

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM**

**KARLSRUHE**

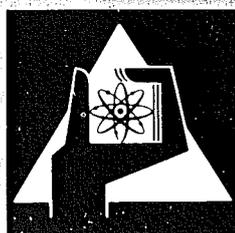
Dezember 1974

KFK 2058

Institut für Experimentelle Kernphysik

**Transversale und longitudinale Strahlanpassung an einen  
supraleitenden Protonenlinearbeschleuniger**

K.W. Zieher



**GESELLSCHAFT  
FÜR  
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

**KARLSRUHE**

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 2058

Institut für Experimentelle Kernphysik

TRANSVERSALE UND LONGITUDINALE STRAHLANPASSUNG AN EINEN  
SUPRALEITENDEN PROTONENLINEARBESCHLEUNIGER\*

K. W. Zieher

Gesellschaft für Kernforschung mbH, Karlsruhe

\* von der Universität (TH) Karlsruhe genehmigte Dissertation



## Zusammenfassung

Im Institut für Experimentelle Kernphysik der Universität und des Kernforschungszentrums Karlsruhe befindet sich ein supraleitender Prototyplinearbeschleuniger für Protonen im Bau. Als Injektor steht eine Hochspannungskaskade mit einer Duoplasmatronquelle für Protonen zur Verfügung. Ein transversales und longitudinales Strahlanpassungssystem wurde entwickelt und sowohl experimentell als auch theoretisch untersucht.

Der Phasenraumbereich der experimentell erzeugten Strahlpulse paßt transversal und longitudinal in den vorgegebenen Akzeptanzbereich des Linearbeschleunigers.

Das Prinzip nach dem der Strahl gepulst wird, weicht von der konventionellen Methode ab. Sowohl Messungen als auch Rechnungen zeigen, daß nach diesem Prinzip Strahlpulse erzeugt werden können, deren longitudinale Phasenraumfläche kleiner als die für einen konventionellen Chopper bekannte theoretische untere Grenze ist.

## TRANSVERSE AND LONGITUDINAL BEAM MATCHING TO A SUPERCONDUCTING LINEAR PROTON ACCELERATOR

### Abstract

A superconducting prototype linear accelerator for protons is being built at the Institut für Experimentelle Kernphysik der Universität and of the Kernforschungszentrum at Karlsruhe. A high voltage cascade generator with a duoplasmatron source for protons is available as an injector. A transverse and longitudinal beam matching system has been developed and investigated both experimentally and theoretically.

The phase space volume of the experimental beam pulses fits into the given transverse and longitudinal acceptance of the linear accelerator.

The principle of chopping the beam is different from the conventional method. Both measurements and calculations show that beam pulses can be produced according to this principle which occupy a longitudinal phase space volume smaller than the known theoretical lower limit for a conventional chopper.

Eingereicht am 28. August 1974

# INHALTSVERZEICHNIS

Seite

<u>1. EINLEITUNG</u>	1
<u>2. LÖSUNGSMÖGLICHKEITEN FÜR EIN STRAHLANPASSUNGSSYSTEM</u>	5
2.1 Teilchenauslese	5
2.2 Transversale Strahlanpassung (Fokussierung)	5
2.3 Longitudinale Strahlanpassung (Pulserzeugung)	5
2.3.1 Zerhacken des Strahls mit Hilfe eines transversalen elektrischen HF-Feldes und einer Blende (konventioneller Chopper)	8
2.3.2 Zerhacken des Strahls durch Energiemodulation, anschließende Energieselektion und Demodulation	12
2.3.3 Prinzip des Modulators (Buncher)	22
<u>3. EXPERIMENTELLER AUFBAU</u>	27
3.1 Strahlführungselemente	28
3.2 HF-Modulator (Buncher)	31
3.3 Justierung, Blenden, Fluoreszenzschirme	33
3.4 Meßeinrichtungen	34
3.4.1 Emittanzmeßgerät	35
3.4.2 Bunchanalysator	39
<u>4. MESSUNGEN</u>	43
4.1 Emittanzmessung	43
4.2 Messung der longitudinalen Dichteverteilung	47
4.2.1 Abhängigkeit der Bunchlänge von $x$ und $x'$	50
4.2.2 Bestimmung des Untergrundes zwischen den Paketen	52
4.2.3 Systematische Variation der Parameter	53

	Seite
5. <u>BERECHNUNG DER STRAHLDICHTE IN DER LONGITUDINALEN PHASENEBENE EINSCHLIEßLICH DER DRITTEN ORDNUNG</u>	56
5.1 Überblick über die Herleitung der allgemeinen Formeln	56
5.1.1 Energieänderung durch einen Modulator mit zwei getrennten Beschleunigungsspalten	57
5.1.2 Phasenabweichung der Teilchen aufgrund verschiedener Flugzeiten zwischen Modulator I und II	58
5.1.3 Resultierende Energieabweichung nach dem zweiten Modulator	59
5.1.4 Ankunftsphase am Beschleuniger	59
5.1.5 Bahnkoordinaten an der Schneide	60
5.1.6 Dichteverteilung des eingegebenen Strahls im transversalen Phasenraum	62
5.2 Numerische Rechnung	63
<u>6. ZUSAMMENFASSUNG</u>	70
<u>ANHANG</u>	73
A1 Energiemodulation durch einen Doppelspaltmodulator	73
A2 Phasenabweichung der Teilchen infolge verschiedener Flugzeiten zwischen Modulator I und II	83
A3 Resultierende Energieänderung nach dem zweiten Modulator	88
A4 Phasenabweichung am Beschleunigereingang	91
<u>LITERATURVERZEICHNIS</u>	97

## 1. EINLEITUNG

In Karlsruhe wurde der Bau eines supraleitenden Linearbeschleunigers für Protonen begonnen<sup>1</sup>. Die Frequenz der Beschleunigungskavitäten im ersten Teil des Beschleunigers beträgt 90 MHz, die Einschußenergie 750 keV. Der Energiegewinn pro Längeneinheit ist im ersten Teil mit 1 MeV/m angesetzt.

Eine wichtige Größe eines Beschleunigers ist seine Akzeptanz. Sie beschreibt den Phasenraumbereich\* der eingeschossenen Teilchen, die den Beschleuniger ungehindert durchlaufen. Im einzelnen gibt die transversale Akzeptanz die maximal zulässige Strahlbreite und Divergenz des Strahls an, während die longitudinale Akzeptanz die maximal erlaubte Länge der Strahlpulse und die größten zulässigen Energieabweichungen der Teilchen angibt. Teilchen mit Phasenraumkoordinaten außerhalb des Akzeptanzbereichs gehen im Laufe der Beschleunigung verloren, indem sie auf eine mechanische Begrenzung des Beschleunigers treffen. Dies führt neben dem Verlust dieser Teilchen zur Erwärmung und möglicherweise zu Strahlenschäden<sup>2,3</sup> der Oberflächen der Beschleunigungsresonatoren. Im Falle eines supraleitenden Linearbeschleunigers wird mit besonderem Nachdruck gefordert, daß sich außerhalb des Akzeptanzbereiches nahezu keine Teilchen befinden. Daneben ist ein kleiner Phasenraumbereich um das Sollteilchen eine notwendige Voraussetzung, um eine kleine Energiebreite des beschleunigten Strahls zu erzielen. Dieser Zusammenhang gewinnt beim supraleitenden Linearbeschleuniger gegenüber dem normalleitenden an Bedeutung, da beim supraleitenden Beschleuniger keine

---

\* Als Phasenraumkoordinaten werden hierbei statt  $(x, p_x, y, p_y, z, p_z)$  näherungsweise die Koordinaten  $(x, p_0 x', y, p_0 y', v_0(t-t_0), 2p_0(W-W_0)/W_0)$  genommen, wobei  $p_0, v_0, t_0, W_0$  der Impuls, die Geschwindigkeit, die Energie und die Ankunftszeit des Sollteilchens sind. Außerdem werden die konstanten Faktoren herausgenommen, so daß unter dem 6-dimensionalen Phasenraum der Raum  $(x, x', y, y', t-t_0, W-W_0)$ , unter den transversalen, zweidimensionalen Phasenebenen die Ebenen  $(x, x')$  und  $(y, y')$  und unter der longitudinalen Phasenebene die Ebene  $(t-t_0, W-W_0)$  zuweilen auch  $(\varphi - \varphi_0, W - W_0)$  mit  $\varphi = \omega t$  verstanden werden.  $\omega$  ist die Frequenz des Beschleunigers.

Energieverbreiterung durch 'transient beam loading' auftritt\*.

Die Größe der longitudinalen Akzeptanz hängt stark von der Größe des Frequenzsprunges und der Teilchenenergie bei der er erfolgt ab. Diese beiden Parameter konnten zur Zeit der Arbeit noch nicht festgelegt werden. Als obere Grenze für die Länge der Teilchenpakete wurde eine Phasenbreite  $\Delta\varphi=30^\circ$  festgelegt. Bei einem Energiegewinn von 1 MeV/m gehört zu dieser Phasenbreite eine Energiebreite der Teilchenbahnen im longitudinalen Phasenraum von  $\Delta W/W_0 \approx 8.7\%$ <sup>5</sup>. Abb. 1.1 zeigt die damit vorgegebene Akzeptanzellipse.

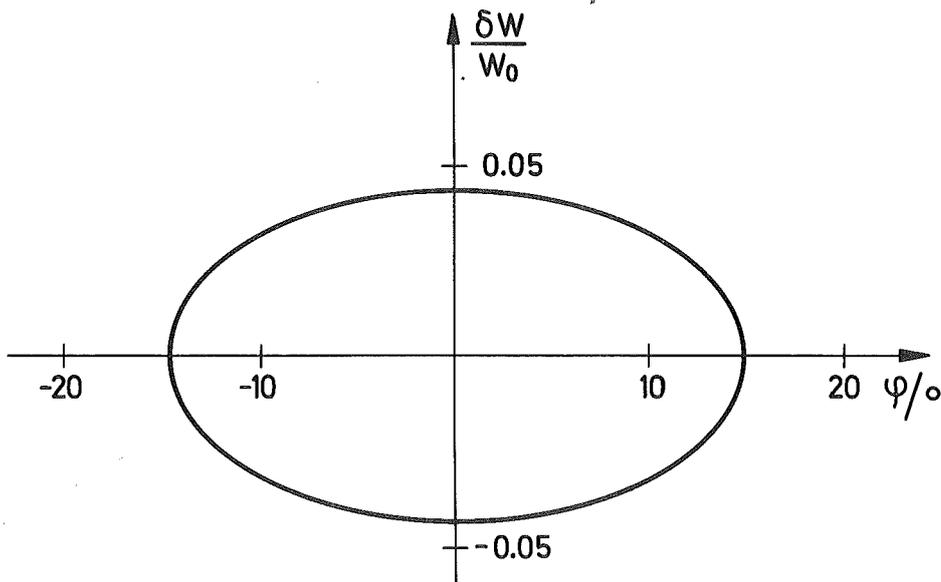


Abb. 1.1: Longitudinale Akzeptanz des Beschleunigers

Die transversale Akzeptanz hängt dagegen nur unwesentlich von diesem Frequenzsprung ab. Sie ist für den erreichbaren Energiegewinn und eine Pulslänge von  $\Delta\varphi=30^\circ$  nach Ref. 6 vorgegeben. In Abb. 1.2 ist die transversale Akzeptanz für die horizontale (a) und vertikale (b) Ebene bezogen auf den Eingang des Beschleunigers dargestellt<sup>6</sup>.

---

\* Bei normalleitenden Linearbeschleunigern für große Stromstärken tritt beim periodischen Einschalten des Strahls eine sich zeitlich ändernde Belastung der Beschleunigerresonatoren auf (transient beam loading)<sup>4</sup>, die nicht vollständig ausgeregelt werden kann und daher zu einer Energieverschmierung des beschleunigten Strahls führt.

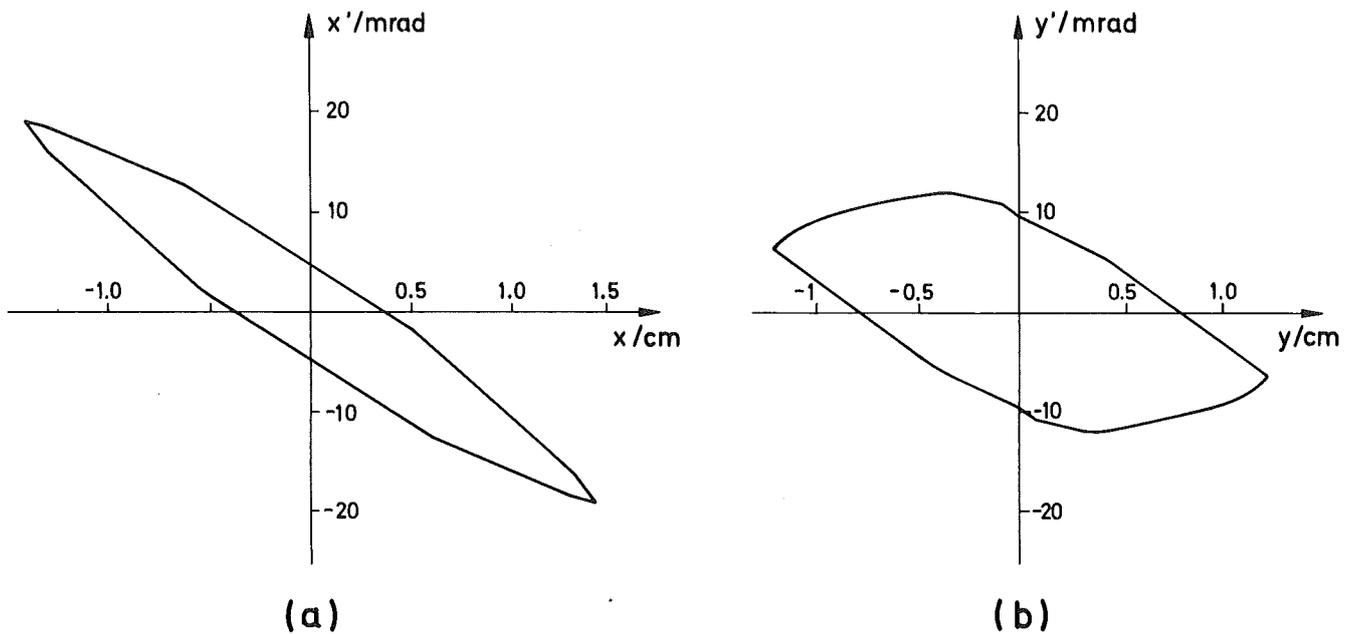


Abb. 1.2: Effektive, transversale Akzeptanz horizontal (a) und vertikal (b)<sup>6</sup>

Als Injektor steht eine Hochspannungskaskade zur Verfügung, in deren Hochspannungselektrode eine Duoplasmatronquelle<sup>7,8</sup> eingebaut ist. Bei geeigneter Wahl der Quell- und Extraktionsparameter besteht der extrahierte Ionenstrahl vorwiegend aus Protonen. Er durchfällt in einem Beschleunigungsrohr das Potential der Kaskade und erreicht hierbei eine kinetische Energie  $W_0 = 750 \text{ keV}$  pro Ion. Die nichtnormierte Emittanz  $\epsilon_0/\pi$  des Ionenstrahls beträgt nach Ausblenden der Randzone  $\epsilon_0/\pi = 2.5 \text{ cm mrad}$  bei einem Strahlstrom von  $1.5 \text{ mA}$  hinter der Blende. Die Emittanz des Protonenanteils wurde im Verlaufe dieser Arbeit bei einem Protonenstrom von  $1 \text{ mA}$  zu  $\epsilon_0/\pi = (1.8 \pm 0.3) \text{ cm mrad}$  bestimmt\*.

Die Aufgabe vorliegender Arbeit war es, den vom Injektor kommenden Strahl mit möglichst großer Ausbeute an die Akzeptanz des Linearbeschleunigers anzupassen.

Diese Anpassung kann in zwei Teile aufgegliedert werden:

---

\* Die Modulation der Hochspannung beträgt weniger als  $\pm 50 \text{ V}$  ( $50 \text{ Hz}$  und  $400 \text{ Hz}$ ) und hat eine relative Energiemodulation der Protonen von weniger als  $\pm 7.4 \times 10^{-5}$  zur Folge<sup>9</sup>, welche vernachlässigt werden kann.

1. F o k u s s i e r u n g : Der Protonenstrahl muß an die transversale Akzeptanz angepaßt werden. Dies geschieht durch teilchenoptische Elemente.
2. P u l s e r z e u g u n g : Die Protonen müssen in kurzen Pulsen konzentriert werden. Bei guter Strahlnutzung soll dabei der Phasenraumbereich um das Sollteilchen möglichst klein bleiben. Protonen, die sich zeitlich zwischen den Strahlpulsen aufhalten würden, müssen zuvor ausgeblendet werden. Hierzu wird ein Zerhackersystem ("Chopper") benötigt, das den Strahl pulst. Die Anhäufung der Teilchen in den Pulsen erfolgt durch einen "Buncher".

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Strahlanpassungssystem entwickelt und gebaut. Es wurde sowohl experimentell als auch theoretisch untersucht.

Die transversale Anpassung und die Anhäufung der Teilchen in den Pulsen erfolgt auf konventionelle Weise. Dagegen wurde für das Zerhacken des Strahls eine von den üblichen Verfahren abweichende Methode entwickelt, um möglichst schmale Strahlpulse zu erzielen.

In den meisten Fällen erfolgt das Zerhacken des kontinuierlichen Strahls durch periodisches Ablenken über eine Öffnung mit Hilfe eines transversalen, elektrischen Hochfrequenzfeldes<sup>10-14</sup>. Diese Methode besitzt eine untere Grenze des erreichbaren, longitudinalen Phasenraumvolumens der Strahlpulse, die nur vom transversalen Phasenraumvolumen des Strahls abhängt. Es gilt folgende Ungleichung

$$\Delta W \cdot \Delta T \geq \Delta p_y \cdot \Delta y \quad . \quad (1-1)$$

Hierbei sind  $\Delta W$  und  $\Delta T$  die Energiebreite und Dauer der Pulse,  $\Delta p_y$  und  $\Delta y$  die transversale Impulsbreite und Strahlbreite an einer Strahl-taille<sup>15,16</sup>. Die Strahlausbeute geht im Grenzfall gegen Null.

Bei dem im folgenden untersuchten System wird dagegen die Energie des Strahls periodisch moduliert. Anschließend durchläuft der Strahl ein Spektrometer, das nur Teilchen, deren Energie verkleinert wurde, durchläßt, also den kontinuierlichen Strahl zerhackt. Nach dem Spektrometer werden die entstandenen Pakete nachmoduliert, um als kurze Pulse in den Beschleuniger zu gelangen<sup>17</sup>.

Auf diese Weise erzeugte Pulse können longitudinale Phasenraumbe-reiche einnehmen, die kleiner sind als Gl. (1-1) erlaubt.

## 2. LÖSUNGSMÖGLICHKEITEN FÜR EIN STRAHLANPASSUNGSSYSTEM

### 2.1 Teilchenauslese

Durch geeignete Wahl der Extraktionsspannung und des magnetischen Fokussierungsfeldes an der Duoplasmatronquelle werden bevorzugt Protonen in die Beschleunigungssäule der Hochspannungskaskade eingespeist. Der aus dem Injektor kommende Strahl enthält neben den gewünschten Protonen noch Molekülionen des Wasserstoffs ( $H_2^+$  und  $H_3^+$ ), sowie schwerere Ionen ( $O^+$ ,  $N^+$ , Kohlenwasserstoffionen u.a.), da im Injektor keine Ablenkung der Strahlachse durch magnetische Felder erfolgt. Die unerwünschten Ionen werden, bei der magnetischen Umlenkung des vertikal aus dem Injektor austretenden Strahls in die Horizontale, an einer wassergekühlten Wand des Strahlrohres aufgefangen.

### 2.2 Transversale Strahlanpassung (Fokussierung)

Zur Anpassung des Injektorstrahls an den Ablenkmagnet, der, wie in 2.3. erläutert wird, gleichzeitig als Energiespektrometer eingesetzt wird, ist wenigstens ein magnetisches Quadrupoldublett nötig. Ebenso ist nach dem Magnet für die transversale Anpassung des Strahls an den Linearbeschleuniger wenigstens ein weiteres Quadrupoldublett erforderlich. Das System wird flexibler, wenn statt der Dubletts Quadrupoltripletts verwendet werden<sup>20</sup>.

### 2.3 Longitudinale Strahlanpassung (Pulserzeugung)

Die Erhöhung der Konzentration der Protonen in den Paketen und das Verkürzen der Pakete ist nach dem Klystronprinzip möglich<sup>21-25</sup>: Die Energie der Protonen und damit ihre Geschwindigkeit in Achsrichtung wird harmonisch als Funktion der Zeit mit der Frequenz  $\omega$  des anschließenden Linearbeschleunigers mit Hilfe eines Energiemodulators (Buncher) moduliert. Danach werden Protonen ver-

mindere Energie auf ihrem Weg zum Beschleuniger von solchen mit erhöhter Energie nach einer Driftstrecke  $s_0$  eingeholt. Es kommt zu Anhäufungen der Teilchen in einem räumlichen Abstand von  $\beta\lambda$ . Dabei ist  $\beta = v_0/c$  das Verhältnis der Teilchensollgeschwindigkeit  $v_0$  zur Lichtgeschwindigkeit  $c$  und  $\lambda$  die Vakuumwellenlänge der Frequenz  $\omega$ . Die Energiemodulation erfolgt im axialen, elektrischen Feld eines HF-Resonators der Frequenz  $\omega$ .

Abb. 2.1 zeigt ein Momentbild des Strahls. Er erfährt an der Stelle BU eine Energiemodulation. Der durch eine Linie verbundene Teil des Strahls ist für die Injektion in den Beschleuniger geeignet, der Rest der Teilchen muß aus dem Strahl entfernt werden. Im unteren Teil der Abb. 2.1 ist die Dichte längs der Strahlachse  $z$  dargestellt. Nach einer Driftstrecke  $s_0$  haben die Pakete eine optimale Teilchenkonzentration für eine anschließende Wechselfeldbeschleunigung.

An dieser Stelle beginnt der Linearbeschleuniger. Sein Beschleunigungsfeld verhindert das in Abb. 2.1 sichtbare axiale Auseinanderlaufen der Pakete ( Bunch ) nach der Strecke  $s_0$ <sup>5,26</sup>. Das Auslenken der unerwünschten Protonen zwischen den Paketen erfolgt zweckmäßigerweise vor dem Zusammenlaufen der Teilchen, also vor, oder kurz nach dem Buncher. Der Strahl wird dadurch zerhackt (Chopping).

Im folgenden Abschnitt 2.3.1 wird die konventionelle Methode den Strahl zu zerhacken beschrieben und eine theoretische Grenze für die kleinste erreichbare, longitudinale Phasenfläche der entstehenden Strahlpulse hergeleitet. Da diese Choppermethode für die vorliegende Anwendung nicht zufriedenstellend ist, wird im Abschnitt 2.3.2 eine neuartige Choppermethode beschrieben, mit der theoretisch Strahlpulse mit wesentlich kleinerer longitudinaler Phasenfläche erzeugt werden können. Der Buncher wird im Abschnitt 2.3.3 beschrieben.

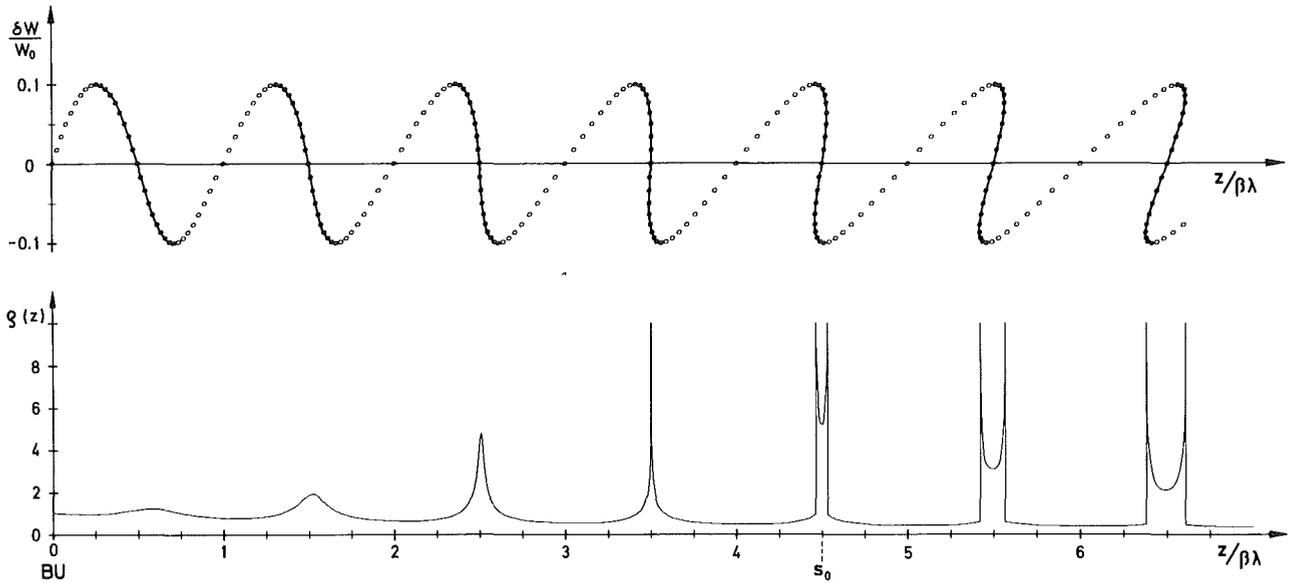


Abb. 2.1: Momentbild der Energiemodulation und der Dichteverteilung als Funktion von  $z$ . Nach dem Buncher BU beginnen die Teilchen mit vergrößerter Energie die anderen Teilchen einzuholen, während Teilchen mit verminderter Energie etwas zurückbleiben. Auf diese Weise häufen sich die Teilchen in Abständen von  $\beta\lambda$  (Bunching). Nach einer Driftstrecke  $s_0$  sind die Teilchen für eine anschließende Wechselfeldbeschleunigung optimal gruppiert. Die zwischen den Anhäufungen liegenden Teilchen sind im Beschleuniger unerwünscht und müssen ausgeschieden werden (Chopping).

### 2.3.1 Zerhacken des Strahls mit Hilfe eines transversalen elektrischen HF-Feldes und einer Blende (konventioneller Chopper)

---

Eine bekannte und häufig angewandte Methode einen kontinuierlichen Strahl zu pulsen besteht darin, den Strahl periodisch über eine Öffnung zu lenken. Das Ablenken geschieht dabei durch das transversale elektrische Feld\* eines Hochfrequenzresonators<sup>10-14</sup>. Abb. 2.2 zeigt das Prinzip eines solchen Choppers.

In einem hochfrequenten, transversalen elektrischen Feld

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (2-1)$$

erfährt ein geladenes Teilchen eine Impulsänderung

$$\Delta \vec{p} = e \int_{t_1}^{t_2} \vec{E}(\vec{r}, t) dt \quad (2-2)$$

Dabei ist  $\vec{r} = (x, y, z)$  der Ortsvektor des Teilchens,  $\vec{E}(\vec{r})$  die elektrische Feldstärke am Ort des Teilchens,  $e$  seine Ladung und  $\varphi$  die Phase bei der das abzulenkende Teilchen die Mittelebene des Deflektors passiert.

$t_1$  und  $t_2$  sind Zeitpunkte vor Erreichen, bzw. nach Verlassen des HF-Feldes.

Die Impulsänderung beträgt in der Ablenkebene

$$\Delta p_y = e \int_{t_1}^{t_2} E_y(y, z(t)) \cdot \cos(\omega t + \varphi) dt \quad (2-3)$$

und in Achsrichtung infolge der Randfelder

$$\Delta p_z = e \int_{t_1}^{t_2} E_z(y, z(t)) \cdot \cos(\omega t + \varphi) dt \quad (2-4)$$

---

\* Es ist auch möglich, den Strahl durch das transversale Magnetfeld eines TM-Resonators abzulenken<sup>18, 19</sup>. Die erzeugten Kräfte auf den Teilchenstrahl sind um einen Faktor  $\beta = v_0/c$  kleiner als bei Ablenkung durch elektrische Felder gleicher Energiedichte, also für niederenergetische Protonen ungünstig.

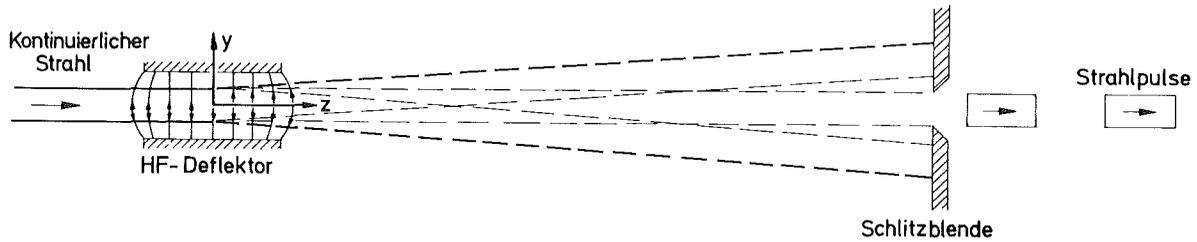


Abb. 2.2: Prinzip eines HF-Deflektor-Choppers. Der kontinuierliche Strahl wird periodisch über eine Blende geführt. Dabei entstehen hinter der Blende Strahlpakete mit der doppelten Frequenz des Deflektors.

Entwickelt man die Feldkomponenten  $E_y$  und  $E_z$  an der Mittelebene ( $y = 0$ ) nach  $y$ , so ergibt sich in niederster Näherung bei Berücksichtigung der Symmetrie des Deflektors

$$E_y(y, z) = E_y(0, z) \quad \text{und}$$

$$E_z(y, z) = y \cdot \left. \frac{\partial E_z}{\partial y} \right|_{(0, z)} = y \left. \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{(0, z)}, \quad \text{da } \nabla_{\mathbf{x}} \vec{E} = 0 \quad (2-5)$$

Eingesetzt in Gl. (2-4) erhält man bei Berücksichtigung der Symmetrie in  $z$ -Richtung ( $E_y(0, z) = E_y(0, -z)$ ):

$$\delta p_y = (\Delta p_y)_0 \cdot \cos \varphi \quad \text{mit} \quad (\Delta p_y)_0 = \frac{e}{v_0} \int_{z_1}^{z_2} E_y(0, z) \cdot \cos\left(2\pi \frac{z}{\beta \lambda}\right) \cdot dz \quad (2-6)$$

und zusammen mit  $y(z) = y(0) + z \cdot y'(0)$

$$\delta p_z = - \frac{e}{v_0} \cdot y(0) \int_{z_1}^{z_2} \left. \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{(0, z)} \cdot \sin\left(2\pi \frac{z}{\beta \lambda}\right) dz \cdot \sin \varphi$$

$$+ \frac{e}{v_0} y'(0) \int_{z_1}^{z_2} z \cdot \left. \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{(0, z)} \cdot \cos\left(2\pi \frac{z}{\beta \lambda}\right) \cdot dz \cdot \cos \varphi \quad (2-7)$$

Partielle Integration führt zu

$$\delta p_z = (\Delta p_y)_0 \cdot \frac{y(0)}{\beta\lambda} \cdot 2\pi \cdot \sin\varphi - (\Delta p_y)_0 \cdot y'(0) \cdot \cos\varphi + y'(0) \cdot 2\pi \cdot \frac{e\beta\lambda}{v_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z}{\beta\lambda} \cdot E_y(0,z) \cdot \sin\left(2\pi \frac{z}{\beta\lambda}\right) \cdot \frac{dz}{\beta\lambda} \cdot \cos\varphi. \quad (2-8)$$

Die Energieänderung ist in niederster Näherung

$$\delta W = \frac{p_y \cdot \delta p_y}{m} + \frac{p_z \cdot \delta p_z}{m} = \frac{p_0}{m} (y' \cdot \delta p_y + \delta p_z). \quad (2-9)$$

Gl. (2-6) und (2-8) in diese Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\delta W = \frac{p_0}{m} \left[ (\Delta p_y)_0 \cdot \frac{y(0)}{\beta\lambda} \cdot 2\pi \cdot \sin\varphi + (\Delta p_y)_0 \cdot y'(0) \cdot 2\pi \frac{\int_{z_1}^{z_2} \frac{z}{\beta\lambda} E_y(0,z) \cdot \sin\left(2\pi \frac{z}{\beta\lambda}\right) dz}{\int_{z_1}^{z_2} E_y(0,z) \cdot \cos\left(2\pi \frac{z}{\beta\lambda}\right) dz} \right] \quad (2-10)$$

In den folgenden Rechnungen wird der Strahl in der Ablenkebene durch eine Phasenraumellipse mit den Halbachsen  $y_0$  und  $y_0'$  ersetzt:

$$y = y_0 \cdot \cos\epsilon, \quad y' = y_0' \cdot \sin\epsilon \quad \text{mit } 0 \leq \epsilon \leq 2\pi. \quad (2-11)$$

Die Emittanz in dieser Ebene ist gegeben durch

$$\epsilon_0/\pi = y_0 \cdot y_0'. \quad (2-12)$$

Um den Strahl mit einer Ausbeute von 40 bis 50 % und  $\Delta\varphi \cong 90^\circ$  zu pulsen, muß die Amplitude der Ablenkung etwa viermal so groß sein wie die Divergenz des Strahls. Dieser Zusammenhang ist schematisch in Abb. 2.3 dargestellt.

Wird  $(\Delta p_y)_0 = 4y_0' \cdot p_0$ ,  $y(0) = y_0 \cdot \cos\epsilon$  und  $y'(0) = y_0' \cdot \sin\epsilon$  mit  $0 \leq \epsilon \leq 2\pi$  in Gl.(2-10) eingesetzt, so kann für einen nahezu parallelen Strahl (breite Strahltaile) der zweite Ausdruck in der Klammer vernachlässigt werden und es wird

$$\delta W = 8\pi \cdot \frac{p_0^2}{m} \cdot \frac{y_0}{\beta\lambda} \cdot y_0' \cdot \cos\epsilon \cdot \sin\varphi$$

$$\text{mit } 0 \leq \epsilon \leq 2\pi \quad \text{und} \quad -\frac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{4} \quad \text{oder} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi. \quad (2-13)$$

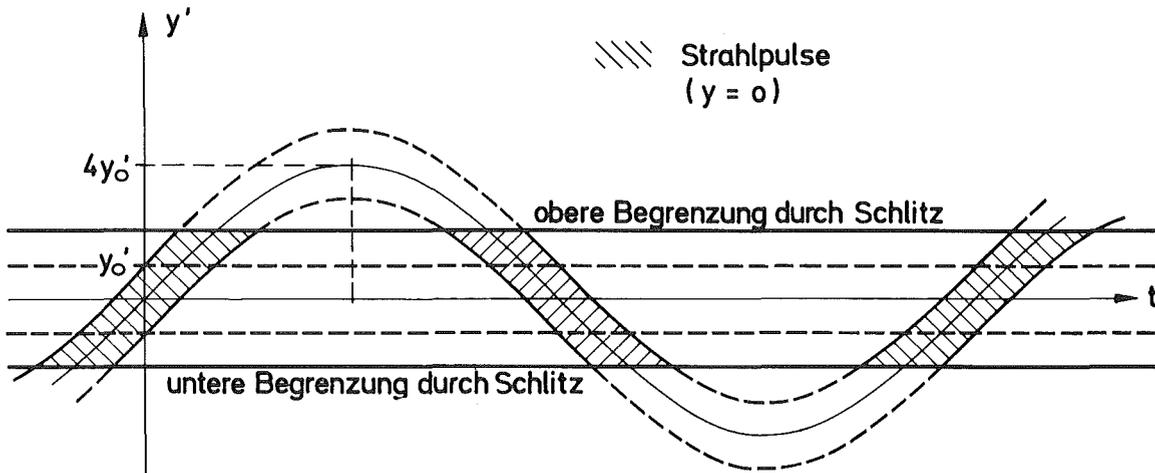


Abb. 2.3: Strahlpakete in der  $y'$ - $t$ -Ebene ( $y = 0$ ) an der Schlitzeblende. Die Begrenzung durch den Schlitz schneidet Teilchen mit  $|y'| \geq 2y_0'$  ab. Die im Strahl verbleibenden Teilchen (schraffiert) bilden Pakete der Länge  $\beta\lambda/4$ .

Die Energiebreite  $\Delta W$  der Pulse beträgt

$$\Delta W = 16 \pi \frac{p_0^2}{m} \cdot \frac{y_0}{\beta\lambda} \cdot y_0' \quad . \quad (2-14)$$

Da die Pakete eine Länge von etwa  $\beta\lambda/4$  und damit eine Dauer

$$\Delta T = \frac{\beta\lambda}{4v_0}$$

der Strahlpulse

$$\Delta W \cdot \Delta T \cong \pi \cdot \Delta p_y \cdot \Delta y \quad . \quad (2-15)$$

Dabei ist  $\Delta p_y$  die Breite des transversalen Impulsbereichs und  $\Delta y$  die Strahlbreite an der Strahltaile.

Der Inhalt der longitudinalen Phasenfläche bleibt aufgrund des Liouvilleschen Satzes <sup>30</sup> bei der nachfolgenden Anpassung durch den Buncher erhalten \*. Praktisch weicht die Modulation jedoch von einem linearen Sägezahnverlauf ab und verzerrt die Phasenfläche.

---

\* In erster Näherung sind die Bewegungen der Teilchen in den zweidimensionalen Unterebenen  $(x, x')$ ,  $(y, y')$ ,  $(t, W - W_0)$  voneinander unabhängig.

Wird die Verzerrung nicht korrigiert<sup>23,27-29</sup>, so ist dies gleichbedeutend mit einer Vergrößerung der effektiven Phasenfläche. Sollen etwa die Hälfte der Teilchen optimal in den Pulsen zusammengeführt werden, so ist die Vergrößerung, wenn nur mit der Grundfrequenz moduliert wird  $\Delta\varphi_{BU} \cong 10^0$ .

Im vorliegenden Fall setzt sich bei einer Emittanz von 1,8 cm mrad, einer Ausbeute von 40 bis 50% und einer Amplitude der Energiemodulation von 3.6% die minimale Länge  $\Delta\varphi$  der Strahlpulse zusammen: aus einem Chopperanteil

$$\Delta\varphi_{CH} = \pi \cdot \frac{s_0}{\beta\lambda} \cdot \frac{\Delta W_{CH}}{W_0} \cong 15^0$$

und dem Buncheranteil von  $10^0$ . Es sind Strahlpulse mit einer Länge  $\Delta\varphi \geq 25^0$  zu erwarten.

Dieser Wert läßt keine ausreichende Akzeptanzreserve des Beschleunigers übrig. Geringe Störungen der Phase oder der Amplitude des Bunchers oder geringe Fehler in der Justierung der Beschleunigerelemente können dazu führen, daß die Phasenfläche der injizierten Strahlpakete die longitudinale Akzeptanz des Beschleunigers übersteigt und zu Teilchenverlusten mit deren Folgen führt.

Es wurde deshalb zur Lösung der vorliegenden Aufgabe eine andere Methode entwickelt, um den Strahl zu pulsen. Im folgenden Abschnitt wird das Prinzip erläutert und es werden die grundlegenden Eigenschaften in niederster Näherung hergeleitet.

### 2.3.2 Zerhacken des Strahls durch Energiemodulation, anschließende Energieselektion und Demodulation

Statt den transversalen Impuls  $p_y$  des Strahls periodisch zu ändern, kann auch durch eine periodische Änderung des axialen Impulses  $p_z$  mit Hilfe eines Energiemodulators (kurz: Modulator) eine periodische Auslenkung des Strahls aus seiner Mittellage (Sollbahn) in einem nachfolgenden statischen Magnetfeld erreicht werden.

Eine Chopperanordnung, die auf der Modulation des axialen Impulses beruht, besteht aus einem Modulator, gefolgt von einem Energiespektrometer mit einem Fenster oder einer Schneide und danach einem weiteren Modulator zur Kompensation der Modulation des ersten<sup>1,17</sup>. Dieser zweite Modulator kann gleichzeitig als Buncher dienen. Abb. 2.4 zeigt das Prinzip dieser Methode.

Der vom Injektor kommende, kontinuierliche Strahl wird auf die Mitte  $F_1$  eines ersten Energiemodulators fokussiert. Danach tritt der harmonisch energiemodulierte Strahl in ein magnetisches Spektrometer. Aufgrund der fokussierenden Wirkung des magnetischen Ablenkfeldes entsteht nach dem halben Durchlaufen des Spektrometers eine Strahltaille  $F_e$ , deren radiale Position sich linear mit dem Impuls ändert. Der Strahl wird, gemäß seiner Energiemodulation, periodisch um eine Mittellage radial versetzt. Durch eine Schneide kann nun der Teil des Strahls, der eine Energieerhöhung erfuhr, ausgeblendet werden, während der Rest der Teilchen innerhalb der Schneide vorbeifliegt. Nachdem der nun gepulste Strahl die zweite Hälfte des Magneten durchlaufen hat, entsteht außerhalb des Feldes wieder eine Strahltaille  $F_2$ . An dieser Stelle befindet sich ein zweiter Modulator, der die Energievariation der entstandenen Pakete demoduliert. Er kann gleichzeitig die nötige Modulation für das Klystron-Bunching erzeugen. Bei symmetrischem Aufbau des Magneten mit einer Strahltaille auf halbem Weg erfolgt die Ablenkung ohne chromatische Aberration<sup>31</sup> und die Abbildung von  $F_1$  auf  $F_2$  ohne Öffnungsfehler\*. Die Längen der divergenten Teilchenbahnen werden in erster Näherung von  $y'$  gleich. Dadurch wird eine weitgehende Kompensation der Energiemodulation durch den zweiten Modulator möglich. Bei reinem Zerhackerbetrieb ohne Bunching ist die effektive

---

\* Die Abbildungskoeffizienten  $(y, y'^2)$  und  $(y, \delta)$  für die Abbildung von  $F_1$  auf  $F_2$  sind Null. Dabei ist  $\delta$  die relative Energieabweichung.

