

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

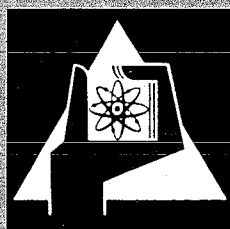
Februar 1972

KFK 1564

Institut für Experimentelle Kernphysik

**Fixpunkte spezieller nichtlinearer Transformationen
des Betatron-Phasenraumes**

J. Erb



**GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE**

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

**GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE**

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Februar 1972

KFK 1564

Institut fuer Experimentelle Kernphysik

FIXPUNKTE SPEZIELLER NICHTLINEARER
=====

TRANSFORMATIONEN DES BETATRON-PHASENRAUMES+
=====

J. Erb

Gesellschaft fuer Kernforschung m.b.H., Karlsruhe

+ von der Fakultaeet fuer Physik der Universitaet (TH)
Karlsruhe genehmigte Dissertation

ZUSAMMENFASSUNG

=====

Die transversale Teilchenbewegung in einem idealen Synchrotron, das durch einen einzelnen Sextupol gestört ist, wird unter dem Aspekt der Transformation einer Phasenebene mit dem Teilchenumlauf behandelt. Der Sextupol wird als dünne Linse aufgefasst; infolge dessen ist die Transformation durch zwei algebraische Ausdrücke in den Phasenraumkoordinaten gegeben. Die für das Stabilitätsverhalten der Teilchenbewegung wichtigen Fixpunkte der Transformation ergeben sich als Lösungen eines algebraischen Gleichungssystems. Indem man von den Gruppeneigenschaften der Transformation und eventueller Symmetrie Gebrauch macht, kann man das Aufsuchen der Fixpunkte wesentlich vereinfachen. Es wird gezeigt, dass in dem betrachteten System sich Fixpunkte bis zur Ordnung sechs analytisch berechnen lassen; sie werden explizit angegeben.

Die Ergebnisse können beim Entwurf von Systemen zur langsamen Extraktion des Teilchenstrahles Verwendung finden.

ABSTRACT

=====

The transversal motion of particles in an ideal synchrotron which is perturbed by a single sextupole is treated by transforming the phase plane over a number of revolutions. The perturbing sextupole is taken as a thin lens, giving the transformation in the form of two algebraic expressions of the phase space coordinates.

The fixed points of the transformation which are important for the stability behaviour of the particles emerge from a system of algebraic equations.

By using the group properties of the transformation and its symmetry the procedure of determining the fixed points is greatly simplified. It is shown that in the system under consideration the fixed points may be calculated analytically up to sixth order, they are given explicitly.

The results can be used in designing slow extraction systems for particle beams from large synchrotrons.

INHALTSVERZEICHNIS

=====

I	:	EINLEITUNG	1
II	:	DAS SYNCHROTRON MIT SEXTUPOLSTOERUNG	6
II.A:		DIE IDEALE MASCHINE	6
II.B:		DIE GESTOERTE MASCHINE	9
III	:	SPEZIELLE NICHTLINEARE TRANSFORMATIONEN	12
III.A:		LOESUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN	12
III.B:		DIE DIMENSIONSLOSEN PHASENEBENEN	13
III.C:		DIE TRANSFORMATION UEBER EINEN UMLAUF	15
III.D:		DIE TRANSFORMATION UEBER N UMLAEUFE	17
III.E:		DIE BEDEUTUNG DER FIXPUNKTE DER TRANSFORMATIONEN	19
III.F:		DIE SYMMETRISIERTEN TRANSFORMATIONEN	20
IV	:	BERECHNUNG VON FIXPUNKTEN	28
IV.A:		ALLGEMEINE UEBERLEGUNGEN	28
IV.B:		AUSNUTZEN DER SYMMETRIEEIGENSCHAFTEN	30
IV.C:		DIE FIXPUNKTE DER ORDNUNGEN EINS BIS VIER	38
IV.D:		DIE FIXPUNKTE DER ORDNUNGEN FUENF UND SECHS	48
V	:	DISKUSSION DER METHODE	54
VI	:	DISKUSSION DER ERGEBNISSE	57
A N H A N G			

A1	:	BEWEIS FUER DIE SPIEGELSYMMETRIE EINES SATZES FIXPUNKTE	58
A2	:	DAS CHECKPROGRAMM FUER DIE FIXPUNKTE	67
A3	:	BEWEIS DER IRREDUZIBILITAET GEWISSER FIXPUNKTPOLYNOME	71
		LITERATURVERZEICHNIS	74

I: EINLEITUNG

=====

Das Stabilitätsverhalten der transversalen Teilchenbewegung in einem Kreisbeschleuniger oder Speicherring zeigt charakteristische Unterschiede je nach dem, ob die Magnetfelder, von denen die Teilchen im Ring beeinflusst werden, lineare Funktionen des Abstands von der Sollbahn sind oder nicht.

In einer rein 'linearen' Maschine ist jede Teilchenbahn stabil, falls nur die 'Struktur' des Magnetsystems so gewählt wurde, dass sich ihr ein (reeller) Q -Wert [1] zuordnen lässt, d.h. die Spur der Transfermatrix fuer einen Umlauf dem Betrage nach kleiner als die Zahl zwei ist; baut man das 'Gitter' der Magnete so auf, dass die genannte Bedingung verletzt wird, so ist jede Teilchenbahn instabil: wie auch immer man die Startbedingungen fuer ein Teilchen wählt, d. h. in welchem Abstand X und mit welcher Neigung X' zur Sollbahn man das Teilchen in die Vakuumkammer einschiesst, nach endlicher Zeit wird die Abweichung des Teilchens von der Sollbahn die Abmessungen der Vakuumkammer erreicht haben.

Wenn die Magnetfelder nicht voellig linear verlaufen, so ist die Stabilität einer Teilchenbahn - im Gegensatz zum linearen Fall - nicht nur durch die Parameter der Maschine bestimmt, sondern auch durch die Startkoordinaten des betreffenden Teilchens.

Diesen Sachverhalt kann man, da X und X' 'Phasenraumkoordinaten' sind, folgendermassen ausdruecken: der transversale Phasenraum, auch 'Betatron-Phasenraum' genannt, weist im allgemeinen stabile und instabile Gebiete auf, deren Lage

und Groesse wiederum von den Maschinenparametern abhaengen. Beim Entwurf eines Beschleunigers kommt es darauf an, die freien Parameter so zu waehlen, dass trotz unvermeidbarer Feldfehler und Nichtlinearitaeten in den Magneten die Bahnkoordinaten der Teilchen stets in Stabilitaetsbereichen liegen.

Die Untersuchungen ueber den Einfluss von nichtlinearen Magnetfeldern auf die Teilchenbewegung, die vor etwa 20 Jahren im Zusammenhang mit dem damals anstehenden Bau der ersten grossen AG-Synchrotrone (in Genf und Brookhaven) durchgefuehrt wurden, hatten dementsprechend das Ziel, Regeln zu finden, deren Anwendung beim Bau der Maschinen Strahlstabilitaet garantierte. Von den meisten Autoren wurde eine Methode verwendet, die gekennzeichnet ist durch Fourieranalyse des Potentials und Loesung der Bewegungsgleichungen fuer die Teilchen mittels Variation der Konstanten. (Bei A. Schoch [2] findet man eine ausfuehrliche Darstellung dieses Verfahrens und zahlreiche Literaturhinweise). Ihr wichtigstes Ergebnis ist das folgende: zwischen dem Q-Wert Q und der Nummer P eines nicht verschwindenden Fourierkoeffizienten darf keine Beziehung der Form: $Q N = P$ bestehen, wobei N eine positive ganze Zahl < 5 ist; anders ausgedrueckt: Resonanzen und Subresonanzen bis zur Ordnung 4 muessen vermieden werden, wenn der Strahl stabil bleiben soll.

Als sich durch den erfolgreichen Betrieb der grossen Maschinen gezeigt hatte, dass die Nichtlinearitaeten beherrschbar waren, ging man dazu ueber, sie fuer die langsame Extraktion des Strahles [3] am Ende der Beschleunigung auszunutzen. Man

erregt zu diesem Zweck spezielle Stoermagnete, meist Sextupole, die ein nichtlineares Feld erzeugen, verschiebt den Arbeitspunkt der Maschine in eine Resonanz und laesst den Teilchenstrahl nach und nach instabil werden. Die Zahl dieser Zusatzmagnete ist relativ klein, neuere Entwuerfe fuer Extraktionssysteme [4] sehen einen oder zwei Sextupole vor. Die theoretische Behandlung einer derartigen Anordnung von nichtlinearen Magneten in einem demgegenueber in erster Naehung als linear anzusehenden Synchrotron ist sehr wohl nach dem in [2] beschriebenen Verfahren durchfuehrbar [5]; dies ist jedoch nur dann bequem und durchsichtig, wenn die Zahl der signifikanten Terme in der Fourierentwicklung des Stoerpotentials gering ist. Der Fall, dass nur wenige, zudem scharf lokalisierte Stoerfelder wirken, liegt sozusagen am anderen Ende des Anwendungsspektrums der genannten Methode; denn es gibt hier stets unendlich viele, i. a. gleich grosse Fourierkomponenten, die man - bis auf eine - alle weglaesst oder wegtransformiert: ersteres ist unbefriedigend, letzteres unbequem.

Sehr viel durchsichtiger und direkter ist die Methode, auf der die Computerprogramme basieren, die bei der Berechnung von Magnetanordnungen zur langsamen Extraktion verwendet werden: die Maschine wird als linear angesehen und dementsprechend durch Transfermatrizen beschrieben, die Stoermagnete behandelt man als duenne Linsen; man verfolgt rechnerisch eine Reihe von Teilchen mit gewissen anfaenglichen Bahnkoordinaten ueber mehrere Umlaeufe. Moderne Grossrechner gestatten es, je nach Kompliziertheit der Anordnung pro Se-

kunde Rechenzeit etwa 500 bis 5000 Umlaeufe um den Ring zu simulieren. Die Programmierung ist nicht sehr aufwendig, und mittels graphischer Ausgabe der Koordinaten kann man sich leicht einen Ueberblick ueber die Teilchenbewegung verschaffen [11].

Gleichwohl ist eine analytische Behandlung wuensenswert, besonders im Hinblick auf Optimierungsfragen. Hierbei waere es bereits ein Gewinn, wenn die Abhaengigkeit der Koordinaten geschlossener Teilchenbahnen von den relevanten Parametern explizit gemacht werden koennte: den Umlaeufen der Teilchen entsprechen gewisse Transformationen des Beta-tron-Phasenraumes, geschlossenen Bahnen entsprechen Fixpunkte dieser Transformationen; es zeigt sich, dass Lage und Groesse der Stabilitaetsgebiete im Phasenraum durch die Position solcher Fixpunkte weitgehend bestimmt werden.

Einfache Systeme, bestehend aus einem Sextupol und einem Quadrupol, sind bereits mehrfach behandelt worden [6] - [9]. Es fehlt jedoch eine systematische Darstellung des Sachverhalts; des weiteren ist bisher - soweit bekannt - noch nicht der Versuch unternommen worden, bei der analytischen Behandlung so weit zu gehen, wie es von der Natur des Problems her moeglich ist. Der Grund liegt in dem enormen Aufwand an algebraischen Manipulationen, der dazu getrieben werden muss. In der vorliegenden Arbeit soll die einfachste Anordnung der genannten Art, ein einziger Stoersexupol in einer im uebrigen rein linearen Maschine, ausfuehrlich untersucht werden. Dabei wird der Transformationsaspekt des Problems deutlich in den Vordergrund gestellt. Die Beschraenkung auf den ein-

fachsten Fall hat den Sinn, den Rechenaufwand vergleichsweise niedrig zu halten und das Wesen der Methode deutlicher hervortreten zu lassen. Mit Hilfe des FORMAC-Programmsystems [10] werden die Grenzen der angesprochenen analytischen Methode erkundet - auch im Hinblick auf kompliziertere Anordnungen. Gleichzeitig wird ein Verfahren geschildert, dass auch bei Systemen, die sich ob ihrer Kompliziertheit algebraischer Behandlung entziehen, numerischen Rechnungen als Grundlage dienen kann.

II: DAS SYNCHROTRON MIT SEXTUPOLSTÖRUNG

II.A: DIE IDEALE MASCHINE

Die transversalen Schwingungen eines Teilchens in einem Synchrotron genügen den Differentialgleichungen

$$\underline{x'' + k_1(s) x = F_1(s, x, x', z, z', \Delta P/P)} \quad (1a)$$

$$\underline{z'' + k_2(s) z = F_2(s, x, x', z, z')} \quad (1b)$$

Hierbei bezeichnen x und z die horizontalen bzw. vertikalen Koordinaten des Teilchens bezueglich der Sollbahn, x' und z' die Ableitungen dieser Koordinaten nach der Bogenlaenge s der Sollbahn, $\Delta P/P$ die relative Abweichung des Teilchenimpulses vom Sollimpuls. Die Funktionen k_1 , k_2 haengen nur von der Bogenlaenge ab und sind i. a. periodisch mit einer Periode, die der Quotient aus Umfang L des Beschleunigers und Anzahl der Superperioden ist.

In einem 'idealen' Synchrotron verschwindet die Funktion F_2 ganz, die Funktion F_1 bis auf einen Term, der der Impulsabweichung proportional ist. Betrachtet man nur Teilchen eines ganz bestimmten Impulses, so kann man durch eine Variablentransformation auch diesen Term zum Verschwinden bringen und hat zwei entkoppelte Schwingungsgleichungen der Form

$$\underline{y'' + k(s) y = 0} \quad , \quad (2)$$

deren Federkonstanten periodische Funktionen der unabhaengi-

gen Variablen sind.

Reale Maschinen werden gemeinhin so gebaut, dass die Funktionen F_1, F_2 als kleine Störungen des rein linearen Falles angesehen werden koennen.

Gleichung (2) ist vom Hillschen Typ. Ihre Loesung laesst sich nach Floquet in der Form

$$\underline{y = w \exp(i \varphi)} \quad (3)$$

darstellen, wobei die Amplitude $w(s)$ der Differentialgleichung

$$\underline{w'' + k w - 1/(w^3) = 0} \quad (4a)$$

genuegt und mit der Phase φ in der Beziehung

$$\underline{\varphi' = 1/(w^2)} \quad (4b)$$

steht. Beide sind Funktionen der Bogenlaenge, wobei w der Periodizitaet des Gitters folgt, waehrend φ monoton von s abhaengt.

Wegen der Linearitaet der Gleichung (2) laesst sich ihre Loesung, dargestellt durch das Variablenpaar $(y(s), y'(s))$ an einer beliebigen Stelle s , linear aus den Anfangswerten $(y(s_0), y'(s_0))$ der betreffenden Teilchenbahn berechnen:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline I \\ \hline I \\ \hline I \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline y(s) \\ \hline y'(s) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline I \\ \hline I \\ \hline I \\ \hline \end{array} \\ & = T & \begin{array}{|c|} \hline I \\ \hline I \\ \hline I \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline y(s_0) \\ \hline y'(s_0) \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline I \\ \hline I \\ \hline I \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (5)$$

Hierbei bezeichnet T eine zweireihige quadratische Matrix,

die sog. 'Transfermatrix'. Die moeglichen Wertepaare (y, y') kann man als Punkte einer Ebene interpretieren, der 'Phasenebene' der Schwingung. Jedem Umfangspunkt s laesst sich eine solche Ebene zuordnen.

Die Elemente der Transfermatrix T sind Funktionen der Variablen w und w' an den Stellen s und s_0 sowie des Phasenvorschubs

$$\mu = \varphi(s) - \varphi(s_0)$$

zwischen diesen. Ihre genaue Form ist in [1] und [8] angegeben. In [8] wird auch gezeigt, dass man - aufgrund des eindeutigen Zusammenhangs zwischen s und φ - durch eine Eichtransformation uebergehen kann zu einem System von Phasenebenen $[Y(\varphi), Y'(\varphi)]$, wobei der Apostroph nunmehr Differentiation nach φ bedeutet und diese 'normierten Phasenebenen' die fuer mathematische Behandlung angenehme Eigenschaft haben, dass der Uebergang von einer Ebene zur anderen durch die Matrix einer Drehung um den Ursprung vermittelt wird:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} \\ I & Y(\varphi) & I & = & I & C & S & I & I & Y(\varphi_0) & I \\ I & & I & & I & & & I & I & & I \\ I & Y'(\varphi) & I & & I & -S & C & I & I & Y'(\varphi_0) & I \\ \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} \end{array} \quad (6)$$

Hierin sind die Abkuerzungen

$$C = \cos(\mu), \quad (7a)$$

$$S = \sin(\mu), \quad (7b)$$

$$\mu = \varphi - \varphi_0 = \varphi(s) - \varphi(s_0)$$

verwendet worden, die auch im folgenden beibehalten werden sollen.

