

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

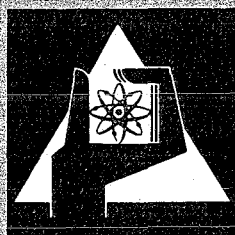
Januar 1973

KFK 1653

Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Schneller Brüter

**Geschwindigkeits- und Temperaturfelder in Brennstabbündeln
symmetrischer und asymmetrischer Geometrie**

F. Hofmann



**GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

**GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE**

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 1653

Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Schneller Brüter

Geschwindigkeits- und Temperaturfelder in Brennstabbündeln
symmetrischer und asymmetrischer Geometrie ^{x)}

von

F. Hofmann

Gesellschaft für Kernforschung mbH. , Karlsruhe

x) Als Dissertation genehmigt von der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Karlsruhe

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit ist ein theoretisches Modell entwickelt, das es erlaubt, in asymmetrischen Bündelgeometrien die turbulenten Geschwindigkeits- und Temperaturfelder im Kühlmittel 2-dimensional, in azimuthaler und axialer Richtung, unter Berücksichtigung des thermischen Anlaufvorganges zu ermitteln. Daran gekoppelt ist eine 3-dimensionale Bestimmung der Temperaturverteilung im Brennstoff und in der Hülle. Mischungsvorgänge im Kühlmittel werden durch geeignete Ansätze für die turbulenten Impuls- und Wärmeaustauschgrößen erfaßt. Alle physikalischen Eigenschaften können Funktionen der Temperatur und des Druckes sein.

Das Modell wird an experimentellen Ergebnissen getestet. Die Anwendung erfolgt am Beispiel des natriumgekühlten schnellen Brutreaktors SNR. Für diesen Fall werden die Auswirkungen verschiedener Stabauslenkungen auf die Geschwindigkeits- und Temperaturfelder in Kühlmittel bzw. in Hülle und Brennstoff diskutiert.

VELOCITY AND TEMPERATURE DISTRIBUTIONS IN FUEL ROD BUNDLES WITH SYMMETRICAL AND ASYMMETRICAL GEOMETRY

ABSTRACT

A theoretical analysis is presented which allows to determine the turbulent velocity and temperature fields in asymmetrical bundle geometries. For the coolant the velocities and temperatures are calculated in azimuthal and axial direction under hydrodynamically but not thermally fully developed conditions. This is coupled with a 3-dimensional determination of the temperature distribution in the fuel and the cladding. Mixing of the coolant is taken into account by appropriate equations for the diffusivities of momentum and energy. The physical properties are respected to be temperature and pressure dependent respectively.

The method is compared with experimental results. The analysis is applied to the sodium cooled fast breeder reactor SNR. For this example the effects of different rod displacements upon the velocity and temperature fields in the coolant and the cladding and fuel, respectively, are discussed.

INHALTSVERZEICHNIS

	<u>Seite</u>
1. Einleitung	1
2. Formulierung der Gleichungen für das theoretische Modell	5
2.1 Kühlmittelbereich	5
2.1.1 Gleichungen zur Beschreibung der Kühlkanalgeometrie	5
2.1.2 Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes im Kühlmittel	7
2.1.2.1 Navier-Stokes-Gleichung	7
2.1.2.2 Ansätze zur Beschreibung der scheinbaren kinematischen Viskosität	15
2.1.3 Bestimmung des Temperaturfeldes im Kühlmittel	18
2.1.3.1 Energiegleichung	18
2.1.3.2 Ansätze für die thermische Austauschgröße	21
2.2 Brennstabbereich	23
2.2.1 Temperaturfelder in Brennstoff und Hülle	23
2.2.2 Ansätze für den lokalen Wärmeübergangskoeffizienten Hülle-Kühlmittel und den Wärmedurchgangskoeffizienten im Spalt	27
2.2.3 Vergleich des theoretischen Modells mit Experimenten	29
2.3 Lösungsverfahren	33
3. Anwendung der Theorie auf den Fall des Na-gekühlten Brutreaktors und Diskussion der Ergebnisse	38
4. Zusammenfassung	45
Literatur	48
Nomenklatur	53
Abbildungen	57
Anhang	75

1. EINLEITUNG

Schnelle Brutreaktoren, insbesondere solche mit Flüssigmetallkühlung, haben enggepackte Brennstabbündel mit Brennstäben von kleinem Durchmesser und hoher Leistung. Als Folge dieser dichten Anordnung der Brennstäbe bewirken daher geometrische Abweichungen von nominellen Positionen, die sich aufgrund von Fertigungstoleranzen oder während des Leistungsbetriebes ergeben können, starke Störungen der Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung im Kühlmittel, um einen Brennstab herum. Aufgrund der geometrischen Verhältnisse treten derartige Erscheinungen nicht nur bei exzentrisch stehenden Zentralstäben, sondern auch bei Eck- und Randstäben des Bündels in nomineller Position auf [1, 2].

Die entstehenden Störungen pflanzen sich in axialer und radialer Richtung fort. Damit können, unter Änderung des lokalen Wärmeübergangs zwischen Brennstab und Kühlmittel, auch größere azimuthale Temperaturdifferenzen vor allem in der Hülle, aber auch in den äußeren Brennstoffzonen auftreten. Es entsteht somit die Gefahr eines zusätzlichen Ausbiegens des Stabes, wodurch die ursprüngliche Störung vergrößert wird. Außerdem können diese azimuthalen Temperaturvariationen zu heißen Stellen und hohen thermischen Spannungen in der Hülle führen. Die aus einer Analyse dieser Probleme hervorgehenden Temperaturfelder sind somit Ausgangsbedingungen für Spannungs- und Verbiegerechnungen [43].

Das Problem der azimuthalen Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung im Kühlmittel bzw. Brennstab (Hülle und Brennstoff) wurde bereits in früheren Arbeiten behandelt. Die wichtigsten der bis jetzt bekannt gewordenen theoretischen Modelle werden nachstehend diskutiert, soweit sie sich auf Stabbündelgeometrien beziehen, wie sie bei schnellen Brutreaktoren vorliegen. Ausführlichere Angaben können aus [3] entnommen werden. Abb. 1 zeigt den Querschnitt einer für ein Bündel typischen Stabanordnung.

Der größte Teil der bisher veröffentlichten Untersuchungen befaßt sich mit symmetrischer Bündelgeometrie.

Unter dieser Voraussetzung untersuchten auch R. G. Deissler und M. F. Taylor [4] in einer der ersten theoretischen Arbeiten die turbulente Strömung in einem Bündel mit Dreieck- und Viereckanordnung der Stäbe. Sie ermittelten in einem aus Symmetriegründen ausreichenden Sektor von 30° bzw. 45° die 2-dimensionale Geschwindigkeitsverteilung in der r - φ -Ebene, sowie die azimutale Verteilung der Hüllentemperatur unter der Annahme, daß die Wärmestromdichte an der Innenseite der Hülle am Umfang konstant ist. Azimutaler Impuls- und Wärmeaustausch im Kühlmittel sind nicht berücksichtigt, was zu einer Überbewertung der Schwankungen in Umfangsrichtung führt.

Die gleichen geometrischen Bedingungen liegen den Untersuchungen von O. E. Dwyer [5] zugrunde. Unter den Voraussetzungen: turbulente Strömung, konstante Wärmestromdichte an der Staboberfläche und voll ausgebildete Geschwindigkeits- und Temperaturprofile wird die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung im Kühlmittel in der r - φ -Ebene bestimmt. Im wesentlichen ergab sich jedoch aus dieser Arbeit, daß das Modell des Ringspalt zur Approximation der geometrischen Verhältnisse eines Stabbündels nur bei großen Teilungsverhältnissen $P/D \geq 1,35$ ohne größeren Fehler anwendbar ist. Daraus ist zu schließen, daß auch andere experimentelle und theoretische Ergebnisse, die aus Untersuchungen im zentrischen und exzentrischen Ringspalt gewonnen wurden, nur bedingt auf Stabbündel übertragbar sind. Deshalb wird auf derartige Arbeiten hier nicht näher eingegangen.

R. Nijssing u. W. Eifler, sowie D. J. Bender u. P. M. Magee [6, 7] gehen in ihren Analysen von der Bedingung: konstante Wärmestromdichte oder konstante Hüllentemperatur am Stabumfang ab und ermitteln neben den Geschwindigkeits- und Temperaturprofilen im Kühlmittel auch die Temperaturverteilung im Brennstoff und in der Hülle in r -

und φ -Richtung. Beide Arbeiten setzen symmetrische Bündelgeometrie voraus.

Die Untersuchungen von Axford [8] gelten für Kühlmittel, in denen entweder Kolbenströmung oder laminare Strömung vorliegt. Sie sind daher in ihrem Anwendungsbereich beschränkt. Zur Bestimmung der Temperaturfelder in den entsprechenden radialen Zonen werden die Energiegleichungen für Brennstoff, Hülle und Kühlmittel simultan 2-dimensional (r, φ Ebene) für symmetrische Bündelgeometrie gelöst.

Theoretische Arbeiten zu dem Problem der asymmetrischen Bündelgeometrie sind bisher nur wenige vorhanden, obwohl experimentelle Untersuchungen [9] gezeigt haben, daß gerade in diesen Fällen, die Temperaturvariationen auch bei Flüssigmetallkühlung mit zunehmender Asymmetrie des Kühlkanals stark ansteigen .

Die Untersuchungen von M. Fischer und H. Shimamune [10] gelten für einen Stab, der exzentrisch in einem unendlich ausgedehnten Bündel-element in Dreieckanordnung steht. In der Analyse wird bei turbulenter Strömung die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung im Kühlmittel in einer axialen Ebene in azimuthaler Richtung, also 1-dimensional ermittelt. Die Temperaturverteilung an der Hüllenoberfläche wird unter der Voraussetzung bestimmt, daß die Beziehung für den mittleren Wärmeübergang auch lokal angewendet werden kann. Die Wärmeleitung im Brennstoff ist durch ein stark vereinfachtes 1-dimensionales Modell berücksichtigt. Das turbulente Strömungsmodell geht von der Annahme der Karman'schen Geschwindigkeitsverteilung in radialer Richtung aus.

Die Analysen von K. Johannsen, R. Ullrich und L. Wolf [2] beschreiben ebenfalls asymmetrische Stabpositionen im Gitter. Als Sonderfälle ent-

halten sie Eck- und Randstäbe, sowie exzentrische Lage des Brennstoffs. Die Temperaturverteilung in Brennstoff und Hülle wird nach einem analytischen Verfahren 2-dimensional in der r - φ -Ebene ermittelt. Für den Kühlmittelbereich wird ausgebildete Temperaturverteilung und Kolbenströmung vorausgesetzt. Die Temperaturabhängigkeit der physikalischen Eigenschaften von Brennstoff, Hülle und Kühlmittel werden nicht berücksichtigt. Mit diesen Restriktionen ist der Anwendungsbereich der Analyse beschränkt auf Flüssigmetalle als Kühlmittel bei Peclet-Zahlen: $500 < Pe < 1500$, sowie auf Bündelgeometrien mit einem Teilungsverhältnis $P/D \geq 1,25$, wie Dwyer und Berry [11] gezeigt haben.

Insgesamt gesehen behandeln alle dargestellten Arbeiten die Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilung im Fluid sowie in Brennstoff und Hülle in der r - φ -Ebene. Eine echt 2-dimensionale Betrachtung der Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile in r - und φ -Richtung erfolgt dabei wegen des großen Rechenaufwandes nur in einzelnen symmetrischen Fällen, bei denen man sich aus Symmetriegründen auf einen kleinen Sektor (z. B. 30° , Abb. 1) beschränken kann. In den exzentrischen Fällen werden solche Analysen bis jetzt nur mit vereinfachten Modellen (z. B. Kolbenströmung) durchgeführt, wodurch der Anwendungsbereich eingeengt wird. Alle Untersuchungen gehen weiterhin von der Annahme aus, daß die Strömung nicht nur hydraulisch, sondern auch thermisch voll ausgebildet ist. Gerade im Zusammenhang mit asymmetrischer Bündelgeometrie, d. h. auch in den Rand- und Eckpositionen bei nomineller Auslegung, ist jedoch die letztere Annahme (thermisch voll ausgebildet) nicht gerechtfertigt.

In der vorliegenden Arbeit wird neben der symmetrischen besonders die asymmetrische Bündelgeometrie bei Brennelementen schneller Brutreaktoren behandelt. Die Analyse geht dabei erstmals von der Voraussetzung aus, daß die Strömung von Anfang an auf Grund des axialen Blankets zwar hydraulisch, nicht jedoch thermisch voll ausgebildet ist.

Unter diesen Voraussetzungen wird die Fortpflanzung azimuthaler Störungen in den Geschwindigkeits- bzw. Temperaturfeldern in radialer Richtung, d. h. vom Kühlmittel zum Brennstoff, sowie in axialer Richtung untersucht. Dazu ist in Erweiterung früherer Arbeiten [10] das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld im Fluid in axialer und azimuthaler Richtung zu ermitteln, sowie die Temperaturverteilung in Brennstoff und Hülle 3-dimensional unter Berücksichtigung der variablen Randbedingungen. Dem turbulenten Strömungsmodell liegt die Karman'sche Geschwindigkeitsverteilung zugrunde. Der turbulente Impuls und Energieaustausch in azimuthaler Richtung ist berücksichtigt. Alle physikalischen Eigenschaften von Brennstoff, Hülle und Kühlmittel werden temperatur- bzw. temperatur- und druckabhängig behandelt. Damit ist eine weitere Voraussetzung gegeben, die den Anwendungsbereich der Analyse erweitert, was insbesondere im Hinblick auf die Untersuchung verschiedener Kühlmittel nötig ist. Die dargestellte Methode wird an experimentellen Ergebnissen getestet. Anwendungsrechnungen werden für das Beispiel eines natriumgekühlten schnellen Brutreaktors mit asymmetrischer Bündelgeometrie durchgeführt.

2. FORMULIERUNG DER GLEICHUNGEN FÜR DAS THEORETISCHE MODELL

2.1 Kühlmittelbereich

2.1.1 Gleichungen zur Beschreibung der Kühlkanalgeometrie

Die Brennelement-Konzepte schneller Reaktoren zeigen für die Kernausslegung kreiszylindrische Brennstäbe in Dreiecksanordnungen, wobei jeweils eine größere Anzahl durch ein sechseckiges Mantelrohr zu einem Bündel zusammengefaßt wird. Unter Zugrundelegung dieser Bedingungen werden die Untersuchungen für das Beispiel durchgeführt, daß ein im Innern des Bündels stehender Brennstab aus seiner

zentriscen Position um den Winkel θ und die Strecke f ausgelenkt ist (Abb. 2). Die zu diesem Stab gehörende Kühlmittelquerschnittsfläche wird begrenzt durch die Halbierenden der Stabmittenabstände P (Abb. 1). Sie ist unterteilt in 12 Elemente. Bei symmetrischer Bündelgeometrie genügt es, bei den Berechnungen der Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen nur ein Element zu betrachten, d. h. einen Winkelbereich von $\pi/6$. Im Falle einer Stabauslenkung (Asymmetrie) ist es jedoch nötig, über einem Bereich von $\varphi = 0 \div \pi$ oder $0 \div 2\pi$ zu integrieren. Um eine geschlossene Integration über den Gesamtbereich durchführen zu können, werden daher in dem Kühlkanalmodell die Ecken, die an den Schnittpunkten zweier Halbierender der Stabmittenabstände entstehen, durch Kreisbogen mit sehr kleinen Radien $R_g \ll \hat{y}$ approximiert.¹⁾ Jedes Element (Abb. 3) wird dadurch aus zwei Teilelementen A und B gebildet, die nochmals in Segmente unterteilt sind. Die Anzahl der Segmente pro Teilelement wird bestimmt durch die Schrittweite, die zur Konvergenz der Integration der Impuls- und Energiegleichung in azimuthaler Richtung nötig ist. Jedes Segment wird begrenzt durch die Stabwand, zwei Radien (Geschwindigkeitsgradientenlinien) und die Halbierende der Stabmittenabstände.

Der radiale Abstand zwischen Staboberfläche und äußerer Kühlkanalbegrenzung ist für

Teilelement A

$$\hat{y} = \frac{1}{2} \left(P \frac{1}{\cos \psi} - d \right) \quad (2.1)$$

Teilelement B (vgl. Anhang A)

$$\hat{y} = \left[\frac{P}{2 \cos \alpha} - C - R_g \right] \cos \varphi - \frac{d}{2} + \left[\left(\frac{P}{2 \cos \alpha} - C - R_g \right)^2 \cos^2 \varphi - \left(\frac{P}{2 \cos \alpha} - C \right)^2 + 2 \left(\frac{P}{2 \cos \alpha} - C \right) R_g \right]^{1/2} \quad (2.2)$$

1) Eine Approximation der gesamten Sechseckflächen des Kühlkanalmodells durch eine äquivalente Kreisfläche ist nach Dwyer [5], wie bereits erwähnt, nur bei großen Stabmittenabständen, d. h. $P/D \geq 1,35$, vertretbar. Dieser Wert stellt jedoch für die hier behandelten Reaktorkonzepte insbesondere mit Na-Kühlung eine obere Grenze dar.

Der hydraulische Durchmesser eines Segments ist für beide Teilelemente jeweils gegeben durch die Beziehung

$$d_e = 4 \hat{y} \left(1 + \frac{\hat{y}}{d} \right) \quad (2.3)$$

Die Gl. (2.1) bis (2.3) gelten für den exzentrisch im Bündel stehenden Innenstab. Es ist jedoch ohne große Schwierigkeiten möglich, die Analyse auf Rand- und Eckstäbe zu erweitern.

2.1.2 Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes im Kühlmittel

2.1.2.1 Navier-Stokes-Gleichung

Für die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung des Kühlmittels in einer axialen Zone werden im wesentlichen die folgenden Annahmen getroffen:

1. Die Strömung ist voll turbulent, einphasig und stationär. Als Anlaufstrecke kann das axiale Blanket angesehen werden, das dem Kern vorgeschaltet ist.
2. Es soll kein Netto-Austausch von Impuls und Energie über die Linien maximaler Geschwindigkeit stattfinden, d. h. es wird ein adiabates Modell betrachtet. Die Linien maximaler Geschwindigkeit sollen aus Symmetriegründen mit den Halbierenden der Stabmittenabstände zusammenfallen.
3. Das Kühlmittel ist inkompressibel.
4. Alle Stoffgrößen des Kühlmittels können jedoch Funktion der Temperatur und des Druckes sein.

Unter Vernachlässigung der Massenkräfte wird die Geschwindigkeitsverteilung des Kühlmittels aus der Navier-Stokes-Gleichung ermittelt, die in Vektorform lautet:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{u} \quad (2.4)$$

Die Lösung von Gl. (2.4) erfolgt unter der Bedingung, daß die zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten in radialer und azimuthaler Richtung Null sind.

$$\bar{u}_r = \bar{u}_\varphi = 0 \quad (2.5)$$

Hinsichtlich der zu untersuchenden Exzentrizitäten bedeutet das, daß ein Stab über die gesamte Länge konstant ausgelenkt ist, oder aber, daß die Verbiegung klein ist. Große Verbiegungen sowie die Erfassung von Abstandshaltern, insbesondere in Form von Wendelrippen, würde die Berücksichtigung der Komponenten \bar{u}_r und \bar{u}_φ erfordern, was zu einer 3-dimensionalen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung führt. Eine direkte numerische Integration der Navier-Stokes- sowie der Kontinuitätsgleichung ist heute jedoch weder im statistischen noch deterministischen Sinne mit sinnvollem Aufwand möglich [12, 41], so daß Vereinfachungen praktisch notwendig sind.

Mit den Bedingungen von Gl. (2.5) reduziert sich Gl. (2.4) auf die folgende Differentialgleichung für die axiale Geschwindigkeitskomponente.

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \quad (2.6)$$

mit

$$\begin{aligned} u_z &= \bar{u}_z + u_z' & p &= \bar{p} + p' \\ u_r &= \bar{u}_r + u_r' \\ u_\varphi &= \bar{u}_\varphi + u_\varphi' \end{aligned} \quad (2.7)$$

Für den Druck folgt damit aus den r, φ Komponenten der Impuls-
gleichung:

$$p \neq p(r, \varphi) \quad (2.8)$$

Unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung

$$\text{div. } \vec{u} = 0 \quad (2.9)$$

sowie Gl. (2.5) ergibt sich aus Gl. (2.6) nach Bildung der zeitlichen
Mittelwerte

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} - \overline{\rho u_z' u_r'} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_z}{r \partial \varphi} - \overline{\rho u_z' u_\varphi'} \right) \quad (2.10)$$

Durch Einführen der Schubspannungskomponenten

$$\tau_r = \mu \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} - \overline{\rho u_z' u_r'} \quad (2.11a)$$

$$\tau_\varphi = \mu \frac{\partial \bar{u}_z}{r \partial \varphi} - \overline{\rho u_z' u_\varphi'} \quad (2.11b)$$

für die lokalen Schubspannungen in radialer und azimuthaler Richtung,
folgt aus Gl. (2.10)

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \tau_r) + \frac{\partial \tau_\varphi}{\partial \varphi} = r \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \quad (2.12)$$

Die Schubspannungskomponenten in Gl. (2.11a ; 2.11b ; 2.12) setzen
sich zusammen aus einem laminaren und turbulenten Term. Die

turbulenten Anteile werden im allgemeinen seit Boussinesq [13] proportional den entsprechenden Geschwindigkeitsgradienten definiert als:

$$\tau_{r \text{ turb}} = - \overline{\rho u'_z u'_r} = \rho \epsilon_{rM} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} \quad (2.13a)$$

$$\tau_{\varphi \text{ turb}} = - \overline{\rho u'_z u'_\varphi} = \rho \epsilon_{\varphi M} \frac{\partial \bar{u}_z}{r \partial \varphi} \quad (2.13b)$$

Die Proportionalitätsfaktoren ϵ_{rM} und $\epsilon_{\varphi M}$ werden als "scheinbare kinematische Viskosität" bezeichnet.

Zur Lösung von Gl. (2.12) wird zunächst über r in den Grenzen von r_0 bis $r_0 + \hat{y}$ integriert (Abb. 4), wobei $y = f(\varphi)$.

Damit ergibt sich aus Gl. (2.12)

$$(r_0 + \hat{y}) \tau_{r(r_0 + \hat{y})} - r_0 \tau_{r r_0} + \int_{r_0}^{r_0 + \hat{y}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tau_{\varphi} dr = \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \cdot \frac{1}{2} (d + \hat{y}) \hat{y} \quad (2.14)$$

Als Randbedingung gilt weiter, daß aus Symmetriegründen der Impulsfluß τ_n senkrecht zur Linie max. Geschwindigkeit Null sein muß [14]. In entsprechender Komponentenschreibweise von τ_r und τ_{φ} heißt das (Abb. 3):

$$\tau_n = 0 = \tau_r \cdot \cos \psi (r_0 + \hat{y}) - \tau_{\varphi} \cdot \sin \psi (r_0 + \hat{y}) \quad (2.15)$$

oder

$$\tau_{r(r_0 + \hat{y})} = \tau_{\varphi(r_0 + \hat{y})} \operatorname{tg} \psi \quad (2.16)$$

Mit der Beziehung

$$r_o + \hat{y} = \frac{P}{2} / \cos \psi, \quad (2.17)$$

sowie der Ableitung

$$\frac{d(r_o + \hat{y})}{d\psi} = (r_o + \hat{y}) \operatorname{tg} \psi \quad (2.18)$$

folgt aus Gl. (2.14) nach Substitution von $\tau_{r(r_o + \hat{y})}$ durch Gl. (2.16 und 2.18) folgende Beziehung:

$$r_o \tau_{r_o} + \frac{\hat{y}}{2} (d + \hat{y}) \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = \int_{r_o}^{r_o + \hat{y}} \frac{\partial}{\partial \psi} \tau_{\varphi} dr + \frac{\partial(r_o + \hat{y})}{\partial \psi} \tau_{\varphi(r_o + \hat{y})} \quad (2.19)$$

wobei

$$\psi = \varphi - \Gamma_K \left\{ \begin{array}{ll} \psi < 0 & \varphi < \Gamma_K \\ \psi = 0 & \varphi = \Gamma_K \\ \psi > 0 & \varphi > \Gamma_K \end{array} \right\} \quad (2.20)$$

und $\partial \psi = \partial \varphi$ ist, da

$$\Gamma_K = \sum_{j=1}^K \alpha_j \quad (2.21)$$

eine Konstante ist.

Nach Berücksichtigung der Regeln der Differentiation unter dem Integralzeichen ($\hat{y} = f(\varphi)$) läßt sich mit Gl. (2.21) für die Beziehung (2.19) schreiben:

$$r_o \tau_{r_o} + \frac{\hat{y}}{2} (d + \hat{y}) \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{r_o}^{r_o + \hat{y}} \tau_{\varphi} dr \quad (2.22)$$

Zur Lösung des Integrals (vgl. Anhang B)

$$J = \int_{r_o}^{r_o + \hat{y}} \tau_{\varphi} dr$$

wird τ_φ substituiert durch die Gl. (2.11b) und (2.13b)

$$\tau_\varphi = (\mu + s \epsilon_{\varphi M}) \frac{\partial \bar{u}_z}{r \partial \varphi} \quad (2.23)$$

Als Lösungsansatz wird dabei angenommen, daß die Geschwindigkeitsverteilung in radialer Richtung durch das Kármán'sche Gesetz

$$u^+ = A + B \ln y^+ \quad (2.24)$$

$$u^+ = \bar{u}_z / u^*$$

$$y^+ = (r - r_0) u^* / \nu$$

beschrieben werden kann, das zunächst nur für das Kreisrohr abgeleitet wurde. Neuere Messungen der Geschwindigkeitsverteilung in Geometrien, wie sie bei Stabbündel vorliegen, zeigten Konsistenz mit diesem Gesetz. Levchenko [15] fand mit seinen Messungen in Kanälen, wie sie bei enggepackten Stabbündeln mit $P/D = 1$ entstehen, eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Kármán'schen Gesetz. Aus den Messungen von Nijsing [16], die auch in bündelähnlichen Kanälen mit $P/D = 1,05$ bis $1,15$ durchgeführt wurden, ergab sich, daß die Geschwindigkeitsverteilung normal zur Stabwand den gleichen Gesetzen folgt wie bei Kreisrohren.