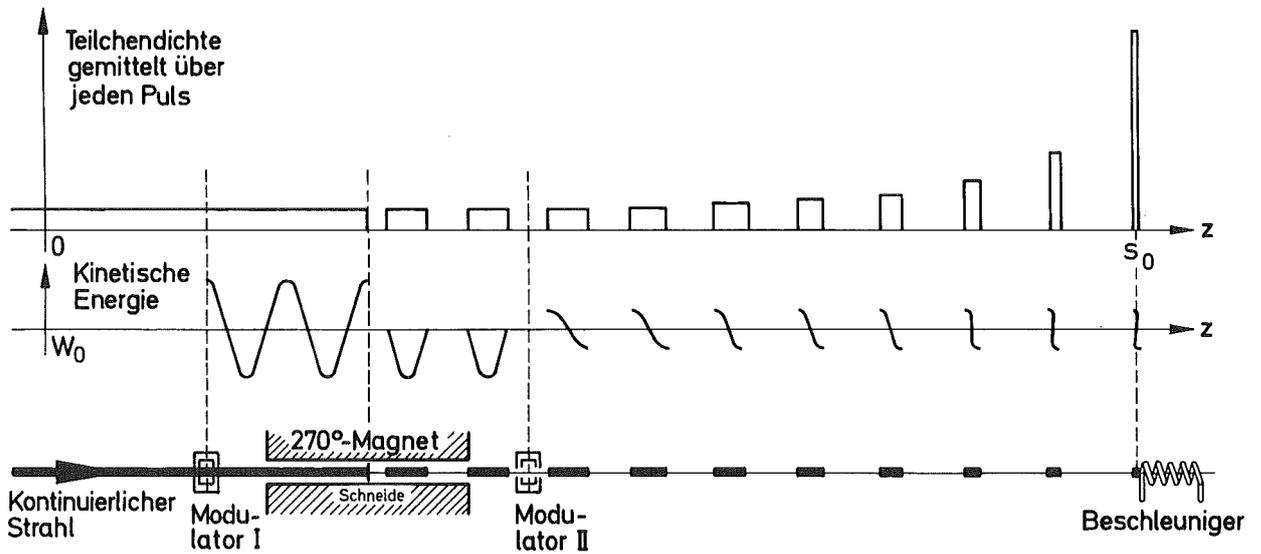
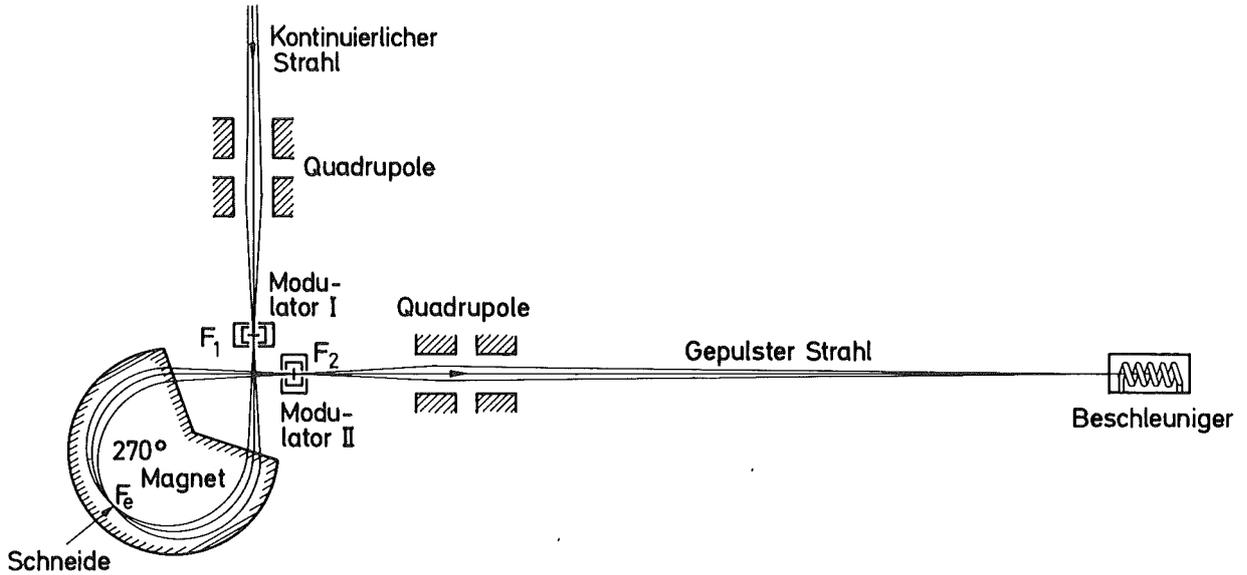


Abb. 2.4: Prinzip des Chopper-Buncher-Systems. Der vom Injektor kommende kontinuierliche Protonenstrahl wird im Modulator I energiemoduliert. Die Schneide bei  $F_e$  schneidet die höherenergetischen Teilchen heraus. Übrig bleiben Strahlpakete der Länge  $\beta\lambda/2$ . Im Modulator II wird die Energiemodulation der Pakete korrigiert, so daß die Teilchen der Pakete nach einer Driftstrecke  $s_0$  optimal am Beschleunigereingang zusammenlaufen.

longitudinale Phasenfläche der Strahlpakete gleich dem Produkt aus der resultierenden Energieunschärfe, multipliziert mit der Dauer der Pulse: Dieses Produkt ist ein Maß für die Güte des Choppers.

Nachfolgende Rechnung und ausführliche Rechnungen im Anhang zeigen, daß die Divergenz  $y_1'$  des Strahls in die resultierende Energiemodulation nicht linear, sondern quadratisch eingeht \* . Daher ist es nötig, in erster Näherung Glieder mit  $y_1'^2$  neben solchen, die linear in  $y_1$  und  $\delta$  sind, zu berücksichtigen.

$\delta = (W - W_0)/W_0$  ist die relative Energieabweichung des Teilchens von der Sollenergie  $W_0$ . Vernachlässigt werden Ausdrücke der Form  $y_1 \cdot y_1'$  ,  $y_1'^2$  und  $y_1 \delta$  gegen  $y_1$  .

Um eine grobe Vorstellung von der Güte eines solchen Chopper-Systems zu bekommen, werden folgende vereinfachende Annahmen gemacht: Die Modulatoren sollen nur einen einzigen, im Vergleich zu  $\beta\lambda$  kurzen Beschleunigungsspalt besitzen. Die Ausdehnung des Strahls senkrecht zur Ablenkebene wird nicht berücksichtigt. Der vom Injektor kommende Strahl sei monoenergetisch. Raumladungseffekte werden nicht berücksichtigt.

Ein Teilchen, das den ersten Modulator zur Zeit  $t_1$  durchläuft, erfährt eine Energieänderung

$$\delta W_1 = W_m \cdot \sin \omega t_1 \quad . \quad (2-16)$$

Es erreicht den zweiten Modulator nach einer Zeit

$$t_2 - t_1 = \frac{S}{v} \quad . \quad (2-17)$$

---

\* Dies kann folgendermaßen erklärt werden:

1. Die Energieänderung eines Teilchens beim Passieren eines Modulators wächst, wegen der Symmetrie bezüglich  $y = 0$  , quadratisch mit  $y$  und  $y'$  .
2. Die Laufzeit der Teilchen zwischen den beiden Modulatoren hängt quadratisch von der Neigung  $y_1'$  der Teilchenbahn am Punkt  $F_1$  ab.
3. Die Breite der Strahltaile an der Schneide und damit der nötige Modulationshub wächst linear mit  $y_0$  und quadratisch mit  $y_0'$  .

Die Bahnlänge  $s$  ist in niederster Näherung unter Berücksichtigung von  $y_1'^2$ :

$$s = \ell \left( 2 + \frac{y_1'^2}{2} + \frac{y_2'^2}{2} \right) + \int_0^{3\pi/2} r \left( 1 + \frac{r'^2}{2} \right) d\Theta$$

$$= s_m + \int_0^{3\pi/2} (r - r_0) d\Theta + r_0 \int_0^{3\pi/2} \frac{r'^2}{2} d\Theta + \frac{\ell}{2} (y_1'^2 + y_2'^2) \quad (2-18)$$

Hierbei ist  $\ell$  der Abstand der Strahltaillen  $F_1$  und  $F_2$  von der Grenze des Magnetfeldes,  $y_2'$  die Steigung der Teilchenbahn relativ zur Strahlachse bei  $F_2$ ,  $r$  der Abstand der Teilchenbahn vom Mittelpunkt der Sollbahn,  $r'$  die Steigung der Teilchenbahn relativ zur Sollbahn bei gleichem Winkel  $\Theta$ ,  $r_0$  der Sollbahnradius und  $s_m = 2\ell + \frac{3\pi}{2} r_0$  die Länge der Sollbahn zwischen  $F_1$  und  $F_2$ .

Die Teilchenbahn im Magnetfeld wird beschrieben durch eine Reihenentwicklung nach den Abweichungen der Bahnparameter von denen der Sollbahn am Eingang des Magnetfeldes<sup>32-37</sup>. In der diesem Abschnitt zugrundegelegten Näherung ist

$$r - r_0 = r_0 \left[ (u, u) u + (u, \alpha) \alpha + (u, \delta) \delta + (u, uu) u^2 + (u, u\alpha) u\alpha + (u, \alpha\alpha) \alpha^2 \right]. \quad (2-19)$$

Dabei ist  $u = \frac{y}{r_0}$ ,  $\alpha = y'$  am Eingang des Magnetfeldes, jedoch außerhalb des Randfeldes. Bei den Bahnkoeffizienten  $(u, u)$ ,  $(u, \alpha)$  etc. bedeuten spitze Klammern den Einschluß der Randfelder und zwar rechts für den Strahleintritt und links für den Strahlaustritt aus dem Magnetfeld. Die Koeffizienten sind Funktionen von  $\Theta$ . Sie können den Ref. 36 und Ref. 37 entnommen werden.

Entsprechend ist

$$r'^2 = \left[ (\alpha, u) u + (\alpha, \alpha) \alpha + (\alpha, \delta) \delta \right]^2. \quad (2-20)$$

Die Bahnparameter am Eingang des Magnetfeldes sind

$$u = \frac{y_1}{r_0} + \frac{\ell}{r_0} y_1', \quad \alpha = y_1', \quad \delta = \frac{\Delta W_I}{W_0}. \quad (2-21)$$

Multiplikation von Abbildungsmatrizen einer Driftstrecke  $\ell$  und eines Sektorfeldes unter Einschluß beider Randfelder liefert

$$y_2' = \langle \alpha, u \rangle \frac{y_1}{r_0} + \left[ \langle \alpha, u \rangle \frac{\ell}{r_0} + \langle \alpha, \alpha \rangle \right] y_1' + \langle \alpha, \delta \rangle \frac{\delta W_I}{W_0} \quad (2-22)$$

Die Forderung, daß  $F_1$  auf  $F_2$  abgebildet wird, führt bei einer Vergrößerung von 1 zu

$$\langle \alpha, u \rangle \frac{\ell}{r_0} + \langle \alpha, \alpha \rangle = 1 \quad (2-23)$$

Außerdem gilt wegen des Zwischenbildes bei  $F_e$

$$\int_0^{3\pi/2} \left[ \langle u, \alpha \rangle + \frac{\ell}{r_0} \langle u, u \rangle \right] d\Theta = 0 \quad (2-24)$$

Die Geschwindigkeit der Teilchen zwischen den beiden Modulatoren ist in der genannten Näherung

$$v = v_0 \left( 1 + \frac{\delta W_I}{2W_0} \right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta W_I}{W_0} \right) \quad (2-25)$$

Wird nun Gl.(2-19), (2-20), (2-21), (2-22) unter Berücksichtigung von Gl.(2-23) und (2-24) in die Gl.(2-18) für  $s$  eingesetzt, so kann die Laufzeit mit Hilfe der Gl. (2-25) nach der Gl.(2-17) berechnet werden. In der für diesen Abschnitt geltenden Näherung ergibt dies

$$t_2 - t_1 = \frac{s_m}{v_0} + \frac{r_0}{v_0} \left( T_y \cdot \frac{y_1}{r_0} + T_\delta \cdot \frac{\delta W}{W_0} + T_{y'y'} \cdot y_1'^2 \right) \quad (2-26a)$$

mit den Koeffizienten

$$T_y = \int_0^{3\pi/2} \langle u, u \rangle d\Theta$$

$$T_\delta = \int_0^{3\pi/2} \langle u, \delta \rangle d\Theta$$

$$\begin{aligned}
 T_{yy'} &= \left(\frac{\ell}{r_0}\right)^2 \int_0^{3\pi/2} (u, uu) d\theta + \frac{\ell}{r_0} \int_0^{3\pi/2} (u, u\alpha) d\theta + \int_0^{3\pi/2} (u, \alpha\alpha) d\theta \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\ell}{r_0}\right)^2 \int_0^{3\pi/2} (\alpha, u)^2 d\theta + \frac{\ell}{r_0} \int_0^{3\pi/2} (\alpha, u) (\alpha, \alpha) d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{3\pi/2} (\alpha, \alpha)^2 d\theta \\
 &+ \frac{\ell}{r_0} \cdot \quad \quad \quad (2-26b)
 \end{aligned}$$

Zur Zeit  $t_2$  durchläuft das Teilchen den zweiten Modulator und erfährt eine zusätzliche Energieänderung

$$\delta W_{II} = -W_m \sin(\omega t_2 + \xi) \quad (2-27)$$

Wird nun  $\xi = -\omega \frac{s_m}{v_0}$  gewählt, so ist

$$\delta W_{II} = -W_m \cdot \sin(\omega t_1 + \omega \cdot \delta t) \quad \text{mit } \delta t = t_2 - t_1 - \frac{s_m}{v_0} \quad (2-28)$$

Die resultierende Energieabweichung nach dem zweiten Modulator beträgt

$$\begin{aligned}
 \delta W_{res} &= \delta W_I + \delta W_{II} \\
 &= W_m (\sin \omega t_1 - \sin \omega t_1 \cdot \cos \omega \delta t - \cos \omega t_1 \cdot \sin \omega \delta t) \\
 &= -W_m \cdot \cos \omega t_1 \cdot \omega \delta t + \dots \quad (2-29)
 \end{aligned}$$

In der genannten Näherung wird

$$\delta W_{res} = -W_m \cdot \cos \omega t_1 \cdot \omega \cdot \frac{r_0}{v_0} \left[ T_y \cdot \frac{y_1}{r_0} + T_s \cdot \frac{W_m}{W_0} \cdot \sin \omega t_1 + T_{yy'} \cdot y_1'^2 \right] \quad (2-30)$$

Die erforderliche Energiemodulation  $W_m$  hängt von der Strahlbreite  $D$  an der Schneide ab. Die Modulation soll wieder, wie bei Abschnitt 2.3.1 eine maximale Auslenkung um den doppelten Strahldurchmesser bewirken:

$$(u, \delta)_e \cdot \frac{W_m}{W_0} = 2 \cdot D / r_0 \quad (2-31)$$

An der Schneide ist

$$\frac{y_e}{r_o} = (u, u)_e \cdot \frac{y_1}{r_o} + \left[ (u, uu)_e \left( \frac{\ell}{r_o} \right)^2 + (u, u\alpha)_e \frac{\ell}{r_o} + (u, \alpha\alpha)_e \right] y_1'^2 . \quad (2-32)$$

Für die im Abschnitt 2.3.1 Gl.(2-11) genannte Phasenraum-ellipse führt dies zu einer Strahlbreite

$$\frac{D}{r_o} = \text{Max} \left[ a \cdot \frac{y_o}{r_o} + \frac{a^2 (y_o)^2}{4b \left( \frac{r_o}{y_o} \right)^2} + by_o'^2, 2a \frac{y_o}{r_o} \right] , \quad (2-33a)$$

wobei

$$a = -(u, u)_e \quad \text{und}$$

$$b = - \left[ (u, uu)_e \cdot \left( \frac{\ell}{r_o} \right)^2 + (u, u\alpha)_e \cdot \frac{\ell}{r_o} + (u, \alpha\alpha)_e \right] \quad \text{ist } 36, 37 . \quad (2-33b)$$

Es wird nun folgende Substitution eingeführt:

$$\frac{y_o}{r_o} = \left( \frac{\epsilon_o / \pi}{r_o} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot q \quad (2-34a)$$

Daraus folgt:

$$y_o' = \left( \frac{\epsilon_o / \pi}{r_o} \right)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{q} \quad (2-34b)$$

Damit wird

$$\frac{W_m}{W_o} = 2 \cdot \left( \frac{\epsilon_o / \pi}{r_o} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot C(q) \quad (2-35a)$$

mit

$$C(q) = \text{Max} \left[ aq + \frac{a^2}{4b} \cdot q^4 + \frac{b}{q^2}, 2aq \right] / (u, \delta)_e . \quad (2-35b)$$

Die Substitution (2-34) und Gl.(2-35) in Gl.(2-30) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta W_{\text{res}}}{W_0} &= -\frac{4\pi r_0}{\beta\lambda} \cdot \left(\frac{\epsilon_0/\pi}{r_0}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \cos \omega t_A \cdot C(q) \left[ 2 \cdot T_\delta \cdot C(q) \sin \omega t_A + T_y \cdot q \cdot \cos \epsilon \right. \\
 &\quad \left. + T_{yy'} \cdot \frac{\sin^2 \epsilon}{q^2} \right] \\
 &= -\frac{2\pi r_0}{\beta\lambda} \cdot \left(\frac{\epsilon_0/\pi}{r_0}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot C(q) \cdot T_{yy'} \cdot \frac{1}{q^2} \cdot \cos \omega t \\
 &\quad - \frac{4\pi r_0}{\beta\lambda} \cdot \left(\frac{\epsilon_0/\pi}{r_0}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot C^2(q) \cdot T_\delta \cdot \sin 2\omega t \\
 &\quad - \frac{4\pi r_0}{\beta\lambda} \cdot \left(\frac{\epsilon_0/\pi}{r_0}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot C(q) \cdot \left[ T_y \cdot q \cdot \cos \epsilon - \frac{1}{2} T_{yy'} \frac{\cos 2\epsilon}{q^2} \right] \cdot \cos \omega t \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2-36}$$

Wird die Modulation durch den zweiten Modulator um

$\frac{2\pi r_0}{\beta\lambda} \left(\frac{\epsilon_0/\pi}{r_0}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot C(q) \cdot T_{yy'} \cdot \frac{1}{q^2} \cdot W_0 \cdot \cos \omega t$  vergrößert, so verschwindet der erste Ausdruck von  $\frac{\delta W_{\text{res}}}{W_0}$ . Damit wird die Energiebreite

$$\frac{\delta W_{\text{res}}}{W_0} = \frac{4\pi r_0}{\beta\lambda} \left(\frac{\epsilon_0/\pi}{r_0}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \Delta H(q) \quad , \tag{2-37a}$$

wobei

$$\Delta H(q) = H_{\text{max}}(q, t, \epsilon) - H_{\text{min}}(q, t, \epsilon) \quad \pi \leq \omega t \leq 2\pi, \quad 0 \leq \epsilon \leq 2\pi \quad \text{und}$$

$$H(q, t, \epsilon) = -C^2(q) \cdot T_\delta \cdot \sin 2\omega t - C(q) \left[ T_y \cdot q \cdot \cos \epsilon - \frac{1}{2} T_{yy'} \cdot \frac{\cos 2\epsilon}{q^2} \right] \cos \omega t \tag{2-37b}$$

ist. Damit wird der effektive longitudinale Phasenraumbereich

$$\Delta W \cdot \Delta T = \left(\frac{\epsilon_0/\pi}{r_0}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \Delta H(q) \cdot \Delta p_y \cdot \Delta y \quad . \tag{2-38}$$

Es existiert ein optimaler Wert  $q = q_0$  für den  $\Delta H(q)$  am kleinsten wird:  $\Delta H(q_0) = \Delta H_0$  <sup>17</sup>.

Für verschiedene Konfigurationen des Ablenkmagneten erhält man für die Gesamtenergiebreite  $\Delta H_0$  Werte zwischen 9 und 15. Wird nach dem Chopper ein Klystron-Bunching durchgeführt, so wird dieses durch den mittleren, kohärenten Term der Gl.(2-36) noch verbessert. Es ist in diesem Fall nur die Energiebreite des inkohärenten Teils zu betrachten. Dies führt bei etwas kleineren Werten  $q = q_0$  zu Werten von  $\Delta \bar{H}_0$  zwischen 4.5 und 5.5<sup>17</sup>.

Für einen homogenen Ablenkmagneten mit nicht fokussierenden Polkanten ist

$$\begin{array}{lll} \bar{q}_0 = 1.0 & \Delta \bar{H}_0 = 5.0 & \\ q_0 = 1.2 & \Delta H_0 = 10.3 & C(q_0) = 2.32 \end{array} .$$

Bei einer Emittanz des Injektors von  $\epsilon_0/\pi = 1.8 \text{ cm mrad}$  und einem Sollbahnradius von  $r_0 = 20 \text{ cm}$  ist zusammen mit dem kohärenten Anteil

$$\Delta W \Delta T = 4.5 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10.3 \cdot \Delta p_y \Delta y = 0.36 \cdot \Delta p_y \Delta y .$$

Dies bedeutet im Vergleich zum konventionellen Chopping eine mögliche Verbesserung um etwa einen Faktor 8.

Für die Auslenkung um zwei Strahldurchmesser ist eine Modulation  $W_m/W_0 = 0.0093$  nötig.

Wird nach dem Zerhacken des Strahls Klystron-Bunching durchgeführt, so liefert nur der inkohärente Anteil eine Vergrößerung der Phasenfläche und es ergibt sich ein Verbesserungsfaktor von etwa 18.

Die Begrenzungen liegen mit dieser Methode nicht mehr beim Zerhacken. Sie sind vielmehr durch die Abweichung der Modulationsspannung von einem Sägezahnverlauf, durch chromatische Fehler der abbildenden Elemente und die Divergenz des Strahls zwischen Buncher und Beschleuniger gegeben. Diese Probleme sind jedoch beiden Methoden gemeinsam. Es wurde deshalb als Chopper-System die letztere Methode gewählt.

### 2.3.3 Prinzip des Energiemodulators (Buncher)

Ein Energiemodulator für niedere Frequenzen und kleine Teilchengeschwindigkeiten  $\beta$  besitzt zumeist zwei Beschleunigungsspalte mit vorwiegend elektrischem Feld und einen aufgewickelten Leiter, in dessen Umgebung sich vorwiegend ein magnetisches Feld befindet. Abb.2.5 zeigt das Prinzip eines einfachen Modulators. Die Beschreibung der Felder durch ein quasi-stationäres Potential ist erlaubt, solange die geometrischen Längen im betrachteten Bereich klein gegen die Vakuumwellenlänge  $\lambda$  sind<sup>38</sup>. Diese Voraussetzung ist im Bereich der Beschleunigungsspalte gegeben.

Zu einer bestimmten Zeit besteht eine Spannungsdifferenz  $U = U_0 \cos \omega t$ , oder in komplexer Schreibweise  $\mathcal{U} = U_0 e^{i\omega t}$  zwischen dem Mittelteil und dem Außenteil. Die Felder in den Beschleunigungsspalten 1 und 2 sind zu gleichen Zeiten entgegengerichtet. Die in den beiden Beschleunigungsspalten erzeugte, harmonische Energiemodulation wird addiert und kann durch ein komplexes Zeigerdiagramm dargestellt werden.

Für einen einfachen Buncher wird der Abstand zwischen Spalt 1 und 2 gleich  $\beta\lambda/2$  gewählt. Damit läßt sich bei fester Amplitude  $U_0$  die stärkste Modulation erzielen. Es ist

$$\delta W_1 = e\mathcal{U}_1 = eU_0 e^{i\omega t} \quad (2-39a)$$

$$\delta W_2 = e\mathcal{U}_2 = -eU_0 e^{i(\omega t + \pi)} \quad (2-39b)$$

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = e(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) = 2eU_0 e^{i\omega t} \quad (2-39c)$$

Abb.2.5 zeigt das zugehörige Zeigerdiagramm.

Die Strahltaillen  $F_1$  und  $F_2$  sind nur in der Ablenkebene vorhanden (astigmatische Abbildung). Die Apertur des Modulators wird an den Strahl angepaßt und ist ein zur Ablenkebene senkrechter Schlitz, dessen Ausdehnung von der Strahlgeometrie bestimmt wird.

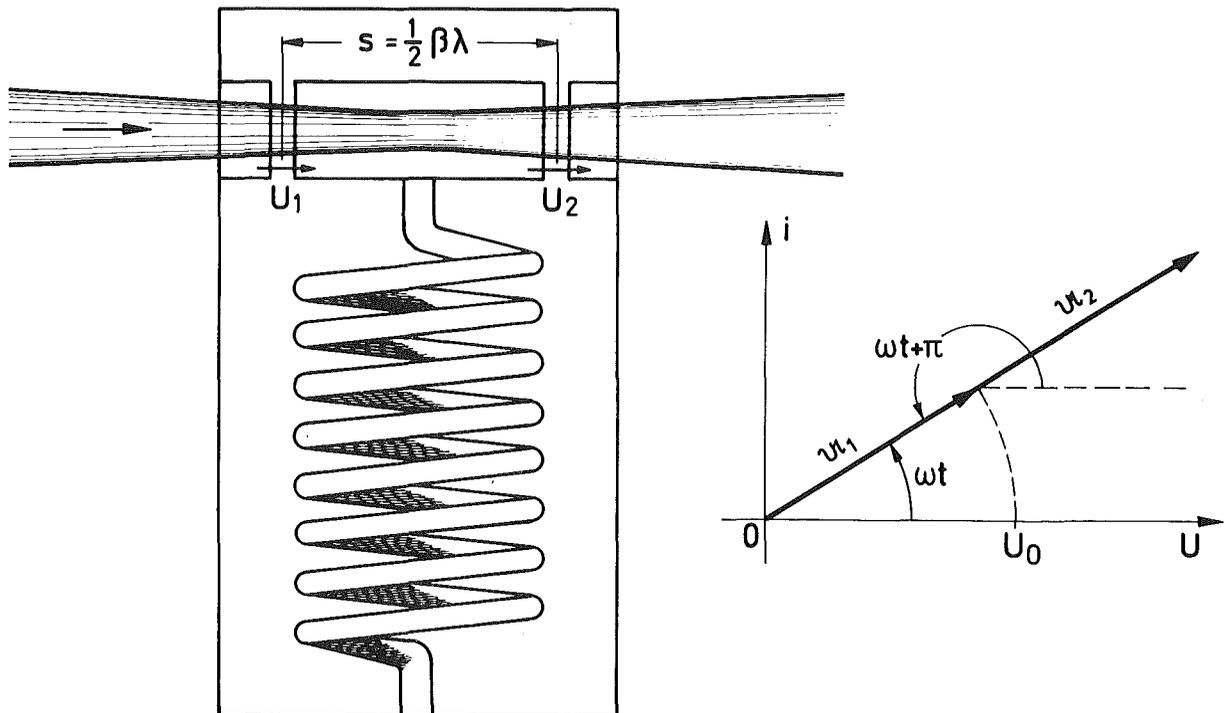


Abb. 2.5: Prinzip des einfachen Energiemodulators für niedrigere Frequenzen und dazugehöriges Zeigerdiagramm. Bei einem Spaltabstand von  $s = \beta\lambda/2$  addieren sich die Energieänderungen  $e\mathcal{U}_1$  und  $e\mathcal{U}_2$  im ersten und zweiten Beschleunigungsspalt zu einer maximalen, resultierenden Energieänderung  $e\mathcal{U}_I = e\mathcal{U}_1 + e\mathcal{U}_2$ .

Bei einem homogenen Ablenkmagnet mit zum Strahl senkrechter Begrenzung des Magnetfeldes (nicht fokussierende Polkanten) fallen die beiden Strahltaillen  $F_1$  und  $F_2$  zusammen. Dies ermöglicht die beiden, in Abb. 2.4 dargestellten, Modulatoren zusammenzufassen. Dabei durchläuft der Strahl zweimal denselben Resonator. Es wurde für diese Anwendung von Szeesi<sup>39</sup> ein stark konzentrierter Buncher-Resonator entwickelt, dessen mechanischer Aufbau im Abschnitt 3.2 Abb. 3.5 dargestellt ist und an anderer Stelle ausführlicher beschrieben wird<sup>40</sup>. Abb. 2.6 gibt eine schematische Darstellung des Doppelmodulators. Es entstehen zwischen einem gemeinsamen Mittelstück und dem Außenteil vier Beschleunigungsspalte.

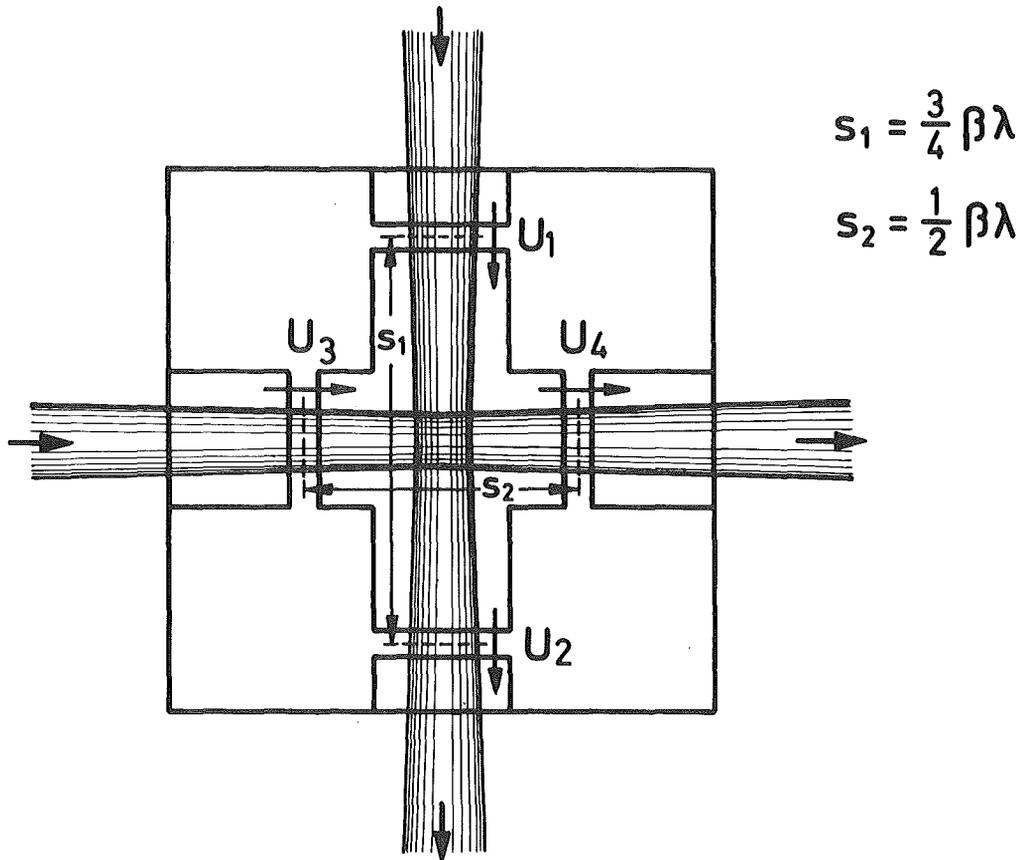


Abb. 2.6: Prinzip des Doppelmodulators. Der Protonenstrahl durchläuft den Doppelmodulator zweimal in zueinander senkrechten Richtungen. Der Spaltabstand beträgt für das erste Durchlaufen  $s_1 = \frac{3}{4} \beta \lambda$  und für das zweite  $s_2 = \beta \lambda / 2$ . Dadurch werden bei konstanter Amplitude des Modulators bei der ersten und zweiten Passage verschiedene Energieänderungen  $\delta W_{\text{I}} = e \mathcal{U}_{\text{I}} = e(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2)$  und  $\delta W_{\text{II}} = e \mathcal{U}_{\text{II}} = e(\mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_4)$  erreicht.

Beim ersten Durchlaufen des Bunchers erfährt das Teilchen eine Energieänderung

$$\delta W_{\text{I}} = e \mathcal{U}_{\text{I}} = e(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) \quad . \quad (2-40a)$$

Beim zweiten Durchlaufen beträgt die Energieänderung

$$\delta W_{\text{II}} = e \mathcal{U}_{\text{II}} = e(\mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_4) \quad . \quad (2-40b)$$

Nun muß  $\mathcal{U}_{\text{II}}$  erstens die Modulation durch  $\mathcal{U}_{\text{I}}$  kompensieren und zweitens die nötige Modulation für das Klystron-Bunching liefern (siehe Abb. 2.7a).

$$\delta W_{\text{II}} = -e \mathcal{U}_{\text{I}} + e \alpha \mathcal{U}_{\text{I}} e^{i \frac{\pi}{2}} \quad . \quad (2-41)$$

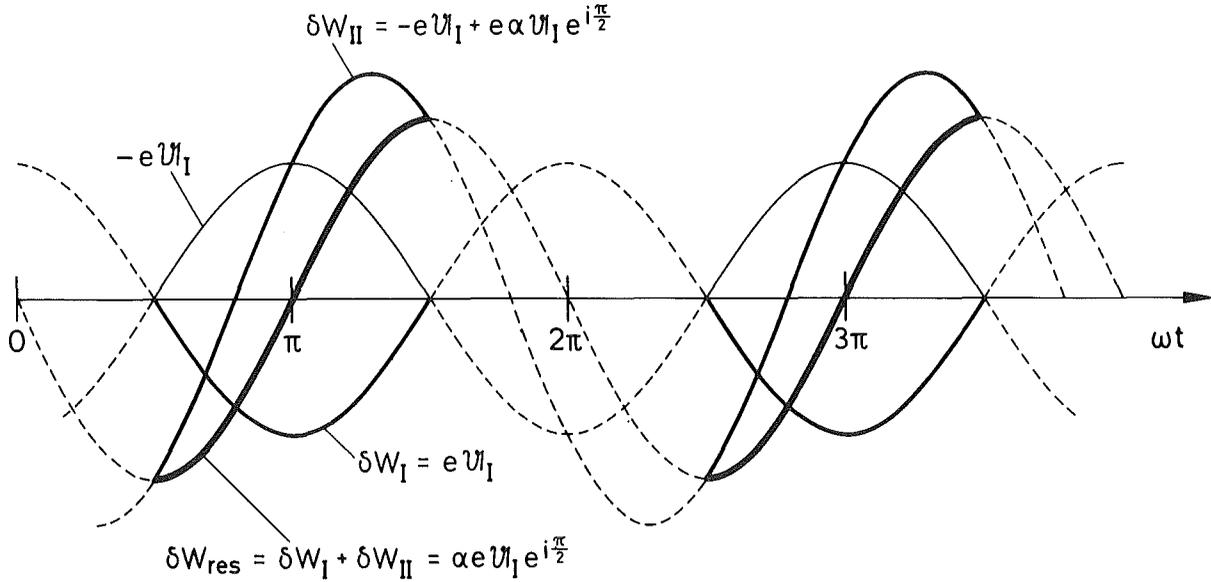


Abb. 2.7a: Die Energiemodulation  $\delta W_I = e \mathcal{U}_I$  nach dem ersten Durchlaufen des Modulators wird beim zweiten Durchlaufen durch  $\delta W_{II} = e \mathcal{U}_{II} = -e \mathcal{U}_I + \alpha e \mathcal{U}_I e^{i\frac{\pi}{2}}$  kompensiert und es verbleibt eine für das Bunching geeignete Modulation  $\delta W_{res} = e \mathcal{U}_{res} = \alpha e \mathcal{U}_I e^{i\frac{\pi}{2}}$

Für  $\alpha = 1$  wird  $|\mathcal{U}_{II} / \mathcal{U}_I| = \sqrt{2}$  oder  $|\mathcal{U}_I| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathcal{U}_{II}|$ . Dies läßt sich erreichen, indem der Abstand  $s_2$  zwischen Spalt 3 und 4  $s_2 = \beta\lambda/2$  und der Abstand  $s_1$  zwischen Spalt 1 und 2  $s_1 = \frac{3}{4}\beta\lambda$  gewählt wird. Die relative Phase zwischen  $\mathcal{U}_{II}$  und  $\mathcal{U}_I$  beim wiederholten Durchlaufen des Modulators durch das gleiche Teilchen kann durch Änderung der Bahnlänge im Magneten, also durch Anpassung von  $r_0$  eingestellt werden. Abb. 2.7b verdeutlicht die Addition der Energieänderungen mit Hilfe des Zeigerdiagramms. Es ist

$$e \mathcal{U}_1 = e U_0 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{4})}$$

$$e \mathcal{U}_3 = e U_0 e^{i(\omega t + \frac{3\pi}{4})}$$

$$e \mathcal{U}_2 = -e U_0 e^{i(\omega t + \frac{5\pi}{4})}$$

$$e \mathcal{U}_4 = -e U_0 e^{i(\omega t + \frac{7\pi}{4})}$$

$$\delta W_I = e \mathcal{U}_I = \sqrt{2} e U_0 e^{i\omega t}$$

$$\delta W_{II} = e \mathcal{U}_{II} = 2e U_0 e^{i(\omega t + \frac{3\pi}{4})}$$

$$\delta W_{res} = e \mathcal{U}_{res} = e \mathcal{U}_I + e \mathcal{U}_{II} = \sqrt{2} e U_0 e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \quad (2-42)$$

Diese Modulation ist geeignet die Pakete nach einer bestimmten Driftstrecke in kurze Pulse zu konzentrieren.

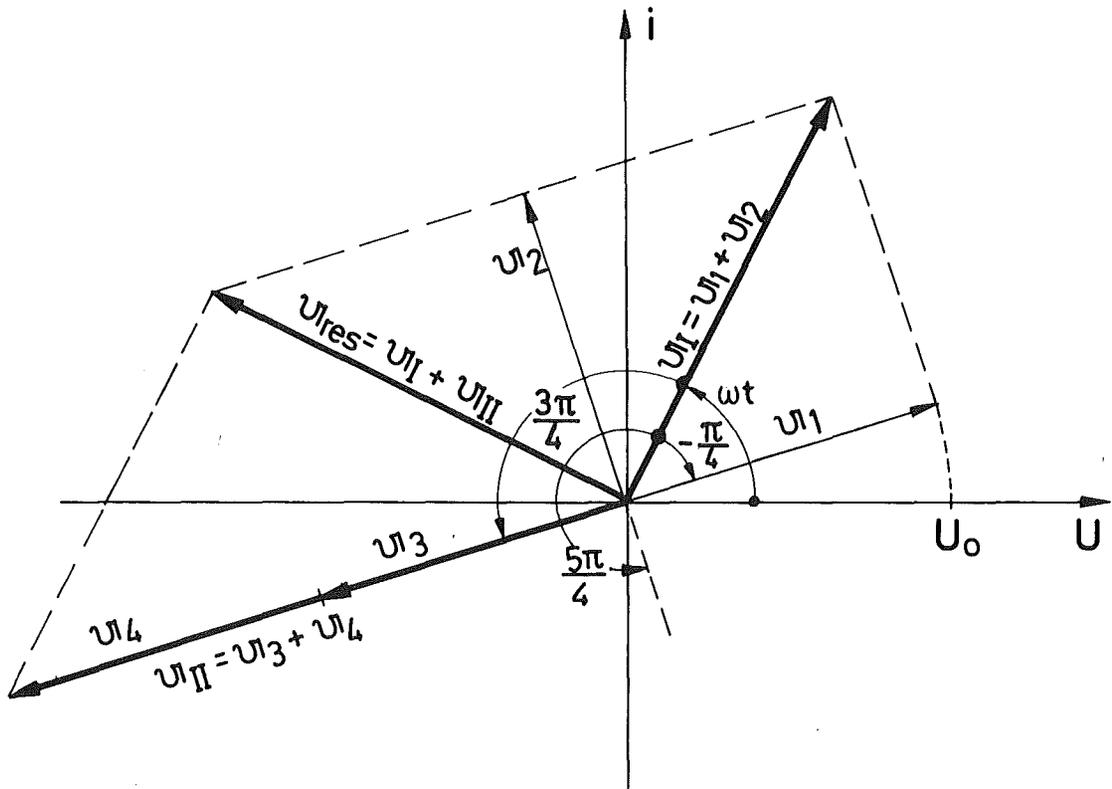


Abb. 2.7b: Vektordiagramm des Doppelmodulators. Die Spaltspannungen  $U_1$  und  $U_2$  werden vektoriell addiert  $U_I = U_1 + U_2$ . Dieser Spannung entspricht die Energiemodulation nach dem ersten Durchlaufen des Doppelmodulators. Entsprechend werden beim zweiten Durchlaufen die Spannungen  $U_3$  und  $U_4$  addiert  $U_{II} = U_3 + U_4$ .  $U_I$  und  $U_{II}$  ergeben zusammen die resultierende Spannung  $U_{res}$ , der die resultierende Energieänderung  $\delta W_{res} = eU_{res}$  entspricht.

### 3. EXPERIMENTELLER AUFBAU

Den experimentellen Aufbau des im Abschnitt 2.3.2 in seinen Grundzügen beschriebenen Chopper-Buncher-Systems zeigt Abb. 3.1. Das zentrale Element besteht aus einem homogenen Ablenkmagnet, der den Protonenstrahl auf einem Sollbahnradius  $r_0 = 20$  cm um  $270^\circ$  umlenkt. Die Magnetfeldbegrenzung ist gerade und senkrecht zum ein- und austretenden Strahl. Auf halber Strecke im Magnet kann eine Schneide von außen in den Strahl gefahren werden. Der Doppelmodulator befindet sich am Kreuzungspunkt des Strahls. Die Anpassung des Injektorstrahls an den Chopper-Magnet erfolgt durch ein magnetisches Quadrupoldublett. Der gepulste Strahl wird durch ein zweites Quadrupoldublett an die transversale Akzeptanz des Linearbeschleunigers angepaßt<sup>41</sup>.

