

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

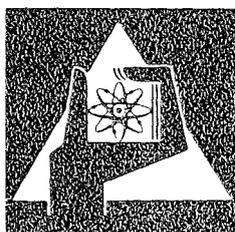
August 1976

KFK 2336

Projekt Schneller Brüter
Fachgebiet Reaktortechnik der
Technischen Hochschule Darmstadt

**Kriechen von Brennstabhüllrohren des Brutreaktors bei
hoher Temperatur unter Innen- bzw. Außendruck
Entwicklung eines theoretischen Modells und eines
Verfahrens zur kontinuierlichen Messung der
Verformung**

U. Krugmann



**GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 2336

Projekt Schneller Brüter

Fachgebiet Reaktortechnik der
Technischen Hochschule Darmstadt

Kriechen von Brennstabhüllrohren des Brutreaktors
bei hoher Temperatur unter Innen- bzw. Außendruck

Entwicklung eines theoretischen Modells
und eines Verfahrens
zur kontinuierlichen Messung der Verformung

von
U. Krugmann

Durchgeführt im Auftrag der Gesellschaft für
Kernforschung in Zusammenarbeit mit G. Karsten,
Projektleitung Schneller Brüter

Darmstädter Dissertation D 17

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe

Zusammenfassung

1. Es wird ein theoretisches Modell entwickelt, das das Kriechverhalten von Brennstabhüllrohren analytisch beschreibt. Dabei wird das Hüllrohr als Schale behandelt. Es gilt das Kriechgesetz von Norton.
2. Es wird ein kapazitives Dehnungsmeßverfahren entwickelt, das die kontinuierliche Messung der Kriechverformung von Hüllrohren bei Temperaturen bis zu 700 °C unter Innen- bzw. Außendruck ermöglicht. Die Darstellung des Meßverfahrens geschieht unter besonderer Berücksichtigung der Meßgenauigkeit.
3. Es wird über out- of- pile- Kriechexperimente an Schnellbrüter- Hüllrohren berichtet, die mit dem kapazitiven Dehnungsmeßverfahren durchgeführt und nach dem Schalenmodell ausgewertet wurden. Die Ergebnisse werden mit Kriechdaten anderer Autoren verglichen, die an identischen Rohren auf der Basis unterschiedlicher Meßverfahren gewonnen wurden.

Creep of fuel element cladding tubes of fast breeder reactors subjected to high temperatures and internal or else external pressure - development of a theoretical model and of a system for the continuous measurement of deformation

Abstract

1. A theoretical model is developed for the analytical description of creeping of fuel element cladding tubes. The cladding tube is treated as a shell. The creep law of Norton is valid.
2. A capacitive measuring system is developed for the continuous measurement of creep deformation of cladding tubes subjected to temperatures up to 700 °C and internal or else external pressure. The measuring system is presented with particular regard to the measuring accuracy.
3. Out- of- pile- creep experiments on cladding tubes of fast breeder reactors are reported, which have been performed by the capacitive measuring system and analysed by the shell model. The results are compared to creep data of other authors obtained on identical cladding tubes by different measuring systems.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>		Seite
	Verzeichnis der wichtigsten Symbole	
1.	Einleitung	1
2.	Schalenmodell	7
2.1	Theorie für das Kriechen von Schalen	7
2.1.1	Tensorielle Formulierung der Kontinuumsmechanik	8
2.1.2	Kriechgesetz	11
2.1.3	Variationsprinzipien	13
2.1.4	Annahmen der Schalentheorie	16
2.1.5	Grundgleichungen des Kriechens von Schalen	24
2.2	Kriechverhalten unendlich-langer zylindrischer Rohre nach der Schalentheorie	25
2.2.1	Formulierung der Schalengleichungen für den unendlich-langen Zylinder	26
2.2.2	Lösung der Schalengleichungen für den unendlich-langen Zylinder	32
2.3	Korrekturen und Ergebnisse	37
2.3.1	Wandstärkenkorrektur	38
2.3.2	Berücksichtigung der realen Druckangriffsfläche	39
2.3.3	Elastische Korrektur	40
2.3.4	Korrigierte Lösungen	42
2.3.5	Ergebnisse für einen Vergleichsdatenfall	43
3.	Kapazitives Verfahren zur kontinuierlichen Messung der Hüllrohrverformung unter Innen- oder Außendruck und hoher Temperatur	45
3.1	Meßprinzip	48
3.2	Modellversuche zur Ermittlung des Einflusses von Streufeldern und Exzentrizitäten	49
3.3	Innendruckmessung	53

	Seite	
3.4	Außendruckmessung	56
3.5	Genauigkeit des kapazitiven Meßverfahrens	58
3.6	Betriebsverhalten des kapazitiven Meßverfahrens	64
4.	Kriechexperimente an Brennstabhüllrohrproben	67
4.1	Versuchsstand	67
4.2	Rohrproben und Meßvorrichtungen	68
4.3	Vermessung der Meßanordnung	70
4.4	Innendruckmessungen	73
4.5	Vergleich mit Experimenten von Böhm, Schäfer und Braun	76
4.6	Außendruckmessungen	79
4.7	Vergleich der Innen- und Außendruckmessungen	85
	<u>Anhang</u>	90
A 1.	Analyse der elastischen Spannungsverteilung der endlich-langen Kreiszyinderschale	90
A 1.1	Einleitung	90
A 1.2	Differentialgleichungen der endlich-langen Kreiszyinderschale und ihre Lösung	90
A 1.3	Spannungsanalyse des halbunendlichen Rohres	93
A 1.3.1	Gelenkige Lagerung bei $\zeta = 0$	95
A 1.3.2	Einspannung bei $\zeta = 0$	96
A 1.3.3	Real gelagertes Rohr	98

	Seite
A 2. Berechnung von Kapazitätswerten	101
A 2.1 Kapazität des Kreiszyylinderkondensators	101
A 2.2 Kapazität des Zylinderkondensators mit einer kreisförmigen und einer ovalen Elektrode	102
A 2.3 Kapazität des exzentrischen Zylinderkondensators	103
Literaturverzeichnis	105
Tabellen	109
Figuren	114

Verzeichnis der wichtigsten Symbole

a	mittlerer Radius der Mittelfläche einer ovalen zylindrischen Schale
\tilde{a}	Lastangriffsradius einer ovalen zylindrischen Schale
a	Exzentrizität eines Zylinderkondensators
\vec{a}_α	Basis der Schalenmittelfläche
$a_{\alpha\beta}$	Metriktensor der Schalenmittelfläche
A	Eichkonstante des Meßschwingkreises
$b_{\alpha\beta}$	Krümmungstensor der Schalenmittelfläche
c	Kriechrate
C	Kapazität eines Zylinderkondensators
d	Abstand, Spaltweite
D	Dehnungssteifigkeit
E	Elastizitätsmodul
E_r	rad. Komponente der elektr. Feldstärke
F	Fläche
\vec{g}_i	Basis im dreidimensionalen Raum
g_{ij}	Metriktensor des Raumes
h	Wandstärke einer Schale
I_2	2. Invariante des Spannungsdeviators
J_2	2. Invariante des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeit
k	Norton-Kriechparameter
K	Biegesteifigkeit
l	Länge der Meßanordnung
L	Lagrangefunktion
\bar{L}	charakteristische Länge
$m^{\alpha\beta}$	Momententensor

\vec{M}^α	Schnittmomente in der Schale
$M_\varphi, M_\zeta, M_{\varphi\zeta}$	phys. Komponenten der Momente in einer Zylinderschale
n	Norton-Kriechparameter
N	Leistung der äußeren Kräfte gegenüber einer Verschiebungsgeschwindigkeit infolge Kriechen
$n^{\alpha\beta}$	Normalkrafttensor
\vec{N}^α	Schnittkräfte in der Schale
$N_\varphi, N_\zeta, N_{\varphi\zeta}$	phys. Komponenten der Normalkräfte in einer Zylinderschale
O_V	Oberfläche eines Volumens V
p	hydrostatischer Druck
p	Gewichtsfaktor bei der Fehlerfortpflanzung
\vec{P}	Volumenkraft
q	axiale Last eines Rohres
\vec{q}	Flächenlast
Q	elektr. Ladung
q_α	Querkraftvektor
Q_φ, Q_ζ	phys. Komponenten der Querkräfte in einer Zylinderschale
r, R	Radius einer Zylinderfläche
\vec{r}, \vec{R}	Ortsvektoren
\bar{R}	mittlerer Radius eines Rohres unter Außendruckbelastung
R^*	fiktiver Radius eines Rohres unter Außendruckbelastung
R_{io}^{sek}	auf den Zeitnullpunkt extrapolierter Innenradius eines stationär kriechenden Rohres
t	Zeit
T	Temperatur
\vec{t}	Spannungsvektor

\vec{T}	modifizierter Spannungsvektor
\vec{u}, u_i	Verschiebungsvektor, Komponenten
\vec{v}, v_i, v_α	Verschiebungsgeschwindigkeitsvektor, Komponenten
V	Volumen
w	Verschiebungsgeschwindigkeitskomponente senkrecht zur Schalenmittelfläche
\vec{w}, w_α	Verdrehungsgeschwindigkeiten der Tangenten der Schalenmittelfläche, Komponenten
w_e, w_s	Kriechpotentiale
x_3	Abstand eines Schalenpunktes von der Schalenmittelfläche
z	Normalenabschnitt bei einer Zylinderfläche
α	Ovalität
α	Wärmeausdehnungskoeffizient
$\alpha_{\alpha\beta}$	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor der Schalenmittelfläche
γ	Gewichtsfaktor bei der Spannungsberechnung
γ_{ij}	Verzerrungstensor
$\dot{\gamma}_{ij}$	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$	Christoffelsymbole
δ_i^j	Kroneckersymbol
Δ	Symbol für Fehler, Differenz
ϵ	Verzerrung, eindimensional
$\dot{\epsilon}$	Verzerrungsgeschwindigkeit, eindimensional
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante des Vakuums
ζ	axiale Koordinate bei zylindersymmetrischen Problemen
θ^i	allgemeine, krummlinige Koordinaten im Raum
$\theta = \theta^3$	Schalenkoordinate senkrecht zur Schalenmittelfläche

VII

$\lambda = \frac{h}{L}$	dimensionslose Wandstärke der Schale
μ	Schalenkonstante des kreiszylindrischen Rohres
ν	Frequenz
ν	Querkontraktionszahl
Π	Gesamtverformungsleistung
Π_i	innere Verformungsleistung
Π_a	Verformungsleistung beim Kriechen gegenüber äußeren Kräften
ρ	Krümmungsradius einer Zylinderschale
$\sigma_\varphi, \sigma_\zeta$	phys. Spannungskomponenten
τ^{ij}	Spannungstensor
σ^{ij}	Spannungsdeviator
φ	azimutale Koordinate bei zylindersymmetrischen Problemen
χ	Verdrehung der axialen Tangente beim kreiszylindrischen Rohr
$\omega_{\alpha\beta}$	Verdrehungsgeschwindigkeitstensor der Schalenmittelfläche

Indizes:

φ	azimutal
ζ	axial
t	tangential
n	normal
x, y	Richtungen in einem kartesischen Koordinatensystem
i	innen, Innendruck
a	außen, Außendruck
S	Meßsonde
u	Untergrund
m	mittel

Tensorkomponenten und ihre Indizierung:

lateinische Indizes laufen von 1 bis 3,

griechische Indizes laufen von 1 bis 2,

hochgestellte Indizes bezeichnen kontravariante,

tiefgestellte Indizes kovariante Komponenten eines

Tensors,

gemischte Komponenten haben hoch- und tiefgestellte

Indizes,

über sowohl hochgestellt als auch tiefgestellt vor-

kommende Indizes wird summiert.

1. Einleitung

Wie die meisten Leistungsreaktortypen besitzt der schnelle natriumgekühlte Brutreaktor (SNR) zylindrische Brennstäbe. Der keramische Brennstoff (Urandioxyd) liegt in Tablettenform vor und wird von einer metallischen Hülle umgeben. Die Hülle sorgt für die Formbeständigkeit des Brennstabs, die die Keramik nicht übernehmen kann. Daneben kommt der Hülle noch eine besondere sicherheitstechnische Bedeutung zu, denn sie verhindert das Austreten von Radioaktivität in Form von Brennstoff oder Spaltprodukten in den Kühlkreislauf und schützt den Brennstoff vor dem Angriff des Kühlmittels (vgl. Smidt /1/). Damit bildet die Hülle die innerste Sicherheitsbarriere des Reaktors.

Auf Grund dieser Sicherheitsfunktion muß ein Versagen der Hülle ausgeschlossen werden. Da ein Hüllrohrschaden im Wesentlichen auf die über die Zeit integrierte Leistungsdichte im Brennstab zurückgeführt werden kann, begrenzt letztlich die Hülle die aus dem Brennstoff erzeugbare Wärmeenergie und damit die Wirtschaftlichkeit des SNR (vgl. Engelmann /2/).

Den gesamten Belastungskomplex, der bis zum Versagen der Hülle führen kann, und die daraus resultierenden Vorgänge im Hüllrohr hat Böhm /3/ zusammengestellt. Als mechanische Kräfte wirken auf das Hüllrohr von außen der Kühlmitteldruck, von innen der Spaltgasdruck und dazu noch lokale Belastungen, verursacht z. B. durch Abstandshalter oder Brennstoffbruchstücke. Zusätzlich treten infolge der hohen radialen Temperaturdifferenz in der Hülle von größenordnungsmäßig 50 Grad thermische Spannungen auf.

Die Festigkeit der Hülle gegenüber diesen mechanischen Belastungen ist in erster Linie abhängig von der Zusammensetzung und vom Zustand des Hüllmaterials. Sie wird jedoch teilweise beträchtlich beeinflusst durch die beson-

deren Bedingungen, denen die Hülle im SNR ausgesetzt ist:

- Der hohe schnelle Neutronenfluß ($> 10^{23} \text{n/cm}^2$) bewirkt über Kernprozesse Effekte wie Bestrahlungsverfestigung, Schwellen infolge Porenbildung, bestrahlungsinduziertes Kriechen und Hochtemperaturversprödung.
- Die Kühlung durch flüssiges Natrium hat Korrosion an der Hüllrohraußenseite zur Folge.
- An der Hüllrohrinnenseite finden chemische Reaktionen zwischen dem Hüllmaterial einerseits und dem Brennstoff oder Spaltprodukten andererseits statt.
- Unter den im Reaktor herrschenden Temperaturen kommt es schon unterhalb der Fließgrenze zu irreversiblen Formänderungen, verursacht durch thermisches Kriechen.

Bei der mechanischen Auslegung des Hüllrohrs muß dieser gesamte Belastungskomplex berücksichtigt werden. Es muß nachgewiesen werden, daß dabei die Hülle intakt bleibt. Darüber hinaus muß auch noch die Formbeständigkeit der Hülle gewährleistet sein, da sonst die Gefahr von lokalen Überhitzungen infolge Kühlkanalverengungen besteht. Aus diesen Gründen wird in der derzeitigen Situation die bleibende Verformung als Auslegungskriterium herangezogen (vgl. Seehafer /4/).

Diese irreversible Verformung ist unter Reaktorbedingungen im Wesentlichen auf Kriechprozesse zurückzuführen.

Nach Seehafer /4/ wird aus 'in-pile'-Versuchen, bei denen die SNR-Verhältnisse möglichst umfassend simuliert werden, zu verschiedenen Spannungen im Hüllrohr die Standzeit und die minimale Bruchdehnung ϵ_{\min} von Hüllrohrproben gemessen. Die zulässige bleibende Hüllrohrdehnung ϵ_{zul} wird dann durch einen Sicherheitsfaktor S definiert:

$$\epsilon_{\text{zul}} = \epsilon_{\min} / S \quad (1.1)$$

Zur Zeit läßt man eine Hüllrohrdehnung $\epsilon_{zul} = 1\%$ zu.

Mit Hilfe von Brennstabauslegungscodes (vgl. z. B. LIFE II /5/, IAMBUS-1 /6/) wird für verschiedene Betriebszustände des Reaktors die bleibende Dehnung berechnet und mit dem Auslegungswert ϵ_{zul} verglichen. In diese Auslegungscodes gehen Kriechmodelle ein, die die Abhängigkeit der Kriechgeschwindigkeit von der im Hüllrohr herrschenden Spannungsverteilung auf der Basis von phänomenologischen Kriechgesetzen ermitteln. Diese Kriechgesetze enthalten Parameter, die abhängig sind vom Spannungsbereich, von der Temperatur, von der Zusammensetzung und vom Zustand des Hüllmaterials.

Auf Grund mangelnder Reproduzierbarkeit und ungenügend entwickelter Meßtechnik ist es im allgemeinen nicht möglich, Kriechparameter aus 'in-pile'-Versuchen zu bestimmen. Man greift daher auf Kriechparameter zurück, die aus 'out-of-pile'-Versuchen ermittelt wurden (vgl. Seehafer /4/). Hierunter versteht man Experimente, bei denen die Belastung und die Temperatur der Hülle der SNR-Brennstäbe simuliert, der Bestrahlungseinfluß jedoch vernachlässigt wird.

Zur Messung von Kriechparametern in 'out-of-pile'-Versuchen ist es notwendig, den Verformungsvorgang der Rohrprobe kontinuierlich zu erfassen. Die Problematik der kontinuierlichen Messung der Rohrdehnung wird in dieser Arbeit behandelt, und es wird ein Verfahren entwickelt, das die kontinuierliche Messung in 'out-of-pile'-Versuchen ermöglicht.

Zur Zeit ist es allgemein üblich, Kriechparameter aus Rohrrinnendruckversuchen zu bestimmen. Dies entspricht auch der normalen Belastung der Brennstabhüllrohre des SNR durch den Spaltgasdruck von innen auf Zug. Infolge der hohen radialen Temperaturdifferenz von etwa 50 Grad entstehen so hohe thermische Spannungen in der Rohrwand,

daß an der Innenfaser des Hüllrohres Druck herrschen kann (vgl. Smidt /1/). Das Phänomen, daß bei allgemeiner Zugbelastung bereichsweise das Hüllrohr auf Druck beansprucht wird, tritt auch bei der Einleitung lokaler Belastungen auf (Endstopfen des Hüllrohrs, Abstandshalter, Brennstoffbruchstücke). Für den Fall des Endstopfens wird dies in dieser Arbeit nachgewiesen.

Eine Untersuchung des Hüllrohrmaterials auf Druck ist für den SNR also ebenso sinnvoll wie für Reaktortypen (Druckwasserreaktor, gas- oder dampfgekühlter schneller Brutreaktor), bei denen die Belastung in der Hauptsache durch das Kühlmittel von außen erfolgt.

Im allgemeinen wird der Ansatz gemacht, daß beim Übergang von Zug- auf Druckbelastung das Kriechgesetz und die Kriechparameter unverändert bleiben und nur das Vorzeichen der Kriechgeschwindigkeit wechselt. Um diese Hypothese überprüfen zu können, wurde das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Meßverfahren so ausgelegt, daß es sowohl bei Rohrinneindruck- als auch bei Rohraußendruck-Experimenten arbeitet.

Zwei weitere Aspekte zur Messung von Kriechparametern, die in Brennstabauslegungsrechnungen Anwendung finden, sollen hier noch angeführt werden:

In der Regel werden Kriechparameter unter stationären Bedingungen gemessen. Erst in jüngster Zeit werden auch Kriechexperimente unter nicht konstanter Last durchgeführt (vgl. Schäfer /7/). Die Anwendung in Auslegungsrechnungen erfolgt aber unter den wechselnden Belastungen im Reaktor.

Deshalb wurde das in dieser Arbeit entwickelte Meßverfahren so ausgelegt, daß keine Beschränkungen hinsichtlich des zeitlichen Ablaufs der Belastung bestehen. Die Testmessungen, die die Funktion des Verfahrens nachweisen, wurden zwar unter konstanten Bedingungen durchgeführt.

Grund dafür war jedoch nur die Möglichkeit des Vergleichs mit anderen Meßverfahren.

Der zweite Aspekt betrifft die Angabe der Genauigkeit von Kriechparametern. Deswegen wird in dieser Arbeit sowohl die Genauigkeit der kontinuierlichen Dehnungsmessung als auch die Genauigkeit der sich daraus ergebenden Kriechparameter diskutiert. Als Beispiel dafür, welchen entscheidenden Einfluß die Genauigkeit der zugrundegelegten Kriechparameter auf die Genauigkeit der daraus berechneten Kriechgeschwindigkeiten und Standzeiten hat, sollen hier zwei Arbeiten zitiert werden:

Laßmann /8/ hat Standzeiten von Hüllrohren unter Außen- druck und isothermen Bedingungen berechnet. Er hat gezeigt, daß Werkstoffunsicherheiten die Standzeit bis um einen Faktor 10 verfälschen können.

Fabian /9/ hat nachgewiesen, daß schon kleine Werkstoff- unsicherheiten Voraussagen der Kriechgeschwindigkeit und der Standzeit von Hüllrohren unter den transienten Ver- hältnissen des Kühlmittelverlustunfalls bei Leichtwasser- reaktoren sehr erschweren.

Zur quantitativen Auswertung wird in dieser Arbeit ein theoretisches Modell entwickelt, das auf den Annahmen der technischen Schalentheorie basiert (vgl. Klingbeil /10/). Es beschreibt die Druck- und Temperaturabhängigkeit der Kriechgeschwindigkeit in einer Schale in allgemeiner Form. Zugrunde liegt das Kriechgesetz von Norton /11/.

Zur Anwendung auf die Auswertung von Innen- oder Außen- druckversuchen an Hüllrohrproben, bei denen der ebene Verzerrungszustand sehr gut erfüllt ist, wird das Scha- lenmodell spezialisiert auf die unendlich-lange zylindri- sche Schale, die den Sonderfall der unendlich-langen kreiszylindrischen Schale enthält.

Es ist daneben auch die Spezialisierung auf beliebig an-

ders geformte Schalen möglich. In einer vergleichenden Studie, in der axiale Effekte im Hüllrohr untersucht wurden, wurde das Schalenmodell zum Beispiel auf die endlich-lange kreiszylindrische Schale angewendet (Fabian et al. /12/).

Die Spezialisierung auf die unendlich-lange zylindrische Schale hat die günstige Konsequenz, daß sich dabei sowohl die Schnittkräfte und -momente als auch die Kriechgeschwindigkeiten in einer geschlossenen Form ergeben. Der Vorteil dieser geschlossenen Form besonders gegenüber numerischen Verfahren, zeigt sich bei der Auswertung der kontinuierlichen Dehnungsmessung nach dem in dieser Arbeit entwickelten Verfahren:

Nach einer zeitlichen Integration der Kriechgeschwindigkeiten liegt der zeitliche Verlauf der Verformung des Hüllrohrquerschnitts geschlossen in Abhängigkeit von den Kriechparametern des Norton'schen Gesetzes vor. Eine Anpassung dieses theoretischen Verlaufs an den kontinuierlich gemessenen zeitlichen Verlauf der Hüllrohrgeometrie nach der Gauß'schen Methode der kleinsten Fehlerquadrate, die die geschlossene Form voraussetzt, ermöglicht schon die Angabe von Kriechparametern aus jeder einzelnen gemessenen Kriechkurve. Das in der Literatur übliche Verfahren zur Kriechparametermessung geht von der charakteristischen Spannungsabhängigkeit der Kriechgeschwindigkeit aus. Dabei sind zur Kriechparameterbestimmung mehrere, unter verschiedener Druckbelastung gewonnene Kriechkurven notwendig (vgl. Schäfer /13/, Böhm /14/).

Der Formalismus der Ausgleichsrechnung nach der Gauß'schen Methode liefert außerdem noch die Vertrauensgrenzen der Kriechparameter. Auf die Bedeutung der Fehler von Kriechparametern für Auslegungsrechnungen von Brennstabhüllrohren wurde bereits hingewiesen.

2. Schalenmodell

Ziel dieses Kapitels ist es, ein Modell zu entwickeln, das die Kriecheigenschaften eines Brennstabhüllrohres unter den Druck- und Temperaturbedingungen beschreibt, die in einem schnellen natriumgekühlten Brutreaktor herrschen. Die wesentlichen Annahmen, die dem Schalenmodell zugrunde liegen, sind

- Linearisierung der Spannungen und der Verzerrungen über die Schalenwand,
- Behandlung des Brennstabhüllrohres als eine unendlich lang ausgedehnte zylindrische Schale,
- Idealisierung des Rohrquerschnitts zu einer doppelt-symmetrischen ovalen Kontur und
- Beschränkung auf kreisförmige oder nur schwach ovale Konturen.

Als Ergebnis dieses Schalenmodells liegt ein Satz von Gleichungen vor, der für isotherme Verhältnisse sowohl für Innendruck als auch für Außendruckbelastung den zeitlichen Verlauf des Verformungsvorgangs einer Rohrprobe in analytischer Form beschreibt.

2.1 Theorie für das Kriechen von Schalen

In diesem Abschnitt wird eine Theorie für das Kriechen von Schalen entwickelt, die als Ergebnis die Gleichgewichtsbedingungen für die Schnittgrößen der Schale, die Kriechgesetze der Schale (d. h. die Abhängigkeit der Verzerrungsgeschwindigkeit von den Schnittgrößen) und die Verschiebungsgeschwindigkeits-Verzerrungsgeschwindigkeits-Beziehungen der Schale enthält.

Diese Gleichungen bilden ein System partieller Differentialgleichungen, das das Problem des Kriechens von Schalen vollständig beschreibt.

2.1.1 Tensorielle Formulierung der Kontinuumsmechanik

Die Schalentheorie wird im Folgenden im Calcul der Tensorrechnung entwickelt. Dazu werden hier summarisch die Grundlagen zusammengestellt. Für eine genaue Ableitung der tensoriellen Behandlung der Kontinuumsmechanik wird auf Lehrbücher verwiesen (vgl. Klingbeil /10/, Green, Zerna /15/).

Es sei \vec{r} der Ortsvektor, \vec{g}_i und \vec{g}^i die ko- bzw. kontravarianten Basisvektoren in dem krummlinigen Referenzkoordinatensystem θ^i ($i = 1, 2, 3$) im unverformten Kontinuum.

Die kovariante Basis berechnet sich aus

$$\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta^i} = \vec{r}_{,i} . \quad (2.1.1.1)$$

Das Komma soll partielle Differentiation andeuten. Die kontravariante Basis ergibt sich aus

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \delta_i^j . \quad (2.1.1.2)$$

Der Metriktensor wird durch Skalarprodukte von Basisvektoren gebildet

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j , \\ g^{ij} &= \vec{g}^i \cdot \vec{g}^j . \end{aligned} \quad (2.1.1.3)$$

Auf Grund einer Krafteinwirkung erleidet jeder Massenpunkt eine Verschiebung

$$\vec{u} = u_i \vec{g}^i = u^i \vec{g}_i \quad (2.1.1.4)$$

Der daraus resultierende Verzerrungstensor ist

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} (\vec{g}_i \cdot \vec{u}_{,j} + \vec{g}_j \cdot \vec{u}_{,i} + \vec{u}_{,i} \cdot \vec{u}_{,j}) , \\ \frac{1}{2} (u_{i|j} + u_{j|i} + u_{k|i} u^k_{|j}) . \end{cases} \quad (2.1.1.5)$$

Bei genügend kleinen Verschiebungen sind die jeweils letzten Terme in (2.1.1.5) vernachlässigbar:

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} (\vec{g}_i \cdot \vec{u}_{,j} + \vec{g}_j \cdot \vec{u}_{,i}) , \\ \frac{1}{2} (u_{i|j} + u_{j|i}) . \end{cases} \quad (2.1.1.5)'$$

Der senkrechte Strich in (2.1.1.5) und (2.1.1.5)' soll kovariante Differentiation andeuten.

Bei der Behandlung von Kriechprozessen wird der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit gebraucht. Differentiation von (2.1.1.5)' nach der Zeit ergibt

$$\dot{\gamma}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} (\vec{g}_i \cdot \dot{\vec{u}}_{,j} + \vec{g}_j \cdot \dot{\vec{u}}_{,i}) , \\ \frac{1}{2} (\dot{u}_{i|j} + \dot{u}_{j|i}) . \end{cases} \quad (2.1.1.6)$$

Schneidet man das verformte Kontinuum längs einer Fläche auf, die durch den Normaleneinheitsvektor

$$\vec{n} = n^i \vec{G}_i = n_i \vec{G}^i \quad (2.1.1.7)$$

charakterisiert werden soll, dann wirkt der Spannungsvektor \vec{t} auf der Schnittfläche

$$\vec{t} = \tau^{ij} n_i \vec{G}_j . \quad (2.1.1.8)$$

τ^{ij} sind dabei die kontravarianten Komponenten des Spannungstensors. Zur Unterscheidung von den Basisvektoren \vec{g}_i und \vec{g}^i im unverformten System werden hier im verformten System die Basisvektoren mit \vec{G}_i und \vec{G}^i bezeichnet. In einem Kontinuum, in dem die Volumenkraft \vec{P} wirkt, unterliegt der Spannungstensor folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

$$\tau^{ij} = \tau^{ji} \quad (\text{Symmetrie}) , \quad (2.1.1.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T}^i{}_{,i} + \vec{P} \sqrt{G} = 0 , \\ \text{mit } \vec{T}^i = \tau^{ij} \sqrt{G} \vec{G}_j , \quad G = \det(\vec{G}_i \cdot \vec{G}_j) , \quad (2.1.1.10) \\ \tau^{ij} \parallel_i + P^j = 0 . \end{array} \right.$$

Der senkrechte Doppelstrich in (2.1.1.10) soll kovariante Differentiation im verformten Kontinuum andeuten.

Bei genügend kleinen Verschiebungen \vec{u} können die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten Kontinuum aufgestellt werden. In (2.1.1.7), (2.1.1.8) und (2.1.1.10) sind dabei die Basisvektoren im unverformten System einzusetzen, in (2.1.1.10) ist die kovariante Differentiation im unverformten System auszuführen:

$$\vec{n} = n^i \vec{g}_i = n_i \vec{g}^i , \quad (2.1.1.7)'$$

$$\vec{t} = \tau^{ij} n_i \vec{g}_j , \quad (2.1.1.8)'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T}^i{}_{,i} + \vec{P} \sqrt{g} = 0 , \\ \text{mit } \vec{T}^i = \tau^{ij} \sqrt{g} \vec{g}_j , \quad g = \det(\vec{g}_j \cdot \vec{g}_j) , \quad (2.1.1.10)' \\ \tau^{ij} |_{,i} + P^j = 0 . \end{array} \right.$$

2.1.2 Kriechgesetz

In dieser Arbeit wird vorausgesetzt, daß das Norton'sche Kriechgesetz gilt. Es beruht auf der Erfahrung, daß bei Kriechexperimenten im einaxialen Spannungszustand die Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ von der n-ten Potenz der Spannung σ abhängt (vgl. Norton /11/, Odqvist /16/, Rabotnov /17/).

$$\dot{\epsilon} = k \sigma^n \quad (2.1.2.1)$$

Dieser Ansatz gilt im weiten Rahmen für das Sekundärkriechen bei vielen metallischen Werkstoffen.

Um dieses Kriechgesetz auch auf mehraxiale Spannungszustände ausdehnen zu können, müssen zusätzliche Annahmen gemacht werden, die allerdings in hohem Maße spekulativ sein müssen, da experimentelle Grundlagen fehlen. In dieser Arbeit soll den Annahmen von Odqvist (vgl. /16/, Invariantentheorie) gefolgt werden. Es soll gelten:

1. Die Kriechverformung ändert das Volumen nicht. Bei hinreichend kleinen Verzerrungsgeschwindigkeitskomponenten $\dot{\gamma}_{ij}$ bedeutet dies:

$$g^{ij} \dot{\gamma}_{ij} = 0 . \quad (2.1.2.2)$$

2. Ein überlagerter hydrostatischer Druck beeinflusst nicht die Kriechgeschwindigkeit, die damit nicht von dem Spannungstensor τ_{ij} , sondern vom Spannungsdeviator $o\tau_{ij}$ abhängt:

$$o\tau_{ij} = \tau_{ij} - \frac{1}{3} g_{ij} \tau_k^k . \quad (2.1.2.3)$$

3. Die Abhängigkeit der Kriechgeschwindigkeit vom Spannungsdeviator ist tensoriell linear:

$$\dot{\gamma}_{ij} = f \cdot o\tau_{ij} . \quad (2.1.2.4)$$

4. Der Proportionalitätsfaktor f hängt ausschließlich von der zweiten Invariante I_2 des Spannungsdeviators ab:

$$I_2 = g^{jk} g^{li} \sigma_{ij} \sigma_{kl} , \quad (2.1.2.5)$$

$$\dot{\gamma}_{ij} = f(I_2) \cdot \sigma_{ij} . \quad (2.1.2.6)$$

Fordert man, daß für den Spezialfall des einaxialen Spannungszustandes das Norton-Gesetz (2.1.2.1) gilt, dann erhält man mit

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{3}{2} k \left(\frac{3}{2} I_2\right)^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{ij} \quad (2.1.2.7)$$

das Kriechgesetz für den mehraxialen Spannungszustand.

Das Kriechgesetz läßt sich auch umkehren. Bezeichnet J_2 die zweite Invariante des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors $\dot{\gamma}_{ij}$:

$$J_2 = g^{jk} g^{li} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{kl} , \quad (2.1.2.8)$$

dann gilt

$$\sigma_{ij} = \frac{3}{2} k^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{2}{3} J_2\right)^{-\frac{n-1}{2n}} \dot{\gamma}_{ij} . \quad (2.1.2.9)$$

Das Kriechgesetz (2.1.2.7) läßt sich aus einem Potential W_s herleiten (siehe Malmberg /18/):

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial W_s}{\partial \sigma_{ij}} . \quad (2.1.2.10)$$

Bildet man

$$W_e = \sigma_{ij} \dot{\gamma}_{ij} - W_s , \quad (2.1.2.11)$$

so erkennt man, daß auch die Umkehrung des Kriechgesetzes (2.1.2.9) aus einem Potential W_e abgeleitet werden kann:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W_e}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \quad (2.1.2.12)$$

Die Potentiale W_s und W_e lauten:

$$W_s = \frac{k}{n+1} \left(\frac{3}{2} I_2 \right)^{\frac{n+1}{2}}, \quad (2.1.2.13)$$

$$W_e = \frac{n}{n+1} k^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{2}{3} J_2 \right)^{\frac{n+1}{2n}}. \quad (2.1.2.14)$$

2.1.3 Variationsprinzipien

Einige Variationsprinzipien für den kriechenden Körper hat Malmberg zusammengestellt /18/. An dieser Stelle sollen zwei Prinzipien anschaulich hergeleitet werden, nach einer Methode, die Klingbeil für die Elastizitätstheorie angibt /10/.

Diese formale Behandlung der stationären Verzerrungsgeschwindigkeit beim Kriechen analog der statischen elastischen Verzerrung nennt Odqvist /16/ die Hoff'sche Analogie. Sie findet in der Kriechmechanik allgemeine Anwendung.

An jedem Volumenelement dV des Kontinuums wird eine virtuelle Verschiebungsgeschwindigkeit $\delta \vec{v}$ angebracht. Dabei wird gegen die äußeren Kräfte, die Volumenkraft \vec{P} und die Flächenlast \vec{q} auf die Begrenzungsfläche, folgende virtuelle Leistung δN aufgebracht.

$$\delta N = \iiint_V \vec{P} \delta \vec{v} dV + \iint_{O_V} \vec{q} \delta \vec{v} dF. \quad (2.1.3.1)$$

Der erste Term in (2.1.3.1) läßt sich mit der Gleichgewichtsbedingung (2.1.1.10)' und der Beziehung

$$dV = \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3$$

umformen:

$$\delta N = - \iiint_V \bar{T}^i{}_{,j} \delta \vec{v} \, d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 + \iint_{O_V} \bar{q} \delta \vec{v} \, dF. \quad (2.1.3.2)$$

Berücksichtigung der Identität

$$(\bar{T}^i \delta \vec{v})_{,i} = \bar{T}^i{}_{,i} \delta \vec{v} + \bar{T}^i \delta \vec{v}_{,i} \quad (2.1.3.3)$$

ergibt

$$\begin{aligned} \delta N &= \iiint_V \bar{T}^i \delta \vec{v}_{,i} \, d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ &- \iiint_V (\bar{T}^i \delta \vec{v})_{,i} \, d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 + \iint_{O_V} \bar{q} \delta \vec{v} \, dF. \end{aligned} \quad (2.1.3.4)$$

Der zweite Summand in (2.1.3.4) wird nach dem Gauß'schen Integralsatz in ein Oberflächenintegral umgewandelt:

$$\iiint_V (\bar{T}^i \delta \vec{v})_{,i} \, d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \iint_{O_V} \bar{t} \delta \vec{v} \, dF \quad (2.1.3.5)$$

und tilgt sich gegen den letzten Term in (2.1.3.4) wegen der Randbedingung $\bar{t} = \bar{q}$.

Es ergibt sich

$$\delta N = \iiint_V \bar{T}^i \delta \vec{v}_{,i} \, d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \quad (2.1.3.6)$$

und in Komponentenschreibweise

$$\delta N = \iiint_V \tau^{ij} \delta v_{,ij} \, dV. \quad (2.1.3.7)$$

Wegen Symmetrie des Spannungstensors (vgl. (2.1.1.8)) kann man schreiben

$$\delta N = \iiint_V \tau^{ij} \delta \dot{\gamma}_{ij} \, dV. \quad (2.1.3.8)$$

Um das Problem des kriechenden Kontinuums als Variationsproblem lösen zu können, muß gezeigt werden, daß δN wirklich eine Variation ist.

Wegen Volumenkonstanz ist

$$\tau^{ij} \delta \dot{\gamma}_{ij} = \circ \tau^{ij} \delta \dot{\gamma}_{ij} . \quad (2.1.3.9)$$

Mit (2.1.2.12), (2.1.3.8) und (2.1.3.9) ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta N &= \iiint_V \frac{\partial W_e}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \delta \dot{\gamma}_{ij} dV = \iiint_V \delta W_e dV \\ &= \delta \left[\iiint_V W_e dV \right] \end{aligned} \quad (2.1.3.10)$$

und damit, daß δN eine Variation ist. Man bezeichnet

$$\Pi_i = \iiint_V W_e dV \quad (2.1.3.11)$$

als innere Verformungsleistung. Liegt ein konservatives System vor, dann lassen sich auch die äußeren Kräfte aus einem Potential herleiten

$$\delta N = - \delta \Pi_\alpha . \quad (2.1.3.12)$$

Aus (2.1.3.10), (2.1.3.11) und (2.1.3.12) folgt

$$\delta \Pi = \delta (\Pi_i + \Pi_\alpha) = 0 . \quad (2.1.3.13)$$

Die Variation der Verformungsleistung Π gegen innere und äußere Kräfte ist Null. Die Verzerrungsgeschwindigkeiten nehmen die Größe an, bei der die Gesamtverformungsleistung ihr Minimum hat.

Mit (2.1.3.13) steht ein Variationsprinzip zur Behandlung des kriechenden Kontinuums zur Verfügung.

Die Verformungsleistung Π enthält als Variable nur die Verschiebungsgeschwindigkeitskomponenten und wird deswegen bezüglich der Verschiebungsgeschwindigkeiten variiert. Nach Malmberg /18/ ist für die praktische Verwendbarkeit ein anderes Variationsprinzip geeigneter. Setzt man (2.1.2.11) in (2.1.3.11) ein, so erhält man für (2.1.3.13)

$$\pi = \iiint_V \left[\tau^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - W_s \right] dV + \pi_a. \quad (2.1.3.14)$$

Wegen Volumenkonstanz gilt

$$\begin{cases} \pi = \iiint_V \left[\tau^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - W_s \right] dV + \pi_a, \\ \delta\pi = 0. \end{cases} \quad (2.1.3.15)$$

Das Variationsprinzip (2.1.3.15) ist in dieser Arbeit Grundlage der weiteren Entwicklung der Theorie des Kriechens von Schalen. Die Variation geschieht bezüglich der Verschiebungsgeschwindigkeiten und der Spannungen.

2.1.4 Annahmen der Schalentheorie

Das Variationsprinzip (2.1.3.15) wird in diesem Abschnitt auf Schalen spezialisiert. Die Bezeichnung der Schalen-
größen wird von Klingbeil übernommen /10/.

Die Koordinaten der Schalenmittelfläche sind $\{\theta^1, \theta^2\}$.
Zunächst werden die geometrischen Größen des Schalenraumes auf die geometrischen Größen der Schalenmittelfläche zurückgeführt.

Der Ortsvektor zur Schalenmittelfläche ist $\bar{L} \vec{r}(\theta^1, \theta^2)$,
wobei \bar{L} eine charakteristische Länge ist, die den Ortsvektor dimensionslos macht.

Senkrecht auf der Schalenmittelfläche steht der Einheitsvektor $\vec{a}_3(\theta^1, \theta^2)$. Der Abstand eines Schalenpunktes von der Mittelfläche ist x_3 . Der Ortsvektor eines Punktes im Schalenraum ist dann

$$\vec{R} = \bar{L} \vec{r} + x_3 \vec{a}_3 = \bar{L} \left(\vec{r} + \frac{x_3}{\bar{L}} \vec{a}_3 \right). \quad (2.1.4.1)$$

Die dritte Koordinate wird

$$\theta^3 \equiv \theta = \frac{x_3}{h} \quad (2.1.4.2)$$

wobei h die Wandstärke der Schale ist. Die dimensionslose Wandstärke, bezogen auf die charakteristische Länge \bar{L} , ist

$$\lambda = \frac{h}{\bar{L}} \quad (2.1.4.3)$$

Damit wird (2.1.4.1) zu

$$\vec{R} = \bar{L} (\vec{r} + \lambda \theta \vec{a}_3) \quad (2.1.4.4)$$

Auf Grund der Gleichung (2.1.4.4) wird die Basis \vec{g}_i des Schalenraumes auf die Basis \vec{a}_i der Schalenmittelfläche

$$\begin{cases} \vec{g}_\alpha = \bar{L} (\vec{a}_\alpha - \lambda \theta b_\alpha^\lambda \vec{a}_\lambda), \\ \vec{g}_3 = \lambda \bar{L} \vec{a}_3 \end{cases} \quad (2.1.4.5)$$

und der Metriktensor des Schalenraums auf den Metriktensor der Schalenmittelfläche zurückgeführt:

$$\left\{ \begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \bar{L}^2 (a_{\alpha\beta} - 2\lambda\theta b_{\alpha\beta} + \lambda^2\theta^2 b_{\alpha\lambda} b_{\beta}^\lambda), \\ g_{\alpha 3} &= 0, \\ g_{33} &= \bar{L}^2 \lambda^2, \\ g^{\alpha\beta} &= \frac{1}{\bar{L}^2} (a^{\alpha\beta} + 2\lambda\theta b^{\alpha\beta} + 3\lambda^2\theta^2 b_\lambda^\alpha b^{\lambda\beta} + \dots), \\ g^{\alpha 3} &= 0, \\ g^{33} &= \frac{1}{\bar{L}^2 \lambda^2}, \\ \sqrt{\frac{g}{a}} &= \sqrt{\frac{\det(g_{ij})}{\det(a_{\alpha\beta})}} \\ &= \bar{L}^3 \lambda \left(1 - \lambda\theta b_\mu^\mu + \lambda^2\theta^2 \frac{\det(b_{\alpha\beta})}{\det(a_{\alpha\beta})} \right). \end{aligned} \right. \quad (2.1.4.6)$$

Hierbei sind $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$ die Komponenten des Metriktensors der Schalenmittelfläche, $b_{\alpha\beta}$, b_{α}^{β} , $b^{\alpha\beta}$ die Komponenten des Krümmungstensors der Schalenmittelfläche. Eine Herleitung von (2.1.4.5) und (2.1.4.6) gibt Klingbeil /10/.

Für den Verschiebungsgeschwindigkeitsvektor \vec{v} wird, wie in der Schalentheorie üblich, angesetzt:

$$\vec{v} = L \left[(v_{\alpha} + \lambda \theta w_{\alpha}) \vec{a}^{\alpha} + w \vec{a}_3 \right]. \quad (2.1.4.7)$$

Nach (2.1.1.6) folgt für den Verzerrungsgeschwindigkeits-tensor:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\gamma}_{\alpha\beta} &= L^2 \left\{ \begin{aligned} &\alpha_{\alpha\beta} \\ &+ \lambda \theta \left[\omega_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (b_{\alpha}^{\lambda} v_{\beta|\lambda} + b_{\beta}^{\lambda} v_{\alpha|\lambda}) - b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} w \right] \\ &- \frac{1}{2} \lambda^2 \theta^2 (b_{\alpha}^{\lambda} w_{\beta|\lambda} + b_{\beta}^{\lambda} w_{\alpha|\lambda}) \end{aligned} \right\}, \\ \dot{\gamma}_{\alpha 3} &= \frac{\lambda L^2}{2} (w_{\alpha} + w_{|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} v_{\lambda}), \\ \dot{\gamma}_{33} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (2.1.4.8)$$

In (2.1.4.8) wurden als Abkürzungen zwei Flächentensoren eingesetzt:

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} w, \quad (2.1.4.9)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (w_{\alpha|\beta} + w_{\beta|\alpha}). \quad (2.1.4.10)$$

Zur Spezialisierung des Variationsprinzips (2.1.3.15) auf Schalen ist zusätzlich ein Ansatz für die Spannungen nötig. In dieser Arbeit sollen die Spannungen aus den Schnittkräften und Schnittmomenten der Schale abgeleitet werden.

Nach Klingbeil /10/ wirkt auf einen Schnitt $\theta^\alpha = \text{const}$ die Schnittkraft

$$\vec{N}^\alpha = n^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta + q^\alpha \vec{a}_3 \quad (2.1.4.11)$$

und das Schnittmoment

$$\vec{M}^\alpha = m^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta \quad (2.1.4.12)$$

Dabei berechnen sich der Normalkrafttensor $n^{\alpha\beta}$, der Querkraftvektor q^α und der Momententensor $m^{\alpha\beta}$ nach folgenden Gleichungen:

$$\begin{cases} n^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{g}{a}} (\tau^{\alpha\beta} - \lambda\theta b_\lambda^\alpha \tau^{\lambda\beta}) d\theta, \\ m^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{g}{a}} (\tau^{\alpha\beta} - \lambda\theta b_\lambda^\alpha \tau^{\lambda\beta}) \lambda\theta d\theta, \\ q^\alpha = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{g}{a}} \tau^{\alpha 3} d\theta. \end{cases} \quad (2.1.4.13)$$

Die Spannungen $\tau^{\alpha\beta}$ und $\tau^{\alpha 3}$ sind nun wie die geometrischen- und Verschiebungsgrößen als Potenzreihe in $\lambda\theta$ darstellbar:

$$\begin{cases} \tau^{\alpha\beta} = A_0^{\alpha\beta} + \lambda\theta A_1^{\alpha\beta} + \lambda^2\theta^2 A_2^{\alpha\beta} + \dots, \\ \tau^{\alpha 3} = B_0^{\alpha\beta} + \lambda\theta B_1^{\alpha\beta} + \lambda^2\theta^2 B_2^{\alpha\beta} + \dots \end{cases} \quad (2.1.4.14)$$

Bei Vorgabe von $n^{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$ und q^α sind von den Koeffizienten der Potenzreihe nur $A_0^{\alpha\beta}$, $A_1^{\alpha\beta}$ und $B_0^{\alpha\beta}$ zu berechnen.

Dies bedeutet eine lineare Verteilung der Normalspannungen $\tau^{\alpha\beta}$ und eine konstante Verteilung der Schubspannungen $\tau^{\alpha 3}$ über die Schalenwand.

Die Spannungen τ^{33} lassen sich nicht durch Schalenschnittgrößen ausdrücken. Sie werden hier Null gesetzt, da der

Verschiebungsansatz (2.1.4.7) auch keine Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\gamma}_{33}$ zuläßt:

$$\tau^{33} = 0 . \quad (2.1.4.14)'$$

Eine andere mögliche Verteilung der Normalspannungen ist durch das Sandwichmodell gegeben (vgl. Hoff /19/, Laßmann /8/, Malmberg /18/). Hierbei werden die Normalspannungen in zwei Stufen, also quasilinear, über die Schalenwand verteilt.

Mit den geometrischen Beziehungen (2.1.4.6), dem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor (2.1.4.8) und dem Spannungstensor (2.1.4.14) wird das Variationsprinzip (2.1.3.15) nun für Schalenverhältnisse spezialisiert. Dabei sollen als äußere Kräfte nur Druckbelastungen auf die Mantelfläche zugelassen werden. Vereinfachend wird angenommen, daß die Flächenbelastung \vec{q} infolge eines hydrostatischen Druckes p an der Mittelfläche der Schale angreift:

$$\vec{q} = \frac{1}{L} p \vec{a}_3 . \quad (2.1.4.15)$$

Das Potential dieser äußeren Flächenlast ist

$$\Pi_a = - \iint_F \vec{q} \vec{v} dF = - \iint_F p w dF \quad (2.1.4.16)$$

nach (2.1.4.7).

Die innere Verformungsleistung stellt sich als Volumenintegral dar. Nach (2.1.3.15) gilt

$$\Pi_i = \iiint_V \left[\tau^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - W_s \right] dV. \quad (2.1.4.17)$$

Der Integrand dieses Volumenintegrals läßt sich mit (2.1.4.6), (2.1.4.8) und (2.1.4.14) als Potenzreihe von $\lambda\theta$ darstellen. Es ist das Wesen der Schalentheorie, aus einem dreidimensionalen Problem durch Integration über die Wandstärke ein zweidimensionales Problem zu machen. Diese

Integration über die Wandstärke und damit hinsichtlich θ läßt sich nun ausführen. Wegen

$$\begin{aligned} dV &= \sqrt{g} \, d\theta^1 d\theta^2 d\theta, \\ dF &= \sqrt{a} \, d\theta^1 d\theta^2 \end{aligned} \quad (2.1.4.18)$$

gilt

$$dV = \sqrt{\frac{g}{a}} \, d\theta \, dF. \quad (2.1.4.19)$$

Damit wird (2.1.4.17) zu

$$\Pi_i = \iint_F \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{g}{a}} \left(\tau^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - W_s \right) d\theta \right] dF. \quad (2.1.4.20)$$

Das Integral über θ stellt sich als Integral über eine Potenzreihe von $\lambda\theta$ dar und wird ausgeführt:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(\overset{(0)}{I} + \lambda\theta \overset{(1)}{I} + \lambda^2\theta^2 \overset{(2)}{I} + \dots \right) d\theta \\ = \overset{(0)}{I} + \frac{\lambda^2}{12} \overset{(2)}{I} + \frac{\lambda^4}{80} \overset{(4)}{I} + \dots \end{aligned} \quad (2.1.4.21)$$

An dieser Stelle werden zu den Annahmen in den Ansätzen für die Verschiebungsgeschwindigkeiten und für die Spannungen drei weitere Annahmen gemacht, die zur endgültigen Formulierung eines Variationsprinzips für das Kriechen von Schalen führen. Diese Annahmen stimmen mit denjenigen überein, die Klingbeil /10/ für elastische Schalen trifft.

- (I) Die Schalendicke ist so klein, daß Glieder mit $\frac{\lambda^4}{80}$ unterdrückt werden können. Daraus folgt für die innere Verformungsleistung:

$$\Pi_i = \iint_F \left(\overset{(0)}{I} + \frac{\lambda^2}{12} \overset{(2)}{I} \right) dF \quad (2.1.4.22)$$

- (II) Die Krümmung der Schale ist so schwach, daß der Krümmungstensor in $\overset{(2)}{I}$ vernachlässigt und damit gleich Null gesetzt werden kann.