Von besonderem Interesse ist die Transfermatrix fuer einen

Umlauf; sie vermittelt eine lineare Abbildung der Phasenebene bei s_0 auf sich selbst. Den zugehörigen Phasenvorschub, geteilt durch 2π , bezeichnet man als Q-Wert:

$$\mu = \varphi(s_0 + L) - \varphi(s_0) = 2\pi Q \quad (8)$$

Q gibt die Anzahl der Betatronschwingungen pro Umlauf an und ist für die Dynamik der Teilchen im Ring von eminenter Wichtigkeit.

Im Rahmen der hier darzustellenden Überlegungen ist eine ideale Maschine vollständig durch die Angabe ihrer beiden Q-Werte - jeweils einer für die horizontale wie die vertikale Schwingungsrichtung - beschrieben.

II.B: DIE GESTOERTE MASCHINE

Im folgenden soll das einfachste Modell einer Störung der idealen Maschine untersucht werden: ein an einem einzigen Punkt des Umfangs wirksames Feld, das die Richtung der Bahn des Teilchens beeinflussen kann, wenn dieses den Ort des Störfeldes erreicht. Das Modell beschreibt genähert die Wirkung eines einzelnen Störmagneten auf den Teilchenstrahl. Diese Näherung - man nennt sie die 'Dünn-Linsen-Näherung' der Strahloptik - ist dann brauchbar, wenn die Länge des betrachteten Magneten klein ist gegenüber der Wellenlänge einer Betatronschwingung, also der Strecke s , längs derer die Phase φ um 2π anwächst.

Mathematisch lässt sich die scharfe Lokalisierung der Stö-

rung durch Faktoren vom Typ der Diracschen Delta-Funktion (als Funktion von s bzw. φ) in den Inhomogenitäten F_1 , F_2 auf der rechten Seite von (1) beschreiben. Dementsprechend hat die Y^s -Koordinate der Lösung von (1), wenn φ_1 die Position der Störung bezeichnet, Sprungstellen bei φ_1 modulo μ , wobei $\mu = 2\pi Q$ (s. (8)). Die Differenz

$$\underline{\Delta Y^s(\varphi_1) = Y^{s+}(\varphi_1) - Y^{s-}(\varphi_1)} \quad (9)$$

zwischen rechts- und linksseitigem Grenzwert an diesen Punkten soll - um das Modell etwas zu spezialisieren - nur von der Variablen $Y(\varphi_1)$ abhängen:

$$\underline{\Delta Y^s(\varphi_1) = D(Y(\varphi_1))} \quad (9a)$$

Es soll also keine Kopplung von horizontaler und vertikaler Schwingung induziert werden.

Ueber den Verlauf von D als Funktion von Y wird folgende Voraussetzung gemacht:

$$\underline{D(Y) = K (Y - Y_0)^2} \quad (10)$$

Dies entspricht der Situation, dass der Stoermagnet ein Sextupol ist, der in geeigneter Weise gegenueber der betrachteten Schwingungsrichtung justiert wurde. Der Parameter K beschreibt die Staerke des Sextupols, der Parameter Y_0 die Lage seines Zentrums.

Im allgemeinen verkoppelt ein Sextupol die horizontale mit der vertikalen Schwingung, und zwar gilt in Duenner-Linsen-Naeherung:

$$\underline{\Delta x'' = k ((x - x_0)^2 - z^2)} \quad (10a)$$

$$\underline{\Delta z'' = - 2 k (x - x_0) z} \quad (10b)$$

hierbei sind die urspruenglichen Bezeichnungen (s. (1)) verwendet sowie die Annahme gemacht worden, dass das Zentrum des Magneten bei $x = x_0$, $z = 0$ liegt. Teilchen, die mit den Koordinaten $z=0$, $z'=0$ am Sextupoleingang starten, werden demnach nur hinsichtlich ihrer x - und x' -Koordinaten durch den Sextupol beeinflusst, desgleichen laesst der ungestoerte Teil der Maschine diese speziellen Werte von z und z' ungeaendert, so dass die Phasenebene ($z=0, z'=0$) stets in sich uebergeht. Der Ansatz (10) stellt also eine Spezialisierung der Betrachtungen auf die genannte Phasenebene dar.

Aus zwei Gruenden wird hier die Sextupolstoerung untersucht: Zum einen entspricht sie dem ersten - und damit einfachsten - nichtlinearen Term in der Multipolentwicklung des magnetischen Feldes. (Rein lineare Stoerungen zu betrachten eruebrigst sich; denn jede solche Stoerung kann man durch eine Transfermatrix beschreiben und somit - wenn die Gesamtmatrix fuer einen Umlauf eine Spur < 2 hat - zur ungestoerten Maschine rechnen.) Zum anderen finden Sextupole bei der langsamen Extraktion des Teilchenstrahles aus Protonensynchrotronen Verwendung; daher ist es nicht nur von akademischem, sondern auch von praktischem Interesse, den Einfluss einzelner Sextupole auf den Strahl zu studieren. Bei den in Betracht kommenden Maschinen ist die Voraussetzung fuer die Anwendbarkeit des Modells (Betatronwellenlaenge gross gegen die Laenge des Magneten) erfuehrt.

III: SPEZIELLE NICHTLINEARE TRANSFORMATIONEN

III.A: LOESUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN

Die Loesung der Differentialgleichungen (II,1) laesst sich - unter den im letzten Kapitel beschriebenen Voraussetzungen - auf folgende Weise konstruieren: ausgehend von den Anfangskordinaten (Y, Y') an der Stelle φ_0 errechnet man mittels der Transfermatrix der ungestoerten Maschine von φ_0 nach φ_1 die Bahnkoordinaten des Teilchens am Ort der Stoerung (bei $\varphi = \varphi_1$). Die Y' -Koordinate inkrementiert man sodann gemaess

$$\underline{Y'(\varphi_1)} \longrightarrow Y'(\varphi_1) + D(Y(\varphi_1)) \quad , \quad (1)$$

die Y -Koordinate bleibt ungeaendert. Will man die Koordinaten des Teilchens an der Stelle φ_2 wissen, so hat man auf den Punkt $(Y(\varphi_1), Y'(\varphi_1))$ die Transfermatrix fuer den Teil der ungestoerten Maschine von φ_1 nach φ_2 anzuwenden.

Interessiert man sich jedoch fuer die Teilchenkoordinaten nach einer Reihe von Umlaeufen, so laesst man auf $(Y(\varphi_1), Y'(\varphi_1))$ zunaechst die Transfermatrix fuer einen Umlauf wirken; dadurch gewinnt man die Teilchenkoordinaten unmittelbar vor dem naechsten Durchlaufen des Stoerfeldes. Nun inkrementiert man Y' abermals gemaess (1), jedoch unter Beruecksichtigung der neuen Werte von $Y(\varphi_1)$, und so fort. Auf diese Weise kann man die Teilchenkoordinaten nach endlich vielen Umlaeufen aus den Anfangswerten berechnen.

Mit der soeben angegebenen Vorschrift zur Berechnung der Phasenraumkoordinaten bei $\varphi = \varphi_2$ aus den Koordinaten bei $\varphi = \varphi_0$ ist eine unendliche Folge von Transformationen der Phasenebene bei φ_0 auf die Phasenebene bei φ_2 definiert; die einzelnen Transformationen unterscheiden sich voneinander durch die Anzahl der Durchgaenge durch das Stoerfeld (Anzahl von Umlaeufen) bei ihrer Konstruktion. Setzt man $\varphi_2 = \varphi_0$ (modulo $2\pi Q$), so kann man die gestoerte Maschine auffassen als ein System, das bestimmte nichtlineare Transformationen einer Phasenebene auf eine andere vermittelt. Durch das Studium der Eigenschaften dieser Abbildungen lassen sich Aussagen ueber das Stabilitaetsverhalten der Teilchenbahnen im Synchrotron gewinnen. Die Wahl der Bezugsebene ist fuer die Stabilitaetsfrage unerheblich und wird nur durch praktische Gesichtspunkte bestimmt.

III.B: DIE DIMENSIONSLOSEN PHASENEBENEN

Bevor die fuer das weitere relevanten Phasenraumtransformationen explizit abgeleitet werden, sollen die das zugrunde liegende System beschreibenden Formeln noch etwas modifiziert werden. Der in (II,10) auftretende Parameter K (Sextupolstaerke) laesst sich eliminieren durch Uebergang in ein System von Phasenebenen (X, X') , die aus (Y, Y') durch Multiplikation mit K hervorgehen:

$$\underline{X} = K Y, \quad \underline{X'} = K Y', \quad \underline{X_0} = K Y_0 \quad . \quad (2)$$

Aus (II,10) wird dann (fuer die Phasenebene am Azimut des Sextupols)

$$\underline{\Delta X^0 = (X - X_0)^2} \quad ; \quad (3)$$

bezuglich der linearen Transformation (II,6) - im ungestoerten Teil der Maschine - aendert sich formal nichts. Die Koordinaten X und X' sind dimensionslos (*); denn Y und Y' haben die Dimension einer Laenge, K dagegen hat die einer reziproken Laenge [8]. Ergebnisse von Rechnungen in den 'dimensionslosen' Phasenebenen - soweit es sich um Koordinaten handelt - lassen sich nach (2) in die 'normierten Phasenebenen' (Y, Y') fuer jeden von Null verschiedenen Wert der Sextupolstaerke durch eine affine Transformation uebertragen (scaling law).

Der Bequemlichkeit halber wird im folgenden statt der Bezeichnung X^0 stets Y geschrieben.

(*) Die Existenz der dimensionslosen Phasenebenen ist uebrigens nicht auf den Fall der Sextupolstoerung beschraenkt. Betrachtete man in Duenner-Linsen-Naeherung einen hoeheren Multipol, bei dem der Exponent 2 in (11) durch eine groessere ganze Zahl N zu ersetzen waere, so haette man Y und Y' mit der $(N-1)$ -ten Wurzel aus K zu multiplizieren, um zu dimensionslosen Groessen zu kommen. Auch in dem Fall, dass neben dem nichtlinearen Stoermagneten eine Reihe von linearen Zusatzmagneten zur Wirkung kommt, lassen sich dimensionslose Phasenebenen finden [9].

III.C: DIE TRANSFORMATION UEBER EINEN UMLAUF

Nach dem im vorletzten Abschnitt skizzierten Verfahren soll nunmehr die Transformation ueber einen Umlauf berechnet und explizit angegeben werden. Als Bezugsebene ('Start und Ziel') wird die Phasenebene 'unmittelbar stromauf' vom Sextupol gewaehlt, weil sich dann - der Phasenvorschub zwischen der Bezugsebene und der Ebene des Sextupols verschwindet - die Transformation besonders einfach schreibt.

Ein Teilchen mit Koordinaten (X, Y) in der Bezugsebene erfahrt durch den Sextupol nur eine Aenderung seiner Y -Koordinate (s. (3)). Bezeichnet man mit (X_H, Y_H) die Koordinaten 'unmittelbar hinter' dem Sextupol, so gilt

$$\underline{X_H = X} \quad (4a)$$

$$\underline{Y_H = Y + (X - X_0)^2} \quad (4b)$$

Auf das Zahlenpaar (X_H, Y_H) ist sodann die Transfermatrix fuer einen Umlauf (vgl. (II,6) und (2)) anzuwenden. Der Zielpunkt in der Bezugsebene wird mit (X_B, Y_B) bezeichnet. Fuer ihn erhaelt man:

$$\underline{X_B = C X_H + S Y_H} \quad (5a)$$

$$\underline{Y_B = -S X_H + C Y_H} \quad (5b)$$

Einsetzen von X_H und Y_H nach (4) in (5) liefert die gesuchte Transformation:

$$\underline{XB = SY + (C - 2SX_0)X + SX^2 + SX_0^2} \quad (6a)$$

$$\underline{YB = CY - (S + 2CX_0)X + CX^2 + CX_0^2} \quad (6b)$$

Fuer die spaeteren Betrachtungen wird sich die zu (6) inverse Transformation als sehr nuetzlich erweisen; deshalb soll sie hier sogleich angefuehrt werden. Man gewinnt sie, indem man entweder (6) nach X und Y aufluest oder besser, indem man die Inversen von (4) und (5) in umgekehrter Reihenfolge verknuepft, also die Operation der 'Zeitumkehr' auf den Teilchenumlauf anwendet. Aus (5) ergibt sich:

$$\underline{XH = CXB - SYB} \quad (7a)$$

$$\underline{YH = SXB + CYB} \quad (7b)$$

aus (4):

$$\underline{X = XH} \quad (8a)$$

$$\underline{Y = YH - (XH - X_0)^2} \quad (8b)$$

Durch Einsetzen von (7) in (8) erhaelt man, nachdem man noch die Ersetzungen $(X,Y) \rightarrow (XBI,YBI)$ und $(XB,YB) \rightarrow (X,Y)$ vorgenommen hat, die inverse Transformation:

$$\underline{XBI = -SY + CX} \quad (9a)$$

$$\underline{YBI = 2SCXY + (C - 2SX_0)Y + (S + 2CX_0)X - \frac{2}{S}Y^2 - CX^2 - X_0^2} \quad (9b)$$

Die Transformation (6) hat Funktionaldeterminante Eins; denn sie setzt sich aus 2 Transformationen mit eben dieser Eigenschaft zusammen. Dasselbe gilt auch fuer alle anderen Transformationen, von denen hier hier und in der Folge die Rede ist.

III.D: DIE TRANSFORMATION UEBER N UMLAEUFE

Die Formel (6a) und (6b) definieren einen nichtlinearen Operator T (nicht zu verwechseln mit der Transfermatrix aus Kapitel II), der den Punkt (X,Y) in seinen Bildpunkt (XB,YB) ueberfuehrt. Symbolisch:

$$\underline{(XB, YB) = T(X, Y)} \quad . \quad (10)$$

Entsprechend laesst sich die Transformation ueber N Umlaeufe schreiben als N-malige Anwendung des Operators T auf einen Punkt der Bezugsebene:

$$\underline{T^N(X, Y) = T T^{(N-1)}(X, Y)} \quad . \quad (11)$$

Hierbei ist

$$\underline{T^1(X, Y) = T(X, Y)} \quad . \quad (12)$$

Analog definieren (9a) und (9b) einen zu T inversen Operator

$$\underline{(XBI, YBI) = T^{-1}(X, Y)} \quad . \quad (13)$$

Es muss gelten:

$$\underline{T^{-1}(XB, YB) = T^{-1}T(X, Y) = (X, Y) \quad ; \quad (14)}$$

das ist durch Einsetzen von (6) in (9) auch verifizierbar.

Zu jedem Operator T^N existiert ein inverser Operator T^{-N} mit der Eigenschaft:

$$\underline{T^{-N}T^N(X, Y) = T^0(X, Y) = (X, Y) \quad ; \quad (15)}$$

T^0 bezeichnet den Einheitsoperator.

Damit ist fuer jeden ganzzahligen Wert des Zeigers N eine Transformation T^N definiert. Die Menge dieser Transformationen bildet eine Gruppe, die Substitutionsgruppe von T . Jedes Gruppenelement laesst sich durch eine Folge von Substitutionen aus T oder T^{-1} erzeugen. Die Gruppe ist abelsch, denn man hat fuer 2 beliebige Elemente mit Zeigern N bzw. M :

$$\underline{T^N T^M(X, Y) = T^{(N+M)}(X, Y) = T^M T^N(X, Y) \quad . \quad (16)}$$

Die vorstehenden Ueberlegungen gelten nicht nur fuer die spezielle Transformation (6) und ihre Inverse, sondern fuer jede eineindeutige Abbildung eines Raumes auf sich selbst. Insbesondere lassen sie sich auch auf die den Transformationen (6) und (9) aequivalenten symmetrisierten Transformationen anwenden, die im uebernaechsten Abschnitt eingefuehrt werden sollen.

III.E: DIE BEDEUTUNG DER FIXPUNKTE DER TRANSFORMATIONEN

Wendet man der Reihe nach die nichtlinearen Transformationen aus der Substitutionsgruppe von T auf einen Punkt der Phasenebene an und betrachtet die Reihe der Bildpunkte, so kann man die Faelle unterscheiden, dass alle Bildpunkte in einem endlichen Gebiet der Phasenebene liegen oder dass fuer hinreichend grosse N die Bildpunkte aus jedem endlichen - wenn auch noch so gross gewaehlten - Gebiet herausfallen. Im ersten Fall gehoert die Folge der Bildpunkte zu einer stabilen Teilchenbahn, im zweiten zu einer instabilen. In diesem Zusammenhang draengt sich die Frage auf, ob es Fixpunkte der Transformation gibt, also Punkte (X,Y) , die unter der Anwendung eines Elementes aus der Substitutionsgruppe von T - ausser dem Einselement - in sich uebergehen. Ein Fixpunkt ist von der Ordnung N , wenn er sich unter N -maliger Anwendung von T reproduziert:

$$\underline{T^N (X,Y) = (X,Y) \quad . \quad (17)}$$

Fixpunkte entsprechen geschlossenen Teilchenbahnen, die eine Sonderstellung unter den moeglichen Bahnen im Synchrotron einnehmen insofern, als auf sie die Unterscheidung 'stabil' oder 'instabil' nicht direkt anwendbar ist, da sie per definitionem 'fix', also stabil sind. Trotzdem spricht man von 'stabilen' bzw. 'instabilen' Fixpunkten, bezieht sich dabei aber auf das Verhalten der Phasenraumpunkte in der Umgebung eines Fixpunktes. Durch Linearisierung der Transformation um

einen Fixpunkt kann man feststellen, ob ein den Fixpunkt enthaltendes Gebiet (ausser ihm) sicher instabil oder moeglicherweise stabil ist.