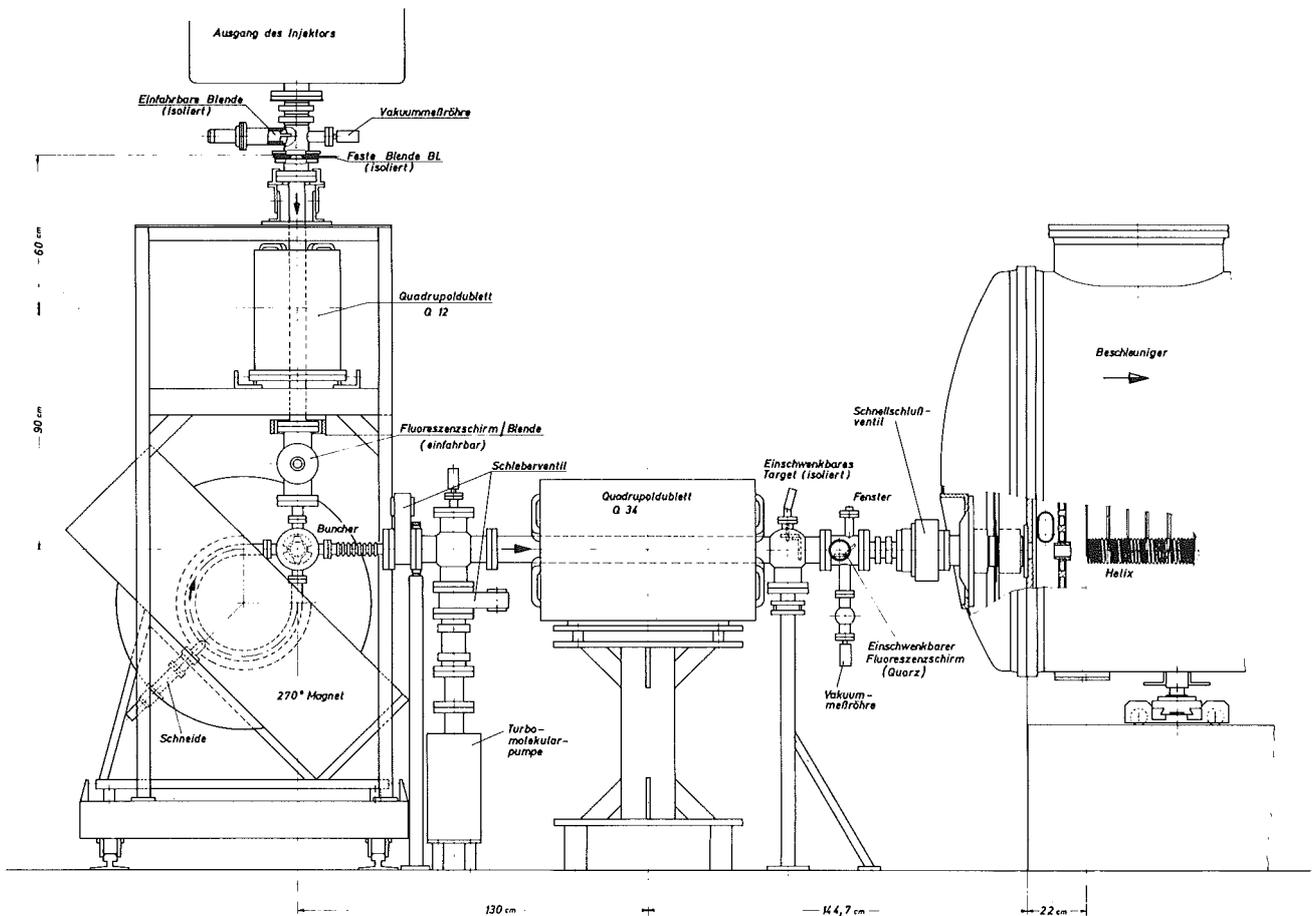


Abb. 3.1: Aufbau des Chopper-Buncher-Systems

Abb. 3.2. zeigt den Verlauf des Strahls in der Ablenkebene (vertikal) und in der dazu senkrechten Ebene (horizontal). Dabei wurde der gekrümmte Teil der Bahn im Ablenkmagnet abgewickelt. Die Aperturen sind ebenfalls eingezeichnet.

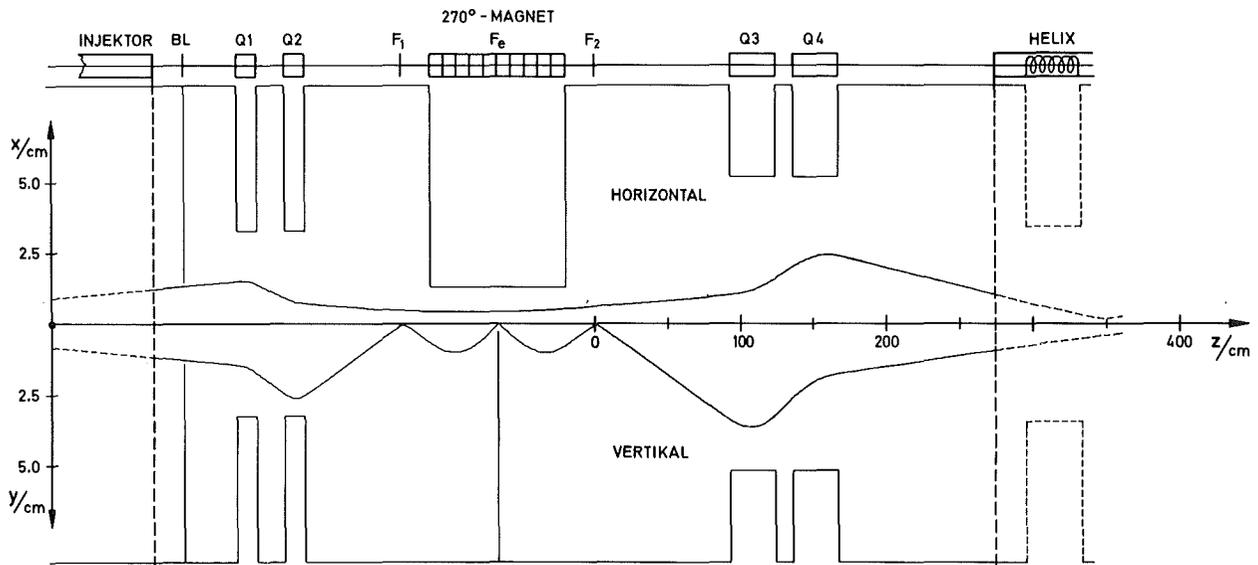


Abb. 3.2: Strahlweite horizontal (x) und vertikal (y) mit der festen Blende BL, Quadrupol Q1 und Q2, Strahltaile bei  $F_1$ ,  $F_e$  und  $F_2$ , Quadrupol Q3 und Q4 und der ersten Helixsektion des Linearbeschleunigers. Die Aperturen der einzelnen Elemente sind eingezeichnet. Die Schneide ist in der vertikalen Ebene bei  $F_e$  angedeutet. Der gekrümmte Teil der Bahn im  $270^\circ$ -Magnet wurde<sup>42</sup> abgewickelt.

Abb. 3.3 zeigt die transversale Phasenraumfläche des energiemodulierten Strahls am Eingang des Beschleunigers. Dazu ist vergleichsweise die Akzeptanz des Beschleunigers mit gebrochener Linie eingezeichnet. Der vom Injektor kommende Strahl wurde durch eine Phasenraumellipse ersetzt. Die Rechnungen zu Abb. 3.2 und 3.3 wurden mit dem Computerprogramm "Beam 72" durchgeführt<sup>42</sup>.

### 3.1 Strahlführungselemente

Der  $270^\circ$ -Sektormagnet hat einen Polschuhdurchmesser von 50 cm und einen Polschuhabstand von 2.5 cm. Die Feldabweichungen des Magnet-

feldes sind  $\left| \frac{B - B_0}{B_0} \right| \leq 10^{-3}$  mit Ausnahme der Randzonen.

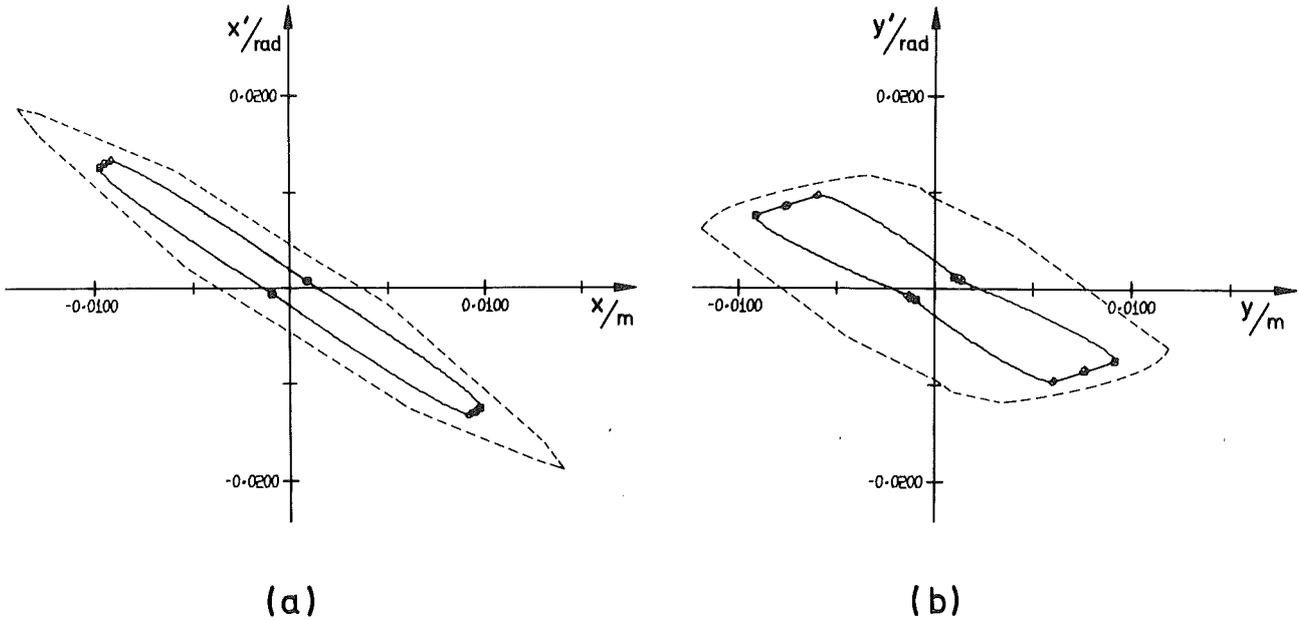


Abb. 3.3: Transversale Emittanz des energiemodulierten Strahls ( $\frac{\Delta W}{W_0} = \pm 1,9 \%$ ) am Eingang des Beschleunigers ( $z = 274,7 \text{ cm}$ ) (a) horizontal und (b) vertikal berechnet mit Hilfe des Programms "Beam 72" <sup>42</sup>. Die Akzeptanz des Beschleunigers ist mit gebrochener Linie eingezeichnet.

Die Polkontur wurde zur Linearisierung des Feldabfalls <sup>43</sup> mit Hilfe eines elektrolytischen Troges bestimmt. Die Gestalt der Polschuhkanten mit Spiegelplatte und der Verlauf des Randfeldes sind in Abb. 3.4 dargestellt. Das Ansteigen des Feldes hinter der Spiegelplatte wurde durch zusätzliche Weicheisenringe unterdrückt. Das Netzgerät besitzt eine Stromstabilität  $\left| \frac{\Delta I}{I} \right| \leq 2 \times 10^{-5}$  (Angabe des Herstellers). Der Betrag des Magnetfeldes wird mit einem Kernresonanzmagnetometer gemessen. Es ist  $B_0 = 0.6156 \text{ T}$  bei  $\nu_p = 26.210 \text{ MHz}$ , dem entspricht  $r_0 = 20.3 \text{ cm}$ .

Das Quadrupoldublett Q12 hat eine Apertur von 6.35 cm, eine effektive Länge <sup>43</sup> je Quadrupol von 14.5 cm und einen Abstand der Quadrupolmitten von 33 cm. Die eingestellten Gradienten der Quadrupole Q1 und Q2 betragen 1.61 T/m beziehungsweise 2.51 T/m.

Das Quadrupoldublett Q34 besitzt eine Apertur von 10.3 cm und eine effektive Länge je Quadrupol von 31.1 cm. Der Abstand der Quadrupolmitten ist 43.1 cm. Die Gradienten von Q3 und Q4 wurden bei den Messungen auf 1.07 T/m beziehungsweise 0.80 T/m eingestellt. Die Netzgeräte für die Quadrupolmagnete besitzen eine Stromstabilität von  $\left| \frac{\Delta I}{I} \right| \leq 2 \cdot 10^{-4}$  (Angabe des Herstellers).

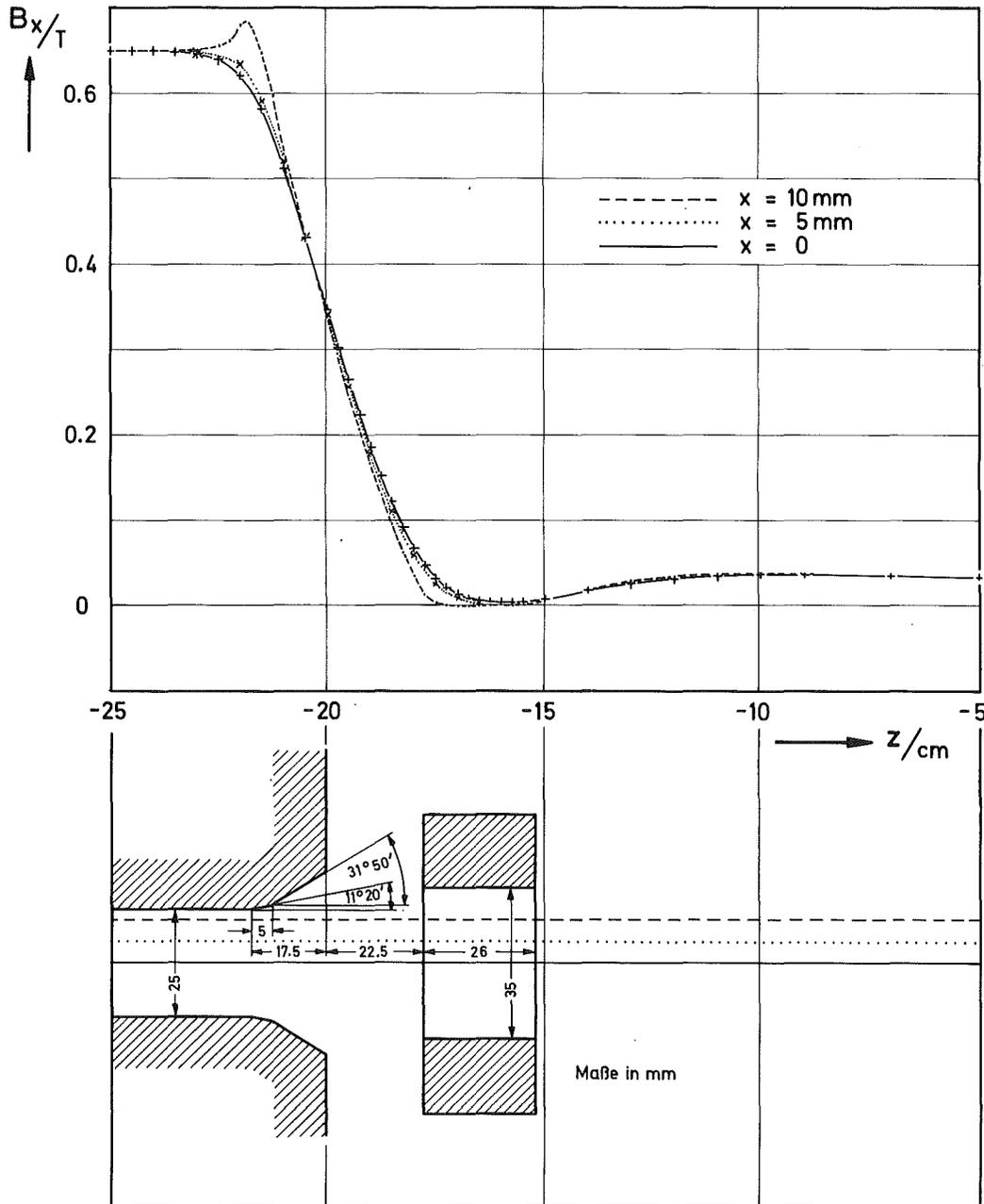


Abb. 3.4: Randfeld und Polkontur des  $270^\circ$ -Magneten mit Spiegelplatte

### 3.2 HF-Modulator (Buncher)

Abb. 3.5 zeigt den Aufbau des HF-Modulators <sup>39, 44, \*</sup>.

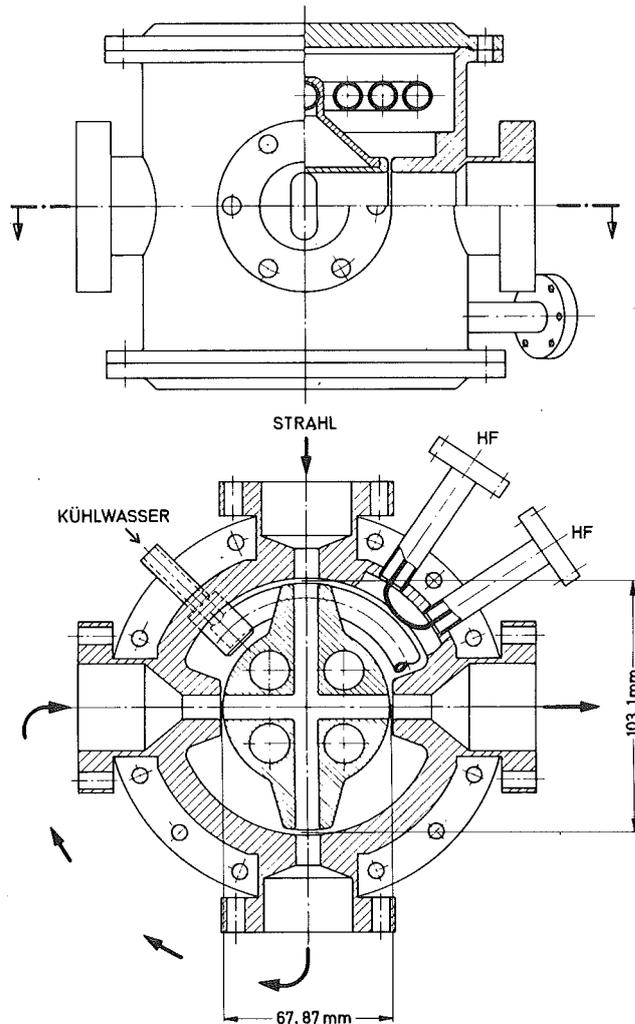


Abb. 3.5: Aufbau des Doppelmodulators (Buncher) schematisch <sup>39</sup>

\* Da der Buncher zunächst für eine Protonenenergie von 800 keV ausgelegt wurde, weicht beim Betrieb mit 750 keV das Vektordiagramm von dem im Abschnitt 2.3.3 Abb. 2.7b ab. Abb. 3.6 zeigt das Vektordiagramm für diesen Doppelmodulator bei einer Protonenenergie von 750 keV und einer Betriebsfrequenz von 90 MHz.

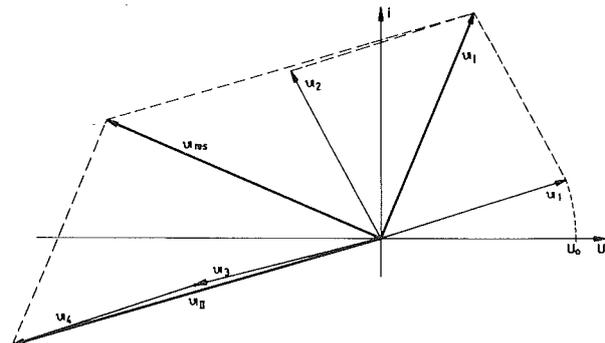


Abb. 3.6: Vektordiagramm des Doppelmodulators

Die HF-Versorgung mit den Regelkreisen ist unter anderem in Abb. 3.7 dargestellt

Die Amplitudenmodulation auf der HF-Spannung beträgt  $\left| \frac{\Delta U}{U} \right| \leq 2 \cdot 10^{-3} \text{ } ^{46}$ . Dies führt längs der Driftstrecke zu einem Phasenfehler  $|\delta\varphi| \leq 0.1^\circ$ .

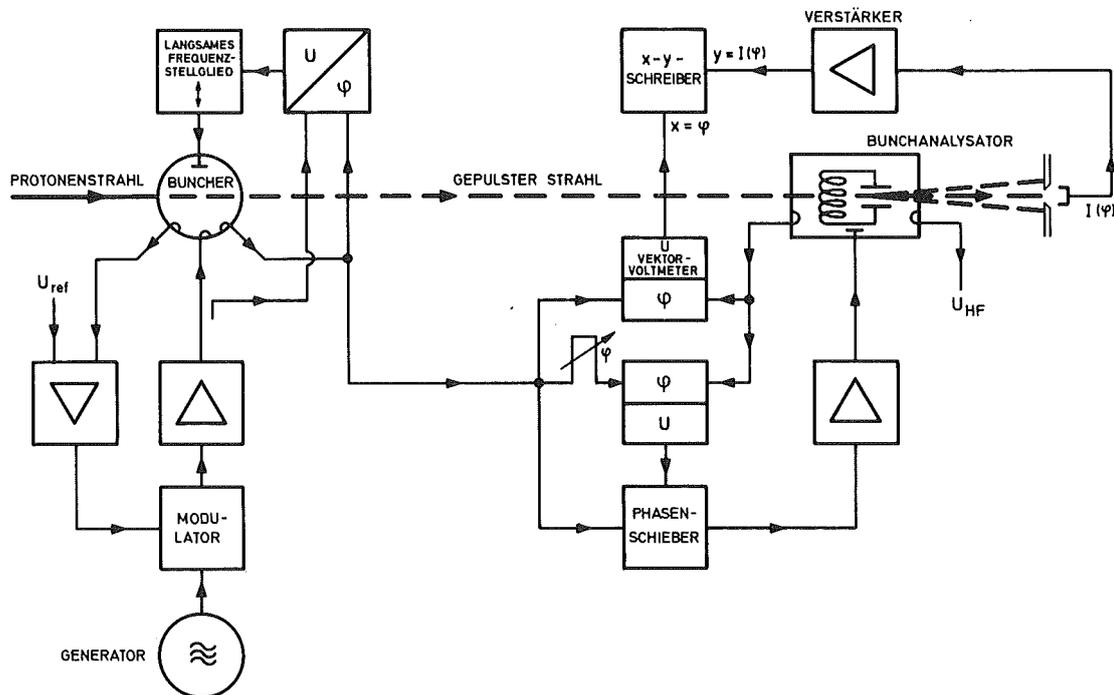


Abb. 3.7: Hochfrequenzaufbau bei der Bunchanalyse.

Eine direkte Messung der Modulation des Protonenstrahls nach dem ersten Durchlaufen des Modulators mit Hilfe der Schneide ergab eine Amplitude der Modulation  $\frac{\Delta W_z}{W_0} = (1.44 \pm 0.12)\%$  bei einer zugeführten Leistung von  $(890 \pm 50)W$  \*. Die Spannungsamplitude an den Beschleunigungsspalten beträgt dabei nach dem Vektordiagramm (Abb. 3.6)  $U_0 = (8.4 \pm 0.7) keV$ .

\* Daraus ergibt sich nach dem Vektordiagramm eine Amplitude der resultierenden Energiemodulation der Strahlpakete  $\delta W_{res}/W_0 = (1.75 \pm 0.15)\%$ . Im Vergleich dazu ergeben die Bunchermessungen des Abschnitts 4.2 Abb. 4.7 zusammen mit den numerischen Rechnungen des Abschnitts 5.2 Abb. 5.4 bei einer Buncherverlustleistung  $P_v = (860 \pm 50)W$  eine Amplitude der Modulation von  $\delta W_{res}/W_0 = (1.87 \pm 0.1)\%$ . Umgerechnet auf  $P_v = 890W$  sind dies  $\delta W_{res}/W_0 = (1.9 \pm 0.1)\%$ . Die beiden Werte stimmen innerhalb der Meßgenauigkeit überein.

### 3.3 Justierung, Blenden, Fluoreszenzschirme

Zur Lagebestimmung des Strahls befinden sich an mehreren Stellen Blenden und Fluoreszenzschirme, die in den Strahl eingefahren werden können. Ihre Lage ist in Abb. 3.1 eingezeichnet.

Eine fest eingebaute Blende BL mit einem Aperturradius von  $r = 14$  mm begrenzt den vom Injektor kommenden Strahl.

Als fluoreszierende Substanz wurde für kleine Strahlstromdichten Yttriumvanadat auf Kupferunterlagen aufgebracht. Bei größerer Stromdichte zeigt sich jedoch nach kurzer Zeit eine Braunfärbung verbunden mit einer Abnahme der Fluoreszenz. Dagegen eignen sich Quarzplatten für etwas größere Stromdichten<sup>47,48</sup>. Auf diese Platten wird zur Ableitung von elektrischen Ladungen ein Liniennetz aus Graphit (Aquadac Kohle) aufgemalt. Gleichzeitig dient das Netz als Fadenzug und Maßstab.

Die Justierung des Strahlrohres, der Blenden und Fluoreszenzschirme erfolgte mit Theodolit und Nivellier. Damit gelang eine Justierung auf etwa  $\pm 0.3$  mm. Die Justierung des  $270^\circ$ -Magnetens erfolgte zunächst mit Theodolit und Präzisionswasserwaage. Die Quadrupoldublette Q12 und Q34 wurden mit Hilfe von Distanzschalen nach dem ausgerichteten Strahlrohr vorjustiert. Die endgültige Justierung der abbildenden Elemente wird durch eine Blende erleichtert, die mit zwei zueinander senkrechten Lochreihen versehen ist und oberhalb des Quadrupoldubletts Q12 in den Strahl eingefahren werden kann<sup>48</sup>. Bei der Justierung des Dubletts Q12 wurde zuweilen an Stelle der Schneide ein Fluoreszenzschirm mit einem Fenster eingebaut. Der unterhalb des Quadrupols Q12 befindliche Fluoreszenzschirm besitzt in der Mitte ein Loch mit  $0.5$  mm $\phi$ , so daß bei eingefahrenem Schirm die Strahlachse weiter verfolgt werden kann. Es wurde vorübergehend bei der Justierung des Dubletts Q34 eine weitere Blende mit einem Loch in der Mitte ( $0.5$  mm $\phi$ ) zwischen dem  $270^\circ$ -Magnet und Q34 eingebaut.

Die Einstellung der Gradienten hat bei der Sollstrahlstromstärke zu erfolgen, da die Strahlgeometrie des Injektorstrahls vom eingestellten Strom abhängt. Hierzu wird die Blende mit der doppelten Lochreihe eingefahren und der Strahl an verschiedenen Stellen auf den Fluoreszenzschirmen betrachtet. Die Strahltaille bei  $F_e$  kann in der Ablenkebene mit der Schneide abgetastet werden, wobei der durchgelassene Strom als Funktion der Schneidenstellung gemessen wird.

Die Einstellung der Phasendifferenz zwischen erstem und zweitem Durchlaufen des Modulators erfolgt durch Veränderung der Bahnlänge. Dies geschieht durch geringe Änderung des Magnetfeldes. Um dabei die Lage der horizontalen Strahlachse beizubehalten muß der  $270^{\circ}$ -Magnet in der Ablenkebene längs der Winkelhalbierenden zwischen ein- und austretendem Strahl verschoben und neu justiert werden.

Die Reproduzierbarkeit der Felder und die Stabilität des Aufbaus machen eine Nachjustierung der Strahlführungselemente und der Gradienten über einen Zeitraum von einigen Monaten nicht nötig. Dagegen muß nach einem Wechsel der Kathode der Duoplasmatronquelle die Strahllage nachgeprüft und in manchen Fällen die Beschleunigungssäule nachjustiert werden.

Die Bestimmung der Strahlstromstärke erfolgt oberhalb Q21 durch eine einfahrbare Blende, die vom System elektrisch isoliert ist. Nach dem Dublett Q34 erfolgt die Strahlstrommessung durch eine einschwenkbare, isolierte Blende, die nur kurzzeitig im Strahl bleibt, da sie nicht wassergekühlt ist. Zur Unterdrückung von Sekundärelektronen befindet sich vor dem Auffänger ein isolierter Zylinder auf negativem Potential.

Die einfahrbare Schneide bei  $F_e$  ist in der Lage, bei Ausfall des Modulators einen unmodulierten Strahlstrom bis 1mA abzuschneiden, ohne daß die Kühlung der Schneide durch Bildung von Dampfblasen zusammenbricht. Im normalen Betrieb wird der Strahl durch die Modulation aufgefächert und nur etwa zur Hälfte ausgeblendet, so daß die Strahlstromdichte unkritisch ist. Als Material wurde für die Schneide OFHC-Kupfer verwendet. Die Oberfläche wurde hart verchromt.

### 3.4 Meßeinrichtungen

Um eine Aussage über die Qualität des gepulsten Strahls machen zu können und um die Wirkungsweise des Chopper-Buncher-Systems zu untersuchen, wurde ein einfaches Emittanzmeßgerät und ein zeitlich hochauflösender Buchanalysator gebaut. In den beiden folgenden Abschnitten werden diese Geräte beschrieben.

### 3.4.1 Emittanzmeßgerät

Die Aufgabe eines Emittanzmeßgerätes ist es Information über die Dichteverteilung  $\varrho(x,x',y,y')$  eines Teilchenstrahls im transversalen Phasenraum zu liefern<sup>49-52</sup>. Das im folgenden beschriebene, einfache Gerät mißt die Projektion der Dichteverteilung auf eine Ebene des Phasenraums

$$\begin{aligned} \varrho(x,x') &= \iint \varrho(x,x',y,y') dy dy' \\ \text{oder} \quad \varrho(y,y') &= \iint \varrho(x,x',y,y') dx dx' \end{aligned} \quad (3-1)$$

Abb. 3.8a zeigt das Prinzip der Emittanzmessung. Der Strahl fällt auf eine Schar paralleler Schlitze, deren Abstand 4.1 mm und deren Schlitzbreite 160  $\mu\text{m}$  beträgt. Die durchgelassenen

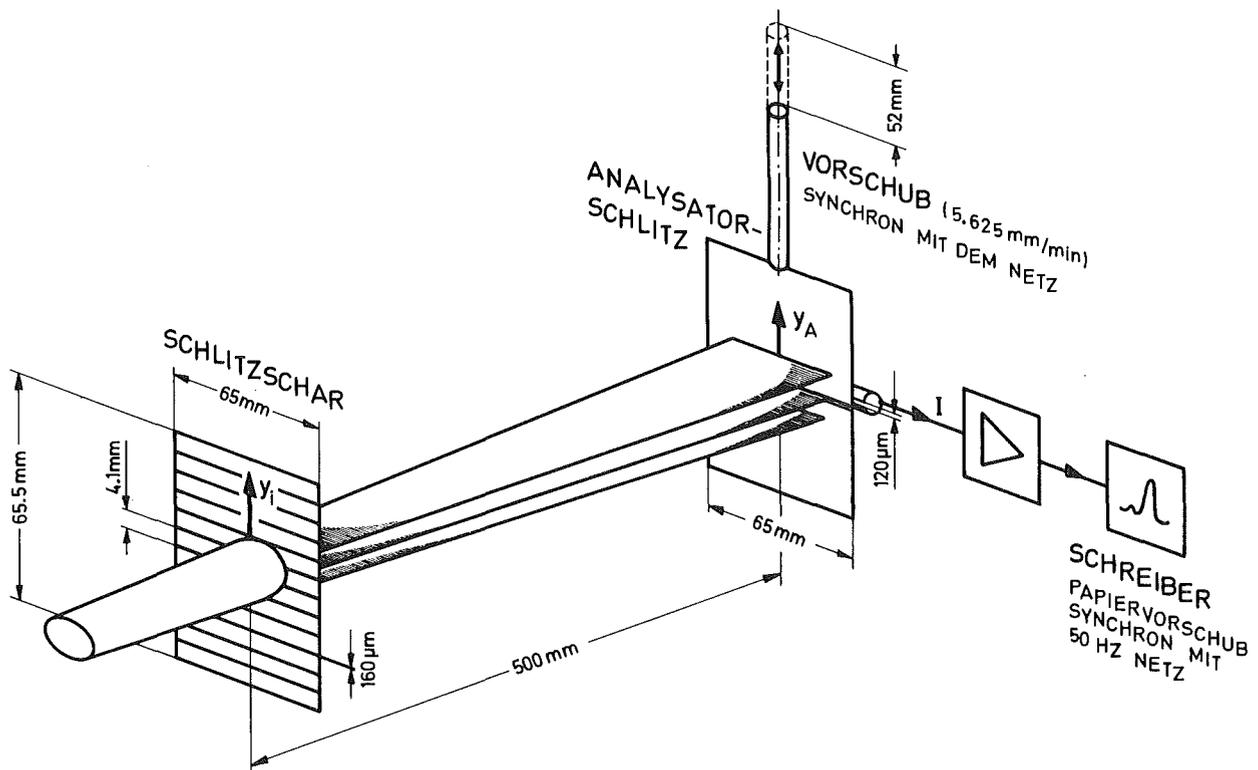


Abb. 3.8a: Prinzip der Emittanzmessung. Der Strahl fällt auf eine Schar paralleler Schlitze. Die durchgelassenen Teilstrahlbündel (in der Abbildung sind drei vorhanden) werden mit Hilfe des Analysatorschlitzes und dem dahinter befindlichen Auffänger in  $y$ -Richtung abgetastet. Die Differenz  $y_A - y_i$  ist proportional zur Steigung der vom Auffänger gesammelten Teilchen. Damit ist der Auffänger-Strom  $I$  ein Maß für die Dichte  $\varrho(y_i, y')$  des Strahls.

Teilstrahlbündel werden durch einen weiteren Spalt, hinter dem sich ein Auffänger befindet, analysiert. Der Spalt befindet sich in einem Abstand von 50 cm hinter den Eintrittsschlitzen und ist parallel zu ihnen. Er wird transversal mit einer Geschwindigkeit von 5.625 mm/min synchron mit der Frequenz des Netzes über die Teilstrahlen bewegt. Der auf den Auffänger fallende Strom wird mit einem y-t-Schreiber synchron mitgeschrieben. Abb. 3.8b zeigt die Konstruktion des Emittanzmeßgerätes.

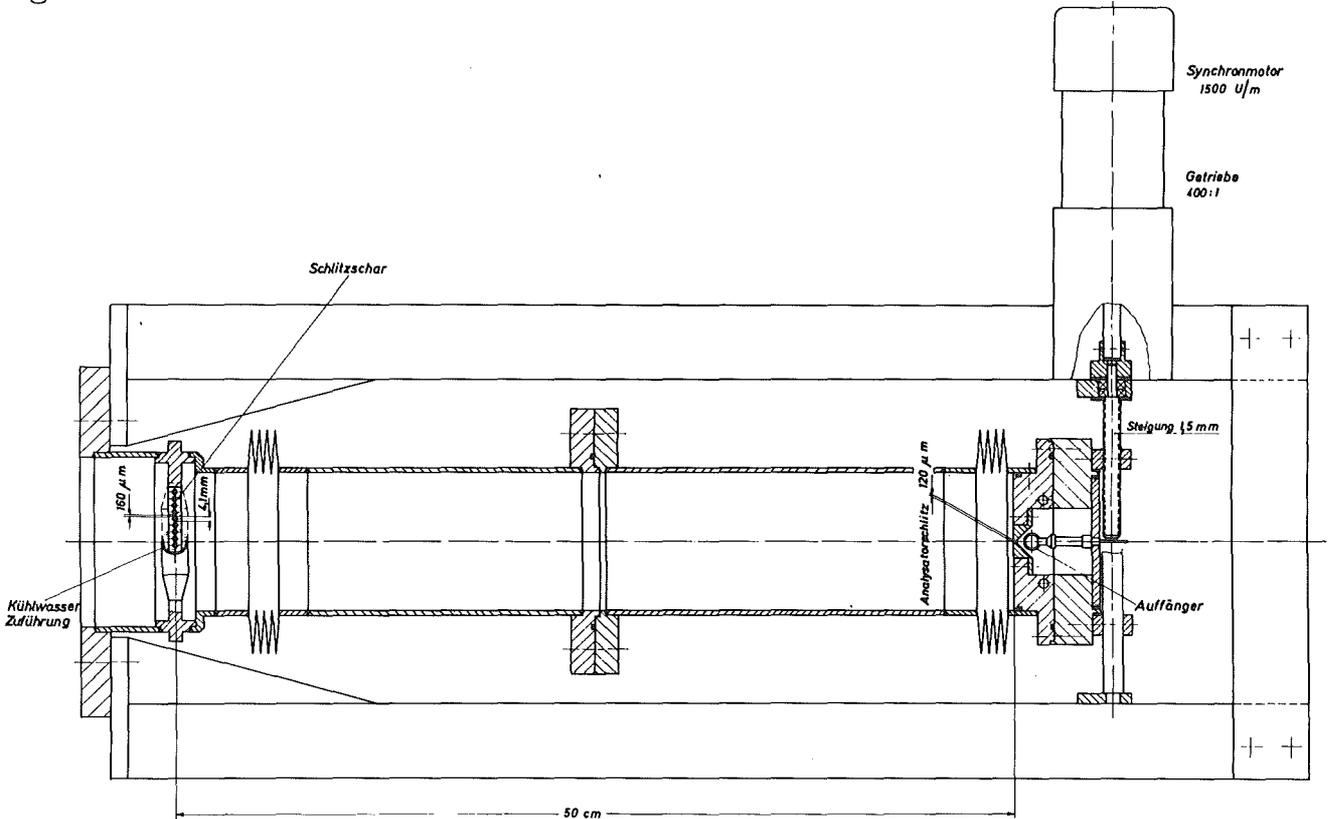


Abb. 3.8b: Mechanischer Aufbau des Emittanzmeßgerätes. Die Schlitzschar wird durch eine Serie paralleler Kupferrohre mit 160  $\mu\text{m}$  seitlichem Abstand gebildet.

Im transversalen Phasenraum erhält man das in Abb. 3.9 dargestellte Bild von der zu untersuchenden Ebene.

Der von den Schlitzen durchgelassene Teil des Strahls ist schraffiert, der vom Analysatorschlitz durchgelassene Teil des Strahls ist voll ausgezogen in der Phasebene der Schlitzschar eingezeichnet.  $I(y_A)$  ist der gemessene Stromverlauf bei Veränderung der Position  $y_A$  des Analysatorschlitzes. Um die Verteilung  $\varphi(y_i, y')$  zu bekommen, dürfen sich die Teilstrahlbündel

aus verschiedenen Schlitzen  $i$  nicht überlagern.  $y_i$  ist die Position des  $i$ -ten Schlitzes. Dann ist

$$y' = (y_A - y_i) / 50 \text{ cm.} \quad (3-2)$$

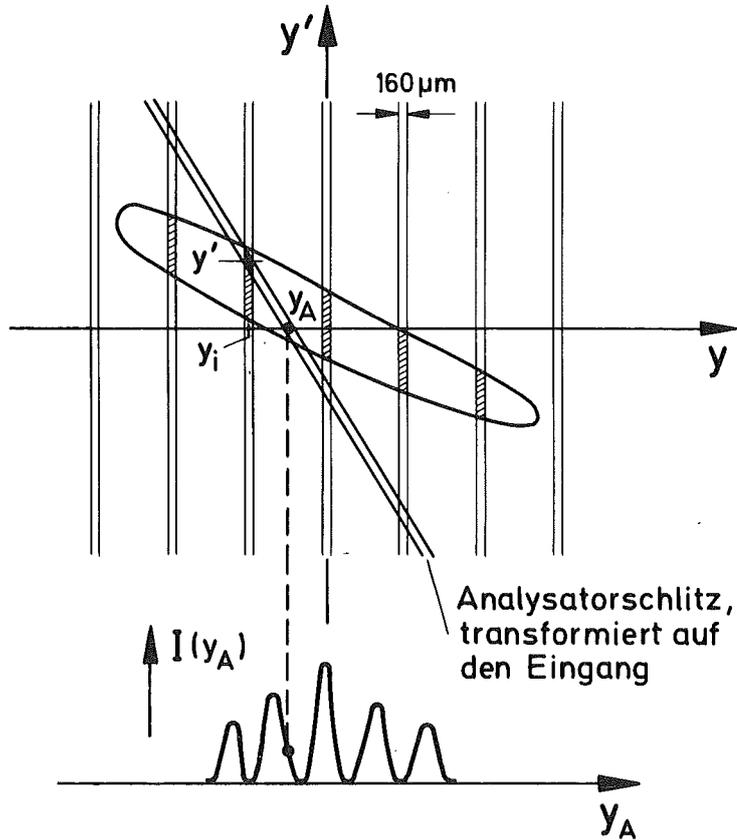


Abb. 3.9: Transversale Phasenebene  $(y, y')$  am Eingang des Emitanzmeßgerätes. Der Analysatorschlitz wurde ebenfalls auf diese Ebene transformiert. Teilchen, die durch die Schlitzschar treten, müssen in den senkrechten Streifen der Breite  $\Delta y = 160 \mu\text{m}$  liegen. Nur Teilchen, die sich außerdem innerhalb des schrägen Streifens der Breite  $\Delta y = 120 \mu\text{m}$  befinden, erreichen den Auffänger. Für sie gilt  $y' \cong (y_A - y_i) \cdot \text{const}$ ,  $y \cong y_i$  und  $I(y_A) \propto \varphi(y_i, y')$ .

Um das Winkelauflösungsvermögen zu ermitteln, wird eine ursprüngliche  $\delta$ -Verteilung längs der  $y'$ -Achse angenommen und die Antwort auf dem Auffänger untersucht.

$$\varphi(y, y') = \delta(y' - y_i) \quad (3-3)$$

Es ergibt sich der in Abb. 3.10 eingezeichnete Stromverlauf  $I(y_A)$  und da  $dy_A = 50 \text{ cm} \cdot dy'$  ist, auch der Verlauf  $I(y')$ . Das Auflösungsvermögen beträgt damit

$$\Delta y' = 160 \mu\text{m} / 50 \text{ cm} = 0.32 \text{ mrad}.$$

Die Ungenauigkeit in  $y_1$  beträgt  $\Delta y_1 = 160 \mu\text{m}$  und ist für die benötigte Meßgenauigkeit von  $y_1$  ohne Bedeutung. Durch das endliche Auflösungsvermögen der Anordnung wird die kleinste zu messende Emittanzfläche

$$(\mathcal{E}_o/\pi)_{\min} \cong y_o \cdot \Delta y' \cong 0.28 y_o \cdot \text{mrad} \quad . \quad (3-4)$$

Bei  $y_o = 1.5 \text{ cm}$  ist  $(\mathcal{E}_o/\pi)_{\min} \cong 0.42 \text{ cm mrad}$ , also etwa einen Faktor 5 kleiner als die zu messende Emittanz.