Bei der Integration über r ist für die untere Integrationsgrenze zu berücksichtigen, daß das Kármán'sche Gesetz (Gl. (2.24)) nur bis zu einem Abstand δ von der Wand, der der Dicke der Zähigkeitsbeeinflussten Wandschicht entspricht, gilt. Die obere Integrationsgrenze bleibt die Linie maximaler Geschwindigkeit. Dadurch wird

$$\int_{r_0}^{r_0 + \hat{y}} \tau_\varphi dr \quad \text{dargestellt durch} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{r_0 + \delta}^{r_0 + \hat{y}} \tau_\varphi dr \quad (2.25)$$

Bei großen Re-Zahlen, wie sie auch in den zu betrachtenden Reaktorkonzepten vorliegen ($Re \geq 10^5$), ist diese Dicke δ klein gegen

den turbulenten Bereich, so daß der Fehler bei der nachfolgenden Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit als vernachlässigbar klein angenommen werden kann.

Die Untersuchungen von Sandborn [17] zeigten, daß die scheinbare kinematische Zähigkeit in azimuthaler Richtung $\epsilon_{\varphi M}$ nur in Wandnähe vom radialen Wandabstand abhängt. Daraus folgt als weitere Annahme zur Lösung des Integrals

$$\epsilon_{\varphi M} \neq f(r)$$

Mit diesen Bedingungen sowie unter Berücksichtigung der Gl. (2.23 u. 2.24) kann dann aus Gl. (2.22) nach Substitution der Wandschubspannung durch die Schubspannungsgeschwindigkeit

$$\tau_{r_{r_0}} = \zeta u^{*2} \quad (2.26)$$

die folgende Beziehung abgeleitet werden:

$$r_0 \zeta u^{*2} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ (\mu + \zeta \epsilon_{\varphi M}) \left(\frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \left[\bar{u}^+ - B \left(\frac{\hat{y}}{2d+\hat{y}} + \frac{\hat{y}}{2(d+\hat{y})} \right) \right] \frac{2\hat{y}}{d+\hat{y}} + \right. \right. \\ \left. \left. B u^* \left(\frac{1}{u^*} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \right) \ln \left(1 + \frac{\hat{y}}{r_0} \right) \right| \right\} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \frac{\hat{y}}{2} (d + \hat{y}) \quad (2.27)$$

Gl. (2.27) stellt die azimuthale Verteilung der Schubspannungsgeschwindigkeit eines Segments dar.

Darin ist

$$\bar{u}^+ = \frac{\int_{r_0+d}^{r_0+\hat{y}} u^+ r d\varphi dr}{\int_{r_0+d}^{r_0+\hat{y}} r d\varphi dr} \quad (2.28)$$

oder

$$\bar{u}^+ = A + B \left(\ln \hat{y}^+ + \frac{\hat{y}}{2(d+\hat{y})} - 1 \right) \quad (2.29)$$

Gl. (2. 29) ist die Bestimmungsgleichung für die mittlere Kühlmittelgeschwindigkeit eines Segments (Anhang C).

Der axiale Druckgradient $\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$ ist auf Grund der Bedingungen nach Gl. (2. 8) und (2. 9)

$$\text{und} \quad \begin{aligned} p &= p(r, \varphi) \\ u_z &= u_z(r, \varphi) \end{aligned}$$

konstant in der Strömungsquerschnittsfläche.

Für die Fälle, daß die Terme

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi}$$

vernachlässigbar klein sind, reduziert sich Gl. (2. 27) auf die Form:

$$\begin{aligned} r_o \xi u^{*2} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ (\mu + \xi \epsilon_{\varphi M}) \left[\frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \left[\bar{u}^+ - B \left(\frac{\hat{y}}{2d+\hat{y}} + \frac{\hat{y}}{2(d+\hat{y})} \right) \right] \frac{2\hat{y}}{d+\hat{y}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} B \ln \left(1 + \frac{\hat{y}}{r_o} \right) \right] \right\} - \frac{d\bar{p}}{dz} \frac{\hat{y}}{2} (d + \hat{y}) \end{aligned} \quad (2. 30)$$

Durch Einführen einer geeigneten Beziehung für die scheinbare kinematische Viskosität in azimuthaler Richtung $\epsilon_{\varphi M}$, auf die im nächsten Kapitel näher eingegangen wird, läßt sich Gl. (2. 27) bzw. Gl. (2. 30) lösen. Die Lösung erfolgt numerisch nach dem Runge-Kutta-Nyström-Verfahren [18] für die Randbedingungen

$$\frac{\partial u^*}{\partial \varphi} = 0 \quad ; \quad \varphi = 0, \pi, 2\pi \quad (2. 31)$$

Die Stetigkeitsbedingungen beim Übergang von Element zu Element sind:

$$u^* \left. \begin{array}{l} i=1 \\ j=I \end{array} \right\} = u^* \left. \begin{array}{l} i=N \\ j=I-1 \end{array} \right\} \quad (2. 32a)$$

und

$$\left. \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \right|_{\substack{i=1 \\ j=1}} = \left. \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \right|_{\substack{i=N \\ j=I-1}} \quad (2.32b)$$

Dabei ist:

I = Anzahl der Elemente

N = Anzahl der Segmente pro Element.

2.1.2.2 Ansätze zur Beschreibung der scheinbaren kinematischen Viskosität

Zur Bestimmung der scheinbaren kinematischen Viskosität wurden eine Anzahl von Arbeiten durchgeführt, von denen hier nur die wesentlichen, im Zusammenhang mit dieser Arbeit interessierenden Modelle, die sich auf Bündelgeometrien beziehen, diskutiert werden können.

In einer der ersten Arbeiten untersuchten Deissler und Taylor [4] 1956 die Strömung in parallelen Stabbündeln, sie gingen von der Annahme aus, daß die Turbulenzstruktur in einer Bündelgeometrie identisch der für reine Rohrströmung ist und stellten demnach die Kräftebilanz in der Form auf

$$\tau_w \Delta l = - \frac{dp}{dz} \Delta A$$

Δl = Anteil des benetzten Umfangs

ΔA = Kühlmittelfläche begrenzt durch Δl und zwei Geschwindigkeitsgradientenlinien

Aufgrund dieser Annahme wird die Variation der Wandschubspannung τ_w überbewertet, da der dämpfende Einfluß des azimuthalen Impulsaustausches vernachlässigt ist. Das Modell gilt daher nicht in all den Fällen, in denen sich der Kanalquerschnitt stark ändert, was auch aus einem Vergleich zwischen Rechnungen mit diesem Modell und experimentellen Ergebnissen hervorgeht [7].

Die Stabbündelanalyse von Dwyer [5] geht von ähnlichen Voraussetzungen aus, so daß auch die Berechnungen des Strömungsfeldes im wesentlichen identisch sind mit denjenigen von Deissler und Taylor.

Eine weitergehende Annahme, um den komplexeren Strömungsverhältnissen in Kanälen mit starken Querschnittsänderungen Rechnung zu tragen, war die, zwischen dem turbulenten Austausch in radialer und azimuthaler Richtung zu differenzieren.

Basierend auf experimentellen Ergebnissen im Kreisrohr, insbesondere von Sandborn [17], folgerten Rapiert und Redman [19], daß die scheinbare kinematische Viskosität in φ -Richtung $\epsilon_{\varphi M}$ bei der Strömung in Bündelgeometrie gleich ist dem max. Wert der scheinbaren kinematischen Viskosität in r -Richtung $\epsilon_{r M}$. Für $\epsilon_{\varphi M}$ an der Stelle φ soll damit gelten:

$$\epsilon_{\varphi M}(\varphi) = \frac{1}{10} u^* (\varphi) \cdot \hat{y}(\varphi)$$

Diese Beziehung folgt aus dem Karman'schen Gesetz zusammen mit dem Newton'schen Gesetz und der Annahme, daß die Schubspannung linear zur Kanalmitte hin abfällt.

Nijsing et al. [16] untersuchten die Strömung zwischen parallelen Stäben in Dreiecksanordnung. Basierend auf Messungen von Elder [44] leiteten sie für den Mittelwert von $\epsilon_{\varphi M}$ an der Stelle φ die Beziehung ab:

$$\epsilon_{\varphi M} = 0,0115 \cdot \nu \left[\frac{u}{\bar{u}} \frac{de}{D_h} \cdot Re \right]^{7/8}$$

Das theoretische Modell von Bender et al. [20] basiert auf den Arbeiten von Buleev [21] und Hooper [22]. Es bestimmt den turbulenten Austausch bei isotroper Turbulenz nach einer Mischungslängentheorie. Die Analyse geht aus von einer charakteristischen Länge, die aus einer theoretischen Betrachtung der Wirbelstrukturen, d. h. ihrer

Größen-, Energie- und Frequenzverteilung gewonnen wird. Diese Methode, ebenso wie die Verfahren von Rotta [23] oder Spalding [24], führt aufgrund ihrer Komplexität zu sehr aufwendigen Rechnungen, die im Zusammenhang mit den hier durchgeführten Untersuchungen den vertretbaren Aufwand überschreiten. Außerdem enthalten auch diese Modelle eine Anzahl empirischer Konstanten, die aus Messungen zu bestimmen sind. Bender mußte daher seine Untersuchungen zur Strömungsverteilung im Bündel auf den symmetrischen Fall, d. h. auf einen 30° -Ausschnitt in einer $r-\varphi$ -Ebene beschränken. Insgesamt gesehen ergibt sich aus seiner Analyse, daß der maximale Wert für die scheinbare kinematische Viskosität in radialer Richtung unabhängig vom P/D-Verhältnis ist und durch die Gleichung

$$\varepsilon_{rM} \max = 0,001 \cdot \nu \cdot Re$$

dargestellt werden kann, während die scheinbare kinematische Viskosität in φ -Richtung eine Größenordnung höher ist als die in r -Richtung, d. h.

$$\varepsilon_{\varphi M} \max = 0,01 \cdot \nu \cdot Re$$

Ibragimov et al. [25] geben eine semi-empirische Beziehung an, die eine direkte Relation zwischen der Kanalform und der Verteilung der Wandschubspannung herstellt.

Das Modell geht davon aus, daß der gesamte Impulstransport in azimuthaler Richtung die Summe aus zwei Transportmechanismen ist.

- 1) Impulstransport durch molekulare Reibung (Diffusion)
- 2) Impulstransport durch sekundäre Strömung (Konvektion).

Ausdrücke für die scheinbare kinematische Viskosität werden dabei explizit nicht abgeleitet.

In der hier durchgeführten Arbeit wurde bei der Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung (Kap. 2.1.2) zur Berücksichtigung des

turbulenten Impulsaustausches in azimuthaler Richtung von dem Modell der scheinbaren kinematischen Viskosität $\epsilon_{\varphi H}$ ausgegangen, unter der Voraussetzung, daß kein konvektiver Impulstransport über dem Querschnitt auftritt. Diese Annahme hat in diesem Rahmen die Bedeutung einer Arbeitshypothese. Sie soll ermöglichen, eine Alternative zu der bisher experimentell nicht mit genügender Genauigkeit nachgewiesenen Sekundärströmung, insbesondere in dem für schnelle Brutreaktoren interessanten Bereich von P/D-Verhältnissen $\geq 1,1$ und Pr-Zahlen ≤ 1 , aufzuweisen. Die erzielten Ergebnisse liegen mit der getroffenen Vernachlässigung auf der sicheren Seite.

Eine vergleichende Untersuchung der verschiedenen, oben diskutierten Beziehungen für $\epsilon_{\varphi H}$ (Rapier, Nijssing, Bender) zeigte, daß die semi-empirische Beziehung nach Nijssing [16] die beste Übereinstimmung zwischen den theoretisch ermittelten Geschwindigkeitsprofilen (nach Gl. (2.30)) und experimentell ermittelten liefert (Abb. 5). Der numerischen Rechnung liegt daher diese Beziehung zugrunde.

2.1.3 Bestimmung des Temperaturfeldes im Kühlmittel

2.1.3.1 Energiegleichung

Unter Berücksichtigung der zu Beginn von Kap. 2.1.2 getroffenen Annahmen kann die Energiebilanz für ein differentielles Kühlmittелеlement durch die folgende Gleichung in Zylinder-Koordinaten dargestellt werden ^{x)}:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[(\lambda + \xi c_p \epsilon_{rH}) \frac{\partial T_K}{\partial r} r \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(\lambda + \xi c_p \epsilon_{\varphi H}) \frac{\partial T_K}{r \partial \varphi} \right] = r \frac{\partial}{\partial z} (u_z \xi c_p T_K) \quad (2.33)$$

x) Die Dissipation kann dabei gegenüber der radialen und azimuthalen Wärmeleitung als vernachlässigbar klein angenommen werden, ebenso wie die axiale Wärmeleitung gegenüber der Wärmekonvektion durch die Strömung.

Durch Einführen der Wärmestromdichten q_r und q_φ folgt aus Gl. (2. 33)

$$\frac{\partial}{\partial r} (q_r r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} q_\varphi = r \frac{\partial}{\partial z} (u_z \zeta c_p T_K) \quad (2. 34)$$

Zur Ermittlung der Kühlmitteltemperaturverteilung wird Gl. (2. 34) in einem ersten Schritt auf die Lösung des zweidimensionalen Problems reduziert, d. h. analog zu Kap. 2. 1. 2 wird Gl. (2. 34) zunächst in radialer Richtung zwischen den Grenzen r_o und $r_o + \hat{y}$ integriert. Entsprechend gilt auch als Randbedingung, daß die Wärmestromdichte q_n senkrecht zur Linie maximaler Geschwindigkeit Null sein muß. In Komponentenschreibweise von q_r und q_φ heißt das:

$$q_n = 0 = q_r \cos \psi - q_\varphi \sin \psi \quad (2. 35)$$

$$\left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}$$

$(r_o + \hat{y}) \quad \quad \quad (r_o + \hat{y})$

Unter der Voraussetzung, daß die Stoffgrößen λ , ζ , c_p Mittelwerte pro Segment (vgl. Abb. 2) darstellen, d. h.

$$\left. \begin{matrix} \lambda \\ \zeta \\ c_p \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\zeta} \\ \bar{c}_p \end{matrix} \right\} = f(\bar{T}_K(\varphi))$$

und in Analogie zu $\epsilon_{\varphi M}$ weiter gilt (vgl. Kap. 2. 1. 3. 2),

$$\epsilon_{\varphi H} \neq f(r)$$

ergibt sich für die azimutale Verteilung der mittleren Kühlmitteltemperatur eines Segments $\bar{T}_K(\varphi)$ an der Stelle z die Beziehung:

$$q_r = \frac{1}{d} u \zeta (d + \hat{y}) \hat{y} \frac{\partial}{\partial z} (c_p \bar{T}_K) - \frac{1}{r_o} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(\lambda + \zeta c_p \epsilon_{\varphi H}) \frac{\partial \bar{T}_K}{\partial \varphi} \cdot \frac{\hat{y}}{r_m} \right] \quad (2. 36)$$

Darin sind: $u = u(\varphi)$ die mittlere Kühlmittelgeschwindigkeit pro Segment
 $q_r = q(\varphi)$ die radial zugeführte Wärmestromdichte " "

Alle bisher üblichen Ansätze zur Lösung von Gl. (2.36) gingen von der Annahme aus, daß die Strömung von Anfang an nicht nur hydraulisch, sondern auch thermisch voll ausgebildet ist. Deshalb wurde der axiale Temperaturgradient durch eine Energiebilanz über den gesamten Kanalquerschnitt global über die Beziehung dargestellt:

$$Q_{\text{ges}} = \overline{m}_{\text{ges}} \overline{c}_{p,\text{ges}} \frac{d\overline{T}_K}{dz} \quad (2.37)$$

Das bedeutet, daß $\frac{\partial \overline{T}_K}{\partial z}$ in azimuthaler Richtung konstant ist, d. h.

$$\frac{\partial \overline{T}_K}{\partial z} \neq f(\varphi) \quad (2.38)$$

Diese Voraussetzung einer von Anfang an voll thermisch ausgebildeten Strömung in z- und φ -Richtung erscheint besonders im Hinblick auf asymmetrische Kanalquerschnitte, wie sie z. B. bei exzentrisch stehenden Stäben im Bündel entstehen, nicht gerechtfertigt, was die später dargestellten Ergebnisse auch beweisen.

Aus diesem Grunde ging die hier durchgeführte Analyse nicht von der Annahme einer von Anfang an thermisch voll ausgebildeten Strömung aus. Zur Bestimmung der Temperaturverteilung im Kühlmittel muß daher Gl. (2.36) in φ - und z-Richtung integriert werden. Das erfolgt nach entsprechender Diskretisierung von Gl. (2.36) in z-Richtung durch Lösen des folgenden Systems von Differenzgleichungen für das 2-dimensionale φ -x Netz (Abb. 6):

$$q(\varphi)_n = [u(\varphi) \cdot \xi(\varphi)]_n$$

$$x \left[\frac{(c_p(\varphi) \overline{T}_K(\varphi))_{n+1/2} - (c_p(\varphi) \overline{T}_K(\varphi))_{n-1/2}}{\Delta x} \right] \frac{(d+\hat{y})\hat{y}}{d} \quad (2.39)$$

$$- \frac{1}{r_o} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ [\lambda(\varphi) + \epsilon_{\varphi H}(\varphi) \xi(\varphi) c_p(\varphi)]_n \frac{\partial \overline{T}_K(\varphi)_n}{\partial \varphi} \cdot \frac{\hat{y}}{r_m} \right\}$$

Die Lösung in φ -Richtung erfolgt numerisch nach der Methode von Runge-Kutta-Nyström [18] für die Randbedingungen

$$\frac{\partial \bar{T}_K}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = 0, \pi, 2\pi \quad (2.40)$$

und die Stetigkeitsbedingungen beim Übergang von Element zu Element

$$\bar{T}_K \Big|_{\substack{i=1 \\ j=I}} = \bar{T}_K \Big|_{\substack{i=N \\ j=I-1}} \quad (2.41a)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_K}{\partial \varphi} \Big|_{\substack{i=1 \\ j=I}} = \frac{\partial \bar{T}_K}{\partial \varphi} \Big|_{\substack{i=N \\ j=I-1}} \quad (2.41b)$$

Dabei ist: I = Anzahl der Elemente

N = Anzahl der Segmente pro Element

Für die Integration in axialer Richtung gelten die Bedingungen, daß die Druck- und Temperaturverteilung am Kühlkanaleintritt vorgegeben ist, ebenso die Druckverteilung am Kühlkanalaustritt.

Die Ermittlung der Temperaturverteilungen nach Gl. (2.39) erfolgt zusammen mit der Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung. Das ist möglich, da beide Gleichungen nur über die druck- und temperaturabhängigen Stoffgrößen gekoppelt sind. Zur Bestimmung der Wärmestromdichte an der Hüllenoberfläche $q(\varphi)$ ist eine gleichzeitige Ermittlung des Temperaturfeldes im Brennstab (Hülle und Brennstoff) erforderlich.

2.1.3.2 Ansätze für die thermische Austauschgröße

Die Analogie zwischen Impuls- und Wärmetransport bei turbulenter Strömung wird allgemein dargestellt durch eine direkte Beziehung zwischen der scheinbaren kinematischen Viskosität ϵ_M und der

thermischen Austauschgröße ϵ_H :

$$\epsilon_H = K \cdot \epsilon_M \quad (2.42)$$

Im Falle eines gasförmigen Kühlmediums mit Pr-Zahlen = 1 ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Geschwindigkeits- und Temperaturprofile für den Proportionalitätsfaktor:

$$K = 1 \quad (2.43)$$

Im Falle von Flüssigmetallkühlung, z. B. Natrium, mit Pr-Zahlen $\ll 1$, wo also die Reynolds-Analogie nicht mehr gilt, zeigten die Untersuchungen von Eickhoff [26] und Dwyer [27], daß der Proportionalitätsfaktor kleiner ist als 1.

$$K < 1 \quad (2.44)$$

In Anlehnung an diese Arbeiten kann unter Zugrundelegung der vergleichenden Untersuchungen von Bender [7] die thermische Austauschgröße in azimuthaler Richtung $\epsilon_{\varphi H}$ für Flüssigmetall durch die Beziehung von Dwyer [27] dargestellt werden:

$$\epsilon_{\varphi H} = K_{\varphi} \cdot \epsilon_{\varphi M} \quad (2.45)$$

mit

$$K_{\varphi} = 1 - \frac{(0,2/Pr) - 2}{(\epsilon_{\varphi M} / \nu)^{0,9}} \quad (2.46)$$

Insgesamt gesehen ist jedoch zu berücksichtigen, daß bei Natrium als Kühlmittel die molekulare Wärmeleitung λ den turbulenten Wärmetransport, also $\epsilon_{\varphi H}$, überwiegt. Damit wird der Fehler, der bei der Berechnung der Temperaturverteilung im Kühlmittel aufgrund von Unsicherheiten in der Bestimmungsgleichung von $\epsilon_{\varphi H}$ entsteht, klein.

2.2 Brennstabbereich

2.2.1 Temperaturfelder in Brennstoff und Hülle

Die Temperaturverteilung in Brennstoff und Hülle wird beschrieben durch die bekannte Fourier'sche Differentialgleichung der Wärmeleitung. Sie lautet in ihrer allgemeinen Form für den stationären Fall:

$$\nabla (\lambda \nabla T) + W = 0 \quad (2.47)$$

Die Lösung erfolgt unter den folgenden Voraussetzungen:

1. konstante Leistungsdichte im Brennstoff,
2. keine axiale Wärmeleitung,
3. kein azimuthaler Wärmeaustausch im Spalt zwischen Brennstoff und Hülle,
4. keine Gamma-Heizung,
5. temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeiten.

Damit ergeben sich im einzelnen die folgenden Differentialgleichungen in r - φ -Koordinaten

1) für den Brennstoff

$$\lambda_B \frac{\partial^2 T_B}{\partial r^2} + \frac{\lambda_B}{r} \frac{\partial T_B}{\partial r} + \frac{\lambda_B}{r^2} \frac{\partial^2 T_B}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \lambda_B}{\partial r} \frac{\partial T_B}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda_B}{\partial \varphi} \frac{\partial T_B}{\partial \varphi} + W = 0 \quad (2.48)$$

2) für die Hülle entsprechend

$$\lambda_H \frac{\partial^2 T_H}{\partial r^2} + \frac{\lambda_H}{r} \frac{\partial T_H}{\partial r} + \frac{\lambda_H}{r^2} \frac{\partial^2 T_H}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \lambda_H}{\partial r} \frac{\partial T_H}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda_H}{\partial \varphi} \frac{\partial T_H}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.49)$$

Die Randbedingungen zur Lösung von Gl. (2.48) bzw. (2.49) sind für

1) Brennstoff

$$\left. \frac{\partial T_B}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0, \pi, 2\pi} = 0 \quad (2.50a)$$

$$\left. \frac{\partial T_B}{\partial r} \right|_{r=R_{Bi}} = 0 \quad (2.50b)$$

2) Brennstoff-Hülle

$$\lambda_B \left. \frac{\partial T_B}{\partial r} \right|_{r=R_{Ba}} = - \left[T_B(R_{Ba}, \varphi) - T_H(R_{Hi}, \varphi) \right] \cdot K_{\text{Spalt}} \quad (2.51)$$

3) Hülle

$$\left. \frac{\partial T_H}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0, \pi, 2\pi} = 0 \quad (2.52)$$

4) Hülle-Kühlmittel

$$\lambda_H \left. \frac{\partial T_H}{\partial r} \right|_{r=R_{Ha}} = - \left[T_K(\varphi) - T_H(R_{Ha}, \varphi) \right] \cdot h_K(\varphi) \quad (2.53)$$

Diese Darstellungsweise der Randbedingung 4 zwischen Hülle und Kühlmittel hat den Nachteil, daß zur Ermittlung der Hüllentemperatur der lokale Wärmeübergangskoeffizient erforderlich ist. Da man zu dessen Bestimmung auf experimentelle Ergebnisse, d. h. halbempirische Ansätze zurückgreifen muß, tritt damit ein Unsicherheitsfaktor auf, der zu einer relativ groben Darstellung der Randbedingungen nach Gl. (2.53) führen kann.

Dieses Problem ließe sich umgehen durch eine Darstellung der Randbedingung zwischen Hülle-Kühlmittel in der Form

$$T_H(R_{Ha}, \varphi) = T_K(R_{Ha}, \varphi) \quad (2.54a)$$

$$\lambda_H \left. \frac{\partial T_H}{\partial r} \right|_{r=R_{Ha}} = \lambda_K \left. \frac{\partial T_K}{\partial r} \right|_{r=R_{Ha}} \quad (2.54b)$$

Diese Methode würde jedoch zur Bestimmung der Kühlmitteltemperatur an der Hüllwand $T_K(R_{Ha}, \varphi)$ eine zusätzliche Zonenaufteilung des Kühlkanals in radialer Richtung erfordern. Im Zusammenhang mit den hier untersuchten Problemen, die bereits eine Integration über φ und z erfordern, wäre damit der Kühlkanalbereich echt 3-dimensional zu betrachten, was zwar prinzipiell möglich ist, aber, insbesondere im Hinblick auf asymmetrische Geometrien, zu einem sehr hohen Rechenaufwand führt. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß auch in diesem Fall Unsicherheitsfaktoren dadurch auftreten, daß für den turbulenten Impuls und Wärmeaustausch Ansätze nötig sind, die jeweils in einzelnen radialen Zonen unterschiedlich sind.

