

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

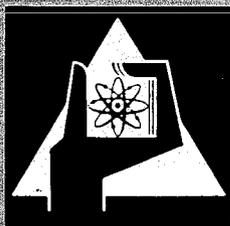
Dezember 1971

KFK 1390

Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Schneller Brüter

Über einige Variationsprinzipie der Kriechmechanik
und ihre Anwendung auf das
Kriechkollaps-Problem von Brennstabhüllrohren

T. Malmberg



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

**GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M.B.H.
KARLSRUHE**

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Dezember 1971

KFK 1390

Institut für Reaktorentwicklung

Projekt Schneller Brüter

Über einige Variationsprinzipie der Kriechmechanik
und ihre Anwendung auf das
Kriechkollaps-Problem von Brennstabhüllrohren⁺

von

T. Malmberg

Gesellschaft für Kernforschung mbH, Karlsruhe

⁺) Als Dissertation genehmigt von der Fakultät für Maschinenbau der
Universität Karlsruhe (T. H.).

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Entwicklung einiger allgemeiner Variationsprinzipie der Kriechmechanik, deren Spezialisierung für dünnwandige Schalen und der Anwendung dieser Prinzipie zur näherungsweise Lösung des Kriechkollaps-Problems von Brennstabhüllrohren.

Bei der Entwicklung der allgemeinen Variationsprinzipie werden zwei technisch wichtige Stoffgesetze unterschieden: Bei dem ersten Stoffgesetz setzt sich die Gesamtverzerrungsrate additiv aus der elastischen Verzerrungsrate, der Kriechrate und der Wärmedehnungsrate zusammen. Dieses Stoffgesetz verknüpft die Gesamtverzerrungsrate mit der Spannungsrate sowie den Spannungen und möglicherweise Größen, die den Verfestigungsgrad beschreiben. Bei dem zweiten Stoffgesetz wird nur die Kriechrate als wesentlich erachtet und hier verknüpft das Stoffgesetz die Verzerrungsrate mit den Spannungen und wiederum möglicherweise Größen, die die Verfestigung charakterisieren. Es wird bei der Formulierung dieser Kriechgesetze vorausgesetzt, daß die Verzerrungen infinitesimal sind, daß aber die Rotationen endlich sein können. Die Darstellung der beiden entsprechenden Anfangsrandwertaufgaben und der zugehörigen Variationsprinzipie erfolgt im Bezug auf ein Referenzkoordinatensystem im spannungsfreien, unverformten Körper (Lagrangesches oder materielles Koordinatensystem).

Bei dem elastischen, kriechenden Körper (erstes Stoffgesetz) wird das Variationsprinzip von Sanders, McComb und Schlechte, das ein Analogon zum Hellinger-Reissnerschen Variationsprinzip ist, zum Ausgangspunkt genommen, um im Rahmen der Kirchhoff-Loveschen Hypothese eine approximative, geometrisch nichtlineare Schalentheorie zu entwickeln. Insbesondere wird dabei einschränkend angenommen, daß die Verzerrungen der Mittelfläche und die Rotation um die Mittelflächennormale von kleinerer Größenordnung sind als die beiden Rotationen der Mittelflächennormalen. Das entwickelte Variationsprinzip für dünne Schalen ist dadurch gekennzeichnet, daß sowohl die Verschiebungsraten der Mittelfläche wie auch die Raten der Membrankräfte und Momente zu variieren sind. Durch sukzessive Elimination einmal der Momentenraten und dann auch der Membrankraftraten werden zwei weitere Variationsprinzipie entwickelt.

Ein entsprechend allgemeines Variationsprinzip, bei dem nicht nur die Verschiebungsraten der Mittelfläche sondern auch die Membrankräfte und Momente zu variieren sind, wird für den nichtelastischen, kriechenden Körper (zweites Stoffgesetz) abgeleitet.

In allen Fällen wird davon ausgegangen, daß die Mittelfläche durch einen hydrostatischen Druck belastet wird.

Zwei dieser verallgemeinerten (gemischten) Variationsprinzipie werden dazu verwandt, um approximative Kriechkollapstheorien für Brennstabhüllrohre zu entwickeln. Dazu wird mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens die Ortsabhängigkeit des Problems eliminiert und das entstehende System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung wird mit Hilfe eines Runge-Kutta Verfahrens vierter Ordnung bezüglich der Zeit integriert. Zunächst wird dabei eine einfache Kriechkollapstheorie aufgestellt, die auf dem Doppelmembranmodell (Sandwichmodell) beruht und die vergleichbar ist mit der Theorie von Hoff, Jahsman und Nachbar. Schließlich wird ein vorwiegend numerisches Verfahren entwickelt, das im Gegensatz zu den einfachen Kriechkollapstheorien erlaubt, weitgehend beliebige Kriechgesetze, Temperaturverteilungen, Wärmespannungen sowie die Nichtlinearität der Spannungsverteilung in der Hüllrohrwand zu berücksichtigen. Unter der Voraussetzung zeitlich konstanter Temperatur und konstanten Druckes wurden Rechnungen mit diesem Verfahren durchgeführt, die u. a. zu folgenden Ergebnissen führen:

- Die Details der Spannungsverteilung durch die Hüllrohrwand beeinflussen praktisch nicht die Kriechkollapszeit. Dies hat ein Vergleich mit Rechnungen nach dem Doppelmembranmodell gezeigt
- Wärmespannungen führen nur zu einer unbedeutenden Verminderung der Kollapszeit
- Nichtrotationssymmetrische Temperaturfelder infolge der Bündelgeometrie oder infolge einer Brennstabexzentrizität beeinflussen sehr stark das Kollapsverhalten. Eine isotherme Auslegung nach der höchsten Temperatur in Wandmitte liegt zwar auf der sicheren Seite, kann aber leicht zu konservativ sein.

Summary

The present study deals with the development of some general variational principles of creep mechanics, their specialization for thin shells, and the application of these principles to the approximate solution of the creep collapse problem of fuel element claddings.

Two constitutive equations are considered which are important for engineering applications: In the first case it is assumed that the total strain rate is obtained by combining the elastic strain rate, the creep rate, and the thermal strain rate in an additive manner. This constitutive equation relates the total strain rate to the stress and the stress rate and possibly other variables which describe the hardening of the material. In the second case only the creep rate is considered to be essential. This second constitutive equation relates the (total) strain rate to the stress and possibly variables describing the hardening of the material. In both cases it is assumed that the strains are infinitesimal but large rotations are retained. The corresponding initial-boundary value problems are formulated with respect to a reference coordinate system in the stress free undeformed body (Lagrangian or material coordinate system).

The principle of Sanders, McComb and Schlechte which is an analogon to the Hellinger-Reissner variational principle and which applies to the elastic viscous body (first constitutive relation) is used to develop an approximate geometrically nonlinear theory of shells. This theory is within the frame of the Kirchhoff-Love hypothesis, and it is restricted to problems where the strains of the middle surface and the rotation around the normal of the middle surface are significantly less than the two rotations of the normal. The variational principle developed for thin shells is characterized by the fact that the displacement rates of the middle surface as well as the rates of the membrane forces and moments are to be varied simultaneously. Using this principle two other variational principles are developed by successive elimination of the rates of moments and the rates of membrane forces.

For a thin nonelastic viscous shell (second constitutive relation) a corresponding general principle is formulated where displacement rates, membrane forces, and moments are to be varied simultaneously.

In all cases it is assumed that the middle surface is loaded by a hydrostatic pressure.

Two of these general (mixed) variational principles are used to develop approximate creep collapse theories for fuel element claddings. This is done by eliminating the space dependence of the problem by means of the Ritz method. The system of ordinary differential equations of first order obtained is then integrated with respect to time by using a fourth order Runge-Kutta integration procedure. First a simple theory based on the double membrane model (sandwich model) is developed which is comparable to the theory of Hoff, Jahsman and Nachbar. Then a more elaborate method is set up which accounts for fairly arbitrary creep laws, temperature distributions, thermal stresses, and the nonlinear distribution of the stresses across the thickness of the cladding. Assuming that temperature and pressure do not change with time a series of calculations were performed. The following conclusions can be drawn from these results:

- The creep collapse time is practically not effected by the details of the stress distribution across the cladding. This was shown by comparison with results obtained by the use of the double membrane model
- Thermal stresses produce only a minor decrease of the creep collapse time
- Nonrotationally symmetric temperature fields which are due to the close packed bundle geometry or due to the fuel rod eccentricity do influence strongly the collapse time. A design which is based on the maximum temperature in the middle of the cladding is well on the safe side, however might be easily too conservative.

Inhalt

	<u>Seite</u>
1. Einführung und Übersicht	1
2. Die Grundgleichungen und die Formulierung der Anfangs-Randwertaufgaben	6
3. Variationsprinzipie	
3.1 Allgemeines	17
3.2 Variationsprinzipie für einen nicht- elastischen, viskosen Körper	18
3.3 Variationsprinzipie für einen elasti- schen, viskosen Körper	23
4. Variationsprinzipie für dünnwandige, viskose Schalen bei kleinen Verzerrungen aber nicht- verschwindenden Rotationen	
4.1 Allgemeines	25
4.2 Geometrische Beziehungen	26
4.3 Das approximative Verschiebungs- und Verzerrungsfeld	28
4.4 Variationsprinzipie für viskose Schalen mit Berücksichtigung der elastischen Verzerrungen	33
4.5 Ein Variationsprinzip für nichtelastische, viskose Schalen	45
5. Das Kriechkollaps-Problem von Brennstabhüllrohren	
5.1 Problemstellung	48
5.2 Kriechkollapstheorien	49
5.3 Die Kriechkollapstheorien von Hoff et al., Ellington und Serpico	52
6. Die Behandlung des Kriechkollaps-Problems mit Hilfe von Variationsprinzipien der Kriechmechanik	
6.1 Zielsetzung der Untersuchungen und Voraussetzungen	56
6.2 Die Geometrie und Kinematik des Hüllrohrs	58

	<u>Seite</u>
6.3 Eine Alternative zur Theorie von Hoff et al.	60
6.4 Kriechkollaps eines langen, glatten Hüllrohrs bei rotations- und nichtrotationssymmetrischem Temperaturfeld	
6.4.1 Theorie	70
6.4.2 Numerische Lösung	81
6.5 Beispiele	
6.5.1 Vergleiche mit der Theorie von Hoff et al.	82
6.5.2 Rotationssymmetrisches Temperaturfeld	83
6.5.3 Nichtrotationssymmetrisches Temperatur- feld	88
6.6 Zusammenfassung der Ergebnisse	90
Anmerkungen	92
Nomenklatur	93
Literatur	99
Tabellen	105
Abbildungen	107
Liste des Programms CØCØ	122

1. Einführung und Übersicht

Bei der Auslegung von Reaktorbauteilen müssen wegen der hohen Temperaturen nicht selten die Kriecheigenschaften der Werkstoffe berücksichtigt werden. Andernfalls können Phänomene wie beispielsweise die Spannungsrelaxation, die zyklische Kriechverformung oder die Instabilität von Hüllrohren unter Außendruck infolge Kriechen weder erklärt noch quantitativ abgeschätzt werden.

Das zentrale Problem bei derartigen quantitativen Untersuchungen ist das Stoffgesetz, d.h. die Beziehung zwischen Verzerrungen und Spannungen. Zwei Klassen von Stoffgesetzen [1, 2, 3] sollen hier unterschieden werden. In der ersten und allgemeineren Klasse wird außer dem Kriechen auch elastisches Materialverhalten betrachtet; nichtmechanische Verformungen, wie Wärmedehnungen sind berücksichtigt. Die Kriechverzerrungsraten und die elastischen sowie die nichtmechanischen Verzerrungsraten sind additiv. Hier verknüpft das Stoffgesetz die Gesamtverzerrungsraten mit den Spannungen und Spannungsraten. In der zweiten Klasse wird nur das Kriechverhalten als wesentlich erachtet. Das Stoffgesetz verknüpft dann die Verzerrungsraten mit den Spannungen und möglicherweise Größen, die den Verfestigungsgrad charakterisieren. Das wichtigste und wohl bekannteste Beispiel ist das voll ausgebildete sekundäre Kriechen nach der Invariantentheorie von Odqvist [1, 2]. Es sei bemerkt, daß natürlich bei hinreichend großen Spannungen zeitunabhängiges plastisches Materialverhalten auftreten kann, das gegebenenfalls berücksichtigt werden muß. Im folgenden wird allerdings vorausgesetzt, daß die Spannungen hinreichend klein sind, um diese Materialeigenschaft außer acht lassen zu können.

Neben dem Materialgesetz müssen noch die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen, die Gleichgewichtsbedingungen und die Rand- und Anfangsbedingungen formuliert sein, um das Festigkeitsproblem vollständig zu beschreiben. Bei Instabilitätsphänomenen, wie beispielsweise dem Kriechkollaps von Brennstabhüllrohren, ist es erforderlich, in diesen Gleichungen geometrische Nichtlinearitäten zu berücksichtigen.

Diese so allgemein formulierte Aufgabe führt mathematisch zunächst auf ein Anfangs-Randwertproblem, das wegen der Nichtlinearität des Stoffgesetzes und wegen der geometrischen Nichtlinearität selbst in einfachen Fällen analytisch kaum lösbar ist. Bei einer approximativen Lösung ist man bestrebt, zunächst die Ortsabhängigkeit zu eliminieren. Dazu kann man einmal direkt von den Differentialgleichungen des Problems ausgehen und diese

beispielsweise durch Differenzengleichungen approximieren oder Kollokationsmethoden anwenden. Andererseits läßt sich, sofern ein Variationsprinzip existiert, dieses zur Elimination der Ortsabhängigkeit heranziehen. Beide Wege führen zu einer Reduktion der Anfangs-Randwertaufgabe auf eine Anfangswertaufgabe für ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung, dessen Lösung im allgemeinen nur numerisch geschehen kann.

Da Variationsprinzip in der Elastostatik zur Entwicklung von Näherungslösungen eine so bedeutende Rolle spielen, liegt es nahe, auch für die Kriechmechanik entsprechende Prinzipie zu formulieren.

Für einen elastischen Körper sind im wesentlichen vier Prinzipie bekannt geworden. Es sind dies einmal die Prinzipie vom Minimum der Potentiellen Energie und der Komplementärenergie [4] und weiterhin das Hellinger-Reissnersche Variationsprinzip [5, 6, 7], bei dem das Verschiebungs- und Spannungsfeld variiert werden. Hu [8] und Washizu [9, S. 68] haben ein noch allgemeineres Prinzip angegeben; hier werden ohne Zwangsbedingungen außer den Verschiebungen und Spannungen auch noch die Verzerrungen variiert, so daß die kinematischen Bedingungen, das Elastizitätsgesetz und die Gleichgewichtsbedingungen als Euler-Lagrangesche Gleichungen erhalten werden; alle Randbedingungen ergeben sich als natürliche Randbedingungen. Bis auf das Prinzip vom Minimum der Komplementärenergie sind diese Prinzipie auch für große Deformationen formuliert worden. Die Verzerrungen und Spannungen müssen dann aber geeignet definiert werden und die eingeprägten Kräfte müssen unabhängig von der Verformung sein [7, 9, 11, 12]. Es sei bemerkt, daß diese Prinzipie mit Hilfe der Multiplikatormethode von Lagrange und der Legendreschen Transformation auseinander hervorgehen [10].

Für einen elastischen, kriechenden Stoff (erstes Stoffgesetz) sind analoge Prinzipie formuliert worden. Hier sind zunächst die beiden Prinzipie von Wang und Prager [13] zu nennen, die den Prinzipien vom Minimum der Komplementärenergie und der Potentiellen Energie entsprechen. Sie wurden für infinitesimale Verzerrungen und Rotationen entwickelt und berücksichtigen außer der Elastizität und dem Kriechverhalten auch zeitunabhängige Plastizität. Sanders, McComb und Schlechte [14] haben dann durch Probieren ein Variationsprinzip für kleine Verzerrungen aber endliche Rotationen entwickelt, das dem Hellinger-Reissnerschen Prinzip ent-

spricht. Pian [15] hat das Funktional von Sanders et al. aus einem verallgemeinerten Reissnerschen Prinzip für elastische Körper mit Anfangsspannungen und -Verzerrungen abgeleitet. Darüber hinaus hat Washizu [9, S. 103] ein allgemeineres Variationsprinzip für endliche Deformationen angegeben, das dem Prinzip von Hu [8] und Washizu [9, S. 68], analog ist. Das von Besseling [16] formulierte Theorem ist etwas allgemeiner als das von Washizu, da es auch die thermodynamischen Feldgleichungen als Euler-Lagrangesche Gleichungen enthält; ein weiterer allerdings geringfügiger Unterschied besteht darin, daß anstelle der Verschiebungen die momentanen Ortskoordinaten als kinematische Variable gewählt worden sind. Im Unterschied zu den Prinzipien bei rein elastischem Materialverhalten werden bei diesen Prinzipien die zeitlichen Änderungen des Verschiebungsvektors, Verzerrungs- und Spannungstensors variiert.

Nicht unerwähnt sollte das Variationsprinzip von Kachanov [17] bleiben, bei dem ein statisch zulässiges Spannungsfeld variiert wird; seine Brauchbarkeit ist allerdings auf infinitesimale Verzerrungen und Rotationen beschränkt.

Für einen nichtelastischen, kriechenden Körper (zweites Stoffgesetz) sind bei infinitesimalen Deformationen durch Analogiebetrachtungen mit einem nichtlinear-elastischen Körper, der sogenannten Hoffschens Analogie [18, 19], zwei Variationsprinzipien bekannt geworden [1, 2, 3]. Sie entsprechen den Prinzipien vom Minimum der Potentiellen Energie und der Komplementärenergie. Bei dem ersten Prinzip wird das Geschwindigkeitsfeld, das die geometrischen Randbedingungen erfüllt, variiert; findet die Kriechverformung ohne Volumenänderung statt, dann muß das Geschwindigkeitsfeld die Inkompressibilitätsbedingung als Zwangsbedingung erfüllen. Bei dem zweiten Prinzip wird das Spannungsfeld, das den Gleichgewichts- und Spannungsrandbedingungen genügt, variiert. Wesentlich für die Existenz dieser Variationsprinzipien ist hier die Existenz eines Kriechpotentials [3]. Ein allgemeineres Variationsprinzip für stationäres Kriechen bei infinitesimalen Verschiebungen und Verschiebungsgradienten ist von Grigoliuk und Lipovtsev [25] aus dem Prinzip von Sanders et al. [14] abgeleitet worden. Hier werden der Spannungstensor und der Geschwindigkeitsvektor unabhängig voneinander variiert. Weitere, allgemeinere Variationsprinzipien insbesondere für endliche Verschiebungsgradienten sind anscheinend bisher nicht veröffentlicht worden.

Für rein elastisches Materialverhalten und infinitesimale Verschiebungen

und Verschiebungsgradienten hat Reissner [20, 21] das Hellinger-Reissnersche Variationsprinzip herangezogen, um eine Schalentheorie zu entwickeln, bei der die Querkraftverformung und die Verformungen infolge der Normalspannungen senkrecht zur Mittelfläche berücksichtigt werden. Naghdi [22] hat Vergleichbares mit einem etwas allgemeineren Variationsprinzip durchgeführt. Weiterhin hat Habip [23] das Variationsprinzip von Hu [8] und Washizu [9, S. 68] dazu verwendet, um eine geometrisch nichtlineare Theorie elastischer Schalen zu entwickeln.

Verallgemeinerte Variationsprinzipie für dünne Schalen aus einem viskosen Material sind bis auf die nachfolgend angegebenen Untersuchungen anscheinend nicht aufgestellt worden. Rabotnov [24] hat für eine nichtelastische, kriechende, zylindrische Doppelmembrane (sekundäres Kriechen nach einem Potenzgesetz) unter axisymmetrischer Belastung und bei infinitesimalen Verschiebungsgradienten ein Funktional angegeben, bei dem ein Biegemoment und die Kriechgeschwindigkeit normal zur Mittelfläche variiert werden. Grigoliuk und Lipovtsev [26] haben gezeigt, wie sich dieses Funktional aus einem allgemeineren Prinzip ableiten läßt. In [25] hat Rabotnov dasselbe Funktional für den gleichen Fall angegeben, allerdings erweitert um einen Term, der auf dem Einfluß einer geometrischen Nichtlinearität beruht. Eine Ableitung oder Bezugnahme auf ein allgemeineres Prinzip fehlt hier aber. Weiterhin haben Grigoliuk und Lipovtsev [26], [27] das Funktional von Sanders, McComb und Schlechte [14] unter einer Reihe von einschränkenden Annahmen durch die Schalenwand integriert. Die wesentlichen Annahmen sind: Die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen werden durch den Ansatz von Donnell [28] approximiert, die Spannungsverteilung ist linear über der Schalendicke, die elastischen Verzerrungen sind inkompressibel, und die Flächenbelastung ist unabhängig vom Verschiebungsfeld.

Es ist nun zunächst das Ziel dieser Arbeit, neben den bisher bekannten allgemeinen Prinzipien insbesondere drei Variationsprinzipie für einen nichtelastischen, kriechenden Körper bei kleinen Verzerrungen aber endlichen Rotationen anzugeben. Das erste dieser Prinzipie ist dadurch gekennzeichnet, daß in dem Variationsfunktional außer dem Geschwindigkeitsfeld auch das Verschiebungsfeld selbst auftritt, das aber für den betrachteten Zeitpunkt als gegeben angesehen wird. Variiert wird nun das Geschwindigkeitsfeld. Im Hinblick auf die Entwicklung von Näherungslösungen ist dieses Prinzip allerdings nur begrenzt brauchbar, denn einerseits ist bei einem inkompressiblen Material die Inkompressibilitätsbedingung nur

schwer zu erfüllen und andererseits führt dieses Prinzip bei einem nicht-linearen Kriechgesetz auf ein Differentialgleichungssystem, in dem die höchsten Ableitungen nach der Zeit nichtlinear enthalten sind. Mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatormethode wird daher dieses Prinzip erweitert und ein zweites sehr allgemeines Variationsprinzip angegeben, bei dem sowohl das Geschwindigkeitsfeld wie auch die Verzerrungsraten und Spannungen variiert werden. Dieses Prinzip ist ein Analogon zu dem allgemeinen Theorem von Hu [8] und Washizu [9, S. 68] für einen elastischen Körper. Das dritte Prinzip erhält man durch "Verkürzung" des zweiten Variationsprinzips; hier werden dann nur das Geschwindigkeits- und Spannungsfeld variiert, so daß dieses Prinzip ein neues Analogon zum Hellinger-Reissner'schen Prinzip darstellt. Für seine Anwendung ist hier die Tatsache wichtig, daß man mit dem Ritzschen Verfahren in manchen Fällen auch bei nicht-linearem Kriechgesetz auf quasilineare Differentialgleichungssysteme kommen kann. Darüber hinaus braucht das Verschiebungsfeld nicht die Inkompressibilitätsbedingung zu erfüllen.

Da die oben beschriebenen Variationsprinzipie für dünnwandige, viskose Schalen vielen Einschränkungen unterworfen sind und auch nicht geeignet sind für die Anwendung auf das Kriechkollaps-Problem von Brennstabhüllrohren, werden in Abschn. 4 dieser Arbeit die für die beiden Stoffgesetze angegebenen Analoga des Hellinger-Reissner'schen Variationsprinzips zum Ausgangspunkt genommen, um approximative Variationsprinzipie für dünnwandige Flächentragwerke unter hydrostatischer Druckbelastung zu entwickeln. Dies geschieht im Rahmen der Kirchhoff-Loveschen Hypothese. Es wird vorausgesetzt, daß die Verzerrungen infinitesimal sind bei nicht infinitesimalen Rotationen. Die entsprechenden Verzerrungs- Verschiebungsbeziehungen und die Gleichgewichtsbedingungen für den symmetrischen Membrankraft- und Momententensor stimmen mit den von Sanders [29, S. 32 u. 33] auf anderem Wege abgeleiteten Gleichungen überein. In der angegebenen allgemeinen Form sind diese Variationsprinzipie nicht in der Literatur zu finden.

In Abschn. 6 werden dann zwei dieser Variationsprinzipie dazu verwendet, um approximative Kriechkollapstheorien zu entwickeln, nachdem in Abschn. 5 die vorhandenen Kriechkollapstheorien (Kriechbeultheorien) diskutiert wurden. Dem Problem des Kriechkollapses von Brennstabhüllrohren muß bei gas- oder dampfgekühlten Brutreaktoren besondere Beachtung gegeben werden. Ist kein Druckausgleich zwischen dem kleinen Innendruck des Hüllrohrs und dem

hohen Außendruck des Kühlmittels vorhanden, dann führt dieser äußere Überdruck bei den hohen Temperaturen im Verein mit den unvermeidlich vorhandenen Fertigungsungenauigkeiten (z. B. Anfangsovalität) der Hüllrohre zu einer progressiven Vergrößerung dieser Abweichungen von der perfekten Kreis- zylindergeometrie. Läßt man außer acht, daß die Hüllrohre durch den mehr oder weniger plastischen Brennstoff gefüllt sind, dann führt diese Kriech- deformation nach einer anfangs schleichenden Bewegung zu einem sehr raschen Anwachsen der Verformungen, die dann theoretisch nach endlicher Zeit (Kriechkollapszeit) beliebig große Werte annehmen. Bei der Behandlung die- ses Problems wird in dieser Arbeit besondere Beachtung jenen Einflüssen ge- geben, die bisher nicht oder nicht befriedigend untersucht wurden:

- Einfluß der elastischen Verzerrungen auf die Kriechkollapszeit
- Nichtlineare Spannungsverteilung in der Hüllrohrwand
- Einfluß der Wärmespannungen und der Temperaturabhängigkeit der Kriechparameter bei rotationssymmetrischer und nichtrotations- symmetrischer Temperaturverteilung.

2. Die Grundgleichungen und die Formulierung der Anfangs-Randwertauf- gaben

In diesem Abschnitt wird eine Zusammenstellung der kinematischen Beziehun- gen, Gleichgewichtsbedingungen, Stoffgesetze und Randbedingungen gegeben, und zwar für den Fall endlicher Deformationen.

Für die Behandlung von Problemen, bei denen die Oberfläche des Körpers in vorgeschriebener Weise verformt wird oder bei denen vorgeschriebene Ober- flächenkräfte den Körper belasten, ist es bequem, eine materielle Betrachtungsweise anzuwenden und dabei den gesamten Verformungsablauf auf ein festes Referenzkoordinatensystem zu beziehen. In dieser Arbeit wird als Referenzsystem ein Koordinatensystem im unverformten, spannungsfreien Körper gewählt und alle tensoriellen Feldgrößen werden auf die Basis die- ses Referenzsystems bezogen. Die Bezeichnungsweise folgt weitgehend der von Green und Zerna [30] und Green und Adkins [31]. Es sei darauf hin- gewiesen, daß in [30] und [31] mitgeschleppte Koordinaten verwendet werden und daß dort die tensoriellen Größen sowohl auf die Basis des Re- ferenzkoordinatensystems im unverformten Körper wie auch auf die Basis des verformten Koordinatensystems bezogen werden.

Zur Bezeichnungsweise sei weiter bemerkt, daß lateinische Indizes die

Werte eins bis drei durchlaufen und sofern nichts Anderes gesagt ist, wird von der üblichen Summationskonvention Gebrauch gemacht, d.h. es wird in einem Produkt indizierter Größen über gleiche hoch- und tiefgestellte Indizes von eins bis drei summiert. Eingeklammerte Indizes haben keinen tensoriellen Charakter. In der symbolischen Schreibweise werden Vektoren durch einen Pfeil gekennzeichnet z.B. \vec{u} , und Tensoren werden symbolisch durch Unterstreichen kenntlich gemacht z.B. \underline{s} . Das skalare Produkt zweier Vektoren wird durch einen Punkt z.B. $\vec{a} \cdot \vec{b}$, das vektorielle Produkt durch ein Kreuz z.B. $\vec{a} \times \vec{b}$ und das dyadische Produkt wird durch das Symbol \otimes z.B. $\vec{a} \otimes \vec{b}$ gekennzeichnet.

Es seien \vec{r} der Ortsvektor, \vec{g}_i und \vec{g}^i die ko- und kontravarianten Basisvektoren des krummlinigen Referenzkoordinatensystems θ^i ($i=1,2,3$) im unverformten Körper (Abb. 1)

$$\begin{aligned} \vec{g}_i &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta^i} \\ \vec{g}^i &= \vec{g}_j \times \vec{g}_k \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad i, j, k \text{ zyklisch} \\ g &= \det(\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j) \\ \vec{g}_j \cdot \vec{g}^i &= \delta_j^i = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Weiterhin sind g_{ij} und g^{ij} die ko- und kontravarianten Komponenten des Metriktensors

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \\ g^{ij} &= \vec{g}^i \cdot \vec{g}^j \\ g_{ij} g^{jk} &= \delta_i^k \end{aligned} \quad (2.2)$$

Infolge der Belastung erfahren die materiellen Punkte die Verschiebung \vec{u}

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u^i \vec{g}_i = u_i \vec{g}^i \\ u^i &= g^{ij} u_j, \quad u_i = g_{ij} u^j \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Größen u_i und u^i sind die ko- und kontravarianten Komponenten des Verschiebungsvektors bezüglich der Metrik des Referenzsystems im unverformten Körper. Nach der Verformung ist der Ortsvektor des materiellen Punktes

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{u}.$$

Denkt man sich das Koordinatensystem θ^i mit dem Körper verbunden und mit-

bewegt, dann sind

$$\vec{G}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta^i} = (\delta_i^k + u^k|_i) \vec{g}_k, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Basisvektoren des verformten Koordinatensystems. Die in (2.4) auftretende kovariante Ableitung $u^k|_i$ der Verschiebungen u^k ist durch

$$\begin{aligned} u^k|_i &= u^k_{,i} + \Gamma_{ij}^k u^j \\ u_{j|i} &= g_{jk} u^k|_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

definiert. Das Komma bedeutet die partielle Ableitung

$$u^k_{,i} = \frac{\partial u^k}{\partial \theta^i}$$

und Γ_{ij}^k ist das Christoffelsymbol zweiter Art, das aus der Metrik des Referenzsystems gebildet wird:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{ie,j} + g_{je,i} - g_{ij,e}).$$

Die kovarianten Komponenten des Metriktensors im verformten System sind dann

$$G_{ij} = \vec{G}_i \cdot \vec{G}_j.$$

Der Abstand zweier benachbarter materieller Punkte vor bzw. nach der Verformung sei $d\tau$ bzw. dR , mit

$$\begin{aligned} (d\tau)^2 &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} = g_{ij} d\theta^i d\theta^j \\ (dR)^2 &= d\vec{R} \cdot d\vec{R} = G_{ij} d\theta^i d\theta^j, \end{aligned}$$

so daß

$$(dR)^2 - (d\tau)^2 = 2 e_{ij} d\theta^i d\theta^j,$$

wobei

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2} (G_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2} (\vec{g}_i \cdot \vec{u}_{,j} + \vec{g}_j \cdot \vec{u}_{,i} + \vec{u}_{,i} \cdot \vec{u}_{,j}) \\ &= \frac{1}{2} (u_{i|j} + u_{j|i} + u^m|_i u_{m|j}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

der Lagrangesche Verzerrungstensor ist. Bei kleinen Dehnungen und Gleitungen aber nicht notwendigerweise verschwindend kleinen Verschiebungsgradienten $u^k|_i$ sind die physikalischen Komponenten des Lagrangeschen Verzerrungstensors den Dehnungen und Gleitungen gleich [4]. Dieser Fall soll später für die Formulierung der Stoffgesetze zugrunde gelegt werden.

Die Lagrangesche Verzerrungsgeschwindigkeit \dot{e}_{ij} ist definiert als

$$\dot{e}_{ij} = \frac{\partial e_{ij}(\theta^k, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i|j} + \dot{u}_{j|i} + \dot{u}^m_{|i} u_{m|j} + \dot{u}^m_{|j} u_{m|i}), \quad (2.7)$$

wobei

$$\dot{u}_i = \left. \frac{\partial u_i(\theta^k, t)}{\partial t} \right|_{\theta^k = \text{const.}}$$

die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors

$$\vec{u} = \dot{u}^i \vec{g}_i = \dot{u}_i \vec{g}^i, \quad \dot{u}_i = g_{ik} \dot{u}^k \quad (2.8)$$

eines materiellen Teilchens sind.

In symbolischer Schreibweise ist der Lagrangesche Verzerrungstensor gegeben durch

$$\underline{e} = e_{ij} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j = e^{ij} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j = e^i_j \vec{g}_i \otimes \vec{g}^j = e_j^i \vec{g}^j \otimes \vec{g}_i,$$

wobei unter Beachtung der Symmetrie von e_{ij}

$$e^i_j = e_j^i = e^i_i = e_{kj} g^{ki}.$$

Entsprechendes gilt dann für $\underline{\dot{e}}$.

Für die Darstellung der Spannungen wird hier von dem Kirchhoffschen Spannungstensor [4, 11, 31] Gebrauch gemacht, da er wegen seiner Symmetrie mathematisch bequem zu handhaben ist und da er die dem Lagrangeschen Verzerrungstensor zugehörigen generalisierten Spannungen darstellt. Es sei \vec{n} der Einheitsnormalenvektor eines Flächenelements df im unverformten Körper (Abb. 1)

$$\vec{n} = n^i \vec{g}_i = n_i \vec{g}^i.$$

Das Flächenelement df ist eine der Seitenflächen eines Tetraeders (Abb. 1), dessen drei andere Seitenflächen die Einheitsnormalenvektoren

$$\vec{n}^{(k)} = \frac{\vec{g}^k}{\sqrt{g^{kk}}} \quad (\text{keine Summation})$$

haben. Dann ist

$$df \vec{n} = df^{(k)} \vec{n}^{(k)},$$

so daß

$$df^{(k)} = \sqrt{g^{kk}} n_k df \quad (\text{keine Summation})$$

gilt. Denkt man sich jetzt das Koordinatensystem mit dem Körper verbunden, dann wird durch die Verformung df in dF und $df^{(k)}$ in $dF^{(k)}$ überführt. Sind $\vec{T}^{(k)}$ der auf $dF^{(k)}$ und \vec{T} der auf dF wirkende Spannungsvektor, dann ergibt das Kräftegleichgewicht am verformten Tetraeder

$$\vec{T} dF = \vec{T}^{(k)} dF^{(k)}. \quad (2.9)$$

Führt man anstelle von $\vec{\tau}^{(k)}$ und $\vec{\tau}$ Spannungsvektoren $\vec{S}^{(k)}$ und \vec{S} ein, die auf die unverformten Flächenelemente bezogen sind, dann ist

$$\vec{S}^{(k)} = \frac{\vec{\tau}^{(k)} dF^{(k)}}{df^{(k)}} \quad (\text{keine Summation})$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{\tau} dF}{df}$$

so daß damit aus (2.9)

$$\vec{S} = \sqrt{g^{kk}} n_k \vec{S}^{(k)}$$

folgt. Die Spannungsvektoren $\vec{S}^{(k)}$ werden jetzt bezüglich der Kantenvektoren \vec{G}_e des verformten Tetraeders zerlegt:

$$\vec{S}^{(k)} = S^{(k)(e)} \vec{G}_e$$

Wird der Spannungsvektor \vec{S} nun auf die Basis des Referenzsystems bezogen, dann erhält man mit (2.4)

$$\vec{S} = S^m \vec{g}_m = S^{ke} (\delta_e^m + u^m|_e) n_k \vec{g}_m \quad (2.10)$$

Die Größen S^{ke} sind zahlenmäßig gleich den Werten $\sqrt{g^{kk}} S^{(k)(e)}$. Mit dem Quotientengesetz folgt aus (2.10), daß die S^{ke} die kontravarianten Komponenten eines zweistufigen Tensors \underline{S}

$$\underline{S} = S^{ke} \vec{g}_k \otimes \vec{g}_e = S_{ke} \vec{g}^k \otimes \vec{g}^e = S^k_e \vec{g}_k \otimes \vec{g}^e = S_k^e \vec{g}^k \otimes \vec{g}_e$$

sind, dessen Basis die des Referenzsystems ist. Dieser Tensor wird als Kirchhoffscher Spannungstensor oder genauer als Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor zweiter Art [32] bezeichnet. Nach [31] sind die kontravarianten Komponenten S^{ke} zahlenmäßig mit den kontravarianten Komponenten τ^{ke} des Cauchyschen (wahren) Spannungstensors durch

$$S^{ke} = \sqrt{\frac{G}{g}} \tau^{ke}$$

verknüpft. Hier ist

$$G = \det(G_{ij})$$

Sind keine Volumen- oder Trägheitskräfte vorhanden, bzw. werden sie vernachlässigt, dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte am Volumenelement in Richtung der Basisvektoren \vec{g}_j ($j = 1, 2, 3$)

$$[S^{ik} (\delta_k^j + u^j|_k)]|_i = 0 \quad (2.11)$$

wobei zu beachten ist, daß die kovariante Ableitung der kontravarianten Komponenten des zweistufigen Tensors \underline{S} durch

$$S^{ij}|_l = S^{ij}_{,l} + \Gamma_{lm}^i S^{mj} + \Gamma_{lm}^j S^{im}$$

definiert ist. Unter der Voraussetzung, daß keine Volumenmomente vorhanden sind, ergeben die Momentengleichgewichtsbedingungen die Symmetrie des Kirchhoffschen Spannungstensors

$$s^{ke} = s^{ek} \quad (2.12)$$

Die Differentiation des Kirchhoffschen Spannungstensors ergibt den Spannungsgeschwindigkeitstensor (Spannungsraten)

$$\dot{s}^{ke} = \left. \frac{\partial s^{ke}(\theta^i, t)}{\partial t} \right|_{\theta^i = \text{const.}}$$

Bei kleinen Verzerrungen, d.h.

$$\sqrt{\frac{G}{g}} = 1 + e_k^k \approx 1,$$

sind die Spannungsraten \dot{s}^{ke} zahlenmäßig gleich den relativen Spannungsraten $\dot{\tau}^{ke}$, die ja die zeitlichen Änderungen in bezug auf das mitbewegte Koordinatensystem darstellen. Durch Differentiation von (2.11) nach der Zeit erhält man die Gleichgewichtsbedingungen, denen die Spannungsraten \dot{s}^{ke} genügen müssen:

$$[\dot{s}^{ik}(\delta_k^j + u^j|_k)]|_i + [s^{ik} \dot{u}^i|_k]|_i = 0 \quad (2.13)$$

Bei der Formulierung von Kriechgesetzen für den mehrachsigen Spannungszustand wird gewöhnlich davon ausgegangen, daß die Verschiebungen und Verschiebungsgradienten infinitesimal sind [2]. Bei stationärem Kriechen entspricht eine solche Theorie dem Eulerschen Konzept des Fließens von Materie [2, S. 74]. Setzt man voraus, daß die Verzerrungen klein sind, nicht aber notwendigerweise die Verschiebungsgradienten, dann sind bei Bezugnahme auf das Referenzsystem die Dehnungen und Gleitungen proportional den Lagrangeschen Verzerrungen (2.6), bei denen der nichtlineare Term nicht vernachlässigt werden darf. Die Kirchhoffschen Spannungen werden näherungsweise gleich den wahren Spannungen. Ersetzt man nun in dem Kriechgesetz den klassischen Spannungstensor und den infinitesimalen Verzerrungstensor durch den Kirchhoffschen Spannungstensor und den Lagrangeschen Verzerrungstensor, so gilt das entstehende Stoffgesetz auch bei großen Rotationen, weil es invariant ist gegenüber starren Drehungen des Körpers. In dieser Weise wird im folgenden vorgegangen werden.

Zwei relativ allgemeine, für die technische Auslegungsrechnung wichtige Stoffgesetze werden betrachtet, deren wesentliches Merkmal es ist, daß sich die Lagrangesche Verzerrungsgeschwindigkeit aus einem Potential ableiten läßt. Dies ist wichtig im Hinblick auf die Formulierung von Variationsprinzipien.

Bei dem ersten, allgemeineren Kriechgesetz wird davon ausgegangen, daß sich die Gesamtverzerrungsrate $\dot{\epsilon}_j^i$ aus einem elastischen und einen nicht-elastischen Anteil $\dot{\epsilon}_j^{\prime i}$ und $\dot{\epsilon}_j^{\prime\prime i}$ zusammensetzt

$$\dot{\epsilon}_j^i = \dot{\epsilon}_j^{\prime i} + \dot{\epsilon}_j^{\prime\prime i} \quad (2.14)$$

$\dot{\epsilon}_j^{\prime\prime i}$ enthalte die Kriechrate $\dot{\epsilon}_j^{\dot{c} i}$, die Schwellrate $\dot{\epsilon}_j^{\dot{s} i}$ infolge Bestrahlung und die Wärmedehnungsrate $\dot{\epsilon}_j^{\dot{T} i}$ infolge eines zeitlich veränderlichen Temperaturfeldes T :

$$\dot{\epsilon}_j^{\prime\prime i} = \dot{\epsilon}_j^{\dot{c} i} + \dot{\epsilon}_j^{\dot{s} i} + \dot{\epsilon}_j^{\dot{T} i} \quad (2.15)$$

Insbesondere soll vorausgesetzt werden, daß $\dot{\epsilon}_j^{\prime\prime i}$ unabhängig von den Spannungsraten sein soll.

Gilt das Hookesche Gesetz (vergl. S. 92), dann sind die elastischen Verzerrungsraten mit den Spannungsraten durch

$$\dot{\epsilon}_j^{\prime i} = \frac{1+\nu}{E} \dot{s}_j^i - \frac{\nu}{E} \dot{s}_m^m \delta_j^i \quad (2.16)$$

verknüpft. Wegen der Symmetrie des Kirchhoffschen Spannungstensors ist hier

$$\dot{s}_j^i = \dot{s}^{ik} g_{kj}$$

In (2.16) ist vorausgesetzt, daß der Elastizitätsmodul E und die Poisson'sche Zahl ν unabhängig von der im allgemeinen zeitlich veränderlichen Temperatur T sind. Ist dies nicht der Fall, dann tritt in (2.16) eine zusätzliche Verzerrungsrate der Form

$$\left[s_j^i \frac{d}{dT} \left(\frac{1+\nu}{E} \right) - s_m^m \delta_j^i \frac{d}{dT} \left(\frac{\nu}{E} \right) \right] \dot{T}$$

auf. Wir denken uns für das Weitere diese Größe in $\dot{\epsilon}_j^{\prime\prime i}$ enthalten. Dann ist $\dot{\epsilon}_j^{\prime i}$ dadurch gekennzeichnet, daß es nur die Glieder enthält, die von den Spannungsraten abhängen, während $\dot{\epsilon}_j^{\prime\prime i}$ nicht von den Spannungsraten abhängt. Im Text werden aber auch unter dieser Bedingung die $\dot{\epsilon}_j^{\prime i}$ als elastische und die $\dot{\epsilon}_j^{\prime\prime i}$ als nichtelastische Verzerrungsraten bezeichnet. Zur vollständigen Charakterisierung des Stoffgesetzes ist es noch erforderlich, eine Aussage über die Spannungsabhängigkeit der Kriechrate $\dot{\epsilon}_j^{\dot{c} i}$ zu machen; beispielsweise kann hier die Invariantentheorie von Odquist, wie sie im folgenden

(Gl. (2.28) bzw. (2.35)) beschrieben wird, verwendet werden. Für die formale Ableitung der Gleichungen (2.17) bis (2.23) ist eine explizite Angabe aber nicht erforderlich.

Mit der Funktion

$$W_s' = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\nu}{E} \dot{s}_l^k \dot{s}_k^l - \frac{\nu}{E} \dot{s}_m^m \dot{s}_n^n \right)$$

kann \dot{e}_j^i auch durch

$$\dot{e}_j^i = \frac{\partial W_s'}{\partial \dot{s}_j^i} \quad (2.17)$$

dargestellt werden. Mit

$$W_s'' = \dot{e}_j^i \dot{s}_i^j, \quad W_s = W_s' + W_s'' \quad (2.18)$$

folgt dann für die Gesamtverzerrungsgeschwindigkeit (vergl. S. 92)

$$\dot{e}_j^i = \frac{\partial W_s}{\partial \dot{s}_j^i} \quad (2.19)$$

Da (2.19) einen eindeutigen Zusammenhang zwischen \dot{e}_j^i und \dot{s}_j^i liefert, läßt sich das Produkt

$$L = \dot{s}_j^i \dot{e}_{ij} = \dot{s}_j^i \dot{e}_i^j \quad (2.20)$$

allein durch \dot{e}_j^i und \dot{e}_j^i darstellen. Bildet man

$$L - W_s = W_e(\dot{e}_j^i) \quad (2.21)$$

und differenziert (2.21) nach \dot{e}_j^i , dann erhält man wegen (2.19)

$$\dot{s}_j^i = \frac{\partial W_e}{\partial \dot{e}_j^i} \quad (2.22)$$

mit

$$W_e = W_e' + W_e'' \quad (2.23)$$

$$W_e' = \frac{1}{2} (2\mu \dot{e}_l^k \dot{e}_k^l + \lambda \dot{e}_m^m \dot{e}_n^n)$$

$$W_e'' = - (2\mu \dot{e}_l^k \dot{e}_k^l + \lambda \dot{e}_m^m \dot{e}_n^n)$$

und den Lameschen Konstanten

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.24)$$

Die Funktionen W_e und W_s sollen "Potentiale" (Kriechpotentiale) genannt werden (vergl. S. 92).

In der zweiten Klasse von Kriechgesetzen werden elastische und nichtmechanische Verzerrungen gegenüber den Kriechverzerrungen vernachlässigt. Die Verknüpfung zwischen den Kriechraten und den Spannungen muß aus dem Experi-

ment gewonnen werden. Einen Überblick über wichtige Versuche bei einachsigen und insbesondere bei mehrachsigem Spannungszustand sowie bei konstanten und auch variierenden Spannungen gibt Rabotnov [3]. Danach wird deutlich, daß sich allgemein gültige Kriechgesetze mit den vorhandenen experimentellen Kenntnissen kaum formulieren lassen. Ist das Material isotrop und sind die Spannungen und die Temperatur zeitlich konstant, dann läßt sich allerdings häufig das mehrachsige (genauer das zweiachsige), sekundäre Kriechen im Rahmen des bei Kriechversuchen üblichen Streubereichs recht brauchbar durch die folgenden Eigenschaften beschreiben:

- Durch die Kriechdeformation findet keine Volumenänderung statt, d. h.

$$\dot{\epsilon}_k^k = 0 \quad (2.25)$$

- Ein überlagerter hydrostatischer Druck beeinflusst nicht die Kriechgeschwindigkeit und
- die Beziehung zwischen den Kriechverzerrungsraten und den Spannungen ist tensoriell linear, d. h.

$$\dot{\epsilon}_j^i = \dot{\epsilon}_j^i = f \circ S_j^i,$$

wobei

$$\circ S_j^i = S_j^i - \frac{1}{3} S_k^k S_j^i \quad (2.26)$$

die gemischten Komponenten des Kirchhoffschen Spannungsdeviators sind.

- Der Proportionalitätsfaktor f ist nur eine Funktion der zweiten Invarianten des Kirchhoffschen Spannungsdeviators

$$\circ J_{II} = \frac{1}{2} \circ S_j^i \circ S_i^j \quad (2.27)$$

und der Stoffkonstanten.

Damit lautet das zuerst von Odqvist [1] aufgestellte Kriechgesetz (Invariantentheorie von Odqvist)

$$\dot{\epsilon}_j^i = f(\circ J_{II}) \circ S_j^i. \quad (2.28)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß hier vorausgesetzt wird, daß die Verzerrungen und auch die Verzerrungsraten klein gegen eins sind, nicht aber notwendigerweise die Verschiebungsgradienten. Andernfalls hat die Inkompressibilitätsbedingung nicht mehr die einfache Form (2.25) und auch der Deviator des Kirchhoffschen Spannungstensors (2.26) verschwindet nicht identisch bei rein hydrostatischer Druckbelastung.

Die Form der Funktion f läßt sich vollständig aus einachsigen Zugversuchen bestimmen. Häufig wird (2.28) auch dann als gültig angesehen, wenn sich die Belastung mit der Zeit ändert. Dies bedarf strenggenommen der experimentellen Überprüfung.