(III) Die Schubverzerrungen $\dot{\gamma}_{\alpha 3}$ werden vernachlässigt. Diese Annahme führt wegen (2.1.4.8) zu den Verträglichkeitsbedingungen

$$w_{\alpha} + w|_{\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} v_{\lambda} = 0 . \quad (2.1.4.23)$$

Damit werden gleichzeitig die Schubspannungen $\tau^{\alpha 3}$ vernachlässigt.

Die Annahme (II) findet nicht nur bei der Berechnung der inneren Verformungsleistung, sondern auch bei der Berechnung der Schnittgrößen aus den Spannungen nach (2.1.4.13), (2.1.4.14) Anwendung. Es ergibt sich hier als Resultat für die Normalspannungen:

$$\tau^{\alpha\beta} = \frac{1}{L^3 \lambda} \left(n^{\alpha\beta} + \lambda \theta \frac{12}{\lambda^2} m^{\alpha\beta} \right). \quad (2.1.4.24)$$

Für die innere Verformungsleistung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Pi_i = \iint_F & \left[n^{\alpha\beta} \alpha_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} \right. \\ & - \frac{k}{n+1} \frac{1}{h^n} \left\{ (X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta})^{\frac{n+1}{2}} + \frac{n+1}{2} \frac{12}{\lambda^2} (X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta})^{\frac{n-3}{2}} \right. \\ & \left. \left. \cdot \left((X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta})(X_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta}) + (n-1)(X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta})^2 \right) \right\} \right] dF. \quad (2.1.4.25) \end{aligned}$$

Dabei wurde der Tensor

$$X_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{3}{2} a_{\beta\gamma} a_{\delta\alpha} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta} \quad (2.1.4.26)$$

als Abkürzung eingeführt.

Das Variationsprinzip (2.1.3.15) führt damit für Schalen auf ein Variationsproblem der Form:

$$\iint L(n^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}, v_{\alpha}, w_{\alpha}, w) dF \stackrel{!}{=} \text{Min} \quad (2.1.4.27)$$

Die Verschiebungsgeschwindigkeitskomponenten v_α , w_α und w sind nicht voneinander unabhängig, sondern durch die Verträglichkeitsbedingungen (2.1.4.23) miteinander verknüpft. Diese Nebenbedingungen werden nach der Methode der Lagrange-Multiplikatoren berücksichtigt. Hierbei werden die Nebenbedingungen (2.1.4.23) mit geeigneten Multiplikatoren λ^α in die Lagrange-Funktion L , den Integranden der Verformungsleistung, eingeführt. Damit lautet die Lagrange-funktion:

$$\begin{aligned}
 L & (n^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}, \lambda^\alpha, v_\alpha, w_\alpha, w) \\
 &= n^{\alpha\beta} \alpha_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} \\
 &- \frac{k}{n+1} \cdot \frac{1}{h^n} \left\{ (X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta})^{\frac{n+1}{2}} \right. \\
 &+ \frac{n+1}{2} \frac{12}{\lambda^2} (X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta})^{\frac{n-3}{2}} \\
 &\cdot \left. \left[(X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta})(X_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta}) + (n-1)(X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta})^2 \right] \right\} \\
 &- \rho w + \lambda^\alpha (w_\alpha + w|_\alpha + b_\alpha^\lambda v_\lambda) \quad (2.1.4.28)
 \end{aligned}$$

und das Variationsprinzip:

$$\delta \left[\iint_F L (n^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}, \lambda^\alpha, v_\alpha, w_\alpha, w) dF \right] = 0. \quad (2.1.4.29)$$

Die Variation geschieht bezüglich der Schnittgrößen $n^{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$, der Lagrange-Multiplikatoren λ^α und der Verschiebungsgeschwindigkeitskomponenten v_α , w_α und w .

2.1.5 Grundgleichungen des Kriechens von Schalen

Die Grundgleichungen für das Kriechen von Schalen sind die Euler-Lagrange'schen Differentialgleichungen des Variationsproblems (2.1.4.29). Die Variationsgleichungen bezüglich der Verschiebungsgeschwindigkeitskomponenten lauten:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial v_{\epsilon|\vartheta}} \right)_{|\vartheta} - \frac{\partial L}{\partial v_{\epsilon}} = n^{\epsilon\vartheta} |_{\vartheta} - b_{\vartheta}^{\epsilon} \lambda^{\vartheta} = 0, \quad (2.1.5.1)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial w_{\epsilon|\vartheta}} \right)_{|\vartheta} - \frac{\partial L}{\partial w_{\epsilon}} = m^{\epsilon\vartheta} |_{\vartheta} - \lambda^{\epsilon} = 0, \quad (2.1.5.2)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial w|_{\vartheta}} \right)_{|\vartheta} - \frac{\partial L}{\partial w} = \lambda^{\vartheta} |_{\vartheta} + n^{\epsilon\vartheta} b_{\epsilon\vartheta} + p = 0. \quad (2.1.5.3)$$

Die Gleichungen (2.1.5.1), (2.1.5.2), (2.1.5.3) sind die Gleichgewichtsbedingungen für die Schnittgrößen der Schale. Die Lagrange-Multiplikatoren λ^{α} spielen die Rolle der wegen Annahme (III) vernachlässigten Querkräfte. Die Variation bezüglich der Lagrange-Multiplikatoren ergibt die schon bekannten Verträglichkeitsbedingungen:

$$- \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda^{\epsilon|\vartheta}} \right)_{|\vartheta} + \frac{\partial L}{\partial \lambda^{\epsilon}} = w_{\epsilon} + w|_{\epsilon} + b_{\epsilon}^{\lambda} v_{\lambda} = 0. \quad (2.1.5.4)$$

Die Variation bezüglich $n^{\epsilon\vartheta}$ und $m^{\epsilon\vartheta}$ ergibt die Kriechgesetze der Schale:

$$\begin{aligned} 0 &= - \left(\frac{\partial L}{\partial n^{\epsilon\vartheta}} \right)_{|\mu} + \frac{\partial L}{\partial n^{\epsilon\vartheta}} \\ &= \alpha_{\epsilon\vartheta} - \frac{k}{h^n} \left[\left\{ \left(X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta} \right)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{12}{\lambda^2} \frac{n-1}{2} \left(X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta} \right)^{\frac{n-5}{2}} \right. \right. \\ &\quad \cdot \left. \left. \left(\left(X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta} \right) \left(X_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta} \right) + (n-3) \left(X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta} \right)^2 \right) \right\} X_{\epsilon\vartheta\gamma\delta} n^{\gamma\delta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{\lambda^2} (n-1) \left(X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta} \right) X_{\epsilon\vartheta\gamma\delta} m^{\gamma\delta} \right], \quad (2.1.5.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= - \left(\frac{\partial L}{\partial m^{\epsilon\delta}} \right) \Big|_{\mu} + \frac{\partial L}{\partial m^{\epsilon\delta}} \\
 &= \omega_{\epsilon\delta} - \frac{k}{h^n} \frac{12}{\lambda^2} \left[(X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta})^{\frac{n-1}{2}} X_{\epsilon\delta\gamma\delta} m^{\gamma\delta} \right. \\
 &\quad \left. + (n-1) (X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta})^{\frac{n-3}{2}} (X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta}) X_{\epsilon\delta\gamma\delta} n^{\gamma\delta} \right]. \quad (2.1.5.6)
 \end{aligned}$$

Durch die Gleichungen (2.1.5.1) bis (2.1.5.6) wird das Kriechen von Schalen vollständig beschrieben.

2.2 Kriechverhalten unendlich-langer zylindrischer Röhre nach der Schalentheorie

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Theorie für das Kriechen von Schalen auf die spezielle Geometrie des unendlich-langen zylindrischen Rohres angewendet.

Als Belastung wird Innen- bzw. Außendruck auf die Mantelfläche des Rohres angenommen.

Es wird die Annahme gemacht, daß der Rohrquerschnitt doppelte Symmetrie (Fig. 2.1) hat. Damit ist der Spezialfall des kreiszylindrischen Rohres in der Untersuchung enthalten, sie läßt darüber hinaus aber Abweichungen von der Kreiszyylinderform zu.

Das Problem der kriechenden Zylinderschale, speziell in der Anwendung auf das Brennstabhüllrohr, wird in verschiedenen Arbeiten behandelt.

Von den Autoren, die das rotationssymmetrische Rohr unter Innendruckbelastung behandeln, sollen hier Guyette /20/ und Laßmann /8/ genannt werden. Sie berechnen das Rohr nicht als Schale, wie es in dieser Arbeit geschieht, sondern gehen vom dreidimensionalen Kontinuum in Zylinderkoordinaten aus, vernachlässigen die axiale und azimutale Abhängigkeit und berechnen numerisch den radialen Verlauf

von Spannungen und Verschiebungen.

Unter Außendruckbelastung wird die Zylinderschale von mehreren Autoren als Sandwich-Modell behandelt: Hoff /19/ kommt zu einer geschlossenen Darstellung des zeitlichen Ovalitätsverlaufs, allerdings unter der Voraussetzung ganzzahliger Kriechexponenten. Laßmann /8/ setzt den Rohrquerschnitt aus einer Anzahl finiter Sandwich-Elemente zusammen und kommt so zu einer numerischen Lösung. Malmberg /18/ geht von Variationsprinzipien für die nichtelastische bzw. elastische, kriechende Schale aus, die er nach dem Ritz'schen Verfahren auswertet. Dabei behandelt er einerseits die Sandwich-Schale, andererseits die Vollwandschale ohne die einschränkende Annahme der linearen Spannungsverteilung in der Schalenwand.

In dieser Arbeit wird ausgenutzt, daß die aus dem Variationsprinzip (2.1.4.28), (2.1.4.29) hervorgegangenen Differentialgleichungen (2.1.5.1) bis (2.1.5.6), spezialisiert auf die doppelt symmetrische, unendlich lange Zylinderschale, vollständig lösbar sind. Dabei wird die Zylinderschale unter Innendruckbelastung und Außendruckbelastung formal gemeinsam behandelt: $\text{sign}(p) = +1$ bedeutet Innendruck, $\text{sign}(p) = -1$ Außendruck.

2.2.1 Formulierung der Schalengleichungen für den unendlich-langen Zylinder

Bezeichnet r den Abstand eines Zylinderflächenpunktes von der Zylinderachse und φ den Umfangswinkel, dann ist durch Vorgabe von $r(\varphi)$ die Zylinderform vorgegeben (Fig. 2.1). Der Umfangswinkel φ und die axiale Koordinate ξ werden als Flächenkoordinaten gewählt:

$$\begin{cases} \theta^1 \equiv \varphi, \\ \theta^2 \equiv \xi. \end{cases} \quad (2.2.1.1)$$

Der Ortsvektor zur Schalenmittelfläche ist dann:

$$\vec{r} = \frac{1}{L} \left(r \cos \varphi \vec{e}_1 + r \sin \varphi \vec{e}_2 + z \vec{e}_3 \right). \quad (2.2.1.2)$$

Bezeichnet ein Strich die Ableitung nach φ , dann lauten die Basisvektoren der Schalenmittelfläche nach (2.1.1.1):

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = \frac{1}{L} \left((r \cos \varphi)' \vec{e}_1 + (r \sin \varphi)' \vec{e}_2 \right), \\ \vec{a}_2 = \frac{1}{L} \vec{e}_3. \end{cases} \quad (2.2.1.3)$$

Der Metriktensor lautet nach (2.1.1.3):

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{z^2}{L^2}, \\ a_{12} = a_{21} = 0, \\ a_{22} = \frac{1}{L^2}, \\ a^{11} = \frac{L^2}{z^2}, \\ a^{12} = a^{21} = 0, \\ a^{22} = L^2, \\ \sqrt{a} = \frac{z}{L^2}. \end{cases} \quad (2.2.1.4)$$

Dabei wurde als Abkürzung eingeführt:

$$z^2 = r^2 + r'^2. \quad (2.2.1.5)$$

Geometrisch bedeutet z den Normalenabschnitt der Schalenmittelfläche (Fig. 2.1, vgl. Bronstein /21/).

Der Krümmungstensor (vgl. Klingbeil /10/) berechnet sich zu:

$$\begin{cases} b_{11} = -\frac{z^2}{L^2}, \\ b_{12} = b_{21} = b_{22} = 0. \end{cases} \quad (2.2.1.6)$$

Dabei bezeichnet ρ den Krümmungsradius der Zylinderfläche in einem Schnitt $\zeta = \text{const.}$ Die Christoffelsymbole (vgl. Klingbeil /10/), die gebraucht werden, um die kovariante Differentiation auszuführen, ergeben sich zu:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{z'}{z} , \\ \text{alle übrigen } \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0 . \end{cases} \quad (2.2.1.7)$$

Für die tensoriellen Komponenten der Verschiebungsgeschwindigkeit und der Schnittgrößen werden physikalische Komponenten eingeführt.

Wegen (2.1.4.11) gilt:

$$\begin{cases} n^{11} = \frac{\bar{L}^2}{z^2} N_{\varphi} , \\ n^{12} = n^{21} = \frac{\bar{L}^2}{z} N_{\varphi\zeta} , \\ n^{22} = \bar{L}^2 N_{\zeta} . \end{cases} \quad (2.2.1.8)$$

Wegen (2.1.4.12) und (2.1.4.13) gilt:

$$\begin{cases} m^{11} = \frac{\bar{L}}{z^2} M_{\varphi} , \\ m^{12} = m^{21} = \frac{\bar{L}}{z} M_{\varphi\zeta} , \\ m^{22} = \bar{L} M_{\zeta} . \end{cases} \quad (2.2.1.9)$$

Nach (2.1.4.11) ergibt sich für die Querkräfte:

$$\begin{cases} \lambda^1 = \frac{\bar{L}}{z} Q_{\varphi} , \\ \lambda^2 = \bar{L} Q_{\zeta} . \end{cases} \quad (2.2.1.10)$$

Für den Druck ergibt sich nach (2.1.4.15):

$$p = \bar{L} P . \quad (2.2.1.11)$$

Die physikalischen Verschiebungsgeschwindigkeitskomponenten lauten nach (2.1.4.7):

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \frac{z}{L^2} V_{t\varphi}, \\ V_2 = \frac{1}{L^2} V_{t\zeta}, \\ W_1 = \frac{z}{L} W_\varphi, \\ W_2 = \frac{1}{L} W_\zeta, \\ W = \frac{1}{L} V_n. \end{array} \right. \quad (2.2.1.12)$$

Damit ergibt sich nach (2.1.4.9) und (2.1.4.10) für die Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren unter Berücksichtigung der Tatsache, daß Ableitungen nach der axialen Koordinate ζ verschwinden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} = \frac{z^2}{L^2} \left(\frac{V'_{t\varphi}}{z} + \frac{V_n}{\rho} \right), \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2L^2} V'_{t\zeta}, \\ \alpha_{22} = 0, \end{array} \right. \quad (2.2.1.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{11} = \frac{z}{L} W'_\varphi, \\ \omega_{12} = \omega_{21} = \frac{1}{2L} W'_\zeta, \\ \omega_{22} = 0. \end{array} \right. \quad (2.2.1.14)$$

Aus der Tatsache, daß $\alpha_{22} = \omega_{22} = 0$ (ebener Verzerrungszustand), und den Gleichungen (2.1.5.5) und (2.1.5.6) ergibt sich, daß

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{22\gamma\delta} n^{\gamma\delta} = 0, \\ X_{22\gamma\delta} m^{\gamma\delta} = 0. \end{array} \right. \quad (2.2.1.15)$$

Daraus folgt sofort

$$\begin{cases} a_{22} n^{22} &= \frac{1}{2} a_{11} n^{11}, \\ a_{22} m^{22} &= \frac{1}{2} a_{11} m^{11}. \end{cases} \quad (2.2.1.16)$$

Berücksichtigt man (2.2.1.8) und (2.2.1.9), so bedeutet dies

$$\begin{cases} N_{\xi} &= \frac{1}{2} N_{\varphi}, \\ M_{\xi} &= \frac{1}{2} M_{\varphi}. \end{cases} \quad (2.2.1.17)$$

Die axiale Schnittkraft des zylindrischen Rohres ist gerade halb so groß wie die Umfangsschnittkraft. Dieses Ergebnis deckt sich gerade mit den experimentellen Gegebenheiten bei Versuchen mit Rohrproben unter Druckbelastung. Denn hier herrscht wegen Druckbelastung auf den Endstopfen der Rohrprobe auch gerade dieselbe Relation zwischen der axialen und der azimuthalen Schnittkraft. Experimente mit endlich langen Rohrproben unter Druckbelastung sind also auswertbar nach dieser theoretischen Untersuchung unendlich langer Rohre, da in beiden Fällen von gleichen Belastungssystemen ausgegangen wird.

Berücksichtigt man noch, daß im vorliegenden Fall die Koordinatenlinien mit der Hauptkrümmungs- und den Hauptspannungslinien übereinstimmen, und daß damit gilt:

$$N_{\varphi\xi} = M_{\varphi\xi} = 0, \quad (2.2.1.18)$$

dann ergibt sich:

$$\begin{cases} X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta} &= \frac{3}{4} N_{\varphi}^2, \\ X_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta} &= \frac{3}{4} \left(\frac{M_{\varphi}}{L}\right)^2, \\ X_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta} &= \frac{3}{4} N_{\varphi} \frac{M_{\varphi}}{L} \end{cases} \quad (2.2.1.19)$$

und

$$\begin{cases} X_{11\gamma\delta} n^{\gamma\delta} = \frac{3}{4} \frac{z^2}{L^2} N_{\varphi} , \\ X_{11\gamma\delta} m^{\gamma\delta} = \frac{3}{4} \frac{z^2}{L^2} \frac{M_{\varphi}}{L} . \end{cases} \quad (2.2.1.20)$$

Damit stehen alle Größen zur Verfügung, die gebraucht werden, um die Gleichungen für das Kriechen von Schalen für die unendlich-lange zylindrische Schale zu formulieren.

Die Gleichgewichtsbedingungen (2.1.5.1) bis (2.1.5.3) ergeben:

$$N'_{\varphi} + \frac{z}{\rho} Q_{\varphi} = 0, \quad (2.2.1.21)$$

$$M'_{\varphi} - z Q_{\varphi} = 0, \quad (2.2.1.22)$$

$$Q'_{\varphi} - \frac{z}{\rho} N_{\varphi} = -z P. \quad (2.2.1.23)$$

Die Kriechgesetze (2.1.5.5) und (2.1.5.6) ergeben:

$$\frac{V'_{t\varphi}}{z} + \frac{V_n}{\rho} = \text{sign}(N_{\varphi}) \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} k \left\{ \left| \frac{N_{\varphi}}{h} \right|^n + 6n(n-1) \left| \frac{N_{\varphi}}{h} \right|^{n-2} \left| \frac{M_{\varphi}}{h^2} \right|^2 \right\}, \quad (2.2.1.24)$$

$$\frac{W'_{\varphi}}{z} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} \frac{12nk}{h} \left| \frac{N_{\varphi}}{h} \right|^{n-1} \frac{M_{\varphi}}{h^2}. \quad (2.2.1.25)$$

Die Verträglichkeitsbedingungen (2.1.5.4) ergeben:

$$\frac{V'_n}{z} - \frac{V_{t\varphi}}{\rho} = -W_{\varphi}. \quad (2.2.1.26)$$

Damit stehen 6 Gleichungen für die 6 Größen N_{φ} , M_{φ} , Q_{φ} , V_n , $V_{t\varphi}$, W_{φ} zur Verfügung. Das Problem der Kriechverformung zylindrischer Rohre wird durch (2.2.1.21) bis (2.2.1.26) vollständig beschrieben.

2.2.2 Lösung der Schalengleichungen für den unendlich-langen Zylinder

Zunächst sollen die Gleichgewichtsbedingungen (2.2.1.21) bis (2.2.1.23) gelöst werden. Sie stellen ein System linearer Differentialgleichungen für die 3 Größen N_φ , M_φ , Q_φ dar. Hier wird für den Zylinder doppelte Symmetrie angenommen (vgl. Fig. 2.2).

Schneidet man die ovale Kontur unter dem Winkel φ vollständig auf, dann bringen die Schnittgrößen $N_\varphi(\varphi)$ die unter Druck stehende halbe Kontur ins Gleichgewicht, es gilt:

$$2 N_\varphi(\varphi) = 2 P l(\varphi). \quad (2.2.2.1)$$

Auf Grund der geometrischen Bedeutung der Größe z als Normalabschnitt (vgl. Fig. 2.2) gilt:

$$l(\varphi) = \frac{r^2}{z}. \quad (2.2.2.2)$$

Aus (2.2.2.1) und (2.2.2.2) folgt:

$$N_\varphi = \frac{P r^2}{z}. \quad (2.2.2.3)$$

Mit (2.2.1.21) folgt:

$$Q_\varphi = - \frac{P r r'}{z}. \quad (2.2.2.4)$$

(2.2.2.3) und (2.2.2.4) befriedigen Gleichung (2.2.1.23). Gleichung (2.2.1.22) ergibt

$$M_\varphi = - \frac{P}{2} (r^2 - c^2). \quad (2.2.2.5)$$

Die Größe c^2 ist eine Integrationskonstante, die wegen statischer Unbestimmtheit der Kontur aus den Gleichgewichtsbedingungen nicht bestimmbar ist. Zur Bestimmung von c^2 müssen die Verformungsgesetze herangezogen werden.

Die Gleichung (2.2.1.25) verknüpft die Verdrehungsgeschwindigkeit w_φ der Umfangstangente der Kontur mit dem Schnittmoment in der Schale. Aus der Forderung nach Periodizität der Verdrehungsgeschwindigkeit w_φ ergibt sich die Integrationskonstante C^2 :

$$\begin{aligned} 0 &= w_\varphi(2\pi) - w_\varphi(0) = \int_0^{2\pi} w'_\varphi d\varphi \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} \frac{12nk}{h} \int_0^{2\pi} z \left|\frac{N_\varphi}{h}\right|^{n-1} \frac{M_\varphi}{h^2} d\varphi. \end{aligned} \quad (2.2.2.6)$$

Berücksichtigt man (2.2.2.3) und (2.2.2.5), so erhält man

$$C^2 = \frac{\int_0^{2\pi} r^{2n} z^{-(n-2)} d\varphi}{\int_0^{2\pi} r^{2n-2} z^{-(n-2)} d\varphi}. \quad (2.2.2.7)$$

Mit (2.2.2.3) bis (2.2.2.5) und (2.2.2.7) liegen die Schnittgrößen exakt vor.

Für die Verschiebungsgeschwindigkeitskomponenten liegt nach (2.2.1.24) bis (2.2.1.26) ebenfalls ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vor. Das System ist wie bei den Schnittgrößen gekoppelt.

Bezeichnen R_1 und R_2 die Störfunktionen der rechten Seiten, die mit (2.2.2.3) bis (2.2.2.5) und (2.2.1.24) bis (2.2.1.26) bekannt sind, dann gilt

$$\frac{V'_{t\varphi}}{z} + \frac{V_n}{\rho} = R_1, \quad (2.2.2.8)$$

$$\frac{V'_n}{z} - \frac{V_{t\varphi}}{\rho} = -W_\varphi, \quad (2.2.2.9)$$

$$\frac{W'_\varphi}{z} = R_2. \quad (2.2.2.10)$$

Wählt man anstelle der Tangentialkomponente $v_{t\varphi}$ und der Normalkomponente v_n der Verschiebungsgeschwindigkeit die Komponenten in einem raumfesten kartesischen Koordinaten-

System, dann liegen (2.2.2.8) und (2.2.2.9) entkoppelt vor:

$$V_x' = (r \cos \varphi)' R_1 - (r \sin \varphi)' W_\varphi, \quad (2.2.2.11)$$

$$V_y' = (r \sin \varphi)' R_1 + (r \cos \varphi)' W_\varphi. \quad (2.2.2.12)$$

Damit liegen v_x , v_y und w_φ in Integraldarstellung vor:

$$w_\varphi(\varphi) = w_\varphi(0) + \int_0^\varphi z(\bar{\varphi}) R_2(\bar{\varphi}) d\bar{\varphi}, \quad (2.2.2.13)$$

$$v_x(\varphi) = v_x(0) + \int_0^\varphi \left\{ (r \cos \bar{\varphi})' R_1(\bar{\varphi}) - (r \sin \bar{\varphi})' W_\varphi(\bar{\varphi}) \right\} d\bar{\varphi}, \quad (2.2.2.14)$$

$$v_y(\varphi) = v_y(0) + \int_0^\varphi \left\{ (r \sin \bar{\varphi})' R_1(\bar{\varphi}) + (r \cos \bar{\varphi})' W_\varphi(\bar{\varphi}) \right\} d\bar{\varphi}. \quad (2.2.2.15)$$

und das System der Schalengleichungen für die unendlich-lange, ovale zylindrische Schale ist vollständig und exakt gelöst.

Zur praktischen Auswertung der Integrale in (2.2.2.13) bis (2.2.2.15) wird der Rohrradius nach Fourier entwickelt:

$$r = a \left(1 + \alpha_2 \cos 2\varphi + \alpha_4 \cos 4\varphi + \dots \right). \quad (2.2.2.16)$$

Dieser spezielle Ansatz ist wegen der Doppel-Symmetrie des Rohres sinnvoll.

Die Größe a beschreibt den mittleren Radius. Sie ist allgemein zeitabhängig.

Die Größen $\alpha_2, \alpha_4, \dots$ beschreiben die Abweichung des Rohrs von der exakten Kreis-Zylinderform. Sie sind ebenfalls zeitabhängig. Für reale Rohre gilt immer

$$|\alpha_i| \ll 1 \quad ; \quad i = 2, 4, \dots$$

Bei Innendruckbelastung beschreibt im allgemeinen allein die Größe a die Rohrverformung, denn die ohnehin schon kleinen Abweichungen von der Kreis-Zylindergeometrie werden im Laufe der Zeit weiter abgebaut.

Bei Außendruckbelastung ist die Berücksichtigung von Rohr-unrundheiten unumgänglich. Ein Rohr unter Außendruck ist prinzipiell ein instabiles Gebilde. Bei genügend großer Last knickt es elastisch. Dabei sind verschiedene Knickformen möglich, je nach Größe von Wandstärke, Radius, Länge und Belastung (vgl. Flügge /22/, Pflüger /23/).

Doch auch, wenn diese Knicklast nicht erreicht wird, werden durch Kriechprozesse bestehende Unrundheiten so lange vergrößert, bis es ebenfalls zum Einknicken kommt. Bei diesen Kriechprozessen entsteht bei genügend großen Verhältnissen Rohrlänge zu Rohrradius ein zusammengeklapptes Rohr als Knickform. Dies wird allgemein bei Außendruck-Experimenten an Rohrproben beobachtet (vgl. Kaupa /24/). Vorausgesagt wird diese Knickform schon durch Berechnung der Knicklasten für Kreiszyylinderrohre (vgl. Flügge /22/, Pflüger /23/). Diese Knickform wird in der Hauptsache durch die Größe α_2 beschrieben, die Ovalität des Rohres.

Beschränkt man sich auf genügend kleine Rohrverformungen, dann sind alle höheren Fourrierterme klein gegen die Ovalität und können vernachlässigt werden.

Unter der Voraussetzung kleiner Rohrverformungen wird deshalb hier der Ansatz gemacht:

$$r(\varphi, t) = a(t) (1 + \alpha(t) \cos 2\varphi). \quad (2.2.2.17)$$

Dieser Ansatz ist sowohl bei Innen- als auch bei Außendruckbelastung zu verwenden.

Alle Größen, die in den Integralen in (2.2.2.13) bis (2.2.2.15) stehen, lassen sich nun als Potenzreihen von α

darstellen. Wegen der Voraussetzung kleiner Rohrverformung und daher kleiner Ovalität können diese Potenzreihen nach dem 1. Glied abgebrochen werden. Damit erhält man für die Verschiebungsgeschwindigkeiten in x- und y-Richtung:

$$V_x = \text{sign}(p) \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} k a \left(\frac{|p|a}{h}\right)^n \cdot \left\{ \left(1 - \frac{n-1}{2} \alpha - 3n\alpha \frac{\alpha^2}{h^2}\right) \cos \varphi + \left(\frac{n+3}{6} - n \frac{\alpha^2}{h^2}\right) \alpha \cos 3\varphi \right\} \quad (2.2.2.18)$$

$$V_y = \text{sign}(p) \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} k a \left(\frac{|p|a}{h}\right)^n \cdot \left\{ \left(1 + \frac{n-1}{2} \alpha + 3n\alpha \frac{\alpha^2}{h^2}\right) \sin \varphi + \left(\frac{n+3}{6} - n \frac{\alpha^2}{h^2}\right) \alpha \sin 3\varphi \right\} \quad (2.2.2.19)$$

Bildet man hieraus die radiale Verschiebungsgeschwindigkeit v_r , so erhält man

$$v_r = \text{sign}(p) \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} k a \left(\frac{|p|a}{h}\right)^n \left\{ 1 + \alpha \cos 2\varphi \left(1 - \frac{n}{3} \left(1 + 12 \frac{\alpha^2}{h^2}\right)\right) \right\} \quad (2.2.2.20)$$

Die radiale Verschiebungsgeschwindigkeit läßt sich in zwei Komponenten aufteilen, in eine, die zur Änderung des mittleren Radius führt, und in eine zweite, die die Veränderung der Ovalität ergibt. Daraus ergeben sich dann jeweils Differentialgleichungen für das zeitliche Verhalten:

$$\frac{da}{dt} = \text{sign}(p) \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} k a \left(\frac{|p|a}{h}\right)^n, \quad (2.2.2.21)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = - \text{sign}(p) \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\alpha n k}{3} \left(\frac{|p|a}{h}\right)^n \left(1 + 12 \left(\frac{a}{h}\right)^2\right). \quad (2.2.2.22)$$

In (2.2.2.22) ergibt sich bei Vernachlässigung von 1 gegen $12 \left(\frac{a}{h}\right)^2$

$$\frac{d\alpha}{dt} = - \operatorname{sign}(p) \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} 4\alpha n k \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{|p|a}{h}\right)^n. \quad (2.2.2.23)$$

Die Differentialgleichungen (2.2.2.21) und (2.2.2.23) lassen sich geschlossen lösen:

$$a(t) = a_0 \left(1 - \operatorname{sign}(p) \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} n k \left(\frac{|p|a}{h}\right)^n t\right)^{-\frac{1}{n}}, \quad (2.2.2.24)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 \exp \left[2n \frac{\alpha_0^2 - a^2(t)}{h^2} \right]. \quad (2.2.2.25)$$

Gleichungen (2.2.2.24) und (2.2.2.25) zeigen, daß Innen- druckbelastung zu einer Vergrößerung des mittleren Radius und damit zu einer Verkleinerung der Ovalität mit der Zeit führt. Bei Außendruckbelastung ist es umgekehrt.

2.3 Korrekturen und Ergebnisse

Die Ergebnisse von Abschnitt 2.2 sollen in dieser Arbeit auf Innen- und Außendruckversuche an Proben von Brennstabhüllrohren für schnelle Brutreaktoren angewendet werden. Wie bereits unter Abschnitt 2.2.1 ausgeführt, stimmen die Belastungssysteme bei den theoretischen Überlegungen und der experimentellen Praxis überein. Die Gleichungen (2.2.2.24) und (2.2.2.25) beinhalten allerdings noch unzulängliche Annahmen, die in diesem Abschnitt durch Korrekturen beseitigt werden sollen.

Einmal läßt sich die Annahme nicht aufrechterhalten, daß während der Kriechverformung die Wandstärke konstant bleibt. Die Änderung des mittleren Radius sowohl bei Innen- als auch bei Außendruckbelastung führt auf Grund der Volumenkonstanz beim Kriechen zu einer äquivalenten Wandstärkeänderung.

Weiter wurde mit (2.1.4.15) und (2.1.4.16) angenommen, daß die Druckbelastung p der Schale an der Schalenmittelfläche

angreift. Im realen Fall ist die Angriffsfläche die Rohrinnenseite bei Innendruck- und die Rohraußenseite bei Außendruckversuchen. Die reale Belastung ist bei Außendruckversuchen also größer, bei Innendruckversuchen kleiner als bisher in dieser Arbeit angenommen wurde.

Zum dritten wurde in den vorangegangenen Abschnitten die Rohrverformung ausschließlich auf Kriechprozesse zurückgeführt. Dies ist für das Langzeitverhalten von Rohren unter Druckbelastung sicherlich der dominante Verformungsmechanismus. Darüber hinaus aber können elastisch-plastische Prozesse nicht ausgeschlossen werden.

Um die theoretische Behandlung zu vereinfachen, wird davon ausgegangen, daß die Fließgrenze nicht überschritten wird. Damit wird ausschließlich eine elastische Korrektur notwendig.

2.3.1 Wandstärkenkorrektur

Bei der Formulierung des mehraxialen Kriechgesetzes wurde unter 2.1.2 gefordert, daß bei Kriechprozessen das Volumen erhalten bleibt. Weiter wurde unter Punkt 2.2.1 hergeleitet, daß bei Rohren mit Endstopfen unter Druckbelastung die axiale Dehnung verschwindet und damit der ebene Verzerrungszustand herrscht.

Die Forderung nach Erhaltung des Volumens führt hier zur Forderung nach Erhaltung der Querschnittsfläche des Rohrs. Bei kleinen Verformungen von dünnwandigen Rohren wird der Ansatz gemacht:

$$h(t) a(t) = h(0) a(0) = h_0 a_0 . \quad (2.3.1.1)$$

Diese Gleichung (2.3.1.1) muß bei der Lösung der Differentialgleichungen (2.2.3.21) und (2.2.3.23) berücksichtigt werden.

2.3.2 Berücksichtigung der realen Druckangriffsfläche

Bisher wurde angenommen, daß sowohl bei Außen- als auch bei Innendruckbelastung der Druck an der Schalenmittelfläche angreift. In Wirklichkeit ist die Lastangriffsfläche aber die Außen- bzw. Innenfläche des Rohrs.

Nach Fig. 2.2, aus der der Normalkraftverlauf hergeleitet werden kann, müssen $r(\varphi)$ und $z(\varphi)$ die Maße der Lastangriffsfläche und nicht der Schalenmittelfläche darstellen. Dies soll im Folgenden durch eine Schlangenlinie angedeutet werden:

$$\tilde{N}_\varphi = \frac{P \tilde{r}^2}{z}, \quad (2.3.2.1)$$

$$\tilde{M}_\varphi = -\frac{P}{2} (\tilde{r}^2 - \tilde{z}^2), \quad (2.3.2.2)$$

$$\tilde{z}^2 = \frac{\int_0^{2\pi} \tilde{r}^{2n} \tilde{z}^{-(n-2)} d\varphi}{\int_0^{2\pi} \tilde{r}^{2n-2} \tilde{z}^{-(n-2)} d\varphi}. \quad (2.3.2.3)$$

Damit ergeben sich als Bestimmungsgleichungen für die Verschiebungsgeschwindigkeiten:

$$\tilde{w}_\varphi' = z \tilde{R}_2, \quad (2.3.2.4)$$

$$\tilde{v}_x' = (r \cos \varphi)' \tilde{R}_1 - (r \sin \varphi)' \tilde{w}_\varphi, \quad (2.3.2.5)$$

$$\tilde{v}_y' = (r \sin \varphi)' \tilde{R}_1 + (r \cos \varphi)' \tilde{w}_\varphi. \quad (2.3.2.6)$$

\tilde{R}_1 und \tilde{R}_2 berechnen sich wie R_1 und R_2 , wobei für die Schnittgrößen \tilde{N}_φ und \tilde{M}_φ einzusetzen sind. Macht man den Ansatz

$$\tilde{r} = \tilde{a} (1 + \alpha \cos 2\varphi), \quad (2.3.2.7)$$

$$r = \left(\tilde{a} + \text{sign}(p) \frac{h}{2} \right) (1 + \alpha \cos 2\varphi), \quad (2.3.2.8)$$

so erhält man für die radiale Verschiebungsgeschwindigkeit nach demselben Verfahren wie in Abschnitt 2.2.2:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_r = \text{sign}(p) \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} k \left(\tilde{\alpha} + \text{sign}(p) \frac{h}{2}\right) \left(\frac{|p| \tilde{\alpha}}{h}\right)^n \\ \cdot \left\{ 1 + \alpha \cos 2\varphi \left(1 - \frac{n}{3} \left(1 + 12 \frac{\tilde{\alpha} (\tilde{\alpha} + \text{sign}(p) \frac{h}{2})}{h^2}\right)\right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.2.9)$$

Analog wie unter Punkt 2.2.2 läßt sich die radiale Kriechgeschwindigkeit aufteilen in eine Kriechrate, die die gleichmäßige Aufweitung bzw. Schrumpfung angibt und in eine Kriechrate, die die Ovalisierung des Rohrs beschreibt:

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{dt} = \text{sign}(p) \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} k \left(\tilde{\alpha} + \text{sign}(p) \frac{h}{2}\right) \left(\frac{|p| \tilde{\alpha}}{h}\right)^n, \quad (2.3.2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = -\text{sign}(p) \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\alpha n k}{3} \left(1 + \text{sign}(p) \frac{h}{2\tilde{\alpha}}\right) \\ \cdot \left(\frac{|p| \tilde{\alpha}}{h}\right)^n \left(1 + 12 \frac{\tilde{\alpha}^2}{h^2} \left(1 + \text{sign}(p) \frac{h}{2\tilde{\alpha}}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.3.2.11)$$

2.3.3 Elastische Korrektur

In diesem Abschnitt werden die elastischen Dehnungen eines Rohres mit dem Querschnitt (2.2.2.17) angegeben und ihre Auswirkungen auf die Gesamtverformung des Rohres berechnet.

Nach Klingbeil /10/ gilt für die durch elastische Prozesse hervorgerufene Verschiebung \tilde{u} der Zylinderschale:

$$\frac{u'_{\varphi}}{z} + \frac{u_n}{\rho} = (1-\nu^2) \frac{\tilde{N}_{\varphi}}{Eh}, \quad (2.3.3.1)$$

$$\frac{u'_n}{z} - \frac{u_{\varphi}}{\rho} = -\tilde{W}_{\varphi}, \quad (2.3.3.2)$$

$$\frac{\tilde{W}_{\varphi}}{z} = \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} \frac{\tilde{M}_{\varphi}}{Eh}. \quad (2.3.3.3)$$

$u_{t\varphi}$ und u_n sind die Komponenten des Verschiebungsvektors in Umfangs- und Normalenrichtung, \tilde{w}_φ ist die Verdrehung der Umfangstangente. Diese Gleichungen werden genauso gewonnen, wie die entsprechenden Gleichungen (3.2.1.24) bis (3.2.1.26) für die Kriechgeschwindigkeiten.

Die Gleichungen für die Schnittgrößen sind identisch mit den für die kriechende Schale gewonnenen Beziehungen (3.2.2.3) bis (3.2.2.5). Allerdings muß die Integrationskonstante im Momentenverlauf noch für die elastische Schale bestimmt werden. Sie ergibt sich aus (3.2.2.7) für $n = 1$ zu:

$$\tilde{C}_{elast}^2 = \frac{\int_0^{2\pi} \tilde{r}^2 \tilde{z} d\varphi}{\int_0^{2\pi} \tilde{z} d\varphi} \quad (2.3.3.4)$$

In einem analogen Vorgehen wie in dem Abschnitt 2.2.2 für die Verschiebungsgeschwindigkeiten ergibt sich für die radiale Verschiebung bei elastischer Verformung von ovalen zylindrischen Rohren:

$$u_r^{elast} = (1-\nu^2) \frac{p \tilde{\alpha}}{E h} \left(1 + \text{sign}(p) \frac{h}{2\tilde{\alpha}} \right) \left[1 + \alpha \cos 2\varphi \left(\frac{2}{3} - 4 \frac{\tilde{\alpha}^2}{h^2} \left(1 + \text{sign}(p) \frac{h}{2\tilde{\alpha}} \right) \right) \right] \quad (2.3.3.5)$$

Das bedeutet sowohl eine elastische Änderung des mittleren Radius $\tilde{\alpha}$ als auch der Ovalität α (unter Vernachlässigung von kleinen Lastangriffskorrekturtermen):

$$(\Delta \tilde{\alpha})^{elast} = (1-\nu^2) \frac{p \tilde{\alpha}^2}{E h} \quad (2.3.3.6)$$

$$(\Delta \alpha)^{elast} = -4 (1-\nu^2) \alpha \frac{p \tilde{\alpha}^3}{E h^3} \quad (2.3.3.7)$$

Bei einer Änderung $\frac{d\tilde{\alpha}}{dt}$ des mittleren Radius, verursacht durch Kriechprozesse, ergibt sich auch ein Zuwachs der elastischen Dehnung $\frac{d}{dt} (\Delta \tilde{\alpha})^{elast}$. Die Gesamtdehnung ist die Summe beider Dehnungen:

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{dt} = \left(\frac{d\tilde{\alpha}}{dt} \right)^{\text{Kriechen}} \left(1 + 3(1-\nu^2) \frac{p\tilde{\alpha}}{Eh} \right). \quad (2.3.3.8)$$

Analog ergibt sich für die zeitliche Änderung der Ovalität:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^{\text{Kriechen}} \left(1 - 4(1-\nu^2) \frac{p\tilde{\alpha}^3}{Eh^3} \right). \quad (2.3.3.9)$$

2.3.4 Korrigierte Lösungen

Zur Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens von Rohren unter Druckbelastung stehen nach Kapitel 2.2.2 unter Berücksichtigung der Korrekturen (Kap. 2.3.1 bis 2.3.3) folgende Gleichungen zur Verfügung:

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{d\tilde{\alpha}}{dt} = \text{sign}(p) \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{n+1}{2}} k \left(1 + 3(1-\nu^2) \frac{p\tilde{\alpha}}{Eh} \right) \left(1 + \text{sign}(p) \frac{h}{2\tilde{\alpha}} \right) \left(\frac{|p|\tilde{\alpha}}{h} \right)^n, \quad (2.3.4.1)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = -\text{sign}(p) \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{n+1}{2}} \frac{nk}{3} \left(1 - 4(1-\nu^2) \frac{p\tilde{\alpha}^3}{Eh^3} \right) \left(1 + \text{sign}(p) \frac{h}{2\tilde{\alpha}} \right) \cdot \left(1 + 12 \frac{\tilde{\alpha}^2}{h^2} \left(1 + \text{sign}(p) \frac{h}{2\tilde{\alpha}} \right) \right) \left(\frac{|p|\tilde{\alpha}}{h} \right)^n, \quad (2.3.4.2)$$

$$\tilde{\alpha}(t) \cdot h(t) = \tilde{\alpha}_0 \cdot h_0. \quad (2.3.4.3)$$

Unter der Voraussetzung kleiner Verformungen lassen sich diese Gleichungen näherungsweise lösen:

$$\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}_0 \left(1 + (1-\nu^2) \frac{p\tilde{\alpha}_0}{Eh_0} \right) \cdot \left[1 - \text{sign}(p) \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{n+1}{2}} 2nk \left(1 + \text{sign}(p) \frac{h_0}{2\tilde{\alpha}_0} \right) \left(1 + 3(1-\nu^2) \frac{p\tilde{\alpha}_0}{Eh_0} \right) \left(\frac{|p|\tilde{\alpha}_0}{h_0} \right)^n t \right]^{-\frac{1}{2n}}, \quad (2.3.4.4)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left(1 - 4(1-\nu^2) \frac{p\tilde{\alpha}_0^3}{Eh_0^3} \right) \exp \left[n \frac{\tilde{\alpha}_0^4 - \tilde{\alpha}^4(t)}{\tilde{\alpha}_0^2 h_0^2} \left(1 + \text{sign}(p) \frac{h_0}{2\tilde{\alpha}_0} \right) \left(1 - 8(1-\nu^2) \frac{p\tilde{\alpha}_0^3}{Eh_0^3} \right) \right], \quad (2.3.4.5)$$

$$h(t) = h_0 \frac{\tilde{\alpha}_0}{\tilde{\alpha}(t)}. \quad (2.3.4.6)$$

Durch die Gleichungen (2.3.4.4) bis (2.3.4.6) wird der zeitliche Verlauf der Rohrgeometrie unter Druckbelastung bei kleinen Verformungen vollständig in analytischer Form beschrieben.

2.3.5 Ergebnisse für einen Vergleichsdatenfall

Die Gleichungen (2.3.4.4) bis (2.3.4.6), die den zeitlichen Verlauf der Rohrgeometrie unter Druckbelastung auf die Mantelfläche des Rohres für kleine Verformungen beschreiben, werden in diesem Abschnitt auf einen Vergleichsdatenfall angewendet (Tabelle 2.1). Dieser Datenfall wurde gewählt, da er in den Arbeiten von Malmberg und Laßmann bereits als Vergleichsdatenfall zu den Ergebnissen von Hoff dient.

Fig. 2.3 zeigt den zeitlichen Verlauf des Innenradius bei Innendruckbelastung. Es existiert eine Standzeit, die dadurch charakterisiert ist, daß unendlich große Kriechgeschwindigkeiten auftreten.

Diese Kriechinstabilität ist auf einen Geometrieeffekt zurückzuführen: Mit zunehmender Aufweitung wird wegen des ebenen Dehnungszustandes die Wandstärke zunehmend geschwächt. Sowohl Rohraufweitung als auch Wandstärkeschwächung verursachen eine Spannungserhöhung, die wiederum eine zunehmende Rohraufweitung zur Folge hat.

Fig. 2.4 und 2.5 zeigen den zeitlichen Verlauf der Rohrgeometrie bei Außendruckbelastung.

Die Standzeit wird bei Außendruckbelastung wesentlich früher als bei Innendruckbelastung erreicht. Maßgeblich dafür ist die Ovalisierung des Rohres. Auch diese Kriechinstabilität ist anschaulich zu erklären: Ein ideal rundes Rohr ist momentfrei. Kleine Abweichungen vom ideal-kreisförmigen Querschnitt verursachen Momente in der Rohrwand. Diese Momente führen zu Verbiegungen des Rohres,

die die Rohrunrundheit verstärken.

Der Rohraußenradius verändert seine Größe während der Einsatzzeit des Rohres beim vorliegenden Datenfall nur unwesentlich.

Obwohl bei der Herleitung der Gleichungen (2.3.4.4) bis (2.3.4.6) mehrfach kleine Verformungen, speziell kleine Ovalitäten, vorausgesetzt wurden, wird auch die Standzeit quantitativ richtig wiedergegeben. In dieser Arbeit wird angenommen, daß die Standzeit erreicht ist, wenn die Ovalität α den Wert 20 % erreicht hat. Größere Werte von α zu berechnen, wäre physikalisch unsinnig. Denn diesen α -Werten würden wegen (2.2.2.17) irreale Rohrquerschnitte entsprechen.

Die so ermittelten Standzeiten zeigen gute Übereinstimmung mit den Standzeiten nach Hoff /19/, Malmberg /18/ und Laßmann /8/ (Fig. 2.6).

3. Kapazitives Verfahren zur kontinuierlichen Messung der Hüllrohrverformung unter Innen- oder Außendruck und hoher Temperatur

An ein Verfahren, das die kontinuierliche Messung der Hüllrohrverformung gestattet, wird ein Katalog von Anforderungen gestellt:

1. Die maximale Hülltemperatur des SNR beträgt etwa 700°C. Da die Kriechrate mit wachsender Temperatur zunimmt, stellt die maximal zu erwartende Temperatur den Hauptarbeitsbereich des Meßverfahrens dar.
 2. Das Verfahren soll bei Innen- und Außendruckversuchen bis zu 20 N/mm² arbeiten.
 3. Es soll die Messung von Kriechkurven bis zu Einsatzzeiten von der Größenordnung von einigen 1000 Stunden möglich sein. Dies erfordert eine hohe Langzeitstabilität und dann gleichzeitig die Erfassung von Kriechgeschwindigkeiten bis hinab zu 10⁻⁵ mm/h.
 4. Um diese kleinen Bewegungen erfassen zu können, soll die Genauigkeit der Messungen im Mikrometer-Bereich liegen.
 5. Die Messungen sollen reproduzierbar sein.
 6. Durch die Messung soll der Kriechvorgang nicht beeinflusst werden.
 7. Die Meßvorrichtung soll einfach herstellbar und einsetzbar sein.
- H. Braun /25/ mißt die Rohrverformung diskontinuierlich. Die eigentliche Vermessung geschieht unter Raumtemperatur. Zwar wird die Druckbeaufschlagung nicht vollständig aufgehoben, jedoch ist über die Temperaturwechselbeanspruchung hinaus auch eine Druckwechselbelastung nicht zu vermeiden. Dadurch wird jeweils Anforderung 6 verletzt.

Eine weitere Diskussion der diskontinuierlichen Methode wird deshalb nicht vorgenommen. H. Will /26/ hat mögliche Verfahren diskutiert, die die Messung von Kriechverformungen kontinuierlich auch unter Bestrahlungsbedingungen ermöglichen. Diese einschränkende Bedingung besteht für diese Untersuchung nicht, die Diskussion der Verfahren ist jedoch auch unter den oben genannten Bedingungen möglich.

Grundsätzlich lassen sich alle kontinuierlichen Verfahren in 2 Gruppen einteilen: differentielle und integrale Verfahren.

Bei differentiellen Messungen werden die Koordinaten einzelner Punkte auf den Rohrumfang kontinuierlich gemessen. Um Aufschluß über den Rohrquerschnitt zu erhalten, sind mindestens 3, besser 4 oder 6 über den Rohrumfang verteilte Meßstellen nötig.

Verschiedene Meßverfahren, die Will angibt, arbeiten differentiell, so z. B. optische Verfahren, Methoden, bei denen induktive oder kapazitive Wegaufnehmer verwendet werden, Pralldüsenverfahren oder elektrische Kontaktverfahren.

Bei reinen Rohrrinnendruckversuchen verwenden Böhm, Schäfer (Cloß /27/) und van der Linde, Kwast /28/ zwei bzw. vier über den Umfang verteilte induktive Wegaufnehmer, die in der heißen Zone als Quarzstäbe ausgebildet sind.

Bei der Verwendung bei Außendruckversuchen treten unüberwindliche konstruktive Schwierigkeiten auf. Würde man die Meßfühler außen am Rohr anbringen, so bestünde das Problem, mechanische Druckdurchführungen bei 700°C abzudichten. Andererseits ist es nicht vorstellbar, daß ein so aufwendiges Meßsystem im Rohrrinneren (freier Durchmesser 5.24 mm) untergebracht werden kann.

Über diese rein konstruktiven Probleme, die die Anforder-

nung 7 verletzen, hinaus ist es schwierig, der Anforderung 6 gerecht zu werden. Jeder Meßfühler, wie immer er im einzelnen ausgebildet ist, leitet an der Meßstelle Wärme ab. Dadurch wird während des Meßvorganges das Temperaturprofil geändert und der Verformungsvorgang gestört.