Die Lösung der Gl. (2.48), (2.49) erfolgt mit Hilfe einer numerischen Methode. Sie hat in diesem Fall gegenüber den analytischen Verfahren, die mit Hilfe der Laplace-Transformation [28, 29] oder über die Entwicklung nach Eigenfunktionen [29] möglich sind, den Vorteil, daß physikalische Bedingungen, wie z.B. Temperaturabhängigkeit der Stoffgrößen besser und leichter erfaßt werden können. Außerdem ist die erzielbare Genauigkeit sehr groß.

Der Lösung liegt das folgende Modell zugrunde (Abb. 7):

1. Durch den Brennstab werden senkrecht zur axialen Koordinate Ebenen gelegt, die in ein Gitter mit der Maschenweite Δr , $\Delta \varphi$ aufgeteilt sind.

2. Für dieses Gitternetz werden die Gl. (2.48 und 2.49) diskretisiert, so daß an Stelle der Differentialgleichungen ein System von Differenzgleichungen zu lösen ist.

Für den Brennstoff (Gl. 2.48) ergibt sich somit: (der Übersichtlichkeit halber wird in Gl. (2.55) an Stelle von T_B die Größe T sowie für λ_B die Größe λ geschrieben)

$$L_{k-1,k}^j (T_{k-1}^j - T_k^j) + L_{k+1,k}^j (T_{k+1}^j - T_k^j) + L_k^{j-1,j} (T_k^{j-1} - T_k^j) + L_k^{j+1,j} (T_k^{j+1} - T_k^j) + W_k^j = 0 \quad (2.55)$$

$$\begin{array}{ll} \text{wobei} & 1 \leq j \leq J & J = \text{Anzahl der azimuthalen Zonen} \\ & 1 \leq k \leq K & K = \text{Anzahl der radialen Zonen} \end{array}$$

Die Wärmeleitwerte L sind definiert durch:

$$L_{k-1,k}^j = \lambda_{k-1,k}^j \cdot c_{k-1,k}^j \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{k-1,k}^j = \lambda \left(\frac{1}{2} (T_{k-1}^j - T_k^j) \right) \\ c_{k-1,k}^j = \frac{1}{2} (\varphi^{j+1} - \varphi^{j-1}) \cdot \frac{1}{\ln r_k^j - \ln r_{k-1}^j} \end{array} \right. \quad (2.56a)$$

$$L_{k+1,k}^j = \lambda_{k+1,k}^j \cdot c_{k+1,k}^j \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{k+1,k}^j = \lambda \left(\frac{1}{2} (T_{k+1}^j - T_k^j) \right) \\ c_{k+1,k}^j = \frac{1}{2} (\varphi^{j+1} - \varphi^{j-1}) \cdot \frac{1}{\ln r_{k+1}^j - \ln r_k^j} \end{array} \right. \quad (2.56b)$$

$$L_k^{j-1,j} = \lambda_k^{j-1,j} \cdot c_k^{j-1,j} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_k^{j-1,j} = \lambda \left(\frac{1}{2} (T_k^{j-1} - T_k^j) \right) \\ c_k^{j-1,j} = \frac{1}{\varphi^j - \varphi^{j-1}} \ln \frac{r_k^j + r_{k+1}^j}{r_{k-1}^j - r_k^j} \end{array} \right. \quad (2.56c)$$

$$L_k^{j+1,j} = \lambda_k^{j+1,j} \cdot c_k^{j+1,j} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_k^{j+1,j} = \lambda \left(\frac{1}{2} (T_k^{j+1} - T_k^j) \right) \\ c_k^{j+1,j} = \frac{1}{\varphi^{j+1} - \varphi^j} \ln \frac{r_k^j + r_{k+1}^j}{r_{k-1}^j + r_k^j} \end{array} \right. \quad (2.56d)$$

Für die Energiebilanz in der Hülle gilt eine analoge Beziehung zu Gl. (2. 55), jedoch ohne den Quellterm W . Die Randbedingungen (Gl. 2. 50a bis 2. 53) sind entsprechend in Differenzgleichungen umzuformen.

Die Ermittlung der Temperaturfelder im Brennstoff und in der Hülle erfolgt mit einer modifizierten Version des Relax-Codes [30].

2. 2. 2 Ansätze für den lokalen Wärmeübergangskoeffizienten Hülle-Kühlmittel und den Wärmedurchgangskoeffizienten im Spalt

Zur Bestimmung der Temperaturverteilung in Brennstoff und Hülle ist es nötig, im Zusammenhang mit den Randbedingungen 2 und 4 (Gl. (2. 51) und (2. 53)) Aussagen über den Wärmedurchgangskoeffizienten im Spalt sowie über den lokalen Wärmeübergangskoeffizienten zwischen Hülle und Kühlmittel machen zu können.

Der Wärmedurchgangskoeffizient im Spalt Hüllrohr-Brennstoff K_{Spalt} ist vom Medium im Spalt abhängig. Bei oxidischem Brennstoff wird allgemein ein gasgefüllter Spalt verwendet. Hier wird der konstante Wert von $1 \text{ W}/(\text{cm}^2 \text{ }^\circ\text{C})$ benutzt [31]. Bei Na-Bonding wird der Wärmedurchgangskoeffizient aus der Spaltweite und der Wärmeleitfähigkeit des Natriums bestimmt.

Über den Verlauf des lokalen Wärmeübergangskoeffizienten Hülle - Kühlmittel $h_K(\varphi)$ sind sowohl bei Gasen als auch bei Flüssigmetall als Kühlmedium, insbesondere bei asymmetrischer Bündelgeometrie, sehr wenig theoretische und experimentelle Ergebnisse bekannt [9, 32, 33]. Die üblichen angegebenen Wärmeübergangsbeziehungen definieren im allgemeinen den mittleren Wärmeübergang und gelten für symmetrische Geometrie, oder sie sind entweder verbunden mit der Bedingung eines am Umfang konstanten Wärmeflusses oder einer am Umfang konstanten Hülltemperatur [34, 35].

Theoretische Arbeiten, die sich mit azimuthaler Temperaturverteilung in einem Brennstab befassen, approximieren den lokalen Wärme-

übergangskoeffizienten zwischen Hülle und Kühlmittel in Stabbündeln mit Dreiecksanordnung durch den Ansatz [36]

$$h_k(\varphi) = K_0 - K_1 \cos 6\varphi \quad (2.57)$$

der nur für symmetrische Bündelgeometrien gilt.

Die Konstanten K_0, K_1 sind dabei aus experimentellen Ergebnissen für die jeweils geometrisch oder hydraulisch verschiedenen Fälle neu zu bestimmen.

In einer anderen theoretischen Betrachtungsweise [7] wird bei Natrium als Kühlmittel das Wärmeübergangsproblem als Wärmeleitproblem betrachtet. Wie bereits in Kap. 2. 2. 1 im Zusammenhang mit den Randbedingungen diskutiert, führt dieses Verfahren zu einem Rechenaufwand, der den Rahmen der hier zu untersuchenden Probleme übersteigt.

In der hier durchgeführten Arbeit wurde in Anlehnung an Überlegungen der Ähnlichkeitstheorie der lokale Wärmeübergang in azimuthaler Richtung als Funktion von dimensionslosen Kenngrößen dargestellt, d. h. für die lokale Nu-Zahl soll gelten:

$$Nu_{lok} = f\left(Re, Pr, \frac{P}{D}, \frac{u}{\bar{u}}, \frac{d_e}{D_h}\right) \quad (2.58)$$

Berücksichtigt man, daß für die mittlere Nu-Zahl bei Bündelementen weiter gilt:

$$Nu_{av} = f\left(Re, Pr, \frac{P}{D}\right), \quad (2.59)$$

so kann man die Abhängigkeit von Nu_{lok} auf die Form reduzieren

$$Nu_{lok} = f\left(Nu_{av}, \frac{u}{\bar{u}}, \frac{d_e}{D_h}\right) \quad (2.60)$$

Diese Art der Darstellung erlaubt es, den lokalen Wärmeübergang

direkt aus dem mittleren Wärmeübergang basierend auf einer bekannten Beziehung (Nu_{av}) zu ermitteln. Die lokale Abhängigkeit wird dabei durch die Berücksichtigung der lokalen Strömungs- und Geometrieverhältnisse über die Terme $\frac{u}{\bar{u}}$ und $\frac{de}{D_h}$ erzielt.

In der endgültigen Form soll gelten:

$$Nu_{lok} = Nu_{av} \left(\frac{u}{\bar{u}} \right)^{m_1} \left(\frac{de}{D_h} \right)^{m_2} = f(\varphi) \quad (2.61)$$

Die Exponenten m_1 und m_2 werden aus Experimenten bestimmt.

Diese Art der Darstellung des lokalen Wärmeübergangs erlaubt es im Gegensatz zur Fourier-Approximation nach Gl. (2.57) sowohl symmetrische als auch asymmetrische Geometrien zu erfassen. Außerdem erscheint mit diesem Ansatz eine Extrapolation auf asymmetrische Fälle, für die bis jetzt noch keine experimentellen Ergebnisse für den lokalen Wärmeübergang vorliegen, wie z. B. besonders bei Rand- oder Eckstäben, leichter möglich als mit einer Fourier-Approximation, da lokale Änderung direkt durch die Korrekturglieder $\frac{u}{\bar{u}}$ und $\frac{de}{D_h}$ erfaßt werden. Eine Voraussetzung ist dabei, daß der Fehler, der durch Konstanthalten der Exponenten m_1 und m_2 entsteht, klein ist, was im Rahmen der nachfolgenden Untersuchungen gezeigt werden kann.

2.2.3 Vergleich des theoretischen Modells mit Experimenten

Diese Darstellung des lokalen Wärmeübergangs wurde zusammen mit dem theoretischen Modell an experimentellen Ergebnissen getestet. Dazu wurden die experimentellen Untersuchungen von Dwyer [9] herangezogen. Sie sind momentan, so weit bekannt, die einzigen, die das Problem des lokalen Wärmeübergangs bei Stabbündeln mit exzentrischem Stab für den Fall der Flüssigmetallkühlung betrachten. Die Untersuchungen wurden an einem Stabbündel mit 13 beheizten Stäben

in Dreiecksanordnung ohne Abstandshalter durchgeführt. Darin wurde ein zentraler Stab in zwei verschiedene Richtungen ausgelenkt:

1. in Richtung genau zwischen zwei benachbarte Stäbe,
2. in Richtung genau auf einen benachbarten Stab.

Die effektive Auslenkung variierte zwischen 0 % und etwa 77,5 % der maximal möglichen. Die Experimente wurden mit Quecksilber als Kühlmittel durchgeführt. Als Ergebnisse aus diesen Experimenten wurde die azimutale Verteilung der Wärmestromdichte $q(\varphi)$ an der Hüllrohrfläche und des Wärmeübergangskoeffizienten $h_K(\varphi)$ dargestellt.

Zum Vergleich sind die Fälle nachgerechnet, daß ein Stab genau in Richtung zwischen zwei benachbarte Stäbe ausgelenkt ist, wobei der Betrag der relativen Auslenkung 58,2 % und 77,5 % war. Diese Beispiele stellen sowohl in bezug auf die Richtung der Auslenkung als auch auf den Betrag die ungünstigsten der von Dwyer untersuchten Fälle dar.

Ein Vergleich zwischen den theoretischen und experimentellen Resultaten (Abb. 8a) ergab, daß sich der lokale Wärmeübergang im Falle $\zeta = 0,582$ sowohl qualitativ als auch quantitativ gut darstellen läßt durch die Beziehung:

$$\text{Nu}_{\text{lok}} = \text{Nu}_{\text{av}} \left(\frac{u}{\bar{u}} \right)^{0,2} \left(\frac{D_e}{D_h} \right)^{1,0} \quad (2.62)$$

Die maximale Abweichung der theoretischen von den experimentellen Ergebnissen beträgt etwa 8 %.

Auch im Falle der höheren Auslenkung, $\zeta = 0,775$ (Abb. 8b) gibt diese Gleichung den lokalen Wärmeübergang qualitativ gut wieder. Die quantitativen Abweichungen zwischen Theorie und Experiment resultieren in diesem Falle im wesentlichen daraus, daß nach den Meßergebnissen von Dwyer der mittlere Wärmeübergangskoeffizient mit zunehmender

Auslenkung abnimmt, während er aufgrund der getroffenen Annahmen (adiabate Randbedingungen) in den hier durchgeführten theoretischen Untersuchungen konstant bleibt bei konstanten Pe-Zahlen. Dadurch liegen die nach diesem Modell ermittelten Werte für den lokalen Wärmeübergangskoeffizienten über den experimentell gefundenen. Die maximale Abweichung beträgt in diesem Fall etwa 20 %/o, d. h. absolut gesehen etwa 1,0 zu 0,8 kcal/(m² sec °C).

Die Minima treten jeweils an den Stellen in Umfangsrichtung auf, wo die größten Änderungen des Kühlkanalquerschnitts vorliegen. Sie verschieben sich daher mit zunehmender Exzentrizität zu höheren Winkeln (vgl. Abb. 8a und 8b).

Bei kleineren Exzentrizitäten (Abb. 8a) werden diese Minima durch die Theorie ausgeprägter wiedergegeben als durch das Experiment, was zum einen am Kühlkanalmodell, zum anderen an Genauigkeitsgrenzen bei der Messung liegen kann.

Als weiteres Ergebnis der Nachrechnung ist in Abb. 9 die azimutale Verteilung der Wärmestromdichte an der Hüllrohroberfläche dargestellt. Ein Vergleich zwischen Theorie und Experiment zeigt qualitativ befriedigende Übereinstimmung. Die quantitativen Abweichungen sind im wesentlichen dadurch bedingt, daß für die experimentellen Ergebnisse die vereinfachende Voraussetzung gilt:

radialer Wärmefluß Q_R an der Hülleninnenseite ist konstant,
d. h.

$$Q_R \neq f(\varphi)$$

Bei den theoretischen Nachrechnungen konnte diese Bedingung aufgrund des sehr großen Rechenaufwandes sowie fehlender Versuchsangaben nicht ganz verifiziert werden. Es traten daher bei der Nachrechnung noch Wärmeströme in azimutaler Richtung sowohl in der Hülle als auch im Brennstoff auf, was den wirklichen Verhältnissen im Brennstab auch mehr entspricht. Die maximalen Abweichungen liegen daher im Bereich der heißesten Zonen ($\varphi = 0 - \frac{\pi}{3}$). Sie betragen im Falle $\zeta = 0,582$

etwa 2,5 % (Abb. 9a) und erhöhen sich bei $\epsilon = 0,775$ auf etwa 4 % (Abb. 9b), da mit steigender Auslenkung die azimuthalen Flüsse steigen.

Insgesamt gesehen haben die Testrechnungen gezeigt, daß mit dem theoretischen Modell experimentelle Untersuchungen qualitativ und quantitativ befriedigend beschrieben werden können. In bezug auf die Abweichungen ist zu sagen, daß experimentelle Bedingungen bei der Nachrechnung aufgrund des großen Rechenaufwandes oder unvollständiger Angaben nicht ganz genau erfaßt werden konnten. Andererseits ist bei dem Vergleich zwischen Theorie und Experiment auch die Genauigkeit zu beachten, mit der experimentelle Untersuchungen wiedergegeben werden können.

Alle bisherigen Vergleichsrechnungen wurden durchgeführt für Quecksilber als Kühlmittel. Im Hinblick auf die spätere Anwendung des Modells ist es nötig, mangels direkter Vergleichsmöglichkeiten, z. B. Experimente, die Ergebnisse der Untersuchung, die im Testen von Gl. (2.62) bzw. in der Ermittlung der Exponenten m_1 und m_2 bestanden, von Quecksilber auf Natrium zu übertragen, was allgemein üblich ist.

Wegen der unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften der beiden Metalle wurde jedoch in einem nächsten Schritt weiterhin untersucht, wie sich bei Natrium Unsicherheiten im lokalen Wärmeübergang, die durch Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der Exponenten m_1 und m_2 entstehen, über die entsprechende Randbedingung (Gl. (2.53)) auf die Lösung der Fourier-Dgl. und damit auf die Hülltemperaturverteilung auswirken. Die Untersuchungen wurden durchgeführt am Beispiel des Stabbündels eines natriumgekühlten schnellen Testreaktors [42], das durch den sehr kleinen Stababstand bei hoher Oberflächenleistung ($P/D = 1,2$; $D = 0,47$ mm; $X = 530$ W/cm) einen extremen Fall darstellt. Die Ergebnisse zeigen (Abb. 10), daß trotz einer starken Änderung der Exponenten um jeweils den Faktor 2 von $m_1 = m_2 = 0,5$ auf $m_1 = m_2 = 1,0$ die maximale Abweichung in der Hüllflächen-

temperatur nur etwa 1,5 % beträgt.

Insgesamt gesehen kann man aus diesen Ergebnissen schließen, daß sich nach Festlegung der Größenordnung der Exponenten m_1 und m_2 Variationen um diese Größenordnungen nur wenig auf die Temperaturverteilung auswirken, so daß weiter angenommen werden kann, daß auch bei Natrium als Kühlmittel der lokale Wärmeübergang bei exzentrischer Geometrie durch die Gl. (2.62) dargestellt werden kann.

2.3 Lösungsverfahren

Die Lösung der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder im Kühlmittel bzw. in Brennstoff und Hülle bei asymmetrischer Bündelgeometrie erfolgt gekoppelt, und zwar totalnumerisch (Kap. 2.1.2, 2.1.3, 2.2). Sie ist auf die Anwendung digitaler Rechenmaschinen zugeschnitten. Zur Bestimmung der Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung im Kühlmittel ist das Verfahren von Runge-Kutta-Nyström [18] verwendet worden. Die Temperaturfelder im Brennstoff und in der Hülle werden nach einem Eliminationsverfahren [37] unter Verwendung des größten Pivotelements bestimmt. Um eine möglichst große Flexibilität, insbesondere in bezug auf die Rechenzeit und den Speicherplatzbedarf sowie auf die Genauigkeit bei der Ermittlung der Temperaturfelder in Kühlmittel, Hülle und Brennstoff zu erhalten, wird die Mascheneinteilung im Kühlmittelbereich unabhängig von der des Hülle-Brennstoffbereiches in den einzelnen axialen Zonen betrachtet. Die Dichte der Maschenpunkte, die im Kühlmittelbereich durch die zur Konvergenz der Lösung der Navier-Stokes- und Energiegleichung nötige Schrittweite in φ -Richtung bestimmt wird, muß damit nicht auch auf den Hülle-Brennstoffbereich übertragen werden. Dieses Vorgehen erfordert jedoch, daß diejenigen Größen aus der Kühlkanalrechnung, die in die Randbedingungen zur Lösung der Gleichungen (2.48), (2.49) eingehen, d. h. also $T_K(\varphi)$, $h_K(\varphi)$, durch ein Ausgleichspolynom darzustellen sind. Zu berücksichtigen ist dabei, daß die einzelnen Funktionswerte bei asymmetrischer Bündelgeometrie an nicht

äquidistanten Argumentenstellen gegeben sind. Die Approximation erfolgt aus diesem Grunde durch eine trigonometrische Reihe in der Form [18]

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} \cos(\nu x), \quad (2.63)$$

wobei für die Anzahl der Glieder gelten soll

$$n \leq 10$$

Die Koeffizienten a_{ν} werden wie üblich aus den entsprechenden partiellen Ableitungen der kleinsten Fehlerquadratsumme Q_n ermittelt.

$$Q_n = \sum_{i=1}^m (\tilde{f}(x_i) - f_i)^2 = \text{Min.} \quad (2.64)$$

i = Anzahl der Stützstellen

Der Lösungsverlauf der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder ist im nachfolgenden Fließschema dargestellt. Die axiale Integration erfolgt im einzelnen auf folgendem Weg: In dem ersten Iterationsschritt werden die axialen Zonen entkoppelt betrachtet. Für jede axiale Zone wird dabei mit den Annahmen

$$\frac{\Delta i}{\Delta z} = f(z) \neq f(\varphi) \quad (2.65a)$$

und

$$q = f(z) \neq f(\varphi) \quad (2.65b)$$

das Geschwindigkeits- und Temperaturprofil im Kühlmittel als $f(\varphi)$, sowie das Temperaturprofil im Stab als $f(r, \varphi)$ bestimmt.

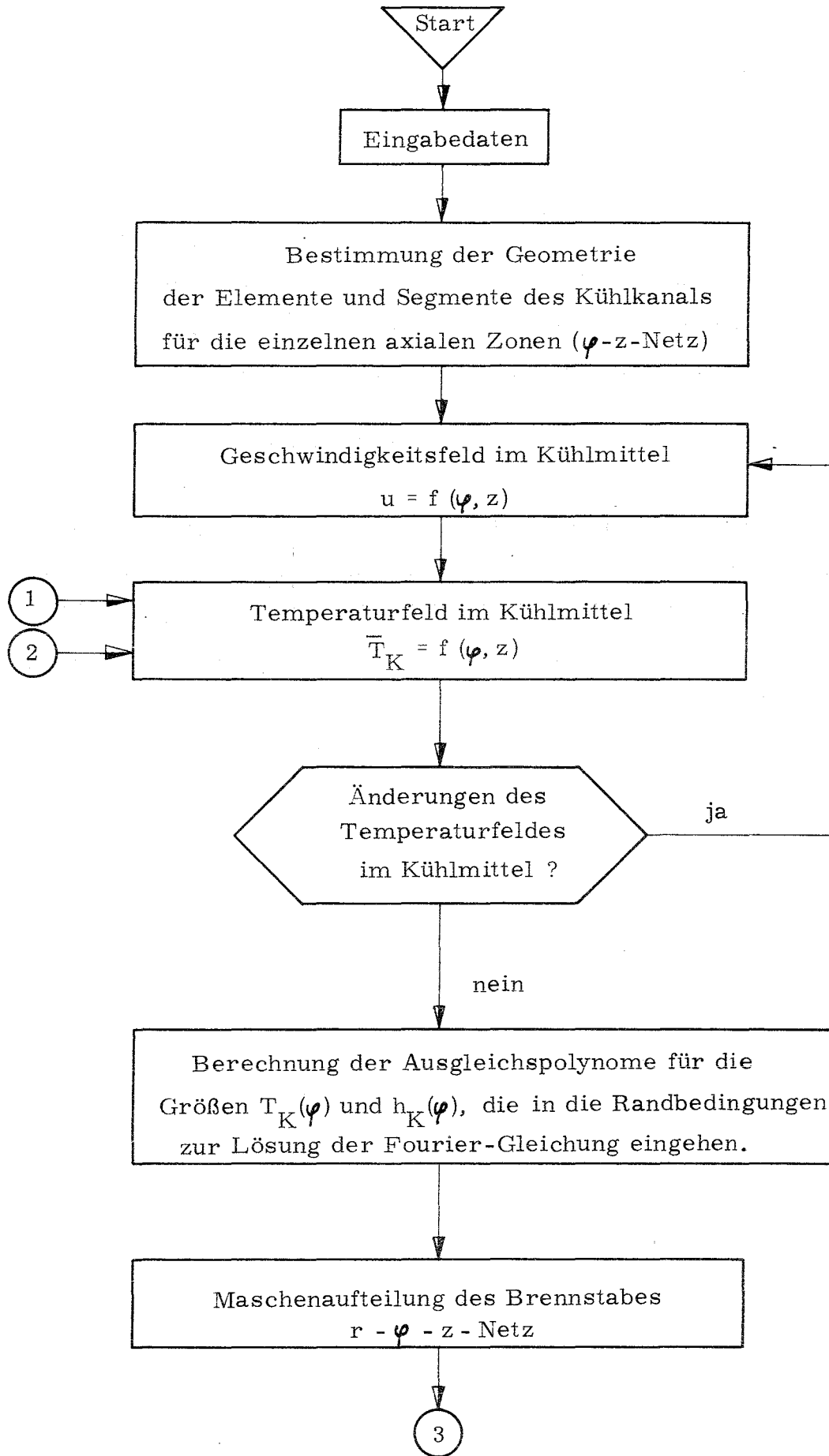
Aus diesen Ergebnissen folgt für den nächsten, jetzt axial gekoppelten, Iterationsschritt :

$$\frac{\Delta i}{\Delta z} = f(\varphi, z) \quad (2.66a)$$

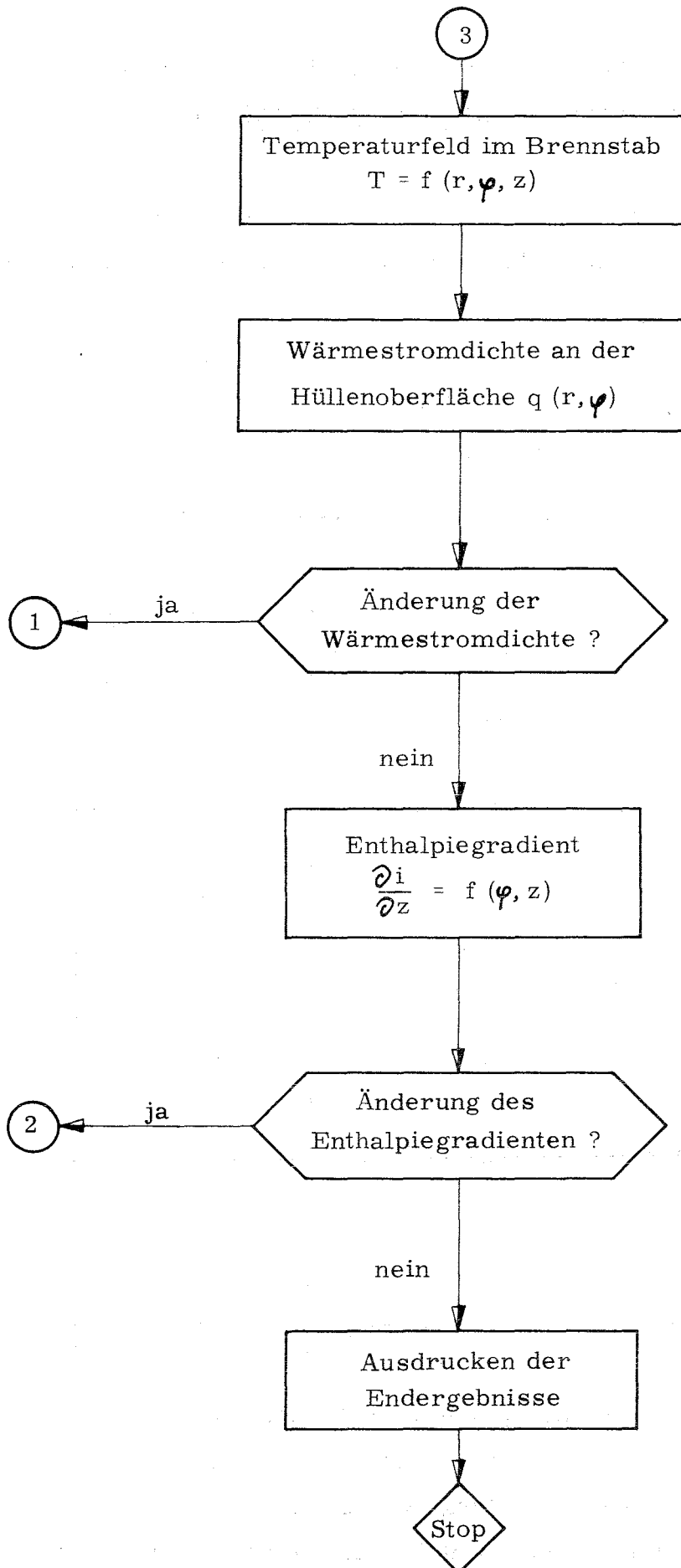
$$q = f(\varphi, z) \quad , \quad (2.66b)$$

sowie weiter die neue Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung in den einzelnen axialen Zonen. Dieser Vorgang wiederholt sich, bis die vorgegebene Genauigkeitsbedingung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Iterationsschritten erfüllt ist.