Daraus resultiert die Bedeutung der Fixpunkte fuer die Untersuchung des Stabilitaetsverhaltens der Teilchenbahnen. In der Folge sollen daher die Fixpunkte der Transformation (6) (oder einer aequivalenten Transformation) explizit berechnet werden - zumindest fuer niedrige Ordnungen.

III.F: DIE SYMMETRISIERTEN TRANSFORMATIONEN

Ein Operator T, der den Punkt (X,Y) in seinen Bildpunkt (XB,YB) ueberfuehrt, wird dargestellt durch zwei Funktionen F und G der Variablen X und Y:

$$\underline{T(X,Y) = (XB,YB) = (F(X,Y),G(X,Y))} \quad . \quad (18)$$

Entsprechend wird der zu T inverse Operator durch zwei Funktionen FI, GI vermittelt:

$$\underline{T^{-1}(X,Y) = (XBI,YBI) = (FI(X,Y),GI(X,Y))} \quad . \quad (19)$$

Im naechsten Kapitel wird gezeigt, dass es fuer die Berechnung von Fixpunkten der durch T induzierten Abbildung von Vorteil ist, wenn zwischen den eben eingefuehrten Funktionen die folgenden Symmetriebeziehungen bestehen:

$$\underline{FI(X,Y) = F(X,-Y)} \quad (20a)$$

$$\underline{GI(X,Y) = -G(X,-Y)} \quad . \quad (20b)$$

Daher sollen die Transformationen T - definiert durch (6a) und (6b) - und deren Inverse - definiert durch (9a) und (9b) - auf eine Form gebracht werden, in der sie den Relationen (20) genuegen. Diese kann man uebrigens interpretieren als Symmetrie des Operators gegen 'Zeitumkehr'; denn der Uebergang von Y zu $-Y$ entspricht der Umkehrung der Bewegungsrichtung der umlaufenden Teilchen.

Anstatt nun nach Ausdruecken zu suchen, die, in (6) und (9) substituiert, T zu einem symmetrischen Operator machen, kann man sich folgender Ueberlegung bedienen: Die Wahl der Bezugsebene fuer die Transformation ueber einen Umlauf hat auf die Eigenschaften einer Teilchenbahn (etwa stabil oder instabil zu sein) keinerlei Einfluss; man kann ja leicht durch eine entsprechende Transformation von einer Phasenebene zu einer anderen uebergehen. Die Transformationen, aus denen (6) und (9) aufgebaut sind, naemlich (5) und (7) einerseits, (4) und (8) andererseits, besitzen bereits die gewuenschte Eigenschaft; sie uebertraegt sich jedoch nicht auf T , weil die Reihenfolge der Verknuepfung jener Transformationen beim Uebergang zur Inversen vertauscht wird. Man hat also nach Phasenebenen zu suchen, bei denen die inverse Transformation die gleiche Reihenfolge der Anwendung von symmetrischen Operatoren impliziert wie die urspruengliche. Insbesondere muessen solche Ebenen bezueglich des Phasenvorschubs in beiden Richtungen - modulo 2π - gleich weit vom Sextupol entfernt sein.

Es gibt ihrer zwei: die erste liegt 'in der Mitte des Sextupols', die zweite diesem 'genau gegenueber'.

Die Mitte des Sextupols ist dadurch definiert, dass ein Teilchen, das in der Ebene unmittelbar vor ihm die Koordinaten (X, Y) und in der Ebene unmittelbar hinter ihm die Koordinaten

$$\underline{X_H = X} \quad (21a)$$

$$\underline{Y_H = Y + (X - X_0)^2} \quad (21b)$$

hat (vgl. (4)), in der Mitte die Y-Koordinate

$$\underline{Y_M = Y + 1/2 (Y_H - Y) = Y + 1/2 (X - X_0)^2} \quad (22)$$

besitzt. Der Sextupol, der als duenne Linse nur auf die Y-Koordinate wirkt, wird bezueglich dieser Wirkung in zwei Haelften aufgeteilt, von denen die eine am Anfang, die andere am Ende eines Umlaufs beruecksichtigt wird.

Bezeichne nun (X, Y) einen Punkt in der so definierten Mittelebene, die im folgenden Bezugsebene 1 heissen moege. Ein Teilchen, das dort startet, hat - aufgrund der Wirkung des halben Sextupols - am Sextupolaustritt die Koordinaten

$$\underline{X_H = X} \quad (23a)$$

$$\underline{Y_H = Y + 1/2 (X - X_0)^2} \quad (23b)$$

Durch Anwendung der Transfermatrix fuer einen Umlauf (vergl.

(5)) erhaelt man die Koordinaten (X_B, Y_B) am Sextupoleingang. Die Transformation ueber einen Umlauf wird abgeschlossen durch Beruecksichtigung der Wirkung der anderen Haelfte des Sextupols auf die Koordinaten (X_B, Y_B) . Bezeichnet (X_T, Y_T) den Zielpunkt in der Bezugsebene 1, so gilt:

$$\underline{X_T = X_B} \quad (24a)$$

$$\underline{Y_T = Y_B + 1/2 (X_B - X_0)^2} \quad (24b)$$

Fuehrt man die soeben beschriebenen Operationen im einzelnen aus, so erhaelt man fuer X_T und Y_T die folgenden Ausdruecke in X und Y :

$$\underline{X_T = (C - S X_0) X + S Y + 1/2 S X^2 + 1/2 S X_0^2} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} \underline{Y_T = (- S^2 X_0 + S C) Y X + (- S - 2 C X_0 + 1/2 S C} \\ \underline{X_0^2 + S X_0^2 - 1/2 S^2 X_0^3) X + (C - S X_0 + 1/2 S} \\ \underline{X_0^2) Y + 1/2 S^2 Y X^2 + (1/2 C - S C X_0 - 1/2 S X_0} \\ \underline{+ 3/4 S^2 X_0^2 + 1/2 C^2) X^2 + (- 1/2 S^2 X_0 + 1/2} \\ \underline{S C) X^3 + 1/8 S^2 X^4 + 1/2 S^2 Y^2 + 1/2 C X_0^2 - 1/2} \\ \underline{S X_0^3 + 1/8 S^2 X_0^4 + 1/2 X_0^2} \quad (25b) \end{aligned}$$

Entsprechend gewinnt man die zu (25) inverse Transformation, indem man ein Teilchen das System in umgekehrter Richtung durchlaufen laesst und die entsprechenden Operatoren - die

Inversen von (24), (5) und (23) - hintereinander anwendet. Bezeichnet man wiederum den Startpunkt mit (X, Y) den Zielpunkt mit (X_{TI}, Y_{TI}) , so hat man

$$X_{TI} = (C - S X_0) X - S Y + 1/2 S X^2 + 1/2 S X_0^2 \quad (26a)$$

$$\begin{aligned}
 Y_{TI} = & (-S^2 X_0 + S C) Y X + (S + 2 C X_0 - 1/2 S C \\
 & X_0^2 - S X_0^2 + 1/2 S^2 X_0^3) X + (C - S X_0 + 1/2 S \\
 & X_0^2) Y + 1/2 S^2 Y X^2 + (-1/2 C + S C X_0 + 1/2 S \\
 & X_0^2 - 3/4 S^2 X_0^2 - 1/2 C^2) X^2 + (1/2 S^2 X_0^2 - 1/2 S \\
 & C) X^3 - 1/8 S^2 X^4 - 1/2 S^2 Y^2 - 1/2 C X_0^2 + 1/2 \\
 & S X_0^3 - 1/8 S^2 X_0^4 - 1/2 X_0^2. \quad (26b)
 \end{aligned}$$

Damit ist ein Operator T definiert, der eine eindeutige Abbildung der Bezugsebene 1 auf sich selbst vermittelt. Vergleich von (25) und (26) lehrt, dass T in der Tat die gewünschte Symmetrieeigenschaft (20) besitzt.

(Die Formeln (25) und (26) könnte man auch erhalten, indem man in (6) und (9) Substitutionen vornimmt, die der Beziehung (22) entsprechen).

Die zweite Phasenebene, in der die Transformation ueber einen Umlauf symmetrisch ist, liegt um den Phasenschub πQ vom Sextupol entfernt. Bedeute nunmehr C und S Cosinus und Sinus des halben Phasenverschubs ueber einen Umlauf:

$$C = \cos(\pi Q) = \cos(\mu/2) \quad (27a)$$

$$S = \sin(\pi Q) = \sin(\mu/2) \quad ; \quad (27b)$$

mit (X_1, Y_1) sei ein Punkt in Bezugsebene 1, mit (X_2, Y_2) ein Punkt in Bezugsebene 2 gemeint. Fuer den Uebergang von der zweiten zur ersten Ebene gilt dann:

$$\underline{X_1 = C X_2 + S Y_2} \quad (28a)$$

$$\underline{Y_1 = -S X_2 + C Y_2 + 1/2 (X_1 - X_0)^2} \quad (28b)$$

Hierbei ist das Teilchen mit Startkoordinaten (X_2, Y_2) 'stromab' verfolgt worden. Folgt man ihm 'stromauf', so hat man:

$$\underline{X_1 = C X_2 - S Y_2} \quad (29a)$$

$$\underline{Y_1 = S X_2 + C Y_2 - 1/2 (X_1 - X_0)^2} \quad (29a)$$

Betrachtet man umgekehrt ein Teilchen, das in Bezugsebene 1 startet und stromab nach Bezugsebene 2 laeuft, so erhaelt man:

$$\underline{X_2 = C X_1 + S (Y_1 + 1/2 (X_1 - X_0)^2)} \quad (30a)$$

$$\underline{Y_2 = -S X_1 + C (Y_1 + 1/2 (X_1 - X_0)^2)} \quad ; \quad (30b)$$

stromauf ergibt sich:

$$\underline{X_2 = C X_1 - S (Y_1 - 1/2 (X_1 - X_0)^2)} \quad (31a)$$

$$\underline{Y_2 = S X_1 + C (Y_1 - 1/2 (X_1 - X_0)^2)} \quad (31b)$$

Durch Kombination von (28) und (30) laesst sich die Transformation ueber einen Umlauf in Bezugsebene 2 gewinnen. Sie schreibt sich explizit, wenn statt (X_1, Y_1) nunmehr (X, Y) gesetzt und der Bildpunkt (XZ, YZ) genannt wird:

$$\begin{aligned} XZ = & \frac{2 S^2 C Y X + (-2 S C X_0 + C^2 - S^2) X + (-2 S^2 X_0 + 2 S C) Y + S X_0^2 + S C X^2 + S^3 Y^2}{2 S^2 C Y X + (-2 S C X_0 + C^2 - S^2) X + (-2 S^2 X_0 + 2 S C) Y + S X_0^2 + S C X^2 + S^3 Y^2} \end{aligned} \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} YZ = & \frac{2 S C^2 Y X + (-2 C^2 X_0 - 2 S C) X + (-2 S C X_0 + C^2 - S^2) Y + C X_0^2 + C^3 X^2 + S^2 C Y^2}{2 S C^2 Y X + (-2 C^2 X_0 - 2 S C) X + (-2 S C X_0 + C^2 - S^2) Y + C X_0^2 + C^3 X^2 + S^2 C Y^2} \end{aligned} \quad (32b)$$

Analog gewinnt man aus (29) und (31) die inverse Transformation fuer Bezugsebene 2:

$$\begin{aligned} XZI = & \frac{-2 S^2 C Y X + (-2 S C X_0 + C^2 - S^2) X + (2 S^2 X_0 - 2 S C) Y + S X_0^2 + S C X^2 + S^3 Y^2}{-2 S^2 C Y X + (-2 S C X_0 + C^2 - S^2) X + (2 S^2 X_0 - 2 S C) Y + S X_0^2 + S C X^2 + S^3 Y^2} \end{aligned} \quad (33a)$$

$$\begin{aligned} YZI = & \frac{2 S C^2 Y X + (2 C^2 X_0 + 2 S C) X + (-2 S C X_0 + C^2 - S^2) Y - C X_0^2 - C^3 X^2 - S^2 C Y^2}{2 S C^2 Y X + (2 C^2 X_0 + 2 S C) X + (-2 S C X_0 + C^2 - S^2) Y - C X_0^2 - C^3 X^2 - S^2 C Y^2} \end{aligned} \quad (33b)$$

Der durch (32) definierte Operator T hat, wie Vergleich mit seiner Inversen (33) zeigt, ebenfalls die Symmetrieeigenschaft (20).

Je nach der Zahl der Betatronschwingungen pro Umlauf, also dem Zahlenwert von Q , gibt es noch weitere Symmetrieebenen; das sind diejenigen Ebenen, die um eine Phase $2\pi QM$, M ganz,

von der Bezugsebene 2 entfernt liegen, ohne dass, um sie zu erreichen, der Sextupol durchlaufen werden muss. Sie unterscheiden sich bezüglich T in nichts von der Bezugsebene 2 'genau gegenüber' dem Sextupol.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass auch die Formeln (28) und (29) sowie (30) und (31) ineinander uebergehen, wenn man in (28) und (30) Y durch $-Y$ ersetzt.

In den Formeln (28) bis (32) haben die Symbole C und S die in (27) angegebene Bedeutung von Cosinus bzw. Sinus des Phasenvorschubs pro halben Umlauf. Im uebrigen Teil der Arbeit, insbesondere in Kapitel IV, bedeuten C und S - entsprechend (II,7) und (II,8) - Cosinus bzw. Sinus des Phasenvorschubs ueber einen ganzen Umlauf.

IV: BERECHNUNG VON FIXPUNKTENIV.A: ALLGEMEINE UEBERLEGUNGEN

Ein Fixpunkt (X,Y) N -ter Ordnung einer Transformation T ist definiert (vgl. (III,17)) durch die Beziehung

$$\underline{T^N(X,Y) = (X,Y)} \quad . \quad (1)$$

Wird T mittels der beiden algebraischen Ausdrücke $F(X,Y)$ und $G(X,Y)$ dargestellt (etwa realisiert durch (III,25a) und (III, 25b)), so hat man zur Bestimmung der Koordinaten des Fixpunktes ein System von 2 Gleichungen in X und Y zu lösen. Da der Grad der Polynome F und G in X und Y sich mit jedem Umlauf N verdoppelt, nimmt die Zahl der Loesungen von Umlauf zu Umlauf in geometrischer Proportion zu; die Aufloesung des Gleichungssystems wird mit wachsendem N immer schwieriger.

Die Gruppeneigenschaften der Transformation T (vgl. Kap. III, Abschnitt D) gestatten es, die Schwierigkeiten beim Berechnen der Fixpunkte zu mildern: Multiplikation von (1) mit der M -ten Potenz von T liefert:

$$\underline{T^M T^N(X,Y) = T^M(X,Y)} \quad , \quad (2)$$

oder wegen der Kommutativitaet der Gruppe:

$$\underline{T^N T^M (X,Y) = T^M (X,Y)} \quad (3)$$

Diese Beziehung gilt fuer jeden ganzzahligen Zeiger M. Sie hat eine Reihe von Konsequenzen.

Die erste besagt, dass mit (X,Y) auch $T^M (X,Y)$ ein Fixpunkt N-ter Ordnung von T ist. Die weiteren ergeben sich durch Spezialisierung von M.

Setzt man $M = -N$, so folgt aus (3), dass ein Fixpunkt von T zu irgendeiner Ordnung auch Fixpunkt der inversen Transformation von derselben Ordnung ist. Waehlt man M zwischen 0 und N ($N > M > 0$), so erkennt man, dass mit (X,Y) weitere N-1 Punkte Fixpunkte von T sind, naemlich diejenigen, in die (X,Y) nach 1, 2, 3, ..., N-1 Transformationen uebergeht, ehe die N-te Anwendung von T auf den urspruenglichen Punkt zurueckfuehrt. Das entspricht der anschaulichen Tatsache, dass eine Teilchenbahn, die sich nach N Umlaeufen schliesst, am Azimut einer jeden Bezugsebene N-mal vorbeilaeuft und N Phasenraumpunkte liefert, die der Reihe nach - von Umlauf zu Umlauf - angenommen werden.

Sei N eine gerade Zahl; dann folgt mit $M = -N/2$ aus (3):

$$\underline{T^{N/2} (X,Y) = T^{-N/2} (X,Y)} \quad (4)$$

Zur Berechnung eines Fixpunktes gerader Ordnungen N benoetigt man demnach nur die Transformation ueber N/2 Umlaeufe, sowie deren Inverse.

