

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM  
KARLSRUHE**

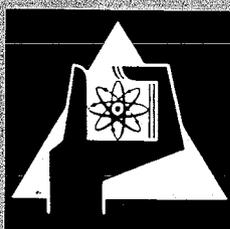
März 1972

KFK 1509

Institut für Experimentelle Kernphysik

Proton-Proton Final State Interaction  
in der Reaktion  $d + p \rightarrow p + p + n$

H. Matthäy



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.

KARLSRUHE

**Als Manuskript vervielfältigt**

**Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE**

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

März 1972

KFK 1509

Institut für Experimentelle Kernphysik

PROTON-PROTON FINAL STATE INTERACTION

IN DER REAKTION  $d + p \rightarrow p + p + n$  +)

H. Matthäy

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H. Karlsruhe

+)

Von der Fakultät für Physik der Universität Karlsruhe  
genehmigte Dissertation

[The page contains extremely faint and illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the document. The text is too light to transcribe accurately.]

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
Zusammenfassung	
Einleitung	1
1. Kinematik der Dreiteilchenreaktionen	3
2. Experimentelle Anordnung	
2.1 Prinzip der Meßmethode	6
2.2 Elektronik	8
2.3 On line Datenerfassungssystem "DATA"	11
2.4 Test des On line Systems mit der Reaktion $d+d \rightarrow d+p+n$	15
3. Korrekturen der Rohdaten aus der Reaktion $d+p \rightarrow p+p+n$	
3.1 Allgemeine Korrekturen	20
3.2 Ansprechwahrscheinlichkeit des Neutronendetektors	21
3.3 Doppelereignisse	24
4. Proton-Proton Final State Interaction in der Reaktion $d+p \rightarrow p+p+n$	
4.1 Experimentelle Ergebnisse und Vergleich mit der Neutron-Proton Final State Interaction	26
4.2 Theoretische Interpretation der Daten	26
4.3 Pole des Enhancementfaktors für die Proton- Proton Final State Interaction	33
5. Winkelkorrelationsmessungen	
5.1 Winkelkorrelationsmessungen für das n-p Subsystem	36
5.2 Winkelkorrelationsmessungen für das p-p Subsystem	40

	Seite
6. Erweiterte Theorie der Proton-Proton Final State Interaction	
6.1 Grundlagen	44
6.2 Berechnung der Matrixelemente	47
6.3 Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen	55
6.4 Erweiterung auf die Vierteilchenreaktion $d+d \rightarrow p+p+n+n$	58
 Anhang A	
Elektronische Schaltungen der einzelnen Komponenten im System DATA	60
 Anhang B	
Berechnung der Ansprechwahrscheinlichkeit des Neutronendetektors mit einer Monte Carlo-Methode	65

## Zusammenfassung

Das Hauptziel dieser Arbeit bestand in einer systematischen experimentellen Untersuchung der Proton-Proton Endzustandswechselwirkung in der Dreinukleonenreaktion  $d+p \rightarrow p+p+n$ . Die Experimente wurden mit einer Koinzidenzanordnung am externen 52.3 MeV Deuteronenstrahl des Karlsruher Isochronzyklotrons durchgeführt. Dabei wurde die vollständige Information, die das Experiment über jedes einzelne Koinzidenzereignis liefert, von einem speziell hierfür entwickelten vierparametrischen Datenerfassungssystem verarbeitet. Dieses System ist on line mit einem Computer vom Typ CDC 3100 gekoppelt.

Eine Proton-Proton Final State Interaction (p-p FSI) ist bisher anderweitig mit Koinzidenzexperimenten nur in den Dreiteilchenreaktionen  ${}^3\text{He}(p, pd)p$  und  ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, pp){}^4\text{He}$  beobachtet worden. |1| In beiden Fällen sind aber insgesamt mehr als drei Nukleonen an der Reaktion beteiligt. Daher ist auch die Anzahl der zur Reaktion beitragenden Mechanismen sehr viel höher als bei einer Dreinukleonenreaktion. Die in dieser Arbeit untersuchte Reaktion  $d+p \rightarrow p+p+n$  ist hingegen die einfachste Kernreaktion in der eine Proton-Proton FSI auftritt. Daher wurde diese Reaktion hier erstmals für eine systematische Untersuchung der Proton-Proton FSI herangezogen.

In kinematisch vollständigen Experimenten, bei denen zwei der drei Nukleonen im Ausgangskanal in Koinzidenz nachgewiesen werden, sind alle kinematischen Variablen des Endzustands eindeutig festgelegt. Eine spezielle Wahl der beiden Detektorwinkel erlaubt es, Zweinukleonensubsysteme bei Relativenergien bis herab zu Null zu untersuchen. Daraus ergibt sich eine Möglichkeit, die Proton-Proton Wechselwirkung auch bei Energien zu untersuchen, die so niedrig sind, daß eine Beobachtung der freien p-p Streuung hier auf unüberwindliche experimentelle Hindernisse stößt ( $E_{pp} \ll 300 \text{ KeV}$ ).

Eine systematische Untersuchung der Reaktion  $d+p \rightarrow p+p+n$  ist außerdem eine unerläßliche Vorbedingung für die Bestimmung der n-n Streulänge aus der analogen Reaktion  $n+d \rightarrow n+n+p$  |2|.

Die n-n Streulänge kann nämlich nur indirekt aus Dreiteilchenreaktionen ermittelt werden, da keine freien Neutronentargets zur Verfügung stehen. Zunächst muß man jedoch die Zuverlässigkeit der Extraktion von Zweiteilchenstreudaten aus Dreinukleonenreaktionen prüfen. Dazu untersucht man zweckmäßigerweise die Reaktion  $d+p \rightarrow p+p+n$  unter vergleichbaren kinematischen Bedingungen und vergleicht die aus diesem Experiment erhaltenen Werte für die p-p- und n-p Streulängen mit den aus der freien p-p- und n-p Streuung bekannten Werten. Die Anwendung dieses Verfahrens (Comparison procedure) lieferte für die p-p Streulänge bzw. für die n-p Singulettstreulänge typische Werte von  $a_{pp} = -7.5 \pm 0.5$  fm bzw.  $a_{np}^s = -22.7 \pm 0.5$  fm. Diese Werte stimmen gut mit den aus der freien Streuung bekannten Werten überein.

Neben diesen Aspekten, deren Schwergewicht auf dem Zweiteilchensubsystem liegt, ist es von besonderem Interesse, das Verständnis der dominanten Reaktionsmechanismen in Dreiteilchenreaktionen zu vertiefen und die Anwendbarkeitsbereiche einfacher Reaktionsmodelle gegeneinander abzugrenzen. Diese Modelle sind die Impulsapproximation für die quasifreie Streuung und der Watson-Migdal Ansatz für die Final State Interaction. Es erweist sich, daß keines der beiden Modelle allein in der Lage ist, Meßdaten über einen großen kinematischen Bereich zu beschreiben.

Das Watson-Migdal Modell beruht auf der Annahme einer reinen Zweistufenreaktion. Der Gültigkeitsbereich eines solchen Zweistufenreaktionsmodells wurde durch vergleichende Messungen der Winkelverteilungen in n-p- und p-p Subsystemen direkt ermittelt. Es bestätigte sich, daß das Watson-Migdal Modell bei kleinen Relativenergien sehr gut anwendbar ist, sofern der Beitrag der quasielastischen Streuung klein ist.

Im Fall der p-p Final State Interaction tritt zum rein nuklearen Anteil der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung die langreichweitige Coulombkomponente hinzu. Die bisher verwandten Modelle, nämlich das Watson Modell und das Modell der quasifreien Streuung,

reichen in diesem Fall nicht aus, um die Meßdaten über den experimentell erfaßten Bereich zu beschreiben. Deshalb wurde ein verallgemeinertes Modell entwickelt, das beide Mechanismen in Gestalt eines Zweistufenprozesses einschließt. Dieses neue Modell reproduziert in niedrigster Näherung die beiden erwähnten Ansätze und ist aber auch in der Lage Interferenzeffekte zu beschreiben. Eine Erweiterung des Modells auf die Vierteilchenreaktion  $d+d \rightarrow p+p+n+n$  wird ebenfalls diskutiert.

Teilergebnisse dieser Arbeit wurden in [3] veröffentlicht.

## Abstract

The proton-proton final state interaction in the reaction  $d+p \rightarrow p+p+n$  was investigated systematically by kinematically complete experiments using the 52.3 MeV external deuteron beam of the Karlsruhe Isochronous Cyclotron.

The analysis of the data in terms of a slightly modified Watson Migdal ansatz resulted in typical values of the p-p scattering length which are in good agreement with the value known from free p-p scattering. (The same holds for the value of n-p singlet scattering length measured under the same kinematical conditions, as compared with the result of free n-p scattering).

In a special set of experiments the angular distribution of final state interacting p-p and n-p pairs in their c.m. system was measured in order to test the applicability of the two step reaction model to the reaction under investigation.

Finally a new approach to a simple theory of proton-proton final state interaction was developed. Within the framework of this model the reaction is assumed to proceed via a two step process with a zero range break-up mechanism in the first step which is followed by a p-p final state interaction. The model includes pure Coulomb final state interaction in all partial waves. The results of the calculation are in good agreement with experimental data.

## Einleitung

Die experimentelle Untersuchung und die theoretische Behandlung des Dreikörperproblems im Bereich der Kernphysik haben im Laufe der letzten Jahre zunehmend an Interesse gewonnen. Ihren Ausdruck fand diese Entwicklung in den internationalen Konferenzen von Brela: Conference on the few body problem 1967 | 4 | und Birmingham: Conference on the three body problem 1969 | 5 |.

Auf der experimentellen Seite konnten durch die Verwendung von Computern als mehrparametrischen Datenerfassungssystemen in Koinzidenzexperimenten erhebliche Fortschritte erzielt werden | 6,7 |. So gelangte im Rahmen dieses Experiments zur systematischen Untersuchung der Proton-Proton Final State Interaction in der Reaktion  $d+p \rightarrow p+p+n$  erstmals ein vierparametrisches Datenerfassungs- und Verarbeitungssystem zum Einsatz | 8 |. Dieses System gestattet es, die Teilchenidentifizierung "on line" per Computer vorzunehmen. Es bietet den Vorteil in einem Experiment mehrere Reaktionskanäle simultan beobachten zu können.

Die erheblichen Fortschritte, die auf theoretischem Gebiet in der Behandlung des nuklearen Dreikörperproblems erzielt wurden, wurden im wesentlichen durch die grundlegenden Arbeiten von Faddeev | 9 |, Mitra |10| und Amado |11| eingeleitet. Die grundsätzlichen Schwierigkeiten, die bei der theoretischen Behandlung des nuklearen Dreikörperproblems auftreten, lassen sich folgendermaßen skizzieren. Zwar ist es möglich für ein Dreiteilchenstreuproblem in Analogie zum Zweiteilchenstreuproblem Gleichungen vom Lippmann-Schwinger-Typ zu formulieren; diese erweisen sich aber als zunächst nicht lösbar. Denn wie schon im Zweiteilchenfall macht auch hier das Auftreten gebundener Zustände und Resonanzen in Subsystemen die Anwendbarkeit von Störungsrechnungen aussichtslos.

Während aber im Zweiteilchenfall das Fredholmverfahren zur Lösung der entsprechenden Integralgleichungen herangezogen werden kann, ist das für den Dreiteilchenfall nicht möglich, da durch das Auftreten von  $\delta$ -Funktionen, die die Impulserhaltung in den Subsystemen garantieren, der Kern der Integralgleichung seine Vollstetigkeit verliert.

Gerade diese Eigenschaft aber setzt das Fredholmverfahren voraus. Erst Faddeev gelang es in der zitierten Arbeit durch Umordnung der Terme der iterierten Gleichung ein Gleichungssystem anzugeben, das prinzipiell die Lösung des Dreiteilchenstreuproblems gestattet, aber noch nach Drehimpulszerlegung zweidimensional ist und sich daher für eine numerische Rechnung als unhandlich erweist.

Ein zunächst unterschiedlich erscheinendes Verfahren wandten Amado und Mitarbeiter an. Sie formulierten das Dreinukleonenstreuproblem mit feldtheoretischen Methoden in Analogie zu dem in der Hochenergiephysik gebräuchlichen Lee-Modell [12], wobei anstelle des Zweibarion-Meson-Vertex ein Deuteron-Zweinukleon-Vertex tritt. Dieses Modell führt ebenso wie die Rechnungen mit separablem Potential auf eindimensionale Integralgleichungen und ist, wie sich zeigen läßt, der Einführung eines separablen Potentials äquivalent.

Schließlich erbrachten Sandhas und Mitarbeiter [13] den Nachweis, daß man im Unterschied zu dem ursprünglichen Vorgehen von Faddeev bei der Lösung des Problems direkt von Gleichungen des Lippmann-Schwinger-Typs ausgehen kann und zu praktikablen Gleichungen gelangt, wenn man die von Resonanzen und gebundenen Zuständen herührenden Polterme mit separablem Ansatz erfasst und den nicht separablen Rest in Störungsrechnung behandelt.

Bisher liegen allerdings nur wenige auf den erwähnten Theorien basierende Rechnungen vor, die Voraussagen über den Verlauf von Einzelteilchenspektren liefern. Da aber die Einzelteilchenspektren automatisch über verhältnismäßig weite kinematische Bereiche integrieren, gehen Details der Information verloren. Ein Vergleich von Resultaten der exakten Rechnungen mit gemessenen Einteilchenspektren macht darüberhinaus deutlich, daß sie die experimentellen Daten gerade in den kinematischen Bereichen wo ein starker Beitrag von der Final State Interaction erwartet wird, nur grob reproduzieren. Außerdem führen alle bisher ausgeführten "exakten Rechnungen" zu dem gleichen verblüffenden Ergebnis, daß gerade diejenigen in der Rechnung mitgeführten Terme, die die Final State Interaction nicht explizit berücksichtigen, dort dominieren, wo ein erheblicher Beitrag des Final State Interaction - Mechanismus erwartet wird [14]. Diese Paradoxie ist noch nicht voll geklärt, da bisher noch keine

Voraussagen für kinematisch vollständige Experimente existieren. Gerade die Ergebnisse dieser Experimente stellen aber einen sehr empfindlichen Test für die Anwendbarkeit einer Theorie dar. Da überdies noch keine exakten Rechnungen vorliegen, die den Effekt der Proton-Proton Final State Interaction einschließen, mußte bei der Analyse experimenteller Ergebnisse aus den Koinzidenzmessungen auf einfache aber bewährte Modelle wie das Watson-Migdal Modell zurückgegriffen werden. Darüberhinaus wird in dieser Arbeit eine Erweiterung des Watson-Migdal Modells entwickelt, die auch den Mechanismus der quasifreien Streuung berücksichtigt und daher auch in kinematischen Bereichen angewandt werden kann, wo das einfache Watson-Migdal Modell versagt.

### 1. Kinematik der Dreiteilchenreaktionen

Bei einer Kernreaktion vom Typ  $1+2\rightarrow 3+4+5$  mit drei Teilchen bekannter Masse im Endzustand legen die Impulsvektoren  $\vec{p}_3, \vec{p}_4, \vec{p}_5$  sämtliche kinematischen Variablen im Ausgangskanal eindeutig fest. Die neun Impulskomponenten  $p_{x\lambda}, p_{y\lambda}, p_{z\lambda}$  ( $\lambda=3,4,5$ ) sind jedoch nicht voneinander unabhängig, denn Energie- und Impulserhaltungssatz reduzieren die Anzahl der unabhängigen Variablen auf fünf. Weist man zwei der drei auslaufenden Teilchen, beispielsweise die Teilchen 3 und 4 in Koinzidenz nach, so werden durch die Polar- und Azimutalwinkel  $\theta_\lambda, \phi_\lambda$  ( $\lambda=3,4$ ) unter denen die Zähler stehen, weitere vier Variable festgelegt. Für eine solchermaßen vorgegebene Geometrie liefern der Energie- und der Impulserhaltungssatz eine maximal zweideutige Beziehung zwischen den Energien  $E_3$  und  $E_4$  der nachgewiesenen Teilchen, die als sogenannte kinematisch erlaubte Kurve in der  $E_3 - E_4$  Ebene dargestellt werden kann. | 15,16 |

Mißt man daher bei fester Geometrie die Energie beider koinzident nachgewiesenen Teilchen, so sind hiermit sämtliche kinematische Variablen für das Dreiteilchensystem im Ausgangskanal eindeutig festgelegt.

Im Hinblick auf die in dieser Arbeit enthaltenen Ergebnisse der Winkelkorrelationsmessungen zum Test des Zweistufenreaktionsmodells ist es nützlich, die Kinematik im Ausgangskanal der Dreiteilchenreaktion noch für einen anderen Satz kinematischer Variablen zu diskutieren. Bei vorgegebener Einschußenergie für Teilchen 1 ist

allein durch die Kenntnis der Flugrichtung und der Energie von Teilchen 3 über den Impulssatz der Schwerpunktimpuls des Systems (4, 5) eindeutig festgelegt. Zusätzliche Anwendung des Energiesatzes legt auch die Energie  $E_{45}$ , der beiden Teilchen im Subsystem (4, 5) eindeutig fest. Eine Vieldeutigkeit besteht lediglich für die Emissionswinkel  $\theta_{45}$ ,  $\phi_{45}$ , unter denen die beiden Teilchen im Subsystem emittiert werden.

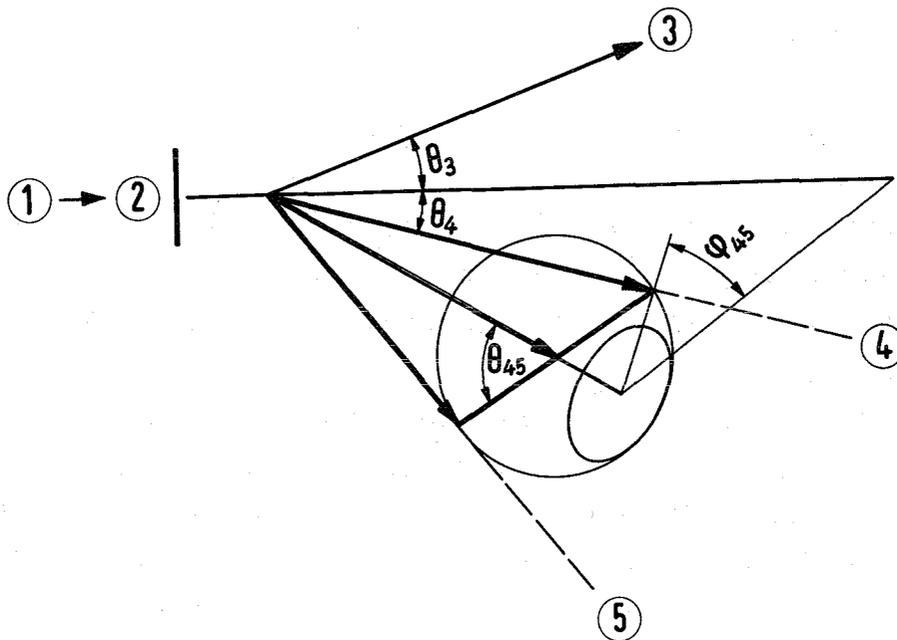


Abb. 1.1 Schematische Darstellung der Dreiteilchenkinematik und der verwendeten Nomenklatur.

Erst die Aufstellung des zweiten Zählers, der beispielsweise Teilchen 4 in Koinzidenz mit Teilchen 3 nachweist, beseitigt diese Vieldeutigkeit, die allen Experimenten anhaftet, bei denen Dreiteilchenreaktionen mit einem Detektor untersucht werden.

Das ist von besonderer Wichtigkeit, wenn die Emission der beiden Teilchen im Subsystem anisotrop erfolgt. Eine solche Anisotropie ist, wie bei der Diskussion der Winkelkorrelationsmessungen erläutert wird, die Konsequenz bestimmter Reaktionsmechanismen. Daher sind Koinzidenzexperimente in besonders hohem Maße geeignet, detaillierte Information über den Beitrag bestimmte Reaktionsmechanismen in Dreiteilchenreaktionen zu gewinnen. Ein kinematisch vollständiges Experiment, bei dem z.B. die Teilchen 3 und 4 in Koinzidenz nachgewiesen werden, liefert die Verteilung der Ereignisse auf der kinematisch erlaubten Kurve als Funktion der Teilchenenergien  $E_3$  und  $E_4$ . Aus der Projektion eines Zweiges dieses Spektrums, z.B. auf die Energieachse  $E_i$  ( $i=3, 4$ ) läßt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt  $d^3\sigma/dE_i \cdot d\Omega_3 \cdot d\Omega_4$  ermitteln. Der Wirkungsquerschnitt ist mit dem Matrixelement  $|\langle T \rangle|$  für die spezielle Dreiteilchenreaktion und dem Phasenraumfaktor  $\rho_{ps}(E_i)$ , der die statistische Verteilung der Teilchen auf den zur Verfügung stehenden Phasenraum beschreibt, durch folgende Beziehung verknüpft.

$$\frac{d^3\sigma}{dE_i d\Omega_3 d\Omega_4} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{m_1}{p_1} |\langle T \rangle|^2 \rho_{ps}(E_i)$$

Der Phasenraumfaktor hat folgende Gestalt

$$\rho_{ps}(E_4) = \frac{1}{h^6} \frac{m_3 \cdot m_4 \cdot m_5 \cdot p_3 \cdot p_4}{(m_3 + m_5) - \frac{m_3 (\vec{p}_1 - \vec{p}_4) \vec{p}_3}{p_3^2}}$$

$\rho_{ps}(E_3)$  erhält man durch Vertauschen der Indizes 3 und 4.

Dafür, daß genau definierte kinematische Bedingungen für die Beobachtung der Reaktionsprodukte aus Dreiteilchenreaktionen das Auftreten bestimmter Reaktionsmechanismen begünstigen, sollen im folgenden zwei Beispiele gegeben werden.

- a) Effekte, die durch die Nukleon-Nukleon Final State Interaction (FSI) in einer Dreiteilchenreaktion zustande kommen, treten besonders stark in Erscheinung, wenn die Relativenergie der beiden betreffenden Nukleonen minimal ist. Auf die Reaktion  $d+p+p+n$  angewandt heißt das, daß man zur Beobachtung dieses

Mechanismus die Winkel  $\theta_3$  und  $\theta_4$  unter denen die Detektoren stehen so wählen muß, daß dabei die Relativenergie  $E_{45}$  für die Teilchen 4 und 5 bis zu Null herabreicht.

- b) Ein anderer wesentlicher Mechanismus ist die quasifreie Streuung (QFS). Die Bedeutung dieses Prozesses für die Reaktion  $d+p \rightarrow p+p+n$  wird durch Abb.1.2 symbolisiert.

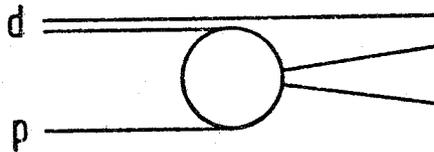


Abb. 1.2 Graph für die quasifreie Streuung in der Reaktion  $d+p \rightarrow p+p+n$ .

Charakteristisch für diesen Reaktionsmechanismus ist, daß nur ein Nukleon des einlaufenden Deuterons mit dem Targetproton in Wechselwirkung tritt, während das andere Nukleon (der sogenannte Spectator) mit dem Impuls, den es aus dem Deuteron mitbekommen hat, geradeaus fliegt. Die Summe der Winkel, unter denen die beiden quasifreigestreuten Nukleonen emittiert werden, beträgt im speziellen Fall etwa  $84^\circ$  in Analogie zur freien Nukleon-Nukleon-Streuung, wo die entsprechende Summe  $90^\circ$  beträgt. Die Differenz kommt durch die zum Aufbruch des Deuterons benötigte Energie zustande.

## 2. Experimentelle Anordnung

### 2.1 Prinzip der Meßmethode

Da dieses Experiment die Untersuchung der p-p FSI bis herab zu niedrigsten Relativenergien im p-p Subsystem zum Ziel hatte, erwies es sich als notwendig, jeweils ein Proton in Koinzidenz mit dem Neutron nachzuweisen. Die experimentelle Anordnung ist in Abb. 2.1 dargestellt.

