

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM  
KARLSRUHE**

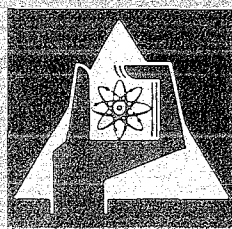
September 1972

KFK 1630

Institut für Kernverfahrenstechnik

Theoretische Untersuchung einer viskosen, kompressiblen Strömung  
in einer gekrümmten Düse

R.A. Dürr



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

September 1972

KFK 1630

Institut für Kernverfahrenstechnik

Theoretische Untersuchung einer viskosen,  
kompressiblen Strömung in einer gekrümm-  
ten Düse

von

R.A. Dürr

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe  
von der Fakultät für Maschinenbau der Universität  
Karlsruhe genehmigte Dissertation



Zusammenfassung

Zur Berechnung der Strömung und der Entropie-Produktion reiner Gase in der Trenndüsengeometrie werden die Navier-Stokes-Gleichungen vereinfacht und durch numerische Integration mittels eines Verfahrens endlicher Differenzen gelöst. Durch Vergleich mit Druckmessungen wird gezeigt, daß die Ergebnisse vor allem im Bereich kleiner und mittlerer Umlenkwinkel die Experimente in zufriedenstellender Weise wiedergeben. Die tangential zur Umlenkwand in die Düse eintretende Strömung hat sich nach etwa  $30^\circ$  Umlenkung an die gekrümmte Düse angepaßt und zeigt im azimuthalen Geschwindigkeitsprofil erst bei Reynoldszahlen oberhalb 200 stärkere Abweichungen von einer parabelähnlichen Form. Der Temperaturverlauf entspricht weitgehend dem einer isoenergetischen Strömung. Die integrale Entropie-Produktion zeigt quantitativ den im Experiment gemessenen Verlauf. Eine Analyse der Verteilung der Verluste innerhalb des Trennelements ergibt, daß aufgrund der steilen Geschwindigkeitsgradienten und der Form des Einlaufprofils die Verluste im ersten Düsendrittel am größten sind.

Abstract

For calculation of the flow and the entropy production of pure gases in the separation nozzle geometry, the Navier-Stokes equations are simplified and solved by numerical integration by means of a finite difference method. It is shown by comparison with pressure measurements that the results are a satisfactory rendition of the experiments, especially in the range of small and medium-size deflection angles. The flow entering the nozzle tangential to the deflection wall has adapted itself to the curved nozzle after approximately  $30^\circ$  of deflection and does not show major deviations from a parabolic shape in the azimuthal velocity profile below Reynolds numbers of 200. The temperature curve largely corresponds to that of an isoenergetic flow. Quantitatively, the integral entropy production shows the behavior measured in the experiment. Analysis of the distribution of losses within the separation element shows the losses to be highest in the initial third of the nozzle, due to the steep velocity gradient and the shape of the inlet profile.



Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	2
1. Vereinfachung der Navier-Stokes-Gleichungen durch Abschätzung der Einzelterme nach Größenordnungen	6
2. Randbedingungen und Lösungsverfahren des verkürzten Gleichungssystems	17
3. Untersuchung der Güte der Näherung durch Vergleich von theoretischen und experimentellen Ergebnissen für den räumlichen Verlauf der Wand- und Staudrücke	21
4. Ergebnisse	24
4.1 Anpassung der Strömung an die Kanal- krümmung	24
4.2 Abhängigkeit des Strömungsprofils von Umlenkwinkel und Reynoldszahl	26
4.3 Temperaturprofile	29
4.4 Entropie-Produktion der Strömung	31
5. Diskussion der Ergebnisse	37
ANHANG	
A 1 Nachweis des parabolischen Charakters der verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen	39
A 2 Numerische Integration der verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen	44
A 3 Berechnung der Geschwindigkeitsprofile minimaler Entropie-Produktion	51

## Einleitung

Zur Anreicherung des leichten Uran-Isotops U-235 in großtechnischem Maßstab wird neben dem Diffusions- und dem Zentrifugen-Verfahren auch das im Kernforschungszentrum Karlsruhe entwickelte Trenndüsen-Verfahren in Betracht gezogen<sup>1)</sup>. Bei diesem Verfahren strömt ein Gemisch aus  $UF_6$  und einem leichten Zusatzgas aufgrund eines Druckgefälles durch eine schlitzförmige Düse mit gekrümmten Wänden; am Ende der Umlenkung teilt ein Abschäler den Gasstrom in

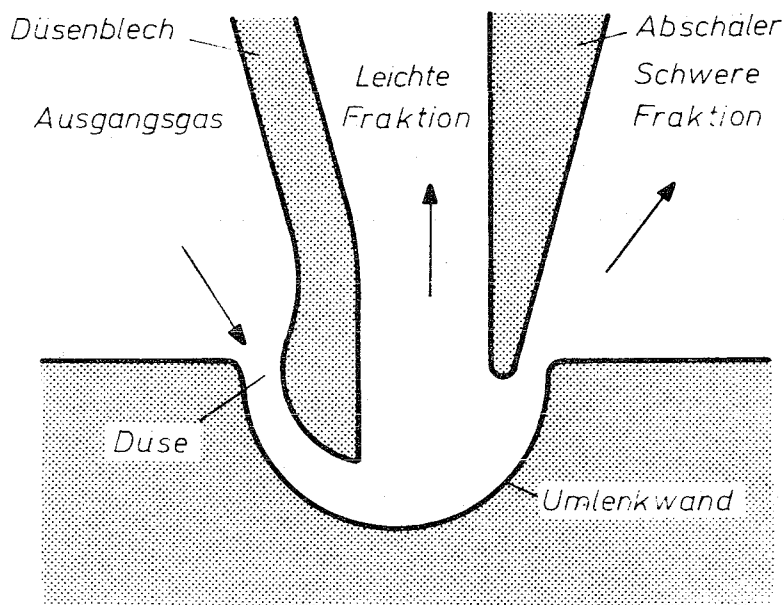


Abb 1 Schnitt durch ein schlitzförmiges Trennelement

zwei Fraktionen (Abb 1). Durch die Massenabhängigkeit der Zentrifugalkraft reichert sich das schwere Uranisotop in der nahe der Umlenkwand strömenden äußeren Fraktion an, während das leichte Isotop bevorzugt in der inneren Fraktion zu finden ist.

Wie Wirtschaftlichkeitsrechnungen<sup>2)</sup> gezeigt haben, zeichnet sich das Trenndüsenverfahren durch besonders günstige spezifische Investitionskosten aus, während sein spezifischer



Energieverbrauch im gegenwärtigen Entwicklungsstand noch über dem des Diffusionsverfahrens liegt.

Für die weitere Verbesserung des Verfahrens ist eine möglichst genaue Kenntnis der physikalischen Vorgänge in der Trenndüse erwünscht. In einer früheren Arbeit<sup>3)</sup> wurde deshalb die Entmischung unter vereinfachenden Annahmen berechnet, wobei aus Sondenmessungen<sup>4)</sup> abgeleitete Geschwindigkeitsprofile verwendet wurden. Durch Vergleich der Rechenergebnisse mit dem Experiment konnten charakteristische Züge des Trenneffekts gedeutet werden.

Zur theoretischen Erfassung des spezifischen Energieverbrauchs ist neben dem Verständnis der Entmischung auch ein Verständnis der Verlustprozesse erforderlich. Eine vollständige theoretische Erfassung dieser Verlustprozesse würde jedoch eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen für die kompressible, stark reibungsbehaftete gekrümmte Trenndüsenströmung unter Berücksichtigung der starken Entmischung von  $UF_6$  und leichtem Zusatzgas<sup>+</sup>) erfordern. Eine geschlossene Lösung dieser Aufgabe ist aber mit den heute bekannten Mitteln nicht möglich.

Die Analyse der Verlustprozesse läßt sich naturgemäß wesentlich vereinfachen, wenn man auf die Erfassung des Einflusses der Entmischung von  $UF_6$  und leichtem Zusatzgas verzichtet. Von entsprechenden Rechnungen sind brauchbare Ergebnisse zumindest für den Bereich kleiner Umlenkwinkel zu erwarten, in dem die Entmischung praktisch keine Rolle spielt. Da über diesen Bereich nur relativ wenige experimentelle Ergebnisse vorliegen, andererseits aber bekannt ist, daß er für die Verlustprozesse von wesentlicher Bedeutung sein kann<sup>5)</sup>, werden in der vorliegenden Arbeit

---

+ ) Die Isotopenentmischung ist für das Strömungsproblem praktisch ohne Bedeutung.

theoretische Untersuchungen über die Trenndüsenströmung unter Vernachlässigung der Entmischung von  $UF_6$  und leichtem Zusatzgas durchgeführt.

Auch bei Vernachlässigung der Entmischung lassen sich die Bewegungsgleichungen für die Trenndüsenströmung nicht in ihrer allgemeinen Form lösen. Eine Abschätzung der Einzeltermine nach Größenordnungen zeigt aber, daß die Änderungen der Strömungsgrößen in radialer Richtung als groß gegen die in azimuthaler Richtung und daß die azimuthalen Geschwindigkeitskomponenten als groß gegen die radialen betrachtet werden können. Daher werden in den Bewegungsgleichungen alle Produkte dieser kleinen Größen vernachlässigt. Das auf diese Weise vereinfachte Differentialgleichungssystem läßt sich mit erträglichem Aufwand numerisch integrieren. Aus den gewonnenen Strömungsgrößen kann dann die Entropieproduktion berechnet werden.

Durch einen Vergleich von theoretischen und experimentellen Ergebnissen für den räumlichen Verlauf von Wand- und Staudrücken bei Helium wird zunächst gezeigt, daß die verwendete Näherung für die Beschreibung der Strömungs- und Dissipationsvorgänge in der Trenndüse ausreicht.

Anschließend werden die Vorgänge bei der Anpassung der Strömung an die Kanalkrümmung untersucht. Es zeigt sich, daß die auf die Außenwand bezogene Radialkomponente der Geschwindigkeit nach einem Umlenkwinkel von etwa  $30^\circ$  das Vorzeichen gewechselt hat. Aus einer theoretischen Analyse der Winkelabhängigkeit des azimuthalen Strömungsprofils geht hervor, daß erst oberhalb einer Reynoldszahl von etwa 200 - also oberhalb der z.Zt. wirtschaftlich optimalen Verfahrensbedingungen - deutliche Abweichungen von Hagen-Poiseuille-artigen Strömungsprofilen in der ganzen Trenndüse auftreten. Die berechneten Temperaturprofile entsprechen weitgehend denen einer isoenergetischen Strömung.

Die Entropie-Produktion umfaßt im eigentlichen Trenndüsenbereich bei Verfahrensbedingungen etwa 50% der gemäß des angelegten Expansionsverhältnisses insgesamt erzeugten Entropie. Die Wärmeleitungsvorgänge tragen mit etwa 20% zu den Verlusten bei.

Bis zu etwa  $50^\circ$  Umlenkung der betrachteten Düse wird etwa ebensoviel Entropie produziert wie zwischen  $50^\circ$  und  $180^\circ$  Umlenkung. Dabei spielen vor allem die bereits hohen Geschwindigkeiten bei noch engem Kanal eine Rolle. Daneben sind die aufgrund steiler Geschwindigkeitsgradienten ungünstigen Einlaufprofile wesentlich, wie durch Vergleich mit Profilen minimaler Entropie-Produktion gezeigt wird.

1. Vereinfachung der Navier-Stokes-Gleichungen durch Abschätzung der Einzelterme nach Größenordnungen<sup>6)</sup>

Die Berechnung der Strömung und der dissipativen Verluste des in Abb 1 gezeigten technischen Trennelements - auch Halbzylinderelement genannt - ist unter den im Verfahrensbereich vorliegenden Randbedingungen infolge der stufenförmigen Erweiterung bei  $90^\circ$  Umlenkung mit erheblichen mathematischen Schwierigkeiten verbunden. Experimentelle Ergebnisse zeigen, daß bis zu dem in der Praxis verwendeten Expansionsverhältnis 4 die Gas- und Isotopenentmischungen bei dem in Abb 1 gezeigten System nicht wesentlich von denen bei einem sogenannten Vollzylinderelement, wie es in Abb 2 im Schnitt gezeigt ist, unterscheiden<sup>+)</sup> . Den

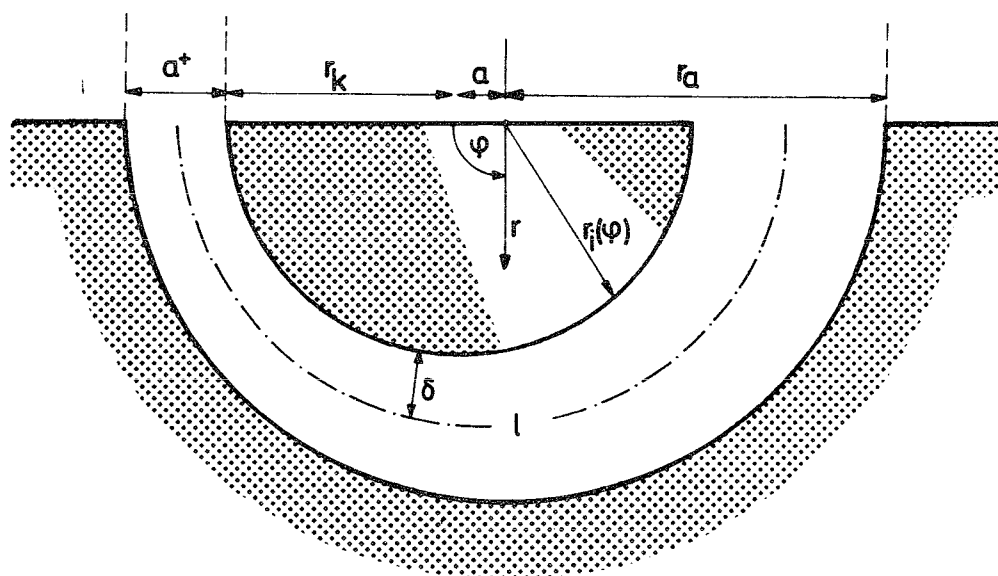


Abb. 2 Schnitt durch ein schlitzförmiges Vollzylinderelement, wie es den Rechnungen zugrunde liegt.