Auf diese Weise wird die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung im Kühlmittel 2-dimensional in φ - z -Richtung, sowie die Temperaturverteilung in Hülle und Brennstoff 3-dimensional, d. h. in r - φ - z -Richtung bestimmt. Neben asymmetrischen Kühlkanalgeometrien, z. B. exzentrisch stehende Brennstäbe, können in der Analyse auch gleichzeitig Asymmetrien im Brennstoff und in der Hülle berücksichtigt werden.



Fließschema des Rechenprogramms zur Bestimmung der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder



Fließschema des Rechenprogramms zur Bestimmung der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder (Fortsetzung)

3. ANWENDUNG DER THEORIE AUF DEN FALL DES NA-GEKÜHLTEN BRUTREAKTORS UND DISKUSSION DER ERGEBNISSE

Die Anwendung des in Kap. 2 entwickelten theoretischen Modells wird am Beispiel eines Brennstabbündels des Na-gekühlten Prototypreaktors SNR (Tab. 1) gezeigt.

Tabelle 1

SNR-Daten

Kühlmittel		Na
Brennstoff		UO ₂ /PuO ₂
Hüllenwerkstoff		Stahl 4988
elektr. Leistung	[MW]	300
max. Stableistung	[W/cm]	460
Corehöhe	[cm]	95
Teilungsverhältnis		1,3
Stabdurchmesser	[mm]	6,0
Brennstoffdurchmesser	[mm]	5,1
Druck (Eintritt)	[at]	10
Druckverlust	[at]	4,18
mittl. Kühlmitteltemperatur (Eintritt)	[°C]	377
Aufheizspanne	[°C]	214
Leistungsformfaktor axial		0,80
Wärmeleitfähigkeit Hülle	[W/cm °C]	0,21

Die Untersuchungen werden durchgeführt für den Fall, daß ein Stab im Innern des Bündels aus seiner zentralen Position um den Winkel $\theta = 30^\circ$ (Abb. 2), d. h. genau in Richtung zwischen zwei benachbarte Stäbe ausgelenkt ist. Diese Richtung stellt nach Dwyer [38] gegenüber einer Auslenkung in Richtung auf einen benachbarten Stab den

ungünstigeren Fall dar, da neben dem ausgelenkten Stab selbst noch zwei Stäbe stärker beeinflusst werden.

Neben dem symmetrischen Fall ($f = 0$ mm) werden zwei exzentrische Fälle betrachtet: $f = 0,22$ und $f = 0,66$ mm. Das entspricht einer Verengung der Kühlkanalweite an der engsten Stelle gegenüber dem symmetrischen Fall um $\sigma = 10$ % und $\sigma = 30$ %.

Die Auslenkung ist nach Richtung und Betrag über die axiale Länge des Bündels konstant. Abstandshalter sind nicht berücksichtigt.

Aus Symmetriegründen braucht in azimuthaler Richtung nur ein Winkelbereich von $\varphi = 0$ bis π (6 Elemente) betrachtet zu werden.

Um echt 2- bzw. 3-dimensional rechnen zu können, ist für das Demonstrationsbeispiel der Kühlmittelbereich radial in eine, sowie axial in 5 und azimuthal in 120 Zonen eingeteilt (Abb. 11). Die azimuthale Zoneneinteilung ergibt sich aus der zur Konvergenz der Integration nötigen Schrittweite. Der Brennstabbereich, Hülle und Brennstoff, ist axial und radial je in 5 sowie azimuthal in 24 Zonen aufgeteilt.

Bei der Ermittlung der Temperaturfelder im Brennstoff, der im Demonstrationsbeispiel aus Oxid besteht, wird berücksichtigt, daß die Wärmeleitfähigkeit von der Temperatur und der Porosität abhängt nach der Beziehung [39, 40]:

$$\frac{\lambda_B(T_B, P)}{W/cm/^{\circ}C} = (1 - P^{0,66}) \frac{41,2}{\frac{T_B}{^{\circ}C} + 277,9} + 6,55 \cdot 10^{-13} \left(\frac{T_B}{^{\circ}C} + 273 \right)^3 + 7 \text{ %} \quad (3.1)$$

P = Porosität

Die Wärmeleitfähigkeit der Hülle wurde dagegen als temperaturunabhängig betrachtet. Es ist jedoch ohne weiteres möglich, auch hier die Temperaturabhängigkeit zu berücksichtigen, da sie in dem theoretischen Modell berücksichtigt ist. Im Spalt zwischen Hülle und Brennstoff ist Gasfüllung angenommen.

Die Verteilung der Kühlmitteltemperatur am Eintritt in den Kühlkanal soll über den betrachteten Kanalquerschnitt konstant sein, aufgrund der geringen Aufheizung im vorgeschalteten axialen Blanket. Ebenso kann nach den Betriebsbedingungen des Reaktors die Druckverteilung am Ein- und Austritt des Kühlkanals als konstant angenommen werden.

Berechnet wurden die azimutale Verteilung der Kühlmittelgeschwindigkeit und Kühlmitteltemperatur, sowie der Hüllen- und Brennstofftemperatur in den angegebenen axialen und radialen Zonen.

Als Ergebnis ist zunächst in Abb. 12 die azimutale Verteilung der relativen Kühlmittelgeschwindigkeit am Kanaleintritt ($z = 9,5 \text{ cm}$), in Kanalmitte ($z = 47,5 \text{ cm}$) und am Kanalende ($z = 85,5 \text{ cm}$) dargestellt. Bedingt durch die hexagonale Kanalgeometrie ist der azimutale Verlauf der relativen Geschwindigkeit im symmetrischen Fall ($\epsilon = 0$) sinusförmig mit einer Periode von $\pi/3$ und einer Amplitude von 3% des Mittelwertes. Im exzentrischen Fall ($\epsilon = 0,3$) ist diesem Verlauf eine zusätzliche sinusförmige Verteilung mit einer Periode von 2π überlagert. Daraus resultiert eine maximale Differenz am Umfang von etwa 35% des Mittelwertes. Die axiale Änderung dieser Differenzen ist im symmetrischen und exzentrischen Fall vernachlässigbar klein.

Abb. 13 zeigt die azimutale Verteilung der mittleren Kühlmitteltemperatur in einem Segment in den axialen Zonen 1, 3 und 5. Im symmetrischen Fall liegt wieder ein sinusförmiger Verlauf in Umfangsrichtung vor. Die Amplitude beträgt in der ersten Zone etwa 1°C . Sie steigt in der Kanalmitte auf etwa 2°C an und fällt zum Kanalende hin wieder auf etwa 1°C ab, bedingt durch die abnehmende Stableistung. Aus den Untersuchungen der exzentrischen Fälle $\epsilon = 0,1$ und $0,3$ folgt, daß mit zunehmender Stabauslenkung die azimutalen Temperaturdifferenzen $\Delta T_{K \text{ max}}$ zwischen der heißesten und kältesten Stelle zunehmen. Gleichzeitig verschieben sich die Maxima dieser maximalen Temperaturdifferenzen am Umfang gegen den Kanalaustritt. Außerdem ist zu beobachten, daß die Temperaturabweichung vom jeweiligen Zonenmittelwert

des symmetrischen Falles in positiver Richtung größer ist als in negativer (Abb. 14). Das bedeutet, daß in den exzentrischen Fällen die mittleren Temperaturen in den einzelnen axialen Zonen höher liegen als in den symmetrischen, da die Mittelwerte der Leistungsdichten, in den einzelnen axialen Zonen konstant sein müssen, d. h.

$$\frac{1}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} [u(\varphi) \cdot \zeta(\varphi) c_p(\varphi) \cdot \bar{T}_K(\varphi)]_n d\varphi = \text{konst.} \quad (3.2)$$

Bei einer Auslenkung von 30 % ($\epsilon = 0,3$) betragen damit die Abweichungen (+ 10; -3)°C am Kanalbeginn ($\frac{z}{H} = 0,1$) und erreichen das Maximum von etwa (+ 42; -25)°C bei $\frac{z}{H} = 0,7$ (Abb. 14). Sie fallen zum Kanalende hin leicht ab.

In Abb. 15 und 16 ist die azimutale Verteilung der Hüllentemperatur an der Innenseite der Hülle dargestellt. Die Ergebnisse zeigen für die symmetrischen und exzentrischen Fälle qualitativ das gleiche Verhalten, wie es zuvor bei der Kühlmitteltemperatur eingehend diskutiert wurde. Die quantitativen Unterschiede gegenüber dem Kühlmittel resultieren aus der Dämpfung im Kühlmittel und der Hüllwand. Sie sind jedoch im Falle des Demonstrationsbeispiels gering (Abb. 19) aufgrund der kleinen Wandstärke der Hülle verbunden mit dem guten Wärmeübergang zwischen Hülle und Kühlmittel.

Die azimutale Verteilung der Brennstofftemperatur auf einen Radius von $R_B = 1$ mm, gemessen von Brennstoffmitte aus, ist in Abb. 17 dargestellt. Im symmetrischen Fall bleibt die Brennstofftemperatur in Umfangsrichtung konstant auf dem jeder axialen Zone entsprechenden Wert. In den beiden exzentrischen Fällen ($\epsilon = 0,1$ und $0,3$) treten die maximalen Abweichungen von den Mitteltemperaturen etwa im Bereich von $\varphi = 0$ bis $\pi/6$ auf. Der Betrag dieser Abweichung steigt auch hier wieder in axialer Richtung an. Er ist jedoch gegenüber dem in der Hülle in allen axialen Zonen stark gedämpft (Abb. 19).

Wie aus Abb. 18 hervorgeht, ist die azimutale Verteilung der relativen Wärmestromdichte an der Hüllenoberfläche dem Temperaturverlauf in der Hülle entgegengesetzt (vgl. Abb. 15). Im exzentrischen Fall ($\mathcal{E} = 0,3$) erfolgt daher eine Reduktion von q/\bar{q} gegenüber dem nominellen Fall ($\mathcal{E} = 0$) im Bereich des engsten Kühlkanalquerschnitts ($\varphi = 0$ bis $\pi/6$), wobei die Minima etwa an der Stelle der kleinsten Kühlkanalweite auftreten. Die maximalen Abweichungen verschieben sich auch wieder gegen das Stabende.

Insgesamt gesehen haben somit die Untersuchungen gezeigt, daß sich in den exzentrischen Fällen die Maxima der azimutalen Temperaturdifferenzen zwischen der heißesten und kältesten Stelle sowohl im Kühlmittel- als auch im Brennstabbereich gegen das Ende hin verschieben. Sie treten damit in Zonen auf, wo bereits bei nomineller Auslegung (symmetrischer Fall) hohe Kühlmittel-, aber vor allem Hüllentemperaturen vorliegen. Dieses Zusammentreffen der maximalen Temperaturschwankungen am Umfang mit den oben genannten hohen Betriebstemperaturen wirkt sich besonders im Falle der Hülle sehr negativ auf die Beanspruchbarkeit aus [43], zumal der Betrag der Schwankungen an dieser Stelle größenordnungsmäßig dem im Kühlmittel entspricht, wie die Rechnungen gezeigt haben. Hinzu kommt noch, daß durch die Exzentrizitäten gleichzeitig auch das Niveau der mittleren Temperaturen zu höheren Werten als im symmetrischen Fall verschoben wird. Bei der mechanischen Auslegung des Stabes sowie bei der Heißstellenrechnung im Bündel sind daher diese Störungen der nominellen Verhältnisse aufgrund ihrer Größe und Lage besonders zu berücksichtigen.

Dagegen sind die Auswirkungen der ermittelten azimutalen Temperaturschwankungen auf das Kühlmittel gering, da trotz lokaler Erhöhung der Kühlmitteltemperatur in den hier untersuchten Fällen der Abstand zur Siedetemperatur noch groß ist. Das gleiche gilt für den Brennstoffbereich, wo in keiner radialen, azimutalen oder axialen Zone die Schmelztemperatur überschritten wird. In der äußeren Randzone ($r = 0,26$ cm)

ist die lokale Zunahme der Brennstofftemperatur zwar am größten, die Mitteltemperatur jedoch klein gegen die Schmelztemperatur (Abb. 19). In der inneren Zone, wo das höchste Temperaturniveau vorliegt, ist die Störung stark gedämpft. Außerdem tritt die maximale Erhöhung in einem axialen Bereich auf, wo die Brennstofftemperatur aufgrund der cos-förmigen Leistungsverteilung bereits wieder abfällt.

In diesem Zusammenhang sei daran erinnert, daß die Rechnungen unter der Bedingung durchgeführt wurden, daß der Stab über die gesamte Länge konstant ausgelenkt ist, was im Hinblick auf das thermische Ausbiegen, wie es im Bündelelement auftritt, eine konservative Annahme darstellt. Außerdem ist der Einfluß von Abstandshaltern noch nicht berücksichtigt. Aus diesen Gründen ist daher damit zu rechnen, daß die Ergebnisse dem Betrage nach konservativ sind. Eine Aufgabe dieser Restriktionen würde jedoch voraussetzen, daß die turbulente Strömung echt mehrdimensional in den Geschwindigkeitskomponenten gelöst werden kann und gleichzeitig der Rechenaufwand ein vertretbares Maß nicht überschreitet, da ja im Zusammenhang mit diesen Untersuchungen neben dem Geschwindigkeitsfeld auch die Temperaturfelder im Kühlmittel und Brennstab 2- bzw. 3-dimensional ermittelt werden.

Weiterhin führt die Annahme der adiabaten Randbedingung zu Ergebnissen, die auf der sicheren Seite liegen. Das gilt jedoch mehr in den Fällen, in denen ein Austausch mit den radial benachbarten Kanälen in allen Richtungen möglich ist, d. h. für Stäbe im Innern des Bündels, weniger jedoch für die Rand- und Eckpositionen aufgrund der Begrenzung durch die Wand des Brennelementkastens. Aufgrund der qualitativ und quantitativ befriedigenden Übereinstimmung der Ergebnisse bei der Vergleichsrechnung mit den Dwyer'schen Experimenten (Kap. 2. 2. 3) scheint jedoch die Annahme der Adiabaten für sich allein noch keine starke Restriktion darzustellen. Dadurch dürfte auch diese Annahme im Zusammenhang mit dem Demonstrationsbeispiel insgesamt gesehen die Ergebnisse weniger stark beeinflussen.

In Abb. 20 ist die azimutale Verteilung des Enthalpiegradienten $\frac{\partial i}{\partial z}$ in allen 5 axialen Zonen ($z = 9,5$ cm bis $85,5$ cm) dargestellt. Für den symmetrischen Fall ($\epsilon = 0$) zeigt es sich, daß über die gesamte axiale Länge thermisch voll ausgebildete Strömung vorliegt, da sich $\frac{\partial i}{\partial z}$ in φ -Richtung praktisch nicht ändert, wie zu erwarten war. In den exzentrischen Fällen ($\epsilon = 0,1$ und $0,3$) ist das jedoch nicht mehr der Fall. Mit zunehmender Exzentrizität wird die azimutale Variation von $\frac{\partial i}{\partial z}$ größer. Sie hat ihr Maximum in der untersten axialen Zone und wird in axialer Richtung abgebaut. Es bildet sich somit eine thermische Anlaufstrecke aus, deren axiale Erstreckung mit zunehmender Exzentrizität steigt. Dementsprechend verschiebt sich in diesem Fall der Zustand der thermisch ausgebildeten Strömung gegen das Kanalende. Der Verlauf von $\frac{\partial i}{\partial z} = f(\varphi)$ in Zone 5 ($z = 85,5$ cm) ergibt sich daraus, daß am Kanalende im Falle des Demonstrationsbeispiels der radiale Wärmestrom stärker abnimmt als der azimutale aufgrund der cos-förmigen Leistungsverteilung bzw. der azimutalen Temperaturdifferenz im Kühlmittel.

Damit haben die Untersuchungen weiterhin gezeigt, daß bei der Ermittlung der Temperaturfelder Die Annahme einer von Anfang an thermisch voll ausgebildeten Strömung, $\frac{\partial i}{\partial z} = f(\varphi)$, nur für symmetrische Bündelgeometrie vorausgesetzt werden darf. In den exzentrischen Fällen führt diese Voraussetzung mit zunehmender Exzentrizität zu qualitativ und quantitativ anderen Ergebnissen, wie das Beispiel mit $\epsilon = 0,3$ beweist (Abb. 21). Bei asymmetrischer Bündelgeometrie, wie sie hier untersucht wurde, ist daher die Berücksichtigung des thermischen Anlaufes, d. h. $\frac{\partial i}{\partial z} = f(\varphi, z)$ und damit die Integration in axialer Richtung nötig. Aufgrund der starken Änderungen der Kühlkanalquerschnittsfläche in φ -Richtung gilt diese Bedingung nicht nur bei exzentrisch stehendem Zentralstab, sondern auch bei Rand- und Eckstäben des Bündelelements in nomineller Position.

4. ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit ist eine Methode entwickelt, die es in Erweiterung früherer Arbeiten erlaubt, in asymmetrischen Bündelgeometrien die Geschwindigkeits- und Temperaturfelder im Kühlmittel 2-dimensional in azimuthaler und axialer Richtung unter Berücksichtigung des thermischen Anlaufvorganges zu ermitteln. Daran gekoppelt ist eine 3-dimensionale Bestimmung der Temperaturverteilung im Brennstoff und in der Hülle. Es ist somit möglich, den Betrag der Störungen in den Geschwindigkeits- bzw. Temperaturfeldern im allgemeinen, sowie im speziellen den Ort der maximal auftretenden Störung jeweils in den drei Bereichen: Kühlmittel, Hülle und Brennstoff anzugehen.

Durch Berücksichtigung des turbulenten Geschwindigkeitsprofils, der turbulenten Impuls- und Wärmeaustauschgrößen $\epsilon_{\varphi M}$ und $\epsilon_{\varphi H}$, sowie der Temperatur- und Druckabhängigkeit aller vorkommenden physikalischen Eigenschaften sind Voraussetzungen für einen großen Anwendungsbereich der Analyse, besonders in bezug auf verschiedene Kühlmittel, gegeben.

Als Sonderfälle können Asymmetrien im Brennstoff und in der Hülle in den einzelnen axialen Zonen berücksichtigt werden.

Durch die Annahme, daß die Stabauslenkung über die gesamte Bündellänge konstant ist, sowie durch die Vernachlässigungen des dämpfenden Einflusses von Abstandshaltern ist mit konservativen Ergebnissen zu rechnen. Eine Aufgabe dieser Restriktionen würde eine 3-dimensionale Lösung der Navier-Stokes-Gleichung voraussetzen. Eine direkte numerische Integration der Navier-Stokes-, sowie der Kontinuitätsgleichung ist heute jedoch weder im statistischen, noch deterministischen Sinne mit sinnvollem Rechenaufwand möglich, so daß Vereinfachungen praktisch notwendig sind.

Das Verfahren wird zunächst an experimentellen Ergebnissen getestet. Es ergibt sich sowohl qualitativ als auch quantitativ befriedigende Übereinstimmung.

Aus den Vergleichsrechnungen folgt weiterhin, daß für Flüssigmetallkühlung der lokale Wärmeübergang zwischen Hülle und Kühlmittel bei exzentrischer Bündelgeometrie in den hier untersuchten Fällen qualitativ und quantitativ befriedigend dargestellt werden kann als Funktionen der mittleren Nu-Zahl, korrigiert durch zwei Faktoren, die die lokale Geschwindigkeit und Geometrie berücksichtigen. Eine detailliertere Untersuchung des lokalen Wärmeüberganges würde im Zusammenhang mit dieser Arbeit auch eine 3-dimensionale Betrachtung des Kühlmittelbereiches erfordern, was wiederum zu einem sehr hohen Rechenaufwand führt, im Hinblick auf eine möglichst genaue Erfassung des Wärmeübergangs jedoch anzustreben ist.

Die Anwendung des Verfahrens erfolgt am Beispiel des natriumgekühlten schnellen Brutreaktors SNR. Es zeigt sich, daß auch bei Natrium als Kühlmittel bereits kleinere Stabauslenkungen größere Geschwindigkeits- und Temperaturvariationen am Stabumfang bewirken können, die mit zunehmender Exzentrizität stark ansteigen. Dabei verschieben sich die absoluten Maxima der azimuthalen Temperaturdifferenzen (zwischen der heißen und kalten Seite) axial zum Brennelementende hin, d. h. also in Zonen, wo bereits bei nomineller Auslegung hohe Kühlmittel, aber vor allem hohe Hüllentemperaturen vorliegen. Gleichzeitig erhöht sich der Mittelwert der Temperaturen in jeder axialen und radialen Zone. Der Betrag der azimuthalen Temperaturvariationen nimmt in radialer Richtung beim Übergang von Kühlmittel zum Brennstoffzentrum hin stark ab. Dabei ist die Dämpfung im Brennstoff größer als in der Hülle.

Bei der Heißstellenrechnung im Bündel, sowie bei der mechanischen Stabauslegung sind daher diese Störungen der nominellen Verhältnisse aufgrund ihrer Größe und Lage besonders zu berücksichtigen.

Die Annahme eines in allen axialen Zonen voll ausgebildeten Temperaturprofils ist unter den vorliegenden Bedingungen nur bei symmetrischer Bündelgeometrie gerechtfertigt. Mit zunehmender Asymmetrie führt diese Annahme zu qualitativ und quantitativ anderen Ergebnissen. Aufgrund der geometrischen Verhältnisse gilt diese Aussage nicht nur bei exzentrisch stehenden Innenstäben, sondern auch bei Rand- und Eckstäben in nomineller Position.

Literatur

- [1] K. W. Cook: Velocity Distribution around Fuel Pins in Sodium-Cooled Fast Reactors with Triangular Fuel Pin Arrays.
AEC Research and Development Report GEAP-5752, Dez. 1968

- [2] K. Johannsen, R. Ullrich, L. Wolf: Mehrbereichsanalyse für den Wärmetransport im Randbereich flüssigmetallgekühlter Brennstabbündel.
Atomwirtschaft , Juli 1970

- [3] The American Society of Mechanical Engineers: Heat Transfer in Rod Bundles.
ASME Winter Annual Meeting, New York, Dec. 1968

- [4] R. G. Deissler, M. F. Taylor: Analysis of Axial Turbulent Flow and Heat Transfer Through Banks of Rods or Tubes.
TID 7529, Reactor Heat Transfer Conf. (Pt. 1) Book 2, 1957

- [5] O. E. Dwyer: Analytical Study of Heat Transfer to Liquid Metal Flowing In-Line Through Closely Packed Rod Bundles.
Nuclear Science and Engineering 25, 343 (1966)

- [6] R. Nijsing, W. Eifler: Analysis of Liquid Metal Heat Transfer in Assemblies of Closely Spaced Fuel Rods.
Nuclear Engineering and Design 10 (1969)

- [7] D. J. Bender, R. M. Magee: Turbulent Heat Transfer in a Rod Bundle With Liquid Metal Coolant.
AEC Research and Development Report GEAP-10052, July 1969

- [8] R. A. Axford: Two Dimensional Multiregion Analysis Temperature Fields in Reactor Bundles.
Nuclear Engineering and Design 6 (1967) 25.

