

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

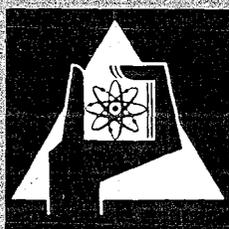
Oktober 1972

KFK 1665

Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Schneller Brüter

**Zur Berechnung der Spannungen und Verzerrungen in zweifach
zusammenhängenden prismatischen Körpern mit Rechenbeispielen
für ein längsberipptes Brennstabhüllrohr**

R. Krieg



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 1665

Institut für Reaktorentwicklung

Projekt Schneller Brüter

Zur Berechnung der Spannungen und Verzerrungen
in zweifach zusammenhängenden prismatischen Körpern
mit Rechenbeispielen für ein längsberipptes Brennstabhüllrohr⁺)

von

R. Krieg

Gesellschaft für Kernforschung mbH, Karlsruhe

⁺) Als Dissertation genehmigt von der Fakultät für Maschinenbau der
Universität Karlsruhe (T. H.).

Zusammenfassung

Bei prismatischen Körpern, deren Werkstoffverhalten elastisch ist und ebenso wie die Belastung in Richtung der Prismaachse nicht variiert, gehorcht die Spannungsverteilung einem partiellen Differentialgleichungssystem, dessen Lösungen als unendliche Reihe dargestellt werden können.

Die homogenen Teile dieser Lösungen sind aus der Literatur bekannt. Die partikulären Lösungsteile, welche im allgemeinen dann benötigt werden, wenn von außen aufgeprägte Zusatzverzerrungsfelder, z. B. Wärmedehnungsfelder zu berücksichtigen sind, werden in dieser Arbeit in geeigneter Form angegeben.

Die zu den homogenen Lösungen gehörenden Integrationskonstanten ergeben sich aus den Randbedingungen und gegebenenfalls aus den Michell-Bedingungen. Ihre numerische Bestimmung macht dann erhebliche Schwierigkeiten, wenn die Körperquerschnittsfläche stärker von einer Kreis(ring)fläche abweicht, gewisse Genauigkeitsforderungen aber eingehalten werden sollen. Die befriedigende Behandlung dieses Problems ist wesentlicher Bestandteil der vorliegenden Arbeit. Dies bestätigen auch Vergleiche mit spannungsoptischen Experimenten.

Aufbauend auf dem elastischen Spannungszustand wird ein schrittweises Rechenverfahren zur Spannungs- und Verzerrungsanalyse bei nichtelastischem Werkstoffverhalten (Kriechen) hergeleitet. Die nichtelastischen Verzerrungen sind hierbei identisch mit den Zusatzverzerrungen, welche bei den schrittweisen elastischen Lösungen auftreten.

Unter Verwendung der oben genannten Theorien und Verfahren wurden die Computercodes EVA1 (elast. Werkstoffverhalten) und EVA2 (Werkstoffkriechen) entwickelt. Sie sind besonders auf die Spannungs- und Verzerrungsanalyse längsberippter Brennstabhüllrohre zugeschnitten. Mehrere Rechenbeispiele, bei denen der Einfluß des Rohrrinnendrucks, der Wärmedehnung, des Werkstoffschwellens und des strahlungsinduzierten Kriechens untersucht wird, sind angeführt.

Summary

The stress distribution of elastic prismatic bodies with uniform loads along their axis is described by a partial differential equation. One way of solution is the representation by an infinite power series, the homogeneous parts of which is known from literature. The particular solution, however, has to be formulated in a suitable way, since a problem with given initial strains has to be solved. For instance, thermal strains represent such initial strains.

In the homogeneous parts of solution certain constants appear, which are determined by the boundary conditions and possibly by the Michell conditions. For a given accuracy the calculation of these constants reveals severe numerical difficulties in cases, where the cross section contours significantly differs from a circle. The successful treatment of this problem is an essential part of this work. The analytical results are compared with photo-elastic experiments.

On the basis of this linear elastic treatment the solution is extended to allow for nonlinear behaviour (creep). An incremental procedure is employed, so that for each small time step an elastic stress distribution as well as corresponding increments of creep strains can be calculated. The initial strains for an elastic stress solution at a certain time are represented by the creep strains accumulated up to this time.

Applying the described theory two computer programs were developed: EVA1 (linear elastic material) and EVA2 (nonlinear material). Both programs are particularly suited for the stress analysis of nuclear reactor fuel pins with integrated axial ribs. Various case studies are included showing the effects of internal pressure, thermal strains, swelling as well as irradiation induced creep.

Inhaltsverzeichnis

| | <u>Seite</u> |
|--|--------------|
| Zusammenfassung | 1 |
| 1. EINFÜHRUNG | 4 |
| 1.1 Formulierung des Problems | 4 |
| 1.2 Anwendung auf Brennstabhüllrohre | 5 |
| 1.3 Anwendung auf andere Probleme | 9 |
| 1.4 Lösungsweg - Vergleich mit anderen Verfahren | 10 |
| 2. BEHANDLUNG DES PROBLEMS BEI LINEAR-ELASTISCHEM WERKSTOFFVERHALTEN | 19 |
| 2.1 Einführung der Grundgleichungen | 19 |
| 2.2 Umformung des Grundgleichungssystems durch Elimination der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen und Einführung der Kompatibilitätsbedingungen | 25 |
| 2.3 Einführung der Airyschen Spannungsfunktion und Zurückführung des modifizierten Grundgleichungssystems auf die Bipotentialgleichung | 28 |
| 2.4 Lösung der Bipotentialgleichung | 33 |
| 2.5 Bestimmung der Integrationskonstanten durch Erfüllung der Michell-Bedingungen und der Randbedingungen | 39 |
| 2.6 Numerische Durchführung der elastischen Rechnung bei spiegelsymmetrischer und mindestens zweifach periodischer Körperquerschnittsfläche | 55 |
| 3. BEHANDLUNG DES PROBLEMS BEI PLASTISCHEM WERKSTOFFVERHALTEN | 63 |
| 3.1 Das Stoffgesetz bei kriechendem Werkstoff | 63 |
| 3.2 Schrittweise Lösung des Problems bei kriechendem Werkstoff | 69 |
| 3.3 Numerische Durchführung der Kriechrechnung bei spiegelsymmetrischer und mindestens zweifach periodischer Körperquerschnittsfläche | 72 |
| 3.4 Einige Überlegungen zur Lösung des Problems beim Auftreten zeitunabhängiger Plastizität | 79 |

| | <u>Seite</u> |
|---|--------------|
| 4. RECHENBEISPIELE | 82 |
| 4.1 Rechenbeispiel nach Takeuti | 82 |
| 4.2 Spannungsanalyse zum längsberippten Brennstabhüllrohr bei linear-elastischem Werkstoffverhalten. Vergleiche mit spannungsoptischen Untersuchungen | 84 |
| 4.3 Spannungs- und Verzerrungsanalyse zum längsberippten Brennstabhüllrohr bei nichtelastischem Werkstoffverhalten | 91 |
| 5. SCHLUSSEBEMERKUNGEN | 132 |
| Flußdiagramm für den Computercode EVA1 | 135 |
| Flußdiagramm für den Computercode EVA2 | 136 |
| Literatur | 138 |

1. EINFÜHRUNG

1.1 Formulierung des Problems

Gegeben sei ein unendlich langer, prismatischer (zylindrischer) Körper mit den folgenden Eigenschaften:

- Beliebige, zweifach berandete Körperquerschnittsfläche.
- Beliebiges, von der Zeit abhängiges, jedoch in Richtung der Prismaachse nicht variiertes Temperaturfeld.
- Beliebige, von der Zeit abhängige, jedoch in Richtung der Prismaachse nicht variiierende Randbelastung. Randspannungen, wirkend in Richtung der Prismaachse, mögen nicht vorhanden sein. Außerdem möge das Prisma nicht tordiert werden.
- Beliebiges, jedoch in Richtung der Prismaachse nicht variiertes, eingepprägtes Verzerrungsfeld. Ein spezielles eingepprägtes Verzerrungsfeld ist das Wärmedehnungsfeld, welches eine beliebige Funktion der Temperatur und der Zeit sein kann.
- Linear-elastisches Werkstoffverhalten

oder

linear-elastisches Werkstoffverhalten bei gleichzeitigem Werkstoffkriechen. Es möge ein Kriechgesetz mit temperaturabhängigen Kriechparametern gelten. Zeitverfestigung (Primärkriechen) soll zugelassen sein.

Es sei bemerkt, daß zeitunabhängige Plastizität formal fast genauso behandelt werden kann wie das Werkstoffkriechen, wenn nur ein geeignetes Kriechgesetz eingeführt wurde. Bei ideal-elastisch-plastischem Werkstoff (Werkstoff mit Fließgrenze ohne Dehnungsverfestigung) wird dies im einzelnen gezeigt.

(Die hier aufgezählten Bedingungen sind hinreichend für die Existenz des sog. ebenen Verzerrungszustandes).

Das Spannungs- und Verzerrungsfeld, welches sich in dem prismatischen Körper einstellt, soll - gegebenenfalls als Funktion der Zeit - bestimmt werden.

Zum Druck eingereicht am 5.9.72

Hierbei dürfen die Verschiebungen und die Ableitungen der Verschiebungen als "klein" gegenüber den sonstigen Abmessungen, bzw. gegenüber 1 angesehen werden.

Anmerkung: Der Begriff "beliebig" sei insoweit eingeschränkt, als alle Funktionen beliebig oft nach den Ortskoordinaten und der Zeit ableitbar sein mögen. Im Zusammenhang mit der numerischen Durchführung der Rechnungen wird sich zeigen, daß noch weitere Restriktionen erforderlich sind, z. B. müssen die Beträge gewisser Differentialquotienten (Steigung, Krümmung) beschränkt sein.

1.2 Anwendung auf Brennstabhüllrohre

Das Problem wurde so formuliert, daß insbesondere längsberippte Brennstabhüllrohre, wie sie für den Coreaufbau Schneller Reaktoren in Frage kommen, siehe z. B. [1], in guter Näherung behandelt werden können.

Solche Brennstabhüllrohre tragen meist 3 oder 6 schwach gewendelte, trapezförmige Außenrippen. Die Rippen dienen als gegenseitige Abstandshalter der zu einem Bündel (Brennelement) zusammengefaßten Brennstäbe. Gegenüber den bisher häufig verwendeten wabenförmigen Abstandshaltern ergeben sich im allgemeinen folgende Vorteile:

- Der Druckverlust des Kühlmittels, welches das Bündel in axialer Richtung durchströmt, ist geringer.
- Die Kühlmittel-Quervermischung im Bündel ist intensiver. Die Temperaturverteilung im Kühlmittel ist deswegen gleichmäßiger.

Diese Vorteile fallen insbesondere bei Schnellen Brutreaktoren ins Gewicht, da diese aus Gründen der Neutronenphysik einen relativ kleinen Kühlmittelanteil und eine hohe Leistungsdichte aufweisen [2]. Einzelheiten über wendelförmige Abstandshalter (Hüllrohr-Außenrippen) entnehme man den Arbeiten [3, 4, 5].

Brennstabhüllrohre unterliegen folgenden mechanischen Beanspruchungen:

- Volumendilatation, hervorgerufen durch Wärmedehnung und durch Werkstoffschwellen im schnellen Neutronenfluß. Während die Wärmedehnung eine lineare Funktion der Temperatur ist, hängt das Werkstoffschwellen nicht-linear von der Temperatur ab und nimmt mit der Zeit (Abbrand) monoton zu [6, 7, 8]. Da infolge der hohen Wärmemengen, die durch die Hüllrohrwand zu übertragen sind (Stableistung), in der Hüllrohrwand ein starker Temperaturgradient existiert, ist die Volumendilatation ungleichmäßig über die Hüllrohrquerschnittsfläche verteilt. Eigenspannungen bzw. Verzerrungen sind die Folge.
- Rohrrinnendruck, hervorgerufen durch Spaltgasdruck und Brennstoffschwellendruck [9]. Der erstgenannte Druckanteil nimmt mit der Zeit monoton zu. Der zweite Druckanteil bleibt bis zu einer gewissen Zeit etwa konstant.
- Stützkkräfte an denjenigen Stellen des Rippenkopfes, an denen sich die Brennstäbe gegen Nachbarstäbe abstützen. Die Stützkkräfte werden hervorgerufen durch verhinderte Verbiegung und radiale Ausdehnung der Stäbe. Beide Effekte sind Folgen der temperaturabhängigen Volumendilatation.

Als Werkstoff für die Brennstabhüllrohre steht gegenwärtig der austenitische Stahl X8CrNiMoVNB 1613 zur Diskussion. Andere in Betracht kommende Hüllwerkstoffe sind: X8CrNiNb 1613, X8CrNiMoNb 1616, X5CrNiMo 1812, Incoloy 800, Inconel 625, Hastelloy X, Inconel 718. Näheres hierzu entnehme man beispielsweise den Arbeiten von Laue [10] und Böhm [8].

Alle diese Stähle weisen bei den üblichen Hüllrohrtemperaturen, bereits ohne Berücksichtigung der Bestrahlungseinflüsse im Reaktor, nicht zu vernachlässigendes Kriechen auf. Um dieses Kriechen von anderen Kriecheffekten unterscheiden zu können, wird es im folgenden thermisches Kriechen genannt werden. Die Verzerrungsgeschwindigkeit nimmt beim thermischen Kriechen sowohl mit steigender Temperatur, als auch mit steigender Spannung stark progressiv zu. Das Volumen bleibt jedoch in etwa konstant [11].

Bei Bestrahlung im schnellen Neutronenfluß tritt außerdem das sogenannte strahlungsinduzierte Kriechen auf. Es nimmt bereits bei niedrigen Temperaturen (etwa 300 ° C) nicht zu vernachlässigende Werte an, die aber mit zuneh-

mender Temperatur kleiner werden. Nach den heute noch sehr lückenhaften und zum Teil widersprüchlichen Kenntnissen ist das strahlungsinduzierte Kriechen eine lineare Funktion der angelegten Spannung. Das Volumen ändert sich beim strahlungsinduzierten Kriechen erheblich [6, 7, 12].

Eine weitere Folge der Bestrahlung im schnellen Neutronenfluß ist die sogenannte Hochtemperaturversprödung. Die Bruchdehnung wird hierbei je nach Bestrahlungsdosis, Energiespektrum und Temperatur auf Werte der Größenordnung 1 % herabgesetzt [10, 13, 8].

Um zu gewährleisten, daß die im Betrieb auftretenden Dehnungen stets unterhalb dieser relativ niedrigen Bruchdehnung liegen, sind Spannungs-, vor allem aber möglichst genaue Verzerrungsanalysen unumgänglich. Zu beachten ist hierbei, daß durch mehrmaliges An- und Abfahren des Reaktors während der Einsatzzeit des Brennelementes (Thermisches Zyklieren) die - als Thermal Ratcheting bekannten - Effekte zu erheblichen Dehnungszunahmen führen können. Die Voraussetzungen für Thermal Ratcheting, nämlich eine aufgeprägte Spannung (Hüllrohrinnendruck) und aufgeprägte zyklierende Dehnungen mit einer Schwankungsbreite derart, daß bei jedem Zyklus nichtelastische Verformungen auftreten (Wärmedehnung beim thermischen Zyklieren), sind evtl. vorhanden. Auf diese Effekte weist Miller [14] hin.

Brennstabhüllrohre mit integralen Außenrippen bringen gegenüber kreisförmigen Brennstabhüllrohren noch zusätzliche Verschärfungen des Problems:

- Die Rippen stellen eine stückweise Versteifung der Rohrwand dar. Die aufgeprägten Wärmedehnungen und Dehnungen infolge strahlungsinduziertem Schwellen werden deswegen fast ausschließlich durch entsprechende elastische Verzerrungen und Kriechverzerrungen in den Bereichen zwischen den Rippen kompensiert. Je kleiner aber diese Bereiche sind, desto höher sind die dort auftretenden Verzerrungen bei gleichen aufgeprägten Dehnungen. Dies bedeutet, in längsberippten Hüllrohren wird die Beanspruchung infolge Wärmedehnung und Schwelldehnung höher sein, als in kreisförmigen Hüllrohren.
- In längsberippten Brennstabhüllrohren tritt außerdem am Rippenfuß eine zusätzliche Spannungserhöhung infolge Kerbwirkung auf. Diese Spannungs-

erhöhung ist um so kleiner, je größer der Ausrundungsradius des Rippenfußes, je kleiner die Steigung der Rippenflanke und je kleiner die Rippenbreite ist. Der letzte Effekt wird in [15] als Entlastung bezeichnet und hat seine Ursache in der gegenseitigen Beeinflussung benachbarter Kerben.

- Hinzu kommt, daß die Durchführung der Spannungs- und Verzerrungsanalyse bei längsberippten Hüllrohren wesentlich komplizierter ist, als bei kreisförmigen Hüllrohren.

In Abschnitt 1.1 wurde eine grobe Formulierung jener Klasse von Problemen gegeben, für die im folgenden Lösungen gesucht werden sollen. Die Gegebenheiten bei längsberippten Brennstabhüllrohren fallen - wie man durch Vergleich bestätigt - dann unter diese Problemklasse,

- wenn Stützkräfte am Rippenkopf außeracht gelassen werden, oder wenn diese Kräfte als in axialer Richtung konstant angenommen werden,
- wenn die geringe Wendelung der Rippen unberücksichtigt bleibt,
- wenn angenommen wird, daß in jener axialen Zone, die untersucht werden soll, das Temperaturfeld und damit auch die Stoffeigenschaften in axialer Richtung nicht variieren. (Dies kann man häufig mit sehr guter Näherung tun, da in der Regel die axialen Temperaturgradienten um Größenordnungen kleiner sind als die entsprechenden radialen und azimutalen Gradienten),
- wenn die sogenannten Endeinflüsse, welche dadurch verursacht werden, daß das Hüllrohr nur eine endliche Länge hat, außeracht gelassen werden. (Da die Zonen hoher Hüllrohrbeanspruchung relativ weit von den Hüllrohrenden entfernt sind, ist der hierdurch verursachte Fehler sehr klein. Vergl. z. B. die Arbeit von Valentin [16]).

1.3 Anwendung auf andere Probleme

Neben den längsberippten Brennstabhüllrohren gibt es zu der in Abschnitt 1.1 definierten Problemklasse noch eine Reihe weiterer, technisch wichtiger Anwendungen. Einige dieser Anwendungen wurden von Stearns [21] genannt.

Zunächst zwei weitere Beispiele aus der Reaktortechnik:

Brennelementkästen. Sie haben meist Sechseckstruktur und umgeben ein Brennstabündel. Im Normalbetrieb werden sie durch Axialspannungen, hervorgerufen durch unterschiedliche Wärme- und Schwelldehnung und durch Innendruck, belastet. Beim Versagen eines Hüllrohres können diese Innendrucke kurzzeitig sehr hoch werden. Wegen ihrer relativ geringen Wandstärke lassen sich Brennelementkästen jedoch auch in sehr guter Näherung als Schalen behandeln.

Moderator-Stäbe. Sie kommen bei gasgekühlten thermischen Reaktoren vor. Spannungsanalysen (bei lin.elast. Mat.-Verh.) werden in [33,34] durchgef.

Beispiele aus der übrigen Technik:

Rohrkrümmer. Bei der Berechnung von Wärmespannungen in Rohrleitungssystemen sind die Rohrkrümmer wegen ihrer relativ großen Flexibilität im Vergleich zum geraden Rohr von ausschlaggebender Bedeutung [17]. Außerdem treten häufig in den Rohrkrümmern die höchsten Beanspruchungen auf. Bisher sind jedoch fast nur Spannungs- und Verformungsanalysen für elastische Rohrkrümmer durchgeführt worden. Ausnahmen sind die Arbeiten von Spence [17, 18]. Faßt man den Rohrkrümmer als Teil eines unendlich langen prismatischen Körpers mit gekrümmter Achse (Torus) auf, so läßt sich zeigen, daß das zugehörige Gleichungssystem mit dem Gleichungssystem eines entsprechenden gerad-achsigen Prismas identisch ist, bis auf gewisse zusätzliche Terme. Diese lassen sich als Volumenkräfte im gerad-achsigen Prisma deuten und können, wenn das Verhältnis Wandstärke zu Rohrdurchmesser nicht zu groß ist, mit guter Näherung durch Randlasten ersetzt werden. Damit fällt auch der kriechende Rohrkrümmer - sogar der kriechende Rohrkrümmer mit exzentrischer Bohrung und Innendruck - unter das im Abschnitt 1.1 formulierte Problem.

Zahnrad, Freilaufnabe, Welle mit Keilnuten u. ä. Je nach der axialen Länge unterliegen diese Maschinenelemente nicht mehr dem ebenen Verzerrungszustand (Abschnitt 1.1), sondern dem ebenen Spannungszustand. Bei lin. elast. Werkstoffverhalten existieren zwischen beiden Beanspruchungszuständen jedoch einfache Transformationsformeln (s. z. B. [19]).

Es soll noch erwähnt werden, daß man bei der mathematischen Behandlung zweifach zusammenhängender Platten zu ganz ähnlichen Gleichungssystemen gelangt, wie bei der mathematischen Behandlung des in Abschnitt 1.1 definierten Problems. Eine ausführliche Untersuchung wurde hierzu von Mindlin [20] durchgeführt. Die Lösung des Plattenproblems kann demnach analog zu der in dieser Arbeit angegebenen Lösung gewonnen werden.

1.4 Lösungsweg - Vergleich mit anderen Verfahren

In vielen Fällen gewinnt man Verfahren zur Spannungs- und Verformungsanalyse bei Körpern mit plastischem Werkstoffverhalten durch wiederholte Durchführung entsprechender elastischer Analysen. Der Hauptvorteil solcher Verfahren liegt darin, daß ein weites Spektrum möglicher Stoffgesetze zugelassen werden kann. Das in Abschnitt 1.1 definierte Problem soll deshalb zuerst unter der Annahme linear-elastischen Werkstoffverhaltens gelöst werden. Dieses Vorgehen scheint um so mehr geboten, als bei kriechenden Werkstoffen das Spannungs- und Verzerrungsfeld unmittelbar nach Lastaufbringung ohnehin rein elastisch ist.

Zur elastischen Lösung:

Es ist selbstverständlich, daß bereits die numerische Auswertung elastischer Lösungen nur mit Hilfe von Computern durchgeführt werden kann, wenn eine gewisse Genauigkeit erzielt werden soll und die Randkurven, Randlasten und Temperaturfelder die verlangten Willkürlichkeiten aufweisen. Es liegt deshalb nahe, auch das Differentialgleichungssystem, welches das Problem beschreibt, rein numerisch - z. B. mit Hilfe des Differenzenverfahrens - zu lösen. Oder, man benutzt die "Methode der finiten Elemente", ein Verfahren, das ebenfalls stark auf den Computereinsatz zugeschnitten ist.

Wie in der Arbeit von Stearns [21] - auch unter Zuhilfenahme von Experimenten - gezeigt wurde, ist jedoch bei zweifach zusammenhängenden Körperquerschnittsflächen eine brauchbare Lösung mit Hilfe des Differenzenverfahrens bei mäßigem Rechenaufwand nicht zu erzielen.

Die Methode der finiten Elemente hat sich dagegen bereits in größerem Umfang als verhältnismäßig universell einsetzbares Verfahren erwiesen. Sehr umfangreiche Arbeiten wurden hierzu unter anderem von Argyris und Mitarbeitern [22] durchgeführt. Die Methode der finiten Elemente hat jedoch, ebenso wie andere, rein numerische Verfahren den Nachteil, daß die das Problem beschreibenden mathematischen Beziehungen, insbesondere die Feldgleichungen, nur näherungsweise erfüllt werden. Der hierdurch verursachte Fehler kann in der Regel nur durch Vergleiche mit Experimenten abgeschätzt werden.

In dieser Arbeit soll dagegen zur Behandlung des elastischen Problems ein Verfahren in Anwendung kommen, bei dem die exakten Lösungen der Feldgleichungen benutzt werden. Allgemeinere Arbeiten hierzu, die auch zweifach berandete Körperquerschnittsflächen miteinbeziehen, wurden unter anderem veröffentlicht von Biot [23], Gatewood [24], Holms [25], sehr ausführlich aber von Boley und Weiner [19] und Babuška et al. [54]. Die wichtigsten Schritte zur Erzielung der hier verwendeten exakten Lösung seien kurz angedeutet:

- Das Grundgleichungssystem, welches das vorgegeb. elast. Problem vollständig beschreibt, besteht aus einem System von Feldgleichungen, den Randbedingungen, sowie dem eingprägten Verzerrungsfeld (Wärmedehnungsfeld, Anfangsverzerrungsfeld). Die Grundgleichungen werden unter Zugrundelegung eines Polarkoordinatensystems angegeben.
- In dem Feldgleichungssystem, welches seinerseits aus den Gleichgewichtsbedingungen, dem Hookeschen Gesetz und den Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen besteht, werden die Verschiebungen eliminiert. Dies ist sinnvoll, da Verschiebungen auch in den restlichen Bedingungen (Randbedingungen, eingprägtes Verzerrungsfeld) nicht vorkommen. Als Folge dieser Elimination treten anstelle der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen die Kompatibilitätsbedingungen und die Michell-Bedingungen.

Die letztgenannten Bedingungen sind deswegen erforderlich, weil die Körperquerschnittsfläche den Polarkoordinatenursprung als singulären Punkt

in ihrem Inneren enthält und deswegen a priori als zweifach zusammenhängend angesehen werden muß. Die Michell-Bedingungen wurden erstmals in [26], freilich mehr auf intuitivem Wege hergeleitet. Wenig später wurden sie auch von Cesaro [27] angegeben. Da viele Lehrbücher auf die Existenz der Michell-Bedingungen nicht eingehen, ist es nicht verwunderlich, daß gelegentlich Arbeiten über mehrfach zusammenhängende Körper veröffentlicht werden, in denen diese Bedingungen unberücksichtigt bleiben. Vollkommen falsche Ergebnisse sind in der Regel die Folge (z. B. [28, 29]).

In der vorliegenden Arbeit wurde deshalb der Herleitung der Michell-Bedingungen viel Aufmerksamkeit gewidmet. Die hierbei verwendete Methode weicht von dem Vorgehen, welches beispielsweise von Boley und Weiner [19] bevorzugt wurde, ab.

- Das System der Feldgleichungen geht nach Einführung der Airyschen Spannungsfunktion in eine einzige partielle Differentialgleichung, nämlich in die Bipotentialgleichung über, deren homogene Lösung bekannt ist (siehe z. B. [30, 31, 32]). Im allgemeinen besitzt die Bipotentialgleichung eine Störfunktion, die ausschließlich von dem eingepprägten Verzerrungsfeld abhängt. Da die eingepprägten Verzerrungen nur in endlich vielen (diskreten) Punkten vorgegeben sind, die Lösung aber analytisch sein soll, muß die Störfunktion in eine geeignete, möglichst allgemeine, analytische Form gebracht werden. Die zugehörige partikuläre Lösung wird in dieser Arbeit hergeleitet.

In vielen technisch wichtigen Anwendungen verschwindet die Störfunktion (z. B. stationäres, quellfreies Temperaturfeld bei linearer Wärmedehnung, kein Anfangsverzerrungsfeld). Deshalb benötigen die meisten Autoren keine partikuläre Lösung der Bipotentialgleichung. Bei zweifach zusammenhängender Körperquerschnittsfläche gehören die Arbeiten von Takeuti [33, 34, 35], ferner die Veröffentlichung [36] zu den wenigen Ausnahmen. Allerdings sind bei Takeuti als eingepprägte Verzerrungsfelder nur solche Wärmedehnungsfelder zugelassen, die aus Temperaturfeldern mit speziellen Wärmequellenverteilungen hervorgehen.

Da die hier zu entwickelnde elastische Lösung zur Erzielung entsprechender Lösungen bei plastischem Materialverhalten verwendet werden soll, müssen bei der elastischen Lösung weitgehend beliebige, eingepprägte Verzerrungsfelder zugelassen werden.

Es bleiben noch die Randbedingungen. Ihnen wird dadurch genügt, daß den unendlich vielen Integrationskonstanten, die in der homogenen Lösung auftreten, geeignete Werte zugewiesen werden. Da es natürlich nicht möglich ist unbeschränkt vielen Integrationskonstanten individuelle Werte zuzuweisen (ab einer gewissen Ordnung werden die Integrationskonstanten gleich Null gesetzt), können die vorgegebenen Randbedingungen im allgemeinen nur näherungsweise erfüllt werden, d. h.

die erzielte Lösung gilt exakt für ein Problem mit etwas abgeänderten Randbelastungen ¹⁾.

In vielen Fällen sind die Abänderungen in den Randbedingungen derart, daß ihr verfälschender Einfluß auf die Lösung zumindest an den kritischen Stellen sehr gut übersehen werden kann.

Hierbei ist zu beachten, daß in der Technik die Vorgabe einer scharf definierten Randbelastung stets eine Idealisierung darstellt. Tatsächlich gehört zu einer Randbelastung immer ein Toleranzfeld (Unschärfefeld), einerlei ob dies explizit angegeben wurde oder nicht. Alle Randbelastungen innerhalb des Toleranzfeldes sind mögliche Randbelastungen.

Genau genommen lautet das Problem nun wie folgt: Gesucht sind die Lösungen für jene Randbelastungen, die an den kritischen Stellen maximale Beanspruchungen liefern. Diese Aufgabenstellung geht über das Problem, das in dieser Arbeit untersucht werden soll, erheblich hinaus. Die mathematische Behandlung ist im allgemeinen wesentlich komplizierter.

Abgesehen von gewissen Sonderfällen ist es in der Praxis jedoch ausreichend, wenn die Lösung für eine einzige mögliche Randbelastung bekannt ist. Dies geht implizit daraus hervor, daß das zur Randbelastung gehörende Toleranzfeld nicht angegeben wird.

- 1) Sofern die Störfunktion nicht verschwindet oder konstant ist, hat die exakte Lösung auch eine etwas abgeänderte Störfunktion zur Grundlage, denn die Überführung der vorgegebenen Störfunktion in eine analytische Form ist im allgemeinen nicht ohne gewisse Abweichungen möglich. Die Störfunktion läßt sich als Wärmequellenverteilung interpretieren. Sämtliche Bemerkungen, die im folgenden zu den Abweichungen zwischen den vorgegebenen und den sich bei der Lösung einstellenden Randspannungen gemacht werden, gelten auch für die Abweichungen zwischen der vorgegebenen und der sich bei der Lösung einstellenden Störfunktion (Wärmequellenverteilung).

Liegen nun die Abweichungen zwischen den vorgegebenen Randbelastungen und den Randbelastungen, für welche die hier erzielte Lösung exakt gilt, innerhalb des Toleranzfeldes der Randbelastungen, so hat man gerade eine solche, als ausreichend erachtete Lösung gefunden. Diese Lösung ist bezüglich des Informationsgehaltes jener Lösung vollkommen gleichwertig, die sich für die vorgegebene Randbelastung (ohne Berücksichtigung des Toleranzfeldes) einstellt. Aus diesem Grunde wird die in Rede stehende exakte Lösung, erzielt bei etwas abgeänderten Randbelastungen, in dieser Arbeit auch als "quasi-exakte Lösung" bezeichnet.

Bei rein numerischen Verfahren - z. B. bei der Methode der finiten Elemente - lassen sich solche quasi-exakten Lösungen nicht angeben, da bei diesen Verfahren mindestens einem Teil der Feldgleichungen nicht exakt genügt wird. Fehler bei der Erfüllung der Feldgleichungen lassen aber im Gegensatz zu den erwähnten Abweichungen in den Randbedingungen keine sinnvollen physikalischen Deutungen zu. Mit anderen Worten: Bei rein numerischen Verfahren weicht das Berechnungsmodell in diesem Zusammenhang von den tatsächlichen Gegebenheiten ab. Bei dem hier zur Anwendung kommenden Verfahren stimmt es dagegen in diesem Zusammenhang mit der Wirklichkeit überein, sofern es nur gelingt den Fehler bei der Erfüllung der Randbedingungen so klein zu machen, daß er innerhalb des zugehörigen Toleranzfeldes liegt.

Außerdem sei darauf hingewiesen, daß mit Hilfe des in dieser Arbeit benutzten halbanalytischen Verfahrens, numerische Rechenverfahren auf ihre Genauigkeit hin überprüft werden können. Man hat hierzu bei den numerischen Verfahren gerade die Randbelastung vorzugeben, bei der die halbanalytische Lösung exakt gilt. Es handelt sich also nicht um den Vergleich zweier Näherungslösungen, gewonnen auf verschiedenen Wegen, sondern um den Vergleich einer Näherungslösung mit exakten Ergebnissen.

Alle die Vorteile jener Lösungsmethoden, bei denen die Feldgleichungen exakt erfüllt werden, erlangen nur dann Bedeutung, wenn es tatsächlich gelingt, den Randbedingungen ausreichend genau zu genügen. Dies hat sich als das entscheidende Problem herausgestellt.

In vielen Veröffentlichungen werden die Randbedingungen, d. h. die Bedingungen, daß Normal- und Schubspannung am Rand gewisse vorgegebene Werte annehmen, durch Integration in entsprechende Bedingungen für die Airysche Spannungsfunktion überführt. Auch Holms [25] und Takeuti [33, 34, 35] gehen diesen Weg. Diese so transformierten Randbedingungen werden nun gerade in so vielen diskreten Randpunkten (exakt) erfüllt, daß die Anzahl der entstehenden linearen Gleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Integrationskonstanten ausreicht. Diese Methode, bekannt unter dem Begriff "Randkollokationsmeth.", wurde häufig beschrieben und angewendet, z. B. von Barta [37], Conway [38], Shuleshko [39] und Takeuti [33, 34, 35]. Bei komplizierten Körperquerschnittsflächen (Rippenrohrquerschnittsfläche) werden jedoch in den restlichen Randpunkten die vorgegebenen Randspannungen meistens ganz erheblich verletzt. Auch durch eine größere Anzahl von zu bestimmenden Integrationskonstanten wird der Fehler überraschenderweise nicht wesentlich kleiner. Die Ursache hierfür wird in Abschnitt 2.5 angedeutet.

Nach zahlreichen Testrechnungen im Zusammenhang mit dieser Arbeit konnte festgestellt werden, daß folgende Kombination zweier Methoden bei vorgegebenem Aufwand die beste Erfüllung der Randbedingungen gewährleistet:

- Auf die Transformation der Randbedingungen in entsprechende Bedingungen für die Airysche Spannungsfunktion (und auf die dadurch entstehende Vereinfachung) wird verzichtet.
- Sowohl die vorgegebenen Randspannungen, als auch die tatsächlichen Randspannungen werden längs des Randes nach Fourier entwickelt. Aus der Bedingung, daß die Fourierkoeffizienten bis zu einer gewissen Ordnung übereinstimmen sollen, ergibt sich ein Teil der Integrationskonstanten.
- Der restliche Teil der Integrationskonstanten ergibt sich aus der Bedingung, daß das Integral über das Quadrat aller Randspannungsfehler ein Minimum ist.

Jede der beiden Methoden für sich angewendet führt nicht zum Erfolg, im ersten Fall wird der Fehler, ähnlich wie bei dem gewöhnlichen Kollakationsverfahren, zu groß. Im zweiten Fall erhält man ein lineares Gleichungssystem mit fast verschwindender Koeffizienten-Determinante, dessen Lösung auch bei doppeltgenauer Computerrechnung für die in dieser Arbeit gestellten Anforderungen viel zu ungenau wird. Neuerdings wurde auf die Methode der Minimierung des Fehlerquadrates bei der Erfüllung der Randbedingungen in einer sehr ausführlichen Arbeit von Niedenfuhr und Leissa [40], ferner in den Arbeiten von Hoffman und Ariman [41] und K. S. Rao, M. N. Bapu Rao und Ariman [42] aufmerksam gemacht.

Wegen den Schwierigkeiten bei einer hinreichend genauen Erfüllung der Randbedingungen haben Takeuti und Noda in neueren Arbeiten [43, 44] das Problem mit Hilfe der Funktionentheorie gelöst. Auch bei diesem Verfahren, welches ausführlich von Gatewood [24] beschrieben wurde, werden die Feldgleichungen exakt erfüllt. Das Verfahren kann jedoch nur dann angewendet werden, wenn eine analytische Funktion zur Verfügung steht, mit deren Hilfe sich die innere und äußere Randkurve als konforme Abbildungen zweier konzentrischer Kreise ergeben. In den so abgebildeten Randkurven wird den Randbedingungen exakt genügt. Da diese Randkurven mit den vorgegebenen Randkurven im allgemeinen nicht ganz übereinstimmen werden, wird in Wirklichkeit die exakte Lösung für ein Problem mit etwas abgeänderten Randkurven jedoch unter den richtigen Randlasten erzielt. Dies ist gerade umgekehrt, wie in dem hier zur Anwendung kommenden Verfahren, wo die exakte Lösung für die richtigen Randkurven, bei etwas abgeänderten Randlasten gewonnen wird.

Bei komplizierten Randkurven (Rippenrohrkontur) sind Lösungen mit Hilfe der Funktionentheorie kaum verwendbar, da es große Schwierigkeiten macht, geeignete Abbildungsfunktionen anzugeben. So können auch Takeuti und Noda [43, 44] nur Lösungen für eine gewisse Klasse von Randkurven (polygonartige Randkurven) herleiten.

Zur Lösung bei kriechendem Werkstoff:

(lin. Elast. u. Kriechen). Man denke sich hierzu die gesamte Zeit, während der Kriechen auftritt, in geeignete Zeitintervalle unterteilt. Zu Beginn des ersten Zeitintervalles liegt ein linear-elastischer Spannungszustand vor. Er kann mit Hilfe des oben diskutierten Verfahrens bestimmt werden. Bis zum Ende des ersten Zeitintervalles bildet sich ein Kriechverzerrungsfeld aus, das sich näherungsweise aus dem Spannungszustand zum Beginn dieses Zeitintervalles berechnet. Die Änderung des Spannungszustandes (Relaxation) im ersten Zeitintervall ist identisch mit dem elastischen Spannungszustand, hervorgerufen durch

- dieses Kriechverzerrungsfeld
 - die eventuelle Änderung des Wärmedehnungsfeldes
 - die eventuelle Änderung der Randbedingungen (Randspannungen).
- } eingepprägtes Verzerrungsfeld

Die Änderung des Spannungszustandes kann deshalb ebenfalls mit dem oben diskutierten Verfahren bestimmt werden. Damit ist der Spannungszustand zu Beginn des zweiten Zeitintervalles bekannt. Auf ganz entsprechende Art und Weise gewinnt man den Spannungszustand zu Beginn des dritten, vierten, Zeitintervalles.

Die schrittweise Rechnung läßt sich noch durch je eine Iteration pro Rechenschritt verbessern. Zur Berechnung des Kriechverzerrungsfeldes, entstanden während des n-ten Zeitintervalles, wird dann nicht mehr das Spannungsfeld zu Beginn des n-ten Zeitintervalles zugrundegelegt, sondern das in diesem Zeitintervall zeitlich gemittelte Spannungsfeld. Von dieser Möglichkeit wird in dieser Arbeit Gebrauch gemacht.

Obwohl die hier angegebene schrittweise Berechnungsmethode sehr naheliegend ist und auch bei eindimensionalen Problemen häufig benutzt wird, sind Anwendungen auf prismatische Körper mit zweifach berandeter Körperquerschnittsfläche selten. Eine Arbeit hierzu wurde von Platus [45] veröffentlicht. Im Gegensatz zu der hier vorliegenden Arbeit löst Platus das linear-elastische Problem mit Hilfe der Funktionentheorie. Die aus dieser Methode resultierenden Einschränkungen bei der Vorgabe der Randkurven - weiter oben wurde darauf eingegangen - nimmt er in Kauf. Bei der Spannungsanalyse für einen Kreiszyylinder

mit nicht rotationssymmetrischer Belastung setzt Platus sein Verfahren mit Erfolg ein. Im Falle eines quadratischen Prismas versagt dagegen das Rechenverfahren. Als Ursache vermutet er Rechenungenauigkeiten. Hierzu sei bemerkt, daß Platus in seinen Computerprogrammen nur einfach genaue Gleitkommazahlen (maximal 9 wesentliche Dezimalstellen) verwenden konnte.

Die Schwierigkeiten bei der Berücksichtigung plastischen Werkstoffverhaltens und der Mangel an entsprechenden Veröffentlichungen haben demnach ihre Ursachen im wesentlichen in den Ungenauigkeiten entsprechender elastischer Rechnungen. Diese Tatsache rechtfertigt den großen Aufwand, der in dieser Arbeit zur Entwicklung eines möglichst genau arbeitenden Lösungsverfahrens bei linear-elastischem Werkstoffverhalten getrieben wurde.

Die sicheren Aussagen über die Genauigkeit der Ergebnisse, welche bei der elastischen Lösung des Problems möglich waren, sind im Prinzip auch auf die plastische Lösung ausdehnbar, wenn man eine gewisse Toleranzbreite beim Kriechgesetz zuläßt. Die in der Regel stark streuenden Meßergebnisse bei Kriechversuchen scheinen die Einführung einer solchen - nicht zu kleinen - Toleranzbreite zu rechtfertigen. Bei der numerischen Durchführung der Rechnungen wird man jedoch häufig zur Sicherung der Konvergenz gewisse Glättungen der Spannungsfelder vornehmen müssen. Genauigkeitsaussagen von der Qualität wie bei der elastischen Lösung sind dann nicht mehr möglich ist.

Speziell zur Spannungs- und Verformungsanalyse von Brennstabhüllrohren sind fast nur solche Veröffentlichungen zu finden, die sich auf kreisförmige Rohre beziehen. Beispielsweise behandelt Guyette [46] kreisförmige Hüllrohre bei Plastizität (Dehnungsverfestigung) und Kriechen. Die meisten anderen Veröffentlichungen hierzu berücksichtigen noch weitere, im Zusammenhang mit der Auslegung von Brennstabhüllrohren auftretende Aspekte. Beispiele hierzu sind die Arbeiten von Schmidt [47] und Matthews [48]. Hoffmann und Rust [5] befassen sich zwar mit der Spannungsverteilung in längsberippten Brennstabhüllrohren. Sie geben aber nur eine sehr grobe Abschätzung und setzen linear-elastischen Werkstoff voraus. Auch die vom Verfasser bisher zur Spannungs- und Verformungsanalyse kreisförmiger und längsberippter Brennstabhüllrohre erfolgten Veröffentlichungen [36, 49] gehen von linear-elastischem Werkstoff aus.

2. BEHANDLUNG DES PROBLEMS BEI LINEAR-ELASTISCHEM WERKSTOFFVERHALTEN

2.1 Einführung der Grundgleichungen

Die mathematische Behandlung des Problems wird in Zylinderkoordinaten r, φ, z durchgeführt. Die z -Achse fällt hierbei mit der Prismaachse zusammen und wird von beiden Randkurven eingeschlossen. Alternativ wird gelegentlich auch ein Kartesisches Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 benutzt.

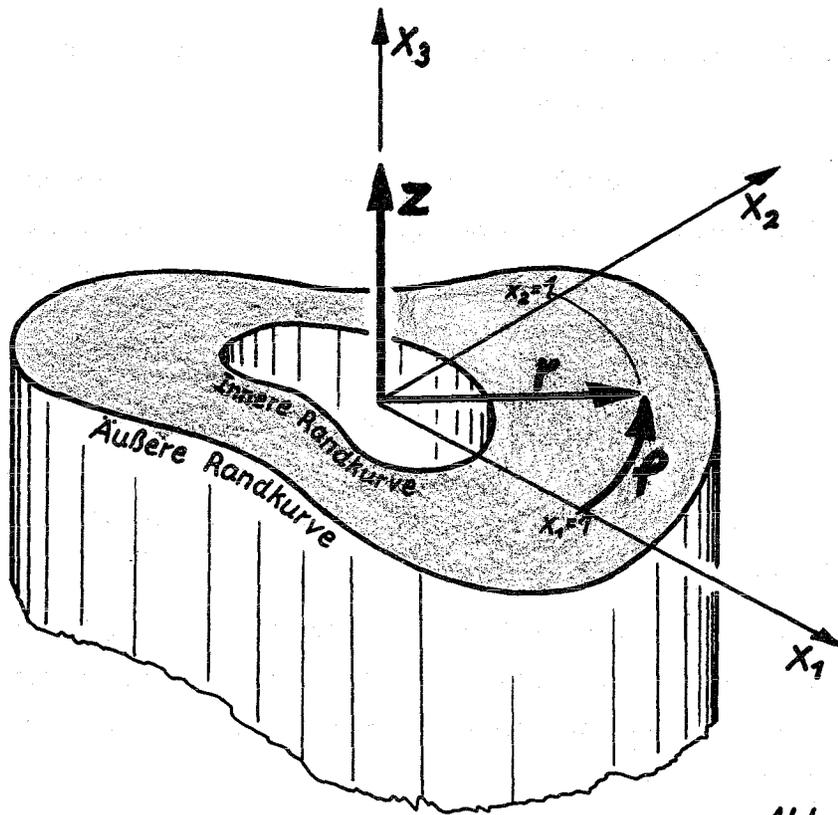


Abb. 1

Die Grundgleichungen stellen ein System von Beziehungen dar (Feldgleichungen, Randbedingungen, eingprägtes Verzerrungsfeld z. B. Wärmedehnungsfeld), welches zur eindeutigen Bestimmung

des sich einstellenden Spannungstensors

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\varphi z} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

des sich einstellenden Verzerrungstensors

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\varphi} & \epsilon_{rz} \\ \epsilon_{r\varphi} & \epsilon_{\varphi\varphi} & \epsilon_{\varphi z} \\ \epsilon_{rz} & \epsilon_{\varphi z} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

und des sich einstellenden Verschiebungsvektors $(u_r \ u_\varphi \ u_z)$

in jedem Körperpunkt ausreicht. Der Beweis für die Eindeutigkeit wird von Boley und Weiner [19] unter der Voraussetzung linear-elastischen Werkstoffverhaltens und kleiner Verzerrungen geführt. Gerade diese Voraussetzungen treffen auch hier zu.

Die Symbole, welche zur Bezeichnung der Tensorelemente eingeführt wurden, entsprechen den üblichen Konventionen.

Man kann zeigen, daß das Grundgleichungssystem in zwei Teilsysteme zerfällt, die bei dem vorliegenden Problem unabhängig voneinander lösbar sind. Das eine Teilsystem beschreibt das sogenannte Torsionsproblem. Aufgrund der Spezifikation in Abschnitt 1.1 hat dieses Teilsystem die Lösungen

$$\sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = \epsilon_{rz} = \epsilon_{\varphi z} = 0$$

Im folgenden wird das verbleibende Teilsystem als Grundgleichungssystem bezeichnet. Es lautet:

Der Spannungstensor (Spannungsfeld), der Verzerrungstensor (Verzerrungsfeld) und der Verschiebungsvektor (Verschiebungsfeld) mögen in allen Körperpunkten existieren, eindeutige Werte annehmen und gemäß Abschnitt 1.1 (Anmerkung) beliebig oft ableitbar sein,¹⁾

und es mögen folgende Beziehungen gelten:

1) Nach [19] ist es bereits ausreichend, wenn eine von der Art des jeweiligen Feldes abhängige endliche Zahl von Ableitungen existiert.

Gleichgewichtsbedingungen (Volumenkräfte und Ableitungen $\frac{\partial}{\partial z}$ verschwinden)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \sigma_{rr}) - \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} &= \sigma \\ \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \sigma_{r\varphi}) + \sigma_{r\varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} &= \sigma \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Hinzu kommt die Bedingung, daß der Spannungstensor symmetrisch sein muß. Dies wurde bereits bei der vorangegangenen Definition des Spannungstensors berücksichtigt.

Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen (die Verschiebungen sind klein gegen die sonstigen Abmessungen und die Verschiebungsableitungen sind klein gegen 1)

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \epsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Bei der Herleitung von (2.1.2) zeigt sich, daß auch der Verzerrungstensor symmetrisch ist. Dies wurde ebenfalls bei der vorangegangenen Definition des Verzerrungstensors berücksichtigt.

Stoffgesetz (der Werkstoff verhält sich linear-elastisch und ist isotrop)

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})] + \epsilon_{rr}^z \\ \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\varphi\varphi} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] + \epsilon_{\varphi\varphi}^z \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})] + \epsilon_{zz}^z \\ \epsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{E} (1+\nu) \sigma_{r\varphi} + \epsilon_{r\varphi}^z \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

E ist der Elastizitätsmodul
 ν ist die Querkontraktionszahl

} Beide Größen sind für den gesamten Körper konstant

$\epsilon_{rr}^z, \epsilon_{\varphi\varphi}^z, \epsilon_{zz}^z, \epsilon_{r\varphi}^z$ sind Elemente des eingepprägten Verzerrungstensors. Dieser wird im folgenden auch Tensor der Zusatzverzerrungen genannt.

Aus der Symmetrie des Spannungs- und Verzerrungstensors folgt wegen (2.1.3) die Symmetrie des Tensors der Zusatzverzerrungen.

Stellt das eingeprägte Verzerrungsfeld nur eine Volumendilatation dar, so gilt:

$$\varepsilon_{rr}^z = \varepsilon_{\varphi\varphi}^z = \varepsilon_{zz}^z = \beta$$

$$\varepsilon_{r\varphi}^z = 0$$

Wird die Volumendilatation allein durch (lineare) Wärmedehnung verursacht, so ergibt sich der Wert β wie folgt:

$$\beta = \alpha \cdot T$$

α ist der lineare Wärmedehnungskoeffizient

T ist das Feld jener Temperaturänderungen, das auf die Ausbildung des Spannungs- und Verzerrungszustandes Einfluß haben soll.

Gemäß Boley und Weiner [19] beschreibt das hier angegebene Grundgleichungssystem mit $\beta = \alpha \cdot T$ das sogenannte "entkoppelte, quasistatische, ebene Wärmespannungsproblem".

Die Gleichgewichtsbedingungen, die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen und das Stoffgesetz gelten in jedem Körperpunkt. Die Gleichungen heißen deswegen Feldgleichungen. Sie werden - sieht man von den Zusatzverzerrungen ab - in der einschlägigen Literatur angegeben. Die Formulierung in Zylinderkoordinaten findet man z. B. in [50]. Wärmedehnungsglieder sind in [19] und [30] berücksichtigt.

Randbedingungen. Beim vorliegenden Problem sind die Komponenten des Randspannungsvektors an der inneren Randkurve σ_r und τ_r und die Komponenten des Randspannungsvektors an der äußeren Randkurve σ_A und τ_A als Funktionen der Winkelkoordinate φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) vorgegeben. Um die Komponenten der Randspannungsvektoren den Randpunkten eindeutig zuordnen zu können, müssen die Steigungen der Randkurven $\partial r/\partial \varphi$ und $\partial r_A/\partial \varphi$ überall endlich sein. Dies ist eine zusätzliche Einschränkung. Ferner sollen die in z -Richtung wirkenden Komponenten des Randspannungsvektors definitionsgemäß verschwinden.

