

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM**

**KARLSRUHE**

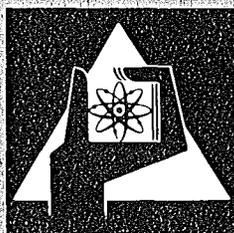
Dezember 1976

KFK 1874

Institut für Reaktorentwicklung  
Projekt Schneller Brüter

**Untersuchung der dreidimensionalen  
thermoelastischen Verformung des Kernverbandes  
eines schnellen Brutreaktors unter stationären  
Betriebsbedingungen**

Yong-Su Hoang



**GESELLSCHAFT  
FÜR  
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

**KARLSRUHE**

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 1874

Institut für Reaktorentwicklung

Projekt Schneller Brüter

Untersuchung der dreidimensionalen thermoelastischen  
Verformung des Kernverbandes eines schnellen Brutreaktors  
unter stationären Betriebsbedingungen <sup>x)</sup>

---

Yong-Su Hoang

Gesellschaft für Kernforschung mbH, Karlsruhe

<sup>x)</sup> Als Dissertation genehmigt von der Fakultät für Maschinenbau  
der Universität Karlsruhe (TH)



Kurzfassung:

Bei der Untersuchung des Betriebsverhaltens eines schnellen natriumgekühlten Brutreaktors ist es erforderlich, die Verformung der Kernstruktur zu berechnen und deren Auswirkung auf den Kernentwurf abzuschätzen. In der vorliegenden Arbeit wurde ein Verfahren zur Berechnung der dreidimensionalen Elementverbiegung unter Berücksichtigung der thermischen Ausdehnung entwickelt. Dabei sind folgende zwei Problemkreise von besonderer Wichtigkeit:

1. Die dreidimensionale Verbiegung der Elemente in vorgegebenen spielbehafteten und nachgiebigen Lagern (Verbiegungsproblem)
2. Die Untersuchung der Gleichgewichtskonfiguration der Elemente in den Verspannungsebenen (Verspannungsebenenproblem)

Für die Berechnung der Elementverbiegung wird die elementare Theorie der Balkenbiegung angewendet.

Besondere Probleme treten durch die räumlich spielbehaftet und nachgiebig ausgebildete Lagerkonfiguration auf. Diese Aufgabe wird im wesentlichen in zwei Schritten gelöst:

- a) Eindeutigkeitsanalyse der Balken-Auflager-Anordnung
- b) Berechnung der Auflagerkräfte und der Biegelinie für die eindeutige Balken-Auflager-Anordnung.

Das Ziel einer Eindeutigkeitsanalyse ist die Feststellung, ob in der Balken-Auflager-Anordnung eine Starrkörperbewegung des Balkens möglich ist. Aus dieser Analyse kann der Bereich der möglichen Lagerstelle des Balkens im spielbehafteten Lager ermittelt werden. Das wichtigste Problem bei der Berechnung der Auflagerkräfte für die eindeutige Balken-Auflager-Anordnung ist die Ermittlung der Lagerstellen des Balkens in den spielbehafteten Lagern. Diese erfolgt iterativ.

Das Verspannungsebenenproblem kann wegen grundsätzlicher Schwierigkeiten noch nicht zufriedenstellend gelöst werden. Daher wird für die spielfreie Lagerung ein einfaches Verspannungsmodell verwendet und für die spielbehaftete Lagerung eine parametrische Untersuchung

durchgeführt. Die entwickelte Rechenmethode wird auf den MARK I-Kern des SNR 300 angewandt. Dabei wird die Berechnung der Coreverformung mit verschiedenen Lagerungsbedingungen der Elemente in der Tragplatte und in der oberen Verspannungsebene durchgeführt. Aus dieser Untersuchung ergibt sich, daß die Tangentialkomponenten der Kräfte und der Verbiegungen nicht immer kleiner sind als die entsprechenden Radialkomponenten: Das Verhältnis dieser beiden Größen hängt stark von den gewählten Lagerungsbedingungen ab. Vergleicht man die Auflagerkräfte von Speichenelementen mit denen von Elementen auf gleichem Radius und gleicher Umfangsreihe, dann zeigen sich in der Regel deutliche Unterschiede. Es ist offensichtlich, daß die Ergebnisse aus zwei- und dreidimensionalen Untersuchungen Abweichungen zeigen, die im wesentlichen auf die Einbeziehung der azimuthalen Verbiegung zurückzuführen sind. Die in dieser Arbeit vorgestellte Rechenmethode erlaubt die Berücksichtigung dieser dreidimensionalen Effekte.

Investigation of the Three-dimensional Thermoelastic Deformation of the Core Assembly of a Fast Breeder Reactor under Steady-State Operating Conditions

Abstract

Considering the normal operational behavior of a sodium cooled fast breeder reactor, the deformation of the core structure has to be calculated, and its consequences must be taken into account in the core design. In this study a method is described which has been developed in order to calculate three-dimensional deformation of the reactor core, taking into account thermal expansion. Two problem areas are of particular importance:

1. The spatial deflection of subassemblies in specified flexible supports and with specified clearances.
2. The investigation of the equilibrium configurations of the subassemblies in the planes of clamping (problem of clamping plane).

The elementary theory of beam deflection has been used to calculate the deformation of subassemblies.

However, particular problems have been encountered as a result of flexibly designed support configurations having some spatial clearances. The problem has essentially been solved in two steps:

- a) Uniqueness analysis of the beam-support configuration
- b) Calculation of the support loads and bending line for the unique beam-support configuration.

The aim of a uniqueness analysis consists of the determination whether or not a rigid-body movement of the beam is possible in the beam-support configuration. The analysis allows the calculation of a range of possible beam positions in a support provided with spatial clearance. The most important problem in the calculation of

support loads for a unique beam-support configuration is the evaluation of the proper beam position in the supports. This is done by an iterative procedure.

Basic difficulties currently prevent the problem of clamping plane being solved in a satisfactory manner. Therefore, a simplified clamping model was used for supports without spatial clearance and a parametric study was performed for supports having spatial clearance.

The computation method developed is applied to the MARK I core of SNR 300. Core deformations are calculated under different support conditions for the subassemblies in the grid plate and in the upper clamping plane. The results show that the tangential components of the force and deformations are not always smaller than the respective radial components: the ratio of these two variables strongly depends on the support conditions selected. If the support loads of a radial row of subassemblies are compared with those of subassemblies lying on the same radius and peripheral row, clear difference can usually be seen. Obviously, the results from two and three-dimensional studies show deviations which are mainly attributable to the influence of azimuthal deformation. The method of calculation presented in this study permits allowance to be made for these three-dimensional effects in an approximate manner.

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
1. Einleitung	1
2. Qualitative Beschreibung des Lösungsweges	5
3. Gleichung der elastischen Linie bei räumlicher Biegung	8
4. Lösungsmethoden für ebene Balken-Auflager-Anordnungen	17
4.1. Allgemeines	18
4.2. Ermittlung der Einflußdaten, der Auflagerkräfte und der Biegelinie einer erweiterten Balken-Auflager-Anordnung mit spielfreien Lagern	23
4.3. Eindeutigkeitsanalyse	27
4.3.1 Fallunterscheidung und Begriffsdefinitionen	27
4.3.2 Eindeutigkeitsanalyse bei drei Lagern	29
4.3.3 Eindeutigkeitsanalyse bei N Lagern	34
4.4. Ermittlung der Auflagerkräfte und der Biegelinie einer Balken-Auflager-Anordnung mit spielbehafteten Lagern	39
4.4.1 Normaler Fall	39
4.4.2 Allgemeiner Fall	43
4.4.3 Mehrdeutiger Fall	48
5. Berechnung der Auflagerkräfte und der Biegelinie bei räumlicher Balken-Auflager-Anordnung	50
5.1. Einführung	50
5.2. Die reduzierte Lagerkontur	52
5.3. Bestimmung der projizierten Kontur	59
5.4. Die räumliche Eindeutigkeitsanalyse	69
5.5. Berechnung der Auflagerkräfte und der Biegelinie	74
5.5.1 Allgemeines	74
5.5.2 Konstruktion von rechteckigen Ersatzkonturen	77

5.5.3 Allgemeiner Fall	83
5.5.4 Normaler Fall	87
5.5.5 Mehrdeutiger Fall	90
6. Lagerung der Elemente	93
6.1. Arten der Lagerung, Begriffsdefinitionen und Ausgangsdaten	93
6.2. Elementpositionen im unverformten Zustand	98
6.3. Elementpositionen im verformten Zustand	99
6.3.1 Allgemeines	99
6.3.2 Ein vereinfachtes Rechenmodell zur Bestimmung der Elementpositionen bei spielfreier Ver- spannung	100
6.3.3 Querschnittsverformung infolge der Druckkräfte	103
7. Fließschema des Rechenganges	108
7.1. Beschreibung des Strukturdiagramms zur Be- rechnung der dreidimensionalen Elementver- biegung im Kern	108
7.2. Rechengang zur Bestimmung der Auflagerkräfte, der Biegelinie und der axialen Dehnung (Teilsystem 058EE)	112
8. Anwendungsbeispiel für den Mark I - Kern des SNR 300	115
8.1. Aufbau des Reaktors	115
8.2. Umfang der Analyse	123
8.3. Ergebnisse bei der Parametervariation der Lagerbedingungen	130
8.3.1 Temperaturverteilung und freie Verbiegung	130
8.3.2 Ergebnisse für gleichmäßig spielbehaftete Lagerung in der oberen Verspannungsebene und spielfrei nachgiebige Lagerung in der Tragplatte	134
8.3.3 Variation der Lagerungsbedingung in der oberen Verspannungsebene	143

8.3.4	Variation der Lagerungsbedingung in der Tragplatte bei gleichmäßig spielbehafteter Lagerung in der oberen Verspannungsebene	149
8.3.5	Variation der Lagerungsbedingung in der Tragplatte bei spielfreier Lagerung in beiden Verspannungsebenen	155
8.3.6	Qualitative Untersuchung des Einflusses des Strukturmaterialschwellens	164
9.	Zusammenfassung	175
	Verzeichnis der häufig verwendeten Symbole, Indizes und Abkürzungen	178
	Literatur	184
Anhang 1:	Querschnittsdaten eines dünnwandigen Kastenquerschnittes	A01
Anhang 2:	Berechnung von Biegelinien für einfache ebene Balken-Auflager-Anordnung	A06
Anhang 3:	Untersuchung der Überlappung von Lager-spiel und projizierten Strecken einer ebenen Balken-Auflager-Anordnung	A15
Anhang 4:	Eindeutigkeitsanalyse von räumlicher Balken-Auflager-Anordnung	A17
	A4.1.: Aufgabenstellung und Begriffsdefinition	A17
	A4.2.: Eindeutigkeitsanalyse bei einer Balken-Auflager-Anordnung mit drei Lagern	A21
	A4.3.: Eindeutigkeitsanalyse bei einer Balken-Auflager-Anordnung mit vier Lagern	A31
	A4.4.: Eindeutigkeitsanalyse bei einer Balken-Auflager-Anordnung mit beliebig vielen $N(N > 4)$ Lagern	A35

Anhang 5: Untersuchung der Anordnung konvexer Konturen  
in einer Ebene A41

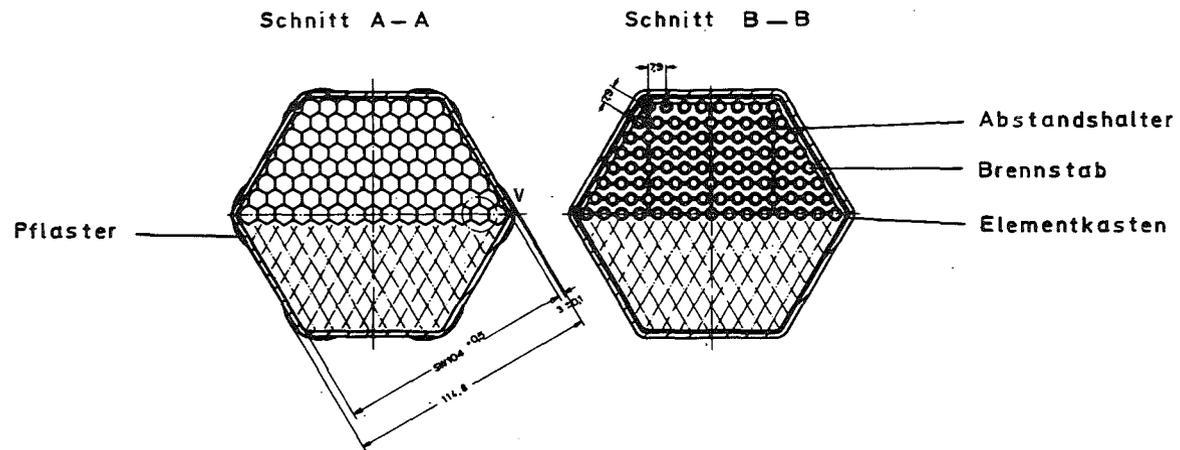
Anhang 6: Ableitung der Gleichung (6.15a) A44

## 1. Einleitung

Im Zusammenhang mit der Untersuchung schneller Reaktoren ist es notwendig, die Folgen der thermischen Ausdehnung, des Strukturmaterialschwellens und des strahlungsinduzierten Kriechens innerhalb der Kernstruktur zu untersuchen [1]. Hierbei sind die Kräfte im Kernverband, die Spannungen in Elementkästen sowie die Verbiegung der Elemente und die möglicherweise daraus resultierenden Reaktivitätsänderungen von besonderem Interesse. Diese Untersuchungen können prinzipiell in zwei Gruppen aufgeteilt werden: Einmal werden die Auswirkungen von Kurzzeiteffekten betrachtet, die bei schnellen Änderungen des Betriebszustandes des Reaktors auftreten, wie z.B. Anfahrvorgänge, Laständerungen, Abschalten usw. Zum anderen müssen Auswirkungen von Langzeiteffekten in relativ großen Betriebszeiträumen erfaßt werden, wie z.B. die Kernstrukturänderung aufgrund des Strukturmaterialschwellens und des strahlungsinduzierten Kriechens. Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt auf der Behandlung der Kurzzeiteffekte, wobei Einflüsse des Strukturmaterialschwellens qualitativ berücksichtigt werden können.

Den Aufbau des Schnellen natriumgekühlten Brütters SNR 300 zeigt die Abb. 1.1. im Längs- und im Querschnitt [6]. Im unteren Teil des Reaktortanks ist der zylindrische Reaktorkern angeordnet, der durch die Gitterplatte (Tragplatte) getragen wird. Der Reaktorkern besteht aus Brenn- und Brutelementen, Absorberelementen sowie den radialen Reflektorelementen. Ein Brennelement ist ein durch einen hexagonalen Elementkasten umhülltes Bündel von Brennstäben, das vom Kühlmittel durchströmt wird (Abb. 1.2.). Die Brennstäbe in Elementkästen werden durch Abstandshalter fixiert. Die Elemente sind in mehreren Reihen hexagonal gleichmäßig angeordnet (Abb. 1.3.) und durch die zylindrische Gitterplatteneinsätze positioniert (Abb. 1.4.). Sie stützen sich in Verspannungsebenen über Pflaster gegenseitig ab (Abb. 1.4.). Die seitliche Bewegung und eine unbegrenzte Auffächerung der Elemente wird dadurch verhindert, daß die Elemente sich jeweils in der Höhe der Verspannungsebenen an den Kernmantel anlehnen können (Abb. 1.4.). Bei dieser Anordnung ist jedes Element sowohl am Fuß als auch in den Verspannungsebenen spielbehaftet aufgelagert.





Maßskizze M1:5

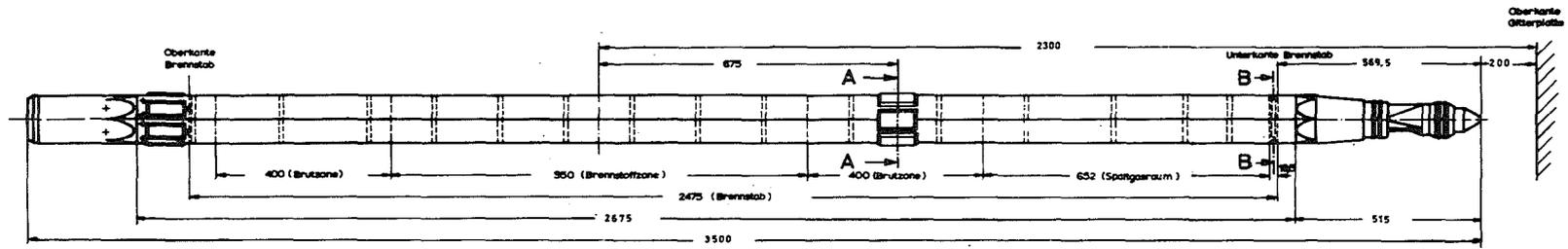


Abb. 1.2. Brennelement [67]

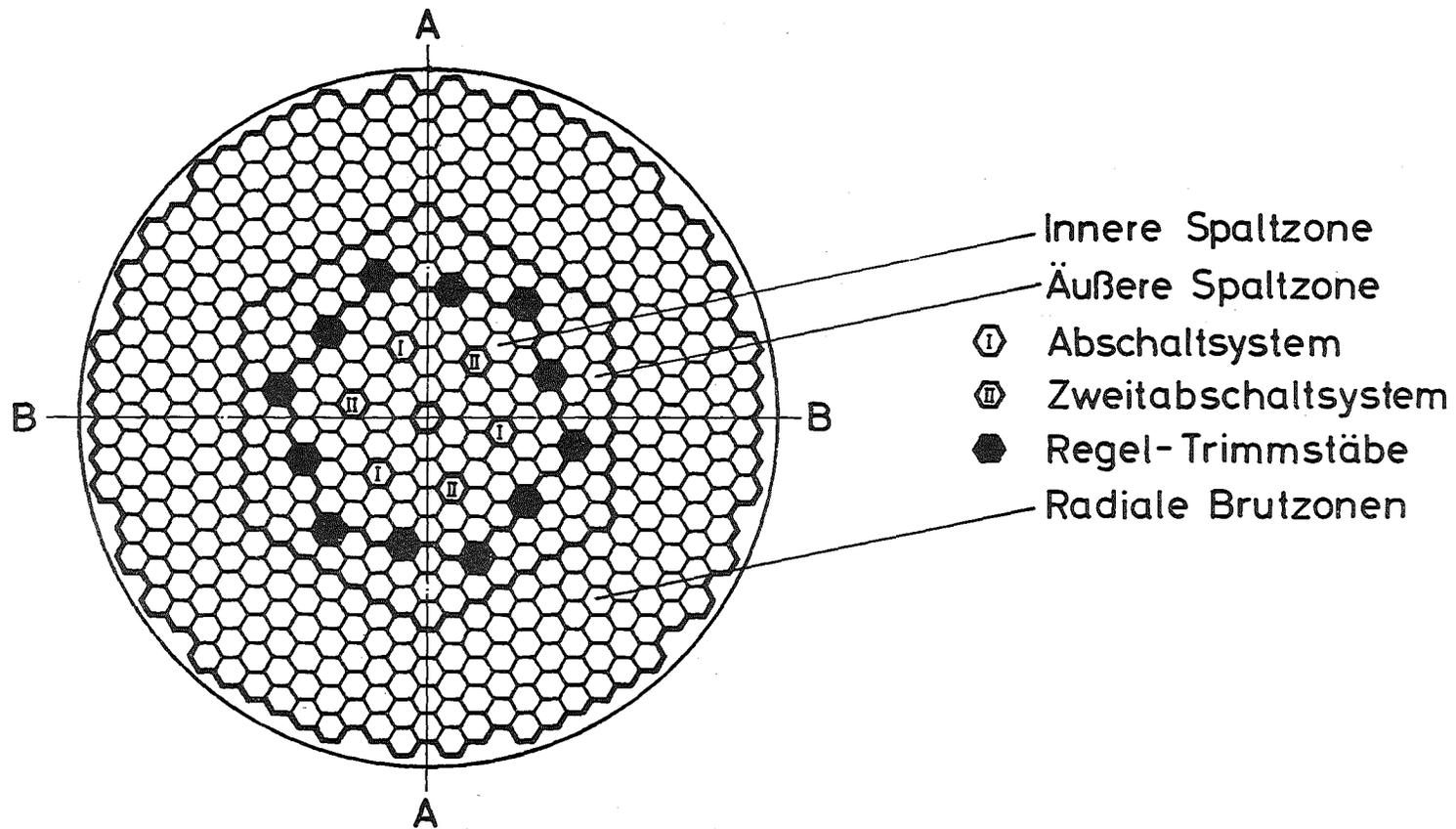


Abb.1.3. Kernquerschnitt (schematisch)

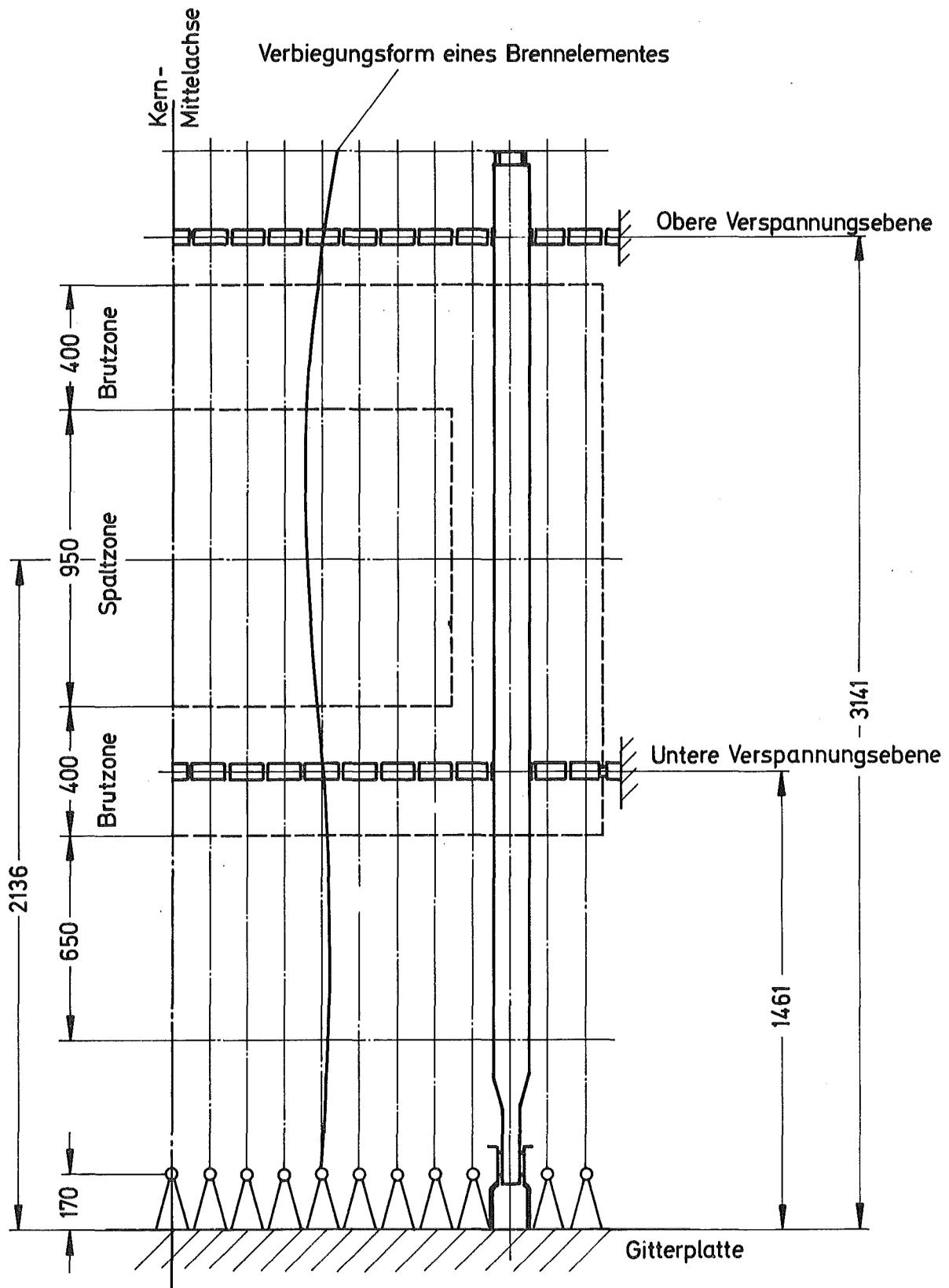


Abb. 1.4. Schematische Darstellung für die radiale Positionierung und für das Prinzip der Verspannung der Elemente

Eine ungehinderte Verformung des Elementkastens infolge ungleichförmiger Temperaturverteilung bzw. Strukturmaterialschwellens ist wegen der Lagerung der Elemente in der Tragplatte und der kinematischen Restriktionen in den Verspannungsebenen nicht möglich. Die sich unter diesen Bedingungen einstellende Gleichgewichtskonfiguration des Coreverbandes wird wesentlich durch die Nachgiebigkeit der Lager, die möglichen Spiele in den Verspannungsebenen und in den Gitterplatteneinsätzen sowie durch Reibungskräfte in den Verspannungsebenen und die mögliche Querschnittsänderung der Elementkästen durch die Belastung an den Pflastern bestimmt [6, 9].

Eine exakte theoretische Lösung dieser komplexen Aufgabenstellung ist noch nicht möglich [9]. Man ist daher gezwungen, mit Hilfe von vereinfachenden Annahmen Ersatzmodelle aufzustellen.

Drei Problemkreise sind dabei von besonderer Wichtigkeit:

1) Beschreibung der Verformung eines einzelnen Elementkastens unter der Annahme fester Lager

Hierbei werden nur thermoelastische Deformationen betrachtet und die elementare Theorie der elastischen Balkenbiegung wird als Ausgangspunkt gewählt. Es sind keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bei der Berechnung einer solcher Anordnung zu erwarten.

2) Berücksichtigung der Spiele und der Nachgiebigkeiten in den Lagern der Tragplatte

Die definierten Spiele zwischen dem zylindrischen Teil des Elementfußes und dem Gitterplatteneinsatz gestatten bei einer dreidimensionalen Betrachtung sowohl eine Schiefstellung als auch eine Querverschiebung der Elemente an dieser Stelle. Außerdem kann der Gitterplatteneinsatz durch die vom Elementfuß übertragene Last elastisch verformt werden, so daß darüber hinaus die Auflager der Elementfüße als nachgiebig angesehen werden müssen. Die Tragplatte kann darüber hinaus durch Querlasten nachbiegen, so daß die unverbogenen Elemente nicht mehr vertikal und parallel sind. Die Durchsenkung der Tragplatte ist sehr gering, jedoch kann der Neigungswinkel der Gitterplatteneinsätze für die Biegerechnung bedeutsam werden.

### 3) Probleme bei der Verspannung der Elemente

Die Verspannung ist konstruktiv dadurch charakterisiert, daß die Elementkästen in den Verspannungsebenen mit Pflastern versehen sind, so daß dort Kräfte übertragen werden können, die in den äußeren Kernmantel geleitet werden. Das Problem der Wechselwirkung zwischen den Elementen in den Verspannungsebenen ist eine schwierige und noch ungelöste Aufgabe. Selbst eine einigermaßen realistische Berechnung der Querschnittsverformung des Kastens in den Verspannungsebenen infolge der über die Pflaster übertragenen Querlasten ist schwer zu verwirklichen. In dieser Arbeit werden daher die Positionen der Elementachsen in den Verspannungsebenen sowie das dort möglicherweise vorhandene Lagerspiel als bekannt angenommen. Eine Wechselwirkung der Elementkästen, insbesondere in den spielbehafteten Verspannungsebenen wird dabei nicht berücksichtigt. Durch diese einschneidende Vereinfachung reduziert sich das Problem auf die Untersuchung einer Vielzahl einzelner Elementkästen, die allerdings spielbehaftet aufgelagert sein können.

Zur Beschreibung der Kernverformung sind bisher insbesondere rein radiale Modelle, wie das Ringmodell und das Speichenmodell angewendet worden.

Beim Ringmodell wird der Reaktorkern um seine Vertikalachse in mehrere konzentrische Ringzonen aufgeteilt [5]. Zur Ermittlung des mechanischen Verhaltens wird für jede Zone ein repräsentatives Element herangezogen, das in der Tragplatte und in den Verspannungsebenen als spielfrei aufgelagert gedacht wird. Die Wechselwirkung der Elemente und die Querschnittsverformung des Elementkastens werden dabei nicht berücksichtigt. Die Stoffdaten werden als konstant angenommen. Weiterhin wird angenommen, daß der Temperaturverlauf über den Kastenquerschnitt linear ist. Es sei schließlich darauf hingewiesen, daß aufgrund der im Reaktorquerschnitt flächengleichen Aufteilung der Ringzonen die Breiten der Ringzonen mit der Schlüsselweite des Elementkastens nicht übereinstimmen können.

Beim Speichenmodell werden nur die auf einer ausgewählten Speiche (Abb. 1.2.) befindlichen Elemente betrachtet [9], die nur radial in Wechselwirkung miteinander stehen können. Zur Ermittlung der radialen Verbiegung eines Elementes außerhalb der Speiche wird die Annahme gemacht, daß eine radiale Interpolation der errechneten Verbiegung der Speichenelemente zulässig ist. Brown und Yant haben in einer solchen Rechnung die Lagerspiele berücksichtigt [12]. Dabei wurde die mit Lagerspielen verbundene Parallelverschiebung der Elemente behandelt. Außerdem wurde beim Speichenmodell die radiale Querschnittsverformung des Kastens näherungsweise berücksichtigt [9, 11]. Dadurch ist beim Speichenmodell eine gegenüber dem Ringmodell genauere Beschreibung der Kernverformung möglich. Im Gegensatz dazu wird in dieser Arbeit das Hexagonalmodell, ein dreidimensionales Modell verwendet. Hierbei wird die dreidimensionale Anordnung der Elemente berücksichtigt und einzelne Elemente im Kernverband werden individuell untersucht. Die Spiele und Nachgiebigkeiten der Auflager können berücksichtigt werden. Die dreidimensionale Elementverbiegung wird hierbei durch die Überlagerung zweier ebener Elementverbiegungen ermittelt, die unabhängig voneinander betrachtet werden können. Der prinzipielle Lösungsweg bei der Anwendung des Hexagonalmodells wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

## 2. Qualitative Beschreibung des Lösungsweges beim Hexagonalmodell

Um die Elementverformung innerhalb der Kernstruktur möglichst genau zu erfassen, ist es notwendig, das Problem zumindest teilweise dreidimensional zu behandeln. Dabei müssen die dreidimensionale Anordnung der Elemente, die Lagerspiele, die elastische Nachgiebigkeit der Auflager und die temperaturabhängigen Stoffdaten berücksichtigt werden. Ausgehend von Kernaufbau und dem Aufbau der Elemente bieten sich die folgenden Vereinfachungen an, die bei der Entwicklung des Hexagonalmodells für die Elementbiegung berücksichtigt worden sind: Der Querschnitt des Elementkastens des schnellen Reaktors hat die Form eines dünnwandig hexagonalen Hohlquerschnittes (Abb. 1.3). Da die Querschnittsabmessungen gegenüber der Kastenlänge und den Abständen der Auflager klein sind, kann der Elementkasten näherungsweise als einfacher Balken angesehen werden. Daher ist die elementare Theorie der Balkenbiegung [13] anwendbar. Für die in den Brennelementkästen befindlichen Brennstabbündel soll vorausgesetzt werden, daß die Brennstäbe reibungsfrei in den Gitterabstandshaltern (Abb. 1.3.) gleiten können. Diese Voraussetzungen führen zu folgenden grundsätzlichen Konsequenzen:

- Der Querschnitt des Elementkastens bleibt bei der Deformation eben und steht senkrecht zur deformierten Balkenachse. Die Querschnittsform bleibt bei der Biegung erhalten (Bernoullische Hypothese), d.h. der Einfluß einer Querschnittsabplattung an Laststellen auf die Biegung wird nicht berücksichtigt.
- Die Dehnungen bzw. Stauchungen und Rotationen sind infinitesimal, so daß die kinematischen Beziehungen zwischen Verzerrungen und Verschiebungen linear sind und die Gleichgewichtsbedingungen in der undeformierten Balkenkonfiguration aufgestellt werden können.
- Da die Brennstäbe in den Gitterabstandshaltern reibungsfrei gleiten können und ihre gesamte Biegesteifigkeit klein ist gegenüber der des Brennelementkastens, spielen die Brennstäbe für die folgende Betrachtung annähernd keine Rolle.

Darüber hinaus sollen noch die folgenden Annahmen gemacht werden:

- Die gleichmäßige Sechseckform des Kastenquerschnittes soll bei der Ausdehnung und der Querschnittsverformung beibehalten werden.
- Die Reibung und die Torsion der Elementkästen sollen vernachlässigt werden.

Unter diesen grundsätzlichen Annahmen bzw. vereinfachenden Voraussetzungen läßt sich die Elementbiegung auf dem im folgenden qualitativ beschriebenen Weg bestimmen.

Die durch die dreidimensionale Temperatur- und Neutronenflußverteilung auftretenden ortsabhängigen Dehnungen führen einmal zu einer Querschnittsaufweitung des Elementkastens (globale Dehnung) und zum anderen zu einer Verbiegung des Elementkastens infolge der umfangsvariablen Dehnung im Kastenquerschnitt (differentielle Dehnung).

Denkt man sich das Element nur am Fuß in der Tragplatte eingespannt und sonst nicht gelagert, dann wird sich infolge der differentiellen Dehnung das Element verbiegen. Die sich dabei einstellende Verbiegung wird im folgenden als freie Verbiegung bezeichnet. Wegen der tatsächlich vorhandenen Wechselwirkung der Elemente in den Verspannungsebenen ist eine solche freie Verbiegung aber nicht möglich. Da in dieser Arbeit die Positionen der Elemente in den Verspannungsebenen und deren Spiele als vorzugebende freie Parameter angesehen werden, reduziert sich das Problem, die Biegelinie zu ermitteln, darauf, ein Verfahren zu entwickeln, die räumlich elastische Biegung eines mehrfach aufgelagerten Balkens zu berechnen, dessen Lager spielbehaftet und nachgiebig sein können. Es müssen daher Einzelkräfte eingeführt werden, die in den Verspannungsebenen wirken und die gerade so bestimmt werden, daß das Element unter Wirkung dieser Einzelkräfte den kinematischen Bedingungen in den Verspannungsebenen und der Tragplatte genügt. Dementsprechend setzt sich die Biegung eines Elementes aus der freien Verbiegung und aus der mechanischen Rückbiegung unter Wirkung der Einzelkräfte zusammen.

Die zur Lösung dieses Problems notwendigen Rechenschritte können wie folgt charakterisiert werden:

- 1) Ermittlung der freien Verbiegung der Elemente infolge der differentiellen Dehnung und der mittleren Kastenaufweitung in den Verspannungsebenen infolge der globalen Dehnung (Kap.3).
- 2) Bestimmung der Elementpositionen in den Verspannungsebenen; (Kap. 6): für spielfreie Verspannung in Abhängigkeit von der globalen Dehnung der Kastenquerschnitte und für spielbehaftete Verspannung in Abhängigkeit von den vorgegebenen Elementpositionen und den zugeordneten Lagerspielen.
- 3) Für die Auflagersituation werden die Auflagerkräfte für jedes Element unter Berücksichtigung der kinematischen Bedingungen in den Verspannungsebenen (Kap. 4 und 5) berechnet.
- 4) Berechnung der neuen Elementpositionen unter Berücksichtigung der bekannten Auflagerkräfte bei spielfreien Verspannungsebenen (Kap. 6). Hierbei wird vereinfachend davon ausgegangen, daß die Querschnittsdeformation gleichmäßig hexagonal bleibt.
- 5) Iteration der Schritte (3) und (4)  
Als Konvergenzkriterium wird die Minimalisierung der relativen Änderung von Elementpositionen zweier aufeinander folgender Iterationsschritte gewählt.
- 6) Aus den bekannten Auflagerpositionen und Auflagerkräften wird die Biegelinie der Elemente ermittelt. (Kap. 4 und 5)
- 7) Bei bekannten Biegelinien der Elemente wird überprüft, ob sich Überschneidungen von Biegelinien ergeben. Bei Auftreten unzulässiger Überschneidungen werden fiktive zusätzliche Auflager eingeführt und so die korrigierte Biegelinie bestimmt.
- 8) Aus den dreidimensional bestimmten Belastungen werden die Maximalspannungen ermittelt. Die Biegelinien können zur Ermittlung von Materialverschiebungen herangezogen werden, die über Danger-Koeffizienten zu Reaktivitätsänderungen des verformten Kernverbandes führen.

### 3. Gleichung der elastischen Linie bei räumlicher Biegung

Die Grundgleichungen für die Biegung eines geraden Balkens nach der elementaren Theorie der Balkenbiegung sind bekannt [13, 14]. Die wesentlichen Beziehungen sollen hier kurz dargestellt werden. Unter Voraussetzung der Bernoullischen Hypothese ist die axiale Verschiebung  $u$  darstellbar durch

$$u(X, Y, Z) = f(Z) + Y \cdot f_X(z) + X \cdot f_Y(z) \quad (3.01)$$

Hierbei ist  $f(Z)$  die translatorische Komponente der Verschiebung in Längsrichtung  $Z$  des Balkens und  $f_X(Z)$  bzw.  $f_Y(Z)$  ist die Rotation um die  $X$ - bzw.  $Y$ -Achse des Balkenquerschnittes. Damit ist die axiale Dehnung  $\epsilon = \epsilon(X, Y, Z)$  zu

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial Z} = f'(z) + Y \cdot f'_X(z) + X \cdot f'_Y(z) \quad (3.02)$$

Die axiale Spannung  $\sigma = \sigma(X, Y, Z)$  ergibt sich aus dem thermoelastischen Stoffgesetz für den einachsigen Spannungszustand zu

$$\sigma = E(T) \cdot [\epsilon - \bar{\alpha}(T) \cdot T]$$

Wenn der Elastizitätsmodul  $E$  im betrachteten Temperaturbereich über den Balkenquerschnitt nur schwach von der Temperatur  $T = T(X, Y, Z)$  abhängt, kann ein konstanter, über den Balkenquerschnitt gemittelter  $E$ -Modul der Rechnung zugrunde gelegt werden.

$$\sigma(x, y, z) = E(z) \cdot [\epsilon(x, y, z) - \alpha \cdot T(x, y, z)] \quad (3.03)$$

$\alpha = \alpha(T)$  ist der lineare Temperatúrausdehnungskoeffizient des Balkenquerschnittes.

Die Spannungsergebnisse in der  $(X, Y)$ -Querschnittsebene sind

$$\text{Längskraft} \quad P = \int_{(F)} \sigma dF \quad (3.04a)$$

Biegemomente bezüglich der  $X$ - und  $Y$ -Achse

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{(F)} \sigma \cdot y \cdot dF \\ M_y &= \int_{(F)} \sigma \cdot x \cdot dF \end{aligned} \right\} \quad (3.04b)$$

Mit (3.02) und (3.03) folgt dann aus (3.04a) und (3.04b)

$$\left. \begin{aligned} f'(z) \cdot \int_{(F)} dF + f'_x(z) \cdot \int_{(F)} y dF + f'_y(z) \cdot \int_{(F)} x dF &= \int_{(F)} \alpha T dF + P/E \\ f'(z) \cdot \int_{(F)} y dF + f'_x(z) \cdot \int_{(F)} y^2 dF + f'_y(z) \cdot \int_{(F)} xy dF &= \int_{(F)} \alpha T y dF + M_x/E \\ f'(z) \cdot \int_{(F)} x dF + f'_x(z) \cdot \int_{(F)} xy dF + f'_y(z) \cdot \int_{(F)} x^2 dF &= \int_{(F)} \alpha T x dF + M_y/E \end{aligned} \right\} \quad (3.05)$$

Voraussetzungsgemäß soll die Z-Achse durch den Flächenschwerpunkt des Balkenquerschnittes gehen und die X- und Y-Achse sollen Hauptträgheitsachsen des Balkenquerschnittes sein. Dann gilt

$$\int_{(F)} x dF = \int_{(F)} y dF = 0 \quad , \quad \int_{(F)} xy dF = 0 \quad (3.06)$$

Führt man die Definition

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_{(F)} y^2 dF & M_{Tx} &= E \int_{(F)} \alpha T y dF \\ J_y &= \int_{(F)} x^2 dF & M_{Ty} &= E \int_{(F)} \alpha T x dF \\ & & P_T &= E \int_{(F)} \alpha T dF \end{aligned} \right\} \quad (3.07)$$

ein, so erhält man für  $f'(z)$ ,  $f'_x(z)$  und  $f'_y(z)$  aus (3.05) unter Berücksichtigung (3.07)

$$\left. \begin{aligned} f'(z) &= (P + P_T) / EF \\ f'_x(z) &= (M_x + M_{Tx}) / EJ_x \\ f'_y(z) &= (M_y + M_{Ty}) / EJ_y \end{aligned} \right\} \quad (3.08)$$

Die axiale Verschiebung einer  $(x, y)$ -Faser des Balkens ergibt sich aus (3.01) und (3.08)

$$u = \frac{1}{E} \int_0^z \left[ \frac{P + P_T}{F} + \frac{M_x + M_{Tx}}{J_x} \cdot y + \frac{M_y + M_{Ty}}{J_y} \cdot x \right] dz \quad (3.09)$$

Die über den Balkenquerschnitt gemittelte axiale Verschiebung erhält man aus

$$u_m(z) = \frac{1}{F} \int_{(F)} u dF$$

oder

$$\frac{dU_m(z)}{dz} = \left( \frac{P + P_T}{EF} \right)_{(z)} \quad (3.10)$$

Die beiden Rotationen  $f_x(z)$  und  $f_y(z)$  sind mit den Verschiebungen  $V(z)$  und  $W(z)$  der Balkenachse in X- und Y-Richtung verknüpft durch

$$\frac{dV(z)}{dz} = -f_x(z) \quad \text{und} \quad \frac{dW(z)}{dz} = -f_y(z)$$

Damit erhält man aus (3.08) die Differentialgleichung für die Biegelinien in beiden Richtungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2V(z)}{dz^2} &= - \left( \frac{M_x + M_{Tx}}{E J_x} \right)_{(z)} \\ \frac{d^2W(z)}{dz^2} &= - \left( \frac{M_y + M_{Ty}}{E J_y} \right)_{(z)} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

und die axiale Spannung

$$\begin{aligned} \sigma(x, y, z) &= -\alpha \cdot E(z) \cdot T(x, y, z) + \left( \frac{P + P_T}{F} \right)_{(z)} \\ &+ \left( \frac{M_x + M_{Tx}}{J_x} \right)_{(z)} \cdot y + \left( \frac{M_y + M_{Ty}}{J_y} \right)_{(z)} \cdot x \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Größen  $P_T$ ,  $M_{Tx}$  und  $M_{Ty}$  sind die Anteile der Schnittlasten des Balkenquerschnittes infolge der aufgrund der thermischen Belastung hervorgerufenen sog. freien Verformung des Elementkastens (Gl. 3.07). Im Falle der Berücksichtigung des Strukturmaterialschwellens werden die dem Strukturmaterialschwellen zugeordneten Dehnungswerte zusätzlich zu den Werten der thermischen Dehnung ( $\alpha T$ ) in Gl. 3.07 berücksichtigt. Dieses Vorgehen wird am Ende dieses Kapitels näher behandelt. Dagegen sind die Größen  $P$ ,  $M_x$  und  $M_y$  die Anteile der Schnittlasten des Balkenquerschnittes durch die Verformung aufgrund der äußeren Belastung, die an den Lagerstellen bei der Verhinderung der freien Ausfächerung der Elemente auftreten können.

Man sieht, daß bei der Lösung der Gln. (3.10), (3.11) und (3.12) die Verformungen und Spannung aufgrund der thermischen Lasten und

aufgrund der äußeren Lasten separierbar sind. Darüber hinaus kann die räumliche Biegung durch zwei voneinander unabhängige ebene Biegungen dargestellt werden, wenn in der Anordnung nur spielfreie Lager vorhanden sind.

Daher werden im Kapitel 3 die freien Verformungen der Elementkästen zuerst aufgrund der thermischen Belastung berechnet und anschließend wird der Fall behandelt, bei dem das Strukturmaterialschwellen berücksichtigt wird. Im Kapitel 4 wird die Lösungsmethode für ebene Balken-Auflager-Anordnung als Teilproblem der räumlichen Balkenbiegung untersucht. Danach wird im Kapitel 5 die Berechnung der Auflagerkräfte und der Biegelinie der räumlichen Balken-Auflager-Anordnung, ausgehend von der freien Verbiegung des Elementkastens und der Lagerbedingung, durchgeführt.

In den folgenden Ausführungen werden für die freie Verformung nur die Anteile berücksichtigt, die sich aufgrund der thermischen Belastung ergeben. Zur Lösung der Gln. (3.10), (3.11) und (3.12) werden folgende Größen (Querschnittsdaten) definiert.

$$\left. \begin{aligned} R &= \int_{(F)} \alpha T \, dF = P_T/E \\ S_x &= \int_{(F)} \alpha T \cdot y \, dF = M_{Tx}/E \\ S_y &= \int_{(F)} \alpha T \cdot x \, dF = M_{Ty}/E \\ J &= J_x = J_y \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Damit ergeben sich aus (3.10), (3.11) und (3.12)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_m}{dz} &= \frac{R}{F} \\ \frac{d^2V}{dz^2} &= -\frac{S_x}{J} \\ \frac{d^2W}{dz^2} &= -\frac{S_y}{J} \\ G &= E \left[ -\alpha T + \frac{R}{F} + \frac{1}{J} (S_x \cdot y + S_y \cdot x) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Hierbei sind die Größen  $E$ ,  $F$  und  $J$  sowie  $R$ ,  $S_x$  und  $S_y$  charakteristische Querschnittsdaten in Abhängigkeit der axialen Position von  $Z = Z^x$ .

Für den Bereich der Elementflüsse sind hierbei Rohrquerschnitte zu betrachten, im überwiegenden Bereich des Elementes Hexagon-Querschnitt.

Da die Kastenquerschnitte der Elemente dünnwandige geschlossene Rahmen mit guter Wärmeleitfähigkeit darstellen, wird angenommen, daß der Dehnungsverlauf entlang des Rahmens in einem Querschnitt zwischen zwei benachbarten Rahmenpunkten linear ist. Die Bezugspunkte sind bei einem Hexagon die Ecken- und die Seitenmittelpunkte, während bei einem Rohrquerschnitt  $n$  Punkte angenommen werden, die am Umfang des Querschnittes gleichmäßig verteilt sind. Für die beiden Typen von Querschnitten werden die Größen  $F$ ,  $J$ ,  $R$ ,  $S_x$  und  $S_y$  in Anhang 1 berechnet. Damit ergeben sich für den Hexagon-Querschnitt bei Verwendung der Eckpunkte als Stützstellen (Gln. A1.06a und A1.06c)

$$\left. \begin{aligned}
 F &= 6ah \\
 J &\approx \frac{5}{2}a^3h \\
 R &= ah \cdot \sum_{k=1}^6 (\alpha T)_k \\
 S_x &\approx \frac{5}{6} a^2h \sum_{k=1}^6 (\alpha T \cdot \sin \varphi)_k \\
 S_y &\approx \frac{5}{6} a^2h \sum_{k=1}^6 (\alpha T \cdot \cos \varphi)_k \\
 \varphi_k &= \varphi_1 + (k-1) \cdot \frac{\pi}{3}
 \end{aligned} \right\} (3.15)$$

und schließlich aus der Gl. (3.14)

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dU_m}{dz} &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 (\alpha T)_k \\
 \frac{d^2V}{dz^2} &\approx -\frac{1}{3a} \sum_{k=1}^6 (\alpha T \cdot \sin \varphi)_k \\
 \frac{d^2W}{dz^2} &\approx -\frac{1}{3a} \sum_{k=1}^6 (\alpha T \cdot \cos \varphi)_k
 \end{aligned} \right\} (3.16)$$

Hierbei sind

- a = Radius des mittleren Umkreises des Hexagons
- h = Wanddicke
- $\varphi_1$  = Winkel, der die erste Ecke mit der X-Achse einschließt.

Für den Rohrquerschnitt ergeben sich für  $n = 6$  Stützwerte  
(Gl. A1.07)

$$\left. \begin{aligned} F &= 2\pi ah \\ J &\approx \pi a^3 h \\ R &= \frac{1}{3} \pi ah \cdot \sum_{m=1}^6 (\alpha T)_m \\ S_x &\approx \frac{3}{\pi} a^2 h \sum_{m=1}^6 (\alpha T)_m \cdot \sin \varphi_m \\ S_y &\approx \frac{3}{\pi} a^2 h \sum_{m=1}^6 (\alpha T)_m \cdot \cos \varphi_m \\ \varphi_m &= \varphi_1 + (m-1) \cdot \pi / 3 \end{aligned} \right\} (3.17)$$

und schließlich aus der Gl. (3.14)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_m}{dz} &= \frac{1}{6} \sum_{m=1}^6 (\alpha T)_m \\ \frac{d^2V}{dz^2} &\approx -\frac{3}{\pi^2 a} \sum_{m=1}^6 (\alpha T)_m \sin \varphi_m \\ \frac{d^2W}{dz^2} &\approx -\frac{3}{\pi^2 a} \sum_{m=1}^6 (\alpha T)_m \cos \varphi_m \end{aligned} \right\} (3.18)$$

Hierbei sind

- a = der mittlere Radius
- h = die Wanddicke
- $\varphi_1$  = der Winkel, der den ersten Punkt mit der X-Achse einschließt.

Für die Berechnung der freien Verformung wird das Element axial in  $\bar{L}$  Abschnitte mit den Längen  $b_1^*$  ( $1 = 1, 2, \dots, \bar{L}$ ) aufgeteilt. Die Länge der Abschnitte wird so gewählt, daß der Verlauf der Querschnittsdaten in jedem Abschnitt linear angenommen werden kann. Die axiale Teilung wird für alle Elemente gleich gewählt. Charakteristische Zonengrenzen des Reaktorkerns, wie z.B. der Übergang vom Kernbereich zu den axialen Brutmänteln sind Abschnittsgrenzen, in gleicher Weise alle Verspannungsebenen. Die Querschnittsdaten der Randpunkte  $Z = Z_1^*$  ( $1 = 1, 2, \dots, \bar{L} + 1$ ) sind bekannt. Die Berechnung der freien Verbiegung kann in X- und Y-Richtung voneinander unabhängig erfolgen. Im folgenden wird daher nur die Berechnung der freien Verbiegung in X-Richtung beschrieben.

Die Größen  $\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_1 = c_1$  ( $1 = 1, 2, \dots, \bar{L} + 1$ ) nach Gl. (3.14) bzw. (3.16) oder (3.18) bekannt. Unter der Annahme, daß der Verlauf von  $c_1$  innerhalb eines Abschnittes 1 linear ist, erhält man die Gleichung der freien Verbiegung  $\eta_1 = \eta_1(b_1)$  ( $0 \leq b_1 \leq b_1^*$ ) im Abschnitt 1 durch

$$\eta_l''(b_l) = \frac{d^2\eta_l(b_l)}{db_l^2} = \frac{c_{l+1} - c_l}{b_l^*} \cdot b_l + c_l \quad (3.19)$$

$$(l = 1, 2, \dots, \bar{L})$$

Daraus ergeben sich die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \eta_l'(b_l) &= \frac{c_{l+1} - c_l}{2b_l^*} \cdot b_l^2 + c_l \cdot b_l + P_l \\ \eta_l(b_l) &= \frac{c_{l+1} - c_l}{6b_l^*} \cdot b_l^3 + \frac{c_l}{2} \cdot b_l^2 + P_l \cdot b_l + q_l \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

$$(l = 1, 2, \dots, \bar{L})$$

Hierbei sind die Größen  $P_1$  und  $q_1$  ( $1 = 1, 2, \dots, \bar{L}$ ) die insgesamt  $2 \cdot \bar{L}$  Integrationskonstanten, die mit Hilfe der folgenden Randbedingungen bestimmt werden.

Randbedingung für die Einspannstelle

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(0) &= 0 \\ \eta_1'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.21a)$$

Randbedingungen zwischen den Abschnitten

$$\left. \begin{aligned} \eta'_{l+1}(0) &= \eta'_l(b_l^*) \\ \eta_{l+1}(0) &= \eta_l(b_l^*) \\ (\ell &= 1, 2, \dots, \bar{L}) \end{aligned} \right\} \quad (3.21b)$$

Die Größe  $\alpha T$  in den Gln. (3.03), (3.05), (3.07) und (3.13) bis (3.18) ist die lineare thermische Dehnung des Elementkastens. Für eine qualitative Berücksichtigung des Strukturmaterialschwellens bei der freien Verformung der Elementkästen kann an Stelle der Temperaturdehnung  $\alpha T$  oder  $A(\alpha T)$  ein linearer Dehnungswert  $c$  eingeführt werden.

$$C(\alpha, T, \phi, t) = A(\alpha, T) + B(T, \phi, t) \quad (3.22)$$

Hierbei ist die Größe  $B$  derjenige Anteil der linearen Dehnung, der vom Strukturmaterialschwellen herrührt.

Dieser Beitrag wird aus der ortsabhängigen volmetrischen Dehnung  $\Delta V/V$  des Strukturmaterials bestimmt.

$$B = \sqrt[3]{1 + \Delta V/V} - 1 \quad (3.23)$$

Die volumetrische Dehnung  $\Delta V/V$  infolge des Strukturmaterialschwellens wird durch eine experimentell ermittelte Beziehung [7, 33, 34, 35]

$$\Delta V/V = f(T, \phi, t) \quad (3.24)$$

gegeben. Das Strukturmaterialschwellen ist von der Temperatur  $T$ , dem schnellen Neutronenfluß  $\phi$  und der Bestrahlungszeit  $t$  abhängig. Es sind mehrere Formeln zur Approximation der vorliegenden experimentellen Ergebnisse zu Strukturmaterialschwellen [7, 36, 37, 38], wie zum Beispiel:

$$\frac{\Delta V}{V} = 8.5 \cdot 10^2 \cdot \left( \frac{\phi \cdot t}{10^{23}} \right)^{1.6} \cdot \exp \left[ - \left( \frac{T-490}{100} \right)^2 \right] \quad (3.25)$$

(sog. Interatom-IMF-Formel)

und

$$\frac{\Delta V}{V} = 5 \cdot 10^{-38} \cdot (\phi \cdot t)^{1.66} \cdot \left[ \exp \left( - \frac{6800}{(T+273) \cdot R} \right) - 1.87 \cdot 10^4 \cdot \exp \left( - \frac{27000}{(T+273) \cdot R} \right) \right] \quad (3.26)$$

(FFTF-Formel)

wobei R die Gaskonstante ist.

Diese Formeln sind in Abhängigkeit vom Material nur für bestimmte Bereiche der Temperatur bzw. schnellen Dosiswerte ( $\phi \cdot t$ ) gültig.

Für den Reaktorzustand beim An- bzw. Abfahren wird die freie Verbiegung der Elemente demzufolge nur durch die Dehnung B infolge des Strukturmaterialschwellens bestimmt.

#### 4. Lösungsmethoden bei ebener Balken-Auflager-Anordnung

Für die Beschreibung der dreidimensionalen Kernverformung auf der Grundlage des Hexagonmodells werden im wesentlichen die Methoden zur Untersuchung ebener Balken-Auflager-Anordnung (abgekürzt: BAA) zugrunde gelegt. Dieses Vorgehen ist dadurch begründet, daß die räumliche Verbiegung durch die Überlagerung von zwei ebenen Verbiegungen bestimmt wird, die unabhängig voneinander zu behandeln sind. Daher werden in diesem Kapitel die Methoden diskutiert, die ausgehend von dem freiverbogenen Balken und einer bekannten Lageranordnung (abgekürzt: LA) für den ebenen Fall verwendet werden, um die Auflagerkräfte und die Biegelinie in der resultierenden Balken-Auflager-Anordnung zu berechnen.

#### 4.1. Allgemeines

Bei einer ebenen BAA sind Kombinationen von Auflagern möglich, die in den Dreh- und Auslenkungsrichtungen nachgiebig oder nicht nachgiebig, ferner spielfrei oder spielbehaftet sein können. Die Kombinationen der in Abb. 4.1. dargestellten fünf Arten von Auflagern reichen aus, um die Verbiegung der Elemente im Reaktorkern zu beschreiben, die im Rahmen dieser Arbeit betrachtet werden. Die Lösungsmethoden zur Beschreibung der statischen Balkenbiegung in spielfreien Lagern sind bekannt [13, 15, 7]. Wenn in der BAA spielbehaftete Lager vorhanden sind, ist das Problem komplex, da die Konfiguration der Anordnung statisch ein- oder mehrdeutig sein kann. Selbst bei einer eindeutigen Konfiguration reichen für die Berechnung der Auflagerkräfte die bisher bekannten Methoden nicht aus, da dabei die Auslenkungsstellen des Balkens in den spielbehafteten Lagern als zusätzliche Unbekannten auftreten.

	Bezeichnung	mechanisches Sinnbild	Bemerkung
1	eingespanntes Lager		M: Einspannmoment
2	Gelenklager ohne Spiel		A: Auflagerkraft
3	Gelenklager mit Spiel		S: Spiel
4	nachgiebiges Lager ohne Spiel		
5	nachgiebiges Lager mit Spiel		

Abb. 4.1. Schematische Darstellung der Auflager

Für die Beschreibung der Balkenbiegung in Lagern mit und ohne Spiel ist deshalb eine Untersuchung von zwei verschiedenen Arten von ebenen BAA erforderlich:

- BAA mit nur spielfreien Lagern
- BAA mit spielfreien und spielbehafteten Lagern.

Die BAA mit nur spielfreien Lagern kann in statisch bestimmte und statisch unbestimmte Fälle unterteilt werden. Ein BAA ist statisch bestimmt, wenn sich die Auflagerkräfte durch die statischen Gleichgewichtsbedingungen berechnen lassen. Dazu gehören die BAA mit zwei Gelenklagern oder mit einem eingespannten Lager. Der statisch unbestimmte Fall tritt auf, wenn in der Anordnung so viel Auflager vorhanden sind, daß für die Berechnung der Auflagerkräfte die statischen Gleichgewichtsbedingungen nicht ausreichen. Die fehlenden Beziehungen können mit Hilfe des Satzes von Castigliano gewonnen werden [15]. Eine komplexe BAA wird in dieser Arbeit so behandelt, daß sie durch die Erweiterung um zusätzliche Auflager aus einfachen BAA entwickelt wird. Eine derartige Entwicklung kann stufenweise erfolgen. Ausgangspunkt dieser Entwicklung sind die im Anhang 2 aufgeführten drei einfachen Anordnungen:

- der einfach eingespannte Balken
- der zweifach gelenkig aufgelagerte Balken
- der zweifach eingespannte Balken.

Die ersten beiden sind die BAA im statisch bestimmten Fall. Die dritte Anordnung wird aus folgenden Gründen eingeführt: Eine BAA kann in Teil-Anordnungen zerlegt werden, die voneinander unabhängig zu behandeln sind, wenn in der Anordnung viele eingespannte Lager vorhanden sind. In dieser Arbeit werden aber nur BAA behandelt, die "nicht zerlegbar" sind. Demzufolge kommt eine Erweiterung um ein eingespanntes Lager nicht in Betracht.

Die einfache BAA ist in diesem Sinne die "nicht zerlegbare" BAA, die über zusätzliche Gelenklager in jede komplexe BAA erweitert werden kann (Abschnitt 4.2.). Dabei werden die Einflußdaten, die Auflagerkräfte und die Biegelinie für die komplexe BAA berechnet, wenn die Einflußdaten, die Auflagerkräfte und die Biegelinie für die einfache BAA bekannt sind.

Die Einflußdaten für die einfache BAA sind im einzelnen:

- a) Die Einflußzahlen  $\alpha_{mn}$ ,  $\beta_{ml}$ ,  $\gamma_{kn}$  und  $\delta_{kl}$

Die Einflußzahl  $\alpha_{mn}$  bzw.  $\beta_{ml}$  ist die Auslenkung des dem zusätzlichen Lager zugeordneten Balkenpunktes bei  $Z=Z_m$  infolge der Einheitskraft an der zusätzlichen Lagerstelle bei  $Z=Z_n$  bzw. an der Laststelle bei  $Z=\bar{Z}_1$  (Abb. 4.2.). Entsprechend ist die Bedeutung von  $\gamma_{kn}$  und  $\delta_{kl}$  in der Tabelle 4.1. dargestellt. Für diese Einflußzahlen gelten die Beziehungen  $\alpha_{mn} = \alpha_{nm}$ ,  $\beta_{mk} = \gamma_{km}$  und  $\delta_{kl} = \delta_{lk}$ .

- b) Die Einheitsauflagerkraft  $a_{rm}$  bzw.  $b_{rk}$  an einer Lagerstelle infolge der Einheitskraft an einer zusätzlichen Lagerstelle bzw. an der Laststelle einer äußeren Kraft.

- c) Die Einheitsbiegeline  $\eta_m(z)$  bzw.  $\eta_k(z)$  des Balkens infolge der Einheitskraft an einer zusätzlichen Lagerstelle bzw. an der Laststelle einer äußeren Kraft.

Die Einflußdaten für die komplexe BAA werden mit gleichen Buchstaben bezeichnet, jedoch an der rechten oberen Ecke mit einem Stern ( $\ast$ ) versehen, wie z.B.  $\alpha_{mn}^{\ast}$ .

Der Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Untersuchung der BAA mit spielfreien und spielbehafteten Lagern. Die Konfiguration einer solchen BAA ist aufgrund des Vorhandenseins von spielbehafteten Lagern nicht immer eindeutig. Sind in der Anordnung mindestens zwei spielfreie Gelenklager oder ein eingespanntes Lager vorhanden, der sog. "normale Fall", so ist die Konfiguration von vornherein eindeutig. Dagegen ist die Konfiguration der BAA zunächst unbestimmt, wenn in der Anordnung höchstens ein spielfreies Gelenklager und kein eingespanntes Lager vorhanden ist. In diesem Fall muß untersucht werden, ob der Balken in den vorgegebenen LA ein- oder mehrdeutig auflagert. Eine derartige Untersuchung wird mit Eindeutigkeitsanalyse bezeichnet und im Abschnitt 4.3. behandelt. Aus einer solchen Eindeutigkeitsanalyse erhält man eine von drei möglichen Konfigurationen der BAA. Diese sind mehrdeutige, eindeutig kräftefreie und allgemeine Anordnungen. Bei einem allgemeinen Fall handelt es sich um eine eindeutige BAA mit Auflagerkräfte. Bei einer eindeutig kräftefreien Anordnung handelt es sich um eine Konfiguration,

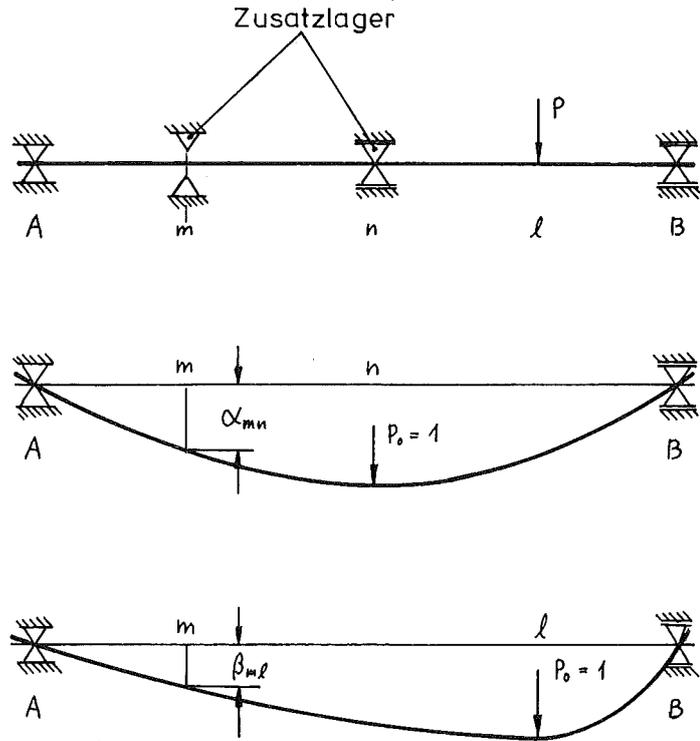


Abb.4.2 Skizze zur Erläuterung für die Einflußzahlen  $\alpha_{mn}$  und  $\beta_{nl}$

		Laststellen der Einheitskräfte	
		$\bar{M}$ zusätzliche Lagerstellen (Index n)	$\bar{K}$ Laststellen der äußeren Einzelkräfte (Index l)
Auslenkungsstellen	$\bar{M}$ zusätzliche Lagerstellen (Index m)	$\alpha_{mn}$	$\beta_{ml}$
	K Laststellen äußeren Einzelkräfte (Index k)	$\beta_{kn}$	$\alpha_{kl}$

Tabelle 4.1. Die schematische Darstellung für die Bezeichnung der Einflußdaten.

die zwischen den allgemeinen und den mehrdeutigen Fall liegt. Die Lage des Balkens ist dabei durch zwei Auflagerpunkte gegeben, die bei der Eindeutigkeitsanalyse ermittelt werden.

Nach der bisher durchgeführten Diskussion kann die ebene BAA mit spielfreien und spielbehafteten Lagern in vier mögliche Fälle aufgeteilt werden.

1. normaler Fall
2. allgemeiner Fall
3. eindeutig kräftefreier Fall
4. mehrdeutiger Fall

Die Fälle 1, 2 und 4 werden im Abschnitt 4.4. näher untersucht.

#### 4.2. Ermittlung der Einflußdaten, der Auflagerkräfte und der Biegelinie einer erweiterten Balken-Auflager-Anordnung mit spielfreien Lagern

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, kann die Ermittlung der Auflagerkräfte, der Biegelinie und der Einflußdaten für komplexe BAA aus einer einfachen bekannten Anordnung ermittelt werden. Im folgenden wird gezeigt, wie die Auflagerkräfte, die Biegelinie und die Einflußdaten ermittelt werden, wenn eine BAA mit  $\bar{R}$  ( $\bar{R} \geq 2$ ) festen Lagern durch  $\bar{M}$  ( $\bar{M} > 0$ ) zusätzliche elastisch nachgiebige Gelenklager erweitert und  $\bar{K}$  ( $\bar{K} \geq 0$ ) Einzelkräfte belastet wird. Die Position von  $\bar{R}$  festen Lagern ist durch die Koordinate  $Z = \bar{z}_r$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R}$ ) gegeben. Die Positionen von  $\bar{M}$  zusätzlichen Lagern bzw.  $\bar{K}$  Einzelkräfte sind durch die Koordinate  $Z = Z_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) bzw.  $Z = \bar{z}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ) bestimmt. Dabei können Koordinaten-Werte aus der Menge  $Z_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) mit den Koordinaten-Werte aus der Menge  $\bar{z}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ) jeweils identisch sein. Für den in  $\bar{R}$  festen Lagern aufgelagerten Balken seien die Biegelinie  $H(Z)$ , die Auflagerkräfte  $A_r$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R}$ ), die Versetzung  $S_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) und die elastischen Nachgiebigkeiten  $\omega_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) der zusätzlichen  $\bar{M}$  Lager sowie die Einflußdaten für die Balkenpunkte  $Z = Z_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) und  $Z = \bar{z}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ) bekannt.

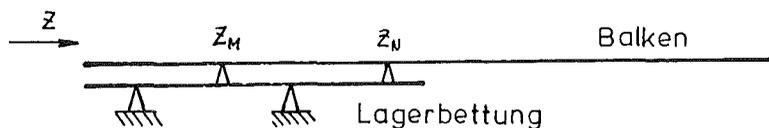


Abb.4.3 Schematische Darstellung eines elastisch nachgiebigen Lagers

Ein elastisch nachgiebiges Lager tritt auf, wenn der Balken auf einer elastischen Bettung gelagert ist (Abb. 4.3.). Da die Lager einer solchen elastischen Bettung aneinander gekoppelt sein können, sind zur Beschreibung der elastischen Nachgiebigkeiten die Werte  $\omega_{MM}$ ,  $\omega_{MN}$  usw. erforderlich. Die Einflußdaten sind dabei die Einflußzahlen (Tabelle 4.1.)  $\alpha_{mn}$ ,  $\beta_{m1}$ ,  $\gamma_{kn}$  und  $\delta_{k1}$  ( $m, n = 1, 2, \dots, \bar{M}$  :

$k, l = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ), die Einheitsauflagerkräfte  $a_{rm}$  und  $b_{rk}$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R} : m = 1, 2, \dots, \bar{M} : k = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ) sowie die Einheitsbiegelineien  $\eta_m(z)$  und  $\psi_k(z)$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M} : k = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ).

Berechnet werden bei der erweiterten Anordnung an den  $\bar{M}$  zusätzlichen Lagern und an den  $\bar{R}$  festen Lagern die Auflagerkräfte  $D_n^*$  ( $n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) und  $A_r^*$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R}$ ) sowie die Biegelinie  $H^*(z)$  und die Einflußdaten. Die Einflußdaten sind dabei die Einflußzahlen  $\delta_{kl}^*$  ( $k, l = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ), die Einheitsauflagerkräfte  $b_{rk}^*$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R} : k = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ) an  $\bar{R}$  festen Lagern und  $d_{mk}^*$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M} : k = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ) an den  $\bar{M}$  zusätzlichen Lagern sowie die Einheitsbiegelineien  $\psi_k^*(z)$  ( $k = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ).

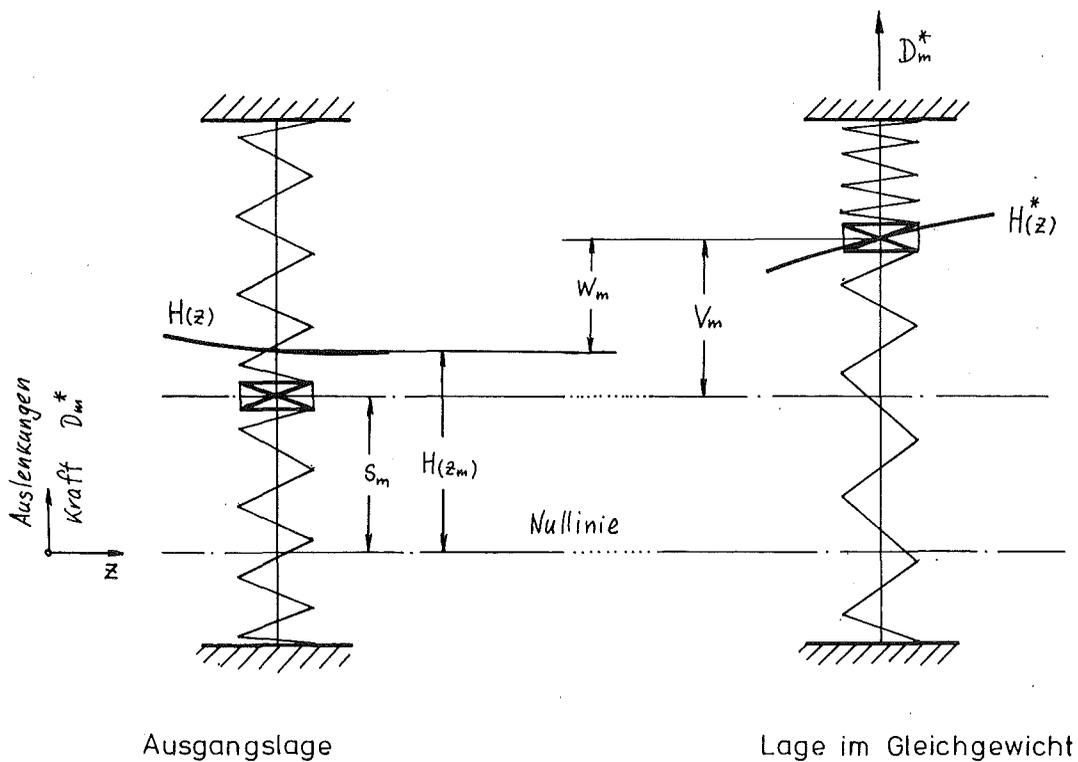


Abb.4.4 Schematische Darstellung der Lagerung des Balkens in einem zusätzlichen spielfreien Lager an der Stelle  $Z = Z_m$  ( $Z = 1, 2, \dots, \bar{M}$ )

Ist der Balken in  $\bar{R} + \bar{M}$  Lagern aufgelagert, so gelten für die Auslenkungen  $V_m$  und  $W_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) der Lager und der Balkenpunkte an zusätzlichen Lagern bei  $Z = Z_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) folgende Beziehungen (Abb. 4.04):

- Für die Lager

$$\{V_m\} = - [\omega_{mn}] \{D_n^*\} \quad (4.01a)$$

- Für die Balkenpunkte

$$\{W_m\} = [\alpha_{mn}] \{D_n^*\} + {}^*[\beta_{mk}] \{P_k\} \quad (4.01b)$$

Da aus Abb. 4.04

$$V_m = W_m + H(Z_m) - S_m \quad (m = 1, 2, \dots, \bar{M})$$

folgt, ergibt sich aus (4.01a) und (4.01b) die Beziehung

$$[\alpha_{mn} + \omega_{mn}] \{D_n^*\} = \{S_m\} - \{H(z_m)\} - {}^*[\beta_{mk}] \{P_k\} \quad (4.02)$$

Aus der Beziehung (4.02) lassen sich die Auflagerkräfte  $D_n^*$  ( $n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) berechnen. Die Auflagerkräfte  $A_r^*$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R}$ ) und die Biegelinie  $H^*(Z)$  des Balkens in der erweiterten BAA unter der Belastung von  $\bar{K}$  Einzelkräfte ergeben sich aus

$$\{A_r^*\} = \{A_r\} + {}^*[a_{rm}] \{D_m^*\} + {}^*[b_{rk}] \{P_k\} \quad (4.03)$$

$$H^*(z) = H(z) + \sum_{m=1}^{\bar{M}} \eta_m(z) \cdot D_m^* + \sum_{k=1}^{\bar{K}} \psi_k(z) \cdot P_k \quad (4.04)$$

Setzt man in das Gleichungssystem (4.02) die Beziehungen

$$S_m = 0, H(Z_m) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, \bar{M})$$

$$P_k = 1, P_1 = 0 \quad (1 = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, \bar{K})$$

ein, so erhält man anstatt  $D_n^*$  die Einheitsauflagerkräfte  $d_{nk}^*$  ( $n = 1, 2, \dots, \bar{M} ; k = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ) wie folgt:

$$[\alpha_{mn} + \omega_{mn}] {}^*[d_{nk}^*] = - {}^*[\beta_{mk}]$$

oder

$${}^*[d_{mk}^*] = - [\alpha_{mn} + \omega_{mn}]^{-1} {}^*[\beta_{nk}] \quad (4.05)$$

Anschließend können die Einflußzahlen  $\delta_{kl}^*$ , die Einheitsauflagerkräfte  $b_{rk}^*$  und die Einheitsbiegeline  $v_k^*(z)$  für die erweiterte BAA berechnet werden:

$$\left. \begin{aligned} [\delta_{kl}^*] &= [\delta_{kl}] + [x_{kn}^*] [d_{nl}^*] \\ {}^*[b_{rk}^*] &= {}^*[b_{rk}] + {}^*[a_{rm}] [d_{mk}^*] \\ v_k^*(z) &= v_k(z) + \sum_{m=1}^{\bar{H}} \eta_m(z) \cdot d_{mk}^* \\ &(k = 1, 2, \dots, \bar{K}) \end{aligned} \right\} (4.06)$$

### 4.3. Eindeutigkeitsanalyse

#### 4.3.1. Fallunterscheidung und Begriffsdefinitionen

Die im vorigen Abschnitt diskutierte Berechnungsmethode der Auflagerkräfte und der Biegelinie des Balkens einer ebenen BAA mit spielfreien Lagern reicht für die Behandlung einer BAA mit spielfreien und spielbehafteten Lagern nicht aus. Die Konfiguration derartiger BAA ist nicht in jedem Fall eindeutig. Deshalb muß zunächst festgestellt werden, ob der Balken in einer vorgegebenen BAA mit spielbehafteten Lagern eindeutig auflagert. Ein Balken ist in einer LA dann eindeutig aufgelagert, wenn eine Starrkörperbewegung des Balkens in der BAA nicht möglich ist. Bei der Analyse der Eindeutigkeit ist die Berechnung der Auflagerkräfte und der Biegelinie zunächst nicht erforderlich, denn für die Eindeutigkeit ist allein die Art der Lagerungsmöglichkeit des Balkens in der BAA maßgebend. Im einzelnen sind folgende Lagerungsarten möglich:

##### 1) Eindeutige BAA

Bei dieser Anordnung ist es möglich, die Lage des Balkens in der BAA eindeutig zu bestimmen. Dazu kann es notwendig sein, den Balken durch Verbiegung in die Lager hineinzuzwängen. Bei dieser Anordnung werden in Bezug auf das Lösungsverfahren drei Fälle unterschieden:

##### 1a) Normaler Fall

Dieser Fall ist dadurch charakterisiert, daß zur Feststellung der eindeutigen Lagerung des Balkens kein großer Aufwand erforderlich ist. Der normale Fall ist dann gegeben, wenn in der BAA mindestens zwei Gelenklager oder ein eingespanntes Lager vorhanden sind. Sieht man von der Möglichkeit ab, daß die restlichen Lager spielbehaftet sein können, dann ist die BAA statisch bestimmt oder statisch unbestimmt [73, 15, 16], also eindeutig.

### 1b) Allgemeiner Fall

Das besondere Kennzeichen dieses Falles ist die Notwendigkeit, vor Bestimmung der Auflagerkräfte eine aufwendige Eindeutigkeitsanalyse durchführen zu müssen. Eine derartige BAA hat mindestens drei Lager, jedoch höchstens ein festes Lager und kein eingespanntes Lager.

### 1c) Eindeutig kräftefreier Fall

In diesem Lagerungsfall ist es nicht notwendig, den Balken in die Lager hineinzuzwängen, d.h. alle Auflagerungskräfte sind Null. Die Lage des Balkens in der LA läßt sich direkt aus der Eindeutigkeitsanalyse ermitteln.

## 2) Mehrdeutige BAA

Eine BAA ist mehrdeutig, wenn eine Starrkörperbewegung des Balkens in der LA möglich ist. Dieser Fall tritt z.B. auf, wenn in der Anordnung nur ein einfaches Lager vorhanden ist oder zwei einfache Lager vorhanden sind, von denen höchstens eins spielfrei ist. In diesen beiden Fällen ist die Mehrdeutigkeit sofort einsehbar. Bei komplexen BAA ist jedoch eine Eindeutigkeitsanalyse notwendig.

Die Eindeutigkeitsanalyse wird unter der Voraussetzung durchgeführt, daß die den Lagern zugeordneten Balkenpunkte in einer Geraden liegen. Daher wird bei dieser Untersuchung die vorgegebene BAA vom infolge der differentiellen Dehnung verbogenen Balken durch Transformation in eine BAA überführt, bei der die den Lagern zugeordneten Balkenpunkte auf einer Geraden liegen. Bei der Eindeutigkeitsanalyse wird eine mögliche Starrkörperbewegung des Balkens nur in den Lagerstellen untersucht. Aus diesem Grunde werden bei der nachfolgenden Eindeutigkeitsanalyse nur solche BAA behandelt, die jeweils aus einem geraden Balken und aus einer LA mit  $N$  spielbehafteten Lagern bestehen. Die Spiele der spielbehafteten Lager  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) sind dabei durch die Grenzwerte  ${}_j S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) gegeben, wobei der Index  $j$  die untere ( $j = 1$ ) und die obere ( $j = 2$ ) Grenze des Spieles angibt. Da die bei der Eindeutigkeitsanalyse untersuchte Starrkörperbewegung in zwei spielbehafteten Lagern am einfachsten festzustellen ist, wird die Analyse mit Hilfe der sog. projizierten Strecke durchgeführt. Eine projizierte

Strecke  ${}^k\psi_{mn}$  wird dabei als eine Spur definiert, die der Balken bei der Starrkörperbewegung in zwei Lagern  $f_m$  und  $f_n$  in der  $k$ -ten Lagerebene beschreibt (Abb. 4.05). Der untere bzw. obere Endpunkt der projizierten Strecke  ${}^k\psi_{mn}$  wird durch  ${}^k_1t_{mn}$  bzw.  ${}^k_2t_{mn}$  bezeichnet. Ihre Ermittlung wird im Abschnitt 4.3.2. behandelt, in dem die Analyse der BAA mit drei Lagern durchgeführt wird. Die Eindeutigkeitsanalyse für die BAA mit beliebig vielen  $N$  ( $N > 3$ ) Lagern folgt im Abschnitt 4.3.3.