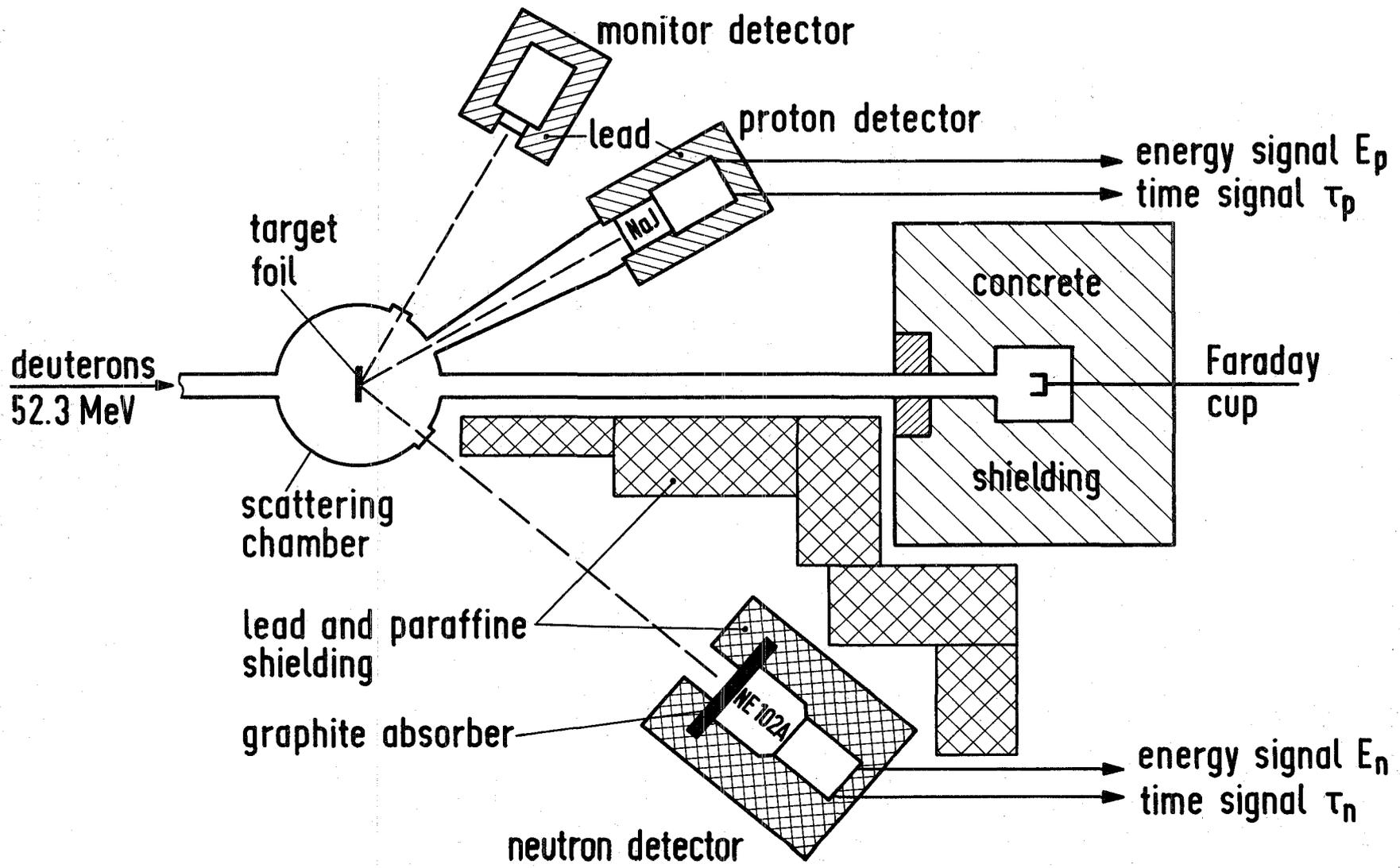


Abb. 2.1 Schematische Darstellung der experimentellen Anordnung.

Der externe 52.3 MeV Deuteronenstrahl des Karlsruher Isochronenzyklotrons trifft auf eine in der Mitte einer zylindrischen Streukammer von 305 mm Durchmesser angebrachte Polyäthylenfolie, die über eine Massenbelegung von ca.  $3 \text{ mg/cm}^2$  verfügt. Der Strahldurchmesser am Targetort wird durch Quadrupollinsen auf  $2 \times 2 \text{ mm}^2$  fokussiert. Die beiden Detektoren befinden sich auf ca. 1 m langen Armen, die unabhängig frei um die Kammerachse drehbar sind. Der verhältnismäßig große Abstand der Zähler vom Target ist notwendig, um eine Flugzeitmessung durchführen zu können. Um die Energieverluste des Protons gering zu halten, befindet sich zwischen dem Austrittsfenster der Kammer und dem Protonendetektor ein Rohr, das evakuiert ist. Als Protonendetektor dient ein NAJ(TL)-Zähler. Als Neutronenzähler wurde ein NE 102A Plastikzähler von 8 cm Länge und 7 cm Durchmesser verwendet. Um gegen geladene Teilchen zu diskriminieren, wurde vor seiner Frontfläche eine Graphitscheibe angebracht, in der die geladenen Teilchen absorbiert werden.

Die Winkelauflösung betrug für die verschiedenen Experimente im Protonenzweig etwa  $0,5^\circ$  und im Neutronenzweig etwa  $1,5^\circ - 2^\circ$ . Die Genauigkeit der Winkeleinstellung ist auf besser als  $0,1^\circ$  reproduzierbar. Von beiden Detektoren wurden Energiesignale und über speziell konstruierte Tunneldiodenkreise [17] Zeitmarkensignale abgenommen. Die kombinierte Energie-Flugzeitinformation wurde in dem Zweig, in dem die geladenen Teilchen nachgewiesen wurden, zur Teilchenidentifikation benutzt. Die Neutronenenergie wurde über eine Flugzeitmessung bestimmt. Der Primärstrahlstrom wurde mit einem Faraday-Käfig gemessen. Unabhängig davon wurden mit einem Monitorzähler unter  $46^\circ$  die Rückstoßprotonen aus der elastischen d-p Streuung registriert. Auf diese Weise kann auch eine Veränderung der Targetdicke, die durch Strahlbelastung zustande kommt, berücksichtigt werden.

## 2.2 Elektronik

Die Anordnung der Elektronik wird durch das Prinzipschaltbild in Abb. 2.2 verdeutlicht. Die Zeitmarkensignale des Neutronendetektors (Det. 3) und des Protonendetektors (Det. 4) gelangen nach geeigneter Verzögerung und Impulsformung durch Diskriminatoren auf die beiden Flugzeitkreise, die hier durch die Bezeichnungen

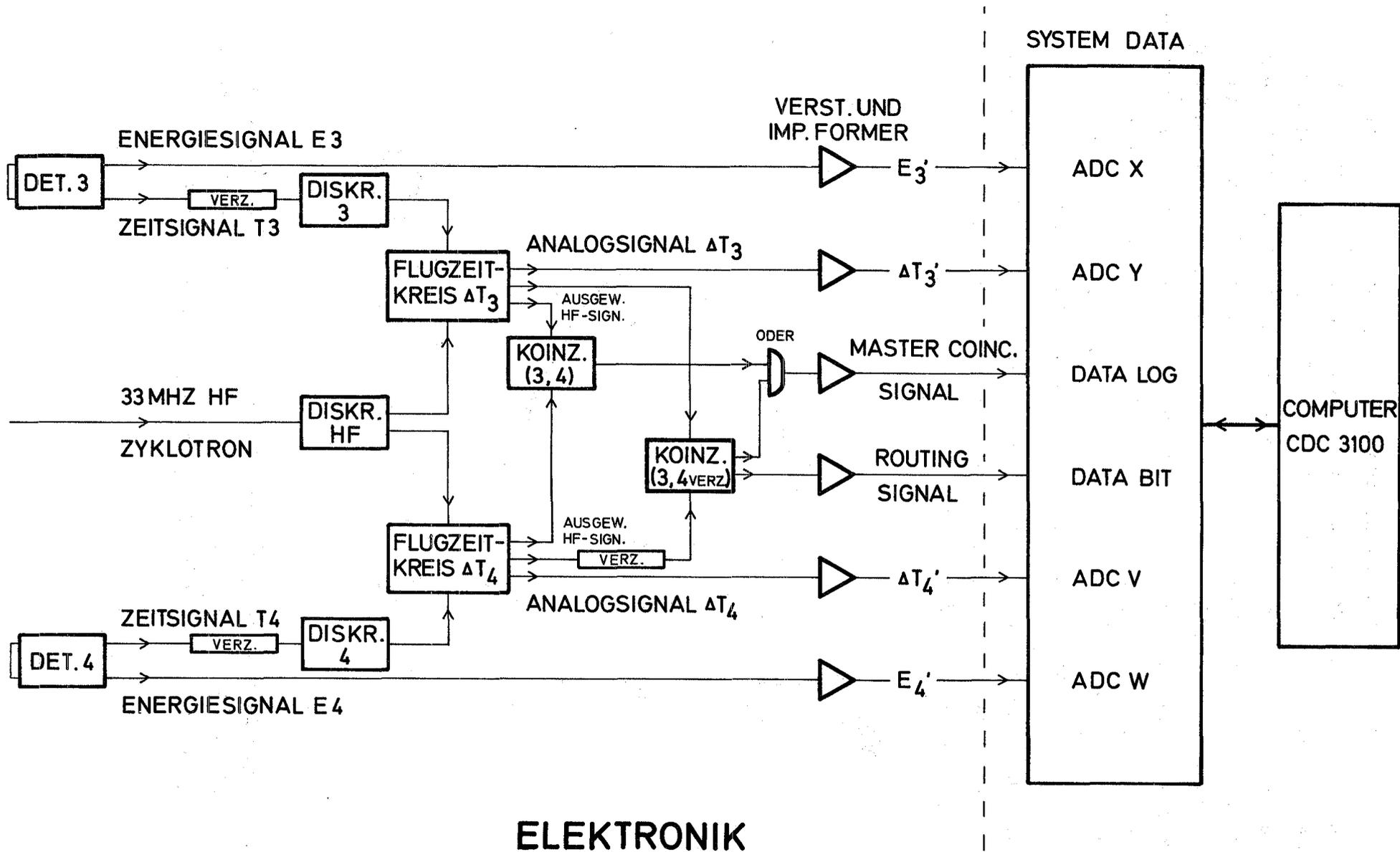


Abb. 2.2 Blockschaltbild der Elektronik.

$\Delta\tau_3$  und  $\Delta\tau_4$  symbolisiert werden. Zusätzlich gelangt eine von den 33 MHz HF des Zyklotrons über einen schnellen Diskriminator abgenommene Impulsfolge auf beide Kreise. Die Flugzeitkreise sind in [18] ausführlich beschrieben. Ihre Funktion besteht darin, daß jedes der beiden Zeitmarkensignale aus der Impulsfolge ein Signal auswählt, zu dem es zeitlich korreliert ist. Diese als ausgewählte HF-Signale bezeichneten Signale gelangen auf eine schnelle Koinzidenz (3,4), deren Auflösung nach oben durch den zeitlichen Abstand zweier Strahlimpulse (30 ns) begrenzt ist. Wählen beide Zweige das gleiche HF-Signal aus, wird eine Koinzidenz registriert.

Eine typische kinematische Kurve, auf der die Koinzidenzereignisse liegen müssen, ist in Abb.2.3 als Funktion der Protonenenergie und der Neutronenflugzeit dargestellt.

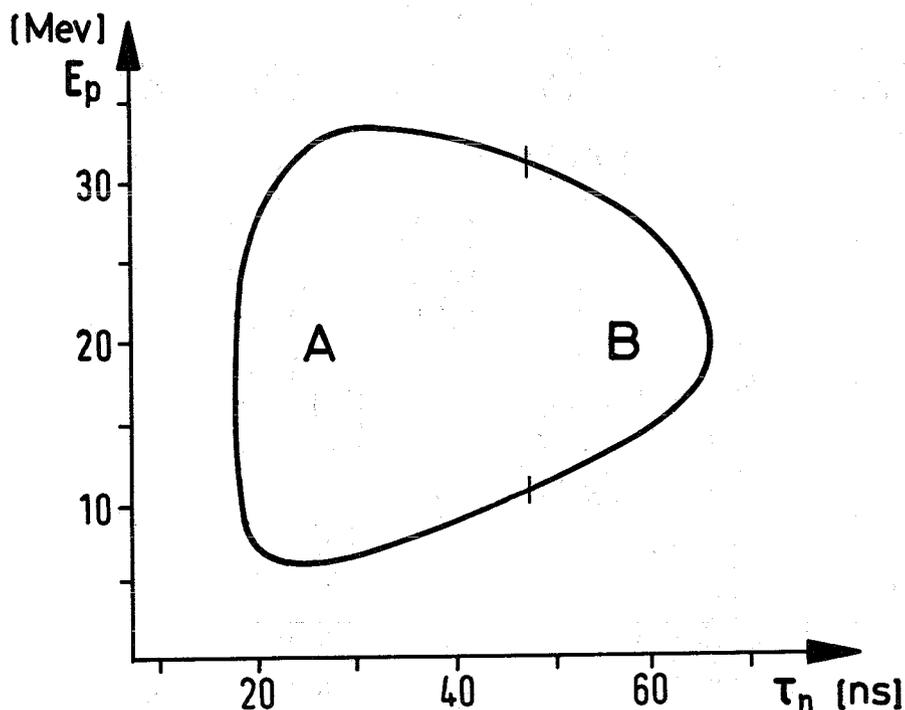


Abb. 2.3 Kinematisch erlaubte Kurve für ein n-p Koinzidenzspektrum ( $\theta_n = 42.0^\circ$ ,  $\theta_p = 25.3^\circ$ ) als Funktion der Protonenenergie  $E_p$  und der Neutronenflugzeit  $\tau_n$ . ( $E_d = 52.3$  MeV)

Das Beispiel zeigt, daß unter den vorgegebenen geometrischen Bedingungen die zu messenden Neutronenflugzeiten um mehr als 30 ns differieren. Bei einer Koinzidenz zwischen den HF-Impulsen, deren zeitlicher Abstand 30 ns beträgt, werden daher je nach Verzögerung nur solche Ereignisse ausgewählt, die im Teil A oder im Teil B der kinematischen Kurve liegen. Zur Erfassung aller Ereignisse auf der gesamten kinematisch erlaubten Kurve ist daher eine zusätzliche Koinzidenz (3,4 verzögert) notwendig. Ihr Ausgangssignal gelangt zusammen mit dem Ausgangssignal der Koinzidenz (3,4) auf ein Or-Gate, das das sogenannte Masterkoinzidenzsignal generiert. Dieses Signal startet jeden Verarbeitungszyklus des nachgeschalteten Datenverarbeitungssystems "DATA".

Neben diesem und anderen logischen Signalen verarbeitet das System die gesamte, in Form von Analogsignalen vorliegende Information über Flugzeit und Energie beider koinzident nachgewiesenen Teilchen. Außerdem wird mit der Koinzidenz (3,4) verzögert ein Routingsignal generiert, das dafür sorgt, daß Ereignisse, die auf dem Teil A oder dem Teil B der kinematischen Kurve liegen, im Kernspeicher des Computers CDC 3100 in getrennten Bereichen abgespeichert werden. Die Grundkonzeption und die verschiedenen Funktionen des Systems "DATA" werden im folgenden Abschnitt behandelt.

### 2.3 On-line Datenerfassungssystem "DATA"

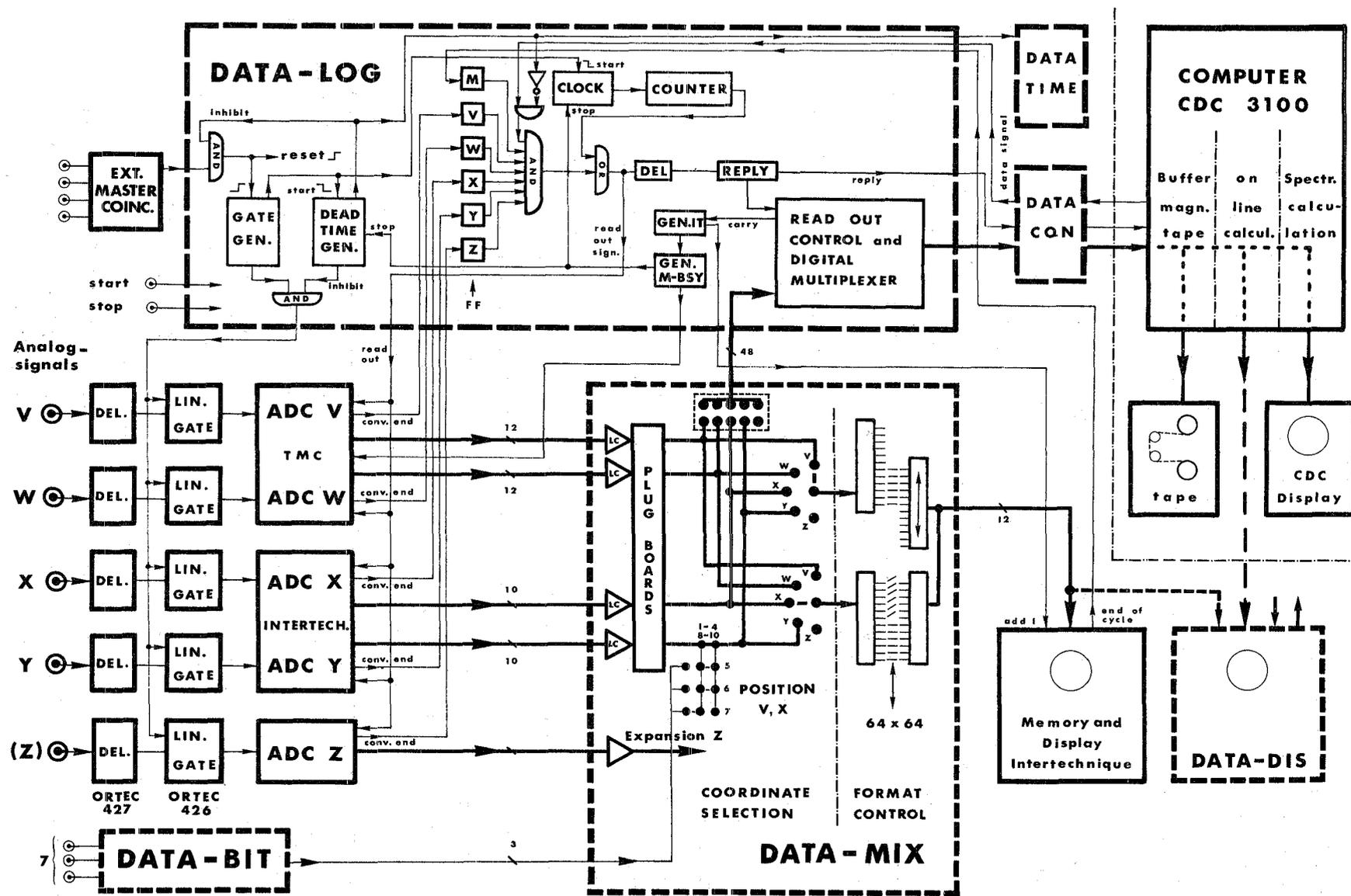
Wie bereits bei der Behandlung der Kinematik ausgeführt wurde, sind bei einer Reaktion mit drei Teilchen im Endzustand sämtliche kinematische Variablen im Ausgangskanal eindeutig festgelegt wenn die Energien zweier koinzident nachgewiesener Reaktionsprodukte gemessen werden.

Diese rein kinematische Betrachtung läßt aber die Tatsache unberücksichtigt, daß von der experimentellen Anordnung mit zwei Detektoren im allgemeinen mehrere Reaktionskanäle, die für das **Target- und Geschoßteilchen offen sind, simultan erfaßt werden**. Die Notwendigkeit diese Kanäle voneinander zu trennen, macht eine Teilchenidentifizierung erforderlich. Diese verlangt neben der Kenntnis der Energien beider koinzident nachgewiesener Teilchen zusätzliche Information, die wie in dem hier beschriebenen Experiment durch eine

Flugzeitmessung für beide Teilchen oder aber auch durch eine zusätzliche  $dE/dx$  Messung erhalten werden kann. Da bei den bisher üblichen zweiparametrischen Meßverfahren diese Information nicht weiter verarbeitet werden konnte, wurden sie lediglich dazu verwandt, mittels einer verhältnismäßig aufwendigen Analogelektronik Ereignisse aus einem bestimmten Reaktionskanal auszuwählen und gleichzeitig alle simultan angelieferte Information über die anderen Reaktionskanäle zu unterdrücken. Ein zusätzlicher Nachteil einer solchen Analogelektronik besteht darin, daß eine Vielzahl von Schwellen gesetzt werden muß, die über den Verlauf des gesamten Experiments extrem konstant gehalten werden müssen. Etwaige geringe Schwankungen sind aber nur sehr schwer zu erkennen.

Als weit vorteilhaftere Alternativlösung erweist sich das Verfahren, die für jedes Koinzidenzereignis in Form von Analogsignalen vorliegende Information über die Flugzeiten und die Energien beider Teilchen zu digitalisieren und die gesamte digitale Information auf einen "On line" Rechner zu übertragen. Im Rechner kann man nun Ereignisse aus einem bestimmten Reaktionskanal auswählen und gleichzeitig mit der gesamten vom Experiment angelieferten Information über konkurrierende Kanäle auf Magnetband archivieren.

Diese Überlegungen führten zur Konzeption des vierparametrischen Datenerfassungssystems DATA, das zu jedem Koinzidenzereignis die gesamte Information über Flugzeit und Energieverlust beider Teilchen in den Zählern erfasst, digitalisiert und verarbeitet. Der gesamte Signal- und Datenfluß im System DATA wird in Abb. 2.4 schematisch dargestellt. Die vier Analogsignale (im folgenden als V, W, X, Y bezeichnet) die die Information über Energieverlust und Flugzeit beider Teilchen enthalten, gelangen nach angemessener Verzögerung über lineare Gates auf vier im System **integrierter Analog-Digitalkonverter** und werden von diesen mit einem Konversionsbereich von maximal 12 bit/Signal digitalisiert. Die nun in digitaler Form vorliegende Information (maximal 48 bit) wird von der zentralen Steuereinheit DATALOG über die zentrale Schalteinheit DATAMIX und das eigentliche Interface DATACON zum Rechner CDC 3100 übertragen, der sie weiterverarbeitet und auf Magnetband speichert. Da die Wortlänge der CDC 3100 24 bit beträgt, erfolgt die Übertragung dann, wenn mehr als 24 bit konvertiert werden sollen, in zwei 24 bit-Worten.



## SYSTEM 'DATA'

Abb. 2.4 Funktionsschaltbild des Datenerfassungssystems DATA.

Unabhängig davon wird ein Teil der Gesamtinformation (maximal 12 bit) in der Einheit DATAMIX abgezweigt und auf eine 4K-Memory- und Displayeinheit übertragen. Er gelangt dort zu Kontrollzwecken in Form eines zweidimensionalen Spektrums zur Darstellung. Die Auswahl der zwei aus insgesamt vier Koordinaten und die Wahl des Darstellungsformats wird ebenfalls über die Einheit DATAMIX vorgenommen.

Die Einheit DATALOG dient als zentrale Steuereinheit für das gesamte System. Jeder Funktionszyklus wird durch ein externes Masterkoinzidenzsignal eingeleitet, das nur dann von der Einheit akzeptiert wird, wenn das System nicht mehr mit der Verarbeitung von Information aus dem vorhergegangenen Ereignis beschäftigt ist. Die Anstiegsflanke des Masterkoinzidenzsignals generiert ein internes Reset-Signal, das alle Komponenten des Systems zu Beginn eines jeden Zyklus in einen definierten Zustand bringt und triggert den Gategenerator, der die den ADC's vorgeschalteten linearen Gates für eine fest einstellbare Zeit öffnet. Die Endflanke des Gatesignals setzt das Totzeitflipflop und sperrt das Masterkoinzidenzgate und die linearen Gates bis zum Ende des Verarbeitungszyklus. Die Dauer dieses Totzeitintervalls wird von einem Totzeitzähler erfasst und aufintegriert.

Jeder im System integrierte ADC (V,W,X,Y) generiert, wenn er die Konversion abgeschlossen hat, ein Konversionsendsignal, mit dem die entsprechenden Flipflopspeicher im DATALOG gesetzt werden. Das Flipflop M speichert das End of Cycle-Signal (EOC), das die zusätzliche Memoryeinheit am Ende ihres Speicherzyklus abgibt. Wenn der Computer in der Lage ist, neue Daten von peripheren Einheiten zu empfangen, wird das durch ein als Datasignal bezeichnetes Pegelsignal angezeigt, welches zusammen mit den Ausgangspegeln der Flipflopspeicher V,W,X,Y,M auf das zentrale Abrufgate gelangt. Wenn alle ADC's ihre Konversion beendet haben und sowohl der Rechner **als auch** die 4K-Memory und Speichereinheit zur Datenübernahme bereit sind, generiert das zentrale Gate das Read Out-Signal für die ADC's. Das erste 24 bit-Wort kann zum Rechner übertragen werden. Mit einer vorgegebenen Verzögerung wird ein Replysignal erzeugt, das dem Rechner anzeigt, daß Daten zur weiteren Verarbeitung anstehen. Wie der Name sagt, dient das Replysignal als Antwort auf das Datasignal, das nach Empfang durch den Rechner verschwindet und

erst dann wieder erscheint, wenn der Rechner zum Empfang des zweiten 24 bit Worts bereit ist. Dann kann der Auslesezyklus für das zweite 24 bit Wort gestartet werden. Anschließend setzt das Carry-Signal der Auslesekontrolle das Totzeitflipflop um. Dadurch wird das dem zentralen Gate vorgeschaltete Gate für das Datasignal gesperrt und das Masterkoinzidenzgate wieder geöffnet. Das Add One-Signal für die zusätzliche Memoryeinheit wird nur einmal am Ende des gesamten Übertragungszyklus generiert.

Es kann nun vorkommen, daß eines der Signale, die den Abruf generieren, nämlich die Konversionsendsignale der ADC's, das Datasignal des Computers oder das EOC-Signal der Memoryeinheit nicht empfangen wird. Beispielsweise kann in einer der Einheiten eine Störung aufgetreten sein oder die Impulshöhe eines der Analogsignale fällt nicht in das am ADC durch Diskriminatoren einstellbare Fenster. In diesem Fall wird nach der längsten möglichen Konversionszeit automatisch durch das Overflowsignal eines Zählers ein Abrufzyklus gestartet und außerdem im Falle einer Störung angezeigt, wo sie auftritt. Details von Schaltungen der beschriebenen Funktionseinheiten befinden sich in Anhang A.