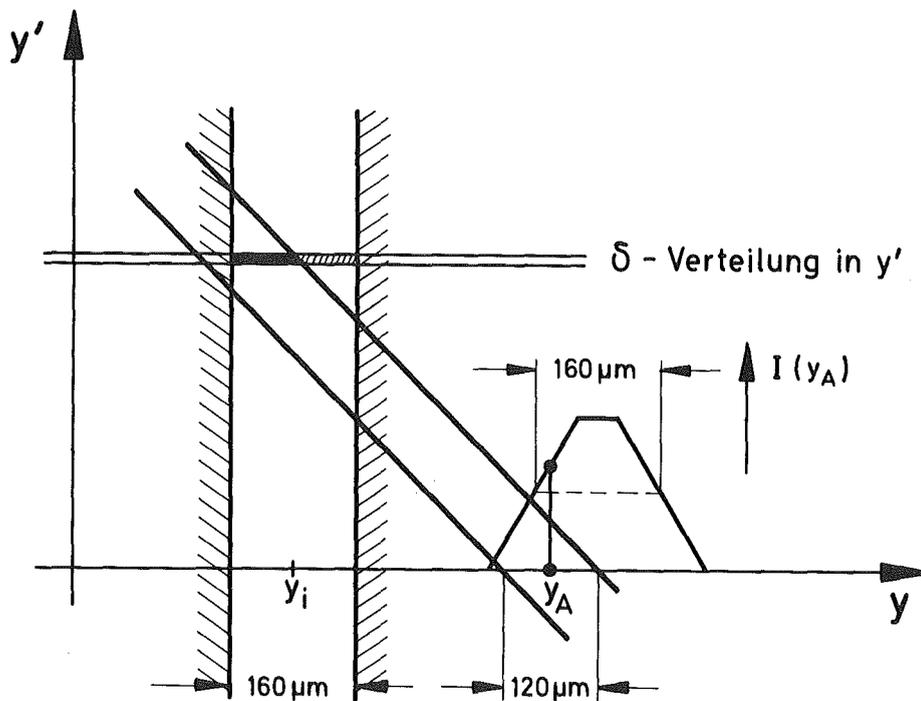


Abb. 3.10: Auflösungsgrenze des Emittanzmeßgerätes. Die in  $y'$  vorgegebene  $\delta$ -Verteilung führt bei Änderung von  $y_A$  zu dem Stromverlauf  $I(y_A)$ . Aus der Breite des Stromverlaufs kann die Auflösungsgrenze nach Gl. (3-2) bestimmt werden.

### 3.4.2 Bunchanalysator

Um die Dichteverteilung eines Strahlpakets längs der z-Achse zu einer festen Zeit  $t$  zu bekommen, genügt es den zeitlichen Verlauf des Stroms beim Durchgang der Pakete bei festem  $z$  zu bestimmen. Dies läßt sich bei periodischen Vorgängen mit Hilfe der Samplingmethode erreichen. Dabei wird ein "Zeitfenster" synchron mit der Frequenz des zu untersuchenden Vorgangs geöffnet und die Phasendifferenz zwischen "Fenster" und periodischem Vorgang langsam verändert <sup>53</sup>.

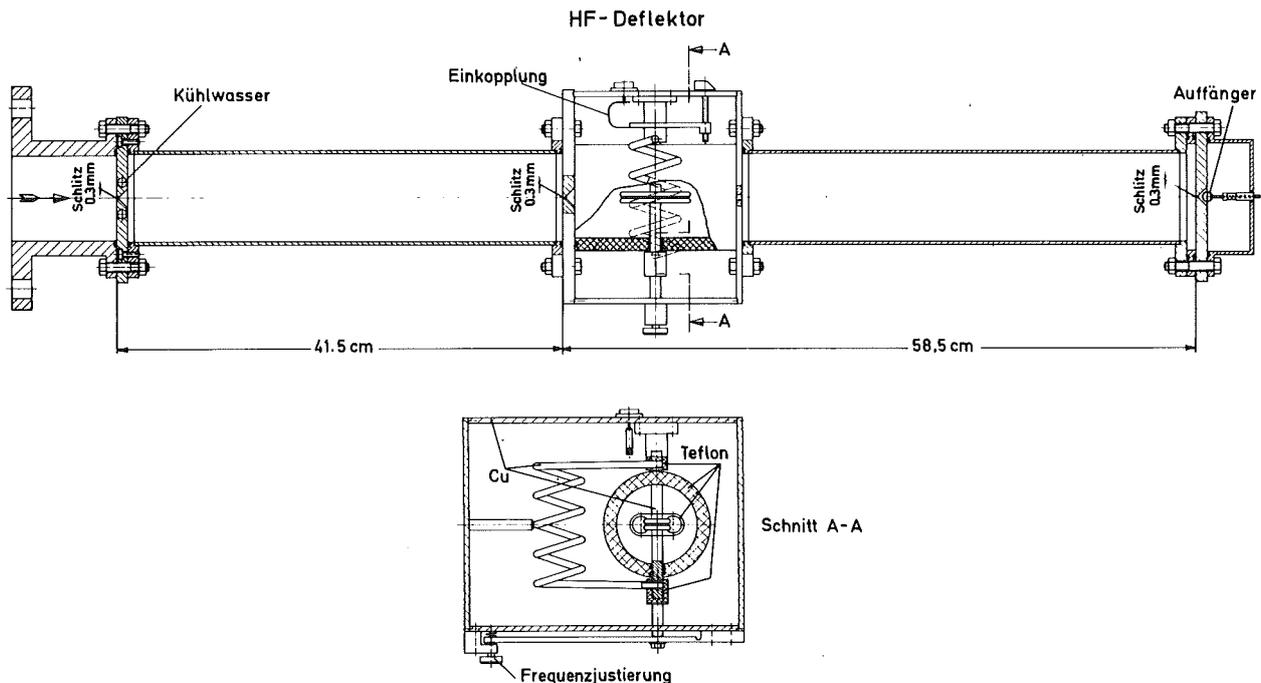


Abb. 3.11: Aufbau des Bunchanalysators. Durch die beiden parallelen Schlitze auf der Strahleingangsseite wird ein paralleles Teilstrahlbündel ausgeblendet. Dieses wird im nachfolgenden HF-Deflektor periodisch abgelenkt. Bei den Nulldurchgängen der Ablenkung kann der Teil des Strahls, der sich gerade in der Mitte des Deflektors befindet, den dritten Schlitz passieren und den Auffänger erreichen. Durch Veränderung der Phase des Deflektors relativ zu den Strahlpulsen kann der Nulldurchgang langsam längs der Phase des Pulses verschoben werden. Der gemessene Strom  $I$  des Auffängers ist ein Maß für die Stromdichte  $\varrho(\varphi)$  längs der Pulse.

Als hochfrequentes "Fenster" dient ein HF-Deflektor mit einem nachfolgenden Schlitz. Der Aufbau des Systems ist in Abb. 3.11 dargestellt. Das Gerät besitzt drei 0.3 mm breite Schlitzze, die in einer Ebene liegen. Nach dem zweiten Schlitz wird der Strahl durch das elektrische Feld des Deflektorkondensators, der Teil eines Schwingkreises ist, periodisch abgelenkt. Bei den Nulldurchgängen des Deflektorfeldes kann der Strahl für eine kurze Zeit den Auffänger erreichen.

Abb. 3.12 erläutert die Phasenverhältnisse. Ein Teilchen, das mit der Phase  $\varphi_p = \omega t_B$  den Bunchanalysator erreicht, erfährt eine Ablenkung

$$y' = \Delta y'_0 \cdot \sin(\omega t_B + \varphi_B), \quad y = y_{max} \cdot \sin(\omega t_B + \varphi_B), \quad (3-5)$$

wobei  $\varphi_B$  die Phasenverschiebung des Bunchanalysators relativ zum Buncher ist. Gelangt das Teilchen bei einer Phasenverschiebung  $\varphi_B$  auf den Auffänger, so muß  $y' = 0$  sein, also

$$\omega t_B + \varphi_B = 0 \quad \text{oder} \quad \pi,$$

$$\text{das bedeutet } \varphi_p = -\varphi_B \quad \text{oder} \quad -\varphi_B + \pi * . \quad (3-6)$$

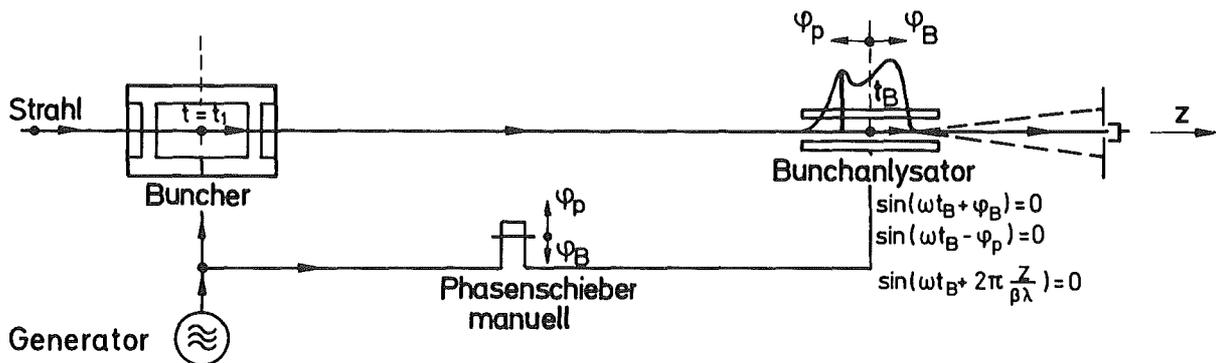


Abb. 3.12: Erläuterung des Vorzeichens von  $\varphi_p$  und  $\varphi_B$

\* Eine Kontrolle für das richtige Vorzeichen von  $\varphi_p$  bei der Aufzeichnung der Verteilung ergibt sich aus einer Vergrößerung der Driftstrecke  $s$ :  $\omega t_B = \omega t_1 + \frac{\Delta s}{V}$   
 In die Bedingung eingesetzt:  $\omega t_1 + \omega \cdot \frac{\Delta s}{V} + \varphi_B = 0$ .  
 Bei Vergrößerung von  $s$  und fester Verteilung  $\varphi(\varphi_p)$  taucht das Paket bei kleinerem  $\varphi_B$  auf.

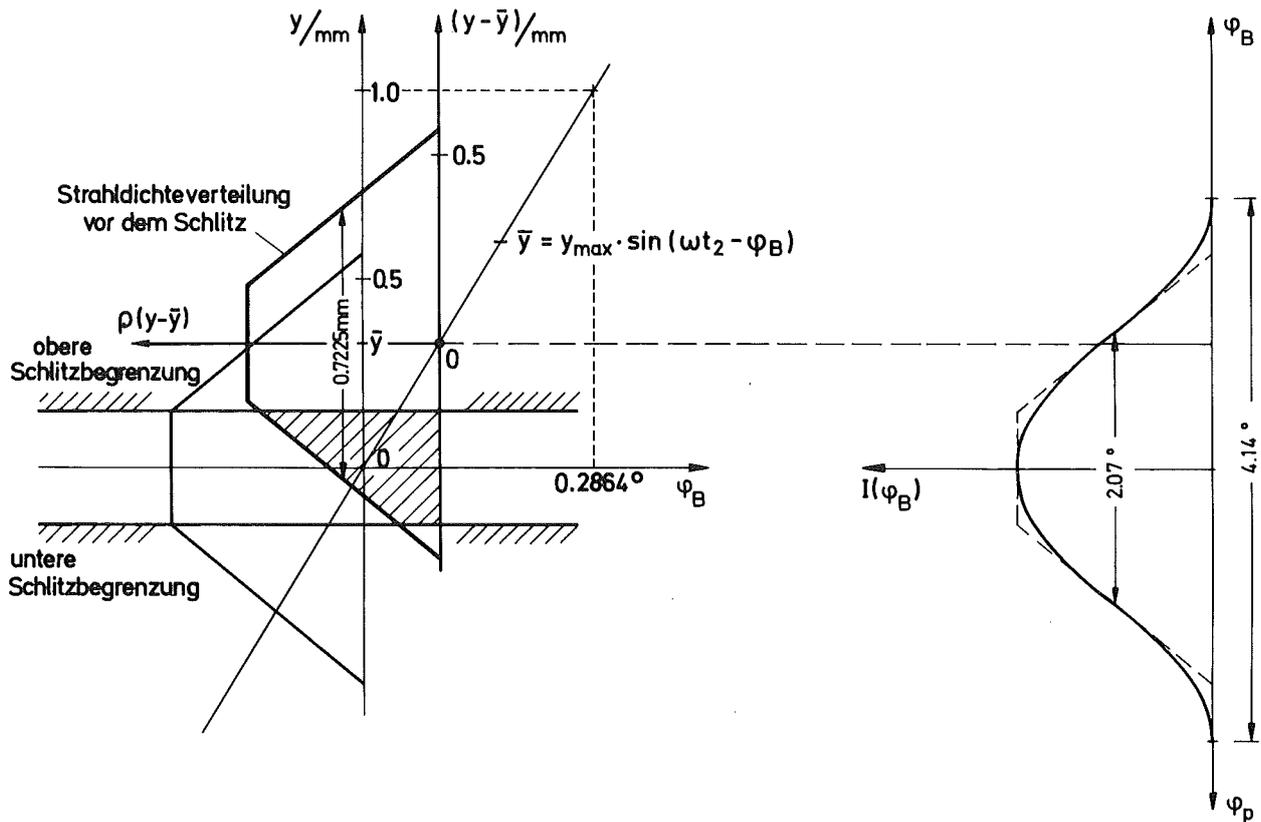


Abb. 3.13: Auflösungsgrenze des Bunchanalysators. Längs  $z$  wird eine  $\delta$ -Verteilung der Stromdichte vorgegeben. Auf den Schlitz vor dem Auffänger fällt ein Strahl mit der transversalen Dichteverteilung  $\rho(y - \bar{y})$ . Der Schwerpunkt  $\bar{y}$  der Verteilung wandert bei festem  $t_B$  als Funktion der Phase  $\varphi_B$  auf der Kurve  $\bar{y} = y_{\text{max}} \cdot \sin(\omega t_B + \varphi_B)$ . Dabei wird die Verteilung  $\rho(y - \bar{y})$  über den Schlitz vor dem Auffänger geführt. Der vom Auffänger gesammelte Teilchenstrom  $I(\varphi_B)$  ergibt sich durch Integration von der unteren bis zur oberen Schlitzbegrenzung (schraffierte Fläche).

Zur theoretischen Bestimmung des Auflösungsvermögens wird längs  $z$  eine  $\delta$ -Verteilung angenommen.

$$\rho(z) \propto \delta(z - z_B(t)), \quad z_B(t) = z_0 + v \cdot t \quad . \quad (3-7)$$

Auf den Schlitz vor dem Auffänger fällt ein Strahl mit der transversalen Verteilung  $\rho(y - \bar{y})$  wie in Abb. 3.13 eingezeichnet.

Dabei ist

$$\bar{y} = d \cdot \Delta y'_0 \cdot \sin(\omega t_B + \varphi_B) \quad , \quad (3-8)$$

wo  $d$  der Abstand zwischen der Mitte des Ablenkplattenpaares und dem Analysatorschlitz ist. Wird  $\varphi_B$  linear vergrößert, so ergibt sich ein Stromverlauf  $I(\varphi_B)$ , der ebenfalls in Abb. 3.13 angegeben ist. Das Auflösungsvermögen ist gegeben durch

$$\frac{d\varphi_B}{dy} = - \frac{d\varphi_B}{d\gamma} = - \frac{1}{d \cdot \Delta y'_0} = - \frac{1}{Y_{\max}} \quad . \quad (3-9)$$

Die maximale Auslenkung  $y_{\max}$  beträgt bei  $P = 100$  W etwa 20 mm. Bei diesem, in den folgenden Experimenten verwendeten Pegel, beträgt daher die Auflösungsgrenze mit  $\Delta y = 0.7225$  mm:

$$\delta\varphi = \left| \frac{d\varphi_B}{dy} \right| \cdot \Delta y = 2.864^\circ/\text{mm} \cdot 0.7225 \text{ mm} = 2.07^\circ, \quad \delta t = 64 \text{ psec} \quad .$$

Der Bunchanalysator untersucht nur den Teil des Strahls, der durch die beiden ersten Schlitze durchgelassen wird. Um eine Aussage über die Gesamtlänge zu bekommen, müßte der Analysator als Ganzes seitlich versetzt und geschwenkt werden. Bei den durchgeführten Messungen zeigte sich, daß die größte Länge der Pakete in der Mittelstellung gemessen wird. Es genügt also in der Mittelebene des Strahls zu messen. Dabei wird die Schlitzebene parallel zur Ablenkebene gelegt um die ganze Schar der  $y_1$ - und  $y'_1$ -Werte zu erfassen.

Die Eigenfrequenz des Bunchanalysators wird manuell nachgeregelt, was bei einer Güte  $Q_0 = 300$  keine Schwierigkeiten bereitet. Die Phasendifferenz zwischen Bunchanalysator und Buncher wird mit Hilfe eines Phasenregelkreises (Herstellerfirma Herfurth) auf dem eingestellten Wert gehalten (Abb. 3.7). Ein Vektorvoltmeter mißt die Phasendifferenz und gibt eine dazu proportionale Spannung auf den horizontalen Eingang eines xy-Schreibers. Vertikal wird der am Auffänger gemessene Strom als Funktion der manuell eingestellten Phasendifferenz zwischen Bunchanalysator und Buncher aufgezeichnet.

#### 4. MESSUNGEN

Die folgenden Messungen wurden bei einer Protonenenergie von 750 keV und einem Protonenstrahlstrom von 1 mA durchgeführt. Die Frequenz betrug 90.4 MHz und die Driftstrecke war bei den Bunchmessungen 298.4 cm lang. Die Emittanzmessungen beziehen sich auf die Ebene  $z=210.9$  cm. Die Lage der Strahltaillen weicht bei den Messungen nur wenig von ihrer Sollposition ab.

##### 4.1 Emittanzmessung

Es muß zwischen Messungen mit und ohne Energiemodulation unterschieden werden. Beide Messungen werden in der Ablenkebene und senkrecht dazu durchgeführt.

Die Messungen ohne Modulation geben Aufschluß über die Emittanz des Protonenstrahls vor dem Ablenkmagnet. Dabei befindet sich die Schneide außerhalb des Strahls. Abb. 4.1 und 4.2 zeigen zwei Messungen.

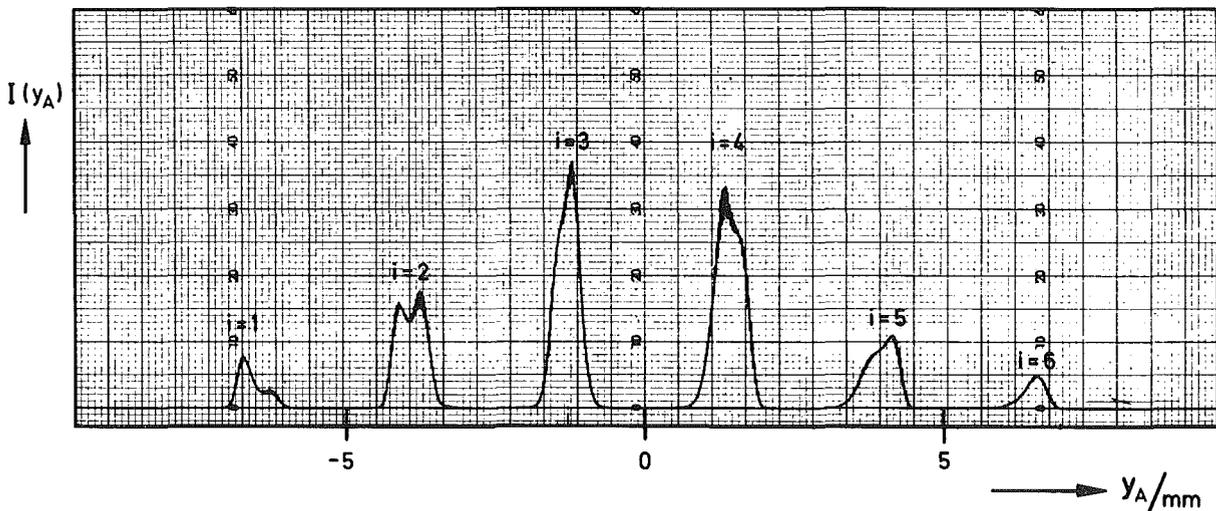


Abb. 4.1: Emittanzmessung in der Ablenkebene, ohne Modulation, bei  $z = 210.9$  cm

Es ergibt sich in beiden Ebenen etwa die gleiche Emittanz von  $\epsilon_0/\pi = (1.8 \pm 0.3)$  cm mrad. Dabei wird in jeder Ebene etwa 0.5% des Strahls außerhalb der Projektion des Phasenraumbereichs zugelassen. Da die Verteilung  $\rho(y', y_i)$  glatt verläuft, wird die scheinbare Emittanzvergrößerung aufgrund des endlichen Auflösungsvermögens durch das Abschneiden weitgehend reduziert.

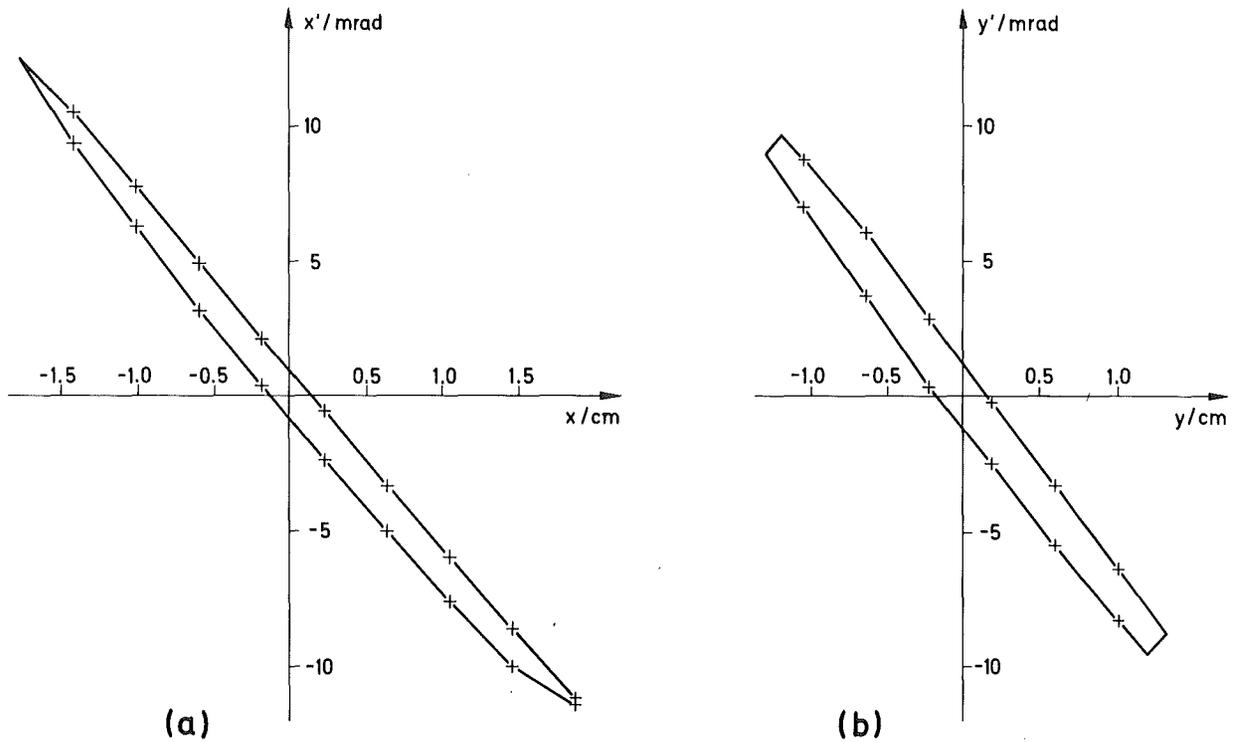


Abb. 4.2: Emittanz des Strahls ohne Modulation bei  $z = 210.9$  cm  
 (a) senkrecht zur und (b) in der Ablenkebene

Messungen der Emittanz des vom Injektor kommenden Strahls ergeben einen wesentlich größeren Wert für die Emittanzfläche  $\epsilon_0/\pi = 2.5$  cm mrad. Dies ist auf verschiedene Ionenarten, die neben den Protonen im Strahl enthalten sind, zurückzuführen. Eine solche Messung liefert daher nur wenig Information über den Protonenanteil. Es wird nun angenommen, daß die Emittanz des Protonenstrahls vor dem  $270^\circ$ -Magnet ebenfalls 1.8 cm mrad beträgt.

Hierfür spricht die Gestalt der Emittanzfläche in der  $y$ -Ebene ohne Energiemodulation. In der  $y$ - (Ablenk-)Ebene bleiben Randstrahlen, d. h. Strahlen mit maximaler Divergenz, aufgrund der starken Divergenz des Strahlenbündels in der Nähe des Strahlrandes außer an den Strahlteilen. Abbildungsfehler treten vorwiegend an den Randzonen der teilchenoptischen Elemente auf. Wäre die Emittanz nach dem Chopper-Buncher-System im wesentlichen durch die Abbildungsfehler der Quadrupole und des  $270^\circ$ -Magnetens bestimmt, so müßten starke Verzerrungen in der Nähe der weit voneinander entfernten Scheitelpunkte der Emittanzfläche auftreten<sup>54, 55</sup>. Dies wird jedoch nicht beobachtet. Vielmehr nimmt die Breite der Emittanzfläche nach der Mitte hin zu. Die Dichteverteilung  $\rho(y_i, y')$  läßt auch in der Mitte ( $i=3$  und  $4$ ) noch eine Höcker-

struktur erkennen, die nicht von Abbildungsfehlern des Chopper-Buncher-Systems herrührt, sondern nur vom Injektor und dort von der Quelle stammen kann (Abb. 4.1 ).

Da der Injektor rotationssymmetrisch aufgebaut ist, kann angenommen werden, daß in der x-Ebene die Emittanz des Injektorstrahls (Protonenanteil) genauso groß ist. Bei der Messung der Emittanz des Gesamtstrahls am Ausgang des Injektors ergab sich kein wesentlicher Unterschied zwischen der Messung in der x-Ebene und der y-Ebene.

Mit einer Energiemodulation, wie sie bei der Buncherzeugung verwendet wird, ergibt sich eine größere Emittanz. Die extremen Energieabweichungen betragen in den Strahlpaketen  $\pm 1.9\%$ . Die Schneide wurde soweit eingefahren, daß noch etwa 40% der Teilchen in den Paketen erhalten bleiben. Abb. 4.3 zeigt die gemessene Emittanzfläche in der Ablenkebene (a) und in der dazu senkrechten Ebene (b).

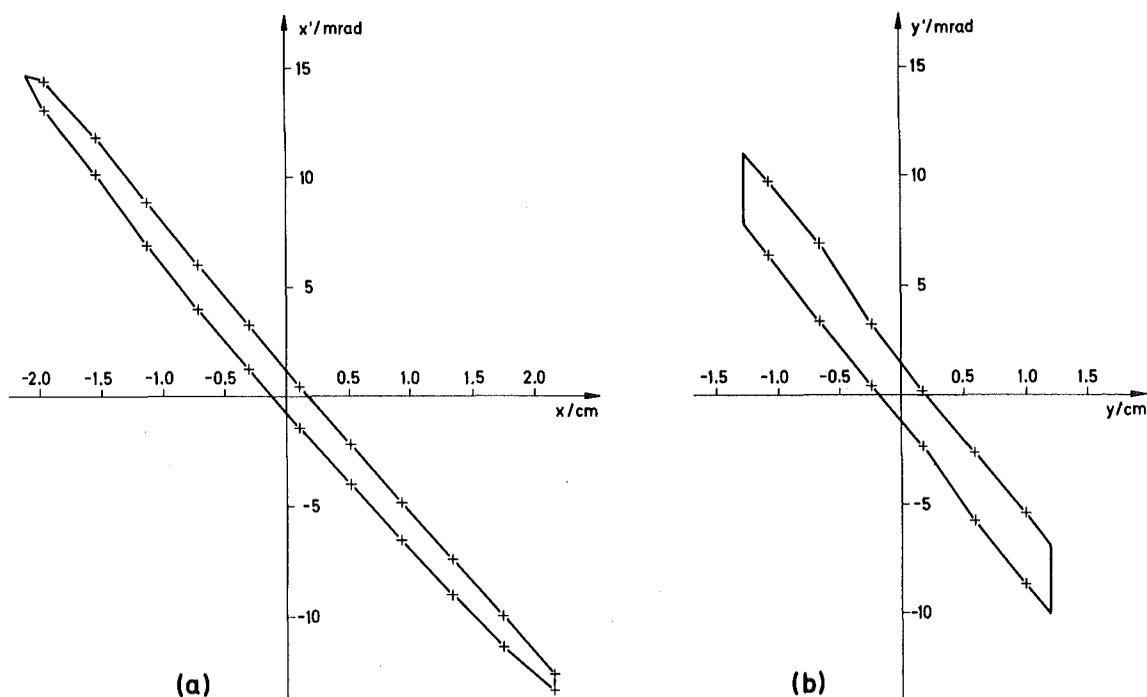
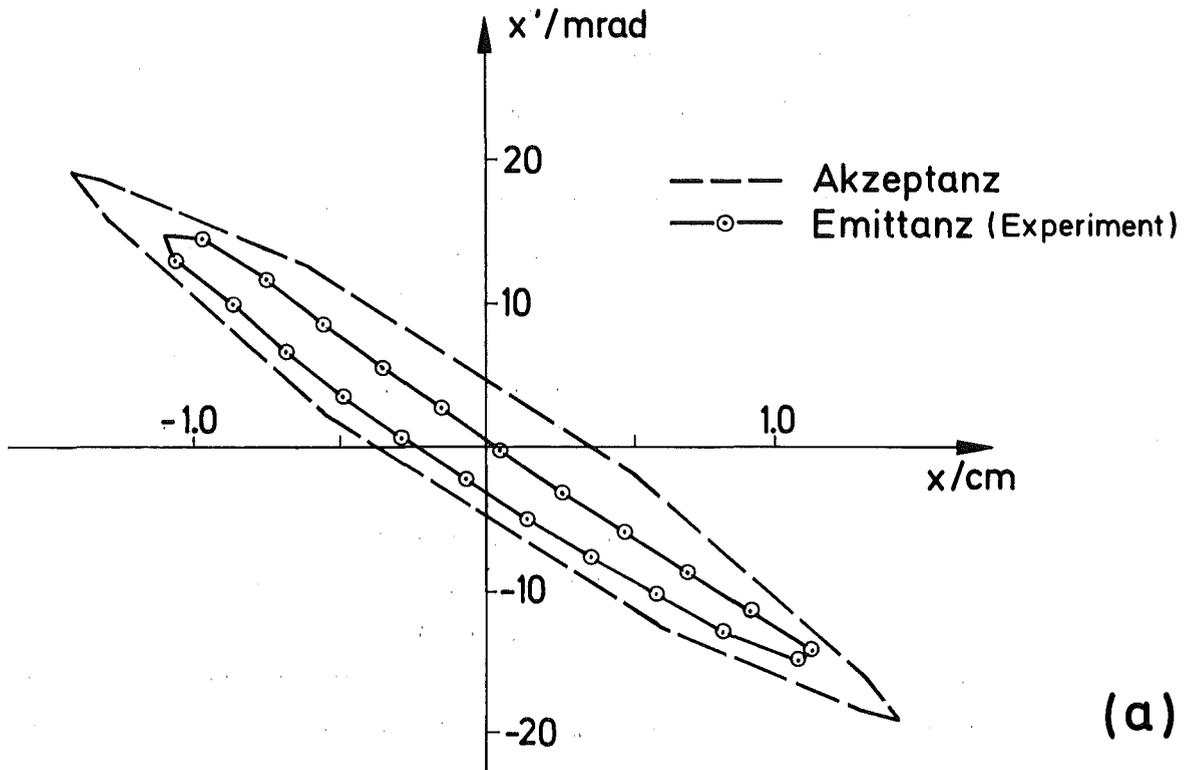
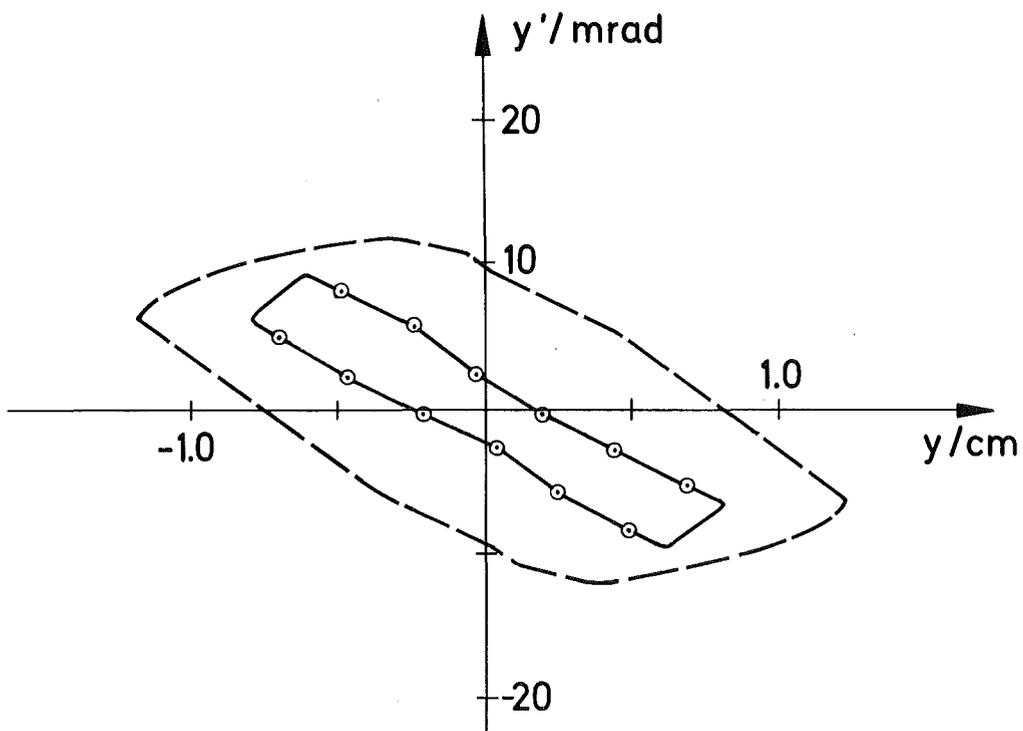


Abb. 4.3: Emittanz des Strahls mit Energiemodulation bei  $z=210.9$  cm  
(a) senkrecht zur und (b) in der Ablenkebene

In der Ablenkebene zeigt sich besonders ausgeprägt eine Verbreiterung der Emittanzfläche durch die chromatischen Abbildungsfehler des Quadrupoldoublets Q34. Die Emittanz mit Modulation beträgt in der Ablenk-



(a)



(b)

Abb. 4.4: Emittanz des modulierten Strahls und Akzeptanz bezogen auf den Eingang des Beschleunigers bei  $z=274.7$  cm (a) in der horizontalen Ebene und (b) in der vertikalen Ebene

ebene  $(\epsilon_0/\pi)_y = (2.75 \pm 0.3)$  cm mrad und senkrecht dazu  
 $(\epsilon_0/\pi)_x = (2.6 \pm 0.3)$  cm mrad.

Aus der für eine bestimmte Gradientenkombination gemessenen Emittanz kann für nur wenig abweichende Strahlkonfigurationen die Emittanzfläche durch eine lineare Transformation bestimmt werden. Abb. 4.4 zeigt die gemessene Emittanz (a) in der x- und (b) in der y-Ebene bei einer Korrektur der Gradienten von Q3 und Q4 um +0.093% bzw. +2.12% und auf den Eingang des Beschleunigers transformiert. Im Vergleich dazu ist die errechnete Akzeptanz des Beschleunigers eingezeichnet.

#### 4.2 Messung der longitudinalen Dichteverteilung

In einer ersten Messung wird bei verschiedenem Pegel  $P_V$  des Modulators die Stromdichte als Funktion der Phasendifferenz  $\varphi_B = \varphi_{BA} - \varphi_{BU}$  zwischen Bunchanalysator und Buncher aufgezeichnet. Dabei ist die Schneide zurückgezogen und läßt den gesamten Protonenstrahl passieren. Abb. 4.5a und 4.5b zeigen die gemessene Stromdichte als Funktion der Phase  $\varphi_B$ .

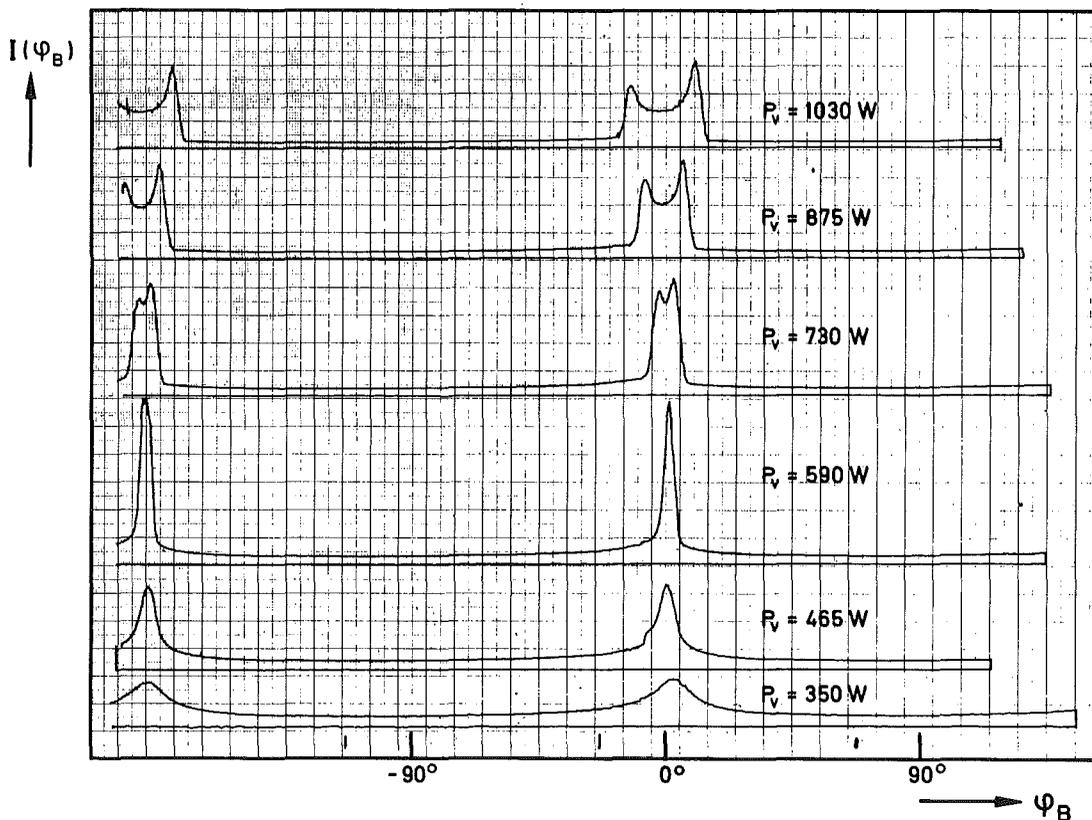


Abb. 4.5a: Stromdichte als Funktion von  $\varphi_B$  bei verschieden starker Modulation und ungepulstem Strahl

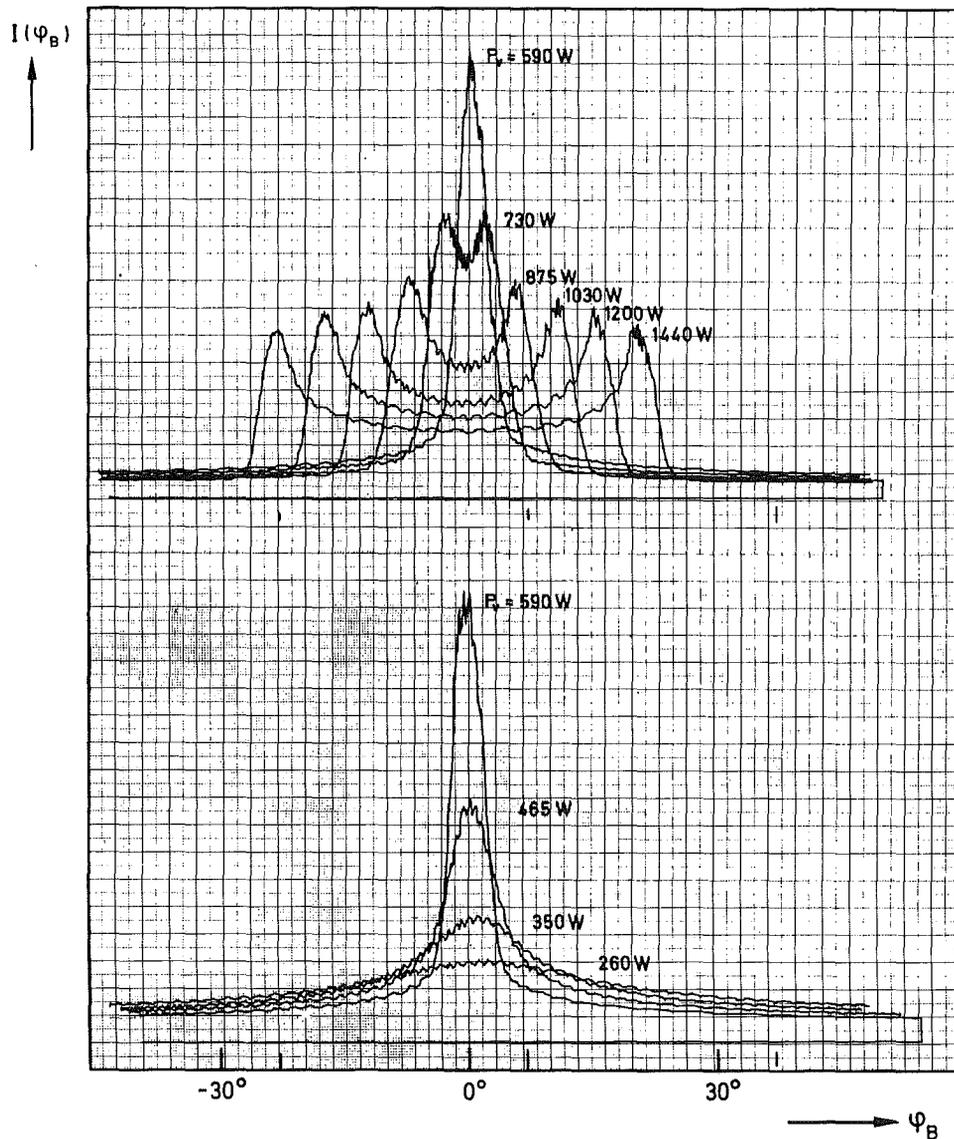


Abb. 4.5b: Stromdichte als Funktion von  $\varphi_B$  bei verschieden starker Modulation und ungepulstem Strahl

Als nächstes wird die Schneide teilweise in den Strahl eingefahren. Teilchen, die nicht in der Nähe der Pakete zusammenlaufen, werden dabei herausgeblendet. Abb. 4.6 zeigt wieder die Stromdichte als Funktion der Phase (a) ohne und (b) mit Schneide im Strahl. Dabei werden bei eingefahrener Schneide noch 40% der Teilchen durchgelassen. Die Dichteverteilung ändert sich dabei im Maximum nur wenig, während die Dichte zwischen den Maxima drastisch reduziert wird.