Mechanische Meßfühler üben darüber hinaus auch eine Kraft auf das Hüllrohr aus und stören so den Verformungsvorgang. Deshalb mußte die Wahl auf ein integrales Meßverfahren fallen. Hierbei wird eine physikalische Größe kontinuierlich erfaßt, die den Rohrverformungszustand charakterisiert. Im Folgenden werden einige integrale Verfahren zusammengestellt, die auch Will teilweise angibt:

- Dehnungsmessung mit Widerstandsdrähten, die um die Rohrprobe gewickelt sind, nach dem Dehnungsmeßstreifenprinzip,
- Messung des Druckabfalls innerhalb eines Ringspaltes, den das Rohr mit einer Hülse bildet (Eine Änderung der Rohrgeometrie bewirkt eine Änderung des Strömungswiderstandes).
- Hohlraum-Resonanzmessung
- integrale kapazitive Verformungsmessung

Die Dehnungsmessung nach dem Prinzip des Dehnungsmeßstreifens ist bei Außendruck nicht einsetzbar. Bei der Druckabfallmethode tritt Wärmeabfuhr durch das strömende Medium auf. Deshalb werden diese Meßverfahren ebenfalls verworfen.

Der geringere apparative und damit finanzielle Aufwand im Vergleich zur Hohlraum-Resonanz-Meßmethode führte schließlich zur kapazitiven Verformungsmessung.

3.1 Meßprinzip

Das in dieser Arbeit entwickelte Meßverfahren arbeitet nach folgendem Prinzip:

Im druckfreien Raum der Rohrprobe (dies ist bei Innendruck das Rohräußere, bei Außendruckbelastung das Rohrinne) wird konzentrisch zum Rohr elektrisch isoliert eine Meßsonde angebracht. Meßgröße ist die Kapazität des Zylinderkondensators Rohr - Meßsonde.

Fig. 3.1 zeigt die Meßanordnung für Innendruckbelastung. Die Meßsonde ist als Hülse ausgebildet, die über die Rohrprobe geschoben wird. Der Zylinderkondensator besteht aus zwei koaxialen kreisförmigen Elektroden. Die Kapazität der homogenen (unendlich langen) Anordnung ist nach Anhang A 2:

$$C_i(t) = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_s}{R_a(t)}} \quad (3.1.1)$$

Bei Außendruckbelastung ist die Meßsonde als Stab ausgebildet, der in die Rohrprobe eingeführt wird (Fig. 3.2). Die innere Elektrode (Meßsonde) kann als kreiszylindrisch angesehen werden, die äußere Elektrode hat im allgemeinen einen ovalen Querschnitt. Setzt man für den Innenradius an

$$R_i(t) = \bar{R}_i(t) (1 + \alpha(t) \cos 2\varphi), \quad (3.1.2)$$

wobei α die Ovalität des Rohres angibt, dann erhält man bei genügend kleinen Spalten zwischen Rohrprobe und Meßsonde nach Anhang A 2:

$$C_a(t) = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{\bar{R}_i(t)}{R_s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha(t) \bar{R}_i(t)}{\bar{R}_i(t) - R_s}\right)^2}} \quad (3.1.3)$$

Auch Gleichung (3.1.3) gilt für homogenes elektrisches Feld, also für die unendlich lange Meßanordnung.

3.2 Modellversuche zur Ermittlung des Einflusses von Streufeldern und Exzentrizitäten

Die Formeln (3.1.1) und (3.1.3) lassen sich nicht direkt zur Auswertung von Innen- bzw. Außendruckversuchen an Rohren verwenden. Dies hat zwei Ursachen:

1. Eine realisierbare Meßanordnung hat eine endliche Länge. Fig. 3.3 zeigt qualitativ die Feldlinien und die Äquipotentiallinien der Meßanordnung für Innendruckversuche. Die für die Formeln (3.1.1) und (3.1.3) getroffene Annahme der Homogenität des elektrischen Feldes ist in den Randzonen der Außenelektrode sicher nicht erfüllt.
2. Zur empfindlichen Messung kleiner Geometrieänderungen des Hüllrohrs muß der Spalt zwischen Rohr und Sonde etwa in der Größenordnung der Verschiebung sein. Zur Messung von Dehnungen zwischen 0.2 % und 5 % an Rohren mit einem Außendurchmesser von 6 mm wurde ein Spalt von 0.2 mm gewählt. Bei so geringen Spaltweiten verändern schon geringfügige Exzentrizitäten den Kapazitätswert.

Diese beiden Fragestellungen wurden in Modellversuchen behandelt. Versuche an vergrößerten Modellen sind deshalb möglich, weil in die Gleichungen (3.1.1) und (3.1.3) nur Verhältnisse der Radien R_s/R_a bzw. R_i/R_s , nicht aber die Radien selbst eingehen. Vergrößert man die Radien maßstäblich, so ändert sich an den Verhältnissen und damit an der Kapazität nichts.

Die Modellversuche wurden mit ovalen Innenelektroden und kreisförmigen Außenelektroden durchgeführt. Tabelle 3.1 gibt die Abmessungen der verwendeten Modellkörper. Der Einfluß des Streufeldes in der Randzone der Meßanordnung wird durch Variation der Länge l der Außenelektrode bestimmt (vgl. Fig. 3.3). Zur Ermittlung des Einflusses der

Exzentrizität wurde die Außenelektrode mit einem Kreuzschlitten gegenüber der fest angebrachten ovalen Innenelektrode verschoben.

Die Kapazität wurde manuell mit einer Kapazitätsmeßbrücke gemessen.

Fig. 3.4 bis 3.10 zeigen die Meßergebnisse zur Ermittlung des Streufeldeinflusses. Dargestellt ist jeweils die auf die Länge der Außenelektrode bezogene Kapazität in Abhängigkeit von der Länge l der Außenelektrode. Die Extrapolation auf $l = \infty$ ergibt die auf die Längeneinheit bezogene Kapazität der homogenen Anordnung. Die Abweichung der gemessenen Werte von dem asymptotischen Wert zeigt den Einfluß der Streufelder am Rande der Anordnung. Dieser Einfluß wird besonders bei kleinen Werten von l spürbar.

Zur quantitativen Analyse der Meßergebnisse wird der einfache Ansatz gemacht, daß sich die Gesamtkapazität C_{ges} additiv aus einem homogenen Anteil C_{hom}^* und aus einem inhomogenen Anteil C_{inhom}^* zusammengesetzt.

Innerhalb des Bereiches l^* der Meßanordnung (vgl. Fig. 3.3) sollen homogene Verhältnisse vorliegen. Die Verhältnisse in diesem Bereich sollen durch die Gleichungen (3.1.1) und (3.1.3) beschrieben werden. Wegen (3.1.1) und (3.1.3) ist C_{hom}^* proportional zu l^* . Daher gilt:

$$C_{\text{hom}}^* = a l^* \quad . \quad (3.2.1)$$

(a = Proportionalitätskonstante)

Der inhomogene Anteil soll unabhängig von l^* und l sein:

$$C_{\text{inhom}}^* \neq C_{\text{inhom}}^*(l^*, l) \quad . \quad (3.2.2)$$

Dies bedeutet, daß für Δl gilt (siehe Fig. 3.3):

$$\Delta l = \frac{1}{2} (1 - l^*) \neq \Delta l (l^*, l) \quad . \quad (3.2.3)$$

Damit folgt für die Gesamtkapazität:

$$\begin{aligned} C_{\text{ges}} &= a l^* + C_{\text{inhom}}^* \\ &= a l + C_{\text{inhom}}^* - 2a \Delta l . \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Zur Vereinfachung werden neue Bezeichnungen eingeführt.

$$C_{\text{hom}} = a l \quad (3.2.5)$$

und

$$C_{\text{inhom}} = C_{\text{inhom}}^* - 2a \Delta l \neq C_{\text{inhom}}(l^*, l). \quad (3.2.6)$$

Insgesamt gilt für die auf die Längeneinheit bezogene Gesamtkapazität

$$\frac{C_{\text{ges}}}{l} = a + \frac{C_{\text{inhom}}}{l} . \quad (3.2.7)$$

C_{ges}/l setzt sich zusammen aus einem konstanten, von l unabhängigen, Anteil und einem Anteil, der proportional zu $1/l$ ist.

In Fig. 3.4 bis 3.10 sind Kurven der Form von Gleichung (3.2.7) eingezeichnet, die nach der Methode der kleinsten Abweichungsquadrate angepaßt sind.

Die sich daraus ergebenden Werte für C_{hom}/l und C_{inhom} sind in Fig. 3.11 und 3.12 in Abhängigkeit von der Ovalität der Innenelektrode und dem Durchmesser der Außenelektrode dargestellt. Die durchgezogenen Kurven in Fig. 3.11 zeigen die nach Anhang A 2 theoretisch erwarteten Kapazitätswerte für die homogene Anordnung. Es zeigt sich befriedigende Übereinstimmung mit den Meßpunkten.

Der inhomogene Anteil C_{inhom} der Kapazität (Fig. 3.12) ist bei festgehaltenem Durchmesser der Außenelektrode praktisch unabhängig von der Ovalität. Allerdings zeigt sich eine Vergrößerung des inhomogenen Anteils bei einer

Durchmesseränderung der Außenelektrode, die zur Verkleinerung des Spalts zwischen den Elektroden führt.

Vergleicht man die Änderung des inhomogenen mit der des homogenen Anteils der Kapazität bei Verringerung des Spaltes zwischen den Elektroden, so ergibt sich, daß der homogene Anteil wesentlich stärker von der Spaltweite abhängt. Bei dem später realisierten Wert von $l = 20$ mm steigt der homogene Anteil um 24 pF, der inhomogene jedoch nur um 2 pF. Diese geringfügige Änderung des inhomogenen Anteils wird deswegen vernachlässigt. Der inhomogene Anteil der Gesamtkapazität wird damit unabhängig von dem sich im Laufe der Zeit verändernden Werken von Ovalität und Spaltweite. Damit kann er der Untergrundkapazität zugeschlagen werden, die zeitlich konstant in Form von Leitungs- und Anschlußkapazitäten immer vorhanden ist. Die Elimination des Untergrunds zur Bestimmung des Meßeffektes beinhaltet dann auch die Elimination des Einflusses von Streukapazitäten. Der Meßeffect wird damit im gesamten Bereich l von Gleichung (3.1.1) bzw. (3.1.3) beschrieben.

Fig. 3.13 bis 3.18 zeigen die Meßergebnisse zur Bestimmung des Einflusses der Exzentrizität der Anordnung.

Aufgetragen sind jeweils die auf die Längeneinheit der Außenelektrode bezogenen Kapazitätswerte in Abhängigkeit von der Exzentrizität. Dabei bedeutet a_x die Exzentrizität in Richtung der kleinen Halbachse der Innenelektrode, a_y die Exzentrizität in Richtung der großen Halbachse.

Qualitativ ähnliches Verhalten wie die exzentrische ovale Meßanordnung zeigt die exzentrische runde Meßanordnung. Nach Anhang A 2 gilt für die exzentrische runde Anordnung

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R_a - R_i}\right)^2}} \quad (3.2.8)$$

Dabei bedeutet a die Exzentrizität, R_a und R_i den Radius von Außen- bzw. Innenelektrode der Anordnung. Durch Differenzieren erhält man:

$$\frac{\partial C}{\partial a} \Big|_{a=0} = 0. \quad (3.2.9)$$

Dies bedeutet, daß kleine Exzentrizitäten den Kapazitätswert nicht verfälschen. Dasselbe Resultat zeigt sich in Fig. 3.13 bis 3.18.

Im Folgenden werden deshalb Streufeld- und Exzentrizitätseinfluß zunächst vernachlässigt. Sie werden jedoch berücksichtigt bei der Abschätzung der Genauigkeit der Messung.

3.3 Innendruckmessung

Die Anwendung der Kapazitätsmeßbrücke wie bei den Modellexperimenten ist bei Langzeitexperimenten nicht geeignet. Einmal erfordert sie einen hohen personellen Aufwand, zum zweiten leidet die Reproduzierbarkeit unter individuellem Messen und Ablesen. Aus diesem Grund wurde die Kapazitätsmessung automatisiert. Fig. 3.19 zeigt das Blockschaltbild zur automatischen Kapazitätsmessung.

Die Meßkapazität C_{mess} bildet zusammen mit der Untergrundkapazität C_u das kapazitive Glied eines Schwingkreises. Das induktive Glied L ist fest vorgegeben. Dieser Schwingkreis wird von einem Oszillator angeregt. Die Impulse des Oszillators, deren Frequenz ein Maß für die Meßkapazität ist, werden in einem Zähler während einer vorgebbaren Meßzeit ausgezählt. Nach Beendigung der Zählung erfolgt die Ausgabe auf Drucker und Lochstreifenstanzer. Zwischen zwei Messungen läßt sich eine Wartezeit vorgeben.

Meßgrößen sind damit einmal die Zeit, die sich additiv aus den einzelnen Wartezeiten, Meßzeiten und Ausgabezeiten zusammensetzt, und die Oszillatorfrequenz ν , die ein

Maß für die Kapazität der Meßanordnung ist.

Nach Gleichung (3.1.1) gilt für den Meßeffect:

$$C_{\text{mess}}(t) = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_s}{R_a(t)}} \quad (3.3.1)$$

Die Gesamtkapazität setzt sich aus dem Meßeffect und dem Untergrund zusammen:

$$C_{\text{ges}}(t) = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_s}{R_a(t)}} + C_u \quad (3.3.2)$$

Nach Gehrtzen /29/ gilt für den Zusammenhang zwischen der Frequenz und der Kapazität eines Schwingkreises:

$$C_{\text{ges}}(t) = \frac{A}{\nu^2(t)} \quad (3.3.3)$$

Dabei ist A die Eichkonstante des Schwingkreises, die durch Eichung mit bekannten Kapazitäten ermittelt werden kann. Elimination von $C_{\text{ges}}(t)$ aus (3.3.2) und (3.3.3) ergibt

$$\frac{A}{\nu^2(t)} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_s}{R_a(t)}} + C_u \quad (3.3.4)$$

Alle in Gleichung (3.3.4) vorkommenden Größen bis auf die Untergrundkapazität C_u sind zur Zeit $t = 0$, also vor Beginn des Verformungsvorgangs, bekannt.

Zunächst ergeben sich die geometrischen Größen $R_a(0)$, R_s und l aus einer Vermessung der Meßanordnung vor dem Versuchsbeginn. Die Temperaturdifferenz zwischen der Raumtemperatur, bei der diese geometrische Vorvermessung vorgenommen wird, und der Versuchstemperatur bewirkt eine thermische Dehnung von $R_a(0)$, R_s und l , die als bekannt vorausgesetzt werden kann. Damit liegen die geometrischen Größen unmittelbar vor Beginn des Verformungsvorgangs bei der Versuchstemperatur vor. Die Frequenz $\nu(0)$ zur selben

Zeit ergibt sich durch eine einfache Frequenzmessung.

Zur Zeit $t = 0$ gilt also:

$$\frac{A}{\nu^2(0)} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_s}{R_a(0)}} + C_u. \quad (3.3.5)$$

Aus (3.3.4) und (3.3.5) läßt sich die Untergrundkapazität eliminieren:

$$A \left(\frac{1}{\nu^2(t)} - \frac{1}{\nu^2(0)} \right) = 2\pi\epsilon_0 l \left(\frac{1}{\ln \frac{R_s}{R_a(t)}} - \frac{1}{\ln \frac{R_s}{R_a(0)}} \right). \quad (3.3.6)$$

Eine Umformung ergibt:

$$\ln \frac{R_a(t)}{R_s} = \left[1 + \frac{A \ln \frac{R_s}{R_a(0)}}{2\pi\epsilon_0 l} \left(\frac{1}{\nu^2(t)} - \frac{1}{\nu^2(0)} \right) \right]^{-1} \ln \frac{R_a(0)}{R_s}. \quad (3.3.7)$$

Durch Exponieren ergibt sich schließlich:

$$R_a(t) = R_s \left(\frac{R_a(0)}{R_s} \right)^{x_i} \quad (3.3.8)$$

mit

$$x_i = \left[1 + \frac{A \ln \frac{R_s}{R_a(0)}}{2\pi\epsilon_0 l} \left(\frac{1}{\nu^2(t)} - \frac{1}{\nu^2(0)} \right) \right]^{-1} \quad (3.3.9)$$

Die kontinuierliche Messung des Rohraußenradius im Laufe der Einsatzzeit der Probe ist damit zurückgeführt auf eine relative Frequenzmessung. Die Änderung der Frequenz gegenüber dem Wert, den sie bei Einsatz der Probe hatte, ist das Maß für die entsprechende Änderung des Rohrradius.

Die weiteren Meßgrößen sind der Außenradius $R_a(0)$ der Rohrprobe, der Innenradius R_s und die Länge l der Meßsonde und die Eichkonstante A des Schwingkreises. Die Erfassung dieser Größen kann schon vor Probeneinsatz erfolgen. Bei den geometrischen Abmessungen ist allerdings die Berücksichtigung der Wärmedehnung bei Probeneinsatz notwendig.

3.4 Außendruckmessung

Die kontinuierliche Erfassung der geometrischen Größen bei Außendruck stellt sich schwieriger dar als bei Innendruck. Dies hat seine Ursache darin, daß man in seinem Verformungsmodell sowohl die Durchmesserabnahme als auch die Ovalisierung des Rohres erfassen muß. Es ergibt sich damit das Problem, aus der Messung einer Größe, der Kapazität der Meßanordnung bzw. der Frequenz des Meßkreises, die verschiedenen Verformungsgrößen zu separieren. Nach Gleichung (3.1.3) gilt für den zeitlichen Verlauf der Kapazität:

$$C(t) = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{\bar{R}_i(t)}{R_s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha(t)\bar{R}_i(t)}{\bar{R}_i(t) - R_s}\right)^2}} \quad (3.4.1)$$

Die gemessenen Kapazitätswerte hängen ab von der Ovalität und dem Innenradius der Probe. Bei kleinen Ovalitätswerten, die beim Probeneinsatz immer vorliegen, ist der Einfluß der Ovalität vernachlässigbar. Deswegen wird zunächst der Einfluß der Ovalität vollständig vernachlässigt. Kapazitätsänderungen werden ausschließlich auf Änderungen des Innenradius zurückgeführt:

$$C^*(t) = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_i^*(t)}{R_s}} \quad (3.4.2)$$

Die experimentelle Ermittlung des zeitlichen Verlaufs des fiktiven Innenradius $R_i^*(t)$ der Rohrprobe verläuft vollständig analog zur Ermittlung des Außenradius bei Innendruckversuchen. Es gilt

$$R_i^*(t) = R_s \left(\frac{R_i^*(0)}{R_s} \right)^{x_a} \quad (3.4.3)$$

mit

$$x_a = \left[1 + \frac{A \ln \frac{R_i^*(0)}{R_s}}{2\pi\epsilon_0 l} \left(\frac{1}{v^2(t)} - \frac{1}{v^2(0)} \right) \right]^{-1} \quad (3.4.4)$$

Der Zusammenhang zwischen dem wahren mittleren Innenradius $\bar{R}_i(t)$ und dem fiktiven Innenradius $R_i^*(t)$ ergibt sich durch Gleichsetzen von Gleichung (3.4.1) und (3.4.2). Damit läßt sich $R_i^*(t)$ in Abhängigkeit von $\bar{R}_i(t)$ und $\alpha(t)$ berechnen:

$$R_i^*(t) = \bar{R}_i(t) \left(\frac{R_s}{\bar{R}_i(t)} \right)^{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha(t) \bar{R}_i(t)}{\bar{R}_i(t) - R_s} \right)^2}} \quad (3.4.5)$$

Fig. 3.20 zeigt den zeitlichen Verlauf von $\bar{R}_i(t)$ und $R_i^*(t)$. Er gilt für die unter Abschnitt 4 untersuchten Rohrproben und wurde auf der Basis des Schalenmodells gewonnen, das in Abschnitt 2 dargestellt ist. Die Abszisse bildet der normierte Außenradius $R_a(t)/R_a(0)$ der Rohrprobe, damit Fig. 3.20 allgemein für jede Außendruckbelastung gilt. Da der Außenradius linear mit der Zeit schrumpft, entspricht die Abszisse einer Zeitachse.

Der durch die Ovalisierung verfälschte Verlauf wurde unter der Annahme gewonnen, daß der Außendruck $p = 12 \text{ N/mm}^2$ und der Kriechexponent $n = 8$ ist. Die Wahl von $n = 8$ ist realistisch für die unter Abschnitt 4 untersuchten Rohre. Die spezielle Wahl des Druckes beeinträchtigt die Allgemeingültigkeit von Fig. 3.20 nur unwesentlich, da die Druckabhängigkeit von $R_i^*(t)$ nur sehr schwach ist. Während zwei Drittel der Einsatzzeit der Probe ist kein Einfluß der Ovalität spürbar. Dann wächst er jedoch rapide an und beendet damit die Einsatzzeit der Probe. Dies hat seinen Grund in dem zeitlichen Verlauf der Ovalität, die lange Zeit sehr klein bleibt und plötzlich in kurzer Zeit zu sehr großen Werten übergeht. Während der ersten Zeit verläuft $\bar{R}_i(t)$ deckungsgleich mit $R_i^*(t)$ zeitlich linear. Dieser lineare Verlauf von $\bar{R}_i(t)$ läßt sich auch in den Bereich extrapolieren, in dem $R_i^*(t)$ nach unten abknickt. Damit liegt der gesamte zeitliche Verlauf von $\bar{R}_i(t)$ vor.

Gleichung (3.4.5) läßt sich nach $\alpha(t)$ auflösen:

$$\alpha(t) = \frac{\bar{R}_i(t) - R_s}{\bar{R}_i(t)} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\ln \frac{R_i^*(t)}{\bar{R}_i(t)}}{\ln \frac{R_s}{\bar{R}_i(t)}}\right)^2} \quad (3.4.6)$$

Damit liegt auch der gesamte zeitliche Verlauf von $\alpha(t)$ vor.

Aus der Messung der fiktiven Größe $R_i(t)$ in Abhängigkeit der Zeit t lassen sich nach diesen Verfahren durch Anwendung des Schalenmodells die realen Größen

- mittl. Innenradius $\bar{R}_i(t)$ und
- Ovalität $\alpha(t)$ der Rohrprobe

separieren.

3.5 Genauigkeit des kapazitiven Meßverfahrens

Nach Kapitel 3.3 und 3.4 liegt für Innen- und Außendruckbelastung ein identisches Meßproblem vor. Deshalb wird die Genauigkeitsabschätzung nur für Innendruckbelastung durchgeführt. Die sich daraus ergebenden Fehler gelten vollständig analog auch für Außendruckbelastung.

Bei Innendruckbelastung sind die einzelnen Meßgrößen:

- Außenradius R_a ($t = 0$) der Rohrprobe,
- Sondenradius R_s ,
- Länge l der Meßanordnung,
- Eichkonstante A des Meßkreises,
- Eigenfrequenz ν ($t = 0$) des Meßkreises zur Zeit $t = 0$,
- kontinuierlich gemessene Eigenfrequenz $\nu(t)$ des Meßkreises.

Aus diesen Meßgrößen wird ^{(nach} (3.3.8) und (3.3.9) der zeitliche Verlauf $R_a(t)$ des Rohraußenradius bestimmt.

Die Ungenauigkeit $\Delta R_a(t)$ des kontinuierlich indirekt gemessenen Rohraußenradius $R_a(t)$ geht einmal auf die Ungenauigkeit der einzelnen oben aufgeführten direkten Meßgrößen zurück. Diese Ungenauigkeit läßt sich mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes ermitteln. Da die einzelnen Fehlerquellen statistisch unabhängig voneinander sind, ergibt sich der Gesamtfehler aus der Summe der Quadrate der Einzelfehler (vgl. Zurmühl /30/):

$$\begin{aligned} \Delta R_a^2(t) &= \left(\frac{\partial R_a(t)}{\partial R_a(0)} \right)^2 \Delta R_a^2(0) + \left(\frac{\partial R_a(t)}{\partial R_s} \right)^2 \Delta R_s^2 \\ &+ \left(\frac{\partial R_a(t)}{\partial l} \right) \Delta l^2 + \left(\frac{\partial R_a(t)}{\partial A} \right) \Delta A^2 \\ &+ \left(\frac{\partial R_a(t)}{\partial v(0)} \right) \Delta v^2(0) + \left(\frac{\partial R_a(t)}{\partial v(t)} \right) \Delta v^2(t). \quad (3.5.1) \end{aligned}$$

Zum zweiten ergibt sich eine Ungenauigkeit für $R_a(t)$ durch die Effekte, die in Modellversuchen in Kapitel 3.2 untersucht wurden. Dies betrifft die Folgen der Annahme, daß die Streukapazität und damit die Untergrundkapazität als zeitlich konstant angenommen wird und den Einfluß vorhandener Exzentrizitäten.

Für die Fehlerfortpflanzung ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta R_a(t)}{R_a(t)} \right)^2 &= P_{R_a(0)}^2 \left(\frac{\Delta R_a(0)}{R_a(0)} \right)^2 + P_{R_s}^2 \left(\frac{\Delta R_s}{R_s} \right)^2 + P_l^2 \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 \\ &+ P_A^2 \left(\frac{\Delta A}{A} \right)^2 + P_{v(0)}^2 \left(\frac{\Delta v(0)}{v(0)} \right)^2 + P_{v(t)}^2 \left(\frac{\Delta v(t)}{v(t)} \right)^2. \quad (3.5.2) \end{aligned}$$

Dabei berechnen sich die einzelnen Gewichtungsfaktoren zu:

$$P_{R_a(0)} = x_i^2, \quad (3.5.3)$$

$$P_{R_s} = 1 - x_i^2, \quad (3.5.4)$$

$$P_i = (x_i - x_i^2) \ln \frac{R_s}{R_a(t)}, \quad (3.5.5)$$

$$P_A = P_i, \quad (3.5.6)$$

$$P_{v(t)} = 2 x_i^2 \ln \frac{R_s}{R_a(t)} \frac{A}{v^2(t)} \frac{\ln \frac{R_s}{R_a(t)}}{2\pi\epsilon_0 l}, \quad (3.5.7)$$

$$P_{v(t)} = P_{v(t)} + 2 P_i. \quad (3.5.8)$$

Für die in Kapitel 4 realisierte Meßanordnung sind die Gewichtungsfaktoren in Fig. 3.21 aufgetragen. Die Abszisse bildet dabei der Exponent x_i (vgl. Gleichung (3.3.8), (3.3.9)).

Zur Zeit $t = 0$ ist $x_i = 1$. Mit zunehmender Zeit wird der Rohrradius und damit die Kapazität der Meßordnung größer, gleichzeitig wird die Frequenz des Meßkreises kleiner. Der minimale Wert für die Frequenz ist Null, damit wird auch $x_i = 0$. Die Abszisse in Fig. 3.21 entspricht also qualitativ einer Zeitachse.

Es fällt auf, daß die Länge l der Meßanordnung und die Eichkonstante A des Meßkreises nur sehr schwach in die Genauigkeit von $R_a(t)$ eingehen. Deshalb ist ein besonderer Aufwand bei der Bestimmung von l und A nicht nötig. Den zahlenmäßig größten Gewichtungsfaktor haben die Meßfrequenzen $v(0)$ und $v(t)$. Berücksichtigt man allerdings, daß die Frequenzen selbst sehr genau meßbar sind (bei den in Kapitel 4 behandelten Messungen lag die relative Genauigkeit der Frequenzmessung bei 10^{-5}), dann wird auch der Fehler von $R_a(t)$ infolge Frequenzmeßungengenauigkeit verschwindend gering.

Damit gehen in die Genauigkeit von $R_a(t)$ durch Fehlerfortpflanzung praktisch nur die Fehler ein, mit denen der Rohraußenradius $R_a(0)$ und der Sondenradius R_s vermessen

werden. Zunächst ist die Genauigkeit, mit der $R_a(0)$ bekannt ist, das Maß für die Genauigkeit des kontinuierlich gemessenen Rohraußenradius $R_a(t)$. Mit wachsender Einsatzzeit der Rohrprobe, bei der sich die Rohrprobe immer stärker an die Sonde annähert, wird die Genauigkeit des Sondenradius R_s die entscheidende Größe für die Genauigkeit von $R_a(t)$.

Die Auswirkung der Annahme, daß die Untergrundkapazität und damit die Streukapazität zeitlich konstant ist, läßt sich nur grob abschätzen.

Aus den Modellexperimenten (Kap. 3.2) ergab sich, daß die Streukapazität und damit der Untergrund ^(μm) 2 pF zunimmt, wenn die Spaltweite zwischen Rohrprobe und Meßsonde von 5.5 % auf 2.5 % verringert, also ungefähr halbiert wird.

Die Fehlerabschätzung wird für die in Kapitel 4 realisierte Meßanordnung gemacht:

$$\begin{array}{rcl} R_a(0) & = & 3 \text{ mm} &) \\ & & &) \\ & & &) \text{ Spaltweite } 6.7 \% \\ R_s & = & 3,2 \text{ mm} &) \\ l & = & 20 \text{ mm} &) \end{array}$$

Zunächst wird die sehr grobe Annahme getroffen, daß die Untergrundkapazität zeitlich linear ansteigt:

$$C_u = C_{u0} + \Delta C_u(t) \quad (3.5.9)$$

mit

$$\Delta C_u(t) = \frac{t}{t_{0.5}} \cdot 2 \text{ pF} . \quad (3.5.10)$$

Hierbei ist $t_{0.5}$ die Zeit, innerhalb der die Spaltweite halbiert wird. Damit sind Gleichung (3.3.4) und (3.3.5) zur Elimination des Untergrunds zu modifizieren:

$$\frac{A}{\gamma^2(t)} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_s}{R_a^*(t)}} + C_{u0} + \frac{t}{t_{0.5}} \cdot 2\rho F, \quad (3.5.11)$$

$$\frac{A}{\gamma^2(0)} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_s}{R_a(0)}} + C_{u0}. \quad (3.5.12)$$

In Gleichung (3.5.11) ist $R_a^*(t)$ der korrigierte Rohraußenradius, bei dem die zeitliche Änderung der Untergrundkapazität berücksichtigt ist.

Nach demselben Verfahren wie in Kapitel 3.3 ergibt sich:

$$R_a^*(t) = R_s \left(\frac{R_a(0)}{R_s} \right)^{x_i^*} \quad (3.5.13)$$

mit

$$x_i^* = x_i \left[1 - \frac{t}{t_{0.5}} 2\rho F \frac{\ln \frac{R_s}{R_a(0)}}{2\pi\epsilon_0 l} \right]^{-1}. \quad (3.5.14)$$

Unter der wieder sehr groben Annahme, daß sich der Radius $R_a(t)$ linear mit der Zeit vergrößert, ist der Fehler $\Delta R_a^{\text{Streu}} = R_a^*(t) - R_a(t)$ in Fig. 3.22 über dem Außenradius und damit über der Zeit aufgetragen. Der Fehler ist anfangs Null und übersteigt später betragsmäßig nicht 7 μm .

Auf Grund der vielen Annahmen, die zur Abschätzung des Fehlers gemacht wurden, ist der in Fig. 3.22 dargestellte zeitliche Verlauf natürlich allgemein nicht sehr aussagekräftig.

Als konkretes Ergebnis lassen sich jedoch zwei Aussagen machen:

1. Durch die Annahme, daß der Untergrund zeitlich konstant ist, wird ein zu schneller zeitlicher Anstieg $R_a(t)$ des Außenradius vorgetäuscht.
2. Die Voreilung in der Aufweitung beträgt größenordnungsmäßig einige Mikrometer. Bezogen auf den Rohrradius sind dies etwa 2 $^{\circ}/\infty$.

Alle späteren Fehlerangaben für $R_a(t)$ sind an diesem Streufehler zu relativieren. Eine genauere Fehlerangabe als in der Größenordnung des Streufehlers ist nicht sinnvoll.

Auch durch Vernachlässigung der Exzentrizität a der Meßanordnung wird ein falscher zeitlicher Radienverlauf vorgetäuscht.

Statt die Meßwerte mit

$$C^w(t) = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_s}{R_a^w(t)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R_s - R_a^w(t)}\right)^2}} \quad (3.5.15)$$

auszuwerten (vgl. Anhang A 2), wird vereinfachend angenommen:

$$C(t) = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_s}{R_a(t)}} \quad (3.5.16)$$

Bei kleinen Exzentrizitäten a und damit bei kleinen Unterschieden zwischen $R_a^w(t)$ und $R_a(t)$ läßt sich $C^w(t)$ näherungsweise ersetzen:

$$C^{w'}(t) = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_s}{R_a^w(t)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R_s - R_a(t)}\right)^2}} \quad (3.5.17)$$

Gleichsetzen von (3.5.16) und (3.5.17) ergibt:

$$R_a^w(t) = R_s \left(\frac{R_a(t)}{R_s} \right)^{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R_s - R_a(t)}\right)^2}}} \quad (3.5.18)$$

Fig. 3.22 zeigt den Fehler $\Delta R_a^{\text{ex}}(t) = R_a^w(t) - R_a(t)$ in Abhängigkeit von dem Rohraußenradius, es zeigt sich, daß Exzentrizitäten unter 25 μm weitgehend zu vernachlässigen sind. Erst bei größeren Exzentrizitäten treten spürbare Fehler $\Delta R_a^{\text{ex}}(t)$ auf. Wieder wird ein zu rascher zeitlicher Anstieg des Rohraußenradius vorgetäuscht. Der zeitliche Bereich, in dem spürbare Fehler auftreten, liegt im letzten Teil der Einsatzzeit der Rohrprobe.

Zusammenfassend lassen sich alle auftretenden Fehlerquellen in drei Gruppen einteilen.

Ein statistischer Fehler liegt nur vor bei der kontinuierlichen Messung der Frequenz $v(t)$. Die gemessenen Frequenzwerte schwanken statistisch um einen mittleren zeitlichen Verlauf.

Alle anderen Fehler sind systematische Fehler. Sie sind in der unzureichenden Kenntnis jeweils einer Größe begründet, die sich auf alle Meßwerte des Außenradius $R_a(t)$ in gleicher Weise auswirkt. Durch eine beliebige Steigerung der Zahl der Meßpunkte läßt sich die Größe dieser Fehler nicht reduzieren. Die systematischen Fehler lassen sich wieder in zwei Gruppen einteilen. Die Ungenauigkeiten von $R_a(0)$, R_s , l , A und $v(0)$ bewirken jeweils symmetrische Fehler für $R_a(t)$. Dagegen wirken sich die Annahmen, daß der Streufeldeinfluß zeitlich konstant ist und daß Exzentrizitäten vernachlässigt werden können, als einseitige Fehler für $R_a(t)$ aus. Sie täuschen jeweils einen zu grossen Wert für den Außenradius $R_a(t)$ vor.

Bei der Auswertung der gemessenen Kriechkurven in Kapitel 4 sind die einzelnen Fehlergruppen jeweils gesondert zu behandeln.

3.6 Betriebsverhalten des kapazitiven Meßverfahrens

Am Anfang des Kapitels 3 war ein Katalog von Anforderungen aufgestellt worden, der der Entwicklung des kontinuierlichen kapazitiven Meßverfahrens zugrunde gelegt wurde. Die Funktion des Verfahrens unter diesen Betriebsbedingungen wird durch die Kriechexperimente nachgewiesen, die in Kapitel 4 dargestellt werden.

Die experimentelle Hauptschwierigkeit liegt dabei in dem Temperaturarbeitsbereich des Verfahrens. Denn die kapazitive Rohrvermessung bei $700\text{ }^{\circ}\text{C}$ wird durch die im folgen-

den aufgeführten vier Temperatureffekte erschwert:

1. Unter einer Luftatmosphäre würden die Meßflächen von Rohr und Sonde oxydieren. Durch Oxydation werden zunächst die geometrischen Abmessungen der Meßanordnung verändert, darüber hinaus können sich die dielektrischen Verhältnisse im Spalt zwischen den Meßelektroden des Zylinderkondensators ändern.
2. Metalloberflächen emittieren bei einer Temperatur von 700°C Elektronen. Diese Elektronen ermöglichen einen Ladungstransport zwischen den Elektroden des Meßkondensators und dämpfen damit die Resonanz des Meßschwingkreises.
3. Ein weiteres Dämpfungsglied im Meßschwingkreis stellen die Keramikisolier- und -zentrierkörper dar, die zwischen Rohr und Sonde angebracht sind. Der spezifische Widerstand im Handel erhältlicher Keramik nimmt mit steigender Temperatur stark ab und begrenzt damit die Einsatzmöglichkeit des kapazitiven Meßverfahrens.
4. In der Aufheizphase zu Beginn eines jeden Kriechexperiments verändert sich die Konfiguration der Meßanordnung durch freigesetzte Eigenspannungen und verschiedene thermische Ausdehnung in den einzelnen Bauteilen.

Jeder einzelne der hier aufgeführten Temperatureffekte kann eine Rohrverformung vortäuschen, bis hin zum Anliegen des Rohres an die Sonde. Die Beseitigung dieser Effekte ist also unerlässlich für das Funktionieren des Meßverfahrens.

Die Oxydation der Meßflächen läßt sich verhindern, wenn das gesamte Meßvolumen (der Raum zwischen den Meßflächen) evakuiert oder unter Heliumatmosphäre gesetzt wird. Die Dämpfung des Meßkreises durch elektrische Leitung über den Meßspalt (Elektronenemission) oder über die Keramikkörper verändert zwar nicht die Eigenfrequenz des Meßkrei-

ses, bewirkt aber elektronische Probleme beim Oszillator und beim Frequenzzähler. Die Elektronenemission ist prinzipiell nicht vermeidbar, die elektrische Leitung über die Keramikkörper kann aber durch geeignete Wahl des Materials reduziert werden.

Bei Verwendung von hochreiner Aluminiumoxydkeramik konnte der Gesamtwiderstand der Meßanordnung bei 700 °C auf $> 1 \text{ M}\Omega$ angehoben werden. Dabei traten keine frequenzmeßtechnischen Probleme mehr auf.

Die Frequenzänderung in der Aufheizphase ließ sich nicht unterdrücken. Um dennoch reproduzierbare Verhältnisse zu haben, wurde jede Meßanordnung vor der Druckbeaufschlagung der Probe etwa 200 Stunden der Untersuchungstemperatur ausgesetzt. Innerhalb dieser Zeit waren die Konfigurationsänderungen stets abgeschlossen, was an einem konstanten Wert der Frequenz des Meßkreises zu beobachten war. Die Anfangskonfiguration der Meßanordnung wurde dann definiert durch

- die geometrischen Größen der Meßanordnung, die vor Probeneinsatz durch eine Vermessung ermittelt und auf thermische Ausdehnung korrigiert wurden, und
- die Anfangsfrequenz des Meßkreises, die sich als konstanter Wert unmittelbar vor der Druckbeaufschlagung bei der Untersuchungstemperatur eingestellt hatte.

4. Kriechexperimente an Brennstabhüllrohrproben

Mit Hilfe des kapazitiven Meßverfahrens (Kap. 3) werden Kriechexperimente sowohl unter Innen- als auch unter Außendruckbelastung bei hoher, zeitlich konstanter Temperatur durchgeführt.

Die Rohrproben bestehen aus einem für den Schnellbrüter-Prototyp SNR 300 zur Diskussion stehenden Werkstoff. Die Interpretation der Meßdaten wird mit Hilfe des Schalenmodells (Kap. 2) vorgenommen.

4.1 Versuchsstand

Der Versuchsstand zur Simulation der Reaktorbedingungen besteht im wesentlichen aus folgenden Teilen:

- Batterie von 10 Zeitstandprüfeinheiten
- Heizstromversorgungs- und Temperaturmeßeinheit
- Druckversorgungs- und Druckmeßeinheit
- Vakuum- bzw. Schutzgasanlage
- Klimaanlage

Jede Zeitprüfeinheit besteht aus einem Röhrenofen, einem Druck- und einem Vakuum- bzw. Schutzgasanschluß. Der Röhrenofen hat einen nutzbaren Durchmesser von 70 mm. Er wird in drei Zonen elektrisch beheizt. Dadurch entsteht eine nutzbare Ofenlänge von 160 mm, in der isotherme Verhältnisse vorliegen. Im nutzbaren Bereich läßt sich eine auf ± 3 °C konstante Temperatur erzeugen.

Zur Durchführung der isothermen Experimente wird der Heizstrom mittels eines Drehtransformators für jede Heizzone und eines Netzschnellreglers fest eingestellt. Er wird gegebenenfalls manuell nachgeregelt. Die Temperaturmessung wird jeweils mit drei über die Länge der Rohrprobe verteilten Pt-PtRh-Thermoelementen vorgenommen.

Die Genauigkeit der Temperaturmessung liegt bei der Untersuchungstemperatur von 700 °C bei 0.5 %. Die zeitlichen Schwankungen der Temperatur innerhalb des Röhrenofens liegen innerhalb dieser Genauigkeit.

Der Prüfdruck wird mit einem Doppelmembrankompressor aufgebracht. Der maximale Prüfdruck beträgt 50 N/mm². Jede Zeitstandprüfeinheit hat einen eigenen abgetrennten Druckanschluß.

Die Druckmessung geschieht mit Feinmeßmanometern mit einer Genauigkeit von 0.025 N/mm² unterhalb von 25 N/mm² und mit einer Genauigkeit von 0.3 N/mm² bis zum maximalen Prüfdruck. Als Druckmedium dient das Inertgas Helium.

Die Zeitstandprüfeinheiten haben eine gemeinsame Vakuum- bzw. Schutzgasanlage. Mit einer Drehschieberpumpe kann ein Betriebsvakuum von 10⁻² Torr erzeugt werden. Als Schutzgas wird Helium verwendet. Die Heizleistung der Zeitstandprüfeinheiten wird mit einer Klimaanlage abgeführt.

4.2 Rohrproben und Meßvorrichtungen

Die Daten der untersuchten Rohre enthält Tabelle 4.1. Dieselben Rohre wurden auch von Schäfer et al., und von Braun et al. auf ihr Zeitstand- und Kriechverhalten zur Verwendung in schnellen natriumgekühlten Brutreaktoren untersucht. Bei der Anlieferung lag ein Vermessungsprotokoll über Innen- und Außenradius sowie über die Wandstärke vor.

Unmittelbar vor Versuchsbeginn wurde das Rohrmaterial ca. 200 h bei 700 °C ausgelagert und spannungsfrei gegläht.

Die Auswertung der Kriechversuche an diesem Rohrmaterial soll nach dem Schalenmodell erfolgen. Dazu ist es erforderlich, daß in der Meßzone homogene Verhältnisse vorliegen,

wie sie beim unendlich langen Rohr bestehen, das die Grundlage für das Schalenmodell bildet.

In Kap. 2.2.1 wurde gezeigt, daß die Forderung des ebenen Dehnungszustandes im Rohr zu einer Spannungsverteilung führt, die der Spannungsverteilung in einer endlich langen Rohrprobe entspricht, die an den Enden druckdicht abgeschlossen ist.

Die druckdichte Verschweißung am Rohrende führt zwar nach Anhang A 1 zu einer Störung der Spannungsverteilung in der unmittelbaren Umgebung der Schweißnaht. Bei einer in dieser Arbeit realisierten Länge der Rohrprobe von 100 mm und einer Meßzone von 20 mm Länge in der Mitte der Rohrprobe kann davon ausgegangen werden, daß in der Meßzone die geforderten homogenen Verhältnisse vorliegen.

Diese Folgerung aus der Analyse der Spannungsverteilung im Rohr deckt sich auch mit dem experimentellen Befund:

Kaupä /24/ entdeckte bei Außendruck-Standzeitexperimenten an Rohren aus Incoloy 800 (Außendurchmesser 7 mm, Wandstärke 0,4 mm, Temperatur 700 °C) keine deutlich spürbare Änderung der Standzeit bei einer Reduzierung der Probenlänge von 100 mm auf 50 mm.

Polifka /31/ hat Rohre aus dem Material X8 CrNiMoVNb 1613 (Werkstoff-Nr. 1.4988, Außendurchmesser 7 mm, Wandstärke 0,4 mm, Temperatur 700 °C) unter Innendruckbelastung untersucht. Er beanspruchte die Rohre bis zum Bruch und stellte bei Rohrlängen zwischen 10 mm und 140 mm keine Unterschiede bezüglich Standzeit und Bruchdehnung fest.

Die Meßvorrichtung für Innendruckbelastung zeigt Fig. 4.1. Die Meßvorrichtung wird so in den Röhrenofen fixiert, daß die Rohrprobe in der isothermen Zone des Röhrenofens liegt. Die Temperatur wird an drei über die Länge der Rohrprobe verteilten Positionen an der Außenwand der Meßvorrichtung gemessen.

Die Meßsonde wird gegenüber der Rohrprobe mit geschliffenen Röllchen aus hochreiner Aluminiumoxydkeramik isoliert und zentriert, ebenso wie die Herausführung der Meßsonde gegenüber dem Gehäuse der Meßvorrichtung.

Die Innendruckexperimente werden unter Vakuum durchgeführt. Der Vakuumschluß sowie die Vakuumdichtungen liegen außerhalb des Röhrenofens.

Die Meßvorrichtung für Außendruckbelastung zeigt Fig. 4.2. Die Meßposition liegt ebenfalls in der isothermen Zone des Röhrenofens, die Isolierung und Zentrierung erfolgt mit Aluminiumoxydkeramik.

Die Messung wird unter dem Schutzgas Helium durchgeführt. Der Schutzgasanschluß und die Herausführung der Meßsonde aus der Schutzgaskammer sind außerhalb des Röhrenofens angeordnet.

4.3 Vermessung der Meßanordnung

Nach Kapitel 3 ist zur Auswertung der kontinuierlich anfallenden Frequenzdaten die genaue Kenntnis folgender Maße der Meßanordnung notwendig:

- Außenradius der Rohrprobe bei Innendruck- bzw. Innenradius der Rohrprobe bei Außendruckbelastung
- Sondenlänge
- Exzentrizität der Meßanordnung

Diese Größen ergeben sich aus der mechanischen Vorvermessung der Meßanordnung.

Zur Kontrolle des kontinuierlichen Meßverfahrens wird außerdem nach Abschluß des Experiments

- der Rohraußenradius und
- die Ovalität

vermessen.

Zur Messung der Radien und der Ovalitäten stehen Innen- und Außenmikrometerschrauben zur Verfügung.

Die oben aufgeführten Größen gehen z. T. (nach Kap. 3.3 und 3.4) als Meßgrößen in die Auswertung der kontinuierlichen Versuche ein.

Zur Fehlerabschätzung (Kap. 3.5) ist darüber hinaus noch die Kenntnis der Zuverlässigkeit der oben aufgeführten Abmessungen notwendig.

Die Zuverlässigkeit der jeweiligen Meßgröße ergibt sich aus der Genauigkeit des entsprechenden Meßinstruments.

In die Zuverlässigkeit der kontinuierlichen Messung der Rohrgeometrie geht außerdem nach Kap. 3.5 die Exzentrizität der Meßanordnung ein. Sie läßt sich auf 4 verschiedene Ursachen zurückführen:

- axiale Krümmung der Rohrprobe
- axiale Krümmung der Meßsonde
- Lagerspiel zwischen Rohrprobe und Keramikzentrierring
- Lagerspiel zwischen Meßsonde und Keramikzentrierring

Ein bei Raumtemperatur bestehendes Spiel an der Innenfläche des Zentrierrings wird durch Temperaturbeaufschlagung abgebaut, da der thermische Ausdehnungskoeffizient der Keramik nur etwa halb so groß wie der des Sonden- und Rohrmaterials (austenitischer Stahl) ist. Bei den in Kapitel 4.4 und 4.5 beschriebenen Messungen ließ es sich stets einrichten, daß an der Zentrierringinnenfläche ein Preßsitz auftrat. Dadurch reduziert sich die Exzentrizität auf drei Anteile.

Umgekehrt wird ein eventuell an der Zentrierringaußenfläche bestehender Preßsitz durch Temperaturbeaufschlagung

abgebaut. Dadurch trat bei den in Kapitel 4 beschriebenen Messungen an der Zentrierringaußenfläche stets Spiel auf.

Dieses Spiel läßt sich durch Messung mit Innen- und Außenmikrometerschrauben und durch Berücksichtigung der thermischen Ausdehnung bestimmen.

Durch das Lagerspiel ist die Meßsonde schon an den Zentrierringen selbst nicht genau zentriert. Diese Zentrierfehler wirken sich auch auf den Meßbereich in der Mitte aus und ermöglichen die Angabe einer mittleren Exzentrizität infolge Lagerspiel.

Die axiale Krümmung von Rohrprobe und Meßsonde wird mit einem Rundheitsmeßgerät gemessen.

Das zu vermessende Werkstück wird auf dem Drehteller des Meßgeräts zentriert und ins Lot gebracht. Mit Hilfe eines induktiven Wegaufnehmers werden drei Polarschriebe aufgenommen, jeweils im Bereich der Zentrierringe und im Meßbereich (Fig. 4.3). Aus der relativen Lage der Mittelpunkte der drei aufgenommenen Kreise läßt sich die Exzentrizität im Meßbereich relativ zu den Zentrierstellen bestimmen.

Wäre das Werkstück ideal gerade, dann müßte der Mittelpunkt des mittleren Kreises die Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der äußeren Kreise gerade halbieren. Der Abstand von diesem idealen Mittelpunkt ergibt direkt die Exzentrizität des Werkstücks. Die Zusammensetzung der drei Anteile der Exzentrizität zur Gesamtexzentrizität läßt sich nur mit statistischen Methoden bewerkstelligen, da unbekannt ist, wie sich die einzelnen Anteile konkret überlagern.

Aufgrund ihrer statistischen Unabhängigkeit werden die einzelnen Anteile quadratisch zur Gesamtexzentrizität zusammengesetzt:

$$a^2 = a^2_{\text{Spiel}} + a^2_{\text{Rohr}} + a^2_{\text{Sonde}} \quad (4.3.1)$$

4.4 Innendruckmessungen

Die Daten zu den Innendruckmessungen sind in Tabelle 4.2 und in Fig. 4.4 bis 4.8 enthalten.

Bei der Vorvermessung der Meßanordnung wurden nach Kap. 4.3 die Größen bestimmt, die nach Kap. 3.3 und 3.5 als feste Meßgrößen oder zur Fehlerabschätzung in die Auswertung der Innendruckversuche eingehen. Die kontinuierlich gemessenen Eigenfrequenzen der Meßanordnung wurden nach Gleichung (3.3.8) und (3.3.9) in Außenradien umgerechnet und in Fig. 4.4 bis 4.8 aufgetragen.

Die einzelnen Meßpunkte sind als Kreuze aufgetragen, deren senkrechte Balken die Zuverlässigkeit des jeweiligen Meßpunktes angeben. Die Asymmetrie der Fehler hat ihre Ursache in der einseitigen Wirkung des Exzentrizitätsfehlers, der zu große Außenradien vortäuscht und deshalb in Richtung auf kleinere Außenradien angetragen ist.

Das Meßverfahren läßt sich überprüfen durch die Nachvermessung der Rohrproben.

Die nach der Demontage der Meßanordnungen gewonnenen Radienwerte müssen noch hinsichtlich der elastischen und der thermischen Dehnung korrigiert werden, um sie mit den kontinuierlich gemessenen Radienwerten am Ende der Einsatzzeit der Probe vergleichen zu können:

$$R_a^{korr} = R_a \left(1 + \alpha \Delta T \right) \left(1 + (1-\nu^2) \frac{p R_i}{E h} \right). \quad (4.4.1)$$

Bei Probe 7 und 8 zeigt sich Konsistenz zwischen den Ergebnissen der Nachvermessung und den Ergebnissen der kontinuierlichen kapazitiven Rohrvermessung. Die geringfügig höheren Werte bei der kontinuierlichen Vermessung sind auf den Einfluß des Exzentrizitätsfehlers und des Streufehlers zurückzuführen (vgl. Kap. 3.5). Die Diskrepanz bei Probe 6, bei der in der Nachvermessung der Rohrradius

gegenüber der kontinuierlichen Vermessung vergrößert erscheint, ist damit zu erklären, daß die Probe nach Beendigung der kontinuierlichen Vermessung noch einige Stunden den Prüfbedingungen ausgesetzt war.

