KERNFORSCHUNGSZENTRUM

KARLSRUHE

Juli 1974 KFK 2031

Institut für Angewandte Systemtechnik und Reaktorphysik

Zur Bestimmung kostengünstiger Lebensdauerexperimente für Elemente mit exponentieller Lebensdauerverteilung

D. Sellinschegg

GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.

KARLSRUHE

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.

KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für
Angewandte Systemtechnik und Reaktorphysik

KFK 2031

Zur Bestimmung kostengünstiger Lebensdauerexperimente für Elemente mit exponentieller Lebensdauerverteilung +)

Dieter Sellinschegg

Gesellschaft für Kernforschung mbH., Karlsruhe

+) von der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Universität Fridericiana Karlsruhe (TH) zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften genehmigte Dissertation

Zusammenfassung:

Die Arbeit befaßt sich mit der Bestimmung kostengünstiger Versuchspläne zur Prüfung der Zuverlässigkeit von Elementen. Untersucht werden die Versuchspläne vom Typ (n,∞,r), $(n,1,r)$, (n,∞,T) und $(n,1,T)$. Zur statistischen Auswertung des Experiments werden Alternativtests, Parameterbereich- und Parameterpunktschätzungen betrachtet.

Das Ziel der Arbeit ist es, einen Versuchsplan so zu bestimmen, daß für ein optimales statistisches Verfahren bei vorgegebener Güte der statistischen Aussage die zu erwartenden Experimentkosten möglichst gering sind. Die Untersuchung wird für ein Kostenmodell gemacht, das die wesentlichen Kosten erfaßt, die bei der Durchführung eines Experiments auftreten, nämlich: Versuchsanlage-, Element-, Betriebskosten und ein Bonus- bzw. Malus Pönale für Unter- bzw. Überschreitung der vereinbarten Experimentdauer.

Contribution to determine cost optimal life tests for components with exponentially distributed life times.

Abstract:

This work reports the determination of cost optimal plans for life tests. Plans of the type (n,∞,r), $(n,1,r)$, (n,∞,T) and $(n,1,T)$ are considered. For drawing statistical inference on the basis of the gathered data, the method of testing hypotheses, interval estimates and the determination of estimators is used.

The aim of this work is to determine a plan in such a way that for an optimal statistical decision procedure the expected experimental cost is as low as possible for a given degree of efficiency for the statistical inference. The investigation is done with a cost model, which considers the investment and operating costs of the test facility, the cost for the component to be tested and the cost (penalty or bonus) for meeting the specified contract length.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Bestimmung kostengünstiger Versuchspläne zur Prüfung der Zuverlässigkeit von Elementen. Prinzipiell muß man, um Aussagen über die Zuverlässigkeit zu erhalten, ein oder mehrere gleichartige Elemente einem Experiment unterziehen und das Beobachtungsmaterial dann mit einem passenden statistischen Verfahren auswerten entsprechend der Fragestellung, die zu klären ist. Dazu hat man sich zunächst zu überlegen, wie das Experiment am günstigsten durchzuführen ist.

In der Arbeit werden die vier wichtigsten Typen von Versuchsplänen untersucht, die man üblicherweise für die Prüfung der Zuverlässigkeit von Elementen benutzt, nämlich: Es werden im Experiment n Elemente geprüft, während des Experiments ausgefallene Elemente werden erneuert bzw. nicht erneuert (symbolisch mit ∞ bzw. 1 bezeichnet), das Experiment wird nach einer vorgegebenen Anzahl r von Ausfällen oder nach einer vorgegebenen Experimentdauer T abgebrochen. Die Versuchspläne lassen sich dann jeweils charakterisieren durch ein Tripel der Form (n,∞,r), $(n,1,r)$, (n,∞,T), $(n,1,T)$; z.B. bedeutet (n,∞,r): n Elemente werden in einem Experiment, in dem ausgefallene Elemente erneuert werden, geprüft, und das Experiment wird nach r Ausfällen abgebrochen. Zur statistischen Auswertung des Experiments werden Alternativtests, Parameterbereich- und Parameterpunktschätzungen betrachtet. Die Aufgabe lautet dann, einen Versuchsplan so zu bestimmen, daß für ein optimales statistisches Verfahren bei vorgegebener Güte der statistischen Aussage die zu erwartenden Experimentkosten möglichst gering sind. Es wird stets angenommen, daß sich ein Element nur im Zustand "funktioniert" und "ausgefallen" befinden kann, und die Lebensdauer (d.h. die Übergangszeit vom Zustand "funktioniert" in den Zustand "ausgefallen") exponentiell verteilt ist.

Im Abschnitt 1 der Arbeit wird für jeden betrachteten Typ von Versuchsplänen ein Wahrscheinlichkeitsmodell aufgestellt und die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem jeweils interessierenden Ergebnisraum des Experiments (dem Stichprobenraum) bestimmt. Im Anschluß daran (Abschnitt 2) werden zunächst zur Bereitstellung der Notation die statistischen Verfahren für die Auswertung der Experimente in Anlehnung an Witting [19] und Beljajew [2] kurz besprochen und für die betrachteten Typen von statistischen Verfahren jeweils ein Maß für die Güte der statistischen Aussage eingeführt. Dadurch soll erreicht werden, daß für die Aussagekraft der statistischen Aussagen bei den verschiedenen statistischen Verfahren ein einfaches Maß zur Verfügung steht. Es wird daher für jedes der betrachteten Verfahren eine Maßzahl gewählt, die sich jeweils aus der Gütefunktion des Verfahrens ableitet.

Es zeigt sich, daß diese Maßzahl für die Güte der statistischen Aussage für Versuchspläne vom Typ (n,∞,r) und $(n,1,r)$ unabhängig vom gewählten Typ des statistischen Verfahrens ist und nur von der Anzahl r der beobachteten Ausfälle bis zum Abbruch des Experiments abhängt. Dagegen hängt für Versuchspläne vom Typ (n,∞,T) die Güte der statistischen Aussage für Alternativtests von nT ab und für Parameterbereich- bzw. Parameterpunktschätzungen von λnT, wobei λ der unbekannte Parameterwert ist (vergl. Bemerkung (2.8)).

Das Problem der Bestimmung der Zuverlässigkeit von Elementen mit exponentiell verteilter Lebensdauer wurde u.a. bereits von Epstein, Sobel in [4], [5], Epstein in [6], [7], [8], [9], [10], Lloyd, Lipow in [14] und Beljajew in [2] untersucht. Für die hier betrachteten Versuchspläne und statistischen Verfahren geben beispielsweise Epstein in [10], Lloyd, Lipow in [14] und Beljajew in [2] Verfahren zur Bestimmung der Zuverlässigkeit an. In Ergänzung zu diesen Arbeiten wird hier auch auf das zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsmodell näher eingegangen.

Der Abschnitt 3 der Arbeit befaßt sich schließlich mit der Ermittlung kostengünstiger Versuchspläne. Es wird ein Kostenmodell eingeführt, das die wesentlichen Kosten erfaßt, die bei der Durchführung eines Experiments auftreten, nämlich: Versuchsanlage- und Elementkosten (in Abhängigkeit von der Anzahl der geprüften Elemente und der Experimentdauer), Betriebskosten (in Abhängigkeit von der Betriebszeit der Elemente) sowie ein Bonus- bzw. Malus-Pönale für Unter- bzw. Überschreitung der vereinbarten Experimentdauer. Eine Abschreibung in exponentieller Form (abhängig von der Experimentdauer) für die Versuchsanlage und die geprüften Elemente ist in dem Modell enthalten. Die Versuchspläne werden nach den zu erwartenden Kosten beurteilt. Ein Versuchsplan heißt optimal, wenn er die zu erwartenden Kosten gleichmäßig bezüglich λ minimiert und eine vorgegebene Güte der statistischen Aussage einstellt. Dabei wird angenommen, daß der Typ des zu verwendenden statistischen Verfahrens durch die Problemstellung impliziert wird. Zur Konkurrenz werden dann nur solche Versuchspläne zugelassen, die eine optimale statistische Auswertung des Beobachtungsmaterials gestatten, d.h. es ist möglich, bei gegebener Schadensfunktion und vorgegebenem Optimalitätskriterium ein optimales statistischen Verfahren auszuwählen. Dies hat zur Folge, daß die Versuchspläne vom Typ $(n,1,T)$ nicht zulässig sind (vergl. Bemerkung (2.2)), und somit die konkurrierenden Versuchspläne vom Typ (n,∞,r),$(n,1,r)$ und (n,∞,T) sind.

Man kann für Versuchspläne vom Typ (n,∞,r) und $(n,1,r)$ zeigen, daß für monoton in der Experimentdauer steigende Kostenfunktionen die Versuchspläne vom Typ (n,∞,r) kostengünstiger sind, während sich dagegen die Versuchspläne vom Typ $(n,1,r)$ für monoton in der Experimentdauer fallende Kostenfunktionen als kostengünstiger erweisen (vergl. Satz(3.2)).

Dies trifft nicht mehr zu für den folgenden Spezialfall des Kostenmodells, der im Hinblick auf Anwendungen von besonderem Interesse ist: Die betrachteten Kosten sind bis auf die von der Experimentdauer abhängigen Kosten linear. Die von der Experimentdauer abhängigen Kosten sind von exponentieller Gestalt. Hier läßt sich nicht mehr zeigen, daß einer der beiden Typen von Versuchsplänen (n,∞,r) bzw. $(n,1,r)$ besser ist. Falls man zusätzlich eine obere Schranke für die Zahl der im Experiment eingesetzten Elemente hat, wie es bei Anwendungen im allgemeinen der Fall ist, so kann man zeigen, daß Versuchspläne vom Typ (n,∞,r) bzw. $(n,1,r)$ zwar nicht gleichmäßig bezüglich λ, aber für gewisse Parameterbereiche geringere Experimentkosten verursachen (vergl. Satz (3.8) und Bemerkung Seite 42). In Fortsetzung dieser Untersuchungen wird im letzten Teil dieses Abschnitts der Fall behandelt, daß nur Versuchspläne eines Typs jeweils zur Auswahl zugelassen sind. In einigen Fällen kann dann für gegebenen Parameterwert λ ein Plan explizit bestimmt werden, der die zu erwartenden Experimentkosten minimiert (vergl. Satz (3.12) und Folgerung (3.13)). Verfügt man nun über ein Vorwissen derart, daß man eine untere Schranke für den Parameter λ hat, so lassen sich für Versuchspläne vom Typ (n,∞,r) und $(n,1,r)$ leicht mittels der in Satz (3.12) und Folgerung (3.13) gewonnenen Aussagen Minimax-Versuchspläne angeben, d.h. Pläne, die die maximal zu erwartenden Kosten minimieren (vergl. Folgerung (3.14)). Für Versuchspläne vom Typ (n,∞,T) läßt sich aus den Aussagen von Satz (3.12) und Folgerung (3.13) sofort ein Versuchsplan angeben, der die zu erwartenden Kosten gleichmäßig bezüglich λ minimiert (vergl. Folgerung (3.14)). Dabei kann für Parameterbereich- und Parameterpunktschätzungen ein gleichmäßig bester Versuchsplan nur dann angegeben werden, wenn man ein Vorwissen in Form einer unteren Schranke für den Parameter λ hat (vergl. Bemerkung (2.9)).

Das Problem der Bestimmung kostengünstiger Versuchspläne wurde für Spezialfälle der hier betrachteten Modelle bereits von Lloyd, Lipow [14], Taub [18] sowie Nägele und dem Autor [16] untersucht. So betrachteten Lloyd, Lipow in [14] Versuchspläne vom Typ (n,∞,r) und $(n,1,r)$ und bestimmten unter der Nebenbedingung r = const. den Typ von Versuchsplänen, der die geringeren zu erwartenden Kosten gleichmäßig bezüglich λ verursacht. Diese Untersuchung basiert auf einem von Epstein in [10] angegebenem linearen Kostenmodell, das die Betriebskosten (in Abhängigkeit von der Experimentdauer) und die Elementkosten (in Abhängigkeit von der Anzahl der geprüften Elemente) für die Durchführung eines Experiments erfaßt. Das bis auf einen Fixkostenterm gleiche Kostenmodell benutzt Taub in [18] zur Bestimmung eines Versuchsplans, der für Versuchspläne vom Typ $(n,.,T)$ die zu erwartenden Kosten gleichmäßig bezüglich λ minimiert. Die Nebenbedingung dafür ist nT = const., die im Zusammenhang mit der statistischen Auswertung des Experiments durch Parameterbereichschätzungen gewählt wurde. Nägele und der Autor behandeln in [16] Versuchspläne vom Typ (n,∞,r),$(n,1,r)$,(n,∞,T),$(n,1,T)$ und Parameterbereichschätzungen zur statistischen Auswertung des Beobachtungsmaterials.Es wird für jeden Typ von Plänen der Versuchsplan bestimmt, der die zu erwartenden Kosten für einen gegebenen Parameterwert λ minimiert und eine vorgegebene wie hier definierte Güte der statistischen Aussage einstellt. Das benutzte Kostenmodell erfaßt die hier betrachteten Kosten für die Durchführung eines Experiments, jedoch ist der Kostenansatz im Unterschied zu dem Modell hier durchweg linear, und es wird keine Abschreibung in Abhängigkeit von der Experimentdauer berücksichtigt.

1. Lebensdauerexperimente

Einfaches Lebensdauerexperiment

Ein Element sei ein Teil eines technischen Systems, das sich nur in zwei Zuständen befinden kann, nämlich im Zustand "funktioniert" und im Zustand "ausgefallen". Der Übergang von einem Zustand in den anderen soll zufällig erfolgen. Wird ein Element einem Experiment unterworfen, so meint man, daß es entsprechend seiner Funktion im System betrieben wird. Dabei soll das Element zu Beginn eines Experiments immer im Zustand "funktioniert" sein, gelangt es einmal in den Zustand "ausgefallen", dann bleibt es in diesem Zustand. Man nennt die Übergangszeit, d.h. die Zeit, die vergeht, bis das Element vom Zustand "funktioniert" in den Zustand "ausgefallen" übergeht, die Lebensdauer des Elements. Die so definierte Lebensdauer muß nicht unbedingt mit dem üblichen Begriff Lebensdauer identisch sein, da die Zustände "funktioniert" und "ausgefallen" unter Umständen systembezogen definiert sind. Den Zeitpunkt des Übergangs in den Zustand "ausgefallen" bezeichnet man als Ausfallzeitpunkt oder Ausfall.

Wahrscheinlichkeitsmodell

Definition (1.1)

Es sei $\lambda > 0$, $(\Omega, \mathcal{R}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (WR) und $\tau : \Omega \to \mathbb{R}^+$ eine $G(1,\lambda)$[1] verteilte Zufallsvariable (ZV) auf diesem WR. Dann heißt $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^+)$[2]$, P_\tau)$ ein einfaches Lebensdauerexperiment.

---

1) Eine ZV mit der Verteilungsfunktion (VF) $G(x|\nu,\alpha) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\nu)} \alpha^\nu t^{\nu-1} e^{-\alpha t} dt$ $(\nu,\alpha > 0)$ heißt $G(\nu,\alpha)$ verteilt.

2) $\mathcal{B}_p$ ist die σ-Algebra der Borelschen Mengen auf $\mathbb{R}^p$,

$\mathcal{B}_p(\mathbb{R}^p_+) := \{B \cap \mathbb{R}^p_+ \mid B \in \mathcal{B}_p\}$.

Bemerkung:

Man kann τ als die Lebensdauer eines Elements auffassen. Die Annahme der exponentiell verteilten Lebensdauer ist eine sehr strenge Forderung. Denn diese Vorschrift bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls in einem bestimmten Zeitintervall unabhängig davon ist, wie lange das Element schon vor diesem Zeitintervall funktioniert hat. Aus der Praxis weiß man jedoch, daß beispielsweise elektronische Elemente fast immer diese Forderung erfüllen und dies auch für eine ganze Reihe mechanischer Elemente zutrifft (vgl. Deutsche Lufthansa AG. [12]).

Definition (1.2):

Es sei $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^+), P_\tau)$ ein einfaches Lebensdauerexperiment, $\lambda > 0$. Dann heißt die Abbildung $R : \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ mit $R(t) = P_\tau(t, \infty) = e^{-\lambda t}$ Zuverlässigkeitsfunktion.

Für die Ermittlung der Zuverlässigkeit eines Elements genügt es also, den Parameter λ zu ermitteln.

Lebensdauerexperimente nach Plänen

Das zentrale Problem ist die Bestimmung (näherungsweise) der Lebensdauer bzw. der Zuverlässigkeit von Elementen. Eine solche Bestimmung wird im allgemeinen so durchgeführt, daß einfache Lebensdauerexperimente in geeigneter Weise kombiniert werden und ein kombiniertes Experiment durchgeführt wird.

Um ein Experiment dieser Art in konkreten Fällen durchführen zu können, hat man daher Vorschriften anzugeben, die den Ablauf des Experiments festlegen. Die Vorschriften werden zusammengefaßt als Plan bezeichnet. Im folgenden werden Pläne der Form (n, N, a) betrachtet, wobei

$n \in \mathbb{N}$: die Anzahl der in einem Experiment gleichzeitig zu prüfenden Elemente angibt;

$N \in \{\infty, 1\}$: gibt an, ob in dem Experiment Erneuerungen (∞) durchgeführt werden oder nicht (1);

$a \in \{r,T\}$: gibt die Abbruchregel des Experiments an mit
$r \in \mathbb{N}$: Abbruch des Experiments nach r Ausfällen
$T > 0$: Abbruch des Experiments nach der Zeit T.

Durch Kombination erhält man die vier wichtigsten Typen von Plänen, nämlich die Pläne (n, ∞, r), $(n, 1, r)$, (n, ∞, T), $(n, 1, T)$, die im folgenden besprochen werden.

Bei einem Experiment mit Erneuerung soll nach jedem Ausfall eines Elements dieses augenblicklich durch ein neues (bzw. repariertes altes) Element ersetzt und damit das Experiment fortgeführt werden. Man erhält also für jedes zu prüfende Element eine Folge zeitlich hintereinanderfolgender einfacher Lebensdauerexperimente, die als stochastisch unabhängig angenommen werden. Hat man n zu prüfende Elemente, so hat man n solcher Folgen, die ebenfalls voneinander stochastisch unabhängig angenommen werden.

Bei einem Experiment ohne Erneuerung soll kein Element nach dem Ausfall erneuert werden. Hat man n Elemente zu prüfen, so hat man gleichzeitig n einfache Lebensdauerexperimente durchzuführen, die wieder voneinander stochastisch unabhängig angenommen werden.

Diese Annahmen führen zu folgenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellen.

Wahrscheinlichkeitsmodell

Zur Beschreibung eines Experiments ohne Berücksichtigung von Abbruchsbedingungen kann man den mit einfachen Lebensdauerexperimenten gebildeten Produktraum betrachten.

Definition (1.3)

Es sei $n \in \mathbb{N}, N \in \{1,\infty\}$, $\lambda, t > 0$.

(1) $(\Omega_n^N, \mathcal{A}_n^N, P_n^N)$ heißt ein Lebensdauerexperiment, wenn gilt

$$\Omega_n^N = \mathop{\times}_{i=1}^{N} \Omega_i \quad \text{mit} \quad \Omega_i = \mathbb{R}_+^n \quad \forall i$$

$$\mathcal{R}_n^N = \bigotimes_{i=1}^{N} \mathcal{R}_i \quad \text{mit} \quad \mathcal{R}_i = \mathcal{B}_n(\mathbb{R}_+^n) \quad \forall i$$

$$P_n^N = \prod_{i=1}^{N} P_n^i \quad \text{mit} \quad P_n^i = \prod_{j=1}^{n} P_j \quad \forall i, \quad P_j(0,t) = 1-e^{-\lambda t} \text{ für } j \in \{1,\dots,n\}.$$

(2) $(\Omega_n^\infty, \mathcal{R}_n^\infty, P_n^\infty)$ heißt ein Lebensdauerexperiment mit n Elementen und Erneuerung (ohne Abbruch).