Fuer ungerade N setzt man $M = -(N-1)/2$ und hat gemaess (3):

$$\underline{T^{(N+1)/2}(X,Y) = T^{-(N-1)/2}(X,Y)} ; \quad (5)$$

die Fixpunkte ungerader Ordnung N erfordern also nur Transformationen ueber $(N+1)/2$ Umlaeufe.

Damit ist der Grad der zu loesenden Gleichungen fuer $N > 1$ auf einen Bruchteil dessen reduziert, der sich bei direkter Benutzung von (1) ergaebe.

Schliesslich kann man noch ausnutzen, dass das allgemeinste Gleichungssystem fuer die Fixpunkte N -ter Ordnung auch alle Punkte als Loesungen enthalten muss, die Fixpunkte von T zu einer niedrigeren Ordnung M sind, wenn M ein Teiler von N ist. Indem man von niedrigen zu hoeheren Ordnungen fortschreitet, kann man die bereits bekannten Loesungen gegebenenfalls aus den neuen Gleichungen eliminieren und so deren Grad verringern.

IV.B: AUSNUTZEN DER SYMMETRIEEIGENSCHAFTEN

Waehrend die im letzten Abschnitt dargestellten Ueberlegungen fuer jede Transformation gelten, unabhaengig davon, in welcher Form sie sich darstellt, sollen jetzt die speziellen Eigenschaften der betrachteten Abbildungen ausgenutzt werden. Fuer die Transformation (III,25) in Bezugsebene 1 und (III,32) in Bezugsebene 2 gelten ja die Symmetriebeziehungen (vgl. (III,20)):

$$\underline{F(X, -Y) = FI(X, Y)} \quad (6a)$$

$$\underline{-G(X, -Y) = GI(X, Y)} \quad (6b)$$

Ist (X, Y) Fixpunkt von T , so auch von T^{-1} ; also hat man:

$$\underline{FI(X, Y) = X} \quad (7a)$$

$$\underline{GI(X, Y) = Y} \quad (7b)$$

Damit folgt aus (6):

$$\underline{F(X, -Y) = X} \quad (8a)$$

$$\underline{G(X, -Y) = -Y} \quad (8b)$$

d.h. der Punkt $(X, -Y)$ ist Fixpunkt von T .

Betrachtet man den Operator T^2 , so hat man wegen (6) (Y mit $-Y$ vertauscht):

$$\underline{F(F(X, Y), G(X, Y)) = F(FI(X, -Y), -GI(X, -Y))} \quad (9a)$$

$$\underline{G(F(X, Y), G(X, Y)) = G(FI(X, -Y), -GI(X, -Y))} \quad (9b)$$

und abermals wegen (6):

$$\underline{F(F(X, Y), G(X, Y)) = FI(FI(X, -Y), GI(X, -Y))} \quad (10a)$$

$$\underline{G(F(X, Y), G(X, Y)) = -GI(FI(X, -Y), GI(X, -Y))} \quad (10b)$$

Die Symmetrieeigenschaft (6) ist transitiv; denn sie uebertraegt sich nach dem vorstehenden von T auf T^2 .

Analog kann man zeigen, dass mit T auch alle Potenzen dieser Transformation die Eigenschaft (6) besitzen. Die Argumentation, die von (6) zu (8) gefuehrt hat, kann man also fuer jede beliebige Potenz von T wiederholen; damit hat man das folgende Ergebnis: ist (X, Y) Fixpunkt von T zu irgendeiner Ordnung N , so ist $(X, -Y)$ Fixpunkt derselben Ordnung. Diese Aussage laesst sich noch verschaerfen. Zu jedem Fixpunkt der Ordnung N gehoeren ja noch $N-1$ andere, sie bilden ein 'Ensemble von Fixpunkten' oder einen 'Satz Fixpunkte', zu ein und derselben Teilchenbahn gehoerig. Aus (6), (7) und (8) folgt nun, dass jeder Satz Fixpunkte einen spiegelbildlichen Satz besitzt - gespiegelt an der X -Achse.

Eine weitere Folge der Eigenschaft (6) eines Operators T ergibt sich aus der Betrachtung eines Punktes $(X, 0)$ auf der X -Achse: ein jedes Element $T^{+M}(X, 0)$ in der Folge seiner Bildpunkte liegt dem entsprechenden Element $T^{-M}(X, 0)$ bezueglich der X -Achse spiegelbildlich gegenueber. Faellt einer der Bildpunkte seinerseits auf diese, so ist er mit seinem 'Spiegelpunkt' identisch. In diesem Fall fuehrt weitere Anwendung des Operators T auf den urspruenglichen Startpunkt zurueck, wobei die Punkte ausserhalb der Achse, die vorher Spiegelpunkte waren, nun in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen werden.

Hiernach ist evident: liegen in der Folge $T^M(X, Y)$, $M = 0, 1, 2, 3, \dots$, irgendzwei Punkte auf der X -Achse, so ist die Folge endlich und gehoert zu einer geschlossenen Teilchenbahn. Sie bildet einen 'Satz Fixpunkte' gerader Ordnung. Die Punkte liegen symmetrisch zur X -Achse. Faellt in irgendeiner

- im Prinzip nach beiden Richtungen unendlichen - Folge nur ein Punkt auf die X-Achse, so ist die Folge gleichfalls zu dieser symmetrisch. Handelt es sich um eine zyklische Folge, also um eine Folge von Fixpunkten, so ist die Ordnung dieses Ensembles ungerade. Folgen, die mehr als 2 Punkte auf der X-Achse haben, gibt es nicht.

Ein Ensemble von Fixpunkten, von denen mindestens einer auf die X-Achse faellt, geht also bei Spiegelung an dieser in sich ueber. Es erhebt sich die Frage, ob ein "Satz Fixpunkte" in jedem Fall symmetrisch zur X-Achse liegt, also sein eigenes Spiegelbild ist. Im Anhang A1 wird gezeigt, dass dies in der Tat zutrifft.

Fuer die Fixpunkte ungerader Ordnungen hat das die wichtige Konsequenz, dass in jedem Ensemble genau einer auf der X-Achse liegt. Zweckmaessig berechnet man zuerst diesen, die weiteren N-1 Punkte des Ensembles ergeben sich aus ihm durch (N-1)-malige Anwendung des Operators T; man kommt wegen der Spiegelsymmetrie sogar mit (N-1)/2 Transformationen aus.

Es soll sogleich untersucht werden, welche Folgerungen sich aus der - fuer Fixpunkte ungerader Ordnungen gueltigen - Beziehung (5) ergeben, wenn man sie fuer einen Achsenpunkt spezialisiert. Dazu wird die N-te Potenz des Operators T formal in X- und Y-Komponente aufgespalten:

$$\underline{T^N(X,Y)} = \left(F^{(N)}(X,Y), G^{(N)}(X,Y) \right) ; \quad (11a)$$

entsprechend wird mit der Inversen verfahren:

$$\begin{aligned} T^{-N}(X, Y) &= (F^{(N)}(X, Y), G^{(N)}(X, Y)) \\ &= (F^{(-N)}(X, Y), G^{(-N)}(X, Y)) \end{aligned} \quad (11b)$$

Damit schreibt sich (5), wenn $M = (N-1)/2$ gesetzt wird:

$$F(F^{(M)}(X, Y), G^{(M)}(X, Y)) = F^{(M)}(X, Y) \quad (12a)$$

$$G(F^{(M)}(X, Y), G^{(M)}(X, Y)) = G^{(M)}(X, Y) \quad ; \quad (12b)$$

wegen der Symmetrieeigenschaft (6) und deren Transitivitaet folgt:

$$F(F^{(M)}(X, Y), G^{(M)}(X, Y)) = F^{(M)}(X, -Y) \quad (13a)$$

$$G(F^{(M)}(X, Y), G^{(M)}(X, Y)) = -G^{(M)}(X, -Y) \quad , \quad (13b)$$

und fuer $Y = 0$ schliesslich:

$$F(F^{(M)}(X, 0), G^{(M)}(X, 0)) = F^{(M)}(X, 0) \quad (14a)$$

$$G(F^{(M)}(X, 0), G^{(M)}(X, 0)) = -G^{(M)}(X, 0) \quad . \quad (14b)$$

Die Funktionen auf der rechten Seite kommen also als Argument der gleichen Funktionen auf der linken Seite vor.

Setzt man zur Abkuerzung

$$F^{(M)}(X, 0) = U \quad (15a)$$

$$\underline{\underline{G^{(M)}(X,0) = V}}, \quad (15b)$$

so stellt sich (14) dar als

$$\underline{\underline{F(U,V) = U}} \quad (16a)$$

$$\underline{\underline{G(U,V) = -V}} \quad (16b)$$

Man hat also zwei Gleichungen fuer die Unbekannte X, die die Lage des Fixpunktes auf der Achse angibt; denn U und V sind ja nur Abkuerzungen fuer relativ komplizierte Ausdruecke in X. Es muss geklaert werden, inwieweit die beiden Gleichungen miteinander vertraeglich sind. Betrachtet man hierzu die Transformation in Bezugsebene 1, so hat man mit F und G nach (III,25):

$$\underline{\underline{0 = (C - S X_0 - 1) U + S V + 1/2 S U^2 + 1/2 S X_0^2}} \quad (17a)$$

$$\underline{\underline{0 = (-S^2 X_0 + S C) V U + (-S - 2 C X_0 + 1/2 S C X_0^2 + S X_0^2 - 1/2 S X_0^3) U + (C - S X_0 + 1/2 S X_0^2 + 1) V + 1/2 S^2 V U^2 + (1/2 C - S C X_0 - 1/2 S X_0 + 3/4 S^2 X_0^2 - 1/2 S^2 + 1/2) U^2 + (-1/2 S X_0 + 1/2 S C) U^3 + 1/8 S^2 U^4 + 1/2 S^2 V^2 + 1/2 C X_0^2 - 1/2 S X_0^3 + 1/8 S^2 X_0^4 + 1/2 X_0^2}} \quad (17b)$$

Auflösen von (17a) nach V und Einsetzen des gewonnenen Ausdrucks fuer V in (17b) laesst diese Gleichung identisch erfuellt sein. Betrachtet man die Transformation in Bezugsebene 2 und stellt (14) mittels (III,32) dar, so erkennt man ebenfalls, dass die Loesungen von (14a) gleichzeitig (14b) befriedigen.

Zur Bestimmung der Fixpunkte ungerader Ordnungen auf der X -Achse ist hiernach Gleichung (14a) ausreichend.

Formal fehlt in den Gleichungen (16) und (17) der Bezug zum Punkte $(X,0)$ auf der X -Achse und zu jedweden Fixpunkten. Der Zusammenhang von (16a) mit (16b) laesst sich daher auch folgendermassen interpretieren: bleibt bei der Transformation irgendeines Punktes ueber einen Umlauf die X -Koordinate unveraendert, so wechselt die Y -Koordinate lediglich ihr Vorzeichen.

Fuer die Fixpunkte gerader Ordnungen liegen die Verhaeltnisse nicht ganz so einfach; denn bei ihnen braucht es nicht in jedem Ensemble Achsenpunkte zu geben. Nun wird jedoch in Anhang A1 gezeigt, dass ein Satz Fixpunkte gerader Ordnung entweder in Bezugsebene 1 oder in Bezugsebene 2 genau zwei Achsenpunkte hat. Man spezialisiert also die Beziehungen (4) in beiden Bezugsebenen fuer Punkte auf der X -Achse und hat in beiden Faellen

$$\begin{array}{l} \text{F}^{(N/2)}(X,0) = \text{FI}^{(N/2)}(X,0) \end{array} \quad (18a)$$

$$\begin{array}{l} \text{G}^{(N/2)}(X,0) = \text{GI}^{(N/2)}(X,0) \end{array} \quad (18b)$$

und wegen (6) bzw. (10):

$$\frac{F^{(N/2)}(X,0)}{\text{-----}} = F^{(N/2)}(X,0) \quad (19a)$$

$$\frac{G^{(N/2)}(X,0)}{\text{-----}} = -G^{(N/2)}(X,0) \quad (19b)$$

Beziehung (19a) ist eine Identität und liefert keine Information. Aus (19b) jedoch folgt die Gleichung:

$$\frac{G^{(N/2)}(X,0)}{\text{-----}} = 0 \quad ; \quad (20)$$

die anschauliche Forderung, dass bei einem Satz Fixpunkte gerader Ordnung N das Bild eines Achsenpunktes nach $N/2$ Umläufen auf die X -Achse fallen muss, ist also zur Bestimmung der Fixpunkte auf der Achse ausreichend.

Nach der Berechnung der Achsenpunkte in Bezugsebene 1 und 2 lassen sich die uebrigen Mitglieder eines jeden Ensembles gerader Ordnung durch $N/2 - 1$ Transformationen der Punkte auf der Achse gewinnen. Kennt man einen Fixpunkt in einer der beiden Bezugsebenen, so ist die Lage des entsprechenden Punktes in der anderen Ebene durch Anwendung eines der Formelpaare (III,28) bis (III,31) leicht zu ermitteln.

Durch Ausnutzen der Symmetrieeigenschaften der in Rede stehenden Transformationen laesst sich also die Bestimmung eines jeden Satzes Fixpunkte auf die Berechnung der Nullstellen eines Polynoms und anschliessende Transformation der so gewonnenen Achsenpunkte zurueckfuehren. Aus den Transformationsformeln (III,25) und (III,32) zusammen mit den Bezie-

hungen (16a) und (20) liest man folgendes ab: der Grad des Polynoms ist stets eine Potenz von 2, und zwar ist der Exponent dieser Zahl im Falle ungerader Ordnungen gleich $(N+1)/2$ - in beiden Bezugsebenen; fuer gerade Ordnungen ist er in Bezugsebene 1 gleich $(N+2)/2$, in Bezugsebene 2 gleich $N/2$. Auf diese Weise kann die Aufloesung eines nichtlinearen Gleichungssystems - fuer das sich als Resolvente ein Polynom wesentlich hoeheren Grades ergaebe - vermieden werden.

IV.C: DIE FIXPUNKTE DER ORDNUNGEN EINS BIS VIER

Die Berechnung der Fixpunkte der niedrigsten Ordnungen laesst sich analytisch durchfuehren. Dies soll im folgenden geschehen.

ORDNUNG 1

Fuer die erste Ordnung hat man nach (16a) in der Bezugsebene eins mit $U = X$ und $V = 0$ unter Verwendung von (III,25a):

$$0 = (C - S X_0 - 1) X + 1/2 S X^2 + 1/2 S X_0^2 \quad (21)$$

Die Loesung dieser quadratischen Gleichung lautet:

$$X = X_0 + (- C + \text{WURZEL} + 1) / S \quad (22a)$$

WURZEL steht dabei fuer eine Quadratwurzel incl. der beiden moeglichen Vorzeichen. Der Radikand der Wurzel ist:

$$\underline{\underline{\text{RAD} = 2 (- C + 1) X_0 S + (- C + 1)^2}} \quad . \quad (22b)$$

Es gibt genau zwei Fixpunkte erster Ordnung entsprechend den zwei Vorzeichen von WURZEL; denn nach dem im letzten Abschnitt Gesagten liegen alle Fixpunkte 1. Ordnung auf der X-Achse.

ORDNUNG 3

Die Gleichung fuer die Achsenpunkte dritter Ordnung in Bezugsebene 1 lautet entsprechend (14a) - wobei $N=3$, $M=1$ zu setzen ist - und (III,25):

$$\begin{aligned} 0 = & (- C - 4 S C X_0 + S X_0^2 + S^2 C X_0^2 + 2 S^2 X_0^2 \\ & - S^3 X_0^3 - 2 S^2 + 1) X + (1/2 S^2 - 2 S^2 C X_0 - S^2 \\ & X_0 + S C + 3/2 S^3 X_0^2 - S^3) X^2 + (- S^3 X_0 + S^2 \\ & C) X^3 + 1/4 S^3 X^4 + S C X_0^2 + 1/2 S X_0^2 - S X_0^3 \\ & + 1/4 S^3 X_0^4 \quad . \quad (23) \end{aligned}$$

Sie laesst sich ohne Rest durch (21) dividieren, da die Loesungen von (21) als Fixpunkte 1. Ordnung auch Fixpunkte 3. Ordnung sind und somit (23) erfuellen muessen. Die quadratische Gleichung, die sich aus der Division ergibt, hat als Loesung:

$$\underline{\underline{X = X_0 + (- C + \text{WURZEL} - 1) / S}} \quad . \quad (24a)$$

Hierbei bedeutet WURZEL abermals eine Quadratwurzel; der Radikand lautet:

$$\underline{\underline{\text{RAD} = 2 (- C + 1) X_0 S + (- C + 1)^2 - 2}} \quad (24b)$$

Es gibt genau 2 Fixpunkte 3. Ordnung auf der X-Achse entsprechend den beiden moeglichen Vorzeichen der Wurzel. Durch Transformation ueber einen Umlauf erhaelt man die restlichen Mitglieder der beiden Ensembles. Bezeichnet man mit $PX(I)$ die X-Koordinate, mit $PY(I)$ die Y-Koordinate des I-ten Punktes, so stellen sich die Fixpunkte 3. Ordnung insgesamt folgendermassen dar:

$$\underline{\underline{PX(1) = X_0 + (\text{WURZEL} - C - 1) / S}} \quad (25a)$$

$$\underline{\underline{PY(1) = 0}} \quad (25b)$$

$$\underline{\underline{PX(2) = X_0 + (- \text{WURZEL} - C) / S}} \quad (25c)$$

$$\underline{\underline{PY(2) = (- \text{WURZEL} + 1/2) / S^2}} \quad (25d)$$

$$\underline{\underline{PX(3) = X_0 + (- \text{WURZEL} - C) / S = PX(2)}} \quad (25e)$$

$$\underline{\underline{PY(3) = (\text{WURZEL} - 1/2) / S^2 = -PY(2)}} \quad (25f)$$

Hier bietet sich uebrigens ein exzellenter Test fuer die Richtigkeit der gewonnenen Ergebnisse: N-malige Transformation eines Fixpunktes N-ter Ordnung muss dessen Koordinaten

wiederum als Resultat liefern. Diese Probe wurde fuer alle Fixpunkte, soweit sich ihre Lage explizit angeben laesst, mittels eines FORMAC-Programms durchgefuehrt. Es ist im Anhang A2 aufgelistet.