Zur quantitativen Analyse der Innendruckmessungen wird das Schalenmodell (Kap. 2) herangezogen. Gleichung (2.3.4.4) und (2.3.4.6) beschreiben den danach zu erwartenden zeitlichen Verlauf der Rohrgeometrie für den sekundären Kriechbereich.

Beachtet man, daß für den Lastangriffsradius a der Innenradius R_i der Rohrprobe zu setzen ist, dann folgt für den für die Verformungsmessung interessierenden Außenradius

R_a :

$$R_a(t) = R_{io}^{sek} (1 - ct)^{-\frac{1}{2n}} + \frac{h_o R_{io}}{R_{io}^{sek} (1 - ct)^{-\frac{1}{2n}}} \quad (4.4.2)$$

R_{io}^{sek} ist der auf den Zeitpunkt des Beginns der Druckbelastung extrapolierte Innenradius des sekundären Kriechbereichs, im Gegensatz zu R_{io} , das den tatsächlichen Radius zu dieser Zeit angibt. Der Unterschied zwischen R_{io} und R_{io}^{sek} ist auf elastische Verformungen und primäre Kriechdehnungen zurückzuführen.

Durch die Größe c wird die Anfangssteigung des zeitlichen Radienverlaufs festgelegt. Entwickelt man Gleichung (4.4.2) für kleine Zeiten, so folgt

$$R_a(t) = R_{io}^{sek} \left[\left(1 + \frac{h_o R_{io}}{(R_{io}^{sek})^2} \right) + \frac{ct}{2n} \left(1 - \frac{h_o R_{io}}{(R_{io}^{sek})^2} \right) + \dots \right] \quad (4.4.3)$$

Daher wird c im folgenden Kriechrate genannt. Die Abhängigkeit von c von Druck, Werkstoffparametern und Rohrabbmessungen gibt Gleichung (2.3.4.4):

$$c = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 2nk \left(1 + \frac{h_o}{2R_{io}^{sek}} \right) \left(1 + 3(1-\nu^2) \frac{p R_{io}^{sek}}{E h_o} \right) \left(\sqrt{\frac{3}{4}} \frac{p R_{io}^{sek}}{h_o} \right)^n \quad (4.4.4)$$

Der Kriechparameter n , der in (4.4.2) in dem Exponenten steht, beschreibt im wesentlichen die Krümmung des zeitlichen Radienverlaufs.

In Fig. 4.4 bis 4.8 sind im sekundären Kriechbereich Kurven der Form (4.4.2) nach den Regeln der Ausgleichsrechnung angepaßt. Die durchgezogenen Kurven stellen den Kurvenverlauf im Anpassungsbereich dar. Die zugrunde liegenden Ausgleichsgrößen R_{i0}^{sek} , c und n sind mit ihren Fehlern in Tabelle 4.2 aufgeführt.

Die Werte für den Kriechparameter n , die sich direkt aus der Ausgleichsrechnung für jede Probe ergeben, sind in Fig. 4.9 in Abhängigkeit von der Druckbelastung aufgetragen. Nach Gleichung (4.4.4) lassen sich für jede Probe aus den Ausgleichsgrößen auch Werte für den Kriechparameter k ermitteln (Fig. 4.10). Es zeigt sich in beiden Fällen innerhalb des Meßfehlers Unabhängigkeit der Kriechparameter vom Druck und damit sowohl die Gültigkeit des zugrunde gelegten Kriechgesetzes für den behandelten Fall als auch die Reproduzierbarkeit des Meßverfahrens.

Über diese direkte Bestimmung der Kriechparameter hinaus gibt es noch die Möglichkeit, aus der Druckabhängigkeit der Kriechrate die Kriechparameter n und k indirekt zu ermitteln. Dieses Verfahren wird z. B. von Schäfer /13/ und Böhm /14/ benutzt.

Nach (4.4.4) hängt die Kriechrate c von der n -ten Potenz des Druckes p ab.

Logarithmieren von (4.4.4) ergibt:

$$\lg c = \lg \left[\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 2nk \left(1 + \frac{h_0}{2R_{i0}^{sek}} \right) \left(1 + 3(1-\nu^2) \frac{p R_{i0}^{sek}}{E h_0} \right) \left(\sqrt{\frac{3}{4}} \frac{R_{i0}^{sek}}{h_0} \right)^n \right] + n \lg p \quad (4.4.5)$$

Die elastische Korrektur $\left(1 + 3(1-\nu^2) \frac{p \cdot R_{i0}^{sek}}{E \cdot h_0} \right)$ unterscheidet sich für die eingesetzten Proben um weniger als

1 0/00 von 1, die Druckabhängigkeit dieser Korrektur ist also gering.

R_{io}^{sek} ist nach Tabelle 4.2 in guter Näherung als eine Konstante anzusehen. Daher läßt sich der ganze erste Term in Gleichung (4.4.5) als Konstante auffassen. Zwischen $\lg c$ und $\lg p$ besteht demnach ein linearer Zusammenhang. Dieser lineare Zusammenhang ergibt sich auch experimentell (Fig. 4.11).

Aus den Parametern der angepaßten Gerade ergeben sich die Kriechparameter n und k , die als Fehlerbänder in Fig. 4.9 und 4.10 eingezeichnet sind.

Da Konsistenz zwischen beiden Methoden der Kriechparameterbestimmung besteht, werden sie beide zur Bestimmung der resultierenden Kriechparameter herangezogen (eng schraffiertes Fehlerband in Fig. 4.9 und 4.10):

$$n = 8.4 \pm 0.2$$
$$k = \begin{pmatrix} 4.2 & +5.4 \\ & -2.3 \end{pmatrix} \cdot 10^{-21} h^{-1} [N/mm^2]^{-n}$$

4.5 Vergleich mit Experimenten von Böhm, Schäfer und Braun

Die Rohrproben (Kap. 4.2) und die speziellen Versuchsbedingungen (Kap. 4.4) waren so gewählt worden, daß ein Vergleich der Messungen nach dem kontinuierlichen kapazitiven Verfahren (Kap. 3) mit Messungen nach anderen Meßverfahren möglich war.

Böhm /14/ mißt die Rohraufweitung kontinuierlich mit induktiven Wegaufnehmern. Er gibt Kriechparameter für die Versuchsbedingungen an, die auch in dieser Arbeit zugrunde liegen. Allerdings werden die Kriechparameter unter

der vereinfachenden Annahme gewonnen, daß das Norton-Kriechgesetz für den einaxialen Spannungszustand

$$\dot{\epsilon} = k \sigma^n \quad (4.5.1)$$

angewendet werden kann auf die Abhängigkeit der tangentialen Kriechgeschwindigkeit von der tangentialen Spannung.

Die Kriechparameter von Böhm sind deshalb mit den in dieser Arbeit gewonnenen Parametern nicht vergleichbar.

Deshalb wird in Fig. 4.12 der Vergleich direkt anhand der Kriechrate vorgenommen. Böhm definiert als sekundäre Kriechrate die minimale Steigung der Zeit-Dehn-Kurve. Die Vergleichsgröße dieser Arbeit ist die relative extrapolierte zeitliche Anfangssteigung des Innenradius nach (4.4.2):

$$\dot{\epsilon} = \frac{c}{2n} \quad (4.5.2)$$

Die Darstellung der Kriechraten, die den Ergebnissen von Böhm zugrunde liegen, erfolgt nach Closs /27/.

Mit in den Vergleich aufgenommen werden Ergebnisse aus einaxialen Zugversuchen an identischen Rohren von Schäfer /13/. Hierbei sind sowohl lösungsgeglühte als auch kaltverformte Rohre untersucht worden.

Böhm und Schäfer messen vergleichbare Kriechgeschwindigkeiten bei 12 % kaltverformten Rohren für einaxiale und mehraxiale Belastung. Dagegen zeigen Schäfers Ergebnisse für lösungsgeglühte Rohre bei einaxialer Belastung einen deutlichen Trend zu größerer Kriechgeschwindigkeit bei gleicher Spannung.

Etwa im Bereich der Ergebnisse für lösungsgeglühte Rohre nach Schäfer liegen die Ergebnisse dieser Arbeit. Dies deutet darauf hin, daß die Auslagerung der Rohre bei 700°C vor Druckbeaufschlagung die Erhöhung der Zeitstandfestig-

keit durch die Kaltverformung wieder rückgängig gemacht hat.

Schäfer beobachtet bei seinen einaxialen Zugversuchen einen ähnlichen Effekt. Bei kaltverformten Rohren wird die Zeitstandfestigkeit mit zunehmender Versuchszeit so sehr reduziert, daß lösungsgeglühte und 12 % kaltverformte Rohre bei Einsatzzeiten > 5000 h identisches Verhalten zeigen.

Braun /25/ mißt die Rohraufweitung diskontinuierlich. Die Vermessung erfolgt jeweils druckfrei unter Raumtemperatur. Fig. 4.13 zeigt einen Vergleich zwischen Kriechkurven unter ähnlicher Druckbelastung nach Braun und nach dieser Arbeit.

Zunächst fällt der Unterschied in der sekundären Kriechrate und in der Standzeit ungefähr um den Faktor 2 auf. Dies wurde schon beim Vergleich mit den Ergebnissen von Schäfer beobachtet und hat seinen Grund darin, daß bei den Rohrproben dieser Arbeit im Rohr bestehende Eigenspannungen schon vor der Druckbeaufschlagung freigesetzt wurden. Darüber hinaus fällt das stark unterschiedliche Verhalten der Rohrproben von Braun und der Rohrproben dieser Arbeit im primären Kriechbereich auf. In der Anfangsphase der Verformung mißt Braun in einem 24-stündigen Zyklus. Bei größeren Einsatzzeiten werden auch die Meßintervalle größer. Es wurde zunächst vermutet, daß die rasche Meßfolge in der Anfangsphase die Rohrverformung im primären Kriechbereich beeinflusst. Fig. 4.14 zeigt jedoch, daß sich dieser Einfluß des Meßverfahrens auf das Rohrverhalten während der gesamten Einsatzzeit der Rohre auswirkt.

Aufgetragen ist in Fig. 4.14 die Spannungsabhängigkeit der sekundären tangentialen Kriechgeschwindigkeit. Die Innendruckbelastung hat im Rohr zwei geometrische Effekte zur Folge:

- radiale Aufweitung und
- Wandstärkenschwächung des Rohrs.

Beide Effekte vergrößern während der Einsatzzeit der Rohrprobe kontinuierlich die Tangentialspannung. In Kapitel 4.4 wurde diese Spannungsvergrößerung während der Rohrverformung zur direkten Messung der Kriechparameter ausgenutzt. Darüber hinaus besteht nach Kapitel 4.4 die Möglichkeit der indirekten Messung der Kriechparameter durch Auswertung der Druckabhängigkeit der Kriechrate.

Die Konsistenz beider Auswertungsverfahren zeigt sich in Fig. 4.14 in dem tendenziell gleichen Verhalten jeder einzelnen Rohrprobe dieser Arbeit. Die Abhängigkeit der tangentialen Kriechgeschwindigkeit von der tangentialen Spannung deutet auf ein für alle Rohrproben in gleicher Weise geltendes Verformungsgesetz hin.

Die Ergebnisse von Braun zeigen dieses konsistente Verhalten nicht. Während die einzelne Rohrprobe eine starke Abhängigkeit der Kriechgeschwindigkeit von der Spannung aufweist, besteht nahezu Spannungsunabhängigkeit beim Vergleich der verschiedenen Rohrproben untereinander. Ein für alle Proben gültiges Verformungsgesetz läßt sich nicht angeben.

4.6 Außendruckmessungen

Die Daten zu den Außendruckmessungen sind in Tabelle 4.3 aufgeführt. Auf eine graphische Darstellung des zeitlichen Verlaufs von mittlerem Innenradius, fiktivem Innenradius und Ovalität der einzelnen Proben mußte hier verzichtet werden. Der Grund dafür liegt in der geringen Größe des Meßeffectes bei den einzelnen Außendruckproben, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht wurden.

Fig. 4.15 zeigt den gemessenen Frequenzverlauf für Probe 11. Es zeigt sich bei dieser sehr empfindlichen Auftragung, daß die Ungenauigkeit des Meßverfahrens in der gleichen Größenordnung liegt wie der Meßeffect selber. Bei allen anderen Proben wurde ein vergleichbarer zeitli-

cher Verlauf der Frequenz festgestellt.

Eine nur schwache, eventuell in der Größenordnung der Genauigkeit des Meßverfahrens liegende zeitliche Änderung des Rohrradius war zwar schon nach dem Schalenmodell (vgl. Kap. 3.4, Fig. 3.20) vorausgesagt worden. Es wurde jedoch ein massiver Meßeffect durch die Ovalisierung des Rohres erwartet. Die Tatsache, daß dieser massive Effekt nicht auftritt, ist ein Indiz dafür, daß die Ovalisierung nicht nach dem im Schalenmodell berechneten Verlauf fortschreitet. Ein Mechanismus, der im folgenden noch näher erläutert wird, sorgt dafür, daß nach kleinen Ovalisierungen bereits Kollaps in der Rohrprobe eintritt. Abschätzungen aus dem zeitlichen Frequenzverlauf bei den einzelnen Proben ergeben, daß der Kollaps etwa bei 2...3 % Ovalität eintritt.

Der hiermit gemessene Ovalitätsverlauf steht im Widerspruch zu allen theoretischen Aussagen (vgl. Schalenmodell, Kap. 2, Malmberg /18/, Hoff /19/, Laßmann /8/). Denn keine dieser Theorien enthält ein Kriterium, nach dem dieser plötzliche Kollaps bei solch kleinen Ovalitäten möglich ist.

Die Diskrepanz zwischen dem experimentellen Befund (Fig. 4.15), nach dem Kollaps schon bei Ovalitäten von 2 % bis 3 % eintritt, und den theoretischen Voraussagen, nach denen die Ovalisierung stetig zunimmt bis hin zu unendlich großen Werten, soll am Beispiel des Schalenmodells deutlich gemacht werden: In Fig. 2.5 ist der zeitliche Verlauf der Ovalität für einen Vergleichsdatenfall (Tab. 2.1) und verschiedene Außendruckbelastungen dargestellt. Zwar sind die geometrischen Abmessungen der Rohre des Vergleichsdatenfalls und der experimentell untersuchten Rohre unterschiedlich. Das Verhältnis Wandstärke zu Rohrradius, das die entscheidende Größe für den plötzlichen Kollaps ist, wie in diesem Abschnitt noch gezeigt wird, ist jedoch etwa gleich groß. Auch oberhalb der experimentell

gefundenen Grenzovalität von 2 % bis 3 % wird ein kontinuierliches Ansteigen der Ovalität berechnet, bis schließlich fast nach einer Verdopplung der Einsatzzeit die Standzeit erreicht ist.

Um diese Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment erklären zu können, ist eine quantitative Analyse der Außen-druckmessungen notwendig. Dazu kann der zeitliche Verlauf der Meßfrequenz nach dem Schema, das in Kap. 3.4 angegeben ist, nicht herangezogen werden, da der geringe Meßeffekt bei den einzelnen Proben durch Schwankungen des Meßsystems zu stark überdeckt wird. Aus demselben Grund läßt sich auch die Kriechrate der einzelnen Rohrproben nicht bestimmen, deren Druckabhängigkeit (vgl. Kap. 4.4) zur Kriechparameterbestimmung herangezogen werden kann.

Zur quantitativen Auswertung liegen damit nur die Standzeiten der Proben vor. Daraus ist eine Aussage über die dem Verformungsprozeß zugrunde liegenden Kriechparameter möglich. Hoff /19/ gibt für die Standzeit t_s folgende Druckabhängigkeit an:

$$t_s \sim p^{-n} \quad (4.6.1)$$

Dieses Ergebnis wendet z. B. Kaupa /24/ bei der Auswertung seiner Standzeitmessungen an. Ein äquivalentes Ergebnis liefert das Schalenmodell (vgl. Kap. 2): Berücksichtigt man Gleichung (2.3.4.4) bei kleinen zeitlichen Änderungen und Gleichung (2.3.4.5), so erhält man:

$$\ln \frac{\alpha(t)}{\alpha(0)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} 4 n k t p^n \left(\frac{R_a(0)}{h(0)}\right)^{n+2} \left(1 - \frac{h(0)}{R_a(0)}\right) \cdot \left(1 - 3(1-\nu^2) \frac{p R_a(0)}{E h(0)}\right) \left(1 + 8(1-\nu^2) \frac{p R_a^3(0)}{E h^3(0)}\right). \quad (4.6.2)$$

In Kap. 2.3.5 wurde als Kriterium für Erreichen der Standzeit das Erreichen einer festzusetzenden maximalen Ovalität α_{\max} eingeführt. Unter Anwendung dieses Standzeitkriteriums erhält man:

$$t_s = \frac{\left(h \frac{\alpha_{\max}}{\alpha(o)} \right)}{4nkp^n \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{R_a(o)}{h(o)} \right)^{n+2} \left(1 - \frac{h(o)}{R_a(o)} \right) \left(1 - 3(1-\nu^2) \frac{p R_a(o)}{E h(o)} \right) \left(1 + 8(1-\nu^2) \frac{p R_a^3(o)}{E h^3(o)} \right)} \quad (4.6.3)$$

Dieses Standzeitkriterium liefert wieder die charakteristische Druckabhängigkeit der Standzeit, die schon Hoff /19/ angibt; denn die Korrekturfaktoren in (4.6.3) bezüglich Lastangriffsradius und elastischer Verzerrung liegen in etwa bei 1 und sind nur sehr schwach druckabhängig und die geometrischen Größen $\alpha(o)$, $R_a(o)$, $h(o)$ sind laut Tab. 4.3 für alle Proben als in etwa konstant anzusehen.

Die Standzeiten, die für die eingesetzten Proben gemessen wurden, zeigen die nach (4.6.3) zu erwartende Druckabhängigkeit (Fig. 4.16). Die daraus zu ermittelnden Kriechparameter hängen nach (4.6.3) noch von der speziellen Wahl von α_{\max} ab. Bei der numerischen Auswertung nach der Gauß'schen Methode der kleinsten Fehlerquadrate (vgl. Zurmühl /30/) wurden zwei verschiedene Werte von α_{\max} angenommen:

Auf Grund der kontinuierlichen Rohrvermessung erscheint der Wert $\alpha_{\max} = 2\%$ als sinnvoll, als zweiter Wert wurde $\alpha_{\max} = 20\%$ gewählt. Dieser Wert war schon bei der vergleichenden Standzeitberechnung mit Hoff /19/, Malmberg /18/ und Laßmann /8/ (vgl. Kap. 2.3.5, Fig. 2.6) zugrundegelegt worden.

Als Ergebnis erhält man:

$$n = 8.0 \pm 0.4$$

$$k = \begin{cases} (1.4 \begin{smallmatrix} +3.5 \\ -1.0 \end{smallmatrix}) \cdot 10^{-22} & h^{-1} [N/mm^2]^{-n} & \text{für } \alpha_{\max} = 20\% \\ (9.4 \begin{smallmatrix} +23.6 \\ -6.8 \end{smallmatrix}) \cdot 10^{-23} & h^{-1} [N/mm^2]^{-n} & \text{für } \alpha_{\max} = 2\% \end{cases}$$

Vergleicht man diese Außendruck-Kriechdaten mit den Daten, die aus Innendruckversuchen gewonnen wurden, so zeigt sich für die untersuchten Rohrproben Unabhängigkeit des Kriechexponenten n vom Vorzeichen der Druckbelastung. Dagegen

zeigt der Kriechparameter k eine starke Abhängigkeit vom Vorzeichen der Belastung. Je nach zugrunde gelegtem Wert für α_{\max} ergibt sich eine Verkleinerung von k und damit auch der Kriechrate durch Übergang von Zug auf Druck um den Faktor $1/30$ bis $1/45$.

Dieser experimentelle Befund bedeutet, daß die bei der Odqvist'schen Invariantentheorie /16/ gemachte Annahme der Unabhängigkeit der Norton'schen Kriechparameter vom Vorzeichen der Spannung so allgemein nicht haltbar ist. Bei Problemen, bei denen das Material bereichsweise durch Zugspannungen und bereichsweise durch Druckspannungen beansprucht wird, ist ein Kriechansatz zu machen, der den verschiedenen Kriech Eigenschaften in den einzelnen Bereichen Rechnung trägt. Dieser Fall der bereichweisen Beanspruchung auf Zug bzw. auf Druck ist nun gerade beim Rohr unter Außendruckbelastung verwirklicht.

Nach dem Schalenmodell wird im folgenden der Spannungszustand im Rohr unter Außendruck analysiert:

Formuliert man Gleichung (2.1.4.24) für die physikalische Umfangskomponente der Spannung in einer zylindrischen Schale, so erhält man

$$\sigma_{\varphi} = \left(1 + \frac{x_3}{\rho}\right)^2 \left(\frac{N_{\varphi}}{h} + 12 \frac{x_3}{h} \frac{M_{\varphi}}{h^2}\right). \quad (4.6.4)$$

Unter Beachtung von Gleichung (2.2.2.3) und (2.2.2.5) und der vernünftigen Annahme kleiner Ovalitäten erhält man

$$\sigma_{\varphi} = \left(1 + \frac{x_3}{\rho}\right)^2 \frac{p\alpha}{h} \left(1 + \alpha \cos 2\varphi \left(1 - 12 \frac{\alpha}{h} \frac{x_3}{h}\right)\right). \quad (4.6.5)$$

In Fig. 4.17 ist der Spannungsverlauf (4.6.5) für verschiedene Ovalitäten dargestellt. Auf die Bedeutung des Ovalitätsparameters α_{\max}^N wird noch eingegangen. Während das Rohr unter Innendruck zu jeder Zeit und an jeder Stelle durch Zugspannungen beansprucht wird, wird das Rohr unter Außendruck nur in der Anfangsphase ausschließlich durch

Druckspannungen belastet. Die zunehmende Ovalisierung vergrößert die Biegemomente im Rohr, die ihre maximalen Werte an den Rohrscheiteln annehmen. Bei einer bestimmten Ovalität sind die Biegemomente an den Scheiteln so groß, daß die Umfangsspannung in Randfasern des Rohres am Scheitel Null wird. Eine weitere Ovalisierung führt zu Bereichen im Rohr, in denen Zugspannungen herrschen. Diese Bereiche liegen am Hauptscheitel an der Außenseite des Rohres und am Nebenscheitel an der Rohrinneenseite.

Angesichts der großen Unterschiede in den Kriechgeschwindigkeiten für Zug bzw. Druck bedeuten die Zugbereiche an den Rohrscheiteln praktisch 'Fließgelenke' gegenüber den sonst recht kriechfesten, durch Druckspannungen beanspruchten Rohrereichen. Diese Fließgelenke führen augenblicklich zum Kollaps des Rohres.

Ein nach diesen Überlegungen sinnvolles Kriterium für den Kollaps von Rohren unter Außendruck ist die Entlastung des Rohres in den Randfasern an seinen Scheiteln. Dieses Kriterium läßt sich durch den Spannungsverlauf (4.6.5) nach dem Schalenmodell auswerten.

Am Hauptscheitel ($\cos 2\varphi = 1$) auf der Rohraußenseite ($x_3 = h/2$) tritt Entlastung ein, wenn gilt

$$\alpha(t) = \alpha_{\max}^H = \frac{1}{6 \frac{a}{h} - 1} . \quad (4.6.6)$$

Analog ergibt sich als Entlastungskriterium für den Nebenscheitel ($\cos 2\varphi = -1$, $x_3 = -h/2$)

$$\alpha(t) = \alpha_{\max}^N = \frac{1}{6 \frac{a}{h} + 1} . \quad (4.6.7)$$

Unter Vernachlässigung von 1 gegen $6a/h$ erhält man als Kollapskriterium aus (4.6.6) und (4.6.7):

$$\alpha_{\max} = \frac{h}{6a} . \quad (4.6.8)$$

Nach Gleichung (4.6.8) läßt sich die maximal auftretende Ovalität bei den in dieser Arbeit untersuchten Rohren abschätzen:

$$\alpha_{\max} = 2.1 \%$$

Dieser Wert stimmt überein mit den aus den Frequenzverläufen ermittelten maximalen Ovalitäten und erklärt den niedrigen Meßeffect bei den in dieser Arbeit durchgeführten Außendruckexperimenten.

4.7 Vergleich der Innendruck- und Außendruckmessungen

In diesem Abschnitt soll ein abschließender Vergleich der Ergebnisse der Innendruck- und der Außendruckexperimente dieser Arbeit durchgeführt werden.

Vergleichende Kriechversuche unter Zug- und Druckbelastung wurden bisher nur selten durchgeführt und veröffentlicht. Dies hat seinen Grund in den experimentellen Schwierigkeiten, die bei Versuchen unter Druckbelastung auftreten. Rabotnov /17/ zeigt, daß diese Schwierigkeiten auf zwei Ursachen zurückzuführen sind:

- Exzentrizität des Lastangriffs und
- Abweichungen realer Kriechproben von der idealen Probenform

Diese Ursachen führen zu einer Erniedrigung der Standzeit einer Kriech-Druckprobe infolge Instabilitäten (Knicken, Beulen).

Verkleinert man die Länge der Kriechproben, dann kann man diese Schwierigkeiten weitgehend ausschalten. Dabei nimmt man aber in Kauf, daß durch die Krafteinleitung der Spannungszustand in weiten Bereichen der Probe gestört wird.

Diese Überlegungen Rabotnovs gelten für eindimensionale

Kriech-Druckproben. Das Rohr unter hydrostatischer Druckbelastung von außen stellt ebenfalls eine Kriech-Druckprobe dar. Der Spannungszustand ist jedoch mehrdimensional. Speziell die Schwierigkeiten, die durch den Lastangriff verursacht werden, bestehen hier nicht. Es treten zwar Abweichungen von der idealen Rohrgeometrie in Form von Ovalitäten und axialen Verbiegungen auf. Die Rohrverbiegung stellt jedoch keine kritische Größe dar, da das Rohr allseitig vom Druckmedium umgeben ist und dadurch keine resultierenden axialen Momente im Rohr entstehen. Nur die Rohrovalität führt zur Instabilität (Kriechbeulen).

In dieser Arbeit wird die Rohrovalisierung als Beitrag zum Meßeffekt aufgefaßt und nicht als Störeffekt, wie das bei Rabotnov der Fall ist. Damit bestehen die oben aufgeführten experimentellen Schwierigkeiten für das kriechende Rohr unter Außendruck nicht in dem Maße wie für die eindimensionale Kriech-Druckprobe.

Aus diesen Gründen bietet sich das Rohr als eine geometrische Konfiguration an, an der das Kriechen unter Druckbelastung, speziell im Vergleich zum Kriechen unter Zugbelastung, experimentell quantitativ ermittelt werden kann. Auf die Bedeutung dieser Tatsache für die Auslegung von Brennstabhüllrohren wurde bereits in der Einleitung (Kap. 1) hingewiesen.

Der abschließende Vergleich zwischen den Innen- und Außendruckmessungen dieser Arbeit beinhaltet im wesentlichen folgende Punkte:

- Funktion und Einsetzbarkeit des Meßverfahrens
- Möglichkeit der Auswertung der Meßergebnisse
- Größe der Kriechparameter

Die Funktion des Meßverfahrens ist durch die Kriechexperimente belegt, die in Abschnitt 4.4 und 4.6 dargestellt

wurden. Das Verfahren ist bei den geforderten Untersuchungsbedingungen (Druck, Temperatur) einsetzbar bis hin zu Standzeiten über 1000 Stunden. Die erreichbare Genauigkeit ergibt sich aus den Innendruck-Kriechkurven (Fig. 4.4 bis 4.8). Sie liegt im Bereich einiger Mikrometer.

Eine Grenze der Langzeitstabilität zeigt sich in den Auswendruckexperimenten. Die dort auftretenden Bewegungen von $< 10^{-4}$ mm/h liegen an der Grenze der Auflösbarkeit nach dem kapazitiven Dehnungsmeßverfahren. Die Ursache dafür ist darin zu suchen, daß in der direkten und weiteren Umgebung der Rohrprobe während des Versuchs konstante Verhältnisse nicht in genügendem Maße aufrecht gehalten werden konnten. Eine Auswirkung der Langzeitdrift der Meßelektronik auf die Meßergebnisse ist aber auch nicht auszuschließen.

Die Reproduzierbarkeit der Messungen wird belegt durch die Auswertung der Meßergebnisse, sowohl bei den Innen- als auch bei den Außendruckversuchen. Es wurden verschiedene, voneinander unabhängige Auswertungsverfahren benutzt, die bezüglich der Aussage über Kriechparameter jeweils zu übereinstimmenden Ergebnissen führten.

Insgesamt lassen sich drei Auswertungsverfahren zur Bestimmung von Kriechparametern aus Kriechkurven angeben:

- direkte Bestimmung der Kriechparameter aus der Kriechkurve,
- Bestimmung der Kriechparameter aus der Druckabhängigkeit der Kriechrate,
- Bestimmung der Kriechparameter aus der Druckabhängigkeit der Standzeit.

Bei den Innendruckversuchen wurden die beiden ersten Verfahren benutzt. Sie führten zu übereinstimmenden Ergebnissen. Die Benutzung des dritten Verfahrens war nicht

möglich, da bei den kleinen zugelassenen Dehnungen die Standzeit der Proben nicht erreicht wurde.

Bei den Außendruckversuchen wurde das dritte Verfahren benutzt. Die direkte Bestimmung der Kriechparameter oder ihre Bestimmung aus der Druckabhängigkeit der Kriechrate war wegen mangelnder Langzeitstabilität und des zu geringen Meßeffektes nicht möglich. Der Unterschied im Meßeffekt zeigt sich deutlich beim Vergleich der Kapazitäten der Innendruck- und der Außendruckmeßanordnung.

Während sich bei den Innendruckexperimenten die Kapazität im Laufe eines einzelnen Versuchs um größenordnungsmäßig 50 pF änderte und aus dieser Änderung genaue Schlüsse über das Dehnungsverhalten der einzelnen Rohrprobe gezogen werden konnten, betrug diese Änderung bei Außendruckbelastung größenordnungsmäßig nur 1 pF.

Verursacht wird dieser niedrige Meßeffekt durch die extrem unterschiedlichen Kriechparameter für Zug- bzw. Druckbelastung, die bei den in dieser Arbeit untersuchten Rohren gemessen wurden.

Eine Anwendung des in dieser Arbeit entwickelten Meßverfahrens erscheint deshalb bei Rohren unter Innendruck als sinnvoll. Bei Außendruckbelastung von Rohren ergeben sich die nach dem kapazitiven Verfahren in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse bereits aus wesentlich weniger aufwendigen reinen Standzeitmessungen. Bei der Planung von Außendruckexperimenten an Rohren ist deshalb im konkreten Fall zu prüfen, ob der Aufwand einer kapazitiven Vermessung in Hinsicht auf den Meßeffekt lohnt, oder ob eine Standzeitmessung dieselben Ergebnisse liefern würde.

Abgesehen von den meßtechnischen Schwierigkeiten sind jedoch Experimente an Brennstabhüllrohren sowohl unter Zug- als auch unter Druckbelastung nützlich, da nur so der gesamte Belastungsbereich im Reaktor abgedeckt werden kann.

Nach den Ergebnissen dieser Arbeit ist für die untersuchten Rohre zwar die qualitative Spannungsabhängigkeit der Kriechrate unter Innendruck und Außendruck gleich (gleicher Kriechexponent n). Die absolute Größe der Kriechrate ist aber größenordnungsmäßig um einen Faktor 40 unterschiedlich (unterschiedlicher Kriechparameter k).

Zur Beschreibung dieses Kriechverhaltens ist danach eine Revision des theoretischen Ansatzes notwendig, der zur Zeit generell bei der Berechnung des Kriechens im mehrdimensionalen Spannungszustand gemacht wird.

Speziell bedeutet dies, daß die Annahmen der Invariantentheorie von Odqvist (vgl. /16/, Kap. 2.1.2) modifiziert werden müssen. Denn die hierbei grundlegende Annahme, daß die Kriechgeschwindigkeit von einer quadratischen Form (der 2. Invariante) des Spannungsdeviators abhängt, führt gerade zum Verlust des Vorzeichens der Spannung.

Bestätigt wird dies durch Rabotnov /17/. Er hat einige Ergebnisse aus vergleichenden Zug-Druck-Kriechversuchen unter verschiedenen Bedingungen und an verschiedenen Materialien zusammengestellt.

Dabei zeigt sich zwar teilweise betragsmäßig gleiche Kriechgeschwindigkeit unter Zug- und Druckbelastung, teilweise aber auch eine Erhöhung der Kriechrate unter Zugbelastung gegenüber Druckbelastung.

A N H A N G

A 1 Analyse der elastischen Spannungsverteilung der endlich-langen Kreiszylinderschale

A 1.1 Einleitung

In diesem Abschnitt wird die elastische Spannungsverteilung eines endlich langen kreiszylindrischen Rohres untersucht. Eine endlich lange Rohrprobe, die in einem Experiment mit Innen- oder Außendruck beaufschlagt wird, muß an beiden Enden druckdicht mit Endstopfen verschweißt werden. Diese Verschweißung an den Enden führt zu charakteristischen Spannungsverteilungen im Bereich der Schweißnähte.

Ziel dieses Abschnitts ist die Untersuchung

- der möglichen Spannungserhöhung durch die Verschweißung am Rande des Rohrs und
- des axialen Bereichs, in dem ein Einfluß der Verschweißung noch spürbar ist.

A 1.2 Differentialgleichungen der endlich-langen Kreiszylinderschale und ihre Lösung

Die Theorie der elastischen Rotationsschale wird ausführlich in der einschlägigen Literatur behandelt (vgl. z. B. Klingbeil /10/ und Flüge /22/). In diesem Abschnitt sollen daher nur kurz und summarisch die zur Untersuchung des Randeinflusses benötigten Differentialgleichungen zusammengestellt werden.

Nach Klingbeil /10/ gilt folgender Satz von Gleichungen für die zylindrische Rotationsschale unter Druckbelastung p von innen oder außen:

1. Gleichgewichtsbedingungen:

$$N'_\xi = 0, \quad (\text{A 1.2.1})$$

$$M'_\xi - Q_\xi = 0, \quad (\text{A 1.2.2})$$

$$N_\varphi + r Q_\xi = r p, \quad (\text{A 1.2.3})$$

2. Verträglichkeitsbedingung:

$$u'_n - \chi = 0 \quad (\text{A 1.2.4})$$

3. Elastizitätsgesetze:

$$N_\xi = D \left(u'_{t\xi} + \frac{\nu u_n}{r} \right), \quad (\text{A 1.2.5})$$

$$N_\varphi = D \left(\frac{u_n}{r} + \nu u'_{t\xi} \right), \quad (\text{A 1.2.6})$$

$$M_\xi = K \chi', \quad (\text{A 1.2.7})$$

$$M_\varphi = \nu K \chi'. \quad (\text{A 1.2.8})$$

Hierbei ist die Dehnungssteifigkeit

$$D = \frac{E h}{1 - \nu^2} \quad (\text{A 1.2.9})$$

und die Biegesteifigkeit

$$K = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}. \quad (\text{A 1.2.10})$$

Ein Strich bedeutet in den Gleichungen (A 1.2.1) bis (A 1.2.8) Ableitung nach der axialen Koordinate ζ .

Elimination von χ aus (A 1.2.4) und A 1.2.7) ergibt:

$$M_\xi = K u''_n. \quad (\text{A 1.2.11})$$

Elimination von M_{ξ} aus (A 1.2.2) und (A 1.2.11) ergibt:

$$Q_{\xi} = K u_n'''. \quad (\text{A 1.2.12})$$

Integration von (A 1.2.1) ergibt:

$$N_{\xi} = q = \text{const.} \quad (\text{A 1.2.13})$$

Hierbei bedeutet q die axiale Belastung des Rohres, die durch Druckbelastung auf die Endstopfen herbeigeführt wird.

Nach (A 1.2.5) und (A 1.2.13) ergibt sich für die axiale Dehnung:

$$u'_{\xi\xi} = \frac{q}{D} - \frac{\nu u_n}{r}. \quad (\text{A 1.2.14})$$

Elimination von $u'_{\xi\xi}$ aus (A 1.2.6) und (A 1.2.14) ergibt:

$$N_{\varphi} = D(1-\nu^2) \frac{u_n}{r} + \nu q. \quad (\text{A 1.2.15})$$

(A 1.2.12) und (A 1.2.15) werden in (A 1.2.3) eingesetzt:

$$u_n'''' + 4\mu^4 u_n = 4\mu^4 u_n^{\infty}. \quad (\text{A 1.2.16})$$

Dabei wurden als Abkürzung eingeführt:

$$\mu^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{r^2 h^2} \quad (\text{A 1.2.17})$$

und

$$u_n^{\infty} = r \frac{pr - \nu q}{Eh}. \quad (\text{A 1.2.18})$$

Die Differentialgleichung (A 1.2.16) geben u. a. auch Green und Zerna an /15/. Ihre allgemeine Lösung ist:

$$u_n = u_n^{\infty} + e^{\mu\xi} (A \cos \mu\xi + B \sin \mu\xi) + e^{-\mu\xi} (C \cos \mu\xi + D \sin \mu\xi). \quad (\text{A 1.2.19})$$

Dabei sind A, B, C und D freie Konstanten, die durch Randbedingungen festzulegen sind.

A 1.3 Spannungsanalyse des halbumendlichen Rohres

Die Spannungsanalyse von Rohren im Bereich des Rohrendes ist auf der Basis der Gleichungen von Kapitel A 1.2 geschlossen möglich (vgl. z. B. Markus /32/). Durch den axialen Verlauf der Normalverschiebung liegen auch alle übrigen schalenspezifischen Größen fest, speziell die Schnittgrößen. Mit (A 1.2.8), (A 1.2.11), (A 1.2.12), (A 1.2.13) und (A 1.2.15) ergibt sich

$$N_{\varphi} = \frac{Eh}{r} u_n + \nu q, \quad (\text{A 1.3.1})$$

$$M_{\varphi} = \nu K u_n'', \quad (\text{A 1.3.2})$$

$$N_{\varphi} = q, \quad (\text{A 1.3.3})$$

$$M_{\varphi} = K u_n'', \quad (\text{A 1.3.4})$$

$$Q_{\varphi} = K u_n'''. \quad (\text{A 1.3.5})$$

Die Axiallast q ist im Falle der hydrostatischen Druckbelastung auf den Endstopfen:

$$q = \frac{pr}{2} \quad (\text{A 1.3.6})$$

Nach Kap. 2.1.4 ist es möglich, aus dem Verlauf der Schnittkräfte und -momente den Verlauf der Normalspannungen zu berechnen. Nach (2.1.4.24) ergibt sich:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{N_{\varphi}}{h} + 12 \frac{x_3}{h} \frac{M_{\varphi}}{h^2}, \quad (\text{A 1.3.7})$$

$$\sigma_{\varphi} = \left(1 + \frac{x_3}{r}\right)^2 \left[\frac{N_{\varphi}}{h} + 12 \frac{x_3}{h} \frac{M_{\varphi}}{h^2} \right]. \quad (\text{A 1.3.8})$$

Dabei bezeichnet x_3 die Schalenkoordinate, die senkrecht

auf der Schalenmittelfläche steht:

$$-\frac{h}{2} \leq x_3 \leq +\frac{h}{2} \quad . \quad (\text{A } 1.3.9)$$

Die Schubspannungen $\tau_{\varphi\zeta}$ treten nicht auf, da die Koordinatenlinien gleichzeitig Hauptspannungslinien sind.

Die Schubspannungen $\tau_{\varphi r}$ treten wegen Rotationssymmetrie des Rohres nicht auf. Die Schubspannungen $\tau_{\zeta r}$ werden zwar durch die grundlegende Annahme (III) der Schalentheorie vernachlässigt (vgl. Kap. 2.1.4). Sie werden aber wieder eingeführt als Lagrange-Multiplikatoren im Variationsprinzip (vgl. Kap. 2.1.4). Die daraus resultierenden Querkräfte Q_ζ haben folgenden Zusammenhang mit den Schubspannungen $\tau_{\zeta r}$:

$$\tau_{\zeta r} = \frac{Q_\zeta}{h} \quad . \quad (\text{A } 1.3.10)$$

Nicht ermitteln lassen sich die Radialspannungen σ_r auf Grund des einfachen Verschiebungsansatzes, der der Schalentheorie üblicherweise zugrunde liegt (vgl. (2.1.4.14)).

Die Spannungsverläufe (A 1.3.7), (A 1.3.8) und (A 1.3.10) werden in diesem Abschnitt für das halbunendliche Rohr berechnet. Dieses spezielle Rohr hat ein Ende bei $\zeta = 0$, das andere Ende liegt bei $\zeta \rightarrow +\infty$. Die Randbedingung im Unendlichen besteht darin, daß die Normalverschiebung u_n einen endlichen Wert annehmen muß. Aus (A 1.2.19) folgt damit zwingend:

$$A = B = 0 \quad . \quad (\text{A } 1.3.11)$$

Damit vereinfacht sich das Problem auf die Bestimmung von zwei Konstanten durch die spezielle Randbedingung bei $\zeta = 0$.

Unter A 1.3.1 wird das gelenkig gelagerte, unter A 1.3.2 das eingespannte Rohr untersucht. Unter A 1.3.3 wird der Zusammenhang zwischen diesen idealisierten Randbedingungen

und dem realen Rohrverhalten im Bereich seiner Endstopfen hergestellt.

A 1.3.1 Gelenkige Lagerung bei $\zeta = 0$

Als Randbedingung bei $\zeta = 0$ wird gefordert:

$$u_n(0) = 0, \quad (\text{A 1.3.1.1})$$

$$M_\zeta(0) = 0. \quad (\text{A 1.3.1.2})$$

Aus (A 1.2.19), (A 1.3.10) und (A 1.3.1.1) folgt:

$$C = -u_n^\infty. \quad (\text{A 1.3.1.3})$$

Aus (A 1.2.19), (A 1.3.10) und (A 1.3.1.2) folgt:

$$D = 0. \quad (\text{A 1.3.1.4})$$

Damit liegt folgender Verlauf der elastischen Normalverschiebung vor:

$$u_n = u_n^\infty \left(1 - e^{-\mu\zeta} \cos \mu\zeta \right). \quad (\text{A 1.3.1.5})$$

Dabei gilt nach (A 1.2.18) und (A 1.3.6)

$$u_n^\infty = \frac{pr^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right). \quad (\text{A 1.3.1.6})$$

Nach (A 1.3.1) bis (A 1.3.9) läßt sich damit der Verlauf der Spannungen in der Rohrwand ermitteln:

$$\sigma_\xi = \frac{pr}{2h} \left[1 - 4\sqrt{3} \frac{1-\frac{\nu}{2}}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{x_2}{h} e^{-\mu\xi} \sin \mu\xi \right], \quad (\text{A 1.3.1.7})$$

$$\sigma_\varphi = \left(1 + \frac{x_3}{r} \right)^2 \left[\nu \sigma_\xi + \frac{pr}{h} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \left(1 - e^{-\mu\xi} \cos \mu\xi \right) \right], \quad (\text{A 1.3.1.8})$$

$$\tau_{\xi r} = -p \sqrt{\frac{r}{h}} \frac{1-\frac{\nu}{2}}{4\sqrt{3}(1-\nu^2)} e^{-\mu\xi} \cos \left(\mu\xi + \frac{\pi}{4} \right). \quad (\text{A 1.3.1.9})$$

Fig. A 1.1 und Fig. A 1.2 zeigen die Isodynien für Axial-

und Umfangsspannung in der Rohrwand im Bereich des Rohrendes. Die Spannungswerte sind jeweils auf die Spannung bezogen, die an derselben radialen Position im unendlichlangen Rohr herrschen würde. Fig. A 1.3 zeigt den axialen Verlauf der Axial- und Umfangsspannung an der Hüllrohrinnenseite und der Schubspannung in der Hüllrohrwand im Bereich des Rohrendes. Für die Schubspannung wurde eine bestimmte Geometrie zugrundegelegt ($r/h = 8.4375$). Die Druckbelastung ist nach Vorzeichen und Betrag frei wählbar. Der Verlauf von Axial- und Umfangsspannung in den Figuren A 1.1 bis A 1.3 gilt für beliebige Geometrie und beliebige Druckbelastung.

Die Axialspannung hat in der direkten Umgebung des Lagers ($\mu\zeta \approx 1$) große radiale Gradienten, eine Folge der starken Verbiegung an dieser Stelle. Die Umfangsspannung zeigt eine deutliche Abnahme in der direkten Umgebung des gelenkigen Lagers. Etwa bei $\mu\zeta = 2 \dots 3$ tritt über den gesamten Bereich der Wandstärke ein Maximum der Umfangsspannung auf. Schon bei einem Abstand vom Lager von $\mu\zeta \approx 5$ ist der Lagereinfluß nicht mehr spürbar, von dort ab können Verhältnisse wie beim unendlich langen Rohr angenommen werden. Die Schubspannung $\tau_{\zeta r}$ nimmt nur in der unmittelbaren Umgebung des Lagers endliche Werte an. Aber auch hier ist sie klein gegen die übrigen Spannungstensorkomponenten.

A 1.3.2 Einspannung bei $\zeta = 0$

Im Falle des bei $\zeta = 0$ eingespannten Rohres wird als Randbedingung gefordert:

$$u_n(0) = 0 \quad , \quad (A 1.3.2.1)$$

$$\chi(0) = 0 \quad . \quad (A 1.3.2.2)$$

Analog zum gelenkig gelagerten Rohr ergibt (A 1.3.2.1):

$$C = - u_n^\infty \quad . \quad (A 1.3.2.3)$$

Aus (A 1.3.2.2) folgt:

$$D = C . \quad (\text{A } 1.3.2.4)$$

Damit liegt der Verlauf der elastischen Normalverschiebung vor:

$$u_n = u_n^\infty \left(1 - \sqrt{2} e^{-\mu \zeta} \sin \left(\mu \zeta + \frac{\pi}{4} \right) \right). \quad (\text{A } 1.3.2.5)$$

u_n^∞ wird nach (A 1.3.1.6) berechnet.

Analog zu Kapitel A 1.3.2 lassen sich die Spannungen ermitteln:

$$\sigma_\zeta = \frac{Pr}{2h} \left[1 + \frac{x_2}{h} 4\sqrt{6} \frac{1-\frac{\nu}{2}}{\sqrt{1-\nu^2}} e^{-\mu \zeta} \cos \left(\mu \zeta + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (\text{A } 1.3.2.6)$$

$$\sigma_\varphi = \left(1 + \frac{x_2}{r} \right)^2 \left[\nu \sigma_\zeta + \frac{Pr}{h} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \left(1 - \sqrt{2} e^{-\mu \zeta} \sin \left(\mu \zeta + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right], \quad (\text{A } 1.3.2.7)$$

$$\tau_{\zeta r} = -p \sqrt{\frac{r}{h}} \frac{1-\frac{\nu}{2}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} e^{-\mu \zeta} \cos \mu \zeta . \quad (\text{A } 1.3.2.8)$$

Fig. A 1.4 und A 1.5 zeigen die Isodynien für Axial- und Umfangsspannung, Fig. A 1.6 zeigt die Axial- und Umfangsspannung an der Hüllrohrinnenseite und die Schubspannung in der Rohrwand, jeweils analog zu Kapitel A 1.3.1. Es zeigen sich ebenso wie beim gelenkig gelagerten Rohr grose radiale Gradienten bei der Axialspannung, wobei sogar das Vorzeichen der Axialspannung wechselt. Die Umfangsspannung nimmt kleine Werte an der Einspannstelle an (auch hier wechselt das Vorzeichen), bildet ein Maximum etwa bei $\mu \zeta \approx 3$. Bei größeren Abständen vom Lager ($\mu \zeta > 5$) geht der Verlauf bei den Spannungsverteilungen in den Verlauf des unendlich langen Rohres über, der Randeinfluß ist nicht mehr spürbar.

Ebenso wie bei der gelenkigen Lagerung ist die Schubspannung $\tau_{\zeta r}$ nur in unmittelbarer Umgebung der Einspannstelle verschieden von Null, aber auch hier noch klein gegen die restlichen Spannungen.

A 1.3.3 Real gelagertes Rohr

Die unter Kapitel A 1.3.1 und A 1.3.2 behandelten Randbedingungen stellen die Extremfälle für eine reale Randbedingung dar. Speziell gilt, daß die reale Verdrehung am Lager zwischen der maximal möglichen Verdrehung bei gelenkiger Lagerung und der Verdrehung Null bei Einspannung liegt. Dadurch lassen sich Grenzen angeben, innerhalb derer ein realer Lagerungsfall liegt.

Aus (A 1.3.1.5) läßt sich die maximal mögliche Verdrehung am Lager ermitteln:

$$\chi_{\max}(0) = u'_{n,\max}(0) = \mu u_n^\infty. \quad (\text{A 1.3.3.1})$$

Als reale Randbedingung läßt sich daher fordern:

$$u_n(0) = 0, \quad (\text{A 1.3.3.2})$$

$$\chi(0) = \gamma \chi_{\max}(0); \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (\text{A 1.3.3.3})$$

Aus (A 1.3.3.2) ergibt sich analog zu Kapitel A 1.3.1 und A 1.3.2:

$$C = -u_n^\infty. \quad (\text{A 1.3.3.4})$$

Aus (A 1.3.3.3) folgt:

$$D = -(1-\gamma) u_n^\infty \quad (\text{A 1.3.3.5})$$

Damit wird der Verlauf der elastischen Normalverschiebung berechnet:

$$u_n^{\text{real}} = u_n^\infty \left[1 - e^{-\mu s} \left(\cos \mu s + (1-\gamma) \sin \mu s \right) \right]. \quad (\text{A 1.3.3.6})$$

Der Vergleich mit (A 1.3.1.5) und (A 1.3.2.5) liefert:

$$u_n^{\text{real}} = \gamma u_n^{\text{gelenkig}} + (1-\gamma) u_n^{\text{eingespannt}}. \quad (\text{A 1.3.3.7})$$

Der reale Verlauf läßt sich somit aus den Extremfällen durch Überlagerung mit den "Gewichten" γ bzw. $(1 - \gamma)$ ermitteln.

Wegen (A 1.3.1) bis (A 1.3.9) gilt die Rechenvorschrift der Überlagerung der Lösungen für die Extremfälle mit den Gewichten γ bzw. $(1 - \gamma)$ auch für die Spannungsverteilungen:

$$\sigma_{\varphi}^{\text{real}} = \gamma \sigma_{\varphi}^{\text{gelenkig}} + (1-\gamma) \sigma_{\varphi}^{\text{eingespannt}}, \quad (\text{A 1.3.3.8})$$

$$\sigma_{\varphi}^{\text{real}} = \gamma \sigma_{\varphi}^{\text{gelenkig}} + (1-\gamma) \sigma_{\varphi}^{\text{eingespannt}}, \quad (\text{A 1.3.3.9})$$

$$\tau_{\varphi r}^{\text{real}} = \gamma \tau_{\varphi r}^{\text{gelenkig}} + (1-\gamma) \tau_{\varphi r}^{\text{eingespannt}}. \quad (\text{A 1.3.3.10})$$

Eine konventionelle Abschätzung der Spannungen im Bereich des Rohrendes läßt sich daher mit den Figuren A 1.1 bis A 1.6 vornehmen.