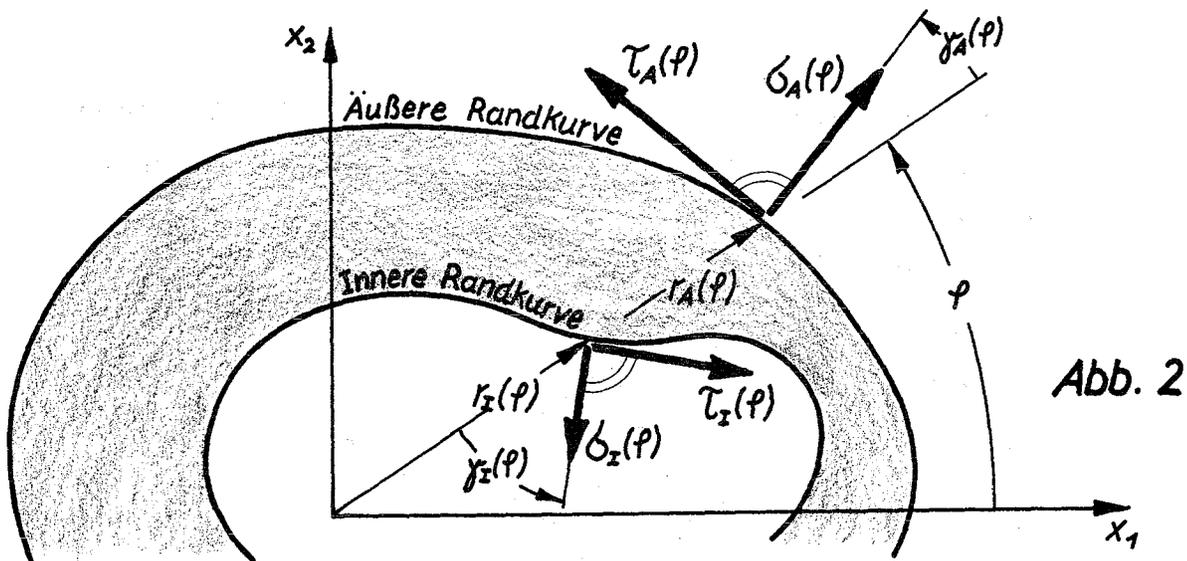


Abb. 2

Ist $r_I(p)$ der Radius und $\gamma_I(p)$ die Neigung an der inneren Randkurve, ferner $r_A(p)$ der Radius und $\gamma_A(p)$ die Neigung an der äußeren Randkurve, so existieren folgende Beziehungen zwischen den Komponenten der Randspannungsvektoren und den Elementen des Spannungstensors.

$$\sigma_I(p) = \sigma_{rr}(r_I(p), p) \cdot \cos^2(\gamma_I(p)) + \sigma_{\varphi\varphi}(r_I(p), p) \cdot \sin^2(\gamma_I(p)) + \sigma_{r\varphi}(r_I(p), p) \cdot \sin(2\gamma_I(p))$$

$$\tau_I(p) = \frac{1}{2} \cdot [-\sigma_{rr}(r_I(p), p) + \sigma_{\varphi\varphi}(r_I(p), p)] \cdot \sin(2\gamma_I(p)) + \sigma_{r\varphi}(r_I(p), p) \cdot \cos(2\gamma_I(p))$$

(2.1.4)

$$\sigma_A(p) = \sigma_{rr}(r_A(p), p) \cdot \cos^2(\gamma_A(p)) + \sigma_{\varphi\varphi}(r_A(p), p) \cdot \sin^2(\gamma_A(p)) + \sigma_{r\varphi}(r_A(p), p) \cdot \sin(2\gamma_A(p))$$

$$\tau_A(p) = \frac{1}{2} \cdot [-\sigma_{rr}(r_A(p), p) + \sigma_{\varphi\varphi}(r_A(p), p)] \cdot \sin(2\gamma_A(p)) + \sigma_{r\varphi}(r_A(p), p) \cdot \cos(2\gamma_A(p))$$

Man beachte, daß die Randspannungsvektoren bezüglich eines rechtwinkligen Koordinatensystems x, y angegeben sind, das je nach Randneigung $\gamma_I(p)$ bzw. $\gamma_A(p)$ wie aus Abb. 2 ersichtlich gedreht ist.

Es wird sich bei der späteren Rechnung zeigen, daß neben den Beziehungen (2.1.4) noch drei Bedingungen erforderlich sind, die integrale Aussagen über die Axialspannung σ_{zz} liefern. Sie lauten:

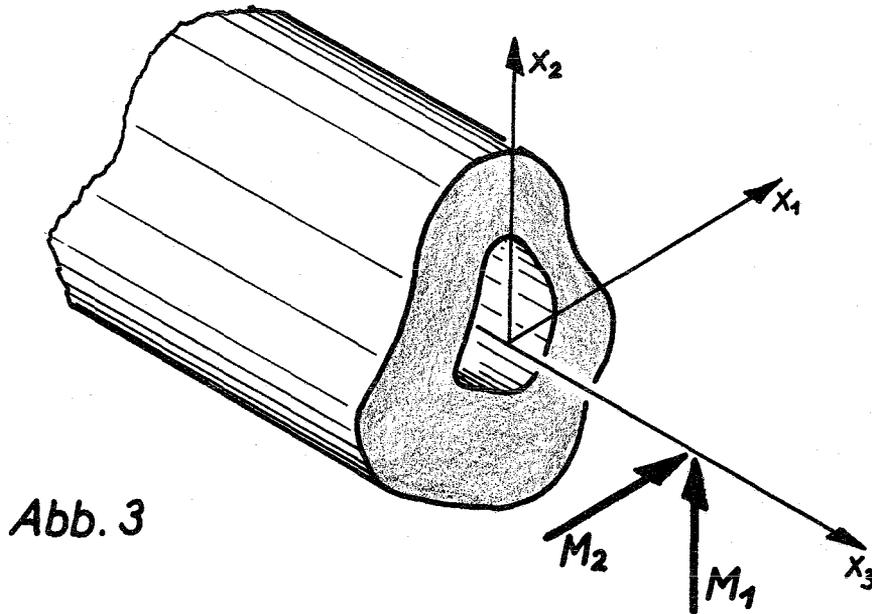


Abb. 3

$$\begin{aligned} K &= \iint_{(F)} \sigma_{zz} \cdot dx_1 \cdot dx_2 \\ M_1 &= \iint_{(F)} \sigma_{zz} \cdot x_1 \cdot dx_1 \cdot dx_2 \\ M_2 &= \iint_{(F)} \sigma_{zz} \cdot x_2 \cdot dx_1 \cdot dx_2 \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

F ist die Körperquerschnittsfläche

K ist die im Prisma wirkende Axialkraft

M_1 und M_2 sind die Komponenten des im Prisma wirkenden Biegemomentes, wenn das Prisma als Balken angesehen wird.

K, M_1 und M_2 sind vorzugeben.

Tensor des Zusatzverzerrungsfeldes (eingepprägtes Verzerrungsfeld)

Neben den Feldgleichungen und den Randbedingungen ist noch der Tensor des Zusatzverzerrungsfeldes vorzugeben. Ist das Zusatzverzerrungsfeld eine Funktion der Temperatur (Wärmedehnung), so genügt es, diese Funktion (Wärmedehnungskoeffizient α) und das Temperaturfeld anzugeben.

2.2 Umformung des Grundgleichungssystems durch Elimination der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen und Einführung der Kompatibilitätsbedingungen

Um Lösungen für das im vorigen Abschnitt angegebene Grundgleichungssystem zu erzielen, ist es erforderlich, die Zahl der in dem Gleichungssystem vorkommenden Unbekannten zu reduzieren. Zur Elimination bieten sich die Verschiebungen an, da sie die einzigen Unbekannten sind, die nur in einer Gruppe von Gleichungen, nämlich den Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen (2.1.2), auftreten.

In einfacheren Abhandlungen werden zu diesem Zweck die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen in geeigneter Weise zweimal differenziert. Man erhält dann Gleichungen, in denen sich die Ableitungen der Verschiebungen unter nochmaliger Benutzung der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen gerade substituieren lassen. Mit Hilfe dieser so erzielten Gleichungen - in der Literatur heißen sie häufig Kompatibilitätsbedingungen - werden die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen ersetzt. In dem Grundgleichungssystem treten dann die Verschiebungen nicht mehr auf.

Man bestätigt sofort, daß aus dem so modifizierten Grundgleichungssystem nicht wieder das Grundgleichungssystem nach Abschnitt 2.1 eindeutig hergeleitet werden kann. Daraus folgt, daß die gesuchten Spannungs-Verzerrungs- und Verschiebungsfelder möglicherweise nicht eindeutig durch das modifizierte Grundgleichungssystem bestimmt sind.

Bei den Anwendungen zeigt sich, daß mehrdeutige Lösungen bei mehrfach zusammenhängenden Körpern auftreten. Um diesem Mangel abzuweichen, haben zuerst Michell [26], später auch Cesàro [27], Biot [23] und andere, geeignete zusätzliche Bedingungen eingeführt. Sie werden meistens als Michell-Bedingungen oder Cesàro-Integrale bezeichnet und wurden häufig mehr oder weniger unter Zuhilfenahme der Anschauung gewonnen. Erst die Michell-Bedingungen zusammen mit den oben erwähnten Kompatibilitätsbedingungen - sie sollen hier gewöhnliche Kompatibilitätsbedingungen heißen - stellen die vollständigen Kompatibilitätsbedingungen dar, welche die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen ohne Verlust an Eindeutigkeit ersetzen.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die vollständigen Kompatibilitätsbedingungen herzuleiten. Hier soll auf die von Boley und Weiner [19] gegebene Herleitung zurückgegriffen werden, deren einzelne Schritte sich wie folgt charakterisieren lassen:

- Es werden drei Linienintegrale angegeben mit Integranden, welche die Komponenten des Verzerrungstensors enthalten. Die Integration erfolgt auf beliebigen, endlichen Integrationswegen, die im Inneren oder auf dem Rand des zu untersuchenden Körpers verlaufen.
- Es werden Bedingungen angegeben, die notwendig und hinreichend dafür sind, daß der Wert dieser Linienintegrale nur von dem Endpunkt des Integrationsweges eindeutig abhängt, dagegen unabhängig ist von dem sonstigen Verlauf des Integrationsweges. Der Anfangspunkt des Integrationsweges wird hierbei als fest angesehen. Bei einfach zusammenhängenden Körpern bestehen diese Bedingungen aus sechs Feldgleichungen. Bei mehrfach zusammenhängenden Körpern müssen zusätzlich noch gewisse Umlaufintegrale verschwinden (Michell-Bedingungen).
- Es wird durch Substitution der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen (2.1.2) gezeigt, daß die drei Linienintegrale identisch sind mit den drei Komponenten des Verschiebungsvektors, ausgenommen eine Starrkörperbewegung. Der Körperpunkt, für den der Verschiebungsvektor berechnet wird, ist der Endpunkt des Integrationsweges.

Die Komponenten des Verschiebungsvektors sind von minderelem Interesse, da in dieser Arbeit nur die Spannungen und Verzerrungen interessieren.

Dagegen sind die Bedingungen, die notwendig und hinreichend dafür sind, daß die oben angegebenen Integrale nur von dem Integrationsendpunkt abhängen, von Bedeutung. Sie stellen die vollständigen Kompatibilitätsbedingungen dar.

Bei ebenen Problemen mit einfach zusammenhängender Körperquerschnittsfläche bestehen die Kompatibilitätsbedingungen aus den folgenden Beziehungen:

$$2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (r \cdot \varepsilon_{r\varphi}) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = k_0 + k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + k_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \quad (2.2.1)$$

(k_0, k_1, k_2 und k_{12} sind Konstanten).

Bei ebenen Problemen mit mehrfach zusammenhängender Körperquerschnittsfläche sind zur Sicherung der Eindeutigkeit der Verschiebungsfelder neben den Bedingungen (2.2.1) noch die Michell-Bedingungen erforderlich. Bei zweifach zusammenhängender Körperquerschnittsfläche lauten die Michell-Bedingungen:

$$v = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0$$

mit

$$v = \int_0^{2\pi} \left[\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi} - r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right] \cdot d\varphi \quad (2.2.2)$$

$$v_1 = r \int_0^{2\pi} \left[-\varepsilon_{\varphi\varphi} \cdot \sin \varphi + 2 \cdot \varepsilon_{r\varphi} \cdot \cos \varphi + \int_0^\varphi \left(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi} - r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) d\varphi^* \cdot \cos \varphi \right] d\varphi$$

$$v_2 = r \int_0^{2\pi} \left[\varepsilon_{\varphi\varphi} \cdot \cos \varphi + 2 \cdot \varepsilon_{r\varphi} \cdot \sin \varphi + \int_0^\varphi \left(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi} - r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) d\varphi^* \cdot \sin \varphi \right] d\varphi$$

Der Integrationsweg ist ein Kreis mit dem Radius r .

r ist so zu wählen, daß der Integrationsweg innerhalb oder auf dem Rand des Definitionsbereiches des Integranden, d. h. innerhalb oder auf dem Rand der Körperquerschnittsfläche verläuft.

φ^* ist eine Integrationsvariable in Umfangsrichtung.

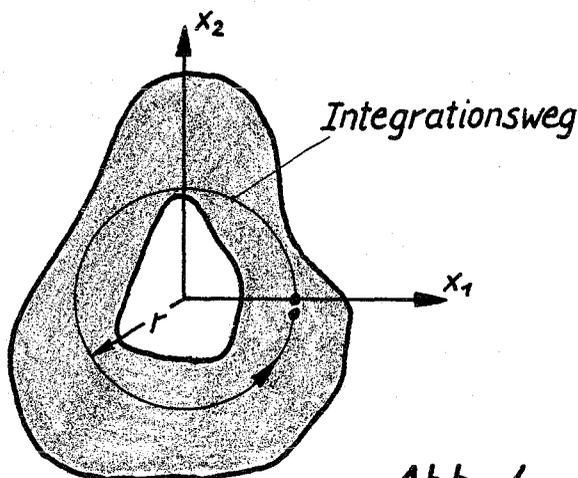


Abb. 4

1) Damit ist eine gewisse zusätzliche Einschränkung bezüglich der Konturen der Randkurve gegeben, denn es gibt Randkurven, bei denen dies nicht möglich ist.

Während die gewöhnlichen Kompatibilitätsbedingungen ebenso wie die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen Feldgleichungen darstellen, lassen sich die Michell-Bedingungen als drei Gleichungen interpretieren, deren Erfüllung nur in einem Körperpunkt verlangt wird. Sie gehören damit zur Klasse der Randbedingungen.

Ersetzt man in dem Grundgleichungssystem nach Abschnitt 2.1 die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen (2.1.2) durch die gewöhnlichen Kompatibilitätsbedingungen (2.2.1) und die Michell-Bedingungen (2.2.2), so erhält man ein modifiziertes Grundgleichungssystem, das als Lösung dieselben Spannungs- und Verzerrungsfelder liefert, wie das Grundgleichungssystem nach Abschnitt 2.1.

Zum Beweis hat man nur folgendes zu zeigen: Die erhaltenen Spannungs- und Verzerrungsfelder genügen den Grundgleichungen nach Abschnitt 2.1, und es existiert ein Verschiebungsfeld, das ebenfalls diesen Grundgleichungen genügt. Dies ist aber der Fall.

2.3 Einführung der Airyschen Spannungsfunktion und Zurückführung des modifizierten Grundgleichungssystems auf die Bipotentialgleichung

In dem modifizierten Grundgleichungssystem treten als Unbekannte nur noch die Spannungs- und Verzerrungsfelder auf. Eine weitere Vereinfachung des Gleichungssystems läßt sich ohne Schwierigkeiten durch Elimination der Verzerrungen erreichen. Man hat hierzu nur in den Kompatibilitätsbedingungen (2.2.1) und (2.2.2) die Verzerrungen mit Hilfe des Stoffgesetzes (2.1.3) zu substituieren.

Weiter läßt sich auch das Spannungsfeld σ_{zz} eliminieren. Hierzu wird die Gleichung, welche aus der zweiten Beziehung von (2.2.1) genommen wurde, nach σ_{zz} aufgelöst

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) + E \cdot (k_0 + k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_{12} x_1 x_2) - E \cdot \epsilon_{zz}^z \quad (2.3.1)$$

und in jene Differentialgleichung eingesetzt, die aus der ersten Beziehung von (2.2.1) stammt. Einzige Unbekannte sind jetzt noch die Spannungsfelder $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi}$.

Verlangt man, daß eine in allen Körperpunkten eindeutige und beliebig oft eindeutig ableitbare Funktion $\phi(r, \rho)$ existieren mögen mit

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} \\ \sigma_{\rho\rho} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\rho} &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \rho} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \rho},\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

so werden die Gleichgewichtsbedingungen (2.1.1) identisch erfüllt. $\phi(r, \rho)$ ist die Airysche Spannungsfunktion.

Bei einfach zusammenhängender Körperquerschnittsfläche kann man zeigen, daß eine solche Spannungsfunktion stets existiert. Bei mehrfach zusammenhängender Körperquerschnittsfläche gibt es dagegen Spannungszustände, die sich nur aus einer - in bestimmter Weise - mehrdeutigen Spannungsfunktion berechnen lassen. Mathematische Untersuchungen zu diesem Problemkreis werden von Babuška, Rektorys und Vyčichlo [54] durchgeführt.

Die Existenz einer eindeutigen Spannungsfunktion auch bei mehrfach zusammenhängender Körperquerschnittsfläche ist dann gesichert, wenn

die Randbelastung an jeder geschlossenen
Randkurve für sich im Gleichgewicht ist.

Dies soll bei der weiteren Behandlung des Problems vorausgesetzt werden.

Die einzige noch verbleibende Feldgleichung, nämlich die aus den (gewöhnlichen) Kompatibilitätsbedingungen hervorgegangene Differentialgleichung, nimmt mit (2.3.2) folgende Form an:

$$\Delta^2 \phi = Q(r, \rho)$$

mit

$$\begin{aligned}Q(r, \rho) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \epsilon_{r\rho}^z}{\partial r \partial \rho} - \frac{\partial^2 (\epsilon_{\rho\rho}^z + \nu \epsilon_{zz}^z)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 (\epsilon_{rr}^z + \nu \epsilon_{zz}^z)}{\partial \rho^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \left(\frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \epsilon_{r\rho}^z}{\partial \rho} - 2 \cdot \frac{\partial (\epsilon_{\rho\rho}^z + \nu \epsilon_{zz}^z)}{\partial r} + \frac{\partial (\epsilon_{rr}^z + \nu \epsilon_{zz}^z)}{\partial r} \right) \right]\end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\tag{2.3.3}$$

Δ ist der Laplace-Operator

Die Michell-Bedingungen lauten, wenn man mittels (2.3.2) die Airysche Spannungsfunktion einführt und einige Umformungen vornimmt:

$$V = V_1 = V_2 = 0$$

(2.3.4)

$$V = \frac{1-\nu^2}{E} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - r \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \right) d\varphi + \int_0^\varphi \left(\varepsilon_{rr}^z - \varepsilon_{\varphi\varphi}^z - r \frac{\partial(\varepsilon_{\varphi\varphi}^z + \nu \varepsilon_{zz}^z)}{\partial r} \right) d\varphi$$

$$V_1 = \frac{1-\nu^2}{E} \int_0^{2\pi} \left[\left(3 \frac{1}{r} \phi - 2 \frac{\partial \phi}{\partial r} - r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \sin \varphi + \int_0^\varphi \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - r^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \right) d\varphi^* \cos \varphi \right] d\varphi +$$

$$+ r \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\varepsilon_{\varphi\varphi}^z + \nu \varepsilon_{zz}^z \right] \sin \varphi + \left[2 \varepsilon_{r\varphi}^z + \int_0^\varphi \left(\varepsilon_{rr}^z - \varepsilon_{\varphi\varphi}^z - r \frac{\partial(\varepsilon_{\varphi\varphi}^z + \nu \varepsilon_{zz}^z)}{\partial r} \right) d\varphi^* \right] \cos \varphi \right\} d\varphi$$

$$V_2 = \frac{1-\nu^2}{E} \int_0^{2\pi} \left[\left(-3 \frac{1}{r} \phi - 2 \frac{\partial \phi}{\partial r} - r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \cos \varphi + \int_0^\varphi \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - r^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \right) d\varphi^* \sin \varphi \right] d\varphi +$$

$$+ r \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\varepsilon_{\varphi\varphi}^z + \nu \varepsilon_{zz}^z \right] \cos \varphi + \left[2 \varepsilon_{r\varphi}^z + \int_0^\varphi \left(\varepsilon_{rr}^z - \varepsilon_{\varphi\varphi}^z - r \frac{\partial(\varepsilon_{\varphi\varphi}^z + \nu \varepsilon_{zz}^z)}{\partial r} \right) d\varphi^* \right] \sin \varphi \right\} d\varphi$$

Es gelten dieselben Bemerkungen wie bei der Formulierung (2.3.2).

Die Randbedingungen (2.1.4) lauten unter Beachtung von (2.3.2) schließlich:

$$\sigma_I(\varphi) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \cos^2(\gamma_I(\varphi)) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \sin^2(\gamma_I(\varphi)) +$$

$$+ \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \sin(2 \cdot \gamma_I(\varphi))$$

$$\tau_I(\varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r^2} \right) \sin(2 \cdot \gamma_I(\varphi)) +$$

$$+ \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \cos(2 \cdot \gamma_I(\varphi))$$

($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

(2.3.5)

Die entsprechenden Beziehungen an der äußeren Randkurve erhält man, wenn statt des Index I der Index A eingesetzt wird. Die Airysche Spannungsfunktion ϕ ist jeweils für die Argumente $(r_I(\varphi), \varphi)$ bzw. $(r_A(\varphi), \varphi)$ zu nehmen.

Die partielle Differentialgleichung (2.3.3) ist die bekannte Bipotentialgleichung. Die Störfunktion $Q(r, \varphi)$ hängt nur von dem vorzugebenden Zusatzverzerrungsfeld $\varepsilon_{rr}^z, \varepsilon_{\varphi\varphi}^z, \varepsilon_{zz}^z, \varepsilon_{r\varphi}^z$ ab. Die Bedingungen (2.3.4) und (2.3.5) stellen die zur Bipotentialgleichung gehörenden Randbedingungen dar.

Damit ist die Lösung des Problems auf die Lösung der Bipotentialgleichung (2.3.3) mit den Randbedingungen (2.3.4) und (2.3.5) zurückgeführt. Hat man eine solche Lösung ϕ gefunden, so ergeben sich mit Hilfe der Definitionen (2.3.2) sofort die Spannungsfelder $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi}$.

Zur Bestimmung des Spannungsfeldes σ_{zz} steht die Beziehung (2.3.1) zur Verfügung. Die in dieser Beziehung vorkommenden Konstanten K_0, K_1, K_2, K_{12} lassen sich mit Hilfe der Bedingungen (2.1.5) bestimmen. Man erhält:

$$K_0 \cdot E = \frac{K - K^*}{F}$$

$$K_1 \cdot E = \frac{(M_1 - M_1^*) \cdot I_2 - (M_2 - M_2^*) \cdot I_{12}}{I_1 \cdot I_2 - I_{12}^2}$$

$$K_2 \cdot E = \frac{(M_2 - M_2^*) \cdot I_1 - (M_1 - M_1^*) \cdot I_{12}}{I_1 \cdot I_2 - I_{12}^2}$$

$$K_{12} \cdot E = 0$$

mit

(2.3.6)

$$K^* = \iint_{(F)} [\nu \cdot (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) - E \cdot \varepsilon_{zz}^z] dx_1 dx_2$$

$$M_1^* = \iint_{(F)} [\nu \cdot (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) - E \cdot \varepsilon_{zz}^z] \cdot x_1 dx_1 dx_2$$

$$M_2^* = \iint_{(F)} [\nu \cdot (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) - E \cdot \varepsilon_{zz}^z] \cdot x_2 dx_1 dx_2$$

F ist die Körperquerschnittsfläche

$$F = \iint_{(F)} dx_1 dx_2$$

I_1 und I_2 sind die Flächenträgheitsmomente

$$I_1 = \iint_{(F)} x_1^2 dx_1 dx_2$$

$$I_2 = \iint_{(F)} x_2^2 dx_1 dx_2$$

I_{12} ist das Zentrifugalmoment

$$I_{12} = \iint_{(F)} x_1 x_2 dx_1 dx_2$$

Die Verzerrungsfelder erhält man mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes (2.1.3) unter Beachtung der zweiten Bedingung in (2.2.1).

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_{rr} - \nu(1+\nu)\sigma_{\varphi\varphi}] + \\ &\quad + \varepsilon_{rr}^z + \nu \cdot \varepsilon_{zz}^z - \nu \cdot (k_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2) \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_{\varphi\varphi} - \nu(1+\nu)\sigma_{rr}] + \\ &\quad + \varepsilon_{\varphi\varphi}^z + \nu \cdot \varepsilon_{zz}^z - \nu \cdot (k_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2) \\ \varepsilon_{zz} &= k_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2 \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^z\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

Die Verschiebungsfelder schließlich erhält man durch Integration der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen (2.1.2). Hierbei ist zu beachten, daß die Verschiebungen überbestimmt sind. Da den vollständigen Kompatibilitätsbedingungen genügt wurde, hat dies keine Mehrdeutigkeit bei den Verschiebungsfeldern zur Folge.

Anmerkung: Stellt das Zusatzverzerrungsfeld allein die lineare Wärmedehnung dar (siehe Abschnitt 2.1, Stoffgesetz), so erhält die Störfunktion der Bipo-tentialgleichung die bekannte Form [23]:

$$Q(r, \varphi) = -\frac{\alpha \cdot E}{1-\nu} \Delta T$$

Bei konstanter Wärmeleitfähigkeit läßt sich diese Beziehung mit Hilfe der Fourierschen Wärmeleitgleichung umformen:

$$Q(r, \varphi) = \frac{\alpha \cdot E}{1-\nu} \left(\frac{q}{\lambda} - \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\rho \cdot c_p}{\lambda} \right)$$

q ist die Wärmeerzeugung pro Volumen

$\frac{\partial T}{\partial t}$ ist der zeitliche Temperatur-Gradient

λ ist die Wärmeleitfähigkeit

ρ ist die Dichte

c_p ist die spez. Wärme

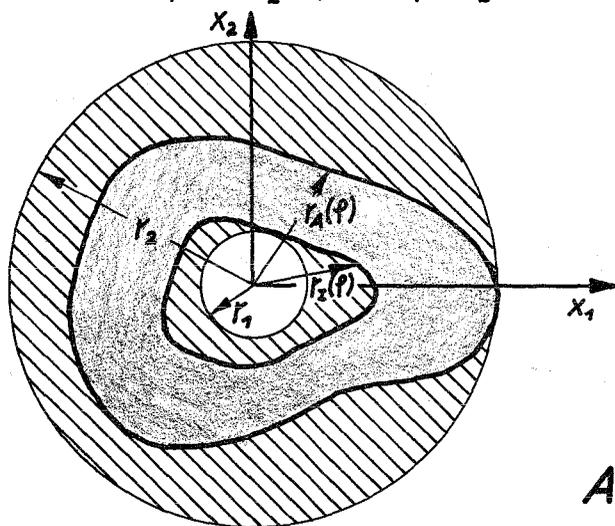
Ist das Temperaturfeld stationär und wärmequellenfrei, so verschwindet die Störfunktion $Q(r, \varphi)$. Sind außerdem keine Randspannungen $\sigma_I, \tau_I, \sigma_A, \tau_A$ vorhanden und verschwinden die in den Beziehungen (2.3.4) angegebenen Integrale über die Zusatzverzerrungen, so verschwinden auch die Airysche Spannungsfunktion und die Spannungen (Wärmespannungen) $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi}$. Die Integrale über die Zusatzverzerrungen in (2.3.4) haben dann den Wert Null, wenn die gesamte Wärmemenge, die vom Inneren zum Äußeren der Körperquerschnittsfläche geleitet wird, verschwindet und das Problem entweder bezüglich der φ -Koordinate ($0 \leq \varphi < 2\pi$) mindestens 2-fach periodisch ist, oder aber ein gewisses in [49] definiertes Wärmequellenmoment verschwindet.

2.4 Lösung der Bipotentialgleichung

Homogene Lösungen der Bipotentialgleichung in Polarkoordinaten werden beispielsweise angegeben von Timoshenko und Goodier [30] und Biezeno / Grammel [32]. Weitere Lösungen glaubte W. Z. Sadeh [51] gefunden zu haben. C. W. Bert [31] machte jedoch darauf aufmerksam, daß auch diese Lösungen bereits in [32] mitangegeben wurden.

Um die Menge der möglichen Lösungen der Bipotentialgleichung einzuschränken, soll hier zuerst gezeigt werden, daß $\phi(r, \varphi)$ nach Fourier entwickelt werden kann.

Voraussetzung hierfür ist, daß man den Definitionsbereich für alle vorkommenden Feldgrößen durch Hinzunahme eines fiktiven Bereiches auf eine Kreisringfläche mit den Radien r_1 und r_2 ($0 < r_1 < r_2$) erweitert (Abb. 5).



Der fiktive Definitionsbereich ist schraffiert.

Abb. 5

Für die Zusatzverzerrungsfelder im fiktiven Definitionsbereich sind beliebig auszuwählende Funktionen vorzugeben. Man hat bei der Auswahl dieser Funktionen nur sicherzustellen, daß den Bedingungen über die Differenzierbarkeit (Abschnitt 1.1, Anmerkung) auf der gesamten Ringfläche genügt wird.

Nach dieser Voraussetzung ist folgender Fourieransatz für das Spannungsfeld $\sigma_{\varphi\varphi}$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit zulässig:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} A_0''(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n''(r) \cdot \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_n''(r) \cdot \sin n\varphi$$

$A_0(r), A_1(r), A_2(r), \dots, B_1(r), B_2(r), \dots$ sind geeignete Funktionen von r und es möge bedeuten:

$$' \hat{=} \frac{\partial}{\partial r} \quad \cdot \hat{=} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Gemäß der zweiten Gleichung von (2.3.2) folgt nach zweimaliger Integration:

$$\phi = \frac{1}{2} A_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r) \cdot \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(r) \cdot \sin n\varphi + r \cdot f(\varphi) + g(\varphi)$$

$f(\varphi)$ und $g(\varphi)$ sind beliebige Funktionen.

Anhand der ersten und der dritten Gleichung von (2.3.2) erhält man dann

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \frac{1}{2} \frac{1}{r} A_0'(r) + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n'(r) \cdot \cos n\varphi + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} B_n'(r) \cdot \sin n\varphi + \frac{1}{r} f(\varphi) - \\ & - \frac{1}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r) \cdot n^2 \cos n\varphi - \frac{1}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n(r) \cdot n^2 \sin n\varphi + \frac{1}{r} f''(\varphi) + \frac{1}{r^2} g''(\varphi) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi} = & -\frac{1}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r) \cdot n \cdot \sin n\varphi + \frac{1}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n(r) \cdot n \cdot \cos n\varphi + \frac{1}{r} f'(\varphi) + \frac{1}{r^2} g'(\varphi) \\ & + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n'(r) \cdot n \cdot \sin n\varphi - \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} B_n'(r) \cdot n \cdot \cos n\varphi - \frac{1}{r} f'(\varphi) \end{aligned}$$

σ_{rr} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ sind aber aufgrund ihrer physikalischen Bedeutung bezüglich φ periodisch. Daraus folgt bei Beachtung der letzten Gleichung, daß $\dot{g}(\varphi)$ periodisch sein muß. Berücksichtigt man in der vorletzten Gleichung, daß mit $\dot{g}(\varphi)$ auch $\ddot{g}(\varphi)$ periodisch ist, so ergibt sich für $f(\varphi)$ folgende Differentialgleichung

$$f(\varphi) + \ddot{f}(\varphi) = s(\varphi) \quad ,$$

wobei $s(\varphi)$ eine vorgegebene periodische Funktion ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist ebenfalls periodisch.

Damit ist gezeigt, daß der folgende Fourieransatz für die Airysche Spannungsfunktion ϕ die Allgemeinheit der Lösung nicht einschränkt

$$\phi(r, \varphi) = \frac{1}{2} A_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r) \cdot \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(r) \cdot \sin n\varphi \quad (2.4.1)$$

p ist die Periodizität des zu behandelnden Problems ($p = 1, 2, \dots$)

Mit diesem Ansatz geht die Bipotentialgleichung (2.3.3) über in das folgende System Eulerscher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} A_n'''' + 2 \cdot \frac{1}{r} A_n''' - (2n^2 p^2 + 1) \cdot \frac{1}{r^2} A_n'' + (2n^2 p^2 + 1) \cdot \frac{1}{r^3} A_n' + (n^4 p^4 - 4n^2 p^2) \cdot \frac{1}{r^4} A_n &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(r, \varphi) \cdot \cos n\varphi \cdot d\varphi \\ n &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n'''' + 2 \cdot \frac{1}{r} B_n''' - (2n^2 p^2 + 1) \cdot \frac{1}{r^2} B_n'' + (2n^2 p^2 + 1) \cdot \frac{1}{r^3} B_n' + (n^4 p^4 - 4n^2 p^2) \cdot \frac{1}{r^4} B_n &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(r, \varphi) \cdot \sin n\varphi \cdot d\varphi \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Bei der numerischen Durchführung ist die Störfunktion $Q(r, \varphi)$ ebenso wie der Tensor des Zusatzverzerrungsfeldes, aus welchem sich $Q(r, \varphi)$ berechnet, nur in diskreten Punkten des Feldes (Rasterpunkten) angegeben. Bei der exakten (analytischen) Lösung des Differentialgleichungssystems muß jedoch die Störfunktion als analytische Funktion gegeben sein. $Q(r, \varphi)$ wird deswegen durch folgende analytische Funktion ersetzt:

$$Q(r, \varphi) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{l_m} P_{0i} r^i + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{l_m} P_{ni} r^i \right] \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{l_m} \bar{P}_{ni} r^i \right] \sin n\varphi$$

Die rechten Seiten der Eulerschen Differentialgleichungen sind dann gerade mit den oben vorkommenden Polynomen vom Grade l_m ($l_m > 0$) identisch:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(r, \varphi) \cdot \cos n\varphi \cdot d\varphi &\approx \sum_{i=0}^{l_m} P_{ni} r^i \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(r, \varphi) \cdot \sin n\varphi \cdot d\varphi &\approx \sum_{i=0}^{l_m} \bar{P}_{ni} r^i \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Die Lösungen der Eulerschen Differentialgleichungen lauten damit:

$$A_0(r) = a_{01} + a_{02} \ln r + a_{03} r^2 + a_{04} r^2 \ln r + \hat{A}_0(r)$$

Bei $p=1$

$$A_1(r) = a_{11} + a_{12} r^{-1} + a_{13} r^3 + a_{14} r \ln r + \hat{A}_1(r)$$

$$B_1(r) = b_{11} + b_{12} r^{-1} + b_{13} r^3 + b_{14} r \ln r + \hat{B}_1(r)$$

(2.4.3)

Bei $p=1$ für $n=2,3,\dots$; bei $p=2,3,\dots$ für $n=1,2,3,\dots$

$$A_n(r) = a_{n1} r^{np} + a_{n2} r^{-np} + a_{n3} r^{2+np} + a_{n4} r^{2-np} + \hat{A}_n(r)$$

$$B_n(r) = b_{n1} r^{np} + b_{n2} r^{-np} + b_{n3} r^{2+np} + b_{n4} r^{2-np} + \hat{B}_n(r)$$

Die Koeffizienten $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4}$ ($n=0,1,2,\dots$) und $b_{n1}, b_{n2}, b_{n3}, b_{n4}$ ($n=1,2,\dots$) sind Integrationskonstanten, und die Glieder der Lösung, in denen die Integrationskonstanten vorkommen, stellen die vollständige homogene Lösung dar. Da in den Arbeiten [30, 32, 51] die Periodizität der Airyschen Spannungsfunktion nicht vorausgesetzt wurde, treten dort noch zusätzliche homogene Lösungen auf. Sie sind hier ohne Bedeutung.

Die Funktionen $\hat{A}_n(r)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) und $\hat{B}_n(r)$ ($n = 1, 2, \dots$) sind die partikulären Lösungen der Bipotentialgleichung. Diese partikulären Lösungen, sowie ihre ersten und zweiten Ableitungen nach r lauten:

$$\hat{A}_n(r) = \sum_{\substack{i=0 \\ (i \neq np-2; i \neq np-4)}}^{i_m} \frac{1}{i(i+4)^3 + (4-2n^2p^2) \cdot (i+4)^2 + 4n^2p^2 \cdot (i+3) + n^4p^4} P_{ni} r^{i+4} + \frac{P_{n, n-2}}{8np \cdot (np+1)} r^{np+2} \ln r - \frac{P_{n, n-4}}{8np \cdot (np-1)} r^{np} \ln r \quad (2.4.4)$$

$$\hat{A}'_n(r) = \sum_{\substack{i=0 \\ (i \neq np-2; i \neq np-4)}}^{i_m} \frac{i+4}{i(i+4)^3 + (4-2n^2p^2) \cdot (i+4)^2 + 4n^2p^2 \cdot (i+3) + n^4p^4} P_{ni} r^{i+3} + \frac{P_{n, n-2}}{8np \cdot (np+1)} r^{np+1} \cdot [1 + (np+2) \cdot \ln r] - \frac{P_{n, n-4}}{8np \cdot (np-1)} r^{np-1} \cdot [1 + np \cdot \ln r]$$

$$\hat{A}''_n(r) = \sum_{\substack{i=0 \\ (i \neq np-2; i \neq np-4)}}^{i_m} \frac{(i+4) \cdot (i+3)}{i(i+4)^3 + (4-2n^2p^2) \cdot (i+4)^2 + 4n^2p^2 \cdot (i+3) + n^4p^4} P_{ni} r^{i+2} + \frac{P_{n, n-2}}{8np \cdot (np+1)} r^{np} [2np+3 + (np+1) \cdot (np+2) \cdot \ln r] - \frac{P_{n, n-4}}{8np \cdot (np-1)} r^{np-2} [2np-1 + (np-1) \cdot np \cdot \ln r]$$

Die partikulären Lösungen $\hat{B}_n(r)$ stimmen mit den partikulären Lösungen $\hat{A}_n(r)$ überein, wenn in letzteren P_{ni} durch \bar{P}_{ni} ersetzt wird.

Die Angabe $i \neq np-2$ und $i \neq np-4$ unter dem Summationszeichen bedeutet, daß bei der Summation die Glieder mit dem Index $i = np-2$ und $i = np-4$ auszulassen sind.

Die mit (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) und (2.4.4) erzielte Lösung ϕ der inhomogenen Bipotentialgleichung wird unmittelbar kaum benötigt. Von größerem Interesse sind dagegen die Spannungen σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{r\varphi}$, die sich mittels der Gleichungen (2.3.2) aus der Lösung ϕ ergeben. Sie werden deswegen explizit angegeben:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \\
 &= \frac{1}{2} [a_{02} r^{-2} + 2a_{03} + a_{04} (1 + 2 \ln r)] + \\
 &\quad + [-2a_{12} r^{-3} + 2a_{13} r + a_{14} r^{-1}] \cdot \cos \varphi + \\
 &\quad + [-2b_{12} r^{-3} + 2b_{13} r + b_{14} r^{-1}] \cdot \sin \varphi + \\
 &\quad - \sum_{n=1,2}^{\infty} [np(np-1)a_{n1} r^{np-2} + np(np+1)a_{n2} r^{-np-2} + \\
 &\quad \quad + (n^2 p^2 - np - 2)a_{n3} r^{np} + (n^2 p^2 + np - 2)a_{n4} r^{-np}] \cos np\varphi + \\
 &\quad - \sum_{n=1,2}^{\infty} [np(np-1)b_{n1} r^{np-2} + np(np+1)b_{n2} r^{-np-2} + \\
 &\quad \quad + (n^2 p^2 - np - 2)b_{n3} r^{np} + (n^2 p^2 + np - 2)b_{n4} r^{-np}] \sin np\varphi + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \hat{A}'_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{r} \cdot \hat{A}'_n(r) - \frac{1}{r^2} n^2 p^2 \cdot \hat{A}_n(r)] \cos np\varphi + \\
 &\quad \quad + \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{r} \cdot \hat{B}'_n(r) - \frac{1}{r^2} n^2 p^2 \cdot \hat{B}_n(r)] \sin np\varphi
 \end{aligned}$$

} Bei $p > 1$ sollen diese Glieder verschwinden
} Bei $p = 1$ beginnt die Summation mit $n = 2$
} Bei $p > 1$ beginnt die Summation mit $n = 1$

(2.4.5)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\
 &= \frac{1}{2} [-a_{02} r^{-2} + 2a_{03} + a_{04} (3 + 2 \ln r)] + \\
 &\quad + [2a_{12} r^{-3} + 6a_{13} r + a_{14} r^{-1}] \cdot \cos \varphi + \\
 &\quad + [2b_{12} r^{-3} + 6b_{13} r + b_{14} r^{-1}] \cdot \sin \varphi + \\
 &\quad + \sum_{n=1,2}^{\infty} [np(np-1)a_{n1} r^{np-2} + np(np+1)a_{n2} r^{-np-2} + \\
 &\quad \quad + (n^2 p^2 + 3np + 2)a_{n3} r^{np} + (n^2 p^2 - 3np + 2)a_{n4} r^{-np}] \cos np\varphi + \\
 &\quad + \sum_{n=1,2}^{\infty} [np(np-1)b_{n1} r^{np-2} + np(np+1)b_{n2} r^{-np-2} + \\
 &\quad \quad + (n^2 p^2 + 3np + 2)b_{n3} r^{np} + (n^2 p^2 - 3np + 2)b_{n4} r^{-np}] \sin np\varphi + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \hat{A}''_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}''_n(r) \cdot \cos np\varphi + \\
 &\quad \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{B}''_n(r) \cdot \sin np\varphi
 \end{aligned}$$

} Bei $p > 1$ sollen diese Glieder verschwinden
} Bei $p = 1$ beginnt die Summation mit $n = 2$
} Bei $p > 1$ beginnt die Summation mit $n = 1$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\varphi} &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \\
 &= [-2a_{12}r^{-3} + 2a_{13}r + a_{14}r^{-1}] \cdot \sin \varphi + \\
 &\quad -[-2b_{12}r^{-3} + 2b_{13}r + b_{14}r^{-1}] \cdot \cos \varphi - \\
 &\quad + \sum_{n=1,2}^{\infty} [np(np-1)a_{n1}r^{np-2} - np(np+1)a_{n2}r^{-np-2} + \\
 &\quad \quad + np(np+1)a_{n3}r^{np} - np(np-1)a_{n4}r^{-np}] \cdot \sin np\varphi - \\
 &\quad - \sum_{n=1,2}^{\infty} [np(np-1)b_{n1}r^{np-2} - np(np+1)b_{n2}r^{-np-2} + \\
 &\quad \quad + np(np+1)b_{n3}r^{np} - np(np-1)b_{n4}r^{-np}] \cdot \cos np\varphi + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} np \left[\frac{1}{r} \cdot \hat{A}'_n(r) - \frac{1}{r^2} \cdot \hat{A}_n(r) \right] \cdot \sin np\varphi - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} np \left[\frac{1}{r} \cdot \hat{B}'_n(r) - \frac{1}{r^2} \cdot \hat{B}_n(r) \right] \cdot \cos np\varphi
 \end{aligned}$$

noch (2.4.5)

Bei $p > 1$ sollen diese Glieder verschwinden

Bei $p=1$ beginnt die Summation mit $n=2$

Bei $p > 1$ beginnt die Summation mit $n=1$

Bemerkenswert sind die folgenden Eigenschaften der Spannungsfelder σ_{rr} und $\sigma_{r\varphi}$:

Das Spannungsfeld $\sigma_{r\varphi}$ besitzt keinen von φ unabhängigen Term.

Die Spannungsfelder σ_{rr} und $\sigma_{r\varphi}$ besitzen (bei $p=1$) dieselben Terme mit dem Faktor $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$.

Diese Eigenschaften folgen aus der Bedingung, daß die Randbelastungen an der inneren und der äußeren Randkurve jeweils für sich im Gleichgewicht sein müssen.

2.5 Bestimmung der Integrationskonstanten durch Erfüllung der Michell-Bedingungen und der Randbedingungen

Substituiert man in den Michell-Bedingungen (2.3.4) die Airysche Spannungsfunktion durch ihre Lösung, d. h. setzt man die Beziehungen (2.4.1) und (2.4.3) ein, formt man außerdem in geeigneter Weise um, so erhält man in den Gleichungen (2.3.4) für das erste Integral bzw. Doppelintegral

in der Formel zur Berechnung von v

$$-4\pi \frac{1-\nu^2}{E} a_{04} - \frac{1-\nu^2}{E} \pi \sum_{i=0}^{im} \frac{1}{i+2} \rho_{0i} r^{i+2}$$

in der Formel zur Berechnung von V_1 bei $p=1$

$$-4\pi \frac{1-\nu^2}{E} b_{14} + \frac{1-\nu^2}{E} \pi \sum_{i=0}^{i_m} \frac{1}{i+3} \bar{P}_{1i} r^{i+3}$$

in der Formel zur Berechnung von V_2 bei $p=1$

$$4\pi \frac{1-\nu^2}{E} a_{14} - \frac{1-\nu^2}{E} \pi \sum_{i=0}^{i_m} \frac{1}{i+3} P_{1i} r^{i+3}$$

Daraus folgt eine bemerkenswerte Feststellung. Bei $p=1$ stellt jede der drei Michell-Bedingungen (2.3.4) genau eine Bestimmungsgleichung für jeweils eine der drei Integrationskonstanten a_{04} , a_{14} , b_{14} dar. Bei $p>1$ stellt die erste Michell-Bedingung aus (2.3.4) eine Bestimmungsgleichung für a_{04} dar.

Diese Bestimmungsgleichungen lauten:

$$a_{04} = -\frac{1}{4} \sum_{i=0}^{i_m} \frac{1}{i+2} P_{0i} r^{i+2} + \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\epsilon_{rr}^z - \epsilon_{\varphi\varphi}^z - r \frac{\partial(\epsilon_{\varphi\varphi}^z + \nu \epsilon_{zz}^z)}{\partial r}) d\varphi$$

Bei $p=1$ kommt hinzu:

(2.5.1)

$$a_{14} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{i_m} \frac{1}{i+3} P_{1i} r^{i+3} + \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -[\epsilon_{\varphi\varphi}^z + \nu \epsilon_{zz}^z] \cos \varphi - [2\epsilon_{r\varphi}^z + \int_0^\varphi (\epsilon_{rr}^z - \epsilon_{\varphi\varphi}^z - r \frac{\partial(\epsilon_{\varphi\varphi}^z + \nu \epsilon_{zz}^z)}{\partial r}) d\varphi^* \sin \varphi \right\} d\varphi$$

$$b_{14} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{i_m} \frac{1}{i+3} \bar{P}_{1i} r^{i+3} + \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -[\epsilon_{\varphi\varphi}^z + \nu \epsilon_{zz}^z] \sin \varphi + [2\epsilon_{r\varphi}^z + \int_0^\varphi (\epsilon_{rr}^z - \epsilon_{\varphi\varphi}^z - r \frac{\partial(\epsilon_{\varphi\varphi}^z + \nu \epsilon_{zz}^z)}{\partial r}) d\varphi^* \cos \varphi \right\} d\varphi$$

Bei $p>1$ wird der Bedingung $V_1 = V_2 = 0$ von selbst genügt. (Dies läßt sich auch leicht durch die Anschauung bestätigen).

Es gelten dieselben Bemerkungen wie bei den Beziehungen (2.2.2), nämlich: Der Integrationsweg ist ein Kreis mit dem Radius r . Er ist so zu wählen, daß der Integrationsweg innerhalb oder auf dem Rand des Definitionsbereiches des Integranden verläuft. φ^* ist eine Integrationsvariable in Umfangsrichtung.

Wird das Zusatzverzerrungsfeld allein von der Wärmedehnung verursacht, ist ferner $\Delta T = 0$, so läßt sich die Formel zur Berechnung von a_{04} stark vereinfachen. Man erhält:

$$a_{04} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{E}{2(1-\nu)} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot q$$

α ist der lineare Wärmedehnungskoeffizient

λ ist die Wärmeleitfähigkeit

q ist die gesamte auf die Prismalänge bezogene Wärmemenge, die vom Inneren zum Äußeren der Körperquerschnittsfläche geleitet wird.

Aus den Formeln (2.4.5) geht hervor, daß bei $p=1$ die Integrationskonstanten a_{01}, a_{11}, b_{11} , bei $p>1$ die Integrationskonstante a_{01} auf das Spannungsfeld und damit auf die Lösung des Problems keinen Einfluß haben. Diese Integrationskonstanten werden deswegen bei allen zukünftigen Überlegungen außer acht gelassen.

Es bleiben noch die folgenden Integrationskonstanten zu bestimmen:

| | | | | | | | |
|------------|----------|----------|------------|------------|----------|----------|------------|
| | a_{02} | a_{03} | | | | | |
| (a_{11}) | a_{12} | a_{13} | (a_{14}) | (b_{11}) | b_{12} | b_{13} | (b_{14}) |
| a_{21} | a_{22} | a_{23} | a_{24} | b_{21} | b_{22} | b_{23} | b_{24} |
| | | | | | | | |

(Die in Klammern gesetzten Integrationskonstanten sind nur bei $p>1$ zu bestimmen).

Hierzu werden die Randbedingungen (2.3.5) herangezogen:

Setzt man in die Randbedingungen (2.3.5) die Beziehungen (2.4.5) ein und bringt nach längeren Umformungen die bekannten Glieder auf die rechte Seite und die Glieder, in denen eine der noch unbekanntenen Integrationskonstanten vorkommt, auf die linke Seite, so erhält man die folgenden vier Bedingungen:

$$\begin{aligned}
 S_x(p, r_I(p), \gamma_I(p)) &= S(p, r_I(p), \gamma_I(p), \sigma_I(p)) \\
 T_x(p, r_I(p), \gamma_I(p)) &= T(p, r_I(p), \gamma_I(p), \tau_I(p)) \\
 S_x(p, r_A(p), \gamma_A(p)) &= S(p, r_A(p), \gamma_A(p), \sigma_A(p)) \\
 T_x(p, r_A(p), \gamma_A(p)) &= T(p, r_A(p), \gamma_A(p), \tau_A(p))
 \end{aligned}
 \tag{2.5.2}$$

Die rechten Seiten bedeuten:

$$\begin{aligned}
 S(\rho, r, \gamma, \delta) = & \delta - a_{04} [(1 + \ln r) - \frac{1}{2} \cos 2\gamma] - \\
 & - a_{14} \frac{1}{r} (\cos \rho + \sin \rho \sin 2\gamma) - \\
 & - b_{14} \frac{1}{r} (\sin \rho - \cos \rho \sin 2\gamma) - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{1}{r} \hat{A}_0' \cos^2 \gamma - \\
 & - \frac{1}{2} \hat{A}_0'' \sin^2 \gamma - \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{r^2} \hat{A}_n \cdot n\rho (-n\rho \cos n\rho \cos^2 \gamma - \sin n\rho \sin 2\gamma) + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{r} \hat{A}_n' (\cos n\rho \cos^2 \gamma + n\rho \sin n\rho \sin 2\gamma) + \\
 & \quad + \hat{A}_n'' \cos n\rho \sin^2 \gamma + \\
 & \quad + \frac{1}{r^2} \hat{B}_n \cdot n\rho (-n\rho \sin n\rho \cos^2 \gamma + \cos n\rho \sin 2\gamma) + \\
 & \quad + \frac{1}{r} \hat{B}_n' (\sin n\rho \cos^2 \gamma - n\rho \cos n\rho \sin 2\gamma) + \\
 & \quad \left. + \hat{B}_n'' \sin n\rho \sin^2 \gamma \right]
 \end{aligned}$$

] Diese beiden Glieder treten nur bei $\rho=1$ auf

(2.5.3)

$$\begin{aligned}
 T(\rho, r, \gamma, \tau) = & \tau - a_{04} \frac{1}{2} \sin 2\gamma - \\
 & - a_{14} \frac{1}{r} \sin \rho \cos 2\gamma + \\
 & + b_{14} \frac{1}{r} \cos \rho \cos 2\gamma + \\
 & + \frac{1}{4} \frac{1}{r} \hat{A}_0' \sin 2\gamma - \\
 & - \frac{1}{4} \hat{A}_0'' \sin 2\gamma - \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{r^2} \hat{A}_n \cdot n\rho (-\sin n\rho \cos 2\gamma + \frac{n\rho}{2} \cos n\rho \sin 2\gamma) + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{r} \hat{A}_n' (n\rho \sin n\rho \cos 2\gamma - \frac{1}{2} \cos n\rho \sin 2\gamma) + \\
 & \quad + \hat{A}_n'' \frac{1}{2} \cos n\rho \sin 2\gamma + \\
 & \quad + \frac{1}{r^2} \hat{B}_n \cdot n\rho (\cos n\rho \cos 2\gamma + \frac{n\rho}{2} \sin n\rho \sin 2\gamma) + \\
 & \quad + \frac{1}{r} \hat{B}_n' (-n\rho \cos n\rho \cos 2\gamma - \frac{1}{2} \sin n\rho \sin 2\gamma) + \\
 & \quad \left. + \hat{B}_n'' \frac{1}{2} \sin n\rho \sin 2\gamma \right]
 \end{aligned}$$

] Diese beiden Glieder treten nur bei $\rho=1$ auf

Die linken Seiten bedeuten:

$$S_x(\rho, r, \gamma) = a_{02} r^{-2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2\gamma + a_{03} 1 - a_{12} r^{-3} \cdot 2 \cos(\rho - 2\gamma) - a_{13} r \cdot 2 [\cos(\rho + 2\gamma) - 2 \cos \rho] +$$

] Diese beiden Glieder treten nur bei $\rho=1$ auf

Bei $\rho=1$ beginnt die Summation mit $n=2$

$$+ \sum_{n=1,2}^{\infty} \left[\begin{aligned} &-a_{n1} r^{np-2} np \cdot (np-1) \cdot \cos(np\rho + 2\gamma) - \\ &-a_{n2} r^{-np-2} np \cdot (np+1) \cdot \cos(np\rho - 2\gamma) - \\ &-a_{n3} r^{np} [np \cdot (np+1) \cdot \cos(np\rho + 2\gamma) - 2(np+1) \cdot \cos np\rho] - \\ &-a_{n4} r^{-np} [np \cdot (np-1) \cdot \cos(np\rho - 2\gamma) + 2(np-1) \cdot \cos np\rho] \end{aligned} \right] -$$

Bei $\rho > 1$ beginnt die Summation mit $n=1$

$$-b_{12} r^{-3} \cdot 2 \sin(\rho - 2\gamma) - b_{13} r \cdot 2 [\sin(\rho + 2\gamma) - 2 \sin \rho] +$$

] Diese beiden Glieder treten nur bei $\rho=1$ auf

$$+ \sum_{n=1,2}^{\infty} \left[\begin{aligned} &-b_{n1} r^{np-2} np \cdot (np-1) \cdot \sin(np\rho + 2\gamma) - \\ &-b_{n2} r^{-np-2} np \cdot (np+1) \cdot \sin(np\rho - 2\gamma) - \\ &-b_{n3} r^{np} [np \cdot (np+1) \cdot \sin(np\rho + 2\gamma) - 2(np+1) \cdot \sin np\rho] - \\ &-b_{n4} r^{-np} [np \cdot (np-1) \cdot \sin(np\rho - 2\gamma) + 2(np-1) \cdot \sin np\rho] \end{aligned} \right]$$

(2.5.4)

$$T_x(\rho, r, \gamma) = -a_{02} r^{-2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\gamma + a_{03} 0 - a_{12} r^{-3} \cdot 2 \sin(\rho - 2\gamma) + a_{13} r \cdot 2 \sin(\rho + 2\gamma) +$$

] Diese beiden Glieder treten nur bei $\rho=1$ auf

Bei $\rho=1$ beginnt die Summation mit $n=2$

$$+ \sum_{n=1,2}^{\infty} \left[\begin{aligned} &+a_{n1} r^{np-2} np \cdot (np-1) \cdot \sin(np\rho + 2\gamma) - \\ &-a_{n2} r^{-np-2} np \cdot (np+1) \cdot \sin(np\rho - 2\gamma) + \\ &+a_{n3} r^{np} np \cdot (np+1) \cdot \sin(np\rho + 2\gamma) - \\ &-a_{n4} r^{-np} np \cdot (np-1) \cdot \sin(np\rho - 2\gamma) \end{aligned} \right] +$$

Bei $\rho > 1$ beginnt die Summation mit $n=1$

$$+ b_{12} r^{-3} \cdot 2 \cos(\rho - 2\gamma) - b_{13} r \cdot 2 \cos(\rho + 2\gamma) +$$

] Diese beiden Glieder treten nur bei $\rho=1$ auf

$$+ \sum_{n=1,2}^{\infty} \left[\begin{aligned} &-b_{n1} r^{np-2} np \cdot (np-1) \cdot \cos(np\rho + 2\gamma) + \\ &+b_{n2} r^{-np-2} np \cdot (np+1) \cdot \cos(np\rho - 2\gamma) - \\ &-b_{n3} r^{np} np \cdot (np+1) \cdot \cos(np\rho + 2\gamma) + \\ &+b_{n4} r^{-np} np \cdot (np-1) \cdot \cos(np\rho - 2\gamma) \end{aligned} \right]$$

Von den vier Bedingungen (2.5.2) verlangt

- die erste, daß die Normalspannung am Innenrand $\sigma_r(\varphi)$ ist,
- die zweite, daß die Schubspannung am Innenrand $\tau_r(\varphi)$ ist,
- die dritte, daß die Normalspannung am Außenrand $\sigma_a(\varphi)$ ist,
- die vierte, daß die Schubspannung am Außenrand $\tau_a(\varphi)$ ist.