---

+ ) Vgl. z.B. Ref. 1. Vollzylinderelemente wurden u. a. in der 10-stufigen Pilot-Anlage für das Trenndüsenverfahren benutzt. Vgl. dazu Ref 7.

weiteren Untersuchungen wurde deshalb das gemäß seiner geometrischen Form einfacher zu berechnende Vollzylinder-Element zugrunde gelegt. Da das System in seiner Ausdehnung senkrecht zur Schnittebene als beliebig lang betrachtet werden kann, sind Änderungen in dieser Richtung auszuschließen, so daß sich die Berechnung der Strömung auf ein zweidimensionales Problem reduziert.

Mit einem Umlenkradius  $r_a = 10^{-2}$  cm, einer engsten Düsenweite  $a^+ = r_a(0^\circ) - r_i(0^\circ) = 0.266 \cdot 10^{-2}$  cm und einem Öffnungsverhältnis = (Kanalbreite bei  $0^\circ$  Umlenkung zu Kanalbreite bei  $180^\circ$  Umlenkung) =  $1/2$  ist das Verhältnis von mittlerer Kanalbreite zur Länge  $l$  dieser Trenndüse in Strömungsrichtung von der Ordnung  $O(10^{-1})$ . Der sich der Düsengeometrie anpassende Strahl zeigt also eine radiale Geschwindigkeit  $u$ , deren Verhältnis zur azimuthalen Geschwindigkeit  $v$  ebenfalls in der Größenordnung  $O(10^{-1})$  liegt.

Dem Experiment<sup>+)</sup> kann nun entnommen werden, daß die Zustandsgrößen sowohl längs der Umlenkung als auch quer zum Gasstrahl eine Änderung von nicht mehr als einer Größenordnung aufweisen. Außerdem fällt die Azimutalgeschwindigkeit  $v$  über dem Radius vom Maximum in etwa der Kanalmitte bis auf sehr kleine Werte an den Strahlrändern ab. Längs der Umlenkung erreicht sie ihr Maximum etwa in Düsenmitte und fällt zum Düsenanfang bzw Düsenende hin auf etwa den halben Maximalwert ab. Da diese Änderungen in der entsprechenden Richtung nicht mehrfach durchlaufen werden, sind die Differentialoperatoren in azimuthaler bzw radialer Richtung von der Größenordnung

$$\frac{\partial}{r \cdot \partial \varphi} = O(1^{-1}) \quad \text{bzw} \quad \frac{\partial}{\partial r} = O(\delta^{-1})$$

---

+) Siehe z.B. Ref. 4 und die internen Arbeitsberichte der Serie KVT 55

wenn  $\delta$  die etwa halbe Kanalbreite charakterisiert.

Macht man die Strömungsgrößen in der üblichen Weise dimensionslos<sup>+) , so erhält man<sup>++)</sup></sup>

$$\begin{aligned}\bar{p}, \bar{\rho}, \bar{v}, \bar{T} &= O(1) \\ \bar{u} &= O(\bar{l}^{-1}) = O(10^{-1}) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} &= O(\bar{\delta}^{-1}) = O(1) \\ \frac{\partial}{\bar{r} \cdot \partial \varphi} &= O(\bar{l}^{-1}) = O(10^{-1})\end{aligned}$$

Im Verfahrensbereich liegen außerdem Reynoldszahlen um 100 vor.

$$\frac{\text{Massendurchsatz}}{\text{Zähigkeit}} = Re = O(10^2)$$

Mit diesen Abschätzungen können nun die Größenordnungen der einzelnen Terme der Bewegungsgleichungen untersucht werden. Aus den Navier-Stokes-Gleichungen für die stationäre, kompressible Strömung mit konstanter Zähigkeit,

- 
- + ) Die mit folgenden Werten dimensionslos gemachten Strömungsgrößen sind durch einen Querstrich gekennzeichnet.
- Länge:  $d^+ = a^+$  (engste Düsenweite)
- Dichte:  $\rho^+ = \rho(r_i, 0^0)$  (Innenwanddichte an der engsten Düsenweite)
- Geschwindigkeit:  $v^+ = Re \cdot \eta / \rho^+ \cdot d^+$  (mittlere Geschwindigkeit)
- Druck:  $p^+ = \rho^+ \cdot v^{+2}$  (dynamischer Druck)
- Temperatur:  $T^+ = v^{+2} / c_p$  (Differenz zwischen der Wandtemperatur und der mittleren Temperatur der Strömung)
- Gaskonstante:  $R^+ = c_p$

++) Nomenklatur siehe Seite 56

Wärmeleitkoeffizienten und spezifischen Wärmen und ohne äußere Kräfte erhält man für den interessierenden zweidimensionalen Fall in Zylinderkoordinaten<sup>8)</sup> für die einzelnen physikalischen Größen (in dimensionsloser Schreibweise)<sup>+</sup>

(1a) Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{\rho} \bar{u} \bar{r}) + \frac{\partial}{\partial \bar{r} \cdot \partial \varphi} (\bar{\rho} \bar{v}) = 0$$

$$1 \cdot \frac{1}{\delta} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 1 \quad \frac{1}{1} \cdot 1 \cdot 1$$

(1b) radiale Impulsgleichung:

a) Konvektionskräfte

$$\bar{\rho} \left( \bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} - \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} \right)$$

$$1 \left[ \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1 \cdot \delta} \quad 1 \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} \quad 1 \right]$$

Der Zentrifugalterm überwiegt deutlich, jedoch soll der zweite Term mitberücksichtigt werden, da die azimutale Änderung der radialen Geschwindigkeitskomponente  $\partial \bar{u} / \partial \varphi$

---

+) Im Gegensatz zu der Nomenklatur, bei der man unter den Navier-Stokes-Gleichungen lediglich die Impulsgleichungen für inkompressible Strömungen versteht, soll hier das ganze Differentialgleichungssystem für die kompressiblen Strömungen (Massenerhaltung, Impulserhaltung, Energieerhaltung) mit dem Begriff Navier-Stokes-Gleichungen belegt werden.

im Einlaufgebiet (Gebiet kleiner Umlenkwinkel) wegen der Anpassung der Einlaufströmung an die Geometrie in die Größenordnung der azimuthalen Geschwindigkeit kommen kann.

b) Druckkraft

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}}$$

$$\frac{1}{\delta}$$

c) Reibungskraft

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\bar{r} \partial \bar{r}} - \frac{4}{3} \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{\varphi}^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\bar{r} \partial \bar{r} \partial \bar{\varphi}} - \frac{7}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\bar{r}^2 \partial \bar{\varphi}} \right)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{\bar{l} \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{\delta}} \quad \frac{1}{\bar{l} \cdot \bar{\delta}} \quad \frac{1}{\bar{l}} \quad \frac{1}{\bar{l} \cdot \bar{l} \cdot \bar{l}} \quad \frac{1}{\bar{\delta} \cdot \bar{l}} \quad \frac{1}{\bar{l}} \right]$$

Die Terme der radialen Reibungskraft sind alle um mindestens eine Größenordnung kleiner als die Zentrifugalkraft oder die Druckkraft, so daß sie vernachlässigt werden können und die Strömung in radialer Richtung als reibungsfrei betrachtet werden kann.



(1c) azimutale Impulsgleichung:

a) Konvektionskräfte

$$\bar{\rho} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{u} \bar{v}}{\bar{r}} \right)$$

$$1 \left[ \frac{1}{\bar{l}} \cdot \frac{1}{\bar{\delta}} \quad 1 \cdot \frac{1}{\bar{l}} \quad \frac{1}{\bar{l}} \cdot 1 \right]$$

b) Druckkraft

$$\frac{\partial \bar{p}}{\bar{r} \cdot \partial \varphi}$$

$$\frac{1}{\bar{l}}$$

c) Reibungskraft

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{4}{3 \bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{3 \bar{r}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi \partial \bar{r}} + \frac{1}{3 \bar{r}^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2} - \frac{\bar{v}}{\bar{r}^2} \right)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{\bar{l} \cdot \bar{l}} \quad \frac{1}{\bar{l} \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{l}} \quad \frac{1}{\bar{l} \cdot \bar{l}} \quad \frac{1}{\bar{\delta}} \quad \frac{1}{\bar{\delta} \cdot \bar{\delta}} \quad 1 \right]$$

Druckterm und alle Konvektionsterme sind in azimuthaler Richtung von dergleichen Größenordnung, doch treten auch noch merkliche Reibungskräfte in dieser Größenordnung hinzu, die bei den betrachteten Reynoldszahlen auf die

gesamte Strömung Einfluß nehmen.

(1d) Energiegleichung:

a) konvektiver Anteil

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{\bar{v}^2}{2} + \bar{T} \right) + \bar{\rho} \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{\bar{v}^2}{2} + \bar{T} \right)$$

$$1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1}{1 \cdot 1} \quad 1 \quad 1 \right] \quad 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \left[ \frac{1}{1 \cdot 1} \quad 1 \quad 1 \right]$$

b) Wärmeleitungsanteil

$$\frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$\frac{1}{\text{Re} \cdot 1} \left[ \frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{1 \cdot 1} \right]$$

c) dissipativer Anteil

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( 2 \left( \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{u}}{r} \right)^2 \right) + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{r} \right)^2 \right)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{1}{1 \cdot \delta} \right)^2 \quad \left( \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \right)^2 \quad \left( \frac{1}{1 \cdot 1} \quad \frac{1}{\delta} \quad 1 \right)^2 \right]$$

$$- \frac{2}{3\text{Re}} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \right)^2$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{\bar{l} \cdot \bar{\delta}} \quad \frac{1}{\bar{l}} \quad \frac{1}{\bar{l}} \right]^2$$

d) Anteil durch Arbeitsleistung

$\bar{u} \cdot$  (Reibungsterm der radialen Impulsgleichung)

$$\frac{1}{\bar{l}} \cdot \left[ \dots \quad \frac{1}{\text{Re} \cdot \bar{l} \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{\delta}} \quad \dots \right]$$

+  $\bar{v} \cdot$  (Reibungsterm der azimuthalen Impulsgleichung)

$$1 \cdot \left[ \dots \quad \frac{1}{\text{Re} \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{\delta}} \quad \dots \right]$$

In der spezifischen Gesamtenthalpie  $\bar{E} = \bar{u}^2/2 + \bar{v}^2/2 + \bar{T}$  kann der Beitrag durch die radiale Geschwindigkeit vernachlässigt werden, da die kinetische Energie der Querkomponente der Strömung klein ist gegenüber derjenigen in Hauptströmungsrichtung. Ebenso wie bei den Scherkräften sind auch bei den Wärmeleitungstermen nur diejenigen von Bedeutung, die mit den Ableitungen in radialer Richtung verknüpft sind. D.h. die wesentlichen Beiträge zur Energiebilanz liefern seitens der Wärmeleitung der radiale Wärmestrom und seitens der dissipierten Energie die mit den radialen Änderungen der azimuthalen Geschwindigkeitskompo-

nente verbundenen Scherkräfte.

Man erhält so bei Berücksichtigung aller Größen bis zur Ordnung  $O(1/Re)$  anstelle der ursprünglichen Navier-Stokes-Gleichungen folgendes verkürzte Differentialgleichungssystem<sup>+) :</sup>

(2a) Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{\rho} \bar{u} \bar{r}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{\rho} \bar{v}) = 0$$

(2b) radiale Impulsgleichung

$$\bar{\rho} \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} - \bar{v} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}}$$

(2c) azimutale Impulsgleichung

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left( \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{v} \bar{r}) + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} \right) = \\ - \frac{\partial \bar{p}}{\bar{r} \cdot \partial \varphi} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \right) \right) \end{aligned}$$

+) Dieses Gleichungssystem ist den Grenzschichtgleichungen recht ähnlich; es unterscheidet sich jedoch in zwei Punkten von diesen

- a) Der Druck quer zum Strahl ist nicht konstant.
- b) Der azimutale Druckverlauf kann nicht durch eine Kernströmung berechnet werden sondern ist Bestandteil der Lösung.

(2d) Energiegleichung

$$\bar{\rho} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\text{Pr} \cdot \bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) \right. \\ \left. + \bar{r}^2 \left( \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \right) \right)^2 + \bar{v} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \right) \right) \right)$$

(2e) ideale Gasgleichung

$$\bar{p} = \bar{\rho} \frac{\bar{R} \bar{T}}{M}$$

mit

$$\bar{E} = \bar{T} + 1/2 \bar{v}^2$$

Die aus Gleichung (2) als Lösung gewonnenen Strömungsgrößen werden zur Berechnung der mit der Strömung verbundenen Verlustvorgänge d.h. ihrer Entropie-Produktion herangezogen.

Die pro Zeiteinheit im Volumenelement erzeugte Entropie setzt sich zusammen aus der Entropie-Produktion aufgrund der Reibungsvorgänge, die durch die Dissipationsfunktion beschrieben wird, und der Entropie-Produktion, die mit den Wärmeleitvorgängen verbunden ist<sup>9)</sup>. Durch Integration über das Trenndüsengebiet erhält man in der hier verwendeten azimutalen Näherung für die pro Zeiteinheit (und cm Schlitzlänge) erzeugte Entropie

+) )

$$(3) \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \int_0^\pi \int_{r_i(\varphi)}^{r_a} \frac{\eta}{T} r^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{v}{r} \right)^2 r dr d\varphi + \int_0^\pi \int_{r_i(\varphi)}^{r_{a1}} \lambda \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{T}{T} \right)^2 r dr d\varphi + C$$

Durch die Konstante C soll der Teil der Entropie erfaßt werden, der im Bereich des Zulaufs vor der engsten Düsenweite erzeugt wird. In den Rechnungen wird ihr Betrag über das Verhältnis des Ruhedrucks des Ausgangszustandes zum mittleren Staudruck der angenommenen Anfangsbedingungen festgelegt und ergibt sich zu etwa 5-10% der gesamten Entropie-Produktion der Trenndüse.