Pro Hochfrequenzperiode werden, wie erwartet, zwei Nulldurchgänge registriert. Die beiden zugehörigen Bilder der Pakete erscheinen im Abstand  $\pi$ .

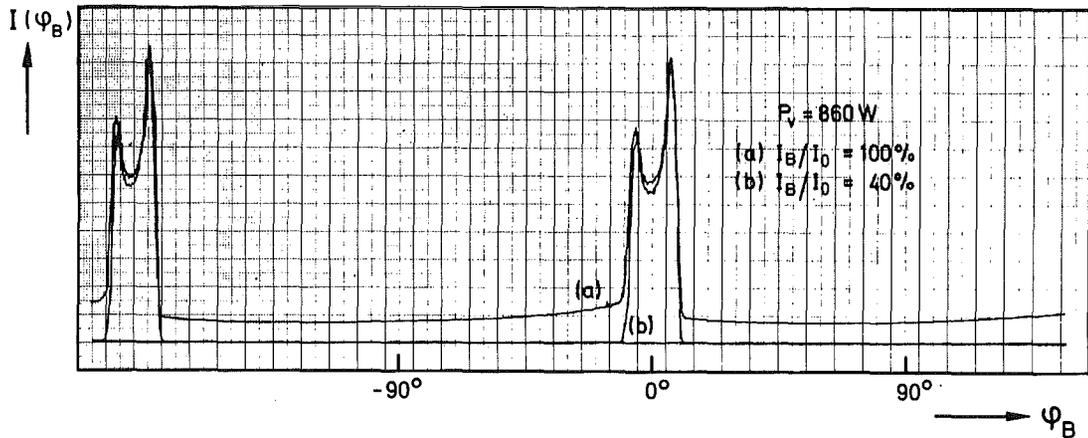


Abb. 4.6: Stromdichte als Funktion der Phase  $\varphi_B$  (a) ohne und (b) mit der Schneide im Strahl. Bei eingefahrener Schneide (b) bleiben etwa 40% der Teilchen im Strahl. Die Dichteverteilung ändert sich im Strahlpaket nur wenig, während die Dichte zwischen den Pulsen stark reduziert wird.

Die Dichteverteilung eines Strahlpulses, wie er für die Injektion in den Beschleuniger geeignet ist, zeigt die Abb. 4.7.

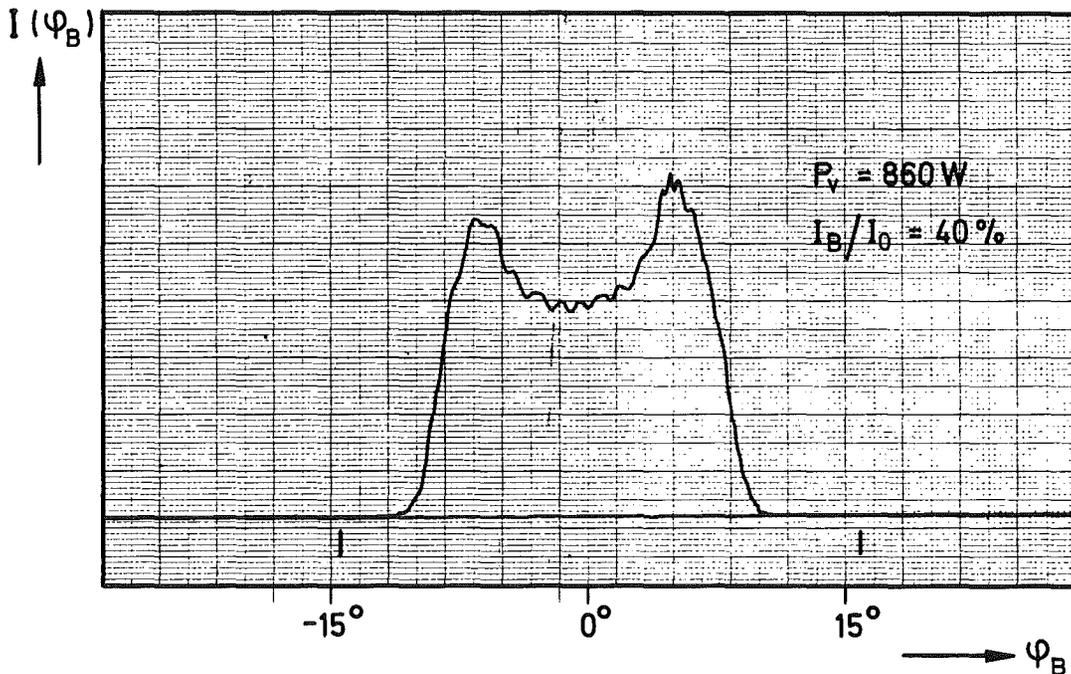


Abb. 4.7: Dichteverteilung längs eines Strahlpulses bei einer Buncherverlustleistung von  $P_v = 860 \text{ W}$  und einer Strahl- ausbeute  $I_B/I_0 = 40\%$

Dabei bleiben im zerhackten Strahl 400  $\mu\text{A}$ , das sind 40% der Protonen, erhalten. Die Verlustleistung des Bunchers beträgt dabei  $P_v=860\text{ W}$ . Die Pakete haben eine Länge  $\Delta\varphi \leq 22^\circ$ , ihre Energiebreite ergibt sich nach theoretischen Überlegungen zu  $\Delta W=3.8\%$ . Dieser Bereich ist in Abb. 4.8 zusammen mit der festgesetzten longitudinalen Akzeptanz des Beschleunigers wiedergegeben.

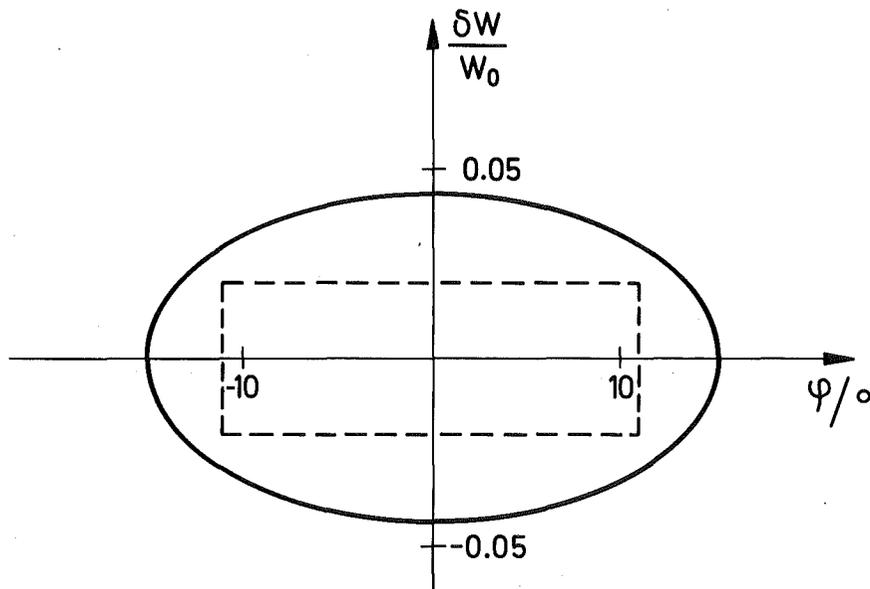


Abb. 4.8: Longitudinale Phasenraumgrenzen der erzeugten Strahlpulse und longitudinale Akzeptanz des Beschleunigers

#### 4.2.1 Abhängigkeit der Bunchlänge von $x$ und $x'$

Da der Bunchanalysator nur einen Teil des Strahls analysiert, nämlich Teilchen mit  $x \approx 0$  und  $x' \approx 0$ , muß untersucht werden, ob die gemessene Bunchlänge von  $x$  und  $x'$  abhängt.

Hierzu wurde in einer ersten Messung  $x' \approx 0$  festgehalten und  $x$  über die ganze Strahlbreite variiert, d. h. der gesamte Bunchanalysator wurde in definierten Schritten parallel zur Strahlachse seitlich versetzt und jeweils die Dichteverteilung aufgezeichnet. Abb. 4.9 (a) zeigt das Ergebnis dieser Messung: die größte Bunchlänge wird bei  $x \approx 0$  beobachtet.

In einer zweiten Meßreihe wurde  $x \approx 0$  am ersten Schlitz festgehalten und der Bunchanalysator langsam aus der Richtung der Strahlachse

geschwenkt. Abb.4.9 (b) zeigt die gemessene Intensitätsverteilung für verschiedene Werte von  $x'$ . Es zeigt sich auch in diesem Fall, daß die größte Bunchlänge bei  $x' \approx 0$  gemessen wird.

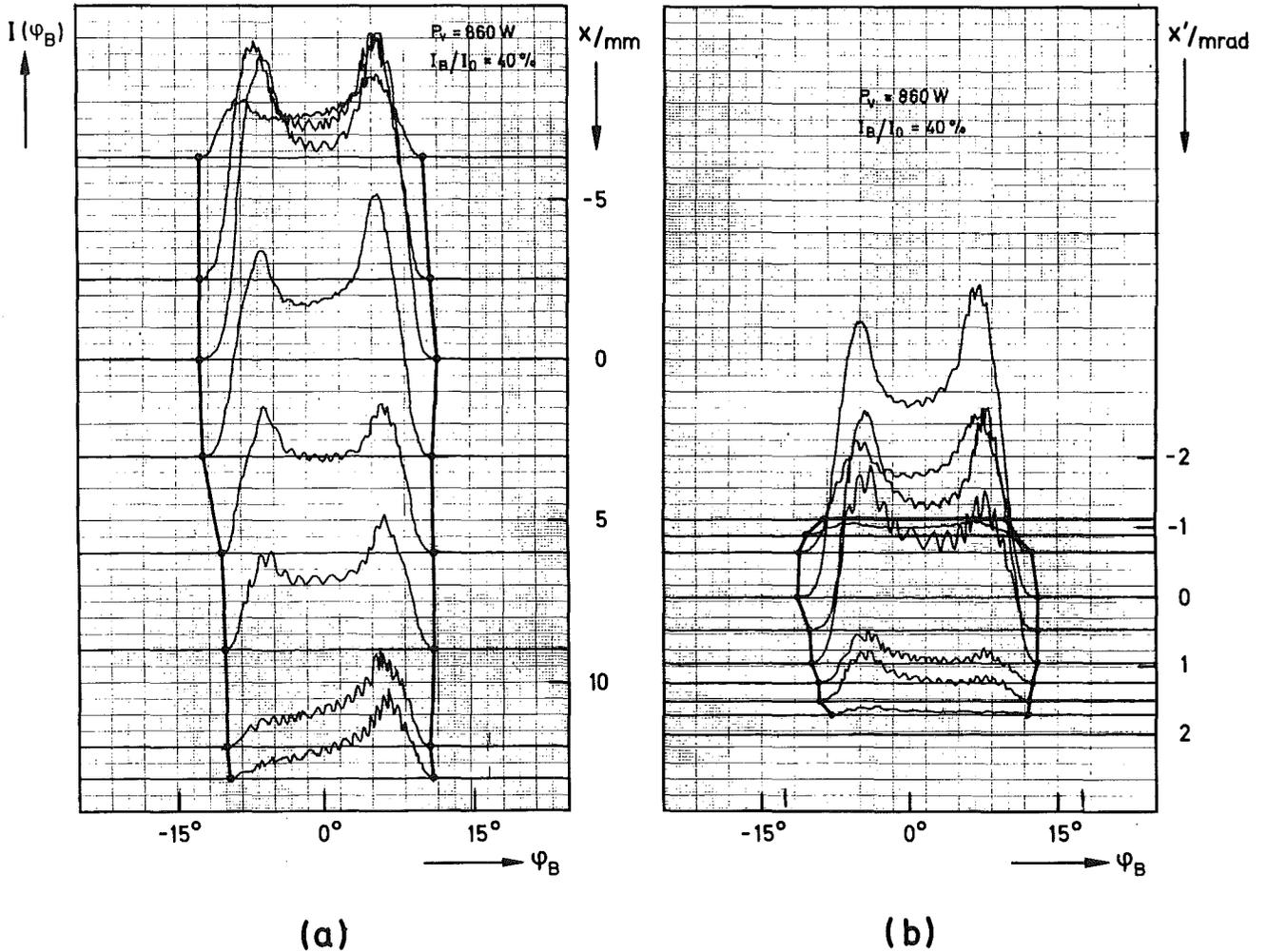


Abb. 4.9: Dichteverteilung und Bunchlänge  
(a) für verschiedene Werte von  $x$  und  $x' \approx 0$ ,  
(b) für  $x \approx 0$  und verschiedene Werte von  $x'$ .  
Die größte Pulslänge wird beim größten gemessenen Pulsstrom und  $x \approx 0$  sowie  $x' \approx 0$  beobachtet.

Es genügt daher für  $x \approx 0$  und  $x' \approx 0$  die Bunchlänge zu messen. In dieser Lage wird die größte Stromdichte beobachtet. Bei der Justierung des Bunchanalysators wird die Stromdichte optimiert.

#### 4.2.2 Bestimmung des Untergrunds zwischen den Paketen

Um den Untergrund zwischen den Strahlpulsen sichtbar zu machen, wird der gemessene Strom um einen Faktor 100 verstärkt wiedergegeben. Die gemessene Dichteverteilung als Funktion von  $\varphi_B$  ist in Abb. 4.10 wiedergegeben.

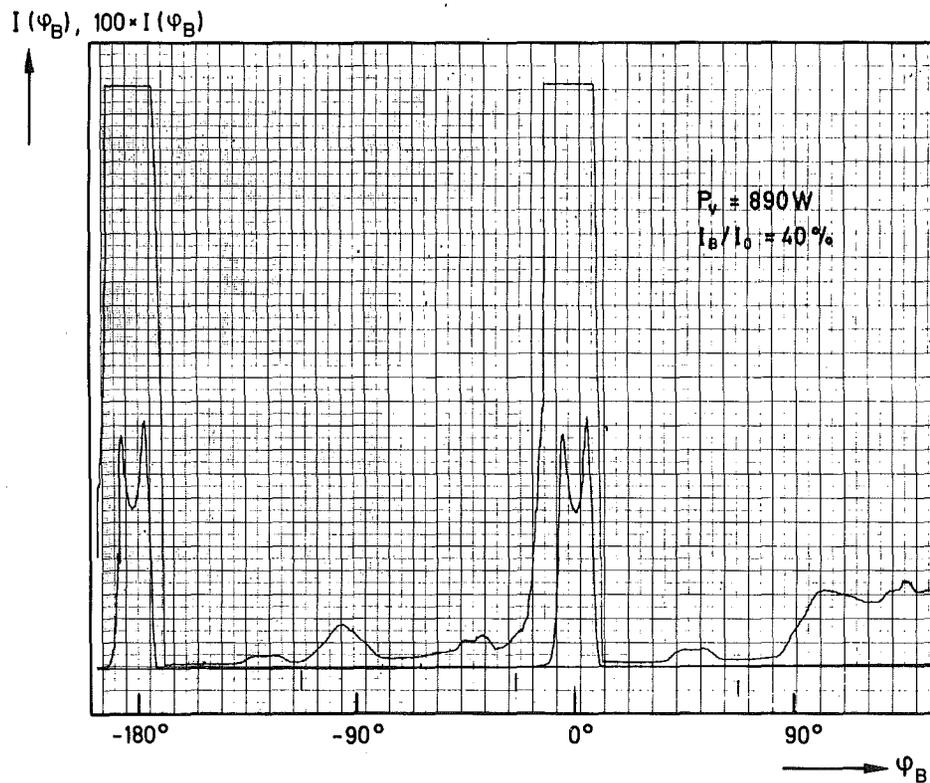


Abb. 4.10: Untergrund zwischen den Strahlpulsen. Um den Untergrund sichtbar zu machen, wurde als zusätzliche Kurve der Strom um einen Faktor 100 vergrößert aufgezeichnet. Die Stromdichte außerhalb der Pulse ist etwa um einen Faktor  $10^{-3}$  kleiner als im Strahlpuls. Zwischen den Pulsen befindet sich ein Anteil des Strahls von weniger als 1%.

Es zeigt sich, daß die Stromdichte außerhalb der Pulse etwa um einen Faktor  $10^{-3}$  kleiner ist als im Strahlpuls. Wird der Untergrund zwi-

schen den Paketen über die Phase integriert, so ergibt sich ein Anteil von weniger als 1%.

Ein Teil des Untergrundes wiederholt sich mit  $\Delta\varphi=\pi$ . Es wurde beobachtet, daß dieser Anteil von der Einstellung der Quellparameter abhängt und bei kleinem Strahlstrom am Injektor relativ zu den Strahlpulsen zunimmt. Der Rest des Untergrundes zeigt dagegen keine Periodizität mit  $\pi$ , ist jedoch reproduzierbar. Dieser Anteil könnte mit der Nachweisapparatur zusammenhängen.

Da es keine zuverlässige Abschätzung der zulässigen Strahlverluste auf den supraleitenden Oberflächen der HF-Resonatoren und der damit verbundenen Strahlenschäden gibt, wird man versuchen, den Untergrund so klein wie möglich zu halten. Die Ursachen des Untergrundes wurden im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt. Seine Reduktion um eine Größenordnung bleibt einem späteren Verbesserungsprogramm vorbehalten.

#### 4.2.3 Systematische Variation der Parameter

In den hier beschriebenen Meßserien wurde für verschiedene Modulatorpegel die Position der Schneide schrittweise geändert und dabei jeweils die Stromdichte als Funktion der Phase  $\varphi_B$  aufgezeichnet. Gleichzeitig wurde das Verhältnis des durchgelassenen Strahlstromes  $I_B$  zum Gesamtprotonenstrom ohne Schneide  $I_0$  gemessen.

Abb. 4.11 zeigt Stromverteilungen für eine Buncherverlustleistung von  $P_V = 760$  W und verschiedene Stellungen  $y_e$  der Schneide. Die kürzesten Strahlpulse werden bei  $P_V \approx 600$  W erreicht. Abb. 4.12 zeigt die Stromdichteverteilung bei verschiedener Stellung der Schneide mit Angabe der Strahlausbeute. Bei einer Ausbeute von etwa 17% beträgt die gemessene Pulslänge  $\Delta\varphi = 8.5^\circ$ .

Aus diesen Kurven kann die Bunchlänge bestimmt und die Strahlausbeute  $I_B/I_0$  bei verschiedenen Stellungen der Schneide als Funktion dieser Pulslänge  $\Delta\varphi$  gezeichnet werden. Abb. 4.13 zeigt eine Schar solcher Kurven für verschiedene Pegel  $P_V$  des Modulators. Die Hüllkurve dieser Kurvenschar stellt den optimal erreichbaren Wirkungsgrad als Funktion der Bunchlänge dar.

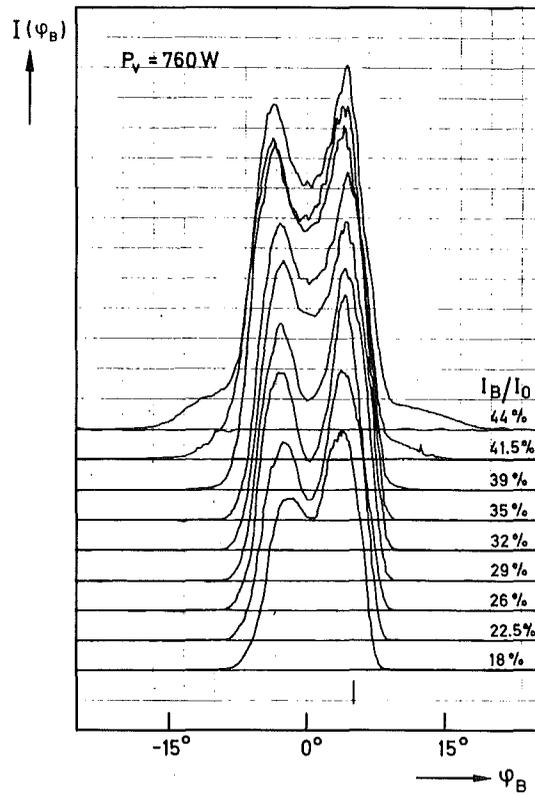


Abb. 4.11: Longitudinale Dichteverteilung bei verschiedener Stellung  $y_e$  der Schneide mit Angabe der Strahlausbeute  $I_B/I_0$

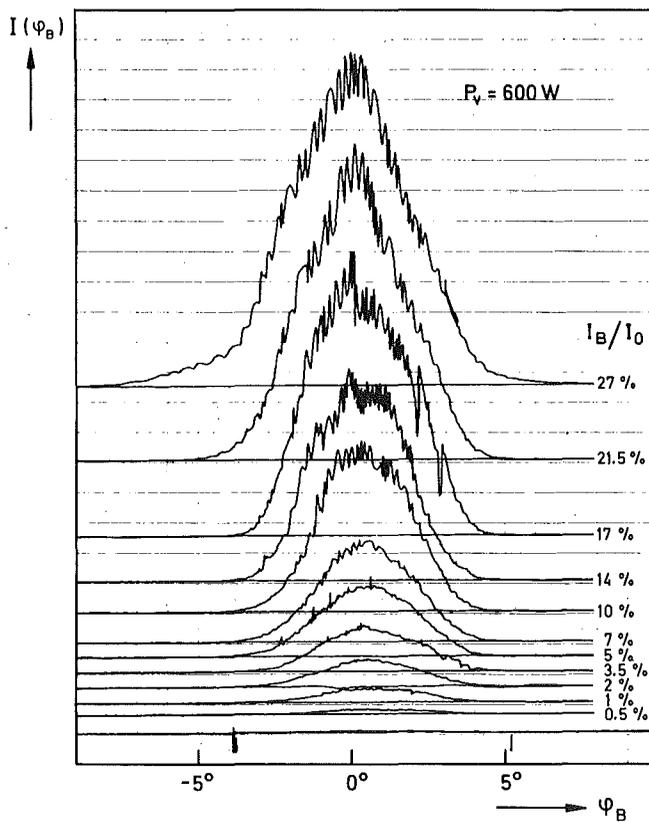


Abb. 4.12: Longitudinale Dichteverteilung der Strahlpulse bei  $P_v \approx 600 \text{ W}$  und verschiedener Stellung der Schneide. Die Strahlausbeute  $I_B/I_0$  ist für die verschiedenen Schneidstellungen angegeben.

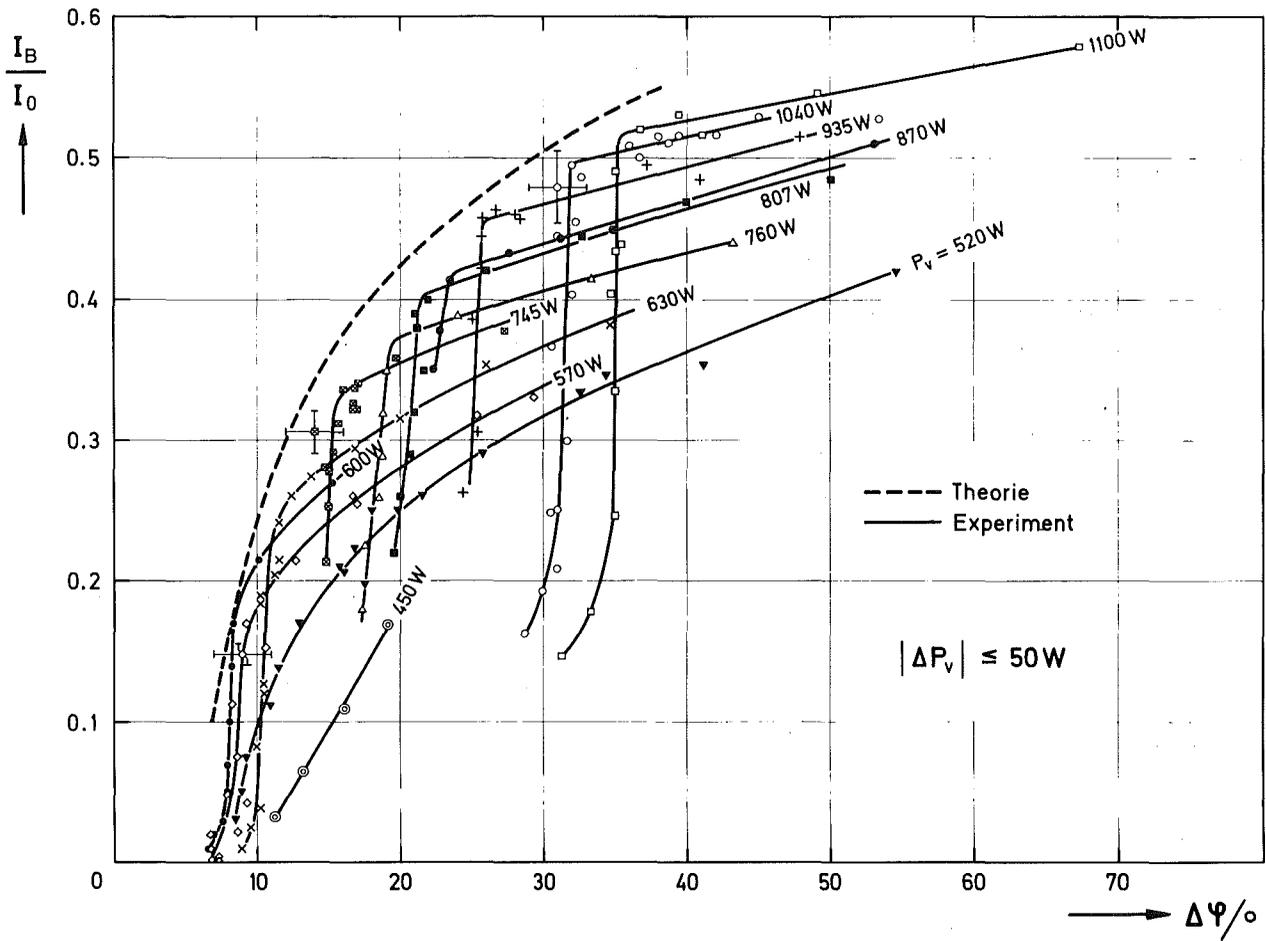


Abb. 4.13: Strahlausbeute und Pulslängen für verschiedene Buncherleistung  $P_v$  und Stellungen der Schneide. Zusätzlich ist die durch numerische Rechnungen des Abschnitts 5.2 (Abb. 5.5) erhaltene Grenzkurve eingezeichnet. Sie berücksichtigt das endliche Auflösungsvermögen des Bunchanalysators ( $\delta\Psi=2.07^\circ$ ) nicht.

## 5. BERECHNUNG DER STRALDDICHTE IN DER LONGITUDINALEN PHASENEBENE EINSCHLIEßLICH DER DRITTEN ORDNUNG

---

Die im Abschnitt 2.3.2 durchgeführte Herleitung berücksichtigt bei der Berechnung der resultierenden Energiemodulation nach dem zweiten Modulator von den Ausdrücken höherer Ordnung nur den mit  $W_m \cdot y'^2$ , während dagegen  $W_m \cdot y^2$ ,  $W_m y y'$ ,  $W_m x^2$ , ...,  $W_m^2 \cdot y$ , ...  $W_m^3$  vernachlässigt werden. Im folgenden werden alle Glieder dritter Ordnung bei der Herleitung berücksichtigt. Außerdem werden die beiden Beschleunigungsspalte der Modulatoren nicht durch einen einzigen Spalt ersetzt. Abbildungsfehler des  $270^\circ$ -Magnetens einschließlich der Randeffekte in die Rechnung einbezogen. Die Rechnung wird bis zum Eingang des Beschleunigers fortgeführt. Dabei werden Wegunterschiede aufgrund der Divergenz des Strahls und chromatischer Abbildungsfehler des Dubletts Q34 berücksichtigt. Es werden geschlossene analytische Ausdrücke für die resultierende Energieabweichung nach dem zweiten Modulator und die Phase eines Teilchens am Beschleunigereingang als Funktion der Anfangsparameter hergeleitet.

Es werden ferner numerische Rechnungen mit den erhaltenen Formeln durchgeführt. Die bei den Messungen vorhandene Strahlgeometrie wird in die Formeln eingesetzt. Es wird als Injektorstrahl eine abgeschnittene 4-dimensionale Gaußverteilung im transversalen Phasenraum eingesetzt und die Dichteverteilung im longitudinalen Phasenraum nach dem Chopper-Buncher-System berechnet. Dabei werden Messungen des Abschnitts 4.2.3 mit den erstellten Formeln numerisch nachvollzogen.

Daneben wird der reine Chopperbetrieb in dritter Ordnung gerechnet, der experimentell mit diesem Aufbau wegen des Bunchers nicht erprobt werden kann. Es werden ferner die Näherungen des Abschnitts 2.3.2 anhand dieser numerischen Rechnung nachgeprüft.

### 5.1 Überblick über die Herleitung der allgemeinen Formeln

In den folgenden Abschnitten wird ein Überblick über die Herleitung der Formeln gegeben. Die Längen und Energien werden als Vielfache

von  $\beta\lambda$  bzw.  $W_0$  angegeben. Eine ausführliche Herleitung der Formeln und Koeffizienten findet sich im Anhang A1.

### 5.1.1 Energieänderung durch einen Modulator mit zwei getrennten Beschleunigungsspalten

Abb. 5.1 zeigt die beiden vereinfachten Beschleunigungsspalte eines Modulators mit den verwendeten Koordinaten.

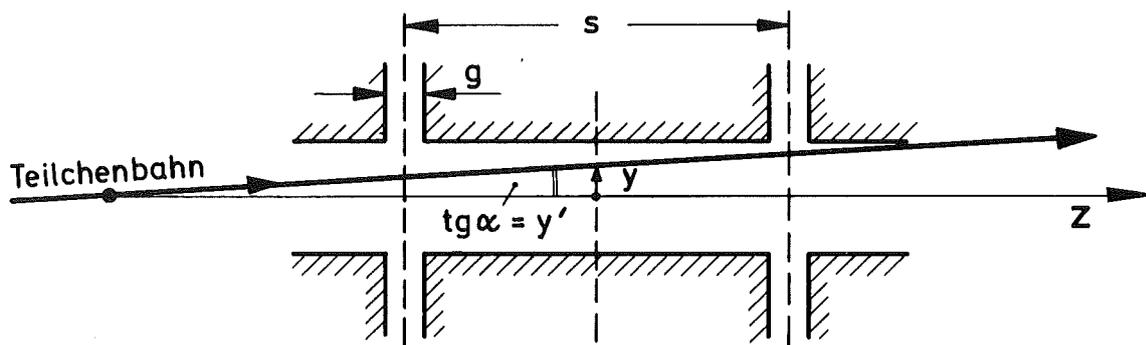


Abb. 5.1: Vereinfachte Geometrie der Modulatorspalte

Es wird vorausgesetzt, daß die Spaltbreite  $g$  und die Spaltweite klein gegen  $\beta\lambda$  sind. Die Felder werden quasi-stationär behandelt und um die Mittelebene  $y=0$  entwickelt. Anschließend wird unter Berücksichtigung der Teilchengeschwindigkeit längs  $z$  integriert und die Impulsänderung infolge eines Spaltes berechnet. Dann werden die Impulsänderungen im ersten und zweiten Spalt mit dem richtigen Phasenunterschied addiert und daraus die Energieänderung durch den Modulator bestimmt.

Es ergibt sich eine von der Spaltbreite unabhängige Energieänderung

$$\begin{aligned} \delta W = \mu \{ & 2 \sin^4 \sin \pi \tau s + K_{\delta} \cdot \delta + K_{\mu} \cdot \mu \\ & + K_{\delta\delta} \cdot \delta^2 + K_{\delta\mu} \cdot \delta\mu + K_{\mu\mu} \cdot \mu^2 \\ & + K_{yy} \cdot y^2 + K_{yy'} \cdot yy' + K_{yy''} \cdot y'^2 + K_{x'x'} \cdot x'^2 \} . \end{aligned}$$

Dabei ist  $\delta W$  die relative Energieänderung des Teilchens durch den Modulator,  
 $\mu$  die Amplitude der Energieänderung in einem Spalt,  
 $\delta$  die relative Energieabweichung des Teilchens vor dem Modulator,  
 $\varphi$  die HF-Phase des Modulators wenn das Teilchen die Mittelebene passiert,  
 $s$  der Abstand der beiden Spalte.

Eine ausführliche Herleitung der Koeffizienten K findet sich im Anhang A1.

### 5.1.2 Phasenabweichung der Teilchen aufgrund verschiedener Flugzeiten zwischen Modulator I und II

Nach passieren des Modulators I besitzen die Teilchen verschiedene Geschwindigkeiten und durchlaufen verschieden lange Flugbahnen. Teilchen, die die Mittelebene des Modulators II bei der Phase  $\varphi_2$  erreichen, passieren den Modulator I bei einer Phase  $\varphi_1 = \varphi_2 - \xi - \delta \varphi_{21}$ .  $\xi$  ist eine fest eingestellte Phasendifferenz. Bei der Berechnung der Bahnlängen werden die Bahnkoeffizienten zweiter Ordnung samt Randfeldeffekten berücksichtigt. In zweiter Näherung ist

$$\begin{aligned} \delta \varphi_{21} = 2\pi r_0 \left\{ T_Y \cdot \frac{y_A}{r_0} + T_{\mu} (\varphi_2 - \xi) \cdot \mu_1 \right. \\ + T_{Y\mu}^* \cdot \frac{y_A}{r_0} \mu_1 + T_{Y'\mu} \cdot y_A' \mu_1 + T_{\mu\mu}^* \cdot \mu_1^2 \\ + T_{YY} \left( \frac{y_A}{r_0} \right)^2 + T_{YY'} \cdot \frac{y_A}{r_0} \cdot y_A' + T_{Y'Y'} \cdot y_A'^2 \\ \left. + T_{XX} \left( \frac{x_e}{r_0} \right)^2 + T_{XX'} \cdot \frac{x_e}{r_0} x_e' + T_{x'x'} \cdot x_e'^2 \right\} . \end{aligned} \quad (5-2)$$

Dabei sind die Teilchenbahnparameter am Modulator I mit dem Index 1 versehen. Senkrecht zur Ablenkebene werden die Bahnparameter linear auf  $F_e$  transformiert und mit dem Index e gekennzeichnet. Die Koeffizienten T werden ausführlich im Anhang A2 hergeleitet.

### 5.1.3 Resultierende Energieabweichung nach dem zweiten Modulator

Die resultierende Energieänderung beträgt

$$\delta W_{\text{res}} = \delta W(y_1, y_1', x_1', \mu_1, \varphi_1, s_1, \delta=0) + \delta W(y_2, y_2', x_2', \mu_2, \varphi_2, s_2, \delta W_I).$$

Durch zweimalige Anwendung der Formel für  $\delta W$  und unter Berücksichtigung von  $\delta \varphi_{2,1}$  sowie der Abbildungsgleichungen ergibt sich in dritter Näherung:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{res}} = \mu_1 \left\{ 2 \left[ \sin \pi s_1 \cdot \sin(\varphi_2 - \xi) + R \sin \pi s_2 \cdot \sin \varphi_2 \right] \right. \\ + W_y \cdot \frac{x}{v_0} + W_\mu \cdot \mu_1 \\ + W_{y\mu} \cdot \frac{y_1'}{v_0} \mu_1 + W_{y'\mu} \cdot y_1' \mu_1 + W_{\mu\mu} \cdot \mu_1^2 \\ \left. + W_{yy} \left( \frac{y_1}{v_0} \right)^2 + W_{yy'} \cdot \frac{y_1}{v_0} y_1' + W_{y'y'} \cdot y_1'^2 + W_{xx} \left( \frac{x_e}{v_0} \right)^2 + W_{xx'} \cdot \frac{x_e}{v_0} x_e' + W_{x'x'} \cdot x_e'^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5-3)$$

Dabei ist  $R = \mu_2 / \mu_1$ .

Die Koeffizienten  $W$  werden ausführlich im Anhang A3 hergeleitet. Wie schon im Abschnitt 2.3.1 gezeigt wurde, tritt kein Ausdruck  $\mu y'$  auf, d. h.  $W_{y'} = 0$ .

### 5.1.4 Ankunftsphase am Beschleuniger

Zwischen dem zweiten Modulator und der ersten Beschleunigerstruktur bewegen sich die Teilchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten und auf verschiedenen Bahnen. Die Quadrupollinsen werden dabei durch ideale dünne Linsen approximiert. Die Länge der Flugbahn ist  $s_b = s_0 + \delta S$  mit

$$\begin{aligned} \delta S = s_0 \left\{ S_{y\mu} \cdot \frac{y_1'}{v_0} \mu_1 + S_{y'\mu} \cdot y_1' \mu_1 + S_{\mu\mu} \cdot \mu_1^2 \right. \\ \left. + S_{yy} \left( \frac{y_1}{v_0} \right)^2 + S_{yy'} \cdot \frac{y_1}{v_0} y_1' + S_{y'y'} \cdot y_1'^2 + S_{xx} \left( \frac{x_e}{v_0} \right)^2 + S_{xx'} \cdot \frac{x_e}{v_0} x_e' + S_{x'x'} \cdot x_e'^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5-4)$$

Die Koeffizienten  $S$  werden im Anhang A4 ausführlich hergeleitet.

Die Teilchen kommen daher, selbst wenn sie zur gleichen Zeit den Modulator II durchfliegen, zu verschiedenen Zeiten  $t_D$  am Kummulationspunkt an. Die Phase der Beschleunigerstruktur ist zu dieser Zeit

$$\begin{aligned} \varphi_D &= \omega t_D + \zeta \\ &= \varphi_2 + 2\pi s_0 + \zeta - 2\pi s_0 \mu_1 \left[ \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin\pi s_1 + R \sin\varphi_2 \cdot \sin\pi s_2 \right] + \delta\varphi_D. \quad (5-5) \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \delta\varphi_D &= \pi s_0 \mu_1 \left\{ (-W_Y + 2 S_{Y\mu}) \frac{Y_A}{v_0} + 2 S_{Y'\mu} \cdot Y_A' \right. \\ &\quad + \left[ -W_\mu + 3(\sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin\pi s_1 + R \cdot \sin\varphi_2 \cdot \sin\pi s_2)^2 + 2 S_{\mu\mu} \right] \cdot \mu_1 \\ &\quad + \left[ -W_{Y\mu} + 3(\sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin\pi s_1 + R \cdot \sin\varphi_2 \cdot \sin\pi s_2) \cdot W_Y \right. \\ &\quad \quad \left. - 2(\sin(\varphi_2 - \xi) \sin\pi s_1 + R \cdot \sin\varphi_2 \cdot \sin\pi s_2) \cdot S_{Y\mu} \right] \cdot \frac{Y_A}{v_0} \mu_1 \\ &\quad + \left[ -W_{Y\mu} - 2(\sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin\pi s_1 + R \cdot \sin\varphi_2 \cdot \sin\pi s_2) \cdot S_{Y'\mu} \right] \cdot Y_A' \mu_1 \\ &\quad + \left[ -W_{\mu\mu} + 3(\sin(\varphi_2 - \xi) \sin\pi s_1 + R \cdot \sin\varphi_2 \cdot \sin\pi s_2) \cdot W_\mu \right. \\ &\quad \quad \left. - 2(\sin(\varphi_2 - \xi) \sin\pi s_1 + R \cdot \sin\varphi_2 \cdot \sin\pi s_2) \cdot S_{\mu\mu} \right] \cdot \mu_1^2 \\ &\quad + \left[ -W_{YY} + 2 S_{YY}/\mu_1 \right] \cdot \left( \frac{Y_A}{v_0} \right)^2 + \left[ -W_{YY'} + 2 S_{YY'}/\mu_1 \right] \cdot \frac{Y_A}{v_0} Y_A' + \left[ -W_{Y'Y'} + 2 S_{Y'Y'}/\mu_1 \right] \cdot Y_A'^2 \\ &\quad \left. + \left[ -W_{XX} + 2 S_{XX}/\mu_1 \right] \cdot \left( \frac{x_e}{v_0} \right)^2 + \left[ -W_{XX'} + 2 S_{XX'}/\mu_1 \right] \cdot \frac{x_e}{v_0} x_e' + \left[ -W_{X'X'} + 2 S_{X'X'}/\mu_1 \right] \cdot x_e'^2 \right\}. \quad (5-6) \end{aligned}$$

### 5.1.5 Bahnkoordinaten an der Schneide

Um die Wirkung der Schneide zu berücksichtigen, wird die Lage der Teilchenbahn aus den Anfangsdaten  $y_1, y_1', x_e, x_e'$  und der Energiemodulation nach dem ersten Modulator am Ort der Schneide in zweiter Ordnung berechnet. Im numerischen Programm findet an dieser Stelle eine Trefferabfrage statt.