(3) $(\Omega_n^1, \mathcal{R}_n^1, P_n^1)$ heißt ein Lebensdauerexperiment mit n Elementen ohne Erneuerung (ohne Abbruch).

<u>Definition (1.4)</u>

Es sei $t > 0$, $i = 1$ für $N = 1$ bzw. $i \in \mathbb{N}$ für $N = \infty$, $j \in \{1,\dots, n\}$.

(1) Die ZV $\tau_j^i : \Omega_n^N \to \mathbb{R}^+$ mit $\tau_j^i(\omega) = \omega_{ji}$ für

$$\omega = (\omega_{11}, \dots, \omega_{n1}; \omega_{12}, \dots, \omega_{n2}; \dots; \omega_{1i}, \dots, \omega_{ji}, \dots, \omega_{ni}; \dots) \in \Omega_n^N$$

heißt Lebensdauer des i-ten Elements in der j-ten Folge von einfachen Lebensdauerexperimenten.

(2) Die ZV $T_j^i : \Omega_n^N \to \mathbb{R}^+$ mit $T_j^i = \sum_{k=1}^{i} \tau_j^k$ heißt i-ter Ausfallzeitpunkt in der j-ten Folge von einfachen Lebensdauerexperimenten.

(3) Die ZV $D_j(t) : \Omega_n^N \to \mathbb{N}_0$ mit

$$D_j(t)(\omega) = \begin{cases} 0 : 0<t\leq T_j^1(\omega) \\ k : T_j^k(\omega)<t\leq T_j^{k+1}(\omega)\,(k\in\mathbb{N}) \end{cases} \quad : N = \infty \text{ bzw.}$$

$$D_j(t)(\omega) = \begin{cases} 0 : 0<t\leq T_j^1(\omega) \\ 1 : T_j^1(\omega)<t \end{cases} \quad : N = 1$$

für $\omega\in\Omega_n^N$ heißt Anzahl der Ausfälle in $[0,t)$ in der j-ten Folge von einfachen Lebensdauerexperimenten.

<u>Folgerung (1.5)</u>

Es sei $\lambda,t>0$, $i = 1$ für $N = 1$ bzw. $i\in\mathbb{N}$ für $N = \infty$, $j\in\{1,\dots,n\}$.
(1) Die ZV τ_j^i ist $G(1,\lambda)$ verteilt.
(2) Die ZV T_j^i ist $G(i,\lambda)$ verteilt.
(3) Die ZV $D_j(t)$ ist $\mathcal{P}(\lambda t)$[1] bzw. $\mathcal{B}(1,1-e^{-\lambda t})$[2] verteilt für $N=\infty$ bzw. $N=1$.

<u>Beweis:</u>

Es sei $\lambda,t>0$.

<u>Zu (1):</u> Ist nach Definition (1.3) und (1.4) trivial.
<u>Zu (2):</u> $G(k,\lambda)$ ist die k-fache Faltung der $G(1,\lambda)$ Verteilung (vergl. W. Feller, Bd. II [11]). Damit folgt nach Definition (1.4) und wegen der stochastischen Unabhängigkeit der τ_j^i d.B.
<u>Zu (3):</u> Nach Definition (1.4) und (2) gilt

$$P_n^N(\{\omega\in\Omega_n^N \mid D_j(t)(\omega) = 0\}) = P_n^N(\{\omega\in\Omega_n^N \mid T_j^1(\omega) \geq t\}) = 1-G(t|1,\lambda) = e^{-\lambda t} \;;$$

$$P_n^\infty(\{\omega|D_j(t)(\omega)=k\})=P_n^\infty(\{\omega|T_j^k(\omega)<t,T_j^{k+1}(\omega)\geq t\})=G(t|k,\lambda)-G(t|k+1,\lambda)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

für $k\in\mathbb{N}$;

---

1) Eine ZV mit der WV $\mathcal{P}(x|a) = \frac{a^x}{x!}e^{-a}(a>0,\ x\in\mathbb{N}_0)$ heißt $\mathcal{P}(a)$ verteilt.

2) Eine ZV mit der WV $\mathcal{B}(x|n,p) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$ $(p\in(0,1),x\in\{0,\dots,n\})$ heißt $\mathcal{B}(n,p)$ verteilt.

$$P_n^1\ (\{\omega|D_j(t)(\omega) = 1\}) = P_n^1\ (\{\omega|T_j^1(\omega)<t\}) = G(t|1,\lambda) = 1-e^{-\lambda t}\ .$$

Also gilt

$$P_n^N\ (\{\omega\in\Omega_n^N|D_j(t)(\omega) = k\}) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\ e^{-\lambda t}\ (k\in\mathbb{N}_0) & : N = \infty \\ \binom{1}{k}(1-e^{-\lambda t})^k\ e^{-\lambda t(1-k)}\ (k\in\{0,1\}) & : N = 1, \end{cases}$$

damit f.d.B.

Definition (1.6)

Es sei $t>0$, $k\in\{1,\dots,n\}$ für $N = 1$ bzw. $k\in\mathbb{N}$ für $N = \infty$.

(1) Die ZV $D(t) : \Omega_n^N \to \mathbb{N}_0$ mit $D(t) = \sum_{j=1}^{n} D_j(t)$ heißt die Anzahl der Ausfälle in einem Lebensdauerexperiment in $[0,t)$.

(2) Die ZV $T_k : \Omega_n^N \to \mathbb{R}^+$ mit

$$T_k(\omega) = \sup\ \{T_j^i(\omega)|D(T_j^i(\omega))(\omega)<k,\ i\in\{1,\dots,k\},\ j\in\{1,\dots,n\}\}$$

für $\omega\in\Omega_n^N$ heißt k-ter Ausfallzeitpunkt in einem Lebensdauerexperiment.

Satz (1.7)

Es sei $\lambda,t>0$, $k\in\{1,\dots,n\}$ für $N = 1$ bzw. $k\in\mathbb{N}$ für $N = \infty$.

(1) $D(t)$ ist $\mathcal{P}(n\lambda t)$ bzw. $\mathcal{B}(n,\ 1-e^{-\lambda t})$ verteilt für $N = \infty$ bzw. $N = 1$.

(2) T_k ist $G(k,n\lambda)$ verteilt für $N = \infty$ und besitzt für $N = 1$ die VF

$$F_k(t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}(1-e^{-\lambda t})^i\ e^{-\lambda t(n-i)}$$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte (WD)

$$f_k(t) = n\binom{n-1}{k-1}(1-e^{-\lambda t})^{k-1}\ e^{-(n-k)\lambda t}\ \lambda e^{-\lambda t}.$$

Beweis:

Zu (1): Es sei $a>0$, $p\in(0,1)$, $n\in\mathbb{N}$. $\mathcal{P}(na)$ bzw. $\mathcal{B}(n,p)$ ist die n-fache Faltung der $\mathcal{P}(a)$ bzw. $\mathcal{B}(1,p)$ Verteilung (vergl. W. Feller, Bd. I, [11]). Ferner ist $D_j(t)$ nach Folgerung (1.5) $\mathcal{P}(\lambda t)$ bzw. $\mathcal{B}(1,\ 1-e^{-\lambda t})$ verteilt für $N = \infty$ bzw. $N = 1$. Damit folgt nach Definition (1.6) und wegen der stochastischen Unabhängigkeit der $D_j(t)$ d.B.

Zu (2): Es sei $\lambda, t>0$, $k\in\{1,\dots,n\}$ für $N = 1$ bzw. $k\in\mathbb{N}$ für $N = \infty$, $\omega\in\Omega_n^N$. Nach Definition (1.6) folgt $D(t)(\omega)<k \Longleftrightarrow T_k(\omega)\geq t$, also gilt $P_n^N(\{\omega|T_k(\omega)<t\}) = P_n^N(\{\omega|D(t)(\omega)\geq k\})$. Es folgt mit (1)

$$P_n^N(\{\omega|T_k(\omega)<t\}) = \begin{cases} 1-\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(n\lambda t)^i}{i!} e^{-n\lambda t} = G(t|k,n\lambda) & : N = \infty \\ \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}(1-e^{-\lambda t})^i e^{-\lambda t(n-i)} = F_k(t) & : N = 1. \end{cases}$$

Es gilt

$$\frac{dF_k(t)}{dt} = \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i} i(1-e^{-\lambda t})^{i-1} \lambda e^{-\lambda t} e^{-(n-i)\lambda t} - \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}(1-e^{-\lambda t})^i (n-i)\lambda e^{-(n-i)\lambda t}$$

$$= n\lambda e^{-\lambda t} \left(\sum_{i=k}^{n}\binom{n-1}{i-1}(1-e^{-\lambda t})^{i-1} e^{-(n-i)\lambda t} - \sum_{i=k}^{n-1}\binom{n-1}{i}(1-e^{-\lambda t})^i e^{-(n-i-1)\lambda t}\right)$$

$$= n\lambda e^{-\lambda t} \left(\sum_{i=k}^{n}\binom{n-1}{i-1}(1-e^{-\lambda t})^{i-1} e^{-(n-i)\lambda t} - \sum_{j=k+1}^{n}\binom{n-1}{j-1}(1-e^{-\lambda t})^{j-1} e^{-(n-j)\lambda t}\right)$$

$$= n\binom{n-1}{k-1}(1-e^{-\lambda t})^{k-1} e^{-(n-k)\lambda t} \lambda e^{-\lambda t}.$$

Nach W. Feller Bd. II [11] gilt ferner

Folgerung (1.8)

Es sei $k\in\{1,\dots,n\}$ für $N = 1$ bzw. $k\in\mathbb{N}$ für $N = \infty$, $Y_k : \Omega_n^N \to \mathbb{R}^+$ mit $Y_k = \begin{cases} T_k & : k=1 \\ T_k - T_{k-1} & \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist die ZV Y_k $G(1,n\lambda)$ bzw. $G(1,(n-k+1)\lambda)$ verteilt für $N = \infty$ bzw. $N = 1$ und die Y_k sind stochastisch unabhängig.

Definition (1.9)

Es sei $r,n\in\mathbb{N}$, $N\in\{1,\infty\}$, $T>0$.

(1) Ein 7-Tupel $(\mathcal{X},\mathcal{B},P_X;X;(n,N,r))$ heißt ein Lebensdauerexperiment

nach einem Plan (n,N,r), wenn gilt

$\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^r$, dabei $r \leq n$ für $N = 1$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_r(\mathbb{R}_+^r)$

$X : \Omega_n^N \to \mathcal{X}$ mit $X(\omega) = (T_1(\omega), \dots, T_r(\omega))$, $\omega \in \Omega_n^N$

$P_X(B) = P_n^N(X^{-1}(B))\ \forall B \in \mathcal{B}$.

(2) Ein 7-Tupel $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_X; X; (n,N,T))$ heißt ein Lebensdauerexperiment nach einem Plan (n,N,T), wenn gilt

$\mathcal{X} = \bigcup_{k=0}^{nN} \Omega^k$ mit $\Omega^0 = \{0\}$, $\Omega^k = \bigtimes_{i=1}^{k} \Omega_i\ \forall k$, $\Omega_i = (0,T)\ \forall i$

$\mathcal{B}$ ist die von $\bigcup_{k=0}^{nN} \mathcal{B}^k$ erzeugte σ-Algebra mit $\mathcal{B}^0 = \mathcal{P}(\Omega^0)$, $\mathcal{B}^k = \bigotimes_{i=1}^{k} \mathcal{R}_i\ \forall k$,

$\mathcal{R}_i = \mathcal{B}_1((0,T))\ \forall i$

$X : \Omega_n^N \to \mathcal{X}$ mit

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & : D(T)(\omega) = 0,\ \omega \in \Omega_n^N \\ (T_1(\omega), \dots, T_k(\omega)) \in \Omega^k & : D(T)(\omega) = k,\ k \geq 1,\ \omega \in \Omega_n^N \end{cases}$$

$P_X(B) = P_n^N(X^{-1}(B))\ \forall B \in \mathcal{B}$.

Bemerkung zu (2):

Man interessiert sich für den Ausgangsraum eines Lebensdauerexperiments, das bis zur Zeit T läuft. Beobachtet werden die Ausfallzeitpunkte der geprüften Elemente. Wurden k Ausfälle in der Zeit T beobachtet, so hat man den Ausgang des Experiments in der Form eines Elements x aus Ω^k gegeben. Der Ausgangsraum eines solchen Experiments besteht somit aus der Vereinigung der möglichen Ω^k.

Folgerung (1.10)

Es sei $\lambda > 0$.

(1) Es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_X; X; (n,N,r))$ ein Lebensdauerexperiment nach einem Plan (n,N,r), $(t_1, \dots, t_r) \in \mathcal{X}$. Dann ist P_X gegeben durch die WD

$$f_X(t_1,\dots,t_r) =$$
$$= \begin{cases} (n\lambda)^r e^{-n\lambda t_r} & : N=\infty,\ 0<t_1\leq t_2\leq\dots\leq t_r \\ n(n-1)\dots(n-r+1)\lambda^r e^{-\lambda(\sum_{i=1}^{r} t_i+(n-r)t_r)} & : N=1,\ 0<t_1\leq t_2\leq\dots\leq t_r \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(2) Es sei $(\mathfrak{X},\mathfrak{B},P_X;X;(n,N,T))$ ein Lebensdauerexperiment nach einem Plan (n,N,T), $k\in\{1,\dots,n\}$ für $N = 1$ bzw. $k\in\mathbb{N}$ für $N = \infty$, $(t_1,\dots,t_k)\in\Omega^k\subset\mathfrak{X}$. Dann ist P_X auf Ω^k gegeben durch die WD

$$f_{X,\Omega^k}(t_1,\dots,t_k) =$$
$$= \begin{cases} (n\lambda)^k e^{-\lambda nT} & : N=\infty,\ 0<t_1\leq t_2\leq\dots\leq t_k<T \\ n(n-1)\dots(n-k+1)\lambda^k e^{-\lambda(\sum_{i=1}^{k} t_i+(n-k)T)} & : N=1,\ 0<t_1\leq t_2\leq\dots\leq t_k<T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $P_X(\Omega^0) = e^{-\lambda nT}$.

<u>Beweis:</u>

<u>Zu (1):</u> Es sei $r\in\mathbb{N}$, $Y_i(i\leq r)$ ZV auf $(\Omega_n^N,\mathfrak{X}_n^N,P_n^N)$ definiert wie in Folgerung (1.8), $Y = (Y_1,\dots,Y_r)$. Nach Definition (1.9) ist $X = (T_1,\dots,T_r)$. Nach Folgerung (1.8) folgt damit $Y' = AX'$ mit $A = (a_{ij})_{i,j} = 1,\dots,r$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & : j = i \\ -1 & : j = i-1, \text{ und es ist } \det A = 1. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Folgerung (1.8) lautet wegen der stochastischen Unabhängigkeit der Y_i die WD von Y

$$f_Y(y_1,\dots,y_r) =$$
$$= \begin{cases} (n\lambda)^r e^{-n\lambda(y_1+\dots+y_r)} & : N=\infty,\ y_i>0(i\in\{1,\dots,r\}) \\ n(n-1)\dots(n-r+1)\lambda^r e^{-\lambda(ny_1+(n-1)y_2+\dots+(n-r+1)y_r)} & : N=1,\ y_i>0(i\in\{1,\dots,r\}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man erhält $f_X(x) = f_Y((Ax')')J$ mit $J = \left|\frac{\partial(y_1,\dots,y_r)}{\partial(t_1,\dots,t_r)}\right|$ für $x = (t_1,\dots,t_r)$, $y = (y_1,\dots,y_r)$. Es ist $J = |\det A| = 1$, also

$f_X(t_1,\dots,t_r) = f_Y(t_1,t_2-t_1,\dots,t_r-t_{r-1})$. Setzt man in $f_Y(.)$ ein, so erhält man

$$f_X(t_1,\dots,t_r) = \begin{cases} (n\lambda)^r e^{-n\lambda t_r} & : N=\infty,\ 0<t_1\leq t_2\leq\dots\leq t_r \\ n(n-1)\dots(n-r+1)\lambda^r e^{-\lambda(t_1+t_2+\dots+t_{r-1}+(n-r+1)t_r)} & : N=1,\ 0<t_1\leq t_2\leq\dots\leq t_r \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zu (2): Es sei $k\in\{1,\dots,n\}$ für $N=1$ bzw. $k\in\mathbb{N}$ für $N=\infty$, $0<t_1\leq t_2\leq\dots\leq t_k<T$, $A^k = \{(x_1,\dots,x_k)\in\Omega^k | x_1<t_1,\dots,x_k<t_k\}$. Nach Definition (1.6) folgt $D(T)(\omega)<k \Leftrightarrow T_k(\omega)\geq T$, also $D(T)(\omega)\geq k \Leftrightarrow T_k(\omega)<T$. Daraus folgt $D(T)(\omega) = k \Leftrightarrow T_k(\omega)<T\leq T_{k+1}(\omega)$. Damit gilt nach Definition (1.9) $P_X(A^k) = P_n^N(\{\omega|T_1(\omega)<t_1,\dots,T_k(\omega) < t_k, T_{k+1}(\omega)\geq T\})$. Sei $X^k = (T_1,\dots,T_{k+1})$, dann hat X^k nach (1) mit $r = k+1$ die WD

$$f_{X^k}(x_1,\dots,x_{k+1}) = \begin{cases} (n\lambda)^{k+1} e^{-n\lambda x_{k+1}} & : N=\infty,\ 0<x_1\leq x_2\leq\dots\leq x_{k+1} \\ n(n-1)\dots(n-k)\lambda^{k+1} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^{k+1} x_i+(n-k-1)x_{k+1})} & : N=1,\ 0<x_1\leq x_2\leq\dots\leq x_{k+1} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit kann man schreiben $P_X(A^k) = \int_0^{t_1}\int_{x_1}^{t_2}\dots\int_{x_{k-1}}^{t_k}\int_T^{\infty} f_{X^k}(x_1,\dots,x_{k+1})dx_1\dots dx_{k+1}$.

Man hat also zu zeigen, daß $f_{X,\Omega^k}(x_1,\dots,x_k) = \int_T^{\infty} f_{X^k}(x_1,\dots,x_{k+1})dx_{k+1}$.

Man erhält

$$\int_T^{\infty} f_{X^k}(x_1,\dots,x_{k+1})dx_{k+1} = \begin{cases} (n\lambda)^k e^{-n\lambda T} & : N=\infty,\ 0<x_1\leq x_2\leq\dots\leq x_k \\ n(n-1)\dots(n-k+1)\lambda^k e^{-\lambda(\sum_{i=1}^{k} x_i+(n-k)T)} & : N=1,\ 0<x_1\leq x_2\leq\dots\leq x_k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Definition (1.9) gilt $P_X(\Omega^0) = P_n^N(\{\omega|D(T)(\omega) = 0\})$. Damit folgt nach Satz (1.7) d.B.

Definition (1.11)

Es sei $(\mathfrak{X},\mathfrak{B},P_X;X;(n,N,r))$ ein Lebensdauerexperiment nach einem Plan (n,N,r), $x = (x_1,\dots,x_r)\in\mathfrak{X}$.

(1) Die ZV $T^N : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}^+$ mit $T^N(x) = x_r$ heißt Experimentdauer.

(2) Die ZV $S^N : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+$ mit

$$S^N(x) = \begin{cases} nx_r & : \ N = \infty \\ \sum_{i=1}^{r} x_i + (n-r)x_r & : \ N = 1 \end{cases}$$

heißt summarische Betriebszeit für einen Plan (n,N,r).

