

KfK 2628
April 1978

Fehlerbaumanalyse von periodisch inspizierbaren Systemen mit Hilfe von Monte Carlo Methoden

Ch. Schneider
Institut für Datenverarbeitung in der Technik
Projekt Nukleare Sicherheit

Kernforschungszentrum Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE GMBH

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Datenverarbeitung in der Technik
Projekt Nukleare Sicherheit

KfK 2628

FEHLERBAUMANALYSE VON PERIODISCH INSPIZIERBAREN
SYSTEMEN MIT HILFE VON MONTE CARLO METHODEN *)

von

Christian Schneider

*) Von der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Universität
Karlsruhe genehmigte Dissertation

Zusammenfassung

Die Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit komplexer Systeme erfordert großen Aufwand. Da auf analytischem Wege auch nur Näherungslösungen gewonnen werden können, wurde in der vorliegenden Arbeit untersucht, inwieweit mit Hilfe von Monte-Carlo-Methoden ein geeignetes Alternativverfahren zur Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit von Systemen mit periodischer Inspektion gewonnen werden kann.

Da bei der Simulation von Systemen, deren Komponenten sehr kleine Ausfallwahrscheinlichkeiten haben, eine große Zahl von Monte-Carlo-Spielen erforderlich ist, wenn ein vorgegebener kleiner Fehler nicht überschritten werden soll, wurde das varianzreduzierende Verfahren "importance sampling" benutzt, um den Rechenaufwand zu verkleinern.

Es wird eine kurze Darstellung der Theorie von Systemen mit periodischer Inspektion, des "importance sampling" und der Analyse der Ausfallwahrscheinlichkeit komplexer Systeme mit Fehlerbäumen gegeben, und es wird an Hand dreier ausgewählter Beispiele u.a. festgestellt, daß der Rechenzeitgewinn umso größer ausfällt, je kleiner die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Komponenten sind.

Abstract

FAILURE TREE ANALYSIS OF PERIODICALLY INSPECTED SYSTEMS WITH THE HELP OF MONTE CARLO METHODS

The determination of failure probabilities of complex systems usually requires a large effort. As with analytical methods only approximate solutions can be obtained, it has been investigated in this paper, to what extent one can develop alternative methods which are based on Monte Carlo methods and which permit the determination of failure probabilities of systems with periodical inspection.

The simulation of systems the components of which have very small failure probabilities requires a large number of Monte-Carlo-games if a given small error shall not be exceeded. Therefore, the variance reducing method "importance sampling" was used in order to decrease the computer time needed.

In this paper, a short presentation of the theory of systems with periodical inspection, of the importance sampling procedure and of the analysis of failure probabilities of complex systems with failure trees is given. Among others it is shown with the help of three examples that the computer time gain is the larger, the smaller the failure probability of the components is.

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
1. Einleitung	1
2. Parallelsystem S_2 mit periodischer Inspektion	6
2.1 Beschreibung des Parallelsystems	6
2.2 Exakte analytische Lösung	8
2.3 Monte Carlo Simulation ohne Importance Sampling	11
2.4 Monte Carlo Simulation mit Importance Sampling	15
2.4.1 Varianz der Schätzfunktion	17
2.4.2 Optimierung der Parameter	23
2.5 Numerische Rechnungen	25
3. Parallelsystem S_3 und S_n mit periodischer Inspektion	31
3.1 Beschreibung der Parallelsysteme	31
3.2 Exakte analytische Lösung	31
3.3 Monte Carlo Simulation ohne Importance Sampling	36
3.4 Monte Carlo Simulation mit Importance Sampling	39
3.4.1 Varianz der Schätzfunktion	40
3.4.2 Optimierung der Parameter	42

	<u>Seite</u>
4. Auswertung von Fehlerbäumen mit periodischer Inspektion	43
4.1 Beschreibung des Fehlerbaumes	43
4.2 Darstellung mittels Ersatzschaltbilder	49
4.3 Analytische Lösung für die Systemausfallwahrscheinlichkeit über die Minimalsschnitte	52
4.4 Direkte Simulation des Fehlerbaumes	56
4.4.1 Einführung	56
4.4.2 Monte Carlo Simulation ohne Importance Sampling	57
4.4.3 Monte Carlo Simulation mit Importance Sampling	58
4.4.4 Varianz der Schätzfunktion	59
4.5 Simulation des Baumes über Minimalsschnitte	61
4.5.1 Einführung	61
4.5.2 Monte Carlo Simulation ohne Importance Sampling	61
4.5.3 Monte Carlo Simulation mit Importance Sampling	63
5. Probleme der Programm- und Organisationsstruktur	67
5.1 Einführung	67
5.2 Simulation des Systemausfalls eines periodisch inspizierbaren Parallelsystems mit einer EDV-Anlage	68