Vergleicht man die Spannungsverteilungen für das gelenkig gelagerte und das eingespannte Rohrende, dann kann der größere Spannungswert an einer bestimmten Position in der Rohrwand jeweils als obere Grenze, der kleinere als untere Grenze für den realen Spannungswert dienen.

H. Fabian und H. D. Klement /33/ haben für ein Leichtwasserreaktor-Hüllrohr die Spannungen im Bereich des Endstopfens nach der Methode der Finiten Elemente berechnet.

Ein Vergleich ihrer Ergebnisse und der vorliegenden Untersuchung zeigt gute Übereinstimmung zwischen der Finitenelementlösung und der schalentheoretischen Lösung für das eingespannte Rohrende. Daraus läßt sich der Schluß ziehen, daß die Formulierung der Randbedingungen für das eingespannte Rohr der Realität sehr nahe kommt und damit der Gewichtungsfaktor γ nahe bei Null liegt.

Es zeigt sich weiter, daß die Annahmen der Schalentheorie auch im Bereich des Rohrendes vernünftig sind, denn Ra-

dial- und Schubspannung sind jeweils klein gegen die Axial- oder die Umfangsspannung.

Zusammenfassend läßt sich folgendes Resümee aus diesen Untersuchungen zur Spannungsverteilung in einem Rohr im Bereich seines Endstopfens ziehen:

1. In der unmittelbaren Umgebung der Schweißnaht bestehen starke radiale Gradienten für die Axialspannung, wobei in radialer Richtung sogar das Vorzeichen der Axialspannung wechselt. Dies ist auf die Aufwölbung des Rohres direkt oberhalb der Schweißnaht zurückzuführen.
2. Etwa an der Stelle $\mu\zeta \approx 3$ hat die Umfangsspannung ein Maximum über den gesamten Bereich der Wandstärke. Für Schnellbrüter-Hüllrohre ($r = 2.81$ mm, $h = 0.38$ mm) bedeutet dies, daß man in einem Abstand von etwa 2 mm oberhalb der Schweißnaht maximale Verformung des Rohres erwarten muß. Eine maximale Aufweitung wurde an dieser Stelle bei Innendruckexperimenten (vgl. Kap. 4.3) auch stets beobachtet. Wurde eine Probe bis zum Riß beansprucht, dann trat dieser Riß stets als Axialriß (hervorgerufen durch die überhöhte Umfangsspannung) an dieser Stelle auf.
3. Über einen Abstand von $\mu\zeta \approx 5$ (für Schnellbrüter-Hüllrohre $\zeta \approx 3$ mm) hinaus ist ein Einfluß der Verschweißung des Rohres mit dem Endstopfen nicht mehr spürbar.

A 2 Berechnung von Kapazitätswerten

A 2.1 Kapazität des Kreiszyylinderkondensators

Für den Fall des homogenen Kreiszyylinderkondensators läßt sich die Kapazität exakt angeben. Man legt zwischen die konzentrischen Zylinderflächen mit den Radien R_i und R_a , die den Kondensator bilden, eine konzentrische Zylinderfläche mit dem Radius r (Fig. A 2.1). Der Verschiebungsfluß, integriert über diese gesamte Fläche, ist gerade gleich der eingeschlossenen Ladung, der Ladung Q des Zylinderkondensators:

$$2\pi\epsilon_0 l r E_r(r) = Q. \quad (\text{A 2.1.1})$$

Daraus läßt sich die elektrische Feldstärke eliminieren:

$$E_r(r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}. \quad (\text{A 2.1.2})$$

Die Spannung U ergibt sich durch Integration über die elektrische Feldstärke:

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_i}^{R_a} E_r dr \\ &= Q \frac{\ln \frac{R_a}{R_i}}{2\pi\epsilon_0 l}. \end{aligned} \quad (\text{A 2.1.3})$$

Mit Kapazität C wird das Verhältnis Ladung Q zu Spannung U eines Kondensators bezeichnet:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_a}{R_i}}. \quad (\text{A 2.1.4})$$

Für kleine Spaltweiten d zwischen den Kondensatorflächen läßt sich eine Näherungsformel entwickeln:

$$\left. \begin{aligned} R_a &= R_m + \frac{d}{2} \\ R_i &= R_m - \frac{d}{2} \end{aligned} \right\} \text{mit } d \ll R_m; \quad (\text{A 2.1.5})$$

dann ist (vgl. Bronstein /21/)

$$\ln \frac{R_a}{R_i} = \ln \frac{1 + \frac{d}{2R_m}}{1 - \frac{d}{2R_m}} = 2 \left[\frac{d}{2R_m} + \frac{1}{3} \left(\frac{d}{2R_m} \right)^3 + \dots \right]. \quad (\text{A } 2.1.6)$$

Unter Vernachlässigung kubischer und höherer Terme ergibt sich für die Kapazität:

$$C = \epsilon_0 \frac{2\pi R_m \cdot l}{d} = \frac{\epsilon_0 F}{d}. \quad (\text{A } 2.1.7)$$

Dabei bezeichnet F die mittlere Zylinderfläche des Kondensators. Gleichung (A 2.1.7) gibt die Kapazität eines Plattenkondensators an (vgl. Gerthsen /29/).

Für die realisierte Innendruckmeßvorrichtung (Kap. 4.2) ergibt sich die Meßkapazität

$$C = \begin{cases} 17.240 \text{ pF} & \text{nach (A 2.1.4),} \\ 17.246 \text{ pF} & \text{nach (A 2.1.7).} \end{cases}$$

Es erscheint damit als möglich, bei den realisierten kleinen Spalten zwischen den Elektroden des Zylinderkondensators von den Verhältnissen des Plattenkondensators auszugehen. Praktisch bedeutet dies die Annahme eines linearen Feldverlaufes zwischen den Elektroden.

A 2.2 Kapazität des Zylinderkondensators mit einer kreisförmigen und einer ovalen Elektrode

Bei der Außendruckmeßvorrichtung ist der Fall des Zylinderkondensators mit einer kreisförmigen und einer ovalen Elektrode realisiert (vgl. Kap. 4.2).

Die ovale Außenelektrode bildet die Rohrrinnenfläche, die kreisrunde Innenelektrode die Außenfläche der Meßsonde. Die Ovalität der Außenelektrode wird durch

$$R_a(\varphi) = \bar{R}_a (1 + \alpha \cos 2\varphi) \quad (\text{A } 2.2.1)$$

beschrieben.

Die Spaltweite zwischen den Elektroden des Zylinderkondensators ist vom Umfangswinkel φ abhängig.

$$\begin{aligned}d(\varphi) &= R_a(\varphi) - R_i \\ &= \bar{R}_a - R_i + \alpha \bar{R}_a \cos 2\varphi.\end{aligned}\tag{A 2.2.2}$$

Bildet man nach (A 2.1.7) für jedes differentielle Zylinderkondensatorintervall $d\varphi$ die Kapazität dC , so erhält man:

$$dC = \frac{\epsilon_0 R_m l d\varphi}{\bar{R}_a - R_i + \alpha \bar{R}_a \cos 2\varphi}.\tag{A 2.2.3}$$

Integration dieser differentiellen Kapazitätsbeiträge über den gesamten Umfang ergibt:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l R_m}{\bar{R}_a - R_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha \bar{R}_a}{\bar{R}_a - R_i}\right)^2}}.\tag{A 2.2.4}$$

Unter Beachtung von (A 2.1.4) und (A 2.1.7) läßt sich (A 2.2.4) umschreiben:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{\bar{R}_a}{R_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha \bar{R}_a}{\bar{R}_a - R_i}\right)^2}}.\tag{A 2.2.5}$$

Gleichung (A 2.2.5) gibt die Kapazität eines Zylinderkondensators mit ovaler Außenelektrode und kreisrunder Innenelektrode an. Vorausgesetzt wird dabei ein kleiner Spalt zwischen den Elektroden.

A 2.3 Kapazität des exzentrischen Zylinderkondensators

Ein realer Zylinderkondensator hat im allgemeinen eine exzentrische Anordnung seiner Elektroden. Die Größe der Exzentrizität beeinflusst direkt die Kapazität des Zylinderkondensators. Wie unter A 2.2 bei der Berechnung der Kapazität der ovalen Anordnung wird die exzentrische Anordnung in differentielle Elemente $d\varphi$ eingeteilt, für die die

Eigenschaften des Plattenkondensators gelten sollen.

Nach Fig. A 2.2 ergibt sich für die Spaltweite der exzentrischen Anordnung:

$$d(\varphi) = R_a - a \cos \varphi - \sqrt{R_i^2 - a^2 \sin^2 \varphi}. \quad (\text{A } 2.3.1)$$

Das differentielle Zylinderkondensatorelement $d\varphi$ hat folgende Kapazität dC :

$$dC = \frac{\epsilon_0 R_m l d\varphi}{R_a - a \cos \varphi - \sqrt{R_i^2 - a^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (\text{A } 2.3.2)$$

Läßt man nur kleine Exzentrizitäten zu, was bei der vorausgesetzten kleinen Spaltweite automatisch folgt, dann vereinfacht sich (A 2.3.2) zu

$$dC = \frac{\epsilon_0 R_m l d\varphi}{R_a - R_i - a \cos \varphi}. \quad (\text{A } 2.3.3)$$

Integration über den gesamten Umfang ergibt:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l R_m}{R_a - R_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R_a - R_i}\right)^2}}. \quad (\text{A } 2.3.4)$$

Unter Beachtung von (A 2.1.4) und A 2.1.7) läßt sich (A 2.3.4) umschreiben:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R_a - R_i}\right)^2}}. \quad (\text{A } 2.3.5)$$

Gleichung (A 2.3.5) beschreibt die Abhängigkeit der Kapazität eines Zylinderkondensators von seiner Exzentrizität unter der Voraussetzung kleiner Spaltweiten zwischen den Elektroden.

Literaturverzeichnis

- /1/ D. Smidt, Reaktortechnik, 2 Bände, Verlag G. Braun, Karlsruhe (1971)

- /2/ P. Engelmann, Stand der brüterbezogenen Arbeiten, Beitrag in Statusbericht 1974, Projekt Schneller Brüter, KFK 2003 (März 1974)

- /3/ H. Böhm, Stand der Arbeiten für die Auswahl von Hüllmaterialien für den SNR 300, Beitrag in Statusbericht 1974, Projekt Schneller Brüter, KFK 2003 (März 1974)

- /4/ H.-J. Seehafer, Zur Auslegungssituation von SNR-Hüllrohren im Bereich hoher Temperaturen, ATW 19 (1974), S.593

- /5/ K. Jankus, R.W. Weeks, LIFE II - A Computer Analysis of Fast Reactor Fuel Element Behaviour as a Function of Reactor Operating History, Nucl. Eng. and Design 18 (1972), S. 76

- /6/ J. Wordsworth, IAMBUS-1 - A Digital Computer Code for the Design, In-Pile Performance Prediction and Post-Irradiation Analysis of Arbitrary Fuel Rods, Nucl. Eng. and Design 31 (1974), S. 309

- /7/ L. Schäfer, K. D. Cloß, Beschreibung der Kriechkurven zweier austenitischer Stähle aus Zeitstandversuchen mit konstanter Lastanstiegsgeschwindigkeit, KFK 1963 (1974)

- /8/ K. Laßmann, Untersuchungen zum mechanischen Verhalten von zylindrischen Brennstäben eines Kernreaktors, KFK 1853 (Nov. 1973)

- /9/ H. Fabian, U. Krugmann, K. Laßmann, R. Schwarz,
Methodenvergleich bei der Berechnung von großen
Hüllrohrdeformationen, Reaktortagung, Nürnberg,
8.-11. April 1975, Deutsches Atomforum e.V.,
Kerntechnische Gesellschaft im Dt. Atomforum e.V.,
Leopoldshafen 1975: ZAED, S. 3
- /10/ E. Klingbeil, Tensorrechnung für Ingenieure,
Bibliographisches Institut, Mannheim (1966)
- /11/ F. H. Norton, Creep of Steel at High Temperatures,
McGraw Hill, New York (1929)
- /12/ H. Fabian, U. Krugmann, K. Laßmann, R. Schwarz,
Studie zum Deformationsverhalten von Zircaloy-
Hüllrohren beim Kühlmittelverlustunfall,
Veröffentlichung als KFK-Bericht in Vorbereitung
- /13/ L. Schäfer, M. Schirra, Mechanische und
physikalische Eigenschaften von Hüllmaterial,
Beitrag in KFK 1273/4 (März 1974)
- /14/ H. Böhm, L. Schäfer, M. Schirra,
Mechanische Eigenschaften von Hüllmaterial,
Beitrag in KFK 1273/3 (Dez. 1973)
- /15/ A.E. Green, W. Zerna, Theoretical Elasticity,
Second Edition, Oxford, At the Clarendon Press (1968)
- /16/ F.K.G. Odqvist, J. Hult, Kriechfestigkeit metallischer
Werkstoffe, Springer Verlag, Berlin (1962)
- /17/ Yu.N. Rabotnov, Creep Problems in Structural Members,
North Holland Publishing Company, Amsterdam (1969)

- /18/ T. Malmberg, Über einige Variationsprinzipie der Kriechmechanik und ihre Anwendung auf das Kriechkollaps- Problem von Brennstabhüllrohren, KFK 1390 (Dez. 1971)
- /19/ N.J. Hoff, W.E. Jahsman, W. Nachbar, A Study of Creep Collapse of a Long Cylindrical Shell under Uniform External Pressure, J. Aerospace Sciences 26 (Okt. 1959), S. 663
- /20/ M. Guyette, A Computer Program for the Analysis of Creep and Plasticity in Fuel Pin Sheets, KFK 1050 (1969)
- /21/ I. Bronstein, K. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, 4. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt und Zürich (1964)
- /22/ W. Flügge, Statik und Dynamik der Schalen, Springer Verlag, Berlin (1962)
- /23/ A. Pflüger, Stabilitätsprobleme der Elastostatik, Springer Verlag, Berlin (1964)
- /24/ H. Kaupa, Experimentelle Untersuchung des Kriechbeulverhaltens dünnwandiger Rohre aus hochwarmfesten Werkstoffen, KFK 1363 (Feb.1971)
- /25/ H. Braun, K.H.Weinert, Untersuchungen am Hüllwerkstoff 1.4970 kaltverformt bzw. kaltverformt und ausgelagert und 1.4981 kaltverformt unter mehraxialer Belastung, pers. Mitteilung (1975)
- /26/ H. Will, In-Pile-Einrichtungen für Dehnungsmessungen an Kernbrennstoffen und Strukturmaterialien, KFK 1281 (Okt. 1970)

- /27/ K.D. Cloß, pers. Mitteilung
- /28/ A. van der Linde, H. Kwast, In- and Out-of-pile Experiments Related to the Safety of Fast Reactor Fuel Pins, RCN-133, EURFNR-884 (Dez. 1970)
- /29/ Ch. Gerthsen, Physik, 6. Auflage, Springer Verlag, Berlin (1960)
- /30/ R. Zurmühl, Praktische Mathematik, 5. Auflage, Springer Verlag, Berlin (1965)
- /31/ F. Polifka, L. Schäfer, Einfluß der Probenlänge auf das Zeitstandverhalten von Hüllrohren bei Belastung durch Innendruck (1970) unveröffentlicht
- /32/ G. Markus, Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke, Werner Verlag, Düsseldorf (1968)
- /33/ H. Fabian, H.D. Klement, Untersuchungen zur Festigkeit von Brennstabhüllrohren im Bereich der unteren Schweißnaht, ATW 18 (1973), S.339

Tabelle 2.1: Vergleichsdatenfall für Schalenmodell

Rohr 7 x 0.4 mm

Hastelloy X, 700 °C

$n = 6.1$

$K = 2 \cdot 10^{-11} \text{ h}^{-1} (\text{kp/mm}^2)^{-n}$

$E = 15350 \text{ Kp/mm}^2$

$\nu = 0.3$

$R_a = 3.5 \text{ mm}$

$h = 0.4 \text{ mm}$

$\alpha_0 = 1.225 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 3.1: Abmessungen der Modellkörper für die
Modellversuche

Bezeichnung	Höhe [mm]	(mittl.) Durchmesser [mm]	Ovalität [%]
Innenelektrode I 1	120	100	5
I 2			4
I 3			3
I 4			1.5
I 5			1
Außenelektrode A 1	1	105.5	-
A 2	2		
A 3	5		
A 4	10		
A 5	20		
A 6	50		
A 7	1	102.5	-
A 8	2		
A 9	5		
A 10	10		
A 11	20		
A 12	50		

Tabelle 4.1: Rohrdaten

Nenndurchmesser	6 mm
Nennwandstärke	0,38 mm
Werkstoff	X8 CrNiMoNb 1616
Werkstoff-Nr.	1.4981
Charge-Nr.	70015
Anlieferungszustand	5 min lösungsgeglüht bei 1080 °C, danach 12 % kaltverformt

Tabelle 4.2: Daten zu den Innendruckmessungen

1. Vorvermessung:

Probe-Nr.	R_a [mm]	R_s [mm]	l [mm]	a [μm]
4	3.000	3.2025	20.75	30
6	3.000	3.2025	20.75	30
7	3.0015	3.2025	20.85	60
8	3.0015	3.2025	20.65	28
11	2.9995	3.2010	20.675	33

2. Prüfbedingungen:

Probe-Nr.	T [$^{\circ}\text{C}$]	p [N/mm^2]
4	700	17.66
6	700	19.62
7	700	12.75
8	700	13.73
11	700	15.70

3. Nachvermessung:

Probe-Nr.	R_a [mm]	Korr R_a [mm]
4	-	-
6	3.174	3.216
7	3.133	3.173
8	3.098	3.138
11	-	-

4. Ausgleichsgrößen:

Probe-Nr.	R_{io}^{sek} [mm]	c [h^{-1}]	n [-]
4	$2.6571^{+0.00056}_{-0.00318}$	$0.00491^{+0.00012}_{-0.00038}$	$7.546^{+0.388}_{-0.741}$
6	$2.6681^{+0.00073}_{-0.00397}$	$0.01239^{+0.00023}_{-0.00140}$	$8.021^{+0.342}_{-1.181}$
7	$2.6678^{+0.0006}_{-0.0166}$	$0.000554^{+0.000006}_{-0.000344}$	$11.978^{+0.413}_{-10.430}$
8	$2.6588^{+0.0005}_{-0.0025}$	$0.000544^{+0.000015}_{-0.000025}$	$8.129^{+0.442}_{-0.512}$
11	$2.6568^{+0.0005}_{-0.0032}$	$0.00335^{+0.00004}_{-0.00013}$	$8.759^{+0.201}_{-0.320}$

Tabelle 4.3: Daten zu den Außendruckmessungen

1. Vorvermessung:

Probe-Nr.	R_a [mm]	R_s [mm]	α [%]	l [mm]	a [μm]
11	2.991	2.344	0.0700	20.00	77
12	2.9945	2.350	0.0433	19.95	72
13	2.995	2.345	0.0467	19.95	76
14	2.9935	2.342	0.0567	20.00	68

2. Prüfbedingungen:

Probe-Nr.	T [$^{\circ}\text{C}$]	p [N/mm^2]
11	700	19.62
12	700	15.70
13	700	17.66
14	700	22.56

3. Nachuntersuchung:

Probe-Nr.	Befund
11	Kollaps
12	"
13	"
14	"

4. Standzeiten:

Probe-Nr.	t_s [h]
11	230
12	1178
13	521
14	63

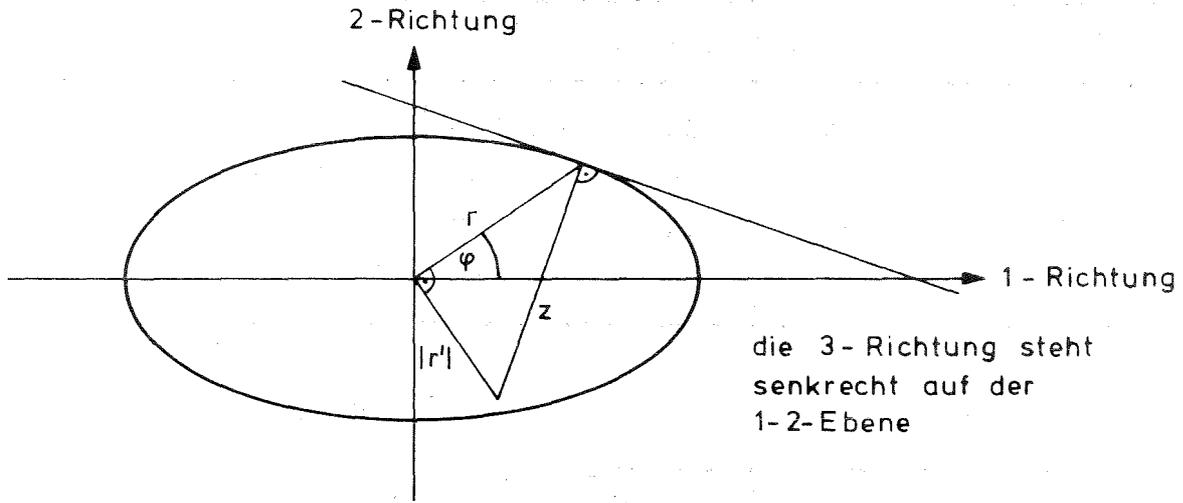


Fig. 2.1: Rohrquerschnitt

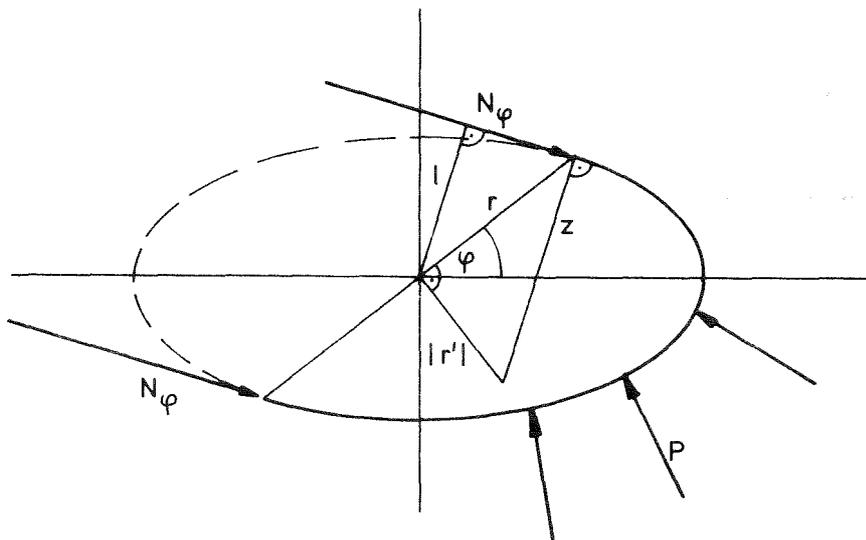


Fig. 2.2: Umfangskräfte im Rohr

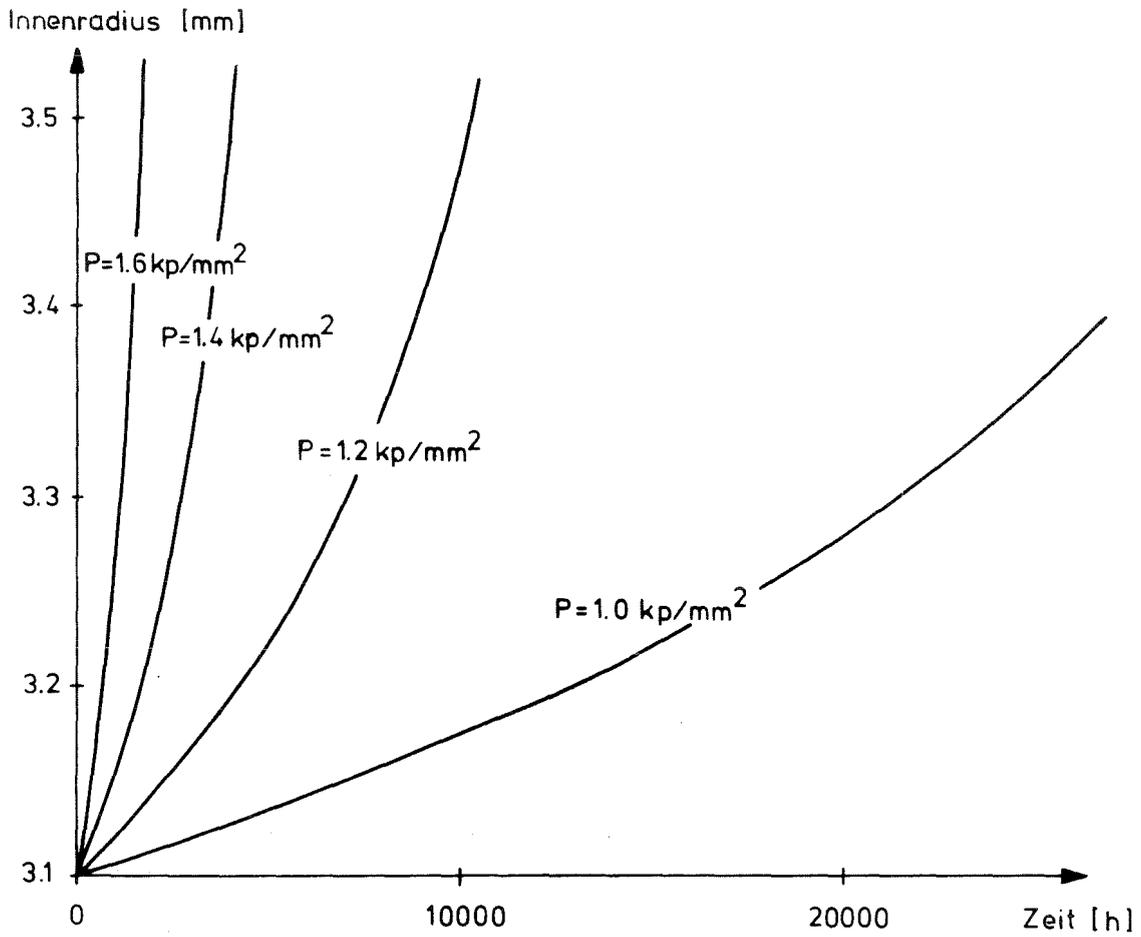


Fig. 2.3: Rohraufweitung unter Innendruckbelastung (Vergleichsdatenfall)

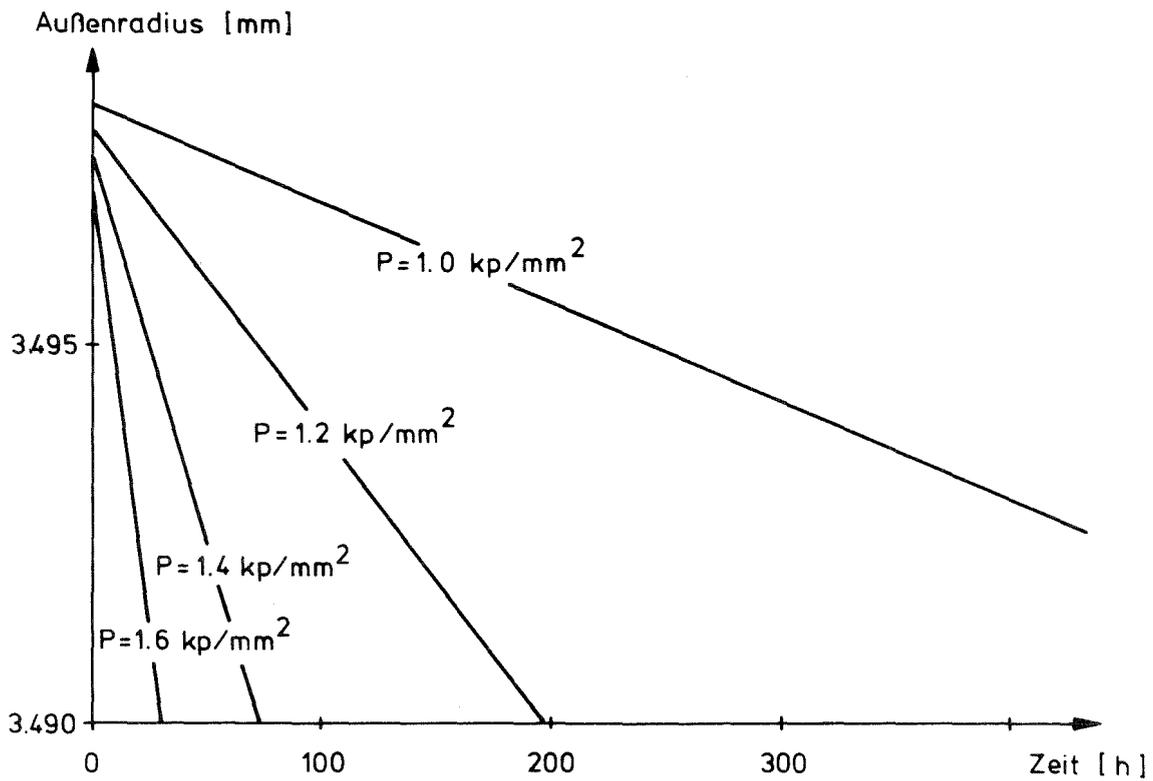


Fig. 2.4: Rohrschrumpfung unter Außendruckbelastung (Vergleichsdatenfall)

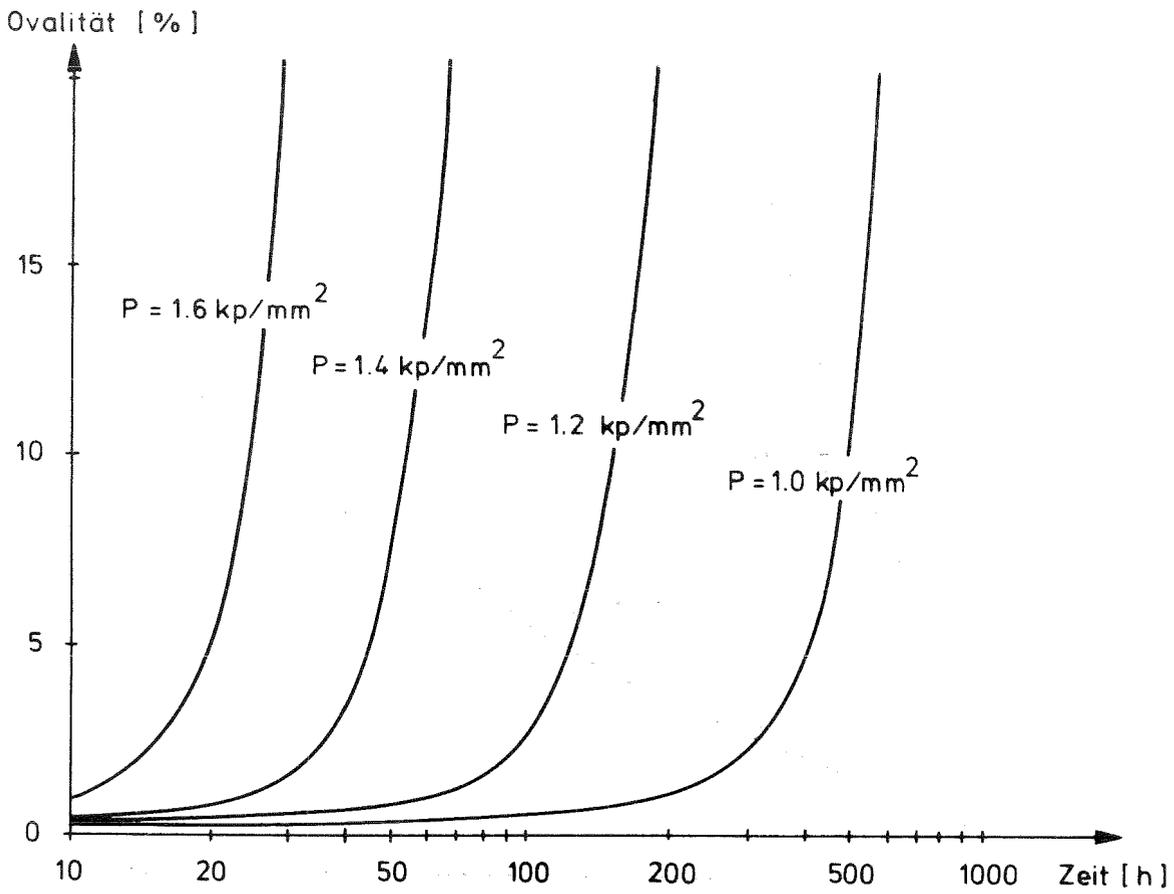


Fig. 2.5: Rohrovalisierung unter Außendruckbelastung (Vergleichsdatenfall)

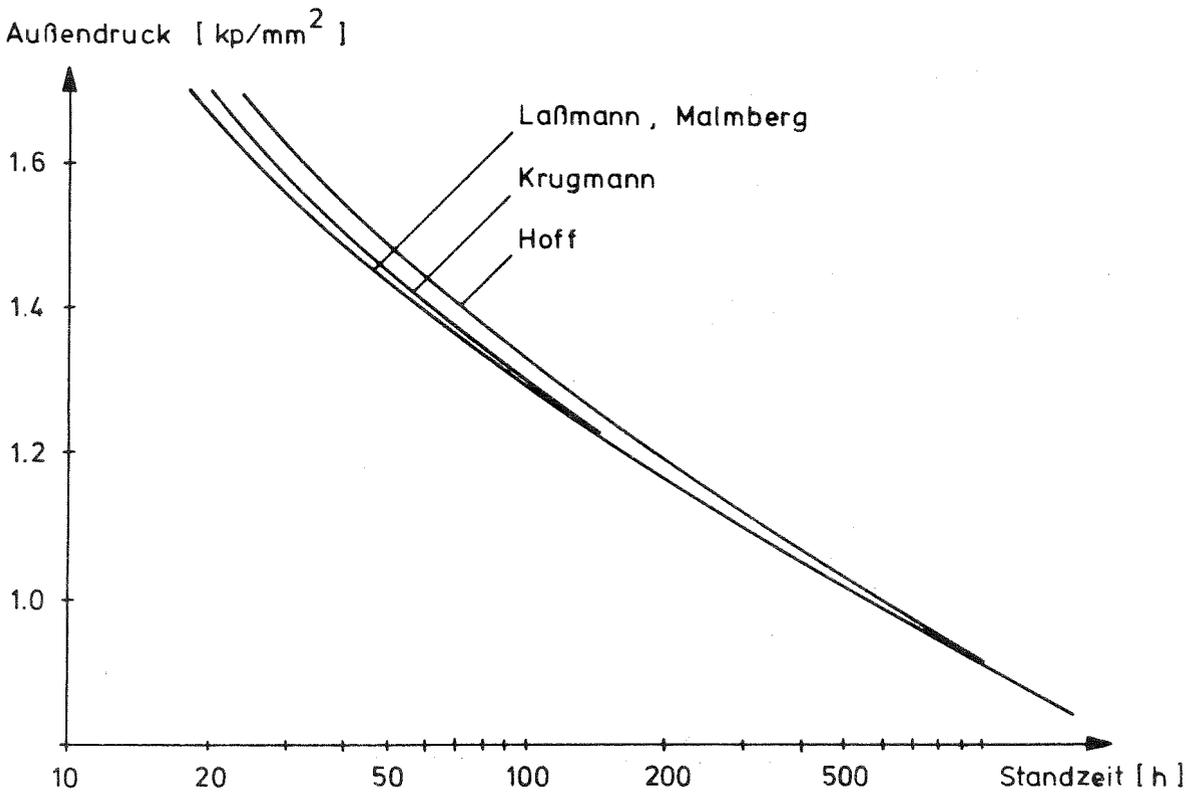


Fig. 2.6: Standzeit in Abhängigkeit vom Außendruck (Vergleichsdatenfall)

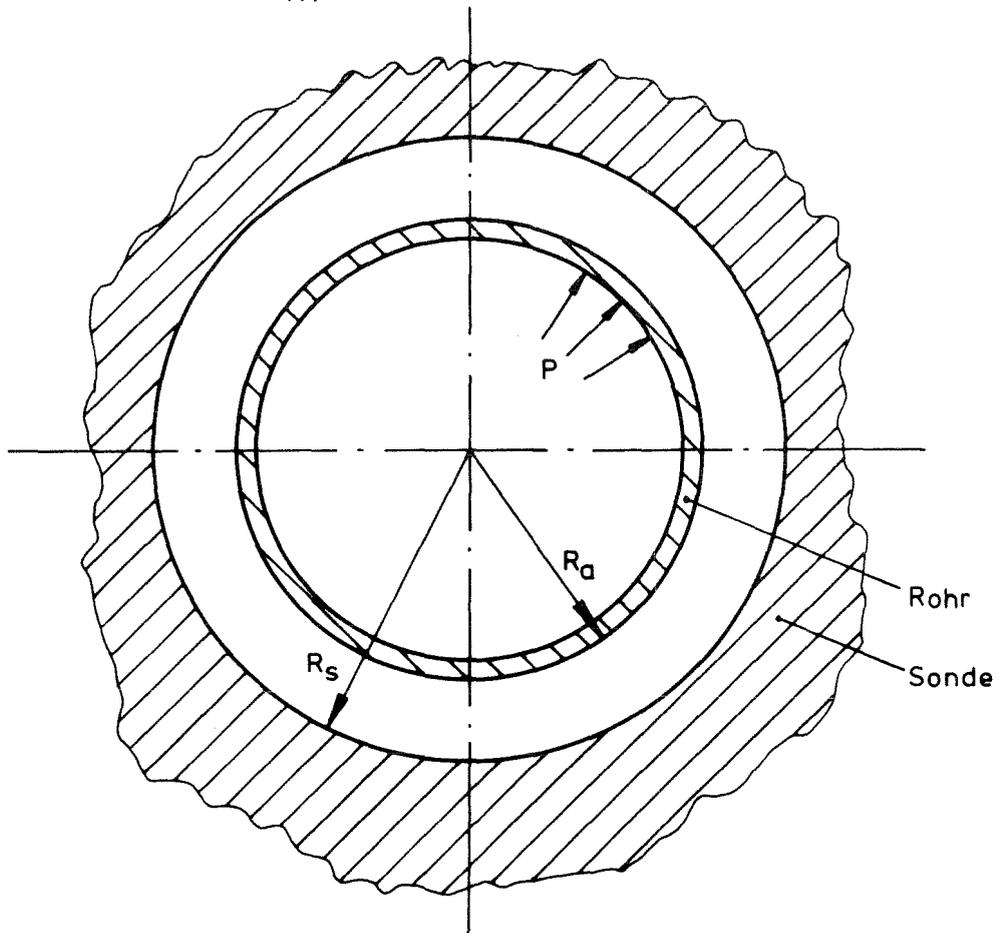


Fig. 3.1: Meßprinzip bei Innendruckbelastung

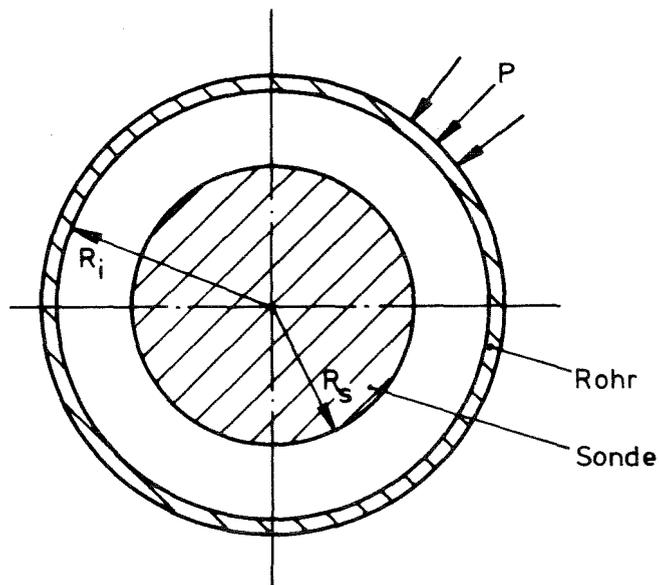


Fig. 3.2: Meßprinzip bei Außendruckbelastung

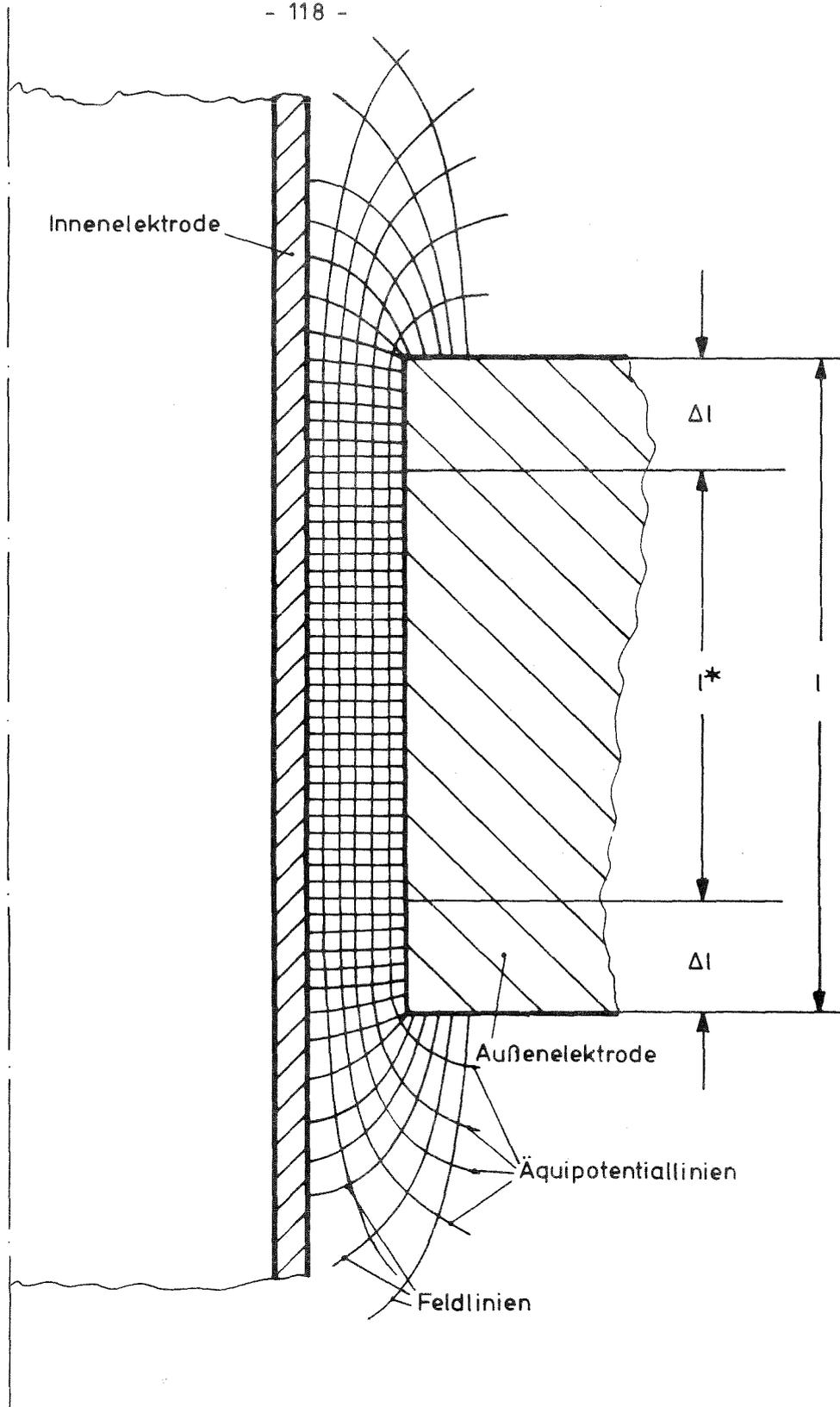


Fig. 3.3: Längsschnitt durch die Innendruckmeßanordnung, schematisch

Fig. 3.4 - 3.10: Modellversuche, Messung des Streufeldebflusses auf die Kapazität C der Meßanordnung durch Variation der Länge l der Außenelektrode (Sonde)