Aus dem Aufbau von (2.28) folgt, daß ein Potential $\tilde{W}_s(\circ S_j^i)$ existiert

derart, daß

$$\dot{e}_j^i = \frac{\partial \tilde{W}_s}{\partial s_j^i} \quad (2.29)$$

gilt, wobei

$$\tilde{W}_s = \int \dot{e}_j^i ds_j^i = \int f(\sigma_{II}) dJ_{II}.$$

Wegen der Inkompressibilität gilt

$$\frac{\partial \tilde{W}_s}{\partial s_j^i} s_j^i \equiv 0,$$

so daß man anstelle von (2.29) auch

$$\dot{e}_j^i = \frac{\partial \tilde{W}_s (s_j^k - \frac{1}{3} s_m^m \delta_j^k)}{\partial s_j^i} \quad (2.30)$$

schreiben kann. Die Dissipationsleistung pro Einheit des unverformten Volumens ist mit (2.25)

$$\tilde{L} = s_j^i \dot{e}_i^j = s_j^i \dot{e}_i^j. \quad (2.31)$$

Setzt man

$$\tilde{W}_e = \tilde{L} - \tilde{W}_s, \quad (2.32)$$

dann ist analog wie vorher

$$s_j^i = \frac{\partial \tilde{W}_e}{\partial \dot{e}_i^j}, \quad \text{wobei} \quad \dot{e}_m^m = 0. \quad (2.33)$$

Wird beispielsweise das sekundäre Kriechen im einachsigen Spannungszustand durch das Potenzgesetz von Norton [1, 2, 3]

$$\dot{e} = k |s|^{n-1} s, \quad k > 0, \quad n \geq 1 \quad (2.34)$$

(k und n sind temperaturabhängige Materialkonstanten) beschrieben, wobei hier gleiches Verhalten im Zug- und Druckversuch angenommen wird, dann hat (2.28) die Form

$$\dot{e}_j^i = \frac{3}{2} k [3 J_{II}]^{\frac{n-1}{2}} s_j^i \quad (2.35)$$

und die Potentiale \tilde{W}_s und \tilde{W}_e lauten

$$\begin{aligned} \tilde{W}_s &= \frac{k}{n+1} [3 J_{II}]^{\frac{n+1}{2}} \\ \tilde{W}_e &= \frac{n k^{-1/n}}{n+1} \left[\frac{4}{3} \sigma_{II} \right]^{\frac{n+1}{2n}} \end{aligned} \quad (2.36)$$

wobei σ_{II} die zweite Invariante des Verzerrungsgeschwindigkeitsdeviators \dot{e}_j^i ist

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2} \dot{e}_j^i \dot{e}_i^j;$$

wegen der Inkompressibilitätsbedingung (2.25) ist hier

$$\dot{\epsilon}_j^i = \dot{\epsilon}_j^i - \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_k^k \delta_j^i = \dot{\epsilon}_j^i.$$

Die Existenz eines Kriechpotential \tilde{W}_s bzw. \tilde{W}_e soll für das Weitere ausdrücklich vorausgesetzt werden, u.z. auch dann, wenn \tilde{W}_s und \tilde{W}_e nicht durch (2.36) gegeben sind und wenn die Spannungen zeitlich veränderlich sind. Darüber hinaus soll die Möglichkeit offengelassen werden, daß die Kriechraten auch von der Zeit oder von Parametern abhängen, welche die Verfestigung beschreiben. Derartige Ansätze werden bei den Zeitverfestigungs- oder Dehnungsverfestigungstheorien zur Beschreibung des physikalischen Primärkriechens gemacht [1, 3].

Abschließend werden noch die Randbedingungen zusammengestellt. Auf der Gesamtoberfläche $O = O_u + O_r$ seien zwei Arten von Randbedingungen vorge-schrieben.

Auf O_u lautet die Randbedingung

$$\dot{\vec{u}} = \dot{\vec{u}}. \quad (2.37)$$

$\dot{\vec{u}}$ ist als vorgegeben anzusehen. Dagegen wirken auf das Oberflächenteil O_r von außen eingeprägte Kräfte. Ist $\vec{\bar{t}}$ die auf das verformte Oberflächenelement dF wirkende Spannung, dann erfordert das Gleichgewicht an der Oberfläche

$$\vec{s} df = \vec{\bar{t}} dF.$$

Setzt man

$$\vec{\bar{t}} = \vec{\bar{t}} \frac{dF}{df} \quad (2.38)$$

und zerlegt $\vec{\bar{t}}$ bezüglich der Basen \vec{g}_k des Referenzsystems

$$\vec{\bar{t}} = \bar{T}^k \vec{g}_k,$$

dann ist mit (2.10)

$$T^k := S^{il} (\delta_{il}^k + u^h{}_{|l}) n_i = \bar{T}^k. \quad (2.39)$$

Die Größen \bar{T}^k sind im allgemeinen nicht nur abhängig von den eingepprägten Kräften, sondern auch von den noch unbekanntem Verschiebungen u_i , und zwar insbesondere dann, wenn die Oberflächenkräfte ihre Richtung mit der Verformung ändern wie beispielsweise bei hydrostatischer Druckbelastung.

Durch Differenzieren nach der Zeit erhält man aus (2.39) die Randbedin-

gungen für die Spannungsraten

$$\dot{T}^k := (\dot{S}^{i\ell}(\delta_\ell^k + u^k|_\ell) + S^{i\ell} \dot{u}^k|_\ell) n_i = \dot{T}^k \quad (2.40)$$

Die Gleichungen (2.7), (2.13), (2.19) bzw. (2.22) sowie (2.37) und (2.40) beschreiben zusammen mit geeigneten Anfangsbedingungen die Anfangs-Randwertaufgabe für einen elastischen, kriechenden Körper. Geht man nun davon aus, daß zu irgendeinem Zeitpunkt das Verschiebungs- und Spannungsfeld u_i und S^{ij} und die nichtelastischen Verzerrungen $\dot{e}_j^{''i}$ bekannt sind, dann stellen diese Gleichungen eine Randwertaufgabe für die Geschwindigkeiten \dot{u}_i und die Spannungsraten \dot{S}^{ij} dar. Diese Aufgabe ist vergleichbar mit einem elastostatischen Problem, bei dem die Rotationen endlich sind und bei dem Anfangsspannungen, -verzerrungen und -verschiebungen vorhanden sind.

Die Anfangs-Randwertaufgabe für einen nichtelastischen, kriechenden Körper wird dagegen durch die Gleichungen (2.7), (2.11), (2.30) bzw. (2.33) sowie (2.37) und (2.39) und geeigneten Anfangsbedingungen für die Verschiebungen beschrieben. Sieht man hier die Verschiebungen u_i zu irgendeinem Zeitpunkt als gegeben an, dann beschreiben diese Gleichungen eine Randwertaufgabe für \dot{u}_i und S^{ij} .

3. Variationsprinzipie

3.1 Allgemeines

Im folgenden werden Variationsprinzipie angegeben, die den oben genannten Randwertaufgaben äquivalent sind. Insbesondere werden für einen nichtelastischen, kriechenden Körper mit kleinen Verzerrungen aber endlichen Rotationen Prinzipie entwickelt, die nach Kenntnis des Autors bisher nicht veröffentlicht wurden. Auf ihre Ableitung wird in Abschnitt (3.2) näher eingegangen. Dagegen können die Variationsprinzipie für einen elastischen, kriechenden Körper als weitgehend bekannt gelten, so daß auf ihre Ableitung nicht weiter eingegangen zu werden braucht, zumal sie analog der in Abschnitt (3.2) angegebenen Darstellung verläuft. Eine Zusammenstellung erfolgt in Abschnitt (3.3).

Für das Weitere soll vorausgesetzt werden, daß alle auftretenden Funktionen hinreichend oft differenzierbar sind.

3.2 Variationsprinzip für einen nichtelastischen, kriechenden Körper

Es wird vorausgesetzt, daß zu einem Zeitpunkt t die Verschiebungen u_i bekannt sind. Neben dem zu diesem Zeitpunkt herrschenden tatsächlichen Geschwindigkeitsfeld \dot{u}_i , das die Inkompressibilitätsbedingung (2.25) erfüllt, werde ein benachbartes Geschwindigkeitsfeld \dot{u}_i^* betrachtet,

$$\dot{u}_i^* = \dot{u}_i + \delta \dot{u}_i,$$

das (2.25) genügt

$$\dot{u}^{*r}|_r + \dot{u}^{*m}|^r u_{m|r} = 0$$

bzw.

(3.1)

$$\delta \dot{e}_r^r = (\delta \dot{u}^r)|_r + (\delta \dot{u}^m)|^r u_{m|r} = 0$$

und die Randbedingungen

$$\dot{u}_i^* = \dot{u}_i$$

bzw.

(3.2)

$$\delta \dot{u}_i = 0 \quad \text{auf } O_u$$

erfüllt. Infolge der virtuellen Geschwindigkeit $\delta \dot{u}_i$ erfährt das Kriechverzerrungspotential \tilde{W}_e die Änderung

$$\delta \tilde{W}_e = \frac{\partial \tilde{W}_e}{\partial \dot{e}_j^i} \delta \dot{e}_j^i,$$

hier ist

$$\delta \dot{e}_j^i = \frac{1}{2} [(\delta \dot{u}^i)|_j + (\delta \dot{u}_i)|^j + (\delta \dot{u}^m)|^i u_{m|j} + u^m|_i (\delta \dot{u}_m)|_j]. \quad (3.3)$$

Mit (2.33) und wegen (3.1) ist dann

$$\delta \tilde{W}_e = s_i^j \delta \dot{e}_j^i = s_i^j \delta \dot{e}_j^i. \quad (3.4)$$

Daraus ersieht man, daß die Änderung des Kriechverzerrungspotentials gleich der Änderung der Dissipationsleistung ist (bei konstant gehaltenen Spannungen).

Integriert man (3.4) über das gesamte Volumen des Körpers, wobei die Integration im Referenzsystem auszuführen ist, dann erhält man unter Beachtung von (3.3) und der Symmetrie des Kirchhoffschen Spannungstensors

$$\begin{aligned}
 \int_V \delta \tilde{W}_e dV &= \delta \int_V \tilde{W}_e dV = \int_V s^{ij} \delta \dot{e}_{ij} dV \\
 &= \int_V s^{ij} (\delta_j^m + u^m_{|j}) \delta \dot{u}_{m|i} dV \\
 &= \int_V [s^{ij} (\delta_j^m + u^m_{|j}) \delta \dot{u}_m]_{|i} dV \\
 &\quad - \int_V [s^{ij} (\delta_j^m + u^m_{|j})]_{|i} \delta \dot{u}_m dV \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

mit

$$dV = \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3.$$

Da das Spannungsfeld die Gleichgewichtsbedingungen (2.11) erfüllt, verschwindet das letzte Integral in (3.5). Nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes folgt dann

$$\delta \int_V \tilde{W}_e dV = \int_O s^{ij} (\delta_j^m + u^m_{|j}) m_i \delta \dot{u}_m dO. \quad (3.6)$$

Wegen (3.2) und der Spannungsrandbedingung (2.39) ergibt sich aus (3.6)

$$\delta \int_V \tilde{W}_e dV - \int_{O_r} \bar{T}^m \delta \dot{u}_m dO = 0. \quad (3.7)$$

Die Gleichung (3.7) wird als Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit bezeichnet. Sind die eingepprägten Oberflächenkräfte \bar{T}^m unabhängig von der Geschwindigkeit, dann kann anstelle von (3.7)

$$\delta \left\{ \int_V \tilde{W}_e dV - \int_{O_r} \bar{T}^m \dot{u}_m dO \right\} = 0 \quad (3.8)$$

geschrieben werden. Die Gleichung (3.8) besagt, daß das Funktional

$$\phi := \int_V \tilde{W}_e dV - \int_{O_r} \bar{T}^m \dot{u}_m dO \quad (3.9)$$

für das tatsächliche Geschwindigkeitsfeld einen stationären Wert annimmt. Es ist hier aber zu beachten, daß das Geschwindigkeitsfeld die Inkompressibilitätsbedingung (3.1) und die Randbedingung (3.2) zu erfüllen hat.

Würde man (3.8) für eine approximative Lösung der Randwertaufgabe heranziehen, dann kann die Zwangsbedingung (3.1) erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Darüber hinaus führt (3.8) bei Verwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung auf ein System von Differentialgleichungen, in dem die höchsten Ableitungen nach der Zeit nichtlinear enthalten sind. Nur bei einem praktisch uninteressanten linearen Kriechgesetz ist dies nicht der Fall. Ganz entsprechend führt bei einem nichtlinear-elastischen Ma-

terial die Ritzsche Methode auf ein nichtlineares Gleichungssystem.

Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, kann man zunächst durch Anwendung der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren [10] die Variationsaufgabe (3.8) von der Inkompressibilitätsbedingung und den geometrischen Randbedingungen befreien. Dazu werden die Verzerrungsgeschwindigkeiten \dot{e}_j^i als neue Veränderliche eingeführt; dann ist (3.8) mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{e}_j^i - \frac{1}{2} (\dot{u}^i|_j + \dot{u}_j|{}^i + \dot{u}^m|{}^i u_{m|j} + u^m|{}^i \dot{u}_{m|j}) &= 0 \\ \dot{e}_r^r &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

und

$$\dot{u}_m - \dot{\bar{u}}_m = 0 \quad \text{auf} \quad O_u$$

zu erfüllen. Entsprechend der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode wird das Funktional (3.9) durch Einführung der Multiplikatoren $A^{ij} = A^{ji}$, B und C^i erweitert,

$$\begin{aligned} \phi_{\Sigma} = \int_V \{ & \tilde{W}_e (\dot{e}_j^i - \frac{1}{2} \dot{e}_k^k \delta_j^i) \\ & + A_j^i [\dot{e}_j^i - \frac{1}{2} (\dot{u}^i|_j + \dot{u}_j|{}^i + \dot{u}^m|{}^i u_{m|j} + u^m|{}^i \dot{u}_{m|j})] \\ & + B \dot{e}_r^r \} dV \\ & - \int_{O_r} \tau^m \dot{u}_m dO - \int_{O_u} c^m (\dot{u}_m - \dot{\bar{u}}_m) dO \end{aligned} \quad (3.11)$$

und es wird die Forderung

$$\delta \phi_{\Sigma} = 0 \quad (3.12)$$

gestellt, wobei \dot{u}_i , \dot{e}_j^i , A_j^i , B und C^i unabhängig und ohne Nebenbedingungen (außer der Symmetrie von A^{ij} und $\dot{e}_{;j}^i$) variiert werden. Die Variationsaufgabe (3.12) ist der Variationsaufgabe (3.8) mit den Nebenbedingungen (3.10) äquivalent. Die Variation von (3.11) liefert

$$\begin{aligned} \delta \phi_{\Sigma} = \int_V \{ & \frac{\partial \tilde{W}_e}{\partial \dot{e}_j^i} \delta \dot{e}_j^i \\ & + [\dot{e}_j^i - \frac{1}{2} (\dot{u}^i|_j + \dot{u}_j|{}^i + \dot{u}^m|{}^i u_{m|j} + u^m|{}^i \dot{u}_{m|j})] \delta A_j^i \\ & + A_j^i [\delta \dot{e}_j^i - \frac{1}{2} ((\delta \dot{u}^i)|_j + (\delta \dot{u}_j)|{}^i + (\delta \dot{u}^m)|{}^i u_{m|j} + u^m|{}^i (\delta \dot{u}_m)|_j)] \\ & + \dot{e}_r^r \delta B + B \delta \dot{e}_r^r \} dV \\ & - \int_{O_r} \tau^m \delta \dot{u}_m dO - \int_{O_u} \{ (\dot{u}_m - \dot{\bar{u}}_m) \delta c^m + c^m \delta \dot{u}_m \} dO = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes läßt sich die dritte Zeile von (3.13) analog wie in Gleichung (3.5) umformen. Man erhält nach Umordnung

$$\begin{aligned}
 \delta\phi_{\mathcal{I}} = & \int_V \left\{ \left[\frac{\partial \tilde{W}_e}{\partial \dot{e}_j^i} + A_i^j + B \delta_j^i \right] \delta \dot{e}_j^i \right. \\
 & + \left[\dot{e}_j^i - \frac{1}{2} (\dot{u}_j^i + \dot{u}_j^i) + \dot{u}^{m/i} u_{m/j} + u^{m/i} \dot{u}_{m/j} \right] \delta A_i^j \\
 & + \dot{e}_r^\tau \delta B \\
 & \left. + \left[A_i^j (\delta_j^m + u^{m/j}) \right] n^i \delta \dot{u}_m \right\} dV \\
 & - \int_{O_r} \left\{ \bar{T}^m + A_i^j (\delta_j^m + u^{m/j}) n^i \right\} \delta \dot{u}_m dO \\
 & - \int_{O_u} \left\{ \left[c^m + A_i^j (\delta_j^m + u^{m/j}) n^i \right] \delta \dot{u}_m + (\dot{u}_m - \dot{\bar{u}}_m) \delta c^m \right\} dO = 0
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Da die Variationen $\delta \dot{u}_i$, $\delta \dot{e}_j^i$, δA_j^i , δB , δc^i unabhängig sind, ist nach dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung das Verschwinden der Koeffizienten von $\delta \dot{u}_m$ etc. eine notwendige Bedingung dafür, daß $\phi_{\mathcal{I}}$ stationär wird. Die Koeffizienten im Volumenintegral liefern die Euler-Lagrangeschen Gleichungen und die Koeffizienten in den Oberflächenintegralen die natürlichen Randbedingungen. Diese Gleichungen sind der Randwertaufgabe für den nichtelastischen, kriechenden Körper äquivalent und deshalb folgt sofort

$$\begin{aligned}
 A_j^i &= -S_j^i \\
 B &= \frac{1}{3} s_r^\tau = -p
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$c^m = S_i^j (\delta_j^m + u^{m/j}) n^i = T^m.$$

Aus (3.15) ersieht man die mechanische Bedeutung der Lagrangeschen Multiplikatoren.

Führt man (3.15) in das Funktional (3.11) ein, dann erhält man schließlich das allgemeine Variationsprinzip

$$\delta\phi_{\mathcal{I}} = 0 \tag{3.16}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \phi_{\mathcal{I}} = & \int_V \left\{ \tilde{W}_e (\dot{e}_j^i - \frac{1}{3} \dot{e}_k^k \delta_j^i) - (S_i^j + p \delta_j^i) \dot{e}_j^i \right. \\
 & \left. + S_i^j \frac{1}{2} (\dot{u}_j^i + \dot{u}_j^i) + \dot{u}^{m/i} u_{m/j} + u^{m/i} \dot{u}_{m/j} \right\} dV \\
 & - \int_{O_r} \bar{T}^m \dot{u}_m dO - \int_{O_u} T^m (\dot{u}_m - \dot{\bar{u}}_m) dO
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Hier werden \dot{u}_i , $\dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ji}$, $s^{ij} = s^{ji}$ und ρ unabhängig und ohne Nebenbedingungen variiert. Aus dem Prinzip (3.16) lassen sich einige Sonderfälle entwickeln.

Verlangt man, daß die Verzerrungsgeschwindigkeiten \dot{e}_j^i die Inkompressibilitätsbedingung $\dot{e}_r^r = 0$ erfüllen und drückt dann \dot{e}_j^i durch die deviatorischen Spannungen entsprechend (2.29) bzw. (2.30) aus, dann wird aus (3.17) mit (2.32)

$$\begin{aligned} \phi_{II} := & \int_V \left\{ s_i^j \frac{1}{2} (\dot{u}_{i/j} + \dot{u}_{j/i}) + \dot{u}^m /{}^i u_{m/j} + u^m /{}^i \dot{u}_{m/j} \right. \\ & \left. - \tilde{W}_s(s_j^i - \frac{1}{3} s_k^k \delta_j^i) \right\} dV - \int_{O_r} \bar{T}^m \dot{u}_m dO - \int_{O_u} T^m (\dot{u}_m - \dot{\bar{u}}_m) dO. \end{aligned} \quad (3.18)$$

In (3.18) werden \dot{u}_i und $s^{ij} = s^{ji}$ unabhängig und ohne Nebenbedingungen variiert. Besonders ist zu beachten, daß das Geschwindigkeitsfeld \dot{u}_i nicht die Inkompressibilitätsbedingung (3.1) zu erfüllen braucht. In dem Integral über die Oberfläche O_u kann T^m als weitere unabhängig zu variierende Größe aufgefaßt werden oder man kann T^m entsprechend (3.15) durch die Spannungen ausdrücken.

Das Funktional (3.18) ist für die Entwicklung von Näherungslösungen von Interesse. Gibt man die Ortsabhängigkeit des Spannungsfeldes sowie die des Verschiebungs- und damit die des Geschwindigkeitsfeldes vor und führt die Volumen- und Oberflächenintegration durch, dann kann die Variation bezüglich der noch freien Geschwindigkeits- und Spannungsparameter auf ein System von quasilinearen Differentialgleichungen erster Ordnung für die Verschiebungsparameter führen. Wesentlich ist, daß sich alle Spannungsparameter allein durch die Lasten und die Verschiebungsparameter ausdrücken lassen. Dies kann eintreten, wenn die Ansätze linear in den freien Parametern sind und wenn insbesondere die Anzahl der Verschiebungsparameter mit der der Spannungsparameter übereinstimmt. Allerdings wird ein derartiger Ansatz im allgemeinen nicht leicht zu finden sein, und sicherlich ist diese Bedingung auch noch nicht ausreichend für eine sinnvolle Näherung. An einem Beispiel (Abschn. 6.3) wird diese Frage näher diskutiert.

Ein weiterer Sonderfall läßt sich angeben, wenn man in (3.17) die Verzerrungsrate \dot{e}_j^i durch das Geschwindigkeits- und Verschiebungsfeld ausdrückt. Dann gilt mit (2.7)

$$\begin{aligned} \phi_{III} := & \int_V \left\{ \tilde{W}_e(\dot{e}_j^i - \frac{1}{3} \dot{e}_k^k \delta_j^i) - \rho (\dot{u}^r /{}^r + \dot{u}^m /{}^r u_{m/r}) \right\} dV \\ & - \int_{O_r} \bar{T}^m \dot{u}_m dO - \int_{O_u} T^m (\dot{u}_m - \dot{\bar{u}}_m) dO. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Die Funktionen \dot{u}_i , ρ und T^m (auf O_u) werden unabhängig voneinander variiert. Erfüllt das zu variiierende Geschwindigkeitsfeld die kinematischen Randbedingungen (3.2), dann verschwindet das zweite Oberflächenintegral in (3.19), so daß Φ_{III} dann eine Erweiterung von Φ , Gleichung (3.9), darstellt, gültig für ein Geschwindigkeitsfeld, das die Inkompressibilitätsbedingung (3.1) nicht als Nebenbedingung zu erfüllen braucht.

Setzt man nun voraus, daß Verzerrungen und Rotationen infinitesimal sind, dann erhält man völlig entsprechende Prinzipie, sofern man den Lagrange'schen Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \dot{e}_j^i durch den infinitesimalen Verzerrungsgeschwindigkeitstensor

$$\dot{E}_j^i = \frac{1}{2} (\dot{u}_j^i + \dot{u}_j^i)$$

und den Kirchhoffschen Spannungstensor S^ij durch den klassischen Spannungstensor σ^{ij} ersetzt. Insbesondere muß man dann darauf achten, daß dann in den Funktionalen die Verschiebungen u_i selbst nicht mehr auftreten, sofern nicht ein Dehnungsverfestigungsgesetz angenommen worden war. Die von Hoff durch Analogiebetrachtungen mit einem nichtlinear-elastischen Körper angegebenen Variationsprinzipie [19] erhält man dann einmal aus (3.8) und weiterhin aus (3.18), sofern man in (3.18) die erste Zeile partiell integriert und dann verlangt, daß das Spannungsfeld die Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma^{ij}{}_{|i} = 0$$

und die Spannungsrandbedingung

$$\sigma^{im} n_i = \bar{T}^m$$

erfüllt. Die entsprechenden Ausdrücke von (3.17) bis (3.18) und (3.19) stellen dann verallgemeinerte Variationsprinzipie für nichtelastische, kriechende Körper bei infinitesimalen Deformationen dar. Sie sind analog zu den Variationsprinzipien eines inkompressiblen, elastischen Körpers aufgebaut; so hat Hermann [33] ein Variationsprinzip angegeben, das (3.19) entspricht.

3.3 Variationsprinzipie für einen elastischen, kriechenden Körper

Der Ausgangspunkt für die folgende Zusammenstellung ist die in Abschnitt (2) beschriebene Randwertaufgabe für den elastischen, kriechenden Körper. Es wird also ein Zeitpunkt t betrachtet, in dem das Verschiebungsfeld u_i , das Spannungsfeld s^ij und das nichtelastische Verzerrungsgeschwindigkeitsfeld \dot{e}''^ij bekannt sind, während \dot{u}_i und S^ij gesucht sind.

Durch analoge Betrachtungen wie in Abschnitt (3.2) erhält man zunächst das folgende Prinzip

$$\delta \int_V \left\{ W_e + \frac{1}{2} s^{ij} \dot{u}^m{}_{|i} \dot{u}_{m|j} \right\} dV - \int_{\partial\tau} \dot{T}^m \delta \dot{u}_m dO = 0. \quad (3.20)$$

Unter der einschränkenden Voraussetzung, daß die eingepprägten Oberflächenkräfte \bar{T}^m nicht vom Verschiebungsfeld abhängen, und damit auch $\dot{\bar{T}}^m$ nicht vom Geschwindigkeitsfeld abhängt, kann für (3.20)

$$\delta \psi = 0 \quad (3.21)$$

geschrieben werden, wobei

$$\psi := \int_V \left\{ W_e + \frac{1}{2} s^{ij} \dot{u}^m{}_{|i} \dot{u}_{m|j} \right\} dV - \int_{\partial\tau} \dot{T}^m \dot{u}_m dO. \quad (3.22)$$

Hier wird nur das Geschwindigkeitsfeld \dot{u}_i variiert. Erweitert man das Funktional (3.22) mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode, dann erhält man das allgemeine Variationsprinzip von Washizu [9, S. 103]

$$\delta \psi_I = 0, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \psi_I := & \int_V \left\{ W_e(\dot{e}_{ij}) - \dot{s}^{ij} \dot{e}_{ij} + \frac{1}{2} s^{ij} \dot{u}^m{}_{|i} \dot{u}_{m|j} \right. \\ & \left. + \dot{s}^{ij} \frac{1}{2} (\dot{u}_{i|j} + \dot{u}_{j|i} + \dot{u}^m{}_{|i} u_{m|j} + u^m{}_{|i} \dot{u}_{m|j}) \right\} dV \\ & - \int_{\partial\tau} \dot{T}^m \dot{u}_m dO - \int_{\partial u} \dot{T}^m (u_m - \bar{u}_m) dO. \quad (3.24) \end{aligned}$$

\dot{u}_i , \dot{e}_{ij} , \dot{s}^{ij} und \dot{T}^m auf O_u werden unabhängig und ohne Nebenbedingungen variiert (außer der Symmetrie von \dot{e}_{ij} und \dot{s}^{ij}). Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen sind (2.7), (2.13) und (2.22) und die natürlichen Randbedingungen sind (2.37) und (2.40). Besseling [16] hat ein allgemeineres Prinzip entwickelt, das auch die thermodynamischen Feldgleichungen als Euler-Lagrangesche Gleichungen enthält.

Drückt man die Gesamtverzerrungsrate \dot{e}_{ij} durch die Spannungsrate \dot{s}^{ij} und die nichtelastische Verzerrungsrate \dot{e}''_{ij} aus, dann gilt (2.19) und (2.21); damit folgt aus (3.24) das Funktional von Sanders McComb und Schlechte [14]:

$$\begin{aligned} \psi_I := & \int_V \left\{ \dot{s}^{ij} \frac{1}{2} (\dot{u}_{i|j} + \dot{u}_{j|i} + \dot{u}^m{}_{|i} u_{m|j} + u^m{}_{|i} \dot{u}_{m|j}) \right. \\ & \left. - W_s(\dot{s}^{ij}) + \frac{1}{2} s^{ij} \dot{u}^m{}_{|i} \dot{u}_{m|j} \right\} dV \\ & - \int_{\partial\tau} \dot{T}^m \dot{u}_m dO - \int_{\partial u} \dot{T}^m (u_m - \bar{u}_m) dO \quad (3.25) \end{aligned}$$

Hier werden nur der Geschwindigkeitsvektor \dot{u}_i , der Spannungsratentensor \dot{S}^{ij} und \dot{T}^m auf O_u variiert. Sanders, McComb und Schlechte haben allerdings ihr Prinzip durch Probieren gefunden, wobei sie sich von dem Reissnerschen Prinzip [7] und den Prinzipien von Wang und Prager [13], die nur für infinitesimale Verzerrungen und Rotationen gelten, leiten ließen. Pian [15] hat das Funktional von Sanders et al. aus einem verallgemeinerten Reissnerschen Prinzip für Körper mit Anfangsspannungen und -verzerrungen abgeleitet.

Auf die entsprechenden Variationsprinzipie bei infinitesimalen Deformationen wird hier nicht weiter eingegangen; es sei nur erwähnt, daß man die beiden Prinzipie von Wang und Prager [13] als Sonderfälle erhält.

4. Variationsprinzipie für dünnwandige, viskose Schalen bei kleinen Verzerrungen aber nichtverschwindenden Rotationen

4.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt werden approximative, geometrisch nichtlineare Theorien für dünnwandige Schalen dargestellt, u. z. für ein kriechfähiges Material sowohl mit wie auch ohne Berücksichtigung der elastischen Verzerrungen. Ausgangspunkt für diese beiden Theorien ist zum einen das Variationsprinzip von Sanders, McComb und Schlechte (3.25) und zum anderen das Prinzip (3.18).

Unter der Annahme, daß die Schalendicke klein im Verhältnis zu den Krümmungsradien ist, sollen diese Theorien im Rahmen der Kirchhoff-Loveschen Approximationen entwickelt werden. Diese Näherungen besagen, daß

- 1) Normalen der Mittelfläche auch nach der Verformung Normalen der verformten Mittelfläche bleiben,
- 2) materielle Punkte ihren Abstand von der Mittelfläche nicht ändern,
- 3) und daß aufgrund der geometrischen Bedingungen 1) und 2) die Schub- und Normalspannungen senkrecht zur Mittelfläche im Stoffgesetz nicht berücksichtigt werden.

Darüber hinaus soll vorausgesetzt werden, daß die Verzerrungen infinitesimal und die Rotationen endlich aber klein seien. Bei den Rotationen wird

insbesondere angenommen, daß die Rotation um die Mittelflächennormale vernachlässigbar ist im Vergleich zu den beiden anderen Rotationen.

4.2 Geometrische Beziehungen

Die wichtigsten geometrischen Zusammenhänge und Bezeichnungen sollen kurz zusammengestellt werden. Die Bezeichnungsweise folgt vorwiegend der von Green und Zerna [30]. Griechische Indizes durchlaufen die Werte eins bis zwei und in einem Ausdruck mit gleichen hoch- und tiefgestellten Indizes wird eine Summation von eins bis zwei durchgeführt.

Vor der Verformung sei der Ortsvektor \vec{r} eines materiellen Punktes im Schalenraum (Abb. 2) gegeben durch

$$\vec{r} = l \left[\vec{s}(\theta^1, \theta^2) + \lambda \theta \vec{a}_3(\theta^1, \theta^2) \right] \quad (4.1)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \theta \leq +\frac{1}{2}$$

Hier ist

- l der minimale Krümmungsradius
- $l\vec{s}$ der Ortsvektor der Mittelfläche, die einfach zusammenhängend sei und die Randkurve C besitze
- \vec{a}_3 der Einheitsnormalenvektor der Mittelfläche vor der Verformung
- θ^α eine krummlinige Koordinate in der Mittelfläche der Schale ($\alpha = 1, 2$)
- $\theta - \theta^3$ die Koordinate in \vec{a}_3 -Richtung
- h die Schalendicke
- $\lambda = \frac{h}{l} \ll 1$ die dimensionslose Schalendicke.

Der Einfachheit wegen soll h bzw. λ als konstant angesehen werden. Man wird aber später sehen können, daß die abgeleiteten Gleichungen auch für veränderliche Schalendicke gültig sind, sofern die Ableitungen von λ bezüglich der Mittelflächenkoordinaten θ^α von derselben Größenordnung sind wie λ [30].

Die ko- und kontravarianten Basisvektoren der Mittelfläche vor der Verformung (Referenzsystem) sind

$$\vec{a}_\alpha = \frac{\partial \vec{s}}{\partial \theta^\alpha} = \frac{1}{l} \left[\vec{g}_\alpha \right]_{\theta=0}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.2)$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0, \quad \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_3 = 1$$

$$\vec{a}^1 = \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \frac{1}{|\vec{a}_1|}, \quad \vec{a}^2 = \vec{a}_3 \times \vec{a}_1 \frac{1}{|\vec{a}_2|}, \quad \vec{a}^3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \frac{1}{|\vec{a}_3|}$$

$$a = \det(\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta) \quad (4.2)$$

$$\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & , \alpha = \beta \\ 0 & , \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Die ko- und kontravarianten Komponenten des Metriktensors der Mittelfläche sind $a_{\alpha\beta}$ und $a^{\alpha\beta}$ mit

$$a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta$$

$$a^{\alpha\beta} = \vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}^\beta \quad (4.3)$$

$$a_{\beta\gamma} a^{\gamma\alpha} = \delta_\beta^\alpha$$

und es gilt

$$\vec{a}_\alpha = a_{\gamma\alpha} \vec{a}^\gamma, \quad \vec{a}^\alpha = a^{\alpha\gamma} \vec{a}_\gamma$$

Die Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten lauten

$$\vec{a}_{\alpha,\beta} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \vec{a}_\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{a}_3 \quad (4.4)$$

$$\vec{a}_{3,\alpha} = -b_\alpha^\gamma \vec{a}_\gamma$$

In (4.4) bedeutet $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ das Christoffelsymbol

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} a^{\gamma\delta} (a_{\delta\alpha,\beta} + a_{\delta\beta,\alpha} - a_{\alpha\beta,\delta})$$

$$= \vec{a}_{\alpha,\beta} \cdot \vec{a}^\gamma = \vec{a}_{\beta,\alpha} \cdot \vec{a}^\gamma = -\vec{a}_\beta \cdot \vec{a}^{\gamma,\alpha}$$
(4.5)

und $b_{\alpha\beta}$ sind die Fundamentalgrößen 2. Ordnung

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_{3,\beta} = -\vec{a}_\beta \cdot \vec{a}_{3,\alpha} = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta}$$

$$b_\beta^\alpha = a^{\alpha\delta} b_{\delta\beta}, \quad b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\delta} b_\delta^\beta \quad (4.6)$$

Die Basisvektoren \vec{g}_i ($i = 1, 2, 3$) im Schalenraum sind durch

$$\vec{g}_\alpha = l \mu_\alpha^\gamma \vec{a}_\gamma$$

$$\vec{g}_3 = l \lambda \vec{a}_3 \quad (4.7)$$

$$\mu_\alpha^\gamma := \delta_\alpha^\gamma - \lambda \theta b_\alpha^\gamma$$

gegeben. Für die kovarianten Komponenten g_{ij} des Metriktensors des Schalenraumes ergibt sich dann [30]

$$g_{\alpha\beta} = (l)^2 [a_{\alpha\beta} - 2\lambda\theta b_{\alpha\beta} + (\lambda\theta)^2 b_\beta^\gamma b_{\alpha\gamma}]$$

$$g_{\alpha 3} = 0$$

$$g_{33} = (\lambda l)^2 \quad (4.8)$$

und die kontravarianten Komponenten g^{ij} sind

$$g^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{l}\right)^2 [a^{\alpha\beta} + 2(\lambda\theta) b^{\alpha\beta} + 3(\lambda\theta)^2 b^{\alpha\gamma} b^{\beta\gamma} + \dots], \quad \lambda \ll 1$$

$$g^{\alpha 3} = 0 \quad (4.9)$$

$$g^{33} = \left(\frac{1}{\lambda l}\right)^2.$$

Weiter ist

$$\sqrt{\frac{g}{a}} = \lambda(l)^3 [1 - (\lambda\theta) b_{\alpha}^{\alpha} + (\lambda\theta)^2 \det(b_{\beta}^{\alpha})] \quad (4.10)$$

und das Flächenelement df der Mittelfläche ist

$$df = (l)^2 \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2 \quad (4.11)$$

Mit dem Permutationstensor $\epsilon_{\alpha\beta}$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0, \quad \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = \sqrt{a} \quad (4.12)$$

ist

$$\vec{a}_{\alpha} \times \vec{a}_{\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} \vec{a}_3, \quad \vec{a}_3 \times \vec{a}_{\beta} = \epsilon_{\beta\gamma} \vec{a}^{\gamma}.$$

4.3 Das approximative Verschiebungs- und Verzerrungsfeld

Mit der Kirchhoff-Loveschen Hypothese lautet der Verschiebungsvektor

(Abb. 2)

$$\vec{u} = l \vec{v} + \lambda\theta l (\vec{A}_3 - \vec{a}_3). \quad (4.13)$$

Hier ist \vec{v} der dimensionslose Verschiebungsvektor der Mittelfläche

$$\vec{v} = v^{\alpha} \vec{a}_{\alpha} + w \vec{a}_3 = v_{\alpha} \vec{a}^{\alpha} + w \vec{a}_3 \quad (4.14)$$

und \vec{A}_3 der Einheitsnormalenvektor der verformten Mittelfläche. Weiter ist w die dimensionslose Normalverschiebung und v^{α} bzw. $v_{\alpha} = a_{\alpha\gamma} v^{\gamma}$ sind die kontra- bzw. kovarianten Komponenten der Tangentialverschiebung der Mittelfläche; die Dimension von v^{α} ist gleich der von θ^{α} und die Dimension von v_{α} ist gleich der reziproken Dimension von θ^{α} .

Der Ortsvektor eines materiellen Punktes ist nach der Verformung

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{u},$$

und die kovarianten Basisvektoren der verformten Mittelfläche sind definiert als

$$\vec{A}_{\alpha} = \frac{1}{l} [\vec{R}_{,\alpha}]_{\theta=0} = \vec{a}_{\alpha} + \vec{V}_{,\alpha}. \quad (4.15)$$

Mit den Ableitungsgleichungen (4.4) und der kovarianten Ableitung von v^α

$$\begin{aligned} v^\alpha|_\beta &= v^\alpha{}_{,\beta} + \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha v^\gamma \\ v_\alpha|_\beta &= a_{\alpha\gamma} v^\gamma|_\beta \end{aligned} \quad (4.16)$$

ist dann

$$\vec{A}_\alpha = (\delta_\alpha^\gamma + v^\gamma|_\alpha - \omega b_\alpha^\gamma) \vec{a}_\gamma - \omega_\alpha \vec{a}_3, \quad (4.17)$$

wobei ω_α bzw. ω^α durch

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &:= -(\omega_{,\alpha} + b_{\alpha\gamma} v^\gamma) \\ \omega^\alpha &= a^{\alpha\gamma} \omega_\gamma \end{aligned} \quad (4.18)$$

definiert ist.

Um im weiteren eine Reihe von Vereinfachungen vornehmen zu können, werden jetzt mehrere Größenordnungsannahmen vorgenommen. Dazu wird zunächst die geometrische Bedeutung einiger Flächentensoren erläutert.

Vor der Verformung ist $[d\vec{r}]_{\theta=0}$ der Abstandsvektor zweier benachbarter Punkte in der Mittelfläche; durch die Deformation wird er in $[d\vec{R}]_{\theta=0}$ überführt und die Änderung ist mit (4.14) und (4.17)

$$[d\vec{R} - d\vec{r}]_{\theta=0} = [d\vec{u}]_{\theta=0} = l \left\{ (v_{\gamma|\alpha} - \omega b_{\gamma\alpha}) \vec{a}^\gamma - \omega_\alpha \vec{a}_3 \right\} d\theta^\alpha$$

Durch Aufspaltung des Verschiebungsgradienten $v_{\gamma|\alpha}$ in den symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil kann dafür auch

$$\begin{aligned} [d\vec{u}]_{\theta=0} &= l \left\{ \frac{1}{2} (v_{\gamma|\alpha} + v_{\alpha|\gamma} - 2\omega b_{\gamma\alpha}) \vec{a}^\gamma \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (v_{\gamma|\alpha} - v_{\alpha|\gamma}) \vec{a}^\gamma - \omega_\alpha \vec{a}_3 \right\} d\theta^\alpha \end{aligned} \quad (4.19)$$

geschrieben werden. Wie man durch Berechnen der Verzerrungen der Mittelfläche

$$[e_{\alpha\beta}]_{\theta=0} = \frac{1}{2} (l)^2 [\vec{A}_\alpha \cdot \vec{A}_\beta - a_{\alpha\beta}]$$

nachweist, stellt in (4.19) der Term

$$\frac{1}{2} (v_{\gamma|\alpha} + v_{\alpha|\gamma} - 2\omega b_{\gamma\alpha})$$

bis auf einen konstanten Faktor die Verzerrung der Mittelfläche dar, wenn die Verschiebungen und Verschiebungsgradienten als infinitesimal angesehen werden. Weiterhin läßt sich dem schiefsymmetrischen Flächentensor

$$\frac{1}{2} (v_{\gamma|\alpha} - v_{\alpha|\gamma})$$

ein Vektor $\Omega \vec{a}_3$ zuordnen derart, daß mit (4.12)

$$\begin{aligned} \Omega \vec{a}_3 \times [d\vec{r}]_{\theta=0} &= l \Omega \sqrt{a} [d\theta^1 \vec{a}^2 - d\theta^2 \vec{a}^1] \\ &= l \frac{1}{2} (v_{\beta|\alpha} - v_{\alpha|\beta}) \vec{a}^\alpha d\theta^\alpha \end{aligned}$$

ist, so daß also

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} v_{\alpha|\beta} = \frac{1}{2} (v_{1|2} - v_{2|1}) \frac{1}{\sqrt{a}}$$

gilt. Aus dem Kreuzprodukt $\Omega \vec{a}_3 \times [d\vec{r}]_0$ ersieht man, daß Ω und damit $\frac{1}{2}(v_{\beta|\alpha} - v_{\alpha|\beta})$ die Starrkörperdrehung des von $[d\vec{r}]_0$ aufgespannten Mittelflächenelements um die Mittelflächennormale \vec{a}_3 darstellt, sofern die Verschiebungsgradienten infinitesimal sind. Aus (4.19) erkennt man ferner, daß die physikalischen Komponenten von w_α ($\alpha = 1, 2$) die beiden Drehungen der Mittelflächennormalen darstellen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann für das Folgende vorausgesetzt werden, daß die Koordinaten θ^α ($\alpha = 1, 2$) dimensionslos sind, und zwar sollen sie die auf den minimalen Krümmungsradius bezogenen Bogenlängen darstellen. Dann sind auch w_α , $v_{\alpha|\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ dimensionslos. In Anlehnung an ähnliche Annahmen von Sanders [29] wird nun vorausgesetzt, daß die Verzerrungen der Mittelfläche und die Rotation um die Mittelflächennormale von kleinerer Größenordnung sind als die beiden Rotationen der Normalen. Dazu werden die folgenden Größenordnungsannahmen gemacht:

$$\begin{aligned} \text{Rotationen der Normalen} & : w_\alpha \sim \lambda = \frac{h}{l} \ll 1 \\ \text{Rotation um die Normale} & : \frac{1}{2}(v_{\alpha|\beta} - v_{\beta|\alpha}) \sim (\lambda)^2 \quad (4.20) \\ \text{Infinites. Verzerrung} & \\ \text{der Mittelfläche} & : \frac{1}{2}(v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha} - 2w b_{\alpha\beta}) \sim (\lambda)^2 \end{aligned}$$

Aus der zweiten und dritten Größenordnungsannahme folgt mit

$$v_{\alpha|\beta} - w b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha} - 2w b_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}(v_{\alpha|\beta} - v_{\beta|\alpha})$$

sofort, daß dann

$$v_{\alpha|\beta} - w b_{\alpha\beta} \sim (\lambda)^2 \quad (4.21)$$

gilt.

Mit (4.17) und (4.12) errechnet sich jetzt die Normale der verformten Mittelfläche aus

$$\vec{A}_3 = \frac{\vec{A}_1 \times \vec{A}_2}{|\vec{A}_1 \times \vec{A}_2|}$$

und mit (4.12) ermittelt man zunächst

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 = \sqrt{a} \{ & \vec{a}_3 [1 + (v^1_{/1} - \omega b^1_1) \\ & + (v^2_{/2} - \omega b^2_2) \\ & + (v^1_{/1} - \omega b^1_1)(v^2_{/2} - \omega b^2_2) \\ & - (v^2_{/1} - \omega b^2_1)(v^1_{/2} - \omega b^1_2)] \\ & + \vec{a}^1 [\omega_1 + (v^2_{/2} - \omega b^2_2) \omega_1 \\ & - (v^2_{/1} - \omega b^2_1) \omega_2] \\ & + \vec{a}^2 [\omega_2 + (v^1_{/1} - \omega b^1_1) \omega_2 \\ & - (v^1_{/2} - \omega b^1_2) \omega_1] \} . \end{aligned}$$

Vernachlässigt man alle Terme von der Größenordnung $(\lambda)^2$ und kleiner im Vergleich zu eins, dann wird

$$\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 \approx \sqrt{a} \{ \vec{a}_3 + \omega^2 \vec{a}_\alpha \} ,$$

so daß man

$$\vec{A}_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \omega^2 \omega_3} (\vec{a}_3 + \omega^2 \vec{a}_\alpha) \quad (4.22)$$

bzw.

$$\vec{A}_3 \approx \vec{a}_3 + \omega^2 \vec{a}_\alpha \quad (4.23)$$

erhält. Man beachte, daß \vec{A}_3 entsprechend (4.23) bis auf einen Fehler der Größenordnung $(\lambda)^2$ Einheitsvektor ist. Ferner sei bemerkt, daß man (4.22) bzw. (4.23) auch dann erhält, wenn die Rotation um die Normale von der Größenordnung λ ist.

Mit (4.23) lautet dann der Verschiebungsvektor (4.13)

$$\vec{u} = l [(v^\alpha + \lambda \theta \omega^\alpha) \vec{a}_\alpha + \omega \vec{a}_3] . \quad (4.24)$$

Dieser approximative Ansatz stimmt mit dem der geometrisch linearen, technischen Schalentheorie überein [30].

Mit

$$\vec{u}_{,\alpha} = l [(v^3_{/\alpha} - \omega b^3_\alpha + \lambda \theta \omega^3_{/\alpha}) \vec{a}_3 - \omega_3 \mu^3_\alpha \vec{a}_3]$$

und (4.7) erhält man für die Verzerrungen (2.6) nach Entwicklung in Potenzen von $(\lambda\theta)$

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} (\ell)^2 \left\{ v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha} - 2\omega b_{\alpha\beta} \right. \\
 & + \lambda\theta \left[w_{\alpha|\beta} + w_{\beta|\alpha} - b_{\alpha}^{\delta} (v_{\gamma|\beta} - \omega b_{\gamma\beta}) - b_{\beta}^{\delta} (v_{\gamma|\alpha} - \omega b_{\gamma\alpha}) \right] \\
 & - (\lambda\theta)^2 \left[b_{\gamma\alpha} w_{\delta|\beta} + b_{\gamma\beta} w_{\delta|\alpha} \right] \\
 & \left. + \left(\frac{1}{\ell}\right)^2 \vec{u}_{,\alpha} \cdot \vec{u}_{,\beta} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

und

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_{,\alpha} \cdot \vec{u}_{,\beta} = & (\ell)^2 \left\{ \omega_{\alpha} \omega_{\beta} + (v_{\gamma|\alpha} - \omega b_{\gamma\alpha})(v_{\delta|\beta} - \omega b_{\delta\beta}) \right. \\
 & + \lambda\theta \left[w_{\gamma|\alpha} (v_{\delta|\beta} - \omega b_{\delta\beta}) + w_{\gamma|\beta} (v_{\delta|\alpha} - \omega b_{\delta\alpha}) \right. \\
 & \quad \left. - \omega^{\delta} b_{\gamma\alpha} \omega_{\beta} - \omega^{\delta} b_{\gamma\beta} \omega_{\alpha} \right] \\
 & \left. + (\lambda\theta)^2 \left[w_{\gamma|\alpha} w_{\delta|\beta} + \omega^{\delta} b_{\gamma\alpha} \omega^{\delta} b_{\delta\beta} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Da \vec{s} der auf den minimalen Krümmungsradius ℓ bezogene Ortsvektor der Mittel­fläche ist und θ^{α} hier die auf ℓ bezogene Bogenlänge darstellt, wird b_{α}^{δ} von der Größenordnung eins. Wird weiterhin angenommen, daß die Änderung $w_{\alpha|\beta}$ der Rotation ω_{α} von derselben Größenordnung ist wie λ und werden dann in (4.25) alle Terme von kleinerer Größenordnung als $(\lambda)^2$ vernachlässigt, dann wird

$$e_{\alpha\beta} = (\ell)^2 \left[\alpha_{\alpha\beta} + \lambda\theta \omega_{\alpha\beta} \right] \tag{4.27}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha} - 2\omega b_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha} \omega_{\beta} \right) \\
 \omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(w_{\alpha|\beta} + w_{\beta|\alpha} \right)
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

und es ist

$$\vec{u}_{,\alpha} \cdot \vec{u}_{,\beta} = (\ell)^2 \omega_{\alpha} \omega_{\beta}. \tag{4.29}$$

Zunächst sei bemerkt, daß die in (4.23) und damit auch in (4.24) vorgenommenen Vernachlässigungen mit der hier durchgeführten Approximation konsistent sind.

Der Flächentensor $\alpha_{\beta\alpha}$ ist von der Größenordnung $(\lambda)^2$; er beschreibt den Verzerrungszustand der Mittel­fläche. Wegen der Annahmen (4.20)₂ enthält er nur den nichtlinearen Term $\omega_{\alpha} \omega_{\beta}$. Der Flächentensor $\omega_{\alpha\beta}$ ist von der Größenordnung λ ; er beschreibt die Krümmungsänderung der Mittel­fläche.

Der Einfluß der Rotation Ω um die Normale ist wegen der Annahmen (4.20)₂ hier nicht enthalten. Es ist denkbar, daß $\omega_{\alpha\beta}$ von kleinerer Größenordnung ist als λ . Das bedeutet dann aber, daß die Verformung primär nur durch Membrankräfte bestimmt wird, so daß also hier Fehler in $\omega_{\alpha\beta}$ von geringer Bedeutung sind.

