

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

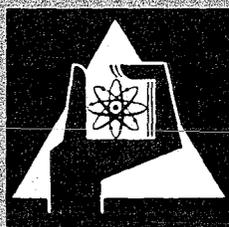
Mai 1972

KFK 1602

Institut für Experimentelle Kernphysik

Bestimmung der Verteilung der Ladung und des
magnetischen Dipolmoments in ${}_{41}^{93}\text{Nb}$
aus dem myonischen Röntgenspektrum

H. P. Povel



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Mai 1972

KFK 1602

BESTIMMUNG DER VERTEILUNG DER LADUNG UND DES MAGNETISCHEN
DIPOLMOMENTS IN ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ AUS DEM MYONISCHEN
RÖNTGENSPEKTRUM *)

von

H.P. Povel

Institut für Experimentelle Kernphysik der Universität (TH)
und des Kernforschungszentrums Karlsruhe

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M.B.H. KARLSRUHE

* von der Fakultät für Physik der Universität Karlsruhe (TH)
genehmigte Dissertation

BESTIMMUNG DER VERTEILUNG DER LADUNG UND DES MAGNETISCHEN
DIPOLMOMENTS IN $^{93}_{41}\text{Nb}$ AUS DEM MYONISCHEN RÖNTGENSPEKTRUM

Zusammenfassung

Mittels hochauflösender Ge(Li)-Detektoren wurden die folgenden myonischen Röntgenübergänge in $^{93}_{41}\text{Nb}$ gemessen:

2p-1s, 3d-2p, 3p-2s, 3s-2p und 2s-2p

Wichtig ist die Beobachtung der Übergänge vom und zum 2s-Niveau, das neben dem 1s-Niveau am empfindlichsten auf die Kerneigenschaften ist und somit zusätzliche Informationen liefert. Der 3s-2p-Übergang wurde erstmals beobachtet. Da das magnetische Dipolmoment des $^{93}_{41}\text{Nb}$ -Kerns groß ist ($6.167 \mu_N$), konnte die magnetische Hyperfeinstruktur-Aufspaltung der $2p_{1/2}-1s_{1/2}$ - und $2s-2p$ -Übergänge teilweise aufgelöst werden. Damit läßt sich neben der Ladungsverteilung auch die Verteilung des magnetischen Dipolmoments bestimmen. Die erreichte Meßgenauigkeit der Energie ist so groß, daß daraus bis zu drei Parameter der Ladungsverteilung bestimmt werden konnten. Dies war bisher mit Myon-Atomen nur bei schwereren Kernen möglich.

Aus der magnetischen Dipol-Hyperfeinstrukturaufspaltung der $2p_{1/2}-1s_{1/2}$, $3d_{3/2}-2p_{1/2}$, $2s_{1/2}-2p_{1/2}$ - und $2s_{1/2}-2p_{3/2}$ -Übergänge erhielten wir die M1-Kopplungskonstanten der $1s_{1/2}$ -, $2s_{1/2}$ - und $2p_{1/2}$ -Niveaus:

$$a(1s_{1/2}) = (0.698 \pm 0.014) \text{ keV}$$

$$a(2s_{1/2}) = (0.103 \pm 0.009) \text{ keV}$$

$$a(2p_{1/2}) = (0.190 \pm 0.008) \text{ keV}$$

in Übereinstimmung mit den theoretischen Werten, die wir aus dem Einteilchen-Kernmodell berechnen.

Aus der elektrischen Quadrupol-Aufspaltung des $2p_{3/2}-1s_{1/2}$ - und $3d_{5/2}-2p_{3/2}$ -Übergänge erhielten wir die E2-Kopplungskonstante des $2p_{3/2}$ -Niveaus

$$b(2p_{3/2}) = (-2.92 \pm 0.07) \text{ keV}$$

und für das Quadrupolmoment von ${}^{93}_{41}\text{Nb}$

$$Q = - \begin{bmatrix} & + 0.07 \\ 0.30 & \\ & - 0.01 \end{bmatrix} \text{ barn}$$

Für die Kernladungsverteilung wurde eine Fermi-Verteilung angenommen. Die Energien der Röntgenübergänge wurden durch numerische Integration der Dirac-Gleichung berechnet.

Ohne Berücksichtigung der Kernpolarisation erhielten wir aus den gemessenen Energien der acht Übergänge $2p-1s$, $3d-2p$, $2s-2p$ und $3p-2s$ die Fermi-Parameter

$$c = (4.97 \pm 0.08) \text{ fm}, \quad t = (2.32 \pm 0.16) \text{ fm}$$

und $R_2/A^{1/3} = (1.2307 \pm 0.0008) \text{ fm},$

$$\chi^2/(N-F) = 4.15$$

Bei Berücksichtigung der Kernpolarisation in den $1s$ -, $2s$ - und $2p$ -Zuständen ergab sich

$$c = (5.15 \pm 0.04) \text{ fm}, \quad t = (1.96 \pm 0.09) \text{ fm}$$

und $R_2/A^{1/3} = (1.2303 \pm 0.0008) \text{ fm},$

$$\chi^2/(N-F) = 0.426$$

und die Kernpolarisation im 1s-Zustand

$$\Delta E_{NP}(1s) = (2.53 \pm 0.52) \text{keV}$$

in Übereinstimmung mit dem von M.Y. Chen berechneten Wert. Ferner wurden die c,t-Parameter unter Ausschluß des 2p-1s-Übergangs bestimmt. Wir erhielten

$$c = (5.16 \pm 0.06) \text{fm}, \quad t = (1.94 \pm 0.15) \text{fm}$$

und $R_2/A^{1/3} = (1.2300 \pm 0.0024) \text{fm}$ $\chi^2/(N-F) = 0.417$

Mit diesen Parametern wurde die Energie des 2p-1s-Übergangs berechnet. Die Abweichung vom experimentellen Wert beträgt $(2.4 \pm 0.6) \text{keV}$, was der Kernpolarisation im 1s-Zustand entspricht.

Für jeden gemessenen Übergang wurde der Äquivalenzradius R_k einer zweiparametrischen Fermi-Verteilung nach der Methode von Ford und Wills bestimmt. Die gefundenen R_k liegen auf einer Kurve, deren Verlauf von den Parametern der Ladungsverteilung abhängt. Diese Kurve wurde angepaßt. Bei einer zweiparametrischen Fermiverteilung finden wir dieselben c,t-Werte wie aus den Energien ($\chi^2 = 2.123$). Bei einer dreiparametrischen Fermiverteilung erhalten wir eine Verbesserung von χ^2 um etwa 3 % für

$$w = 0.3$$

$$c = (4.93 \pm 0.04) \text{fm}, \quad t = (2.17 \pm 0.08) \text{fm}$$

und

$$\chi^2 = 2.066 \quad (N-F = 5)$$

Die Energie der $n \rightarrow 5$ -Übergänge wurde gemessen. Daraus konnten

wir die Abschirmungsverschiebung durch die Hüllenelektronen bestimmen. Die gemessenen Verschiebungen stimmen innerhalb der Fehler mit den berechneten Werten überein.

Die relativen Intensitäten einiger Übergänge wurden bestimmt und mit den Werten verglichen, die mit einem Kaskadenmodell berechnet werden. Die Übereinstimmung ist für eine statistische Anfangsverteilung der eingefangenen Myonen am besten.

Eine mögliche endliche Ausdehnung des Myons führt zu einer Verschiebung der myonischen Energieniveaus. Aus den Genauigkeitsgrenzen der theoretisch und experimentell bestimmten Energien der Übergänge konnten wir eine obere Grenze für den "root mean square"-Radius des Myons abschätzen

$$\langle r_{\mu}^2 \rangle^{1/2} \leq 0.16 \text{ fm}$$

Diese Grenze ist mit den Ergebnissen anderer Experimente vergleichbar.

Determination of the distribution of the charge and the
magnetic dipole moment in ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ from the muonic x-ray
spectrum

Abstract:

The muonic x-ray spectrum of μ ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ has been measured with high resolution Ge(Li) - detectors. The following transitions have been observed:

2p - 1s, 3d - 2p, 3p - 2s, 3s - 2p and 2s - 2p.

The observation of the transitions from and to the 2s-level is important, because this level is next to the 1s-level most sensitive to the electromagnetic properties of the nucleus.

From the measured energies and the hyperfine splitting (hfs) of the transitions the space distribution of the nuclear charge and the magnetic dipole moment have been determined.

From the magnetic dipole hfs of the $2p_{1/2}-1s_{1/2}$, $3d_{3/2}-2p_{1/2}$, $2s_{1/2}-2p_{1/2}$ and $2s_{1/2}-2p_{3/2}$ -transitions we evaluated the M1-coupling constants of the $1s_{1/2}$ -, $2s_{1/2}$ - and $2p_{1/2}$ -levels

$$\begin{aligned} a(1s_{1/2}) &= (0.698 \pm 0.014) \text{ keV} \\ a(2s_{1/2}) &= (0.103 \pm 0.009) \text{ keV} \\ a(2p_{1/2}) &= (0.190 \pm 0.008) \text{ keV} \end{aligned}$$

From the electric quadrupole hfs of the $2p_{3/2}-1s_{1/2}$ - and $3d_{5/2}-2p_{3/2}$ -transitions we got the E2-coupling constant of the $2p_{3/2}$ -level

$$b(2p_{3/2}) = (-2.92 \pm 0.07) \text{ keV}$$

and the electric quadrupole moment

$$Q = - (0.30 \pm 0.07 \text{ - } 0.01) \text{ barn}$$

For the charge distribution a Fermi-distribution was assumed. The energies of the muonic x-ray transitions have been calculated by numerical integration of the Dirac-equation for the Coulomb- and first order vacuum polarization potential. Lambshift and higher order vacuum polarization have been taken into account by first order perturbation calculation.

Without taking into account the nuclear polarization by the muon we obtained from the measured energies of the 2p-1s, 3d-2p, 2s-2p and 3p-2s transitions the following Fermi-parameters

$$c = (4.97 \pm 0.08) \text{ fm} \quad , \quad t = (2.32 \pm 0.16) \text{ fm}$$

and $R_2/A^{1/3} = (1.2307 \pm 0.0008) \text{ fm}$

$$\chi^2/(N-F) = 4.15$$

Taking into account the nuclear polarization correction in the 1s-, 2s and 2p-states we got

$$c = (5.15 \pm 0.04) \text{ fm} \quad , \quad t = (1.96 \pm 0.09) \text{ fm}$$

and $R_2/A^{1/3} = (1.2303 \pm 0.0008) \text{ fm}$

$$\chi^2/(N-F) = 0.426$$

with a nuclear polarization shift in the 1s-level amounting to

$$\Delta E_{NP} (1s) = (2.53 \pm 0.52) \text{ keV}$$

Leaving out the 2p-1s-transition from the charge distribution analysis we got

$$c = (5.16 \pm 0.06) \text{ fm} \quad , \quad t = (1.94 \pm 0.15) \text{ fm}$$

and $R_2/A^{1/3} = (1.2300 \pm 0.0024) \text{ fm}$

$$\chi^2/(N-F) = 0.417$$

With these parameters we have calculated the energy of the 2p-1s-transition. The deviation from the measured energy amounts to $(2,4 \pm 0.6)$ keV corresponding to the nuclear polarization shift in the 1s-level.

For each transition we have evaluated the equivalence radius R_k of a two-parameter Fermi charge distribution according to a method of Ford and Wills. The set of R_k -values which we have found can be fitted with the same two-parameter Fermi distribution as we have determined from the energies ($\chi^2=2.123$). A small improvement of χ^2 can be achieved for a three-parameter Fermi distribution with

$$W = 0.3$$

$$C = (4.93 \pm 0.04) \text{ fm} \quad , \quad t = (2.17 \pm 0.08) \text{ fm}$$

$$\chi^2 = 2.066$$

The energies of the $n \rightarrow 5$ transitions have been measured. From this we could determine the screening shifts caused by the atomic electrons. The measured shifts agree within the errors with the calculated values.

The relative intensities of some transitions have been determined and compared with the values which have been calculated from a cascade model. We have found good agreement for a statistical initial distribution of the captured muons.

A possible finite extension of the muon leads to a shift of the muonic energy levels. An upper limit of this shift is given by the uncertainties of the measured and calculated energies. From this we have estimated an upper limit of the root mean square radius of the muon

$$\langle r_{\mu}^2 \rangle^{1/2} \leq 0.16$$

This limit is in agreement with the results of other experiments.

Inhaltsverzeichnis

I.	<u>Einleitung</u>	1
1.	Grundlegende Eigenschaften der Myon-Atome	2
2.	Eigenschaften des in dieser Arbeit untersuchten $^{93}_{41}\text{Nb}$ -Kerns	8
3.	Überblick über die Arbeit	10
II.	<u>Theorie der myonischen Atome</u>	11
1.	Energieniveaus der Myonen im Coulombfeld eines Atomkerns	11
1.1	Punktkernnäherung	
1.2	Einfluß der endlichen Kernaushdehnung	
1.3	Vakuumpolarisation und Lambshift	
1.4	Abschirmung durch die Elektronenhülle	
1.5	Kernpolarisation	
1.6	Kleinere Korrekturen	
2.	Analyse der Kernladungsverteilung	25
2.1	Modelle der Ladungsverteilung	
2.2	Momente der Ladungsverteilung	
3.	Intensität der myonischen Röntgenstrahlung	31
3.1	Kaskadenmodell	
3.2	Übergangswahrscheinlichkeiten	
4.	Hyperfeinstrukturaufspaltung der myonischen Energieniveaus	38
4.1	Magnetische Dipol-Wechselwirkung (M1-HFS)	
4.2	Elektrische Quadrupol-Wechselwirkung (E2-HFS)	
4.3	Intensität der Hyperfeinstrukturkomponenten	
III.	<u>Beschreibung des Experiments</u>	50
1.	Der Myonen-Kanal am CERN-Synchrozyklotron	50
2.	Aufbau des Experiments	51
3.	Elektronik	53
4.	Datenverarbeitung und Auswertung der Spektren	56

IV. <u>Durchführung und Auswertung der Messungen</u>	59
1. Die Messungen	59
2. Bestimmung der Energien und Hyperfeinstruktur- aufspaltung	61
2.1 Der 3d-2p- Übergang	
2.2 Der 2p-1s- Übergang	
2.3 Der 2s-2p- Übergang	
2.4 Der 3p-2s- Übergang	
2.5 Der 3s-2p- Übergang	
2.6 Zusammenfassung der Ergebnisse	
2.7 Beobachtung von ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ - γ -Linien	
3. Relative Intensitäten	75
3.1 Relative Intensitäten von Kaskadenübergängen	
3.2 Intensitätsverhältnisse der Feinstrukturkomponenten	
4. Einfluß der Elektronenabschirmung auf höhere Übergänge	83
V. <u>Bestimmung der Kernladungsverteilung von ${}_{41}^{93}\text{Nb}$</u>	86
1. Korrekturen der Bindungsenergien	86
2. Bestimmung der c,t- Parameter	88
2.1 Methode	
2.2 c-t- Diagramme ohne Kernpolarisation	
2.3 c-t- Diagramme mit Kernpolarisation	
2.4 Vergleich der theoretischen und experimentellen Energien	
2.5 Äquivalenzradien der Ladungsverteilung	
VI. <u>Ergebnisse, Diskussion und Vergleich mit anderen Messungen</u>	100
1. M1-HFS- Konstanten	100
2. Quadrupolmoment von ${}_{41}^{93}\text{Nb}$	101
3. Energien	103
4. Kernpolarisation	105
5. Ladungsverteilung	105
6. "Cut off"-Masse und endliche Ausdehnung des Myons	112

Literaturverzeichnis

Verzeichnis der Abbildungen

Anhang

- A.1 Eigenfunktionen des Myons im Potential einer Punktladung
- A.2 Zusammenhang zwischen der Energie myonischer Röntgenübergänge und den Momenten der Ladungsverteilung
- A.3 Magnetische Hyperfeinstruktur in Myon-Atomen
- A.4 Klassische Betrachtung zu einer endlichen Ausdehnung des Myons

Verzeichnis einiger häufig verwendeter Symbole

I. Einleitung

Hinweise für die Entstehung myonischer Atome wurden schon vor 1950 erhalten. So beobachtete H.K. Ticho [Tic 48] bei der Untersuchung des Myonenzerfalls in fester Materie, daß die Myonen in Konkurrenz zum Zerfall von den Atomkernen eingefangen werden können. Dieser Prozeß hängt von der Kernladungszahl Z ab, und zwar ist er proportional zu Z^4 . Dies weist darauf hin, daß das Myon sich vor dem Einfang vom Kern im Grundzustand eines Myon-Atoms befunden hat. In einem anderen Experiment von M. Cosyns et al [CoD 49] wurden zum Ende der Spuren von Myonen in photographischen Emulsionen niederenergetische Augerelektronen beobachtet. Hieraus folgerte man, daß die Myonen, nachdem sie ihre ganze Energie abgegeben haben, in angeregte Zustände eines Myon-Atoms eingefangen werden, die unter Emission von Auger-Elektronen und Röntgenstrahlung in den Grundzustand übergehen.

Die ersten Messungen myonischer Röntgenstrahlung wurden von M. Camac et al [Ca M 52] sowie von V. Fitch und J. Rainwater [FiR 53] mit NaJ-Zählern durchgeführt. Seither wurden große Fortschritte auf diesem Gebiet gemacht, was vor allem auf die Verwendung hochauflösender Ge(Li)-Detektoren zurückzuführen ist.

Zusammenfassende Darstellungen über den derzeitigen Stand der Myon-Atom-Physik sind in verschiedenen Berichten zu finden, z.B. von D. West [Wes 58] , S. Devons und I. Duerdoth [DuD 68] , C.S. Wu und L. Wilets [WuW 69] , sowie von F. Scheck und J. Hüfner [ScH 71] .

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die grundlegenden Eigenschaften myonischer Atome behandelt, während sich der zweite Abschnitt mit dem in dieser Arbeit untersuchten ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ -Kern befaßt.

1. Grundlegende Eigenschaften der Myon-Atome

Ein Myon-Atom ist ein wasserstoffähnliches Atom, in dem das Leuchtelektron durch ein Myon ersetzt wurde. Der einzige Unterschied zwischen Elektron und Myon, der dabei in Erscheinung tritt, ist die größere Masse des Myons.

Der heute bekannte Wert der Myonenmasse in Einheiten der Elektronenmasse ist [Rev 71]

$$m_{\mu} = (206.7692 \pm 0.0027)m_e \quad (I.1)$$

Ein wasserstoffähnliches Atom stellt ein quantenmechanisches Zweiteilchensystem dar, dessen Eigenschaften relativ einfach zu berechnen sind. In Tabelle 1-1 werden die aus dem Bohrschen Modell berechneten Radien und Bindungsenergien elektronischer und myonischer Atome verglichen.

Tabelle 1-1: Radien und Bindungsenergien in e- und μ -Atomen

Größe	Formel (Grundzustand)	Typische Werte			
		e-Atom		μ -Atom	
		Z = 1	Z = 41	Z=1	Z = 41
Bohrscher Radius	$a_B = \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle^{-1} = (m \alpha Z)^{-1}$	52918	1291	255.9	6.24
Bindungsenergie	$\frac{\alpha Z}{2} \cdot \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{(\alpha Z)^2}{2} \cdot m$	0.0136	2.287	2.813	4729

Energien in keV, Radien in fm (1fm = 10^{-13} cm)

Feinstruktur- und Hyperfeinstrukturaufspaltungen hängen folgendermaßen von der Teilchenmasse ab:

Feinstruktur: $\frac{Z}{m} \cdot \left\langle \frac{(\vec{\ell} \vec{\sigma})}{r^3} \right\rangle \sim Z^4 \cdot m$

Magnetische Hyperfeinstruktur: $\frac{e}{2m} \cdot \mu_I \cdot \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \sim Z^3 m^2 \mu_I$

Elektrische Hyperfeinstruktur: $e^2 Q_N \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \sim Z^3 m^3 Q_N$

Worin μ_I das magnetische Dipolmoment und Q_N das elektrische Quadrupolmoment des Kerns ist.

Dabei haben wir $\hbar = c = 1$ gesetzt. Für die Feinstrukturkonstante α verwenden wir den Wert [Rev 71]

$$\alpha = e^2 / \hbar c = 1/137.03602 \quad (I.2)$$

Die Energie und Feinstrukturaufspaltung der myonischen Niveaus sind etwa 207 mal größer als die der elektronischen Niveaus.

Der genaue Wert für die Energie des Myons im Coulombfeld einer Punktladung $Z \cdot e$ wird durch die Eigenwerte der Dirac-Gleichung gegeben.

$$\epsilon_{nj} = m_\mu c^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha Z}{n - (j+1/2) + \sqrt{(j+1/2)^2 - (\alpha Z)^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (I.3)$$

Darin ist n die Hauptquantenzahl und $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ der Gesamtdrehimpuls des Zustands. In Abb. 1-1 ist als Beispiel das aus (I.3) berechnete Termschema des myonischen Niob-Atoms eingezeichnet.

Der Radius myonischer Atome ist 207 mal kleiner als der Radius elektronischer Atome. Damit erreicht man die Größenordnung der Kernradien R_N , die näherungsweise der Beziehung

$$R_N = 1.2 \cdot A^{1/3} \text{ fm} \quad (I.4)$$

folgen. Es ist also zu erwarten, daß die Kerneigenschaften bei den Myon-Atomen viel stärker in Erscheinung treten als bei den Elektron-Atomen.

Wir beschränken uns hier auf die statischen Kerneigenschaften. Das sind die räumliche Verteilung der elektrischen Kernladung und des magnetischen Dipolmoments. Die Abweichung der Ladungsverteilung von der kugelsymmetrischen Form tritt als elektrisches Quadrupolmoment des Kerns in Erscheinung.

In der Punktkernnäherung ist das Verhältnis der Bindungsenergie zur Feinstrukturaufspaltung von der Teilchenmasse unabhängig, also für Elektron- und Myon-Atome gleich. Dagegen ist das Verhältnis zu den Hyperfeinstrukturaufspaltungen von der Masse abhängig. Die magnetische Dipol-Hyperfeinstrukturaufspaltung ist in Myon-Atomen relativ zur Übergangsenergie ungefähr zweihundertmal größer als in Elektron-Atomen, die elektrische Quadrupolaufspaltung sogar $4 \cdot 10^4$.

Wir wollen nun einige Abschätzungen für den Einfluß der Kerneigenschaften auf die Energie der Atomzustände des Myons angeben. Dabei gehen wir von einer homogenen Verteilung der Kernladung aus

$$\varrho(r) = \begin{cases} \varrho_0 & \text{für } r \leq R_N \\ 0 & \text{für } r > R_N \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

wobei R_N aus (I.4) entnommen werden kann.

a) Die räumliche Ausdehnung der Kernladung bewirkt eine Verringerung der Bindungsenergie des Myons relativ zu dem aus (I.3) berechneten Punktkernwert. Die Größe dieser Verschiebung hängt anschaulich betrachtet von der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Myons im Kern ab. Ein Maß hierfür ist die Überlappung des myonischen Zustands $\Upsilon(r)$ mit der Kernladungsverteilung $\varrho(r)$. Als Überlappung definiert man die Funktion

$$\omega(r) = \varrho(r) \cdot |\Upsilon(r)|^2 \cdot r^2$$

In Abb. 1-2 ist als Beispiel die Kernladungsverteilung des ${}^{93}_{41}\text{Nb}$ Kerns und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi(r)|^2 \cdot r^2 dr$ für verschiedene Zustände eingezeichnet. In Abb. 1-3 sind die dazugehörigen Überlappfunktionen $\omega(r)$ dargestellt. Als Ladungsverteilung wurde eine zweiparametrische Fermiverteilung angenommen (Gl. (II.13) mit $w = 0$).

Der Einfluß der räumlich ausgedehnten Kernladung ist für die s-Niveaus am größten. Eine Abschätzung von Cooper und Henley [CoH53] ergibt mit der Verteilung (I.5) für die relative Änderung der Bindungsenergie in s-Zuständen

$$\frac{\Delta\epsilon_{ns}}{\epsilon_{ns}} = \frac{4}{5} \frac{1}{n^2} \left(\frac{R_N}{a_B} \right)^2 \quad (\text{I.6})$$

Für die 2p-Niveaus läßt sich folgende Abschätzung angeben [Wes 58]

$$\left(\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \right)_{2p} \approx 0.0018 \left(\frac{R_N}{a_B} \right)^4 \quad (\text{I.7})$$

In Tabelle 1-2 sind einige Zahlenbeispiele für Nb und Pb zu finden.

Tabelle 1-2: Einfluß der Kerneigenschaften in μ -Atomen

Z	Element	R_N/a_B	$(\Delta\epsilon/\epsilon)_{1s}$ nach (I.7)	$(\Delta\epsilon/\epsilon)_{2p}$ nach (I.8)	f nach (I.10)
41	Nb	0.87	0.61	0.0010	0.47
82	Pb	1.74	2.42	0.0165	0.16

Wir sehen, daß aus der Messung myonischer Röntgenübergänge Informationen über die Kernladungsverteilung erhalten werden können. Am besten sind dafür Übergänge geeignet, an denen s-Niveaus beteiligt sind. Das sind z.B. 2p-1s-, 2s-2p- und 3p-2s-Übergänge.

An dieser Stelle ist der 2s-2p-Übergang besonders hervorzuheben. Nach der Punktkernnäherung (I.3) sind Zustände mit gleichem n und j entartet. Die $2s_{1/2}$ - und $2p_{1/2}$ -Niveaus müßten demnach die gleiche Energie haben. Der beobachtete Unterschied ist bis auf kleinere elektrodynamische Korrekturen fast ausschließlich auf den für beide Niveaus verschiedenen Einfluß der ausgedehnten Kernladung zurückzuführen. Die Messung dieses Übergangs ist deshalb besonders interessant.

b) In der Punktkernnäherung ist die Hyperfeinstruktur (HFS) der Atomzustände proportional zu $\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle$ und dem magnetischen Dipolmoment μ_N bzw. dem elektrischen Quadrupolmoment Q_N . Diese Näherung ist jedoch nur gültig, solange der Überlapp des betrachteten Zustands mit der räumlich ausgedehnten Verteilung des magnetischen Dipol-, bzw. des elektrischen Quadrupolmoments des Atomkerns klein ist. A. Bohr und V. Weisskopf [BoW 50] haben die Abweichung der HFS-Aufspaltung von der Punktkernnäherung für $s_{1/2}$ - und $p_{1/2}$ -Niveaus in Elektron-Atomen für eine homogene Verteilung des magnetischen Dipolmomentes im Kern (I.5) untersucht. Sie finden Effekte von 0.1 bis 5 %. Die dort angegebene Abschätzung kann man auf Myon-Atome übertragen. Der Einfluß der räumlich ausgedehnten Verteilung des magnetischen Dipol- bzw. des elektrischen Quadrupolmoments läßt sich durch einen Formfaktor berücksichtigen. Die magnetische Dipol-HFS-Aufspaltung ist dann

$$\epsilon_{M1} = f_{\mu} \cdot \epsilon_{M1}(\text{Punktkern}) \quad (\text{I.8})$$

und die elektrische Quadrupol-HFS-Aufspaltung

$$\epsilon_{\epsilon 2} = f_Q \cdot \epsilon_{\epsilon 2}(\text{Punktkern}) \quad (\text{I.9})$$

In Abb. 1-2 ist als Beispiel die Kernladungsverteilung des ${}^{93}_{41}\text{Nb}$ Kerns und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi(r)|^2 \cdot r^2 dr$ für verschiedene Zustände eingezeichnet. In Abb. 1-3 sind die dazugehörigen Überlappfunktionen $\omega(r)$ dargestellt. Als Ladungsverteilung wurde eine zweiparametrische Fermiverteilung angenommen (Gl. (II.13) mit $w = 0$).

Der Einfluß der räumlich ausgedehnten Kernladung ist für die s-Niveaus am größten. Eine Abschätzung von Cooper und Henley [CoH53] ergibt mit der Verteilung (I.5) für die relative Änderung der Bindungsenergie in s-Zuständen

$$\frac{\Delta \epsilon_{ns}}{\epsilon_{ns}} = \frac{4}{5} \frac{1}{n^2} \left(\frac{R_N}{a_B} \right)^2 \quad (\text{I.6})$$

Für die 2p-Niveaus läßt sich folgende Abschätzung angeben [Wes 58]

$$\left(\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} \right)_{2p} \approx 0.0018 \left(\frac{R_N}{a_B} \right)^4 \quad (\text{I.7})$$

In Tabelle 1-2 sind einige Zahlenbeispiele für Nb und Pb zu finden.

Tabelle 1-2: Einfluß der Kerneigenschaften in μ -Atomen

Z	Element	R_N/a_B	$(\Delta \epsilon / \epsilon)_{1s}$ nach (I.7)	$(\Delta \epsilon / \epsilon)_{2p}$ nach (I.8)	f nach (I.10)
41	Nb	0.87	0.61	0.0010	0.47
82	Pb	1.74	2.42	0.0165	0.16

Wir sehen, daß aus der Messung myonischer Röntgenübergänge Informationen über die Kernladungsverteilung erhalten werden können. Am besten sind dafür Übergänge geeignet, an denen s-Niveaus beteiligt sind. Das sind z.B. 2p-1s-, 2s-2p- und 3p-2s-Übergänge.

An dieser Stelle ist der 2s-2p-Übergang besonders hervorzuheben. Nach der Punktkernnäherung (I.3) sind Zustände mit gleichem n und j entartet. Die $2s_{1/2}$ - und $2p_{1/2}$ -Niveaus müßten demnach die gleiche Energie haben. Der beobachtete Unterschied ist bis auf kleinere elektrodynamische Korrekturen fast ausschließlich auf den für beide Niveaus verschiedenen Einfluß der ausgedehnten Kernladung zurückzuführen. Die Messung dieses Übergangs ist deshalb besonders interessant.

b) In der Punktkernnäherung ist die Hyperfeinstruktur (HFS) der Atomzustände proportional zu $\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle$ und dem magnetischen Dipolmoment μ_N bzw. dem elektrischen Quadrupolmoment Q_N . Diese Näherung ist jedoch nur gültig, solange der Überlapp des betrachteten Zustands mit der räumlich ausgedehnten Verteilung des magnetischen Dipol-, bzw. des elektrischen Quadrupolmoments des Atomkerns klein ist. A. Bohr und V. Weisskopf [BoW 50] haben die Abweichung der HFS-Aufspaltung von der Punktkernnäherung für $s_{1/2}$ - und $p_{1/2}$ -Niveaus in Elektron-Atomen für eine homogene Verteilung des magnetischen Dipolmomentes im Kern (I.5) untersucht. Sie finden Effekte von 0.1 bis 5 %. Die dort angegebene Abschätzung kann man auf Myon-Atome übertragen. Der Einfluß der räumlich ausgedehnten Verteilung des magnetischen Dipol- bzw. des elektrischen Quadrupolmoments läßt sich durch einen Formfaktor berücksichtigen. Die magnetische Dipol-HFS-Aufspaltung ist dann

$$\epsilon_{M1} = f_{\mu} \cdot \epsilon_{M1}(\text{Punktkern}) \quad (\text{I.8})$$

und die elektrische Quadrupol-HFS-Aufspaltung

$$\epsilon_{\epsilon 2} = f_Q \cdot \epsilon_{\epsilon 2}(\text{Punktkern}) \quad (\text{I.9})$$

Die Formfaktoren f sind kleiner als eins, d.h. die Aufspaltungen werden reduziert. Nach einer Abschätzung von Bohr und Weisskopf [BoW50] ist

$$f_{\mu, Q} \approx 1 - \frac{3}{5} \left(\frac{R_N}{a_B} \right)^2 \xi^{-1} \quad (\text{I.10})$$

mit $\xi = (1 - \alpha^2 Z^2)^{1/2}$

Wir bemerken, daß f genauso wie die Verschiebung der Energieniveaus aufgrund der räumlichen Ausdehnung der Kernladung (siehe (I.6)) von dem Verhältnis R_N/a_B abhängt. In Tabelle 1-2 sind Beispiele dieser Abschätzungen zu finden.

2. Eigenschaften des in dieser Arbeit untersuchten
 $^{93}_{41}\text{Nb}$ -Kerns

Die Messung des myonischen Röntgenspektrums von $^{93}_{41}\text{Nb}$ ist aus folgenden Gründen günstig:

- a) Das Element kommt in monoisotoper Form in der Natur vor und kann in ausreichenden, genügend reinen Mengen erworben werden.
- b) Der $^{93}_{41}\text{Nb}$ -Kern ist für vergleichende Elektronen-Streuexperimente gut geeignet, da der erste Zustand, der durch die Streuung angeregt werden kann, noch aufgelöst werden kann.

Das Niveau-Schema des $^{93}_{41}\text{Nb}$ -Kerns wurde von H. Göbel et al [GöF70] durch inelastische Neutronenstreuung erhalten und ist in Abb. 1-4 dargestellt. Das gestrichelt eingezeichnete Niveau bei 685 keV wurde mit der Reaktion $^{92}_{40}\text{Zr}(\text{}^3_2\text{He}, \text{D})^{93}_{41}\text{Nb}$ festgestellt [CaB69]. Die Niveaus über 2.2 MeV sind nur ungenau bekannt.

Das magnetische Dipolmoment des $9/2^+$ -Grundzustand wurde durch magnetische Kernresonanz gemessen. Der Mittelwert aus verschiedenen Experimenten ist [FuC69]

$$\mu_I = (6.1672 \pm 0.0012) \mu_N \quad (\text{I.11})$$

wobei $\mu_N = e \hbar / 2m_p c$ (Kern-Magneton)

Im Grundzustand besitzt der $^{93}_{41}\text{Nb}$ -Kern ein unpaariges $g_{9/2^-}$ Proton. Nach dem Einteilchen-Kernmodell erhält man damit für das magnetische Moment des Kerns den Schmidt-Wert (siehe (II.29)):

$$\mu_e = 6,7928 \mu_N \quad (\text{I.12})$$

Dieser Wert weicht um etwa 10 % von dem gemessenen Wert (I.11) ab. Die Einteilchen-Näherung ist somit für den $^{93}_{41}\text{Nb}$ -

Kern brauchbar.

Das elektrische Quadrupolmoment von $^{93}_{41}\text{Nb}$ wurde von K. Murakawa [Mur58] mit Methoden der optischen Spektroskopie gemessen. Der Wert ist

$$Q_N = (-0.25 \pm 0.15) \text{ barn} \quad (\text{I.13})$$

(Anmerkung: Der in [FuC69] angegebene Wert von $Q_N = -0.22$ barn ist ein Mittel aus (I.13) und einer älteren Messung von Murakawa, die (-0.20 ± 0.10) barn ergab. Wir verwenden nur den neueren Wert, da die Berechnung des Quadrupolmoments aus der gemessenen optischen HFS in der neuen Arbeit genauer zu sein scheint.)

Im Vergleich zu den deformierten Kernen ist dieser Wert klein, so daß wir $^{93}_{41}\text{Nb}$ praktisch zu den kugelsymmetrischen Kernen zählen können.

Das magnetische Dipolmoment μ_N (I.11) von $^{93}_{41}\text{Nb}$ ist viel genauer bekannt als das elektrische Quadrupolmoment Q_N (I.13). Damit ist auch die magnetische Dipol-HFS-Aufspaltung für den Punktkern entsprechend genauer berechenbar als die elektrische Quadrupol-HFS. In diesem Experiment können wir also nur den Formfaktor f_μ bzw. die Verteilung des magnetischen Dipolmoments bestimmen. Der Formfaktor f_Q bzw. die Verteilung des elektrischen Quadrupolmoments bleibt weiterhin unbekannt. Wir können jedoch f_Q aus einem Modell berechnen und damit einen genaueren Wert für das Quadrupolmoment aus der gemessenen $\epsilon 2$ -HFS-Aufspaltung abschätzen.

3. Überblick über die Arbeit

Auf die im ersten Abschnitt dieses Kapitels angedeuteten theoretischen Grundlagen der myonischen Atome werden wir im zweiten Kapitel näher eingehen. Im dritten Kapitel wird der Aufbau des Experimentes besprochen. Das vierte Kapitel hat die Durchführung und Auswertung der Messung des myonischen Röntgenspektrums von Niob zum Inhalt. Im fünften Kapitel wird die Bestimmung der Ladungsverteilung von Niob besprochen. Den Schluß bildet das sechste Kapitel, in dem die Ergebnisse diskutiert und mit anderen Messungen verglichen werden.

II. Theorie der myonischen Atome

Im folgenden Kapitel geben wir einen Überblick über die Theorie der Myon-Atome, soweit sie die vorliegende Arbeit betrifft. Wir beschränken uns auf die statische Wechselwirkung zwischen Atomkern und Myon. Eine ausführlichere Darstellung des Gebiets und zahlreiche Literaturhinweise sind z.B. in Berichten von F. Scheck und J. Hüfner [SchH 71] sowie von C.S. Wu und L. Wilets [WuW 69] zu finden.

1. Energieniveaus des Myons im Coulombfeld eines Atomkerns

Der Hamilton-Operator des Myon-Kern-Systems kann in der folgenden Form dargestellt werden

$$H = H^N + H^\mu + H^e$$

Dabei ist H^N der Gesamtoperator des Kerns und H^μ der Hamilton-Operator des freien Myons. H^e beschreibt die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Kern und Myon.

In der nullten Näherung wird der Kern durch die Anwesenheit des Myons nicht beeinflusst und die Wellengleichung des Systems läßt sich separieren. Im Grundzustand des Kerns gilt

$$H^N \bar{\varphi}_0 = \epsilon_0 \bar{\varphi}_0$$

und für das Myon

$$(H^\mu + V_c) \gamma = \epsilon \gamma \quad (\text{II.1})$$

wobei

$$H^\mu = c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_\mu c^2$$

$$\text{und } V_c = \langle \bar{\varphi}_0 | H^e | \bar{\varphi}_0 \rangle = \langle \bar{\varphi}_0 | \sum_{i=1}^Z \frac{-e^2}{|r - \mathcal{R}_i|} | \bar{\varphi}_0 \rangle \quad (\text{II.2})$$

Der Operator V_c beschreibt die mittlere elektrostatische

Wechselwirkung aller Protonen mit dem Myon.

Wenn wir diese Ausdrücke in (II.1) einsetzen, erhalten wir die Dirac-Gleichung des Myons im Coulombfeld des Atomkerns

$$(c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_{\mu} c^2) \psi = (\epsilon - V(r)) \psi \quad (\text{II.3})$$

wobei $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ der Stromoperator des Myons, $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ und $\vec{\sigma}$ der 3-Vektor der Paulischen Spin-Matrizen ist.

Wir wenden uns nun der Berechnung der Energiezustände des Myon-Atoms zu. In den ersten beiden Abschnitten besprechen wir die Berechnung der Energieeigenwerte von (II.2). Die restlichen Abschnitte befassen sich mit Korrekturen dieser Energien.

1.1 Punktkernnäherung

Das Potential eines Punktkerns mit der Ladung Ze ist

$$V(r) = - \frac{Ze^2}{r}$$

Damit lautet die Dirac-Gleichung

$$(c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} - Z \frac{e^2}{r} + \beta m_{\mu} c^2) \psi = \epsilon \psi \quad (\text{II.3}')$$

Die Lösung dieser Gleichung wird z.B. von M.E. Rose [Ros 61] ausführlich diskutiert. Die Eigenfunktionen sind im Anhang (A1) zu finden.

Formal schreiben wir

$$\psi = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} G \cdot \varphi_1 \\ F \cdot \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.4})$$

Die Winkelanteile φ_1 und φ_2 hängen nicht vom Potential ab. Die großen und kleinen Komponenten $G(r)$ und $F(r)$ befriedigen die Radialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dr} &= -\alpha \frac{G}{r} + (\epsilon + m_{\mu} c^2 - V(r)) F / \hbar c \\ \frac{dF}{dr} &= \alpha \frac{F}{r} - (\epsilon - m_{\mu} c^2 - V(r)) G / \hbar c \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

mit $V(r) = -Ze^2/r$ und

$$\alpha = \begin{cases} -\ell-1 & \text{für } j = \ell + 1/2 \\ \ell & \text{für } j = \ell - 1/2 \end{cases} \quad (\text{II.5'})$$

F und G erfüllen die Normierungsbedingung

$$\int_0^{\infty} (F^2 + G^2) dr = 1$$

Die Eigenwerte von (II.4) lauten

$$\epsilon_{n\alpha} = m_{\mu} c^2 \left[1 + \left(\frac{Z}{n - |\alpha| + \sqrt{\alpha^2 - (\alpha Z)^2}} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{II.6})$$

Die Bindungsenergie des Myons im Zustand $|nj\ell\rangle$ ist

$$B_{nj} = m_{\mu} c^2 - \epsilon_{n\alpha}$$

1.2 Einfluß der endlichen Kernausdehnung

Die Ladungsverteilung des Kerns im Grundzustand ist $e \cdot |\bar{\phi}_0|^2$. Das zugehörige Potential wird aus (II.2) berechnet. Wenn man $|\bar{\phi}_0|^2$ durch eine mittlere kugelsymmetrische Verteilung $\xi(R)$ ersetzt und $1/|r-R|$ in (II.2) nach Kugelfunktionen entwickelt, erhält man

$$V(r) = -\frac{e^2 Z}{r} \int_0^r \xi(R) R^2 dR - e^2 Z \int_r^{\infty} \xi(R) R dR \quad (\text{II.7})$$

wobei die Kernladungsdichte die Normierungsbedingung

$$4\pi \int_0^{\infty} \rho(R) R^2 dR = 1$$

erfüllt. Für die meisten Ladungsverteilungen ist (II.7) nicht geschlossen integrierbar, so daß $V(r)$ numerisch berechnet werden muß.

Eine analytische Lösung der Dirac-Gleichung ist mit diesem Potential in den meisten Fällen nicht mehr möglich. Die Radialgleichungen (II.5) müssen dann numerisch integriert werden.

Wir verwenden für die Berechnung der Eigenwerte und -funktionen ein von H. Acker entwickeltes Rechenprogramm [AcB 66]. In diesem Programm werden die Radialgleichungen numerisch bis zu einem gewissen Radius R_M nach der Methode von Hamming integriert. R_M wird so gewählt, daß dort die numerisch berechneten Radialfunktionen mit den Punktkernlösungen gleichgesetzt werden können. Als Anfangswert für die Energie wird der Punktkernwert (II.6) genommen.

In Tabelle 2-1 sind als Beispiel die mit diesem Programm berechneten Bindungsenergien für ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ eingetragen. Zum Vergleich werden darin noch die aus (II.6) berechneten Punktkernenergien angegeben.

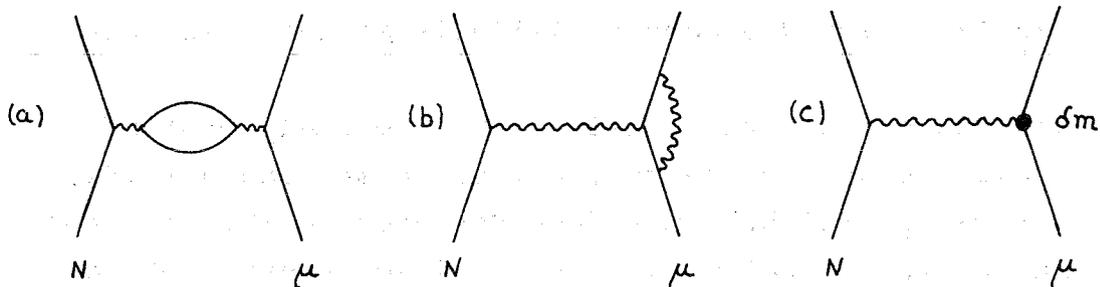
Für den Radius R_M nehmen wir 30 fm an. Die Integrations-schrittweite beträgt 0,15 fm. Als Ladungsverteilung wählen wir eine zweiparametrische Fermiverteilung mit $c = 5.15$ fm und $t = 1.95$ fm.

Tabelle 2-1: Bindungsenergien in ${}_{41}^{93}\text{Nb}$

Niveau	ϵ_{Punkt} keV	ϵ keV	$\epsilon_{\text{Punkt}} - \epsilon$ keV
$1s_{1/2}$	4834.01	3788.75	1045.26
$2s_{1/2}$	1215,50	1067.60	147.90
$2p_{1/2}$	1215,50	1206.67	8.84
$2p_{3/2}$	1187,51	1184.01	3.50
$3s_{1/2}$	537.08	492.00	45.08
$3p_{1/2}$	537.08	534.02	3.06
$3p_{3/2}$	528.77	527.54	1.23
$3d_{3/2}$	528.77	528.74	0.035
$3d_{5/2}$	526.12	526.09	0.030
$4f_{5/2}$	296.16	296.16	0
$4f_{7/2}$	295.61	295.61	0

1.3 Vakuumpolarisation und Lambshift

Die Quantenelektrodynamik führt zu zwei Typen von Strahlungskorrekturen der myonischen Energieniveaus. Die niedrigsten Ordnungen werden durch die folgenden drei Feynman-Graphen dargestellt (siehe z.B. [Fey 61])



- a) beschreibt die Vakuumpolarisation,
- b) beschreibt die Selbstenergiekorrektur und
- c) die damit verbundene Massenrenormierung

Anschaulich betrachtet, ist die Vakuumpolarisation eine Konsequenz der Dirac-Theorie. Das elektrische Feld einer Ladung verzerrt die Wellenfunktionen der Teilchen-Antiteilchen-Paare, die das Vakuum füllen. Dadurch wird die Ladungsverteilung im Vakuum verändert und das Vakuum erscheint polarisiert. Als Teilchenpaare kommen z.B. e^+e^- , $\mu^+\mu^-$ oder $\pi^+\pi^-$ -Paare in Frage.

Die Selbstenergiekorrektur kommt anschaulich dargestellt von der Wechselwirkung des Myons mit den Fluktuationen des quantisierten Strahlungsfeldes, die zu einer mittleren quadratischen Schwankung der Myonen-Ortskoordinate führen (Zitterbewegung).

Der größte Beitrag der Strahlungskorrekturen kommt von der Vakuumpolarisation durch e^+e^- -Paare. Der zugehörige Graph(a) wurde z.B. von A. Mickelwait und B. Corben [MiC 54] berechnet. Danach kann die Vakuumpolarisationskorrektur der myonischen Energieniveaus in Form eines Potentials berücksichtigt werden. Es gilt

$$V_{VP}(r) = -e^2 \frac{2\alpha}{3} \int \frac{g(r')}{|r-r'|} Z_0(|r-r'|) d\tau' \quad (II.8)$$

mit

$$Z_0(|r|) = \int_1^\infty e^{-2r\gamma/\lambda_e (1 + \gamma^2/2)} \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{d\gamma}{\gamma^2} \quad (II.9)$$

$\lambda_e = 386.17$ fm ist die Compton-Wellenlänge des Elektrons.

Das Vakuumpolarisationspotential kann zum Coulombpotential der Kernladung addiert werden. Bei der numerischen Integration der Dirac-Gleichung muß dann der oben definierte Anpassungsradius R_M vergrößert werden, weil wegen der größeren Reichweite von V_{VP} die Änderung des Potentials gegenüber dem Punktkernpotential auch noch für größere Radien eine Rolle spielt.

Die Vakuumpolarisationskorrektur kann auch durch Störungsrechnung erster Ordnung berücksichtigt werden. Die Verschiebung der myonischen Energieniveaus ist dann

$$\Delta\epsilon_{VP} = \int |\psi(r)|^2 \cdot V_{VP}(r) d\tau \quad (II.10)$$

Diese Korrektur, sowie Beiträge von Graphen höherer Ordnung als die oben dargestellten wurden von B. Fricke [Fri 69a] ausführlich diskutiert. Die aus den Formeln von Fricke berechneten Korrekturen wurden in genauen Experimenten überprüft [BaC 70] . Die Übereinstimmung ist sehr gut.

In der vorliegenden Arbeit wurden ebenfalls die von Fricke angegebenen Formeln verwendet.

In Tabelle 2-2 geben wir als Beispiel die auf Vakuumpolarisation korrigierten Bindungsenergien des Myons in ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ an. In der zweiten Spalte stehen die aus der numerischen Integration der Dirac-Gleichung berechneten Energien, wobei das Vakuumpolarisationspotential direkt zum Kernladungspotential addiert wurde. Der oben beschriebene Anpassungsradius R_M wurde solange vergrößert, bis die Energie sich um weniger als 1eV änderte. Diese Bedingung wird für $R_M = 100$ fm erfüllt. - In der dritten Spalte stehen die Bindungsenergien ohne Vakuumpolarisationskorrektur. In der vierten Spalte sind die aus der Störungsrechnung (II.10) berechneten Korrekturen eingetragen. Die Wellenfunktionen wurden bei der Berechnung der in Spalte 3 stehenden Bindungsenergien erhalten. In der letzten Spalte ist schließlich die Summe der Energien aus den Spalten 3 und 4 zu finden.

Die Rechnungen wurden für ein Fermi-Potential mit $c = 5,03$ fm und $t = 2.23$ fm durchgeführt.

Tabelle 2-2: Vakuumpolarisationskorrektur der Bindungsenergien in μNb

1	2	3	4	5
Niveau	$[\epsilon + \Delta\epsilon_{VP}]_{\text{exakt}}$	ϵ	$[\Delta\epsilon_{VP}]_{\text{störg.}}$	$\epsilon + \Delta\epsilon_{VP}^{(4)}$
	keV	keV	keV	keV
$1s_{1/2}$	3814.794	3788.498	26.235	3814.733
$2s_{1/2}$	1072.827	1067.689	5.173	1072.862
$2p_{1/2}$	1212.895	1206.622	6.280	1212.902
$2p_{3/2}$	1189.885	1183.974	5.923	1189.897

An Hand der Tabelle finden wir, daß sich die Bindungsenergien bei exakter Berechnung der Vakuumpolarisationskorrektur (Spalte 2) gegenüber der Störungsrechnung (Spalte 5) unterscheiden. Die Abweichung ist für das 1s-Niveau - 61eV, für das 2s-Niveau -35eV und für die 2p-Niveaus -7eV bzw. -12eV. Für die höheren p,d,f...-Niveaus ist der Unterschied kleiner als 1eV.

Der Graph (a) für $\mu^+\mu^-$ -Paare und die Graphen (b) und (c) wurden z.B. von G. Ericson und D. Yennie [ErY 65] berechnet. Sie ergeben zusammen die "Lamb-Shift" der myonischen Energieniveaus

$$\Delta\epsilon_{LS} = \frac{\alpha}{3\pi} \lambda_e^2 \langle \Delta V \rangle \left[\log \frac{m}{2\Delta\epsilon} + \frac{11}{24} + \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right] + \frac{\alpha}{8\pi} \lambda_\mu^2 \left\langle \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} (\vec{\sigma} \vec{\ell}) \right\rangle$$

wobei $V(r)$ das Potential der Kernladungsverteilung $\varrho(r)$ und $\lambda_\mu = 1.8676$ fm die Comptonwellenlänge des Myons ist.

$\langle \Delta V \rangle = \langle n | \Delta V | n \rangle$ ist über die Myonenzustände $|n\rangle$ gemittelt.