Für eine Realisation $x \in \mathcal{X}$ gibt $S^N(x)$ die summarische Betriebszeit der n Elemente an, die in einem Lebensdauerexperiment nach einem Plan (n,N,r) geprüft wurden.

<u>Definition (1.12)</u>

Es sei $(\mathcal{X},\mathcal{B},P_X;X;(n,N,T))$ ein Lebensdauerexperiment nach einem Plan (n,N,T), $k \in \{0,\dots,n\}$ für $N = 1$ bzw. $k \in \mathbb{N}_0$ für $N = \infty$, $\Omega^k \subset \mathcal{X}$ definiert wie in Definition (1.9), $x = (x_1,\dots,x_k) \in \Omega^k$ für $k \geq 1$.

(1) Die ZV $D^N : \mathcal{X} \to \mathbb{N}_0$ mit $D^N(x) = k$ für $x \in \Omega^k$ heißt Anzahl der Ausfälle im Lebensdauerexperiment.

(2) Die ZV $\tilde{S}^N : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+$ mit

$$\tilde{S}^N(x) = \begin{cases} nT & : \ N = 1,\ x \in \Omega^0;\ N = \infty \\ \sum_{i=1}^{k} x_i + (n-k)T & : \ N = 1,\ x \in \Omega^k (k \geq 1) \end{cases}$$

heißt summarische Betriebszeit für einen Plan (n,N,T).

<u>Satz (1.13)</u>

Es sei $\lambda, t > 0$.

(1) T^N ist $G(r,n\lambda)$ verteilt für $N = \infty$ und besitzt für $N = 1$ die VF

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} (1-e^{-\lambda t})^i e^{-\lambda t(n-i)} \text{ mit}$$

$$E(T^N) = \begin{cases} \dfrac{r}{\lambda n} & : N=\infty \\ \dfrac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{r} \dfrac{1}{n-i+1} & : N=1 \end{cases}, \quad Var(T^N) = \begin{cases} \dfrac{r}{(n\lambda)^2} & : N=\infty \\ \dfrac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{r} \dfrac{1}{(n-i+1)^2} & : N=1. \end{cases}$$

(2) S^N ist $G(r,\lambda)$ verteilt mit $E(S^N) = \frac{r}{\lambda}$, $Var(S^N) = \frac{r}{\lambda^2}$ für $N = \infty$ bzw. $N = 1$.

(3) D^N ist $\mathcal{P}(n\lambda T)$ bzw. $\mathcal{B}(n,1-e^{-\lambda T})$ verteilt für $N=\infty$ bzw. $N = 1$ mit

$$E(D^N) = \begin{cases} n\lambda T & : N=\infty \\ n(1-e^{-\lambda T}) & : N=1 \end{cases}, \quad Var(D^N) = \begin{cases} n\lambda T & : N=\infty \\ n(1-e^{-\lambda T})e^{-\lambda T} & : N=1. \end{cases}$$

Beweis:

Zu (1): Nach Definition (1.9) und (1.11) folgt $T^N \circ X = T_r$. Also gilt $P_X(\{x\in\mathfrak{X}|T^N(x)<t\}) = P_n^N(\{\omega\in\Omega_n^N|T_r(\omega)<t\})$, damit ergibt sich nach Satz (1.7) die WV von T^N. Eine $G(\nu,\alpha)$ verteilt ZV hat den Erwartungswert $\frac{\nu}{\alpha}$ und die Varianz $\frac{\nu}{\alpha^2}$ (vergl. W. Feller Bd. II, /‾11_/). Damit erhält man $E(T^\infty) = \frac{r}{n\lambda}$, $Var(T^\infty) = \frac{r}{(n\lambda)^2}$, damit folgt d.B. für $N = \infty$. Nach Folgerung (1.8) folgt $T_r = Y_1+\ldots+Y_r$. Also gilt $E(T^1) = E(Y_1)+\ldots+ E(Y_r)$ und wegen der stochastischen Unabhängigkeit der Y_k $Var(T^1) = Var(Y_1)+\ldots+Var(Y_r)$. Damit gilt nach Folgerung (1.8) $E(T^1) = \frac{1}{\lambda n} + \ldots + \frac{1}{\lambda(n-r+1)}$, $Var(T^1) = \frac{1}{(\lambda n)^2} +\ldots+ \frac{1}{(\lambda(n-r+1))^2}$.

Zu (2): Nach Definition (1.9) und (1.11) gilt $P_X(\{x|S^N(x)<s\}) = P_n^N(\{\omega|S^N\circ X(\omega)<s\})$. Für $N = \infty$ gilt somit nach Definition $P_X(\{x|S^\infty(x)<s\}) = P_n^\infty(\{\omega|nT_r(\omega)<s\})$ und nach Satz (1.7) gilt $P_n^\infty(\{\omega|T_r(\omega)<t\}) = 1-\sum_{k=o}^{r-1}\frac{(n\lambda t)^k}{k!} e^{-n\lambda t}$. Damit gilt $P_X(\{x|S^\infty(x)<s\}) = 1-\sum_{k=o}^{r-1}\frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} = G(s|r,\lambda)$ und $E(S^\infty) = \frac{r}{\lambda}$, $Var(S^\infty) = \frac{r}{\lambda^2}$, d.f.d.B. für $N = \infty$.

Für $N = 1$ gilt nach Definition (1.11) $S^1 \circ X = \sum_{i=1}^{r} T_i+(n-r)T_r =: \hat{S}$.
Dies kann man umschreiben: $\hat{S} = nT_1+(n-1)(T_2-T_1)+\ldots+(n-r+1)(T_r-T_{r-1})$ und nach Folgerung (1.8) gilt $\hat{S} = nY_1+(n-1)Y_2+\ldots+(n-r+1)Y_r$. Nach Folgerung (1.8) gilt ferner $P_n^1(\{\omega|Y_k(\omega)<t\}) = G(t|1,(n-k+1)\lambda) = 1-e^{-\lambda(n-k+1)t}$. Damit folgt $(n-k+1)Y_k$ ist $G(1,\lambda)$ verteilt für $k\in\{0,\ldots,n\}$. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit der Y_k ist die

Verteilung von $\hat{S}$ die r-fache Faltung der $G(1,\lambda)$ Verteilung, also ist S^1 $G(r,\lambda)$ verteilt und $E(S^1) = \frac{r}{\lambda}$, $Var(S^1) = \frac{r}{\lambda^2}$.

Zu (3): Nach Definition (1.9) und (1.11) folgt $D^N \circ X = D(T)$. Also gilt $P_X(\{x\in\mathcal{X} | D^N(x) = k\}) = P_n^N(\{\omega\in\Omega_n^N | D(T)(\omega) = k\})$. Damit ist D^N nach Satz (1.7) $\mathcal{P}(n\lambda T)$ bzw. $\mathcal{B}(n,1-e^{-\lambda T})$ verteilt für $N = \infty$ bzw. $N = 1$. Eine $\mathcal{P}(a)$ bzw. $\mathcal{B}(n,p)$ verteilte ZV hat den Erwartungswert a bzw. np und die Varianz a bzw. np(1-p) (vergl. W. Feller Bd. I [11]). Damit erhält man

$$E(D^N) = \begin{cases} n\lambda T & : N = \infty \\ n(1-e^{-\lambda T}) & : N = 1 \end{cases}, \quad Var\ (D^N) = \begin{cases} n\lambda T & : N = \infty \\ n(1-e^{-\lambda T})e^{-\lambda T} & : N = 1. \end{cases}$$

Nach Definition (1.11) bzw. (1.12) und Folgerung (1.10) folgt mit dem Neyman-Kriterium und dem Satz über die Vollständigkeit der Exponentialfamilie (vergl. H. Witting [19], Satz 3.22 und Satz 3.25):

Folgerung (1.14)

(1) Für $(\mathcal{X},\mathcal{B},P_X;X;(n,N,r))$ ist S^N eine vollständige suffiziente Statistik für $\lambda\in(0,\infty)$.

(2) Für $(\mathcal{X},\mathcal{B},P_X;X;(n,\infty,T))$ ist D^∞ eine vollständige suffiziente Statistik für $\lambda\in(0,\infty)$.

(3) Für $(\mathcal{X},\mathcal{B},P_X;X;(n,1,T))$ ist $(D^1,\tilde{S}^1)$ suffiziente Statistik für $\lambda\in(0,\infty)$.

2. Statistische Auswertung

Die Auswertung des Beobachtungsmaterials aus einem Lebensdauerexperiment kann nach verschiedenen statistischen Verfahren erfolgen, wobei die Wahl eines Verfahrens im wesentlichen von der jeweiligen Problemstellung abhängt. Im folgenden soll nicht das Problem der Auswahl einer geeigneten Auswertungsmethode behandelt, sondern die üblicherweise benutzten statistischen Verfahren zur Auswertung des Beobachtungsmaterials dargestellt werden. Zur Bestimmung der Zuverlässigkeit kommen für praktische Problemstellungen im allgemeinen nur Alternativtests, Parameterbereichsschätzungen und Parameterpunktschätzungen zur Anwendung.

Im konkreten Fall hat man zur Bestimmung der Zuverlässigkeit einen Plan zur Durchführung eines Lebensdauerexperiments und ein statistisches Verfahren zur Auswertung desselben anzugeben. Hat man sich für ein statistisches Verfahren vom geeigneten Typ entschieden, so ist es zweckmäßig, für die Auswahl eines günstigen Plans nur solche Pläne zur Konkurrenz zuzulassen, die eine optimale statistische Auswertung des Beobachtungsmaterials gestatten, d.h. es soll möglich sein, bei vorgegebener Schadensfunktion und vorgegebenem Optimalitätskriterium ein optimales statistisches Verfahren auszuwählen.

Bei praktischen Problemstellungen hat man für die Auswahl eines geeigneten Plans zur Durchführung eines Lebensdauerexperiments häufig noch weitere Forderungen zu berücksichtigen. Eine davon ist die Forderung einer bestimmten Güte der statistischen Aussage, die aus ökonomischen oder aus Sicherheitsgründen von Interesse ist. Dabei soll die Güte der statistischen Aussage nicht zur Bewertung von statistischen Verfahren dienen, sondern zur Beurteilung von Plänen für die Durchführung eines Lebensdauerexperiments herangezogen werden in dem Sinne, daß durch die Güte der statistischen Aussage ein praxisrelevantes Maß für die Aussagekraft der, bei einem gegebenen Plan und dem dazugehörigen optimalen statistischen Verfahren, zu erwartenden statistischen Aussage gegeben ist. Im Fall von Kernkraftwerken ist man beispielsweise daran interessiert, daß die Zuverlässigkeit innerhalb eines vorgegebenen Intervalls liegt oder eine bestimmte Mindestzuverlässigkeit erreicht wird. Darf man nun davon ausgehen (was hier unterstellt werden soll), daß sich die Zuverlässigkeit des Systems aus der Zuverlässigkeit der einzelnen Elemente des Systems ermitteln läßt, so kann man aus einer Forderung für die Zuverlässigkeit des Systems die entsprechenden Zuverlässigkeitsforderungen für die einzelnen Elemente bestimmen. Man wird dann die Elemente in einem Lebensdauerexperiment testen und an Hand der erhaltenen statistischen Aussage prüfen, ob die gestellten Forderungen erfüllt sind. Hat man sich z.B. im Hinblick auf die Auswertung für Konfidenzintervallschätzungen zu einem vorgegebenen Niveau entschieden, so kann man die Zuverlässigkeitsforderung in Form eines zulässigen Konfidenzintervalls angeben. In diesem Fall ist es zweckmäßig, die zu erwartende Länge des Konfidenzintervalls als Maß für die Güte der statistischen Aussage zu betrachten. Für den Nachweis der Zuverlässigkeitsforderung durch ein Lebensdauerexperiment wird man nur solche Pläne zur Konkurrenz zulassen, für die die zu erwartende Länge des Konfidenzintervalls bei gegebenem Konfidenzniveau kleiner (oder gleich) ist als die des zulässigen Konfidenzintervalls.

Im folgenden werden Alternativtests, Parameterbereichsschätzungen und Parameterpunktschätzungen besprochen und für jedes Verfahren ein praxisrelevantes Maß für die Güte der statistischen Aussage eingeführt.

Hat man ein Lebensdauerexperiment nach einem Plan $(\mathcal{X},\mathcal{B},P_X;X;(n,.,.))$ durchgeführt, so ist das Beobachtungsmaterial in der Form eines Elements x aus $\mathcal{X}$ und das Vorwissen über P_X in der Form $W := \{P_{X,\lambda} | \lambda \in (0,\infty)\}$ gegeben.

<u>Alternativtest:</u>

Im folgenden werden nur Hypothesen der Form

$H_0 : P_{X,\lambda} \in W_0 := \{P_{X,\lambda} | \lambda < \lambda_0\}$

$H_1 : P_{X,\lambda} \in W_1 := \{P_{X,\lambda} | \lambda > \lambda_0\}$

mit $\lambda_0 > 0$ betrachtet. Als Entscheidungsbereich hat man $\Delta := \{d_{H_0}, d_{H_1}\}$, wobei d_{H_0} Annahme von H_0 und d_{H_1} Annahme von H_1 bedeutet. Als Schadensfunktion wählt man:

$$s(P_{X,\lambda},d(x)) = \begin{cases} 1 : d(x) = d_{H_1},\ P_{X,\lambda}\in W_0;\ d(x) = d_{H_0},\ P_{X,\lambda}\in W_1 \\ 0 : d(x) = d_{H_0},\ P_{X,\lambda}\in W_0;\ d(x) = d_{H_1},\ P_{X,\lambda}\in W_1. \end{cases}$$

Die Risikofunktion lautet dann für einen Test d mit kritischem Bereich K_d

$$R(P_{X,\lambda},d) = E_\lambda(s(P_{X,\lambda},d)) = \begin{cases} P_{X,\lambda}(K_d) & : P_{X,\lambda}\in W_0 \\ 1-P_{X,\lambda}(K_d) & : P_{X,\lambda}\in W_1. \end{cases}$$

Satz (2.1)

Es sei $c\in\mathbb{R}_+$, $k\in\mathbb{N}_0$, d ein Test für H_0 gegen H_1 mit

(1) $$d(x) = \begin{cases} d_{H_1} : & S^N(x)<c \\ d_{H_0} : & S^N(x)\geq c \end{cases}, \text{ für Pläne vom Typ } (n,N,r);$$

(2) $$d(x) = \begin{cases} d_{H_1} : & D^\infty(x)>k \\ d_{H_0} : & D^\infty(x)\leq k \end{cases}, \text{ für Pläne vom Typ } (n,\infty,T).$$

Dann ist d ein Test zum Niveau $\begin{cases} P_{\lambda_0}(S^N<c) : & (n,N,r) \\ P_{\lambda_0}(D^\infty>k) : & (n,\infty,T) \end{cases}$, der die Fehlerwahrscheinlichkeiten 1. und 2. Art gleichmäßig minimiert.

Beweis:

Es sei $\lambda\in(0,\infty)$, $f_\lambda(x)$ die WD von X für ein Lebensdauerexperiment $(\mathfrak{X},\mathfrak{B},P_X;X;(n,.,.))$. Nach H. Witting /‾19_7, Satz (2.29) und Corollar (2.30), genügt es zu zeigen, daß der Likelihoodquotient $\frac{f_{\lambda_1}(x)}{f_{\lambda_0}(x)}$ für $0<\lambda_0<\lambda_1$ monoton ist. Nach Definition (1.6) und Definition (1.9) hat eine Realisation $x\in\mathfrak{X}$ die Gestalt

$$x = \begin{cases} (x_1,\dots,x_r),\ 0<x_1\leq x_2\leq\dots\leq x_r & : (n,N,r) \\ 0 \text{ bzw. } (x_1,\dots,x_k),\ 0<x_1\leq x_2\leq\dots\leq x_k<T,\ k\in\mathbb{N} & : (n,\infty,T) \end{cases}.$$ Damit gilt

nach Folgerung (1.10), Definition (1.11) und Definition (1.12)

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} (n\lambda)^r e^{-\lambda S^\infty(x)} & : N = \infty \\ n(n-1)\ldots(n-r+1)\lambda^r e^{-\lambda S^1(x)} & : N = 1 \end{array}\right\} : & (n,N,r) \\ (n\lambda)^{D^\infty(x)} e^{-\lambda nT} & : (n,\infty,T). \text{ Also gilt} \end{cases}$$

$$\frac{f_{\lambda_1}(x)}{f_{\lambda_0}(x)} = \begin{cases} e^{r\ln(\frac{\lambda_1}{\lambda_0})-(\lambda_1-\lambda_0)S^N(x)} & : (n,N,r) \\ e^{D^\infty(x)\ln(\frac{\lambda_1}{\lambda_0})-(\lambda_1-\lambda_0)nT} & : (n,\infty,T). \text{ Damit folgt d.B., da} \end{cases}$$

$\frac{f_{\lambda_1}(x)}{f_{\lambda_0}(x)}$ monoton fallend in $S^N(x)$ bzw. monoton steigend in $D^\infty(x)$ ist.

Bemerkung (2.2):

Im Unterschied zu Lebensdauerexperimenten nach Plänen vom Typ (n,N,r) und (n,∞,T) gibt es für Lebensdauerexperimente nach Plänen vom Typ $(n,1,T)$ keinen Test, der die Fehlerwahrscheinlichkeiten 1. und 2. Art gleichmäßig minimiert (vergl. J.K. Beljajew e.a. [2], Kapitel 6). Analoge Aussagen gibt es auch bezüglich der anderen hier betrachteten statistischen Verfahren.

Da jedoch im folgenden Pläne verschiedenen Typs miteinander verglichen werden sollen, die statistischen Verfahren für Pläne vom Typ $(n,1,T)$ aber nicht die gleichen Optimalitätskriterien erfüllen wie die der Pläne der anderen Typen und somit ein größeres Risiko ergeben, sollen die Pläne vom Typ $(n,1,T)$ nicht weiter untersucht werden.

Folgerung (2.3)

Es sei $\alpha\in(0,1)$, $0<\lambda_0<\lambda_1<\infty$, d ein Test für H_0 gegen H_1 zum Niveau α definiert wie im Satz (2.1) mit $k\in\mathbb{N}_0$:
$P_{\lambda_0}(D^\infty>k) = \alpha'\leq\alpha<P_{\lambda_0}(D^\infty>k-1)$ für Pläne vom Typ (n,∞,T), G_d Gütefunktion von d, $G_d(\lambda_1) = 1-\alpha$. Dann gilt

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = \begin{cases} \dfrac{\hat{F}_{2r}(1-\alpha)}{\hat{F}_{2r}(\alpha)} - 1 & : (n,N,r)\ ^{1)} \\[2ex] \dfrac{\hat{F}_{2(k+1)}(1-\alpha)}{\hat{F}_{2(k+1)}(\alpha)} - 1 & : (n,\infty,T) \text{ mit } 2\lambda_0 nT \leq \hat{F}_{2(k+1)}(\alpha). \end{cases}$$

Beweis:

Nach Satz (2.1) gilt

$$G_d(\lambda) = \begin{cases} P_\lambda(S^N < c) & : (n,N,r) \\ P_\lambda(D^\infty > k) & : (n,\infty,T) \end{cases} \quad \text{mit } G_d(\lambda_0) \begin{cases} = \alpha & : (n,N,r) \\ \leq \alpha & : (n,\infty,T). \end{cases}$$

Nach Satz (1.13) gilt ferner S^N ist $G(r,\lambda)$ verteilt bzw. D^∞ ist $\mathcal{P}(\lambda nT)$ verteilt.