Nun ist zunächst darauf zu achten, daß in (4.27) $e_{\alpha\beta}$ kein Flächentensor ist, vielmehr werden hier die Indizes eigentlich mit der Metrik (4.8) und (4.9) herunter- bzw. heraufgezogen. Berücksichtigt man dabei aber konsequenterweise nur Terme von der Größenordnung $(\lambda)^2$, dann muß im Rahmen dieser Approximation die Metrik des Schalenraumes durch die Metrik der Mittelfläche approximiert werden, so daß also

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= (\ell)^2 a_{\alpha\beta} \\ g^{\alpha\beta} &= (\ell^{-1})^2 a^{\alpha\beta} \\ \sqrt{g/a} &= \lambda (\ell)^3 \end{aligned} \quad (4.30)$$

gesetzt werden kann. Entsprechendes gilt dann auch für den Kirchhoffschen Spannungstensor. Im Vergleich zu der Operation des Herauf- und Herunterziehens bei den Flächentensoren $a_{\alpha\beta}$, $\omega_{\alpha\beta}$, v_α , w_α etc. beachte man aber bei $e_{\alpha\beta}$ und $s^{\alpha\beta}$ die Faktoren $(\ell)^2$ und $(\ell^{-1})^2$ in (4.30). Dieser Unterschied beruht nur auf der Normierung des Ortsvektors der Mittelfläche (4.1).

4.4 Variationsprinzip für viskose Schalen mit Berücksichtigung der elastischen Verzerrungen

Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen ist das Variationsprinzip von Sanders, McComb und Schlechte (3.25). Für das Verschiebungs- bzw. Geschwindigkeitsfeld wird (4.24) mit (4.18) zugrunde gelegt und der Verzerrungstensor wird durch (4.27) mit (4.28) approximiert. Weiterhin werden die Terme im Volumenintegral von (3.25), die die Schubspannungen S_3^α und die Normalspannung S_3^3 enthalten, fortgelassen.

Es sei vorausgeschickt, daß die zweistufigen Tensoren vorwiegend durch ihre gemischten Komponenten dargestellt werden, um die Gleichungen möglichst übersichtlich zu halten.

Wesentlich für das Folgende ist, daß zunächst keine Annahme über die Verteilung der Spannungen S_3^α bzw. ihrer zeitlichen Änderungen \dot{S}_3^α über der Schalendicke gemacht wird.

Wird ohne besondere Einschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt, daß

$$\delta \dot{u}_i = 0 \quad \text{auf} \quad O_u,$$

dann lautet (3.25) unter Beachtung von (4.18), (4.24) und (4.27) bis (4.30)

$$\Psi_{II} = \int_V \left\{ \dot{s}_\beta^\alpha \dot{e}_\alpha^\beta + \frac{1}{2} s_\beta^\alpha \dot{\omega}_\alpha \dot{\omega}^\beta - W_S(\dot{s}_\beta^\alpha) \right\} dV - \int_{O_T} \dot{\vec{T}} \cdot \vec{u} dO, \quad (4.31)$$

wobei $\dot{\vec{T}}$ die zeitliche Änderung der eingepprägten Oberflächenlast ist; das Potential W_S entsprechend (2.18) bekommt die folgende Form:

$$W_S = \frac{1}{2} \left[\frac{1+\nu}{E} \dot{s}_\beta^\alpha \dot{s}_\alpha^\beta - \frac{\nu}{E} \dot{s}_\gamma^\gamma \dot{s}_\delta^\delta + 2 \dot{e}''_{\alpha}{}^\beta \dot{s}_\beta^\alpha \right]. \quad (4.32)$$

Die Variation der Spannungsraten \dot{s}_β^α in (4.31) liefert nun das Stoffgesetz als eine der Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$\dot{e}_\beta^\alpha - \frac{1+\nu}{E} \dot{s}_\beta^\alpha + \frac{\nu}{E} \dot{s}_\mu^\mu \delta_\beta^\alpha - \dot{e}''_{\beta}{}^\alpha = 0,$$

deren Auflösung nach \dot{s}_β^α die Gleichung

$$\dot{s}_\beta^\alpha = \frac{E}{1+\nu} \left[\dot{e}_\beta^\alpha - \dot{e}''_{\beta}{}^\alpha + \frac{\nu}{1-\nu} (\dot{e}_\mu^\mu - \dot{e}''_{\mu}{}^\mu) \delta_\beta^\alpha \right] \quad (4.33)$$

ergibt. Integriert man jetzt die ersten beiden Terme im Volumenintegral von (4.31) über die Schalendicke, dann erhält man

$$\int_V \left\{ \dot{s}_\beta^\alpha \dot{e}_\alpha^\beta + \frac{1}{2} s_\beta^\alpha \dot{\omega}_\alpha \dot{\omega}^\beta \right\} dV = \int_f \left\{ \dot{m}_\beta^\alpha \dot{\alpha}_\alpha^\beta + \dot{m}_\beta^\mu \dot{\omega}_\mu^\beta + \frac{1}{2} m_\beta^\mu \dot{\omega}_\mu \dot{\omega}^\beta \right\} df. \quad (4.34)$$

Hier ist mit (4.30) und (4.11)

$$dV = \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta = \lambda l d\theta df$$

und

$$\begin{aligned} m_\beta^\alpha &:= \lambda l \int_{-1/2}^{1/2} s_\beta^\alpha d\theta \\ m_\beta^\mu &:= (\lambda)^2 l \int_{-1/2}^{1/2} s_\beta^\mu \theta d\theta. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Unter Beachtung der in Abschnitt (4.2) angegebenen Approximationen stellen m_β^α und m_β^μ die gemischten Komponenten des Membrankraft- und Momententensors dar [30]. Die kontravarianten Komponenten sind durch

$$\begin{aligned} m^{\alpha\beta} &= a^{\gamma\beta} m_\gamma^\alpha = \lambda (l)^3 \int_{-1/2}^{1/2} s^{\alpha\beta} d\theta \\ m^{\alpha\mu} &= a^{\gamma\mu} m_\gamma^\alpha = (\lambda)^2 (l)^3 \int_{-1/2}^{1/2} s^{\alpha\mu} \theta d\theta \end{aligned} \quad (4.36)$$

gegeben. Sie sind symmetrisch.

Setzt man voraus, daß sich die Elastizitätskonstanten E und ν nicht über die Schalendicke ändern, dann ergibt die Integration von (4.33) mit (4.35) und (4.27)

$$\dot{n}_{\beta}^{\alpha} = \frac{E}{1+\nu} D \left[\dot{\alpha}_{\beta}^{\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{\alpha}_{\mu}^{\mu} \delta_{\beta}^{\alpha} \right] - \dot{n}_{\beta}^{\prime\prime\alpha} \quad (4.37)$$

$$\dot{m}_{\beta}^{\alpha} = \frac{E}{1+\nu} B \left[\dot{\omega}_{\beta}^{\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{\omega}_{\mu}^{\mu} \delta_{\beta}^{\alpha} \right] - \dot{m}_{\beta}^{\prime\prime\alpha}.$$

Hier bedeuten (s. S. 92)

$$D := \lambda l \int_{-1/2}^{1/2} d\theta = h \quad (4.38)$$

$$B := (\lambda)^2 l \int_{-1/2}^{1/2} (\theta)^2 d\theta = (\lambda)^2 \frac{l}{12}$$

und

$$\dot{n}_{\beta}^{\prime\prime\alpha} := \lambda l \frac{E}{1+\nu} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\dot{e}_{\beta}^{\prime\prime\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{e}_{\mu}^{\prime\prime\mu} \delta_{\beta}^{\alpha} \right) d\theta \quad (4.39)$$

$$\dot{m}_{\beta}^{\prime\prime\alpha} := (\lambda)^2 l \frac{E}{1+\nu} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\dot{e}_{\beta}^{\prime\prime\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{e}_{\mu}^{\prime\prime\mu} \delta_{\beta}^{\alpha} \right) \theta d\theta.$$

Aus (4.39) erhält man

$$\lambda l \int_{-1/2}^{1/2} \dot{e}_{\beta}^{\prime\prime\alpha} d\theta = \frac{1+\nu}{E} \left(\dot{n}_{\beta}^{\prime\prime\alpha} - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{m}_{\mu}^{\prime\prime\mu} \delta_{\beta}^{\alpha} \right) \quad (4.40)$$

$$(\lambda)^2 l \int_{-1/2}^{1/2} \dot{e}_{\beta}^{\prime\prime\alpha} \theta d\theta = \frac{1+\nu}{E} \left(\dot{m}_{\beta}^{\prime\prime\alpha} - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{m}_{\mu}^{\prime\prime\mu} \delta_{\beta}^{\alpha} \right)$$

und aus (4.37) berechnet man

$$\dot{\alpha}_{\mu}^{\mu} = \frac{1}{D} \frac{1-\nu}{E} \left(\dot{m}_{\mu}^{\mu} + \dot{m}_{\mu}^{\prime\prime\mu} \right) \quad (4.41)$$

$$\dot{\omega}_{\mu}^{\mu} = \frac{1}{B} \frac{1-\nu}{E} \left(\dot{m}_{\mu}^{\mu} + \dot{m}_{\mu}^{\prime\prime\mu} \right)$$

und

$$\dot{\alpha}_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{D} \frac{1+\nu}{E} \left[\dot{m}_{\beta}^{\alpha} + \dot{m}_{\beta}^{\prime\prime\alpha} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\dot{m}_{\beta}^{\mu} + \dot{m}_{\beta}^{\prime\prime\mu} \right) \delta_{\beta}^{\alpha} \right] \quad (4.42)$$

$$\dot{\omega}_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{B} \frac{1+\nu}{E} \left[\dot{m}_{\beta}^{\alpha} + \dot{m}_{\beta}^{\prime\prime\alpha} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\dot{m}_{\beta}^{\mu} + \dot{m}_{\beta}^{\prime\prime\mu} \right) \delta_{\beta}^{\alpha} \right].$$

Mit (4.41) und (4.42) lassen sich jetzt die Spannungsraten (4.33) darstellen durch

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{\beta}^{\alpha} = & \frac{1}{D} \left[\dot{m}_{\beta}^{\alpha} + \dot{m}_{\beta}^{\prime\prime\alpha} \right] + \frac{\lambda \theta}{B} \left[\dot{m}_{\beta}^{\alpha} + \dot{m}_{\beta}^{\prime\prime\alpha} \right] \\ & - \frac{E}{1+\nu} \left[\dot{e}_{\beta}^{\prime\prime\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{e}_{\beta}^{\prime\prime\mu} \delta_{\beta}^{\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Man erkennt, daß sich die durch (4.43) dargestellten Spannungsraten als Folge aus den Euler-Lagrangeschen Gleichungen (4.33) ergeben, sofern man die in Abschnitt (4.2) gemachten geometrischen und kinematischen Approximationen zugrunde legt, und daher ist dann (4.43) mit der Euler-Lagrangeschen Gleichung (4.33) verträglich. Aus (4.43) ersieht man, daß die Verteilung der Spannungsraten über der Schalendicke nichtlinear ist, denn im allgemeinen sind die in $\dot{e}''_{\beta}{}^{\alpha}$ enthaltenen Kriechraten durch eine nichtlineare Beziehung mit den Spannungen verknüpft. Da die nichtelastischen Verzerrungsraten $\dot{e}'_{\beta}{}^{\alpha}$ in dem betrachteten Zeitpunkt als bekannt angesehen werden, sind die Spannungsraten $\dot{s}_{\beta}{}^{\alpha}$ berechenbar, sofern die zeitlichen Änderungen der Membrankräfte und Momente bestimmt sind.

Wird jetzt (4.43) als Ansatz für die Spannungsraten zugrunde gelegt, dann ergibt der dritte Term im Volumenintegral von (4.31) nach Integration über die Schalendicke

$$\begin{aligned} \hat{W}_s &= \lambda l \int_{-h}^h W_s d\theta = \frac{1+\nu}{2ED} \left[\dot{n}_{\beta}{}^{\alpha} \left(\dot{m}_{\alpha}{}^{\beta} - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{n}_{\gamma}{}^{\delta} \delta_{\alpha}^{\beta} \right) \right. \\ &\quad + \dot{m}_{\beta}{}^{\alpha} \left(\dot{m}_{\alpha}{}^{\beta} - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{m}_{\gamma}{}^{\delta} \delta_{\alpha}^{\beta} \right) \frac{D}{B} \\ &\quad + 2 \dot{n}_{\beta}{}^{\alpha} \left(\dot{n}''_{\alpha}{}^{\beta} - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{n}''_{\gamma}{}^{\delta} \delta_{\alpha}^{\beta} \right) \\ &\quad \left. + 2 \dot{m}_{\beta}{}^{\alpha} \left(\dot{m}''_{\alpha}{}^{\beta} - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{m}''_{\gamma}{}^{\delta} \delta_{\alpha}^{\beta} \right) \frac{D}{B} \right] \\ &\quad + \mathcal{Z}(\dot{e}''_{\beta}{}^{\alpha}) . \end{aligned} \tag{4.44}$$

Der Zusatzterm $\mathcal{Z}(\dot{e}''_{\beta}{}^{\alpha})$ enthält nur Integrale über die nichtelastischen Verzerrungsraten; da diese in dem betrachteten Zeitpunkt als bekannt angesehen und nicht variiert werden, kann der Zusatzterm im folgenden fortgelassen werden.

Die ersten beiden Zeilen von (4.44) stellen die bekannte elastische Formänderungsenergie pro Einheit der Mittelfläche dar, ausgedrückt durch die zeitlichen Änderungen des symmetrischen Membrankraft- und Momententensors. Die beiden weiteren Zeilen berücksichtigen die nichtelastischen Verzerrungen. Man beachte, daß hier (4.40) gilt.

Interessant ist, daß man formal denselben Ausdruck \hat{W}_s (ohne Zusatzterm \mathcal{Z}) erhält, wenn man anstelle von (4.43) eine lineare Spannungsverteilung

$$\dot{s}_{\beta}{}^{\alpha} = \frac{1}{D} \dot{n}_{\beta}{}^{\alpha} + \frac{\lambda \theta}{B} \dot{m}_{\beta}{}^{\alpha}$$

zugrunde legt. Dann haben aber die Kriechraten und damit $\dot{e}''_{\beta}{}^{\alpha}$, \dot{n}''_{β} und $\dot{m}''_{\beta}{}^{\alpha}$ andere Werte.

Auf die beiden im Abstand $h/2$ zur Mittelfläche verlaufenden Oberflächen wirken Kräfte. Da voraussetzungsgemäß die Schale dünn ist, ist es zulässig, die Kraftangriffspunkte in die Mittelfläche zu verlegen. Für das Weitere soll nun der praktisch wichtige Fall einer ortsunabhängigen, hydrostatischen Druckbelastung angenommen werden. Da diese Druckkraft normal zur verformten Mittelfläche wirkt, ist die zeitliche Änderung der eingepprägten Kraft \ddot{T} abhängig vom Geschwindigkeitsfeld. Es muß daher untersucht werden, unter welchen Bedingungen in diesem Fall ein "Druckpotential" $\bar{\pi}_f$ der auf die Mittelfläche wirkenden Kräfte existiert (zur Bezeichnung "Potential" vergl. S. 92). Zur Herleitung dieses Druckpotentials muß von dem Ausdruck

$$\int_f \ddot{T} \cdot (\delta \vec{u})_{\theta=0} df$$

ausgegangen werden (vergl. 3.20), und es muß nachgewiesen werden, daß eine skalare Funktion ("Potential") $\bar{\pi}_f$ existiert, so daß

$$\int_f \bar{\pi}_f df = \int_f \ddot{T} \cdot (\delta \vec{u})_{\theta=0} df \quad (4.45)$$

gilt. Es ist

$$\ddot{T} = -\rho \bar{A}_3 \frac{dF}{df}; \quad (4.46)$$

hier ist ρ der hydrostatische Druck, df das unverformte und dF das verformte Flächenelement der Mittelfläche und \bar{A}_3 der Einheitsnormalenvektor der verformten Mittelfläche. Mit

$$A = \det(\bar{A}_{\alpha} \cdot \bar{A}_{\beta})$$

ist

$$\frac{dF}{df} = \sqrt{\frac{A}{a}} \approx 1 + (e_{\alpha}^{\alpha})_{\theta=0} + \dots = 1 + v^{\alpha}{}_{/\alpha} - w b_{\alpha}^{\alpha} + \frac{1}{2} w_{\alpha} w^{\alpha} + \dots$$

und (4.46) wird

$$\ddot{T} = -\rho \frac{1 + (e_{\alpha}^{\alpha})_{\theta=0}}{1 + \frac{1}{2} w_{\alpha} w^{\alpha}} (w^{\mu} \bar{a}_{\mu} + \bar{a}_3)$$

sofern man berücksichtigt, daß \bar{A}_3 strenggenommen ein Einheitsvektor sein muß. Man erhält durch Entwicklung des Nenners und Vernachlässigung von Termen kleiner als $(\lambda)^2$

$$\ddot{T} = -\rho [w^{\mu} \bar{a}_{\mu} + (1 + v^{\alpha}{}_{/\alpha} - w b_{\alpha}^{\alpha}) \bar{a}_3] \quad (4.47)$$

und nach Differentiation

$$\dot{\vec{T}} = -[\dot{\rho} \dot{w}^\alpha + \rho \dot{\dot{w}}^\alpha] \vec{a}_\mu - [\dot{\rho} (1 + v^\alpha/\alpha - w b_\alpha^\alpha) + \rho (\dot{v}^\alpha/\alpha - \dot{w} b_\alpha^\alpha)] \vec{a}_3.$$

Unter Beachtung von (4.24) und (4.18) wird

$$\begin{aligned} \dot{\vec{T}} \cdot \delta \vec{u}_{(\theta=0)} = l \{ & [\dot{\rho} (w_{,\mu} + b_{\mu\gamma} v^\gamma) + \rho (\dot{w}_{,\mu} + b_{\mu\gamma} \dot{v}^\gamma)] \delta v^\mu \\ & - [\dot{\rho} (1 + v^\alpha/\alpha - w b_\alpha^\alpha) + \rho (\dot{v}^\alpha/\alpha - \dot{w} b_\alpha^\alpha)] \delta \dot{w} \}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ist $\vec{\nu} = \nu^\alpha \vec{a}_\alpha = \nu_\alpha \vec{a}^\alpha$ der äußere Einheitsnormalenvektor auf der Randkurve C , der in der Tangentialebene der Mittelfläche liegt und ist dC das Bogenelement der Randkurve, dann erhält man mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_f \dot{w}_{,\mu} \delta v^\mu df = l \oint_C \nu_\mu \dot{w} \delta v^\mu dC - \int_f \dot{w} \delta v^\mu{}_{,\mu} df. \quad (4.49)$$

Damit ergibt die Integration von (4.48) über die Mittelfläche

$$\int_f \dot{\vec{T}} \cdot \delta \vec{u}_{(\theta=0)} df = \int_f \pi_f df + \rho (l)^2 \oint_C \dot{w} \nu_\mu \delta v^\mu dC, \quad (4.50)$$

wobei

$$\begin{aligned} \pi_f = l \{ & -\dot{\rho} (1 + v^\alpha/\alpha - w b_\alpha^\alpha) \dot{w} + \dot{\rho} (w_{,\mu} + b_{\mu\gamma} v^\gamma) \dot{v}^\mu \\ & + \frac{1}{2} \rho (b_{\gamma\mu} \dot{v}^\gamma \dot{v}^\mu + b_\alpha^\alpha (\dot{w})^2) - \rho \dot{w} \dot{v}^\mu{}_{,\mu} \}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Das Randintegral in (4.50) verschwindet,

$$\oint_C \dot{w} \nu_\mu \delta v^\mu dC = 0 \quad (4.52)$$

nur bei bestimmten Randbedingungen, und zwar insbesondere dann, wenn \dot{w} oder $\nu_\mu \delta v^\mu$ (virtuelle Tangentialgeschwindigkeit normal zur Randkurve) oder beide Geschwindigkeitsgrößen auf dem genannten Rand C gleich Null sind. Man erkennt unmittelbar, daß dies bei einer eingespannten oder gelenkig gelagerten Schale der Fall ist. Auch bei einer Schale, die keinen Rand besitzt, also geschlossen ist, ist (4.52) erfüllt. Für das Folgende soll vorausgesetzt werden, daß das Randintegral (4.52) verschwindet.

Einen (4.51) entsprechenden Ausdruck für einen elastischen, dreidimensionalen Körper hat Pearson [34] gegeben und analoge Überlegungen für eine elastische Zylinderschale wurden von Pflüger [35] angestellt.

Die Randkurve C der Mittelfläche und die Normalen \vec{a}_3 und $\vec{\nu}$ auf C mögen die Randfläche O_R definieren. Für die auf diese Randfläche O_R wirkenden Spannungen soll vorausgesetzt werden, daß sie nicht vom Verschiebungsfeld abhängen. Beachtet man zunächst einmal nicht die Forderung (4.52), dann läßt sich das

Randintegral

$$\int_{O_R} \dot{\vec{T}} \cdot \dot{\vec{u}} dO$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{\vec{n}}^\alpha &= \lambda l \int_{-1/2}^{1/2} \dot{\vec{T}} \cdot \vec{a}_\alpha d\theta \\ \dot{\vec{m}}^\alpha &= (\lambda)^2 l \int_{-1/2}^{1/2} \dot{\vec{T}} \cdot \vec{a}_\alpha \theta d\theta \\ \dot{\vec{q}} &= (\lambda)^2 l \int_{-1/2}^{1/2} \dot{\vec{T}} \cdot \vec{a}_3 d\theta \end{aligned}$$

und (4.24) durch

$$\int_{O_R} \dot{\vec{T}} \cdot \dot{\vec{u}} dO = l \oint_C \left\{ \dot{\vec{n}}^\alpha v_\alpha + \dot{\vec{m}}^\alpha \dot{w}_\alpha + \dot{\vec{q}} \dot{w} \right\} dC \quad (4.53)$$

darstellen. Die Größen $\dot{\vec{n}}^\alpha$, $\dot{\vec{m}}^\alpha$ und $\dot{\vec{q}}^\alpha$ sind die Komponenten der zeitlichen Änderungen der Randkräfte und Momente. Für die Rotationsrate \dot{w}_α läßt sich mit (4.18)

$$\dot{w}_\alpha = -(\dot{w}_{,\alpha} + b_\alpha^\gamma v_\gamma) = -l \left[v_\alpha \frac{\partial \dot{w}}{\partial v} - \epsilon_{\alpha\beta} v^\beta \frac{\partial \dot{w}}{\partial C} \right] - b_\alpha^\gamma v_\gamma \quad (4.54)$$

schreiben, indem man $\dot{w}_{,\alpha}$ nach den Komponenten $\frac{\partial \dot{w}}{\partial C}$ und $\frac{\partial \dot{w}}{\partial v}$ bezüglich der Randkurve C und der äußeren Normalen $\vec{\nu}$ entwickelt. Hier ist dv das Bogenelement in Richtung $\vec{\nu}$. Mit (4.54) und unter der Voraussetzung, daß $\dot{w} \dot{\vec{m}}^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} v^\beta$ eindeutig ist, wird aus (4.53) nach partieller Integration über die Randkurve

$$\begin{aligned} \Pi_c := \int_{O_R} \dot{\vec{T}} \cdot \dot{\vec{u}} dO &= l \oint_C \left\{ \left[\dot{\vec{n}}^\alpha - \dot{\vec{m}}^\gamma b_\gamma^\alpha \right] v_\alpha - \left[\dot{\vec{m}}^\alpha v_\alpha \right] \frac{\partial \dot{w}}{\partial C} l \right. \\ &\quad \left. + \left[\dot{\vec{q}} - l \frac{\partial}{\partial C} (\dot{\vec{m}}^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} v^\beta) \right] \dot{w} \right\} dC. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Der Term $\dot{\vec{m}}^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} v^\beta l$ ist die zeitliche Ableitung des Torsionsmomentes am Rande und der Ausdruck

$$\dot{\vec{q}}^* := \dot{\vec{q}} - l \frac{\partial}{\partial C} (\dot{\vec{m}}^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} v^\beta)$$

stellt die zeitliche Ableitung der Ersatzquerkraft dar, deren Einführung bei Theorien, die auf der Kirchhoff-Loveschen Hypothese beruhen, erforderlich ist.

Es muß jetzt aber beachtet werden, daß das Potential Π_c der Randbelastungen (vergl. S. 92) bei hydrostatischer Druckbelastung mit der Bedingung (4.52) verträglich sein muß. So muß beispielsweise bei einem gelenkig gelagerten Rand ($\dot{w} = 0$) der Ausdruck $\dot{\vec{q}}^* \dot{w}$ in Π_c fortgelassen werden.

Mit (4.34), (4.44), (4.51) und (4.52) sowie (4.55) bekommt das Funktional

(4.31) nach Integration über die Schalendicke die folgende Form

$$\Psi_{II} = \int_f \left\{ \dot{n}^{\alpha\beta} \dot{\alpha}^{\beta\alpha} + \dot{m}^{\alpha\beta} \dot{\omega}^{\beta\alpha} + \frac{1}{2} n^{\alpha\beta} \dot{\omega}_\alpha \dot{\omega}^{\beta\alpha} - \hat{W}_s - \Pi_f \right\} df - \Pi_c \quad (4.56)$$

Das Variationsprinzip lautet dann

$$\delta \Psi_{II} = 0, \quad (4.57)$$

wobei \dot{v}^α , $\dot{\omega}$, $\dot{n}^{\alpha\beta} = \dot{n}^{\beta\alpha}$, $\dot{m}^{\alpha\beta} = \dot{m}^{\beta\alpha}$ variiert werden. Die erste Variation von (4.56) führt auf mehrere Ausdrücke, die mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes und der kovarianten Ableitung von $\dot{n}^{\alpha\beta}$ (bzw. $\dot{m}^{\alpha\beta}$)

$$\dot{n}^{\alpha\beta}|_\gamma = \dot{n}^{\alpha\beta},_\gamma + \bar{\Gamma}^\alpha_{\gamma\lambda} \dot{n}^{\lambda\beta} + \bar{\Gamma}^\beta_{\gamma\lambda} \dot{n}^{\alpha\lambda}$$

in Randintegrale überführt werden können:

$$\begin{aligned} \int_f \dot{n}^{\alpha\beta} \delta v_{\alpha|\beta} df &= l \oint_c v_\beta \dot{n}^{\alpha\beta} \delta v_\alpha dC - \int_f \dot{n}^{\alpha\beta}|_\beta \delta v_\alpha df \\ \int_f \dot{n}^{\alpha\beta} \omega_\alpha \delta \dot{\omega}_{,\beta} df &= l \oint_c v_\beta \dot{n}^{\alpha\beta} \omega_\alpha \delta \dot{\omega} dC - \int_f [\dot{n}^{\alpha\beta} \omega_\alpha]_{|\beta} \delta \dot{\omega} df \\ \int_f \dot{m}^{\alpha\beta} [\delta \dot{\omega}_{,\beta} + b_{\beta\gamma} \delta \dot{v}^\gamma]_{|\alpha} df &= \\ &= l \oint_c \left\{ v_\alpha \dot{m}^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma} \delta \dot{v}^\gamma + v_\alpha \dot{m}^{\alpha\beta} v_\beta \delta \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial v} l \right. \\ &\quad \left. - (\dot{m}^{\alpha\beta}|_\alpha v_\beta - l \frac{\partial}{\partial C} (\dot{m}^{\alpha\beta} v_\beta \epsilon_{\alpha\beta} v^\alpha)) \delta \dot{\omega} \right\} dC \\ &\quad - \int_f \left\{ \dot{m}^{\alpha\beta}|_\alpha b_{\beta\gamma} \delta \dot{v}^\gamma - \dot{m}^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} \delta \dot{\omega} \right\} df. \end{aligned}$$

Mit diesen Beziehungen und (4.51) folgt aus (4.57) unter Beachtung von (4.52)

$$\begin{aligned} \delta \Psi_{II} = \int_f \left\{ \left[\dot{\alpha}^{\beta\alpha} - \frac{\partial \hat{W}_s}{\partial \dot{n}^{\alpha\beta}} \right] \delta \dot{n}^{\alpha\beta} + \left[\dot{\omega}^{\beta\alpha} - \frac{\partial \hat{W}_s}{\partial \dot{m}^{\alpha\beta}} \right] \delta \dot{m}^{\alpha\beta} \right. \\ \left. - \left[\dot{n}^{\alpha\beta}|_\beta + \dot{m}^{\alpha\beta} \omega_\beta b_\beta^\alpha + n^{\alpha\beta} \dot{\omega}_\beta b_\beta^\alpha - \dot{m}^{\alpha\beta}|_\beta b_\beta^\alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \dot{p} l \omega^\alpha - p l \dot{\omega}^\alpha \right] \delta \dot{v}^\alpha \quad (4.58) \right. \\ \left. - \left[\dot{n}^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} - (\dot{n}^{\alpha\beta} \omega_\alpha)_{|\beta} - (n^{\alpha\beta} \dot{\omega}_\alpha)_{|\beta} + \dot{m}^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} - \right. \right. \\ \left. \left. - \dot{p} l (1 + v^\alpha|_\alpha - \omega b_\alpha^\alpha) - p l (\dot{v}^\alpha|_\alpha - \dot{\omega} b_\alpha^\alpha) \right] \delta \dot{\omega} \right\} df - \end{aligned}$$

$$-l \oint_C \left\{ \left[\dot{n}^\alpha - \dot{m}^\alpha b_\gamma^\alpha - \dot{n}^{\alpha\beta} v_\beta + \dot{m}^{\alpha\beta} b_\beta^\alpha v_\beta \right] \delta \dot{v}_\alpha - \left[\dot{m}^\alpha v_\alpha - \dot{m}^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta \right] \delta \frac{\partial \dot{w}}{\partial v} l + \right. \\ \left. + \left[\dot{q}^\alpha + \dot{n}^{\alpha\beta} w_\alpha v_\beta + \dot{m}^{\alpha\beta} \dot{w}_\alpha v_\beta - \dot{m}^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta + l \frac{\partial}{\partial C} (\dot{m}^{\alpha\beta} v_\beta \epsilon_{\alpha\beta} v^\beta) \right] \delta \dot{w} \right\} dC = 0$$

Für $\frac{\partial \hat{W}_s}{\partial \dot{n}_\beta^\alpha}$ u.s.w. erhält man mit (4.44)

$$\frac{\partial \hat{W}_s}{\partial \dot{n}_\beta^\alpha} = \frac{1+\nu}{ED} \left(\dot{n}_\alpha^\beta - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{n}_s^\beta \delta_\alpha^\beta + \dot{n}''_\alpha{}^\beta - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{n}''_s{}^\beta \delta_\alpha^\beta \right) \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial \hat{W}_s}{\partial \dot{m}_\beta^\alpha} = \frac{1+\nu}{EB} \left(\dot{m}_\alpha^\beta - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{m}_s^\beta \delta_\alpha^\beta + \dot{m}''_\alpha{}^\beta - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{m}''_s{}^\beta \delta_\alpha^\beta \right).$$

Wegen der Beliebigkeit und Unabhängigkeit der virtuellen Größen $\delta \dot{v}_\alpha$, $\delta \dot{w}$, $\delta \dot{n}_\beta^\alpha$, $\delta \dot{m}_\beta^\alpha$ auf der Fläche f folgt zunächst aus (4.58), daß die eckigen Klammern unter dem Flächenintegral verschwinden müssen. Die Forderung nach dem Verschwinden der ersten beiden Klammern liefert das Stoffgesetz

$$\dot{\alpha}_\beta^\alpha - \frac{\partial \hat{W}_s}{\partial \dot{m}_\beta^\alpha} = 0 \quad (4.60)$$

$$\dot{\omega}_\beta^\alpha - \frac{\partial \hat{W}_s}{\partial \dot{n}_\beta^\alpha} = 0. \quad (4.61)$$

Die Forderung nach dem Verschwinden der restlichen Klammern liefert drei Bedingungen für die zeitlichen Änderungen $\dot{n}^{\alpha\beta}$, $\dot{m}^{\alpha\beta}$ der sechs Spannungserzeugenden. Diese drei Gleichungen sind die Gleichgewichtsbedingungen der resultierenden Kräfte an einem Schalenelement in Richtung der Basisvektoren \vec{a}_α ($\alpha = 1, 2$) und \vec{a}_3 . Außerdem folgt aus (4.58), daß die eckigen Klammern oder entsprechend die virtuellen Größen $\delta \dot{v}_\alpha$, $\delta \frac{\partial \dot{w}}{\partial v} l$, $\delta \dot{w}$ unter dem Linienintegral und damit auf der Randkurve C verschwinden; hier muß beachtet werden, daß (4.52) erfüllt sein muß. Diese letztgenannten Forderungen ergeben die vier Randbedingungen auf C , und zwar folgen aus dem Verschwinden der eckigen Klammern die dynamischen Randbedingungen und entsprechend liefert das Verschwinden der virtuellen Geschwindigkeiten $\delta \dot{v}_\alpha$, $\delta \frac{\partial \dot{w}}{\partial v} l$, $\delta \dot{w}$ auf C die kinematischen Randbedingungen. Man sieht, daß die Gleichgewichts- und dynamischen Randbedingungen direkt bezüglich der Zeit integrierbar sind. Ein Vergleich mit den geometrisch nichtlinearen Schalentheorien von Sanders [29] zeigt, daß die Verzerrungs- und Verschiebungsbeziehungen und die Gleichgewichtsbedingungen mit der approximativen Theorie für kleine Verzerrungen und kleiner Rotation um die Normale übereinstimmen, sofern man in der Arbeit von Sanders die Querkraft aus den Gleichgewichtsbedingungen eliminiert. Allerdings hat Sanders nicht den Fall der hydrostatischen Druckbelastung betrachtet und elastisches Materialverhalten angenommen.

Im folgenden werden noch zwei Transformationen des Funktionals (4.56) abgeleitet, und zwar mit Hilfe der Euler-Lagrangeschen Gleichungen (4.60) und (4.61),

aus denen man mit (4.59) die zeitlichen Änderungen der Membrankräfte und Momente zu

$$\dot{n}_\beta^\alpha = \frac{E}{1+\nu} D \left(\dot{\alpha}_\beta^\alpha + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{\alpha}_s^\alpha \delta_\beta^\alpha \right) - \dot{n}''_\beta^\alpha \quad (4.62)$$

$$\dot{m}_\beta^\alpha = \frac{E}{1+\nu} B \left(\dot{\omega}_\beta^\alpha + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{\omega}_s^\alpha \delta_\beta^\alpha \right) - \dot{m}''_\beta^\alpha \quad (4.63)$$

errechnet. Die Relationen (4.60) und (4.61) bzw. (4.62) und (4.63) sind natürliche Bedingungen [10] der Variationsaufgabe (4.57). Fügt man sie von vornherein als Nebenbedingungen hinzu, dann bleibt in dem neuen Problem der stationäre Charakter von Ψ_{II} erhalten [10].

Zunächst sei die Nebenbedingung (4.61) bzw. (4.63) betrachtet. Sie läßt sich einfach in der Weise berücksichtigen, indem man in Ψ_{II} die zeitlichen Änderungen der Momente nicht mehr als unabhängig zu variierende Größen auffaßt, sondern man denkt sie sich entsprechend (4.63) durch die Geschwindigkeiten \dot{v}^α und \dot{w} ausgedrückt. Dann wird aus dem Funktional (4.56)

$$\Psi_{II}^* := \int_f \left\{ \dot{n}_\beta^\alpha \dot{\alpha}_\alpha^\beta + \frac{1}{2} m_\beta^\alpha \dot{v}_\alpha \dot{v}^\beta - \hat{W}^* - \pi_f \right\} df - \pi_c, \quad (4.64)$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{W}^* = & \frac{1+\nu}{2E} \frac{1}{D} \left[\dot{n}_\beta^\alpha \left(\dot{m}_\alpha^\beta - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{m}_s^\beta \delta_\alpha^\beta \right) \right. \\ & \left. + 2 \dot{n}_\beta^\alpha \left(\dot{m}''_\alpha^\beta - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{m}''_s^\beta \delta_\alpha^\beta \right) \right] \\ & - \frac{E}{2(1+\nu)} B \left[\dot{\omega}_\beta^\alpha \dot{\omega}_\alpha^\beta + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{\omega}_s^\alpha \dot{\omega}_\mu^\alpha \right] \\ & + \left(\dot{\omega}_\beta^\alpha + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{\omega}_s^\alpha \delta_\beta^\alpha \right) \left(\dot{m}''_\alpha^\beta - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{m}''_s^\beta \delta_\alpha^\beta \right). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Die hier an sich auftretenden Zusatzterme, die nur die Integrale \dot{n}_β^α und \dot{m}''_β^α enthalten, können fortgelassen werden, da sie nicht variiert werden. In Ψ_{II}^* werden $\dot{n}''_\beta^\alpha = \dot{n}''^\alpha_\beta$, \dot{v}_α und \dot{w} variiert und es gilt

$$\delta \Psi_{II}^* = 0. \quad (4.66)$$

Für die Spannungsraten \dot{s}_β^α erhält man mit (4.63) aus (4.43)

$$\begin{aligned} \dot{s}_\beta^\alpha = & \frac{1}{D} \left(\dot{n}_\beta^\alpha + \dot{n}''_\beta^\alpha \right) + \lambda \theta \frac{E}{1+\nu} \left(\dot{\omega}_\beta^\alpha + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{\omega}_s^\alpha \delta_\beta^\alpha \right) \\ & - \frac{E}{1+\nu} \left(\dot{e}''_\beta^\alpha + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{e}''_s^\alpha \delta_\beta^\alpha \right). \end{aligned} \quad (4.67)$$

In gleicher Weise können aus (4.56) sowohl \dot{m}_β^α wie auch \dot{n}_β^α mit Hilfe der Nebenbedingungen (4.62) und (4.63) eliminiert werden. Dann erhält man

$$\Psi_{II}^{**} := \int_f \left\{ \hat{W}^{**} + \frac{1}{2} n_{\beta}^{\alpha} \dot{w}_{\alpha} \dot{w}^{\beta} - \pi_f \right\} df - \pi_c, \quad (4.68)$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{W}^{**} = & \frac{1}{2} \frac{ED}{1+\nu} \left[\dot{\alpha}_{\beta}^{\alpha} \dot{\alpha}_{\alpha}^{\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{\alpha}_{\beta}^{\beta} \dot{\alpha}_{\mu}^{\mu} \right. \\ & \left. + \frac{B}{D} (\dot{\omega}_{\beta}^{\alpha} \dot{\omega}_{\alpha}^{\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{\omega}_{\beta}^{\beta} \dot{\omega}_{\mu}^{\mu}) \right] \\ & - (\dot{\alpha}_{\beta}^{\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{\alpha}_{\mu}^{\mu} \delta_{\beta}^{\alpha}) (\dot{n}_{\alpha}^{\beta} - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{n}_{\beta}^{\alpha} \delta_{\alpha}^{\beta}) \\ & - (\dot{\omega}_{\beta}^{\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{\omega}_{\mu}^{\mu} \delta_{\beta}^{\alpha}) (\dot{m}_{\alpha}^{\beta} - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{m}_{\beta}^{\alpha} \delta_{\alpha}^{\beta}). \end{aligned} \quad (4.69)$$

In dem Funktional Ψ_{II}^{**} werden nur \dot{v}^{α} und \dot{w} variiert und es gilt

$$\delta \Psi_{II}^{**} = 0. \quad (4.70)$$

Das Prinzip (4.70) entspricht dem Prinzip vom Minimum der Potentiellen Energie bei Vorhandensein von Anfangsverzerrungen- und Spannungen und endlichen Rotationen. Die Spannungsraten \dot{S}_{β}^{α} ergeben sich aus (4.43) mit (4.62) und (4.63) zu

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\beta}^{\alpha} = & \frac{E}{1+\nu} \left[\dot{\alpha}_{\beta}^{\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{\alpha}_{\beta}^{\beta} \delta_{\beta}^{\alpha} + \lambda \theta (\dot{\omega}_{\beta}^{\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{\omega}_{\beta}^{\beta} \delta_{\beta}^{\alpha}) \right. \\ & \left. - (\dot{e}_{\beta}^{\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \dot{e}_{\beta}^{\beta} \delta_{\beta}^{\alpha}) \right]. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Einige allgemeine Bemerkungen zur Anwendung sollen noch gegeben werden. Es soll zunächst (4.57) zum Ausgangspunkt genommen und das Ritzsche Verfahren oder die Methode der Finiten Elemente angewendet werden, um eine Näherungslösung zu entwickeln. Für das Verschiebungsfeld sowie für die Membrankräfte und Momente werden Ansätze gewählt, die noch freie zeitabhängige Parameter linear enthalten. Nach Variation bezüglich der zeitlichen Ableitungen dieser Parameter erkennt man, daß die Anwendung des Variationsprinzips gleichbedeutend ist mit einer gewichteten Mittelung des Stoffgesetzes, der Gleichgewichtsbedingungen und der dynamischen Randbedingungen. Diese Ansätze müssen von der zu erwartenden Lösung des Gesamtproblems her gesehen geschickt gewählt werden.

Gelingt es nun insbesondere Ansätze (linear in den Parametern) derart zu finden, daß die Anzahl der Verschiebungsparameter mit der Anzahl der Membrankraft- und Momentenparameter übereinstimmt, dann ist zu erkennen, daß nach Anwendung des Ritzschen Verfahrens zwei entkoppelte Systeme von linearen Gleichungen für die zeitlichen Änderungen der beiden Parametergruppen ent-

stehen können. Das erste System folgt aus dem gemittelten Stoffgesetz und das zweite aus den gemittelten Gleichgewichts- und dynamischen Randbedingungen. Falls die Zahl der Gleichungen des zweiten Systems mit der Anzahl der zeitlichen Ableitungen der Membrankraft- und Momentenparameter übereinstimmt und diese auch in dem zweiten Gleichungssystem auftreten, dann lassen sich nach Integration bezüglich der Zeit (bei vorgegebenen Anfangsbedingungen) die Membrankraft- und Momentenparameter allein durch die Verschiebungsparameter und die Lasten ausdrücken und daher aus dem Problem eliminieren. Ein derartiges Beispiel ist in Abschn. 6.3 (S. 68) angegeben. Im allgemeinen werden aber solche Ansätze nicht leicht zu finden sein.

Ist man an einer genauen Untersuchung, insbesondere an der nichtlinearen Spannungsverteilung über der Schalendicke interessiert, dann ist es erforderlich, die lokalen Spannungen in der Schale zu berechnen, um daraus dann die Kriechraten und die Integrale \dot{n}_{β}^{α} und \dot{m}_{β}^{α} zu ermitteln. Dafür stehen die Gleichungen (4.43) für die Spannungsraten \dot{S}_{β}^{α} zur Verfügung. Diese Gleichungen zusammen mit den durch das Ritzsche Verfahren gewonnenen Gleichungen stellen ein System von Integro-Differentialgleichungen dar. Indem die Spannungsraten nur an diskreten Stellen berechnet werden, wird das Problem auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung für die Spannungen, Spannungsresultierenden und Verschiebungen reduziert. Nachteilig ist, daß die Anzahl der Differentialgleichungen sehr groß ist, da die Spannungsraten an vielen diskreten Punkten berechnet werden müssen. Um diese Anzahl zu vermindern, ist es im allgemeinen vorteilhafter, von dem Variationsprinzip (4.66) oder besser (4.70) auszugehen, wenn auch der Hauptanteil der Gleichungen durch (4.67) bzw. (4.71) gestellt wird.

Der Umfang des Differentialgleichungssystems kann durch das folgende Vorgehen erheblich reduziert werden. Zunächst trifft man die Annahmen, daß die Spannungsverteilung über der Schalendicke im Gegensatz zu (4.43) allein durch die Membrankräfte und Momente bestimmt ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn man eine lineare Spannungsverteilung oder ein Sandwichmodell (Doppelmembran [1, 2, 3]) annimmt; das Sandwichmodell ist wegen der leichten Integration über die Schalendicke vorzuziehen. Aus (4.31) erhält man dann, wie auf S. 36 bemerkt, nach Integration über die Schalendicke formal ebenfalls das Funktional (4.56). Bei der direkten Anwendung des Prinzips (4.57) zeigt sich, daß die Ritzschen Gleichungen jetzt die Aufgabe vollständig beschreiben, so daß im Gegensatz zu dem oben beschriebenen Vorgehen eine Spannungsberechnung an diskreten Punkten nicht mehr erforderlich ist. Darin ist der eigentliche Vorteil des allgemeinen Variationsprinzips (4.57)

zu sehen. Der Nachteil ist, daß nichts über die nichtlineare Spannungsverteilung und die lokalen, nichtelastischen Verzerrungen ausgesagt werden kann. Darüber hinaus wird der durch die Umlagerung der Spannungen hervorgerufene "statische Primärkriecheffekt" [1] vernachlässigt.

Eine weitere Möglichkeit soll hier nur angedeutet werden. Anstelle des Ansatzes (4.43) könnte man von vornherein für die Spannungen einen Polynomansatz derart machen, daß

$$S_{\beta}^{\alpha} = S_{(0)}^{\alpha}(\theta^1, \theta^2) + \sum_{k=1}^{\bar{k}} S_{(k)}^{\alpha}(\theta^1, \theta^2) (\theta)^k.$$

Die Integration des Funktionals (4.31) über die Schalendicke muß dann neu durchgeführt werden. Dieses Vorgehen führt allerdings auf ein sehr großes System freier Parameter. Insbesondere aber wird es schwer sein, bei Anwendung des Ritzschen Verfahrens, geeignete Ansätze für die Ortsabhängigkeit der Funktionen $S_{(0)}^{\alpha}(\theta^1, \theta^2)$ und $S_{(k)}^{\alpha}(\theta^1, \theta^2)$ zu finden, da diesen Größen keine mechanische Bedeutung wie beispielsweise den Membrankräften oder Momenten zukommt. Dieser Nachteil ist bei dem Ansatz (4.43) bzw. bei einem Sandwichmodell oder einer angenommenen linearen Spannungsverteilung über die Schalendicke nicht vorhanden.

4.5 Ein Variationsprinzip für nichtelastische, viskose Schalen

Das Variationsprinzip (3.18) wird den folgenden Ableitungen zugrunde gelegt. Es soll davon ausgegangen werden, daß sämtliche eingepprägten Kräfte unabhängig vom Geschwindigkeitsfeld sein sollen. Weiterhin gelte $\delta \dot{u}_i = 0$ auf O_u .

Voraussetzungsgemäß soll auf die Mittelfläche ein hydrostatischer Druck wirken, so daß man mit (4.23), (4.46) und der Approximation

$$\frac{dF}{df} \approx 1$$

für die Leistung der Mittelflächenbelastung näherungsweise

$$\tilde{\pi}_f := \int_f \bar{T} \cdot (\dot{\bar{u}})_{\theta=0} df = - \int_f \rho l (\dot{w} + w_s \dot{v}^s) df \quad (4.72)$$

erhält. Es sei darauf hingewiesen, daß diese Approximationen bei der Herleitung von $\tilde{\pi}_f$, Gl. (4.51), nicht möglich sind, da sonst ein Potential (s. S. 92) nicht angebbbar ist.

Mit der Kirchhoff-Loveschen Approximation folgt dann aus (3.18) nach Inte-

gration über die Schalendicke

$$\begin{aligned} \Phi_{II} = & \int_f \left\{ n_{\beta}^{\alpha} \dot{a}_{\alpha}^{\beta} + m_{\beta}^{\alpha} \dot{\omega}_{\alpha}^{\beta} - \hat{W}_s + \rho l (\dot{w} + \dot{w}_s \dot{v}^s) \right\} df \\ & - l \int_c \left\{ [\bar{n}^{\alpha} - \bar{m}^s b_{\beta}^{\alpha}] \dot{v}_{\alpha} - [\bar{m}^{\alpha} v_{\alpha}] \frac{\partial \dot{w}}{\partial v} l + \bar{q}^* \dot{w} \right\} dC. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Hier bedeutet formal

$$\hat{W}_s = \lambda l \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{W}_s (s_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{3} s_{\beta}^s \delta_{\beta}^{\alpha}) d\theta. \quad (4.74)$$

Für die Integration von (4.74) ist es erforderlich, eine Annahme für die Spannungsverteilung über die Schalendicke zu machen. Im einfachsten Fall kann man eine lineare Spannungsverteilung annehmen; für die Integration (4.74) ist die Annahme eines Sandwichmodells (Doppelmembran) allerdings geeigneter. Für bestimmte einfache Belastungsfälle (z.B. reine Biegung) läßt sich erreichen, daß das angenäherte Dissipationspotential mit dem exakten übereinstimmt. Wesentlich ist für beide Approximationen, daß die Spannungen in der Schale eindeutig durch die Membrankräfte und Momente bestimmt sind, so daß \hat{W}_s allein durch diese Größen darstellbar ist. Die Variation von (4.73) erfolgt dann bezüglich \dot{v}^{α} , \dot{w} , n_{β}^{α} und m_{β}^{α} .

Man erhält

$$\begin{aligned} \delta \Phi_{II} = & \int_f \left\{ \left[\dot{a}_{\alpha}^{\beta} - \frac{\partial \hat{W}_s}{\partial n_{\beta}^{\alpha}} \right] \delta n_{\beta}^{\alpha} + \left[\dot{\omega}_{\alpha}^{\beta} - \frac{\partial \hat{W}_s}{\partial m_{\beta}^{\alpha}} \right] \delta m_{\beta}^{\alpha} \right. \\ & - \left[n^{\beta\alpha} |_{\beta} + n^{s\beta} \omega_s b_{\beta}^{\alpha} - m^{s\beta} |_{s} b_{\beta}^{\alpha} - \rho l \omega^{\alpha} \right] \delta \dot{v}_{\alpha} \\ & - \left[n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} - (n^{\alpha\beta} \omega_{\alpha}) |_{\beta} + m^{\alpha\beta} |_{\alpha\beta} - \rho l \right] \delta \dot{w} \left. \right\} df \\ & - \int_c l \left\{ \left[\bar{m}^{\alpha} - \bar{m}^s b_{\beta}^{\alpha} - n^{\alpha\beta} \gamma_{\beta} + m^{s\beta} b_{\beta}^{\alpha} \gamma_s \right] \delta \dot{v}_{\alpha} \right. \\ & - \left[\bar{m}^{\alpha} \gamma_{\alpha} - m^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \right] \delta \frac{\partial \dot{w}}{\partial v} l \\ & + \left[\bar{q}^* + n^{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \gamma_{\beta} - m^{\alpha\beta} |_{\alpha} \gamma_{\beta} \right. \\ & \left. + l \frac{\partial}{\partial c} (m^{\alpha s} \gamma_s \epsilon_{\alpha\beta} \gamma^{\beta}) \right] \delta \dot{w} \left. \right\} dC = 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

und entnimmt dann (4.75) sofort, daß das Verschwinden der Ausdrücke in den eckigen Klammern die notwendigen Bedingungen für das Stationärwerden von (4.73) darstellen.