ORDNUNG 2

Fuer die Fixpunkte gerader Ordnungen muss man entweder Gleichung (20) in beiden Bezugsebenen anwenden oder direkt von dem Gleichungssystem (4) ausgehen und dieses loesen. Hier soll im Falle der Ordnungen 2 und 4 die zweite Methode verwendet werden, weil sie noch relativ wenig Aufwand erfordert. Man setzt also unter Benutzung von (III,25) und (III,26) $X_T = X_{TI}$ sowie $Y_T = Y_{TI}$ und erhaelt die in Bezugsebene 1 gueltigen Gleichungen fuer die Fixpunkte 2. Ordnung:

$$\underline{0 = 2 S Y} \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \left(-2 S - 4 C X_0 + S C X_0^2 + 2 S X_0^2 - S X_0^3 \right. \\ & \left. \right) X + \left(C - 2 S C X_0 - S X_0^2 + \frac{3}{2} S X_0^2 + C \right) X^2 \\ & + \left(-S X_0^2 + S C \right) X^3 + \frac{1}{4} S X^4 + S Y^2 + C \\ & X_0^2 - S X_0^3 + \frac{1}{4} S X_0^4 + X_0^2 \end{aligned} \quad (26b)$$

Aus (26a) folgt, dass alle Fixpunkte 2. Ordnung in Bezugsebene 1 auf der X-Achse liegen. Mit $Y = 0$ wird aus (26b) eine Gleichung 4. Grades fuer die X-Koordinaten. Abspaltung der Loesungen fuer die Fixpunkte 1. Ordnung, d.h. Division durch (21), fuehrt auf eine quadratische Gleichung mit der

Loesung

$$\underline{X = X_0 + (- C + \text{WURZEL} - 1) / S} \quad (27a)$$

WURZEL bedeutet wiederum eine Quadratwurzel, diesmal mit dem Radikanden

$$\underline{\text{RAD} = 2 (- C + 1) X_0 S + (- C + 1)^2 - 4} \quad (27b)$$

Die beiden den verschiedenen Vorzeichen der Wurzel entsprechenden Fixpunkte 2. Ordnung

$$\underline{PX(1) = X_0 + (\text{WURZEL} - C - 1) / S} \quad (28a)$$

$$\underline{PY(1) = 0} \quad (28b)$$

$$\underline{PX(2) = X_0 + (- \text{WURZEL} - C - 1) / S} \quad (28c)$$

$$\underline{PY(2) = 0} \quad (28d)$$

gehen unter T und T^{-1} ineinander ueber, wie man durch Einsetzen in (III,25) und (III,26) verifizieren kann. In Bezugsebene 2 liegen ihre Bilder - gemass Anhang A1 - ausserhalb der X-Achse spiegelbildlich zueinander.

ORDNUNG 4

Waehrend der Rechenaufwand beim Aufstellen und Loesen der Fixpunktgleichungen fuer die Ordnungen 1 bis 3 zwar erheblich ist, aber notfalls noch von Hand bewaeltigt werden kann, steigt er ab der 4. Ordnung auf eine Hoehe, die von manueller Durchfuehrung abschreckt. Das liegt daran, dass der Grad der vorkommenden Polynome in X und Y sich von einem

Umlauf zum naechsten verdoppelt. Um zu demonstrieren, wie umfangreich die Ausgangsgleichungen werden, sei es gestattet, sie auch fuer den Fall der Ordnung 4 explizit hier anzugeben. Man erhaelt analog zu (26) aus der Transformation ueber zwei Umlaeufe und ihrer Inversen das System:

$$0 = \begin{pmatrix} -4 S^3 X^0 + 4 S^2 C \end{pmatrix} Y X + \begin{pmatrix} -4 S^2 X^0 + 4 S^3 C \end{pmatrix} Y X + \begin{pmatrix} 2 S^3 X^0 \end{pmatrix} Y + 2 S^2 Y X \quad (29a)$$

$$0 = \begin{pmatrix} -8 C^2 X^0 + 4 S^2 X^0 - 4 S C + 12 S C X^0 - 2 S^3 C X^0 + 4 S^2 C X^0 + 2 S^3 C X^0 - 2 S^3 X^0 - 12 S^2 C X^0 - 10 S^2 C X^0 - 4 S^2 X^0 + 2 S^4 X^0 + 14 S^3 C X^0 + 5/2 S^3 C X^0 + 6 S^3 X^0 - 1/2 S^5 X^0 - 6 S^4 C X^0 - 6 S^4 X^0 + 1/2 S^5 C X^0 + 3 S^5 X^0 - 1/2 S^6 X^0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -24 S^4 C X^0 + 6 S^5 C X^0 + 12 S^5 X^0 - 6 S^6 X^0 + 10 S^3 C - 2 S^3 C X^0 - 2 S^5) Y X + \begin{pmatrix} -4 S C X^0 + 8 S^3 C X^0 - 6 S C X^0 - 8 S^3 X^0 + 9 S^2 C X^0 - 2 S^4 C X^0 + 24 S^2 C X^0 + 4 S^2 C X^0 + 2 S^2 X^0 - 4 S^4 X^0 - 24 S^3 C X^0 - 16 S^3 C X^0 - 5 S^3 X^0 + 2 S^5 X^0 + 39/2 S^4 C X^0 + 3/2 S^4 C X^0 + 9 S^4 X^0 - 3 S^5 C X^0 - 15/2 S^5 X^0 + 7/4 S^6 X^0 - 2 S^2 C + C + 2 C \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & + C^4 - S^2 + S^4) X^2 + (- 12 S^5 C X^0 - 6 S^5 X^0 \\
 \hline
 & + 6 S^4 C + 9 S^6 X^0 + 6 S^4 C^2) Y^2 X^2 + (- 4 S^2 \\
 \hline
 & C X^0 + 4 S^4 C X^0 - 10 S^2 C^2 X^0 - 12 S^2 C^3 X^0 + 2 \\
 \hline
 & S^4 X^0 - 2 S^3 C + 14 S^3 C X^0 + 27 S^3 C^2 X^0 + 2 \\
 \hline
 & S^3 C^3 X^0 + 2 S^3 X^0 - 3 S^5 X^0 - 28 S^4 C^3 X^0 \\
 \hline
 & - 6 S^4 C^2 X^0 - 6 S^4 X^0 + 15/2 S^5 C X^0 + 10 S^5 \\
 \hline
 & X^0 - 7/2 S^6 X^0 + 2 S^2 C^3 - 2 S^3 C^2 + 2 S^3 C^3 + 2 \\
 \hline
 & S C^4) X^3 + (- 6 S^6 X^0 + 6 S^5 C^2) Y^3 X^3 + (- \\
 \hline
 & 2 S^3 C X^0 - 16 S^3 C^2 X^0 - 4 S^3 C^3 X^0 - 1/2 S^3 X^0 \\
 \hline
 & + 2 S^5 X^0 + 1/2 S^2 C - 2 S^4 C + 39/2 S^4 C X^0 + 9 \\
 \hline
 & S^4 C^2 X^0 + 3/2 S^4 X^0 - 10 S^5 C X^0 - 15/2 S^5 \\
 \hline
 & X^0 + 35/8 S^6 X^0 + S^4 C^2 + 4 S^2 C^3 + S^2 C^4) X^4 \\
 \hline
 & + 3/2 S^6 Y^2 X^4 + (- 6 S^4 C X^0 - 6 S^4 C^2 X^0 + \\
 \hline
 & 15/2 S^5 C X^0 + 3 S^5 X^0 - 7/2 S^6 X^0 + 5/2 S^3 C^2 \\
 \hline
 & + 2 S^3 C^3 - 1/2 S^5) X^5 + (- 3 S^5 C X^0 - 1/2 S^5 \\
 \hline
 & X^0 + 1/2 S^4 C + 7/4 S^6 X^0 + 3/2 S^4 C^2) X^6 + (\\
 \hline
 & - 1/2 S^6 X^0 + 1/2 S^5 C) X^7 + 1/16 S^6 X^8 + (- 8 \\
 \hline
 & S^3 C X^0 - 2 S^3 X^0 + 2 S^2 C + 6 S^4 C X^0 + 6 S^4 X^0 \\
 \hline
 & - 6 S^5 X^0 + 3/2 S^6 X^0 + 4 S^2 C^2) Y^6 + S^6 Y^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
+ 2 C X_0^2 + C^2 X_0^2 - S^2 X_0^2 - 4 S C X_0^3 - 2 S X_0^3 \\
\hline
+ 5/2 S^2 C X_0^4 + S^2 C^2 X_0^4 + 3 S^2 X_0^4 - 2 S^3 C \\
\hline
X_0^5 - 5/2 S^3 X_0^5 + 1/2 S^4 C X_0^6 + 3/2 S^4 X_0^6 - 1/ \\
\hline
2 S^5 X_0^7 + 1/16 S^6 X_0^8 + X_0^2
\end{array}
\quad (29b)$$

In der Tat ist Gleichung (29b) sehr laenglich, gleichwohl gegenueber dem Ausdruck fuer die Y-Koordinate der Transformation, der bei ihrer Ableitung zunaechst berechnet werden muss, wesentlich verkuerzt; denn alle Terme, die in dem entsprechenden Ausdruck fuer die inverse Transformation ebenfalls auftreten, sind bereits herausgefallen. (Das ersieht man aus (19b) unter Beruecksichtigung der Symmetriebeziehung (10b) und verifiziert, dass keine ungeraden Y-Potenzen in (29b) vorkommen).

Die mathematischen Operationen, die dem Niederschreiben der Gleichungen (29) vorausgehen, wurden verstaendlicherweise nicht von Hand, sondern mittels eines speziell dafuer geschriebenen PL/1 - FORMAC - Programms auf den zentralen Datenverarbeitungsanlagen des Kernforschungszentrums Karlsruhe ausgefuehrt. Auch die weitere Behandlung des Gleichungssystems ist ohne den Einsatz eines Grossrechners praktisch unmoeglich.

Gleichung (29a) liefert fuer Fixpunkte auf der X-Achse keine Aussage (vgl. (19a)); es folgt jedoch aus ihr, dass die X-Koordinate der Punkte ausserhalb der Achse einer quadrati-

schen Gleichung genuegen, welche die Loesung

$$\underline{X = XO + \text{WURZEL} / S - C / S} \quad (30a)$$

mit dem Radikanden

$$\underline{\text{RAD} = 2 (- C + 1) S XO + (- C + 1)^2 - 1} \quad (30b)$$

besitzt. Setzt man (30a) in (29b) ein, so ergibt sich eine biquadratische Gleichung, die fuer die Unbekannte Y die folgenden Werte liefert:

$$\underline{Y_1 = \text{WURZEL} / S^2} \quad (30c)$$

$$\underline{Y_2 = \text{RADIX} / S^2} \quad (30d)$$

RADIX stellt genau wie WURZEL eine Quadratwurzel (incl. der beiden Vorzeichen) dar; der Radikand von WURZEL ist durch (30b) gegeben, der Radikand von RADIX lautet:

$$\underline{R = 2 \text{WURZEL} + \text{WURZEL}^2 = 2 \text{WURZEL} + \text{RAD}} \quad (30e)$$

Damit sind die Fixpunkte der Ordnung 4 ausserhalb der X-Achse gefunden. Die anderen, auf der X-Achse selbst gelegenen, kann man erhalten, indem man in (29b) Y gleich Null setzt, die resultierende Gleichung 8. Grades in X durch das aus (26b) sich ergebende Polynom fuer die X-Koordinate der Fixpunkte 2. und 1. Ordnung dividiert und die 4 Nullstellen des Quotientenpolynoms aufsucht. Diese Prozedur ist jedoch

ueberfluessig, wenn man zuvor die Loesungen (30) ueber 4 Umlaeufe transformiert; denn es zeigt sich, dass Bilder der bereits ermittelten Fixpunkte auf die Achse fallen. Unterwirft man der viermaligen Transformation zunaechst den Punkt, welcher der Loesung (30d) entspricht, so erhaelt man den folgenden Satz Fixpunkte 4. Ordnung:

$$\underline{\underline{PX(1) = X_0 + (\text{WURZEL} - C) / S}}$$

$$\underline{\underline{PY(1) = \text{RADIX} / S^2}}$$

$$\underline{\underline{PX(2) = X_0 + (\text{RADIX} - C) / S}}$$

$$\underline{\underline{PY(2) = 0}}$$

$$\underline{\underline{PX(3) = X_0 + (\text{WURZEL} - C) / S = PX(1)}}$$

$$\underline{\underline{PY(3) = - \text{RADIX} / S^2 = -PY(1)}}$$

$$\underline{\underline{PX(4) = X_0 + (- \text{RADIX} - C) / S}}$$

$$\underline{\underline{PY(4) = 0}}$$

(31)

Unter Beruecksichtigung der beiden Vorzeichen der Quadratwurzeln beschreiben die Formeln (31) zwei Ensembles, die jeweils zwei Mitglieder auf der X-Achse haben. Da es nach dem obigen genau 4 Achsenpunkte 4. Ordnung geben muss, darf kein Mitglied des Ensembles, das man aus (30a) und (30c) gewinnt, in gleicher Weise auf der X-Achse liegen. In der Tat ergibt

sich die Folge:

$$\underline{PX(1) = X_0 + (\text{WURZEL} - C) / S}$$

$$\underline{PY(1) = \text{WURZEL} / S^2}$$

$$\underline{PX(2) = X_0 + (\text{WURZEL} - C) / S = PX(1)}$$

$$\underline{PY(2) = - \text{WURZEL} / S^2 = -PY(1)}$$

$$\underline{PX(3) = X_0 + (- \text{WURZEL} - C) / S}$$

$$\underline{PY(3) = - \text{WURZEL} / S^2 = -PY(1)}$$

$$\underline{PX(4) = X_0 + (- \text{WURZEL} - C) / S = PX(3)}$$

$$\underline{PY(4) = \text{WURZEL} / S^2 = PY(1)}$$

(32)

Dies Ensemble geht in sich ueber, wenn man das Vorzeichen der Wurzel aendert; mithin gibt es genau einen Satz Fixpunkte 4. Ordnung, der in Bezugsebene 1 keinen Achsenpunkt hat.

IV.D: DIE FIXPUNKTE DER ORDNUNGEN FUENF UND SECHS

Bei Betrachtung der Ergebnisse des vorigen Abschnitts faellt auf, dass sich die Fixpunktformeln fuer die verschiedenen Ordnungen sehr aehneln: die - mit RAD bezeichneten - Radi-

kanden (22b), (27b), (24b) und (30b) der in den Formeln fuer die Ordnungen 1 bis 4 auftretenden Quadratwurzeln - WURZEL genannt - unterscheiden sich voneinander lediglich durch einen Summanden L, der ab der 2. Ordnung eine negative Zahl ist und sich beim Uebergang von einer Ordnung zur naechst-hoeheren halbiert.

TABELLE T4

N	L	C	Q
1	0	1.	0.
2	-4	-1.	1/2
3	-2	-0.4142	0.318
4	-1	0.	1/4
5	-1/2	0.2929	0.203
6	-1/4	0.5	1/6
7	-1/8	0.6464	0.138
8	-1/16	0.75	0.115

In Tabelle T4 sind eingetragen - zunaechst einmal fuer die Ordnungen N von 1 bis 4 - die Summanden L, ausserdem die Werte von C und Q ($C = \cos(2\pi Q)$), fuer die unter der Voraussetzung $X_0 = 0$ der Radikand verschwindet, also die Grenze des Realitaetsgebietes der Fixpunkte erreicht wird. Des weiteren sind - versuchsweise - die entsprechenden Werte fuer die Ordnungen 5 bis 8 eingetragen unter der Annahme, dass 1.) auch fuer diese Ordnungen Fixpunkte existieren, die sich als Wurzel ganz analog aufgebauter quadratischer Gleichungen

darstellen und 2.) die Tendenz des Summanden L , sich fortschreitend zu halbieren, anhält.