---

+) Zur Darstellung der Ergebnisse wird im allgemeinen nicht der Absolutwert der Entropie-Erzeugung verwendet sondern in Analogie zu Ref 5 das Verhältnis zur gesamten Entropiezunahme des Trenndüsenprozesses, die das Gas erfährt, wenn es vom Ruhedruck  $p_0$  auf den angelegten Absaugdruck  $p_M$  isotherm expandiert wird.

$$(\Delta s_0 = R \ln p_0/p_M)$$

## 2. Randbedingungen und Lösungsverfahren des verkürzten Gleichungssystems

Wie man zeigen kann<sup>+)</sup> , bedeutet ein Übergang von den Navier-Stokes-Gleichungen (1) zu den verkürzten Gleichungen (2) ein Übergang von einem elliptischen Differentialgleichungssystem zu einem solchen mit parabolischen Eigenschaften. Damit sind auch Änderungen in den zur Lösung erforderlichen Randbedingungen verbunden. Physikalisch wird dadurch festgelegt, daß die stromaufwärts gerichtete Wirkung von Störungen an einem bestimmten Querschnitt nicht durch das vereinfachte Modell erfaßbar ist. Die Strömungsbedingungen am Düsenendquerschnitt ( $\varphi = 180^\circ$ ) können also nicht vorgegeben werden, sondern sind durch die Strömungsbedingungen am Düsen Eintritt ( $\varphi = 0^\circ$ ) und denen an der Düseninnen- und Düsenaußenwand festgelegt.

Als Rand- bzw Anfangsbedingungen, die bei der Lösung des Gleichungssystems (2) zu beachten sind, treten somit auf:

- a) Vorgabe der Strömungsgrößen Geschwindigkeit, Temperatur und Druck am Einlaufquerschnitt.
- b) Verschwindende Geschwindigkeiten auf den Düsenwänden ( ein zu erwartender Geschwindigkeitsschlupf soll nicht berücksichtigt werden ).
- c) Vorgabe des Temperaturverlaufs auf den Düsenwänden ( $T = \text{const} = 300^\circ\text{K}$ ). Ein möglicherweise auftretender Temperatursprung soll unberücksichtigt bleiben.

---

<sup>+)</sup>  Siehe Anhang A 1

Da die Anfangsbedingungen a) wegen der komplizierten geometrischen Form des Gaszuführungsteils der Apparatur sehr schwierig zu berechnen sind, wurden diese den Experimenten entnommen bzw in plausiblen Grenzen variiert.

Die Lösung des Gleichungssystems (2) erfolgte unter Berücksichtigung der Randbedingungen und der vorliegenden Geometrie durch numerische Integration mittels eines Verfahrens endlicher Differenzen, das im Anhang A 2 erläutert wird.

Eine Komplikation tritt bei der Diskretisierung des Trenndüsengebiets durch den nichtlinearen Verlauf der Düsenberandung in der  $r, \varphi$  - Ebene auf. Die entsprechenden "geometrischen Randbedingungen" in der Trenndüse (exzentrische Düsenzylinder) können zwar grundsätzlich dadurch berücksichtigt werden, daß an den Düsenberandungen mit Differenzenschemata nicht konstanter Maschenweite des Gitternetzes gerechnet wird (Abb 3a). Es ist hier jedoch bequemer, die komplizierteren Schemata verschiedener Maschenweiten zu

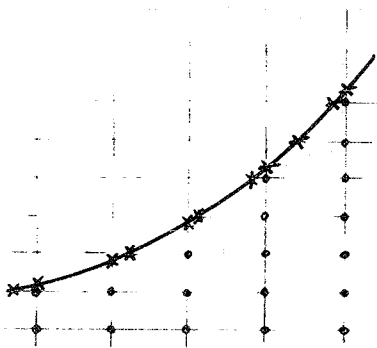


Abb 3a Gitternetz bei beliebiger Berandung

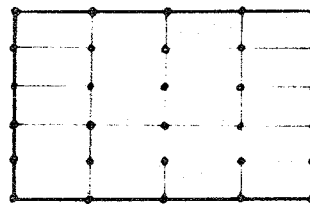


Abb 3b Gitternetz des Rechteckgebiets

vermeiden und den Verlauf der Gitterlinien der Berandung anzupassen bzw das zu untersuchende Gebiet auf ein Rechteckgebiet abzubilden, in dem nur noch eine vorgegebene Maschenweite pro Dimension auftritt (Abb 3b).



Die gewählte Abbildungsvorschrift für die Trenndüse von der  $r, \varphi$  - Ebene auf die  $s, t$  - Ebene

$$\begin{array}{ccc} 0 \leq \varphi \leq \pi & \longrightarrow & 0 \leq t \leq \pi \\ r_i(\varphi) \leq r \leq r_a & & 0 \leq s \leq 1 \end{array}$$

lautet

$$t(\varphi) = \varphi$$

$$s(r, \varphi) = \frac{r - r_i(\varphi)}{r_a - r_i(\varphi)}$$

mit

$$r_i(\varphi) = a \cdot \cos \varphi + \sqrt{r_k^2 - a^2 \cdot \sin^2 \varphi}$$

so daß man für die Differentialoperatoren erhält

$$\frac{\partial}{\partial r} = g(t) \cdot \frac{\partial}{\partial s}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = g(t) \cdot f(s, t) \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = g^2(t) \frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

mit

$$g(t) \equiv \left[ r_a - r_i(t) \right]^{-1}$$

$$f(s,t) \equiv \left[ a \cdot \sin t + \frac{a^2 \cdot \cos t \cdot \sin t}{\sqrt{r_k^2 - a^2 \cdot \sin^2 t}} \right] \cdot \left[ 1 - s \right]$$

3. Untersuchung der Güte der Näherung durch Vergleich von theoretischen und experimentellen Ergebnissen für den räumlichen Verlauf der Wand- und Staudrücke

Vergleicht man die durch Integration der Gleichungen (2) gewonnenen Ergebnisse mit entsprechenden Meßwerten für Helium des Vollzylinderelements, um die Güte der Näherung des mathematischen Modells zu überprüfen, so zeigt sich folgendes:

Der über dem Umlenkwinkel  $\varphi$  berechnete und aus Sondenmessungen<sup>10)</sup> bestimmte Wanddruckverlauf stimmt bei den untersuchten Reynoldszahlen im wesentlichen überein (Abb 4). Sowohl die Theorie als auch das Experiment liefern einen steilen Druckabfall in der ersten Düsenhälfte und einen daran anschließenden flachen Verlauf des Druckes über dem Umlenkwinkel. Abweichend von den Rechnungen sinkt aber der experimentelle Außenwanddruck bei großen Umlenk winkeln stark ab. Dies dürfte durch das plötzliche Ende der Umlenk wand bei  $180^\circ$  bedingt sein, dessen Rückwirkung in den Düsenbereich von den parabolischen Gleichungen nicht erfaßt werden kann.

Auch der bei  $180^\circ$  Umlenkung berechnete und der mit Pitotdrucksonden<sup>5)</sup> gemessene radiale Staudruckverlauf stimmen weitgehend überein (Abb 5). Vor allem im Bereich des Strahl innenrandes sind die Abweichungen gering, während im Experiment am Außenrand der Strömung wieder stärkere Abweichungen auftreten, die ebenfalls auf die Rückwirkung des Endes der Umlenk wand zurückzuführen sein dürften.

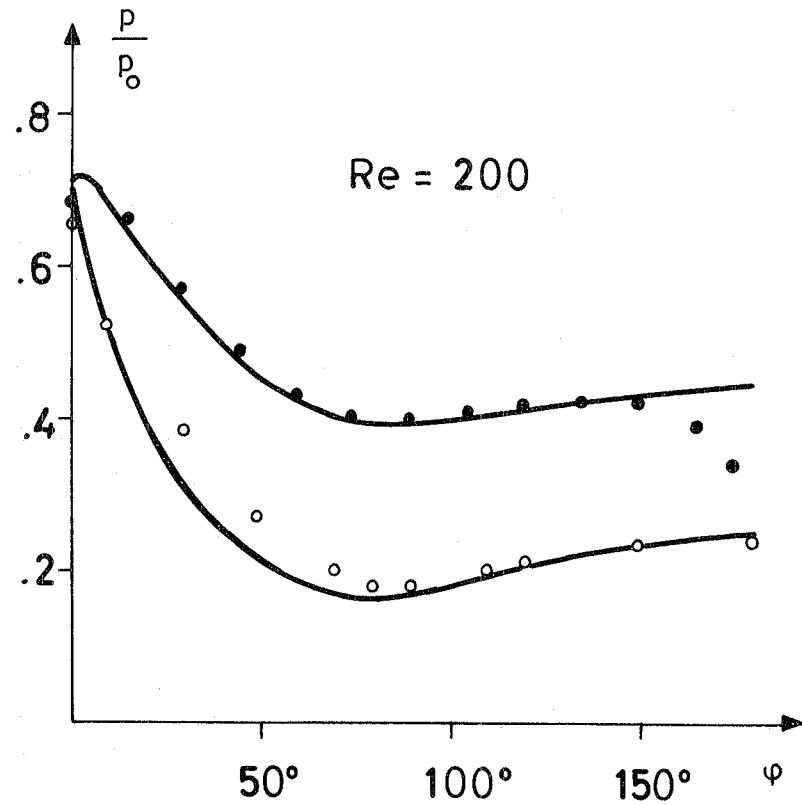
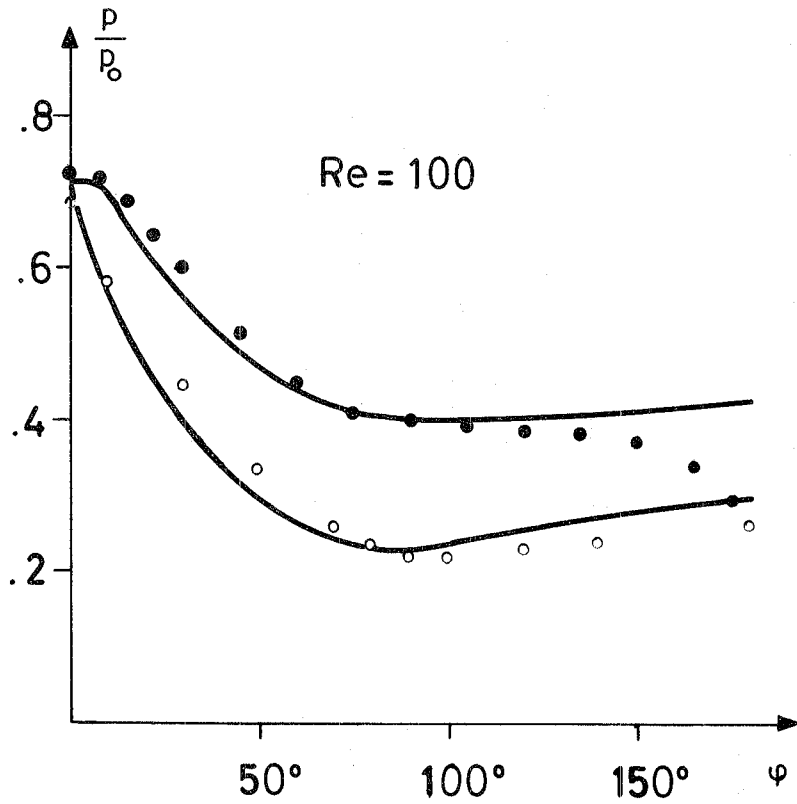


Abb 4 Die experimentellen<sup>10)</sup> (○,●) und die entsprechenden aus den verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen berechneten (—) Innenwand- und Umlenkwand-Drücke als Funktion des Umlenkwinkels  $\varphi$  bei den Reynoldszahlen 100 und 200 für Helium

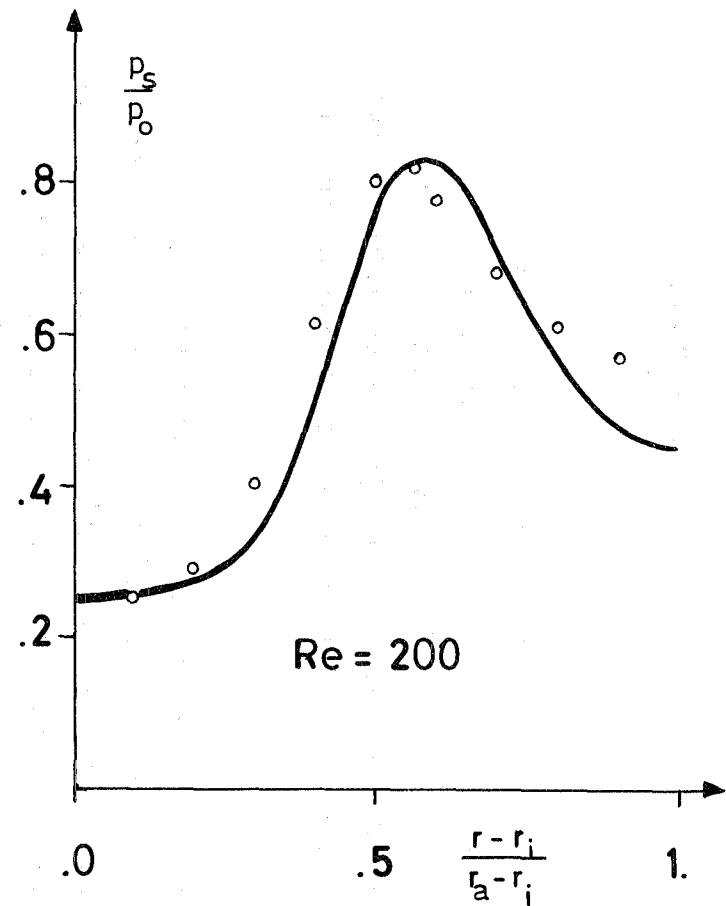
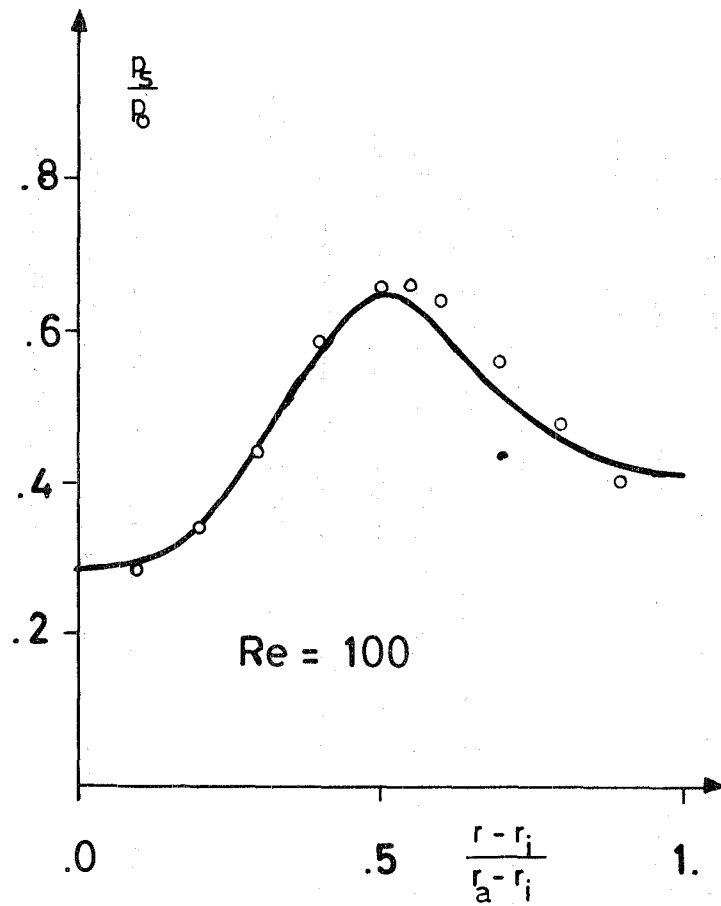