Wie schon auf S. 22 bemerkt, beruht bei einem nichtelastischen, kriechenden Körper der Vorteil des verallgemeinerten Variationsprinzips auf der Möglichkeit, daß man in manchen Fällen bei unabhängiger Variation der Spannungen und der Verschiebungsraten auf ein System von quasilinearen Differentialgleichungen für die Verschiebungsparameter kommen kann. Entsprechendes gilt hier für das Prinzip (4.73), d. h. es müssen sich die Membrankraft- und Momentenparameter allein durch die Verschiebungsparameter und die Lasten ausdrücken lassen können. Das ist nur dann möglich, wenn sich aus den Ritzschen Gleichungen zwei entkoppelte, lineare Gleichungssysteme einerseits für die zeitlichen Ableitungen der Verschiebungsparameter und andererseits für die Membrankraft- und Momentenparameter ergeben. Dies kann man erwarten, wenn die Ansätze linear in den Parametern sind und wenn die Anzahl der Verschiebungsparameter mit der Anzahl der Membrankraft- und Momentenparameter übereinstimmt (vergl. dazu die Bemerkungen auf S. 43); als einfaches Beispiel wird dazu in Abschnitt 6.3 der Kriechkollaps eines isothermen Brennstabhüllrohrs untersucht. Ist ein solcher Ansatz nicht möglich, dann wird man zu jedem Zeitpunkt das nichtlineare Gleichungssystem für die Membrankraft- und Momentenparameter sowie die zeitlichen Ableitungen der Verschiebungsparameter iterativ zu lösen haben.

Wegen des im allgemeinen nichtlinearen Kriechgesetzes ist die Spannungsverteilung über die Schalendicke auch bei angenommener linearer Verzerungsverteilung nichtlinear. Ist man insbesondere an dieser Spannungsverteilung interessiert, dann ist der hier eingeschlagene Weg nicht gangbar, vielmehr muß die Spannungsverteilung durch weitere freie Parameter dargestellt werden. Allerdings kann man erwarten, daß dieses Vorgehen sehr schnell seine praktischen Grenzen findet.

5. Das Kriechkollaps-Problem von Brennstabhüllrohren

5.1 Problemstellung

Die Brennstäbe von dampf- oder gasgekühlten Schnellen Brutreaktoren sind hohen Betriebsbeanspruchungen ausgesetzt, und zwar sind dies im wesentlichen:

- Hohe Hüllrohrtemperaturen und radiale Temperaturgradienten. Infolge der engen Brennstabbündelgeometrie ergeben sich weiterhin Temperaturschwankungen entlang des Umfangs, und zwar sowohl bei exzentrischer Brennstabposition wie auch bei zentrischer Position [36, 37].
- Hoher Kühlmitteldruck. Bei Brennstäben ohne Druckausgleichssystem [38, 39] besteht zumindest am Anfang der Einsatzzeit ein äußerer Überdruck, der nur teilweise durch Aufbringen eines anfänglichen Innendrucks kompensiert werden kann.
- Hohe Bestrahlungsdosen.
- Mechanische und chemische Wechselwirkung des Hüllrohrs mit dem Brennstoff und dem Kühlmittel.

Ist kein Druckausgleichssystem für die Brennstäbe vorgesehen, dann führt der anfängliche äußere Überdruck und die hohe Temperatur, die den Hüllrohrwerkstoff kriechfähig macht, zusammen mit den unvermeidlichen, fertigungsbedingten Fehlern der Hüllrohrgeometrie zum Problem der geometrischen Stabilität der Brennstabhülle.

Faßt man das Hüllrohr als Schale auf, dann müssen zwei Arten von geometrischen Fertigungsungenauigkeiten unterschieden werden:

- Abweichung der Mittelfläche von der perfekten Kreiszyylinderform (z.B. quasi-elliptische Anfangsovalität)
- Veränderliche Wandstärke (z.B. Hüllrohrquerschnitt mit exzentrischen Kreiskonturen)

Nur die erste Fertigungsungenauigkeit soll hier betrachtet werden, denn einerseits kann man die minimale Wandstärke der Rechnung zugrunde legen, andererseits wird ein Hüllrohr mit veränderlicher Wandstärke, aber perfekter Kreiszyylinderform der Mittelfläche, eine wesentlich größere Kriechfestigkeit haben als eines mit kleinen Störungen der Mittelflächengeometrie.

Infolge der geometrischen Abweichungen der Mittelfläche erzeugt der äußere Überdruck außer Membrankräften auch Biegemomente, die bereits bei rein elastischem Materialverhalten eine Vergrößerung dieser Fehler erzeugen. Da nun das Hüllrohrmaterial bei den vorgesehenen Betriebstemperaturen kriecht, ändern

sich diese geometrischen Fehler auch bei konstantem und beliebig kleinem äußeren Überdruck progressiv mit der Zeit. Durch die Spaltgasfreisetzung vergrößert sich aber der Innendruck und infolge des Brennstoffschwellens baut sich ein Festkörperdruck im Innern der Hülle auf. Beide Effekte wirken dem Außendruck entgegen. Außerdem kann der Brennstoff aufgrund der Kriechfestigkeit seiner Randzone eine gewisse Stützwirkung haben. Nun sind jedoch die Kenntnisse über das Kriechverhalten des Brennstoffes insbesondere unter Bestrahlung ungenügend, und wesentliche Effekte wie Haft- oder Gleitkontakt zwischen Brennstoff und Hüllrohr, Rißbildung, Schwellen und anderes mehr sind nur schwer zu erfassen. Daher soll die Hülle für die erwartete Einsatzzeit ohne Berücksichtigung der mechanischen Wechselwirkung mit dem Brennstoff als kriechfest gegen den äußeren Überdruck ausgelegt werden ("strong-clad" - Konzept). Wegen der unsicheren Daten über die Spaltgasfreisetzung wird der Spaltgasdruckaufbau ebenfalls nicht berücksichtigt.

In diesem Zusammenhang muß natürlich noch darauf hingewiesen werden, daß bei hinreichend hohem Druck ein zeitunabhängiges elastisches oder elastisch-plastisches Beulen unmittelbar nach Belastung auftreten kann. Es ist klar, daß ein solcher Versagensmechanismus von vornherein durch geeignete Wahl des Werkstoffes, der Abmessungen, Temperatur und der Belastung ausgeschlossen werden muß. Darüber hinaus muß man auch das Hüllrohr gegen den später wirksam werdenden Schwelldruck des Brennstoffes und gegen den Fall eines Kühlmitteldruckverlustes am Ende der Einsatzzeit auslegen. Diese Gesichtspunkte werden hier aber nicht weiter untersucht.

5.2 Kriechkollapstheorien

In der Kriechmechanik existieren eine Reihe fundamental unterschiedlicher Kriechstabilitätskonzepte, die von einer unterschiedlichen Definition der Stabilität und unterschiedlichen Stoffgesetzen herrühren. Eine Zusammenstellung der verschiedenen Theorien im Hinblick auf das Kriechknicken von Druckstäben und einen kritischen Vergleich hat Hoff [40] gegeben. Diese Theorien lassen sich grob in zwei Gruppen einteilen.

In der ersten Gruppe wird die Instabilität analog zu den klassischen Stabilitätskonzepten definiert. Man sieht die Anfangsgeometrie des Bauteils als perfekt an und benützt kinetische oder statische Stabilitätskriterien ([40] bis [49]). Aus diesen Kriterien errechnet sich ein kriti-

scher Zeitpunkt, nach dem jede Störung zu einem exponentiellen Auswachsen der Verformungen führt. Hoff hat die technische Brauchbarkeit dieser Konzepte in Frage gestellt und u.a. insbesondere darauf hingewiesen, daß signifikante Verformungen bei der theoretisch gut fundierten Theorie von Rabotnov und Shesterikov [41] erst nach einem Vielfachen der kritischen Zeit auftreten. Die Unbrauchbarkeit dieser Theorien bei der Vorausberechnung des Langzeitverhaltens haben Jahsman und Field [50] durch Vergleich mit experimentellen Ergebnissen an Druckstäben nachgewiesen.

In der zweiten Gruppe werden realistischere Kriechstabilitätstheorien entwickelt, die die Tatsache berücksichtigen, daß unvermeidbare Abweichungen von der perfekten Geometrie vorhanden sind, und die das Langzeitverhalten untersuchen. Infolge dieser Abweichungen werden Biegemomente in das Bauteil eingeleitet, die bei kriechendem Material zu einer **monotonen Zunahme** der Verformungen führen. Im Hinblick auf die technische Brauchbarkeit des Bauteils, müssen diese Deformationen natürlich beschränkt bleiben. Daher ist es wesentlich, quantitative Aussagen über den zeitlichen Verlauf der Verformungen machen zu können. Drei Phänomene können hier auftreten:

- Werden elastische und zeitunabhängige, plastische Verzerrungen vernachlässigt und wird nur Kriechen berücksichtigt, dann wachsen die Verformungen und Geschwindigkeiten auch bei zeitlich konstanter und beliebig kleiner Last theoretisch über alle Grenzen. Bei einem linear-viskosen Material liegt dieser Zeitpunkt im Unendlichen, dagegen ergibt sich für ein nichtlinear-viskoses Verhalten eine endliche Zeit, die hier als Kriechkollapszeit bezeichnet werden soll. Während des weitaus größten Teils dieses Zeitraums kann die Bewegung als schleichend angesehen werden, so daß also Trägheitskräfte vernachlässigt werden können; im letzten Teil wachsen dann die Deformationen stark an.
- Berücksichtigt man zeitunabhängige, plastische Verzerrungen, dann können, nachdem die Verformungen durch Kriechen genügend groß geworden sind, durch Überschreiten der Streck- bzw. Quetschgrenze hinreichend viele Fließzonen gebildet werden, so daß ein plastischer Kollaps (im Sinne der Traglasttheorie) auftritt. Ist diese Fließgrenze sehr klein, dann kann ein derartiger plastischer Kollaps zeitlich weit vor dem Kriechkollaps eintreten. Es soll für die weiteren theoretischen Untersuchungen aber vorausgesetzt werden, daß die Fließ-

grenze hinreichend groß ist, so daß ein plastischer Kollaps erst bei großen Deformationen auftritt. Dann wird der Zeitpunkt des plastischen Kollapses genügend genau durch die Kriechkollapszeit angegeben, so daß man die zeitunabhängigen, plastischen Verzerrungen vernachlässigen kann.

- Darüber hinaus kann unter Berücksichtigung des elastischen Verhaltens bei gewissen Geometrien und Belastungen eine elastische Instabilität nach endlicher Zeit, aber vor Erreichen der Kriechkollapszeit auftreten. Grigoliuk und Lipovtsev haben dies in [27] gezeigt. Allerdings sei hier bemerkt, daß eine derartige Instabilität bei einem langen, quasi-elliptischen Rohr unter Außendruck nicht auftreten kann.

Speziell zum Problem des quasi-elliptischen Kreiszyylinderrohres unter Außendruck sind eine Reihe von Arbeiten erschienen, die die in Kap. 5.1 beschriebene Fragestellung zumindest teilweise behandeln.

Die Arbeit von Sundström [51] sei nur erwähnt, da sie wegen der Belastungs- und Lagerungsverhältnisse nicht dem Hüllrohr entspricht und keine explizierten Ergebnisse angibt. Wah und Gregory [52] und Stowell und Wah [53] untersuchen einen Kreisring mit vorgegebener Anfangsovalität und legen ein Stoffgesetz zugrunde, das außer elastischen Verzerrungen sekundäres Kriechen nach einem hyperbolischen Gesetz enthält. Stowell und Briggs [54] haben primäres Kriechen durch ein Zeitverfestigungsgesetz berücksichtigt. Die homogene Wand des Ringes wird durch ein Sandwichmodell ersetzt. Unausgesprochen wird das Problem durch eine Einzelpunktkollokation auf eine gewöhnliche Differentialgleichung für die zeitabhängige Ovalität zurückgeführt.

Theoretisch detaillierte Untersuchungen wurden von Hoff, Jahsman und Nachbar [55], Ellington [56] und Serpico [57] durchgeführt. Serpico hat selbst einen ersten Vergleich mit der Theorie von Hoff et al. vorgenommen. Die Arbeiten von Hoff et al. und Ellington haben für die Auslegung von Hüllrohren besondere Bedeutung gewonnen. Schmidt [58] hat die Theorie von Hoff et al. zur Festigkeitsanalyse von Hüllrohren für den dampfgekühlten Schnellen Brüter angewandt und Glückler, Passig und Höchel [59] haben die Ellingtonsche Theorie auf beliebige ganzzahlige Kriechexponenten erweitert und mit der Theorie von Hoff et al. verglichen. Eine kritische Durchdringung dieser Theorien wurde allerdings nicht durchgeführt. Wegen ihrer Bedeutung seien deshalb im folgenden Abschnitt einige

Bemerkungen angefügt.

5.3 Die Kriechkollapstheorien von Hoff et al., Ellington und Serpico

5.3.1 Die Kriechkollapstheorie von Hoff, Jahsman und Nachbar [55]

Die wesentlichen Annahmen sind folgende:

- a) Das Materialverhalten wird allein durch sekundäres Kriechen nach der Invariantentheorie von Odqvist ([1], Nortonsche Gesetz) beschrieben. Das Temperaturfeld ist isotherm und ändert sich nicht mit der Zeit.
- b) In axialer Richtung treten keine Kriechdehnungen auf.
- c) Die Hüllrohrwand ist dünnwandig und wird durch eine Doppelmembran (Sandwichmodell) ersetzt. Für die Abmessungen der Doppelmembran wird verlangt, daß die Summe der Membranstärken mit der Hüllrohrdicke und daß die Flächenträgheitsmomente übereinstimmen. Es sei bemerkt, daß diese letzte Bedingung eigentlich nur bei linear elastischem oder linear viskosem Materialverhalten angebracht ist.
- d) Die Anfangsform des Hüllrohrs ist quasi-elliptisch, d.h. der Radius R der Mittelfläche ist gegeben durch

$$R = \bar{R} (1 + \alpha_0 \cos 2\varphi),$$

wobei \bar{R} der mittlere Radius ist und $\alpha_0 \ll 1$ ein fertigungsbedingter Ovalitätsparameter.

Nach diesen grundsätzlichen Voraussetzungen nehmen Hoff et al. an, daß die Mittelfläche des Zylinders für alle späteren Zeitpunkte dargestellt werden kann durch

$$R = \bar{R} (1 + \alpha(t) \cos 2\varphi); \quad (5.1)$$

dabei wird nicht gesagt, ob φ eine Eulersche- oder Lagrangesche Koordinate ist. Die Autoren machen auch keine weitere Angabe über die Verformung der Mittelfläche, so daß Schwierigkeiten bei der Deutung bestehen. Der Ansatz (5.1) bekommt allerdings dann einen klaren Sinn, wenn man φ als Lagrangesche Koordinate ansieht, woraus dann auch folgt, daß sich die materiellen Punkte der Mittelfläche nur auf Radien bewegen. Dies erkennt man auch aus der Art und Weise, in der die zeitliche Änderung der geometrischen Krümmung κ_g gebildet wird [55, Gl.25a].

Ohne hier auf die Einzelheiten einzugehen, erhalten Hoff et al. schließlich mit Hilfe eines einfachen Mittelungsverfahrens eine gewöhnliche Differentialgleichung für das Ovalitätsmaß

$$\chi(t) = \alpha(t) \frac{\bar{R}}{h_s/2}$$

$$\dot{\chi} = \frac{4}{3} k \left(\frac{\bar{R}}{h_s}\right)^2 \left(\frac{\rho \bar{R}}{2d}\right)^n \sum_{\nu=1,3}^{n^*} \binom{n}{\nu} B_\nu(\chi)^\nu \quad (5.2)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\chi = \chi_0 = \alpha_0 \frac{\bar{R}}{h_s/2}.$$

Hier sind:

h	Hüllrohrdicke
$h_s = h/\sqrt{3}$	Abstand der Membranen des Sandwichmodells (Abb. 4)
$d = h/2$	Membranstärke
K	Konstante im Nortonschen Kriechgesetz
$k = K \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}}$	
n	Nortonscher Kriechexponent
$n^* = \begin{cases} n & , & n \text{ ungerade} \\ n-1 & , & n \text{ gerade} \end{cases}$	
$B_1 = 1, B_\nu = B_{\nu-2} \frac{\nu-1}{\nu}$	
ρ	Äußerer Überdruck, der zeitlich variabel sein kann.

(5.2) ist unter den folgenden Einschränkungen gültig:

- n : ganze Zahl
- n ungerade : $\chi_0 \leq \chi \leq \bar{R}/(h_s/2) \gg 1$
- n gerade : $\chi_0 \leq \chi \leq 1$

Auf eine nähere Begründung wird in Abschnitt 6.3 eingegangen werden.

5.3.2 Die Kriechkollapstheorien von Ellington [56] und Serpico [57]

Der Ausgangspunkt dieser Theorien ist das Variationsprinzip von Sanders, McComb und Schlechte [14], so daß hier also außer den Kriechverzerrungen auch elastische Verzerrungen berücksichtigt werden. Die Anfangsgeometrie ist bei beiden Autoren quasi-elliptisch. Die Gemeinsamkeiten der bei-

den Theorien liegt in folgenden Punkten:

- Der äußere Überdruck wird momentan aufgebracht und dann konstant gehalten; das Temperaturfeld ist isotherm.
- Dünnwandigkeit wird vorausgesetzt.
- Die Spannungsverteilung durch die Rohrwand wird als linear angesehen. Dies ist sicher eine gute Approximation zu Beginn des Deformationsprozesses, sofern keine Wärmespannungen auftreten. Die Änderung der Membrankraft in Umfangsrichtung und die Schubspannungen werden vernachlässigt.
- Für die Normal- und Tangentialverschiebungen (w , v) der Mittel-
fläche macht Ellington den Ansatz

$$w = w_I(t) + w_{II}(t) \cos 2\varphi$$
$$v = -\frac{1}{2} w_{II}(t) \sin 2\varphi$$

Serpico vernachlässigt den Schrumpfungsterm w_I , der auch nicht wesentlich ist, sofern man nur an der Kriechkollapszeit interessiert ist. Die Verknüpfung der Tangential- und Normalverschiebung folgt aus der Bedingung, daß sich die Dehnung der Mittelfläche näherungsweise nicht entlang des Umfangs ändert.

- Bei der Integration des Funktional von Sanders et al. gehen beide Autoren stillschweigend davon aus, daß das unverformte Rohr eine perfekte Kreisform besitzt. Für die Integration des Funktional ist es aber erforderlich, diese im Referenzkoordinatensystem auszuführen; d.h., es muß über den quasi-elliptischen Zylinder integriert werden. Es gehen daher in beiden Theorien gewisse Terme verloren. Insbesondere ist es daher bei dem Vorgehen von Ellington und Serpico nicht möglich, die anfänglichen elastischen Verformungen, die bei einem momentanen Aufbringen des äußeren Überdrucks auftreten, aus dem Variationsprinzip zu erhalten.
- Für das Kriechverhalten nehmen beide Autoren ein Zeitverfestigungsgesetz an, dessen Spannungsabhängigkeit durch ein Potenzgesetz beschrieben wird.

Die Unterschiede der beiden Theorien liegen im folgenden wesentlichen Punkten:

- Serpico betrachtet einen Ring, so daß keine axialen Spannungen auf-

treten. Ellington berücksichtigt die axialen Spannungen, macht aber die zunächst recht willkürliche Annahme, daß in axialer Richtung keinerlei Kriechdehnungen auftreten; dadurch wird die Anzahl der Spannungsunbekannten reduziert. Eine physikalische Begründung gibt Ellington nicht. Wie sich später zeigen wird, ist diese Annahme aber recht gut erfüllt, sofern keine Temperaturgradienten auftreten.

- Ein weiterer Unterschied in beiden Theorien besteht in der Beziehung zwischen den Lagrangeschen Tangentialdehnungen und den Verschiebungen. Ellington setzt

$$e_p = w + v_{,p} + \frac{1}{2} (w_{,p})^2 - \lambda \Theta (w_{,pp} - v_{,p})$$

und bei Serpico ist in Anlehnung an Novozhilov [12]

$$e_p = w + v_{,p} + \frac{1}{2} [(w_{,p} - v)^2 + (w + v_{,p})^2] - \lambda \Theta (w_{,pp} - v_{,p})$$

Zunächst muß bemerkt werden, daß diese Beziehungen nur gelten, wenn die Mittelfläche perfekt kreisförmig ist; bei der quasi-elliptischen Mittelfläche kommen Zusatzterme hinzu, die von derselben Größenordnung sind wie die nichtlinearen Terme. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Ansätzen liegt in den nichtlinearen Ausdrücken. Man sieht unmittelbar, daß sich der Ansatz von Serpico vereinfachen läßt, da bei den vorausgesetzten kleinen Dehnungen e_p in der Mittelfläche ($\Theta = 0$) der Ausdruck $(w + v_{,p})^2$ gegen $(w_{,p} - v)^2$ vernachlässigt werden kann. Der Term $(w_{,p} - v)$ stellt die Rotation der Normalen dar. Den Ansatz von Ellington erhält man dann, falls der Einfluß der Tangentialverschiebung auf die Rotation vernachlässigt wird, und zwar nur in dem nichtlinearen Glied. Konsequenterweise müßte dann aber auch die Krümmung $(w_{,p} - v)_{,p}$ durch $w_{,pp}$ ersetzt werden (Donnell'sche Approximation).

- Ellington berücksichtigt unausgesprochen nicht die Tatsache, daß bei hydrostatischer Druckbelastung die Oberflächenkräfte ihre Richtung mit der Verformung ändern. Serpico hat sowohl diese Belastungsart wie auch eine wirklich hydrostatische Druckbelastung untersucht und gezeigt, daß die hydrostatische Belastung insbesondere bei großen Anfangsovalitäten eine wesentlich geringere Kriechkollapszeit zur Folge hat. Diese Vernachlässigung in der Ellington'schen Theorie wird aber zumindest dadurch teilweise kompensiert, daß Ellington bei der Variation des Geschwindigkeitsfeldes die erforderliche Variation der Tangentialgeschwindigkeit übersieht. Für ein kubisches Kriechgesetz und bei verschwindenden axialen Spannungen stimmen die Kollapszeiten

von Ellington und Serpico überein.

- Serpico hat als erster einen Vergleich seiner Theorie mit der Theorie von Hoff, Jahsman und Nachbar durchgeführt, indem er die elastischen Verzerrungen durch den Grenzübergang ($E \rightarrow \infty$) gegen Null geben ließ. Dabei zeigten sich deutlich Unterschiede in den beiden Theorien. Für den Fall einer nichthydrostatischen Druckbelastung kamen sich beide Lösungen allerdings recht nahe. Eine Erklärung für diese Unstimmigkeit konnte er allerdings nicht geben.

Glückler, Passig und Höchel [59] haben die Theorie von Hoff et al. und Ellington verglichen und dabei Kollapszeiten gefunden, die sich um einen Faktor 2 - 3 unterschieden.

6. Die Behandlung des Kriechkollaps-Problems mit Hilfe von Variationsprinzipien der Kriechmechanik

6.1 Zielsetzung der Untersuchungen und Voraussetzungen

Nach der vorangegangenen Diskussion vorhandener Kollapstheorien ergeben sich eine Reihe von Fragestellungen, die bisher keine oder nur eine ungenügende Klärung erfahren haben:

- a) Einfluß der elastischen Verzerrungen auf den Deformationsprozess und die Kriechkollapszeit
- b) Ermittlung der nichtlinearen Spannungsverteilung in der Hüllrohrwand und ihr Einfluß auf die Kriechkollapszeit
- c) Ermittlung der nichtelastischen Verzerrungen in der Hüllrohrwand
- d) Einfluß der Wärmespannungen und der Temperaturabhängigkeit der Kriechparameter, sowohl bei rotationssymmetrischem wie auch nichtrotationssymmetrischem Temperaturfeld

Darüber hinaus gibt es weitere Effekte, die die Deformation des Hüllrohrs beeinflussen; die wesentlichsten sind:

- Das Verhalten des Hüllrohrmaterials unter Bestrahlung; in Abhängigkeit von dem Werkstoff, dem Temperaturbereich und der Bestrahlungsdosis können das strahlungsinduzierte Kriechen, das Schwellen und die Hochtemperaturversprödung von Wichtigkeit sein.
- Die Stützwirkung und das Schwellen des Brennstoffes.

Auf diese Probleme kann hier nicht weiter eingegangen werden. Im Prinzip läßt sich aber das Schwellen und strahlungsinduzierte Kriechen des Hüllrohrs bei dem in Abschn. 6.4 angegebenen numerischen Verfahren berücksichtigen, sofern das Bestrahlungsverhalten quantitativ faßbar ist.

Die unter a) bis d) angegebenen Fragestellungen sollen mit den in Abschn. 4 entwickelten Variationsprinzipien untersucht werden. Folgende Voraussetzungen sollen getroffen werden:

- Die Hüllrohrgeometrie, das Materialverhalten, die Temperaturverteilung und der äußere Überdruck sind unveränderlich entlang der Brennstabachse
- Der hydrostatische Druck und die Wandstärke ändern sich nicht in Umfangsrichtung (keine integralen Rippen)
- Die Anfangsgeometrie des Hüllrohrs und das Temperaturfeld haben mindestens eine gemeinsame Symmetrieachse
- Die Abweichungen der Mittelfläche von der perfekten Kreiszyylindergeometrie sind sehr klein im Vergleich zum mittleren Radius des Hüllrohrs
- Die elastischen Konstanten und die Wärmeausdehnungszahl sind temperaturunabhängig
- Das Kriechverhalten wird durch die Invariantentheorie von Odqvist [1], die im einachsigen Spannungszustand auf das Nortonsche Gesetz führt, beschrieben
- Der hydrostatische Druck und die anfänglichen Wärmespannungen sind hinreichend klein, so daß kein elastisches oder elastisch-plastisches Beulen auftritt

Zur Verwendung der Invariantentheorie von Odqvist [1] sei bemerkt, daß verschiedene Untersuchungen bei mehrachsigen Spannungszustand, insbesondere die von Kennedy, Harms und Douglas ([60]; Rohrproben unter Innendruck und axialer Zugbelastung) und auch die von Closs und Schäfer ([61]; Rohrproben unter Innendruck), eine befriedigende Übereinstimmung zwischen dieser Theorie und den experimentellen Ergebnissen ergeben haben. Allerdings wurden diese Versuche nur bei zeitlich konstanter Last durchgeführt.

Unter den oben genannten Voraussetzungen wird in Abschn. 6.3 mit Hilfe des Variationsprinzips (4.75) für nichtelastische, viskose Schalen eine Alternative zur Theorie von Hoff et al. entwickelt. Dazu wird von dem Doppel-

membranmodell ausgegangen. Die elastischen Verzerrungen werden im Vergleich zu den Kriechverzerrungen als vernachlässigbar angesehen und das Temperaturfeld wird als isotherm betrachtet. Diese Theorie hat den Vorzug gegenüber dem folgenden numerischen Verfahren, daß die entwickelten Differentialgleichungen relativ einfach und übersichtlich bleiben, so daß qualitative Vergleiche mit der Theorie von Hoff et al. möglich sind.

Das in Abschn. 6.4 aufgestellte numerische Verfahren ist allerdings weit- aus flexibler. Grundlage für dieses Verfahren ist das Variationsprinzip (4.66). Elastische Verzerrungen und Wärmespannungen werden berücksichtigt. Die Hüllrohrwand wird als homogen angesehen und die Anfangsgeometrie und die Temperaturverteilung sind in gewissen Grenzen beliebig. Das Verfahren ist im Prinzip anwendbar auf alle Kriechgesetze, bei denen die Kriechverzerrungsraten unabhängig von den Spannungsraten sind. Voraussetzung für die Anwendung dieses Verfahrens ist die Verfügbarkeit eines Computercodes zur Integration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

6.2 Die Geometrie und Kinematik des Hüllrohrs

Es seien (Abb. 3)

$$\theta^1 = x \quad , \quad \theta^2 = \varphi \quad , \quad \theta^3 = z$$

dimensionslose, orthogonale Koordinaten. Als charakteristische Länge l wird der mittlere Hüllrohrradius \bar{R} gewählt. Da die Abweichungen der Mittel- fläche von der perfekten Kreiszyylindergeometrie voraussetzungsgemäß klein sind und sich nicht entlang der Stabachse ändern, wird die Mittel- fläche durch

$$\vec{s} = (1 + \alpha \eta(\varphi)) (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_3) + x \vec{e}_2 \quad (6.1)$$
$$\alpha \ll 1 \quad , \quad |\eta|_{\max} = 1$$

beschrieben. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sind Einheitsvektoren in einem kartesischen Ko- ordinatensystem (Abb. 3). Der Parameter α ist ein Maß für die Fertigungs- genauigkeit und die periodische Funktion η beschreibt die Form der Ab- weichung von der perfekten Kreiszyylindergeometrie. Der Winkel φ wird von einer Symmetrieachse des Hüllrohrs aus gemessen. Es soll vorausgesetzt werden, daß sich die Funktion η nur schwach entlang des Umfanges ändert, so daß $\alpha \eta_{,\varphi}$ und auch $\alpha \eta_{,\varphi\varphi}$ klein im Vergleich zu eins sind. Insbesondere wird später angenommen werden, daß η den Verlauf von $\cos k\varphi$ ($k = 2, 3, 4$) hat, wobei der $\cos 2\varphi$ -Verlauf den für die Auslegung wichtigsten Fall dar-

stellt, da er zu den ungünstigsten Ergebnissen führt. Da $\alpha \ll 1$ ist, können bei der Entwicklung der Basisvektoren und der Fundamentalgrößen 1. und 2. Ordnung sowie des Christoffelsymbols die in α quadratischen Terme vernachlässigt werden, so daß man das Folgende erhält:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{e}_2 \\ \vec{a}_2 &= [-\sin \varphi + \alpha(\eta_{, \varphi} \cos \varphi - \eta \sin \varphi)] \vec{e}_1 \\ &\quad + [\cos \varphi + \alpha(\eta_{, \varphi} \sin \varphi + \eta \cos \varphi)] \vec{e}_3 \\ \vec{a}_3 &= \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \approx [\cos \varphi + \alpha \eta_{, \varphi} \sin \varphi] \vec{e}_1 + [\sin \varphi - \alpha \eta_{, \varphi} \cos \varphi] \vec{e}_3 \\ a_{11} &= 1, \quad a_{22} \approx 1 + 2\alpha \eta \\ b_2^2 &= \vec{a}_{2,2} \cdot \vec{a}_3 \frac{1}{a_{22}} \approx -(1 - \alpha(\eta_{, \varphi \varphi} + \eta)) \\ \bar{r}_{22}^2 &= \vec{a}_{2,2} \cdot \vec{a}_2 \frac{1}{a_{11}} \approx \alpha \eta_{, \varphi} \\ \sqrt{a} &\approx 1 + \alpha \eta \end{aligned}$$

Alle anderen Fundamentalgrößen $a_{\mu\nu}$ und $b_{\mu\nu}$ und die übrigen Komponenten des Christoffelsymbols verschwinden identisch. Für die Verschiebungen soll vorausgesetzt werden, daß

$$v^1 = v^1(x), \quad v^2 = v^2(\varphi), \quad w = w(\varphi) \quad (6.2)$$

gilt, d.h. die Querschnittsverformung soll sich entlang der Hüllrohrachse nicht ändern. Es sind

$$u = v^1, \quad v = v^2 \sqrt{a_{22}} = v_2 \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \quad (6.3)$$

die physikalischen Komponenten der Verschiebungen v^{α} , die auf den mittleren Radius l bezogen sind. u , v und w sind dimensionslos.

Sofern alle in α quadratischen Terme im Vergleich zu eins vernachlässigt werden, erhält man mit (4.18) unter Beachtung von (6.3) für die Rotationen ω_{α}^{β} , die Verzerrungen α_{β}^{α} und die Krümmungsänderungen ω_{β}^{α}

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0 = \omega^1 \\ \omega_2 &= -(\dot{\omega}_{, \varphi} + v \frac{b_{22}}{\sqrt{a_{22}}}) = -[\dot{\omega}_{, \varphi} - v(1 - \alpha \eta_{, \varphi \varphi})] \quad (6.4) \\ \omega^2 &= \omega_2 a^{22} = \omega_2 \frac{1}{a_{22}} = -[\dot{\omega}_{, \varphi} (1 - 2\alpha \eta) - v(1 - \alpha(\eta_{, \varphi \varphi} + 2\eta))] \\ \dot{\omega}^2 \omega_2 &= (\dot{\omega}_{, \varphi})^2 (1 - 2\alpha \eta) - \dot{\omega}_{, \varphi} \dot{v} 2(1 - \alpha(\eta_{, \varphi \varphi} + 2\eta)) + \\ &\quad + (\dot{v})^2 (1 - 2\alpha(\eta_{, \varphi \varphi} + \eta)) \quad (6.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_1^1 &= u_{,x} \\
 \alpha_2^1 &= 0 \quad , \quad \alpha_1^2 = 0 \\
 \alpha_2^2 &= \alpha_\varphi = v_{,\varphi} (1 - \alpha \eta) + w (1 - \alpha (\eta_{,\varphi\varphi} + \eta)) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (w)^2 [1 - 2\alpha (\eta_{,\varphi\varphi} + \eta)] \\
 &\quad - w_{,\varphi} v [1 - \alpha (\eta_{,\varphi\varphi} + 2\eta)] \\
 &\quad + \frac{1}{2} (w_{,\varphi})^2 [1 - 2\alpha \eta]
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_1^1 &= 0 \\
 \omega_2^1 &= 0 \quad , \quad \omega_1^2 = 0 \\
 \omega_2^2 &= \omega_p = - \left\{ w_{,\varphi\varphi} (1 - 2\alpha \eta) - w_{,\varphi} \alpha \eta_{,\varphi} \right. \\
 &\quad \left. - v_{,\varphi} [1 - \alpha (\eta_{,\varphi\varphi} + 2\eta)] + v \alpha (\eta_{,\varphi\varphi\varphi} + \eta_{,\varphi}) \right\}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Die Membrankräfte und Biegemomente (physikalische Größen) in axialer Richtung x und in Umfangsrichtung φ sind mit (4.35)

$$\begin{aligned}
 n_x &= n_1^1 \quad , \quad n_\varphi = n_2^2 \\
 m_x &= \frac{1}{l} m_1^1 \quad , \quad m_\varphi = \frac{1}{l} m_2^2
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned}
 \dot{n}_x &= \dot{n}_1^1 \quad , \quad \dot{n}_\varphi = \dot{n}_2^2 \\
 \ddot{m}_x &= \frac{1}{l} \ddot{m}_1^1 \quad , \quad \ddot{m}_\varphi = \frac{1}{l} \ddot{m}_2^2
 \end{aligned}$$

6.3 Eine Alternative zur Theorie von Hoff, Jahsman und Nachbar [55]

Die Annahmen (a) bis (d) (S. 52) sollen auch hier zugrunde gelegt werden, allerdings mit der Einschränkung, daß über die Abmessungen der Doppelmembran zunächst noch nichts ausgesagt werden soll. Die Annahme eines quasi-elliptischen Hüllrohrs bedeutet

$$\eta(\varphi) = \cos 2\varphi \tag{6.9}$$

Für die Entwicklung einer approximativen Lösung wird von dem Funktional (4.73) für dünnwandige Schalen ausgegangen. Gegenüber der Anwendung von

(3.8) hat man hier, wie schon früher erwähnt, den Vorteil, daß das Differentialgleichungssystem quasilinear werden kann und daß außerdem \tilde{W}_s für ungerade Kriechexponenten oft noch elementar integrierbar ist; dagegen ist \tilde{W}_e (vergl. 2.36) zumeist nur noch numerisch integrierbar.

Aus dem Verschwinden der axialen Kriechrate $\dot{e}_1 = 0$ folgt $s_1 = \frac{1}{2} s_2^2$ (vergl. (2.35)), so daß

$$s_\beta^\alpha s_\alpha^\beta = \frac{1}{2} (s_2^2)^2. \quad (6.10)$$

Damit ist dann

$$\tilde{W}_s = \tilde{K} |s_2^2|^{n+1}, \quad \tilde{K} = k \frac{1}{n+1} = K \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n+1}. \quad (6.11)$$

Betrachtet man dagegen einen Ring, bei dem keine axialen Spannungen auftreten, dann ist

$$\tilde{W}_s = \tilde{K}_R |s_2^2|^{n+1}, \quad \tilde{K}_R = k_R \frac{1}{n+1} = K \frac{1}{n+1}. \quad (6.12)$$

Es ist $s_\varphi = s_2^2$ die physikalische Komponente der Spannung in Umfangsrichtung, die in der inneren (-) und der äußeren (+) Membran (Abb. 4) durch

$$s_\varphi = \begin{Bmatrix} s_\varphi^+ \\ s_\varphi^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_\varphi + m_\varphi \frac{1}{h_s/2} \\ n_\varphi - m_\varphi \frac{1}{h_s/2} \end{Bmatrix} \frac{1}{2d} \quad (6.13)$$

dargestellt werden kann. Aus (4.74) folgt dann

$$\begin{aligned} \hat{W}_s &= h \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tilde{W}_s d\theta \\ &\hat{=} \frac{\tilde{K} d}{(2d)^{n+1}} \left\{ \left| n_\varphi + \frac{m_\varphi}{h_s/2} \right|^{n+1} + \left| n_\varphi - \frac{m_\varphi}{h_s/2} \right|^{n+1} \right\}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Für den Ausdruck $w_s \dot{v}^s$ in dem Flächenintegral (4.73) berechnet man bei Vernachlässigung der in α quadratischen Terme im Vergleich zu eins

$$w_s \dot{v}^s = \dot{v} v (1 + 3\alpha \cos 2\varphi) - \dot{v} w_{,\varphi} (1 - \alpha \cos 2\varphi).$$

Unter Beachtung, daß sich in axialer Richtung die Verschiebungen und Spannungen nicht ändern, erhält dann das Funktional (4.73) die folgende Form

$$\begin{aligned} \Phi_{II} &= \int_0^{2\pi} \left\{ n_\varphi \dot{\alpha}_\varphi + \frac{1}{l} m_\varphi \dot{\omega}_\varphi - \hat{W}_s + \rho l [\dot{w} + \right. \\ &\quad \left. + \dot{v} v (1 + 3\alpha \cos 2\varphi) - \dot{v} w_{,\varphi} (1 - \alpha \cos 2\varphi)] \right\} l (1 + \alpha \cos 2\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (6.15)$$

wobei

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_\varphi &= \dot{v}_{,\varphi} (1 - \alpha \cos 2\varphi) + \dot{w} (1 + 3\alpha \cos 2\varphi) \\ &+ \dot{v} v (1 + 6\alpha \cos 2\varphi) - (\dot{v} w_{,\varphi} + \dot{w}_{,\varphi} v) (1 + 2\alpha \cos 2\varphi) \\ &+ \dot{w}_{,\varphi} w_{,\varphi} (1 - 2\alpha \cos 2\varphi) \end{aligned} \quad (6.16)$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_\varphi &= - \left[\dot{w}_{,\varphi\varphi} (1 - 2\alpha \cos 2\varphi) + \dot{w}_{,\varphi} 2\alpha \sin 2\varphi \right. \\ &\quad \left. - \dot{v}_{,\varphi} (1 + 2\alpha \cos 2\varphi) + \dot{v} 6\alpha \sin 2\varphi \right]. \end{aligned}$$

Da voraussetzungsgemäß im Hüllrohr keine Temperaturgradienten vorhanden sein sollen, der Werkstoff homogen ist und da eine quasi-elliptische Anfangsgeometrie angenommen wurde, muß das Spannungs- und Verschiebungsfeld wie die Anfangsovalität eine Doppelsymmetrie besitzen. Die ersten Glieder einer Fourierentwicklung der Beanspruchungsgrößen und Verschiebungen lauten dann

$$\begin{aligned} n_\varphi &= n_I(t) + n_{II}(t) \cos 2\varphi \\ m_\varphi &= m_{II}(t) \cos 2\varphi \\ w &= w_I(t) + w_{II}(t) \cos 2\varphi \\ v &= v_{II}(t) \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (6.17)$$

und

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{w}_I(t) + \dot{w}_{II}(t) \cos 2\varphi \\ \dot{v} &= \dot{v}_{II}(t) \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Hier wurde die Annahme gemacht, daß sich nur die Ovalität ändert, ohne das weitere Oberwellen auftreten. Weiterhin beachte man, daß die Anzahl der Parameter für die Beanspruchungsgrößen (n_I, n_{II}, m_{II}) mit der Anzahl der Geschwindigkeitsparameter ($\dot{w}_I, \dot{w}_{II}, \dot{v}_{II}$) übereinstimmt.

Mit (6.17) wird aus (6.14)

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{W}}_s &= \frac{\tilde{K} d}{(2d)^{n+1}} |n_I|^{n+1} \left\{ \left| 1 + \frac{n_{II} + m_{II} \frac{2}{h_s} \cos 2\varphi}{n_I} \right|^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + \left| 1 + \frac{n_{II} - m_{II} \frac{2}{h_s} \cos 2\varphi}{n_I} \right|^{n+1} \right\} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Um die weitere Rechnung übersichtlich zu halten und um rein numerische Integrationen zu vermeiden, soll vorausgesetzt werden, daß der Kriechex-

ponent n eine ganze (positive) Zahl ist. Falls n ungerade ist, dann können die Betragsstriche in (6.18) fortgelassen werden und eine Entwicklung mit Hilfe des Binomischen Satzes ist sofort möglich. Ist dagegen n gerade, dann können in (6.18) die Betragsstriche nur dann außer acht gelassen werden, wenn die Bedingung

$$\left| \frac{n_{II} \pm m_{II} \frac{z}{h_s}}{n_I} \right| \leq 1 \quad (6.19)$$

gilt. Andernfalls ist eine Entwicklung mit Hilfe des Binomischen Satzes für beliebige Winkel φ nicht möglich. Die Bedingung (6.19) besagt, daß weder in der Innen- noch Außenmembran ein Vorzeichenwechsel der Spannung S_φ^- oder S_φ^+ auftreten darf. Unter dieser Voraussetzung gilt für ganzzahlige Kriechexponenten

$$\hat{W}_s = \frac{\tilde{k} d}{(2d)^{n+1}} [\operatorname{sgn}(m_I)]^{n+1} \left\{ \sum_{\nu=0,1,2}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} (n_I)^{n+1-\nu} \left(n_{II} + m_{II} \frac{z}{h_s} \right)^\nu \cos^\nu 2\varphi + \sum_{\nu=0,1,2}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} (n_I)^{n+1-\nu} \left(n_{II} - m_{II} \frac{z}{h_s} \right)^\nu \cos^\nu 2\varphi \right\}$$

Die Integration entlang des Umfanges entsprechend (6.15) liefert

$$\tilde{W} := \int_0^{2\pi} \hat{W}_s [1 + \alpha \cos 2\varphi] d\varphi = \frac{\tilde{k} d}{(2d)^{n+1}} [\operatorname{sgn}(m_I)]^{n+1} \left\{ \sum_{\nu=0,2,4}^{\bar{n}} \binom{n+1}{\nu} A_\nu (n_I)^{n+1-\nu} \left[\left(n_{II} + m_{II} \frac{z}{h_s} \right)^\nu + \left(n_{II} - m_{II} \frac{z}{h_s} \right)^\nu \right] + \alpha \sum_{\nu=1,3,5}^{\bar{n}} \binom{n+1}{\nu} A_{\nu+1} (n_I)^{n+1-\nu} \left[\left(n_{II} + m_{II} \frac{z}{h_s} \right)^\nu + \left(n_{II} - m_{II} \frac{z}{h_s} \right)^\nu \right] \right\} \quad (6.20)$$

Hier ist

$$A_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^\nu 2\varphi d\varphi, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n+1.$$

A_ν läßt sich leicht aus der Rekursionsformel

$$A_0 = 2, \quad A_\nu = A_{\nu-2} \frac{\nu-1}{2}, \quad \nu = 2, 4, \dots \quad (6.21)$$

$$A_\nu = 0, \quad \nu = 1, 3, \dots$$

bestimmen, Weiterhin ist

$$\bar{n} = \begin{cases} n+1, & n \text{ ungerade} \\ n, & n \text{ gerade} \end{cases} \quad (6.22)$$

$$\bar{\bar{n}} = \begin{cases} n, & n \text{ ungerade} \\ n+1, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Mit (6.17) ergibt schließlich die Integration des Funktionals (6.15) bei

Vernachlässigung der in α quadratischen Terme

$$\begin{aligned} \phi_{II} = \pi l \left\{ m_I \left[2 \dot{w}_I + \dot{w}_I (4\alpha + 4w_I + 2v_I) + \dot{v}_I (2w_I + v_I) \right] \right. \\ + n_{II} \left[4\alpha \dot{w}_I + \dot{w}_I (1 - \alpha w_I + \frac{3}{2}\alpha v_I) + \dot{v}_I (2 + \frac{3}{2}\alpha w_I + \frac{3}{4}\alpha v_I) \right] \\ + m_{II} \frac{1}{l} \left[4 \dot{w}_I + 2 \dot{v}_I \right] - \tilde{W}(n_I, n_{II}, m_{II}) \\ \left. + \rho l \left[2 \dot{w}_I + \dot{w}_I \alpha + \dot{v}_I (2w_I + v_I) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Die in diesem Funktional zu variierenden Parameter sind die sechs zeitabhängigen Funktionen n_I, n_{II}, m_{II} und $\dot{w}_I, \dot{w}_{II}, \dot{v}_{II}$. Die Größen w_I, w_{II}, v_{II} sind für den betrachteten Zeitpunkt als gegeben anzusehen. Es sei bemerkt, daß die Terme $\alpha w_I, \alpha v_I$ in dem Koeffizienten von n_{II} (zweite Zeile von (6.23)) konsequenterweise auch gegen eins vernachlässigt werden müssen, solange w_{II} und v_{II} von gleicher oder kleinerer Größenordnung sind wie α ; andernfalls müßten die in α quadratischen Glieder berücksichtigt werden.