Auffaellig ist, dass im Falle der geradzahligen Ordnungen < 6 die Fixpunkte genau bei einem Wert von Q zu existieren beginnen (bei wachsendem Q -Wert), der gleich $1/N$ (modulo 1) ist. (Fuer $N = 2$ verschwinden sie sofort wieder, wenn $Q > 1/2$ wird). Auch fuer Ordnung 3 liegt der Wert von Q etwa bei $1/N$. Aus der Theorie der nichtlinearen Schwingungen [2] weiss man, dass Resonanzen - und damit einhergehend Fixpunkte - bei rationalen Q -Werten auftreten koennen. In diesem Lichte scheinen die erhaltenen Werte von Q fuer die Ordnung 5 und 6 die obige Annahme zu stuetzen; sie soll daher genauer geprueft werden.

ORDNUNG 5

Indem man in (14a) $M = 2$ setzt und die Transformationsformeln (III,25) verwendet, erhaelt man ein Polynom 8. Grades zur Bestimmung der Fixpunkte 5. Ordnung auf der X -Achse in Bezugsebene eins. Es laesst sich, da die Zahl 5 prim ist, nur durch Gleichung (21), die die Fixpunkte 1. Ordnung als Loesungen hat, ohne Rest dividieren. Damit spitzt sich die oben angeschnittene Fragestellung darauf zu, ob das resultierende Polynom 6. Grades in solcher Weise faktorisierbar ist, dass eines der Faktorpolynome vom Grade 2 ist und Koeffizienten besitzt, die - wie bei allen bisher behandelten Fixpunktgleichungen - ihrerseits Polynome in X_0 , C und S sind.

In Anhang A3 wird beschrieben, auf welche Weise die Antwort

gefunden wurde. Sie lautet: das Fixpunktpolynom 6. Grades fuer die Ordnung 5 ist nicht reduzibel, mithin koennen seine Nullstellen nicht in geschlossener Weise - durch Radikale - dargestellt werden. Zu ihrer Auffindung ist man also voellig auf numerische Verfahren angewiesen.

ORDNUNG 6

Fuer die Ordnung $N = 6$ erhaelt man aus (20) unter Benutzung (III,25) ein Polynom vom Grade 16, das sich nach Division durch die Gleichungen fuer die Achsenfixpunkte 1., 2., und 3. Ordnung auf ein Polynom 10. Grades reduziert. Auch von diesem wird im Anhang gezeigt, dass es nicht weiter reduzibel ist und seine Nullstellen nur durch numerische Verfahren aufgesucht werden koennen. Diese Nullstellen geben die Lage der Achsenpunkte in Bezugsebene 1 an; mit ihnen sind natuerlich auch alle anderen Mitglieder der betreffenden 5 Ensembles von Fixpunkten 6. Ordnung nicht geschlossen darstellbar.

Guenstiger fuer eine analytische Behandlung liegen die Verhaeltnisse in Bezugsebene zwei. Dort ergibt sich fuer die Achsenpunkte 6. Ordnung aus (20) unter Benutzung von (III,32) ein Polynom 8. Grades. Es laesst sich durch die entsprechenden Gleichungen fuer die Ordnungen 1 und 3 (in Bezugsebene 2 liegen keine Fixpunkte 2. Ordnung auf der X-Achse) auf ein Polynom 4. Grades reduzieren. Dies kann man, wie sich herausstellt, durch eine geeignete Variablentransformation auf biquadratische Form bringen, sodass seine Nullstellen durch Quadratwurzeln ausgedrueckt werden koen-

nen. (Die Rechnungen wurden - unter Benutzung von FORMAC - auf der bisher leistungsfähigsten zur Verfügung stehenden Rechenanlage, der IBM 360/91 des IPP in München-Garching, ausgeführt. Benötigte Rechenzeit: 33 Minuten). Aus den Achsenfixpunkten folgt das ganze dazugehörige Ensemble durch Anwendung der Transformation (III,32). Sein Pendant in Bezugsebene 1 gewinnt man mittels der Formeln (III,28) oder (III,29); es stellt sich folgendermassen dar:

$$\underline{PX(1) = X_0 + (- RADIX - C + 1/2) / S}$$

$$\underline{PY(1) = 1/2 (RADIX + (- C + 1) WURZEL - 1/2) / S^2}$$

$$\underline{PX(2) = X_0 + (WURZEL - C - C WURZEL) / S}$$

$$\underline{PY(2) = RADIX / S^2}$$

$$\underline{PX(3) = X_0 + (RADIX - C + 1/2) / S}$$

$$\underline{PY(3) = 1/2 (RADIX - (- C + 1) WURZEL + 1/2) / S^2}$$

$$\underline{PX(4) = PX(3)}$$

$$\underline{PY(4) = -PY(3)}$$

$$\underline{PX(5) = PX(2)}$$

$$\underline{PY(5) = -PY(2)}$$

$$\underline{PX(6) = PX(1)}$$

$$\underline{PY(6) = -PY(1)}$$

(33)

Auch hier bedeuten WURZEL und RADIX Quadratwurzeln incl. der

beiden Vorzeichen. Der Radikand von WURZEL ist:

$$\underline{\text{RAD}} = 2 (C + 1) X_0 / S + 1 , \quad (34a)$$

der von RADIX lautet:

$$\underline{\text{R}} = \frac{2 (- C + 1) S X_0 + (- C + 1) \text{WURZEL} + (- C + 1) - 3/4}{2} . \quad (34b)$$

Die Formeln (33) und (34) stellen 2 Ensembles dar; denn ersetzt man RADIX durch -RADIX, so gehen die Punkte folgendermassen ineinander ueber: 1 --> 4, 2 --> 5, 3 --> 6. Auch aus der Tatsache, dass in Bezugsebene 2 vier Fixpunkte 6. Ordnung auf der Achse liegen, die jeweils paarweise zu Ensembles gehoeren, deren Bild die durch (33) und (34) dargestellten Saetze in Bezugsebene 1 sind, kann man folgern, dass es sich um genau 2 Ensembles handeln muss.

Setzt man $X_0 = 0$ und waehlt das positive Vorzeichen von WURZEL, so verschwindet RADIX bei $C = 1/2$. Das stimmt genau mit dem Wert fuer die Ordnung 6 ueberein, der in Tabelle T4 angegeben ist. Die oben angesprochene Frage war also durchaus einer Pruefung wert.

V: DISKUSSION DER METHODE
=====

Bei den Untersuchungen im vorangehenden Kapitel ist deutlich geworden, dass der vorgestellten Methode zur Berechnung von Fixpunkten Grenzen gesetzt sind, was die Möglichkeit angeht, analytische Ausdrücke für die interessierenden Größen zu finden. Offenbar sind Fixpunktpolynome, die nur die zu einer einzigen Ordnung gehörenden Punkte auf der X-Achse als Lösungen haben (bei denen also eventuelle zu niedrigeren Ordnungen gehörende Teilerpolynome bereits herausdividiert sind), im allgemeinen nicht weiter reduzierbar; ihre Nullstellen kann man also nur dann in geschlossener Form finden, wenn der Grad des Polynoms kleiner als fünf ist.

Im Fall der betrachteten Transformation, die zu einer Störung des idealen Synchrotrons durch einen einzigen Sextupol gehört, lassen sich die in der Praxis wichtigen Ordnungen 1 bis 4 nach der beschriebenen Methode vollständig behandeln. Es soll nun abgeschätzt werden, wie weit das Verfahren trägt, wenn das zu untersuchende System komplizierter ist.

Zunächst ist festzustellen, dass auch eine Anordnung von Magneten, in der neben dem Stoersexupol eine Reihe von 'linearen' Zusatzmagneten (Quadrupole, Dipole) auftreten, nach der beschriebenen Methode behandelt werden kann. Dass dies so ist, lässt sich folgendermassen einsehen:

Zusätzliche Magnete mit linearem Feldverlauf ändern nichts

an der Linearität der Maschine. Lässt man den Stoersex-
 tupol zunächst einmal weg, so kann man das aus ungestoerter
 Maschine und linearen Zusatzmagneten bestehende System als
 eine neue Maschine auffassen, die ggfs. nur eine einzige Su-
 perperiode hat. Der Q -Wert und die Lage des closed orbit
 werden sich gegenüber dem ungestoerten Fall verschieben,
 diese Änderung kann man im Prinzip analytisch berechnen.
 Wenn man alle Koordinaten auf den neuen closed orbit be-
 zieht, ist das System - in der normierten Phasenebene -
 letztlich nur durch seinen Q -Wert beschrieben. Nimmt man
 jetzt den Sextupol wieder hinzu, so hat sich X_0 , die Entfer-
 nung des Sextupolzentrums von der Bezugsbahn, gegenüber dem
 Fall ohne lineare Zusatzmagnete verändert - nur dies und
 den neuen Q -Wert hat man zu berücksichtigen, und die im
 vorstehenden abgeleiteten Formeln für die Fixpunkte können
 direkt übernommen werden.

Betrachtet man statt des Sextupols einen Oktupol, bei dem
 die Wirkung auf die Teilchenbewegung in X -Richtung nicht mit
 X^2 , sondern mit X^3 geht, so enthält die Funktion F (vgl.
 (III, 18)) in der symmetrisierten Ausgangstransformation 3.
 Potenzen von X , die Funktion G dagegen 9. Potenzen. Die Fix-
 punkte 1. Ordnung sind sicher analytisch darstellbar, für
 die Ordnung 2 jedoch ist bereits eine Gleichung 9. Grades zu
 lösen; sie reduziert sich zwar auf eine Gleichung 6. Gra-
 des, diese dürfte jedoch nicht weiter reduzierbar sein.

Der für die langsame Extraktion noch interessante Fall
 zweier Sextupole verschiedener Polarität, die einander
 über den halben Ring hinweg gegenüberstehen (der eine

steht in Bezugsebene 1, der andere in Bezugsebene 2), bietet gleichfalls Schwierigkeiten: in der symmetrisierten Transformation ueber einen Umlauf ist die Funktion F (vgl. (III,18)) vom 4. Grade in X , die Funktion G vom 8. Grade. Bereits zur Bestimmung der Fixpunkte 1. Ordnung hat man eine Gleichung 4. Grades zu loesen. Der Grad der die Transformation beschreibenden algebraischen Ausdruecke waechst von Umlauf zu Umlauf um den Faktor vier. Nach den Methoden von Kap. IV sind die Fixpunkte 2. Ordnung sicher noch analytisch zu berechnen, was jedoch die fuer die Extraktion wichtigere Ordnung 3 angeht, so muessen weitere Untersuchungen abgewartet werden.

Solange die betrachteten Systeme - Anordnungen von duennen Stoerlinsen in einer idealen Maschine - eine Symmetrieebene haben, ist das beschriebene Verfahren mit Vorteil anwendbar, auch wenn man die Fixpunkte der zugehoerigen Transformationen lediglich auf numerischen Wege berechnen kann; denn es liefert die gesuchten Punkte als Nullstellen eines Polynoms. Die Theorie der Polynome ist jedoch wohlbekannt [13]; daher gibt es eine Reihe von wirkungsvollen numerischen Verfahren zur Nullstellenbestimmung, die zum Teil bereits programmiert sind [15], sodass man im Einzelfall relativ bequem zum Ergebnis kommen kann.

VI: DISKUSSION DER ERGEBNISSE

=====

In Kapitel IV wurde gezeigt, dass sich alle Fixpunkte der betrachteten nichtlinearen Phasenraumtransformationen bis zur 4. Ordnung analytisch finden und als Wurzeln quadratischer oder biquadratischer Gleichungen darstellen lassen. Im einzelnen ergab sich folgendes: Zur Ordnung eins existieren zwei Ensembles von Fixpunkten, zur Ordnung zwei genau eines, zur Ordnung drei wiederum zwei und zur Ordnung vier schliesslich drei Ensembles. Die Fixpunkte 5. Ordnung, zu der es 6 Ensembles gibt, lassen sich nicht in geschlossenen Form schreiben; das gleiche gilt fuer 5 Ensembles der Ordnung sechs. Zu dieser gibt es aber 2 weitere Fixpunktsaetze, die sich wiederum durch Radikale darstellen lassen.

Bei dieser Uebersicht ist die Tatsache hintangestellt worden, dass die erhaltenen Formeln im allgemeinen komplexe Zahlen als Fixpunktkoordinaten liefern, reelle Fixpunkte einer bestimmten Ordnung also nicht fuer jede Kombination der beiden Parameter (Q-Wert und Sextupolexzentrizitaet) zu existieren brauchen. Die Untersuchung der Realitaet der Fixpunkte in Abhaengigkeit von den genannten Groessen sowie die genauere Auswertung der erhaltenen Ergebnisse sollen jedoch nicht im Rahmen dieser Arbeit vorgenommen werden. Das geschieht ausfuehrlich an anderer Stelle [14] in groesserem Zusammenhang.

A N H A N G A 1

=====

BEWEIS FUER DIE SPIEGELSYMMETRIE EINES SATZES FIXPUNKTE

Die Transformation ueber einen Umlauf, die 'stromab' von der Bezugsebene 1 dorthin zurueckfuehrt, setzt sich zusammen aus einer Vergroesserung der Y-Koordinate, einer anschliessenden Drehung um den Ursprung und einer abermaligen Vergroesserung des (neuen) Y-Wertes. Die Drehung erfolgt um einen Winkel $\alpha = 2\pi Q$ im Uhrzeigersinn. Ist $\alpha > \pi$, so kann man setzen: $\alpha = \pi + \beta$ und sich die Drehung als im Gegenzeigersinn um den Winkel β ausgefuehrt denken. Ohne Beschraenkung der Allgemeinheit darf man also den Drehwinkel $< \pi$ voraussetzen. (Der Fall, dass der Q-Wert ganz- oder halbzahlig ist, bedarf ohnehin einer Sonderbehandlung).

Nach dem in Kapitel IV, Abschnitt B, im Anschluss an die Gleichungen (10) Gesagten, gehoert zu jedem Satz Fixpunkte ein spiegelbildlicher Satz. Der Beweis, dass jeder Satz mit seinem Spiegelbild identisch ist, soll indirekt gefuehrt werden. Es wird also vorausgesetzt, es einen Satz Fixpunkte irgendeiner Ordnung N gibt, der von seinem Spiegelsatz in allen Punkten verschieden ist. Das impliziert, dass kein Punkt des betrachteten Satzes auf der X-Achse liegt; denn dann waere der Satz spiegelsymmetrisch.

Jeder Satz enthaelt mindestens einen Punkt mit dem groessten und einen mit dem kleinsten X-Wert. Die Punkte mit dem groessten X-Wert liegen im 1. und 4. Quadranten, die mit dem kleinsten im 2. und 3; denn laegen alle Punkte rechts

(links) der Y-Achse, so fuehrte die mit einer Transformation verbundene Drehung bei einem der beiden am weitesten links (rechts) - und spiegelbildlich zueinander - gelegenen Punkte (Eckfixpunkte genannt) ueber einen Winkel, der groesser ist als π , was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist.

Zunaechst kann man zeigen, dass die Fixpunkte eines Satzes nicht alle auf derselben Seite der X-Achse liegen koennen. Zum Beweise betrachte man einen im ersten Quadranten der Bezugsebene 1 gelegenen Eckfixpunkt A und sein Schicksal unter der Transformation, die mit einer Drehung im Uhrzeigersinn verbunden ist (s. Fig. A1,1). Durch die Wirkung des halben Sextupols geht A ueber in B unter Vergroesserung der Y-Koordinate: $Y(B) > Y(A)$. Mit B sind 2 Punkte in der unteren Halbebene definiert: der Punkt B' , den man durch Spiegelung von B an der X-Achse erhaelt, und der Punkt B'' , der durch Spiegelung von B am Ursprung entsteht.

Der Transformation durch den ungestoerten Teil der Maschine, die durch die Transfermatrix (II,6) beschrieben wird, entspricht eine Drehung um den Ursprung. Hierbei geht B in einen Punkt C ueber, der auf dem Kreisbogen zwischen B' und B'' liegt; denn erstens muss der Punkt C eine kleinere X-Koordinate haben als A (sonst waere A kein Eckfixpunkt), und zweitens darf der Drehwinkel nicht groesser als π sein; es gilt: $-Y(C) > Y(B)$. Durch die Wirkung der 2. Haelfte des Sextupols am Ende des Umlaufs geht C ueber in einen Punkt D mit $Y(D) = Y(C) + \Delta Y(C)$. Der Punkt D ist der Bildpunkt von A, nachdem der erste Umlauf abgeschlossen ist.