Abb 5 Die experimentellen<sup>5)</sup> (o) und die entsprechenden aus den verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen berechneten (—) Staudruckprofile über dem normierten Kanalquerschnitt nach 180° Umlenkung bei den Reynoldszahlen 100 und 200 für Helium

#### 4. Ergebnisse

##### 4.1 Anpassung der Strömung an die Kanalkrümmung

In Abb 6 ist der Winkel  $\beta$  zwischen den Stromlinien der berechneten Trenndüsenströmung und einer rein azimuthalen Strömung d.h. einer Strömung, die überall parallel zur Außenwand verläuft, dargestellt. Der  $\operatorname{tg}\beta$  entspricht direkt dem Verhältnis der radialen Geschwindigkeit  $u$  zur azimuthalen Geschwindigkeit  $v$ .

Man sieht, daß die in die Düse eintretende Strömung, die dort als im gesamten Düsenquerschnitt parallel zur Düsenwand verlaufend angenommen wurde, zunächst die ursprüngliche Richtung beizubehalten versucht. Sie bewegt sich nach dem Eintritt auf die sich in die Strömung hineinkrümmende Außenwand zu ( $\beta > 0$ ). Die Stromlinien passen sich jedoch - beginnend an den Strahlrändern - zunehmend den gekrümmten Wänden an, und nach etwa  $30^\circ$  Umlenkung ist die positive radiale Geschwindigkeitskomponente über dem ganzen Düsenquerschnitt abgebaut. Durch geänderte Anfangsbedingungen kann dieser Zustand bis zu etwa  $10^\circ$  früher oder später erreicht werden.

Außer der Entwicklung der sich der Düsenform anpassenden Strömung zeigt die Abbildung zusätzlich, daß im ganzen sich anschließenden Düsenbereich dieser Winkel weniger als  $10^\circ$  beträgt, die berechnete radiale Geschwindigkeit der Strömung also in Konsistenz mit der entsprechenden früheren Annahme 10% der azimuthalen Geschwindigkeit nicht überschreitet.

Entsprechend läßt sich der radiale Druckverlauf ab etwa  $30^\circ$  Umlenkung ohne großen Fehler ( $\leq 5\%$ ) allein durch die auf den azimuthalen Geschwindigkeitsterm (Zentrifugalterm) reduzierte Eulergleichung beschreiben.

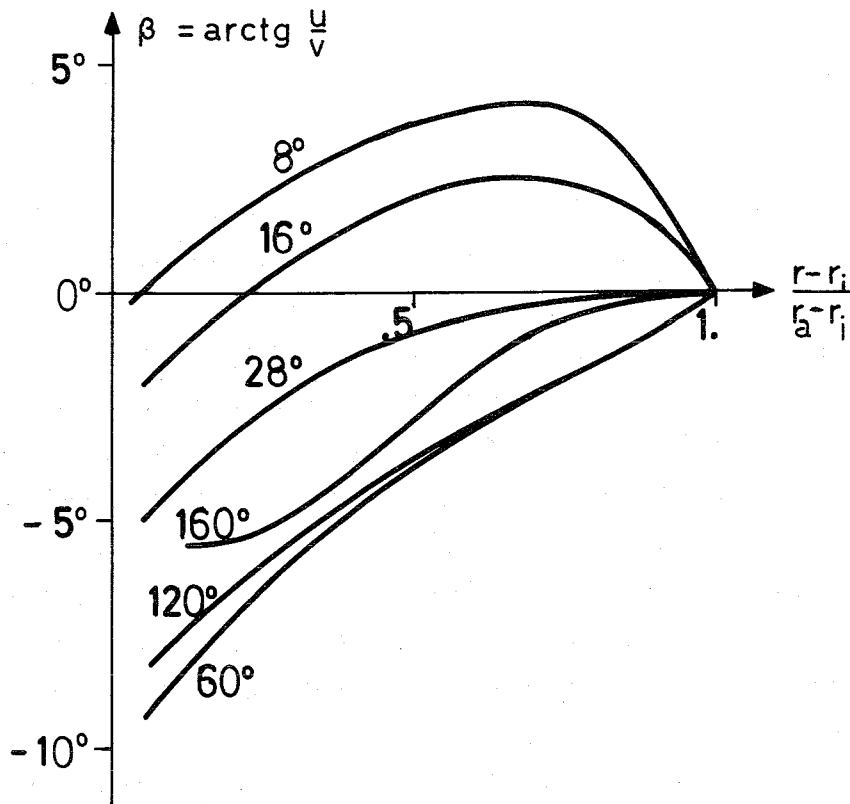


Abb 6 Typische Winkelabweichung  $\beta$  der aus den verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen berechneten Heliumstromlinien von der Strömung parallel zur Düsenwand in Abhängigkeit vom Umlenkwinkel  $\phi$  über der normierten Kanalbreite

#### 4.2 Abhängigkeit des Strömungsprofils von Umlenkwinkel und Reynoldszahl

---

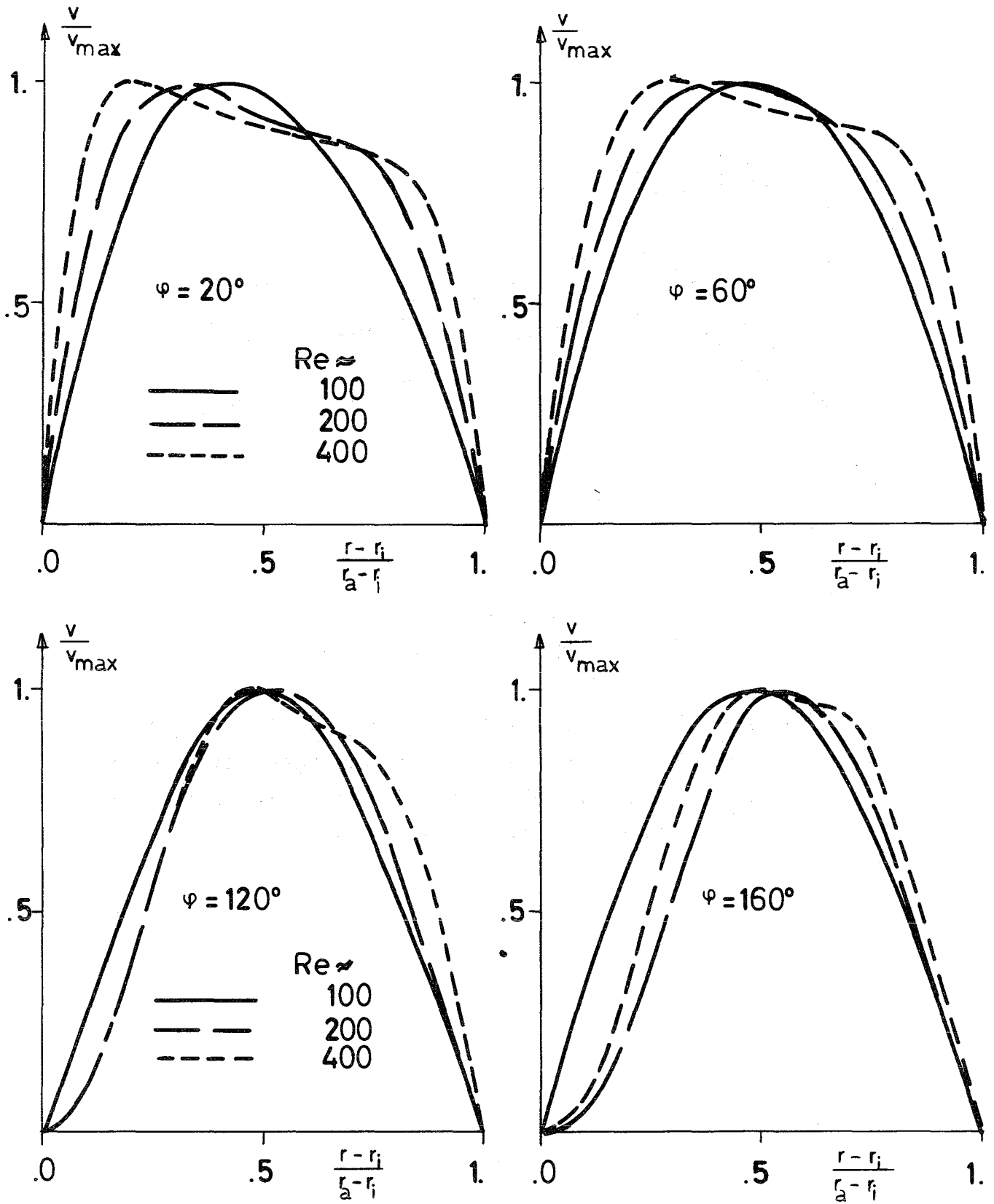
Der radiale Verlauf der azimuthalen Geschwindigkeit  $v$  weicht bei niedrigen Reynoldszahlen ( $Re \leq 100$ ) im gesamten Bereich der Umlenkung nur unwesentlich von den Hagen-Poiseuille-Profilen einer Kanalströmung ab (Abb 7). Mit steigenden Reynoldszahlen zeigen die berechneten Lösungen jedoch eine Tendenz in Richtung Potentialströmung. Die Geschwindigkeitsprofile gehen zunächst im Bereich kleiner Umlenkwinkel in solche über, bei denen immer deutlicher der Charakter einer Potentialströmung hervortritt. Erwartungsgemäß breitet sich aber im Laufe der Umlenkung zunehmend der Einfluß der Scherkräfte über dem Querschnitt aus. Sie erzwingen noch bei Reynoldszahlen bis etwa 200 innerhalb der Trenndüse den Übergang zu parabelähnlichen Strömungsprofilen. Erst oberhalb einer Reynoldszahl von etwa 200 - also oberhalb der z.Zt. wirtschaftlich optimalen Verfahrensbedingungen - treten in der ganzen Trenndüse deutliche Abweichungen von Hagen-Poiseuille-artigen Strömungsprofilen auf.

In Abb 8 ist der Verlauf des maximalen Geschwindigkeitsverhältnisses<sup>+)</sup> über dem Umlenkwinkel wiedergegeben. Die theoretischen Ergebnisse zeigen, daß in der ersten Düsenhälfte die Strömung noch eine Beschleunigung erfährt, während sie in der zweiten Hälfte abgebremst wird. Dem ausgeprägten Reibungseinfluß ist es wohl zuzuschreiben, daß sich dabei in der Trenndüse lokal Zonen mit Überschallbedingungen ausbilden, von denen die Strömung stoßfrei in Unterschallgebiete übergeht. Für gerade Düsen wurde diese Eigenschaft ebenfalls theoretisch festgestellt<sup>11)</sup> und auch experimentell nachgewiesen<sup>12)</sup>.

---

+) Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit zur wahrscheinlichsten thermischen Geschwindigkeit





**Abb 7** Das Profil der azimuthalen Geschwindigkeit  $v$  über dem normierten Kanalquerschnitt, berechnet aus den verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen für verschiedene Reynoldszahlen  $Re$  und Umlenkwinkel  $\varphi$

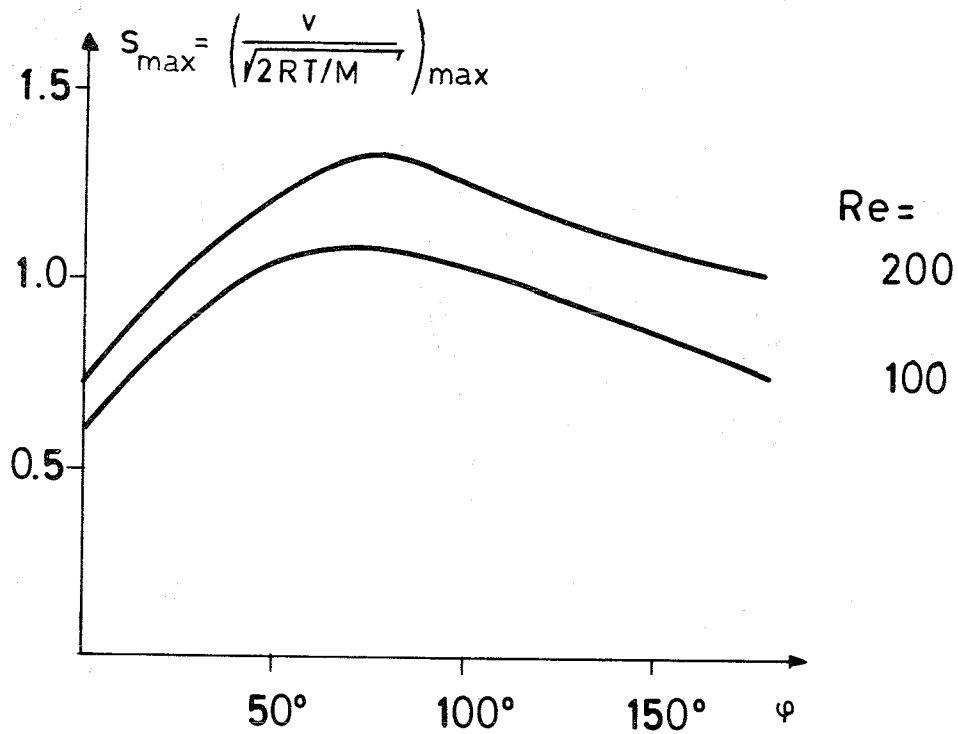


Abb 8 Aus den verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen berechnetes maximales Geschwindigkeitsverhältnis  $S_{\max}$  in Abhängigkeit vom Umlenkwinkel  $\varphi$  und der Reynoldszahl  $Re$  (Helium,  $p_O/p_M \approx 4$ )

### 4.3 Temperaturprofile

Obwohl für den Grenzfall der Kanalströmung ( $\frac{r_a - r_i}{r} \rightarrow 0$ ) die Gleichungen (2) direkt in die bekannten Grenzschichtgleichungen<sup>13)</sup> übergehen, ist die isoenergetische Strömung  $E = \text{const}$ , die dort für wärmeundurchlässige Wände bei Prandtl-Zahl  $Pr = 1$  als analytische Lösung der Energiegleichung auftritt, keine Lösung der hier vorliegenden Energiegleichung (2d). Wie man durch Einsetzen leicht zeigt, verhindert ein Term der Form  $\frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$  gerade diese Lösung<sup>+</sup>). Dieser Term und die Abweichungen der Prandtlzahl vom Wert 1 scheinen jedoch i.a. keinen großen Einfluß auf die Lösung auszuüben, da die Rechnungen zeigen, daß für die im Verfahrensbereich untersuchte Heliumströmung der Temperaturverlauf fast im ganzen Düsenbereich nur innerhalb der Fehlergrenzen ( $\pm 5^\circ\text{K}$ ) von der isoenergetischen Beziehung abweicht (Abb 9).