ϕ_{II} läßt sich durch weitere Annahmen über die Parameter n_I, n_{II} etc. vereinfachen. Zunächst erkennt man aus einer Gleichgewichtsbetrachtung am Hauptscheitel ($\varphi = 0$) des ovalen Hüllrohrs, daß n_{II} den Wert $-\rho l(\alpha + w_I)$ hat. Wie sich später zeigen wird (vergl. (6.29)), sind die durch das Biegemoment m_{II} hervorgerufenen Spannungen (vergl. (6.13)) um den Faktor $2l/h_3 \gg 1$ größer als die Spannungen infolge n_{II} , so daß die Approximation

$$n_{II} \approx 0 \quad (6.24)$$

berechtigt ist. Daraus folgt dann aber auch, daß die Dehnung der Mittel- fläche unabhängig von φ ist, so daß man mit (6.16) und (6.17) in erster Näherung

$$v_{II} \approx -\frac{1}{2} w_{II} \quad (6.25)$$

erhält. Das folgt auch aus (6.23). Wesentlich ist, daß \dot{v}_{II} jetzt nicht mehr unabhängig variiert wird, da dies mit der Approximation (6.24) nicht verträglich ist. Für geradzahlige Kriechexponenten hat man anstelle von (6.19) die Bedingung

$$\left| \frac{m_{II} \frac{2}{h_3}}{m_I} \right| \leq 1 \quad (6.26)$$

zu setzen. Da jetzt in dem Dissipationspotential (6.20) der Term mit dem Vorfaktor α identisch verschwindet, wird aus (6.23)

$$\begin{aligned} \phi_{II} = \pi l \left\{ n_{II} \left[2 \dot{\omega}_{II} + \dot{\omega}_{II} (4\alpha + 9/4 \omega_{II}) + m_{II} \frac{1}{2} 3 \dot{\omega}_{II} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2 \tilde{k} d}{(2d)^{n+1}} [\operatorname{sgn}(n_{II})]^{n+1} \sum_{\nu=0,2,4}^{\bar{n}} \binom{n+1}{\nu} A_{\nu} (n_{II})^{n+1-\nu} \left(\frac{m_{II}}{h_s/2} \right)^{\nu} \right. \right. \\ \left. \left. + \rho l \left[2 \dot{\omega}_{II} + \dot{\omega}_{II} \left(\alpha - \frac{3}{4} \omega_{II} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Die Forderung des Stationärwerdens von ϕ_{II} bei unabhängiger Variation von n_{II} , m_{II} , $\dot{\omega}_{II}$ und ω_{II} liefert

$$\delta \phi_{II} = \frac{\partial \phi_{II}}{\partial n_{II}} \delta n_{II} + \frac{\partial \phi_{II}}{\partial m_{II}} \delta m_{II} + \frac{\partial \phi_{II}}{\partial \dot{\omega}_{II}} \delta \dot{\omega}_{II} + \frac{\partial \phi_{II}}{\partial \omega_{II}} \delta \omega_{II} = 0,$$

so daß sich daraus das folgende System von Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi l} \frac{\partial \phi_{II}}{\partial n_{II}} &= 2 \dot{\omega}_{II} + \dot{\omega}_{II} (4\alpha + 9/4 \omega_{II}) \\ &\quad - \frac{2 \tilde{k}}{(2d)^{n+1}} [\operatorname{sgn}(n_{II})]^{n+1} \sum_{\nu=0,2,4}^{\bar{n}} \binom{n+1}{\nu} A_{\nu} (n_{II})^{n-\nu} \left(\frac{m_{II}}{h_s} \right)^{\nu} = 0 \\ \frac{1}{\pi l} \frac{\partial \phi_{II}}{\partial m_{II}} &= \frac{3}{2} \dot{\omega}_{II} - \frac{2 d \tilde{k}}{h_s/2} \left(\frac{\operatorname{sgn}(n_{II})}{2d} \right)^{n+1} \sum_{\nu=2,4}^{\bar{n}} \binom{n+1}{\nu} A_{\nu} \nu (n_{II})^{n+1-\nu} \left(\frac{m_{II}}{h_s} \right)^{\nu-1} = 0 \\ \frac{1}{\pi l} \frac{\partial \phi_{II}}{\partial \dot{\omega}_{II}} &= 2 n_{II} + 2 \rho l = 0 \\ \frac{1}{\pi l} \frac{\partial \phi_{II}}{\partial \omega_{II}} &= n_{II} (4\alpha + 9/4 \omega_{II}) + m_{II} \frac{3}{2} + \rho l \left(\alpha - \frac{3}{4} \omega_{II} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

Die ersten beiden Gleichungen stellen das gemittelte Stoffgesetz dar und die letzten beiden Gleichungen die gemittelten Gleichgewichtsbedingungen. Aus dem letzteren folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} n_{II} &= -\rho l \\ m_{II} &= \rho (l)^2 (\alpha + \omega_{II}). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Dann läßt sich die zweite Gleichung von (6.28) unter Beachtung von (6.11) und nach Umbenennung des laufenden Index $\nu = \mu+1$ in der Form

$$\dot{\omega}_{II} = \operatorname{sgn}(\rho) \frac{k}{3} \frac{2l}{h_s} \left| \frac{\rho l}{2d} \right|^m \sum_{\mu=1,3}^{n^*} \binom{m}{\mu} A_{\mu+1} \left[\left(\alpha + \omega_{II} \right) \frac{2l}{h_s} \right]^{\mu} \quad (6.30)$$

schreiben. Es bedeutet hier

$$n^* = \begin{cases} m & , \quad n \text{ ungerade} \\ m-1 & , \quad n \text{ gerade} \end{cases}$$

Die mittlere Durchmesseränderung ω_{II} ergibt sich aus der ersten Gleichung

von (6.28) zu

$$\dot{w}_{II} = -\operatorname{sgn}(p) k \left| \frac{p\ell}{2d} \right|^n \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=2,4}^n \binom{n}{\nu} A_{\nu} \left[(\alpha + w_{II}) \frac{2\ell}{h_s} \right]^{\nu} \right\}, \quad (6.31)$$

wobei der Term $\dot{w}_{II} (2\alpha + \frac{2}{h_s} w_{II})$ vernachlässigt wurde. Die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen (6.30) und (6.31) bestimmen den Deformationsprozess des Rohres, wobei (6.30) die für die Ovalitätsänderung wesentliche Gleichung ist. Für geradzahlige Kriechexponenten n ist ihr Gültigkeitsbereich durch (6.26) eingeschränkt. Mit (6.29) erhält man daraus die Bedingung

$$(\alpha + w_{II}) \frac{2\ell}{h_s} \leq 1 \quad (6.32)$$

Die Anfangsbedingungen sind durch

$$w_{II} = 0, \quad \dot{w}_{II} = 0 \quad \text{für} \quad t = 0 \quad (6.33)$$

gegeben.

Die noch offene Frage, wie die geometrischen Parameter h_s und d der Doppelmembrane in Relation zur Wandstärke h zu setzen sind, muß noch untersucht werden. Hoff et al. (vergl. S. 53) setzen

$$\frac{d}{h} = \frac{1}{2}, \quad \frac{h_s}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577.$$

Dieser Ansatz ist nur angebracht für ein linear elastisches Material oder für einen Kriechexponenten $n=1$. Ein alternativer Vorschlag ergibt sich aus der Forderung, daß das Dissipationspotential \hat{W}_s in zwei wesentlichen Grenzfällen für die Doppelmembrane und die Vollwand gleich sein soll. Unmittelbar nach Aufbringen der Druckbelastung sind die Spannungen in der Hüllrohrwand praktisch ausschließlich durch die Membrankraft bestimmt, sofern $\frac{h_s}{\ell} \gg \alpha$ (vergl. (6.13) unter Beachtung von (6.29)). Die Forderung der Gleichheit der Dissipationspotentiale liefert dann wie bei Hoff et al. die Bedingung

$$\frac{d}{h} = \frac{1}{2}. \quad (6.34)$$

Betrachtet man dagegen einen späteren Zeitpunkt, bei dem die Biegemomente große Werte an den Scheitelpunkten des Hüllrohrs annehmen, dann sind die Spannungen infolge der Membrankraft an den Stellen $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3/2\pi$ gegenüber den Biegespannungen vernachlässigbar; dagegen herrschen die Membranspannungen an den Stellen $\varphi = \pi/4$ etc. vor. Die Forderung der Übereinstimmung des Dissipationspotentials der Doppelmembrane und der Vollwand an den Stellen $\varphi = \pi/4$ etc., liefert wieder die Bedingung (6.34). Dagegen ergibt sich für die Scheitelpunkte $\varphi = 0, \pi/2$ etc. die Bedingung

$$\frac{h_s}{h} = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{\frac{n}{n+1}} \quad (6.35)$$

Bei der Ableitung von (6.35) wurde entsprechend (4.27) eine lineare Verteilung der Dehnungen über die Vollwand zugrunde gelegt. Es läßt sich leicht nachweisen, daß die Forderungen (6.34) und (6.35) mit den Forderungen gleicher Dehnungsgeschwindigkeit bzw. Krümmungsgeschwindigkeit (bei reiner Membranspannungsbeanspruchung bzw. reiner Biegung) in der Doppelmembrane und in der Vollwand identisch sind. Man beachte, daß aus (6.35) für $n=1$ wieder die Bedingung von Hoff et al. folgt. (6.35) wurde auch von Rabotnov [3, S. 616; 20] angegeben. Aus Abb. 5 erkennt man, daß sich das Verhältnis h_s/h für große n nur schwach ändert. Es ist ca. 10 o/o geringer als das von Hoff et al. benutzte.

Die Kriechkollapszeit t_c wird durch die Differentialgleichung (6.30) bestimmt. Durch Einführung der Variablen

$$\chi = \frac{m \pi}{h_s \rho l / 2} = (\alpha + w \pi) \frac{2l}{h_s} \quad (6.36)$$

läßt sich (6.30) für äußeren Überdruck ($p > 0$) auf die Form

$$\dot{\chi} = \frac{4}{3} \left(\frac{l}{h_s} \right)^2 k \left(\frac{pl}{2d} \right)^n \sum_{v=1,3,\dots}^{n^*} \binom{n}{v} A_{v+1} (\chi)^v \quad (6.37)$$

bringen.

Die zugehörige Anfangsbedingung ist

$$\chi_0 = \alpha \frac{2l}{h_s} \quad (6.38)$$

Der typische zeitliche Verlauf von $\chi(t)$ ist schon von der Theorie von Hoff et al. [55] her bekannt. Die Ovalitätsänderung ist über einen großen Zeitraum schleichend, um dann innerhalb kurzer Zeit große Werte (theoretisch $\chi \rightarrow \infty$) anzunehmen; hierbei läuft t asymptotisch gegen den endlichen Wert t_c . Bei geradzahligem Kriechexponenten n sind beide Theorien wegen (6.32) auf Werte $\chi \leq 1$ beschränkt und für den Fall $n = 1$ ergibt sich ein exponentiell ansteigender Verlauf.

Vergleicht man (6.37) mit der Gleichung von Hoff et al. (5.2), dann fällt sofort auf, daß beide Theorien bis auf die Koeffizienten B_v und A_{v+1} übereinstimmen, sofern die Abmessungen der Doppelmembran in beiden Theorien übereinstimmen und man berücksichtigt, daß $\bar{R} \equiv l$. Das Verhältnis dieser Koeffizienten ist für $v = 1, 3, 5, 7, 9$

$$\frac{A_{v+1}}{B_v} = 1, \quad 1.127, \quad 1.172, \quad 1.193, \quad 1.211.$$

Daraus folgt, daß die Ovalitätsänderungsgeschwindigkeit $\dot{\chi}$ in der hier neu entwickelten Theorie (6.37) etwas größer ist als in der Theorie von Hoff et al., so daß sich auch etwas kürzere Kriechkollapszeiten ergeben. Aus den angegebenen Verhältniszahlen ersieht man aber, daß für $n \leq 9$ die Abweichungen nicht mehr als maximal 21 o/o betragen kann. Dieser Unterschied läßt sich klarmachen, wenn man bedenkt, daß die Anwendung des Variationsprinzipes (4.75) mit einer gewichteten Mittelung der Gleichgewichtsbedingungen und des Stoffgesetzes äquivalent ist. Bei Hoff et al. dagegen findet nur eine einfache Mittelung und keine Wichtung statt; die Krümmungsänderungen an den Stellen $\varphi=0$ und $\pi/2$ werden dort als gleichwertig angesehen.

In ähnlicher Weise läßt sich auch eine Kriechkollapstheorie unter Berücksichtigung der elastischen Verzerrungen entwickeln, wenn man das Variationsprinzip (4.57) zugrunde legt. Geht man auch hier von dem Doppelmembranmodell aus, dann wird bei der Bestimmung des Parameters h_s deutlich, daß nicht gleichzeitig die elastischen Eigenschaften und das Kriechverhalten des homogenen Hüllrohrs approximiert werden können. Um konservativ zu sein, könnte man die Beziehung (6.35) anwenden. Auch kann man voraussetzen, daß in axialer Richtung keine Kriechdehnungen auftreten. Dies gilt in guter Näherung am Anfang des Kriechprozesses, wenn die Biegespannungen infolge der Anfangsovalität noch klein gegenüber den Membranspannungen sind. Ohne auf die Ableitung im einzelnen einzugehen, erhält man für ein isothermes, quasi-elliptisches Hüllrohr bei konstantem äußeren Überdruck die Differentialgleichung

$$\dot{\chi} = \frac{1}{1-P/\bar{p}} \frac{4}{3} \left(\frac{l}{h_s}\right)^2 \left(\frac{Pl}{2d}\right)^n k \sum_{\nu=1,3}^{n^*} \binom{n}{\nu} A_{\nu+1} (\chi)^\nu, \quad (6.39)$$

wobei \bar{p} der elastische Beuldruck der Doppelmembrane ist:

$$\bar{p} = \frac{3EB}{l} = \frac{3}{2} E \left(\frac{h_s}{l}\right)^2 d. \quad (6.40)$$

Bei plötzlicher Druckbelastung lautet die Anfangsbedingung

$$\chi_0 = \frac{2l}{h_s} d \left(1 + \frac{P/\bar{p}}{1-P/\bar{p}}\right). \quad (6.41)$$

Die Differentialgleichungen (6.37) und (6.39) und die Anfangsbedingungen (6.38) und (6.41) stimmen bis auf die Glieder, die den Quotienten P/\bar{p} enthalten, vollständig überein. Diese Zusatzglieder bewirken, daß die Ovalitätsänderungsgeschwindigkeit $\dot{\chi}$ und die Anfangsovalität etwas vergrößert wird. Daher wird beispielsweise die Kollapszeit t_c für $P/\bar{p} = 0.3$ entsprechend Gl. (6.39) um 30 o/o kleiner sein als die Kollapszeit ent-

sprechend Gl. (6.37), sofern man den Einfluß der vergrößerten Anfangsovalität nicht berücksichtigt.

In diesem Zusammenhang wurde der Einfluß des gleichförmigen radialen Wärmedurchgangs untersucht. Bei der Analyse wurde allerdings nur ein Ring betrachtet (keine axiale Spannungen) und der Kriechexponent n wurde wegen seiner im allgemeinen nur schwachen Temperaturabhängigkeit als konstant angesehen. Die qualitativen Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen: Die drei Folgeeffekte einer am Umfang gleichförmigen radialen Temperaturdifferenz ΔT , u.z.

- Wärmespannungen infolge der thermischen Ausdehnung
- unterschiedliches Kriechverhalten an der Innen- und Außenseite ($K^- > K^+$)
- und differentielles Schwellen infolge Bestrahlung,

bewirken alle eine Vergrößerung der Ovalitätsänderungsgeschwindigkeit, und damit eine Verminderung der Kriechkollapszeit. Für das bestrahlungsinduzierte Schwellen wird hier vorausgesetzt, daß die Schwellrate mit der Temperatur zunimmt. Nur bei einem linearen Kriechgesetz ($n = 1$) sind diese Einflüsse nicht vorhanden. Interessanterweise ist es gleichgültig, ob hier ein Wärmedurchgang von innen nach außen oder von außen nach innen erfolgt. Eine quantitative, numerische Untersuchung einiger dieser Einflüsse wird im folgenden Abschnitt mit einer genaueren Theorie vorgenommen.

6.4 Kriechkollaps eines langen, glatten Hüllrohrs bei rotations- und nichtrotationssymmetrischem Temperaturfeld

6.4.1 Theorie

Wegen der Dünnwandigkeit des Hüllrohrs kann die Temperaturverteilung in radialer Richtung als linear angesehen werden, so daß das approximative Temperaturfeld $T(\varphi, \theta)$ die folgende Form erhält:

$$T(\varphi, \theta) = \bar{T}_m(\varphi) - \Delta T(\varphi) \cdot \theta \quad (6.42)$$

mit

- $\bar{T}_m(\varphi)$: mittlere Wandtemperatur
 $\Delta T(\varphi)$: Temperaturdifferenz zwischen der Innen- und Außenseite des Hüllrohrs ($\Delta T > 0$).

Die azimutalen und radialen Temperaturgradienten bewirken mehrere Effekte:

- Inhomogenität:

Da die Kriechparameter eine ausgeprägte Temperaturabhängigkeit besitzen, sind sie ortsabhängig; es ist zu erwarten, daß dieser Effekt einen sehr wesentlichen Einfluß auf die Kriechkollapszeit hat. Die Temperaturabhängigkeit der elastischen Konstanten ist im Vergleich dazu vernachlässigbar.

- Wärmespannungen:

Es seien $\bar{T}_m(\varphi)$ und $\Delta T(\varphi)$ in Fourierreihen

$$\begin{aligned} \bar{T}_m(\varphi) &= \bar{T}_{m0} + \bar{T}_{m1} \cos \varphi + \bar{T}_{m2} \cos 2\varphi + \dots \\ \Delta T(\varphi) &= \Delta T_0 + \Delta T_1 \cos \varphi + \Delta T_2 \cos 2\varphi + \dots \end{aligned} \quad (6.43)$$

entwickelt. Goodier [62] hat für einen dünnwandigen, elastischen Kreiszyylinder gezeigt, daß nur die Terme \bar{T}_{m1} , ΔT_0 und ΔT_1 einen Beitrag zu den Wärmespannungen in Umfangsrichtung liefern. Die höheren Fourierglieder erzeugen nur eine Welligkeit des Zylinders. Infolge \bar{T}_{m1} und ΔT_1 werden sowohl Membrankräfte wie auch Biegemomente in Umfangsrichtung erzeugt. Die Membranspannungen in Umfangsrichtung sind um den Faktor $\frac{h}{L} \frac{1}{12}$ kleiner als die maximale Biegespannung in Umfangsrichtung. Insbesondere sind aber die Membranspannungen in Umfangsrichtung um den Faktor $\frac{h}{L} \frac{1}{12}$ kleiner als die axialen Membranspannungen, so daß man also in guter Näherung die durch Temperaturgradienten hervorgerufenen Membranspannungen in Umfangsrichtung vernachlässigen kann. In axialer Richtung dagegen bewirken bis auf \bar{T}_{m0} alle Terme

der Fourierreihen (6.45) Wärmespannungen, die berücksichtigt werden müssen. Der Term T_{m0} liefert keinen Beitrag, da die durch ihn hervorgerufene Wärmedehnung nicht behindert ist.

- Thermische Biegung der Brennstabachse:

Besitzt die mittlere Wandtemperatur $T_m(\varphi)$ nur eine Symmetrieachse (d.h. $T_{mi} \neq 0$, i ungerade), dann wird sich die Brennstabachse krümmen, sofern sie nicht behindert ist. Da die Brennstäbe durch Abstandshalter geführt werden, ist eine solche freie, thermische Biegung nicht möglich. Um eine genaue Untersuchung der Brennstabdeformation unter Berücksichtigung der Auflager zu vermeiden, sollen zwei Grenzfälle betrachtet werden. Im ersten Fall wird angenommen, daß der Brennstab völlig behindert ist, sich thermisch zu verbiegen, und im zweiten Fall wird angenommen, daß er sich ungehindert krümmen kann. Bei freier, thermischer Biegung muß dann aber verlangt werden, daß die axialen Spannungen kein resultierendes Biegemoment besitzen. Unter Vernachlässigung der Anfangsovalität und der Querschnittsdeformation des Hüllrohrs infolge des Außendrucks erhält diese Forderung wegen der Dünnwandigkeit die folgende Form

$$\int_0^{\pi} n_x \cos \varphi d\varphi = 0. \quad (6.44)$$

Hier ist n_x die axiale Membrankraft. Es sei bemerkt, daß infolge der Krümmung der Stabachse bei freier, thermischer Biegung der Hüllrohrquerschnitt Verschiebungen erfährt, die sich den Verschiebungen infolge der Ovalitätsänderungen durch den äußeren Überdruck überlagern. So bewirkt beispielsweise eine Temperaturdifferenz von 100°C am Umfang (d.h. $T_{m1} = 50^\circ\text{C}$, $T_{mi} = 0$, $i > 1$) bei einem Außendurchmesser von 7 mm sowie einem Wärmeausdehnungskoeffizienten $\beta = 0.15 \cdot 10^{-4}$ (grad) $^{-1}$ eine Krümmung der Stabachse mit einem Radius von 4.67 m. Da das Radiusverhältnis 7/4670 sehr klein im Vergleich zu eins ist, kann die Brennstabachse weiterhin als gerade angesehen werden. Es bleiben daher die Ergebnisse von Abschnitt (6.2) auch hier anwendbar. Allerdings muß (6.44) beachtet werden.

- Änderung der Mittelflächengeometrie infolge azimuthaler Temperaturvariationen:

Sowohl die azimuthale Variation der mittleren Wandtemperatur $T_m(\varphi)$ wie auch die der Temperaturdifferenz $\Delta T(\varphi)$ erzeugen eine "Welligkeit" der Mittelfläche. Es kann davon ausgegangen werden, daß die durch $T_m(\varphi)$ hervorgerufene Welligkeit vernachlässigbar ist im Vergleich zu den

fertigungsbedingten Abweichungen. Beispielsweise errechnet man für einen Ring bei der sehr ungünstigen $\cos 2\varphi$ -Verteilung eine maximale Abweichung von

$$\frac{\beta \bar{T}_{m2}}{2^2 - 1} \quad (6.45)$$

Mit $\beta = 0.18 \cdot 10^{-4} (\text{grad})^{-1}$ und $\bar{T}_{m2} = 50^\circ \text{C}$ erhält man eine Abweichung von 0.03 o/o vom mittleren Radius des Hüllrohrs; im Vergleich dazu beträgt die maximale fertigungsbedingte Abweichung etwa 0.5 o/o, so daß sie also um mehr als einen Faktor 10 größer ist. Dagegen ergibt beispielsweise die azimutale Schwankung der Temperaturdifferenz $\Delta T = \Delta \bar{T}_2 \cos 2\varphi$ eine maximale Abweichung von

$$\frac{l}{h} \frac{\beta \Delta \bar{T}_2}{2^2 - 1} \quad (6.46)$$

so daß man mit $\Delta \bar{T}_2 = 50^\circ \text{C}$ und $l/h \approx 10$ eine maximale Abweichung von 0.3 o/o des mittleren Radius bekommt. Diese Ovalität liegt in derselben Größenordnung wie die fertigungsbedingte Ovalität und muß daher berücksichtigt werden.

Für die Lösung dieses allgemeinen Problems soll von dem Variationsprinzip (4.66) ausgegangen werden, bei dem die zeitliche Ableitung des Membrankrafttensors \dot{n}_β^* und das Geschwindigkeitsfeld \dot{v}^* und \dot{w} unabhängig variiert werden. Die Anwendung dieses Prinzips hat gegenüber dem allgemeinen Variationsprinzip (4.57) den Vorteil, daß hier die Anzahl der zu variiierenden Parameter geringer ist. Im Vergleich zu dem Prinzip (4.70) hat (4.66) den Nachteil der größeren Anzahl freier Parameter; dieser Nachteil wird aber dadurch aufgewogen, daß sich die Bedingung (6.44) bei der Anwendung von (4.66) sehr einfach berücksichtigen läßt. Darüber hinaus sind die bei (4.66) durchzuführenden Integrationen wesentlich einfacher als bei (4.70).

Das Variationsprinzip (4.66) erhält mit den Voraussetzungen von Abschnitt (6.2) die folgende Form

$$\begin{aligned} \psi_{\text{I}}^* = \int_{-\bar{x}}^{\bar{x}} \int_0^{2\bar{r}} \left\{ \dot{n}_1^1 \dot{\alpha}_1^1 + \dot{n}_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2} \dot{n}_2^1 \dot{w}_2 \dot{w}_2^2 \right. \\ - \frac{1}{2Eh} [(\dot{n}_1^1)^2 + (\dot{n}_2^2)^2 - 2\nu \dot{n}_1^1 \dot{n}_2^2] \\ - \frac{1}{Eh} [\dot{n}_1^1 (\dot{n}_1^{''1} - \nu \dot{n}_2^{''2}) + \dot{n}_2^2 (\dot{n}_2^{''2} - \nu \dot{n}_1^{''1})] \\ + \frac{1}{2} \frac{EB}{1-\nu^2} [\dot{\omega}_2^2]^2 - \dot{\omega}_2^2 \dot{n}_2^{''2} \\ \left. - \pi_f \right\} (l)^2 (1+\alpha\gamma) d\varphi dx \quad - \pi_c \end{aligned} \quad (6.47)$$

Die Integration in axialer Richtung x erstreckt sich dabei über einen beliebigen Abschnitt $-\bar{x} \leq x \leq \bar{x}$ (Abb. 3). Man beachte, daß das Randintegral (4.52) über den gedachten Rand C (Abb. 3) identisch verschwindet.

Für das Potential $\bar{\pi}_f$ der hydrostatischen Belastung auf der Mittelfläche errechnet man aus (4.51)

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_f = l \left\{ -\dot{\rho} [1 + u_{,x} + v_{,\varphi}(1 + \alpha\eta) + w(1 - \alpha(\eta_{,\varphi\varphi} + \eta))] \dot{w} \right. \\ \left. + \dot{\rho} [w_{,\varphi}(1 - \alpha\eta) - v(1 - \alpha(\eta_{,\varphi\varphi} + \eta))] \dot{v} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \rho [(\dot{v})^2 + (\dot{w})^2] [1 - \alpha(\eta_{,\varphi\varphi} + \eta)] \right. \\ \left. - \rho \dot{w} [\dot{u}_{,x} + \dot{v}_{,\varphi}(1 - \alpha\eta)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Hier wurden alle in α quadratischen Terme im Vergleich zu eins vernachlässigt. Da sich in axialer Richtung x die Verschiebungen v und w und Beanspruchungsgrößen nicht ändern und da das Hüllrohr geschlossen ist und unter hydrostatischem Druck steht, ergibt sich für das Randintegral

$$\bar{\pi}_c = 2l \int_0^{2\pi} (\dot{n}^1 \dot{v}_1)_{x=\bar{x}} l \Gamma a d\varphi = -2\pi (l)^3 \dot{\rho} \dot{u}_{(x=\bar{x})}. \quad (6.49)$$

Man beachte, daß hier die Querschnittsflächenänderung des Brennstabes infolge der Deformation nicht berücksichtigt wurde.

Für die Verschiebungen w und v und die Membrankraft n_φ werden jetzt folgende Annahmen getroffen. Die Normalverschiebung $w(\varphi, t)$ wird in zwei Anteile aufgespalten

$$w(\varphi, t) = w_I(t) + w_{II}(\varphi, t); \quad (6.50)$$

hierbei stellt w_I den "Schrumpfungsterm" dar, während w_{II} die ungleichförmige, im wesentlichen durch Biegung hervorgerufene Normalverschiebung ist. Weiterhin wird angenommen, daß die Membrankraft n_φ sich nicht entlang des Umfangs ändert, d.h.

$$n_\varphi(\varphi, t) = n_\varphi(t). \quad (6.51)$$

Durch diesen Ansatz wird einmal der Einfluß der Ovalität vernachlässigt, darüberhinaus werden aber auch die durch azimutale Temperaturgradienten hervorgerufenen Membrankräfte in Umfangsrichtung nicht berücksichtigt (vergl. die Bemerkungen zu den Wärmespannungen auf S. 70).

Um die Anzahl der freien Parameter zu vermindern wird mit

$$v_{II} \equiv v$$

die Annahme

$$v_{II, \varphi} + w_{II} = 0 \quad (6.52)$$

getroffen. Diese Approximation war schon für ein isothermes Temperaturfeld in (6.25) benützt worden, und sie war dort mit dem Ansatz (6.51) verträglich. Will man die Approximationen (6.51) und (6.52) bei einem nicht-rotationssymmetrischen Temperaturfeld verwenden, dann ist folgendes zu beachten. Die durch die azimutalen Schwankungen der mittleren Wandtemperatur $T_m(\varphi)$ hervorgerufene Welligkeit der Mittelfläche wird bei Verwendung von (6.51) und (6.52) nicht berücksichtigt, da infolge dieser Schwankungen die Dehnung der Mittelfläche sich entlang des Umfanges ändert. Wie aber auf S. 71 festgestellt worden war, ist dieser Einfluß vernachlässigbar im Vergleich zu der fertigungsbedingten Abweichung von der Mittelfläche. Ist man besonders an diesem Effekt interessiert, dann muß die durch $T_m(\varphi)$ erzeugte Änderung der Mittelflächengeometrie in der Anfangsabweichung $\propto \eta(\varphi)$ berücksichtigt werden.

Durch die Approximationen (6.51) und (6.52) wird weiterhin nicht berücksichtigt, daß infolge der Temperaturabhängigkeit und damit Ortsabhängigkeit der Kriechparameter die Dehnung der Mittelfläche sich entlang des Umfanges ändert. Geht man beispielsweise von der $\cos 6\varphi$ -Verteilung von $T_m(\varphi)$ (bei dreieckiger Stabanordnung und ungestörter Geometrie) aus, dann ändert sich die Kriechdehnung der Mittelfläche primär nach einem $\cos 6\varphi$ -Verlauf, so daß also eine Welligkeit der Mittelfläche in dieser Form entsteht. Man muß aber erwarten, daß diese sich mit der Zeit entwickelnde Mittelflächenabweichung von wesentlich geringerem Einfluß auf die Kollapszeit ist als eine von Anfang an vorhandene Ovalität infolge der Fertigungsungenauigkeit. Andererseits kann man auch davon ausgehen, daß weniger die durch die Membrankraft n_φ erzeugte Dehnung der Mittelfläche für das Kollapsverhalten von Bedeutung ist als vielmehr die durch Biegemomente erzeugte Krümmungsänderung. Aus diesen Gründen und wegen der beträchtlichen Verminderung des Rechenaufwandes sollen die Annahmen (6.51) und (6.52) beibehalten werden. Will man allerdings diesen Einfluß untersuchen, dann muß man v_{II} als unabhängig von w_{II} ansehen und die Schwankungen der Membrankraft müssen in (6.51) berücksichtigt werden.

Für w_{II} wird der Ansatz

$$w_{II}(\varphi, t) = \sum_{k=2,3}^{k_F} \tilde{w}_k(t) \cos k\varphi \quad (6.53)$$

gemacht. Dann ist mit (6.52)

$$v_{II}(\varphi, t) = - \sum_{k=2,3}^{K_F} \tilde{w}_k(t) \frac{1}{k} \sin k\varphi. \quad (6.54)$$

Der Term für $k = 1$ ist in (6.53) und (6.54) nicht enthalten, da er eine starre Translationsbewegung darstellt.

Da sich die Spannungen und Verschiebungen voraussetzungsgemäß in axialer Richtung nicht ändern, ist die axiale Verschiebung eine lineare Funktion in x

$$u(x, \varphi, t) = x \tilde{u}(t). \quad (6.55)$$

An sich muß u bei freier, thermischer Biegung einen Term der Form $\hat{u}(x) \cos \varphi$ enthalten. Dieser kann aber wegen der Bedingung (6.44) im folgenden fortgelassen werden. Schließlich wird für die axiale Membrankraft ebenfalls ein Fourieransatz gemacht

$$n_x(\varphi, t) = \tilde{n}_0(t) + \tilde{n}_1(t) \cos \varphi + \sum_{k=2,3}^{K_F} \tilde{n}_k(t) \cos k\varphi. \quad (6.56)$$

Bevor nun (6.47) mit den Ansätzen (6.50) bis (6.56) integriert wird, können in (6.47) eine Reihe von Ausdrücken, die den Parameter $\alpha \ll 1$ enthalten, vereinfacht werden. Dies läßt sich folgendermaßen einsehen. Maßgebend für die Formänderung des Hüllrohrs ist zunächst einmal der Verlauf der Abweichung $\eta(\varphi)$. Ist beispielsweise $\eta = \cos k\varphi$ ($k = 2, 3, 4$), dann wird man erwarten, daß w_{II} im wesentlichen ebenfalls einen $\cos k\varphi$ -Verlauf hat und v_{II} entsprechend einen $\sin k\varphi$ -Verlauf. Es werden dann die Amplituden \tilde{w}_k besonders ausgeprägt sein; im ersten Teil des Deformationsprozesses werden sie von derselben Größenordnung wie α sein. Beschränkt man sich nun auf die wesentlichen Terme, dann erhält man unter Beachtung des Faktors $\sqrt{1+\alpha\eta} \approx (1+\alpha\eta)$ in (6.47)

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_2^2 (1+\alpha\eta) &\approx \dot{w}_{II} (1-\alpha\eta_{,\varphi\varphi}) - \dot{w}_{II} \alpha \eta_{,\varphi\varphi} \\ &\quad + \dot{v}_{II} v_{II} - (\dot{w}_{II,\varphi} v_{II} + w_{II,\varphi} \dot{v}_{II}) + \dot{w}_{II,\varphi} w_{II,\varphi} \\ \dot{\omega}_2^2 (1+\alpha\eta) &\approx - (\dot{w}_{II,\varphi\varphi} - \dot{v}_{II,\varphi}) \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$(\dot{\omega}_2^2)^2 (1+\alpha\eta) \approx (\dot{w}_{II,\varphi\varphi} - \dot{v}_{II,\varphi})^2$$

$$\dot{w}_2 \dot{\omega}_2^2 (1+\alpha\eta) \approx (\dot{w}_{II,\varphi})^2 - 2 \dot{w}_{II,\varphi} \dot{v}_{II} + (\dot{v}_{II})^2$$

$$\begin{aligned}
 \pi_f (1+\alpha\eta) \approx l \left\{ -\dot{\rho} [1+\alpha\eta + u_{,x} + \dot{w}_I] [\dot{w}_I + \dot{w}_{II}] \right. \\
 + \dot{\rho} [\dot{w}_{II,\varphi} - v_{II}] \dot{v}_{II} \\
 - \frac{1}{2} \rho [(\dot{w}_I)^2 + 2 \dot{w}_I \dot{w}_{II} + (\dot{w}_{II})^2 + (\dot{v}_{II})^2] \\
 \left. - \rho [\dot{w}_I + \dot{w}_{II}] [\dot{u}_{,x} + v_{II,\varphi}] \right\} .
 \end{aligned} \tag{6.58}$$

Für alle übrigen Terme des Flächenintegrals von (6.47) kann der Faktor $\sqrt{a} \approx 1+\alpha\eta$ durch 1 approximiert werden. Man erhält dann schließlich für ψ_{II}^*

$$\begin{aligned}
 \psi_{II}^* = 2\bar{x} \int_0^{2\pi} \left\{ \dot{n}_x \ddot{u} \right. \\
 + \dot{n}_\varphi [\dot{w}_I (1-\alpha\eta_{,\varphi\varphi}) - \dot{w}_{II} \alpha\eta_{,\varphi\varphi} + \dot{v}_{II} v_{II} \\
 - (\dot{w}_{II,\varphi} v_{II} + \dot{w}_{II,\varphi} \dot{v}_{II}) + \dot{w}_{II,\varphi} \dot{w}_{II,\varphi}] \\
 + \frac{1}{2} m_\varphi [(\dot{w}_{II,\varphi})^2 - 2 \dot{w}_{II,\varphi} \dot{v}_{II} + (\dot{v}_{II})^2] \\
 - \frac{1}{2ED} [(\dot{n}_x)^2 + (\dot{n}_\varphi)^2 - 2\nu \dot{n}_x \dot{n}_\varphi] \\
 - \frac{1}{ED} [\dot{n}_x (\dot{n}_x'' - \nu \dot{n}_\varphi'') + \dot{n}_\varphi (\dot{n}_\varphi'' - \nu \dot{n}_x'')] \\
 + \frac{EB}{2(1-\nu^2)} [\dot{w}_{II,\varphi\varphi} - \dot{v}_{II,\varphi}]^2 \\
 + [\dot{w}_{II,\varphi\varphi} - \dot{v}_{II,\varphi}] \dot{n}_\varphi'' l \\
 + l \left\{ \dot{\rho} [1+\alpha\eta + \ddot{u} + \dot{w}_I] [\dot{w}_I + \dot{w}_{II}] \right. \\
 - \dot{\rho} [\dot{w}_{II,\varphi} - v_{II}] \dot{v}_{II} \\
 + \frac{1}{2} \rho [(\dot{w}_I)^2 + 2 \dot{w}_I \dot{w}_{II} + (\dot{w}_{II})^2 + (\dot{v}_{II})^2] \\
 \left. + \rho [\dot{w}_I + \dot{w}_{II}] [\ddot{u} + v_{II,\varphi}] \right\} \} (l)^2 d\varphi \\
 + 2\pi (l)^3 \dot{\rho} \ddot{u} \bar{x}
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

Aus der Forderung nach dem Verschwinden der ersten Variation von Ψ_{II}^* bezüglich \ddot{u} folgt jetzt die integrale Bedingung

$$\int_0^{2\pi} \dot{n}_x d\varphi = -\rho l \int_0^{2\pi} \dot{w}_I d\varphi + \frac{1}{2\bar{x}(l)^2} \frac{\partial \bar{\pi}_c}{\partial \ddot{u}}.$$

Da bei der Berechnung von $\bar{\pi}_c$ der Einfluß der Dehnung der Mittelfläche vernachlässigt worden war, bleibt auf der rechten Seite auch hier konsequenterweise der erste Term unberücksichtigt, so daß

$$\int_0^{2\pi} \dot{n}_x d\varphi = 2\pi \dot{\bar{n}}_0 = -\pi l \dot{\rho} \quad (6.60)$$

wird.

Wird (6.59) bezüglich \dot{w}_I variiert, dann erhält man aus der Bedingung

$$\frac{\partial \Psi_{II}^*}{\partial \dot{w}_I} = 0$$

nach Integration um den Umfang die Gleichung

$$\dot{n}_\varphi(t) = -\dot{\rho} l [1 + \bar{u} + w_I] - \rho l [\ddot{u} + \dot{w}_I],$$

so daß sich mit den Anfangsbedingungen $\rho=0$, $w_I=0$, $\bar{u}=0$ daraus

$$n_\varphi(t) = -\rho l [1 + w_I + \bar{u}]$$

ergibt. Die mittlere Dehnung der Mittelfläche ($w_I + \bar{u}$) kann im Vergleich zu eins vernachlässigt werden, so daß man das triviale Ergebnis

$$n_\varphi(t) = -\rho l \quad (6.61)$$

erhält. Schließlich liefert die Forderung des Verschwindens der ersten Variation von Ψ^* bezüglich \dot{n}_φ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{w}_I = & \frac{1}{Eh} \dot{n}_\varphi - \frac{\nu}{Eh} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{n}_x d\varphi + \frac{1}{Eh} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dot{n}_\varphi'' - \nu \dot{n}_x'') d\varphi \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\dot{w}_I \alpha \varrho_{\varphi\varphi} + \dot{v}_I v_{II} - (\dot{w}_{I,\varphi} v_{II} + w_{II,\varphi} \dot{v}_I) - \dot{w}_{I,\varphi} w_{II,\varphi} \right\} d\varphi. \end{aligned}$$

Da, wie schon in Abschn. (6.3) gezeigt wurde, w_I keinen Einfluß auf die Ovalitätsänderung, d.h. auf w_{II} und v_{II} hat, kann man hier die quadratisch kleinen Terme $\dot{w}_I \alpha$, $\dot{v}_I v_{II}$ etc. vernachlässigen, so daß man mit (6.60) und (6.61)

$$\dot{w}_I = -\dot{\rho} \frac{l(1-\nu/2)}{Eh} + \frac{1}{Eh} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\dot{n}_\varphi'' - \nu \dot{n}_x'') d\varphi \quad (6.62)$$

erhält.

Das Funktional (6.59) läßt sich jetzt unter Beachtung von (6.52), (6.60) und (6.61) und mit Hilfe partieller Integration in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{II}^* = 4\bar{x}(l)^2 \int_0^{\bar{\pi}} & \left\{ -\dot{p}l [-\dot{w}_{II} \alpha(\eta_{,\varphi\varphi} + \eta) + \dot{w}_{II,\varphi} w_{II,\varphi} + \dot{w}_{II} w_{II}] \right. \\
 & + p l \frac{1}{2} [(\dot{w}_{II})^2 - (\dot{w}_{II,\varphi})^2] \\
 & + \frac{EB}{2(1-\nu^2)} [(\dot{w}_{II})^2 - 2(\dot{w}_{II,\varphi})^2 + (\dot{w}_{II,\varphi\varphi})^2] \\
 & + [\dot{w}_{II,\varphi\varphi} + \dot{w}_{II}] \dot{m}_\varphi l \\
 & \left. - \frac{1}{2Eh} [(\dot{m}_x)^2 + 2\nu \dot{m}_x \dot{p}l - 2\dot{m}_x (\dot{m}_x'' - \nu \dot{m}_\varphi'')] \right\} d\varphi \\
 & + (\Psi_{II}^*)_R
 \end{aligned} \tag{6.63}$$

Bei der Festlegung der Integrationsgrenze wurde berücksichtigt, daß mindestens eine Symmetrieachse ($\varphi=0$) vorhanden ist.

$(\Psi_{II}^*)_R$ enthält alle Terme von (6.59), in denen nicht \dot{w}_{II} , \dot{w}_{II} bzw. deren Gradienten oder \dot{m}_x auftreten. Der erste Term von (6.59) ist wegen (6.60) darin auch enthalten. Die gemischten Produkte wie $\ddot{u} \dot{w}_{II}$ und $\dot{w}_x \dot{w}_{II}$ können wegen (6.53) fortgelassen werden.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Form von (6.63) auch geeignet ist für die Anwendung der Methode der Finiten Elemente, da eine Vielzahl der Ausdrücke in \dot{w}_{II} und seinen Gradienten nur quadratisch sind.

Mit den Reihen (6.53) und (6.56) und unter Beachtung von (6.60) kann die Integration über die Mittellinie durchgeführt werden. Aus der Forderung nach dem Verschwinden der ersten Variation von Ψ_{II}^* bei unabhängiger Variation von \dot{w}_k ($k=2, 3, \dots, K_F$) und \dot{m}_k ($k=1, 2, 3, \dots, K_F$) ergibt sich dann das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \Psi_{II}^*}{\partial \dot{w}_k} = 0, \quad k=2, 3, \dots, K_F, \quad \frac{\partial \Psi_{II}^*}{\partial \dot{m}_k} = 0, \quad k=1, 2, 3, \dots, K_F$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_{k(t)} = \frac{1}{1-p/\bar{p}_k} \left\{ \frac{\dot{p}}{\bar{p}_k} [\tilde{w}_k + \alpha \tilde{\eta}_k] + \frac{2}{\bar{p}_k \bar{\pi}} \int_0^{\bar{\pi}} \cos k\varphi \dot{m}_\varphi'' d\varphi \right\} \\
 k=2, 3, \dots, K_F
 \end{aligned} \tag{6.64}$$

$$\dot{m}_{k(t)} = -\frac{2}{\bar{\pi}} \int_0^{\bar{\pi}} \cos k\varphi [\dot{m}_x'' - \nu \dot{m}_\varphi''] d\varphi, \quad k=1, 2, \dots, K_F, \tag{6.65}$$

wobei

$$\tilde{\eta}_k = \frac{-2}{\pi(k^2-1)} \int_0^{\pi} \cos k\varphi [\eta_{,\varphi\varphi} + \eta] d\varphi \quad (6.66)$$

$$\bar{p}_k = \frac{E\beta}{l(1-\nu^2)} (k^2-1) = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{l}\right)^3 \frac{(k^2-1)}{12}$$

Die Größen \bar{p}_k ($k = 2, 3, \dots, k_F$) sind die elastischen Beuldrücke des Hüllrohrs. Bei unbehinderter thermischer Krümmung der Brennstabachse muß wegen (6.44)

$$\dot{\tilde{n}}_1 \equiv 0 \quad (6.67)$$

gesetzt werden. Mit (4.67) ergeben sich die zeitlichen Änderungen der axialen und tangentialen Normalspannungen $\dot{s}_x, \dot{s}_\varphi$ zu

$$\begin{aligned} \dot{s}_x(\varphi, \theta, t) &= \frac{1}{h} [\dot{n}_x + \dot{n}_x''] + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{h}{l} \theta \dot{\omega}_\varphi - \\ &\quad - \frac{E}{1-\nu^2} [\dot{e}_x'' + \nu \dot{e}_\varphi''] = \dot{s}_1^1 \end{aligned} \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_\varphi(\varphi, \theta, t) &= \frac{1}{h} [-\dot{p}l + \dot{n}_\varphi''] + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h}{l} \theta \dot{\omega}_\varphi - \\ &\quad - \frac{E}{1-\nu^2} [\dot{e}_\varphi'' + \nu \dot{e}_x''] = \dot{s}_2^2, \end{aligned}$$

wobei unter Beachtung von (4.39)

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_\varphi &= \dot{\omega}_2^2 = \sum_{k=2,3}^{k_F} \dot{\tilde{\omega}}_k [k^2-1] \cos k\varphi \\ \dot{n}_x' &= \dot{n}_1^1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\dot{e}_x'' + \nu \dot{e}_\varphi'') d\theta \\ \dot{n}_\varphi'' &= \dot{n}_2^2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\dot{e}_\varphi'' + \nu \dot{e}_x'') d\theta \\ \dot{m}_\varphi'' &= \dot{m}_2^2 \frac{1}{l} = \left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\dot{e}_\varphi'' + \nu \dot{e}_x'') \theta d\theta \\ \dot{n}_x &= \dot{n}_1^1 = -\frac{\dot{p}l}{2} + \dot{\tilde{n}}_1 \cos \varphi + \sum_{k=2,3}^{k_F} \dot{\tilde{n}}_k \cos k\varphi \end{aligned} \quad (6.69)$$

ist. Falls Schwellen nicht berücksichtigt wird und das Kriechen allein durch die Invariantentheorie von Odqvist beschrieben wird, dann haben die nichtelastischen Verzerrungsraten die folgende Formen

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}''_x &= \dot{\epsilon}''_1 = V_{AR} \left[s_x - \frac{1}{2} s_\varphi \right] + \beta \dot{T} \\ \dot{\epsilon}''_\varphi &= \dot{\epsilon}''_2 = V_{AR} \left[s_\varphi - \frac{1}{2} s_x \right] + \beta \dot{T} \\ V_{AR} &= K(T) \left[(s_x)^2 + (s_\varphi)^2 - s_x s_\varphi \right]^{\frac{n(T)-1}{2}} \end{aligned} \quad (6.70)$$

Die Kriechparameter K und n sind Funktionen der Temperatur T .

Die Gleichungen (6.68) zusammen mit (6.62), (6.64) und (6.65) bilden ein System von Integro-Differentialgleichungen.

Für

$$P(t=0) = 0, \quad T(t=0) = 0$$

lauten die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} w_I &= 0 \\ \tilde{w}_k &= 0, \quad k = 2, 3, \dots, k_F; \quad \tilde{n}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, k_F \\ s_x &= 0, \quad s_\varphi = 0. \end{aligned}$$

Bei momentaner Belastung durch den Druck und die Temperatur

$$\begin{aligned} P(t=0) &= P(0) \\ T(t=0) &= T(0) \end{aligned}$$

berechnet man leicht die neuen Anfangswerte zu

$$\begin{aligned} [w_I]_{t=0} &= -\rho l \frac{1-\nu/2}{E} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\bar{\pi}} \beta [T_m(\varphi)]_{t=0} d\varphi \\ [\tilde{w}_k]_{t=0} &= \frac{1}{1 - P(0)/\bar{p}_k} \left\{ \frac{P(0)}{\bar{p}_k} \alpha \tilde{n}_k - \frac{2E\beta}{\bar{p}_k 12(1-\nu^2)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\bar{\pi}} \cos k\varphi [\Delta T(\varphi)]_{t=0} d\varphi \right\}, \\ & \quad k = 2, 3, \dots, k_F \end{aligned} \quad (6.71)$$

$$[\tilde{n}_k]_{t=0} = -E\beta h \frac{2}{\pi} \int_0^{\bar{\pi}} \cos k\varphi [T_m(\varphi)]_{t=0} d\varphi, \quad k = 1, 2, \dots, k_F$$

$$\begin{aligned}
 [S_x]_{t=0} &= - \frac{P_{(0)} l}{2h} - E/\beta [T_m(\varphi) - T_{m0}]_{t=0} \\
 &+ \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{h}{l} \Theta \sum_{k=2,3}^{K_F} [\tilde{w}_k]_{t=0} (k^2-1) \cos k\varphi \\
 &- \frac{E\beta}{1-\nu^2} \Theta [\Delta T(\varphi)]_{t=0}
 \end{aligned} \tag{6.71}$$

$$\begin{aligned}
 [S_\varphi]_{t=0} &= - \frac{P_{(0)} l}{h} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h}{l} \Theta \sum_{k=2,3}^{K_F} [\tilde{w}_k]_{t=0} (k^2-1) \cos k\varphi \\
 &- \frac{E\beta}{1-\nu^2} \Theta [\Delta T(\varphi)]_{t=0} .
 \end{aligned}$$

6.4.2 Numerische Lösung

Das System von Integro-Differentialgleichungen (6.62), (6.64), (6.65) und (6.68) wurde approximativ gelöst, indem die axialen und tangentialen Spannungen nur an den Knotenpunkten eines über die Hüllrohrfläche gelegten Maschennetzes (Abb. 6) berechnet wurden. Dann stellen diese Gleichungen ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung dar. Für die numerische Integration wurde das Programmsystem DYSYS (Dynamic System Simulator [63_7]) verwendet, das erlaubt, Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung mit bis zu 500 abhängigen Veränderlichen zu behandeln. Die Integration im Zeitbereich wird hier mit dem Runge-Kutta-Verfahren durchgeführt. Parallel dazu wird eine Extrapolation mit Hilfe Hermite-scher Polynome durchgeführt. Anhand der Abweichung dieser beiden Ergebnisse wird die relative Genauigkeit geprüft und die Integrationsschrittweite angepaßt [63_7].

Die Zahl der Knotenpunkte in azimuthaler Richtung wurde auf maximal $J_F = 25$ und in radialer Richtung auf maximal $I_F = 7$ festgelegt. Damit bilden die Gleichungen (6.62), (6.64), (6.65) und (6.68) ein System von maximal $(350 + 2 \cdot K_F)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen. Darüber hinaus sind eine Reihe weitere Größen wie Kriechdehnungen, Vergleichsdehnungen, Tangential-

und Normalverschiebungen von Interesse, so daß die Gesamtzahl der abhängigen Veränderlichen die Möglichkeiten von DYSYS weitgehend ausschöpft. Die erforderlichen Integrationen der nichtelastischen Verzerrungsraten über die Intervalle $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$ bzw. $\pi/2$ (Einfachsymmetrie bzw. Doppelsymmetrie) wurden mit Hilfe der Simpson-Regel durchgeführt. Da die maximale Intervallzahl in azimuthaler Richtung auf 24 beschränkt ist, wurde K_F auf maximal 10 begrenzt. Bei Doppelsymmetrie ist dann der Fehler bei der Integration von $\cos 10\varphi$ im Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi/20$ kleiner als 1 o/o. Sämtliche Gleichungen einschließlich verschiedener Interpolationsformeln für die Kriechparameter und der Routine für die Simpson-Integration wurden in Fortran IV programmiert und in einer Subroutine mit dem Namen COCO (Collapse-Code) zusammengefaßt.

Eine Reihe von Testrechnungen ergab, daß die Maximalwerte $I_F = 7$, $J_F = 25$ und $K_F = 10$ für die praktisch interessierenden Temperaturverteilungen ausreichend sind, um konvergierende Kollapszeiten und Deformationsverläufe zu bekommen. Die Kriechkollapszeit wird hier rechnerisch als diejenige Zeit definiert, bei der die ungleichförmige Normalverschiebung w_x am Hauptscheitel ($\varphi = 0$) den Wert 0,2, d.h. 20 o/o vom mittleren Radius erreicht. Diese Zeit ist wegen des sehr starken Anstiegs der Deformationen praktisch identisch mit dem asymptotischen Wert t_c .