Also gilt

$$G_d(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^c \frac{\lambda^r t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda t} dt = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda c)^i}{i!} e^{-\lambda c} = F_{2r}(2\lambda c) & : (n,N,r) \\ \displaystyle 1 - \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda nT)^i}{i!} e^{-\lambda nT} = F_{2(k+1)}(2\lambda nT) & : (n,\infty,T). \end{cases}$$

Daraus folgt wegen

$$G_d(\lambda_0) \begin{cases} = \alpha & : (n,N,r) \\ \leq \alpha & : (n,\infty,T) \end{cases}$$

$c = \frac{1}{2\lambda_0} \hat{F}_{2r}(\alpha)$ für (n,N,r), $2\lambda_0 nT \leq \hat{F}_{2(k+1)}(\alpha)$ für (n,∞,T). Damit folgt wegen

$$1-\alpha = G_d(\lambda_1) = \begin{cases} F_{2r}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \hat{F}_{2r}(\alpha)\right) & : (n,N,r) \\ F_{2(k+1)}(2\lambda_1 nT) & : (n,\infty,T) \end{cases}, \text{ d.B.}$$

---

1) Eine ZV mit der VF $F_m(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma(\frac{m}{2}) 2^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{t}{2}} dt$ $(m \in \mathbb{N}, x \in (0,\infty))$ heißt F_m bzw. χ^2 verteilt mit m Freiheitsgraden. $\hat{F}_m(.)$ ist die Umkehrfunktion von $F_m(.)$, also $\displaystyle\int_0^{\hat{F}_m(\alpha)} \frac{t^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma(\frac{m}{2}) 2^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{t}{2}} dt = \alpha.$

Bemerkung:

Durch die Steigung der Gütefunktion eines Tests im Bereich der "Nahtstelle" zwischen den beiden Hypothesen wird beschrieben, wie gut der Test die Hypothesen trennt. Im Idealfall ist die Gütefunktion eine Sprungfunktion: $G_d(\lambda) = \begin{cases} 0 : \lambda \leq \lambda_0 \\ 1 : \lambda > \lambda_0 \end{cases}$. Um die Betrachtung von Gütefunktionen bzw. ihrer Steigungen zu vermeiden und auf einfache Art Tests vergleichen zu können, benutzt man in vergröbernder Weise die Länge des Intervalls $[\lambda_0, \lambda_1]$ (s. Fig. 1) als Maßzahl für die Steigung der Gütefunktion. Im folgenden wird daher die normierte Länge $\frac{\lambda_1-\lambda_0}{\lambda_0}$ als Maß für die Güte der statistischen Aussage eines Tests benutzt.

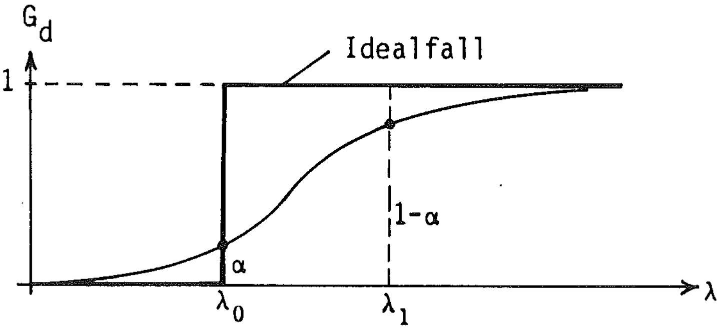

Fig. 1

Parameterbereichschätzung:

Der zu dem Vorwissen W gehörige Parameterbereich ist $\Lambda := \{\lambda | \lambda \in (0,\infty)\}$. Als Entscheidungsbereich wird $\Delta := \mathcal{P}(\Lambda)$ betrachtet.

Nach J.K. Beljajew e.a. [2], Kapitel 5, (vergl. auch H. Witting [19], Satz 2.32, bzw. Beispiel 2.17) gilt:

Satz (2.4)

Es sei $\alpha \in (0,1)$, $C(x) = [\underline{\lambda}(x), \overline{\lambda}(x)]$ eine Parameterbereichschätzung, bzw. ein Konfidenzintervall für λ mit

$$\underline{\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{\hat{F}_{2r}(\frac{\alpha}{2})}{2\, S^N(x)} & : (n,N,r) \\[2ex] \dfrac{\hat{F}_{2D^\infty(x)}(\frac{\alpha}{2})}{2nT} & : (n,\infty,T) \end{cases}, \quad \overline{\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{\hat{F}_{2r}(1-\frac{\alpha}{2})}{2\, S^N(x)} & : (n,N,r) \\[2ex] \dfrac{\hat{F}_{2(D^\infty(x)+1)}(1-\frac{\alpha}{2})}{2nT} & : (n,\infty,T). \end{cases}$$

Dann ist C(x) ein Konfidenzintervall für λ zum Niveau 1-α.

Folgerung (2.5)

Es sei $r>1$, $[\underline{\lambda}(x),\overline{\lambda}(x)]$ ein Konfidenzintervall für λ zum Niveau $1-\alpha$ definiert wie in Satz (2.4). Dann gilt

$$E_\lambda\left(\frac{\overline{\lambda}(x)-\underline{\lambda}(x)}{\lambda}\right) = \begin{cases} \dfrac{\hat{F}_{2r}(1-\frac{\alpha}{2})-\hat{F}_{2r}(\frac{\alpha}{2})}{2(r-1)} & : (n,N,r) \\[2ex] \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{\hat{F}_{2(i+1)}(1-\frac{\alpha}{2})-\hat{F}_{2i}(\frac{\alpha}{2})}{2} \; \dfrac{(\lambda nT)^{i-1}}{i!} e^{-\lambda nT} & : (n,\infty,T). \end{cases}$$

Beweis:

Nach Satz (1.13) gilt: S^N ist $G(r,\lambda)$ verteilt bzw. D^∞ ist $\mathcal{P}(\lambda nT)$ verteilt. Damit gilt nach Satz (2.4)

$$E_\lambda\left(\frac{\overline{\lambda}(x)-\underline{\lambda}(x)}{\lambda}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\hat{F}_{2r}(1-\frac{\alpha}{2})-\hat{F}_{2r}(\frac{\alpha}{2})}{2\lambda} \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{s}\,\frac{\lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!}\, e^{-\lambda s} ds = \dfrac{\hat{F}_{2r}(1-\frac{\alpha}{2})-\hat{F}_{2r}(\frac{\alpha}{2})}{2(r-1)} & : (n,N,r) \\[2ex] \dfrac{1}{2\lambda nT} \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\hat{F}_{2(i+1)}(1-\frac{\alpha}{2})-\hat{F}_{2i}(\frac{\alpha}{2})\right)\dfrac{(\lambda nT)^i}{i!} e^{-\lambda nT} & : (n,\infty,T). \end{cases}$$

Bemerkung:

Es ist naheliegend, für Parameterbereichschätzfunktionen die zu erwartende Länge des Konfidenzintervalls bei vorgegebenem Konfidenzniveau als Maß für die Güte der statistischen Aussage der Schätzung zu wählen. Im folgenden wird daher die auf den wahren Parameterwert λ normierte Länge der Konfidenzintervallschätzung, also $E_\lambda(\frac{\overline{\lambda}(x)-\underline{\lambda}(x)}{\lambda})$, als Maß für die Güte der statistischen Aussage einer Parameterbereichschätzung benutzt.

Parameterpunktschätzung:

Der zu dem Vorwissen W gehörige Parameterbereich ist $\Lambda := \{\lambda \mid \lambda\in(0,\infty)\}$. Als Entscheidungsbereich wird $\Delta := \Lambda$ betrachtet. Als Schadensfunktion wird gewählt $s(P_{X,\lambda},\delta) = (\lambda-\delta)^2$. Die Risikofunktion für eine Parameterpunktschätzfunktion $\hat{\lambda}$ für λ lautet dann $R(P_{X,\lambda},\hat{\lambda}) = E(\lambda-\hat{\lambda}(x))^2 = (E(\hat{\lambda})-\lambda)^2+\mathrm{Var}(\hat{\lambda})$.

Satz (2.6)

Es sei $r>1$. Die Schätzfunktion $\hat{\lambda}$ mit

$$\hat{\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{r-1}{S^N(x)} & : (n,N,r) \\ \dfrac{D^\infty(x)}{nT} & : (n,\infty,T) \end{cases}$$

ist eine erwartungstreue Parameterpunktschätzung für λ mit gleichmäßig kleinster Varianz.

Beweis:

Nach Satz (1.13) gilt: S^N ist $G(r,\lambda)$ verteilt, D^∞ ist $\mathcal{P}(\lambda nT)$ verteilt. Daraus folgt, daß der Schätzer $\hat{\lambda}$ erwartungstreu ist, denn es gilt:

$$E(\hat{\lambda}) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{r-1}{s}\,\frac{\lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!}\,e^{-\lambda s}ds = \lambda & : (n,N,r) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^\infty \frac{i}{nT}\,\frac{(\lambda nT)^i}{i!}\,e^{-\lambda nT} = \lambda & : (n,\infty,T) \end{cases}$$

. Wegen der Vollständigkeit von S^N und D^∞ nach Folgerung (1.14) folgt nach dem Satz von Lehmann-Scheffé (vergl. H. Witting [19], Satz 3.24) d.B.

Folgerung (2.7)

Es sei $r>1$, $\alpha\in(0,1)$, $\hat{\lambda}$ die in Satz (2.6) definierte Schätzfunktion, $[\underline{\hat{\lambda}}(\lambda), \overline{\hat{\lambda}}(\lambda)]$ ein Toleranzintervall für $\hat{\lambda}$ zum Niveau $1-\alpha$ mit $\underline{\hat{\lambda}}(\lambda) = \sup\{\gamma\in(0,\infty)\,|\,P_\lambda(\hat{\lambda}<\gamma)\leq\frac{\alpha}{2}\}$ und $\overline{\hat{\lambda}}(\lambda) = \inf\{\gamma\in(0,\infty)\,|\,P_\lambda(\hat{\lambda}>\gamma)\leq\frac{\alpha}{2}\}$.

Dann gilt

$$\frac{\overline{\hat{\lambda}}(\lambda)-\underline{\hat{\lambda}}(\lambda)}{\lambda} = \begin{cases} 2(r-1)\left(\dfrac{1}{\hat{F}_{2r}(\frac{\alpha}{2})} - \dfrac{1}{\hat{F}_{2r}(1-\frac{\alpha}{2})}\right) & : (n,N,r) \\ \dfrac{\overline{k}(\lambda)-\underline{k}(\lambda)}{\lambda nT} & : (n,\infty,T) \end{cases}$$

mit

$\underline{k}(\lambda)=\sup\{k\in\mathbb{N}_0\,|\,2\lambda nT\geq\hat{F}_{2k}(1-\frac{\alpha}{2})\}$, $\overline{k}(\lambda)=\inf\{k\in\mathbb{N}_0\,|\,2\lambda nT\leq\hat{F}_{2(k+1)}(\frac{\alpha}{2})\}$.

Beweis:

Es sei $\gamma\in(0,\infty)$, $k\in\mathbb{N}_0$. Nach Satz (2.6) gilt:

$$\hat\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{r-1}{S^N(x)} & : \ (n,N,r) \\[2ex] \dfrac{D^\infty(x)}{nT} & : \ (n,\infty,T) \end{cases}$$

. Es gilt ferner nach Satz (1.13): S^N ist $G(r,\lambda)$ verteilt und D^∞ ist $\mathscr{P}(\lambda nT)$ verteilt. Also gilt

$$P_\lambda(\hat\lambda<\gamma) = P_\lambda\left(S^N > \frac{r-1}{\gamma}\right) = 1 - \int_0^{\frac{r-1}{\gamma}} \frac{\lambda^r t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda t} dt = 1 - F_{2r}\left(2\lambda \frac{r-1}{\gamma}\right) \ : \ (n,N,r)$$

$$\left.\begin{aligned} P_\lambda\left(\hat\lambda< \frac{k}{nT}\right) &= P_\lambda(D^\infty<k) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda nT)^i}{i!} e^{-\lambda nT} = 1 - F_{2k}(2\lambda nT) \\ P_\lambda\left(\hat\lambda\le \frac{k}{nT}\right) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda nT)^i}{i!} e^{-\lambda nT} = 1 - F_{2(k+1)}(2\lambda nT) \end{aligned}\right\} \ : \ (n,\infty,T).$$

Für Pläne vom Typ (n,N,r) erhält man somit $\underline{\hat\lambda}(\lambda),\bar{\hat\lambda}(\lambda)$ als Lösung von

$$P_\lambda(\hat\lambda<\underline{\hat\lambda}(\lambda)) = P_\lambda(\hat\lambda>\bar{\hat\lambda}(\lambda)) = \frac{\alpha}{2} \text{ bzw. } 1 - F_{2r}\left(2\lambda\frac{r-1}{\underline{\hat\lambda}(\lambda)}\right) = F_{2r}\left(2\lambda\frac{r-1}{\bar{\hat\lambda}(\lambda)}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Damit folgt wegen $\underline{\hat\lambda}(\lambda) = \dfrac{2\lambda(r-1)}{\hat F_{2r}(1-\frac{\alpha}{2})}$, $\bar{\hat\lambda}(\lambda) = \dfrac{2\lambda(r-1)}{\hat F_{2r}(\frac{\alpha}{2})}$ d.B.

Wählt man für Pläne vom Typ (n,∞,T) $k_1,k_2\in\mathbb{N}_0$ derart, daß gilt

$P_\lambda(\hat\lambda< \frac{k_1}{nT})\le \frac{\alpha}{2}$, $P_\lambda(\hat\lambda> \frac{k_2}{nT})\le \frac{\alpha}{2}$ bzw. $\hat F_{2k_1}(1-\frac{\alpha}{2})\le 2\lambda nT\le\hat F_{2(k_2+1)}(\frac{\alpha}{2})$, so ist

$\left[\frac{k_1}{nT}, \frac{k_2}{nT}\right]$ ein Toleranzintervall für $\hat\lambda$ zum Niveau $1-\alpha$. Damit folgt

wegen $\underline{\hat\lambda}(\lambda) = \dfrac{\underline{k}(\lambda)}{nT}$, $\bar{\hat\lambda}(\lambda) = \dfrac{\bar{k}(\lambda)}{nT}$ mit $\underline{k}(\lambda) = \sup\{k_1 \mid 2\lambda nT\ge\hat F_{2k_1}(1-\frac{\alpha}{2})\}$, $\bar{k}(\lambda) =$

$\inf\{k_2 \mid 2\lambda nT\le \hat F_{2(k_2+1)}(\frac{\alpha}{2})\}$ d.B.

Bemerkung:

Bei praktischen Problemstellungen ist man für eine gegebene Parameterpunktschätzfunktion an einer Aussage über deren Streuung als einem Maß für die Güte der statistischen Aussage der Schätzung interessiert und verwendet diese auch als Gütemaß. Daneben ist es jedoch häufig zweckmäßig, die Länge des Toleranzintervalls der Schätzung als Gütemaß zu betrachten (was hier unterstellt werden soll). Im folgenden wird die auf den zu erwartenden Parameterwert λ normierte Länge des Toleranzintervalls, also $\frac{\bar{\hat{\lambda}}(\lambda)-\underline{\hat{\lambda}}(\lambda)}{\lambda}$, als Maß für die Güte der statistischen Aussage einer Parameterpunktschätzung benutzt.

Bemerkung (2.8):

Es sei $\alpha\in(0,1)$ fest gegeben.

(1) Nach Folgerung (2.3) ist $\frac{\lambda_1-\lambda_0}{\lambda_0}$, das Maß für die Güte der statistischen Aussage eines Alternativtests, von r bzw. nT abhängig, je nachdem, ob das Lebensdauerexperiment nach einem Plan vom Typ (n,N,r) bzw. (n,∞,T) durchgeführt wird.

(2) Nach Folgerung (2.5) und Folgerung (2.7) sind $E_\lambda(\frac{\bar{\lambda}(x)-\underline{\lambda}(x)}{\lambda})$ und $\frac{\bar{\hat{\lambda}}(\lambda)-\underline{\hat{\lambda}}(\lambda)}{\lambda}$, Maße für die Güte der statistischen Aussage einer Parameterbereichschätzung und einer Parameterpunktschätzung, von r bzw. λnT abhängig, je nachdem, ob das Lebensdauerexperiment nach einem Plan vom Typ (n,N,r) bzw. (n,∞,T) durchgeführt wird.

D.h. die Güte der statistischen Aussage einer Parameterbereich- und einer Parameterpunktschätzung hängt bei Lebensdauerexperimenten nach Plänen vom Typ (n,∞,T) vom unbekannten Parameterwert λ ab. Da man sich für Pläne interessiert, die es gestatten, eine vorgegebene Güte für die statistische Aussage einzustellen, hat man sich nun zu überlegen, ob dies für alle Parameterwerte $\lambda\in(0,\infty)$ möglich ist.

Bemerkung (2.9):

Hat man ein Vorwissen der Form, daß man eine untere Schranke $\underline{\lambda}$ für den Parameter λ angeben kann (d.h. man kennt die maximal zu erwartende Lebensdauer des zu prüfenden Elements), was bei Anwendungen im allgemeinen der

Fall ist, so ist es für Pläne vom Typ (n,∞,T) durch geeignete Wahl von nT möglich, eine geforderte Güte der statistischen Aussage für Parameterbereich- und Parameterpunktschätzungen für alle $\lambda\in[\underline{\lambda},\infty)$ einzustellen. Die Mindestgüte erhält man für $\lambda=\underline{\underline{\lambda}}$, da man zeigen kann, daß die Güte der statistischen Aussage für Schätzungen monoton steigend in λnT ist; d.h. $E_\lambda\left(\frac{\overline{\lambda}(x)-\underline{\lambda}(x)}{\lambda}\right)$ und $\frac{\hat{\overline{\lambda}}(\lambda)-\hat{\underline{\lambda}}(\lambda)}{\lambda}$ ist monoton fallend in λnT (vergl. Folgerung (2.5) und Folgerung (2.7)).