Es scheint allerdings eine Tendenz zur Erhöhung der Stautemperatur<sup>++)</sup> im Strahlbereich nahe der Umlenk wand bei gleichzeitiger Absenkung der Stautemperatur im Bereich der Innenwand vorzuliegen, die gegen Ende der Umlenkung zu Abweichungen vom isoenergetischen Temperaturverlauf führen, welche außerhalb derzeitiger Fehlergrenzen des Rechenverfahrens liegen. Eine weitere theoretische Analyse des auch im Experiment<sup>14)</sup> beobachteten Effekts soll aber genaueren Rechnungen vorbehalten bleiben.

---

+) Für den Fall der Kanalströmung ( $r \rightarrow \infty$ ) geht dieser Term gegen Null.

++) Als Stautemperatur wird die mit Hilfe der isoenergetischen Beziehung  $E = \text{const}$  aus der Temperatur  $T$  und der Strahlgeschwindigkeit  $v$  berechnete Ruhetemperatur  $T_{\text{stau}} = T + 0.5 v^2 / c_p$  bezeichnet.

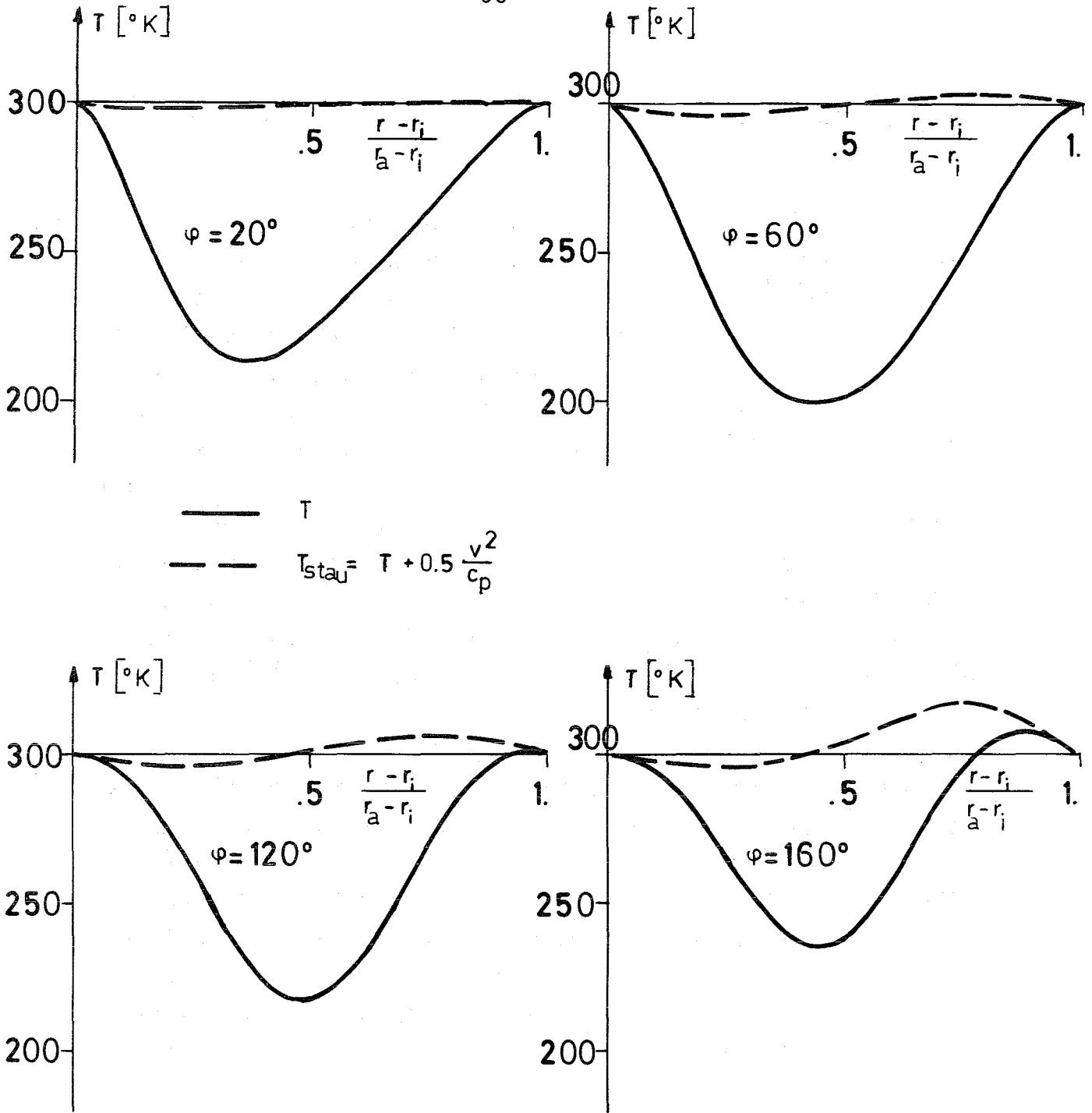


Abb 9 Verlauf der aus den verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen berechneten statischen Temperatur  $T$  (—) sowie der Stautemperatur  $T_{\text{stau}}$  (---), die aus der Beziehung  $T_{\text{stau}} = T + 0.5 \frac{v^2}{c_p}$  bestimmt wurde, über der normierten Kanalbreite für verschiedene Umlenkwinkel  $\varphi$  und  $Re=100$  (Helium,  $Pr=0.75$ )

#### 4.4 Entropie-Produktion der Strömung

Die Auswertung der Integrale (3) läßt erkennen (Abb 10), daß die Reibung den Hauptanteil (80%) zur Entropie-Produktion innerhalb der Trenndüse liefert, während der Beitrag der Wärmeleitung zu etwa 20% bestimmt wird. Theorie und Experiment weichen um etwa 10% voneinander ab.

Bei den Reynoldszahlen des Verfahrensbereichs ( $\leq 200$ ) steigt die relative Entropie-Produktion erwartungsgemäß mit fallender Reynoldszahl stark an. Wie bereits im Experiment<sup>5)</sup> beobachtet, geht für Reynoldszahlen um 100 jedoch nur etwa 50% der zum Rückstau verwendbaren kinetischen Energie durch dissipative Prozesse in der Trenndüse selbst verloren. Der Rest wird in den Absaugkanälen irreversibel umgewandelt. Dabei ist die lokale Entropie-Produktion im Bereich kleiner Umlenkwinkel am größten (Abb 11). Dies ist auf die hohe Geschwindigkeit bei noch verhältnismäßig engem Kanal im Bereich kleiner Umlenkwinkel und auf die wegen ihrer steilen Gradienten bzgl der Dissipation ungünstigen Einlaufprofile zurückzuführen.

Um den Einfluß dieser Geschwindigkeitsprofile des Einlaufquerschnitts auf die Entropie-Produktion bestimmen und von dem Teil der Entropie-Produktion trennen zu können, der durch die Geometrie und den vorgegebenen Durchsatz verursacht wird, soll auch dasjenige Geschwindigkeitsprofil berechnet werden, das für die von den Strömungsrechnungen vorgegebenen Randbedingungen (Düsengeometrie, Massendurchsatz, Druckverlauf) die geringste Entropie erzeugt. Da gezeigt wurde, daß im Verfahrensbereich die Reibungsverluste den wesentlichen Anteil zur Entropie-Produktion liefern, wird die Untersuchung darauf beschränkt, die Reibungsverluste bzgl des Geschwindigkeitsprofils bei vorgegebenen

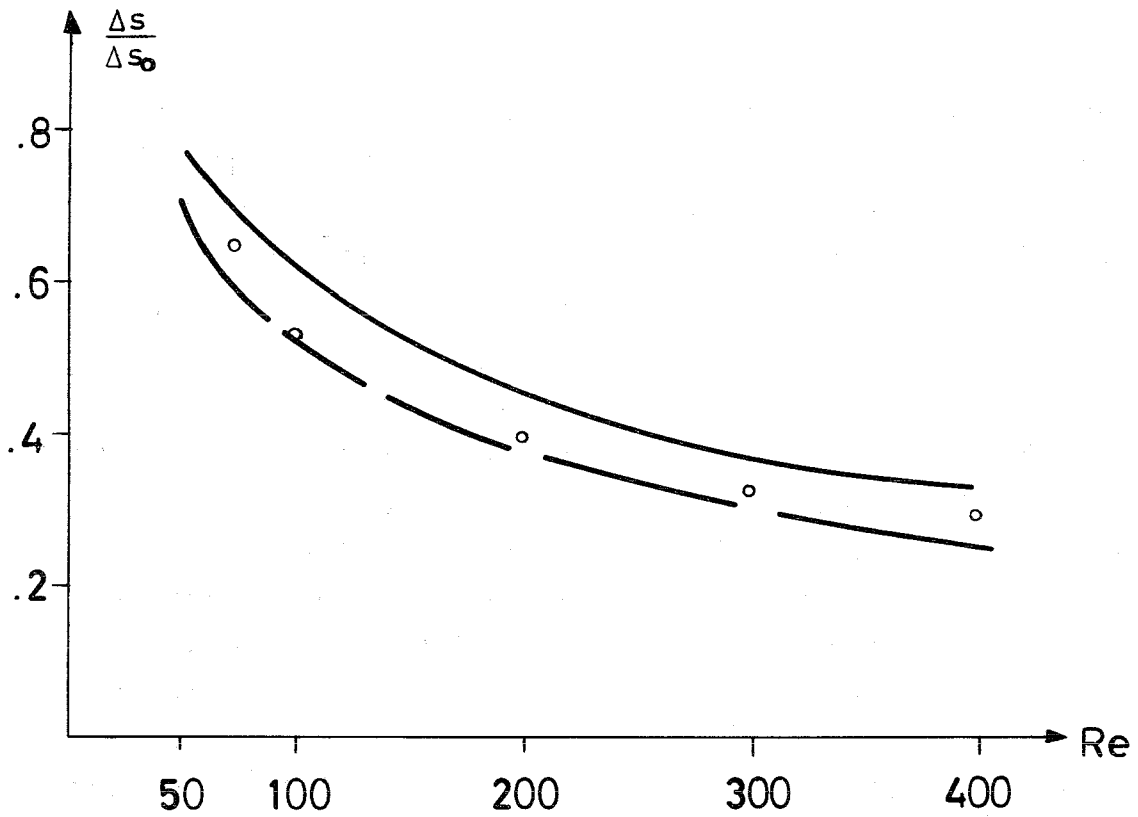


Abb 10 Die relative Entropie-Produktion über der Reynoldszahl berechnet aus den verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen ohne (— —) und mit (---) dem Beitrag der Wärmeleitung sowie die experimentellen Werte (o) aus Staudruckmessungen<sup>5)</sup>

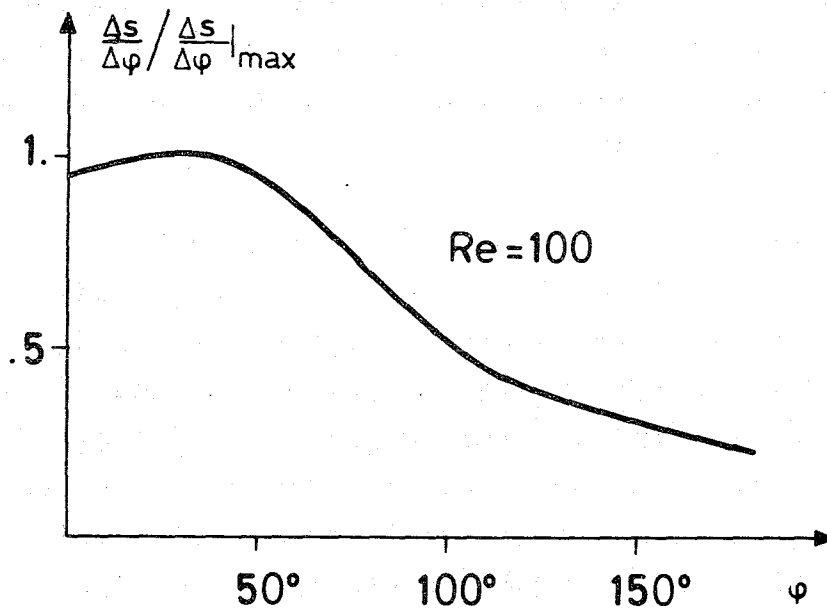


Abb 11 Normierte Entropie-Produktion pro Umlenkwinkel der für  $Re=100$  aus den verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen berechneten Heliumströmung

Randbedingungen zu minimieren.