6.5 Beispiele

6.5.1 Vergleiche mit der Theorie von Hoff, Jahsman und Nachbar [55]

Die Differentialgleichung von Hoff et al. (5.2) wurde mit Hilfe des Programmsystems DYSYS numerisch integriert. Die Daten, die dem Vergleich zugrunde gelegt wurden, sind in Tabelle 1 zusammengefaßt.

Da die Theorie von Hoff et al. erlaubt, nur ganzzahlige Kriechexponenten zu verwenden, wurde der Exponent auf 6.0 abgerundet und K so korrigiert, daß die mittlere Kriechgeschwindigkeit gleich bleibt:

$$K_{KORR} |S|^{6.0} = K |S|^{6.1}$$

Die Spannung S wurde hier gleich der mittleren Umfangsspannung $p\ell/h$ gesetzt. Die Sandwichabmessungen wurden nach Hoff et al. (S. 53) berechnet.

In Abb. 7 ist die Kriechkollapszeit t_c als Funktion des Druckes p für eine Anfangsovalität $\alpha = 0.001225$ ($\alpha \ell = 4 \mu\text{m}$) aufgetragen. Man erkennt, daß im gesamten Druckbereich die Berücksichtigung der elastischen Verzerrungen zu

einer Verringerung der Kriechkollapszeit führen, die besonders bei hohen Drücken ausgeprägter wird. Für $\rho = 170 \text{ kp/cm}^2$ beträgt der Unterschied zur Theorie von Hoff et al. etwa 25 o/o. Dieser Wert entspricht den in Abschn. 6.3 gemachten Abschätzungen und zeigt, daß der maßgebende Unterschied durch den Faktor $1/(1 - \rho/\bar{\rho}_2)$ erzeugt wird. Dieses Resultat steht im Gegensatz zu den Angaben von Glückler et al. [59]. Danach ist die Kollapszeit nach der Theorie von Hoff et al. [55] um einen Faktor 2 - 3 größer als die Kollapszeit nach Ellington [56], bei der die elastischen Verzerrungen berücksichtigt werden. Ein solches Ergebnis ist aber nur dann zu erwarten, wenn der äußere Überdruck mehr als die Hälfte des elastischen Beuldruckes $\bar{\rho}_2$ beträgt.

In Abb. 8 wird die Abhängigkeit der Kriechkollapszeit τ_c von der Anfangsovalität α bei konstantem Druck von 100 kp/cm^2 gezeigt. Der Kriechexponent n wurde hier zu $n = 5.0$ gewählt, da dann die Hoff'sche Theorie auch für Werte $n > 1$ gültig ist und die oben erwähnte Korrektur der Kriechparameter nicht nötig wird. Man sieht, daß die Kriechkollapszeit für kleine Anfangsovalitäten $\alpha < 1/\mu\text{m}$ sehr stark von α abhängt, während bei großen Anfangsovalitäten dieser Einfluß wesentlich schwächer wird. Auch hier zeigt sich, daß die Vergrößerung der Deformationsgeschwindigkeit und der Anfangsovalität infolge des elastischen Materialverhaltens nur eine geringe Verringerung der Kollapszeit erzeugt.

Hier sei angefügt, daß Kaupa [65] das Kriechkollapsverhalten von Brennstabhüllrohren bei einem isothermen Temperaturfeld und konstantem Druck experimentell untersucht hat und Vergleiche mit der Theorie von Hoff et al. [55] durchgeführt hat. Für die Werkstoffe, bei denen keine metallurgischen Veränderungen (wie z. B. Ausscheidungen) auftraten, stimmten die experimentellen und theoretischen Kollapszeiten gut überein. U. a. ist diese Tatsache auch deshalb von Interesse, weil dadurch die Brauchbarkeit der Invariantentheorie von Odqvist (Nortonsches Gesetz im einachsigen Spannungszustand) nicht nur für zeitliche konstante Spannungen sondern auch für monoton veränderliche Spannungen deutlich gemacht wird. Leider bestanden experimentelle Schwierigkeiten bei der Ermittlung des zeitlichen Deformationsverlaufs, so daß hier also noch keine Überprüfung der Theorie möglich ist.

6.5.2 Rotationssymmetrisches Temperaturfeld

In sämtlichen weiteren Rechnungen wurden die in Tabelle 2 angegebenen Abmessungen und Belastungen benutzt; sie entsprechen in etwa den Werten für einen Gasbrüter. Wenngleich auch der Einsatz von Inconel 625 als Hüllwerk-

stoff fraglich ist, da die Zeitstandfestigkeit und Duktilität infolge der Bestrahlung stark herabgesetzt werden [66], wurde dieser Werkstoff (im warm-fertiggewalzten Zustand) den Rechenbeispielen zugrunde gelegt, da die Temperaturabhängigkeit der Nortonschen Kriechparameter im Bereich 650 - 800 ° C bekannt ist [67]. An Abb. 9 ist die Temperaturabhängigkeit angegeben. Es ist erkennbar, daß der Parameter K durch eine Beziehung der Form

$$\log_{10} K = \tilde{A} - \tilde{B} \frac{1}{T} \quad (T \text{ in } ^\circ\text{K})$$

und der Parameter n durch

$$n = \tilde{\tilde{A}} + \tilde{\tilde{B}} \frac{1}{T} \quad (T \text{ in } ^\circ\text{K})$$

interpoliert werden kann. Für die Rechnung wurde nur der Bereich zwischen 650 und 750 ° C in Betracht gezogen. Die eingezeichneten Interpolationsgeraden wurden verwendet. Sie führen zu Ergebnissen, die auf der "sicheren Seite" liegen.

Im folgenden werden einige Parametereinflüsse untersucht. Der sehr wesentliche Einfluß des äußeren Überdruckes ist für ein isothermes Temperaturfeld unmittelbar aus (6.39) ablesbar und der Einfluß der Abmessungen ist mit Hilfe der Theorie von Hoff et al. an anderer Stelle diskutiert worden [58]. Daher wird hier auf diese Effekte nicht weiter eingegangen.

Einfluß der Form der Anfangsabweichung $\eta(\varphi)$ auf die Kriechkollapszeit

Für eine isotherme Temperaturverteilung ($T = 700$ ° C) und eine maximale Abweichung von $\alpha = 5.435 \cdot 10^{-3}$ ($l\alpha = 20$ µm) gibt die folgende Tabelle Aufschluß über den Einfluß der Mittelflächengeometrie auf die Kriechkollapszeit t_c :

$\eta(\varphi)$	t_c [h]
$\cos 2\varphi$	4100
$\cos 3\varphi$	14550
$\cos 4\varphi$	29460

Die Werte für $\eta = \cos 3\varphi$ und $\cos 4\varphi$ wurden in der Weise errechnet, indem alle Deformationsmodi \tilde{w}_k bis auf \tilde{w}_3 bzw. \tilde{w}_4 identisch null gesetzt wurden; dasselbe wurde für \tilde{n}_k durchgeführt. Bei Mitnahme aller Glieder \tilde{w}_2 bis \tilde{w}_0 zeigte sich, daß infolge der nun einmal beschränkten Integrationsgenauigkeit der Deformationsmodus \tilde{w}_2 in der Kollapsphase

dominierend wurde. Die Kollapszeit verminderte sich dadurch etwas, so daß beispielsweise für $\eta = \cos 3\varphi$ anstelle von 144550 h eine Zeit von 13890 h errechnet wurde.

Da das quasi-elliptische Hüllrohr ($\eta = \cos 2\varphi$) die niedrigsten Kollapszeiten hat und da detaillierte Kenntnisse über die Form der Anfangsabweichungen nicht verfügbar sind, wird die quasi-elliptische Form der Mittelfläche ($\eta = \cos 2\varphi$) allen weiteren Rechnungen zugrunde gelegt.

Einfluß der Kriechparameter auf die Kollapszeit

Für ein isothermes Temperaturfeld läßt sich der Einfluß des Kriechparameters K auf die Kollapszeit sofort aus (6.41) ablesen:

$$t_c \sim \frac{1}{K} .$$

Dies folgt auch unmittelbar aus einer Dimensionsanalyse. Dagegen ist der Einfluß des Exponenten n weniger überschaubar. Abb. 10 zeigt die Kollapszeit als Funktion des Exponenten n . Der lineare Verlauf weist darauf hin, daß der Term $(pe/h)^n$ hier maßgebend ist. Allerdings ist $t_c (pe/h)^n$ nicht etwa konstant, sondern nimmt mit wachsendem n ab. Wesentlich ist, daß eine geringe Änderung von n einen bedeutenden Einfluß auf die Kollapszeit haben kann. So ergibt in diesem Beispiel eine Vergrößerung des Kriechexponenten n um 10 o/o von $n=5.0$ auf 5.5 eine Verminderung der Kollapszeit um 64 o/o.

Einfluß eines am Umfang konstanten, radialen Wärmeflusses

Sind Temperaturgradienten im Hüllrohr vorhanden, dann überlagern sich zwei Effekte: die Änderung der Spannungen infolge der zunehmenden Ovalität (bei äußerem Überdruck) und der Abbau der Wärmespannungen infolge Kriechen. Leider standen keine experimentellen Ergebnisse zur Verfügung, um zu überprüfen, wie gut die reine Spannungsrelaxation durch Kriechen mit dem sekundären Kriechgesetz nach Norton (bzw. die Verallgemeinerung von Odqvist für den mehrachsigen Spannungszustand) beschrieben werden kann. Daher muß insbesondere in dieser Hinsicht das Kriechgesetz als hypothetisch angesehen werden. Es ist allerdings zu vermuten, daß hier das primäre Kriechen eine wichtige Rolle spielt.

Zunächst läßt sich aus Abb. 11 die Verminderung der Kriechkollapszeit t_c durch die gleichförmige radiale Temperaturdifferenz ΔT entnehmen, wie in Abschn. 6.3 erwähnt wurde. Die Verringerung der Kollapszeit ist allerdings gering; so beträgt sie bei $\Delta T = 40^\circ \text{C}$ (entsprechend einer Stableistung von

etwa 495 W/cm) nur 9 o/o. Mehrere Rechnungen unter Vernachlässigung der Wärmespannungen (d.h. $\beta \equiv 0$) ergaben dieselbe Kollapszeit wie für den Fall $\Delta T = 0$. Daraus ist zu schließen, daß in diesem Beispiel nur Wärmespannungen zu einer Verminderung der Kollapszeit beitragen. Dies ist plausibel, da der Kriechparameter K mit der Temperatur zunimmt während dagegen der Kriechexponent n abnimmt, so daß sich ihre Einflüsse zumindest zum Teil wieder aufheben können.

In Abb. 13 ist die Normalverschiebung w_{II} am Hauptscheitel ($\varphi = 0$) ohne den Schrumpfungsanteil w_x als Funktion der Zeit t aufgetragen, u.z. für $\Delta T = 0$ und $\Delta T = 30$ °C. Man erkennt für den Fall $\Delta T = 30$ °C eine kurze Anlaufphase und sieht, daß die relative Abweichung zwischen beiden Kurven nur bei kleinen Zeiten groß ist.

Die maximale plastische Vergleichsdehnung

$$e_v = \int_0^t \left[\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_i \dot{\epsilon}_i \right]^{1/2} dt = \sqrt{\frac{4}{3}} \int_0^t \left[(\dot{\epsilon}_x)^2 + (\dot{\epsilon}_\varphi)^2 + \dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_\varphi \right]^{1/2} dt$$

tritt bei Wärmedurchgang an der Innenseite der Hauptscheitel ($\varphi = 0, \pi/2$, $\Theta = -1/2$) auf. Ihr zeitlicher Verlauf ist in Abb. 14 für eine Reihe von Sonderfällen wiedergegeben. Man erkennt, daß die behinderten Wärmedehnungen maßgebend für die Anlaufvorgänge sind. Durch den Abbau der Wärmespannungen infolge Kriechen werden vorgegebene Grenzwerte der plastischen Vergleichsdehnung in erheblich kürzerer Zeit erreicht als vergleichsweise beim isothermen Temperaturfeld ($\Delta T = 0$) (vergl. Abb. 11). Diese Tatsache ist aber von geringer Bedeutung, da die verwendeten Werkstoffe zumindest am Anfang der Einsatzzeit noch eine hinreichend große Duktilität besitzen. Allerdings spielen die plastischen Verzerrungen infolge einer Temperaturwechselbelastung, die hier nicht betrachtet wird, eine wesentliche Rolle (siehe S. 92).

Aus Abb. 11 entnimmt man, daß Kriechdehnungen größer als 1 o/o erst kurz vor Erreichen der Kollapszeit auftreten. Sind die zulässigen Dehnungen größer als 1 o/o, dann folgt daraus, daß die Forderung des Nichtüberschreitens der zulässigen Dehnung hier praktisch nicht die "Lebensdauer" begrenzt; die Kollapszeit stellt dann eine hinreichend genaue Abschätzung für die "Lebensdauer" dar.

Eine Vorstellung von der nichtlinearen Verteilung der Kriechdehnungen in Umfangsrichtung bei einer Temperaturdifferenz von $\Delta T = 30$ °C gibt Abb. 15. Die große Kriechdehnungsrate auf der Innenseite beruht auf der dort herr-

schenden höheren Spannung; sie wird außerdem in komplexer Weise durch die Temperaturabhängigkeit der Kriechparameter beeinflusst. Bei einem isothermen Temperaturfeld besteht ein qualitativ ähnlicher Verlauf, d. h. eine nahezu lineare Verteilung auf der Innenseite und eine Krümmung der Kurve auf der Außenseite.

In Abb. 16 ist der zeitliche Verlauf der Umfangsspannungen an der Innen- und Außenseite des Hauptscheitels ($\varphi = 0$) dargestellt. Zunächst gibt der Spannungsverlauf für ein perfekt kreisförmiges Hüllrohr ($\alpha = 0.0$) unter äußerem Überdruck mit Wärmedurchgang ($\Delta T = 30^\circ \text{C}$) einen Eindruck von der Spannungsumlagerung; die unterschiedlichen asymptotischen Spannungen werden durch die Temperaturabhängigkeit der Kriechparameter verursacht. Von den beiden gegenläufigen Temperaturabhängigkeiten der Parameter K und n überwiegt hier der Einfluß von K . Bei dem Spannungsverlauf im quasi-elliptischen Hüllrohr ohne Wärmedurchgang ($\Delta T = 0.0$) fällt die betragsmäßig wesentlich größere Spannungsrate an der Außenseite auf. Dies bedeutet, daß sich an der Innenseite die elastische Dehnung nur schwach ändert, während an der Außenseite größere elastische Dehnungsänderungen auftreten. Der Grund dafür läßt sich mit gewissen Einschränkungen durch folgende vereinfachte Überlegung einsehen. Beschränkt man sich auf einen einachsigen Spannungszustand (Ring), dann lautet das Stoffgesetz (n ungerade)

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \frac{\dot{S}_\varphi}{E} + K(S_\varphi)^n,$$

wobei $\dot{\epsilon}_\varphi$ und S_φ die Dehnungsrate und die Spannung in Umfangsrichtung bedeuten. Wegen der linearen Dehnungsverteilung ist

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \dot{\alpha}_\varphi + \lambda \theta \dot{\omega}_\varphi.$$

Setzt man voraus, daß in der Hüllrohrwand nur Druckspannungen herrschen, dann läßt sich die Dehnungsrate $\dot{\epsilon}_\varphi$ an der Innen- (I) und Außenseite (A) berechnen und nach Elimination der Krümmungsrate $\dot{\omega}_\varphi$ folgt daraus

$$\frac{\dot{S}_{\varphi A} + \dot{S}_{\varphi I}}{E} = + 2 \left\{ \frac{K |S_{\varphi A}|^n + K |S_{\varphi I}|^n}{2} + \dot{\alpha}_\varphi \right\}.$$

Durch Integration des Stoffgesetzes durch die Ringwand erhält man bei zeitlich konstanter Membrankraft bzw. konstantem Druck

$$\int_{-1/2}^{1/2} \dot{\epsilon}_\varphi d\theta = \dot{\alpha}_\varphi = - \int_{-1/2}^{1/2} K |S_\varphi|^n d\theta.$$

Da am Hauptscheitel S_φ an der Innenseite betragsmäßig größer ist als an der Außenseite, ist dann, wie man sich anschaulich leicht klarmachen kann, wegen der nichtlinearen Spannungsabhängigkeit ($n > 1$) der Kriechrate der Mit-

telwert $(K|S_{\varphi A}|^n + K|S_{\varphi I}|^n)/2$ größer als $|\dot{\alpha}_{\varphi}|$. Damit ist $(\dot{S}_{\varphi A} + \dot{S}_{\varphi I}) > 0$. Infolge der zunehmenden Ovalität wird das Biegemoment größer, so daß die Druckspannung an der Innenseite zu- und an der Außenseite abnimmt. Dann ist $\dot{S}_{\varphi I} < 0$ und $\dot{S}_{\varphi A} > 0$ und unter den genannten Voraussetzungen gilt mit $(\dot{S}_{\varphi A} + \dot{S}_{\varphi I}) > 0$ die Beziehung $|\dot{S}_{\varphi A}| > |\dot{S}_{\varphi I}|$. Bei einem Doppelmembranmodell sind dagegen die Spannungsraten in den beiden Membranen betragsmäßig gleich. Schließlich ist in Abb. 16 noch der kombinierte Fall (äußerer Überdruck und Wärmedurchgang $\Delta T = 30^\circ\text{C}$) dargestellt.

Die Spannungsverteilung über die Hüllrohrwand am Hauptscheitel zeigt Abb. 17, u.z. ohne Wärmedurchgang ($\Delta T = 0^\circ\text{C}$). Auch hier ist wieder die wesentlich stärkere Spannungsänderung an der Außenseite erkennbar. Nach hinreichend langer Zeit ist die Umfangsspannung bereichsweise nahezu linear. Man erkennt, daß die Axialspannungen S_x etwa halb so groß sind wie die Umfangsspannungen S_{φ} , so daß daraus also in erster Näherung das Verschwinden der axialen Kriechdehnung folgt. Dadurch wird eine der Approximationen von Ellington [56] bestätigt. Die lineare Spannungsverteilung, wie sie der Theorie von Ellington [56] und der von Serpico [57] zugrunde liegt, ist aber selbst bei isothermem Temperaturfeld nur am Anfang eine gute Näherung. Wird der Wärmedurchgang berücksichtigt ($\Delta T > 0$), dann ist die Spannungsverteilung während der Anlaufphase wesentlich komplexer als im isothermen Fall; mit wachsender Zeit wird sie ähnlich der in Abb. 17.

6.5.3 Nichtrotationssymmetrisches Temperaturfeld

Das Verhalten der Brennstabhülle bei den beiden Temperaturverteilungen

$$T_m(\varphi) = T_{m0} \cos 6\varphi, \quad \Delta T = \Delta T_0 = \text{const.}$$

$$T_m(\varphi) = T_{m1} \cos \varphi, \quad \Delta T = \Delta T_0 = \text{const.}$$

wird im folgenden näher diskutiert. Die erste Temperaturverteilung entspricht derjenigen bei zentrischer Position eines Brennstabes in einem Bündel mit dreieckiger Stabanordnung. Die zweite Verteilung stellt sicher nur eine erste Näherung für den Einfluß einer möglichen Stabexzentrizität dar; wahrscheinlich wird eine Überlagerung der $\cos \varphi$ - und $\cos 6\varphi$ -Verteilung realistischer sein. Da aber realistische Temperaturverteilungen für diesen Fall nicht verfügbar sind, wurde die $\cos \varphi$ -Verteilung wegen ihrer Einfachheit und Überschaubarkeit zugrunde gelegt. Die radiale Temperatur-

differenz ΔT wurde als konstant angenommen. Die von Hofmann [37,68] für einen natriumgekühlten Reaktor errechneten Temperaturfelder zeigen ein qualitativ ähnliches Verhalten.

Zunächst vermittelt Abb. 18 einen Eindruck der Schwankungen der Kriechparameter K und n bei einer $\cos 6\varphi$ -Verteilung mit einer Amplitude von nur $T_{m\phi} = 10^\circ\text{C}$ und einer radialen Temperaturdifferenz $\Delta T = 30^\circ\text{C} = \text{const.}$. Man beachte, daß am Hauptscheitel ($\varphi = 0$) der Parameter K an der Innenseite etwa um den Faktor 10 größer ist als an der Außenseite.

Die errechneten Kriechkollapszeiten sind in Abb. 19 als Funktion der Amplitude der mittleren Wandtemperatur zusammengestellt. Für die Berechnung der Kollapszeit bei der $\cos\varphi$ -Temperaturverteilung wurde davon ausgegangen, daß die Brennstabachse sich nicht krümmen kann, d.h. $\tilde{r}_s \neq 0$.

Es ist auffallend, daß die Kollapszeit bei einer $\cos 6\varphi$ -Temperaturverteilung besonders bei hohen Temperaturamplituden wesentlich geringer ist als bei einer $\cos\varphi$ -Verteilung. Diese Tatsache ist verständlich, wenn man beachtet, daß die relative Anordnung des Temperaturfeldes zur Anfangsovalität für die Krümmungsänderung wichtig ist. Man muß nämlich dann große Deformationsänderungen erwarten, wenn die Scheitel des quasi-elliptischen Hüllrohrs hohe Temperaturen haben. Besonders deutlich ist dies bei einer $\cos 4\varphi$ -Verteilung der mittleren Wandtemperatur, bei der die vier Scheitel des Hüllrohrs sich auf hoher Temperatur befinden. Für eine Amplitude $T_{m\varphi} = 40^\circ\text{C}$ erhält man z.B. eine Kollapszeit von nur 680 h (Symbol Δ , Abb. 19) im Vergleich zu 1400 h bei einer $\cos 6\varphi$ -Verteilung; man beachte, daß trotz der unterschiedlichen Temperaturverteilung die über dem Umfang und die Hüllrohrwand gemittelten Kriechparameter in beiden Fällen dieselben sind. Aus diesem Vergleich folgt auch unmittelbar die Feststellung, daß eine quadratische Stab-anordnung für die "Lebensdauer" nachteiliger ist als eine dreieckige.

Ergänzend sei bemerkt, daß man aus dem Vergleich der Kurven (1) und (2) natürlich nicht folgern darf, daß die zentrische Position des Brennstabes ($\cos 6\varphi$ -Temperaturverteilung) für die Auslegung bestimmender sei als die exzentrische ($\cos\varphi$ -Temperaturverteilung), denn außer der Form der Verteilung ist die Temperaturamplitude und die mittlere Temperatur wesentlich.

Würde kein Verfahren zur Verfügung stehen, um azimutale Temperaturschwankungen rechnerisch zu berücksichtigen, dann würde man wohl das Hüllrohr als isotherm ansehen und diejenigen Kriechparameter der Rechnung zugrunde legen, die der maximalen Temperatur in der Wandmitte $(T_{m(\varphi)})_{\max}$ entsprechen (Kurve (3), Abb. 19). Natürlich liegen diese Ergebnisse im Hinblick auf die

Kollapszeit auf der "sicheren Seite". Bei einem Vergleich mit der Kurve (2) ($\cos \varphi$ -Temperaturverlauf) erkennt man, daß sich insbesondere bei hohen Temperaturamplituden die Kollapszeiten beträchtlich unterscheiden, so daß bei einer Auslegung entsprechend der Kurve (3) die Tragfähigkeit des Hüllrohrs nicht voll ausgenützt wird.

Aus Abb. 19 entnimmt man fernerhin, daß die Wärmespannungen auch bei einem nichtrotationssymmetrischen Temperaturfeld nur einen geringen Einfluß auf die Kollapszeit haben. Dies zeigen die durch das Symbol (X) gekennzeichneten Werte. Daraus folgt dann auch, daß es im Hinblick auf die Kollapszeit praktisch keinen Unterschied macht, ob sich bei einer $\cos \varphi$ -Temperaturverteilung die Brennstabachse thermisch krümmen kann ($\tilde{\alpha}_1 = 0$) oder nicht. Dies wurde auch durch eine Nachrechnung bestätigt.

Wie schon bei der rotationssymmetrischen Temperaturverteilung bemerkt, führen aber die behinderten Wärmedehnungen zu einem anfangs schnellen Anwachsen der Kriechdehnungen. Einen Eindruck davon gibt Abb. 12 ($\cos 6 \varphi$ -Temperaturverteilung). In diesem Beispiel treten plastische Dehnungen (Stauchungen), die größer als 2 o/o sind erst kurz vor Erreichen der Kollapszeit auf. Daher begrenzen zulässige Dehnungen, die größer als 2 o/o sind hier praktisch nicht die Lebensdauer.

Abschließend ist in Abb. 20 das Verschiebungsfeld nach 1017 h (Kollapszeit 2190 h) bei einer $\cos \varphi$ -Verteilung der mittleren Wandtemperatur ($T_{m,1} = 40^\circ \text{C}$) dargestellt. Man erkennt sehr deutlich den kleineren Krümmungsradius des Hüllrohrs auf der heißen Seite.

6.6 Zusammenfassung der Ergebnisse

- a) Mit Hilfe eines verallgemeinerten Variationsprinzips für nichtelastische, viskose Schalen bei kleinen Verzerrungen aber endlichen Rotationen wurde eine Alternative zur Theorie von Hoff et al. entwickelt. Diese Alternative ist kinematisch besser begründet, liefert aber keine wesentlich kürzeren Kollapszeiten als die Theorie von Hoff et al.
- b) Ausgehend von einem verallgemeinerten Variationsprinzip für viskose Schalen, bei denen der elastische Deformationsanteil berücksichtigt wird, wurde ein numerisches Verfahren für glatte Hüllrohre aufgestellt. Im Gegensatz zu den einfachen Kriechkollapstheorien erlaubt

diese Methode, weitgehend beliebige Kriechgesetze, Temperaturverteilungen, Wärmespannungen sowie die Nichtlinearität der Spannungsverteilung in der Hüllrohrwand zu berücksichtigen. Mit diesem Verfahren wurden eine Reihe von Rechnungen für ein quasi-elliptisches Hüllrohr durchgeführt, die zu den unten angegebenen Ergebnissen führten.

- c) Durch Vergleich mit der Theorie von Hoff et al. zeigt sich, daß elastische Verzerrungen nur einen geringen Einfluß auf die Kollapszeit haben, sofern der äußere Überdruck klein im Vergleich zum elastischen Beuldruck ist.
- d) Das Doppelmembranmodell stellt eine gute Approximation dar, sofern man nur an der Kollapszeit interessiert ist. Das bedeutet, daß die Details der Spannungsverteilung durch die Hüllrohrwand für die Berechnung der Kollapszeit nicht wesentlich sind. Jedoch können die lokalen Kriechdehnungen mit dem Doppelmembranmodell nur sehr grob erfaßt werden.
- e) Wärmespannungen führen nur zu einer unbedeutenden Verminderung der Kollapszeit.
- f) Bei den hier durchgerechneten Beispielen treten Kriechdehnungen von mehr als etwa 2 o/o erst kurz vor Erreichen der Kollapszeit auf. Sind die zulässigen Kriechdehnungen größer, dann wird die "Lebensdauer" hinreichend genau durch die Kollapszeit angegeben, sofern die Hüllrohrauslegung für einen konstanten äußeren Überdruck vorgenommen wird und Temperaturwechsel nicht betrachtet werden. Sind die zulässigen Kriechdehnungen dagegen kleiner als etwa 0,5 o/o, dann ist die zulässige Einsatzzeit merklich kürzer als die Kollapszeit, da die durch Relaxation der Wärmespannungen entstehenden Kriechdehnungen bewirken, daß derart kleine zulässige Kriechdehnungen schon in einem frühen Stadium des Beulprozesses überschritten werden.
- g) Nichtrotationssymmetrische Temperaturfelder sowohl bei zentrischer Brennstabposition wie auch bei Stabexzentrizität können sehr stark das Kollapsverhalten beeinflussen. Eine Auslegung nach der höchsten Temperatur in Wandmitte liegt zwar auf der "sicheren Seite", sie kann aber bei großen Temperaturamplituden leicht zu konservativ sein. Bei Kenntnis des Temperaturfeldes und der Temperaturabhängigkeit der Kriechparameter liefert die hier entwickelte Methode ein realistischeres Bild des Kriechkollapsverhaltens von Brennstabhüllrohren.

Anmerkungen

Zu S. 12:

Eigentlich handelt es sich hier um eine von St. Venant, Kirchhoff und anderen [32, S. 211] entwickelte Verallgemeinerung des Hookeschen Gesetzes. Gl. (2.16) folgt aus diesem Stoffgesetz [32, S. 211] durch Differenzieren nach der Zeit.

Zu S. 13:

Hier und im folgenden sollen Funktionen, deren Ableitungen bezüglich der Spannungsraten, Spannungen oder Verzerrungsraten die Verzerrungsraten, Spannungen oder Spannungsraten ergeben als "Kriechpotentiale" oder kurz "Potentiale" bezeichnet werden (vergl. (2.19), (2.22), (2.29), (2.33)).

Zu S. 35:

Bei der Definition von D und B (Gl. (4.38)) muß beachtet werden, daß bei einer Doppelmembran-Schale (Sandwichmodell) hier und im folgenden die Integrale über die Schalendicke durch Summen zu ersetzen sind. Es ist dann

$$D = 2d \quad , \quad B = \left(\frac{h_s}{l}\right)^2 \frac{d}{2} .$$

Zu S. 37, 39 u. 45:

Unter den "Potentialen" $\pi_f, \pi_c, \tilde{\pi}_f, \tilde{\pi}_c$ sollen hier skalare Funktionen verstanden werden, deren Ableitungen bezüglich der Verschiebungsraten die Belastungsraten (bzw. die Belastungen, vergl. Abschn. 4.5) entweder auf der Mittelfläche f (Index f) oder auf der Randkurve c (Index c) ergeben.

Zu S. 86:

Es ist bei diesen Betrachtungen zu beachten, daß es noch weitgehend ungeklärt ist, welches Versagenskriterium (sowohl für monotone wie auch für zyklische Verformung) maßgebend ist. So ist einmal die Frage offen, welche phänomenologische Größe (oder Größen) für die Materialschädigung verantwortlich ist; darüber hinaus ist es durchaus möglich, daß Stauchverformungen (wie an der Innenseite der Hauptscheitel) und Streckverformungen (wie an der Außenseite) eine unterschiedliche Schädigung des Werkstoffes erzeugen. Man beachte, daß die hier angegebenen maximalen Vergleichsdehnungen durch Stauchverformungen erzeugt werden und daß Stauchverformungen einen möglicherweise weniger schädigenden Einfluß haben.

Nomenklatur

- a, A : Determinante des Metriktensors der unverformten bzw. der verformten Mittelfläche einer Schale Gl. (4.2)
- $\bar{a}_\alpha, \bar{a}^\alpha$: Ko- bzw. kontravariante Basis der Mittelfläche Gl. (4.2)
- $a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}$: Fundamentalgrößen 1. Ordnung, d.h. die ko- bzw. kontravarianten Komponenten des Metriktensors der unverformten Mittelfläche Gl. (4.3)
- \bar{a}_3, \bar{A}_3 : Einheitsnormalenvektor der unverformten bzw. der verformten Mittelfläche Gl. (4.2), (4.22)
- \bar{A}_α : Basisvektoren der verformten Mittelfläche Gl. (4.17)
- A^i_j : Lagrangesche Multiplikatoren Gl. (3.11)
- A_ν : Koeffizienten Gl. (6.21)
- B : Lagrangescher Multiplikator Gl. (3.11)
- B : Bezogenes Trägheitsmoment Gl. (4.38) u. S. 92
- B_ν : Koeffizienten Gl. (5.2)
- $b_{\alpha\beta}, b^\alpha_\rho = a^{\alpha\delta} b_{\delta\rho}$: Fundamentalgrößen 2. Ordnung Gl. (4.6)
- C^m : Lagrangesche Multiplikatoren Gl. (3.11)
- D : Tragende Schalendicke Gl. (4.38) u. S. 92
- d : Dicke einer Membran des Doppelmembranmodells (Abb. 4)
- E : Elastizitätsmodul
- \bar{e}_i : Basisvektoren eines kartesischen Koordinatensystems (Abb. 3)
- $e_{ij}, e^i_j = g^{ik} e_{kj}$: Kovariante bzw. gemischte Komponenten des Lagrangeschen Verzerrungstensors Gl. (2.6)
- $\dot{e}_{ij}, \dot{e}^i_j$: Lagrangescher Verzerrungsgeschwindigkeit Gl. (2.7)
- $\dot{e}^i_j, \dot{e}''^i_j$: Elastische und nichtelastische Verzerrungsraten Gl. (2.16), (2.15)
- $\dot{e}^i_j, \dot{e}^i_{s_j}, \dot{e}^i_{T_j}$: Kriech-, Schwell- und Wärmedehnungsrate Gl. (2.15)
- \dot{e}^i_j : Deviatorische Verzerrungsrate
- f, df : Fläche und Flächenelement im unverformten Körper (Referenzsystem)

- F, dF : Fläche und Flächenelement im verformten Körper
 \vec{g}_i, \vec{g}^i : Ko- und kontravariante Basisvektoren im unverformten Körper (Referenzsystem) Gl. (2.1)
 g_{ij}, g^{ij} : Ko- und kontravariante Komponenten des Metriktensors im Referenzsystem Gl. (2.2)
 \vec{G}_i : Kovarianter Basisvektor im verformten Körper Gl. (2.4)
 G_{ij} : Kovariante Komponenten des Metriktensors im verformten Körper
 g : Determinante von g_{ij}
 G : Determinante von G_{ij}
 h : Dicke der Schale
 h_s : Abstand der Membranen des Doppelmembranmodells (Abb.4)
 I_F : Anzahl der radialen Stützstellen im Hüllrohr
 ${}_0I_{II}$: Zweite Invariante des Verzerrungsgeschwindigkeitsdeviators
 J_F : Anzahl der tangentialen Stützstellen im Hüllrohr
 ${}_0J_{II}$: Zweite Invariante des Deviators des Kirchhoffschen Spannungstensors Gl. (2.27)
 K_F : Anzahl der Glieder der Reihen (6.53), (6.54) und (6.56)
 K : Parameter im Nortonschen Kriechgesetz Gl. (2.34)
 \bar{K}, \tilde{K}_R, k : Parameter Gl. (6.11), (6.12)
 l : Charakteristische Länge z.B. minimaler Krümmungsradius der Schale
 $m^{\alpha\beta}, m^{\alpha}_{\beta} = a_{\gamma\beta} m^{\alpha\gamma}$: Kontravariante und gemischte Komponenten des Momententensors Gl. (4.36), (4.35)
 \dot{m}^{α}_{β} : Integrale über die nichtelastischen Verzerrungsraten Gl. (4.39)
 $\dot{m}^{\alpha}_x, \dot{m}^{\alpha}_\varphi$: Momente der axialen und tangentialen nichtelastischen Verzerrungsraten (physikal. Komponenten von $\dot{m}^{\alpha}_1, \dot{m}^{\alpha}_2$) Gl. (6.8)
 m_x, m_φ, m_{II} : Biegemomente Gl. (6.8), (6.17)

- \bar{m}^α : Momentenbelastung auf der Randkurve C der Schale
 n : Kriechexponent im Nortonschen Kriechgesetz Gl. (2.34)
 \bar{n}, \bar{n}, n^* : Anzahl der Glieder der Reihen (6.20), (5.2), (6.30)
 \vec{n}, n_i, n^i : Einheitsnormalenvektor insb. der äußere Normalenvektor auf der Oberfläche O im Referenzsystem und seine ko- und kontravarianten Komponenten Gl. (2.10), (2.39), (2.40)
 $n^{\alpha\rho}, n_\rho^\alpha = a_{\rho\sigma} n^{\sigma\alpha}$: Kontravariante und gemischte Komponenten des Membrankrafttensors Gl. (4.36), (4.35)
 $\dot{n}^{\alpha\beta}$: Integrale der nichtelastischen Verzerrungsraten Gl. (4.39)
 n_x, n_φ : Membrankraft in axialer und azimuthaler Richtung Gl. (6.8)
 n_I, n_{II} : Fourierkoeffizienten von n_φ , Gl. (6.17)
 \tilde{n}_k : Fourierkoeffizienten von n_x , Gl. (6.56)
 $\dot{n}''_x, \dot{n}''_\varphi$: Integrale der nichtelastischen Verzerrungsraten in axialer und azimuthaler Richtung Gl. (6.8)
 \bar{n}^α : Membrankraftbelastung auf der Randkurve C
 O, O_u, O_T : Oberfläche und Oberflächenteile im Referenzsystem (S.16)
 dO : Oberflächenelement im Referenzsystem
 p : Hydrostatischer Druck, Gl. (3.15), Äußerer Überdruck Gl. (5.2)
 \bar{p}_k : Beuldrücke einer unendlich langen, elastischen Kreis- zylinderschale Gl. (6.66)
 \bar{q}, \bar{q}^* : Querkraft und Ersatzquerkraft auf dem Rand C
 $\bar{R} \equiv l$: Mittlerer Radius des Hüllrohrs
 \vec{r}, \bar{r} : Ortsvektor eines materiellen Punktes vor bzw. nach der Verformung
 $S^{ij}, S_j^i = g_{kj} S^{ik}$: Kontravariante und gemischte Komponenten des Kirchhoff- schen Spannungstensors (Piola-Kirchhoffscher Spannungs- tensor 2. Art)
 \mathcal{S}_j^i : Gemischte Komponenten des Deviators des Kirchhoffschen Spannungstensors Gl. (2.26)
 S_x, S_φ : Kirchhoffsche Spannung in axialer und in Umfangsrich- tung (phys. Komp.)

- S_{φ}^+ , S_{φ}^- : Kirchhoffsche Spannung in der äußeren bzw. inneren Membran in Umfangsrichtung Gl. (6.13)
- t , t_c : Zeit, Kriechkollapszeit
- $T_{(\theta, \varphi, t)}$: Temperatur (im Referenzzustand ist $T = 0$)
- $T_m(\varphi, t)$: Temperatur in der Mitte der Hüllrohrwand Gl. (6.42)
- $\Delta T(\varphi, t)$: Temperaturdifferenz über die Hüllrohrwand Gl. (6.42)
- $T_{m\kappa}$: Fourierkoeffizienten von $T_m(\varphi, t)$ Gl. (4.43)
- ΔT_{κ} : Fourierkoeffizienten von $\Delta T(\varphi, t)$ Gl. (4.43)
- $\bar{\bar{T}}$: Belastungsspannung auf der Oberfläche O_r bezogen auf das verformte Flächenelement
- \bar{T} : Belastungsspannung auf der Oberfläche O_r bezogen auf das unverformte Flächenelement
- \bar{T}^{κ} : Kontravariante Komponenten von $\bar{\bar{T}}$ im Referenzsystem
- T^{κ} : Definition siehe Gl. (2.39)
- \bar{u} , u_i , u^i : Verschiebungsvektor und seine ko- und kontravarianten Komponenten bezüglich des Referenzsystems im unverformten, spannungsfreien Körper
- $\dot{\bar{u}}$, \dot{u}_i , \dot{u}^i : Vorgeschriebene Geschwindigkeit auf der Oberfläche O_u
- $u(x, t)$: Axiale Verschiebung Gl. (6.3)
- $\bar{u}(t)$: Axiale Dehnung Gl. (6.55)
- \bar{v} : Verschiebungsvektor der Mittelfläche
- v_{α} , v^{α} : Ko- u. kontravariante Komponenten der Tangentialverschiebung der Mittelfläche, Gl. (4.14)
- $v_{(\varphi, t)} \equiv v_{II(\varphi, t)}$: Verschiebung in Umfangsrichtung Gl. (6.3), (6.54)
- V , dV : Volumen und Volumenelement im Referenzsystem
- W_e , W_s : Potentiale für einen elastisch-viskosen Körper Gl.(2.23), (2.18) u. einen nichtel.-viskosen Körper Gl.(2.33), (2.30)
- \hat{W}_s , \hat{W}^* , \hat{W}^{**} : Potentiale für eine elastisch-viskose Schale Gl. (4.44), (4.65), (4.69)
- $\hat{\tilde{W}}_s$: Potentiale für eine nichtelastisch-viskose Schale Gl. (4.74)

- w : Normalverschiebung der Mittelfläche Gl. (4.14)
 w_I, w_{II} : Anteile der Normalverschiebung Gl. (6.17), (6.50)
 $\tilde{w}_k(t)$: Fourierkoeffizienten von w_I Gl. (6.53)
 w_α, w^α : Ko- und kontravariante Komponenten des Rotationsvektors der Mittelflächennormalen Gl. (4.18)
 x : Dimensionslose axiale Koordinate

 $\alpha \equiv \alpha_0$: Dimensionslose maximale Anfangsabweichung von der Mittelfläche Gl. (6.1), (5.2)
 $\alpha(t)$: Zeitabhängiges Ovalitätsmaß in der Theorie von Hoff et al.
 $\alpha_{\alpha\beta}, \alpha_\beta^\alpha = a^\alpha_\gamma \alpha_\gamma^\beta$: Kovariante und gemischte Komponenten des Verzerrungstensors der Mittelfläche Gl. (4.28)
 α_φ : Dehnung der Mittelfläche in Umfangsrichtung Gl. (6.6)
 β : Wärmeausdehnungskoeffizient
 Γ_{ik}^i : Christoffelsymbol 2. Art
 $\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$: Christoffelsymbol 2. Art bezüglich der Mittelfläche Gl. (4.5)
 δ : Variationsoperator
 $\delta_i^i, \delta_\beta^\alpha$: Einheitstensoren in einem drei-bzw. zweidimensionalen Raum
 ϵ_{ij} : Verzerrungstensor bei infinitesimalen Verschiebungen und Verschiebungsgradienten
 $\epsilon_{\alpha\beta}$: Permutationstensor Gl. (4.12)
 $\eta(\varphi)$: Form der Mittelflächenabweichung des Hüllrohrs Gl. (6.1)
 $\tilde{\eta}_k$: Definition siehe Gl. (6.66)
 θ^i : Krummlinige Koordinaten
 θ^α : Koordinaten in der Mittelfläche
 $\Theta \equiv \theta^3$: Koordinate senkrecht zur Mittelfläche
 $\lambda = h/l$: Dimensionslose Schalendicke
 λ, μ : Lamesche Konstanten Gl. (2.24)

- μ_{ρ}^{α} : Definition Gl. (4.7)
 ν : Querkontraktionszahl
 $\vec{v}, \nu_{\alpha}, \nu^{\alpha}$: Äußerer Normalenvektor in der Tangentialebene der Mittelfläche auf der Randkurve C und seine ko- und kontravarianten Komponenten (S. 38)
 dv : Bogenelement in Richtung \vec{v}
 π_f, π_c : Potential des hydrostatischen Druckes und der Randbelastung Gl. (4.51), (4.55)
 \vec{s} : Dimensionsloser Ortsvektor der Mittelfläche im Referenzzustand G. (4.1)
 σ^{ij} : Kontravariante Komponenten des klassischen Spannungstensors (bei infinitesimalen Verschiebungen und Verschiebungsgradienten)
 τ^{ij} : Kontravariante Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors
 φ : Winkel, gemessen von der gemeinsamen Symmetrieachse des Hüllrohrs und des Temperaturfeldes
 $\phi, \phi_I, \phi_{II}, \phi_{III}$: Funktionale Gl. (3.9), (3.17), (3.18), (3.19)
 χ : Ovalitätsmaß Gl. (5.2), (6.36)
 ψ, ψ_I, ψ_{II} : Funktionale Gl. (3.22), (3.24), (3.25), (4.56), (4.64), (4.68)
 ψ_I^*, ψ_{II}^{**}
 Ω : Rotation eines Mittelflächelementes um die Mittelflächenormale
 $\omega_{\alpha\beta}, \omega_{\rho}^{\alpha} = a^{\alpha\delta} \omega_{\delta\rho}$: Kontravariante und gemischte Komponenten des Tensors der Krümmungsänderungen Gl. (4.28)
 ω_{ρ} : Krümmungsänderung in Umfangsrichtung Gl. (6.7)

Besondere Zeichen

- \cdot : Der Punkt über einer Größe bedeutet materielle zeitliche Änderung
 $|$: Der vertikale Strich neben einem Tensor bedeutet kovariante Ableitung, und zwar entweder bezüglich der Metrik g_{ij} (dreidimensionaler Raum) oder bezüglich der Metrik $a_{\alpha\beta}$ (Mittelfläche)
 $,$: Das Komma bedeutet partielle Ableitung

Literatur

- [1] F.K.G. Odqvist, J. Hult: Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe, Springer-Verlag, 1962
- [2] F.K.G. Odqvist: Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture, Oxford, At the Clarendon Press, 1966
- [3] Yu.N. Rabotnov: Creep Problems in Structural Members, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam-London, 1969
- [4] H. Leipholz: Einführung in die Elastizitätstheorie, G. Braun, Karlsruhe, 1968
- [5] E. Hellinger: Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua, *Enz. math. Wiss.* 4, S. 602 - 694, 1914
- [6] E. Reissner: On a Variational Theorem in Elasticity, *J. Math. Phys.* 27, 1950, S. 90 - 95
- [7] E. Reissner: On a Variational Theorem for Finite Elastic Deformations, *J. Math. Phys.* 32, 2/3, 1953, S. 129 - 135
- [8] Hu Hai-Chang: On Some Variational Principles in the Theory of Elasticity and the Theory of Plasticity, *Scientia Sinica* 4, 1, 1955, S. 33 - 54
- [9] K. Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968
- [10] R. Courant, D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik I, Springer-Verlag, 1968
- [11] E. Trefftz: Über die Ableitung der Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichts aus der Elastizitätstheorie endlicher Deformationen, *Proc. 3rd. Int. Cong. Appl. Mech.*, 1931, S. 44 - 50
- [12] V.V. Novozhilov: Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity, Graylock Press, Rochester N.Y., 1953
- [13] A.J. Wang, W. Prager: Thermal and Creep-Effects in Work-Hardening Elastic-Plastic Solids, *J. Aeron. Sc.*, Mai 1954, S. 343 - 344 u. 360

- [14] J.L. Sanders, H.G. McComb, F.R. Schlechte: A Variational Theorem for Creep with Applications to Plates and Columns, NACA TN 4003, 1957
- [15] T.H.H. Pian: On The Variational Theorem for Creep, J. Aeron. Sc., Nov. 1957, S. 846 - 847
- [16] J.F. Besseling: A Theory of Small Deformations of Solid Bodies, Feb. 9, 1959, SUDAER No. 84, A FOSR-TN-59-605
- [17] L.M. Kachanov: siehe [3], S. 684
- [18] N.J. Hoff: Approximate Analysis of Structures in the Presence of Moderately Large Creep Deformations, Quart. Appl. Math. 12, 1, 1954, S. 49 - 55
- [19] N.J. Hoff: Stress Distribution in the Presence of Creep, aus: High Temperature Effects in Aircraft Structures, Hrsg.: N.J. Hoff, AGARDograph No. 28, Pergamon Press, 1958, S. 248 - 266
- [20] E. Reissner: Stress Strain Relations in the Theory of Thin Elastic Shells, J. Math. Phys. 31, 2, July 1952, S. 109 - 119
- [21] E. Reissner: On the Form of Variationally Derived Shell Equations, J. Appl. Mech., June 1964, S. 233 - 238
- [22] P.M. Naghdi: On a Variational Theorem in Elasticity and its Application to Shell Theory, J. Appl. Mech., Dec. 1964, S. 647 - 653
- [23] L.M. Habip: Theory of Elastic Shells in the Reference State, Ingenieur-Archiv 34, 1965, S. 228 - 237
- [24] Yu.N. Rabotnov: Axisymmetrical Creep Problems of Circular Cylindrical Shells, J. Appl. Math. Mech. 28, 1964, S. 1255 - 1263
- [25] Yu.N. Rabotnov: Creep of Shells, Proc. 11. Int. Cong. Appl. Mech. 1964, S. 414 - 419
- [26] E.I. Grigoliuk, Yu.V. Lipovtsev: Use of the Variational Principle in Stability Problems of Shells Under Creep Conditions, Mechanics of Solids 1, 1966, S. 56 - 60
- [27] E.I. Grigoliuk, Yu.V. Lipovtsev: On the Creep Buckling of Shells, Int. J. Solids Structures 5, 1969, S. 155 - 172

- [28] L.H. Donnell: A New Theory for the Buckling of Thin Cylinders Under Axial Compression and Bending, Trans. ASME 56, 1934, S. 795 - 806
- [29] J.L. Sanders: Nonlinear Theories for Thin Shells, Quart. Appl. Math. 21, 1963, S. 21 - 36
- [30] A.E. Green, W. Zerna: Theoretical Elasticity, Oxford, At the Clarendon Press, 1960
- [31] A.E. Green, J.E. Adkins: Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics, Oxford, At the Clarendon Press, 1960
- [32] A.C. Eringen: Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill, New York, 1962
- [33] L.R. Herrmann: Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Media by a Variational Theorem, AIAA 3, 10, 1965, S. 1896 - 1900
- [34] C.E. Pearson: General Theory of Elastic Stability, Quart. Appl. Math. 14, 2, 1956, S. 133 - 144
- [35] A. Pflüger: Stabilitätsprobleme der Elastostatik, Springer-Verlag, 1964
- [36] M. Fischer, H. Shimamune: Temperature Distribution and Thermal Stability in Asymmetrical Triangular Rod-Clusters, April 1969, KFK 724, EVR 4178 e
- [37] F. Hofmann: Temperaturfelder in Brennstoff, Hüllrohr und Kühlmittel in Brennelementen mit symmetrischer und asymmetrischer Bündelgeometrie, Reaktortagung 1971, Bonn
- [38] F. Erbacher, S. Malang, K. Rust: Arbeiten zur Weiterentwicklung Dampfgekühlter Schneller Brutreaktoren, Atomwirtschaft, Juli 1970, S. 331 - 334
- [39] S. Dorner, F.E. Reiß, K. Schretzmann: Druckausgleichsverschluß für Brennelemente, insbesondere für gasgekühlte Brutreaktoren, International Meeting on Fast Reactor Fuel and Fuel Elements, Karlsruhe, Sept. 28 - 30, 1970