#### 2.4 Test des On Line Systems mit der Reaktion $d+d \rightarrow d+p+n$

Als Beispiel für die vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten des Vierparametersystems und seine Überlegenheit gegenüber konventionellen elektronischen Anordnungen soll das Ergebnis einer Testmessung dienen, bei der die Reaktion  $d+d \rightarrow d+p+n$  untersucht wurde. Dabei wurden die geladenen Reaktionsprodukte unter verschiedenen Winkeln  $\theta_3 = 40^\circ$   $\theta_4 = 26^\circ$  in Koinzidenz nachgewiesen. Die Auflösung der Koinzidenz betrug 30 ns. Da durch die dem System vorgeschaltete schnelle Elektronik und Analogelektronik keine Teilchendiskriminierung vorgenommen wird, registrieren beide Zähler sowohl Deuteronen als auch Protonen. Da die Zähler asymmetrisch zur Strahlachse aufgestellt waren, erwartet man, daß sich die Ereignisse auf zwei verschiedene kinematische Kurven verteilen, wie sie in Abb. 2.5 schematisch gezeigt sind. Tatsächlich beobachtet man, wie das zugehörige experimentelle Spektrum in Abb. 2.5 zeigt, eine starke Häufung der Ereignisse längs beider kinematischer Kurven.

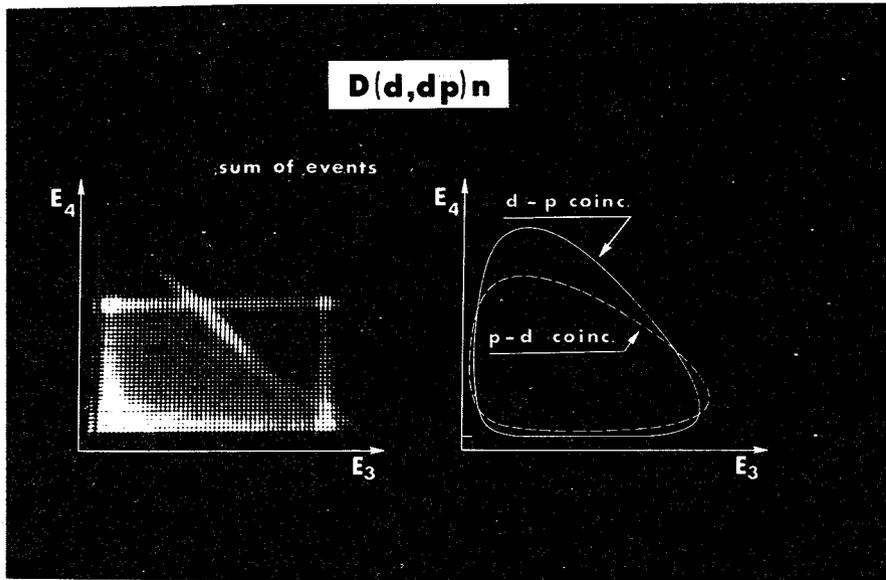


Abb. 2.5 Experimentelles Spektrum und kinematische Kurven für die Reaktion  $d+d \rightarrow d+p+n$  (Detektorwinkel  $\theta_3 = 40^\circ$ ,  $\theta_4 = 26^\circ$ ).

Darüberhinaus zeigt das Spektrum die als Balken sichtbare typische Verteilung der Zufallskoinzidenzen zwischen den Reaktionsprodukten und elastisch gestreuten Deuteronen. Dieses Spektrum enthält nun die gleiche Information wie man sie beim Einsatz eines zweiparametrischen Vielkanalanalysators erhalten würde. Eine Trennung der beiden Ereignistypen wäre allerdings insbesondere in dem Bereich, wo sich die beiden kinematischen Kurven überlappen, nicht mehr möglich. Es bliebe nur der Ausweg, gegen alle Ereignisse auf einem Zweig zu diskriminieren und damit auf einen erheblichen Teil der experimentellen Information zu verzichten.

Die vom Vierparametersystem zusätzlich gelieferte Information über die Flugzeit beider Teilchen ermöglicht eine Trennung beider Zweige ohne Ausnutzung der Tatsache, daß man den Verlauf beider kinematischer Kurven kennt. Das dazu verwendete Verfahren wird durch Abb. 2.6 verdeutlicht. Sie zeigt für beide Zähler die Energie beider Teilchen-

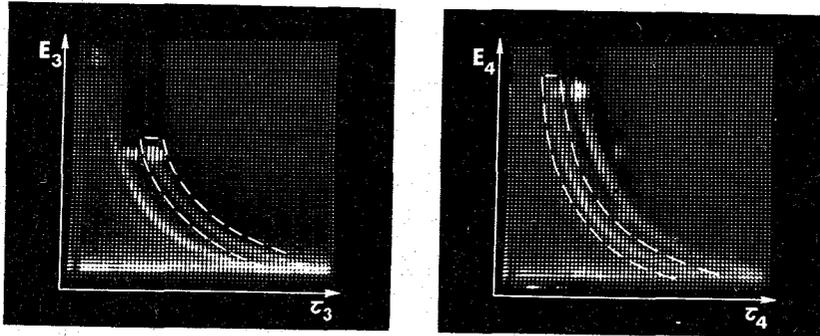


Abb. 2.6 Teilchenidentifizierung durch kombinierte Energie-  
Flugzeitmessung.

sorten als Funktion ihrer Flugzeit. Durch Auswahl von Ereignissen, die bezüglich des einen Zählers auf der Energie-Flugzeitkurve für Deuteronen und bezüglich des anderen Zählers auf der Energie-Flugzeitkurve für Protonen liegen, gelangt man zu den in Abb. 2.7 gezeigten Spektren. Diese Spektren enthalten noch die Zufallskoinzidenzen zwischen den ausgewählten Teilchensorten. Schließlich wird die Trennung der echten Ereignisse von den Zufallskoinzidenzen mit einem speziellen Rechenprogramm [19] vorgenommen. Die Qualität, mit der diese Trennung möglich ist, demonstriert Abb. 2.7. Ein weiterer wesentlicher Vorteil der geschilderten Methode besteht darin, daß über das Rechenprogramm die effektive Auflösungszeit der Koinzidenz auf 1-2 ns herabgesetzt werden kann.

Abb.2.8 zeigt schließlich die Projektion der d-p Koinzidenzen (kinematische Kurve 1 aus Abb. 2.7) auf die Deuteronenenergieachse. Neben dem dominant auftretenden Spectatoreffekt zeigt dieses Spektrum bei hoher Deuteronenenergie einen weiteren kleinen Peak,

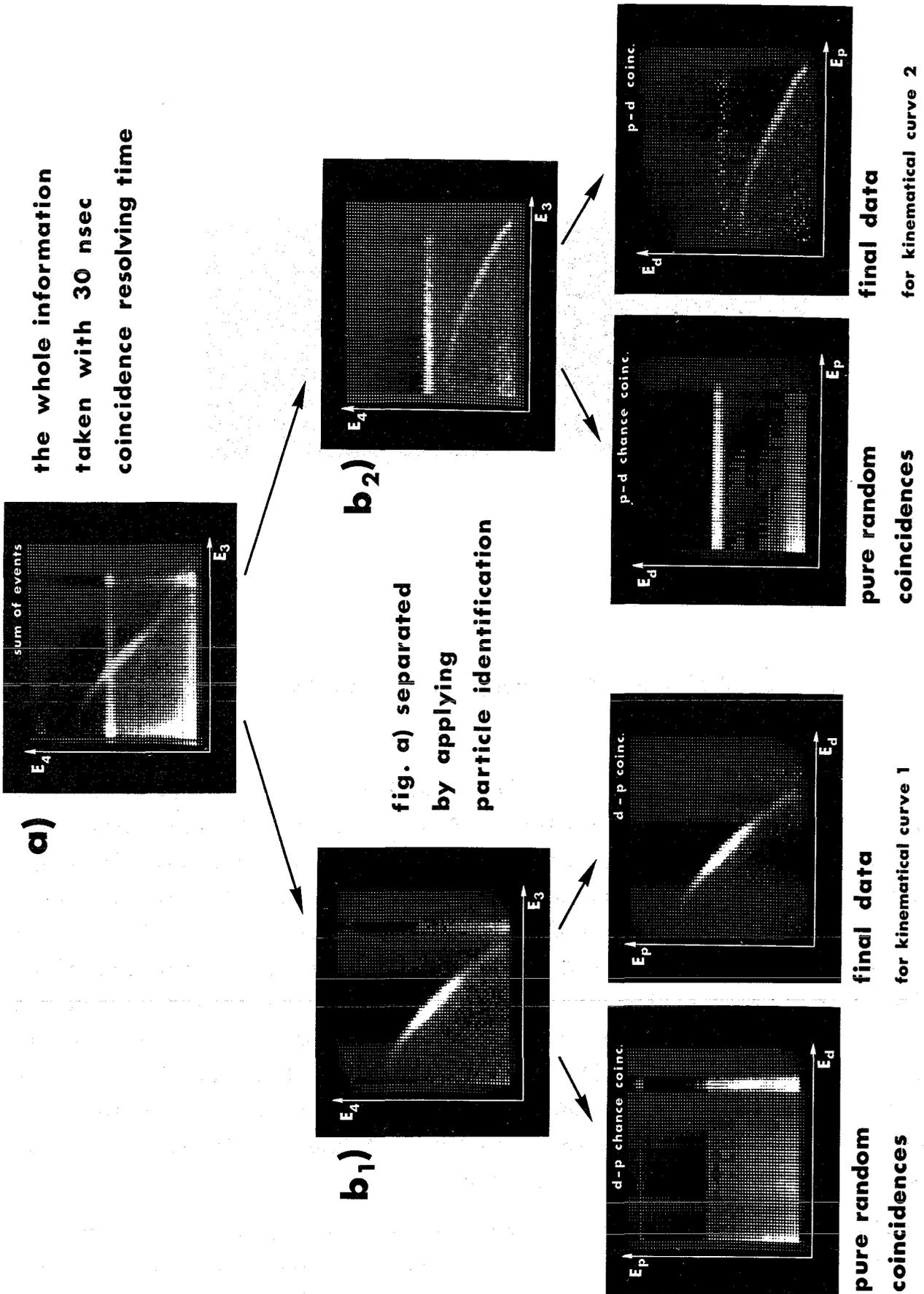


Abb. 2.7 Trennung der d-p Koinzidenzen und der p-d Koinzidenzen in der Reaktion  $d+d \rightarrow d+p+n$  durch Teilchenidentifizierung und Abzug der Zufallsereignisse.

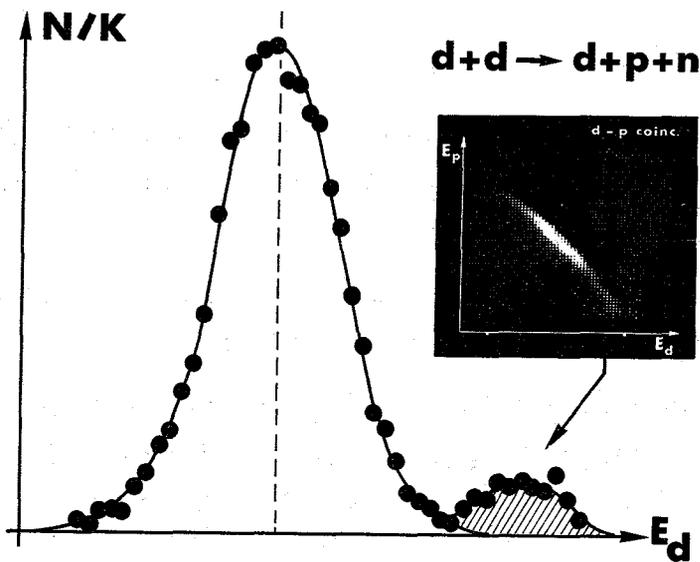


Abb. 2.8 Projektion des d-p Koinzidenzspektrums auf die Deuteronenenergieachse.

der als hoch angeregter Zustand des Tritiums interpretiert werden kann. Um Gewißheit darüber zu erhalten, ob es sich dabei tatsächlich um einen angeregten Zustand handelt, werden zur Zeit weitere Messungen durchgeführt. |20|.

### 3. Korrekturen der Rohdaten aus der Reaktion $d+p \rightarrow p+p+n$

#### 3.1. Allgemeine Korrekturen

Die mit dem zuvor beschriebenen Verfahren aufgenommenen experimentellen Rohdaten bedürfen nach Abzug der Zufallsereignisse noch folgender Korrekturen:

1. Es müssen die experimentelle Energieauflösung und die endliche Winkelauflösung berücksichtigt werden.
2. Die Nachweiswahrscheinlichkeit des Neutronendetektors variiert in dem vom Experiment gleichzeitig erfaßten Energiebereich, der typisch von etwa 2 MeV bis zu etwa 16 MeV reicht, erheblich.
3. In kinematischen Bereichen, die durch eine kleine Relativenergie der beiden Protonen charakterisiert sind, fliegen diese nahezu in die gleiche Richtung und können daher vom Protonenzähler registriert werden. Da beide Protonen in einem solchen Fall auch nahezu die gleiche Energie haben, gibt der Protonenzähler ein ungefähr doppelt so hohes Signal ab, wie beim Nachweis nur eines der beiden Protonen. Das hat zur Folge, daß diese Ereignisse nicht mehr die Energie-Flugzeitrelation für Protonen, die zur Teilchenidentifizierung benötigt wird, erfüllen und daher vom Rechner verworfen werden.
4. Korrekturen für den Energieverlust der nachgewiesenen Protonen in Target- und Zählerfolie, sowie für Nichtlinearitäten in der Lichtausbeute des Protonenzählers als Funktion der Protonenenergie brauchen nicht angebracht zu werden. Es erweist sich nämlich als vorteilhaft, die Energieeichung des Protonenzweiges unter Benutzung der Kinematik über die sehr präzise Flugzeitmessung der koinzidenten Neutronen vorzunehmen. Die hohe Präzision der Neutronenflugzeitmessung ist im wesentlichen durch zwei Tatsachen bedingt, nämlich durch die sehr gute differentielle Linearität der Flugzeitkreise und die Tatsache, daß die verwendeten Zeitmarkengeber über einen großen Amplitudenbereich amplitudenunabhängig arbeiten.

### 3.2 Ansprechwahrscheinlichkeit des Neutronendetektors

Bei der Berechnung der Nachweiswahrscheinlichkeit des Neutronenzählers müssen mehrere Effekte in Betracht gezogen werden.

1. Das nachgewiesene Neutron wird an einem Proton des im Zählmaterial (NE 102 A)<sup>\*)</sup> enthaltenen Wasserstoffs gestreut und die Energie des Rückstoßprotons im Zähler abgegeben.
- 2a. Das nachgewiesene Neutron wird zunächst am  $C^{12}$  und dann am Wasserstoff gestreut.
- 2b. Doppelstreuung am Wasserstoff braucht nicht berücksichtigt zu werden, da dieser Effekt nur die Pulshöhe vergrößert. Die Festlegung der Neutronenenergie erfolgt jedoch über eine Neutronenflugzeitmessung und die verwendeten Zeitmarkengeber arbeiten, wie bereits erwähnt, über große Bereiche amplitudenunabhängig.
3. Randeffekte, die dadurch zustande kommen, daß das Rückstoßproton den Zähler verläßt bevor es einen Energiebetrag abgegeben hat, der oberhalb der Schwelle liegt, haben eine sehr geringe Bedeutung. Für die in dieser Arbeit beschriebenen Experimente, betrug die Maximalenergie der nachgewiesenen Neutronen ca. 20 MeV. Selbst bei einem zentralen Stoß entspricht dieser Energie im Zählmaterial nur eine Protonenreichweite von ca. 4 mm.
4. Reaktionen am  $C^{12}$  wie z.B.  $C(n,n'\gamma)C^*$ ,  $C(n,\alpha)Be$ ,  $C(n,n'\alpha)$  und  $C(n,p)B$  spielen in dem betrachteten Energiebereich nur eine geringe Rolle. |21,22|

---

\*) Nach Angabe des Herstellers "Nuclear Enterprises LTD." beträgt für NE 102 A die Dichte der Wasserstoffatome  $n_H = 0.0525/\text{cm barn}$  und die Dichte der Kohlenstoffatome  $n_C = 0.0475/\text{cm barn}$ .

Der von der n-p Streuung im Zählermaterial herrührende Beitrag zur Nachweiswahrscheinlichkeit berechnet sich unter diesen Voraussetzungen, wenn man zusätzlich annimmt, daß die Neutronen senkrecht auf die Stirnfläche des Szintillators einfallen zu

$$W_H = n_H \sigma_H(E) \lambda \{1 - \exp(-L/\lambda)\} \quad (3.1)$$

Die mittlere freie Weglänge  $\lambda = \lambda(E)$  ist durch folgende Beziehung definiert

$$\lambda(E) = [n_H \sigma_H(E) + n_C \sigma_C(E)]^{-1} \quad (3.2)$$

$n_H$  und  $n_C$  sind die Dichten der Wasserstoff- bzw. der  $C^{12}$ -Atome für das Zählermaterial.  $\sigma_H(E)$  und  $\sigma_C(E)$  bedeuten die totalen Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Neutronen der Energie E am Wasserstoff bzw. Kohlenstoff. L ist die Ausdehnung des Zählers in Flugrichtung der Neutronen (Z-Richtung).

Der von der Doppelstreuung am Kohlenstoff und Wasserstoff herrührende Beitrag ist gegeben durch

$$W_{CH} = n_C n_H \int_0^V \int_0^{4\pi} e^{-Z/\lambda} \frac{d\sigma_C(E)}{d\Omega} (1 - e^{-\frac{Z}{\lambda'}}) \lambda' \sigma_H' dV d\Omega \quad (3.3)$$

Dieses Integral ist über den ganzen Raumwinkel und das Zählervolumen V zu nehmen.

Die Größen  $\lambda'$ ,  $\sigma_H'$  sind definiert durch  $\lambda' = \lambda(E')$  und  $\sigma_H' = \sigma_H(E')$  wobei E' die Energie des Neutrons nach der Streuung im Kohlenstoff ist.  $z$  ist die Strecke zwischen dem Streuort für die Streuung am  $C^{12}$  (Koordinate in Strahlrichtung Z) und dem Schnittpunkt der Bahn des gestreuten Teilchens mit der Begren-

zungsfläche des Zählers. Dieses Integral wurde mit einer Monte Carlo-Methode berechnet (siehe Anhang B). Die Gesamtnachweiswahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung der Schwellenenergie  $E_S$  ( $E_S = 500$  keV) ist dann gegeben durch die Beziehung:

$$W(E) = (1 - E_S/E) (W_H + W_{CH}) \quad (3.4)$$

Das Ergebnis der Rechnung zeigt Abb. 3.1.

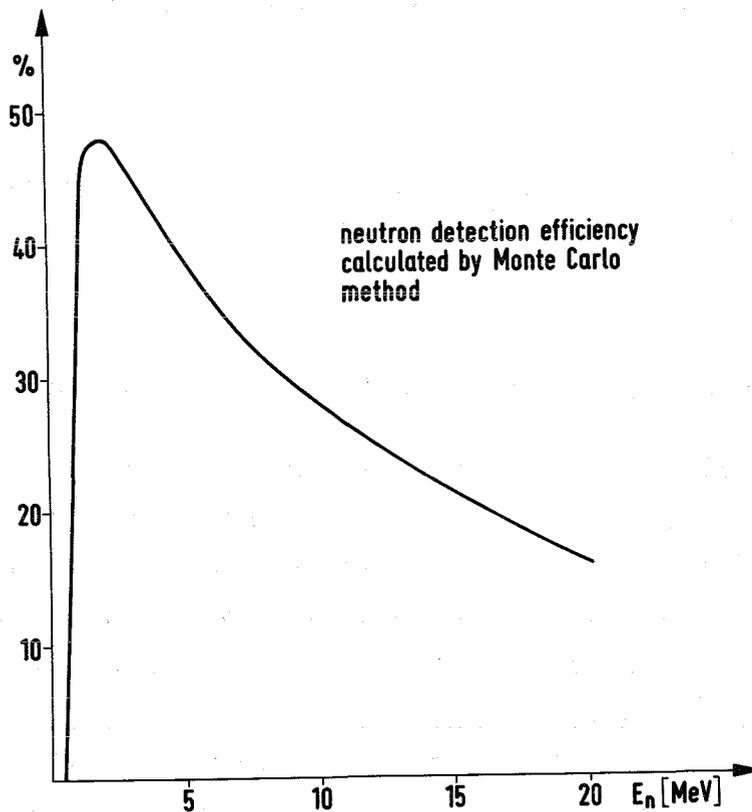


Abb. 3.1 Ergebnis der Monte Carlo-Rechnung zur Bestimmung der Ansprechwahrscheinlichkeit des Neutronendetektors.

### 3.3 Doppelereignisse

Der Anteil der Ereignisse bei denen beide aus der Reaktion stammende Protonen vom Protonenzähler registriert wurden, wurde ebenfalls mit einer Monte Carlo -Methode berechnet. Zur Verdeutlichung der dabei verwendeten Methode dient die Abb. 3.2.

Zunächst wurden die Eintrittskordinaten für das Neutron im Neutronenzähler ausgewürfelt. Sie werden zweckmäßigerweise durch Polarkordinaten  $a_n$  und  $\alpha_n$  definiert.

Eine Gleichverteilung der Eintrittskordinaten auf der Stirnfläche des Zählers erreicht man, wenn man durch die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= Z \cdot 2\pi \\ a_n &= Z^{1/2} \cdot R \end{aligned} \right\} 0 \leq Z \leq 1 \quad (3.5)$$

mit einem Zufallszahlgenerator für die Zahl  $Z$  ausgewürfelt.

Entsprechend werden die Eintrittskordinaten  $x_{p1}$  und  $y_{p1}$  für ein Proton gleichverteilt über die mit einer Rechteckblende versehene Eintrittsöffnung des Protonenzählers ausgewürfelt. Dann wird bei vorgegebener Energie des einen Protons der Impuls des anderen Protons mit einem relativistischen Kinematikprogramms | 23| unter Berücksichtigung der nicht-koplanaren Geometrie errechnet und geprüft, ob dieses Teilchen ebenfalls in den Protonenzähler eintritt. Daraus ergibt sich eine Verteilung der Zählratenverluste durch gleichzeitigen Nachweis von zwei Protonen als Funktion der Energie eines der beiden Protonen, die Abb. 3.3 zeigt.

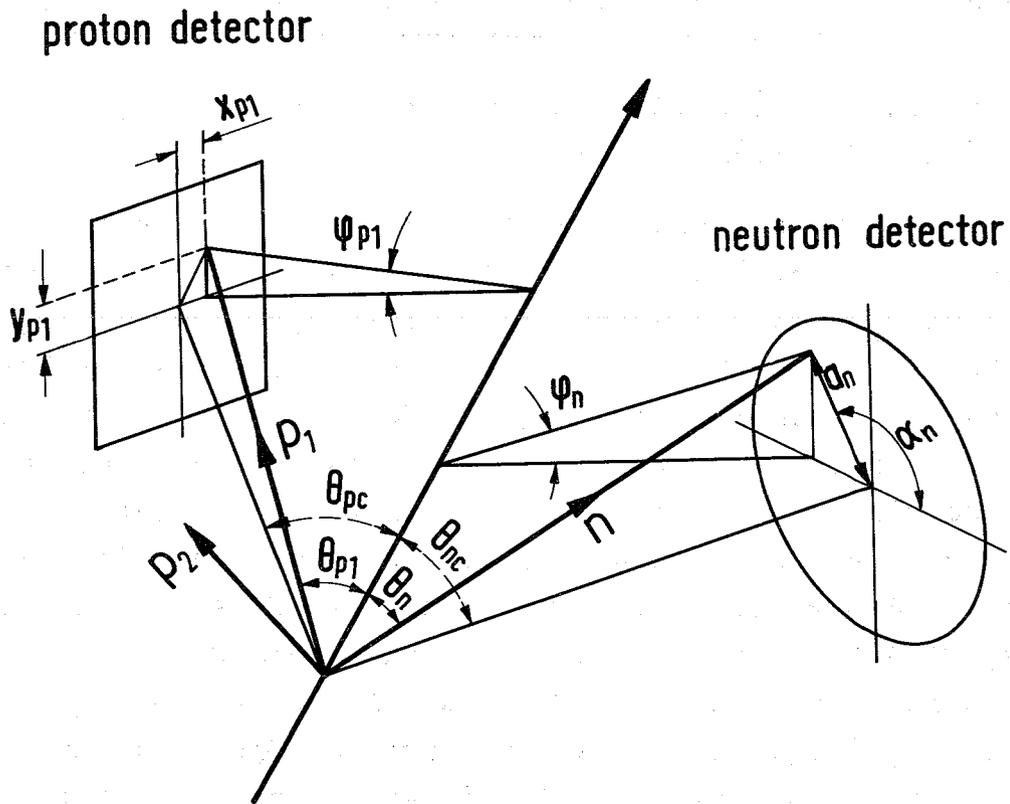


Abb. 3.2 Nomenklatur für das Monte Carlo-Programm zur Berechnung von Doppelereignissen.