Wenn $Y(D) < 0$, so liegt der Bildpunkt von A in der unteren

Halbebene. Es waere jedoch denkbar, dass er oberhalb der X-Achse liegt, also $Y(D) > 0$ und damit $\Delta Y(C) > -Y(C)$. In diesem Fall muss man einen weiteren Umlauf betrachten: Der halbe Sextupol erhoehrt die Y-Koordinate von D um denselben Betrag $\Delta Y(C)$. Damit ist $Y(E) > Y(B)$; denn es gilt: $Y(E) = Y(C) + 2 \Delta Y(C) > -Y(C) > -Y(B') = Y(B)$. Die anschliessende zweite Drehung verlaeuft auf einem Kreis mit groesserem Radius als beim ersten Mal. Dies Spiel kann man wiederholen, und man sieht, dass die Annahme, keiner der Bildpunkte von A liege unterhalb der X-Achse, zu einem Widerspruch fuehrt; denn die Bildpunkte von B (E ist der erste dieser Punkte) muessten dann stets eine kleinere X-Koordinate und groessere Y-Koordinaten haben als B, und die Folge der Transformationen koennte niemals auf B zurueckfuehren, was aber, da A Fixpunkt sein soll, geschehen muss.

Mithin liegt in jedem achsenfremden Fixpunktsatz auf jeder Seite der X-Achse mindestens ein Punkt. Durch eine entsprechende Ueberlegung kann man sich ueberzeugen, dass diese Aussage auch fuer Bezugsebene 2 gilt.

Sei nun A1 ein Fixpunkt in einer der beiden Bezugsebenen, dessen Bildpunkt A2 auf der anderen Seite der X-Achse liegt. Der Bildpunkt von A2 heisse A3, der von A3 heisse A4 und so fort. (In Fig. A1,2 ist schematisch ein Beispiel fuer einen asymmetrischen Fixpunktsatz zur Ordnung sechs skizziert). Nach Voraussetzung ist A2 kein Spiegelpunkt zu A1. Man kann nun A1 mit A2 durch eine stetige Kurve $K(X)$ verbinden, die genau einen Schnittpunkt S mit der X-Achse hat. Die Wahl der

Kurve und des Punktes S sind im uebrigen beliebig. (In Fig. A1,2 ist der Einfachheit halber eine Gerade gewaehlt worden). Wendet man die Transformation ueber einen Umlauf an, so gehen A_1 in A_2 , A_2 in A_3 ueber und die Verbindungskurve K zwischen A_1 und A_2 in eine Kurve, die A_2 mit A_3 verbindet. (In Fig. A1,2 ist die Bildkurve von K durch eine Gerade dargestellt, obwohl eine nichtlineare Transformation eine Gerade im allgemeinen nicht in eine Gerade ueberfuehrt. Es kommt hier jedoch nur auf die Topologie des betrachteten Gebildes an, und diesbeueglich ist eine Gerade jeder anderen stetigen doppelpunktfreien Kurve aequivalent).

Wiederholt man die Transformation, so geht die Bildkurve von K in eine weitere Kurve ueber, die sich stetig von A_3 nach A_4 hinzieht. Nach $N-1$ Transformationen hat man auf diese Weise N Kurvenzuege erhalten, die die Fixpunkte des Ensembles der Reihe nach verbinden und insgesamt eine geschlossene Kurve ergeben (s. Fig. A1,2). Diese Kurve darf sich selbst nicht schneiden; denn sonst waere der Schnittpunkt ein Fixpunkt der Transformation. Da die Startkurve K jedoch in weiten Grenzen beliebig vorgegeben werden kann, bedeutete das die Existenz von unendlich vielen Fixpunkten einer endlichen Ordnung, was aufgrund der Struktur der Transformation ausgeschlossen ist.

Nun soll der Spiegelsatz betrachtet werden: der Spiegelpunkt von A_1 heisse B_1 etc. Man kann B_1 mit B_2 durch eine stetige Kurve $K'(X)$ verbinden, die das Spiegelbild von K ist: $K'(X) = -K(X)$.

Unterwirft man auch K' der oben genannten Folge von $N-1$

Transformationen, so erhaelt man einen zweiten geschlossenen Kurvenzug, der die Fixpunkte des Spiegelsatzes der Reihe nach verbindet. Aus dem Schnittpunkt S von K und K^* entsteht dabei eine Folge von Kreuzungspunkten der beiden genannten Kurvenzuege. Diese muessen sich auf den Teilstuecken zwischen jeweils 2 Fixpunkten genau einmal kreuzen, weil K und K^* genau einen Schnittpunkt haben und die Transformation eineindeutig ist.

Hieraus laesst sich fuer den Fall ungerader Ordnungen N sogleich eine Absurditaet konstruieren: Ein Punkt eines Satzes, etwa A_1 , liegt entweder innerhalb oder ausserhalb des den Spiegelsatz verbindenden Kurvenzuges. Geht man laengs der zu A_1 gehoerenden geschlossenen Kurve einmal herum und zurueck nach A_1 , so muss man die andere geschlossenen Kurve eine ungerade Zahl von Malen kreuzen, man befindet sich also zum Schluss, wenn man wieder bei A_1 angeckmmen ist, auf der anderen Seite der Kurve. Damit liegt A_1 sowohl innerhalb als auch ausserhalb ein und derselben Kurve, was absurd ist.

Allgemein kann man folgendermassen schliessen: Transformiert man $K^*(X)$ mittels der inversen Transformation, so entsteht ebenfalls ein geschlossener Kurvenzug, der die Punkte B_1, B_2, \dots miteinander verbindet und wegen der Symmetrieeigenschaft (III,20) der Transformation symmetrisch zu der aus $K(X)$ hervorgegangenen geschlossenen Kurve ist. Die beiden Kurven haben neben der Nullstelle S von K und K^* noch mindestens einen weiteren Schnittpunkt, der auf der X -Achse liegt. Durch Betrachtung des Verhaltens dieses Punktes unter Transformation und inverser Transformation findet man, dass

die gespiegelte Kurve die Originalkurve auf allen Teilstuecken genau einmal schneiden muss. Das ist jedoch nur dann moeglich, wenn beide Kurven symmetrisch zur X-Achse verlaufen, was im Widerspruch steht zur Voraussetzung; denn die Fixpunkte eines Satzes, die ja nach Konstruktion auf die Kurve fallen, sollten asymmetrisch zur X-Achse liegen.

Die Voraussetzung, ein Satz Fixpunkte habe keinen Punkt mit dem spiegelbildlichen Satz gemeinsam, fuehrt zu Widerspruechen und ist deshalb falsch. Aus der soeben bewiesenen Tatsache, dass ein Fixpunkt mit seinem Spiegelsatz mindestens einen Punkt teilt, folgt sofort, dass beide Saetze identisch sind, denn jedes Paar von Teilchenkoordinaten kann nur zu einer einzigen Teilchenbahn gehoeren.

EINIGE FOLGERUNGEN

Wegen der Symmetrie eines Fixpunktsatzes bzgl. der X-Achse liegt in einem Ensemble ungerader Ordnung genau ein Punkt auf der X-Achse. Transformiert man ihn mittels T und T^{-1} , so durchlauft man die Folge der Fixpunkte, die einander spiegelbildlich gegenueber liegen. Man erkennt, dass sich der Kreis nur schliessen kann, indem 2 Punkte, die einander zum Spiegelpunkt haben, einander auch zum Bildpunkt haben (unter T bzw. T^{-1}).

In gleicher Weise ueberzeugt man sich, dass auch bei achsenfremden Saetzen das zyklische Durchlaufen einer Fixpunkt-

folge nur dadurch moeglich wird, dass zwei Paare von Spiegelpunkten den jeweiligen Partner zum Bild haben. In diesen Faellen fuehrt die Teilchenbahn beim Uebergang von Partner zu Partner in der anderen Bezugsebene auf einen Achsenpunkt, d. h. die Bahn ist extremal. Davon kann man sich durch einfaches Nachrechnen mittels der Formeln (III,28) und (III,30) ueberzeugen. (Es wird die Gelegenheit benutzt, daran zu erinnern, dass in den Formeln am Schluss von Kapitel III die Symbole C und S die durch (III,27) definierte Bedeutung haben, also Cosinus und Sinus des halben Phasenvorschubs pro Umlauf darstellen, dagegen im restlichen Teil der Arbeit, entsprechend (II,7) und (II,8), die analogen Groessen fuer einen vollen Umlauf bedeuten).

Dass umgekehrt die Bilder eines in Bezugsebene 1 auf der Achse gelegenen Punktes nach Vorwaerts- bzw. Rueckwaerts-Transformation in Bezugsebene 2 spiegelbildlich zueinander liegen muessen (und umgekehrt), ersieht man bereits aus der am Ende von Kapitel III erwaehten Symmetrie der Formeln.

Schliesslich folgt hieraus noch, dass Ensembles von Fixpunkten gerader Ordnung in einer der beiden Bezugsebenen achsenfremd sind, in der anderen jedoch nicht.

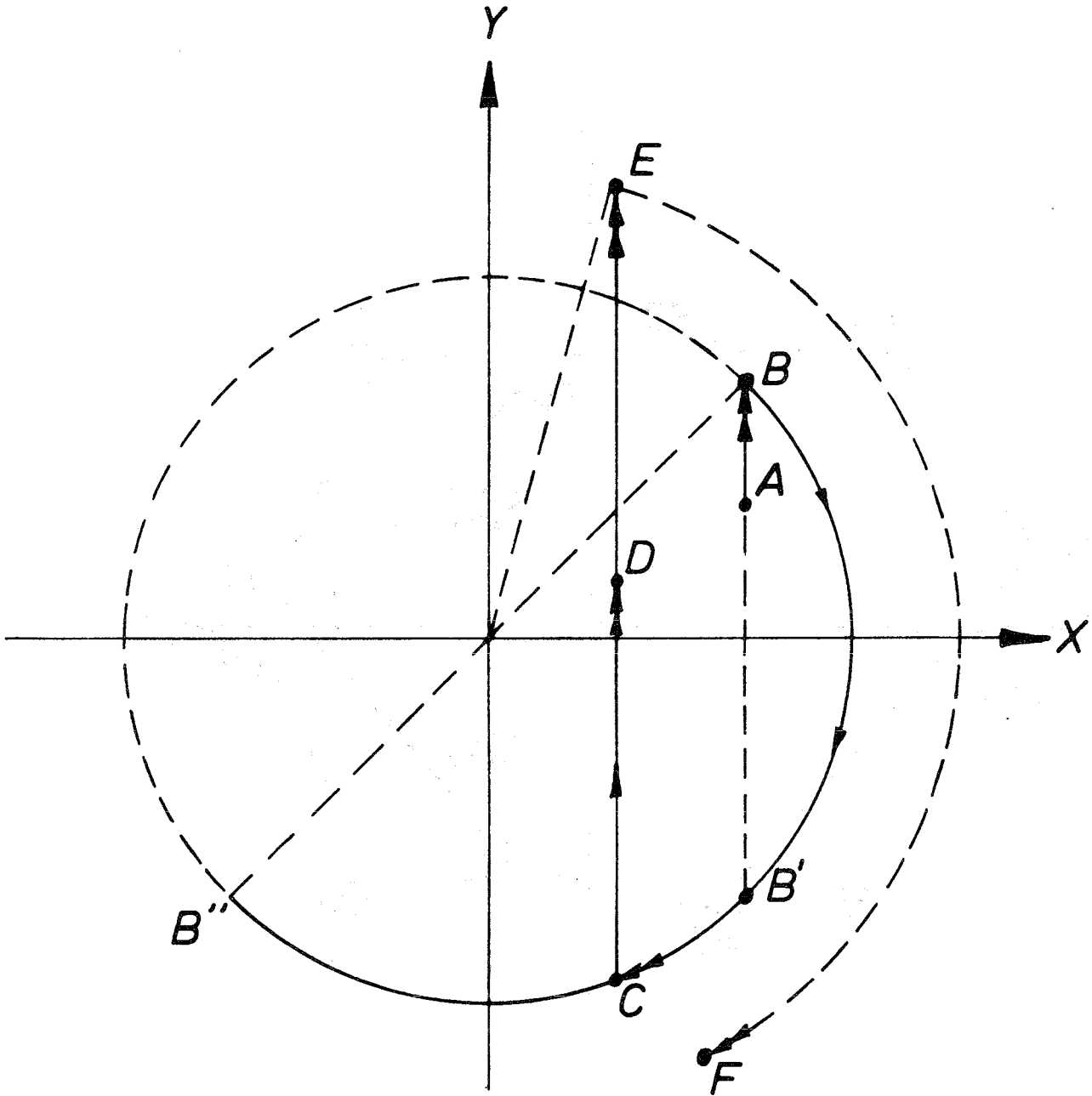


FIG. A1.1

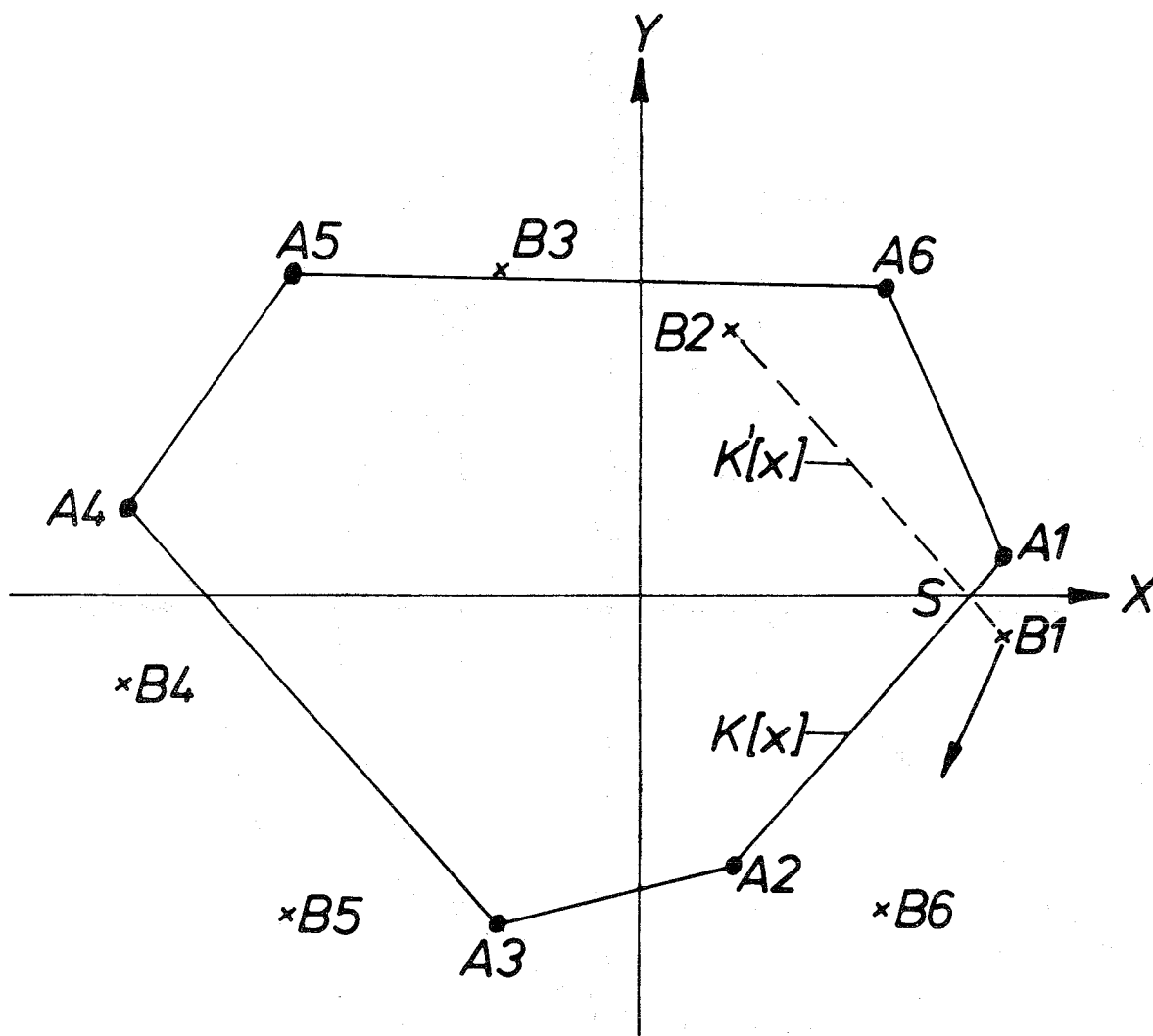


FIG. A12

A N H A N G A2DAS CHECKPROGRAMM FUER DIE FIXPUNKTE

Das umseitige FORMAC-PL/1-Programm macht die Probe auf die Loesungen der Fixpunktgleichungen von Kapitel IV, und zwar fuer die Ordnungen N von eins bis sechs, soweit explizite Loesungen erhalten werden konnten.