- [9] O.E.Dwyer, I.J.Hlavac, M.A.Helfant: Heat Transfer to Mercury Flowing In-Line Through an Unbaffled Rod Bundle: Effect of Rod Displacement on Local Surface Temperature and Local Heat Flux. Nuclear Science and Engineering 41 (1970)
- [10] M.Fischer, H.Shimamune: Temperature Distribution and Thermal Stability in Asymmetrical Triangular Rod Clusters. KFK 724, EUR 4178e, KFZ Karlsruhe, 1969
- [11] O.E.Dwyer, H.C.Berry: Slug-Flow Nusselt Numbers for In-Line Flow Through Unbaffled Rod Bundles. Nuclear Science and Engineering 39 (1970) p. 143
- [12] M.J.Beran: Statistical Continuum Theories. Interscience Publishers, 1968
- [13] J.Boussinesq: Essai sur la Theorie des Eaux Courantes. Memoires presentees par divers savants a l'Academie des Sciences de l'Institut de France (1877)
- [14] W.Eifler: Über die turbulente Geschwindigkeitsverteilung und Wandreibung in Strömungskanälen verschiedener Querschnitte. Dissertation T. H. Darmstadt, 1968
- [15] Y.D.Levchenko, U.I.Subbotin, P.A.Ushakov: The Distribution of Coolant Velocities and Wall Stresses in Closely Packed Rods. Atomnaya Energiya 22, 218 (1967)
- [16] R.Nijsing, I.Gargantini, W.Eifler: Fundamental Studies of Fluid Flow and Heat Transfer in Fuel Element Geometries. AEC Report, EUR 2193 Part I and II (1965)
- [17] V.A.Sandborn: Experimental Evaluation of Momentum Terms in Turbulent Pipe Flow. Nat. Aero Space Adusin. Techn. Note 3266 (Jan. 1955)

- [18] R. Zurmühl: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1965)
- [19] A. C. Rapier, J. D. Redman: *The Calculation of Velocity Distribution in Rod Clusters*. TRG-Report 838(w), Reactor Development Lab., Windscale, UK, 1964
- [20] D. J. Bender, D. M. Switick, J. H. Field: *Turbulent Velocity Distribution in a Rod Bundle*. AEC Research and Development Report, GEAP-5411, Oct. 1967
- [21] N. I. Buleev: *Theoretical Model of the Mechanism of Turbulent Exchange in Fluid Flows*. Atomic Energy Research Establishm., England, Translat. 957, 1963
- [22] G. T. J. Hooper: *Turbulent Momentum Diffusivity Within a Circular Tube*. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 6 (1963)
- [23] J. Rotta: *Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz*. *Zeitschrift für Physik*, Bd. 129, S. 547-572 (1951)
- [24] B. E. Launder, D. B. Spalding: *The Problem of Prediction of Heat and Momentum Transfer in Gas-Cooled Nuclear Reactors. Current Status and Future Prospects*. Imperial College of Science and Technology, Department of Mechanical Engineering. Exhibition Rd., London S. W. 7, Aug. 1970
- [25] M. Kh. Ibragimov, et al.: *Calculation of the Tangential Stresses at the Wall of a Channel and the Velocity Distribution in a Turbulent Flow of Liquid*. *Atomnaya Energiya* 21, 101 (1966)
- [26] K. J. Eickhoff, J. Alen, C. Boormann: *Engineering Development for Sodium Systems*. London Conf. on Fast Breeder Reactors, Ref.: 5 B/5, May 1966

- [27] O.E. Dwyer: Heat Transfer to Liquid Metals Flowing In-Line Through Unbaffled Rod Bundles. A Review.
Nuclear Engineering and Design 10 (1969)
- [28] L. Caldarola, E. G. Schlechtendahl: Reactor Temperature Transients With Spatial Variables.
KFK 223, Kernforschungszentrum Karlsruhe
- [29] R. Palinski: Lösung der instationären Wärmeleitgleichung mit zeitabhängiger Umgebungstemperatur und zeitlich veränderlicher und räumlich ungleichmäßig verteilter Wärmequellen.
Nukleonik, Bd. 6, Heft 6, S. 289-303, 1964
- [30] S. Malang, K. Rust: Relax - Ein Fortran-Programm zur numerischen Bestimmung von Temperaturfeldern mittels der Relaxationsmethode der Thermodynamik.
KFK 1053, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1969
- [31] W. Kermit, Anderson, G. L. Lechliter: Some Input Functions for Computer Description of Fuel Properties.
ANS Transact. 9, No. 2, 1966
- [32] G. Markoczy: Konvektive Wärmeübertragung in axial angeströmten Stabbündeln. Reaktortagung des DAfF in Bonn, 1971
- [33] Chia-Jung-Hsu: Effect of Rod Displacement on Heat Transfer in Slug Flow Through Unbaffled Rod Bundles.
ASME, New York, Nov. 1970
- [34] Liquid Metals Handbook. BNL 11936 R
- [35] VDI-Wärmeatlas. VDI-Verlag GmbH., Düsseldorf
- [36] K. Johannsen, L. Wolf: Nichtlinearisierte Behandlung azimuthaler Störungen bei der Berechnung von Brennelementtemperaturen.
Institut für Kerntechnik, TU Berlin, 1969

- [37] SIMQ: Solution of Simultaneous Linear Algebraic Equations.
IBM Application Program 420 - 0205 - 3
- [38] P. J. Hlavac, O. E. Dwyer, M. A. Helfant: Heat Transfer to Mercury Flowing In-Line Through an Unbaffled Rod Bundle: Experimental Study of the Effect of Rod Displacement on Rod-Average Heat Transfer Coefficients.
Transactions of the ASME , Nov. 1969
- [39] H. Kämpf: Einfluß der inneren Geometrie auf die radiale Temperaturverteilung von Schnellbrüter-Brennelementen.
KFK 751, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1968
- [40] H. Kämpf: Saturn Code; Theoretical Analysis of Fuel Pin Behavior and Fuel Void Dynamics.
KFK 1088, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1969
- [41] H. W. Emmons: Critique of Numerical Modeling of Fluid-Mechanics Phenomena.
Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 2, 15-36, 1970
- [42] M. Fischer et al. : Durchführbarkeitsstudie für den Schnellen Hochflußtestreaktor FR3.
KFK 1356, Kernforschungszentrum Karlsruhe, März 1971
- [43] F. Hofmann, R. Krieg: Stresses in Fuel Cladding Due to Radial and Peripheral Temperature Gradients in Fuel Elements With Eccentric Geometry.
1st Internat. Conf. on Struct. Mechanics in Reactor Technology, Berlin, Sept. 1971
- [44] J. W. Elder: The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow. J. Fluid Mech. 5 (1959) 544

Nomenklatur

Deutsche Symbole

A	Konstante der Gl. 2. 24
B	Konstante der Gl. 2. 24
C	Abstand zwischen Punkt N und Q
c	Geometriegröße in Gl. 2. 56a ÷ 2. 56d
c_p	spez. Wärme des Kühlmittels bei konst. Druck
$\overline{c}_{p,ges}$	Mittelwert der spez. Wärme im Subkanal
d, D	Brennstabaußendurchmesser
D_h	hydraulischer Durchmesser des Subkanals
i	Enthalpie des Kühlmittels
K	Proportionalitätsfaktor in Gl. 2. 42
K_o	Konstante } in Gl. 2. 57
K_1	
k_{Spalt}	Wärmedurchgangskoeffizient Hülle-Brennstoff
h_K	Wärmeübergangskoeffizient Hülle-Kühlmittel
L	Wärmeleitwert
m	Massenstrom
\overline{m}_{ges}	Massenstrom im Subkanal
m_1	Exponent der lok. Nu-Gleichung
m_2	Exponent der lok. Nu-Gleichung
Nu_{av}	mittlere Nu-Zahl
Nu_{lok}	lokale Nu-Zahl
P	Stabmittenabstand
p	Druck
\overline{p}	zeitlicher Mittelwert von p
p'	Schwankungskomponente von p
Pr	Prandtl-Zahl
Q_r	radialer Wärmefluß an der Hülleninnenseite
Q_{ges}	zugeführte Gesamtwärme im Subkanal
q	Wärmestromdichte

Re	Reynolds-Zahl
R _g	Radius des Teilelements B
R _{Ba}	Brennstoffradius außen
R _{Bi}	Brennstoffradius innen
R _{Ha}	Hüllenradius außen
R _{Hi}	Hüllenradius innen
r	radiale Koordinate
r _k	Radius der äquivalenten Kreisfläche
r _m	Radius an der Stelle \bar{T}_K
r _o	Brennstabradius
T	Brennstabtemperatur
T _B	Brennstofftemperatur
T _H	Hüllentemperatur
T _K	Kühlmitteltemperatur
\bar{T}_K	radialer Mittelwert von T _K
t	Zeit
\vec{u}	Geschwindigkeitsvektor
$\left. \begin{matrix} u_r \\ u_z \\ u_\varphi \end{matrix} \right\}$	Komponenten des Vektors \vec{u}
u	mittlere Geschwindigkeit eines Segments
\bar{u}	mittlere Geschwindigkeit des Subkanals in einer axialen Zone
$\left. \begin{matrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_z \\ \bar{u}_\varphi \end{matrix} \right\}$	zeitliche Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten
$\left. \begin{matrix} u_r' \\ u_z' \\ u_\varphi' \end{matrix} \right\}$	Komponenten der Schwankungsgeschwindigkeiten
u ⁺	dimensionslose Geschwindigkeit = \bar{u}_z / u^*
\bar{u}^+	radialer Mittelwert von u ⁺
u [*]	Schubspannungsgeschwindigkeit = $(\tau_w / \zeta)^{1/2}$

y^+	dimensionsloser Wandabstand = $(r - r_0) u^x / \nu$
\hat{y}	radialer Abstand Hüllwand-Linie max. Geschwindigkeit
\hat{y}^+	dimensionsloser Wandabstand Hüllwand-Linie max. Geschwindigkeit
W	pro Volumenelement erzeugte Wärmemenge
z	axiale Koordinate

Griechische Symbole

α	Elementenwinkel
δ	Wandschicht
δ_e	hydr. Durchmesser eines Segments
ϵ_M	scheinbare kinematische Viskosität
ϵ_H	thermische Austauschgröße
θ	Winkel der Auslenkung
λ	Wärmeleitfähigkeit des Kühlmittels
λ_B	Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffs
λ_H	Wärmeleitfähigkeit der Hülle
μ	dynamische Viskosität
ν	kinematische Viskosität
f	radiale Länge der Auslenkung
ρ	Kühlmitteldichte
σ	relative Auslenkung = $\frac{\text{effekt. Auslenkung } f}{\text{max. mögliche Auslenkung}}$
τ	Schubspannung
φ	Winkelkoordinate
χ	Stableistung
ψ	Winkel nach Gl. 2.20
$\overline{\Gamma}_K$	Winkel nach Gl. 2.21

Indices

i	Laufzahl der Segmente	} Kühlkanalbereich
j	Laufzahl der Elemente	
k	Laufzahl der Radian	} Brennstabbereich
j	Laufzahl der Winkel	
n	Laufzahl der axialen Zone	
r	radial	
w	Wand	
z	axial	
φ	azimutal	

Abweichende Bedeutungen, sowie weitere Symbole sind im Text erläutert.

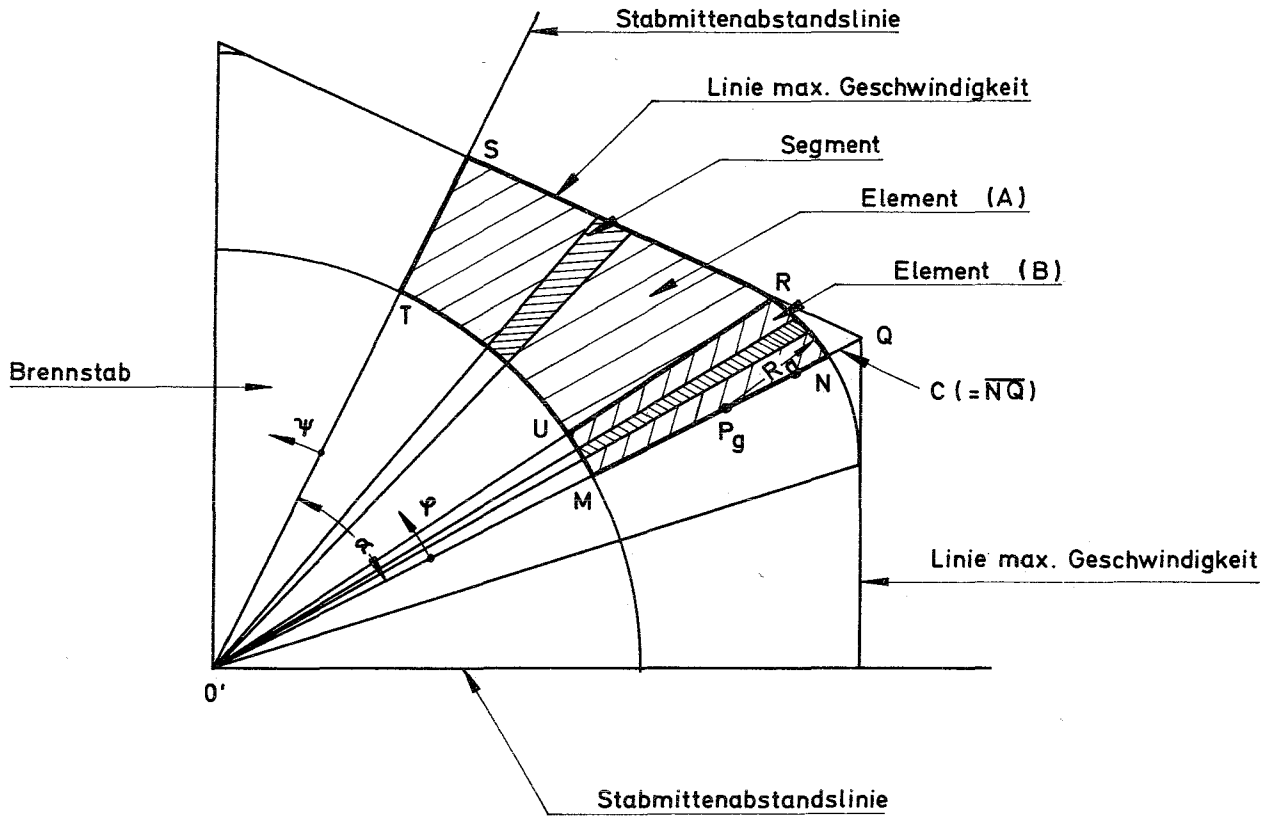


Abb. 3: Darstellung der Kühlkanalgeometrie

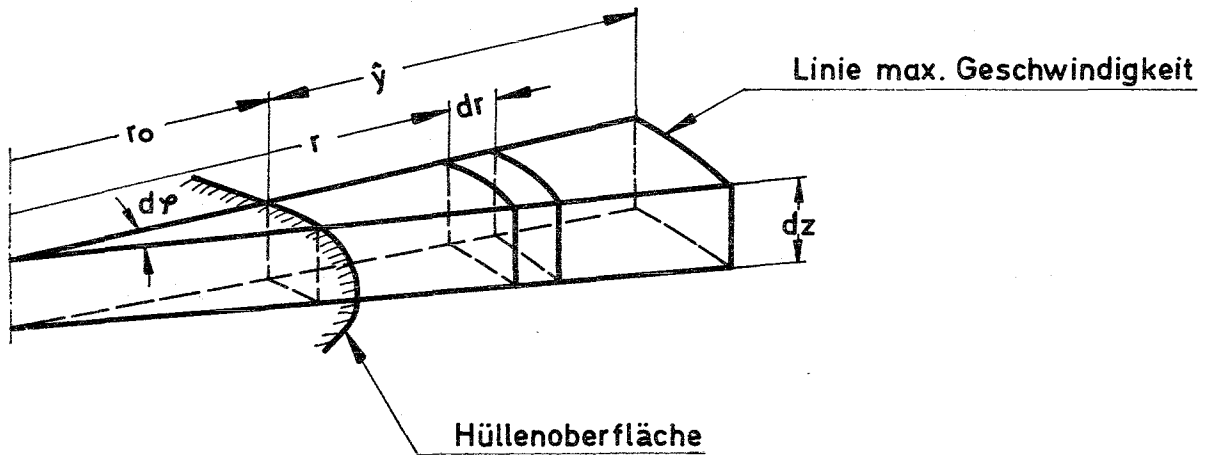


Abb. 4: Kühlmittelvolumenelement

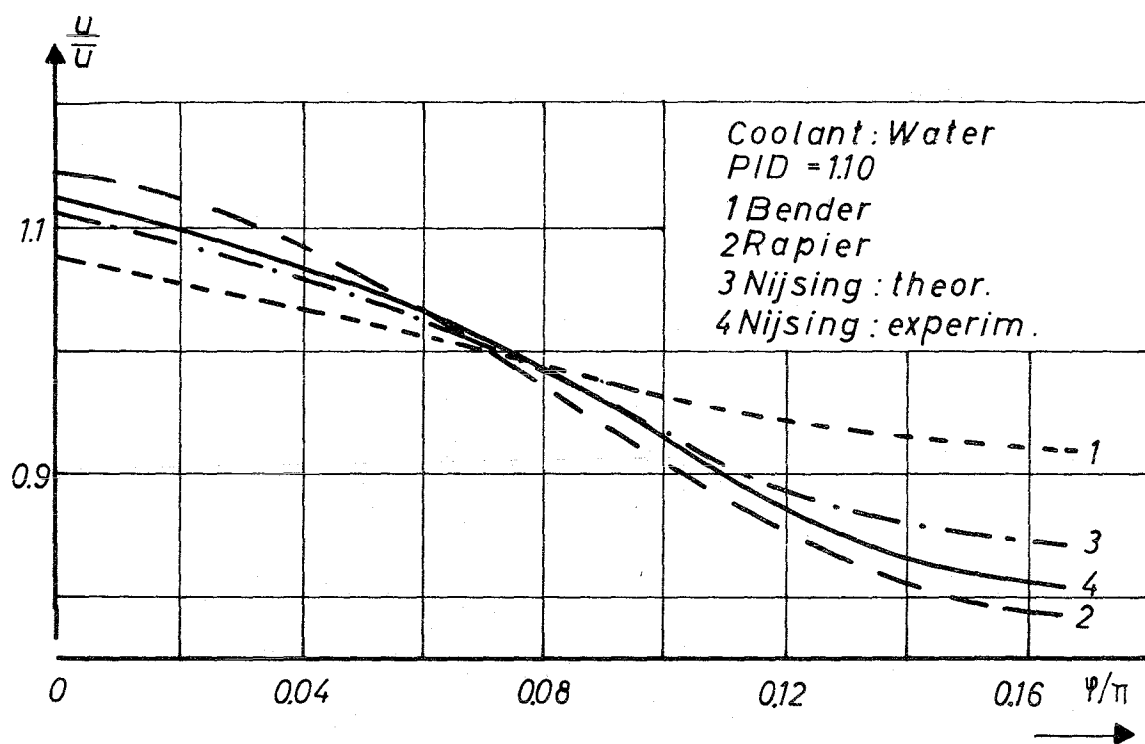
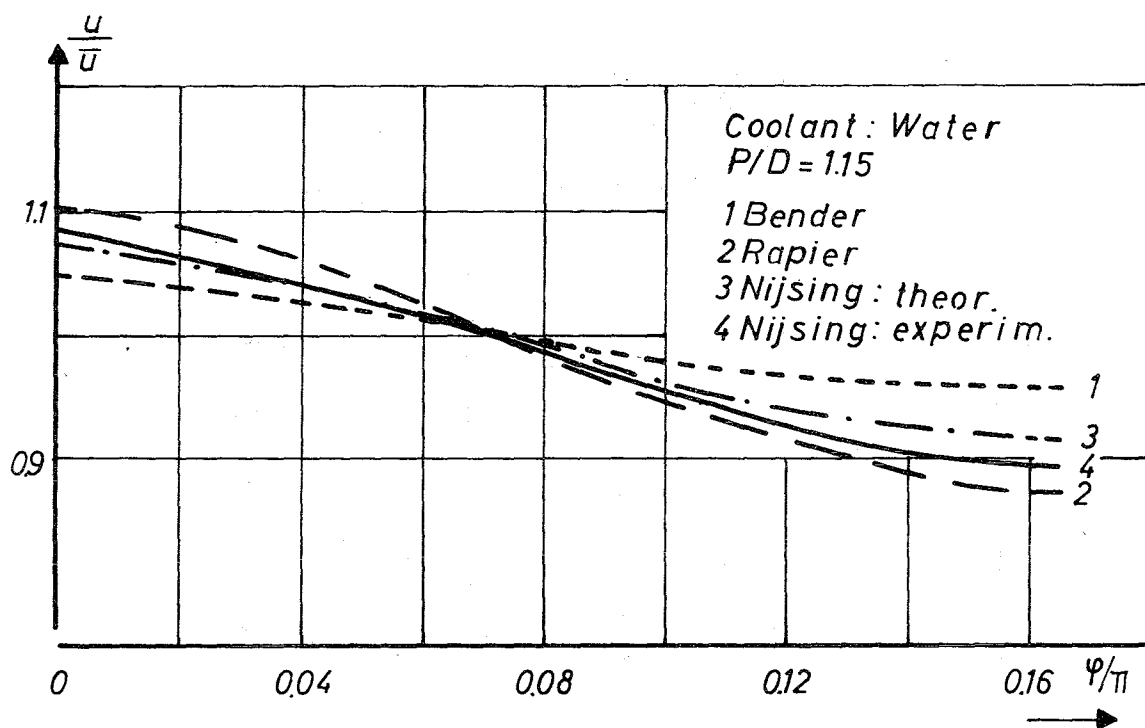


Abb. 5: Vergleich verschiedener Ansätze für die scheinbare kinematische Viskosität $\epsilon_{\psi M}$.

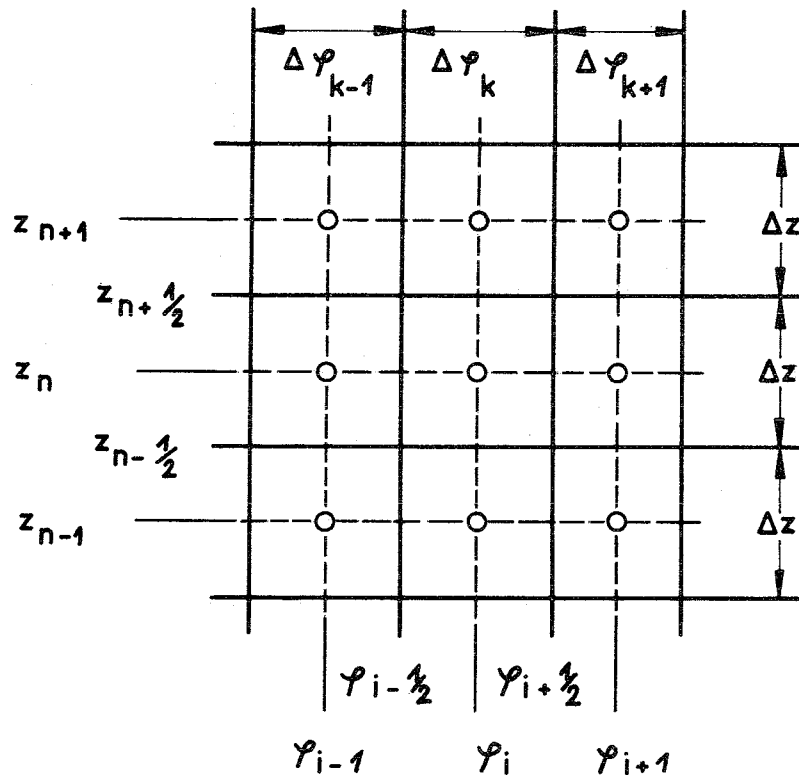


Abb. 6: Zonenaufteilung im Kühlmittel (φ - z -Netz)

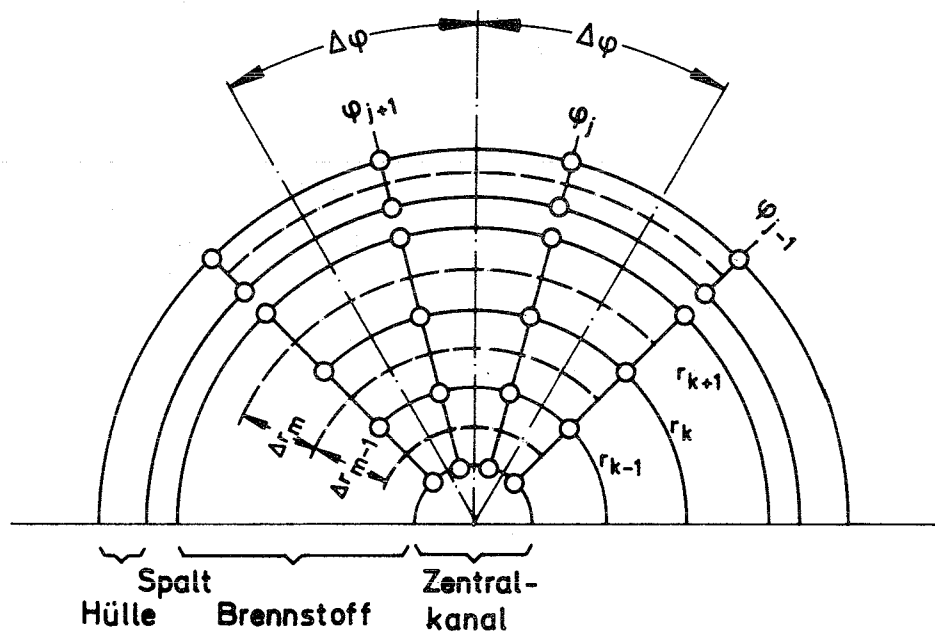


Abb. 7: Zonenaufteilung im Brennstab (r - φ -Netz)