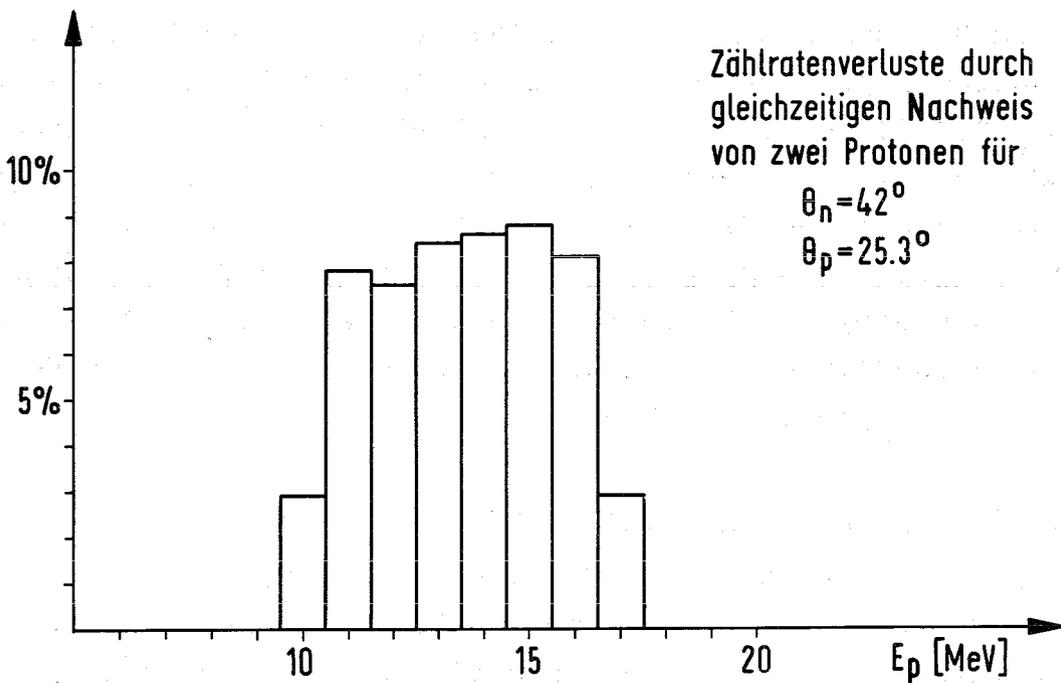


Abb. 3.3 Zählratenverlust durch gleichzeitigen Nachweis zweier Protonen in der Reaktion  $d+p \rightarrow p+p+n$  als Funktion der Protonenenergie.

#### 4. Proton-Proton Final State Interaction in der Reaktion $d+p \rightarrow p+p+n$

##### 4.1 Experimentelle Ergebnisse und Vergleich mit der Neutron-Proton-Final State Interaction

Ein Beispiel für ein zweidimensionales n-p Koinzidenzspektrum aus der Reaktion  $d+p \rightarrow p+p+n$  zeigt Abb. 4.1a. Die Detektoren standen bei der Aufnahme dieses Spektrums unter den Winkeln  $\theta_n = \theta_3 = 42^\circ$ ,  $\theta_p = \theta_4 = 25.3^\circ$ . Die Verteilung der Ereignisse auf die kinematisch erlaubte Kurve ist als Funktion der Protonenenergie  $E_p$  und der Flugzeit der koinzidenten Neutronen  $\tau_n$  dargestellt. Besonders auffällig ist das ausgeprägte Minimum des Wirkungsquerschnitts bei minimaler Neutronenflugzeit, d.h. bei maximaler Neutronenenergie  $E_n = E_3$ . Gerade hier erreicht die Relativenergie  $E_{pp}$  der beiden Protonen ihren Minimalwert. Unter den speziellen in diesem Experiment gewählten Winkeln reicht diese Relativenergie bis zu Null herab. Durch die in Abschn. 2.2 diskutierte Verwendung der beiden Koinzidenzen (3,4) und (3,4 verz.) besteht das Spektrum aus zwei Teilen, die absichtlich durch einige Kanäle getrennt wurden, um die Funktion dieses Teils der Elektronik während des gesamten Experiments überprüfen zu können.

Zum Vergleich ist in Abb. 4.1b ein p-p Koinzidenzspektrum gezeigt, das unter identischen kinematischen Bedingungen  $\theta_3 = 42^\circ$ ,  $\theta_4 = 25.3^\circ$  erhalten wurde. Im Gegensatz zum n-p Koinzidenzspektrum zeigt dieses Spektrum einen ausgeprägten Peak bei maximaler Energie  $E_3$  des freien Protons. ( $E_{45} = E_{np} = 0$ ). Dieser Gegensatz charakterisiert die Verschiedenheit von n-p und p-p FSI. Zur Verdeutlichung wird in Abb. 4.2 noch einmal die Projektion dieser beiden Spektren auf die Energieachse ( $E_4$ ) des an der FSI beteiligten Protons gezeigt. Verantwortlich für das starke Absinken des Wirkungsquerschnitts im n-p Spektrum bei kleiner Relativenergie ist die Coulombabstoßung. Im Gegensatz dazu erreicht das p-p Koinzidenzspektrum bei  $E_{np} = 0$  sein Maximum.

##### 4.2 Theoretische Interpretation der Daten

Die Spektren wurden unter Verwendung des sogenannten Watson-Migdal Ansatzes für Dreiteilchenreaktionen analysiert. Dieser Ansatz beruht auf der Modellvorstellung, daß die Reaktion als ein Zweistufenprozess abläuft. In der ersten Stufe findet die eigentliche Aufbruchreaktion in drei Teilchen statt. Die zweite Stufe wird durch die Endzustandswechselwirkung (FSI) zweier dieser drei Teilchen charakterisiert.

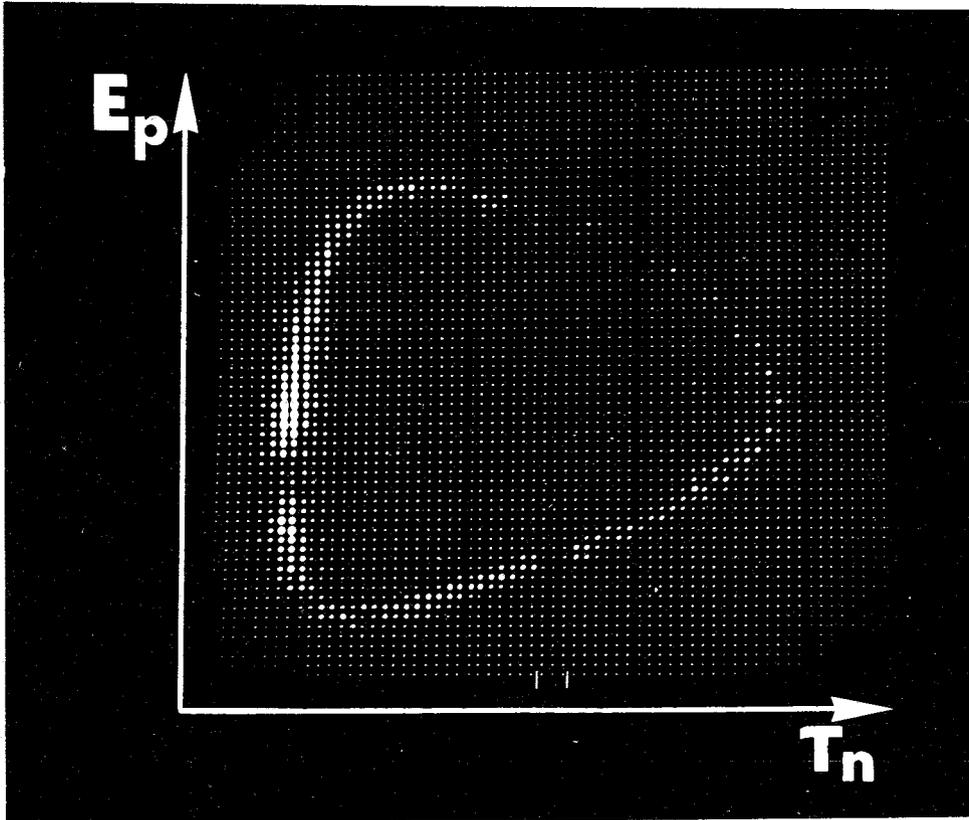


Abb. 4.1 a n-p Koinzidenzspektrum für die Reaktion  $d+p \rightarrow p+p+n$   
( $E_d = 52.3$  MeV,  $\theta_n = \theta_3 = 42.0^\circ$ ,  $\theta_p = \theta_4 = 25.3^\circ$ )

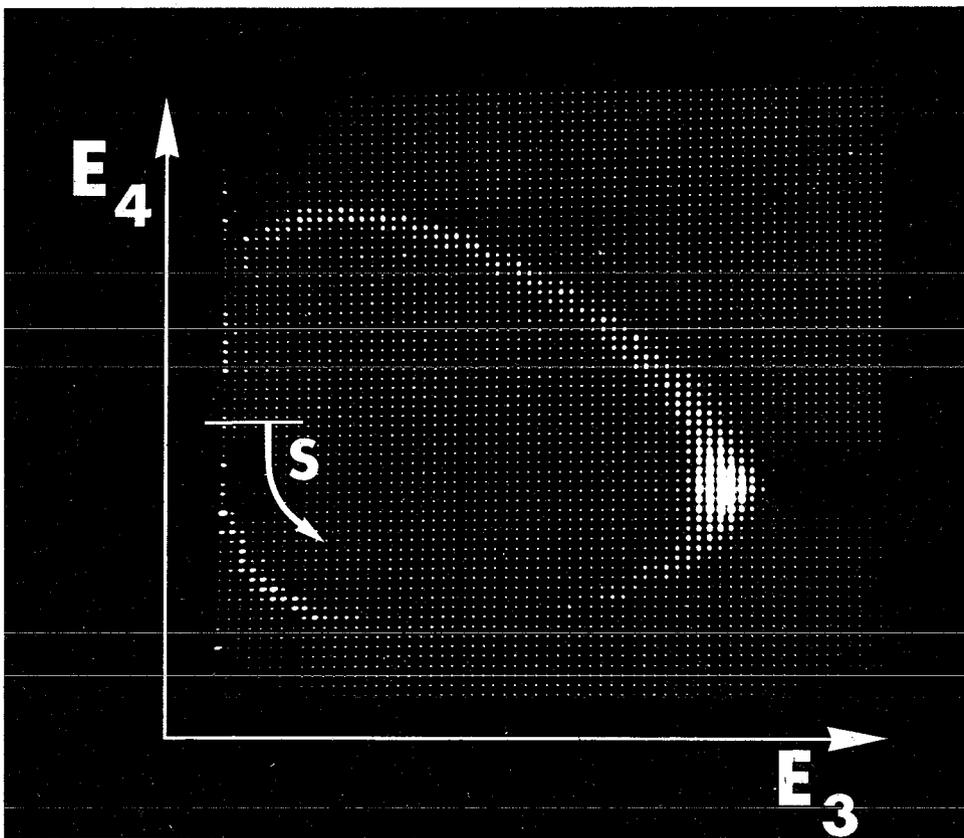


Abb. 41 b p-p Koinzidenzspektrum für die Reaktion  $d+p \rightarrow p+p+n$  unter  
gleichen kinematischen Bedingungen wie für Abb. 4.1 a.  
(Die Bogenlänge  $S$  der kinematischen Kurve ist schematisch  
mit eingezeichnet.)

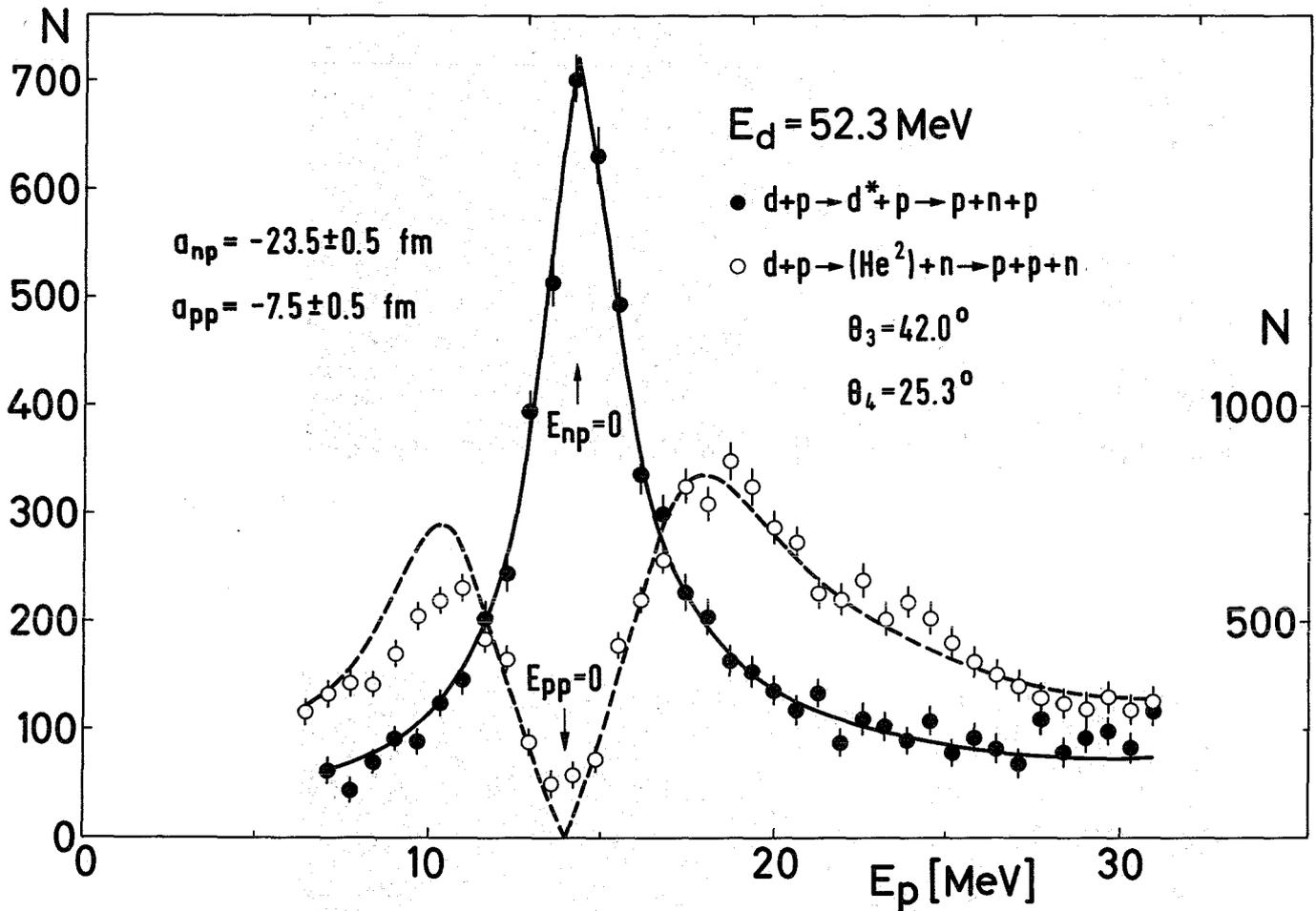


Abb. 4.2 Vergleich der p-p und der p-n Final State Interaction (FSI) bei identischen kinematischen Bedingungen ( $\theta_3 = 42.0^\circ$ ,  $\theta_4 = 25.3^\circ$ ). Beide Spektren sind als Funktion der Protonenenergie  $E_p = E_4$  dargestellt. Die Werte für die p-p Streulänge  $a_{pp} = -7.5 \pm 0.5 \text{ fm}$  und die n-p Singulettstreuränge  $a_{np} = -23.5 \pm 0.5 \text{ fm}$  ergeben sich aus den eingezeichneten Least-Square-Fits.

Es wird dabei angenommen, daß die erste Stufe die Endzustandswechselwirkung nicht beeinflußt. Diese Annahme ist bildlich gesprochen genau dann gerechtfertigt, wenn sich die beiden in FSI befindlichen Reaktionspartner noch in ihrem Wechselwirkungsbereich aufhalten, wenn das freie Teilchen bereits das primäre Reaktionsvolumen verlassen hat. In diesem Modell ist die Dominanz der FSI **allgemein unter** kinematischen Bedingungen zu erwarten, die so gewählt sind, daß Zweiteilchensysteme mit einer Relativenergie gebildet werden, bei der der Zweiteilchenwirkungsquerschnitt für die FSI-Partner maximal wird.

In Anlehnung an die hier skizzierte Modellvorstellung wird im Watson-Migdal-Ansatz das Gesamtmatrizelement für den Zweistufenprozess  $\langle T \rangle_{\text{ges.}}$  faktorisiert in einen Anteil  $\langle T \rangle_{\text{break up}}$  der die Aufbruchreaktion beschreibt und den sogenannten Enhancementfaktor  $F_{pp}^2(E_{pp})$  der die Endzustandswechselwirkung beschreibt. [24,25]

$$\langle T \rangle_{\text{ges.}}^2 = \langle T \rangle_{\text{break up}}^2 \cdot F_{pp}(E_{pp})$$

Es wird dabei angenommen, daß die Abhängigkeit des Gesamtmatrizelementes von der Relativenergie  $E_{pp}$  der beiden Protonen nur im Enhancementfaktor enthalten ist.

Solange nämlich Richtung und Betrag des Schwerpunktimpulses, mit dem das p-p System emittiert wird, konstant bleibt, kann  $\langle T \rangle_{\text{break up}}$  als Konstante betrachtet werden. Diese Annahme ist für kleine Relativenergien gut erfüllt.

Für die Analyse der p-p FSI-Daten wurde der von Migdal eingeführte Faktor erweitert und in folgender Gestalt benutzt.

$$F_{pp} = \frac{\left[ \frac{1}{r_0} - \frac{1}{a_{pp}} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + \frac{1}{R} \langle \ln \frac{r}{R} + 2\gamma - 1 \rangle \right]^2}{C_0^2(\eta) k^2 + \frac{1}{C_0^2(\eta)} \left( -\frac{1}{a_{pp}} + \frac{1}{2} r_0 k^2 - \frac{h(\eta)}{R} \right)^2} \quad (4.1)$$

Hier bezeichnen  $a_{pp}$  und  $r_0$  die Streulänge und die effektive Reichweite für die p-p Streuung.  $R$  ist der Bohr'sche Radius des Protons  $R = \hbar^2 / M_p e^2 = 28.8 \text{ fm}$ .  $\gamma$  ist die Euler'sche Konstante.  $k$  ist mit der Relativenergie  $E_{pp}$  im p-p Schwerpunktsystem durch die Beziehung  $k = (M_p E_{pp} / \hbar^2)^{1/2}$  verknüpft. Der Coulombfaktor  $C_0^2(\eta)$  ist durch

$C_0^2(\eta) = 2\pi\eta / (\exp(2\pi\eta) - 1)$  mit  $\eta = (2kR)^{-1}$  definiert.

Für kleine Relativenergien konvergiert  $C_0^2(\eta)$  gegen Null. Sowohl für große Relativenergien als auch für einen Grenzübergang, bei dem die elektromagnetische Kopplungskonstante gegen Null geht, gilt die Beziehung  $\lim_{E_{pp} \rightarrow \infty} C_0^2(\eta) = \lim_{e \rightarrow 0} C_0^2(\eta) = 1$

Die Funktion  $h(\eta)$  ist definiert durch

$$h(\eta) = \text{Re} [\Gamma'(-i\eta) / \Gamma(-i\eta)] - \ln \eta = -\ln \eta - \gamma + \eta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + \eta^2)} \quad (4.2)$$

Zu der durch Gleichung 4.1 gegebenen Gestalt des Enhancementfaktors führt die folgende Überlegung. Nach dem Watson-Migdal-Modell ist für kleine Relativenergien  $E_{pp}$  die  $k$ -Abhängigkeit des Gesamtmatrixelementes allein durch das Verhalten der asymptotischen Lösung des niederenergetischen  $p$ - $p$  Streuproblems bestimmt.

$$\psi_{pp} = e^{i\delta_0} (F_0 \cos \delta_0 + G_0 \sin \delta_0) / kr \quad (4.3)$$

Hierin bedeutet  $\delta_0$  die "nukleare"  $S$ -Streuphase.  $F_0$  und  $G_0$  sind die entsprechenden regulären und irregulären Coulombfunktionen.

Beide Funktionen können nach einer von Breit und Hull [26] angegebenen Reihe in Potenzen von  $kr$  entwickelt werden. Berücksichtigt man in dieser Entwicklung nur Terme bis zur ersten Ordnung, so erhält man

$$F_0 = C_0(\eta) kr \quad (4.4)$$

$$G_0 = \frac{1}{C_0(\eta)} \left[ 1 + \frac{r}{R} \langle \ln \frac{r}{R} + h(\eta) + 2\gamma - 1 \rangle \right]$$

Einsetzen von Gleichung 4.4 in Gleichung 4.3 führt unter Benutzung der shapeunabhängigen effective-range-Näherung für die  $p$ - $p$  Streuung

$$k \cdot \text{ctg} \delta_0 = \frac{1}{C_0^2(\eta)} \left[ -\frac{1}{a_{pp}} + \frac{1}{2} r_0 k^2 - \frac{h(\eta)}{R} \right] \quad (4.5)$$

für  $r=r_0$  zu dem in Gleichung 4.1 gegebenen Enhancementfaktor  $F_{pp} = |\psi_{pp}|^2$ .

Daß hierbei die Wellenfunktion  $\psi_{pp}(r)$  gerade an der Stelle  $r=r_0=2,8$  fm genommen wird, enthält eine gewisse Willkür. Phillips [27] hat im Rahmen einer vereinfachten Behandlung auf einer Arbeit von Breit und Bouricius [28] basierend, die Verwendung eines kleineren Wertes  $r=1,4$  fm vorgeschlagen.

Abbildung 4.3 zeigt mehrere Fits für das korrigierte p-p FSI-Spektrum aus Abb. 4.2. Die Streulänge  $a_{pp}$  wurde dabei als freier Parameter behandelt. Es wurden nur die Meßpunkte bei höherer Protonenenergie in den Fit miteinbezogen, weil hier der störende Einfluß des Spectatoreffektes aus kinematischen Gründen geringer sein muß als für die Meßpunkte bei kleiner Protonenenergie. Die Werte für die Streulänge liegen bei  $a_{pp}=-7.7$  fm für  $r=2.8$  fm (Fit 3) und bei  $a_{pp}=-6.8$  fm für  $r=1,4$  fm (Fit 2). Man kann diesen Radius auch als zusätzlichen freien Parameter mit den Randbedingungen  $1 \text{ fm} < r < 3 \text{ fm}$  behandeln. Damit erhält man für die Streulänge einen Wert  $a_{pp} = -6.6$  fm und für  $r$  einen Wert  $r=1.2$  fm. Dieser Fit ist nicht mit eingezeichnet.

Die mit Fit 1 bezeichnete Kurve stellt schließlich den besten Fit an die experimentellen Daten unter Verwendung des ursprünglichen Migdalansatzes [25] dar. Dieser Ansatz unterscheidet sich von Gleichung 4.1 dadurch, daß bei gleichem Nenner der Zähler als konstant betrachtet wird. Dieses Ergebnis erhält man aus Gleichung 4.3, wenn man aus der von Breit und Hull angegebenen Reihenentwicklung für  $F_0$  und  $G_0$  den Term der nullten Ordnung mitführt, d.h.  $F_0=0$  und  $G_0=C_0^{-1}$  setzt. Diese Näherung ist nur für sehr kleine Relativenergien zulässig. Die unkritische Anwendung der Näherung bei großen Relativenergien hat daher zur Folge, daß sich der Wert für die extrahierte Streulänge empfindlich ändert und wie Abbildung 4.3 zeigt, mit  $a_{pp} = -5.7$  fm wesentlich kleiner ausfällt. Aus Meßwerten bei Relativenergien, für die die niederenergetische Näherung gültig ist, kann jedoch kein Wert für die Streulänge extrahiert werden, da in diesem Bereich die Coulomb-Wechselwirkung dominiert.

Man kann diesen Sachverhalt auch unter einem etwas anderen Gesichtspunkt verstehen. Die Faktorisierung des Gesamtmatrixelementes verlangt, daß der Wert  $F_{pp}(E_{pp})$  für große  $E_{pp}$  gegen Eins konvergiert, da dann die Final State Interaction vernachlässigbar wird und das Aufbruchmatrixelement  $\langle T \rangle_{\text{break up}}$  allein den gesamten Prozeß beschreibt. Der in dieser Arbeit benutzte erweiterte Enhancementfaktor  $F_{pp}$  besitzt diese Eigenschaft, wohingegen der ursprünglich von Migdal angegebene Faktor für große  $E_{pp}$  gegen Null konvergiert.

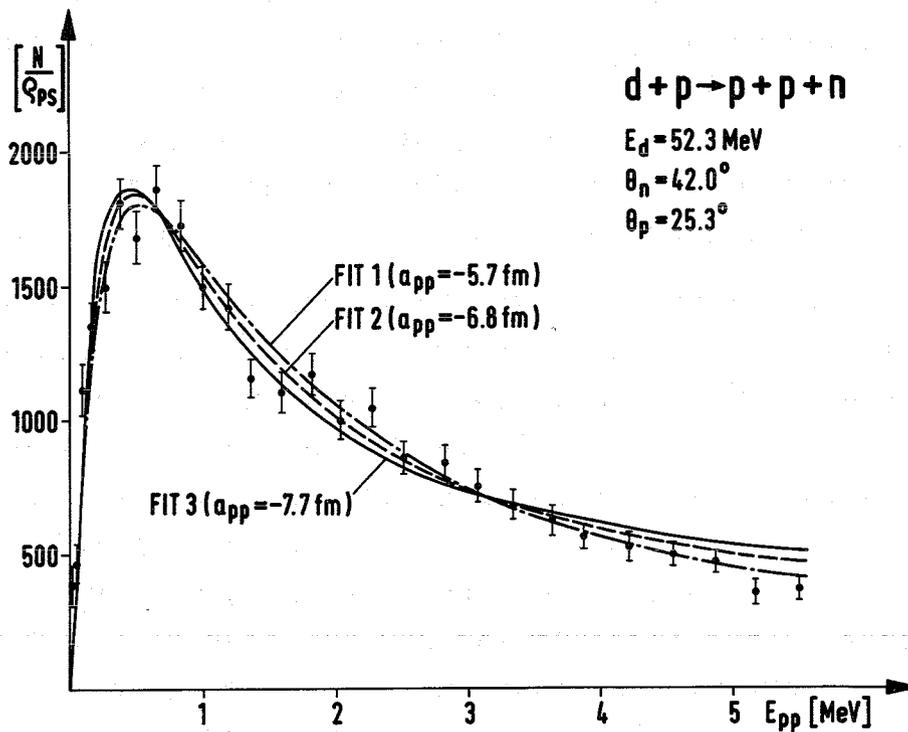


Abb. 4.3 Verschiedene Fits an die durch den Phasenraumfaktor  $\rho_{PS}$  dividierten Daten aus Abb. 4.2.