$\text{Log}(m/2\Delta\epsilon)$ ist der sogenannte Bethe-Logarithmus, durch den die mittlere Anregungsenergie $\overline{\Delta\epsilon_n}$ als eine Summe über die Zustände $|n'\rangle$ der Energie ϵ_n , definiert wird. Es gilt

$$\text{Log} \frac{m}{2\Delta\epsilon} = \sum_{n'} \left[\langle n | p_i | n' \rangle \cdot \langle n' | [V, p_i] | n \rangle \cdot \ln \left(\frac{m/2}{\epsilon_n - \epsilon_{n'}} \right) \right] / \frac{1}{2} \langle \Delta V \rangle$$

Der Anteil $-\frac{1}{5}$ im ersten Term der Lambshift $\Delta\epsilon_{LS}$ kommt von der $\mu^+\mu^-$ -Vakuumpolarisation. Der Anteil $\frac{3}{8}$ und der Spin-Term kommen vom anomalen magnetischen Moment des Myons.

Die Lambshift in myonischen Atomen ist von R.C. Barrett et.al. [BaB 68] berechnet worden. Die Rechnungen sind durch den Bethe-Logarithmus, d.h. durch die Unkenntnis der mittleren Energie $\overline{\Delta\epsilon}$, beschränkt.

In Tabelle 2-3 ist eine Zusammenstellung der Strahlungskorrekturen von $\mu_{41}^{93}\text{Nb}$ zu finden. Die Lambshift wurde von R.C. Barrett berechnet [Bar 68]. Die Vakuumpolarisationskorrekturen erhielten wir aus den Formeln von Fricke mit einem Rechen-

programm, das von L. Tauscher geschrieben wurde [BaC 70]

Tabelle 2-3: Strahlungskorrekturen in ${}_{41}^{93}\text{Nb}$

Niveau	$\Delta\epsilon_{\text{VP}}$ 1. Ordnung keV	$\Delta\epsilon_{\text{VP}}$ höherer Ordnung keV	$\Delta\epsilon_{\text{LS}}$ keV
$1s_{1/2}$	26.235	0.411	-1.133 ± 0.136
$2s_{1/2}$	5.173	0.072	-0.286 ± 0.044
$2p_{1/2}$	6.280	0.075	-0.001 ± 0.007
$2p_{3/2}$	5.923	0.070	-0.045 ± 0.004
$3s_{1/2}$	1.703		
$3p_{1/2}$	1.924		
$3p_{3/2}$	1.835		
$3d_{3/2}$	1.528		0.004
$3d_{5/2}$	1.498	0.015	0.003

1.4 Abschirmung durch die Elektronenhülle

Durch die Elektronen der Atomhülle wird die Kernladung Z etwas abgeschirmt. Dadurch wird die Bindungsenergie des Myons im Zustand Ψ verringert. Wenn $\varphi_e(r)$ das Potential der Elektronenhülle am Ort des Myons ist, erhält man durch Störungsrechnung erster Ordnung die Energieverschiebung

$$\Delta\epsilon_e = -e \int |\Psi(r)|^2 \varphi_e(r) d^3r \quad (\text{II.11})$$

Diese Verschiebung beträgt für die einzelnen Zustände einige keV. Jedoch ist der Unterschied zwischen benachbarten Niveaus viel kleiner und nimmt erst mit wachsendem Niveauabstand zu.

Um die Energieänderung (II.11) der myonischen Zustände berechnen zu können, muß man das Elektronenpotential φ_e bzw. die Elektronendichte am Kernort kennen. Dies führt zu verschiedenen Schwierigkeiten

- 1) Durch die Anwesenheit des Myons wird die Elektronenhülle gestört. Dieses Problem läßt sich durch die Hartree-Fock-

Näherung für das Myon-Elektron-System lösen. Solche Rechnungen wurden von B. Fricke durchgeführt [Fri 69b] .

2) Durch Auger-Übergänge des Myons werden Elektronen aus der Hülle geworfen. Die genaue Elektronenkonfiguration zur Zeit eines Strahlungsübergangs des Myons ist somit garnicht bekannt.

Eine obere Grenze für den Abschirmeffekt erhält man aus der Lösung von (II.11) für das Elektronenpotential des ungestörten Atoms. Solche aus der Hartree-Fock-Näherung berechneten Potentiale wurden z.B. von T. Carlson et al [CaL 70] tabelliert.

In Abb. 2-1 ist die Radialabhängigkeit des Elektronenpotentials $\varphi_e(r)$ des Niob-Atoms eingezeichnet. In Tabelle 2-4 sind die mit φ_e aus (II.11) berechneten Energieverschiebungen einiger myonischer Übergänge in Niob eingetragen. Die Wellenfunktionen des Myons wurden aus der Dirac-Gleichung für ein Fermipotential mit $c = 5,03$ fm und $t = 2.20$ fm berechnet.

Tabelle 2-4: Elektronenabschirmung in μNb

Übergang	$\Delta\epsilon_e/\text{eV}$	Übergang	$\Delta\epsilon_e/\text{eV}$	Übergang	$\Delta\epsilon_e/\text{eV}$
5g-4f	22	6h-5g	28	7i-6h	35
6g-4f	61	7h-5g	85	8i-6h	115
7g-4f	124	8h-5g	167	9i-6h	216
		9h-5g	268	10i-6h	333
		10h-5g	385	11i-6h	461
		11h-5g	513	12i-6h	596
		12h-5g	647	13i-6h	734
		13h-5g	783	14i-6h	871
				15i-6h	1005
				16i-6h	1134

Ein Vergleich der gemessenen Verschiebung eines myonischen Röntgenübergangs mit der berechneten gestattet eine Aussage über die Anzahl der im Atom zur Zeit des Übergangs vorhandenen Elektronen. Diese Aussage bezieht sich vor allem auf die K-Elektronen, die 80-90 % zur gesamten Abschirmung beitragen.

1.5 Kernpolarisation

Bisher haben wir angenommen, daß der Kern durch die Anwesenheit des Myons nicht verändert wird und im Grundzustand ϕ_0 bleibt. Wir konnten daher die elektromagnetische Wechselwirkung H^e zwischen Myon und Kern durch ein mittleres Potential $V(r) = \langle \phi_0 | H^e | \phi_0 \rangle$ ersetzen. Dadurch ließ sich die Wellengleichung des Kern-Myon-Systems $|\phi_0 \gamma_k\rangle$ separieren (siehe S.11). In Wirklichkeit wird der Kern aber durch die Anwesenheit des Myons verändert. Er kann z.B. polarisiert werden. Die dadurch bewirkte Änderung der myonischen Energieniveaus kann durch einen Störoperator $H' = H^e - V$ berücksichtigt werden [CoH 53].

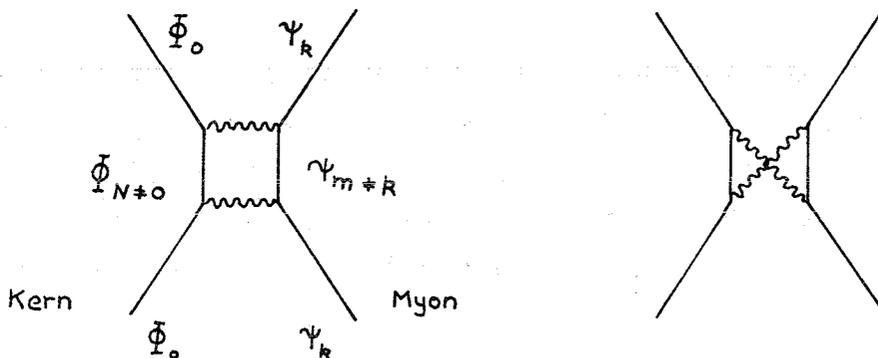
Die Störungsenergie erster Ordnung ist

$$W^{(1)} = \langle \Phi_0 \gamma_k | H' | \Phi_0 \gamma_k \rangle = 0$$

Erst die zweite Ordnung gibt einen nichtverschwindenden Beitrag

$$W^{(2)} = \sum_{\substack{N \neq 0 \\ m \neq k}} \frac{\langle \Phi_0 \gamma_k | H' | \gamma_m \Phi_N \rangle \cdot \langle \Phi_N \gamma_m | H' | \gamma_k \Phi_0 \rangle}{\epsilon_0 + \epsilon_k - \epsilon_N - \epsilon_m}$$

Dieser Ausdruck beschreibt die Verschiebung der myonischen Energieniveaus durch virtuelle Anregung des Kerns. Man kann dies in Form von Feynman-Diagrammen darstellen und auch entsprechend ausrechnen [Col 69] .



Wenn man den Störoperator H' nach Kugelfunktionen $P_l(\cos\theta)$ entwickelt, läßt sich $W^{(2)}$ in eine Summe von Anteilen $W_l^{(2)}$ zerlegen. Dem Term $W_l^{(2)}$ entspricht eine virtuelle Multipolanregung des Kerns mit dem Drehimpuls l .

In den myonischen s -Zuständen überwiegt die virtuelle Monopol- und Dipolanregung des Kerns. In den höheren p, d, \dots -Zuständen überwiegen die Anregungen mit $l \geq 2$ [Che 70] .

Obwohl die Kernpolarisations-Verschiebung

$$\Delta\epsilon_{NP} = \sum_{l=0}^{\infty} W_l^{(2)}$$

durch die Störungsrechnung zweiter Ordnung genau definiert wird, ist es dennoch schwierig, sie verlässlich zu berechnen, da man über ein vollständiges System von Zwischenzuständen des Kerns summieren muß, die gar nicht genau bekannt sind.

In Tabelle 2-5 haben wir die von einigen Autoren berechneten Korrekturen $\Delta\epsilon_{NP}$ einiger Niveaus in μNb eingetragen. Die Werte von Chen wurden durch Extrapolation der in [WuW 69] gezeigten Kurven erhalten.

Der Fehler der Korrekturen ist bei Chen etwa 30 %, bei Cole [Col 69] etwa 50 %.

Tabelle 2-5: Kernpolarisationskorrekturen der Bindungsenergien in μNb

Zustand	$\Delta\epsilon_{NP}/\text{keV}$
1s	$\left\{ \begin{array}{l} 1.98^{\text{a)}} \\ 1.20^{\text{b)}} \end{array} \right.$
2s	$\left\{ \begin{array}{l} 0.58^{\text{a)}} \\ 0.14^{\text{b)}} \end{array} \right.$
2p	$\left\{ \begin{array}{l} 0.16^{\text{a)}} \\ 0.05^{\text{b)}} \end{array} \right.$
3s	0.04 ^{c)}
3p _{1/2}	0.02 ^{c)}
3d _{3/2}	0.001 ^{c)}

- a) von Chen aus Ref. [WuW 69] , b) Ref. [Col 69] ,
 c) Ref. [Tan 71]

1.6 Kleinere Korrekturen

a) Vakuumpolarisation durch $\pi^+ \pi^-$ -Paare etc.

Bei der Wechselwirkung des Photons mit dem Vakuum können im Prinzip beliebige virtuelle Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugt werden. Die Beiträge der e^+e^- - und $\mu^+\mu^-$ -Paare wurden bereits oben besprochen. Der Beitrag von $\pi^+ \pi^-$ - Paaren

kann nicht nach den gleichen Formeln bestimmt werden, da das Pion der Quantenmechanik der Spin-0-Teilchen gehorcht. Fricke findet für Uran ($Z = 92$) im $1s$ -Zustand eine Korrektur von -27eV [Fri 69]. Bei leichteren Kernen sollte der Effekt noch kleiner sein.

Im Prinzip steckt der Vakuumpolarisationseffekt aller hadronischen Teilchen in der Mesonenwolke der Nukleonen. Er ist somit implizit im Formfaktor des Kerns enthalten. Die Vakuumpolarisation durch die stark wechselwirkenden Teilchen braucht also gar nicht berücksichtigt zu werden [Fri 69].

b) Einfluß einer endlichen Ausdehnung des Myons

Eine mögliche endliche Ausdehnung der Ladung des Myons würde das Coulombpotential im Bereich dieser Ausdehnung verändern. Die Frage nach der Größe einer solchen Ausdehnung wurde bis heute noch nicht endgültig beantwortet. Es lassen sich jedoch obere Schranken dafür angeben.

Theoretisch findet dieses Problem seine Formulierung in einer Abänderung der Quantenelektrodynamik für kleine Abstände (siehe Brodsky und Drell, "On the present Status of Quantum Electrodynamics", [BrD 70]). Wir wollen hier jedoch nicht näher darauf eingehen.

Der Einfluß einer möglichen endlichen Ausdehnung des Myons auf die Energieniveaus in Myon-Atomen wurde von F. Jachello und A. Lande [JaL 71] berechnet. Sie erhalten folgende Korrektur der Bindungsenergie des Myons

$$\Delta\epsilon_{\Lambda} = \pm 4\pi e^2 \hbar^2 c^2 \cdot \langle \varrho(r) \rangle / \Lambda^2 \quad (\text{II.12})$$

Der Parameter Λ wird als "cut off"-Masse des Myons bezeichnet. Die Ausdehnung des Myons, bzw. die Reichweite der Veränderung des Coulombpotentials wird durch $\hbar c / \Lambda$ bestimmt. $\langle \varrho \rangle$ ist die über die Myonenwellenfunktion gemittelte Kernladungsverteilung, mit der Normierungsbedingung $4\pi \int \varrho(r) r^2 dr = Z$.

(Anmerkung: Zu einem ähnlichen Ausdruck wie (II.12) kommen wir auch durch eine klassische Betrachtung, siehe Anhang (A 4)).

Aus einer Messung verschiedener Übergänge an myonischem $^{206}_{82}\text{Pb}$ erhalten Jachello und Lande über die Unbestimmtheit in der Analyse der Ladungsverteilung die Abschätzung $\Lambda > 1.44 \text{ GeV}/c$. In der folgenden Tabelle sind die Korrekturen $\Delta\epsilon_{\Lambda}$ in $^{206}_{82}\text{Pb}$ für $\Lambda = 1\text{GeV}$ und $\Lambda > 1.44 \text{ GeV}$ eingetragen. Die Korrekturen für $^{93}_{41}\text{Nb}$ wurden aus den Pb-Werten mit Hilfe der Gleichung (II.12) berechnet.

Tabelle 2-6: Einfluß einer endlichen Ausdehnung des Myons

Niveau	$^{206}_{82}\text{Pb}$			$^{93}_{41}\text{Nb}$	
	$e^2 \langle \epsilon \rangle$ $10^{-2} \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-2}$	$\Lambda = 1\text{GeV}$ $\Delta\epsilon_{\Lambda}/\text{keV}$	$>1.44\text{GeV}$ $\Delta\epsilon_{\Lambda}/\text{keV}$	$e^2 \langle \epsilon \rangle$ $10^{-2} \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-2}$	$\Lambda > 1.44\text{GeV}$ $\Delta\epsilon_{\Lambda}/\text{keV}$
$1s_{1/2}$	35.43	17.80	< 8.60	12.56	< 3.05
$2s_{1/2}$	6.11	3.06	< 1.48	1,84	< 0.45
$2p_{1/2}$	6.19	3.21	< 1.55	0.28	< 0.07
$2p_{3/2}$	4.63	2.40	< 1.16	0.18	< 0.05
$3p_{3/2}$	1.56	0.81	< 0.39	0.06	< 0.015
$3d_{3/2}$	0.14	0.07	< 0.034		
$3d_{5/2}$	0.08	0.04	< 0.019		

2. Analyse der Kernladungsverteilung

Die räumliche Ausdehnung der Kernladung drückt sich in einer Verringerung der Bindungsenergie des Myons gegenüber den Punktkernwerten aus (siehe Tab. 2-1). Dadurch werden die Übergangsenergien verkleinert. Die Größe und Abhängigkeit der Verschiebung von der Form und Ausdehnung der Ladungsverteilung ist für die einzelnen Übergänge verschieden. Aus den gemessenen Übergangsenergien erhält man Aussagen über die Dichteverteilung der Kernladung.

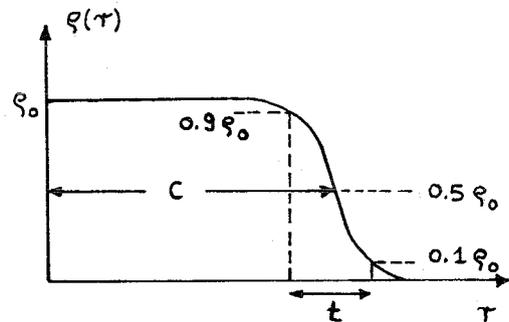
Um diese Aussagen in eine quantitative Form zu bringen, muß man erstens einen passenden Ausdruck für die Radialabhängigkeit

der Ladungsdichte finden und zweitens untersuchen, wie die verschiedenen Übergänge von den möglichen Parametern der Ladungsverteilung abhängen. Hierauf wollen wir in den nächsten Abschnitten näher eingehen.

2.1 Modelle der Ladungsverteilung

Unsere heutige Vorstellung vom radialen Verlauf der Kernladungsdichte ist eine räumlich mehr oder weniger scharf begrenzte Verteilung, wie in der nebenstehenden Skizze angedeutet.

Eine Anzahl geeigneter Funktionen, die einen ähnlichen Verlauf zeigen, wurde z.B. von Ford und Wills [FoW 69] untersucht. Eine häufig verwendete Funktion ist die dreiparametrische Fermi-Verteilung



$$\rho(r) = \frac{N}{1 + \exp [4 \ln(3(r-c)/t)]} \cdot \begin{cases} 1 + W(r/c)^2, & r < c \\ 1 + W, & r > c \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Die Konstante N folgt aus der Normierungsbedingung

$$4\pi \int \rho(r) r^2 dr = 1 \quad (\text{II.14})$$

c ist der Halbwertsradius, t die Oberflächendicke, die von $0.9 \rho_0$ bis $0.1 \rho_0$ reicht. Der Parameter W beschreibt eine parabolische Zu- oder Abnahme der Ladungsdichte im Kerninnern.

Die Wahl eines bestimmten mathematischen Ausdrucks für die Ladungsverteilung $\rho(r)$ bedeutet eine gewisse willkürliche Vorwegnahme der eigentlich erst durch das Experiment zu bestimmenden Verteilung. Man kann jedoch $\rho(r)$ als Modell betrachten, das am Experiment geprüft werden soll. Eine in einem gewissen Rahmen modellunabhängige Betrachtungsweise werden wir im nächsten Abschnitt beschreiben.

Die Parameter der vorgegebenen Ladungsverteilung $\varrho(r)$ sind bestimmt, wenn die theoretischen Energien der für $\varrho(r)$ gelösten Dirac-Gleichung mit den gemessenen Energien übereinstimmen.

Im Falle der zweiparametrischen Fermi-Verteilung ($W = 0$) läßt sich das Problem der Parametervariation und der Eindeutigkeit des Ergebnisses elegant durch die Darstellung in sogenannten c,t-Diagrammen lösen [AcB 66]. Durch jeden gemessenen Übergang der Energie ϵ_{exp} wird in der c-t-Ebene eine Isoenergie-Kurve $\epsilon(c,t)_{\text{theor}} = \epsilon_{\text{exp}}$ definiert, oder genauer ein Band von solchen Kurven, dessen Breite durch den Meßfehler $\delta\epsilon_{\text{exp}}$ festgelegt ist. Der Schnittpunkt zweier c,t-Kurven bestimmt die gesuchten Parameter. Wenn die Schnittpunkte weiterer Kurven innerhalb der zugelassenen Schwankung mit dem ersten zusammenfallen, kann man annehmen, daß die angenommene zweiparametrische Fermiverteilung der wirklichen Ladungsverteilung nahekommt. Wenn die Kurven parallel verlaufen, bedeutet dies, daß die entsprechenden Übergänge dieselbe Information über $\varrho(r)$ geben, d.h. nur einen Parameter bestimmen.

Die Genauigkeit, mit der die Energie eines Übergangs gemessen werden muß, damit man daraus Aussagen über die Kernladungsverteilung erhält, wird durch die Empfindlichkeit der beteiligten Niveaus gegenüber Änderungen der Verteilung bestimmt. Wir gehen bei unseren Betrachtungen wieder von einer angenommenen zweiparametrischen Fermi-Verteilung (II.13) aus. Die Lösung der Dirac-Gleichung für das zugehörige Fermi-Potential ergibt dann Energien, die von den Parametern c und t abhängen. Die Empfindlichkeit des Übergangs gegenüber Änderungen der Ladungsverteilung kann durch die partiellen Differentialquotienten $(\frac{\partial\epsilon}{\partial c})_t$ und $(\frac{\partial\epsilon}{\partial t})_c$ ausgedrückt werden. Die entsprechenden reziproken Größen sind ein Maß für die Genauigkeit, mit der c und t bestimmt werden können, wenn die Genauigkeit der gemessenen Energie gegeben ist.

In Tabelle 2-7 sind diese Werte neben der Energie für einige Übergänge in μNb eingetragen. Aus dieser Tabelle entnehmen wir, daß die Empfindlichkeit der Übergänge auf Änderungen von

c ungefähr doppelt so groß ist wie auf Änderungen von t. Ferner sehen wir, daß bei gleichgroßen Meßfehlern c z.B. aus dem $2p_{1/2}-1s_{1/2}$ -Übergang ungefähr 55 mal genauer bestimmt werden kann als aus dem $3d_{3/2}-2p_{1/2}$ -Übergang.

Tabelle 2-7: Empfindlichkeit myonischer Übergänge in Niob gegenüber Änderungen von c und t

Übergang	$\epsilon(\text{theor.})/\text{keV}$ c=5.15 fm t=1.95 fm	$\left[\frac{\Delta\epsilon}{\Delta c}\right]_t$ keV/fm	$\left[\frac{\Delta\epsilon}{\Delta t}\right]_c$ keV/fm	$\left[\frac{\Delta c}{\Delta\epsilon}\right]_t$ fm/keV	$\left[\frac{\Delta t}{\Delta\epsilon}\right]_c$ fm/keV
$2p_{1/2} - 1s_{1/2}$	2603.6	-177.93	-73.52	-0.0056	-0.0136
$2p_{3/2} - 1s_{1/2}$	2626.7	-179.31	-74.12	-0.0056	-0.0135
$3d_{3/2} - 2p_{1/2}$	683.0	- 3.22	- 1.63	-0.3106	-0.6135
$3d_{5/2} - 2p_{3/2}$	662.6	- 1,84	- 1.02	-0.5435	-0.9804
$2s_{1/2} - 2p_{1/2}$	139.9	+ 23.98	+ 9.40	+0.0417	+0.1064
$2s_{1/2} - 2p_{3/2}$	116.9	+ 25.36	+10.01	+0.0394	+0.1000
$3p_{1/2} - 2s_{1/2}$	537.4	- 26.09	-10.47	-0.0383	-0.0952
$3p_{3/2} - 2s_{1/2}$	543.9	- 26.54	-10.67	-0.0377	-0.0935
$2p_{3/2} - 2p_{1/2}$	23.1	- 1.38	- 0.61	-0.7246	-1.6529

2.2 Momente der Ladungsverteilung

Einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(r)$ kann der Erwartungswert

$$\langle M \rangle_{\rho} = \int r^2 \rho(r) M(r) dr$$

zugeordnet werden. Wir bezeichnen $\langle M \rangle_{\rho}$ als Moment der Ladungsverteilung. Wenn $\langle M \rangle_{\rho}$ bekannt ist, lassen sich damit Eigenschaften der Funktion $\rho(r)$ bestimmen. Im Anhang (A.2) wird gezeigt, daß ein Übergang des Myons von dem Zustand $|a\rangle$ in den Zustand $|b\rangle$ der Energie ϵ_{ab} eine Momentfunktion bestimmt, so daß

$$\epsilon_{ab} \sim \langle M_{ab} \rangle_{\rho} \quad (\text{II.15})$$

Die Energie eines myonischen Übergangs ist somit (in erster Näherung) proportional zu einem Moment der Ladungsverteilung.

Ford und Wills [FoW 69] zeigen, daß für eine Auswahl von Ladungsverteilungen $M_{ab}(r)$ durch die Funktion $p_0 + p_1 r^{k_{ab}}$ angenähert werden kann. Damit gilt nach (II.15)

$$\epsilon_{ab} = p_0 + p_1 \left\langle r^{k_{ab}} \right\rangle_{\xi} \quad (\text{II.16})$$

Der Exponent k_{ab} ist für die einzelnen Übergänge verschieden und weitgehend unabhängig von der Wahl der Ladungsverteilung. Die Abweichung von k_{ab} für verschiedene Ladungsverteilungsmodelle ist maximal ± 0.02 , während k_{ab} Werte zwischen 1 und 4 hat.

Dem Moment $\langle r^k \rangle$ läßt sich ein äquivalenter Radius

$$R_k = \left[\frac{k+3}{3} \left\langle r^k \right\rangle_{\xi} \right]^{1/k} \quad (\text{II.17})$$

einer homogen geladenen Kugel zuordnen.

Am Beispiel der Fermi-Verteilung wollen wir erläutern, wie die Momente oder Äquivalenzradien nach der Methode von Ford und Wills bestimmt werden können.

Wir gehen von der gemessenen Energie ϵ_{exp} eines Übergangs aus. Nach Abzug der oben besprochenen Korrekturen, mit Ausnahme der e^+e^- -Vakuumpolarisation erster Ordnung erhalten wir daraus die korrigierte Energie ϵ_{exp}^* . Die e^+e^- -Vakuumpolarisation erster Ordnung berücksichtigen wir bei der Berechnung der theoretischen Energie $\epsilon(c,t)_{\text{theor}}$ aus der Lösung der Dirac-Gleichung. Mit den c,t -Parametern, die auf der c - t -Kurve

$$\epsilon(c,t)_{\text{theor}} = \epsilon_{\text{exp}}^* \quad (\text{II.18})$$

liegen, bestimmen wir nun aus Gleichung (II.17) die Äquivalenz-

radien als Funktion von k . Für jedes c, t -Paar erhalten wir eine Kurve in der R_k - k -Ebene. Wie das aussieht, wird weiter unten in Abb. 5-5 am Beispiel einiger Übergänge in μNb gezeigt. Die R_k -Kurven sind nahezu linear. In den von uns untersuchten Fällen stellte es sich heraus, daß die Schar der R_k -Kurven eines Übergangs einen gemeinsamen Schnittpunkt hat. Damit ist die Frage gelöst, welche Parameter der Ladungsverteilung von einem myonischen Übergang bestimmt werden. An die Stelle einer c, t -Kurve tritt jetzt ein Punkt in der R_k - k -Ebene. Nach den Untersuchungen von Ford und Wills ist die Lage des Schnittpunktes nur wenig von der Form der anfangs gewählten Ladungsverteilung abhängig. (In unserem Fall war das eine Fermi II-Verteilung).

Die Schar der R_k -Kurven eines Übergangs hat nicht in jedem Falle einen gemeinsamen Schnittpunkt. So konnten Ford und Wills für den $2s_{1/2}-2p_{1/2}$ -Übergang in ^{206}Pb keinen derartigen Punkt finden.

Für verschiedene Übergänge (i) erhält man im allgemeinen verschiedene Punkte $(R_k^{(i)}, k^{(i)})$ in der R_k - k -Ebene. Weiter unten ist dies in Abb. 5-6 am Beispiel von μNb zu sehen.

Wie erhält man nun aus den so bestimmten Äquivalenzradien die Form $\varrho(r)$ der Ladungsverteilung? - Durch (II.7) wird für eine gegebene Ladungsverteilung eine Kurve in der R_k - k -Ebene definiert. Die gesuchte Ladungsverteilung muß eine Kurve ergeben, die durch alle Punkte $(R_k^{(i)}, k^{(i)})$ geht. Wenn man eine solche Kurve nicht finden kann, stimmt das Modell nicht.

Wir beginnen mit einer zweiparametrischen Fermi-Verteilung. Wenn wir ein c, t -Parameterpaar finden, das die obige Bedingung erfüllt, haben wir bereits die gesuchte Ladungsverteilung. Auf das Bild der c, t -Kurven übertragen, bedeutet dies aber nichts anderes, als daß die c, t -Kurven der verschiedenen Übergänge einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Wenn wir kein c, t -Paar finden, für das die R_k -Kurve durch alle $R_k^{(i)}$ geht, dürfen wir die Ladungsverteilung geringfügig modifizieren. (Darin liegt der Vorteil der Ford-Wills-Methode). Wir können z.B. eine Fermi III-Verteilung nehmen. Die für eine Fermi II-Verteilung erhaltenen R_k -Werte werden dabei nicht verändert, solange die Fermi III-Verteilung nicht wesentlich von der ursprünglichen Fermi II-Verteilung abweicht. Diese Bedingung ist für $|w| < 1$ erfüllt (siehe (II.13)) [FoW 69].

Die Annahme, daß durch myonische Übergänge Momente der Ladungsverteilung bestimmt werden, wurde von R.C. Barrett [Bar 70] auf allgemeinere Ladungsverteilungen, als die von Ford und Wills betrachteten ausgedehnt. Barrett erhält als Momentfunktion

$$M(r) = p_0 + p_1 r^k e^{-\beta r},$$

wobei k und β für jeden Übergang bestimmt werden müssen. In diesem Fall ist jedoch eine Darstellung der Momente durch Äquivalenzradien nicht mehr möglich.

3. Intensität der myonischen Röntgenstrahlung

3.1 Kaskadenmodell

Die Myonen werden nach ihrer Abbremsung in einen Atomzustand mit den Quantenzahlen N und L eingefangen. Die Besetzung p_{NL} (pro gebildetes Myon-Atom) dieser Anfangszustände ist proportional zu der Wahrscheinlichkeit W_{NL} (in sec^{-1}), mit der das Myon vom Kontinuum in den Zustand $|NL\rangle$ übergeht.

Wenn alle Prozesse, die diesen Übergang bewirken, bekannt sind, kann W_{NL} und daraus p_{NL} berechnet werden. Als mögliche Einfangsprozesse werden Strahlungs- und Auger-Übergänge des Myons vom Kontinuum in den Zustand $|NL\rangle$ betrachtet. Rechnungen von Au-Yang und Cohen [AuC 68], sowie von Mann und Rose

[MaR 61] zeigen, daß die K-Auger-Übergänge um etwa eine Größenordnung wahrscheinlicher sind als die Strahlungsübergänge. Dabei wird ein K-Elektron emittiert. Aus Energiegründen gilt $N \leq \sqrt{m_{\mu}/m_e} \approx 14$.

Dieses Modell ist aus zwei Gründen unbefriedigend.

- a) Die beobachtete Intensität der myonischen Röntgenübergänge läßt sich nicht mit der aus den Übergangswahrscheinlichkeiten W_{NL} berechneten Anfangsverteilung p_{NL} erklären.
- b) Es werden auch Übergänge von Zuständen mit $N > 14$ beobachtet [Bac 69]. - Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, verwenden wir die von Eisenberg und Kessler eingeführte halbempirische Anfangsverteilung [EiK 61]

$$p_{NL} \sim (2L+1)e^{\alpha \cdot L} \quad (II.19)$$

wobei der Faktor $(2L + 1)$ die statistische Besetzung der Niveaus berücksichtigt. Der Parameter α , der von N abhängen kann, muß durch Vergleich der aus diesem Modell berechneten Intensitäten mit den experimentellen Werten bestimmt werden.

Die Anzahl der Myonen, die vom Zustand $i = |n\ell\rangle$ den Zustand $f = |n'\ell'\rangle$ erreichen, ist

$$S_{if} = \frac{W_{if}}{\sum_{f'} W_{if'}} \cdot p_i \quad (II.20)$$

Darin ist p_i die Besetzung des Anfangszustandes und W_{if} die Gesamtübergangswahrscheinlichkeit (in sec^{-1}), die sich aus einem Augeranteil A_{if} und einem Strahlungsanteil R_{if} zusammensetzt.

Die Intensität eines Röntgenüberganges ist (pro gebildetes Myon-Atom)

$$I_{if} = \frac{R_{if}}{\sum_{f'} W_{if'}} \cdot p_i \quad (II.21)$$

Die Besetzung des Zustandes f ist

$$p_f = \sum_i S_{if} \quad (\text{II.22})$$

Bei der Berechnung der Kaskade gehen wir von der oben definierten Anfangsverteilung (II.19) aus, die wir so normieren, daß

$$\sum_{L=0}^{N-1} P_{NL} = 1$$

Die Quantenzahl N halten wir bei allen Rechnungen fest. Wir setzen $N = 20$. Für den Parameter α findet man Werte zwischen -0.2 und 0.2 .

Aus den Formeln (II.20) und (II.22) werden die Besetzung $p_{n\ell}$ der tiefer liegenden Zustände $|n\ell\rangle$ ($n < N$) und aus (II.21) die Intensität der Röntgenübergänge berechnet.

Die Rechnungen wurden mit Hilfe eines FORTRAN-Programmes durchgeführt. In der ursprünglichen, von J. Hüfner geschriebenen Version des Programmes wurden nur K- und L-Auger-Übergänge berücksichtigt. Dies ist zulässig, wenn das Myon in Zustände mit $N \approx 14$ eingefangen wird. Da wir bei unseren Rechnungen mit $N = 20$ anfangen, muß auch die Emission von M-Elektronen berücksichtigt werden. Wir nehmen an, daß bei $Z = 41$ die M-Konversion etwa 37 % der L-Konversion beträgt. Dieser Wert wurde von M.E. Rose [Ros 58] für die innere Konversion der Kern- γ -Strahlung berechnet.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten A_{if} und R_{if} wurden aus Formeln von Y. Eisenberg und D. Kessler berechnet [EiK 61].

Diese Formeln wurden für nichtrelativistische Punktkernwellenfunktionen des Myons berechnet. Im unteren Teil der Kaskade ist diese Annahme nicht mehr zulässig, weil dort die Übergangsenergien groß sind und die Wellenfunktionen durch die Ausdehnung der Kernladung merklich deformiert werden.

Im nächsten Abschnitt sind die Formeln für eine verbesserte Berechnung der Strahlungsübergangswahrscheinlichkeit R_{if} zu finden. Die Intensität der tieferen Übergänge ($n \leq 3$ für Nb) muß mit diesen genaueren Übergangswahrscheinlichkeiten berech-

net werden (siehe nächster Abschnitt). Die Besetzung der Niveaus mit $n \geq 3$ und die Intensitäten der Übergänge im oberen Teil der Kaskade wurden mit dem oben erwähnten Rechenprogramm unter Verwendung der nichtrelativistischen Formeln für A_{if} und R_{if} berechnet.

3.2 Übergangswahrscheinlichkeiten

In myonischen Atomen wurden bisher nur elektrische Dipol- und Quadrupolübergänge beobachtet [BaE 71a]. Die magnetischen Multipolübergänge sind um mehrere Größenordnungen schwächer. Wir beschränken uns deshalb auf die elektrischen Multipolübergänge.

Der Anfangszustand $|i\rangle$ sei durch den Drehimpuls j_i ; und die Parität π_i , der Endzustand durch j_f und π_f charakterisiert. Der Drehimpuls der emittierten Strahlung sei L und deren Energie E_{if} .

Es gelten folgende Auswahlregeln

a) für den Drehimpuls

$$|j_i - j_f| \leq L \leq j_i + j_f \quad (\text{II.23})$$

b) für die Parität

$$\pi_i \cdot \pi_f = \begin{cases} (-1)^L & \text{bei EL-Übergängen} \\ (-1)^{L+1} & \text{bei ML-Übergängen} \end{cases} \quad (\text{II.23}')$$

Die Wahrscheinlichkeit $R(\text{EL})_{if}$ und $R(\text{ML})_{if}$ für elektrische, bzw. magnetische Multipolübergänge eines Teilchens im Zentralpotential wurde z.B. von S.A. Moszkowski [Mos 68] und M.E. Rose [Ros 55] berechnet.

Die Übergangswahrscheinlichkeit ist

$$R_{if} = a(L, E_{if}) \cdot \left| \langle f \| T_L \| i \rangle \right|^2 \quad (\text{II.24})$$

wobei

$$a(L, E_{if}) = \frac{2}{\hbar} \frac{L+1}{L(2L+1) [(2L-1)!!]} \left(\frac{E_{if}}{\hbar c} \right)^{2L+1}$$

T_L ist ein Multipoltensoroperator. Für elektrische Multipolübergänge ist das reduzierte Matrixelement [Mos 68]

$$\left| \langle f \parallel T_L \parallel i \rangle \right|^2 = e^2 (2j_f + 1) \begin{pmatrix} j_i j_f L \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} 0 \end{pmatrix}^2 \mathcal{R}_L^2$$

wobei

$$\mathcal{R}_L = \int_0^{\infty} (F_i G_f + G_i F_f) r^L dr$$

$G(r)$ und $F(r)$ sind die großen bzw. kleinen Radialkomponenten der Myon-Wellenfunktion, die wir aus der Lösung der Dirac-Gleichung erhalten. Das Radialintegral \mathcal{R}_L muß numerisch ausgewertet werden. Im nichtrelativistischen Grenzfall läßt sich für R_{if} eine analytische Lösung angeben [EiK 61].

\mathcal{R}_L ist dann proportional zu $\langle \gamma_i | r^L | \gamma_f \rangle$ wobei $\gamma(r)$ die nichtrelativistische Radialfunktion ist.

In Tabelle 2-8 sind Zahlenbeispiele für Dipolübergangswahrscheinlichkeiten in μNb zu finden. Die Energien E_{if} (Spalte 2) und die Radialfunktionen F und G wurden aus der Lösung der Dirac-Gleichung für ein Fermipotential mit $c = 5,03$ und $t = 2.20$ fm bestimmt. In der dritten und vierten Spalte stehen die durch E_{if}^3 dividierten Übergangswahrscheinlichkeiten, die aus den Formeln von Eisenberg und Kessler [EiK 61] bzw. aus (II.24) berechnet wurden.

In der nichtrelativistischen Näherung erhält man für einen Übergang $n\ell \rightarrow n'\ell'$ nur einen Wert von R_{if}/E_{if}^3 . In der relativistischen Näherung werden die Feinstrukturkomponenten berücksichtigt. Damit man die Werte für einen Übergang vergleichen kann, muß man über die relative Intensität der Feinstrukturkomponenten mitteln. In Tabelle 2-8a sind die Ergebnisse eingetragen.

Tabelle 2-8: Dipolübergangswahrscheinlichkeiten in μNb

Übergang	Energie keV	R_{if}/E_{if}^3	R_{if}/E_{if}^3	R_{if}
		nicht rela- tivistisch $10^6 \text{ sec}^{-1} \text{ keV}^{-3}$	relativist. $10^6 \text{ sec}^{-1} \text{ keV}^{-3}$	relativist. 10^{16} sec^{-1}
$2p_{1/2} - 1s_{1/2}$	2603.6	} 8.21	15.50	27.35
$2p_{3/2} - 1s_{1/2}$	2626.6		15.60	28.27
$3p_{1/2} - 1s_{1/2}$	3280.6	} 1.316	1.722	6.079
$3p_{3/2} - 1s_{1/2}$	3287.2		1.861	6.610
$3p_{1/2} - 2s_{1/2}$	537.2	} 46.31	95.48	1.480
$3p_{1/2} - 2s_{1/2}$	543.8		89.83	1.444
$2s_{1/2} - 2p_{1/2}$	139.8	} 0	124.0	0.0339
$2s_{1/2} - 2p_{3/2}$	116.8		259.1	0.0413
$3d_{3/2} - 2p_{1/2}$	682.7	} 133.4	104.2	3.314
$3d_{3/2} - 2p_{3/2}$	659.6		22.0	0.631
$3d_{5/2} - 2p_{3/2}$	662.3		132.8	3.857
$4f_{5/2} - 3d_{3/2}$	233.6	} 663.4	604.7	0.7712
$4f_{5/2} - 3d_{5/2}$	230.9		43.8	0.0539
$4f_{7/2} - 3d_{5/2}$	231.5		659.3	0.8181

Tabelle 2-8a: Vergleich der relativistischen und nicht-relativistischen Dipolübergangswahrscheinlichkeiten in μNb

Übergang	R_{if}/E_{if}^3 [$10^6/\text{sec}\cdot\text{keV}^3$]		Verhältnis (n.rel.)/(rel.)
	n.rel.	rel.	
2p-1s	8.21	15.56	0.528
3p-1s	1.316	1.815	0.725
3p-2s	46.31	91.71	0.505
3d-2p	133.4	115.9	1.151
4f-3d	663.4	619.6	1.071

In Tabelle 2-9 sind die Wahrscheinlichkeiten einiger E2- und M1-Übergänge zusammengestellt.

Tabelle 2-9: M1- und E2-Übergangswahrscheinlichkeiten in μNb

Übergang	Energie/keV	Typ	R_{if}/sec^{-1}
$2s_{1/2} - 1s_{1/2}$	2743.42	M1	0
$2p_{3/2} - 2p_{1/2}$	23.02	M1	$5.32 \cdot 10^9$
$3d_{3/2} - 1s_{1/2}$	3286.26	M1	0
		E2	$5.66 \cdot 10^{14}$
$3d_{5/2} - 1s_{1/2}$	3288.93	E2	$5.76 \cdot 10^{14}$
$3d_{3/2} - 2s_{1/2}$	542.84	E2	$2.81 \cdot 10^{13}$
$3d_{5/2} - 2s_{1/2}$	545.51	E2	$2.90 \cdot 10^{13}$

4. Hyperfeinstrukturaufspaltung der myonischen Energie- niveaus

4.1 Magnetische Dipol-Wechselwirkung (M1-HFS)

Die magnetische Wechselwirkung zwischen Myon und Atomkern wird durch den Tensoroperator

$$M1 = -e \int \mathcal{M}(\mathbf{R}') \left(\nabla_{\mathbf{R}} \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} \right) d\tau'$$

beschrieben. $\mathcal{M}(\mathbf{R})$ ist die Magnetisierungsdichte des Kerns. Durch die Wechselwirkung M1 werden der Drehimpuls \vec{j} des Myons und der Kernspin \vec{I} zu dem Gesamtdrehimpuls

$$\vec{F} = \vec{I} + \vec{j}$$

zusammengekoppelt. Die Energieniveaus des Myons spalten dabei in $2\text{Min}(I, j) + 1$ Hyperfeinstruktur-Zustände auf, die durch die Drehimpulsquantenzahl F gekennzeichnet werden. Die Aufspaltung der Niveaus läßt sich durch Störungsrechnung erster Ordnung aus den Diagonal-Matrixelementen von M1 bestimmen.

$$\epsilon_F(M1) = -e \langle FM | \alpha \times \vec{\alpha} | FM \rangle$$

Das Ergebnis läßt sich in der folgenden allgemeinen Form anschreiben (siehe Anhang A3)

$$\epsilon_F(M1) = a \frac{F(F+1) - I(I+1) - j(j+1)}{2} \quad (\text{II.25})$$

Die Konstante a wird als Hyperfeinstrukturkonstante bezeichnet. a kann aus dem Experiment bestimmt werden. Die gesamte Information über die magnetische Dipolwechselwirkung zwischen Myon und Atomkern ist in a enthalten. a hängt von dem betrachteten Zustand des Myons ab und von den magnetischen Kerneigenschaften, insbesondere der räumlichen Verteilung des magnetischen

Moments.

Die Berechnung der M1-Kopplungskonstanten a wird im Anhang A3 näher erläutert. Wir beschränken uns hier auf die Endformeln, die für die Auswertung der Messungen und die Diskussion der Ergebnisse benötigt werden.

a) Punktkernnäherung

Wenn das magnetische Dipolmoment des Atomkerns auf einen Punkt konzentriert ist, gilt

$$\mathcal{M} = \vec{\mu}_I \cdot \delta^{(3)}(0)$$

Das magnetische Kernmoment ist

$$\vec{\mu}_I = g_I \cdot \mu_N \cdot \vec{I} \quad (\text{II.26})$$

wobei

$$\mu_N = \frac{\hbar e}{2m_p c} \quad (\text{Kernmagneton})$$

und g_I der g-Faktor des Kerns ist.

Für die M1-HFS-Kopplungskonstante erhält man damit

$$a_0 = eg_I \mu_N \frac{\alpha}{j(j+1)} 2 \int_0^\infty \frac{G \cdot F}{r^2} dr \quad (\text{II.27})$$

$\alpha, G(r)$ und $F(r)$ wurden bereits im Abschnitt 1.1 dieses Kapitels definiert. Im nichtrelativistischen Grenzfall geht a_0 in den folgenden Ausdruck über (siehe Anhang A3)

$$a_0 = \frac{e\hbar}{2m_p c} g_I \mu_N \frac{\ell(\ell+1)}{j(j+1)} \cdot 2 \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle n\ell \quad (\text{II.28})$$

Wobei $\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle n\ell$ über die nichtrelativistische Punktkernwellenfunktion des Myons gemittelt ist.

b) Einfluß der räumlichen Verteilung des magnetischen Kernmoments

Wenn man die räumliche Verteilung des magnetischen Dipolmomentes im Atomkern berücksichtigt, muß für die Magnetisierungs-

dichte eine Ortsabhängigkeit angenommen werden.

$$\mathcal{M}(\vec{R}) = \sum_i \mathcal{M}(\vec{R})_i$$

wobei $\mathcal{M}(\vec{R})_i$ der Beitrag des i -ten Nukleons ist

$$\mathcal{M}(\vec{R})_i = \mu_N (g_L \vec{L} + g_S \vec{S})_i \delta^{(3)}(\vec{R} - \vec{R}_i)$$

\vec{L} und \vec{S} sind die Drehimpulsoperatoren, die auf das i -te Nukleon wirken. g_L und g_S sind die Bahndrehimpuls- bzw. Spin- g -Faktoren der Nukleonen. Für die Neutronen gilt $g_L = 0$, $g_S = -3.8263$, für die Protonen $g_L = 1$ und $g_S = 5.5855$.

Die M1-HFS-Kopplungskonstante setzt sich aus einem Bahn- und einem Spinanteil zusammen

$$a = a_L + a_S$$

Der Beitrag des i -ten Nukleons ist

$$a^{(i)} = a_L^{(i)} + a_S^{(i)}$$

und es gilt
$$a = \sum_i a^{(i)}$$

$a_L^{(i)}$ und $a_S^{(i)}$ wurden von Le Bellac [LeB 63] für $s_{1/2^-}$ und $p_{1/2^-}$ Zustände des Myons berechnet. Die Formeln sind im Anhang A.3 zu finden.

Im Einteilchen-Kernmodell ist das magnetische Kernmoment

$$\vec{\mu}_I = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S$$

wobei $\vec{\mu}_L = g_L \mu_N \cdot \vec{L}$ der Bahnanteil und $\vec{\mu}_S = g_S \cdot \mu_N \cdot \vec{S}$ der Spinanteil des magnetischen Moments des "Leuchtnukleons" ist. Aus (II.26) folgt damit

$$g_I \vec{I} = g_L \vec{L} + g_S \vec{S}$$

Für den g-Faktor des Kerns erhält man aus dieser Gleichung den bekannten 'Schmidt-Wert'

$$g_I = g_L + \lambda \frac{g_S - g_L}{2L+1} \quad (\text{II.29})$$

mit

$$\lambda = \begin{cases} 1 & \text{für } I = L + 1/2 \\ -1 & \text{für } I = L - 1/2 \end{cases}$$

Aus dem Einteilchen-Modell erhält man die M1-Kopplungskonstante der $s_{1/2}$ - und $p_{1/2}$ -Zustände für $I = L - 1/2$ [LeB 63]

$$a = a_0 + e \mu_N \frac{\kappa}{j(j+1)} \cdot \frac{2}{I} \left[-g_I \cdot I \cdot K_1 + \left\{ g_L (I-1/2) - g_S \frac{2 \cdot I - 1}{8(I+1)} \right\} K_2 \right] \quad (\text{II.30})$$

für $I = L - 1/2$

$$a = a_0 + e \mu_N \frac{\kappa}{j(j+1)} \cdot \frac{2}{I} \left[-g_I \cdot I \cdot K_1 + \left\{ g_L \frac{2I + 3}{2(I+1)} + g_S \frac{2 \cdot I + 3}{8(I+1)} \right\} K_2 \right] \quad (\text{II.31})$$

wobei

$$K_1 = \int_0^{\infty} |u(R)|^2 R^2 dR \int_0^R \frac{FG}{r^2} dr$$

$$K_2 = \int_0^{\infty} |u(R)|^2 R^2 dR \int_0^R r \frac{FG}{R^3} dr$$

$u(r)$ ist der Radialteil der Nukleonenwellenfunktion mit der Normierungsbedingung

$$\int_0^{\infty} |u(r)|^2 r^2 dr = 1$$

Für eine punktförmige Verteilung $|u(r)|^2 = \delta(o)$ verschwinden die Integrale K_1 und K_2 . (II.30) und (II.31) gehen dann in die Punktkernnäherung (II.28) über.

Mittels der Beziehung (II.29) kann aus den Gleichungen (II.30) und (II.31) g_L eliminiert werden. Wenn für g_I der experimentelle Wert verwendet wird, ist dies gleichbedeutend mit einer Abänderung von g_L , so daß der 'Schmidt-Wert' (II.29) gleich dem gemessenen g -Faktor des Kerns ist. g_S bleibt dabei unverändert. Wir finden

$$a = a_0 - e\mu_N \frac{\lambda}{j(j+1)} \frac{2}{I} \left[g_I \cdot I \cdot (K_1 - K_2) + \lambda \cdot \frac{1}{2} g_S \frac{3(2I+1)}{4(I+1)} K_2 \right] \quad (\text{II.32})$$

Wenn wir
$$K_0 = \int_0^\infty \frac{FG}{r^2} dr$$

setzen, folgt aus (II.27)

$$a_0 = e g_I \mu_N \frac{\lambda}{j(j+1)} \cdot 2 K_0$$

Damit kann man (II.32) folgendermaßen umformen

$$a = a_0 \cdot f_\mu$$

mit
$$f_\mu = 1 - \frac{K_1 - K_2}{K_0} + \lambda \frac{g_S}{2g_I \cdot I} \cdot \frac{3(2I+1)}{4(I+1)} \frac{K_2}{K_0} \quad (\text{II.33})$$

Der Formfaktor f_μ beschreibt die Änderung des Punktkernwertes a_0 der M1-HFS-Konstanten durch die ausgedehnte Verteilung des magnetischen Kernmomentes. f_μ hängt über die Bohr-Weisskopf-Integrale K_0 , K_1 und K_2 von der Verteilung des magnetischen Moments ab.

Die relative Änderung der M1-Kopplungskonstante

$$\xi = \frac{a_0 - a}{a_0} = 1 - f_\mu$$

wird als Bohr-Weisskopf-Effekt bezeichnet [BoW 50].

Die Formel (II.27) gilt für alle Zustände des Myons, während die Formel (II.32) nur für die $s_{1/2}$ - und $p_{1/2}$ -Zustände richtig ist. Für andere Zustände erhält man kleine Korrekturglieder [Sch 71], die aber vernachlässigt werden können, da der Bohr-Weisskopf-Effekt in den höheren Zuständen klein ist.

Wir haben die M1-Kopplungskonstante aus den Formeln (II.27) und (II.32) für verschiedene Zustände in μNb berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2-10 zu finden.

Tabelle 2-10: M1-HFS-Konstanten von μNb

Niveau	Punktkern-Modell		Einteilchen-Modell		Fermi-Verteilung	
	$a_o^{1)}$ keV	$a_o^{2)}$ keV	$a^{3)}$ keV	f_μ	$a^{4)}$ keV	f_μ
$1s_{1/2}$	2.293	1.002	0.671	0.670	0.674	0.673
$2s_{1/2}$	0.474	0.158	0.095	0.604	0.096	0.608
$2p_{1/2}$	0.176	0.186	0.148	0.798	0.148	0.798
$2p_{3/2}$	0.037	0.034	0.033	0.978	0.033	0.976
$3p_{1/2}$	0.052	0.055	0.042	0.762		
$3p_{3/2}$	0.011	0.010	0.010	0.972		
$3d_{3/2}$	0.007	0.007	0.007	0.997		
$3d_{5/2}$	0.003	0.003	0.003	1,000		

$a_o^{1)}$ wurde aus der nichtrelativistischen Näherung (II.28) berechnet. Der Einfluß der Kernaussdehnung auf die Myonwellenfunktion und relativistische Effekte wurden durch Korrekturfaktoren berücksichtigt. Es wurden die von H. Kopfermann [Kop 56] für Elektronen angegebenen Korrekturen verwendet, die sich auf Myonen übertragen lassen, wenn man darin die Elektronenmasse durch die Myonenmasse ersetzt.