#### 4.3.2. Eindeutigkeitsanalyse bei drei Lagern

Bei vorgegebenen drei spielbehafteten Lagern lassen sich in beliebiger Kombination zwei Lager  $f_1$  und  $f_2$  herausgreifen, bei denen eine Starrkörperbewegung des Balkens möglich ist, so daß der Balken in der dritten Lagerebene eine projizierte Strecke  ${}^3\psi_{12}$  beschreibt (Abb. 4.5.).

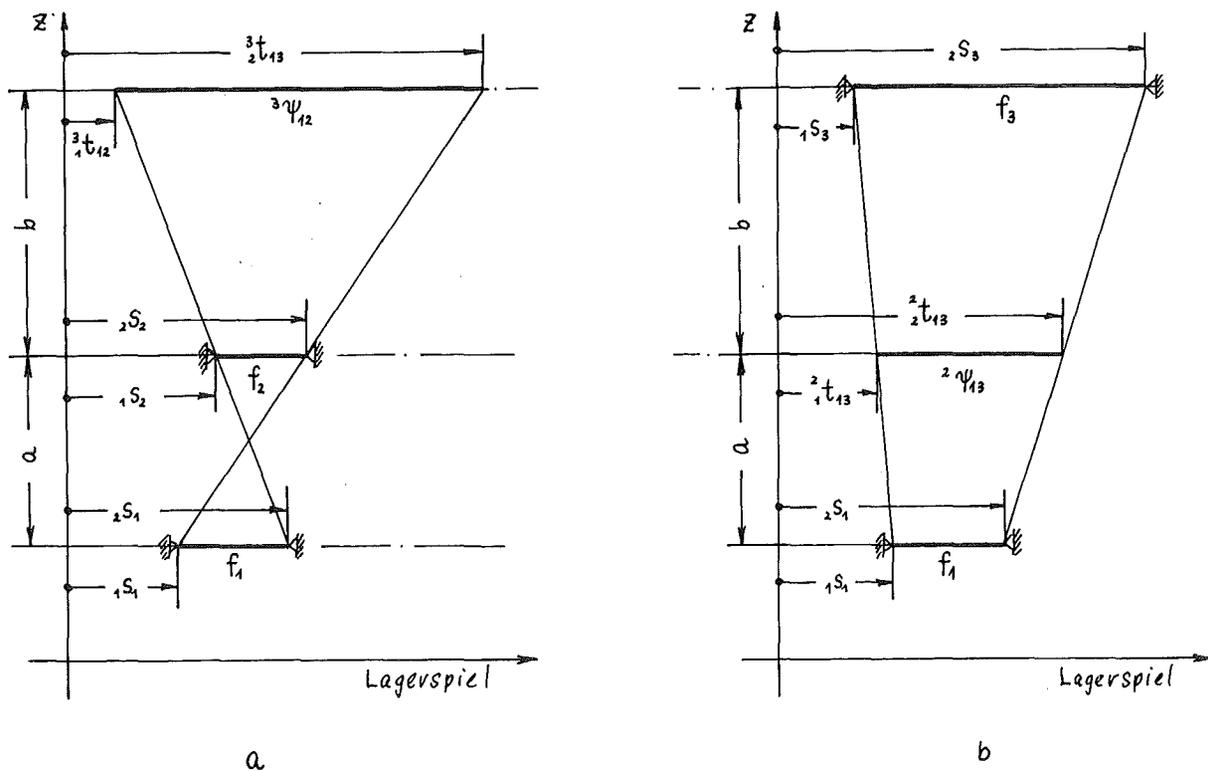


Abb. 4.5 Zwei Möglichkeiten für die Bestimmung der projizierten Strecken



Die wesentlichen Probleme sind nun folgende Punkte:

- die Bestimmung der projizierten Strecke
- die Analyse der relativen Lage von projizierten Strecken und Lagerspielen

Es gibt drei Möglichkeiten, um zwei beliebige Lager aus drei herauszugreifen:

- a) Lager 1 und 2 (benachbart)
- b) Lager 1 und 3 (nicht benachbart)
- c) Lager 2 und 3 (benachbart)

Bei allen drei Möglichkeiten ergeben sich die Grenzen der projizierten Strecken  ${}^3\psi_{12}$ ,  ${}^2\psi_{13}$  und  ${}^1\psi_{23}$  (Abb. 4.5.) durch

$$\left. \begin{aligned} {}^3t_{12} &= -\frac{b}{a} \cdot {}^2S_1 + \frac{a+b}{a} \cdot {}^1S_2 \\ {}^3t_{12} &= -\frac{b}{a} \cdot {}^1S_1 + \frac{a+b}{a} \cdot {}^2S_2 \end{aligned} \right\} (4.07a)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^2t_{13} &= \frac{b}{a+b} \cdot {}^1S_1 + \frac{a}{a+b} \cdot {}^1S_3 \\ {}^2t_{13} &= \frac{b}{a+b} \cdot {}^2S_1 + \frac{a}{a+b} \cdot {}^2S_3 \end{aligned} \right\} (4.07b)$$

und

$$\left. \begin{aligned} {}^1t_{23} &= -\frac{a}{b} \cdot {}^2S_3 + \frac{a+b}{b} \cdot {}^1S_2 \\ {}^1t_{23} &= -\frac{a}{b} \cdot {}^1S_3 + \frac{a+b}{b} \cdot {}^2S_2 \end{aligned} \right\} (4.07c)$$

Betrachtet man in einer der drei Lagerebenen, z.B. in der dritten Lagerebene, so bestehen zwischen dem Lagerspiel und der projizierten Strecke folgende Beziehung:

- Fall 1 (eine gemeinsame Strecke)

$$\begin{aligned} {}^3_1t_{12} < {}_2S_3 \text{ und} \\ {}^3_2t_{12} > {}_1S_3 \end{aligned} \quad (4.08a)$$

- Fall 2 (ein gemeinsamer Punkt)

$$\begin{aligned} {}^3_1t_{12} = {}_2S_3 \text{ oder} \\ {}^3_2t_{12} = {}_1S_3 \end{aligned} \quad (4.08b)$$

- Fall 3 (kein gemeinsamer Punkt)

$$\begin{aligned} {}^3_1t_{12} > {}_2S_3 \text{ oder} \\ {}^3_2t_{12} < {}_1S_3 \end{aligned} \quad (4.08c)$$

Führt man die Beziehung in der Gl. (4.07a) in die Ungl. (4.08a), so erhält man durch die Umformung die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} {}_1S_2 < \frac{b}{a+b} \cdot {}_2S_1 + \frac{a}{a+b} \cdot {}_2S_3 \\ {}_2S_2 > \frac{b}{a+b} \cdot {}_1S_1 + \frac{a}{a+b} \cdot {}_1S_3 \end{aligned} \right\} (4.09a)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} {}_1S_1 < -\frac{a}{b} \cdot {}_1S_3 + \frac{a+b}{b} \cdot {}_2S_2 \\ {}_2S_1 > -\frac{a}{b} \cdot {}_2S_3 + \frac{a+b}{b} \cdot {}_1S_2 \end{aligned} \right\} (4.09b)$$

Setzt man die Beziehung (4.07b) bzw. (4.07c) in die Ungl. (4.09a) bzw. (4.09b) ein, so erhält man die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} {}^2_1 t_{13} &< {}_2 S_2 \\ {}^2_2 t_{13} &> {}_1 S_2 \end{aligned} \right\} (4.10a)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} {}^1_1 t_{23} &< {}_2 S_1 \\ {}^1_2 t_{23} &> {}_1 S_1 \end{aligned} \right\} (4.10b)$$

Die Beziehungen (4.10a) und (4.10b) sind nichts anderes als die Ungleichungen, die aus der Ungl. (4.08a) durch die zyklische Umtauschung gewonnen werden. Daraus ergibt sich, daß im Falle der Gültigkeit der Beziehung bei einem spielbehafteten Lager die gleiche Beziehung (Fall 1) bei beiden anderen Lagern gültig ist. Entsprechend kann mit den Beziehungen (4.08b) und (4.08c) die gleiche Aussage für die Fälle 2 und 3 nachgewiesen werden.

Aus dieser Feststellung läßt sich ableiten, daß die Untersuchung bei einem Lager für die Analyse ausreicht, ob die BAA dem Fall 1 (mehrdeutiger Fall) oder dem Fall 2 (eindeutig kräftefreier Fall) oder dem Fall 3 (allgemeiner Fall) entspricht.

Abschließend wird hier die Vorgehensweise der Eindeutigkeitsanalyse kurz skizziert: zunächst werden bei einem der drei Lager die Grenzen der projizierten Strecke  ${}^k_1 t_{mn}$  und  ${}^k_2 t_{mn}$  nach den Gln. (4.07a) oder (4.07b) oder (4.07c) ermittelt. Danach wird die Eindeutigkeitsanalyse durch die Einbeziehung der Größen  ${}_1 S_k$  und  ${}_2 S_k$  nach dem in Abb. 4.7. dargestellten Schema durchgeführt.

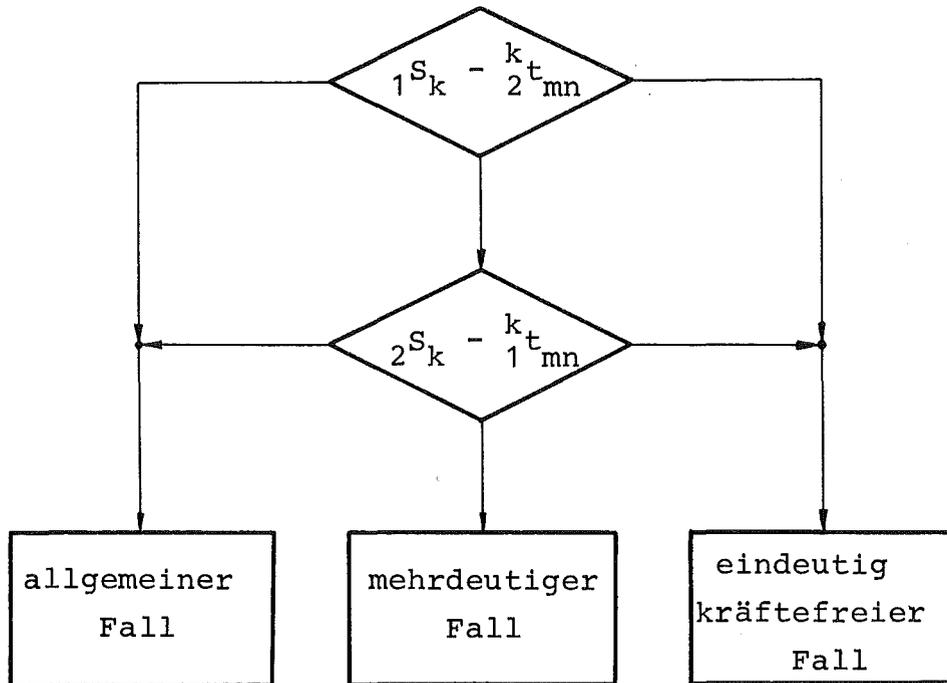


Abb. 4.7. Schematische Darstellung der Vorgehensweise bei der Eindeutigkeitsanalyse der BAA mit drei spielbehafteten Lagern

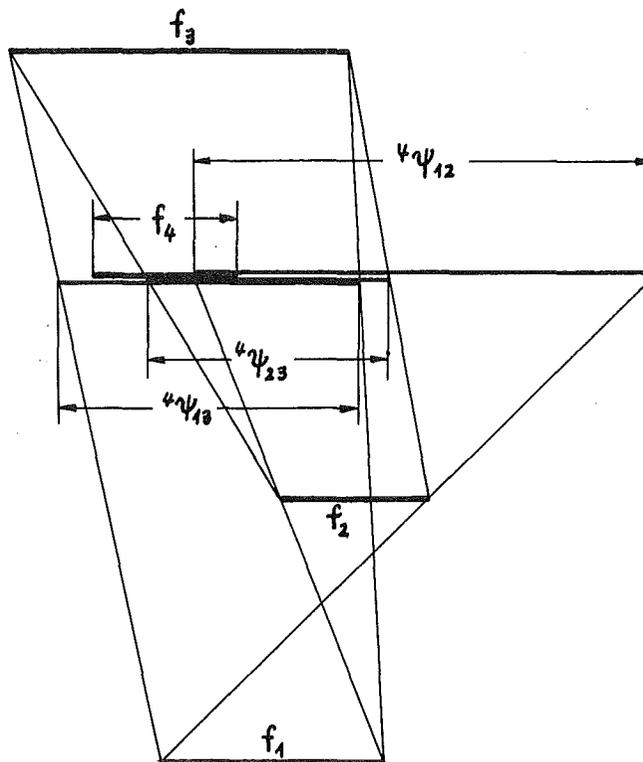
#### 4.3.3. Eindeutigkeitsanalyse bei N Lagern

Ausgehend von einer BAA mit N Lagern können LA mit (N-1) Lagern gebildet werden. Es sind insgesamt N derartige Anordnungen möglich. Jeder dieser LA von (N-1) Lagern ist wieder darstellbar als LA von (N-2) Lagern mit (N-1) Möglichkeiten. Die Eindeutigkeitsanalyse für die BAA mit drei Lagern wurde im Abschn. 4.3.2. behandelt. Davon ausgehend läßt sich die Eindeutigkeitsanalyse für die komplexere BAA durchführen.

Im allgemeinen sind aus einer BAA mit N Lagern insgesamt  $\binom{N}{n}$  Kombinationen von BAA mit n ( $n < N$ ) Lagern möglich. Wenn bei einer vorgegebenen BAA mit N ( $N > 3$ ) Lagern die Konfiguration einer beliebigen Kombination von n ( $n < N$ ) Lagern eindeutig ist, ist die Konfiguration der vorgegebenen BAA stets eindeutig.

Nr.	Kombinationen von drei Lagern	gemeinsamer Bereich durch
1	$f_1, f_2$ und $f_3$	${}^4\psi_{12}, {}^4\psi_{13}$ und ${}^4\psi_{23}$
2	$f_1, f_2$ und $f_4$	$f_4$ und ${}^4\psi_{12}$
3	$f_1, f_3$ und $f_4$	$f_4$ und ${}^4\psi_{13}$
4	$f_2, f_3$ und $f_4$	$f_4$ und ${}^4\psi_{23}$

a) gemeinsame Bereiche bei Kombinationen von drei Lagern



b) Positionen der Lagerspiele und projizierte Strecken

Abb. 4.8 Verhältnisse in der vierten Lagerebene bei einer mehrdeutigen Lageranordnung mit vier spielbehafteten Lagern

Wenn dagegen die Konfiguration keiner der Kombinationen der BAA mit  $n$  ( $3 < n < N$ ) eindeutig ist, ist auch die komplexe vorgegebene BAA mehrdeutig. Diese Behauptung soll zuerst für den Fall  $N=4$  und anschließend für den Fall  $N > 4$  gezeigt werden.

Bei  $N=4$  läßt sich diese Behauptung folgendermaßen formulieren: Sind die Lagerungen des Balkens bei allen vier Kombinationen von drei Lagern (Abb. 4.8a) jeweils mehrdeutig, so ist eine Starrkörperbewegung des Balkens in allen vier Lagern  $f_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) möglich.

Zunächst wird dies in einer beliebigen Lagerebene, z.B. in der vierten Lagerebene  $E_4$ , untersucht. Die mehrdeutige Anordnung mit drei Lagern  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) wird danach charakterisiert, daß der Balken aufgrund der möglichen Starrkörperbewegung in der vierten Lagerebene  $E_4$  eine Spur beschreibt. Diese Spur ist der gemeinsame Bereich der drei projizierten Strecken  ${}^4\psi_{12}$ ,  ${}^4\psi_{13}$  und  ${}^4\psi_{23}$ , die durch die Lager  $f_1$ ,  $f_2$  und  $f_3$  in der vierten Lagerebene bestimmt werden (Abb. 8.4a und b). Die Lagerung des Balkens ist voraussetzungsgemäß jeweils mehrdeutig bei allen drei anderen Kombinationen von drei Lagern, bei denen das vierte Lager stets beteiligt ist.

Betrachtet man eine dieser Kombinationen von drei Lagern, beispielsweise die Kombination von drei Lagern  $f_1$ ,  $f_2$  und  $f_4$ , so haben das Lager  $f_4$  und die projizierte Strecke  ${}^4\psi_{12}$  in der vierten Lagerebene  $E_4$  auf Grund der Mehrdeutigkeit einen gemeinsamen Bereich (Abb. 8.4.a und b). Aus gleichen Gründen hat das Lager  $f_4$  mit der projizierten Strecke  ${}^4\psi_{13}$  bzw.  ${}^4\psi_{23}$  jeweils einen gemeinsamen Bereich (Abb. 8.4a und b). Da damit alle Zweier-Kombinationen aus dem Lager  $f_4$  und den projizierten Strecken  ${}^4\psi_{12}$ ,  ${}^4\psi_{13}$  und  ${}^4\psi_{23}$  in der vierten Lagerebene  $E_4$  jeweils einen gemeinsamen Bereich haben (Abb. 8.4a), haben das Lager  $f_4$  und diese drei projizierten Strecken einen gemeinsamen Bereich (Anlage 2). Dieser gemeinsame Bereich ist der Bereich der möglichen Starrkörperbewegung des Balkens in der vierten Lagerebene  $E_4$ . Gleichfalls gibt es auch in den ersten drei Lagerebenen  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  jeweils ein Bereich der möglichen Starrkörperbewegung des Balkens. Damit ist die Behauptung für  $N=4$  bewiesen.

Bei  $N > 4$  beschreibt der Balken, wie im Falle  $N=4$ , bei der mehrdeutigen Lagerung in den ersten  $N-1$  Lagern  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ) in der  $N$ -ten Lagerebene  $E_N$  eine Spur, die den gemeinsamen Bereich aller projizierten Strecken  ${}^N\psi_{mn}$  ( $m=1, 2, \dots, N-2; n=m+1, \dots, N-1$ ) darstellt.

Andererseits hat das Lager  $f_N$  mit jeder dieser projizierten Strecken jeweils einen gemeinsamen Bereich, wenn der Balken in allen Lagerkombinationen von  $N-1$  Lagern jeweils mehrdeutig auflagert, bei denen das Lagerspiel  $f_N$  beteiligt ist (Vergleiche mit dem Fall  $N=4$ ). Dies führt schließlich zur Behauptung: Wenn bei einer vorgegebenen BAA mit  $N$  ( $N > 4$ ) spielbehafteten Lagern der Balken in allen Lagerkombinationen von  $N-1$  Lagern jeweils mehrdeutig auflagert, ist die vorgegebene BAA auch mehrdeutig. Da eine derartige Untersuchung, wie oben gezeigt, ausgehend von BAA mit drei Lagern, in BAA mit  $N$  ( $N > 3$ ) Lagern erweitert werden kann, läßt sich aus dieser Untersuchung folgendes ableiten: Die BAA mit  $N$  ( $N > 3$ ) Lagern ist mehrdeutig, wenn die Lagerung des Balkens in allen  $\binom{N}{3}$  Kombinationen von drei Lagern jeweils mehrdeutig ist.

Außerdem gilt folgende Behauptung: Ist die Lagerung des Balkens in einer BAA mit  $N$  ( $N > 3$ ) Lagern teils mehrdeutig und teils eindeutig kräftefrei, so sind die Lagen des Balkens in den eindeutig kräftefreien Fällen identisch.

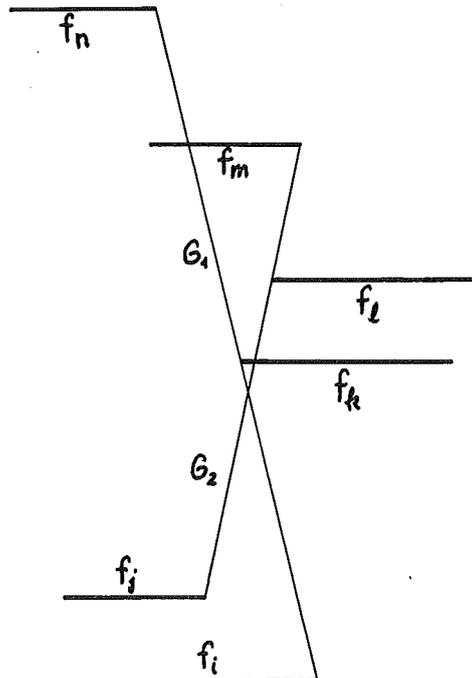


Abb. 4.9. Darstellung zur Erläuterung für die Identität zweier eindeutig kräftefreier Lagen  $G_1$  und  $G_2$

Diese Behauptung läßt sich prinzipiell einfach beweisen. Die Beweisführung ist jedoch aufgrund der vielfältigen Möglichkeiten derartiger Balkenlagen umständlich. Deshalb wird im folgenden nur das Prinzip der Beweisführung beschrieben: Eine eindeutig kräftefreie Balkenlage ist durch eine Gerade hinreichend gegeben, die abwechselnd an die untere und obere Grenze von nur drei Lagern anliegt. Sind jedoch zwei derartige Geraden  $G_1$  und  $G_2$  nicht identisch, so überschneiden sich (Abb. 4.9) oder sie sind parallel. Hierbei ist bei den mit den Geraden  $G_1$  und  $G_2$  in Zusammenhang stehenden Lagern stets eine Dreierkombination mit dem allgemeinen Fall zu finden, wie beispielsweise die Lager  $f_i$ ,  $f_1$  und  $f_n$  (Abb. 4.09). Da aber in der Anordnung keiner Dreier-Lagerkombinationen mit dem allgemeinen Fall vorhanden sein soll, müssen beide eindeutig kräftefreien Lagen identisch sein. In der gleichen Weise kann bei mehreren eindeutig spielfreien Lagen fortlaufend bewiesen werden, daß alle derartigen Lagen identisch sind. Daraus läßt sich ableiten: Die BAA mit  $N$  ( $N > 3$ ) Lagern ist eindeutig kräftefrei, wenn die Lagerung des Balkens in  $\binom{N}{3}$  Kombinationen von drei Lagern teils mehrdeutig und teils eindeutig kräftefrei ist, oder alle eindeutig kräftefrei sind.

Schließlich kann behauptet werden: Die BAA mit  $N$  ( $N > 3$ ) Lagern ist eindeutig (allgemeiner Fall), wenn die Lagerung des Balkens mindestens in einer der  $\binom{N}{3}$  Kombinationen von drei Lagern dem allgemeinen Fall entspricht.

Aus den eben behandelten drei Behauptungen ergibt sich die Vorgehensweise der Eindeutigkeitsanalyse der BAA mit  $N$  ( $N > 3$ ) Lagern wie folgt: Man führt die Eindeutigkeitsanalysen der  $\binom{N}{3}$  möglichen BAA mit jeweils drei Lagern durch. Wenn dabei eine der Anordnungen dem allgemeinen Fall entspricht, so wird die Analyse unterbrochen, da es sich bei der vorgegebenen Anordnung um einen allgemeinen Fall handelt. Wenn alle möglichen BAA mit drei Lagern mehrdeutig sind, so ist die vorgegebene BAA mehrdeutig. Bei sonstigen Fällen ist die vorgegebene BAA eindeutig kräftefrei.

#### 4.4. Ermittlung der Auflagerkräfte und der Biegelinie einer Balken-Auflager-Anordnung mit spielbehafteten Lagern

Bei der Ermittlung der Auflagerkräfte und der Biegelinie für eine BAA mit spielbehafteten Lagern muß zunächst die Art der Anordnung untersucht werden, da dementsprechend verschiedene Lösungsmethoden angewandt werden müssen. Es sind folgende drei Arten von BAA zu betrachten:

- normaler Fall
- allgemeiner Fall
- mehrdeutiger Fall

##### 4.4.1. Normaler Fall

Dieser Fall tritt auf, wenn in der BAA zwei oder mehrere feste Lager vorhanden sind und eine beliebige Anzahl von spielbehafteten und nachgiebigen Lagern. Für den Fall, daß in der Anordnung nur feste Lager vorhanden sind, wurde die Ermittlung der Einflußdaten, der Auflagerkräfte und der Biegelinie im Abschnitt 4.2. ausführlich behandelt. Die Berechnung der Auflagerkräfte und der Biegelinie bei einer normalen BAA wird unter der Voraussetzung durchgeführt, daß die Einflußdaten für die BAA bekannt sind, die sich aus der vorgegebenen BAA ohne spielbehaftete Lager ergibt.

Es wird gezeigt, wie die Auflagerkräfte und die Biegelinie berechnet werden, wenn bei einer BAA mit  $\bar{R}$  ( $\bar{R} > 2$ ) festen Lagern die Zahl der Lager um  $\bar{M}$  ( $\bar{M} > 0$ ) zusätzliche spielbehaftet-nachgiebige Lager erweitert wird und der Balken durch  $\bar{K}$  ( $\bar{K} \geq 0$ ) Einzelkräfte belastet wird.

Für den in  $\bar{R}$  festen Lagern aufgelagerten Balken seien die Biegelinie  $H(Z)$  und die Auflagerkräfte  $A_r$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R}$ ) an den Stellen  $Z = \hat{Z}_r$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R}$ ) bekannt. Die Lagen der  $\bar{M}$  zusätzlichen Lager bzw. der  $\bar{K}$  Einzelkräfte sind durch die Koordinaten  $Z = Z_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) bzw.  $Z = \bar{Z}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ) gekennzeichnet. Die Einflußdaten der BAA in  $\bar{R}$  festen Lagern seien ebenfalls bekannt und zwar wie bei a, b, und c in Abschnitt 4.1.

Die unteren und oberen Grenzen der spielbehafteten Lager sind durch  ${}_1S_m$  und  ${}_2S_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ), ihre elastischen Nachgiebigkeiten durch  $\omega_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) gegeben. Nach der Erweiterung der BAA um diese spielbehafteten Lager sollen nun die Auflagerkräfte  $D_n^x$  ( $n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) an den spielbehafteten Lagern sowie  $A_r^x$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R}$ ) an den festen Lagern und die Biegelinie  $H^x(Z)$  berechnet werden. Der Gleichgewichtszustand des Balkens in allen  $\bar{R} + \bar{M}$  Lagern unter Belastung von  $\bar{K}$  Einzelkräften führt nicht notwendigerweise dazu, daß der Balken in allen  $\bar{M}$  spielbehafteten Lagern auflagert. Die Anzahl  $M^x$  der spielbehafteten Lager, an denen der Balken auflagert, liegt zwischen 0 und  $\bar{M}$  ( $0 < M^x < \bar{M}$ ). Bei der Formulierung des bestimmenden Gleichungssystems wird trotzdem zunächst davon ausgegangen, daß der Balken im Gleichgewichtszustand in allen spielbehafteten Lagern auflagert.

Man erhält für die Auslenkungen der Lager und der Balkenpunkte,  $V_m$  und  $W_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ), an den spielbehafteten und nachgiebigen Lagern bei  $Z = Z_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) folgende Beziehungen (Abb. 4.10):

- für die Lager

$$\{V_m\} = [\omega_{mn}] \{D_n^*\} \quad (4.11a)$$

- für die Balkenpunkte

$$\{W_m\} = [\alpha_{mn}] \{D_n^*\} + {}^*[\beta_{mk}] \{P_k\} \quad (4.11b)$$

Kommt der Balken bei  $Z = Z_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) mit einer der Kanten des jeweiligen Lagers in Kontakt, so besteht zwischen den Größen,  $V_m$ ,  $W_m$ ,  ${}_jS_m$  und  $H(Z_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) die Beziehung:

$$\{W_m\} = \{{}_jS_m\} - \{H(z_m)\} + \{V_m\} \quad (4.11c)$$

Hierbei ist  $j$  der Index für die untere ( $j = 1$ ) oder obere ( $j = 2$ ) Lagergrenze, die bei jedem Lager bei  $Z = Z_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) verschieden sein kann.

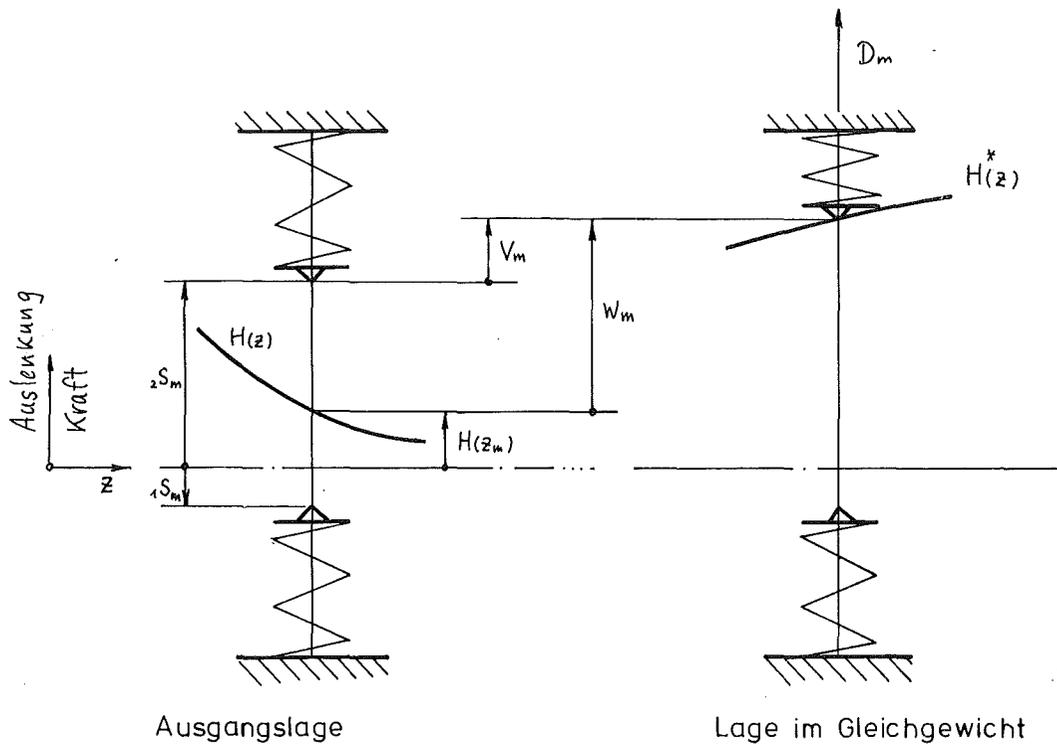


Abb.4.10 Schematische Darstellung der Lagerung des Balkens in einem spielbehafteten Lager an der Stelle  $Z = Z_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) bei einem normalen Fall

Aus den Gln. (4.11a), (4.11b) und (4.11c) erhält man das Gleichungssystem

$$[\alpha_{mn} + \omega_{mn}] \{D_n^*\} = \{j_s m\} - \{H(z_m)\} - [\beta_{mk}] \{P_k\} \quad (4.12)$$

Betrachtet man eine Kontaktstelle des Balkens mit einer der Kanten des spielbehafteten Lagers, so ist die Richtung der Auflagerkraft und die Auslenkung des Balkenpunktes entgegengesetzt. Der Balken kann sich jedoch in einem spielbehafteten Lager in drei verschiedenen Positionen befinden:

1. An der unteren Grenze des Spiels mit positiver Auflagerkraft.
2. An der oberen Grenze des Spiels mit negativer Auflagerkraft.
3. Zwischen den Grenzen des Spiels ohne Auflagerkraft.

Vorzeichen der Auflagerkraft $D_m^x$	Auslenkung des Balkens im spielbehafteten Lager $m$	
	beim elastisch nachgiebigen Lager	beim nicht nachgiebigen Lager
$D_m^x > 0$	$\xi_m < {}_1S_m$	$\xi_m = {}_1S_m$
$D_m^x < 0$	$\xi_m > {}_2S_m$	$\xi_m = {}_2S_m$
$D_m^x = 0$	${}_1S_m \leq \xi_m \leq {}_2S_m$	

Tabelle 4.2. Die Beziehung zwischen dem Vorzeichen der errechneten Auflagerkraft und der Auslenkung des Balkens in einem spielbehafteten Lager bei  $Z = Z_m$ .

Diese Beziehungen werden in der Tabelle 4.2 dargestellt, wobei  $\xi_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) die Auslenkungswerte der den spielbehafteten Lagern zugeordneten Balkenpunkte sind (Abb. 4.10).

$$\xi_m = H(z_m) + W_m$$

oder

$$\{\xi_m\} = \{H(z_m)\} + *[\beta_{mk}]\{P_k\} + [\alpha_{mn}]\{D_n^*\} \quad (4.13)$$

Die Auflagerkräfte  $D_n^x$  ( $n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) in den spielbehafteten Lagern können aus der Gl. (4.12) unter Einbeziehung der Bedingungen in der Tabelle 4.2. mit der Beziehung (4.13) berechnet werden. Dies setzt voraus, daß der Balken bei allen  $\bar{M}$  spielbehafteten Lagern auflagert. Da in der BAA  $\bar{M}$  spielbehaftete Lager vorhanden sind, gibt es grundsätzlich insgesamt  $3^{\bar{M}}$  Lagerungsmöglichkeiten. Nur eine davon erfüllt die Gleichgewichtsbedingung des Systems. Deshalb ist es erforderlich, maximal alle  $3^{\bar{M}}$  Fälle durchzurechnen, bis die Lagerkombination gefunden wird, bei der die Lagerungsbedingungen erfüllt sind. Die Verwendung des Gleichungssystems (4.12) ist jedoch nicht möglich, wenn der Balken nicht in allen  $\bar{M}$  spielbehafteten Lagern aufgelagert werden soll. In solchen Fällen müssen in der

Gl. (4.12) alle Glieder eliminiert werden, die mit solchen Lagern in Zusammenhang stehen, an denen der Balken nicht auflagert. Die Berechnung wird dann mit restlichen  $M^x$  Lagern fortgesetzt. Dabei spielt die Biegelinie für  $M^x = 0$ , d.h. die Biegelinie nur in festen Lagern, eine besondere Rolle. Verläuft die Biegelinie  $\bar{H}(Z) = H(Z) + \bar{K} \sum_{k=1}^{\bar{K}} \psi_k(Z) \cdot P_k$  bei allen spielbehafteten Lagern zwischen ihren Grenzen, so ist  $\bar{H}(Z)$  gleichzeitig die endgültige Biegelinie  $H^x(Z)$ , so daß die Berechnung der Auflagerkräfte mit der Gl. (4.12) überflüssig ist. Dabei sind alle spielbehafteten Lager kräftefrei. Verläuft jedoch die Biegelinie  $\bar{H}(Z)$  an spielbehafteten Lagern außerhalb der Spielgrenzen, so muß zunächst die Auflagerkraft  $D_n^x$  ( $n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) berechnet werden. Es werden nun insgesamt  $3^{\bar{M}} - 1$  mögliche Lagen untersucht. Bei der gesuchten Gleichgewichtslage muß die Balkenlage einerseits an den  $M^x$  in der Berechnung berücksichtigten spielbehafteten Lagern die Bedingungen in der Tabelle 4.2. erfüllen und zum anderen der Balken in den restlichen  $\bar{M} - M^x$  Lagern zwischen den Lagergrenzen hindurchgehen, so daß die zugehörigen Auflagerkräfte verschwinden.

Mit Hilfe so berechneter Auflagerkräfte  $D_m^x$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) können die Auflagerkräfte  $A_r^x$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R}$ ) in  $\bar{R}$  festen Lagern durch

$$\{A_r^x\} = \{A_r\} + [a_{rm}] \{D_m^x\} + [b_{rk}] \{P_k\} \quad (4.14)$$

und die Biegelinie  $H^x(Z)$  durch

$$H^x(z) = H(z) + \sum_{m=1}^{\bar{M}} \eta_m(z) \cdot D_m^x + \sum_{k=1}^{\bar{K}} \psi_k(z) \cdot P_k \quad (4.15)$$

bestimmt werden.

#### 4.4.2. Allgemeiner Fall

In einer als allgemeiner Fall eingeordneten BAA sind drei oder mehr Lager vorhanden, von denen höchstens eines fest ist. In diesem Abschnitt wird hierfür der Rechengang zur Bestimmung der Auflagerkräfte und der Biegelinie für eine BAA mit  $\bar{M}$  ( $\bar{M} > 3$ ) spielbehafteten und nachgiebigen Lagern untersucht, wenn der Balken zusätzlich durch  $\bar{K}$  ( $\bar{K} > 0$ ) Einzelkräfte belastet wird. Für die Lösung dieser Aufgabe wird hier die für den normalen Fall diskutierten Lösungsmethoden angewendet. Um dies zu ermöglichen, wird zunächst eine Ersatz-BAA definiert. Folgendes Vorgehen wird dabei gewählt:

Der Balken wird in der vorgegebenen BAA um einen beliebigen endlichen Betrag verlängert und am Ende dieser Verlängerung ein fiktives Einspannlager angebracht. Damit entsteht eine Ersatz-BAA. Die ursprüngliche und die Ersatz-BAA sind hinsichtlich ihrer Biegeeigenschaft völlig gleich, wenn die Auflagerreaktionen am fiktiven Einspannlager in der Ersatz-BAA in der Gleichgewichtsbedingung verschwinden. Damit ist die BAA vom allgemeinen Fall formal in einen normalen Fall überführt, mit nur einem Einspannlager als festes Auflager. Der Rechenvorgang folgt dem Vorgehen für den normalen Fall (Abschn. 4.4.1), wobei aber darüberhinaus sichergestellt werden muß, daß im Gleichgewichtszustand der Ersatz-BAA die Auflagerkraft und der Moment des fiktiven Einspannlagers verschwinden.

Betrachtet man  $\bar{M}$  Lager und die ihnen zugeordneten Balkenpunkte hinsichtlich ihrer Auslenkungen  $V_m$  und  $W_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) bei der Ersatz-BAA (Abb. 4.11), so erhält man die Beziehungen:

- für die Lager

$$\{V_m\} = -[\omega_{mn}]\{D_n^*\} \quad (4.16a)$$

- für die Balkenpunkte

$$\{W_m\} = [\alpha_{mn}]\{D_n^*\} + {}^*[\beta_{mk}]\{P_k\} \quad (4.16b)$$

Kommt der Balken bei  $Z = Z_m$  mit einer der Kanten des zugehörigen spielbehafteten Lagers in Kontakt (Abb. 4.10), so besteht die Beziehung

$$u + z_m \cdot \varkappa + W_m = {}_j S_m - H(z_m) + V_m$$

oder im allgemeinen

$$u + \varkappa \{z_m\} + \{W_m\} = \{{}_j S_m\} - \{H(z_m)\} + \{V_m\} \quad (4.16c)$$

Hierbei ist  $u$  die Verschiebung der Einspannstelle und  $\varkappa$  die Rotation des verlängerten Balkenteiles. Die Größen  $u$  und  $\varkappa$  werden deshalb in die Rechnung eingeführt, damit das verlängerte Teilstück des Balkens unverbogen bleibt und der Übergang der Balkenverlängerung zum Ausgangsbalken knickfrei verläuft. Die Gerade, auf der die Balkenachse des verlängerten Teilstücks liegt, ist die fiktive Nulllage eines "gewöhnlich" eingespannten Balkens. Außerdem gilt definitionsgemäß die Gleichgewichtsbedingung:



$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^M D_m^* &= 0 \\ \sum_{m=1}^M D_m^* \cdot z_m &= 0 \end{aligned} \right\} (4.16d)$$

Führt man die Beziehungen (4.16a) und (4.16b) in die Gl. (4.16c) ein und faßt man dies mit der Gl. (4.16d) zusammen, so erhält man das Gleichungssystem (4.17).

$$[\overline{\alpha_{mn} + \omega_{mn}}] \{ \overline{D_m^*} \} = \{ \overline{j S_m} \} - \{ \overline{H(z_m)} \} -^* [\overline{\beta_{mk}}] \{ P_k \} \quad (4.17)$$

Hierbei sind

$$[\overline{\alpha_{mn} + \omega_{mn}}] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \omega_{11} & \alpha_{12} + \omega_{12} & \dots & \alpha_{1\bar{n}} + \omega_{1\bar{n}} & z_1 & 1 \\ \alpha_{21} + \omega_{21} & \alpha_{22} + \omega_{22} & \dots & \alpha_{2\bar{n}} + \omega_{2\bar{n}} & z_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\bar{n}1} + \omega_{\bar{n}1} & \alpha_{\bar{n}2} + \omega_{\bar{n}2} & \dots & \alpha_{\bar{n}\bar{n}} + \omega_{\bar{n}\bar{n}} & z_{\bar{n}} & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{\bar{n}} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$^* [\overline{\beta_{mk}}] = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1\bar{n}} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2\bar{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{\bar{n}1} & \beta_{\bar{n}2} & \dots & \beta_{\bar{n}\bar{n}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{ \overline{D_n^*} \} = \begin{pmatrix} D_1^* \\ D_2^* \\ \vdots \\ D_{\bar{n}}^* \\ \mathcal{R} \\ u \end{pmatrix}$$

$$\{ \overline{H(z_m)} \} = \begin{pmatrix} H(z_1) \\ H(z_2) \\ \vdots \\ H(z_{\bar{n}}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Auflagerkräfte  $D_n^x$  ( $n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ), die Verschiebung  $u$  und die Rotation  $\varkappa$  lassen sich durch das Gleichungssystem (4.17) berechnen. In der Gleichgewichtslage sind zwischen dem Vorzeichen der Auflagerkraft und der Auslenkung des zugehörigen Balkenpunktes die in der Tabelle 4.2. angegebenen Bedingungen gültig, wie im Abschn. 4.4.1. Dabei sind die Auslenkungswerte  $\xi_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) durch

$$\{\xi_m\} = u + \varkappa \{z_m\} + \{H(z_m)\} + [\alpha_{mn}] \{D_n^*\} + [\beta_{mk}] \{P_k\} \quad (4.18)$$

anzugeben.

Die Beziehung (4.17) und (4.18) sind gültig, wenn der Balken in allen  $\bar{M}$  Lagern auflagert, was nicht immer der Fall sein kann. Beim normalen Fall sind insgesamt  $3^{\bar{M}}$  Kombinationen von Lagen für die vorgegebenen  $\bar{M}$  spielbehafteten Lager möglich (Abschn. 4.4.1.). Die Zahl  $3^{\bar{M}}$  setzt sich aus den Mengen von  $\binom{\bar{M}}{m} \cdot 2^{\bar{M}-m}$  Kombinationen mit  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) Lagern zusammen, bei denen der Balken innerhalb der Lagergrenzen kräftefrei verläuft.

$$3^{\bar{M}} = \sum_{m=0}^{\bar{M}} \binom{\bar{M}}{m} \cdot 2^{\bar{M}-m} \quad (4.19a)$$

Da im allgemeinen Fall ohne zusätzliche Einzelkraft ( $\bar{K} = 0$ ) der Balken mindestens in drei Lagern aufgelagert werden muß, wird nun aus  $3^{\bar{M}}$  die Zahl  $L$  für die Kombinationen aus weniger als drei Lagern abgezogen.

$$L = \sum_{m=\bar{M}-2}^{\bar{M}} \binom{\bar{M}}{m} \cdot 2^{\bar{M}-m}$$

oder

$$L = 2 \cdot \bar{M}^2 + 1 \quad (4.19b)$$

Damit ist im allgemeinen Fall die Untersuchung von maximal  $3^{\bar{M}} - (2 \cdot \bar{M}^2 + 1)$  Kombinationen mit jeweils  $M^x$  ( $3 \leq M^x \leq \bar{M}$ ) erforderlich, um die endgültige Lage des Balkens in vorgegebenen  $\bar{M}$  spielbehafteten Lagern zu ermitteln. Diese Untersuchung läßt sich aber mit den Gln. (4.17) und (4.18) durchführen, indem dort jeweils  $M^x$  statt  $M$  eingesetzt wird. Dabei werden alle Glieder eliminiert, die mit den restlichen  $\bar{M} - M^x$  Lagern in Zusammenhang stehen. Bei der gesuchten Lage muß der Balken an diesen  $\bar{M} - M^x$  Lagern zwischen den Lagergrenzen lastfrei hindurchgehen, wie im normalen Fall.

Mit Hilfe so berechneter Auflagekräfte  $D_m^x$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) sowie den Größen  $u$  und  $\varkappa$  kann die Biegelinie  $H^x(Z)$  berechnet werden.

$$H^x(Z) = H(Z) + u + \varkappa \cdot z + \sum_{m=1}^{\bar{M}} \eta_m(z) \cdot D_m^x + \sum_{k=1}^{\bar{K}} \nu_k(z) \cdot P_k \quad (4.20)$$

Die hier vorgeführte Lösungsmethode für den allgemeinen Fall kann bei allen ebenen BAA ohne eingespanntes Lager angewendet werden, einschließlich spielfreie BAA und normaler Fall.

#### 4.4.3. Mehrdeutiger Fall

Bei einem mehrdeutigen Fall wirkt in der BAA keine Kraft. Diese Situation tritt bei der BAA mit nur zwei Lagern auf, von denen höchstens eines spielfrei ist oder in Sonderfällen bei der BAA mit drei oder mehr Lagern (Abschn. 4.3.). Das eigentliche Problem hierbei ist die Ermittlung einer quasi stabilen Lage des Balkens innerhalb der Kernanordnung. Dies kann nur nach Festlegung bestimmter Konventionen erfolgen. Hierbei sind folgende Möglichkeiten denkbar:

Der Balken soll durch Eigengewicht an die Grenzen der spielbehafteten Lager anlehnen, wobei der unterste Balkenpunkt auf einer Horizontallinie bis zum stabilen Zustand gleiten kann. Die Möglichkeit einer derartigen Anlehnung wird in Abb. 4.12 bei zwei spielbehafteten Lagern gezeigt, wobei die strich-punktierte Linie die vorgegebene, die gestrichelte Linie die nicht stabile und die durchgezogene

Linie die stabile Lage des Balkens sein soll. Es ist jedoch nicht immer möglich, die Balkenlage nach dieser Vorschrift eindeutig zu bestimmen (Abb. 4.12). Man kann als "endgültige Lage" des Balkens z.B. die mit größter Schrägstellung festlegen.

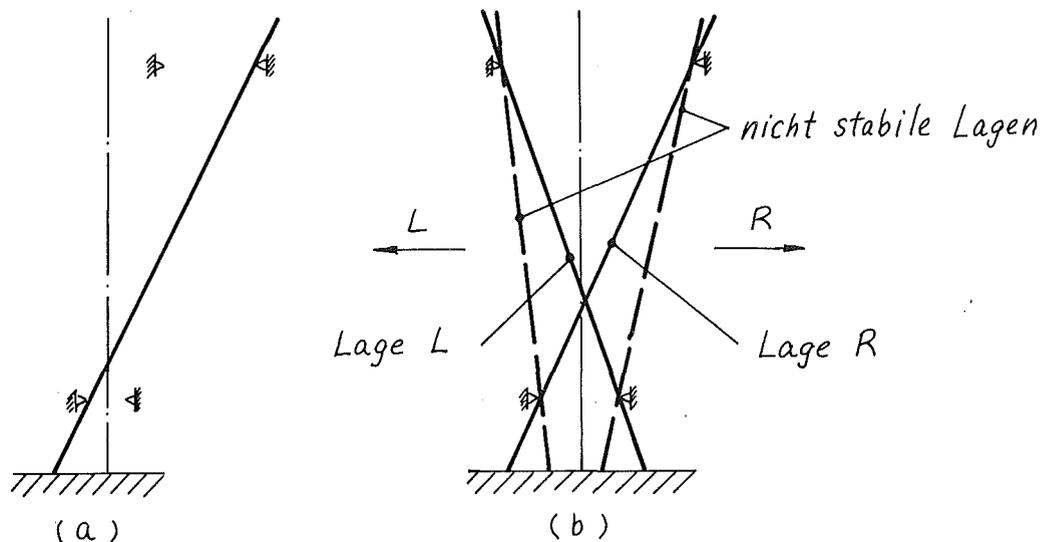


Abb. 4.12 Schematische Darstellung für das quasi stabile Anliegen des Balkens in zwei spielbehafteten Lagern beim mehrdeutigen Fall

Bei der BAA mit mehr als zwei Lagern werden zunächst die Kombinationen von zwei Lagern gebildet, so daß jeweils die "endgültigen Lagen" ermittelt werden, bei denen der Balken in allen Lagern innerhalb der Lagerspiele verläuft. Sind in der Anordnung mehrere solche "endgültige Lagen" mit gleicher Schrägstellung vorhanden, so werden für die Festlegung der "gesuchten Lage" zusätzliche (willkürliche) Vorschriften eingeführt. Eine derartige Vorschrift wäre die Neigungsrichtung des obersten Balkenpunktes, beispielsweise die Lage R. Dabei ist der oberste Balkenpunkt nach rechts ausgelenkt, während der unterste Balkenpunkt nach links ausgelenkt sein soll (Abb. 4.12.).

## 5. Berechnung der Auflagerkräfte und der Biegelinie bei räumlicher Balken-Auflager-Anordnung

### 5.1. Einführung

In diesem Kapitel sollen, wie bei der ebenen BAA, ausgehend von der freien Verbiegung des Balkens und der LA in einer räumlichen BAA bei zusätzlichen Einzelkräften die Auflagerreaktionen und die Biegelinie berechnet werden. Dabei sei die räumliche freie Verbiegung des Balkens durch zwei ebene freie Verbiegungen in X- und Y-Richtung vorgegeben.

Die Untersuchung eines Biegebalkens in ausschließlich festen Lagern ist relativ einfach, da das Problem sich in zwei beliebig vorgegebenen Biegeebenen unabhängig voneinander behandeln läßt [23]. Ist jedoch der Balken in spielbehafteten Lagern aufgelagert, so ist das Problem komplizierter. Die Schwierigkeiten treten dabei bei den spielbehafteten Lagern auf, da dort im Gegensatz zu festen Lagern die Lagerstellen des Balkens zunächst unbestimmt sind. Es muß daher auf die Beziehung des Balkenquerschnittes zum zugehörigen spielbehafteten Lager eingegangen werden.

Das vorliegende Lösungsverfahren liegt im Anwendungsbereich der elementaren Theorie der reinen Biegung. Es behandelt den auf die Balkenachse reduzierten Balken. Für jedes spielbehaftete Lager wird dabei eine sog. reduzierte Lagerkontur (abgekürzt: rLkt), d.h. ein auf die Balkenachse bezogenes Lager, eingeführt (Abschn. 5.2.). Die rLkt ist allgemein eine geschlossene konvexe Linie: hier interessieren insbesondere gleichmäßige Mehrecke mit geraden Seitenzahlen oder Kreise. Bevor auf das Lösungsverfahren eingegangen wird, muß zuerst, ähnlich wie beim ebenen Fall, untersucht werden, ob die BAA eindeutig oder mehrdeutig ist. Wenn in der Anordnung mindestens zwei spielfreie Lager vorhanden sind, ist die BAA eindeutig (normaler Fall). Bei einer BAA mit höchstens einem spielfreien Lager muß dagegen zuerst die Eindeutigkeit der BAA festgestellt werden. Hier wird eine räumliche Eindeutigkeitsanalyse notwendig (Abschn. 5.4.), bei der die mögliche Starrkörperbewegung des Balkens in der LA untersucht wird.

Für eindeutige Fälle liefert die Eindeutigkeitsanalyse jedoch nicht immer die Lagerstellen des Balkens in den rLKt. Deshalb werden zunächst bei einer angenommenen Lage des Balkens in den rLKt mit Hilfe der Lösungsmethode der ebenen BAA (Abschn. 5.5. ) unter Verwendung von sog. rechteckigen Ersatzkonturen (abgekürzt: rEKt) Auflagerkräfte berechnet. Eine rEKt ist eine sich innerhalb der vorgegebenen rLKt befindliche rechteckige Kontur, deren Seiten zur X- und Y-Richtung parallel sind.

Anschließend werden die aufgrund der angenommenen Auslenkung erwarteten und errechneten Richtungen der resultierenden Auflagerkräfte bei jedem spielbehafteten Lager verglichen. Derartige Rechenvorgänge werden so lange wiederholt, bis die Differenz der Richtungen von der erwarteten und errechneten Richtung der resultierenden Auflagerkräfte bei allen spielbehafteten Lagern eine vorgegebene Größe unterschreitet. Wenn die Auslenkungsstellen des Balkens in den rLKt ermittelt worden sind, kann die Biegelinie berechnet werden. Anschließend werden mehrdeutige Fälle untersucht (Abschn. 5.5.5.).

## 5.2. Die reduzierte Lagerkontur

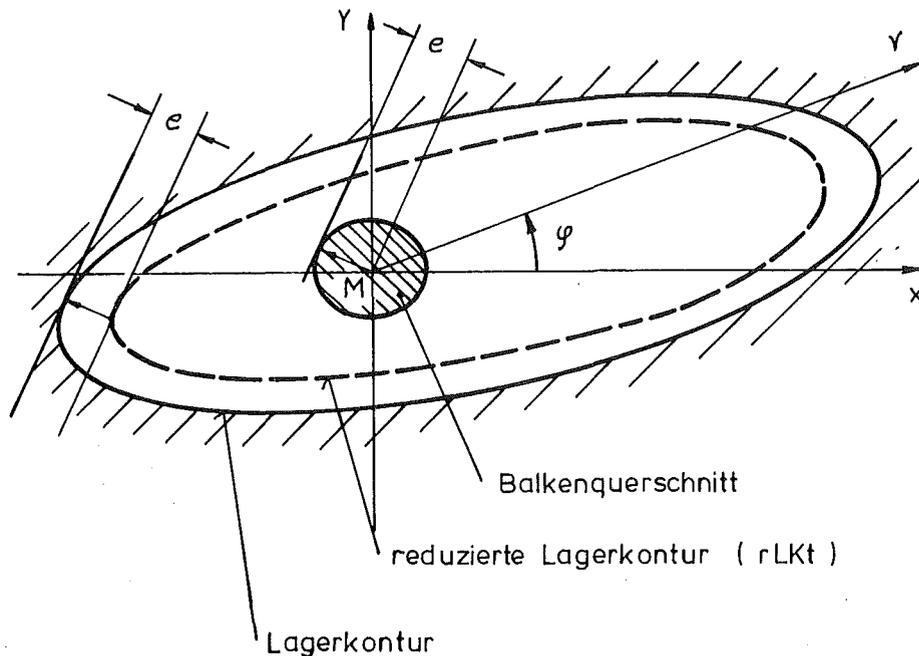
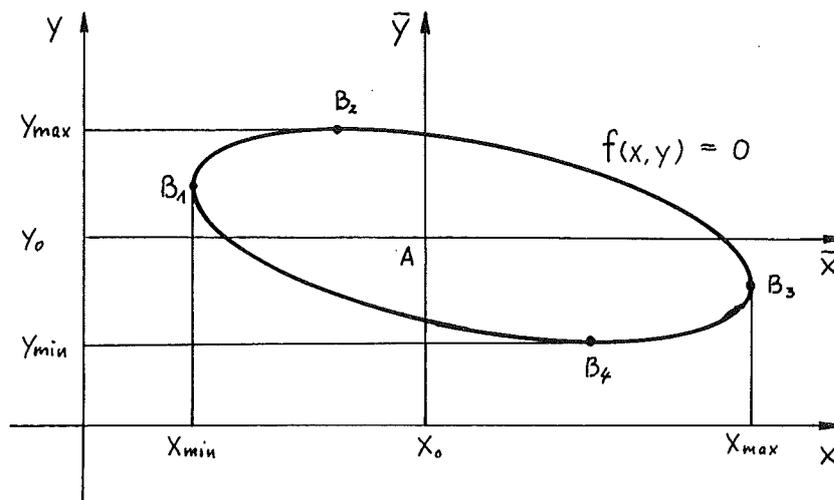


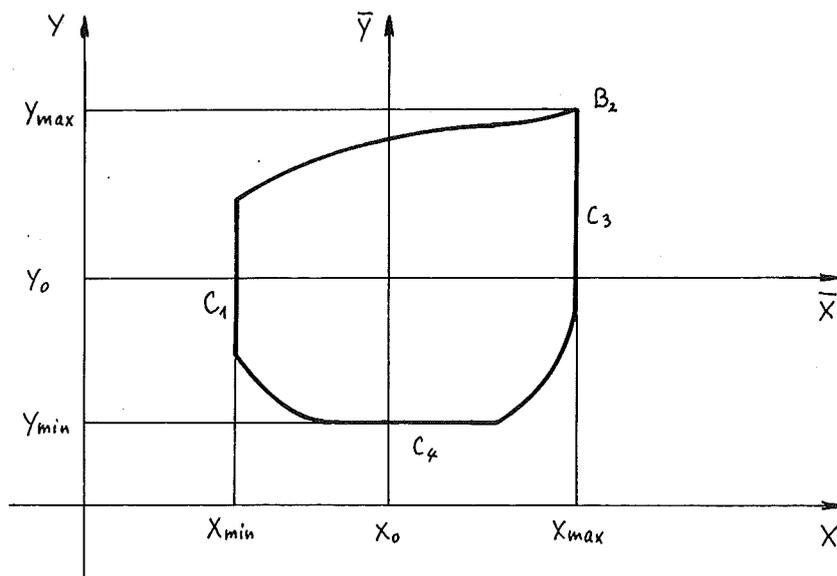
Abb. 5.1 Schematische Darstellung zur Bestimmung der reduzierten Lagerkontur (rLkt) aus dem Balkenquerschnitt und der zugehörigen spielbehafteten Lagerkontur

In Abb. 5.1. ist ein zur Balkenachse senkrechter Schnitt durch den Balken und das zugehörige spielbehaftete Lager schematisch dargestellt. Entsprechend der torsionsfreien Auslenkung des Balkens innerhalb der Lagerkontur wird die Grenzlinie des möglichen Bereiches des Flächenschwerpunktes M des Balkenquerschnittes als "reduzierte Lagerkontur" (rLkt) bezeichnet. Eine rLkt soll allgemein eine geschlossene Linie darstellen, die ein konvexes Gebiet umschließt und singuläre Punkte haben kann.

Die rLkt in der Lagerebene wird durch  $f(x, y) = 0$  in kartesischen Koordinaten bzw.  $f^*(\varphi, \gamma) = 0$  in Polarkoordinaten beschrieben.



a) Randpunkte  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ , und  $B_4$



b) Randstrecken  $C_1$ ,  $C_3$ , und  $C_4$

Randpunkt  $B_2$

Abb.5.2 Randpunkte und Randstrecken  
der Konturen

Die Funktion  $f(x, y) = 0$  ist in einem Bereich zwischen den Werten  $X_{\min}$  und  $X_{\max}$  bzw.  $Y_{\min}$  und  $Y_{\max}$  für X- bzw. Y-Richtung definiert (Abb. 5.2.). Eine derartige Bereichsgrenze stellt entweder ein Punkt oder eine gerade Strecke dar. Handelt es sich bei einer Grenze um einen Punkt, so wird sie als ein "Randpunkt" und sonst als eine "Randstrecke" der rLkt bezeichnet (Abb. 5.2.). Ein Konturpunkt, der weder in der Randstrecke liegt noch ein Randpunkt ist, wird als ein "Normalpunkt" bezeichnet. Da es sich um eine reibungsfreie Lagerung des Balkens handelt, kann für das weitere vorausgesetzt werden, daß die Auflagerkraft  $A^x$  immer normal zur rLkt wirkt (Abb. 5.3.). Die Auflagerkraft muß an der Lagerstelle stets in das Innere der rLkt gerichtet sein. Diese Richtung wird dann als positive Richtung der Auflagerkraft definiert. Bei einer eventuell möglichen Knickstelle (singulärer Punkt) in der rLkt kann die Auflagerkraft  $A^x$  in zwei Komponenten  $A^x_1$  und  $A^x_2$  zerlegt werden, die jeweils normal zu beiden Tangenten der rLkt wirken, so daß die Resultierende  $A^x$  sich innerhalb des zugehörigen Wickelbereiches befinden muß (Abb. 5.3.).

Für einen regulären Punkt A' der rLkt besteht zwischen dem Neigungswinkel  $\mu$  der Auflagerkraft  $A^x$  und dem Neigungswinkel  $\nu$  der Tangente an die Kontur die Beziehung (Abb. 5.3.a):

$$\mu = \nu - \pi/2 \quad (5.01)$$

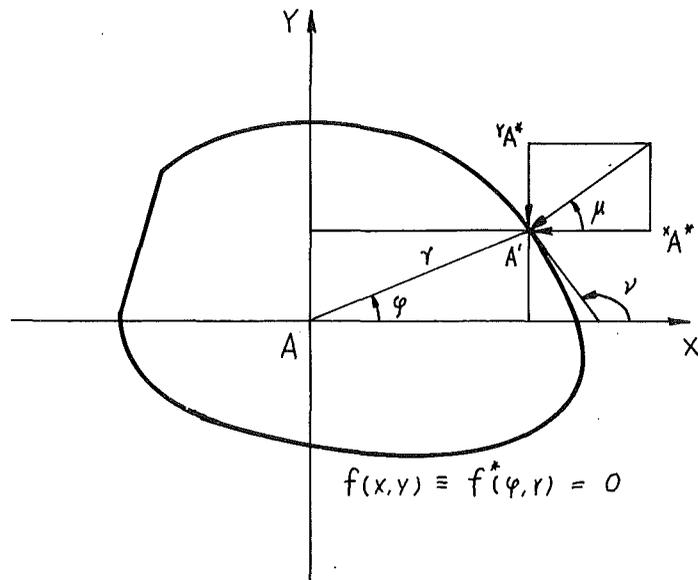
Da  $\nu$  die Neigungswinkel der Tangente an die rLkt ist, gilt

$$A_g \nu = \dot{Y} \quad (5.02a)$$

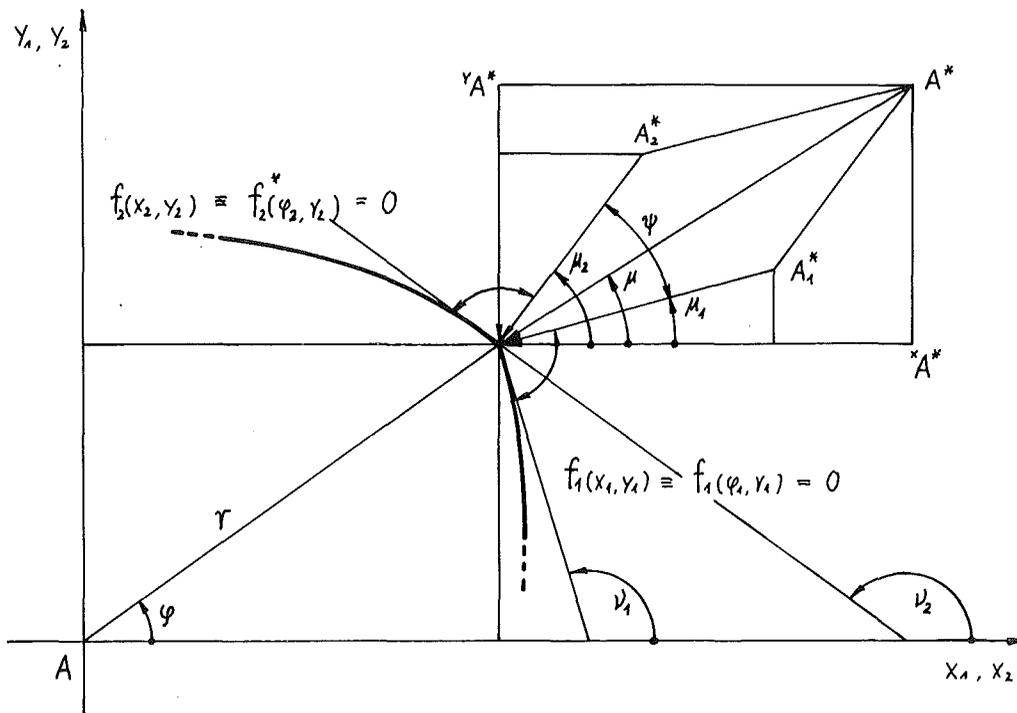
in kartesischen Koordinaten bzw.

$$A_g \nu = \frac{\dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi}{r \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi} \quad (5.02b)$$

in Polarkoordinaten. Hierbei bedeuten



a) an einem regulärem Punkt



b) an einem singulärem Punkt

Abb. 5.3 Die Beziehungen bei der Lagerung des Balkens an einem Punkt der rLkT

$$\left. \begin{aligned} \dot{Y} &= dY(X) / dX \\ \dot{r} &= dr(\varphi) / d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (5.02c)$$

Daraus folgen für kartesische Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} \sin \mu &= 1 / \sqrt{1 + \dot{Y}^2} \\ \cos \mu &= \dot{Y} / \sqrt{1 + \dot{Y}^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.03a)$$

bzw. für Polarkoordinaten

$$\left. \begin{aligned} \sin \mu &= \frac{\dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}} \\ \cos \mu &= \frac{\dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}} \end{aligned} \right\} \quad (5.03b)$$

Außerdem gelten für die Komponenten  $x_{A^*}$  und  $y_{A^*}$  der Auflagerkraft  $A^*$  in  $\bar{X}$ - und  $\bar{Y}$ -Richtung die Beziehungen zu

$$\left. \begin{aligned} x_{A^*} &= A^* \cos \mu \\ y_{A^*} &= A^* \sin \mu \\ \tan \mu &= y_{A^*} / x_{A^*} \\ \text{und} \quad A^* &= \sqrt{x_{A^*}^2 + y_{A^*}^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.04)$$

Für einen singulären Punkt bestehen zwischen den Neigungswinkeln  $\mu_1$  und  $\mu_2$  der Grenzlinien des Bereiches und den Neigungswinkeln  $\nu_1$  und  $\nu_2$  der zugehörigen Tangenten die Beziehung (Abb. 5.3b):

$$\begin{aligned} \mu_j &= \nu_j - \pi/2 \\ (j &= 1 \text{ und } 2) \end{aligned} \quad (5.05a)$$

Entsprechend der Beziehungen (5.02a) bis (5.03b) erhält man für einen singulären Punkt in kartesischen Koordinaten

$$\tan \nu_j = \dot{Y}_j$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \mu_j &= 1 / \sqrt{1 + \dot{Y}_j^2} \\ \cos \mu_j &= \dot{Y}_j / \sqrt{1 + \dot{Y}_j^2} \end{aligned} \right\} (5.05b)$$

mit

$$\dot{Y}_j = dY_j(X_j) / dX_j$$

$$(j = 1, 2)$$

bzw. in Polarkoordinaten

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \nu_j &= - \frac{\dot{r}_j \sin \varphi_j + r_j \cos \varphi_j}{\dot{r}_j \cos \varphi_j + r_j \sin \varphi_j} \end{aligned} \right\} (5.05c)$$

$$\sin \nu_j = \frac{\dot{r}_j \cos \varphi_j - r_j \sin \varphi_j}{\sqrt{\dot{r}_j^2 + r_j^2}}$$

$$\cos \nu_j = - \frac{\dot{r}_j \sin \varphi_j + r_j \cos \varphi_j}{\sqrt{\dot{r}_j^2 + r_j^2}}$$

mit  $\dot{r}_j = dr_j(\varphi_j) / d\varphi_j$

$$(j = 1, 2)$$

Die auf beiden Tangenten senkrechten Komponenten  $A_1^x$  und  $A_2^x$  der Auflagerkraft  $A^x$  (Abb. 5.03b) können zunächst in  $x_{A_1}^x$ ,  $Y_{A_1}^x$ ,  $x_{A_2}^x$  und  $Y_{A_2}^x$  bezüglich der X- und Y-Richtung zerlegt und anschließend zu  $x_{A^x}$  und  $Y_{A^x}$  zusammengefaßt werden. Dann gilt

$$\left. \begin{aligned} x_{A_j}^x &= A_j^x \cdot \cos \mu_j \\ Y_{A_j}^x &= A_j^x \cdot \sin \mu_j \\ A_j^x &= \sqrt{x_{A_j}^{x2} + Y_{A_j}^{x2}} \\ \operatorname{tg} \mu_j &= Y_{A_j}^x / x_{A_j}^x \\ (j &= 1, 2) \end{aligned} \right\} (5.05d)$$

und

$$\left. \begin{aligned} x_A^x &= x_{A_1}^x + x_{A_2}^x \\ Y_A^x &= Y_{A_1}^x + Y_{A_2}^x \end{aligned} \right\} \quad (5.05e)$$

Bei einer rLkt ohne singulären Punkt ist nach der Gl. (5.03b) jedem  $\varphi$ -Wert ein  $\mu$ -Wert eindeutig zugeordnet. Wie später noch zu sehen ist, ist es notwendig, für einen vorgegebenen  $\mu$ -Wert den zugehörigen  $\varphi$ -Wert zu ermitteln. Eine derartige Ermittlung ist leicht durchzuführen, wenn die rLkt durch eine einfache Funktion von  $f(X, Y) = 0$  bzw.  $f^x(\varphi, r) = 0$  darzustellen ist, z.B. bei einer kreisförmigen rLkt mit dem Radius  $a$

$$r = a \quad (5.06a)$$

Da  $\dot{r} = 0$  ist, erhält man aus der Gl. (5.036)

$$\left. \begin{aligned} \sin\mu &= -\sin\varphi \\ \cos\mu &= -\cos\varphi \end{aligned} \right\} \quad (5.06b)$$

Ist jedoch die rLkt nicht durch eine einfache Funktion darzustellen, so müssen neben den Funktionswerten aus  $f(X, Y) = 0$  bzw.  $f^x(\varphi, r) = 0$  die Werte der Neigungswinkeln  $\nu_{(\varphi)}$  und  $\mu_{(\varphi)}$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  tabellarisch bekannt sein. Die Werte  $\nu$ ,  $\mu$  und  $\varphi$  sind zu einander eindeutig. Beim Auftreten eines geraden Bereiches der rLkt ist der  $\mu$ -Wert für einen bestimmten Bereich von  $\varphi$  konstant.

Bei einer geschlossenen konvexen Kontur ist einem regulären Punkt eine Tangente zugeordnet. Dagegen gibt es für einen singulären Punkt eine Schar von Tangenten, während für die Punkte einer geraden Konturstrecke nur eine gemeinsame Tangente vorhanden ist.

Danach ist einer Tangente eine sog. Tangentenbasis zugeordnet, die die Berührungsstelle der Tangente mit der Kontur ist. Eine Tangentenbasis ist demnach entweder ein Punkt oder eine gerade Strecke.

Als Sonderform der konvexen Kontur sind gerade Strecken und Punkte denkbar.

### 5.3. Bestimmung der projizierten Kontur

Die Eindeutigkeitsanalyse ist die Untersuchung zur Feststellung der möglichen Starrkörperbewegung des Balkens in einer LA. Dabei wird die sog. projizierte Kontur (abgekürzt: PrKt) verwendet.

Bei vorgegebenen drei Lagern ist die PrKt in einer Lagerebene die Grenzlinie der Spur, die durch die mögliche Starrkörperbewegung des geraden Balkens in zwei anderen Lagern beschrieben wird. Im folgenden wird die Methode zur Bestimmung der PrKt erläutert: Gegeben seien drei parallelen Lagerebenen  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  in einem kartesischen Koordinatensystem  $(X, Y, Z)$  mit dem Koordinatenursprung in der Ebene  $E_3$ , wobei die  $Z$ -Richtung zu den Ebenen senkrecht steht (Abb. 5.04). In der Ebene  $E_1$  bzw.  $E_2$  ist eine  $X$  und  $Y$  parallele ebene Koordinate  $(\bar{X}, \bar{Y})$  bzw.  $(\bar{\bar{X}}, \bar{\bar{Y}})$  definiert, deren Koordinatenursprung mit  $(0, 0, a)$  bzw.  $(0, 0, b)$  gegeben ist. In den Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  ist jeweils die rLkt  $f_1$  bzw.  $f_2$  durch die Funktion  $f_1(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$  bzw.  $f_2(\bar{\bar{X}}, \bar{\bar{Y}}) = 0$  definiert. Eine Verbindungsgerade zweier beliebiger Punkte  $(\bar{X}_0, \bar{Y}_0)$  und  $(\bar{\bar{X}}_0, \bar{\bar{Y}}_0)$  mit den Beziehungen  $f_1(\bar{X}_0, \bar{Y}_0) < 0$  und  $f_2(\bar{\bar{X}}_0, \bar{\bar{Y}}_0) < 0$  hat einen Schnittpunkt  $(X_0, Y_0)$  mit der Ebene  $E_3$ . Alle derartigen Schnittpunkte lassen sich durch eine konvexe Linie  $\psi$  mit der Beziehung  $\psi(X, Y) = 0$  umschließen [17, 30].  $\psi$  ist dabei die PrKt in der Ebene  $E_3$  (Abb. 5.04).

Da die rLkt  $f_1$  und  $f_2$  die Formen von Punkt, Strecke oder konvexe geschlossene Linie haben können, sind bezüglich der Erzeugung der PrKt in  $E_3$  sechs Kombinationen möglich:

1) Punkt	-	Punkt
2) Punkt	-	Strecke
3) Punkt	-	geschlossene Linie
4) Strecke	-	Strecke
5) Strecke	-	geschlossene Linie
6) geschlossene Linie	-	geschlossene Linie

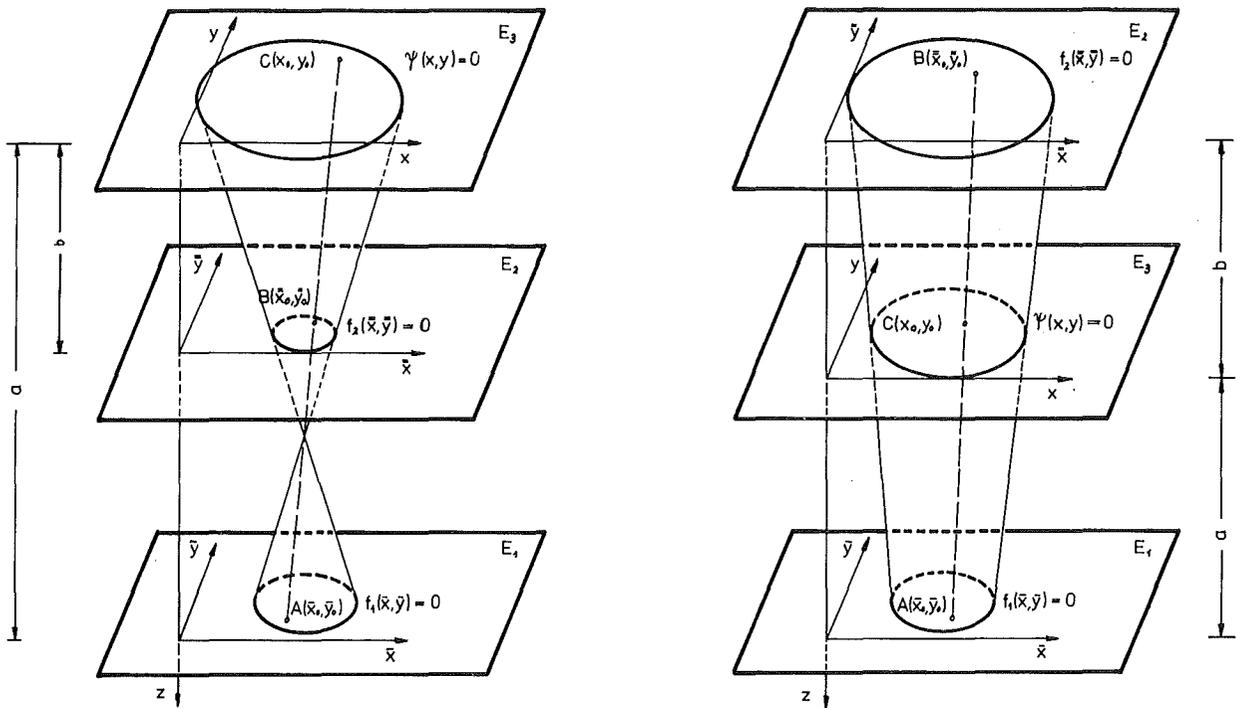


Abb. 5.04 Schematische Darstellung zur Bestimmung der projizierten Kontur ( PrKt )

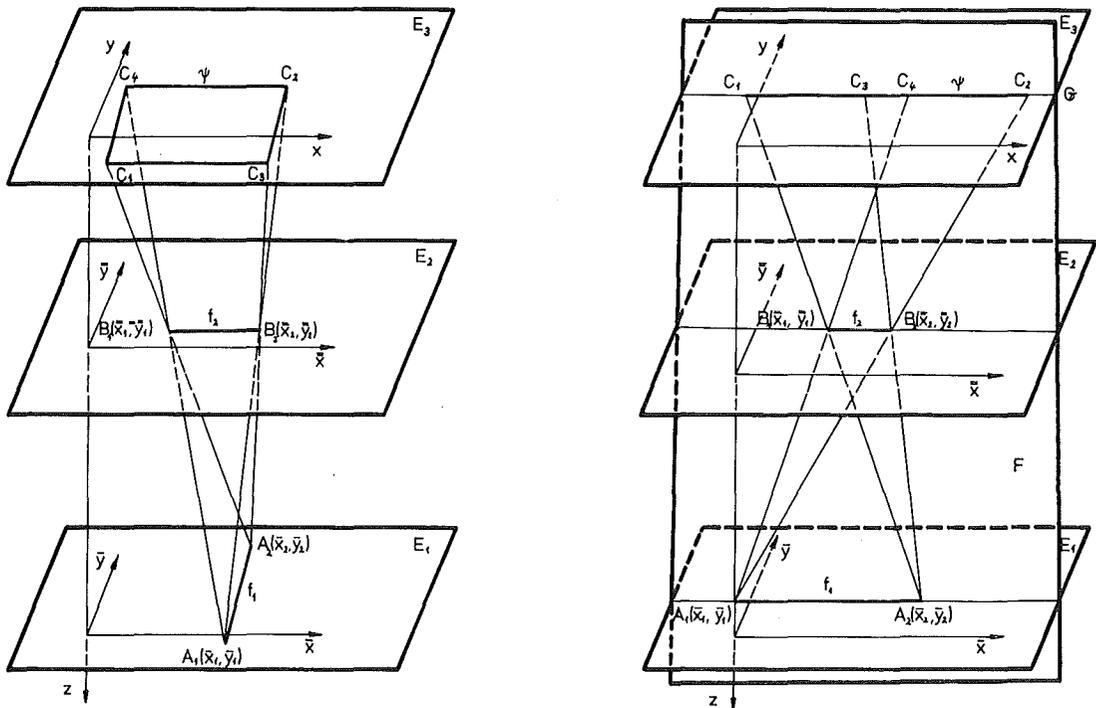


Abb. 5.05 Die Bestimmung der PrKt für zwei rLKt von Strecken

Im folgenden wird die Bestimmung der PrKt für diese Fälle behandelt.