### 4.3 Pole des Enhancementfaktors für die Proton-Proton Final State Interaction

Um das Polverhalten des Enhancementfaktors  $F_{pp}$  für die Proton-Proton Final State Wechselwirkung (Gl. 4.1) zu untersuchen, müssen die Nullstellen seines Nenners auf der komplexen  $k$ -Ebene aufgesucht werden.

Der effective range-Ansatz (4.5) für die p-p Streuung im  $^1S_0$  Zustand kann aber im Gegensatz zum Fall niederenergetischer p-n bzw. n-n Streuung nicht mit einem einfachen Zweipolansatz für den S-Operator von der Gestalt

$$S = e^{2i\delta_0} = \frac{(k+ik_1)(k-ik_2)}{(k-ik_1)(k+ik_2)} \quad (4.6)$$

verknüpft werden. Aus Gl. (4.6) folgt die effective range-Beziehung

$$k \cdot \text{ctg} \delta_0 = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2 = \left[ \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 - k_2} \right] + \left[ \frac{1}{k_1 - k_2} \right] \cdot k^2 \quad (4.7)$$

Die Pole liegen also bei

$$\begin{aligned} + ik_1 \text{ mit } k_1 &= \frac{1}{r_0} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{2r_0}{a}} \right] \\ -ik_2 \text{ mit } k_2 &= \frac{1}{r_0} \left[ \sqrt{1 - \frac{2r_0}{a}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Für den Fall verschwindender elektromagnetischer Kopplungskonstante (dem entspricht in Gl. 4.5 ein Grenzübergang für den Bohr'schen Radius des Protons  $R' = \alpha'R$  mit  $\alpha' \rightarrow \infty$ ) muß das Verhalten von  $F_{pp}$  aber durch die Beziehungen 4.6 - 4.8 beschreibbar sein. Schaltet man daher zunächst in der Rechnung das Coulombfeld ab, so erhält man Pole bei  $k_1 = 0.8 \text{ fm}^{-1}$  und  $k_2 = 0.055 \text{ fm}^{-1}$ . Schaltet man in einem zweiten Schritt der Rechnung das Coulombfeld wieder ein, so wandert der physikalisch ausschlaggebende Pol auf die in Abb. 4.4 gezeigte Weise in der komplexen  $k$ -Ebene. Diese "Polwanderung" spiegelt sich

im Verhalten des Enhancementfaktors auf der reellen  $k$ -Achse wider (Abb. 4.5). Für  $\alpha' \rightarrow \infty$  zeigt der Faktor  $F_{NN}$  als Funktion von  $k$  das typische Verhalten des Enhancementfaktors für die n-n FSI. Für  $\alpha' = 1$  zeigt  $F_{NN}$  hingegen das typische Verhalten des Enhancementfaktors für die p-p FSI.

Bei der Berechnung wurde von der näherungsweise gültigen Beziehung zwischen n-n und p-p Streulänge [29]

$$\frac{1}{a_{nn}} = \frac{1}{a_{pp}} - \frac{1}{R} \left[ \ln \left[ \frac{r_0}{R} \right] + 2\gamma - 0.824 \right] \quad (4.9)$$

Gebrauch gemacht.

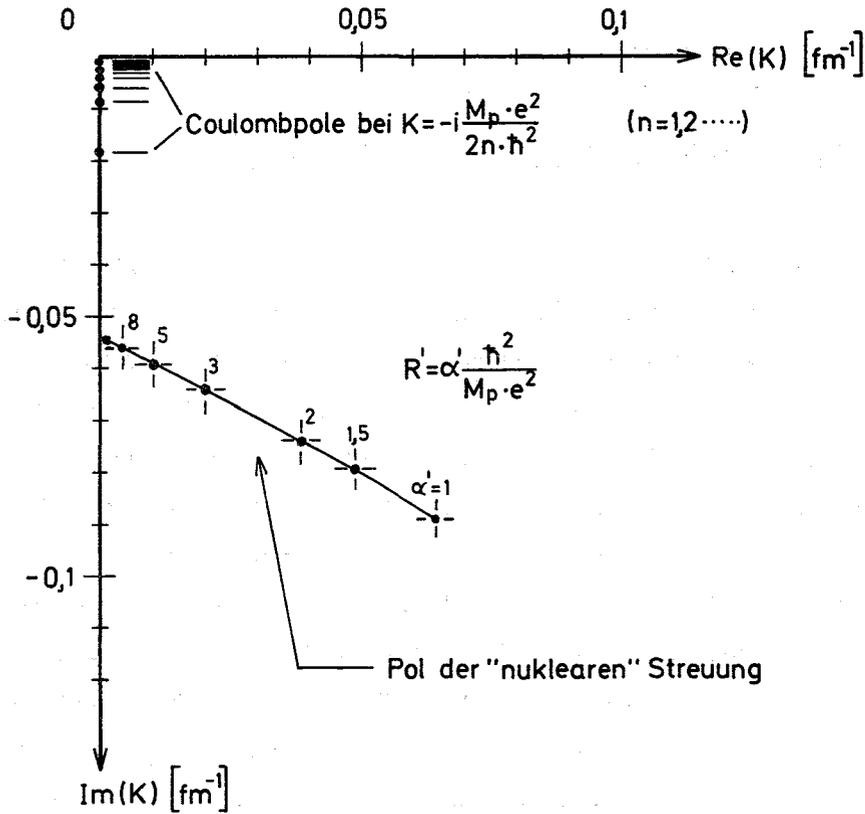


Abb. 4.4 Wanderung des "nuklearen" Pols des p-p Enhancementfaktors für einen Grenzübergang mit der elektromagnetischen Kopplungskonstante gegen Null.

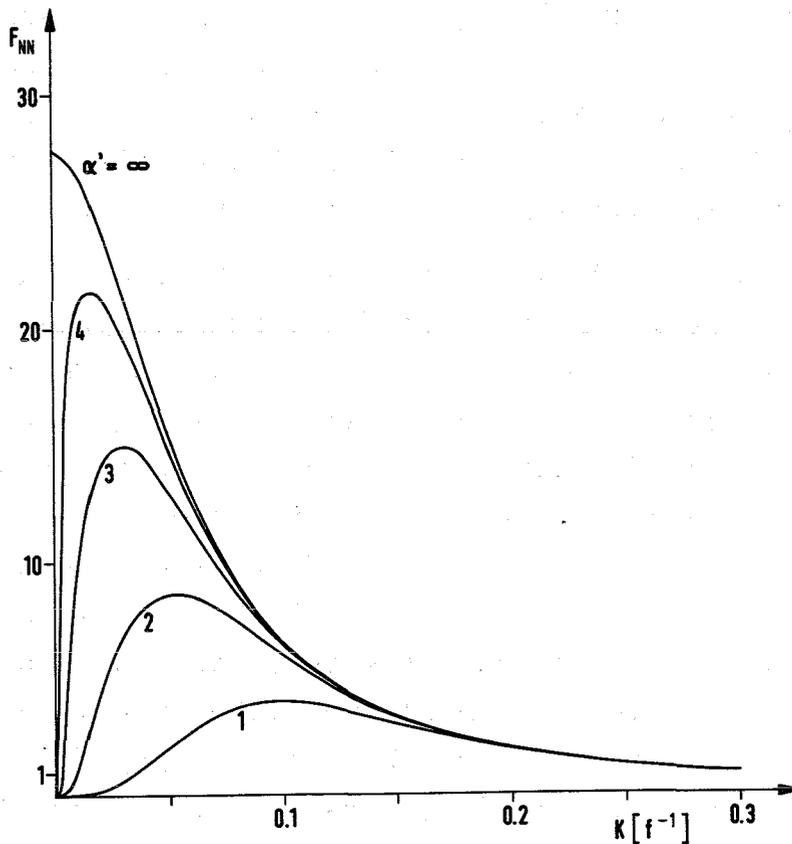


Abb. 4.5 Beziehung zwischen dem p-p FSI- und dem n-n FSI Enhancement-Faktor.

## 5. Winkelkorrelationsmessungen

### 5.1 Winkelkorrelationsmessungen für das n-p Subsystem

Die wesentlichste Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Watson-Migdal-Ansatzes ist die Gültigkeit des Zweistufenreaktionsmodells, wie es in Abschnitt 4.2 behandelt wurde. Es erweist sich daher als notwendig, die Gültigkeit dieses Modells direkt experimentell zu prüfen. Besonders geeignet für einen solchen Test ist eine Winkelkorrelationsmessung, wie sie anhand von Abbildung 5.1 erläutert werden soll. In einer Dreiteilchenreaktion  $1+2 \rightarrow 3+(4+5) \rightarrow 3+4+5$  möge ein Zweiteilchensystem (4,5) mit FSI über einen Zweistufenmechanismus gebildet werden. Dann muß die Produktionswahrscheinlichkeit für die Bildung des Systems (4,5) unabhängig von den Relativkoordinaten dieses Systems sein, insbesondere also von Winkel  $\theta_{\text{sub}}$ , unter dem die Teilchen 4 und 5 in ihrem Schwerpunktsystem emittiert werden. Die Messung der Produktionswahrscheinlichkeit für das Subsystem (4,5) als Funktion des Winkels  $\theta_{\text{sub}}$  kann daher Aufschluß darüber geben, ob die Reaktion als Zweistufenprozeß abläuft. Eine wesentliche Voraussetzung für eine solche Prüfung des Modells ist allerdings die Kenntnis der Winkelverteilung im Subsystem, wie man sie aus Zweiteilchenstreuexperimenten für die Teilchen 4 und 5 erhält. Besonders gut geeignet ist daher eine Untersuchung des p-n Subsystems bei niedriger Relativenergie, da für dieses System die Isotropie der Winkelverteilung besonders gut gesichert ist.

Wie bereits in Abschnitt 1. diskutiert wurde, ist allein durch die Messung der Energie von Teilchen 3 der Schwerpunktsimpuls des Subsystems (4,5) sowie die Relativenergie  $E_{45}$  beider Teilchen in diesem Subsystem eindeutig festgelegt. Der Winkel  $\theta_{\text{sub}}$ , unter dem das in Koinzidenz beobachtete Teilchen 4 im Subsystem emittiert werden soll, wird eindeutig durch den Laborwinkel  $\theta_4$ , unter dem der Detektor 4 steht, bei fester Energie  $E_4$  festgelegt. Um eine Subsystemwinkelverteilung zu erhalten, muß man daher eine Reihe von Messungen durchführen, bei denen die Position von Detektor 3 festgehalten aber die Position von Detektor 4 in kleinen Schritten verändert wird. Solche Messungen wurden für das n-p Subsystem mit p-p Koinzidenzen für die Winkelpaare  $\theta_3=48,3^\circ, \theta_4=20^\circ$ ;  $\theta_3=48,3^\circ, \theta_4=22,4^\circ$ ;  $\theta_3=48,3^\circ, \theta_4=26,5^\circ$ ;  $\theta_3=48,3^\circ, \theta_4=28,5^\circ$  durchgeführt.

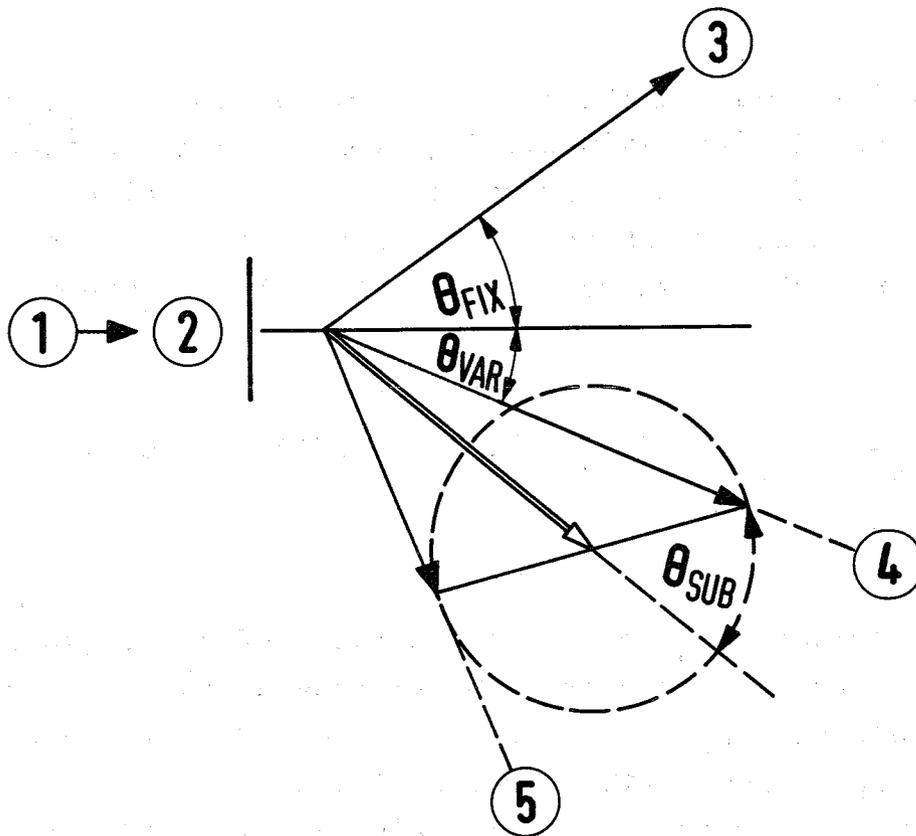


Abb. 5.1 Schematische Darstellung der Dreiteilchenkinematik für die Winkelkorrelationsmessungen.

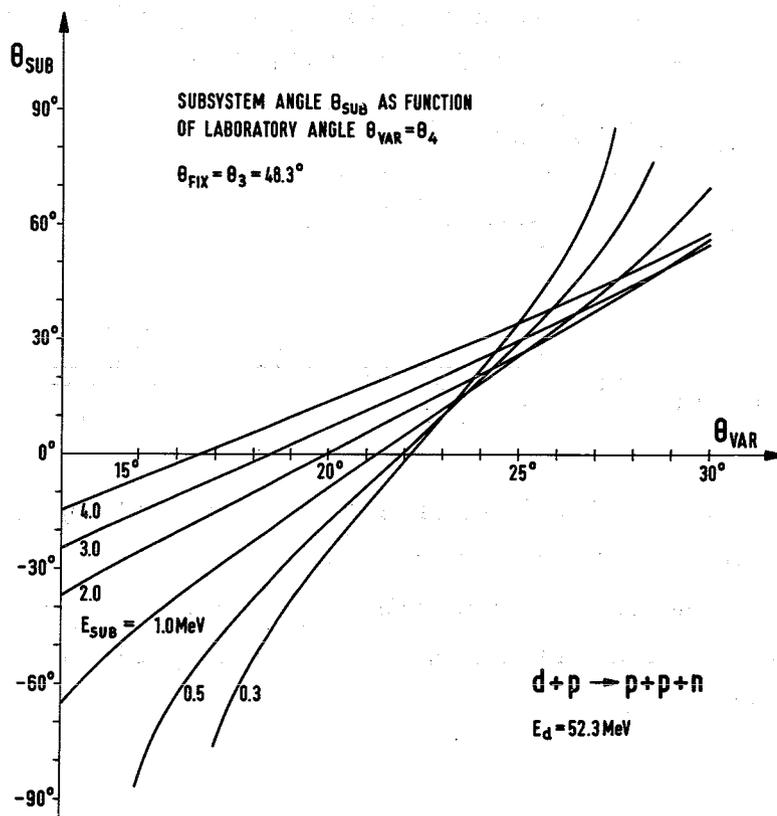


Abb. 5.2 Nukleon-Nukleon Subsystemwinkel  $\theta_{\text{sub}}$  als Funktion des variablen Laborwinkels  $\theta_4$  für  $\theta_3 = 48.3^\circ$ . Die Subsystemenergie  $E_{\text{sub}}$  ist als Parameter eingezeichnet.

Wie aus Abb. 5.2 ersichtlich, die für einen Winkel  $\theta_n = \theta_{n, \text{fix}} = 48,3^\circ$  die Abhängigkeit des Subsystemwinkels  $\theta_{\text{sub}}$  von  $\theta_4$  zeigt, entspricht besonders bei niedrigen Relativenergien  $E_{45} = E_{\text{np}}$  bereits eine kleine Änderung von  $\theta_4$  einer verhältnismäßig großen Änderung von  $\theta_{\text{sub}}$ . Die erhaltenen Spektren wurden zunächst einzeln mit einem Ansatz von der Form

$$\frac{d^3\sigma}{dS d\Omega_3 d\Omega_4} \cdot \frac{1}{\rho_{\text{PS}}} = X^{\text{S}}(\theta_4) F^{\text{S}}(E_{\text{np}}) + X^{\text{T}}(\theta_4) F^{\text{T}}(E_{\text{np}}) \quad (5.1)$$

gefittet.

Hierbei ist  $d^3\sigma/dS d\Omega_3 d\Omega_4$  der differentielle auf die Bogenlänge der kinematisch erlaubten Kurve bezogene Wirkungsquerschnitt, der durch den Phasenraumfaktor  $\rho_{\text{PS}}$  dividiert wird. (Die Definition der Bogenlänge  $S$  wird durch Abb. 4.1b verdeutlicht).

$X^{\text{S}}$  und  $X^{\text{T}}$  sind die Produktionswahrscheinlichkeiten für die Bildung des n-p Systems im Singulett- bzw. Triplettzustand. Diese beiden Größen wurden in dem Fit als freie Parameter behandelt.

$F^{\text{S}}$  und  $F^{\text{T}}$  schließlich sind die Enhancementfaktoren für die n-p Singulett- bzw. Triplett FSI. Sie haben als Funktion der Relativenergie  $E_{\text{np}}$  im Subsystem (4,5) die Gestalt |30|

$$F^{\text{S}, \text{T}}(E_{\text{np}}) = \frac{(k^2 + \alpha^2)^2 \cdot \frac{r_{\text{o st}}^2}{4}}{\left(-\frac{1}{a_{\text{st}}} + \frac{r_{\text{o st}}}{2} k^2\right)^2 + k^2} \quad (5.2)$$

$$\text{mit } k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{E_{\text{np}} m_{\text{N}}} \quad \text{und } \alpha = \frac{1}{r_{\text{o st}}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2r_{\text{o st}}}{a_{\text{st}}}}\right)$$

und machen implizit von der Voraussetzung der Isotropie der Winkelverteilung im Subsystem (4,5) Gebrauch.

$m_{\text{N}}$  ist die Nukleonenmasse. Die Größen  $r_{\text{o st}}$  und  $a_{\text{st}}$  sind die effektive Reichweite und Streulänge für die n-p Streuung im Singulett- bzw. Triplett-Zustand.

Tatsächlich ergibt die Auswertung, wie Abbildung 4.3 zeigt, daß die Produktionswahrscheinlichkeit  $X^S$  garnicht und die Produktionswahrscheinlichkeit von  $X^t$  nur schwach von Winkel  $\theta_4$  abhängt. Damit ist ein expliziter Nachweis für die Gültigkeit des Zweistufenreaktionsmodells erbracht. Diese schwache Winkelabhängigkeit von  $X^t$  findet ihre Erklärung darin, daß bei der Bestimmung von  $X^t$  Meßpunkten bei höherer Relativenergie ein größeres Gewicht zukommt, als bei der Bestimmung von  $X^S$ . Bei solchen Relativenergien ist aber der Einfluß anderer Mechanismen nicht mehr vernachlässigbar.

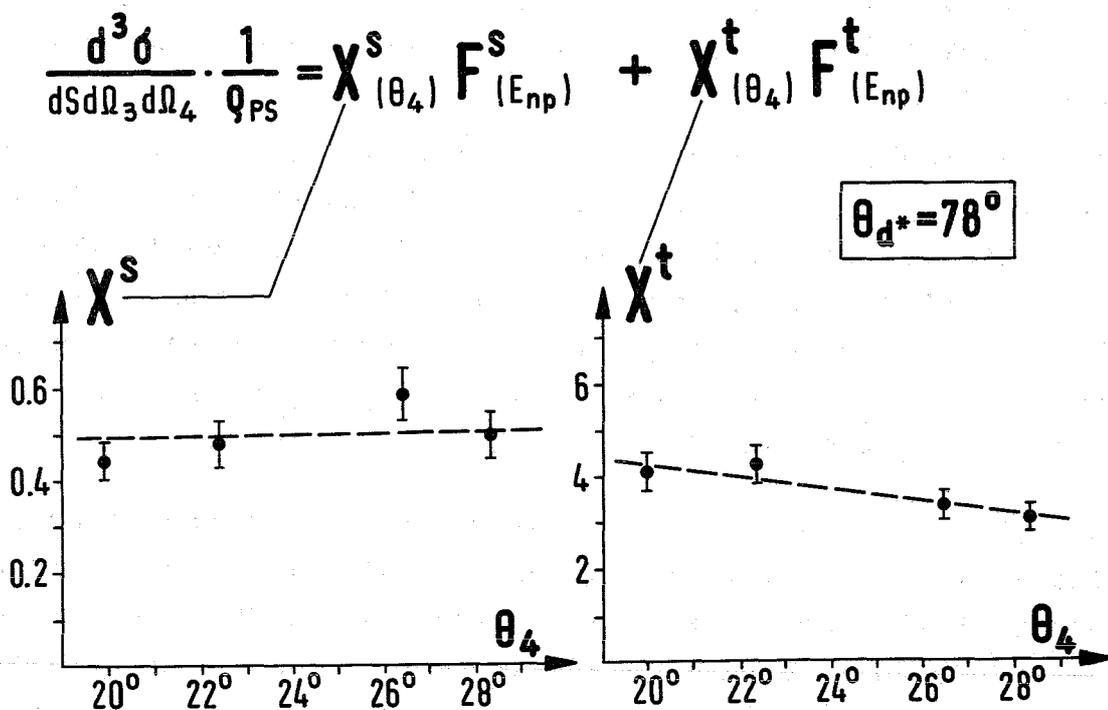


Abb. 5.3 Ergebnis der Winkelkorrelationsmessung für das n-p Subsystem. Aufgetragen sind die Produktionswahrscheinlichkeiten  $X^S$  und  $X^t$  für das n-p System im Singulett- bzw. Triplettzustand als Funktion des variablen Winkels  $\theta_4$ .

## 5.2 Winkelkorrelationsmessungen für das p-p Subsystem

Man kann nun unter den gleichen kinematischen Bedingungen mit p-n Koinzidenzen Winkelverteilungen im p-p Subsystem messen. Da unter diesen kinematischen Bedingungen die Gültigkeit des Zweistufenreaktionsmodells aus der Messung der n-p Subsystemwinkelverteilung gesichert ist, kann man den bei der Interpretation der Neutron-Proton Daten benutzten Gedankengang umkehren und die Winkelverteilung im p-p Subsystem auf etwaige Anisotropien untersuchen. Solche Anisotropien können durch den Beitrag von Drehimpulsen mit  $l > 0$  in der Coulombwechselwirkung zustande kommen.

Die experimentellen n-p Koinzidenzspektren für die vier Winkelpaare  $\theta_n = 48,3^\circ$ ,  $\theta_p = 19,5^\circ$ ;  $\theta_n = 48,3^\circ$ ,  $\theta_p = 22,4^\circ$ ;  $\theta_n = 48,3^\circ$ ,  $\theta_p = 25,5^\circ$ ;  $\theta_n = 48,3^\circ$ ,  $\theta_p = 28,3^\circ$  zeigt Abbildung 5.4. Zwei Effekte treten hier deutlich in Erscheinung.

1. Nur das Spektrum für die Winkel  $(48,3^\circ, 22,4^\circ)$  zeigt ausgeprägt das für die p-p FSI charakteristische Absinken des Wirkungsquerschnitts für kleine Relativenergien  $E_{pp}$ . Der Grund dafür ist, daß nur für diese Winkelkombination die Relativenergie Null erreicht wird. Die niedrigste Relativenergie für die anderen Spektren beträgt ( $E_{pp \text{ min}} = 85 \text{ keV}$  für  $\theta_4 = 19,5^\circ$ ,  $E_{pp \text{ min}} = 97 \text{ keV}$  für  $\theta_4 = 25,4^\circ$ ) und ( $E_{pp \text{ min}} = 397 \text{ keV}$  für  $\theta_4 = 28,3^\circ$ ).
2. Außerdem fällt auf, daß der vom Protonenspektator herrührende Anteil im Gebiet großer Neutronenflugzeiten mit zunehmendem Winkel  $\theta_p = \theta_4$  ebenfalls zunimmt. Das ist aufgrund der Kinematik verständlich, die einen maximalen Beitrag der quasielastischen Streuung für Winkelpaare  $\theta_3, \theta_4$  erwarten läßt, die die Beziehung  $\theta_3 + \theta_4 \approx 84^\circ$  erfüllen.

Der Teil der Spektren, in dem die FSI dominiert, wurde auf die Protonenenergieachse projiziert und durch den Phasenraumfaktor dividiert. Das Ergebnis zeigt Abbildung 5.5. Da hier die Verhältnisse im p-p Subsystem untersucht werden sollen, sind die Spektren als Funktion der Relativenergie  $E_{pp}$  der beiden Protonen dargestellt. Die ausgezogenen Kurven zeigen jeweils den besten Fit an die experimentellen Daten, die man mit dem Watson-Migdal Ansatz erhält.