Jede der vier Bedingungen soll für alle Werte von φ im Intervall $0 \leq \varphi < 2\pi$ erfüllt sein, d. h. jede der vier Bedingungen (2.5.2) stellt unter Beachtung von (2.5.4) ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen für unendlich viele Unbekannte, nämlich die noch zu bestimmenden Integrationskonstanten, dar.

Da es im allgemeinen nicht möglich ist, lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten zu lösen, wird allen Integrationskonstanten, deren erster Index $n > n_m \cong 1$ ist, der Wert Null zugewiesen. Das hat zur Folge, daß in allen Summen mit n als Summationsindex, die Summation nicht bis $n \rightarrow \infty$ sondern bis $n = n_m$ durchzuführen ist, d. h.

$$\sum_{n=\dots}^{\infty} \dots \text{ geht über in } \sum_{n=\dots}^{n_m} \dots$$

Wie man leicht abzählen kann, bleiben

- bei $p=1$ noch $m_m = 8 \cdot n_m - 2$ unbekannte Integrationskonstanten,
- bei $p>1$ noch $m_m = 8 \cdot n_m + 2$ unbekannte Integrationskonstanten

zu bestimmen.

Ist das Problem spiegelsymmetrisch, so verschwinden alle Integrationskonstanten b_{\dots} und es bleiben

- bei $p=1$ noch $m_m = 4 \cdot n_m$ unbekannte Integrationskonstanten,
- bei $p>1$ noch $m_m = 4 \cdot n_m + 2$ unbekannte Integrationskonstanten

zu bestimmen.

Es ist selbstverständlich, daß den Randbedingungen (2.5.2) jetzt nicht mehr für alle Werte von φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) exakt genügt werden kann. Die Aufgabe besteht jetzt vielmehr darin, die noch verbleibenden Integrationskonstanten so zu bestimmen, daß die Randbedingungen möglichst gut erfüllt werden.

Hierzu lassen sich verschiedene Verfahren benutzen.

Um diese Verfahren möglichst kurz und übersichtlich beschreiben zu können, werden die folgenden Umbenennungen durchgeführt:

- Die noch zu bestimmenden Integrationskonstanten (vergl. Seite 38)

$$a_{02}, a_{03}, (a_{11}), a_{12}, a_{13}, (a_{14}), a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, \dots, a_{n_m 4},$$

$$(b_{11}), b_{12}, b_{13}, (b_{14}), b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}, b_{31}, \dots, b_{n_m 4}$$

werden der Reihe nach durchnummeriert und mögen heißen

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_m, \dots, X_{m_m}$$

(Die in Klammer gesetzten Integrationskonstanten treten nur bei $p > 1$ auf).

- Die in der ersten Formel von (2.5.4) auftretenden Koeffizienten der Integrationskonstanten werden ebenfalls der Reihe nach durchnummeriert und mögen heißen:

$$S_1(p, r, \gamma), S_2(p, r, \gamma), \dots, S_m(p, r, \gamma), \dots, S_{m_m}(p, r, \gamma)$$

Entsprechendes möge mit den in der zweiten Formel von (2.5.4) auftretenden Integrationskonstanten geschehen. Diese mögen heißen:

$$T_1(p, r, \gamma), T_2(p, r, \gamma), \dots, T_m(p, r, \gamma), \dots, T_{m_m}(p, r, \gamma)$$

Damit ist beispielsweise:

| | | |
|-------------|---|--|
| | $S_1 = r^{-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 2\gamma$ | $T_1 = -r^{-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\gamma$ |
| | $S_2 = 1$ | $T_2 = 0$ |
| bei $p=1$ | $S_3 = -r^{-3} \cdot 2 \cdot \cos(p-2\gamma)$ | $T_3 = -r^{-3} \cdot 2 \cdot \sin(p-2\gamma)$ |
| bei $p > 1$ | $S_3 = -r^{p-2} \cdot p(p-1) \cdot \cos(p-p+2\gamma)$ | $T_3 = r^{p-2} \cdot p(p-1) \cdot \sin(p-p+2\gamma)$ |
| | u. s. w. | |

Mit den neuen Bezeichnungen schreiben sich die Formeln (2.5.4) wie folgt:

$$S_x(p, r, \gamma) = \sum_{m=1}^{m_m} X_m \cdot S_m(p, r, \gamma)$$

$$T_x(p, r, \gamma) = \sum_{m=1}^{m_m} X_m \cdot T_m(p, r, \gamma)$$

(2.5.5)

Nun sollen die Verfahren zur Bestimmung der Integrationskonstanten X_m kurz erläutert werden:

A) Gewöhnliche Kollokationsmethode

Dieses Verfahren ist das weitaus bekannteste. Die Randbedingungen (2.5.2) werden

in insgesamt i_{max} Punkten am Innenrand
 mit den Winkeln $\varphi_{I1}, \varphi_{I2}, \dots, \varphi_{Ii}, \dots, \varphi_{Ii_{max}}$,
 in insgesamt a_{max} Punkten am Außenrand
 mit den Winkeln $\varphi_{A1}, \varphi_{A2}, \dots, \varphi_{Aa}, \dots, \varphi_{Aa_{max}}$

exakt erfüllt, d. h. aus den ersten beiden Bedingungen von (2.5.2) folgen $2 \cdot i_{max}$ Gleichungen und aus den letzten beiden Bedingungen von (2.5.2) folgen $2 \cdot a_{max}$ Gleichungen.

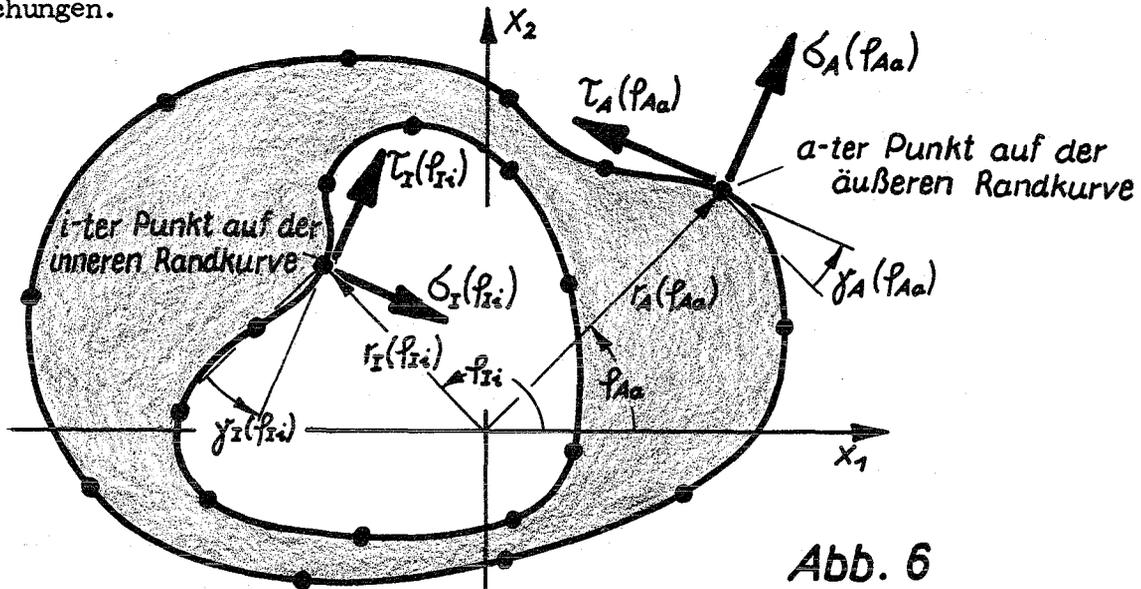


Abb. 6

Mit (2.5.5) lauten diese Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{m_m} X_m \cdot S_m(p_{Ii}, r_I(p_{Ii}), y_I(p_{Ii})) &= S(p_{Ii}, r_I(p_{Ii}), y_I(p_{Ii}), \sigma_I(p_{Ii})) \\
 \sum_{m=1}^{m_m} X_m \cdot T_m(p_{Ii}, r_I(p_{Ii}), y_I(p_{Ii})) &= T(p_{Ii}, r_I(p_{Ii}), y_I(p_{Ii}), \tau_I(p_{Ii})) \\
 \sum_{m=1}^{m_m} X_m \cdot S_m(p_{Aa}, r_A(p_{Aa}), y_A(p_{Aa})) &= S(p_{Aa}, r_A(p_{Aa}), y_A(p_{Aa}), \sigma_A(p_{Aa})) \\
 \sum_{m=1}^{m_m} X_m \cdot T_m(p_{Aa}, r_A(p_{Aa}), y_A(p_{Aa})) &= T(p_{Aa}, r_A(p_{Aa}), y_A(p_{Aa}), \tau_A(p_{Aa}))
 \end{aligned}
 \tag{2.5.6}$$

$i = 1, 2, \dots, i_{max}; \quad a = 1, 2, \dots, a_{max}$

(2.5.6) stellt ein lineares Gleichungssystem mit $2 \cdot (i_{max} + a_{max})$ Gleichungen für m_m unbekannte Integrationskonstanten X_m dar. Diese Unbekannten X_m lassen sich dann eindeutig bestimmen, wenn

$$2 \cdot (i_{max} + a_{max}) = m_m$$

ist und wenn alle Gleichungen in (2.5.6) voneinander linear unabhängig sind. Letzteres ist im allgemeinen dann der Fall, wenn alle Randpunkte, in denen die Randbedingungen exakt erfüllt werden sollen, voneinander verschieden sind und wenn

bei nicht spiegelsymmetr. Problem $0 \cong \begin{pmatrix} p_{xi} \\ p_{aa} \end{pmatrix} < \frac{2\pi}{p}$

bei spiegelsymmetr. Problem $0 \cong \begin{pmatrix} p_{xi} \\ p_{aa} \end{pmatrix} < \frac{\pi}{p}$

ist.

Bei der Behandlung ähnlicher Probleme wurde die (gewöhnliche) Kollokationsmethode unter anderem bereits 1937 von Barta [37], später von Conway [38] und Takeuti [33, 34, 35] beschrieben und angewendet. Vergleichende Studien bei etwas voneinander abweichenden Verfahren stellt Shuleshko [39] anhand des Torsionsproblems an. Allen Arbeiten ist jedoch gemeinsam, daß die Körperquerschnittsfläche relativ einfache Randkonturen besitzt.

Wie im Zusammenhang mit dieser Arbeit bei durchgeführten Rechenbeispielen festgestellt wurde, liefert diese Methode nur sehr ungenaue Ergebnisse, wenn die Konturen der Körperquerschnittsfläche etwas komplizierter sind, wie das beispielsweise beim längsberippten Brennstabhüllrohr der Fall ist. Aus diesem Grunde benutzen Takeuti und Noda, deren Probleme dem hier zu behandelnden Problem am nächsten kommt, in neueren Veröffentlichungen [43, 44] ein vollkommen anderes Lösungsverfahren.

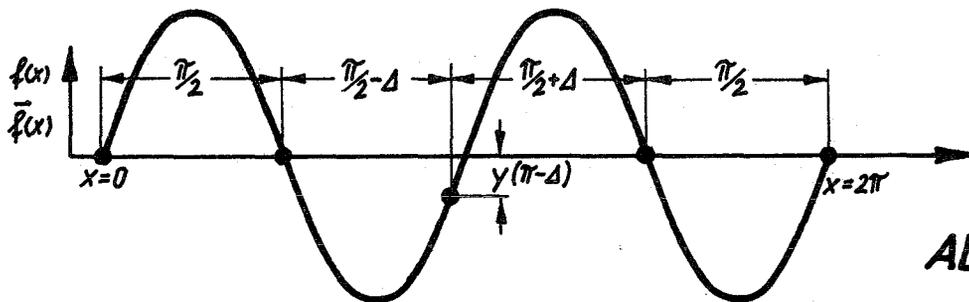
Die Ursache für die großen Ungenauigkeiten, d. h. die Ursache für die erhebliche Verletzung der Randbedingungen (2.52) bei jenen Winkeln φ , die nicht mit p_{aa} bzw. p_{xi} übereinstimmen, läßt sich wie folgt plausibel machen:

Gegeben seien $2 \cdot n_m + 1$ Punkte auf der x -Achse im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$.

Gegeben sei ferner eine nach Fourier entwickelte Funktion

$$f(x) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{n_m} (A_n \cdot \cos nx + B_n \cdot \sin nx) \quad \text{die in den } 2 \cdot n_m + 1$$

Punkten verschwinden möge. Am Beispiel $n_m = 2$ (Abb. 7) bestätigt man



leicht, daß bei gleichem Abstand der Punkte untereinander alle Fourierkoeffizienten A_n, B_n verschwinden mit Ausnahme des Koeffizienten $B_{n=n_m}$ der unbestimmt ist, d. h. beliebig hohe Werte annehmen kann.

Auch wenn die Funktion $\bar{f}(x) = \bar{A}_0/2 + \sum_{n=1}^{n_m} (\bar{A}_n \cdot \cos nx + \bar{B}_n \cdot \sin nx)$ in den $2 \cdot n_m + 1$ Punkten voneinander verschiedene Werte $y(x)$ annehmen soll, tritt diese Unbestimmtheit auf, denn mit $\bar{f}(x)$ nimmt auch $\bar{f}(x) + f(x)$ die verlangten Werte $y(x)$ an. Erst wenn die $2 \cdot n_m + 1$ Punkte voneinander verschiedenen Abstand haben, läßt sich auch $B_{n=n_m}$ eindeutig bestimmen. Wie aus Abb. hervorgeht (Verschiebung des mittleren Punktes um Δ) kann aber auch in diesem Fall $B_{n=n_m}$ relativ hohe Werte, verglichen mit Δ und $y(\pi - \Delta)$ annehmen.

Ähnliche Verhältnisse liegen - wie man leicht bestätigt - auch bei der Erfüllung der Randbedingungen mit Hilfe der gewöhnlichen Kollokationsmethode vor. Insbesondere aber zeigt sich, daß die Wahl der Lage der Punkte, in denen die Randbedingungen (2.5.2) exakt erfüllt werden, von erheblichem Einfluß sein kann.

B) Verbesserte Kollokationsmethode

Es liegt nahe, die Kollokationsmethode dadurch verbessern zu wollen, daß man eine größere Anzahl von Randpunkten zur Bestimmung der gesuchten Integrationskonstanten heranzieht. Eine solche Methode, in der sogar alle Randpunkte gleichmäßig berücksichtigt werden, gewinnt man, wenn rechts und links von (2.5.2)

nach Fourier entwickelt wird. ¹⁾

Unter Beachtung von (2.5.5) lauten damit die Randbedingungen (2.5.2):

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{m_m} X_m \int_0^{\rho_0} S_m(\rho, r_z(\rho), \gamma_z(\rho)) \frac{\cos(l \cdot \rho \cdot \rho)}{\sin(l \cdot \rho \cdot \rho)} d\rho &= \int_0^{\rho_0} S(\rho, r_z(\rho), \gamma_z(\rho), \delta_z(\rho)) \frac{\cos(l \cdot \rho \cdot \rho)}{\sin(l \cdot \rho \cdot \rho)} d\rho && \begin{array}{l} (2.5.7) \\ l = 0, 1, 2, \dots, n_{l1} \\ l = 1, 2, \dots, n_{l1} \end{array} \\
 \sum_{m=1}^{m_m} X_m \int_0^{\rho_0} T_m(\rho, r_z(\rho), \gamma_z(\rho)) \frac{\cos(l \cdot \rho \cdot \rho)}{\sin(l \cdot \rho \cdot \rho)} d\rho &= \int_0^{\rho_0} T(\rho, r_z(\rho), \gamma_z(\rho), \tau_z(\rho)) \frac{\cos(l \cdot \rho \cdot \rho)}{\sin(l \cdot \rho \cdot \rho)} d\rho && \begin{array}{l} l = (1), 2, \dots, n_{l2} \\ l = (1), 2, \dots, n_{l2} \end{array} \\
 \sum_{m=1}^{m_m} X_m \int_0^{\rho_0} S_m(\rho, r_A(\rho), \gamma_A(\rho)) \frac{\cos(l \cdot \rho \cdot \rho)}{\sin(l \cdot \rho \cdot \rho)} d\rho &= \int_0^{\rho_0} S(\rho, r_A(\rho), \gamma_A(\rho), \delta_A(\rho)) \frac{\cos(l \cdot \rho \cdot \rho)}{\sin(l \cdot \rho \cdot \rho)} d\rho && \begin{array}{l} l = 0, 1, 2, \dots, n_{l3} \\ l = 1, 2, \dots, n_{l3} \end{array} \\
 \sum_{m=1}^{m_m} X_m \int_0^{\rho_0} T_m(\rho, r_A(\rho), \gamma_A(\rho)) \frac{\cos(l \cdot \rho \cdot \rho)}{\sin(l \cdot \rho \cdot \rho)} d\rho &= \int_0^{\rho_0} T(\rho, r_A(\rho), \gamma_A(\rho), \tau_A(\rho)) \frac{\cos(l \cdot \rho \cdot \rho)}{\sin(l \cdot \rho \cdot \rho)} d\rho && \begin{array}{l} l = (1), 2, \dots, n_{l4} \\ l = (1), 2, \dots, n_{l4} \end{array}
 \end{aligned}$$

Der in Klammern gesetzte Index $l=(1)$ tritt nur auf, wenn $\rho > 1$ ist. Dies folgt aus dem Umstand, daß die Randlasten bereits aufgrund des Ansatzes (2.3.2) an jeder geschlossenen Randkurve im Gleichgewicht sein müssen, d. h., wird

$$\int_0^{\rho_0} S(\rho, r_z(\rho), \gamma_z(\rho), \delta_z(\rho)) \frac{\cos \rho}{\sin \rho} d\rho \quad \text{und} \quad \int_0^{\rho_0} S(\rho, r_A(\rho), \gamma_A(\rho), \delta_A(\rho)) \frac{\cos \rho}{\sin \rho} d\rho$$

willkürlich vorgegeben, so darf über

$$\int_0^{\rho_0} T(\rho, r_z(\rho), \gamma_z(\rho), \tau_z(\rho)) \frac{\cos \rho}{\sin \rho} d\rho \quad \text{und} \quad \int_0^{\rho_0} T(\rho, r_A(\rho), \gamma_A(\rho), \tau_A(\rho)) \frac{\cos \rho}{\sin \rho} d\rho$$

nicht mehr frei verfügt werden. Aus dem gleichen Grund dürfen auch für die Randintegrale

$$\int_0^{\rho_0} T(\rho, r_z(\rho), \gamma_z(\rho), \tau_z(\rho)) \cdot d\rho \quad \text{und} \quad \int_0^{\rho_0} T(\rho, r_A(\rho), \gamma_A(\rho), \tau_A(\rho)) \cdot d\rho$$

keine Bedingungen eingeführt werden.

1) Streng würde diese Behauptung nur dann gelten, wenn es möglich wäre, gewisse Integrationen längs der Randkurve exakt durchzuführen. Tatsächlich wird man sich mit Näherungsverfahren begnügen müssen.

Bei nicht spiegelsymmetr. Problem

ist $\varphi_0 = \frac{2\pi}{p}$.

(2.5.7) stellt bei $p=1$ $l_m = 2(n_{l1} + n_{l2} + n_{l3} + n_{l4}) - 2$ lin. Gleichungen,
bei $p>1$ $l_m = 2(n_{l1} + n_{l2} + n_{l3} + n_{l4}) + 2$ lin. Gleichungen

zur Bestimmung der m_m Integrationskonstanten X_m dar.

Bei spiegelsymmetr. Problem

ist $\varphi_0 = \frac{\pi}{p}$

Es wird in der ersten Beziehung nur mit $\cos(l \cdot p \cdot \varphi)$
in der zweiten Beziehung nur mit $\sin(l \cdot p \cdot \varphi)$
in der dritten Beziehung nur mit $\cos(l \cdot p \cdot \varphi)$
in der vierten Beziehung nur mit $\sin(l \cdot p \cdot \varphi)$ multipliziert.

(2.5.7) stellt bei $p=1$ $l_m = n_{l1} + n_{l2} + n_{l3} + n_{l4}$ lin. Gleichungen,
bei $p>1$ $l_m = (n_{l1} + n_{l2} + n_{l3} + n_{l4}) + 2$ lin. Gleichungen

zur Bestimmung der m_m Integrationskonstanten X_m dar.

Stimmt die Anzahl der linearen Gleichungen mit der Anzahl der zu bestimmenden Integrationskonstanten X_m überein, so lassen sich die Integrationskonstanten X_m im allgemeinen eindeutig bestimmen.

Zwar werden bei dieser verbesserten Kollokationsmethode die Randbedingungen (2.5.2), gemittelt in gewissen - je nach Wahl von n_{l1}, n_{l2}, \dots recht kleinen - Intervallen von φ , exakt erfüllt. Anhand von durchgeführten Rechenbeispielen wurde jedoch festgestellt, daß der Fehler bei der Erfüllung der Randbedingungen, aufgetragen über der Winkelkoordinate φ , sehr starke, periodische Schwankungen aufweist. Diese Methode konnte deshalb bei der Lösung des vorgegebenen Problems nicht eingesetzt werden.

Die Ursache für diese stark schwankenden Fehler läßt sich leicht angeben:

In den Integranden S_m und T_m , welche in den Beziehungen (2.5.7) vorkommen, treten als Faktoren

teilweise hohe Potenzen von $r_x(\varphi)$ und $r_A(\varphi)$ ¹⁾

und Winkelfunktionen $\cos(n \cdot p \cdot \varphi)$ und $\sin(n \cdot p \cdot \varphi)$

auf (vergl. (2.5.4)). Da die größten Ordnungen n in etwa mit den größten

1) In Rechenbeispielen kamen Potenzen r^{168} und r^{-170} vor.

Ordnungen l (vergl. (2.5.7)) übereinstimmen und nicht beide Funktionen $r_I(\rho)$ und $r_A(\rho)$ konstant, oder fast konstant sind, lassen sich die Funktionen $S_m(\rho, r_I(\rho), \gamma_I(\rho))$, $T_m(\rho, r_I(\rho), \gamma_I(\rho))$, $S_m(\rho, r_A(\rho), \gamma_A(\rho))$ und $T_m(\rho, r_A(\rho), \gamma_A(\rho))$ mit Hilfe der Fourierentwicklung in (2.5.7) in einigen Fällen nur sehr ungenau darstellen. Tatsächlich müßten die maximalen Fourierordnungen $l = n_{l1}$ bzw. n_{l2} usw. ein Mehrfaches der maximalen Fourierordnung $n = n_m$ betragen, wenn die Näherung genügend genau sein soll. Das ist aber nicht möglich, da andernfalls das System (2.5.7) mehr lineare Gleichungen als Unbekannte X_m enthalten würde.

C) Methode des kleinsten Fehlerquadrates

Auch bei diesem Verfahren finden alle Randpunkte Berücksichtigung. ¹⁾ Die Integrationskonstanten X_m werden so bestimmt, daß das Integral Ψ , erstreckt über die Quadrate aller vier Fehler, welche bei der Erfüllung von (2.5.2) entstehen, ein Minimum wird. Mit (2.5.5) lautet dieses Integral:

$$\Psi = \int_0^{\rho_0} \left\{ \left[S(\rho, r_I(\rho), \gamma_I(\rho), \delta_I(\rho)) - \sum_{m=1}^{m_m} X_m \cdot S_m(\rho, r_I(\rho), \gamma_I(\rho)) \right]^2 \cdot G_I(\rho) + \right. \\ \left. + \left[T(\rho, r_I(\rho), \gamma_I(\rho), \tau_I(\rho)) - \sum_{m=1}^{m_m} X_m \cdot T_m(\rho, r_I(\rho), \gamma_I(\rho)) \right]^2 \cdot G_I(\rho) + \right. \\ \left. + \left[S(\rho, r_A(\rho), \gamma_A(\rho), \delta_A(\rho)) - \sum_{m=1}^{m_m} X_m \cdot S_m(\rho, r_A(\rho), \gamma_A(\rho)) \right]^2 \cdot G_A(\rho) + \right. \\ \left. + \left[T(\rho, r_A(\rho), \gamma_A(\rho), \tau_A(\rho)) - \sum_{m=1}^{m_m} X_m \cdot T_m(\rho, r_A(\rho), \gamma_A(\rho)) \right]^2 \cdot G_A(\rho) \right\} \cdot d\rho$$

Die Funktionen $G_I(\rho)$ und $G_A(\rho)$ sind Gewichte. An den Stellen, an denen $G_I(\rho)$ oder $G_A(\rho)$ relativ hohe Werte annimmt, wird der Randbedingung am Innen- bzw. Außenrand (auf Kosten der Genauigkeit an anderen Stellen) besonders gut genügt.

Für ρ_0 gilt wieder

| | |
|-----------------------------------|---------------------------|
| bei nicht spiegelsymmetr. Problem | $\rho_0 = \frac{2\pi}{p}$ |
| bei spiegelsymmetr. Problem | $\rho_0 = \frac{\pi}{p}$ |

1) vergl. Fußnote Seite 49

Notwendig dafür, daß Ψ bei variablen X_m ein Minimum wird, ist:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X_l} = 0 \quad l = 1, 2, \dots, m_m$$

Nach Ausführung der Differentiation und geeigneter Umstellung erhält man:

$$\sum_{m=1}^{m_m} X_m \cdot \int_0^{p_0} \left\{ [S_m(p, r_I(p), \gamma_I(p)) \cdot S_l(p, r_I(p), \gamma_I(p)) + T_m(p, r_I(p), \gamma_I(p)) \cdot T_l(p, r_I(p), \gamma_I(p))] \cdot G_I(p) + [S_m(p, r_A(p), \gamma_A(p)) \cdot S_l(p, r_A(p), \gamma_A(p)) + T_m(p, r_A(p), \gamma_A(p)) \cdot T_l(p, r_A(p), \gamma_A(p))] \cdot G_A(p) \right\} \cdot dp = \quad (2.5.8)$$

$$= \int_0^{p_0} \left\{ [S(p, r_I(p), \gamma_I(p), \delta_I(p)) \cdot S_l(p, r_I(p), \gamma_I(p)) + T(p, r_I(p), \gamma_I(p), \tau_I(p)) \cdot T_l(p, r_I(p), \gamma_I(p))] \cdot G_I(p) + [S(p, r_A(p), \gamma_A(p), \delta_A(p)) \cdot S_l(p, r_A(p), \gamma_A(p)) + T(p, r_A(p), \gamma_A(p), \tau_A(p)) \cdot T_l(p, r_A(p), \gamma_A(p))] \cdot G_A(p) \right\} \cdot dp$$

$$l = 1, 2, \dots, m_m$$

(2.5.8) stellt ein lineares Gleichungssystem dar, bestehend aus m_m Gleichungen für m_m unbekannte Integrationskonstanten X_m . Da im allgemeinen die Gleichungen voneinander linear unabhängig sind, darf davon ausgegangen werden, daß eine eindeutige Lösung für die Unbekannten X_m existiert. Am Computer durchgeführte Rechnungen für spiegelsymmetrische Probleme zeigten jedoch, daß die Koeffizientendeterminante des linearen Gleichungssystems (2.5.8) bereits für $n_m > 9$ quasi-singulär wird, obwohl doppelgenaue Zahlendarstellung (16 ÷ 17 signifikante Dezimalstellen) benutzt wurde. Da die Spannungsfelder, welche bei $n_m \leq 9$ für außenberippte Brennstabhüllrohre erzielt wurden, die Randbedingungen (2.5.2) nicht mit der verlangten Genauigkeit erfüllten, konnte auch dieses Verfahren zur Behandlung des vorliegenden Problems nicht (unmittelbar) eingesetzt werden.

In einer ausführlichen Arbeit zur Kollokationsmethode bei Randwertproblemen.

[40] führen Niedenfuhr und Leissa ebenfalls die Methode des kleinsten Fehler-

quadrates an. Die von ihnen benutzte Formulierung weicht allerdings von der hier gegebenen Formulierung erheblich ab. Insbesondere machen sie nicht das Integral über die Fehlerquadrate, sondern eine Summe über die Fehlerquadrate zum Minimum, wobei die Fehlerquadrate an vorzugebenden Randpunkten zu bilden sind. Dadurch hängt das Verfahren, ähnlich wie bei der gewöhnlichen Kollokationsmethode, von den Zufälligkeiten bei der Auswahl dieser Randpunkte ab. Hoffman und Ariman [41], sowie K. S. Rao, M. N. Bapu Rao und Ariman [42] wenden diese Methode mit Erfolg auf ebene Probleme mit zweifach zusammenhängender Körperquerschnittsfläche an. Allerdings begnügen sich diese Autoren mit $n_m < 9$, so daß die oben erwähnte Quasi-Singularität der Determinante des linearen Gleichungssystems nicht auftritt.

D) Kombinierte Methode

Nach zahlreichen Testrechnungen stellte sich heraus, daß die gleichzeitige Anwendung der Methoden B und C zur Bestimmung der Integrationskonstanten den gestellten Genauigkeitsforderungen am besten genügt. Die Testrechnungen wurden durchgeführt sowohl für Körperquerschnittsflächen, wie sie beim längsberippten Brennstabhüllrohr vorkommen, als auch für Querschnittsflächen wie sie von Takeuti und Noda [43] in ihren Untersuchungen zugrunde gelegt wurden.

Die Kombination der Methoden B und C erreicht man wie folgt:

- Es werden zunächst lineare Gleichungen des Typs (2.5.7) zur Bestimmung der Integrationskonstanten X_m angegeben. Dabei werden aber n_{l1}, n_{l2}, n_{l3} und n_{l4} so gewählt, daß die Anzahl l_m der linearen Gleichungen zur Bestimmung der m_m Integrationskonstanten X_m nicht ausreicht, d. h.

$$l_m < m_m$$

- Die restlichen Gleichungen, welche zur eindeutigen Bestimmung der Integrationskonstanten X_m benötigt werden, sind vom Typ (2.5.8). Man erhält sie, wenn man setzt:

$$l = l_m + 1, l_m + 2, \dots, m_m$$

Die kombinierte Methode vereint in sich die Vorteile der Methode B, nämlich

- die exakte Erfüllung der Randbedingungen (2.5.2), gemittelt in gewissen - je nach Wahl von n_{l1}, n_{l2}, \dots recht kleinen - Intervallen von φ

und die Vorteile der Methode C, nämlich

- möglichst kleine Abweichungen zwischen den vorgegebenen und den sich bei der Rechnung einstellenden Randspannungen, wobei hohe Fehler überproportional gewichtet werden.

Die Nachteile der Methoden B und C werden vermieden. Insbesondere darf

$$n_m > 9$$

sein, was bei komplizierteren Randkonturen und üblichen Genauigkeitsanforderungen unumgänglich ist.

Es hat sich herausgestellt, daß den Randbedingungen (2.5.2) dann am besten genügt wird, wenn man l_m gerade so klein vorgibt, d. h. gerade so viele lineare Gleichungen des Typs (2.5.8) einführt, daß sich das lineare Gleichungssystem an der Grenze der Quasi-Singularität befindet. Bei spiegelsymmetrischer Körperquerschnittsfläche und doppeltegenauer Computerrechnung (16 ÷ 17 signifikante Dezimalstellen) ist das der Fall, wenn

$$n_{l1} = n_{l2} = n_{l3} = n_{l4} = n_l = n_m - 9$$

ist.

2.6 Numerische Durchführung der elastischen Rechnung bei spiegelsymmetrischer und mindestens zweifach periodischer Körperquerschnittsfläche

Wie aus den theoretischen Untersuchungen hervorgeht, unterscheiden sich die mathematischen Formulierungen erheblich, je nachdem, ob die Probleme spiegelsymmetrisch oder nicht spiegelsymmetrisch sind und je nachdem, ob sie im Intervall $0 \leq \varphi < 2\pi$ einfach oder mehrfach periodisch sind ($p=1$ oder $2, 3, \dots$). Es ist deshalb angebracht, die numerische Behandlung für die einzelnen Fälle getrennt durchzuführen.

Im Zusammenhang mit dieser Arbeit wurde der Computercode EVAL entwickelt. Er ist einsetzbar für die Behandlung spiegelsymmetrischer, mindestens zweifach periodischer, linear-elastischer Probleme und wurde so konzipiert, daß er vor allem zur Spannungsanalyse längsberippter Brennstabhüllrohre [3, 4, 5] benutzt werden kann.

Die wichtigsten Merkmale des Codes EVAL sollen kurz erläutert werden:

Der Körperquerschnittsfläche wird ein Polarkoordinatennetz zugeordnet mit maximal $60 \cdot 2 \cdot p$ äquidistanten radialen und maximal 35 äquidistanten azimuthalen Netzlinien. In radialer Richtung werden

Dargestellt ist $\frac{1}{2}$ der Körperquerschnittsfläche eines Brennstabhüllrohres mit 6 integralen Außenrippen ($0 \leq \varphi < \frac{\pi}{p}$; $p=6$)

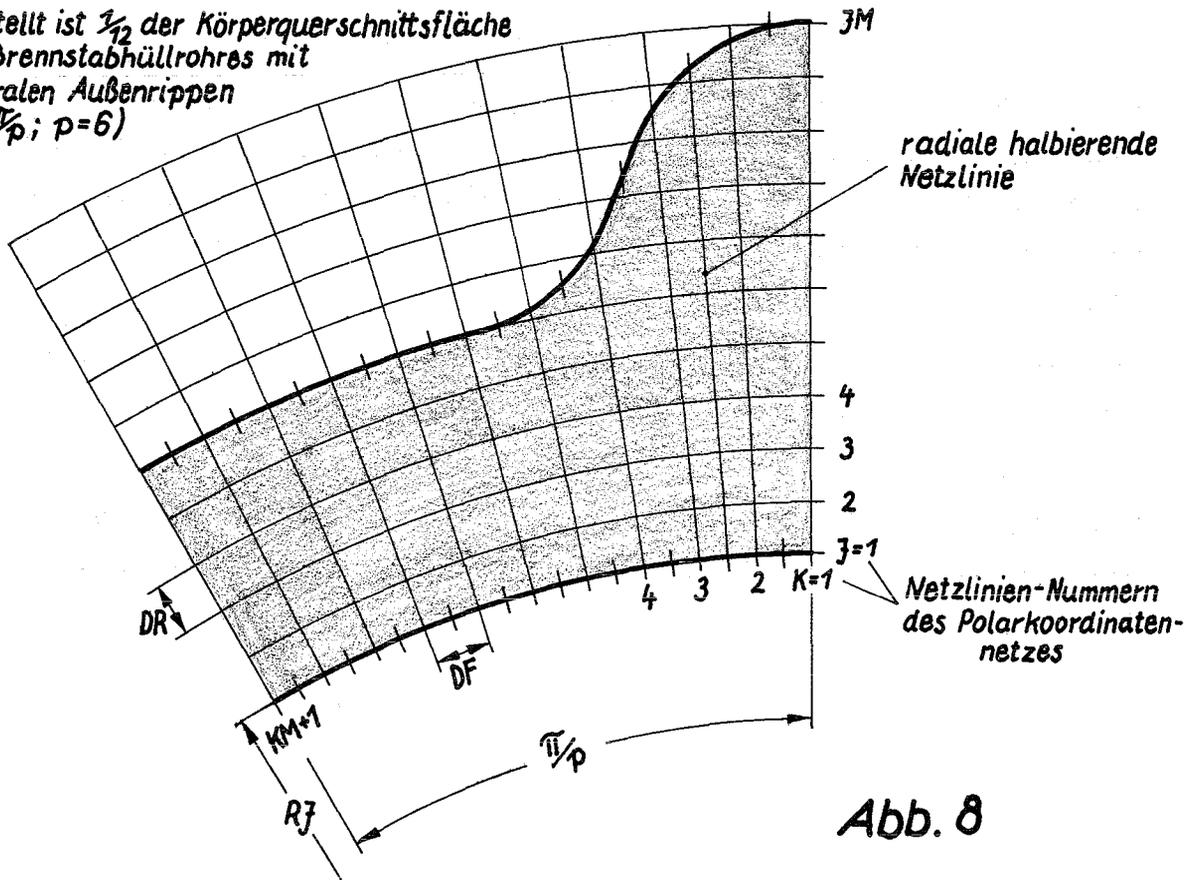


Abb. 8

die Netzlinien nummeriert mit $j=1, 2, \dots, jM$ ($jM \leq 35$), in Umfangsrichtung werden die Netzlinien nummeriert mit $K=1, 2, \dots, KM+1$ ($KM \leq 60$). Soweit Funktionen (Felder) nicht in analytischer Form angegeben sind, werden sie durch die Funktionswerte in den Schnittpunkten des Polarkoordinatennetzes dargestellt, d. h. für die Argumente der Felder gilt:

$$r \rightarrow j \quad \varphi \rightarrow K$$

Auch die Randbedingungen lassen sich im allgemeinen nur in endlich vielen Randpunkten vorgeben. Es wurde festgelegt, daß diese Randpunkte identisch sein sollen mit den Schnittpunkten zwischen der inneren bzw. äußeren Randkurve und den radialen Netzlinien, sowie den radialen halbierenden Netzlinien (siehe Abb. 8). Dies bedeutet, daß

| | |
|-------------------------------------|-------------|
| an der inneren Randkurve der Radius | $RI(K)$ |
| der Randneigungswinkel | $GAMMAI(K)$ |
| die Normalspannung | $SIGMAI(K)$ |
| die Schubspannung | $TAUI(K)$ |

| | |
|-------------------------------------|-------------|
| an der äußeren Randkurve der Radius | $RA(K)$ |
| der Randneigungswinkel | $GAMMAA(K)$ |
| die Normalspannung | $SIGMAA(K)$ |
| die Schubspannung | $TAUA(K)$ |

an je $2 \cdot KM+1$ Punkten anzugeben ist. Diese relativ hohe Punktezahl wurde gewählt, um nicht bereits bei der Vorgabe der Randbedingungen merkliche Fehler in die Rechnung einzuschleppen. Gleichzeitig mit den Randbedingungen werden auch die Gewichte $GEWI(K)$ und $GEWA(K)$ angegeben, welche bei der Auswertung der Beziehung (2.5.8) erforderlich sind.

Die Temperaturverteilung $T(r, \varphi)$, gegebenenfalls auch $Q(r, \varphi)$, werden als diskrete Felder $TEMP(j, K)$ und $Q(j, K)$ zur Verfügung gestellt.

Eine Vorstellung über den Rechnungsgang vermittelt das auf Seite 135 dargestellte Flußdiagramm. SUB01, SUB02, SUB12, ferner SUB21, SUB22, DGAUSA und HØELI sind die Namen der vorkommenden Subroutinen. SUB21, SUB22 und HØELI dienen der Datenausgabe (Ausdrucken und Plotten).

Als Zusatzverzerrungsfeld wurde nur die Volumendilatation $3 \cdot SCHW(j,K)$ zugelassen. $SCHW(j,K)$ berechnet sich wie folgt aus dem Temperaturfeld:

$$\begin{aligned} SCHW(j+1,K) = & ALPHA0 + ALPHA1 \cdot (TEMP(j,K) - TEMO) + \\ & + ALPHA2 \cdot (TEMP(j,K) - TEMO)^2 + \quad (2.6.1) \\ & + ALPHA3 \cdot (TEMP(j,K) - TEMO)^3 \end{aligned}$$

$ALPHA0, ALPHA1, ALPHA2, ALPHA3$ sowie $TEMO$ sind vorzugebende Konstanten.

Die Subroutinen, insbesondere die Routinen SUB09 und SUB10 sind so konzipiert, daß sie auch bei beliebigen Zusatzverzerrungsfeldern $\epsilon_{rr}^z, \epsilon_{\theta\theta}^z, \epsilon_{zz}^z, \epsilon_{r\theta}^z$ eingesetzt werden können. (Dies ist deswegen erforderlich, weil bei den später folgenden plastischen Rechnungen, bei denen allgemeine Zusatzverzerrungsfelder auftreten, weitgehend dieselben Subroutinen verwendet werden sollen).

Die Störfunktion $Q(j,K)$ der Bipotentialgleichung wird, wenn sie nicht vorgegeben ist, gemäß Gleichung (2.3.3) aus den Zusatzverzerrungsfeldern bzw. dem Feld der Volumendilatation gewonnen (SUB09). Die hierbei auftretenden Differentialquotienten werden durch entsprechende Differenzenquotienten ersetzt. Um diese Differenzenquotienten auch am Rand der Körperquerschnittsfläche bilden zu können, müssen die Zusatzverzerrungsfelder bzw. das Feld der Volumendilatation am Innen- und Außenrand um ca. eine radiale Maschenbreite extrapoliert werden (kubische Extrapolation). Das würde bedeuten, daß z. B. bei $SCHW(j,K)$ der erste Index die Nummern $j = 0, 1, 2, \dots, jM+1$ annehmen kann. Da jedoch die kleinste zulässige Nummer, die ein Index annehmen darf, $j=1$ ist, wird wie folgt umbenannt:

$$\begin{array}{ccc} SCHW(j,K) & j = 0, 1, 2, \dots, jM+1 & \\ \downarrow & \downarrow & \\ SCHW(j+1,K) & j = 1, 2, 3, \dots, jM+2 & \end{array}$$

Entsprechendes geschieht mit den Verzerrungsfeldern. (EVA2)

Eine weitere Folge der zweimaligen Differentiation ist, daß kleine Fehler bei der Vorgabe des Temperaturfeldes, große Fehler beim Feld $Q(j,K)$ verursachen können. Um solche Fehler soweit es geht auszuschalten, werden je nachdem, ob $Q(j,K)$ bekannt bzw. nicht bekannt ist, ob $\Delta(T)$ verschwindet bzw. nicht

verschwindet, oder ob zwischen $TEMP(j,K)$ und $SCHW(j,K)$ ein linearer oder nicht linearer Zusammenhang besteht, insgesamt 6 Fälle unterschieden ($NEING2 = 0,1,2,3,4,5$). Je nach dem vorliegenden Fall, muß $Q(j,K)$ vorgegeben oder nicht vorgegeben werden. Bei $NEING2 = 0$ (kein Wärmespannungsproblem) wird sogar auf die Vorgabe von $TEMP(j,K)$ verzichtet.

Um $Q(j,K)$ durch die in Abschnitt 2.4 angegebene analytische Funktion darstellen zu können, muß der Definitionsbereich von $Q(j,K)$ auf die in Abb. 5 angegebene Ringfläche (Radien r_1, r_2) erweitert werden (SUB10). Theoretisch ist der Verlauf von $Q(j,K)$ im fiktiven Teil des Definitionsbereiches ohne Einfluß auf das Ergebnis. Bei der numerischen Rechnung dagegen ist sehr wohl ein Einfluß vorhanden. ¹⁾

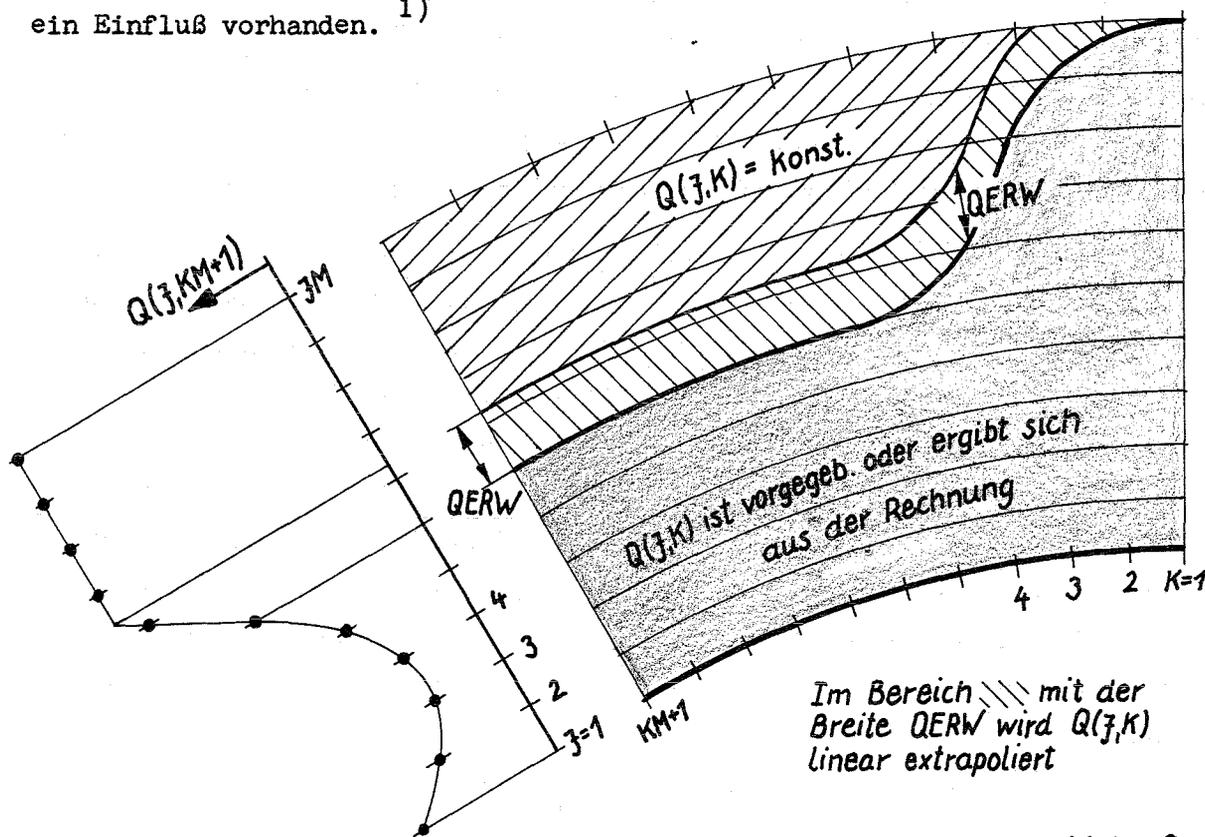


Abb. 9

1) Der Einfluß rührt daher, daß $Q(j,K)$ - wie in Abschnitt 2.4 dargelegt - in eine analytische Form gebracht werden muß. Der hierbei an irgendeinem Punkt (j,K) entstehende Fehler hängt aber ab von dem Verlauf von $Q(j,K)$ auf der gesamten Ringfläche. Vergl. hierzu auch die folgenden Ausführungen.

Anhand zahlreicher Testrechnungen ergab sich, daß es zweckmäßig ist, die Erweiterung des Definitionsbereiches von $Q(j,K)$, wie in Abb. 9 dargestellt, vorzunehmen. $QERW$ soll die Größenordnung von DR haben.

Die Koeffizienten P_{ni} in der analytischen Ersatzfunktion für $Q(j,K)$ - siehe Abschnitt 2.4 - werden im Code EVAL wie folgt benannt:

$$P_{ni} \longrightarrow P(i+1, n+1) \longrightarrow P(I+1, N+1)$$

Dadurch ist gewährleistet, daß alle Indizes stets größer Null sind. Es ist häufig zweckmäßig, zu verlangen

$$P(I+1, N+1) = 0 \quad \text{für } N > n_p$$

$n_p \leq n_m$ ist die maximale Fourier-Ordnung der Störfunktion (2.4.2)

Die Koeffizienten $P(I+1, N+1)$ werden so bestimmt (SUB11), daß

$$\sum_{j=1}^{j_m} \left[\sum_{I=1}^{i_m} P(I+1, N+1) \cdot R^{I-1} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(R, \rho) \cdot \cos(N \cdot \rho \cdot \rho) d\rho \right]^2 \cdot GEWP(j) \quad N=0,1,\dots,n_m \quad (2.6.2)$$

zum Minimum wird.

R ist der Radius der j -ten azimuthalen Netzlinie, $R = R_j + DR \cdot (j-1)$. Die Erfüllung der Bedingung (2.6.2) gewährleistet, daß die Näherung (2.4.2) relativ gut ist. Durch Vorgabe verschiedener Gewichte $GEWP(j)$ kann man erreichen, daß die Näherung in gewissen Bereichen für R besonders gut wird auf Kosten der Genauigkeit in anderen Bereichen. Das Feld der Fehler, welches bei der Einführung der analytischen Ersatzfunktion für $Q(j,K)$ entsteht, wird zur Kontrolle ausgedruckt.

Testrechnungen bestätigen die bekannte Tatsache, daß

$$i_m \leq 8$$

sein muß. Andernfalls wird das aufzulösende lineare Gleichungssystem, selbst bei doppeltgenauer Computerrechnung, quasi-singulär.

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten α_{04} - im Code wird sie $A04$ genannt - ist nach Formel (2.5.1) eine Integration längs eines Kreises erforderlich. Der Radius R dieses Kreises ist beliebig, d. h. $A04$ darf von R nicht abhängen. Der Kreis muß jedoch innerhalb der Körperquerschnittsfläche verlaufen. Bei der numerischen Bestimmung von $A04$ (SUB10) ergibt sich dagegen, im Gegensatz zur Theorie, eine gewisse Abhängigkeit von R . Dieser Fehler ist auf den Umstand zurückzuführen, daß die Koeffizienten $P(I+1,1)$, welche ebenfalls in die Formel zur Bestimmung von $A04$ eingehen, das Feld $Q(J,K)$ nur näherungsweise beschreiben. Um diesen Fehler weitgehend zu eliminieren, wird $A04$ bei mehreren Radien R bestimmt (alle azimutalen Netzlinien, die innerhalb der Körperquerschnittsfläche verlaufen und den Randkurven nicht zu nahe kommen, sind Integrationskurven). Aus all diesen Werten für $A04$ wird der Mittelwert genommen.