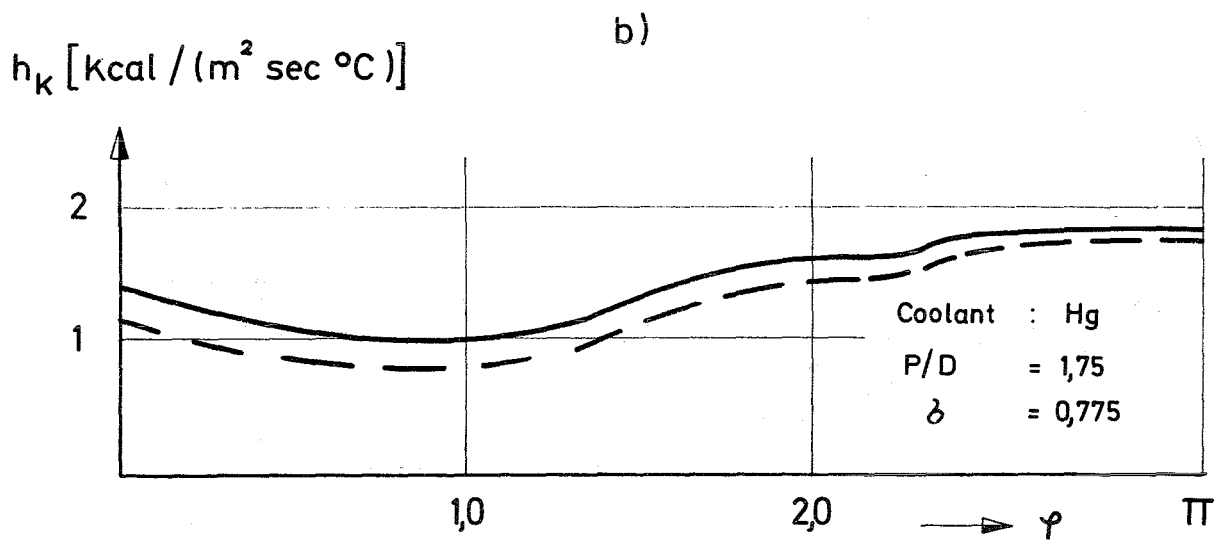
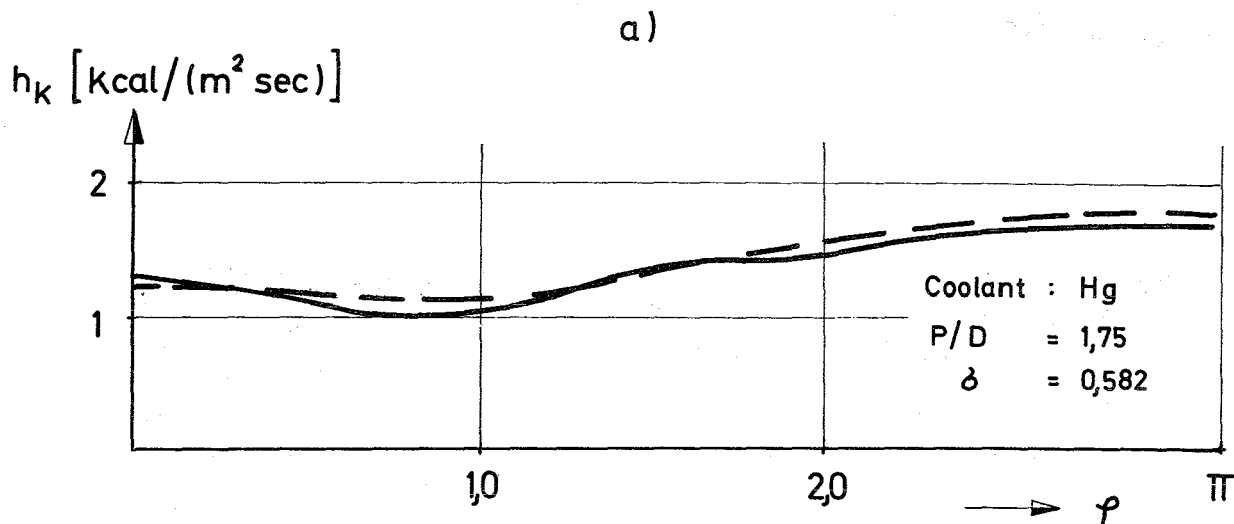


Abb. 8: Azimutale Variation des lokalen Wärmeübergangskoeffizienten bei verschiedenen Stabauslenkungen ($\delta = 0,582; 0,775$) (Theorie —; Experiment ---).

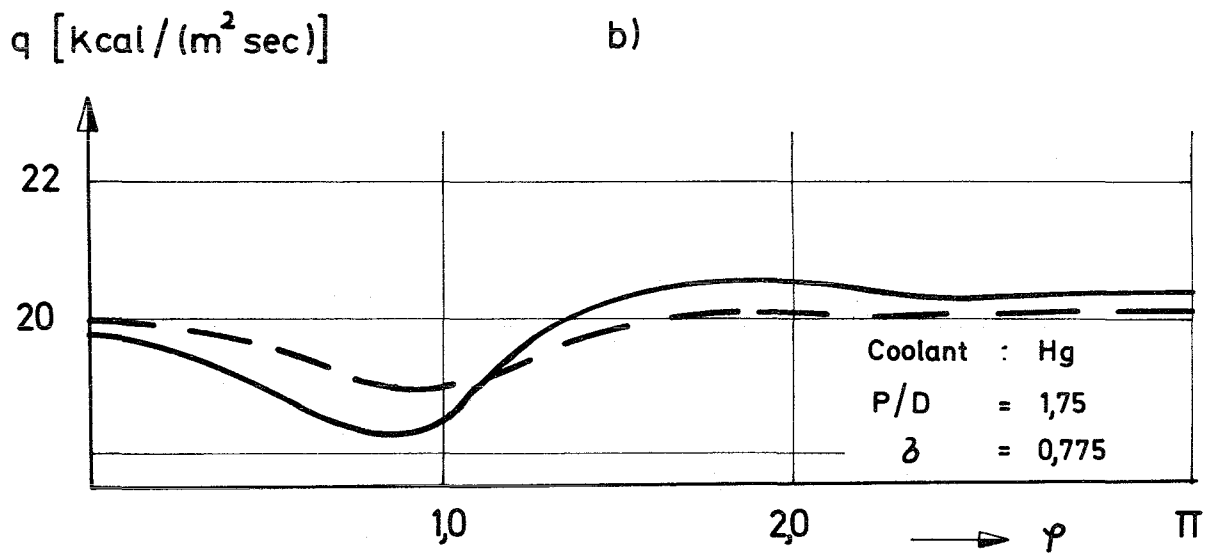
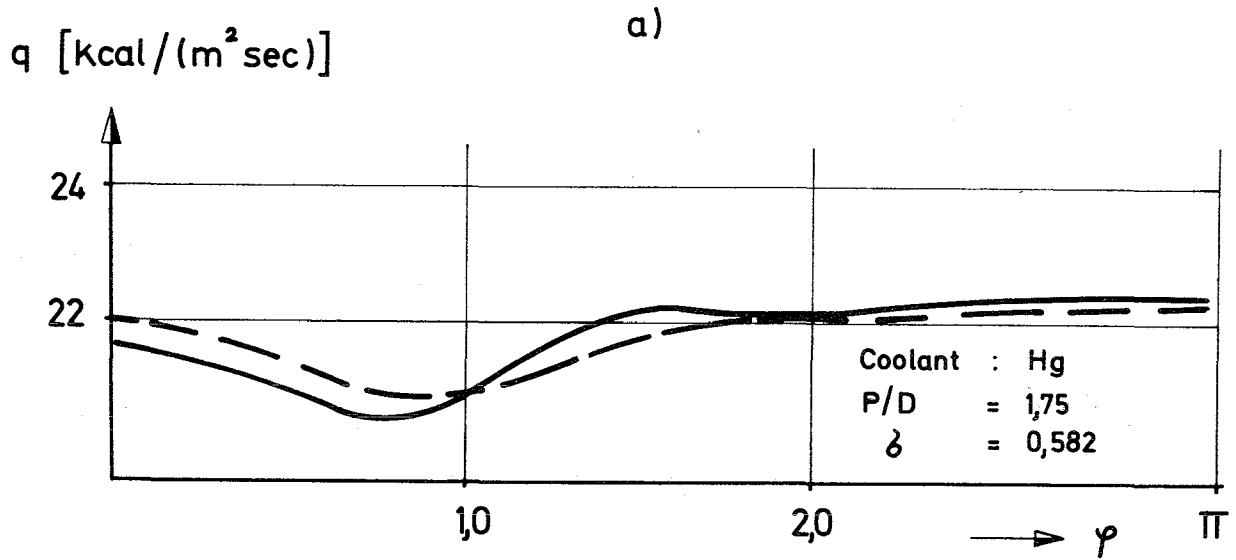


Abb. 9: Azimutale Variation der Wärmestromdichte an der Hüllenoberfläche bei verschiedenen Stabauslenkungen ($\delta = 0,582; 0,775$) (Theorie —; Experiment ---).

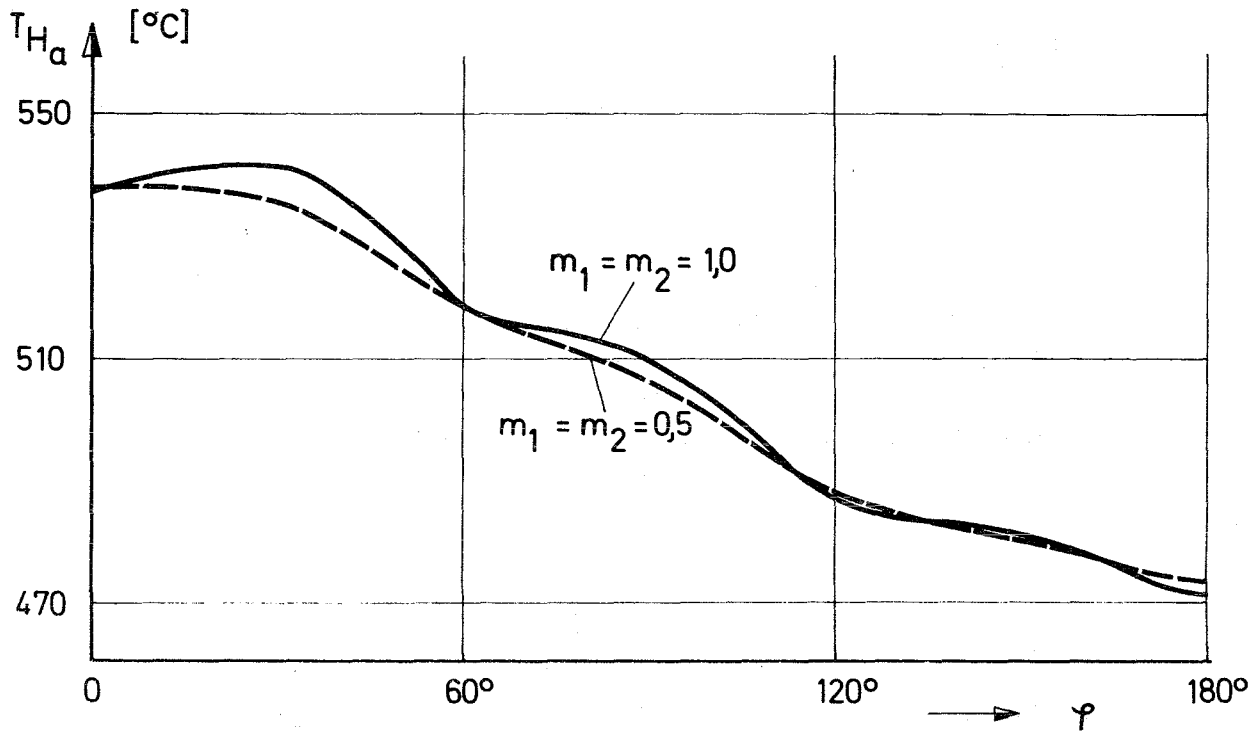


Abb. 10: Einfluß der Exponente m_1, m_2 auf die azimuthale Verteilung der Temperatur an der Hül-
lenoberfläche ($m_1 = m_2 = 0,5$ ---;
 $m_1 = m_2 = 1,0$ —)

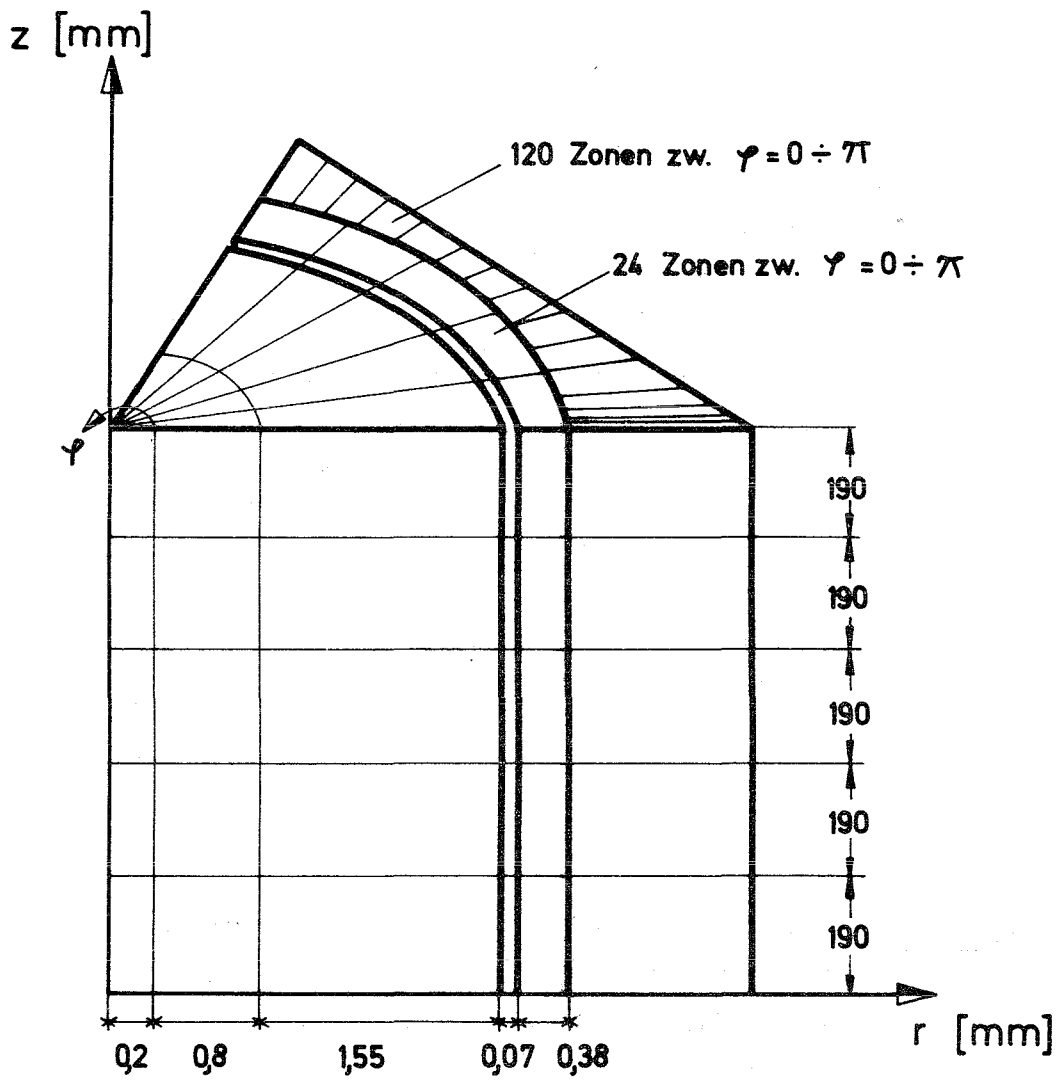


Abb. 11: Zonenaufteilung in Brennstoff, Hülle und Kühlmittel.

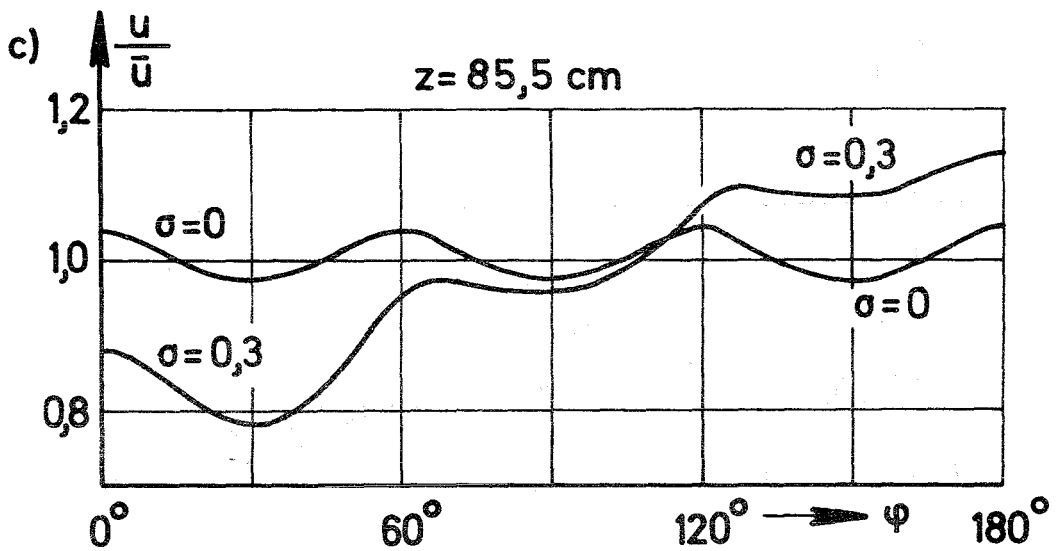
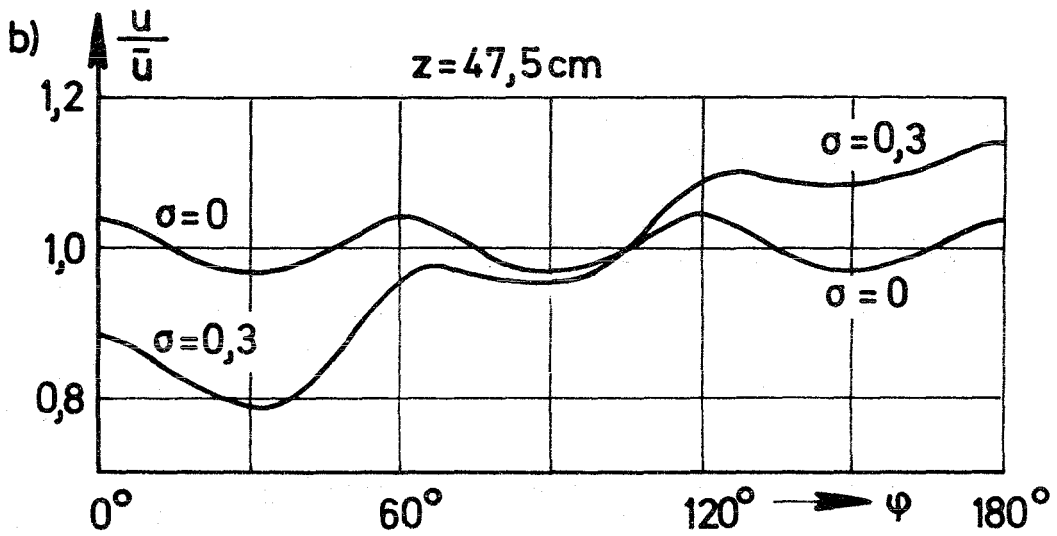
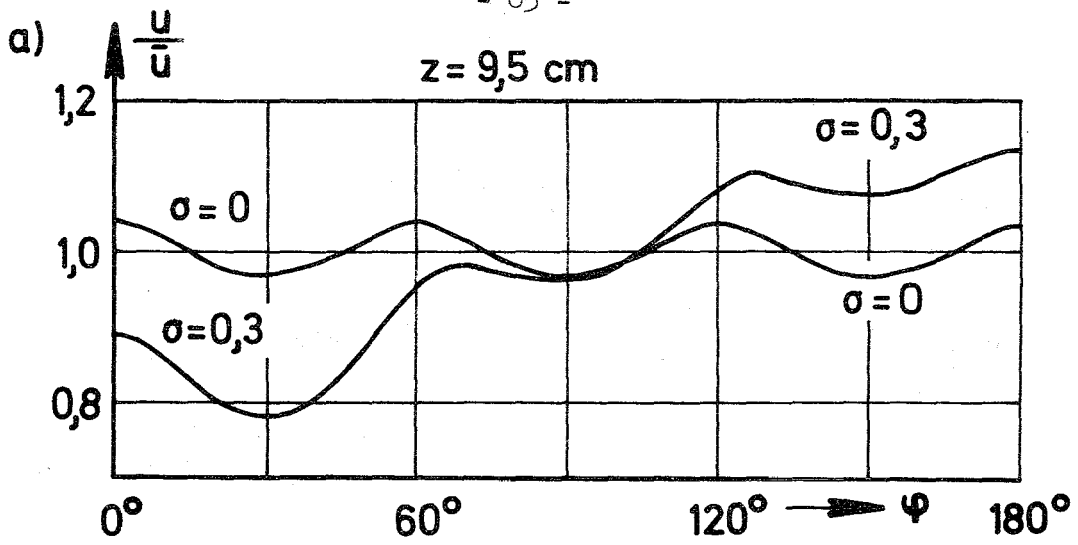


Abb. 12: Azimutale Variation der relativen Kühlmit-
telgeschwindigkeit in den axialen Zonen
1, 3, 5, (a,b,c) bei sym. und asym. Stab-
anordnung ($\sigma = 0; 0,3$)

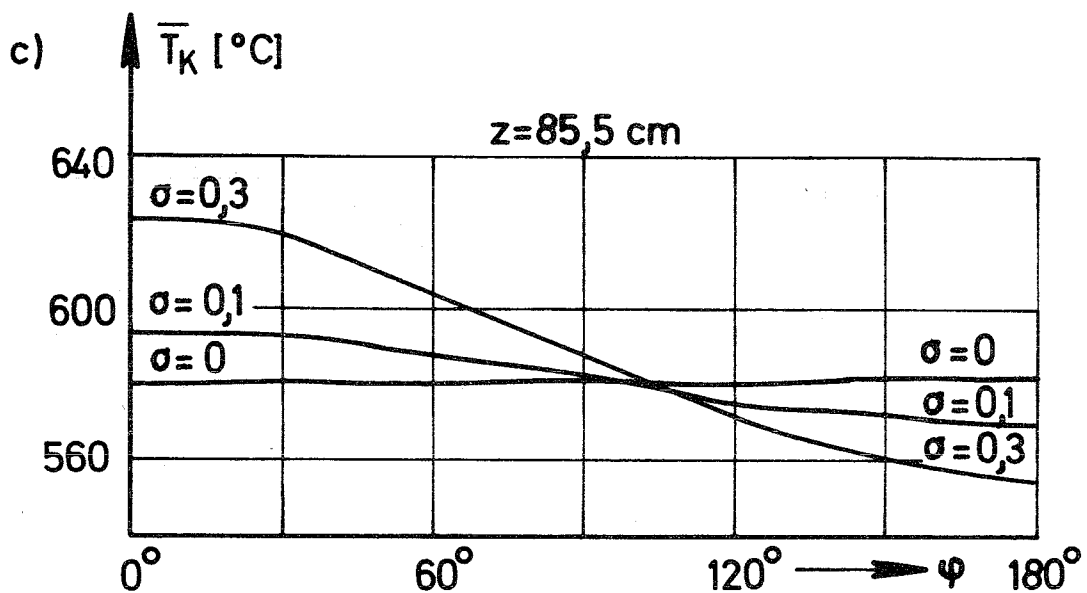
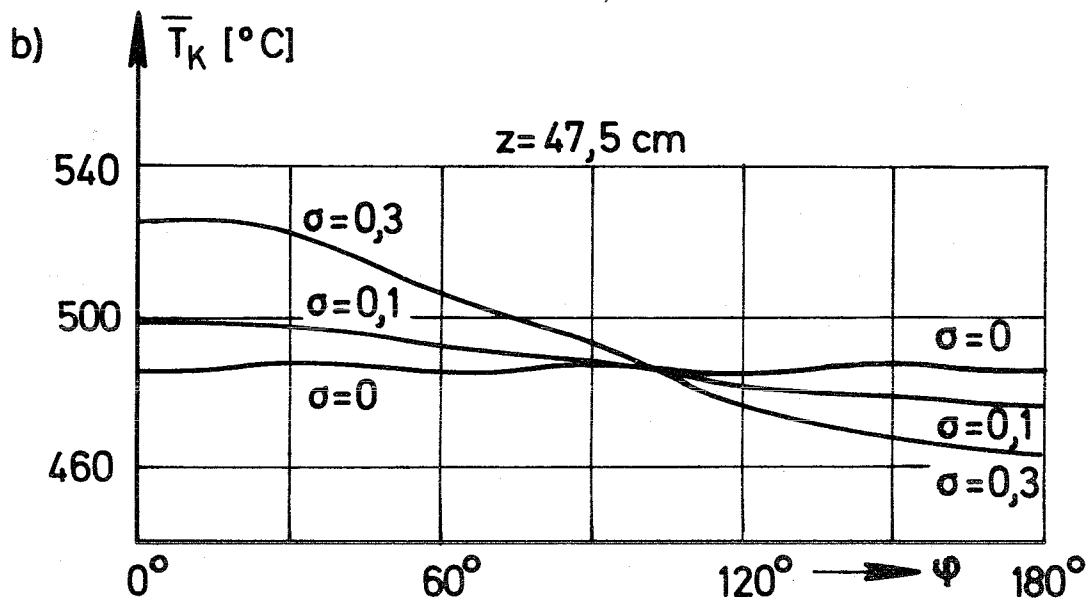
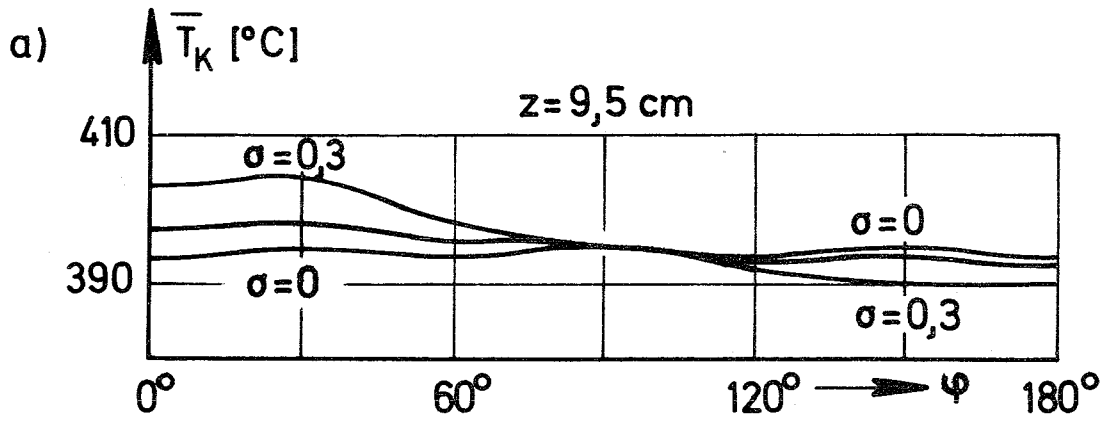