Hierzu werden die Koordinatenpaare der Transformation ueber einen Umlauf in Bezugsebene 1 unterworfen. Das geschieht in Prozedur REVOLU). Nach jedem Umlauf werden die erhaltenen Formeln vereinfacht, wobei die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen in ihrer einfachsten Form ausgenutzt werden (Prozedur TRIGONA).

Stimmen die erhaltenen Koordinaten mit den Startkoordinaten ueberein, werden Startpunkt und N-1 Folgepunkte ausgegeben, evtl. etwas modifiziert, falls nicht, wird abermals transformiert, bis eine vorgegebene Anzahl von Umlaeufen erreicht ist.

Die Vereinbarungen ueber die Zeilenlaenge am Anfang des Programms ermoeeglichen die direkte Verwendung der ausgegebenen Resultate in dem Strom der Zeichen, die den vorliegenden Text bilden.

Um eine korrekte Wiedergabe des Programms zu ermoeeglichen, wurde das Ausdrucken mittels einer Kette vorgenommen, die alle PL/1-Zeichen enthaelt.

```

PROG_N1: PROCEDURE OPTIONS(MAIN);
FORMAC_OPTIONS;
ON CONDITION (DENERRR) STOP;
OPEN FILE(SYSPRINT) LINESIZE(56);OPTSET(LINELENGTH=56);
DCL (NUMMA,ORDER,M,K,L,I,N,MARK(10),MAR,J) FIXED BIN;
LET (SUMMA(1) = 0;SUMMA(2) = 4;SUMMA(3) = 2;SUMMA(4) = 1);
NUMMA = 6;
LOOP: DO ORDER = 1 TO 6;LET ( ORD = "ORDER" );
IF ORDER = 5 THEN GO TO M20;
/*
DEFINITION DER STARTPUNKTE
*/
LET ( FY(1,1) = 0 );
LET ( RAD = (1 - C)**2 + 2*XO*S*(1 - C) - SUMMA(ORD) );
IF ORDER = 1 THEN
DO;LET ( T1 = XO + (1 - C)/S + WURZEL/S );
END;
IF ORDER = 2 | ORDER = 3 THEN
DO;
LET ( T1 = XO - (1 + C)/S + WURZEL/S );
END;
IF ORDER = 4 THEN
DO;
LET ( T1 = XO + WURZEL/S - C/S;
FY(1,1) = RADIX/(S*S);
FY(2,1) = WURZEL/(S*S);
RAAD = WURZEL**2 + 2*WURZEL );
END;
IF ORDER = 6 THEN
DO;
LET ( T1 = XO + ( WURZEL*(1-C)-C)/S;
FY(1,1) = -RADIX/(S*S);
RAAD = 2*XO*S*(1-C)+(1-C)**2+WURZEL*(1-C)-3/4;
RAD = 2*XO*(1+C)/S+1 );
END;
PUT EDIT('VERSUCH ',ORDER,' --- MAXIMAL ',NUMMA,' UMLAEUFE')
(PAGE,A,F(2),A,F(1),A);PUT SKIP(2);PUT LIST('ANSATZ:');PUT
SKIP;
PRINT_OUT(FX(1,1) = EXPAND(T1) );
PUT SKIP(2);PRINT_OUT(FY(1,1));
PUT SKIP(5);
IF ORDER = 4 THEN
DO;PRINT_OUT(FX(2,1) = FX(1,1) );
PUT SKIP(2);PRINT_OUT(FY(2,1));PUT SKIP(5);
END;
PUT LIST('DIE RADIKANDEN DER QUADRATWURZELN SIND:');
PUT SKIP(2);PRINT_OUT(RAAD;RAD);
M = 1;
IF ORDER = 4 THEN M = 2;
/*
DIE STARTPUNKTE WERDEN UEBER MAXIMAL SECHS UMLAEUFE
TRANSFORMIERT. NACH JEDEM UMLAUF WIRD NACHGESEHEN, OB DAS
ERGEBNIS MIT DEM STARTPUNKT UEBEREINSTIMMT. WENN JA, WERDEN
DIE KOORDINATEN DER PUNKTE NACH JEDEM UMLAUF AUSGEGEBEN.
*/
K = 0;

```

```

M1: K = K + 1; IF K > ORDER THEN GO TO M8;
L=K+1; LET (K="K";L="L");
M2: DO I = 1 TO M; LET (I = "I");
MA1: CALL REVOLU('FX(I,K)', 'FY(I,K)', 'Z(1)', 'Z(2)');
M3: DO N = 1 TO 2; LET (N = "N");
LET (G1 = EXPAND(Z(N)));
LET ( G2 = REPLACE(G1,RADIX**2,RAAD,
RADIX**4,RAAD**2,RADIX**3,RAAD*RADIX ); G1 = EXPAND(G2);
G2 = REPLACE(G1,WURZEL**4,RAD**2, WURZEL**3,RAD*WURZEL,
WURZEL**2,RAD);G1 = EXPAND(G2) );
IF N = 1 THEN LET ( G1 = EXPAND(G1*S) );
ELSE LET ( G1 = EXPAND(G1*S**2) );
CALL TRIGONA('G1','G2');
IF N = 1 THEN LET ( Z(N) = EXPAND(G2 /S));
ELSE LET ( Z(N) = EXPAND(G2 /(S**2)));
END M3;
PA1: LET (FX(I,L) = Z(1); FY(I,L) = Z(2));
MA4: END M2;
M4: DO N = 1 TO M; LET(N="N");MARK(N)=0;
IF IDENT(FX(N,L);FX(N,1)) THEN GO TO M5; ELSE GO TO M6;
M5: IF IDENT (FY(N,L);FY(N,1)) THEN MARK(N)=1; ELSE GOTO M6;
M6: END M4;
MAR = 0;
M7: DO N = 1 TO M;
IF MARK(N)=1 THEN DO ; PUT SKIP(5); PUT EDIT('LOESUNG ', N ,
' NACH ', K, ' UMLAEUFEN WIEDER ERREICHT' ) (A,F(2),A,F(2),A);
PUT SKIP(2); MAR = 1;
END M7;
IF MAR = 1 THEN GO TO M10;ELSE GO TO M1;
M8: PUT EDIT('NACH ',K-1, ' UMLAEUFEN ANSATZ NICHT
BESTAETIGT' )
(SKIP(5),A,F(2),A); GO TO M20;
M10: PUT EDIT('FIXPUNKTE DER ORDNUNG ',K) (PAGE, A,F(1));
PUT SKIP(5);
DO J = 1 TO K; LET ( J="J");
M11: DO N = 1 TO M; LET ( N = "N" );
IF MARK(N) =1 THEN GO TO M12;
LET ( GH = FX(N,J);GH=GH-XO; GH=EXPAND(GH*S);GH=GH/S;
FX(N,J) = XO + GH );
PRINT_OUT(FX(N, J));
PRINT_OUT(PX(J) = FX(N, J));
LET ( GH = FY(N,J);GH=EXPAND(GH*S*S) );
IF ORDER = 6 THEN
DO;
IF J = 1 | J = 4 THEN GO TO MMM;
IF J = 2 THEN
DO;
LET(GHH = -1/2*(RADIX+WURZEL*(1-C)-1/2); GHH2 = GHH);
END;
IF J = 3 THEN LET ( GHH = - GHH2 );
IF J = 5 THEN
DO;
LET (GHH = 1/2*(RADIX-WURZEL*(1-C)+1/2); GHH5 = GHH);
END;
IF J = 6 THEN LET ( GHH = - GHH5 );
IF ~ IDENT(GH;EXPAND(GHH)) THEN

```

```

DO;PUT DATA;STOP;
END;LET ( GH = GHH );
END;
MMMM:
LET ( GH=GH/(S*S);FY(N,J)=GH );
PRINT_OUT(PY(J) = FY(N,J));
PRINT_OUT(FY(N,J)); PUT SKIP(3);
M12: END M11;
END;
IF ORDER = 4 | ORDER = 6 THEN
DO;
PUT SKIP(5);
PUT LIST('RAAD IST DER RADIKAND DER QUADRATWURZEL RADIX. ');
PUT SKIP(2);
PRINT_OUT(RAAD);PUT SKIP(2);
END;
PUT SKIP(3);PUT LIST('DER RADIKAND DER WURZEL (WURZEL)
IST: ');
PUT SKIP(2);PRINT_OUT(RAD);
M20: END LOOP;
PUT LIST('END OF JOB') PAGE;
TRIGONA:PROC(EX135,EX235);
/* THIS PROCEDURE REPLACES WITHIN THE FORMAC-VARIABLE EX135
WHICH IS PASSED BY THE CALLING PROGRAM, C**2 (CORRESPONDING
TO COS**2) BY 1-S**2 (CORRESPONDING TO 1-SIN**2) AND
PROCEEDS IN SIMILAR WAY FOR HIGHER POWERS OF C. */
DCL ( EX135,EX235) CHAR(8) VAR,
(M,N,N2) FIXED BIN;
LET ( E35 = EXPAND("EX135"); MC35=HIGHPOW(E35,C) );
M=INTEGER(MC35);
IF M > 1 THEN
DO;
DO N=M TO 2 BY -1;
N2=N/2; IF 2*N2=N THEN
LET (A35= REPLACE(E35 ,C**"N", (1-S**2)**M* "N2"));
ELSE LET (A35= REPLACE (E35 ,C**"N", (1-S**2)**"N2"*C));
LET ( E35 = EXPAND(A35) );
END;
END;
LET ( "EX235" = E35 ); ATOMIZE(E35;A35;MC35); RETURN;
END TRIGONA;
REVOLU: PROCEDURE(X1,Y1,X2,Y2);
/* DIESE PROCEDUR TRANSFORMIERT DEN PUNKT (X1,Y1) UEBER
EINEN UMLAUF IN DEN PUNKT (X2,Y2). */
DCL (X1,X2,Y1,Y2 ) CHARACTER(8) VARYING;
LET (XA="X1";YA="Y1");
TRANSF : LET (XM = XA;YM = YA+1/2*(XA-XO)**2;
XB = EXPAND(C*XM+S*YM);YN = -S*XM+C*YM;
YB = EXPAND(YN + 1/2*(XB-XO)**2));
LET ("X2" = XB; "Y2" = YB);
ATOMIZE(XB;YB;XA;YA;XM;YM;YN);
RETURN;
END REVOLU;
END PROG_N1;

```

A N H A N G A3

=====

BEWEIS DER IRREDUZIBILITAET GEWISSER FIXPUNKTPOLYNOME

Die Behauptung ist folgende: das Polynom 6. Grades, dessen Nullstellen die Fixpunkte auf der X-Achse in Bezugsebene 1 liefern und dessen Koeffizienten algebraische Funktionen der Parameter X_0 , C und S sind, laesst sich nicht in solcher Weise in Faktoren zerlegen, dass die Koeffizienten der Faktorpolynome gleichfalls algebraische Ausdruecke in X_0 , C und S darstellen; das gleiche gilt fuer das Polynom 10. Grades, das die Achsenfixpunkte 6. Ordnung in Bezugsebene 1 liefert.

Der Beweis laesst sich durch ein numerisches Beispiel fuehren: kann man einen Satz von Parametern finden, fuer den die Zerlegung unmoeglich ist, so hat man die Behauptung bewiesen. Wichtig ist dabei, dass die Koeffizienten wirklich exakt und nicht nur naeherungsweise berechnet werden.

Da Sinus und Cosinus in den hier interessierenden Faellen keine ganzen Zahlen sind, muss man rationale Werte dieser Funktionen waehlen. Das FORMAC-System [10] gestattet rationale Arithmetik; daher lag es nahe, die Frage mittels eines entsprechenden Programms zu klaeren.

Mit dem Parametersatz $X_0=1$, $C=3/5$, $S=4/5$ (pythagoraeische Zahlen in C und S) wurden die in Kapitel IV beschriebenen Transformationen ab ovo aufgestellt und die Fixpunktgleichungen aus ihnen gewonnen. Sodann wurden die ueblichen Reduktionen vorgenommen.

Die auf diese Weise erhaltenen Polynome 6. und 10. Grades wurden einem speziell dafuer entwickelten Programm eingegeben, das untersucht, ob ein vorgelegtes Polynom mit rationalen Koeffizienten Teiler der gleichen Eigenschaft besitzt [12]. Die vom Programm verwendete Methode ist das Verfahren von Kronecker [13].

Es stellte sich heraus, dass beide Polynome nicht reduzibel sind, q. e. d.

Es waere denkbar, dass das Fixpunktpolynom fuer die Ordnung 5, da es vcm 6. Grade ist, als ein Polynom 2. Grades in einem Polynom 3. Grades geschrieben werden kann oder umgekehrt. Auch dieser Frage wurde nachgegangen und dazu untersucht, welchen Bedingungen die Koeffizienten eines Polynoms vom Grade 6 genuegen muessen, damit es sich auf die eine oder die andere Weise schreiben laesst.

Bezeichnet man den Koeffizienten der I-ten Potenz mit GA(I) und setzt GA(6)=1, was keine Einschraenkung bedeutet, so ergeben sich die folgenden Bedingungen:

fuer den Fall, dass das aeussere Polynom vom Grade 2 ist:

$$\begin{array}{r}
 0 = - GA(2) + 1/2 GA(3) GA(5) - 3/8 GA(4) GA(5)^2 \\
 \hline
 + 5/64 GA(5)^4 + 1/4 GA(4)^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0 = - GA(1) - 1/4 GA(4)^2 GA(5) + 1/2 GA(4) GA(3) \\
 \hline
 - 1/8 GA(3) GA(5)^2 + 1/8 GA(4) GA(5)^3 - 1/64 GA(5)^5
 \end{array}$$

fuer den Fall, dass das innere Polynom vom Grade 2 ist:

$$\underline{0 = - GA(3) + \frac{2}{3} GA(4) GA(5) - \frac{5}{27} GA(5)^3}$$

$$\underline{0 = - GA(1) + \frac{1}{3} GA(2) GA(5) - \frac{1}{27} GA(4) GA(5)^3}$$

$$\underline{+ \frac{1}{81} GA(5)^5}$$

Die Koeffizienten des untersuchten Polynoms genuegen keiner dieser Bedingungen.

LITERATURVERZEICHNIS

=====

- [1] : E. D. Courant and H. S. Snyder,
Theory of the Alternating Gradient Synchrotron,
Annals of Physics, Vol. 3, 1958
- [2] : A. Schoch,
Theory of linear and nonlinear perturbations of beta-
tron oscillations in alternating gradient synchro-
trons,
CERN 57-21, 1958
- [3] : H. G. Hereward,
THE POSSIBILITY OF RESONANT EXTRACTION FROM THE C. P.
S.,
AR/Int. GS/61-5, 1961 (CERN)
- [4] : A DESIGN OF THE EUROPEAN 300 GeV RESEARCH FACILITIES,
MC/60, 1970 (CERN)
- [5] : K. R. Symon,
BEAM EXTRACTION AT A THIRD-INTEGRAL RESONANCE I, II,
III, IV,
NAL internal reports FN 130, 134, 140, 144, 1968
- [6] : C. Bovet,
VARIATION DES PARAMETRES DE L'EJECTION LENTE,
MPS/DL Int. 65-6, 1965 (CERN)
- [7] : P. Strolin,
Integer resonance slow extraction from alternating
gradient synchrotrons,
ISR-TH/66-41, 1966 (CERN)
- [8] : P. Strolin,
THIRD-ORDER RESONANCE SLOW EXTRACTION FROM ALTERNATING
GRADIENT SYNCHROTRONS,
ISR-TH/66-40, 1966 (CERN)
- [9] : J. Erb,
Some Phase Plane Properties of a Simple Extraction
System,
Proceedings of the VII International Conference on
High Energy Accelerators, Yerevan, 1969
- [10] : R. Tobey et al.,
PL/1-FORMAC INTERPRETER, USER'S REFERENCE MANUAL,
IBM CONTRIBUTED PROGRAM LIBRARY 360D 03.3.004, 1967

- [11]: J. Erb,
PHASE, ein Programm zum Studium von Phasenraumtransformationen in einfachen Extraktionssystemen - Beschreibung eines interaktiven FORTRAN-IV-Programms fuer die IBM 370/165 unter Benutzung der graphischen Ein-Ausgabe-Einheit IBM 2250,
IEKP Karlsruhe, unveroeffentlicht
- [12]: J. Erb,
ZERLEG, ein FORMAC-PL/1-Programm zur Faktorisierung von Polynomen ueber dem Ring der ganzen Zahlen - Programmbeschreibung,
IEKP Karlsruhe, unveroeffentlicht
- [13]: van der Waerden,
Algebra, 7. Aufl., Kap. IV,
Springer Verlag, 1966
- [14]: J. Erb,
SPEZIELLE NICHTLINEARE PHASENRAUMTRANSFORMATIONEN,
KFK-Bericht, in Vorbereitung
- [15]: IBM System/360 Scientific Subroutine Package,
(360A-CM-03X) Version III, Programmer's Manual