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{Y_e}{r_0} &= (Y, Y)_e \cdot \frac{Y_1}{r_0} + (Y, \delta)_e \cdot \delta W_I^{(2)} + (Y, Y\delta)_e \cdot \frac{Y_1}{r_0} \cdot \delta W_I^{(1)} + (Y, Y'\delta)_e \cdot Y_1' \cdot \delta W_I^{(1)} + (Y, \delta\delta)_e \cdot (\delta W_I^{(1)})^2 \\ &+ (Y, YY)_e \cdot \left(\frac{Y_1}{r_0}\right)^2 + (Y, YY')_e \cdot \frac{Y_1}{r_0} Y_1' + (Y, Y'Y')_e \cdot Y_1'^2 \\ &+ (Y, XX)_e \cdot \left(\frac{X_e}{r_0}\right)^2 + (Y, XX')_e \cdot \frac{X_e}{r_0} X_e' + (Y, X'X')_e \cdot X_e'^2 \end{aligned} \quad (5-7a)$$

mit

$$\begin{aligned} (Y, Y)_e &= (u, u)_e \\ (Y, Y')_e &= (u, \alpha)_e + \frac{\ell}{r_0} (u, u)_e = 0 \\ (Y, \delta)_e &= (u, \delta)_e \\ (Y, YY)_e &= (u, uu)_e \\ (Y, YY')_e &= (u, u\alpha)_e + 2\frac{\ell}{r_0} (u, uu)_e \\ (Y, Y'Y')_e &= (u, \alpha\alpha)_e + \frac{\ell}{r_0} (u, u\alpha)_e + \left(\frac{\ell}{r_0}\right)^2 (u, uu)_e \\ (Y, Y\delta)_e &= (u, u\delta)_e \\ (Y, Y'\delta)_e &= (u, \alpha\delta)_e + \frac{\ell}{r_0} (u, u\delta)_e \\ (Y, \delta\delta)_e &= (u, \delta\delta)_e \\ (Y, XX)_e &= \langle v, v \rangle_e^2 (u, vv)_e - \langle v, v \rangle_e \langle \beta, v \rangle_e (u, v\beta)_e + \langle \beta, v \rangle_e^2 (u, \beta\beta)_e \\ (Y, XX')_e &= -2 \langle v, v \rangle_e \langle v, \beta \rangle_e (u, vv)_e + (\langle v, \beta \rangle_e \langle \beta, v \rangle_e + \langle v, v \rangle_e \langle \beta, \beta \rangle_e) \cdot (u, v\beta)_e \\ &\quad - 2 \langle \beta, v \rangle_e \langle \beta, \beta \rangle_e (u, \beta\beta)_e \\ (Y, X'X')_e &= \langle v, \beta \rangle_e^2 (u, vv)_e - \langle v, \beta \rangle_e \langle \beta, \beta \rangle_e (u, v\beta)_e + \langle \beta, \beta \rangle_e^2 (u, \beta\beta)_e \end{aligned}$$

(5-7b)

$\delta W_I^{(1)}$  und  $\delta W_I^{(2)}$  sind die Modulation nach dem ersten Modulator in erster und zweiter Näherung.

### 5.1.6 Dichteverteilung des eingegebenen Strahls im transversalen Phasenraum

---

Die Dichteverteilung im 4-dimensionalen Phasenraum wird in der numerischen Rechnung durch eine 4-dimensionale Gaußverteilung approximiert. Die Flächen gleicher Dichte sind dabei Ellipsoidflächen. Allgemeine Phasenraumpunkte werden beschrieben durch drei Winkel  $\varepsilon$ ,  $\zeta$ ,  $\eta$  und einen Halbachsenabschnitt  $y_0$ . Es ist

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos \eta \\ y_1' &= y_0' \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \eta \\ x_e &= x_{e0} \cdot \cos \zeta \cdot \sin \eta \\ x_e' &= x_{e0}' \cdot \sin \zeta \cdot \sin \eta \end{aligned} \quad (5-8)$$

Dabei sind die Verhältnisse der Halbachsenabschnitte fest und durch die Emittanzmessungen bestimmt.

Die Dichteverteilung ist von der Form

$$\frac{dn}{dy_0} = \begin{cases} \text{const. } y_0^3 e^{-\frac{y_0^2}{2\sigma_{y_0}}} & \text{für } 0 \leq y_0 \leq y_{0c} \\ 0 & \text{für } y_{0c} < y_0 \end{cases} \quad (5-9)$$

$\sigma_{y_0}$  wird den Messungen angepaßt. Es wird außerdem der Abschneideradius  $y_{0c}$  so bestimmt, daß das Ellipsoid gerade die gemessene Emittanzfläche ausfüllt.

Der eingeschossene Strahl ist monoenergetisch und besitzt längs  $\varphi_1$  eine konstante Dichte. Am Modulator II zeigt er bereits eine longitudinale Dichtemodulation. Sie wird durch einen Faktor

$$\rho(\varphi_2) = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{d}{d\varphi_2} (\varphi_2 - \xi - \delta\varphi_{21}) = 1 - \frac{d\delta\varphi_{21}}{d\varphi_2} \quad (5-10a)$$

berücksichtigt. Es ist

$$\frac{d\delta\varphi_{21}}{d\varphi_2} = 2\pi r_0 \left\{ \frac{dT}{d\varphi_2} \cdot \mu_1 + \frac{dT^*}{d\varphi_2} \cdot \frac{y_1}{r_0} \mu_1 + \frac{dT}{d\varphi_2} \cdot y_1' \mu_1 + \frac{dT^*}{d\varphi_2} \cdot \mu_1^2 \right\} \quad (5-10b)$$

## 5.2 Numerische Rechnung

Nach den vorliegenden Formeln wurde ein Rechenprogramm geschrieben, das es erlaubt, die Dichteverteilung im longitudinalen Phasenraum zu berechnen. Die Bahnkoeffizienten wurden aus der Literatur übernommen und gelten auch für inhomogene Magnetfelder oder Felder mit fokussierenden Kanten<sup>36,37,56</sup>. Es können auch gekrümmte Feldbegrenzungen eingesetzt werden. Der Ablenkwinkel beträgt in allen Fällen  $270^\circ$ . Der eingeschossene Strahl wird durch eine spezielle Dichteverteilung approximiert.

Die Parameter des vorhandenen Chopper-Buncher-Systems werden, falls nichts anderes ausdrücklich vermerkt ist, in den nachfolgenden Beispielen in das Rechenprogramm eingesetzt. Die festen Parameter lauten:

Wellenlänge	$\beta\lambda$	= 13,3187 cm
Sollbahnradius	$r_0$	= 20 cm
Feldindex	$n$	= 0
Neigung der Feldgrenzen	$\text{tg}\eta$	= 0
Krümmungsradius der Feldgrenzen	$\bar{R}$	= $\infty$
Spaltabstände	$s_1$	= 10.31 cm
	$s_2$	= 6.787 cm
Driftstrecke	$s_0$	= 298.4 cm
Emittanz	$\epsilon_0/\pi$	= 1.8 cm mrad
maximale Divergenz	$y'_{im}$	= 0.037
	$x'_{em}$	= 0.005
Abstände der Linsen und Strahltaillen	$l_1$	= 108.4 cm
	$l_2$	= 43.2 cm
	$l_x$	= 210.3 cm
	$l_y$	= 191.6 cm

In einem ersten Beispiel werden bei einer Modulation  $\mu_1=0.012$  und einer Stellung der Schneide  $y_e/r_0=-0.0045$  die entstehenden Strahlpulse untersucht. Die Rechnung ergibt eine Strahlausbeute von 40%.

Abb. 5.2 zeigt die longitudinale Phasenfläche der Strahlpulse am Anfang der ersten Beschleunigerstruktur bei Berücksichtigung aller Glieder dritter Ordnung und der x-Ausdehnung des Strahles.

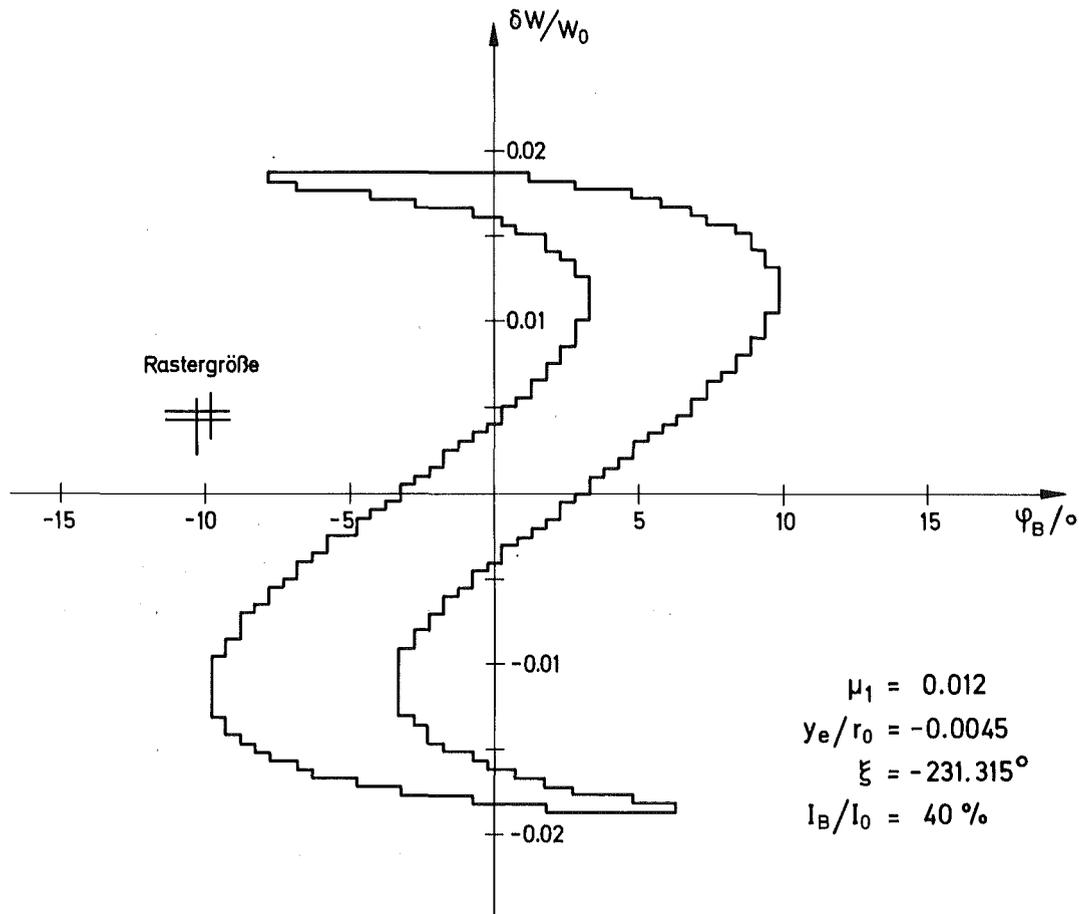


Abb. 5.2: Berechneter longitudinaler Phasenraumbereich der Strahlpulse

Abb. 5.3 zeigt die Projektion auf die  $\varphi$ - Achse. Dies ist die Dichte längs des Strahlpulses. Die Länge der Strahlpulse beträgt nach der Rechnung  $\Delta\varphi = 19^\circ$ , Kurve (a). Das Ergebnis bei Vernachlässigung der x-Ausdehnung wird durch Kurve (b) wiedergegeben. Die Länge der Strahlpakete ist nach wie vor  $\Delta\varphi = 19^\circ$ . Dies bestätigt die Messungen des Abschnittes 4.2.1, bei denen die größten Pulslängen bei  $x_e \approx 0$ ,  $x'_e \approx 0$  gemessen wurden. Die Kurve (c) zeigt die Dichteverteilung bei einem Auflösungsvermögen des Bunchanalysators von  $2.07^\circ$  und Vernachlässigung der x-Ausdehnung.

In Abb. 5.4 wird die errechnete Dichteverteilung bei Berücksichtigung des endlichen Auflösungsvermögens mit der Messung des Abschnittes 4.2 (Abb. 4.7) verglichen. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Die Länge der Strahlpulse beträgt nach der Rechnung  $\Delta\varphi = 22.5^\circ$ . Die Messung ergab  $\Delta\varphi_{\text{exp}} = 22^\circ$ .

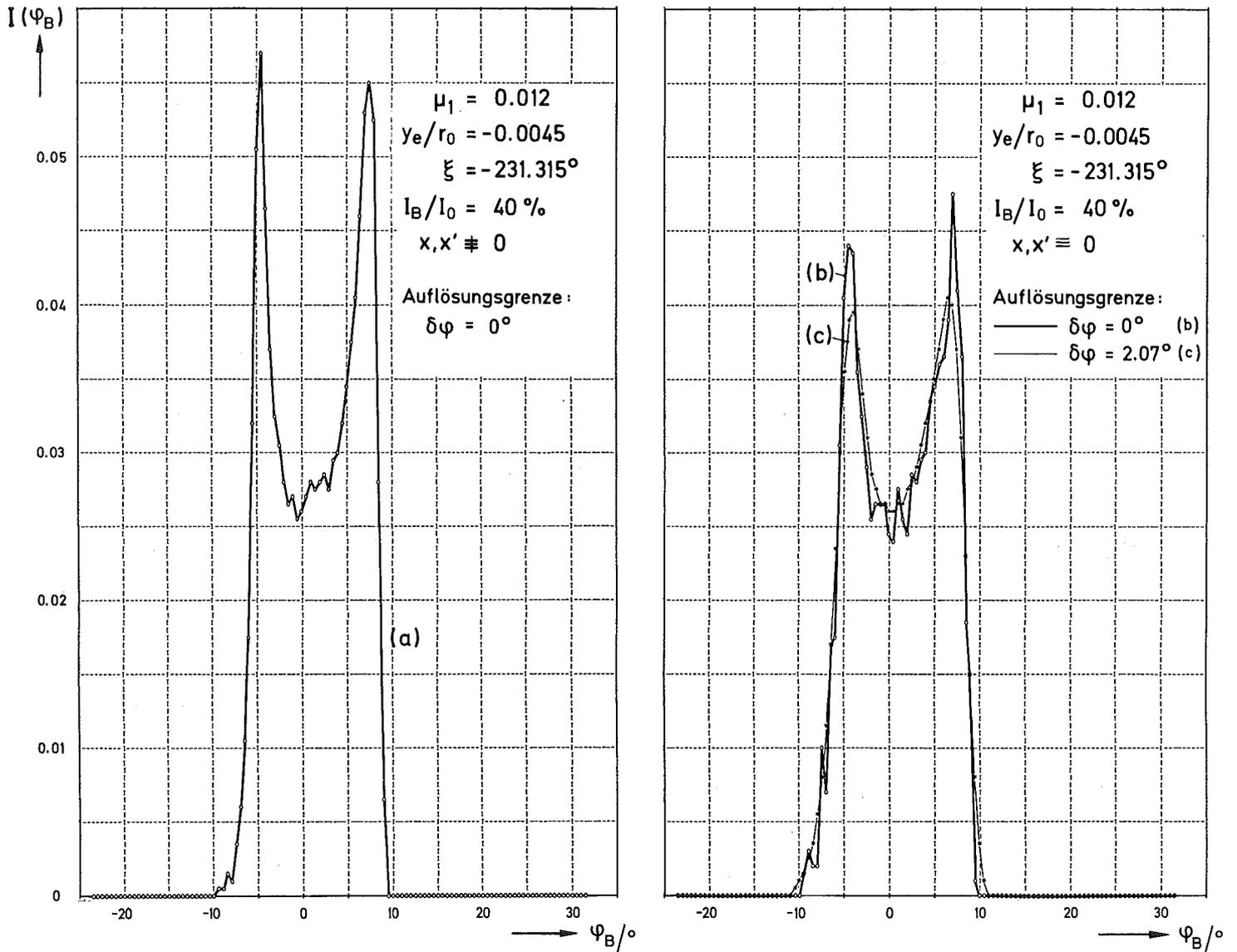


Abb. 5.3: Berechnete longitudinale Dichteverteilung längs der Strahlpulse

- (a) unter Berücksichtigung der x-Ausdehnung des Strahls,
- (b) bei Vernachlässigung der x-Ausdehnung,
- (c) bei Vernachlässigung der x-Ausdehnung des Strahls und unter Berücksichtigung der Auflösungsgrenze  $\delta\varphi = 2.07^\circ$  des Bunchanalysators.

Bei Vernachlässigung der x-Ausdehnung ergibt sich auch bei der Rechnung keine Verkürzung der Pulslänge.

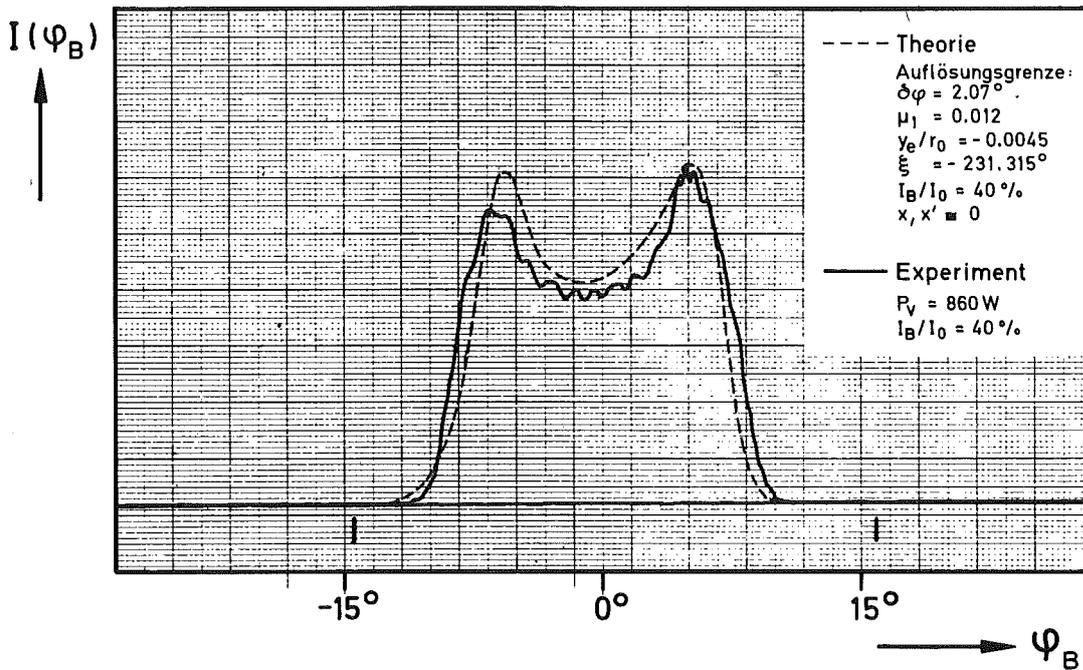


Abb. 5.4: Vergleich der gemessenen mit der errechneten Dichteverteilung bei Berücksichtigung der Auflösungsgrenze des Bunchanalysators in der Rechnung

In einer nächsten Rechenserie wurde die Pulslänge für verschiedene Modulation  $\mu_1$  und verschiedene Stellungen der Schneide  $y_e/r_0$  errechnet. Abb. 5.5 zeigt die errechnete Strahlausbeute als Funktion der Pulslänge. Die Hüllkurve gibt die rechnerisch optimal erreichbaren Bunchlängen wieder. Der Vergleich der Messungen des Abschnittes 4.2.3 mit der Rechnung zeigt zunächst zu große experimentelle Bunchlängen. Wird die endliche Auflösungsgrenze des Bunchanalysators von den gemessenen Pulslängen versuchsweise abgezogen, so beträgt der Unterschied zwischen Messung und Rechnung nur noch  $1^\circ$  bis  $2^\circ$ .

Aufgrund der relativ guten Beschreibung der Messungen durch die Rechnung scheint es erlaubt mit Hilfe der Rechnung eine Aussage über die erreichbare longitudinale Phasenfläche eines reinen Choppers zu machen. Beim reinen Chopper fallen die Verzerrungen durch die Nachmodulation für das Bunching weg. Ebenso geht die Divergenz des Strahls längs der Driftstrecke nach dem zweiten Modulator nicht in die Rechnung ein. Dies erlaubt einen echten Vergleich zwischen den beiden Chopperprinzipien. Aus den gleichen Gründen kann an diesem Beispiel die Qualität der verschiedenen Näherungen besser nachgeprüft werden.

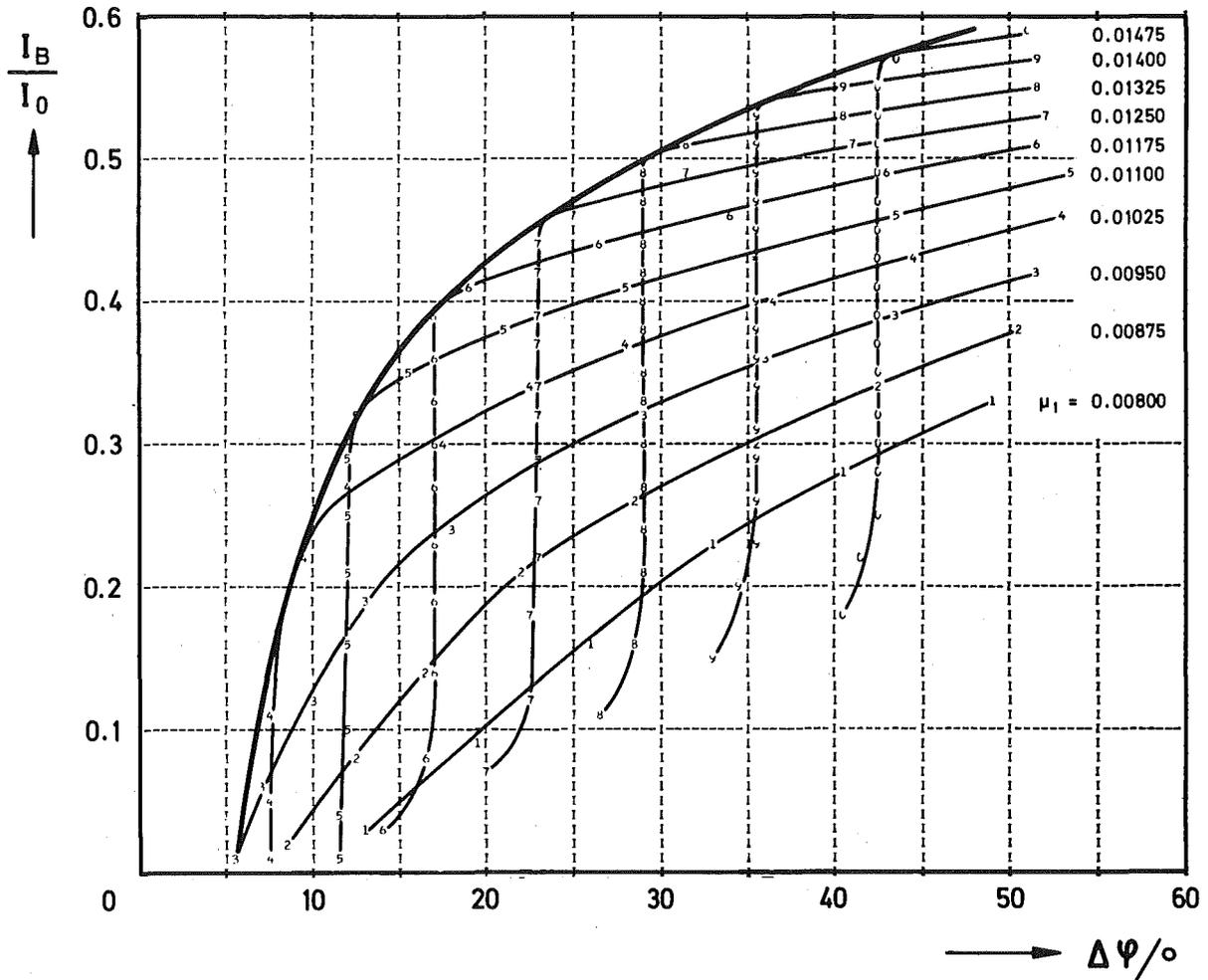
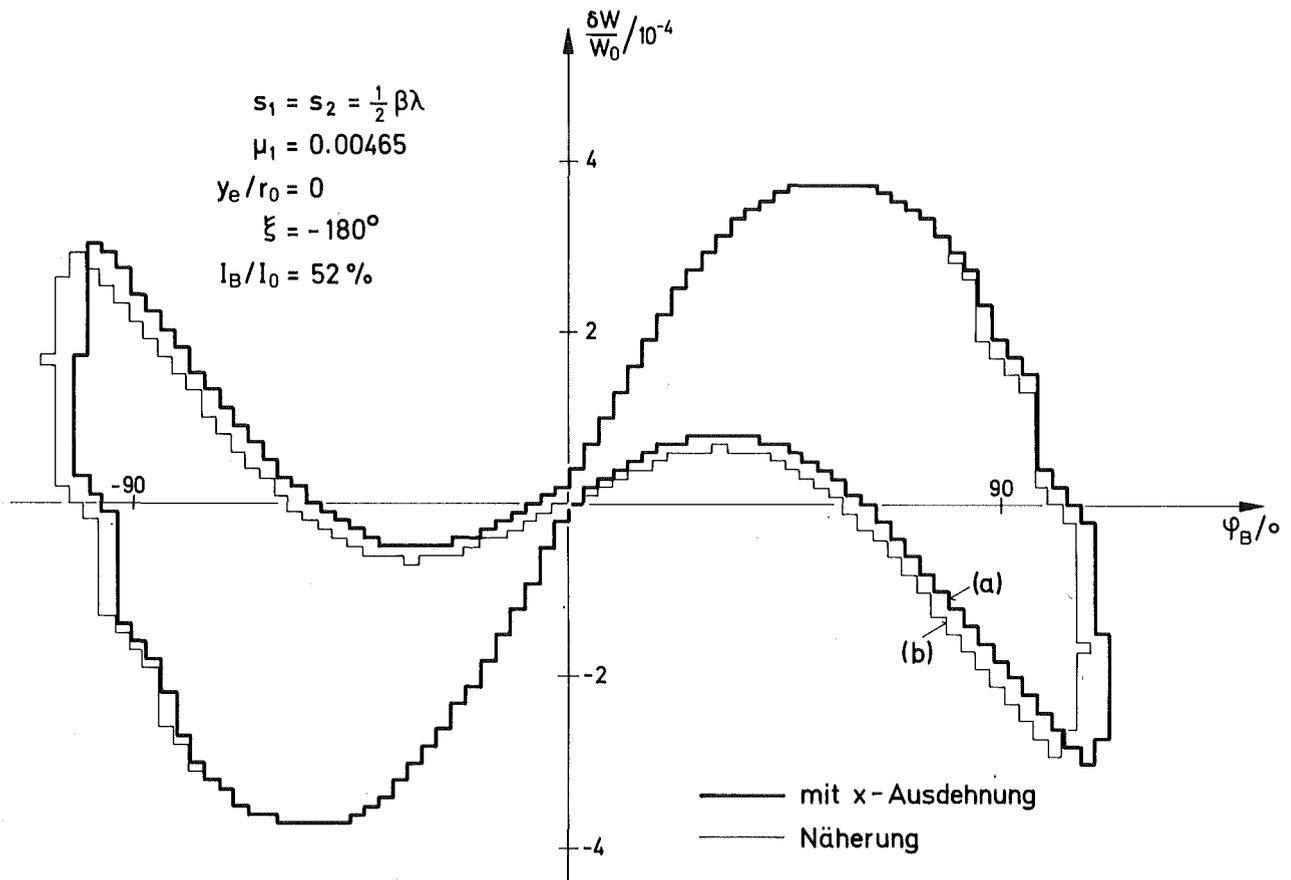


Abb. 5.5: Berechnete Strahlausbeute  $I_B/I_0$  und Pulslängen  $\Delta\psi$  für verschiedene Modulationswerte  $\mu_1$  und verschiedenen Stellungen der Schneide. Die Hüllkurve gibt den optimal erreichbaren Wirkungsgrad bei vorgegebener Pulslänge an.

Der zweite Modulator kompensiert in erster Näherung gerade die Energiemodulation durch den Modulator I, d. h.  $eU_{II} = -eU_I$  und damit  $U_{res} = 0$ . Experimentell kann der reine Chopper-Betrieb mit dem vorhandenen 4-Spalt-Buncher nicht realisiert werden. Hierzu müßten die Spaltabstände  $s_1$  und  $s_2$  gleich sein. In der Rechnung wird  $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = \beta\lambda/2$  und  $\mu_1 = 0.00465$  gesetzt. Dabei wird der Strahl an der Schneide gerade um maximal zwei Strahlbreiten ausgelenkt. Die errechnete longitudinale Phasenfläche ist in Abb. 5.6 dargestellt.



**Abb. 5.6:** Berechneter longitudinaler Phasenraumbereich bei reinem Chopperbetrieb ( $y_e/r_0=0.0$ ,  $\mu_1=0.00465$ ,  $W_m=Q93\%$ )  
 (a) unter Berücksichtigung der x-Ausdehnung und aller Glieder dritter Ordnung,  
 (b) bei Vernachlässigung der x-Ausdehnung und alleiniger Berücksichtigung von  $\mu_1 y_0$ ,  $\mu_1^2$  und  $\mu_1 y_0^2$ . Ferner wurden die Doppelspalte durch einen einzigen Spalt ersetzt. Dies ist die Näherung des Abschnittes 2.3.2, Gleichung (2-30).

Die Kurve (a) gilt ohne Vernachlässigung von Gliedern dritter Ordnung. Es ergibt sich bei Vernachlässigung der x-Ausdehnung die gleiche Grenze der Phasenfläche, nur im Inneren ändert sich die Dichteverteilung. Kurve (b) ergibt sich in der Näherung des Abschnittes 2.3.2. Für  $y_e=0.000$  ergibt sich eine Pulslänge  $\Delta\varphi=210^\circ$ , eine Energiebreite  $\Delta W/W_0=7.45 \times 10^{-4}$  und eine Strahlausbeute von 52%. Damit ist  $\Delta W \cdot \Delta T = 0.4 \times \Delta p_y \Delta y$ , also etwa einen Faktor 8 besser als beim konventionellen Choppen.

Wird  $y_e/r_0 = -0.003$  gewählt, so wird  $\Delta\psi = 170^\circ$  und die Ausbeute 40%.  
Bei gleicher Modulation ergibt sich in diesem Falle

$$\Delta W \cdot \Delta T = 0.32 \times \Delta p_y \Delta y.$$

Dies bestätigt die Richtigkeit der Abschätzung des Abschnittes 2.3.2.

Beim Zerhacken des Strahls erfolgt durch die Energiemodulation eine Änderung der Divergenz der Teilchenbahnen an der Strahltaile  $F_2$ , obwohl der  $270^\circ$ -Magnet achromatisch ist. Es gilt in erster Näherung:

$$y_2' = \langle \alpha, u \rangle \frac{y_1}{r_0} + \langle \alpha, \delta \rangle \delta W_I^{(1)} + y_1'$$

$$y_2 = y_1 \tag{5-11}$$

Die Emittanzvergrößerung beträgt für den zerhackten Strahl

$$\Delta\epsilon/\pi = \langle \alpha, \delta \rangle \cdot \frac{W_m}{2W_0} \cdot y_{om} \quad \text{und die relative Vergrößerung}$$

$$\Delta\epsilon/\epsilon = \frac{\langle \alpha, \delta \rangle}{2y_{om}'} \cdot \frac{W_m}{W_0} \tag{5-12}$$

Bei  $W_m/W_0 = 0.93\%$ ,  $y_{om}' = 0.037$ ,  $\langle \alpha, \delta \rangle = 0.5$  (homogener  $270^\circ$ -Magnet,  $\text{tgn} = 0$ ) ergibt dies

$$\Delta\epsilon/\epsilon = 6.5\%$$

für den reinen Chopperbetrieb.

## 6. ZUSAMMENFASSUNG

Es wurde eine longitudinale und transversale Anpassung des kontinuierlichen Injektorstrahles an die Akzeptanz des Linearbeschleunigers erreicht. Dazu wurde ein Chopperprinzip entwickelt, das die für konventionelle Chopperanordnungen bekannte untere Grenze<sup>15,16</sup> der longitudinalen Phasenfläche umgeht. Als Buncherprinzip wurde das gebräuchliche Klystron-Bunching angewendet. Die erzielten Strahlpulse wurden transversal und longitudinal mit einem dazu konstruierten Emittanzmeßgerät und Bunchanalysator untersucht.

Die Messungen zeigen einen ausreichenden Abstand zwischen Akzeptanzgrenze und 6-dimensionalem Phasenraumbereich des gepulsten Strahls. Die Strahlpakete besitzen bei einer Strahlausbeute von 40% eine Länge  $\Delta\varphi \leq 22^\circ$  oder  $\Delta T = 680$  psec, eine Energiebreite  $\frac{\Delta W}{W_0} = 3.8\%$  und eine transversale Emittanz  $\varepsilon_0/\pi = (2.6 \pm 0.3)$  cm mrad.

Es wurden bei anderer Strahlausbeute die optimal erreichbaren Puls-längen experimentell ermittelt. Die kürzesten experimentell erreichten Strahlpulse hatten bei einer Ausbeute von 17% eine Länge von  $\Delta\varphi \leq 8.5^\circ$  oder  $\Delta T \leq 262$  psec. Die Energiebreite beträgt dabei nach der Rechnung  $\Delta W/W_0 = 2.28\%$ .

Für diese Pulse ist daher

$$\Delta W \cdot \Delta T \leq 0.5 \times \Delta p_y \cdot \Delta y.$$

Die Halbwertsbreite der Pulse beträgt  $\Delta\varphi_{\frac{1}{2}} \leq 4.3^\circ$  oder  $\Delta T_{\frac{1}{2}} \leq 133$  psec. Bei diesen Angaben handelt es sich um die gemessenen Pulslängen ohne Abzug infolge der Auflösungsgrenze von  $2.07^\circ$  des Bunchanalysators.

Die Teilchendichte zwischen den Pulsen ist wenigstens  $10^{-3}$  mal kleiner als im Mittel in den Pulsen. Dieser Untergrund setzt sich aus einem mit  $\pi$  periodischen Anteil, der mit von der Einstellung der Quellparameter abhängt und einem nicht mit  $\pi$  periodischen Rest zusammen, der möglicherweise von der Nachweisapparatur hervorgerufen wird. Der über die Phase zwischen den Paketen integrierte Untergrund ergibt weniger als 1% des gepulsten Strahlstromes.

Neben den experimentellen Untersuchungen wurde eine theoretische Untersuchung des Chopper-Buncher-Systems durchgeführt. Es wurden Koeffizienten einer Reihenentwicklung der Energieabweichung und Phase der Teilchen in den Strahlpaketen als Funktion der Anfangsbahnparameter hergeleitet. Mit Hilfe dieser Entwicklung wurden die Phasenraumbereiche und die Dichteverteilung der Strahlpakete berechnet. Es ergab sich gute Übereinstimmung mit den Meßergebnissen.

Die wesentlichen Beiträge zur Länge der Pulse rühren von der Abweichung der Modulationsspannung des Bunchers von einem linearen Sägezahnverlauf und der Divergenz des Strahls zwischen Buncher und Beschleuniger her.

Verschiedene Näherungen der theoretischen Beschreibung wurden geprüft. Die Vernachlässigung der x-Ausdehnung des Strahles ergibt keine Änderung der errechneten Bunchlänge. Vernachlässigung der Glieder dritter Ordnung mit Ausnahme von  $\mu y'^2$  und Beschreibung der Modulation durch einen einzigen Spalt pro Modulator ergibt noch eine recht gute Näherung.

Die Qualität eines reinen Chopper-Systems nach diesem Prinzip wurde theoretisch untersucht. Es zeigt sich eine erzielbare longitudinale Phasenraumfläche, die bei der vorhandenen Strahlgeometrie etwa um einen Faktor 8 bis 10 kleiner ist als beim konventionellen Chopper. Die relative Emittanzvergrößerung des reinen Choppers beträgt dabei in der Ablenkebene bei gleicher Geometrie und einer Auslenkung des Strahls um zwei Strahldurchmesser  $\Delta\epsilon/\epsilon = 6.5\%$ .

Verbesserungen des vorhandenen Systems sollten daher darauf abzielen, zunächst die Ursachen für den Untergrund zwischen den Pulsen zu untersuchen und ihn möglicherweise zu reduzieren. Ferner wäre die Verwendung von zwei getrennten Modulatoren<sup>57</sup> vorteilhaft, um das Chopper-Buncher-System flexibler zu machen. Dazu sind gedrehte Feldgrenzen mit defokussierender Wirkung in der Ablenkebene oder ein inhomogenes Magnetfeld erforderlich. Eine Verkürzung der Strahlpulse wäre durch Verwendung eines Doppeldriftbunchers oder eines Oberwellenbunchers möglich<sup>23, 27-29, 58</sup>. Als weitere Maßnahme zur Verkürzung der Pulse

müßte der Strahl zwischen Buncher und Beschleuniger möglichst weitgehend parallel geführt werden und erst kurz vor der Beschleunigerstruktur transversal angepaßt werden. Diese Änderung ist im Zusammenhang mit einer Verringerung des transversalen Emittanzwachses durch die chromatischen Abbildungsfehler der Quadrupolmagnete zu betrachten.

Ein gutes Chopper-Buncher-System, das Pulse mit geringem effektivem Phasenraumvolumen erzeugt, ist eine notwendige Voraussetzung für einen beschleunigten Teilchenstrahl mit geringer Energieinhomogenität<sup>5</sup>. Bei einem supraleitenden Beschleuniger muß durch das Chopper-Buncher-System darüberhinaus die Voraussetzung für geringen Teilchenverlust im Beschleuniger geschaffen werden. Mit dem in dieser Arbeit entwickelten System wurden bei guter Strahlausbeute die gestellten Forderungen erfüllt.

ANHANG

A1 Energiemodulation durch einen Doppelspaltmodulator

Die Felder in den Beschleunigungsspalten werden zweidimensional behandelt. Dies ist eine gute Näherung. Ferner werden die Felder in quasi-stationärer Näherung ( $g \ll \lambda_0$ ) betrachtet.

Zunächst wird die Impulsänderung in einem einzelnen Beschleunigungsspalt bestimmt. Das elektrische Feld wird hierzu in eine Taylorsche Reihe nach  $y$  entwickelt. Dabei wird von  $\vec{E} = \vec{E}(y,z) \cos \omega t$  mit den Eigenschaften

$$\nabla \vec{E} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{ausgegangen.} \quad (\text{A1-1})$$

Das elektrische Feld wird um die Mitte  $y = 0$  nach  $y$  in eine Reihe entwickelt. Die axiale und transversale Feldkomponente lauten

$$E_z(y,z) = E_z(0,z) + y \cdot \left. \frac{\partial E_z}{\partial y} \right|_{(0,z)} + \frac{y^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} \right|_{(0,z)} + \dots \quad (\text{A1-2a})$$

$$E_y(y,z) = E_y(0,z) + y \cdot \left. \frac{\partial E_y}{\partial y} \right|_{(0,z)} + \frac{y^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} \right|_{(0,z)} + \dots \quad (\text{A1-2b})$$

Aufgrund der Symmetrie der Beschleunigungsfelder ist

$$E_y(0,z) = 0, \quad \left. \frac{\partial E_z}{\partial y} \right|_{(0,z)} = 0 \quad \text{und ebenso} \quad \left. \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} \right|_{(0,z)} = 0.$$

Ferner ergibt (A1-1) folgende Gleichheit

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \quad (\text{A1-3})$$

Damit werden die Feldkomponenten in zweiter Ordnung

$$E_z(y,z) = E_z(o,z) - \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \Big|_{(o,z)} \quad (A1-4a)$$

$$E_y(y,z) = -y \frac{\partial E_z}{\partial z} \Big|_{(o,z)} \quad (A1-4b)$$

Die Impulsänderung eines geladenen Teilchens beim Durchfliegen der Felder ist

$$\delta \vec{p} = e \int_1^2 \vec{E}(y,z) \cos \omega t \, dt \quad (t_1 \text{ vor, } t_2 \text{ nach dem Feld}) \quad (A1-5)$$

Damit ist in zweiter Näherung in  $y, y'$ :

$$\delta p_z = e \int_1^2 E_z(o,z) \cos \omega t \, dt - \frac{e}{2} \int_1^2 y^2 \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \Big|_{(o,z)} \cdot \cos \omega t \, dt \quad (A1-6)$$

Wird nun im zweiten Integral  $y = y_0 + y_0' z$  und  $t = \frac{z}{v_0} + \frac{\varphi}{\omega}$  eingesetzt, so ist in dieser Näherung

$$\begin{aligned} \delta p_z = e \int_1^2 E_z(o,z) \cos \omega t \, dt - \frac{e y_0^2}{2 v_0} \int_1^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \Big|_{(o,z)} \cdot \cos\left(\frac{2\pi z}{\beta \lambda} + \varphi\right) dz \\ - \frac{e y_0 y_0'}{v_0} \int_1^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \Big|_{(o,z)} \cdot \cos\left(\frac{2\pi z}{\beta \lambda} + \varphi\right) \cdot z \cdot dz \\ - \frac{e y_0'^2}{2 v_0} \int_1^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \Big|_{(o,z)} \cdot \cos\left(\frac{2\pi z}{\beta \lambda} + \varphi\right) z^2 dz \quad (A1-7) \end{aligned}$$

Zur Berechnung des ersten Integrals wird die Feldverteilung  $E_z(o,z)$  durch einen rechteckigen Verlauf ersetzt:

$$E_z(o,z) = \begin{cases} E_0 & -\frac{g}{2} \leq z \leq \frac{g}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (A1-8)$$

Nach der Berechnung der Integrale wird der Grenzübergang Spaltbreite  $g \rightarrow 0$  durchgeführt, wobei  $E_0 \cdot g$  konstant gehalten wird.