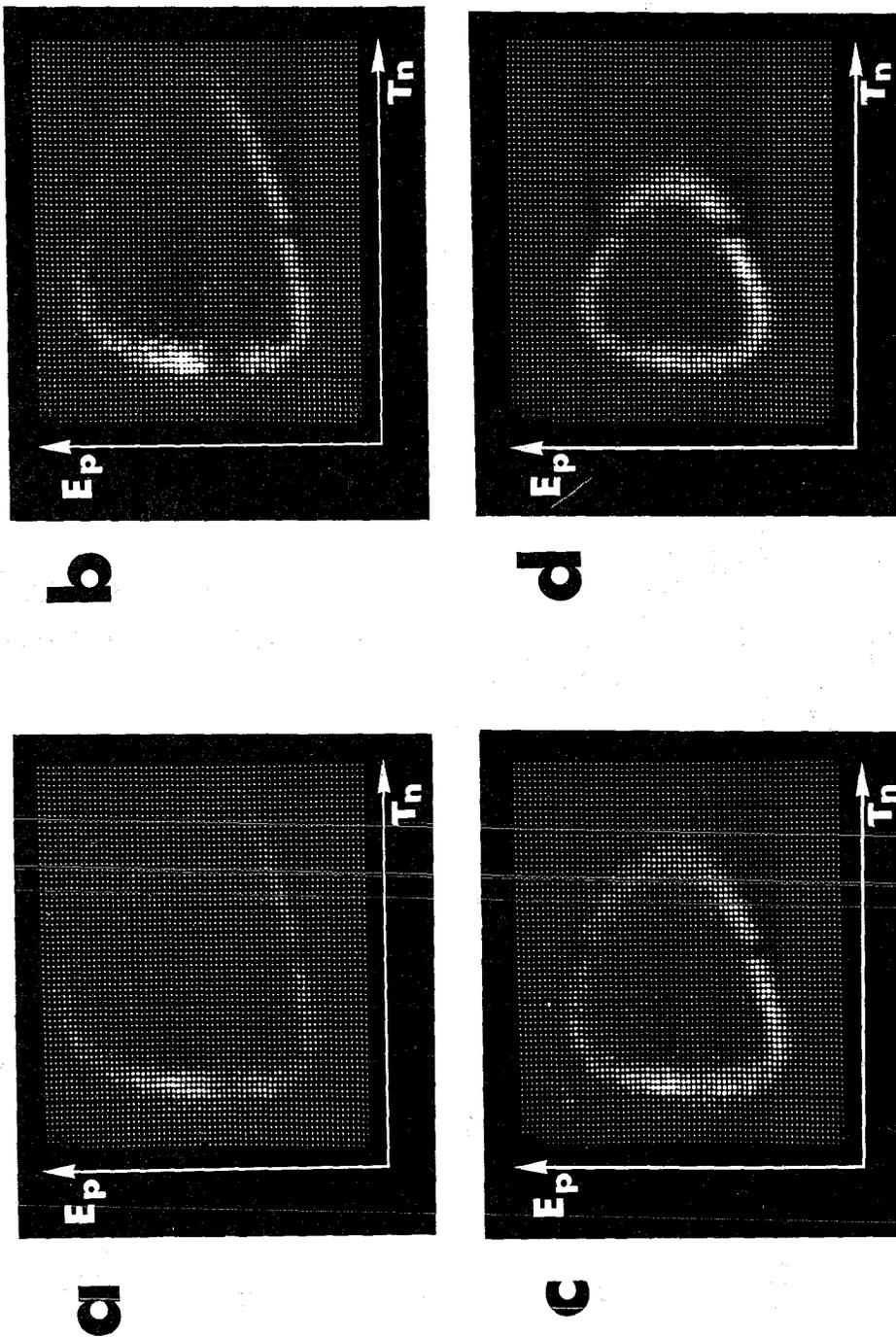


Abb. 5.4 Experimentelle n-p Koinzidenzspektren zur Untersuchung der p-p Subsystemwinkelverteilung. Die Winkelpaare betragen

$\theta_n = 48.3^\circ$ , $\theta_p = 19.5^\circ$	Spektrum a.
$\theta_n = 48.3^\circ$ , $\theta_p = 22.4^\circ$	Spektrum b.
$\theta_n = 48.3^\circ$ , $\theta_p = 25.5^\circ$	Spektrum c.
$\theta_n = 48.3^\circ$ , $\theta_p = 28.3^\circ$	Spektrum d.

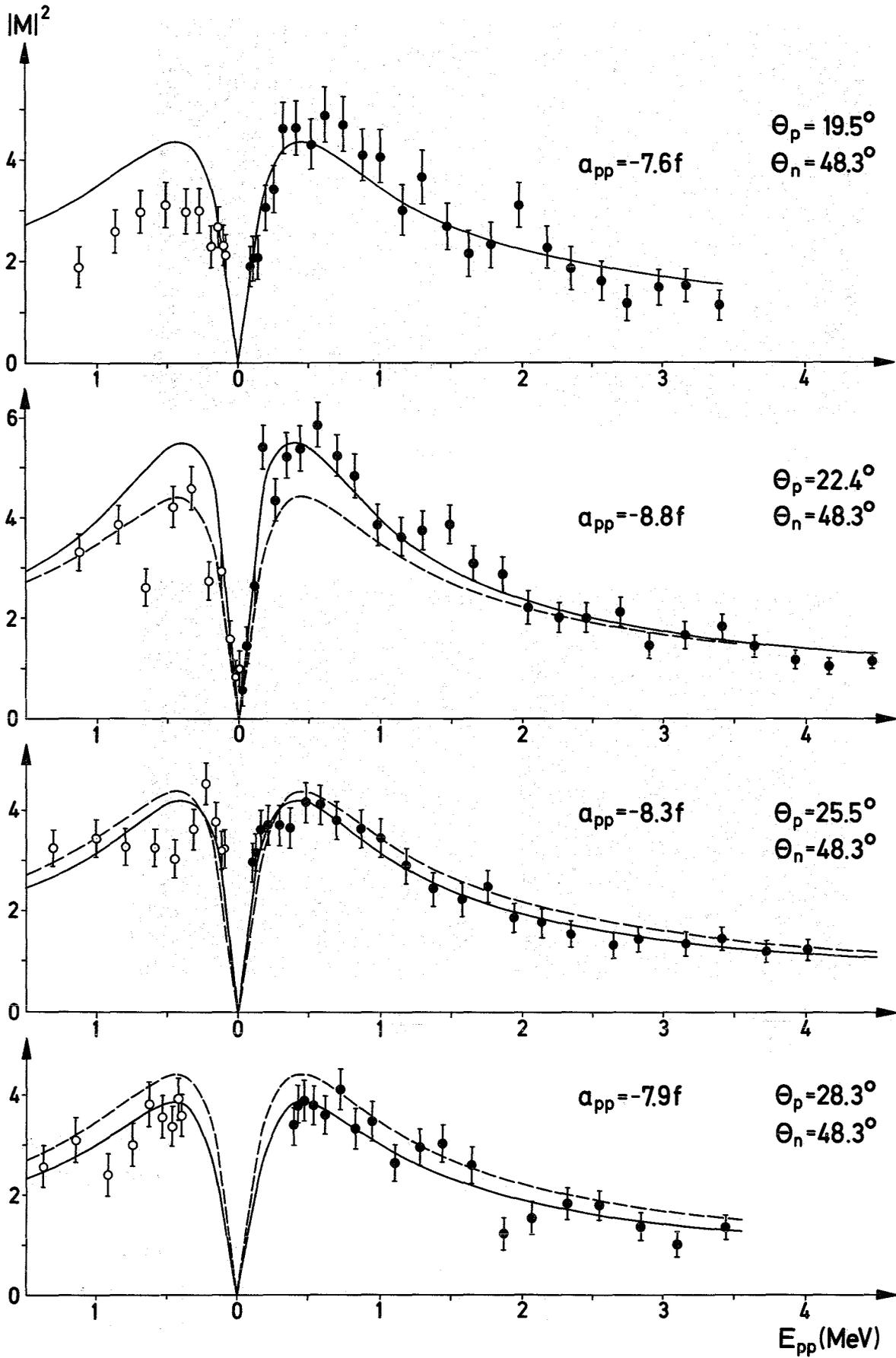


Abb. 5.5 Ergebnis der n-p Winkelkorrelationsmessung zur Untersuchung der Winkelverteilung im p-p Subsystem.

Dabei wurden nur die schwarz bezeichneten Punkte (Meßpunkte bei hoher Protonenenergie) in den Fit miteinbezogen, weil der Einfluß des Spectators im Gebiet hoher Protonenenergie kleiner ist als bei niedriger Protonenenergie.

Der Fit für die  $19,5^\circ$  Daten ist in den anderen Spektren jeweils gestrichelt miteingezeichnet. Man sieht, daß die beobachtete Anisotropie im Gebiet kleiner Relativenergie nur schwach ist. Das Proton-Proton Subsystem wird also im Bereich niedriger Relativenergie erwartungsgemäß vorzugsweise im  $^1S_0$ -Zustand gebildet.

Die Tatsache, daß die Spektren im Bereich großer Relativenergie kaum voneinander abweichen, hat rein kinematische Gründe. Das Subsystemwinkelintervall, das dem in der Winkelkorrelationsmessung überstrichenen Laborwinkelintervall entspricht, ist wie Abbildung 5.2 zeigt, für große Relativenergien kleiner als für kleine Relativenergien.

## 6. Erweiterte Theorie der Proton-Proton Final State Interaction

### 6.1 Grundlagen

Wie bereits einleitend erwähnt wurde, verfügt man zur Zeit für Dreiteilchenreaktionen, insbesondere in solchen Fällen in denen Coulombeffekte eine entscheidende Rolle spielen, über keine praktikable Theorie, die wesentlich über die Watson-Migdal Theorie hinausginge. Der Watson-Migdal Ansatz, wie er bisher in dieser Arbeit Anwendung fand, bleibt aber aus mehreren Gründen unbefriedigend; denn er basiert auf einer Reihe von Annahmen und Vereinfachungen, die ihn ungeeignet machen, die Meßdaten über den gesamten vom Experiment erfaßten kinematischen Bereich zu reproduzieren.

1. Er vernachlässigt völlig die Dynamik der eigentlichen Aufbruchsreaktion.
2. Er berücksichtigt nur die reine Endzustandswechselwirkung und in keiner Weise den, wie die Experimente zeigen, ebenfalls dominanten Spectatoreffekt, dessen Einfluß auch im Gebiet ausgeprägter FSI nicht vollständig vernachlässigbar ist.
3. In der bisher verwendeten Form liegt dem Ansatz die Annahme zugrunde, daß das p-p System lediglich im  $^1S_0$  Zustand gebildet wird. Diese Annahme ist, wie die Winkelkorrelationsmessungen gezeigt haben, bei niedrigen Relativenergien im p-p System zulässig. Sie gilt auch sicher noch bei höherer Relativenergie für den nuklearen Anteil der p-p Wechselwirkung, der über eine kurze Reichweite verfügt. Wegen des zusätzlichen Auftretens der langreichweitigen Coulombkräfte, spielen jedoch Beiträge höherer Drehimpulse im p-p System prinzipiell eine größere Rolle als etwa in n-n oder n-p Systemen.

Einen Einblick in den hiermit umrissenen Problembereich kann man aber, wie im folgenden gezeigt werden soll, durch die Behandlung der Reaktion in Born'scher Näherung unter besonderer

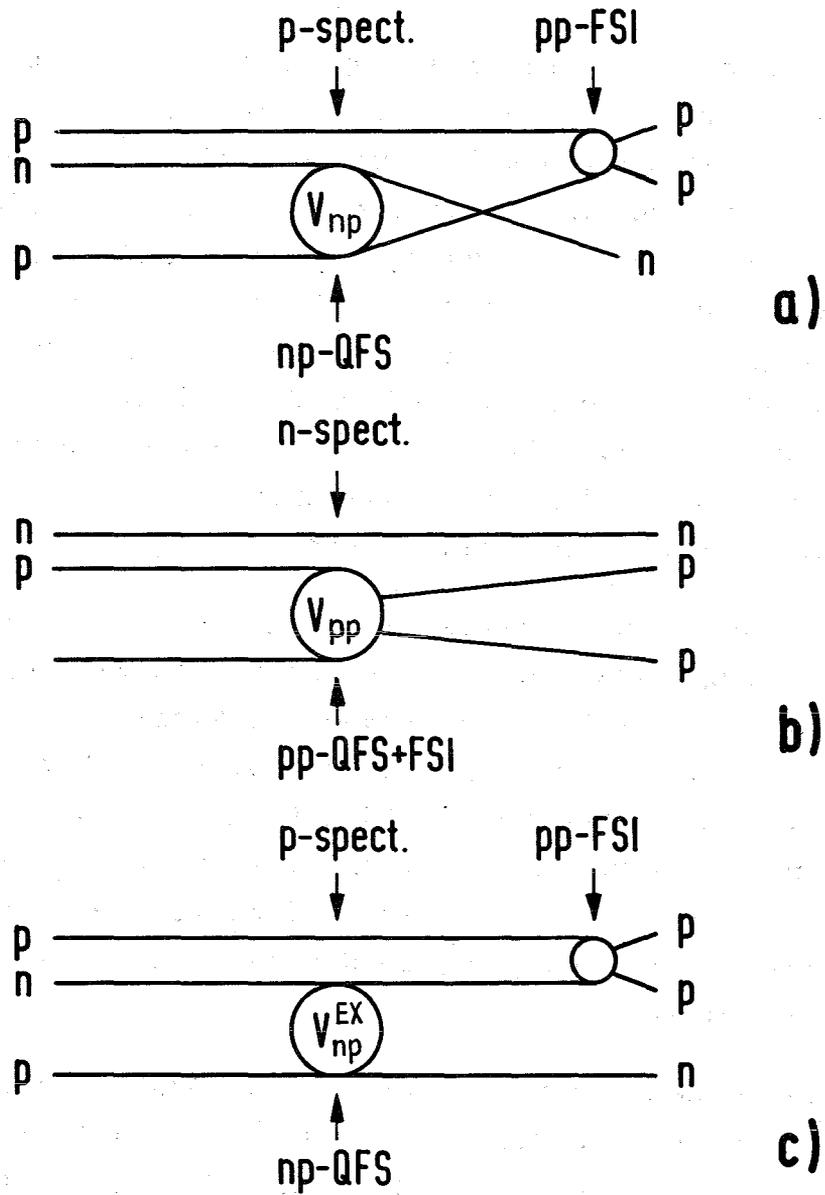
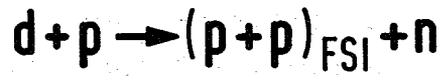


Abb. 6.1 Graphen die in Born'scher Näherung zur p-p FSI in der Reaktion  $d+p \rightarrow p+p+n$  führen.

Berücksichtigung der p-p FSI gewinnen. Man gelangt damit zu einer noch verhältnismäßig einfachen theoretischen Formulierung, der aber nicht mehr die unter 1 - 3 angeführten Mängel anhaften.

In Abbildung 6.1 a-c sind die Graphen zusammengestellt, die für die Reaktion  $d + p \rightarrow p + p + n$  in Born'scher Näherung zu einer p-p FSI führen. Die Annahme, die dieser Näherung zugrunde liegt, ist die, daß die eigentliche Aufbruchsreaktion über den Prozeß der quasifreien Streuung verläuft, und zwar über eine quasielastische n-p Streuung, wie im Graph a und c oder eine p-p Streuung, wie sie im Graph b enthalten ist. Im zweiten Schritt tritt stets eine p-p FSI auf. Dasjenige Geschoßnukleon, das nicht an der quasielastischen Streuung teilnimmt, übernimmt jeweils die Rolle eines Zuschauers, was hier durch die Indizierung "Spect." angedeutet wird.

Das Maß, in dem die einzelnen Graphen zum Gesamtmatrixelement beitragen, hängt aber sehr stark von den speziellen, für die Beobachtung der Reaktion vorgegebenen, kinematischen Bedingungen ab. Bei den in dieser Arbeit diskutierten Experimenten, wurde stets ein Proton aus der Reaktion unter Vorwärtswinkeln und das freie Neutron unter einem relativ großen Winkel nachgewiesen. Für diese kinematischen Bedingungen erwartet man einen starken Beitrag vom Graph a, in dem ein Proton die Rolle des Spectators übernimmt.

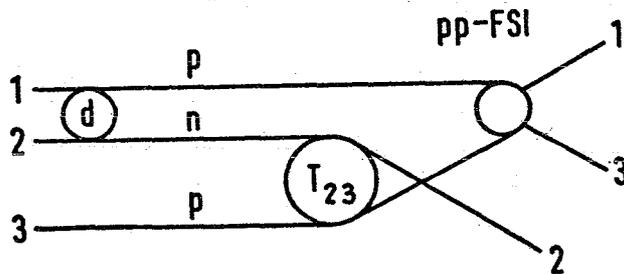
Genau diese kinematische Situation, die Graph a begünstigt, schließt einen nennenswerten Beitrag, der vom Graph b herrührt, aus, da hier das Neutron die Rolle des Zuschauers übernimmt und mit einem Impuls, der etwa der Hälfte des Impulses des einlaufenden Deuterons entspricht, unter einem Vorwärtswinkel emittiert wird.

Der Graph c schließlich, der eine quasifreie n-p Streuung mit gleichzeitigem Ladungsaustausch enthält, trägt im Gebiet starker p-p FSI nur unwesentlich bei. Denn in diesem Fall befinden sich die beiden durch die oberen Linien symbolisierten

Teilchen sowohl im Eingangs- als auch im Ausgangskanal in einem Zustand niedriger Relativenergie. Daher bleibt der Impulsübertrag auf das Neutron im Ausgangskanal gering. Das Neutron bleibt also gewissermaßen im Laborsystem liegen. Gerade im Fall niedriger Relativenergie im p-p Subsystem wird aber bekanntlich die Energie des Neutrons im Ausgangskanal maximal. Daher kann dieser Graph bei niedrigen Relativenergien nur eine geringe Rolle spielen. Für den Fall größerer Relativenergie im p-p Subsystem gilt das angeführte jedoch Argument nicht mehr. Man kann aber zeigen, daß für die spezielle Näherung (zero-range-Näherung), die im folgenden gemacht wird, die Anteile, die von den Graphen a und c stammen, zueinander proportional sind. Daher braucht für die vorgegebenen kinematischen Bedingungen nur der Graph a explizit berechnet zu werden.

## 6.2 Berechnung der Matrixelemente

Im folgenden wird der Graph 6.1 a quantitativ behandelt.



Diesem Graph entspricht im Laborsystem (zunächst unter Vernachlässigung des Spins) ein Matrixelement von der Gestalt:

$$\delta(\vec{P}-\vec{Q}-\vec{p}_n)M(\vec{P},\vec{p}_n,\vec{k}) = \delta(\vec{P}-\vec{Q}-\vec{p}_n)\langle \vec{p}_n,\vec{k} | T_{23} | \vec{P} \rangle =$$

$$= \int d^3r_1 d^3r_2 d^3r_3 e^{-i\vec{p}_n\vec{r}_2} e^{-i\vec{Q}(\vec{r}_1+\vec{r}_3)/2} \chi_{\vec{k}}^{(-)}(\vec{r}_1-\vec{r}_3) \times \quad (6.1)$$

$$\times T_{23} \phi_d(\vec{r}_1-\vec{r}_2) e^{i\vec{P}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)/2}$$

Hierbei bedeuten:

- $\vec{P}$  Impuls des einlaufenden Deuterons
- $\vec{p}_n = 2\vec{q}$  Impuls des auslaufenden Neutrons
- $\vec{Q}$  Impuls des p-p Schwerpunktsystems
- $\vec{k}$  Relativimpuls im p-p Schwerpunktsystem
- $T_{23}$  Streuamplitude für die quasielastische n-p Streuung
- $\phi_d$  Wellenfunktion des Deuterons
- $\chi_{\vec{k}}^{(-)}$  p-p Wellenfunktion

Die Protonenkoordinaten sind mit 1 und 3, die Koordinaten des Neutrons sind mit 2 indiziert.

Für die weitere Rechnung erweist es sich als zweckmäßig, eine Transformation auf Relativ- und Schwerpunktskoordinaten durchzuführen.

$$\begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r}_{12} \\ \vec{r}_{13} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{T} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Für die Determinante dieser Transformation gilt  $\det(T) = 1$ .  
Damit erhält man anstelle von Gleichung (6.1)

$$\delta(\vec{P}-\vec{Q}-\vec{p}_n)M(\vec{P},\vec{p}_n,\vec{k}) = \int d^3R d^3r_{12} d^3r_{13} e^{iR(\vec{P}-\vec{Q}-\vec{p}_n)} e^{-i\vec{r}_{12}(\vec{P}-2\vec{p}_n)/2} \times \quad (6.3)$$

$$\times \phi_d(\vec{r}_{12})T_{23} e^{i\vec{r}_{13} \cdot \vec{Q}/2} \chi_{\vec{k}}^{*(-)}(\vec{r}_{13})$$

Zieht man zusätzlich Spin und Antisymmetrisierung in Betracht, so gelangt man für den Dreiteilchenwirkungsquerschnitt zu folgendem Ergebnis.

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_p d\Omega_n dE_p} = A \cdot \sum_{Ss} [(2S+1)(2s+1)] \left| \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} (2\sigma+1) W\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} S; \sigma 1\right) \times \right. \quad (6.4)$$

$$\left. \times W\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} S; \sigma s\right) M_{s\sigma}(\vec{P},\vec{p}_n,\vec{k}) \right|^2$$

Hierbei bezeichnet S den totalen Spin, s den Spin des p-p Subsystems im Endzustand, und  $\sigma$  den Spin des n-p Systems (2,3) im Zwischenzustand. Die Größen W sind Racahkoeffizienten in der üblichen Notation. A enthält alle kinematischen Faktoren. Die Matrixelemente  $M_{s\sigma}$  hängen von s wegen der notwendigen Antisymmetrisierung und von  $\sigma$  wegen der Spinabhängigkeit der Kernkräfte ab.

(6.5)

$$M_{s\sigma}(\vec{P},\vec{p}_n,\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \langle \vec{p}_n, \vec{k} | T_{23}^{\sigma} | \vec{P} \rangle + (-1)^s \langle \vec{p}_n, -\vec{k} | T_{23}^{\sigma} | \vec{P} \rangle \right|$$

Explizit erhält man für die Beziehung (6.4) folgendes Ergebnis:

(6.6)

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_p d\Omega_n dE_p} = A \cdot \left\{ \frac{9}{8} |M_{00} + M_{01}|^2 + \frac{3}{8} |3M_{10} - M_{11}|^2 + 12 |M_{11}|^2 \right\}$$

Bei der Berechnung des Matrixelementes benutzt man für die in Gleichung (6.3) auftretende Wellenfunktion des Deuterons zweckmäßigerweise die Hulthénfunktion.

$$\phi_d(\vec{r}) = N \cdot \frac{e^{-\beta_1 r} - e^{-\beta_2 r}}{r} \quad (6.7)$$

Die Normierungskonstante der Hulthén-Funktion N ist gegeben durch

$$N = \left[ \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{2\pi (\beta_1 - \beta_2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.8)$$

Die p-p Wellenfunktion  $\chi_{\vec{k}}(\vec{r})$  kann als Summe eines regulären Coulombanteils und eines  $\vec{k}$ "nuklearen" Anteils dargestellt werden.

$$\chi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \chi_{\vec{k}}^{\text{Cb}}(\vec{r}) + \chi_{\vec{k}}^{\text{Nuc}}(\vec{r}) \quad (6.9)$$

Die beiden Summanden sind folgendermaßen definiert

$$\chi_{\vec{k}}^{\text{Cb}}(\vec{r}) = e^{-\frac{\pi\eta}{2}} \Gamma(1+i\eta) e^{i\vec{k}\vec{r}} F[-i\eta \mid 1 \mid i(kr - \vec{k}\vec{r})] \quad (6.10)$$

$$\chi_{\vec{k}}^{\text{Nuc}}(\vec{r}) = -\frac{1}{2kr} \sum_0^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell+1} e^{i\sigma_\ell} (e^{2i\delta_\ell} - 1) \times \quad (6.11)$$

$$\times (G_\ell(kr) + iF_\ell(kr)) P_\ell(\cos \theta_{\vec{k} \vec{r}})$$

F ist die konfluente hypergeometrische Funktion. Die Größen  $\sigma_\ell$  und  $\delta_\ell$  sind die reinen Coulomb- bzw. die "nuklearen" Streuphasen.  $F_\ell$  und  $G_\ell$  sind die regulären und irregulären Coulombfunktionen. Entsprechend der durch (6.9) gegebenen Aufteilung für die p-p Wellenfunktion, kann man nun auch das Gesamtmatrixelement in einen reinen Coulombanteil und einen "nuklearen" Anteil aufspalten.

$$M_{\sigma}(\vec{P}, \vec{p}_n, \vec{k}) = M_{\sigma}^{\text{Cb}}(\vec{P}, \vec{p}_n, \vec{k}) + M_{\sigma}^{\text{Nuc}}(\vec{P}, \vec{p}_n, \vec{k}) \quad (6.12)$$

Für den reinen Coulombanteil kann jedoch im Allgemeinfall kein geschlossener Ausdruck angegeben werden. Benutzt man aber für die Zweiteilchenstreuamplituden  $T_{23}^{\sigma}$  eine zero-range-Näherung

$$T_{23}^0 = V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = V_0 \delta(\vec{r}_{12} - \vec{r}_{13}) \quad (6.13)$$

$$T_{23}^1 = \alpha \cdot V_0 \cdot \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \alpha \cdot V_0 \cdot \delta(\vec{r}_{12} - \vec{r}_{13})$$

so ist der Coulombanteil geschlossen integrierbar. \*)

Eine solche zero-range-Näherung ist genau wie das Modell der quasifreien Streuung überhaupt nur dann gerechtfertigt, wenn die de Broglie-Wellenlänge, die dem Impuls im Schwerpunktsystem entspricht, klein ist verglichen mit der Ausdehnung des Deuterons. Die Näherung ist daher bei der relativ hohen Einschußenergie von 52 MeV zu vertreten. Man erhält nun nach Integration über  $\vec{R}$  und  $\vec{r}_{12}$  für das Coulombmatrixelement folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} M_{\sigma=0}^{\text{Cb}} = \langle \vec{p}_n, \vec{k} | T_{23}^0 | \vec{P} \rangle_{\sigma=0}^{\text{Cb}} &= (2\pi)^3 V_0 N \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} \times \\ &\times \chi_{-\vec{k}}^{\text{Cb}}(\vec{r}) \left( \frac{e^{-\beta_1 r} - e^{-\beta_2 r}}{r} \right) \\ &= (2\pi)^3 V_0 N e^{-\frac{\pi\eta}{2}} \Gamma(1+i\eta) \int r dr d\Omega \times \\ &\times e^{i(\vec{q}-\vec{k})\vec{r}} \left( e^{-\beta_1 r} - e^{-\beta_2 r} \right) \times \\ &\times F[-i\eta | 1 | i(kr + \vec{k}\vec{r})] \end{aligned} \quad (6.14)$$

\*) Der Parameter  $\alpha$  wird durch das Verhältnis von n-p Triplet und - Singulett-Streuquerschnitt in folgender Weise bestimmt

$$\alpha = (\sigma_{np}^{\text{tripl.}} / \sigma_{np}^{\text{singl.}})^{1/2}$$

Das Integral (6.14) kann nach der Methode von Sommerfeld und Morrinigo [31,32] geschlossen berechnet werden.

$$M_{\sigma=0}^{Cb} = M_{\sigma=0}^{Cb}(\beta_1) - M_{\sigma=0}^{Cb}(\beta_2)$$

mit

$$M_{\sigma=0}^{Cb}(\beta) = 2(2\pi)^4 V_0 N e^{i\sigma_0} C_0(n) \left[ \frac{1}{(\vec{k}-\vec{q})^2 + \beta^2} \right]^{\times} \quad (6.15)$$

$$\times \left[ \frac{\beta^2 + (\vec{k}-\vec{q})^2 - 2\vec{k}(\vec{k}-\vec{q}) - 2ik\beta}{(\vec{k}-\vec{q})^2 + \beta^2} \right]^{in}$$

Hierbei wird von der Identität  $e^{-\pi n/2} \Gamma(1+in) = C_0(n) e^{iq_0}$  Gebrauch gemacht.