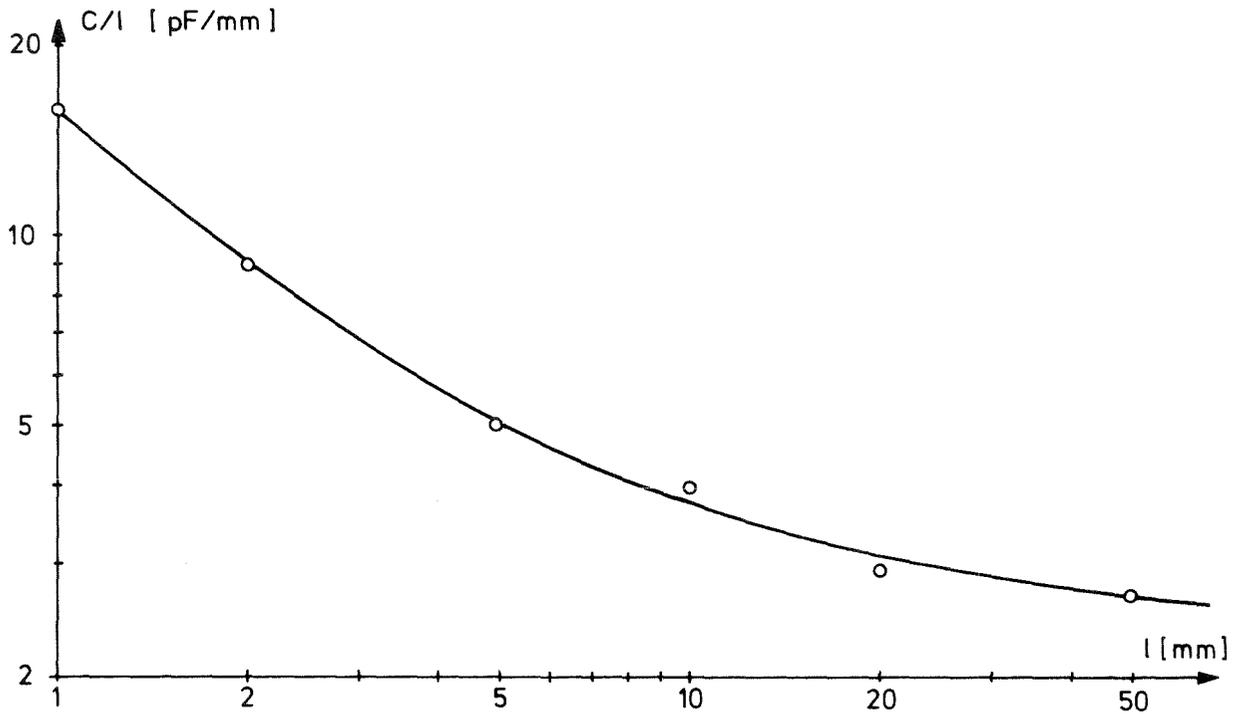


Fig. 3.4: Sondendurchmesser 105.5 mm, Ovalität 5%

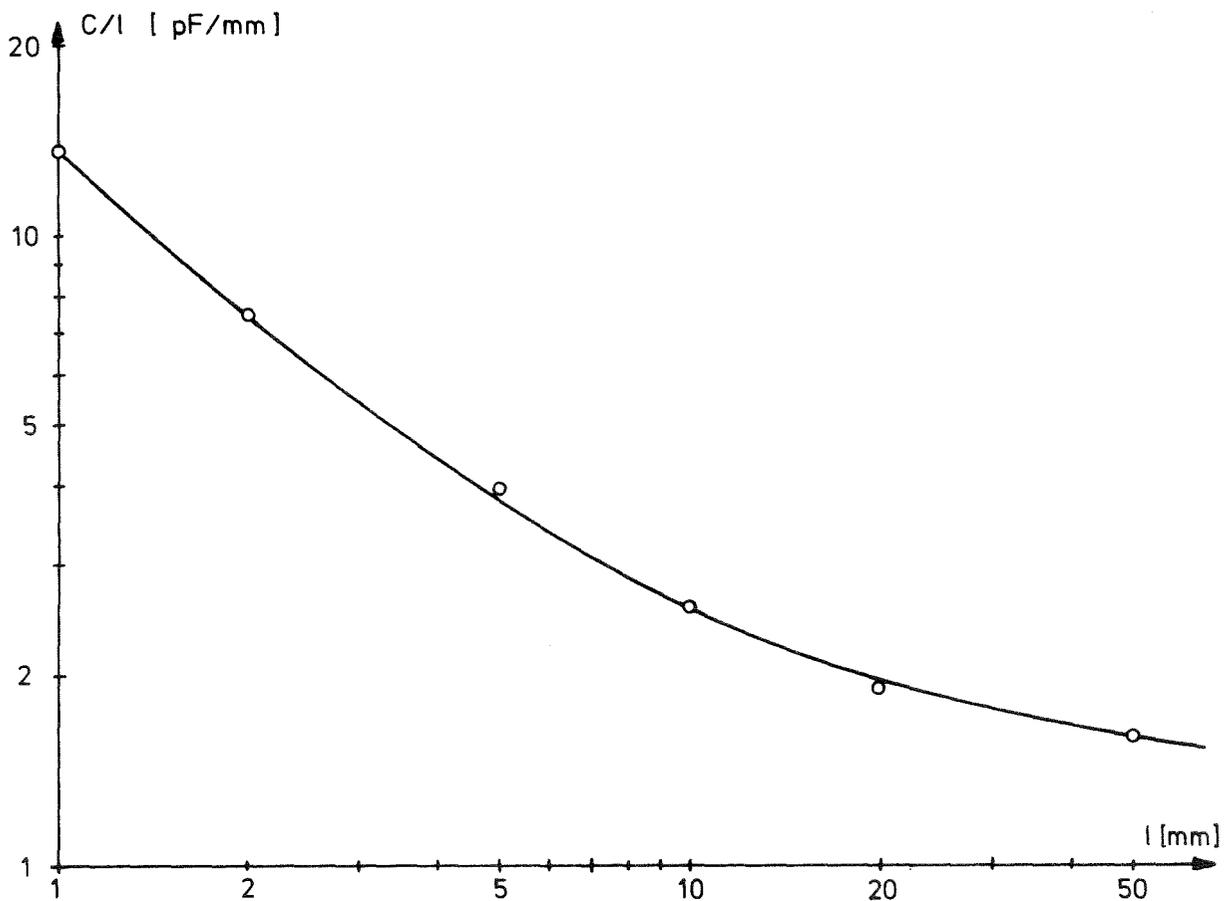


Fig. 3.5: Sondendurchmesser 105.5 mm, Ovalität 4%

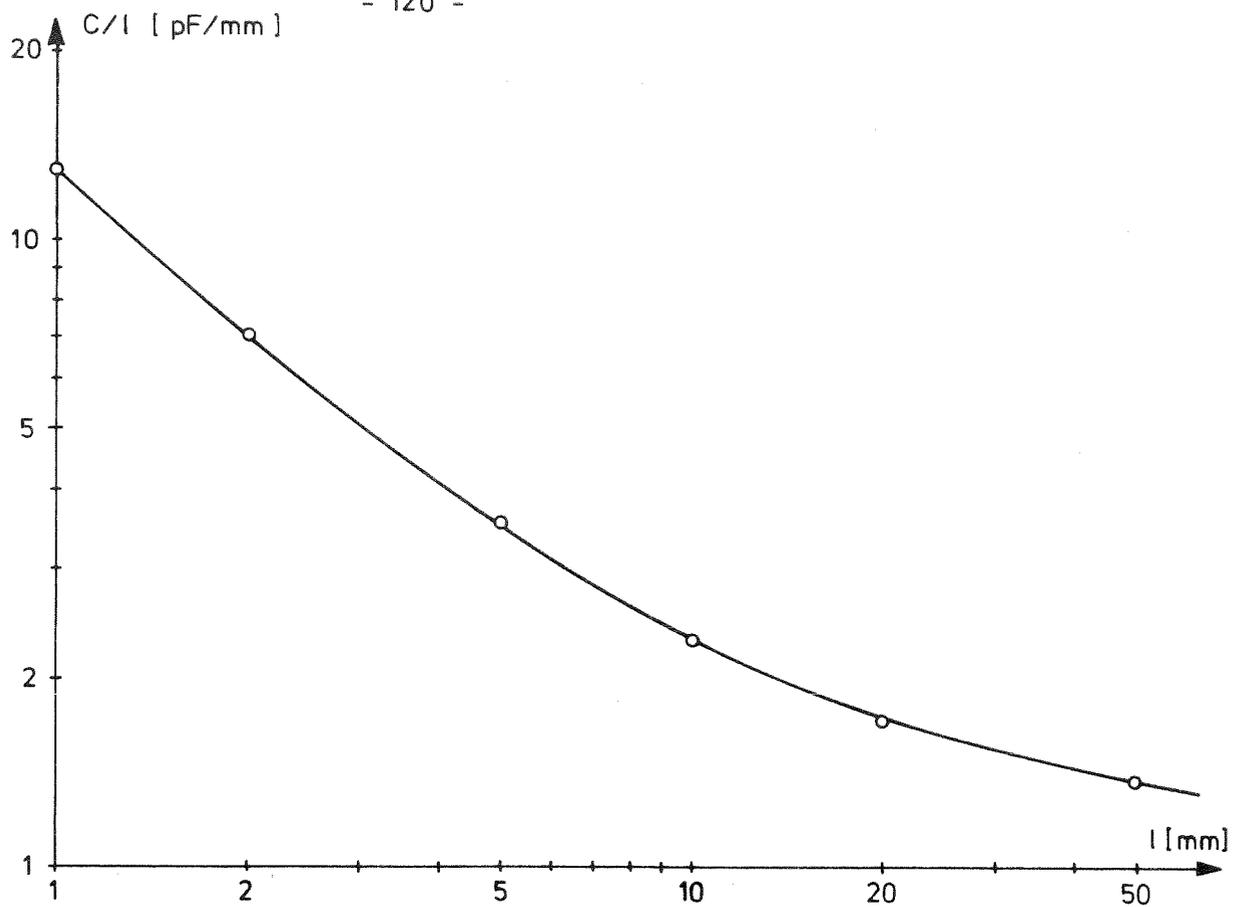


Fig. 3.6: Sondendurchmesser 105.5 mm, Ovalität 3 %

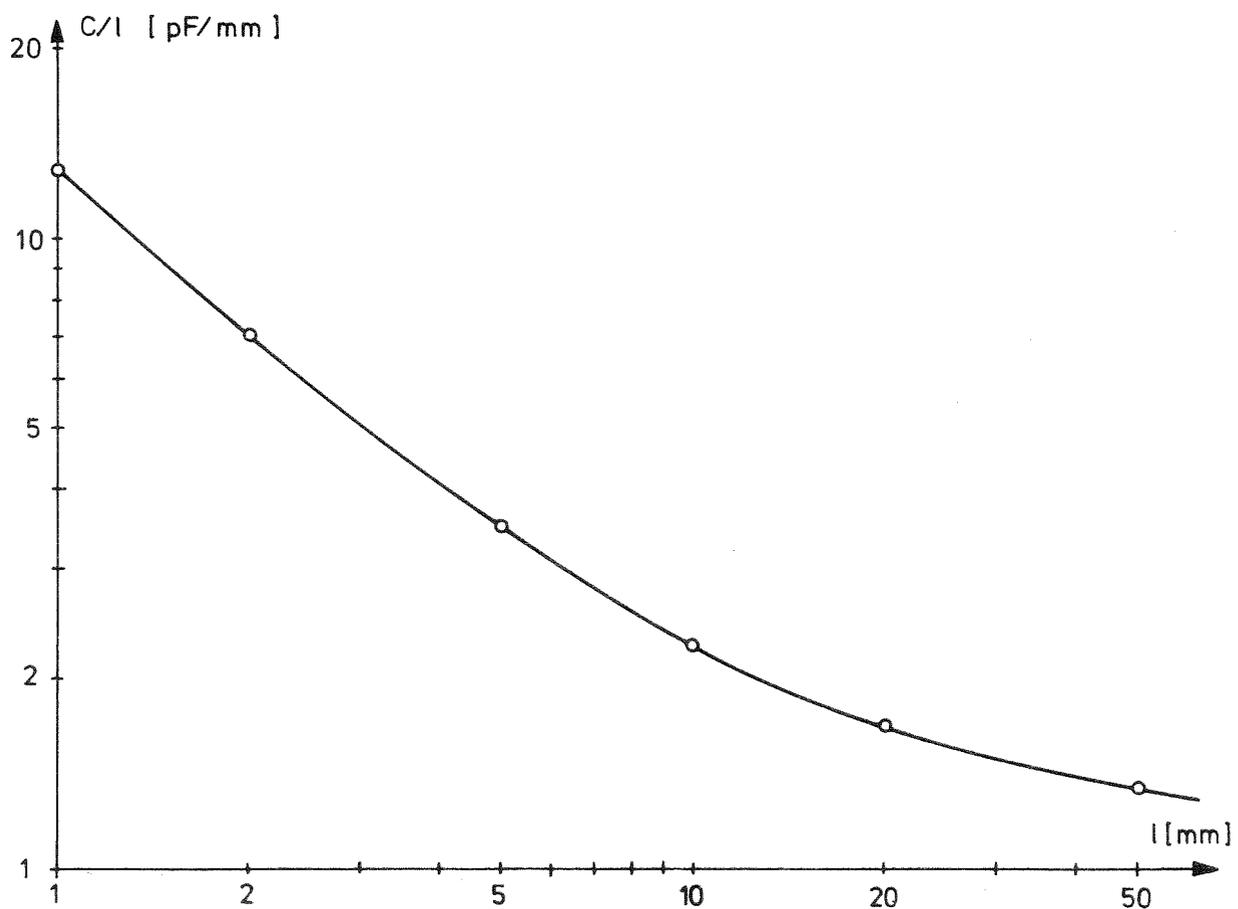


Fig. 3.7: Sondendurchmesser 105.5 mm, Ovalität 1.5 %

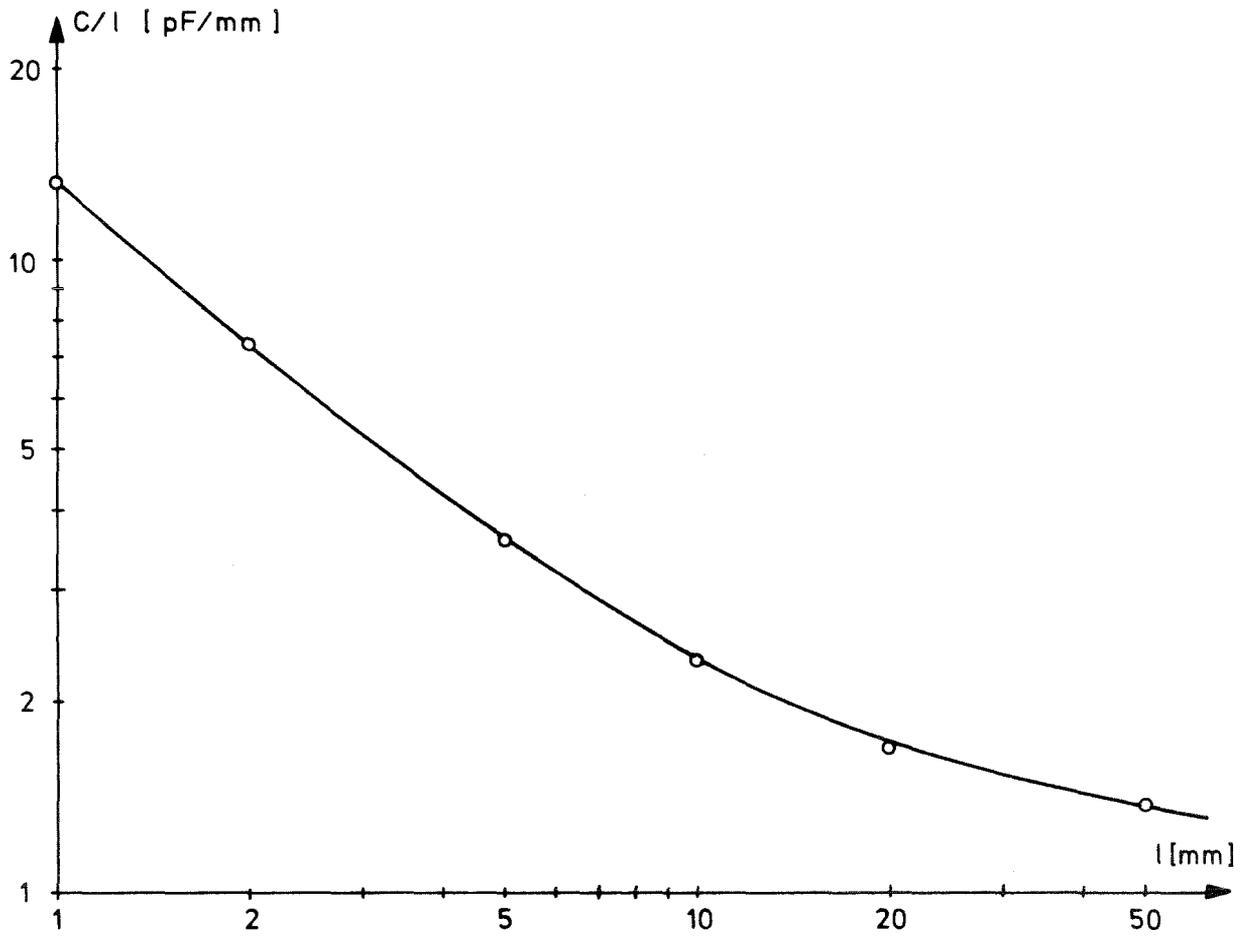


Fig. 3.8: Sondendurchmesser 105.5 mm, Ovalität 1 %

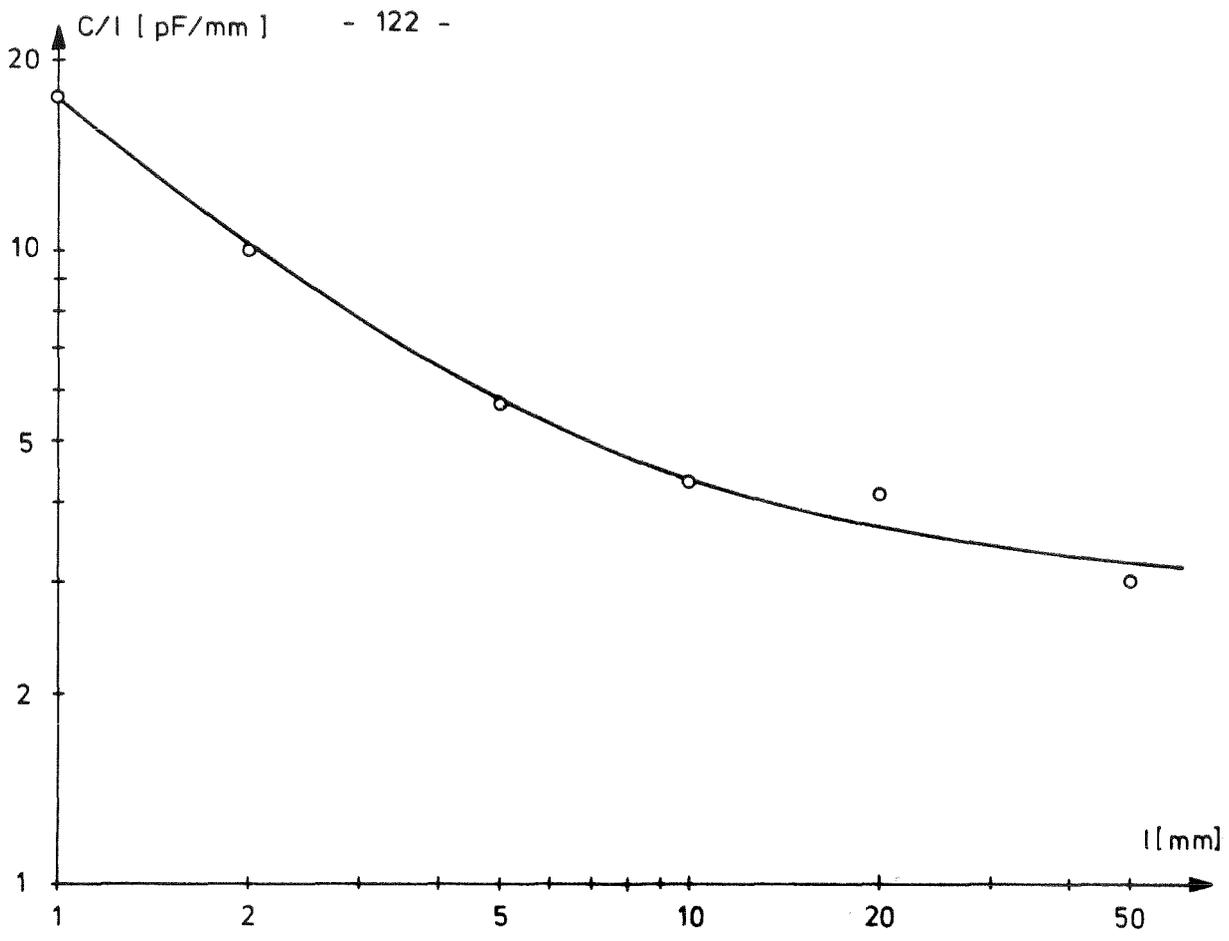


Fig. 3.9: Sondendurchmesser 102.5 mm , Ovalität 1.5 %

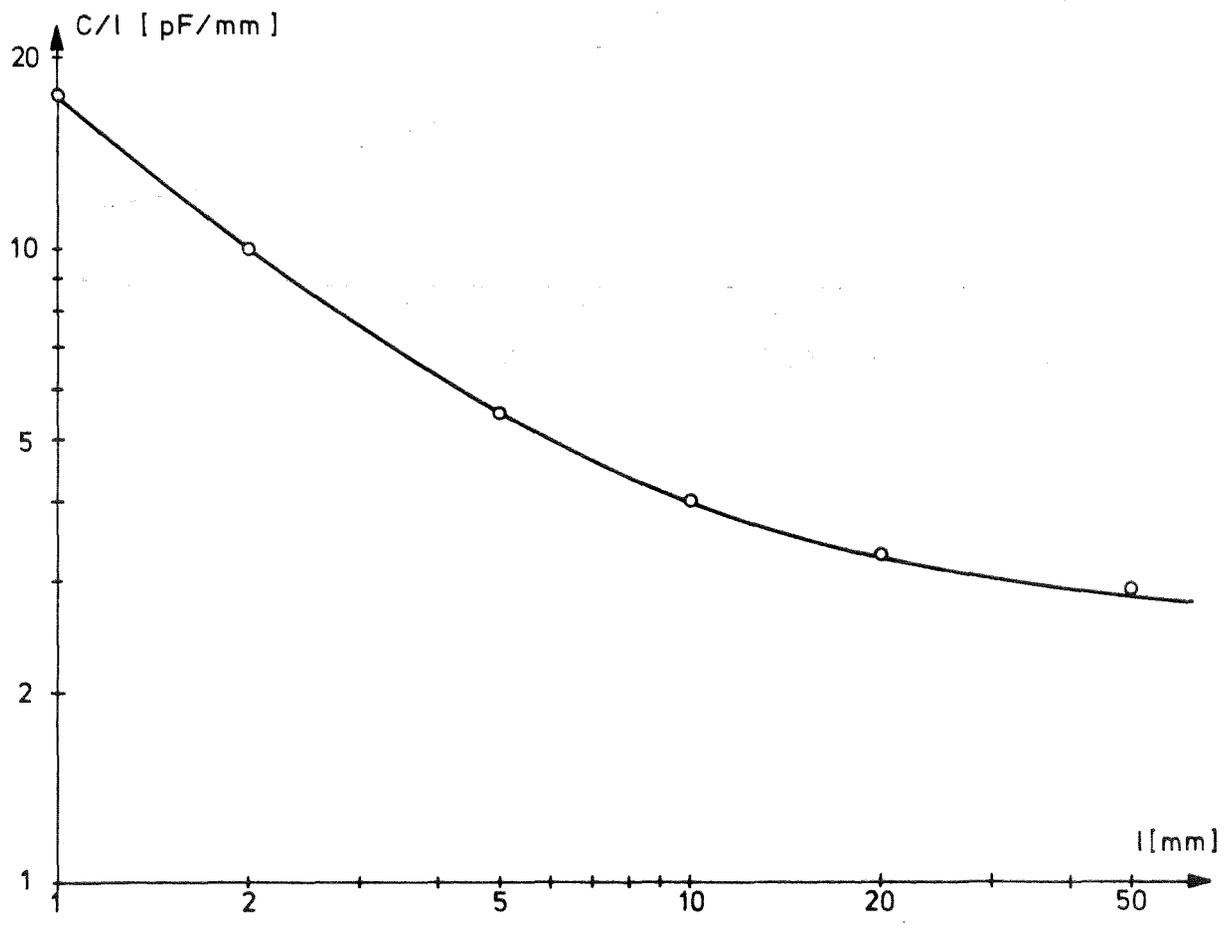


Fig. 3.10: Sondendurchmesser 102.5, Ovalität 1 %

Fig. 3.11 - 3.12: Modellversuche, Auswertung der Streufeldmessungen, Ausgleichsgrößen in Abhängigkeit von Sondendurchmesser D_S und Ovalität α

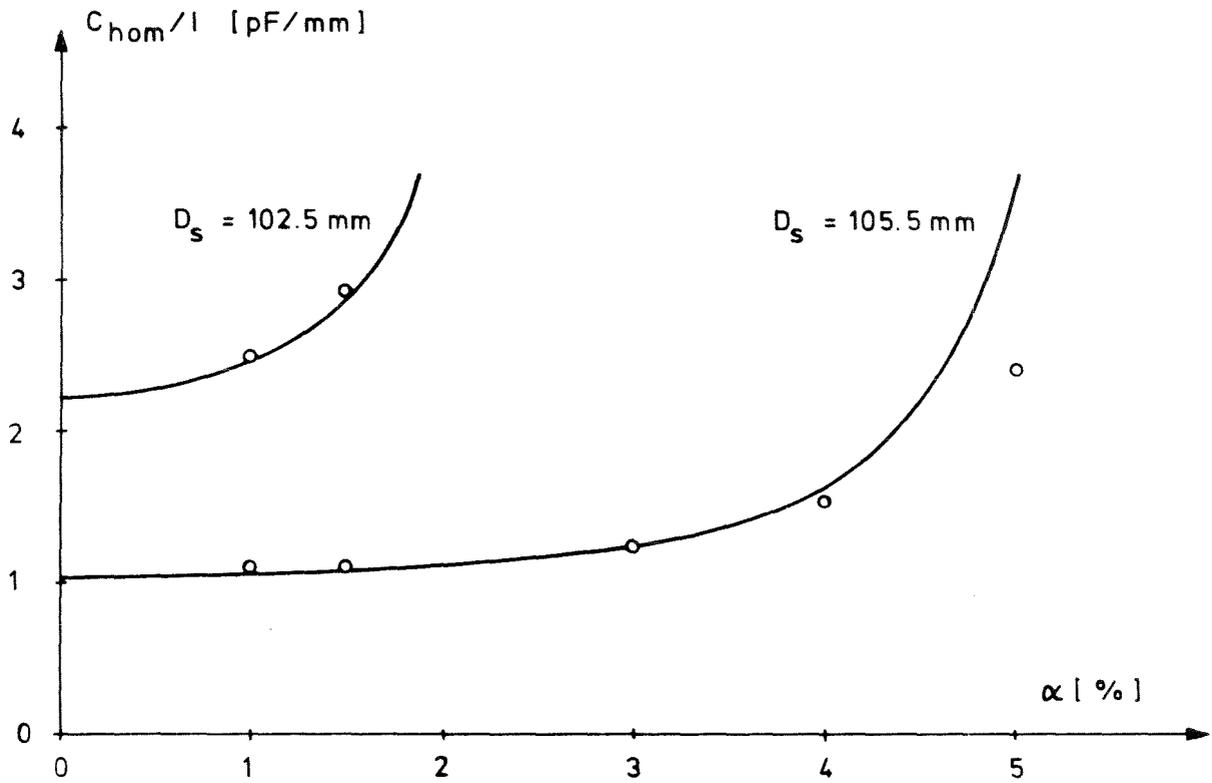


Fig. 3.11: Homogener Kapazitätsanteil C_{hom} , bezogen auf die Sondenlänge l

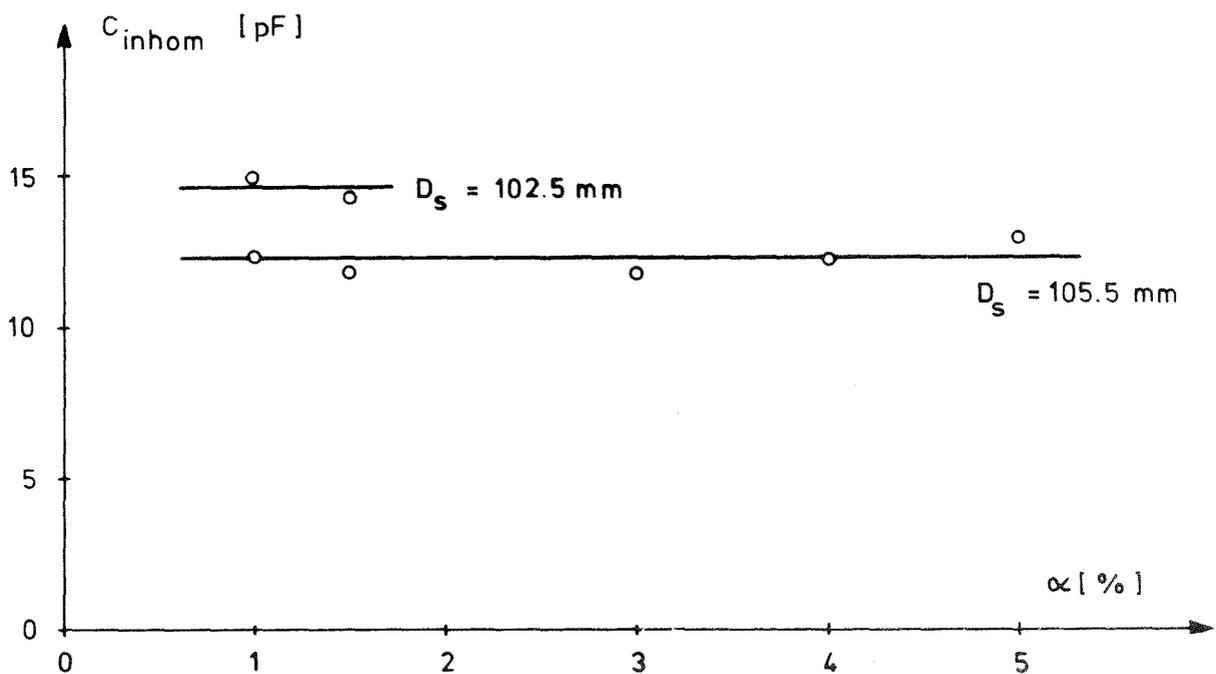


Fig. 3.12: Inhomogener Kapazitätsanteil C_{inhom}

Fig. 3.13 - 3.18: Modellversuche, Messung des Einflusses von Exzentrizitäten a_x und a_y auf die Kapazität C der Meßanordnung in Abhängigkeit von Sondenlänge l , Sondendurchmesser D_s und Ovalität α

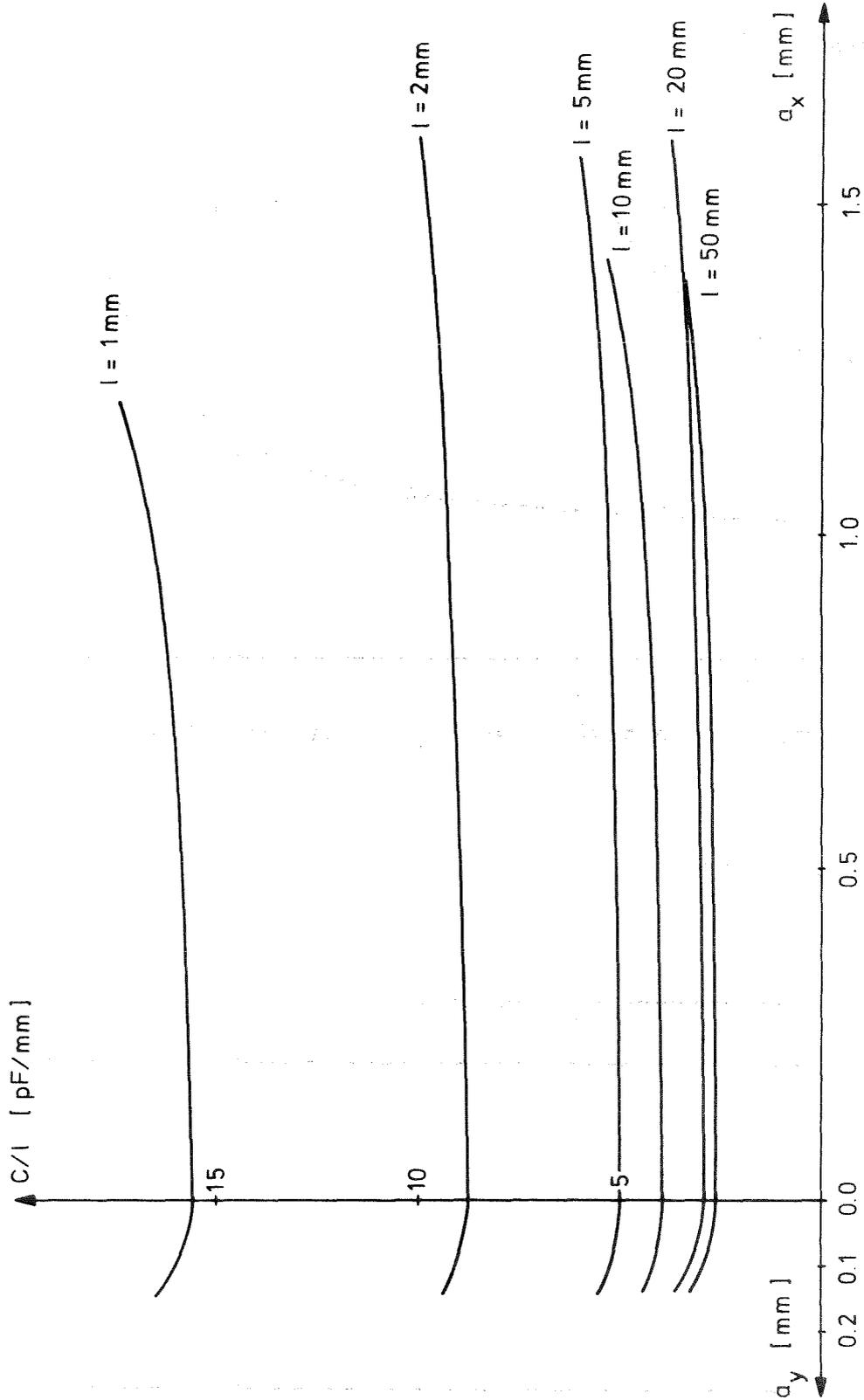


Fig. 3.13: Sondendurchmesser 105.5 mm, Ovalität 5%

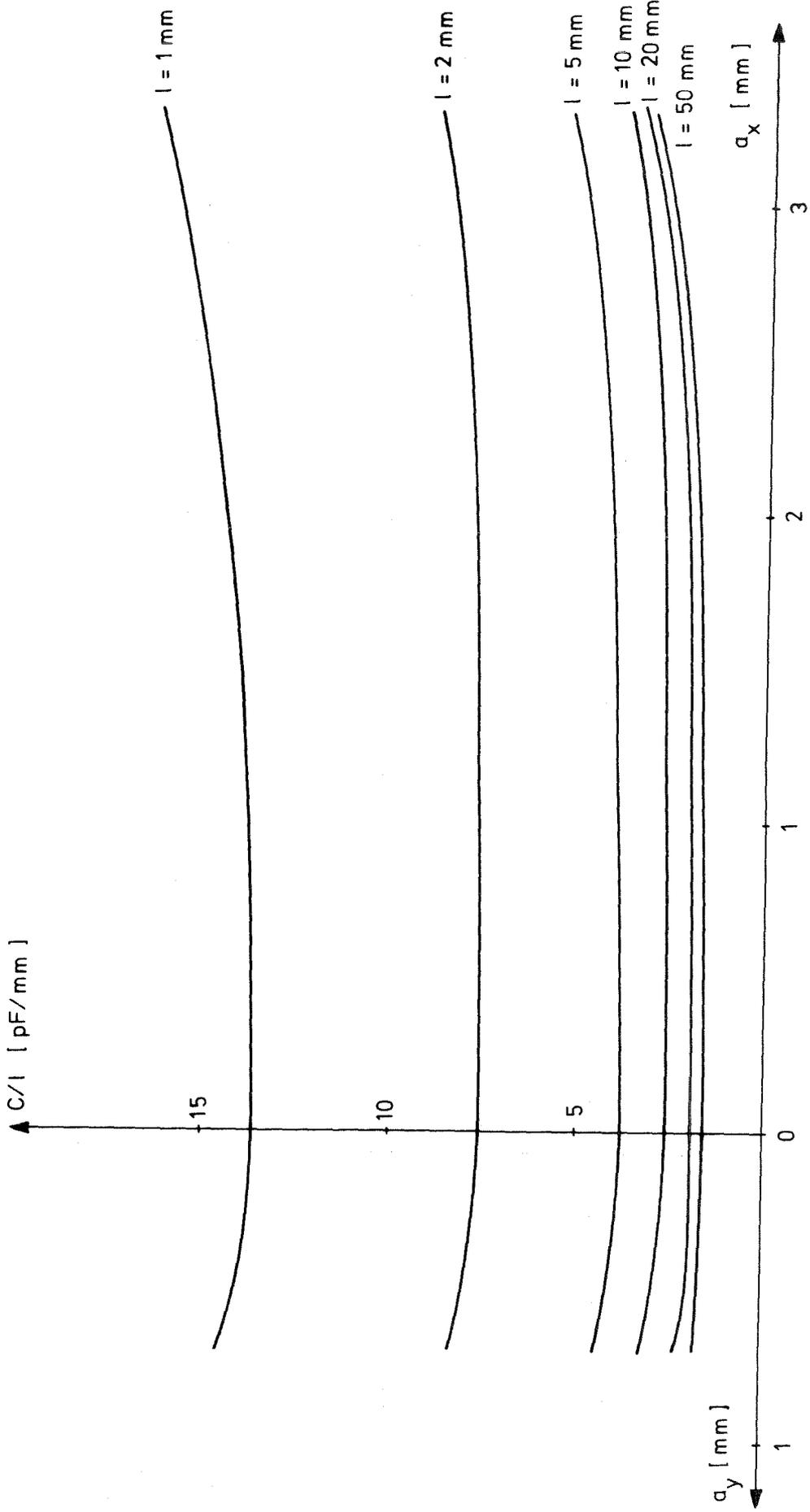


Fig. 3.14: Sondendurchmesser 105.5 mm, Ovalität 4 %.

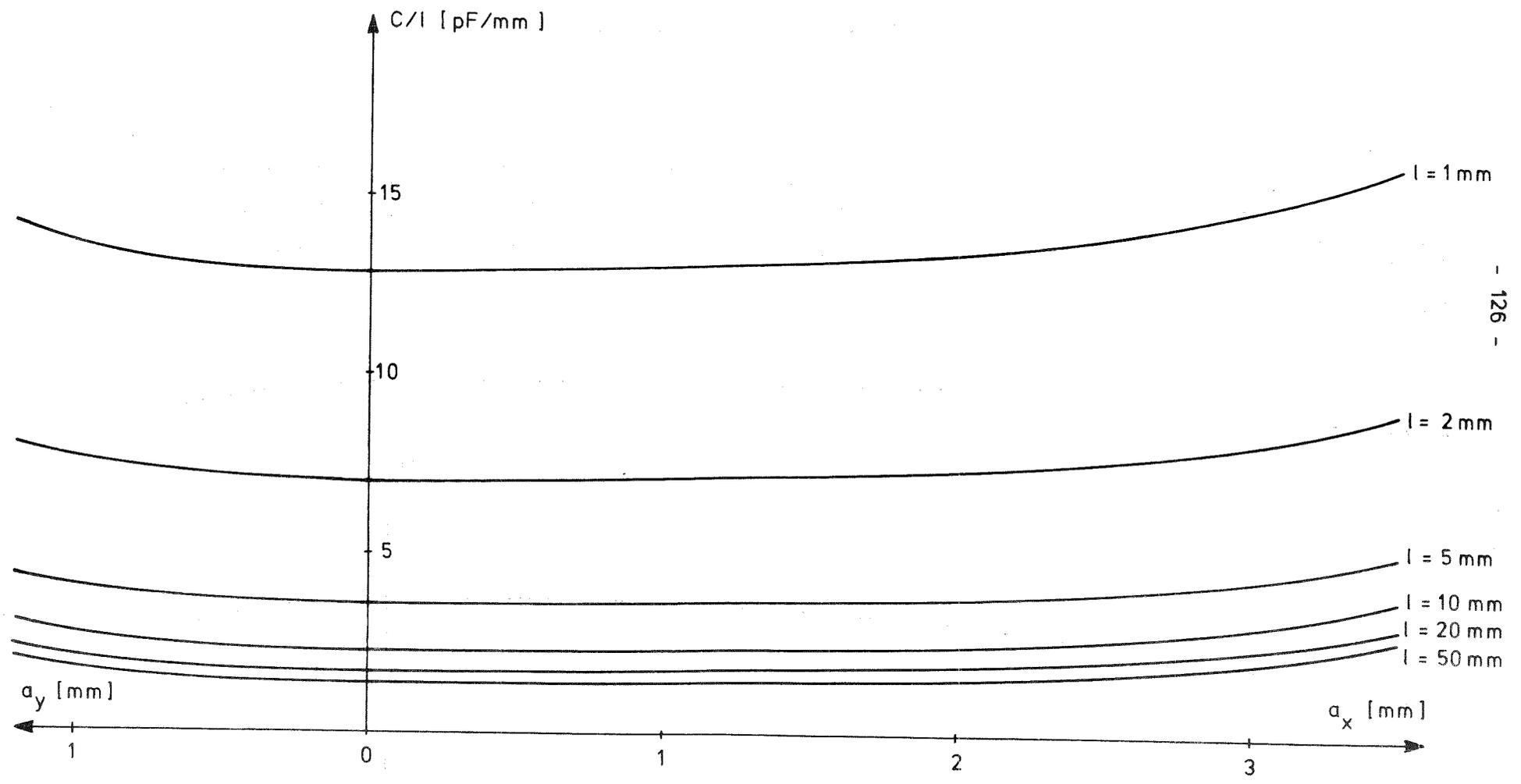


Fig. 3.15: Sondendurchmesser 105.5 mm, Ovalität 3%

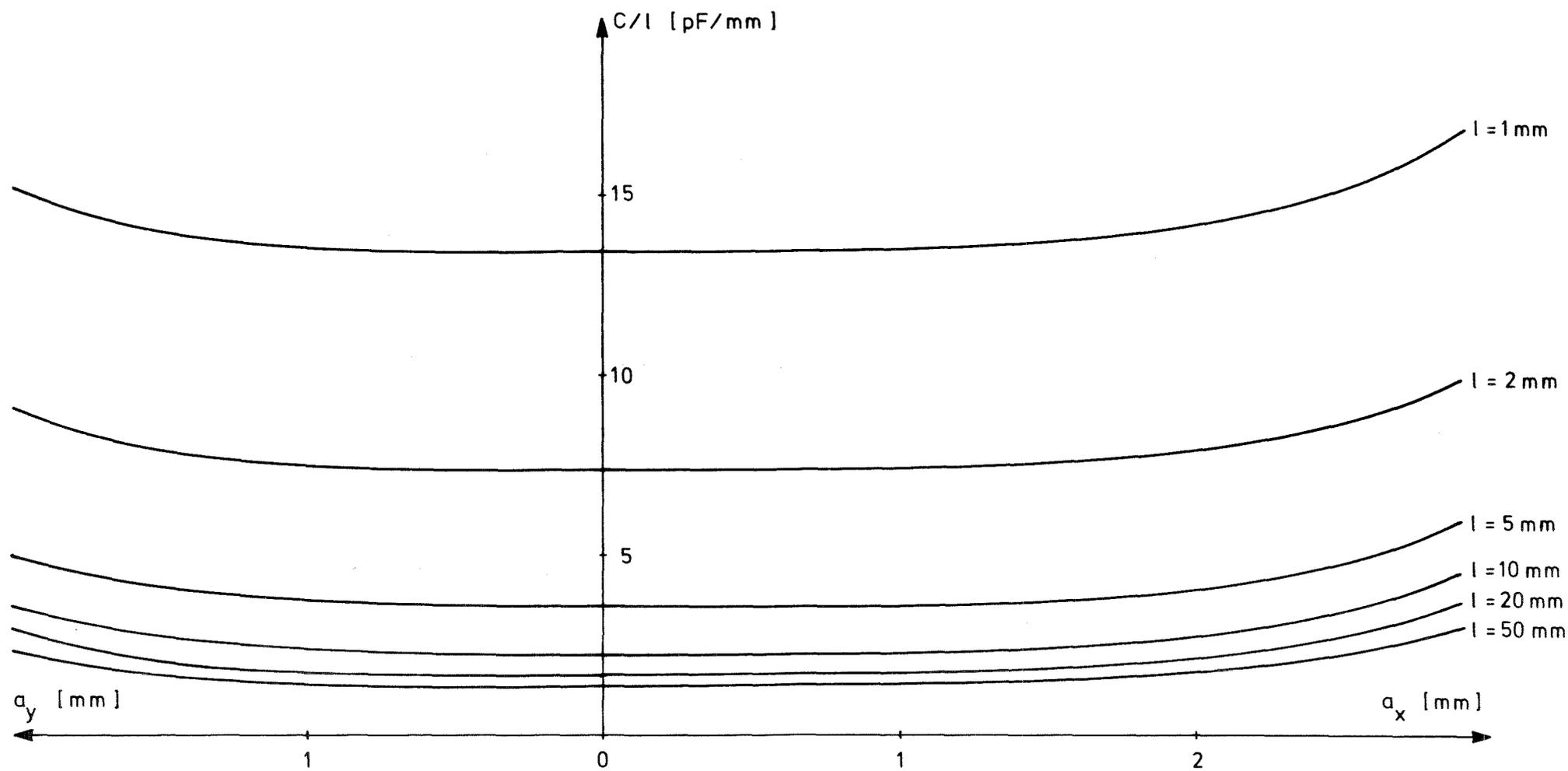


Fig. 3.16: Sondendurchmesser 105.5 mm, Ovalität 1 %

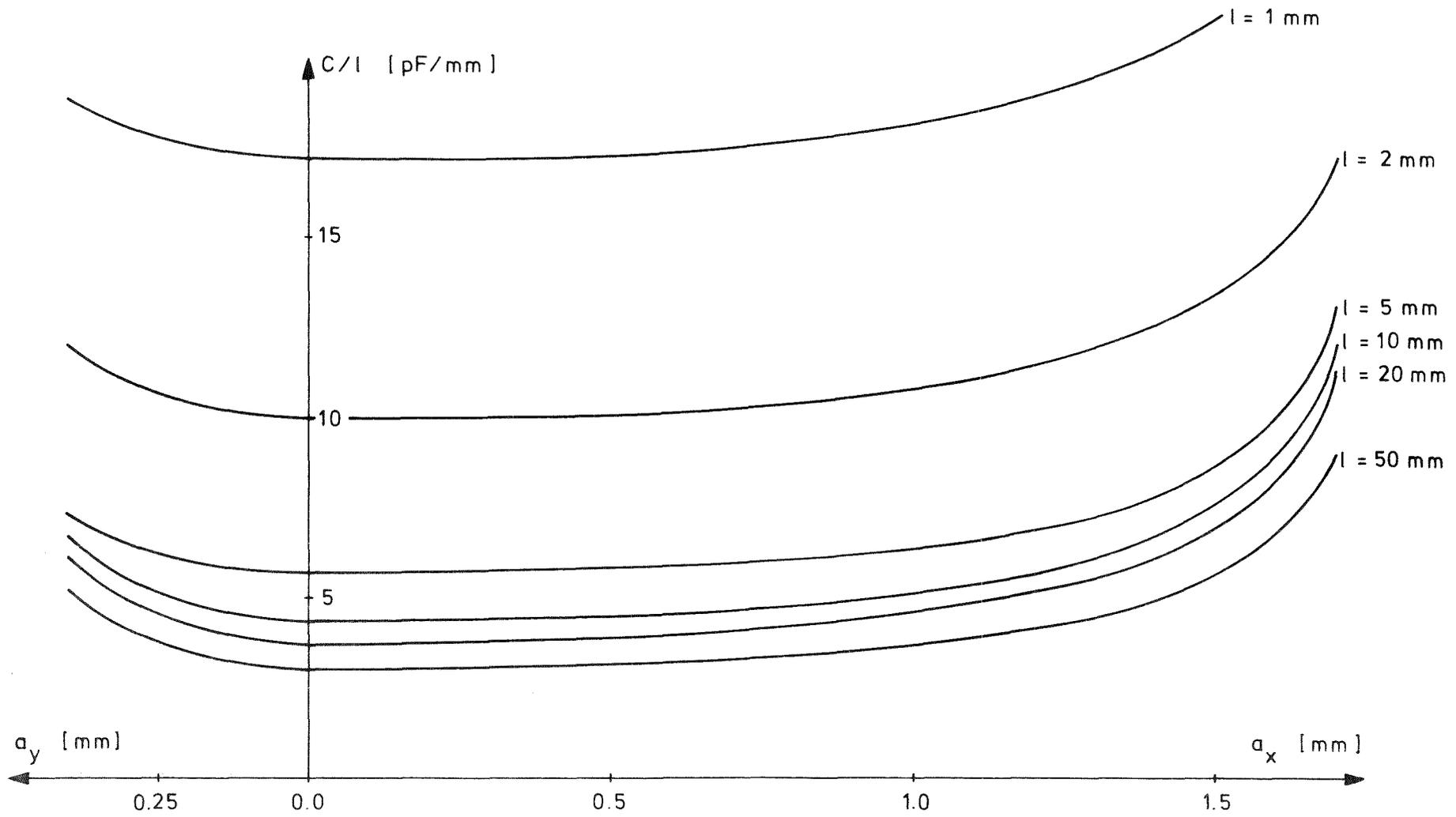


Fig. 3.17: Sondendurchmesser 102.5 mm, Ovalität 1.5 %

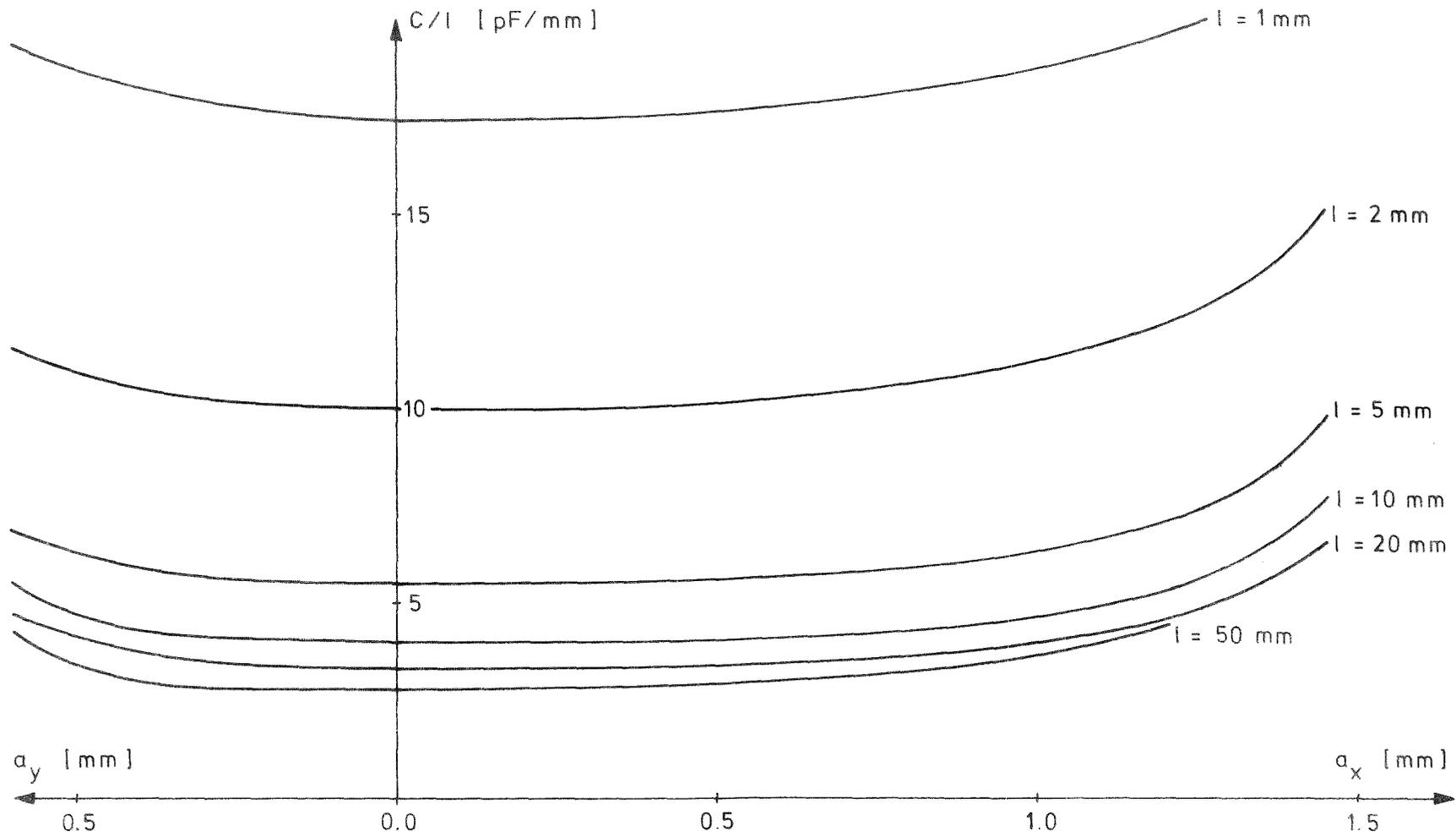


Fig. 3.18: Sondendurchmesser 102.5 mm, Ovalität 1%

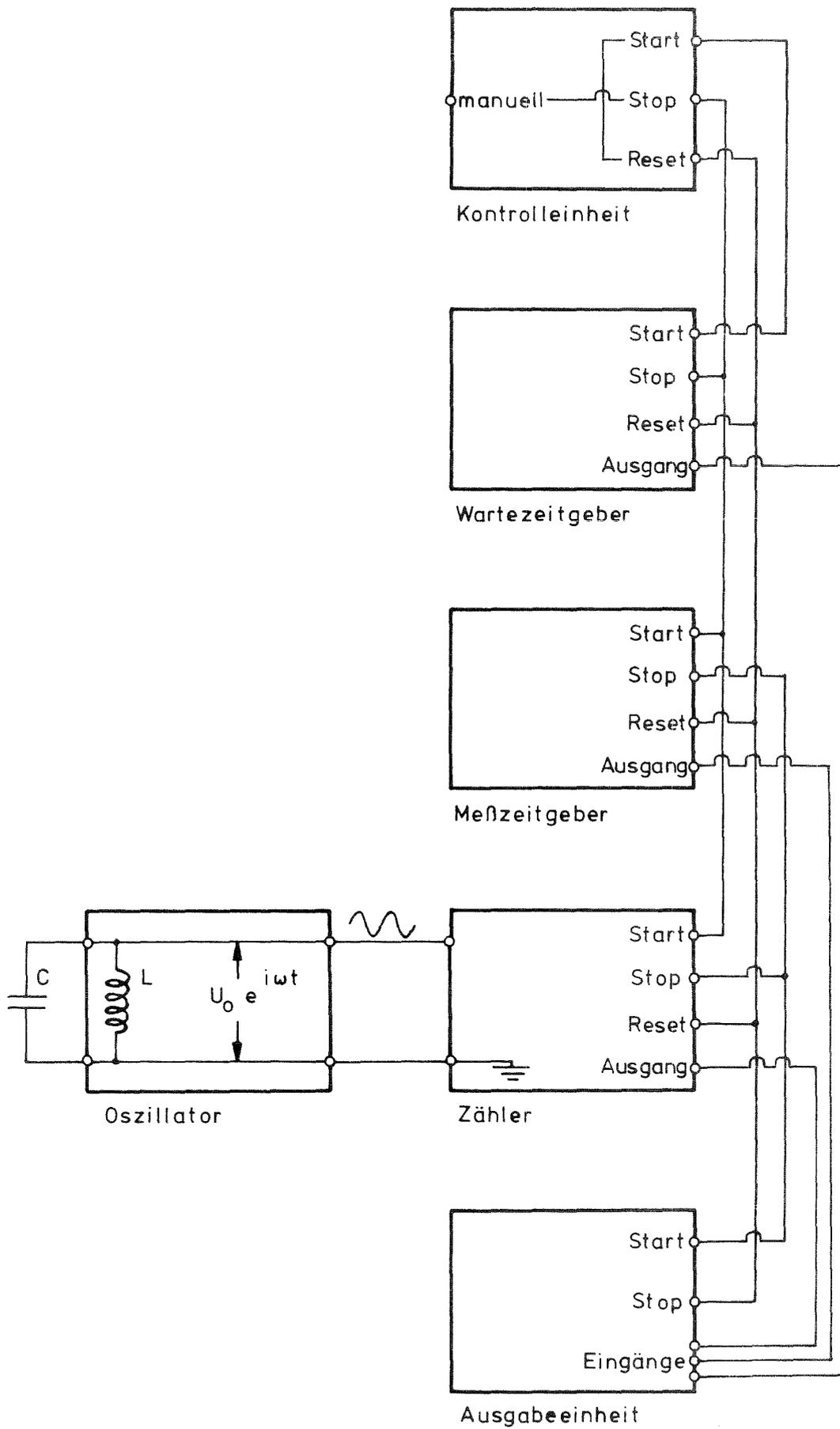


Fig. 3.19: Blockschaltbild der automatischen Kapazitätsmessung

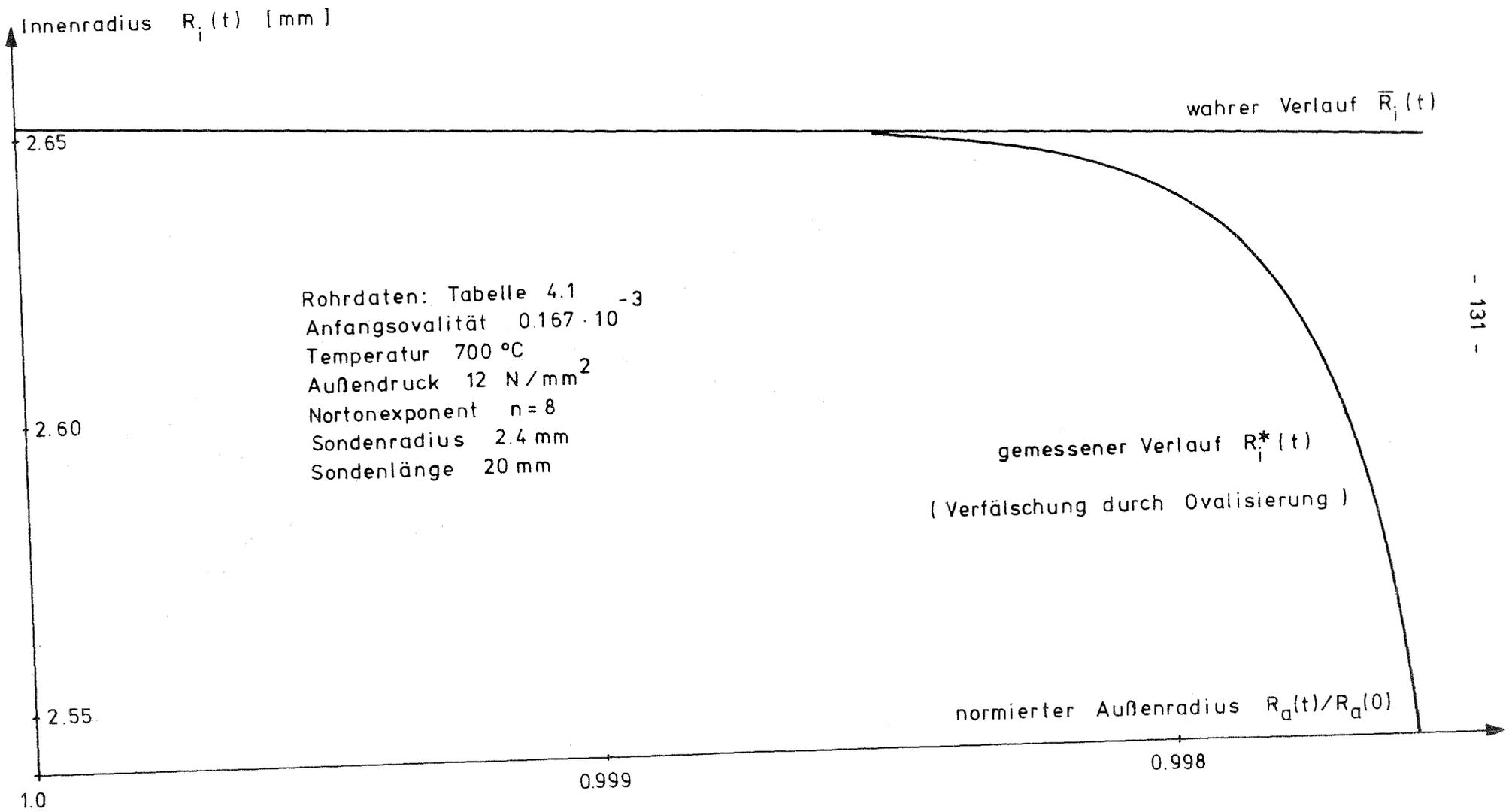


Fig. 3.20: Kapazitive Radienmessung unter Außendruckbelastung

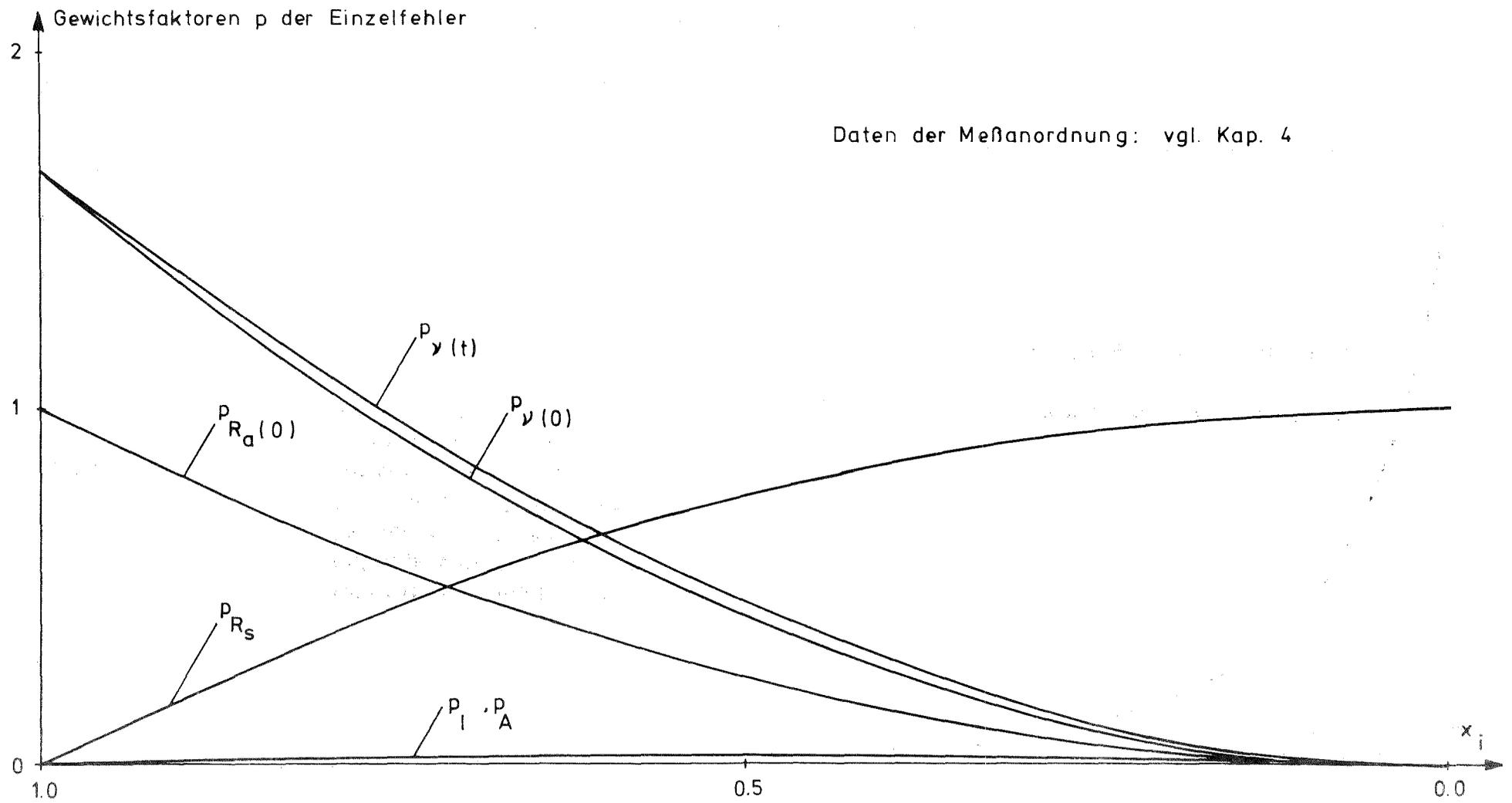


Fig. 3.21: Fehler des kontinuierlich gemessenen Rohrradius durch Fehlerfortpflanzung