Berechnung des ersten Integrals der Gleichung (A1-7):

$$\begin{aligned}
 e \int_1^2 E_z(0, z) \cos \omega t \, dt &= \frac{eE_0}{\omega} (\sin \omega t_2 - \sin \omega t_1) \\
 &= \frac{eE_0}{\omega} \left[ (t_2 - t_1) \omega \cdot \cos \omega t - \frac{(t_2 - t_1)^2 \omega^2}{2} \sin \omega t \right] \quad (\text{A1-9})
 \end{aligned}$$

Im Grenzfall  $g \rightarrow 0$ ,  $gE_0 = \text{const}$  geht der in der Zeitdifferenz  $(t_2 - t_1)$  quadratische Term gegen Null.

Für die Bewegung des Teilchens im Feld (A1-8) gilt die Differentialgleichung

$$-m\ddot{z} + eE_0 \cos \omega t = 0 \quad . \quad (\text{A1-10})$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$z(t) = -\frac{eE_0}{m\omega^2} \cos \omega t + c_1 t + c_2 \quad . \quad (\text{A1-11})$$

Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  werden aus den Anfangsbedingungen  $\dot{z}(t_1) = \dot{z}_1$ ,  $z(t_1) = -\frac{g}{2}$  bestimmt.

Mit  $z(t_2) = \frac{g}{2}$  erhält man aus (A1-11) die Zeitdifferenz

$$t_2 - t_1 = \begin{cases} \frac{-\dot{z}_1 + \sqrt{\dot{z}_1^2 + \frac{2eE_0 g}{m} \cdot \cos \varphi}}{\frac{eE_0}{m} \cos \varphi} & \text{für } \cos \varphi \neq 0 \\ g/\dot{z}_1 & \text{für } \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (\text{A1-12})$$

Dieser Ausdruck wird in Gleichung (A1-9) eingesetzt und dann die rechte Seite nach

$$\frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} = \frac{\dot{z}_1 - v_0}{v_0} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta p_0}{p_0} = \frac{eE_0 g}{mv_0^2}$$

bis zur dritten Ordnung entwickelt. Dann ist

$$e \int_1^2 E_z(o, z) \cos \omega t \, dt = \Delta p_0 \cdot \cos \phi \left[ 1 - \frac{\dot{\Delta z}_1}{v_0} + \left( \frac{\dot{\Delta z}_1}{v_0} \right)^2 - \frac{\Delta p_0}{2p_0} \cos \varphi \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \frac{\Delta p_0}{p_0} \frac{\dot{\Delta z}_1}{v_0} \cos \varphi + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta p_0}{p_0} \right)^2 \cos^2 \varphi \right] \quad (A1-13)$$

Berechnung des zweiten Integrals der Gleichung (A1-7) durch zweimalige partielle Integration ohne die spezielle Annahme (A1-8) für das Feld:

$$\int_1^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \cdot \cos \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \, dz = \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot \cos \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot \sin \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \, dz \cdot \frac{2\pi}{\beta \lambda} \\ = 0 + E_z \cdot \frac{2\pi}{\beta \lambda} \cdot \sin \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \Big|_1^2 - \int_1^2 E_z \cdot \cos \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \, dz \left( \frac{2\pi}{\beta \lambda} \right)^2 \\ = - \left( \frac{2\pi}{\beta \lambda} \right)^2 \int_1^2 E_z \cdot \cos \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \, dz \quad (A1-14)$$

Entsprechend wird das dritte und vierte Integral der Gleichung (A1-7) durch mehrmalige partielle Integration berechnet.

$$\int_1^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \cdot \sin \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \, dz = \frac{4\pi}{\beta \lambda} \int_1^2 E_z \cdot \cos \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \, dz - \left( \frac{2\pi}{\beta \lambda} \right)^2 \int_1^2 E_z \cdot \sin \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \, dz \quad (A1-15)$$

und

$$\int_1^2 z^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \cos \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \, dz = 2 \cdot \int_1^2 E_z \cos \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \, dz + \left( \frac{8\pi}{\beta \lambda} \right)^2 \int_1^2 z \cdot E_z \sin \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \, dz \\ - \left( \frac{2\pi}{\beta \lambda} \right)^2 \int_1^2 z^2 \cdot E_z \cos \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \, dz \quad (A1-16)$$

Beim Grenzübergang zu einem kurzen Spalt bleiben von der rechten Seite der Gleichungen (A1-15) und (A1-16) nur das erste Integral übrig und es wird  $\frac{e}{mv_0^2} \int_1^2 E_z \cos \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \, dz = \frac{\Delta p_0}{p_0}$ .

Die Ergebnisse der Gleichungen (A1-13, 14, 15, 16) in Gleichung (A1-7) eingesetzt ergibt die axiale Impulsänderung

$$\begin{aligned} \delta p_z = \Delta p_0 \left\{ \left[ 1 - \frac{\dot{\Delta z}_1}{v_0} + \left( \frac{\dot{\Delta z}_1}{v_0} \right)^2 \right] \cos \varphi - \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta p_0}{p_0} \right) \cos^2 \varphi + \frac{3}{2} \left( \frac{\Delta p_0}{p_0} \right) \cdot \right. \\ \cdot \frac{\dot{\Delta z}_1}{v_0} \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta p_0}{p_0} \right)^2 \cos^3 \varphi + 2\pi^2 \left( \frac{y}{\beta \lambda} \right)^2 \cos \varphi + 4\pi \frac{y}{\beta \lambda} \cdot \\ \left. \cdot y' \sin \varphi - y'^2 \cos \varphi \right\} . \end{aligned} \quad (A1-17)$$

Die transversale Impulsänderung ist nach Gleichung (A1-5):

$$\delta p_y = e \int_1^2 E_y(y, z) \cos \omega t \, dt .$$

In zweiter Näherung ist

$$\begin{aligned} \delta p_y &= - e \int_1^2 y \cdot \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{(0, z)} \cdot \cos \omega t \, dt \\ &= - \frac{e}{v_0} \int_1^2 y \cdot \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{(0, z)} \cdot \cos \left( 2\pi \frac{z}{\beta \lambda} + \varphi \right) dz . \end{aligned}$$

Mit  $y = y_0 + y'_0 z$  wird

$$\begin{aligned} \delta p_y &= - \frac{e}{v_0} \cdot y_0 \int_1^2 \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{(0, z)} \cdot \cos \left( 2\pi \frac{z}{\beta \lambda} + \varphi \right) \cdot dz - \frac{e}{v_0} \cdot y'_0 \int_1^2 z \cdot \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{(0, z)} \cdot \cos \left( 2\pi \frac{z}{\beta \lambda} + \varphi \right) \cdot dz \\ &= \frac{e}{v_0} \cdot y_0 \cdot \sin \varphi \cdot \int_1^2 \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{(0, z)} \cdot \sin \left( 2\pi \frac{z}{\beta \lambda} \right) \cdot dz - \frac{e}{v_0} \cdot y'_0 \cdot \cos \varphi \cdot \int_1^2 z \cdot \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{(0, z)} \cdot \cos \left( 2\pi \frac{z}{\beta \lambda} \right) \cdot dz . \end{aligned} \quad (A1-18)$$

Partielle Integration ergibt

$$\delta p_y = \Delta p_0 \left( - 2\pi \frac{y}{\beta \lambda} \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi \right) . \quad (A1-19)$$

Der Modulator besteht aus zwei Beschleunigungsspalten im Abstand  $s$ . Die Felder sind in den beiden Gaps zu jeder Zeit einander entgegengerichtet. Im folgenden bezieht sich der Index 1 und 2 auf Spalt 1

bzw. Spalt 2. Es ist die gesamte Impulsänderung

$$\delta \vec{p} = \delta \vec{p} \left( \frac{Y_1}{\beta \lambda}, Y_1', \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0}, \frac{\Delta p_0}{p_0}, \varphi_1 \right) - \delta \vec{p} \left( \frac{Y_2}{\beta \lambda}, Y_2', \frac{\Delta \dot{z}_2}{v_0}, \frac{\Delta p_0}{p_0}, \varphi_2 \right) . \quad (\text{A1-20})$$

Mit Hilfe von Gleichung (A1-17) und (A1-19) wird

$$\begin{aligned} \delta p_z = \Delta p_0 \left\{ \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 - \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} \cdot \cos \varphi_1 + \frac{\Delta \dot{z}_2}{v_0} \cos \varphi_2 + \left( \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} \right)^2 \cos \varphi_1 - \left( \frac{\Delta \dot{z}_2}{v_0} \right)^2 \cos \varphi_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\Delta p_0}{p_0} (\cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2) + \frac{3}{2} \frac{\Delta p_0}{p_0} \left( \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} \cdot \cos^2 \varphi_1 - \frac{\Delta \dot{z}_2}{v_0} \cos^2 \varphi_2 \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta p_0}{p_0} \right)^2 (\cos^3 \varphi_1 - \cos^3 \varphi_2) + 2 \pi^2 \left( \left( \frac{Y_1}{\beta \lambda} \right)^2 \cos \varphi_1 - \left( \frac{Y_2}{\beta \lambda} \right)^2 \cos \varphi_2 \right) \right. \\ \left. + 4 \pi \left( \frac{Y_1}{\beta \lambda} \cdot Y_1' \cdot \sin \varphi_1 - \frac{Y_2}{\beta \lambda} \cdot Y_2' \cdot \sin \varphi_2 \right) - (Y_1'^2 \cos \varphi_1 - Y_2'^2 \cos \varphi_2) \right\} , \end{aligned} \quad (\text{A1-21})$$

$$\delta p_y = \Delta p_0 \left\{ -\frac{2\pi}{\beta \lambda} (y_1 \sin \varphi_1 - y_2 \sin \varphi_2) + (y_1' \cos \varphi_1 - y_2' \cos \varphi_2) \right\} . \quad (\text{A1-22})$$

Es ist einschließlich zweiter Ordnung:

$$\frac{\Delta \dot{z}_2}{v_0} = \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} + \frac{\delta p_{z1}}{p_0} ,$$

$$\frac{\Delta \dot{z}_2}{v_0} = \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} + \frac{\Delta p_0}{p_0} \left[ \left( 1 - \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} \right) \cos \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta p_0}{p_0} \cos^2 \varphi_1 \right] \quad (\text{A1-23})$$

Ferner ist in erster Ordnung:

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega \cdot \frac{s}{z_2} = 2 \pi \frac{s}{\beta \lambda} \cdot \frac{v_0}{z_2} = \frac{2 \pi s}{\beta \lambda} \left( 1 - \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} - \frac{\Delta p_0}{p_0} C_- \right) , \quad (\text{A1-24})$$

$$\text{wobei } C_- = \cos \left( \varphi - \frac{\pi s}{\beta \lambda} \right)$$

$$C_+ = \cos \left( \varphi + \frac{\pi s}{\beta \lambda} \right)$$

$$S_- = \sin \left( \varphi - \frac{\pi s}{\beta \lambda} \right)$$

$$S_+ = \sin \left( \varphi + \frac{\pi s}{\beta \lambda} \right) \quad \text{ist.} \quad (\text{A1-25})$$

Die Gleichung (A1-24) in (A1-23) eingesetzt ergibt einschließlich zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \dot{z}_2}{v_0} &= \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} + \frac{\Delta p_0}{p_0} \left[ \cos \left( \varphi - \frac{\Delta \varphi}{2} \right) - \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} \cdot C_- - \frac{1}{2} \frac{\Delta p_0}{p_0} \cdot C_-^2 \right] \\ &= \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} + \frac{\Delta p_0}{p_0} \left[ C_- - S_- \cdot \frac{\pi s}{\beta \lambda} \left( \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} + \frac{\Delta p_0}{p_0} \cdot C_- \right) - \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} \cdot C_- - \frac{1}{2} \frac{\Delta p_0}{p_0} \cdot C_-^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A1-26})$$

Wird nun Gleichung (A1-26) in (A1-24) eingesetzt, so erhält man in zweiter Näherung

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi s}{\beta \lambda} \left[ 1 - \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} - \frac{\Delta p_0}{p_0} \cdot C_- + \frac{\Delta p_0}{p_0} \cdot \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} \left( \frac{\pi s}{\beta \lambda} \cdot S_- + 3C_- \right) + \left( \frac{\Delta p_0}{p_0} \right)^2 \left( \frac{\pi s}{\beta \lambda} \cdot C_- \cdot S_- + \frac{3}{2} C_-^2 \right) + \left( \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} \right)^2 \right] \quad (\text{A1-27})$$

Ferner ist in erster Näherung

$$\begin{aligned} y_1 &= y - \frac{s}{2} y' \quad , \\ y_2 &= y + \frac{s}{2} y' \quad , \\ y'_1 &= y'_2 = y' \quad . \end{aligned} \quad (\text{A1-28})$$

Dabei beziehen sich  $y$  und  $y'$  auf die Mittelebene des Modulators zwischen Spalt 1 und Spalt 2.

Im folgenden werden die Längen als Vielfache von  $\beta \lambda$  und die Geschwindigkeiten als Vielfache von  $v_0$  angegeben.

Als nächstes wird (A1-28) und (A1-27) in Gleichung (A1-21) und (A1-22) eingesetzt. Man erhält die resultierende axiale Impulsänderung. Sie lautet einschließlich der dritten Ordnung:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta p_z}{p_0} = & \frac{\Delta p_0}{p_0} \left\{ 2 \sin \varphi \sin \pi s + (-2\pi s \cdot \sin \varphi \cdot \cos \pi s - 2 \sin \varphi \sin \pi s) \cdot \Delta z_1 \right. \\
 & + \left( -2\pi s \cdot C_- \cdot \sin \varphi \cdot \cos \pi s + C_- \cos \varphi \cdot \cos \pi s - C_- \sin \varphi \sin \pi s \right. \\
 & \quad \left. \left. - 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin \pi s \cdot \cos \pi s \right) \cdot \frac{\Delta p_0}{p_0} \right. \\
 & + \left( 2\pi s \cdot \sin \varphi \cdot \cos \pi s - (\pi s)^2 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \pi s + 2\pi s \cdot \sin \varphi \cdot \cos \pi s + 2 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \pi s \right) \cdot \Delta z_1^2 \\
 & + \left( 2(\pi s)^2 S_- \sin \varphi \cdot \cos \pi s + 6\pi s C_- \sin \varphi \cos \pi s - 2(\pi s)^2 C_- \sin \varphi \cdot \sin \pi s \right. \\
 & \quad + \pi s C_- \cdot \cos \varphi \cdot \sin \pi s - C_- \cos \varphi \cdot \cos \pi s - \pi s \cdot S_- \cdot \cos \varphi \cdot \cos \pi s + \pi s C_- \cdot \sin \varphi \cdot \cos \pi s \\
 & \quad + C_- \cdot \sin \varphi \cdot \sin \pi s + \pi s \cdot S_- \sin \varphi \cdot \sin \pi s + 2\pi s \cdot C_- \cdot \sin \varphi \cdot \cos \pi s \\
 & \quad \left. - 2\pi s \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin^2 \pi s + 2\pi s \cdot \sin \varphi \cos \varphi \cdot \cos^2 \pi s - 2C_- C_+ + \frac{3}{2}(C_-^2 - C_+^2) \right) \frac{\Delta p_0}{p_0} \Delta z_1^2 \\
 & + \left( 2(\pi s)^2 S_- C_- \sin \varphi \cdot \cos \pi s + 3\pi s C_-^2 \sin \varphi \cdot \cos \pi s - (\pi s)^2 C_-^2 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \pi s \right. \\
 & \quad - \frac{1}{2} C_-^2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \pi s - \pi s S_- C_- \cdot \cos \varphi \cdot \cos \pi s + \pi s C_-^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \pi s + \frac{1}{2} C_-^2 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \pi s \\
 & \quad + \pi s \cdot S_- C_- \cdot \sin \varphi \cdot \sin \pi s + \pi s C_-^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \pi s + 2\pi s C_- \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2 \pi s \\
 & \quad \left. - 2\pi s C_- \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin^2 \pi s - C_-^2 C_+ - \frac{3}{2} C_- C_+^2 + \frac{1}{2}(C_-^3 - C_+^3) \right) \left( \frac{\Delta p_0}{p_0} \right)^2 \\
 & + 4\pi^2 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \pi s \cdot \gamma^2 \\
 & + (-4\pi^2 s \cdot \cos \varphi \cdot \cos \pi s - 8\pi \cdot \cos \varphi \cdot \sin \pi s) \cdot \gamma \gamma' \\
 & \left. + \left( (\pi s)^2 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \pi s - 4\pi s \cdot \sin \varphi \cdot \cos \pi s - 2 \sin \varphi \cdot \sin \pi s \right) \cdot \gamma'^2 \right\}
 \end{aligned}$$

(A1-29)

Die transversale Impulsänderung ist in zweiter Ordnung:

$$\frac{\delta p_y}{p_0} = \frac{\Delta p_0}{p_0} \left\{ (4\pi \sin \pi s \cdot \cos \varphi) \cdot \gamma + (2\pi s \cdot \cos \pi s \cdot \sin \varphi + 2 \sin \pi s \cdot \sin \varphi) \cdot \gamma' \right\} \quad (A1-30)$$

Da die Impulsänderung bekannt ist, kann die Energieänderung berechnet werden. Sie beträgt exakt:

$$\begin{aligned}\Delta W &= \bar{W} - W = \frac{1}{2m} \left[ 2p_y (\bar{p}_y - p_y) + 2p_z (\bar{p}_z - p_z) + (\bar{p}_y - p_y)^2 + (\bar{p}_z - p_z)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2m} (2p_y \delta p_y + 2p_z \delta p_z + \delta p_y^2 + \delta p_z^2)\end{aligned}\quad (\text{A1-31})$$

Bei Vernachlässigung von Ausdrücken höherer als dritter Ordnung lautet die relative Energieänderung

$$\frac{\Delta W}{W_0} = 2y' \frac{\delta p_y}{p_0} + 2 \frac{\delta p_z}{p_0} + 2 \frac{\Delta \dot{z}_1}{v_0} \frac{\delta p_z}{p_0} + \left( \frac{\delta p_z}{p_0} \right)^2 \quad (\text{A1-32})$$

Ferner ist die Einschußenergie

$$\frac{W_i}{W_0} = \left( \frac{\dot{x}_1}{v_0} \right)^2 + \left( \frac{\dot{y}_1}{v_0} \right)^2 + \left( \frac{\dot{z}_1}{v_0} \right)^2$$

Daraus folgt in zweiter Näherung mit  $\delta = \frac{\Delta W_i}{W_0}$

$$\Delta \dot{z}_1 = -\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} \delta - \frac{1}{8} \delta^2 \quad (\text{A1-33})$$

In gleicher Weise kann die Amplitude der relativen axialen Impulsänderung ausgedrückt werden als die Amplitude einer relativen Energieänderung. Es ist  $\frac{p}{p_0} = \sqrt{\frac{W}{W_0}}$  und daher in zweiter Näherung

$$\frac{\Delta p_0}{p_0} = \frac{1}{2} \mu - \frac{1}{8} \mu^2 \quad \text{wobei} \quad \mu = \frac{\Delta W_0}{W_0} \quad \text{ist.} \quad (\text{A1-34})$$

$\Delta W_0$  ist die Amplitude der Energieänderung des Strahls auf der Achse, erzeugt durch einen einzelnen Spalt.

Nun wird Gleichung (A1-29) und (A1-30) in Gleichung (A1-32) eingesetzt und anschließend die Substitution (A1-33) und (A1-34) durchgeführt. Nach Vernachlässigung von Ausdrücken höherer als dritter Ordnung erhält man für die Energieänderung in einem Modulator mit zwei Spalten:

$$\begin{aligned} \delta W = \mu \{ & 2 \sin\varphi \sin\pi s + K_{\delta} \cdot \delta + K_{\mu} \cdot \mu \\ & + K_{\delta\delta} \cdot \delta^2 + K_{\delta\mu} \cdot \delta\mu + K_{\mu\mu} \cdot \mu^2 \\ & + K_{\gamma\gamma} \cdot \gamma^2 + K_{\gamma\gamma'} \cdot \gamma\gamma' + K_{\gamma\gamma''} \cdot \gamma'^2 + K_{x'x''} \cdot x'^2 \} \end{aligned}$$

(A1-35a)

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} K_{\delta} &= -\pi s \cdot \sin\varphi \cdot \cos\pi s \\ K_{\mu} &= \sin\varphi \left( -\pi s C_{-} \cos\pi s - \frac{1}{2} \sin\pi s \right) + \frac{1}{2} C_{-} C_{+} - \sin\varphi \cdot \sin\pi s C_{+} \\ K_{\delta\delta} &= \frac{1}{4} \sin\varphi \left( 3 \pi s \cos\pi s - (\pi s)^2 \sin\pi s \right) \\ K_{\delta\mu} &= \frac{1}{4} \left[ \sin\varphi \left( 2 (\pi s)^2 S_{-} \cos\pi s + 7 \pi s C_{-} \cos\pi s - 2 (\pi s)^2 C_{-} \sin\pi s + \pi s S_{-} \sin\pi s \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2 C_{-} \sin\pi s + \pi s \cos\pi s \right) \right. \\ & \quad \left. + \cos\varphi \left( \pi s C_{-} \sin\pi s - \pi s S_{-} \cos\pi s - 2 C_{-} \cos\pi s \right) \right. \\ & \quad \left. + \sin\varphi \cdot \cos\varphi \left( -2 \pi s \sin^2\pi s + 2 \pi s \cos^2\pi s + 4 \cos\pi s \cdot \sin\pi s \right) \right. \\ & \quad \left. + \sin^2\varphi \left( -4 \pi s \sin\pi s \cdot \cos\pi s - 4 \sin^2\pi s \right) \right] \\ K_{\mu\mu} &= \frac{1}{4} \left[ \sin\varphi \left( 2 (\pi s)^2 S_{-} C_{-} \cos\pi s + 4 \pi s C_{-}^2 \cos\pi s - (\pi s)^2 C_{-}^2 \sin\pi s + \frac{3}{2} C_{-}^2 \sin\pi s \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \pi s S_{-} C_{-} \sin\pi s + 2 \pi s C_{-} \cos\pi s + C_{-} \sin\pi s \right) \right. \\ & \quad \left. + \cos\varphi \left( -\frac{1}{2} C_{-}^2 \cos\pi s - \pi s S_{-} C_{-} \cos\pi s + \pi s C_{-}^2 \sin\pi s - C_{-}^2 \cos\pi s - C_{-} \cos\pi s \right) \right. \\ & \quad \left. + \sin\varphi \cdot \cos\varphi \left( 2 \pi s C_{-} \cos^2\pi s - 2 \pi s C_{-} \sin^2\pi s + 5 C_{-} \cos\pi s \cdot \sin\pi s + 2 \sin\pi s \cdot \cos\pi s \right) \right. \\ & \quad \left. + \cos^2\varphi \left( -\frac{3}{2} C_{-} \cos^2\pi s \right) + \sin^2\varphi \left( -\frac{7}{2} C_{-} \sin^2\pi s - 4 \pi s C_{-} \sin\pi s \cdot \cos\pi s - 2 \sin^2\pi s \right) \right. \\ & \quad \left. + \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi \left( 3 \cos^2\pi s \cdot \sin\pi s \right) + \sin^3\varphi \cdot \sin^3\pi s + \sin^2\varphi \cos\varphi \left( -4 \sin^2\pi s \cdot \cos\pi s \right) \right] \\ K_{\gamma\gamma} &= 4 \pi^2 \sin\varphi \cdot \sin\pi s \\ K_{\gamma\gamma'} &= -4 \pi^2 s \cdot \cos\varphi \cdot \cos\pi s - 4 \pi \cos\varphi \cdot \sin\pi s \\ K_{\gamma\gamma''} &= \pi^2 s^2 \sin\varphi \cdot \sin\pi s - \pi s \cdot \sin\varphi \cdot \cos\pi s \\ K_{x'x''} &= \pi s \cdot \sin\varphi \cdot \cos\pi s \end{aligned}$$

(A1-35b)

A2 Phasenabweichung der Teilchen infolge verschiedener Flugzeiten zwischen Modulator I und II

---

Teilchen, die den Modulator I bei einer Phase  $\varphi_1$  passierten, erreichen die Mitte des Modulators II zu einer Phase  $\varphi_2$ :

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \omega t_{21} = \varphi_1 + \xi + \omega \delta t = \varphi_1 + \xi + \delta \varphi_{21} \quad (\text{A2-1})$$

mit  $\xi = \xi_0 + \xi_{\text{HF}}$ , wobei  $\xi_0 = \omega \cdot t_0$  ist.  $t_0$  ist die Zeit, die ein Teilchen mit der Sollenergie auf der Strahlachse benötigt, um vom Modulator I zum Modulator II zu gelangen.  $\xi_{\text{HF}}$  ist die ebenfalls feste Phasendifferenz der Hf-Spannungen der beiden Modulatoren.

Die Zeit, die ein Teilchen für die Strecke zwischen den Mitten der Modulatoren benötigt ist:

$$t_{21} = \frac{s_{12}}{v} = \frac{s_m}{v} + \frac{\Delta s}{v} = s_m + s_m \left( -\frac{1}{2} \delta W_I + \frac{3}{8} \delta W_I^2 \right) + \Delta s \left( 1 - \frac{1}{2} \delta W_I \right),$$

$$\delta \varphi_{21} = 2\pi \left[ s_m \left( -\frac{1}{2} \delta W_I + \frac{3}{8} \delta W_I^2 \right) + \Delta s \left( 1 - \frac{1}{2} \delta W_I \right) \right] \quad (\text{A2-2a})$$

$$s_m = \frac{3\pi}{2} r_0 + 2\ell \quad (\text{A2-2b})$$

Zunächst wird die Bahnlänge im Magnetfeld bestimmt.

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(r \cdot d\theta)^2 + (r \cdot d\theta \cdot x')^2 + (r \cdot d\theta \cdot y')^2} \\ &= r \cdot d\theta \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \end{aligned} \quad (\text{A2-3})$$

wobei  $y'$  der Tangens des Winkels zwischen auf die Ablenkebene projizierter Teilchenbahn und Strahlachse bei gleichem Winkel  $\theta$  ist. In zweiter Näherung wird:

$$\frac{ds}{d\theta} = r(\theta) \left( 1 + \frac{1}{2} x'^2 + \frac{1}{2} y'^2 \right) \quad (\text{A2-4})$$

Damit wird

$$s_{12} = \int_0^{3\pi/2} (r_0 + \Delta r) \left(1 + \frac{x_1'^2}{2} + \frac{y_1'^2}{2}\right) d\theta + \ell \left(2 + \frac{1}{2}y_1'^2 + \frac{1}{2}x_1'^2 + \frac{1}{2}y_2'^2 + \frac{1}{2}x_2'^2\right) \quad (A2-5)$$

Die Indizes 1 und 2 beziehen sich auf den Modulator I und II. Es ist einschließlich zweiter Ordnung:

$$\Delta s = r_0 \left[ \int_0^{3\pi/2} \left(\frac{\Delta r}{r_0} + \frac{1}{2}x_1'^2 + \frac{1}{2}y_1'^2\right) d\theta + \frac{\ell}{2r_0} (y_1'^2 + x_1'^2 + y_2'^2 + x_2'^2) \right] \quad (A2-6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta r}{r_0} = & (u, u) \cdot \left(\frac{Y_1}{r_0} + \frac{\ell}{r_0} Y_1'\right) + (u, \alpha) \cdot Y_1' + (u, \delta) \cdot \delta W_I \\ & + (u, u\delta) \cdot \left(\frac{Y_1}{r_0} + \frac{\ell}{r_0} Y_1'\right) \delta W_I + (u, \alpha\delta) \cdot Y_1' \delta W_I + (u, \delta\delta) \cdot \delta W_I^2 \\ & + (u, uu) \cdot \left(\frac{Y_1}{r_0} + \frac{\ell}{r_0} Y_1'\right)^2 + (u, u\alpha) \cdot \left(\frac{Y_1}{r_0} + \frac{\ell}{r_0} Y_1'\right) Y_1' + (u, \alpha\alpha) \cdot Y_1'^2 \\ & + (u, vv) \cdot v^2 + (u, v\beta) \cdot v\beta + (u, \beta\beta) \cdot \beta^2 \end{aligned}$$

(A2-7)

In erster Näherung ist

$$Y_1'(\theta) = (\alpha, u) \cdot \left(\frac{Y_1}{r_0} + \frac{\ell}{r_0}\right) + (\alpha, \alpha) \cdot Y_1' + (\alpha, \delta) \cdot \delta W_I$$

$$X_1'(\theta) = (\beta, v) \cdot v + (\beta, \beta) \cdot \beta$$

$$Y_2' = (\alpha, u) \cdot \left(\frac{Y_1}{r_0} + \frac{\ell}{r_0} Y_1'\right) + (\alpha, \alpha) \cdot Y_1' + (\alpha, \delta) \cdot \delta W_I = (\alpha, u) \cdot \frac{Y_1}{r_0} + Y_1' + (\alpha, \delta) \cdot \delta W_I$$

$$v = \langle v, v \rangle_e \frac{x_e}{r_0} - \langle v, \beta \rangle_e x_e' \quad , \quad \beta = -\langle \beta, v \rangle_e \frac{x_e}{r_0} + \langle \beta, \beta \rangle_e x_e'$$

$$X_2' = \langle \beta, v \rangle_e \frac{x_e}{r_0} + \langle \beta, \beta \rangle_e x_e' \quad , \quad X_1' = \beta$$

(A2-8)

Die Koeffizienten sind den Referenzen <sup>36, 37, 56</sup> zu entnehmen. Dabei bedeutet

- ( , > mit Randfeld am Eingang, variables  $\theta$   
 < , > mit beiden Randfeldern,  $\theta = \frac{3\pi}{2}$   
 < , ><sub>e</sub> mit Randfeld am Ausgang,  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Mit Hilfe von (A2-7) und (A2-8) wird

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{3\pi/2} \left( \frac{\Delta r}{r_0} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 \right) d\theta \\
 &= \int_0^{3\pi/2} \langle u, u \rangle d\theta \cdot \frac{y_1}{r_0} + \int_0^{3\pi/2} \langle u, \delta \rangle d\theta \cdot \delta W_I + \int_0^{3\pi/2} [\langle u, uu \rangle + \frac{1}{2} \langle \alpha, u^2 \rangle] d\theta \cdot \left( \frac{y_1}{r_0} \right)^2 \\
 &+ \int_0^{3\pi/2} \left[ 2 \frac{\ell}{r_0} \langle u, uu \rangle + \langle u, u\alpha \rangle + \frac{\ell}{r_0} \langle \alpha, u^2 \rangle + \langle \alpha, u \rangle \langle \alpha, \alpha \rangle \right] d\theta \cdot \frac{y_1}{r_0} y_1' \\
 &+ \int_0^{3\pi/2} \left[ \left( \frac{\ell}{r_0} \right)^2 \langle u, uu \rangle + \frac{\ell}{r_0} \langle u, u\alpha \rangle + \langle u, \alpha\alpha \rangle + \frac{1}{2} \left( \frac{\ell}{r_0} \right)^2 \langle \alpha, u \rangle^2 + \frac{\ell}{r_0} \langle \alpha, u \rangle \langle \alpha, \alpha \rangle + \frac{1}{2} \langle \alpha, \alpha^2 \rangle \right] d\theta \cdot y_1'^2 \\
 &+ \int_0^{3\pi/2} \left[ \langle u, u\delta \rangle + \langle \alpha, u \rangle \langle \alpha, \delta \rangle - \frac{1}{2} \langle u, u \rangle \right] d\theta \cdot \frac{y_1}{r_0} \delta W_I + \int_0^{3\pi/2} \left[ \langle u, \delta\delta \rangle + \frac{1}{2} \langle \alpha, \delta^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle u, \delta \rangle \right] d\theta \cdot \delta W_I^2 \\
 &+ \int_0^{3\pi/2} \left[ \frac{\ell}{r_0} \langle u, u\delta \rangle + \langle u, \alpha\delta \rangle + \frac{\ell}{r_0} \langle \alpha, u \rangle \langle \alpha, \delta \rangle + \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \alpha, \delta \rangle \right] d\theta \cdot y_1' \delta W_I \\
 &+ \int_0^{3\pi/2} \left[ \langle u, vv \rangle + \frac{1}{2} \langle \beta, v^2 \rangle \right] d\theta \cdot v^2 + \int_0^{3\pi/2} \left[ \langle u, v\beta \rangle + \langle \beta, v \rangle \langle \beta, \beta \rangle \right] d\theta \cdot v\beta + \int_0^{3\pi/2} \left[ \langle u, \beta\beta \rangle + \frac{1}{2} \langle \beta, \beta^2 \rangle \right] d\theta \cdot \beta^2
 \end{aligned}$$

(A2-9)

und

$$\begin{aligned}
 & \frac{\ell}{2r_0} (y_1'^2 + y_2'^2 + x_1'^2 + x_2'^2) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\ell}{r_0} \langle \alpha, u \rangle^2 \cdot \left( \frac{y_1}{r_0} \right)^2 + \frac{\ell}{r_0} \langle \alpha, u \rangle \cdot \frac{y_1}{r_0} y_1' + \frac{\ell}{r_0} y_1'^2 + \frac{\ell}{r_0} \langle \alpha, u \rangle \langle \alpha, \delta \rangle \cdot \frac{y_1}{r_0} \delta W_I + \frac{\ell}{r_0} \langle \alpha, \delta \rangle \cdot y_1' \delta W_I \\
 &+ \frac{\ell}{2r_0} \langle \alpha, \delta \rangle^2 \cdot \delta W_I^2 + \frac{\ell}{r_0} \langle \beta, v \rangle^2 \cdot \left( \frac{x_0}{r_0} \right)^2 + \frac{\ell}{r_0} \langle \beta, \beta \rangle^2 \cdot x_e'^2
 \end{aligned}$$

(A2-10)

Nun wird Gleichung (A2-9) und (A2-10) addiert, wobei die Substitution (A2-8) für v und  $\beta$  vorgenommen wird. Damit ist die rechte Seite von (A2-6) bekannt und wird in Gleichung (A2-2a) eingesetzt. Nach Vernachlässigung von Gliedern höherer als zweiter Ordnung erhält man

$$\delta\varphi_{2,1} = 2\pi r_0 \left\{ T_y \frac{Y_1}{r_0} + T_\delta \cdot \delta W_I + T_{yy} \left( \frac{Y_1}{r_0} \right)^2 + T_{yy'} \cdot \frac{Y_1}{r_0} Y_1' + T_{y'y'} \cdot Y_1'^2 + T_{y\delta} \cdot \frac{Y_1}{r_0} \delta W_I + T_{y'\delta} \cdot Y_1' \delta W_I \right. \\ \left. + T_{\delta\delta} \cdot \delta W_I^2 + T_{xx} \left( \frac{X_e}{r_0} \right)^2 + T_{xx'} \cdot \frac{X_e}{r_0} \cdot X_e' + T_{x'x'} \cdot X_e'^2 \right\} \quad (\text{A2-11a})$$

mit den Koeffizienten

$$T_y = \int_0^{3\pi/2} (u, u) d\theta$$

$$T_\delta = \int_0^{3\pi/2} (u, \delta) d\theta - \frac{3\pi}{4} - \frac{\ell}{r_0}$$

$$T_{yy} = \int_0^{3\pi/2} [(u, uu) + \frac{1}{2} (\alpha, u)^2] d\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{r_0} (\alpha, u)^2$$

$$T_{yy'} = \int_0^{3\pi/2} \left[ 2 \frac{\ell}{r_0} (u, uu) + (u, u\alpha) + \frac{\ell}{r_0} (\alpha, u)^2 + (\alpha, u) (\alpha, \alpha) \right] d\theta + \frac{\ell}{r_0} (\alpha, u)$$

$$T_{y'y'} = \int_0^{3\pi/2} \left[ \left( \frac{\ell}{r_0} \right)^2 (u, uu) + \frac{\ell}{r_0} (u, u\alpha) + (u, \alpha\alpha) + \frac{1}{2} \left( \frac{\ell}{r_0} \right)^2 (\alpha, u)^2 \right. \\ \left. + \frac{\ell}{r_0} (\alpha, u) (\alpha, \alpha) + \frac{1}{2} (\alpha, \alpha)^2 \right] d\theta + \frac{\ell}{r_0}$$

$$T_{y\delta} = \int_0^{3\pi/2} [(u, u\delta) + (\alpha, u) (\alpha, \delta) - \frac{1}{2} (u, u)] d\theta + \frac{\ell}{r_0} (\alpha, u) (\alpha, \delta)$$

$$T_{y'\delta} = \int_0^{3\pi/2} [(u, \alpha\delta) + \frac{\ell}{r_0} (\alpha, u) (\alpha, \delta) + (\alpha, \alpha) (\alpha, \delta) + \frac{\ell}{r_0} (u, u\delta)] d\theta + \frac{\ell}{r_0} (\alpha, \delta)$$

$$T_{\delta\delta} = \int_0^{3\pi/2} [(u, \delta\delta) + \frac{1}{2} (\alpha, \delta)^2 - \frac{1}{2} (u, \delta)] d\theta + \frac{1}{2} \frac{\ell}{r_0} (\alpha, \delta)^2 + \frac{9\pi}{16} + \frac{3}{4} \frac{\ell}{r_0}$$

$$T_{xx} = \int_0^{3\pi/2} [(u, vv) + \frac{1}{2} (\beta, v)^2] d\theta \langle v, v \rangle^2 - \int_0^{3\pi/2} [(u, v\beta) + (\beta, v) (\beta, \beta)] d\theta \langle v, v \rangle \langle \beta, v \rangle \\ + \int_0^{3\pi/2} [(u, \beta\beta) + \frac{1}{2} (\beta, \beta)^2] d\theta \langle \beta, v \rangle^2 + \frac{\ell}{r_0} \langle \beta, v \rangle^2$$

$$T_{x'x'} = -2 \int_0^{3\pi/2} [(u, vv) + \frac{1}{2} (\beta, v)^2] d\theta \langle v, v \rangle \langle v, \beta \rangle + \int_0^{3\pi/2} [(u, v\beta) + (\beta, v) (\beta, \beta)] d\theta \cdot \\ \cdot [\langle v, v \rangle \langle \beta, \beta \rangle + \langle v, \beta \rangle \langle \beta, v \rangle] - 2 \int_0^{3\pi/2} [(u, \beta\beta) + \frac{1}{2} (\beta, \beta)^2] d\theta \langle \beta, v \rangle \langle \beta, \beta \rangle$$

$$T_{x'x'} = \int_0^{3\pi/2} [(u, vv) + \frac{1}{2} (\beta, v)^2] d\theta \langle v, v \rangle^2 - \int_0^{3\pi/2} [(u, v\beta) + (\beta, v) (\beta, \beta)] d\theta \langle v, \beta \rangle \langle \beta, \beta \rangle \\ + \int_0^{3\pi/2} [(u, \beta\beta) + \frac{1}{2} (\beta, \beta)^2] d\theta \langle \beta, \beta \rangle^2 + \frac{\ell}{r_0} \langle \beta, \beta \rangle^2$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 \delta W_{\text{I}} &= \mu_1 [2 \sin \varphi_1 \sin \pi s_1 + K_{\mu} \cdot \mu_1 + \dots] \\
 &= \mu_1 [2 \sin(\varphi_2 - \xi - \delta \varphi_{2,1}) \sin \pi s_1 + K_{\mu} \cdot \mu_1 + \dots] \\
 &= \mu_1 [2 \sin(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 - 2 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot \delta \varphi_{2,1} + K_{\mu} \cdot \mu_1 + \dots] \\
 &= \mu_1 [2 \sin(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 - 4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_y \cdot \frac{y_1}{v_0} \\
 &\quad - 4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 \cdot T_{\delta} \cdot 2 \cdot \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot \mu_1 + K_{\mu} \cdot \mu_1 + \dots] \\
 &= \mu_1 [2 \sin(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 - 4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_y \cdot \frac{y_1}{v_0} \\
 &\quad + (-8\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin^2 \pi s_1 \cdot T_{\delta} + K_{\mu}) \cdot \mu_1 + \dots]
 \end{aligned}$$

(A2-12)

Eingesetzt in Gleichung (A2-11a) wird die Phasenabweichung einschließlich Glieder zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}
 \delta \varphi_{2,1} &= 2\pi r_0 \left\{ T_y \cdot \frac{y_1}{v_0} + T_{\mu} (\varphi_2 - \xi) \cdot \mu_1 \right. \\
 &\quad + T_{y\mu}^* \cdot \frac{y_1}{v_0} \mu_1 + T_{y'y_1} \cdot \frac{y_1}{v_0} \mu_1 + T_{\mu\mu}^* \cdot \mu_1^2 \\
 &\quad + T_{yy} \left( \frac{y_1}{v_0} \right)^2 + T_{yy'} \cdot \frac{y_1}{v_0} \cdot y_1' + T_{y'y_1'} \cdot y_1'^2 \\
 &\quad \left. + T_{xx} \left( \frac{x_e}{v_0} \right)^2 + T_{xx'} \cdot \frac{x_e}{v_0} x_e' + T_{x'x'} \cdot x_e'^2 \right\}
 \end{aligned}$$

(A2-13a)

mit den Koeffizienten

$$T_{\mu} = 2 \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{\delta}$$

$$T_{y\mu}^* = 2 \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{y\delta} - 4\pi r_0 \cdot \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{\delta} \cdot T_y$$

$$T_{y'y_1} = 2 \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{y'\delta}$$

$$T_{\mu\mu}^* = 4 \sin^2(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin^2 \pi s_1 \cdot T_{\delta\delta} + K_{\mu} (\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot T_{\delta} - 8\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \sin(\varphi_2 - \xi) \sin^2 \pi s_1 \cdot T_{\delta}^2$$

(A2-13b)

A3 Resultierende Energieänderung nach dem zweiten Modulator

Ein Teilchen, das den Modulator II bei der Phase  $\varphi_2$  durchläuft, durchlief den Modulator I bei der Phase  $\varphi_1 = \varphi_2 - \xi - \delta\varphi_{21}$ . Die resultierende Energieänderung ist gegeben durch die Summe der beiden Energieüberträge:

$$\delta W_{\text{res}} = \delta W_{\text{I}}(y_1, y_1', x_1', \mu_1, \varphi_1, s_1, \delta=0) + \delta W_{\text{II}}(y_2, y_2', x_2', \mu_2, \varphi_2, s_2, \delta W_{\text{I}}) \quad (\text{A3-1})$$