Sind die rLKt  $f_1$  und  $f_2$  die Punkte A  $(\bar{X}_0, \bar{Y}_0)$  und B  $(\bar{\bar{X}}_0, \bar{\bar{Y}}_0)$ , so ist die PrKt auch ein Punkt C  $(X_0, Y_0)$ , nämlich der Schnittpunkt der Ebene  $E_3$  mit der Geraden  $\overline{AB}$  (Abb. 5.04). Die Koordinate  $(X_0, Y_0)$  ergibt sich dabei aus

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= \frac{a\bar{\bar{X}}_0 - b\bar{X}_0}{a - b} \\ Y_0 &= \frac{a\bar{\bar{Y}}_0 - b\bar{Y}_0}{a - b} \end{aligned} \right\} \quad (5.07)$$

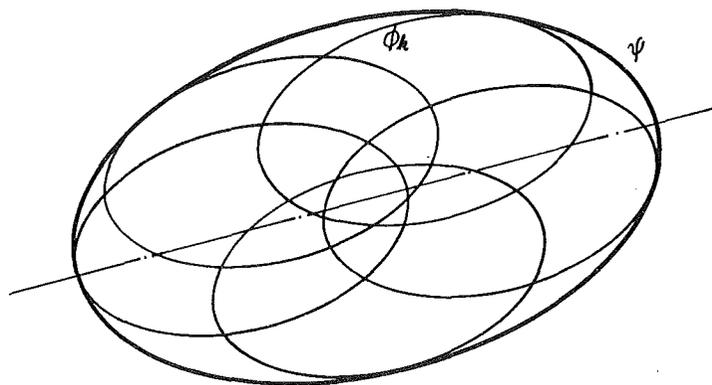
Für den Fall 2 oder 3, daß  $f_1$  ein Punkt mit der Koordinate  $(\bar{X}_0, \bar{Y}_0)$  und  $f_2$  eine Strecke oder eine geschlossene Linie mit der Funktion  $f_2(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$  ist, ist jedem Konturpunkt  $(\bar{\bar{X}}_0, \bar{\bar{Y}}_0)$  von  $f_2$  mit dem Punkt  $(\bar{X}_0, \bar{Y}_0)$  ein Punkt in der Ebene  $E_3$  nach den Gln. (5.07) zugeordnet. Die Spur derartiger Punkte ist die PrKt mit der Gl.  $\Psi(X, Y) = 0$ , die der Gl.  $f_2(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$  ähnlich ist.

$$\Psi(x, y) = f_2\left(\frac{(a-b)x - b\bar{X}_0}{a}, \frac{(a-b)y - b\bar{Y}_0}{a}\right) = 0 \quad (5.08)$$

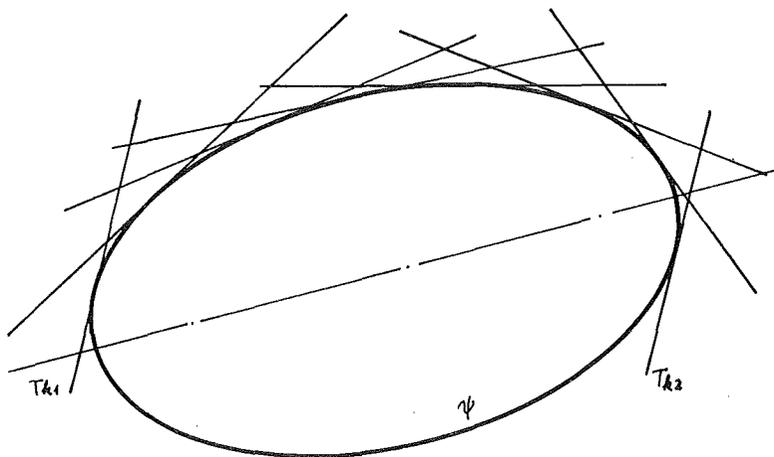
Für den Fall 4, bei dem  $f_1$  und  $f_2$  gerade Strecken  $\overline{A_1A_2}$  und  $\overline{B_1B_2}$  sein sollen (Abb. 5.05a), sind die vier Endpunkte  $A_1, A_2, B_1$  und  $B_2$  durch die Koordinaten  $(\bar{X}_1, \bar{Y}_1), (\bar{X}_2, \bar{Y}_2), (\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{Y}}_1)$  und  $(\bar{\bar{X}}_2, \bar{\bar{Y}}_2)$  vorgegeben. In diesem Fall ist die PrKt ein Parallelogramm, dessen Endpunkte  $C_1, C_3, C_2$  und  $C_4$  die Schnittpunkte der Ebene  $E_3$  mit den Geraden  $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_1}, \overline{A_2B_2}$  und  $\overline{A_1B_2}$  sind (Abb. 5.05a). Die Koordinaten von  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) können nach der Gl. (5.07) berechnet werden. Sind die Strecken  $\overline{A_1A_2}$  und  $\overline{B_1B_2}$  miteinander parallel, so liegen die Punkte  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) auf einer  $\overline{A_1A_2}$  und  $\overline{B_1B_2}$  parallelen Geraden  $G$  in der Ebene  $E_3$ , so daß die PrKt ebenfalls eine Strecke  $\overline{C_1C_2}$  ist (Abb. 5.05b). Dabei ist die Gerade  $G$  die Schnittlinie der Ebene  $E_3$  mit der durch zwei Parallelen  $\overline{A_1A_2}$  und  $\overline{B_1B_2}$  bestimmten Ebene  $F$  (Abb. 5.05b).

Die Bestimmung der PrKt für den Fall 5 läßt sich aus der allgemeinen Bestimmungsmethode der PrKt ableiten. Es wird daher hier darauf nicht näher eingegangen.

Die allgemeine Bestimmungsmethode der PrKt basiert auf den Methoden der Bestimmung von PrKt für die bisher behandelten einfachen Fälle. Danach ist die resultierende PrKt (Abb. 506)



Möglichkeit b



Möglichkeit a

Abb.5.06 Zwei Möglichkeiten zur Darstellung der PrKt

- a) die Einhüllende [17.30] aller PrKt  $\phi_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), die durch die Kontur  $f_2$  und jeweils einem Punkt  $P_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) der Kontur  $f_1$  mit den Koordinaten  $(X_k, Y_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) bestimmt werden.
- b) die Hüllkurve [17.30] aller Schnittlinien  $T_{k1}$  und  $T_{k2}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), die von den Tangentialebenen  $F_{k1}$  und  $F_{k2}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) in der Ebene  $E_3$  erzeugt werden. Die Tangentialebenen  $F_{k1}$  und  $F_{k2}$  sind durch die jeweils parallelen Tangenten an die Konturen  $f_1$  und  $f_2$  bestimmt.

Im folgenden wird die Anwendung beider Möglichkeiten zur Bestimmung der PrKt diskutiert. Entsprechend der Gl. (5.08) läßt sich durch die rLKt  $f_2$  und einem Punkt  $(\bar{X}_k, \bar{Y}_k)$  der rLKt  $f_1$  eine PrKt  $\phi_k$  bestimmen. Alle derartigen PrKt sind durch die Gln.

$$\phi_k(x, y, \bar{x}_k, \bar{y}_k) = f_2\left(\frac{(a-b)x - b\bar{x}_k}{a}, \frac{(a-b)y - b\bar{y}_k}{a}\right) = 0 \quad \text{und}$$

$$f_1(\bar{x}_k, \bar{y}_k) = 0$$

gegeben. Die Einhüllende  $\Psi$  aller  $\phi_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) ergibt sich nach [17.7] aus der Beziehung

$$\Psi(x, y, c_1, c_2) = f_2\left(\frac{(a-b)x - bc_1}{a}, \frac{(a-b)y - bc_2}{a}\right) = 0 \quad (5.09)$$

durch das Einsetzen der Funktionen  $C_1 = C_1(X, Y)$  und  $C_2 = C_2(X, Y)$ .

$C_1$  und  $C_2$  lassen sich aus

$$\left. \begin{aligned} f_1(c_1, c_2) &= 0 \\ \frac{\partial \Psi(x, y, c_1, c_2)}{\partial c_1} \cdot dc_1 - \frac{\partial \Psi(x, y, c_1, c_2)}{\partial c_2} \cdot dc_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

berechnen.

Bei einem einfachen Beispiel, bei dem  $f_1$  und  $f_2$  Kreise sind, gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} (\bar{X} - m_x)^2 + (\bar{Y} - m_y)^2 - r_1^2 &= 0 \\ (\bar{\bar{X}} - n_x)^2 + (\bar{\bar{Y}} - n_y)^2 - r_2^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.11a)$$

ist die PrKt  $\psi$  ebenfalls ein Kreis

$$(x-h_x)^2 + (y-h_y)^2 - r^2 = 0 \quad (5.11b)$$

Hierbei sind

$$\left. \begin{aligned} h_x &= \frac{an_x - bm_x}{a - b} \\ h_y &= \frac{an_y - bm_y}{a - b} \\ r &= \frac{ar_2 - br_1}{a - b} \end{aligned} \right\} \quad (5.11c)$$

Zur Bestimmung der PrKt nach der Definition b wird wie folgt vorgegangen:

Bei einer geschlossenen konvexen Kontur sind in jeder Richtung  $k$  zwei Tangenten möglich, wobei die Kontur selbst als Hüllkurve aller dieser Tangenten angesehen wird. Bei zwei rLkt  $f_1$  und  $f_2$  sind demnach in dieser Richtung  $k$  insgesamt vier parallele Tangenten vorhanden (Abb. 5.07). Durch jeweils eine solcher parallelen Tangenten an die rLkt  $f_1$  und  $f_2$  ist eine Tangentialebene  $F_{ki}$  definiert, die eine Schnittlinie  $T_{ki}$  mit der Ebene  $E_3$  hat. Eine derartige Schnittlinie ist möglicherweise eine Tangente der gesuchten resultierenden PrKt in der  $k$ -Richtung. Es sind jedoch insgesamt vier Tangentialebenen  $F_{ki}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) möglich, die zu vier parallelen Schnittlinien  $T_{ki}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) führen (Abb. 5.07). Die beiden außen liegenden Schnittlinien  $T_{k1}$  und  $T_{k2}$  sind dann Tangenten der resultierenden PrKt in  $k$ -Richtung. Welche der vier Schnittlinien "außen liegen", ist von der Anordnung der drei Lagerebenen  $E_1, E_2$  und  $E_3$  abhängig (Abb. 5.07 a, b). Die Ebene

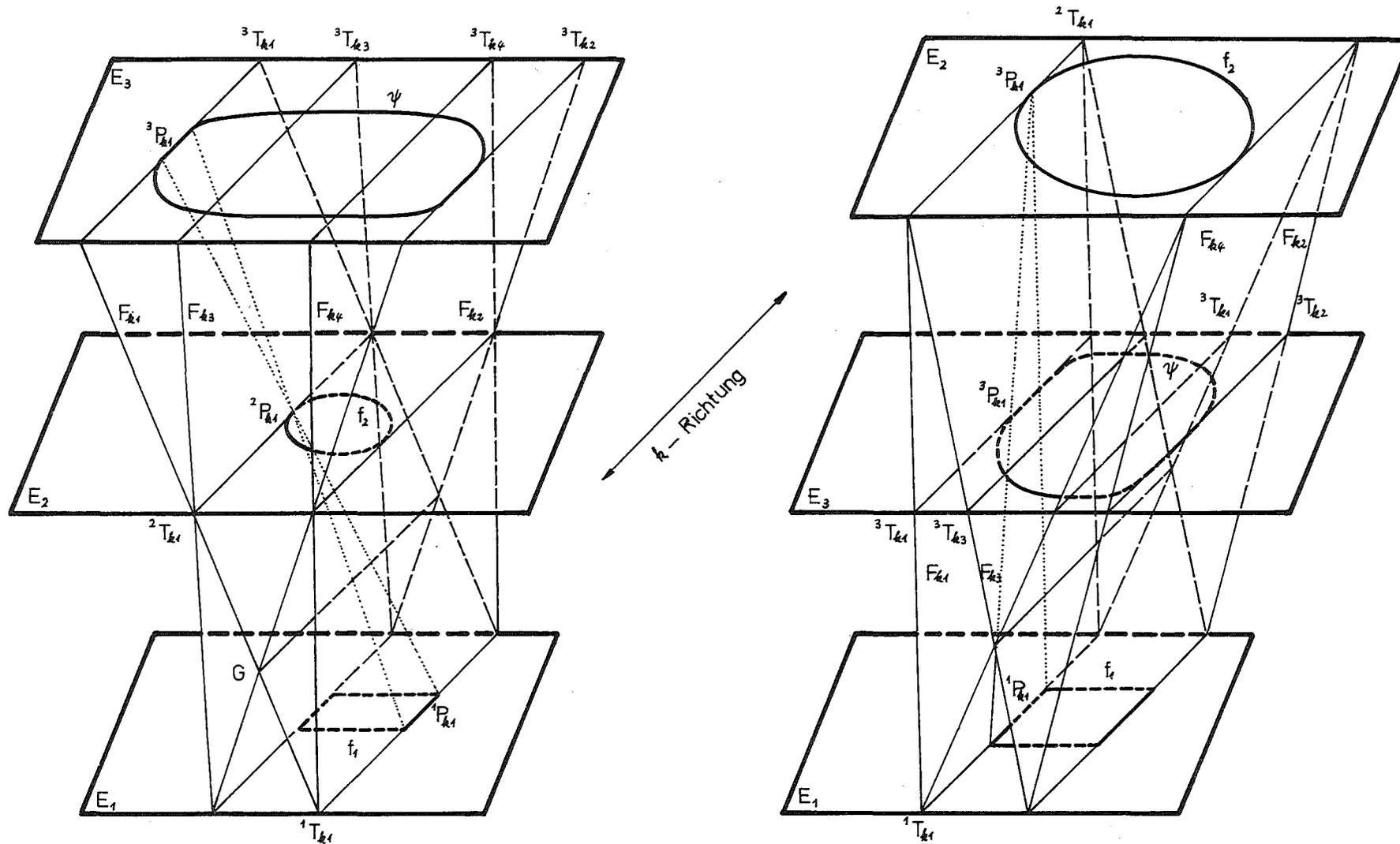


Abb. 5.07 Darstellung für die Bestimmung des Konturausschnitts der PrKt  
in k - Richtung

$E_3$  kann entweder zwischen  $E_1$  und  $E_2$  oder außerhalb dieses Bereiches liegen. Folgende Behauptung ist dabei möglich. Die für die jeweils außen liegenden Schnittlinien  ${}^3T_{k1}$  und  ${}^3T_{k2}$  maßgebenden Tangentialebenen  $F_{k1}$  und  $F_{k2}$  müssen folgenden Bedingungen genügen:

- Wenn  $E_3$  zwischen  $E_1$  und  $E_2$  liegt, überschneiden sich die Tangentialebenen  $F_{k1}$  und  $F_{k2}$  zwischen  $E_1$  und  $E_2$  nicht.
- Wenn  $E_3$  außerhalb  $E_1$  und  $E_2$  liegt, überschneiden sich die Tangentialebenen  $F_{k1}$  und  $F_{k2}$  zwischen  $E_1$  und  $E_2$  bei G.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist aus Abb. 5.07 zu erkennen. Betrachtet man in der Ebene  $F_{k1}$  (Abb. 5.07) die Konturstrecken  ${}^1P_{k1}$ ,  ${}^2P_{k1}$  und  ${}^3P_{k1}$  mit den parallelen zugehörigen Tangenten  ${}^1T_{k1}$ ,  ${}^2T_{k1}$  und  ${}^3T_{k1}$ , so erkennt man, daß die Strecke  ${}^3P_{k1}$  nur durch die Strecken  ${}^1P_{k1}$  und  ${}^2P_{k1}$  bestimmt werden kann. Daraus folgt, daß die PrKt stückweise aus zwei rLKt bestimmt werden kann. Komplizierte rLKt werden dafür in mehrere einfach darstellbare aufgeteilt. Die Bestimmung der PrKt für komplizierte rLKt wird anhand eines Beispiels näher beschrieben, bei dem die PrKt  $\psi$  in der Lagerebene  $E_3$  für eine kreisförmige rLKt  $f_1$  in der Lagerebene  $E_1$  und eine sechseckige rLKt  $f_2$  in der Lagerebene  $E_2$  bestimmt werden soll. Hierbei liegt die Lagerebene  $E_3$  zwischen den Lagerebenen  $E_1$  und  $E_2$ .

Der Kreismittelpunkt der rLKt  $f_1$  ist  $A_0$ . Die sechseckige rLKt  $f_2$  ist durch die Eckpunkte  $B_j$  ( $j = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ) gegeben, wobei ihr Mittelpunkt mit  $B_0$  und die Seiten mit  $\beta_i$  ( $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ) bezeichnet werden (Abb. 5.08).

Zuerst werden in der rLKt  $f_1$  die Punkte  $A_i$  ( $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ) ermittelt, deren Tangenten entsprechend den Seiten  $\beta_i$  ( $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ) parallel sind. Der Punkt  $A_i$  ist dabei der Schnittpunkt des Kreises  $f_1$  mit der auf die Strecke  $\beta_i$  senkrechten Ebene durch den Kreismittelpunkt  $A_0$ . Es sind zwei solche Schnittpunkte möglich. Welche der beiden der gesuchte Punkt  $A_i$  ist, hängt von der Lage der drei Ebenen  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  ab. Die Kreisbogen zwischen den benachbarten Punkten von  $A_i$  ( $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ) werden mit  $\alpha_j$  ( $j = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ) bezeichnet. Durch die Paare von  $A_i$  und  $\beta_i$  ( $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ) werden die Ausschnitte  $\gamma_i$  ( $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ) der PrKt  $\psi$  in der Ebene  $E_3$  bestimmt (Abb. 5.08).

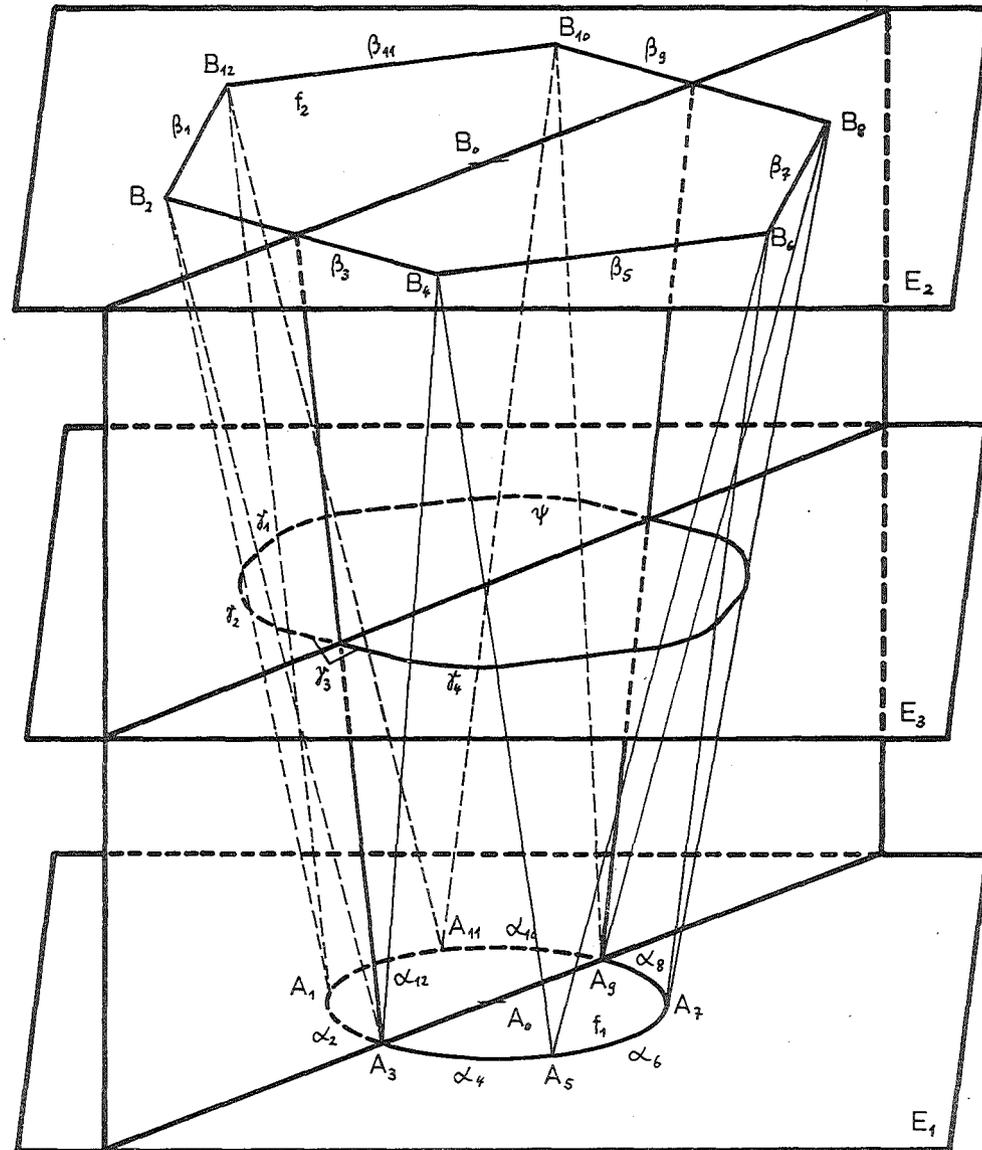
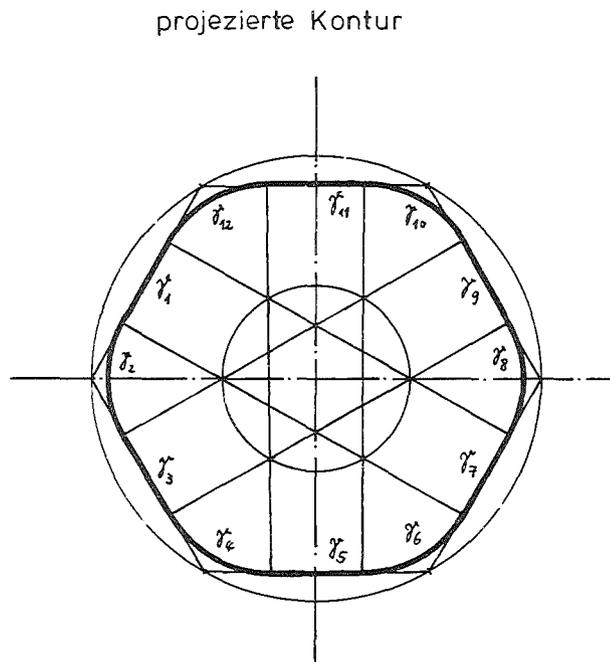


Abb.5.08 Bestimmung der PrKt  $\psi$

für die rLkt  $f_1$  und  $f_2$

$f_1$  : Kreis

$f_2$  : gleichmäßiges Sechseck

Einem beliebigen singulären Punkt  $B_j$  ist im Bereich zwischen zwei benachbarten Seitenlinien eine Schar von Tangenten zugeordnet. Zu jeder dieser Tangenten am Punkt  $B_j$  ist am Kreisbogen  $\alpha_j$  stets ein Punkt mit den entsprechenden parallelen Tangenten zugeordnet. Daher ergibt sich aus den Paaren von  $B_j$  und  $\alpha_j$  ( $j = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ) die Ausschnitte  $\gamma_j^*$  ( $j = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ) der PrKt  $\Psi$ . Damit ist die PrKt  $\Psi$  durch die Ausschnitte  $\gamma_m^*$  ( $m = 1, 2, \dots, 12$ ) bestimmt (Abb. 5.08). Der kritische Punkt bei einer derartigen Vorgehensweise zur Bestimmung der PrKt ist die Aufteilung der komplizierten rLkt. Diese läßt sich allgemein wie folgt beschreiben: Die beiden rLkt werden in gleich viele, möglichst wenige Ausschnitte zerlegt, so daß der zugehörige Ausschnitt der PrKt schrittweise einfach bestimmt werden kann. Bei einer beliebig vorgegebenen LA wird zunächst jede rLkt, unabhängig von den anderen, in einfach darstellbare Ausschnitte aufgeteilt. Derartige rLkt müssen möglicherweise weiter zerlegt werden, um eine einfache Bestimmung der PrKt zu ermöglichen. Hierbei muß sichergestellt sein, daß die Anzahl der Ausschnitte der zu kombinierenden Lager gleich ist.

Bei dem oben behandelten Beispiel wurden beide rLkt jeweils in 12 Ausschnitte aufgeteilt (Abb. 5.08).

Die PrKt wird zweckmäßigerweise in zwei Arten von Gruppen unterteilt:

- einfache bzw. nicht überlappte PrKt
- überlappte PrKt

Das Unterscheidungsmerkmal beider Arten liegt in der Möglichkeit, daß bei der Starrkörperbewegung des Balkens Teilbereiche der PrKt mehrfach erreicht werden können. Im Beispiel ergeben sich aus den sechs möglichen Kombinationen bei den ersten drei Fällen einfache PrKt und bei den letzten zwei Fällen überlappte PrKt.

#### 5.4. Die räumliche Eindeutigkeitsanalyse

Die Berechnungsmethode der Auflagerkräfte und der Biegelinie bei einer räumlichen BAA ist, wie bei der ebenen BAA, von der Art der Konfiguration der BAA abhängig. Bei einer BAA mit nur spielfreien Lagern läßt sich das Problem in zwei frei wählbaren Biegerichtungen getrennt behandeln. Das gleiche gilt auch für eine BAA mit mindestens zwei spielfreien und spielbehafteten Lagern (normaler Fall), da die Eindeutigkeit der BAA trotz spielbehafteter Lager gegeben ist. Deshalb sind derartige BAA nicht Gegenstand der Eindeutigkeitsanalyse. Dagegen ist bei einer BAA mit höchstens einem spielfreien Lager zunächst eine Eindeutigkeitsanalyse erforderlich.

Die Grundlage einer derartigen Eindeutigkeitsanalyse ist die Prüfung, ob eine Starrkörperbewegung des geraden Balkens in der LA möglich ist. Deshalb werden die rLkt zuerst in den jeweiligen Lagerebenen so transformiert, daß alle den Lagern zugehörigen Balkenpunkte in einer Geraden liegen.

Die Eindeutigkeitsanalyse einer räumlichen BAA ist im allgemeinen sehr komplex, so daß eine geschlossene analytische Lösung nicht möglich ist. Das ist darauf zurückzuführen, daß die rLkt und die daraus resultierenden Konturen nicht geschlossen darzustellen sind. Die Analyse wird umso schwieriger, je größer die Zahl der Lager ist.

Ist bei einer BAA mit  $N$  ( $N > 3$ ) Lagern eine Starrkörperbewegung des Balkens in  $N-1$  Lagern möglich, so beschreibt der Balken in der  $N$ -ten Lagerebene aufgrund dieser Starrkörperbewegung eine Spur, die sich durch eine geschlossene konvexe Kontur umschließen läßt. Wenn diese Kontur und die rLkt in der  $N$ -ten Lagerebene ein gemeinsames Gebiet einschließen, ist eine Starrkörperbewegung des Balkens in den  $N$  Lagern möglich. Andernfalls ist die BAA eindeutig.

Die analytische Vorgehensweise bei der Eindeutigkeitsanalyse wird ausführlich in Anhang 4 beschrieben. Dabei wird die Analyse zuerst für die BAA mit drei Lagern durchgeführt. Danach wird sie bei der BAA mit vier Lagern fortgesetzt. Anschließend wird die Eindeutigkeitsanalyse der BAA mit beliebig vielen  $N$  ( $N > 3$ ) Lagern durchgeführt. Dabei werden die möglichen Konfigurationen von BAA in fünf Fälle aufgeteilt:

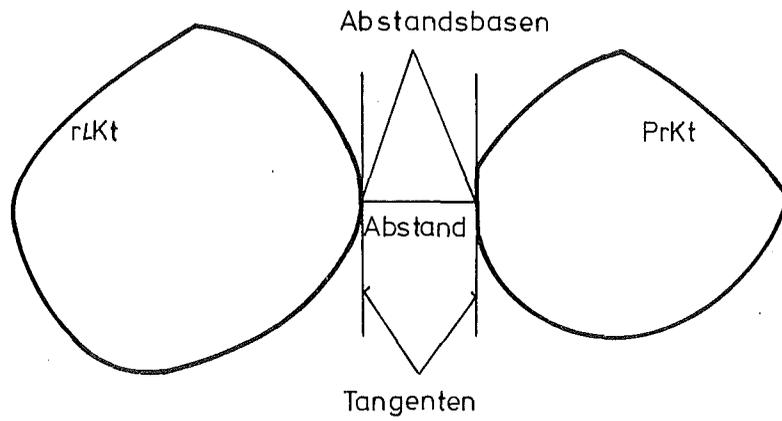
- mehrdeutiger Fall
- mehrdeutig in  $\bar{X}$ -Richtung und eindeutig kräftefrei in  $\bar{Y}$ -Richtung
- mehrdeutig in  $\bar{X}$ -Richtung und eindeutig (allgemeiner Fall) in  $\bar{Y}$ -Richtung
- eindeutig kräftefreier Fall
- eindeutiger Fall (allgemeiner Fall)

Hierbei sind die  $\bar{X}$ - und  $\bar{Y}$ -Richtungen die sich ergebenden Biegerichtungen, die bei der Eindeutigkeitsanalyse im  $(X, Y)$ -Koordinatensystem ermittelt werden.

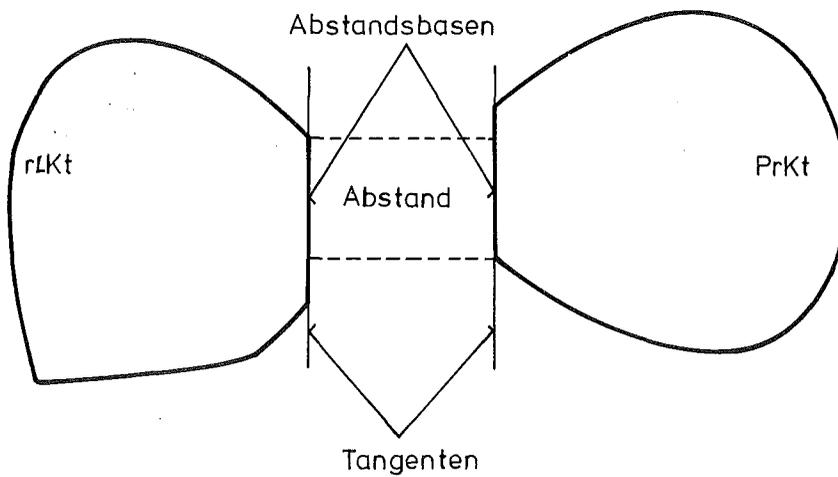
Bei der im Anhang 4 detailliert beschriebenen Eindeutigkeitsanalyse wurde die folgende Vorgehensweise gewählt.

Eine PrKt schließt die Spur ein, die der Balken aufgrund der Starrkörperbewegung in zwei spielbehafteten Lagern in der dritten Lagerebene beschreibt. Daher kann die Eindeutigkeit der BAA mit drei spielbehafteten Lagern durch die Untersuchung der Positionen der PrKt und der rLkt festgestellt werden. Für die Lage der PrKt und der rLkt müssen vier Fälle unterschieden werden:

- 1) Sie umschließen einen gemeinsamen Flächenbereich. Die BAA ist mehrdeutig.
- 2) Sie berühren sich ohne Einschließung eines gemeinsamen Flächenbereiches entlang einer Konturstrecke, die parallel zur  $\bar{X}$ -Richtung verläuft. Die BAA ist damit in  $\bar{X}$ -Richtung mehrdeutig, in  $\bar{Y}$ -Richtung eindeutig kräftefrei.
- 3) Sie berühren sich ohne Einschließung eines gemeinsamen Flächenbereiches nur in einem Punkt. Die BAA ist eindeutig kräftefrei.
- 4) Die Konturen liegen nebeneinander.



a) punktförmig



b) streckenförmig

Abb. 5.09 Darstellung der Abstände und Abstandsbasen

Für den Fall, daß die PrKt und die rLKt in einer Lagerebene nebeneinander liegen, wird als Maß der Entfernung beider Konturen der Abstand zweier Abstandsbasen definiert, in denen die zugeordneten Tangenten parallel sind (Abb. 5.09). Abstandsbasen sind Punkte oder gerade Strecken der Konturen. Sind sie Strecken, so ist die Konfiguration der BAA mehrdeutig in  $\bar{X}$ -Richtung und eindeutig in  $\bar{Y}$ -Richtung, wobei die  $\bar{X}$ -Richtung die zu den Abstandsbasen parallele Richtung ist. Dagegen ist die Konfiguration der BAA eindeutig, wenn Abstandsbasen Punkte sind. Die Abstandsbasis in der rLKt bestimmt dabei den Teil der rLKt, an dem die Auflagerkraft auf den Balken wirkt. Damit ist gleichzeitig die mögliche Auslenkungsstelle des Balkens in dem betreffenden spielbehafteten Lager bestimmt.

Es wird in Anhang 4 gezeigt, daß die Ein- bzw. die Mehrdeutigkeit der BAA durch derartige Untersuchungen in einer oder in zwei Lagerebenen hinreichend bestimmt werden kann. Außerdem wird die Vorgehensweise der Eindeutigkeitsanalyse der BAA mit Kombinationen verschiedener Formen der rLKt (Punkte, Strecken und geschlossene Konturen) detailliert beschrieben.

Zur Durchführung der Eindeutigkeitsanalyse für die BAA mit vier Lagern werden die Konfigurationen aller möglichen Lagerkombinationen von jeweils drei Lagern verwendet. Ist die Konfiguration einer dieser Kombinationen eindeutig, so ist die Gesamtanordnung auch eindeutig. Für die Mehrdeutigkeit der Gesamtanordnung ist die mehrdeutige Lagerung des Balkens in jeweils drei Lagern notwendig, aber nicht hinreichend. Für den Fall, daß der Balken in drei Lagern mehrdeutig oder eindeutig kräftefrei aufgelagert wird, beschreibt der Balken durch die Starrkörperbewegung in der vierten Lagerebene eine Spur. Eine derartige Spur wird entweder durch eine konvexe Kontur umschlossen oder ist eine Strecke oder ein Punkt. Die Eindeutigkeitsanalyse erfolgt durch die Untersuchung der Positionen dieser Kontur und der rLKt in der vierten Ebene, ähnlich wie bei der BAA mit drei Lagern.

Bei den restlichen Fällen gibt es keine durch Starrkörperbewegung erzeugte Spur in der vierten Lagerebene. Der Balken hat jedoch aufgrund der Lagerung in drei Lagern in der vierten Lagerebene eine Spur, die eine Strecke oder ein Punkt ist. Wenn diese

Spur durch die rLKt in der vierten Lagerebene ganz oder teilweise eingeschlossen wird, verändert das vierte Lager prinzipiell das Ergebnis der Eindeutigkeitsanalyse nicht. Liegen diese Spur und die rLKt in der vierten Lagerebene nebeneinander, so läßt sich die Eindeutigkeitsanalyse durch die Untersuchung der relativen Positionen beider Konturen zueinander in der vierten Lagerebene durchführen.

Die Eindeutigkeitsanalyse der BAA mit beliebig vielen  $N$  ( $N > 4$ ) Lagern kann, ausgehend von Kombinationen mit drei Lagern, stufenweise durch die Analyse von Lagerkombinationen mit der nächstgrößeren Anzahl von Lagern durchgeführt werden. Deshalb werden im folgenden nur die besonderen Punkte diskutiert, die für die allgemeine Formulierung der Eindeutigkeitsanalyse bei räumlichen BAA mit sehr vielen Lagern von Bedeutung sind.

Bei einer ebenen BAA konnte gezeigt werden, daß die BAA mit  $N$  ( $N > 3$ ) Lagern mehrdeutig ist, wenn sich die Konfigurationen aller Kombinationen mit drei Lagern als mehrdeutig erweisen (Abschn. 4.4.3.). Bei einer räumlichen BAA ist eine solche Behauptung nicht mehr möglich. Hier läßt sich dagegen die Mehrdeutigkeit der BAA erst dann feststellen, wenn alle Kombinationen von LA mit je fünf statt drei Lagern mehrdeutig sind. Diese Behauptung wird bei einer BAA<sup>mit</sup>rLKt aus nur geschlossenen konvexen Konturen dadurch bewiesen, daß gezeigt wird, daß beliebig viele  $L$  ( $L > 3$ ) konvexe Konturen in einer Ebene einen gemeinsamen Bereich umschließen, wenn alle Kombinationen mit drei Konturen jeweils einen gemeinsamen Bereich umschließen (Anhang 5). Bei einer derartigen Vorgehensweise können die Konfigurationen von BAA mit beliebig vielen  $N$  ( $N > 5$ ) Lagern bestimmt werden (Anhang 4).

## 5.5 Berechnung der Auflagerkräfte und der Biegelinie

### 5.5.1. Allgemeines

In diesem Abschnitt wird die Berechnungsmethode der Biegelinie des Balkens und der auftretenden Auflagerkräfte bei einer räumlichen BAA untersucht. Dabei können im Hinblick auf die Berechnung der Auflagerkräfte die Methoden verwendet werden, die schon im ebenen Fall diskutiert wurden (Abschn. 4.4.)

Bei einer räumlichen BAA sind unter Berücksichtigung der Eindeutigkeitsanalyse entsprechend der Biegerichtungen  $\bar{X}$  und  $\bar{Y}$  mehrere Kombinationsfälle der ebenen Lagerung denkbar (Tabelle 5.1.). Bei dieser Zusammenstellung werden die Fälle, die sich nur durch die Koordinatenvertauschung unterscheiden, nur einmal aufgeführt. Außerdem werden in der letzten Spalte der Tabelle 5.1. die für die Aufteilung dieser Kombinationsfälle entsprechenden Konfigurationen der BAA aufgetragen.

Fälle	Lagerung in		
	$\bar{X}$ -Richtung	$\bar{Y}$ -Richtung	
1	mehrdeutig	mehrdeutig	> 0
2	mehrdeutig	eindeutig kräftefrei	= + 0
3	mehrdeutig	allgemeiner Fall	< + 0
4	eindeutig kräftefrei	eindeutig kräftefrei	= - 0
5	eindeutig kräftefrei	allgemeiner Fall	< - 0
6	allgemeiner Fall	allgemeiner Fall	< - 0
7	normaler Fall	normaler Fall	

Tabelle 5.1. Die Kombinationsmöglichkeiten der Lagerung bei räumlicher BAA.

Für die weitere Untersuchung können die vor der Durchführung der Eindeutigkeitsanalyse vorgegebenen Koordinaten  $X$  und  $Y$  der spielbehafteten Lager durch die Koordinaten  $\bar{X}$  und  $\bar{Y}$  ersetzt werden. Daher wird im folgenden vorausgesetzt, daß alle Größen auf die Koordinaten  $\bar{X}$  und  $\bar{Y}$  transformiert werden [17]. Für die Fälle 1, 4 und 6 ist eine derartige Transformation nicht notwendig. Bei dem Fall 4 ist die Lage des Balkens bereits durch die Eindeutigkeitsanalyse festgelegt worden. Das gleiche gilt für die Lage des Balkens in  $\bar{Y}$ -Richtung bei dem Fall 2. Dagegen läßt sich in diesem Fall die Lage des Balkens in  $\bar{X}$ -Richtung unter der Vorgabe der im Abschnitt 4.5 gemachten zusätzlichen Angaben berechnen, d.h. die Berechnung der Biegelinie erfolgt in beiden Richtungen nach verschiedenen Methoden. Das gleiche gilt auch für die Fälle 3 und 5. Bei der Untersuchung dieser vier Fälle (von 2 bis 5) wird auf die Lösungsmethode zurückgegriffen, die für die ebene BAA entwickelt wurde. Damit bleiben für eine eingehende Untersuchung nur die Fälle 1, 6 und 7 übrig.

Bei einer räumlichen BAA sind im Gegensatz zur ebenen BAA für die eindeutige Anordnung (Die Fälle 6 und 7) die Lagerungsmöglichkeiten des Balkens in den spielbehafteten Lagern unendlich groß. Jeweils eine davon ist aber nur die Gesuchte. Bei dieser Lage müssen

- 1) die Auflagerkräfte und ihre Komponenten in  $\bar{X}$ - und  $\bar{Y}$ -Richtung die statischen Gleichgewichtsbedingungen und
- 2) die Auflagerkräfte und ihre  $\bar{X}$ - und  $\bar{Y}$ -Komponenten in spielbehafteten Lagern die Beziehungen (5.01) bis (5.06) erfüllen (Abschn. 5.1).

Eine analytische Ermittlung der Auflagerkräfte ist nur in wenigen einfachen Fällen möglich, wobei das Problem umso schwieriger wird, je komplizierter die rLkT darzustellen ist. Die Berechnung der Auflagerkräfte bei einer räumlichen BAA mit spielbehafteten Lagern läßt sich nur dann in zwei voneinander unabhängigen Probleme in  $\bar{X}$ - und  $\bar{Y}$ -Richtung aufteilen, wenn alle spielbehafteten Lager rechteckige rLkT sind, deren Seiten den  $\bar{X}$ - und  $\bar{Y}$ -Richtung parallel sind. Damit läßt sich die folgende Lösungsmethode zur Berechnung der

Auflagerkräfte ableiten: Zuerst wird die Auslenkung des Balkens innerhalb der spielbehafteten Lager angenommen. Wenn der Balken an einem Lager die rLkt nicht berühren soll, wird dieses Lager zunächst nicht berücksichtigt. Das Problem wird dann mit den verbleibenden Lagern untersucht, wobei jede rLkt durch eine fiktive Rechteckkontur mit  $\bar{X}$  und  $\bar{Y}$  parallelen Seiten, der sog. rechteckigen Ersatzkontur (abgekürzt: rEKt), ersetzt wird. Eine rEKt muß innerhalb der zugehörigen rLkt liegen und der angenommene Auslenkungspunkt des Balkens ist gleichzeitig Teil der rLkt und rEKt. Die Aufgabe teilt sich damit in zwei unabhängige ebene Probleme in  $\bar{X}$ - und  $\bar{Y}$ -Richtung. Für diese werden die Auflagerkräfte und die Biegelinie mit Hilfe der Lösungsmethoden für den normalen und allgemeinen Fall der ebenen BAA berechnet (Abschn. 4). Die daraus resultierenden Auflagerkräfte und die Biegelinien sind Komponenten der Lösung für räumliche BAA.

Anschließend wird geprüft:

- 1) ob die Differenzen zwischen den Richtungen der berechneten Auflagerkräfte und der aufgrund der angenommenen Auslenkung erwarteten Richtung der Auflagerkräfte in allen spielbehafteten Lagern gleichzeitig vorgegebene Grenzwerte unterschreiten.
- 2) ob die berechnete Biegelinie innerhalb der rLkt der Lager liegt, die zunächst nicht berücksichtigt wurden.

Falls diese Bedingungen nicht erfüllt sind, wird die Rechnung unter veränderten Annahmen über die Balkenauslenkung wiederholt. Für den Erfolg eines derartigen iterativen Vorgehens ist eine gute Vorgabe der ersten Werte für die Auslenkung des Balkens in den spielbehafteten Lagern von großer Bedeutung.

Die Vorgehensweise zur Berechnung der Auflagerkräfte und der Biegelinie bei der räumlich eindeutigen BAA wird in den Abschnitten 5.5.3. (allgemeiner Fall) und 5.5.4. (normaler Fall) untersucht. Zuvor wird die Konstruktion der rEKt im Abschnitt 5.5.2. behandelt. Anschließend wird im Abschnitt 5.5.5. eine Möglichkeit zur Behandlung der BAA beim mehrdeutigen Fall beschrieben.

### 5.5.2. Konstruktion von rechteckigen Ersatzkonturen

Eine rechteckige Ersatzkontur (abgekürzt: rEKt) ist eine innerhalb der rLKt liegende rechteckige Kontur mit parallelen Seiten in X- und Y-Richtung, auf denen der angenommene Auslenkungspunkt B' des Balkens liegen muß. Die rEKt soll mit der rLKt möglichst viele gemeinsame Punkte und Strecken haben und einen möglichst großen Bereich umschließen.

Im folgenden wird beschrieben, wie man im Normalfall für den Punkt B' ( $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}$ ) eine rEKt konstruiert, deren Eckpunkte mit A' ( $X'$ ,  $Y'$ ), A'' ( $X''$ ,  $Y''$ ) und A''' ( $X'$ ,  $Y''$ ) bezeichnet werden. Hierbei werden Strecken- und punktförmige Konturen als Sonderform der rEKt betrachtet.

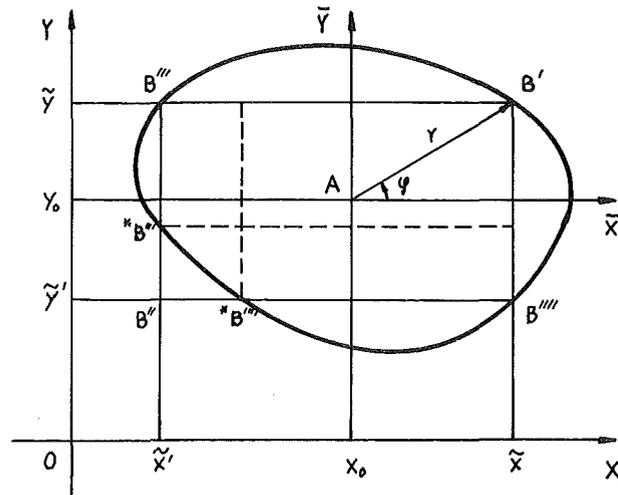
Eine rLKt hat eine der drei Formen: geschlossene konvexe Kontur, gerade Strecke und Punkt. Für die allgemeine Beschreibung wird jedoch zuerst die geschlossene konvexe Kontur behandelt. Hier ist der Punkt B' der rLKt entweder

- a) ein Normalpunkt der Kontur (Abb. 5.10) oder
- b) ein Punkt in einer Randstrecke (Abb. 5.11) oder
- c) ein Schnittpunkt zweier Randstrecken (Abb. 5.12) oder
- d) ein Randpunkt in einer Richtung (Abb. 5.13) oder
- e) ein Randpunkt in  $\tilde{X}$  und  $\tilde{Y}$ -Richtung (Abb. 5.14).

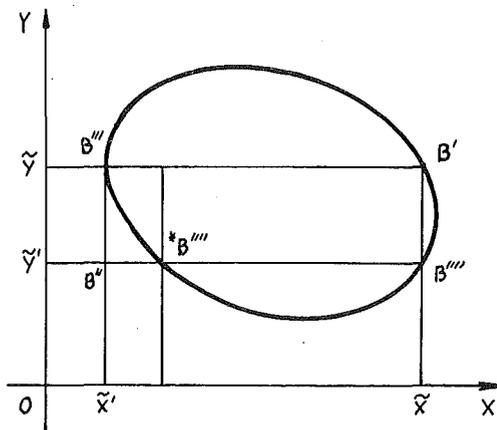
Ist der Punkt B' ein Normalpunkt (Fall a), so soll er gleichzeitig der Eckpunkt A' sein, d.h.

$$\left. \begin{aligned} X' &= \tilde{X} \\ Y' &= \tilde{Y} \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

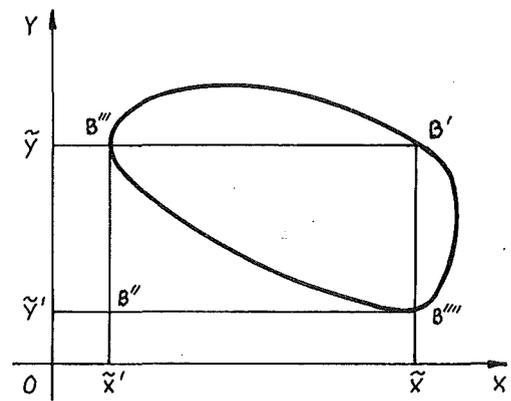
Die Parallelen zu X- und Y-Richtung durch B' schneiden die rLKt bei B''' ( $\tilde{X}'$ ,  $\tilde{Y}$ ) und B'''' ( $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}'$ ) (Abb. 5.10). Mit weiteren zwei Parallelen zur Y-Richtung durch B''' und zur X-Richtung durch B'''' erhält man einen Schnittpunkt B'' ( $\tilde{X}'$ ,  $\tilde{Y}'$ ).



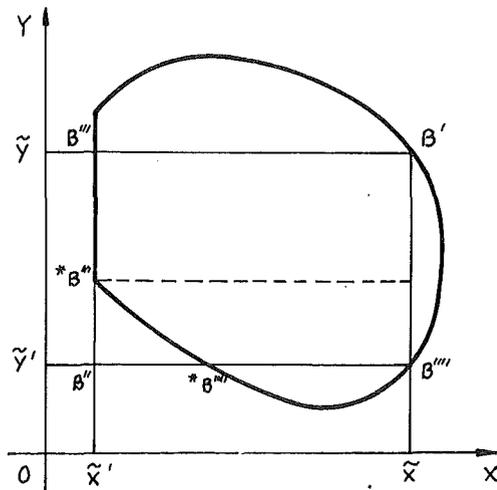
a) Fall a1



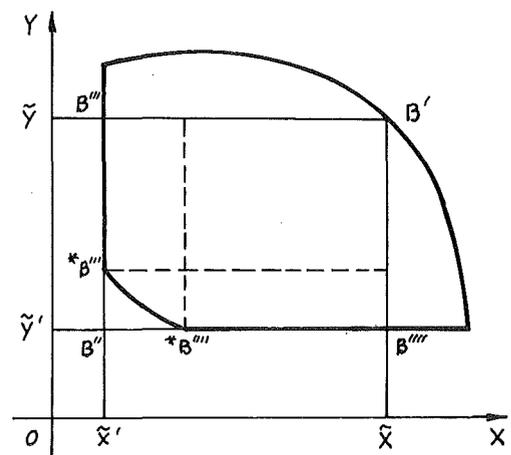
b) Fall a2



c) Fall a3



d) Fall a4



e) Fall a5

Abb. 5.10 Die Bestimmung der rEKt für einen Normalpunkt  $\hat{B}$  der rIKt ( Fall a )

Wenn der Punkt  $B'''$  ein Normalpunkt ist, schneidet die Gerade  $B''B'''$  die rLkt bei  $x_{B''}$  (Abb. 5.10a), so daß die Strecke  $x_{B''}B'''$  im Konturbereich  $f$  liegt. das gleiche gilt auch für die Strecke  $x_{B'''}B''$ . Nun wird zuerst der Fall behandelt, bei dem die Punkte  $B'''$  und  $B''$  Normalpunkte sind. Falls hier  $B''$  innerhalb der rLkt  $f$  liegt, sollen die Punkte  $B''$ ,  $B'''$  und  $B''''$  die Eckpunkte der rEkt  $A''$ ,  $A'''$  und  $A''''$  sein. Wenn sich aber  $B''$  außerhalb der rLkt befindet, wird eine der beliebigen beider Schnittpunkte  $x_{B''}$  und  $x_{B'''}$  als Eckpunkt  $A'$  festgelegt. Dadurch ergibt sich eine rEkt (Abb. 5.10a).

Falls nur einer der Punkte  $B'''$  und  $B''$  ein Normalpunkt (z.B.  $B''$ ) und der andere ein Randpunkt ist (Abb. 5.10b), gibt es keinen Schnittpunkt  $x_{B''}$ . Hier sind die Punkte  $B'''$  und  $x_{B''}$  die Eckpunkte  $A'''$  und  $A''$ , woraus sich eine rEkt ergibt. Sind  $B'''$  und  $B''$  Randpunkte, so kann eine der Strecken  $B''B'''$  und  $B''B''$  als rEkt genommen werden (Abb. 5.10c).

Wenn einer der Punkte  $B'''$  und  $B''$  in einer Randstrecke (z.B.  $B'''$ ) liegt und der andere (z.B.  $B''$ ) ein Normal- oder Randpunkt ist, ist der Punkt  $B'''$  der Eckpunkt  $A'''$  (Abb. 5.10d). Liegen dabei  $B''$  und  $B'''$  in gleicher Randstrecke, so sollen die Punkte  $B''$  und  $B''''$  die Eckpunkte  $A''$  und  $A''''$  darstellen. Anderenfalls soll der Endpunkt  $x_{B''}$  der Randstrecke zwischen  $B''$  und  $B'''$  der Eckpunkt  $A''$  sein (Abb. 5.10d). Es bleibt nun der Fall übrig, bei dem  $B'''$  und  $B''$  jeweils in einer Randstrecke liegen (Abb. 5.10e). Überschneiden sich diese beiden Randstrecken im Punkt  $B''$ , so sind die Punkte  $B''$ ,  $B'''$  und  $B''''$  die Eckpunkte  $A''$ ,  $A'''$  und  $A''''$ . Ist dies nicht der Fall, so wird der Punkt  $x_{B''}$  oder  $x_{B'''}$  als Eckpunkt  $A''$  festgelegt (Abb. 5.10e). Daraus ergibt sich die gesuchte rEkt.

Liegt der Punkt  $B'$  in einer Randstrecke (Fall b), z.B. in X-Richtung (Abb. 5.11), dann soll diese Randstrecke die Seite  $A'A''''$  der rEkt sein. Wenn dabei mindestens einer der Punkte  $A'$  und  $A''''$  ein Randpunkt in Y-Richtung ist, kann die Strecke  $A'A''''$  als rEkt in Sonderform festgelegt werden. Es bleiben nun die Fälle, bei denen die Punkte  $A'$  und  $A''''$  jeweils ein Punkt in einer Randstrecke oder ein Normalpunkt für Y-Richtung sein können. Ist z.B. der Punkt  $A'$  ein Normalpunkt (Abb. 5.11), so schneidet eine Parallele zur X-





Wenn der Punkt  $B'$  ein Randpunkt in eine Richtung (Fall d), beispielsweise in  $X$ -Richtung ist, ist er nach der bisher beschriebenen Methode gleichzeitig  $A'$  und  $A''''$ . Die  $rEKt$  ist in diesem Fall die zur  $X$ -Richtung parallele Strecke  $\overline{B'B''''}$  durch den Punkt  $B'$  innerhalb der  $rLKt$  (Abb. 5.13). Im Falle e, bei dem der Punkt  $B'$  in beiden Richtungen Randpunkt ist, ist die  $rEKt$  als Sonderform der Punkt  $B'$  selbst (Abb. 5.14).

Damit ist die Beschreibung zur Konstruktion der  $rEKt$  bei einer konvexen geschlossenen  $rLKt$  abgeschlossen. Bei einer streckenförmigen  $rLKt$  ist sie selbst die  $rEKt$ , wenn die Strecke zu  $X$ - oder  $\tilde{Y}$ -Richtung parallel ist. Anderenfalls ist die  $rEKt$  der Punkt  $B'$  in Sonderform.

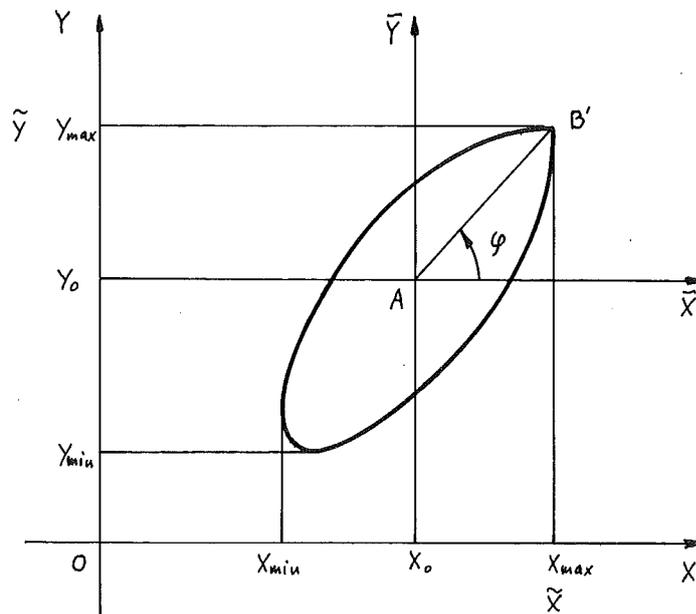


Abb.5.14 Die Bestimmung der  $rEKt$  für einen Randpunkt  $B'$  in beide Richtungen ( Fall e )

### 5.5.3. Allgemeiner Fall

In diesem Abschnitt wird die Durchführung der Berechnung der Auflagerkräfte und der Biegelinie bei einer räumlichen BAA behandelt, deren Konfiguration durch die Eindeutigkeitsanalyse als "eindeutig" festgestellt worden ist.

Die BAA ist in einem  $(X, Y, Z)$ -Koordinatensystem (die Balkenlängsrichtung:  $Z$ ) gegeben und besteht aus einem vorgebogenen Balken und einer LA von  $\bar{M}$  ( $\bar{M} > 3$ ) spielbehafteten Lagern in den zur  $Z$ -Richtung senkrechten Lagerebenen  $E_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ), wobei jedem Lager ein bestimmter Balkenpunkt zugeordnet ist.

Diese Aufgabe wird mit einer iterativen Methode gelöst, bei der das räumliche Problem in zwei ebene Probleme aufgeteilt und unter Benutzung der Lösungsmethode für den allgemeinen Fall der ebenen BAA (Abschn. 4.4.2) gelöst wird. Dafür wird eine fingierte Einspannstelle bei einem willkürlich gewählten Koordinatenursprung für  $z=0$  festgelegt, die sich außerhalb der vorgegebenen LA befindet. Schließlich wird unter Vorgabe der  $X$ - und  $Y$ -Richtung die Lage der BAA in  $(X, Y, Z)$ -Koordinatensystem festgelegt. Die Vorbiegung des Balkens wird in  $X$ - und  $Y$ -Richtung durch  $^X H(z)$  und  $^Y H(z)$  gegeben, während die Balkenquerschnitte so beschaffen sind, daß die Biegesteifigkeit bei bestimmter  $Z$  für alle Biegerichtungen gleich, d.h. nur eine Funktion von  $Z$  ist. Die Lagen von  $\bar{M}$  Lagerebenen  $E_m$  seien durch  $Z = Z_m = Z_1, Z_2, \dots, Z_{\bar{M}}$  gegeben und die Einflußzahlen  $\alpha_{mn}$  und die Einheitsbiegelinien  $\eta_n(z)$  ( $m, n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) bezogen auf die fingierte Einspannstelle (Abschn. 4.2.2.) seien bekannt. Die spielbehafteten Lager sind durch die rLkT  $f_m = f_m(X_m, Y_m) = 0$  in der Lagerebene  $E_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) zu

$$\left. \begin{aligned} X &= X_m + X_{om} \\ Y &= Y_m + Y_{om} \\ z &= Z_m \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

und die für alle Biegerichtungen konstanten elastischen Nachgiebigkeiten  $\omega_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) vorgegeben. Hier wird das Koordinatensystem  $(X_m, Y_m)$  als ein nur in der Lagerebene  $E_m$  bei  $Z = Z_m$  gültiges System verstanden, wobei  $X_m$  und  $X$  bzw.  $Y_m$  und  $Y$  parallel sind und der Koordinatenursprung von  $(X_m, Y_m)$  die Koordinaten  $(X_{om}, Y_{om}, Z_m)$  im Gesamtsystem hat.

Im folgenden müssen die Komponenten der Auflagerkräfte  $x_{D_n}^*$  und  $y_{D_n}^*$  ( $n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) sowie der Balkenbiegeline  $x_{H^*}(z)$  und  $y_{H^*}(z)$  berechnet werden.

Sowohl bei der Eindeutigkeitsanalyse als auch bei der Behandlung der ebenen BAA (Abschn. 4.4.2) war es notwendig, die Positionen der spielbehafteten Lager so zu transformieren, daß die den Lagern zugeordneten Balkenpunkte in einer Geraden liegen. Bei einer derartigen Transformation auf die  $Z$ -Achse werden die Lagen der rLkt durch

$$\left. \begin{aligned} X &= X_m + X_{om} - x_H(Z_m) \\ Y &= Y_m + Y_{om} - y_H(Z_m) \\ Z &= Z_m \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

definiert, während die Größen, wie die Einflußdaten  $(\alpha_{mn}, \eta_n(Z))$ , die Biegesteifigkeit und die elastische Nachgiebigkeit, keine Änderung erfahren.

Die wesentlichen Probleme bei dem gewählten iterativen Vorgehen liegen in folgenden Punkten:

- die Annahme der Auslenkungsstelle des Balkens in den rLkt für den ersten Rechenschritt
- der Rechengang in einem eingeschwungenen Rechenschritt
- die Prüfung der Richtigkeit der angenommenen Auslenkungsstellen
- die Festlegung der neuen Auslenkungsstellen für den weiteren Rechenschritt

Für den ersten Rechenschritt können als Auslenkungsstellen  $B'_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) des Balkens in den rLkt die sog. möglichen Auslenkungspunkte angenommen werden, die durch die Eindeutigkeitsanalyse ermittelt wurden. Eine Auslenkungsstelle kann jedoch auch ein beliebiger Punkt im Konturbereich der zugehörigen rLkt sein.

Im folgenden wird der Rechenvorgang für den  $i$ -ten Rechenschritt ( $i = 2, 3, \dots$ ) unter der Annahme beschrieben, daß die Auslenkungsstellen  $B'_{m,i}$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) bekannt sind. Liegt bei einem Lager die Auslenkungsstelle nicht auf der rLkt, so wird dieses Lager für die Untersuchung nicht berücksichtigt. Bei den übrigen spielbehafteten Lagern wird für jede Auslenkung  $B'_{m,i}$  in jeder rLkt  $f_m$  ein rEkt mit den Eckpunkten  $A'_m (X'_m, Y'_m)$ ,  $A''_m (X''_m, Y''_m)$ ,  $A'''_m (X'''_m, Y'''_m)$  und  $A''''_m (X''''_m, Y''''_m)$  bestimmt. Daraus ergeben sich für die X- und Y-Richtung die Lagerspiele

$$\left. \begin{aligned} x_1 S_m &= \text{Min} (X'_m, X''_m) + X_{om} - x_H(Z_m) \\ x_2 S_m &= \text{Max} (X'_m, X''_m) + X_{om} - x_H(Z_m) \\ y_1 S_m &= \text{Min} (Y'_m, Y''_m) + Y_{om} - y_H(Z_m) \\ y_2 S_m &= \text{Max} (Y'_m, Y''_m) + Y_{om} - y_H(Z_m) \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Hierbei sind  $x_j S_m$  bzw.  $y_j S_m$  die untere ( $j=1$ ) und die obere ( $j=2$ ) Grenze des Lagerspiels in X- bzw. Y-Richtung für das  $m$ -te Lager.

Damit können unter Anwendung von (Gl. 4.22) die Komponenten der Auflagerkräfte  $x_D^x$  und  $y_D^x$  sowie die Größen  $x_U^x$ ,  $y_U^x$ ,  $x_{\mathcal{L}}^x$  und  $y_{\mathcal{L}}^x$  (Gl. 4.22) in X- und Y-Richtung für jedes Lager berechnet werden. Aus den errechneten Komponenten der Kräfte  $x_D^x$  und  $y_D^x$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) lassen sich nun die Richtung  $\mu_{m,i}^x$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) der resultierenden Auflagerkräfte ermitteln.

Zu jeder Auslenkungsstelle  $B'_{m,i}$  in der rLkt ist stets ein Winkelbereich mit den Grenzen  $\mu_{m1,i}$  und  $\mu_{m2,i}$  zugeordnet ( $\mu_{m1,i} \leq \mu_{m2,i}$ ) zwischen denen, die aufgrund der Annahme von  $B'_{m,i}$  erwarteten Richtung der Auflagerkraft liegen muß. Dabei ist  $\mu_{m1,i} = \mu_{m2,i}$  für einen regulären Punkt  $B'_{m,i}$ , während  $\mu_{m1,i} < \mu_{m2,i}$  für einen singulären Punkt  $B'_{m,i}$  gilt. Wenn  $B'_{m,i}$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) die Auslenkungspunkte des Balkens in den spielbehafteten Lagern für den Gleichgewichtszustand der BAA sein sollen, müssen bei allen berücksichtigten spielbehafteten Lagern die Beziehung

$$\mu_{m1,i} - \varepsilon < \mu_{m,i}^* < \mu_{m2,i} + \varepsilon \quad (5.16)$$

$$(m = 1, 2, \dots, \bar{M})$$

bestehen, wobei  $\varepsilon$  eine kleine, positive Größe ist.

Dagegen muß bei den im Rechenschritt nicht berücksichtigten spielbehafteten Lagern der Balken innerhalb der rLkt verlaufen. Andernfalls wird der weitere (i+1)-ten Rechenschritt mit einer erneuten Annahme von Auslenkungsstellen  $B'_{m,i+1}$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) durchgeführt.

Dabei wird für die Auslenkungsstelle  $B'_{m,i+1}$  ein dem Winkel  $\mu_{m,i}^*$  entsprechender Konturpunkt für das spielbehaftete Lager gewählt, bei dem sich im i-ten Rechenschritt die von Null verschiedene Auflagerkraft ergab. War die Auflagerkraft im i-ten Rechenschritt dagegen Null, so wird dieses Lager im (i+1)-ten Rechenschritt nicht berücksichtigt.

Ebenfalls wird das spielbehaftete Lager nicht berücksichtigt, das im i-ten Rechenschritt nicht berücksichtigt war und bei dem der Balken innerhalb des Konturbereiches der rLkt verlief. Schließlich wird im (i+1)-ten Rechenschritt das spielbehaftete Lager berücksichtigt, das im i-ten Rechenschritt berücksichtigt war und bei dem der Balken außerhalb der rLkt verlief. Da bei einem solchen Fall in der Lagerebene die rLkt und der Auslenkungspunkt des Balkens aus dem i-ten Rechenschritt "nebeneinander" liegen, gibt es zwischen ihnen ein Abstand

und somit Abstandsbasen. Als Auslenkungsstelle  $B'_{m,i+1}$  wird dabei die Abstandsbasis in der rLKT angenommen. Nachdem alle Auslenkungsstellen  $B'_{m,i+1}$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) bekannt sind, kann die Rechnung für den  $(i+1)$ -ten Rechenschritt durchgeführt werden.

Ein derartiger Rechenvorgang wird so lange wiederholt, bis bei allen spielbehafteten Lagern gleichzeitig die nach jedem Rechenschritt geprüften Bedingungen erfüllt sind. Mit den errechneten Auflagerkräften  $x_{D_n}^x$  und  $y_{D_n}^x$  ( $n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) können nach der Gl. (4.24) die X- und Y-Komponenten  $x_H^x(Z)$  und  $y_H^x(Z)$  der Balkenbiegeline berechnet werden.

#### 5.5.4. Normaler Fall

In diesem Abschnitt wird der Rechengang zur Bestimmung der Auflagerkräfte und der Biegelinie der räumlichen BAA mit mindestens zwei festen (spielfrei - nicht nachgiebigen) Lagern beschrieben, wobei die Eindeutigkeit der BAA durch feste Lager bereits gegeben ist.

Die BAA ist in einem  $(X, Y, Z)$ -Koordinatensystem gegeben und besteht aus einer LA von  $\bar{R}$  ( $\bar{R} \geq 2$ ) festen Lagern und von  $\bar{M}$  ( $\bar{M} > 0$ ) spielbehafteten Lagern in Z-Richtung senkrechten Lagerebenen  $E_r$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R}$ ) und  $E_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) und aus einem in  $\bar{R}$  festen Lagern aufgelagerten vorgebogenen Balken, wobei jedem Lager ein bestimmter Balkenpunkt zugeordnet ist.

Die eingeprägte Verbiegung des Balkens in  $\bar{R}$  festen Lagern sowie die dabei auftretenden Auflagerkräfte werden in X- und Y-Richtungen durch  $x_H(Z)$  und  $y_H(Z)$  sowie  $x_{A_r}$  und  $y_{A_r}$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R}$ ) gegeben, während die Balkenquerschnitte so beschaffen sind, daß die Biegesteifigkeit in jedem Punkt Z für alle Biegerichtungen gleich ist, d.h. nur eine Funktion von Z. Die Lagen von  $\bar{R}$  bzw.  $\bar{M}$  Lagerebenen seien durch  $Z = \hat{Z}_i = \hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \dots, \hat{Z}_{\bar{R}}$  bzw.  $Z = Z_m = Z_1, Z_2, \dots, Z_{\bar{M}}$  gegeben und die Einflußzahlen  $\alpha_{mn}$  und die Einheitsbiegeline  $\eta_n(Z)$  ( $m, n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) sowie die Einheitsauflagerkräfte  $a_{rm}$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R}$ ) seien bekannt (Abschn. 4.2.2). Die Funktion  $f_m = f_m(x_m, y_m) = 0$  der rLKT und die für alle Biegerichtungen konstanten elastischen Nachgiebigkeiten  $\omega_{mn}$  jedes spielbehafteten Lagers seien vorgegeben, wie im Abschnitt 5.5.3. (Gl. 5.13) beschrieben.

Es werden die Komponenten der Auflagerkräfte  $x_{A_r}^x$  und  $y_{A_r}^x$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R}$ ) in  $\bar{R}$  festen Lagern,  $x_{D_n}^x$  und  $y_{D_n}^x$  ( $n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) in  $\bar{M}$  spielbehafteten Lagern sowie die Balkenbiegeline  $x_H^x(Z)$  und  $y_H^x(Z)$  berechnet.

Wenn die eingeprägte Biegung des Balkens bei allen  $\bar{M}$  spielbehafteten Lagern innerhalb der rLkt verläuft, so bestehen die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned}
 x_{D_n}^x &= 0 \\
 y_{D_n}^x &= 0 \\
 (n = 1, 2, \dots, \bar{M}) \\
 \\
 x_{A_r}^x &= x_{A_r} \\
 y_{A_r}^x &= y_{A_r} \\
 (r = 1, 2, \dots, \bar{R}) \\
 \\
 x_H^x(Z) &= x_H(Z) \\
 y_H^x(Z) &= y_H(Z)
 \end{aligned} \right\} (5.17)$$

Falls die eingeprägte Biegelinie nicht innerhalb aller rLkt liegt, müssen zunächst die Auflagerkräfte in den Lagern berechnet werden. Dies erfolgt in iterativer Art. Die Lösung des Problems läßt sich ähnlich wie beim allgemeinen Fall (Abschn. 5.5.3) in vier Schritte aufteilen.

Für den ersten Rechenschritt können entsprechend der eingepprägten Balkenbiegeline die Auslenkungsstellen  $B'_{m,1}$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) gewählt werden. Wenn die eingepprägte Balkenlinie mit der Lager ebene  $E_m$  außerhalb der rLkt  $f_m$  im Punkt  $C_m$  überschneidet, wird als Auslenkungsstelle  $B'_{m,1}$  die dem Punkt  $C_m$  zugeordnete Abstandsbasis in der rLkt  $f_m$  gewählt.

Für den  $i$ -ten Rechenschritt wird angenommen, daß die Auslenkungsstellen  $B'_{m,i}$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) bekannt sind. Liegt  $B'_{m,i}$  bei einem Lager nicht in der rLkt  $f_m$ , so wird dieses Lager für die Berechnung nicht berücksichtigt, Bei den anderen spielbehafteten Lagern wird in jeder rLkt  $f_m$  für  $B'_{m,i}$  ein rEKt mit den Eckpunkten  $A'_m(X'_m, Y'_m)$ ,  $A''_m(X''_m, Y''_m)$ ,  $A'''_m(X'''_m, Y'''_m)$  und  $A''''_m(X''''_m, Y''''_m)$  bestimmt. Daraus ergibt sich in der X- und Y-Richtung für die Lagerspiele:

$$\left. \begin{aligned} x_{1S_m} &= \text{Min } (X'_m, X''_m) + X_{om} \\ x_{2S_m} &= \text{Max } (X'_m, X''_m) + X_{om} \\ y_{1S_m} &= \text{Min } (Y'_m, Y''_m) + Y_{om} \\ y_{2S_m} &= \text{Max } (Y'_m, Y''_m) + Y_{om} \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Nach der Gl. (4.17) können die Komponenten der Auflagerkräfte  $x_{D_n^x}$  und  $y_{D_n^x}$  ( $n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) berechnet und die Richtung  $\mu_{m,i}^x$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) der resultierenden Auflagerkräfte ermittelt werden. Die Vorgehensweise für die Prüfung der Richtigkeit der angenommenen Auslenkungsstellen  $B'_{m,i}$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) sowie für die Festlegung der neuen Auslenkungsstellen  $B'_{m,i+1}$  ( $m = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) wird aus den entsprechenden Lösungsmethoden entnommen, die beim allgemeinen Fall angewendet wurden (Abschn. 5.5.3.).

Wenn die Komponenten der Auflagerkräfte  $x_{D_n^x}$  und  $y_{D_n^x}$  ( $n = 1, 2, \dots, \bar{M}$ ) berechnet worden sind, können die Auflagerkräfte  $x_{A_r^x}$  und  $y_{A_r^x}$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R}$ ) nach der Gl. (4.19) und die Biegelinie aus  $x_{H^x}(Z)$  und  $y_{H^x}(Z)$  nach der Gl. (4.20) berechnet werden.

Falls in der Anordnung  $\bar{K}$  zusätzliche Einzelkräfte aus  $x_{P_k}$  und  $y_{P_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ) vorhanden sind, wird anstatt der eingepprägten Balkenbiegelinie aus  $x_H(Z)$  und  $y_H(Z)$  die Biegelinie mit den Komponenten  $x_{H'}(Z)$  und  $y_{H'}(Z)$  verwendet, die wie folgt ermittelt werden (Abschn. 4.2).

$$\left. \begin{aligned} x_{H'}(Z) &= x_H(Z) + \sum_{k=1}^{\bar{K}} \vartheta_k(Z) \cdot x_{P_k} \\ y_{H'}(Z) &= y_H(Z) + \sum_{k=1}^{\bar{K}} \vartheta_k(Z) \cdot y_{P_k} \end{aligned} \right\} (5.19a)$$

Dabei ergeben sich die Auflagerkräfte in  $\bar{R}$  festen Lagern  $x_{A'_r}$  und  $y_{A'_r}$  anstatt  $x_{A_r}$  und  $y_{A_r}$  ( $r = 1, 2, \dots, \bar{R}$ )

$$\left. \begin{aligned} x_{A'_r} &= x_{A_r} + \sum_{k=1}^{\bar{K}} b_{rk} \cdot x_{P_k} \\ y_{A'_r} &= y_{A_r} + \sum_{k=1}^{\bar{K}} b_{rk} \cdot y_{P_k} \end{aligned} \right\} (5.19b)$$

### 5.5.5. Mehrdeutiger Fall

Die Untersuchung für eine mehrdeutige BAA ist ohne zusätzliche Konvention bereits abgeschlossen. Im folgenden werden Fälle behandelt, bei denen zusätzliche Konventionen zur Ermittlung einer quasistabilen Lage des Balkens führen. Folgende Möglichkeiten sind dabei denkbar:

Das Zentralelement ist stets vertikal angeordnet, da es unverbogen ist. Alle anderen Elemente sollen durch Eigengewicht, jedoch ohne Verbiegung, an die rLkt anlehnen, wobei der unterste Elementpunkt auf einer Horizontalebene bis zum Zustand gleitet, bei dem das Element mit der Horizontalebene die kleinste Neigungswinkel hat.

Bei einer mehrdeutigen BAA  $f_{N!}^*$  ist in jeder Lagerebene  $E_m$  bei der Eindeutigkeitsanalyse die durch alle Prkt und die rLkt  $f_m$  gemeinsam umschlossene konvexe Kontur  ${}^m\phi_{N!}$  bekannt (Anlage 4). Aus  $N$  derartigen Konturen  ${}^m\phi_{N!}$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) können insgesamt  $\binom{N}{2}$  Kombinationen mit je zwei Konturen gebildet werden. Bei einer Kombination mit  ${}^m\phi_{N!}$  und  ${}^n\phi_{N!}$  in den

Lagerebenen  $E_m$  und  $E_n$  wird die quasi stabile Lager  $L_{mn}$  des Balkens wie folgt bestimmt (Abb. 5.15): Da die Lagerebenen  $E_m$  und  $E_n$  parallel sind, läßt sich die Kontur  ${}^n\phi_{N!}$  in der Lagerebene  $E_n$  in die Lagerebene  $E_m$  normal projizieren, so daß die Kontur  ${}^n\phi_{N!}$  und ihre Projektion  ${}^{mn}\phi_{N!}$  gleich sind. In der Lagerebene  $E_m$  läßt sich jeder Punkt in der Kontur  ${}^m\phi_{N!}$  mit allen Punkten in der Kontur  ${}^{mn}\phi_{N!}$  verbinden. Dabei können die der größten derartigen Verbindungsstrecke zugeordneten Konturpunkte  $P_m$  und  $P_{mn}$  bestimmt werden (Abb. 5.15). Die den Konturpunkten  $P_m$  und  $P_{mn}$  zugeordneten Tangenten  $T_m$  und  $T_n$  sind parallel und stehen auf die Verbindungsstrecke  $\overline{P_m P_{mn}}$  senkrecht. Die quasi-

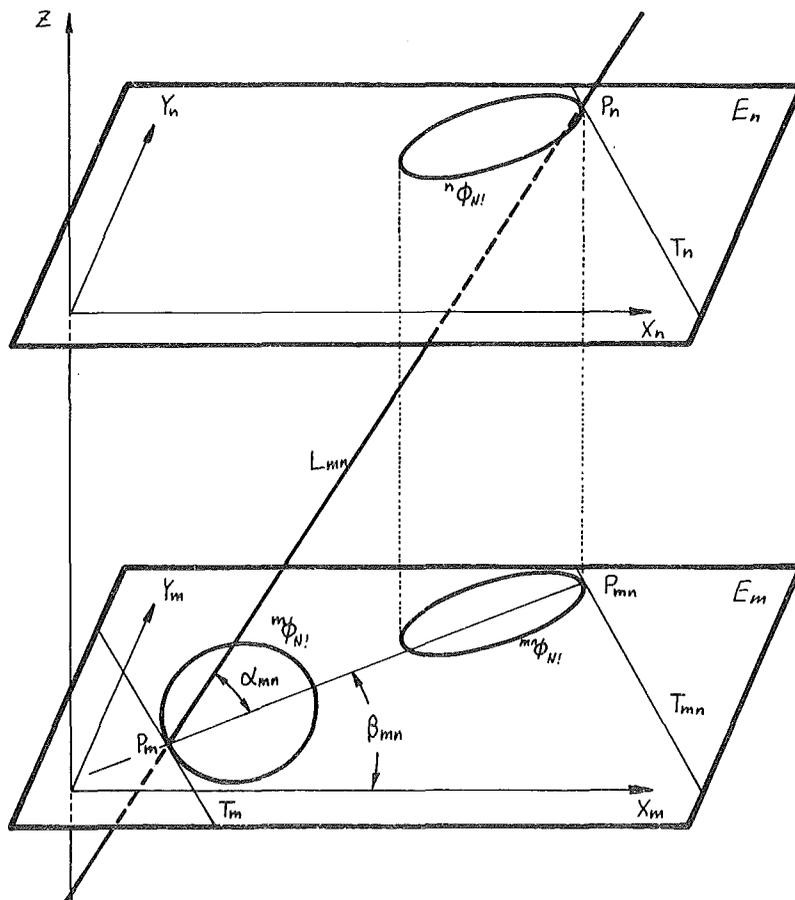


Abb. 5.15 Schematische Darstellung zur Bestimmung einer „quasi stabilen“ Lage  $L_{mn}$  des Balkens

stabile Lage  $L_{mn}$  des Balkens in den Konturen wird dadurch bestimmt, daß der Balken bei der Kontur  ${}^m\phi_{N!}$  im Punkt  $P_m$  und bei der Kontur  ${}^n\phi_{N!}$  im Punkt  $P_n$  anliegt, der dem Punkt  $P_{mn}$  bei der Kontur  ${}^{mn}\phi_{N!}$  entspricht. Dabei können neben der Biegelinie des Balkens für die Lage  $L_{mn}$  auch die Winkel  $\alpha_{mn}$  zwischen der Linie  $L_{mn}$  und der Ebene  $E_m$  und die Winkel  $\beta_{mn}$  zwischen der Strecke  $\overline{P_m P_{mn}}$  und der  $X_m$ -Achse in der Lagerebene  $E_m$  bestimmt werden (Abb. 5.15). Derartige Lagen  $L_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, \dots, N : m < n$ ) lassen sich für alle  $K = \binom{N}{2}$  Kombinationen aus  $N$  Konturen  ${}^m\phi_{N!}$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) ermitteln.

Wenn jede von soeben ermittelten Lagen  $L_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, \dots, N : m < n$ ) eine möglich quasi stabile Lage in allen  $N$  Konturen ist, so muß die Linie  $L_{mn}$  bei allen Lagerebenen innerhalb der Kontur verlaufen. Von allen derartigen Lagen von  $L_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, \dots, N : m < n$ ) mit kleinster Winkelgröße  $\alpha_{mn}$  ist voraussetzungsge-  
mäß eine quasi stabile Lage. Falls mehrere solche Lagen vorhanden, sind, so kann die gesuchte Lage durch eine zusätzliche Konvektion ermittelt werden. Eine zusätzliche Konvention ist beispielsweise, daß die Winkel  $\beta_{mn}$  ein Minimum darstellen sollen. Damit ist die quasi stabile Lage des Balken in allen Lagern eindeutig bestimmt.

## 6. Lagerung der Elemente

### 6.1. Arten der Lagerung, Begriffsdefinitionen und Ausgangsdaten

In einem schnellen Reaktor sind prinzipiell zwei Arten der Elementlagerung zu unterscheiden:

- 1) nicht bewegliche Lager, wie z.B. die Lager in der Tragplatte
- 2) bewegliche Lager, wie z.B. Lager in den Verspannungsebenen und Lager, die aufgrund der Berührung benachbarter Elemente außerhalb der Verspannungsebenen liegen.

Die Lagerung der Elemente in der Tragplatte sind weitgehend vom Betriebszustand des Reaktors unabhängig, die Lager für einzelne Elemente sind von den Lagerbedingungen der anderen Elemente unabhängig. Die wichtigsten Daten zur Charakterisierung dieser Lager sind

- die Anzahl der Lagerstellen
- die Nachgiebigkeit der Lagerbettung und
- die Spiele der Lager

Sie lassen sich aus der Lagerkonstruktion entnehmen. Die Lagerung der Elemente in den Verspannungsebenen dagegen ist vom Betriebszustand des Reaktors bestimmt, wobei die Lagerbedingungen der Elemente, von denen benachbarte Elemente abhängig sein können. Die Lagen derartiger Lager werden durch sog. Elementpositionen (abgekürzt: EPOS) bestimmt, die durch Positionsbereiche von Flächenmittelpunkten des Kastenquerschnittes definiert sind.