- [40] N.J. Hoff: A Survey of the Theories of Creep Buckling,
AFOSR-TN-60-682, 1958
- [41] Yu.N. Rabotnov, S.A. Shesterikov: Creep Stability of Columns
and Plates,
J. Mech. Phys. Solids 6, 1957, S. 27 - 34
- [42] R.F. Shanley siehe [40]
- [43] R.L. Carlson: Time-Dependent Tangent Modulus Applied to Column
Creep Buckling,
J. Appl. Mech. 23, 3, Sept. 1956, S. 390
- [44] G. Gerard: Note on Creep Buckling of Columns,
J. Aeron. Sc. 19, 10, Oct. 1952, S. 714
- [45] G. Gerard: A Creep Buckling Hypothesis,
J. Aeron. Sc. 23, 9, Sept. 1956, S. 879
- [46] G. Gerard, A.C. Gilbert: A Critical Strain Approach to Creep
Buckling of Plates and Shells,
J. Aero/Space Sc. July 1958, S. 429 - 434
- [47] G. Gerard: Theory of Creep Buckling of Perfect Plates and Shells,
J. Aerospace Sc., Sept. 1962, S. 1087 - 1090
- [48] J.M. Corum: An Investigation of the Instantaneous and Creep Buck-
ling Initially Out-Of-Round Tubes Subjected to External Pressure,
ORNL-3299, 1963
- [49] D.A. Howl, B. Moore: Prediction of Creep Collapse Pressures and
Times for Nuclear Fuel Cladding,
J. British Nucl. Soc. 8, 2, April 1969, S. 103 - 108
- [50] W.E. Jahsman, F.A. Field: Comparison of Theoretical and Experi-
mental Creep-Buckling Times of Initially Straight Centrally
Loaded Columns,
J. Aerospace Sc., April 1962, S. 431 - 467
- [51] E. Sundström: Creep Buckling of Cylindrical Shells,
Trans. Roy. Inst. Techn., Stockholm, Sweden, Nr. 115, 1957, S.1-31
- [52] Thein Wah, R.K. Gregory: Creep Collapse of Long Cylindrical
Shells Under High Temperature and External Pressure,
J. Aerospace Sc. 28, 3, March 1961, S. 177 - 188

- [53] E.Z. Stowell, Thein Wah: A Unified Theory for Creep Buckling Under Normal Loads,
J. Aerospace Sc., June 1962, S. 658 - 661
- [54] E.Z. Stowell, E.M. Briggs: Effect of Transient Creep on the Collapse Time of Cylinders and Cones Under External Pressure,
AIAA Journal 1, 11, Nov. 1963, S. 2663 - 2664
- [55] N.J. Hoff, W.E. Jahsman, W. Nachbar: A Study of Creep Collapse of a Long Circular Cylindrical Shell Under Uniform External Pressure,
J. Aerospace Sc., Oct. 1959, S. 663 - 669
- [56] J.P. Ellington: Creep Collapse of Tubes Under External Pressure,
DEG Report 162 (R), 1960
- [57] J.C. Serpico: A Study of Creep Collapse of a Long Circular Cylindrical Shell Under Various Distributed Force Systems,
J. Aerospace Sc., Nov. 1962, S. 1316 - 1323
- [58] G. Schmidt: Hüllrohr-Festigkeitsprobleme beim Dampfgekühlten Schnellen Brüter,
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Externer Bericht Nr. 8/66 - 7,
Okt. 1966
- [59] E. Glückler, E. Passig, J. Höchel: Kriechbeulen von Brennelement-Hüllrohren,
Nucl. Eng. Design 7, 1968, S. 236 - 248
- [60] C.R. Kennedy, W.O. Harms, D.A. Douglas: Multiaxial Creep Studies on Inconel at 1500 F,
Trans. ASME, J. Basic Eng., Dec. 1959, S. 599 - 609
- [61] K.D. Cloß, L. Schäfer: Untersuchungen über das Zeitstandverhalten von Hüllrohrproben mit und ohne Bestrahlung,
Int. Meeting on Fast Reactor Fuel and Fuel Elements, Karlsruhe, Sept. 28 - 30, 1970
- [62] J.N. Goodier: Thermal Stress in Long Cylindrical Shells due to Temperature Variation Round the Circumference and Through the Wall,
Canadian Jour. of Research 15, Sec. A., No 4, April 1937, S.49-58
- [63] E.G. Schlechtendahl: DYSYS - A Dynamic System Simulator for Continuous and Discrete Changes of State,
Juli 1970, KFK 1209

- [64] H. Kaupa: Persönliche Mitteilung, Institut für Material- und Festkörperforschung, Kernforschungszentrum Karlsruhe
- [65] H. Kaupa: Experimentelle Untersuchung des Kriechbeulverhaltens dünnwandiger Rohre aus hochwarmfesten Werkstoffen, Feb. 1971, KFK 1363
- [66] H. Hauk: Bestrahlungsverhalten von Nickellegierungen, aus: Hüllwerkstoffe für Schnelle Brutreaktoren, Juli 1969, KFK 985
- [67] M. Schirra: Persönliche Mitteilung, Institut für Material- und Festkörperforschung, Kernforschungszentrum Karlsruhe
- [68] F. Hofmann, R. Krieg: Mechanische Beanspruchung von Brennstabhüllrohren durch radiale und azimutale Temperaturgradienten in Brennelementen mit exzentrischer Geometrie, zur Veröffentlichung eingereicht: First International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin, 20. - 24. September 1971

Tabelle 1

Parameter	Symbol	Wert	Dimension
Außendurchmesser	D_a	7.0	[mm]
Mittlerer Radius	l	3.3	[mm]
Wandstärke	h	0.4	[mm]
Form der Abweichung	$\eta = \cos 2\varphi$		
Anfangsovalität	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \alpha l \end{array} \right.$	$3.0625 \cdot 10^{-3} \leq \alpha \leq 6.125 \cdot 10^{-3}$ $1 \leq \alpha l \leq 20$	 [-] [μm]
Äußerer Überdruck (zeitl. konstant)	p	$85 \leq p \leq 170$	[kp/cm^2]
Temperatur (isotherm)	T	700	[$^{\circ}\text{C}$]
Werkstoff [64]: Hastelloy X bei 700 $^{\circ}\text{C}$			
Elastizitätsmodul	E	15350	[kp/mm^2]
Poissonsche Zahl	ν	0.3	[-]
Streckgrenze	$\sigma_{0.2}$	26.0	[kp/mm^2]
Nortonsche Kriechparameter	$\left\{ \begin{array}{l} n \\ K \end{array} \right.$	 6.1 $2.0 \cdot 10^{-41}$	 [-] [$h(\text{kp}/\text{mm}^2)^n$] ⁻¹
Wärmeausdehnungskoeffizient	β	$1.57 \cdot 10^{-5}$	[grd^{-1}]

Tabelle 2

Parameter	Symbol	Wert	Dimension
Mittlerer Radius	l	3.68	[mm]
Wandstärke	h	0.35	[mm]
Maximale Abweichung	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ l\alpha \end{array} \right.$	$0.5435 \cdot 10^{-2}$	[-]
		20	[μm]
Äußerer Überdruck (konstant)	p	60	[kp/cm^2]
Temperaturbereich (zeitl. konstant)	T	$650 \leq T_{(t,\theta)} \leq 750$	[$^{\circ}\text{C}$]
Werkstoff [67]: Inconel 625 bei 700°C			
Elastizitätsmodul	E	15350	[kp/mm^2]
Poissonsche Zahl	ν	0.328	[-]
Streckgrenze	$\sigma_{0.2}$	57.5	[kp/mm^2]
Nortonsche Kriechparameter	$\left\{ \begin{array}{l} n \\ K \end{array} \right.$	siehe S. 84	[-]
		u. Abb. 9	[$h(\text{kp}/\text{mm}^2)^n$] $^{-1}$
Wärmeausdehnungskoeffizient	β	$1.5 \cdot 10^{-5}$	[grd^{-1}]
Wärmeleitfähigkeit	λ	0.197	[$\text{W}/(\text{cm}\ \text{grd})$]

Referenzsystem im unverformten Körper

Mitbewegtes Koordinatensystem im verformten Körper

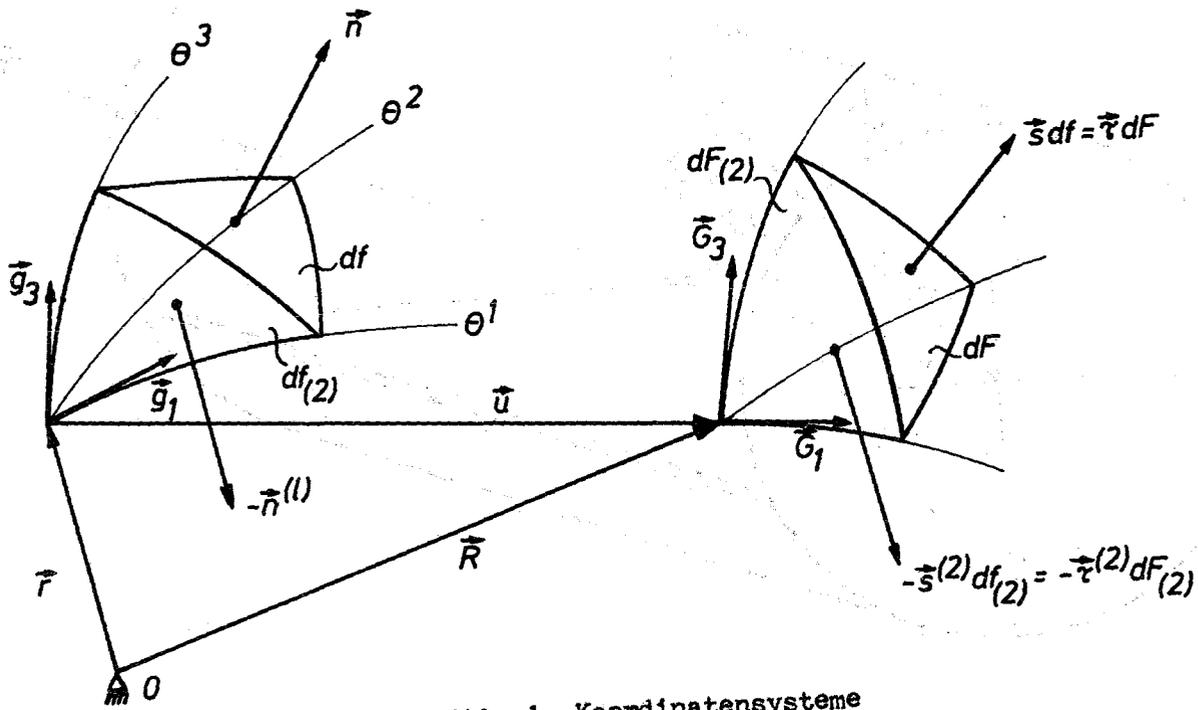
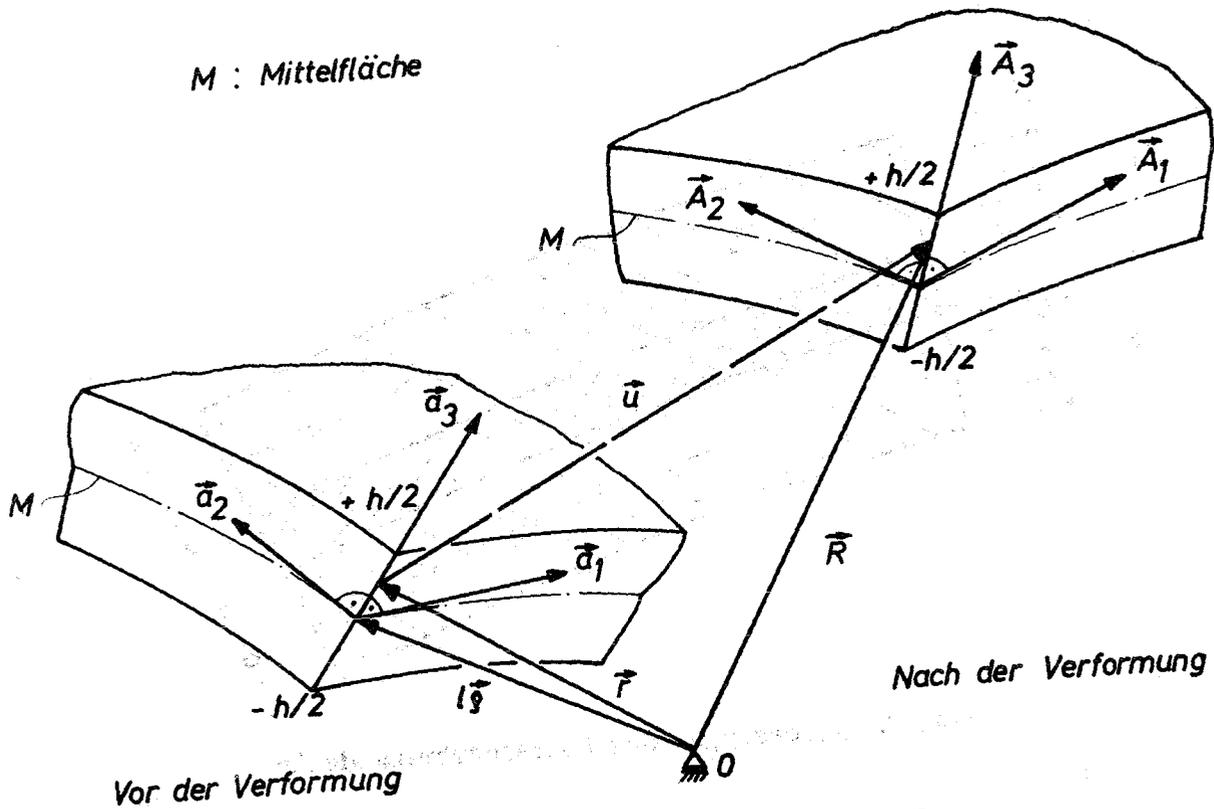


Abb. 1 Koordinatensysteme

M : Mittelfläche



Vor der Verformung

Nach der Verformung

Abb. 2 Orts- und Basisvektoren der Schale

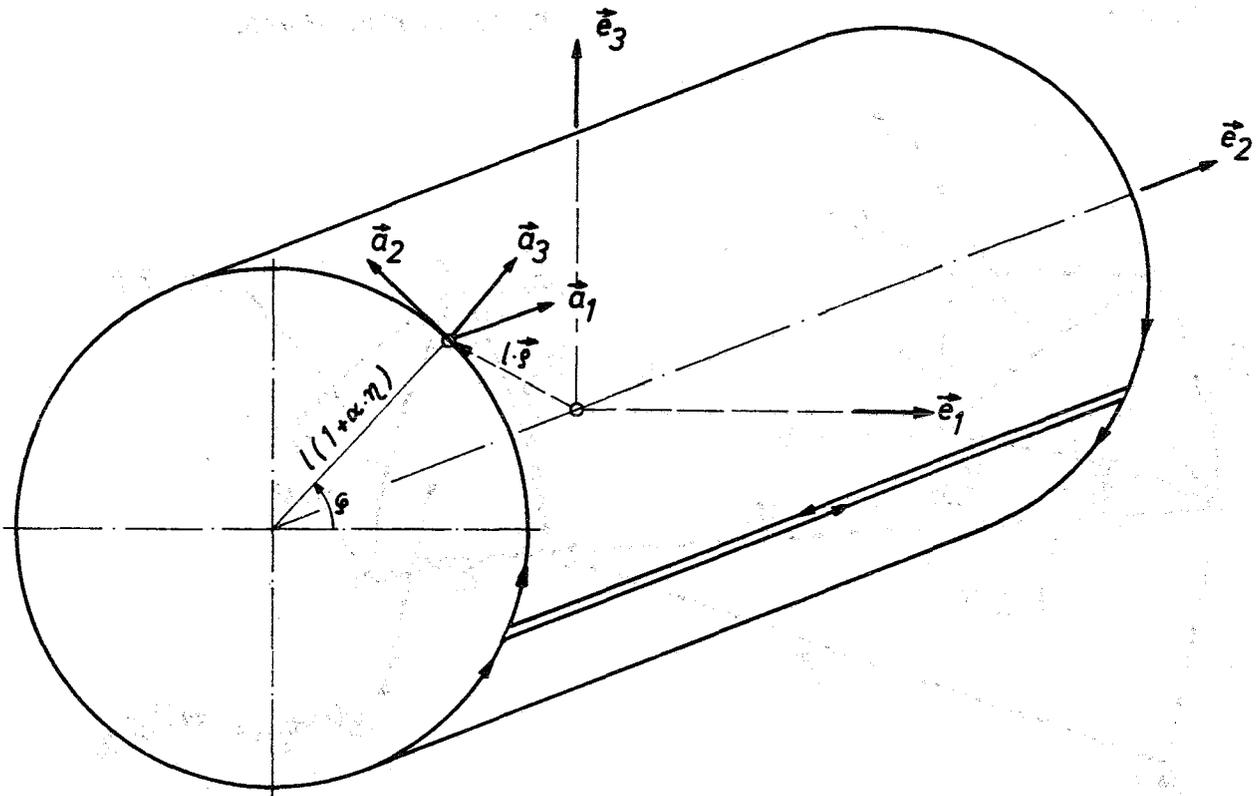


Abb. 3 Koordinatensystem für die Mittelfläche des Hüllrohrs

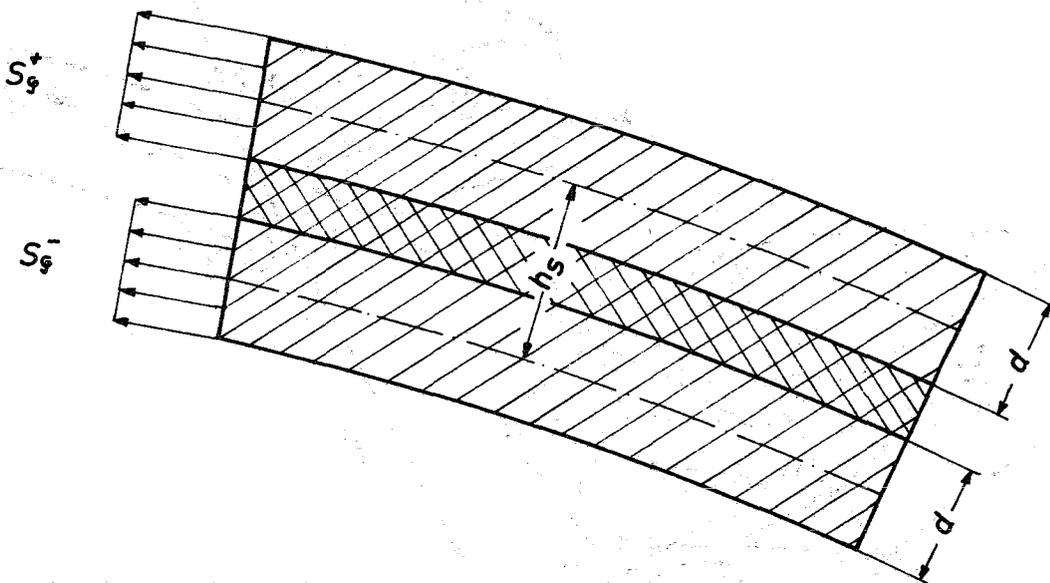


Abb. 4 Abmessungen des Doppelmembranmodells

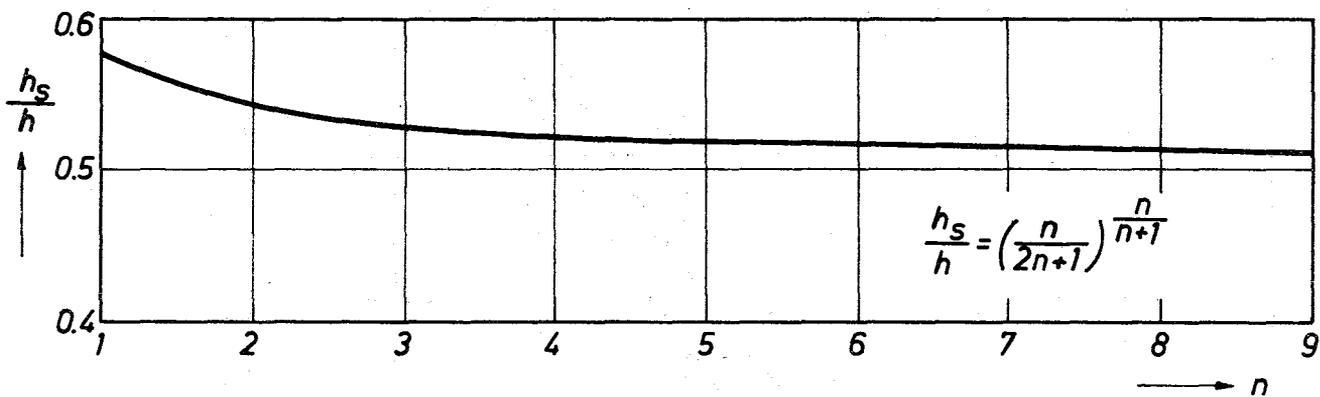


Abb. 5 Doppelmembranabstand h_s als Funktion des Nortonschen Kriechexponenten n

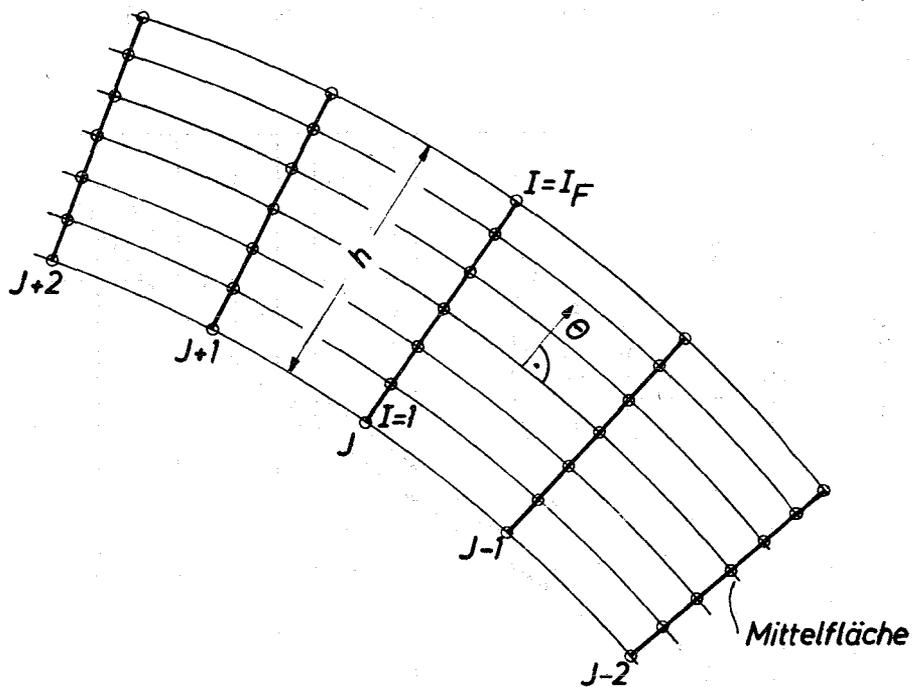


Abb. 6 Maschennetz im Hüllrohr

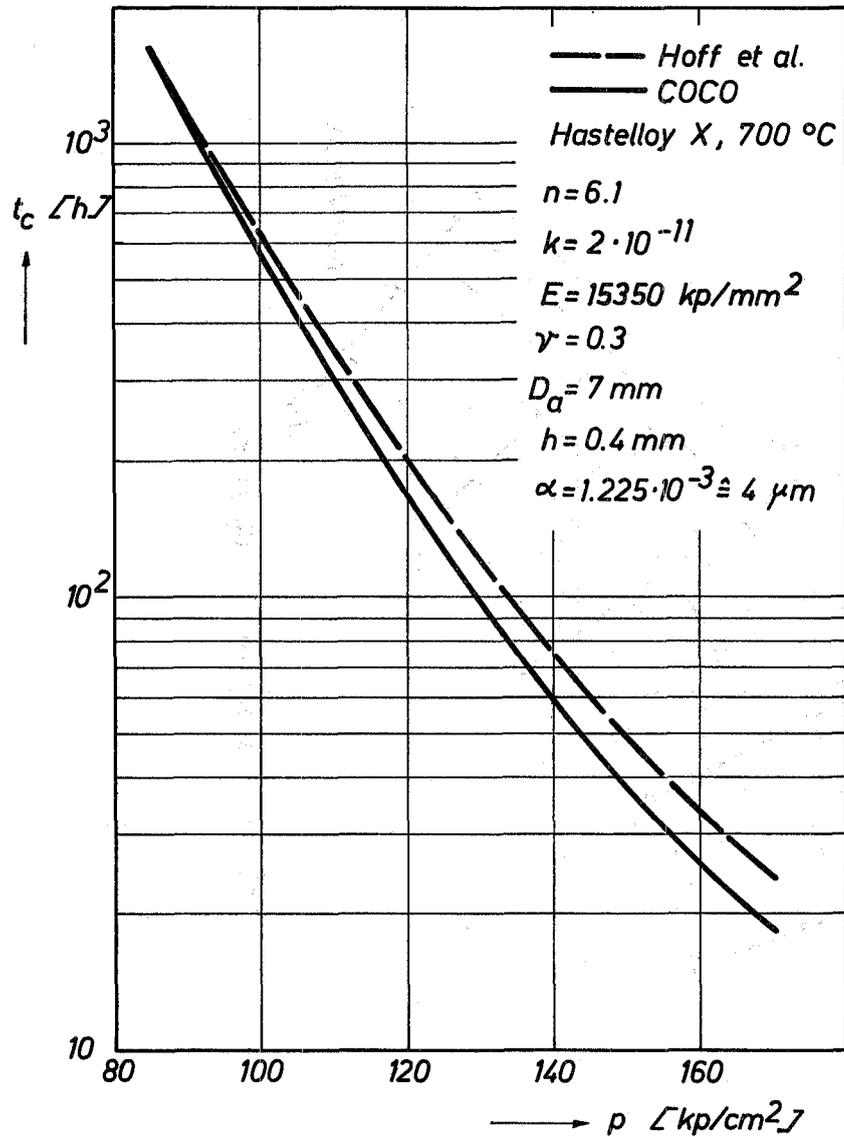


Abb. 7 Einfluss des äußeren Überdruckes p auf die Kriechkollapszeit t_c

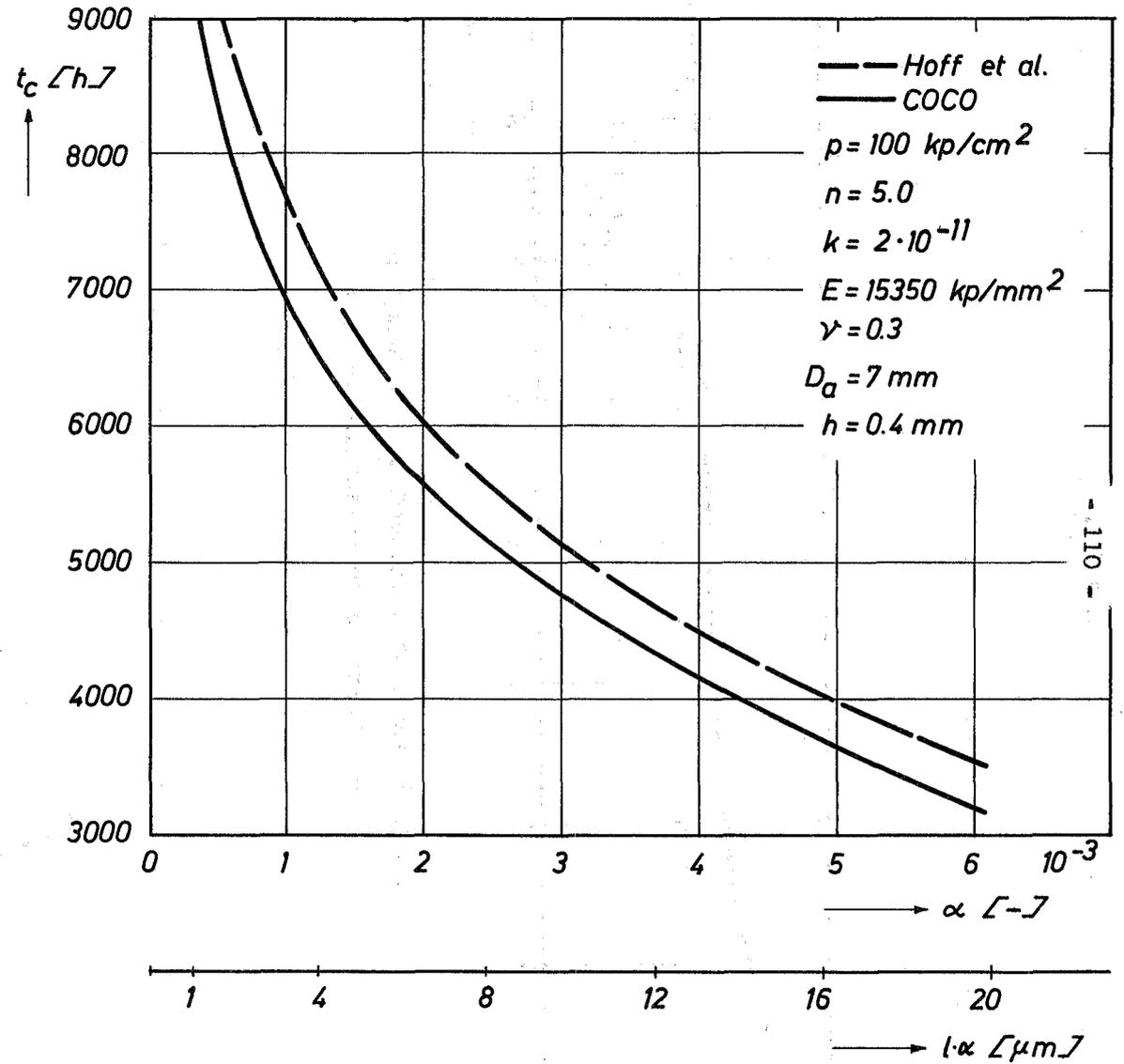


Abb. 8 Einfluss der Anfangsovalität α auf die Kriechkollapszeit t_c

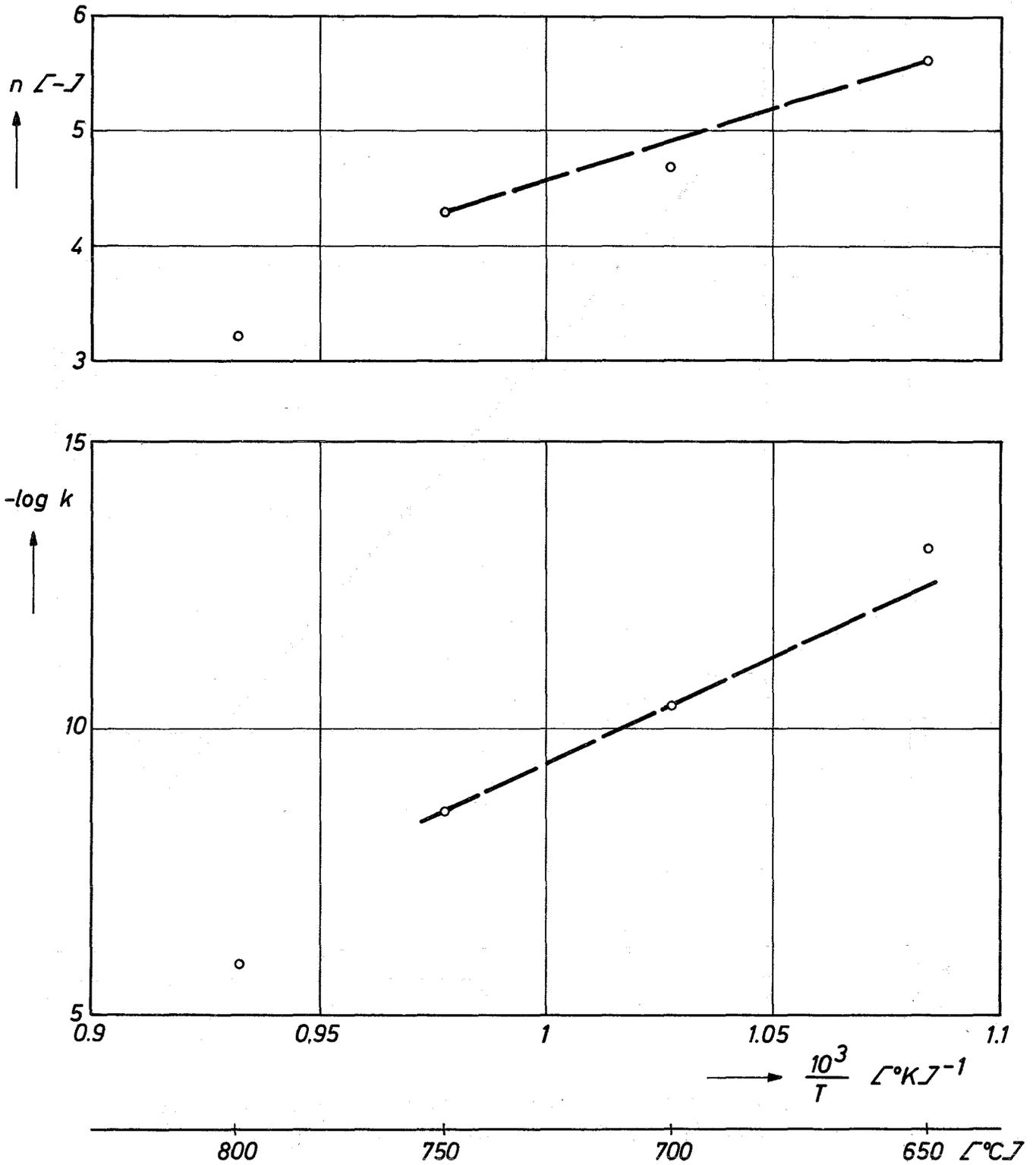


Abb. 9 Nortonsche Kriechparameter als Funktion der Temperatur
(Dimension von $K \sim [h(\text{kp/mm}^2)^n]^{-1}$)

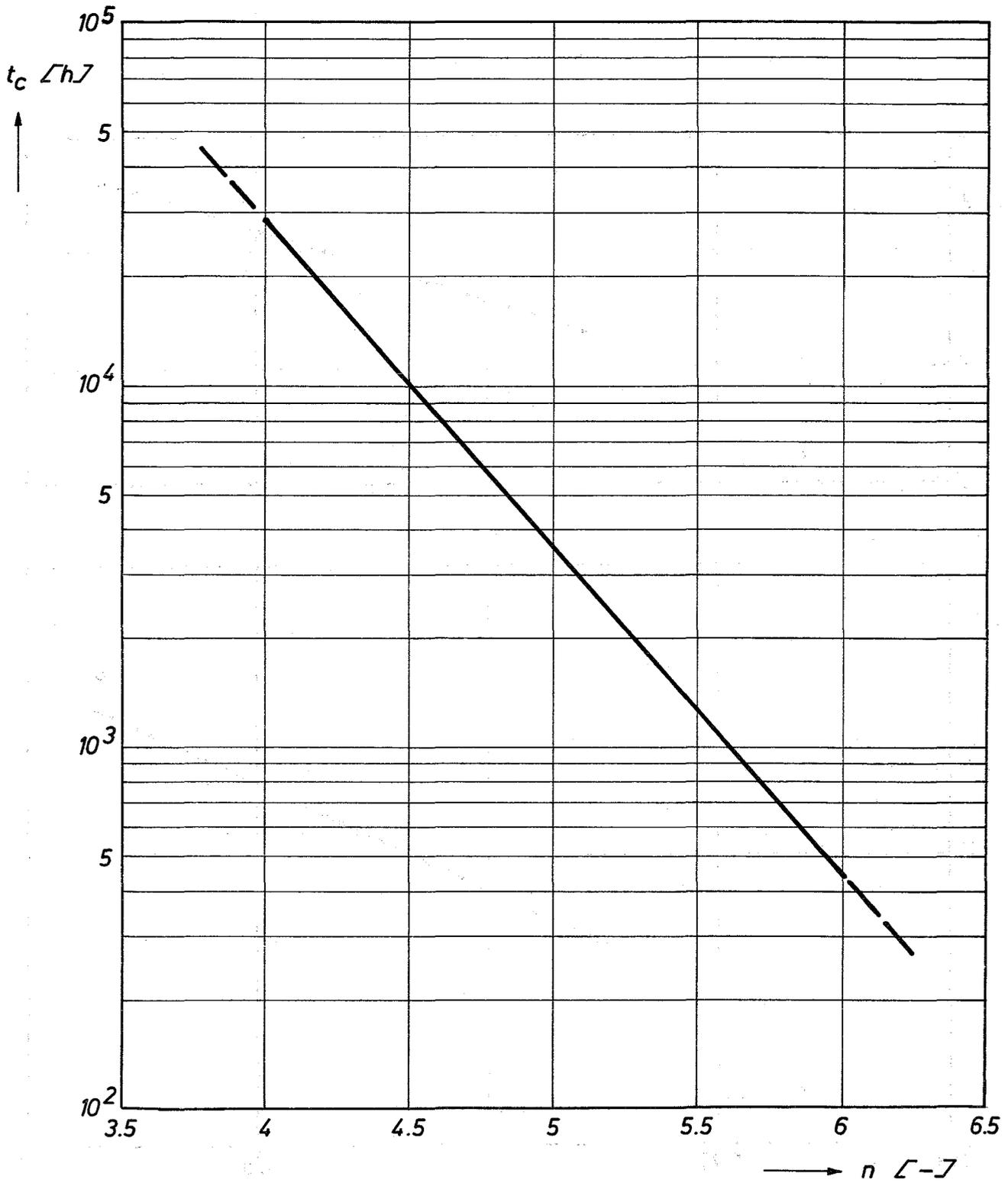


Abb. 10 Abhängigkeit der Kriechkollapszeit t_c von dem Nortonschen Kriechexponenten n (Kriechparameter $K = 4.0758 \cdot 10^{-11}$, Druck $p = 60 \text{ kp/cm}^2$, weitere Daten Tab. 2)

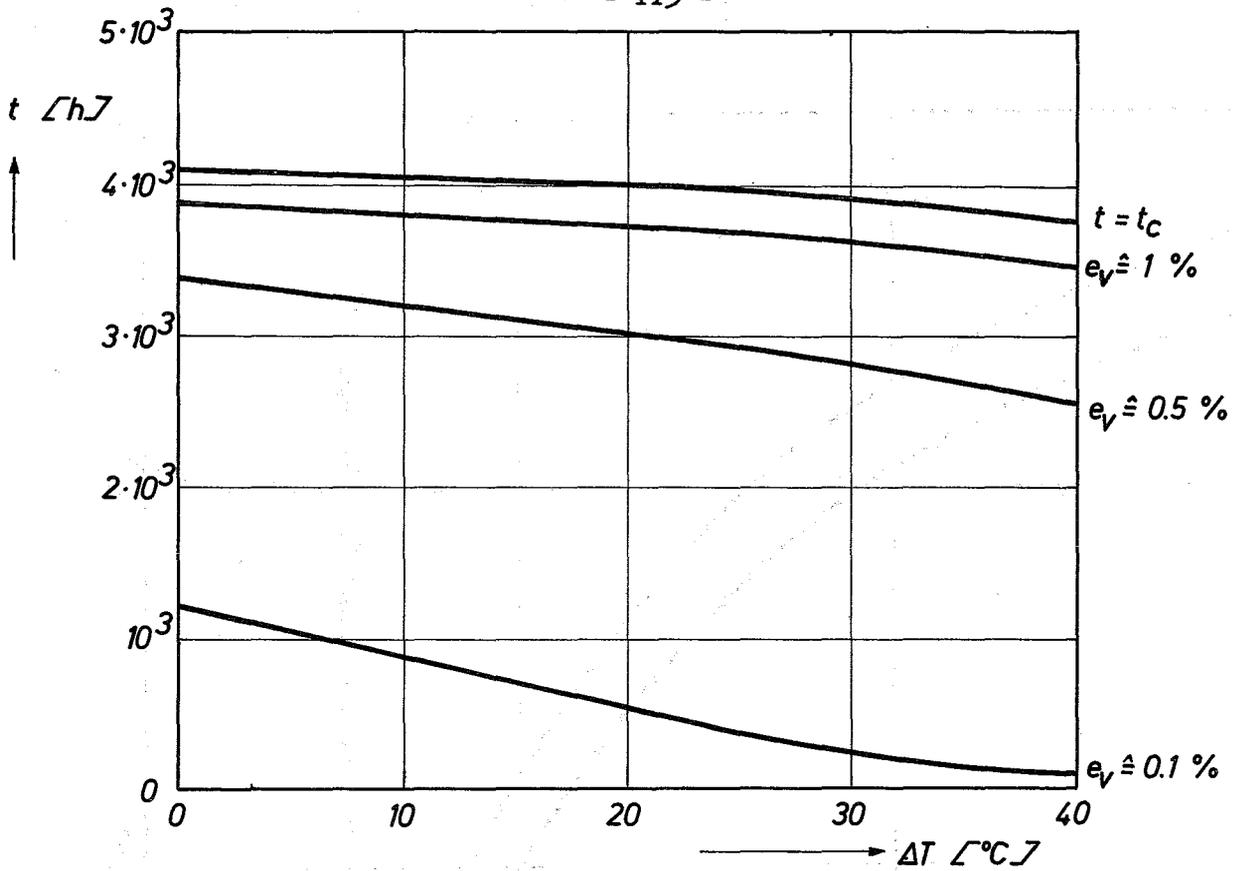


Abb. 11 Einfluß der radialen Temperaturdifferenz ΔT auf die Kollapszeit t_c und die Zeiten $t_{0.1}$, $t_{0.5}$, $t_{1.0}$, zu denen die maximale plastische Vergleichsdehnung e_v 0.1, 0.5, 1.0 o/o erreicht. (Rotationssymmetrisches Temperaturfeld, $T_{m0} = 700^\circ C$)

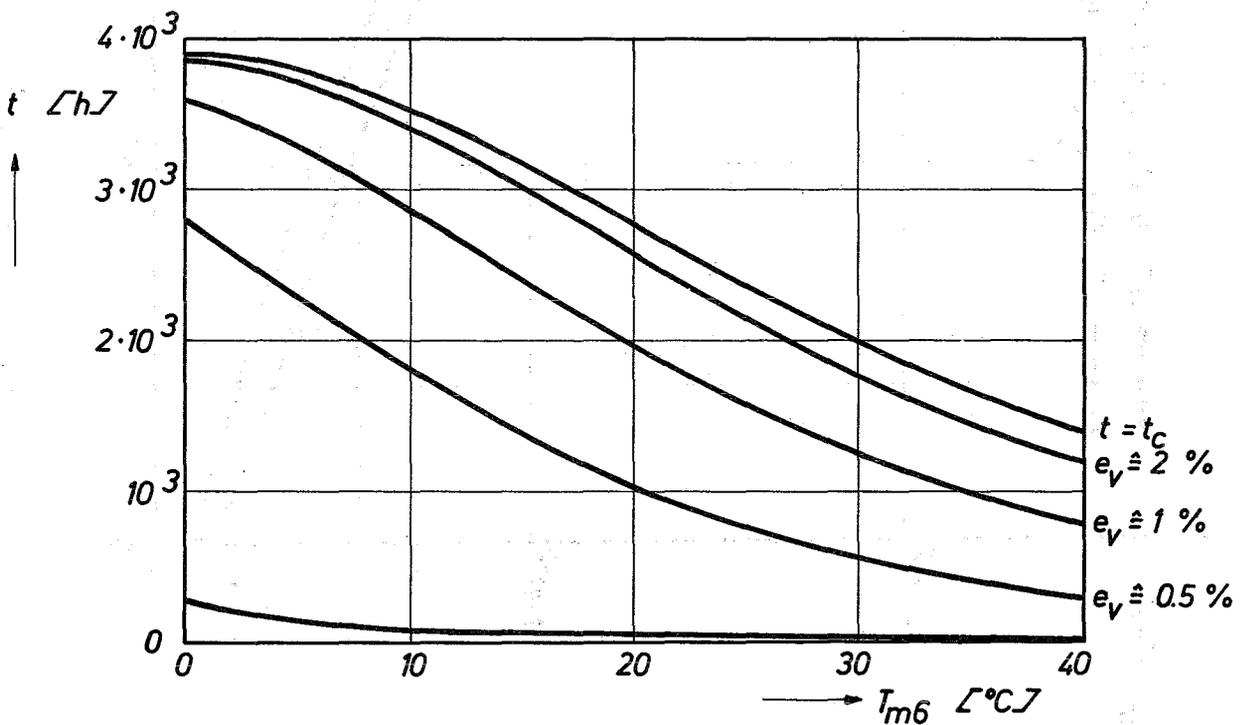


Abb. 12 Einfluß der azimuthalen Temperaturschwankung T_{m6} auf die Kollapszeit t_c und die Zeiten $t_{0.1}$, $t_{0.5}$, $t_{1.0}$, $t_{2.0}$ (Nichtrotationssymmetrisches Temperaturfeld $T(\varphi, \theta) = T_{m0} + T_{m6} \cos 6\varphi - \Delta T \cdot \theta$, $T_{m0} = 700^\circ C$, $\Delta T = 30^\circ C$)

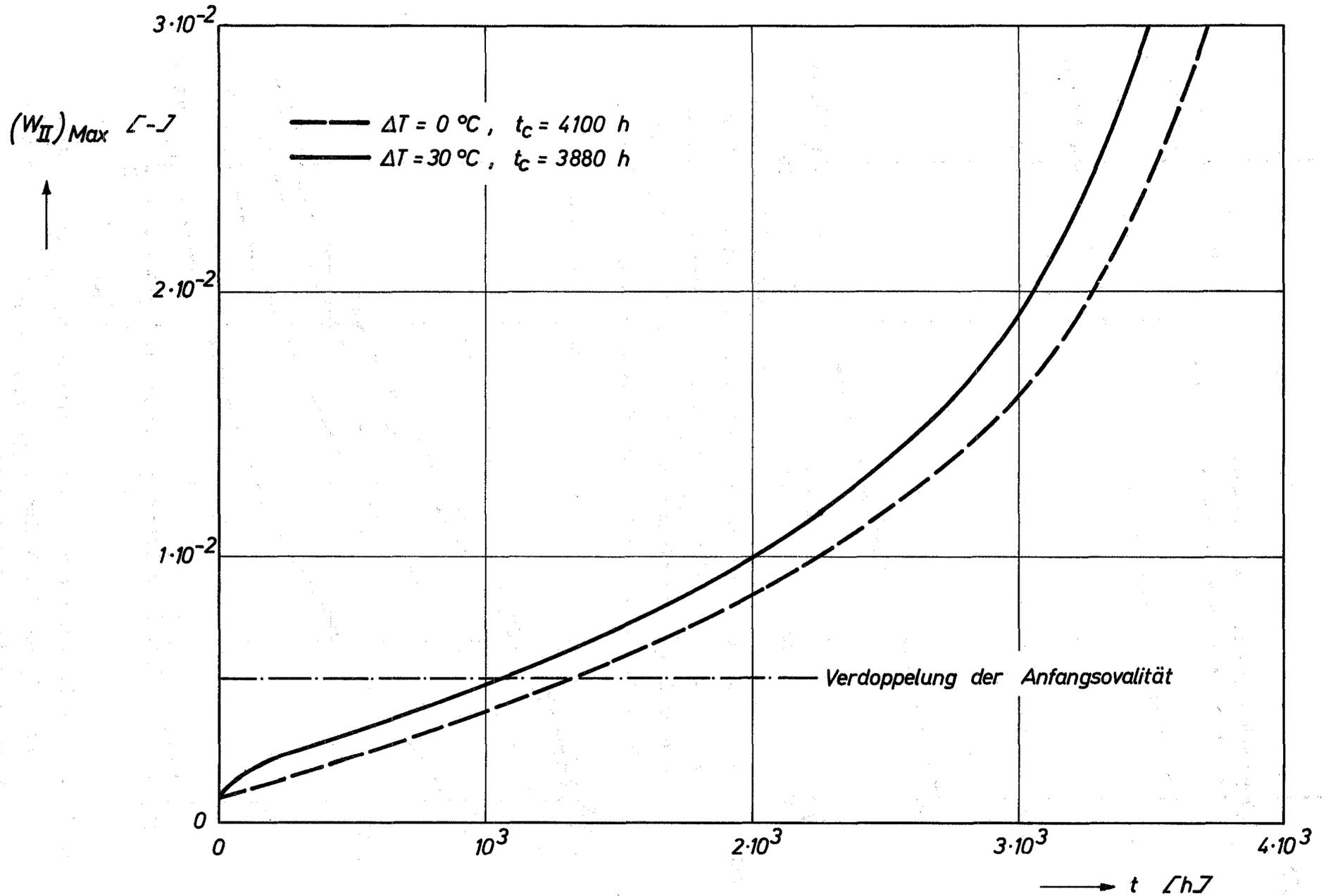


Abb. 13 Zeitlicher Verlauf der ungleichförmigen Normalverschiebung w_{II} ($\psi = 0$)
 (Rotationssymmetrisches Temperaturfeld)