Zur Erzielung der partikulären Lösungen werden in SUB10 die Koeffizienten $P(I+1, N+1)$ durch $M\emptyset DP(I+1, N+1)$ dividiert. $M\emptyset DP(I+1, N+1)$ ist identisch mit den Divisoren von P_{ni} in der ersten Formel von (2.4.4).

Die partikuläre Lösung $\hat{A}_n(r)$ und ihre erste und zweite Ableitung nach dem Polarradius heißen im Code EVAL:

$$\hat{A}_n(r) \rightarrow AA0 \quad \hat{A}'_n(r) \rightarrow AA1 \quad \hat{A}''_n(r) \rightarrow AA2$$

Sie werden mit Hilfe der Subroutine SUBO3 als Funktion des Polarradius R und der Fourierordnung N berechnet.

Die maximale Fourierordnung n_m der Airyschen Spannungsfunktion ist:

$$n_m \leq 28$$

Nach Abschnitt 2.5 ist demnach die Zahl m_m der zu bestimmenden Integrationskonstanten X_m :

$$m_m = 4 \cdot n_m + 2 \leq 114$$

Die Integrationskonstante $A04$ wurde hierbei nicht mitgezählt.

Die errechneten Spannungsverteilungen $\sigma_{rr}(r, \varphi)$, $\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi)$, $\sigma_{zz}(r, \varphi)$, $\sigma_{r\varphi}(r, \varphi)$ und $\sigma_v(r, \varphi)$ werden in den Schnittpunkten des Polarkoordinatennetzes ausgedruckt. $\sigma_v(r, \varphi)$ ist die Vergleichsspannung, berechnet nach v. Mises. Im Code EVAL werden bezeichnet:

- $\sigma_{rr} \rightarrow SRR(J, K)$
- $\sigma_{\varphi\varphi} \rightarrow SFF(J, K)$
- $\sigma_{zz} \rightarrow SZZ(J, K)$
- $\sigma_{r\varphi} \rightarrow SRF(J, K)$
- $\sigma_v \rightarrow SVE(J, K)$

Das Vergleichsspannungsfeld kann mit Hilfe einer Plotausgabe (HØELI) als Höhenlinienfeld dargestellt werden.

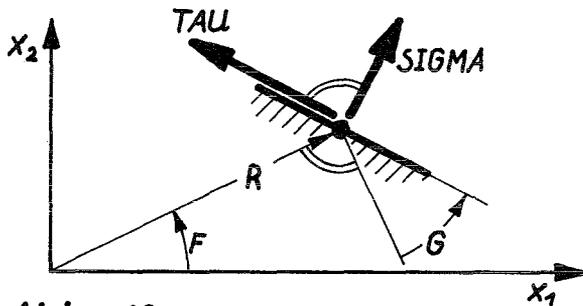


Abb. 10

Die Subroutine SUBO6 liefert die Normalspannung SIGMA und die Schubspannung TAU in jedem Punkt (R, F) der Körperquerschnittsfläche und für jeden Neigungswinkel G (Abb. 10)

Mit Hilfe von SUBO6 und SUB22 werden die Randspannungen SIGMA-NØRMAL, SIGMA-TANG., SIGMA-AXIAL, TAU-TANG. und die Vergleichsspannung

(nach v. Mises) ausgedruckt. Auf Wunsch können diese Spannungen auch als Funktion des Umfangswinkels geplottet werden.

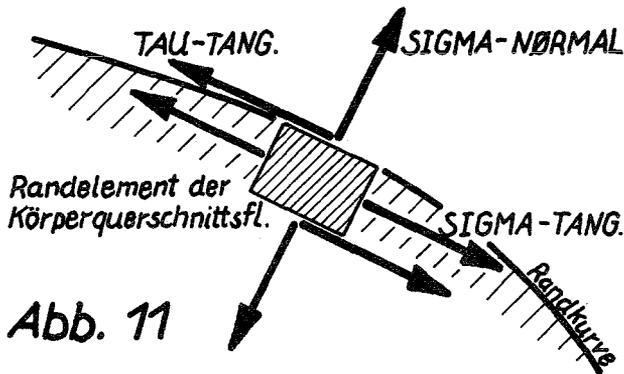


Abb. 11

Die Randspannungen SIGMA-NØRMAL und TAU-TANG. weichen von den vorgegebenen Werten SIGMAI und TAUI am Innenrand, bzw. SIGMAA und TAUA am Außenrand ab. Für diese abweichenden Spannungen, sowie für ein Q-Feld,

das von dem vorgegebenen Feld $Q(j,K)$ im allgemeinen ebenfalls etwas abweicht, gelten die erzielten Ergebnisse exakt. Beide Abweichungen gehen aus den Ausdrücken, die der Code EVAL liefert, eindeutig hervor. Man vergleiche hierzu die Bedingung (2.6.2) mit den nachfolgenden Bemerkungen, sowie den entsprechenden Ausführungen in Abschnitt 1.4.

Der Code EVAL benötigt ein Kernspeichervolumen von etwa 300 K. Die Rechenzeiten auf der IBM 360/85 liegen selbst bei komplizierten Problemen ($n_m = 28$) meist unter einer Minute.

3. BEHANDLUNG DES PROBLEMS BEI PLASTISCHEM WERKSTOFFVERHALTEN

3.1 Das Stoffgesetz bei kriechendem Werkstoff

Das Stoffgesetz für Werkstoffe, bei denen neben linear-elastischem Verhalten auch Kriechen auftritt, kann wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} [d\sigma_{rr} - \nu \cdot (d\sigma_{\varphi\varphi} + d\sigma_{zz})] + d\varepsilon_{rr}^z \\ d\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{E} [d\sigma_{\varphi\varphi} - \nu \cdot (d\sigma_{rr} + d\sigma_{zz})] + d\varepsilon_{\varphi\varphi}^z \\ d\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [d\sigma_{zz} - \nu \cdot (d\sigma_{rr} + d\sigma_{\varphi\varphi})] + d\varepsilon_{zz}^z \\ d\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1+\nu}{E} \cdot d\sigma_{r\varphi} + d\varepsilon_{r\varphi}^z \end{aligned}$$

mit

(3.1.1)

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{rr}^z &= d\beta + d\varepsilon_{rr}^I + d\varepsilon_{rr}^{II} \\ d\varepsilon_{\varphi\varphi}^z &= d\beta + d\varepsilon_{\varphi\varphi}^I + d\varepsilon_{\varphi\varphi}^{II} \\ d\varepsilon_{zz}^z &= d\beta + d\varepsilon_{zz}^I + d\varepsilon_{zz}^{II} \\ d\varepsilon_{r\varphi}^z &= d\varepsilon_{r\varphi}^I + d\varepsilon_{r\varphi}^{II} \end{aligned}$$

β ist die durch das Temperaturfeld aufgeprägte Volumendilatation.

$$\varepsilon_{rr}^I, \varepsilon_{\varphi\varphi}^I, \varepsilon_{zz}^I, \varepsilon_{r\varphi}^I$$

sind die Verzerrungsfelder infolge thermischen Kriechens.

$$\varepsilon_{rr}^{II}, \varepsilon_{\varphi\varphi}^{II}, \varepsilon_{zz}^{II}, \varepsilon_{r\varphi}^{II}$$

sind die Verzerrungsfelder infolge strahlungsinduzierten Kriechens.

Das Symbol "d" bedeutet "differentielle Änderung".

A) Thermisches Kriechen

Setzt man mit Odqvist / Hult [11] voraus,

- daß während des thermischen Kriechens keine Volumenänderung auftritt,
- daß die Änderungen der Kriechverzerrungen von einem überlagerten hydrostatischen Druck nicht beeinflußt werden,

- daß der Werkstoff isotrop ist,
- daß von den drei Invarianten des Spannungstensors nur die zweite Invariante des Spannungsdeviators auf die Änderungen der Kriechverzerrungen Einfluß haben soll, ¹⁾
- daß die Elemente des Spannungstensors im übrigen nur linear auftreten,
- daß schließlich die Geschichte der Beanspruchung allein in Form der sog. Dehnungs- bzw. Zeitverfestigung Einfluß haben soll,

so gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_{rr}^I &= f(\sigma_v, \varepsilon_v, t, T) \cdot [\sigma_{rr} - \frac{1}{2}(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})] \cdot dt \\
 d\varepsilon_{\varphi\varphi}^I &= f(\sigma_v, \varepsilon_v, t, T) \cdot [\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] \cdot dt \\
 d\varepsilon_{zz}^I &= f(\sigma_v, \varepsilon_v, t, T) \cdot [\sigma_{zz} - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})] \cdot dt \\
 d\varepsilon_{r\varphi}^I &= f(\sigma_v, \varepsilon_v, t, T) \cdot \frac{3}{2}\sigma_{r\varphi} \cdot dt
 \end{aligned}
 \tag{3.1.2}$$

- σ_v ist die Vergleichsspannung nach v. Mises. Sie ist eine Funktion der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators
- ε_v ist die Vergleichsdehnung nach v. Mises
- t ist die Zeit
- T ist die Temperatur

Die an vierter Stelle genannte Voraussetzung, welche auf die Mehrachsigkeit der Beanspruchung Bezug nimmt, stimmt nicht immer mit den experimentellen Ergebnissen überein, was zur Folge hat, daß es mitunter richtiger ist, die Vergleichsspannung σ_v nach Mohr zu bestimmen. Closs und Schäfer [52] wiesen jedoch anhand entsprechender Versuche nach, daß bei Brennstabhüllrohren, unter den üblichen Verhältnissen, die vierte Bedingung mit ausreichender Genauigkeit erfüllt ist.

Die Argumente ε_v und t beschreiben die Verfestigung des Werkstoffes (welche beim Primärkriechen auftritt). Verschwinden diese Argumente, so spricht man von Sekundärkriechen. In den Anwendungen wird der Einfachheit halber und mangels geeigneter Stoffdaten häufig angenommen, daß ausschließlich Sekundärkriechen vorliegen möge.

1) Wegen der ersten Bedingung darf die erste Invariante keinen Einfluß haben.

Bei sog. mechanisch stabilen Werkstoffen ist - wie theoretische Überlegungen zeigen - die Verfestigung allein eine Funktion der Verformung, d. h. Primärkriechen ist im allgemeinen mit Hilfe der Dehnungsverfestigungstheorie zu beschreiben [11]. In der Funktion f in (3.1.2) tritt dann die Zeit t nicht mehr explizit auf.

Bei sog. mechanisch instabilen Werkstoffen - das sind Werkstoffe, bei denen während des Kriechens Ausscheidungen, Rekristallisation, Phasenänderung und dgl. stattfinden - tritt dagegen im allgemeinen (auch) Zeitverfestigung auf. Gerade Brennstabhüllrohre, für die das zu entwickelnde Rechenprogramm vorwiegend eingesetzt werden soll, bestehen häufig aus Werkstoffen, die bei den vorliegenden Bedingungen (Temperaturfeld, Neutronenfluß) mechanisch instabil sind. Geeignete Daten zur Beschreibung der Zeitverfestigung liegen jedoch bei diesen Werkstoffen nur in sehr beschränktem Ausmaß vor [52]. Noch weniger liegen solche Daten zur Beschreibung der Dehnungsverfestigung vor.

Aus diesem Grunde wird im folgenden die Dehnungsverfestigung ausgeschlossen, zumal die numerische Behandlung dadurch etwas weniger umfangreich wird, d. h. in der Funktion f , Gl. (3.1.2) kommt das Argument ϵ_v nicht mehr vor. ¹⁾

Man hat jedoch zu beachten, daß bei der Zeitverfestigung das kommutative Gesetz im allgemeinen nicht gilt [11]. Darüber hinaus legen gewisse Versuchsergebnisse und theoretische Überlegungen die Vermutung nahe, daß auch bei Temperaturschwankungen das kommutative Gesetz nicht gilt. Trotzdem wird in der hier vorliegenden Arbeit durchweg das kommutative Gesetz zugrunde gelegt. Abweichungen von diesem Gesetz können gegebenenfalls durch Modifikation der Kriechparameter simuliert werden.

B) Strahlungsinduziertes Kriechen

In allen zu diesem Thema veröffentlichten Arbeiten [6, 7, 12] weisen die Autoren darauf hin, daß die derzeit vorliegenden Daten über das strahlungsinduzierte Kriechen noch sehr lückenhaft und fehlerbehaftet sind.

1) Im Prinzip würde die Berücksichtigung der Dehnungsverfestigung keine Schwierigkeiten machen. Sogar die Benutzung allgemeinerer Kriechgesetze, als (3.1.2), ist bei dem hier in Anwendung kommenden Rechenverfahren ohne weiteres möglich.

In der Arbeit von Gilbert und Straalsund [12] wird ein Kriechgesetz des folgenden Typs vorgeschlagen:

$$d\varepsilon_{ij}^{\pi} = [\alpha(\phi, t, T) \cdot \delta_{ij} + \beta(\phi, t, T) \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})] \cdot dt$$

$i, j = 1, 2, 3$, die Spannungen und Verzerrungen sind in kartesischen Koordinaten angegeben. δ_{ij} ist das Kronecker Symbol.

ϕ ist der Neutronenfluß.

Da es mangels geeigneter Daten derzeit nicht möglich ist, jede der beiden Funktionen $\alpha(\phi, t, T)$ und $\beta(\phi, t, T)$ für sich anzugeben, nehmen Gilbert und Straalsund an, daß das Verhältnis $\beta(\phi, t, T)/\alpha(\phi, t, T)$ konstant ist. Unter dieser Voraussetzung erhalten sie nach Auswertung von Versuchsergebnissen

$$\frac{\beta(\phi, t, T)}{\alpha(\phi, t, T)} = 9$$

Boltax, et al. [7] geben für dieses Verhältnis denselben Wert an.

Dies bedeutet, daß sich bei einem Zugstab die Dehnung in Zugrichtung zur Dehnung in Querrichtung verhält wie 4 : 3. Im Gegensatz zur bekannten Querkontraktion bei elastischem Stoffverhalten, haben beide Dehnungen dasselbe Vorzeichen, d. h. der Durchmesser des Zugstabes vergrößert sich bei anliegender Spannung. Das strahlungsinduzierte Kriechen stellt also eine Volumenänderung dar, die - fast unabhängig von der Richtung der angelegten Spannungen - nahezu gleichmäßig nach allen Seiten erfolgt.

Bei Druckstäben würde das bedeuten, daß der Durchmesser der Stäbe sich verkleinert bei angelegter Druckspannung. Dies steht aber im Widerspruch zu den allgemeinen Erkenntnissen über das Stoffverhalten. Im Gegensatz zu Claudson [6] und Boltax et al. [7] weisen Gilbert und Straalsund in ihrer Arbeit auch darauf hin, daß das von ihnen angegebene Kriechgesetz nicht ohne weiteres im Druckspannungsbereich $(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) < 0$ Gültigkeit haben wird. Versuchsergebnisse für diesen Bereich seien aber derzeit noch nicht verfügbar.

Bei der Formulierung eines Gesetzes, welches das strahlungsinduzierte Kriechen auch im Druckspannungsbereich richtig beschreibt, wird man eine Annahme, die gegenwärtig von fast allen Autoren zugrunde gelegt wird, nicht streng aufrecht

erhalten können. Diese Annahme besagt, daß die Beziehungen zwischen den Kriechverzerrungsraten und den Spannungen linear sind, das bedeutet, daß α und β keine Funktionen der Invarianten des Spannungstensors sind. ¹⁾

Da bei den hier durchzuführenden Rechnungen das (mehrachsige) strahlungsinduzierte Kriechen auch im Bereich der Druckspannungen beschrieben werden muß, wird, solange keine besseren Kenntnisse zur Verfügung stehen, die Funktion β durch die Funktion β^* ersetzt, mit:

$$\beta^* = \beta^*(\phi, t, T, \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})) = \begin{cases} \beta(\phi, t, T) & \text{für } \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \geq 0 \\ 0 & \text{für } \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) < 0 \end{cases}$$

$\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ ist die erste Invariante des Spannungstensors.

Damit läßt sich das Stoffgesetz für das strahlungsinduzierte Kriechen wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{rr}^{\text{II}} &= g(\phi, t, T) \cdot \{C_2 \cdot [\sigma_{rr} - \frac{1}{2}(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})] + C_3^* \cdot \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})\} \cdot dt \\ d\varepsilon_{\varphi\varphi}^{\text{II}} &= g(\phi, t, T) \cdot \{C_2 \cdot [\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] + C_3^* \cdot \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})\} \cdot dt \\ d\varepsilon_{zz}^{\text{II}} &= g(\phi, t, T) \cdot \{C_2 \cdot [\sigma_{zz} - \frac{1}{2}(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr})] + C_3^* \cdot \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})\} \cdot dt \\ d\varepsilon_{r\varphi}^{\text{II}} &= g(\phi, t, T) \cdot \frac{3}{2} \cdot C_2 \cdot \sigma_{r\varphi} \cdot dt \end{aligned}$$

mit

(3.1.3)

$$C_3^* = \begin{cases} C_3 & \text{für } \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \geq 0 \\ 0 & \text{für } \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) < 0 \end{cases}$$

C_2 und C_3 sind Konstante. Wie man leicht bestätigt, entspricht dem Verhältnis $\beta/\alpha = 9$ das Verhältnis $C_3/C_2 = 15$.

An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, daß das Stoffgesetz für das strahlungsinduzierte Kriechen bei $(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) < 0$ zwar mit bekannten

1) Unmittelbare Funktionen der Elemente des Spannungstensors dürfen die Koeffizienten α und β nicht sein, da sich sonst der Werkstoff nicht mehr isotrop verhalten würde. Auf der anderen Seite werden aber α und β im allgemeinen noch vom jeweiligen Verformungszustand abhängen (Dehnungsverfestigung).

Gesetzen nicht im Widerspruch steht, daß seine Formulierung in diesem Bereich aber auf spekulativen - allenfalls plausiblen - Überlegungen aufbaut. Die Rechenergebnisse, welche unter Verwendung von (3.1.3) erzielt werden, sind deswegen außergewöhnlich unsicher. Rechnungen mit einer für technische Zwecke tragbaren Unsicherheit können erst durchgeführt werden, wenn das Werkstoffverhalten (bei strahlungsinduziertem Kriechen) genauer bekannt ist. Wie im Abschnitt 3.3 dargelegt wird, wurden die Rechenprogramme so aufgebaut, daß Änderungen auch in der Struktur der Beziehungen (3.1.3) sehr leicht vorgenommen werden können.

C) Aufgeprägte Volumendilatation

β möge sich wie folgt berechnen:

$$\beta = \alpha \cdot T + h(T) \cdot \alpha_s(\phi, t) \quad (3.1.4)$$

Das erste Glied in (3.1.4) stellt die bekannte Wärmedehnung dar mit dem Wärmeausdehnungskoeffizienten α .

Das zweite Glied stellt das Werkstoffschwellen dar, welches durch Bestrahlung im schnellen Neutronenfluß hervorgerufen wird. Hierbei wurde angenommen, daß die in (3.1.4) vorgenommene Aufspaltung in das Produkt zweier Funktionen zulässig ist. Durch Vergleich mit den beispielsweise von Claudson [6] und Boltax et al. [7] angegebenen Schwellformeln bestätigt man, daß dies bei 20 % kaltverformtem Stahl AISI 316 tatsächlich zulässig ist. In anderen Fällen sind gewisse Vernachlässigungen erforderlich um die Aufspaltbarkeit zu erzielen.

Auch die Daten für das Werkstoffschwellen sind nach [6, 7] zur Zeit noch mit großer Unsicherheiten behaftet. Boltax et al. [7] geben die Größenordnung des Fehlers mit etwa ± 50 % an.

Besonders fragwürdig ist, ob so starke Schwellgradienten, wie sie sich rein rechnerisch infolge der Temperaturgradienten in Brennstabhüllrohren ergeben, tatsächlich auftreten können.

3.2 Schrittweise Lösung des Problems bei kriechendem Werkstoff

Um das in Abschnitt 1.1 definierte Problem bei linear-elastischem Werkstoffverhalten und gleichzeitigem Werkstoffkriechen beschreiben zu können, hat man in dem Grundgleichungssystem (Abschnitt 2.1) lediglich das Stoffgesetz (2.1.3) durch das Stoffgesetz (3.1.1) mit (3.1.2), (3.1.3) und (3.1.4) zu ersetzen. Die weitere mathematische Behandlung kann dann genau so vorgenommen werden wie im linear-elastischen Fall. Anstelle der Spannungen und Verzerrungen treten nur die zugehörigen differentiellen Änderungen. Bei den Randbedingungen bedeutet dies, daß

$$\begin{array}{ll} \sigma_I \longrightarrow \frac{\partial \sigma_I}{\partial t} \cdot dt & \tau_I \longrightarrow \frac{\partial \tau_I}{\partial t} \cdot dt \\ \sigma_A \longrightarrow \frac{\partial \sigma_A}{\partial t} \cdot dt & \tau_A \longrightarrow \frac{\partial \tau_A}{\partial t} \cdot dt \end{array}$$

übergeht. Entsprechendes gilt für die aufgeprägte Volumendilatation.

Bei der Durchführung der Analyse zeigt sich aber, daß die Integrationskonstante a_{04} , gegebenenfalls auch a_{14} und b_{14} , Gl. (2.5.1), sowie die auf den rechten Seiten der Randbedingungen (2.5.2) auftretenden Funktionen S und T nicht explizit angegeben werden können, da die Störfunktion $Q(r, \rho)$ der Bipo-tentialgleichung nicht bekannt ist. In den Gleichungen (2.5.1) zur Bestimmung von a_{04} , a_{14} und b_{14} und in den Gleichungen (2.5.3) zur Bestimmung der Funktionen S und T treten nämlich die Koeffizienten P_{0i} , P_{1i} und \bar{P}_{1i} bzw. die Funktionen $\hat{A}_n(r)$ und $\hat{B}_n(r)$ samt ihren ersten und zweiten Ableitungen auf. Wie die folgende Übersicht zeigt, berechnen sich diese Koeffizienten und Funktionen aus der Spannungsverteilung σ .

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{A}_n(r) & \longrightarrow & P_{ni} & \longrightarrow & Q(r, \rho) & \longrightarrow & d\varepsilon^z & \longrightarrow & \sigma \\ \hat{B}_n(r) & \longrightarrow & \bar{P}_{ni} & & & & & & \\ & & (2.4.4) & & (2.4.2) & & (2.3.2) & & (3.1.1) \\ & & & & & & & & \text{mit (3.1.2)} \\ & & & & & & & & \text{mit (3.1.3)} \end{array}$$

$$n=(0,1,2,\dots); \quad i=0,1,2,\dots,i_m$$

Die Pfeile bedeuten soviel wie "ergeben sich aus". Die dazu erforderliche Beziehung ist unter den Pfeilen angegeben. ε^z ist das Symbol für die Zusatzverzerrungsfelder $\varepsilon_{rr}^z, \varepsilon_{\varphi\varphi}^z, \varepsilon_{zz}^z, \varepsilon_{r\varphi}^z$ und σ ist das Symbol für die Spannungsfelder $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\varphi}$.

Da jedoch die differentiellen Änderungen $d\sigma$ der Spannungsverteilung unbekannt sind - gerade sie sollen ja bestimmt werden - ist auch die Spannungsverteilung selbst unbekannt. Das lineare Gleichungssystem, welches bei linear-elastischem Werkstoffverhalten zu lösen war, ist demnach in ein nichtlineares, gekoppeltes Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit Ableitungen nach der Zeit übergegangen.

Sämtliche Differentialgleichungen dieses Systems sind vom folgenden Typ, oder können auf diesen Typ gebracht werden:

$$d\sigma = F(d\varepsilon^z(\sigma(t))) \cdot dt$$

Da - wie man sieht - Differentiale nur linear vorkommen, läßt sich eine Näherungslösung leicht durch schrittweise Rechnung erzielen.

Berücksichtigt man, daß gemäß Abschnitt 1.1 alle Funktionen eindeutig und stetig nach der Zeit ableitbar sind, so ist

$$\frac{d\sigma}{dt} = F(d\varepsilon^z(\sigma(t)))$$

Ferner gilt aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$\begin{aligned}\sigma(t+\Delta t) &= \sigma(t) + \Delta t \cdot \frac{d\sigma}{dt}(t + \nu \cdot \Delta t) \\ &= \sigma(t) + \Delta t \cdot F(d\varepsilon^z(\sigma(t + \nu \cdot \Delta t)))\end{aligned}$$

$$\text{oder mit } \Delta t \cdot F(d\varepsilon^z(\sigma(t + \nu \cdot \Delta t))) = \Delta\sigma(\Delta\varepsilon^z(\sigma(t + \nu \cdot \Delta t)))$$

$$\sigma(t+\Delta t) = \sigma(t) + \Delta\sigma(\Delta\varepsilon^z(\sigma(t + \nu \cdot \Delta t)))$$

$\Delta\sigma(\Delta\varepsilon^z(\sigma(t + \Delta t)))$ steht - wie man leicht bestätigt - für die Lösung des Problems bei den Randbedingungen

$$\begin{array}{ll}\sigma_I \longrightarrow \sigma_I(t+\Delta t) - \sigma_I(t) & \tau_I \longrightarrow \tau_I(t+\Delta t) - \tau_I \\ \sigma_A \longrightarrow \sigma_A(t+\Delta t) - \sigma_A(t) & \tau_A \longrightarrow \tau_A(t+\Delta t) - \tau_A\end{array}$$

und der Volumendilatation

$$\beta \longrightarrow \beta(t+\Delta t) - \beta(t)$$

Die Störfunktion $Q(r, \rho)$ und damit die Koeffizienten P_{ni} und \bar{P}_{ni} sowie die Funktionen $\hat{A}_n(r)$ und $\hat{B}_n(r)$ ergeben sich mit Hilfe von (3.1.1), (3.1.2) und (3.1.3) aus der Spannungsverteilung zum Zeitpunkt $t + \nu \Delta t$. Man hat hierbei das Differential-Symbol d durch das Differenzensymbol Δ zu ersetzen. (Der Parameter ν wird im allgemeinen in jedem Punkt der Körperquerschnittsfläche einen anderen Wert annehmen, mit der Einschränkung $0 < \nu < 1$)

Daraus ergibt sich folgende Näherungsformel

$$\sigma(t + \Delta t) \approx \sigma(t) + \Delta \sigma(\Delta \varepsilon^z(\sigma(t))) \quad (3.2.1)$$

mit der Eigenschaft, daß der relative Fehler durch Vorgabe ausreichend kleiner Zeitschritte $\Delta t > 0$ jede gewünschte, von Null verschiedene Fehlerschranke unterschreitet.

Da in der Regel $\nu \approx 0,5$ ist und die Funktionen $\varepsilon^z(\sigma(t))$ im Intervall Δt nahezu linear sind, liefert die folgende Iteration eine wesentlich bessere Näherung:

$$\sigma(t + \Delta t) \approx \sigma(t) + \Delta \sigma(\Delta \varepsilon^z(\sigma(t))) \quad (3.2.2)$$

$$\sigma_{\text{Iterat}}(t + \Delta t) \approx \sigma(t) + \Delta \sigma\left(\frac{1}{2} \Delta \varepsilon^z(\sigma(t)) + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon^z(\sigma(t + \Delta t))\right)$$

$\sigma(t + \Delta t)$ ist hierbei eine vorläufige Spannungsverteilung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$. $\sigma_{\text{Iterat}}(t + \Delta t)$ ist eine iterativ verbesserte Spannungsverteilung. Es ist jedoch nicht sinnvoll weitere Iterationen durchzuführen, da hierbei keine Konvergenz zur richtigen Spannungsverteilung erfolgt.

Mit (3.2.1) bzw. (3.2.2) lassen sich Näherungen für die sich einstellenden Spannungs- und Verzerrungsfelder durch schrittweise Rechnung erzielen, denn zur Bestimmung von $\Delta \sigma(\Delta \varepsilon^z(\sigma(t)))$ und damit zur Bestimmung von $\sigma(t + \Delta t)$ ist nur das Spannungsfeld $\sigma(t)$ bzw. das Verzerrungsfeld $\Delta \varepsilon^z(t)$ erforderlich.

Weiter sind zur Bestimmung von $\sigma_{\text{Iterat}}(t + \Delta t)$ nur die Spannungsfelder $\sigma(t)$ und $\sigma(t + \Delta t)$ bzw. die Verzerrungsfelder $\Delta \varepsilon^z(t)$ und $\Delta \varepsilon^z(t + \Delta t)$ erforderlich.

In Abschnitt 1.4 wurde bereits ausführlich auf die Arbeit von Platus [45] eingegangen, wo im Prinzip das gleiche schrittweise Rechenverfahren benutzt wird. Eine (einmalige) iterative Verbesserung der Lösung nach jedem Zeitschritt, wie sie oben empfohlen wird, nimmt Platus allerdings nicht vor. Er äußert vielmehr mit Lin [53] die Ansicht, daß die schrittweise Näherungsmethode der iterativen Näherung überlegen ist.

3.3 Numerische Durchführung der Kriechrechnung bei spiegelsymmetrischer und mindestens zweifach periodischer Körperquerschnittsfläche

Die numerische Durchführung der Kriechrechnung erfolgt in enger Anlehnung an die numerische Durchführung der Rechnung für linear-elastische Probleme (Abschnitt 2.6). Ebenso wie beim linear-elastischen Werkstoffverhalten wurde auch für den Fall des Kriechens ein Computercode entwickelt, der nur für die Behandlung spiegelsymmetrischer, mindestens zweifach periodischer Probleme eingesetzt werden kann. Den besonderen Belangen bei der Spannungsanalyse von längsberippten Brennstabhüllrohren wurde auch hier Rechnung getragen. Der Code hat den Namen EVA2.

In diesem Abschnitt wird eine Beschreibung des Codes EVA2 nur insoweit gegeben, als sie über die Beschreibung des Codes EVA1 in Abschnitt 2.6 hinausgeht. Ein Flußdiagramm des Codes EVA2 ist auf Seite 136 und 137 dargestellt.

Bei der linear-elastischen Rechnung (EVA1) wird der Spannungszustand zu einem einzigen Zeitpunkt bestimmt. Ändern sich mit der Zeit irgendwelche Parameter, die auf den Spannungszustand Einfluß haben, so muß die elastische Rechnung für mehrere Zeitpunkte nacheinander durchgeführt werden.

Bei der Kriechrechnung mit Hilfe des Codes EVA2 wird dagegen das Verhalten eines Körpers in einem gewissen Zeitbereich untersucht. Aus diesem Bereich mögen NSM Zeitpunkte herausgegriffen werden, wobei zum Zeitpunkt mit der Nummer NS die Zeit $t = ZEIT(NS)$ gehören soll (Abb. 12). Der für das Kriechen interessante Zeitbereich möge mit $ZEIT(1)$ beginnen (Normalfall: $ZEIT(1) = 0$) und mit $ZEIT(NSM)$ enden. Die Zeitpunkte $NS = 1, 2, 3, \dots, NSM$ sind identisch mit jenen Zeitpunkten, die bei der schrittweisen Lösung des Kriechproblems (Abschnitt 3.2) der Reihe nach durchlaufen werden. Die Zeitintervalle $\Delta t(NS)$

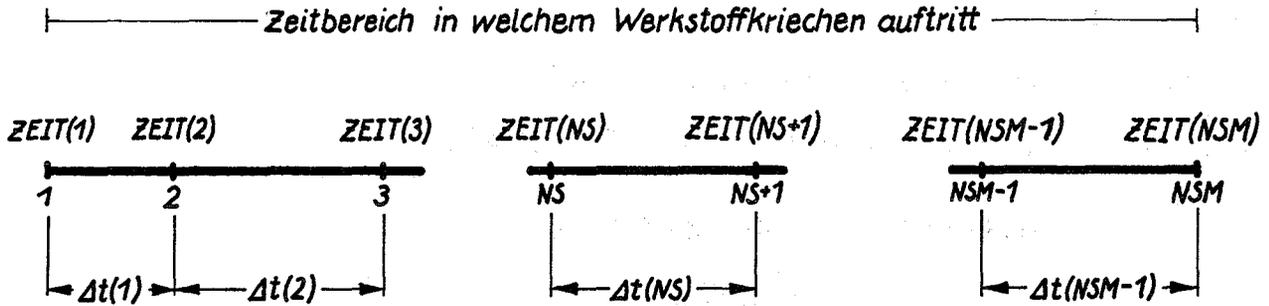


Abb. 12

brauchen nicht gleich zu sein. Man wird vielmehr in jenen Bereichen, in denen stärkere Zustandsänderungen zu erwarten sind, die Zeitintervalle kleiner wählen, als in den übrigen Zeitbereichen. Es können maximal $NSM = 150$ Zeitpunkte vorgegeben werden.

Wie in Abschnitt 3.2 angegeben, kann pro Zeitschritt eine Iteration erfolgen. Dadurch wird bei der Bestimmung der Änderungen der Verzerrungsfelder während eines Zeitschrittes nicht der Spannungszustand zu Beginn dieses Zeitschrittes, sondern ein gewisser mittlerer Spannungszustand zugrunde gelegt. Es bedeutet:

$ITERAT = 0$: keine Iteration; $ITERAT = 1$: einmalige Iteration

Um gewisse, während der Kriechzeit erfolgende Parameteränderungen zu erfassen, werden die folgenden Funktionen eingeführt: $RSPIS(NS)$, $RSPAS(NS)$, $TEMPS(NS)$, $QUELS(NS)$, $ALPHAS(NS)$, $CR1S(NS)$, $CR23S(NS)$.

Sie werden zusammen mit der Funktion $ZEIT(NS)$ für $NS = 1, 2, \dots, NSM$ eingelesen. Mit Hilfe dieser Funktionen ergeben sich zum Zeitpunkt NS

| | |
|--------------------------------------|-------------------------------|
| die vorgegeb. Normalsp. am Innenrand | $SIGMAI(K) \cdot RSPIS(NS)$, |
| die vorgegeb. Schubsp. am Innenrand | $TAUI(K) \cdot RSPIS(NS)$, |
| die vorgegeb. Normalsp. am Außenrand | $SIGMAA(K) \cdot RSPAS(NS)$, |
| die vorgegeb. Schubsp. am Außenrand | $TAUA(K) \cdot RSPAS(NS)$, |

ferner

das Temperaturfeld $TEM(j,K) = TEMP(j,K) \cdot TEMPS(NS) + TEMP0$,

gegebenenfalls

das Wärmequellenfeld $Q(j,K) \cdot QUELS(NS)$

und das Feld der Volumendilatation $3\beta \cong 3 \cdot SCHW(j,K)$

$$\begin{aligned}
 SCHW(j+1,K) = & ALPHA \cdot TEM(j,K) + \\
 & + [ALPHA0 + \\
 & + ALPHA1 \cdot (TEM(j,K) - TEM0) + \\
 & + ALPHA2 \cdot (TEM(j,K) - TEM0)^2 + \\
 & + ALPHA3 \cdot (TEM(j,K) - TEM0)^3] \cdot ALPHAS(NS)
 \end{aligned}
 \tag{3.3.1}$$

Die letzte Beziehung ist mit der Gleichung (3.1.4) identisch, wenn man beachtet, daß der Neutronenfluß ϕ eine Funktion der Zeit ist.

Die von EVA1 her bekannten Randspannungen $SIGMAI(K)$ usw., sowie die Felder $TEMP(j,K)$ und $Q(j,K)$ haben hier den Charakter von Verteilungsfunktionen, die sich mit der Zeit nicht ändern.

Wie aus dem Abschnitt 3.2 hervorgeht, werden bei den einzelnen Rechenschritten nur die, gegenüber dem jeweils vorangegangenen Schritt erfolgten Änderungen der vorgegebenen Randspannungen, gegebenenfalls die Änderung des Wärmequellenfeldes, sowie die Änderung des Feldes $SCHW(j,K)$ benötigt. Diese Änderungen heißen der Reihe nach: $SIGIS(K)$, $TAUIS(K)$, $SIGAS(K)$, $TAUAS(K)$, $QS(j,K)$, $SCHWS(j,K)$.

Die für die einzelnen Rechenschritte erzielten Ergebnisse sind die Änderungen der Spannungsfelder. In Anlehnung an die Namen der Spannungsfelder werden den Änderungen der Spannungsfelder die folgenden Namen zugewiesen: $SRRS(j,K)$, $SFFS(j,K)$, $SZZS(j,K)$, $SRF(j,K)$.

Im Gegensatz zum Code EVA1 treten beim Code EVA2 plastische Verzerrungsfelder auf. Diese haben die Namen: $EZRR(j,K)$, $EZFF(j,K)$, $EZZZ(j,K)$, $EZRF(j,K)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{rr}^z & \longrightarrow EZRR(j,K) + SCHW(j,K) \\
 \epsilon_{\theta\theta}^z & \longrightarrow EZFF(j,K) + SCHW(j,K) \\
 \epsilon_{zz}^z & \longrightarrow EZZZ(j,K) + SCHW(j,K) \\
 \epsilon_{r\theta}^z & \longrightarrow EZRF(j,K)
 \end{aligned}$$

$EZVE(j,K)$ ist das Feld der plastischen Vergleichsdehnung, berechnet nach v. Mises. Die von Rechenschritt zu Rechenschritt erfolgenden Änderungen der plastischen Verzerrungsfelder heißen $EZRRS(j,K), EZFFS(j,K), EZZZS(j,K), EZRF(j,K)$. Sie werden mit Hilfe der Subroutinen SUB13 und CREEP für die jeweiligen Spannungsverteilungen bestimmt.

Wie bei der Beschreibung zum Code EVAL erwähnt, geht der Definitionsbereich der Verzerrungsfelder über den Definitionsbereich der Spannungsfelder hinaus. Um die plastischen Verzerrungen auch in jenen Punkten, in denen keine Spannungen definiert sind, bestimmen zu können, sind gewisse Extrapolationen erforderlich. Sie werden innerhalb der Subroutine SUB13 durchgeführt.

In der Subroutine CREEP werden schließlich die Änderungen der plastischen Verzerrungen gemäß Gl. (3.1.2) und (3.1.3) bestimmt.

Thermisches Kriechen, Gl. (3.1.2)

Die Funktion $\dot{\epsilon}(\sigma_v, t, T) \cdot \Delta t$ wird unter Benutzung des für Primärkriechen erweiterten Nortonschen Gesetzes bestimmt. ([11], Seite 32 und 214)

$$\dot{\epsilon}(\sigma_v, t, T) \cdot \Delta t (NS) = CR1S(NS) \cdot CR1 \cdot e^{\frac{CR1T}{T-273}} \cdot [\sigma_v - (SIG0 + SIGT \cdot T)]^{EXP01 + EXP01T \cdot T - 1} \quad (3.3.2)$$
$$EXP01 + EXP01T \cdot T > 1$$

T ist die Temperatur, σ_v ist die Vergleichsspannung nach v. Mises zum Zeitpunkt NS . Die Einführung des Gliedes $SIG0 + SIGT \cdot T$ stellt ebenfalls eine Erweiterung des bekannten Nortonschen Kriechgesetzes dar.¹⁾ Es muß jedoch verlangt werden, daß der Wert in der eckigen Klammer stets gleich oder größer Null ist, d. h. bei $SIG0 + SIGT \cdot T > \sigma_v$ muß gesetzt werden:

$$\sigma_v - (SIG0 + SIGT \cdot T) = 0$$

Die Konstanten $CR1, CR1T, EXP01, EXP01T, SIG0, SIGT$ werden vorgegeben.

$$EXP01 + EXP01T \cdot T > 1$$

1) Diese Erweiterung wurde insbesondere deswegen vorgenommen, um den Code EVA2 auch bei zeitunabhängiger Plastizität einsetzen zu können. (vergl. Abschn. 3.4)

Strahlungsinduziertes Kriechen, Gl. (3.1.3)

Die Funktionen $C_2 \cdot g(\phi, t, T) \cdot \Delta t$ und $C_3 \cdot g(\phi, t, T) \cdot \Delta t$ werden wie folgt bestimmt:

$$C_2 \cdot g(\phi, t, T) \cdot \Delta t(NS) = CR23(NS) \cdot CR2 \cdot e^{CR2T \cdot (T+273)} \quad (3.3.3)$$

$$C_3 \cdot g(\phi, t, T) \cdot \Delta t(NS) = CR23(NS) \cdot CR3 \cdot e^{CR3T \cdot (T+273)}$$

T ist die Temperatur. Die Konstanten $CR2, CR2T, CR3, CR3T$ werden vorgegeben. Es ist zu beachten, daß der Neutronenfluß ϕ eine Funktion der Zeit ist. Für den Sonderfall $CR2T = CR3T$ und $CR3 = 15 \cdot CR2$ entsprechen die Gesetze (3.3.3) den Beziehungen, die von Claudson [6] und Boltax et al. [7] angegeben werden.

Bei der Einführung der Subroutine CREEP wurde darauf geachtet, daß kleinere Änderungen in der Struktur der Kriechgesetze möglichst nur Änderungen in der relativ einfach aufgebauten Subroutine CREEP zur Folge haben.

Um Instabilitätseffekte, die als Aufrauhungen (Welligwerden) der Spannungs- und Verzerrungsfelder in Erscheinung treten, auszuschalten, wird nach jedem Rechenschritt eine gewisse Glättung der Spannungsfelder (Ausfilterung hoher Frequenzen) durchgeführt. Hierzu werden mittels SUB19 die Spannungen in Umfangsrichtung nach Fourier bis zur Ordnung NP entwickelt und anschließend die Funktionswerte aus der Fourier-Reihe wieder berechnet.

Trotzdem lassen sich bei starkem Materialschwellen in gewissen Teilen der Körperquerschnittsfläche Aufrauhungen der Spannungsfelder $SRR(j,K), SFF(j,K)$ und $SRF(j,K)$ mitunter nicht vermeiden. Charakteristisch ist, daß die Aufrauhungen nur dort auftreten, wo die betreffenden Spannungen relativ niedrige

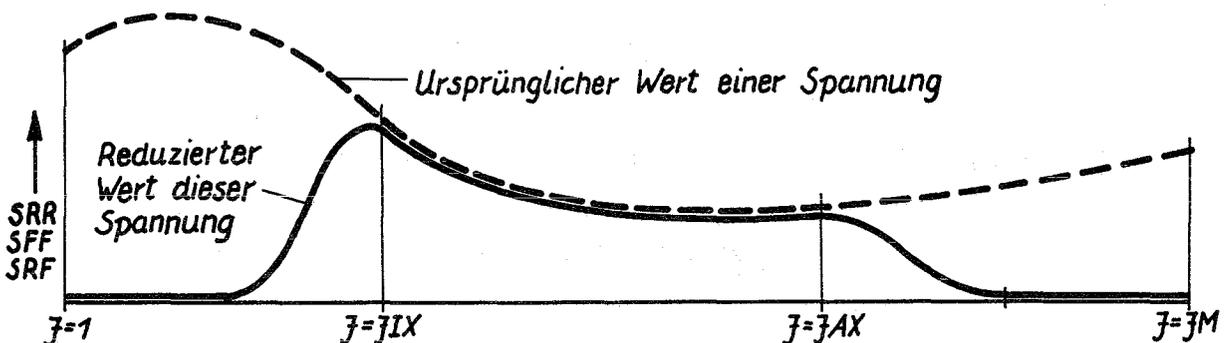


Abb. 13

Werte annehmen, so daß diese Spannungen gegenüber den anderen Spannungen unter Umständen vernachlässigbar sind. Bei längsberippten Brennstabhüllrohren liegt dieser Fall in den Rippenköpfen vor. Es wurde deshalb eine weitere Subroutine SUB18 zur Verfügung gestellt, mit deren Hilfe die Spannungsfeldänderungen $SRRS(j,K)$, $SFFS(j,K)$ und $SRFS(j,K)$ für $j < j_{IX}$ und $j > j_{AX}$ reduziert werden können (Abb. 13).

Beim ersten Rechenschritt, d. h. bei der rein elastischen Lösung erfolgt noch keine Reduzierung. Die Parameter j_{IX} und j_{AX} sind vorzugeben. In welchem Umfange Spannungsreduzierungen mit Rücksicht auf die Genauigkeit noch zulässig sind, muß von Fall zu Fall entschieden werden.

Ein weiterer Instabilitätseffekt ist das Oszillieren der Feldgrößen über der Zeit. Bei den meisten aus der Literatur bekannten Problemen tritt dieser Effekt jedoch nicht auf. So lassen sich beispielsweise während des Abbaues von Eigenspannungen unter konstanten Parametern solche Schwankungen in der Regel nicht beobachten. Anders ist dies, wenn der Eigenspannungszustand durch Materialschwellen hervorgerufen wird. Das Schwellen stellt eine relativ starke, monotone Parameteränderung über der Zeit dar, d. h. der Tendenz, die Spannungen durch Kriechen abzubauen, steht die Tendenz der Eigenspannungserhöhung durch Schwellen gegenüber. Würde kein Spannungsabbau durch Kriechen erfolgen, so würden die Schwellenspannungen Werte annehmen, die ein Mehrfaches der maximal zulässigen Spannung betragen [36]. Das Entstehen oszillatorischer Instabilität kann man plausibel machen, wenn man beachtet, daß das Schwellen eine ständige Energiezufuhr über der Zeit darstellt. Gerade eine solche Energiezufuhr ist aber Voraussetzung für diese Art der Instabilität.

Eine Bestimmung der Stabilitätsgrenzen aufgrund theoretischer Untersuchungen erscheint angesichts der Kompliziertheit des Problems (starke Nichtlinearität, hoher Koppelungsgrad) hoffnungslos. Die bisher durchgeführten Rechnungen zeigen, daß durch Vorgabe genügend kleiner Zeitschritte die oszillatorische Instabilität über der Zeit beseitigt werden kann.

Der Datenausgabe stehen die Subroutinen SUB21, SUB23, SUB24, SUB25 und HØELI zur Verfügung.

Die Spannungs- und Verzerrungsfelder, sowie das QS -Feld und das zugehörige Fehlerfeld werden im allgemeinen nicht für jeden Zeitpunkt $NS = 1, 2, \dots$ sondern nur für die Zeitpunkte

$$NS = 1, 1+NSW, 1+2 \cdot NSW, \dots, NSM$$

mittels SUB21 ausgedruckt. $NSW \geq 1$ ist vorzugeben.

Ähnliche wie in EVA1 können unter Benutzung von HÖELI Höhenlinienfelder für die Vergleichsspannung nach dem ersten und letzten Zeitschritt, sowie ein Höhenlinienfeld für die Vergleichsdehnung nach dem letzten Zeitschritt geplottet werden.

Die Randspannungen und Randverzerrungen werden dagegen nach jedem Zeitschritt (SUB23 und SUB06) ausgedruckt und wenn notwendig abgespeichert.

Auf Wunsch können mit Hilfe von SUB24 sämtliche Randspannungen und Randverzerrungen als Funktion des Umfangwinkels φ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) mit

$$NS = 1, 1+NSPS, 1+2 \cdot NSPS, \dots \quad (\text{bei Spannungen})$$

$$NS = 1, 1+NSPE, 1+2 \cdot NSPE, \dots \quad (\text{bei Verzerrungen})$$

als Parameter geplottet werden. $NSPS$ und $NSPE$ sind vorzugeben.

Die Subroutine SUB25 erlaubt schließlich das Plotten gewisser Randspannungen und Randverzerrungen als Funktion der Zeit

Der Code EVA2 benötigt ein Kernspeichervolumen von etwa 450 K. Die Rechenzeit auf der IBM 360/85 beträgt bei komplizierteren Problemen (die maximal zulässigen Feldgrößen werden ausgenutzt, $n_m = 28$) etwa 0,6 Minuten pro Rechenschritt. Hinzu kommen noch gewisse Rechenzeiten vor Eintritt in die schrittweise Rechnung.

3.4 Einige Überlegungen zur Lösung des Problems beim Auftreten zeitunabhängiger Plastizität

Die folgenden Ausführungen sollen beschränkt sein auf ideal-elastisch-plastisches Werkstoffverhalten. Wie gleich gezeigt wird, läßt sich bei diesem Werkstoffverhalten der Code EVA2 unmittelbar zur Lösung entsprechender Probleme einsetzen. (Die Berücksichtigung von Plastizität mit Dehnungsverfestigung würde dagegen gewisse Änderungen des Codes EVA2 erforderlich machen).

Macht man bei der zeitunabhängigen Plastizität analoge Voraussetzungen wie beim thermischen Kriechen (Abschn. 3.1), so läßt sich das Stoffgesetz bei zeitunabhängiger Plastizität so formulieren, daß weitgehende Übereinstimmung mit den Beziehungen (3.1.1) und (3.1.2) besteht. Bei ideal-elastisch-plastischem Werkstoffverhalten hat man lediglich in (3.1.2) für $\dot{\epsilon}(\sigma_v, \epsilon_v, t, T) \cdot dt$ zu setzen:

$$\dot{\epsilon}(\sigma_v, \epsilon_v, t, T) \cdot dt = \dot{\epsilon}(\sigma_v, T) \cdot dt \quad \begin{cases} = 0 & \text{für } \sigma_v < \sigma_0(T) \\ \geq 0 & \text{für } \sigma_v = \sigma_0(T) \end{cases} \quad (3.4.1)$$

$\sigma_0(T)$ ist eine Stoffgröße und wird als Fließspannung bezeichnet. T ist die Temperatur.

Dem (zeitunabhängigen) plastischen Problem wird das Kriechproblem mit

$$\dot{\epsilon}(\sigma_v, t, T) \cdot dt \quad \begin{cases} = 0 & \text{für } \sigma_v < \sigma_0(T) \\ = C \cdot [\sigma_v - \sigma_0(T)]^n \cdot dt & \text{für } \sigma_v \geq \sigma_0(T) \end{cases} \quad (3.4.2)$$

$$C > 0; \quad n > 0$$

zugeordnet. Abgesehen von möglicherweise auftretenden numerischen Schwierigkeiten, läßt sich dieses Kriechproblem mit Hilfe des Codes EVA2 für beliebige Werte von t ($t \geq 0$) lösen.

Gilt für jeden Punkt der Körperquerschnittsfläche

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\sigma_v - \sigma_0(T)] \leq 0 ,$$

besitzen ferner alle sonstigen Variablen, die das Problem beschreiben, beim Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ eindeutige Grenzwerte, so ist die Lösung des Kriechproblems für $t \rightarrow \infty$ eine Lösung des ideal-elastisch-plastischen Problems. Die Randbedingungen sowie das eingeprägte Verzerrungsfeld des Kriechproblems für

$t \rightarrow \infty$ sind identisch mit den Randbedingungen und dem eingepprägten Verzerrungsfeld beim ideal-elastisch-plastischen Problem.

Beweis: Die Lösung des Kriechproblems genügt sämtlichen Gleichungen, die das ideal-elastisch-plastische Problem beschreiben, insbesondere der Beziehung (3.4.1).

Im Gegensatz zum elastischen Problem und zum Kriechproblem können beim (zeitunabhängigen) plastischen Problem - wie man leicht zeigen kann - mehrere Lösungen oder gar keine Lösung existieren. (Im letzten Fall gelingt es nicht, die Bedingung (3.4.3) zu erfüllen). Um jene Lösung zu finden, die das vorgegebene physikalische Problem beschreibt, sind weitere Kriterien erforderlich. In vielen Fällen reicht die Beachtung der zeitlichen Aufeinanderfolge bei der Aufbringung der Last hin. Das bedeutet, daß zur Erzielung der plastischen Lösung alle während der Lastaufbringung entstandenen Zwischenlösungen der Reihe nach zu durchlaufen sind.

Für die Durchführung entsprechender numerischer Rechnungen hat dies folgende Konsequenzen:

- Die unendlich vielen Zwischenlösungen, die der Reihe nach zu durchlaufen sind, werden durch endlich viele Zwischenlösungen mit den Nummern NS_1, NS_2, \dots, NS_M ersetzt. ($NS_1 < NS_2 < \dots < NS_M$) Die Lösung mit der Nummer NS_M approximiert die gesuchte ideal-elastisch-plastische Lösung.
- Die unendlich vielen Lösungsschritte, die zur Erzielung jeder Zwischenlösung notwendig sind (Zwischenlösung bedeutet Kriechlösung für $t \rightarrow \infty$) werden ebenfalls durch endlich viele Lösungsschritte ersetzt. Die erste Zwischenlösung wird nach NS_1 Schritten, die zweite Zwischenlösung nach $NS_2 - NS_1$ Schritten, die dritte nach $NS_3 - NS_2$ Schritten, ..., erzielt. In (3.4.2) wird dt durch die endlichen Zeitintervalle $\Delta t(NS)$ ersetzt (Abb. 14). Die Randbedingungen sowie das eingepprägte Verzerrungsfeld müssen für $NS \rightarrow NS_1, NS \rightarrow NS_2, \dots$ die für die zugehörige Zwischenlösung vorgesehenen Werte annehmen.