Im folgenden wird für Parameterbereich- und Parameterpunktschätzungen die Abhängigkeit der Güte der statistischen Aussage von Parameteränderungen untersucht. Nach Folgerung (2.5) und Folgerung (2.7) gilt:

Folgerung (2.10)

Es sei $\Delta\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda+\Delta\lambda\in(0,\infty)$, $\overline{g}(\lambda) := E_\lambda\left(\frac{\overline{\lambda}(x)-\underline{\lambda}(x)}{\lambda}\right)$ definiert wie in Folgerung (2.5), $\hat{g}(\lambda) := \frac{\hat{\overline{\lambda}}(\lambda)-\hat{\underline{\lambda}}(\lambda)}{\lambda}$ definiert wie in Folgerung (2.7), $\Delta\overline{g} = |\overline{g}(\lambda)-\overline{g}(\lambda+\Delta\lambda)|$, $\Delta\hat{g} = |\hat{g}(\lambda)-\hat{g}(\lambda+\Delta\lambda)|$. Dann gilt

(1)

$$\Delta\overline{g} = \begin{cases} 0 & : (n,N,r) \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{F}_{2(i+1)}(1-\frac{\alpha}{2})-\hat{F}_{2i}(\frac{\alpha}{2})}{2} \; \frac{(\lambda nT)^{i-1}}{i!} e^{-\lambda nT} \left|1-(1+\frac{\Delta\lambda}{\lambda})^{i-1} e^{-\Delta\lambda nT}\right| & : (n,\infty,T)\,. \end{cases}$$

(2)

$$\Delta\hat{g} = \begin{cases} 0 & : (n,N,r) \\ \left|\frac{(1+\frac{\Delta\lambda}{\lambda})(\overline{k}(\lambda)-\underline{k}(\lambda))-(\overline{k}(\lambda+\Delta\lambda)-\underline{k}(\lambda+\Delta\lambda))}{(\lambda+\Delta\lambda)nT}\right| & : (n,\infty,T) \end{cases} \quad \text{mit}$$

$$\underline{k}(\gamma) = \sup\{k\in\mathbb{N}_0 \,|\, 2\gamma nT \geq \hat{F}_{2k}(1-\tfrac{\alpha}{2})\},\ \overline{k}(\gamma) = \inf\{k\in\mathbb{N}_0 \,|\, 2\gamma nT \leq \hat{F}_{2(k+1)}(\tfrac{\alpha}{2})\} (\gamma\in(0,\infty)).$$

3. Kostengünstige Pläne

Man ist an einem optimalen Plan für die Durchführung eines Lebensdauerexperiments interessiert, und zwar für jeden betrachteten Typ des statistischen Verfahrens zur Auswertung des Experiments. D.h., es sind in Abhängigkeit vom gewählten statistischen Verfahren Pläne gesucht, die die zu erwartenden Experimentkosten gleichmäßig bezüglich λ minimieren und eine vorgegebene Güte der statistischen Aussage einstellen. Zur Konkurrenz sind dabei nur solche Pläne zugelassen, die eine optimale statistische Auswertung des Beobachtungsmaterials (bezüglich der gegebenen Schadensfunktion) gestatten. Dies hat zur Folge, daß die Pläne vom Typ $(n,1,T)$ nicht zulässig sind (vergl. Bemerkung (2.2)) und somit die konkurrierenden Pläne vom Typ (n,N,r) und (n,∞,T) sind. Berücksichtigt man weiter, daß eine vorgegebene Güte der statistischen Aussage eingestellt werden soll, so hat man für die Durchführung eines Experiments nur die Pläne vom Typ (n,N,r) mit vorgegebenem $r \in \mathbb{N}$ und die Pläne vom Typ (n,∞,T) mit vorgegebenem $nT \in \mathbb{R}^+$ (vergl. Bemerkung (2.8)) zur Auswahl. Da für Pläne vom Typ (n,∞,T) bei Parameterbereich- bzw. Parameterpunktschätzungen eine vorgegebene Güte der statistischen Aussage nicht für den ganzen Parameterbereich eingestellt werden kann, unterstellt man dabei, daß man ein Vorwissen in Form einer unteren Schranke für den Parameter λ hat (vergl. Bemerkung (2.9)).

Die Lösung dieser Aufgabe ist in vollem Umfang nicht möglich, daher werden die Untersuchungen auf die folgenden Probleme eingeschränkt:

- Angabe von Bedingungen an Kostenfunktionen, für die bestimmte Typen von Plänen gleichmäßig besser bezüglich λ sind;
- Bestimmung von Typen von Plänen, die für spezielle Kostenfunktionen zumindest auf einem Teil des Parameterbereichs für λ gleichmäßig besser sind;
- Bestimmung von Plänen, die die zu erwartenden Kosten für gegebenen Parameterwert λ minimieren, und zwar für jeden zulässigen Typ von Plänen.

Aus den Aussagen dieser Untersuchungen kann man dann für Pläne vom Typ (n,∞,T) bzw. (n,N,r) Pläne angeben, die die zu erwartenden Kosten gleichmäßig bezüglich λ minimieren bzw. die maximal zu erwartenden Kosten minimieren (Minimax-Plan) (vergl. Folgerung (3.14)). Da für Pläne vom Typ (n,N,r) die zu erwartenden Kosten für $\lambda \to 0$ gegen unendlich streben (vergl. Folgerung 3.7)), wird für die Anwendbarkeit des Minimax-Kriteriums unterstellt, daß man ein Vorwissen in Form einer unteren Schranke für den Parameter λ hat (d.h. man kennt eine obere Schranke für die zu erwartende Lebensdauer des zu prüfenden Elements), was im allgemeinen bei praktischen Anwendungen eine zulässige Annahme sein dürfte.

Im folgenden sollen zunächst für Pläne vom Typ (n,N,r) verschiedene Klassen von Kostenfunktionen untersucht werden. Man nimmt an, daß die Kosten zur Durchführung eines Experiments von der Experimentdauer T^N und der summarischen Betriebszeit S^N abhängen.

<u>Notation (3.1)</u>

$C^N : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$: Kosten für ein Lebensdauerexperiment $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_X; X; (n,N,r))$ mit
$C^N = \psi_1^N \circ T^N + \psi_2^N \circ S^N$, $\psi_i^N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $(i \in \{1,2\})$.

<u>Satz (3.2)</u>

Es sei $i \in \{1,2\}$, $N \in \{1,\infty\}$, ψ_i^N positiv, stetig und beschränkt.
Dann gilt für $\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$E_\lambda(C^\infty) - E_\lambda(C^1) \begin{cases} < 0: & \psi_1^\infty \text{ monoton steigend, } \psi_i^\infty(t) \leq \psi_i^1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \forall i \in \{1,2\} \\ = 0: & \psi_i^\infty(t) = \psi_i^1(t) = \text{const. } \forall i \in \{1,2\} \\ > 0: & \psi_1^\infty \text{ monoton fallend, } \psi_i^\infty(t) \geq \psi_i^1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \forall i \in \{1,2\}. \end{cases}$$

<u>Beweis:</u>

Es sei f^N WD von T^N, g^N WD von S^N. Nach Notation (3.1) gilt dann für $N \in \{1,\infty\}$

$E_\lambda(C^N) = E_\lambda(\psi_1^N \circ T^N) + E_\lambda(\psi_2^N \circ S^N) = \int_0^\infty \psi_1^N(t) f^N(t)dt + \int_0^\infty \psi_2^N(t) g^N(t)dt$. Setzt man

$f(.) = f^\infty(.) - f^1(.)$ und $\psi_i(.) = \psi_i^\infty(.) - \psi_i^1(.)$ $(i \in \{1,2\})$, so erhält man

$$E_\lambda(C^\infty)-E_\lambda(C^1) = \int_0^\infty \psi_1^\infty(t)f(t)dt+\int_0^\infty \psi_1(t)f^1(t)dt+\int_0^\infty (\psi_2^\infty(t)g^\infty(t)-\psi_2^1(t)g^1(t))dt.$$

Nach Satz (1.13) gilt $g^\infty(.) = g^1(.)$, damit gilt

$$E_\lambda(C^\infty)-E_\lambda(C^1) = \int_0^\infty \psi_1^\infty(t)f(t)dt+\int_0^\infty \psi_1(t)f^1(t)dt+\int_0^\infty \psi_2(t)g^\infty(t)dt.$$ Wegen

$f^1(.)\geq 0$ und $g^\infty(.)\geq 0$ folgt

$$\int_0^\infty (\psi_1(t)f^1(t)+\psi_2(t)g^\infty(t))dt \begin{cases} \leq 0 & : \quad \psi_i^\infty(t)\leq\psi_i^1(t) \quad \forall t\in\mathbb{R}^+,\ \forall i\in\{1,2\} \\ \geq 0 & : \quad \psi_i^\infty(t)\geq\psi_i^1(t) \quad \forall t\in\mathbb{R}^+,\ \forall i\in\{1,2\}. \end{cases}$$

Nach Satz (1.13) gilt

$$f^N(t) = \begin{cases} (n\lambda)^r \dfrac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda nt} & : \quad N = \infty \\ n\lambda\binom{n-1}{r-1}(1-e^{-\lambda t})^{r-1}e^{-(n-r+1)\lambda t} & : \quad N = 1 . \end{cases}$$

Also gilt $f(t) = \frac{n\lambda}{(r-1)!} e^{-\lambda nt}((\lambda nt)^{r-1}- \frac{(n-1)!}{(n-r)!} (e^{\lambda t}-1)^{r-1})$. Es gilt weiter $f(t)\to 0$ für $t\to 0$ bzw. $t\to\infty$ und $f(t) = 0$ für $t = \hat{t}$, wenn $\hat{t}$ Lösung der Gleichung $\lambda t = (\prod_{i=1}^{r-1} (1- \frac{i}{n}))^{\frac{1}{r-1}} (e^{\lambda t}-1)$ ist. Da die Steigung von λt stets kleiner ist als die von $(e^{\lambda t}-1)$ gilt

$$f(t) \begin{cases} < 0 & : \quad \hat{t} < t < \infty \\ > 0 & : \quad 0 < t < \hat{t} \end{cases}.$$ Ferner ist $\int_0^\infty f(t)dt = \int_0^\infty (f^\infty(t)-f^1(t))dt = 0$,

damit kann man schreiben

$$\int_0^\infty \psi_1^\infty(t)f(t)dt = \int_0^{\hat{t}} \psi_1^\infty(t)f(t)dt-\psi_1^\infty(\hat{t})\int_0^{\hat{t}} f(t)dt+\int_{\hat{t}}^\infty \psi_1^\infty(t)f(t)dt-\psi_1^\infty(\hat{t})\int_{\hat{t}}^\infty f(t)dt$$

und es folgt

$$\int_0^\infty \psi_1^\infty(t)f(t)dt \begin{cases} < 0 & : \quad \psi_1^\infty(.) \text{ monoton steigend} \\ = 0 & : \quad \psi_1^\infty(.) = \text{const.} \\ > 0 & : \quad \psi_1^\infty(.) \text{ monoton fallend, damit folgt d.B.} \end{cases}$$

Für die weiteren Untersuchungen werden nun die Kostenfunktionen in spezieller Gestalt angesetzt, und zwar wird folgendes Kostenmodell betrachtet:

Notation (3.3)

(Kosten für ein Lebensdauerexperiment nach einem Plan (n,N,.))

$a(t) = n(a_0-a_1e^{-a_2t})$: Kosten der Versuchsanlage pro Experiment, dabei $a_0>0$, $0\leq a_1\leq a_0$, $a_2\geq 0$.

$b(t) = b_0S(t)$: Betriebskosten pro Experiment, dabei $b_0\geq 0$.

$c(t) = n(c_0-c_1e^{-c_3t})+n_kc_2e^{-c_3t}+c_4(D(t)-n_k)$

: Kosten der geprüften Elemente pro Experiment, dabei $c_0>0$, $0\leq c_2\leq c_1\leq c_0$, $c_3\geq 0$, $c_4>0$.

$d(t) = d_1(t-d_0)e^{-d_2t}$: Bonus-Malus-Pönale für Unter- bzw. Überschreitung der vereinbarten Experimentdauer d_0, dabei $d_0\geq 0$, $d_1>0$, $d_2\in\mathbb{R}$; (bzw. Betriebskosten pro Experiment, wenn $b_0 = d_0 = d_2 = 0$).

Dabei gibt

$D(t)\in\mathbb{N}_0$: Anzahl der ausgefallenen Elemente in der Experimentdauer t,

$S(t)\in\mathbb{R}^+$: Summarische Betriebszeit der in t geprüften Elemente,

$n_k\in\mathbb{N}_0$: Anzahl der geprüften Elemente, die sich zum Zeitpunkt t im Zustand "ausgefallen" befinden, dabei $n_k = \begin{cases} 1 : (n,\infty,r) \\ r : (n,1,r) \\ 0 : (n,\infty,T) \end{cases}$

für ein Lebensdauerexperiment an.

Bemerkung:

Für die Kosten der Versuchsanlage (a(t)) und der geprüften Elemente (c(t)) wird eine exponentielle Abschreibung angenommen. Dabei kann eine erhöhte Abschreibung ($c_2>0$) für ausgefallene Elemente festgelegt werden. Die Kosten für eine Erneuerung, bzw. Reparatur eines ausgefallenen Elements (c_4) werden als konstant angenommen.

Für die Kosten der Versuchsanlage wird weiter angenommen, daß nur ein Element zur gleichen Zeit in einer Versuchsanlage geprüft werden kann. Diese Forderung ist speziell auf die Prüfung von Reaktorbauelementen abgestellt und kann deshalb für andere Elemente eine starke Einschränkung darstellen.

Die Betriebskosten für ein Lebensdauerexperiment (b(t)) werden proportional zur summarischen Betriebszeit der geprüften Elemente angenommen. Diese Forderung ist wieder speziell auf die Prüfung von Reaktorbauelementen abgestellt. Im allgemeinen werden die Betriebskosten proportional zur Experimentdauer angenommen (vergl. B. Epstein [10]). Verzichtet man jedoch in dem betrachteten Modell auf die Berücksichtigung eventueller Strafkosten und setzt $b_0 = d_0 = d_2 = 0$, so hat man ein Kostenmodell, in dem die Betriebskosten (d(t)) proportional zur Experimentdauer sind.

Für die Berücksichtigung von Strafkosten (d(t)) wird angenommen, daß diese in Form eines Bonus- bzw. Malus-Pönales bei Unter- bzw. Oberschreitung tung einer vereinbarten Experimentdauer d_0 zur Anwendung kommen. Dabei sind bei gleich großer Unter- bzw. Oberschreitung für $d_2>0$ bzw. $d_2<0$ die Bonus- bzw. Maluskosten größer.

Die Kosten für ein Lebensdauerexperiment nach einem Plan erhält man als Summe der verschiedenen Kostenterme. Es gilt:

Folgerung (3.4)

Es seien $C^N_\cdot(n,.)$ die Kosten für ein Lebensdauerexperiment nach einem Plan (n,N,.). Dann gilt

(1) (n,N,r) Pläne:

$$C^N_r(n,r) = \begin{cases} n(a_0-a_1e^{-a_2T^\infty})+b_0S^\infty+n(c_0-c_1e^{-c_3T^\infty})+c_2e^{-c_3T^\infty}+c_4(r-1)+d_1(T^\infty-d_0)e^{-d_2T^\infty} & :N=\infty \\ n(a_0-a_1e^{-a_2T^1})+b_0S^1+n(c_0-c_1e^{-c_3T^1})+rc_2e^{-c_3T^1}+d_1(T^1-d_0)e^{-d_2T^1} & :N=1. \end{cases}$$

(2) (n,∞,T) Pläne:

$$C^\infty_T(n,T) = n(a_0-a_1e^{-a_2T})+b_0nT+n(c_0-c_1e^{-c_3T})+c_4D^\infty+d_1(T-d_0)e^{-d_2T}.$$

Das Modell von B. Epstein /‾10_7, das von D.K. Lloyd, M. Lipow in /‾14_7 untersucht wurde, ergibt sich als Spezialfall

$$(a_1 = a_2 = b_0 = c_1 = c_2 = c_3 = d_0 = d_2 = 0,\ c_4 = c_2)$$

des hier betrachteten Modells. Ferner ergibt der Spezialfall

$$(a_1 = a_2 = c_3 = d_2 = 0,\ c_0 = c_1,\ c_2 = c_4)$$

das von G. Nägele und dem Autor in /‾16_7 untersuchte Kostenmodell.

Zur Bestimmung des Erwartungswertes der Kosten werden im folgenden zunächst zwei Lemmata bewiesen.

Lemma (3.5)

Es sei $N \in \{1,\infty\}$, $r,n \in \mathbb{N}$, $r \leq n$ für $N = 1$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0,\infty)$,

$$\lambda \begin{cases} > \frac{|\nu|}{n} & : N = \infty \\ > \frac{|\nu|}{n-r+1} & : N = 1 \end{cases} \quad \text{für } \nu<0,\ \hat{\nu} = \nu/\lambda. \text{ Dann gilt}$$

(1)
$$E_\lambda(e^{-\nu T^N}) = \begin{cases} \left(\frac{n}{n+\hat{\nu}}\right)^r & : N = \infty \\ \prod_{i=0}^{r-1} \frac{n-i}{n-i+\hat{\nu}} & : N = 1. \end{cases}$$

(2)
$$E_\lambda(T^N e^{-\nu T^N}) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{n}{n+\hat{\nu}}\right)^r \frac{r}{n+\hat{\nu}} & : N = \infty \\ \frac{1}{\lambda} \prod_{i=0}^{r-1} \frac{n-i}{n-i+\hat{\nu}} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{n-j+\hat{\nu}} & : N = 1. \end{cases}$$

Beweis:

Zu (1): Nach Definition (1.9) und (1.11) gilt $T_r = T^N o X$. Aus Folgerung (1.8) folgt $T_r = Y_1 + \ldots + Y_r$. Also gilt $E_\lambda(e^{-\nu T^N}) = E_\lambda(e^{-\nu(Y_1+\ldots+Y_r)})$.

Wegen der stochastischen Unabhängigkeit der $Y_k (k = 1,2,\ldots)$ nach Folgerung (1.8) gilt somit $E_\lambda(e^{-\nu T^N}) = E_\lambda(e^{-\nu Y_1}) \ldots E_\lambda(e^{-\nu Y_r})$. Außerdem gilt nach Folgerung (1.8) : Y_k ist $G(1,n\lambda)$ bzw. $G(1,(n-k+1)\lambda)$ verteilt für $N = \infty$ bzw. $N = 1$. Also gilt für $k = 1,2,\ldots$

$$E_\lambda(e^{-\nu Y_k}) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty n\lambda e^{-(n\lambda+\nu)t}dt = \frac{n\lambda}{n\lambda+\nu} \text{ für } \nu > -n\lambda & : N = \infty \\ \int\limits_0^\infty (n-k+1)\lambda e^{-((n-k+1)\lambda+\nu)t}dt = \frac{(n-k+1)\lambda}{(n-k+1)\lambda+\nu} \text{ für } \nu>-(n-k+1)\lambda & : N = 1, \end{cases}$$

d.f.d.B.

<u>Zu (2):</u> Nach Satz (1.13) gilt: T^∞ ist $G(r,n\lambda)$ verteilt. Also gilt

$$E_\lambda(T^\infty e^{-\nu T^\infty}) = \int\limits_0^\infty te^{-\nu t}\,\frac{(n\lambda)^r t^{r-1}}{(r-1)!}\,e^{-n\lambda t}dt = \frac{(n\lambda)^r}{(n\lambda+\nu)^r(r-1)!}\int\limits_0^\infty((n\lambda+\nu)t)^r e^{-(n\lambda+\nu)t}dt =$$

$= (\frac{n\lambda}{n\lambda+\nu})^r\,\frac{r}{n\lambda+\nu}$ für $\nu>-n\lambda$, damit folgt d.B. für $N = \infty$.

Nach Teil (1) des Beweises gilt: $E_\lambda(T^N e^{-\nu T^N}) = E_\lambda((Y_1+\ldots+Y_r)e^{-\nu(Y_1+\ldots+Y_r)})$.

Nach Folgerung (1.8) sind die $Y_k(k = 1,2,\ldots)$ stochastisch unabhängig und $G(1,(n-k+1)\lambda)$ verteilt für $N = 1$. Also gilt

$$E_\lambda(T^1 e^{-\nu T^1}) =$$

$$= \int\limits_0^\infty\ldots\int\limits_0^\infty(y_1+\ldots+y_r)e^{-\nu(y_1+\ldots+y_r)}n(n-1)\ldots(n-r+1)\lambda^r$$
$$e^{-\lambda(ny_1+(n-1)y_2+\ldots+(n-r+1)y_r)}dy_1\ldots dy_r =$$

$$= \frac{\lambda^r n(n-1)\ldots(n-r+1)}{(n\lambda+\nu)((n-1)\lambda+\nu)\ldots((n-r+1)\lambda+\nu)}\int\limits_0^\infty\ldots\int\limits_0^\infty(n\lambda+\nu)\ldots((n-r+1)\lambda+\nu)$$
$$(y_1+\ldots+y_r)e^{-((n\lambda+\nu)y_1+\ldots+((n-r+1)\lambda+\nu)y_r)}dy_1\ldots dy_r =$$

$$= \frac{\lambda^r n(n-1)\ldots(n-r+1)}{(n\lambda+\nu)((n-1)\lambda+\nu)\ldots((n-r+1)\lambda+\nu)}\Big(\int\limits_0^\infty(n\lambda+\nu)y_1 e^{-(n\lambda+\nu)y_1}dy_1+$$
$$+\int\limits_0^\infty((n-1)\lambda+\nu)y_2 e^{-((n-1)\lambda+\nu)y_2}dy_2+\ldots+$$
$$+\int\limits_0^\infty((n-r+1)\lambda+\nu)y_r e^{-((n-r+1)\lambda+\nu)y_r}dy_r\Big) =$$

$$= \frac{\lambda^r n(n-1)\ldots(n-r+1)}{(n\lambda+\nu)((n-1)\lambda+\nu)\ldots((n-r+1)\lambda+\nu)}\sum_{i=1}^r\frac{1}{(n-i+1)\lambda+\nu}$$

für $\nu>-(n-r+1)\lambda$. Damit folgt d.B.