$a_o^{2)}$ wurde aus (II.27) berechnet. Die Myonen-Wellenfunktionen $F(r)$ und $G(r)$ erhielten wir aus der numerischen Lösung der Dirac-Gleichung für ein Fermipotential mit $c = 5.03$ fm und

$t = 2.20 \text{ fm}$.

a^3) wurde aus (II.32) mit denselben Wellenfunktionen wie a^2) berechnet. Die Einteilchen-Wellenfunktion $u(R)$ des $g_{9/2}$ -Protons von ${}^{93}_{41}\text{Nb}$ erhielten wir aus der Lösung der Schrödinger-Gleichung für ein realistisches Saxon-Woods-Potential mit Spin-Bahn-Wechselwirkung und mit einem abstoßenden Coulombpotential. Die numerische Integration wurde mit einem FORTRAN-Programm durchgeführt, das von F. Scheck geschrieben wurde [EnS 68]. In Abb. 2-2 ist die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|u(R)|^2$ des $g_{9/2}$ -Protons eingezeichnet.

a^4) wurde wie a^3) berechnet, jedoch unter der Annahme einer Fermi II-Verteilung des magnetischen Kernmoments. In Abb. 2-3 ist der Formfaktor f_{μ} der $1s_{1/2}$ -, $2s_{1/2}$ - und $2p_{1/2}$ -Zustände von μNb als Funktion von c dargestellt. Dabei haben wir $t = 2.20 \text{ fm}$ angenommen.

An Hand von Tabelle 2-10 sehen wir, daß in den höheren Zuständen $2p_{3/2}$, $3p_{3/2}$ und $3d$ der Formfaktor f_{μ} nur wenig von eins verschieden und der Unterschied zwischen der nichtrelativistischen Näherung a^1) und der relativistischen Näherung a^2) klein ist. In den tieferen Zuständen $1s_{1/2}$, $2s_{1/2}$, $2p_{1/2}$ und $3p_{1/2}$ weicht f_{μ} stark von eins ab und a^1) und a^2) sind verschieden.

Beim Vergleich der Kopplungskonstanten der $1s_{1/2}$ -, $2p_{1/2}$ - und $2s_{1/2}$ -Zustände wollen wir noch auf folgende interessante Unterschiede hinweisen. In der nichtrelativistischen Näherung ist $a(2s_{1/2})$ größer als $a(2p_{1/2})$, während in der relativistischen Näherung $a(2s_{1/2})$ kleiner als $a(2p_{1/2})$ ist. Außerdem ist der Bohr-Weißkopf-Effekt im $2s_{1/2}$ -Niveau größer als im $2p_{1/2}$ - und $1s_{1/2}$ -Niveau.

Dies ist darauf zurückzuführen, daß der Integrand FG/r^2 in Formel (II.27) beim $2s_{1/2}$ -Zustand zwischen $r = 0$ und $r = \infty$ zweimal sein Vorzeichen ändert, während FG/r^2 bei den $1s_{1/2}$ - und $2p_{1/2}$ -Zuständen überall dasselbe Vorzeichen hat. Dadurch wird erstens $a(2s_{1/2})$ kleiner als $a(2p_{1/2})$ und zweitens $a(2s_{1/2})$ empfindlicher auf die Ausdehnung des magnetischen Kernmomentes als $a(2p_{1/2})$ und $a(1s_{1/2})$.

4.2 Elektrische Quadrupol-Wechselwirkung (E2-HFS)

Die elektrostatische Wechselwirkung V_c zwischen Myon und Atomkern ist nach (II.2)

$$V_c = \langle \bar{\Phi}_0 | H^e | \bar{\Phi}_0 \rangle$$

worin

$$H^e = \sum_i - \frac{e^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{r}|}$$

und $\bar{\Phi}_0$ die Wellenfunktion des Kerns im Grundzustand ist. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels haben wir die Kernladungsdichte $e \cdot |\bar{\Phi}_0|^2$ durch eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\varrho(r)$ ersetzt. Das Potential V , das aus (II.7) berechnet wird, hängt dann nur noch von r ab. Wenn die Kernladungsverteilung nicht kugelsymmetrisch ist, muß man das elektrostatische Potential aus (II.2) berechnen. Dazu entwickelt man H^e nach Multipoloperatoren E_L . Der Monopolterm E_0 ergibt dann das in (II.7) dargestellte Potential. Der Dipolterm E_1 verschwindet aus Paritätsgründen. Der Quadrupolterm ist

$$V_{\epsilon 2}(r) = \left\langle \bar{\Phi}_0 \left| - \frac{4\pi}{5} e^2 \sum_{i=1}^Z \frac{r_{<}^2}{r_{>}^3} \sum_m Y_{2m}^*(\theta_i, \phi_i) Y_{2m}(\vartheta, \varphi) \right| \bar{\Phi}_0 \right\rangle \quad (\text{II.35})$$

Worin θ_i, ϕ_i, R_i die Koordinaten des i -ten Nukleons, ϑ, φ, r die Myonen-Koordinaten und $r_{<}$ bzw. $r_{>}$ der kleinere bzw. der größere der beiden Radien R_i und r sind.

Durch die elektrische Quadrupolwechselwirkung (II.35) werden der Drehimpuls \vec{j} und der Kernspin \vec{I} zum Gesamtdrehimpuls \vec{F} zusammengekoppelt. Die E2-Hyperfeinstrukturaufspaltung der myonischen Energieniveaus erhält man aus den Diagonalelementen von $V_{\epsilon 2}$. Das Ergebnis läßt sich in der folgenden Form anschreiben

$$\xi_F(\epsilon 2) = b \frac{\frac{3}{2} K(K+1) - 2I(I+1)j(j+1)}{4I(2I-1)j(2j-1)} \quad (\text{II.36})$$

mit

$$K = F(F+1) - I(I+1) - j(j+1)$$

Wir sehen, daß für $I = 1/2$ und $j = 1/2$ in dieser Näherung keine Quadrupolaufspaltung vorhanden ist.

Die E2-Hyperfeinstrukturkonstante b wurde z.B. von Le Bellac [LeB 63] berechnet.

$$b = \frac{2j-1}{j+1} e^2 \left\langle \text{II} \left| \sum_{i=1}^Z C_0^{(2)}(\theta_i) \cdot (L_1(R_i) + L_2(R_i)) \right| \text{II} \right\rangle$$

wobei
$$C_0^{(2)} = \frac{1}{2} (3\cos^2\theta - 1) \quad (\text{II.37})$$

$$L_1(R) = \int_R^\infty \frac{R^2}{r^3} (F^2 + G^2) dr$$

$$L_2(R) = \int_0^R \frac{r^2}{R^3} (F^2 + G^2) dr$$

In der Punktkernnäherung verschwindet der zweite Term in (II.37) und wir finden

$$b_0 = \frac{2j-1}{2j+2} e^2 Q \cdot \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \quad (\text{II.38})$$

wobei
$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{r^3} (F^2 + G^2) d^3r$$

und
$$Q = \int R^2 (3\cos^2\theta - 1) \varrho_N d\tau$$

Q ist das Quadrupolmoment des Kerns mit der Ladungsverteilung $\varrho_N(R, \theta)$. Wenn wir annehmen, daß die räumliche Verteilung des Quadrupolmomentes im Kern durch eine Funktion ϱ_Q beschrieben werden kann, erhalten wir aus (II.37)

$$b = \frac{2j-1}{2j+2} e^2 Q \left[\int_0^\infty \varrho_Q (L_1(R) + L_2(R)) dR \right] \quad (\text{II.39})$$

Wenn Q über eine Kugelschale mit dem Radius R_0 verteilt ist, gilt

$$\varrho_Q = \delta(R - R_0) / R_0^2$$

und aus (II.39) folgt

$$b = \frac{2j-1}{2j+2} \cdot e^2 \frac{Q}{R_0^2} \cdot [L_1(R_0) + L_2(R_0)] \quad (\text{II.40})$$

Wir definieren den Formfaktor

$$f_Q = b/b_0$$

Aus (II.40) finden wir mit (II.38)

$$f_Q = \frac{L_1(R_0) + L_2(R_0)}{\left\langle \frac{R_0^2}{r^3} \right\rangle} \quad (\text{II.41})$$

In Tabelle 2-11 sind Zahlenbeispiele für die E2-Kopplungskonstante b_0 einiger Zustände in μNb eingetragen. Die Myon-Wellenfunktionen F und G wurden für ein Fermipotential mit $c = 5.03 \text{ fm}$ und $t = 2.20 \text{ fm}$ berechnet.

In Abb. 2-4 ist der Formfaktor f_Q aus (II.41) für den $2p_{3/2}^-$ Zustand in μNb als Funktion von R_0 eingezeichnet.

Tabelle 2-11: E2-HFS-Konstanten von μNb ($Q = -0.25 \text{ barn}$)

Niveau	$2p_{3/2}$	$3p_{3/2}$	$3d_{3/2}$	$3d_{5/2}$
b_0/keV	-2.442	-0.732	-0.157	-0.212

4.3 Intensität der Hyperfeinstrukturkomponenten

Wir betrachten einen elektrischen Dipolübergang des Myon-Kern-Systems von dem Zustand $|Ij F\rangle$ in den Zustand $|Ij'F'\rangle$. Wenn die HFS-Aufspaltung der Niveaus klein gegenüber der Übergangsenergie ist, läßt sich die Übergangswahrscheinlichkeit in der folgenden Form darstellen (siehe Anhang A3):

$$R_{FF'} = R_{jj'} \cdot g_{FF'} \quad (\text{II.42})$$

mit

$$g_{FF'} = (2F+1)(2F'+1) \left\{ \begin{matrix} j & 1 & j' \\ & & \\ F' & I & F \end{matrix} \right\}^2$$

$R_{jj'}$, ist die Wahrscheinlichkeit für den E1-Übergang des Myons von $|j\rangle$ nach $|j'\rangle$ (siehe (II.23)). Für j und j' gilt die Auswahlregel

$$\Delta j = 0, \pm 1 \quad (\text{II.43})$$

Aus (II.42) folgt damit für F und F' die Auswahlregel

$$\Delta F = 0, \pm 1 \quad (\text{II.43'})$$

Zur Bestimmung der relativen Intensitäten der HFS-Komponenten genügt es, die Koeffizienten $g_{FF'}$, zu berechnen. Die speziellen $6j$ -Symbole sind z.B. in [Edm 60] tabelliert. Mit Hilfe der Racah-Elliott-Relation finden wir

und

$$\sum_F g_{FF'} = (2F'+1)/(j+1)$$
$$\sum_{F'} g_{FF'} = (2F+1)/(j+1)$$

Dies ist die bekannte Summenregel der Intensitäten (siehe z.B. [Whi 34]).

In Tabelle 2-12 sind einige relative Intensitäten von HFS-Multipletts in μNb ($I = 9/2$) eingetragen. Die Werte wurden von H. Kopfermann übernommen [Kop 56] .

Tabelle 2-12: Relative Intensitäten von HFS-Multipletts in μNb

$$j = \frac{1}{2}, j' = \frac{1}{2}$$

F =	4	5
F' = 4	36.4	100
5	100	66.8

$$j = \frac{3}{2}, j' = \frac{1}{2}$$

F =	3	4	5	6
F' = 4	53.9	50.9	33.8	
5		18.5	50.9	100

$$j = \frac{3}{2}, j' = \frac{3}{2}$$

F =	3	4	5	6
F' = 3	34.6	42.4		
4	42.4	0.3	56.3	
5		56.3	21.7	42.8
6			42.8	100

$$j = \frac{5}{2}, j' = \frac{3}{2}$$

F =	2	3	4	5	6	7
F' = 3	33.4	25.7	11.0			
4		21.0	37.8	31.1		
5			11.2	38.1	60.6	
6				4.0	26.0	100

III. Beschreibung des Experiments

1. Der Myonen-Kanal am CERN-Synchrozyklotron

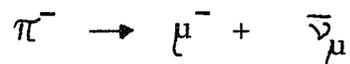
Das Experiment wurde am Myonen-Kanal des CERN-Synchrozyklotrons (SC) durchgeführt. Wir beschreiben kurz die Grundlagen der Erzeugung eines intensiven Myonen-Strahls. Einzelheiten können dem Bericht von A. Citron et. al [CiM 63] entnommen werden.

Im SC werden Protonen auf eine Energie von etwa 600 MeV beschleunigt. Die Protonen treffen auf ein internes Beryllium-Target und erzeugen dort negative Pionen



Die Pionen werden durch das Magnetfeld des SC nach außen abgelenkt. Der Impuls der Pionen, die in den Myonen-Kanal fliegen, wird durch die Position des internen Targets und einen Magneten am Rand der Vakuumkammer bestimmt. In unserem Fall beträgt der Pionen-Impuls etwa 200 MeV/c.

Im Myonen-Kanal, der aus einer 14.5 m langen Reihe von Quadrupolmagneten besteht, zerfallen die Pionen in negative Myonen:



Das Impulsspektrum der Myonen kann durch ein Rechteckspektrum beschrieben werden. Beim Rückwärtszerfall der Pionen erhält man den kleinsten Myonenimpuls (105 MeV/c), beim Vorwärtszerfall den größten (209 MeV/c).

Am Ende des Myonen-Kanals durchfliegen die Teilchen einen Analysatormagneten, werden dabei um 70° abgelenkt und schließlich durch zwei Quadrupolpaare fokussiert. Wenn man den Analysatormagneten auf das untere Ende des Impulsbandes der Myonen einstellt, erhält man einen fast reinen Myonenstrahl. Bei Einstellung auf das hochenergetische Ende erhält man zwangsläufig eine starke Pionenbeimischung, da der maximale

Myonen-Impuls sich kaum vom Pionenimpuls unterscheidet.

2. Aufbau des Experiments

In Abb. 3-1 ist der Aufbau des Experiments schematisch dargestellt. Etwa 0,5 m hinter dem letzten Quadrupolmagneten befindet sich ein Bleikollimator, der den Teilchenstrahl auf einen quadratischen Querschnitt von $10 \times 10 \text{ cm}^2$ begrenzt. Danach folgt ein Teleskop aus vier Zählern, die aus Plastikszintillatoren bestehen, die durch Plexiglaslichtleiter mit Photomultipliern (56 AVP) verbunden sind. Zwischen dem zweiten und dritten Zähler wird der Graphitmoderator (Dichte 2 g/cm^3) eingeschoben. Das Target befindet sich zwischen dem dritten und vierten Zähler. Der Querschnitt der ersten drei Zähler beträgt $10 \times 10 \text{ cm}^2$, der des vierten $15 \times 15 \text{ cm}^2$.

Eine Koinzidenz zwischen den ersten drei Zählern in Antikoinzidenz zum vierten Zähler wird als Stopereignis ($123\bar{4}$) registriert. Nicht allen Stopereignissen entsprechen Teilchen, die im Target eingefangen werden. Es kann vorkommen, daß ein Teilchen aus dem Target herausgestreut wird, ohne vom Antikoinzidenzzähler registriert zu werden und dadurch eine ($123\bar{4}$)-Koinzidenz auslöst. Um den Anteil solcher unechter Stopereignisse möglichst niedrig zu halten, wurde die Geometrie der Anordnung so gewählt, daß der Abstand zwischen den beiden letzten Zählern möglichst klein ist und außerdem der Antizähler größer ist als die ersten drei Zähler. Der letzte Teil des Moderators wurde unmittelbar vor den dritten Zähler gestellt, damit möglichst wenige Teilchen durch Streuung im Moderator verloren gehen.

Im Moderator werden die hochenergetischen Teilchen soweit abgebremst, daß sie im Target eingefangen werden. Die richtige Länge des Moderators erhält man aus einer differentiellen Reichweitenkurve (Rangekurve). Dazu wird die Stoprate als Funktion der Moderatorlänge gemessen. Im Maximum der ($123\bar{4}$)-Rate werden die meisten Teilchen im Target gestoppt. Eine ideale Rangekurve erhält man nur für ein sehr dünnes Target.

Die von uns verwendeten Targets haben eine Flächendichte von 4 bis 5 g /cm², so daß die gemessenen Rangekurven nicht der wirklichen Reichweitenverteilung entsprechen und verbreitert sind.

In den Abbildungen 3-2 und 3-3 sind die Rangekurven zu sehen, die wir mit dem reinen μ -Strahl und dem $\pi\mu$ -Strahl gemessen haben. Auf zwei gegenüberliegenden Seiten des Targets sind die beiden Ge(Li)-Detektoren untergebracht. Sie sind durch Blei- und Kupferplatten gegen gestreute Teilchen und γ -Untergrund abgeschirmt. Der Abstand der Detektoren von der Strahl-Achse beträgt 6 bis 8 cm.

Die in Abb. 3-1 gezeigte Kreuzform des Targets wurde gewählt, damit die Absorption der Röntgenstrahlung im Target in der Richtung zum Detektor möglichst gering und andererseits die effektive Flächendichte zur Strahlrichtung möglichst groß ist. Das verwendete Niob-Target besteht aus Platten von 2 mm Dicke, die mit der Strahlrichtung einen Winkel von 33° einschließen. Bei einer Dichte von 8.7 g/cm³ beträgt somit die effektive Flächendichte 2.3.2g/cm². Die Gesamtmasse des Targets ist 415 g .

Die für dieses Experiment typischen Zählraten sind in Tabelle 3-1 eingetragen.

Tabelle 3-1: Typische Zählraten

Strahl	Zählraten (sec ⁻¹)			
	Zähler 1	$(123\bar{4})_{\mu}$	$(123\bar{4} - \gamma)_{\mu}$	
			Detektor ^{II}	Detektor ^{III}
μ	4.1 10 ⁴	1.1 10 ⁴	170	15
$\pi\mu$	4.2 10 ⁵	5.3 10 ⁴	210	-

3. Elektronik

Ein Blockschaltbild der Elektronik ist in Abb. 3-4 zu finden. Die Impulse der vier Teleskopzähler werden über Abschwächer und Verzögerungsleitungen in geklippter Form Diskriminatoren zugeführt, und dort in logische NIM-Standard-Signale umgewandelt. Die Signale der ersten drei Zähler sind 5 nsec lang, die des vierten Zählers etwa 30 nsec. Damit ist eine große Wirksamkeit der Antikoinzidenz gewährleistet. In der nachfolgenden schnellen Koinzidenzstufe werden diese Signale als Stopereignisse ($123\bar{4}$) registriert. Die Auflösung der Koinzidenz beträgt 5 nsec.

Die Ausgangsimpulse der ladungsempfindlichen Vorverstärker der Ge(Li)-Detektoren müssen in Koinzidenz zu den Stoppsignalen ($123\bar{4}$) gemessen werden. Da die Analogimpulse aus dem Vorverstärker verschiedene Anstiegszeiten haben, können sie nicht direkt als Zeitsignale verwendet werden. Um ein Signal zu erhalten, das in fester zeitlicher Beziehung zum Stopereignis steht, benützen wir einen Zeitsignalgenerator ('constant fraction timing discriminator'). In diesem Gerät werden die Ge(Li)-Impulse aus dem Linear-Verstärker so umgeformt, daß sie nach einer vorgegebenen Zeit T_0 durch Null gehen, wenn das Eingangssignal einen bestimmten Bruchteil f des Endwerts überschreitet.

Ein nulldurchgangs-Diskriminator gibt zu diesem Zeitpunkt ein kurzes Ausgangssignal (5 nsec). Die Zeit T_0 wird durch eine Verzögerungsleitung der Länge $T_D = (1-f) \cdot T_0$ bestimmt. Das Koinzidenzsignal ($123\bar{4} - \gamma$) dient als Gate-Signal für den Vielkanalanalysator, mit dem das Energiespektrum aufgenommen wird. Die Breite dieser Koinzidenz wird durch die Länge des ($123\bar{4}$)-Signals festgelegt. Im günstigsten Fall wird eine Koinzidenzauflösung von 20 bis 50 nsec erreicht.

Zur Eichung der myonischen Röntgenspektren werden die γ -Linien von Standard-Isotopen verwendet, deren Energien in manchen Fällen auf wenige eV genau bekannt sind. Zur Vermeidung systematischer Fehler müssen die Eichlinien unter möglichst

gleichen Bedingungen wie die myonische Röntgenstrahlung gemessen werden. Dies kann man erreichen, indem man die Eichimpulse in zufälliger Koinzidenz zu den Teleskopimpulsen mißt. Die Präzision der Energiemessung, die mit dieser Methode erreicht werden kann, wurde schon in anderen Experimenten demonstriert ([BaC 70] , [BaD 71]). Im besten Fall läßt sich die Energie mesonischer Röntgenübergänge bis auf 20 eV genau bestimmen. Eine ausführliche Diskussion möglicher Fehlerquellen wird von Ch.v.d. Malsburg [Mal 70] gegeben.

Zur simultanen Messung der Eichlinien kommen zwei verschiedene Verfahren zur Anwendung.

(1) Bei der "Routing-Methode" werden das Eichspektrum und das Röntgenspektrum in zwei getrennte Hälften des Vielkanalanalysators gespeichert. Eine prompte Koinzidenz zwischen dem Teleskop und dem Ge(Li)-Detektor identifiziert ein mesonisches Röntgenquant, und das Ereignis wird in der ersten Hälfte des Speichers registriert. Eine Koinzidenz zwischen dem Ge(Li)-Detektor und einem um einige 100 nsec verzögerten (12)-Signal identifiziert eine zufällige Koinzidenz und damit ein Quant der Eichquelle. Dieses Ereignis wird in der zweiten Hälfte des Speichers registriert. Da die Auflösung der (1234- γ)-Koinzidenz nicht beliebig schmal gemacht werden kann, läßt es sich nicht ganz verhindern, daß die Eichlinien, wenn auch sehr schwach, im prompten Spektrum erscheinen. Die Intensität der Eichlinien im prompten Spektrum hängt von dem Verhältnis der Auflösung τ_p der prompten (1234- γ)-Koinzidenz zur Auflösung τ_z der verzögerten (12- γ)-Koinzidenz ab und von dem Verhältnis der (1234) - zur (12) - Rate. Für $\tau_p = 50$ nsec, $\tau_z = 500$ nsec, $N(1234) = 5.3 \cdot 10^4$ /sec, $N(12) = 3.8 \cdot 10^5$ /sec finden wir

$$\frac{I_{\text{prompt}}}{I_{\text{verz.}}} = \frac{\tau_p}{\tau_z} \cdot \frac{N(1234)}{N(12)} = 1.4 \%$$

Diese Methode läßt sich mit Vorteil in solchen Fällen anwenden, in denen die Eichlinien nahe bei den myonischen Linien liegen und der halbierte Speicherplatz für das Röntgenspektrum ausreicht.

(2) Wenn der gesamte zur Verfügung stehende Speicherplatz benötigt wird und die Eichlinien und die myonischen Linien sich nicht gegenseitig stören, kann auch die folgende einfachere Methode angewendet werden.

Wenn die Länge des (1234)-Teleskopsignals genügend lang ist (einige 100 nsec), werden die Eichlinien in zufälliger Koinzidenz mit den gestoppten Myonen gemessen: neben den prompten myonischen Linien erscheinen dann im Spektrum auch die Eichlinien.

Diese Methode hat den Nachteil, daß durch die verbreiterte Koinzidenzauflösung der Untergrund unter den myonischen Linien durch zufällige Koinzidenzen erhöht wird (z.B. Compton-Untergrund von den Eichlinien). Die Analogsignale des Ge(Li)-Detektors werden in einem Linearverstärker (TENELEC TC 200) verstärkt und anschließend in einem Vielkanalanalysator digitalisiert und gespeichert.

Für die Experimente standen drei Analysatoren zur Verfügung.

- a) NUCLEAR DATA, Typ ND 2200 mit 4096 Kanälen
- (b) INTERTECHNIQUE, Typ BM 96 mit ND 2200 ADC und 4096 Kanälen
- (c) TULLAMORE, Typ SCIPP 1600 mit 1600 Kanälen

Der ND 2200 Analog-Digital-Konverter (ADC) gestattet eine digitale Stabilisierung von Nullpunkts- und Verstärkungsschwankungen.

In einigen Experimenten reichte die Zahl der zur Verfügung stehenden Kanäle nicht aus. Deshalb wurde der Nullpunkt der ADC-Eingangsimpulse mit einem "biased-amplifier" verschoben. Damit konnte die Verstärkung heraufgesetzt und die Zahl der Kanäle pro keV vergrößert werden.

In Tabelle 3-2 sind einige Eigenschaften und die Anwendungsbereiche der verwendeten Ge(Li)-Detektoren eingetragen.

Tabelle 3-1: Eigenschaften der Ge(Li)-Detektoren

Nr.	Typ		F cm ²	V cm ³	T keV	Energiebereich MeV
I	NUCLEAR DIODES LGCC - 4.2 - 2.5	koaxial	-	35	2.8 ^{a)} 2.7 ^{b)}	0.5 - 2.0
II	CANBERRA 7219	koaxial	-	18.5	2.2 ^{c)}	0.5 - 2.0
III	ORTEC	planar	2		0.67 ^{d)}	0 - 0.2

F: Oberfläche, V: empfindliches Volumen

T: volle Halbwertsbreite (unter den Bedingungen des Experimentes)

a) ⁶⁰Co - 1332 keV, b) ²⁰⁸Pb-(2614 keV - 2 m·c²),

c) ¹³⁷Cs - 661 keV, d) bei etwa 100 keV

4. Datenverarbeitung und Auswertung der Spektren

Die in den Vielkanalanalysatoren gespeicherten Spektren können auf Magnetband oder Lochstreifen ausgelesen oder direkt Punkt für Punkt auf Papier gezeichnet werden. Die Verarbeitung und Auswertung der Daten wird mit einem FORTRAN-Programm durchgeführt, das von H. Schmitt für die beim CERN zur Verfügung stehenden CDC 6500 und 6600 Rechenmaschinen geschrieben wurde.

Die Auswertung umfaßt Anpassung der Spektren an vorgegebene mathematische Funktionen, Eichung und graphische Darstellung. An die Linien werden Gaußkurven

$$G(k) = A \cdot \exp \left[- 4 \ln 2 \left(\frac{k - k_0}{T} \right)^2 \right] \quad (\text{III.1})$$

angepaßt. Wobei A die Höhe, k₀ der Linienschwerpunkt (in Kanälen)

und Γ die Halbwertsbreite ist. Die Fläche unter der Linie ist

$$F_G = A \cdot \Gamma \cdot \sqrt{\frac{\pi}{4 \ln 2}} \quad (\text{III.2})$$

Der Untergrund der Spektren kann durch ein Polynom mit maximal zehn Koeffizienten oder durch einen Polygonzug mit maximal zehn Knickpunkten angenähert werden.

Mit dem Programm können bis zu vierzig unabhängige Parameter bestimmt werden. Die Parameter werden solange variiert, bis

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{N_{\text{exp}}^{(i)} - N_{\text{fit}}^{(i)}}{\delta N_{\text{exp}}^{(i)}} \right]^2 \quad (\text{III.3})$$

am kleinsten ist ("least squares fit"). $N_{\text{exp}}^{(i)}$ sind die gemessenen Punkte, $\delta N_{\text{exp}}^{(i)}$ deren Fehler und $N_{\text{fit}}^{(i)}$ die berechneten Punkte. Bei einer idealen statistischen Verteilung der Meßwerte $N_{\text{exp}}^{(i)}$ ist der Erwartungswert von χ^2 gleich $N-F$, wobei N die Anzahl der Meßpunkte und F die Anzahl der Parameter ist. An einigen Stellen werden wir auch den normierten Wert

$$\hat{\chi}^2 = \chi^2 / (N-F) \quad (\text{III.4})$$

verwenden.

In manchen Fällen ist die beobachtete Linienform unsymmetrisch und die Linie fällt zu niedrigen Energien hin langsamer ab als eine Gaußkurve. Wir berücksichtigen diesen "Linienfuß", indem wir an einer Stelle, wo die Gaußkurve die Breite $q \cdot \Gamma$ hat, eine Exponentialfunktion $e^{-\lambda k}$ anschließen. Der Parameter λ wird durch die Ableitung der Gaußkurve an dieser Stelle bestimmt. Den "Fußparameter" q erhalten wir aus dem "least squares fit".

Wir führen diese unsymmetrische Linienform auf eine unvollständige Ladungssammlung in dem Ge(Li)-Detektor zurück. Bei einem idealen Detektor streut die von einem γ -Quant freigesetzte Ladungsmenge gaußförmig um einen Mittelwert. Wenn die Ladungen unvollständig gesammelt werden, muß die Gaußverteilung der Impulse aus dem ladungsempfindlichen Vorverstärker

mit einer nach kleinen Impulsen abfallenden Funktion gefaltet werden. Dadurch wird die Linienform unsymmetrisch. - Die Asymmetrie der Linien hängt von der Spannung an der Ge(Li)-Diode ab. Mit zunehmender Spannung wird die Ladungssammlung besser und die Asymmetrie kleiner. Die Spannung kann jedoch nicht beliebig erhöht werden, weil es sonst zu Durchschlägen in der Sperrschicht der Diode kommt.

IV. Durchführung und Auswertung der Messungen

1. Die Messungen

In der vorliegenden Arbeit wurden die folgenden Übergänge in myonischem $^{93}_{41}\text{Nb}$ untersucht: 2p-1s, 3d-2p, 3p-2s und 2s-2p.

Die Messungen erstreckten sich über drei Energiebereiche, in denen die einzelnen Übergänge auftreten. In der folgenden Tabelle sind Angaben darüber zu finden.

Tabelle 4-1: Überblick über die verschiedenen Messungen

Spektrum	Energiebereich keV	Detektor	Meßdauer h	μ -Stoprate 1/sec	wichtigste μ -Linien	Eichmethode	Eichlinien
1	1300-1900	I	80	a) $5.3 \cdot 10^4$	2p-1s (DE)	Routing	$^{24}_{11}\text{Na}$ (DE) $^{208}_{82}\text{Pb}$ (DE) $^{212}_{84}\text{Po}$
2a	490 -900	II	60	b) $1.1 \cdot 10^4$	3d-2p 3p-2s	direkt	$m_0 c^2$ $^{54}_{25}\text{Mn}$ ($^{207}_{83}\text{Bi}$, $^{137}_{55}\text{Cs}$)
2b	520-1000	I	72	a) $5.3 \cdot 10^4$	3d-2p 3p-2s	Routing	$^{207}_{83}\text{Bi}$ $^{208}_{82}\text{Pb}$ $^{88}_{36}\text{Y}$
3	80 -170	III	60	b) $1.1 \cdot 10^4$	2s-2p	direkt	μNb 5g-4f 6g-4f

a) Myonen aus Vorwärtszerfall, b) aus Rückwärtszerfall

Die Spektren 1 und 2b wurden mit dem "Vorwärtsstrahl", die Spektren 2a und 3 mit dem "Rückwärtsstrahl" gemessen. Die Eichmethoden wurden bereits oben besprochen. Von den mit DE markierten Übergängen wurden nur die "double escape" Linien

gemessen. Diese Linien treten auf, wenn das einfallende γ -Quant im Ge-Detektor ein Elektron-Positron-Paar erzeugt und die bei der nachfolgenden Vernichtung des Positrons emittierten Quanten $2m_0c^2$ aus dem Kristall entweichen. Die Energien der verwendeten Eichlinien sind einem Bericht von R.L. Heath [Hea 69] entnommen und in Tabelle 4-2 eingetragen.

Tabelle 4-2: Energien der Eichlinien

Quelle	Isotop	Energie/keV	
^{137}Cs	^{137}Ba	661.633 ± 0.012	
^{207}Bi	^{207}Pb	569.684 ± 0.014	
^{54}Mn	^{54}Cr	834.828 ± 0.03	
^{88}Y	^{88}Sr	898.005 ± 0.04	
^{24}Na	$^{24}\text{Mg}(\text{DE})$	2754.11 ± 0.06	
^{228}Th	{	^{208}Pb	583.139 ± 0.023
		^{212}Po	1620.8 ± 0.8
		$^{208}\text{Pb}(\text{DE})$	2614.61 ± 0.06

Im Spektrum 3 wurden die 5g-4f- und 6g-4f-Übergänge als Eichlinien verwendet. Die Energie dieser Übergänge kann genügend genau berechnet werden. Der größte Beitrag zum Fehler kommt dabei von der Abschirmung durch die Hüllenelektronen. Die Spektren Nr. 2a und Nr. 3 sind in den Abb. 4-1 und 4-2 eingezeichnet.

2. Bestimmung der Energien und Hyperfeinstrukturaufspaltungen

Bevor wir die Auswertung der einzelnen Spektren besprechen, wollen wir noch einige allgemeine Bemerkungen dazu machen. Die Hyperfeinstruktur der hier untersuchten Übergänge wird nur unvollständig oder sogar nur als Verbreiterung der Linien beobachtet. Es ist deshalb wichtig, die genaue Linienform der einzelnen HFS-Komponenten zu kennen, wenn man die Größe der Aufspaltung bestimmen will.

Wie schon im dritten Kapitel ausgeführt, legen wir die Linienform durch die Gaußbreite Γ und den Fußparameter q fest. Beide Größen hängen von der Energie ab. Γ und q werden deshalb zuerst für die Eichlinien bestimmt. Durch lineare Interpolation zwischen diesen Werten erhält man dann die Parameter für die myonischen Linien. Bei der Auswertung wird die Linienform der HFS-Komponenten nicht mehr verändert.

Aus den Schwerpunkten k_i der Eichlinien und den bekannten Energien E_i wird die Eichfunktion

$$E(k) = g_0 + g_1 \cdot k + g_2 k^2 + \dots$$

berechnet. Es werden solche Eichlinien ausgesucht, deren Abstand zu den interessierenden myonischen Linien möglichst klein ist. Die dadurch definierten Energiebereiche sind so schmal, daß die Eichfunktion praktisch linear ist ($g_2/g_1 \approx 10^{-7} - 10^{-6}$).

Bei der Bestimmung der Hyperfeinstrukturaufspaltung der verschiedenen myonischen Linien gehen wir von den bekannten Aufspaltungsschemata aus, die mit den Formeln aus Kap. II für Punktkern- oder Einteilchen-Modell berechnet werden können. Um die Zahl der unbekannt Parameter bei der Auswertung möglichst klein zu halten, beginnen wir mit dem 3d-2p-Übergang. Wie unten genauer beschrieben wird, erhalten wir daraus die Kopplungskonstanten $a(2p_{1/2})$ und $b(2p_{3/2})$. Der nächste Schritt

ist dann die Auswertung des 2p-1s-Übergangs, die uns den Wert für $a(1s_{1/2})$ und nochmals für $b(2p_{3/2})$ gibt. Mit der nun bekannten E2-Kopplungskonstanten des $2p_{3/2}$ -Niveaus wird der $2s_{1/2}$ - $2p_{3/2}$ -Übergang ausgewertet, woraus wir $a(2s_{1/2})$ erhalten. Schließlich können dann aus dem $2s_{1/2}$ - $2p_{1/2}$ -Übergang nochmals $a(2s_{1/2})$ und $a(2p_{1/2})$ bestimmt werden. Wir wenden uns nun der Auswertung der verschiedenen Linien zu.

2.1 Der 3d-2p-Übergang

Das Niveauschema des 3d-2p-Übergangs ist in Abb. 4-3 dargestellt. Das $2p_{1/2}$ -Niveau ist in zwei HFS-Niveaus mit $F = 4$ und 5 aufgespalten. Die $2p_{3/2}$ - und $3d_{3/2}$ -Niveaus sind vierfach und das $3d_{5/2}$ -Niveau sechsfach aufgespalten. Nach den Auswahlregeln (II.43) hat der $3d_{3/2}$ - $2p_{1/2}$ - sechs und der $3d_{5/2}$ - $2p_{3/2}$ -Übergang zwölf HFS-Komponenten, deren relative Intensitäten in Tabelle 2-12 angegeben sind. Energie und Intensität des schwachen $3d_{3/2}$ - $2p_{3/2}$ -Übergangs werden relativ zum $3d_{5/2}$ - $2p_{3/2}$ -Übergang festgehalten. Ihr Energieabstand ist gleich der Feinstrukturaufspaltung des 3d-Niveaus (siehe Tabelle 2-1)

$$\Delta(3d) = 2.676 \text{ keV}$$

Für ihr Intensitätsverhältnis gilt

$$\frac{I(3d_{3/2} - 2p_{1/2})}{I(3d_{5/2} - 2p_{3/2})} = 0.107$$

Wie wir aus den Tab. 2-10 und 11 entnehmen, sind die Kopplungskonstanten $a(2p_{1/2})$ und $b(2p_{3/2})$ um eine Größenordnung größer als $a(2p_{3/2})$ und die Kopplungskonstanten der 3d-Niveaus. Für die letzteren können wir also die Punktkernwerte verwenden.

Die Energie eines HFS-Übergangs zwischen den Niveaus ($3d_{3/2}, F'$) und ($2p_{1/2}, F$) ist

$$E(F' \rightarrow F) = E_0 + E(3d_{3/2}, F') - E(2p_{1/2}, F)$$

wobei E_0 die Energie des unaufgespaltenen $3d_{3/2} - 2p_{1/2}$ - Übergangs ist. Die Aufspaltungen $E(3d_{3/2}, F')$ sind aus (II.25) und (II.36) zu berechnen. Wir haben zwei Liniengruppen zu je drei Linien. Innerhalb einer Gruppe haben alle Linien den gleichen Wert für F , und es ist $F' = F, F \pm 1$. Der Abstand zweier Komponenten mit gleichem F' ist gleich der M1-HFS-Aufspaltung des $2p_{1/2}$ - Niveaus

$$\delta(2p_{1/2}) = E(2p_{1/2}, 5) - E(2p_{1/2}, 4)$$

Nach (II.25) gilt mit $I = 9/2$

$$\delta(2p_{1/2}) = \frac{2I + 1}{2} a(2p_{1/2}) = 5 \cdot a(2p_{1/2}) \quad (\text{IV.1})$$

In den "least squares fit" des $3d_{3/2} - 2p_{1/2}$ -Übergang gehen drei freie Parameter ein: die Gesamtintensität, der Linienschwerpunkt E_0 und die M1-HFS-Aufspaltung $\delta(2p_{1/2})$.

Die Ergebnisse sind:

	$E(3d_{3/2}-2p_{1/2})/\text{keV}$	$\delta(2p_{1/2})/\text{keV}$
Spektrum 2a	683.05 ± 0.12	1.02 ± 0.09
Spektrum 2b	682.89 ± 0.36	$0,86 \pm 0.20$
Mittelwert	683.03 ± 0.11	0.99 ± 0.08

Der $3d_{5/2}-2p_{3/2}$ -Übergang spaltet in vier Liniengruppen zu je drei Linien auf. Innerhalb einer Gruppe ist wieder $F = \text{const.}$ und $F' = F, F \pm 1$. Der Abstand zweier Komponenten mit

gleichem F' und verschiedenem $F = F_1, F_2$ ist

$$\Delta E(2p_{3/2}, F_1, F_2) = \Delta E_{M1}(2p_{3/2}, F_1, F_2) + \Delta E_{E2}(2p_{3/2}, F_1, F_2)$$

Die M1-HFS-Aufspaltung des $2p_{3/2}$ -Niveaus kann aus (II.25) mit dem Punktkernwert von $a(2p_{3/2})$ (siehe Tabelle 2-10) mit genügender Genauigkeit berechnet werden. Die E2-HFS-Aufspaltung wird aus (II.36) berechnet, wobei die E2-Kopplungskonstante $b(2p_{3/2})$ zunächst unbekannt ist.

Als freie Parameter des $3d_{5/2}-2p_{3/2}$ -Übergangs haben wir: die Gesamtintensität, den Linienschwerpunkt E_0 und die E2-Aufspaltung des $2p_{3/2}$ -Niveaus. Die Variation der E2-HFS des $2p_{3/2}$ -Niveaus ist durch (II.36) mit der Variation von $b(2p_{3/2})$ verknüpft. Beim "least squares fit" müssen also nur drei Parameter variiert werden. Da das vorhandene Fit-Programm keine lineare Variation der Linienabstände gestattet, müssen wir die E2-Aufspaltung des $2p_{3/2}$ -Niveaus bzw. $b(2p_{3/2})$ vorgeben. Wir erhalten dann $\hat{\chi}^2$ als Funktion von $b(2p_{3/2})$, wie in Abb. 4-4 dargestellt. Im Minimum finden wir $\hat{\chi}_{\min}^2 = 4,60$ und $b(2p_{3/2}) = -2,92$ keV. Den Fehler Δb von $b(2p_{3/2})$ erhalten wir aus der Bedingung

$$\chi^2(b \pm \sigma) = \chi_{\min}^2 + 1$$

bzw.

$$\hat{\chi}^2(b \pm \sigma) = \hat{\chi}_{\min}^2 + 1/(N-F)$$

und

$$\Delta b = \sigma \cdot \sqrt{\hat{\chi}_{\min}^2} \quad (\text{IV.2})$$

wobei N die Anzahl der Meßpunkte und $N-F$ die Anzahl der Freiheitsgrade ist.

In unserem Fall ist $N-F = 176$. Aus der Abb. 4-4 finden wir damit innerhalb der Genauigkeit der graphischen Darstellung

$\Delta b = \pm 0,05$ keV. Wenn wir dazu noch den Eichfehler von 0,06 keV quadratisch addieren, erhalten wir

$$b(2p_{3/2}) = (-2,92 \pm 0,08) \text{ keV}$$

Der "least squares fit" ergibt für die Energie des $3d_{5/2}$ - $2p_{3/2}$ -Übergangs

$E(3d_{5/2} - 2p_{3/2})/\text{keV}$	
Spektrum 2a	662.56 ± 0.12
Spektrum 2b	662.41 ± 0.30
Mittelwert	662.54 ± 0.11

In Abb. 4-5 wird das Spektrum des $3d$ - $2p$ -Übergangs gezeigt. Die eingezeichnete Kurve ist das Ergebnis des "least squares fit".

2.2 Der $2p$ - $1s$ -Übergang

Das Termschema für die $1s$ -, $2p$ - und $2s$ -Niveaus in μNb ist in Abb. 4-6 dargestellt. Der $2p_{1/2}$ - $1s_{1/2}$ -Übergang hat vier, der $2p_{3/2}$ - $1s_{1/2}$ -Übergang sechs HFS-Komponenten, deren relative Intensitäten Tabelle 2-12 zu entnehmen sind.

Der Umstand, daß die 2614 keV-Linie der ^{228}Th -Eichquelle genau zwischen den beiden Feinstrukturkomponenten des $2p$ - $1s$ -Übergangs liegt, gestattet eine besonders genaue Auswertung dieses Übergangs. Die aus dem "least squares fit" bestimmte Form der 2614 keV-Linie kann direkt für die Auswertung des $2p$ - $1s$ -Übergangs übernommen werden, da ein Vergleich mit der 2754 keV-Linie der ^{24}Na -Eichquelle zeigt, daß sich die Parameter Γ und q in diesem Energiebereich sehr wenig ändern. Es wurden nur die "double escape peaks" gemessen.

Die M1-HFS-Aufspaltung des $2p_{1/2}$ -Niveaus ist nach der Auswertung des $3d_{3/2}-2p_{1/2}$ -Übergangs im vorhergegangenen Kapitel bekannt. Bei der Auswertung des $2p_{1/2}-1s_{1/2}$ -Übergangs lassen wir die folgenden vier Parameter frei: die Gesamtintensität, den Energieschwerpunkt, die M1-HFS-Aufspaltung $\delta(1s_{1/2})$ und das Verhältnis P_5/P_4 der Wahrscheinlichkeiten, mit der die beiden HFS-Niveaus des $1s_{1/2}$ -Zustandes besetzt werden. Das Ergebnis des "least squares fits" ist

$$E(2p_{1/2}-1s_{1/2}) = (2603.42 \pm 0.09) \text{ keV}$$

$$\delta(1s_{1/2}) = (3.49 \pm 0.07) \text{ keV}$$

und $P_5/P_4 = 1.29 \pm 0.06$

Das theoretische Intensitätsverhältnis der HFS-Komponenten ist nach Tabelle 2-12 $(I_{55} + I_{45})/(I_{44} + I_{54}) = 1.22 = 11/9$

Bei der Auswertung des $2p_{3/2}-1s_{1/2}$ -Übergangs gehen wir von der oben erhaltenen M1-Aufspaltung des $1s_{1/2}$ -Niveaus und der aus der Punktkernnäherung berechneten M1-Aufspaltung des $2p_{3/2}$ -Niveaus aus. Damit können wir die E2-Aufspaltung des $2p_{3/2}$ -Niveaus bestimmen.

Wie schon beim $3d_{5/2}-2p_{3/2}$ -Übergang besprochen, bestimmen wir wieder aus dem "least squares fit" $\hat{\chi}^2$ als Funktion von $b(2p_{3/2})$. Das Ergebnis ist in Abb. 4-7 eingezeichnet. Im Minimum finden wir $\hat{\chi}_{\min}^2 = 1.30$ und $b(2p_{3/2}) = -2.93 \text{ keV}$. Für den Fehler erhalten wir mit dem Kriterium (IV.2) $\Delta b = \pm 0.10 \text{ keV}$. Dazu ist noch der Eichfehler von 0.05 keV quadratisch zu addieren. Das Ergebnis lautet dann

$$\underline{b(2p_{3/2}) = (-2.93 \pm 0.11) \text{keV}}$$

Für den Schwerpunkt des $2p_{3/2}-1s_{1/2}$ - Übergangs erhalten wir

$$\underline{\epsilon(2p_{3/2}-1s_{1/2}) = (2626,60 \pm 0.08) \text{keV}}$$

Das Spektrum des $2p-1s$ -Übergangs und die 2614 keV-Linie der ^{228}Th -Eichquelle sind in Abb. 4-8 dargestellt. Die eingezeichneten Kurven wurden aus dem "least squares fit" erhalten.

2.3 Der 2s-2p-Übergang

Zur Eichung des $2s-2p$ -Spektrums wurden die 5g-4f- und 6g-4f-Übergänge verwendet. Der Einfluß der ausgedehnten Kernladungsverteilung auf diese Übergänge ist kleiner als 5 eV. Die Abschirmungsverschiebung durch die Hüllenelektronen ist Tabelle 2-4 zu entnehmen. Wir finden - 20 eV für den 5g-4f- und -60 eV für den 6g-4f-Übergang. Da wir nicht wissen, wieviele Elektronen beim Übergang tatsächlich vorhanden sind, behandeln wir diese Verschiebung als Fehler der berechneten Energien.

In der zweiten Spalte der Tabelle 4-3 stehen die für eine Fermiverteilung mit $c = 5.0$ fm und $t = 2.2$ fm berechneten Energien E_0 . Die Vakuumpolarisationskorrektur erster Ordnung wurde berücksichtigt. In der dritten Spalte stehen die aus Tabelle 2-4 entnommenen Abschirmungsverschiebungen ΔE_e . In der vierten Spalte sind schließlich die zur Eichung benützten Energien

$$E = (E_0 - \frac{1}{2} \Delta E_e) \pm \frac{1}{2} \Delta E_e$$

eingetragen.

Tabelle 4-3: Energie der 5g-4f- und 6g-4f-Übergänge in μNb

Übergang	Energie keV	ΔE_e eV	verwendete Energie keV
5g _{9/2} - 4f _{7/2}	106.82	-20	106.81 \pm 0.01
5g _{7/2} - 4f _{5/2}	107.21		107.21 \pm 0.02
5f _{7/2} - 4d _{5/2}	107.28		
5f _{5/2} - 4d _{3/2}	108.11		108.10 \pm 0.01
6g _{9/2} - 4f _{7/2}	164.65	-60	164.62 \pm 0.03
6g _{7/2} - 4f _{5/2}	165.12		165.11 \pm 0.05
6f _{7/2} - 4d _{5/2}	165.20		
6f _{5/2} - 4d _{3/2}	166.16		166.13 \pm 0.03

Die schwachen "spin flip"-Übergänge (z.B. 5g_{7/2} - 4f_{7/2}) wurden nicht berücksichtigt. Die nahe beieinanderliegenden ng_{7/2}-4f_{5/2} - und nf_{7/2} - 4d_{5/2}-Übergänge (n = 5,6) wurden bei der Auswertung zusammengefaßt und die Energieschwerpunkte mit den in Tabelle 4-7b angegebenen Intensitätsverhältnissen berechnet.

Die Spektren der in Tabelle 4-3 angegebenen Übergänge sind in Abb. 4-9 und Abb. 4-10 zu sehen. Das zum 2s-2p-Übergang gehörige Termschema ist Abb. 4-6 zu entnehmen.

Wir beginnen mit der Auswertung des 2s_{1/2} - 2p_{1/2} - Übergangs. Als freie Parameter verwenden wir die Gesamtintensität, den Energieschwerpunkt und die M1-HFS-Aufspaltungen der 2s_{1/2}- und 2p_{1/2}-Niveaus.

Der 10 \rightarrow 5-Übergang liegt energetisch so dicht neben dem 2s_{1/2}-2p_{1/2}-Übergang, daß sich die Linien noch teilweise überlappen. Damit der 2s_{1/2}-2p_{1/2}-Übergang weitgehend unabhängig vom 10 \rightarrow 5-Übergang ausgewertet werden kann, müssen wir beim "least squares fit" möglichst viele Parameter festhalten. Die Energie der 10 \rightarrow 5-Übergänge kann nicht vorgegeben werden, da nach Tabelle 2-4 die Elektronenabschirmung bis zu 0.39 keV

betragen kann. Dagegen können die Feinstrukturaufspaltungen der beteiligten Niveaus festgehalten werden, da sie von der Elektronenabschirmung praktisch nicht betroffen sind. Wir berücksichtigen die 10h-5g-, 10g-5f- und 10f-5d-Komponenten, deren relative Intensitäten wir aus dem Kaskadenmodell für $\alpha = -0.1$ berechnen (siehe Kap. II.3). Dieses Ergebnis haben wir aus Abschnitt 3 dieses Kapitels vorweggenommen, wo wir die Anfangsverteilung der Kaskade aus Messungen der relativen Intensität einiger Übergänge bestimmen. Als einziger freier Parameter bleibt somit für den 10 \rightarrow 5-Übergang der Energieschwerpunkt. Das Ergebnis ist im übernächsten Abschnitt zu finden.

Die M1-HFS-Aufspaltung $\delta(2s_{1/2})$ des $2s_{1/2}$ -Niveaus wird zunächst fest vorgegeben. Die Aufspaltung $\delta(2p_{1/2})$ des $2p_{1/2}$ -Niveaus wird freigelassen und aus dem "least squares fit" bestimmt. Die Abhängigkeit von $\hat{\chi}^2$ und $\delta(2p_{1/2})$ von $\delta(2s_{1/2})$ ist in Abb. 4-11 dargestellt. Im Minimum von $\hat{\chi}^2$ finden wir $\hat{\chi}^2_{\min} = 0.863$ und $\delta(2p_{1/2}) = 0.94$ keV für $\delta(2s_{1/2}) = 0.46$ keV. Die Fehler von $\delta(2s_{1/2})$ und $\delta(2p_{1/2})$ ergeben sich aus dem Kriterium (IV.2) zu 0.05 keV und 0.02 keV. Dazu muß der Eichfehler von 0.03 keV quadratisch addiert werden. Wir finden:

$$\delta(2s_{1/2}) = (0.46 \pm 0.06) \text{ keV}$$

$$\delta(2p_{1/2}) = (0.94 \pm 0.04) \text{ keV}$$

Der Energieschwerpunkt des $2s_{1/2} - 2p_{3/2}$ -Übergangs ist

$$\epsilon(2s_{1/2} - 2p_{3/2}) = (140.01 \pm 0.08) \text{ keV}$$

Das Spektrum der $2s_{1/2} - 2p_{1/2}$ - und 10 \rightarrow 5-Übergänge ist in Abb. 4-12 zu sehen.