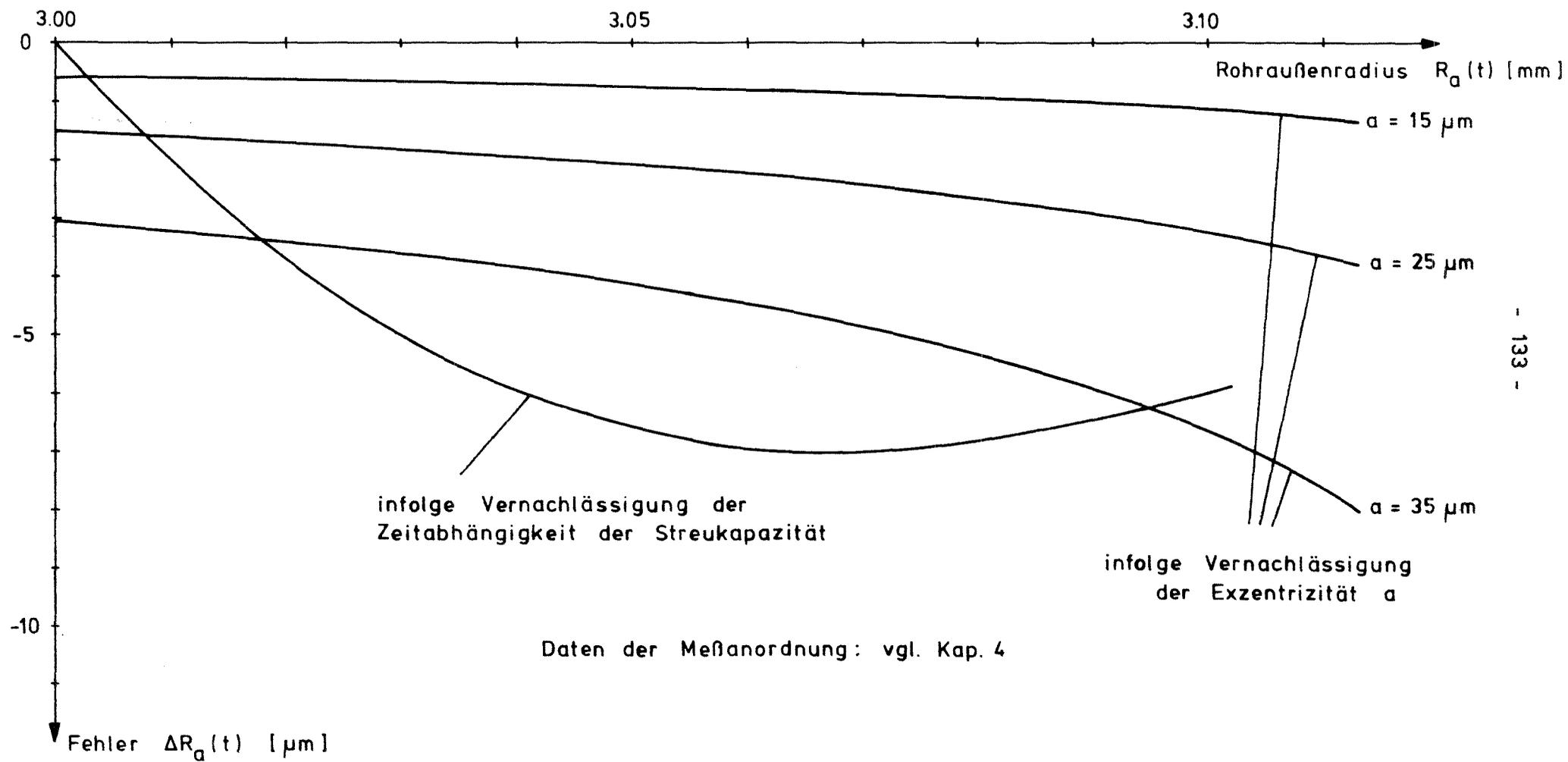


Fig. 3.22: Einseitige systematische Fehler des kontinuierlich gemessenen Rohrradius

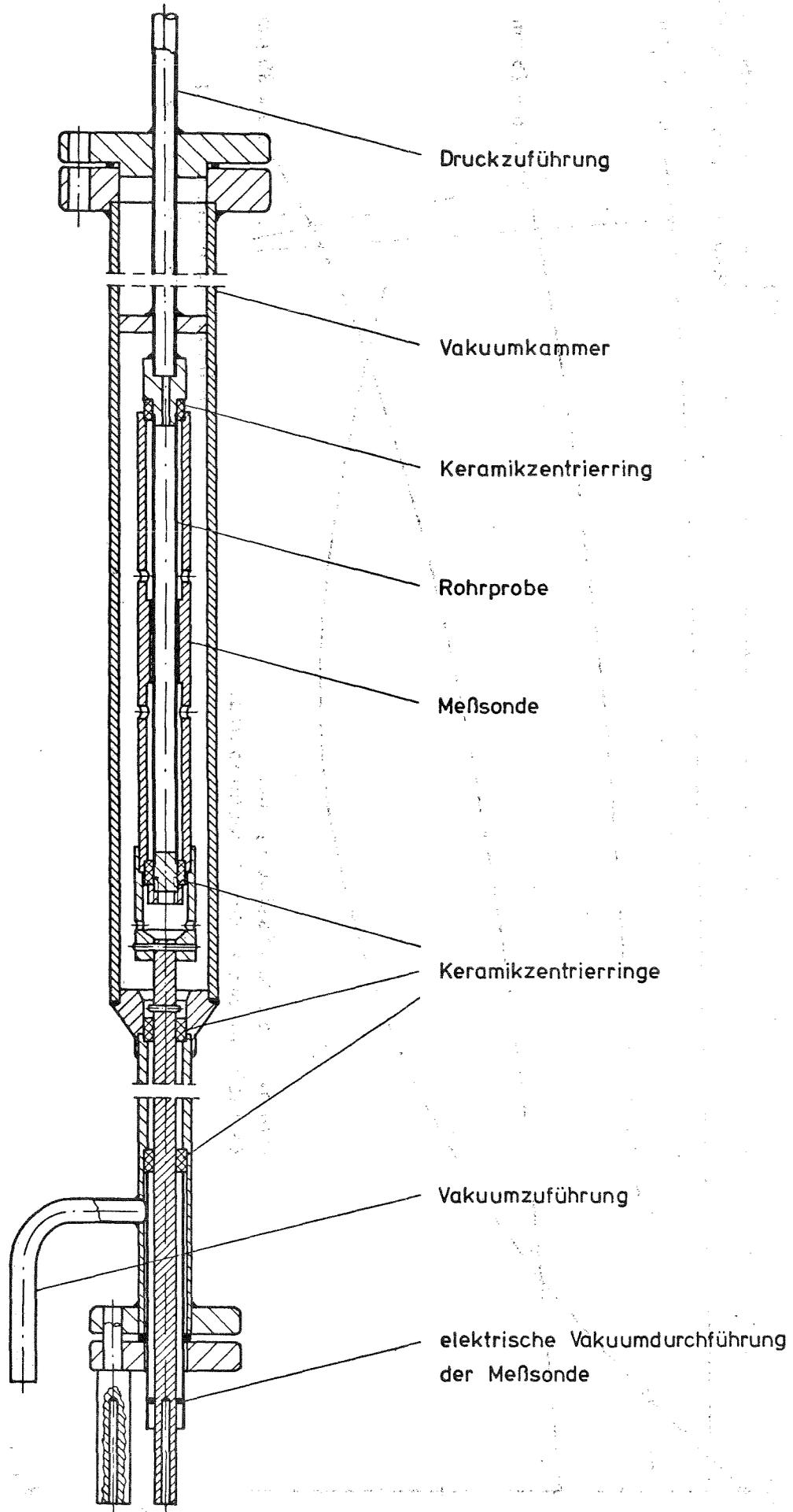


Fig. 4.1: Innendruckmeßvorrichtung, verkleinert

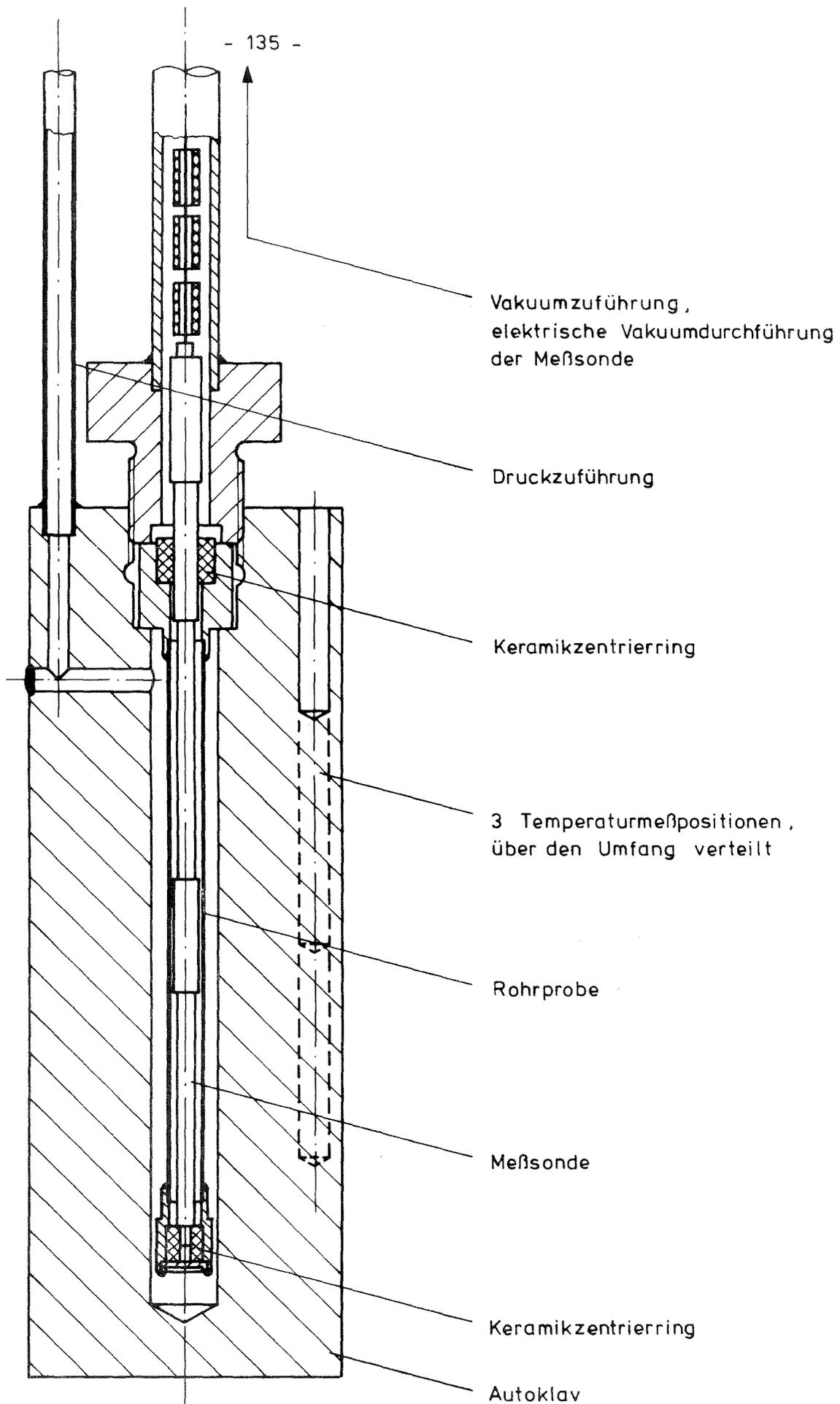


Fig. 4.2: Außendruckmeßvorrichtung

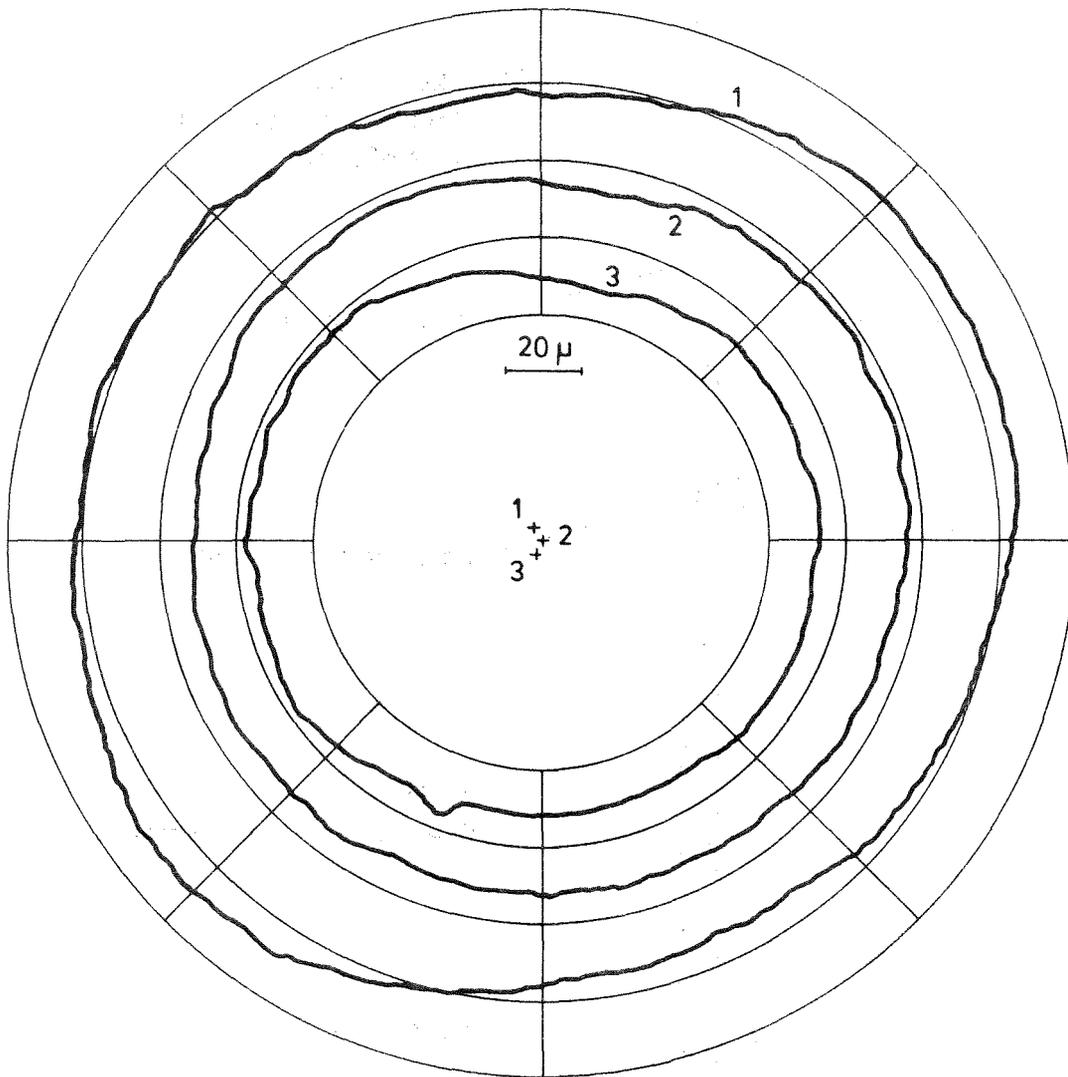
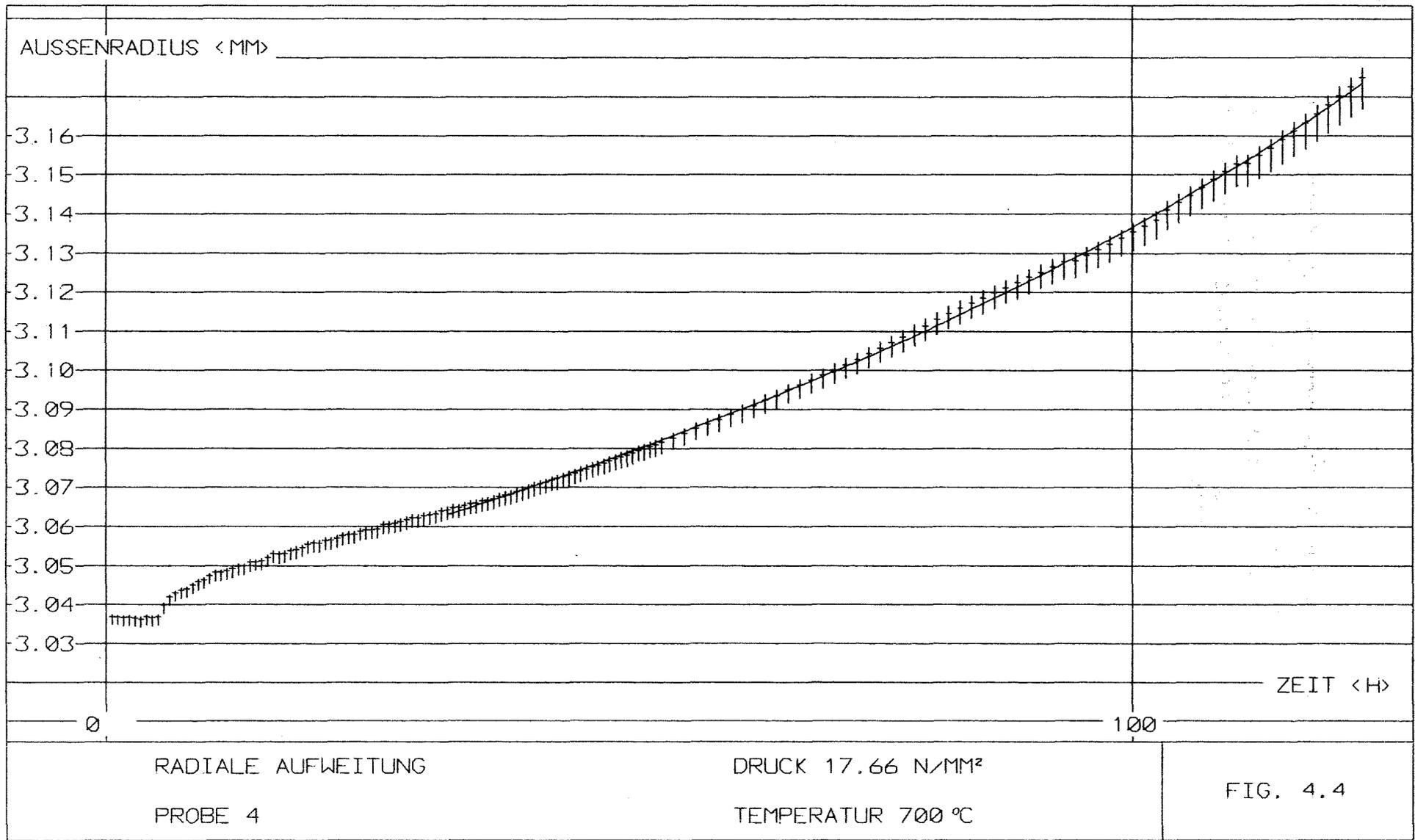


Fig. 4.3: Polarschrieb zur Bestimmung der Exzentrizität

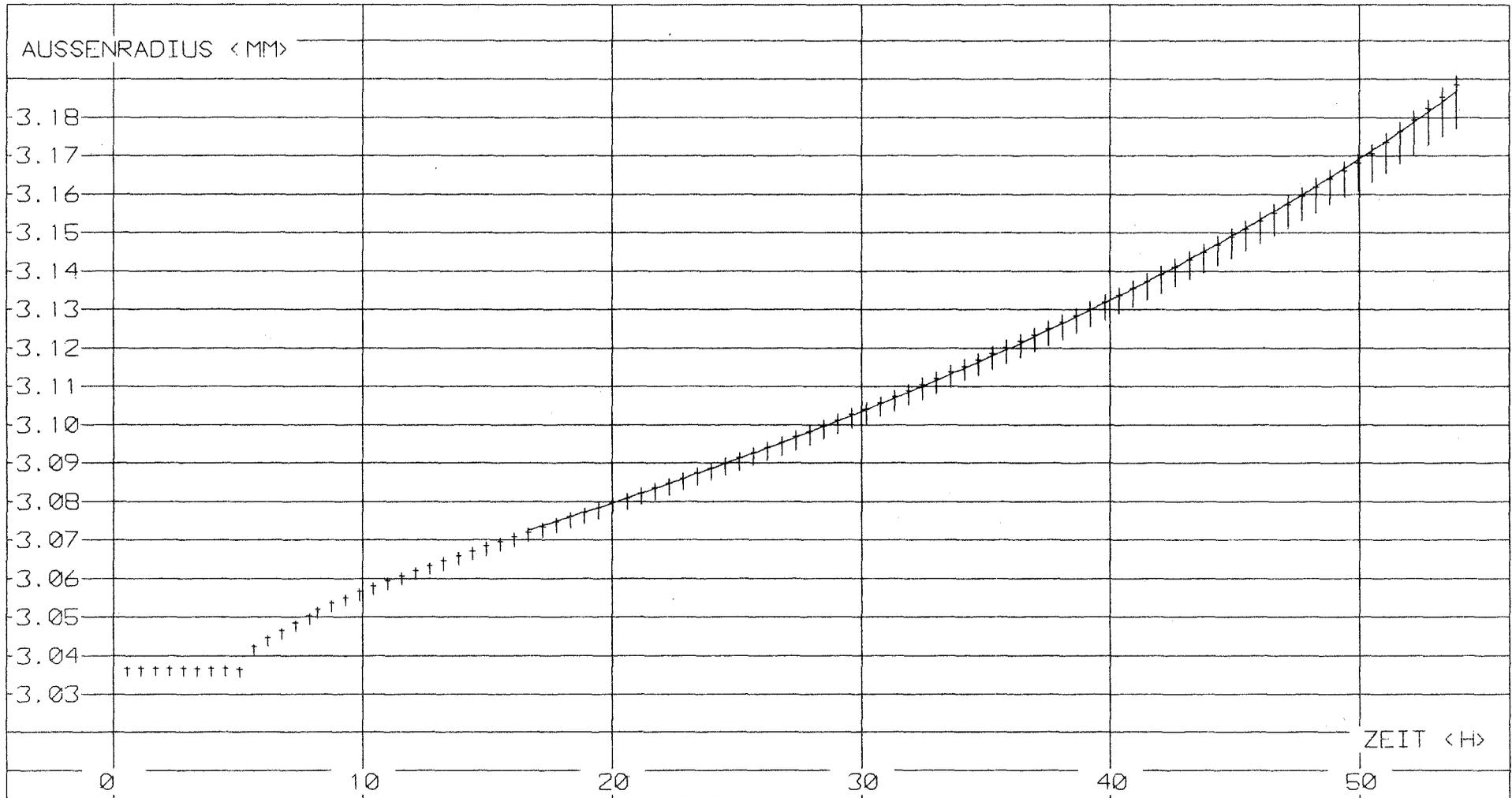
Fig. 4.4 - 4.8: Innendruck - Kriechversuche an Rohren (Tab. 4.1)
bei 700 °C :
gemessener zeitlicher Verlauf der radialen
Aufweitung und Anpassungskurve nach dem
Schalenmodell



RADIALE AUFWEITUNG
 PROBE 4

DRUCK 17.66 N/MM²
 TEMPERATUR 700 °C

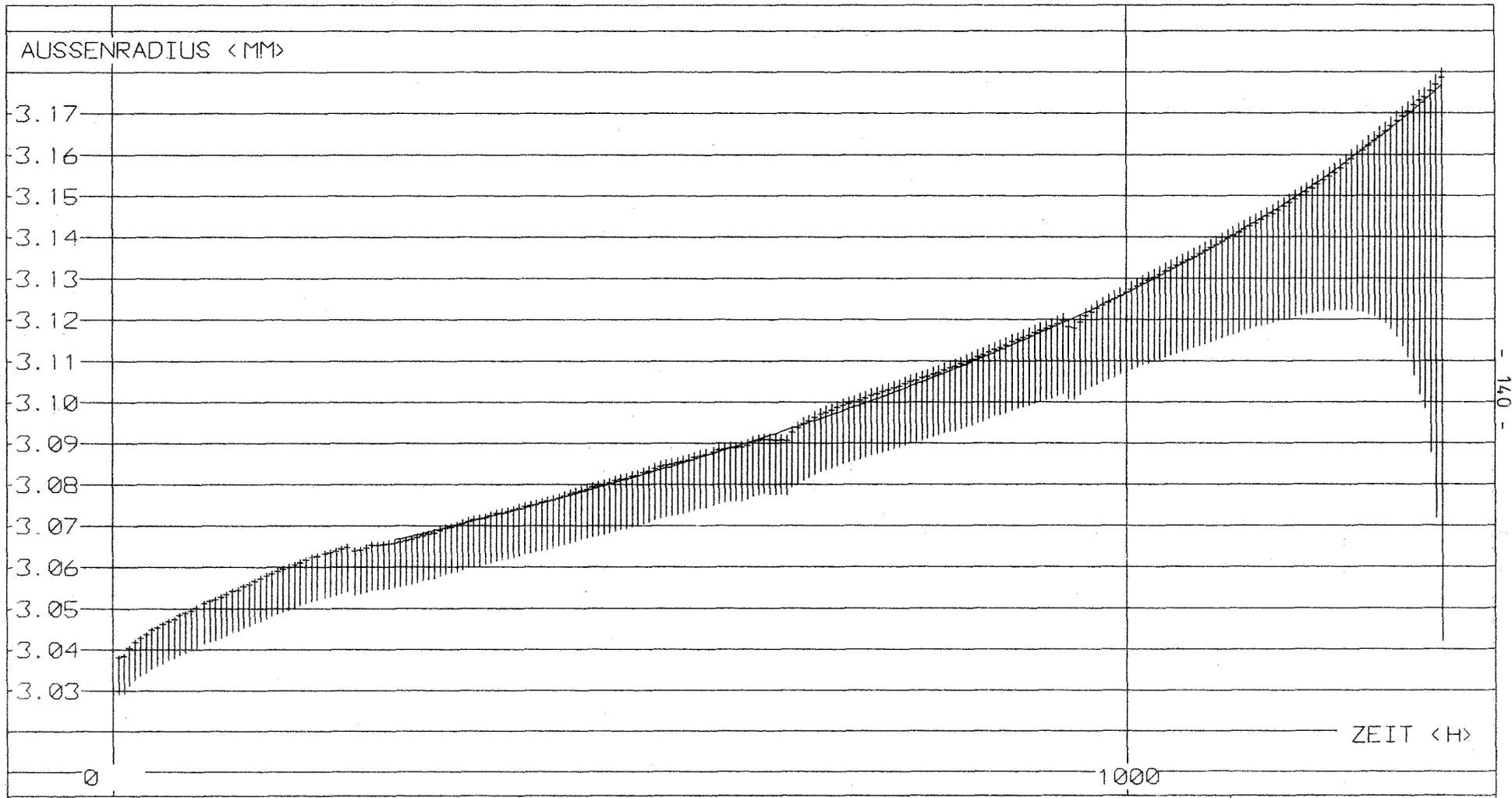
FIG. 4.4



RADIALE AUFWEITUNG
 PROBE 6

DRUCK 19.62 N/MM²
 TEMPERATUR 700 °C

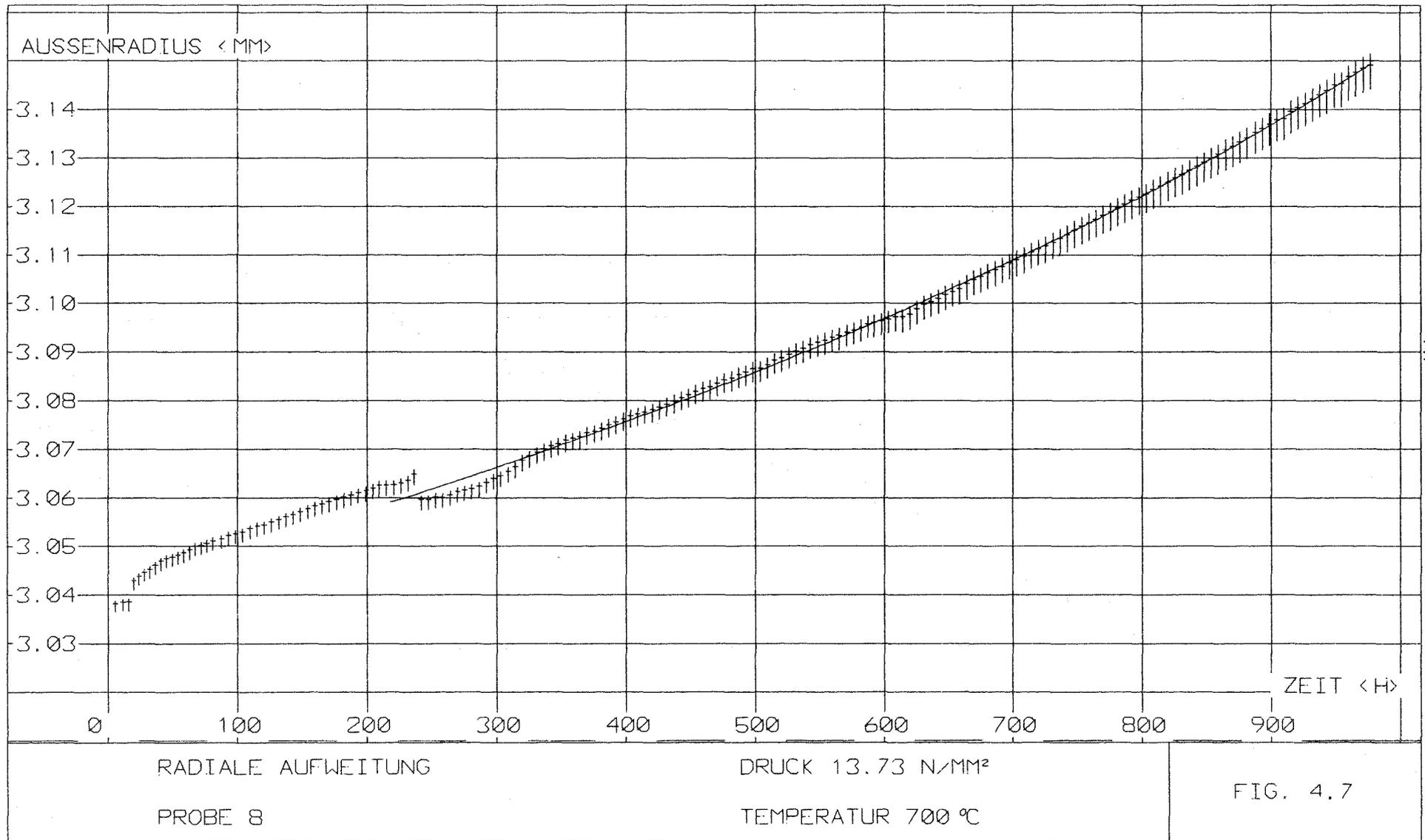
FIG. 4.5

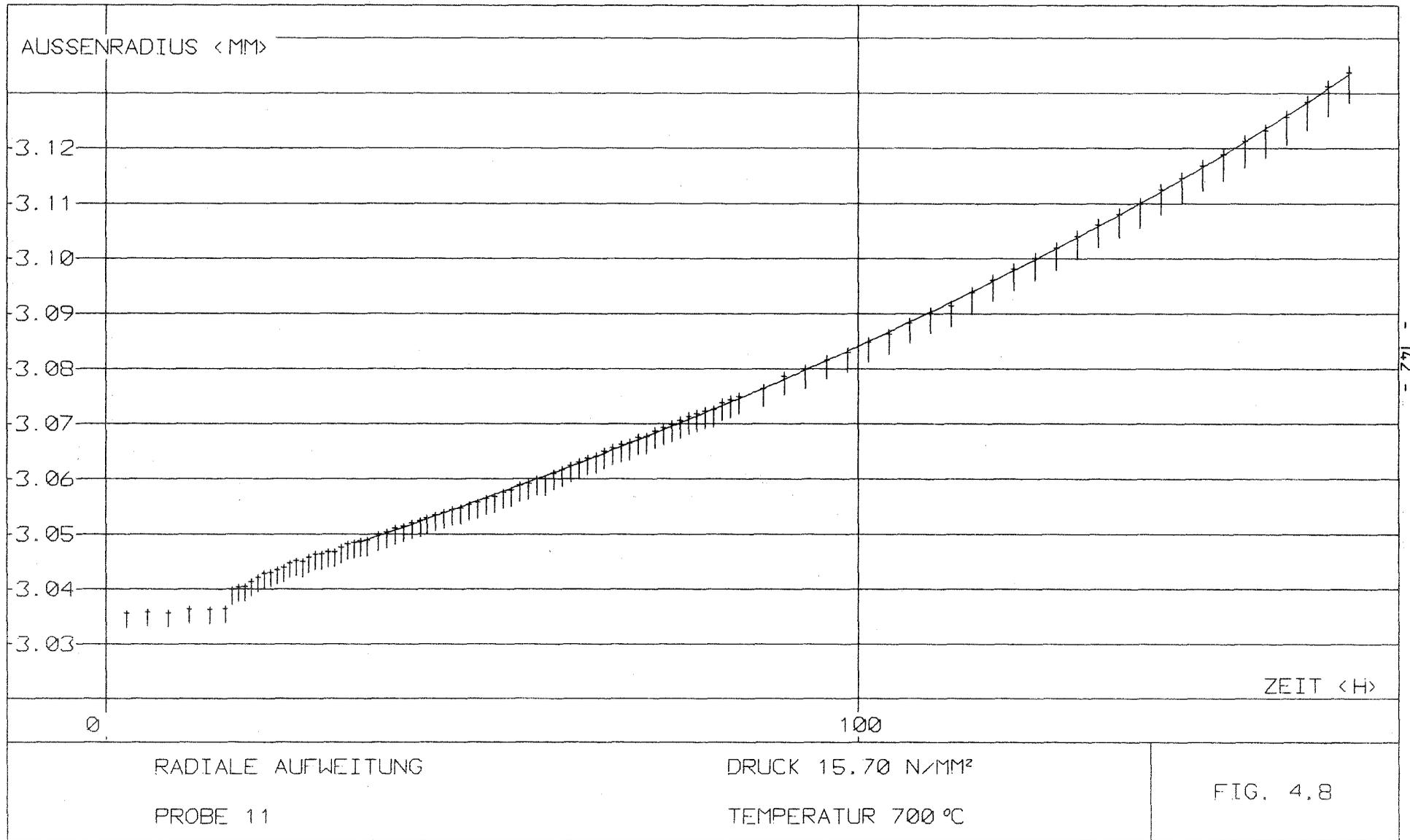


RADIALE AUFWEITUNG
 PROBE 7

DRUCK 12.75 N/MM²
 TEMPERATUR 700 °C

FIG. 4.6





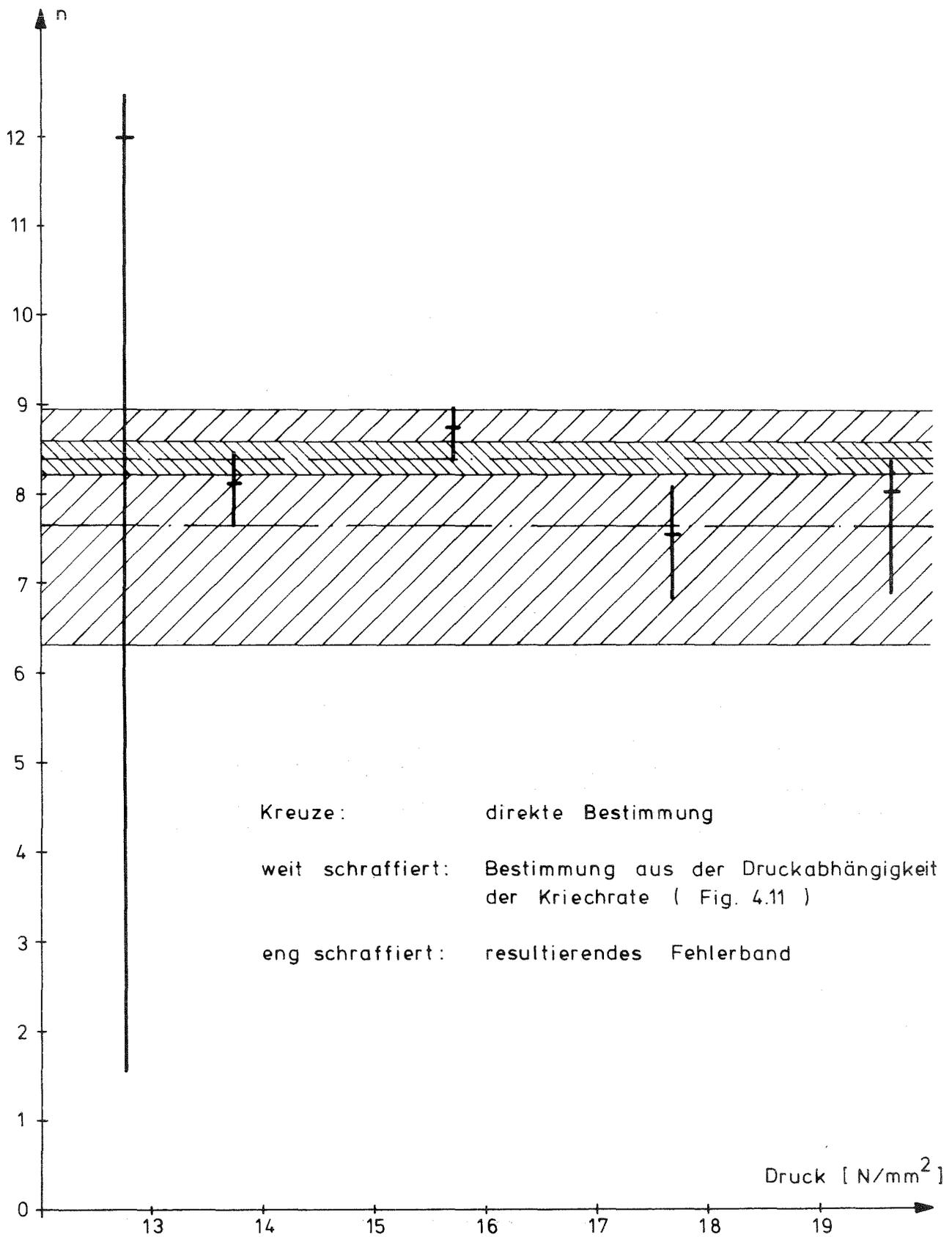


Fig. 4.9: Bestimmung des Nortonparameters n aus Innendruckversuchen an Rohren (Tab. 4.1) bei 700 °C

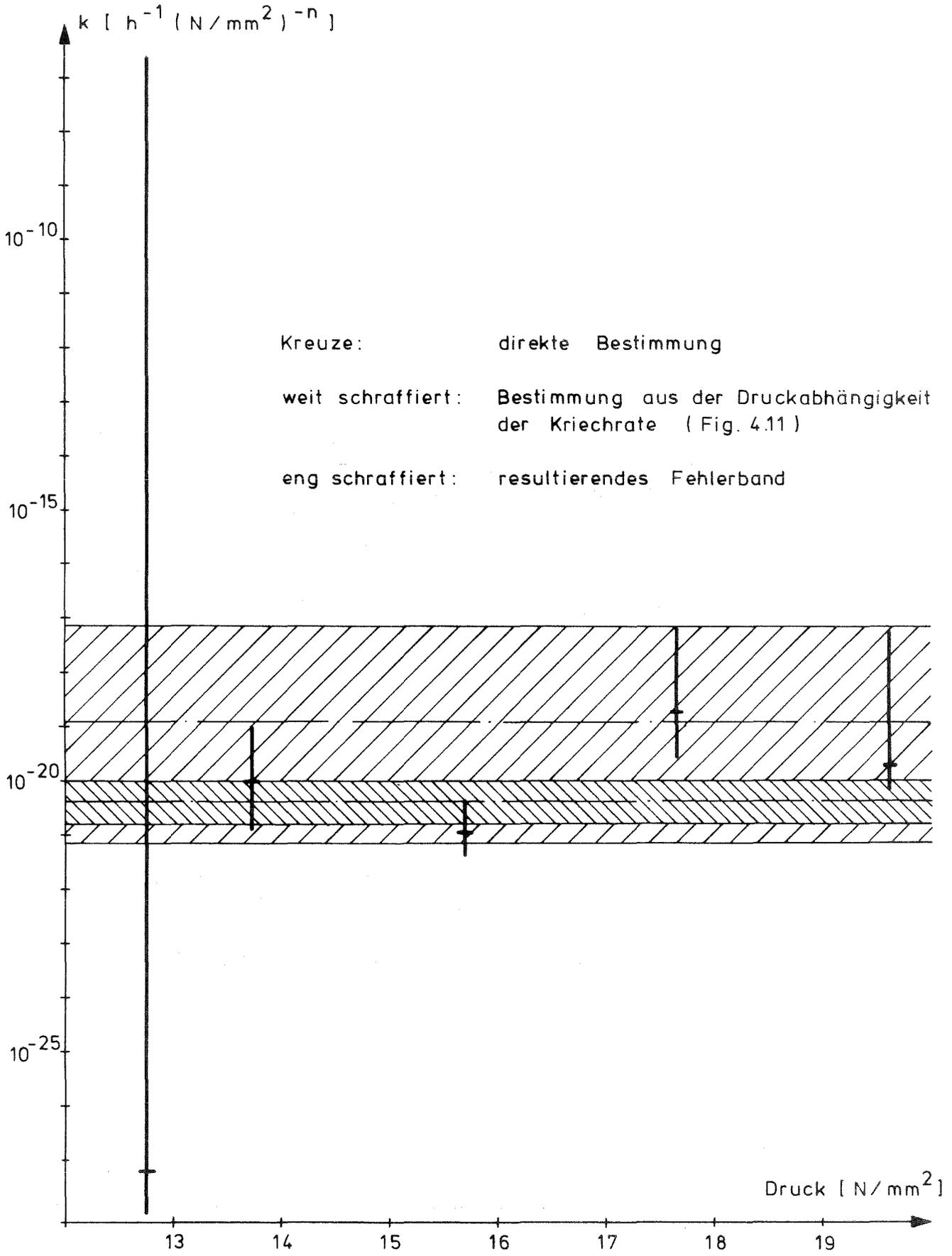


Fig. 4.10: Bestimmung des Nortonparameters k aus Innendruckversuchen an Rohren (Tab. 4.1) bei 700°C

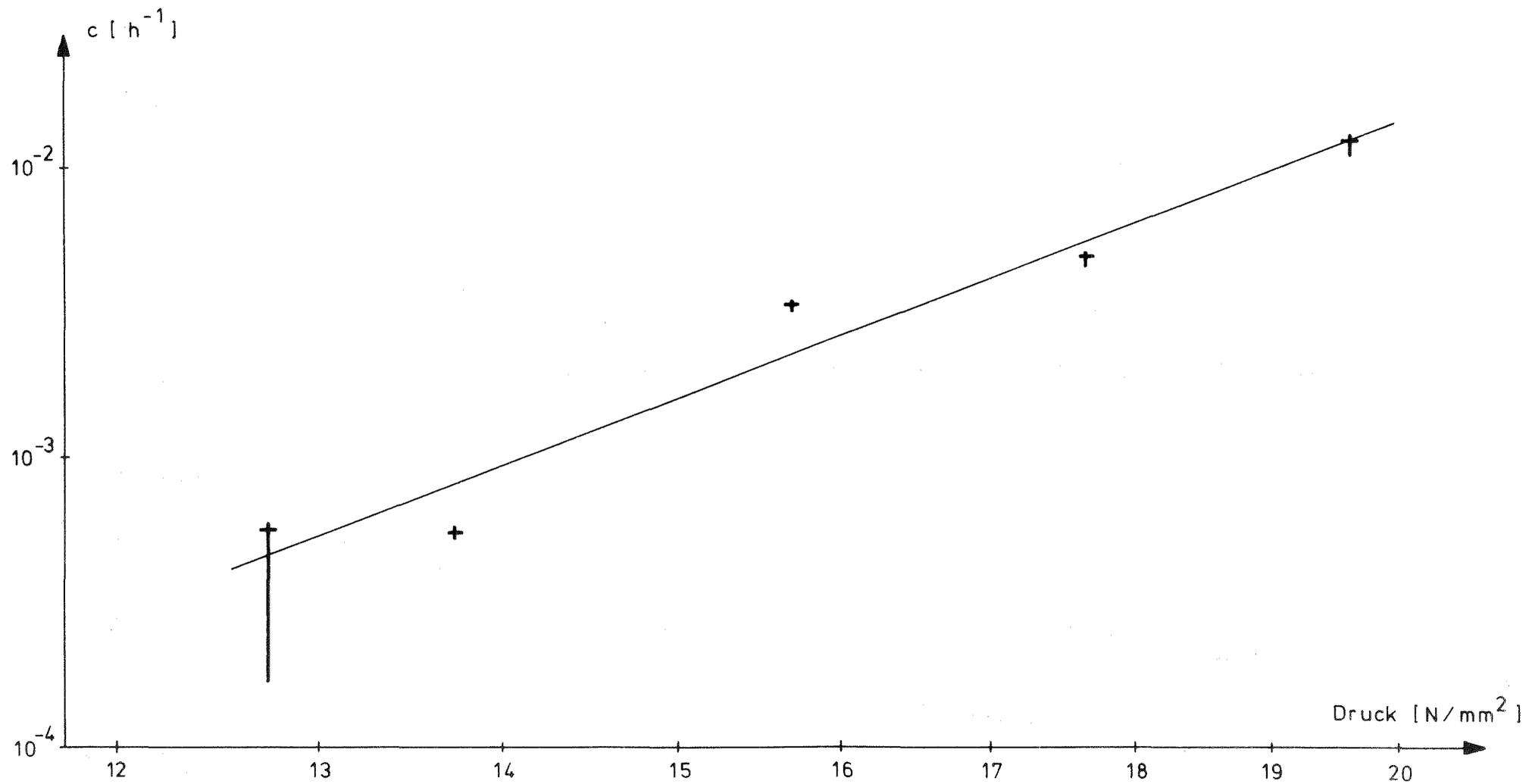


Fig. 4.11: Druckabhängigkeit der Kriechrate c aus Innendruckversuchen an Rohren (Tab. 4.1) bei $700\text{ }^\circ\text{C}$