Bemerkenswert ist das Auftreten des Faktors  $[(\vec{k}-\vec{q})^2 + \beta^2]^{-1}$ . Er erreicht wie eine triviale Umformung zeigt, seinen Maximalwert wenn der Impuls des Geschosßprotons die Spectatorbedingung  $\vec{p}_1 = \vec{P}/2$  erfüllt. Das Matrixelement beschreibt also den Mechanismus des Protonspectators unter dem Einfluß der reinen Coulomb-FSI. (Auch bei einem Grenzübergang  $n \rightarrow 0$  bleibt der aus der Impulsapproximation bekannte Spectatorterm übrig. Im folgenden wird daher (6.15) als Spectatormatrixelement bezeichnet.) In Analogie zu Gl. (6.14) erhält man für das nukleare Matrixelement

$$M_{\sigma=0}^{Nuc} = (2\pi)^3 V_0 N \int d^3r e^{i\vec{q}\vec{r}} \chi_{-\vec{k}}^{Nuc}(\vec{r}) \frac{e^{-\beta_1 r} - e^{-\beta_2 r}}{r}$$

$$= -i(2\pi)^4 V_0 \frac{N}{k} e^{i\sigma_0} (e^{2i\delta_0} - 1) \times \quad (6.16)$$

$$\times \int dr j_0(qr) (G_0(kr) + iF_0(kr)) (e^{-\beta_1 r} - e^{-\beta_2 r})$$

Hierbei wird von der Identität  $\chi_{\vec{k}}^{*(-)}(\vec{r}) = \chi_{-\vec{k}}(\vec{r})$  Gebrauch gemacht.

Der Ausdruck  $(G_0 + iF_0)$  kann nach der von Breit und Hull angegebenen Reihe entwickelt werden. Die Reihenentwicklung lautet

$$G_0(kr) + iF_0(kr) = C_0^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 2\eta (2\gamma - 1 + h(\eta) + \frac{ic_0^2}{2\eta}) A_n + a_n \right\} (kr)^n + 2\eta A_n (kr)^n \ln(2\eta kr) \quad (6.17)$$

$\gamma = 0.577$  ist die Euler'sche Konstante.

Die Größen  $A_n$  und  $a_n$  sind durch die Rekursionsbeziehungen

$$A_n = \frac{2\eta A_{n-1} - A_{n-2}}{n(n-1)} \quad (6.18)$$

$$a_n = \frac{2\eta a_{n-1} - a_{n-2} - 2\eta(2n-1)A_n}{n(n-1)}$$

mit  $A_0 = 0$ ,  $A_1 = 1$ ,  $a_0 = 1$  und  $a_1 = 0$  definiert.

Einsetzen von (6.17) in (6.16) führt auf einen Ausdruck, der Integrale folgender Gestalt enthält:

$$I_n^{(1)} = \int dr \frac{\sin qr}{qr} e^{-\beta r} (kr)^n \quad \text{für } n \geq 0$$

$$I_n^{(2)} = \int dr \frac{\sin qr}{qr} e^{-\beta r} (kr)^n \ln(2\eta kr) \quad (6.19)$$

für  $n > 0$

Explizit erhält man |33|

$$I_n^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{q} \operatorname{arctg}\left(\frac{q}{\beta}\right) & \text{für } n = 0 \\ \frac{n!}{q} \left(\frac{\beta k}{\beta^2 + q^2}\right)^n \sum_{v=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^v \left(\frac{q}{\beta}\right)^{2v+1}}{(2v+1)! (n - [2v+1])!} \end{cases}$$

für  $n \geq 1$

(6.20)

$$I_n^{(2)} = \frac{(n-1)!}{(2\eta)^n q} \left[ \{-\gamma + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2 + q^2}{4\eta^2 k^2}\} \operatorname{Im}\left(\frac{2\eta k}{\beta - iq}\right)^n + \operatorname{arctg}\left(\frac{q}{\beta}\right) \operatorname{Re}\left(\frac{2\eta k}{\beta - iq}\right)^n \right]$$

Damit ergibt sich für das "nukleare" Matrixelement folgende Beziehung

$$\begin{aligned} M_{\sigma=0}^{\text{Nuc}}(\beta) &= \langle \vec{p}_n \vec{k} | T_{23}^0 | \vec{P} \rangle = -i(2\pi)^4 V_0 N e^{i\sigma_0} \left( \frac{e^{2i\delta_0} - 1}{C_0 k} \right) \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 2\eta(2\gamma - 1 + h(n) + \frac{ic_0^2}{2\eta}) A_n + a_n \right\} \times \\ &\times I_n^{(1)}(\beta) + 2\eta A_n I_n^{(2)}(\beta) \end{aligned} \quad (6.21a)$$

Die angegebene Reihe konvergiert jedoch nur für  $k < \sqrt{q^2 + \beta^2}$ .

Für  $k > \sqrt{q^2 + \beta^2}$  kann die Näherung  $(G_0 + iF_0) \approx e^{ikr}$  benutzt werden, weil in diesem Bereich erstens die Größe  $\eta = (2kR)^{-1}$  klein ist und zweitens das Spectatormatrixelement überwiegt.

Mit dieser Näherung ergibt sich

$$\begin{aligned} M_{\sigma=0}^{\text{Nuc}}(\beta) &= -i(2\pi)^4 V_0 N e^{i\sigma_0} \left( \frac{e^{2i\delta_0} - 1}{C_0 k} \right) \frac{1}{2q} \left[ \left\{ \operatorname{arctg} \frac{q+k}{\beta} + \operatorname{arctg} \frac{q-k}{\beta} \right\} + \right. \\ &\left. + \frac{i}{2} \ln \frac{(q+k)^2 + \beta^2}{(q-k)^2 - \beta^2} \right] \end{aligned} \quad (6.21b)$$

Das Gesamtmatrizelement  $M_{\sigma=0}^{\text{Nuc}}$  erhält man als Differenz

$$M_{\sigma=0}^{\text{Nuc}} = M_{\sigma=0}^{\text{Nuc}}(\beta_1) - M_{\sigma=0}^{\text{Nuc}}(\beta_2) \quad (6.22)$$

wobei je nach dem ob  $k \gtrsim \sqrt{q^2 + \beta_{1,2}^2}$  erfüllt ist, die einzelnen Terme mit Gl. (21a) oder Gl. (21b) berechnet werden.

Entsprechend gilt für  $M_{\sigma=1}^{\text{Nuc}} = \alpha M_{\sigma=0}^{\text{Nuc}}$ .

Für kleine Werte von  $k$  erhält man aus beiden Gleichungen in niedrigster Näherung

$$M_{\sigma=0}^{\text{Nuc}} = 2(2\pi)^4 V_0 N e^{i\sigma_0} e^{i\delta_0} \left(\frac{\sin \delta_0}{C_0 k}\right) \frac{1}{q} \left| \arctg\left(\frac{q}{\beta_1}\right) - \arctg\left(\frac{q}{\beta_2}\right) \right| \quad (6.23)$$

Hier ist das Auftreten des Faktors  $\left(\frac{\sin \delta_0}{C_0 k}\right)$  bemerkenswert. Er ist mit dem von Migdal angegebenen Enhancementfaktor  $F_{pp}^{\text{Mig}}$  durch die Beziehung

$$F_{pp}^{\text{Mig}} = \left(\frac{\sin \delta_0}{C_0 k}\right)^2$$

verknüpft.

### 6.3 Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen

Mit der zuvor beschriebenen Methode verfügt man über eine Modellrechnung, die

1. im Spectatorterm ebenso den Beitrag der quasielastischen Streuung, wie auch die reine Coulomb-FSI des p-p Systems und darin den Anteil höherer Drehimpulse berücksichtigt,
2. im "nuklearen Anteil" des Matrizelementes in niedrigster Näherung den Watson-Migdal-Ansatz für die Proton-Proton-FSI reproduziert und
3. Interferenzterme zwischen beiden Mechanismen einschließt.

Abbildung 6.2a zeigt einen Fit mit dieser erweiterten Theorie, an die experimentellen Daten für das Winkelpaar  $\theta_n = \theta_3 = 48^\circ$

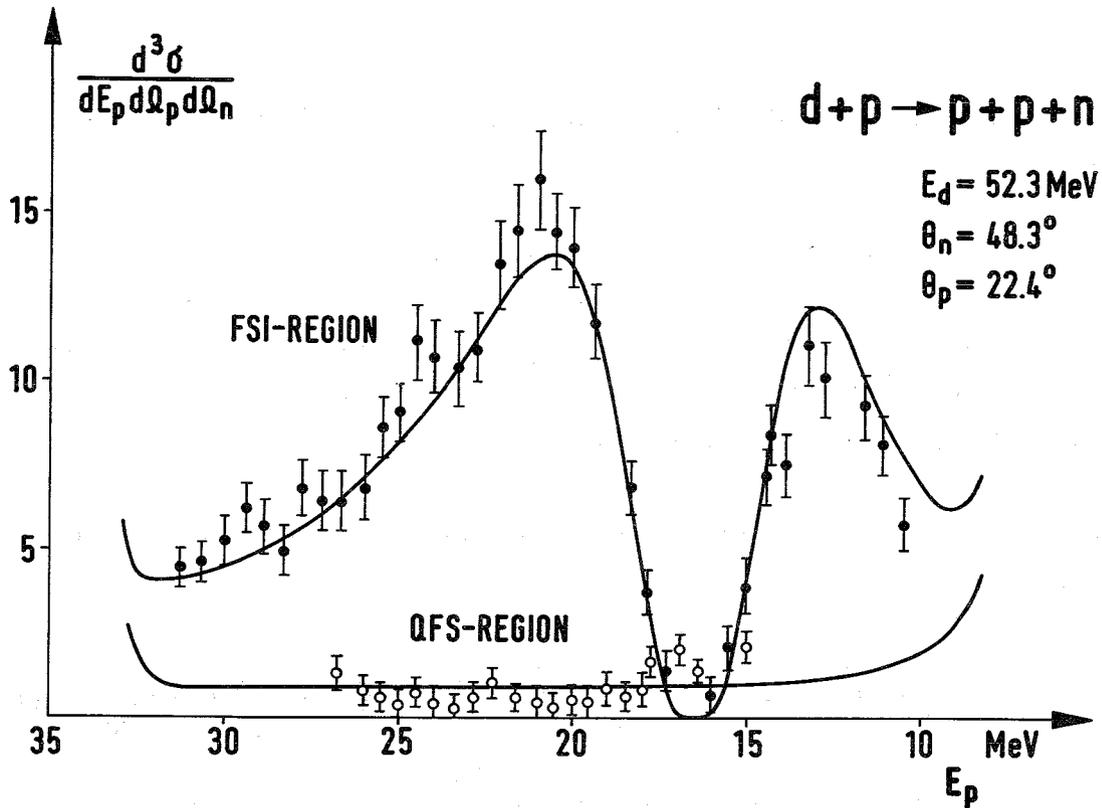


Abb. 6.2a Fit mit der erweiterten Theorie für das Winkelpaar  $\theta_n = 48.3^\circ$ ,  $\theta_p = 22.4^\circ$

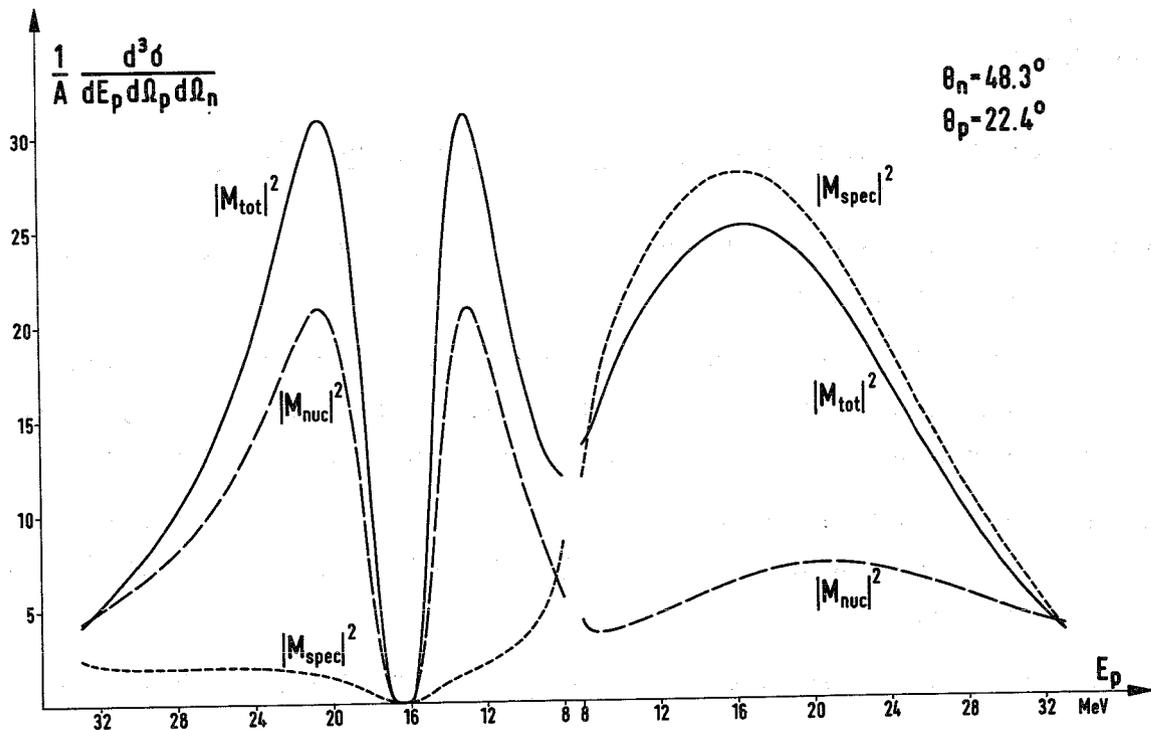


Abb. 6.2b Theoretische Voraussage für den durch den Phasenraum dividierten Wirkungsquerschnitt

und  $\theta_p = \theta_4 = 22.4^\circ$ . Abb. 6.2b zeigt den durch den Phasenraum dividierten Wirkungsquerschnitt. Mit eingetragen sind der "reine Spectatoranteil" bzw. der "reine nukleare Anteil" unter Vernachlässigung der Interferenz zwischen beiden Termen.

Es erweist sich folgendes:

1. Der Ansatz reproduziert den Verlauf des Spektrums im Gebiet ausgeprägter FSI (FSI-REGION) ausgezeichnet. Wie bereits erwartet, zeigt sich, daß auch hier, besonders bei kleiner Protonenenergie, der Einfluß des Spectatoreffektes nicht unbeträchtlich ist. Dadurch wird wiederum der Wert für die extrahierte Streulänge  $a_{pp} = -7.6 \text{ fm}$  im Vergleich zu dem Wert  $a_{pp} = -8.8 \text{ fm}$ , der unter Benutzung des modifizierten Migdalansatzes erhalten wurde, erheblich beeinflusst.
2. In dem Teil des Spektrums, in dem die quasielastische Streuung dominiert (QFS-REGION) werden die Daten durch die theoretische Kurve, wenn man sie zuvor im FSI-Bereich angepaßt hat, nicht so gut reproduziert. Qualitativ zeigt sich aber auch hier eine gute Übereinstimmung mit den beobachteten Spektren. Diese Diskrepanz dürfte vorwiegend ihre Ursache in der Verwendung des einfachen zero-range-Ansatzes für die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung haben.

Eine Weiterentwicklung der beschriebenen Theorie müßte daher darauf hinzielen, die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung in der quasielastischen Streuung mit einem realistischeren Ansatz zu erfassen als ihn die zero-range Näherung darstellt. Damit geht natürlich auch die Möglichkeit verloren, die Ergebnisse wie z.B. im Spectator-term in geschlossener Form zu erhalten. Die Tatsache jedoch, daß der verwendete Ansatz die Daten trotz seiner Einfachheit recht gut reproduziert, zeigt, daß eine Weiterentwicklung erfolgversprechend ist.

6.4 Erweiterung auf die Vierteilchenreaktion d+d+p+p+n+n

Der im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Ansatz zur theoretischen Behandlung der Dreinukleonenreaktion d+p+p+n lässt sich ebenfalls unter Verwendung einer zero-range Näherung relativ einfach auf den Vierteilchenaufbrauch d+d+p+p+n+n erweitern. Abb. 6.3 a) zeigt noch einmal den bereits ausführlich diskutierten Graphen für die Reaktion d+p+p+n. Abb. 6.3 b) zeigt den analogen Graphen für die Reaktion d+d+p+p+n+n.

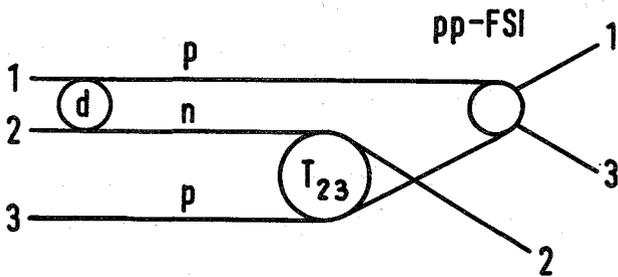


Abb. 6.3a

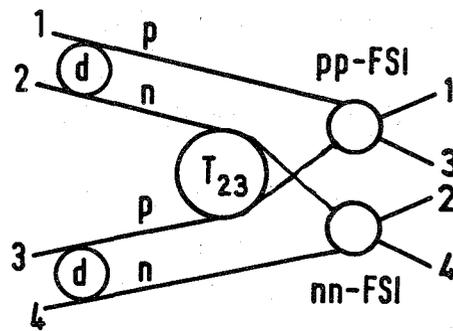


Abb. 6.3b

Das entsprechende Matrixelement hat nach einer Transformation T auf

$$\begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r}_{12} \\ \vec{r}_{23} \\ \vec{r}_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \\ \vec{r}_4 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

geeignete Relativkoordinaten in Analogie zu (6.4) folgende Gestalt.

$$\delta(\vec{P} - \sum_{i=1}^4 \vec{p}_i) \langle M \rangle \sim \int d^3R d^3r_{12} d^3r_{23} d^3r_{34} \phi_d(r_{12}) \phi_d(r_{34}) e^{i\vec{R}(\vec{P} - \sum \vec{p}_i)} \times \quad (6.25)$$

$$e^{i\vec{r}_{12}\vec{p}_{12}} \delta(\vec{r}_{23}) e^{i\vec{r}_{23}\vec{p}_{23}} e^{i\vec{r}_{34}\vec{p}_{34}} \chi_{pp}^*(-\vec{r}_{13}) \chi_{nn}^*(-\vec{r}_{24})$$

Mit  $\delta(\vec{r}_{23}) = \delta(\vec{r}_{12} - \vec{r}_{13}) = \delta(\vec{r}_{24} - \vec{r}_{34})$  erhält man daraus

$$M = \left| \int d^3r_{12} \phi_d(r_{12}) e^{i\vec{r}_{12} \cdot \vec{p}_{12}} \chi_{pp}^{*(-)}(r_{12}) \right| \times \\ \times \left| \int d^3r_{34} \phi_d(r_{34}) e^{i\vec{r}_{34} \cdot \vec{p}_{34}} \chi_{pp}^{*(-)}(r_{34}) \right|$$

Damit ist das Problem der Berechnung von (6.25) auf die bereits ausgeführte Berechnung der dem Graph a entsprechenden Matrixelemente (6.14, 6.16) zurückgeführt.

Wie im Fall der Dreiteilchenreaktion können auch für die Vierteilchenreaktion die kinematischen Bedingungen so präpariert werden, daß der dominante Anteil des Gesamtmatrixelementes aus Graph b stammt. Allerdings muß man dazu drei Teilchen in Koinzidenz nachweisen, um alle kinematischen Variablen im Ausgangskanal eindeutig festzulegen. Das Proton 1 übernimmt die Rolle des **Geschoßspectators**, während das Neutron 4 die Funktion des **Targetspectators** hat. Da außerdem die Teilchen 1 und 3 bzw. 2 und 4 eine verhältnismäßig kleine Relativenergie haben müssen, wenn p-p FSI und n-n FSI gleichzeitig auftreten sollen, müssen die Teilchen 1 und 3 bzw. 2 und 4 nahezu den gleichen Impuls haben. Daher wird es zweckmäßig sein, die beiden Protonen unter Vorwärtswinkeln nachzuweisen, so daß ihre Relativenergie etwa 300 keV beträgt, da hier die p-p FSI ihr Maximum hat, während man das niederenergetische Neutron mit der Impulsverteilung, die es aus dem Deuteron mitbekommt, registriert. Dieser Mechanismus soll im Rahmen eines geplanten Vierdetektorexperiments zur simultanen Untersuchung der Reaktion  $d+d \rightarrow d+p+n$  für mehrere Winkelpaare mit untersucht werden, da Dreifachkoinzidenzen automatisch mitregistriert werden können.