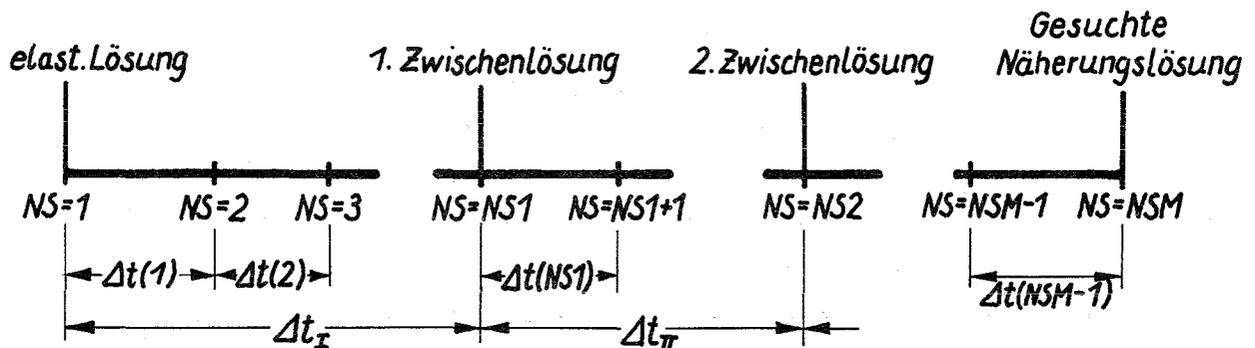


Abb. 14

Die Näherungslösung geht in die gesuchte ideal-elastisch-plastische Lösung über, wenn die Zeitintervalle $\Delta t(1), \Delta t(2), \dots$, gegen Null und die Zeitintervalle $\Delta t_I, \Delta t_{II}, \dots$, gegen ∞ konvergieren und wenn der Bedingung (3.4.3) genügt wird. Ob in einem konkreten Fall dieser Bedingung genügt wird und wie weit die Näherungslösung von der exakten Lösung abweicht, kann im allgemeinen nur aufgrund der erzielten Rechenergebnisse vermutet werden. Auch über die einzusetzenden Kriechparameter, die auf die Güte der Näherung großen Einfluß haben, lassen sich allgemeine Aussagen kaum machen.

Bei gleichmäßiger, monotoner Lastzunahme kommt man häufig ohne eine Zwischenlösung aus. In diesem Falle hat man zu prüfen, ob die Bereiche der Körperquerschnittsfläche, in denen $\sigma_v > \sigma_o(T)$ ist, von Rechenschritt zu Rechenschritt monoton zunehmen. Trifft dies nicht zu (auch nicht ungefähr), so sind in der Regel erhebliche Abweichungen zwischen der erzielten Näherungslösung und der exakten Lösung zu vermuten.

4. RECHENBEISPIELE

4.1 Rechenbeispiel nach Takeuti

In früheren Veröffentlichungen benutzte Takeuti zur Spannungsanalyse linear-elastischer, mehrfach zusammenhängender prismatischer Körper ein Verfahren, welches dem in dieser Arbeit eingeschlagenen Lösungsweg stark ähnelt [33, 34, 35]. Bei der Erfüllung der Randbedingungen beschränkt sich Takeuti allerdings auf die gewöhnliche Randkollokations-Methode. Dies hat zur Folge, daß das Lösungsverfahren nur bei Körperquerschnittsflächen, die nahezu konzentrische Kreise darstellen, mit Erfolg eingesetzt werden kann. In anderen Fällen werden die Randbedingungen so unzureichend erfüllt, daß die Ergebnisse unbrauchbar sind. So läßt sich beispielsweise ein Hohlzylinder mit einer Körperquerschnittsfläche gemäß Abb. 15 mittels der gewöhnlichen Randkollokation nicht befriedigend behandeln. Aus diesem Grunde lösen Takeuti und Noda in einer neueren Arbeit [43] dieses Problem mit Hilfe der Funktionentheorie.

Einzelheiten zu diesem Problem: Die Körperquerschnittsfläche des Hohlzylinders ist in Abb. 15 dargestellt (ausgezogene Kontur). Ursache der Spannungen ist eine über das gesamte Zylindervolumen gleichmäßig verteilte Wärmeerzeugung q . Der Hohlzylinder ist am Außenrand isoliert. Die erzeugte

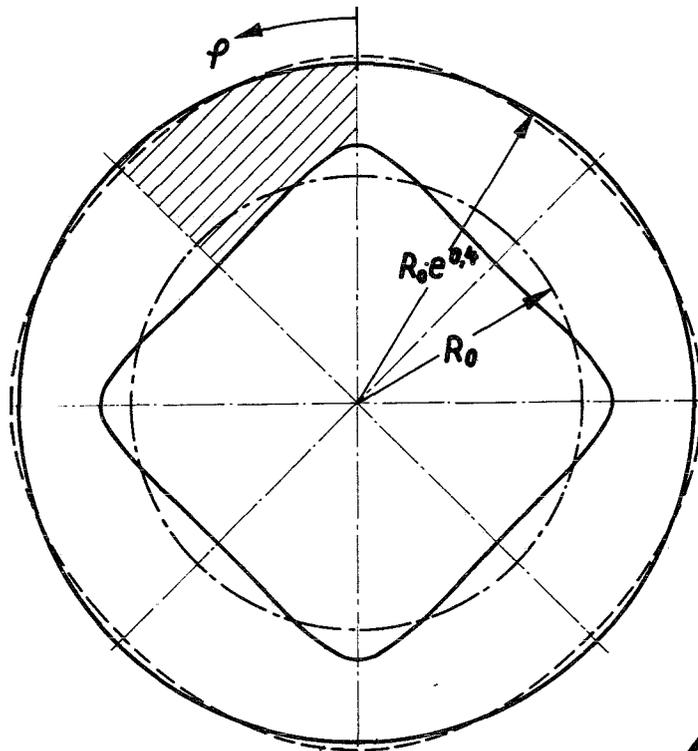


Abb. 15

Wärme wird ausschließlich über den Innenrand abgeleitet.¹⁾ Es wird keine Randbelastung aufgebracht. Die weiteren für die Spannungsanalyse erforderlichen Daten sind die Wärmeleitfähigkeit λ , der Wärmedehnungskoeffizient α , der Elastizitätsmodul E , die Querkontraktionszahl ν und der Parameter für die Geometrie R_0 .

Bei der Behandlung des Problems mit Hilfe der Funktionentheorie benötigen Takeuti und Noda eine Abbildungsfunktion $z = f(\zeta)$, welche einen Kreisring in der komplexen z -Ebene konform abbildet in die Hohlzylinder-Querschnittsfläche (komplexe ζ -Ebene). Das vorliegende Beispiel ist so gewählt, daß $f(\zeta)$ eine einfache Form hat

$$z = f(\zeta) = R_0(\zeta + 0,133\zeta^{-3}),$$

und die verlangten Abbildungseigenschaften an der inneren Randkurve exakt erfüllt sind. Als äußere Randkurve erhält man jedoch nicht den verlangten Kreis (ausgezogene Kurve, Abb. 15) sondern eine etwas abweichende Kurve (gestrichelte Kurve).

Für einen Hohlzylinder mit dieser fehlerhaften äußeren Randkurve führen Takeuti und Noda die Spannungsanalyse durch.

Genau dasselbe Problem wurde auch mit Hilfe der in dieser Arbeit entwickelten Theorie gelöst (Code EVA1). Das Feld der dimensionslos gemachten Radialspannung $\sigma_{rr} \cdot \frac{\lambda \cdot (1-\nu)}{R_0^2 \cdot q \cdot \alpha \cdot E}$ ist auf Seite 102, die entsprechenden Felder der Tangentialspannung $\sigma_{\theta\theta}$ und der Schubspannung $\sigma_{r\theta}$ sind auf Seite 103 und Seite 104 als Höhenlinienbild dargestellt. Die Höhenlinien sind jeweils für ein Achtel der Körperquerschnittsfläche (schraffierter Bereich in Abb. 15) angegeben. Der Einfachheit halber wurde dieses Achtel der Körperquerschnittsfläche derart verzerrt abgebildet, daß Kreise, mit dem Polarkoordinatenursprung als Mittelpunkt, übergehen in Gerade.

Die angegebenen Spannungsfelder gelten exakt für den Fall, daß an den Randkurven periodisch schwankende Normal- und Schubspannungen mit kleiner Amplitude A ($A < 0,0035 \cdot \frac{\lambda \cdot (1-\nu)}{R_0^2 \cdot q \cdot \alpha \cdot E}$) aufgebracht werden. Gemittelt über ebenfalls relativ kleine Umfangswinkel $\Delta\varphi$ ($\Delta\varphi \geq 8^\circ$) verschwinden diese Normal- und Schubspannungen.

1) Die Wärmeübergangsbedingungen können längs der inneren Randkurve beliebig variieren. Es muß nur den von den Randkurven vorgegebenen Symmetrieeigenschaften genügt werden.

Die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse dürften erheblich genauer sein, als die in [43] mit Hilfe der Funktionentheorie erzielten Ergebnisse. Im letzten Fall lassen nämlich die Inkorrektheiten an der äußeren Randkurve Fehler in der Größenordnung von 10 % erwarten. Ein quantitativer Vergleich der Ergebnisse war leider kaum möglich, da die entsprechenden graphischen Darstellungen in [43] sehr klein ausgeführt sind.

Auf die periodischen Schwankungen der errechneten Spannungen nahe der inneren Randkurve (Seite 102, 103 und 104) sei besonders hingewiesen. Sie werden verursacht durch die fehlerhafte Erfüllung der Randbedingungen, d. h. durch die periodisch schwankende Normal- und Schubspannung am Rand. Sehr interessant ist, daß der Einfluß dieser Fehler bereits bei geringen Tiefen (5 % der Wandstärke) offensichtlich ganz erheblich zurückgeht. Ähnliche Beobachtungen lassen sich bei allen folgenden Rechenbeispielen machen. (Prinzip von Saint-Venant).

Mit diesem Rechenbeispiel ist demonstriert worden, daß die in dieser Arbeit entwickelte Methode bei der Randkollokation es gestattet, auch solche Probleme erfolgreich zu behandeln, deren Lösung, erzielt mit Hilfe der gewöhnlichen Randkollokation, viel zu ungenau war.

4.2 Spannungsanalyse zum längsberippten Brennstabhüllrohr bei linear-elastischem Werkstoffverhalten. Vergleiche mit spannungsoptischen Untersuchungen

Das Brennstabhüllrohr, welches in diesem und dem nächsten Abschnitt untersucht werden soll, hat die in Abb. 16 dargestellte Körperquerschnittsfläche (ausgezogene Kontur). Ursache des sich einstellenden Spannungsfeldes ist

ein Rohrrinnendruck von 70 at
und ein Temperaturfeld gemäß Abb. 17 (Wärmedehn.).

Das Temperaturfeld ist dargestellt als Höhenlinienbild für den schraffierten Bereich der Körperquerschnittsfläche (Abb. 16). Dieser Bereich der Körperquerschnittsfläche wurde zu diesem Zweck derart verzerrt wiedergegeben, daß Kreise, deren Mittelpunkte mit dem Polarkoordinatenursprung zusammenfallen, in Gerade übergehen. (Auch die später folgenden Höhenlinienbilder der Spannungs- und Verzerrungsfelder beziehen sich auf den in gleicher Weise verzerrten Bereich der Körperquerschnittsfläche). Bei der Berechnung

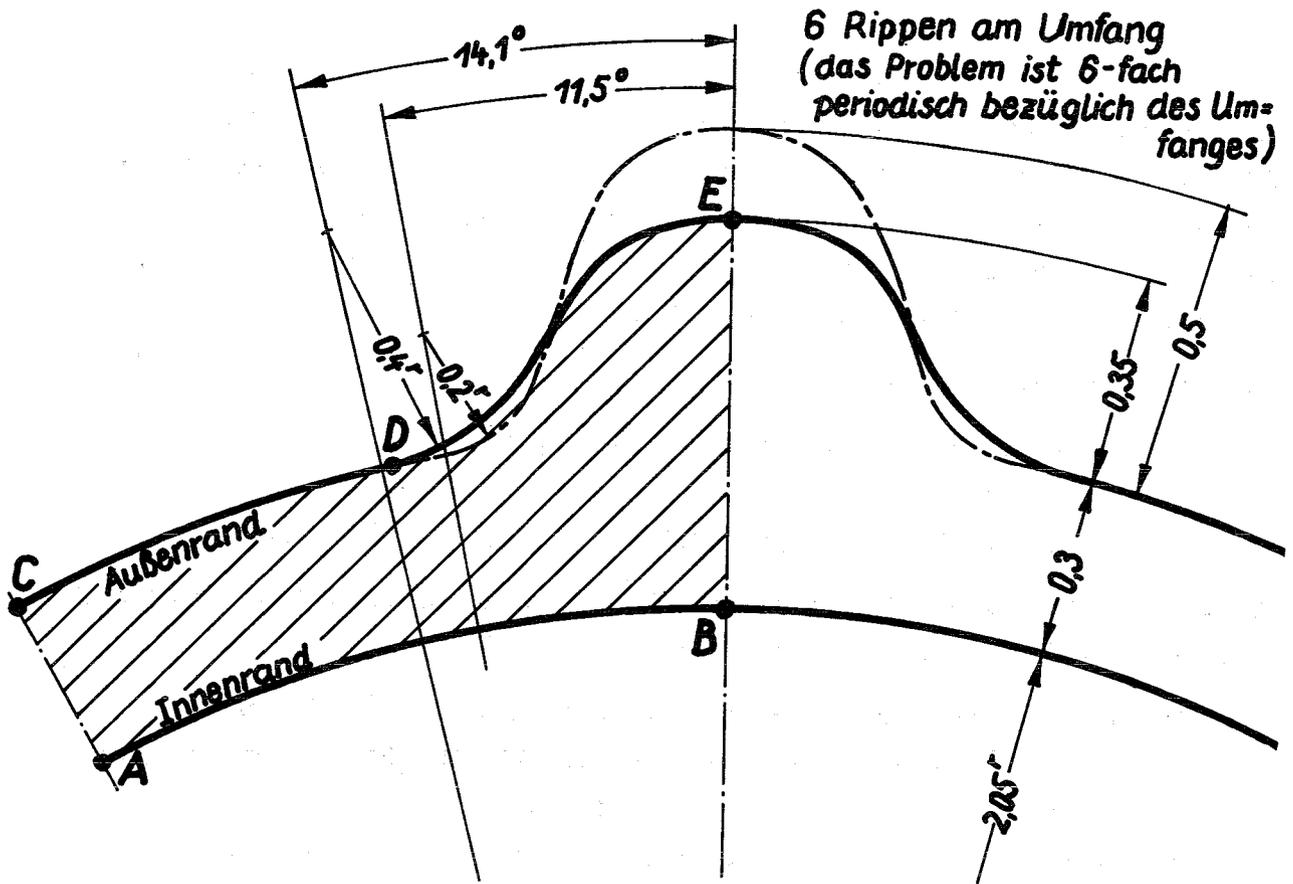


Abb. 16 Rippenrohrquerschnittsfläche

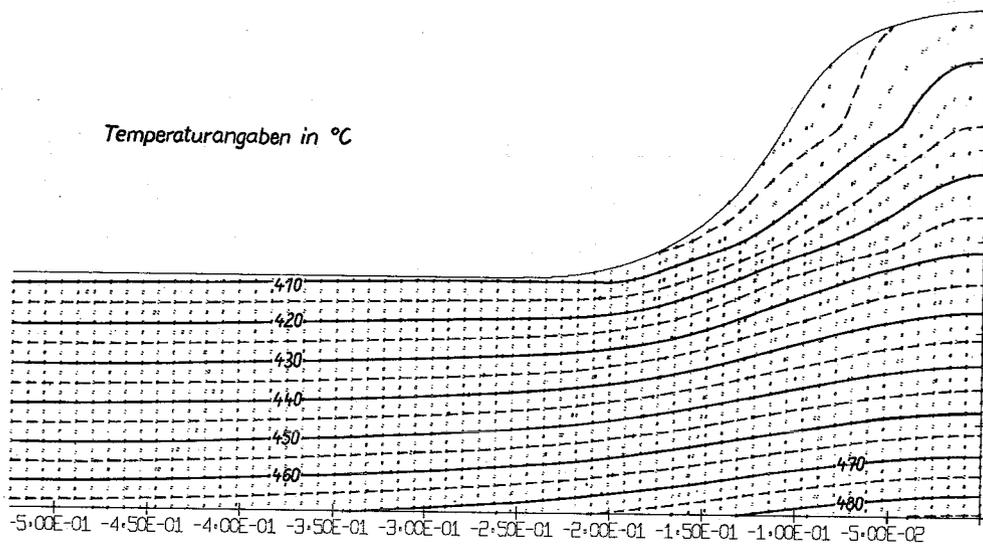


Abb. 17 Temperaturfeld

des Temperaturfeldes wurde eine Stabileistung von 126,7 cal/cm·sec zugrunde gelegt. Da das hierzu verwendete Rechenprogramm die Temperaturen für ein Koordinatennetz lieferte, welches von dem hier verwendeten Koordinatennetz etwas abweicht, waren einige Umrechnungen notwendig. Diese wurden von Hand vorgenommen und führten im Rippenkopf zu gewissen Ungenauigkeiten, die in dem Höhenlinienbild (Abb. 17) zu erkennen sind.

Die Werkstoffdaten waren gegeben durch

den Elastizitätsmodul von 17000 kp/mm^2 ,
die Querkontraktionszahl von 0,3
und den Wärmedehnungskoeffizienten $17,6 \cdot 10^{-6} \text{ 1/grad}$.

Bei der Behandlung des Problems mit Hilfe des Computercodes EVAL waren noch die folgenden Festlegungen zu treffen:

Radiale Maschenweite des Polarkoordinatennetzes $DR = 0,025 \text{ mm}$.
(Damit ist die Anzahl der azimuthalen Netzlinien $JM = 27$ bei 0,35 mm Rippenhöhe und $JM = 33$ bei 0,5 mm Rippenhöhe)

Die azimuthale Maschenweite des Polarkoordinatennetzes wird bestimmt durch die Anzahl der radialen Netzlinien $12 \cdot KM$; $KM = 60$.

Maximale Fourierordnung der Airyschen Spannungsfunktion $n_m = 28$.

Maximale Fourierordnung jener Randspannungsabweichung, die verschwinden soll $n_l = 19$.

Es sei nochmals bemerkt, daß die Maschenweite des Polarkoordinatennetzes in den hier behandelten Fällen nur Einfluß auf die Dateneingabe und -ausgabe hat. Die Rechengenauigkeit hängt nicht von der Maschenweite ab.

Außer für den Referenzfall (Rechenbeispiel 0101) wurden Spannungsanalysen auch für andere Fälle durchgeführt. Bei diesen Fällen (Rechenbeispiele 0001, 0201, 0301, 0013, 0162, 0262, 0362) wurden gegenüber dem Referenzfall gewisse Variationen der Abmessungen (strichpunktierte Konturen) und Belastungen vorgenommen. Einzelheiten sind der folgenden Tafel zu entnehmen:

| Rechenbeisp.- Nr. | Rohrinnen- druck | Rippenhöhe | Rippenfußaus- rundungsradi. | Rippenanzahl am Umfang | |
|----------------------|---------------------|----------------|--------------------------------|---------------------------|---|
| 0001 | 0 | 0,35 mm | 0,4 mm | 6 | |
| 0101 | 70 at | 0,35 mm | 0,4 mm | 6 | } Referenzfall |
| 0201 | 70 at | 0,50 mm | 0,4 mm | 6 | |
| 0301 | 70 at | 0,35 mm | 0,2 mm | 6 | |
| 0013 | 70 at | 0,35 mm | 0,4 mm | 3 | |
| 0162 | 70 at | 0,35 mm | 0,4 mm | 6 | } Ohne Berücksichtigung der Wärmedehnung u. der Axialspannung } Die Vergleichsspann. wird ausnahmsweise nach Mohr bestimmt (max. Schubspann.) |
| 0262 | 70 at | 0,50 mm | 0,4 mm | 6 | |
| 0362 | 70 at | 0,35 mm | 0,2 mm | 6 | |
| | | | | | |

Die drei letzten Rechenbeispiele wurden vorwiegend deswegen durchgeführt, weil in diesen Fällen die Spannungsfelder leicht auf experimentellem Wege mit Hilfe der Spannungsoptik ermittelt werden konnten. Aus diesem Grunde wurde in diesen drei Fällen auch ausnahmsweise die Vergleichsspannung nach Mohr bestimmt (doppelter Betrag der maximalen Schubspannung). Die zugehörigen Höhenlinienbilder können dann unmittelbar mit fotografischen Aufnahmen aus der Spannungsoptik verglichen werden.

In allen anderen Fällen wird die Vergleichsspannung nach v. Mises bestimmt.

Diskussion der Ergebnisse:

Die Ergebnisse für die vorseitig angeführten Rechenbeispiele sind auf Seite 105 bis 116 angegeben. Bei allen Beispielen sind die Tangentialspannung (parallel zur Randkurve) und die Axial- oder Vergleichsspannung sowohl an der inneren als auch an der äußeren Randkurve als Funktion des Umfangswinkels graphisch dargestellt. Gleichzeitig werden die Normal- und Schubspannungen (Randbedingungen) angegeben, bei denen die erzielten Ergebnisse exakt gelten (von Zeichengenauigkeiten und ähnlichem ist in diesem Falle natürlich abzusehen). Man beachte in diesem Zusammenhang die verschiedenen Spannungsmaßstäbe.

Zu den Rechenbeispielen 0001 und 0101 (Seite 105, 106, 107):

Man erkennt deutlich die Spannungserhöhung am Rippenfuß, bekannt unter dem Begriff "Kerbwirkung". Das Spannungsmaximum liegt ¹⁾ nahe am Übergang des kreisförmigen Randes zur Rippenfußausrundung. Will man die Kerbwirkung niedrig halten, so genügt es, in der Zone des Spannungsmaximums den Ausrundungsradius groß zu machen. Interessant ist auch die Spannungserniedrigung am Innenrand unter der Rippe, verursacht durch den wandverstärkenden Einfluß der Rippe.

Man beachte, wie klein der Fehler in den Randbedingungen (Normal- und Schubspannung am Rand) ist, verglichen mit der größten auftretenden Spannung. Am Rippenkopf liegt der Fehler unter 2,5 ‰, im übrigen Bereich unter 0,5 ‰.

Ein Teil der im nächsten Abschnitt behandelten Kriechprobleme besitzt unmittelbar nach Lastaufbringung dieselben Spannungsverteilungen wie in einem dieser beiden Beispiele. Zu Vergleichszwecken werden deswegen auf Seite 107 die Vergleichsspannungsfelder (Vergleichssp. nach v. Mises) der Rechenbeispiele 0001 und 0101 als Höhenlinienbilder dargestellt. Zwei Eigenschaften der Spannungsfelder fallen besonders auf. In der Nähe der Rippenfußausrundung tritt ein besonders starker Spannungsgradient auf. Die Vergleichsspannung besitzt unter der Rippenfußausrundung einen Sattelpunkt, d. h. die über der Rohrwand auftretende Biegespannungsverteilung ist an dieser Stelle am stärksten gestört.

Zum Rechenbeispiel 0201 (Seite 105):

Es wird der Einfluß untersucht, den eine Rippenerhöhung auf die Spannungsverteilung ausübt. Ein solcher Einfluß ist - wie ein Vergleich mit Beispiel 0101 zeigt - praktisch nicht feststellbar. Bemerkenswert ist, daß der Fehler bei

1) Wenn im folgenden ohne weitergehende Spezifikation von "Spannungen" die Rede ist, dann ist die Tangentialspannung gemeint.

der Erfüllung der Randbedingungen wesentlich größer ist als in den vorangegangenen Beispielen. Trotzdem wird die Spannungserhöhung am Rippenfuß recht genau wiedergegeben, weil es durch geeignete Vorgabe der Gewichtsfunktion $GEWA(K)$ gelungen ist, gerade in dem interessierenden Bereich den Fehler noch relativ klein zu halten.

Zum Rechenbeispiel 0301 (Seite 109):

Es wird der Einfluß untersucht, den eine Verkleinerung des Rippenfußausrundungsradius auf die Spannungsverteilung ausübt. Zwei Effekte lassen sich feststellen: Die Spannungserhöhung am Rippenfuß bezogen auf die Außenrandspannung zwischen den Rippen ist 1,77 mal so groß wie im Beispiel 0101. Die Spannungen zwischen den Rippen sind sowohl am Innen- als auch am Außenrand etwa 5 % niedriger als die entsprechenden Spannungen im Beispiel 0101.

Der letztgenannte Effekt ist darauf zurückzuführen, daß mit kleiner werdendem Rippenfußausrundungsradius der Bereich zwischen den Rippen, der im wesentlichen die Flexibilität des Rohres darstellt, zunimmt. Mit größer werdender Flexibilität nehmen aber Spannungen, hervorgerufen durch aufgeprägte Verformung (Wärmedehnung) ab. Der Wert des Spannungsmaximums (Rippenfußradius) und damit die Zahlenangabe zum erstgenannten Effekt dürfte wegen der fehlerhaften Erfüllung der Randbedingungen recht ungenau sein. Eine gezielte Herabsetzung des Fehlers im Rippenfußbereich durch geeignete Vorgabe von $GEWA(K)$ scheiterte.

Damit ist eine Grenze des Anwendungsbereiches der Codes EVAL und EVA2 sichtbar geworden.

Zum Rechenbeispiel 0013 (Seite 110):

Es wird der Einfluß untersucht, den eine Verkleinerung der Rippenanzahl (3 Rippen statt 6 Rippen) auf die Spannungsverteilung ausübt. Die Spannungserhöhung am Rippenfuß bezogen auf die Außenrandspannung zwischen den Rippen ist erwartungsgemäß genau so groß wie im Beispiel 0101. Die Spannungen im Bereich zwischen den Rippen nehmen dagegen am Innenrand um 18,2 %, am Außenrand um 10,6 % ab, verglichen mit den entsprechenden Spannungen im Beispiel 0101. Die Ursache ist - ähnlich wie oben - in einer Erhöhung der Flexibilität zu suchen. Auch bei diesem Rechenbeispiel war eine gezielte lokale Genauigkeitserhöhung am Rippenfuß nicht mehr möglich.

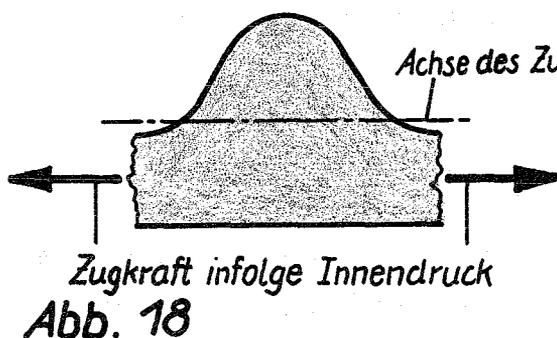
Zu den Rechenbeispielen 0162, 0262, 0362 (Seite 111, 116):

Diese drei Beispiele unterscheiden sich von den Rechenbeispielen 0101, 0201 und 0301 nur dadurch, daß allein der Innendruck Ursache der sich einstellenden Spannungsverteilung ist.

Ähnlich wie bei den Beispielen 0101, 0201 und 0301 nimmt die Spannungserhöhung (Kerbwirkung) am Rippenfuß mit kleiner werdendem Ausrundungsradius zu, während eine Rippenerhöhung praktisch keinen Einfluß auf die Spannungsverteilung ausübt. Im Gegensatz zu den Beispielen 0101, ... tritt eine Verminderung der Spannungen im Bereich zwischen den Rippen bei Verkleinerung des Rippenfußausrundungsradius nicht ein. Dies war nicht anders zu erwarten, da Flexibilitätsänderungen nur dann die Spannungsverteilung stärker beeinflussen, wenn Verformungen (Wärmedehnungen) aufgeprägt sind.

Sehr interessant ist, daß die Kerbwirkung, d. h. die Spannungserhöhung am Rippenfuß bezogen auf die Außenrandspannung zwischen den Rippen im Rechenbeispiel 0162 (reine Innendruckbeanspruchung) nur 11 %^o, im Rechenbeispiel 0001 (reine Biegebeanspruchung) dagegen 17 %^o beträgt. Die Rippenfußausrundungsradien sind in beiden Fällen gleich. Im Falle reiner Biegebeanspruchung (Wärmedehnung) ist also die Kerbwirkung stärker ausgeprägt als im Falle reiner Innendruckbeanspruchung.

Im Gegensatz zu den bisherigen Rechenbeispielen liegt das absolute Spannungs-



maximum bei den Beispielen 0162, 0262

und 0362 (reine Innendruckbeanspruchung) am Innenrand unter der Rippe.

Das Entstehen dieses Maximums kann man sich leicht erklären, wenn man den Rippenbereich des Hüllrohres - wie in Abb. 18 angedeutet - als außermittig belasteten Zugstab interpretiert. Mit demselben Modell läßt sich auch das

Auftreten einer negativen Tangentialspannung am Rippenkopf erklären (Rechenbeispiel 0162).

Wie bereits erwähnt, konnten zu den Rechenbeispielen 0162, 0262 und 0362 auch spannungsoptische Spannungsanalysen durchgeführt werden. Auf Seite 114 bis 116 sind die mit Hilfe der Spannungsoptik erzielten Vergleichsspannungsfelder den berechneten Vergleichsspannungsfeldern gegenübergestellt. (Vergleichsspannungen

ausnahmsweise nach Mohr). Die Übereinstimmung der Felder (Ähnlichkeit) ist - wie man sieht - sehr gut. Wie aufgrund der fehlerhaften Erfüllung der Randbedingungen zu erwarten, treten in den berechneten Spannungsfeldern der Beispiele 0262 und 0362 am Außenrand gewisse, die Ergebnisse verfälschende Oszillationen auf. An jenen Stellen des Außenrandes, die besonders interessieren (Rippenfuß, Bereich zwischen den Rippen), stören diese Oszillationen kaum. Für den Außenrand im Bereich des Rippenkopfes erhält man dagegen keine brauchbaren Rechenergebnisse. Trotzdem stimmen im Inneren des Rippenkopfes die Spannungsfelder recht gut überein. Anders ist dies beim Beispiel 0162, wo das berechnete mit dem experimentell bestimmten Spannungsfeld in jedem Detail übereinstimmt. Interessant ist, daß sogar das sehr schwach ausgeprägte, relative Spannungsmaximum an der Rippenflanke (Wendepunkt der Außenrandkurve) durch das Experiment bestätigt wird.

4.3 Spannungs- und Verzerrungsanalyse zum längsberippten Brennstabhüllrohr bei nichtelastischem Werkstoffverhalten

Bei diesen Untersuchungen wurden ausnahmslos die Hüllrohrabmessungen des Referenzfalles (Abb. 16, ausgezogene Kontur) zugrunde gelegt. Die einzelnen Rechenbeispiele unterscheiden sich nur dadurch, daß entweder thermisches Kriechen oder zeitunabhängige Plastizität (Überschreiten der Streckgrenze) angenommen wurde und daß in gewissen Fällen auch das strahlungsinduzierte Kriechen und bzw. oder das Werkstoffschwellen berücksichtigt wurde. Variiert wurden außerdem das Temperaturniveau, der Innendruck und die von dem gesamten Rohrquerschnitt aufzunehmende Axialkraft.

Für den Elastizitätsmodul, die Querkontraktionszahl und den Wärmedehnkoeffizienten wurden dieselben Werte eingesetzt wie in Abschn. 4.2 beim linear-elastischen Problem.

Schließlich wurde auch dasselbe Polarkoordinatennetz, dieselben max. Fourierordnungen, usw. benutzt. Zusätzlich waren vorzugeben:

Grad des Näherungspolynoms für die Störfunktion $i_m = 8$.

Max. Fourierordnung der Störfunktion $n_p = 17$.

Eine Übersicht über die durchgeführten Rechenbeispiele gibt die folgende Tafel:

| Rechenbeisp.- Nr. | zeitunabh. Plastizität (Streck- grenze) | Therm. Kriechen | Strahl.- Kriechen | Werkstoff Schwellen | Innen- druck | Axial- kraft | Temp- Niveau | R_{JAX} |
|----------------------|--|--------------------|----------------------|------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------|
| 1001 | | x | | | 0 | 0 | 650°C | 2,425mm |
| 1101 | | x | | | x | 0 | 650°C | 2,425mm |
| 1201 | | x | | x | 0 | 0 | 650°C | 2,425mm |
| 1302 | | x | | x | x | 13 kp | 650°C | 2,375mm |
| 1401 | | x | x | x | x | 13 kp | 650°C | 2,375mm |
| 6401 | | x | x | x | x | 13 kp | 450°C | 2,425mm |
| 9001 | x | | | | 100 at | 13 kp | | 2,425mm |

Ein Kreuz in dieser Tafel bedeutet, daß der jeweilige Effekt gemäß den nachfolgend angeführten Spezifikationen berücksichtigt wurde.

Temperaturniveau 450 ° C bedeutet, daß das Temperaturfeld nach Abb. 17 zugrunde gelegt wurde. Temperaturniveau 650 ° C bedeutet, daß dasselbe Temperaturfeld, jedoch um 200 ° C erhöht, zugrunde gelegt wurde.

R_{JAX} gibt an, bis zu welchem Radius Spannungsumlagerungen, hervorgerufen durch Kriechen, voll berücksichtigt wurden. Bei größeren Radien konnten mit Rücksicht auf die Stabilität der Lösung die Umlagerungen der Radial-, Tangential- und Schubspannungen nur teilweise in Rechnung gestellt werden. Die Axialspannungsumlagerungen wurden dagegen voll berücksichtigt. Dies erschien tragbar, da in den zur Debatte stehenden Bereichen die Axialspannung wesentlich größer ist als die übrigen Spannungskomponenten. Das Kriechverhalten

hängt aber gerade fast ausschließlich von der maximalen Spannungskomponente ab. Im Code EVA2 wird R_{JAX} durch die Vorgabe von JAX festgelegt. Näheres hierzu entnehme man dem Abschn. 3.3.

Zeitunabhängige Plastizität:

Das Rechenbeispiel für zeitunabhängiges plastisches Werkstoffverhalten wurde nur durchgeführt, um die Brauchbarkeit des Codes EVA2 auch in diesem Falle zu demonstrieren. Tatsächlich werden die Spannungen in jenen Beispielen, denen praktische Bedeutung zukommt, durch Kriechen so stark abgebaut, daß die Streckgrenze nirgends erreicht wird.

Um größere Zonen der Körperquerschnittsfläche plastisch zu verformen, wurde die

Streckgrenze (Fließgrenze) mit 10 kp/mm^2

sehr niedrig angesetzt. Eine Abhängigkeit der Streckgrenze von der Temperatur wurde nicht angenommen. (Die Berücksichtigung einer solchen Abhängigkeit ist aber jederzeit möglich).

Das Verfahren wurde gemäß Abschnitt 3.4 durchgeführt, d. h. unter anderem, daß ideal-elastisch-plastisches Werkstoffverhalten angenommen wurde. Für das Kriechproblem, welches dem (zeitunabhängigen) plastischen Problem zugeordnet ist, wurden die folgenden Parameter eingesetzt:

$$\left. \begin{array}{l} CR1 = 0,5 \cdot 10^{-5} \\ CR1S(1) = 0,5 \\ CR1S(2), \dots, CR1S(NSM) = 1,0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} C \cdot \Delta t(NS) = CR1 \cdot CR1S(NS) \\ \text{vergl. Formel (3.4.2)} \end{array}$$

Kriechexponent $EXP01 = 2$

Anzahl der Rechenschritte $NSM = 21$

Die Belastungsparameter wurden während des schrittweisen Rechenverfahrens nicht geändert. Dies bedeutet, daß keine plastische Zwischenlösung eingeschaltet wurde.

Bei sämtlichen Rechenbeispielen mit Kriechen wurde eine Einsatzzeit von 208 Tagen zugrunde gelegt. Die Einteilung in Zeitschritte ist aus Abb. 19 zu er-

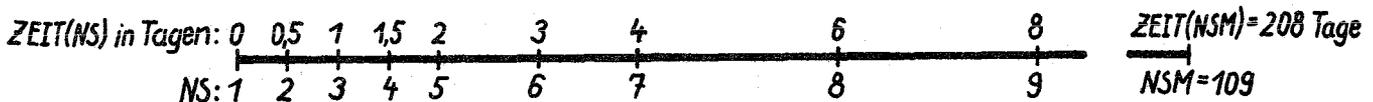


Abb. 19

sehen. Da zu Beginn der Einsatzzeit stärkere Spannungsumlagerungen zu erwarten sind, wurde für die ersten 4 Tage eine feinere Zeitschrittunterteilung gewählt.

Thermisches Kriechen:

Es wurde angenommen, daß nur Sekundärkriechen vorliegen möge. (Die Berücksichtigung von Zeitverfestigung ist jedoch jederzeit möglich). Für die Kriechparameter wurden folgende Werte vorgegeben:

$$\begin{aligned} CR1 &= 0,144 \cdot 10^{30} \\ CR1S(1), \dots, CR1S(4) &= 0,5 \\ CR1S(5) \text{ u. } CR1S(6) &= 1,0 \\ CR1S(7), \dots, CR1S(NSM) &= 2,0 \\ CR1T &= - 81510 \\ EXP01 &= 22,6 \\ EXP01T &= - 0,027 \end{aligned}$$

Im einachsigen Falle lautet damit das Kriechgesetz:

$$\dot{\epsilon} = 0,144 \cdot 10^{30} \cdot e^{-\frac{81510}{T+273}} \cdot \sigma^{22,6-0,027 \cdot T} \frac{1}{\text{Tag}}$$

σ ist die einachsige Spannung in kp/mm^2 , $\dot{\epsilon}$ die in derselben Richtung auftretende Dehnungsgeschwindigkeit und T die Temperatur in $^{\circ}\text{C}$. Nach diesem Gesetz ergeben sich die folgenden Kriechexponenten:

| Temperatur | 400 $^{\circ}\text{C}$ | 500 $^{\circ}\text{C}$ | 600 $^{\circ}\text{C}$ | 700 $^{\circ}\text{C}$ |
|----------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| Kriechexponent | 11,8 | 9,1 | 6,4 | 3,7 |

Das Kriechgesetz ist in Abb. 20 graphisch dargestellt (doppelt logarithmisches Koordinatensystem). Es beschreibt in etwa das Kriechverhalten von Hüllrohrwerkstoffen.

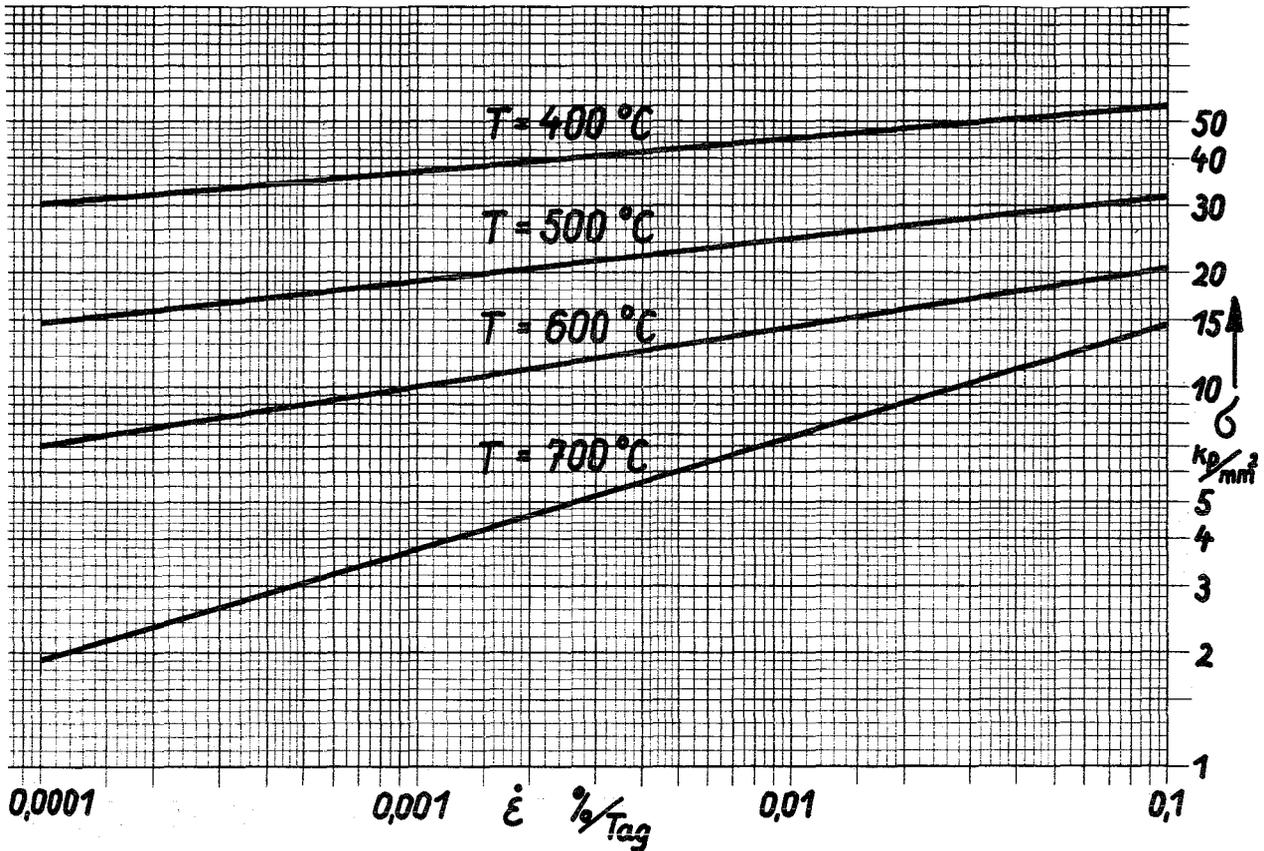


Abb. 20

Strahlungsinduziertes Kriechen:

Es wurde angenommen, daß nur Sekundärkriechen vorliegen möge. (Die Berücksichtigung von Zeitverfestigung ist jedoch auch hier jederzeit möglich).

Für die Kriechparameter wurden folgende Werte vorgegeben:

$$CR2 = 0,745 \cdot 10^{-5}$$

$$CR3 = 0,1118 \cdot 10^{-3}$$

$$CR235(1), \dots, CR235(4) = 0,5$$

$$CR235(5) \text{ u. } CR235(6) = 1,0$$

$$CR235(7), \dots, CR235(NSM) = 2,0$$

$$\left. \begin{array}{l} CR2T = \\ CR3T = \end{array} \right\} - 0,0027$$

Die Kriechdehnung läßt sich aufspalten in einen (konservativen) Anteil ohne Volumenänderung und in einen Anteil der nur Volumenänderung darstellt.

Für den konservativen Kriechdehnungsanteil erhält man im einachsigen Falle mit obigen Daten folgende Beziehung:

$$\dot{\epsilon} = [0,745 \cdot 10^{-5} \cdot e^{-0,0027 \cdot (T+273)}] \cdot \sigma \frac{1}{\text{Tag}}$$

σ ist die einachsige Spannung in kp/mm^2 , $\dot{\epsilon}$ die in derselben Richtung auftretende Dehnungsgeschwindigkeit und T die Temperatur in $^{\circ}\text{C}$.

Für jenen Kriechdehnungsanteil, der nur Volumenänderungen bewirkt, erhält man (im mehrachsigen Falle) mit den obigen Daten:

$$\frac{1}{3} \cdot \text{Volumendilatation} = \dot{\epsilon}_{11} = \dot{\epsilon}_{22} = \dot{\epsilon}_{33} \begin{cases} = [15 \cdot 0,745 \cdot 10^{-5} \cdot e^{-0,0027 \cdot (T+273)}] \cdot \frac{1}{3} \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), & \text{wenn } (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) > 0 \\ = 0, & \text{wenn } (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \leq 0 \end{cases}$$

Man sieht, daß in der zweiten Beziehung der Faktor in der eckigen Klammer 15 mal so groß ist wie der entsprechende Faktor in der ersten Beziehung. Dies stimmt überein mit den Annahmen von Gilbert und Straalsund [12], sowie Boltax et. al [7]. (Die Daten geben die Verhältnisse, die im Schnellen Brüter erwartet werden, nur sehr grob wieder).

Werkstoffschwellen:

Es wurde angenommen, daß in dem vorliegenden Temperaturbereich das Werkstoffschwellen eine lineare Funktion der Temperatur ist. (Diese lineare Beziehung kann jedoch jederzeit durch ein Polynom zweiten oder dritten Grades ersetzt werden). Außerdem wurde angenommen, daß gilt:

$$\text{Werkstoffschwellen} \sim \text{ZEIT}^{1,5}$$

Es wurden die folgenden Daten eingesetzt:

$$\text{ALPHA1} = 1,0 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{ALPHAS(NS)} = [\text{ZEIT(NS+1)/10}]^{1,5} - [\text{ZEIT(NS)/10}]^{1,5}$$

ZEIT(NS) ist hierbei in Tagen anzugeben.

Damit ergibt sich bis zum Ende der Einsatzzeit (208 Tage) eine Volumenzunahme durch Schwellen von

$$0,949 \cdot 10^{-4} \cdot T$$

T ist die Temperatur in $^{\circ} \text{C}$.

Die Volumenzunahme durch Wärmedehnung, welche sofort zu Beginn der Einsatzzeit vorliegt, beträgt dagegen nur (Abschn. 4.2)

$$0,176 \cdot 10^{-4} \cdot T$$

Innendruck:

Es wurde angenommen, daß der Rohrrinnendruck während der Einsatzzeit linear von 70 at auf 142,8 at ansteigt. Es wurde deshalb gesetzt:

$$RSPIS(NS) = 0,7 + 0,0035 \cdot ZEIT(NS)$$

$ZEIT(NS)$ ist hierbei in Tagen anzugeben.

Die Axialkraft wurde unabhängig von dem Innendruck vorgegeben.

Diskussion der Ergebnisse:

Die Ergebnisse für die angeführten Rechenbeispiele sind auf Seite 117 bis 131 graphisch dargestellt. Für jedes einzelne Beispiel - mit Ausnahme des letzten - wurden als Funktion der Zeit angegeben, die Vergleichsspannung, die plastische Vergleichsdehnung, gegebenenfalls auch die plastische Volumendilatation an den Innenrandpunkten A und B und den Außenrandpunkten C, D und E. Die Lage der Randpunkte A, B, C, D, E entnehme man den beigefügten Skizzen.

Außerdem wurde für jedes Rechenbeispiel - einschließlich des letzten Beispiels - das Vergleichsspannungsfeld, das Feld der plastischen Vergleichsdehnung (nach v. Mises) und gegebenenfalls das Feld der plastischen Volumendilatation als Höhenlinienbild dargestellt. Bei den Beispielen mit Kriechen geben die Felder den Zustand nach 208 Tagen Einsatzzeit wieder.

Im Gegensatz zu den elastischen Rechnungen kann man hier über die Genauigkeit der Ergebnisse allenfalls Vermutungen anstellen.

Zum Rechenbeispiel 1001 (Seite 117, 118):

Es wird der Abbau der Wärmespannungen durch Kriechen untersucht. Die Darstellungen auf Seite 117 zeigen deutlich, daß der Abbau am Hüllrohrinnenrand wesentlich intensiver ist als am Außenrand. Ursache ist die höhere Temperatur und die damit verbundene geringere Kriechfestigkeit am Hüllrohrinnenrand. Das hat zur Folge, daß die sich am Innenrand einstellenden Spannungen¹⁾ niedriger und die sich einstellenden plastischen Dehnungen höher sind als am Außenrand. Das hat weiterhin zur Folge, daß sich die Faser, in der die Spannung ein Minimum ist, von der Rohrwandmitte nach außen verschiebt.

Im übrigen zeigt das sich einstellende Spannungsfeld - mit Ausnahme einer gewissen Zone in der Rippe - die typische, beim Kriechen auftretende Biegespannungsverteilung.

Zum Rechenbeispiel 1101 (Seite 119, 120):

Dieses Beispiel unterscheidet sich von dem vorhergehenden Beispiel nur dadurch, daß zusätzlich ein Innendruck anliegt. Die zu beiden Rechenbeispielen gehörenden elastischen Spannungsverteilungen zeigen nur geringe Unterschiede (Seite 107, Beispiel 0001 und Beispiel 0101). Die sich nach der Einsatzzeit (208 Tage) einstellenden Kriechspannungsverteilungen sind dagegen vollkommen verschieden. Für das Beispiel 1101 (Seite 120) erhält man nicht die typische Biegespannungsverteilung, sondern eine Spannungsverteilung, wie sie bei Zugbeanspruchung in der Rohrwand zu erwarten ist. Hierbei ist zu beachten, daß infolge der Temperaturunterschiede die Kriechfestigkeit am Rohrrinnenrand geringer ist als am Rohraußenrand. Ein Spannungsmaximum am Rohrrinnenrand unter der Rippe, welches im elastischen Falle für reine Innendruckbeanspruchung typisch ist, erhält man zwar nicht (vergl. hierzu Beispiel 162, 262, 362). An dieser Stelle ist nämlich die Hüllrohrtemperatur am höchsten und die Kriechfestigkeit am niedrigsten. Dafür tritt an dieser Stelle aber das Maximum der plastischen Dehnung auf.

1) Wenn nichts weiter gesagt wird, sei unter "Spannung" im folgenden immer die Vergleichsspannung und unter "plastischer Dehnung" die plastische Vergleichsdehnung verstanden.

Anhand der Vergleichsspannungen, aufgetragen über der Zeit (Seite 119), läßt sich die Umlagerung des Biegespannungszustandes in eine Spannungsverteilung, bestimmt durch den Innendruck, verfolgen. Die Umlagerung ist nach 40 - 60 Tagen (Spannungsminima) weitgehend abgeschlossen.

Zum Rechenbeispiel 1201 (Seite 121, 122):

Diese Beispiel unterscheidet sich von dem ersten Rechenbeispiel 1001 dadurch, daß neben der Wärmedehnung noch die Schwelldehnung auftritt. Aus der Vergleichsspannung, aufgetragen über der Zeit (Seite 121), geht hervor, daß in den ersten 10 - 20 Tagen der Spannungsabbau ganz analog wie im Beispiel 1001 erfolgt. Dieser Abbau wird aber nicht monoton fortgesetzt, sondern die Spannungen steigen mit zunehmender Zeit wieder geringfügig an. Das Spannungsniveau stellt sich gerade so ein, daß die Schwellgeschwindigkeit in etwa von der Kriechgeschwindigkeit kompensiert wird. Da die Schwellgeschwindigkeit über der Zeit monoton wächst, nimmt auch das Spannungsniveau (nach Beendigung der Anlaufvorgänge) monoton zu.

Im Gegensatz zu den beiden bisherigen Beispielen steigt die Dehnung mit der Zeit teilweise stark an. Nach der Einsatzzeit (208 Tage) wird am Innenrand etwa 1^o/o, am kriechfesteren Außenrand etwa 0,7^o/o erreicht. Spannungs- und Dehnungsfeld (Seite 122) stimmen qualitativ mit den entsprechenden Feldern im Beispiel 1001 überein. Man beachte die lokale Dehnungserhöhung am Rippenfuß. Sie ist größenordnungsmäßig vergleichbar mit der Kerbwirkung im elastischen Fall.

Zum Rechenbeispiel 1302 (Seite 123, 124):

In diesem Beispiel werden neben der Wärmedehnung sowohl Innendruck als auch Schwelldehnung berücksichtigt. Bei der numerischen Durchführung der Rechnungen zeigte sich, daß das Spannungsfeld am Innenrand unter der Rippe zeitliche Schwingungen ausführte. Um diese Instabilitäten zu vermeiden, wurden sämtliche Zeitschritte halbiert. Die Rechenzeit am Computer (IBM 360/85) verdoppelte sich damit auf etwa 140 Minuten. Zwar konnten dadurch die Instabilitäten nicht vollständig vermieden werden. Die Amplituden der zeitlichen Schwingungen wurden jedoch kleiner. Außerdem nehmen sie - wie die Kurven auf Seite zeigen - von einem gewissen Zeitpunkt an ab. Eine weitere Verringerung der Zeitschrittlängen verbot sich mit Rücksicht auf die Rechenzeit.