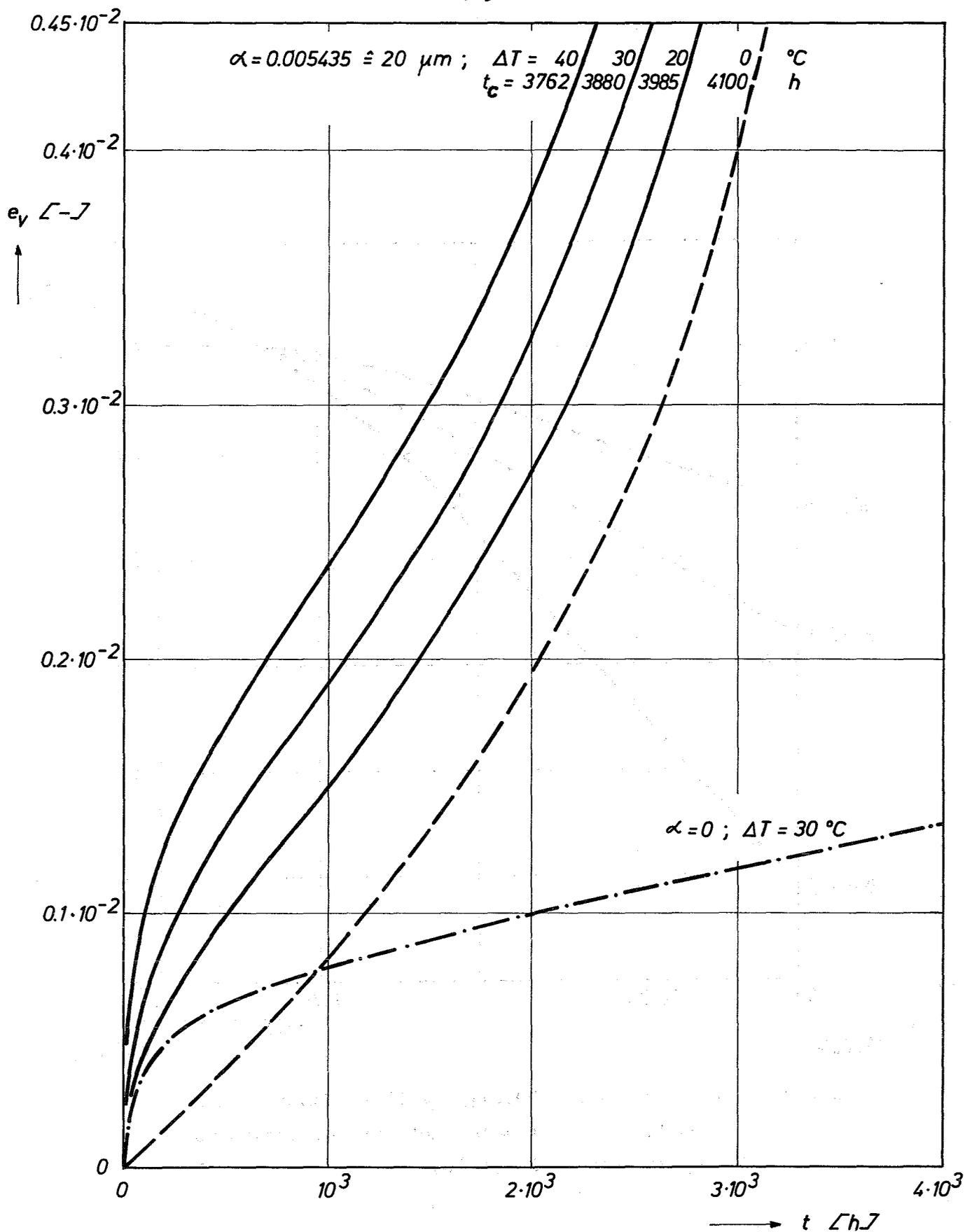


Abb. 14 Maximale plastische Vergleichsdehnung e_v als Funktion der Zeit ($\varphi = 0$, Innenseite; rotationssymmetrisches Temperaturfeld)

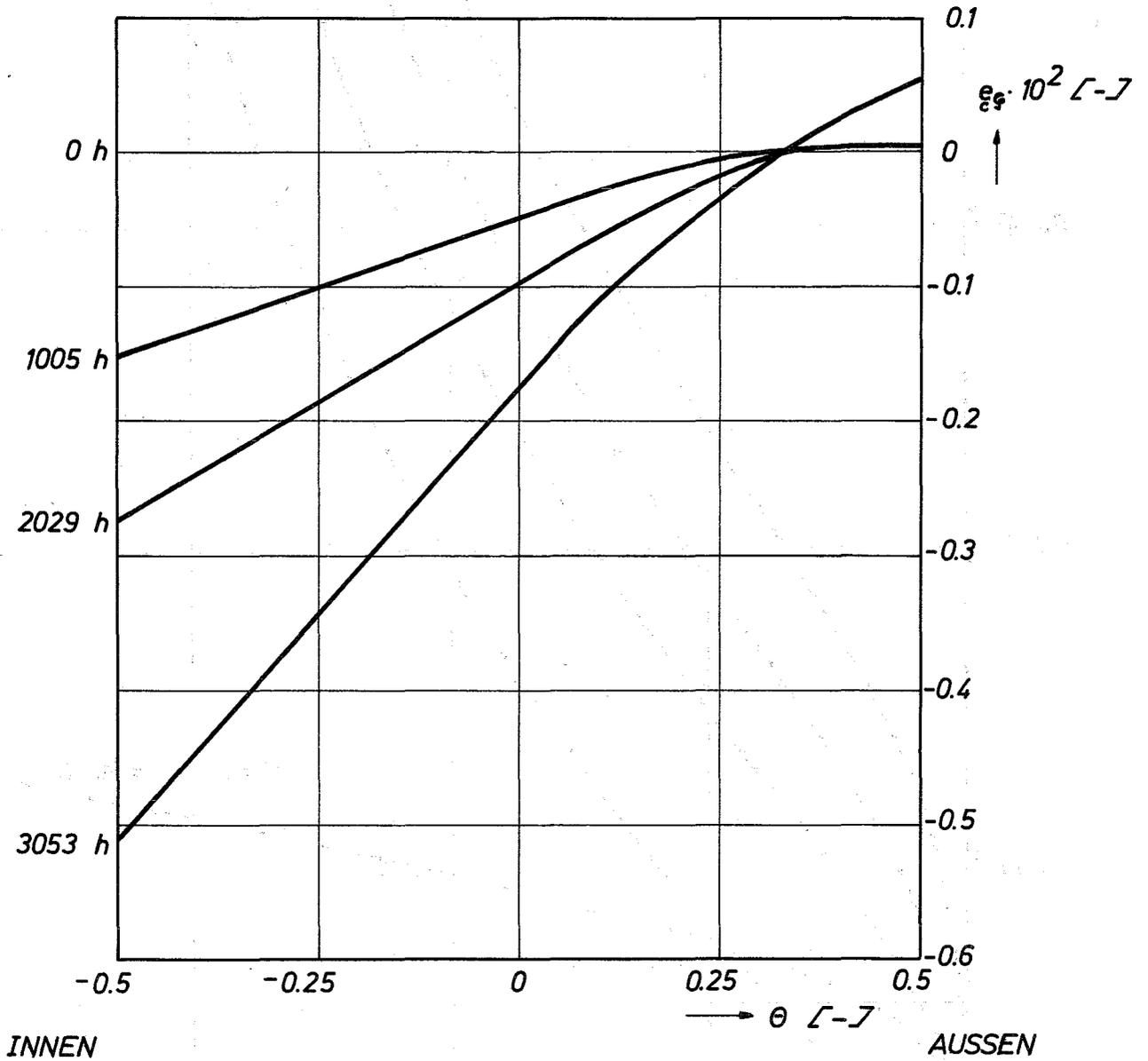


Abb. 15 Verlauf der Kriechdehnung ϵ_p in der Hüllrohrwand am Hauptscheitel ($\varphi = 0$) (Rotationssymmetrisches Temperaturfeld, $\Delta T = 30^\circ \text{C}$)

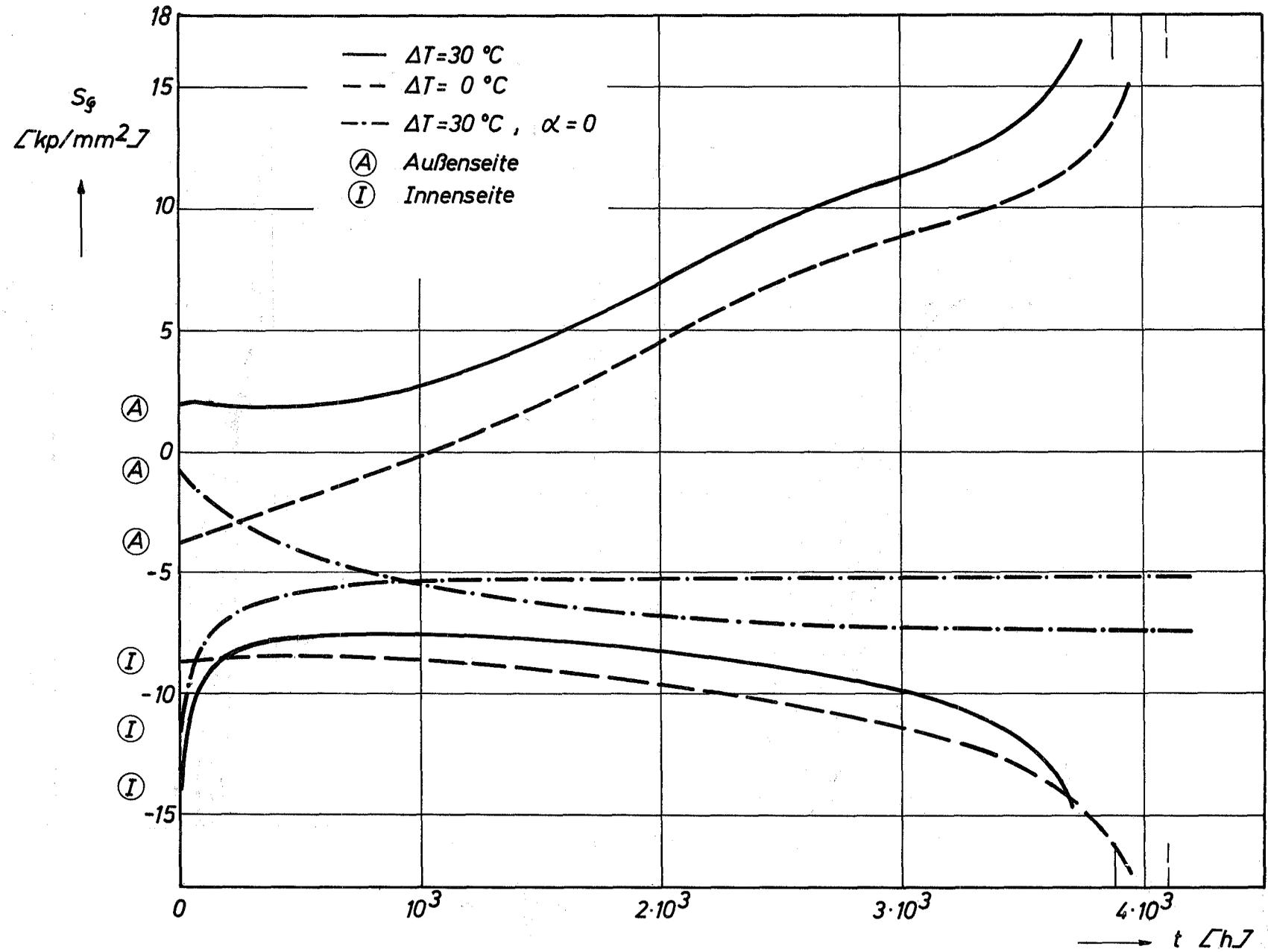
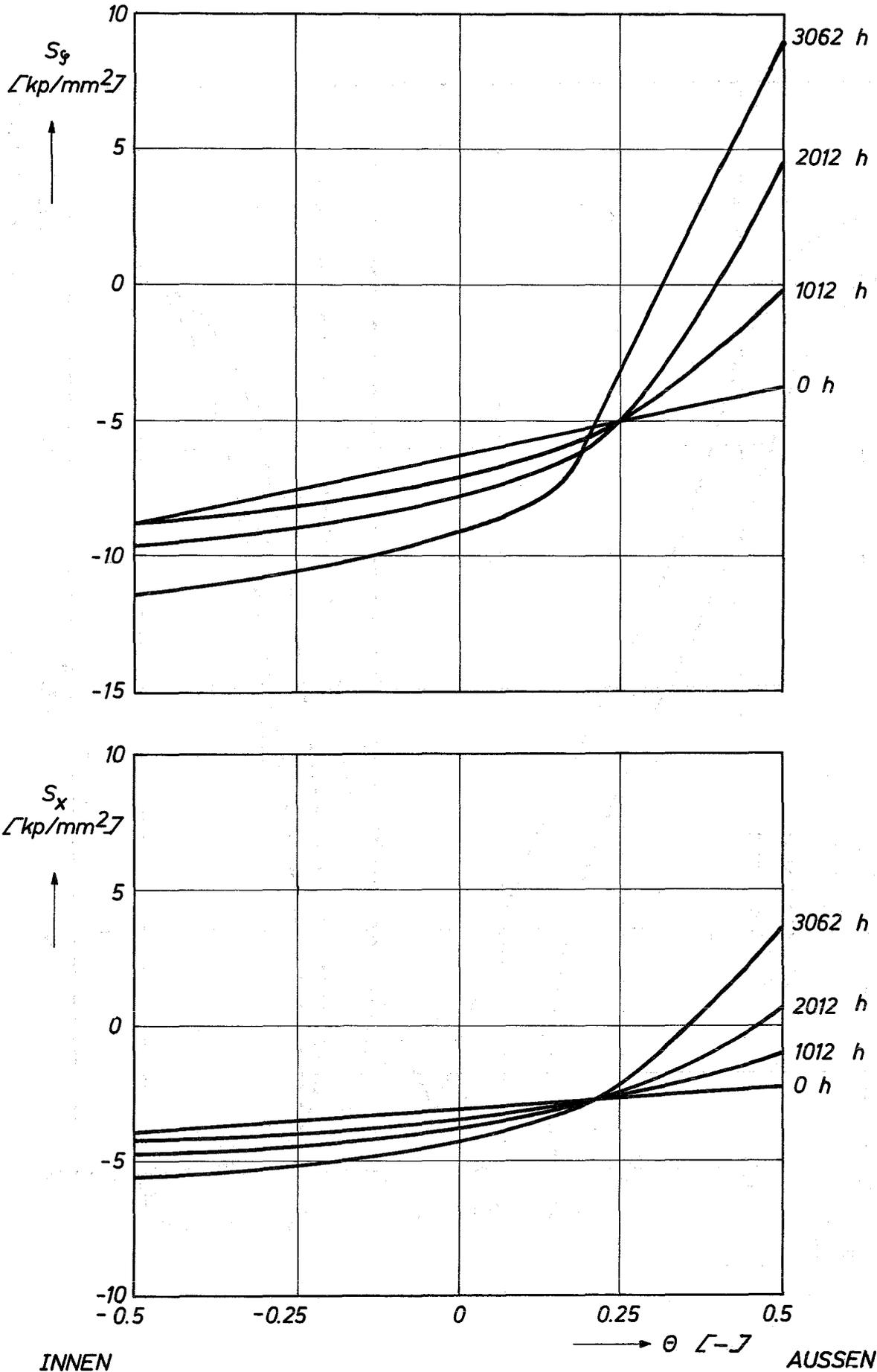


Abb. 16 Zeitlicher Verlauf der Umfangsspannung s_ϕ am Hauptscheitel ($\phi = 0$) (Rotations-symmetrisches Temperaturfeld)



INNEN **AUSSEN**

Abb. 17 Verlauf der tangentialen und axialen Spannungen s_φ und s_x am Hauptscheitel ($\varphi = 0$) über die Hüllrohrwanddicke zu verschiedenen Zeiten (Isothermes Temperaturfeld)

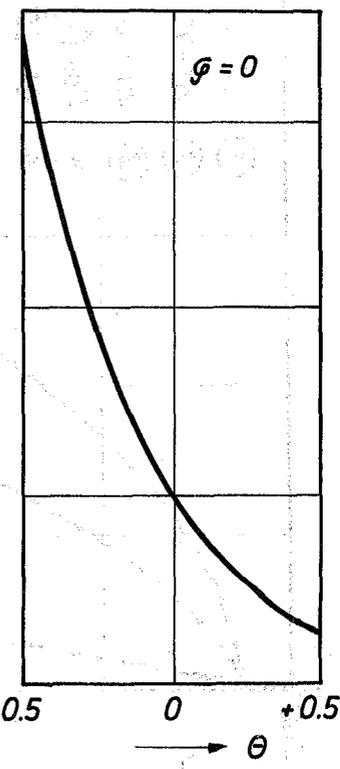
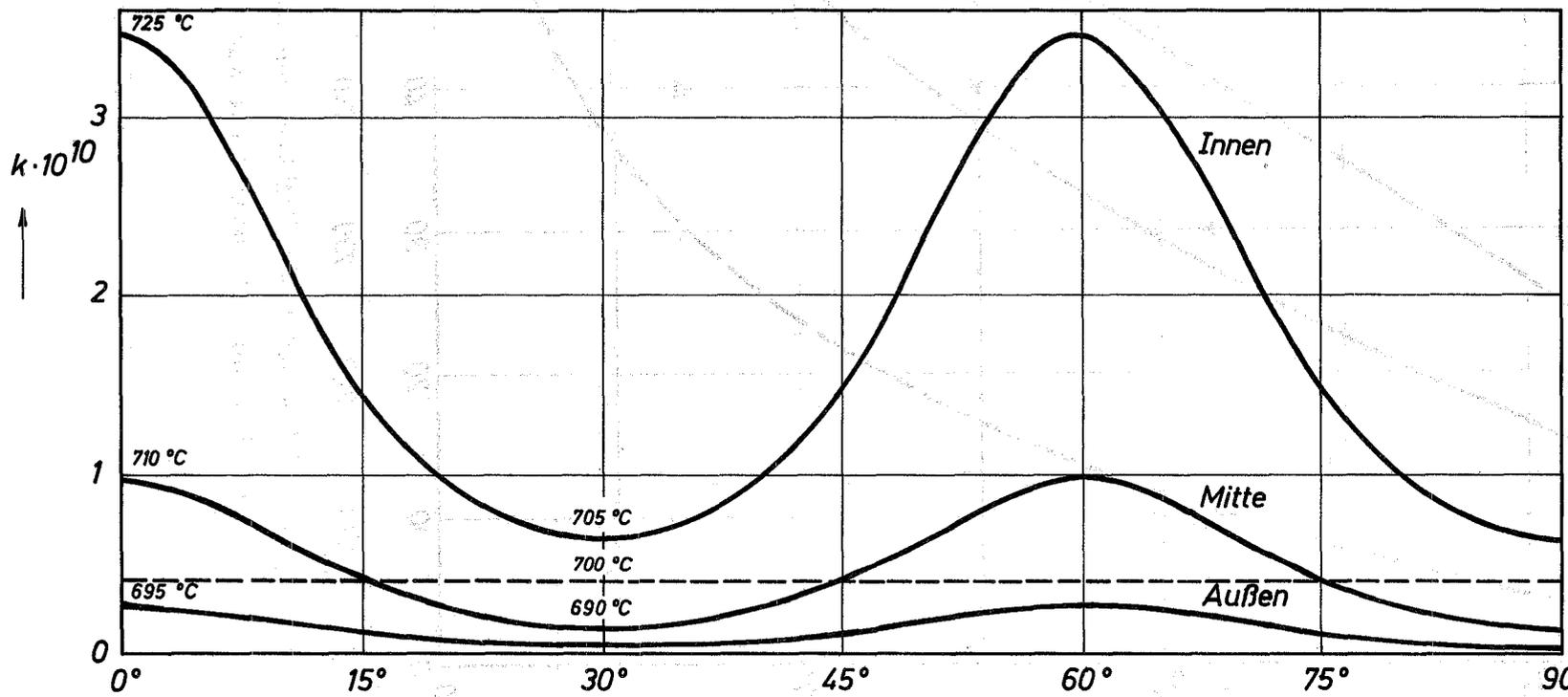
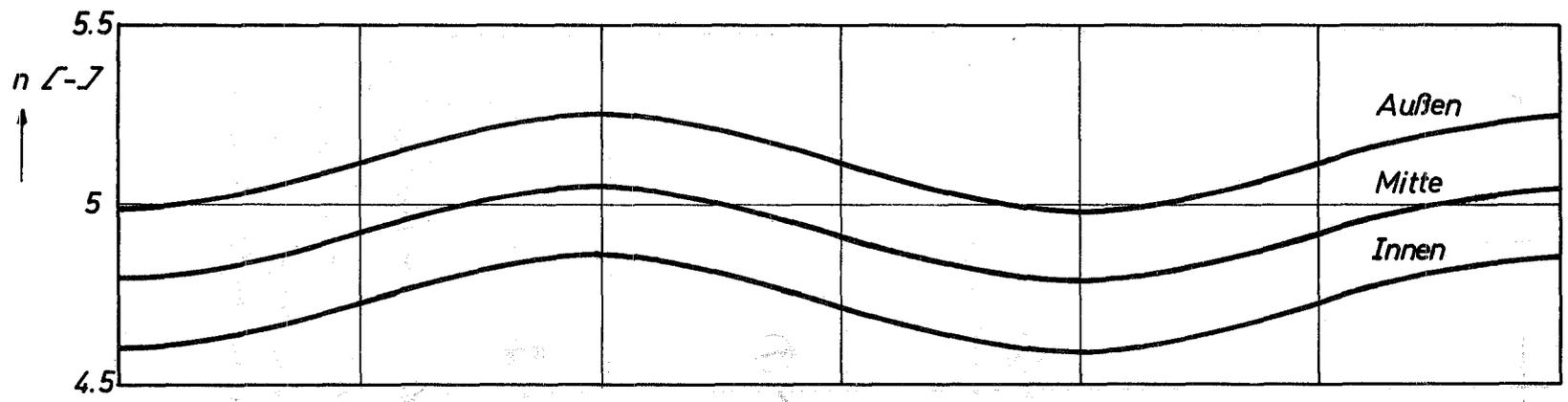


Abb. 18 Verlauf der Kriechparameter K und n (Inconel 625) in der Hüllrohrwand bei einer Temperaturverteilung $T(\varphi, \theta) = 700 + 10 \cos 6\varphi - 30\theta$ [$^{\circ}\text{C}$]

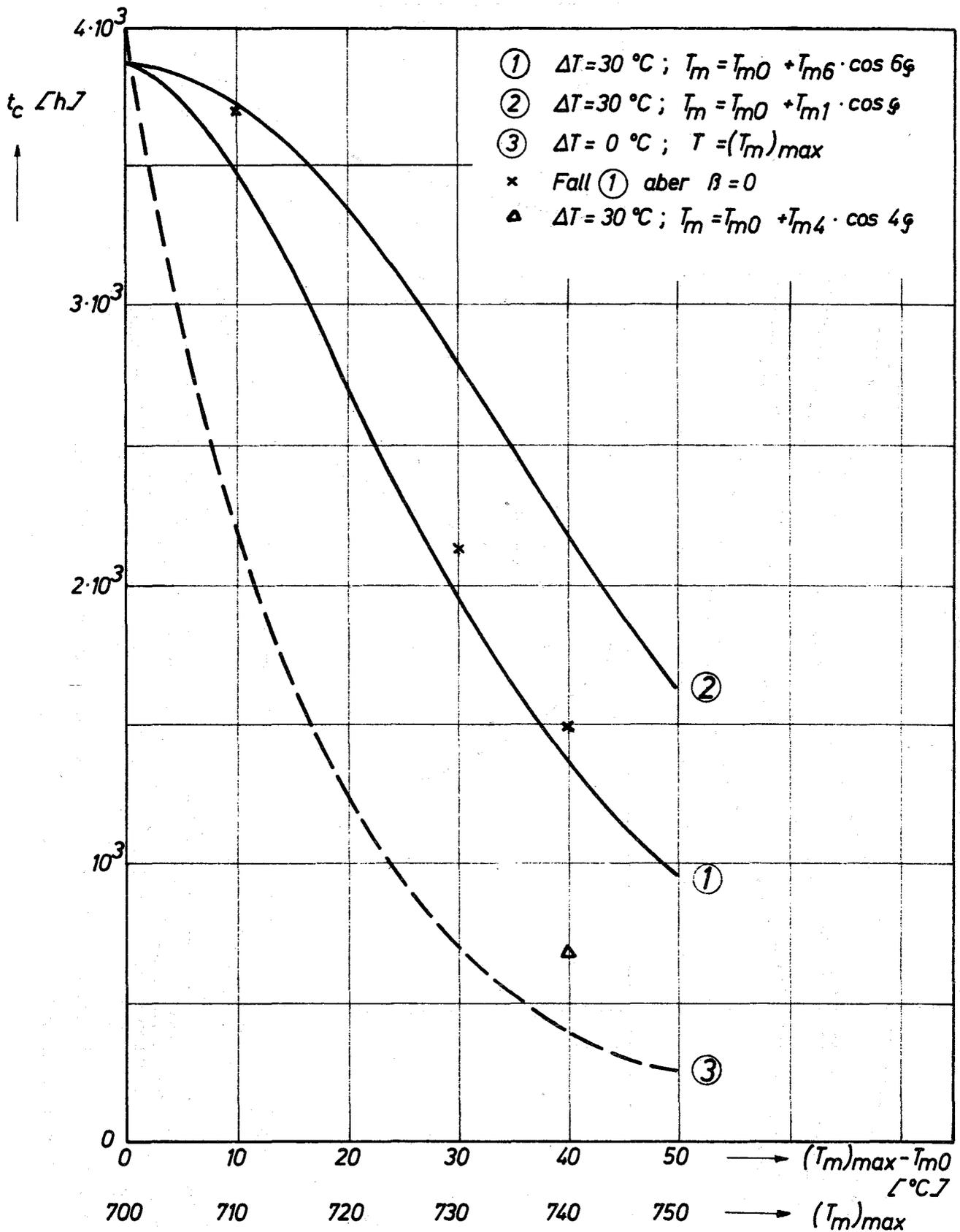


Abb. 19 Die Kollapszeit als Funktion der maximalen Temperatur in Wandmitte bei verschiedenen Temperaturverteilungen (Daten s. Tab.2)

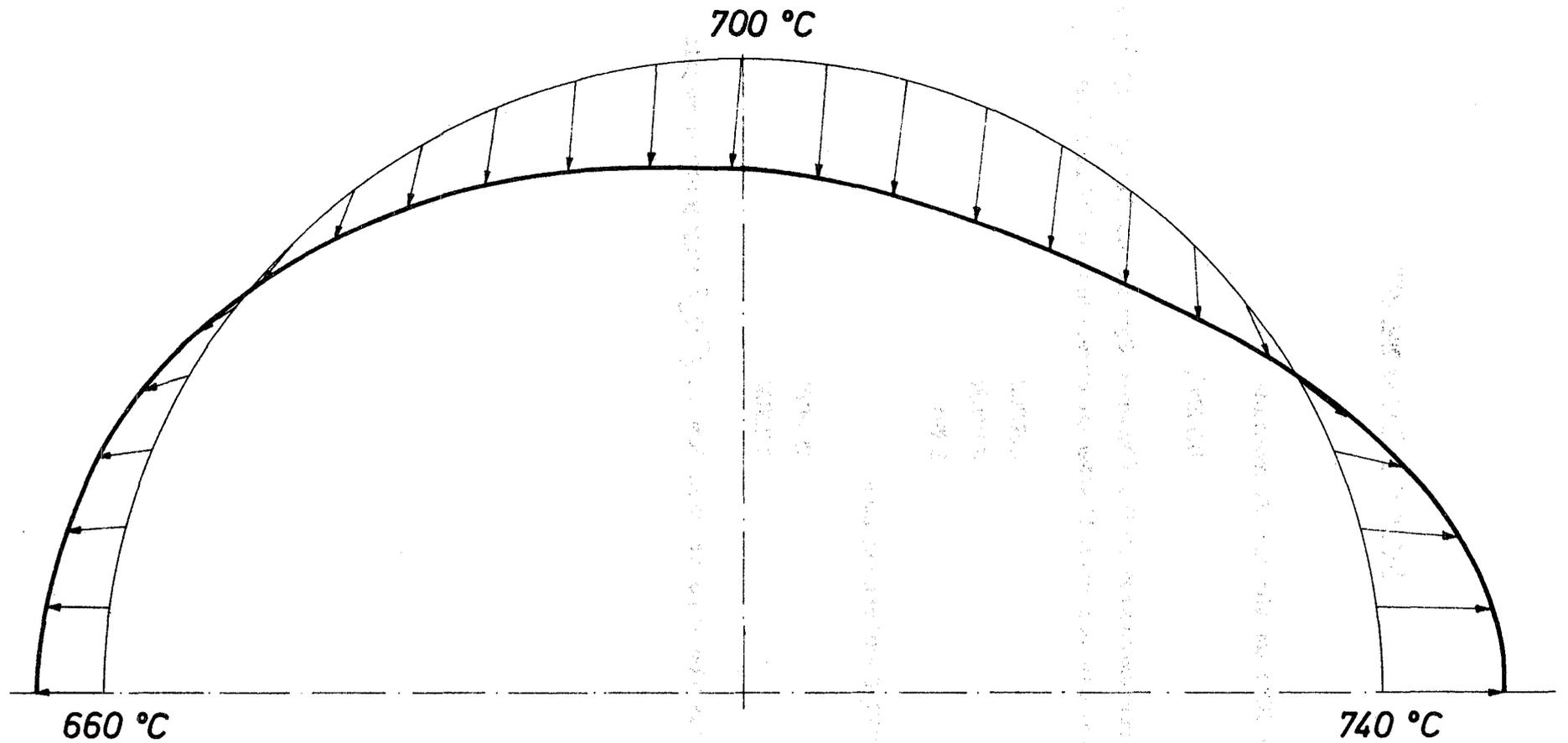


Abb. 20 Verschiebungsfeld der Mittellinie nach 1017 h (Kollapszeit 2190 h, Temperaturverteilung $T(\varphi, \theta) = 700 + 40 \cos \varphi - 30 \theta$ [$^{\circ}\text{C}$]). Die Verschiebungen sind relativ zum Radius um einen Faktor 20 vergrößert worden; die rein thermische Expansion ist hier nicht im Verschiebungsfeld enthalten)

Liste des Programms CØCØ

Das Programm CØCØ umfaßt die Subroutine

DYNAMØ,

die von dem Programmsystem DYSYS (Dynamic System Simulator [63]) aufgerufen wird, und die weiteren DYNAMØ untergeordneten Subroutinen

SUBCØS

SUBENØN

SETØ

sowie die FUNCTION-Unterprogramme

TAVFUN

DELFUN.

Die Ein- und Ausgabe erfolgt nach den in [63] angegebenen Regeln.


```

C
C BERECHNUNG DES TEMPERATURFELDES
C FALLS KTT=1 : CAS TEMPERATURFELD WIRD ALLEIN DURCH TAV(J) UND
C DELT(J) (EINGABEDATEN) BESTIMMT.
C FALLS KTT=2 : DIE VERTEILUNGEN DER WANDMITTENTEMPERATUR TAV UND
C DER TEMPERATURDIFFERENZ DELT WIRD DURCH DIE
C FUNCTIONEN TAVFUN UND DELFUN GEGEBEN. DIE EINGABE-
C DATEN TAV(J) UND DELT(J) WERDEN NICHT BENUTZT.
C
C GO TO (1001,1002),KTT
1001 CC 133 J=1,JF
CC 133 I=1,IF
133 TEMP(I,J)= TAV(J)-DELT(J)*TETA(I)
GOTO 140
C
1002 CC 134 J=1,JF
PHIFUN = PHI(J)
TAV(J) = TAVFUN(PHIFUN)
DELT(J)= DELFUN(PHIFUN)
CC 134 I=1,IF
134 TEMP(I,J)= TAV(J) - DELT(J)*TETA(I)
C
C FALLS KCC=1 : KRIECHPARAMETER TEMPERATURABHAENIG; EXTRAFCLA-
C TION MIT HILFE DES LARSEN-MILLER-PARAMETERS.
C FALLS KCC=2 : KRIECHPARAMETER TEMPERATURUNABHAENIG.
C FALLS KCC=3 : KRIECHPARAMETER AENDERN SICH NICHT IN RADIALER
C RICHTUNG.
C FALLS KCC=4 : ES WIRD VORALSGESETZT, DASS LGG(CREK) UND EXN
C LINEARE FUNKTIONEN VON 1/T(KELVIN) SIND, FUER DIE
C INTERPOLATION WERDEN DIE KONSTANTEN AAK,BBK,AA,
C BBN BENUTZT. DIE EINGABEDATEN VCN,VCK WERDEN NICHT
C GEBRAUCHT.
C
140 GO TO(10,20,30,40),KCC
C
-----
10 CC 137 J=1,JF
CC 137 I=1,IF
TABS = (273.15+TAV(J))/(273.15+TEMP(I,J))
EXN(I,J) = VCN(J)*TABS
CREK(I,J) = VCK(J)**TABS*10.0**(20.0*(1.0-TABS))
137 CREEX(I,J)=(VCN(J)*TABS-1.0)/2.0
GOTO 145
C
-----
20 CC 142 J=1,JF
CC 142 I=1,IF
EXN(I,J) = VCN(I)
CREK(I,J) = VCK(I)
142 CREEX(I,J)= (VCN(I)-1.0)/2.0
GOTO 145
C
-----
30 CC 143 J=1,JF
CC 143 I=1,IF
EXN(I,J) = VCN(J)
CREK(I,J) = VCK(J)
143 CREEX(I,J)= (VCN(J)-1.0)/2.0
GOTO 145
C
-----

```

```

40 CC 144 J=1,JF
CC 144 I=1,IF
TKEHR= 1.0/(273.15+TEMP(I,J))
X = AAK-BBK*TKEHR
CREK(I,J) = EXP(X*2.30259)
EXN(I,J) = AAN+BBN*TKEHR
144 CREEX(I,J)= (EXN(I,J)-1.0)/2.0
C
145 WRITE(6,2000) IF,JF
2000 FORMAT(41H KRIECHKONSTANTEN CREK(1,J),CREK(2,J),.../5H IF= ,I3,5H
1JF= ,I3/)
WRITE(6,2100) ((CREK(I,J),I=1,7),J=1,25)
2100 FORMAT(25(7E15.5//))
WRITE(6,2200) IF,JF
2200 FORMAT(37H KRIECHEXPCONENT EXN(1,J),EXN(2,J),.../5H IF= ,I3,5H JF=
1,I3/)
WRITE(6,2300) ((EXN(I,J),I=1,7),J=1,25)
WRITE(6,2300) IF,JF
2300 FORMAT(35H TEMPERATURFELD TEMP(1,J),TEMP(2,J),.../5H IF= ,I3,5H JF
I= ,I3/)
WRITE(6,2100) ((TEMP(I,J),I=1,7),J=1,25)
C
C BERECHNUNG DER UNGLEICHFOERMIGEN ANFANGSVERFORMUNG W(K)
C *****
C W(1)= 0.0
IF(KDELT.NE.0) GOTO 148
CC 147 K=2,KF
147 W(K)= (ALPHA*PSID(K)*PANF/PC(K))/(1.0-PANF/PC(K))
GOTO 160
148 CONST=-EVHL*ALSC*(1.0+V)/12.0
CALL SUBCOS(VCCS,DELT,CONST,ISYM,2,JF,KF,RESVW)
CC 150 K=2,KF
150 W(K)= (ALPHA*PSID(K)*PANF/PC(K)+RESVW(K)*2.0/(L*PC(K)))/
1 (1.0-PANF/PC(K))
C
C BERECHNUNG DER GLEICHFOERMIGEN RADIALEN AUFWERTUNG
C *****
160 IF(KTAV.NE.0) GOTO 190
C VARIABLE MITTLERE WANDTEMPERATUR
CALL SUBNO(TAV,1.0,JF,KF,RES)
180 WI=-PANF*L*(1.0-V/2.0)/(E*H)+AUSC*RES
GOTO 192
C
C KONSTANTE MITTLERE WANDTEMPERATUR TAV
190 RES= TAV(1)
GOTO 180
C
C BERECHNUNG DER AXIALEN MEMBRANKRAFT AM ANFANG
C *****
193 IF(KTAV.NE.0) GOTO 193
C KONSTANTE MITTLERE WANDTEMPERATUR
CC 195 K=1,KF
195 AK(K)= 0.0
CC 197 J=1,JF
197 RNX(J)=-PANF*L/2.0
GOTO 240
C

```

```

C VARIABLE MITTLERE WANDTEMPERATUR
150 CCNST= E*H*ALSC*2.C
CALL SUBCOS(VCCS,TAV,CCNST,ISYM,KMIN,JF,KF,RESVN)
DO 200 K=1,KF
200 NK(K)=-RESVN(K)
DO 220 J=1,JF
DUMMY= 0.0
DO 210 K=1,KF
210 DUMMY= DUMMY+RESVN(K)*VCCS(J,K)
220 RNX(J)=-FANF*L/2.0-DUMMY
C
C BERECHNUNG DER ANFANGSSPANNUNGEN
*****
C KRUEPUNG
240 DO 250 J=1,JF
CMEGA(J)= 0.0
DO 250 K= 2,KF
RK2 = K**2-1
250 CMEGA(J)= CMEGA(J)+RK2*VCOS(J,K)*W(K)
C
C AXIALE UND TANGENTIALE SPANNUNGEN SX(I,J) UND ST(I,J)
DO 260 J=1,JF
DUMMY1 = RNX(J)/H
DUMMY2 = EMCN*CMEGA(J)
DUMMY3 =-E*ALSC*DELT(J)/(1.0-V)
DUMMY4 =-PANF*L/H
DUMMY5 = V*DUMMY2-DUMMY3
DUMMY6 = DUMMY2-DUMMY3
DO 260 I=1,IF
SX(I,J)= DUMMY1+DUMMY5*TETA(I)
260 ST(I,J)= DUMMY4+DUMMY6*TETA(I)
C
C AUSGABE DER ANFANGSSPANNUNGEN
WRITE(6,2400) IF,JF
2400 FORMAT(50H TANGENTIALE ANFANGSSPANNUNGEN ST(1,J),ST(2,J),.../5H IF
1= ,I3,5F JF= ,I3/)
WRITE(6,2100) ((ST(I,J),I=1,7),J=1,25)
WRITE(6,2500) IF,JF
2500 FORMAT(45H AXIALE ANFANGSSPANNUNGEN SX(1,J),SX(2,J),.../5H IF= ,I3
1,5F JF= ,I3/)
WRITE(6,2100) ((SX(I,J),I=1,7),J=1,25)
WRITE(6,2600) PC(2)
2600 FORMAT(29H ELASTISCHER BEUDDRUCK P(2)= ,E15.5/)
C
C BERECHNUNG DER AXIALEN UND TANGENTIALEN KRIECHDEHNUNGSRATEN
*****
C DIESER ABSCHNITT IST BEI EINEM ANDEREN KRIECHGESETZ ENT-
SPRECHEND ZU AENDERN.
265 DO 270 I=1,IF
DO 270 J=1,JF
VAR(I,J)= CREK(I,J)*(SX(I,J)**2+ST(I,J)**2-SX(I,J)*ST(I,J))**
1 CREFX(I,J)
C
C AXIALE KRIECHRATE
FKX(I,J)= VAR(I,J)*(SX(I,J)-0.5*ST(I,J))
C
C TANGENTIALE KRIECHRATE
270 EKT(I,J)= VAR(I,J)*(ST(I,J)-0.5*SX(I,J))

```

```

C BERECHNUNG DER EQUIVALENTEN KRIECHRATE NACH DER INVARIANTEN-
C THEORIE
*****
C CCDEQ(1)= FAK*SQRT(EKX(1,1)**2 + EKT(1,1)**2 + EKX(1,1)*EKT(1,1)
1 )
C CCDEQ(2)= FAK*SQRT(EKX(IF,1)**2 + EKT(IF,1)**2 + EKX(IF,1)*EKT(IF,
1 1))
C CCDEQ(3)= FAK*SQRT(EKX(1,JM)**2 + EKT(1,JM)**2 + EKX(1,JM)*EKT(1,
1 JM))
C CCDEQ(4)= FAK*SQRT(EKX(IF,JM)**2+ EKT(IF,JM)**2+ EKX(IF,JM)*EKT(IF
1 ,JM))
C CCDEQ(5)= FAK*SQRT(EKX(1,JF)**2 + EKT(1,JF)**2 + EKX(1,JF)*EKT(1,
1 JF))
C CCDEQ(6)= FAK*SQRT(EKX(IF,JF)**2+ EKT(IF,JF)**2+ EKX(IF,JF)*EKT(IF
1 ,JF))
C
C DIFFERENTIALGLEICHUNGEN FUER DIE TANGENTIALEN KRIECHRATEN AN DIS-
C KRETEN STELLEN
*****
DO 280 I=1,IF
ICC(1,1)= EKT(I,1)
ICC(1,2)= EKT(I,JM)
280 ICC(1,3)= EKT(I,JF)
C
C INTEGRATION DER LOKALEN KRIECHRATEN UND IHRER MOMENTE DURCH DIE
C WAND VON INNEN NACH AUSSEN (SIMPSONVERFAHREN)
*****
CC 330 J=1,JF
CLMX = 0.0
DUMT = 0.0
CLMXMO= 0.0
CLMTMO= 0.0
C
C IF(IF.NE.3) GOTO 290
DGMX = EKX(2,J)
DGMT = EKT(2,J)
DGMXMO= EKX(2,J)*TETA(2)
DGMTMO= EKT(2,J)*TETA(2)
GOTO 320
C
C IF GOESSER ALS 3, LAGERADE
290 DO 300 I=3,IFM2,2
DUMX = DUMX +EKX(I,J)
DUMT = DUMT +EKT(I,J)
DUMXMO= DUMXMO+EKX(I,J)*TETA(I)
300 DUMTMO= DUMTMO+EKT(I,J)*TETA(I)
C
C
DGMX = 0.0
DGMT = 0.0
DGMXMO= 0.0
DGMTMO= 0.0
C
C
DO 310 I=2,IFM1,2
DGMX = DGMX +EKX(I,J)
DGMT = DGMT +EKT(I,J)
DGMXMO= DGMXMO+EKX(I,J)*TETA(I)
310 DGMTMO= DGMTMO+EKT(I,J)*TETA(I)

```

```

C
320 EKXI(J) = (EKX(1,J)+EKX(IF,J)+2.0*DUMX+4.0*DGMX)/RIF3
      EKI(I,J) = (EKT(1,J)+EKT(IF,J)+2.0*DUMT+4.0*DGMT)/RIF3
      EKXIMO(J) = (EKX(1,J)*(-0.5)+EKX(IF,J)*0.5+2.0*DUMXMC+4.0*DGXMC)/
1          RIF3
330 EKTIMO(J) = (EKT(1,J)*(-0.5)+EKT(IF,J)*0.5+2.0*DUMTMC+4.0*DGMTMC)/
1          RIF3
C
C
C BILDUNG DER SUMME EKTIMC(J)+V*EKXIMC(J) UND ABSPEICHERUNG
C IN EKTIMO(J)
C *****
C DO 340 J=1,JF
340 EKTIMC(J) = EKTINC(J)+V*EKXIMC(J)
C
C
C ZEITLICHE AENDERUNG DER UNGLEICHERMIGEN RADIALVERSCHIEBUNG
C *****
C W(I) = 0.0
C CALL SUBCOS(VCCS,EKTIMC,EVHL,ISYM,2,JF,KF,RESVH)
C IF (ETA(1).EQ.0.0) GC TO 345
C GO TO 351
345 DO 350 K=2,KF
350 W(K) = 0.0
      W(KKK) = (PP*(ALPHA*PSID(KKK)+W(KKK)) / PC(KKK)+RESVH(KKK)*2.0 /
1          (L*PC(KKK))) / (1.0-P/PC(KKK))
      GC TO 353
351 DO 352 K=2,KF
352 W(K) = (PP*(ALPHA*PSID(K)+W(K)) / PC(K)+RESVH(K)*2.0 / (L*PC(K)))
1          / (1.0-P/PC(K))
C
C
C ZEITLICHE AENDERUNG DER GLEICHERMIGEN RADIALVERSCHIEBUNG
C *****
353 CALL SUBNOC(EKI,1.0,JF,KF,RES)
      CWI = -PP*L*(1.0-V/2.0) / (E*H) + RES
C
C
C ZEITLICHE AENDERUNG DER AXIALEN MEMBRANKRAFTKOMPONENTEN WK(K)
C *****
C CALL SUBCOS(VCCS,EKXI,1.0,ISYM,KMIN,JF,KF,RESVN)
      CCNSTD = 2.0*E*H
C IF (ETA(1).EQ.0.0) GC TO 354
C GO TO 356
354 DO 355 K=1,KF
355 WK(K) = 0.0
      WK(KKK) = -RESVN(KKK)*CCNSTD
      GC TO 359
356 DO 357 K=1,KF
357 WK(K) = -RESVN(K)*CCNSTD
C
C
C ZEITLICHE AENDERUNGEN DER AXIALEN UND TANGENTIALEN SPANNUNGEN
C *****
C ZEITL. AENDER. DER AX. MEMBRANKRAFT AN DEN STUETZSTELLEN J, AB-
C SPEICHERUNG IN RNK(J)
358 DO 360 J=1,JF
      RNK(J) = -PP*L/2.0
      DO 360 K=1,KF
360 RNK(J) = RNK(J)+WK(K)*VCCS(J,K)

```

```

C
C BESTIMMUNG DER ABLEITUNG VCN CMEGA(J) U. ABSPEICHERUNG IN CMEGA(J)
C DO 370 J=1,JF
      CMEGA(J) = 0.0
      CC 370 K=2,KF
      RK = K**2-1
370 CMEGA(J) = CMEGA(J)+DW(K)*RK*VCCS(J,K)
C
C
C AXIALE UND TANGENTIALE SPANNUNGSRATEN DSX(I,J) U. DST(I,J)
C DO 380 J=1,JF
      DUMMY1 = (RNK(J)+EVH*(EKXI(J)+V*EKTI(J)))/H
      DUMMY2 = EMCN*CMEGA(J)
      DUMMY3 = (-PP*L+EVH*(EKTI(J)+V*EKXI(J)))/H
C
C
C DO 380 I=1,IF
      DSX(I,J) = DUMMY1+V*DUMMY2*TETA(I)-EV*(EKX(I,J)+V*EKT(I,J))
380 DST(I,J) = DUMMY3+ DUMMY2*TETA(I)-EV*(EKT(I,J)+V*EKX(I,J))
C
C
C BERECHNUNG DER RADIAL- UND TANGENTIALVERSCHIEBUNGEN AN DEN STUETZ-
C STELLEN J=1 BIS JF CHNE GLEICHF. RADIALVERSCH.
C *****
C DO 390 J=1,JF
      WII(J) = 0.0
      VII(J) = 0.0
      DO 390 K=2,KF
      RK = K
      WII(J) = WII(J)+W(K)*VCCS(J,K)
390 VII(J) = VII(J)-W(K)*VSIN(J,K)/RK
C
C
C KONTR0LLSTOP DES PROGRAMMS
C *****
      WABS = ABS(WII(1))
      IF (WABS<0.2) 500,490,490
490 CALL TERM
500 RETURN
      END
C
C
C SLBROUTINE SUBCOS(VCCS,FUN,CCNST,ISYM,KMIN,JF,KF,RESV)
C DIMENSION VCCS(25,10),FLN(25),RESV(10)
C
C
C JFM1 = JF-1
C JFM2 = JF-2
C RJF3 = (JF-1)*3
C
C
C IF (KMIN .EQ. 2) RESV(1) = 0.0
C
C
C DO 100 K=KMIN,KF
      IF (ISYM .EQ. 1) GOTO 100
      IF (ABS(FLOAT(K)/2.0-FLCAT(K/2)) .LE. 1.0E-07) GOTO 100
      RESV(K) = 0.0
      GOTO 100
100 CUM = 0.0
      DO 110 J=3,JFM2,2
110 CUP = CUM+VCCS(J,K)*FLN(J)
C

```

```

      CGM= 0.0
      DO 120 J=2,JFM1,2
120  CGM= DGM+VCOS(J,K)*FUN(J)
C
      RESV(K)= CCNST*(VCOS(1,K)*FUN(1)+VCCS(JF,K)*FUN(JF)+2.0*DUM
1
      +4.0*DGM)/RJF3
130  CCNTINUE
C
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE SUBNCN(FUN,CCNST,JF,KF,RES)
DIMENSION FUN(25)
C
      JFM1= JF-1
      JFM2= JF-2
      RJF3= (JF-1)*3
C

```

```

      CLM= 0.0
      DO 100 J=3,JFM2,2
100  DUM= DUM + FUN(J)
C

```

```

      CGM= 0.0
      DO 110 J=2,JFM1,2
110  CGM= DGM + FUN(J)
C
      RES= CCNST*(FUN(1)+FUN(JF)+2.0*DUM+4.0*DGM)/RJF3
C
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE SETC
CCMCM /INTVAR/ X,Y(500)
CCMCM /DERIV/ DY(500)
DO 100 I=1,500
Y(I) = 0.0
100  DY(I)= 0.0
RETURN
END

```

```

FUNCTION TAVFUN(PHIFLN)
TAVFUN= 70.0 + 40.0*CCS(PHIFUN)
RETURN
END

```

```

FUNCTION DELFLN(PHIFLN)
DEFLN= 30.0
RETURN
END

```