Wie aus dem Termschema in Abb. 4-6 zu entnehmen ist, spaltet der $2s_{1/2} - 2p_{3/2}$ -Übergang in sechs HFS-Komponenten auf.

Die M1-Aufspaltung des $2p_{3/2}$ -Niveaus berechnen wir wieder aus dem Punktkernwert von a ($2p_{3/2}$). Für die E2-Aufspaltung verwenden wir den Mittelwert aus den E2-Kopplungskonstanten der vorhergegangenen Auswertungen:

$$\underline{b(2p_{3/2}) = (-2.92 \pm 0.07) \text{ keV}}$$

Der $2s_{1/2} - 2p_{3/2}$ -Übergang wird teilweise vom $8 \rightarrow 5$ -Übergang überdeckt. Wir berücksichtigen diesen Übergang auf dieselbe Weise wie oben den $10 \rightarrow 5$ -Übergang bei der Auswertung des $2s_{1/2} - 2p_{1/2}$ -Übergangs. Das Ergebnis für den Energieschwerpunkt des $8 \rightarrow 5$ -Übergangs ist in Abschnitt 4 dieses Kapitels zu finden.

Mit Hilfe des "least squares fit"-Programms bestimmen wir wieder $\hat{\chi}^2$ als Funktion von $\delta(2s_{1/2})$, wie in Abb. 4-13 graphisch dargestellt. Im Minimum ist $\hat{\chi}^2_{\min} = 1.025$ und $\delta(2s_{1/2}) = 0.57 \text{ keV}$. Aus dem Kriterium (IV.2) ergibt sich ein Fehler von $\pm 0.05 \text{ keV}$. Wir addieren den Eichfehler von 0.03 keV quadratisch dazu und erhalten

$$\underline{\delta(2s_{1/2}) = (0.57 \pm 0.06) \text{ keV}}$$

Die Energie des nicht aufgespaltenen $2s_{1/2} - 2p_{3/2}$ -Übergangs ist

$$\underline{E(2s_{1/2} - 2p_{3/2}) = (116.87 \pm 0.06) \text{ keV}}$$

Abb. 4-14 zeigt das Spektrum der $2s_{1/2} - 2p_{3/2}$ - und der $8 \rightarrow 5$ -Übergänge. Die eingezeichnete Kurve wurde aus dem "least squares fit" berechnet.

2.4 Der 3p-2s-Übergang

Das Aufspaltungsbild des 3p-2s-Übergangs entspricht dem des 2p-1s-Übergangs (siehe Abb. 4-6). Eine Analyse der HFS-Aufspaltung, wie sie in den vorhergegangenen Abschnitten durchgeführt wurde, ist bei diesem Übergang nicht möglich, da der Untergrund zu hoch und somit die Statistik der beiden Feinstrukturkomponenten zu gering ist (siehe Abb. 4-15). Die Änderung von $\hat{\chi}^2$ bei Variation der HFS-Aufspaltungen ist so klein, daß daraus keine Bestimmung der Kopplungskonstanten möglich ist. Wir beschränken uns daher auf die Auswertung der Energieschwerpunkte der beiden Feinstrukturkomponenten. Die HFS-Aufspaltung geben wir fest vor. Für $\delta(2s_{1/2})$ nehmen wir den Mittelwert aus den vorhergegangenen Auswertungen

$$\delta(2s_{1/2}) = (0.52 \pm 0.05) \text{keV}$$

Die M1-Aufspaltung der $3p_{1/2}$ - und $3p_{3/2}$ -Niveaus berechnen wir mit den in Tabelle 2-10 angegebenen Kopplungskonstanten aus (II.25). Die E2-Kopplungskonstante des $3p_{3/2}$ -Niveaus schätzen wir aus dem Verhältnis der Punktkernwerte $b_o(2p_{3/2})$ und $b_o(3p_{3/2})$ und dem oben bestimmten experimentellen Wert $b(2p_{3/2})_{\text{exp}}$ ab:

$$b(3p_{3/2}) \approx b_o(3p_{3/2}) \frac{b(2p_{3/2})_{\text{exp}}}{b_o(2p_{3/2})}$$

$$b(3p_{3/2}) \approx -0.88 \text{ keV}$$

Das Spektrum des 3p-2s-Übergangs ist in Abb. 4-15 zu sehen. Die eingezeichnete Kurve wurde aus dem "least squares fit" mit der berechneten HFS-Aufspaltung bestimmt. Wie in der Abbildung zu sehen ist, hat der $3p_{3/2}-2s_{1/2}$ -Übergang auf der linken Seite eine Schulter. Wir vermuten, daß dies der 541.5 keV-Übergang in ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ ist (siehe Abschnitt 2.7 dieses Kapitels). Die Position dieser Linie haben wir beim "least squares fit" des 3p-2s-Übergangs festgehalten, während die Intensität freigelassen wurde. Die hierdurch entstehende Unsicherheit wurde

im Fehler der Energien der 3p-2s-Übergänge berücksichtigt.
Das Ergebnis ist

	$E(3p_{1/2} - 2s_{1/2})$	$E(3p_{3/2} - 2s_{1/2})$
Spektrum 2a	537.30 ± 0.23	543.81 ± 0.16
Spektrum 2b	537.60 ± 0.23	544.00 ± 0.16
Mittelwert	537.45 ± 0.16	543.91 ± 0.11

2.5 Der 3s-2p-Übergang

In Abb. 4-16 ist der Bereich des Spektrums 2b abgebildet, in dem wir den schwachen 3s-2p-Übergang vermuten (siehe Tabelle 2-1). Bei $(695.70 \pm 0.42)\text{keV}$ und $(718.92 \pm 0.42)\text{keV}$ konnten wir die Andeutung zweier Linien finden, deren Abstand innerhalb des Fehlers der erwarteten Feinstrukturaufspaltung des 2p-Niveaus entspricht. Das aus dem "least squares fit" bestimmte Intensitätsverhältnis

$$\frac{I(695.70)}{I(718.92)} = 1.02 \pm 0.37$$

stimmt jedoch nicht mit dem theoretischen Wert

$$\frac{I(3s_{1/2} - 2p_{3/2})}{I(3s_{1/2} - 2p_{1/2})} = 2$$

überein.

2.6 Zusammenfassung der gemessenen Übergangsenergien und Hyperfeinstrukturkonstanten

In Tabelle 4-5 haben wir die in den vorhergegangenen Abschnitten bestimmten Energien der Übergänge im myonischen Niob zusammengestellt.

Tabelle 4-4: Energien myonischer Übergänge in Niob

Übergang	gemessene Energie keV
$2p_{1/2} - 1s_{1/2}$	2603.42 ± 0.09
$2p_{3/2} - 1s_{1/2}$	2626.60 ± 0.08
$3d_{3/2} - 2p_{1/2}$	683.03 ± 0.11
$3d_{5/2} - 2p_{3/2}$	662.54 ± 0.11
$2s_{1/2} - 2p_{1/2}$	140.01 ± 0.08
$2s_{1/2} - 2p_{3/2}$	116.87 ± 0.06
$3p_{1/2} - 2s_{1/2}$	537.45 ± 0.16
$3p_{3/2} - 2s_{1/2}$	543.91 ± 0.11
$3s_{1/2} - 2p_{1/2}$	718.92 ± 0.42
$3s_{1/2} - 2p_{3/2}$	695.70 ± 0.42

Die gemessenen M1-HFS-Aufspaltungen der $1s_{1/2}^-$, $2s_{1/2}^-$ und $2p_{1/2}^-$ -Niveaus rechnen wir mit Hilfe der Beziehung (IV.1) in die entsprechenden Kopplungskonstanten um, z.B.

$$a(1s_{1/2}) = \frac{2}{2I + 1} \cdot \delta(1s_{1/2}) = 0.2 \cdot \delta(1s_{1/2}) \quad (\text{IV.3})$$

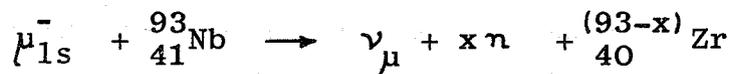
Tabelle 4-6 enthält die Ergebnisse der vorangegangenen Auswertung.

Tabelle 4-5: HFS-Kopplungskonstanten in μNb (keV)

Übergang	Konstante	Einzelwerte	Mittelwert
$2p_{1/2} - 1s_{1/2}$	$a(1s_{1/2})$		0.698 ± 0.014
$3d_{3/2} - 2p_{1/2}$	$a(2p_{1/2})$	0.198 ± 0.016	0.190 ± 0.008
$2s_{1/2} - 2p_{1/2}$		0.188 ± 0.008	
$2s_{1/2} - 2p_{1/2}$	$a(2s_{1/2})$	0.092 ± 0.012	0.103 ± 0.009
$2s_{1/2} - 2p_{3/2}$		0.114 ± 0.012	
$2p_{3/2} - 1s_{1/2}$	$b(2p_{3/2})$	$-2,93 \pm 0.11$	-2.92 ± 0.07
$3d_{5/2} - 2p_{3/2}$		$-2,92 \pm 0.08$	

2.7 Beobachtung von $^{93}_{41}\text{Nb}$ - γ -Linien

Der Einfang eines Myons vom $1s$ -Zustand in den Kern kann durch folgende Reaktionsgleichung dargestellt werden



mit $x = 0, 1, 2, \dots$

Die Energie der emittierten Neutronen beträgt im Mittel einige MeV. Nach Messungen von G. Backenstoss et.al. werden pro Einfang im Durchschnitt mindestens 0.9 Neutronen emittiert [BaC 71] .

Diese Neutronen können im Target durch inelastische Streuung $^{93}_{41}\text{Nb}$ -Kerne anregen. In Tabelle 4-6 sind die von uns beobachteten γ -Übergänge eingetragen, die wahrscheinlich auf solche Anregungsprozesse zurückgeführt werden können.

Eine direkte Anregung durch myonische Übergänge schließen wir an Hand des bekannten Niveau-Schemas von ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ aus (siehe Abb. 1-4).

Die in Tabelle 4-6 eingetragenen Anregungsquerschnitte σ_{anr} wurden mit Neutronen von 2 - 3 MeV gemessen. Die von uns bestimmten relativen Intensitäten der γ -Linien wurden auf den Anregungsquerschnitt der 743.9 keV-Linie normiert. Die Verhältnisse der Intensitäten entsprechen grob den Verhältnissen der Anregungsquerschnitte. Eine gute Übereinstimmung kann nicht erwartet werden, da die Neutronenspektren in beiden Experimenten verschieden sind.

Tabelle 4-6: γ -Übergänge und Anregungsquerschnitte in ${}_{41}^{93}\text{Nb}$

Energie a) keV	σ_{anr} a) mbarn	beobachteter Übergang keV	relative Intensität
541.5 \pm 0.2	158 \pm 23	541.36 \pm 0.27	33 \pm 6
553.2 \pm 0.4	38 \pm 9	552.92 \pm 0.42	21 \pm 5
571.7 \pm 0.4	52 \pm 10		
585.1 \pm 0.3	54 \pm 12		
625.5 \pm 0.8	20 \pm 8		
655.7 \pm 0.5	89 \pm 15		
733.3 \pm 0.6	32 \pm 9		
743.9 \pm 0.2	496 \pm 60	744.02 \pm 0.30	500 \pm 57
779.7 \pm 0.3	198 \pm 31	779.77 \pm 0.42	423 \pm 57
808.5 \pm 0.3	180 \pm 21	808.66 \pm 0.43	256 \pm 39

a) Ref. [GöF70]

3. Relative Intensitäten

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit den Intensitätsverhältnissen einiger Übergänge in myonischem Niob.

Im ersten Teil vergleichen wir die relativen Intensitäten von Kaskadenübergängen mit den Werten, die wir aus dem Kaskadenmodell für verschiedene Anfangsverteilungen berechnen (siehe Kapitel II.3).

Im zweiten Teil vergleichen wir die gemessenen Intensitätsverhältnisse der Feinstrukturkomponenten mit den berechneten Werten. Damit können wir überprüfen, ob nicht etwa unbekannte γ -Linien unter den betreffenden Übergängen liegen, oder ob die Intensitätsverhältnisse durch andere Prozesse, wie z.B. Kernanregung gestört werden.

3.1 Relative Intensitäten von Kaskadenübergängen

Damit die Intensitäten der Übergänge miteinander verglichen werden können, müssen die aus dem "least squares fit" erhaltenen Werte korrigiert werden. Diese Korrektur umfaßt die energieabhängige Ansprechwahrscheinlichkeit $\eta(E)$ des Ge-Detektors und die Transmission $c_\lambda(E)$ des Targets. Die Gesamtkorrektur ist

$$I_j(E) = \eta(E) \cdot c_\lambda(E)$$

Die gemessenen Intensitäten sind durch $I_j(E)$ zu dividieren. Die korrigierten Intensitätsverhältnisse sind dann

$$v = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)_{\text{corr}} = \frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{\gamma(E_2)}{\gamma(E_1)}$$

mit dem mittleren quadratischen Fehler

$$\overline{\delta v^2} = \frac{\overline{\delta^2 I_1}}{[I_1]^2} + \frac{\overline{\delta^2 I_2}}{[I_2]^2} + \frac{\overline{\delta^2 (\gamma_2/\gamma_1)}}{[\gamma_2/\gamma_1]^2}$$

Bei dicht nebeneinander liegenden Übergängen heben sich die Korrekturen aus dem Intensitätsverhältnis praktisch heraus und der Fehler ist

$$\overline{\delta^2 v} = \frac{\overline{\delta^2 I_1}}{[I_1]^2} + \frac{\overline{\delta^2 I_2}}{[I_2]^2}$$

Die relativen Fehler $\delta I_1/I_1$ und $\delta I_2/I_2$ erhalten wir aus

dem "least squares fit". Bei weiter auseinander liegenden Übergängen können die Intensitätskorrekturen unter Umständen sehr verschieden sein. Der Fehlerbeitrag des Verhältnisses der Korrekturen ist etwa 10 %.

Eine Verfälschung der relativen Intensitäten durch eventuell fehlerhafte Intensitätskorrekturen läßt sich also vermeiden, wenn man sich auf Übergänge beschränkt, für die sich die Korrekturen nur wenig unterscheiden. Wir beschränken uns deshalb in dieser Arbeit auf die Untersuchung weniger Übergänge, für die diese Bedingung erfüllt ist.

In Abb. 4-17 ist die relative Ansprechwahrscheinlichkeit des Detektors III zwischen 90 und 170 keV eingezeichnet. Die Transmission des Targets für das Spektrum 3 wurde mit einem FORTRAN-Programm berechnet und wird in Abb. 4-17 gezeigt. Die Gesamtkorrektur im Bereich zwischen 90 und 170 keV ist ebenfalls in dieser Abbildung zu sehen.

In Tabelle 4-7a sind die aus dem Spektrum 3 erhaltenen korrigierten Intensitäten im Verhältnis zum 5g-4f-Übergang eingetragen. Die in den Spalten 5 und 6 angegebenen theoretischen Intensitäten wurden mit dem Kaskaden-Programm berechnet (siehe Kap. II.2). Für die Anfangsverteilung verwenden wir die Funktion (II.19) $(2\ell + 1) \cdot \exp(\alpha \ell)$. Die Rechnungen wurden für $\alpha = 0$ und $\alpha = -0.1$ durchgeführt. Die Hauptquantenzahl des Anfangszustandes setzen wir $N = 20$. Bei der Berechnung der Intensität der Übergänge nach $n = 5$ wurden die Parallelübergänge $m_h - 5g$, $m_g - 5f$ und $m_f - 5d$ ($m = 8, 9, \dots$) berücksichtigt.

Tabelle 4-7a: Intensitäten relativ zum 5g - 4f - Übergang

Übergang	Energie keV	relative Korrektur	relative Intensität %	theoret. Intensität (%)	
				$\alpha = 0$	$\alpha = -0.1$
5 - 4	107	0.58	100 \pm 10.3	100	100
8 - 5	115	0.60	4.18 \pm 0.43	3.64	5.33
2s _{1/2} -2p _{3/2}	117	0.60	2.75 \pm 0.32	2.85	6.91
9 - 5	131	0.58	4.45 \pm 0.46	4.05	6.52
2s _{1/2} -2p _{1/2}	140	0.55	2.61 \pm 0.31	2.29	5.58
10 - 5	142	0.55	2.07 \pm 0.23	1.98	3.46
11 - 5	150	0.52	1.84 \pm 0.24	1.20	2.23
12 - 5	156	0.49	1.40 \pm 0.21	0.91	1.83
13 - 5	161	0.48	0.99 \pm 0.19	0.56	1.22
6 - 4	165	0.46	20.84 \pm 2.69	21.64	27.54
χ^2				21.4	339.2

In Tabelle 4-7b sind die relativen Intensitäten der 5 → 4 und 6 → 4 Parallelübergänge, die zur Eichung der 2s-2p-Übergänge verwendet wurden, eingetragen (siehe Abb. 4-9 und 4-10).

In der zweiten Spalte haben wir die theoretischen Intensitätsverhältnisse der Feinstrukturkomponenten eingetragen. In der dritten Spalte stehen die jeweils auf den ersten Übergang normierten gemessenen relativen Intensitäten. Aus der zweiten und dritten Spalte wurden schließlich die in der vierten Spalte eingetragenen Intensitätsverhältnisse der Parallelübergänge berechnet.

Tabelle 4-7b: Relative Intensitäten von Parallelübergängen

Übergang	I_{rel} (theor.)	I_{rel} (exp.)	Int.-Verh. der Parallelübergänge
$5g_{9/2} - 4f_{7/2}$	0.572	1.000 ± 0.023	
$5g_{7/2} - 4f_{5/2}$	0.428	0.909 ± 0.024	$x_1 = 0.153 \pm 0.030$
$5f_{7/2} - 4d_{5/2}$	$x_1 \cdot 0.600$		
$5f_{5/2} - 4d_{3/2}$	$x_1 \cdot 0.400$	0.086 ± 0.003	$x_1 = 0.123 \pm 0.006$
$6g_{9/2} - 4f_{7/2}$	0.572	1.000 ± 0.095	
$6g_{7/2} - 4f_{5/2}$	0.428	1.101 ± 0.091	$x_2 = 0.337 \pm 0.131$
$6f_{7/2} - 4d_{5/2}$	$x_2 \cdot 0.600$		
$6f_{5/2} - 4d_{3/2}$	$x_2 \cdot 0.400$	0.173 ± 0.013	$x_2 = 0.251 \pm 0.030$

In Tabelle 4-7c haben wir die Mittelwerte der Intensitätsverhältnisse x_1 und x_2 neben den aus dem Kaskadenmodell für $\alpha = 0$ und $\alpha = -0.1$ berechneten Intensitätsverhältnissen eingetragen.

Tabelle 4-7c: Relative Intensitäten von Parallelübergängen

Übergang	Intensitätsverhältnis	theoret. Verhältnis	
		$\alpha = 0$	$\alpha = -0.1$
$x_1 = \frac{5f-4d}{5g-4f}$	$(12.4 \pm 0.6) \%$	13.5%	17.2%
$x_2 = \frac{6f-4d}{6g-4f}$	$(25.2 \pm 3.0) \%$	27.8%	37.3%
	χ^2	4.1	71.3

Wir wenden uns nun den Intensitäten der 3d-2p-, 3p-2s- und 3s-2p-Übergänge zu. Aus dem Kaskaden-Programm bestimmen wir

die Besetzung P_i der 3s-, 3p- und 3d-Niveaus für verschiedene Anfangsverteilungen. Mit Hilfe der Formel (II.21) erhalten wir daraus die absolute Intensität der Übergänge

$$I_{if} = P_i \cdot \frac{R_{if}}{\sum_{f'} W_{if'}} \quad (\text{II.21})$$

Die dabei verwendeten Übergangswahrscheinlichkeiten R_{if} werden numerisch aus (II.24) berechnet. Die Myon-Wellenfunktionen erhalten wir aus der Lösung der Dirac-Gleichung für ein Fermipotential mit $c = 5.0$ und $t = 2.2$.

Bei der Berechnung des Verzweungsverhältnisses $R_{if} / (\sum_{f'} W_{if'})$ berücksichtigen wir alle Übergänge, die von dem betrachteten Niveau erfolgen können und deren Wahrscheinlichkeit größer als 1 % von R_{if} ist.

In Tabelle 4-7d sind die Ergebnisse eingetragen.

Tabelle 4-7d: Relative Intensität der 3-2-Übergänge

Übergang	Energie keV	relat. Korr.	relat. Intensität %	Verzweigungs-Verhältnis	theoretische Intensität			
					P_i $\alpha=0$	I_{rel} %	P_i $\alpha=-0.1$	I_{rel} %
3d-2p	673	1.29	100 ₋₅	1	70.05	100	56.12	100
3p-2s	541	1.57	2.22 _{+0.2}	0.185	6.09	1.61	8.20	2.70
3s-2p	700	1.22	0.47 _{+0.1}	0.683	0.47	0.46	0.91	1.06
χ^2						9.3		43.2

Durch lineare Interpolation zwischen den in den Tabellen 4-7a, c, d angegebenen theoretischen Intensitäten für $\alpha = 0$ und $\alpha = -0.1$ bestimmen wir das Minimum von χ^2 und den Bestwert von α . Das Ergebnis ist

$$\alpha = -0.01 \quad (\chi^2 / (N-F) = 2.11)$$

In Tabelle 4-8 haben wir nochmals alle gemessenen relativen Intensitäten und die für $\alpha = -0.01$ berechneten theoretischen Werte zusammengestellt.

Tabelle 4-8: relative Intensitäten in μNb

Übergang	relative Intensität in %	
	Experiment	Theorie für $\alpha = -0.01$
5 - 4	100. \pm 10.3	100.
8 - 5	4.18 \pm 0.43	3.81
$2s_{1/2} - 2p_{3/2}$	2.75 \pm 0.32	3.26
9 - 5	4.45 \pm 0.46	4.30
$2s_{1/2} - 2p_{1/2}$	2.61 \pm 0.31	2.62
10 - 5	2.07 \pm 0.23	2.13
11 - 5	1.84 \pm 0.24	1.30
12 - 5	1.40 \pm 0.21	1.00
13 - 5	0.99 \pm 0.19	0.63
6 - 4	20.84 \pm 2.69	22.23
<u>5f - 4d</u>	12.4 \pm 0.6	13.9
5g - 4f		
<u>6f - 4d</u>	25.2 \pm 3.0	28.3
6g - 4f		
3d - 2p	100. \pm 5.0	100.
3p - 2s	2.22 \pm 0.2	1.72
3s - 2p	0.47 \pm 0.1	0.52
	χ^2	29.6

An Hand dieser Tabelle können wir zwei wichtige Schlußfolgerungen ziehen:

- 1.) Die Anfangsverteilung weicht wenig von der statistischen $(2 \cdot l + 1)$ -Verteilung ab.
- 2.) Die experimentell bestimmten Intensitäten stimmen gut mit den aus dem Kaskadenmodell berechneten überein. Daraus

folgt, daß die beobachteten Übergänge nicht durch unbekannte γ -Linien gestört werden.

3.2 Intensitätsverhältnisse der Feinstrukturkomponenten

Bei der Berechnung der Intensitätsverhältnisse der Feinstrukturkomponenten gehen wir von einer statistischen Besetzung der Niveaus mit $n \geq 3$ aus. Das statistische Gewicht eines Niveaus mit dem Drehimpuls j ist

$$g_j = 2j + 1$$

Die relative Intensität der Feinstrukturkomponenten ist gemäß (II.21)

$$I_{jj'} = g_j \frac{R_{jj'}}{\sum_f W_{jf}}$$

Die Berechnung der Verzweigungsverhältnisse $R_{jj'}/\sum_f W_{jf}$ wurde schon oben besprochen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4 - 9 zu finden.

Tabelle 4-9: Intensitätsverhältnisse von Feinstrukturkomponenten in μNb

Übergänge	Intensitätsverhältnisse	
	Experiment	Theorie
$\frac{2p_{3/2} - 1s}{2p_{1/2} - 1s}$	2.04 ± 0.05	1.976
$\frac{3d - 2p_{3/2}}{3d - 2p_{1/2}}$	2.05 ± 0.04	1.976
$\frac{3p_{3/2} - 2s}{3p_{1/2} - 2s}$	1.56 ± 0.12	1.834
$\frac{2s - 2p_{3/2}}{2s - 2p_{1/2}}$	1.05 ± 0.15	1.218

Das Verhältnis der Feinstrukturkomponenten muß für die 2p-1s- und 3d-2p-Übergänge gleich sein. Diese Bedingung wird von den experimentellen Werten mit einer Abweichung von 0,5 % innerhalb der Fehler erfüllt. Damit können wir ausschließen, daß unter einem der Übergänge eine störende γ -Linie liegt. Beide Intensitätsverhältnisse weichen jedoch um mehr als eine Standardabweichung von den theoretischen Werten ab.

Beim 3p-2s-Übergang ist das gemessene Intensitätsverhältnis um etwas mehr als zwei Standardabweichungen zu klein. Dafür sind zwei Erklärungen möglich. Erstens kann die Besetzung der $3p_{3/2}$ - und $3p_{1/2}$ -Niveaus von der statistischen Besetzung abweichen. Zweitens kann das Intensitätsverhältnis durch γ -Linien gestört werden. Von der Auswertung des 3p-2s-Übergangs wissen wir, daß der $3p_{3/2}$ - $2s_{1/2}$ -Übergang von der 541.5 keV - $^{93}_{41}\text{Nb}$ -Linie gestört wird. Die Intensität dieser Linie ist unbekannt und muß aus dem "least squares fit" bestimmt werden. Dabei kann das Intensitätsverhältnis des 3p-2s-Übergangs verfälscht werden.

Beim 2s-2p-Übergang ist der theoretische Wert knapp eine Standardabweichung größer als das aus dem Experiment bestimmte Verhältnis.

4. Einfluß der Elektronenabschirmung auf höhere Übergänge

Der Einfluß der ausgedehnten Kernladungsverteilung auf die myonischen Energieniveaus mit $n \geq 4$, $l \neq 0$ ist beim Niob kleiner als 1 eV. Die Energie E_0 eines hohen Übergangs kann somit aus der Lösung der Dirac-Gleichung auf etwa 1 eV genau berechnet werden, selbst wenn die Ladungsverteilung nur ungefähr bekannt ist.

Zwei Korrekturen sind für die höheren Übergänge von Bedeutung, nämlich die Vakuumpolarisation ΔE_{VP} und die Elektronenabschirmung. Die erste Korrektur kann, wie in Kap. II.13 beschrieben, genau berechnet werden. Die zweite Korrektur

hängt von der unbekanntenen Elektronenkonfiguration im myonischen Atom zur Zeit des Übergangs ab. Aus der Verschiebung der gemessenen Energie E_{exp} eines Überganges gegenüber dem theoretischen Wert $E_{\text{th}} = E_0 + \Delta E_{\text{VP}}$ kann die Elektronenabschirmung experimentell bestimmt werden.

Bei hohen Übergängen ist die Intensität der verschiedenen Parallelübergänge ungefähr gleich groß. Beim $10 \rightarrow 5$ -Übergang erhalten wir z.B. aus dem Kaskadenmodell mit einer statistischen Anfangsverteilung $I(10h-5g) = 0.33 \%$; $I(10g-5f) = 0.38 \%$, $I(10f-5d) = 0.20 \%$ und $I(10d-5p) = 0.05 \%$. Die Energieabstände dieser Übergänge sind so klein, daß sie im Experiment nicht mehr aufgelöst werden können. Die gemessene Energie des Übergangs ist deshalb der Schwerpunkt der Parallelübergänge.

Wenn man also die Elektronenabschirmung bestimmen will, muß man zum Vergleich den Schwerpunkt E_{th} der Parallelübergänge $E_{\text{th}}^{(i)}$ berechnen. Es gilt

$$\overline{E_{\text{th}}} = \frac{\sum_i g_i (E_0^{(i)} + \Delta E_{\text{VP}}^{(i)})}{\sum_i g_i}$$

wobei g_i die relative Intensität eines Parallelübergangs ist. Wir erhalten die g_i aus dem Kaskadenmodell.

In Tabelle 4-10 sind die gemessenen Energiedifferenzen $E_{\text{exp}} - \overline{E_{\text{th}}}$ für einige $n \rightarrow 5$ -Übergänge eingetragen. Bei der Berechnung der Schwerpunkte $\overline{E_{\text{th}}}$ wurden die $nh-5g$ -, $ng-5f$ - und $nf-5d$ -Übergänge berücksichtigt. Die Intensitäten g_i der Parallelübergänge wurden für Anfangsverteilungen mit $\alpha = 0$ und $\alpha = -0.1$ berechnet. Die theoretischen Elektronenabschirmungen wurden Tabelle 2-4 entnommen.

Tabelle 4-10: Energie der $n \rightarrow 5$ -Übergänge in μNb

Übergang	$E_{\text{exp}}/\text{keV}$	$\overline{E}_{\text{th}}/\text{keV}$		$(E_{\text{exp}} - \overline{E}_{\text{th}})/\text{keV}$		$(\Delta E_e)_{\text{th}}$ keV
		$\alpha = 0$	$\alpha = -0,1$	$\alpha = 0$	$\alpha = -0,1$	
8 - 5	115.53 ± 0.03	115.67	115.70	-0.14	-0.17	-0.17
9 - 5	130.90 ± 0.03	131.19	131.22	-0.29	-0.32	-0.27
10 - 5	141.92 ± 0.04	142.32	142.35	-0.40	-0.43	-0.39
11 - 5	150.10 ± 0.05	150.57	150.59	-0.47	-0.49	-0.51
12 - 5	156.26 ± 0.06	156.83	156.86	-0.57	-0.60	-0.65
13 - 5	160.98 ± 0.07	161.71	161.74	-0.73	-0.76	-0.78

Wir sehen, daß sich die theoretischen Energien für beide Anfangsverteilungen um 30 eV unterscheiden. Dieser Unterschied ist kleiner als die experimentellen Fehler, so daß keine Aussagen über die relative Intensität der Parallelübergänge erhalten werden können. Da wir von den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnitts wissen, daß $\alpha \approx -0.01$, geben wir den Energiedifferenzen in Spalte 5 den Vorzug. Diese Werte stimmen innerhalb der angegebenen Fehler mit den theoretischen Elektronenabschirmungen überein, die unter der Annahme berechnet wurden, daß die Elektronenkonfiguration im Myon-Atom der des ungestörten Atoms entspricht. Wenn dieses Modell richtig ist, können wir aus unseren Ergebnissen schließen, daß innerhalb einer Abweichung von 10 bis 20 % die Elektronenkonfiguration im Myon-Atom nicht verändert wird. Da die Elektronenabschirmung zu 90 % von den K-Elektronen herrührt, folgt zumindest, daß bei den betrachteten Übergängen des Myons alle K-Elektronen vorhanden sind. Dieses Ergebnis ist verständlich, da im oberen Teil der Kaskade mit $n \gtrsim 8$ für $|\Delta n| = 1$ keine K-Auger-Übergänge möglich sind und für $|\Delta n| > 1$ selbst bei genügend großer Übergangsenergie die Strahlungsübergänge dominieren.

V. Bestimmung der Kernladungsverteilung von ${}_{41}^{93}\text{Nb}$

1. Korrekturen der Bindungsenergien

Mit den gemessenen Energien der 2p-1s-, 3d-2p-, 2p-2s- und 3p-2s-Übergänge soll die Ladungsverteilung des ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ -Kerns untersucht werden.

Damit der zu untersuchende Einfluß der ausgedehnten Ladungsverteilung auf die myonischen Energieniveaus nicht verfälscht wird, müssen die in Kap. II besprochenen Korrekturen von den gemessenen Übergangsennergien abgezogen werden. Die daraus erhaltenen Energien werden dann nur noch von der Ladungsverteilung bestimmt. In Tabelle 5-1 sind die Korrekturen zusammengestellt, die mit Ausnahme der Kernpolarisation bei der weiteren Rechnung festgehalten wurden. Die Vakuumpolarisationskorrekturen erster Ordnung werden für jede Ladungsverteilung neu berechnet, wie in Kap. II.1.3 besprochen, und sind deshalb in Tabelle 5-1 nicht eingetragen. Die Lambshift und die Vakuumpolarisation höherer Ordnung wurden für ein Fermipotential mit $c = 5.03 \text{ fm}$ und $t = 2.20 \text{ fm}$ berechnet.

Tabelle 5-1: Korrekturen der Bindungsenergien in μNb

Niveau	Vakuumpol. höhere Ordnung. keV	Lambshift keV	Kernpolarisation	
			Ref. [WuW 69] keV	Ref. [Col 69] keV
$1s_{1/2}$	0.411	-1.133	1.98	1.20
$2s_{1/2}$	0.072	-0.286	0.58	0.14
$2p_{1/2}$	0.075	-0.001	}0.16	}0.05
$2p_{3/2}$	0.070	-0.045		

Die Kernpolarisation im 1s- und 2s-Niveau ist größer als im 2p-Niveau. Das Verhältnis dieser Korrektur zur "finite size shift" ΔE_0 ist jedoch für das 2p-Niveau am größten. Die Berücksichtigung der Kernpolarisation führt zu einer Änderung

der c,t-Werte, die durch einen bestimmten Übergang festgelegt werden oder anders ausgedrückt, zu einer Verschiebung der zu diesem Übergang gehörenden c,t-Kurve. Eine Abschätzung dieser Änderung erhalten wir durch Multiplikation der Kernpolarisationskorrektur ΔE_{NP} mit den in Tabelle 2-7 angegebenen Werten von $(\frac{\Delta t}{\Delta E})_c$ und $(\frac{\Delta c}{\Delta E})_t$.

In Tabelle 5-2 sind diese Zahlen für einige Übergänge in μNb eingetragen. Die Kernpolarisation wurde aus der vierten Spalte von Tabelle 5-1 entnommen.

Tabelle 5-2: Einfluß der Kernpolarisation auf myonische Übergänge in μNb

Übergang	$(\frac{\Delta c}{\Delta E})_t \cdot \Delta E_{NP}$	$(\frac{\Delta t}{\Delta E})_c \cdot \Delta E_{NP}$
	fm	fm
$2p_{1/2} - 1s_{1/2}$	0.010	0.025
$2p_{3/2} - 1s_{1/2}$	0.010	0.025
$3d_{3/2} - 2p_{1/2}$	0.050	0.098
$3d_{5/2} - 2p_{3/2}$	0.087	0.157
$2s_{1/2} - 2p_{1/2}$	0.018	0.045
$2s_{1/2} - 2p_{3/2}$	0.017	0.042
$3p_{1/2} - 2s_{1/2}$	0.022	0.055
$3p_{3/2} - 2s_{1/2}$	0.022	0.054

2. Bestimmung der c,t-Parameter

2.1 Methode

Die c,t-Parameter einer angenommenen Fermiladungsverteilung können, wie schon in Kap. II.2 besprochen, aus den Schnittpunkten der c,t-Kurven der verschiedenen Übergänge bestimmt werden. Bei der praktischen Berechnung der Kurven gehen wir folgendermaßen vor. Die Dirac-Gleichung wird für einen Satz von neun c,t-Werten gelöst, die ein rechteckiges Gitter in der c,t-Ebene bilden. Für einen vorgegebenen c-Wert, der zwischen den Gitterpunkten liegt, bestimmen wir dann durch quadratische Interpolation zwischen den berechneten Energien die Energien E_{μ} , die zu den drei gegebenen t-Werten gehören

$$E_{\mu}(c) = \alpha(t_{\mu}) + \beta(t_{\mu})c + \gamma(t_{\mu})c^2 \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (\text{V.1})$$

Diese drei Energien liegen näherungsweise auf einer Parabel

$$E(c, t) = p + q \cdot t + r \cdot t^2 \quad (\text{V.2})$$

deren Koeffizienten p, q und r von den Energien $E_{\mu}(c)$ abhängen. Der Schnittpunkt dieser Parabel mit der korrigierten experimentellen Energie E_{exp}^* liefert den gesuchten t-Wert. Auf diese Weise erhalten wir für verschiedene vorgegebene c-Werte jeweils ein t und somit eine Kurve in der c,t-Ebene.

Durch die Gleichung (V.2) wird für jeden Übergang eine Energiefläche $E(c, t)$ über der c,t-Ebene definiert. Der Schnitt dieser Fläche mit der Ebene $E = E_{\text{exp}}^*$ ergibt die zugehörige c,t-Kurve. In Abb. 5-1 ist dies am Beispiel des $2p_{1/2}^{-1}s_{1/2}^{-}$ Überganges dargestellt.

Aus dem Minimum der quadratischen Abweichung

$$\chi^2(c, t) = \sum_i \left[\frac{E_{\text{exp}}^* - E(c, t)}{\delta E_{\text{exp}}} \right]_i^2 \quad (\text{V.3})$$

berechnen wir die gesuchten Parameter c_0, t_0 mit der Bedingung

$$\frac{\partial \chi^2(c_0, t_0)}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \chi^2(c_0, t_0)}{\partial c} = 0$$

Die für c_0 und t_0 mit Hilfe der Beziehungen (V.1) und (V.2) berechneten theoretischen Energien müssen mit den Werten verglichen werden, die man aus der Lösung der Dirac-Gleichung für das entsprechende Fermipotential erhält. Wenn diese Werte nicht übereinstimmen, muß um die gefundenen c_0, t_0 -Werte ein neues Gitter mit kleinerer Maschenweite gelegt werden. Dies wird solange wiederholt, bis die Werte sich um weniger als 2eV unterscheiden. Wenn die Anfangswerte günstig gewählt werden, ist diese Bedingung schon nach zwei bis drei Versuchen erfüllt. - Die hier beschriebenen Rechnungen wurden mittels eines FORTRAN-Programmes durchgeführt.

2.2 c-t-Diagramme ohne Kernpolarisation

Bei der Bestimmung der c,t-Parameter von ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ beginnen wir mit den folgenden Gitterpunkten.

$$c = 4.8, 5.0, 5.2 \text{ fm}$$

$$t = 2.0, 2.2, 2.4 \text{ fm}$$

Wenn wir die Lambshift und die Vakuumpolarisationskorrekturen höherer Ordnung von Tabelle 5-1 übernehmen und die Kernpolarisation nicht berücksichtigen, erhalten wir die in Abb. 5-2 dargestellten c,t-Kurven. Die durch den Fehler der gemessenen Energien zugelassene Streuung der Kurven ist am Anfang durch Fehlerbalken angedeutet. Die "Breite" der 2p-1s-Kurve ist so klein, daß sie bei dem verwendeten Maßstab vernachlässigt werden kann. Hieraus folgt, daß die gesuchten c,t-Werte praktisch auf der 2p-1s-Kurve liegen. Innerhalb der Fehler fallen die jeweils zu einem Dublett gehörenden Kurven zusammen. Deshalb

wurden nur die $2p_{1/2}-1s$ -, $3p_{1/2}-2s$ - und $2s-2p_{1/2}$ -Kurven eingezeichnet. Die "Breite" der beiden $3d-2p$ -Kurven ist viel größer als die der übrigen Kurven. Dies wird sofort verständlich, wenn wir die in Tabelle 2-7 angegebenen Werte von $(\frac{\Delta c}{\Delta E})_t$ und $(\frac{\Delta t}{\Delta E})_c$ betrachten. Ein Zahlenbeispiel soll dies deutlicher machen. Wenn wir die Meßfehler aus Tabelle 4-4 entnehmen, haben wir für den $2p_{1/2}-1s_{1/2}$ -Übergang

$$\Delta E = \pm 0.09 \text{ keV und } \Delta t = (\frac{\Delta t}{\Delta E})_c \cdot \Delta E = \pm 0.0012 \text{ fm}$$

und für den $3d_{3/2}-2p_{1/2}$ -Übergang

$$\Delta E = \pm 0.11 \text{ keV und } \Delta t = (\frac{\Delta t}{\Delta E})_c \cdot \Delta E = \pm 0.067 \text{ fm}$$

Die Änderung von t ist somit bei ungefähr gleichem Meßfehler der Energien für den $3d_{3/2}-2p_{1/2}$ -Übergang 56 mal größer als für den $2p_{1/2}-1s_{1/2}$ -Übergang.

Wie in Abb. 5-2 zu sehen ist, schneiden sich in dem betrachteten c, t -Bereich die beiden $3d-2p$ -Kurven bei $c = 5.116 \text{ fm}$ und $t = 1.87 \text{ fm}$. Die $2p_{1/2}-1s$ - und die $2s-2p_{1/2}$ -Kurven schneiden sich bei $c = 5.016 \text{ fm}$ und $t = 2.22 \text{ fm}$. Alle übrigen Schnittpunkte liegen außerhalb des Bereichs.

Im unteren Teil der Abb. 5-2 ist die Projektion von $\chi^2(c, t)$ auf die c -Achse dargestellt. Nach der obigen Bemerkung liegen die gesuchten c, t -Parameter in guter Näherung auf der $2p-1s$ -Kurve. Die im Minimum von χ^2 gefundenen c, t -Werte sind in Tabelle 5-3 eingetragen.

Tabelle 5-3: c, t -Parameter von μNb ohne Kernpolarisation

χ^2 N-F = 6	χ^2 N-F	c fm	t fm	R_2 fm	$r_0 = R_2/A^{1/3}$ fm
25.9	4.317	4.9280	2.3958	5.5794	1.2315
24.9	4.150	4.9675	2.3194	5.5760	1.2307
25.9	4.317	5.0060	2.2419	5.5726	1.2300

Der Äquivalenzradius R_2 wurde bereits in Kap. II.2.2 (Formel (II.17)) definiert. Da wir zwei Parameter und acht Übergänge haben, ist der theoretische Wert von $\chi^2 = N-F=6$.

Da die c, t -Parameter durch die c, t -Kurven miteinander verknüpft sind, können sie nicht mit einem Fehler versehen werden, da sonst ein Rechteck in der c, t -Ebene zugelassen würde.

Für den Äquivalenzradius finden wir

$$\underline{R_2 = (5.5760 \pm 0.0034) \text{ fm}} \quad (\text{V.4})$$

und

$$\underline{r_0 = R_2/A^{1/3} = (1.2307 \pm 0.0008) \text{ fm}}$$

Mit der Beziehung (II.17) können wir R_2 in den häufig verwendeten "rootmean square radius" umrechnen.

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot R_2$$

Wir erhalten

$$\underline{\langle r^2 \rangle^{1/2} = (4.3192 \pm 0.0026) \text{ fm}}$$

2.3 c-t-Diagramme mit Kernpolarisation

Die in Tabelle 5-1 angegebenen theoretischen Werte der Kernpolarisation in den 1s-, 2s- und 2p-Niveaus sind relativ ungenau. So beträgt der Fehler der Werte von Chen etwa 30 % und der Werte von Cole etwa 50 %.

Wir führen die Kernpolarisation als dritten Parameter bei der Untersuchung der Ladungsverteilung ein. Wir gelangen zu folgenden Ergebnissen.

- a) Die von Cole berechneten Werte bringen keine Verbesserung von χ^2 gegenüber dem im vorhergegangenen Abschnitt erhaltenen Wert ohne Kernpolarisation.
- b) Mit den Werten von Chen erhalten wir eine Verbesserung von χ^2 um ungefähr einen Faktor 10.

Folgende drei Variationsmöglichkeiten wurden untersucht:

- 1) c,t-Fit der acht Übergänge 2p-1s, 3d-2p, 2s-2p und 3p-2s und Festhalten der Kernpolarisationskorrekturen $\Delta E_{NP}(2s)$ und $\Delta E_{NP}(2p)$ der 2s- und 2p-Niveaus und Variation der Korrektur $\Delta E_{NP}(1s)$ des 1s-Niveaus.
- 2) c,t-Fit der acht Übergänge und proportionale Variation von $\Delta E_{NP}(1s)$, $\Delta E_{NP}(2s)$ und $\Delta E_{NP}(2p)$, d.h. Multiplikation dieser Werte mit einem variablen Faktor g_1
- 3) c,t-Fit der sechs Übergänge 3d-2p, 2s-2p, 3p-2s und proportionale Variation von $\Delta E_{NP}(2s)$ und $\Delta E_{NP}(2p)$, d.h. Multiplikation dieser Werte mit einem variablen Faktor g_2 .

Wir gehen von den von Chen berechneten Korrekturen aus. Die erste Methode führt zu einem Wert von $\Delta E_{NP}(1s)$, der etwa gleich groß ist, wie $\Delta E_{NP}(2s)$. Dieses Ergebnis ist physikalisch nicht sinnvoll, da die Kernpolarisation im 1s-Niveau größer sein sollte, als im 2s-Niveau. Bei der zweiten Methode erhalten wir die in Abb. 5-3 gezeigte Abhängigkeit von $\chi^2(c,t)$ von g_1 bzw. $\Delta E_{NP}(1s)$. Im Minimum von χ^2 finden wir mit dem Kriterium (IV.2)

$$\begin{aligned}
 g_1 &= 1.28 \pm 0.26 \\
 \Delta E_{NP}(1s) &= (2.53 \pm 0.52) \text{ keV} \\
 \Delta E_{NP}(2s) &= (0.74 \pm 0.15) \text{ keV} \\
 \Delta E_{NP}(2p) &= (0.20 \pm 0.04) \text{ keV}
 \end{aligned}
 \tag{V.5}$$

Die mit der dritten Methode erhaltene Änderung von $\chi^2(c,t)$ bei Variation des Faktors g_2 ist so klein, daß wir $g_2 = g_1$ setzen können. Damit lassen sich c und t ohne den 2p-1s-Übergang bestimmen.

Wir kommen weiter unten auf die Ergebnisse der dritten Methode zurück und besprechen zuerst die Ergebnisse der zweiten Methode.

In Abb. 5-4 sind die c-t-Kurven eingezeichnet, die wir unter Berücksichtigung der oben bestimmten Kernpolarisationskorrek-

turen erhalten. Wir sehen, daß im Vergleich zu Abb. 5-2 die c-t-Kurven zu größeren c,t-Werten verschoben sind. Die Verschiebung der 3d-2p-Kurven ist am größten. Dies ist nach den Überlegungen des ersten Abschnitts leicht einzusehen. - Durch diese Verschiebung sind die c-t-Kurven im betrachteten Bereich näher aneinander gerückt. Die $\chi^2(c,t)$ - Parabel im unteren Teil der Abbildung hat ein Minimum für $\chi^2 = 2.13$. Da wir acht Übergänge und drei freie Parameter haben, ist der theoretische Wert von $\chi^2 = N-F = 5$. Das Ergebnis des c,t-Fits der acht Übergänge ist in Tabelle 5-4 eingetragen.

Tabelle 5-4: c,t-Parameter von μNb mit Kernpolarisation

χ^2	χ^2	c	t	R_2	$r_o = R_2/A^{1/3}$
N-F = 5	N-F	fm	fm	fm	fm
3.30	0.660	5.1050	2.0573	5.5775	1.2311
2.13	0.426	5.1455	1.9624	5.5739	1.2303
3.24	0.648	5.1850	1.8648	5.5706	1.2295

Der Äquivalenzradius ist damit

$$\underline{R_2 = (5.5739 \pm 0.0036) \text{ fm}} \quad (\text{V.6})$$

und $\underline{r_o = (1.2303 \pm 0.0008) \text{ fm}}$

Für den "root mean square radius" erhalten wir

$$\underline{\langle r^2 \rangle^{1/2} = (4.3175 \pm 0.0028) \text{ fm}}$$

Das Ergebnis des c,t-Fits der sechs Übergänge ohne den 2p-1s-Übergang ist in Tabelle 5-5 zu finden.

Tabelle 5-5: c,t-Parameter von μNb mit Kernpolarisation ohne Verwendung des 2p-1s-Übergangs

$\frac{\chi^2}{N-F} = 3$	$\frac{\chi^2}{N-F}$	c fm	t fm	R_2 fm	$r_o = R_2/A^{1/3}$
2.23	0.743	5.0850	2.1056	5.5807	1.2318
1.25	0.417	5.1557	1.9364	5.5725	1.2300
2.23	0.743	5.2400	1.7072	5.5618	1.2276

Der Äquivalenzradius ist

$$\underline{R_2 = (5.5725 \pm 0.0107) \text{ fm}} \quad (\text{V.7})$$

und $\underline{r_o = (1.2300 \pm 0.0024) \text{ fm}}$

2.4 Vergleich der theoretischen und experimentellen Energien

In den beiden vorhergegangenen Abschnitten haben wir die c,t-Parameter der Ladungsverteilung von ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ bestimmt: a) ohne Kernpolarisation (KP) aus allen Übergängen, b) mit KP aus allen Übergängen, c) mit KP ohne die 2p-1s-Übergänge.

Mit diesen c,t-Parametern wurde die Dirac-Gleichung gelöst. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5-6 zu finden.

Tabelle 5-6: Energien der myonischen Übergänge im Niob

Übergang	$E_{\text{exp}}/\text{keV}$	a)	b)	c)
		$E_{\text{theor}}/\text{keV}$	$E_{\text{theor}}/\text{keV}$	$E_{\text{theor}}/\text{keV}$
$2p_{1/2} - 1s_{1/2}$	2603.42 ± 0.09	2603.523	2603.489	[2601.087]
$2p_{3/2} - 1s_{1/2}$	2626.60 ± 0.08	2626.597	2626.559	[2624.158]
$3d_{3/2} - 2p_{1/2}$	683.03 ± 0.11	682.715	682.993	683.003
$3d_{5/2} - 2p_{3/2}$	662.54 ± 0.11	662.316	662.599	662.607
$2s_{1/2} - 2p_{1/2}$	140.01 ± 0.08	139.976	139.960	139.960
$2s_{1/2} - 2p_{3/2}$	116.87 ± 0.06	116.902	116.890	116.888
$3p_{1/2} - 2s_{1/2}$	537.45 ± 0.16	537.084	537.353	537.360
$3p_{3/2} - 2s_{1/2}$	543.91 ± 0.11	543.652	543.919	543.926
$3s_{1/2} - 2p_{1/2}$	718.92 ± 0.42	[719.14]	[719.559]	[719.566]
$3s_{1/2} - 2p_{3/2}$	695.70 ± 0.42	[696.06]	[696.489]	[696.495]
χ^2		24.86	2.127	1.255
N-F		6	5	3
c/fm		4.96750	5.14553	5.15572
t/fm		2.31941	1.96237	1.93638
$\Delta E_{\text{NP}}(1s)/\text{keV}$		0	2.50	-
$\Delta E_{\text{NP}}(2s)/\text{keV}$		0	0.73	0.73
$\Delta E_{\text{NP}}(2p)/\text{keV}$		0	0.20	0.20

Die eingeklammerten Energien wurden beim "least squares fit" nicht verwendet.

