tau_{\phi}$	Meßverzögerungszeit	84/85
$\tau_s$	Abklingzeit (Verzögerungszeit) des Hf-Verstärkers	153
$\phi_{\mu}(\vec{r})$	mechanische Eigenfunktion (Mode)	6
$\phi_{\mu}(z)$	mechanische Helix eigenfunktionen	(6.1.7)138
$\phi_s$	Teilchensollphase (Synchronphase)	48
$\psi_e(\psi_{ev})$	Signalphasenverschiebung der Amplitudenmodulation für ein Frequenzmodulationssignal mit der Modulationsfrequenz $\Omega(=\Omega_{\nu})$	(3.2.2) (3.6.3)
$\psi_{\phi}$	Signalphasenverschiebung der Phasenmodulation für ein Frequenzmodulationssignal mit der Frequenz $\Omega$	(5.1.5)
$\Omega$	Signalfrequenz, Modulationsfrequenz	27, (3.3.1)
$\Omega_{\mu}(\Omega_{\nu})$	mechanische Eigenfrequenz des Modes $\mu(\nu)$	7, 135
$\Omega_D$	Durchtrittsfrequenz	141
$\Omega_K$	kritische Frequenz	(3.5.7)
$\omega$	Generatorfrequenz, Trägerfrequenz	(2.2.10)
$\omega_0$	Resonatoreigenfrequenz bei Feldstärke 0 ("natürliche Eigenfrequenz")	12
$\omega_c(\omega_{co})$	Resonatoreigenfrequenz bei der Resonatoramplitude $\bar{V}_0$	(2.2.8)
$\omega_{\nu}$	Helix eigenfrequenz für den Mode $\nu$ nach dem Schichtmodell	(6.1.2)
$\omega_s$	Resonanzfrequenz des Hf-Schmalbandverstärkers	153

Literatur

- 1) C. Schaefer, "Elektrodynamik und Optik", W. de Gruyter & Co., Berlin, 1932
- 2) M. M. Karliner et al., Sov. Phys.-Techn. Phys., 11, 1501 (1967)
- 3) V. E. Shapiro, JETP 28, 301 (1969)
- 4) H. Klein et al., Proc. Int. Conf. on Reactions Induced by Heavy Ions, Heidelberg, 1969
- 5) B. W. Montague, CERN, ISR-300/LIN/67-34 und 57 (1967)
- 6) A. Citron, Proc. of the Linear Acc. Conf., Batavia, 1970, p. 239
- 7) D. Schulze, Proc. of the Linear Acc. Conference, Batavia 1970, p. 359
- 8) D. Schulze et al., IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-18, 160 (1971)
- 9) M. M. Karliner et al., Sov. Phys.-Techn. Phys. 14, 1041 (1970)
- 10) L. D. Landau, E.M. Lifschitz, "Mechanik", Akademie Verlag, Berlin, 1964, S. 180
- 11) J. Müller, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik 54, 157 (1939)
- 12) F. E. Borgnis, C.H. Papas, Handbuch der Physik 16, Springer Verlag, Berlin, 1958, S. 411
- 13) J. C. Slater, "Microwave Electronics", D. van Nostrand Co. Inc., New York, 1958
- 14) R. C. Gluckstern, LASL-Report MP-4/RLG-4 (1965) und BNL-Report, AADD-90 (1965)
- 15) J. J. Stoker, "Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems", Intersci. Publ.Inc., New York, 1963
- 16) H. Kauderer, "Nichtlineare Mechanik", Springer Verlag, Berlin, 1958
- 17) K. Magnus, "Schwingungen", Teubner-Verlag, Stuttgart, 1969
- 18) L. Cremer, Regelungstechnik 1, 17 und 38 (1953)
- 19) O. Föllinger, G. Gloede, "Dynamische Struktur von Regelkreisen", AEG, Berlin, 1964
- 20) Feasibility Study for a Two-Mile Superconducting Accelerator, SLAC, Stanford University, 1969

- 21) K. Magnus, "Über ein Verfahren zur Untersuchung nicht-linearer Schwingungs- und Regelungssysteme", VDI-Forschungsheft 451, 1955
- 22) F. Heller, KFK-Ext. Ber. 3/71-6, 1971
- 23) D. Schulze, KFK, Ext. Ber. 3/68-2, 1968
- 24) E. J. Kramer, C.L. Bauer, Phys. Rev. 163, 407 (1967)
- 25) K. W. Wagner, "Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen", Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden, 1947
- 26) N. Krylow, N. Bogoljubow, "Introduction to Nonlinear Mechanics", Princeton University Press, Princeton, 1947
- 27) O. Föllinger, "Nichtlineare Regelungen I", Oldenbourg Verlag, München, 1969
- 28) R. Lauber, Proc. 2nd IFAC Congress, Basel, 1963, p. 14
- 29) M. Abramowitz, I.A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publ., 1968, p. 360
- 30) G. N. Watson, "A Treatise on the Theory of Bessel Functions", Cambridge, 1952, p. 37
- 31) R. A. Jameson, LASL-Report LA-3372, Los Alamos, University of Cal., 1965
- 32) L. R. Suelzle, HEPL-Report 564, Stanford University, 1968
- 33) H. Schwarz, "Mehrfachregelungen", Springer Verlag, Berlin 1967
- 34) S. J. Mason, "Feedback Theory-Some Properties of Signal Flow Graphs", Proc. IRE 41, 1144 (1953), also Proc. IRE 44, 920 (1956).
- 35) M. D. Mesarović, "The Control of Multivariable Systems", J. Wiley, New York, 1960
- 36) K. Johnson, Chr. Michelsens Inst. Beretn. 14 (1951) and 16 (1954), CERN-PS/KS 27 (1954)
- 37) J. E. Vetter et al., Part. Acc., in press
- 38) A. J. Sierk et al., Part. Acc. 2, 149 (1971)
- 39) G. Rotter, A.E.Ü. 25, 25 (1971)
- 40) E. Sauter, KFK, Notiz Nr. 154, Juli 1971 (unveröffentlicht)
- 41) K. Ludwig, ZAMM, 25/27, 29 (1947)

- 42) E. Mettler, Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Axiallast, Mitt. Forsch.-Anst. GHH 8, 1940
- 43) H. Strube, KFK, Notiz Nr. 155, Juli 1971, unveröffentlicht
- 44) E. Philippow, "Taschenbuch Elektrotechnik I", VEB Verlag Technik, Berlin, 1968
- 45) K. H. Fasol, "Die Frequenzkennlinien", Springer Verlag, Berlin, 1968
- 46) F. M. Gardner, "Phaselock Techniques", J. Wiley, New York, 1967
- 47) W. Herold, A.E.Ü. 25, 226 (1971)
- 48) D. Gorle et al., CERN MPS-MV/SD 70-1, July 1970
- 49) M. M. Karliner, private Mitteilung
- 50) R. Bellman, "Methoden der Störungsrechnung in Mathematik, Physik und Technik", Oldenbourg-Verlag, München, 1967
- 51) G. Wunsch, "Moderne Systemtheorie", Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1962