Lemma (3.6)

Es sei $r,n\in\mathbb{N}$, $1<r\leq n$, $x\in\mathbb{R}$, $U(x) = \left(\frac{n}{n+x}\right)^r \quad (x>-n)$,

$$V(x) = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{1-\frac{i}{n}}{1-\frac{i}{n+x}} \quad (x>-(n-r+1)),\quad W(x) = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} \frac{n+x}{n-i+x} \quad (x>-(n-r+1)).$$

Dann gilt

$$(1)\quad U(x) \begin{cases} > 0 & : x>-n \\ \geq 1 & : -n<x\leq 0 \\ = 1 & : x = 0\,, \\ \leq 1 & : x \geq 0 \end{cases} \qquad V(x) \begin{cases} \geq 1 & : -(n-r+1)<x\leq 0 \\ = 1 & : x = 0 \\ \leq 1 & : x \geq 0\,. \end{cases}$$

(2) Es sei $\nu\in\mathbb{R}$, $\lambda\in(0,\infty)$, $\lambda> \frac{|\nu|}{n-r+1}$ für $\nu<0$, $\hat{\nu} = \nu/\lambda$. Dann gilt
$U(\hat{\nu})V(\hat{\nu}) = E(e^{-\nu T^1})$.

(3) Es sei $\nu\in\mathbb{R}$, $\lambda\in(0,\infty)$, $\lambda> \frac{|\nu|}{n-r+1}$ für $\nu<0$, $\hat{\nu} = \nu/\lambda$. Dann gilt
$U(\hat{\nu})V(\hat{\nu})W(\hat{\nu})\,\frac{r}{\lambda(n+\hat{\nu})} = E(T^1 e^{-\nu T^1})$.

(4) $rV(x)\geq 1$ für $0\leq x\leq 1$.

$$(5)\quad W(x) \begin{cases} \geq 1+ \frac{r-1}{r}\,\frac{1}{n-1} & : -(n-r+1)<x\leq 0 \\ \leq 1+ \frac{(r-1)^2}{r} & : x = 0. \end{cases}$$

Beweis:

(1) ist trivial.

Zu (2): Es sei $x>-(n-r+1)$. Dann gilt

$$U(x)V(x) = \left(\frac{n}{n+x}\right)^r \prod_{i=1}^{r-1} \frac{1-\frac{i}{n}}{1-\frac{i}{n+x}} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(r-1))}{(n+x)(n+x-1)\ldots(n+x-(r-1))} = \prod_{i=0}^{r-1} \frac{n-i}{n-i+x}\,,$$

damit folgt nach Satz (3.5) d.B.

Zu (3): Es sei $x>-(n-r+1)$. Dann gilt

$$U(x)V(x)W(x) = \left(\frac{n}{n+x}\right)^r \prod_{i=1}^{r-1} \frac{1-\frac{i}{n}}{1-\frac{i}{n+x}}\;\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} \frac{n+x}{n-i+x} =$$

$$= \prod_{i=0}^{r-1} \frac{n-i}{n-i+x} \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{n+x}{n-i+x} = \frac{n+x}{r} \prod_{i=0}^{r-1} \frac{n-i}{n-i+x} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{n-i+x}$$, damit folgt nach

Satz (3.5) d.B.

Zu (4): Es gilt

$$rV(x) = r \prod_{i=1}^{r-1} \frac{1-\frac{i}{n}}{1-\frac{i}{n+x}} = r\left(\frac{n+x}{n}\right)^{r-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1))}{(n+x-1)(n+x-2)\dots(n+x-(r-1))}$$

$$rV(x) \geq r \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1))}{(n+x-1)(n+x-2)\dots(n+x-(r-1))} \quad \text{wegen } x \geq 0$$

$$\geq r \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1))}{n(n-1)\dots(n-(r-2))} = r\left(1-\frac{r-1}{n}\right) \quad \text{wegen } x \leq 1$$

$$\geq 1 \text{ wegen } n \geq r.$$

Zu (5): Es gilt

$$W(x) = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{n+x}{n-i+x} \geq \frac{1}{r}\left(1+(r-1)\frac{n+x}{n-1+x}\right) = 1+\frac{r-1}{r}\frac{1}{n-1+x} \geq 1+\frac{r-1}{r}\frac{1}{n-1}$$

wegen $-(n-r+1)<x\leq 0$.

$$W(0) = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{n}{n-i} \leq \frac{1}{r}\left(1+\frac{(r-1)n}{n-(r-1)}\right) = 1+\frac{(r-1)^2}{r(n-r+1)} \leq 1+\frac{(r-1)^2}{r} \quad \text{wegen } n \geq r.$$

Nach Lemma (3.5), Lemma (1.6) und Satz (1.13) erhält man für die Erwartungswerte der in Folgerung (3.4) definierten Kosten:

Folgerung (3.7)

Es sei $r,n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in (0,\infty)$, $\hat{\nu} = \nu/\lambda$ für $\nu \in \{a_2, c_3, d_2\}$, $U(.), V(.), W(.)$ definiert wie in Lemma (3.6).

(1) Es sei $\lambda > \frac{|d_2|}{n}$ für $d_2<0$. Dann gilt

$$E_\lambda(C_r^\infty(n,r)) =$$

$$= n(a_0 - a_1 U(\hat{a}_2)) + b_0 \frac{r}{\lambda} + n(c_0 - c_1 U(\hat{c}_3)) + c_2 U(\hat{c}_3) + c_4(r-1) + d_1\left(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)} - d_0\right) U(\hat{d}_2).$$

(2) Es sei $\lambda > \frac{|d_2|}{n-r+1}$ für $d_2<0$, $r \leq n$. Dann gilt

$$E_\lambda(C_r^1(n,r)) =$$
$$=n(a_0-a_1U(\hat{a}_2)V(\hat{a}_2))+b_0\ \frac{r}{\lambda}+n(c_0-c_1U(\hat{c}_3)V(\hat{c}_3))+rc_2U(\hat{c}_3)V(\hat{c}_3)+$$
$$+d_1(\frac{r}{(n+\hat{d}_2)\lambda}\ W(\hat{d}_2)-d_0)U(\hat{d}_2)V(\hat{d}_2).$$

(3) $E_\lambda(C_T^\infty(n,T)) =$
$$=n(a_0-a_1e^{-a_2T})+b_0nT+n(c_0-c_1e^{-c_3T})+c_4\lambda nT+d_1(T-d_0)e^{-d_2T}.$$

Bemerkung:

Für Pläne vom Typ (n,N,r) ist es im Fall $d_2<0$ nicht möglich Pläne anzugeben, die die zu erwartenden Kosten gleichmäßig bezüglich λ minimieren (vergl. Folgerung (3.7) und Lemma (3.5)).

Es wird nun für die Pläne vom Typ (n,∞,r) und $(n,1,r)$ untersucht, ob man für das vorliegende Kostenmodell zumindest Wertebereiche für den Parameter λ angeben kann, für die einer der beiden Typen gleichmäßig besser ist.

Satz (3.8)

Es sei $r,n\in\mathbb{N}$, $1<r\leq n$, $\lambda\in(0,\infty)$. Dann gilt

$$E_\lambda(C_r^\infty(n,r))-E_\lambda(C_r^1(n,r)) \begin{cases} <0: & c_2\geq c_4,\ c_3=0,\ d_2\leq 0,\ \frac{|d_2|}{n-r+1}<\lambda\leq\frac{r}{d_0n}; \\ & d_2\leq 0,\ \frac{|d_2|}{n-r+1}<\lambda\leq\min(\frac{r}{d_0n},\frac{d_1}{c_4n^2}),\ \lambda\geq c_3; \\ & c_2=0,\ d_2\leq 0,\ \frac{|d_2|}{n-r+1}<\lambda\leq\min(\frac{r}{d_0n},\frac{d_1}{c_4n^2}); \\ >0: & a_2=c_2=c_3=d_2=0,\ \frac{d_1}{c_4}\frac{r}{n}\leq\lambda. \end{cases}$$

Beweis:

Nach Folgerung (3.7) gilt

$$(*)\ E_\lambda(C_r^\infty(n,r))-E_\lambda(C_r^1(n,r)) = na_1U(\hat{a}_2)(V(\hat{a}_2)-1)+nc_1U(\hat{c}_3)(V(\hat{c}_3)-1)+$$
$$+c_2U(\hat{c}_3)(1-rV(\hat{c}_3))+(r-1)c_4+$$
$$+d_1U(\hat{d}_2)(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)}-d_0-(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)}W(\hat{d}_2)-d_0)V(\hat{d}_2)).$$

(1) Es sei $c_2 \geq c_4$, $c_3 = 0$, $d_2 \leq 0$, $\frac{|d_2|}{n-r+1} < \lambda \leq \frac{r}{d_0 n}$.

Nach Lemma (3.6) ist $U(\hat{c}_3) = V(\hat{c}_3) = 1$ für $c_3 = 0$. Daher folgt nach (*):

$$E_\lambda(C_r^\infty(n,r)) - E_\lambda(C_r^1(n,r)) =$$

$$= na_1 U(\hat{a}_2)(V(\hat{a}_2)-1) + (c_4-c_2)(r-1) + d_1 U(\hat{d}_2)\left(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)} - d_0 - \left(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)} W(\hat{d}_2) - d_0\right)V(\hat{d}_2)\right)$$

$$\leq d_1 U(\hat{d}_2)\left(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)} - d_0 - \left(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)} W(\hat{d}_2) - d_0\right)V(\hat{d}_2)\right)$$ wegen $U(\hat{a}_2) > 0$, $V(\hat{a}_2) \leq 1$ nach Lemma (3.6) für $a_2 \geq 0$ und $c_2 \geq c_4$;

< 0 wegen $U(\hat{d}_2) \geq 1$, $V(\hat{d}_2) \geq 1$, $W(\hat{d}_2) \geq 1 + \frac{r-1}{r}\frac{1}{n-1}$ nach Lemma (3.6) für $d_2 \leq 0$

im Fall $d_0 = 0$ und im Fall $d_0 > 0$, da in diesem Fall mit $\lambda \leq \frac{r}{d_0 n}$ gilt

$$\left(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)} - d_0\right) \geq \left(\frac{d_0 n}{n+\hat{d}_2} - d_0\right) \geq 0.$$

(2) Es sei $d_2 \leq 0$, $\frac{|d_2|}{n-r+1} < \lambda \leq \min\left(\frac{r}{d_0 n}, \frac{d_1}{c_4 n^2}\right)$, $\lambda \geq c_3$.

Nach Lemma (3.6) ist $U(\hat{a}_2) > 0$, $V(\hat{a}_2) \leq 1$ für $a_2 \geq 0$

$U(\hat{c}_3) > 0$, $V(\hat{c}_3) \leq 1$ für $c_3 \geq 0$

$rV(\hat{c}_3) \geq 1$ für $c_3 \geq 0$, $\lambda \geq c_3$.

Daher folgt nach (*):

$$E_\lambda(C_r^\infty(n,r)) - E_\lambda(C_r^1(n,r))$$

$$\leq (r-1)c_4 + d_1 U(\hat{d}_2)\left(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)} - d_0 - \left(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)} W(\hat{d}_2) - d_0\right)V(\hat{d}_2)\right)$$

$$\leq (r-1)c_4 + d_1 U(\hat{d}_2)\left(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)} - d_0 - \left(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)} + \frac{r-1}{n-1}\frac{1}{\lambda(n+\hat{d}_2)} - d_0\right)\right)$$

wegen $\left(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)} - d_0\right) \geq 0$ für $\lambda \leq \frac{r}{d_0 n}$ wenn $d_0 > 0$ und $U(\hat{d}_2) \geq 1$, $V(\hat{d}_2) \geq 1$,

$W(\hat{d}_2) \geq 1 + \frac{r-1}{r}\frac{1}{n-1}$ nach Lemma (3.6) für $d_2 \leq 0$;

$$\leq (r-1)c_4 - (r-1)c_4 \frac{n^2}{(n-1)(n+\hat{d}_2)}$$ wegen $\lambda \leq \frac{d_1}{c_4 n^2}$

< 0 wegen $d_2 \leq 0$.

(3) Es sei $c_2 = 0$, $d_2 \leq 0$, $\frac{|d_2|}{n-r+1} < \lambda \leq \min(\frac{r}{d_0 n}, \frac{d_1}{c_4 n^2})$.

Nach Lemma (3.6) ist $U(\hat{a}_2)>0$, $V(\hat{a}_2)\leq 1$ für $a_2 \geq 0$
$U(\hat{c}_3)>0$, $V(\hat{c}_3)\leq 1$ für $c_3 \geq 0$.

Daher folgt nach (*) und $c_2 = 0$:

$$E_\lambda(C_r^\infty(n,r))-E_\lambda(C_r^1(n,r))$$

$$\leq (r-1)c_4+d_1U(\hat{d}_2)(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)} -d_0-(\frac{r}{\lambda(n+\hat{d}_2)} W(\hat{d}_2)-d_0)V(\hat{d}_2))$$

< 0 nach Teil (2) des Beweises für $\lambda \leq \frac{d_1}{c_4 n^2}$, $d_2 \leq 0$.

(4) Es sei $a_2 = c_2 = c_3 = d_2 = 0$, $\frac{d_1}{c_4}\frac{r}{n} \leq \lambda$.

Nach Lemma (3.6) ist $U(\hat{a}_2) = U(\hat{c}_3) = U(\hat{d}_2) = V(\hat{a}_2) = V(\hat{c}_3) = V(\hat{d}_2) = 1$ für

$a_2 = c_3 = d_2 = 0$. Daher folgt nach (*) und mit $c_2 = 0$:

$$E_\lambda(C_r^\infty(n,r))-E_\lambda(C_r^1(n,r))$$

$$= (r-1)c_4+d_1(1-W(0)) \frac{r}{\lambda n}$$

$\geq (r-1)c_4-d_1\frac{(r-1)^2}{\lambda n}$ wegen $W(0)\leq 1+\frac{(r-1)^2}{r}$ nach Lemma (3.6)

$\geq (r-1)c_4- \frac{(r-1)^2}{r} c_4$ wegen $\lambda \geq \frac{d_1}{c_4}\frac{r}{n}$

> 0.

Bemerkung:

Hat man für die Anzahl n der in einem Experiment eingesetzten Elemente eine obere Schranke $n_0 \in \mathbb{N}$ gegeben, was bei Anwendungen - insbesondere bei den zum Teil sehr teuren Reaktorbauelementen - meist der Fall ist, so erhält man aus den Aussagen von Satz (3.8):

Für die Parameterbereiche

$|d_2| < \lambda \leqslant \frac{2}{d_0 n_0}$ mit $c_2 \geqslant c_4$, $c_3 = 0$, $d_2 \leqslant 0$;

$|d_2| < \lambda \leqslant \min\left(\frac{2}{d_0 n_0}, \frac{d_1}{c_4 n_0^2} \right)$, $\lambda \geqslant c_3$ mit $d_2 \leqslant 0$;

$|d_2| < \lambda \leqslant \min\left(\frac{2}{d_0 n_0}, \frac{d_1}{c_4 n_0^2} \right)$ mit $c_2 = 0$, $d_2 \leqslant 0$

sind die Pläne vom Typ (n,∞,r) gleichmäßig besser, während für den Parameterbereich

$\lambda \geqslant \frac{d_1}{c_4}$ mit $a_2 = c_2 = c_3 = d_2 = 0$

die Pläne vom Typ $(n,1,r)$ gleichmäßig besser sind.

Bemerkung:

(i) $c_2 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant c_4$, $a_2 \geqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$:

Die Forderung $c_2 > 0$ bedeutet, daß Elemente geprüft werden sollen, die durch die Prüfung einen Wertverlust erleiden, der davon abhängt, ob ein Element nach der Prüfung noch funktionsfähig oder ausgefallen ist.

Die Forderung $c_2 \geqslant c_4$ bedeutet, daß für ein Element, das sich nach der Prüfung im Zustand "ausgefallen" befindet, der dadurch bedingte zusätzliche Wertverlust (c_2) größer oder gleich ist als die Kosten für eine Erneuerung bzw. Reparatur des Elements (c_4).

Im allgemeinen werden Reaktorbauelemente die Forderung $c_2 \geqslant c_4$ erfüllen, da es sich dabei meist um sehr teure Elemente handelt, deren Ausfall durch kleinere, reparierbare Defekte eintritt. Dagegen erfüllen elektronische Bauelemente diese Forderung im allgemeinen nicht, da solche Elemente, gleichgültig ob sie noch funktionsfähig oder ausgefallen sind, nach der Prüfung meist nicht mehr verwendet werden ($c_2 = 0$) und außerdem sich eine Reparatur meist nicht lohnt bzw. unmöglich ist (c_4 ; Neuwert eines Elements).

Die Bedingungen $a_2>0$ und $c_3>0$ bedeuten, daß durch die Prüfung bedingte Wertverluste für die Versuchsanlage und die Elemente mit der Prüfzeit wachsen.

(ii) <u>Beschränkter Parameterbereich für λ:</u>

Häufig ist es möglich, für die zu prüfenden Elemente eine untere Schranke $\underline{\underline{\lambda}}$ für λ anzugeben (d.h. man hat eine Abschätzung für die maximal zu erwartende Lebensdauer vorliegen). Ferner unterzieht man im allgemeinen Elemente erst dann einer aufwendigen Prüfung, wenn die Entwicklung des Elements bereits so weit fortgeschritten ist, daß eine obere Schranke $\bar{\bar{\lambda}}$ für λ (d.h. minimal zu erwartende Lebensdauer) garantiert werden kann. Daher ist bei Anwendungen häufig nur ein eingeschränkter Parameterbereich von Interesse, etwa $\lambda \in [\underline{\underline{\lambda}},\bar{\bar{\lambda}}]$.
Für die Anwendbarkeit von Satz (3.8) hat man somit im konkreten Fall zu prüfen, ob der tatsächlich interessierende Parameterbereich $[\underline{\underline{\lambda}},\bar{\bar{\lambda}}]$ eine Teilmenge des Bereichs für λ ist, der durch die Kostenparameter bestimmt wird.
Betrachtet man das Intervall $[\underline{\underline{\lambda}},\bar{\bar{\lambda}}]$ als gegeben, so erhält man für die Anwendbarkeit von Satz (3.8) Forderungen, die wie folgt zu interpretieren sind:

<u>$c_3\leq\underline{\underline{\lambda}}$, $|d_2|<\underline{\underline{\lambda}}$:</u>

c_3 gibt den Grad des durch die Prüfung bedingten Wertverlustes pro Zeiteinheit an, d_2 den Zuwachs des Bonus- bzw. Maluspönales pro Zeiteinheit bei Unter- bzw. Überschreiten der vereinbarten Experimentdauer (siehe Notation (3.3)). Damit die Bedingungen $c_3\leq\underline{\underline{\lambda}}$ bzw. $|d_2|<\underline{\underline{\lambda}}$ erfüllt sein können, müssen diese Werte klein sein, da $\underline{\underline{\lambda}}$ im allgemeinen klein ist, z.B. $\underline{\underline{\lambda}}\approx 5.10^{-5}$ für Na-Pumpen in Reaktoren.