Die EPOS für den unverformten Zustand wird im Abschnitt 6.2 und die für den Betriebszustand wird im Abschnitt 6.3 bestimmt. Anschließend wird im Abschnitt 6.4 für den Fall untersucht, wenn benachbarte Elemente bei der Verformung außerhalb der Verspannungsebene berühren.

Zunächst werden jedoch die für diese Untersuchung erforderlichen Definitionen und Ausgangsdaten behandelt.

Ein Elementkasten ist ein dünnwandiger Kasten mit einem sechseckigen Querschnitt, dessen Schlüsselweite  $SW_A$  [19,20] und die Wanddicke  $s$  sind (Abb. 6.1.). Jeder Elementkasten ist in einer Verspannungsebene mit zwei Pflastern an jeder Seite versehen. Die sechs Tangenten an diesen Pflastern bilden ein gleichmäßiges Sechseck, die sog. Kernzelle mit einer Schlüsselweite  $SW_B$ . Die Schlüsselweite, die den Mittellinien der Kastenwände entspricht, wird mit  $SW$  bezeichnet (Abb. 6.1). Schließlich ist der Abstand der Mittelpunkt der Kastenquerschnitte benachbarter Elemente im unverformten Zustand  $SW_N$ .

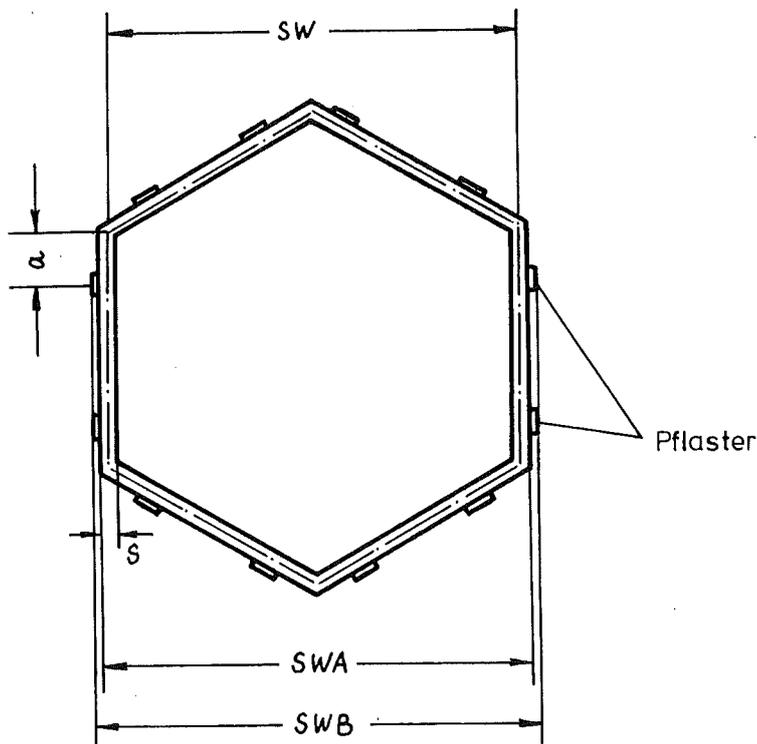


Abb. 6.1 Der Querschnitt des Elementkasten

Die unverformten Elemente sind in einer Horizontalebene über den Kernquerschnitt hexagonal gleichmäßig in einem kartesischen  $(X, Y)$ -Koordinatensystem bzw. in einem polaren  $(\varphi, \gamma)$ -Koordinatensystem angeordnet, dessen Koordinatenursprung der Flächenmittelpunkt des zentralen Sechsecks ist (Abb. 6.2). Die X- bzw. Y-Achse ist dabei entweder eine sog. Speichenlinie oder eine Ecklinie. Eine Speichenlinie ist eine vom Koordinatenursprung ausgehende Linie [6, 9, 11], die die Mittelpunkte benachbarter Sechsecke verbindet, z.B. Y-Achse in Abb. 6.2. Die zu diesen Sechsecken zugehörigen Elemente werden als Speichenelemente bezeichnet. Die im Koordinatenursprung zur Speichenlinie senkrechte Linie heißt Ecklinie, z.B. X-Achse in Abb. 6.2.

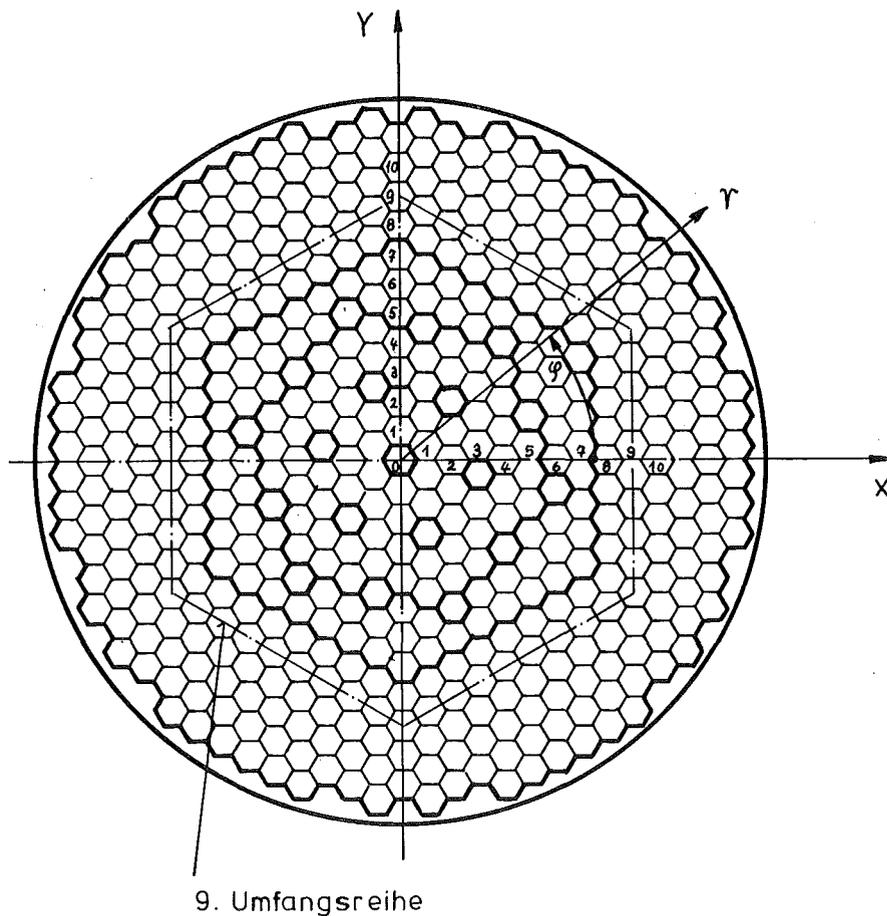


Abb. 6.2 Schematische Darstellung  
eines Kernquerschnittes

In einer hexagonalen Anordnung läßt sich durch die Verbindung der Mittelpunkte der in Umfangsrichtung benachbarten Sechsecke ein gleichmäßiges Sechseck bilden, dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist. Derartige benachbarte Sechsecke bilden eine Umfangsreihe [9]. Jedes Element gehört demnach einer bestimmten Umfangsreihe an. Die Numerierung der Umfangsreihen erfolgt von innen nach außen, wobei das Zentralelement in der Elementreihe 0 liegt.

Die maximal mögliche Anzahl  $\max_{N_k}$  der Elemente in der Umfangsreihe k ergibt sich durch

$$\max_{N_k} = 6 \cdot k \quad (6.01)$$

Die Numerierung der Elemente in einer Umfangsreihe beginnt bei dem Element, dessen Kastenmittelpunkt der X-Achse am nächsten liegt.

Aus Symmetriegründen ist es möglich, einen Ausschnitt des Kernquerschnittes zu behandeln. In diesem Fall ist die maximal mögliche Anzahl  $\max_{N_k}$  der Elemente in der k-ten Umfangsreihe von der Art der Aufteilung und der Berandung des Ausschnittes abhängig. Als Teiler für symmetrische Ausschnitte kommen  $L = 2, 3, 4, 6$  und  $12$  in Betracht, wobei die Berandung jeweils durch eine Speiche oder eine Ecklinie gegeben ist. Die Numerierung der Elemente in einer Umfangsreihe erfolgt dann von einer dieser Linien. Ist eine der Berandungen eine Speichenlinie, so ergeben sich

$$\max_{N_k} = \text{Nat} \left( \frac{6}{N} \cdot k \right) + 1 \quad (6.02a)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

Sind beide Berandungen Ecklinien, so ergeben sich

$$\max_{N_k} = \text{Nat} \left( \frac{6}{N} \cdot k \right) + \frac{1 + (-1)^k}{2} \quad (6.02b)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

Hierbei ist  $\text{Nat} \cdot \left(\frac{6}{N} \cdot k\right)$  der natürliche Anteil von  $\left(\frac{6}{N} \cdot k\right)$ . Die tatsächliche Anzahl  $N_k$  der Elemente in der Umfangsreihe  $k$  ist höchstens  $\max N_k$

$$N_k \leq \max N_k \quad (6.03)$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

Die Gesamtanzahl der Elemente  $\bar{I}$  ist bei insgesamt  $\bar{K} + 1$  Umfangsreihen

$$\bar{I} = \sum_{k=0}^{\bar{K}} N_k \quad (6.04)$$

## 6.2. Elementpositionen im unverformten Zustand

Die EPOS in unverformtem Reaktorzustand sind in Polarkoordinaten durch  $\varphi_{k,n}$  und  $r_{k,n}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, \bar{K}$ ;  $n = 1, 2, \dots, N_k$ ) der Flächenmittelpunkt der gleichmäßigen Sechsecke gegeben, die in einer Horizontalebene hexagonal gleichmäßig angeordnet sind. Der allgemeinen Berechnung der EPOS geht die Ermittlung der Positionen  $\bar{\varphi}_k$  und  $\bar{r}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ) der Speichenelemente voran, wobei davon ausgegangen wird, daß der ( $\varphi = 0$ )-Fahrstrahl des Koordinatensystems auf einer Speichenlinie liege. Dann folgt:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_k &= 0 \\ \bar{r}_k &= (k-1) \cdot \text{SWN} \\ (k &= 0, 1, 2, \dots, \bar{K}) \end{aligned} \right\} (6.05)$$

Die EPOS für ein Element ( $k, n$ ) ( $k = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ;  $n = 1, 2, \dots, N_k$ ) ergibt sich durch

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{k,n} &= \text{arc tg} \left[ \sqrt{3} \cdot \frac{n - m \cdot k - 1}{2 \cdot k - (n - m \cdot k - 1)} \right] + m \cdot \frac{k}{3} \\ r_{k,n} &= \frac{\bar{r}_k}{k} \sqrt{k^2 - k(n - m \cdot k - 1) + (n - m \cdot k - 1)^2} \end{aligned} \right\} (6.06a)$$

Hierbei sind

$$\left. \begin{aligned} m &= \text{Nat} \left( \frac{n}{k} \right) \\ 0 &\leq \text{arc tg} \left[ \sqrt{3} \cdot \frac{n - m \cdot k - 1}{2 \cdot k - (n - m \cdot k - 1)} \right] \leq \frac{\pi}{3} \end{aligned} \right\} (6.06b)$$

### 6.3. Elementposition im verformten Zustand

#### 6.3.1. Allgemeines

Die Verspannung in einem Reaktor dient in erster Linie zur Verhinderung der unbegrenzten Ausfächerung der Elemente infolge der freien Verbiegung [20]. Sie erfolgt nach einem bei der Reaktorauslegung festgelegten Konzept, aus dem die EPOS in den Verspannungsebenen bestimmt werden können. Die im Betrieb einstellende Wechselwirkung der Elemente in den Verspannungsebenen (das Verspannungsproblem) stellt eines der schwierigsten Probleme bei der Analyse der Coreverformung dar. Bisher sind zu dieser Frage wenige, nur stark vereinfachte Modelle bekannt geworden.

Class [9] hat über die möglichen Ansätze bei der allgemeinen Behandlung dieses Problems mit direkter Berücksichtigung der Reibung und Spalte zwischen den Elementen untersucht. Dabei wurde festgestellt, daß ein rein theoretisches Modell für den Gesamtkern eines Reaktors kaum zu entwickeln ist [9]. Einige vereinfachte Rechenmodelle werden jedoch behandelt. Es sind das Ringmodell mit Verschmierung der Vorgänge und das Speichenmodell.

W.E. Pennel [22] hat für eine hexagonale Anordnung ein Rechenmodell entwickelt, in dem die Kastenwände eines Elementes entkoppelt sind, aber jeweils einzeln mit der Elementachse durch Federn verbunden.

Die EPOS in den Verspannungsebenen werden dadurch bestimmt, daß die infolge der globalen Dehnung aufgeweiteten Elementkästen in einem für alle Elementkästen zur Verfügung stehenden Bereich angeordnet sind, wobei die Elementkästen, hervorgerufen durch die gegenseitige Abstützung, zusätzlich Querschnittsverformungen erfahren können.

In der vorliegenden Arbeit werden zwei Arten von Verspannungen unterschieden:

### 1) Spielbehaftete Verspannung

Die Lagerung der Elemente wird durch die nach einer bestimmten Vorschrift festgelegten Positionen und Größen der rLkt für einzelne Elemente im vorgegebenen Bereich der Verspannungsebene definiert. Durch die Änderung derartiger Vorschriften läßt sich die Lagerung der Elemente bei einer spielbehafteten Verspannung parametrisch untersuchen. Bei einer spielbehafteten Verspannung wird die Kastenaufweitung und die Kastenquerschnittsverformung nicht berücksichtigt.

### 2) Spielfreie Verspannung

Für die Beschreibung eines theoretischen Modells ist die Annahme einer spielfreien Verspannung dort möglich, wo relativ kleine Unterschiede der Querschnitte der Elementkästen über einen Kernquerschnitt zu erwarten sind. In einer Verspannungsebene, z.B. unterhalb der Corezone, werden alle Elementkästen aufgrund der globalen Dehnung sehr wenig aufgeweitet, so daß die Annahme der gleichmäßigen Aufweitung der Elementkästen über die Verspannungsebene möglich ist. Da bei einer spielfreien Verspannung die Elemente vielfach gegenseitig abstützen, ist für die EPOS die Querschnittsverformung infolge der Druckkräfte von Bedeutung. Deshalb wird zunächst im Abschn. 6.3.2. ein vereinfachtes Rechenmodell zur Bestimmung der EPOS bei spielfreier Verspannung unter der Annahme behandelt, daß die Kastenquerschnittsverformung infolge der Druckkräfte bekannt ist. Danach werden im Abschnitt 6.3.3 die Bestimmung der Kastenquerschnittsverformung infolge der Druckkräfte und die Berechnung der Druckkräfte selbst untersucht.

### 6.3.2. Ein vereinfachtes Rechenmodell zur Bestimmung der Elementpositionen bei spielfreier Verspannung

Für die Bestimmung der geänderten Schlüsselweiten SWB durch die Querschnittsdeformation werden folgende Annahmen gemacht:

- 1) Die Vernachlässigung der Reibung zwischen den Elementen
- 2) Die Vernachlässigung der Torsion der Elemente
- 3) getrennte Behandlung für jede Verspannungsebene

- 4) unverändert gleichmäßig sechseckige Form der Kastenquerschnitte im verspannten Zustand
- 5) Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Kastenquerschnitte in einer Umfangsreihe bildet im verspannten Zustand ein gleichmäßiges Sechseck.
- 6) Die Querschnittsverformung der Elementkästen infolge der Druckkräfte ist kleiner als die Pflasterhöhe, so daß sich die Elemente in einer Spannungsebene mit den benachbarten Elementen nach wie vor nur über die Pflaster gegenseitig abstützen.

Aus den Punkten 4 und 5 der Annahme resultiert, daß die veränderten Schlüsselweiten aller Kastenquerschnitte in einer Umfangsreihe gleich sein sollen. Daraus ergibt sich, daß die EPOS  $\varphi_{k,n}^x$  in Umfangsrichtung im verspannten Zustand unverändert bleibt.

$$\varphi_{k,n}^* = \varphi_{k,n} \quad (6.07)$$

( $k = 0, 1, \dots, \bar{K} : n = 1, 2, \dots, N_k$ )

Der mittlere deformierte Kastenquerschnitt der Elemente einer Umfangsreihe wird als repräsentatives Hexagon bezeichnet. Die deformierte Schlüsselweite  $SWB_{k,n}^x$  des n-ten Elementes der k-ten Umfangsreihe läßt sich berechnen durch

$$SWB_{k,n}^x = SWB_{k,n} (1 + d_{k,n} - f_{k,n}) \quad (6.08a)$$

Hierbei bedeuten

$d_{k,n}$  = die mittlere globale Dehnung

$f_{k,n}$  = die mittlere relative Querschnittsverformung infolge der auf den Elementkasten wirkenden Druckkräfte (siehe Abschn. 6.3.3.).

Die Schlüsselweite  $\overline{SWB}_k^x$  des repräsentativen Hexagons für die k-ten Umfangsreihe ist dann

$$\overline{SWB}_k^* = \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} SWB_{k,n}^* \quad (6.08b)$$

Bei  $\overline{SWB}_k = SWB_{k,n}$  ( $n = 1, 2, \dots, N_k$ ) ergibt sich

$$SWB_k = SWB_k \cdot \left[ 1 + \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} d_{k,n} - \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} f_{k,n} \right] \quad (6.08c)$$

Zur Berechnung der EPOS  $r_{k,n}^x$  im verspannten Zustand geht, wie bei der Berechnung von  $r_{k,n}$  im unverspannten Zustand, die Ermittlung der Position  $\bar{r}_k^x$  für das zugehörige Speichenelement vor. Die Ermittlung von  $\bar{r}_k^x$  ( $k = 0, 1, \dots, \bar{K}$ ) erfolgt der Reihe nach vom Zentralelement ausgehend nach außen hin. Die radiale Position  $\bar{r}_k^x$  des Speichenelementes ist durch den größeren der beiden Radien  ${}^1\bar{r}_k^x$  und  ${}^2\bar{r}_k^x$

$$\bar{r}_k^x = \text{Max} ({}^1\bar{r}_k^x, {}^2\bar{r}_k^x) \quad (6.09)$$

festgelegt, wobei  ${}^1\bar{r}_k^x$  und  ${}^2\bar{r}_k^x$  berechnet werden durch

$$\left. \begin{aligned} {}^1\bar{r}_k^x &= \bar{r}_{k-1}^x + \frac{1}{2} (\overline{SWB}_{k-1}^x + \overline{SWB}_k^x) \\ {}^2\bar{r}_k^x &= k \cdot \overline{SWB}_k^x \end{aligned} \right\} \quad (6.09a)$$

$(k = 1, 2, \dots, \bar{K})$

Die radiale Position des Zentralelementes ist stets Null.

$$r_{0,1}^x = \bar{r}_0^x = 0 \quad (6.10)$$

Die radiale Position  $r_{k,n}^x$  eines beliebigen Elementes kann nach den Gl. (6.06a) und (6.06b) ermittelt werden. Die tangentielle und radiale Versetzung ( $\varphi_{S_{k,n}}, r_{S_{k,n}}$ ) der EPOS in der Spannungsebene lassen sich mit Hilfe der Differenz ( $\Delta \varphi_{k,n}, \Delta r_{k,n}$ ) von EPOS für den unverformten und verformten Zustand berechnen.

$$\varphi_{S_{k,n}} = \Delta \varphi_{k,n} \cdot r_{k,n}$$

$$r_{S_{k,n}} = \Delta r_{k,n}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} y_{S_{k,n}} &= 0 \\ r_{S_{k,n}} &= r_{k,n}^* - r_{k,n} \\ (k &= 1, 2, \dots, \bar{K} : n = 1, 2, \dots, N_k) \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

### 6.3.3 Querschnittsverformung infolge der Druckkräfte

Für die Berechnung der Querschnittsverformung infolge der Druckkräfte an den Pflastern werden die Beziehungen zweier verschiedener Rechenmodelle verwendet. Die Querschnittsverformung wird dabei durch die Verschiebung des Pflasterpunktes angegeben, die eine Änderung  $f$  der Schlüsselweite  $SW$  zur Folge hat.

- 1) Nach [9] kann die Änderung der Schlüsselweite  $f$  durch die Beziehung

$$f = \frac{P \cdot (SW - S)^3}{5.46 \cdot E \cdot SW \cdot h \cdot S^3 \cdot \left(1 + \frac{SW^2}{12.9 \cdot h \cdot S}\right)} \quad (6.12)$$

berechnet werden (Abb. 6.1.), wobei

$P$  = wirksame Drucklast  
 $E$  = Elastizitätsmodul  
 $h$  = Hexagonhöhe  
 $S$  = Kastenwanddicke

sind.

- 2) Bei einem mehrfach symmetrisch belasteten Hexagonrahmen (Abb. 6.3.) ergibt sich die Durchbiegung  $f$  des Lastpunktes durch

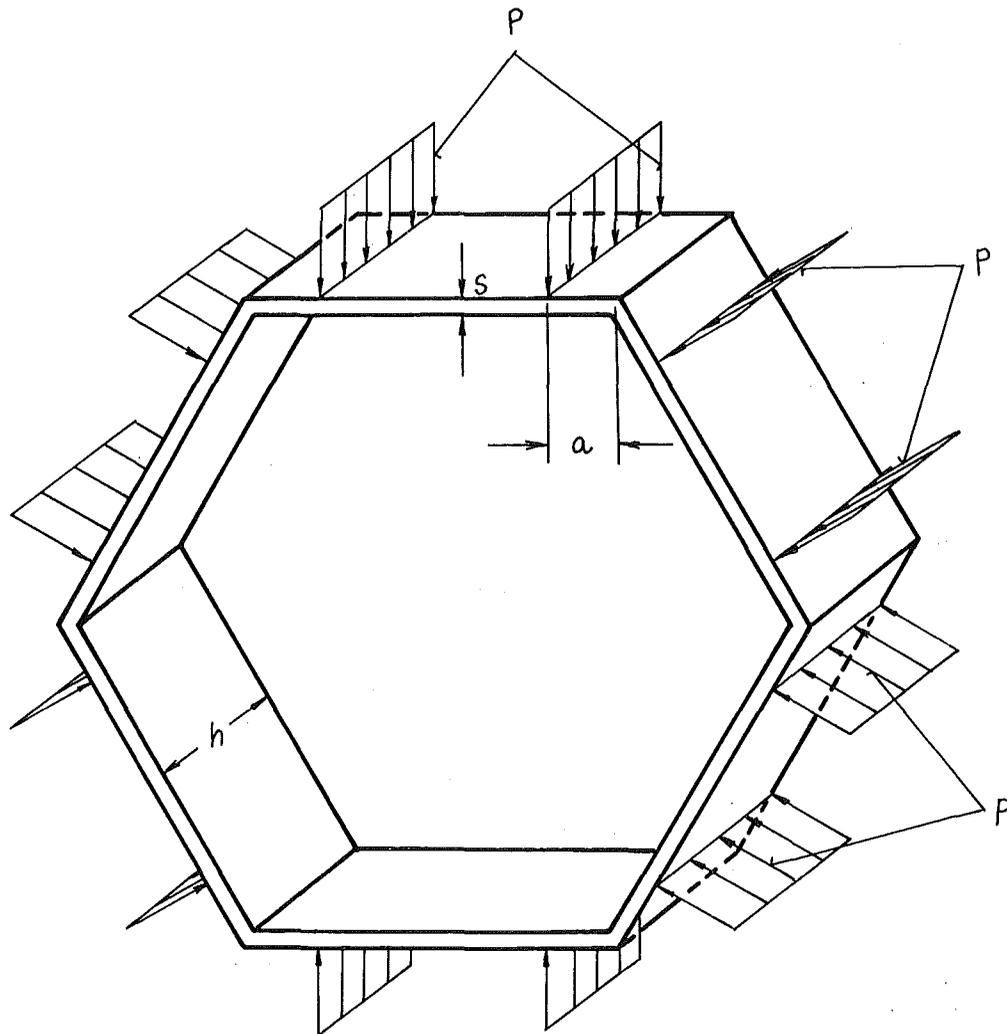


Abb. 6.3 Ein mehrfach symmetrisches belastetes Hexagon

$$f = \frac{4 \cdot P \cdot a^3}{E \cdot SW \cdot h \cdot s^3} \left(1 - \frac{s}{SW}\right)^3 \left(1 - \frac{3\sqrt{3} \cdot a}{2 \cdot SW}\right) \quad (6.13)$$

Hierbei sind

P = Druckkraft

a = Der Abstand des Lastpunktes von der Hexagonecke

E = Elastizitätsmodul

h = Hexagonhöhe

S = Wanddicke

Bei der Annahme, daß die Druckkräfte in den Mitten der Hexagon-,  
seiten wirken, ergibt sich die Durchbiegung  $f_{1/2}$

$$f_{1/2} = \frac{P (SW - S)^3}{24 \cdot 3 \cdot SW \cdot h \cdot S^3} \quad (6.13a)$$

Bei dem im Kapitel 8 vorgeführten Beispiel treten zwischen den  
f-Werten beider Modelle keine großen Unterschiede auf.

Die zunächst unbekannte Druckkraft P für die repräsentativen  
Hexagone wird ausgehend von den mittleren radialen Auflager-  
kräften  $\bar{A}_k$  in einer Verspannungsebene für die Elemente in der  
k-ten Umfangsreihe ermittelt.

$$\bar{A}_k = \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} A_{k,n} \quad (6.14)$$

$$(k = 1, 2, \dots, \bar{K})$$

Hierbei ist  $A_{k,n}$  die radiale Auflagerkraft des n-ten Elementes  
der k-ten Umfangsreihe.

Die mittleren radialen Auflagerkräfte  $\bar{A}_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, \bar{K}$ )  
sind den in einer Speichenlinie angeordneten repräsentativen  
Hexagonen zugeordnet, die sich im Gleichgewicht befinden (Abb. 6.4).  
Die zur Erreichung des Gleichgewichtszustandes fehlenden Kräfte  
 $\bar{A}_{\bar{K}+1}$  und  $\bar{A}_0$  werden durch die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{\bar{K}+1} &= - \text{Max} (0, V_1, V_2, \dots, V_{\bar{K}}) \\ \bar{A}_0 &= - \text{Min} (0, W_1, W_2, \dots, W_{\bar{K}}) \end{aligned} \right\} (6.15a)$$

berechnet werden, wenn

$$\left. \begin{aligned}
 V_m &= \sum_{l=m}^{\bar{K}} \bar{A}_l \\
 W_m &= \sum_{l=1}^m \bar{A}_l
 \end{aligned} \right\} (6.15b)$$

(m = 1, 2, \dots, \bar{K})

sind. Dabei sind die radial nach außen gerichteten Kräfte positiv.

Die Ableitung dieser Beziehungen wurden in der Anlage 6 beschrieben.

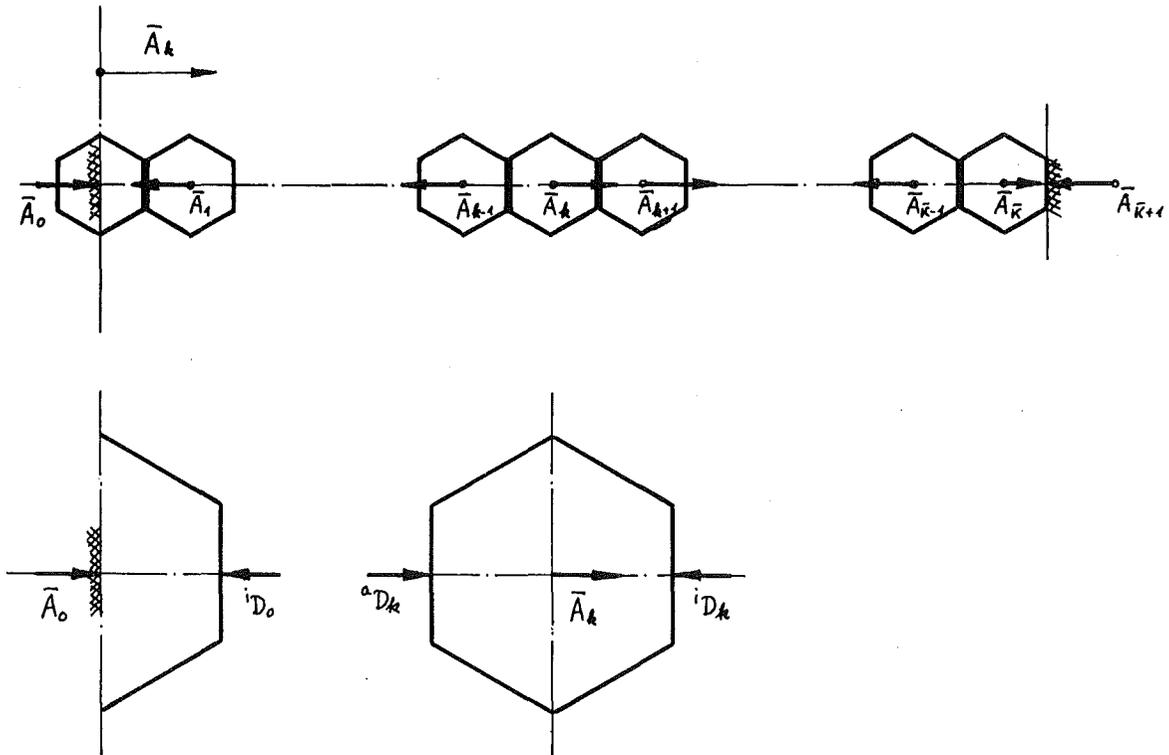


Abb. 6.4 Kräfte bei repräsentativen Hexagonen

Bei der vorliegenden Darstellung werden die Hexagone 1 bis  $\bar{K}$  jeweils an den inneren und äußeren Seiten durch die Kräfte  $i_{D_k}$  und  $a_{D_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, \bar{K}$ ) belastet. Diese Kräfte ergeben sich aus

$$\left. \begin{aligned} i_{D_k} &= \text{Max} (0, {}^k W_0, {}^k W_1, \dots, {}^k W_{k-1}) \\ a_{D_k} &= \text{Min} (0, {}^k V_{k+1}, \dots, {}^k W_{\bar{K}+1}) \end{aligned} \right\} \quad (6.16a)$$

wenn

$$\left. \begin{aligned} {}^k W_m &= \sum_{l=m}^{k-1} \bar{A}_1 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, k-1) \\ {}^k V_m &= \sum_{l=k+1}^m \bar{A}_1 \quad (m = k+1, \dots, \bar{K}+1) \end{aligned} \right\} \quad (6.16b)$$

sind.

Zur Querschnittsverformung der Hexagone tragen sowohl die Druckkräfte in radialer Richtung als auch die in Umfangsrichtung bei. Bei der Annahme, daß beide Komponenten gleich sind, ergibt sich die Druckkraft  $P_k$  an jedem Pflaster des  $k$ -ten Hexagons

$$P_k = \frac{1}{6} (i_{D_k} - a_{D_k}) \quad (6.17a)$$

$$(k = 1, 2, \dots, \bar{K})$$

Für das Zentralelement dagegen gilt die Beziehung

$$P_0 = \frac{1}{2} i_{D_1} \quad (6.17b)$$

## 7. Fließschema des Rechenganges

Für die Realisierung der in den Kapiteln 2 bis 6 beschriebenen Lösungsmethode wurde das Programm BØWY-3D [24] erstellt, dessen Strukturdiagramm mit den notwendigen Vorläufer- und Nachfolgeprogrammen in Abb. 7.1. dargestellt ist. Dabei wurden größere Teilsysteme des Programms, die unabhängig voneinander verwendet werden können, in jeweils einem Kasten zusammengefaßt. Die Programme sind in Fortran IV für eine digitale Rechenmaschine IBM 360-165 geschrieben. Im folgenden Abschnitt wird der Rechengang an Hand des Strukturdiagramms (Abb. 7.1.) diskutiert. Das Teilsystem O58EE, in dem die eigentliche dreidimensionale Elementverbiegung berechnet wird, wird im Abschnitt 7.2. näher erläutert.

### 7.1. Beschreibung des Strukturdiagramms zur Berechnung der dreidimensionalen Elementverbiegung im Kern

Die Berechnung der Elementbiegung im Kern setzt eine dreidimensionale Mehrgruppen-Diffusionsrechnung voraus, wie sie z.B. mit den Programmen KASY [26], D3D [25] oder CITATION [31] durchgeführt werden kann. Mit diesen Programmen werden, ausgehend von mehreren homogenen Mischungszonen, für ein diskretes Maschengitter die Spaltraten und Neutronenflußverteilung sowie der Multiplikationsfaktor bestimmt. Mit der aufgrund der errechneten Spaltraten normierten Wärmequellverteilung läßt sich mit dem Programm THESYS [21] die Temperaturverteilung in den Elementkästen bestimmen, die mit dem Programm O58TT so aufbereitet werden, daß sie für die Berechnung der Elementverbiegung verwendet werden können. Um bei der Elementverbiegung das Strukturmaterialschwellen qualitativ berücksichtigen zu können, werden die normierten schnellen Neutronenflußverläufe in den Elementkästen aus der durch die Diffusionsrechnung errechneten Neutronenflußverteilung mit den Programmen O58AA und O58BB berechnet.

Mit den so bestimmten Temperatur- und schnellen Neutronenflußverläufen werden aufgrund der im Kapitel 3 beschriebenen Lösungsmethode die räumliche freie Verbiegung und axiale Dehnung der Elemente sowie die globale Dehnung der Kastenquerschnitte der Elemente infolge der thermischen Belastung und des Strukturmaterialschwellens in der

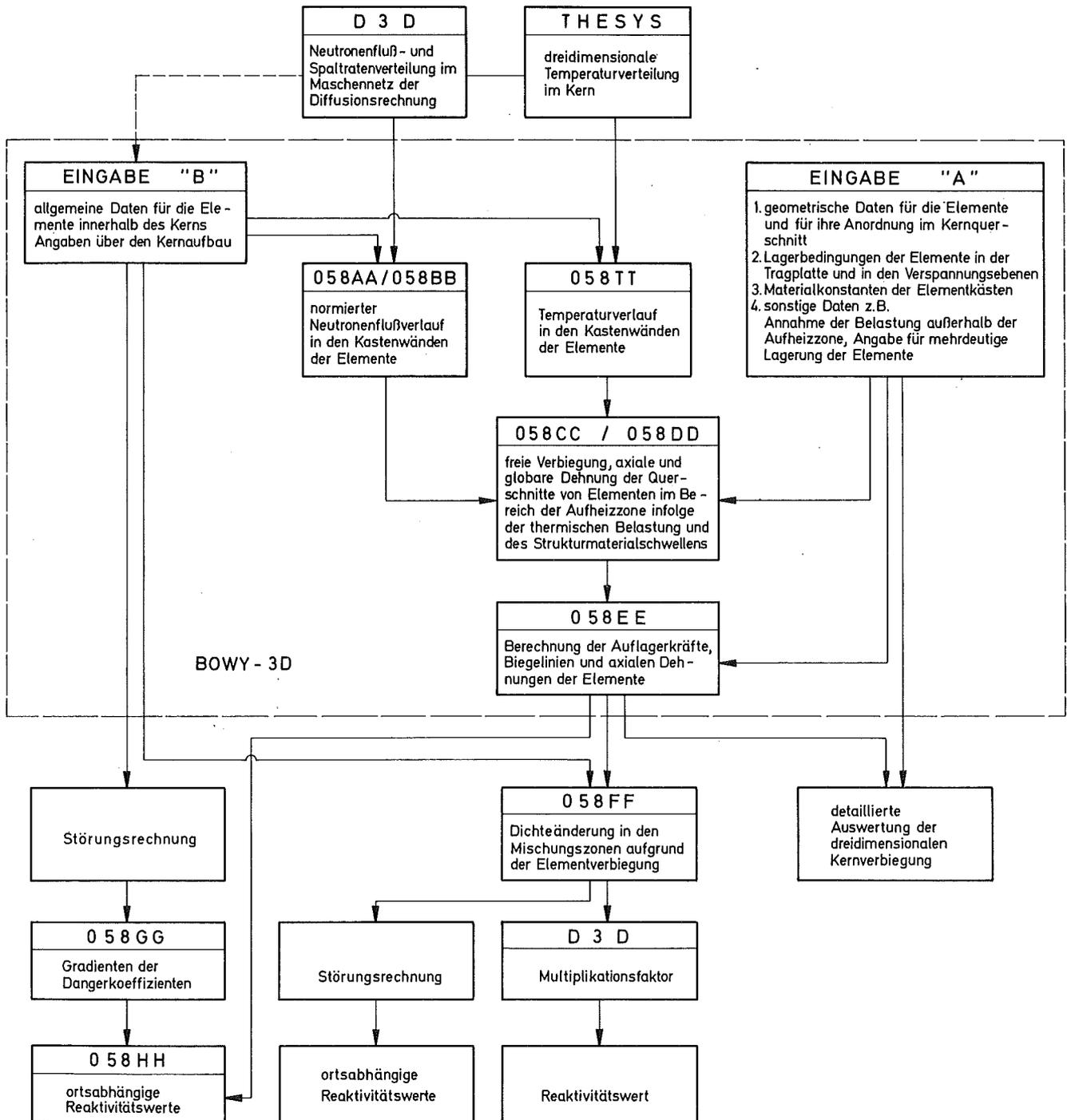


Abb. 7.1 Strukturdiagramm von BOWY-3D zur Berechnung der dreidimensionalen Element-Verbiegung im Kern mit Vorläufer- und Nachfolgeprogrammen

Aufheizzone des Kerns durch die Programme 058CC und 058DD errechnet.

Anschließend werden nach der in den Kapiteln 4 bis 6 beschriebenen Lösungsmethode mit den Lagerbedingungen der Elemente in der Tragplatte und in den Verspannungsebenen sowie mit den Größen für die Bestimmung der Biegesteifigkeit der Elementkästen durch das Teilsystem 058EE die Verbiegung der Elemente im Kernverband und die daraus resultierenden Auflagerkräfte bestimmt. Die Vorgehensweise im Programm 058EE wird im Abschnitt 7.2. näher beschrieben. Mit den Auflagerkräften und der Biegelinie läßt sich eine Auswertung bezüglich mechanischer Größen durchführen, wie z.B. die Ermittlung von Spannungsspitzen und maximaler Verbiegung.

Außerdem können mit den Biegelinien und den axialen Dehnungen der Elemente die Änderung der Reaktivität des Kerns zwischen dem unverformten und verformten Zustand berechnet werden. Die Berechnung dieser Werte ist mit zwei verschiedenen Methoden möglich:

- 1) Untersuchung des Reaktivitätsverhaltens nach der Methode von Storrer [ 3 ]

Hierbei wird die zeitabhängige Reaktivitätsänderung  $R(t)$  bestimmt durch

$$R(t) = \int_{\mathcal{V}} \dot{W}(\mathcal{V}, t) \cdot \text{grad } D(\mathcal{V}) \cdot d\mathcal{V} \quad (7.01)$$

mit

$\dot{W}(\mathcal{V}, t)$  = die orts- und zeitabhängige Verschiebungsgeschwindigkeit des Materialteilchens

$D(\mathcal{V})$  = der ortsabhängige Dangerkoeffizient

Die Dangerkoeffizienten [1\_] werden als ortabhängige Reaktivitätswerte definiert, die sich bei einer Hinzu- bzw. Herausnahme einer Einheitsmenge von Material an einer bestimmten Stelle ergeben würden. Sie werden mit Hilfe der Störungsrechnung [2, 27] ermittelt. Bei einer konstanten Verschiebungsgeschwindigkeit ergibt sich die Reaktivitätsänderung  $\Delta K$  zweier Zustände durch

$$\Delta K = \sum_{m=1}^M \int_{V_0} \tilde{K}^m(\omega) \cdot \text{grad}^m D(\omega) \cdot d\omega \quad (7.02)$$

wobei der Verschiebungsvektor  $\tilde{u}^m(\omega)$  und die Dangerkoeffizienten  $\tilde{K}^m(\omega)$  in Abhängigkeit von Materialien vorgegeben sind. Die räumlichen orts- und materialabhängigen Verschiebungsvektoren der Massenpunkte lassen sich aus den Biegelinien und axialen Dehnungen der Elemente berechnen. Dieser Rechengang kann durch die Auswerteprogramme 058GG und 058HH realisiert werden.

## 2) Berechnung der Reaktivitätsänderung mit geänderten Materialzusammensetzungen in den Zonen

Der Reaktivitätswert von Zonen wird mit Hilfe der sich durch die Verbiegung und die axiale Dehnung hervorgerufenen örtlichen Änderung der Dichte bzw. der Mischungsverhältnisse [18] bestimmt. Durch die Verbiegung und die Dehnung der Elemente werden Anteile des Strukturmaterials, Brenn- und Brutstoffs sowie ein Teil des Kühlmittels gegenüber ihrer ursprünglichen Position im unverformten Zustand verschoben. Dagegen werden andere Anteile in die so frei gewordenen Stellen verdrängt. Diese Materialbewegungen können in den Mischungszonen Änderungen der Mischungsverhältnisse bzw. der Teilchenzahlen [25, 26\_] verursachen.

Sind die neuen Mischungsverhältnisse bekannt, so kann

- a) durch Störungsrechnung der Reaktivitätswert
- b) durch eine erneute Diffusionsrechnung der Kritikalität berechnet werden.

## 7.2. Rechengang zur Bestimmung der Auflagerkräfte, der Biegelinie und der axialen Dehnung (Teilsystem 058EE)

Die Verbiegung der Elemente wird ausgehend von freien Verbiegungen und globaler Dehnung der Kastenquerschnitte in der Aufheizzone aus dem Programm 058DD berechnet (Abb. 7.2.). Folgende Angaben sind hierzu als zusätzliche Eingabe notwendig:

- (A) Lagerbedingung in der Tragplatte und in den Verspannungsebenen (siehe Kap. 6)
- (B) Positionierung einzelner Elemente im untersuchten Ausschnitt des Reaktorquerschnittes (siehe Kap. 6)
- (C) Angaben für die Länge und die Querschnitte der Elemente
- (D) Angaben für den Verlauf der freien Verbiegung außerhalb der Aufheizzone
- (E) Angaben für die mehrdeutig gelagerten Elemente (siehe Abschn. 4.5. und 5.5.)

Aus (A) und (B) können die Lagerbedingungen und die Positionierung der Elemente genau definiert werden (Rechenschritt 1). Mit den Angaben (C) und (D) werden im Rechenschritt (2) die freie Verbiegung und die globale Dehnung der Kastenquerschnitte von Elementen ermittelt. Anschließend werden die Elemente bezüglich der Eindeutigkeit ihrer Lageranordnung im Rechenschritt (3) untersucht (Falldefinition und Eindeutigkeitsanalyse). Durch diese Untersuchung erhält man für jedes Element eine der sechs Arten von Elementlagerungen, bei denen die Auflagerkräfte und die Biegelinie auf unterschiedliche Art und Weise berechnet werden müssen.

- Fall 1) Normaler Fall (Abschn. 5.5.4.)
- Fall 2) Allgemeiner Fall (Abschn. 5.5.3.)
- Fall 3) Eindeutiger kräftefreier Fall (Abschn. 5.4.)
- Fall 4) Eindeutig in einer und mehrdeutig in der anderen Biegerichtung (Abschn. 4.4.2. und 4.4.3.)
- Fall 5) Eindeutig kräftefrei in einer und mehrdeutig in der anderen Biegerichtung (Abschn. 5.4. und 4.4.3.)
- Fall 6) Mehrdeutiger Fall in beiden Biegerichtungen (Abschn. 5.5.5.)

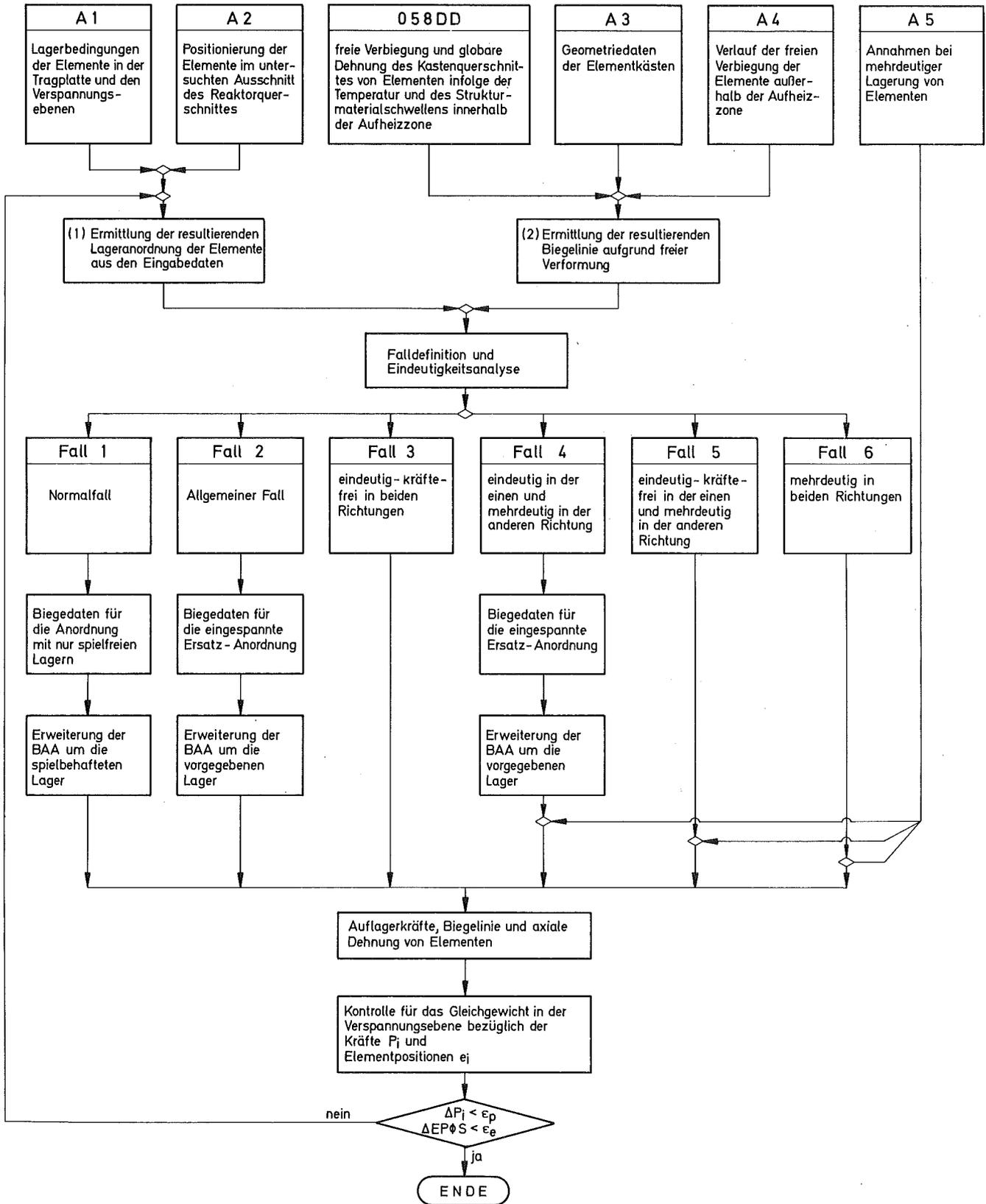


Abb. 7.2 Schematische Darstellung des Rechenganges zur Bestimmung der Auflagerkräfte, Biegelinien und axialen Dehnungen ( Programmteil 058EE )

Beim normalen Fall wird zuerst die Elementlagerung in nur spielfreien Lagern für beide Biegerichtungen unabhängig untersucht (Abschn. 4.2.) und danach um die spielbehafteten Lager erweitert (Abschn. 4.4.1 und 5.5.4). Beim allgemeinen Fall müssen zuerst die Biegedaten für die eingespannte Ersatzanordnung (siehe Abschn. 4.4.2.) bestimmt werden. Mit Hilfe dieser Daten werden dann die Auflagerkräfte iterativ berechnet (Abschn. 5.5.3.). Anschließend werden die Biegelinien der Elemente berechnet. Beim eindeutigen kräftefreien Fall ist die Elementlage durch die Eindeutigkeitsanalyse bereits bestimmt (Abschn. 5.4. und 5.5.1.). Bei einem mehrdeutigen Fall wird für die Elementlage mit Hilfe der dafür vorgesehenen Konventionen (E) eine sog. quasi stabile Lage definiert, die z.B. in den Abschnitten 4.4.3. und 5.5.5. beschrieben wurde. Ist jedoch die Elementlagerung in einer durch die Eindeutigkeitsanalyse (Abschn. 5.4.) bestimmten Biegerichtung mehrdeutig und in der darauf senkrechten Richtung eindeutig (Fall 4 und 5), so ergeben sich zwei voneinander unabhängige ebene Probleme, bei denen die Auflagerkräfte und die Biegelinie durch die im Kapitel 4 beschriebene Rechenmethode bestimmt werden können.

Die so bestimmten Biegelinien und Auflagerkräfte müssen im Kernverband bzw. in den Verspannungsebenen im Gleichgewicht stehen (Kapitel 6). Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so wird der beschriebene Rechengang mit neu zu bestimmenden Lagerpositionen (1) wiederholt. Ist die Gleichgewichtsbedingung erfüllt, kann der Rechengang mit dem Programm 058EE abgeschlossen werden.

## 8. Anwendungsbeispiel für den Mark I-Kern des SNR 300

### 8.1. Aufbau des Reaktors

Mit dem vorgestellten Rechenverfahren wurde die dreidimensionale Elementverbiegung für einen natriumgekühlten schnellen Brutreaktor untersucht.

Der Reaktor entspricht in seinen geometrischen Abmessungen (Abb. 8.1 und 8.2) und der Materialzusammensetzung (Tabelle 8.1. und 8.2.) dem SNR 300 MARK I-Kern [6]. Im Reaktor sind neben den Brenn- und Brutelementen 12 Positionen durch Trimmregelstäbe und je drei Positionen für das Erst- und Zweitabschaltsystem vorgesehen (Abb. 8.1). Die Berechnung erfolgt für ein Viertelausschnitt des Reaktors, wobei die Linien A-A und B-B die Symmetrieachsen des Kernquerschnittes bilden (Abb. 8.1). Damit liegt der Berechnung der in Abb. 8.3a dargestellte Ausschnitt des Kernquerschnittes zugrunde. Es sind insgesamt  $\bar{I} = 86$  Elemente zu untersuchen. Die Numerierung der Elemente ist in Abb. 8.3b angegeben.

Die folgenden Bezeichnungen werden verwendet (Abb. 8.3b):

- Das Element Nr. 1 im Kernzentrum ist das Zentralelement.
- Die Elemente, deren Querschnittsmittelpunkte auf den Symmetrieachsen AA und BB liegen, sind Symmetrieelemente.
- Die Regel- bzw. Abschaltstäbe (z.B. das Element 10) werden als Sonderelemente bezeichnet; die ihnen benachbarten Elemente (z.B. die Elemente 5, 6, 9, 11, 16 und 17) sind dann gestörte Elemente.
- Die Elemente, die sich an der Grenze zwischen dem Core und der radialen Brutzone befinden, werden als Grenzelemente bezeichnet.

Der Längsschnitt des Reaktors ist in Abb. 8.2. schematisch dargestellt.

Eine der Verspannungsebenen ist oberhalb der oberen axialen Brutzone vorgesehen, die zweite innerhalb der unteren axialen Brutzone (Abb. 8.4.).

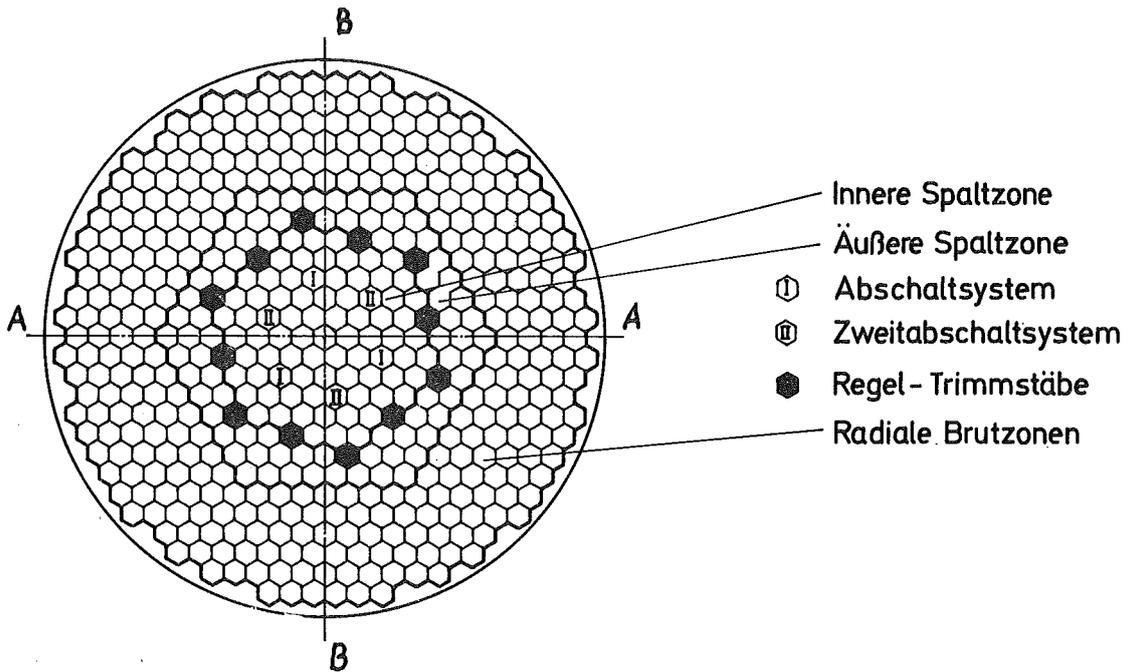


Abb. 8.1 Kernquerschnitt (schematisch)

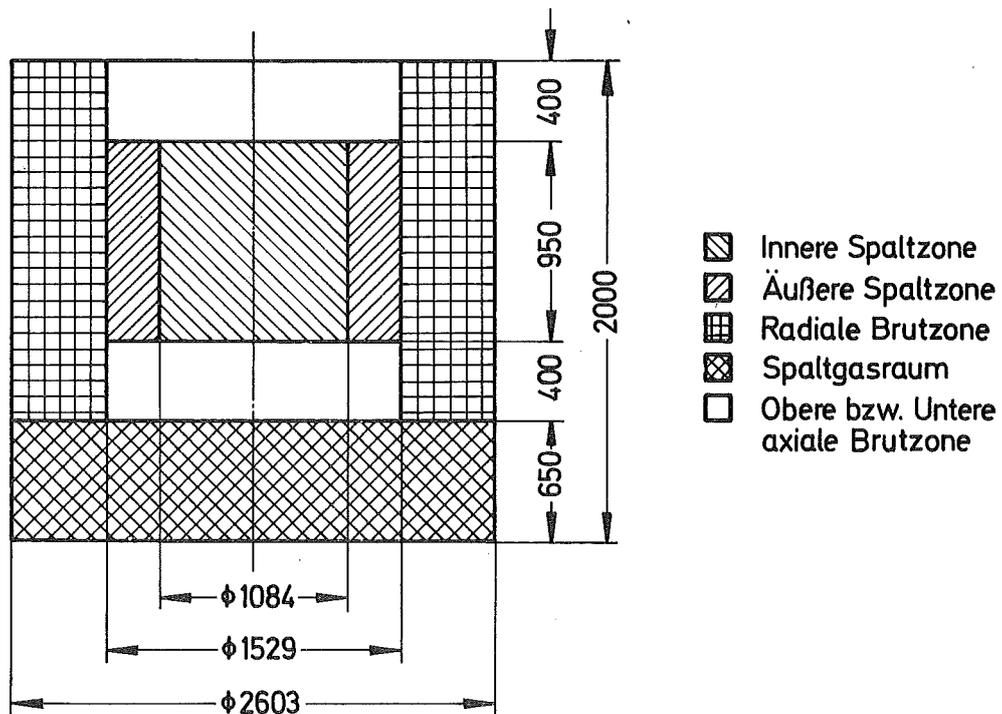


Abb. 8.2 Kernlängsschnitt (schematisch)

Name des Reaktors	SNR
Reaktortyp	natriumgekühlter schneller Reaktor
Thermische Leistung	730 MW
Gesamtbrutrate	1,29
Kühlmittel	Na
Eintrittstemperatur	377°C
mittlere Aufheizspanne	169°C
Elemente	
Anzahl der Brennelemente	151
Anzahl der Brutelemente	148
Anzahl der Abschirmelemente	330
Anzahl der Regel- und Abschaltelemente	18
Länge	3300 mm
Schlüsselweite	11,2 mm
Kastenwandstärke	2,8 mm
Struktur und Hüllmaterial	X8CrNiMoVNb1613
Brennstoff	PUO <sub>2</sub> /UO <sub>2</sub>
Brutstoff	UO <sub>2</sub>
Absorber	B <sub>4</sub> C
mittlere Anreicherung	1/y
innere Spaltzone	0,223
äußere Spaltzone	0,322

Tabelle 8.1. Charakteristische Daten des SNR-300 Mark I-Kerns

	Kühlmittel	Struktur + Hülle	Brennstoff bzw. Brutstoff	Absorber
innere Spaltzone	0.47756	0.20197	0.32047	
äußere Spaltzone	0.47756	0.20197	0.32047	
Abschalt- stäbe	0.4368	0.2500		0.3132
u. ax Brutzone	0.47756	0.20197	0.32047	
o. ax Brutzone	0.46682	0.20534	0.32784	
radiale Brutzone	0.31220	0.23267	0.45512	
Abschirm- zone	0.84148	0.15852		

Tabelle 8.2. Volumenanteile in den Zonen

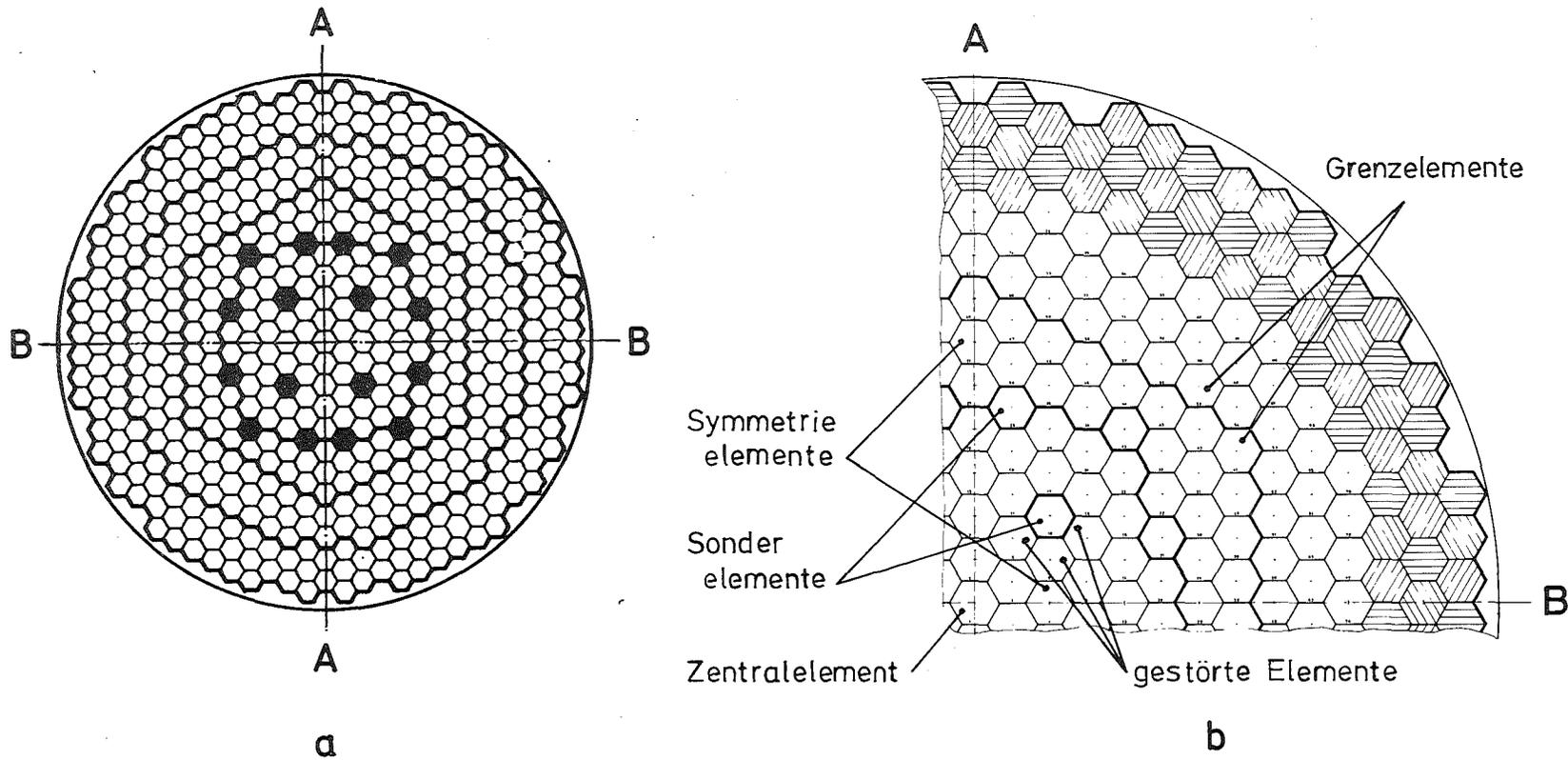


Abb. 8.3 Der rechnerische Kernquerschnitt (schematisch)

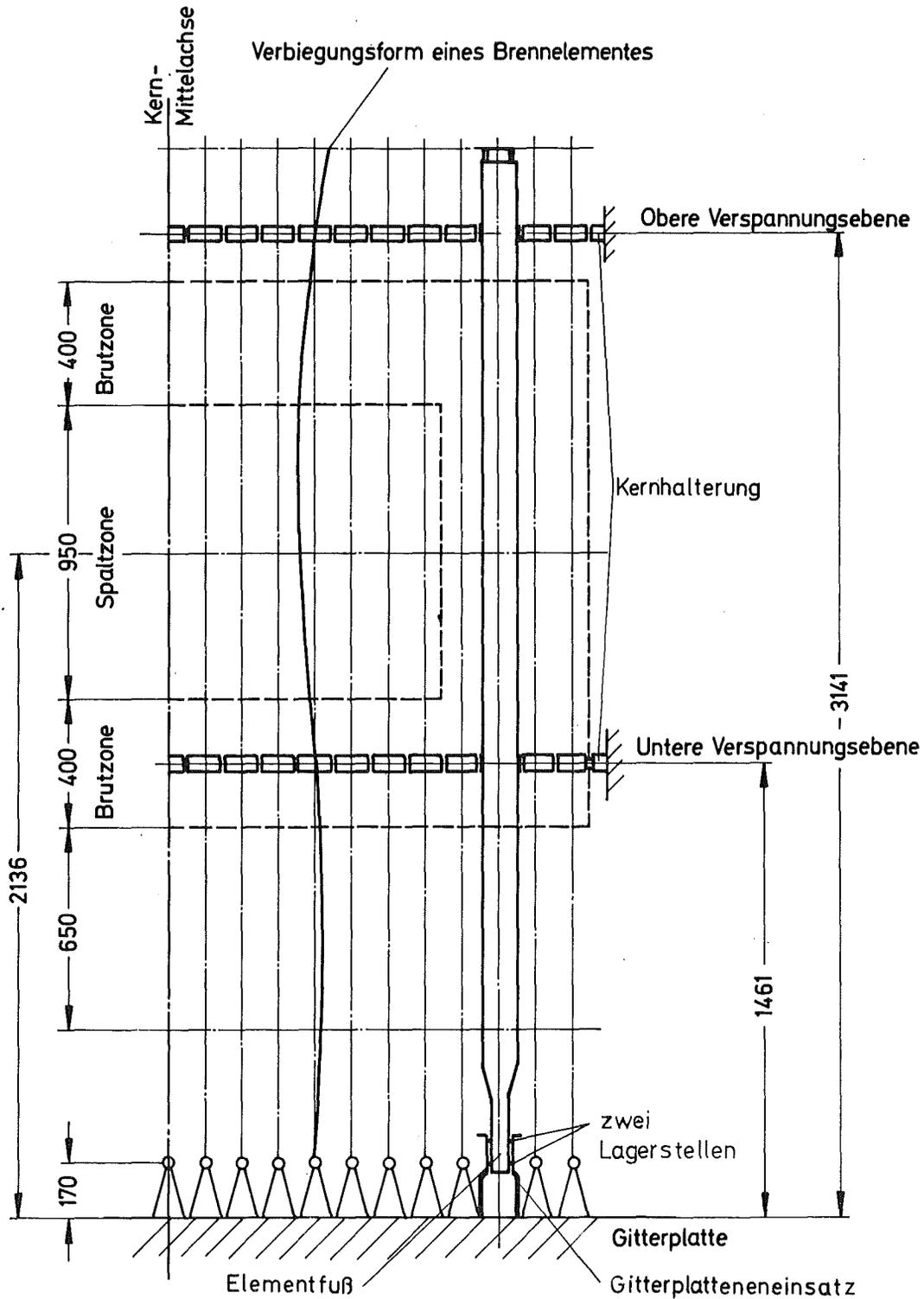


Abb. 8. 4. Schematische Darstellung für die radiale Positionierung und für das Prinzip der Verspannung der Elemente

Die Elemente stehen im unverbogenen Zustand vertikal auf der Tragplatte, wobei in den Verspannungsebenen die Spiele zwischen den Elementen gleichmäßig verteilt sind. Die Auslegung wurde derart gestaltet, daß die Spiele in der unteren Verspannungsebene bei Volleistung gerade verschwinden. Das maximal mögliche Spiel in der oberen Verspannungsebene soll in radialer Richtung insgesamt 10 mm betragen.

Um den Einfluß des Strukturmaterialschwellens näherungsweise erfassen zu können, wurden für das im Abschnitt 8.3.6 zu diskutierende Beispiel die Elemente im eingeschwungenen Leistungsbetrieb nach einer bestimmten Vorschrift umgesetzt, bei dem das folgende Umsetzungsschema der Brenn- und Brutelemente zugrunde gelegt wurde:

- Jedes Brennelement, z.B. Elemente bis zu 7. Umfangsreihe werden während einer für 360 Tage festgelegten Abbrandzeit insgesamt in drei gleichen Zyklen von jeweils 120 Tagen um je  $180^{\circ}$  um die eigene Längsachse verdreht. Das Element bleibt in der gleichen EPOS. Dabei wird am Anfang des Zykluses jeweils ein Drittel aller Brennelemente ausgewechselt. Die Brennelemente gleichen Abbrands sind in Abb. 4.3c mit gleichartigen Zahlen gekennzeichnet.
- Die sich in den Spaltzonen befindlichen vier Sonderelemente (Element-Nr. 10.21.23 und 26) werden nicht umgesetzt. Sie befinden sich seit 360 Tagen im Reaktorkern.
- Für die in den letzten drei Umfangsreihen 8, 9 und 10 angeordneten Brutelementen wurden folgende Regeln angenommen (Abb. 8.3c): Ein Brutelement wird zuerst in einer EPOS C1 bzw. C2 bzw. C3 360 Tage belassen (Abb. 8.3c). Danach wird das Element etwa  $180^{\circ}$  um die eigene Längsachse verdreht und in eine EPOS B1 bzw. B2 bzw. B3 für wiederum 360 Tage eingesetzt. Anschließend wird das Element mit einer gleichzeitigen Drehung um etwa  $180^{\circ}$  um die eigene Längsachse in eine EPOS A1 bzw. A2 bzw. A3 umgesetzt (Abb. 8.3c). In den Positionen A1, A2 und A3 wird das Element jedoch nach jeweils 120 Tagen um  $180^{\circ}$  um die eigene Längsachse verdreht. Bei dieser Umpositionierung wird ein Element stets in eine in Abb. 8.3c mit gleicher Zahl, 1 oder 2 oder 3, versehene EPOS versetzt. Ein Element wird z.B. zuerst in die EPOS 78 (C2), danach in die EPOS 64 (B2) und anschließend in die EPOS 52 (A2) gesetzt (Abb. 8.3c).

Da die Brennelemente in einem 120 Tage-Zyklus und die Brutelemente in einem 360 Tage-Zyklus umgesetzt werden, stellt das in Abb. 8.3c gezeigte Positionsschema eine der insgesamt neun möglichen Elementpositionierungen im Kernverband dar. Für diese Positionierung wurde die später zu diskutierende Rechnung durchgeführt, die den Einfluß des Strukturschwellens auf die dreidimensionale Kernverbiegung aufzeigen soll.

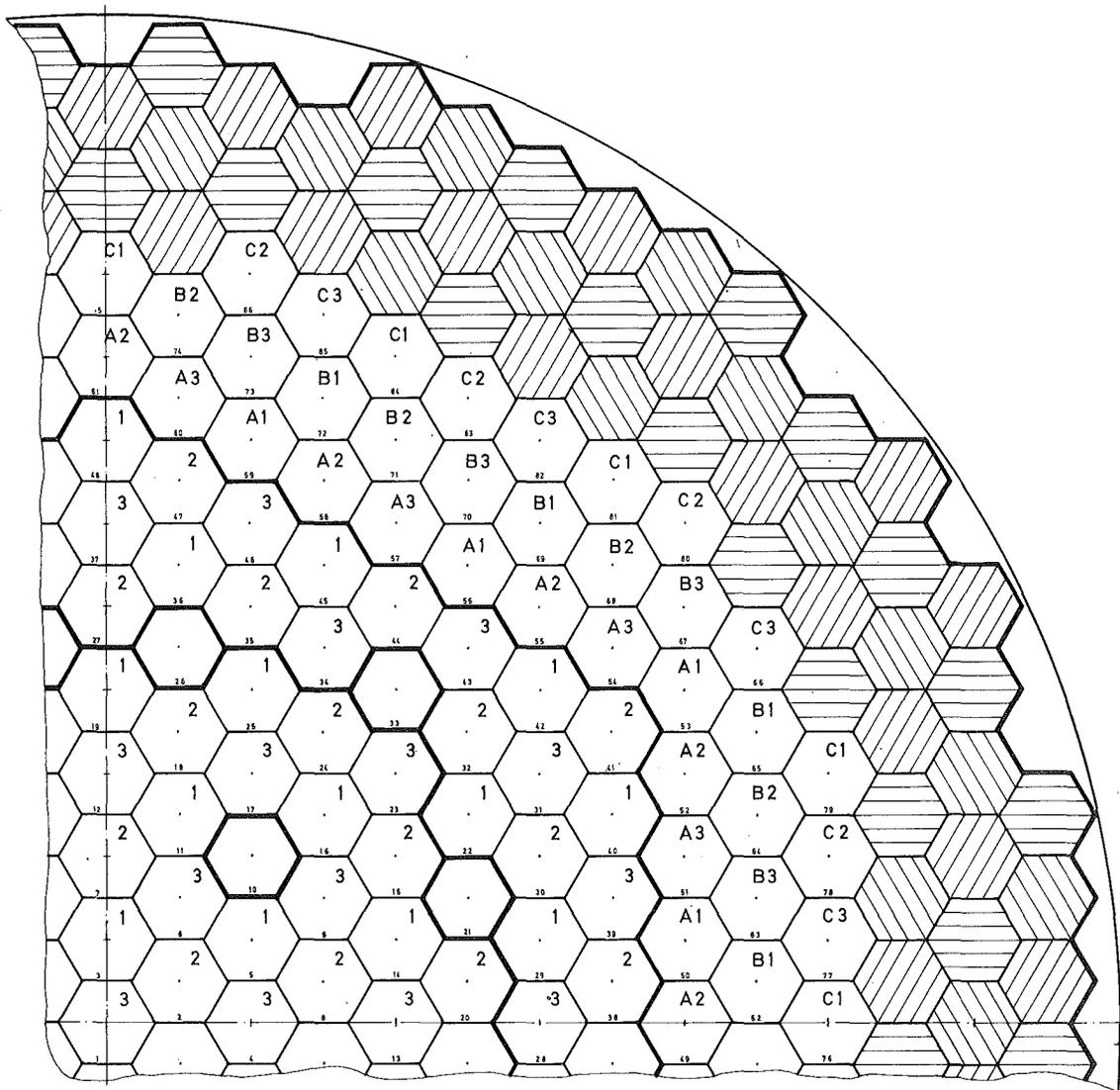


Abb. 8.3c Angaben der Positionierung und Umsetzung der Elemente

## 8.2. Umfang der Analyse

### I Die freie Verformung

Zunächst wird die freie Verformung der Elemente aufgrund rein thermischer Belastung berechnet. Die thermische Belastung wird durch die Temperaturverteilung entlang der Elementkästen bestimmt. Sie muß ausgehend von der Wärmequellendichte berechnet werden [21], die durch Diffusionsrechnungen ermittelt wird [25]. Für die Diffusionsrechnung wurde der Reaktorkern in axialer Richtung in 15 Zonen aufgeteilt. In der horizontalen

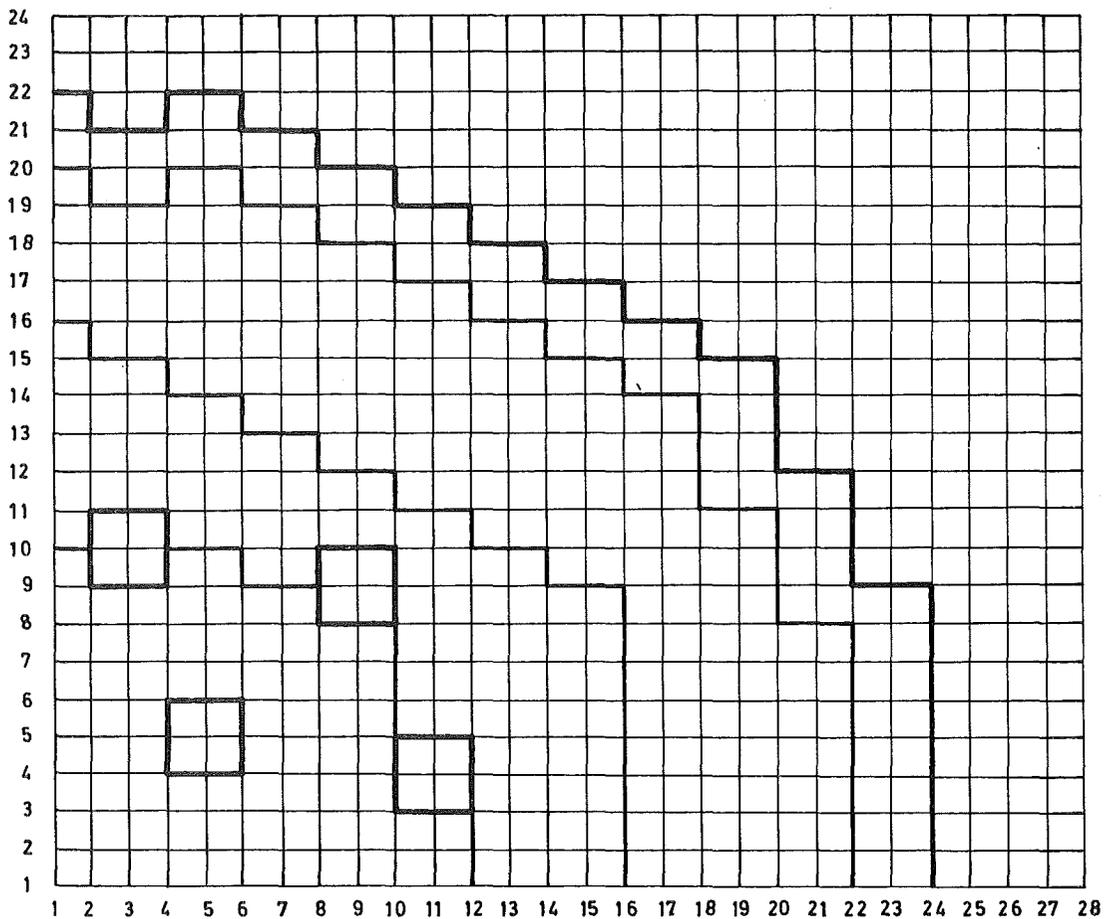


Abb. 8.5. Maschenaufteilung des Viertelkernquerschnitts

Ebene wurden 28 x 24 Stützstellen gewählt (Abb. 8.5). Einem unverbogenen Element entspricht bei dieser Darstellung ein Viereck für das Zentralelement, zwei Vierecke für ein Symmetrieelement und vier Vierecke für die übrigen Elemente, wobei der hexagonale Querschnitt eines Elementes und die entsprechende Vierecke flächengleich sind. Nimmt man an, daß axiale Stücke jedes Elementes und des Gebietes außerhalb der untersuchten Elemente jeweils als eine homogene Mischungszone betrachtet werden, so ergeben sich insgesamt 1560 Mischzonen.

Die Diffusionsrechnung liefert u.a. die Fluß- und die Quellverteilung an den Knotenpunkten des Maschennetzes. Damit kann die Temperaturverteilung in den Elementkästen berechnet werden [24]. Die Kühlmittelintrittstemperatur ist 377°C. Die mittlere Aufheizspanne des Kühlmittels im Corebereich beträgt 180°C, im radialen Brutmantel 40°C und in den Regel- und Abschaltstäben 10°C. Die resultierende Temperaturverteilung bestimmt die thermische Querschnittsaufweitung der Kästen, die axiale Ausdehnung und die freie Verbiegung der Elemente

## II Lagerung der Elemente

### IIa Lagerung in der Tragplatte

Die Elemente des SNR 300-MARK I Kerns sind wie folgt in der Tragplatte gelagert: Jedes Element ist im Gitterplatteneinsatz über zwei Lagerpunkten fixiert (Abb. 8.4). Die Gitterplatteneinsätze sind unabhängig voneinander in der Tragplatte befestigt. Betrachtet man den Gitterplatteneinsatz als separaten Biegebalken, so können die beiden Lagerstellen des Elementes im Gitterplatteneinsatz als nachgiebige Lager formuliert werden. Um ein reibungsloses Ein- und Ausladen der Elemente zu gewährleisten, sind diese beiden Lager als spielbehaftete Lager anzusehen. Die Größe der Spiele kann aus den vorhandenen Unterlagen nur näherungsweise bestimmt werden. Es wurde ein maximales Spiel von  $S = 0,1$  mm angenommen. Die elastischen Nachgiebigkeiten  $\omega_{mn}$  der beiden Lager ergeben sich aus [32]:

$$\omega_{11} = 4.30 \cdot 10^{-5} \text{ [cm/kp]}$$

$$\omega_{12} = \omega_{21} = 6.24 \cdot 10^{-5} \text{ [cm/kp]}$$

$$\omega_{22} = 20.00 \cdot 10^{-5} \text{ [cm/kp]}$$

Da sich die Lagereigenschaften während der Betriebszeit ändern werden, werden folgende Möglichkeiten näher untersucht:

- 1) zwei feste, d.h. spielfreie und nicht nachgiebige Lager
- 2) zwei spielfreie Lager mit elastischen Nachgiebigkeiten  
 $\omega_{mn}$  (m, n = 1, 2)
- 3) zwei nicht nachgiebige Lager mit Spielen von  $S = 0,1$  mm
- 4) zwei Lager mit Spielen von  $S = 0,1$  mm und elastischen Nachgiebigkeiten von  $\omega_{mn}$  (m, n = 1, 2)

#### IIb Lagerung in der unteren Verspannungsebene

Die Elemente sind in der unteren Verspannungsebene spielfrei verspannt. Da die Elemente im unteren axialen Brutbereich praktisch gleiche thermische Ausdehnung erfahren, kann angenommen werden, daß die thermische Querschnittsausdehnung aller Elemente in der unteren Verspannungsebene gleich ist. Die sich aus der Querschnittsverformung ergebende Änderung der Schlüsselweite des Elementkastens wird als Mittelwert aus den Gln. (6.12) und (6.13) angenommen:

$$f = 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot P \text{ [mm]}$$

Hierbei ist  $P$  [kp] die mittlere Druckkraft pro Element.