Die Abweichung der in der letzten Spalte stehenden theoretischen $2p$ - $1s$ -Energien gegenüber den experimentellen Werten führen wir auf die Kernpolarisation im $1s$ -Niveau zurück. Wir finden folgende Energiedifferenzen $\Delta E = E_{\text{exp}} - E_{\text{theor}}$ für den $2p_{1/2} - 1s_{1/2}$ -Übergang

$$\Delta E(2p_{1/2} - 1s_{1/2}) = (2.33 \pm 0.63) \text{ keV} \quad (\text{V.8})$$

für den $2p_{3/2}-1s_{1/2}$ -Übergang

$$\underline{\Delta E(2p_{3/2} - 1s_{1/2}) = (2.44 \pm 0.64) \text{ keV}}$$

Den Fehler erhalten wir durch quadratische Addition des Fehlers der gemessenen Energie und der Schwankung des theoretischen Wertes, die durch die Änderung der zugelassenen c, t -Parameter entsteht (siehe Tabelle 5-5).

Diese Abweichung ist in guter Übereinstimmung mit der oben erhaltenen Kernpolarisationsverschiebung des $1s$ -Niveaus (V.5).

2.5 Äquivalenzradien der Ladungsverteilung

In den vorhergegangenen Abschnitten haben wir bereits den Äquivalenzradius $R_2 = \sqrt{\frac{5}{3} \langle r^2 \rangle}$ der Ladungsverteilung bestimmt. Innerhalb der von der Kernpolarisation herrührenden Unsicherheit finden wir aus (V.4) und (V.6)

$$\underline{R_2 = (5.5739 \pm 0.0055) \text{ fm}} \quad (\text{V.9})$$

Die von den einzelnen Übergängen bestimmten Äquivalenzradien R_k der Ladungsverteilung wurden nach dem in Kap. II.2.2 beschriebenen Verfahren für eine zweiparametrische Fermiverteilung bestimmt. In Abb. 5-5 sind die R_k -Kurven einiger Übergänge eingezeichnet. Bei der Berechnung der Kurven wurde die oben erhaltene Kernpolarisation (V.5) berücksichtigt. Tabelle 5-7 zeigt die Exponenten k und die zugehörigen Äquivalenzradien, die mit den gemessenen acht Übergängen bestimmt wurden.

Tabelle 5-7: Äquivalenzradien der Ladungsverteilung von Niob für eine zweiparametrische Fermi-Verteilung

Übergang	Experiment	Fit			
		c=5.1050 t=2.0573	c=5.1455 t=1.9624	c=5.1850 t=1.8648	
	k	R_k /fm	R_k /fm	R_k /fm	R_k /fm
$2p_{1/2}-1s_{1/2}$	1.4293 \pm 0.0001	5.5400 \pm 0.0005	5.5397	5.5396	5.5396
$2p_{3/2}-1s_{1/2}$	1.4324 \pm 0.0001	5.5396 \pm 0.0004	5.5399	5.5398	5.5398
$3d_{3/2}-2p_{1/2}$	2.7771 \pm 0.0003	5.6108 \pm 0.0315	5.6296	5.6212	5.6132
$3d_{5/2}-2p_{3/2}$	3.4564 \pm 0.0155	5.6923 \pm 0.0540	5.6760	5.6632	5.6510
$2s_{1/2}-2p_{1/2}$	1.1085 \pm 0.0010	5.5223 \pm 0.0031	5.5186	5.5204	5.5223
$2s_{1/2}-2p_{3/2}$	1.1481 \pm 0.0007	5.5220 \pm 0.0022	5.5212	5.5228	5.5244
$3p_{1/2}-2s_{1/2}$	1.2509 \pm 0.0015	5.5255 \pm 0.0056	5.5279	5.5289	5.5300
$3p_{3/2}-2s_{1/2}$	1.2591 \pm 0.0009	5.5297 \pm 0.0038	5.5285	5.5294	5.5304
χ^2 (N-F = 6)			3.3537	2.1390	3.2569

Die Fehler von k und R_k werden durch den Meßfehler der Übergangsenergie bestimmt. Die angegebenen c-t-Parameter sind Tabelle 5-4 entnommen.

Die Äquivalenzradien der 3d-2p-Übergänge sind am ungenauesten. Dies ist nach der vorhergegangenen Diskussion über den unterschiedlichen Einfluß der Ladungsverteilung auf die verschiedenen Übergänge verständlich (siehe Tabelle 2-7).

In Abb. 5-6 sind die Äquivalenzradien gegen k aufgetragen. Die eingezeichneten Kurven wurden für eine Fermi II-Verteilung mit den c-t-Werten aus Tab. 5-4 berechnet. Wir sehen, daß innerhalb der Fehler alle Radien auf einer Kurve liegen. Wie schon in Kap. II.2.2 angedeutet, darf innerhalb gewisser Grenzen die Form der Ladungsverteilung geringfügig verändert werden, ohne daß die mit einer bestimmten Verteilung aus den gemessenen Energien berechneten Äquivalenzradien verändert werden.

Wir versuchen, den in Tabelle 5-7 angegebenen Fit mit einer dreiparametrischen Fermi-Verteilung (II.13) zu verbessern. Dafür nehmen wir verschiedene Werte für w an und variieren c und t solange, bis χ^2 ein Minimum hat. Die Ford-Wills-Näherung ist noch für $|w| < 1$ gültig. Der "least squares fit" wurde mit einem FORTRAN-Programm [SoS 61] durchgeführt. Die Ergebnisse für w zwischen -0.4 und 0.5 sind in Tabelle 5-8 zu finden.

Tabelle 5-8: Fit der Äquivalenzradien aus Tabelle 5-7 mit einer dreiparametrischen Fermi-Ladungsverteilung

w	c fm	t fm	χ^2 ($N-F = 5$)
- 0.4	5.546 \pm 0.031	1.507 \pm 0.121	2.397
- 0.3	5.431 \pm 0.033	1.650 \pm 0.108	2.418
- 0.2	5.326 \pm 0.034	1.770 \pm 0.100	2.223
- 0.1	5.232 \pm 0.036	1.872 \pm 0.093	2.166
0	5.146 \pm 0.037	1.962 \pm 0.089	2.123
0.1	5.068 \pm 0.038	2.040 \pm 0.085	2.093
0.2	4.996 \pm 0.039	2.110 \pm 0.082	2.075
0.3	4.931 \pm 0.040	2.173 \pm 0.080	2.066
0.4	4.871 \pm 0.040	2.229 \pm 0.078	2.151
0.5	4.816 \pm 0.041	2.280 \pm 0.077	2.072

Die Änderung von χ^2 bei Variation von w ist klein. Sie zeigt jedoch, daß die für eine Fermi II-Verteilung erhaltenen Äquivalenzradien auch von einer Fermi III-Verteilung beschrieben werden. Die drei Parameter c , t und w sind stark korreliert, so daß kleine Änderungen von w relativ große Änderungen von c und t mit sich bringen. Mit größer werdendem w nimmt c ab und t zu.

Aus Tabelle 5-8 entnehmen wir, daß für positive Werte von w eine geringfügige Verbesserung von χ^2 erzielt wird. Dies entspricht einer Verdünnung der Ladungsdichte im Kerninnern. In Abb. 5-5 wurde die für $w = 0.3$ berechnete R_k -Kurve als gestrichelte Linie eingezeichnet.

Die Zusammenfassung dieser Ergebnisse zeigt:

a) Aus den 2p-1s-, 2s-2p- und 3p-2s-Übergängen können die niedrigen Momente mit $k < 2$ oder die entsprechenden Äquivalenzradien der Ladungsverteilung des ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ -Kerns mit großer Genauigkeit bestimmt werden, z.B. mit 0.01 % beim 2p-1s-Übergang.

b) Die von den 3d-2p-Übergängen bestimmten höheren Momente der Äquivalenzradien sind wesentlich ungenauer.

c) Wir können keine Aussagen über die Form der Ladungsverteilung machen. Für eine Fermi II-Verteilung erhält man ganz andere c,t-Parameter als für eine Fermi III-Verteilung mit $w \neq 0$.

Der "root mean square radius" $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ liegt dicht bei dem vom 2p-1s-Übergang bestimmten Moment $\langle r^{1.43} \rangle^{1/1.43}$. Damit kann innerhalb gewisser Grenzen $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ oder R_2 als Parameter zur Charakterisierung der Ladungsverteilung des ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ -Kerns verwendet werden. Der Fehler von $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ wird durch die Änderung von $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ für verschiedene Parametersätze der Fermi-Verteilung bestimmt, während der Fehler des vom 2p-1s-Übergang gemessenen Moments nur vom Meßfehler der Energie bestimmt wird. Dies ist in Abb. 5-6 deutlich zu sehen, wo die verschiedenen R_k -Kurven bei $k = 1.43$ praktisch durch einen Punkt gehen, während sie bei $k = 2$ eine gewisse Streuung aufweisen.

VI. Ergebnisse, Diskussion und Vergleich mit anderen Messungen

1. M1- HFS- Konstanten

In Tabelle 6-1 ist eine Zusammenfassung der von uns gemessenen und berechneten M1- HFS- Konstanten von μNb zu finden. Zum Vergleich sind daneben die von S.C. Cheng et al. [ChC71] gemessenen und von J. Johnson und R. Sorensen [JoS70] für verschiedene Kernmodelle berechneten Werte eingetragen.

Tabelle 6-1: M1- HFS- Konstanten von μNb (keV)

Niveau	Experiment		Theorie (Tabelle 2-10)		Theorie Ref. [JoS70]	
	diese Arbeit	Ref. [ChC71]	Punkt- kern	Einteil.- modell $G_L(\text{eff.})$	Conf. mixing	Pairing + Quadrupol $G_R = Z/A$
$1s_{1/2}$	0.698 ± 0.014	0.715 ± 0.031	1.002	0.671	0.658	0.689
$2s_{1/2}$	0.103 ± 0.009	—	0.158	0.095	—	—
$2p_{1/2}$	0.190 ± 0.008	0.160 ± 0.036	0.186	0.148	0.148	0.154

Die gemessenen Werte von $a(1s_{1/2})$ stimmen innerhalb der Fehler mit den von Johnson und Sorensen aus dem "Pairing plus Quadrupol"-Modell berechneten Werten überein. Die Abweichung vom Einteilchen-Wert beträgt zwei, die vom "Configuration-Mixing"-Modell etwa drei Standardabweichungen. Damit ist die in diesem Experiment erreichte Genauigkeit gross genug, um Aussagen über die Richtigkeit der verschiedenen Kernmodelle zu erhalten.

$a(2s_{1/2})$ stimmt innerhalb der Fehler mit dem von uns berechneten Einteilchenwert überein. Die Abweichung vom Punktkernwert beträgt etwa fünf Standardabweichungen. $a(2p_{1/2})$ ist dagegen ungefähr fünf Standardabweichungen grösser als der Einteilchenwert und stimmt mit dem Punktkernwert überein. Wir haben keine Erklärung für diese Abweichung.

Tabelle 6-2 zeigt eine Zusammenstellung der Ergebnisse einiger anderer Experimente.

Tabelle 6-2: M1- HFS- Konstanten in Myon-Atomen

Element	Referenz	Niveau	Experiment	Punkt- kern	Pairing + Quadrupol
^{115}In	[LiB71]	$1s_{1/2}$	0.733 ± 0.031	1.155	0.738
		$2s_{1/2}$	0.124 ± 0.027	0.189^{a}	0.108^{a}
		$2p_{1/2}$	0.231 ± 0.027	0.283	0.214
^{139}La	[ChC71]	$1s_{1/2}$	0.771 ± 0.046	0.857	0.743
		$2p_{1/2}$	0.274 ± 0.046	0.275	0.247
^{141}Pr	[Tho69]	$1s_{1/2}$	1.216 ± 0.048	1.928	1.184

a) Diese Werte wurden von R. Link et al. [LiB71] berechnet, alle übrigen theoretischen Werte wurden Ref. [JoS70] entnommen.

Bemerkenswert ist, daß bei $a(2p_{1/2})$ in ^{139}La dieselbe Abweichung auftritt, wie bei dem von uns gemessenen Wert in $^{93}_{41}\text{Nb}$. In beiden Fällen liegen die gemessenen Kopplungskonstanten nahe beim Punktkernwert, so daß der Formfaktor mit eins verträglich ist. Jedoch ist bei La der Fehler so groß, daß auch das "Pairing plus Quadrupol"-Modell eingeschlossen ist.

2. Quadrupolmoment von $^{93}_{41}\text{Nb}$

In Kap. IV haben wir aus den $3d_{5/2}^{-}2p_{3/2}^{-}$ und $2p_{3/2}^{-}1s_{1/2}^{-}$ Übergängen in μNb die E2-Kopplungskonstante des $2p_{3/2}^{-}$ -Niveaus bestimmt. Wir erhielten den Mittelwert

$$b(2p_{3/2})_{\text{exp}} = (-2.92 \pm 0.07) \text{keV} \quad (\text{VI.1})$$

Dieser Wert weicht erheblich von der von Cheng et al. [ChC71] bestimmten Kopplungskonstanten $b(2p_{3/2}) = (-1.48 \pm 0.32) \text{keV}$ ab.

Im Gegensatz zu Cheng et al. konnten wir den von uns ermittelten Wert von $b(2p_{3/2})$ bei der Auswertung des $2s_{1/2} - 2p_{3/2}$ Übergangs überprüfen. Die dabei erhaltene Kopplungskonstante $a(2s_{1/2})$ stimmt innerhalb der Fehler mit dem Wert von $a(2s_{1/2})$ überein, den wir bei der Auswertung des $2s_{1/2} - 2p_{1/2}$ Übergangs erhielten. Daraus schließen wir, daß der von uns gefundene Wert von $b(2p_{3/2})$ richtig sein muss.

Mit dem von K. Murakawa [Mur58] gemessenen Quadrupolmoment von ${}^{93}_{41}\text{Nb}$

$$Q = (-0.25 \pm 0.15) \text{ barn} \quad (\text{I.13})$$

haben wir den Punktkernwert der Kopplungskonstanten berechnet (siehe Tabelle 2-11):

$$b_0(2p_{3/2})_{\text{theor}} = (-2.44 \pm 1.47) \text{ keV} \quad (\text{VI.2})$$

Dieser Wert stimmt innerhalb der Fehler mit den von uns und von Cheng et al. gemessenen Kopplungskonstanten überein.

Bei Kenntnis des Formfaktors f_Q kann aus der gemessenen Kopplungskonstanten $b(2p_{3/2})_{\text{exp}}$ das Quadrupolmoment des Kerns berechnet werden. Wir schätzen f_Q aus Abb. 2-4 ab, und finden:

$$1 \geq f_Q \geq 0.82 \quad \text{für } 0 \leq R_0 \leq 6 \text{ fm}$$

Aus (VI.6) erhalten wir damit für die Punktkern-Kopplungskonstante den folgenden Wert mit unsymmetrischen Fehlern

$$b_0(2p_{3/2})_{\text{exp}} = -(2.92 \begin{smallmatrix} + 0.71 \\ - 0.07 \end{smallmatrix}) \text{ keV} \quad (\text{VI.3})$$

Mit (II.38) berechnen wir daraus das Quadrupolmoment

$$Q = -(0.299 \begin{smallmatrix} + 0.072 \\ - 0.007 \end{smallmatrix}) \text{ barn}$$

Die untere Grenze $Q_{\text{min}} = -0.292$ barn entspricht einer punktförmigen Verteilung des Quadrupolmoments, die obere Grenze

$Q_{\text{max}} = -0.371$ barn entspricht einer Kugelschalenverteilung mit dem Radius $R_0 = 6 \text{ fm}$.

3. Energien

Die Energien der von uns gemessenen myonischen Übergänge in ^{93}Nb wurden bereits in Tabelle 4-4 zusammengefasst. In Tabelle 6-3 zeigen wir nocheinmal die Energien der 2p-1s- und 3d-2p-Übergänge zusammen mit den von Cheng et al. [ChC71] gemessenen Werten.

Tabelle 6-3: Energie der 2p-1s- und 3d-2p- Übergänge in μNb

Übergang	Energie / keV	
	diese Arbeit	Ref. [ChC71]
$2p_{1/2} - 1s_{1/2}$	2603.42 ± 0.09	2603.2 ± 0.5
$2p_{3/2} - 1s_{1/2}$	2626.60 ± 0.08	2626.2 ± 0.4
$3d_{3/2} - 2p_{1/2}$	683.03 ± 0.11	687.17 ± 0.08
$3d_{5/2} - 2p_{3/2}$	662.54 ± 0.11	665.88 ± 0.08

Bei den 2p-1s- Übergängen finden wir innerhalb der Fehler eine gute Übereinstimmung zwischen unseren und den von Cheng et al. angegebenen Werten. Die Energien der 3d-2p- Übergänge unterscheiden sich dagegen um 4.14 bzw. 3.34 keV. Dies entspricht ungefähr 40 bzw. 30 Standardabweichungen. Wir können die von Cheng et al. gemessenen Energien nicht mit den für verschiedene Ladungsverteilungen berechneten Energien in Übereinstimmung bringen.

Aus den in Tabelle 4-5 angegebenen Energien der 2p-1s-, 2s-2p- und 3d-2p- Übergänge lässt sich die Feinstrukturaufspaltung $\Delta(2p)$ des 2p- Niveaus bestimmen. Wir haben diese Werte in Tabelle 6-4 zusammengestellt und vergleichen sie mit dem theoretischen Wert, den wir aus Tabelle 5-6 entnehmen.

Tabelle 6-4: Feinstrukturaufspaltung des 2p- Niveaus
in μNb

Übergang	$\Delta(2p)$ / keV
2p - 1s	23.18 \pm 0.12
2d - 2p	23.17 \pm 0.16 ^{a)}
2s - 2p	23.14 \pm 0.10
Mittelwert	23.16 \pm 0.07
theoret. Wert	23.07

- a) Die Feinstrukturaufspaltung des 3d- Niveaus ist 2.68 keV. Die Änderung für verschiedene Ladungsverteilungen beträgt weniger als 10 eV.

Der gemessene Mittelwert von $\Delta(2p)$ ist 90 eV größer als der theoretische Wert. Das entspricht dem 1.3-fachen Fehler. Für diese Abweichung sind zwei Erklärungen möglich:

- a) Die Kernpolarisation der $2p_{1/2}^-$ und $2p_{3/2}^-$ Zustände kann verschieden sein. Wir haben für beide Zustände dieselbe Korrektur angenommen. Die Kernpolarisation im 2p-Zustand von ^{209}Bi wurde von H.F. Skardhamar [Ska70] berechnet. Danach ist die Korrektur im $2p_{1/2}^-$ Niveau um 5 % größer als im $2p_{3/2}^-$ Niveau. Dies entspricht beim Nb einer Vergrößerung von $\Delta(2p)$ um 10 eV.
- b) In zweiter Ordnung mischen die M1- und E2- Wechselwirkungen die $2p_{1/2}^-$ und $2p_{3/2}^-$ Zustände mit gleichen F-Quantenzahlen. Dabei wird die Feinstrukturaufspaltung der 2p- Niveaus vergrößert, weil die Wechselwirkung abstoßend ist. Wir haben diesen Effekt für die M1- Wechselwirkung berechnet und finden, dass die Vergrößerung von $\Delta(2p)$ kleiner als 1 eV ist. Bei der E2- Wechselwirkung kann die Abstoßung der beiden 2p- Niveaus jedoch größer sein, da die E2- Aufspaltung im $2p_{3/2}^-$ Niveau viel größer ist, als die M1- Aufspaltung.

4. Kernpolarisation

In Kap. V haben wir mit zwei verschiedenen Methoden die Kernpolarisation im $1s$ -Zustand von μNb bestimmt. Die beiden gefundenen Werte stimmen innerhalb der Fehler überein (siehe (V.5) und (V.8)). Wir bilden das Mittel aus der oberen und unteren Grenze und finden

$$\underline{E_{\text{NP}}(1s) = (2.4 \pm 0.7) \text{ keV}}$$

Die von verschiedenen Autoren experimentell bestimmten Kernpolarisations-Verschiebungen im $1s$ -Zustand anderer myonischer Atome haben wir in Tabelle 6-5 zusammengestellt. Zum Vergleich sind daneben die von Chen [Che69,70] berechneten Korrekturen eingetragen.

Tabelle 6-5: Kernpolarisation im $1s$ -Zustand myonischer Atome

Element	Referenz	$\Delta E_{\text{NP}}(1s)/\text{keV}$	
		Experiment	Theorie
^{93}Nb	diese Arbeit	2.4 ± 0.7	2.0 ± 0.6
^{140}Ce	[JeP70]	5.39 ± 0.65	3.9 ± 1.2
^{203}Tl	[BaE71b]	8.9 ± 1.5	} 6.0 ± 1.8
^{205}Tl		9.6 ± 1.5	
^{206}Pb	[AnH69a]	6.8 ± 2.3	6.0 ± 1.8

Wir sehen, daß innerhalb der angegebenen Fehler die aus dem Experiment bestimmten Verschiebungen der $1s$ -Niveaus mit den berechneten Kernpolarisationskorrekturen übereinstimmen.

5. Ladungsverteilung

In Tabelle 6-6 haben wir nochmals die in Kap. V unter verschiedenen Voraussetzungen bestimmten Fermi-Parameter der Ladungsverteilung des $^{93}_{41}\text{Nb}$ -Kerns zusammengestellt.

Tabelle 6-6: Fermi-Parameter der Ladungsverteilung
von ${}_{41}^{93}\text{Nb}$

	c/fm	t/fm	W	χ^2	$r_0 = R_2/A^{1/3}$ (fm)
a)	4.97 \pm 0.08	2.32 \pm 0.16	0	24.9	1.2307 \pm 0.0008
b)	5.156 \pm 0.055	1.94 \pm 0.15	0	1.25	1.2300 \pm 0.0024
c)	5.431 \pm 0.033	1.650 \pm 0.108	-0.3	2.42	
c)	5.146 \pm 0.037	1.962 \pm 0.089	0	2.12	1.2303 \pm 0.0008
c)	4.931 \pm 0.040	2.173 \pm 0.080	0.3	2.07	

- a) ohne Kernpolarisation
 b) mit Kernpolarisation, ohne 2p-1s- Übergänge
 c) mit Kernpolarisation, alle Übergänge

Die Ladungsverteilung des ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ -Kerns wurde bis heute, soweit uns bekannt ist, nur durch Elektronenstreuung bestimmt. Dieses Experiment wurde von N.G. Afanasyev et al. [Afg67] mit 200MeV-Elektronen durchgeführt. Die Auswertung der Messung mit einer zweiparametrischen Fermi-Verteilung ergab folgende c,t-Parameter

$$c = (4.87 \pm 0.05)\text{fm} \quad t = (2.52 \pm 0.03)\text{fm}$$

Diese Werte liegen, wie in Abb. 5-2 zu sehen ist, innerhalb der Fehlerschranken auf der c,t-Kurve des 2p-1s- Übergangs. Sie stimmen jedoch mit keinem der von uns gefundenen Parametersätze überein.

Aus den c,t-Werten von Afanasyev berechnen wir

$$r_0 = (1.235 \pm 0.024)\text{fm}$$

in Übereinstimmung mit dem von uns gefundenen Wert.

Der Fehler von r_0 konnte von uns um einen Faktor 30 verkleinert werden. Die damit erreichte relative Genauigkeit von $6.5 \cdot 10^{-4}$ hängt im Wesentlichen von der Unbestimmtheit in der Form der Ladungsverteilung ab (siehe Abb. 5-3).

Der von einem myonischen Übergang bestimmte Äquivalenzradius R_k ist nach der Theorie von Ford und Wills weniger modellabhängig, und der Fehler ΔR_k ist

z.B. für den $2p_{1/2} - 1s_{1/2}$ Übergang

$$\Delta R_k = -0.0052 \cdot \Delta E \text{ keV/fm}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 0.35 \cdot 10^{-4} \quad \frac{\Delta R_k}{R_k} = 0.85 \cdot 10^{-4}$$

Der relative Fehler von R_k ist somit 7.6 mal kleiner als der von r_o .

Wir vergleichen die von uns gefundenen möglichen Ladungsverteilungs-Parameter von ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ aus Tabelle 6-6 mit den in Tabelle 6-7 zusammengestellten Parametern einiger anderer Kerne zwischen $A = 40$ und $A = 142$.

In Abb. 6-1 sind die r_o -Werte aus Tabelle 6-7 gegen A aufgetragen. Wenn die mittlere Nukleonendichte $\rho_N = A / (\frac{4\pi}{3} R^3)$ unabhängig von der Nukleonenzahl A wäre, müßte $r_o = R/A^{1/3}$ für alle Kerne gleich sein (Tröpfchenmodell). Wie Abb. 6-1 zu entnehmen ist, scheint jedoch r_o mit zunehmendem A langsam kleiner zu werden, was bedeuten würde, daß die mittlere Nukleonendichte mit A größer wird. Dies wurde bereits von D. Quitmann et al. [QuE63] festgestellt.

Für $87 \leq A \leq 142$ ist das ungewichtete Mittel von r_o aus der e-Streuung $r_o = 1.216$ fm und aus μ -Atomen $r_o = 1.218$ fm. Ein systematischer Unterschied zwischen den aus e-Streuung und μ -Atomen bestimmten Werten von r_o ist nicht zu beobachten.

Tabelle 6-7: Ladungsverteilung einiger Kerne zwischen A = 40 und A = 142

Element	Me- thode	Anz.d. Param.	c fm	t fm	w	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ fm	r_o^a fm	Refe- renz
40. ¹ Ca(nat)	μ	1	3.900 \pm 0.082	(2.00) ^{b)}	—	3.458 \pm 0.056	1.304 \pm 0.021	AcB66
40 Ca	e	3	3.777	2.588	-0.158	3.601	1.359	HeM71
48 Ti	e	3	3.956	2.487	-0.133	3.673	1.305	HeM71
56 Fe	e	3	4.002	2.505	0.016	3.760	1.269	HeM71
56 Fe	μ	1	(4.42)	1.703 \pm 0.003	—	3.714 \pm 0.006	1.2533 \pm 0.0019	Böh71
58 Ni	e	3	4.351 \pm 0.010	2.193 \pm 0.009	-0.185 \pm 0.010	3.725 \pm 0.015	1.2423 \pm 0.0050	FiT70
63. ⁵ Cu(nat)	e	1	4.16	(2.50)	—	3.85 \pm 0.05	1.246 \pm 0.016	ThF70
65. ⁴ Zn(nat)	e	1	4.22	(2.50)	—	3.90 \pm 0.05	1.250 \pm 0.016	ThF70
87. ⁶ Sr(nat)	μ	1	—	—	—	4.218 \pm 0.007	1.226 \pm 0.002	KeM69
89 Y	μ	1	4.86 \pm 0.10	(2.30 \pm 0.20)	—	4.239 \pm 0.007	1.225 \pm 0.002	KeM69
89 Y	e	2	4.76 \pm 0.05	2.51 \pm 0.13	—	4.25 \pm 0.08	1.230 \pm 0.024 ^{x)}	AfG67
90 Zr	e	1	4.66 \pm 0.05	2.34 \pm 0.10	—	4.12 \pm 0.05	1.187 \pm 0.014	BeL70
90 Zr	μ	1	—	—	—	4.266 \pm 0.007	1.229 \pm 0.002	KeM69

a) $r_o = \left[\frac{5}{3} \langle r^2 \rangle \right]^{1/2} / A^{1/3}$,

b) die in Klammern stehenden Parameter wurden beim "least squares fit" nicht variiert

x) der Fehler von r_o wurde aus den Fehlern von c und t berechnet ohne Berücksichtigung der Korrelation von c und t.

Tabelle 6-7: Fortsetzung

Element	Me- thode	Anz. d. Param.	c fm	t fm	w	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ fm	$r_o^{a)}$ fm	Refe- renz
^{112}Sn	e	2	5.375 ± 0.076	2.46 ± 0.45	—	4.655 ± 0.023	1.247 ± 0.006	KhA70
^{115}In	μ	2	5.38 ± 0.18	2.34 ± 0.35	—	4.614 ± 0.218	$1.225 \pm 0.057^{*)}$	LBe70
^{133}Cs	μ	2	5.85 ± 0.07	1.82 ± 0.20	—	4.786 ± 0.092	$1.210 \pm 0.023^{*)}$	LBe70
^{138}Ba	μ	2	5.798 ± 0.057	2.11 ± 0.15	—	4.833 ± 0.077	$1.207 \pm 0.019^{*)}$	Tho69
^{139}La	μ	2	5.802 ± 0.036	2.15 ± 0.09	—	4.848 ± 0.048	$1.208 \pm 0.012^{*)}$	Tho69
^{140}Ce	μ	2	5.779 ± 0.036	2.30 ± 0.08	—	4.881 ± 0.046	$1.214 \pm 0.011^{*)}$	Tho69
^{141}Pr	μ	2	5.793 ± 0.031	2.31 ± 0.08	—	4.918 ± 0.044	$1.220 \pm 0.011^{*)}$	Tho69
^{142}Nd	μ	2	5.75 ± 0.03	2.38 ± 0.08	—	4.888 ± 0.044	$1.210 \pm 0.011^{*)}$	MaB70
^{142}Nd	e	3	5.83 ± 0.03	1.81 ± 0.18	-0.01	4.77 ± 0.090	1.180 ± 0.022	MaC71
^{142}Nd	e	3	5.539	2.588	0.104	4.914 ± 0.030	1.216 ± 0.007	HeC71
^{142}Nd	e	2	5.684	2.524 ± 0.129	—	4.913 ± 0.030	1.216 ± 0.007	HeC71

Die Form der Ladungsverteilung wird durch die Fermi-Parameter c, t und w festgelegt. Wie wir in Kap. V zeigen konnten, werden die aus μ -Atomen bestimmten c, t -Parameter von der Kernpolarisation beeinflusst. Besonders stark macht sich dies durch die Verschiebung der $c-t$ -Kurven des $3d-2p$ -Übergangs bemerkbar. Die Genauigkeit der bisher berechneten Korrekturen liegt zwischen 30 und 50 %. Solange die Kernpolarisation der verschiedenen Niveaus nicht genauer berechnet wird, lassen sich die aus der e -Streuung und μ -Atomen bestimmten c, t -Parameter nicht ohne Vorbehalt miteinander vergleichen. Möglicherweise läßt sich damit auch die Beobachtung erklären, daß die aus der e -Streuung ermittelten t -Werte ($t \approx 2.5$ fm) systematisch größer sind, als die aus μ -Atomen bestimmten t -Werte.

In Abb. 6-2 sind die aus μ -Atomen bestimmten t -Parameter einiger Kerne zwischen $A = 93$ und $A = 142$ aufgetragen. Die Werte streuen um einen Mittelwert von $t = 2.11$ fm. Zwischen ^{133}Ba und ^{142}Nd beobachtet man eine starke Zunahme von t mit A . Bei linearer Extrapolation dieser Werte zu kleineren A finden wir $t \leq 0$ für $A \leq 100$. Dieses Ergebnis ist nicht sinnvoll. Wenn wir eine Gerade

$$t(A) = a + b \cdot A$$

durch alle eingezeichneten Punkte legen, erhalten wir aus dem "least squares fit" $\chi^2 = 8.8$ ($N-F = 6$) und

$$a = (1.31 \pm 0.28) \text{ fm}$$

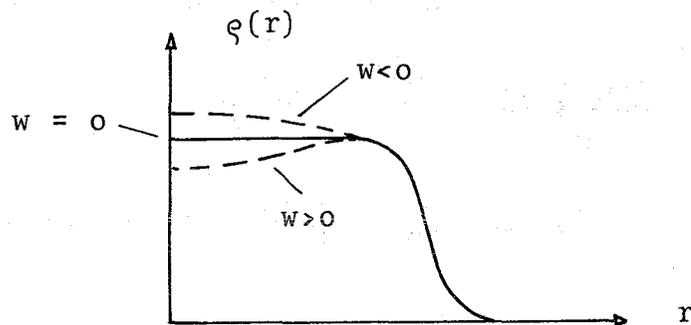
$$b = \frac{\Delta t}{\Delta A} = (0.98 \pm 0.21) 10^{-2} \text{ fm}$$

Diese Gerade ist in Abb. 6-2 eingezeichnet. Wir finden also in dem Bereich von $A = 93$ bis $A = 142$ eine lineare Zunahme der durch μ -Atome bestimmten Oberflächendicke t der Kernladungsverteilung.

In Kap. V haben wir versucht, an die mit einer zweiparametrischen Fermi-Verteilung bestimmten Äquivalenzradien von $^{93}_{41}\text{Nb}$ eine dreiparametrische Fermi-Verteilung anzupassen. Für $w = 0.3$ erhielten wir eine geringfügige Verbesserung von χ^2 gegenüber dem

Wert von χ^2 bei $w = 0$ (siehe Tabelle 5-8). Damit haben wir einen, wenn auch schwachen Hinweis für eine Verdünnung der Ladungsdichte im Kerninnern (siehe untenstehende Skizze).

Wie aus Tabelle 6-7 zu entnehmen ist, erhielt man aus der e-Streuung bei leichten Kernen (Ca, Ti) $w < 0$ und bei schwereren Kernen (Nd) $w > 0$. Dieses Verhalten der Kernladungsdichte wird auch theoretisch vorhergesagt. H.S. Köhler [Köh69] erhält aus Hartree-Fock-Rechnungen für leichtere Kerne (Ca, Fe) eine negative ($w < 0$) und für schwerere Kerne (Zr, Ba) eine positive Krümmung ($w > 0$) der Ladungsdichte im Kernmittelpunkt. Der von uns gefundene positive Wert von w fügt sich gut in dieses Bild ein.



6. "Cut off"-Masse und endliche Ausdehnung des Myons

In Kap. II 1.6 haben wir bereits erwähnt, daß eine mögliche endliche Ausdehnung des Myons zu einer Verschiebung ΔE_{Λ} der myonischen Energieniveaus führt. Die Ausdehnung R_{Λ} des Myons wird durch die "cut off"-Masse Λ ausgedrückt. Es gilt $R_{\Lambda} = \hbar c / \Lambda$. Der Zusammenhang zwischen Λ und ΔE_{Λ} wird durch (II.12) gegeben.

Wir wollen nun versuchen, eine untere Grenze von Λ bzw. eine obere Grenze von R_{Λ} zu finden, indem wir aus dem Experiment die maximal zulässige Energieverschiebung δE_{\max} eines myonischen Röntgenübergangs abschätzen. Nach (II.12) ist die Energieverschiebung eines Übergangs vom Zustand $|i\rangle$ in den Zustand $|f\rangle$

$$\Delta E_{\Lambda}^{if} = \frac{4\pi e^2 (\hbar c)^2}{\Lambda^2} (\langle \varrho \rangle_i - \langle \varrho \rangle_f) \quad (\text{VI.4})$$

Wir können ΔE_{Λ}^{if} z.B. für $\Lambda = \Lambda_0 = 1 \text{ GeV}/c$ berechnen. Dann gilt für ein beliebiges Λ

$$\Delta E_{\Lambda}^{if} = \frac{\Lambda_0^2}{\Lambda^2} \cdot \Delta E_{\Lambda_0}^{if} \leq \delta E_{\max}$$

Hieraus erhalten wir die Ungleichung

$$\Lambda \geq \Lambda_0 \cdot \sqrt{\Delta E_{\Lambda_0}^{if} / \delta E_{\max}} \quad (\text{VI.5})$$

Eine Abschätzung von δE_{\max} läßt sich finden, wenn man annimmt, daß δE_{\max} innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der experimentell und theoretisch bestimmten Energien der myonischen Röntgenübergänge liegt [IaL71].

In Tabelle 6-8 haben wir die experimentellen und theoretischen Ungenauigkeiten der myonischen Übergänge in Nb zusammengestellt. In Spalte 1 steht der Meßfehler (Tabelle 4-5), in Spalte 2 der Fehler der Lambshift (Tabelle 2-3) und der Kernpolarisationskorrektur (V.5) und in Spalte 3 die von der ungenau bekannten Ladungsverteilung herrührende Unbestimmtheit der berechneten

Energien (Tabelle 5-4). In Spalte 4 sind die aus (VI.4) berechneten Verschiebungen $\Delta E_{\Lambda_0}^{if}$ eingetragen. Aus den ersten drei Spalten entnehmen wir δE_{\max} und erhalten damit die in Spalte 5 angegebenen Verhältnisse $\Delta E_{\Lambda_0}^{if}/\delta E_{\max}$. Den größten Wert finden wir beim $2p_{3/2}-1s_{1/2}$ Übergang

$$\Delta E_{\Lambda_0}^{if}/\delta E_{\max} = 8.654$$

Aus der Ungleichung (VI.5) berechnen wir damit die größte untere Grenze von Λ

$$\Lambda \geq \sqrt{8.654} \text{ GeV}/c = \underline{2.94 \text{ GeV}/c} \quad (\text{VI.6})$$

Tabelle 6-8: Myonische Übergänge in Nb als Test für die Quantenelektrodynamik bei kleinen Abständen

Übergang	1 $\delta E_{\text{exp.}}$ keV	2 $\delta E_{\text{th.}}$ keV	3 $\delta E_{\text{th.}}$ keV	4 ΔE_{Λ_0} keV	5 $\frac{\Delta E_{\Lambda_0}}{\delta E_{\max}}$
$2p_{1/2}-1s_{1/2}$	0.090	0.702	0.017	6.009	8.560
$2p_{3/2}-1s_{1/2}$	0.080	0.700	0.021	6.058	8.654
$3d_{3/2}-2p_{1/2}$	0.110	0.047	0.029	0.137	1.245
$3d_{5/2}-2p_{3/2}$	0.110	0.044	0.026	0.088	0.800
$3p_{1/2}-2s_{1/2}$	0.160	0.194	0.030	0.900	4.639
$3p_{3/2}-2s_{1/2}$	0.110	0.194	0.028	0.900	4.639
$2s_{1/2}-2p_{1/2}$	0.080	0.241	0.049	0.763	3.166
$2s_{1/2}-2p_{3/2}$	0.060	0.238	0.045	0.812	3.412

Iachello und Lande [IaL71] haben Λ aus den von Anderson et al. [AnH69b] gemessenen myonischen Röntgenübergängen in ^{208}Pb abgeschätzt und finden $\Lambda > 1.44 \text{ GeV}/c$.

Die von uns gefundene "cut off"-Masse entspricht einer Abänderung des Coulombpotentials des Myons für Abstände

$$R_{\Lambda} = \frac{\hbar c}{\Lambda} \leq 0.067 \text{ fm}$$

Nach Brodsky und Drell [BrD70] entspricht dies einem "root mean square"-Radius des Myons

$$\langle r_{\mu}^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{6} \cdot R_{\Lambda} \leq 0.16 \text{ fm} \quad (\text{VI.7})$$

R. Frosch et al. [FrH68] haben durch Elektronenstreuung die Ladungsverteilung in ^{40}Ca bestimmt und damit die Energie des myonischen 2p-1s- Röntgenübergangs in ^{40}Ca mit einer Genauigkeit von $\pm 2\text{keV}$ berechnet. Die gemessenen und berechneten Energien stimmen innerhalb der Fehler sehr gut überein.

Ein möglicher Unterschied in der endlichen Ausdehnung des Myons und des Elektrons kann zu einer Abweichung zwischen der gemessenen Energie und der Energie führen, die mit der Ladungsverteilung aus der Elektronenstreuung berechnet wurde. Frosch et al. nehmen an, daß eine solche Abweichung innerhalb ihres Fehlers von $\pm 2\text{keV}$ verborgen sein könnte.

Der Einfluß der endlichen Kernausdehnung auf die Energie des 2p-1s- Übergangs in ^{40}Ca beträgt 200keV und ist proportional zum "root mean square"-Radius $\langle r_N^2 \rangle$ des Kerns. Wenn das Myon einen endlichen "root mean square"-Radius hat und man annimmt, daß das Elektron punktförmig ist, dann wird der relative Effekt in der Übergangsenergie

$$\frac{\langle r_{\mu}^2 \rangle}{\langle r_N^2 \rangle} \leq \frac{2}{200} = 0.01$$

Mit $\langle r_N^2 \rangle^{1/2} = 3.5 \text{ fm}$ findet man damit

$$\langle r_{\mu}^2 \rangle^{1/2} \leq 0.35 \text{ fm}$$

Dieser Wert ist etwa doppelt so groß wie der von uns gefundene. Die Möglichkeit einer Abänderung der Quantenelektrodynamik bei kleinen Abständen wurde auch in anderen Experimenten diskutiert. Eine Zusammenstellung neuerer Ergebnisse ist bei Brodsky und Drell [BrD70] zu finden. Wir entnehmen dieser Zusammenstellung ein Beispiel.

Aus dem gemessenen Verhältnis der elastischen μp - und $e p$ -Streuquerschnitte kann man einen Unterschied der "cut-off"-Massen des Myons und des Elektrons abschätzen

$$\frac{1}{\Lambda^2} = \frac{1}{\Lambda_{\mu}^2} - \frac{1}{\Lambda_e^2} \leq (2.26 \text{ GeV}/c)^{-2}$$

entsprechend einem Unterschied in den "root mean square"-Radien:

$$\sqrt{\Delta\langle r^2 \rangle} = \frac{\sqrt{6} \hbar c}{\Lambda} \leq 0.21 \text{ fm}$$

Dieses Ergebnis ist mit der von uns gefundenen Abschätzung (VI.7) verträglich.

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that proper record-keeping is essential for ensuring transparency and accountability in financial reporting.

2. The second part of the document outlines the various methods and techniques used to collect and analyze data. It highlights the need for a systematic approach to data collection and the importance of using reliable sources of information.

3. The third part of the document discusses the challenges and limitations of data collection and analysis. It notes that while data is a valuable resource, it is not always easy to obtain or interpret, and there are often significant costs associated with data collection and analysis.

Literaturverzeichnis

- AcB66 H.L. Acker, G. Backenstoss, C. Daum, J.C. Sens and S.A. DeWit - Nucl. Phys. 87(1966), 1
- AfG67 N.G. Afanasyev, V.A. Goldstein et al. - Proc. of the Int. Conf. on Nucl. Structure, Tokyo, Sept. 7-13, 1967, ed. J. Sanada, S.528
- AnH69a H.L. Anderson, C.K. Hargrove, E.P. Hinks, J.D. McAndrew, R.J. McKee and D. Kessler - Phys. Rev. Letters 22(1969), 221
- AnH69b H.L. Anderson, C.K. Hargrove, E.P. Hinks, J.D. McAndrew, R.J. McKee, R.D. Barton and D. Kessler - Phys. Rev. 187(1969), 1565
- AuC68 M.Y. Au-Yang and M.L. Cohen - Phys. Rev. 174(1968), 468
- BaB68 R.C. Barrett, S.J. Brodsky, G.W. Erickson and M.H. Goldhaber - Phys. Rev. 166(1968), 1589
- Bac70 H. Backe - Thesis, T.H. Darmstadt, 1970
Z. Physik 241(1971), 435
- BaC70 G. Backenstoss, S. Charalambus, H. Daniel, Ch.v.d. Malsburg, G. Poelz, H.P. Povel, H. Schmitt and L. Tauscher - Phys. Letters 31B(1970), 233
- BaC71 G. Backenstoss, S. Charalambus, H. Daniel, W.D. Hamilton, U. Lynen, Ch.v.d. Malsburg, G. Poelz and H.P. Povel - Nucl. Phys. A162(1971), 541
- BaD71 G. Backenstoss, H. Daniel, H. Koch, U. Lynen, Ch.v.d. Malsburg, G. Poelz, H.P. Povel, H. Schmitt, K. Springer and L. Tauscher - Phys. Letters 36B(1971), 403

- BaE71a H. Backe, R. Engfer, U. Jahnke, E. Kankeleit, K.H. Lindenberger, C. Petitjean, H. Schneuwly, W.U. Schröder and H.K. Walter - "Hyperfine Interactions in Excited Nuclei", vol.II, ed. G. Goldring and R. Kalish, Gordon & Breach, New York, London, Paris, 1971, S.729
- BaE71b H. Backe, R. Engfer, E. Kankeleit, R.M. Pearce, C. Petitjean, L. Schellenberg, H. Schneuwly, W.U. Schröder, H.K. Walter and A. Zehnder - Contr. paper subm. to the 4th Int. Conf. on High-Energy Physics and Nucl. Structure, Dubna, USSR, Sept. 7-11, 1971, CERN preprint
- Bar68 R.C. Barrett - Phys. Letters 28B(1968), 93
und private Mitteilung
- Bar70 R.C. Barrett - Phys. Letters 33B(1970), 388
- BeL70 H.A. Bentz, M. Loewenhaupt and H. Theissen - Z.Physik 231(1970), 484
- Böh71 T. Böhringer - Diplomarbeit, ETH-Zürich, 1971
- BoW50 A. Bohr and V.F. Weisskopf - Phys. Rev. 77(1950), 94
- BrD70 S.J. Brodsky and S.D. Drell - Ann. Rev. Nucl. Science 20(1970), 147
- CaB69 M.R. Cates, J.B. Ball and E. Newmann - Phys. Rev. 187
(1969), 1682
- CaL70 T.A. Carlson, C.C. Lu, T.C. Tucker and C.W. Nestor, Jr. - ORNL-4614, 1970
- CaM52 M. Camac, A.D. McGuire, J.B. Platt and H.J. Schulte - Phys. Rev. 88(1952), 134
- ChC71 S.C. Cheng, M.Y. Chen, J.W. Kast, W.Y. Lee, E.R. Macagno, A.M. Rushton and C.S. Wu - Phys. Letters 34B(1971), 615
- Che70 M.Y. Chen - Phys. Rev. C1(1970), 1167
- CiM63 A. Citron, M. Morpurgo and H. Øverås - CERN 63-65

- CoD49 M.G.E. Cosyns, C.C. Dilworth, G.P.S. Occialini,
M. Schoenberg and N. Page - Proc. Phys. Soc. Am.
62(1949), 801
- Co169 R.K. Cole, Jr. - Phys. Rev. 177(1969), 164
- CoH53 L.N. Cooper and E.M. Henley - Phys. Rev. 92(1953), 801
- DeD68 S. Devons and I. Duerdoth - Advances in Nuclear Physics,
ed. M. Baranger and E. Vogt, Plenum Press, New York,
vol. 2, 295, (1968)
- Edm60 A.R. Edmonds, "Angular Momentum in Quantum Mechanics",
Princeton University Press, second issue 1960
- EiK61 Y. Eisenberg and D. Kessler - Nuovo Cimento XIX(1961),
1195
- EnS68 R. Engfer and F. Scheck - Z.Physik 216(1968), 274
- ErY65 G.W. Erickson and D.R. Yennie - Ann.Phys.(N.Y.)
35(1965), 271 and 447
- Fey61 R.P. Feynman, "Quantum Electrodynamics", A Lecture Note
and Reprint Volume, W.A. Benjamin, Inc., New York, 1961
- FiR53 V.L. Fitch and J. Rainwater - Phys. Rev. 92(1953), 789
- FiT70 J.R. Ficenec, W.P. Trower, J. Heisenberg and I. Sick -
Phys. Letters 32B(1970), 460
- FoW69 K.W. Ford and J.G. Wills - Phys. Rev. 185(1969), 1429
- FrH68 R.F. Frosch, R. Hofstadter, J.S. McCarthy, G.K. Nöldeke,
K.J. van Oostrum, M.R. Yearian, B.C. Clark, R. Herman
and D.G. Ravenhall - Phys. Rev. 174(1968), 1380
- Fri69a B. Fricke - Z.Physik 218(1969), 495
- Fri69b B. Fricke - Nuovo Cimento Letters 2(1969), 859
- FuC69 G.H. Fuller and V.W. Cohen, "Nuclear Spins and Moments",
Nuclear Data Tables, Sect.A, vol.5, Nr. 5-6, March 1969
- GöF70 H. Göbel, E.J. Feicht and H. Vonach - Z.Physik
240(1970), 430

- Hea69 R.L. Heath, Inv. Paper at the Int. Conf. on Radio-activity in Nucl. Spectroscopy Techniques and Applications, Vanderbilt University, Nashville, Aug. 1969
- HeC71 J. Heisenberg, J.S. McCarthy, I. Sick and M.R. Yearian - Nucl. Phys. A164(1971), 340
- HeM71 J.Heisenberg, J.S. McCarthy and I. Sick - Nucl. Phys. A164(1971), 353
- IaL71 F. Iachello and A. Lande - Phys. Letters 35B(1971), 205
- JoS70 J. Johnson and R. A. Sorensen - Phys. Rev. C2(1970), 102
- JeP70 D.A. Jenkins, R.J. Powers, P. Martin, G.H. Miller, R.E. Welsh and A.R. Kunselman - Phys. Letters 32B(1970), 267
- KeM69 D. Kessler, R.J. McKee, C.K. Hargrove, E.P. Hinks and H.L. Anderson, Carlton University, Ottawa, Canada, 1969
- KhA70 V.M. Khvastunov, N.G. Afanasyev et al. - Nucl. Phys. A146(1970), 15
- Köh70 H.S. Köhler - Nucl. Phys. A144(1970), 407
- Kop56 H. Kopfermann, "Kernmomente", Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a.M., 1956
- LBe70 W.Y. Lee, S. Bernow, M.Y. Chen, S.C. Cheng, D. Hitlin, J.W. Kast, E.R. Macagno, A.M. Rushton and C.S. Wu - Phys. Rev. Letters 23(1969), 648
- LeB63 M. LeBellac - Nucl. Phys. 40(1963), 645
- LiB71 R. Link, H. Backe, R. Engfer, L. Fluri, R. Michaelson, C. Petitjean, H. Schneuwly and H.K. Walter - submitted to Phys. Letters, Aug. 1971, CERN preprint
- MaB70 E.R. Macagno, S. Bernow, S.C. Cheng, S. Devons, I. Duerdoth, D. Hitlin, J.W. Kast, W.Y. Lee, J. Rainwater and C.S. Wu - Phys. Rev. C1(1970), 1202
- MaC71 D.W. Madsen, L.S. Cardman, J.R. Legg and L.K. Bockelman - Phys. Rev. 184(1969), 1162
- Ma170 Ch. von der Malsburg - Thesis, Univ.-Heidelberg, 1970
- MaR61 R.A. Mann and M.E. Rose - Phys. Rev. 121(1961), 293

- MiC54 A.B. Mickelwait and H.C. Corben - Phys. Rev. 96(1954), 1145
- Mos68 S.A. Moszkowski, "Theory of Multipole Radiation", in " α , β , γ -Ray-Spectroscopy", ed. K. Siegbahn, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968, S.863
- Mur58 K. Murakawa - J. Phys. Soc. Japan 13(1958), 101
- QuE63 D. Quitmann, R. Engfer, U. Hegel, P. Brix, G. Backenstoss, K. Goebel and B. Stadler - Nucl. Phys. 51(1963), 609
- Rev71 "Review of Particle Properties", Rev. Mod. Phys. 43(1971)
- Ros55 M.E. Rose, "Multipole Fields", J. Wiley & Sons, Inc., New York, Chapman & Hall, Ltd., London 1955
- Ros58 M.E. Rose, "Internal Conversion Coefficients", North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958
- Ros61 M.E. Rose, "Relativistic Electron Theory", J. Wiley & Sons, Inc., New York, London, 1961
- Sch71 F. Scheck and J. Hüfner, "Muonic Atoms", to be published by the Academic Press, edited by V.N. Hughes and C.S. Wu, 1971
- Ska70 H.F. Skardhamar - Nucl. Phys. A151(1970), 154
- SoS61 S.N. Sokolov and I.N. Silin - CERN Report No. P810-1961, CERN Computer Library D510
- Tan71 K. Tanabe - Phys. Rev. A3(1971), 1282
- ThF70 H. Theissen, H. Fink and H.A. Bentz - Z.Physik 231(1970), 475
- Tho69 A.C. Thomson, Thesis, Carnegie-Mellon University, 1969
- Tic48 H.K. Ticho - Phys. Rev. 48(1948), 55
- Wes58 D. West - Rept. Progr. Phys. 21(1958), 271
- Whi34 H.E. White, "Introduction to Atomic Spectra", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, London, 1934
- WuW69 C.S. Wu and L. Willets, Ann. Rev. Nucl. Sci. 19(1969), 527

Verzeichnis der Abbildungen

- 1 - 1 Niveau-Schema des myonischen Nb-Atoms.
(Die durchgezogenen Niveaus wurden mit der Punktkernformel (I.3) berechnet. Die gestrichelten Niveaus erhält man aus der Lösung der Dirac-Gleichung für eine Fermi-Ladungs-Verteilung mit $c = 5.15$ fm und $t = 2.0$ fm.)
- 1 - 2 Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi|^2$ des Myons in den $1s_{1/2}$ -, $2s_{1/2}$ -, $2p$ - und $3s_{1/2}$ - Zuständen von μNb . Fermi-Ladungsverteilung ρ .
- 1 - 3 Überlappung $\rho \cdot |\psi|^2$ der $1s_{1/2}$ -, $2s_{1/2}$ -, $2p$ - und $3s_{1/2}$ - Zustände von μNb mit der Kernladungsverteilung ρ von ${}_{41}^{93}\text{Nb}$.
- 1 - 4 Niveau-Schema des ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ -Kerns [Ref. (GÖF70)].
- 2 - 1 Elektronenpotential im ungestörten Nb-Atom [Ref. (CaL70)].
- 2 - 2 Radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|u(r)|^2$ des $g_{9/2}$ - Protons in ${}_{41}^{93}\text{Nb}$, Aufenthaltswahrscheinlichkeit des $1s_{1/2}$ - Myons und Fermi-Verteilung der Kernladung ($c = 5.0$ fm, $t = 2.3$ fm).
- 2 - 3 Formfaktoren f_{μ} der M1-Kopplungskonstanten der $1s_{1/2}$ -, $2s_{1/2}$ - und $2p_{1/2}$ - Zustände in μNb für eine Fermi-Verteilung des magnetischen Kern-Dipolmoments ($t = 2.2$ fm).
- 2 - 4 Formfaktor der E2-Kopplungskonstanten des $2p_{3/2}$ - Zustands in μNb für eine Kugelschalenverteilung des Quadrupolmoments Q
- $$\rho_Q = \delta(R - R_0)/R_0^2$$
- 3 - 1 Schematischer Aufbau des Experiments (Blick von oben, Masstab 1:3).
(1) - (4) Szintillationszähler.