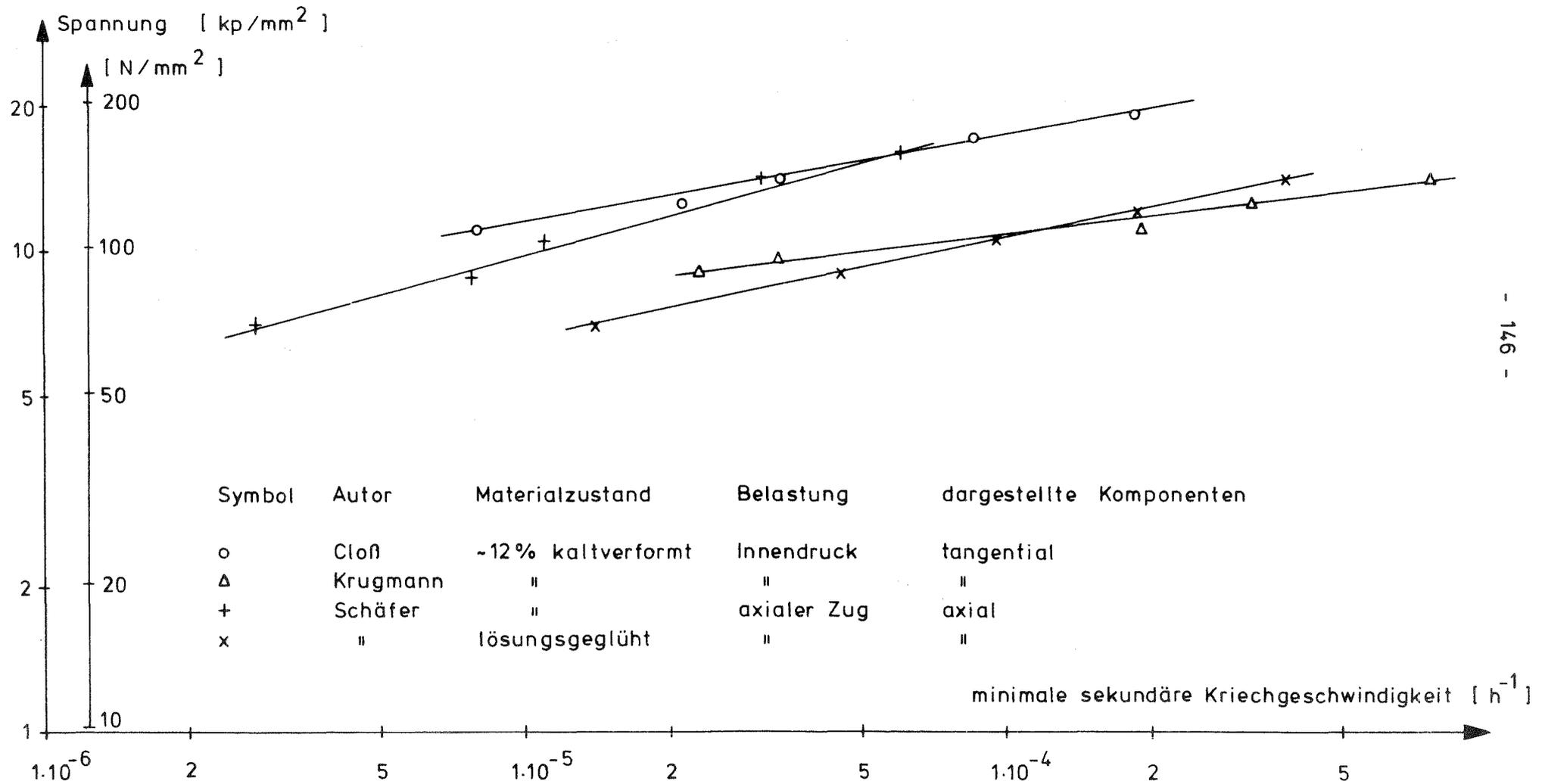


Fig. 4.12: Vergleich von Kriechgeschwindigkeiten aus Kriechversuchen an Röhren (Tab. 4.1) bei 700°C

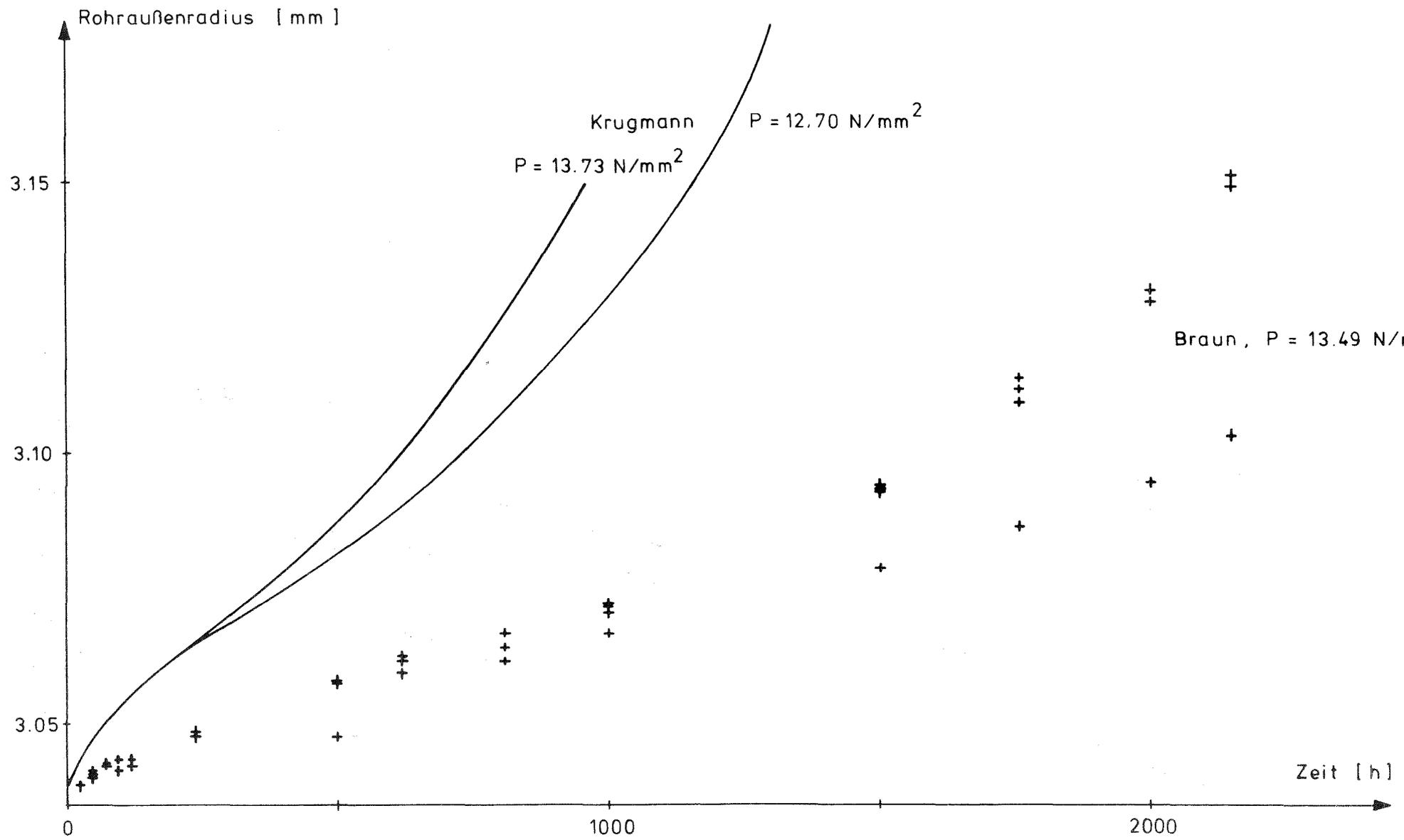


Fig. 4.13 : Vergleich von Kriechkurven aus Innendruckversuchen an Rohren (Tab. 4.1) bei 700 °C

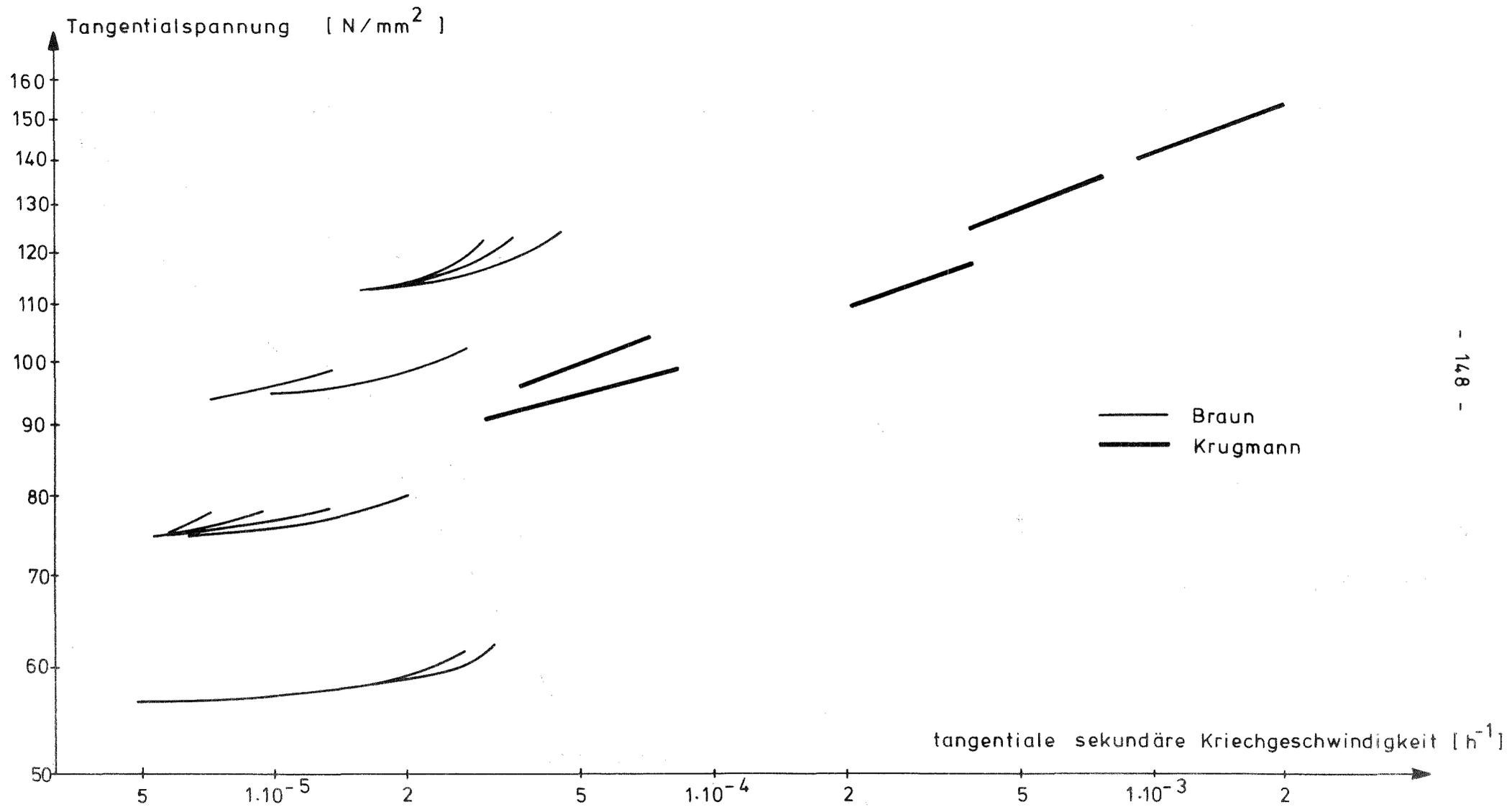


Fig. 4.14: Vergleich von Kriechgeschwindigkeiten aus Innendruckversuchen an Rohren (Tab. 4.1) bei 700 °C

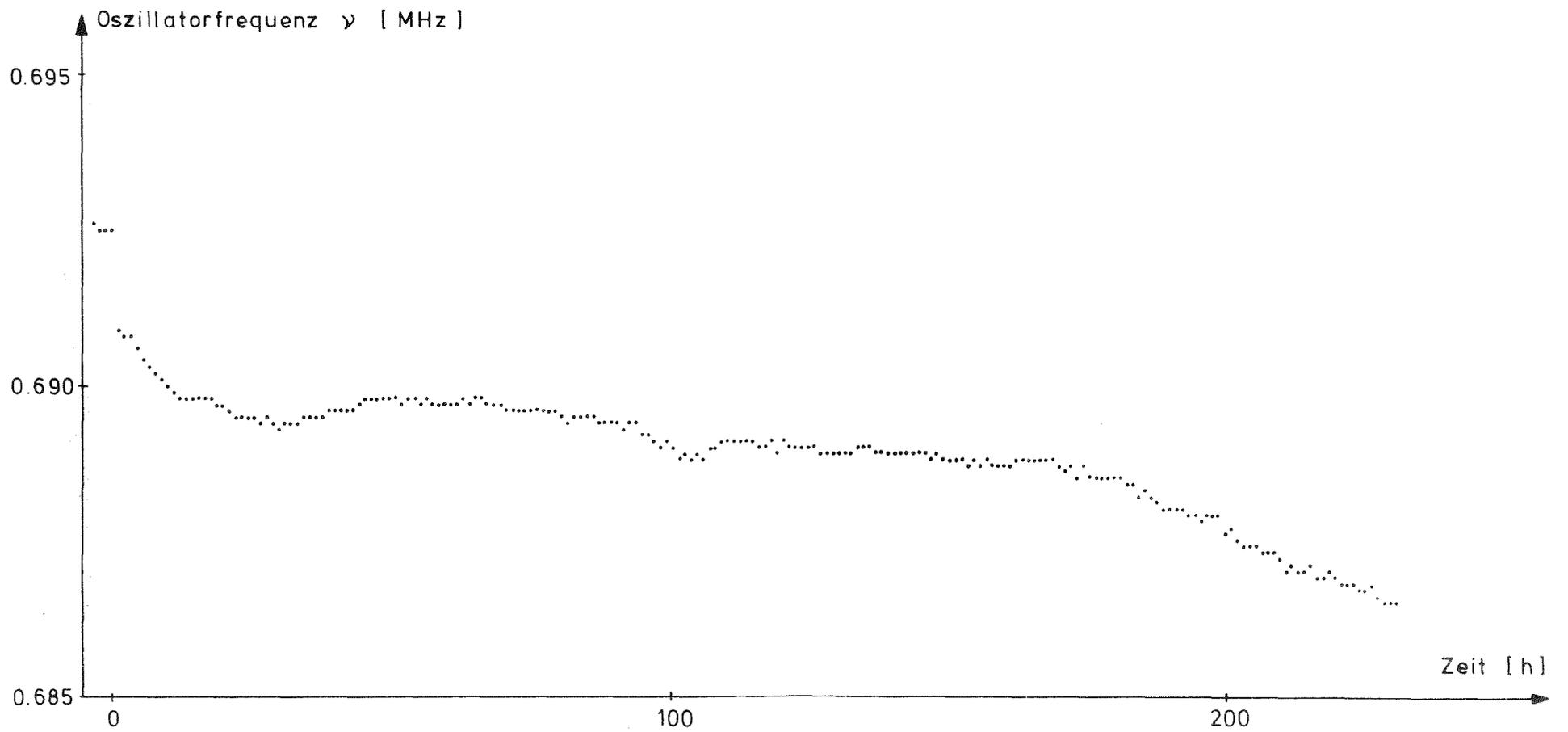


Fig. 4.15: Zeitlicher Frequenzverlauf: Probe 11, Temperatur 700°C, Außendruck 19.62 N/mm²

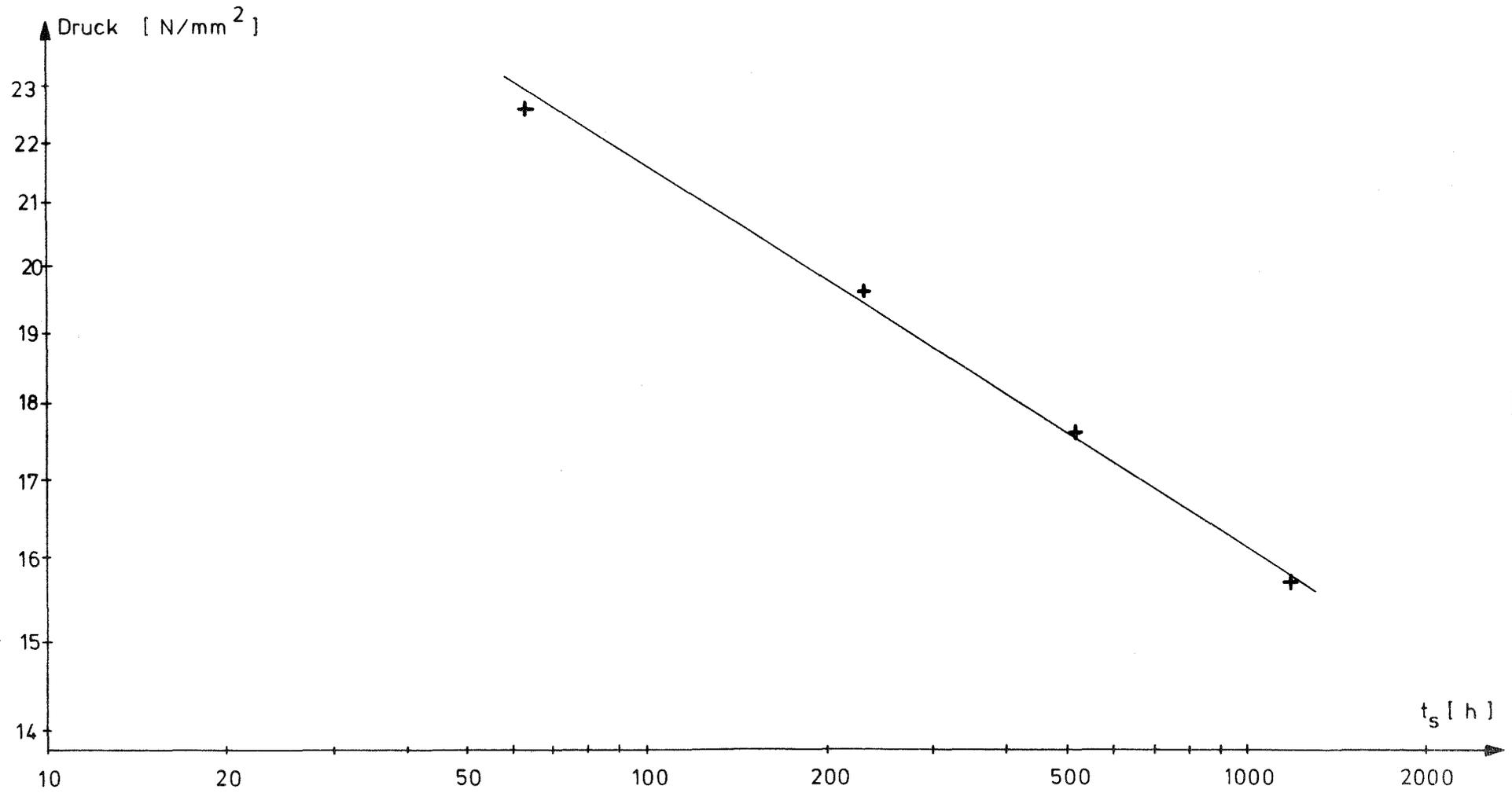


Fig. 4.16: Druckabhängigkeit der Standzeit t_s von Rohren (Tab. 4.1) aus Außendruckversuchen

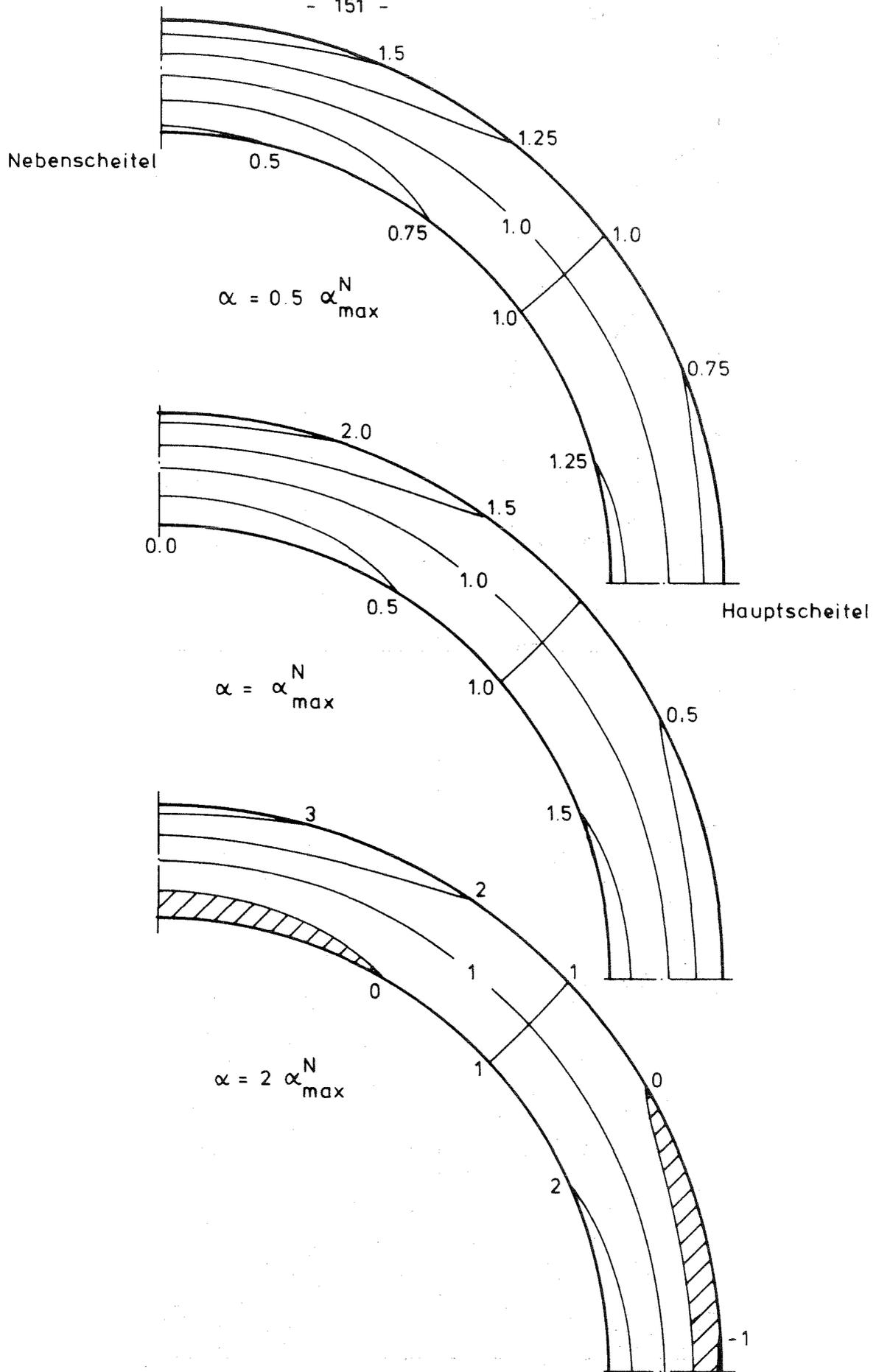


Fig. 4.17: Isodynen der Umfangsspannung σ_φ (bezogen auf die momentfreie Faser) im Rohr unter Außendruck in Abhängigkeit von der Ovalität α , Zugbereiche schraffiert, Rohrdaten vgl. Tab. 4.1

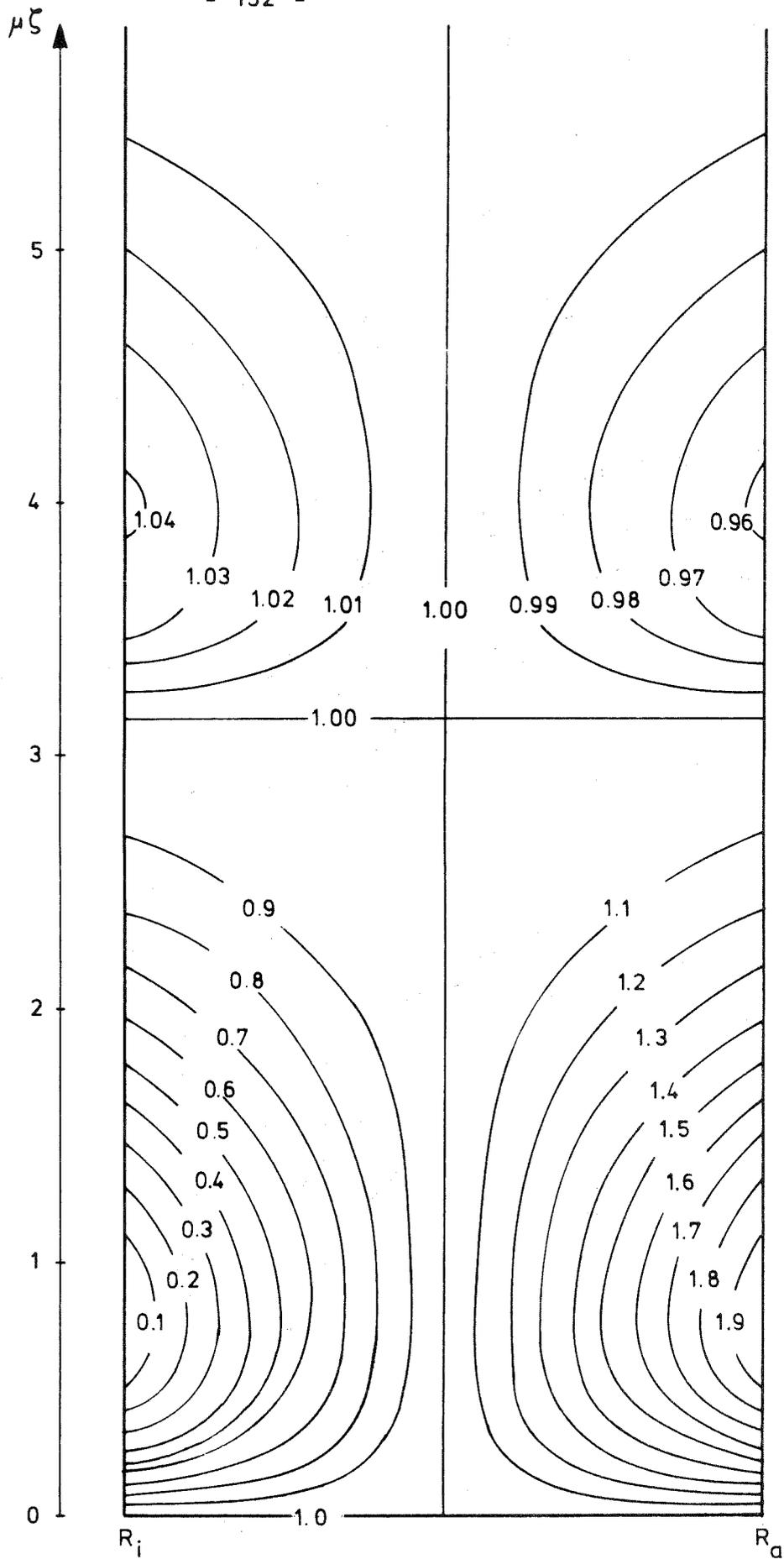


Fig. A1.1: Isodynen der Axialspannung, gelenkig gelagertes Rohr

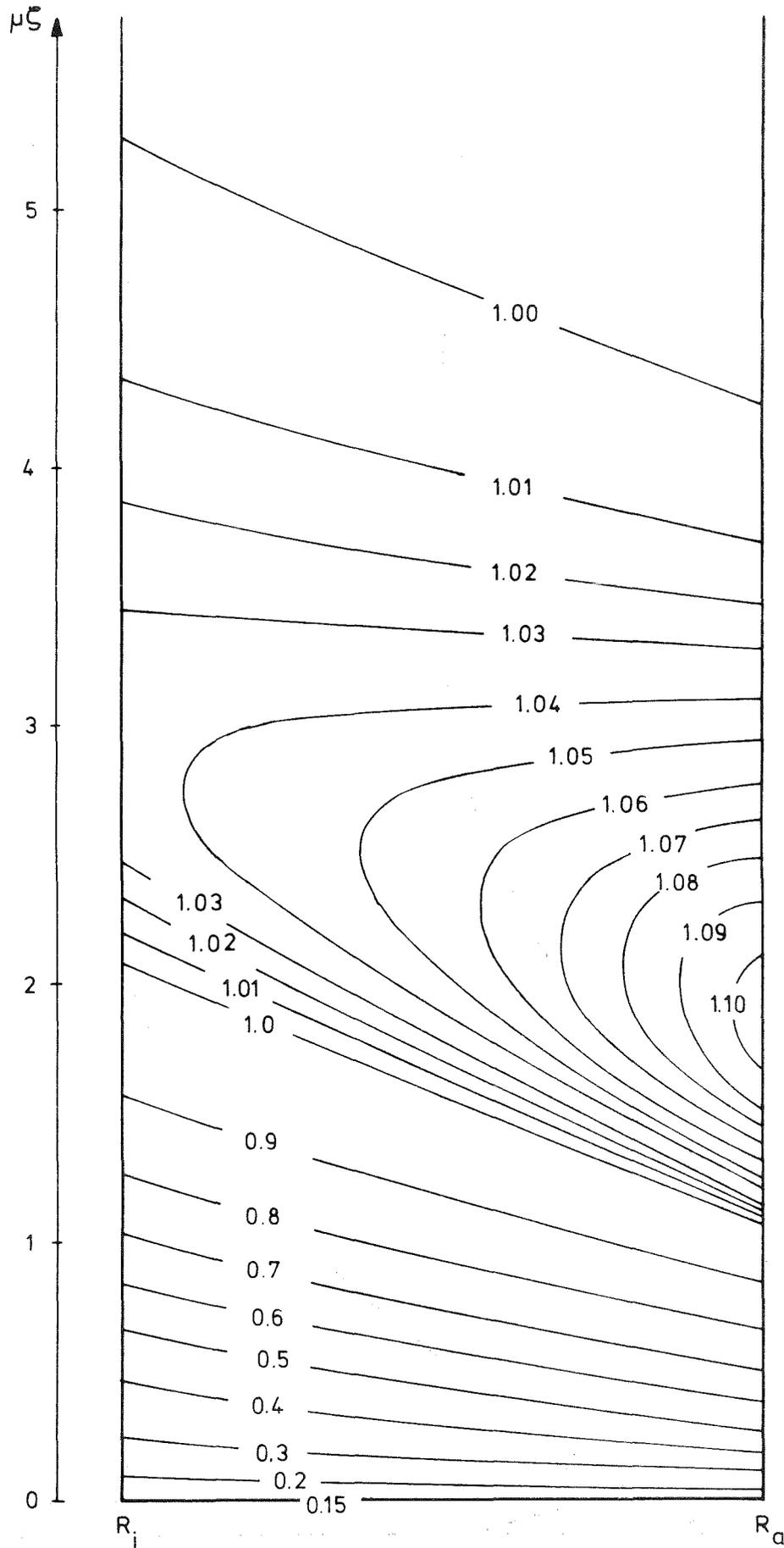


Fig. A1.2: Isodynien der Umfangsspannung, gelenkig gelagertes Rohr

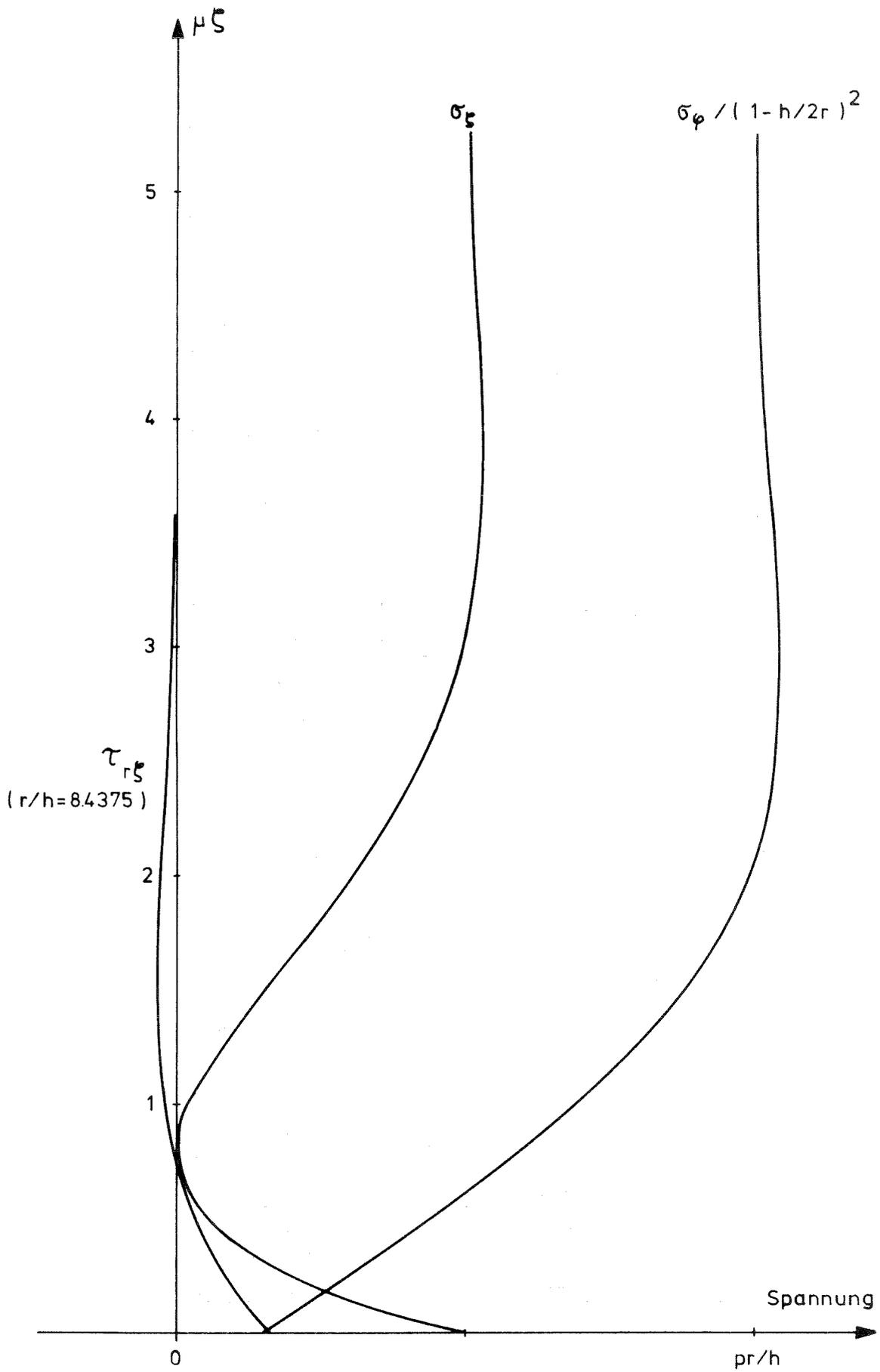


Fig. A1.3: Spannungen an der Innenwand des gelenkig gelagerten Rohrs

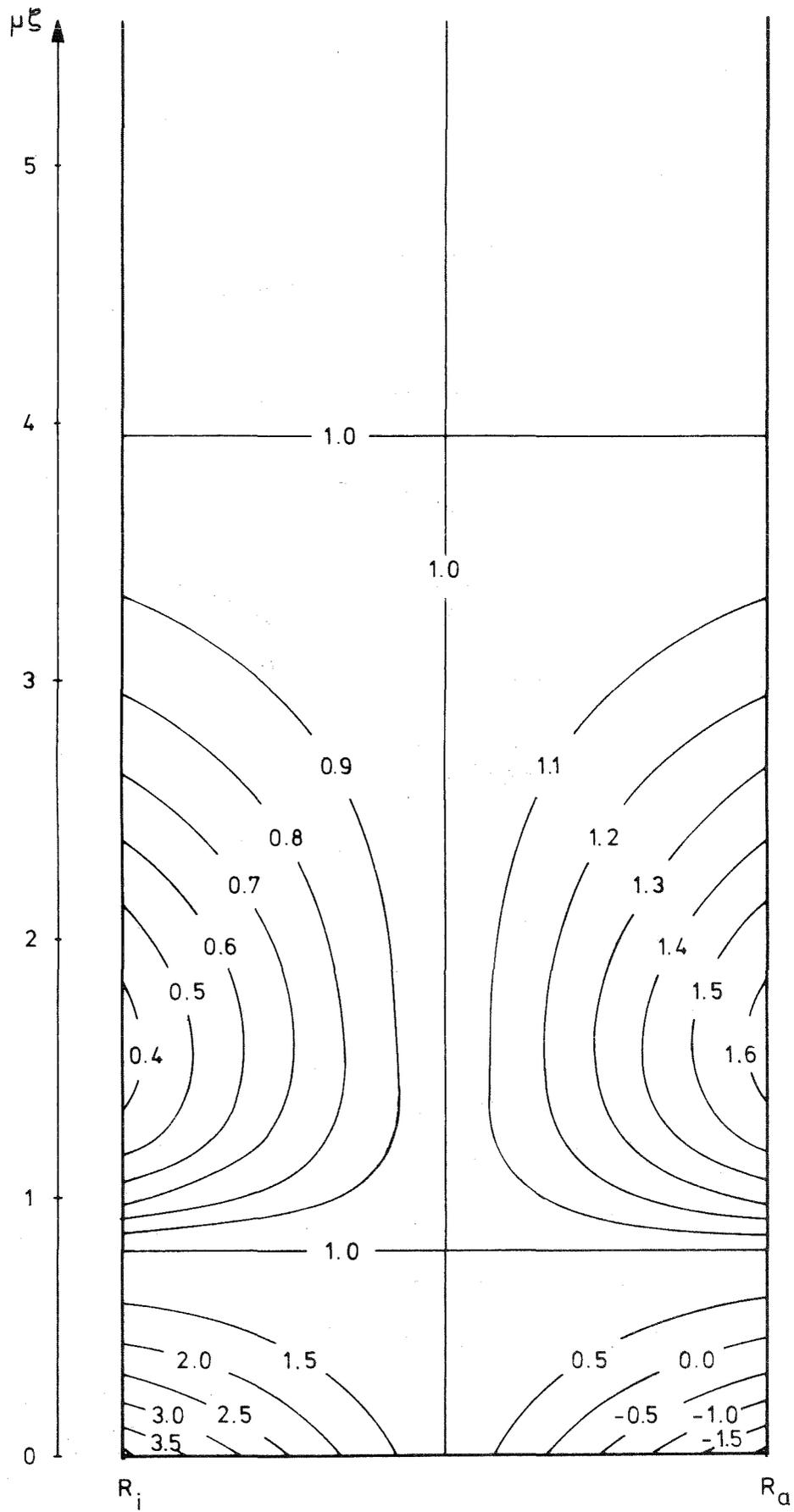


Fig. A1.4: Isodynen der Axialspannung, eingespanntes Rohr

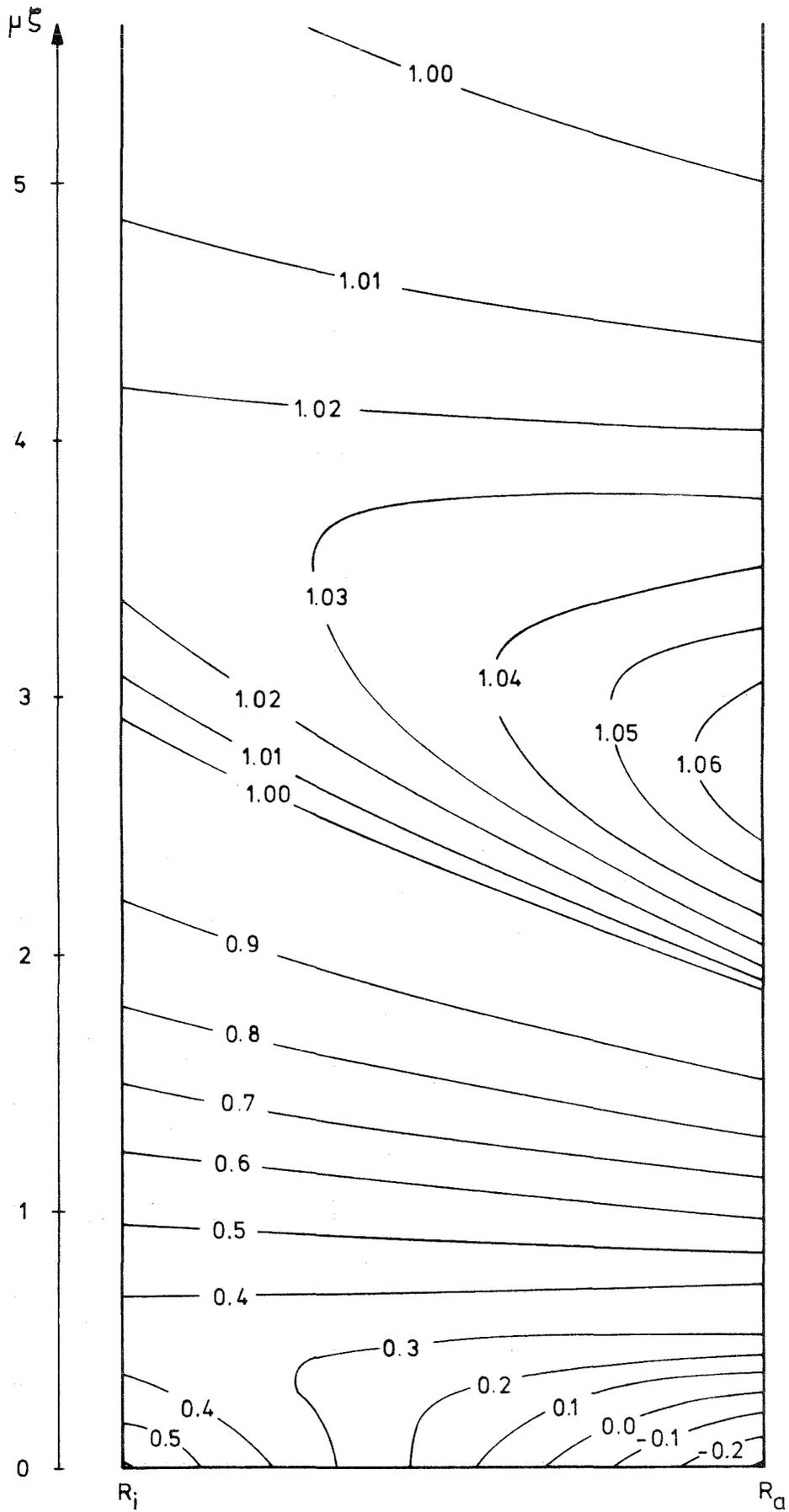


Fig. A1.5: Isodynen der Umfangsspannung, eingespanntes Rohr

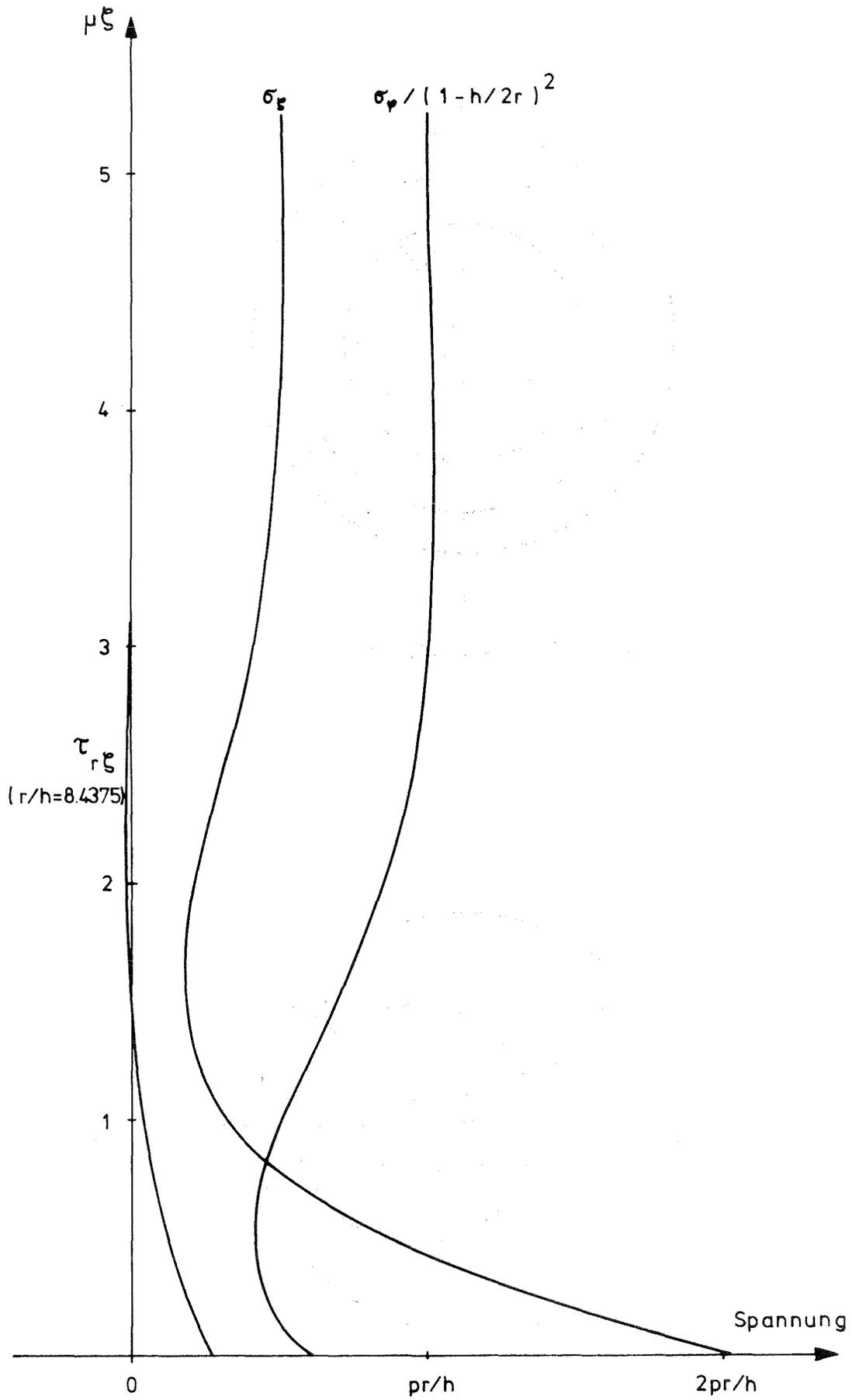


Fig. A1.6: Spannungen an der Innenwand des eingespannten Rohrs

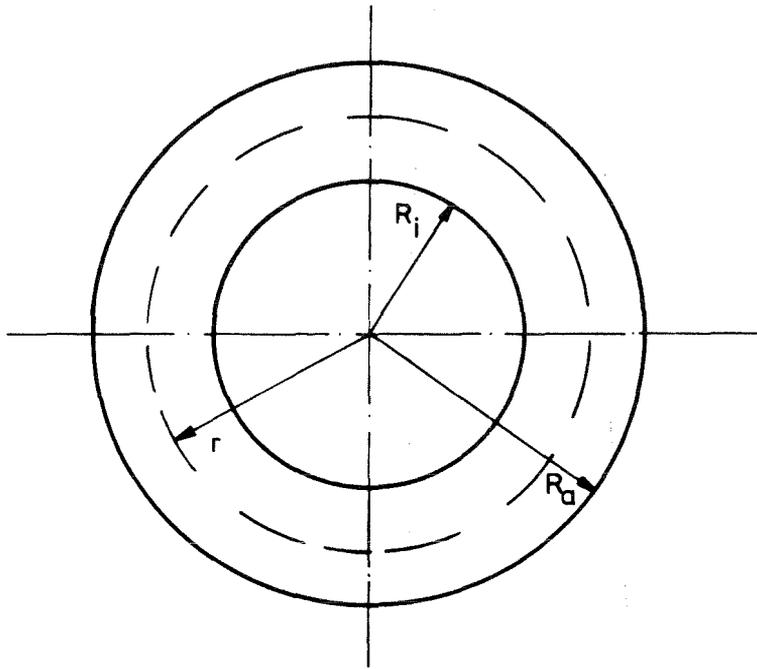


Fig. A2.1: Zylinderkondensator

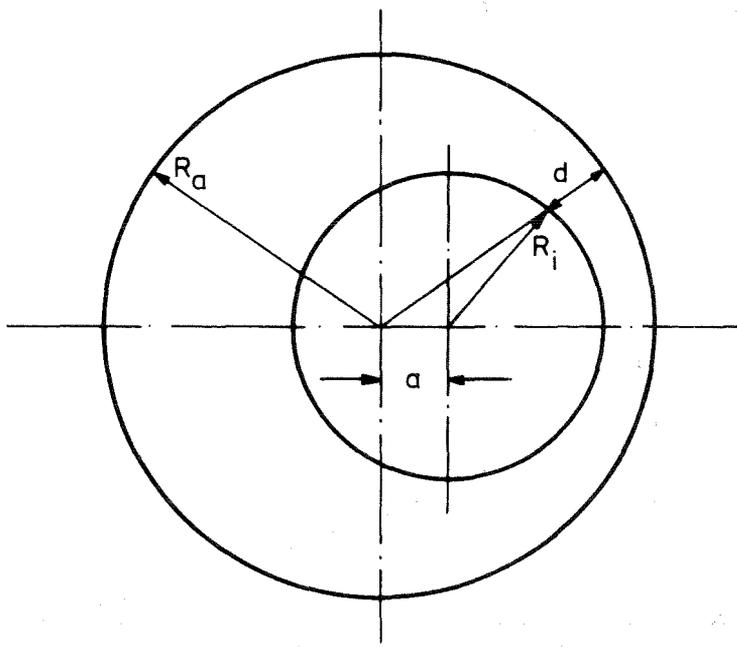


Fig. A2.2: Exzentrischer Zylinderkondensator