### IIc Lagerung in der oberen Verspannungsebene

Die Elemente sollen in der oberen Verspannungsebene -entsprechend der Auslegung - im heißen Zustand ein mittleres radiales Spiel von  $S_0 \approx 10$  mm haben. Deshalb ist eine Auslenkung jedes Elementes im verspannten Zustand um diesen Betrag theoretisch möglich. Die freie Auslenkung der Elemente ist aber sehr stark ortsabhängig: Die Elemente in den kleinen radialen Elementpositionen und in der äußersten Umfangsreihe haben kleine freie Auslenkungen (Abschn. 8.3.1). Dagegen ist die freie Auslenkung der Elemente im Grenzbereich zwischen dem Core und der Brutzone relativ groß. Daher können sich die Elemente in dieser Verspannungsebene gegenseitig abstützen, möglicherweise auch gruppenweise. Die Ermittlung der Auslenkung der Elemente im verspannten Zustand ist erst am Ende einer Reihe von Berechnungen möglich. Im Rahmen dieser Untersuchung soll zunächst der Einfluß der Lagerbedingungen in der oberen Verspannungsebene auf die Coreverformung parametrisch untersucht werden. Dieser Parameterstudie wird zugrunde gelegt, daß die rLkt in der Verspannungsebene kreisförmig sei und ihre Mittelpunkte über den Kernquerschnitt gleichmäßig verteilt sind.

Folgende vier Fälle für die Lagerbedingungen in der oberen Verspannungsebene wurden untersucht:

A) Spielfreie Lagerung

$$S_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \bar{I})$$

B) Konstante Radien der rLkt von

$$S_i = 1,25 \text{ [mm]} \quad (i = 1, 2, \dots, \bar{I})$$

C) Vergrößerung der Radien der rLkt mit steigenden radialen Positionen der Lager von  $S_1 = 0$  mm und  $S_{66} = 2,5$  mm nach

$$S_i = \frac{\gamma_i^*}{\gamma_{66}^*} \cdot 2,5 \text{ [mm]} \quad (i = 1, 2, \dots, \bar{I})$$

D) Verkleinerung der Radien der rLkt mit steigenden radialen Positionen der Lager von  $S_1 = 2,5$  mm und  $S_{66} = 0$  nach

$$S_i = \left(1 - \frac{\gamma_i}{\gamma_{66}^*}\right) \cdot 2.5 \text{ [mm]} \quad \text{für } \gamma_i^* \leq \gamma_{66}$$

$$S_i = 0 \quad \text{für } \gamma_i^* > \gamma_{66}$$

Die Größen  $r_i^x$  ( $i = 1, 2, \dots, 86$ ) sind dabei die radialen Positionen der Mittelpunkte der rLKt.

Die tangentialen und radialen Positionen,  $\varphi_i^x$  und  $r_i^x$  ( $i = 1, 2, \dots, \bar{I}$ ), der Mittelpunkte der rLKt im heißen Zustand werden ausgehend von denen,  $\varphi_i$  und  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \bar{I}$ ) im unverformten Zustand wie folgt bestimmt:

$$\varphi_i^* = \varphi_i$$

$$r_i^* = \frac{\gamma_i}{\gamma_{66}} \cdot [SWB \cdot 9 \cdot (1 + \alpha_{462} \cdot 169) + S_0 - S_{66}]$$

Hierbei ist  $\alpha_{462}$  die lineare Ausdehnungskoeffizient für  $T = 462^\circ\text{C}$ .

### III Fallunterscheidung

in der Tragplatte		ob. Verspannungsebene				
		A	B	C	D	E
		spielfrei	gleichm. Spiel	zunehm. Spiel	abnehm. Spiel	Kompakt
1	fest		x			x
2	nachgiebig	x	x	x	x	x
3	spielbehaftet		x			x
4	nachgiebig u. und spielbehaftet		x			

Tabelle 8.3. Die Tabelle für die Simulation der Elementlagerung

In der Tabelle 8.3. sind die Kombinationsmöglichkeiten der Lagerung der Elemente durch die Simulation der Lagerbedingungen in der Tragplatte und an der oberen Verspannungsebene dargestellt. Außerdem wird noch der Fall E einbezogen, bei dem die Elemente in der oberen Verspannungsebene kompakt nach innen spielfrei verspannt sind. Danach ergeben sich insgesamt 20 Kombinationen von Simulationsfällen, von denen allerdings nur 10 Simulationsfälle untersucht wurden, die in der Tabelle 8.3. durch Kreuze gekennzeichnet sind.

#### IV Darstellung der Ergebnisse

Die räumliche Darstellung der dreidimensional berechneten Ergebnisse, wie die Biegelinie und die Auflagerkräfte bei verschiedenen Kombinationen der Lagersimulation, ist aufgrund der auftretenden geometrischen Verzerrungen nicht sinnvoll. Deshalb werden diese Daten für die Diskussion in einen Querschnitt übertragen und zusammengefaßt dargestellt. Die Auflagerkräfte z.B. werden über der radialen Position der zugehörigen Elementachsen aufgetragen, wobei alle Umfangspositionen in eine gemeinsame Schnittebene geklappt werden (Abb. 8.6). In Abb. 8.7. sind entsprechend dieser Methode

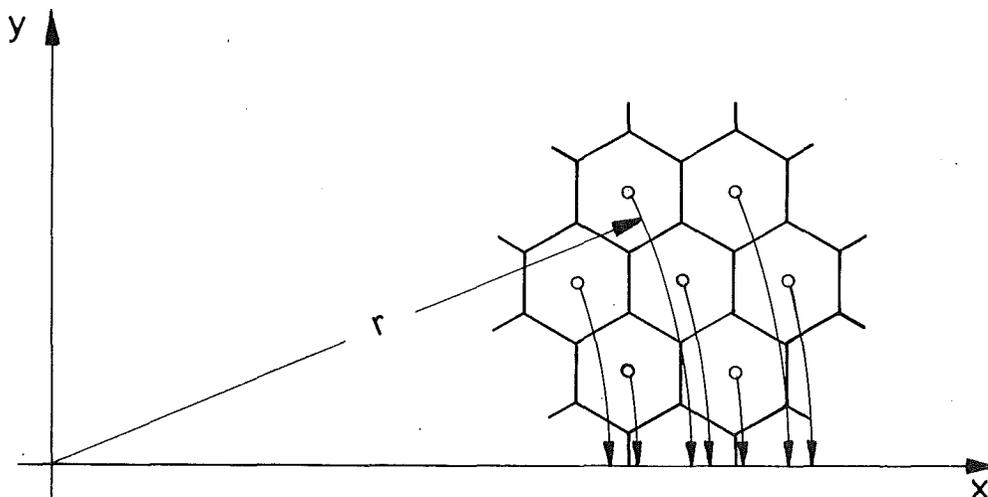


Abb. 8. 6. Skizze zur Darstellung der radialen Positionen der Elementachsen auf eine Koordinate

die radialen Positionen der Elementachsen (kleine arabische Zahlen) und die radialen Bereiche der Umfangsreihe (große arabische Zahlen) dargestellt. Hierbei muß folgendes beachtet werden:

- Mehrere Elemente können gleiche radiale Positionen haben.
- Die Elemente in einer Umfangsreihe können verschiedene radiale Positionen haben. Diese Positionen sind auf ein bestimmtes Gebiet begrenzt.
- Die Gebiete verschiedener Umfangsreihen können sich teilweise überlappen.

Um einen besseren Überblick über die Lastverhältnisse für ein Element zu bekommen, werden die Auflagerkräfte mit der Summe der Auflagerkräfte der beiden Fußlager normiert. Darüber hinaus werden die resultierenden Auflagerkräfte in den Verspannungsebenen und die resultierende Auslenkung der Elemente in der Höhe der oberen Kante des Cores in einem Viertelausschnitt des Kastenquerschnittes mit Pfeilen gekennzeichnet aufgetragen.

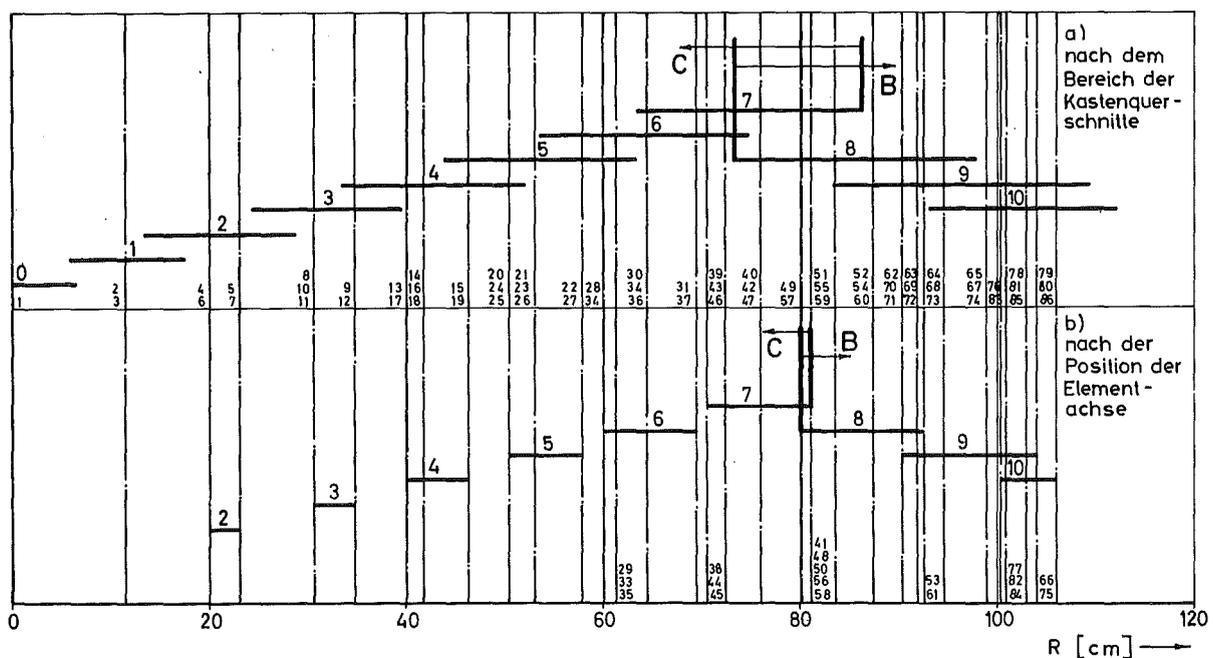


Abb. 8.7 Die radialen Positionen der Elementachse und die radialen Bereiche der Elementreihen (a und b)

### 8.3. Ergebnisse bei der Parametervariation der Lagerbedingung

#### 8.3.1. Temperaturverteilung und freie Verbiegung

In Abb. 8.8. sind für einige ausgewählte Elemente die axialen Verläufe der mittleren Kastenwandtemperatur über den Querschnitt aufgetragen. Die Erhöhung der Temperatur in den axialen Brutzonen ist gering. Wegen der größeren Kühlmittelaufheizspanne liegt das Temperaturniveau der Brennelemente jeweils wesentlich über dem der Brutelemente (Abb. 8.8.).

Als repräsentativer Wert der mittleren Kastenwandtemperatur wurde der an der oberen Kante der oberen axialen Brutzone gewählt. Er ist in Abb. 8.10. über der radialen Position der Elementachsen aufgetragen. Im Grenzbereich des Cores und der radialen Brutzone besteht ein großer Temperaturunterschied zwischen den Brenn- und Brutelementen, so daß in größerem Maße Wärmeleitungseffekte die Temperaturverläufe beeinflussen. Die Temperatur nimmt im Corebereich und im radialen Brutmantel nach außen hin geringfügig ab.

In Abb. 8.9. sind die axialen Verläufe der freien radialen Verbiegung für die Speichenelemente 1, 3, 7, 12, 19, 27, 37, 48, 61 und 75 dargestellt, deren freie Verbiegung aus Symmetriegründen nur radiale Komponenten haben. Wegen des besonders starken Temperaturabfalls nach außen hin ist die freie Verbiegung des Elementes 48 sehr groß. Wesentliche Beiträge der freien Verbiegung werden in axialer Richtung erst oberhalb der mittleren Corehöhe erreicht (Abb. 8.9. ).

Als repräsentativer Wert der freien Verbiegung der Elemente wurde die Auslenkung an der oberen Kante der oberen axialen Brutzone einmal für den gesamten Viertelausschnitt des Reaktors in Abb. 8.12. dargestellt und zum anderen über die radiale EPOS für alle Elemente in Abb. 8.11. aufgetragen. In Abb. 8.12. werden die resultierenden Auslenkungen entsprechend ihrer Größe und Richtung aufgetragen. Erwartungsgemäß weisen das Zentralelement und die Sonderelemente (die Elemente 10, 21, 26 und 33) geringe Auslenkungen auf (Abb. 8.12.). Die freie Auslenkung vergrößert sich im allgemeinen mit zunehmender radialer Position im Core (Abb. 8.11. und 8.12.).

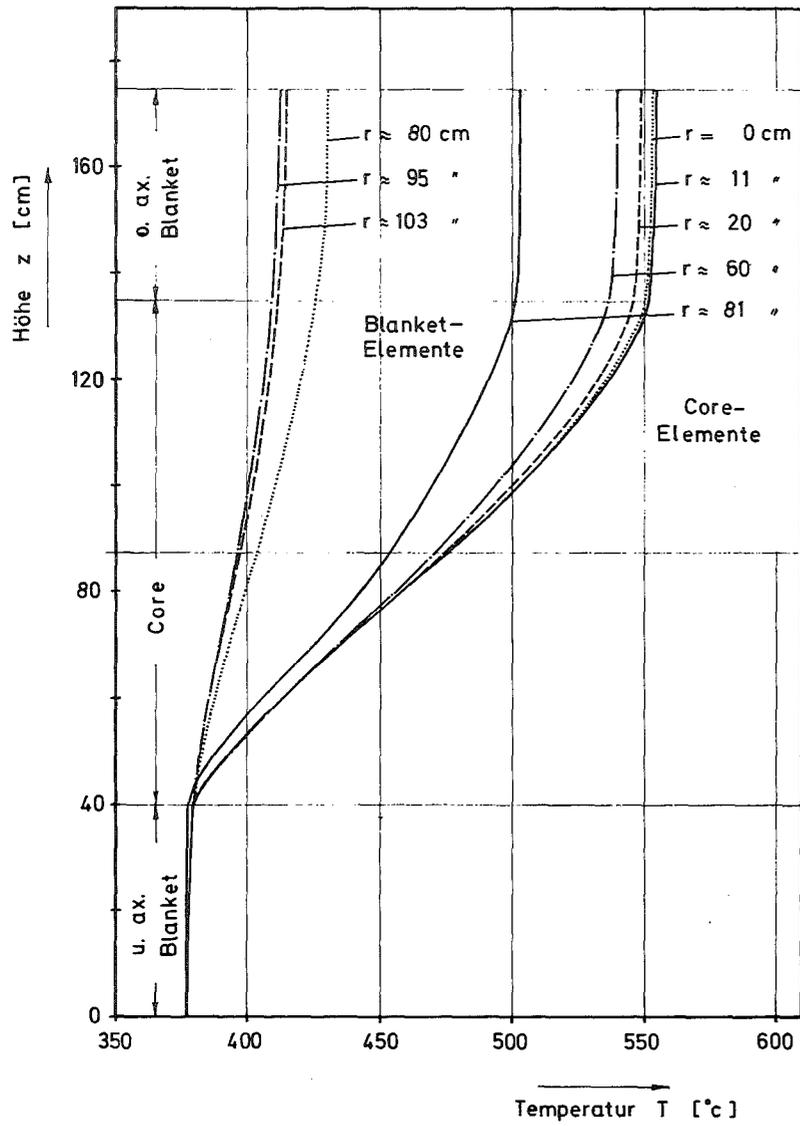


Abb. 8.8. axiale Verläufe der mittleren Kastenwandtemperaturen der Elemente

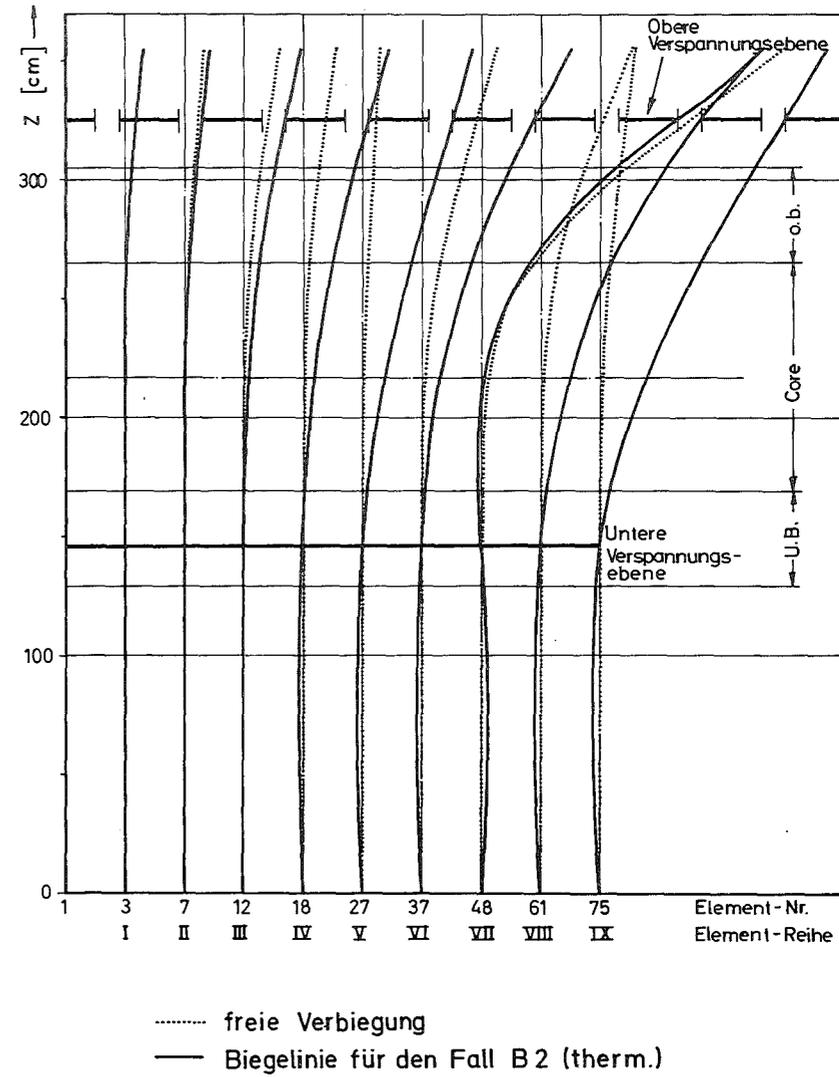


Abb. 8.9. Die Biegelinie der Speichenelemente

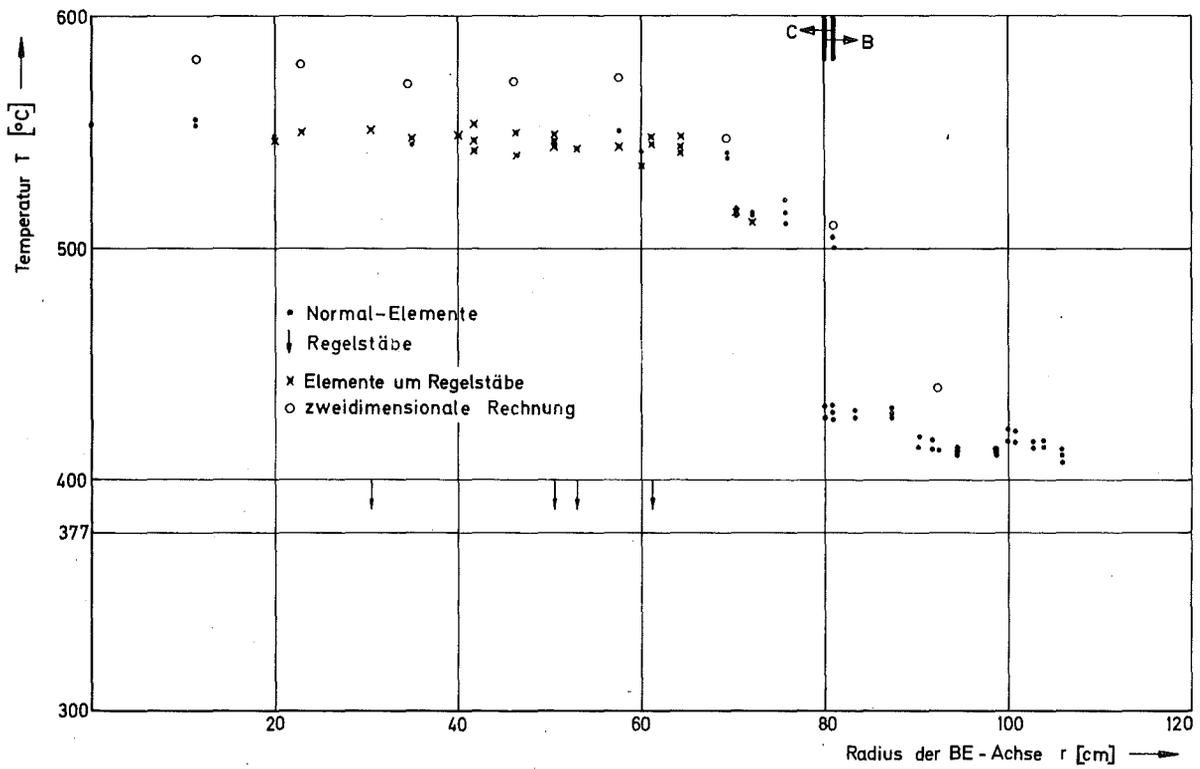


Abb. 8.10. mittlere Kastenwandtemperatur an der oberen Kante

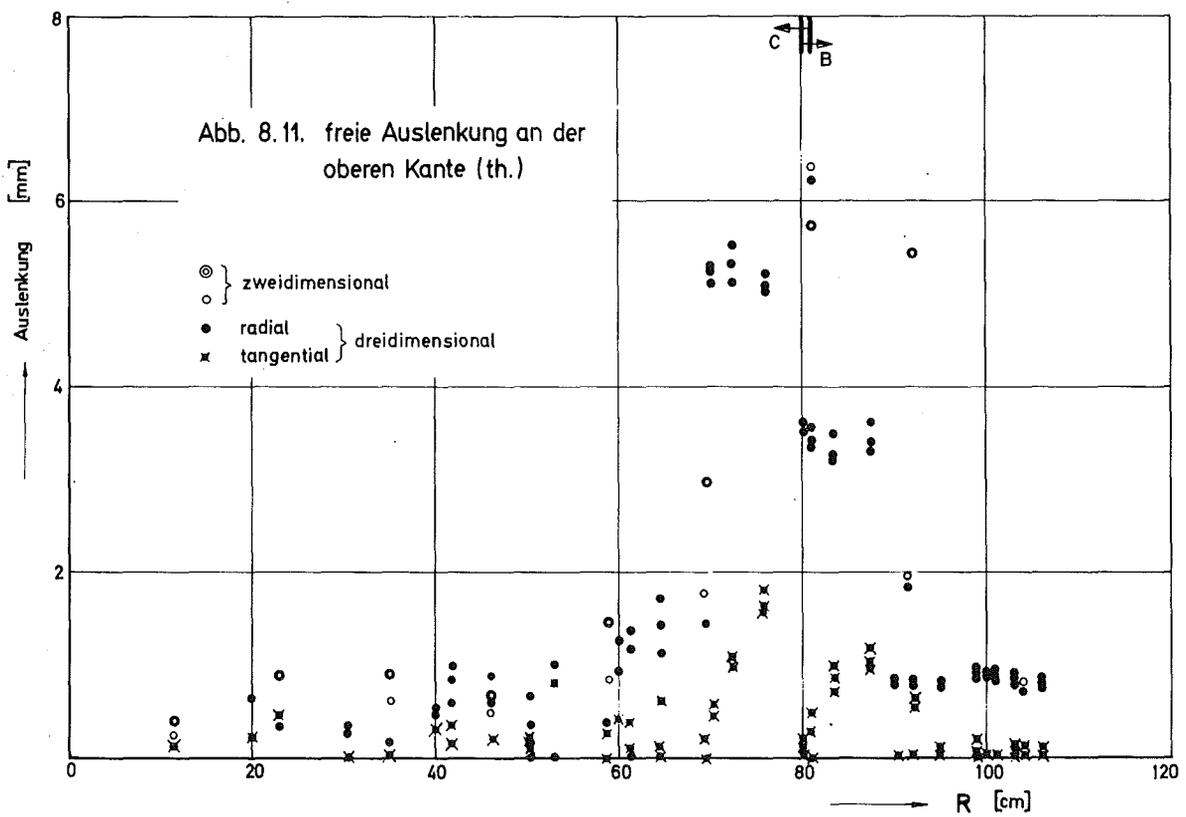
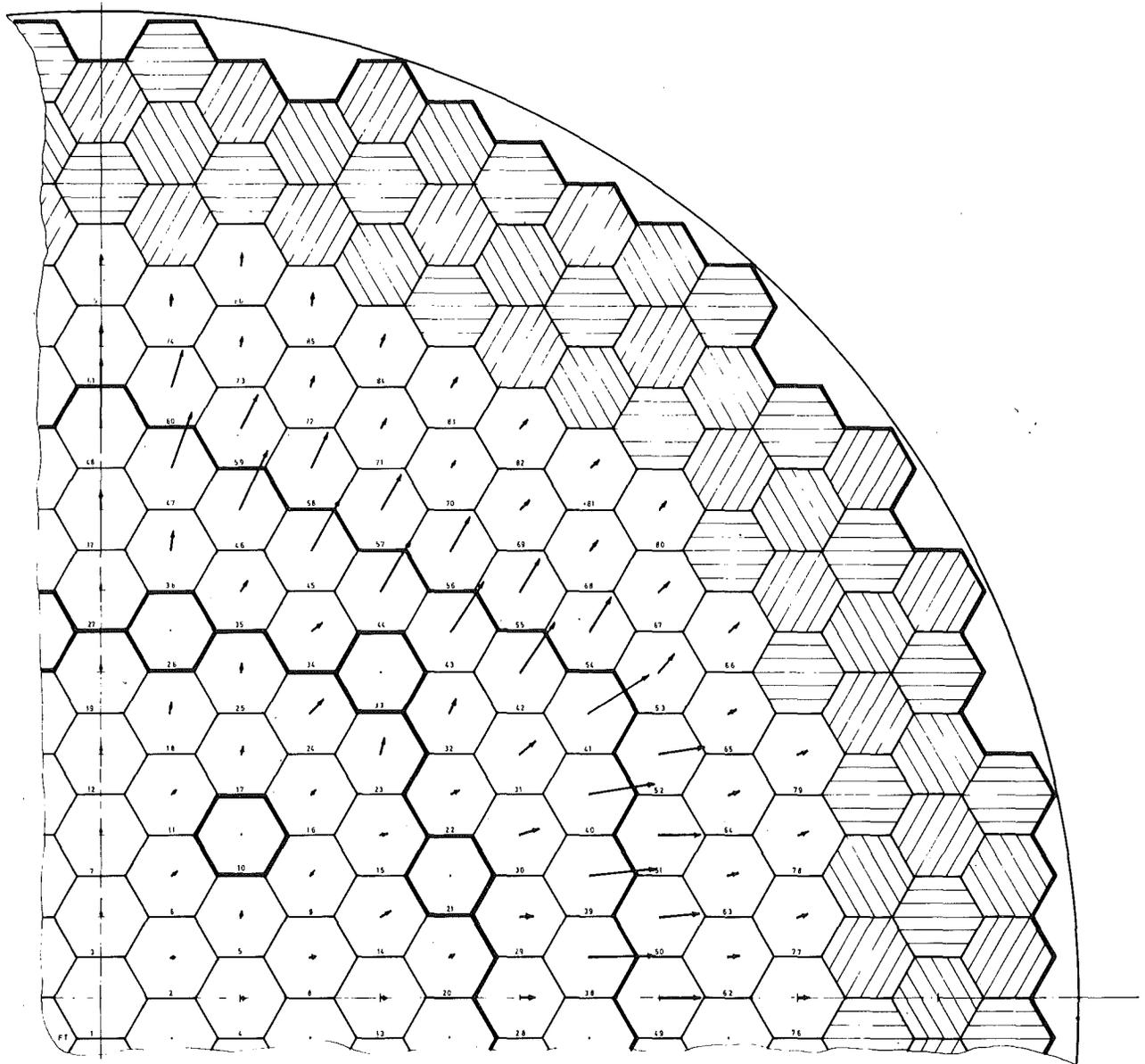


Abb. 8.11. freie Auslenkung an der oberen Kante (th.)



Maßstab  $\overbrace{\hspace{1.5cm}}^{10\text{mm}}$  ( $w =$ )  $10\text{mm} \hat{=} 16\text{mm}$

**Abb. 8.12.** freie thermische Auslenkung  $w$  an der oberen Kante

Sie erreicht im Übergangsbereich zwischen den Core und der radialen Brutzone einen Maximalwert von  $\approx 6,5$  mm (Abb. 8.11). In der Brutzone nehmen die Werte von  $\sim 3,5$  mm nach außen hin wieder ab. Der Anstieg im Übergangsbereich wird durch die hier herrschenden großen Temperaturgradienten verursacht, die durch den starken Abfall der Wärmequellendichte im Kern und durch die Berücksichtigung der Wärmeleitung zwischen den Elementkästen benachbarter Zonen hervorgerufen werden. Aus gleichen Gründen neigen die gestörten Elemente dazu, mehr zu den zugehörigen Sonderelementen hin zu verbiegen (Abb. 8.12.). Die in Abb. 8.11. angegebenen zweidimensional ermittelten Auslenkungswerte für die Speichenelemente [11] weichen von den dreidimensional ermittelten Auslenkungswerten erheblich ab. Der Grund dafür liegt im wesentlichen in der größeren mittleren Kastenwandtemperatur (Abb. 8.10.) und der unvollständigen Berücksichtigung der Wärmeleitung zu benachbarten Elementen bei der zweidimensionalen Rechnung.

Wie in Abb. 8.11. zu entnehmen ist, ist im Normalfall die Tangentialkomponente der freien Verbiegung deutlich kleiner als die Radialkomponente. Für die Elemente im Übergangsbereich zwischen dem Core und der radialen Brutzone sind aber die Tangentialkomponenten etwa gleich groß wie die Radialkomponenten für die anderen Elemente. Damit ist nachgewiesen, daß bei einer genauen Untersuchung der Elementbiegung die Tangentialkomponenten berücksichtigt werden müssen.

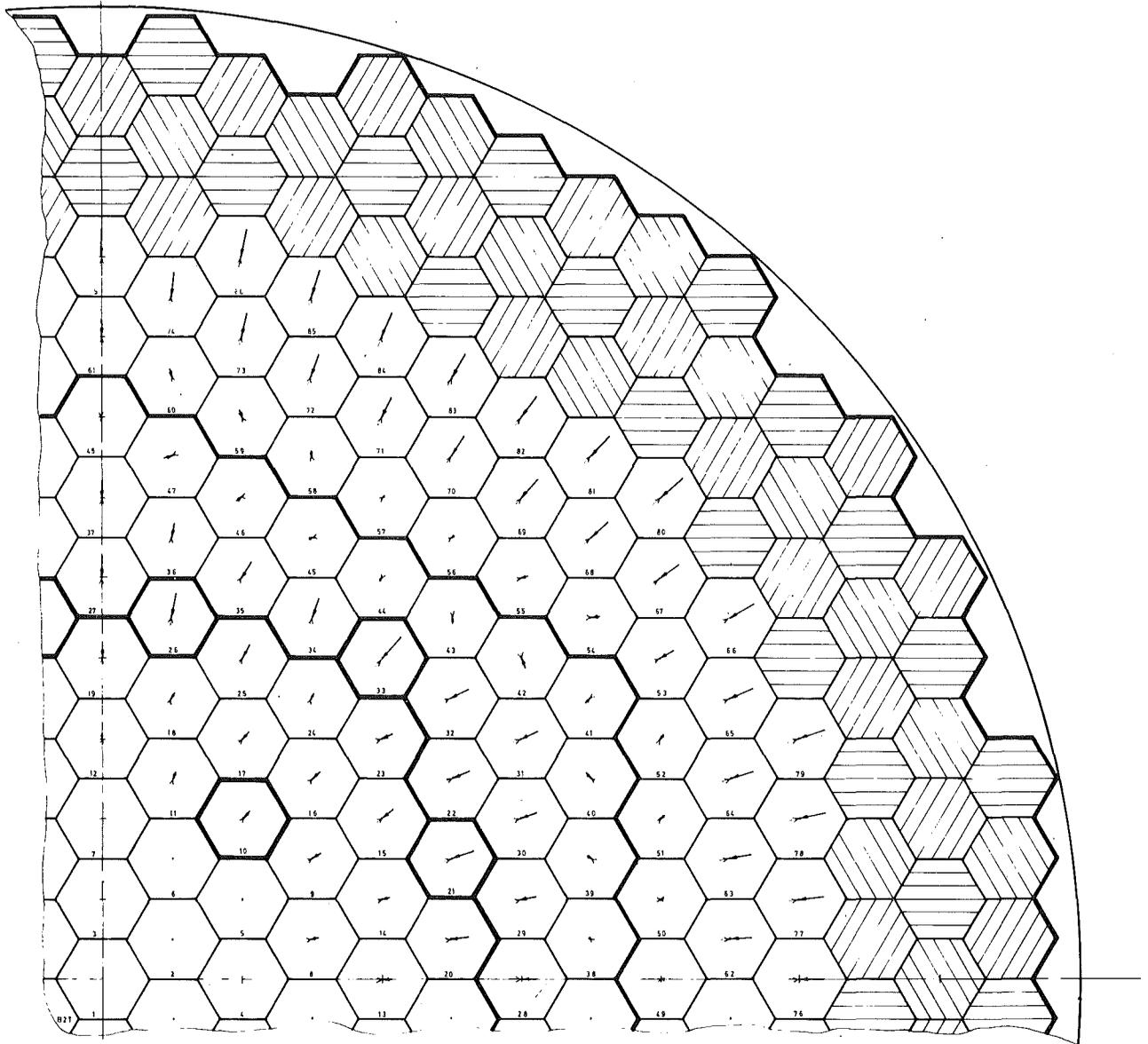
### 8.3.2. Ergebnisse für gleichmäßig spielbehaftete Lagerung in der oberen Verspannungsebene und spielfrei nachgiebige Lagerung in der Tragplatte (Fall B2)

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse für die Auflagerkräfte der Elemente (Abb. 8.13a und b), die Biegelinien der Speichenelemente (Abb. 8.10.) und die Auslenkung der Elemente an der oberen Kante des Cores (Abb. 8.14.) sowie normierte Auflagerkräfte an einzelnen Elementen (Tabelle 8.4.) für den Fall B2 diskutiert (Tabelle 8.3.). Bei dem Fall B2 sind die Elemente in der unteren Verspannungsebene spielfrei, in der oberen Verspannungsebene spielbehaftet mit gleicher  $r_{Lkt}$  und in der Tragplatte jeweils an zwei Lagern spielfrei aber nachgiebig aufgelagert.

Für die Berechnung der Auflagerkräfte und der Biegelinie sind neben der freien Verbiegung die relativen Positionen der Auflager zu entsprechenden freien Auslenkungspunkten des Elementes maßgebend. In den Lagerebenen der Tragplatte und der unteren Verspannungsebene ist die relative Position der Auflager zur zugehörigen freien Auslenkung klein. Dagegen sind diese Größen in der oberen Verspannungsebene relativ groß. Für die Diskussion sind daher die freie Auslenkung und die Lager in der oberen Verspannungsebene besonders wichtig.

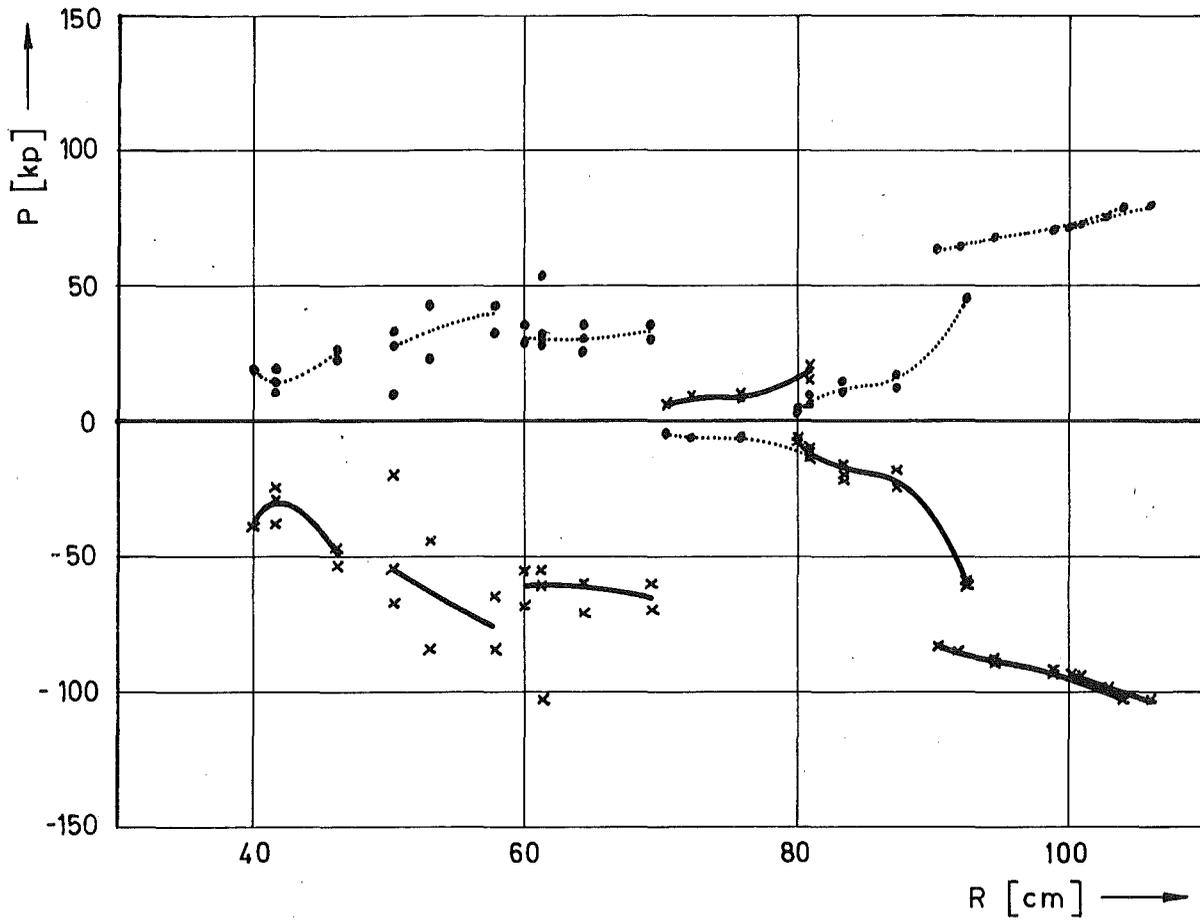
Es zeigt sich, daß das Vorzeichen der Auflagerkraft in der unteren Verspannungsebene gegenüber dem der Auflagerkraft in der oberen Verspannungsebene bzw. dem der Summe der Auflagerkräfte in der Tragplatte entgegengesetzt ist. Die nominellen Werte der Auflagerkräfte sind sowohl für die radialen als auch für die tangentialen Komponenten für die meisten der Elemente etwa gleich groß (Tabelle 8.4). Deshalb werden zunächst nur Auflagerkräfte in der unteren Verspannungsebene diskutiert, die von allen Auflagerkräften die größten Werte annehmen.

Im Corebereich nimmt die Auflagerkraft in der unteren Verspannungsebene zunächst mit steigender radialer Position allmählich ab (Abb. 8, 13a und b). Sie erreicht bei der drittletzten und vorletzten Umfangsreihe im Core mit etwa -70 kp bei Normalelementen und mit etwa -100 kp bei Sonderelementen ihr Minimum. Dabei nimmt die Auslenkung der Elemente auf der Höhe der Grenze des Cores mit der oberen axialen Brutzone rasch zu (Abb. 8.14.), da in der oberen Verspannungsebene die spielbehafteten Lager gegenüber der freien Auslenkung mit steigender radialer Position mehr nach außen verlagert angeordnet sind (Abb. 8.10.). Genau umgekehrt ist die Situation in der letzten Umfangsreihe im Core, bei der die freie Auslenkung über die Position der rLkt hinausragt (Abb. 8.9.). Hier ändert die Auflagerkraft sogar ihr Vorzeichen (Abb. 8.11.a und b). In der radialen Brutzone nimmt die Auflagerkraft wieder ab (Abb. 8.13.a und b). Die Werte der über die radiale Position aufgetragenen Auflagerkräfte für die Umfangsreihe verlaufen monoton und lassen sich für große radiale EPOS miteinander verbinden (Abb. 8.13.b). Am Ende derartiger Verbindungslinien liegen die Werte für die Speichenelemente. Bei kleineren radialen EPOS sind die Auflagerkräfte wesentlich stärker verstreut, da sich hier der



⋯→ in der oberen Verspannungsebene  
→ in der unteren Verspannungsebene

Abb. 8.13a Auflagerkräfte für den Fall B2 (therm.)



x — an der unteren  
Verspannungsebene

• ..... am oberen Fußlager

Abb. 8.13b Radiale Auflagerkräfte für den Fall B2 (therm.)

störende Einfluß der Sonderelemente auf die Temperaturverteilung und dadurch auf die freie Verbiegung der Elemente bemerkbar macht.

Die Auflagerkräfte bei den Sonderelementen sind größer als die bei den entsprechenden Normalelementen, da in der oberen Verspannungsebene die relative Position der rLkt von dem frei ausgelenkten Balkenpunkt bei Sonderelementen größer ist als die bei entsprechenden Normalelementen.

Die Auflagerkräfte für die Umfangsrichtung gestörter Elemente haben größere Tangentialkomponenten (Abb. 8.13.a). Derartige Komponenten haben in der unteren und in der oberen Verspannungsebene unterschiedliches Vorzeichen. Ebenso sind die Tangentialkomponenten der Auslenkung der gestörten Elemente an der oberen Kante der Corezone von den zugehörigen Sonderelementen weg gerichtet (Abb. 8.14.), da in der oberen Verspannungsebene die Tangentialkomponente der freien Auslenkung größer ist als das reale Lagerspiel in Umfangsrichtung es zuläßt. Diese Tatsache wird an Hand eines Beispiels mit dem Element 32 in der oberen Verspannungsebene gezeigt (Abb. 8.15).

Die frei verbogene Elementachse wird von der Auslenkungsstelle  ${}^0O'$  ( ${}^0W_r = 1,14$  mm,  ${}^0W_t = 0,61$  mm) zu einem Punkt  $O'$  ( $W_r = 4,35$  mm,  $W_t = 0,28$  mm,  $\varphi = 205,2^\circ$ ) der rLkt mit dem Radius  $r = 1,25$  mm und dem Mittelpunkt  $O$  ( $X_o = r_o \cos \varphi_o$ ,  $Y_o = Y_o \sin \varphi_o$ ,  $r_o = 5,57$  mm,  $\varphi_o = 38,9^\circ$ ) ausgelenkt. Dabei stehen die Lagerspiele von  $SP_r = 4,35 \dots 6,79$  mm in radialer Richtung und  $SP_t = -0,28 \dots + 0,28$  mm in Umfangsrichtung der freien Auslenkung von ( ${}^0W_r$ ,  ${}^0W_t$ ) gegenüber. Das reale Lagerspiel in Umfangsrichtung ist dabei wesentlich kleiner als der Radius der rLkt  $r$ . Bekanntlich ist das reale Lagerspiel von der wirklichen Auslenkungslage des Elementes abhängig. Dadurch wird das in Umfangsrichtung zum Sonderelement um  ${}^0W_t = 0,61$  mm frei ausgelenkte Element 32 bis auf  $W_t = 0,28$  mm zurück verbogen, so daß das Element im Bereich des Cores und der oberen Brutzone entsprechend zurückbiegt. Eine vergleichbare Situation, nur mit umgekehrten Vorzeichen tritt bei der Biegung in radialer Richtung auf.

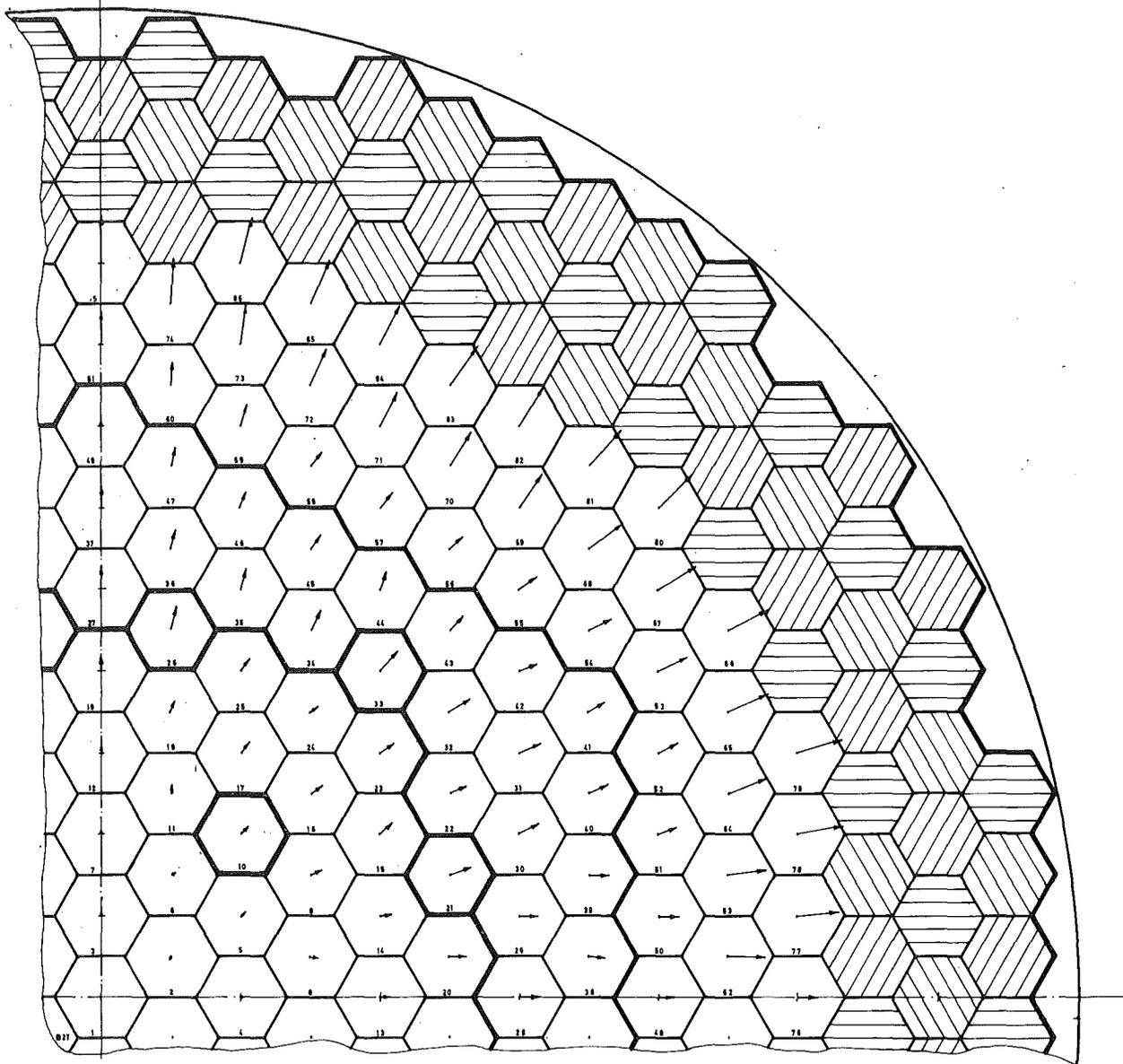
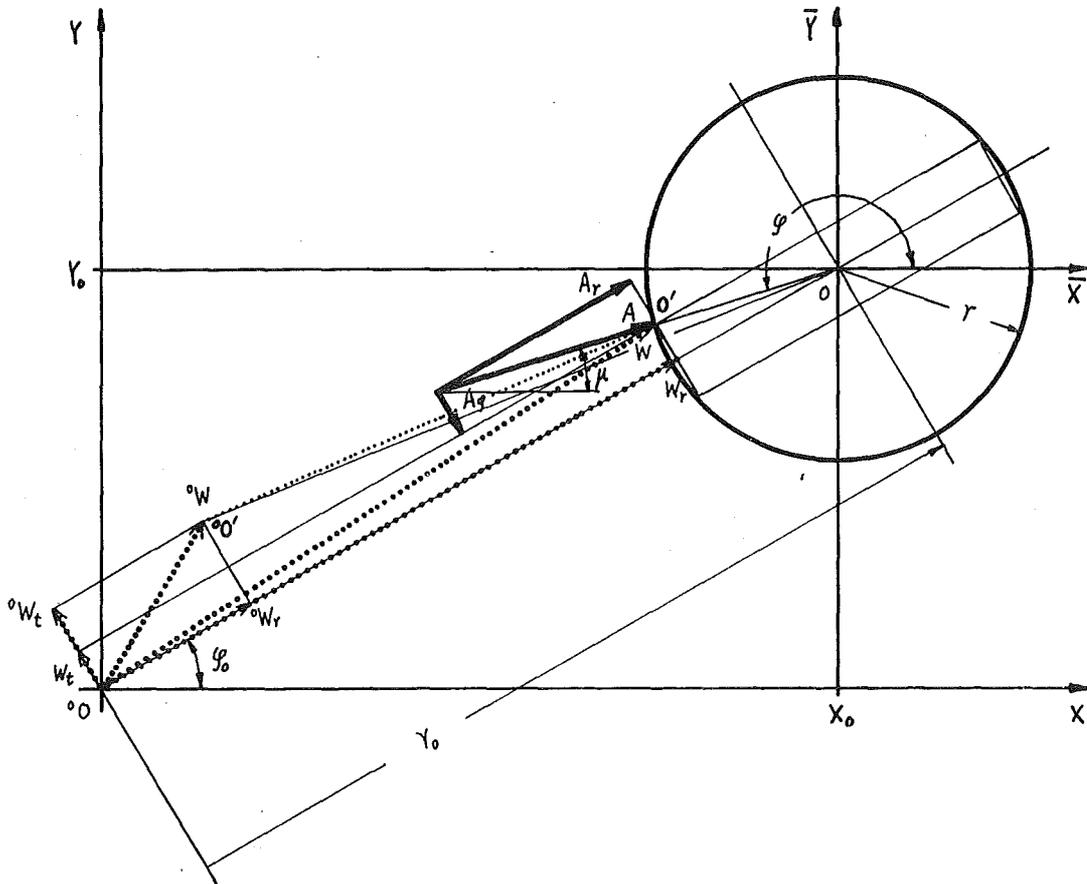


Abb. 8.14. Auslenkung  $w$  an der oberen Kante der Spaltzone für den Fall B2 (therm.)

Nr.	Radialkomponente				Tangentialkomponente				
	Fußlager		Versp. Ebene		Fußlager		Versp. Ebene		
	unteres	oberes	unteres	oberes	unteres	oberes	unteres	oberes	
	1	2	3	4	1	2	3	4	
Umfangsreihe	1								
	2	1,00		-1,71	0,71				
	3	0,13	0,87	-1,73	0,73	0,11	0,89	-1,71	0,71
	4	0,15	0,85	-1,74	0,74	0,11	0,89	-1,71	0,71
	5	0,17	0,83	-1,71	0,71	0,11	0,89	-1,71	0,71
	6	0,15	0,85	-1,71	0,71	0,11	0,89	-1,71	0,71
	7	1,00		-1,70	0,70	0,11	0,89	-1,71	0,71
	8	1,00		-1,64	0,64	-0,32	1,32	-1,66	0,66
	9	-0,27	1,27	-1,65	0,65	-0,32	1,32	-1,66	0,66
	10	-0,27	1,27	-1,66	0,66	-0,32	1,32	-1,67	0,67

Tabelle 8.4. Die normierten Auflagerkräfte am Element für die Umfangsreihe (Fall B2).



$\gamma_0 = 5.57 \text{ mm}$	$\varphi_0 = 38.9^\circ$	$\gamma = 1.25 \text{ mm}$	$\varphi = 205.2^\circ$
${}^{\circ}W_r = 1.14 \text{ mm}$	${}^{\circ}W_t = 0.61 \text{ mm}$	$W_r = 4.35 \text{ mm}$	$W_t = 0.28 \text{ mm}$
$A_r = 29.6 \text{ kp}$	$A_\varphi = -6.7 \text{ kp}$	$\mu = 25.2^\circ$	

Abb. 8.15 Die Verhältnisse der radialen und tangentialen Komponenten für die Auflagerkräfte und die Auslenkung bei der Lagerung des Elementes 32 im spielbehafteten Lager in der oberen Verspannungsebene.

Das Verhältnis der Absolutgrößen der tangentialen und radialen Auflagerkräfte für die Grenzelemente ist größer als dasjenige für die Normalelemente. Das liegt daran, daß die Tangentialkomponenten der Auflagerkräfte sich in diesem Bereich geringfügig ändern. Dagegen sind die Absolutwerte der zugehörigen Radialkomponenten sehr klein (Abb. 8.13.b), so daß die Radialkomponenten in vielen Fällen kleiner als die zugehörigen Tangentialkomponenten sind. Solche Verhältnisse sind durch die Richtung der resultierenden Auflagerkräfte erkennbar (Abb. 8.13.a). Die Anzahl derartiger Elemente beträgt insgesamt 33 oder 40 % aller Elemente. Außerdem weisen die Auflagerkräfte aller Nicht-Symmetrielemente eine mehr oder weniger große Tangentialkomponente auf (Abb. 8.13.a). Das gleiche gilt auch für die Auslenkung (Abb. 8.14.). Aus den bisherigen Ergebnissen läßt sich zusammenfassen, daß die Kräfte und die Verbiegung nicht nur radiale sondern auch teilweise erheblich große tangentiale Komponenten aufweisen. Daher kann mit einer Speichenrechnung, bei der nur die Radialkomponenten berücksichtigt werden, keine zufriedenstellende Aussage über die Biegung der Elemente - auch der Normalelemente - gemacht werden.

### 8.3.3. Variationen der Lagerbedingung in der oberen Verspannungsebene

In diesem Abschnitt wird der Einfluß der Simulation der Lagerung in der oberen Verspannungsebene bei elastisch nachgiebiger Lagerung der Elemente in der Tragplatte für die Fälle A2, B2, C2 und D2 untersucht (Tabelle 8.3.). Diesbezügliche Ergebnisse werden in den Abbn. 8.16, 8.17 und 8.18 sowie in der Tabelle 8.5. dargestellt.

Daraus folgt:

- 1) Die Verläufe der vier auf das Element wirkenden Auflagerkräfte und der Auslenkung der Elemente über die EPOS sind bei allen vier Fällen ähnlich. Die Auflagerkräfte für den Fall A2 sind deutlich größer als diejenigen für die anderen Fälle (Abbn. 8.16 und 8.18), da die Elemente im Gegensatz zu den anderen Fällen in der oberen Verspannungsebene spielfrei aufgelagert sind.
- 2) Bis zur 3. Umfangsreihe sind die Auflagerkräfte (Abb. 8.17.) und die Auslenkung (Abb. 8.18.) für den Fall D2 deutlich kleiner als diejenigen der anderen drei Fälle. Das liegt daran, daß im Fall D2 die Elemente in diesem Bereich infolge der großen Radien der rLkt in der oberen Verspannungsebene frei oder fast frei verbiegen können.
- 3) Die Absolutwerte der radialen Auflagerkräfte im Bereich der radialen EPOS von  $r \approx 60 \dots 90$  cm sind für die Fälle B2 und D2 etwa gleich, wobei das Verhältnis dieser Werte sich mit zunehmender radialer EPOS verkleinert (Abb. 8.16.). Das liegt daran, daß für diese beiden Fälle die rLkt in der oberen Verspannungsebene zwar ähnlich groß ist, aber die rLkt für den Fall D2 nach außen hin verkleinert wird. Dagegen ist die Größe der rLkt für den Fall B2 von der radialen EPOS unabhängig.

Im Gegensatz dazu sind die Radialkomponenten der Auflagerkräfte für den Fall C2 wesentlich kleiner. Dies kann folgendermaßen erklärt werden: Bei der EPOS von  $r \approx 60$  cm ist der Radius der rLkt für den Fall C2 etwa gleich der für die Fälle B2 und D2. Der Mittelpunkt der rLkt für den Fall C2 ist jedoch gegenüber den anderen Fällen nach innen versetzt angeordnet.

- 4) Die Auflagerkräfte in den letzten beiden Umfangsreihen für den Fall C2 sind wesentlich kleiner als diejenigen für die anderen Fälle. Das liegt daran, daß die Radien der rLkt für den Fall C2 gegenüber den anderen Fällen wesentlich größer angenommen wurden.
- 5) Die Auflagerkräfte der Grenzelemente zeigen für alle vier Fälle ein besonderes Verhalten. Die Gründe dafür wurden schon im Zusammenhang mit den Ergebnissen des Falles B2 diskutiert. Daher werden an dieser Stelle nur die Ergebnisse diskutiert, die sich für die Radialkomponente der Auflagerkraft beim Fall C2 ergeben. Sie sind in der letzten Core-Reihe deutlich größer und in der letzten Banket-Reihe deutlich kleiner als bei allen anderen Fällen.

Die Radien der rLkt für den Fall C2 sind im Bereich der Grenzelemente größer als diejenigen für die anderen Fälle. Deshalb sind bezüglich der Auflagerkräfte allgemein kleinere Werte zu erwarten. Betrachtet man die Bestimmung der Mittelpunkte der rLkt (Abschn. IIc), so ist der Radius  $S_{66}$  für den Fall C2 gegenüber den anderen Fällen wesentlich größer. Daher sind die rLkt beim Fall C2 deutlich nach innen verschoben angeordnet. Somit müssen die Grenzelemente, die radial stark nach außen verbiegen, besonders stark zurückgebogen werden.

Bei Fall C2 sind die Elemente in der ersten Blanket-Reihe kaum belastet (Abbn. 8.16. und 8.17.). Das liegt daran, daß in der oberen Verspannungsebene die rLkt "zufällig" in der Nähe der zugehörigen freien Auslenkungsstellen liegen.

Nr.		Fall A2				Fall C2			
		Fußlager		Versp. Ebene		Fußlager		Versp. Ebene	
		untere	obere	untere	obere	untere	obere	untere	obere
		1	2	3	4	1	2	3	4
Umfangsreihe	1	0,13	0,87	-1,75	0,75				
	2	0,12	0,88	-1,73	0,73	1,00		-1,71	0,71
	3	0,12	0,88	-1,71	0,71	1,00		-1,70	0,70
	4	0,14	0,86	-1,68	0,68	1,00		-1,71	0,71
	5	0,13	0,87	-1,72	0,72	1,00		-1,72	0,72
	6	0,14	0,86	-1,73	0,73	1,00		-1,75	0,75
	7	0,05	0,95	-1,71	0,71	1,00		-1,70	0,70
	8	-0,25	1,25	-1,67	0,67	-5,67	6,67	-1	0
	9	-0,28	1,28	-1,65	0,65	-0,23	1,23	-1,67	0,67
	10	-0,29	1,29	-1,67	0,67	-0,23	1,23	-1,68	0,68

Nr.		Fall B2				Fall D2			
		Fußlager		Versp. Ebene		Fußlager		Versp. Ebene	
		untere	obere	untere	obere	untere	obere	untere	obere
		1	2	3	4	1	2	3	4
Umfangsreihe	1								
	2		1,00	-1,71	0,71				
	3	0,13	0,87	-1,73	0,73	0	1,00	-1,71	0,71
	4	0,15	0,85	-1,74	0,74	0	1,00	-1,71	0,71
	5	0,17	0,83	-1,71	0,71	0	1,00	-1,72	0,72
	6	0,15	0,85	-1,71	0,71	0	1,00	-1,72	0,72
	7		1,00	-1,70	0,70	0	1,00	-1,71	0,71
	8		1,00	-1,64	0,64	0	1,00	-1,68	0,68
	9	-0,27	1,27	-1,65	0,65	-0,29	1,29	-1,67	0,67
	10	-0,27	1,27	-1,66	0,66	-0,28	1,28	-1,65	0,65

Tabelle 8.5. Die normierten radialen Auflagerkräfte am Element für die Umfangsreihe (Fälle A2, B2, C2 und D2).

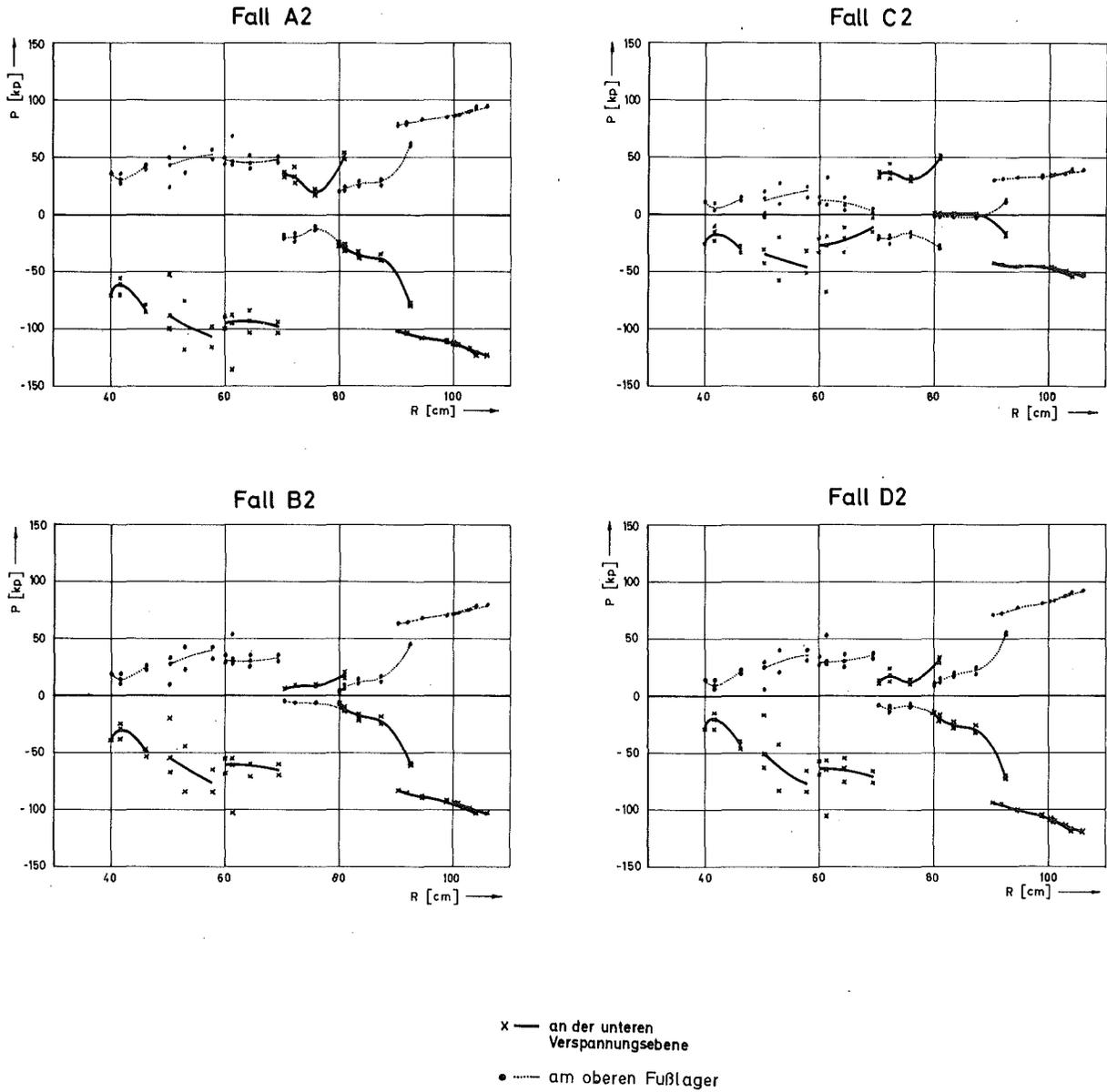


Abb. 8.16. Radiale Auflagerkräfte (thermisch)

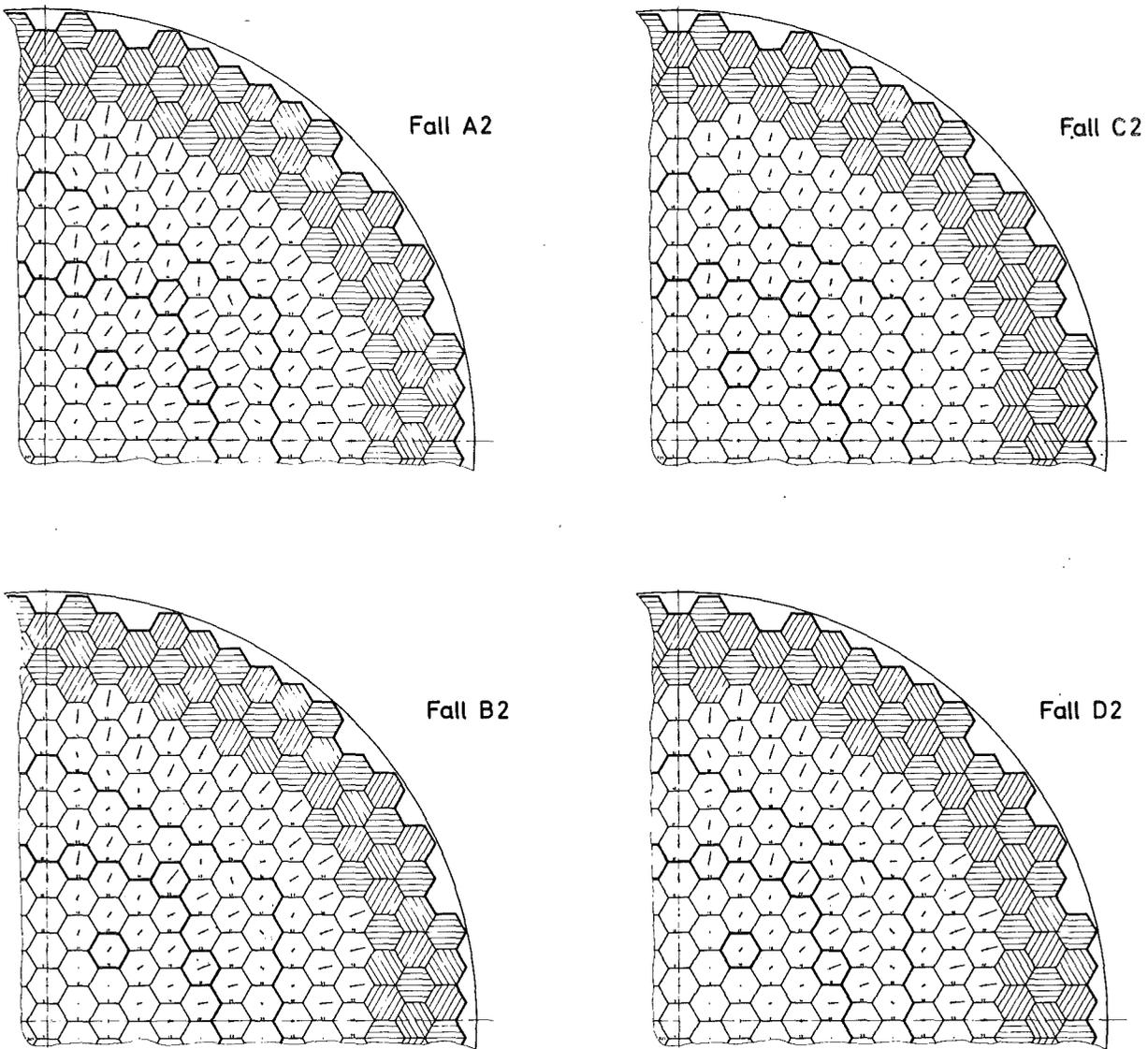


Abb. 8.17. Auflagerkräfte (thermisch)

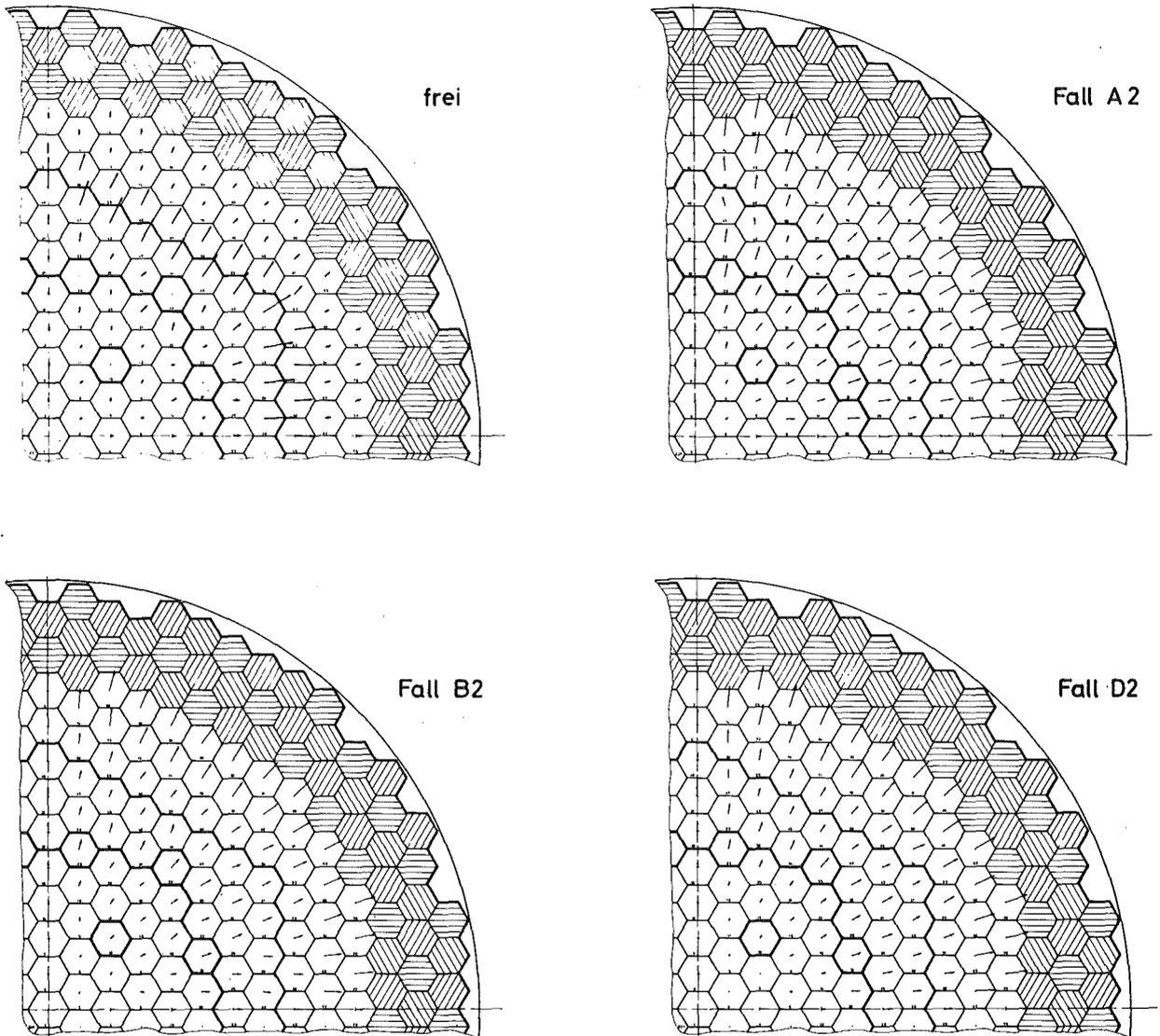


Abb. 8.18 Auslenkung  $w$  an der oberen Kante der Spaltzone (thermisch)

Die bei den Fällen A2, B2, C2 und D2 durchgeführte Untersuchung der Variation der Lagerbedingung in der oberen Verspannungsebene hat die Ergebnisse erbracht, die jeweils für einige dieser Fälle vergleichbar sind und für die anderen Fälle Differenzen zeigen. Daraus ergibt sich, daß eine solche Simulation bezüglich der oberen Verspannungsebene durch ein realistisches Verspannungsmodell unterstützt werden sollte, um zuverlässige Aussagen machen zu können.

#### 8.3.4. Variation der Lagerbedingung in der Tragplatte bei gleichmäßig spielbehafteter Lagerung in der oberen Verspannungsebene

In diesem Abschnitt wird der Einfluß der Simulation der Lagerung der Elemente in der Tragplatte bei gleichgroßen  $r_{Lkt}$  in der oberen Verspannungsebene für die Fälle B1, B2, B3 und B4 untersucht (Tabelle 8.3.).

Die Ergebnisse für diese Fälle werden in den Abbn. 8.19., 8.20. und 8.21. sowie in der Tabelle 8.6. dargestellt.

Daraus folgt:

- 1) Der Einfluß der Simulation der Lagerung in der Tragplatte ist für die Auflagerkräfte wesentlich größer als der Einfluß unterschiedlicher Simulationen der Verhältnisse in der oberen Verspannungsebene (vgl. Abschn. 8.3.3.).
- 2) Die Auflagerkräfte in beiden Verspannungsebenen und die Summe der Auflagerkräfte in der Tragplatte sind für die Fälle B2 und B3 bei allen Elementen ähnlich (Abb. 8.19. und Tabelle 8.6). Das gilt sowohl für die radialen als auch für die tangentialen Komponenten.

Die Relation beider Auflagerkräfte in der Tragplatte ist jedoch sehr verschieden. Die Elemente werden im Falle B3 nur in der oberen Lagerstelle belastet. Dagegen verteilt sich die Auflagerkraft beim Fall B2 auf beide Lagerstellen. Dabei ändert sich die Richtung der beiden Auflagerkräfte in Abhängigkeit von der EPOS. Bei kleineren radialen EPOS sind beide Auflager-

kräfte gleichgerichtet und bei größeren radialen EPOS entgegengesetzt (Tabelle 8.6). Dies ist offenbar darauf zurückzuführen, daß bei kleiner Belastung der Elemente die beiden sehr nah beieinander liegenden Lager der Tragplatte nur wie ein einzelnes Lager belastet werden. Mit steigender Belastung der Elemente wird der Balken auch im Bereich der Tragplatte durch die Auflagerkraft im oberen Fußlager so stark verformt, daß das Element am unteren Fußlager die andere Seite des spielfreien elastisch nachgiebigen Lagers trifft. Dieser Vorgang tritt bei den Elementen in den Umfangsreihen 9 und 10 auf, bei denen die Auflagerkräfte groß sind (Abb. 8.19.).

- 3) Die Auflagerkräfte für den Fall B4 sind gegenüber denjenigen für die Fälle B2 und B3 im gesamten Kern geringfügig kleiner. Das bedeutet, daß bei einer Überlagerung von spielbehafteten und nachgiebigen Lagern sich die Auflagerkräfte zwar geringfügig vermindern, aber bei den hier gewählten Größen für Spiel und Nachgiebigkeit keine deutlichen Unterschiede auftreten.
- 4) Die Auflagerkräfte für den Fall B1 mit spielfreien und nicht nachgiebigen Lagern in der Tragplatte sind wesentlich größer als die bei allen anderen Fällen (Abb. 8.19. und 8.20.). Das Verhältnis zwischen dem Fall B1 und B2 beträgt etwa 1.4 : 1 in der unteren Verspannungsebene und etwa 5 : 1 am oberen Fußlager (Abb. 8.19.).

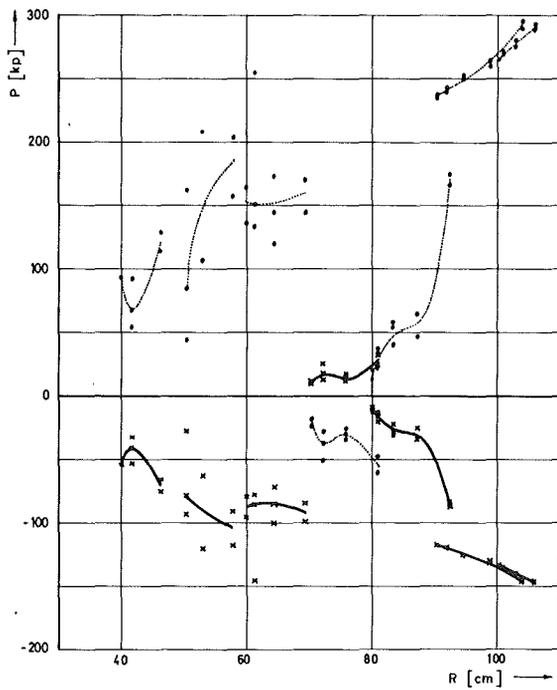
Bemerkenswert ist beim Fall B1 im Gegensatz zu allen anderen Fällen, daß bei einem Element der Betrag der Auflagerkraft in der unteren Verspannungsebene kleiner ist als die beiden Auflagerkräfte in der Tragplatte, aber größer als die Summe dieser beiden (Tabelle 8.6). Dies rührt daher, daß die Auflagerkräfte in der Tragplatte unterschiedliche Vorzeichen haben.

- 5) Die Auslenkungen der Elemente in der Höhe der oberen Kante des Cores sind für die Fälle B1 und B2 im Gegensatz zu den Auflagerkräften etwa gleich groß. Die Verbiegung der Elemente sind jedoch verschieden, da sich die Elementkasten wegen der unterschiedlichen Druckkräfte in der unteren Verspannungsebene ungleich verformen.

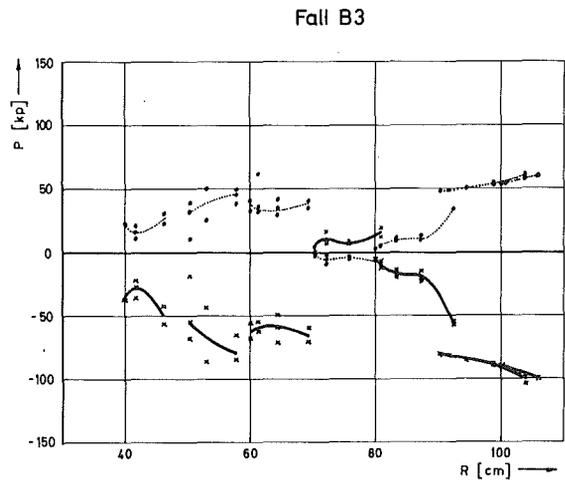
Nr.		Fall B1				Fall B3			
		Fußlager		Versp. Ebene		Fußlager		Versp. Ebene	
		untere	obere	untere	obere	untere	obere	untere	obere
		1	2	3	4	1	2	3	4
Umfangsreihe	1	-5,63	6,63	-1,00	0				
	2	1,00		-1,50	0,50	0	1,00	-1,70	0,70
	3	-1,67	2,67	-1,50	0,50	0	1,00	-1,70	0,70
	4	-1,59	2,59	-1,50	0,50	0	1,00	-1,69	0,69
	5	-1,58	2,58	-1,51	0,51	0	1,00	-1,70	0,70
	6	-1,59	2,59	-1,49	0,49	0	1,00	-1,70	0,70
	7	-2,00	3,00	-1,45	0,45	0	1,00	-1,68	0,68
	8	-1,76	2,76	-1,47	0,47	0	1,00	-1,70	0,70
	9	-1,89	2,89	-1,44	0,44	0	1,00	-1,70	0,70
	10	-1,94	2,94	-1,46	0,46	0	1,00	-1,69	0,69

Nr.		Fall B2				Fall B4			
		Fußlager		Versp. Ebene		Fußlager		Versp. Ebene	
		untere	obere	untere	obere	untere	obere	untere	obere
		1	2	3	4	1	2	3	4
Umfangsreihe	1								
	2	1,00		-1,71	0,71				
	3	0,13	0,87	-1,73	0,73	1,00		-1,80	0,80
	4	0,15	0,85	-1,74	0,74	1,00		-1,74	0,74
	5	0,17	0,83	-1,71	0,71	1,00		-1,78	0,78
	6	0,15	0,85	-1,71	0,71	1,00		-1,77	0,77
	7	1,00		-1,70	0,70	0	1,0	-1,80	0,80
	8	1,00		-1,64	0,64	1,00		-1,78	0,78
	9	-0,27	1,27	-1,65	0,65	0	1,0	-1,70	0,70
	10	-0,27	1,27	-1,66	0,66	0	1,0	-1,69	0,69

Tabelle 8.6. Die normierten radialen Auflagerkräfte am Element für die Umfangsreihe (Fälle B1, B2, B3 und B4).