- 3 - 2 Rangekurve für Pionen und Myonen aus dem Vorwärtszerfall. (Die Stoprate (1,2,3,4) ist auf $5 \cdot 10^6$ (1,2) - Impulse normiert.)
- 3 - 3 Rangekurve für Myonen aus dem Rückwärtszerfall. (Die Stoprate (1,2,3,4) ist auf 10^6 (1,2) - Impulse normiert.)
- 3 - 4 Vereinfachtes Blockdiagramm der Elektronik.
A : Abschwächer, VZ : Verzögerung, D : Diskriminator,
K : Koinzidenz, LV : ladungsempfindlicher Vorverstärker,
FV : Filter-Verstärker, ZG : Zeitsignalgenerator ("constant fraction timing discriminator"), BA : "biased amplifier",
HV : Hauptverstärker, DR : Digital-Stabilisator.
- 4 - 1 Spektrum von μNb in Bereich von 490-880 keV (Detektor II).
Die ^{92}Zr - γ -Linie kommt von der auf S.74 beschriebenen Einfangsreaktion [Ref. (BaC71)].
- 4 - 2 Spektrum von μNb in Bereich von 80-175 keV (Detektor III).
- 4 - 3 Aufspaltungsschema der 3d-2p-Übergänge in μNb .
Die Hyperfeinstrukturaufspaltung der 2p-Niveaus ist um einen Faktor 5 gegenüber der Feinstrukturaufspaltung gespreizt. Die HFS-Aufspaltung der 3d-Niveaus und der schwache $3d_{3/2} - 2p_{3/2}$ - Spinflip-Übergang sind nicht eingezeichnet. Der Abstand der 2p- und 3d-Niveaus ist nicht maßstabsgetreu.
- 4 - 4 $\hat{\chi}^2$ als Funktion von $b(2p_{3/2})$ für den $3d_{5/2} - 2p_{3/2}$ - Übergang.
 $\hat{\chi}_{\min}^2 = 4.60$, $N - F = 176$, $\sigma = 0.023$ keV
 $b(2p_{3/2}) = -2.92$ keV, $\Delta b = \sigma \cdot (\hat{\chi}_{\min}^2)^{1/2} = 0.05$ keV.
- 4 - 5 Spektrum der 3d-2p-Übergänge in μNb .
Die Bedeutung der HFS-Komponenten A,B,a,b,... ist Abb. 4-3 zu entnehmen. Die Bezeichnung a',b',c',d' der Komponenten des $3d_{3/2} - 2p_{3/2}$ -Übergangs entspricht der Bezeichnung a,b,c,d beim $3d_{5/2} - 2p_{3/2}$ - Übergang.

4 - 6 Aufspaltungsschema der 2p-1s- und 2s-2p-Übergänge in μNb . Die HFS-Aufspaltung der Niveaus wurde um einen Factor 5 gegenüber der FS-Aufspaltung des 2p-Niveaus gespreizt. Der Abstand der Niveaus ist nicht masstabsgetreu.

4 - 7 $\hat{\chi}^2$ als Funktion von $b(2p_{3/2})$ für den $2p_{3/2} - 1s_{1/2}$ Übergang.

$$\hat{\chi}_{\min}^2 = 1.296, \quad N - F = 288, \quad \sigma = 0.08 \text{ keV}$$

$$b(2p_{3/2}) = -2.93 \text{ keV}, \quad \Delta b = \sigma \cdot (\chi_{\min}^2)^{1/2} = 0.10 \text{ keV}.$$

4 - 8 (a) Spektrum der 2p \rightarrow 1s - Übergänge in μNb ("double escape peaks").

Bezeichnung der HFS-Komponenten :

$F \rightarrow F'$	$2p_{3/2} - 1s_{1/2}$	$2p_{1/2} - 1s_{1/2}$
6 - 5	a	-
4 - 5	b	1
5 - 5	c	2
3 - 4	d	-
4 - 4	e	3
5 - 4	f	4

(b) Eichspektrum der ^{228}Th -Quelle.

Von dem 2614 keV - Übergang in ^{208}Pb wurde der "double escape peak" gemessen.

4 - 9 Spektrum der 5g - 4f und 5f - 4d - Übergänge in μNb .

4 - 10 Spektrum der 6g - 4f und 6f - 4d - Übergänge in μNb .

4 - 11 $\hat{\chi}^2$ und $\delta(2p_{1/2})$ als Funktion von $\delta(2s)$ für den $2s_{1/2} - 2p_{1/2}$ - Übergang.

$$\hat{\chi}_{\min}^2 = 0.863, \quad N - F = 100, \quad \sigma = 0.10 \text{ keV}$$

$$\delta(2s) = 0.46 \text{ keV}, \quad \delta(2p_{1/2}) = 0.94 \text{ keV}.$$

4 - 12 Spektrum der $2s_{1/2} - 2p_{1/2}$ und $10 \rightarrow 5$ Übergänge in μNb .

Bezeichnung der FS-Komponenten der $10 \rightarrow 5$ - Übergänge:

$$1 : 10h_{11/2} - 5g_{9/2} + 10h_{9/2} - 5g_{9/2}$$

$$2 : 10h_{9/2} - 5g_{7/2}$$

$$3 : 10g_{9/2} - 5f_{7/2} + 10g_{7/2} - 5f_{7/2}$$

$$4 : 10g_{7/2} - 5f_{5/2}$$

$$5 : 10f_{7/2} - 5d_{5/2} + 10f_{5/2} - 5d_{5/2}$$

$$6 : 10f_{5/2} - 5d_{3/2}$$

4 - 13 $\hat{\chi}^2$ als Funktion von $\delta(2s)$ für den $2s_{1/2} - 2p_{3/2}$ - Übergang.

$$\hat{\chi}_{\min}^2 = 1.025, \quad N - F = 65, \quad \sigma = 0.05 \text{ keV}$$

$$\delta(2s_{1/2}) = 0.57 \text{ keV.}$$

4 - 14 Spektrum der $2s_{1/2} - 2p_{3/2}$ und $8 \rightarrow 5$ - Übergänge in μNb .

Die Bezeichnung der FS-Komponenten 1,2, ... der $8 \rightarrow 5$ - Übergänge entspricht der in Abb. 4-12 für die $10 \rightarrow 5$ - Übergänge angegebenen Bezeichnung.

Bezeichnung der HFS-Komponenten des $2s_{1/2} - 2p_{3/2}$ - Übergangs :

	F \rightarrow F'	
a	4	3
b	4	4
c	4	5
d	5	4
e	5	5
f	5	6

4 - 15 Spektrum der $3p - 2s$ - Übergänge in μNb .

4 - 16 Spektrum der $3s - 2p$ - Übergänge in μNb .

- 4 - 17 (a) relative Transmission des Nb-Targets $C_\lambda(E)$
 (b) relative Intensitätskorrektur $\gamma(E) = C_\lambda \cdot \eta$
 (c) relative Ansprechwahrscheinlichkeit von Detektor III $\eta(E)$
- 5 - 1 Energie des $2p_{1/2} - 1s_{1/2}$ - Übergangs als Funktion der Parameter c und t einer Fermi-Verteilung der Kernladung.
- 5 - 2 c, t -Diagramme von ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ ohne Kernpolarization und Projektion von

$$\chi^2(c, t) = \sum \left[\frac{E_{\text{th}}(c, t) - E_{\text{exp}}}{\delta E_{\text{exp}}} \right]^2$$

auf die c -Achse.

- 5 - 3 $\chi^2(c, t)$ als Funktion des Faktors g_1 , wobei die von M.Y. Chen berechneten Kernpolarisationskorrekturen der $1s$ -, $2s$ - und $2p$ -Niveaus mit g_1 multipliziert werden.

$$\chi_{\text{min}}^2 = 2.12, \quad N - F = 5, \quad \sigma_g = 0.26$$

$$g_1 = 1.28, \quad \Delta E_{\text{np}}(1s) = 2.53 \text{ keV.}$$

- 5 - 4 c, t -Diagramme von ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ mit Kernpolarisation und Projektion von $\chi^2(c, t)$ auf die c -Achse.
- 5 - 5 Bestimmung der Äquivalenzradien der Ladungsverteilung des ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ -Kerns aus verschiedenen myonischen Röntgenübergängen.
- 5 - 6 Äquivalenzradien der Kernladungsverteilung von ${}_{41}^{93}\text{Nb}$.
 Berechnete R_k -Kurven:

	$c/\text{fm.}$	$t/\text{fm.}$	W	χ^2
A	5.185	1.865	0	3.257
B	5.146	1.962	0	2.123
C	5.105	2.057	0	3.354
D	4.931	2.173	0.3	2.066

6 - 1 $r_0 = (5 \langle r^2 \rangle / 3)^{1/2} / A^{1/3}$ als Funktion des Atomgewichts A für verschiedene Kerne zwischen $40 \leq A \leq 142$. (Ergebnisse aus e-Streuung und μ -Atomen.)

6 - 2 Oberflächendicke t als Funktion von A für verschiedene Kerne zwischen $93 \leq A \leq 142$. (Ergebnisse aus μ -Atomen.)

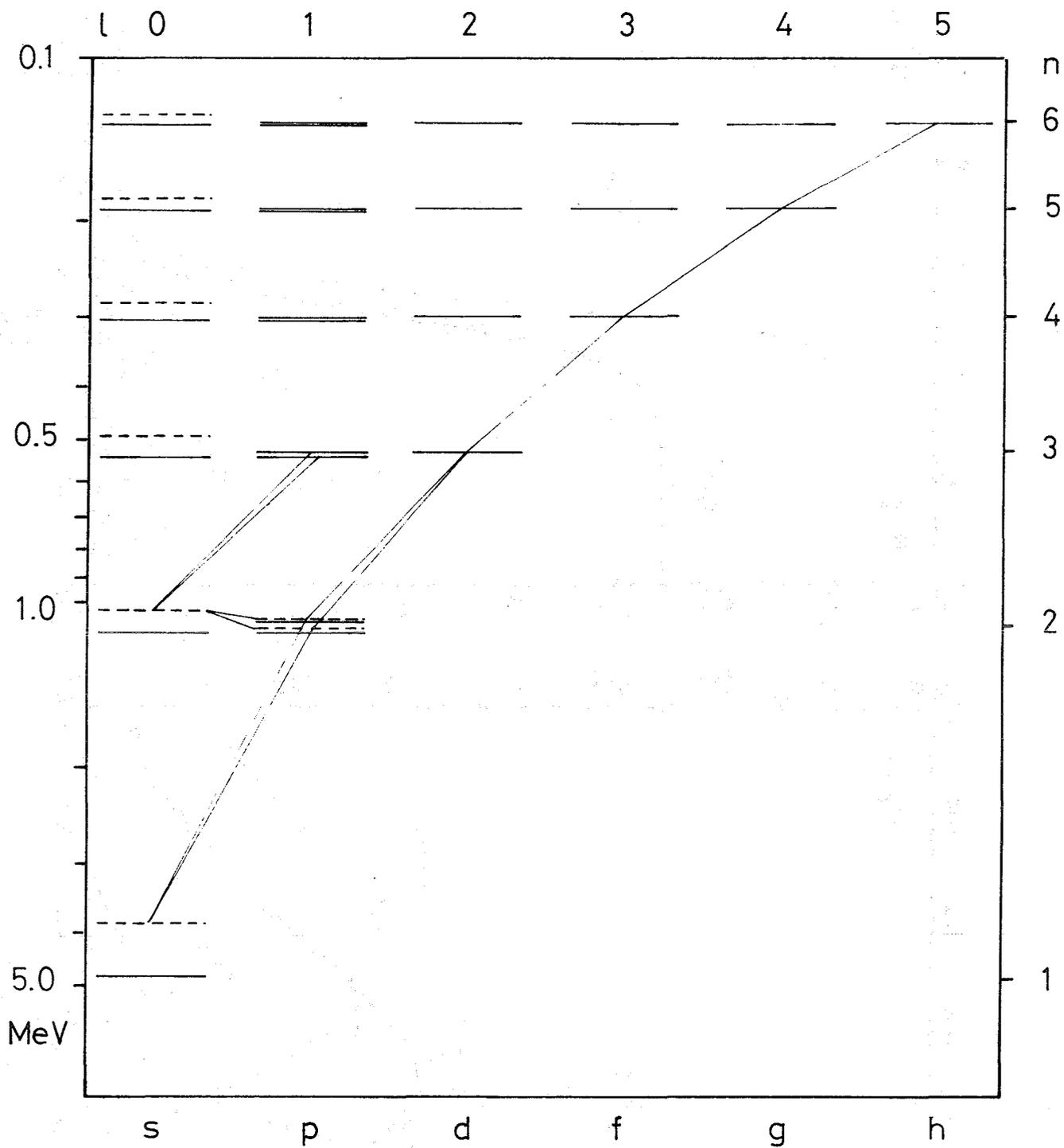


Abb.1-1

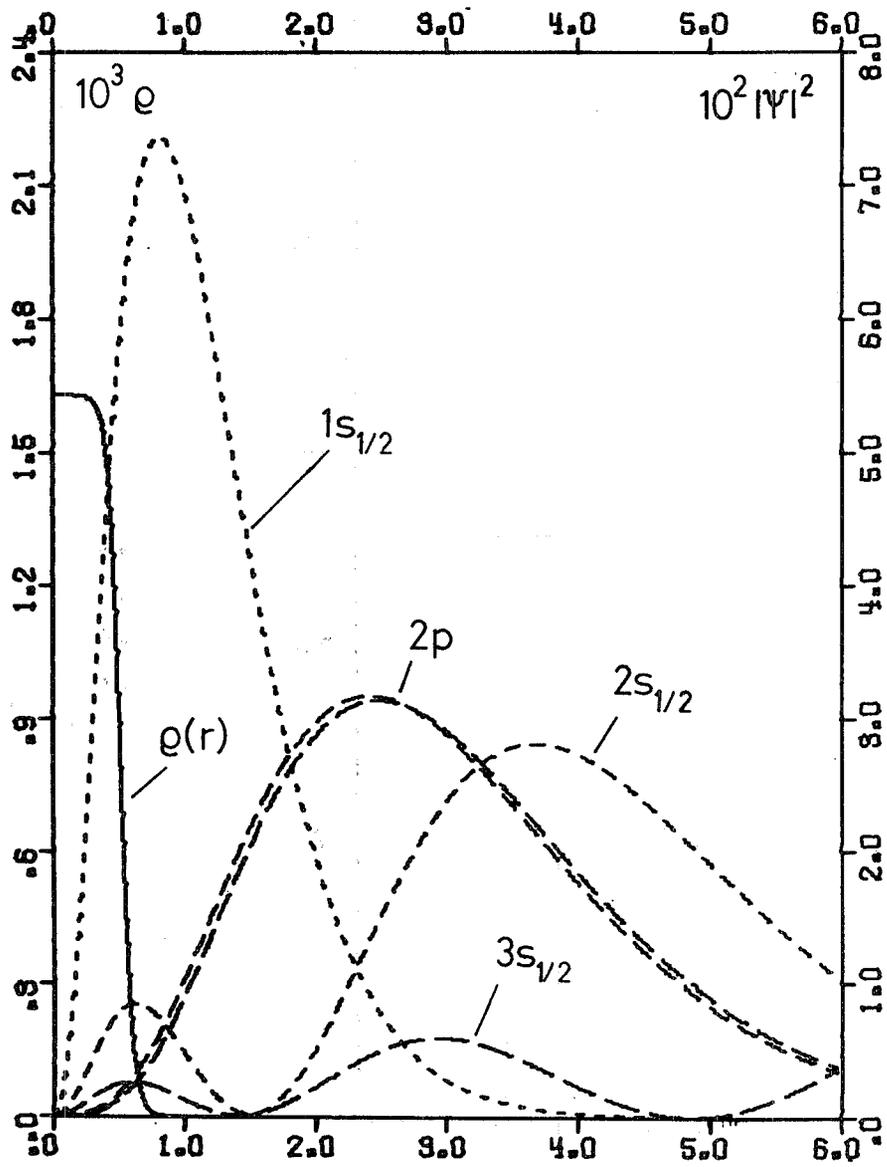


Abb.1-2

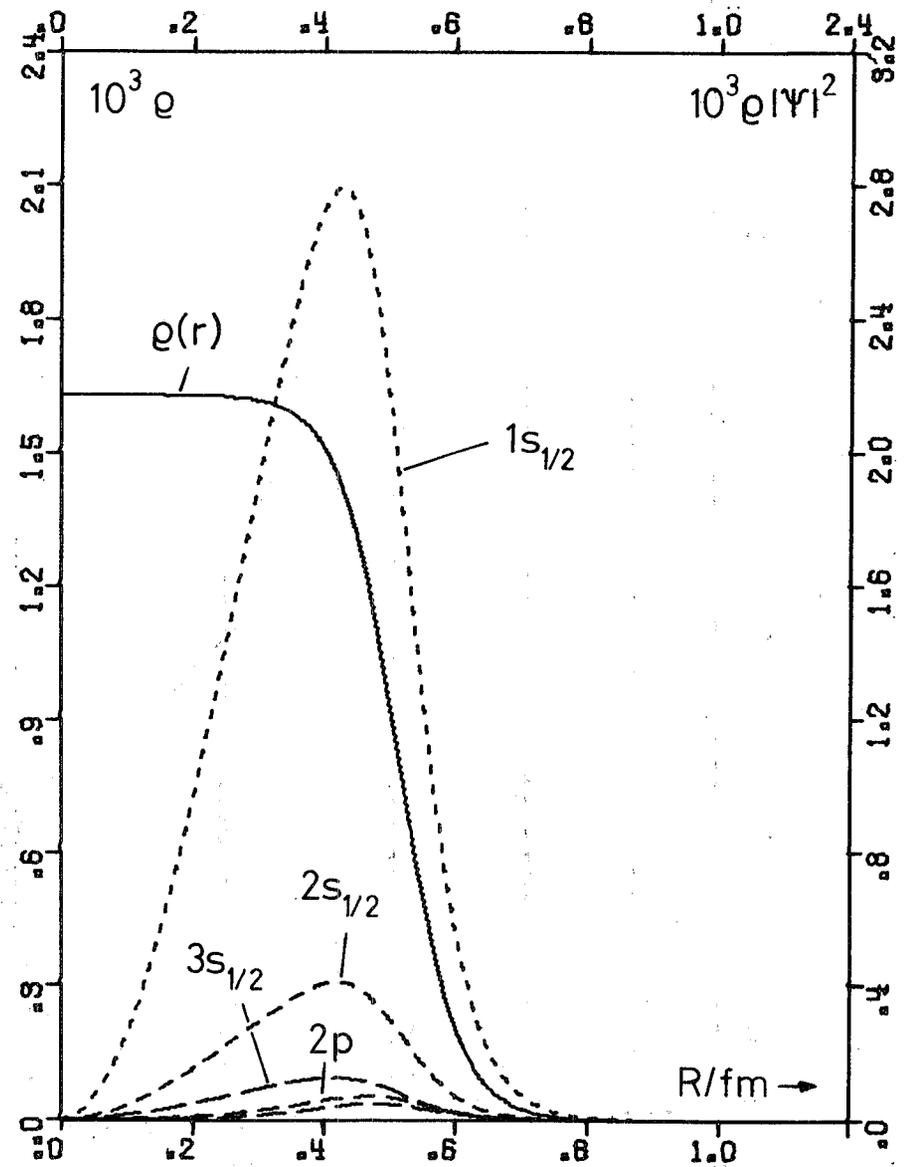


Abb.1-3

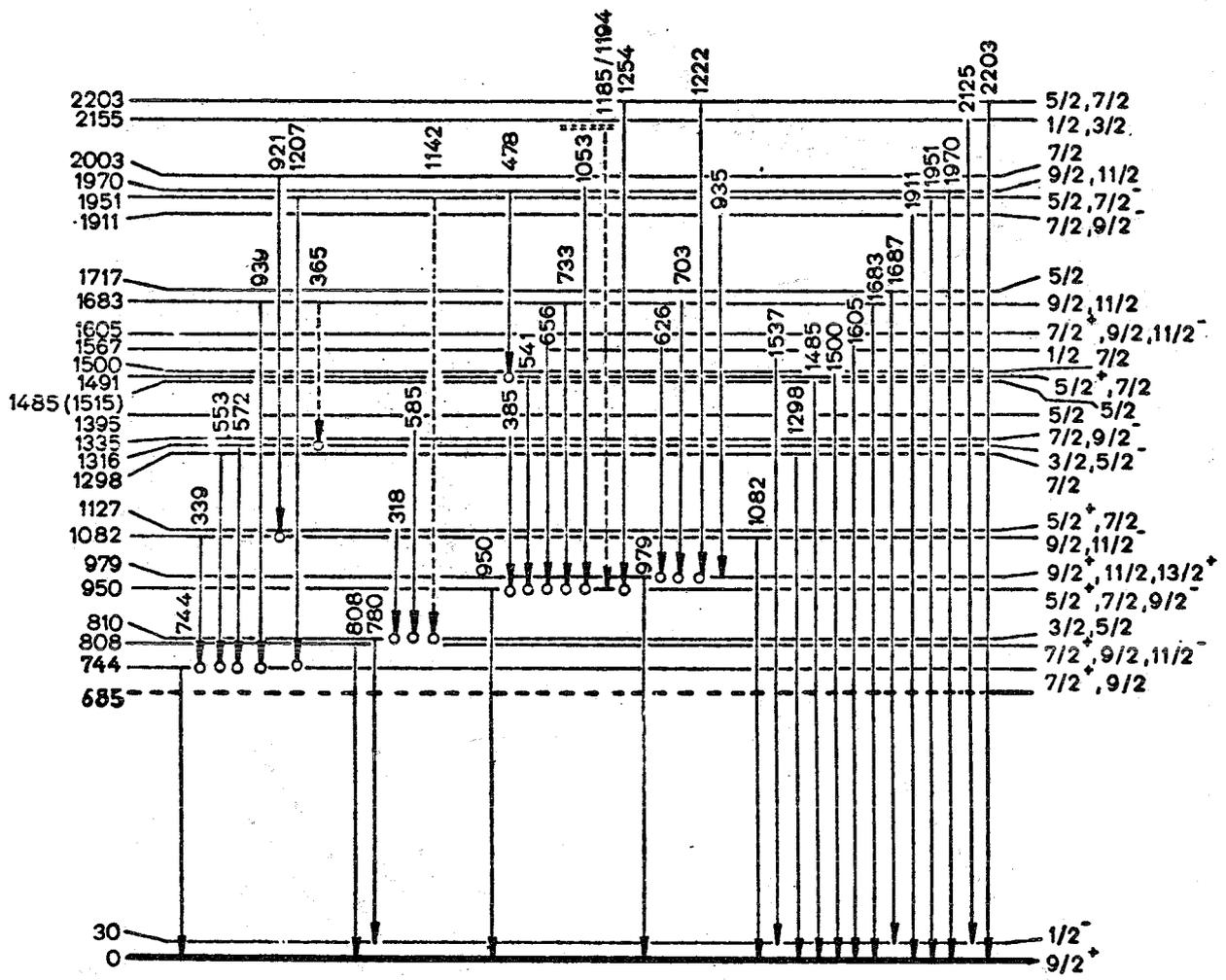


Abb.1-4

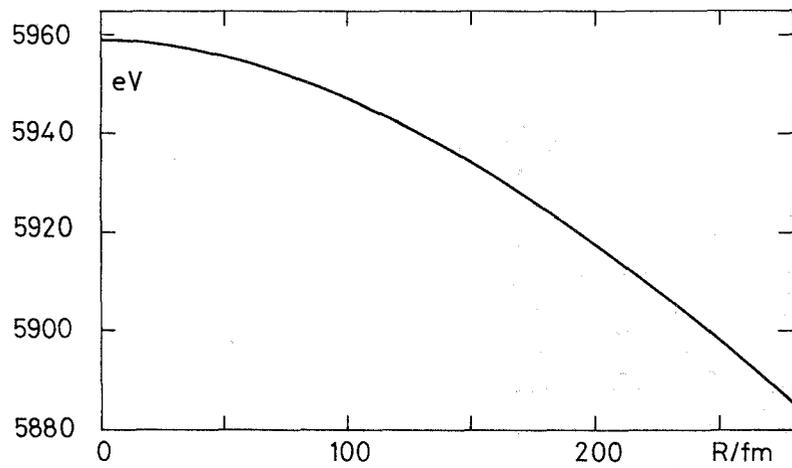


Abb. 2-1

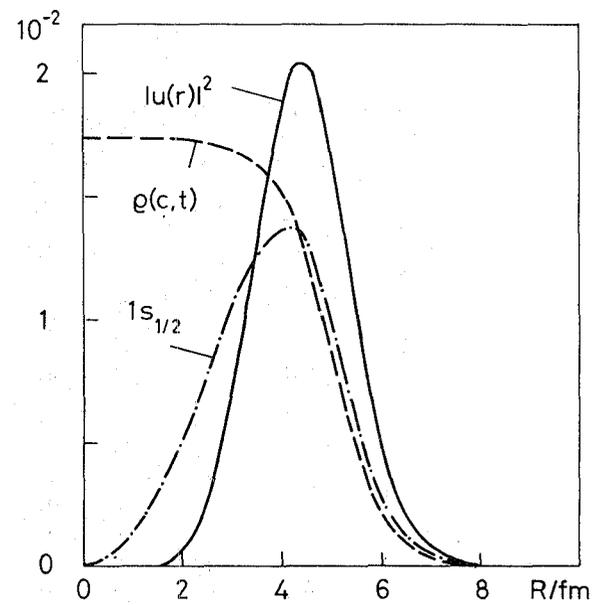


Abb. 2-2

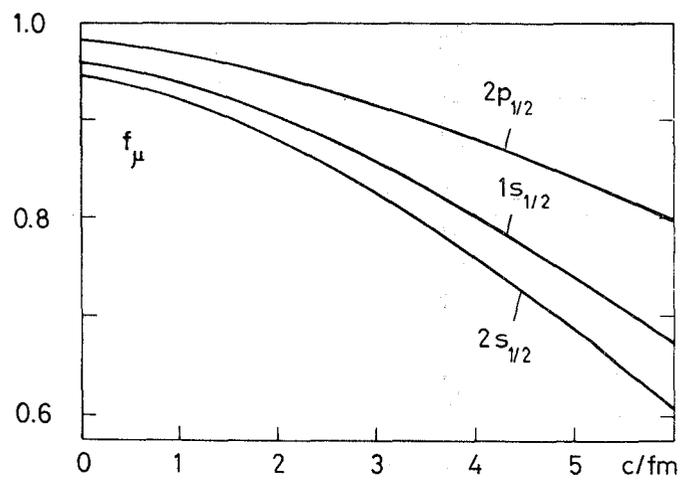


Abb. 2-3

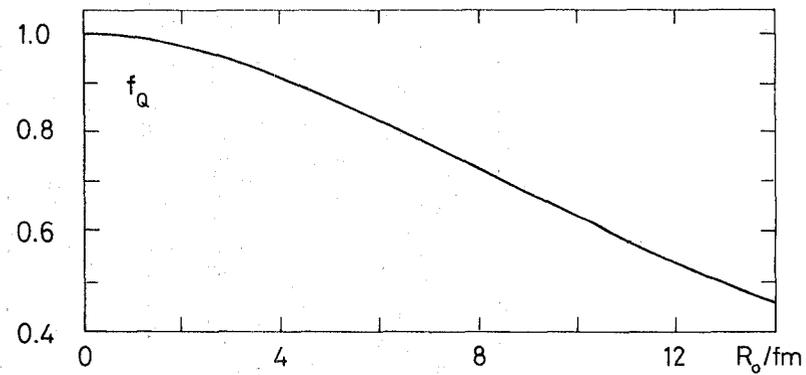
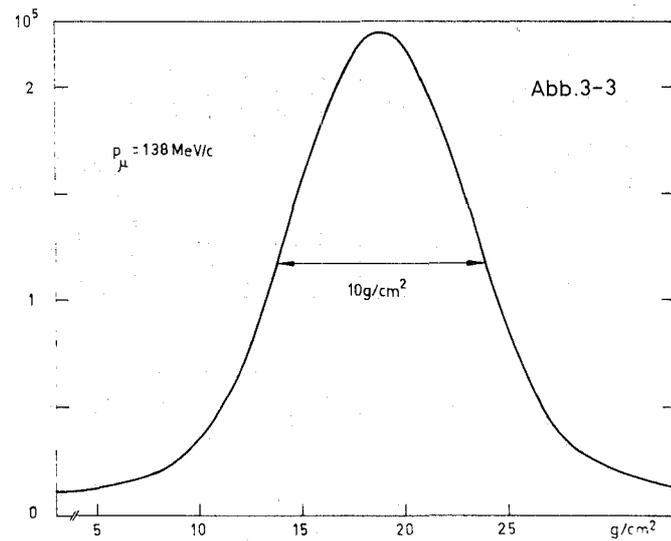
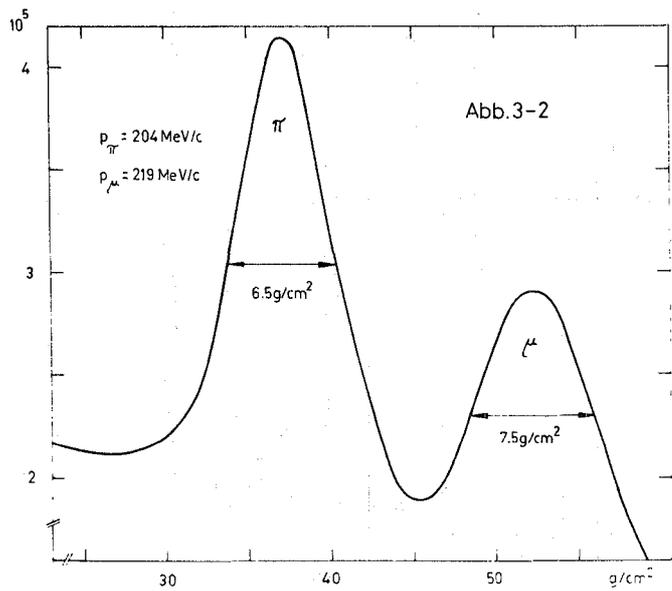
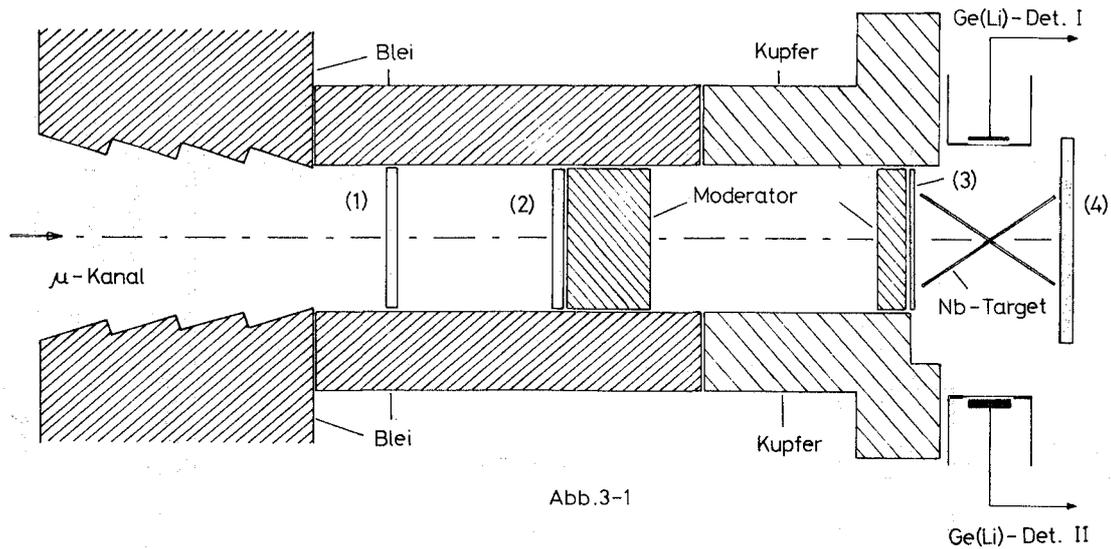


Abb. 2-4



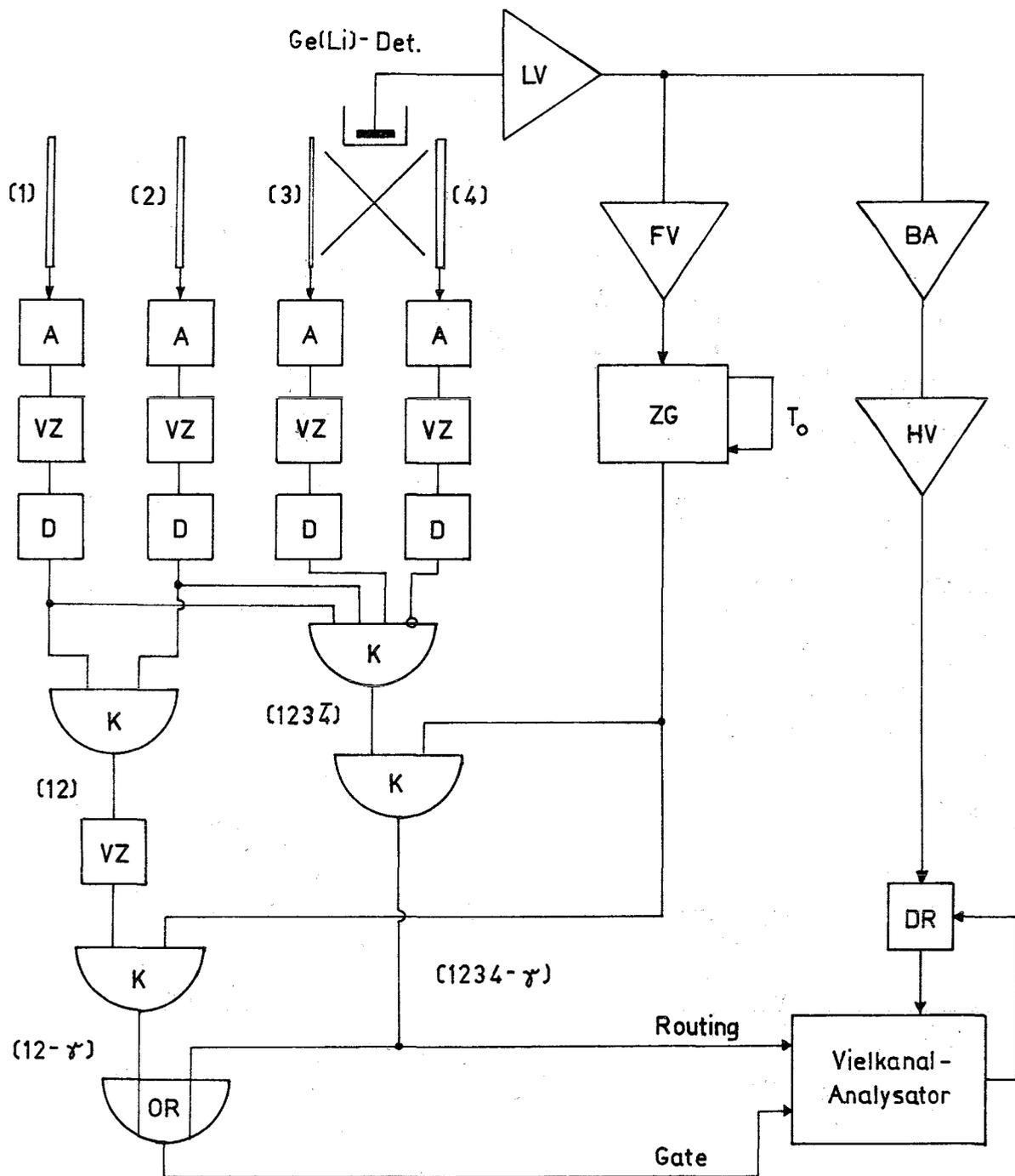


Abb. 3-4

Abb. 4 - 1

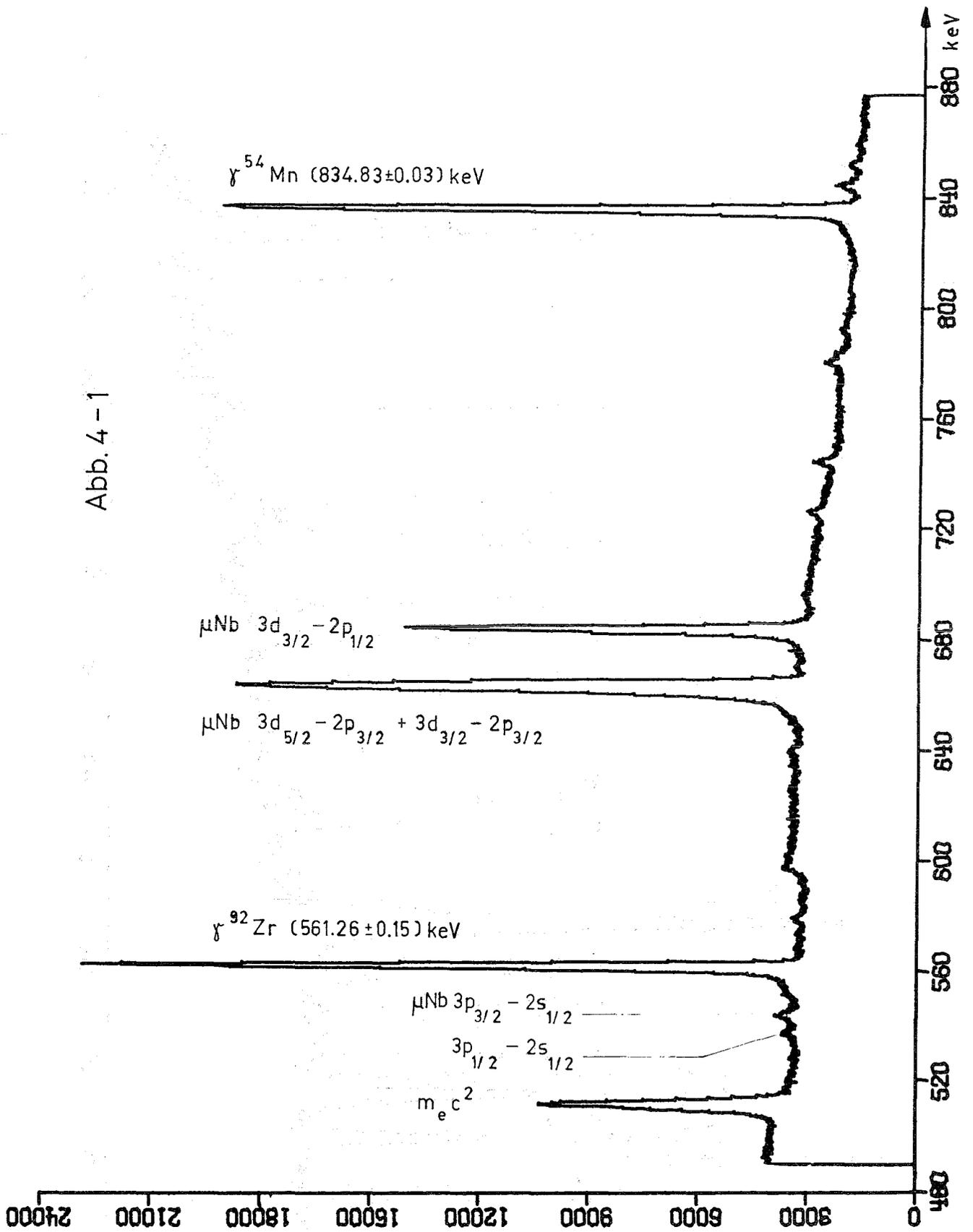
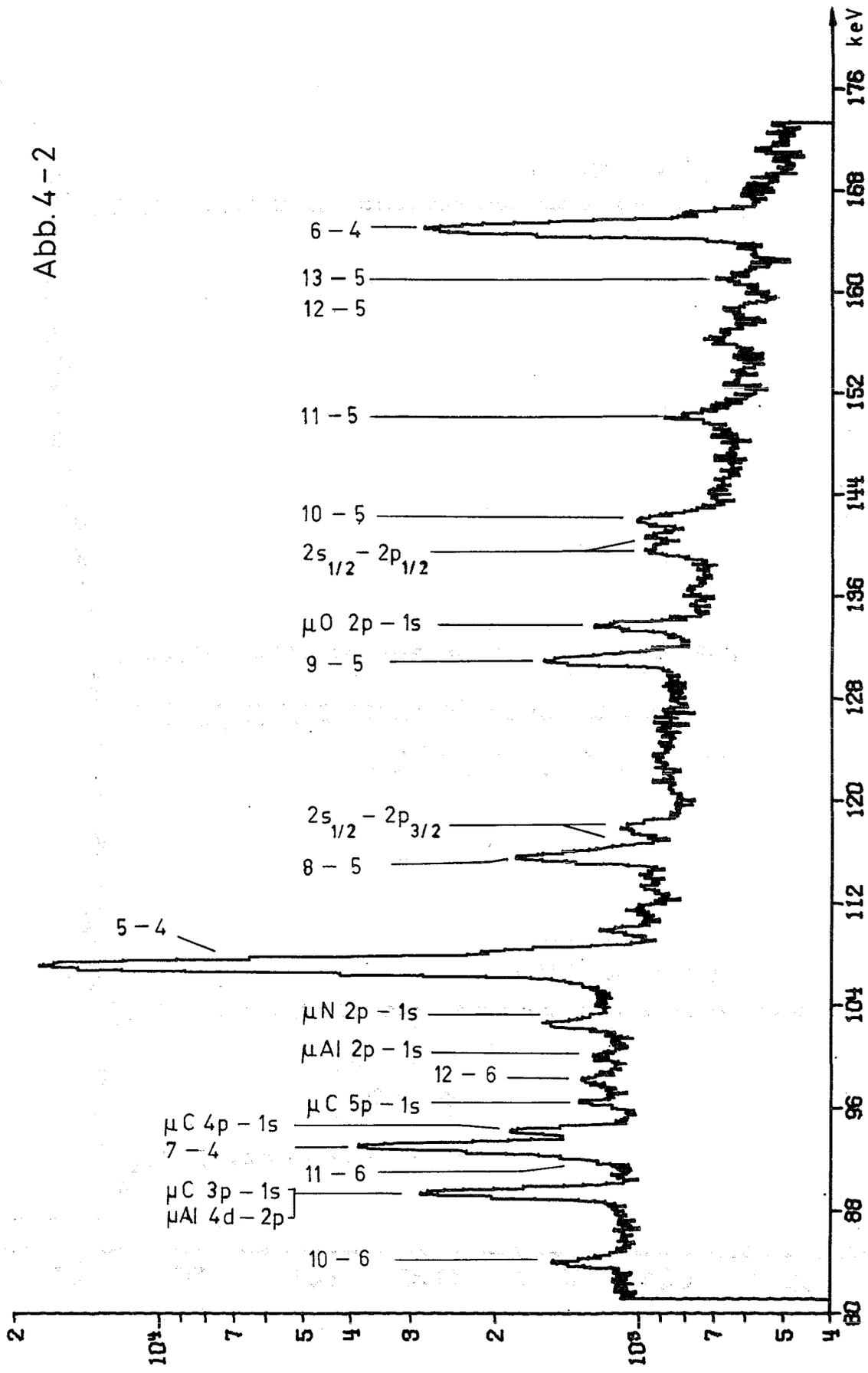


Abb. 4-2



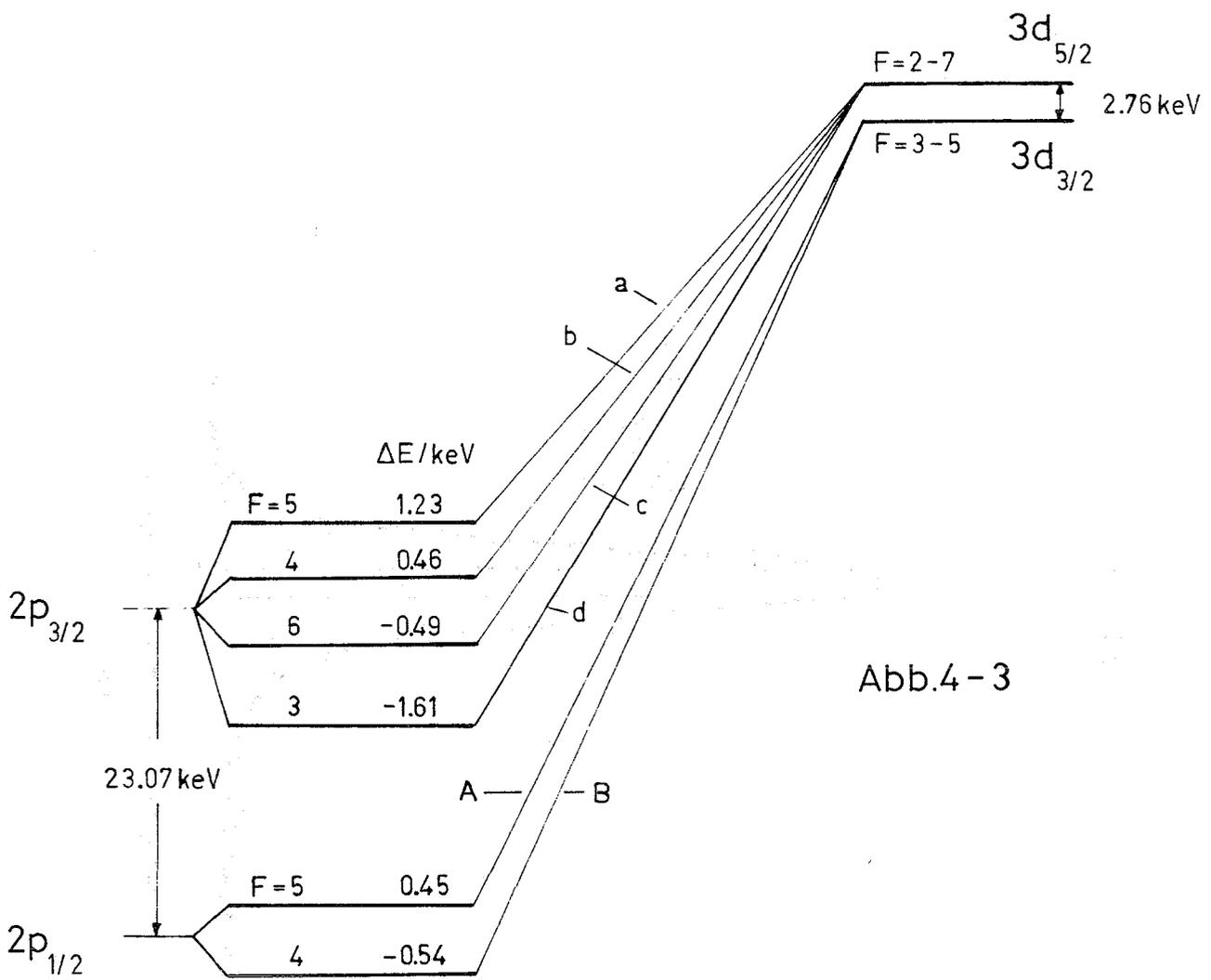


Abb.4-3

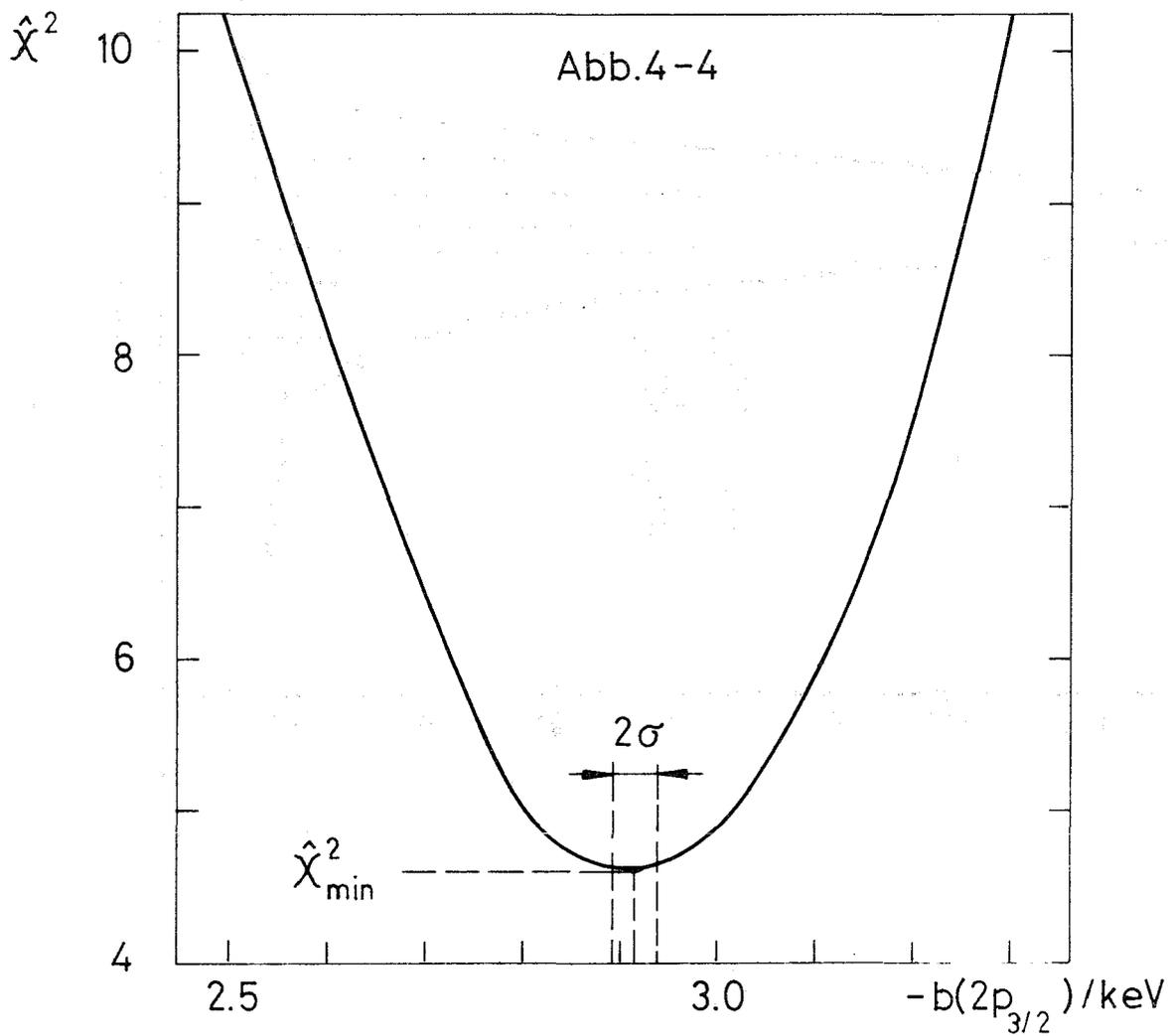
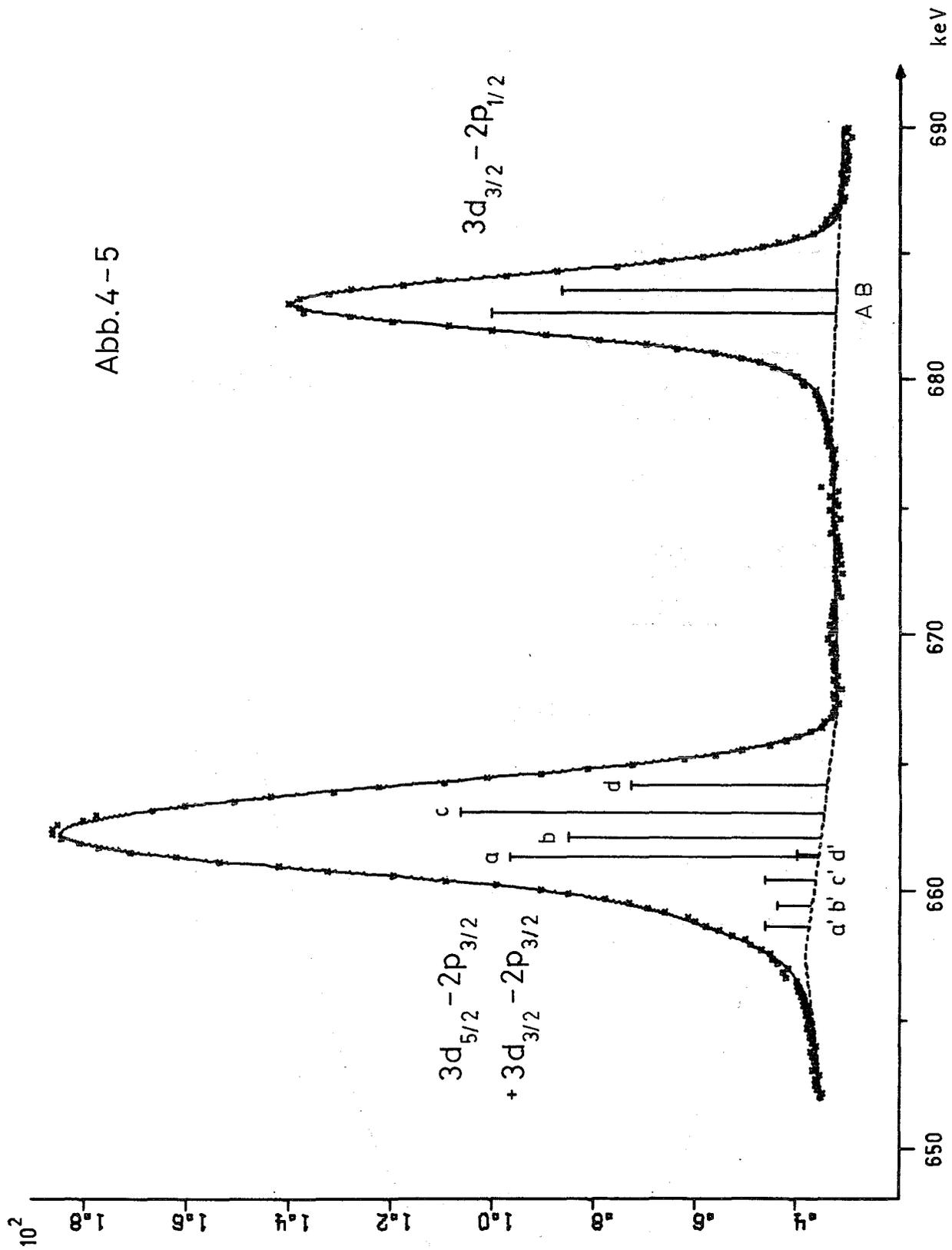