Abb. 13: Azimutale Variation der Kühlmitteltemperatur in den axialen Zonen 1, 3, 5 (a,b,c) bei sym. und asym. Stabanordnung ($\sigma = 0; 0,1; 0,3$)

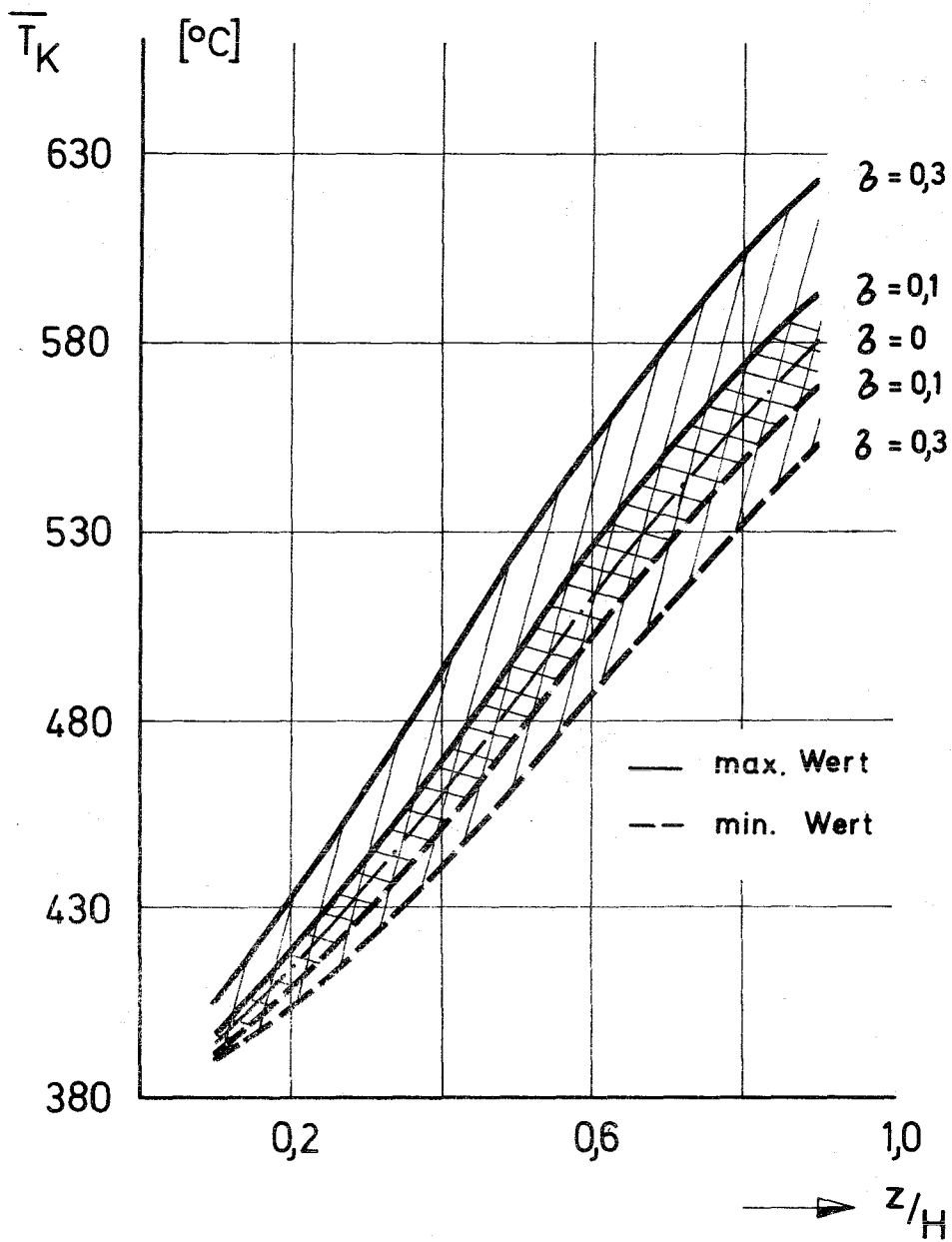


Abb. 14: Axialer Verlauf der maximalen und minimalen Kühlmitteltemperaturen bei asym. Stabanordnung. Im sym. Fall ($G = 0$) ist der axiale Verlauf der mittleren Kühlmitteltemperatur angegeben.

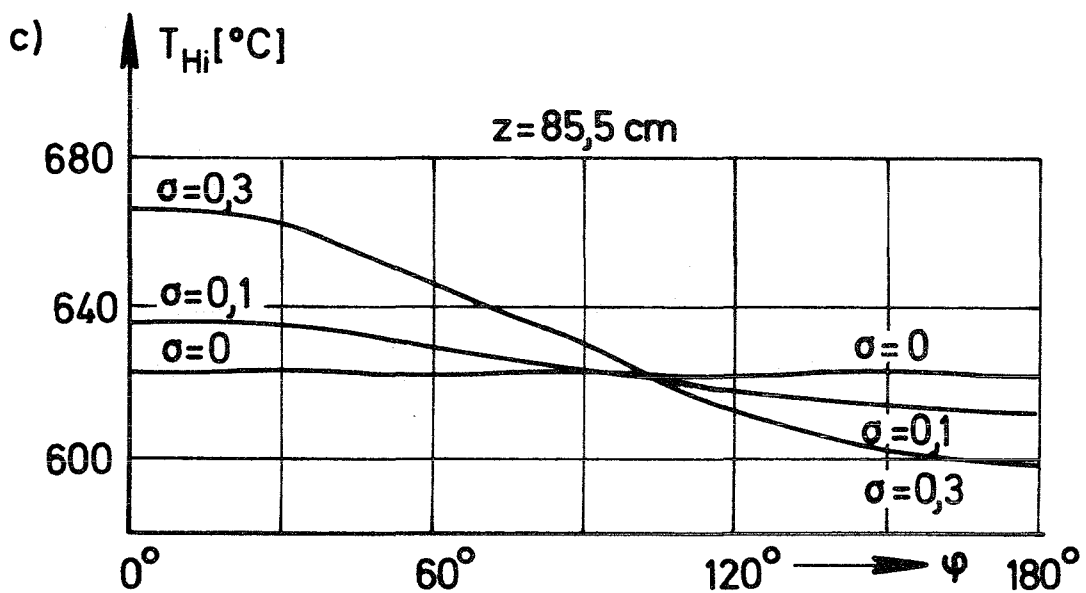
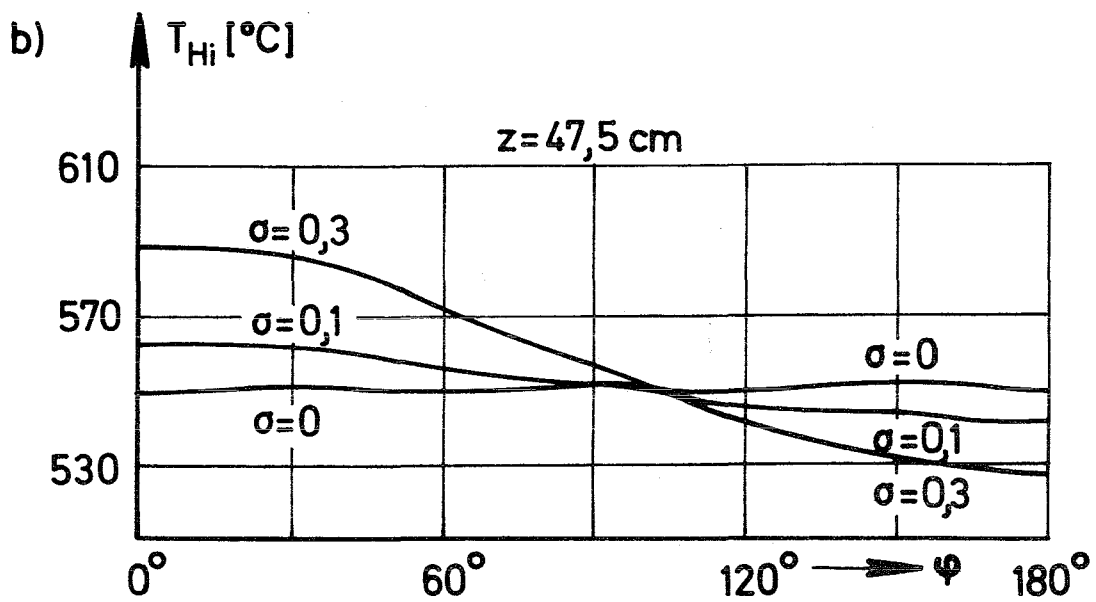
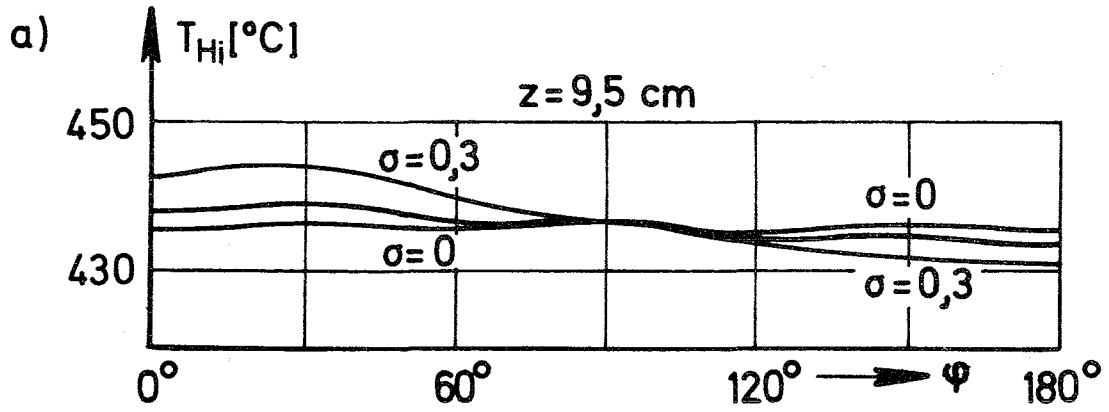


Abb. 15: Azimutale Variation der Temperatur an der Innenseite der Hülle in den axialen Zonen 1, 3, 5 (a,b,c) bei sym. und asym. Stabanordnung ($\sigma = 0; 0,1; 0,3$)

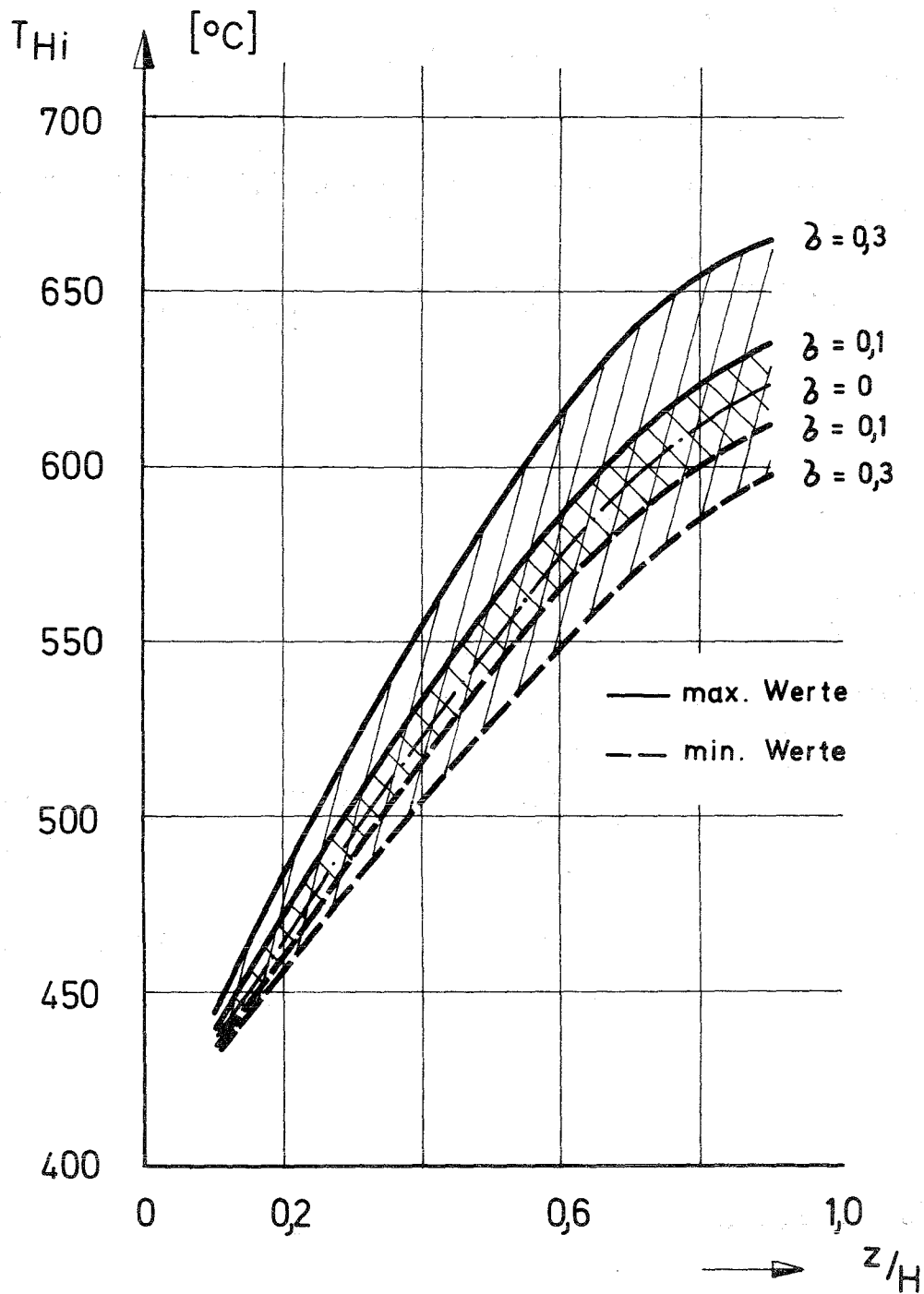


Abb. 16: Axialer Verlauf der maximalen und minimalen Temperaturen der Hülleninnenseite bei asym. Stabanordnung. Im sym. Fall ($\epsilon = 0$) ist der axiale Verlauf des Mittelwertes dargestellt.

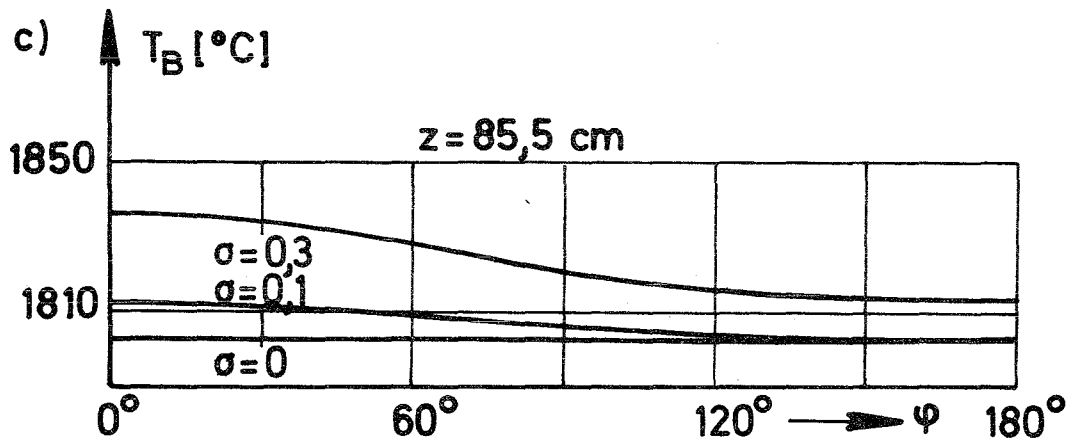
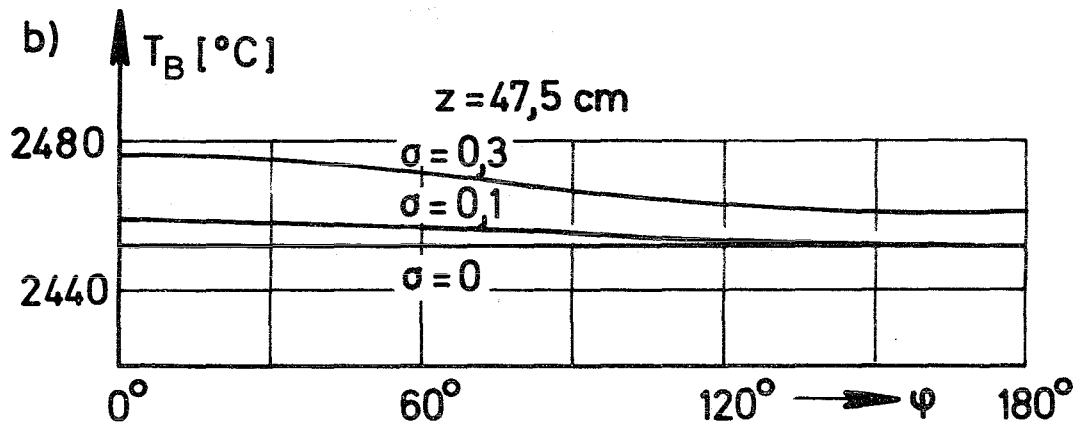
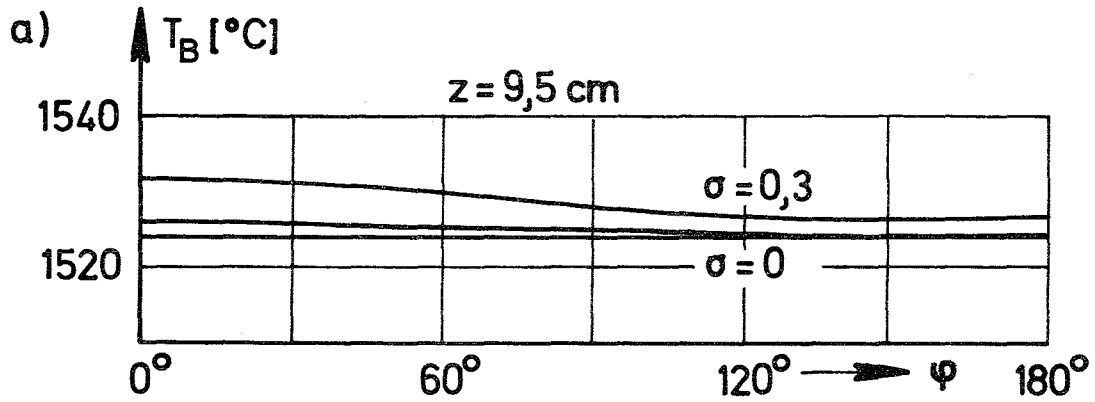


Abb. 17: Azimutale Variation der Brennstofftemperatur auf einem Radius $r = 1 \text{ mm}$, gemessen vom Brennstoffzentrum aus, in den axialen Zonen 1, 3, 5 (a,b,c) bei sym. und asym. Stabanordnung ($\sigma = 0; 0,1; 0,3$).

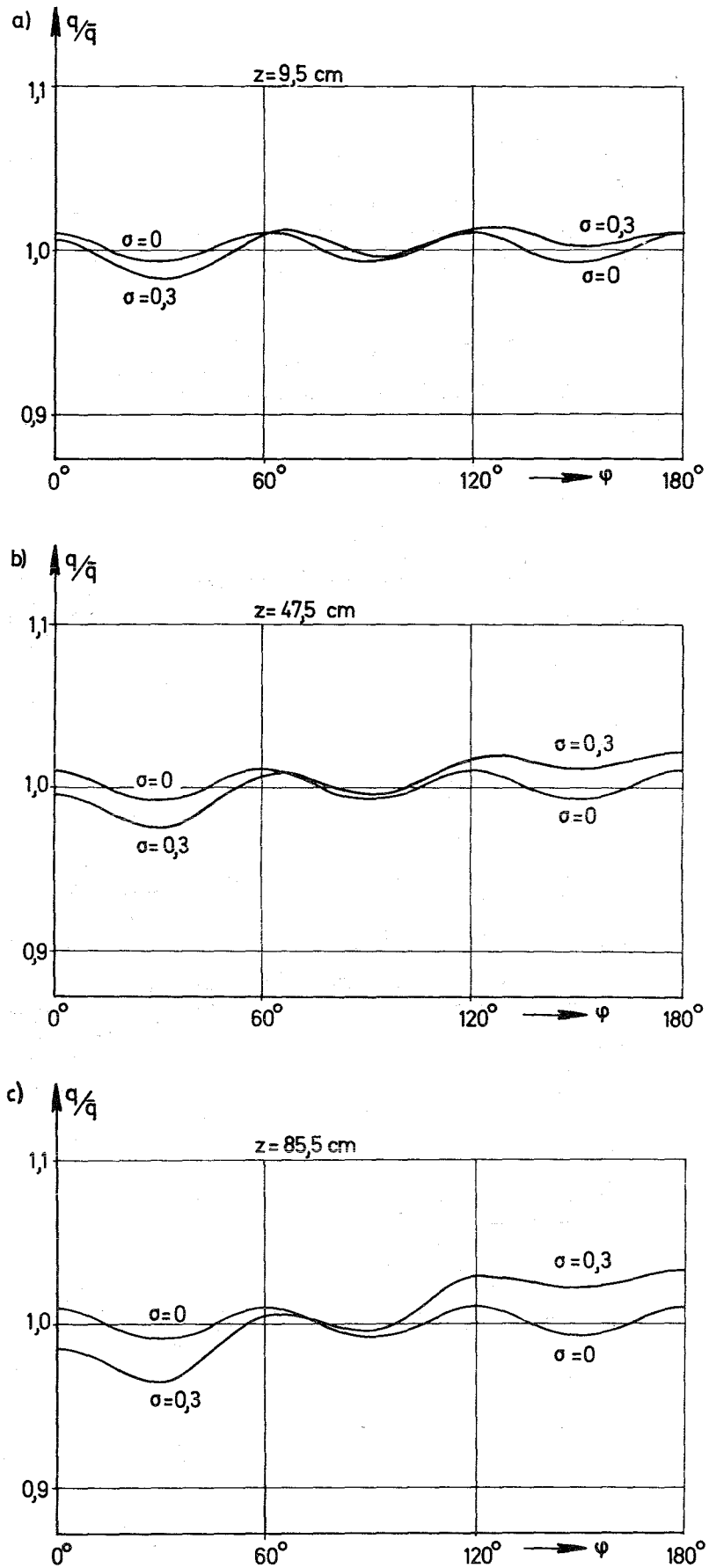


Abb. 18: Azimutale Verteilung der relativen Wärmestromdichte an der Hüllenoberfläche in den verschiedenen axialen Zonen 1,3,5 (a,b,c) bei sym. und asym. Stabanordnung ($\sigma = 0; 0,3$).