Obwohl das Schwellen ebenso wie die Wärmedehnung in dem Sinne wirkt, daß sich eine Biegespannungsverteilung ausbildet, stellte sich nach 208 Tagen doch ein Spannungsfeld ein, wie es für Innendruckbeanspruchung typisch ist (Seite 124). Das Feld der plastischen Dehnung ist dagegen eher einer Biegebeanspruchung zuzuordnen. So liegt auch das Maximum der plastischen Dehnung nicht wie im Rechenbeispiel 1101 am Innenrand unter der Rippe, sondern am Rippenfuß. Es beträgt fast 1,5 ‰. Bemerkenswert ist schließlich das Spannungsminimum im Zentrum der Rippe.

Zum Rechenbeispiel 1401 (Seite 125, 126, 127):

Dieser Fall unterscheidet sich dadurch von dem vorhergehendem Beispiel, daß zusätzlich strahlungsinduziertes Kriechen berücksichtigt wird. Das sich einstellende Spannungsfeld (Seite 127) gleicht in etwa dem Spannungsfeld im vorangegangenen Beispiel, liegt aber um 1,5 - 2 kp/mm² niedriger. Das sich einstellende Feld der plastischen Dehnung stimmt dagegen nur im Rippenbereich mit dem Dehnungsfeld im vorangegangenen Beispiel überein. Im Bereich zwischen den Rippen sind die Dehnungen wesentlich geringer. Dafür treten in diesem Bereich recht hohe plastische Volumendilatationen auf. Das strahlungsinduzierte Kriechen hat demnach beim Temperaturniveau 650 ° C einen ähnlich starken Einfluß auf die Spannungsrelaxation wie das thermische Kriechen.

Zum Rechenbeispiel 6401 (Seite 128, 129, 130):

Es liegen dieselben Verhältnisse vor wie im vorangegangenen Beispiel. Nur das Temperaturniveau wurde um 200 ° C gesenkt. Damit spielt das thermische Kriechen bei den Relaxationsvorgängen kaum eine Rolle. Dominierend ist der Spannungsabbau durch strahlungsinduziertes Kriechen.

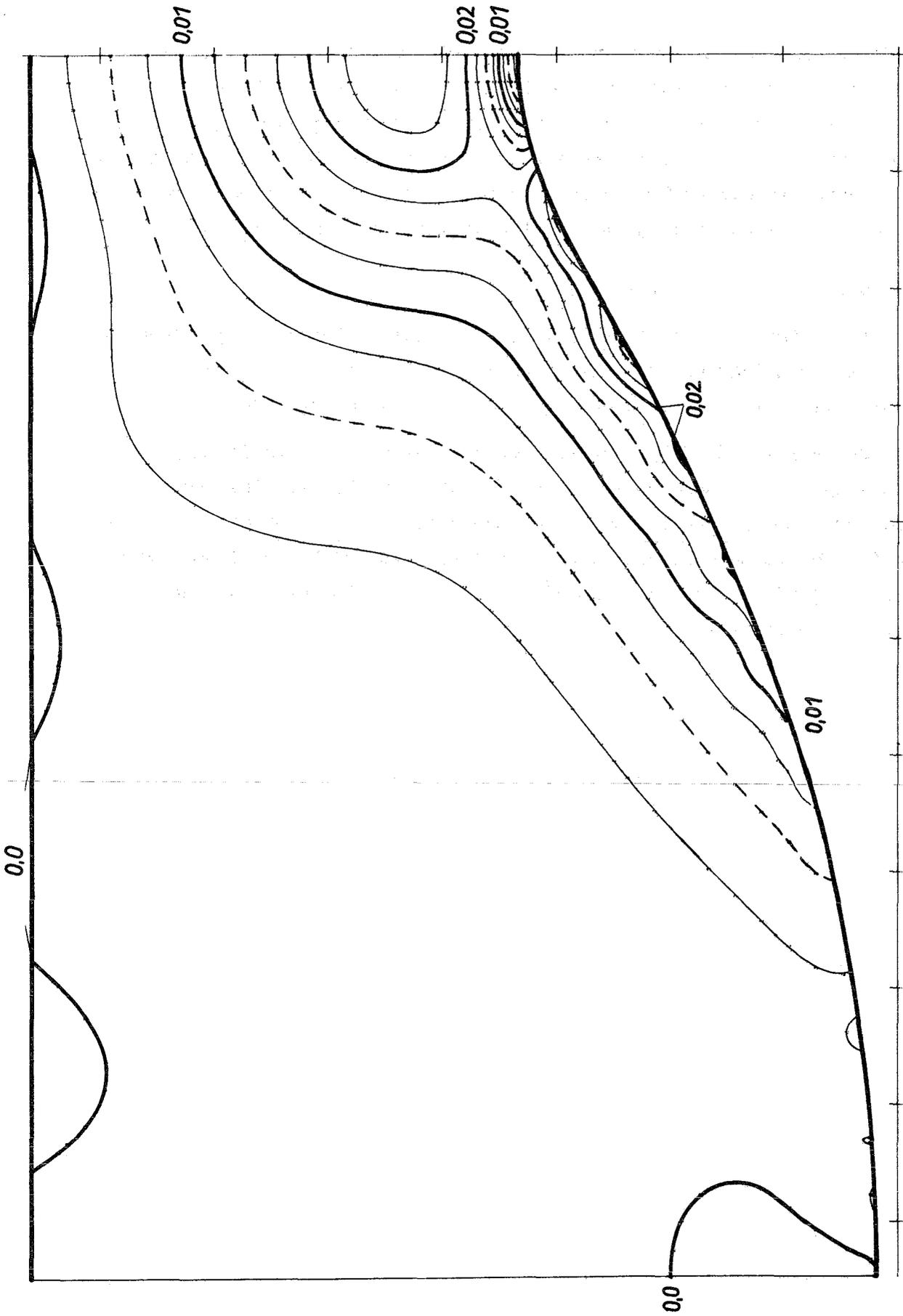
Beim thermischen Kriechen werden Spannungsspitzen, sofern der Kriechexponent größer als 1 ist, überproportional abgebaut. Das hat zur Folge, daß in den Spannungsfeldern ausgeprägte Spannungsmaxima selten vorkommen. Beim strahlungsinduzierten Kriechen hängen die Verzerrungsgeschwindigkeiten im wesentlichen linear von den Spannungen ab, so daß ausgeprägte Spannungsspitzen eher zu erwarten sind. Das Spannungsfeld auf Seite 130 zeigt, daß solche ausgeprägten Spannungsspitzen tatsächlich vorkommen. Bei den Überlegungen zu diesen Spannungsspitzen hat man ferner zu beachten, daß strahlungsinduziertes Kriechen eher eine Relaxation des hydrostatischen Span-

nungsanteils, als eine Relaxation der Vergleichsspannung bewirkt. Dies hängt damit zusammen, daß strahlungsinduziertes Kriechen im wesentlichen eine Volumendilatation und weniger eine deviatorische Verzerrungsänderung (Vergleichsdehnung nach v. Mises) darstellt. Die Felder auf Seite 130 bestätigen diese Tatsache. An dieser Stelle sei nochmals auf die derzeit sehr lückenhaften und unsicheren Daten beim strahlungsinduzierten Kriechen hingewiesen.

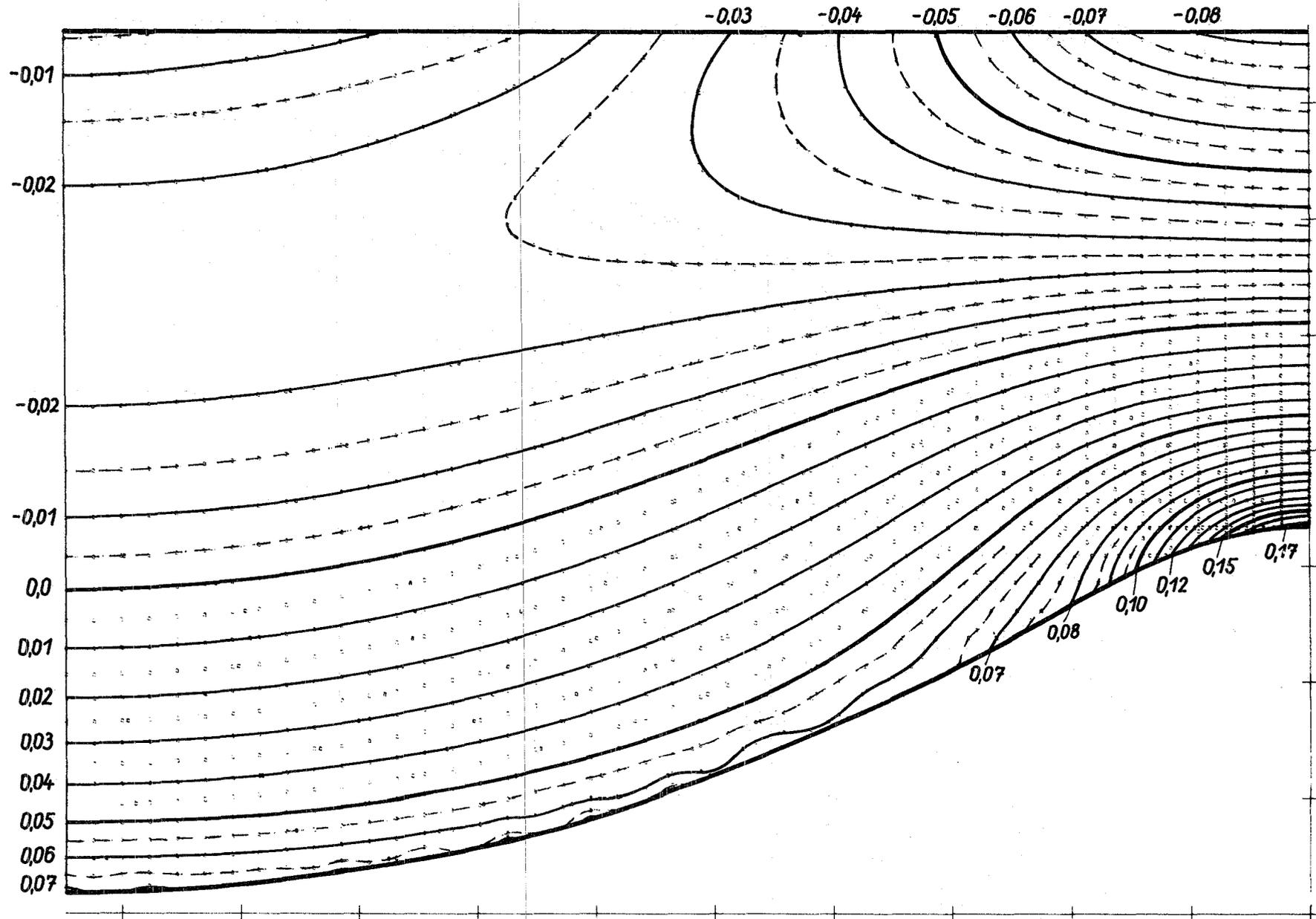
Zum Rechenbeispiel 9001 (Seite 131):

Wie bereits erwähnt, wurde dieses Beispiel nur durchgeführt, um die Anwendbarkeit des Codes EVA2 auf gewisse Probleme mit zeitunabhängiger Platizität (ideal-elastisch-plastisches Werkstoffverhalten) zu demonstrieren.

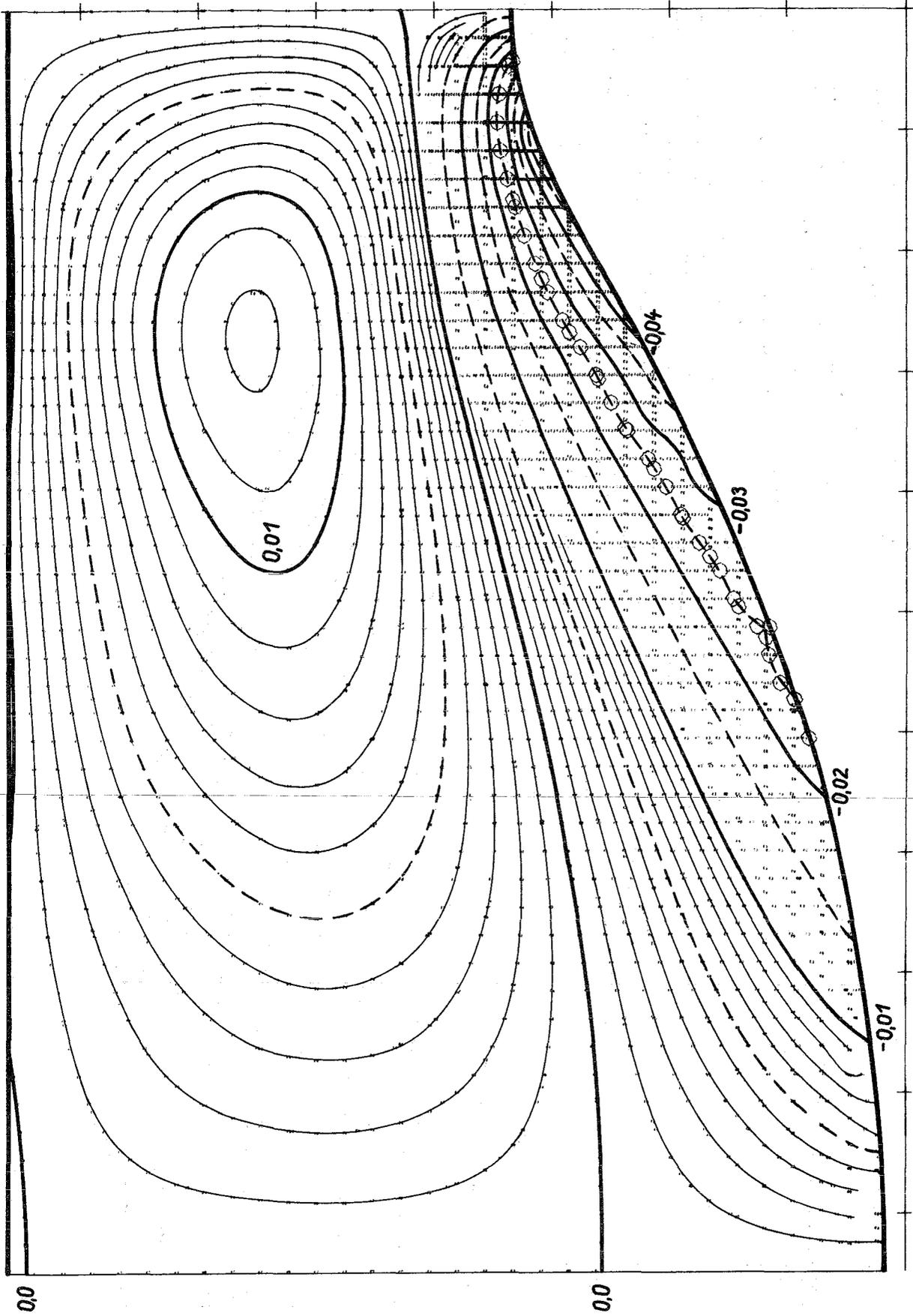
Aufgrund des vorliegenden Spannungsfeldes auf Seite 131 bestätigt man, daß der Bedingung (3.4.3) näherungsweise genügt wird. Da ferner plastische Verzerrungen nur dort auftreten, wo die Spannung etwa gleich der Fließspannung ist, darf vermutet werden, daß sich die erzielte Lösung bei gleichmäßiger, monotoner Lastaufbringung (Erwärmung) einstellt. Die Lösung wurde nach 21 Rechenschritten erzielt.



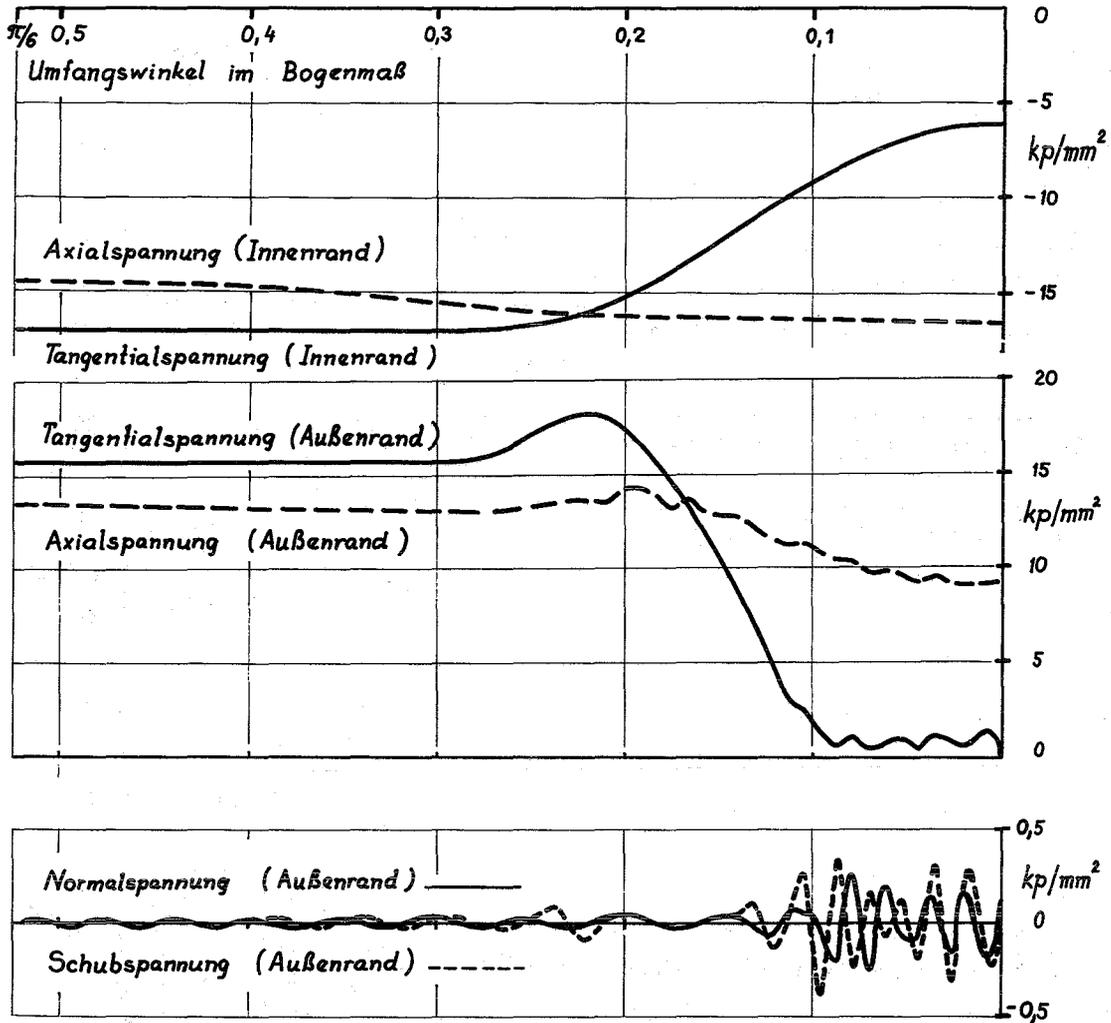
Rechenbeispiel von Takeuti : Normiertes Radialspannungsfeld σ_{rr}



Rechenbeispiel von Takeuti : Normiertes Tangentialspannungsfeld $\sigma_{\varphi\varphi}$



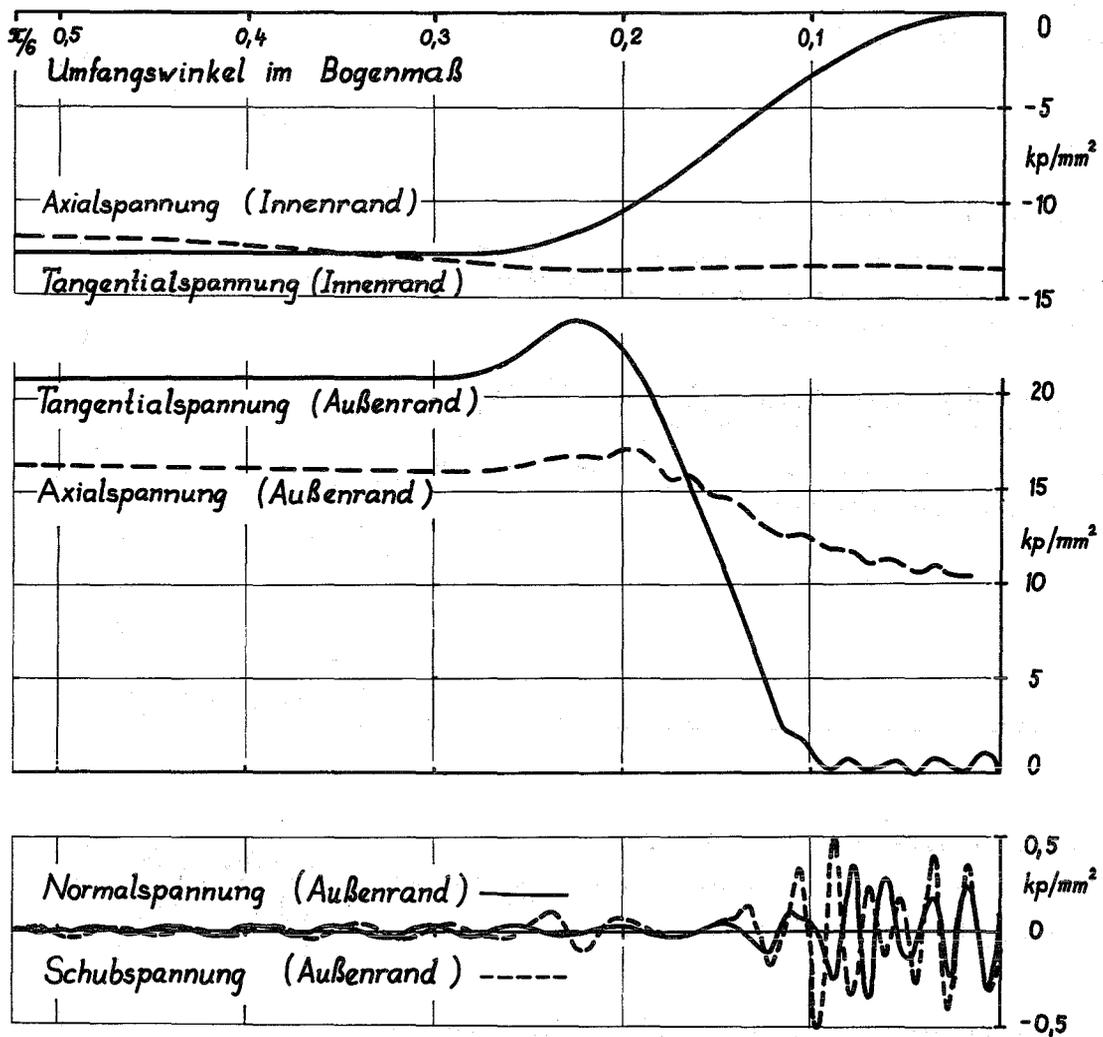
Rechenbeispiel von Takeuti : Normiertes Schubspannungsfeld σ_{rf}



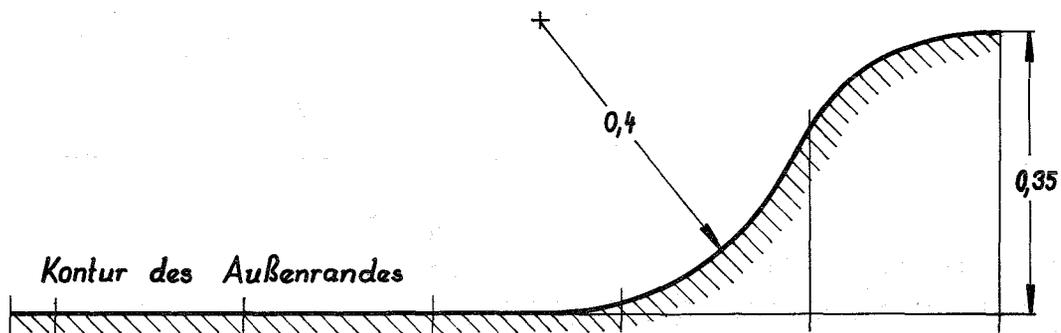
Schwankungen der Normal- und Schubspannung
am Innenrand etwa $\pm 0,001 \text{ kp/mm}^2$

RECHENBEISPIEL 0001 (lin.-elast. Stoffverh., Wärmedehnung)

Tangential-, Axial-, Normal- u. Schubspannung am Innenrand u. Außenrand als Funktion d. Umfangswinkels

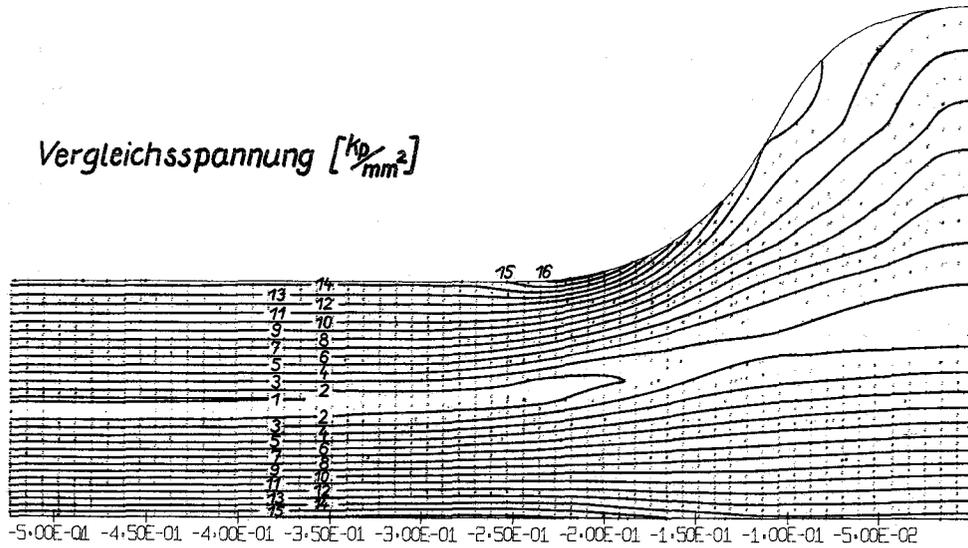


Schwankungen der Normal- und Schubspannung am Innenrand etwa $\pm 0,001 kp/mm^2$

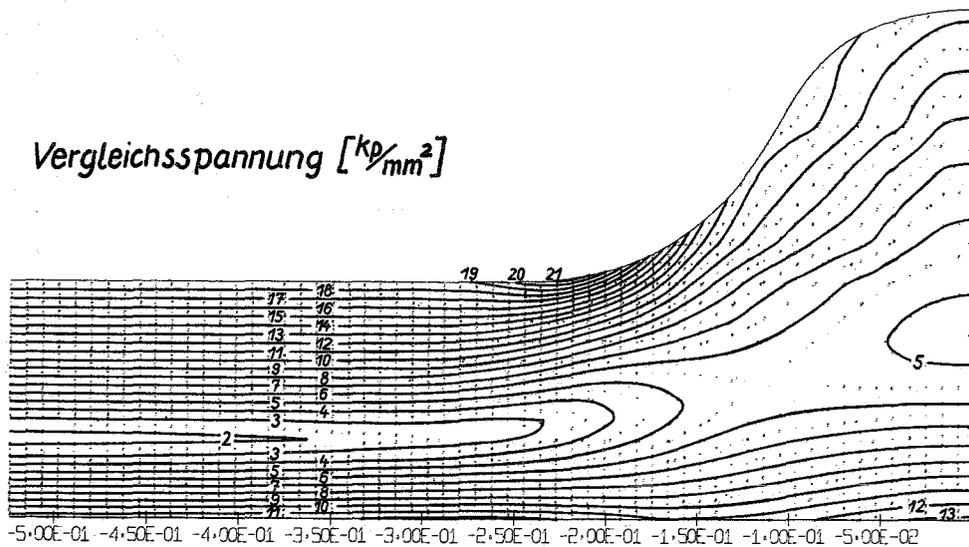


RECHENBEISPIEL 0101 (lin.-elast. Stoffverh., Wärmedehn., Axialkraft, Innendruck)

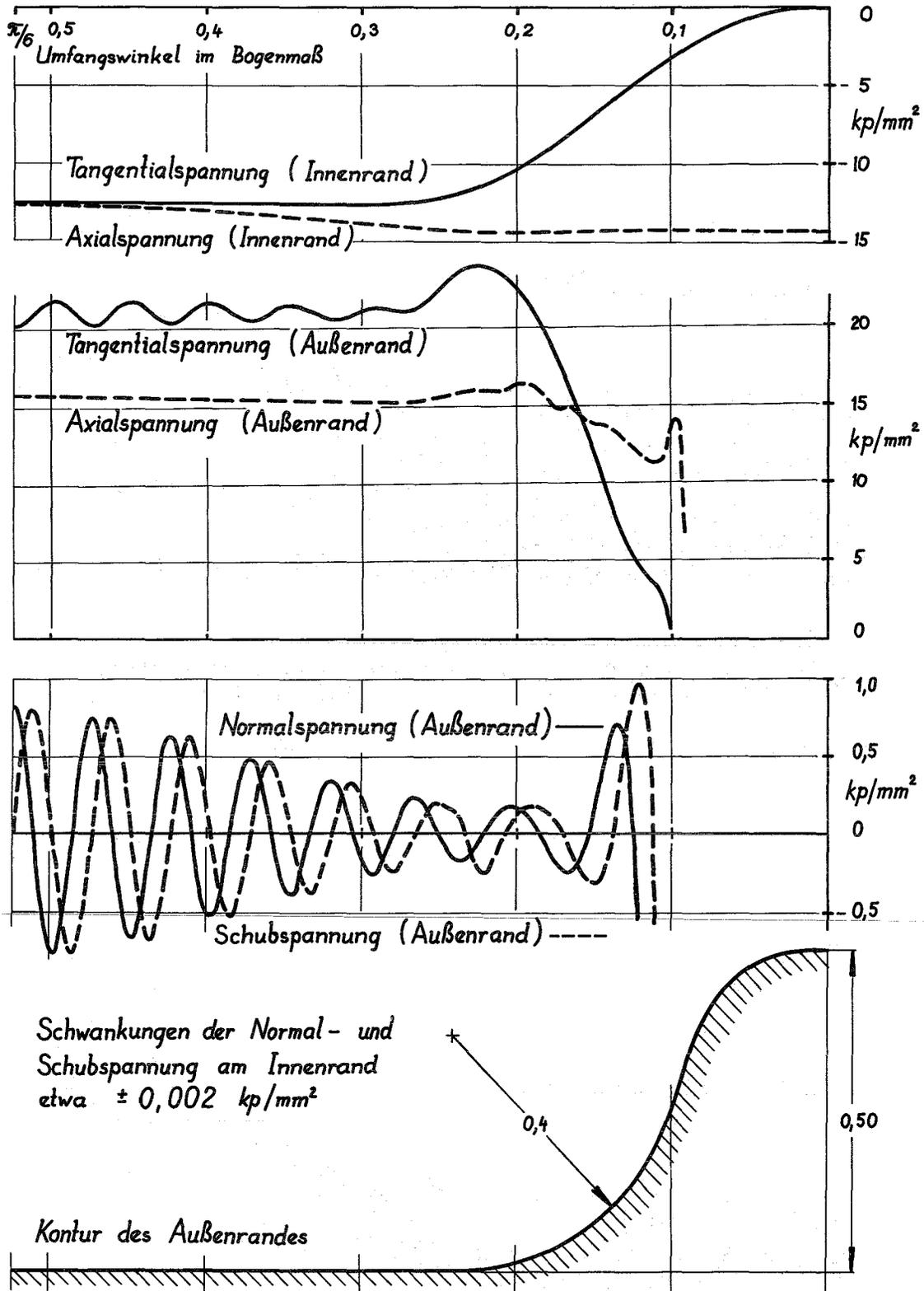
Tangential-, Axial-, Normal- u. Schubspannung am Innenrand u. Außenrand als Funktion des Umfangswinkels



RECHENBEISPIEL 0001 (Anfangszustand bei Beispiel)
1001 u. 1201

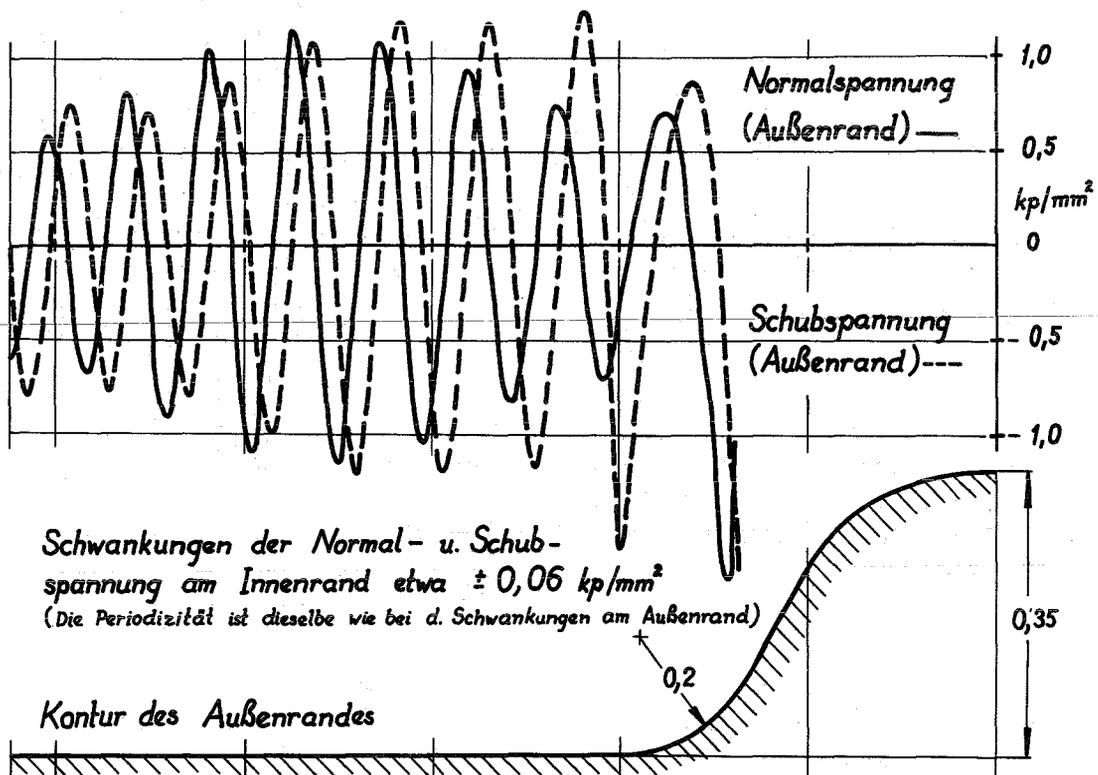
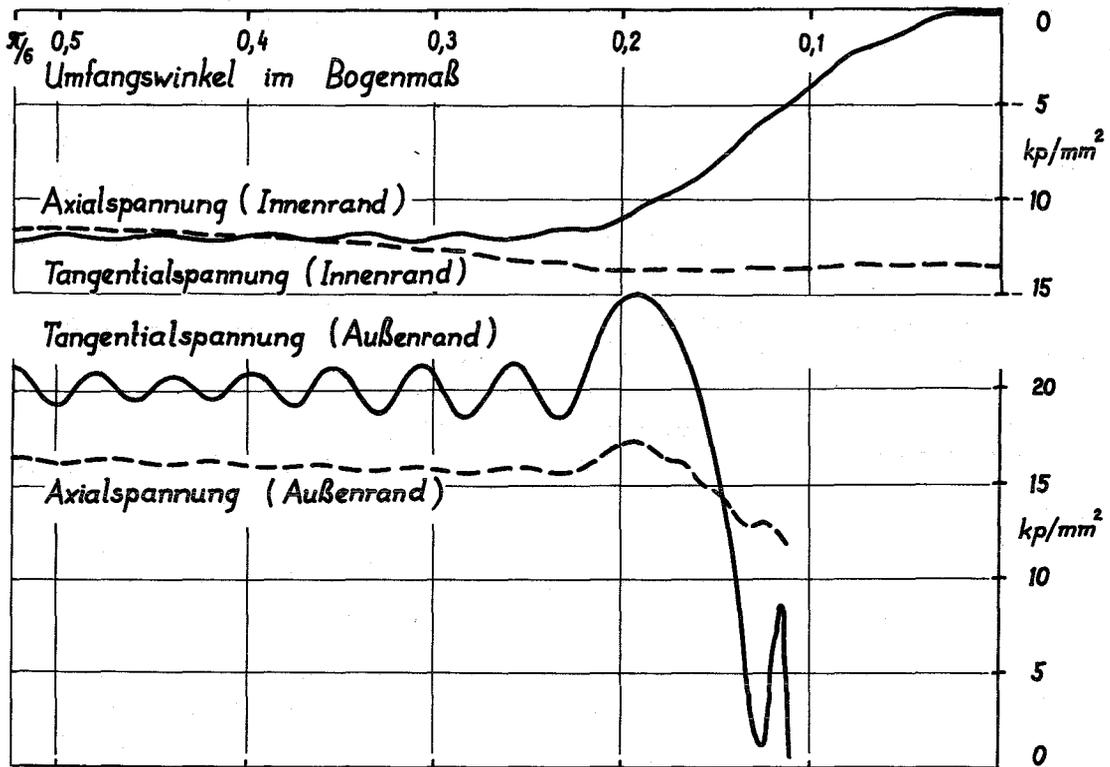


RECHENBEISPIEL 0101 (Anfangszustand bei Beispiel)
1101, 1302, 1401, 6401



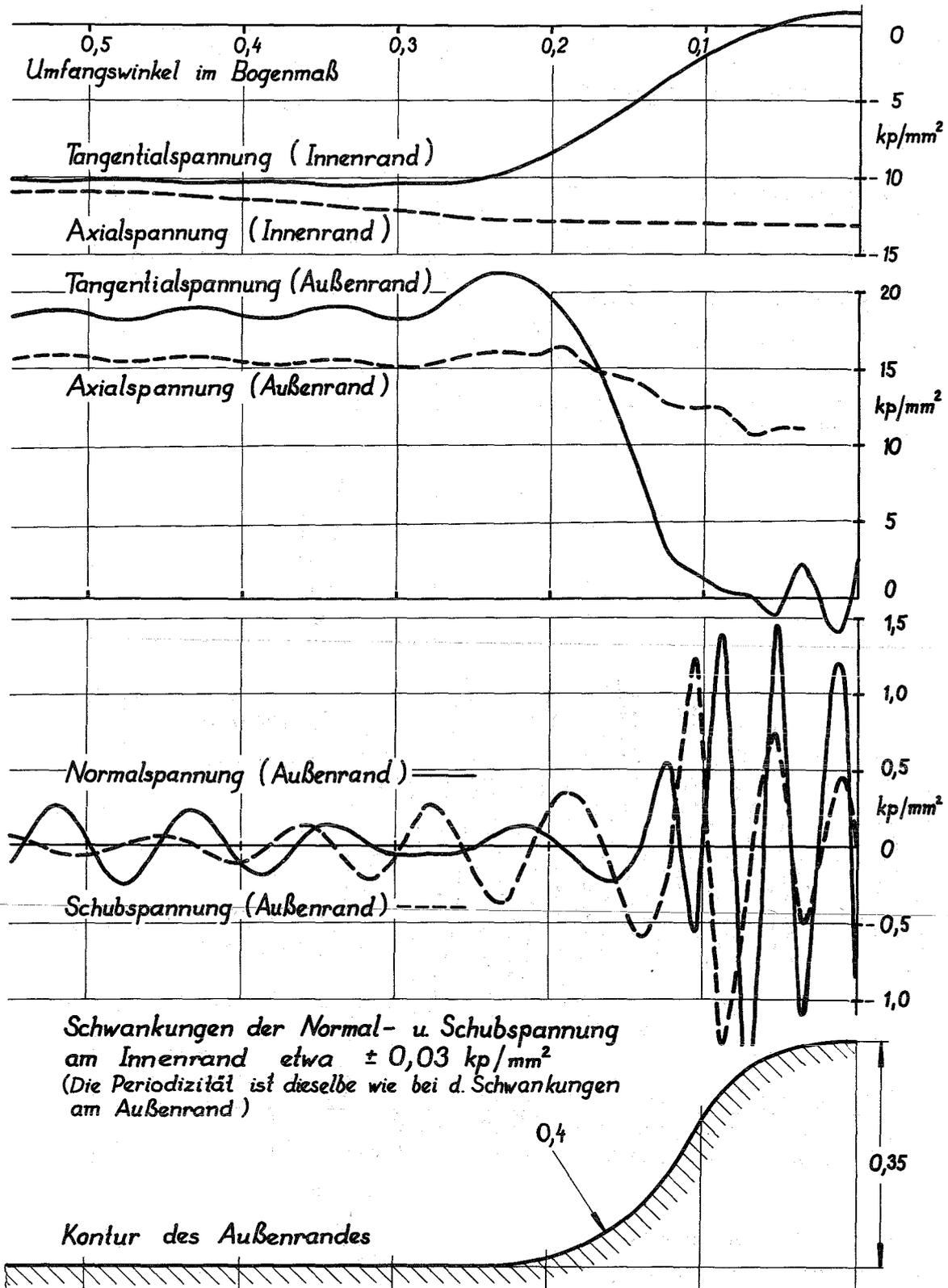
RECHENBEISPIEL 0201 (lin.-elast. Stoffverh., Wärmedehn., Axialkraft, Innendruck, Erhöh. Rippe)

Tangential-, Axial-, Normal- und Schubspannung am Innenrand u. Außenrand als Funktion des Umfangswinkels



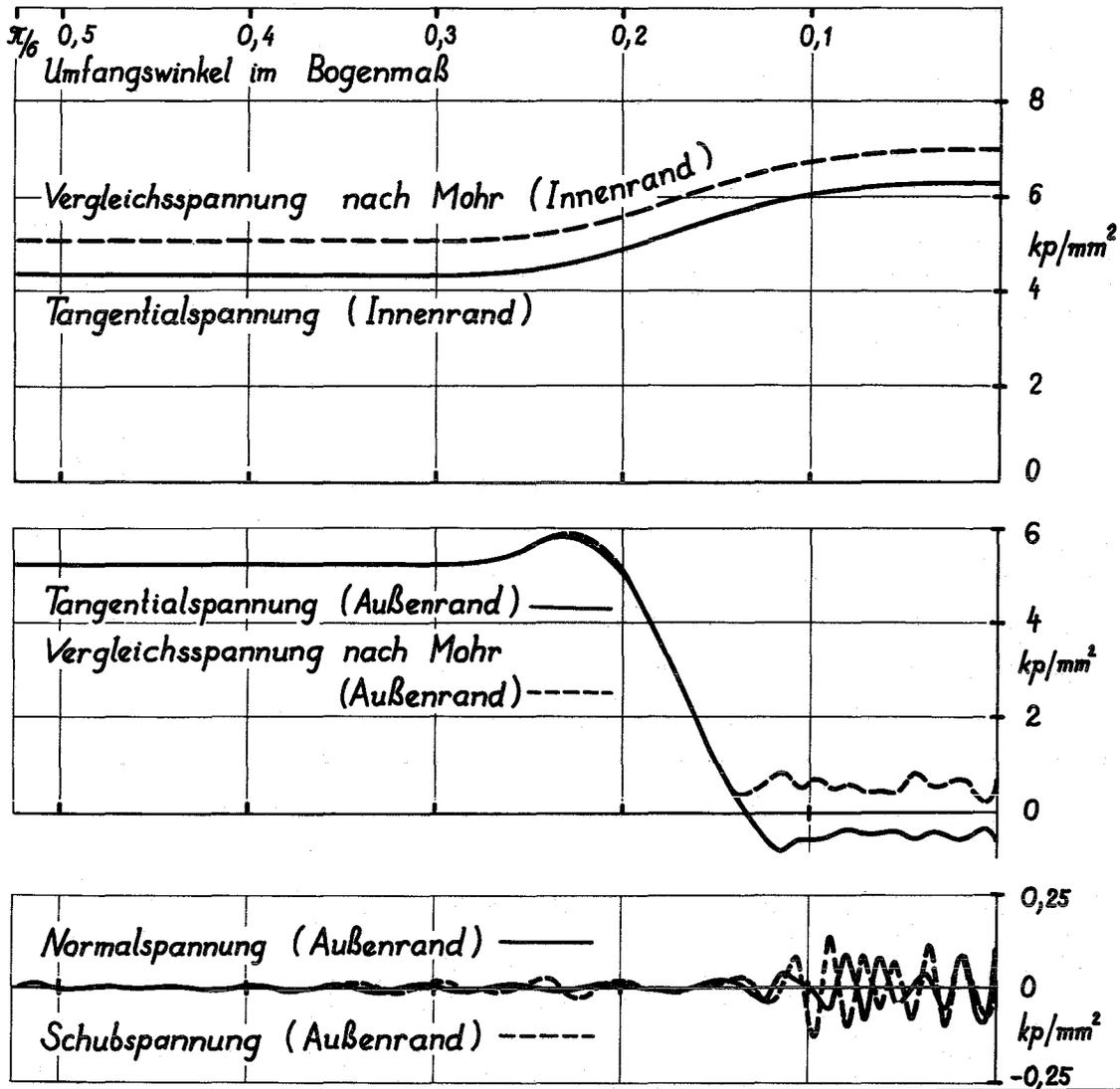
RECHENBEISPIEL 0301 (lin.-elast. Stoffverh., Wärmedehn., Axialkraft, Innendruck, Verkl. Rippenfußrad.)

Tangential-, Axial-, Normal- u. Schubspannung am Innenrand u. Außenrand als Funktion d. Umfangswinkels

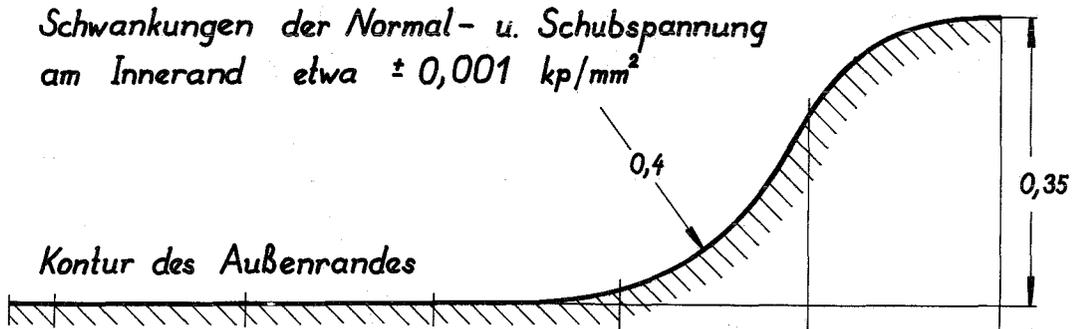


RECHENBEISPIEL 0013 (lin.-elast. Stoffverh., Wärmedehn., Axialkraft, Innendruck, 3 Rippen am Umfang)

Tangential-, Axial-, Normal- und Schubspannung am Innenrand und Außenrand als Funktion d. Umfangswinkels

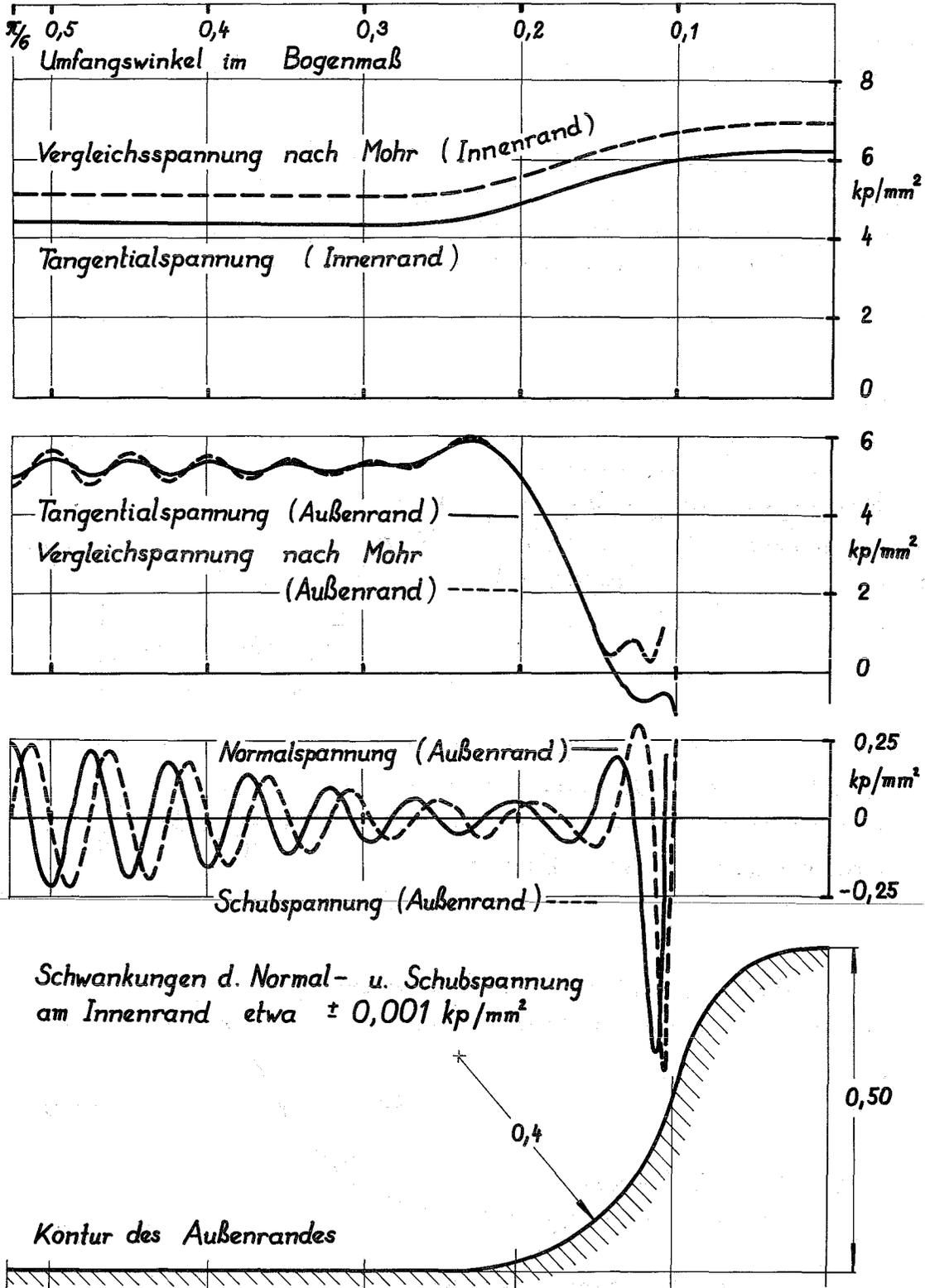


Schwankungen der Normal- u. Schubspannung
am Innenrand etwa $\pm 0,001 kp/mm^2$



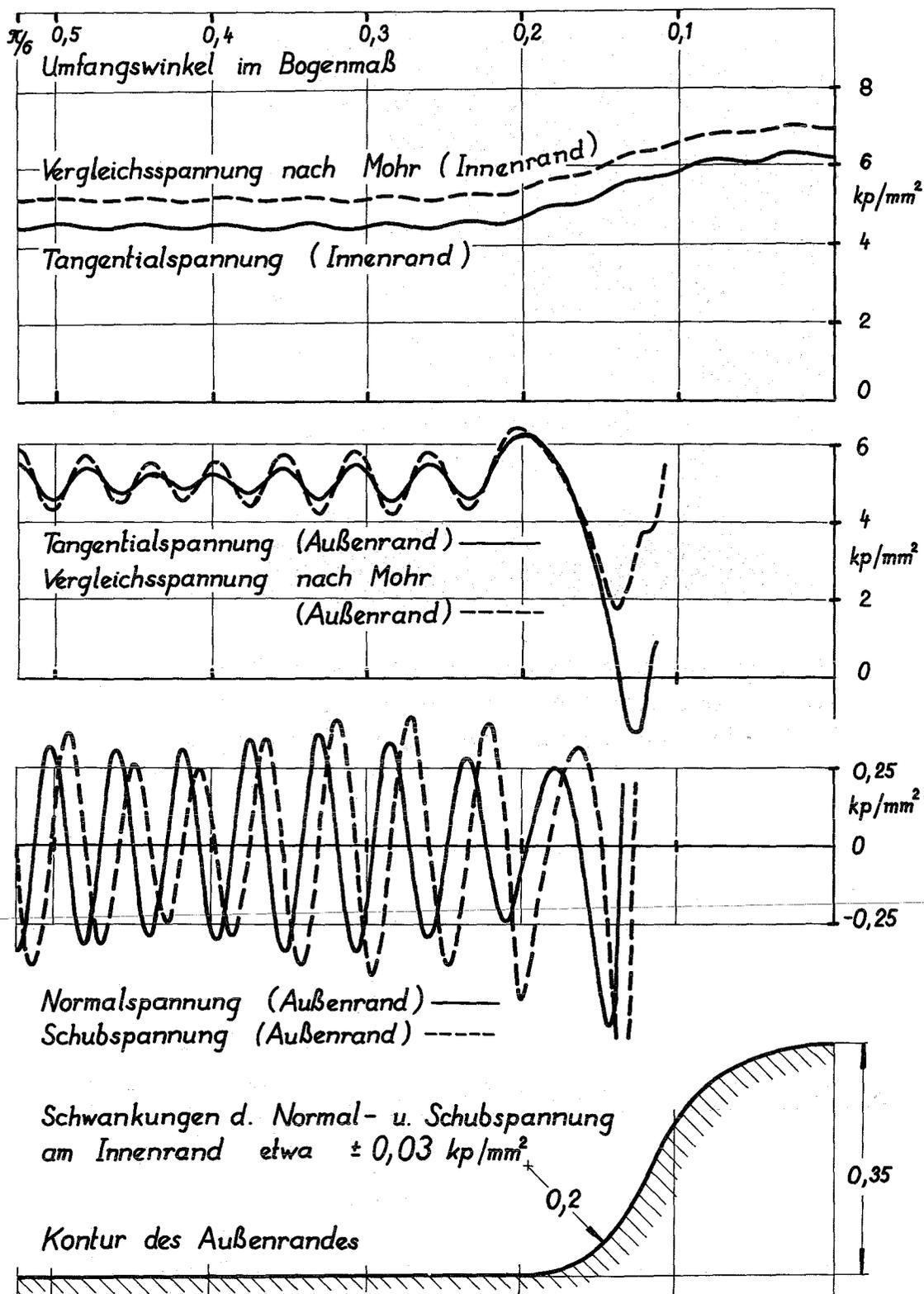
RECHENBEISPIEL 0162 (lin.-elast. Stoffverh., Innendruck, ohne Berücksicht. d. Axialspannung)

Tangentialsp. und Vergleichssp. nach Mohr, sowie Normal- u. Schubsp. am Innen- u. Außenrand als Funktion des Umfangswinkels.