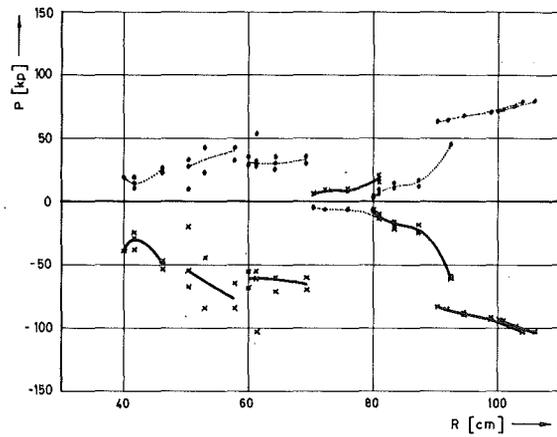


Fall B1

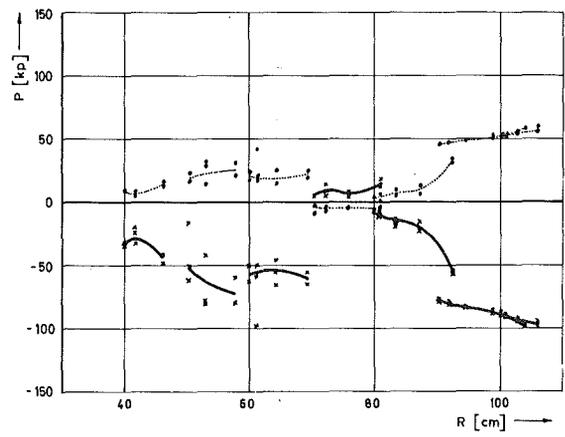


Fall B3

Fall B2

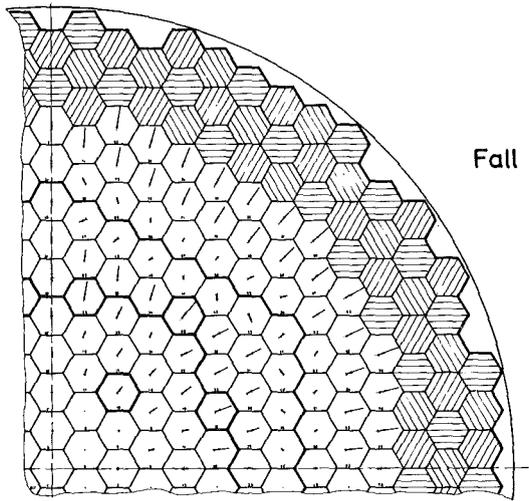


Fall B4

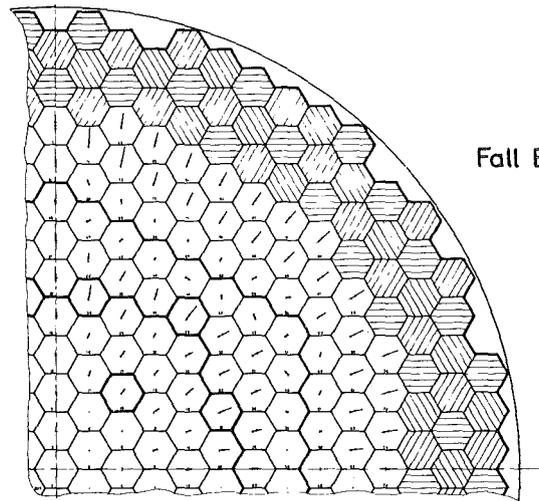


x — an der unteren  
Verspannungsebene  
• — am oberen Fußlager

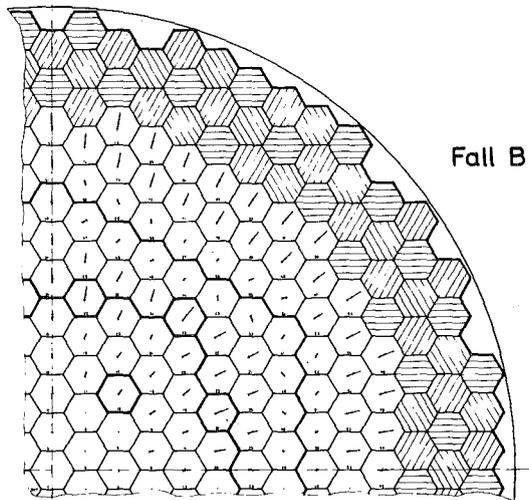
Abb. 8.19 Radiale Auflagerkräfte  
(thermisch)



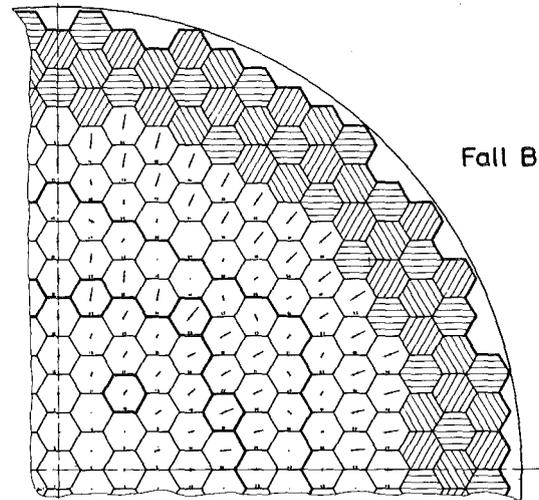
Fall B1



Fall B3



Fall B2

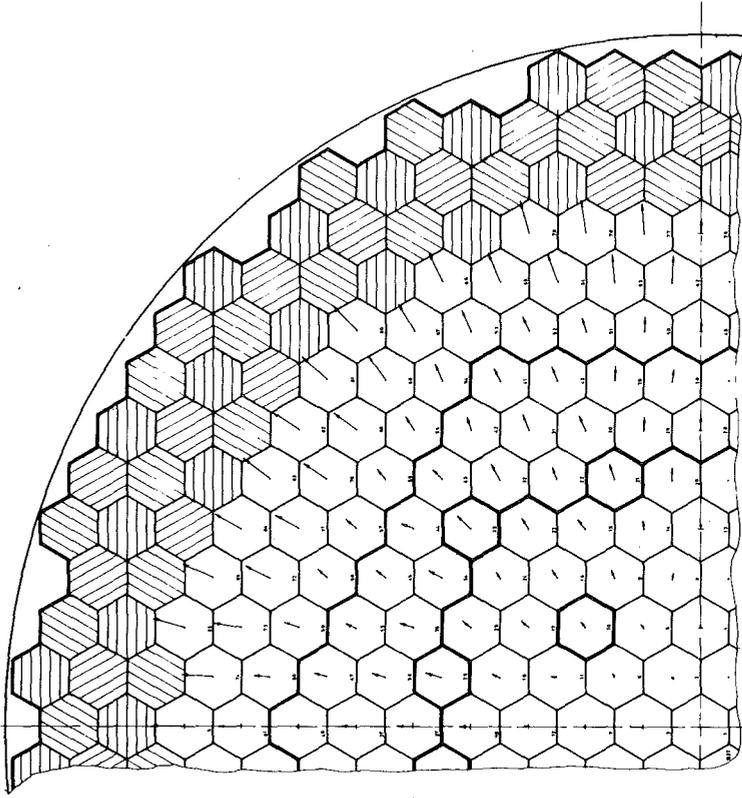


Fall B4

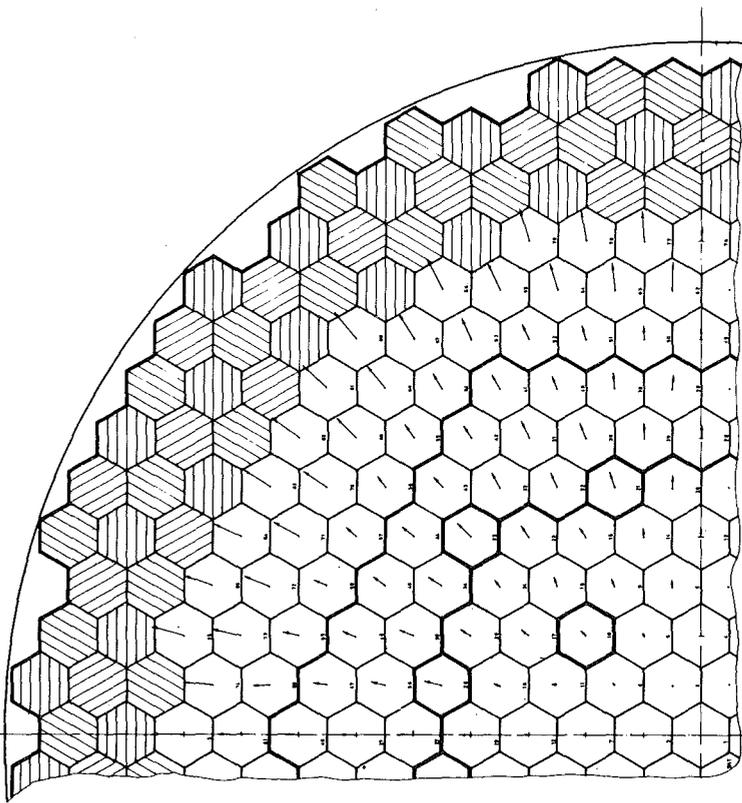
←..... in der oberen Verspannungsebene

← in der unteren Verspannungsebene

Abb. 8.20 Auflagerkräfte (thermisch)



Fall B2



Fall B1

Abb. 8.21. Auslenkung  $w$  an der oberen Kante der Spaltzone  
(therm.)

Die bei dieser Simulationsrechnung gewonnenen Ergebnisse zeigen, daß eine genaue Kenntnis der Flexibilität (Spiel und elastische Nachgiebigkeit) der Lager in der Tragplatte notwendig ist und entsprechend bei der Analyse der Elementverbiegung berücksichtigt werden muß. Im Bereich der hier vorliegenden thermischen Belastung scheint es jedoch ausreichend zu sein, nur eine der beiden Beiträge zur Flexibilität der Lagerung in der Tragplatte zu berücksichtigen. Bei einer stärkeren Belastung der Elemente sind aber sowohl die Lagerspiele als auch die elastische Nachgiebigkeit in die Analyse einzubeziehen.

#### 8.3.5. Variation der Lagerungsbedingungen in der Tragplatte bei spielfreier Lagerung der Elemente in beiden Verspannungsebenen

In diesem Abschnitt wird der Einfluß der Simulation der Lagerung der Elemente in der Tragplatte bei spielfreier Lagerung in den beiden Verspannungsebenen für die Fälle E1, E2 und E3 untersucht (Tabelle 8.3.).

Diesbezügliche Ergebnisse werden in den Abbn. 8.22, 8.23 und 8.24 sowie in den Tabellen 8.7a und 8.7b dargestellt. Hierbei werden nur die Ergebnisse für die Auflagerkräfte behandelt.

##### I) Allgemeine Bemerkung

Die Auflagerkräfte zeigen bis zu EPOS mit  $r \approx 60$  cm infolge der Störwirkung durch die Sonderelemente ein unregelmäßiges Verhalten. Dies gilt für alle vier Lagerstellen bei den drei untersuchten Fällen E1, E2 und E3. Die Größenverhältnisse der Auflagerkräfte sind jedoch für die verschiedenen Fälle geringfügig unterschiedlich (Tabelle 8.6). Die Abb. 8.22. zeigt die Variation der Auflagerkräfte in Abhängigkeit von der radialen EPOS für die radialen Auflagerkräfte der beiden Lager in der Tragplatte. Die Auflagerkräfte sind überwiegend negativ für die unteren und positiv für die oberen Lagerstellen in der Tragplatte (Abb. 8.22.). Das Größenverhältnis der radialen und der tangentialen Komponenten zueinander ist ebenfalls uneinheitlich (Abb. 8.22. und Tabellen 8.7a und 8.7b).

Bei manchen Elementen sind die Tangentialkomponenten deutlich größer als die zugehörigen Radialkomponenten.

Es ist offensichtlich, daß die Elemente in Bezug auf die Auflagerkraft infolge der Störwirkung der Sonderelemente in diesem Gebiet bei der Simulationsreihe E empfindlicher reagieren als bei den anderen Simulationsreihen A, B, C und D.

Etwa bei der EPOS von  $r \approx 60$  cm ändert sich dieses Verhalten. Die Ergebnisse der Berechnung zeigen abschnittsweise ein regelmäßiges Verhalten in Abhängigkeit von der Umfangsposition (Abb. 8.22.). Das liegt daran, daß in den Verspannungsebenen die radialen freien Auslenkungen und die Summe der Kastenaufweitung bzw. -abplattung miteinander gegenläufig sind.

Im Bereich der radialen EPOS von  $r > 60$  cm lassen sich die Werte der Auflagerkräfte für eine Umfangsreihe miteinander verbinden.

In der Tabelle 8.7 sind für die drei Fälle E1, E2 und E3 die normierten Auflagerkräfte zusammengestellt. Dabei erkennt man, daß für jeden Fall das Verhältnis der Auflagerkräfte in den beiden Verspannungsebenen in einem bestimmten Bereich liegt. Eine Ausnahme bildet dabei im Bereich der EPOS von  $r > 0$  cm für den Fall E1. Dagegen ist das Verhältnis der Auflagerkräfte in der Tragplatte und in den Verspannungsebenen unterschiedlich. Daher werden in den folgenden Teilabschnitten die Auflagerkräfte in der Tragplatte und in der unteren Verspannungsebene für die radiale EPOS  $r > 60$  cm diskutiert. Dabei wird der Fall E1 gesondert untersucht (Teilabschnitt II) und danach die Fälle E1, E2 und E3 verglichen (Teilabschnitt III).

## II Der Simulationsfall E1

- 1) Die radialen Auflagerkräfte für die Elemente im Grenzbereich zwischen dem Core und Blanket sind sowohl in der Tragplatte als auch in der unteren Verspannungsebene sehr groß (Abbn. 8.22. und 8.24.). Das liegt daran, daß in der oberen Verspannungsebene die freien Auslenkungen dieser Elemente viel größer sind als die Summe der Kastenquerschnittsveränderungen

bis zu diesen Elementen von der Reaktorachse aus.

Die radialen Auflagerkräfte in der unteren Verspannungsebene bei größeren radialen EPOS sind erwartungsgemäß deutlich kleiner und ändern ihr Vorzeichen (Abb. 8.24.). In der Tragplatte sind jedoch die Auflagerkräfte an beiden Lagerstellen relativ groß (Abb. 8.22.), obwohl die Summe der beiden zugehörigen Auflagerkräfte klein ist. Sie verzögern sich in der letzten Umfangsreihe noch erheblich. Dieser Verlauf der Auflagerkraft ergibt sich durch das Verhältnis der freien Auslenkung zur Summe der Kastenquerschnittsveränderung für das Element. Aus diesem Ergebnis erkennt man die Notwendigkeit der Berücksichtigung beider Lagerstellen in der Tragplatte für die Berechnung. Außerdem ist ersichtlich (Abbn. 8.22. und 8.24.), daß in einer Umfangsreihe die Auflagerkraft für das Speichenelement von der für die anderen Elemente abweicht, insbesondere im Grenzbereich.

- 2) Die Tangentialkomponenten treten in erster Linie bei den Elementen auf, bei denen sich der Einfluß der Störung der Sonderelemente bemerkbar macht. Daher sind die vom Störgebiet weit entfernten Elemente in Umfangsrichtung kaum belastet (Abbn. 8.22., 8.23. und 8.24.). Ebenso sind die Speichen- und Eckelemente der Symmetrieachse in Umfangsrichtung unbelastet. Bemerkenswert ist jedoch, daß dies auch für die Speichen- und Eckelemente außerhalb der Symmetrieachse trotz der nicht symmetrischen Lastverhältnisse gültig ist (Abb. 8.22., 8.23. und 8.24.). Die Tangentialkomponente ist gegenüber der zugehörigen Radialkomponente sichtbar kleiner. Das größte Verhältnis beträgt etwa 0,5 und tritt sowohl in der Tragplatte (Abbn. 8.22. und 8.23.) als auch in der unteren Verspannungsebene (Abb. 8.24.) bei den Elementen zwischen den Speichen- und Eckelementen im Bereich der radialen EPOS von  $r \approx 75 \dots 87$  cm auf.

### III) Die Fälle E2 und E3 im Vergleich zum Fall E1

Die Auflagerkräfte für die Fälle E2 und E3 sind im Grenzbereich zwischen dem Core und der radialen Brutzone wesentlich kleiner als diejenigen für den Fall E1 (Abbn. 8.23. und 8.24.). Das Verhältnis der Auflagerkomponenten des oberen Lagers in der Tragplatte zwischen dem Fall E2 und dem Fall E1 beträgt etwa 15 bis 25 %.

Die Auflagerkräfte im unteren Lager werden noch stärker reduziert (Abb. 8.23.). Dagegen ist beim Fall E3 eines der Lager in der Tragplatte kräftefrei (Tabellen 8.7a und b). Die Auflagerkraft am anderen Lager in der Tragplatte beträgt etwa 55 % bis 65 % der Summe der beiden Auflagerkräfte in der Tragplatte für den Fall E1. Der Unterschied der Auflagerkräfte für die beiden Fälle E2 und E3 ist relativ klein (Abb. 8.23. und 8.24.). Die Auflagerkräfte in der unteren Verspannungsebene bei beiden Fällen E2 und E3 sind jeweils etwa um 30 % kleiner als diejenigen beim Fall E1 (Abb. 8.24.).

Bemerkenswert ist, daß für die Elemente in den beiden letzten Umfangsreihen die radialen Auflagerkräfte für die Fälle E2 und E3 größer sind als die für den Fall E1 (Abb. 8.24.). Dies ist auf die extrem großen Auflagerkräfte in der Tragplatte zurückzuführen (Tabelle 8.7a).

#### IV) Schlußfolgerung

Durch die Reihe E der Lagersimulationen wurde gezeigt:

- 1) Der Verlauf der Auflagerkräfte ist stärker als bei den Simulationen A bis D durch die Störwirkung der Sonderelemente beeinflusst.
- 2) Bei der Berechnung der Elementverbiegung müssen sowohl die Lagerspiele und die elastischen Nachgiebigkeiten als auch die Anzahl der Lagerstellen in der Tragplatte berücksichtigt werden.
- 3) Die Ergebnisse für die Speichenelemente sind nicht immer repräsentativ für die einer Umfangsreihe.

Nr.		Fall E1				Fall E3									
		Fußlager		Versp. Ebene		Fußlager		Versp. Ebene							
		untere	obere	untere	obere	untere	obere	untere	obere						
		1	2	3	4	1	2	3	4						
Umfangsreihe	1														
	2	1,00		-1,60		0,60		1,00		0		-1,81		0,81	
	3	1,00		-1,50		0,50		1,00				-1,70		0,70	
	4	1,00		-1,53		0,53		1,00		0		-1,82		0,82	
	5	1,00		-1,37		0,37									
	6					1,00				-1,82		0,82			
	7	-1,69	2,69	-1,49	0,49	0	1,00	-1,70		0,70					
	8	-2,22	3,22	-1,42	0,42	0	1,00	-1,70		0,70					
	9	17,41	-16,41	-3,76	2,76	1,00	0	-1,82		0,82					
	10	-9,27	10,27	-0,60	-0,40	1,00	0	-1,82		0,82					

Nr.		Fall E2					
		Fußlager		Versp. Ebene			
		untere	obere	untere	obere		
		1	2	3	4		
Umfangsreihe	1						
	2	1,00		-1,75		0,75	
	3	1,00		-1,71		0,71	
	4	1,00		-1,73		0,73	
	5	1,00		-1,72		0,72	
	6	1,00		-1,72		0,72	
	7	0,10	0,90	-1,71	0,71		
	8	-0,38	1,38	-1,65	0,65		
	9	-0,11	1,11	-1,68	0,68		
	10	1,00		-1,69		0,69	

Tabelle 8.7a: Die normierten radialen Auflagerkräfte am Element für die Umfangsreihe (Fälle E1, E2 und E3).

Nr.		Fall E1				Fall E3			
		Fußlager		Versp. Ebene		Fußlager		Versp. Ebene	
		untere	obere	untere	obere	untere	obere	untere	obere
		1	2	3	4	1	2	3	4
Umfangsreihe	1								
	2								
	3	-1,67	2,67	-1,50	0,50	1,00	0	-1,82	0,82
	4	-1,67	2,67	-1,50	0,50	1,00	0	-1,82	0,82
	5	-1,67	2,67	-1,50	0,50				
	6	-1,67	2,67	-1,50	0,50	1,00	0	-1,81	0,81
	7	-1,67	2,67	-1,50	0,50	0	1,00	-1,70	0,70
	8	-2,00	3,00	-1,46	0,46	0	1,00	-1,69	0,69
	9	-1,98	2,98	-1,46	0,46	1,00	0	-1,82	0,82
	10	-2,00	3,00	-1,45	0,45	1,00	0	-1,82	0,82

Nr.		Fall E2			
		Fußlager		Versp. Ebene	
		untere	obere	untere	obere
		1	2	3	4
Umfangsreihe	1				
	2				
	3				
	4	0,11	0,89	-1,71	0,71
	5	0,11	0,89	-1,71	0,71
	6	0,11	0,89	-1,71	0,71
	7	0,11	0,89	-1,71	0,71
	8	-0,31	1,31	-1,65	0,65
	9	-0,32	1,32	-1,66	0,66
	10	-0,33	1,33	-1,67	0,67

Tabelle 8.7b Die normierten tangentialen Auflagerkräfte am Element für die Umfangsreihe (Fälle E1, E2 und E3).

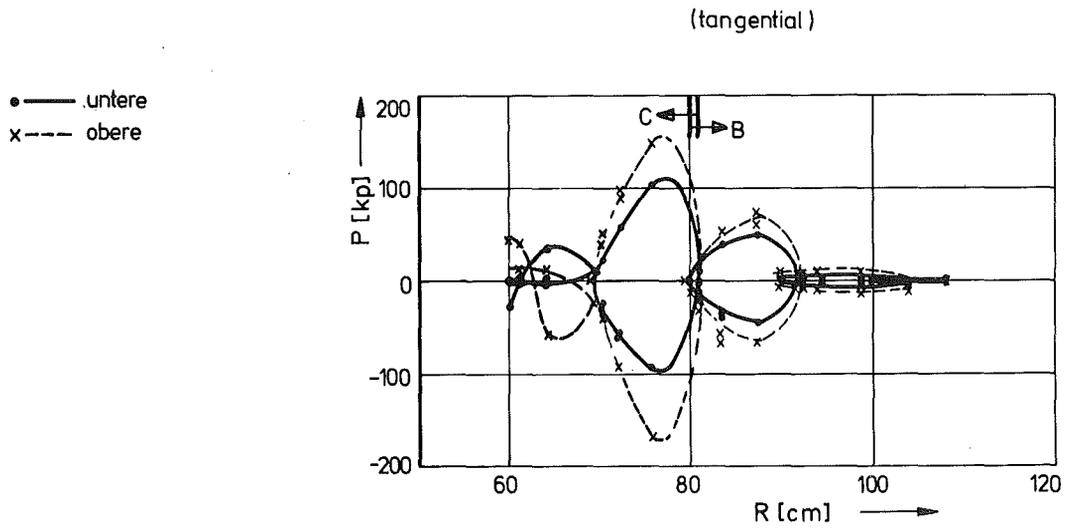
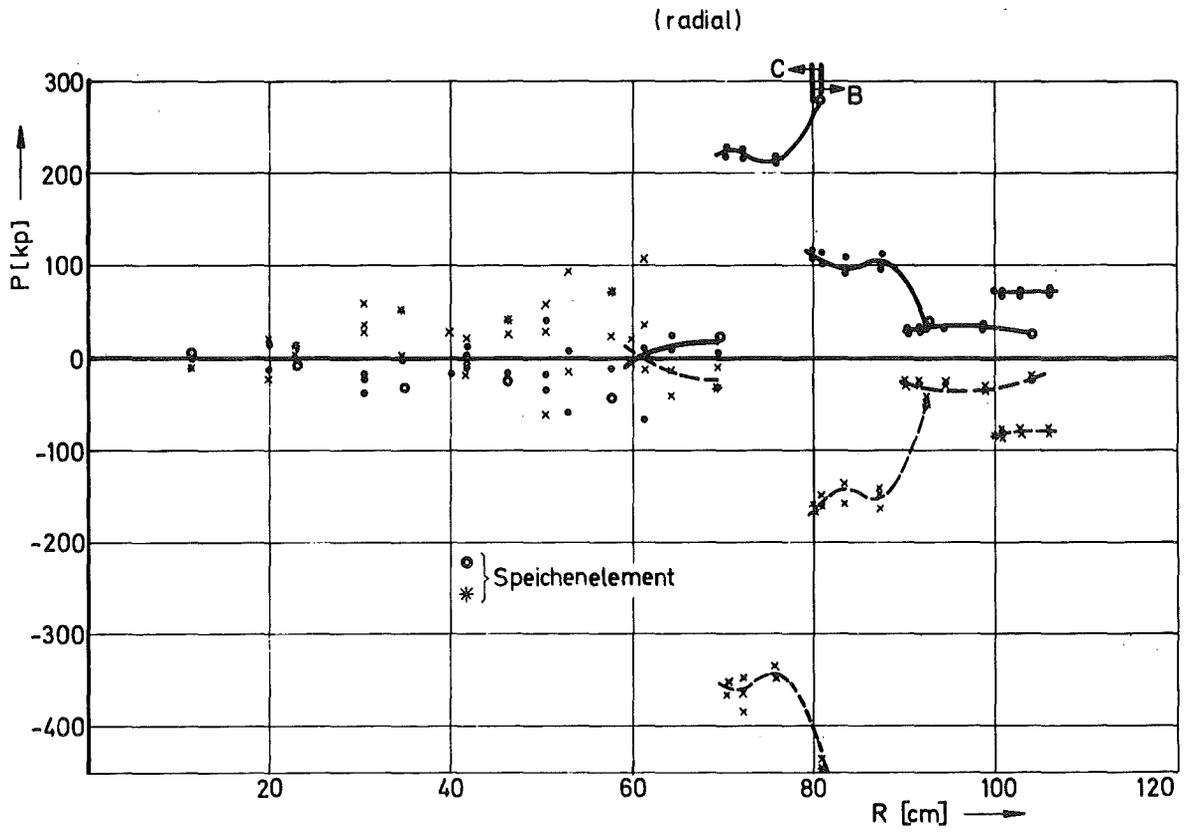
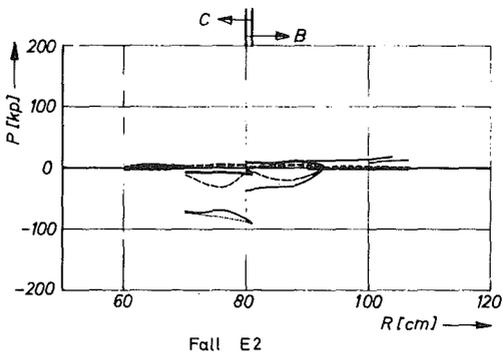
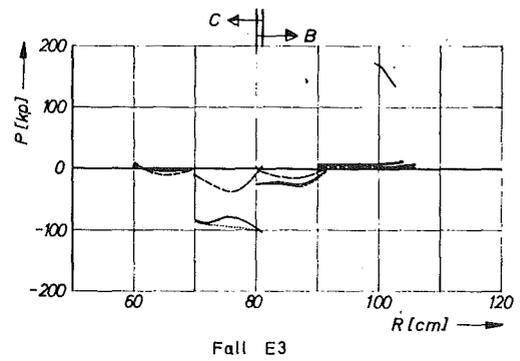
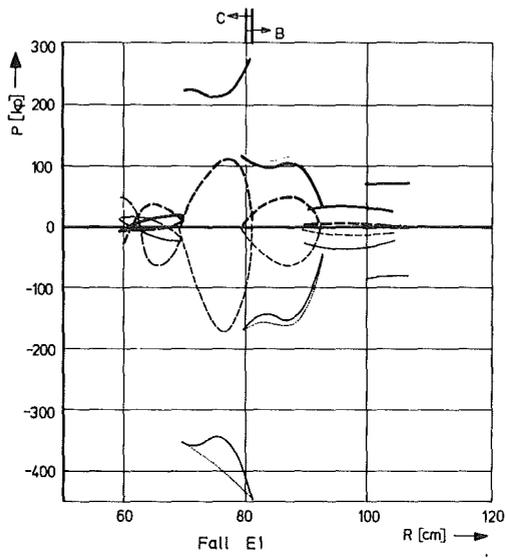
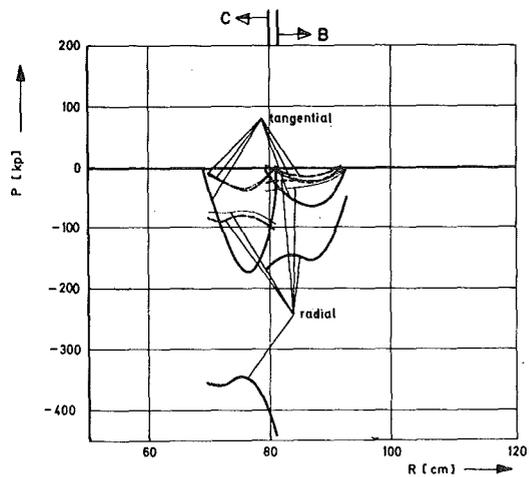


Abb. 8. 22.  
Auflagekräfte am Fuß der BE für den Fall E1

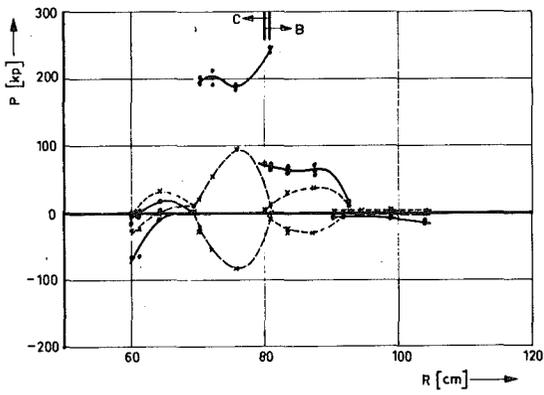


- unt. Aufl. (radial)
- ob. Aufl. (radial)
- - - unt. Aufl. (tangential)
- - - ob. Aufl. (tangential)
- Resultierende

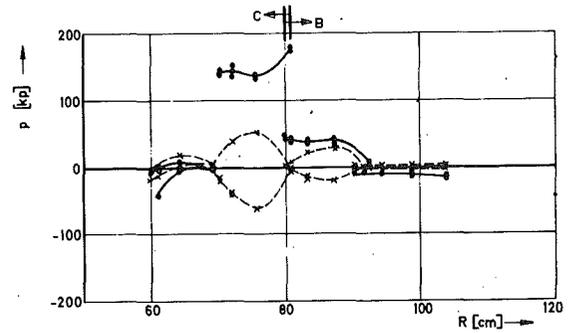
Abb. 8. 23.  
Auflagerkräfte am Fuß



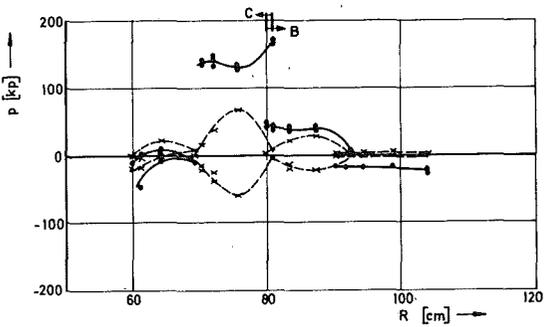
- Auflagerkräfte am oberen Fuflager
- ohne Spiel ohne Federung
  - - - mit " ohne "
  - - - ohne " mit "



Fall E1



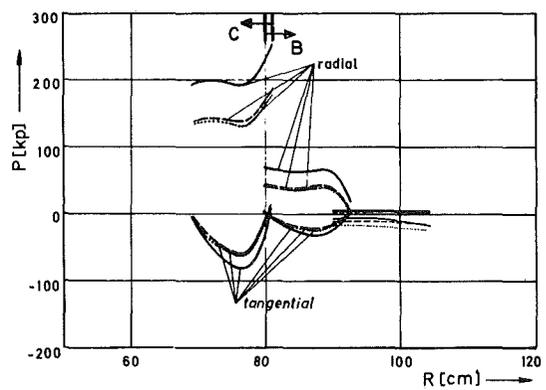
Fall E3



Fall E2

—•— radial  
- - - x - - - tangential

Abb. 8. 24.  
Auflagerkräfte  
an der unteren Verspannungsebene



— ohne Spiel ohne Federung  
- - - mit " ohne "  
..... ohne " mit "

### 8.3.6. Qualitative Untersuchung des Einflusses des Strukturmaterialschwellens

In diesem Abschnitt wird der Einfluß des Strukturmaterialschwellens auf die Elementverschiebung für den Fall B2 (Tabelle 8.3) diskutiert. Dabei wird die aufgrund des Strukturmaterialschwellens auftretende Volumendehnung unter Verwendung der Interatom-Formel (Gl. 3.25) bestimmt. Für die Rechnung wurde das im Abschnitt 8.1. skizzierte Umsetzungsschema zugrunde gelegt. Die Elementpositionierung des untersuchten Reaktorzustandes entspricht dem Anfang des in Abb. 8.3a dargestellten Zykluses. Dabei werden zum eindeutigen Vergleich drei Fälle untersucht.

- a) Fall B2TH: Hierbei ist nur die thermische Dehnung berücksichtigt. Dieser Fall wurde in Abschnitt 8.3.2 (Fall B2) bereits untersucht.
- b) Fall B2SW: In diesem Fall wird nur die Dehnung infolge des Strukturmaterialschwellens nicht aber die thermische Dehnung berücksichtigt. Diese Situation entspricht dem Reaktor im kalten Zustand.
- c) Fall B2TS: Die thermische Dehnung und die Dehnung infolge des Strukturmaterialschwellens bestimmen die dreidimensionale Verbiegung des Reaktorkerns, d.h. der Reaktor ist auf Vollast hochgefahren.

Die Ergebnisse der drei Fälle werden in den Abb. 8.25, 8.26 und 8.27 sowie in den Tabellen 8.8., 8.9. und 8.10. miteinander verglichen.

Bei den Rechnungen für die Fälle B2SW und B2TS sind wegen großer Konvergenzschwierigkeiten die angreifenden Auflagerkräfte in der unteren Verspannungsebene und die Querschnittsverformungen der Elementkästen nicht ausiteriert. Wie später noch zu sehen ist, liegt dies daran, daß die Querschnittsverformung (durch die globale Dehnung und die Druckkräfte) und die entsprechenden Auflagerkräfte in einer Umfangsreihe (Tabelle 8.8a und 8.8b) sehr unterschiedlich sind. Da dieser Vergleich zunächst nur qualitativen Charakter haben soll, wurde

wegen des großen Aufwandes auf eine Weiterführung der Iteration bis zur Erreichung eines vollständigen Gleichgewichts von Verformungen und Kräften verzichtet.

I) Die Globare Dehnung und die freie Verbiegung

Da in der Spaltzone die Kühlmittelaufheizspanne für die Elemente ähnlich groß ist, sind für alle Elemente auch die mittlere thermische Dehnung über den Kastenquerschnitt und die mittlere axiale Verschiebung ähnlich groß (siehe  $r < 81$  cm in Abb. 8.25). Das gleiche gilt für die Brutelemente (siehe  $r > 80$  cm in Abb. 8.25). Dabei ist die axiale Verschiebung der Sonderelemente aufgrund der kleinen Kühlmittelaufheizspanne wesentlich kleiner als diejenige der Brennelemente. Diese kleine Kühlmittelaufheizspanne beeinflusst entsprechend den Verlauf der axialen Verschiebung benachbarter Elemente (Abb. 8.25).

Dagegen sind die Verläufe der mittleren Dehnung über den Kastenquerschnitt und der mittleren axialen Verschiebung infolge des Struktur-

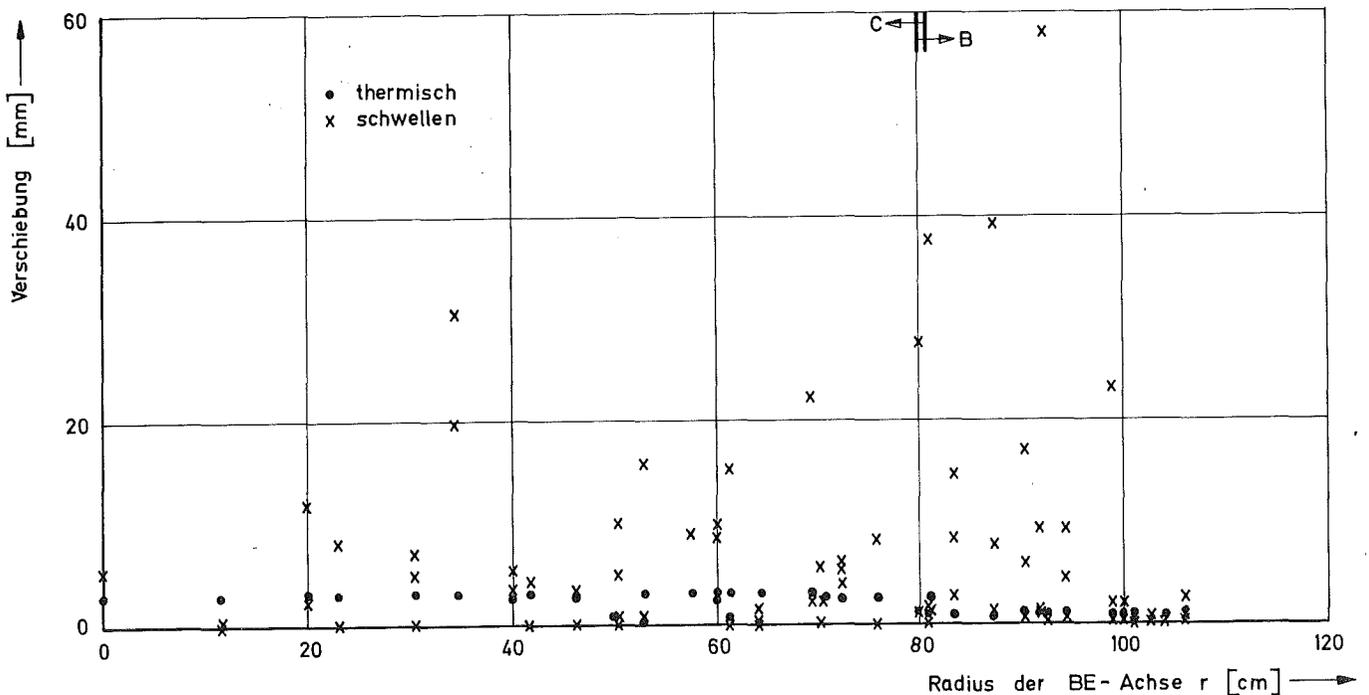


Abb. 8.25 Axiale Verschiebung der Elemente an der oberen Kante für die Fälle B2TH und B2SW

materialschwellens über die radiale EPOS stark unterschiedlich (Abb. 8.25). Dabei weisen die Elemente, die sich im ersten Zyklus befinden, noch keine Dehnung auf. Die Dehnung und die Verschiebung vergrößern sich mit steigender Bestrahlungszeit des Elements (Abb. 8.25). Sie sind außerdem vom ortsabhängigen Neutronenflußverlauf und von der Kostenwandtemperatur abhängig. Aus diesen Ergebnissen läßt sich ableiten, daß bei der Berücksichtigung des Strukturmaterialschwellens die globalen Querschnittsverformungen der Elementkästen in einer Umfangsreihe voneinander stark abweichen können. Der Verlauf der freien thermischen Auslenkung an der oberen Kante der Elemente ist, wie im Abschnitt 8.3.1 beschrieben, mit steigender radialer EPOS in der Spaltzone ansteigend und danach in der Brutzone abfallend (Abb. 8.26a). Eine derart einfache Beschreibung trifft beim Verlauf der freien Auslenkung infolge des Strukturmaterialschwellens nicht zu (Abb. 8.26b). Die Brennelemente des ersten Zykluses sind aufgrund des Strukturmaterialschwellens noch unverbogen (Abb. 8.26b). Die radiale Auslenkung der Brennelemente des zweiten Zykluses ist negativ, diejenige der Brennelemente des dritten Zykluses infolge der  $180^\circ$  Drehung zwischen den ersten beiden Zyklen weisen keine Verbiegung auf.

Zur Erklärung der freien Auslenkung der Brutelemente muß man den genauen Ablauf der radialen und tangentialen Positionierung für jedes Element individuell verfolgen. Darauf soll hier verzichtet werden. Die Tangentialkomponente der freien Auslenkung über der radialen EPOS sind in Abb. 8.26b nur als Absolutwerte aufgetragen. Bemerkenswert ist, daß bei einigen Elementen die freie Auslenkung besonders groß ist, insbesondere kann die Tangentialkomponente deutlich größer als die Radialkomponente werden. Dies kann nur für jedes Element individuell unter Berücksichtigung des Neutronenfluß- und Temperaturfeldes, der Bestrahlungszeit und der Positionierung der Elemente begründet werden. Bei einigen wenigen Elementen ist jedoch eine eindeutige Begründung nicht möglich. Das kann darauf zurückgeführt werden, daß der Neutronenflußverlauf des hexagonalen Elementquerschnitts aus einer X-Y-Rechnung mit viereckigen Maschen bestimmt wird. Dadurch treten bei der Übertragung der Ergebnisse der Neutronenflußrechnung Verzerrungen auf, die sich insbesondere

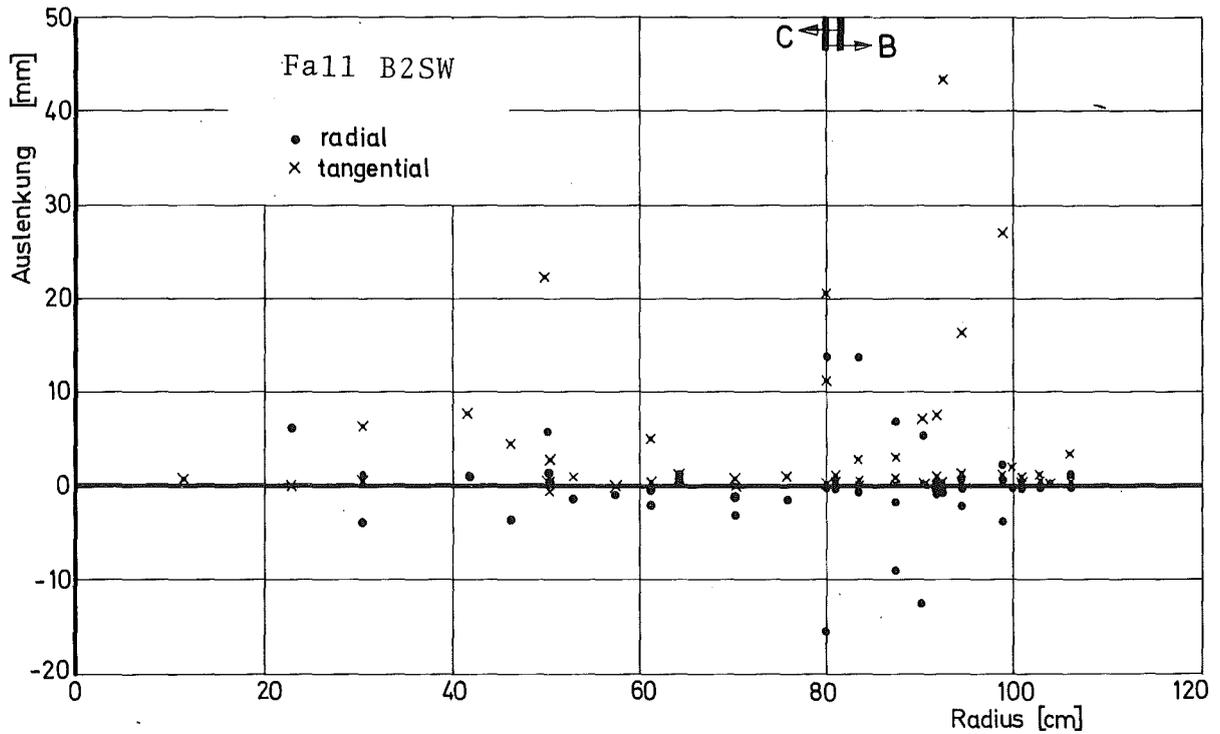
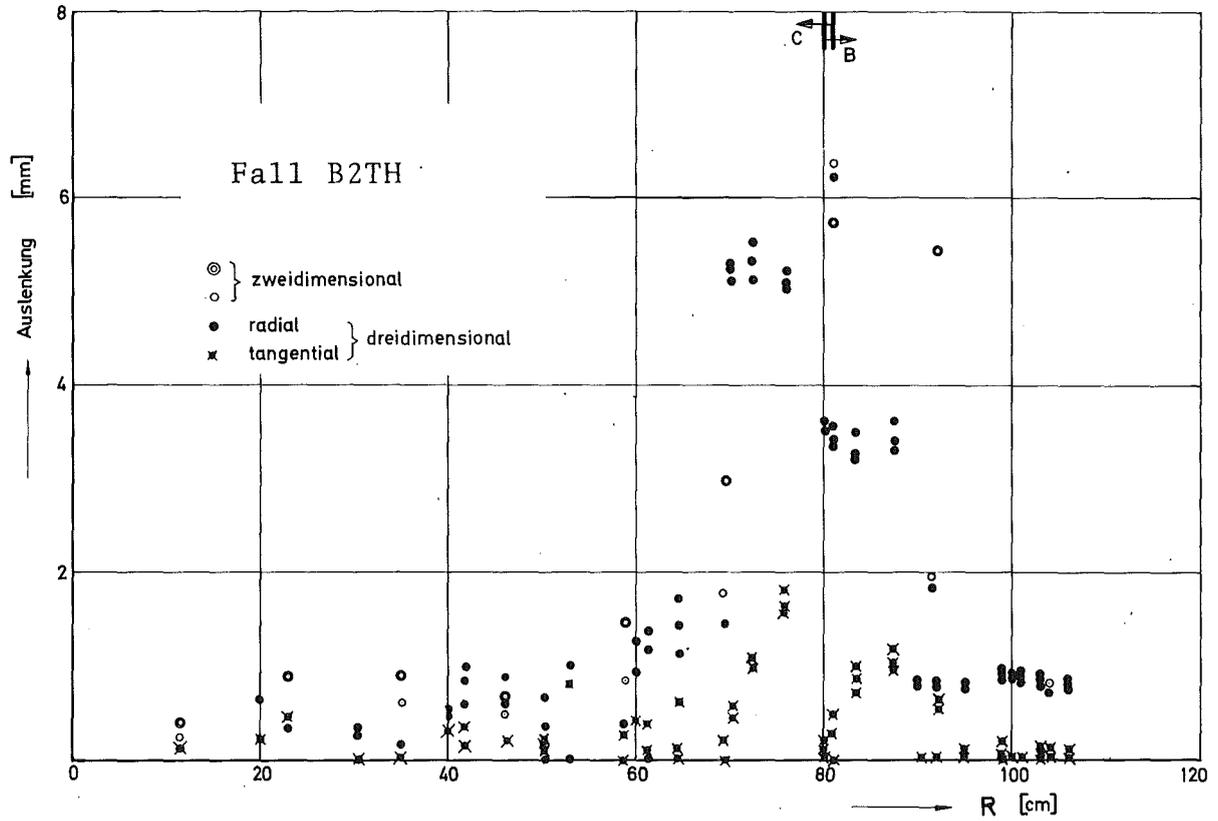


Abb. 8.26. Freie Auslenkung der oberen Kante der Elemente für die Fälle B2TH und B2SW

- bei gestörten Elementen und
- bei Elementen mit größeren Differenzen zwischen den hexagonalen und viereckigen EPOS

bemerkbar machen. Eine zusätzliche Fehlerquelle ist die grobe Aufteilung des  $(x,y)$ -Maschennetzes. Solche Fehler lassen sich nur durch Verwendung eines hexagonalen Maschennetzes bei der Diffusionsrechnung vermeiden.

## II) Auflagerkräfte und Auslenkung

Eine graphische Darstellung der Auflagerkräfte, wie in den vorhergehenden Abschnitten, ist zum Vergleich der untersuchten drei Fälle B2TH, B2SW und B2TS nicht sinnvoll, da die entsprechenden Auflagerkräfte dieser Fälle teilweise in unterschiedlichen Größenbereichen liegen. Daher wurden die Tabellen 8.8a und 8.8b sowie 8.9a und 8.9b erstellt, in denen die radialen und tangentialen Komponenten der Auflagerkräfte sowie ihre normierten Werte dargestellt sind. Im thermischen Fall B2TH läßt sich der Verlauf der Auflagerkräfte über die radiale EPOS und für die Umfangsreihe relativ einfach beschreiben (Abschn. 8.3.2). Aus den Tabellen 8.8a und 8.8b kann entnommen werden, daß bei den Fällen B2Sw und B2TS die Auflagerkräfte für die Elemente mit ausgeprägten freien Auslenkungen entsprechend groß sind.

- Die sich im 4. Zyklus befindlichen Sonderelemente weisen die größten Auflagerkräfte ihrer Umfangsreihe auf (Tabelle 8.8a und 8.8b).
- Die resultierenden Auflagerkräfte für die Brennelemente im zweiten Zyklus sind allgemein größer als diejenigen anderer Brennelemente in der gleichen Umfangsreihe.
- Bei den Brutelementen mit größeren freien Auslenkungen werden größere Auflagerkräfte berechnet. In der letzten Umfangsreihe sind die Auflagerkräfte ungefähr gleich groß.

Die größten Auflagerkräfte treten bei einigen Brutelementen in der drittletzten Umfangsreihe auf, da diese Elemente am längsten umfangsvariablen Neutronenfluß ausgesetzt sind. Ähnliches gilt auch für die Sonderelemente.

		F A L L B 2 T H				F A L L B 2 S W				F A L L B 2 T S			
		FUSSLAGER		VERSP.-EBENE		FUSSLAGER		VERSP.-EBENE		FUSSLAGER		VERSP.-EBENE	
NR.	ZYKL.	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE
*	*	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	2	0.0	0.0	0.0	0.0	-7.41	-63.48	121.12	-50.23	-7.90	-68.59	130.69	-54.19
3	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.50	-0.58	0.09	0.0	0.62	-0.73	0.11	0.0
4	3	0.49	1.95	-4.19	1.76	2.77	3.82	-11.51	4.92	2.65	-1.00	-3.12	1.47
5	1	0.58	2.50	-5.30	2.22	3.50	6.89	-18.04	7.65	3.42	1.74	-9.17	4.00
6	3	0.21	-0.25	0.04	0.0	2.76	3.74	-11.35	4.85	2.42	-2.84	0.42	0.0
7	2	0.65	3.07	-6.39	2.67	-122.20	-994.46	1908.47	-791.81	-123.03	-1003.54	1925.38	-798.81
8	2	2.00	13.13	-25.91	10.77	-6.35	-114.28	205.34	-84.71	-6.42	-120.26	215.62	-88.94
9	3	2.91	20.12	-39.40	16.38	10.80	13.45	-42.41	18.17	11.08	9.68	-38.54	15.78
10	4	2.64	18.17	-35.60	14.79	89.03	641.99	-1250.45	519.44	89.59	641.17	-1250.09	519.33
11	1	1.81	11.58	-22.92	9.53	9.21	9.33	-32.55	14.01	8.95	1.92	-19.51	8.64
12	3	1.55	9.33	-18.64	7.76	10.83	13.73	-42.96	18.40	9.71	-1.30	-15.41	7.01
13	3	3.34	19.23	-38.68	16.11	8.46	22.33	-53.23	22.44	8.11	11.81	-34.75	14.84
14	1	2.71	13.90	-28.49	11.88	8.86	23.69	-56.27	23.72	7.65	6.03	-24.12	10.44
15	2	4.37	26.33	-52.59	21.89	88.01	648.06	-1258.90	522.83	87.96	638.69	-1242.91	516.27
16	1	3.32	18.78	-37.89	15.78	8.86	23.69	-56.27	23.72	8.26	10.92	-33.51	14.34
17	3	3.32	19.00	-38.25	15.93	8.44	22.26	-53.08	22.38	8.08	11.57	-34.30	14.65
18	2	2.39	11.34	-23.56	9.84	-8.95	-110.79	202.50	-83.67	-9.65	-131.58	240.68	-99.45
19	1	4.00	23.35	-46.86	19.51	10.06	28.12	-65.95	27.77	9.48	14.62	-42.01	17.91
20	2	5.73	33.21	-66.74	27.79	-5.56	-123.32	219.23	-90.36	-5.00	-131.75	232.52	-95.77
21	4	6.99	42.69	-85.10	35.42	42.14	251.65	-503.32	209.52	43.61	249.78	-502.81	209.42
22	1	5.82	32.06	-64.95	27.67	15.92	36.11	-90.16	38.12	15.50	17.94	-58.57	25.13
23	3	4.36	21.75	-44.80	18.69	14.49	32.33	-81.14	34.32	13.30	9.30	-39.93	17.33
24	2	2.69	8.87	-19.93	8.37	0.15	-77.61	131.35	-53.89	-2.27	-109.90	190.52	-78.34
25	1	5.01	27.41	-55.58	23.16	13.62	29.33	-74.47	31.52	13.45	15.09	-50.01	21.47
26	4	6.99	42.69	-85.10	35.42	-90.00	-795.03	1511.77	-626.74	-88.60	-797.35	1513.17	-627.21
27	2	7.03	41.66	-83.41	34.73	32.95	171.54	-350.75	146.26	33.74	163.15	-337.96	141.08
28	3	4.98	27.90	-56.36	23.48	17.25	38.00	-95.77	40.52	15.63	12.72	-49.96	21.61
29	1	4.91	27.11	-54.91	22.88	17.53	38.37	-96.90	41.00	15.71	11.33	-47.75	20.71
30	2	5.32	29.69	-60.02	25.00	-0.42	-109.66	186.74	-76.66	-2.15	-136.80	235.91	-96.96
31	3	6.11	34.89	-70.26	29.26	20.19	45.92	-114.54	48.43	18.37	17.09	-62.35	26.88
32	2	6.04	35.46	-71.11	29.61	15.45	16.61	-56.23	24.17	14.48	-4.37	-18.88	8.77
33	4	8.07	52.25	-103.26	42.95	59.60	370.73	-736.96	306.64	60.98	368.93	-736.43	306.52
34	3	5.72	33.75	-67.62	28.15	17.26	38.07	-95.92	40.59	16.39	16.39	-61.55	26.42
35	2	5.40	31.01	-62.40	25.99	18.54	46.49	-112.51	47.48	17.57	26.18	-76.32	32.56
36	1	4.69	24.69	-50.40	21.01	18.55	41.24	-103.63	43.84	16.07	8.07	-42.85	18.72
37	3	5.44	29.53	-59.95	24.99	20.40	47.57	-117.72	49.75	17.80	12.47	-53.47	23.20
38	2	-0.72	-17.90	31.65	-13.04	82.71	573.82	-1123.37	466.84	71.97	474.92	-936.13	389.24
39	3	0.80	-5.99	8.71	-3.52	17.60	52.49	-121.83	51.24	10.18	14.66	-5.05	-9.46
40	1	0.91	-5.76	8.10	-3.26	18.52	55.91	-128.45	54.02	10.79	-19.39	13.30	-4.69
41	2	0.12	-12.91	21.69	-8.89	16.42	33.35	-86.38	36.61	4.31	-77.92	124.33	-50.71
42	1	0.86	-6.21	8.98	-3.62	18.52	55.91	-128.45	54.02	10.69	-20.19	14.83	-5.33
43	3	0.55	-7.96	12.51	-5.09	17.58	52.83	-121.52	51.11	9.89	-21.43	18.38	-6.84
44	2	0.90	-4.95	6.77	-2.71	36.92	209.74	-422.77	176.10	25.95	109.42	-232.70	97.33
45	1	0.84	-5.44	7.70	-3.10	17.03	50.65	-116.82	49.14	9.89	-19.06	14.37	-5.20
46	3	0.20	-10.79	17.94	-7.35	17.59	52.92	-121.69	51.18	9.49	-24.63	24.53	-9.39
47	2	0.71	-7.38	11.23	-4.56	52.21	324.71	-645.50	268.58	41.44	225.08	-456.98	190.46
48	1	0.46	-10.15	16.37	-6.69	19.90	60.82	-139.29	58.57	10.79	-26.37	25.12	-9.54
49	2	0.32	3.57	-6.63	2.74	16.22	30.41	-81.63	34.49	31.97	-29.81	-7.49	5.34
50	1	-0.18	5.68	-9.32	3.81	27.31	-14.68	-24.69	12.06	39.44	-59.84	29.86	-9.46
51	3	-1.38	10.76	-15.73	6.36	11.62	53.58	-111.96	46.77	28.13	-9.68	-34.67	16.22
52	2	-1.74	12.51	-18.06	7.29	-50.04	314.53	-442.57	178.07	-32.74	248.31	-361.66	146.10
53	1	-9.46	44.88	-58.94	23.52	19.67	31.17	-88.59	37.75	30.02	-5.91	-44.50	20.38
54	3	-2.82	17.61	-23.72	9.53	235.79	-853.42	1028.23	-465.61	247.49	-916.56	1105.00	-435.93
55	2	-2.52	15.50	-21.76	8.73	-8.24	136.16	-215.95	88.04	6.97	78.34	-145.52	60.21
56	1	-1.14	9.68	-14.35	5.81	14.19	39.91	-93.45	39.35	28.71	-15.21	-26.35	12.84
57	3	-0.09	5.29	-8.80	3.61	516.91	-2052.63	2542.45	-1006.73	534.95	-2120.51	2624.81	-1039.25
58	2	-0.63	7.56	-11.67	4.75	-565.85	2457.12	-3139.59	1248.31	-549.17	2392.62	-3060.48	1217.03
59	1	-2.25	14.34	-20.24	8.15	60.92	-151.31	145.98	-55.59	76.68	-211.45	219.36	-84.59
60	3	-2.99	17.71	-24.61	9.89	-331.96	1489.13	-1922.65	765.48	-314.96	1425.57	-1845.73	735.12
61	2	-9.90	46.73	-61.26	24.44	-13.20	168.15	-261.21	166.25	-2.72	130.37	-216.17	88.51
62	1	-13.64	63.18	-82.38	32.84	4.12	47.57	-88.15	36.47	9.77	31.00	-70.32	29.55
63	3	-13.93	64.51	-84.11	33.53	2.45	55.62	-98.78	40.71	8.17	38.87	-80.75	33.72
64	2	-14.64	67.72	-88.25	35.18	5.47	44.98	-86.21	35.77	11.18	28.55	-68.73	28.99
65	1	-15.38	71.05	-92.57	36.90	5.84	46.49	-89.44	37.12	11.84	29.67	-70.81	29.90
66	3	-17.29	79.40	-103.27	41.15	3.67	59.23	-107.12	44.22	9.12	44.50	-92.04	38.41
67	2	-15.07	69.80	-91.00	36.28	77.66	-252.30	286.86	-112.22	84.06	-271.09	307.11	-120.08
68	2	-14.60	67.51	-87.97	35.07	-5.55	90.87	-144.04	58.72	0.06	74.79	-126.95	52.10
69	1	-14.69	65.25	-85.06	33.91	12.76	12.61	-44.56	19.19	18.09	-2.48	-28.65	13.04
70	3	-13.75	63.67	-83.61	33.09	191.54	-732.53	894.49	-353.50	197.40	-749.25	912.21	-360.36
71	2	-13.57	62.96	-82.14	32.75	-455.70	1958.75	-2494.39	991.34	-449.28	1941.51	-2476.81	984.58
72	1	-13.88	64.36	-83.94	33.47	-34.30	208.01	-290.49	116.78	-28.58	191.20	-272.37	109.75
73	3	-14.55	67.30	-87.73	34.97	-76.87	387.46	-517.52	206.93	-71.01	370.47	-499.34	199.88
74	2	-15.12	69.99	-91.24	36.37	-139.53	650.98	-850.64	339.19	-133.15	632.06	-830.14	331.23
75	1	-16.97	77.96	-101.39	40.41	3.97	57.96	-105.51	43.58	9.80	41.71	-88.54	37.03
76	1	-15.12	71.24	-93.28	37.21	-5.75	66.83	-102.90	41.82	0.09	47.99	-83.01	34.13
77	3	-15.39	72.34	-94.73	37.78	-7.41	73.99	-112.03	45.45	-0.87	55.62	-92.76	38.00
78	2	-15.99	74.97	-98.10	39.13	-6.52	71.16	-108.85	44.20	-0.07	53.33	-90.32	37.06
79	1	-16.83	78.73	-102.96	41.06	-6.32	71.64	-110.02	44.70	0.13	54.16	-92.09	37.80
80	2	-16.95	79.19	-103.53	41.29	-6.92	74.13	-113.16	45.95	-0.58	57.10	-95.79	39.27
81	1	-16.11	75.56	-98.89	39.44	-6.00	69.00	-106.11	43.12	0.32	51.76	-88.35	36.28
82	3	-15.64	73.33	-95.96	38.27	-6.75	71.35	-108.73	44.14	-0.49	54.01	-90.71	37.19
83	2	-15.09	71.11	-93.19	37.17	6.11	17.55	-40.86	17.20	12.57	-0.57	-21.86	9.86
84	1	-15.26	71.79	-94.03	37.51	-5.82	67.39	-103.71	42.15	0.86	48.42	-83.69	34.40
85	3	-15.70	73.86	-96.65	38.55	-4.08	61.00	-96.05	39.13	2.37	43.20	-77.56	32.00
86	2	-16.56	77.68	-101.67	40.55	25.91	-62.35	58.69	-22.25	32.50			

		F A L L B 2 T H				F A L L B 2 S W				F A L L B 2 T S			
		FUSSLAGER		VERSP.-EBENE		FUSSLAGER		VERSP.-EBENE		FUSSLAGER		VERSP.-EBENE	
NR.	ZYKL.	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE
*	*	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	2	0.0	0.0	0.0	0.0	11.33	9.17	-173.49	71.99	11.66	92.86	-178.65	74.14
3	1	0.00	-0.00	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	-3.00	0.00	0.0
4	3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	1	-0.20	-1.57	3.02	-1.25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	2	0.00	-0.00	0.00	0.0	-0.04	-0.33	0.57	-0.24	-0.04	-0.30	0.57	-0.24
8	2	0.01	0.05	-0.09	0.04	9.44	74.94	-144.25	59.86	9.50	75.47	-145.26	60.28
9	3	-0.16	-1.27	2.44	-1.01	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.16	-1.30	2.50	-1.04
10	4	0.0	0.0	0.0	0.0	-148.90	-1179.64	2271.00	-942.47	-148.90	-1179.64	2271.00	-942.47
11	1	0.09	0.78	-1.35	0.56	0.0	0.0	0.0	0.0	0.09	0.70	-1.35	0.56
12	3	0.00	0.01	-0.02	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	0.01	-0.02	0.01
13	3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
14	1	-0.19	-1.55	2.98	-1.24	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.19	-1.55	2.98	-1.24
15	2	0.43	3.42	-6.57	2.73	-89.55	-712.09	1370.30	-568.65	-89.04	-708.04	1362.49	-565.41
16	1	-0.01	-0.11	0.25	-0.08	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.01	-0.11	0.20	-0.08
17	3	-0.39	-3.14	6.05	-2.51	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.36	-2.89	5.57	-2.31
18	2	-0.36	-2.86	5.51	-2.29	-156.75	-1247.57	2400.47	-996.15	-157.88	-1256.74	2418.08	-1003.46
19	1	0.00	-0.00	0.01	-0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	-0.00	0.01	-0.00
20	2	-0.24	-1.90	3.65	-1.51	9.42	74.98	-144.26	59.86	9.15	72.88	-140.22	58.19
21	4	0.0	0.0	0.0	0.0	-20.92	-165.92	319.38	-132.54	-20.93	-165.99	319.53	-132.60
22	1	-0.39	-3.10	5.97	-2.48	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.39	-3.10	5.97	-2.48
23	3	-1.18	-9.41	18.09	-7.51	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.13	-9.05	17.41	-7.22
24	2	0.19	1.51	-2.90	1.20	54.66	434.87	-836.77	347.24	55.27	439.00	-846.26	351.18
25	1	-0.32	-2.55	4.91	-2.04	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.32	-2.55	4.91	-2.04
26	4	0.0	0.0	0.0	0.0	465.26	3683.70	-7092.28	2943.32	465.52	3685.20	-7095.29	2944.57
27	2	0.00	0.01	-0.01	0.01	-0.04	-0.29	0.56	-0.23	-0.03	-0.28	0.54	-0.22
28	3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
29	1	0.13	1.03	-1.99	0.83	0.0	0.0	0.0	0.0	0.13	1.03	-1.99	0.83
30	2	0.16	1.24	-2.38	0.99	19.95	158.73	-305.43	126.75	20.34	161.88	-311.48	129.26
31	3	-0.38	-3.02	5.81	-2.41	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.38	-3.03	5.83	-2.42
32	2	-1.06	-8.44	16.24	-6.74	-21.84	-173.68	334.22	-138.70	-23.37	-185.96	357.83	-148.49
33	4	0.0	0.0	0.0	0.0	104.93	831.36	-1600.49	664.21	105.02	831.66	-1601.17	664.49
34	3	0.80	6.41	-12.32	5.11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.78	6.23	-11.99	4.97
35	2	0.74	5.93	-11.40	4.73	7.12	56.64	-108.99	45.23	7.93	63.13	-121.48	50.41
36	1	-0.03	-0.21	0.40	-0.17	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.03	-0.21	0.40	-0.17
37	3	0.00	0.01	-0.03	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	0.01	-0.03	0.01
38	2	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.15	-9.20	17.71	-7.35	0.18	1.45	-2.78	1.15
39	3	0.83	6.64	-12.77	5.30	0.0	0.0	0.0	0.0	0.96	7.71	-14.82	6.15
40	1	1.83	14.67	-28.21	11.71	0.0	0.0	0.0	0.0	1.90	15.19	-29.21	12.12
41	2	-0.21	-1.70	3.26	-1.35	17.52	139.64	-268.64	111.48	17.11	136.29	-262.22	108.82
42	1	-2.34	-18.72	35.95	-14.92	0.0	0.0	0.0	0.0	-2.38	-19.06	36.66	-15.21
43	3	-0.90	-7.25	13.93	-5.78	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.04	-8.32	15.99	-6.64
44	2	-0.35	-0.41	0.79	-0.33	12.88	102.68	-196.51	81.55	11.56	91.50	-176.16	73.11
45	1	0.14	1.13	-2.17	0.90	0.0	0.0	0.0	0.0	0.29	2.33	-4.49	1.86
46	3	1.00	8.04	-15.47	6.42	0.0	0.0	0.0	0.0	1.13	9.01	-17.32	7.19
47	2	1.93	15.44	-29.69	12.32	22.96	182.30	-350.86	145.60	26.55	210.97	-406.01	168.49
48	1	-0.01	-0.05	0.10	-0.04	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.01	-0.05	0.10	-0.04
49	2	0.13	-0.55	0.77	-0.28	4.80	-27.01	25.21	-10.01	3.40	-14.22	17.93	-7.12
50	1	-0.41	1.70	-2.14	0.85	-5.77	24.02	-30.26	12.01	-6.57	27.32	-34.41	13.65
51	3	-1.81	7.49	-9.42	3.74	0.12	-0.54	0.69	-0.27	-2.43	10.07	-12.65	5.02
52	2	-2.20	9.13	-11.48	4.56	22.43	-93.25	117.41	-46.59	18.34	-76.27	98.05	-38.12
53	1	0.21	-0.89	1.12	-0.44	1.97	-4.44	5.59	-2.22	1.17	-4.87	6.13	-2.43
54	3	3.11	-12.90	16.23	-6.44	-101.66	423.10	-532.95	211.50	-96.79	402.60	-507.33	261.21
55	2	2.45	-10.18	12.80	-5.68	182.72	-427.27	538.09	-213.54	106.85	-444.67	560.11	-222.28
56	1	0.90	-3.74	4.71	-1.87	23.75	-98.67	124.20	-49.28	25.04	-104.10	131.07	-52.01
57	3	0.07	-0.29	0.37	-0.15	-749.31	3118.22	-3927.59	1558.69	-750.44	3120.13	-3928.80	1559.10
58	2	-0.51	2.13	-2.68	1.26	402.96	-1680.39	2118.09	-840.66	401.84	-1675.55	2111.91	-838.20
59	1	-1.65	6.82	-8.59	3.41	-14.43	59.14	-74.10	29.38	-17.75	72.96	-91.49	36.29
60	3	-2.54	16.53	-13.25	5.26	-1465.83	6102.70	-7687.92	3051.06	-1468.71	6121.36	-7714.35	3061.70
61	2	0.19	-0.80	1.01	-0.40	1652.72	-6896.07	8694.06	-3450.71	1654.76	-6900.89	8698.51	-3452.39
62	1	0.21	-0.87	1.09	-0.43	0.19	-0.78	0.98	-0.39	0.39	-1.62	2.04	-0.81
63	3	0.23	-0.97	1.22	-0.48	-2.25	9.36	-11.79	4.68	-1.96	8.14	-10.25	4.07
64	2	-0.28	0.65	-0.75	0.33	-3.06	12.71	-16.00	6.35	-3.03	12.59	-15.86	6.29
65	1	-0.28	1.18	-1.49	0.59	-2.75	11.45	-14.42	5.72	-2.87	11.96	-15.07	5.98
66	3	0.36	-1.48	1.87	-0.74	0.35	-1.46	1.83	-0.73	0.70	-2.92	3.68	-1.46
67	2	0.65	-2.72	3.43	-1.36	-33.92	141.21	-177.89	70.60	-33.31	138.54	-174.46	69.23
68	1	0.46	-1.90	2.39	-0.95	36.94	-153.81	193.78	-76.90	37.41	-155.68	196.09	-77.82
69	3	0.45	-0.21	0.27	-0.11	-44.89	186.76	-235.21	93.34	-44.87	186.49	-234.80	93.18
70	2	-0.03	0.13	-0.17	0.07	-256.33	1067.19	-1344.39	533.54	-256.84	1068.31	-1345.38	533.91
71	1	-0.11	0.45	-0.56	0.22	258.46	-1074.55	1353.02	-536.93	257.96	-1073.87	1352.78	-536.87
72	1	0.01	-0.05	0.06	-0.02	-265.03	1102.37	-1388.27	550.93	-265.30	1102.97	-1388.80	551.13
73	3	-0.36	1.51	-1.90	0.76	-578.83	2407.20	-3031.32	1202.96	-579.41	2409.92	-3034.62	1204.38
74	2	-0.61	2.51	-3.17	1.26	978.18	-4069.66	5125.58	-2034.89	977.66	-4067.95	5123.62	-2033.32
75	1	0.14	-0.60	0.75	-0.29	0.0	0.0	0.0	0.0	0.14	-0.60	0.75	-0.29
76	1	0.06	-0.26	0.33	-0.13	0.0	0.0	0.0	0.0	0.06	-0.26	0.33	-0.13
77	3	0.25	-1.05	1.32	-0.52	2.23	-9.25	11.65	-4.62	2.43	-10.11	12.73	-5.05
78	2	0.49	-2.01	2.54	-1.01	0.62	-2.59	3.26	-1.30	1.10	-4.56	5.74	-2.28
79	1	0.32	-1.36	1.72	-0.68	0.0	0.0	0.0	0.0	0.33	-1.36	1.72	-0.68
80	2	0.03	-0.08	0.11	-0.04	-1.06	4.44	-5.55	2.20	-1.02	4.24	-5.34	2.12
81	1	-0.18	0.73	-0.92	0.37	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.18	0.73	-0.92	0.37
82	3	0.04	-0.17	0.22	-0.09	3.06	-12.77	16.09	-6.39	3.05	-12.68	15.97	-6.34
83	2	0.15	-0.61	0.78	-0.31	-61.57	256.18	-322.66	128.05	-61.45	255.54	-321.79	127.70
84	1	0.01	-0.03	0.04	-0.02	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	-0.03	0.04	-0.02
85	3	0.34	-1.41	1.77	-0.70	28.65	-119.13	151.01	-59.53	28.89	-126.15	151.30	-60.04
86	2	0.09	-0.38	0.47	-0.19	-115.62	480.98	-605.75	240.39	-115.53	480.62	-605.48	240.29

Tabelle 8.8b Tangentialkomponente der Auflagerkräfte der Elemente für die Fälle B2TH, B2SW und B2TS

a) Radialkomponente

NR. ZYKL.	FALL B2TH				FALL B2SW				FALL B2TS			
	FUSSLAGER		VERSP.-EBENE		FUSSLAGER		VERSP.-EBENE		FUSSLAGER		VERSP.-EBENE	
	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE
* *	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
0	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	0,0	0,0	0,0	0,0	-5,797	6,797	-1,000	0,0	-5,797	6,797	-1,000	0,0
2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
3	0,189	0,811	-1,719	0,719	0,337	0,663	-1,736	0,736	0,663	0,337	-1,776	0,776
4	0,176	0,824	-1,717	0,717	0,109	0,891	-1,709	0,709	0,109	0,891	-1,709	0,709
5	0,292	0,708	-1,731	0,731	0,422	0,578	-1,747	0,747	0,410	-3,105	-2,189	1,189
6	0,135	0,865	-1,712	0,712	0,497	0,503	-1,756	0,756	0,823	0,177	-1,795	0,795
7	0,132	0,868	-1,712	0,712	0,053	0,947	-1,702	0,702	0,051	0,949	-1,702	0,702
8	0,131	0,869	-1,712	0,712	0,443	0,557	-1,749	0,749	0,713	0,287	-1,782	0,782
9	0,127	0,873	-1,711	0,711	0,122	0,878	-1,711	0,711	0,123	0,877	-1,711	0,711
10	0,152	0,848	-1,714	0,714	0,269	0,731	-1,728	0,728	0,446	0,554	-1,749	0,749
11	0,152	0,848	-1,714	0,714	0,130	0,870	-1,712	0,712	0,134	0,866	-1,712	0,712
12	0,148	0,852	-1,714	0,714	0,275	0,725	-1,729	0,729	0,409	0,591	-1,745	0,745
13	0,154	0,846	-1,714	0,714	0,311	0,689	-1,733	0,733	0,467	0,533	-1,752	0,752
14	0,156	0,844	-1,715	0,715	14,908	15,906	0,094	-1,094	-0,509	1,509	-1,635	0,635
15	0,167	0,833	-1,716	0,716	0,310	0,690	-1,733	0,733	0,589	0,411	-1,767	0,767
16	0,141	0,859	-1,713	0,713	0,081	0,919	-1,706	0,706	0,076	0,924	-1,705	0,705
17	0,156	0,844	-1,715	0,715	0,312	0,688	-1,733	0,733	0,621	0,379	-1,770	0,770
18	0,148	0,852	-1,714	0,714	-2,585	3,585	-1,386	0,386	-0,352	1,352	-1,654	0,654
19	0,150	0,850	-1,714	0,714	0,307	0,693	-1,733	0,733	0,528	0,472	-1,759	0,759
20	0,134	0,866	-1,712	0,712	0,138	0,862	-1,713	0,713	0,142	0,858	-1,713	0,713
21	-0,125	1,125	-1,681	0,681	0,249	0,751	-1,726	0,726	-0,984	1,984	-1,578	0,578
22	-0,203	1,203	-1,672	0,672	-0,250	1,250	-1,666	0,666	-0,240	1,240	-1,667	0,667
23	-0,067	1,067	-1,688	0,688	0,249	0,751	-1,726	0,726	-0,828	1,828	-1,597	0,597
24	-0,212	1,212	-1,671	0,671	0,493	0,493	-2,235	1,235	-1,487	2,487	-1,517	0,517
25	-0,168	1,168	-1,676	0,676	-0,457	1,457	-1,641	0,641	-0,440	1,440	-1,643	0,643
26	-0,276	1,276	-1,663	0,663	-0,921	1,021	-1,693	0,693	0,067	0,933	-1,704	0,704
27	-0,276	1,276	-1,663	0,663	-0,699	1,699	-1,612	0,612	-0,672	1,672	-1,615	0,615
28	-0,271	1,271	-1,663	0,663	-0,695	1,695	-1,685	0,685	0,011	0,989	-1,697	0,697
29	-0,271	1,271	-1,663	0,663	-0,697	1,697	-1,684	0,684	0,007	0,993	-1,697	0,697

b) Tangentialkomponente

NR. ZYKL.	FALL B2TH				FALL B2SW				FALL B2TS			
	FUSSLAGER		VERSP.-EBENE		FUSSLAGER		VERSP.-EBENE		FUSSLAGER		VERSP.-EBENE	
	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE	UNTERE	OBERE
* *	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
0	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	-5,797	6,797	-1,000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-5,797	6,797	-1,000	0,0
2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,112	0,888	-1,709	0,709	0,112	0,888	-1,709	0,709
3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	0,111	0,889	-1,709	0,709	0,0	0,0	0,0	0,0	0,111	0,889	-1,709	0,709
6	0,119	0,881	-1,710	0,710	0,112	0,888	-1,709	0,709	0,112	0,888	-1,709	0,709
7	0,111	0,889	-1,709	0,709	0,0	0,0	0,0	0,0	0,111	0,889	-1,709	0,709
8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,112	0,888	-1,709	0,709	0,112	0,888	-1,709	0,709
9	0,111	0,889	-1,709	0,709	0,0	0,0	0,0	0,0	0,111	0,889	-1,709	0,709
10	0,114	0,886	-1,710	0,710	0,112	0,888	-1,709	0,709	0,112	0,888	-1,709	0,709
11	0,111	0,889	-1,709	0,709	0,0	0,0	0,0	0,0	0,112	0,888	-1,709	0,709
12	0,111	0,889	-1,709	0,709	0,0	0,0	0,0	0,0	0,112	0,888	-1,709	0,709
13	0,111	0,889	-1,709	0,709	0,0	0,0	0,0	0,0	0,112	0,888	-1,709	0,709
14	0,111	0,889	-1,709	0,709	0,0	0,0	0,0	0,0	0,112	0,888	-1,709	0,709
15	0,111	0,889	-1,709	0,709	0,0	0,0	0,0	0,0	0,111	0,889	-1,709	0,709
16	0,111	0,889	-1,709	0,709	0,112	0,888	-1,709	0,709	0,112	0,888	-1,709	0,709
17	0,111	0,889	-1,709	0,709	0,0	0,0	0,0	0,0	0,111	0,889	-1,709	0,709
18	0,0	0,0	0,0	0,0	0,112	0,888	-1,709	0,709	0,112	0,888	-1,709	0,709
19	0,113	0,887	-1,709	0,709	0,0	0,0	0,0	0,0	0,113	0,887	-1,709	0,709
20	0,110	0,891	-1,709	0,709	0,111	0,889	-1,709	0,709	0,111	0,889	-1,709	0,709
21	0,112	0,888	-1,709	0,709	0,0	0,0	0,0	0,0	0,112	0,888	-1,709	0,709
22	0,0	0,0	0,0	0,0	0,112	0,888	-1,709	0,709	0,112	0,888	-1,709	0,709
23	0,111	0,889	-1,709	0,709	0,0	0,0	0,0	0,0	0,110	0,890	-1,709	0,709
24	0,111	0,889	-1,709	0,709	0,112	0,888	-1,709	0,709	0,112	0,888	-1,709	0,709
25	0,111	0,889	-1,709	0,709	0,0	0,0	0,0	0,0	0,111	0,889	-1,709	0,709
26	-0,318	1,318	-1,658	0,658	-0,302	1,302	-1,660	0,660	-0,279	1,279	-1,663	0,663
27	-0,312	1,312	-1,659	0,659	-0,315	1,315	-1,658	0,658	-0,315	1,315	-1,658	0,658
28	-0,317	1,317	-1,658	0,658	-0,316	1,316	-1,658	0,658	-0,316	1,316	-1,658	0,658
29	-0,327	1,327	-1,657	0,657	-0,316	1,316	-1,658	0,658	-0,317	1,317	-1,658	0,658
30	-0,316	1,316	-1,658	0,658	-0,316	1,316	-1,658	0,658	-0,316	1,316	-1,658	0,658
31	-0,316	1,316	-1,658	0,658	-0,316	1,316	-1,658	0,658	-0,317	1,317	-1,658	0,658
32	-0,317	1,317	-1,658	0,658	-0,316	1,316	-1,658	0,658	-0,317	1,317	-1,658	0,658
33	-0,317	1,317	-1,658	0,658	-0,316	1,316	-1,658	0,658	-0,317	1,317	-1,658	0,658
34	-0,316	1,316	-1,658	0,658	-0,317	1,317	-1,658	0,658	-0,317	1,317	-1,658	0,658

Tabelle 8.9 Normierte Auflagerkräfte am Element in den Zyklen und Umfangsreihen für die Fälle B2TH, B2SW und B2TS

Bemerkenswert ist, daß sich für die normierten Auflagerkräfte der Elemente verschiedener Zyklen außer in wenigen Ausnahmen bei allen Umfangsreihen und bei allen drei untersuchten Fällen sehr ähnliche Werte ergeben (Tabelle 8.9.a und 8.9b), in besonderem Maße in der unteren Verspannungsebene.