<u>$\frac{2}{d_0 n_0}\geq\bar{\bar{\lambda}}$:</u>

d_0 gibt die vereinbarte Experimentdauer an, die als Bezugspunkt für das Bonus- bzw. Maluspönale dient (siehe Notation (3.3)). Damit die Forderung $\frac{2}{d_0 n_0}\geq\bar{\bar{\lambda}}$ erfüllt ist, muß d_0 kleiner oder gleich der minimal zu erwartenden Experimentdauer sein, d.h. $d_0\leq\frac{2}{\bar{\bar{\lambda}} n_0}\leq\frac{r}{\lambda n} = E(T^\infty)$.

Dies ist eine sehr einschränkende Forderung; sie wird z.B. erfüllt sein, wenn zur Unterbietung der Konkurrenz ein Angebot unterbreitet wird, das ohne Bezahlung von Strafkosten nicht eingehalten werden kann.

$\frac{d_1}{c_4 n_0^2} \geq \bar{\bar{\lambda}}$ bzw. $\frac{d_1}{c_4} \leq \underline{\underline{\lambda}}$, $b_0 = d_0 = d_2 = 0$:

c_4 gibt die Kosten pro Erneuerung bzw. Reparatur eines ausgefallenen Elements an, d_1 die Betriebskosten pro Zeiteinheit (siehe Notation (3.3)). Damit die Forderung $\frac{d_1}{c_4 n_0^2} \geq \bar{\bar{\lambda}}$ erfüllt ist, darf die Anzahl n_0 der zu prüfenden Elemente nicht zu groß sein und d_1 muß groß sein gegenüber c_4, da $\bar{\bar{\lambda}}$ im allgemeinen kleiner 1 ist. Dagegen muß d_1 klein gegenüber c_4 sein, damit die Forderung $\frac{d_1}{c_4} \leq \underline{\underline{\lambda}}$ erfüllt ist, da $\underline{\underline{\lambda}}$ im allgemeinen klein ist.

Die Forderung $\frac{d_1}{c_4 n_0^2} \geq \bar{\bar{\lambda}}$ wird im allgemeinen von Reaktorbauelementen erfüllt, da für den Betrieb dieser Elemente meist sehr kostspielige Versuchsanlagen und damit hohe Betriebskosten erforderlich sind, die Kosten für die Reparatur der meist kleineren, für den Ausfall verantwortlichen Defekte dagegen gering sind und die Anzahl der zu prüfenden Elemente aus Kostengründen klein sein muß. Elektronische Elemente werden dagegen im allgemeinen die Forderung $\frac{d_1}{c_4} \leq \underline{\underline{\lambda}}$ erfüllen, da für diese Elemente eine Reparatur meist nicht lohnt bzw. unmöglich ist und somit die Erneuerungskosten (Neuwert des Elements) groß gegenüber den meist sehr geringen Betriebskosten sind.

Es wird daher nach den Aussagen von Satz (3.8) im allgemeinen kostengünstiger sein, Reaktorbauelemente nach einem Plan vom Typ (n,∞,r) zu prüfen, während elektronische Bauelemente kostenkünstiger nach einem Plan vom Typ $(n,1,r)$ zu prüfen sind.

$\frac{d_1}{c_4 n_0^2} \geq \bar{\bar{\lambda}}$, $b_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$, $d_2 \neq 0$:

In diesem Fall gibt d_1 das Bonus- bzw. Maluspönale pro Zeiteinheit bei Unter- bzw. Überschreiten der vereinbarten Experimentdauer an (siehe Notation (3.3)). Ob die Forderung $\frac{d_1}{c_4 n_0^2} \geq \bar{\bar{\lambda}}$ erfüllt ist, hängt nicht allein vom Typ des zu prüfenden Elements ab, sondern auch von der jeweils zu treffenden Vereinbarung über d_1.

Hat man beispielsweise nach Satz (3.8) einen gleichmäßig besten (bzgl. eines entsprechend eingeschränkten Parameterbereichs) Typ von Plänen erhalten, so interessiert man sich nun für den gleichmäßig besten Plan dieses Typs. Für die Pläne vom Typ (n,∞,r) und $(n,1,r)$ kann man jedoch im Unterschied zu den Plänen vom Typ (n,∞,T) im allgemeinen - auch für einen eingeschränkten Parameterbereich für λ - keinen gleichmäßig besten Plan angeben (vergl. Satz (3.12) und Folgerung (3.14)). Es liegt deshalb nahe, für die Pläne vom Typ (n,∞,r) und $(n,1,r)$ als besten Plan den zu bezeichnen, der die maximal zu erwartenden Kosten minimiert (Minimax-Plan).

Zur Bestimmung des besten Plans eines Typs ist es nun - unabhängig vom gewählten Entscheidungskriterium - zweckmäßig, für jeden Typ von Plänen zunächst den Plan zu ermitteln, der für einen gegebenen Parameterwert λ die zu erwartenden Experimentkosten minimiert. Für die analytische Behandlung ist es dabei von Vorteil, in den Kostenfunktionen die Exponentialfunktion in Reihendarstellung zu wählen. Nach Folgerung (3.4) erhält man:

<u>Folgerung (3.9)</u>

Es gilt

(1) $C_r^N(n,r) = A_0^N + \sum_{i=1}^{\infty} A_i^N (T^N)^i$ mit

$$A_0^N = \begin{cases} n(a_0-a_1+c_0-c_1)+b_0 S^\infty+c_2+c_4(r-1)-d_0 d_1 & : \quad N = \infty \\ n(a_0-a_1+c_0-c_1)+b_0 S^1+rc_2-d_0 d_1 & : \quad N = 1, \end{cases}$$

$$A_i^N = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}\left(n(a_1 a_2^i+c_1 c_3^i)-c_2 c_3^i+d_1 d_2^{i-1}(i+d_0 d_2)\right) & : \; N = \infty,\ i = 1,2,\dots \\ \frac{(-1)^{i+1}}{i!}\left(n(a_1 a_2^i+c_1 c_3^i)-rc_2 c_3^i+d_1 d_2^{i-1}(i+d_0 d_2)\right) & : \; N = 1,\ i = 1,2,\dots\ . \end{cases}$$

(2) $C_T^\infty(n,T) = \overline{A}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i (T)^i$ mit

$$\overline{A}_0 = n(a_0-a_1+c_0-c_1)+b_0 nT+c_4 D^\infty - d_0 d_1$$

$$\overline{A}_i = \frac{(-1)^{i+1}}{i!} (n(a_1 a_2^i + c_1 c_3^i) + d_1 d_2^{i-1}(i+d_0 d_2)) \quad \text{für } i = 1,2,\dots \quad .$$

Zur Bestimmung der Erwartungswerte der Kosten wird zunächst ein Lemma bewiesen.

Lemma (3.10)

Es sei $N \in \{1,\infty\}$, $r,n,k \in \mathbb{N}$, $r \leq n$ für $N = 1, \lambda \in (0,\infty)$. Dann gilt

$$E_\lambda((T^N)^k) = \begin{cases} \dfrac{(r+k-1)!}{(r-1)!\,(n\lambda)^k} & : \ N = \infty \\[2ex] \dfrac{k!}{\lambda^k} \displaystyle\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_r=0 \\ i_1+i_2+\dots+i_r=k}}^{k} \frac{1}{n^{i_1}} \frac{1}{(n-1)^{i_2}} \cdots \frac{1}{(n-r+1)^{i_r}} & : \ N = 1. \end{cases}$$

Beweis:

Nach Satz (1.13) gilt: T^∞ ist $G(r,n\lambda)$ verteilt. Also gilt

$$E_\lambda((T^\infty)^k) = \int_0^\infty t^k (n\lambda)^r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-n\lambda t} dt = \frac{1}{(n\lambda)^{k-1}(r-1)!} \int_0^\infty (n\lambda t)^{r+k-1} e^{-n\lambda t} dt =$$

$= \dfrac{(r+k-1)!}{(r-1)!\,(n\lambda)^k}$. Andererseits folgt aus Definition (1.9) und (1.11)

$T^N \circ X = T_r$ und nach Folgerung (1.8) folgt $T_r = Y_1+Y_2+\dots+Y_r$. Damit gilt insbesondere für $N = 1$

$$E_\lambda((T^1)^k) = E((Y_1+Y_2+\dots+Y_r)^k) = E\Big(\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_r=0 \\ i_1+i_2+\dots+i_r=k}}^{k} \frac{k!}{i_1!\,i_2!\cdots i_r!} Y_1^{i_1} Y_2^{i_2} \cdots Y_r^{i_r}\Big).$$

Wegen der stochastischen Unabhängigkeit der $Y_i (i \in \{1,\dots,r\})$ nach Folgerung (1.8) gilt somit

$$E_\lambda((T^1)^k) = \sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_r=0 \\ i_1+i_2+\dots+i_r=k}}^{k} \frac{k!}{i_1!i_2!\dots i_r!} E(Y_1^{i_1})E(Y_2^{i_2})\dots E(Y_r^{i_r}).$$ Nach

Folgerung (1.8) gilt außerdem: Y_i ist $G(1,(n-i+1)\lambda)$ verteilt für $N = 1$.

Also gilt $E(Y_i^k) = \int_0^\infty t^k(n-i+1)\lambda e^{-(n-i+1)\lambda t}dt = \frac{k!}{(n-i+1)^k\lambda^k}$ $(i\in\{1,\dots,r\})$.

Somit gilt

$$E_\lambda((T^1)^k) = \sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_r=0 \\ i_1+i_2+\dots+i_r=k}}^{k} \frac{k!}{\lambda^k}\frac{1}{n^{i_1}}\frac{1}{(n-1)^{i_2}}\cdots\frac{1}{(n-r+1)^{i_r}}.$$

Es werden nun die Erwartungswerte der Kosten in der Darstellung von Folgerung (3.9) bestimmt.

<u>Folgerung (3.11)</u>

Es sei $r,n\in\mathbb{N}$, $T\in\mathbb{R}^+$, $\lambda\in(0,\infty)$, $\Delta = nT$, $A_i^1 (i=1,2,\dots)$ definiert wie in Folgerung (3.9), $\varepsilon = \sup\{a_2,c_3,|d_2|\}$.

(1) Es sei $\lambda \begin{cases} > \frac{\varepsilon}{n} & : N = \infty \\ > \frac{\varepsilon}{n-r+1} & : N = 1 \end{cases}$, $r\leq n$ für $N = 1$. Dann gilt

$$E_\lambda(C_r^N(n,r)) = \begin{cases} q_0+q_1n+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{p_i}{n^i} & :N=\infty \\ n(a_0-a_1+c_0-c_1)+b_0\frac{r}{\lambda}+rc_2-d_0d_1+ & \\ +\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{\lambda^i}A_i^1\Big(\sum\limits_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_r=0 \\ i_1+i_2+\dots+i_r=i}}^{i}\frac{1}{n^{i_1}}\frac{1}{(n-1)^{i_2}}\cdots\frac{1}{(n-r+1)^{i_r}}\Big) & :N=1 \end{cases}$$

mit

$q_0 = (a_1a_2+c_1c_3+b_0)\frac{r}{\lambda}+c_2+c_4(r-1)-d_0d_1$,

$q_1 = a_0-a_1+c_0-c_1$,

$p_i = (-1)^{i+1}\frac{r(r+1)\dots(r+i-1)}{\lambda^i i!}(d_1d_2^{\,i-1}(i+d_0d_2)-c_2c_3^i-$

$-\frac{r+i}{\lambda(i+1)}(a_1a_2^{i+1}+c_1c_3^{i+1}))$ $(i = 1,2,\dots)$.

$$(2)\ E_\lambda(C_T^\infty(n,T)) = \overline{q}_0 + \frac{\overline{q}_1}{T} + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{p}_i(T)^i \quad \text{mit}$$

$$\overline{q}_0 = ((a_1a_2+c_1c_3+b_0)+\lambda c_4)\Delta - d_0d_1,$$

$$\overline{q}_1 = (a_0-a_1+c_0-c_1)\Delta,$$

$$\overline{p}_i = \frac{(-1)^{i+1}}{i!}(d_1d_2^{\ i-1}(i+d_0d_2) - \frac{\Delta}{i+1}\quad(a_1a_2^{i+1}+c_1c_3^{i+1})) \quad (i = 1,2,\ldots).$$

Beweis:

Zu (1): Es sei $\gamma \in \mathbb{R}, |\gamma| \begin{cases} <\lambda n & :N=\infty \\ <\lambda(n-r+1) & :N=1 \end{cases}$, $f_\nu(\gamma T^N) = \sum_{i=0}^{\nu}(-1)^i \frac{\gamma^i}{i!}(T^N)^i$ für $\nu=0,1,\ldots$. Offensichtlich konvergiert $f_\nu(\gamma T^N)$ dem Maß nach gegen $e^{-\gamma T^N}$. Außerdem ist $|f_\nu(\gamma T^N)| \leq e^{|\gamma T^N|}$ $(\nu \geq 0)$ und $e^{|\gamma T^N|}$ ist eine integrierbare ZV (vergl. Satz (3.5)). Deshalb gilt nach dem Satz von Lebesgue (Satz von der majorisierten Konvergenz):
$E(\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(\gamma T^N)) = \lim_{\nu\to\infty} E(f_\nu(\gamma T^N))$. Nach Folgerung (3.9), Lemma (3.10) und Satz (1.13) folgt daraus durch Einsetzen d.B.

Zu (2): Folgt nach Folgerung (3.9) und Satz (1.13) unmittelbar durch Einsetzen.

Zur Bestimmung des Plans, der die zu erwartenden Experimentkosten für einen gegebenen Parameterwert $\tilde{\lambda}$ minimiert, wird zunächst der folgende Satz bewiesen.

Satz (3.12)

Es sei $r \in \mathbb{N}$, $x,\Delta \in \mathbb{R}^+$, $\tilde{\lambda} \in (0,\infty)$, ε, $q_i, \overline{q}_i, p_j, \overline{p}_j$ $(i \in \{0,1\},\ j = 1,2,\ldots)$ definiert wie in Folgerung (3.11), $A_i^1 (i = 1,2,\ldots)$ definiert wie in Folgerung (3.9), $K^\infty(x) = q_0+q_1x + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_i}{x^i}([x]^{1)} > \frac{\varepsilon}{\tilde{\lambda}})$, $K(x) = \overline{q}_0 + \frac{\overline{q}_1}{x} + \sum_{i=1}^{\infty}\overline{p}_i x^i\ (x>0)$,

$$K^1(x) = x(a_0-a_1+c_0-c_1) + b_0\frac{r}{\tilde{\lambda}} + rc_2 - d_0d_1 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{\tilde{\lambda}^i} A_i^1(\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_r=0\\ i_1+i_2+\ldots+i_r=i}} \frac{1}{x^{i_1}}\frac{1}{(x-1)^{i_2}}\cdots\frac{1}{(x-r+1)^{i_r}})([x] > \frac{\varepsilon}{\tilde{\lambda}} + r-1).$$

(1) Es sei $a_2=c_2=d_2=0$ bzw. $a_1,c_1,c_2 \leq d_1, d_0 \leq 1, d_2<0, 0<a_2,c_3 \leq \tilde{\lambda} \leq |d_2| < \frac{1}{r+3}$,

1) $[x]$ größte ganze Zahl $\leq x$

x_0 Lösung der Gleichung $q_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{ip_i}{x^{i+1}}$, $\overline{x} = \left[\frac{|d_2|}{\tilde{\lambda}}\right] + 1$. Dann besitzt $K^{\infty}(x)$ genau ein Minimum an der Stelle $\overline{n}_{\infty}$, mit

$$\overline{n}_{\infty} = \begin{cases} x_0 & : a_2 = c_3 = d_2 = 0 \\ \left.\begin{matrix} x_0 & : x_0 > \overline{x} \\ \overline{x} & : x_0 \leq \overline{x} \end{matrix}\right\} & : a_1, c_1, c_2 \leq d_1, d_0 \leq 1, d_2 < 0, 0 < a_2, c_3 \leq \tilde{\lambda} \leq |d_2| < \frac{1}{r+3}. \end{cases}$$

Es gilt

$$\overline{n}_{\infty} \begin{cases} = \sqrt{\dfrac{d_1}{a_0-a_1+c_0-c_1} \dfrac{r}{\tilde{\lambda}}} & : a_2 = c_3 = d_2 = 0 \\ > \sqrt{\dfrac{d_1(1+d_0d_2)-c_2c_3-\frac{r+1}{2\tilde{\lambda}}(a_1a_2^2+c_1c_3^2)}{a_0-a_1+c_0-c_1} \dfrac{r}{\tilde{\lambda}}} & : \begin{cases} a_1, c_1, c_2 \leq d_1, d_0 \leq 1, d_2 < 0, \\ 0 < a_2, c_3 \leq \tilde{\lambda} \leq |d_2| < \frac{1}{r+3}, x_0 > \overline{x}. \end{cases} \end{cases}$$

(2) Es sei $a_2 = c_3 = d_2 = 0$. Dann besitzt $K^1(x)$ genau ein Minimum für $x = \overline{n}_1$, wenn $\overline{n}_1$ Lösung der Gleichung $a_0 - a_1 + c_0 - c_1 = \frac{d_1}{\tilde{\lambda}} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{(x-i+1)^2}$ ist.

(3) Es sei $a_2 = c_3 = d_2 = 0$ bzw. $a_1, c_1, c_2 \leq d_1, d_0 \leq 1, d_2 < 0, 0 < a_2, c_3 \leq |d_2| < \frac{1}{2\Delta}(\sqrt{1+4\Delta}-1)$. Dann besitzt $K(x)$ genau ein Minimum für $x = \overline{T}$, wenn $\overline{T}$ Lösung der Gleichung

$\overline{q}_1 = \sum_{i=1}^{\infty} i\overline{p}_i x^{i+1}$ ist. Es gilt

$$\overline{T} \begin{cases} = \sqrt{\dfrac{a_0-a_1+c_0-c_1}{d_1} \Delta} & : a_2 = c_3 = d_2 = 0 \\ < \sqrt{\dfrac{a_0-a_1+c_0-c_1}{d_1(1+d_0d_2)-\frac{\Delta}{2}(a_1a_2^2+c_1c_3^2)} \Delta} & : \begin{cases} a_1, c_1, c_2 \leq d_1, d_0 \leq 1, d_2 < 0, \\ 0 < a_2, c_3 \leq |d_2| < \frac{1}{2\Delta}(\sqrt{1+4\Delta}-1) \end{cases} \end{cases}$$

Beweis:

Zu (1): Nach Folgerung (3.11) gilt für $\lambda = \tilde{\lambda}$

$$q_0 = (a_1a_2 + c_1c_3 + b_0)\frac{r}{\tilde{\lambda}} + c_2 + c_4(r-1) - d_0d_1 ,$$

$$q_1 = a_0 - a_1 + c_0 - c_1 ,$$

$$p_i = (-1)^{i+1} \frac{r(r+1)\dots(r+i-1)}{\tilde{\lambda}^i i!} (d_1d_2^{i-1}(i+d_0d_2) - c_2c_3^i - $$

$$- \frac{r+i}{\tilde{\lambda}(i+1)} (a_1a_2^{i+1} + c_1c_3^{i+1})) \quad (i = 1,2,\dots) .$$

Es soll zunächst gezeigt werden, daß gilt:

$p_1>0,\ p_i = 0\ (i = 2,3,\ldots)\ :\ a_2 = c_3 = d_2 = 0$

$p_i>0\ \ (i = 1,2,\ldots)\ :\ a_1,c_1,c_2\leq d_1,d_0\leq 1,d_2<0,0<a_2,c_3\leq\tilde{\lambda}\leq|d_2| < \frac{1}{r+3}$.