Im einzelnen ist nach Gleichung (A1-35a) einschließlich dritter Ordnung

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{I}} = \mu_1 \left\{ 2 \sin(\varphi_2 - \xi - \delta\varphi_{21}) \sin \pi s_1 + K_{\mu}(\varphi_2 - \xi - \delta\varphi_{21}, s_1) \cdot \mu_1 + K_{\mu\mu}(\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot \mu_1^2 \right. \\ + K_{yy}(\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot y_1^2 + K_{yy'}(\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot y_1 y_1' + K_{y'y'}(\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot y_1'^2 \\ + K_{x'x'}(\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot \langle \beta, v \rangle_e^2 \cdot \left(\frac{x_e}{v_0}\right)^2 - K_{x'x'}(\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot 2 \langle \beta, v \rangle_e \langle \beta, \beta \rangle_e \cdot \frac{x_e}{v_0} \cdot x_e' \\ \left. + K_{x'x'}(\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot \langle \beta, \beta \rangle_e^2 \cdot x_e'^2 \right\} . \end{aligned}$$

$$(\text{A3-2})$$

Die trigonometrischen Funktionen der Summen  $(\varphi_2 - \xi - \delta\varphi_{21})$  werden in trigonometrische Funktionen von  $\varphi_2 - \xi$  und  $\delta\varphi_{21}$  aufgespalten. In zweiter Näherung ist

$$\sin(\varphi_2 - \xi - \delta\varphi_{21}) = \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \delta\varphi_{21}^2\right) - \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \delta\varphi_{21} \quad . \quad (\text{A3-3})$$

Ferner wird  $K_{\mu}$  in eine Reihe nach  $\delta\varphi_{21}$  entwickelt:

$$K_{\mu}(\varphi_2 - \xi - \delta\varphi_{21}, s_1) = K_{\mu}(\varphi_2 - \xi, s_1) - \frac{\partial K_{\mu}}{\partial \varphi} \Big|_{(\varphi_2 - \xi, s_1)} \cdot \delta\varphi_{21} \quad . \quad (\text{A3-4})$$

Nun wird (A3-3) und (A3-4) in Gleichung (A3-2) eingesetzt und  $\delta\varphi_{21}$  durch die rechte Seite von (A2-13a) ersetzt. Nach Vernachlässigung der Glieder höherer als dritter Ordnung wird

$$\begin{aligned}
 \delta W_I = \mu_1 \left\{ \right. & 2 \sin(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 - 4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 \cdot T_Y \left( \frac{Y_1}{r_0} \right) \\
 & + \left[ -4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{\mu}(\varphi_2 - \xi, s_1) + K_{\mu}(\varphi_2 - \xi, s_1) \right] \cdot \mu_1 \\
 & + \left[ -4\pi^2 r_0^2 \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_Y^2 - 4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 \cdot T_{YY} + K_{YY}(\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot r_0^2 \right] \cdot \left( \frac{Y_1}{r_0} \right)^2 \\
 & + \left[ -4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{YY'} + K_{YY'}(\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot r_0 \right] \cdot \frac{Y_1}{r_0} \cdot Y_1' \\
 & + \left[ -4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{Y'Y'} + K_{Y'Y'}(\varphi_2 - \xi, s_1) \right] \cdot Y_1'^2 \\
 & + \left[ -8\pi^2 r_0^2 \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_Y \cdot T_{\mu}(\varphi_2 - \xi) - 4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{Y\mu}^*(\varphi_2 - \xi) \right. \\
 & \quad \left. - 2\pi r_0 \cdot \frac{\partial K_{\mu}}{\partial \varphi} \Big|_{(\varphi_2 - \xi, s_1)} \cdot T_Y \right] \cdot \frac{Y_1}{r_0} \cdot \mu_1 \\
 & + \left[ -4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{Y\mu}(\varphi_2 - \xi) \right] \cdot Y_1' \cdot \mu_1 \\
 & + \left[ -4\pi^2 r_0^2 \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{\mu}^2(\varphi_2 - \xi) - 4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{\mu\mu}^*(\varphi_2 - \xi) \right. \\
 & \quad \left. - 2\pi r_0 \cdot \frac{\partial K_{\mu}}{\partial \varphi} \Big|_{(\varphi_2 - \xi, s_1)} \cdot T_{\mu}(\varphi_2 - \xi) + K_{\mu\mu}(\varphi_2 - \xi, s_1) \right] \cdot \mu_1^2 \\
 & + \left[ -4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{xx} + K_{x'x'}(\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot \langle \beta, v \rangle_e^2 \right] \cdot \left( \frac{x_e}{r_0} \right)^2 \\
 & + \left[ -4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{xx'} - 2 K_{x'x'}(\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot \langle \beta, v \rangle_e \cdot \langle \beta, \beta \rangle_e \right] \cdot \frac{x_e}{r_0} \cdot x_e' \\
 & \left. + \left[ -4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{x'x'} + K_{x'x'}(\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot \langle \beta, \beta \rangle_e^2 \right] \cdot x_e'^2 \right\} .
 \end{aligned}$$

(A3-5)

Bei der nun folgenden Berechnung von  $\delta W_{II}$  wird  $x_2'$  und  $y_2'$  gemäß Gl. (A2-8) als Funktion von  $y_1$ ,  $y_1'$ ,  $x_e$ ,  $x_e'$  und  $\delta W_I$  ausgedrückt. Ferner ist  $y_2 = y_1$ . Für  $\delta W_I$  wird in niederster Näherung  $\mu_1 \cdot 2 \sin(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1$  eingesetzt und  $\mu_2 = R \cdot \mu_1$  mit  $R > 0$  gesetzt. Werden diese Substitutionen in (A3-5) durchgeführt, so erhält man einschließlich dritter Ordnung die Energieänderung im zweiten Modulator:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{II} = \mu_1 \left\{ \right. & 2R \sin \varphi_2 \cdot \sin \pi s_2 + \left[ 2R \cdot K_{\delta}(\varphi_2, s_2) \cdot \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 + R^2 \cdot K_{\mu}(\varphi_2, s_2) \right] \cdot \mu_1 \\
 & + \left[ R r_0^2 \cdot K_{YY}(\varphi_2, s_2) + R r_0 \cdot K_{YY'}(\varphi_2, s_2) \cdot \langle \alpha, u \rangle + R \cdot K_{Y'Y'}(\varphi_2, s_2) \cdot \langle \alpha, u \rangle^2 \right] \cdot \left( \frac{Y_1}{r_0} \right)^2 \\
 & + \left[ R r_0 \cdot K_{YY'}(\varphi_2, s_2) + 2R \cdot K_{Y'Y'}(\varphi_2, s_2) \cdot \langle \alpha, u \rangle \right] \cdot \frac{Y_1}{r_0} \cdot Y_1' + R \cdot K_{Y'Y'}(\varphi_2, s_2) \cdot Y_1'^2 \\
 & + \left[ -4\pi r_0 R \cdot K_{\delta}(\varphi_2, s_2) \cdot \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_Y + 2R r_0 \cdot K_{YY'}(\varphi_2, s_2) \cdot \langle \alpha, \delta \rangle \cdot \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \right. \\
 & \quad \left. + 4R \cdot K_{Y'Y'}(\varphi_2, s_2) \cdot \langle \alpha, u \rangle \cdot \langle \alpha, \delta \rangle \cdot \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \right] \cdot \frac{Y_1}{r_0} \cdot \mu_1 \\
 & + \left[ 4R \cdot K_{Y'Y'}(\varphi_2, s_2) \cdot \langle \alpha, \delta \rangle \cdot \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \right] \cdot Y_1' \cdot \mu_1 \\
 & + \left[ -4\pi R r_0 \cdot K_{\delta}(\varphi_2, s_2) \cdot \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{\mu}(\varphi_2 - \xi, s_1) + R \cdot K_{\delta}(\varphi_2, s_2) \cdot K_{\mu}(\varphi_2 - \xi, s_1) \right. \\
 & \quad + 4R \cdot K_{\delta\delta}(\varphi_2, s_2) \cdot \sin^2(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin^2 \pi s_1 + 2 \cdot R^2 \cdot K_{\delta\mu}(\varphi_2, s_2) \cdot \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \\
 & \quad \left. + R^3 \cdot K_{\mu\mu}(\varphi_2, s_2) + 4R \cdot K_{Y'Y'}(\varphi_2, s_2) \cdot \langle \alpha, \delta \rangle^2 \cdot \sin^2(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin^2 \pi s_1 \right] \cdot \mu_1^2 \\
 & + \left[ R \cdot K_{x'x'}(\varphi_2, s_2) \cdot \langle \beta, v \rangle_e^2 \right] \cdot \left( \frac{x_e}{r_0} \right)^2 + \left[ 2R \cdot K_{x'x'}(\varphi_2, s_2) \cdot \langle \beta, v \rangle_e \cdot \langle \beta, \beta \rangle_e \right] \cdot \frac{x_e}{r_0} \cdot x_e' + \left[ R \cdot K_{x'x'}(\varphi_2, s_2) \cdot \langle \beta, \beta \rangle_e^2 \right] \cdot x_e'^2 \left. \right\}
 \end{aligned}$$

(A3-6)

Nun werden die beiden Energieänderungen addiert gemäß Gleichung (A3-1). Die resultierende Energieänderung wird

$$\begin{aligned} \delta W_{res} = \mu_1 \left\{ 2 \left[ \sin \pi s_1 \cdot \sin(\varphi_2 - \xi) + R \sin \pi s_2 \cdot \sin \varphi_2 \right] \right. \\ + W_y \cdot \frac{X}{r_0} + W_{\mu} \cdot \mu_1 \\ + W_{y\mu} \cdot \frac{Y_1}{r_0} \mu_1 + W_{y'\mu} \cdot Y_1' \mu_1 + W_{\mu\mu} \cdot \mu_1^2 \\ \left. + W_{yy} \left( \frac{Y_1}{r_0} \right)^2 + W_{yy'} \cdot \frac{Y_1}{r_0} Y_1' + W_{y'y'} \cdot Y_1'^2 + W_{xx} \left( \frac{X_e}{r_0} \right)^2 + W_{xx'} \cdot \frac{X_e}{r_0} \cdot X_e' + W_{x'x'} \cdot X_e'^2 \right\} \end{aligned} \quad (A3-7a)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} W_y &= -4\pi r_0 \cdot \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_y \\ W_{\mu} &= -4\pi r_0 \cdot \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{\mu} + K_{\mu}(\varphi_2 - \xi, s_1) \\ &\quad + 2R \cdot K_{\delta}(\varphi_2, s_2) \cdot \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 + R^2 \cdot K_{\mu}(\varphi_2, s_2) \\ W_{y\mu} &= -8\pi^2 r_0^2 \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_y \cdot T_{\mu} - 4\pi r_0 \cdot \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{y\mu}^* \\ &\quad - 2\pi r_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} K_{\mu}(\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot T_y - 4\pi r_0 R \cdot K_{\delta}(\varphi_2, s_2) \cdot \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_y \\ &\quad + 2r_0 R \cdot K_{yy'}(\varphi_2, s_2) \langle \alpha, \delta \rangle \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 + 4R K_{y'y'}(\varphi_2, s_2) \langle \alpha, u \rangle \langle \alpha, \delta \rangle \sin(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 \\ W_{y\mu\mu} &= -4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{y\mu} + 4R \cdot K_{y'y'}(\varphi_2, s_2) \langle \alpha, \delta \rangle \cdot \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \\ W_{\mu\mu\mu} &= -4\pi^2 r_0^2 \sin(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 T_{\mu}^2 - 4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 \cdot T_{\mu\mu}^* - 2\pi r_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} K_{\mu}(\varphi_2 - \xi, s_1) \cdot T_{\mu} \\ &\quad + K_{\mu\mu}(\varphi_2 - \xi, s_1) - 4\pi r_0 R \cdot K_{\delta}(\varphi_2, s_2) \cdot \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{\mu} + R \cdot K_{\delta}(\varphi_2, s_2) \cdot K_{\mu}(\varphi_2 - \xi, s_1) \\ &\quad + 4R K_{\delta\delta}(\varphi_2, s_2) \sin^2(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin^2 \pi s_1 + 2R^2 \cdot K_{\delta\mu}(\varphi_2, s_2) \cdot \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \\ &\quad + K_{\mu\mu}(\varphi_2, s_2) \cdot R^3 + 4R \cdot K_{y'y'}(\varphi_2, s_2) \cdot \langle \alpha, \delta \rangle^2 \cdot \sin^2(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin^2 \pi s_1 \\ W_{yy} &= -4\pi^2 r_0^2 \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_y^2 - 4\pi r_0 \cdot \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{yy} + r_0^2 \cdot K_{yy}(\varphi_2 - \xi, s_1) \\ &\quad + r_0^2 R \cdot K_{yy}(\varphi_2, s_2) + r_0 R K_{yy'}(\varphi_2, s_2) \cdot \langle \alpha, u \rangle + R \cdot K_{y'y'}(\varphi_2, s_2) \langle \alpha, u \rangle^2 \\ W_{yy'} &= -4\pi r_0 \cdot \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{yy'} + K_{yy'}(\varphi_2 - \xi, s_1) r_0 + r_0 R K_{yy'}(\varphi_2, s_2) + 2R K_{y'y'}(\varphi_2, s_2) \langle \alpha, u \rangle \\ W_{y'y'} &= -4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{y'y'} + K_{y'y'}(\varphi_2 - \xi, s_1) + R \cdot K_{y'y'}(\varphi_2, s_2) \\ W_{xx} &= -4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 \cdot T_{xx} + K_{x'x'}(\varphi_2 - \xi, s_1) \langle \beta, V \rangle_e^2 + R \cdot K_{x'x'}(\varphi_2, s_2) \langle \beta, V \rangle_e^2 \\ W_{xx'} &= -4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 \cdot T_{xx'} - 2K_{x'x'}(\varphi_2 - \xi, s_1) \langle \beta, V \rangle_e \langle \beta, \beta \rangle_e \\ &\quad + 2R K_{x'x'}(\varphi_2, s_2) \langle \beta, V \rangle_e \langle \beta, \beta \rangle_e \\ W_{x'x'} &= -4\pi r_0 \cos(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 \cdot T_{x'x'} + K_{x'x'}(\varphi_2 - \xi, s_1) \langle \beta, \beta \rangle_e^2 + R \cdot K_{x'x'}(\varphi_2, s_2) \cdot \langle \beta, \beta \rangle_e^2 \end{aligned} \quad (A3-7b)$$

A4 Phasenabweichung am Beschleunigereingang

Der Abstand der ersten Beschleunigerstruktur von der Mitte des zweiten Modulators ist  $s_0$ . Die Ankunftszeit eines Teilchens am Beschleuniger und damit die Phase  $\varphi = \omega t$  hängt von der Länge der Teilchenbahn  $s_b$  und der Geschwindigkeit  $v$  des Teilchens ab. Es ist

$$\varphi_b = \varphi_2 + \zeta + \omega \frac{s_b}{v} .$$

Wird  $s_b = s_0 + \delta S$  und  $\frac{1}{v} = 1 - \frac{1}{2} \delta W_{res} + \frac{3}{8} \delta W_{res}^2$  eingesetzt, so ergibt sich für  $\varphi_b$  einschließlich Glieder zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \varphi_b &= \varphi_2 + \zeta + 2\pi s_0 - \pi s_0 \delta W_{res} + \frac{3\pi}{4} s_0 \cdot \delta W_{res}^2 - \pi \delta S \cdot \delta W_{res} + 2\pi \cdot \delta S \\ &= \varphi_2 + \zeta + 2\pi s_0 - 2\pi s_0 \mu_1 (\sin(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 - R \sin \varphi_2 \sin \pi s_2) + \delta \varphi_b , \end{aligned} \quad (A4-1a)$$

wobei

$$\delta \varphi_b = -\pi s_0 \cdot \delta W_{res}^{(2,3)} + 2\pi \delta S - \pi \cdot \delta S \cdot \delta W_{res} + \frac{3\pi}{4} s_0 \cdot \delta W_{res}^2 \quad \text{mit } \delta W_{res}^{(2,3)} = \delta W_{res} - \delta W_{res}^{(1)} \text{ ist.} \quad (A4-1b)$$

Um  $\delta S$  zu berechnen, wird angenommen, daß das abbildende System zwischen dem zweiten Modulator und dem Eingang des Beschleunigers aus zwei dünnen Quadrupollinsen mit den Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  besteht. Die Brennweiten können aus der geforderten Lage der Bildebenen und den Abbildungseigenschaften des  $270^\circ$ -Magnet (nur für die x-Ebene wichtig) berechnet werden.

Abb. A4.1 zeigt die beiden dünnen Linsen, den  $270^\circ$ -Magnet und die Lage der Bildpunkte.

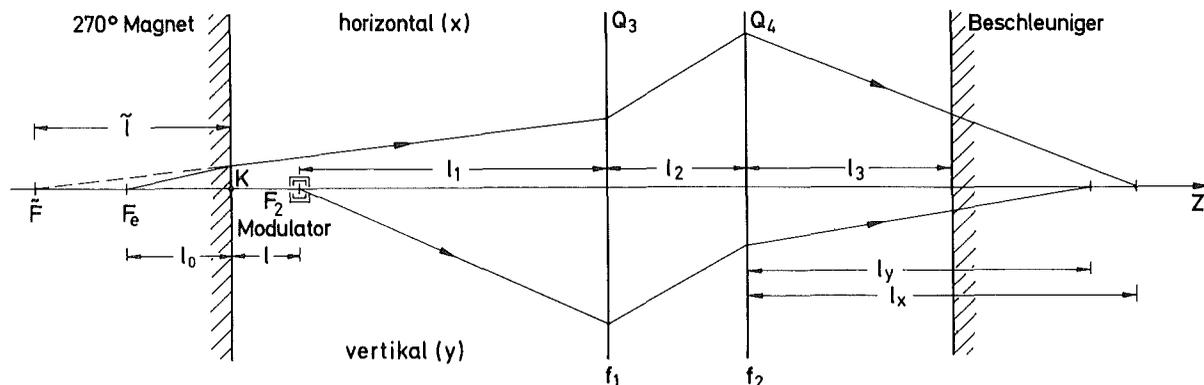


Abb. A4.1: Abbildendes System zwischen  $270^\circ$ -Magnet und Beschleuniger, vereinfacht für die Rechnung

Durch Multiplikation von Abbildungsmatrizen lassen sich die linearen Transformationen der Linsen und Driftstrecken zusammenfassen.

In der Ablenkebene lautet die Transformationsmatrix vom Modulator zum Beschleuniger

$$\begin{pmatrix} (y,y) & (y,y') \\ (y',y) & (y',y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A4-2a})$$

Senkrecht dazu gilt folgende Transformation:

$$\begin{pmatrix} (x,x) & (x,x') \\ (x',x) & (x',x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A4-2b})$$

Die Abbildungsbedingungen lauten

$$(y,y') = 0 \text{ und } (x,x') = 0 \quad .$$

Explizit lautet dieses Gleichungssystem:

$$l_1 + l_2 - l_1 l_2 / f_1 - l_1 l_y / f_2 + l_y (f_1 - l_1)(f_2 - l_2) / (f_1 f_2) = 0$$

$$l_0 + l_2 + l_0 l_2 / f_1 + l_0 l_x / f_2 + l_x (f_1 + l_0)(f_2 + l_2) / (f_1 f_2) = 0 \quad . \quad (\text{A4-4})$$

Daraus läßt sich  $f_1$  und  $f_2$  bestimmen:

$$f_1 = \frac{-(\bar{a}\bar{c} + \bar{d} + \bar{e}\bar{b}) - \sqrt{(\bar{a}\bar{c} + \bar{d} + \bar{e}\bar{b})^2 - 4(\bar{e}\bar{a} + \bar{g})\bar{b}\bar{c}}}{2\bar{b}\bar{c}} \quad ,$$

$$f_2 = \bar{a} + \bar{b}f_1 \quad ,$$

wobei

$$\bar{a} = \frac{l_1 l_2 [l_y (l_0 + l_2 + l_x) - l_x (l_1 + l_2 + l_y)]}{l_1 (l_2 + l_y) (l_0 + l_2 + l_x) + l_0 (l_2 + l_x) (l_1 + l_2 + l_y)} \quad ,$$

$$\bar{b} = - \frac{l_y (l_1 + l_2) (l_0 + l_2 + l_x) + l_x (l_0 + l_2) (l_1 + l_2 + l_y)}{l_1 (l_2 + l_y) (l_0 + l_2 + l_x) + l_0 (l_2 + l_x) (l_1 + l_2 + l_y)} \quad ,$$

$$\begin{aligned}\bar{c} &= l_1 + l_2 + l_y, & \bar{d} &= -(l_1 + l_2) l_y, \\ \bar{e} &= -(l_2 + l_y) l_1, & \bar{g} &= l_1 l_2 l_y.\end{aligned}\tag{A4-5}$$

Zur Bestimmung von  $l_0$  wird der Achsenpunkt an der Schneide durch das Magnetfeld des  $270^\circ$ -Magneten auf den virtuellen Bildpunkt  $\tilde{F}$  abgebildet.  $\tilde{l}$  ist der Abstand des virtuellen Bildpunktes von der Magnetbegrenzung. Die Abbildung von  $F_e$  lautet bezogen auf die Polkante K

$$\begin{pmatrix} \frac{x_K}{r_0} \\ x'_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v, v \rangle_e & \langle v, \beta \rangle_e \\ \langle \beta, v \rangle_e & \langle \beta, \beta \rangle_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x'_e \end{pmatrix}\tag{A4-6}$$

Andererseits soll eine Driftstrecke  $\tilde{l}$  die gleiche Strahlgeometrie an der Polkante erzeugen:

$$\begin{pmatrix} \frac{x_K}{r_0} \\ x'_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{l}/r_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x}' \end{pmatrix}\tag{A4-7}$$

Daraus ergibt sich  $\langle v, \beta \rangle_e \cdot x'_e = \tilde{l} \tilde{x}' / r_0$

$$\text{und} \quad \langle \beta, \beta \rangle_e \cdot x'_e = \tilde{x}'\tag{A4-8a}$$

Aus den Gleichungen (A4-8a) folgt

$$\tilde{l}/r_0 = \langle v, \beta \rangle_e / \langle \beta, \beta \rangle_e.\tag{A4-8b}$$

Es ist somit

$$l_0 = l + \tilde{l} + l_1 = l + r_0 \langle v, \beta \rangle_e / \langle \beta, \beta \rangle_e + l_1.\tag{A4-9}$$

Damit sind die Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  bestimmt.

Da nun die Parameter des abbildenden Systems bekannt sind, können die Wegdifferenzen  $\delta S$  errechnet werden.

Es ist

$$s_b = l_1 \sqrt{1+y_2'^2+x_2'^2} + l_2 \sqrt{1+y_3'^2+x_3'^2} + l_3 \sqrt{1+y_4'^2+x_4'^2} \quad . \quad (A4-10)$$

Dabei ist  $l_3 = s_0 - l_1 - l_2$ . In zweiter Näherung ist

$$\delta S = s_b - s_0 = \frac{l_1}{2} (y_2'^2 + x_2'^2) + \frac{l_2}{2} (y_3'^2 + x_3'^2) + \frac{l_3}{2} (y_4'^2 + x_4'^2) \quad . \quad (A4-11)$$

Die Steigungen  $y_3'$ ,  $x_3'$ ,  $y_4'$ ,  $x_4'$  ergaben sich in erster Ordnung aus der Multiplikation der Matrizen der Gleichungen (A4-2a,b) angewandt auf die Strahlvektoren  $(y_2, y_2')$  und  $(x_2, x_2')$ . Es ergibt dies

$$\begin{aligned} y_3' &= -\frac{1}{f_1} \cdot y_2 + \frac{f_1 - l_1}{f_1} \cdot y_2' \quad , \\ x_3' &= \frac{1}{f_1} \cdot x_2 + \frac{(l_1 + f_1)}{f_1} \cdot x_2' \quad , \\ y_4' &= \left[ -\frac{1}{f_2} - \frac{(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right] y_2 + \left[ -\frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 - l_1)(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right] y_2' \quad , \\ x_4' &= \left[ \frac{1}{f_2} + \frac{(f_2 + l_2)}{f_1 f_2} \right] x_2 + \left[ \frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 + l_1)(f_2 + l_2)}{f_1 f_2} \right] x_2' \quad . \quad (A4-12) \end{aligned}$$

Ferner ist in erster Ordnung

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \quad , \\ y_2' &= \langle \alpha, u \rangle \cdot \frac{y_1}{r_0} + y_1' + \langle \alpha, \delta \rangle \cdot \delta \quad , \\ \frac{x_2}{r_0} &= \left[ \langle v, v \rangle_e + \frac{1}{r_0} \langle \beta, v \rangle_e \right] \cdot \frac{x_e}{r_0} + \left[ \langle v, \beta \rangle_e + \frac{1}{r_0} \langle \beta, \beta \rangle_e \right] x_e' \quad , \\ x_2' &= \langle \beta, v \rangle_e \cdot \frac{x_e}{r_0} + \langle \beta, \beta \rangle_e \cdot x_e' \quad . \quad (A4-13) \end{aligned}$$

Werden nun (A4-12) in (A4-11) eingesetzt und die Bahnparameter mit Index 2 durch die rechten Seiten von (A4-13) ersetzt, so erhält man die Abweichung der Bahnlänge eines Teilchens von der des Sollteilchens zwischen Modulator II und Beschleuniger :

$$\delta S = s_0 \left\{ S_{Y\mu} \cdot \frac{y'_n}{r_0} \mu_n + S_{Y'\mu} \cdot y'_n \mu_n + S_{\mu\mu} \cdot \mu_n^2 \right. \\ \left. + S_{YY} \left( \frac{y'_n}{r_0} \right)^2 + S_{Y'Y} \cdot \frac{y'_n}{r_0} y'_n + S_{Y'Y'} \cdot y_n'^2 + S_{XX} \left( \frac{x'_e}{r_0} \right)^2 + S_{XX'} \cdot \frac{x'_e}{r_0} x'_e + S_{X'X'} \cdot x_e'^2 \right\}$$

(A4-14a)

mit den Koeffizienten

$$S_{Y\mu} = \left[ \frac{l_1}{s_0} + \frac{l_2}{s_0} \cdot \frac{(l_1 - f_1)^2}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( -\frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 - l_1)(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right)^2 \right] \cdot 2 \langle \alpha, u \rangle \langle \alpha, d \rangle \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin^2 \pi s_1 \\ + r_0 \left[ -\frac{l_2}{s_0} \cdot \frac{(f_1 - l_1)}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( -\frac{1}{f_2} - \frac{(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right) \left( -\frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 - l_1)(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right) \right] \cdot 2 \langle \alpha, d \rangle \sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin^2 \pi s_1$$

$$S_{Y'\mu} = \left[ \frac{l_1}{s_0} + \frac{l_2}{s_0} \cdot \frac{(l_1 - f_1)^2}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( -\frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 - l_1)(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right)^2 \right] \cdot 2 \langle \alpha, d \rangle \cdot \sin(\varphi_2 - \xi) \sin^2 \pi s_1$$

$$S_{\mu\mu} = \left[ \frac{l_1}{s_0} + \frac{l_2}{s_0} \cdot \frac{(l_1 - f_1)^2}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( -\frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 - l_1)(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right)^2 \right] \cdot 2 \langle \alpha, d \rangle^2 \cdot \sin^2(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin^2 \pi s_1$$

$$S_{YY} = \left[ \frac{l_1}{s_0} + \frac{l_2}{s_0} \cdot \frac{(l_1 - f_1)^2}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( -\frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 - l_1)(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{2} \langle \alpha, u \rangle^2 \\ + r_0 \left[ -\frac{l_2}{s_0} \cdot \frac{(f_1 - l_1)}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( -\frac{1}{f_2} - \frac{(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right) \left( -\frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 - l_1)(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right) \right] \langle \alpha, u \rangle \\ + \frac{1}{2} r_0^2 \left[ \frac{l_2}{s_0} \cdot \frac{1}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( -\frac{1}{f_2} - \frac{(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right)^2 \right]$$

$$S_{Y'Y'} = \left[ \frac{l_1}{s_0} + \frac{l_2}{s_0} \cdot \frac{(l_1 - f_1)^2}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( -\frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 - l_1)(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right)^2 \right] \langle \alpha, u \rangle \\ + r_0 \left[ -\frac{l_2}{s_0} \cdot \frac{(f_1 - l_1)}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( -\frac{1}{f_2} - \frac{(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right) \left( -\frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 - l_1)(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right) \right]$$

$$S_{Y'Y} = \frac{1}{2} \left[ \frac{l_1}{s_0} + \frac{l_2}{s_0} \cdot \frac{(l_1 - f_1)^2}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( -\frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 - l_1)(f_2 - l_2)}{f_1 f_2} \right)^2 \right]$$

$$S_{XX} = \frac{1}{2} \left[ \frac{l_1}{s_0} + \frac{l_2}{s_0} \cdot \frac{(l_1 + f_1)^2}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( \frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 + l_1)(f_2 + l_2)}{f_1 f_2} \right)^2 \right] \langle \beta, v \rangle_e^2 \\ + r_0 \left[ \frac{l_2}{s_0} \cdot \frac{(l_1 + f_1)}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( \frac{1}{f_2} + \frac{(f_2 + l_2)}{f_1 f_2} \right) \left( \frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 + l_1)(f_2 + l_2)}{f_1 f_2} \right) \right] \langle \beta, v \rangle_e \left( \langle v, v \rangle_e + \frac{l}{r_0} \langle \beta, v \rangle_e \right) \\ + \frac{1}{2} r_0^2 \left[ \frac{l_2}{s_0} \cdot \frac{1}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( \frac{1}{f_2} + \frac{(f_2 + l_2)}{f_1 f_2} \right)^2 \right] \cdot \left( \langle v, v \rangle_e + \frac{l}{r_0} \langle \beta, v \rangle_e \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 S_{xx'} &= \left[ \frac{l_1}{s_0} + \frac{l_2}{s_0} \frac{(l_1 + f_1)^2}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( \frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 + l_1)(f_2 + l_2)}{f_1 f_2} \right)^2 \right] \langle \beta, \beta \rangle_e \langle \beta, v \rangle_e \\
 &+ r_0 \left[ \frac{l_2}{s_0} \frac{(l_1 + f_1)}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( \frac{1}{f_2} + \frac{(f_2 + l_2)}{f_1 f_2} \right) \left( \frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 + l_1)(f_2 + l_2)}{f_1 f_2} \right) \right] \left[ \langle \beta, v \rangle_e \left( \langle v, \beta \rangle_e + \frac{l}{r_0} \langle \beta, \beta \rangle_e \right) + \langle \beta, \beta \rangle_e \left( \langle v, v \rangle_e + \frac{l}{r_0} \langle \beta, v \rangle_e \right) \right] \\
 &+ r_0^2 \left[ \frac{l_2}{s_0} \frac{1}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( \frac{1}{f_2} + \frac{(f_2 + l_2)}{f_1 f_2} \right)^2 \right] \left( \langle v, v \rangle_e + \frac{l}{r_0} \langle \beta, v \rangle_e \right) \left( \langle v, \beta \rangle_e + \frac{l}{r_0} \langle \beta, \beta \rangle_e \right) \\
 S_{x'x'} &= \left[ \frac{l_1}{s_0} + \frac{l_2}{s_0} \frac{(l_1 + f_1)^2}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( \frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 + l_1)(f_2 + l_2)}{f_1 f_2} \right)^2 \right] \frac{1}{2} \langle \beta, \beta \rangle_e^2 \\
 &+ r_0 \left[ \frac{l_2}{s_0} \frac{(l_1 + f_1)}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( \frac{1}{f_2} + \frac{(f_2 + l_2)}{f_1 f_2} \right) \left( \frac{l_1}{f_2} + \frac{(f_1 + l_1)(f_2 + l_2)}{f_1 f_2} \right) \right] \langle \beta, \beta \rangle_e \left( \langle v, \beta \rangle_e + \frac{l}{r_0} \langle \beta, \beta \rangle_e \right) \\
 &+ \frac{1}{2} r_0^2 \left[ \frac{l_2}{s_0} \frac{1}{f_1^2} + \frac{l_3}{s_0} \left( \frac{1}{f_2} + \frac{(f_2 + l_2)}{f_1 f_2} \right)^2 \right] \left( \langle v, \beta \rangle_e + \frac{l}{r_0} \langle \beta, \beta \rangle_e \right)^2 .
 \end{aligned} \tag{A4-14b}$$

Nun werden die rechten Seiten der Gleichungen (A4-14a) und (A3-7a) für  $\delta S$  und  $\delta W_{\text{res}}$  in die Gleichung (A4-1b) für  $\delta \varphi_b$  eingesetzt und Glieder höherer als dritter Ordnung in  $\mu_1$ ,  $y_1$ ,  $y_1'$ ,  $x_e$ ,  $x_e'$  vernachlässigt. Die Phasenabweichung  $\delta \varphi_b$  ist dann

$$\begin{aligned}
 \delta \varphi_b &= \pi s_0 / \mu_1 \left\{ (-W_y + 2 S_{y\mu}) \frac{y_1}{r_0} + 2 S_{y' \mu} \cdot y_1' \right. \\
 &+ \left[ -W_\mu + 3(\sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 + R \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \pi s_2)^2 + 2 S_{\mu\mu} \right] \cdot \mu_1 \\
 &+ \left[ -W_{y\mu} + 3(\sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 + R \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \pi s_2) \cdot W_y \right. \\
 &\quad \left. - 2(\sin(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 + R \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \pi s_2) \cdot S_{y\mu} \right] \cdot \frac{y_1}{r_0} \mu_1 \\
 &+ \left[ -W_{y'\mu} - 2(\sin(\varphi_2 - \xi) \cdot \sin \pi s_1 + R \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \pi s_2) \cdot S_{y'\mu} \right] \cdot y_1' \mu_1 \\
 &+ \left[ -W_{\mu\mu} + 3(\sin(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 + R \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \pi s_2) \cdot W_\mu \right. \\
 &\quad \left. - 2(\sin(\varphi_2 - \xi) \sin \pi s_1 + R \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \pi s_2) \cdot S_{\mu\mu} \right] \cdot \mu_1^2 \\
 &+ \left[ -W_{yy} + 2 S_{yy} / \mu_1 \right] \cdot \left( \frac{y_1}{r_0} \right)^2 + \left[ -W_{yy'} + 2 S_{yy'} / \mu_1 \right] \cdot \frac{y_1}{r_0} y_1' + \left[ -W_{y'y'} + 2 S_{y'y'} / \mu_1 \right] \cdot y_1'^2 \\
 &+ \left[ -W_{xx} + 2 S_{xx} / \mu_1 \right] \cdot \left( \frac{x_e}{r_0} \right)^2 + \left[ -W_{xx'} + 2 S_{xx'} / \mu_1 \right] \cdot \frac{x_e}{r_0} x_e' + \left[ -W_{x'x'} + 2 S_{x'x'} / \mu_1 \right] \cdot x_e'^2 \left. \right\} .
 \end{aligned}$$

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 A. Citron  
Proc. 1970 Proton Linear Acc. Conf., Batavia, Ill. (NAL, 1970)  
Vol. 1, p. 239
- 2 P. Kneisel, C. Lyneis, O. Stoltz, J. Halbritter  
1974 International Acc. Conf., Stanford, Cal.
- 3 P. Kneisel, O. Stoltz, J. Halbritter  
J. Appl. Phys. 45, May (1974)
- 4 T. Nishikawa  
Linear Accelerators (North Holland Publishing Co., Amsterdam,  
1970) C. 1.3 b
- 5 H. G. Hereward  
Linear Accelerators (North Holland Publishing Co., Amsterdam,  
1970) A.2
- 6 J. Klabunde, H. Deitinghoff  
Int. Rep. 72/9 (Universität, Frankfurt, Okt. 1972) unveröffentl.
- 7 J. Huguenin, B. Vosicki  
Linear Accelerators (North Holland Publishing Co., Amsterdam,  
1970) C.2.1
- 8 M. A. Abroyan, V. P. Golubev, V. L. Komarov, G. V. Tarvid,  
G. M. Tokarev, S. G. Tsepakin  
Part. Acc. 2 (1971) p. 133
- 9 W. Kühn  
private Mitteilung
- 10 C. D. Moak, W. M. Good, R. F. King, J. W. Johnson, H. E. Banta,  
J. Judish, W. H. du Preez  
Rev. Sci. Instr. 35 (1964) p. 672
- 11 J. H. Anderson, D. Swann  
Nucl. Instr. and Meth. 30, (1964) p. 1
- 12 J. W. Johnson, R. F. King, C. D. Moak, G. F. Wells  
Report ORNL 4219 (Oak Ridge National Laboratory, 1968) p. 112
- 13 M. Roche  
Rapport CEA-R-3796 (Centre d'Etudes de Bruyères-le-Château, 1969)
- 14 R. Chehab, P. Brunet, X. Buffet, L. Melard, M. Plages  
Nucl. Instr. and Meth. 77 (1970) p. 229
- 15 T. K. Fowler, W. M. Good  
Nucl. Instr. and Meth. 7 (1960) p. 245
- 16 D. J. Warner  
Vth. Int. Conf. High Energy Acc. (1965) p. 612

- 17 K. W. Zieher  
Nucl. Instr. and Meth. 105 (1972) p. 221
- 18 J. Haimson  
IEEE Trans. Nucl. Sci. 3-7 (1966) p. 303
- 19 J. E. Vetter  
Dissertation (Universität Karlsruhe, 1968)
- 20 E. Regenstreif  
Focussing of Charged Particles, Vol. I (Academic Press, New York, 1967) p. 353
- 21 F. E. Whiteway  
AWRE Report No. 0-12/61 (1961)
- 22 P. Tykesson, T. Wiedling  
Nucl. Instr. and Meth. 77 (1970) p. 277
- 23 P. M Lapostolle  
Proc. 1968 Proton Linear Acc. Conf., Brookhaven, N.Y. (1968)  
p. 317
- 24 J. H. Neiler, W. M. Good  
Fast Neutron Physics, Part I (Interscience Publishers Inc., New York, 1960) p. 542
- 25 K. R. Spangenberg  
Vacuum Tubes (Mc. Graw Hill, New York, 1948)
- 26 H. Klein  
Habilitationsschrift (Universität, Frankfurt, 1968)
- 27 C. Agritillis  
Proc. 1968 Proton Linear Acc. Conf., Brookhaven, N.Y. (1968)  
p. 328
- 28 C. R. Emigh  
Proc. 1968 Proton Linear Acc. Conf., Brookhaven, N.Y. (1968) p. 338
- 29 K. Blasche, R. Friehmelt  
UNILAC Bericht Nr. 1-69 (Inst. für Angew. Physik, Universität, Heidelberg, 1969)
- 30 A. J. Lichtenberg  
Phase-Space Dynamics of Particles (John Wiley and Sons, New York, 1969)
- 31 H. Wollnik  
Nucl. Instr. and Meth. 95 (1971) p. 453
- 32 H. A. Enge  
Focussing of Charged Particles, Vol. II (Academic Press, New York, 1967) p. 250
- 33 H. A. Tasman, A. J. H. Boerboom  
Z. Naturforschg. 14a (1959) p. 121
- 34 S. Penner  
Rev. Sci. Instr. 32 (1961) p. 150

- 35 K. L. Brown  
Rev. Sci. Instr. 35 (1964) p. 481
- 36 H. Wollnik  
Nucl. Instr. and Meth. 34 (1965) p. 213
- 37 H. Wollnik  
Nucl. Instr. and Meth. 52 (1967) p. 250
- 38 R. W. P. King  
Handbuch der Physik, Bd. XVI (Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958) p. 165
- 39 L. Szecsi  
Interne Notiz 149 (KFZ, Karlsruhe, IEKP, 26. 5. 1971) unveröffentlicht
- 40 L. Szecsi  
wird veröffentlicht
- 41 A. Brandelik et al.  
Part. Acc. 4 (1972) p. 111
- 42 W. Jüngst  
KFK 1590 (KFZ, Karlsruhe, IEKP, April 1972)
- 43 K. G. Steffen  
High Energy Beam Optics (Interscience Publishers, John Wiley and Sons, New York, 1965) p. 90
- 44 L. Szecsi  
Int. Notiz 150 (KFZ, Karlsruhe, IEKP, 26. 5. 1971) unveröffentl.
- 45 L. Szecsi  
Int. Notiz 151 (KFZ, Karlsruhe, IEKP, 26. 5. 1971) unveröffentl.
- 46 L. Szecsi  
private Mitteilung
- 47 E. der Mateosian, O. C. Kistner, P. Thieberger  
Nucl. Instr. and Meth. 96 (1971) p. 613
- 48 O. C. Kistner  
Nucl. Instr. and Meth. 105 (1972) p. 603
- 49 R. H. Miller  
Proc. Linear Acc. Conf., Los Alamos, N. M. (1966) p. 65
- 50 A. van Steenbergen  
Nucl. Instr. and Meth. 51 (1967) p. 245
- 51 W. Kuhlmann, J. Bojowald, C. Mayer-Böricke, J. Reich, A. Retz  
Nucl. Instr. and Meth. 80 (1970) p. 89
- 52 J. J. Kolata, R. E. Surratt  
Nucl. Instr. and Meth. 87 (1970) p. 141
- 53 T. Toda, K. Irie, Y. Nemoto  
Japan J. Appl. Phys. 8 (1969) p. 1535

- <sup>54</sup> P. W. Hawkes  
Focussing of Charged Particles, Vol. I (Academic Press, New York, 1967) p. 411
- <sup>55</sup> V. Jung  
Nucl. Instr. and Meth. 91 (1971) p. 195
- <sup>56</sup> H. Wollnik, H. Ewald  
Nucl. Instr. and Meth. 36 (1965) p. 93
- <sup>57</sup> K. W. Zieher  
Int. Notiz 174 (KFZ, Karlsruhe, IEKP, Feb. 1972) unveröffentl.
- <sup>58</sup> A. Noblet  
Nucl. Instr. and Meth. 102 (1972) p. 245