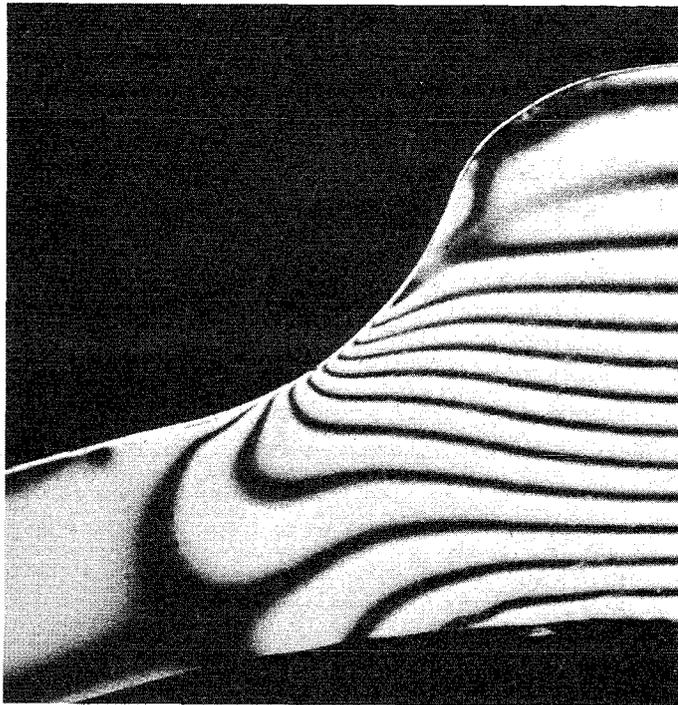
RECHENBEISPIEL 0262 (lin.-elast. Stoffverh., Innendruck, Erhöhte Rippe, ohne Berücksichtigung der Axialspannung)

Tangentialsp. u. Vergleichssp. nach Mohr, sowie Normal- u. Schubsp. am Innen- u. Außenrand als Funktion des Umfangswinkels.

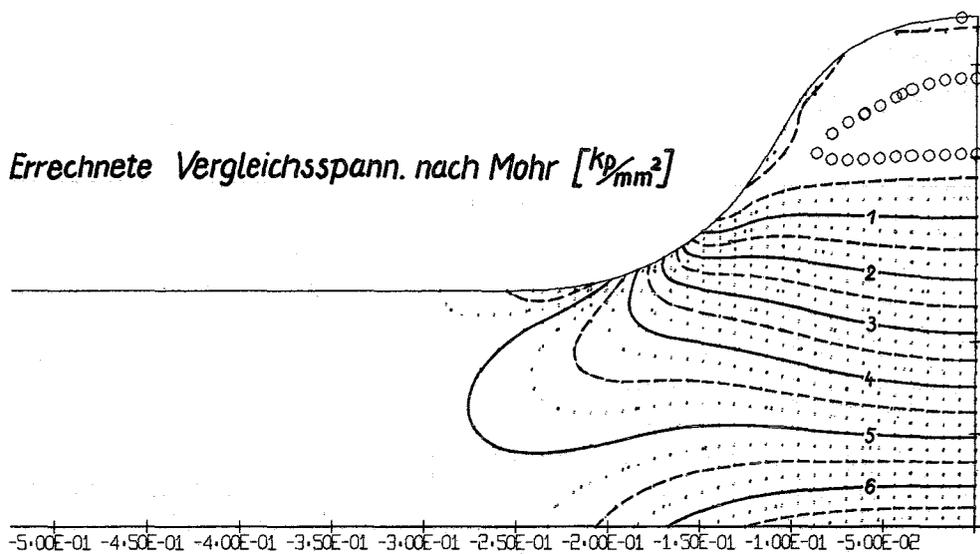


RECHENBEISPIEL 0362 (lin.-elast. Stoffverh., Innendruck, Verkleinerter Rippenfußradius, o. Berücksichtigung d. Axialspannung)

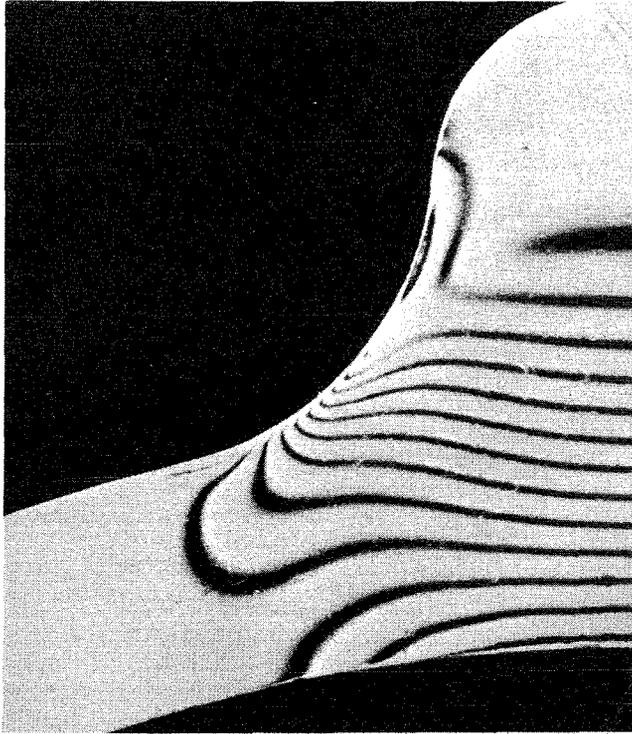
Tangentialsp. u. Vergleichssp. nach Mohr, sowie Normal- u. Schubspann. am Innen- u. Außenrand als Funktion d. Umfangswinkels



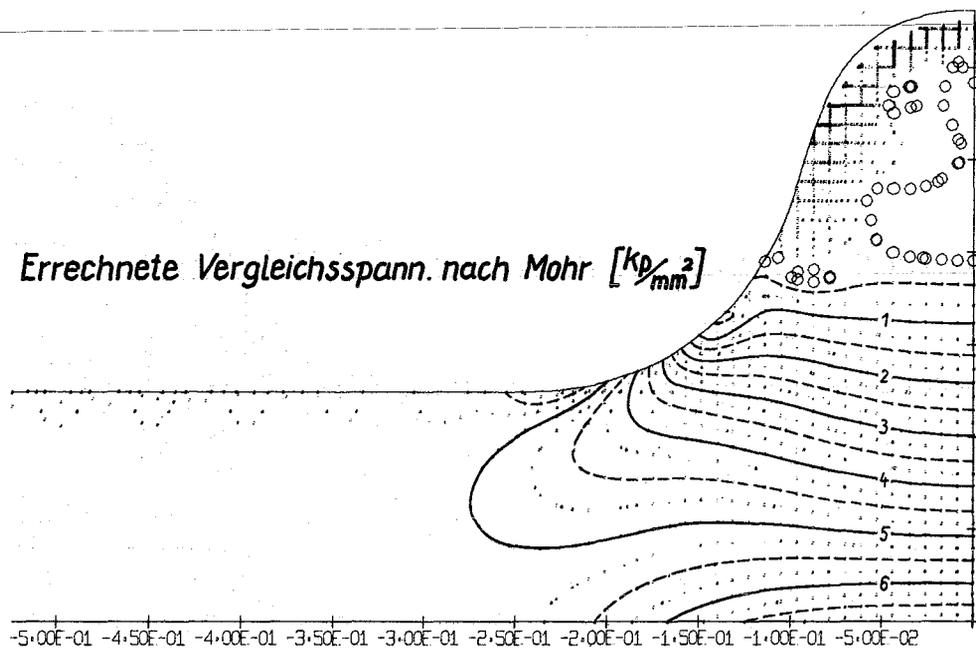
Durch spannungsoptische Experimente bestimmte Vergleichsspannung nach Mohr. Die Höhenlinien bezeichnen nicht dieselben Spannungsniveaus wie im Rechenbeispiel.



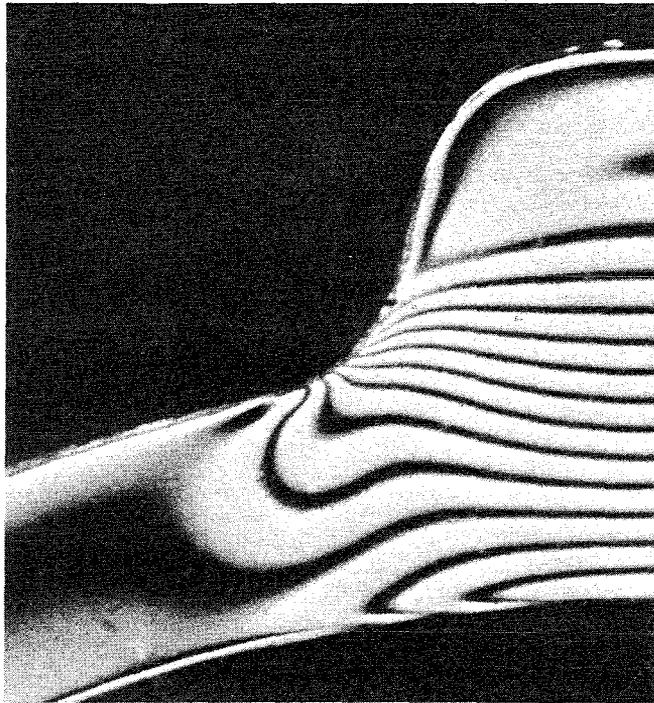
RECHENBEISPIEL 0162



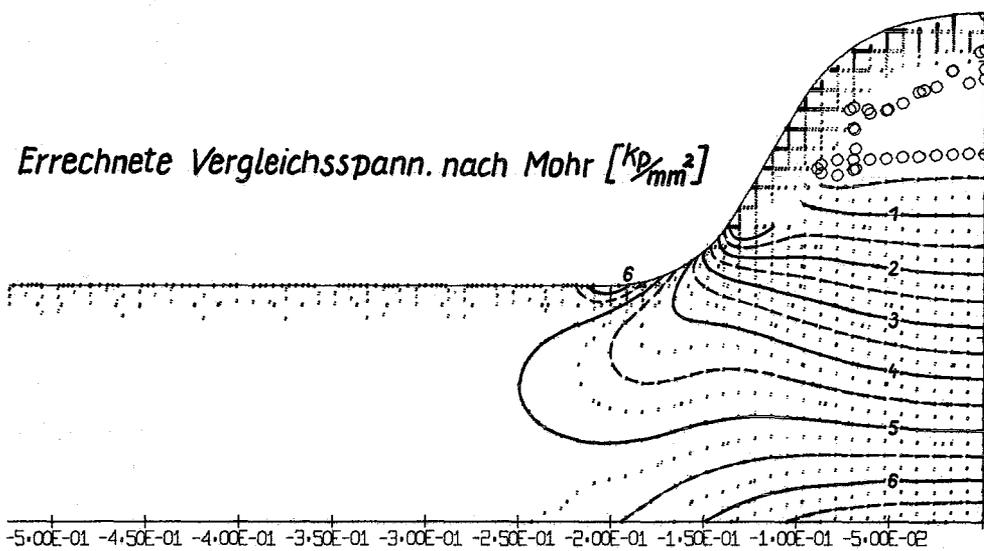
Durch spannungsoptische Experimente bestimmte Vergleichsspannung nach Mohr. Die Höhenlinien bezeichnen nicht dieselben Spannungsniveaus wie im Rechenbeispiel.



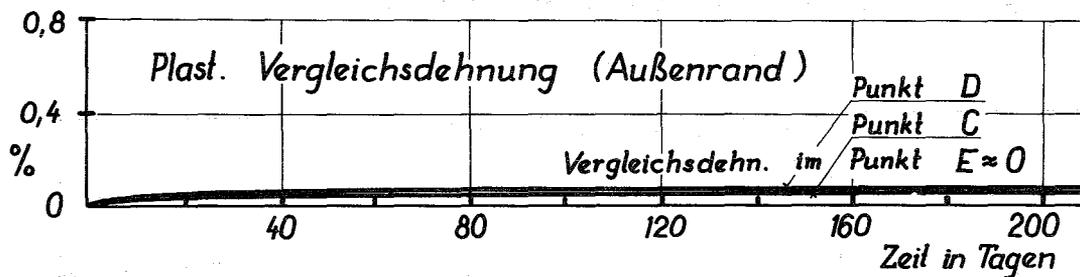
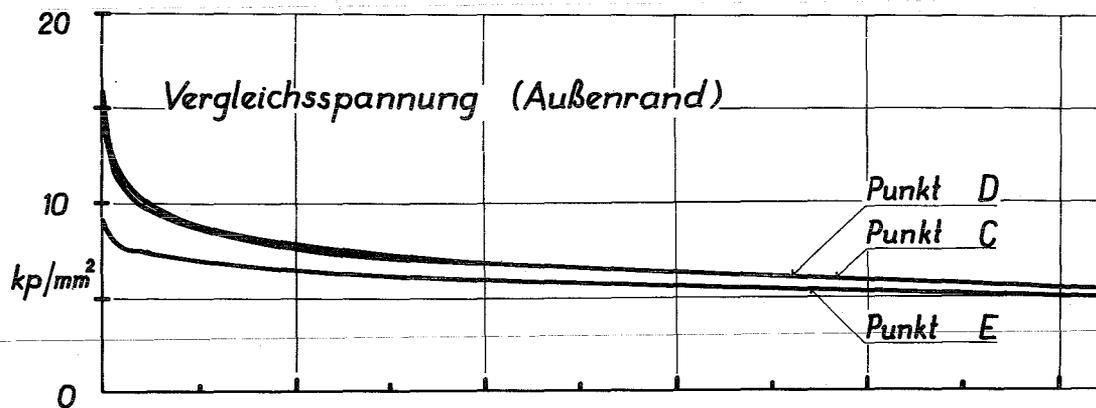
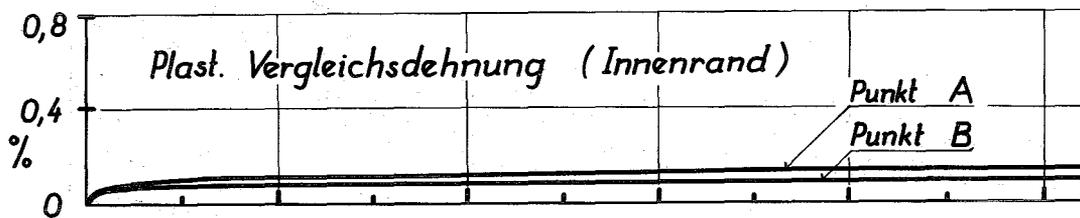
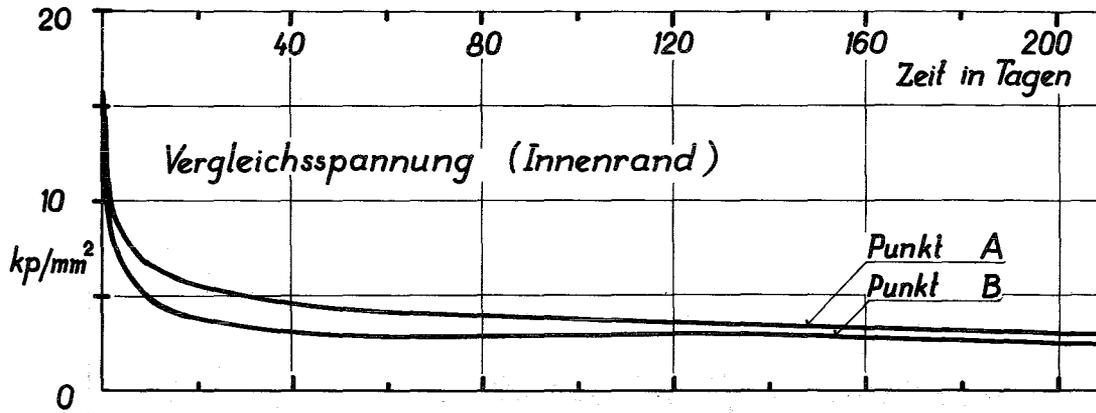
RECHENBEISPIEL 0262



Durch spannungsoptische Experimente bestimmte Vergleichsspannung nach Mohr. Die Höhenlinien bezeichnen nicht dieselben Spannungsniveaus wie im Rechenbeispiel.



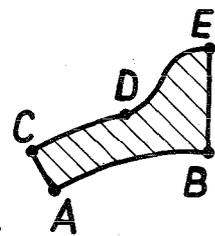
RECHENBEISPIEL 0362

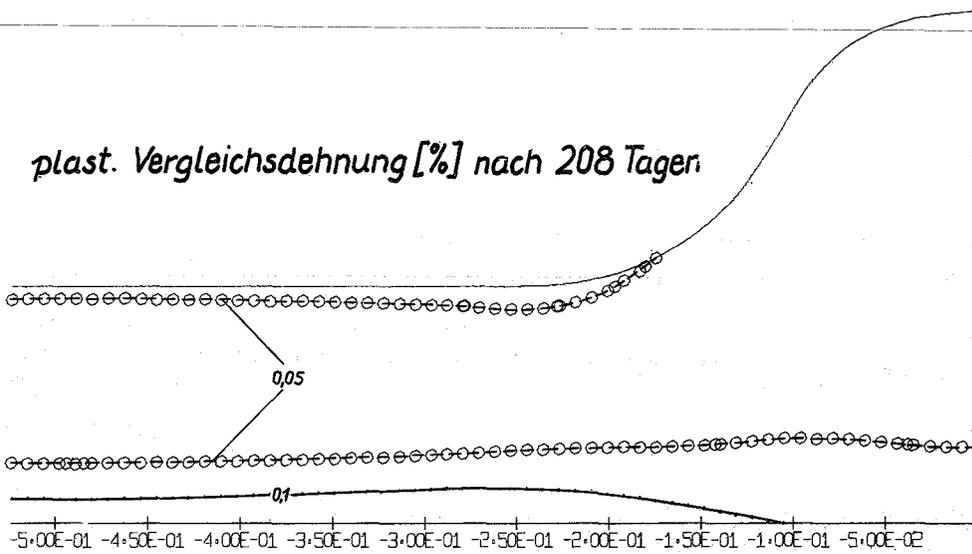
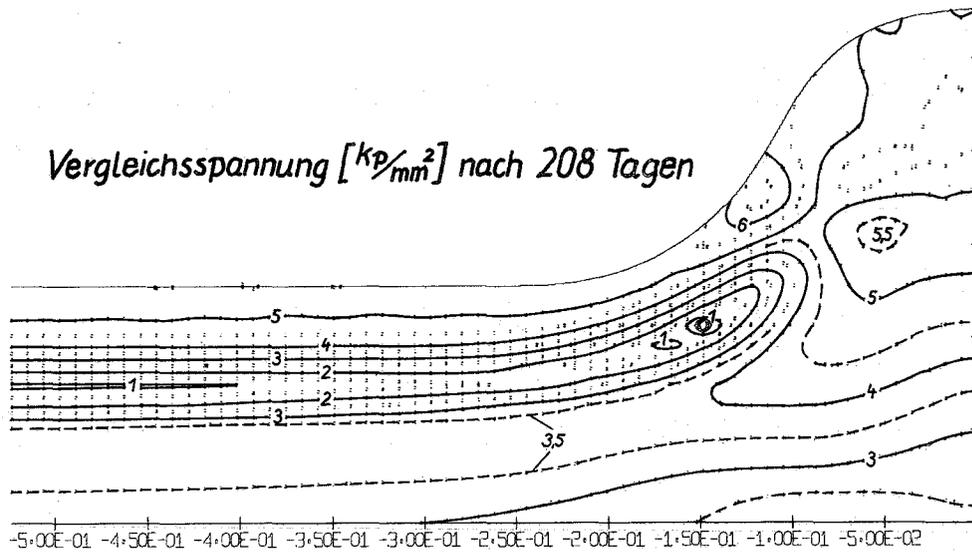


RECHENBEISPIEL 1001

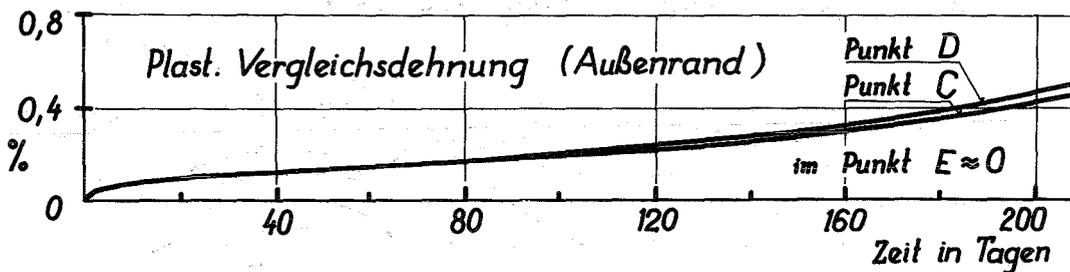
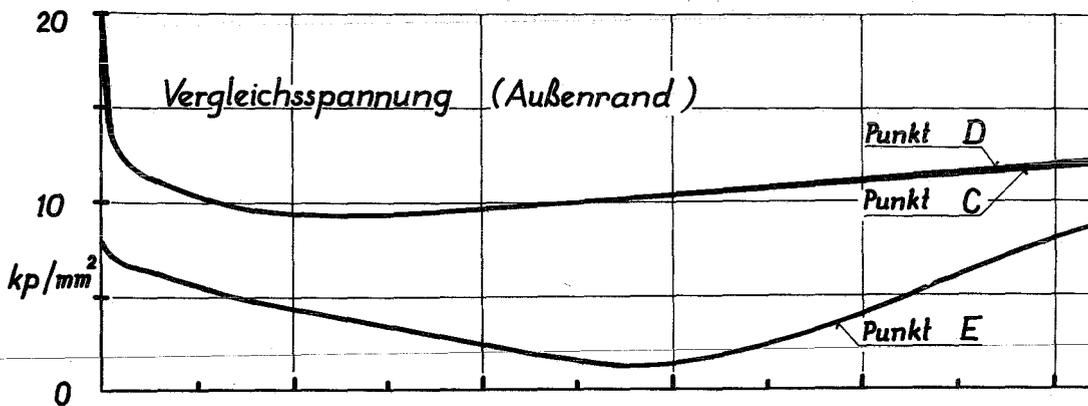
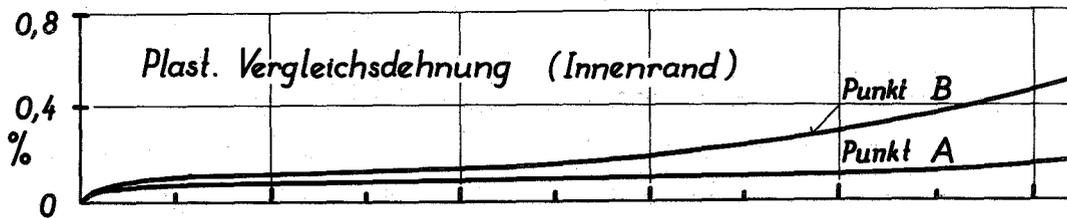
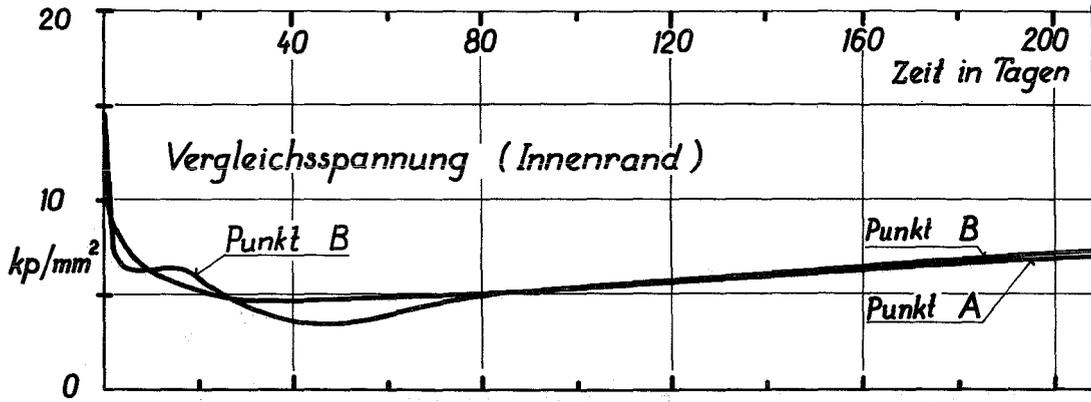
(Therm. Kriechen, Temp.-Niveau 650°C, Wärmedehn.)

Vergleichsspannung u. plast. Vergleichsdehn.
ind. Innenpunkten A, B u. den Außenpunk-
ten C, D, E als Funktion der Zeit.





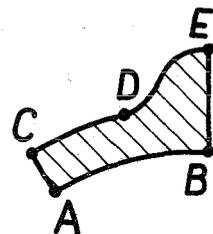
RECHENBEISPIEL 1001

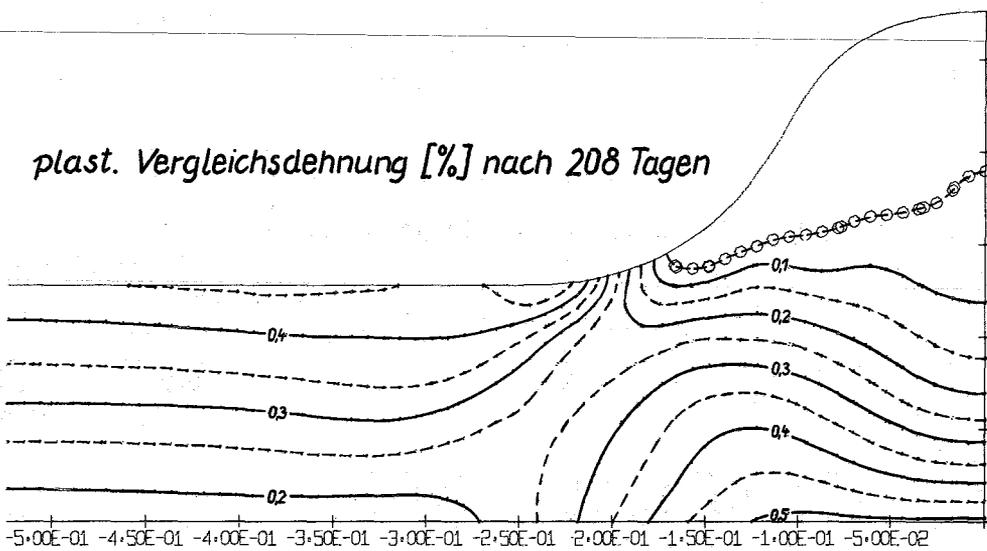
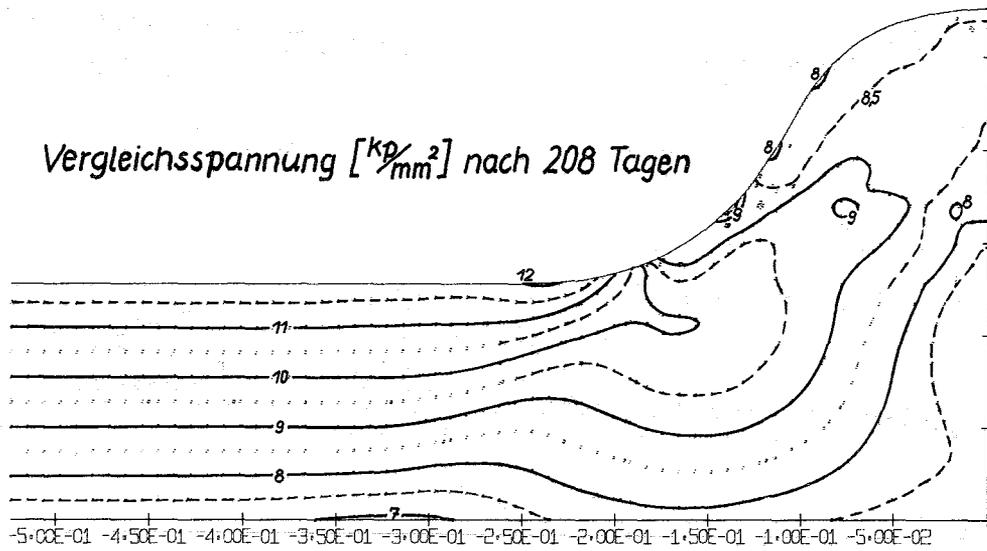


RECHENBEISPIEL 1101

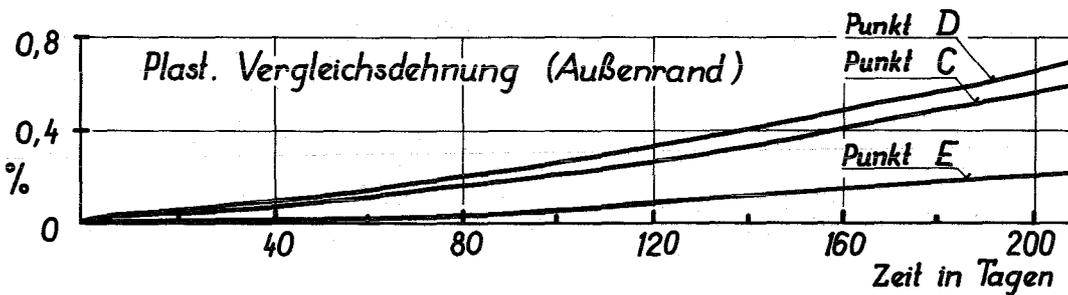
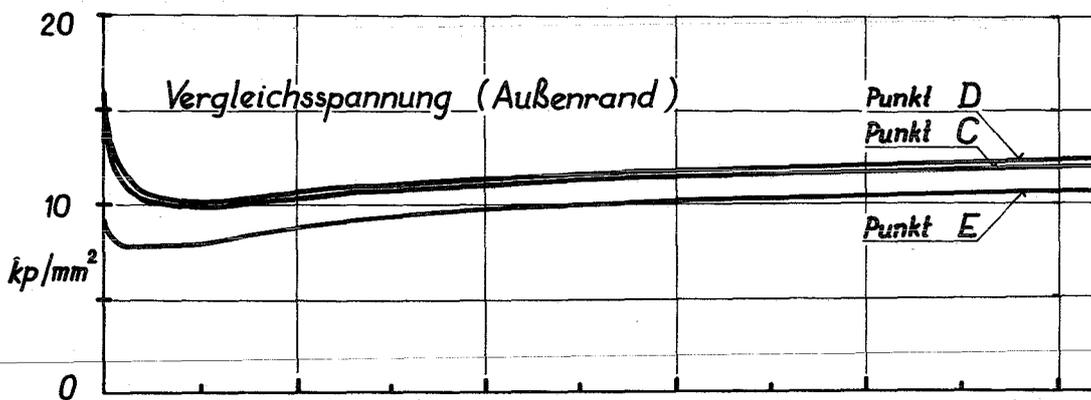
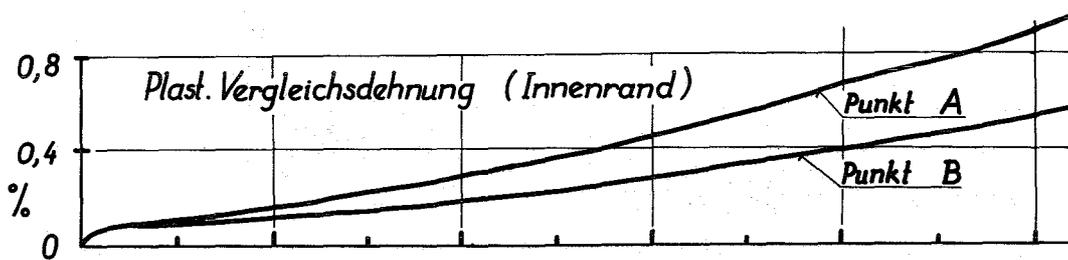
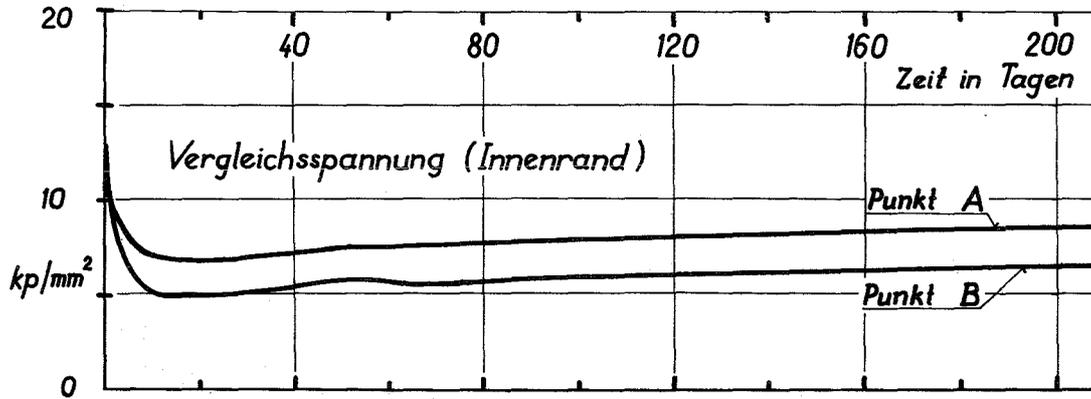
(Therm. Kriechen, Temp. Niveau 650°C, Wärme-
dehnung, Innendruck)

Vergleichsspannung und plast. Vergleichs-
dehnung in den Innenpunkten A, B und
den Außenpunkten C, D, E als Funktion der Zeit.





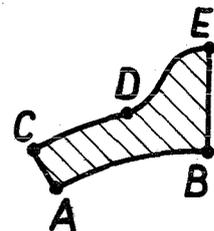
RECHENBEISPIEL 1101



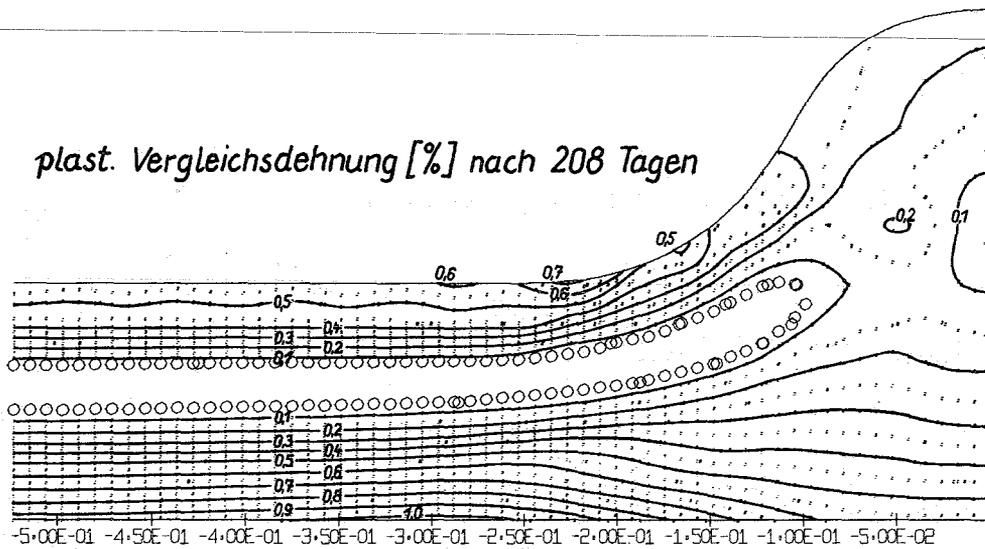
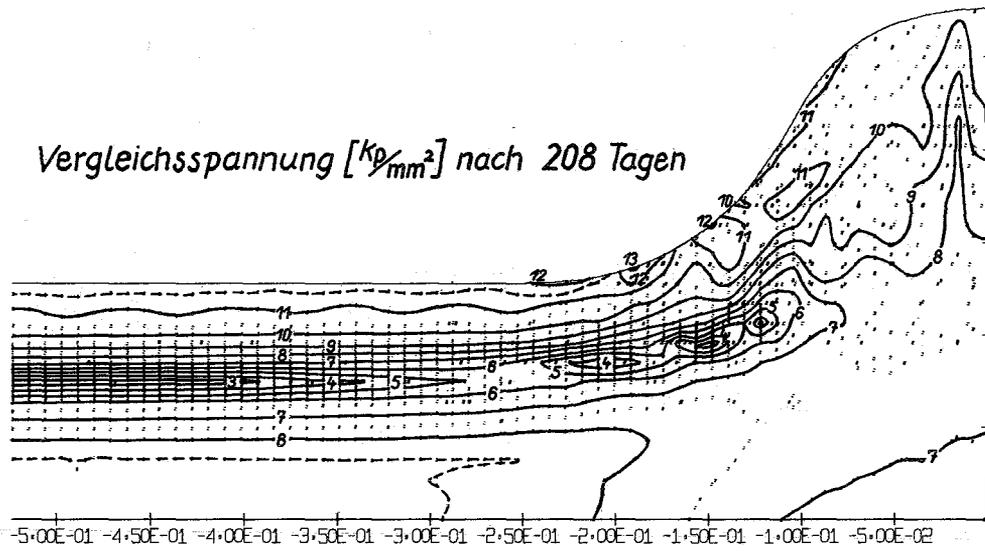
RECHENBEISPIEL 1201

(Therm. Kriechen, Temp.-Niveau 650°C, Wärme-
dehnung, Schwellen)

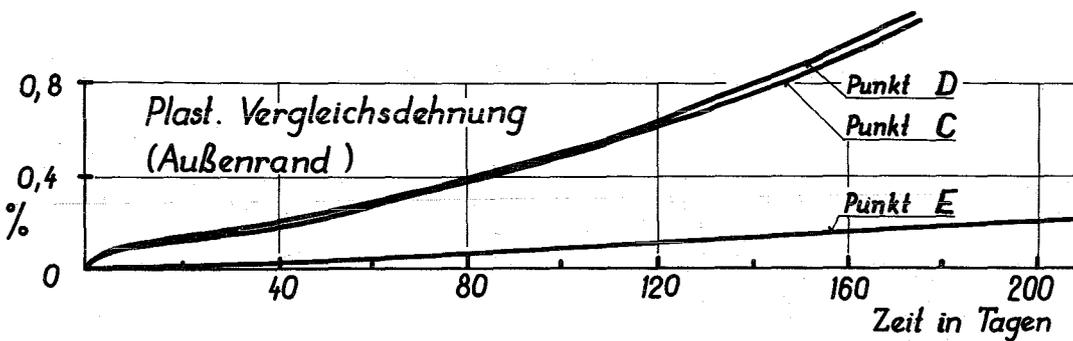
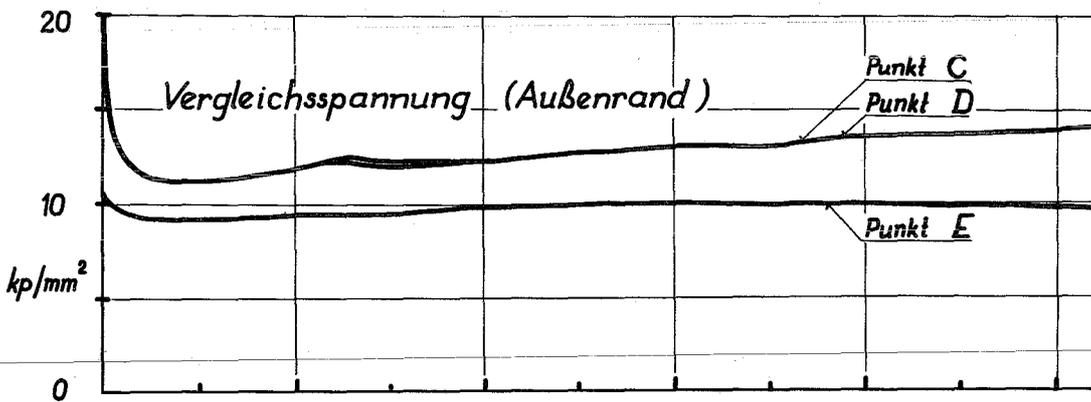
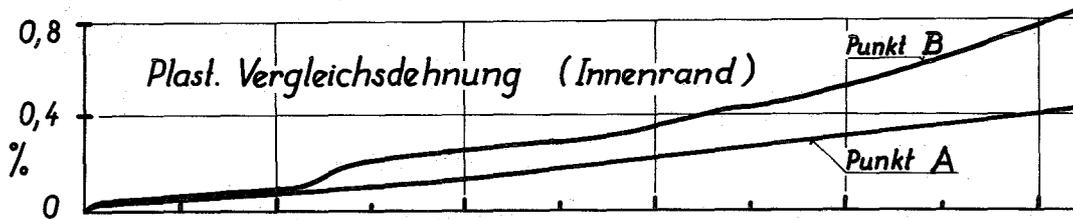
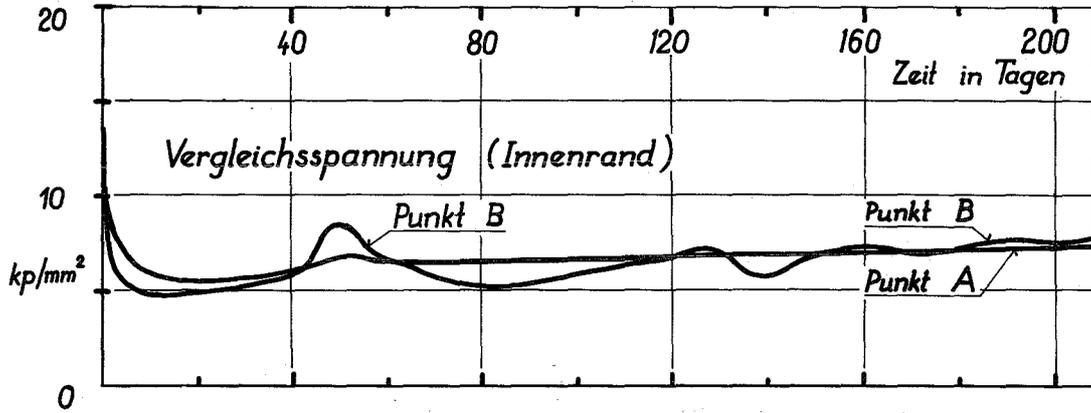
Vergleichsspannung und plast. Vergleichs-
dehnung in den Innenpunkten A, B und
den Außenpunkten C, D, E als Funktion



der Zeit.



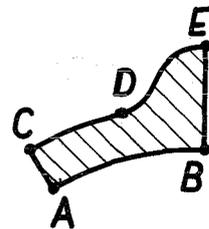
RECHENBEISPIEL 1201

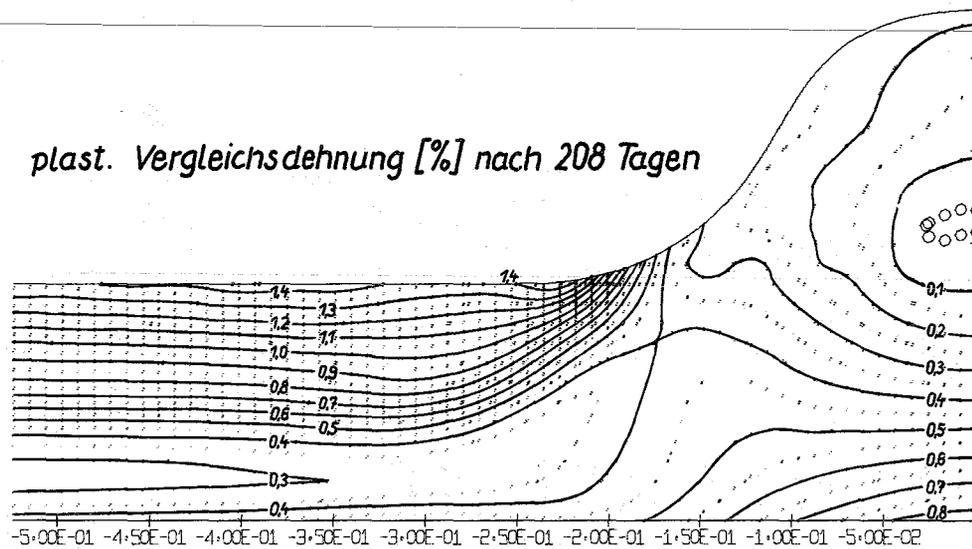
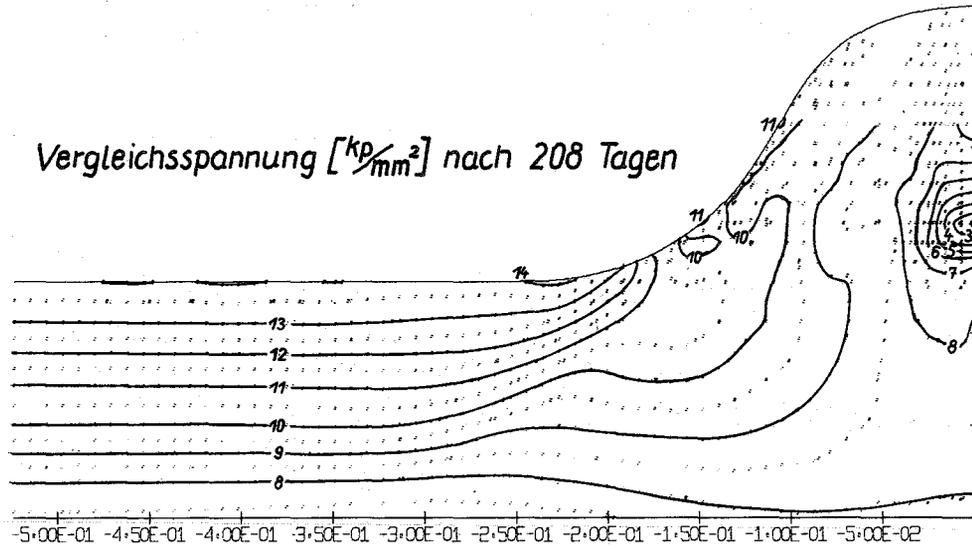


RECHENBEISPIEL 1302

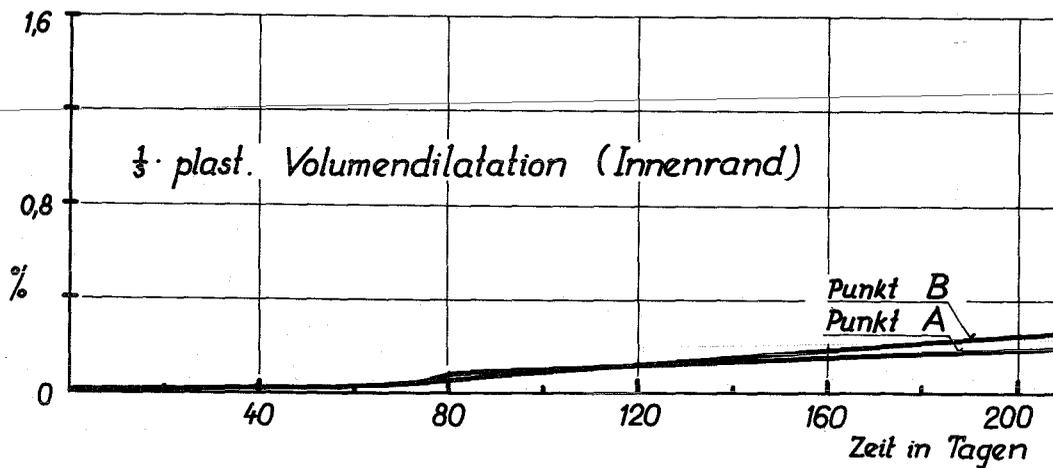
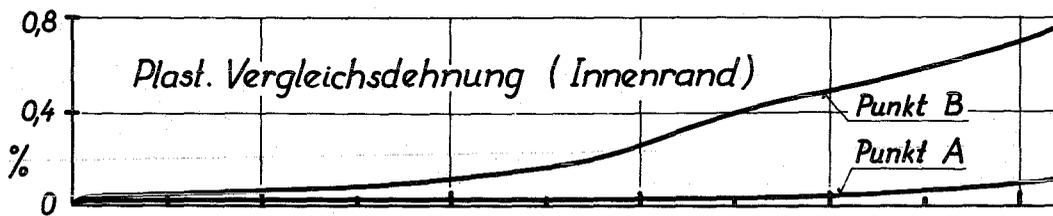
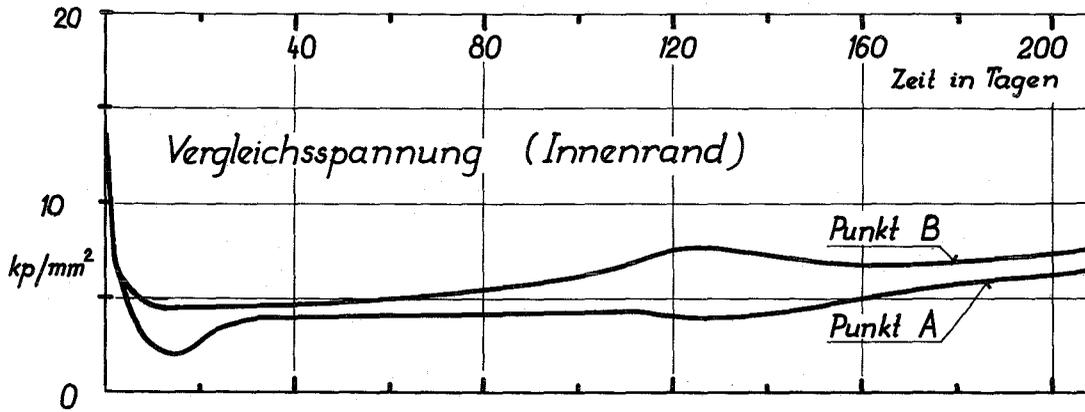
(Therm. Kriechen, Temp.-Niveau 650° C, Wärmedehn., Schwellen, Innendruck, Axialkraft)

Vergleichsspannung und plast. Vergleichsdehnung in den Innenpunkten A, B und den Außenpunkten C, D, E als Funktion der Zeit.