Im thermischen Fall B2TH hat die Auslenkung der Elemente an der oberen Kante der Spaltzone eine positive Komponente in radialer Richtung (Abb. 8.27 und Tabelle 8.10). Die Absolutwerte ihrer Tangentialkomponenten sind klein. Das gleiche gilt auch in den Fällen B2SW und B2TS für etwa  $2/3$  aller Elemente, insbesondere für die Brennelemente im ersten und dritten Zyklus. Für das Drittel aller Elemente, das sich im zweiten Zyklus befindet, ist dies jedoch nicht der Fall. Dort sind die Radialkomponenten der Elementauslenkung negativ. Sie sind teilweise wesentlich kleiner als ihre zugehörigen Tangentialkomponenten. Diese Tendenz entspricht den Situationen, wie sie bei der freien Verbiegung der Elemente infolge des Strukturmaterialschwellens auftreten. Dadurch, daß sich in einer Umfangsreihe Elemente aus verschiedenen Zyklen befinden, sind die Auslenkungen der Elemente stark unterschiedlich. Diese Tatsache kompliziert die Bestimmung der dreidimensionalen Verbiegung und der dazugehörigen Kräfte im Gleichgewicht in der unteren Verspannungsebene erheblich im Vergleich zu Belastungsfällen, bei denen nur die relativ gleichmäßige thermische Auslenkung zugrunde gelegt wird. Insbesondere ergeben sich bei stark unterschiedlichen Auslenkungen in einer Umfangsreihe Schwierigkeiten bei der Iteration der Kastenverformungen, der EPOS und der Kräfte in der unteren Verspannungsebene.

Die tatsächlich auftretenden Kräfte in der Elementlagerung werden jedoch wesentlich kleiner als die hier berechneten sein, da die aufgrund des Strukturmaterialschwellens auftretenden Spannungen wegen des Kriechverhaltens des Kastenmaterials stetig abgebaut werden. Dies ist insbesondere für die Elemente mit relativ großen Kräften zu erwarten. Da die Kriecheigenschaften des Materials in dem hier vorgestellten Modell nicht berücksichtigt wurden, geben die Ergebnisse bezüglich der großen Auflagerkräfte nur ein qualitatives Bild dessen wieder, was in Wirklichkeit zu erwarten ist. Bezüglich der kleinen Verformungen ist die Rechnung als realistischer anzusehen.

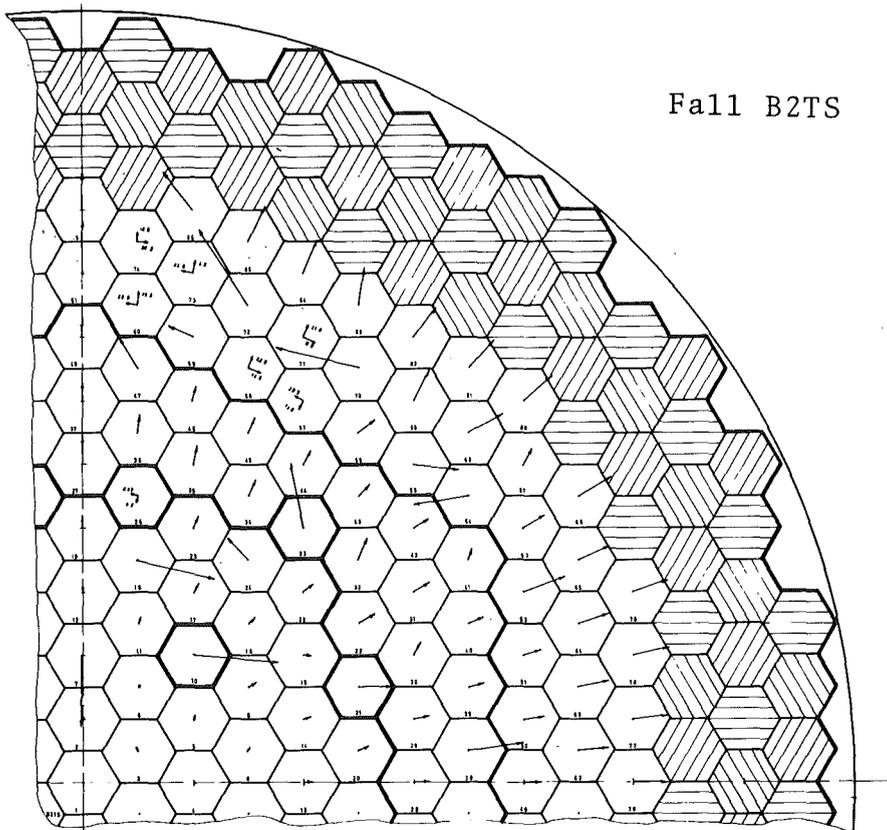
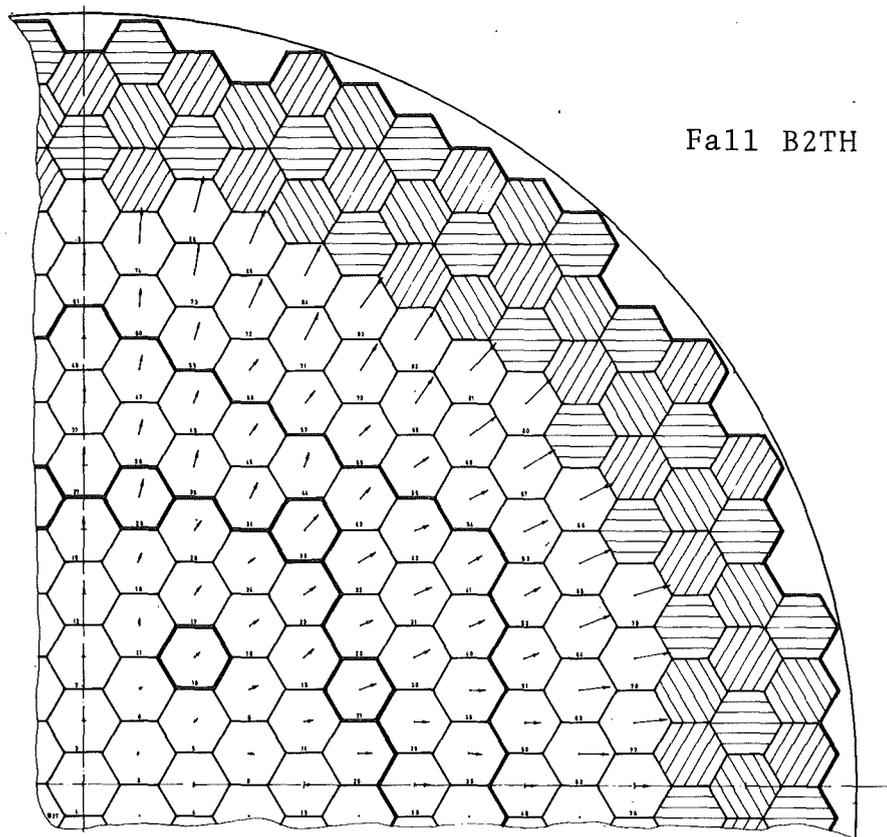


Abb. 8.27. Auslenkung der Elemente an der oberen Kante der Spaltzone für die Fälle B2TH und B2TS

NR. #	ZYKL. *	F A L L B 2 T H		F A L L B 2 S W		F A L L B 2 T S	
		RADIAL	TANGENTIAL	RADIAL	TANGENTIAL	RADIAL	TANGENTIAL
1	3	0.002	0.0	0.0	0.0	0.002	0.0
2	2	0.072	-0.060	0.139	0.442	0.002	0.494
3	1	0.113	-0.002	0.013	0.0	0.130	-0.002
4	3	0.181	0.0	0.287	0.0	0.188	0.0
5	1	0.271	0.064	0.443	0.0	0.395	0.132
6	3	0.205	-0.773	0.287	0.0	0.228	-0.073
7	2	0.266	-0.001	-8.404	-0.002	-8.610	-0.004
8	2	0.698	-0.033	0.460	0.384	0.350	0.368
9	3	0.974	-0.069	1.043	0.0	0.999	-0.069
10	4	0.813	0.0	5.922	-8.119	5.924	-8.119
11	1	0.653	0.050	0.830	0.0	0.671	0.050
12	3	0.681	-0.002	1.045	0.0	0.705	-0.002
13	3	1.065	0.0	1.317	0.0	1.095	0.0
14	1	0.955	-0.032	1.398	0.0	0.985	-0.032
15	2	1.394	0.057	7.351	-6.028	7.166	-5.966
16	1	1.160	-0.521	1.398	0.0	1.190	-0.021
17	3	1.119	-0.067	1.316	0.0	1.150	0.005
18	2	0.902	0.001	0.475	-11.915	-0.004	-12.121
19	1	1.281	-0.001	1.631	0.0	1.314	-0.001
20	2	1.677	-1.380	1.377	0.408	1.257	0.316
21	4	1.940	0.0	3.984	-1.133	3.990	-1.134
22	1	1.874	-0.017	2.219	0.0	1.914	-0.017
23	3	1.479	-0.127	1.978	0.0	1.527	-0.107
24	2	1.086	-0.006	1.237	3.329	0.551	3.449
25	1	1.546	-0.069	1.841	0.0	1.581	-0.069
26	4	1.940	0.0	-4.534	30.728	-4.534	30.745
27	2	2.125	-0.002	3.429	-0.001	3.380	-0.002
28	3	1.811	0.0	2.342	0.0	1.858	0.0
29	1	1.847	-0.035	2.393	0.0	1.892	-0.035
30	2	2.006	0.017	1.937	1.009	1.489	1.100
31	3	2.222	-0.054	2.813	3.0	2.275	-1.054
32	2	2.112	-0.185	2.790	-1.045	2.457	-1.387
33	4	2.353	0.0	4.902	6.318	4.909	6.322
34	3	1.941	0.130	2.343	0.0	1.992	0.119
35	2	1.951	0.050	2.620	0.193	2.347	0.265
36	1	1.899	-0.004	2.556	0.0	1.947	-0.004
37	3	2.106	-0.001	2.826	0.0	2.164	-0.001
38	2	1.204	-0.222	7.789	-0.065	5.472	0.174
39	3	1.730	-0.102	2.959	0.0	1.840	-0.058
40	1	1.734	0.068	3.139	0.0	1.858	0.091
41	2	1.883	0.003	3.308	0.899	0.937	0.826
42	1	1.726	-1.183	3.139	0.0	1.835	-1.199
43	3	1.773	0.028	2.958	0.0	1.872	-0.017
44	2	1.871	0.172	3.965	0.404	1.722	0.133
45	1	1.833	-0.090	2.859	0.0	1.906	-0.038
46	3	1.697	-0.214	2.959	3.0	1.780	0.025
47	2	1.728	0.090	5.138	1.973	2.894	2.619
48	1	1.967	-0.002	3.400	0.0	2.026	-0.002
49	2	1.597	0.002	3.442	-0.036	2.003	0.269
50	1	1.675	-0.030	3.161	-0.161	2.419	-0.115
51	3	1.896	0.047	3.799	0.007	2.178	0.201
52	2	2.030	0.091	6.943	-3.888	5.222	-0.422
53	1	2.975	-0.325	3.982	-0.014	3.053	-0.017
54	3	2.171	-0.211	-4.167	3.889	-5.763	3.313
55	2	2.036	-0.142	4.902	-3.504	3.473	-3.980
56	1	1.804	-0.021	3.697	-0.449	2.419	-0.550
57	3	1.646	-0.004	-16.132	28.677	-17.803	29.682
58	2	1.727	-0.015	25.414	-12.448	23.810	-12.317
59	1	1.979	0.066	2.225	2.709	0.709	3.096
60	3	2.167	0.147	17.835	57.851	16.270	58.394
61	2	3.329	-0.022	6.993	-61.405	6.101	-61.481
62	1	3.544	-0.020	3.899	0.004	3.646	-0.014
63	3	3.659	-0.030	4.046	0.043	3.784	0.000
64	2	3.749	0.005	4.071	0.045	3.813	0.015
65	1	3.954	0.012	4.270	0.038	4.009	0.018
66	3	4.329	-0.025	4.620	-0.007	4.464	-0.031
67	3	3.923	-0.047	2.281	1.073	1.994	1.024
68	2	3.742	-0.034	4.746	-1.010	4.510	-1.039
69	1	3.626	0.004	4.132	1.255	3.932	1.250
70	3	3.554	0.008	-2.784	9.453	-3.030	9.474
71	2	3.535	0.008	21.251	-8.800	21.002	-8.794
72	1	3.602	-0.010	6.837	8.521	6.576	8.517
73	3	3.736	0.025	7.729	22.577	7.454	22.634
74	2	3.925	0.045	11.134	-36.922	10.808	-36.878
75	1	4.289	-0.012	4.607	0.0	4.410	-0.012
76	1	4.014	-0.003	4.401	0.0	4.125	-0.003
77	3	4.056	-0.027	4.503	-0.046	4.238	-0.064
78	2	4.164	-0.054	4.557	-0.012	4.300	-0.064
79	1	4.316	-0.041	4.700	0.0	4.434	-0.041
80	2	4.328	0.013	4.715	0.013	4.461	0.022
81	1	4.175	0.028	4.536	0.0	4.289	0.028
82	3	4.077	0.006	4.481	-0.061	4.237	-0.062
83	2	4.012	-0.008	4.399	1.735	4.161	1.719
84	1	4.041	-0.005	4.435	0.0	4.153	-0.005
85	3	4.135	-0.039	4.694	-0.075	4.465	-0.074
86	2	4.292	-0.021	3.912	3.905	3.641	3.886

Tabelle 8.10. Radiale und tangentiale Auslenkung der Elemente an der oberen Kante der Spaltzone für die Fälle B2TH, B2SW und B2TS

## 9. Zusammenfassung

Zur Untersuchung der Folgen der thermischen Ausdehnung und des Strukturmaterialschwellens innerhalb der Kernstruktur schneller Reaktoren wurde das Hexagonmodell entwickelt, um die dreidimensionale Elementverformung im Kernverband zu berechnen. Unter der Annahme, daß es sich um Elemente mit dünnwandigen hexagonalen Hohlquerschnitten mit kleinen Querschnittabmessungen gegenüber den Kastenlängen bzw. Abständen der Auflager handelt, kann auf dieses Problem die elementare Theorie der Balkenbiegung angewendet werden. Für die dreidimensionale Behandlung wird davon ausgegangen, daß die Verbiegung durch die Überlagerung von zwei ebenen Verformungen beschrieben wird, die unabhängig voneinander behandelt werden können.

Das Ziel derartiger Untersuchungen kann je nach der Art der Beanspruchung des Kernverbandes in zwei Gruppen aufgeteilt werden: einmal müssen die Auswirkungen von Kurzzeiteffekten betrachtet werden, wie sie bei schnellen Änderungen des Betriebszustandes des Reaktors auftreten, zum anderen müssen die Auswirkungen von Langzeiteffekten über relativ große Betriebszeiträume erfaßt werden. Der Schwerpunkt der in dieser Arbeit vorgelegten Untersuchungen liegt auf der Behandlung von Kurzzeiteffekten aufgrund der thermischen Belastung der Kernstruktur. Die Auswirkungen von Langzeiteffekten aufgrund des Strukturmaterialschwellens wurden qualitativ behandelt. Als Ergebnisse der Untersuchungen wurden die Auflagerkräfte und die Verbiegung der Elemente im Kernverband ermittelt in Abhängigkeit von unterschiedlichen Annahmen über die Lagerbedingungen in der Tragplatte und in den Verspannungsebenen.

Die Lösungsmethoden für ebene Balken-Auflager-Anordnungen wurden auf drei sog. Grundmodelle zurückgeführt. Bei komplizierten Anordnungen werden diese Grundmodelle mit Hilfe der für sie berechneten Einflußdaten so kombiniert, daß die komplexe Anordnung durch die Erweiterung um zusätzliche Auflager berechnet werden kann. Für die Auflager werden prinzipiell verschiedene Möglichkeiten zugelassen:

eingespanntes Lager, Gelenklager mit und ohne Spiel, nachgiebiges Lager mit und ohne Spiel. Durch die Kombination dieser fünf Lagerarten können alle real verstellbaren Randbedingungen von Auflagersituationen simuliert werden. Da sich insbesondere bei spielbehafteten und nachgiebigen Lagern Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Lagercharakteristika in Abhängigkeit vom Betriebszustand des Reaktors ergeben, wurden für die durchgeführten Rechnungen diese Annahmen parametrisiert.

Im ebenen Fall, aber insbesondere für dreidimensionale Anordnungen, ergeben sich bei der Untersuchung von komplizierten Lageranordnungen Schwierigkeiten bezüglich der Eindeutigkeit der Balkenlage innerhalb der Lageranordnung. Daher wurde als ein Schwerpunkt dieser Arbeit eine Methode entwickelt, um sowohl für den ebenen als auch für den räumlichen Fall eine Eindeutigkeitsanalyse der Balken-Auflager-Anordnung durchführen zu können. Diese Eindeutigkeitsanalyse teilt im räumlichen Fall die Menge der möglichen Balkenlagen in sechs Gruppen auf; 1. Normaler Fall: eine Balken-Auflager-Anordnung mit mindestens zwei spielfreien Lagern, 2. Allgemeiner Fall: eine eindeutig bestimmte Balkenlage mit Auflagerkräften bei mindestens drei Lagern, von denen höchstens eines spielfrei ist. 3. Eindeutiger kräftefreier Fall: eine eindeutig bestimmte Balkenlage ohne Auflagerkräfte bei mindestens drei Lagern, von denen höchstens eines spielfrei ist. 4. eine eindeutig bestimmte Balkenlage mit Auflagerkräften in einer Biegerichtung und eine mehrdeutige Balkenlage in der senkrecht dazu stehenden Biegerichtung. 5. eine eindeutig bestimmte Balkenlage ohne Auflagerkräfte in einer Biegerichtung und eine mehrdeutige Balkenlage in der senkrecht dazu stehenden Biegerichtung. 6. Mehrdeutiger Fall: der Balken kann in der Lageranordnung eine Starrkörperbewegung ausführen.

Für die Bestimmung der Balken-Auflager-Anordnung bei realer Kernstruktur ist es notwendig, die Situation in den Verspannungsebenen zu kennen. Hier liegen heute für das z.B. beim SNR vorgesehene passive Verspannungskonzept nur unzureichende Kenntnisse vor. Darüberhinaus sind Angaben über die Auflagersituation in der Tragplatte nicht eindeutig bestimmbar, insbesondere, wenn die Untersuchung auch für unterschiedliche Betriebszustände während der Lebenszeit des Reaktors

durchgeführt werden soll. Um diese Komplikationen bei den Anwendungsrechnungen zu umgehen, wurden die Annahmen bezüglich der Lagerbedingungen in der Tragplatte und in den Verspannungsebenen parametrisch behandelt. Es wurden Grenzfälle bezüglich zu erwartender maximaler Auflagerkräfte und Elementverbiegungen untersucht. Wenn auch die durchgeführten Anwendungen bis auf einen Extremfall keine zu großen Schwankungen der Ergebnisse bei der Annahme unterschiedlicher Lagerbedingungen zeigten, so muß als Ergebnis der hier vorliegenden Untersuchungen eine Verbesserung der approximativen Erfassung der Verspannungsebene in Abhängigkeit vom Betriebszustand des Reaktors betrachtet werden. Erst, wenn realistische Modelle zur Beschreibung der Verspannungsebenen mit den Möglichkeiten der hier vorgestellten Methode zur Ermittlung der dreidimensionalen Kernverformung gekoppelt sind, kann der Schwankungsbereich für die quantitativen Ergebnisse bezüglich Auflagerkräfte und Biegelinie erheblich eingeschränkt werden.

Aus den Ergebnissen der hier durchgeführten Parameteruntersuchung wird offensichtlich, daß im Vergleich zu zweidimensionalen Untersuchungen der Kernverformung, wie sie mit Hilfe des Ring- und Speichenmodells heute teilweise durchgeführt werden, große Differenzen in den Ergebnissen auftreten. Diese Differenzen sind im wesentlichen auf die Nicht-Berücksichtigung der azimuthalen Überlagerung der Verbiegung im zweidimensionalen Fall zurückzuführen wie sie in der Umgebung von Regelstab- und Absorberpositionen im verstärkten Maßen zu erwarten sind. Das in dieser Arbeit vorgestellte Hexagonalmodell erlaubt die Berücksichtigung dieser dreidimensionalen Effekte und hat sich sowohl bezüglich der Erfassung der thermischen Kurzzeiteffekte als auch der qualitativen Berücksichtigung von Langzeiteffekten durch Strukturmaterialschwellen als erfolgreich erwiesen.

Verzeichnis der häufig verwendeten Symbole, Indizes und Abkürzungen

Symbole

A	Auflager
$A_i$	Konturpunkt
$A_r$	Auflagerkraft des festen Lagers
$A^x$	Auflagerkraft, allgemein
a	charakteristische Länge oder Radius des mittleren Umkreises
$a_1$	Länge des Abschnittes 1
$a_{rm}$	Einheitsauflager an einer Stelle $z=\hat{z}_r$ durch eine Einheitskraft an der Stelle $z=z_m$
$B_j$	Konturpunkt
$B', B'', B''', B''''$	Eckpunkte einer rechteckigen Ersatzkontur
b	charakteristische Länge
$b_1$	Länge bis zum Abschnitt 1
$b_{rk}$	Einheitsauflagerkraft an einer Stelle $z=\hat{z}_r$ durch eine Einheitskraft an der Stelle $z=\bar{z}_k$
$D_n^x$	Auflagerkraft in zusätzlichen Lagern n
$i_{D_k}$ $a_{D_k}$	Die radial nach innen (i) bzw. nach außen (a) gerichtete Kraft, die in der Brennelementreihe k wirkt.
E	Elastizitätsmodul
e	charakteristische Länge bzw. Konstante
F	Fläche
f	Funktionsbezeichnung bzw. Balkenauslenkung
$f_m$	Kennzeichnung eines spielbehafteten Lagers bzw. einer reduzierten Lagerkontur

$f_{N!}$	Kennzeichnung einer Balken-Auflager-Anordnung mit N Lagern
H	Höhe
H(Z)	Biegelinie
h	Wanddicke bzw. Hexagonhöhe
I	Flächenträgheitsmoment
$\bar{K}$	Anzahl der Einzellasten, die am Balken wirken
L	links
$\bar{L}$	Anzahl möglicher Auflagerfälle
M	Moment
$\bar{M}$	Anzahl von zusätzlichen Lagern
N	Anzahl von Balkenabschnitten
$N_k$	Anzahl der Elemente in einer Umfangsreihe
$N_{at}$	natürlicher Anteil einer Zahl
n	Anzahl der Bezugspunkte
O	Summe der Dehnungsdaten
P	Kraft
q	Streckenlast
R	rechts bzw. Radius bzw. Querschnittsdaten
$\bar{R}$	Anzahl der festen Lager
r	Radius bzw. Größe in radialer Richtung
S	Querschnittsdaten
SW	Schlüsselweite des Hexagons
s	Wanddicke
$j^{S_m}$	die untere (j=1) bzw. obere j=2) Grenze eines spiel-behafteten Lagers
T	Temperatur
t	Zeit
$j^{t_{kl}}$	untere (j=1) bzw. obere (j=2) Grenze einer projizierten Strecke aufgrund der Projektion durch die Lager $f_k$ und $f_1$

$u$	Verschiebung
$V$	Verschiebung bzw. Volumen
$\Delta V$	Volumenänderung
$W$	Verschiebung
$x, X$	Größe in X-Richtung
$y, Y$	Größe in Y-Richtung
$z, Z$	Größe in Z-Richtung
$\alpha$	linearer Ausdehnungskoeffizient
$\alpha_i$	i-ter Konturausschnitt
	Einflußzahl an der Stelle m infolge einer Einheitskraft an der Stelle n
$\beta_j$	j-ter Konturausschnitt
$\beta_{mn}$	Einflußzahl an der Stelle m infolge einer Einheitskraft an der Stelle n
${}^m\beta_N^x$	Bezeichnung einer Balken-Auflager-Anordnung, die sich aus einer Anordnung $f_{N!}^x$ ohne reduzierte Lagerkontur $f_m$ ergibt
$\gamma_m$	m-ter Konturausschnitt
$\gamma_{k1}$	Einflußzahl an der Stelle k infolge einer Einheitskraft an der Stelle 1
${}^m\delta_N^x$	Beziehung einer Balken-Auflager-Anordnung mit m Lagern, die sich aus einer Anordnung $f_{N!}^x$ ergibt
$\delta_{k1}$	Einflußzahl an einer Stelle k infolge einer Einheitskraft an der Stelle 1
$\epsilon$	Dehnung bzw. definierter kleiner positiver Grenzwert
$\eta$	Balkenauslenkung
$\eta_m$	Einheitsbiegelineie infolge der Einheitskraft an der Lagerstelle $Z = Z_m$
$\eta_k$	Einheitsbiegelineie infolge der Einheitskraft an der Laststelle $Z = \bar{Z}_k$
$\vartheta$	Verdrehungswinkel der Balken-Auflager-Anordnung
$\lambda, \mu, \nu$	Winkel
$\xi_m$	Balkenauslenkung am m-ten Lager

$\sigma$	Spannung
$\phi$	Neutronenfluß
${}^m\phi_{ij}$	der mögliche gemeinsame Bereich der PrKt ${}^m\psi_{ij}$ und der rLKt $f_m$ in der Lagerebene m
${}^m\phi_{N!}$	der mögliche gemeinsame Bereich aller PrKt ${}^m\psi_{N!}$ und der rLKt $f_m$ in der Lagerebene m
$\varphi, \psi$	Winkel
${}^m\psi_{ij}$	projizierte Strecke oder projizierte Kontur in der Lagerebene m durch die Lager in den Lagerebenen i und j
${}^m\psi_{N!}$	der mögliche gemeinsame Bereich aller PrKt in der Lagerebene m
$\omega_{mn}$	elastische Nachgiebigkeit der Lager m infolge einer Einheitskraft an der Lagerstelle n

Indizes (links oben)

a	nach außen gerichtet
B	Lagerstelle B
i	nach innen gerichtet
k	Lagerebene $E_k$
m	Lagerebene $E_m$
max	Maximum
min	Minimum
M	Laststelle des Momentes $M_B$
P	Laststelle der Kraft P
x	x-Richtung
y	y-Richtung

Indizes (links unten)

j unterer (j=1) oder oberer (j=2) Grenzwert

Indizes (rechts oben)

x Auflagerkraft  
Größe in der erweiterten Anordnung  
Bezeichnung der Balken-Auflager-Anordnung  
konstante Größe

' , " , "" } konstante oder definierte Größe  
und "" }

Indizes (oben)

~ , - , ^ } konstante oder definierte Größe  
und = }

Index (rechts unten)

e Hexagonecke

i, j, } Abschnitts-Nr. oder  
k, l, } Lagerebene oder  
m und n } Umfangsreihe oder  
Summationsindex

m Mittelwert

max Maximum

min Minimum

N Anzahl der Lager der Balken-Auflager-Anordnung

r feste Lager

s Seitenmitte des Hexagons

T Temperatur

X X-Richtung

Y Y-Richtung

Z Z-Richtung

### Abkürzungen

BAA	Balken-Auflager-Anordnung (Kap. 4 und 5)
EPOS	Elementposition (Kap. 6)
LA	Lageranordnung (Kap. 4 und 5)
PrKt	projizierte Kontur (Kap. 5)
rEKt	rechteckige Ersatzkontur (Kap. 5)
rLKt	reduzierte Lagerkontur (Kap. 5)

### Matrizen

$\left. \begin{array}{l} \{ a_m \} \\ \{ H(z_m) \} \end{array} \right\}$  Spaltenmatrix mit Elementen  $a_m$  bzw.  $H(z_m)$   
 $(m = 1, 2, \dots, \bar{M})$

$\{ j S_m \}$  Spaltenmatrix mit Elementen  $j S_m$   
 $(m = 1, 2, \dots, \bar{M}; j = 1, 2)$

$\{ \overline{j S_m} \}$  Spaltenmatrix mit Elementen  $j S_m$   
 $(m = 1, 2, \dots, \bar{M}+2; j=1, 2)$  mit  $j S_{\bar{M}+1} = 0$  und  $j S_{\bar{M}+2} = 0$

$^x [ a_{mn} ]$  Der Rechteckmatrix mit Elementen  $a_{mn}$   
 $(m = 1, 2, \dots, \bar{M}; n=1, 2, \dots, \bar{N})$  mit  $\bar{M}$  Zeilen und  $\bar{N}$  Spalten

$[ a_{mn} ]$  Quadratische Matrix mit Elementen  $a_{mn}$   
 $(m, n = 1, 2, \dots, \bar{M})$  mit  $\bar{M}$  Zeilen und  $\bar{M}$  Spalten

$[ a_{mn} + b_{mn} ]$  Quadratische Matrix mit Elementen  $a_{mn} + b_{mn}$   
 $(m, n = 1, 2, \dots, \bar{M})$  mit  $\bar{M}$  Zeilen und  $\bar{M}$  Spalten

Hiervon abweichende Bedeutungen sowie weitere Symbole sind jeweils im Text erläutert.

Literaturverzeichnis

- [<sup>-</sup>1\_] D. Smidt: Reaktortechnik Bd2 Kap. 10  
G. Braun, Karlsruhe, Sept. 1970
- [<sup>-</sup>2\_] D. Smidt: Reaktortechnik Bd1 Kap. 3 und 4  
G. Braun, Karlsruhe, Sept. 1970
- [<sup>-</sup>3\_] F. Storrer: Courbes d'influence pour le calcul de l'effect  
des distorsions de la structure sur la réactivité,  
Physics of fast and intermediate Reactors, International  
Atomic Energy Agency, Vienna 1962
- [<sup>-</sup>4\_] Glasstone - Edlund: Kernreaktortheorie  
Springer-Verlag, Wien 1961
- [<sup>-</sup>5\_] Y.S. Hoang: Struktur-, Ausdehnungs- und Verbiegungseffekte  
im schnellen Reaktor Teil I, Kernforschungszentrum Karlsruhe,  
KFK 539/I (EUR 3951d), Jan. 1967
- [<sup>-</sup>6\_] Konsortium SNR: SNR 300 MWe  
Prototypkernkraftwerk mit schnellen natriumgekühltem Reaktor,  
(Dez. 1969 und Mai 1971), unveröffentlicht.
- [<sup>-</sup>7\_] M. Fischer: Durchführbarkeitsstudie für den schnellen Hoch-  
flußreaktor FR3, Kernforschungszentrum, Karlsruhe, KFK 1356,  
März 1971
- [<sup>-</sup>8\_] K. Gast, E.G. Schlechtendahl: Schneller Natriumgekühlter Reak-  
tor Na2, Kernforschungszentrum Karlsruhe, KFK 660 (EUR 3706d),  
Okt. 1967
- [<sup>-</sup>9\_] Class: Untersuchung der Verspannungsebene als Teilproblem der  
Kernhalterung Schneller natriumgekühlter Brutreaktoren,  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, KFK 1769, März 1973

- [<sup>-</sup>10\_] T.R. Bump, P.R. Huebotter, R.D. Phipps and R.V. Strain:  
Analysis of EBR II Core-component deformations
- [<sup>-</sup>11\_] B. Hosemann: Persönliche Mitteilung  
Interatom Bensberg/bei Köln
- [<sup>-</sup>12\_] C.A.Brown, H.W.Yant: Comparative Performance of three  
Candidate LMFBR Core Restraint Systems Considering  
Uncertainties in Irradiated Materials Effects,  
Madison Pennsylvania 15663, WARD-3o45T2B-4, Oct.1972
- [<sup>-</sup>13\_] I. Szabo': Einführung in die technische Mechanik 4. Aufl.,  
Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959
- [<sup>-</sup>14\_] B.A. Boley a. J.H. Weiner: Theory of Thermal Stresses, John  
Wiley & Sons, Inc., New York, London, Jan. 1962
- [<sup>-</sup>15\_] I. Szabo': Höhere Technische Mechanik 2. Aufl.,  
Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958
- [<sup>-</sup>16\_] Hütte I: Theoretische Grundlagen 28. Aufl., Verlag von  
Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1955
- [<sup>-</sup>17\_] W.L.Smirnow: Lehrgang der höheren Mathematik Bd I und II  
6. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin  
1964
- [<sup>-</sup>18\_] D. Woll: GRUCAL - Ein Programmsystem zur Berechnung mikros-  
kopischer Gruppenkonstanten, Kernforschungszentrum Karlsruhe  
KFK 2108, Febr. 1974
- [<sup>-</sup>19\_] D. Smidt et al.: Referenzstudie für den natriumgekühlten  
Schnellen Brutreaktor (Na1), Kernforschungszentrum Karlsruhe  
KFK 299, 1964

- [<sup>-</sup>20\_] Y.S. Hoang: Dreidimensionale Verformung des Kerns eines natriumgekühlten schnellen Reaktors. Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin Sept. 1973
- [<sup>-</sup>21\_] K. Doetschmann: THESY - Ein Fortran-Programm zur Berechnung der dreidimensionalen nominellen Temperaturverteilung in Schnellen Reaktorkernen, Kernforschungszentrum Karlsruhe, KFK 1997, Juli 1974
- [<sup>-</sup>22\_] W.E. Pennell: Structural Materials Aspects of LMFBR Core Restraint System Design. Westinghouse Electric Corporation, Pennsylvania, Mai 1972
- [<sup>-</sup>23\_] Timoschenko und Coodier: Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company/New York, Toronto, London; Kogakusha Company/Tokyo, Febr. 1951
- [<sup>-</sup>24\_] Y.S. Hoang: BOWY-E3 - Ein Fortran Programm zur Berechnung der dreidimensionalen Elementverformung im schnellen Reaktor. Kernforschungszentrum Karlsruhe (im Druck)
- [<sup>-</sup>25\_] B. Stehle: D3D - Ein Fortran-Programm zur Lösung der stationären dreidimensionalen Multigruppen-Diffusionsgleichung, Kernforschungszentrum Karlsruhe KFK 2118, Dez. 1974
- [<sup>-</sup>26\_] G. Buckel: Approximation der stationären dreidimensionalen Mehrgruppen-Neutronen-Diffusionsgleichungen durch ein Syntheseverfahren mit dem Karlsruher Syntheseprogramm KASY, Kernforschungszentrum Karlsruhe KFK 1349, Juni 1971
- [<sup>-</sup>27\_] G.Willerding: AUDI 3 - Ein Fortran Programm für die Störungsrechnung erster Ordnung und andere Auswertung der Ergebnisse von 3-dimensionalen Mehrgruppen-Diffusionsrechnungen, Kernforschungszentrum Karlsruhe (1974), unveröffentlicht.
- [<sup>-</sup>28\_] Chaumont and Koerner: 2D-Pert (A two-dimensional perturbation code), ANL 6555, May 1962

- [<sup>-</sup>29\_] R. Rothe: Höhere Mathematik Teil I, II, III  
B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1954
- [<sup>-</sup>30\_] Mangoldt/Knopp: Einführung in die höhere Mathematik  
I und II; S. Hirzel-Verlag Stuttgart 1955 und 1956
- [<sup>-</sup>32\_] Konstruktionszeichnung über das Brennelement und den  
Gitterplatteneinsatz von Interatom (unveröffentlicht).
- [<sup>-</sup>31\_] T.B. Fowler, D.R. Vondy u. G.W. Cunningham: Nuclear reactor  
core analysis code; CITATION, Oak Ridge National Laboratory  
operated by Union Carbide Corporation, Nuclear Division for  
the U.S. Atomic Energy Commission. 1969, Revision 2 July 1971.  
ORNL-TM-2496, Rev. 2
- [<sup>-</sup>33\_] C. Cawthorne u. E.J. Fluton: Nature 216 (1967), 575
- [<sup>-</sup>34\_] J.O. Stiegler, E.E. Bloom u. J.R. Weir: Trans. ANS 11  
(1968), 146
- [<sup>-</sup>35\_] J.J. Holmes, R.E. Robbins, J.L. Brimhall u. B. Mastel: Acta  
Met. 16 (1968), 955
- [<sup>-</sup>36\_] E.G. Stevens: Fuel Assembly Design, BNWL-1275, Sept.-Nov. 1969,  
S. 6.6
- [<sup>-</sup>37\_] R.J. Jackson: Impact of swelling model on FTR Core Desgn.,  
BNWL-1240, Nov. 1969
- [<sup>-</sup>38\_] T.T. Clandson: Irradiation induced swelling and creep in fast  
reactor materials, ANS-KTG-Meeting Fast Reactor Fuel and Fuel  
Elements", Karlsruhe, Sept. 28.-30.1970
- [<sup>-</sup>39\_] Rudolf Sonntag: Angaben aus der Technischen Mechanik, Springer-  
Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1955
- [<sup>-</sup>40\_] E. Schmidt: Thermodynamik (10. Auflage), Springer-Verlag  
Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1963

- [<sup>-</sup>41\_] G. Class, Y.S. Hoang, U. Hitzschue u. K. Kleefeldt:  
Auswirkungen des Strukturmaterialsquellens auf den  
Entwurf schneller Reaktorkerne, J. Nuclear Engineering  
and Design, Vol 18 (1972) S. 335-352
- [<sup>-</sup>42\_] M. Böhm: Die Porenbildung in metallischen Werkstoffen  
durch Neutronenbestrahlung, Sept. 1968, Kernforschungs-  
zentrum KFK 838
- [<sup>-</sup>43\_] B. Hosemann, J.T. Modell: Mechanical design and Analysis  
of the "SNR-300" Core Restraint System, 2nd International  
Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology,  
Berlin, Sept. 10-14, 1973, F1/5.
- [<sup>-</sup>44\_] J.T. Madell u. H. Spenke: Computational Capabilities for  
the Analysis of the SNR-300 Bowing Coefficient, Trans. A.N.  
Sc, Vol 15, Pg 854, Nov. 1972

Anhang 1 Querschnittsdaten eines dünnwandigen Kastenquerschnittes

Gegeben ist in einem (X,Y,Z)-Koordinatensystem ein dünnwandiger Kästen der Dicke h mit einem gleichmäßig mehreckigen Kastenquerschnitt (Abb. A1.1). Der Radius des mittleren Umkreises des Kastenquerschnittes ist a und der Winkel, der die erste Ecke des Mehrecks mit der X-Achse einschließt, ist  $\varphi_1$  (Abb. A1.1). Dieser Kasten wird durch ein Temperaturfeld belastet, dessen Stützwerte in den Knotenpunkten eines in Längs- und in Umfangsrichtung überzogenen Maschennetzes vorgegeben sind. In Längsrichtung ist die Maschenteilung beliebig. Dagegen sind die Maschenpunkte in Umfangsrichtung des Querschnittes an den Ecken und/oder in den Seitenmitten des Mehrecks definiert. Die Temperaturen an den so entstandenen Maschenpunkten sind die radialen Mittelwerte über der Kastendicke. Der Verlauf der Dehnung  $\alpha T$  zwischen den benachbarten Maschenpunkten in Umfangsrichtung wird linear angenommen.

Berechnet werden die in Kapitel 3 definierten Querschnittsdaten.

Der Flächeninhalt F und das Flächenträgheitsmoment  $\mathcal{J}$  einer beliebigen Querschnittsachse, die durch den Flächenschwerpunkt des unverformten Kastenquerschnittes verläuft, berechnen sich nach

$$\left. \begin{aligned} F &= 2na h \cdot \sin \frac{\beta}{2} \\ \mathcal{J} &= \frac{n}{3} \cdot a^3 h \cdot \sin \frac{\beta}{2} (2 + \cos \beta) \left[ 1 + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{h}{a \cos \frac{\beta}{2}} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.01})$$

wobei  $\beta = \frac{2\pi}{n}$  ist.

Für eine einfache Darstellung werden wir folgt Summenwerte definiert, die sich aus den Dehnungsgrößen für die Ecken- (Index e) und Seitenmittelpunkte (Index s) des Mehrecks ergeben:

$$\left. \begin{aligned} O_k &= \sum_{m=1}^n (\alpha T)_{k,m} \\ P_k &= \sum_{m=1}^n [(\alpha T)_{k,m} \cdot \sin \varphi_{k,m}] \\ Q_k &= \sum_{m=1}^n [(\alpha T)_{k,m} \cdot \cos \varphi_{k,m}] \\ (k &= e, s) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.02})$$

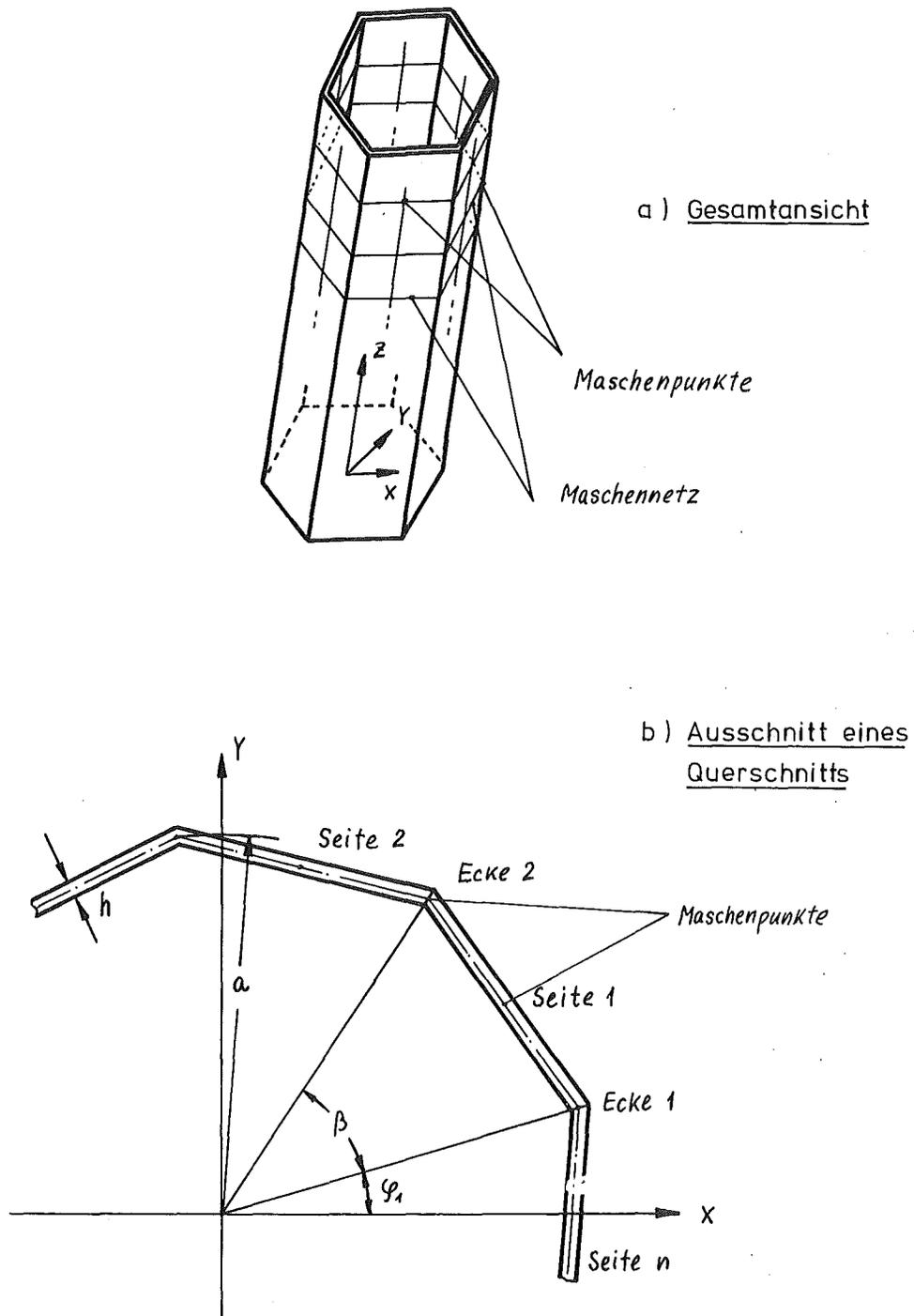


Abb.A 1.1. Dünnwandiger Kasten mit einem gleichmäßig mehreckigem Kastenquerschnitt

Hierbei sind  $\varphi_{e,m}$  bzw.  $\varphi_{s,m}$  (bzw.  $\varphi_{k,m}$ ) die Winkel, die die X-Achse mit dem m-ten Eckpunkt bzw. mit dem m-ten Seitenmittelpunkt einschließen.

Nach der Beziehung (3.13) erhält man die Querschnittsdaten R,  $S_x$  und  $S_y$  wie folgt:

- Berücksichtigung von Dehnungswerten in den Eck- und Seitenmittelpunkten:

$$\left. \begin{aligned} R &= ah \cdot \sin \frac{\beta}{2} (O_e + O_s) \\ S_x &= \frac{1}{6} a^2 h \cdot e \cdot [(5 + \cos \beta) \cdot P_e + 6 \cos \frac{\beta}{2} \cdot P_s] \cdot \sin \frac{\beta}{2} \\ S_y &= \frac{1}{6} a^2 h \cdot e \cdot [(5 + \cos \beta) \cdot Q_e + 6 \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot Q_s] \cdot \sin \frac{\beta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (A1.03a)$$

- Berücksichtigung von Dehnungswerten nur in den Eckpunkten:

$$\left. \begin{aligned} R &= 2ah \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot O_e \\ S_x &= \frac{2}{3} a^2 h \cdot e \cdot (2 + \cos \beta) \cdot P_e \cdot \sin \frac{\beta}{2} \\ S_y &= \frac{2}{3} a^2 h \cdot e \cdot (2 + \cos \beta) \cdot Q_e \cdot \sin \frac{\beta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (A1.03b)$$

- Berücksichtigung von Dehnungswerten nur in den Seitenmittelpunkten:

$$\left. \begin{aligned} R &= 2ah \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot O_s \\ S_x &= \frac{1}{12} a^2 h \cdot e \cdot (11 + \cos \beta) \cdot P_s \cdot \sin \beta \\ S_y &= \frac{1}{12} a^2 h \cdot e \cdot (11 + \cos \beta) \cdot Q_s \cdot \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (A1.03c)$$

mit

$$e = 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{a \cdot \cos \frac{\beta}{2}} \right)^2 \quad (A1.03d)$$

Bei einem Rohrquerschnitt erhält man folgende Querschnittsdaten

$$\left. \begin{aligned} F &= 2\pi ah \\ J &= \pi a^3 h \left( 1 + \frac{h^2}{4a^2} \right) \\ R &= 2\pi ah \cdot \frac{1}{n^*} \cdot \sum_{m=1}^{n^*} (\alpha T)_m \end{aligned} \right\} \quad (A1.04a)$$

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \frac{n^* a^2 h}{\pi} \cdot e^* \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n^*}\right) \cdot \sum_{m=1}^{n^*} (\alpha T)_m \cdot \sin \varphi_m \\ S_y &= \frac{n^* a^2 h}{\pi} \cdot e^* \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n^*}\right) \cdot \sum_{m=1}^{n^*} (\alpha T)_m \cdot \cos \varphi_m \end{aligned} \right\}$$

mit

$$e^* = 1 + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2 \quad (\text{A1.04b})$$

Hierbei sind

$n^*$  = Anzahl der Bezugspunkte für die Dehnungswerte

$\varphi_m$  = die Winkel, die die X-Achse mit dem m-ten Bezugspunkt einschließt.

Für den SNR [ 6 ] ist  $a \approx 10$  cm und  $b = 0,3$  cm. Damit folgt

$$(h/a) \approx 10^{-3} \ll 1 \quad (\text{A1.05})$$

Damit ergeben sich folgende Näherungswerte:

1) für den Hexagonquerschnitt

$$\left. \begin{aligned} F &= 6ah \\ J &\approx \frac{5}{2} a^3 h \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.06a})$$

- Berücksichtigung von Dehnungswerten in den Eck- und Seitenmittelpunkten

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{ah}{2} \cdot \sum_{m=1}^n [(\alpha T)_{e,m} + (\alpha T)_{s,m}] \\ S_x &\approx \frac{a^2 h}{24} \sum_{m=1}^n [(\alpha T)_{e,m} \cdot \sin \varphi_{e,m} + (\alpha T)_{s,m} \cdot \sin \varphi_{s,m}] \\ S_y &\approx \frac{a^2 h}{24} \sum_{m=1}^n [(\alpha T)_{e,m} \cdot \cos \varphi_{e,m} + (\alpha T)_{s,m} \cdot \cos \varphi_{s,m}] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.06b})$$

- Berücksichtigung von Dehnungswerten nur in den Eckpunkten

$$\left. \begin{aligned} R &= ah \sum_{m=1}^n (\alpha T)_{e,m} \\ S_x &\approx \frac{5}{6} a^2 h \sum_{m=1}^n (\alpha T)_{e,m} \cdot \sin \varphi_{e,m} \\ S_y &\approx \frac{5}{6} a^2 h \sum_{m=1}^n (\alpha T)_{e,m} \cdot \cos \varphi_{e,m} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.06c})$$

- Berücksichtigung von Dehnungswerten nur in den Seitenmittelpunkten

$$\left. \begin{aligned} R &= ah \sum_{m=1}^n (\alpha T)_{s,m} \\ S_x &\approx \frac{23\sqrt{3}}{48} a^2 h \sum_{m=1}^n (\alpha T)_{s,m} \cdot \sin \varphi_{s,m} \\ S_y &\approx \frac{23\sqrt{3}}{48} a^2 h \sum_{m=1}^n (\alpha T)_{s,m} \cdot \cos \varphi_{s,m} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.06d})$$

2) für den Rohrquerschnitt mit  $n^{\text{K}} = 6$  Dehnungswerten

$$\left. \begin{aligned} F &= 2\pi ah \\ J &\approx \pi a^3 h \\ R &= \frac{1}{3} \pi ah \cdot \sum_{m=1}^6 (\alpha T)_m \\ S_x &\approx \frac{3}{\pi} a^2 h \sum_{m=1}^6 (\alpha T)_m \cdot \sin \varphi_m \\ S_y &\approx \frac{3}{\pi} a^2 h \sum_{m=1}^6 (\alpha T)_m \cdot \cos \varphi_m \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.07})$$

## Anhang 2:

### Berechnung von Biegelinien für einfache ebene Balken-Auflager-Anordnung

In diesem Anhang wird die Berechnung der Biegelinien der drei einfachen ebenen BAA (Abschn. 4.1.) untersucht. Dazu gehören:

- der einfach eingespannte Balken (Abb. A2.1)
- der zweifach gelenkig aufgelagerte Balken (Abb. A2.2)
- der zweifach eingespannte Balken (Abb. A2.3)

Der Balken bestehe aus N Abschnitten mit den Längen  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Die Numerierung der Abschnitte  $i$  und die in jedem Abschnitt gültige Längskoordinate  $z_i$  verlaufe von links nach rechts. Für jeden dieser Abschnitte sei eine konstante Biegesteifigkeit von  $EJ_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) vorgegeben.

Es soll die elastische Linie des Balkens berechnet werden, wenn der Balken durch eine Einzellast am Ende des  $n$ -ten Abschnittes oder durch eine konstante Streckenlast über den  $n$ -ten Abschnitt oder durch ein Einzelmoment am Ende des  $n$ -ten Abschnittes belastet wird.

Für die Berechnung der Biegelinie eines zweifach gelenkig aufgelagerten bzw. eines zweifach eingespannten Balkens wird unter Einbeziehung des Satzes von Castigliano [13, 15] die sog. Baukasten-Methode verwendet.

#### A2.1. einfach eingespannter Balken

Nach der elementaren Theorie der elastischen Balkenbiegung [13] ist die elastische Linie für den Abschnitt  $i$  gegeben durch

$$W(z_i) = \pm \frac{1}{(EJ)_i} \int_0^{z_i} \left[ \int_0^{\xi_i} M_i(\xi_i) d\xi_i \right] \cdot d\xi_i + C_{1i} z_i + C_{2i} \quad (A2.01)$$

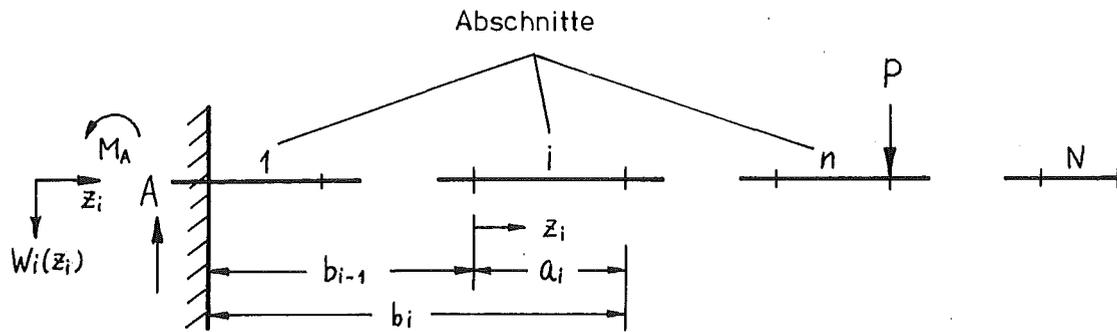


Abb.2.1 Linksseitig eingespannte BAA

Hierbei sind

$W_i(z_i)$  = Verbiegung in Abhängigkeit  $Z = z_i$

$M_i(\xi_i)$  = Moment in Abhängigkeit  $Z = \xi_i$

Die Iterationskonstanten  $C_{i1}$  und  $C_{i2}$  können mit Hilfe der Randbedingungen ermittelt werden.

Die Verbiegung und die Neigungswinkel ergeben sich im einzelnen wie folgt:

- A) linksseitig eingespannter Balken unter einer Einzelkraft P  
 - für die Abschnitte  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}
 W_i(z_i)/P &= \sum_{m=1}^{i-1} \frac{a_m}{EJ_m} \left[ (b_n - b_m + \frac{a_m}{2})(b_{i-1} - b_m + \frac{a_m}{2}) + \frac{a_m^2}{12} \right] \\
 &+ z_i \sum_{m=1}^{i-1} \frac{a_m}{EJ_m} (b_n - b_m + \frac{a_m}{2}) \\
 &+ \frac{z_i^2}{2EJ_i} (b_n - b_{i-1}) - \frac{z_i^3}{6EJ_i}
 \end{aligned}
 \tag{A2.02a}$$

$$W_n(a_n)/P = \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{EJ_m} \left[ (b_n - b_m + \frac{a_m}{2})^2 + \frac{a_m^2}{12} \right] \quad (A2.02b)$$

$$W_n'(a_n)/P = \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{EJ_m} (b_n - b_m + \frac{a_m}{2}) \quad (A2.02c)$$

- für die Abschnitte  $i = n + 1, \dots, N$

$$W_i(z_i) = W_n(a_n) + W_n'(a_n) \cdot (b_{i-1} - b_n + z_i) \quad (A2.02d)$$

Hierbei ist allgemein  $b_k = \sum_{m=1}^k a_m$

B) rechtsseitig eingespannter Balken unter einer Einzellast P

- für die Abschnitte  $i = n + 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} W_i(z_i)/P &= \sum_{m=i}^N \frac{a_m}{EJ_m} \left[ (b_n - b_m + \frac{a_m}{2})(b_{i-1} - b_m + \frac{a_m}{2}) + \frac{a_m^2}{12} \right] \\ &+ z_i \cdot \sum_{m=i}^N \frac{a_m}{EJ_m} (b_n - b_m + \frac{a_m}{2}) \\ &+ \frac{z_i^2}{2EJ_i} (b_{i-1} - b_n) + \frac{z_i^3}{6EJ_i} \end{aligned} \quad (A2.03a)$$

$$W_{n+1}(0)/P = \sum_{m=i+1}^N \frac{a_m}{EJ_m} \left[ (b_n - b_m + \frac{a_m}{2})^2 + \frac{a_m^2}{12} \right] \quad (A2.03b)$$

$$W_{n+1}'(0)/P = \sum_{m=i+1}^N \frac{a_m}{EJ_m} (b_n - b_m + \frac{a_m}{2}) \quad (A2.03c)$$

- für die Abschnitte  $i = 1, 2, \dots, n$

$$W_i(z_i) = W_{n+1}(0) - W_{n+1}'(0) \cdot (b_{i-1} - b_n + z_i) \quad (A2.03d)$$

C) linksseitig eingespannter Balken unter einer Streckenlast  $a_n q$

- für die Abschnitte  $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} W_i(z_i)/a_n q &= \sum_{m=1}^{i-1} \frac{a_m}{EJ_m} \left[ (b_n - b_m - \frac{a_n}{2} + \frac{a_m}{2})(b_{i-1} - b_m + \frac{a_m}{2}) + \frac{a_m^2}{12} \right] \\ &+ z_i \cdot \sum_{m=1}^{i-1} \frac{a_m}{EJ_m} (b_n - b_m - \frac{a_n}{2} + \frac{a_m}{2}) \\ &+ \frac{z_i^2}{2EJ_i} (b_n - b_{i-1} - \frac{a_n}{2}) - \frac{z_i^3}{6EJ_i} \end{aligned} \quad (A2.04a)$$

- für den Abschnitt  $i = n$

$$\begin{aligned}
 W_i(z_i)/a_n q &= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{a_m}{E J_m} \left[ (b_n - b_m - \frac{a_n}{2} + \frac{a_m}{2})(b_{n-1} - b_m + \frac{a_m}{2}) + \frac{a_m^2}{12} \right] \\
 &+ z_i \cdot \sum_{m=1}^{n-1} \frac{a_m}{E J_m} (b_n - b_m - \frac{a_n}{2} + \frac{a_m}{2}) + \frac{z_i^2}{4 E J_n} \cdot a_n \\
 &- \frac{z_i^3}{6 E J_n} + \frac{z_i^4}{24 a_n \cdot E J_n}
 \end{aligned} \tag{A2.04b}$$

$$\begin{aligned}
 W_n(a_n)/a_n q &= \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{E J_m} \left[ (b_n - b_m - \frac{a_n}{2} + \frac{a_m}{2})(b_n - b_m + \frac{a_m}{2}) + \frac{a_m^2}{12} \right] \\
 &+ \frac{a_n^3}{24 E J_n}
 \end{aligned} \tag{A2.04c}$$

$$W'_n(a_n)/a_n q = \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{E J_m} \cdot (b_n - b_m - \frac{a_n}{2} + \frac{a_m}{2}) + \frac{a_n^2}{6 E J_n} \tag{A2.04d}$$

- für die Abschnitte  $i = n + 1, \dots, N$

$$W_i(z_i) = W_n(a_n) + W'_n(a_n) \cdot (b_{i-1} - b_n + z_i) \tag{A2.04e}$$

D) rechtsseitig eingespannter Balken unter einer Streckenlast  $a_n q$

- für die Abschnitte  $i = n + 1, \dots, N$

$$\begin{aligned}
 W_i(z_i)/a_n q &= \sum_{m=i}^N \frac{a_m}{E J_m} \left[ (b_n - b_m - \frac{a_n}{2} + \frac{a_m}{2})(b_{i-1} - b_m + \frac{a_m}{2}) + \frac{a_m^2}{12} \right] \\
 &+ z_i \cdot \sum_{m=i}^N \frac{a_m}{E J_m} (b_n - b_m - \frac{a_n}{2} + \frac{a_m}{2})^2 \\
 &+ \frac{z_i^2}{2 E J_i} (b_{i-1} - b_n + \frac{a_n}{2}) + \frac{z_i^3}{6 E J_i}
 \end{aligned} \tag{A2.05a}$$

- für den Abschnitt  $i = n$

$$\begin{aligned}
 W_i(z_i)/a_n q &= \sum_{m=n}^N \frac{a_m}{E J_m} \left[ (b_n - b_m - \frac{a_n}{2} + \frac{a_m}{2})(b_{n-1} - b_m + \frac{a_m}{2}) + \frac{a_m^2}{12} \right] \\
 &+ \frac{a_n^3}{24 E J_n} \\
 &+ z_i \left[ \sum_{m=n}^N \frac{a_m}{E J_m} (b_n - b_m - \frac{a_n}{2} + \frac{a_m}{2}) - \frac{a_n^2}{6 E J_n} \right] + \frac{z_i^4}{24 a_n E J_n}
 \end{aligned} \tag{A2.05b}$$

$$\begin{aligned}
 W_n(0)/a_n q &= \sum_{m=n}^N \frac{a_m}{E J_m} \left[ (b_n - b_m - \frac{a_n}{2} + \frac{a_m}{2})(b_{n-1} - b_m + \frac{a_m}{2}) + \frac{a_m^2}{12} \right] \\
 &+ \frac{a_n^3}{24 E J_n}
 \end{aligned} \tag{A2.05c}$$

$$W'_n(0)/a_n q = \sum_{m=n}^N \frac{a_m}{E J_m} (b_n - b_m - \frac{a_n}{2} + \frac{a_m}{2}) - \frac{a_n^2}{6 E J_n} \tag{A2.05d}$$

- für die Abschnitte  $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$W_i(z_i) = W_n(0) - W_n'(0) \cdot (b_{i-1} - b_n + z_i) \quad (\text{A2.05e})$$

E) linksseitig eingespannter Balken unter einem Einzelmoment M

- für die Abschnitte  $i = 1, 2, \dots, n$

$$W_i(z_i)/M = \sum_{m=1}^{i-1} \frac{a_m}{EJ_m} \left( b_{i-1} - b_m + \frac{a_m}{2} \right) + z_i \cdot \sum_{m=1}^{i-1} \frac{a_m}{EJ_m} + \frac{z_i^2}{2EJ_i} \quad (\text{A2.06a})$$

$$W_n(a_n)/M = \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{EJ_m} \left( b_n - b_m + \frac{a_m}{2} \right) \quad (\text{A2.06b})$$

$$W_n'(a_n)/M = \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{EJ_m} \quad (\text{A2.06c})$$

- für die Abschnitte  $i = n + 1, \dots, N$

$$W_i(z_i) = W_n(a_n) + W_n'(a_n) \cdot (b_{i-1} - b_n + z_i) \quad (\text{A2.06d})$$

F) rechtsseitig eingespannter Balken unter einem Einzelmoment M

- für die Abschnitte  $i = n + 1, \dots, N$

$$W_i(z_i)/M = \sum_{m=i}^N \frac{a_m}{EJ_m} \left( b_{i-1} - b_m + \frac{a_m}{2} \right) + z_i \cdot \sum_{m=i}^N \frac{a_m}{EJ_m} - \frac{z_i^2}{2EJ_i} \quad (\text{A2.07a})$$

$$W_{n+1}(0)/M = \sum_{m=n+1}^N \frac{a_m}{EJ_m} \left( b_n - b_m + \frac{a_m}{2} \right) \quad (\text{A2.07b})$$

$$W_{n+1}'(0)/M = \sum_{m=n+1}^N \frac{a_m}{EJ_m} \quad (\text{A2.07c})$$

- für die Abschnitte  $i = 1, 2, \dots, n$

$$W_i(z_i) = W_{n+1}(0) - W_{n+1}'(0) \cdot (b_{i-1} - b_n + z_i) \quad (\text{A2.07d})$$

## A2.2. zweifach gelenkig aufgelagerter Balken

Bei einer ebenen BAA mit zwei Gelenklagern A und B kann eine Einzellast entweder links oder rechts von den Lagerstellen oder zwischen beiden Lagerstellen wirken. Für alle drei Fälle lassen sich beide Auflagerkräfte nur durch die statischen Gleichgewichtsbedingungen bestimmen, da die Anordnung statisch bestimmt ist. Damit sind in der Anordnung drei bekannte Lasten, die in Gleichgewicht stehen.

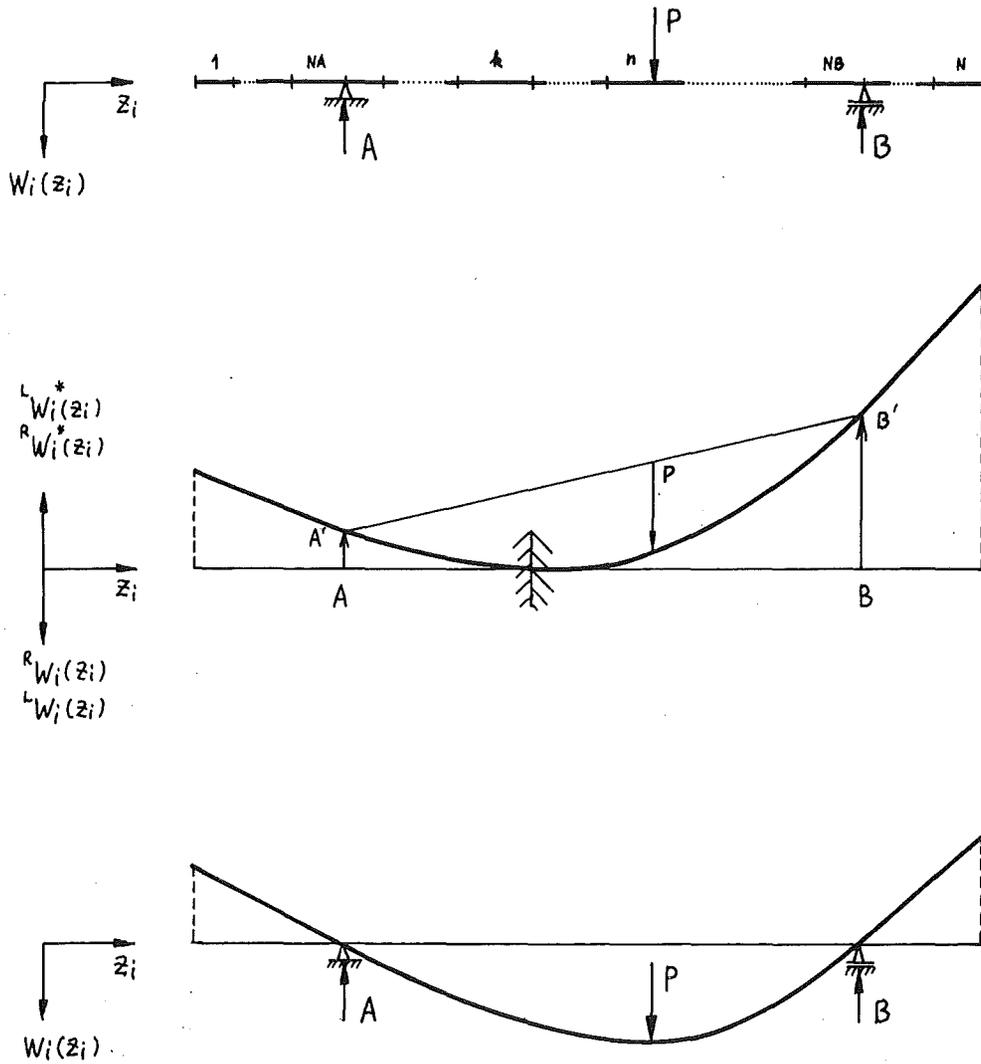


Abb. A2.2 Zweifach gelenkig aufgelagerter Balken

Bringt man an eine beliebige Abschnittsgrenze zwischen beiden Gelenklagern ein quasi-Einspannlager an, so entstehen zwei unabhängige, jeweils einfach eingespannte BAA, für die jeweils eine Biegelinie berechnet werden kann.

Die Biegelinie der Gesamtanordnung läßt sich aus den berechneten Biegelinien beider Einzelanordnungen durch Koordinatentransformation bestimmen, bei der folgende Bedingungen erfüllt werden müssen:

- 1) Die Biegelinie der Gesamtanordnung muß an der Teilungsstelle (quasi-Einspannstelle) knickfrei verlaufen.
- 2) Die Biegelinie ist so zu transformieren, daß beide Lagerstellen A und B in die ursprünglichen Stellen zurückgebracht werden.

Die Bestimmungsmethode ist bei allen eingangs erwähnten drei Lastfällen gleich. Daher wird hier nur ein Fall behandelt, bei dem eine Einzelkraft P zwischen beiden Lagern A und B wirkt.

Eine derartige BAA wird in Abb. A2.1. dargestellt. Dabei werden die beiden Gelenklager A und B an den Enden der  $N_A$ -ten und  $N_B$ -ten Abschnitte angebracht.

Die Auflagerkräfte lassen sich durch

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{b_{NB} - b_n}{b_{NB} - b_{NA}} \cdot p \\ B &= \frac{b_n - b_{NA}}{b_{NB} - b_{NA}} \cdot p \end{aligned} \right\} \quad (A2.08)$$

bestimmen.

Wählt man die quasi-Einspannstelle am Ende des k-ten Abschnittes, so lassen sich die Biegelinien  ${}^L W_i^*(z_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) und  ${}^R W_i^*(z_i)$  ( $i = k + 1, \dots, N$ ) für die so entstandene linke und rechte Teilanordnung nach den Gln. (A2.02a) bis (A2.5e) entsprechend der Lager- und Lastbedingungen berechnen, wobei die Auslenkungen und die Neigungswinkel an den Einspannstellen für beide Biegelinien verschwinden. Damit sind beide Biegelinien knickfrei angeordnet.

Um die ausgelenkten Punkte A' und B' der den Lagern A und B zugeordneten Balkenpunkte auf die Lager A und B zurückzutransformieren, müssen beide Biegelinien zuerst um den Punkt A' mit dem Betrag von

$$R = \frac{{}^R W_{NB}^*(a_{NB}) - {}^L W_{NA}^*(a_{NA})}{b_{NB} - b_{NA}} \quad (A2.09a)$$

verdrehen werden und danach um den Betrag von

$$T = {}^L W_{NA}^*(a_{NA}) \quad (A2.09b)$$

verschoben werden.

Dadurch ergeben sich die Biegelinien für die Ausgangsanordnung

$$\left. \begin{aligned} {}^L W_i(z_i) &= -{}^L W_i^*(z_i) + T + R(b_{i-1} - b_{NA} + z_i) \\ (i &= 1, 2, \dots, k) \\ {}^R W_i(z_i) &= -{}^R W_i^*(z_i) + T + R(b_{i-1} - b_{NA} + z_i) \\ (i &= k+1, \dots, N) \end{aligned} \right\} (A2.10)$$

### A2.3 Zweifach eingespannter Balken

Diese BAA ist statisch zweifach unbestimmt, d.h. für die Ermittlung der Auflagerkräfte sind neben den beiden statischen Gleichgewichtsbedingungen zwei zusätzliche Beziehungen notwendig. Diese zusätzlichen Bedingungen werden durch die Randbedingungen an den Einspannstellen abgeleitet. Bei der Annahme, daß der vorgegebene Balken (Abb. A2.3.) nur an der linken Seite A einfach eingespannt ist, wird der Balken durch die vorgegebene Einzelkraft P sowie die Kraft B und das Moment  $M_B$  im Punkt B verbogen. Die entsprechenden Biegelinien  ${}^P W_i(z_i)$  sowie  ${}^B W_i(z_i)$  und  ${}^M W_i(z_i)$  lassen sich nach den Beziehungen (A2.02a) und (A2.07d) berechnen.

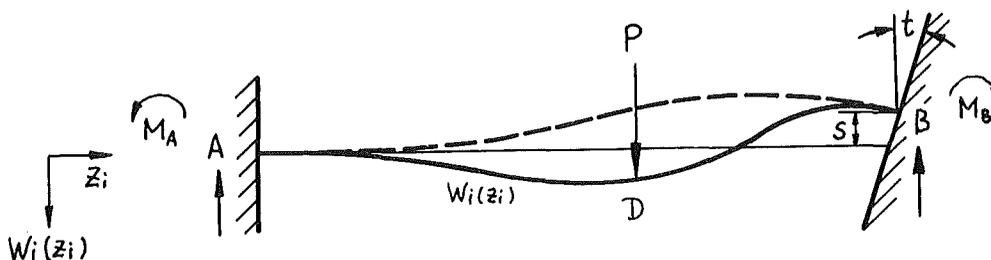


Abb. A2.3 Zweifach eingespannter Balken

Wenn die Biegelinien des zweifach eingespannten Balkens und des nur bei A einfach eingespannten Balkens gleich sein sollen, ergeben sich die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} {}^P W_N(a_N) \cdot P + {}^B W_N(a_N) \cdot B + {}^M W_N(a_N) \cdot M_B &= S \\ {}^P W'_N(a_N) \cdot P + {}^B W'_N(a_N) \cdot B + {}^M W'_N(a_N) \cdot M_B &= t \end{aligned} \right\} \quad (A2.11)$$

Hierbei sind

- B = die zu erwartende Einspannkraft im Lager B
- $M_B$  = das zu erwartende Einspannmoment im Lager B
- S = die Versetzung des Lagers B gegenüber dem Lager A in Biegerichtung
- t = die Neigung der Einspannwinkel des Lagers B gegenüber derjenigen des Lagers A

Aus der Gl. (A2.11) resultiert

$$\begin{pmatrix} B \\ M_B \end{pmatrix} = \frac{1}{H^2} \begin{pmatrix} {}^M W'_N(a_N) & -{}^M W_N(a_N) \\ -{}^B W'_N(a_N) & {}^B W_N(a_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S - {}^P W_N(a_N) \\ T - {}^P W'_N(a_N) \end{pmatrix} \quad (A2.12a)$$

wobei

$$H = \begin{pmatrix} {}^B W_N(a_N) & {}^M W_N(a_N) \\ {}^B W'_N(a_N) & {}^M W'_N(a_N) \end{pmatrix} \quad (A2.12b)$$

Die gesuchte Biegelinie ist somit

$$W_i(z_i) = {}^P W_i(z_i) \cdot P + {}^B W_i(z_i) \cdot B + {}^M W_i(z_i) \cdot M_B \quad (A2.13)$$

Bei  $P = 0$  erhält man die in Abb. A2.3 gestrichelt aufgetragene Biegelinie des Balkens ohne Kraft P.

Anhang 3:

Untersuchung der Überlappung von Lagerspiel und projizierten Strecken einer ebenen BAA

Bei einer Eindeutigkeitsanalyse einer ebenen BAA wird die Möglichkeit einer Starrkörperbewegung des Balkens innerhalb der BAA untersucht. Dabei muß festgestellt werden, ob projizierte Strecken aufgrund der Starrkörperbewegung und das Lagerspiel eines spielbehafteten Lagers einen gemeinsamen Bereich einschließen. Im folgenden wird daher gezeigt, unter welchen Bedingungen beliebig vorgegebene  $N$  Strecken  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) in einer Lagerebene einen gemeinsamen Bereich einschließen. Die Strecken  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) sind durch die Koordinaten  ${}_1S_i$  und  ${}_2S_m$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) der Endpunkte vorgegeben. Bei  $N = 2$  ist die Bedingung der Überlappung beider Strecken durch die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} {}_1S_1 &< {}_2S_2 \\ {}_1S_2 &< {}_2S_1 \end{aligned} \right\} \quad (A3.01)$$

gegeben. Bei  $N = 3$  schließen die Strecken gemeinsam einen Bereich ein, wenn zwei Strecken einen Bereich einschließen und dieser mit der dritten Strecke wiederum einen gemeinsamen Bereich umfaßt. Für ein gemeinsames Einschließen eines Bereiches durch drei Strecken reicht die Bedingung aus, daß alle Zweier-Kombinationen aus drei Strecken jeweils einen gemeinsamen Bereich einschließen (Abb. A3.1). Es gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} {}_1S_i &< {}_2S_j && (A3.02) \\ (i, j &= 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Betrachtet man zwei beliebig gewählte Strecken  $\alpha_i$  und  $\alpha_j$  aus einer vorgegebenen Anzahl von  $N$  Strecken bezüglich einer Beziehung

$${}_1S_i < {}_2S_j \quad (\text{A3.03})$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N),$$

so kann festgestellt werden, daß  ${}_1S_i < {}_2S_j$  die Beziehung (A3.01) voll erfüllt. Umgekehrt reicht zur Erfüllung der Beziehung (A3.03) die Bedingungen  ${}_1S_i < {}_2S_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, N$ ) für alle Zweier-Kombinationen aus  $N$  Strecken aus. Ist bei vorgegebenen  $N$  Strecken die Beziehung erfüllt, so kann behauptet werden, daß  $N$  Strecken gemeinsam einen Bereich einschließen. Daraus ergibt sich die Schlußfolgerung:  $N$  vorgegebenen Strecken in einer Geraden haben einen gemeinsamen Bereich, wenn alle Zweier-Kombinationen aus  $N$  Strecken jeweils einen gemeinsamen Bereich einschließen.

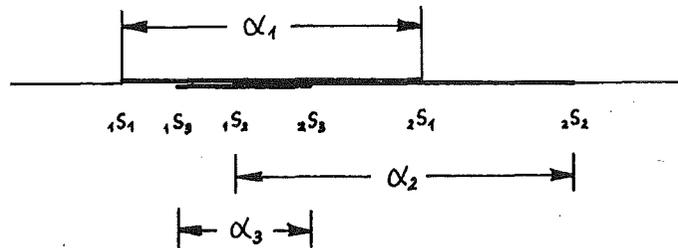


Abb. A3.1 Drei überlappende Strecken

## Anhang 4:

### Eindeutigkeitsanalyse von räumlichen Balken-Auflager-Anordnungen

#### A.4.1. Aufgabenstellung und Begriffsdefinitionen

Bei der Eindeutigkeitsanalyse wird untersucht, ob bei einer räumlichen BAA eine Starrkörperbewegung des Balkens innerhalb der BAA möglich ist. Die vorgegebene BAA  $f_{N!}^x$  bestehe aus einem geraden Balken und einer LA mit  $N$  ( $N > 3$ ) Lagern, von denen maximal eines spielfrei ist. Die  $N$  Lager sind durch die rLkt  $f_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) in den zueinander parallelen Lagerebenen  $E_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) charakterisiert.

Ist bei einer BAA mit  $N$  Lagern eine Starrkörperbewegung des Balkens in  $N-1$  Lagern möglich, so beschreibt der Balken in der  $N$ -ten Lagerebene  $E_N$  aufgrund dieser Starrkörperbewegung eine Spur. Wenn diese Spur und die rLkt  $f_N$  in der Lagerebene  $E_N$  ein gemeinsames Gebiet einschließen, ist eine Starrkörperbewegung des Balkens in den  $N$  Lagern möglich. In diesem Fall ist die BAA mehrdeutig. Andernfalls ist die BAA eindeutig. Die in der Lagerebene  $E_N$  beschriebene Spur läßt sich mit Hilfe der sog. projizierten Kontur (abgekürzt PrKt) bestimmen. Die PrKt  ${}^m\psi_{k1}$  ist dabei die konvexe Kontur, die einen Bereich umschließt, den der Balken bei einer Starrkörperbewegung aufgrund der mehrdeutigen Lagerung in zwei Lagern  $f_k$  und  $f_1$  auf der Lagerebene  $E_m$  erreicht.

Die Eindeutigkeitsanalyse einer räumlichen BAA ist im allgemeinen sehr komplex, so daß eine geschlossene analytische Durchführung nicht möglich ist. Das ist darauf zurückzuführen, daß die rLkt und die daraus resultierenden Konturen nicht geschlossen darzustellen sind. Die Eindeutigkeitsanalyse wird umso schwieriger, je größer die Anzahl der Lager ist.

Daher wird im folgenden zuerst die Eindeutigkeitsanalyse bei einer BAA mit drei Lagern durchgeführt (A4.2.). Danach wird die Analyse bei der BAA mit vier Lagern fortgesetzt (A4.3). Anschließend wird die BAA mit  $N$  Lagern betrachtet (A4.4.).