Abb.4-4

Abb. 4-5



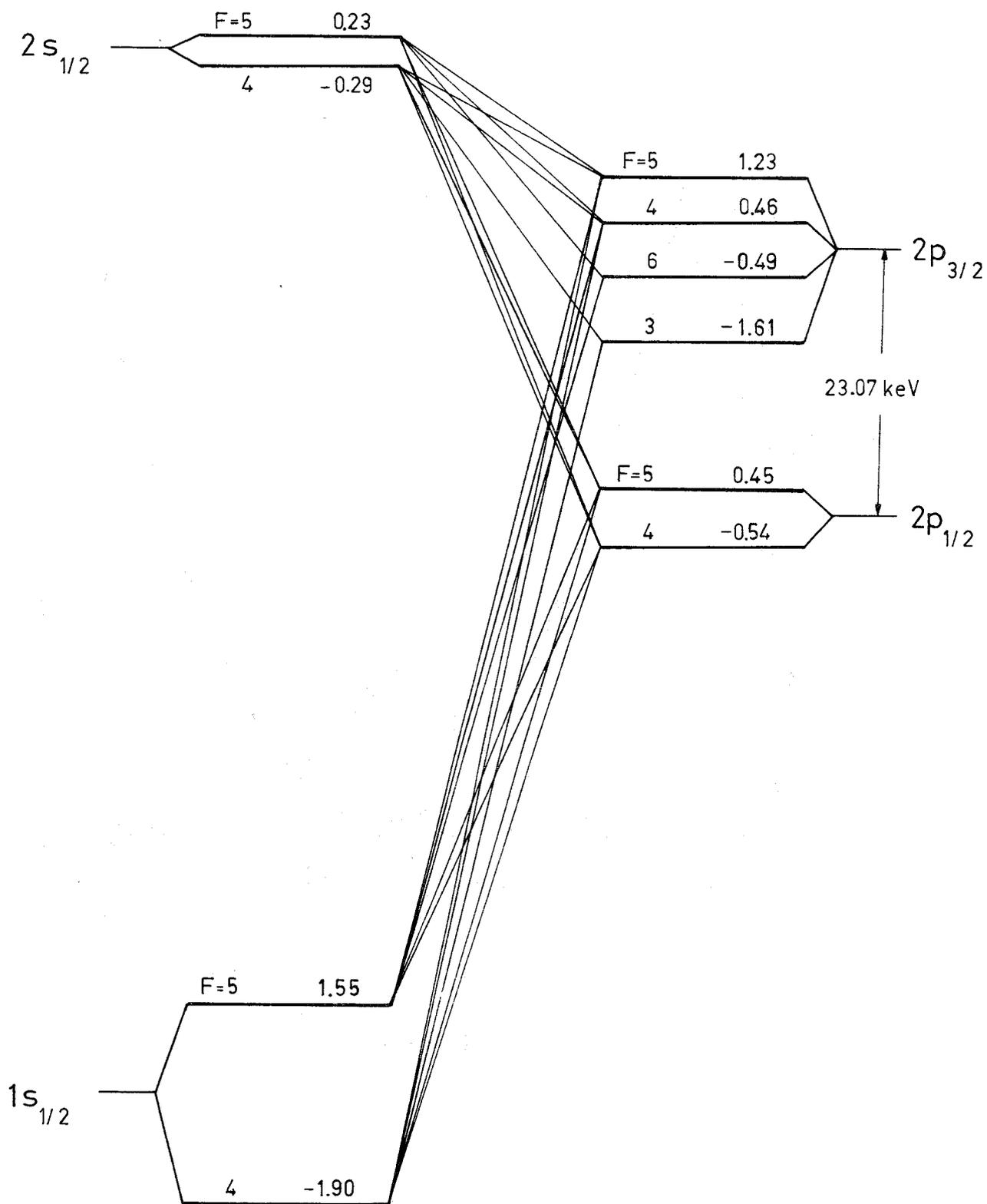


Abb. 4-6

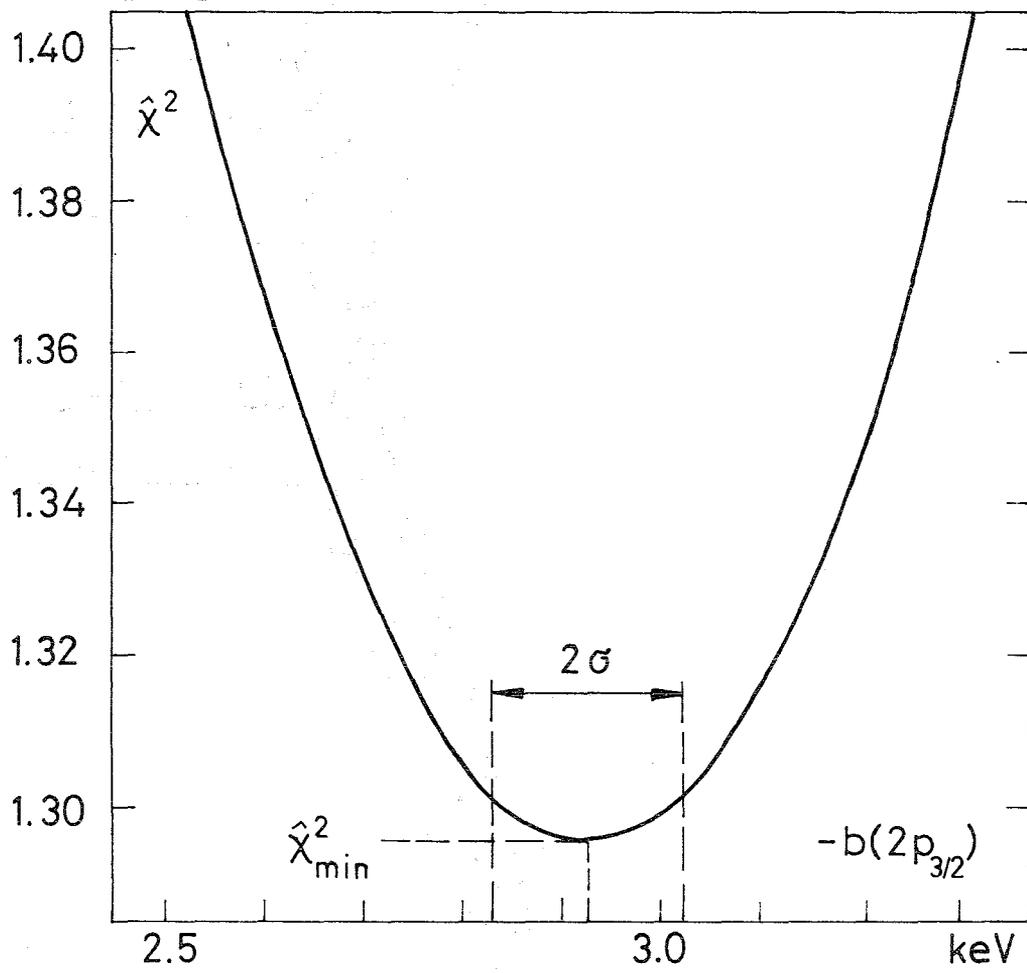


Abb.4-7

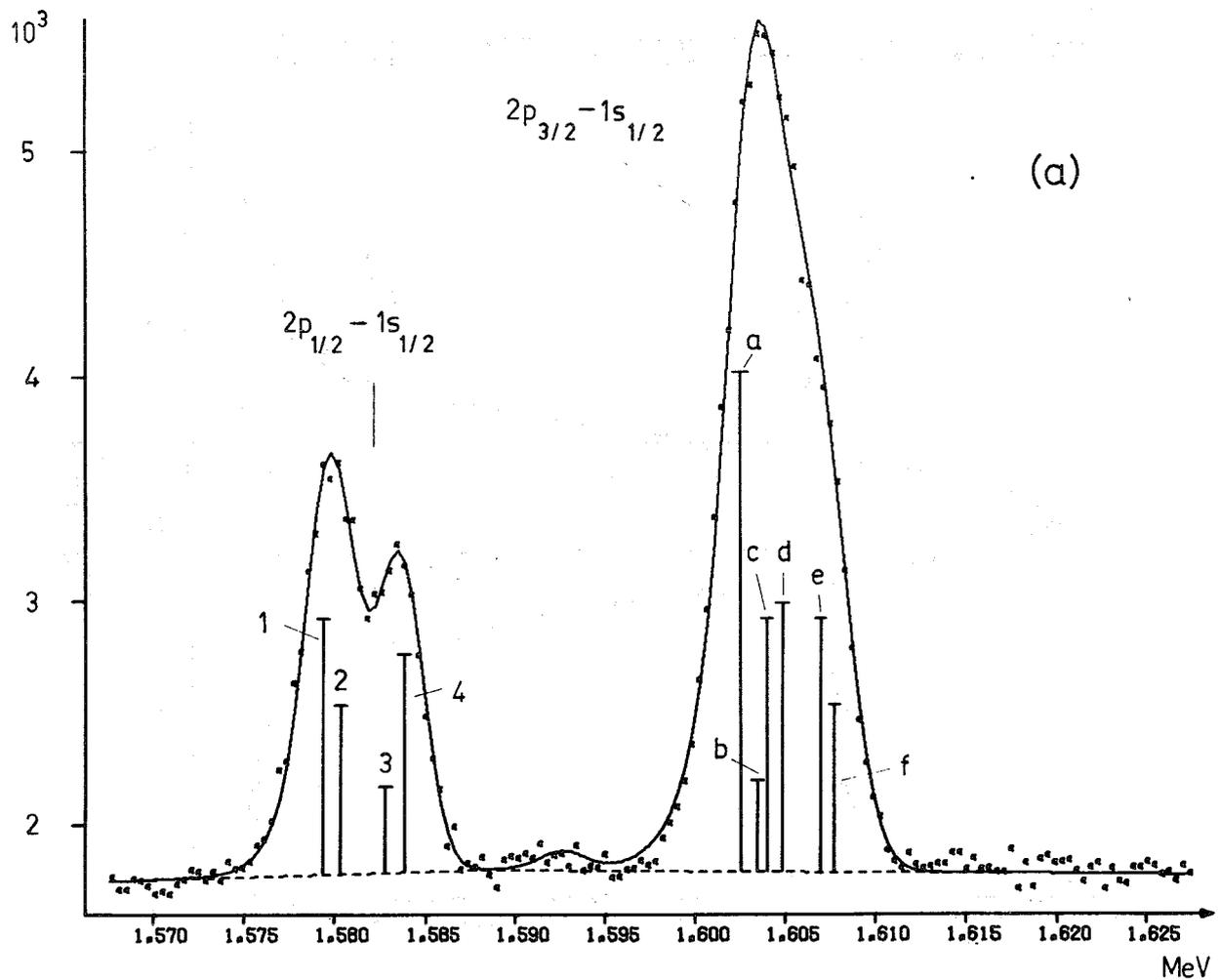
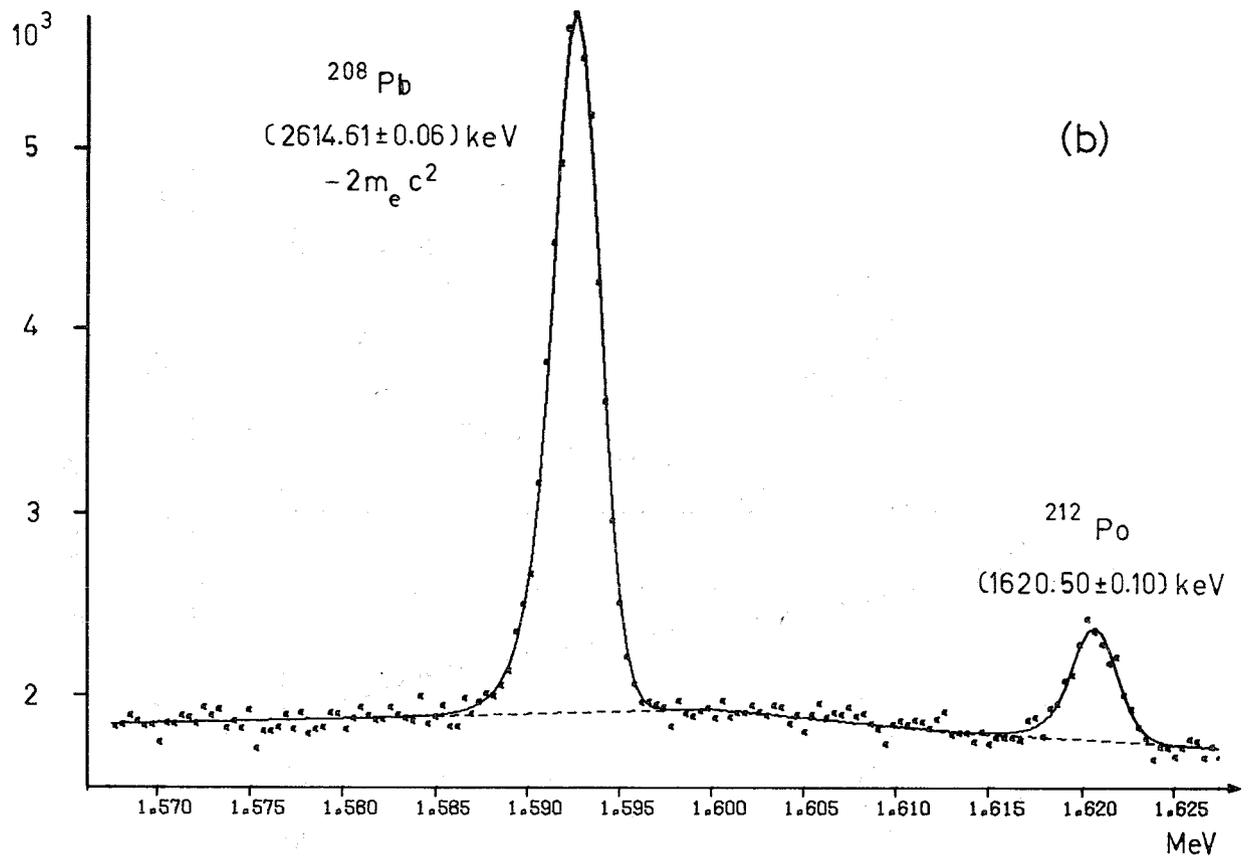


Abb. 4-8

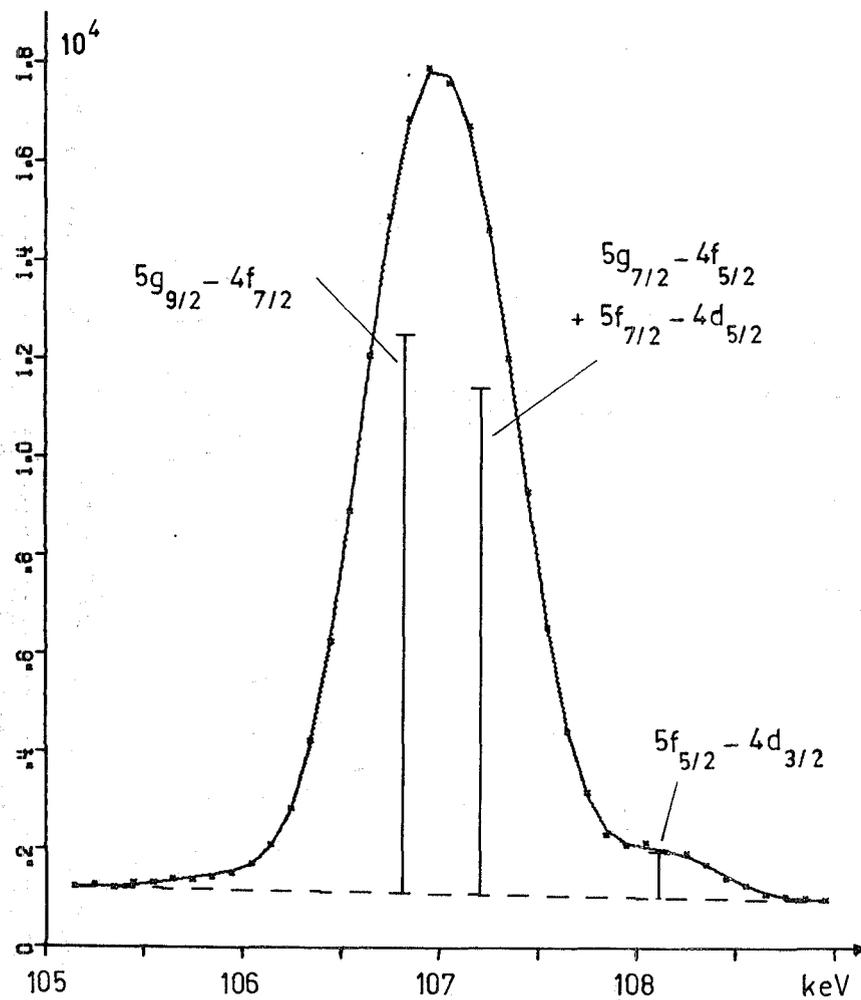


Abb. 4-9

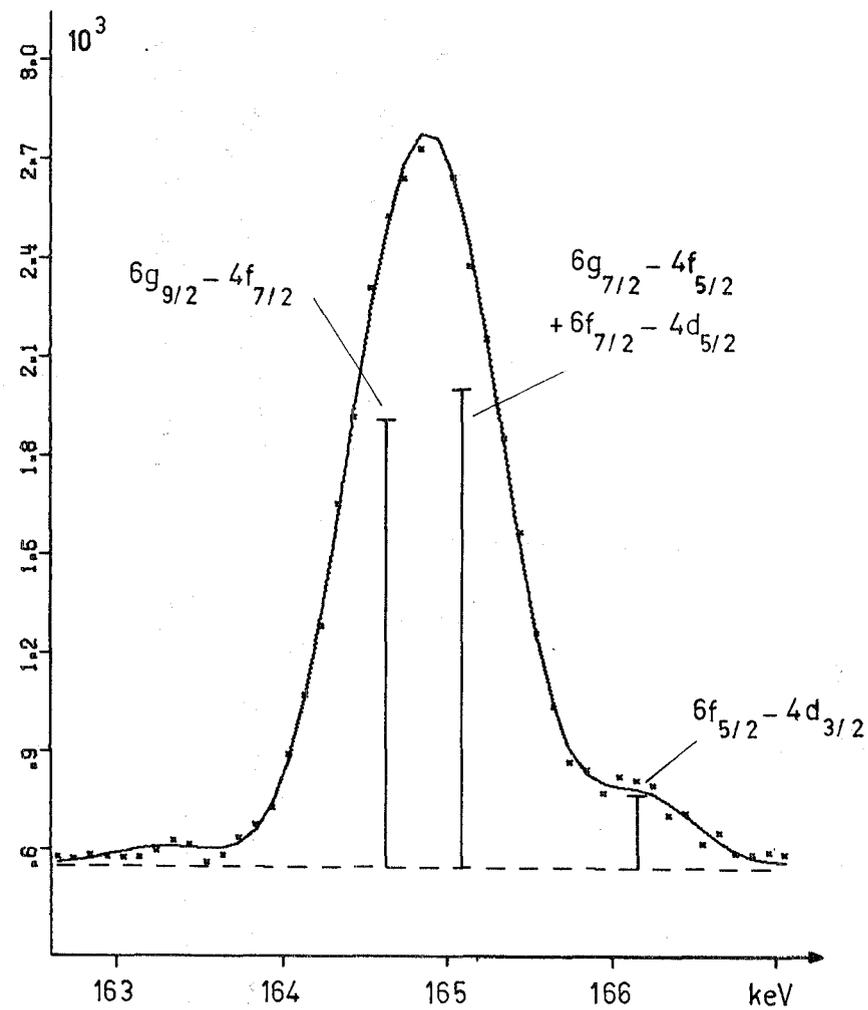


Abb. 4-10

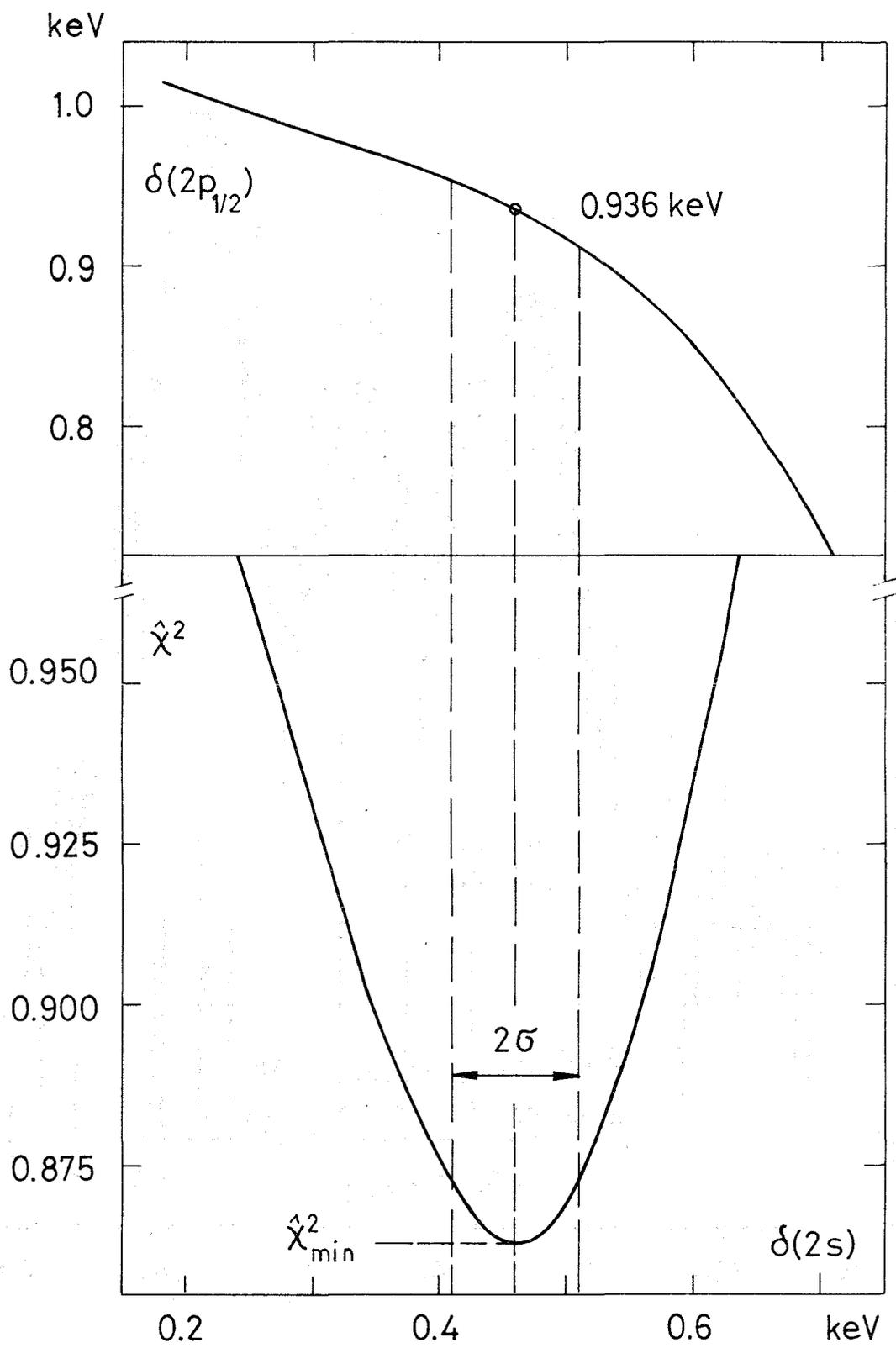


Abb.4-11

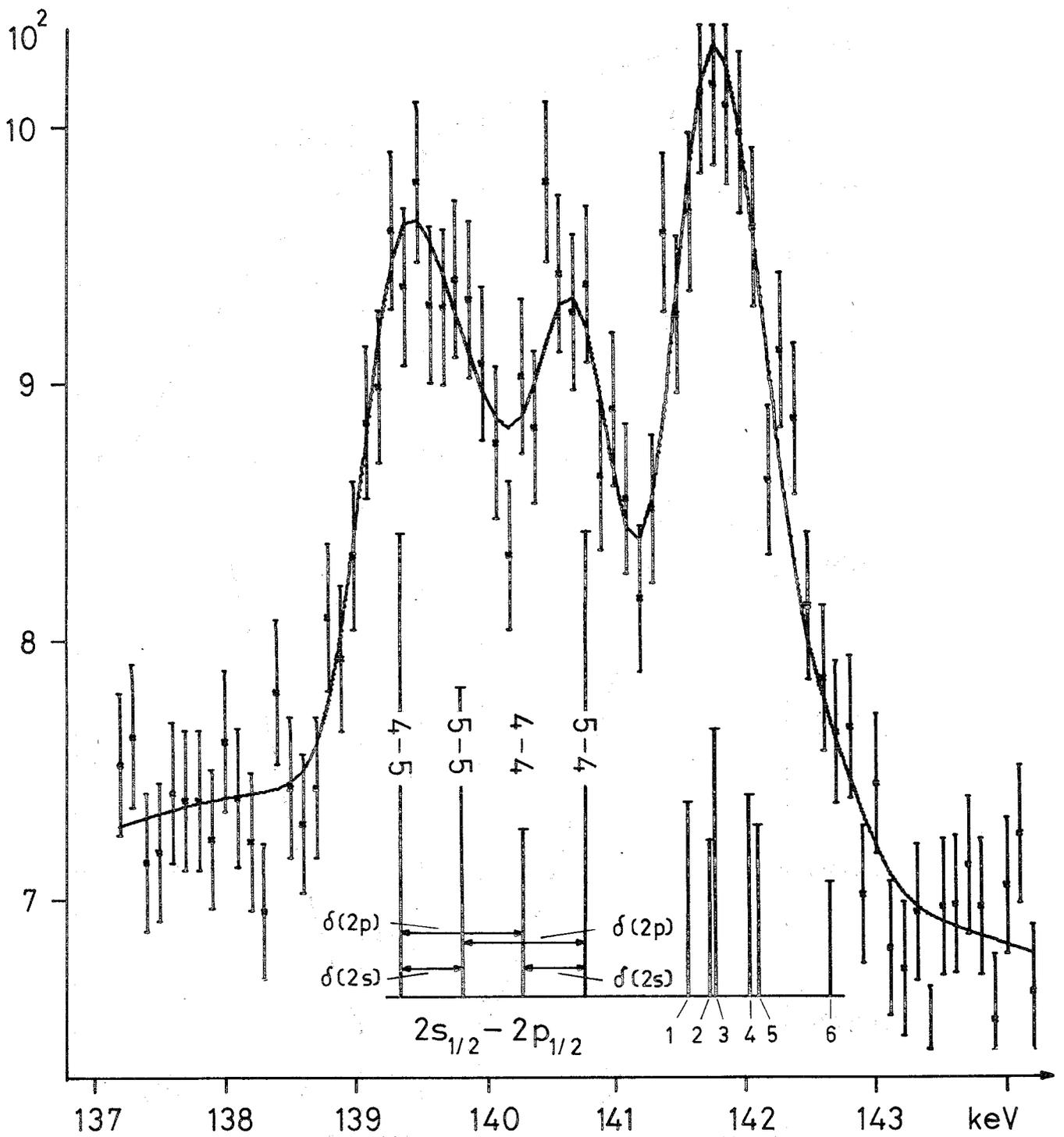


Abb. 4-12

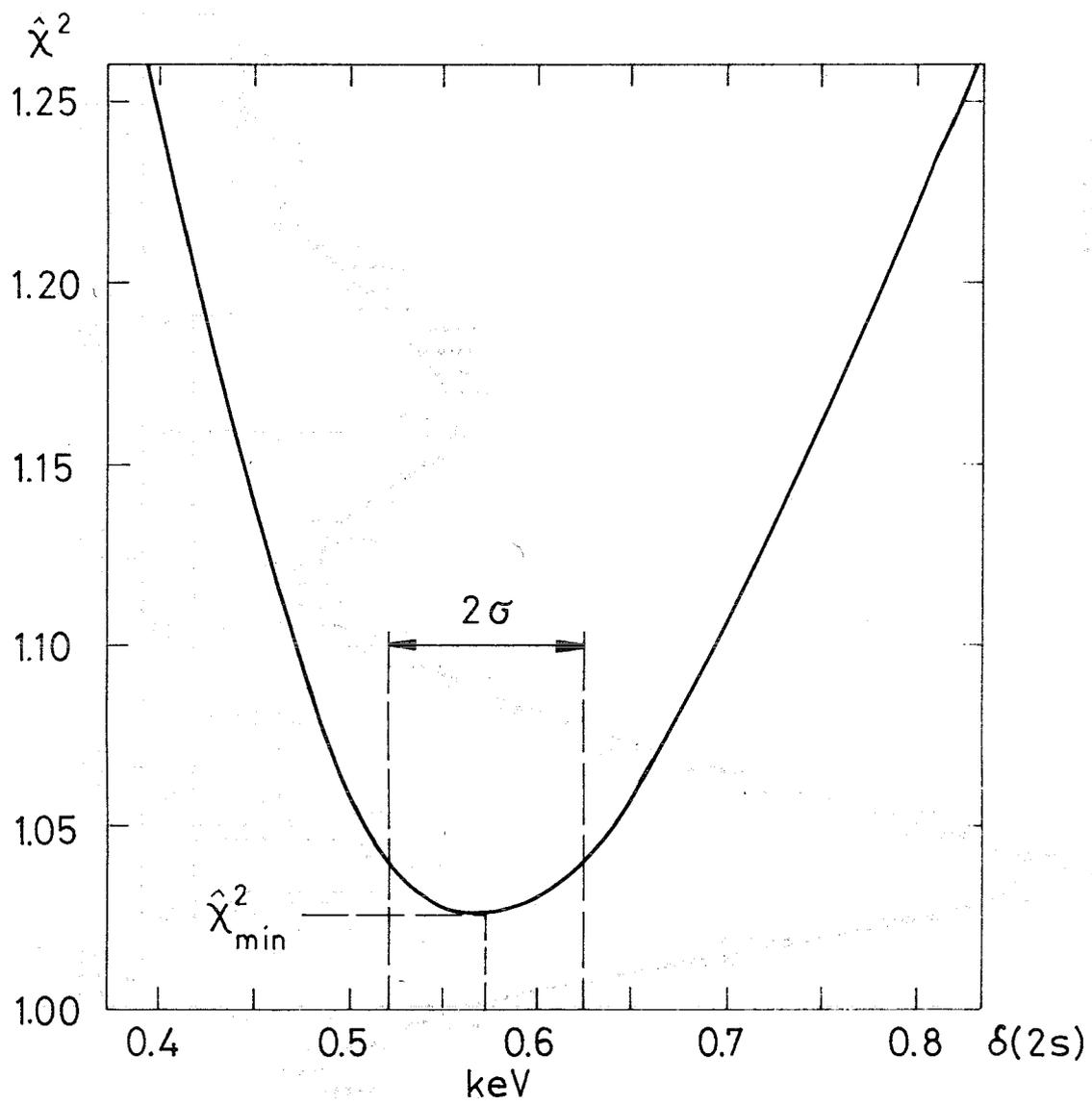
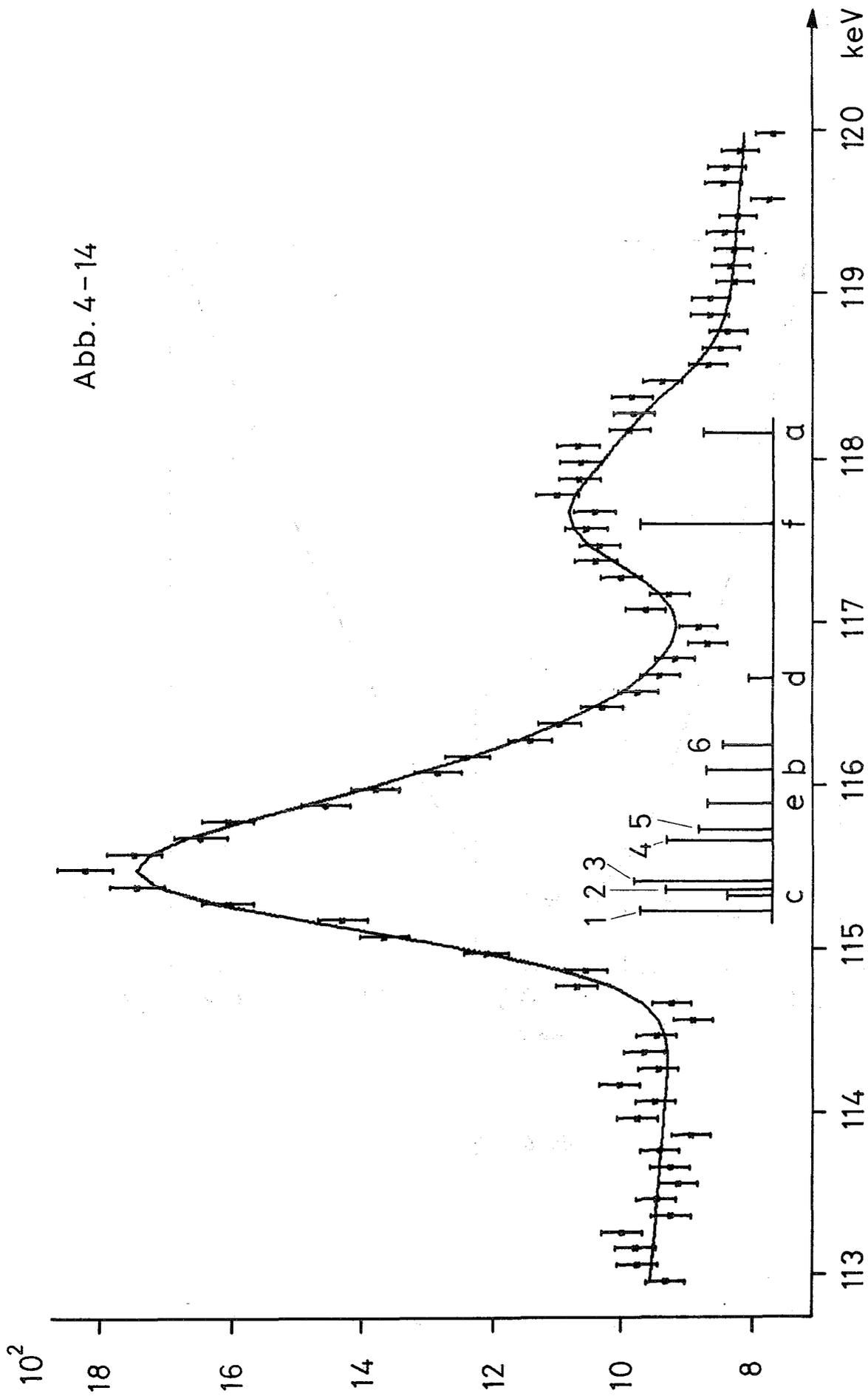
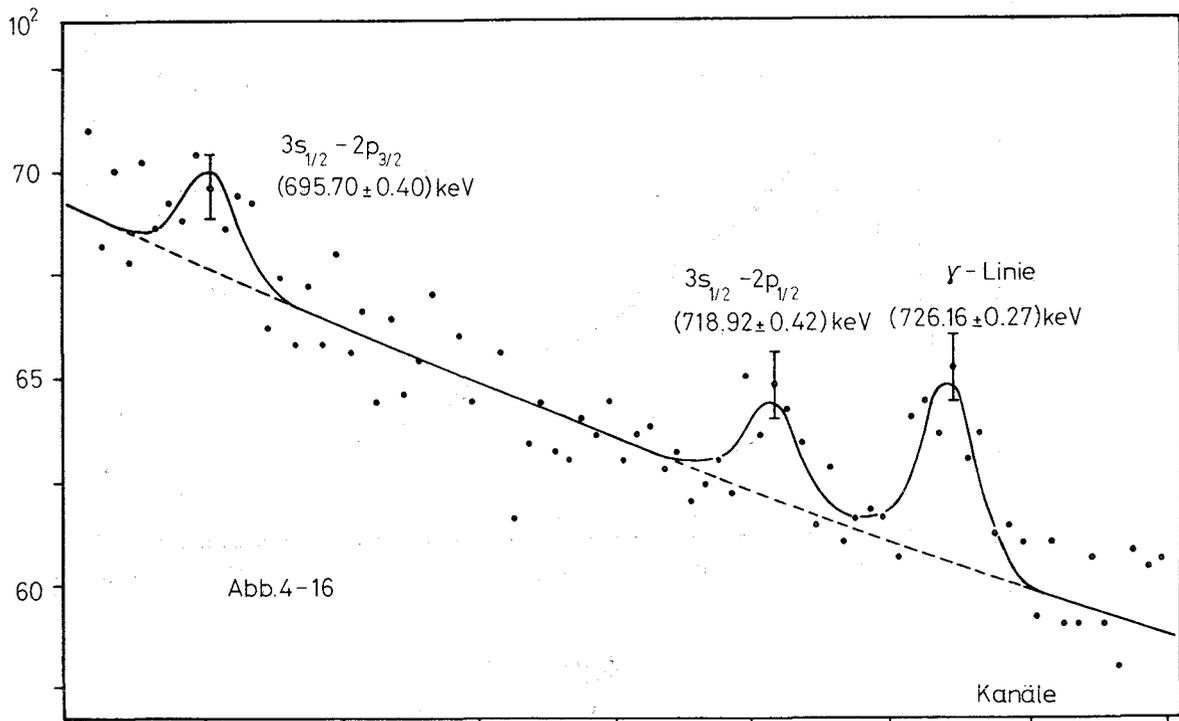
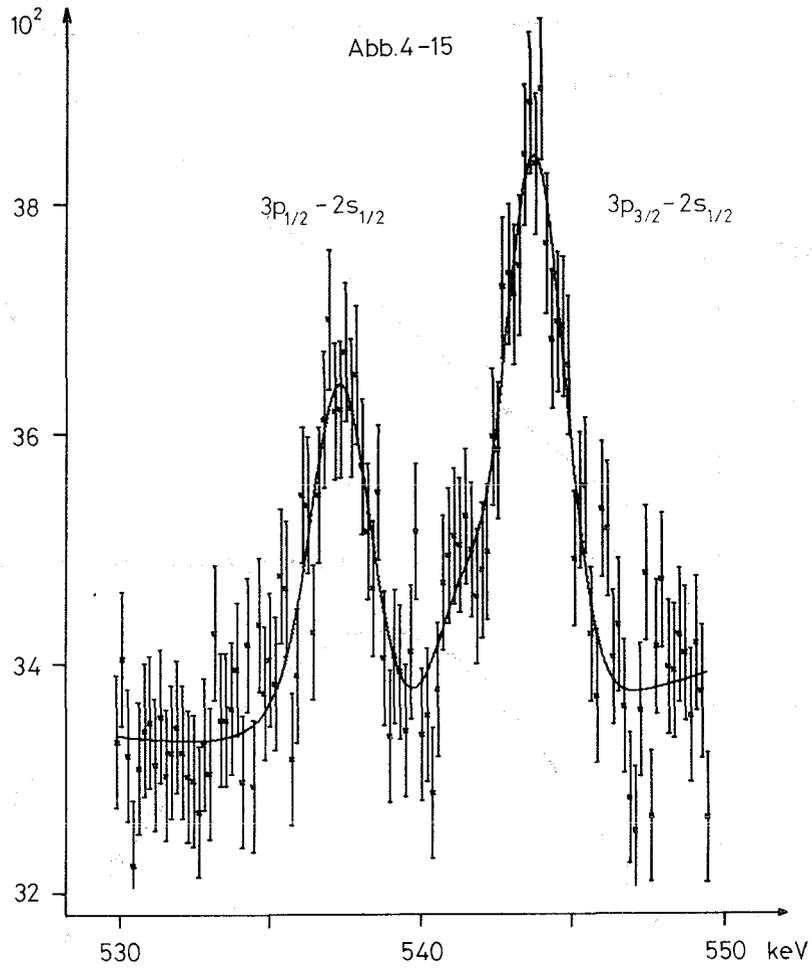