Für den Fall $a_2 = c_3 = d_2 = 0$ folgt d.B. durch Einsetzen. Für den Fall $a_1,c_1,c_2\leq d_1,d_0\leq 1,d_2<0,0<a_2,c_3\leq\tilde{\lambda}\leq|d_2| < \frac{1}{r+3}$ ist $p_i>0$ für $i=2k(k\in\mathbb{N})$ wegen $d_2<0$, $(i-d_0|d_2|)>0$. Damit genügt es zu zeigen, daß gilt

$d_1|d_2|^{i-1}(i-d_0|d_2|)>c_2c_3^i+\frac{r+i}{\tilde{\lambda}(i+1)}(a_1a_2^{i+1}+c_1c_3^{i+1})$ für $i=2k-1(k\in\mathbb{N})$. Es gilt

$$c_2c_3^i+\frac{r+i}{\tilde{\lambda}(i+1)}(a_1a_2^{i+1}+c_1c_3^{i+1})$$

$$\leq d_1(c_3^i+\frac{r+i}{\tilde{\lambda}(i+1)}(a_2^{i+1}+c_3^{i+1})) \quad \text{wegen } a_1,\ c_1,\ c_2\leq d_1$$

$$\leq d_1\tilde{\lambda}^i\ (1+2\ \frac{r+i}{i+1}) \quad \text{wegen } a_2,\ c_3\leq\tilde{\lambda}$$

$$\leq d_1\tilde{\lambda}^i\ (r+2) \quad \text{wegen } i\geq 1$$

$$\leq d_1|d_2|^{i-1}\tilde{\lambda}(r+2) \quad \text{wegen } \tilde{\lambda}\leq|d_2|$$

$$<d_1|d_2|^{i-1}\ \frac{r+2}{r+3} \quad \text{wegen } \tilde{\lambda}<\frac{1}{r+3}$$

$$<d_1|d_2|^{i-1}(1-|d_2|) \quad \text{wegen } |d_2|<\frac{1}{r+3}$$

$$<d_1|d_2|^{i-1}(i-d_0|d_2|) \quad \text{wegen } i\geq 1,\ d_0\leq 1.$$

Es gilt

$x\in(0,\infty)\ :\ a_2 = c_3 = d_2 = 0$ und

$x\in[\bar{x},\infty)\ :\ a_1,c_1,c_2\leq d_1,d_0\leq 1,d_2<0,0<a_2,c_3\leq\tilde{\lambda}\leq|d_2| < \frac{1}{r+3}$, da für $x\geq\bar{x}$ mit

$$\bar{x} = \left[\frac{|d_2|}{\tilde{\lambda}}\right]+1 \text{ gilt:} [x]> \frac{\varepsilon}{\tilde{\lambda}} = \frac{|d_2|}{\tilde{\lambda}} \text{ wegen } a_2,\ c_3\leq|d_2|.$$

Wegen $q_1 = a_0 - a_1 + c_0 - c_1 > 0$ nach Voraussetzung (3.3) gilt: $K^\infty(x)\to\infty$ für $x\to\infty$ und für $x\to 0$ im Fall $a_2 = c_3 = d_2 = 0$. Außerdem gilt $\frac{\partial K^\infty(x)}{\partial x} = q_1 - \sum_{i=1}^{\infty} i\ \frac{p_i}{x^{i+1}}$. Ist x_0 Lösung der Gleichung $q_1 = \sum_{i=1}^{\infty} i\ \frac{p_i}{x^{i+1}}$, so gilt:

$$\frac{\partial K^{\infty}(x)}{\partial x}\begin{cases}\text{monoton fallend in } x : x<x_0\\ = 0 \qquad : x = x_0\\ \text{monoton steigend in } x : x>x_0 .\end{cases}$$

Somit hat $K^{\infty}(x)$ genau ein Minimum an der Stelle $\overline{n}$, mit

$$\overline{n} = \begin{cases} x_0 & : a_2 = c_3 = d_2 = 0 \\ \left.\begin{matrix} x_0 & : x_0>\overline{x} \\ \overline{x} & : x_0\leq\overline{x}\end{matrix}\right\} & : a_1,c_1,c_2\leq d_1,d_0\leq 1,d_2<0,0<a_2,c_3\leq\tilde{\lambda}\leq|d_2| < \frac{1}{r+3} .\end{cases}$$

Für den Fall $a_2=c_3=d_2=0$ gilt wegen $p_i=0(i=2,3,\ldots)$ $\overline{n}=\sqrt{\frac{p_1}{q_1}}$, außerdem erhält man

$p_1 = d_1\frac{r}{\tilde{\lambda}}$. Für den Fall $a_1,c_1,c_2\leq d_1,d_0\leq 1,d_2<0,0<a_2,c_3\leq\tilde{\lambda}\leq|d_2| < \frac{1}{r+3}, x_0>\overline{x}$ gilt $\overline{n}>\sqrt{\frac{p_1}{q_1}}$ wegen $p_i>0$ für $i = 2,3,\ldots$, damit folgt d.B.

Zu (2): Nach Folgerung (3.9) erhält man $A_1^1 = d_1$, $A_i^1 = 0$ $(i = 2,3,\ldots)$ für $a_2 = c_3 = d_2 = 0$. Damit erhält man

$$K^1(x) = x(a_0-a_1+c_0-c_1)+b_0\frac{r}{\tilde{\lambda}}+rc_2-d_0d_1+\frac{d_1}{\tilde{\lambda}}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{x-i+1}\ (x>r-1).$$

Wegen $(a_0-a_1+c_0-c_1)>0$, $d_1>0$ nach Voraussetzung (3.3) gilt:
$K^1(x) \to \infty$ für $x \to r-1$ bzw. $x \to \infty$.
Außerdem gilt

$$\frac{\partial K^1(x)}{\partial x} = a_0-a_1+c_0-c_1-\frac{d_1}{\tilde{\lambda}}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{(x-i+1)^2},$$

$\frac{\partial^2 K^1(x)}{\partial x^2} = \frac{2d_1}{\tilde{\lambda}}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{(x-i+1)^3}$. Wegen $\frac{\partial^2 K^1(x)}{\partial x^2} > 0$ für alle $x\in\mathbb{R}^+$ hat $K^1(x)$ genau ein Minimum für $x = \overline{n}$, wenn $\overline{n}$ Lösung der Gleichung

$$a_0-a_1+c_0-c_1 = \frac{d_1}{\tilde{\lambda}}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{(x-i+1)^2}\quad \text{ist.}$$

Zu (3): Nach Folgerung (3.11) gilt für $\lambda = \tilde{\lambda}$,

$\overline{q}_0 = ((a_1a_2+c_1c_3+b_0)+\tilde{\lambda}c_4)\Delta-d_0d_1$,

$\overline{q}_1 = (a_0-a_1+c_0-c_1)\Delta$,

$$\overline{p}_i = \frac{(-1)^{i+1}}{i!}\left(d_1d_2^{i-1}(i+d_0d_2)-(a_1a_2^{i+1}+c_1c_3^{i+1})\frac{\Delta}{i+1}\right) \qquad (i = 1,2,\ldots).$$

Es soll zunächst gezeigt werden, daß gilt:

$\overline{p}_1>0,\ \overline{p}_i = 0 \quad (i = 2,3,\ldots) \quad : \quad a_2 = c_3 = d_2 = 0$

$\overline{p}_i>0 \quad (i = 1,2,\ldots) \quad : \quad a_1,c_1,c_2\leq d_1,d_0\leq 1,d_2<0,0<a_2,c_3\leq|d_2|<\frac{1}{2\Delta}(\sqrt{1+4\Delta}-1).$

Für den Fall $a_2 = c_3 = d_2 = 0$ folgt d.B. durch Einsetzen. Für den Fall $a_1,c_1,c_2\leq d_1,d_0\leq 1,d_2<0,0<a_2,c_3\leq|d_2| < \frac{1}{2\Delta}(\sqrt{1+4\Delta}-1)$ ist $p_i>0$ für $i=2k(k\in\mathbb{N})$ wegen $d_2<0,\ (i-d_0|d_2|)>0$. Damit genügt es zu zeigen, daß gilt:

$d_1|d_2|^{i-1}(i-d_0|d_2|)> \frac{\Delta}{i+1}(a_1a_2^{i+1}+c_1c_3^{i+1})$ für $i=2k-1(k\in\mathbb{N})$. Es gilt

$$\frac{\Delta}{i+1}(a_1a_2^{i+1}+c_1c_3^{i+1})$$

$$\leq \frac{d_1\Delta}{i+1}(a_2^{i+1}+c_3^{i+1}) \qquad \text{wegen } a_1,\ c_1\leq d_1;$$

$$\leq \frac{2d_1\Delta}{i+1}|d_2|^{i+1} \qquad \text{wegen } a_2,\ c_3\leq |d_2|;$$

$$\leq d_1|d_2|^{i+1}\Delta \qquad \text{wegen } i\geq 1;$$

$$< d_1|d_2|^{i-1}(1-|d_2|) \qquad \text{wegen } |d_2|<\frac{1}{2\Delta}(\sqrt{1+4\Delta}-1);$$

$$< d_1|d_2|^{i-1}(i-d_0|d_2|) \qquad \text{wegen } i\geq 1,\ d_0\leq 1.$$

Somit gilt wegen $\overline{q}_1>0$: $K(x) \to \infty$ für $x \to 0$ bzw. $x \to \infty$.
Außerdem gilt

$$\frac{\partial K(x)}{\partial x} = -\frac{\overline{q}_1}{x^2} + \sum_{i=1}^{\infty} i\overline{p}_i x^{i-1},\quad \frac{\partial^2 K(x)}{\partial x^2} = \frac{2\overline{q}_1}{x^3} + \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)\overline{p}_i x^{i-2}.$$

Wegen $\frac{\partial^2 K(x)}{\partial x^2}>0$ für alle $x\in\mathbb{R}^+$ hat $K(x)$ genau ein Minimum für $x = \overline{T}$, wenn $\overline{T}$ Lösung der Gleichung $\frac{\overline{q}_1}{x^2} = \sum_{i=1}^{\infty} i\overline{p}_i x^{i-1}$ ist. Für den Fall

$a_2 = c_3 = d_2 = 0$ gilt wegen $\overline{p}_i = 0$ $(i = 2,3,\ldots)$ $\overline{T} = \sqrt{\frac{\overline{q}_1}{\overline{p}}}$, außerdem erhält man $\overline{p}_1 = d_1$. Für den Fall $a_1, c_1, c_2 \leq d_1, d_0 \leq 1, d_2 < 0$, $0 < a_2, c_3 \leq |d_2| < \frac{1}{2\Delta}(\sqrt{1+4\Delta}-1)$ gilt $\overline{T} < \sqrt{\frac{\overline{q}_1}{\overline{p}_1}}$ wegen $\overline{p}_i > 0$ für $i = 2,3,\ldots$, damit folgt d.B.

Bemerkung:

Es sei $a_2 = c_3 = d_2 = 0$, $K^1(x)$ definiert wie in Satz (3.12). Für die numerische Bestimmung der Minimalstelle $\overline{n}_1$ von $K^1(x)$ erhält man gute Ergebnisse, wenn man für $\sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{x-i} \approx \ln \frac{x+\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}-r}$ $(x > r-1)$ setzt. Man erhält $\overline{n}_1 \approx \frac{r-1}{2} + \sqrt{(\frac{r}{2})^2 + \frac{d_1}{a_0-a_1+c_0-c_1}\frac{r}{\tilde{\lambda}}}$.

Beschränkt man sich nun auf Pläne, für die der Erwartungswert der Kosten endlich ist und außerdem r = const. für Pläne vom Typ (n,N,r) bzw. nT = const. für Pläne vom Typ (n,∞,T) - r = const. bzw. nT = const. ist erforderlich, um eine geforderte Güte der statistischen Aussage einzustellen (vergl. Bemerkung (2.8) und Bemerkung (2.9)) - so kann man nach Satz (3.12) Pläne angeben, die die zu erwartenden Experimentkosten für bestimmte Parameterwerte $\tilde{\lambda}$ minimieren. Man erhält:

Folgerung (3.13)

Es sei $\tilde{\lambda} \in (0,\infty)$, $N \in \{1,\infty\}$, $r, n, \hat{n}_N, \hat{n} \in \mathbb{N}$, $x_0, \overline{n}_N, \overline{T} \in \mathbb{R}^+$ definiert wie in Satz (3.12), $\Delta, T, \hat{T} \in \mathbb{R}^+$, $\overline{n} = \frac{\Delta}{\overline{T}}$.

(1) Es sei $E_{\tilde{\lambda}}(C_r^N(\hat{n}_N,r)) = \min\{E_{\tilde{\lambda}}(C_r^N(n,r)) \mid r=\text{const.}, n > \frac{|d_2|}{\tilde{\lambda}}$ für $N = \infty$, $n > \frac{|d_2|}{\tilde{\lambda}} + r-1$ für $N = 1\}$, $\overline{x} = \left[\frac{|d_2|}{\tilde{\lambda}}\right]+1$. Dann gilt

$$\hat{n}_N \begin{cases} \in \{[\overline{n}_N], [\overline{n}_N]+1\}: & \left.\begin{array}{l} a_2 = c_3 = d_2 = 0 \\ a_1, c_1, c_2 \leq d_1, d_0 \leq 1, d_2 < 0, 0 < a_2, c_3 \leq \tilde{\lambda} \leq |d_2| < \frac{1}{r+3}, x_0 > \overline{x} \end{array}\right\}: N=\infty \\ & a_2 = c_3 = d_2 = 0 \qquad : N=1 \\ = \overline{x} & a_1, c_1, c_2 \leq d_1, d_0 \leq 1, d_2 < 0, 0 < a_2, c_3 \leq \tilde{\lambda} \leq |d_2| < \frac{1}{r+3}, x_0 \leq \overline{x} \ : N=\infty. \end{cases}$$

(2) Es sei $E_{\tilde{\lambda}}(C_T^\infty(\hat{n},\hat{T})) = \min\{E_{\tilde{\lambda}}(C_T^\infty(n,T)) \mid nT = \Delta\}$. Dann gilt

$(\hat{n},\hat{T}) \in \{([\overline{n}], \frac{\Delta}{[\overline{n}]}), ([\overline{n}]+1, \frac{\Delta}{[\overline{n}]+1})\}$ für $a_2 = c_3 = d_2 = 0$ bzw. $a_1, c_1, c_2 \leq d_1, d_0 \leq 1, d_2 < 0, 0 < a_2, c_3 \leq |d_2| < \frac{1}{2\Delta}(\sqrt{1+4\Delta}-1)$.

Nach Satz (3.12) und Folgerung (3.13) kann man nun für Pläne vom Typ (n,N,r) einen Minimax-Plan bzw. einen gleichmäßig besten Plan bezüglich λ für Pläne vom Typ (n,∞,T) angeben.

Folgerung (3.14)

Es sei $\hat{n}_N, \hat{n}, \hat{T}$ definiert wie in Folgerung (3.13), $\underline{\underline{\lambda}}$ eine untere Schranke für den Parameter λ, r=const. für (n,N,r) Pläne, nT=const. für (n,∞,T) Pläne.

(1) Es sei $a_2 = c_3 = d_2 = 0$, $\lambda \in [\underline{\underline{\lambda}},\infty)$. Dann ist $(\hat{n}_N,N,r)$ ein Minimax-Plan für Pläne vom Typ (n,N,r), wenn $\hat{n}_N$ für $\lambda = \underline{\underline{\lambda}}$ bestimmt wird.

(2) Es sei $a_2 = c_3 = d_2 = 0$ bzw.

$$a_1, c_1, c_2 \leq d_1, d_0 \leq 1, d_2 < 0, 0 < a_2, c_3 \leq |d_2| < \frac{1}{2\Delta}(\sqrt{1+4\Delta}-1),$$

$\lambda \in (0,\infty)$ für Alternativtests bzw. $\lambda \in [\underline{\underline{\lambda}},\infty)$ für Parameterbereich- bzw. Parameterpunktschätzungen. Dann ist $(\hat{n},\infty,\hat{T})$ ein gleichmäßig bester Plan bezüglich λ für Pläne vom Typ (n,∞,T).

Beweis:

Zu (1): Für $a_2 = c_3 = d_2 = 0$ ist $E_\lambda(C_r^N(n,r))$ nach Folgerung (3.11) monoton fallend in λ. Damit folgt nach Satz (3.12) und Folgerung (3.13) d.B.

Zu (2): Da $\hat{n}$ und $\hat{T}$ in Folgerung (3.13) nach Satz (3.12) vom Parameterwert für λ unabhängig ist, folgert man d.B.

Bemerkung:

Die Einschränkung des Wertbereichs für den Parameter λ ist für Pläne vom Typ (n,N,r) notwendig, um das Minimax-Kriterium anwenden zu können, denn nach Folgerung (3.11) streben die zu erwartenden Kosten für $\lambda \to 0$ gegen unendlich. Für Pläne vom Typ (n,∞,T) ist bei Schätzungen die Einschränkung des Wertbereichs für λ dagegen notwendig, da man für alle λ aus $(0,\infty)$ die geforderte Güte der statistischen Aussage für Parameterbereich- und Parameterpunktschätzungen nicht einstellen kann (vergl. Bemerkung (2.9)).

Literaturverzeichnis

[1] Bauer H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, Berlin 1968.

[2] Beljajew I.K., Gnedenko B.W., Solowjew A.D.: Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie, Berlin 1965.

[3] Cramér H.: Mathematical Methods of Statistics, Princeton 1966.

[4] Epstein B., Sobel M.: Life Testing - Journal of the American Statistical Association, Vol. 48, 1953, S. 486 - 502.

[5] Epstein B., Sobel M.: Some Thorems relevant to Life Testing from an Exponential Distribution - Annals of Mathematical Statistics, Vol. 25, 1954, S. 373 - 381.

[6] Epstein B.: Truncated Life Tests in the Exponential Case - Annals of Mathematical Statistics, Vol. 25, 1954, S. 555 - 564.

[7] Epstein B.: The Exponential Distribution and its Role in Life Testing - Industrial Quality Control. Vol. 15, 1958, S. 4 - 9.

[8] Epstein B.: Estimation from Life Test Data - Technometrics, Vol. 2, No. 4, 1960, S. 447 - 455.

[9] Epstein B.: Statistical Life Tests Acceptance Procedures - Technometrics, Vol. 2, No. 4, 1960, S. 435 - 446.

[10] Epstein B.: Statistical Techniques in Life Testing, PB 171580, 1961 (zu erhalten über Clearinghouse).

[11] Feller W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. I, II, New York 1966.

/‾12_7 Harling K., Schürger K.: Optimierung der Instandhaltung von Flugzeuggeräten - Kurzfassung der Beiträge zur Tagung über Technische Zuverlässigkeit, Nürnberg 1971 (Hrsg.: ASQ, NTG, VDI).

/‾13_7 Lindgren B.W.: Statistical Theory, New York 1968.

/‾14_7 Lloyd D.K., Lipow M.: Reliability: Management, Methods and Mathematics, Englewood Cliffs, N.J. 1962.

/‾15_7 Natanson I.P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Berlin 1961.

/‾16_7 Nägele G., Sellinschegg D.: Test Cost Minimization for Reliability Assessment - Proceedings of the Annual Symposium on Reliability and Maintainability, San Francisco, USA 1972, S. 300 - 307.

/‾17_7 Neveu J.: Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie, München 1969.

/‾18_7 Taub T.W.: Minimizing Life Test Cost - IEEE Transactions on Reliability, May 1971, S. 84 - 85.

/‾19_7 Witting H.: Mathematische Statistik, Stuttgart 1966.

/‾20_7 Witting H., Nölle G.: Angewandte Mathematische Statistik, Stuttgart 1970.