Für die analytische Beschreibung der Vorgehensweise der Eindeutigkeitsanalyse müssen bezüglich der BAA, der möglichen Konfiguration und der gemeinsamen Gebiete der Konturen in einer Lagerebene Kurzbezeichnungen eingeführt werden, die im folgenden definiert werden.

a) Bezeichnung für die BAA

$f_{N!}^x$  : BAA aus einem geraden Balken und N Lagern mit den rLkt  $f_m$  in den Lagerebenen  $E_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ )

${}^m \delta_N^x$  : Eine BAA mit m beliebigen Lagern aus der BAA  $f_{N!}^x$

${}^m \delta_{N!}^x$  : Menge aller  $\binom{N}{m}$  BAA von  ${}^m \delta_N^x$

${}^m \beta_N^x$  : Eine BAA mit N-1 Lagern aus der BAA  $f_{N!}^x$  ohne die rLkt  $f_m$

$\beta_{N!}^x$  : Menge aller N BAA von  ${}^m \beta_N^x$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ )

b) Bezeichnung für die PrKt und für das möglicherweise gemeinsam umschlossene Gebiet von Konturen in der Lagerebene  $E_m$

${}^m \psi_{ij}$  : Die PrKt in der Lagerebene  $E_m$  aufgrund der Starrkörperbewegung des geraden Balkens in den rLkt  $f_i$  und  $f_j$  (Abb. 5.4)

${}^m \phi_{ij}$  : das mögliche gemeinsame Gebiet der PrKt  ${}^m \psi_{ij}$  mit der rLkt  $f_m$

${}^m \psi_{N!}$  : das mögliche gemeinsame Gebiet aller  $\binom{N-1}{2}$  PrKt in der Lagerebene  $E_m$  bei der BAA  $f_{N!}^x$

${}^m \phi_{N!}$  : das mögliche gemeinsame Gebiet aller PrKt  ${}^m \psi_{N!}$  mit der rLkt  $f_m$

Bemerkung:

Bei der BAA  $f_{3!}^x$  gelten die Beziehungen

$${}^m \psi_{3!} \equiv {}^m \psi_{ij} \text{ und } {}^m \phi_{3!} \equiv {}^m \phi_{ij}.$$

$[\alpha, \beta]$  : das durch zwei Konturen  $\alpha$  und  $\beta$  möglicherweise gemeinsam umschlossene Gebiet in einer Ebene

c) Art der Kontur  $\gamma$  (z.B.  $f_m, \psi_{ij}$ )

$\gamma > 0$  : eine geschlossene konvexe Kontur

$\gamma = +0$  : eine gerade Strecke

$\gamma = -0$  : ein Punkt

d) Art der Kontur  $\gamma$  (z.B.  $[\alpha, \beta], \phi_3, \phi_{ij}$ ) für das durch zwei Konturen möglicherweise umschlossene Gebiet

$\gamma > 0$  :  $\gamma$  ist eine geschlossene konvexe Kontur (Abb. A4.1a).

$\gamma = 0$  oder  $\gamma = \pm 0$  :  $\gamma$  ist bei  $\gamma = +0$  eine gerade Strecke (Abb. A4.1b) oder bei  $\gamma = -0$  ein Punkt (Abb. A4.1c).

$\gamma < 0$  oder  $\gamma < \pm 0$  : Beide Konturen liegen ohne Berührung nebeneinander (Abb. A4.1d und e). Die genaue Unterscheidung von  $\gamma < +0$  und  $\gamma < -0$  wird im Abschnitt A4.2. behandelt.

e) Art der Kontur  $\gamma$  (z.B.  $\psi_{N!}, \phi_{N!}$ ) für das durch mehrere Konturen möglicherweise gemeinsam umschlossene Gebiet

$\gamma > 0$  :  $\gamma$  ist eine geschlossene konvexe Kontur (Abb. A4.2a)

$\gamma = 0$  oder  $\gamma = \pm 0$  :  $\gamma$  ist bei  $\gamma = +0$  eine gerade Strecke (Abb. A4.2b) oder bei  $\gamma = -0$  ein Punkt (Abb. A4.2c).

$\gamma < 0$  oder  $\gamma < \pm 0$  : Es liegt weder  $\gamma > 0$  noch  $\gamma = 0$  vor (Abb. A4.2d). Die genaue Unterscheidung von  $\gamma < +0$  und  $\gamma < -0$  wird im Abschnitt A4.3. behandelt.

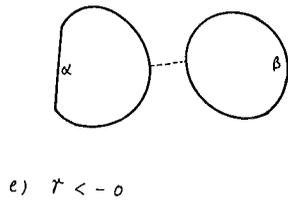
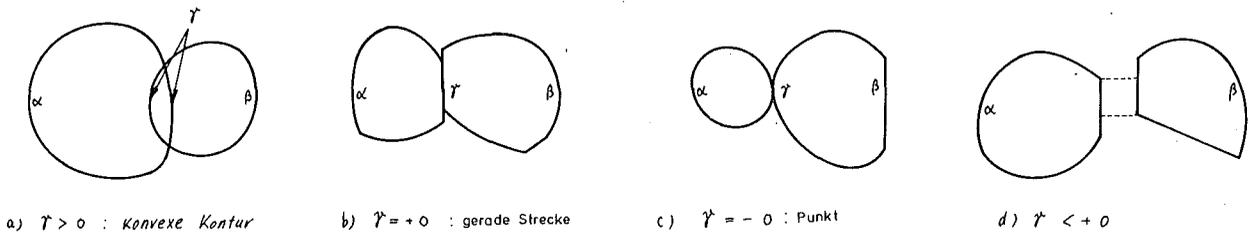


Abb.A4.1 Art des durch zwei Konturen  $\alpha$  und  $\beta$  möglicherweise gemeinsam umschlossenen Bereiches

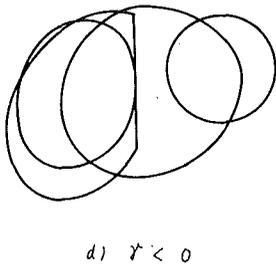
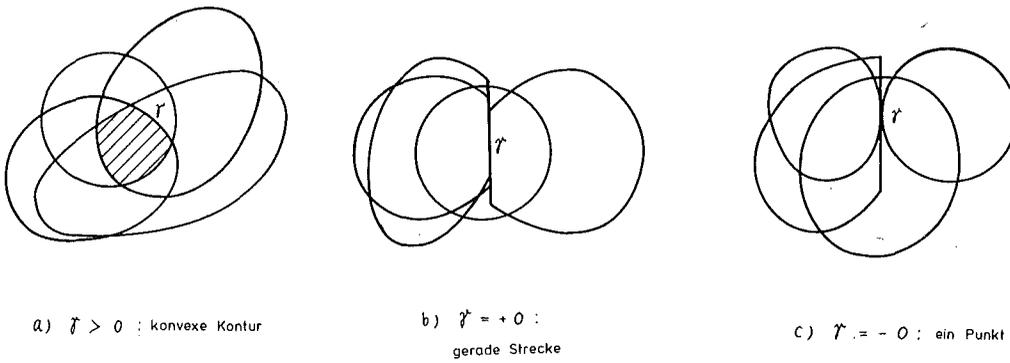


Abb.A4.2 Art des durch mehrere Konturen möglicherweise gemeinsam umschlossenen Bereiches

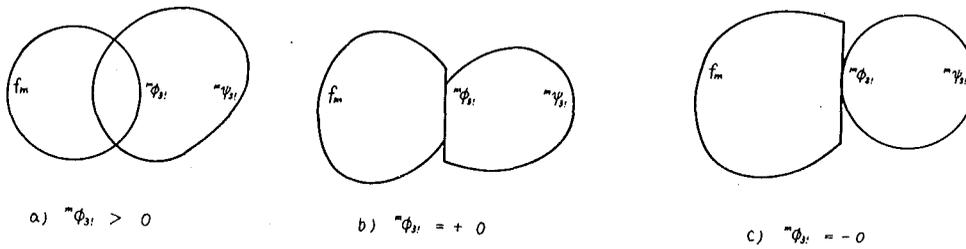


Abb.A4.3 Der durch die Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_i$  bestimmte Bereich  ${}^m\phi_i$

- f) Die Konfiguration der BAA  $\alpha^x$  (z.B.  $f_{N!}^x$ ,  $m_{\delta_N}^x$ ,  $m_{\beta_N}^x$ )
- $\alpha^x > 0$  : mehrdeutige Lagerung
  - $\alpha^x = +0$  : mehrdeutig in einer und eindeutig kräftefrei in der anderen Biegerichtung
  - $\alpha^x = -0$  : eindeutige kräftefreie Lagerung
  - $\alpha^x < +0$  : mehrdeutig in einer und eindeutig in der anderen Biegerichtung
  - $\alpha^x < -0$  : eindeutige Lagerung (mit Auflagerkräften)

#### A4.2. Eindeutigkeitsanalyse bei einer BAA mit drei Lagern

Bei einer BAA mit drei Lagern sind insgesamt drei PrKt  ${}^1\psi_{23} \equiv {}^1\psi_{3!}$ ,  ${}^2\psi_{13} \equiv {}^2\psi_{3!}$  und  ${}^3\psi_{12} \equiv {}^3\psi_{3!}$  vorhanden. Eine PrKt  ${}^m\psi_{k1} \equiv {}^m\psi_{3!}$  beschreibt dabei die Grenze der möglichen Starrkörperbewegung des Balkens in der Lagerebene  $E_m$  aufgrund der Lagerung in den beiden Lagern  $f_k$  und  $f_1$ . Da der Balken bei der Lagerung innerhalb der Kontur  $f_m$  verlaufen muß, ist für die Untersuchung die relative Position der Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$ , also die Kontur für ihr mögliches gemeinsames Gebiet  ${}^m\phi_{3!}$ , von Bedeutung.

Zwei Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$  können

- a) ( ${}^m\phi_{3!} > 0$ ) gemeinsam einen Flächeninhalt einschließen (Abb. A4.3a)
- b) ( ${}^m\phi_{3!} = 0$ ) sich ohne eine gemeinsame Einschließung eines Flächeninhaltes über eine gerade Strecke ( ${}^m\phi_{3!} = +0$ ) oder in einem Punkt ( ${}^m\phi_{3!} = -0$ ) berühren (Abb. A4.3b und A4.3.c).
- c) ( ${}^m\phi_{3!} < 0$ ) nebeneinander liegen (Abb. A4.4.).

Wenn  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$  nebeneinander liegen ( ${}^m\phi_{3!} < 0$ ), sind zwei miteinander überschneidenden Geraden  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  vorhanden (Abb. A4.4.), die für beide Konturen gemeinsame Tangenten darstellen. Beide Konturen werden dabei durch die Punkte  $A_1, A_2, B_1$  und  $B_2$  jeweils in zwei Subkonturen aufgeteilt. Die Subkonturen  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{B}$  werden als "zugewandte Subkonturen" bezeichnet (Abb. A4.4.). Jeder Punkt einer zugewandten Subkontur läßt sich mit allen Punkten der zweiten zugewandten Subkontur verbinden, ohne daß dabei Schnittpunkte mit den Konturen auftreten. Die kürzeste aller dieser Verbindungsstrecken ist ein Maß der Entfernung beider Konturen. Sie wird

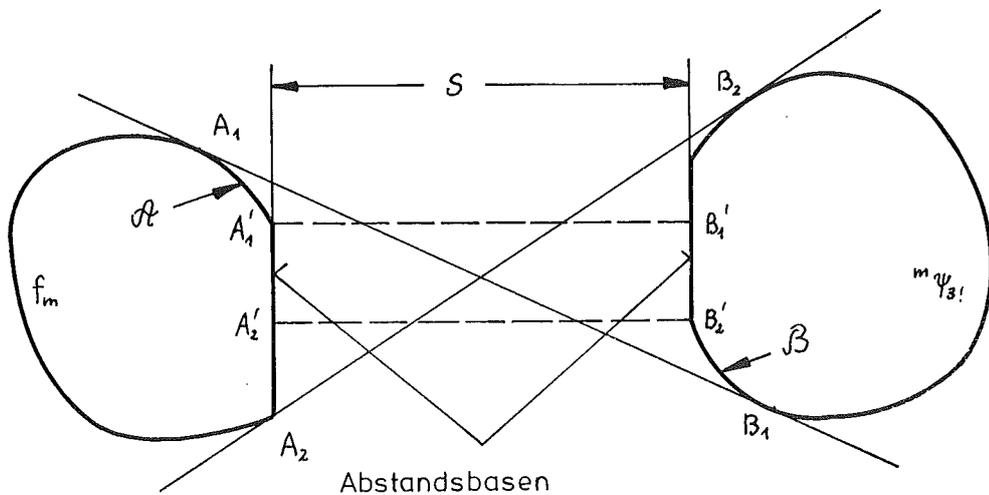
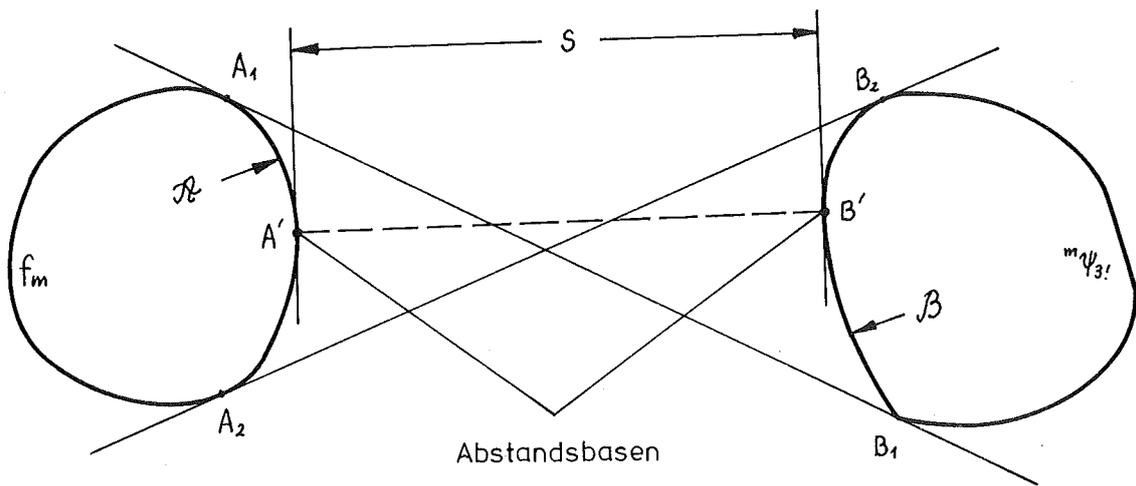


Abb.A4.4 Abstand ( S ) und Abstandsbasen

daher mit "Abstand" beider Konturen bezeichnet. Zu dieser kürzesten Strecke ist auf jeder Kontur ein Fußpunkt zugeordnet. Ist zwischen zwei Konturen eine Reihe von solchen kürzesten Strecken vorhanden, so gibt es in jeder Kontur einen geometrischen Ort von Fußpunkten, der stets eine gerade Strecke ist. Die Gesamtheit dieser Fußpunkte in einer Kontur (Strecke oder Punkt) wird als "Abstandsbasis" bezeichnet. Demnach ist der Abstand zweier Konturen durch zwei Abstandsbasen bestimmt.

Der Abstand und die Abstandsbasen können auch anders beschrieben werden: Jedem Punkt einer zugewandten Subkontur ist ein Punkt der zweiten zugewandten Subkontur zugeordnet, so daß beide zugehörigen Tangenten parallel sind. Geraden wie  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  sind Sonderfälle derartiger Paare von Tangenten mit dem Abstand Null. Dagegen sind die den Abstandsbasen zugehörigen Tangenten ein Paar, bei dem der Abstand am größten ist. Da diese Tangenten zum Abstand senkrecht stehen, lassen sich die Abstandsbasen auf eine der Tangenten senkrecht projizieren, wobei sich beide Projektionen in einem Punkt oder längs einer Strecke überlagern können. Ein solcher Projektionsausschnitt aus einer Abstandsbasis wird als "Normal-Projektion" bezeichnet. Bei einer Punktüberlagerung werden die Lagen beider Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$  durch  ${}^m\phi_{3!} < -0$  definiert. Dagegen wird eine Streckenüberlagerung durch  ${}^m\phi_{3!} < +0$  gekennzeichnet, wobei eine Starrkörperbewegung des Balkens in der Lagerebene  $E_m$  in die Tangentenrichtung möglich ist.

Für die BAA mit drei spielbehafteten Lagern  $f_m > 0$  ( $m = 1, 2, 3$ ) gelten folgende zwei Sätze:

Satz 1: Besteht in einer Lagerebene  $E_m$  eine der Beziehungen

$${}^m\phi_{3!} < \pm 0 \text{ (nebeneinander liegen von } f_m \text{ und } {}^m\psi_{3!}\text{),}$$

$${}^m\phi_{3!} = \pm 0 \text{ (Berührung von } f_m \text{ und } {}^m\psi_{3!}\text{) und}$$

$${}^m\phi_{3!} > 0 \text{ (gemeinsames Gebiet von } f_m \text{ und } {}^m\psi_{3!}\text{),}$$

so ist die gleiche Beziehung jeweils in beiden anderen Lagerebenen  $E_k$  und  $E_1$  gültig.

$${}^m\phi_{3!} < \pm 0 \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^k\phi_{3!} < \pm 0 \\ {}^l\phi_{3!} < \pm 0 \end{array} \right. \quad (\text{A4.01a})$$

$${}^m\phi_{3!} = \pm 0 \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^k\phi_{3!} = \pm 0 \\ {}^l\phi_{3!} = \pm 0 \end{array} \right. \quad (\text{A4.01b})$$

$${}^m\phi_{3!} > 0 \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^k\phi_{3!} > 0 \\ {}^l\phi_{3!} > 0 \end{array} \right. \quad (\text{A4.01c})$$

Satz 2: Besteht in einer Lagerebene  $E_m$  eine der Beziehungen

${}^m\phi_{3!} < +0$  (streckenförmige Abstandsbasen) und

${}^m\phi_{3!} = +0$  (streckenförmige Berührung), so ist die gleiche Beziehung mindestens in einer der beiden anderen Lagerebenen, beispielsweise  $E_k$ , gültig.

$${}^m\phi_{3!} < + 0 \quad \longrightarrow \quad {}^k\phi_{3!} < + 0 \quad (\text{A4.02a})$$

$${}^m\phi_{3!} = + 0 \quad \longrightarrow \quad {}^k\phi_{3!} = + 0 \quad (\text{A4.02b})$$

Im folgenden wird nur der Fall für  ${}^m\phi_{3!} = \pm 0$  beim Satz 1 und der Fall  ${}^m\phi_{3!} = +0$  beim Satz 2 untersucht, da die Beweisführung für die anderen Fälle prinzipiell ähnlich ist. Voraussetzungsgemäß berühren sich bei  ${}^m\phi_{3!} = \pm 0$  die Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$  mit den punkt- oder streckenförmigen Ausschnitten  $S_m$  und  $S_m^*$  in einer gemeinsamen Tangente  $L_m$  (Abb. A4.5.), wobei der Ausschnitt  $S_m^*$  der PrKt  ${}^m\psi_{3!}$  durch die Ausschnitte  $S_k$  und  $S_1$  der rLKt  $f_k$  und  $f_1$  be-

stimmt worden ist (Abschn. 5.3.). Deshalb sind die  $S_k$  und  $S_1$  zugehörigen Tangenten  $L_k$  und  $L_1$  sowie  $L_m$  in einer Ebene  $F$  zueinander parallel (Abb. A4.5.). In der Ebene  $F$  ist mindestens eine Gerade  $G$  vorhanden, die die drei Ebenen  $E_m$ ,  $E_k$  und  $E_1$  in den Punkten  $P_m$ ,  $P_k$  und  $P_1$  durchstößt, wobei die Punkte  $P_k$  und  $P_1$  auf den entsprechenden Ausschnitten  $S_k$  und  $S_1$  und,  $P_m$  auf dem überlappenden Ausschnitt von  $S_m$  und  $S_m^*$  liegen.

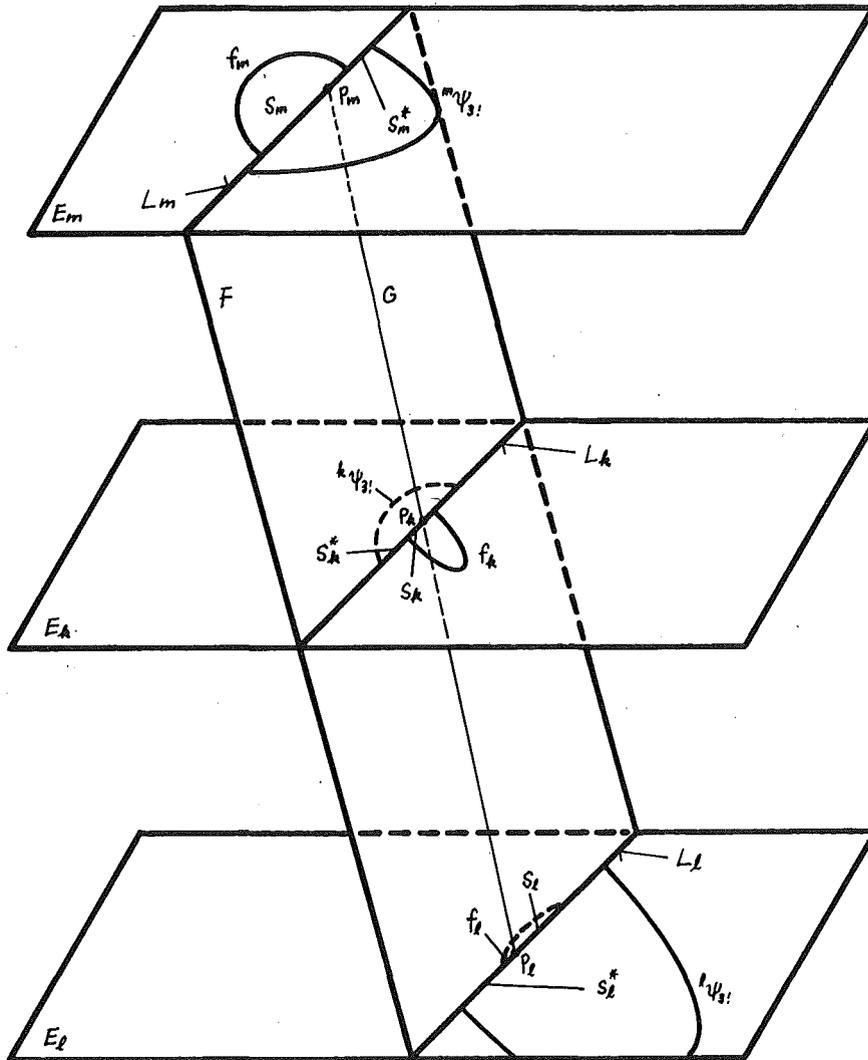


Abb. A4.5 Anordnung der Konturen in einer  
BAA  $f_3^*$  für den Fall  ${}^m\phi_3 = 0$

Andererseits befindet sich in der Geraden  $L_1$  der durch  $S_m$  und  $S_k$  bestimmte Ausschnitt  $S_1^x$  der PrKt  ${}^1\psi_{km} \equiv {}^1\psi_{3!}$  in der Lagerebene  $E_1$ . Da die Punkte  $P_m$  und  $P_k$  in den Ausschnitten  $S_m$  und  $S_k$  der rLkt  $f_m$  und  $f_k$  liegen, liegt der Punkt  $P_1$  auch im Ausschnitt  $S_1^x$ , so daß sich die Konturen  $f_1$  und  ${}^1\psi_{3!}$  im Punkt  $P_1$  berühren, ohne dabei einen gemeinsamen Bereich einzuschließen, also  ${}^1\phi_{3!} = \pm 0$ . Analog ergibt sich die Beziehung  ${}^k\phi_{3!} = \pm 0$ . Damit ist die Gültigkeit der Beziehung (A4.01b) gezeigt.

Für den Satz 2 werden bei  ${}^m\phi_{3!} = +0$  die Ausschnitte  $S_m$  und  $S_m^x$  ( $m = 1, 2, 3$ ) von sechs Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$  ( $m = 1, 2, 3$ ) in der Ebene  $F$  untersucht. Bei  ${}^m\phi_{3!} = +0$  haben die Ausschnitte  $S_m$  und  $S_m^x$  eine gemeinsame Strecke, d.h. sie sind selbst gerade Strecken ( $S_m = +0, S_m^x = +0$ ). Wenn  $S_m^x = +0$ , so muß mindestens ein zugehöriger Ausschnitt eine gerade Strecke sein, z.B.  $S_k = +0$ . Daraus folgt:  $S_k^x = +0$  und  $S_1^x = 0$ .

In diesem Fall ist die Gültigkeit der Beziehung  ${}^k\phi_{3!} = +0$  damit gleich zu setzen, daß sich die Ausschnitte  $S_k$  und  $S_k^x$  in einer gemeinsamen Strecke überlagern. Dies kann in der Ebene  $F$  mit Hilfe der bei der ebenen Eindeutigkeitsanalyse verwendeten Methode bewiesen werden.

Mit den durch die beiden Sätze gezeigten grundlegenden Feststellungen kann die Konfiguration (Mehr- oder Eindeutigkeit) der BAA mit drei Lagern bestimmt werden. Dabei wird die BAA entsprechend der Art ihrer rLkt in mehrere Gruppen unterteilt, für die die Eindeutigkeitsanalyse getrennt durchgeführt werden.

Gruppe 1: Eine der rLkt ist ein Punkt.

Gruppe 2: Mindestens zwei rLkt sind gerade Strecken, die nicht parallel sind.

Gruppe 3: Alle drei rLkt sind parallele Strecken.

Gruppe 4: Zwei rLkt sind parallele Strecken.

Gruppe 5: Alle weiteren möglichen Anordnungen: Dabei sind mindestens zwei rLkt konvexe Konturen. Die dritte rLkt ist entweder eine konvexe Kontur oder eine gerade Strecke.

Für die Eindeutigkeitsanalyse einer vorgegebenen BAA wird zuerst festgestellt, welcher Gruppe diese BAA zuzuordnen ist und zwar von der Gruppe 1 an aufwärts, so daß eine BAA nur einer bestimmten Gruppe zugeordnet wird.

Gruppe 1

Ist eine der rLkt  $f_k$  und  $f_1$ , z.B.  $f_1$ , ein Punkt, so ist in der Lagerebene  $E_m$  die der rLkt  $f_k$  ähnliche PrKt  ${}^m\psi_{k1} = {}^m\psi_{3!}$  (Gl. 5.08) nicht überlappt (Abschn. 5.3.). Daher gelten für den möglichen gemeinsamen Bereich  ${}^m\phi_{3!}$  der Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$  folgende Beziehungen

$${}^m\phi_{3!} > 0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* > 0 \quad (A4.03a)$$

$${}^m\phi_{3!} = +0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* = +0 \quad (A4.03b)$$

$${}^m\phi_{3!} = -0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* = -0 \quad (A4.03c)$$

$${}^m\phi_{3!} < +0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* < +0 \quad (A4.03d)$$

$${}^m\phi_{3!} < -0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* < -0 \quad (A4.03e)$$

Hierbei bedeutet z.B. die Beziehung (A4.03c), daß die Konfiguration der BAA eindeutig kräftefrei ist ( $f_{3!}^* = -0$ ), wenn sich die Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$  in der Lagerebene  $E_m$  in einem Punkt berühren ( ${}^m\phi_{3!} = -0$ ).

Gruppe 2

Für den Fall, daß die rLkt  $f_k$  und  $f_1$  zwei nicht parallele gerade Strecken sind, ist die PrKt  ${}^m\psi_{k1} = {}^m\psi_{3!}$  in der Lagerebene  $E_m$  ein Parallelogramm (Abb. 5.05a). Es läßt sich dabei, wie bei der Gruppe 1, folgende Beziehungen ableiten.

$${}^m\phi_{3!} > 0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* > 0 \quad (A4.04a)$$

$${}^m\phi_{3!} = +0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* = +0 \quad (A4.04b)$$

$${}^m\phi_{3!} = -0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* = -0 \quad (A4.04c)$$

$${}^m\phi_{3!} < +0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* < +0 \quad (A4.04d)$$

$${}^m\phi_{3!} < -0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* < -0 \quad (A4.04e)$$

Gruppe 3

Sind alle drei rLkt  $f_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) parallele Strecken, so sind die PrKt  ${}^m\psi_{3!}$  ( $m = 1, 2, 3$ ) in den Lagerebenen  $E_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) parallele überlappte Strecken. Da die Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$  gerade Strecken sind, kann die Beziehung  ${}^m\phi_{3!} > 0$  und somit die Konfiguration  $f_{3!}^x > 0$  (mehrdeutiger Fall) nicht auftreten. Es sind also nur die Beziehungen  ${}^m\phi_{3!} = \pm 0$  und  ${}^m\phi_{3!} < \pm 0$  möglich.

Bei  ${}^m\phi_{3!} = +0$  bzw.  ${}^m\phi_{3!} < +0$  ist die Konfiguration der BAA  $f_{3!}^x = +0$  bzw.  $f_{3!}^x < +0$ . Bei  ${}^m\phi_{3!} = -0$  können sich die Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$  in der Lagerebene  $E_m$  nur an ihren Endpunkten berühren, da sie parallel zueinander sind. Es kann in der durch drei rLkt  $f_1, f_2$  und  $f_3$  bestimmten Ebene durch die Anwendung der bei der ebenen Eindeutigkeitsanalyse angewandten Methode gezeigt werden, daß der Beziehung  ${}^m\phi_{3!} = -0$  (Punktberührung) die Konfiguration der BAA  $f_{3!}^x = -0$  (eindeutig kräftefreier Fall) folgt. Gleiches gilt für die Beziehung  ${}^m\phi_{3!} < -0$ , bei der die Abstandsbasen beider Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$  jeweils eine ihrer Endpunkte sind. Dabei kann in einer den drei rLkt  $f_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) parallelen und die Lagerebenen  $E_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) überschneidenden Ebene mit Hilfe der Normalprojektionen von drei rLkt und drei PrKt,  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$  ( $m = 1, 2, 3$ ), gezeigt werden, daß der Beziehung  ${}^m\phi_{3!} < -0$  (punktförmige Abstandsbasen) die Konfiguration der BAA  $f_{3!}^x < -0$  (eindeutiger Fall) folgt.

Es gelten demnach die Beziehungen:

$${}^m\phi_{3!} = +0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* = +0 \quad (A4.05a)$$

$${}^m\phi_{3!} = -0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* = -0 \quad (A4.05b)$$

$${}^m\phi_{3!} < +0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* < +0 \quad (A4.05c)$$

$${}^m\phi_{3!} < -0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* < -0 \quad (A4.05d)$$

Gruppe 4

Ist die BAA  $f_N^x$  in die Gruppe 4 einzuordnen, bei der nur zwei rLkt  $f_k$  und  $f_1$  parallele Strecken sind, ist die PrKt  ${}^m\psi_{3!} = {}^m\psi_{k1}$  in der Lagerebene  $E_m$  eine überlappte gerade Strecke ( ${}^m\psi_{3!} = +0$ ).

Daher kann eine mehrdeutige Konfiguration der BAA  $f_{3!}^x > 0$  nicht auftreten, obwohl die rLkt  $f_m$  eine konvexe Kontur ( $f_m > 0$ ) ist. In diesem Fall ist, wie bei der Gruppe 3, auch die Konfiguration der BAA  $f_{3!}^x = +0$  bzw.  $f_{3!}^x < +0$ , wenn in der Lagerebene  $E_m$  die Beziehung  ${}^m\phi_{3!} = +0$  bzw.  ${}^m\phi_{3!} < +0$  gültig ist.

Bei  ${}^m\phi_{3!} = -0$  ist der Berührungspunkt beider Konturen  $f_m > 0$  und  ${}^m\psi_{3!} = +0$  ein Punkt der streckenförmigen PrKt  ${}^m\psi_{3!} = +0$ . Ist der Berührungspunkt keiner ihrer Endpunkte, so kann er durch mehrere Punktpaare von den rLkt  $f_k$  und  $f_1$  bestimmt werden, so daß eine Starrkörperbewegung des Balkens um den Berührungspunkt in der BAA möglich ist, d.h.  $f_{3!}^x = +0$ . Ist der Berührungspunkt ein Endpunkt der streckenförmigen PrKt  ${}^m\psi_{3!}$ , so ist die Konfiguration der BAA durch  $f_{3!}^x = -0$  bestimmt. Entsprechend sind die Verhältnisse bei  ${}^m\phi_{3!} < -0$ , bei den zwischen den Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$  punktförmige Abstandsbasen vorhanden sind. Ist die Abstandsbasis der PrKt  ${}^m\psi_{3!} = +0$  ein Endpunkt, so ist die Konfiguration der BAA  $f_{3!}^x < -0$ , anderenfalls ist die Konfiguration der BAA  $f_{3!}^x < +0$ .

### Gruppe 5

Im Falle der Gruppe 5, bei der zwei rLkt  $f_k > 0$  und  $f_1 > 0$  sind, wird die Konfiguration der BAA  $f_{3!}^x$  mit Hilfe der zuvor behandelten beiden Sätze (siehe Seite A23 und A24) unter folgenden zwei Prinzipien bestimmt.

- A) Eine mehrdeutige Lagerung der BAA in einer Biegerichtung wird durch die Möglichkeit einer Starrkörperbewegung des Balkens in der gleichen Biegerichtung in zwei Lagerebenen festgestellt und umgekehrt.
- B) Eine eindeutige Lagerung der BAA in einer Biegerichtung ist dann gegeben, wenn bei keiner von drei Lagern eine Starrkörperbewegung des Balkens in der gleichen Biegerichtung möglich ist und umgekehrt.

Aus der Beziehung (Gl. A4.01c) des Satzes 1 läßt sich ableiten: Die Konfiguration der BAA ist mehrdeutig ( $f_{3!}^x > 0$ ), wenn das gemeinsame Gebiet  ${}^m\phi_{3!}$  der Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$  in einer Lagerebene  $E_m$  eine geschlossene konvexe Kontur ist ( ${}^m\phi_{3!} > 0$ ).

$${}^m\phi_{3!} > 0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* > 0 \quad (A4.06a)$$

Aus den Beziehungen (Gl. A4.01b) im Satz 1 und (Gl. A4.02b) im Satz 2 ergibt sich, daß die Konfiguration der BAA  $f_{3!}^x = +0$  ist, wenn sich die Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_{3!}$  über eine gerade Strecke berühren ( ${}^m\phi_{3!} = +0$ ), denn es gilt dann mindestens in einer anderen Lagerebene z.B.  $E_k$  die Beziehung  ${}^k\phi_{3!} = +0$ . Entsprechend ergibt sich aus den Beziehungen (Gl. A4.01a) und (Gl. A4.02a), daß für die Feststellung der Konfiguration der BAA  $f_{3!}^x < +0$  nur eine Beziehung  ${}^m\phi_{3!} < +0$  ausreicht.

$${}^m\phi_{3!} = +0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* = +0 \quad (A4.06b)$$

$${}^m\phi_{3!} < +0 \quad \longrightarrow \quad f_{3!}^* < +0 \quad (A4.06c)$$

Die Berührung der rLkt und der Prkt über eine Strecke tritt stets in zwei Lagerebenen gleichzeitig auf (Gl. A4.02b). Daher lassen sich die Punkt-Berührung der rLkt und der Prkt in allen drei Lagererebenen durch Nachweis der Punkt-Berührung in zwei Lagerebenen eindeutig feststellen. Es läßt sich unter der Berücksichtigung der Beziehung (Gl. A4.01b) folgendes ableiten: Die Konfiguration der BAA ist eindeutig kräftefrei ( $f_{3!}^x = -0$ ), wenn sich in zwei Lagerebenen die rLkt und die Prkt jeweils in einem Punkt berühren. Das entsprechende gilt auch für den eindeutigen Fall.

$$\left. \begin{array}{l} {}^m\phi_{3!} = -0 \\ {}^m\phi_{3!} = -0 \end{array} \right\} \longrightarrow f_{3!}^* = -0 \quad (A4.06d)$$

$$\left. \begin{array}{l} {}^m\phi_{3!} < -0 \\ {}^m\phi_{3!} < -0 \end{array} \right\} \longrightarrow f_{3!}^* < -0 \quad (A4.06e)$$

Der Balken wird für eine eindeutige BAA ( $f_{3!}^x < \pm 0$ ) bei allen drei Lagern in die Abstandsbasen der rLkt ausgelenkt. Dabei ist die Ermittlung der Abstände und Abstandsbasen von besonderer Bedeutung.

#### A4.3. Eindeutigkeitsanalyse bei einer BAA mit vier Lagern

Für eine BAA  $f_{4!}^x$  mit vier Lagern können insgesamt vier BAA von  $\beta_{4!}^x$  mit jeweils drei Lagern gebildet werden. Zur Durchführung der Eindeutigkeitsanalyse der Gesamtanordnung sollten zunächst die Konfigurationen von  $\beta_{4!}^x$  bestimmt werden.

Der mehrdeutige BAA wird dadurch charakterisiert, daß sich der Balken aufgrund der Starrkörperbewegung in einer zu den Lagerebenen parallelen beliebigen Ebene innerhalb eines geschlossenen konvexen Bereiches bewegt. Bei einem eindeutigen kräftefreien Fall ist dieser Bereich nur ein Punkt. Daher wird die Konfiguration einer BAA  ${}^m\beta_{4!}^x \geq 0$  in der Lagerebene  $E_m$  durch die Beziehungen

$${}^m\beta_{4!}^* > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad {}^m\psi_{4!} > 0 \quad (\text{A4.07a})$$

$${}^m\beta_{4!}^* = +0 \quad \Longleftrightarrow \quad {}^m\psi_{4!} = +0 \quad (\text{A4.07b})$$

$${}^m\beta_{4!}^* = -0 \quad \Longleftrightarrow \quad {}^m\psi_{4!} = -0 \quad (\text{A4.07c})$$

wiedergegeben.

Im Falle  ${}^m\beta_{4!}^x < +0$  wird der Balken bei mindestens zwei von drei rLkt an parallelen geraden Ausschnitten aufgelagert, auf denen die lastfreie Verschiebung des Balkens möglich ist. Unter Beteiligung dieser beiden Ausschnitten können in der Lagerebene  $E_m$  drei parallele Ausschnitte bei allen drei möglichen PrKt bestimmt werden. Ihre Normalprojektion überdecken eine gerade Strecke. Eine derartige Anordnung aller PrKt in einer Lagerebene wird mit  ${}^m\psi_{4!} < +0$  definiert. Die Länge dieser überdeckten Strecke ist gleich der Länge der geraden Spur  $S_m$ , die der Balken aufgrund der Lagerung in der BAA

${}^m\beta_4^*$  in der Lagerebene  $E_m$  beschrieben würde.

Die Anordnung von  $S_m$  und der rLkt  $f_m$  kann einer der vier Beziehungen von  $\langle f_m, S_m \rangle \leq +0$  und  $\langle f_m, S_m \rangle \leq -0$  entsprechen.

Bei  $\langle f_m, S_m \rangle \leq +0$  läßt sich der Balken in der Lagerebene  $E_m$  in die zur geraden Strecke  $S_m$  parallelen Richtung lastfrei verschieben. Eine solche Anordnung der rLkt  $f_m$  und aller PrKt in einer Lagerebene  $E_m$  wird mit  ${}^m\phi_{4!} < +0$  bezeichnet. Ist der Balken in der Lagerebene  $E_m$  dagegen nicht verschiebbar ( $\langle f_m, S_m \rangle \leq -0$ ), so wird die entsprechende Anordnung mit  ${}^m\phi_{4!} < -0$  bezeichnet.

Analog wird im Falle  ${}^m\beta_4^* < -0$  die Anordnung aller PrKt in der Lagerebene  $E_m$  mit  ${}^m\psi_{4!} < -0$  definiert, wobei die Spur  $S_m$  einen Punkt darstellt. Dementsprechend gilt für die Anordnung der rLkt  $f_m$  und aller PrKt in der Lagerebene  $E_m$  stets  ${}^m\phi_{4!} < -0$ . Daraus ergeben sich die Beziehungen

$${}^m\beta_4^* < +0 \quad \rightleftharpoons \quad {}^m\psi_{4!} < +0 \quad (\text{A4.07d})$$

$${}^m\beta_4^* < -0 \quad \rightleftharpoons \quad {}^m\psi_{4!} < -0 \quad (\text{A4.07e})$$

Die Beziehungen (A4.07a) bis (A4.07e) und die Definitionen  ${}^m\psi_{4!} < \pm 0$  und  ${}^m\phi_{4!} < \pm 0$  lassen sich für die Anordnung der Konturen in einer Lagerebene  $E_m$  bei der BAA mit beliebig vielen  $N$  ( $N > 4$ ) Lagern erweitern.

Die Eindeutigkeitsanalyse für die BAA  $f_{4!}^*$  läßt sich mit Hilfe der bekannten Konfigurationen der BAA  ${}^m\beta_4^*$  sowie der Anordnungen  ${}^m\psi_{4!}$  und  ${}^m\phi_{4!}$  der Konturen in der Lagerebene  $E_m$  durchführen. Der Vorgang dieser Analyse wird in der Tabelle A4.1. schematisch dargestellt, die im folgenden kurz erläutert wird.

Wenn eine BAA  ${}^m\beta_4^*$  mehrdeutig ist ( ${}^m\beta_4^* > 0$ ), dann ist das gemeinsame Gebiet  ${}^m\psi_{4!}$  aller PrKt in der Lagerebene  $E_m$  nach der Gl. (A4.07a) eine geschlossene konvexe Kontur ( ${}^m\psi_{4!} > 0$ ). Zwei Konturen  ${}^m\psi_{4!}$  und  $f_m$  in einer Lagerebene  $E_m$  können eine der fünf möglichen Anord-

${}^m\beta_{4i}^* > 0 \iff {}^m\psi_{4i}^* > 0$	${}^m\phi_{4i}^* > 0 \longrightarrow f_{4i}^* > 0$
	${}^m\phi_{4i}^* = +0 \longrightarrow f_{4i}^* = +0$
	${}^m\phi_{4i}^* < +0 \longrightarrow f_{4i}^* < +0$
	${}^m\phi_{4i}^* = -0 \longrightarrow f_{4i}^* = \pm 0$
	${}^m\phi_{4i}^* < -0 \longrightarrow f_{4i}^* < \pm 0$
${}^m\beta_{4i}^* = +0 \iff {}^m\psi_{4i}^* = +0$	${}^m\phi_{4i}^* = +0 \longrightarrow f_{4i}^* = +0$
	${}^m\phi_{4i}^* < +0 \longrightarrow f_{4i}^* < +0$
	${}^m\phi_{4i}^* = -0 \longrightarrow f_{4i}^* = \pm 0$
	${}^m\phi_{4i}^* < -0 \longrightarrow f_{4i}^* < \pm 0$
${}^m\beta_{4i}^* = -0 \iff {}^m\psi_{4i}^* = -0$	${}^m\phi_{4i}^* = -0 \longrightarrow f_{4i}^* = -0$
	${}^m\phi_{4i}^* < -0 \longrightarrow f_{4i}^* < -0$
${}^m\beta_{4i}^* < +0 \iff {}^m\psi_{4i}^* < +0$	${}^m\phi_{4i}^* < +0 \longrightarrow f_{4i}^* < +0$
	${}^m\phi_{4i}^* < -0 \longrightarrow f_{4i}^* < \pm 0$
${}^m\beta_{4i}^* < -0 \iff {}^m\psi_{4i}^* < -0 \longrightarrow {}^m\phi_{4i}^* < -0 \longrightarrow f_{4i}^* < -0$	

Tabelle A4.1 Schematische Darstellung für die Eindeutigkeitsanalyse zur Feststellung der Konfiguration von  $f_{4i}^*$  durch die Untersuchung in einer Lagerebene  $E_m$  bei verschiedenen Konfigurationen von  ${}^m\beta_{4i}^*$

nungen von  ${}^m\phi_{4!} > 0$ ,  ${}^m\phi_{4!} = \pm 0$  und  ${}^m\phi_{4!} < \pm 0$  annehmen (Tabelle A4.1). Entsprechend ist die Konfiguration der BAA  $f_{4!}^x$ , eine der Möglichkeiten von  $f_{4!}^x > 0$ ,  $f_{4!}^x = \pm 0$  und  $f_{4!}^x < \pm 0$ . Dagegen ist bei einer eindeutigen BAA  ${}^m\beta_{4!}^x < -0$  die Konfiguration der Gesamtanordnung bereits eindeutig, d.h.  $f_{4!}^x < -0$  (Tabelle A4.1.). Aus der Tabelle A4.1. erkennt man, daß für die Bestimmung der Konfiguration der BAA  $f_{4!}^x$  die Untersuchung der Anordnung ( ${}^m\phi_{4!}$ ) der rLkt  $f_m$  und aller PrKt in der Lagerebene  $E_m$  von besonderer Bedeutung ist.

Die Untersuchung bei den nicht stark umrahmten Fällen führt zu einer eindeutigen Feststellung der Konfiguration der BAA  $f_{4!}^x$ . Dagegen reicht bei den stark umrahmten Fällen für die eindeutige Feststellung der Konfiguration der BAA  $f_{4!}^x$  die Untersuchung der Anordnung der Konturen in einer Lagerebene  $E_m$  noch nicht aus. Es muß daher die gleiche Untersuchung in einer beliebigen anderen Lagerebene  $E_n$  mit der BAA  ${}^n\beta_{4!}^x$  durchgeführt werden. Analog zur ersten Untersuchung kann durch diese zweite Untersuchung wiederum bei den nicht stark umrahmten Fällen die Konfiguration der BAA  $f_{4!}^x$  eindeutig festgestellt werden. Es bleiben für die Untersuchung nur die Fälle übrig, bei denen beides mal die Beziehung  ${}^m\phi_{4!} \leq -0$  bzw.  ${}^n\phi_{4!} \leq -0$  aufgetreten sind. Von den durch die Kombinationen resultierenden vier Fällen führt nur der Fall mit den Beziehungen  ${}^m\phi_{4!} = -0$  und  ${}^n\phi_{4!} = -0$  zur Konfiguration der BAA  $f_{4!}^x = -0$  (eindeutig kräftefreie Lagerung). Bei den anderen drei Fällen ist die Konfiguration der BAA  $f_{4!}^x < -0$  (eindeutige Lagerung).

$$\left. \begin{array}{l} {}^m\phi_{4!} = -0 \\ {}^n\phi_{4!} = -0 \end{array} \right\} \longrightarrow f_{4!}^* = -0 \quad (A4.08a)$$

$$\left. \begin{array}{l} {}^m\phi_{4!} = -0 \\ {}^n\phi_{4!} < -0 \end{array} \right\} \longrightarrow f_{4!}^* < -0 \quad (A4.08b)$$

$$\left. \begin{array}{l} {}^m\phi_{4!} < -0 \\ {}^n\phi_{4!} < -0 \end{array} \right\} \longrightarrow f_{4!}^* < -0 \quad (A4.08c)$$

Für die Bestimmung der endgültigen Lage des Balkens in der BAA  $f_{4!}^x$  ist es erforderlich, die Anordnung  ${}^m\phi_{4!}$  der Konturen in allen Lagerebenen  $E_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) zu untersuchen. Bei den Konfigurationen  $f_{4!}^x > 0$  und  $f_{4!}^x = \pm 0$  bilden die Konturen  ${}^m\phi_{4!}$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) in den zugehörigen Lagerebenen  $E_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) die Grenzen der lastfreien Lagerung des Balkens. Bei den Konfigurationen  $f_{4!}^x < \pm 0$  gibt es keine derartige Grenzen. Dafür ist in diesem Falle die Bestimmung der möglichen Auslenkungsstellen des Balkens in der spielbehafteten Lagern von großer Bedeutung. Im folgenden wird die Bestimmung der möglichen Auslenkungsstellen näher erläutert. Die Konfigurationen der BAA  $f_{4!}^x < \pm 0$  sind bei allen fünf Anordnungen  ${}^m\psi_{4!} > 0$ ,  ${}^m\psi_{4!} = \pm 0$  und  ${}^m\psi_{4!} < \pm 0$  der PrKt in der Lagerebene  $E_m$  möglich (Tabelle A4.1). Da für die Konfigurationen  $f_{4!}^x < \pm 0$  die Beziehungen  ${}^m\phi_{4!} < \pm 0$  notwendig sind, liegen bei den Anordnungen  ${}^m\psi_{4!} > 0$  und  ${}^m\psi_{4!} = \pm 0$  die Konturen  $f_m$  und  ${}^m\psi_{4!}$  in der Lagerebene  $E_m$  nebeneinander. Die daraus resultierende Abstandsbasis in der rLkt  $f_m$  ist dabei die mögliche Auslenkungsstelle des Balkens in diesem Lager. Bei der Anordnung  ${}^m\psi_{4!} < +0$  beschreibt der Balken aufgrund der Lagerung in der BAA  ${}^m\beta_4^x$  eine gerade Spur  $S_m = +0$  in der Lagerebene  $E_m$ . Bei der Anordnung  ${}^m\psi_{4!} < -0$  ist dagegen die Spur  $S_m$  ein Punkt ( $S_m = -0$ ). Wenn die rLkt  $f_m$  und die Spur  $S_m = \pm 0$  nicht nebeneinander liegen ( $\angle^- f_m, S_m^- > 0$  oder  $\angle^- f_m, S_m^- = \pm 0$ ), hat die rLkt  $f_m$  für die Lagerung des Balkens in der Gesamtanordnung  $f_{4!}^x$  keinen Einfluß, so daß die rLkt  $f_m$  bei der Ermittlung der Auflagerkräfte zunächst unberücksichtigt bleibt. Liegen die rLkt  $f_m$  und die Spur  $S_m$  nebeneinander ( $\angle^- f_m, S_m^- < \pm 0$ ), so ist die mögliche Auslenkungsstelle des Balkens die Abstandsbasis in der rLkt  $f_m$ .

#### A4.4. Eindeutigkeitsanalyse bei einer BAA mit beliebig vielen $N$ ( $N > 4$ ) Lagern

Die im vorigen Abschnitt durchgeführte Methode der Eindeutigkeitsanalyse der BAA  $f_{4!}^x$  läßt sich auf eine beliebige BAA  $f_{N!}^x$  ( $N > 4$ ) erweitern, wenn die Konfigurationen der BAA von  $\beta_{N!}^x$  bestimmt wor-

den sind. Eine derartige Erweiterung muß stufenweise erfolgen. Im folgenden werden deshalb nur besondere Punkte behandelt, die für die allgemeine Formulierung der Eindeutigkeitsanalyse der BAA mit sehr vielen Lagern von Bedeutung sind.

Bei einer ebenen BAA ist die Konfiguration der BAA mit  $N$  ( $N > 3$ ) Lagern mehrdeutig, wenn sich die Konfigurationen aller kombinierten BAA mit je drei Lagern aus der gegebenen BAA mehrdeutig erweisen (Abschn. 4.3.3).

Wie im Abschnitt A4.3 gezeigt (Tabelle A4.1), ist bei einer räumlichen BAA eine solche Behauptung nicht mehr zutreffend. Hier wird dagegen gezeigt, daß die mehrdeutige Konfiguration der Gesamtanordnung  $f_{N!}^x$  erst dann feststellbar ist, wenn die Konfiguration aller kombinierten BAA  ${}^5\delta_{N!}^x$  mit je fünf statt drei Lagern mehrdeutig sind ( ${}^5\delta_{N!}^x > 0$ ). Dies läßt sich wie folgt umformulieren: Für die Behauptung der mehrdeutigen Konfiguration der BAA  $f_{N!}^x > 0$  ist die vorgegebene Bedingung, daß alle BAA  $\beta_{N!}^x$  mehrdeutig sind ( $\beta_{N!}^x > 0$ ),

- a) bei  $N = 4$  und  $5$  notwendig aber nicht hinreichend und
- b) bei  $N = 6$  hinreichend.

Für den Beweis dieser Behauptung wird die im Anhang 5 gemachte Aussage verwendet, daß  $L$  ( $L > 3$ ) Konturen in einer Ebene gemeinsam einen Bereich umschließen, wenn die Konturen aller Dreier-Kombinationen jeweils einen gemeinsamen Bereich umschließen.

Eine mehrdeutige Konfiguration der BAA  $f_{N!}^x > 0$  ist gegeben, wenn in einer Lagerebene  $E_m$  alle  $M = \binom{N-1}{2}$  PrKt und die rLkt  $f_m$  einen gemeinsamen Bereich umschließen ( ${}^m\phi_{N!} > 0$ , siehe Tabelle A4.1.). Dafür muß nach der im Anhang 5 gemachten Aussage die Konturen aller Dreier-Kombinationen aus der rLkt  $f_m$  und aus sämtlichen  $M$  PrKt in der Lagerebene  $E_m$  jeweils einen gemeinsamen Bereich  $\gamma > 0$  umschließen. Aus der Beziehung  ${}^m\beta_N^x > 0$  der vorgegebenen Bedingung  $\beta_{N!}^x > 0$  ergibt sich, daß in der Lagerebene  $E_m$  sämtliche  $M$  PrKt gemeinsam einen Bereich und dadurch alle  $M_3 = \binom{M}{3}$  ihrer Dreier-Kombinationen jeweils einen gemeinsamen Bereich umschließen. Wenn jetzt die rLkt  $f_m$  mit beiden Konturen aller  $M_2 = \binom{M}{2}$  Zweier-Kombinationen aus  $M$  PrKt jeweils einen gemeinsamen Bereich  $> 0$  umschließt, haben die rLkt  $f_m$  und die

sämtlichen  $M$  PrKt gemeinsam einen Bereich. Daher muß folgendes gezeigt werden: Für die Behauptung, daß in einer Lagerebene  $E_m$  die rLkt  $f_m$  und die beiden Konturen aller  $M_2$  Zweier-Kombinationen sämtlicher PrKt jeweils einen gemeinsamen Bereich umschließen, ist die vorgegebene Bedingung  ${}^n\beta_N^x > 0$  ( $n = 1, 2, \dots, n-1, n+1, \dots, N$ )

a) bei  $N = 4$  und  $5$  nicht hinreichend und

b) bei  $N = 6$  hinreichend.

Bei  $N = 4$  schließen z.B. aufgrund der Beziehung  ${}^4\beta_4^x > 0$  die  $M = \binom{N-1}{2} = 3$  PrKt,  ${}^4\psi_{12} > 0$ ,  ${}^4\psi_{13} > 0$  und  ${}^4\psi_{23} > 0$ , in der Lagerebene  $E_4$  einen gemeinsamen Bereich  ${}^4\psi_{4!} > 0$  um (Abb. A4.6). Drei Bedingungen  ${}^n\beta_4^x$  ( $n = 1, 2, 3$ ) liefern aber lediglich, daß in der Ebene  $E_4$  die rLkt  $f_m$  mit jeder einzelnen dieser PrKt jeweils einen Bereich  $\gamma > 0$  umschließt, aber nicht mit den Konturen aller ihrer  $M_2 = \binom{M}{2} = 3$  Zweier-Kombinationen (Abb. A4.6). Daraus folgt: Die Bedingung  $\beta_{4!}^x > 0$  ist für die Konfiguration  $f_{4!}^x > 0$  nicht hinreichend.

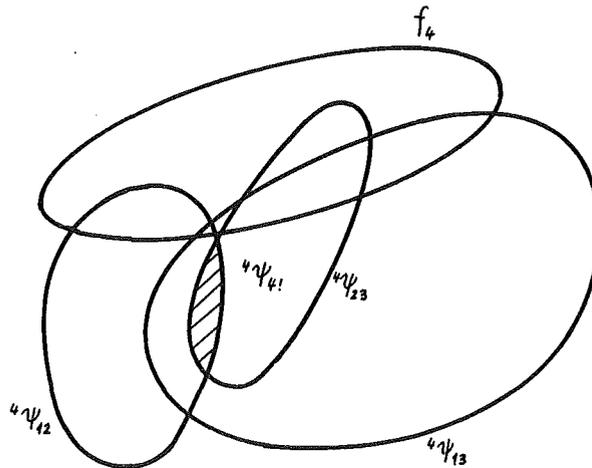


Abb. A4.6 Eine mögliche Anordnung der Konturen in der Lagerebene  $E_4$  bei einer BAA mit vier Lagern

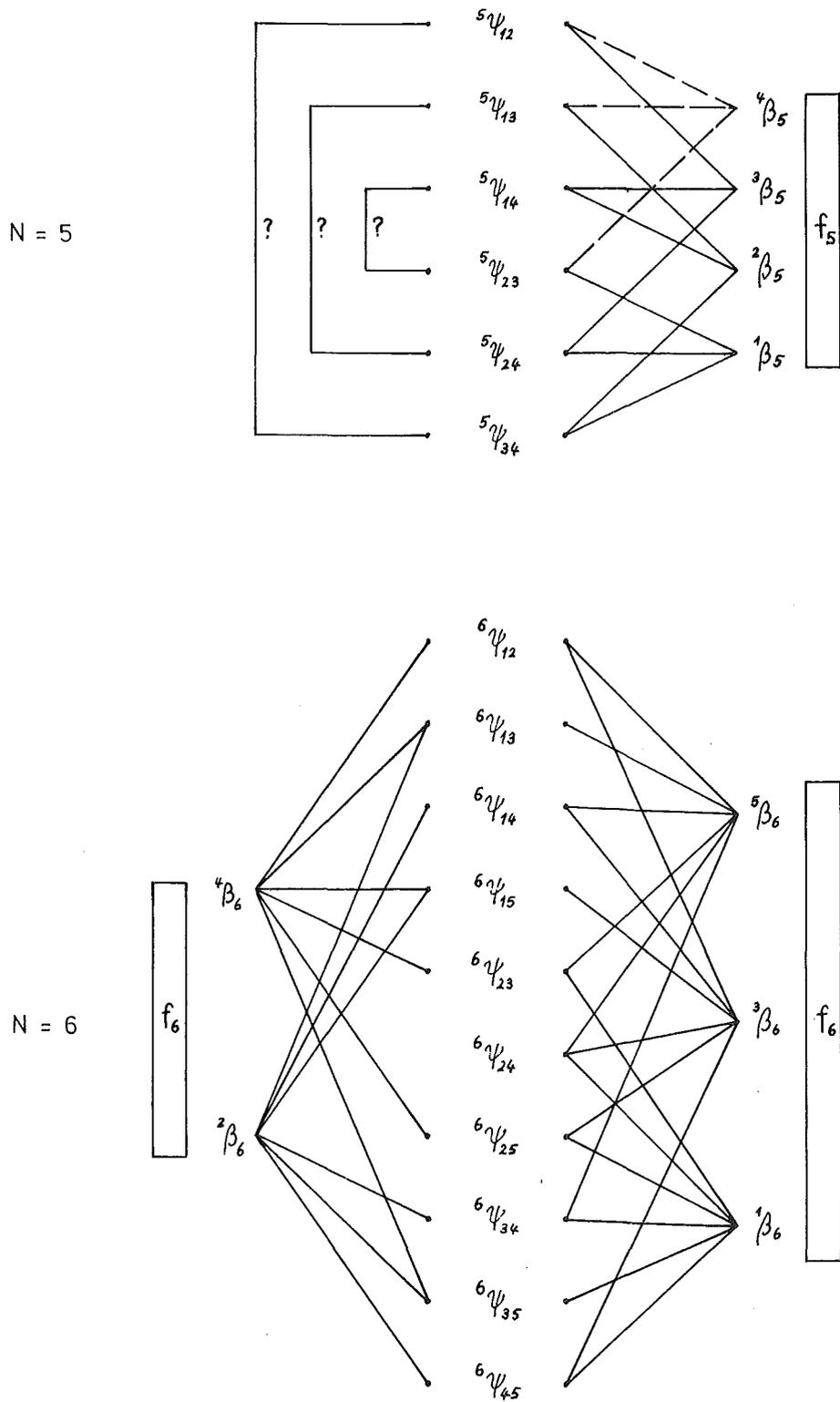


Abb.A4.7 Schematische Darstellung der Beziehung der Konturen in der Lagerebene EN bei einer BAA mit N Lagern ( N = 5,6 )

Bei  $N = 5$  schließt z.B. die rLkt  $f_5$  in der Lagerebene  $E_5$  aufgrund der Bedingung  ${}^4\beta_5^x > 0$  mit drei PrKt  ${}^5\psi_{12}$ ,  ${}^5\psi_{13}$  und  ${}^5\psi_{23}$  gemeinsam einen Bereich und damit mit den Konturen aller Zweier-Kombinationen aus diesen PrKt jeweils einen gemeinsamen Bereich um. Dies wird in Abb. A4.7 mit drei gestrichelten Verbindungslinien schematisch dargestellt. Das gleiche gilt auch für die Bedingungen  ${}^n\beta_5 > 0$  ( $n = 1, 2, 3$ ).

Es kann jedoch mit den Bedingungen  ${}^n\beta_N^x > 0$  ( $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ) nicht gezeigt werden, daß die rLkt  $f_5$  mit beiden PrKt  ${}^5\psi_{12}$  und  ${}^5\psi_{34}$  bzw.  ${}^5\psi_{13}$  und  ${}^5\psi_{24}$  bzw.  ${}^5\psi_{14}$  und  ${}^5\psi_{23}$  auch jeweils einen gemeinsamen Bereich umschließt (Abb. A4.7.).

Daraus folgt: Die Bedingung  $\beta_{5!}^x > 0$  allein ist für die Konfiguration  $f_{5!}^x > 0$  nicht hinreichend.

Im Falle  $N = 6$  schließt z.B. die rLkt  $f_6$  in der Lagerebene  $E_6$  aufgrund der Bedingung  ${}^5\beta_6^x > 0$  mit  $K = \binom{4}{2} = 6$  PrKt  ${}^6\psi_{k1}$  ( $k, 1 = 1, 2, 3, 4, : k < 1$ ) gemeinsam einen Bereich und damit mit den Konturen aller  $L = \binom{K}{2} = 15$  Zweier-Kombinationen aus diesen  $K$  PrKt jeweils einen gemeinsamen Bereich um (Abb. A4.7). Das gleiche gilt auch für die Bedingungen  ${}^n\beta_6$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ). Dies wird in Abb. A4.7. mit Verbindungslinien schematisch dargestellt. Dabei wird gezeigt, daß die rLkt  $f_6$  mit den Konturen aller  $M_2 = \binom{M}{2} = 45$  Kombinationen aus sämtlichen  $M = \binom{N-1}{2} = 10$  PrKt  ${}^6\psi_{k1}$  ( $k, 1 = 1, 2, 3, 4, 5 : k < 1$ ) in der Lagerebene  $E_6$  jeweils einen gemeinsamen Bereich umschließt.

Eine solche Untersuchung läßt sich auf den Fall der BAA mit beliebig vielen  $N$  ( $N > 6$ ) Lagern erweitern, so daß bei  $N > 5$  die Bedingung  ${}^5\delta_{N!}^x > 0$  für die Konfiguration  $f_{N!}^x > 0$  hinreichend ist.

$${}^5\delta_{N!}^* > 0 \quad \longrightarrow \quad f_{N!}^* > 0 \quad (\text{A4.09a})$$

Darüber hinaus gelten folgende Beziehungen:

$${}^5\delta_{N!}^* \geq +0 \quad \longrightarrow \quad f_{N!}^* = +0 \quad (\text{A4.09b})$$

$${}^5\delta_{N!}^* \geq \pm 0 \quad \longrightarrow \quad f_{N!}^* = -0 \quad (\text{A4.09c})$$

$${}^5\delta_{N!}^* \geq +0 \quad \longrightarrow \quad f_{N!}^* < +0 \quad (\text{A4.09d})$$

$${}^5\delta_{N!}^* < -0 \quad \longrightarrow \quad f_{N!}^* < -0 \quad (\text{A4.09e})$$

## Anhang 5: Untersuchung der Anordnung konvexer Konturen in einer Ebene

Eine wichtige Grundlage der Eindeutigkeitsanalyse der räumlichen BAA ist die Untersuchung darüber, wann die vorgegebenen  $N$  ( $N > 1$ ) konvexen Konturen  $\alpha_m > 0$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) in einer Lagerebene einen gemeinsamen Bereich  $\gamma > 0$  umschließen.

Bei  $N = 2$  tritt dieser Fall auf, wenn eine Kontur die andere vollständig umschließt oder beide Konturen mindestens zwei Schnittpunkte aufweisen. Bei  $N = 3$  schließen die Konturen einen gemeinsamen Bereich  $\gamma > 0$  ein, wenn zwei Konturen einen gemeinsamen Bereich  $\bar{\gamma} > 0$  einschließen und dieser mit der dritten Kontur schließlich den Bereich  $\gamma > 0$  gemeinsam umschließt. Für eine gemeinsame Umschließung eines Bereiches durch drei Konturen reicht die Voraussetzung nicht aus, daß alle Zweier-Kombinationen aus drei Konturen jeweils einen gemeinsamen Bereich umschließen (Abb. A5.1). Bei  $N > 3$  gilt dagegen folgender Satz: die vorgegebenen  $N$  ( $N > 3$ ) Konturen schließen in einer Ebene  $E$  einen gemeinsamen Bereich  $\gamma > 0$  ein, wenn alle Dreier-Kombinationen von  $N$  Konturen jeweils einen gemeinsamen Bereich umschließen. Für den Nachweis dieses Satzes wurden die Größen  ${}^m \mathcal{J}_N$  und  $\mathcal{J}_{N!}$  eingeführt. Hier wird mit  ${}^m \mathcal{J}_N$  der durch  $N-1$  Konturen gemeinsam umschlossenen Bereich bezeichnet, wobei  $m$  der Index für die Kontur darstellt, die nicht betrachtet wird. Die Gesamtheit aller Größen von  ${}^m \mathcal{J}_N$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) wird dagegen durch  $\mathcal{J}_{N!}$  definiert. Der Satz wird zuerst bei  $N = 4$  untersucht. Gemäß der Annahme gilt  ${}^m \mathcal{J}_4 > 0$  ( $1 \leq m \leq 4$ ). Falls  $\angle^{-m} \mathcal{J}_4, \alpha_{m-1} > 0$  ist der Satz für  $N = 4$  bewiesen. Es muß untersucht werden, ob bei  $\mathcal{J}_{4!} > 0$  die Beziehungen  $\angle^{-m} \mathcal{J}_4, \alpha_{m-1} \leq 0$  möglich sind.

Bei  $\angle^{-m} \mathcal{J}_4, \alpha_{m-1} \leq 0$  läßt sich die Ebene  $E$  durch eine Gerade  $G$  in zwei Teile aufteilen, so daß in einem Teil die Kontur  ${}^m \mathcal{J}_4 > 0$  und im zweiten Teil die Kontur  $\alpha_m$  liegen. Die Gerade  $G$  ist bei  $\angle^{-m} \mathcal{J}_4, \alpha_{m-1} = 0$  die gemeinsame Tangente beider Konturen an ihrer Berührungsstelle (Abb. A5.2a). Dagegen kann sie bei  $\angle^{-m} \mathcal{J}_4, \alpha_{m-1} < 0$  die Tangente in der Abstandsbasis an die Kontur  ${}^m \mathcal{J}_4 > 0$  sein (Abb. A5.2b).

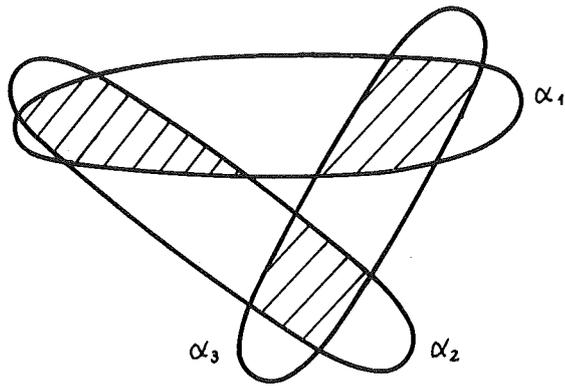
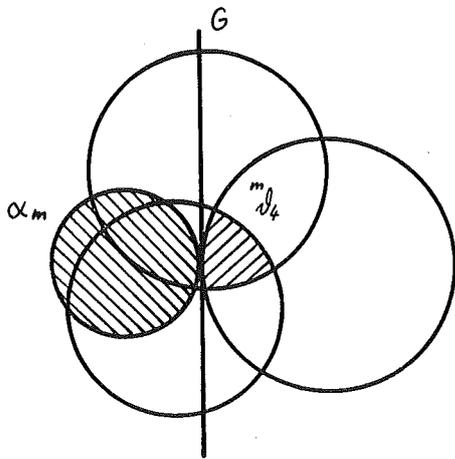
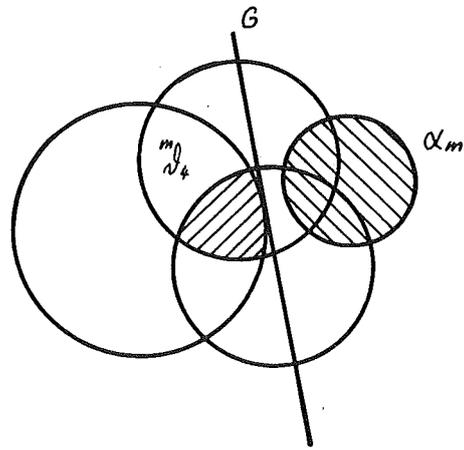


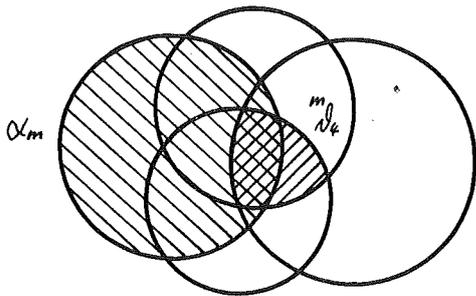
Abb.A5.1 Eine mögliche Anordnung von drei Konturen



a)  $[\overset{m}{\mathcal{N}}_4, \alpha_m] = 0$



b)  $[\overset{m}{\mathcal{N}}_4, \alpha_m] < 0$



c)  $[\overset{m}{\mathcal{N}}_4, \alpha_m] > 0$

Abb.A5.2 Die Anordnung  $[\overset{m}{\mathcal{N}}_4, \alpha_m]$  der Konturen  $\overset{m}{\mathcal{N}}_4 > 0$  und  $\alpha_m > 0$

Betrachtet man im zweiten Teil der Ebene nur drei Konturen (außer  $\alpha_m$ ), so kann gezeigt werden, daß zwei von ihnen keinen gemeinsamen Bereich umschließen. Diese zwei Konturen und die Kontur  $\alpha_m$  können also keinen gemeinsamen Bereich umschließen. Daraus geht hervor, daß der Annahme  $\mathcal{V}_{4!} > 0$  die Beziehung  $\int_{\alpha_m} \mathcal{V}_4 > 0$  und damit  $\gamma > 0$  folgt.

Mit Hilfe derartiger Vorgehensweise und der Methode der mathematischen Induktion [29] kann auch für beliebige  $N$  ( $N > 4$ ) bewiesen werden, daß  $N$  ( $N > 3$ ) Konturen in einer Ebene dann einen gemeinsamen Bereich  $\gamma > 0$  umschließen, wenn  $\mathcal{V}_{N!} > 0$  ist.

Anhang 6: Ableitung der Gleichung (6.15a)

Im Abschn. 6.3.3 wurden die Gleichungen (6.15a) angegeben, die sich aus Gleichgewichtsbetrachtungen an einer Speiche in einer Spannungsebene ergeben. Im folgenden wird die zweite Gleichung

$$A_0 = - \text{Min} (0, W_1, W_2 \dots W_{\bar{K}}) \quad (\text{A6.1})$$

abgeleitet; entsprechend verläuft die Ableitung für die erste Gleichung, auf die hier nicht eingegangen werden soll.

Nach (6.15b) ist

$$W_m = \sum_{l=1}^m \bar{A}_l \quad (m = 1, 2, \dots, \bar{K}) \quad (\text{A6.2})$$

wenn  $\bar{A}_1$  die durch eine separate Biegerechnung ermittelte Kraft für das Hexagon 1 ist. Für die Aufstellung der Gleichgewichtsbeziehung der Kräfte  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{\bar{K}}$  ist es notwendig, die an beiden Enden der Speiche möglicherweise wirkenden, zunächst noch unbekanntes Kräfte  $\bar{A}_0$  und  $\bar{A}_{\bar{K}+1}$  zu berücksichtigen. Dabei soll eine radial nach außen gerichtete Kraft  $\bar{A}_1 (1 = 0, 1, 2, \dots, \bar{K}+1)$  positiv sein (s.S. 106). Die Kraft  $\bar{A}_0$  ist jedoch nicht negativ, da sie nur eine Reaktionskraft auf die Druckkraft sein kann, die vom benachbarten Hexagon auf das zentrale Hexagon 0 wirkt:

$$\bar{A}_0 \geq 0 \quad (\text{A6.3})$$

Die zwischen den Hexagonen wirkenden Druckkräfte  $Z_1 (1 = 1, 2, \dots, \bar{K}+1)$  sind definitionsgemäß (Abschn. 6.3.3)

$$Z_1 \leq 0 \quad (1 = 1, 2, \dots, \bar{K}+1) \quad (\text{A6.4})$$

Wir betrachten zunächst  $m$  Hexagone ( $1 \leq m \leq \bar{K}$ ), die sich mit dem zentralen Hexagon im Gleichgewicht befinden (Abb. A6.1). In diesem Fall gilt

$$Z_{m+1} = 0 \quad (\text{A6.5})$$

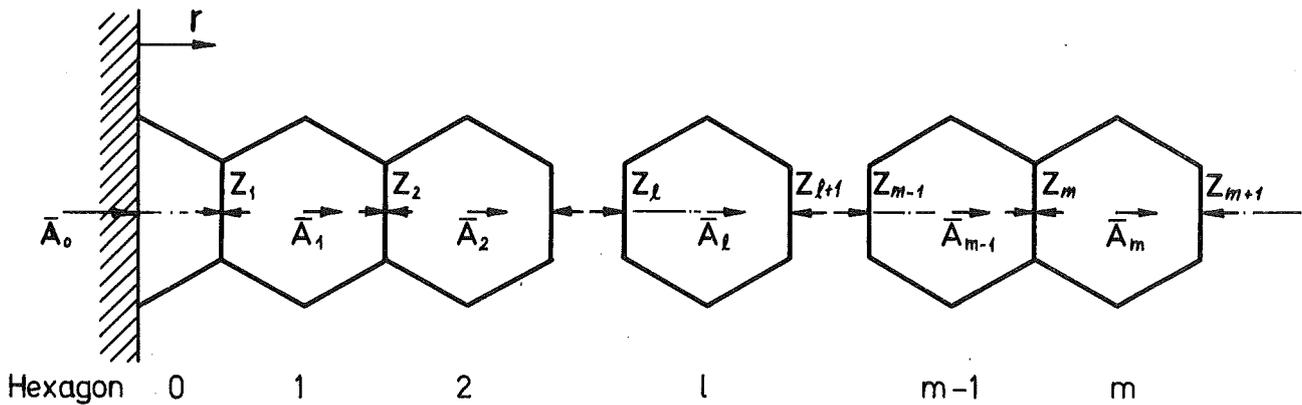


Abb. A6.1 Kräfte an Hexagonkästen  
in einer Speiche

und für die einzelnen Hexagone

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= Z_1 \\ \bar{A}_1 + Z_1 &= Z_2 \\ &\vdots \\ \bar{A}_l + Z_l &= Z_{l+1} \\ &\vdots \\ \bar{A}_m + Z_m &= Z_{m+1} = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\bar{A}_0 + \sum_{i=1}^m \bar{A}_i = 0$$

oder mit (A6.2)

$$\bar{A}_0 = -W_m \tag{A6.6}$$

Wegen (A6.3) ist  $W_m \leq 0$ . Nun wird im folgenden untersucht, ob

$$W_m = \text{Min} (W_1, W_2, \dots, W_{\bar{k}}) \tag{A6.7}$$

ist.

Wäre dies nicht der Fall, so muß es mindestens einen Wert  $W_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, \bar{k}$ ) geben, der die Beziehung  $W_j < W_m$  oder

$$\left. \begin{aligned}
 W_j - W_m &= - \sum_{l=j+1}^m \bar{A}_l < 0 \quad (1 \leq j < m) \\
 \text{bzw.} \\
 W_j - W_m &= \sum_{l=m+1}^j \bar{A}_l < 0 \quad (m < j \leq \bar{k})
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A6.8})$$

erfüllt.

Aus den Kräftegleichungen für die Hexagone

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_{j+1} + Z_{j+2} &= Z_{j+2} & \text{bzw.} & \quad A_{m+1} + \underbrace{Z_{m+1}}_0 = Z_{m+2} \\
 A_{j+2} + Z_{j+2} &= Z_{j+3} & & \quad A_{m+2} + Z_{m+2} = Z_{m+3} \\
 \vdots & & & \\
 \bar{A}_m + Z_m &= Z_{m+1} = 0 & & \quad A_j + Z_j = z_{j+1} \\
 & (1 \leq j < m) & & \quad (m < j \leq \bar{k})
 \end{aligned}$$

erhält man mit (A6.5)

$$Z_{j+1} = - \sum_{l=j+1}^m \bar{A}_l \quad (1 \leq j < m)$$

bzw.

$$Z_{j+1} = \sum_{l=m+1}^j \bar{A}_l \quad (m < j \leq \bar{k})$$

und schließlich mit (A6.8) die Beziehung

$$Z_{j+1} < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, \bar{k})$$

Diese Beziehung widerspricht der Voraussetzung (A6.4). Daraus ergibt sich die Schlußfolgerung: Wenn die Hexagone 0 bis m im Gleichgewicht sind, müssen daher die Beziehungen (A6.7) gültig sein.

Der Nachweis der Beziehung (A6.1) ist nun auf folgende Weise möglich: In einer bestimmten Anordnung von  $\bar{k}$  Hexagonen lassen sich insgesamt  $\bar{k}$  verschiedene Gruppen von  $m$  Hexagonen ( $1 \leq m \leq \bar{k}$ ) bilden, deren erstes Element die Nummer 1 und deren letztes die Nummer  $m$  sind (Abb. 6.1). Die nachfolgende Untersuchung bezieht sich auf derartige Gruppen von Hexagonen.

Für eine Anordnung von Hexagonen auf einer Speiche sind folgende drei Fälle möglich: Es gibt

- a) nur eine einzige Gruppe von  $m$  Hexagonen ( $1 \leq m \leq \bar{k}$ ),
- b) mehrere Gruppen von jeweils  $m_s$  Hexagonen ( $1 \leq m_s \leq \bar{k}$ ,  $s = 1, 2, \dots$ ) und
- c) keine einzige Gruppe von Hexagonen, die sich mit dem zentralen Hexagon 0 im Gleichgewicht befindet.

Im Fall a) gelten bekanntlich die Beziehungen (A6.6) und (A6.7). Somit läßt sich die Kraft  $\bar{A}_0$  durch

$$\bar{A}_0 = -\text{Min} (W_1, W_2, \dots, W_{\bar{k}}) \quad (\text{A6.9a})$$

berechnen. Im Falle b) ergibt sich für jede Gruppe nach (A6.6) und (A6.7) die Beziehungen

$$W_{ms} = \text{Min} (W_1, W_2, \dots, W_{\bar{k}}) \quad (\text{A6.10a})$$

$$\bar{A}_{0s} = -W_{ms} \quad (\text{A6.10b})$$

$$(s = 1, 2, \dots)$$

Da für die Zahlen  $W_1, W_2, \dots$  und  $W_{\bar{k}}$  trivialerweise nur ein einziger Minimalwert möglich ist, ergibt sich aus (A6.10a)

$$W_m = W_{ms} = \text{Min} (W_1, W_2, \dots, W_{\bar{k}}) \quad (\text{A6.11a})$$

$$(s = 1, 2, \dots)$$

So folgt mit (A6.10b) und (A6.11a)

$$\bar{A}_O = \bar{A}_{Os} = -W_{ms} = -W_s \quad (\text{A6.11b})$$

und schließlich

$$\bar{A}_O = -\text{Min} (W_1, W_2, \dots, W_{\bar{k}}) \quad (\text{A6.9b})$$

Im Falle c ist die Gleichgewichtskonfiguration der Hexagon-Anordnung ohne zusätzliche Kraft  $\bar{A}_O$  möglich. Daher ist

$$\bar{A}_O = 0 \quad (\text{A6.9c})$$

Es ist offenbar, daß dieser Fall nur bei  $W_1 \geq 0$  für alle  $1 = 1, 2, \dots, \bar{k}$  auftritt.

Anstelle der drei Gleichungen (A6.9a), (A6.9b) und (A6.9c) läßt sich zusammenfassend darstellen:

$$\bar{A}_O = -\text{Min} (0, W_1, W_2, \dots, W_{\bar{k}})$$

Damit ist die Gleichung (A6.1) abgeleitet.