RECHENBEISPIEL 1302

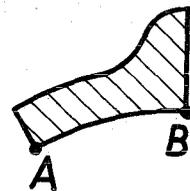


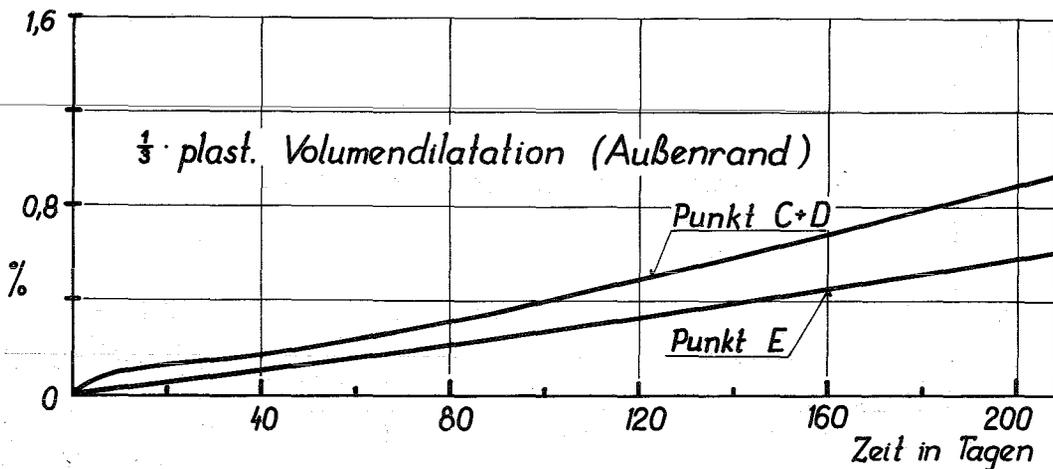
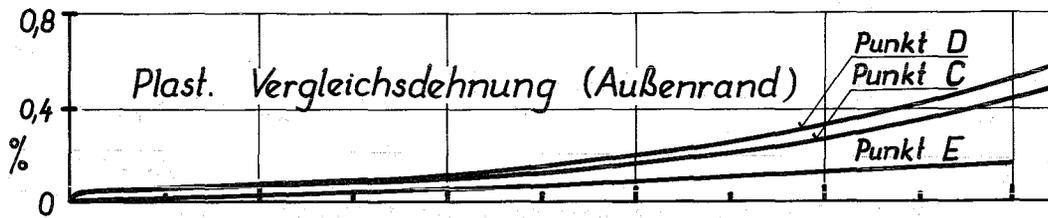
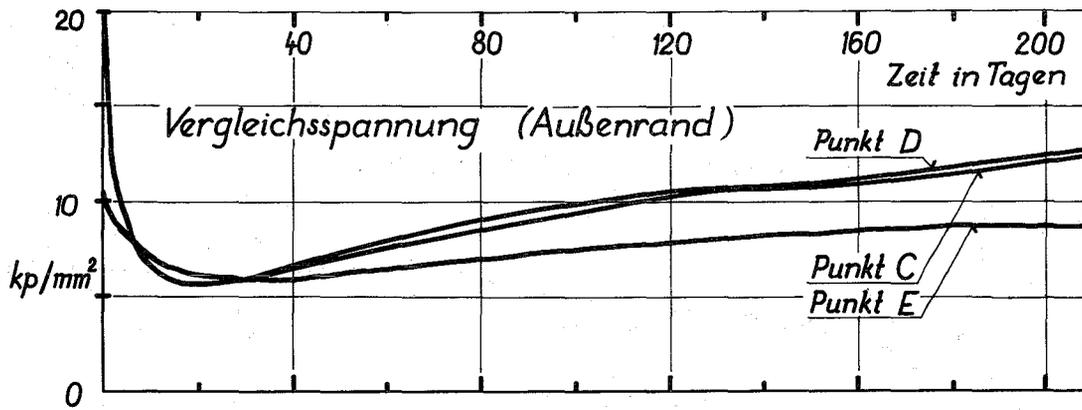
RECHENBEISPIEL 1401

(Therm. Kriechen, Strahl.-Kriechen, Temp.-Niveau 650°C, Wärmedehnung, Schwellen, Innendruck, Axialkraft)

Vergleichsspannung, plast. Vergleichsdehnung

und $\frac{1}{3}$ plast. Volumendilatation in d. Innenrandpunkten A, B.



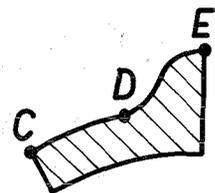


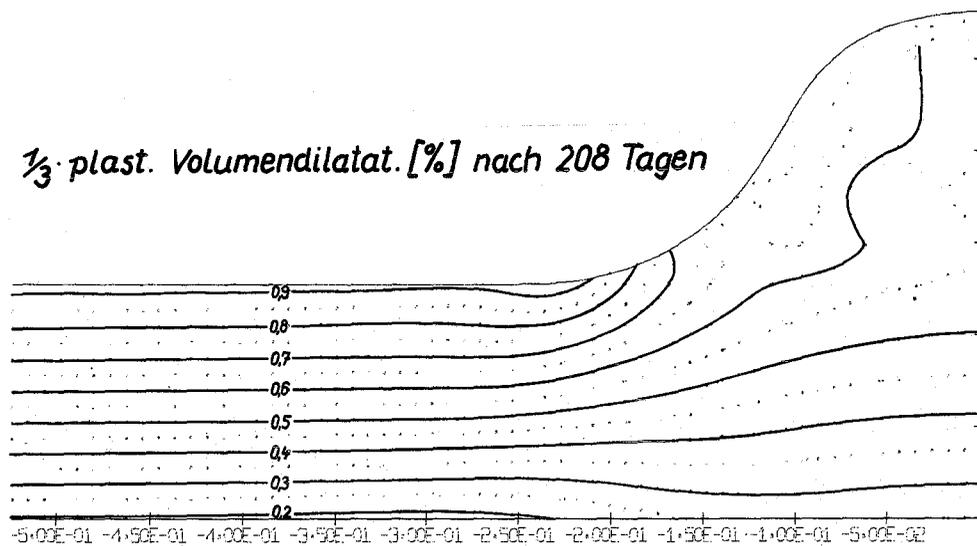
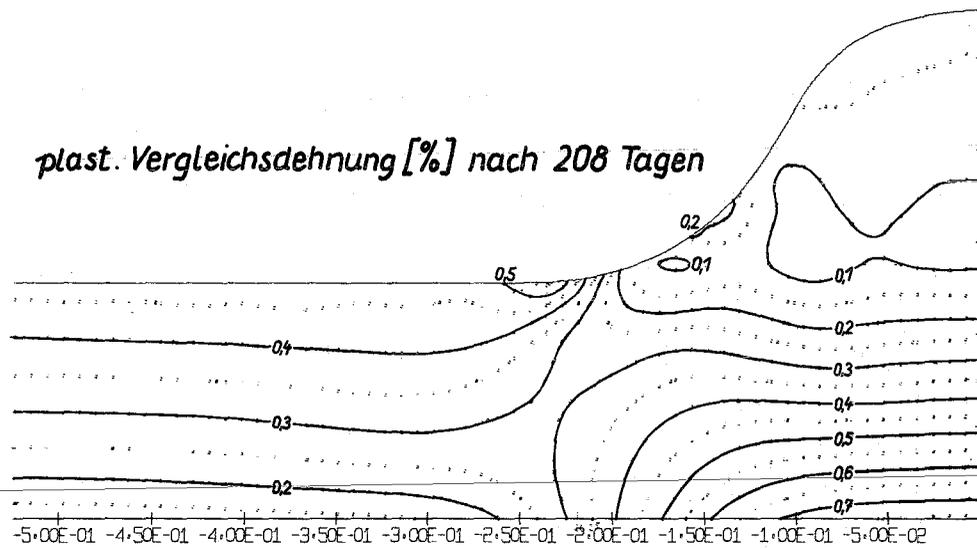
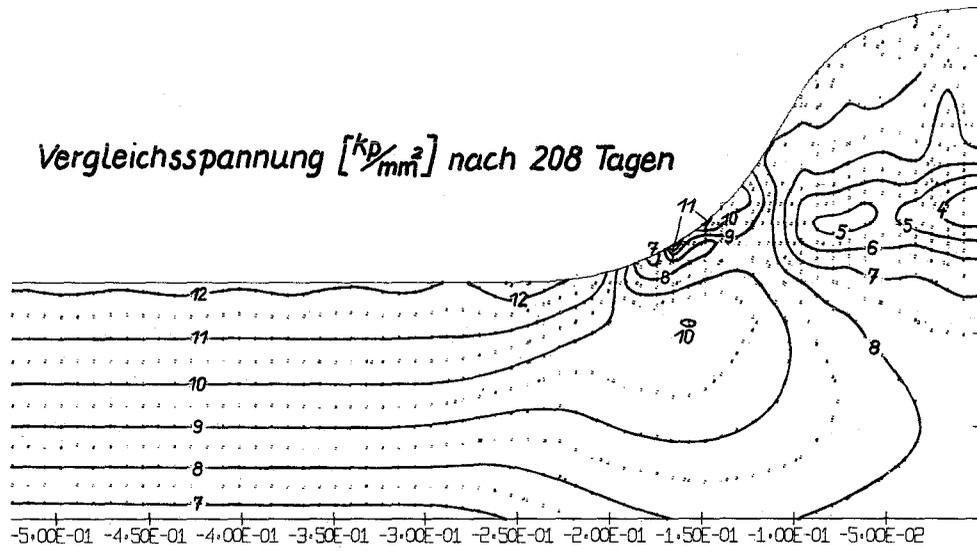
RECHENBEISPIEL 1401

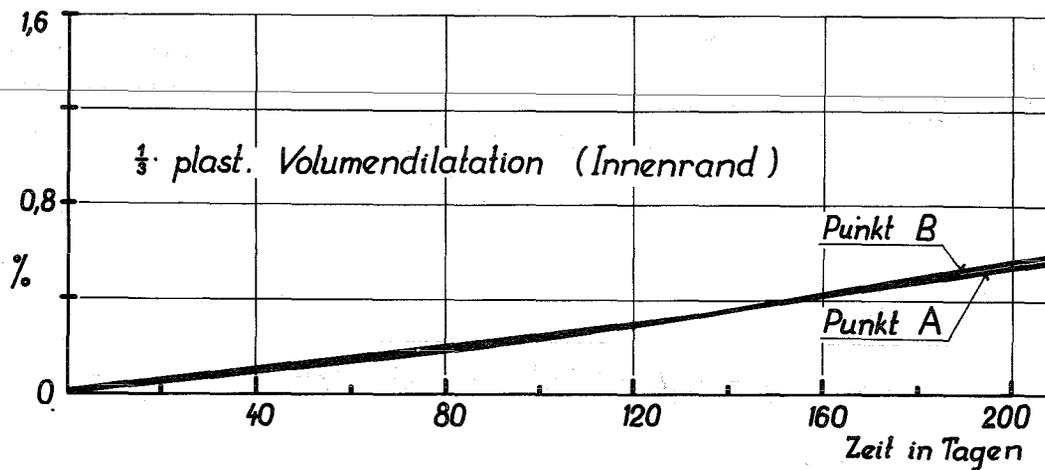
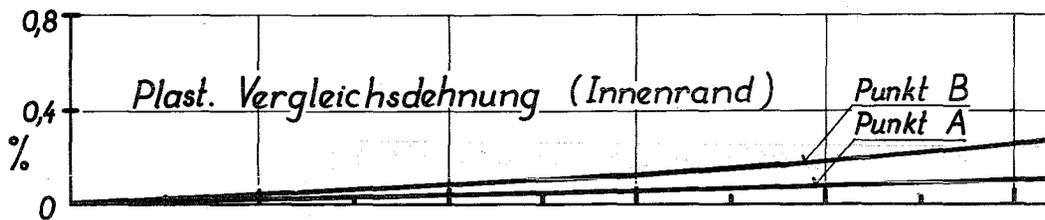
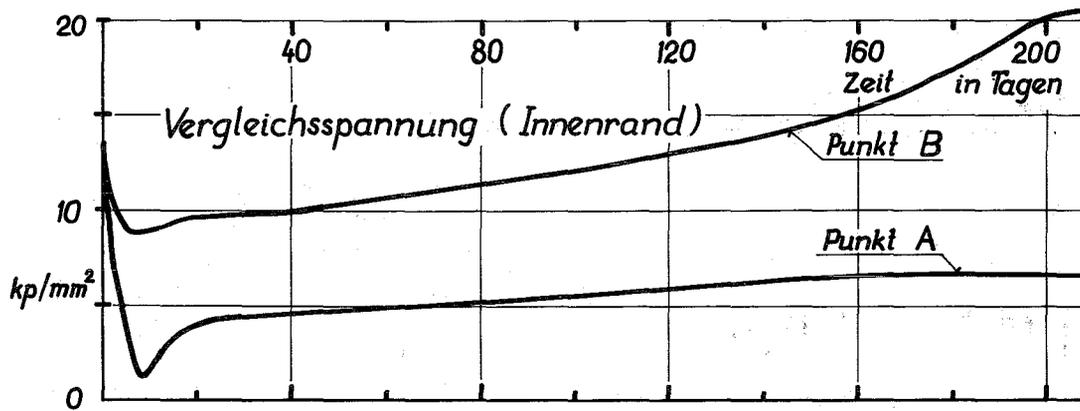
(Therm. Kriechen, Strahl.-Kriechen, Temp.-Niveau 650°C, Wärmedehnung, Schwellen, Innendruck, Axialkraft)

Vergleichsspannung, plast. Vergleichsdehnung

u. $\frac{1}{3}$ plast. Volumendilatation in d. Außenrandpunkten C, D, E.





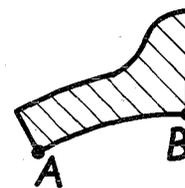


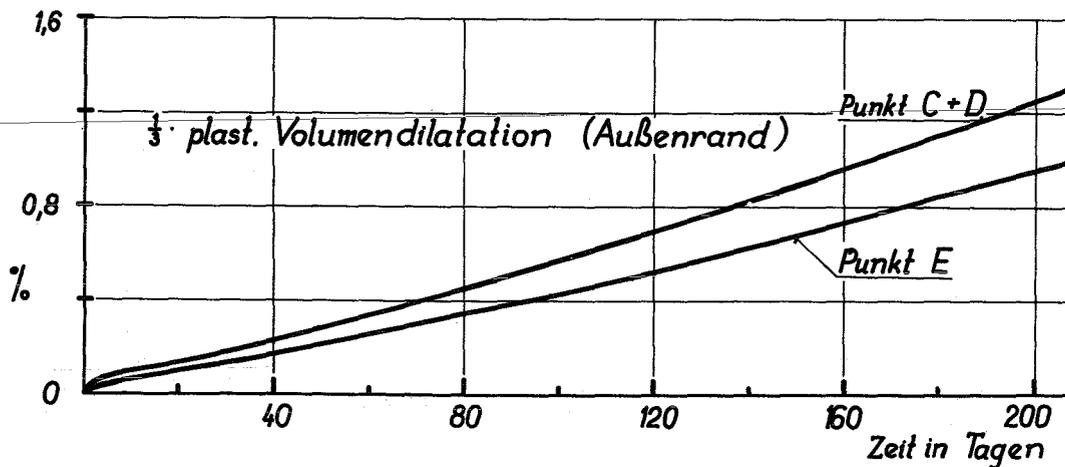
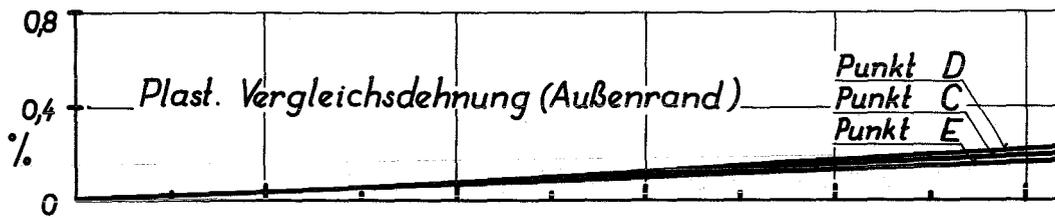
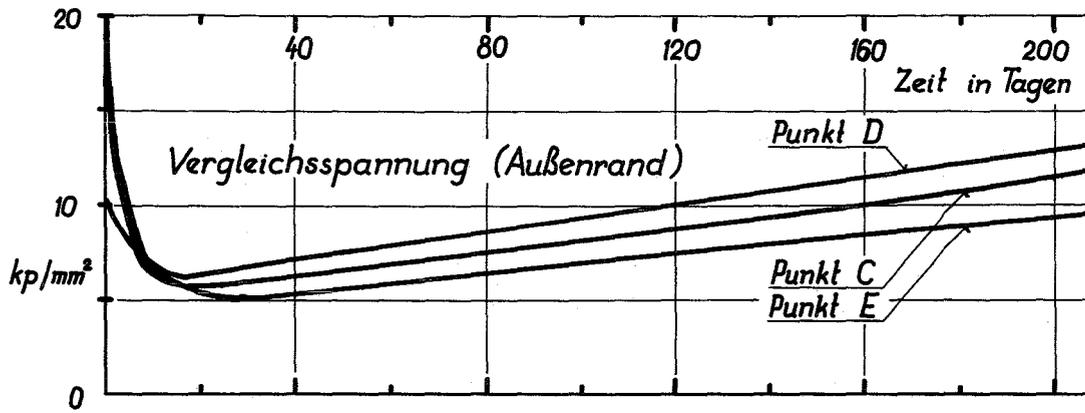
RECHENBEISPIEL 6401

(Therm. Kriechen, Strahl.-Kriechen, Temp.-Niveau 450°C, Wärmedehnung, Schwellen, Innendruck, Axialkraft)

Vergleichsspannung, plast. Vergleichsdehnung

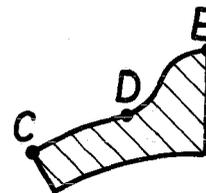
u. $\frac{1}{3}$ plast. Volumendilatation in d. Innenrandpunkten A, B.



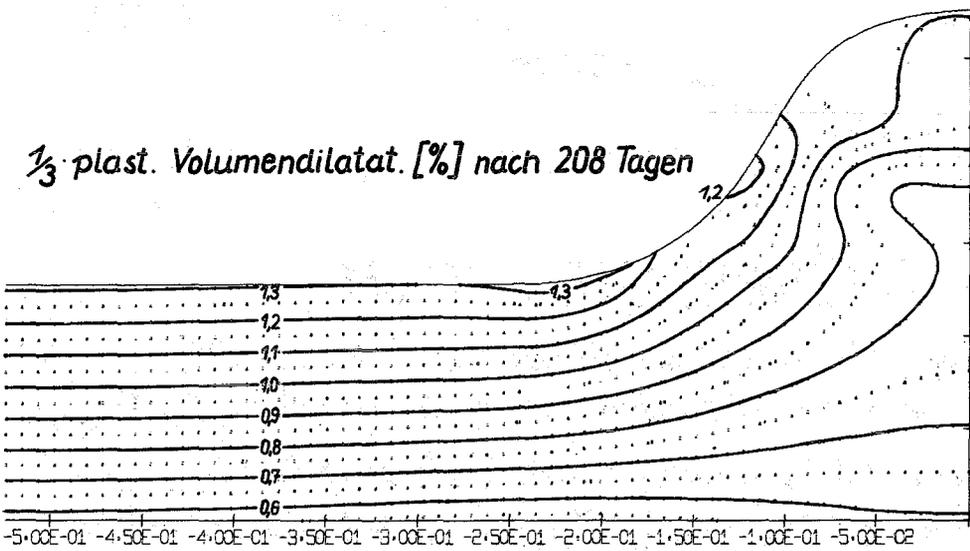
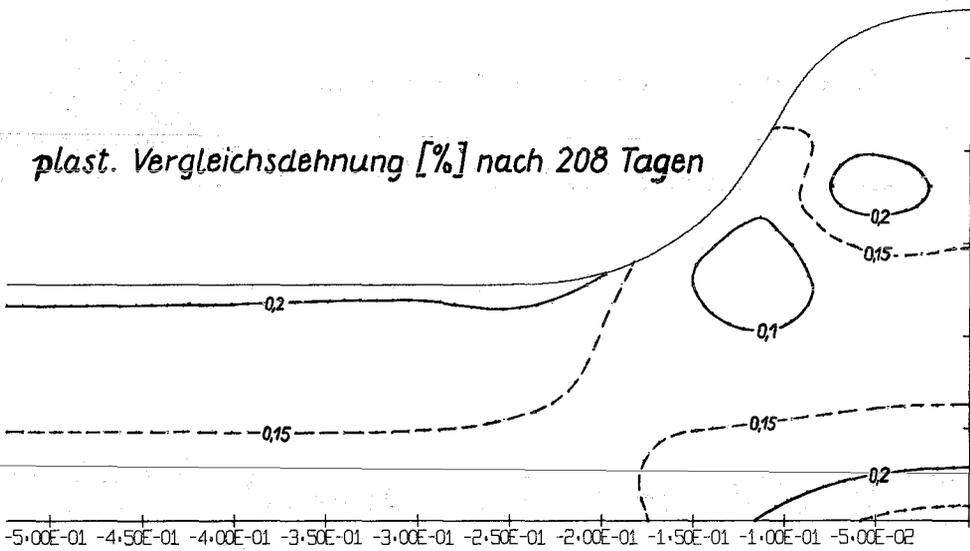
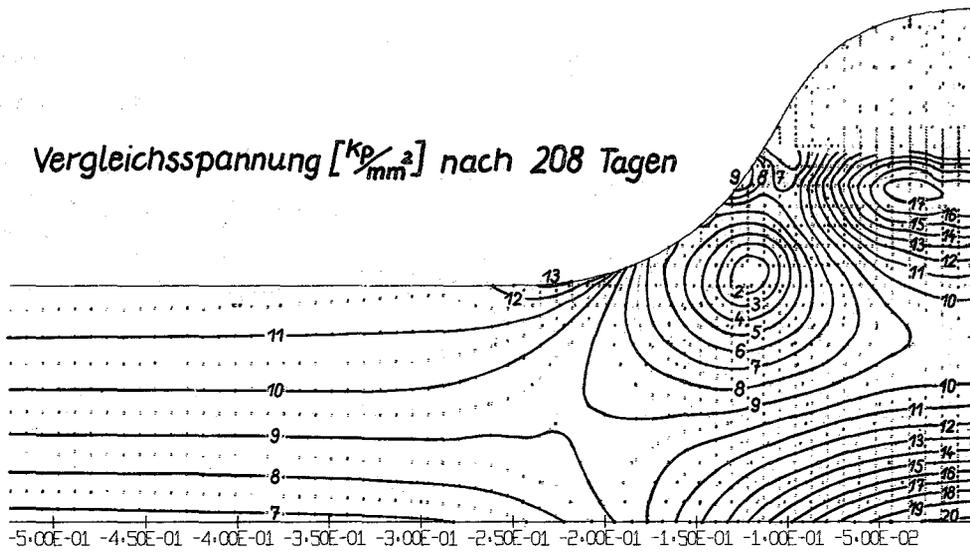


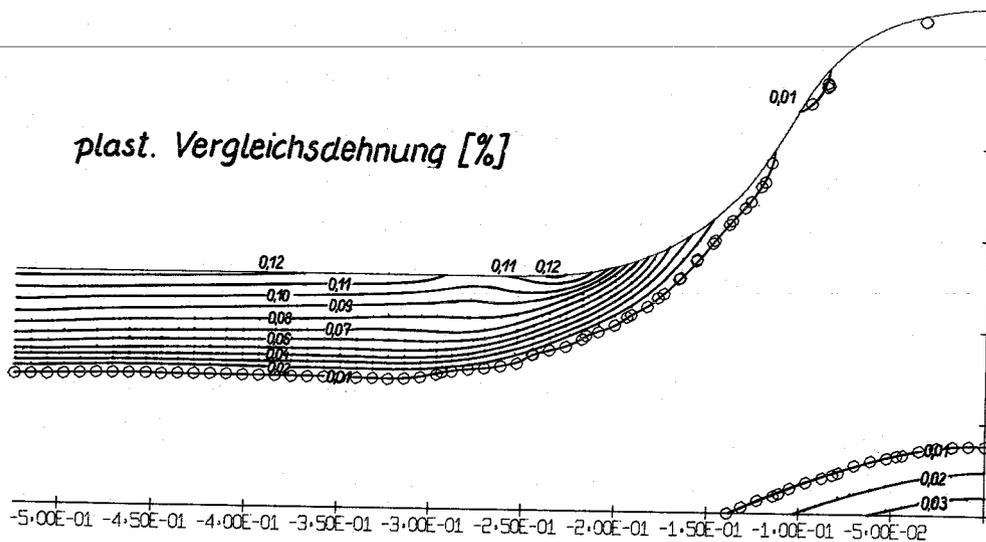
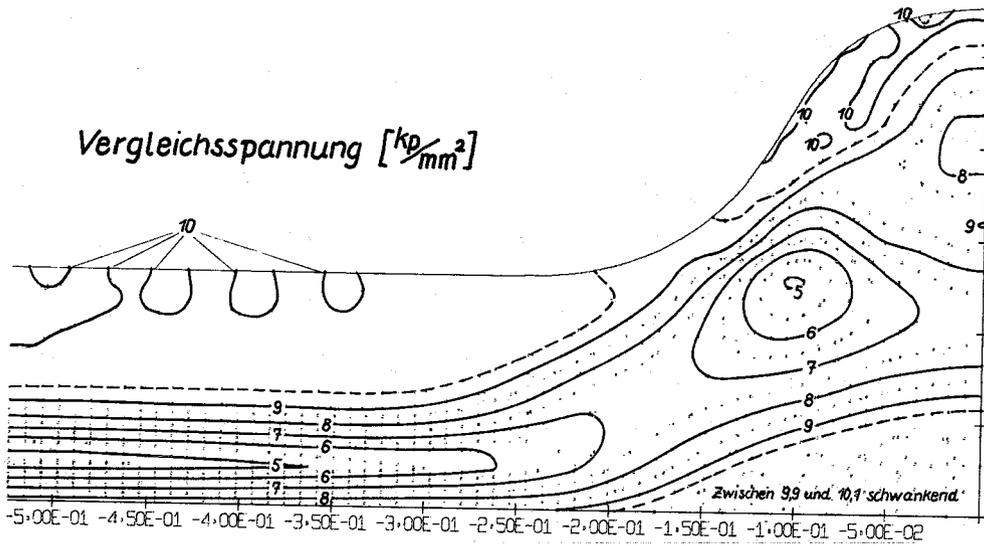
RECHENBEISPIEL 6401

(Therm. Kriechen, Strahl-Kriechen, Temp.-Niveau 450°C,
Wärmedehnung, Schwellen, Innendruck, Axialkraft)



Vergleichsspannung, plast. Vergleichsdehnung
u. $\frac{1}{3}$ plast. Volumendilatation in d. Außenrandpunkten C,D,E.





RECHENBEISPIEL 9001

5. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Ziel dieser Arbeit war es, Rechencodes zur Spannungs- und Verzerrungsanalyse zweifach zusammenhängender, prismatischer Körper (ebener Verzerrungszustand) zu liefern. Die Rechencodes sollten so beschaffen sein, daß mit ihrer Hilfe Untersuchungen zum festigkeitsmäßigen Verhalten längsberippter Brennstabhüllrohre ermöglicht werden.

Zur Lösung dieser Aufgabe wurde ein sogenanntes halbanalytisches Verfahren benutzt, das durch folgende Stichworte charakterisiert werden kann:

Lösung bei linear-elastischem Werkstoffverhalten:

- Exakte Erfüllung der Feldgleichungen (Airysche Spannungsfunktion, Analytische Lösung der Bipotentialgleichung)
- Näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen (Bestimmung der Integrationskonstanten)

Lösung bei plastischem (kriechendem) Werkstoffverhalten:

- Schrittweise linear-elastische Lösung (das plastische Verzerrungsfeld ist im wesentlichen identisch mit dem eingepprägten Zusatzverzerrungsfeld).

Die linear-elastische Lösung unterscheidet sich von den aus der Literatur bekannten Lösungen dadurch, daß zu dem Verzerrungsfeld, bestimmt mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes, noch ein gewisses, als vorgegeben anzusehendes Zusatzverzerrungsfeld addiert wurde. Die Bipotentialgleichung, die das Problem beschreibt, wird dadurch inhomogen. Das Zusatzverzerrungsfeld war erforderlich, weil eine beliebig verteilte Volumendilatation (Werkstoffschwellen) zugelassen und weil die linear-elastische Lösung zur Behandlung des Kriechproblems eingesetzt werden sollte.

Bei der näherungsweisen Erfüllung der Randbedingungen zeigte sich, daß die hierfür bekannten Methoden den Genauigkeitsanforderungen bei weitem nicht genügten. Es mußte deswegen eine andere Methode entwickelt werden, die insbesondere den Gegebenheiten des Computers Rechnung trägt. Die auch bei dieser Methode noch verbleibenden Abweichungen (Fehler) in den Randbedingungen sind teilweise sehr gering und fallen in das ohnehin vorhandene Toleranzfeld. Da ferner die erzielten Ergebnisse unter Zugrundelegung der etwas abweichenden

Randbedingungen exakt gelten, wird die Lösung auch als quasi-exakte Lösung bezeichnet. Die häufig recht hohe Genauigkeit wird durch einige spannungsoptische Experimente bestätigt.

Die relativ hohen Aufwendungen zur Erzielung möglichst genauer linear-elastischer Lösungen waren Voraussetzung für die Erzielung hinreichend genauer Lösungen für das Kriechproblem. Hierbei hat man die folgenden Verschärfungen zu beachten, die sich gegenüber konventionellen Aufgabenstellungen ergeben:

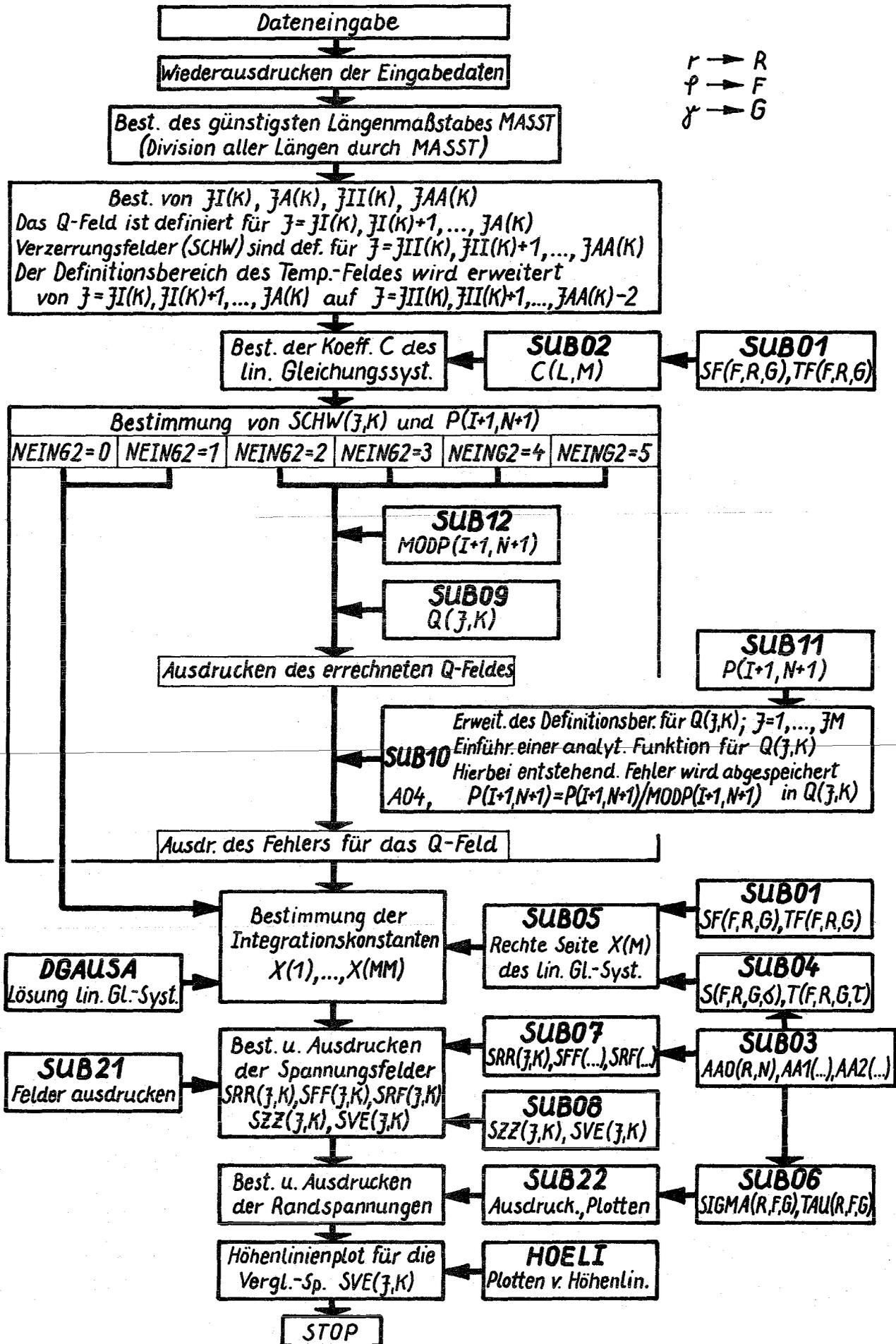
- Sehr starke Änderung der Kriechparameter über der Wandstärke des Hüllrohres, verursacht durch die relativ hohen Temperaturgradienten.
- Monotone Erhöhung der Belastung während der Einsatzzeit, verursacht durch Werkstoffschwellen und Zunahme des Rohrrinnendrucks. Diese Erhöhung wirkt der Tendenz zur Spannungserniedrigung durch Kriechen entgegen (Gefahr der numerischen Instabilität).
- Sehr starke Spannungsumlagerungen, die das Spannungsfeld qualitativ ändern. Die plastischen Dehnungen betragen ein Vielfaches der elastischen Dehnungen.

Aufgrund der erzielten Rechenergebnisse läßt sich das Verhalten längsberippter Brennstabhüllrohre ganz grob wie folgt charakterisieren:

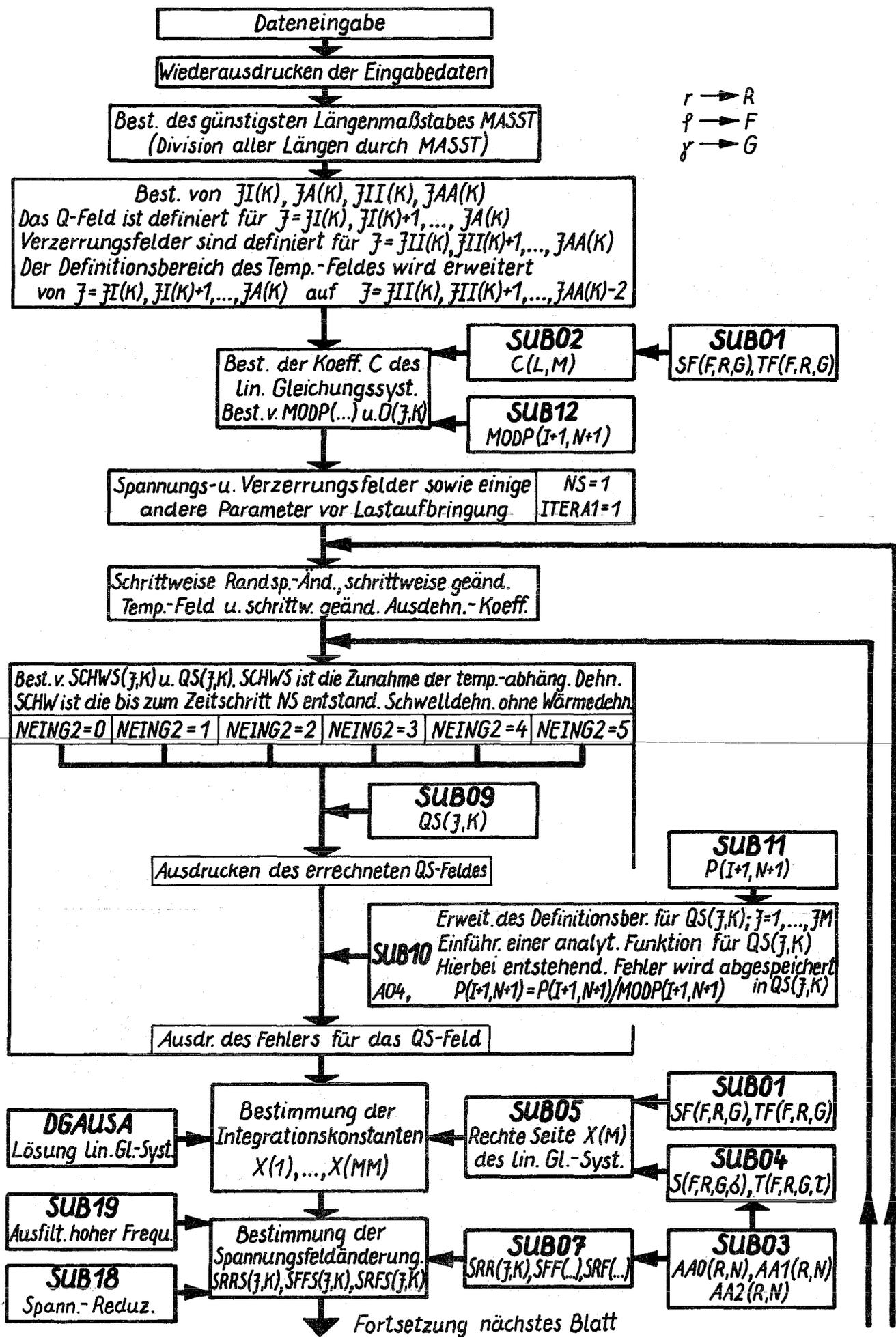
- Bei längeren Einsatzzeiten (Größenordnung 50 Tage) ist für die Hüllrohrbeanspruchung im wesentlichen der Hüllrohrinnendruck maßgebend. Demgegenüber ist der Einfluß des Werkstoffschwellens von geringer Bedeutung.
- Die Erhöhung der Beanspruchung am Rippenfuß infolge Kerbwirkung ist nicht sehr erheblich. Nötigenfalls kann sie durch eine geeignete (korb-bogenartige) Ausrundung herabgesetzt werden.
- Mehr Beachtung verdient die Erhöhung der Beanspruchung am Innenrand unter der Rippe.
- Der Spannungsabbau infolge strahlungsinduzierten Kriechens kann bei mehrachsigen Spannungszustand - anders als beim thermischen Kriechen - zu sehr ungleichmäßigen Spannungsfeldern führen (hohe Spannungsmaxima). Ursache ist die fehlende Progression und der geringe deviatorische (gestaltsändernde) Dehnungsanteil beim strahlungsinduzierten Kriechen.

Die mit den hier entwickelten Codes zur Verfügung gestellten Möglichkeiten bei der Festigkeitsanalyse längsberippter Brennstabhüllrohre können derzeit noch nicht voll ausgeschöpft werden, da es an verlässlichen Stoffdaten mangelt. In diesem Zusammenhang ist besonders das strahlungsinduzierte Kriechen zu nennen. Auch ist unklar, ob sich so hohe Schwellgradienten über der Hüllrohrwand, wie sie sich aufgrund der veröffentlichten Schwellformeln ergeben, tatsächlich einstellen werden. Die in den Rechenbeispielen erzielten Ergebnisse und die darauf aufbauenden allgemeinen Erkenntnisse sind deswegen mit Vorbehalt zu betrachten.

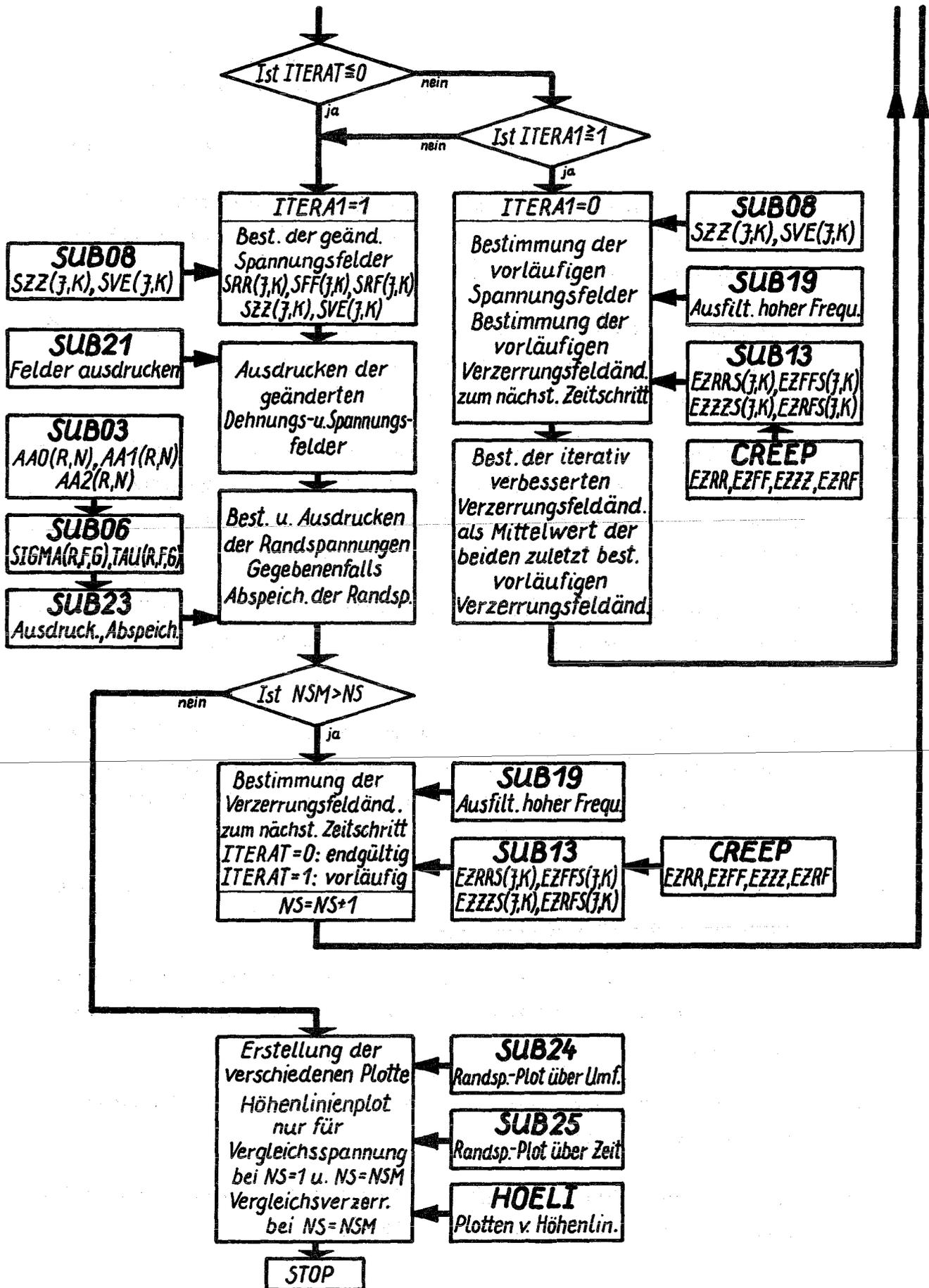
Flußdiagramm für den Computercode EVA1



Flußdiagramm für den Computercode EVA2



Flußdiagramm für den Computercode EVA2 (Fortsetzung)



Literatur:

- [1] M. Fischer: Durchführbarkeitsstudie für den Schnellen Hochflußtestreaktor FR 3. Kernforschungszentrum Karlsruhe, KFK 1356 (1971)
- [2] D. Smidt: Reaktortechnik Bd. 1 und Bd. 2, G. Braun, Karlsruhe 1970
- [3] W. Baumann, H. Hoffmann, K. Rust: Auswahl von Abstandshaltern für die Brennelemente Schneller Brutreaktoren. Int. Meeting Fast Reactor Fuel and Fuel Elements, Karlsruhe 1970
- [4] W. Baumann, V. Casal, H. Hoffmann, R. Möller, K. Rust: Brennelemente mit wendelförmigen Abstandshaltern für Schnelle Brutreaktoren. Kernforschungszentrum Karlsruhe, KFK 768 (1968)
- [5] H. Hoffmann, K. Rust: Temperatur- und Spannungsverteilungen in Brennstabhüllen mit wendelförmigen Abstandshaltern für dampfgekühlte Schnelle Brutreaktoren. Kernforschungszentrum Karlsruhe, KFK 805, Juni 1968
- [6] T. T. Claudson: Irradiation induced Swelling and Creep in Fast Reactor Materials. Int. Meeting Fast Reactor Fuel and Fuel Elements, Karlsruhe 1970
- [7] A. Boltax, A. Biancheria, B. L. Harbourne, T. P. Soffa: Mixed Oxide Fuel Pin Performance Analysis Using the OLYMPUS Computer Code. ANS Conf. on "Fast Reactor Fuel Element Technology", New Orleans, Louisiana, Apr. 13 - 15, 1971
- [8] H. Böhm: Hüllwerkstoffe für Brennelemente schneller Reaktoren. Atomkernenergie Bd. 15 (1970), 14 - 18
- [9] H. Plitz: Beitrag zum Brennstoffschwelldruck bei hohen Abbränden in Schnellbrüterbrennstoffstäben. Int. Meeting Fast Reactor Fuel and Fuel Elements, Karlsruhe 1970
- [10] H. J. Laue: Hüllmaterialauswahl. Kernforschungszentrum Karlsruhe, KFK 700 (1967), Beitrag III
- [11] Odqvist / Hult: Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe. Springer, Berlin / Göttingen / Heidelberg (1962)

- [12] E. R. Gilbert, J. L. Straalsund: A Relationship for Non-Conservative-Volume Creep under Different States of Stress. Nucl. Eng. and Design 12 (1970), 421 - 424
- [13] H. Böhm, W. Dienst, H. Hauck: Hochtemperaturversprödung von austenitischen Stählen und Nickellegierungen durch (n, α)-Reaktionen. Z. Metallkde. Bd. 57 (1966) H. 5, 352 - 357
- [14] D. R. Miller: Thermal-Stress Ratchet Mechanism in Pressure Vessels, Trans. ASME. J. of Basic Eng., June 1959, 190 - 196
- [15] Hütte I, 28. Aufl. 1955, S. 960 FF.
- [16] R. A. Valentin, J. J. Carey: Thermal Stresses and Displacements in Finite, Heat-Generating Circular Cylinders. Nucl. Eng. and Design 12 (1970), 277 - 290
- [17] J. Spence: An Analysis for Pipework Systems under Creep Conditions First Int. Conf. on: Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin 1971, Session F 3
- [18] J. Spence, A. C. Mackenzie: Stationary Creep Deformation of a Smooth Pipe Bend under In-Plane Bending Moments. Int. J. mech. Sci. Pergamon Press. 1969, Vol. 11, 387 - 394
- [19] Boley and Weiner: Theory of Thermal Stresses. John Wiley and Sons, Inc., New York 1960
- [20] R. D. Mindlin: The Analogy between Multiply-Connected Slices and Slabs. Quarterly of Appl. Math. 4 (1946), 279 - 290
- [21] B. K. Stearns: Two Dimensional Elastic Thermal Stresses in Multiply Connected Regions Subjected to Internal Heat Generation. Cornell University, Ph. D., 1966, Eng. Mech., University Microfilms, Inc., Ann Arbor, Michigan
- [22] ASKA User's Manual, ISD Report 73, 1971, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart

- [23] M. A. Biot: A General Property of Two-Dimensional Thermal Stress Distribution. *Philosophical Magazine* 19 (1935), 540 - 549
- [24] B. E. Gatewood: Thermal Stresses in Long Cylindrical Bodies. *Philosophical Magazine* 32 (1941), 282 - 301
- [25] A. G. Holms: A Biharmonic Relaxation Method for Calculating Thermal Stress in Cooled Irregular Cylinders. NACA-TN-2434, Washington, Aug. 1951
- [26] J. H. Michell: On the Direct Determination of Stress in an Elastic Solid, with application to the Theory of Plates. *Proc. of the London Math. Soc.*, Vol. 31 (1899), 100 - 105
- [27] E. Cesàro: Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche. *Rend. Acc. Scienze Fis. e Mat., Società Reale di Napoli*, Juli, Aug. 1906, 311 - 321
- [28] F. Schau: Das Temperaturfeld und die Temperaturspannungen im Siederohr. *Zeitschr. der Dampfkesseluntersuchungs- u. Versicherungs-Gesellschaft a. G.*, Wien (1932), Nr. 8, 9, 10, 11
- [29] M. Forray: Thermal Stresses in Rings. *J. of the Aero/Space Sciences*, Vol. 26, No. 5, May 1959, 310 - 311
Formulas for the Determination of Thermal Stresses in Rings. *J. of the Aero/Space Sciences*, Vol. 27, No. 3, March 1960, 238 - 240
Table for Thermal Stresses in Rings. *J. of the Aero/Space Sciences*, Vol. 27, No. 6, June 1960, 278 - 279
- [30] S. Timoshenko, J. N. Goodier: *Theory of Elasticity*. 2nd Ed., Int. Student-Edition, McGraw-Hill 1951
- [31] C. W. Bert: Comments on "A Note on the General Solution of the Two-Dimensional Linear Elasticity Problem in Polar Coordinates." *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 3, 568
- [32] Biezeno, Grammel: *Technische Dynamik*. Springer, Berlin / Göttingen / Heidelberg (1953)

- [33] Y. Takeuti, T. Sekiya: Thermal Stresses in a Polygonal Cylinder with a Circular Hole under Internal Heat Generation. ZAMM 48 (1968), 237 - 246
- [34] Y. Takeuti, N. Sumi: Steady-State Thermoelastic Problem for a Triangular Prism with a Circular Hole under Non-Uniform Heat Generation. Int. J. Engng Sci., Vol. 6 (1968), 539 - 547
- [35] T. Sekiya, Y. Takeuti: Approximate Solutions of Thermal Stress Problems in Plane Elasticity. Proc. 8 th Japan National Congress for Appl. Mech., (1958), 119 - 122
- [36] R. Krieg: Die Spannungsverteilung in längsberippten Brennstabhüllrohren. First Int. Conf. Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin 1971, Session C 2
- [37] J. Barta: Über die näherungsweise Lösung einiger zweidimensionaler Elastizitätsaufgaben. ZAMM, Bd. 17, Heft 3 (1937), 184 - 185
- [38] H. D. Conway: The Approximate Analysis of Certain Boundary-Value Problems. J. of Appl. Mech., June 1960, 275 - 277
- [39] P. Shuleshko: Comparative Analysis of Different Collocation Methods on the Basis of the Solution of a Torsional Problem. Austral. J. of Appl. Science 12 (1961), 194 - 210
- [40] F. W. Niedenfuhr, A. W. Leissa: A Study of the Point Matching Method as Applied to Thermally and Transversely Loaded Plates and other Boundary Value Problems. Technical Report No. AFFDL-TR-64-159 (Oct. 61)
- [41] R. E. Hoffman; T. Ariman: Thermal Bending of Plates with Circular Holes. Nucl. Eng. and Design 14 (1970), 231 - 238
- [42] K. S. Rao, M. N. Bapu Rao, T. Ariman: Thermal Stresses in Plates with Circular Holes. Nucl. Eng. and Design 15 (1971), 97 - 112
- [43] Y. Takeuti, N. Noda: Thermal Stresses in a Heat-generating Cylinder Containing a Polygonal Hole. ZAMM 50 (1970), 587 - 592

- [44] Y. Takeuti, N. Noda: Thermal Stresses in Circular Cylinder with a Rectangular Hole under Heat Generation. First Int. Conf. on: Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin 1971, Session D 2
- [45] D. L. Platus: The Plane Stress Problem for a Doubly Connected Region in Which the Medium Undergoes Elastic and Creep Deformation. University of California, Los Angeles, Ph. D. Eng., Jan. 1962 and J. of Appl. Mech., March 1964, 54 - 60
- [46] M. Guyette: Cladding Strength Analysis under Combined Creep and Plasticity Effects in Fast Reactor Environment. First Int. Conf. on: Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin 1971, Session C 2
- [47] G. Schmidt: Ein Rechenverfahren zur festigkeitsmässigen Auslegung der Brennstabhüllrohre bei flüssigmetallgekühlten schnellen Reaktoren. Dissertation, Karlsruhe 1968
- [48] J. R. Matthews: The Calculation of Stress in Fast Reactor Fuel Elements. Int. Meeting Fast Reactor Fuel and Fuel Elements, Karlsruhe 1970
- [49] R. Krieg: Zur Berechnung thermoelastischer Spannungen infolge vorgegebener radialer und azimuthaler Temperaturvariationen in Brennstabhüllrohren. Reaktortagung, Bonn 1971, Sektion 1, Nr. 180
-
- [50] H. Leipholz: Einführung in die Elastizitätstheorie. G. Braun, Karlsruhe 1967
- [51] W. Z. Sadeh: A Note on the General Solution of the Two-Dimensional Linear Elasticity Problem in Polar Coordinates. AIAA Journal Vol. 5, No. 2, 354
- [52] K. D. Closs, L. Schäfer: Untersuchungen über das Zeitstand- und Kriechverhalten von Hüllrohrproben mit und ohne Bestrahlung. Int. Meeting Fast Reactor Fuel and Fuel Elements, Karlsruhe 1970
- [53] T. H. Lin: Creep Stresses and Deflections of Columns. J. of Appl. Mech., June 1956, 214 - 218
- [54] I. Babuška, K. Rektorys, F. Vyčichlo: Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme. Akademie-Verlag, Berlin 1960