Es muß also das Minimum der Funktion

$$\int_{r_i}^{r_a} \frac{\eta}{T} r^3 \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{v}{r} \right)^2 dr \stackrel{!}{=} \text{Min}$$

an jedem Querschnitt unter Beachtung der Durchsatzbedingung gefunden werden.

Zur Lösung<sup>+)</sup> der Extremalaufgabe wird ein Ritz-sches Näherungsverfahren verwendet, bei dem die Durchsatzbedingung über einen Lagrange-Ansatz Berücksichtigung findet. Es

---

+) Siehe Anhang A 3

zeigte sich, daß trotz der starken radialen Druckänderungen für die vorliegende schlanke Düse die Geschwindigkeiten mit minimaler Entropie-Produktion im wesentlichen die Form von Hagen-Poiseuille-Profilen besitzen.

Die aus diesen Profilen für  $Re = 100$  berechnete Entropie-Produktion pro Umlenkwinkel ist in Abb 12 aufgezeichnet. Gleichzeitig sind die entsprechenden Ergebnisse aus der Integration der verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen eingetragen, die für ein trapezförmiges Einlaufprofil erzielt wurden. Ein deutlicher Unterschied im Verlauf der beiden Kurven tritt im Bereich kleiner Umlenkwinkel auf; dort kann die lokale Entropie-Produktion des trapezförmigen Profils verglichen mit der lokalen minimalen Entropie-Produktion, die allein durch den Durchsatz, den Druck und den Querschnitt bedingt ist, mehr als doppelt so hoch sein<sup>+) .</sup>

Dieser bei Reynoldszahlen um 100 etwa die ersten  $40^\circ$  Umlenkung erfassende Einlaufvorgang dehnt sich natürlich mit zunehmender Reynoldszahl zu größeren Umlenk winkeln hin aus, so daß auch die dabei erzeugte Entropie gegenüber den minimalen Werten ansteigt. Wie Abb 7 gezeigt hat, weichen zusätzlich im ganzen Düsenbereich mit steigender Reynoldszahl die Strömungsprofile immer mehr von der günstigen parabelähnlichen Form ab, so daß die Unterschiede zwischen der Entropie-Produktion in der Düsenströmung und dem entsprechenden minimalen Wert bereits bei mittleren Reynoldszahlen beträchtlich zunimmt (Abb 13).

---

+) Dies bedeutet aber nicht, daß es hinsichtlich der gesamten mit dem Trenndüsenverfahren verbundenen Entropie-Produktion notwendigerweise vorteilhaft sein muß, mit parabelförmigen Geschwindigkeitsprofilen in die Trenndüse einzutreten, da bereits die Erzeugung solcher Profile im Gaszuführungsteil u.U. mit erheblichen Verlusten verbunden sein kann.



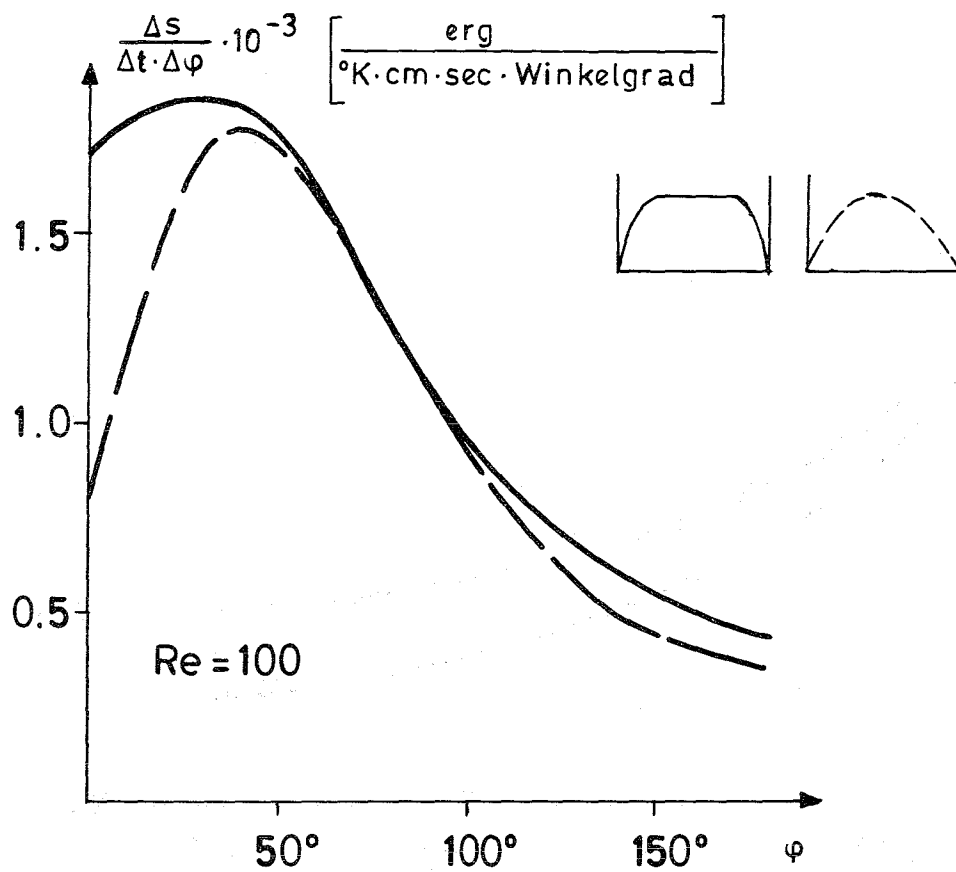


Abb 12 Verlauf der differentiellen Entropie-Produktion (Reibungsanteil) über dem Umlenkwinkel  $\varphi$  berechnet aus den verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen mit trapezförmigem Einlaufprofil der Geschwindigkeit (—) sowie für günstigste Profile an jedem Querschnitt (— —)

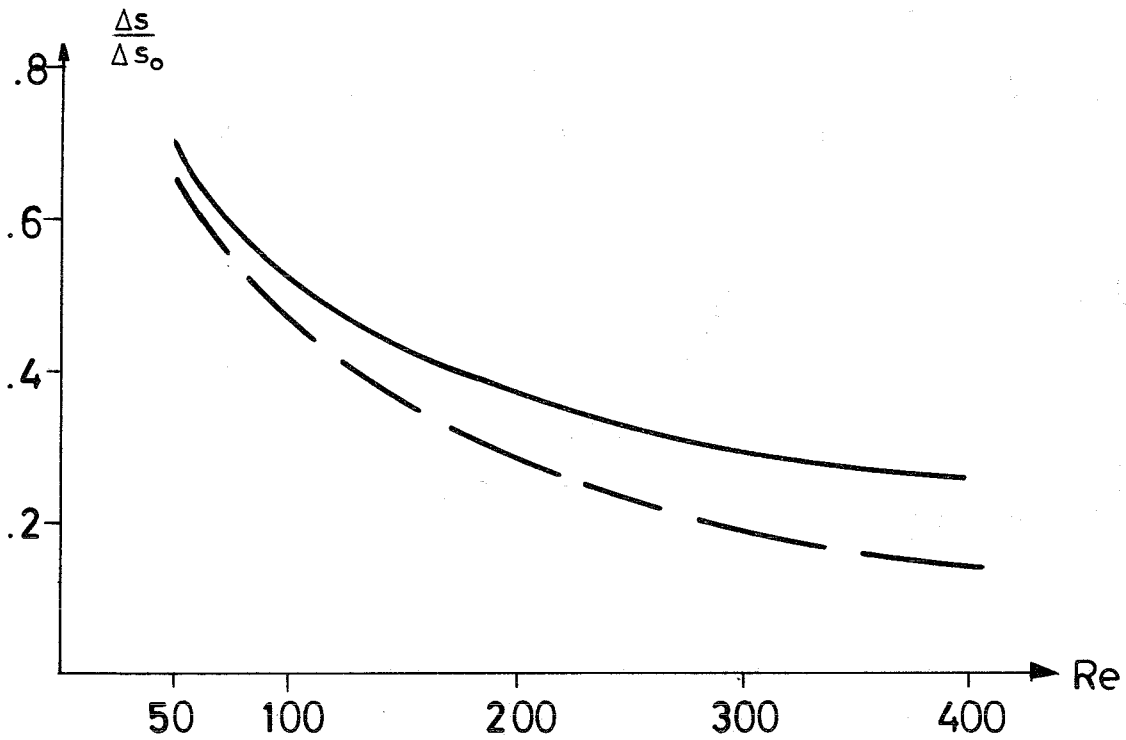


Abb 13 Die relative Entropie-Produktion der Reibungsvorgänge über der Reynoldszahl aus den verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen (—) im Vergleich zu den Verlusten bei günstigsten Geschwindigkeitsprofilen (— —).

## 5. Diskussion der Ergebnisse

Die gute Übereinstimmung der aus den verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen gewonnenen Ergebnisse mit den Experimenten zeigt, daß mit dem vorliegenden mathematischen Modell wesentliche Eigenschaften der Strömung reiner Gase in der Trenndüse erfaßt werden können. Dabei wurden kein Geschwindigkeitsschlupf und Temperatursprung berücksichtigt. Die Trenndüsenströmung kann demnach trotz ihrer relativ hohen Knudsenzahl<sup>+)</sup>  weitgehend als Kontinuumsströmung betrachtet werden. Eine Abschätzung des Geschwindigkeitsschlupfs an den Düsenwänden mit Hilfe der berechneten Geschwindigkeitsgradienten liefert Werte bis zu 5% der Maximalgeschwindigkeit. Durch diesen Geschwindigkeitsschlupf wird die Entropie-Produktion bis zu etwa 10% verringert.

Die Rechnungen geben einen Einblick in die Anpassung der Strömung an die gekrümmte Düse und in die Abhängigkeit der Strömungsgrößen und Entropie-Produktion von Umlenkwinkel und Reynoldszahl; sie bestätigen insbesondere den im Experiment<sup>5)</sup> nur indirekt abgeleiteten Sachverhalt hoher Verluste im Bereich kleiner Umlenkwinkel. Da gerade zu Beginn der Umlenkung Rückwirkungen der Entmischung auf die Strömungsvorgänge gering sein sollten, sind die für reine Gase erhaltenen Ergebnisse in diesem Bereich auch auf Gemische übertragbar.

Bei der weiteren Entwicklung sollte die hier dargestellte Methode der Strömungsberechnung vor allem dazu beitragen, verschiedene Einlaufgeometrien zu vergleichen. Ein solcher Vergleich gewinnt an praktischer Bedeutung, wenn man dabei in die numerische Analyse auch die Gebiete einbezieht, die

---

+) Verhältnis aus mittlerer freier Weglänge und Düsenweite. Mit etwa  $10^{-2}$  liegt die Knudsenzahl des Verfahrensbereichs im Übergangsbereich ( $10^{-3} \leq Kn \leq 1$ ) zwischen Kontinuumsströmung und Molekularströmung.

vor Beginn der eigentlichen Trenndüse liegen. Dadurch wären die Verluste in der Gaszuführung nicht nur integral (Bestimmung der Konstanten C in Gleichung (3)) sondern auch deren lokale Verteilung in diesem Bereich besser zu erfassen.

Um ein quantitatives Maß für die Güte einer Einlaufgeometrie zu erhalten, wird man zugleich mit der Entropie-Produktion die mit der Entmischung verbundene Wertenerzeugung<sup>+)</sup> berechnen. Rechnungen dieser Art sind allerdings auf den Bereich kleiner Umlenkwinkel beschränkt, da nur dort die Rückwirkungen der Gemischtrennung auf die Strömung vernachlässigt werden dürfen.

---

+) Siehe z.B. E.W. Becker, W. Beyrich, K. Bier, H. Burghoff, F. Zigan, Zeitschrift für Naturforschung, Bd. 12a, Heft 8 (1957)

ANHANG A 1

Nachweis des parabolischen Charakters  
der verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen

Die Festlegung der Randbedingungen und die Wahl des numerischen Integrationsverfahrens hängt bekanntlich vom Charakter der zu lösenden Differentialgleichungen ab. In Ref. 15 wurde für die Grenzschichtgleichungen gezeigt, daß sie vom parabolischen (entarteten) Typ sind. Es handelt sich nun bei den verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen zwar um den Grenzschichtgleichungen formal recht ähnliche Differentialgleichungen, sie unterscheiden sich jedoch - wie bereits erwähnt - im radialen Druckverlauf, der Nichtexistenz einer Kernströmung und zusätzlichen Termen durch das gekrümmte System. Aufgrund dieser wesentlichen Unterschiede sollen die verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen gesondert auf ihren Gleichungstyp hin untersucht werden.

Ganz analog zu Ref. 15 wird dabei von der wesentlichen Eigenschaft der Charakteristiken ausgegangen, die besagt, daß aus den Lösungen des einen Lösungsgebiets nicht die Lösungen des anderen Gebiets, das vom ersten durch eine Charakteristik getrennt ist, bestimmt werden können. Deshalb darf es nicht möglich sein, Ableitungen über eine Charakteristik hinweg zu berechnen. Dies läßt sich zur Bestimmung der Charakteristiken direkt ausnützen.

Transformiert man nämlich das Gleichungssystem (2) vom ursprünglichen Koordinatensystem mit den unabhängigen Variablen  $r$  und  $\varphi$  auf ein System mit den unabhängigen Variablen  $\xi$  und  $\tau$ , so erhält man ein Differentialgleichungssystem, bei dem die Ableitungen in  $\xi$ -Richtung mit denen in  $\tau$ -Richtung verknüpft sind. Aus o.a. Eigenschaften der Charakteristiken läßt sich nun aber ableiten, daß die

Achsenrichtungen des neuen Koordinatensystems gerade dann mit den gesuchten Charakteristiken übereinstimmen, wenn die neuen Koordinaten so gewählt werden, daß die transformierten Differentialgleichungen eine eindeutige Berechnung z.B. der Ableitungen längs der  $\xi$ -Achse aus den Ableitungen längs der  $\tau$ -Achse nicht zulassen.