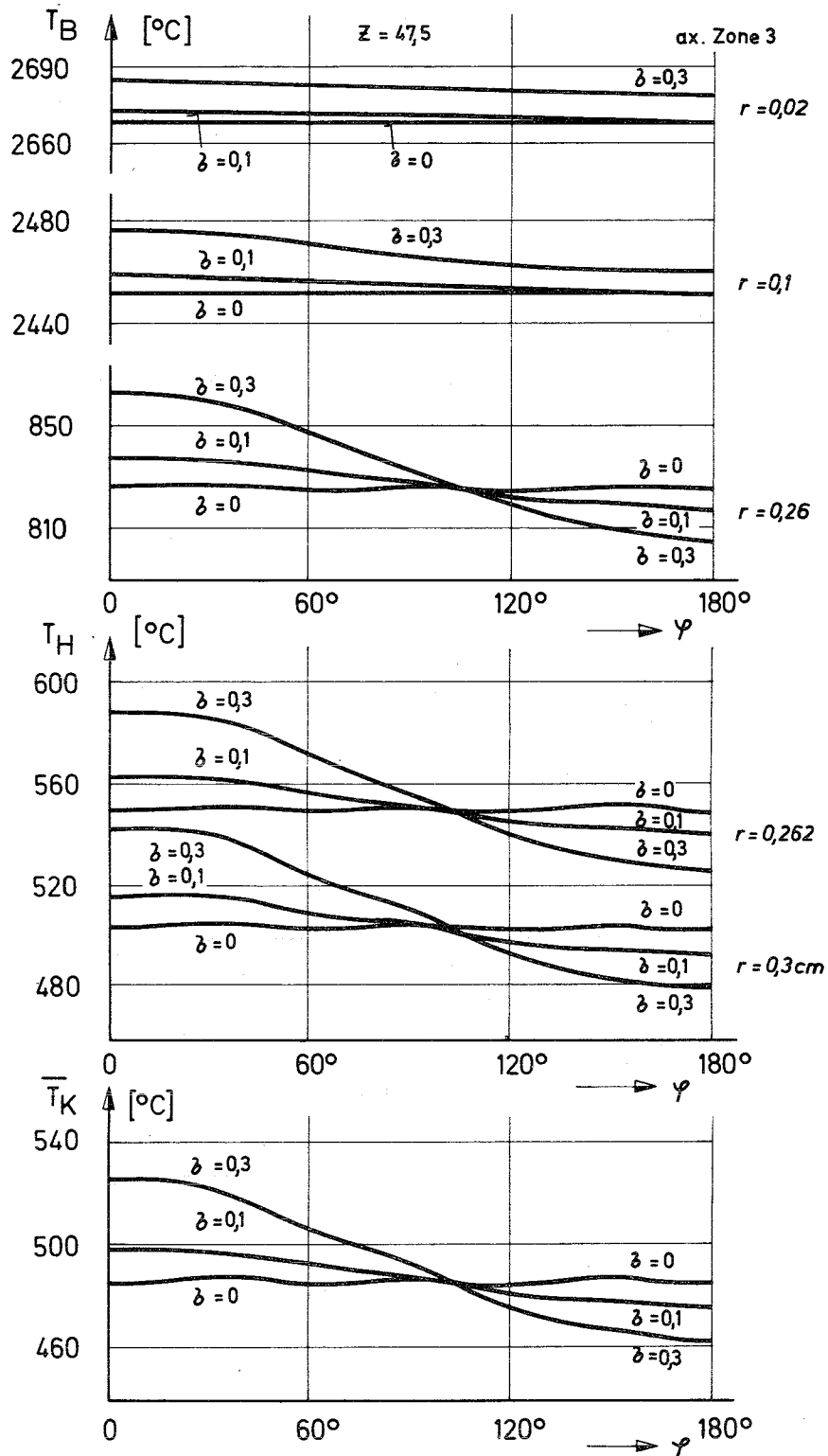


Abb. 19: Azimutale Verteilung der Temperaturen in allen untersuchten radialen Zonen des Kühlmittels, der Hülle und des Brennstoffes (vgl. Abb. 11) bei sym. und asym. Stabanordnung in der 3. axialen Zone.

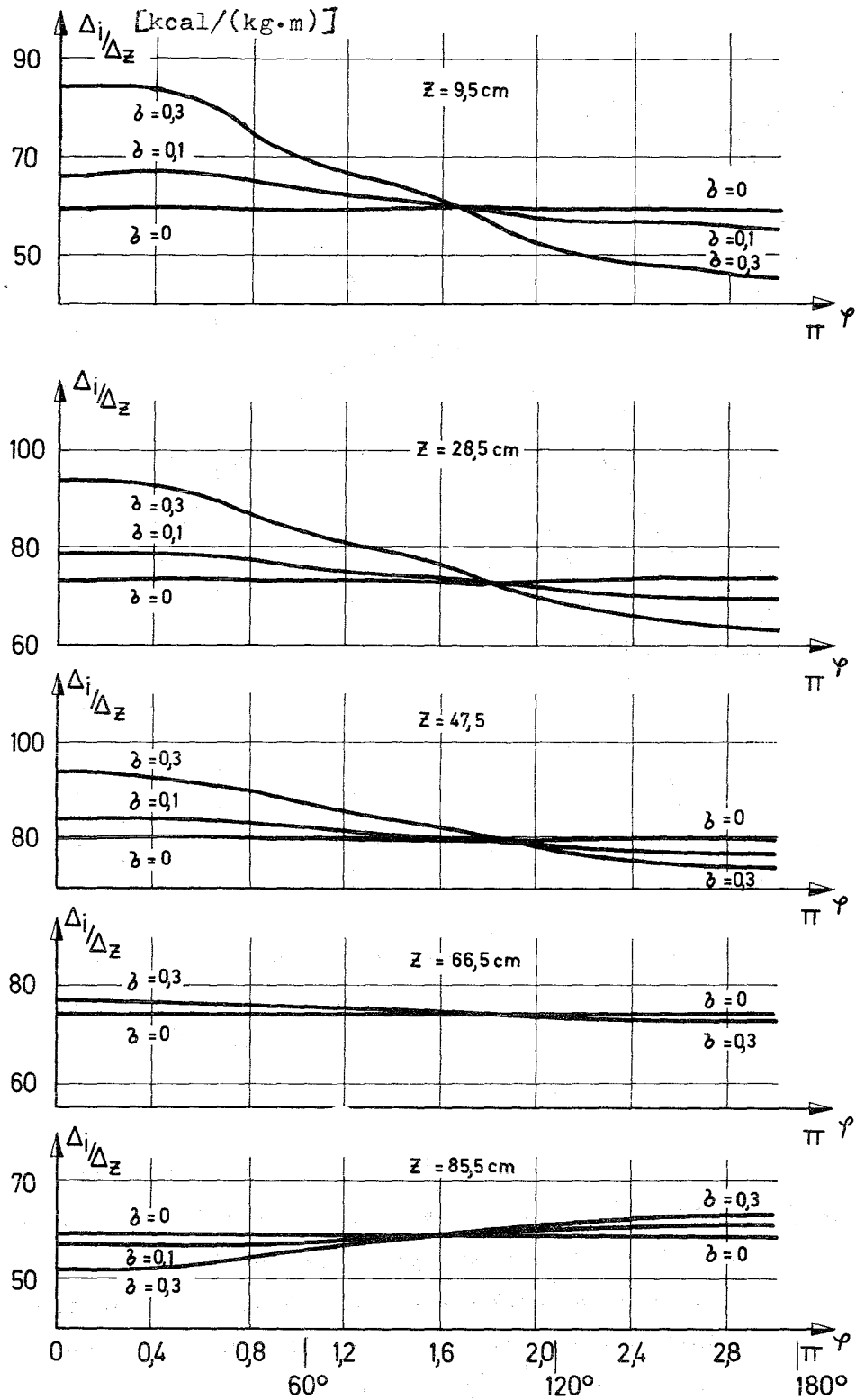


Abb. 20: Azimutale Variation des Enthalpiegradienten $\frac{\Delta i}{\Delta z}$ des Kühlmittels in allen 5 axialen Zonen bei sym. und asym. Stabanordnung ($\delta = 0; 0,1; 0,3$).

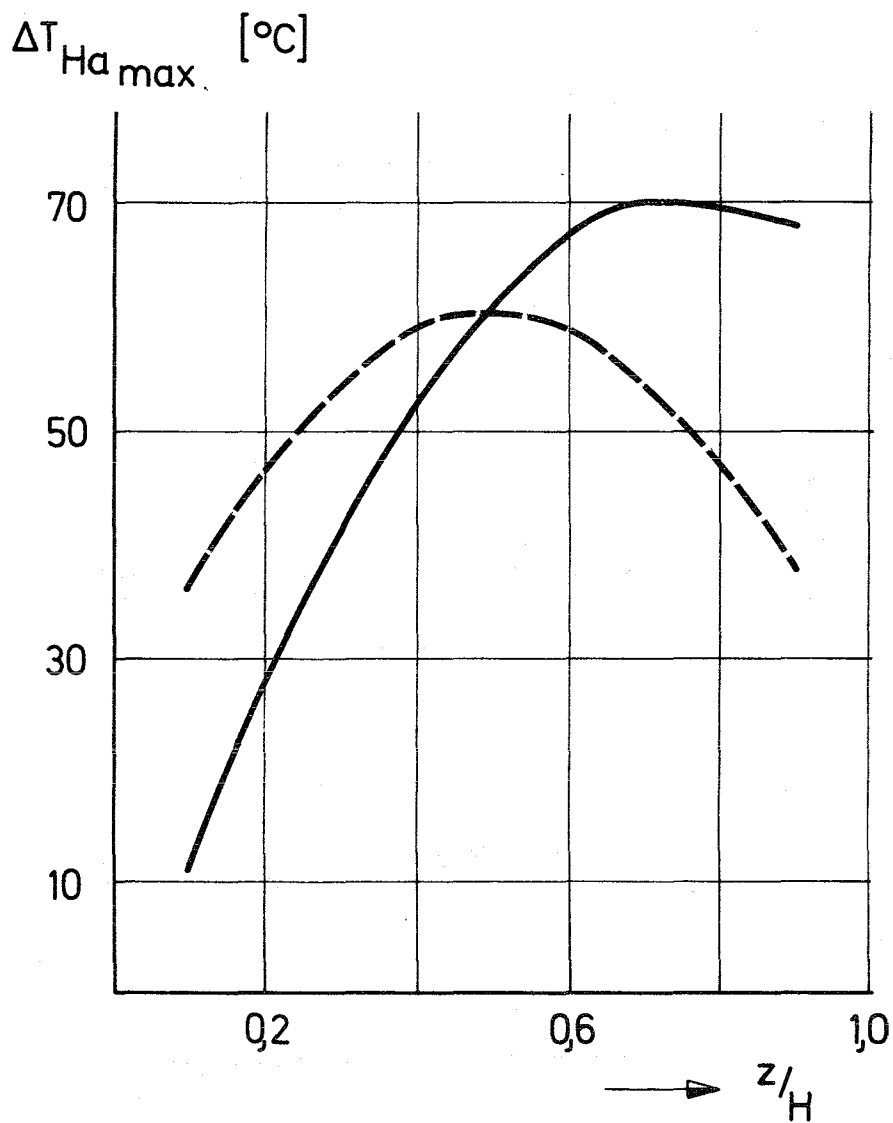
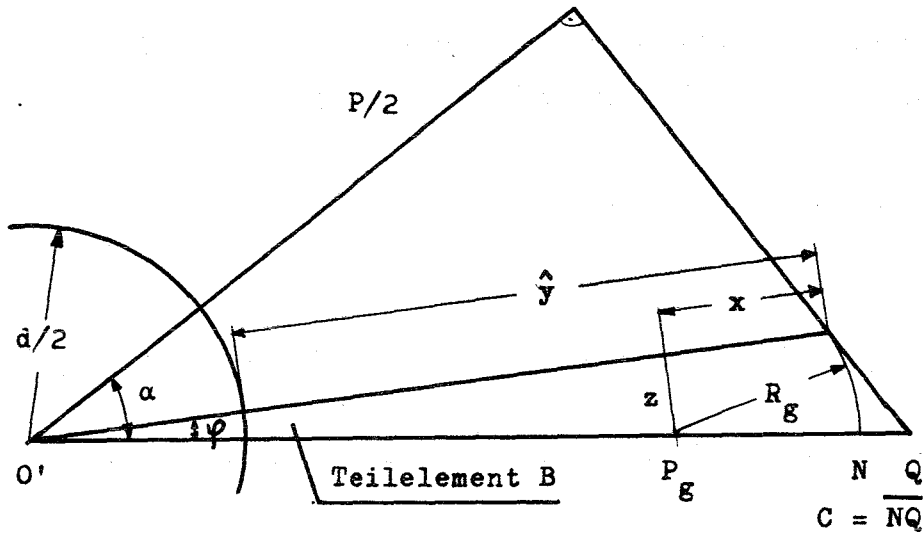


Abb. 21: Axialer Verlauf der maximalen azimuthalen Temperaturdifferenzen an der Hüllenoberfläche bei einer Stabauslenkung von $\zeta = 0,3$. (Mit Berücksichtigung von $\frac{\Delta i}{\Delta z} = f(\varphi)$ —); (ohne Berücksichtigung von $\frac{\Delta i}{\Delta z} = f(\varphi)$ ---).

ANHANG A

Radialer Abstand \hat{y} zwischen Staboberfläche und äußerer
Kanalbegrenzung für Teilelement B



Es gilt

$$\cos \varphi = \frac{\hat{y} + \frac{d}{2} - x}{\overline{OQ} - R_g - C} \quad (\text{A } 1)$$

$$\cos \alpha = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{\overline{OQ}} \quad (\text{A } 2)$$

Aus Gl. (A 1) ergibt sich

$$\hat{y} = (\overline{OQ} - R_g - C) \cos \varphi - \frac{d}{2} + x \quad (\text{A } 3)$$

wobei

$$x = \sqrt{R_g^2 - z^2} \quad (\text{A } 4)$$

und

$$z^2 = (\overline{OQ} - R_g - C)^2 - [(\overline{OQ} - R_g - C) \cos \varphi]^2 \quad (\text{A } 5)$$

Durch Einsetzen von Gl. (A 5) in (A 4) folgt

$$x = \left\{ [(\overline{O'Q} - R_g - C) \cos \varphi]^2 - (\overline{O'Q} - C)^2 + 2 R_g (\overline{O'Q} - C) \right\}^{1/2} \quad (\text{A } 6)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (A 6) und (A 2) folgt aus Gl. (A 3) für den radialen Abstand \hat{y} des Teilelementes B:

$$\hat{y} = \left(\frac{P}{2 \cos \alpha} - R_g - C \right) \cos \varphi - \frac{d}{2} + \quad (\text{A } 7)$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{P}{2 \cos \alpha} - R_g - C \right) \cos \varphi \right]^2 - \left(\frac{P}{2 \cos \alpha} - C \right)^2 + 2 R_g \left(\frac{P}{2 \cos \alpha} - C \right) \right\}^{1/2}$$

ANHANG B

Bestimmung des Integrals :

$$J = \int_{r_0}^{r_0 + \hat{y}} \tau_\varphi \, dr \quad \text{bzw.} \quad (B 1a)$$

gemäß Gl. (2.25) Kap. 2

$$J_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{r_0 + \delta}^{r_0 + \hat{y}} \tau_\varphi \, dr \quad (B 1)$$

Mit Hilfe der Substitution

$$\tau_\varphi = (\mu + \rho \epsilon_{\varphi M}) \frac{\partial \bar{u}_z}{r \partial \varphi} \quad (B 2)$$

ergibt sich für Gl. (B 1)

$$J_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{r_0 + \delta}^{r_0 + \hat{y}} (\mu + \rho \epsilon_{\varphi M}) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \varphi} \frac{1}{r} \, dr \quad (B 3)$$

Durch die Annahme, daß die Geschwindigkeitsverteilung in radialer Richtung durch das Kármán'sche Gesetz

$$u^+ = A + B \ln y^+ \quad (B 4)$$

beschrieben wird, wobei

$$\bar{u}_z = u^* [A + B \ln y^+] \quad (B 5)$$

und

$$u^+ = \frac{\bar{u}_z}{u^*}$$

$$y^+ = \frac{u^* y \rho}{\mu}$$

$$y = r - r_0 = \text{Wandabstand}$$

ist, folgt für die Ableitung

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \varphi} = u^* \frac{\partial u^+}{\partial \varphi} + u^+ \frac{\partial u^*}{\partial \varphi}$$

und weiter

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \varphi} = u^+ \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} + u^* B \left[\frac{1}{u^*} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \right] \quad (\text{B 6})$$

Damit kann für das Integral (Gl. (B 1)) geschrieben werden:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{r_0 + \sigma}^{\hat{r}_0 + \hat{y}} \bar{z}_\varphi \, dr = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{r_0 + \sigma}^{\hat{r}_0 + \hat{y}} (\mu + \varrho \varepsilon_{\varphi H}) \left[u^+ \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} + u^* B \left(\frac{1}{u^*} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \right) \right] \frac{1}{r} \, dr \quad (\text{B 7})$$

Mit der Annahme:

$$\left. \begin{matrix} \mu \\ \varrho \end{matrix} \right\} \text{ sind Mittelwerte pro Segment}$$

und

$$\varepsilon_{\varphi H} \neq f(r),$$

sowie unter der Berücksichtigung, daß für Schubspannungsgeschwindigkeit gilt:

$$u^* \neq f(r)$$

ergibt sich für Gl. (B 7) :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{r_0 + \sigma}^{\hat{r}_0 + \hat{y}} \bar{z}_\varphi \, dr = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left\{ (\mu + \varrho \varepsilon_{\varphi H}) \cdot \left[\underbrace{\int_{r_0 + \sigma}^{\hat{r}_0 + \hat{y}} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \cdot u^+ \frac{1}{r} \, dr}_{J_3} + u^* B \left(\frac{1}{u^*} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \right) \underbrace{\int_{r_0 + \sigma}^{\hat{r}_0 + \hat{y}} \frac{1}{r} \, dr}_{J_2} \right] \right\} \quad (\text{B 8})$$

Lösung der Integrale J_2 und J_3

1) Für das Integral J_2 folgt als Lösung

$$J_2 = \int_{r_0 + \delta}^{r_0 + \hat{y}} \frac{1}{r} dr = \ln \left(\frac{r_0 + \hat{y}}{r_0 + \delta} \right)$$

Damit kann für den Grenzübergang geschrieben werden:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{r_0 + \delta}^{r_0 + \hat{y}} \frac{1}{r} dr = \ln \left(1 + \frac{\hat{y}}{r_0} \right)$$

2) Nach der Umformung von

$$J_3 = \int_{r_0 + \delta}^{r_0 + \hat{y}} \frac{u^+}{r} dr \quad \text{in} \quad J_3 = \int_{\delta}^{\hat{y}} \frac{u^+}{d/2 + y} dy$$

mit $y = r - d/2$

$dy = dr$

folgt unter Berücksichtigung von Gl. (B. 4) weiter

$$\int_{\delta}^{\hat{y}} \frac{u^+}{d/2 + y} dy = \int_{\delta}^{\hat{y}} \frac{A + B \ln b y}{d/2 + y} dy \tag{B. 9}$$

wobei $b = \frac{u^* \delta}{\mu} \neq f(y)$ ist.

Nach partieller Integration folgt aus Gl. (B. 9)

$$(A + B \ln b y) \ln \left(\frac{d}{2} + y \right) \Big|_{\delta}^{\hat{y}} - B \int_{\delta}^{\hat{y}} \frac{1}{y} \ln \left(\frac{d}{2} + y \right) dy \tag{B. 10}$$

Durch Reihenentwicklung von

$$\ln \left(\frac{d}{2} + y \right) = \ln \left(\frac{d}{2} \right) + 2 \left[\left(\frac{y}{d+y} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{d+y} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{y}{d+y} \right)^5 + \dots \right] \quad (\text{B. 11})$$

ergibt sich bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} \left(\frac{y}{d+y} \right)^3 \\ \frac{1}{5} \left(\frac{y}{d+y} \right)^5 \end{array} \right\} < \left(\frac{y}{d+y} \right)$$

für

$$\int_{\mathcal{J}}^{\hat{y}} \frac{1}{y} \ln \left(\frac{d}{2} + y \right) dy = \ln \frac{d}{2} \ln y \Big|_{\mathcal{J}}^{\hat{y}} + 2 \ln (d+y) \Big|_{\mathcal{J}}^{\hat{y}} \quad (\text{B. 12})$$

Damit wird

$$\int_{\mathcal{J}}^{\hat{y}} \frac{u^+}{\frac{d}{2} + y} dy = (A + B \ln b y) \ln \left(\frac{d}{2} + y \right) \Big|_{\mathcal{J}}^{\hat{y}} - B \left(\ln \frac{d}{2} \ln y + 2 \ln (d+y) \right) \Big|_{\mathcal{J}}^{\hat{y}} \quad (\text{B. 13})$$

Nach Einsetzen der Grenzen und Bilden des Grenzüberganges folgt aus Gl. (B. 13)

$$\lim_{d \rightarrow 0} \int_{\mathcal{J}}^{\hat{y}} \frac{u^+}{\frac{d}{2} + y} dy = \left[A + B \ln b \hat{y} - B \left(1 + \frac{\hat{y}}{2d + \hat{y}} \right) \right] \frac{2\hat{y}}{d + \hat{y}} \quad (\text{B. 14})$$

Durch Einführen der Größe \bar{u}^+ (mittlere dimensionslose Geschwindigkeit)

$$\bar{u}^+ = A + B \ln b \hat{y} - B \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{y}}{d + \hat{y}} \right) \right] \quad (\text{B. 15})$$

ergibt sich aus Gl. (B. 14) weiter:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \int_{\hat{y}}^{\hat{y}} \frac{u^+}{\frac{d}{2} + y} dy = [u^+ - B \left(\frac{\hat{y}}{2d + \hat{y}} + \frac{\hat{y}}{2(d + \hat{y})} \right)] \frac{2 \hat{y}}{d + \hat{y}} \quad (\text{B.16})$$

Für das gesuchte Integral (Gl.(B.1a)) läßt sich dann schreiben:

$$\int_{r_0}^{r_0 + \hat{y}} \tau_\varphi dr = (\mu + \beta \epsilon_{\varphi M}) \left\{ \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \left[\bar{u}^+ - B \left(\frac{\hat{y}}{2d + \hat{y}} + \frac{\hat{y}}{2(d + \hat{y})} \right) \right] \frac{2 \hat{y}}{d + \hat{y}} + \right. \\ \left. u^* B \left(\frac{1}{u^*} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \right) \ln \left(1 + \frac{\hat{y}}{r_0} \right) \right\} \quad (\text{B.17})$$

Für die Fälle, daß die Terme

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi}$$

vernachlässigbar klein sind, reduziert sich Gl. (B.17) auf die Form:

$$\int_{r_0}^{r_0 + \hat{y}} \tau_\varphi dr = (\mu + \beta \epsilon_{\varphi M}) \left\{ \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \left(\frac{2 \hat{y}}{d + \hat{y}} \right) \left[\bar{u}^+ - B \left(\frac{\hat{y}}{2d + \hat{y}} + \frac{\hat{y}}{2(d + \hat{y})} \right) \right] + \right. \\ \left. \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} B \ln \left(1 + \frac{\hat{y}}{r_0} \right) \right\} \quad (\text{B.18})$$

ANHANG C

Die mittlere dimensionslose Geschwindigkeit \bar{u}^+ ist (entsprechend Gl. 2.28, 2.29) definiert als

$$\bar{u}^+ = \frac{\int_{r_0+\delta}^{\hat{r}_0+y} u^+ r d\varphi dr}{\int_{r_0+\delta}^{\hat{r}_0+y} r d\varphi dr} \quad (\text{C. 1})$$

Mit den Substitutionen: $r = r_0 + y$;
 $dr = dy$; $r_0 = d/2$

folgt

$$\bar{u}^+ = \frac{\int_{\delta}^{\hat{y}} u^+ \left(\frac{d}{2} + y\right) d\varphi dy}{\int_{\delta}^{\hat{y}} \left(\frac{d}{2} + y\right) d\varphi dy} \quad (\text{C. 2})$$

wobei

$$u^+ = A + B \ln by$$
$$b = \frac{u^*}{\mu}$$

ist. Damit wird

$$\bar{u}^+ = \frac{\int_{\delta}^{\hat{y}} (A + B \ln by) \left(\frac{d}{2} + y\right) d\varphi dy}{\int_{\delta}^{\hat{y}} \left(\frac{d}{2} + y\right) d\varphi dy} \quad (\text{C. 3})$$

oder

$$\bar{u}^+ = A + \frac{B \int_{\delta}^{\hat{y}} \ln by \left(\frac{d}{2} + y\right) dy}{\frac{1}{2} (\hat{y}^2 + d \cdot \hat{y} - (\delta^2 + d \cdot \delta))} \quad (C. 4)$$

Nach Lösung des Integrals:

$$\int_{\delta}^{\hat{y}} \ln by \left(\frac{d}{2} + y\right) dy = \frac{1}{2} \left[(y^2 + d \cdot y) \ln by \right]_{\delta}^{\hat{y}} - \left(\frac{1}{2} y^2 + d \cdot y\right) \left[\frac{1}{y} \right]_{\delta}^{\hat{y}} \quad (C. 5)$$

ergibt sich nach Einsetzen der Grenzen für \bar{u}^+

$$\bar{u}^+ = A + B \left[\frac{\begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ \ln b \hat{y} - \frac{(\frac{1}{2} \hat{y} + d) \hat{y}}{(\hat{y} + d) \hat{y}} - \frac{(\delta + d) \delta}{(\hat{y} + d) \hat{y}} \ln b \delta + \frac{(\frac{1}{2} \delta + d) \delta}{(\hat{y} + d) \hat{y}} \end{array}}{1 - \frac{(\delta + d) \delta}{(\hat{y} + d) \hat{y}}} \right] \quad (C. 6)$$

V

Mit der Annahme: δ ist etwa von der Dicke der laminaren Unterschicht, d. h.

$$\delta \approx 5 \frac{\mu}{u^* \rho}$$

wird in Term III (Gl. (C. 6))

$$\ln b \delta \approx \ln 5$$

Da weiterhin $\delta \ll d$ können in Gl. (C. 6) die Terme III, IV vernachlässigt werden gegenüber den Termen I, II. Außerdem ist

$$\text{Term V} \ll 1$$

Es ergibt sich somit für \bar{u}^+ :

$$\bar{u}^+ = A + B \left[\ln b \hat{y} + \frac{\hat{y}}{2(d + \hat{y})} - 1 \right]$$

wobei $\hat{y}^+ = b \hat{y}$ ist.