Abb. 4-13

Abb. 4-14





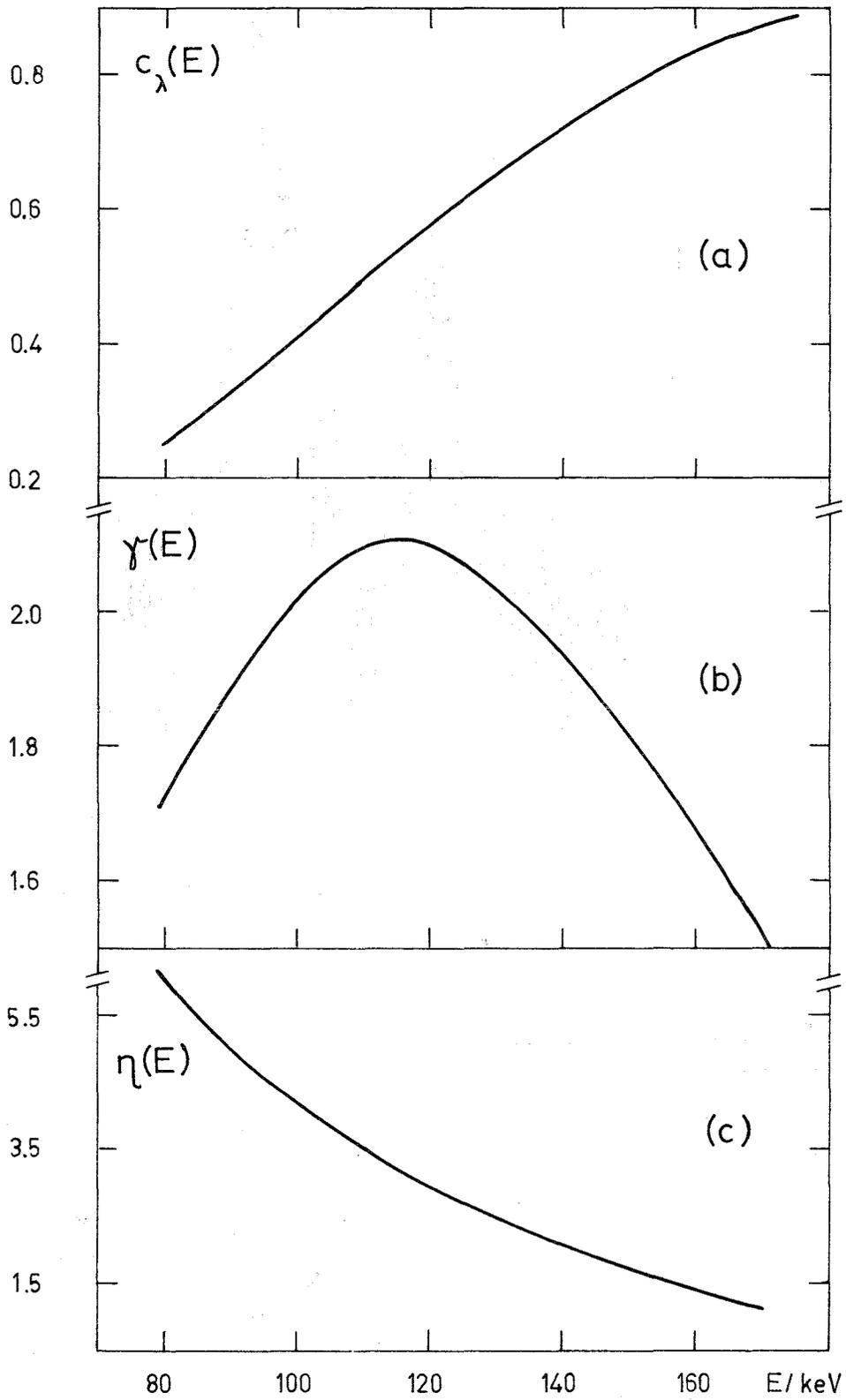


Abb.4-17

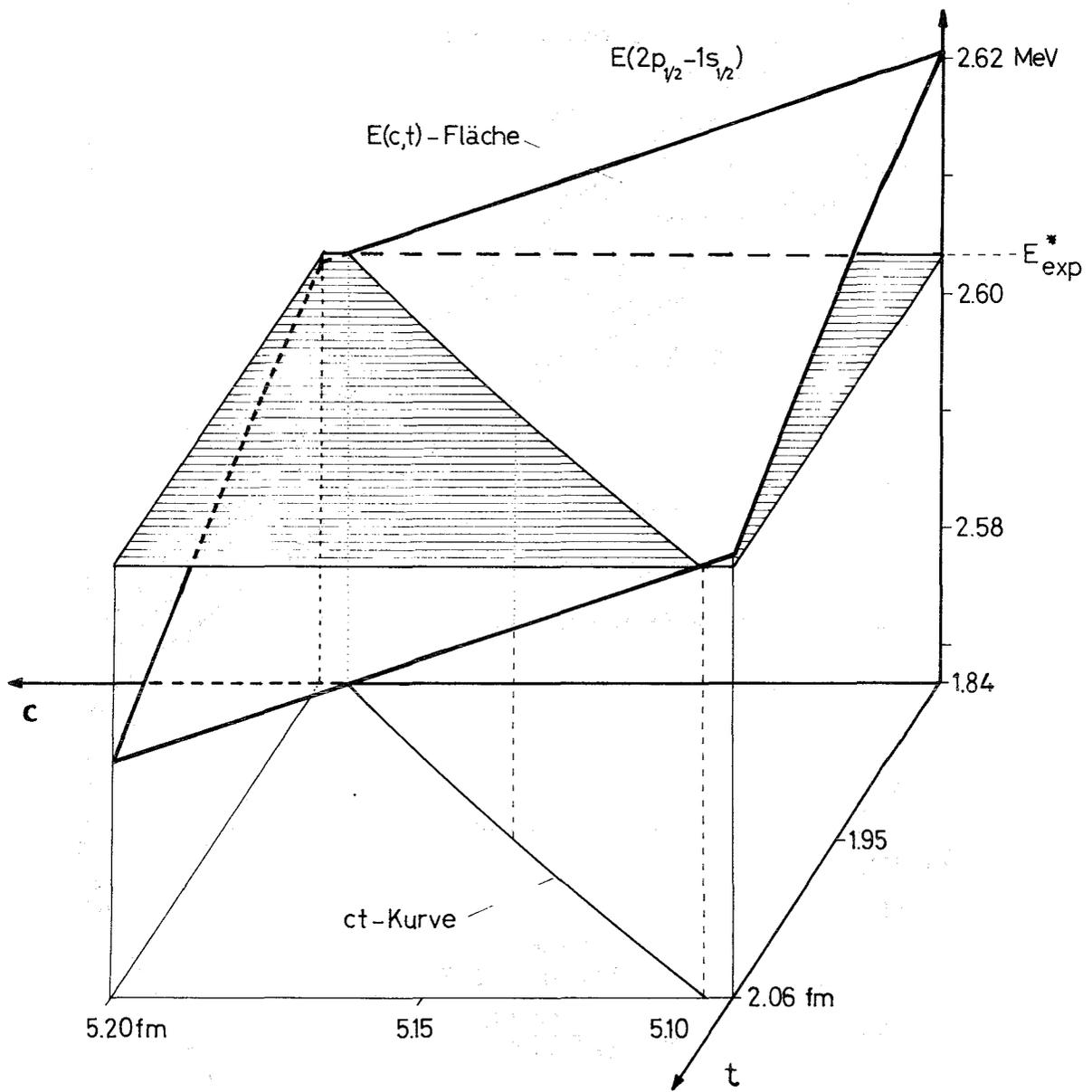


Abb.5-1

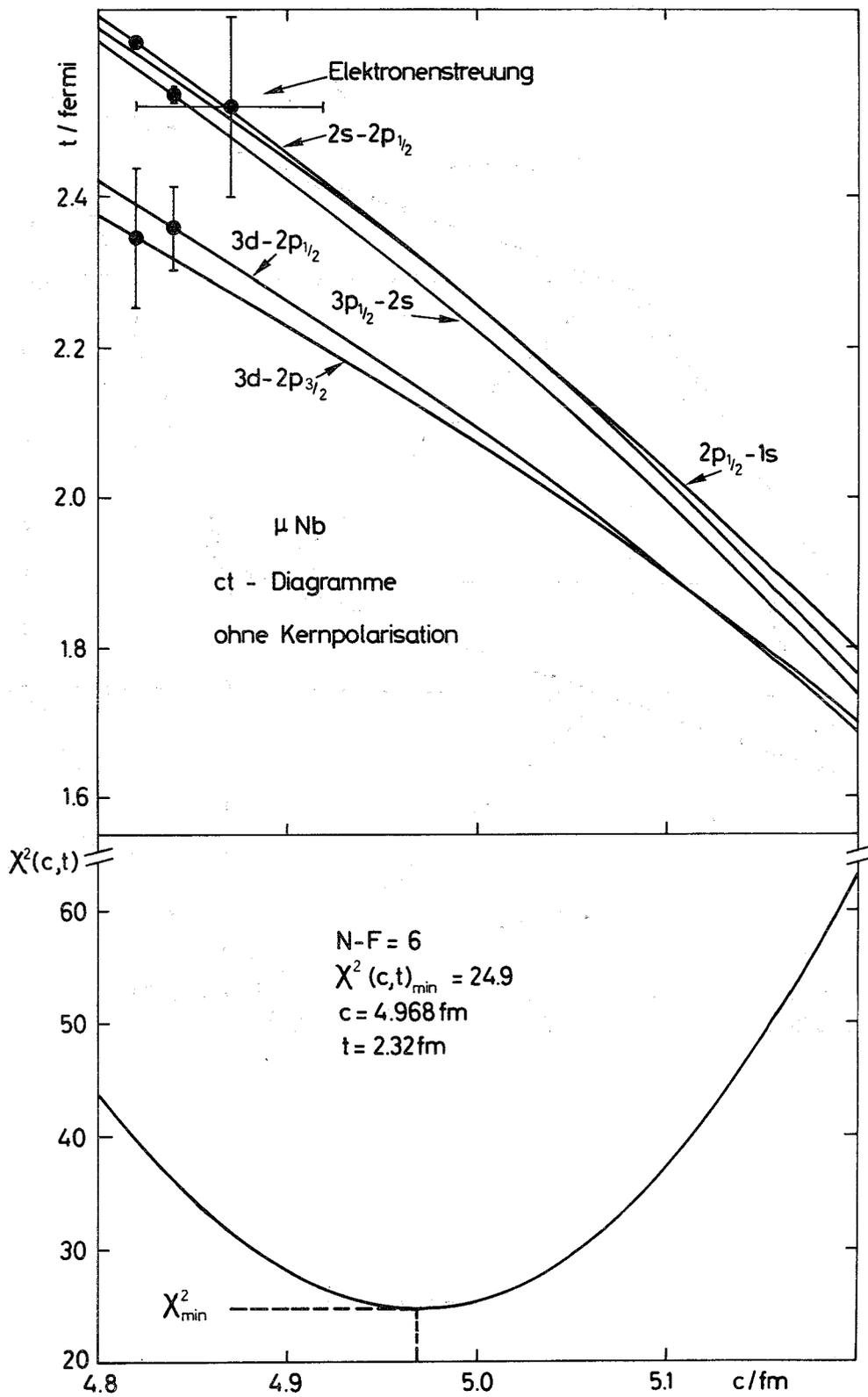


Abb.5 - 2

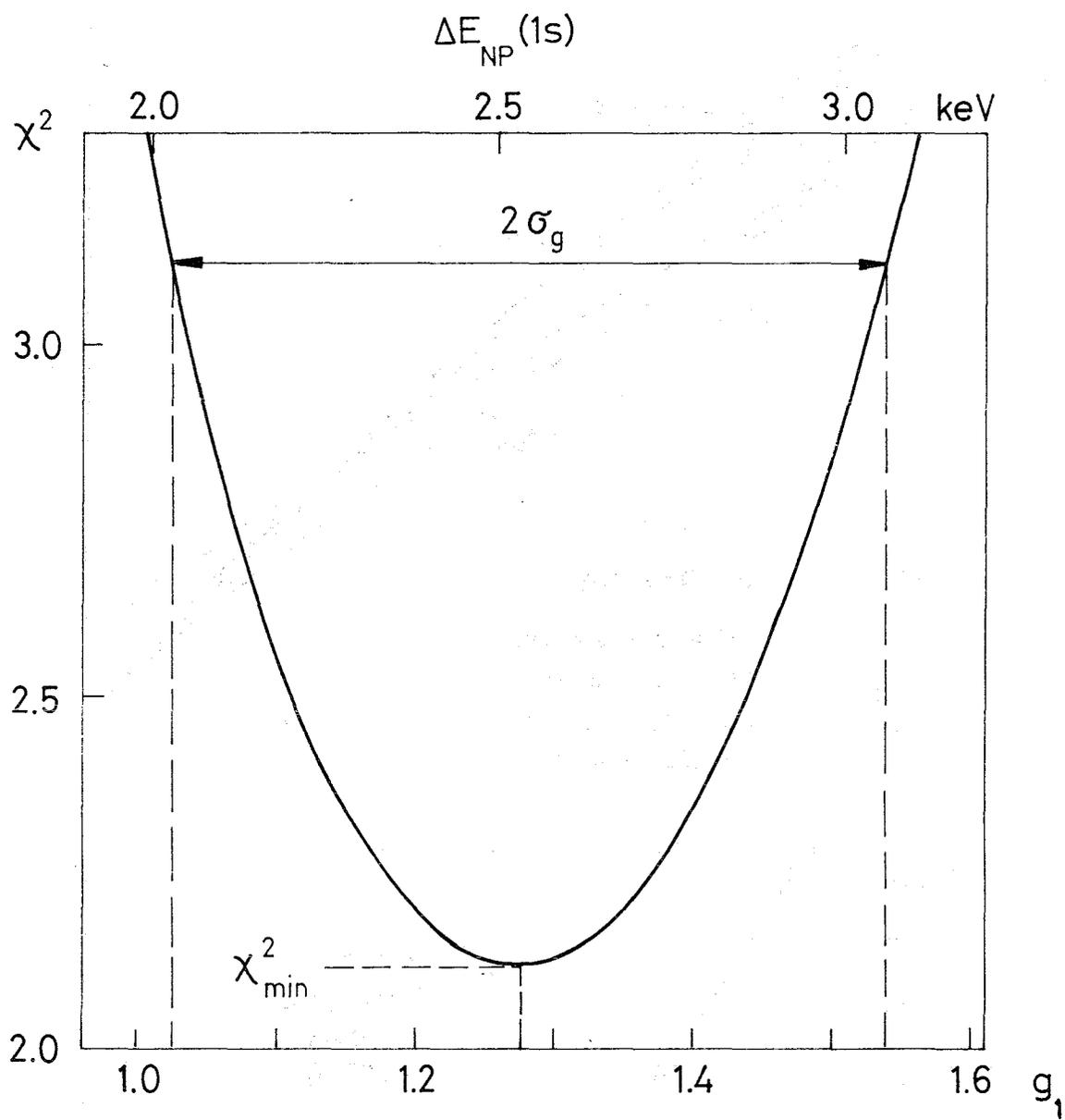


Abb. 5-3

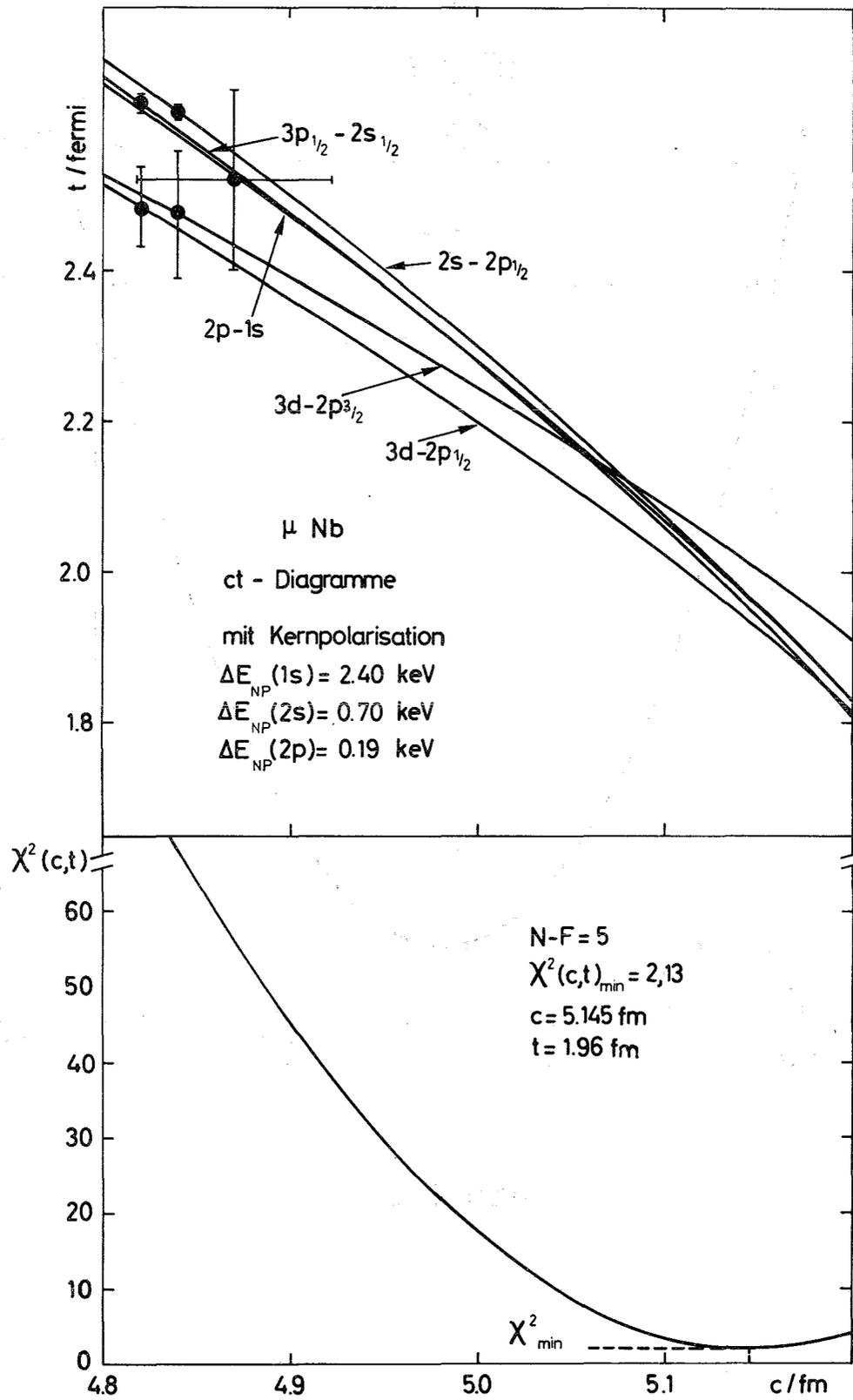


Abb.5-4

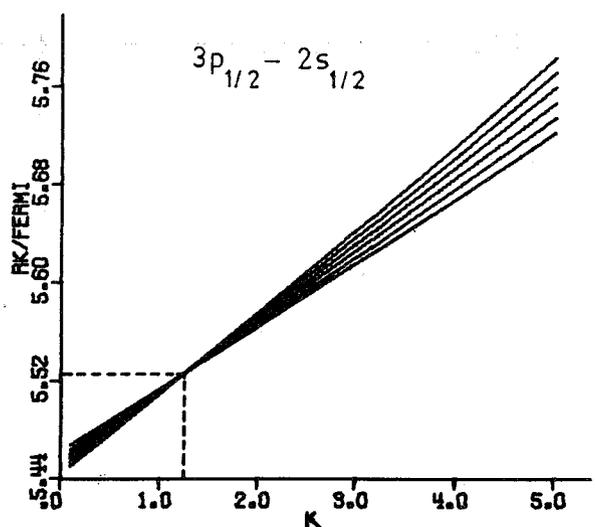
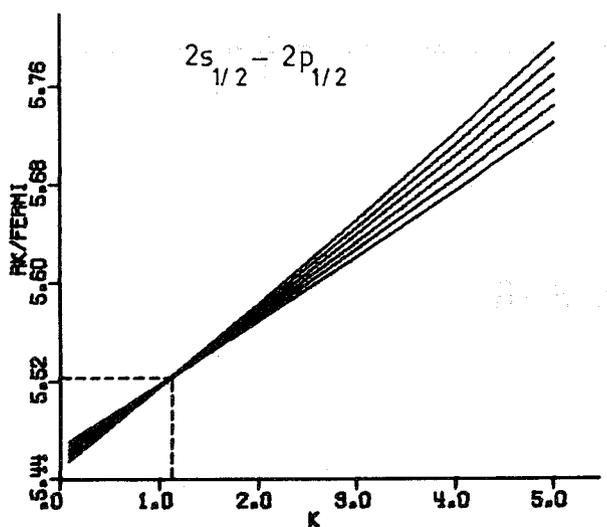
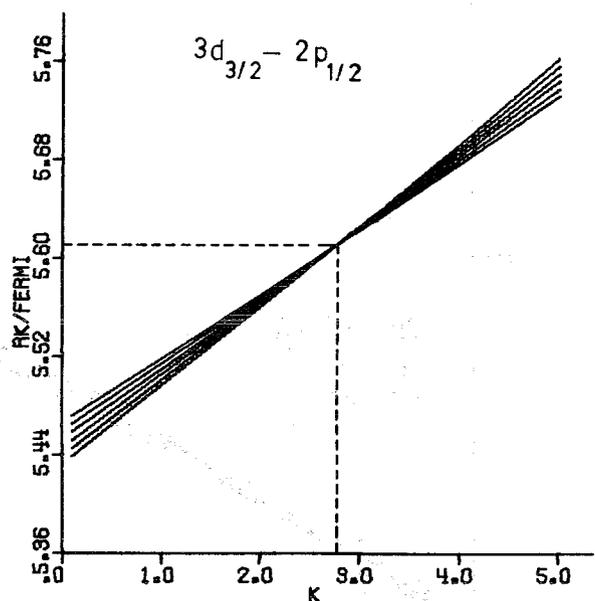
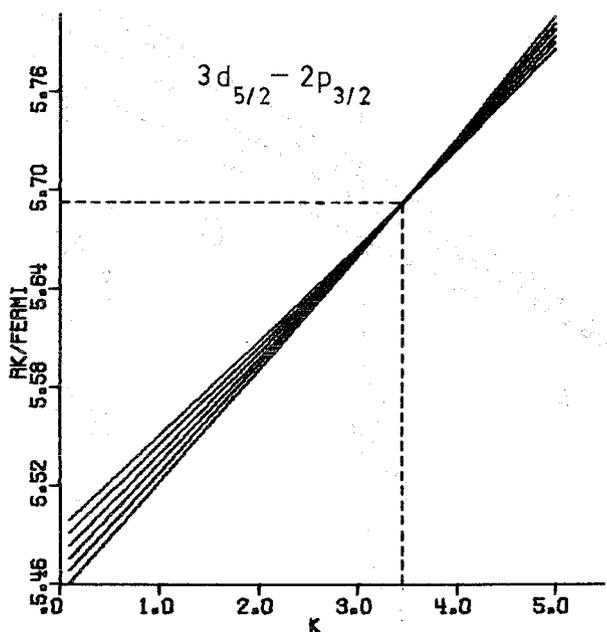
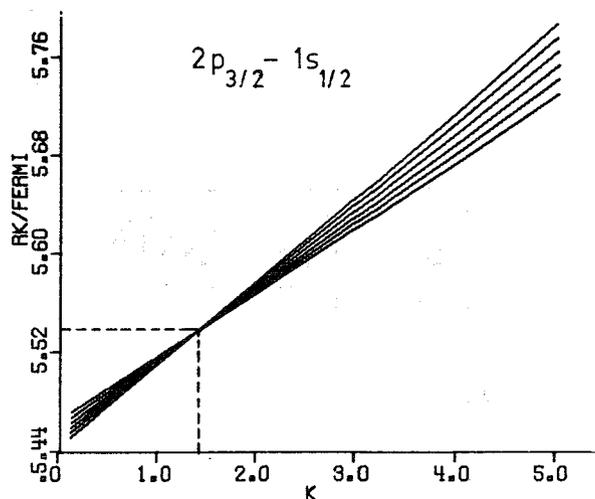
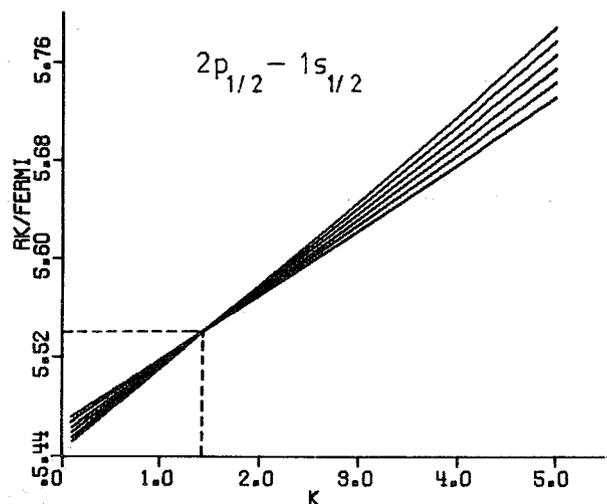


Abb.5 - 5

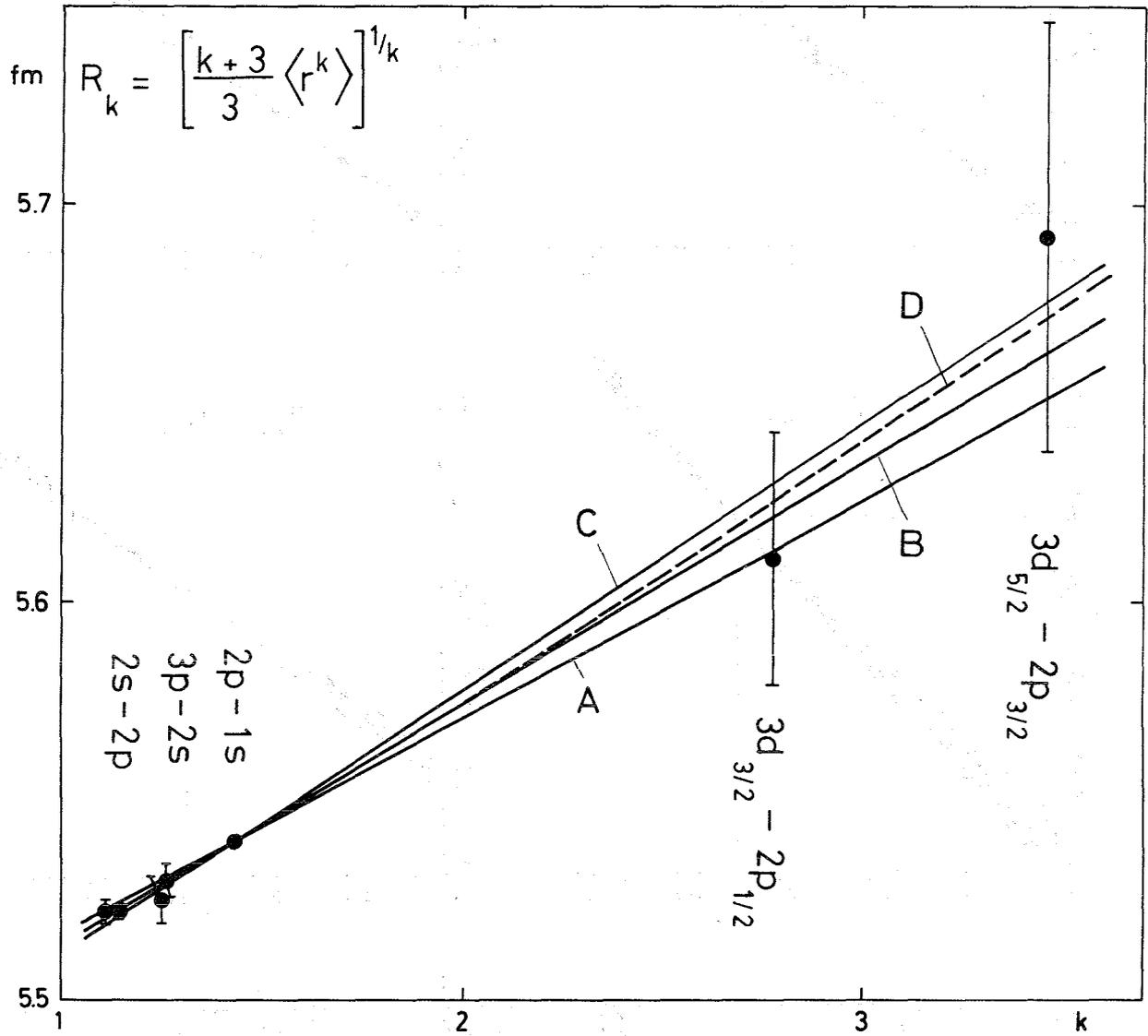


Abb. 5-6

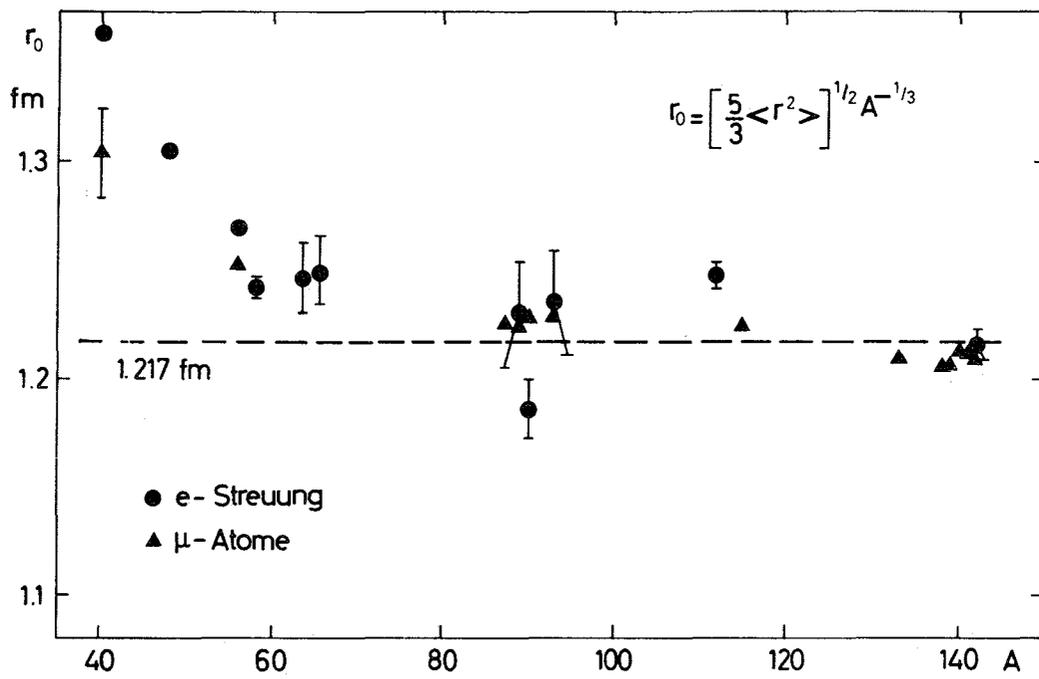


Abb. 6 - 1

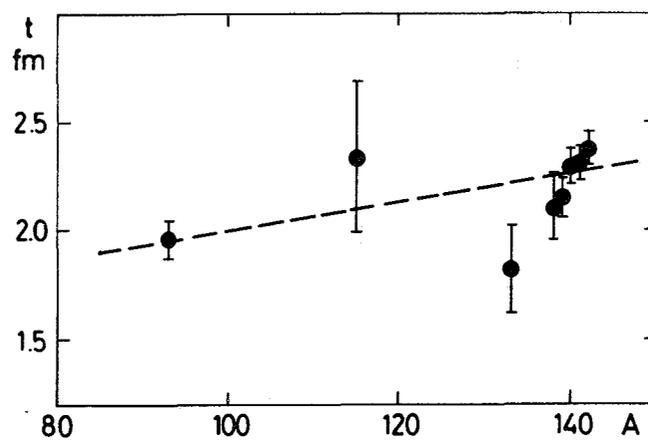


Abb. 6 - 2

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is crucial for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the various methods and tools used to collect and analyze data. It highlights the need for consistent and reliable data collection processes to support effective decision-making.

3. The third part of the document focuses on the role of technology in data management and analysis. It discusses how modern software solutions can streamline data collection, storage, and reporting, thereby improving efficiency and accuracy.

4. The fourth part of the document addresses the challenges associated with data management, such as data quality, security, and integration. It provides strategies to overcome these challenges and ensure the integrity and availability of data.

5. The fifth part of the document discusses the importance of data governance and compliance. It outlines the key principles and practices for ensuring that data is managed in a responsible and lawful manner.

6. The sixth part of the document explores the future of data management, including emerging trends and technologies. It discusses how artificial intelligence and machine learning are transforming data analysis and decision-making.

7. The seventh part of the document provides a summary of the key findings and recommendations. It emphasizes the need for a holistic approach to data management that integrates all aspects of the organization's operations.

8. The final part of the document concludes with a call to action, urging the organization to embrace data-driven decision-making and continuous improvement to achieve its strategic goals.

Anhang

A.1 Eigenfunktion des Myons im Potential einer Punktladung

Die Lösungen der Dirac-Gleichung (II.3') werden von M.E. Rose [Ros61] in der folgenden Form angegeben

$$\psi_{\alpha}^m = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} G(r) \chi_{\alpha}^m \\ iF(r) \chi_{-\alpha}^m \end{pmatrix} \quad (\text{a-1})$$

wobei

$$\chi_{\alpha}^m = \sum_{p=\pm \frac{1}{2}} \langle \ell \frac{1}{2}, m-p \ p \ | \ j \ m \rangle Y_{\ell}^{m-p} \quad (\text{a-2})$$

$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ sind die Kugelfunktionen, $\chi^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\chi^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Pauli-Spinoren und $\langle \ell \frac{1}{2}, m-p \ p \ | \ j \ m \rangle$ Clebsch-Gordan-Koeffizienten^{x)}.

ℓ und j sind der Bahn- bzw. der Gesamtdrehimpuls des Myons. m ist die magnetische Quantenzahl.

Die große und kleine Radialkomponente $G(r)$ und $F(r)$ befriedigen die Radialgleichung (II.5) mit $V(r) = -Ze^2/r$. Es gilt

$$\begin{aligned} G(r) &= \left[\frac{m_{\mu} c^2 + \epsilon}{\hbar c} \right]^{1/2} (\phi_1 + \phi_2) \\ F(r) &= \left[\frac{m_{\mu} c^2 - \epsilon}{\hbar c} \right]^{1/2} (\phi_1 - \phi_2) \end{aligned} \quad (\text{a-3})$$

mit

$$\phi_1(x) = (\alpha + \beta/\lambda') W(k'-1, \gamma, x) / \sqrt{x}$$

$$\phi_2(x) = W(k', \gamma, x) / \sqrt{x}$$

$$x = \lambda/r, \quad \lambda = \tau/\hbar c, \quad \lambda' = \tau/m_{\mu} c^2, \quad \tau = \sqrt{(m_{\mu} c^2)^2 - \epsilon_{n\alpha}^2}$$

x) Für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten benutzen wir hier und im Folgenden die Notation $\langle j_1 j_2, m_1 m_2 \ | \ j_3 m_3 \rangle$ wo $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq (j_1 + j_2)$, $m_1 + m_2 = m_3$

$$k' = \sqrt{E_{n\alpha} / \tau + 1/2}$$

$$\mathfrak{Y} = Ze^2 / \hbar c$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \mathfrak{Y}^2}$$

α und die Energieeigenwerte $E_{n\alpha}$ wurden bereits in Kap. II.1.1 definiert.

$W(a,b,x)$ sind die Whittaker-Funktionen.

A.2 Zusammenhang zwischen der Energie myonischer Röntgenübergänge und den Momenten der Kernladungsverteilung

Die Änderung der Bindungsenergie eines Myons im Zustand Ψ_a bei einer Änderung der Kernladungsverteilung kann durch Störungsrechnung erster Ordnung berechnet werden. Wir erhalten

$$\Delta B_a \sim \iint \Psi_a^*(\mathcal{M}) \frac{\Delta \varphi(\mathcal{R})}{|\mathcal{M} - \mathcal{R}|} \Psi_a(\mathcal{M}) d^3 R d^3 \tau$$

oder

$$\Delta B_a \sim \int d^3 R \Delta \varphi(\mathcal{R}) \int d^3 \tau \frac{|\Psi_a(\mathcal{M})|^2}{|\mathcal{M} - \mathcal{R}|} \quad (a-4)$$

$\mathcal{M}(r, \vartheta, \varphi)$ beschreibt die Myon-, $\mathcal{R}(R, \theta, \phi)$ die Kernkoordinaten

Die Änderung der Übergangsenergie ist nach (a-4)

$$\Delta \epsilon_{ab} = \Delta B_a - \Delta B_b \sim \int d^3 R \Delta \varphi(\mathcal{R}) \cdot M_{ab}(\mathcal{R}) \quad (a-5)$$

mit
$$M_{ab}(\mathcal{R}) = \int d^3 \tau \frac{|\Psi_a(\mathcal{M})|^2 - |\Psi_b(\mathcal{M})|^2}{|\mathcal{M} - \mathcal{R}|} \quad (a-6)$$

Wenn $\Delta \varphi$ nur von $R = |\mathcal{R}|$ abhängt, folgt aus (a-5) nach Integration über die Winkel

$$\Delta \epsilon_{ab} \sim \int_0^\infty R^2 dR M_{ab}(R) \Delta \varphi(R) \quad (a-7)$$

mit
$$M_{ab}(R) = \int d\Omega M_{ab}(\mathcal{R}) \quad (a-6')$$

Als Moment der Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{R})$ definieren wir

$$\langle M_{ab} \rangle = \int \mathbf{R}^2 \varrho(\mathbf{R}) M_{ab}(\mathbf{R}) d\mathbf{R}$$

Damit erhalten wir aus (a-7), wenn wir $\Delta\varrho = \varrho_1 - \varrho_2$ und $\Delta E_{ab} = E_{ab}^{(1)} - E_{ab}^{(2)}$ setzen

$$E_{ab}^{(1)} - E_{ab}^{(2)} \sim \langle M_{ab} \rangle_{\varrho_1} - \langle M_{ab} \rangle_{\varrho_2}$$

Hieraus folgt die Beziehung (II.15)

$$E_{ab} \sim \langle M_{ab} \rangle_{\varrho}$$

Die Momentfunktion $M_{ab}(\mathbf{R})$ wird aus den Gleichungen (a-6) berechnet. Ford und Wills finden die Näherung

$$M_{ab}(\mathbf{R}) \sim P_0 + P_1 \cdot \mathbf{R}^k$$

A.3 Magnetische Hyperfeinstruktur in Myon-Atomen

Die Wechselwirkung des Myons mit dem magnetischen Vektorpotential \mathcal{O} des Kerns ist

$$M1 = -e \cdot \mathcal{O} \times \vec{\alpha} \quad (\text{a-8})$$

$\vec{\alpha}$ ist der relativistische Stromoperator des Myons.

Der Zusammenhang zwischen $\mathcal{O}(\mathbf{R})$ und der Magnetisierungsdichte $\mathfrak{M}(\mathbf{R})$ wird durch die klassische Elektrodynamik gegeben:

$$\mathcal{O}(\mathbf{R}) = \int \mathfrak{M}(\mathbf{R}') \times \nabla_{\mathbf{R}} \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} d^3\mathbf{R}' \quad (\text{a-9})$$

Wenn man (a-9) in (a-8) einsetzt, erhält man den in Kap. II.4 angegebenen Operator

$$M1 = -e \int \mathfrak{M}(\mathbf{R}') \left[\nabla_{\mathbf{R}} \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} \times \vec{\alpha} \right] d^3\mathbf{R}' \quad (\text{a-10})$$

Die Gesamtwellenfunktion des Myon-Kern-Systems lautet

$$|FM\rangle = \sum_m \langle j I m, M-m | FM \rangle | I, M-m \rangle | j m \rangle \quad (a-11)$$

$|I, M-m\rangle$ ist die Kern-, $|j m\rangle$ die Myon-Wellenfunktion.

a) Punktkernnäherung

Wenn das magnetische Dipolmoment des Kerns auf einen Punkt konzentriert ist, gilt

$$\mathcal{M} = \vec{\mu}_I \cdot \delta^{(3)}(\mathbf{r})$$

und aus (a-10) folgt

$$M1_{\text{punkt}} \equiv W^{(0)} = - e g_{I N} \vec{\mu}_I \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \equiv \vec{I} \cdot \vec{H} \quad (a-12)$$

$W^{(0)}$ ist ein Tensoroperator der Ordnung $k = 0$. \vec{I} und \vec{H} lassen sich als Tensoroperatoren $\mathbf{I}^{(1)}$ und $\mathbf{H}^{(1)}$ der Ordnung $k = 1$ darstellen. Die Matrixelemente von $W^{(0)}$ zu den Zuständen $|\nu\rangle = |FM\rangle$ und $|\mu\rangle = |F'M'\rangle$ können mit Hilfe des Wigner-Eckhart-Theorems berechnet werden (siehe z.B. [Edm60]).

Die reduzierten Matrixelemente sind

$$\langle j I F \| W^{(0)} \| j' I' F' \rangle = \delta_{II'} \delta_{FF'} (-1)^{j'+I+F} \begin{Bmatrix} j & j' & 1 \\ I' & I & F \end{Bmatrix} \quad (a-13)$$

$$\cdot \sqrt{2j+1} \sqrt{2I+1} \langle j \| \mathbf{H}^{(1)} \| j' \rangle \langle I \| \mathbf{I}^{(1)} \| I' \rangle$$

Die Auswertung der reduzierten Matrixelemente zeigt $F' = F$, $M' = M$ und $m' = m$. Damit wird

$$W_{\mu\nu} = \langle \mu | W^{(0)} | \nu \rangle = \langle j I F \| W^{(0)} \| j' I F \rangle$$

und mit (a-13)

$$W_{\mu\nu} = (-1)^s \cdot \sqrt{(2I+1)(I+1)I} \begin{Bmatrix} j & j' & 1 \\ I & I & F \end{Bmatrix} \frac{\langle m j | H_z | m j' \rangle}{\begin{pmatrix} j' & 1 & j \\ m & 0 & -m \end{pmatrix}} \quad (a-14)$$

$$s = j + j' - 1 + m + I + F$$

wobei $|j'-1| \leq j \leq (j'+1)$

Die in (a-14) auftretenden speziellen 3j- und 6j- Symbole werden z.B. in [Edm60] explizit angegeben.

Die Diagonal-Matrixelemente von $W_{\mu\nu}$ ergeben die M1-Hyperfeinstrukturaufspaltung des Zustands $|jm\rangle$. Wir finden aus (a-14)

$$W_{\mu\mu} = \frac{1}{m} \langle mj | H_z | mj \rangle \cdot \frac{1}{2} [F(F+1) - I(I+1) - j(j+1)] \quad (a-15)$$

Als Hyperfeinstrukturkonstante definiert man

$$a_0 = \frac{1}{m} \langle mj | H_z | mj \rangle \quad (a-16)$$

Die Matrixelemente

$$(H_z)_{\mu\nu} \equiv \langle mj | H_z | mj' \rangle = - e g_I \mu_N \langle mj | \frac{\mathbf{r} \times \vec{\alpha}}{r^3} | mj' \rangle \quad (a-17)$$

werden von M.E. Rose in der folgenden Form angegeben

$$(H_z)_{\mu\nu} = - e g_I \mu_N R_{\mu\nu} \cdot A_{\mu\nu}$$

mit
$$R_{\mu\nu} = \int_0^{\infty} \frac{1}{r^2} (F_{\mu} G_{\nu} + G_{\mu} F_{\nu}) dr$$

$$A_{\mu\nu} = - \frac{[(\ell + 1/2)^2 - m^2]^{1/2}}{2\ell + 1} \quad \text{für } j' = j \pm 1, \ell' = \ell$$

$$A_{\mu\mu} = - \frac{\alpha m}{j(j+1)} \quad \text{für } j' = j, \ell' = \ell$$

Damit folgt aus (a-17)

$$a_0 = e g_I \mu_N \frac{\alpha}{j(j+1)} 2 \int_0^{\infty} \frac{GF}{r^2} dr \quad (a-18)$$

b) Nichtrelativistische Punktkernnäherung

Aus den Radialgleichungen (II.15) folgt

$$\frac{dG}{dr} = -\kappa \frac{G}{r} + \left[E + m_{\mu} c^2 - V(r) \right] F / \hbar c \quad (\text{a-19})$$

Für kleine Bindungsenergien gilt

$$E + m_{\mu} c^2 - V(r) \approx 2m_{\mu} c^2$$

Damit folgt aus (a-19)

$$F = \frac{\hbar c}{2m_{\mu} c^2} \left(G' + \kappa \frac{G}{r} \right)$$

Durch partielle Integration finden wir damit

$$\int_0^{\infty} \frac{GF}{r^2} dr = \frac{\hbar c}{2m_{\mu} c^2} (1 + \kappa) \int_0^{\infty} \frac{G^2}{r^3} dr \quad (\text{a-20})$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall geht die große Komponente G in die nichtrelativistische Wellenfunktion $\psi_{nl}(r)$ über und es gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{G^2}{r^3} dr = \langle \psi_{nl} | \frac{1}{r^3} | \psi_{nl} \rangle = \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \quad (\text{a-21})$$

Mit $\kappa(1 + \kappa) = l(l + 1)$ und mit (a-20) folgt schließlich aus (a-18)

$$a_0 = g_I \mu_N \mu_B \frac{l(l+1)}{j(j+1)} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle$$

mit

$$\mu_B = e\hbar / 2m_{\mu} c$$

und $\langle \frac{1}{r^3} \rangle = \frac{2}{a_\mu^3} \frac{1}{n^3 \ell(\ell+1)(2\ell+1)}$

$$a_\mu = \frac{\hbar^2}{m_\mu e^2} Z^{-1}$$

c) Einfluß der räumlichen Verteilung des magnetischen Kernmoments

Der Beitrag des i-ten Nukleons zur Magnetisierungsdichte ist

$$\mathcal{M}(\mathcal{R})_i = \mu_N (g_L \vec{L} + g_S \vec{S})_i \cdot \delta^{(3)}(\mathcal{R} - \mathcal{R}_i)$$

Damit wird der Operator M1 in (a-10)

$$M1 = -e g_I \mu_N \sum_{i=1}^A \int (g_L \vec{L} + g_S \vec{S}) \left(\nabla_{\mathcal{R}} \frac{1}{|\mathcal{R} - \mathcal{R}_i|} \times \vec{\alpha} \right)_i \delta^{(3)}(\mathcal{R} - \mathcal{R}_i) d^3 \mathcal{R}_i$$

Bei der Diagonalisierung von M1 erhält man wieder einen Ausdruck wie (a-15). Die Auswertung von $a = (H_Z)_{\mu\mu}$ ist jedoch in diesem Fall schwieriger.

Der Tensoroperator $\nabla_{\mathcal{R}}(1/|\mathcal{R} - \mathcal{R}_i|)$ kann nach Vektorkugelfunktionen entwickelt werden. Es stellt sich heraus, daß für $s_{1/2^-}$ und $p_{1/2^-}$ Zustände nur der Dipolanteil mit $\ell = 1$ beiträgt. Für höhere Zustände geben die Anteile mit $\ell \geq 2$ kleine Korrekturen zum dominierenden Dipolterm [Sch 71].

Nach Le Bellac [LeB63] gilt für $s_{1/2^-}$ und $p_{1/2^-}$ Zustände

$$a = a_L + a_S \tag{a-22}$$

mit

$$a_L = e\mu_N \frac{\alpha}{j(j+1)} \frac{2}{I} \sum_{i=1}^A \langle II | (g_L L_z)_i \left\{ \int_{R_i}^{\infty} \frac{FG}{r^2} dr + \int_0^{R_i} \frac{rFG}{R_i^3} dr \right\} | II \rangle \quad (\text{a-23})$$

$$a_S = e\mu_N \frac{\alpha}{j(j+1)} \frac{2}{I} \sum_{i=1}^A \langle II | (g_S)_i \left\{ S_z \int_{R_i}^{\infty} \frac{FG}{r^2} dr + \hat{a}_z \int_0^{R_i} \frac{rFG}{R_i^3} dr \right\} | II \rangle$$

$$\hat{a} = -\frac{1}{2} \sqrt{10} (S \otimes C^{(2)})^{(1)}$$

$$C_m^{(2)}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} Y_2^m(\theta, \phi)$$

Im Einteilchen-Kernmodell nimmt man an, daß nur ein Nukleon zum magnetischen Dipolmoment beiträgt

$$\vec{\mu} = g_S \vec{S} + g_L \vec{L} = g_I \vec{I}$$

Es gilt

$$\langle II | \mu_z | II \rangle = \langle II | g_S S_z + g_L L_z | II \rangle = g_I \cdot I \quad (\text{a-24})$$

Mit Hilfe des Wigner-Eckhart-Theorems berechnen wir

$$\langle II | a_z^{(1)} | II \rangle = \begin{cases} -\frac{2I-1}{8(I+1)} & \text{für } I = L + 1/2 \\ \frac{1}{8} \frac{2I+3}{I+1} & \text{für } I = L - 1/2 \end{cases} \quad (\text{a-25})$$

$$\langle II | L_z | II \rangle = \begin{cases} I - 1/2 & \text{für } I = L + 1/2 \\ \frac{I(2I+3)}{2(I+1)} & \text{für } I = L - 1/2 \end{cases} \quad (\text{a-26})$$

Aus (a-22) folgt mit (a-23):

$$a = e\mu_N \frac{\hbar c}{j(j+1)} \frac{2}{I} \left[\langle II | g_S S_z + g_L L_z | II \rangle \cdot K_1^* + \right. \\ \left. + \left\{ g_S \langle II | \mathbf{a}_z^{(1)} | II \rangle + g_L \langle II | L_z | II \rangle \right\} K_2 \right] \quad (\text{a-27})$$

mit $K_1^* = K_0 - K_1$

$$K_0 = \int_0^\infty \frac{FG}{r^2} dr$$

$$K_1 = \int_0^\infty |u(R)|^2 R^2 dR \int_0^R \frac{FG}{r^2} dr$$

$$K_2 = \int_0^\infty |u(R)|^2 R^2 dR \int_0^R \frac{rFG}{R^3} dr$$

Darin ist $u(R)$ der Radialteil der Einteilchenfunktion $|II\rangle$. Wenn wir die Gleichungen (a-24) bis (a-26) in (a-27) einsetzen, erhalten wir schließlich die in Kap. II.4b angegebenen Ausdrücke (II.30) und (II.31).

c) Intensität der Hyperfeinstrukturkomponenten

Die Wahrscheinlichkeit eines E1-Übergangs des Myon-Kern-Systems vom Zustand $|jIF\rangle$ in den Zustand $|j'IF'\rangle$ ist (vergl. II.24)

$$R_{FF'} = \alpha(L, \epsilon_{FF'}) \cdot \left| \langle jIF || T_1 || j'IF' \rangle \right|^2 \quad (\text{a-28})$$

mit

$$\epsilon_{FF'} = |\epsilon(j, I, F) - \epsilon(j', I, F')|$$

Wenn die HFS-Aufspaltung der Zustände klein gegenüber der Übergangsenergie ist, gilt

$$\epsilon_{FF'} = |\epsilon(j) - \epsilon(j')|$$

Der Dipoloperator T_1 setzt sich aus dem Anteil ${}_{\mu}T_1$ und einem Anteil ${}_N T_1$ zusammen, der auf das Myon, bzw. auf den Kern wirkt.

$$T_1 = {}_{\mu}T_1 + {}_N T_1$$

Mit Hilfe des Wigner-Eckhart-Theorems zerlegen wir $R_{FF'}$ in einen Myon- und einen Kern-Anteil. Bis auf einen Phasenfaktor gilt

$$R_{FF'} = \alpha(L, \epsilon_{FF'}) \cdot (2F+1) \cdot (2F'+1) \cdot$$

$$\left[\left\{ \begin{matrix} j & 1 & j' \\ F & I & F \end{matrix} \right\} \langle j \| {}_{\mu}T_1 \| j' \rangle + \delta_{jj'} (-1)^{\Delta F} \left\{ \begin{matrix} I & 1 & I \\ F' & j & F \end{matrix} \right\} \langle I \| {}_N T_1 \| I \rangle \right]^2$$

Da der Kern kein elektrisches Dipolmoment haben kann, gilt

$$\langle I \| {}_N T_1 \| I \rangle = 0$$

$$R_{jj'} = \alpha(L, \epsilon_{jj'}) \cdot \left| \langle j \| {}_{\mu}T_1 \| j' \rangle \right|^2$$

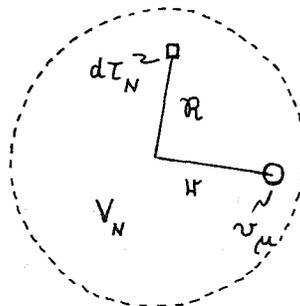
ist die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang des Myons von $|j\rangle$ nach $|j'\rangle$ (siehe (II.24)).

Damit gilt

$$R_{FF'} = R_{jj'} \cdot (2F+1) \cdot (2F'+1) \cdot \left\{ \begin{matrix} j & 1 & j' \\ F & I & F \end{matrix} \right\}^2$$

A.4 Klassische Betrachtung zu einer
endlichen Ausdehnung des Myons

Wir nehmen an, das Myon
befinde sich innerhalb des
Kernvolumens V_N . Wenn das
Myon punktförmig ist, dann
ist seine Energie



$$\varepsilon_0(\tau) = e^2 Z \int_{V_N} \frac{\rho_N(R) d\tau_N}{|\mathcal{R} - \mathcal{W}|} \quad (\text{a-29})$$

Wobei das Integral über das ganze Kernvolumen zu erstrecken
ist. Wenn das Myon ausgedehnt ist und das Volumen v_μ hat,
dann ist die Energie

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau) &= e^2 Z \int_{V_N - v_\mu} \frac{\rho_N(R) d\tau_N}{|\mathcal{R} - \mathcal{W}|} \\ &= e^2 Z \int_{V_N} \frac{\rho_N(R) d\tau_N}{|\mathcal{R} - \mathcal{W}|} - e^2 Z \int_{v_\mu} \frac{\rho_N(R) d\tau_N}{|\mathcal{R} - \mathcal{W}|} \end{aligned}$$

Mit (a-29) erhalten wir hieraus den Energieunterschied

$$\Delta\varepsilon(\tau) = \varepsilon_0(\tau) - \varepsilon(\tau) = e^2 Z \int_{v_\mu} \frac{\rho_N(R) d\tau_N}{|\mathcal{R} - \mathcal{W}|}$$

Wenn wir annehmen, daß die Kernladungsdichte innerhalb des
Volumens v_μ konstant ist, folgt hieraus mit $|\mathcal{R} - \mathcal{W}| = s$
und $d\tau_N = 4\pi s^2 ds$

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon(\tau) &= e^2 Z \rho_N(\tau) \int_0^G \frac{4\pi s^2 ds}{s} \\ &= 4\pi e^2 Z \rho_N(\tau) \frac{G^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{a-30})$$

Wobei G der angenommene Radius des Myons ist.

(a-30) muß noch über die Wellenfunktion des Myons gemittelt werden. Damit erhalten wir die Energieverschiebung des Myons im Zustand $|\Psi\rangle$

$$\Delta\epsilon_G = \langle \Delta\epsilon(r) \rangle = 4\pi e^2 Z \frac{G^2}{2} \langle \rho_N(r) \rangle$$

Dieser Ausdruck entspricht (bis auf den Faktor $1/2$) dem von Iachello und Lande angegebenen (II.12), wenn wir $G = \hbar c/\Delta$ setzen.

Verzeichnis einiger häufig verwendeter Symbole

α	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Feinstrukturkonstante (II.2)} \\ \text{und Parameter der Anfangsverteilung (II.19)} \end{array} \right.$
A	Atomgewicht
$a(nlj)$	M1- HFS- Kopplungskonstante des Zustands $ nlj\rangle$ (II.25)
a_B	Bohrscher Radius (Tabelle 1-1)
$b(nlj)$	E2- HFS- Kopplungskonstante des Zustands $ nlj\rangle$ (II.36)
c	Fermi-Parameter (II.13)
χ^2	mittlere quadratische Abweichung (III.3)
$\hat{\chi}^2$	mittlere quadratische Abweichung pro Freiheitsgrad (= $\chi^2/(N-F)$)
$\epsilon_F(E2)$	E2- HFS- Aufspaltung (II.36)
$\epsilon_F(M1)$	M1- HFS- Aufspaltung (II.25)
F	Gesamtdrehimpuls des Myon-Kern-Systems (Kap. II.4.1)
f_μ, f_Q	Formfaktoren der M1- bzw. E2- HFS- Kopplungskonstanten (I.8) und (I.9)
$g_{s,\ell,I}$	Spin-, Bahndrehimpuls-, Kern-g-Faktor (Kap. II.4.1b)
I_{if}	Intensität eines Strahlungsübergangs von $ i\rangle$ nach $ f\rangle$
Δ	"cut off"-Masse des Myons (II.12)
μ_N	Kernmagneton (I.11)
μ_I	magnetisches Dipolmoment des Kerns mit dem Spin I
P_i	relative Besetzung des Zustands $ i\rangle$ (Kap. II.3.1)
Q_N	elektrisches Quadrupolmoment des Kerns (II.38)
R_{if}	Strahlungsübergangswahrscheinlichkeit von $ i\rangle$ nach $ f\rangle$ (II.24)
R_k	Äquivalenzradius (II.17)
$\sqrt{\langle r^2 \rangle}$	"root mean square"-Radius (= $\int r^2 \rho(r) r^2 dr$)
r_o	normierter Äquivalenzradius (= $R_2/A^{1/3}$)
t	$\left. \vphantom{t} \right\}$ Fermiparameter (II.13)
w	
Z	Kernladungszahl