Formt man das partielle Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung (2) in ein solches erster Ordnung um, so erhält man nach der Koordinatentransformation ein lineares Gleichungssystem der Art

$$A \vec{x} + B \vec{y} = \vec{c}$$

mit den partiellen Ableitungen der Strömungsgrößen als den Unbekannten

$$\vec{x} = \left( \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial p}{\partial \xi}, \dots \right)$$

$$\vec{y} = \left( \frac{\partial u}{\partial \tau}, \frac{\partial v}{\partial \tau}, \frac{\partial p}{\partial \tau}, \dots \right)$$

Dabei sind A und B die Matrizen der Koeffizienten vor den Ableitungen in  $\xi$  und der Koeffizienten vor den Ableitungen in  $\tau$  sowie  $\vec{c}$  der Vektor der ableitungsfreien Terme.

Die Forderung, daß die partiellen Ableitungen in  $\xi$  nicht eindeutig aus den partiellen Ableitungen in  $\tau$  berechenbar sein dürfen, ist also äquivalent zur Aussage, daß

$$\det A = 0$$

sein muß. Dann gibt es nämlich keine inverse Matrix  $A^{-1}$ , die Bestimmungsgleichung für  $\vec{x}$

$$\vec{x} = A^{-1}(\vec{c} - B \vec{y})$$

besitzt keine Lösung und eine Berechnung der über die Charakteristiken hinweg reichenden partiellen Ableitungen  $\vec{x}$  ist auch bei sonst bekannten Größen  $\vec{y}$ , B und  $\vec{c}$  nicht möglich.

Aus dem Gleichungssystem (2) ergibt sich nun das partielle Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\rho_r u r + \rho u_r r + \rho u + \rho_\varphi v + \rho v_\varphi = 0 \quad f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\rho \frac{v}{r} u_\varphi - \rho \frac{v^2}{r} + p_r = 0$$

$$\rho u s + \rho \frac{u}{r} v + \rho \frac{v}{r} v_\varphi + \frac{1}{r} p_\varphi - \frac{1}{Re} \left( s_r + \frac{s}{r} - \frac{v}{r^2} \right) = 0$$

$$\rho u T_r + \rho u v s + \rho \frac{v}{r} T_\varphi + \rho \frac{v^2}{r} v_\varphi - \frac{1}{Re \cdot Pr} \frac{q_r}{r} - \frac{1}{Re} \left( s - \frac{v^2}{r} \right) - \frac{1}{Re} v \left( s_r + \frac{s}{r} - \frac{v}{r^2} \right) = 0$$

$$p_r - \rho_r \frac{R}{M} T - \rho \frac{R}{M} T_r = 0$$

$$v_r - s = 0$$

$$r T_r - q = 0$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial r} = \xi_r \frac{\partial}{\partial \xi} + \tau_r \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \xi_\varphi \frac{\partial}{\partial \xi} + \tau_\varphi \frac{\partial}{\partial \tau}$$

folgt daraus als A die unten dargestellte Matrix.

Die charakteristische Gleichung

$$\xi_r^5 \cdot \left[ \begin{array}{c} v^2 \\ -\xi_\varphi^2 \\ r \end{array} + u v \xi_r \xi_\varphi - r \frac{R}{M} T \xi_r^2 \right] = 0$$

die man aus der Bedingung  $\det A = 0$  erhält, liefert eine reelle Charakteristik durch die Nullstelle  $\xi_r^5 = 0$ . Ein zusätzliches Paar (reeller) Charakteristiken ergibt sich durch das Nullsetzen des Klammerausdrucks. Es handelt sich also beim Gleichungssystem (2) um ein parabolisches entartetes Differentialgleichungssystem.



$$A = \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 \rho_{\xi} & u_{\xi} & v_{\xi} & p_{\xi} & s_{\xi} & T_{\xi} & q_{\xi} \\
 \hline
 ur\xi_r + v\xi_{\varphi} & \rho r\xi_r & \rho\xi_{\varphi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \rho \frac{v}{r}\xi_{\varphi} & 0 & \xi_r & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \rho \frac{v}{r}\xi_{\varphi} & \frac{1}{r}\xi_{\varphi} & -\frac{1}{Re}\xi_r & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \rho \frac{v^2}{r}\xi_{\varphi} & 0 & -\frac{1}{Re}v\xi_r & \rho u\xi_r + \rho \frac{v}{r}\xi_{\varphi} - \frac{1}{Re \cdot Pr} \frac{\xi_r}{r} & 0 \\
 -\xi_r \frac{R}{M} T & 0 & 0 & \xi_r & 0 & -\rho \frac{R}{M} \xi_r & 0 \\
 0 & 0 & \xi_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_r & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

ANHANG A 2

Numerische Integration der verkürzten  
Navier-Stokes-Gleichungen

---

Zur numerischen Integration der verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen soll das Trenndüsengebiet in der üblichen Weise diskretisiert und die Differentialquotienten durch endliche Differenzenquotienten ersetzt werden.

Löst man jedoch das Differentialgleichungssystem (2) nach den partiellen Ableitungen in  $\varphi$  auf, um - am Einlauf beginnend - die Bewegungsgleichungen für die Strömung in der Trenndüse Querschnitt für Querschnitt integrieren zu können, so treten wegen der nichtlinearen Form der Gleichungen Terme auf, bei denen durch die Azimutalgeschwindigkeit  $v$  dividiert werden muß. Da die Geschwindigkeit an den Düsenwänden aber den Wert Null annimmt (Randbedingungen), sind in deren Umgebung numerische Instabilitäten wegen der Division durch sehr kleine Werte zu befürchten. Die Schwierigkeiten können jedoch leicht umgangen werden, wenn anstelle der direkten Integration in  $\varphi$  das folgende Iterationsverfahren verwendet wird.

Sei das zu untersuchende Gebiet  $G(0 \leq a \leq a_0, 0 \leq b \leq b_0)$  in  $M \times N$  Gitterpunkte diskretisiert, der Wert der Funktion  $f$  beim  $k$ -ten Iterationsschritt am Gitterpunkt  $P(i \cdot \Delta a, j \cdot \Delta b)$  mit  $f_{ij}^k$  bezeichnet wobei

$$\Delta a = \frac{a_0}{M - 1} \quad \text{und} \quad \Delta b = \frac{b_0}{N - 1}$$

und außerdem definiert

$$\vec{f}^n = ( \vec{f}_1^n, \vec{f}_2^n, \dots, \vec{f}_N^n )$$

mit

$$\vec{f}_j^n = ( f_{1j}^n, f_{2j}^n, \dots, f_{Mj}^n ) .$$

Bezeichnet man die Gleichungen (2) noch mit

$$F_l(u, v, p, \rho, E) = 0 \quad l=1,2, \dots, 5$$

und entsprechend diskretisiert

$$x^n \equiv (\vec{u}^n, \vec{v}^n, \vec{p}^n, \vec{\rho}^n, \vec{E}^n)$$

$$F_{l,ij}(x) = 0$$

so erhält man bei jedem Iterationsschritt einen Restfehler von

$$F(x^n) = \epsilon^n$$

Aus dem Feld  $x^n$  und dem zugehörigen Fehlerfeld  $\epsilon^n$  läßt sich das neue Strömungsfeld  $x^{n+1}$  in natürlicher Weise dadurch bestimmen, daß die  $\epsilon^n$  als die zeitlichen Änderungen der Bilanzgrößen betrachtet werden.

$$\frac{\partial x^n}{\partial t} = \epsilon^n$$

Aus den zeitabhängigen Bewegungsgleichungen erhält man so schließlich eine explizite Iterationsvorschrift der

Art<sup>+) )</sup>

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t \cdot F(x^n) \quad t = n \cdot \Delta t$$

Die Lösung des Problems liegt dann vor, wenn der Restfehler beliebig klein wird, d.h. der "stationäre" Zustand erreicht ist.

Die Integration des Gleichungssystems

$$\frac{\partial x^n}{\partial t} = F(x^n)$$

kann nun mit bekannten Verfahren<sup>++)</sup> durchgeführt werden. Dabei sind in den Funktionen  $F_1$  die partiellen Differentialquotienten durch endliche Differenzen<sup>16)</sup> zu ersetzen. In den durchgeführten Rechnungen traten anstelle der radialen Ableitungen (mit Ausnahme der Randpunkte) zentrale Differenzenformeln unter Verwendung dreier Gitterpunkte<sup>+++)</sup>, während anstelle der azimuthalen Ableitungen entsprechende Rückwärtsdifferenzenformeln (parabolischer Charakter der Gleichungen) Anwendung fanden.

---

+) In der Energiegleichung wird für die dort auftretende Zeitableitung  $\partial p / \partial t$  eine endliche Differenz eingesetzt. Eine Elimination durch die Impuls- und Kontinuitätsgleichung ist ebenfalls möglich.

++) FORTRAN IV - Subroutine HPCG des Scientific Subroutine Package der IBM

+++) Es zeigte sich, daß bei Verwendung von Differenzenformeln der nächst höheren Ordnung keine nennenswerten Änderungen im Ergebnis auftraten jedoch erheblich höhere Rechenzeiten benötigt wurden.

### Zentrale Differenzen

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{2 \cdot \Delta z} ( H_{i+1,j} - H_{i-1,j} )$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{1}{(\Delta z)^2} ( H_{i+1,j} - 2 H_{ij} + H_{i-1,j} )$$

### Rückwärtsdifferenzen

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{2 \cdot \Delta z} ( 3 H_{ij} - 4 H_{i-1,j} + H_{i-2,j} )$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{\Delta z} ( H_{ij} - H_{i-1,j} )$$

Als Gitternetz lag den Rechnungen zugrunde:  $M = 21$ ,  $N = 46^+$   
( $\Delta\varphi = 4^\circ$ ) und eine dimensionslose Schrittweite  $\Delta t$  von  
etwa  $2 \cdot 10^{-2}$ , die jedoch zum Zwecke der Konvergenzbeschleunigung  
zwischen  $2 \cdot 10^{-2}$  und  $4 \cdot 10^{-2}$  variiert wurde.

Das Stabilitätsverhalten des Integrationsverfahrens sei  
der Anschaulichkeit halber am Beispiel eines einzelnen  
Erhaltungssatzes (Massenerhaltung) pauschal demonstriert.  
Zu Beginn der Iteration werden die Strömungsfelder so

---

+) Eine Verdoppelung der Gitterpunktanzahl brachte bei  
den gefundenen Lösungen praktisch keine Änderung. Es kann  
jedoch nicht ausgeschlossen werden, daß es u.U. möglich  
ist, durch spezielle Gitternetze mit einer Häufung von  
Gitterpunkten im Bereich der starken Geschwindigkeits-  
gradienten den Stabilitätsbereich der Rechnungen zu er-  
weitern.

gewählt, daß die Massenerhaltung exakt erfüllt ist. Der Fehler bei der Berechnung des Durchsatzes ist also gleich Null. Abb 14 zeigt, daß bedingt durch die Wechselwirkung

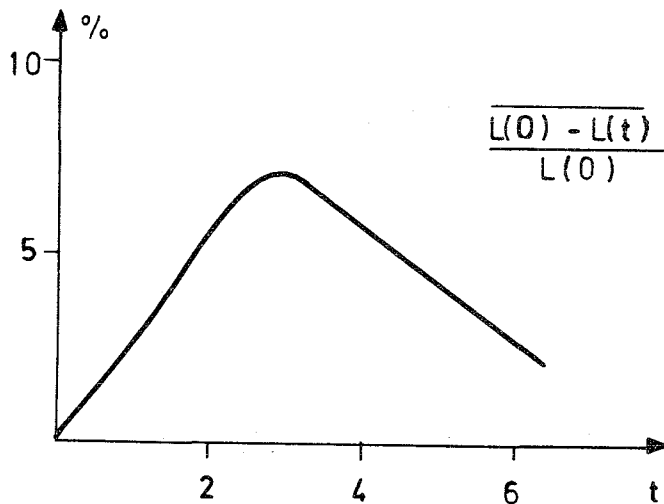


Abb 14

Mittlere Abweichung des aus der Massenbilanz berechneten Durchsatzes vom vorgegebenen Durchsatz mit fortschreitender Iteration bei der numerischen Integration der verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen

mit den anderen Bilanzgleichungen der Fehler in der Massenerhaltung zwar zunächst von Null aus ansteigt. Nach einer gewissen Zahl von Iterationen erfüllen jedoch die berechneten Strömungsgrößen die Massenerhaltung (und die übrigen Bilanzgleichungen) fortschreitend immer besser.