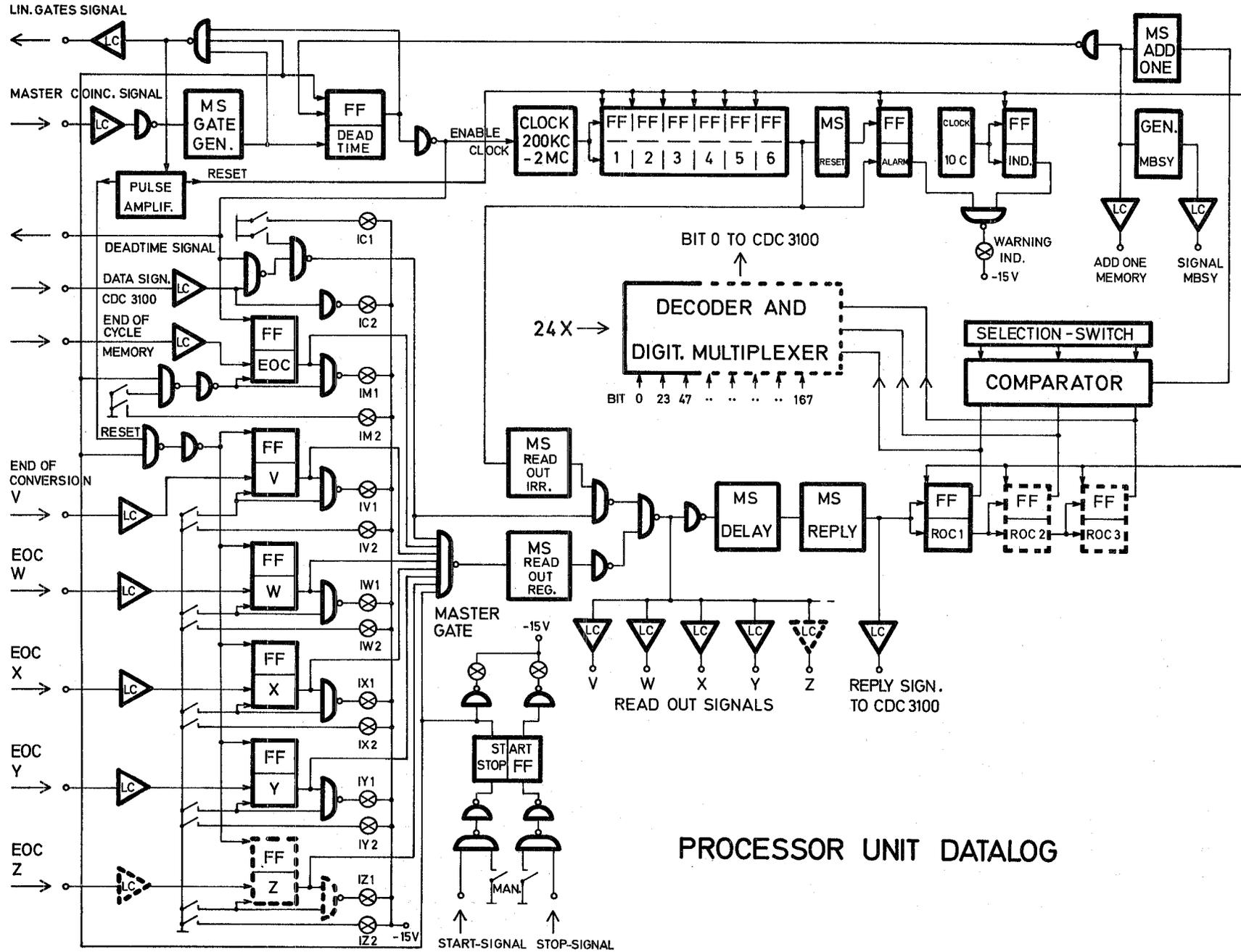
Anhang A

Elektronische Schaltungen der einzelnen Komponenten im System  
DATA

a) DATALOG

Die Einheit DATALOG steuert zentral alle logischen Funktionen der peripheren Meßeinheiten sowie den Datenfluß zwischen Experiment und Computer. Die wesentlichsten Funktionen der Einheit sind bereits in Abschn. 2.3 anhand einer schematischen Darstellung beschrieben worden. Abb. A.1 zeigt wie die einzelnen Funktionsgruppen schaltungstechnisch realisiert wurden. Wenn sich die Einheit in Betriebszustand befindet und nicht mit der Verarbeitung von Information beschäftigt ist, setzt die Vorderflanke des Master Coincidence-Signals über einen Impulsverstärker alle Flipflops in einen definierten Anfangszustand (mit Ausnahme des EOC-Flipflops, da das EOC-Signal zeitlich mit dem Ende des vorhergegangenen Zyklus synchronisiert ist). Über ein Monoflop (MS GATE GEN) werden die linearen Gates geöffnet. Mit der Rückflanke dieses Monoflopsignals wird das Totzeitflipflop gesetzt und die Clock gestartet, die im Falle eines "unvollständigen" Abrufs die Read Out Signale über das Overflowsignal eines sechsstufigen Zählers generiert. Liegt das Datasignal des Computers an und haben alle im System integrierten ADC's die Konversion abgeschlossen, so erfolgt im Fall dieses "vollständigen" Abrufs die Erzeugung des Read Out Signals über das Master Gate. Nach geeigneter Verzögerung wird das Reply-Signal für den Computer generiert. Die Anzahl der Auslesezyklen innerhalb eines Programmzyklus wird über einen Vergleicher mit einer vorgewählten Zahl verglichen. Jeder einzelne Auslesezyklus wird durch ein neues Data-Signal des Computers gestartet, Wenn die vorgewählte Zahl von Auslesezyklen erfolgt ist, wird der Programmzyklus beendet und das Gate für das Data-Signal gesperrt. Das nächste auf die Einheit gelangende Master Coincidence-Signal startet einen neuen Programmzyklus.

Abb. A.1 Detailschaltbild der Einheit DATALOG.



b) DATAMIX

Abb. A.2 zeigt die Einheit DATAMIX. Auf die Einheit gelangen maximal je 12 Bit der ADC's V - Y. In dem speziellen gezeigten Beispiel wird angenommen, daß die ADC's V und W mit einem Konversionsbereich von 5 bzw. 12 Bit arbeiten. Über die Koordinatenauswahl gelangt die Information auf den Formatkontrollschalter, der neben der reinen Schaltfunktion (Section B) auch eine Shiftfunktion (Section A) ausführt. Im Falle, daß die beiden ausgewählten ADC's mit einem Konversionsbereich von 12 Bit arbeiten, kann mit dem Schalter für die Darstellung der Spektren in einem zweidimensionalen Map Display jedes Zwölfbitformat zwischen  $1 \times 4096 \dots 64 \times 64 \dots 4096 \times 1$  gewählt werden.

c) DATABIT

Die Schaltung der Routing Einheit DATABIT wird in Abb. A.3 gezeigt. Die Vorderflanke des Linear Gate Signals bringt zu Beginn eines jeden Zyklus die Einheit in einen definierten Anfangszustand und öffnet die Gates für die Routingsignale 1 - 7. Wird während das Linear Gate Signal anliegt ein Routingsignal empfangen, so wird es binär dekodiert und seine Nummer in den Flipflops 0 - 2 abgespaltet. Eine zusätzliche Einrichtung die das mögliche gleichzeitige Eintreffen zweier Routingsignale erkennt (Simultanbitdekodierung) ist vorgesehen. Die in den Flipflops 0 - 2 und SIM gespeicherte Information kann nun zusammen mit der an den Ausgangsadressregistern der ADC's anliegenden Information ausgelesen werden.

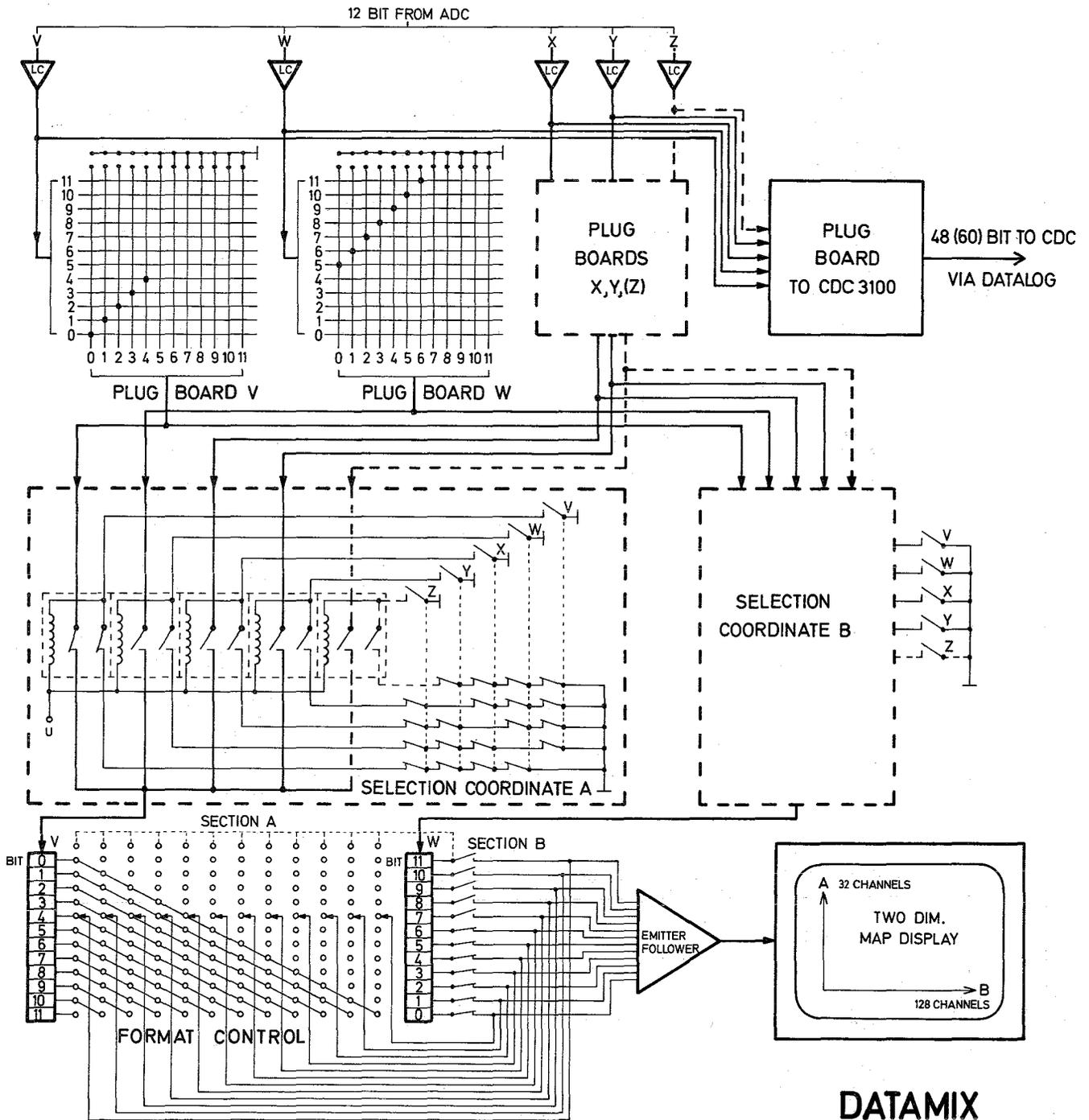
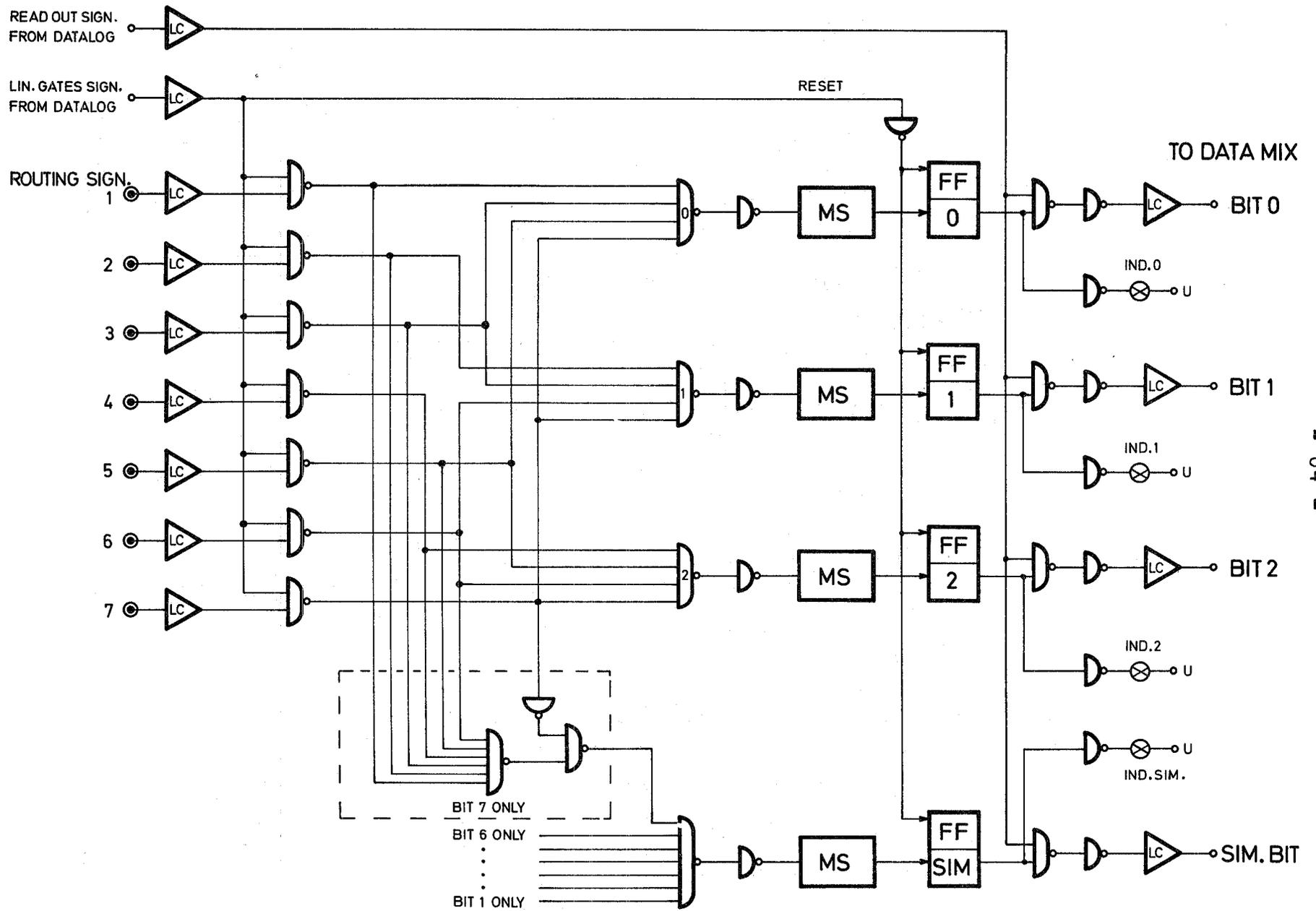


Abb. A.2 Detailschaltbild der Einheit DATAMIX.

Abb. A.3 Detailschaltbild der Einheit DATABIT.



ROUTING UNIT DATABIT

## Anhang B

Bei der Berechnung des Integrals (3.3) mit einer Monte Carlo-Methode wurde folgendermaßen vorgegangen. Mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators wurden Zufallszahlen  $Z_m$  gleichverteilt im Intervall  $0 \leq Z_m \leq 1$  erzeugt. Der Index  $m$  durchläuft dabei für jeden Versuch (i) die Werte  $m = 1 \dots 5$ . Die Bedeutung der verschiedenen Parameter, die jeden einzelnen Versuch vollständig charakterisieren wird durch Abb. B.1. veranschaulicht.

Im einzelnen werden zunächst die mit den Koordinaten  $x_s$  und  $y_s$  des Streuorts identischen Eintrittskordinaten (achsenparalleler Einfall des Neutronenstrahls) gleichverteilt über die Stirnfläche des Zählers ausgewürfelt. (Die Länge des Szintillators sei  $L$  der Durchmesser  $R$ )

$$\psi_s = 2\pi \cdot Z_1$$

$$a_s = R \cdot \sqrt{Z_2}$$

$$x_s = a_s \cdot \cos \psi_s$$

$$y_s = a_s \cdot \sin \psi_s$$

Dann wird die Streukoordinate  $z_s$  entsprechend dem exponentiellen Abfall der Strahlintensität in  $z$  Richtung des Zählers ausgewürfelt.

$$Z_s = -\lambda \ln\{1 - Z_3 [1 - \exp(-L/\lambda)]\}$$

mit  $\lambda = (\sigma_H(E)n_H + \sigma_C(E) \cdot n_C)^{-1}$

Danach werden die Streuwinkel im Schwerpunktsystem des Neutrons und des  $C^{12}$  Kerns gemäß einer isotropen Winkelverteilung bestimmt

$$\phi_s^{CM} = 2\pi \cdot Z_4$$

$$\cos \theta_s^{CM} = 1 - 2 \cdot Z_5$$

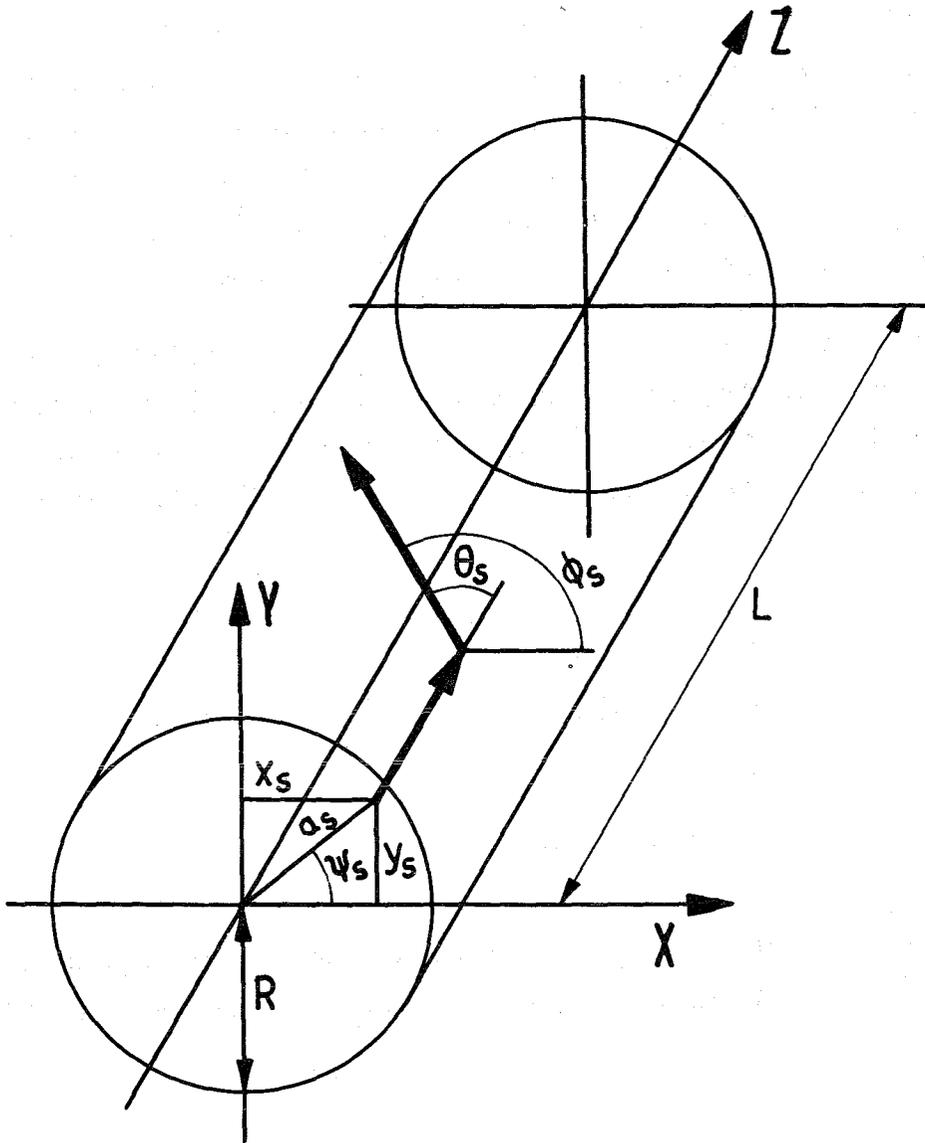


Abb. B.1 Erklärung der im Monte Carlo Programm zur Berechnung der Neutronenansprechwahrscheinlichkeit verwendeten Bezeichnungen.

Die tatsächliche Winkelverteilung wird dabei zum Schluß durch Wichten mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt für den Einzelversuch berücksichtigt. Anschließend wird der Streuwinkel  $\theta_s$  ins Laborsystem transformiert und die Energie  $E'$  des gestreuten Neutrons berechnet.

Die Flugrichtung des Neutrons nach dem Stoß sei durch die Richtungsosini  $u_s, v_s, w_s$  bestimmt, dann gelten für die Strecke  $\ell$  zwischen dem Streuort  $(x_s, y_s, z_s)$  und dem Durchstoßpunkt der Bahn durch die Oberfläche des Szintillators folgende Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \ell &= \frac{-z_s}{w_s} && \text{für } w_s < 0 \\ \ell &= \frac{L-z_s}{w_s} && \text{für } w_s > 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Bei Durchstoß durch die vor-} \\ \text{dere oder hintere Begren-} \\ \text{zungsfläche} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \ell &= \frac{1}{\Omega_s} \left[ -\vec{\Omega}_s \cdot \vec{r}_s + \sqrt{(\vec{\Omega}_s \cdot \vec{r}_s)^2 + (R^2 - r_s^2) \Omega_s^2} \right] \\ \text{mit } \vec{\Omega}_s &= (u_s, v_s) \text{ und } \vec{v}_s = (x_s, y_s) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Bei Durchstoß durch die} \\ \text{Mantelfläche.} \end{array}$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine zweite Streuung des Neutrons an einem Wasserstoffkern auf der Flugstrecke  $\ell$  beträgt allgemein für den  $i$ -ten Versuch

$$W_i^{\text{sek}} = n_H \sigma_H(E_i') \cdot \lambda(E_i') [1 - \exp(-\ell_i / \lambda_i(E_i'))]$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit dafür, daß Neutronen der Energie  $E$  zunächst am  $C^{12}$  und dann am Wasserstoff gestreut werden, beträgt damit

$$W_{CH} = W_C \cdot \frac{\int \frac{d\sigma_C}{d\Omega}(E, \theta_{si}) \cdot W_i^{\text{sek}}}{\int \frac{d\sigma_C}{d\Omega}(E, \theta_{si})}$$

$$\text{mit } W_C = n_C \cdot \sigma_C(E) \cdot \lambda(E) [1 - \exp(-L/\lambda)]$$



## Literaturverzeichnis

- 1) C.C. Chang, E. Bar-Avraham, H.H. Forster, C.C. Kim,  
J.R. Richardson, P. Tomas, J.W. Verba, Phys. Letters  
28B, 175 (1968)  
E.W. Blackmore, J.B. Warren, Can. Journ. Phys. 46, 233 (1968)
- 2) B. Zeitnitz, R. Maschuw, P. Suhr, Phys. Letters  
28B, 420 (1969)  
H. Grässler, R. Honecker, Nucl. Phys. A136, 446 (1969)  
C. Perrin, J.S. Gondrand, M. Durand, S. Desreumaux,  
R. Bouchez,  
Proceeding of the Conference on the Three Body Problem,  
Birmingham (1969)
- 3) H. Brückmann, W. Kluge, H. Matthäy, L. Schänzler, K. Wick  
Phys. Letters 30B, 460 (1969)  
und KFK-Report 949 (1969)  
H. Brückmann, W. Gehrke, W. Kluge, H. Matthäy, K. Wick  
Proceeding of the Conference on the Three Body Problem,  
Birmingham (1969)  
und KFK-Report 892 (1969)  
H. Brückmann, W. Kluge, H. Matthäy, L. Schänzler, K. Wick  
KFK-Report 1172 (1970)  
H. Brückmann, W. Kluge, H. Matthäy, L. Schänzler, K. Wick  
KFK-Report 1216 und Bulletin of the American Physical Society  
Ser. II, Vol. 15, No. 4, 476 (1970)
- 4) G. Paić, I. Slaus (ed.)  
Proc. of the Symposium on Few Body Problems, Light Nuclei,  
and Nuclear Interactions, Bréla 1967  
Gordon and Breach, New York (1968)
- 5) J.S.C. McKee, P.M. Rolph (ed.)  
Proc. of the Conference on the Three Body Problem in Nuclear  
and Particle Physics, Birmingham 1969  
North Holland Publ., Amsterdam (1970)

- 6) D.P. Boyd, P.F. Donovan, B. Marsh, P. Assimakopoulos,  
Bull. Am. Phys. Soc. 13, 567 (1968)  
D.P. Boyd, P.F. Donovan, J.F. Mollenauer,  
Rutgers State University Report (1968)
- 7) A. Niller, C. Joseph, V. Valković, W. von Witsch,  
G.C. Phillips, Phys. Rev. 182, 1083 (1969)
- 8) H. Brückmann, P. Fluck, H. Matthäy, L. Schänzler,  
KFK-Report 897 (1968)  
H. Brückmann, KFK-Report 912 (1968)
- 9) L.D. Faddeev, Soviet. Phys. JETP 12, 1014 (1961)  
L.D. Faddeev, Soviet. Phys. Poklady 7, 600 (1963)
- 10) A.N. Mitra, Nucl. Phys. 32, 529 (1962)
- 11) R. Aaron, R.D. Amado, Phys. Rev. 150, 857 (1966)
- 12) T.D. Lee, Phys. Rev. 95, 1329 (1954)
- 13) E.O. Alt, P. Grassberger, W. Sandhas, Nucl. Phys. B2,  
167 (1967)
- 14) W. Sandhas, Private Mitteilung
- 15) G.G. Ohlsen, Nucl. Instr. and Meth. 37, 240 (1965)
- 16) W. Kluge, Dissertation, Karlsruhe (1967),  
Externer Bericht 3/67-4, Kernforschungszentrum Karlsruhe
- 17) L. Schänzler, Dissertation, Karlsruhe (1968)
- 18) H. Brückmann, E.L. Haase, W. Kluge, L. Schänzler,  
Nucl. Instr. and Meth. 63, 29 (1968)
- 19) W. Kluge, Programmbeschreibung: Teilchenidentifizierung  
und Abzug der zufälligen Koinzidenzen (unveröffentlicht)
- 20) H. Bialy, Diplomarbeit, Karlsruhe (1972)
- 21) J.B. Marion, J.L. Fowler, Fast Neutron Physics  
New York (1960)

- 22) R.J. Kurz, UCRL-Report 11339 (1964)
- 23) K. Wick, Programm für eine relativistische Dreiteilchenkinematik (unveröffentlicht)
- 24) K.M. Watson, Phys. Rev. 88, 1163 (1952),  
M.C. Goldberger, K.M. Watson, Collision Theory  
New York (1964)
- 25) A.B. Migdal, Zh. Eksp. i Theor. Fiz. 28, 3 (1955)
- 26) G. Breit, M.H. Hull, Handbuch der Physik  
Bd. XLI/1, 408, (1954)
- 27) R.J.N. Phillips, Nucl. Phys. 53 (1964), 650
- 28) G. Breit, W.G. Bouricius, Phys. Rev. 75, 1029 (1949)
- 29) J.D. Jackson, J.M. Blatt, Revs. Mod. Phys. 22, 77 (1950)
- 30) K. Wick, Dissertation Karlsruhe (1970),  
externer Bericht 3/70-9, Kernforschungszentrum Karlsruhe
- 31) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien,  
Braunschweig (1939)
- 32) F.B. Morinigo, Phys. Rev. 133B, 65 (1964)
- 33) W. Gröbner, N. Hofreither, Integraltafeln  
Wien (1950)