Natürlich liegt eine eindeutige Lösung der Gleichungen nur dann vor, wenn das Ergebnis von dem zu Beginn der Iteration angenommenen Strömungsfeld unabhängig ist. Außer den vorgegebenen Randbedingungen müssen zur Berechnung der Nullten Iteration der Wanddruckverlauf und Strömungsbedingungen in der Trenndüse vorgegeben werden. Am Beispiel des Wanddruckverlaufs zeigt Abb 15, daß die Endergebnisse von diesen willkürlichen Annahmen nicht abhängen. Es könnte allerdings möglich sein, daß bei starken Abweichungen der Nullten Näherung von der Lösung die Stabilität des Verfahrens verloren geht und ähnlich wie bei anderen Lösungsmethoden für nichtlineare Probleme (z.B. Nullstel-

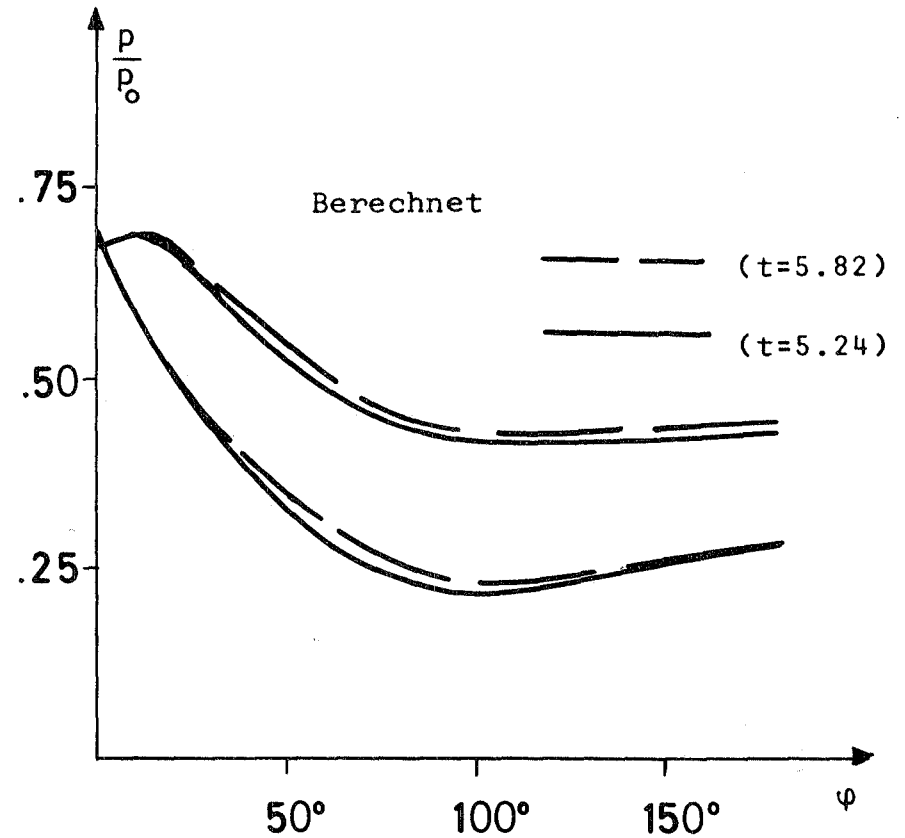
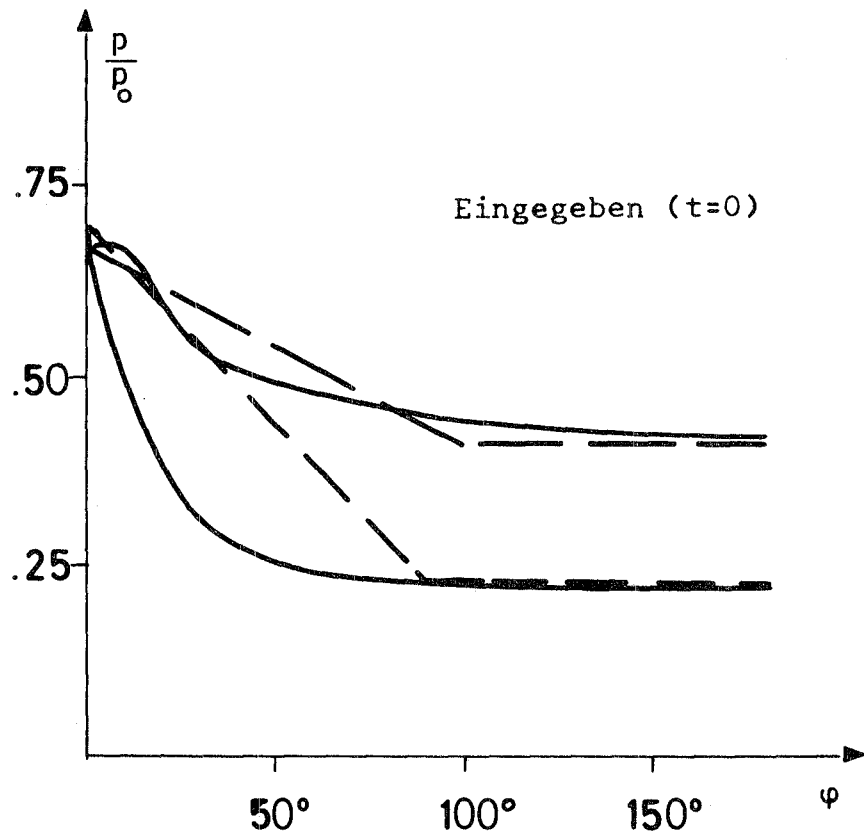


Abb 15 Berechneter Wanddruckverlauf in Abhängigkeit von der beim Null-ten Iterationsschritt (t=0) geschätzten Wanddruckeingabe (Helium, Re=100)

lenbestimmung einer nichtlinearen Gleichung nach dem  
Newton-Verfahren) keine Lösung mehr zu finden ist.



ANHANG A 3

Berechnung der Geschwindigkeitsprofile  
minimaler Entropie-Produktion

---

Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils, das bei vorgegebenen Randbedingungen die geringste Entropie-Produktion durch Reibung hervorruft, muß die Dissipationsfunktion dividiert durch die absolute Temperatur<sup>+) in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsprofil an jedem Düsenquerschnitt minimiert werden.</sup>

$$F(v) \equiv \int_{r_i}^{r_a} \frac{\eta}{T} r^3 \left( \frac{\partial v}{\partial r} \frac{1}{r} \right)^2 dr = \text{Min}$$

Aus dieser Formel kann direkt entnommen werden, daß die Querschnittsbreite  $r_a - r_i$ , die Temperatur  $T$  und die Zähigkeit  $\eta$  (eventuell als Funktion der Temperatur) bekannt sein müssen. Die Absolutwerte der Geschwindigkeit und damit auch ihre radialen Ableitungen sind mit dem Dichteverlauf über die Durchsatzbedingung verbunden.

$$L = \int_{r_i}^{r_a} \rho v dr$$

Anstelle der Dichte kann mit Hilfe der idealen Gasgleichung

$$p = \rho \frac{R T}{M}$$

---

+) Wärmestrom durch Temperatur ergibt Entropiestrom

der Druck eingeführt werden, dessen radialer Verlauf durch die Eulergleichung als Funktion der Geschwindigkeit bekannt ist.

$$p(r, \varphi) = p(r_i, \varphi) \cdot \exp\left(\int_{r_i}^r \frac{M}{R T} \frac{v^2}{r} dr\right)$$

Das heißt, als Randbedingungen zur eindeutigen Lösung der Optimierungsaufgabe sind erforderlich

- 1) Erfüllung der Durchsatzbedingung bei vorgegebenem Durchsatz
- 2) Kenntnis des Verlaufs des Innenwandradius  $r_i(\varphi)$  bei konstantem vorgegebenem Außenradius  $r_a$
- 3) Kenntnis des Innenwanddruckverlaufs  $p(r_i, \varphi)$ . Dieser wird den entsprechenden Lösungen der verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen entnommen.
- 4) Kenntnis des Temperaturverlaufs und der Zähigkeit. Dazu wurde der von den Rechnungen nahe gelegte isoenergetische Temperaturverlauf verwendet und die Zähigkeit in Analogie zu den verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen konstant gehalten.

Als zusätzliche Randbedingung tritt schließlich noch hinzu, daß die Funktion  $v$  die Haftbedingung an den Wänden erfüllen muß.

5) Haftbedingung:  $v(r_i) = v(r_a) = 0$

Infolge der komplizierten Abhängigkeit der zu optimierenden Funktion  $F$  von der Geschwindigkeit  $v$  läßt sich eine analytische Lösung des Problems nicht finden. Es kann jedoch mit Hilfe des Ritz-schen Näherungsverfahrens<sup>17)</sup> auf itera-

tivem Wege rasch eine Lösung mit beliebiger Genauigkeit erreicht werden.

Dazu wird zunächst die Durchsatzbedingung in Form einer Lagrange-Bedingung<sup>17)</sup> in die zu minimierende Funktion einbezogen. Es gilt dann das Minimum der Funktion

$$G(v) = F(v) + \Lambda \cdot \int_{r_i}^{r_a} \rho v \, dr$$

zu finden.

Dieses Minimum kann nun näherungsweise dadurch berechnet werden, daß für die gesuchte Funktion  $v$  ein Ansatz der Art

$$\tilde{v} = \sum_{i=1}^N a_i f_i$$

aufgestellt wird, wobei die  $f_i$  irgendwelche (linear unabhängige) Funktionen sind, die jedoch dieselben Randbedingungen wie die Funktion  $v$  selbst erfüllen müssen, und die  $a_i$  als konstant angenommen werden (Ritz-scher Ansatz). Durch Einsetzen des Ansatzes für  $v$  in die Funktion  $G(v)$  erhält man aus der Bedingung für das Minimum einer Funktion mehrerer Variablen das System von  $N$  Gleichungen

$$\frac{\partial G(\vec{a})}{\partial a_i} = 0 \quad \text{für alle } i=1,2,\dots,N$$

mit  $\vec{a}=(a_1, a_2, \dots, a_N)$

die zusammen mit der Durchsatzbedingung (zur Elimination des freien Parameters  $\Lambda$ ) schließlich die gesuchte Lösung<sup>+)</sup>

---

+) Als Lösung des Problems soll die Funktion  $\tilde{v}$  betrachtet werden, die innerhalb der gewünschten Fehlergrenze  $\epsilon$  unabhängig von der Erhöhung der Zahl  $N$  und der Wahl der Funktionen  $f_i$  ist.

des Problems eindeutig bestimmen.

$$G(v^{n+1}) = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\eta}{T(v^n)} r^3 \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{v^{n+1}}{r} \right)^2 dr + \Lambda \int_{r_i}^{r_a} \rho(v^n) v^{n+1} dr = \text{Min}$$

Mit

$$v^n = \sum_{i=1}^N a_i^n f_i$$

führt dies zu dem linearen Gleichungssystem in den  $N+1$  Unbekannten  $a_i^{n+1}$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) und  $\Lambda$ .

$$\frac{\partial G(\vec{a}^{n+1})}{\partial a_k^{n+1}} = 2 \sum_{i=1}^N a_i^{n+1} A_{ik}^n + \Lambda B_k^n = 0 \quad k=1,2,\dots,N$$

$$\sum_{i=1}^N a_i^{n+1} B_i^n = L$$

wobei definiert ist

$$A_{ik}^n = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\eta}{T(v^n)} r^3 \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{f_i}{r} \right) \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{f_k}{r} \right) dr$$

$$B_k^n = \int_{r_i}^{r_a} \rho(v^n) f_k dr$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich mit den üblichen Methoden der linearen Algebra leicht lösen, und das Iterationsverfahren führte im allgemeinen nach wenigen Schritten zur Lösung<sup>+)</sup>.

---

+) Als Näherungsfunktionen wurden dabei gewählt

$$f_j = \sin\left(j\pi \frac{r-r_i}{r_a-r_i}\right)$$

wobei  $N = 4$  und der Abbruchfehler des Iterationsverfahrens auf  $\epsilon \leq 1\%$  festgesetzt waren. Die Hinzunahme von weiteren Funktionen oder die Entwicklung nach Polynomen, Polynomen mit Exponentialfunktionen oder anderen numerisch vorgegebenen Funktionen  $f_j$  änderte am Ergebnis innerhalb der Fehlergrenzen nichts.

Liste der Symbole

$r$	radiale Variable
$\varphi$	azimutale Variable
$s, t, \xi, \tau$	Hilfsvariablen
$r_a$	Außenradius des Trenndüsensystems
$r_i$	Innenradius des Trenndüsensystems
$l$	Länge des Trenndüsensystems in Strömungsrichtung
$\delta$	halbe Kanalbreite
$u$	radiale Geschwindigkeitskomponente
$v$	azimutale Geschwindigkeitskomponente
$p$	Druck
$\rho$	Massendichte
$R$	universelle Gaskonstante
$T$	absolute Temperatur
$T_{\text{stau}}$	Stautemperatur
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit
$c_p$	spezifische Wärme bei konstantem Druck
$E$	spezifische Gesamtenthalpie
$Re$	Reynoldszahl
$Pr$	Prandtlzahl
$\eta$	Zähigkeitskoeffizient
$p_o$	Einlaßdruck
$p_M$	Absaugdruck
$\Delta s$	Entropie-Differenz
$\Delta s / \Delta s_o$	relative Entropie-Produktion
$M$	Molmasse
$L$	Massendurchsatz
$\epsilon$	Fehlerschranke
$\Lambda$	Lagrange-Parameter
$a_i$	Entwicklungskoeffizienten der Azimutalgeschwindigkeit
$f_i$	Entwicklungsfunktion der Azimutalgeschwindigkeit

Literaturverzeichnis

- 1) E.W. Becker, K. Bier, W. Bier, R. Schütte, D. Seidel,  
Angew. Chemie, Intern. Edition 6, 507 (1967)
- 2) E.W. Becker, W. Bier, G. Frey, R. Schütte, Atomwirtschaft  
14, 249 (1969); E.W. Becker, Atoomenergie en haar  
toepassingen 11, 272 (1969)
- 3) E.W. Becker, W. Bier, W. Ehrfeld, G. Eisenbeiß,  
Zeitschrift für Naturforschung, Band 26a, Heft 9 (1971)
- 4) K. Bier, H. Brandtstädter, U. Ehrfeld, W. Ehrfeld,  
KFK-Bericht 1440, Gesellschaft für Kernforschung,  
Karlsruhe (1971)
- 5) P. Bley, W. Ehrfeld, KFK-Bericht 1562, Gesellschaft  
für Kernforschung, Karlsruhe (1972)
- 6) J.C. Williams III, Dissertation, Ann Arbor (USA, 1962)
- 7) E.W. Becker, G. Frey, R. Schütte, D. Seidel, KFK-Bericht  
854, Gesellschaft für Kernforschung, Karlsruhe (1968)
- 8) S. Pai, Viscous Flow Theory I, van Nostrand Company  
(1956)
- 9) de Groot/Mazur, Grundlagen der Thermodynamik irreversibler  
Prozesse, BI-Hochschultaschenbücher, Bd. 162/162a (1969)
- 10) P. Bley, Untersuchung der Druckrückgewinnung mit Hilfe  
von Druckmessungen an einem vergrößerten Trennelement,  
(1969; unveröffentlicht)
- 11) W.J. Rae, AIAA-Journal, Vol 9, No 5, May 1971,  
pp 811 - 820

- 12) D.E. Rothe, AIAA-Journal, Vol 9, No 5, May 1971,  
pp 804 - 811
- 13) H. Schlichting, Grenzschicht-Theorie, G. Braun (1965)
- 14) U. Ehrfeld, Dissertation, Karlsruhe (1972)
- 15) K. Oswatitsch, Physikalische Grundlagen der Strömungs-  
lehre, Handbuch der Physik VIII/1 (Flügge, 1959)
- 16) I.S. Berezin, Computing Methods I, Pergamon Press (1965)
- 17) Bronstein/Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik,  
Harri Deutsch (1965)