	<u>Seite</u>
5.3 Programmtechnische Lösungsalternativen bei Parallelsystemen	72
5.3.1 Das Problem des Rasters	72
5.3.2 Simulation eines Parallelsystems	73
5.3.3 Programmtechnische und organisationsbedingte Abhängigkeiten	74
5.3.4 Diskussion der Alternativen	75
5.4 Simulation eines Fehlerbaumes	76
5.5 Simulation von Minimalschnitten	76
5.6 Probleme bei Importance Sampling	77
6. Ausgewählte Fehlerbäume	78
6.1 Einführung	78
6.2 Fehlerbaum I	80
6.2.1 Beschreibung des Baumes	80
6.2.2 Numerische Rechnungen	82
6.2.3 Diskussion der Ergebnisse	88
6.3 Fehlerbaum II	90
6.3.1 Beschreibung des Baumes	90
6.3.2 Numerische Rechnungen	91
6.3.3 Diskussion der Ergebnisse	95
6.4 Fehlerbaum TRIGA	97
6.4.1 Beschreibung des Baumes	97
6.4.2 Numerische Rechnungen	98

	<u>Seite</u>
6.4.3 Diskussion der Ergebnisse	108
7. Abschlußdiskussion	110
Anhang: Gesamtoptimierung von Systemen mit periodisch inspizierbaren Komponenten und Optimierung von Subsystemen	114
Literatur	121

1. Einleitung

Bei der Analyse der Zuverlässigkeit komplexer technologischer Systeme hat sich in den letzten Jahren die Fehlerbaumanalyse durchgesetzt. Hierbei wird das zu untersuchende System in einen Fehlerbaum umgesetzt, der die logischen Zusammenhänge zwischen den Fehlerbaumeingängen, die zu einem vorgegebenen unerwünschten Ereignis führen, beschreibt, und der genau die Struktur des Systems widerspiegelt. Eine große Rolle spielen Systeme, deren Komponenten periodisch inspiziert werden.

Einfache Systeme lassen sich analytisch problemlos behandeln. Werden die Strukturen aber komplexer, so läßt sich eine analytische Behandlung nur näherungsweise, und selbst dann nur mit großem Aufwand realisieren. Es ist daher naheliegend, Simulationsmethoden zur Lösung heranzuziehen.

Versucht man Simulationsmethoden anzuwenden, so führt dies sehr bald bei kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten der Komponenten und damit auch bei kleiner Systemausfallwahrscheinlichkeit auf eine sehr große Anzahl von Monte-Carlo-Spielen, wenn man das System mit einem vorgegebenen Fehler abschätzen will. Die Rechenzeiten wachsen selbst bei großen EDV-Anlagen ins ökonomisch nicht mehr Vertretbare an. Will man den Weg der Simulation trotzdem weiter beschreiten, so muß man nach geeigneten Verfahren der Rechenzeitverkürzung suchen.

In der Literatur sind verschiedene Wege zur Rechenzeitverkürzung bei Simulationsrechnungen vorgeschlagen worden. Das in der Praxis am häufigsten verwandte Verfahren ist das "Importance Sampling" ¹⁾, bei dem die Konvergenzbeschleunigung dadurch erzielt wird, daß die Ausfallra-

¹⁾ Da sich in der deutschsprachigen Literatur noch keine allgemein akzeptierte Bezeichnung für dieses Verfahren eingebürgert hat, werden wir in dieser Arbeit am englischen Ausdruck festhalten.

ten der Komponenten, die den größten Beitrag zum Erwartungswert liefern, heraufgesetzt werden und gleichzeitig das Ergebnis mit einem Gewichtungsfaktor korrigiert wird. Da die anderen Verfahren wenig erforscht sind, und andererseits für das "Importance Sampling" wenigstens einige Vergleichswerte vorliegen, soll in dieser Arbeit dieses Verfahren ohne weitere Diskussion angewendet werden. Überdies wurden die Lebensdauern der Komponenten als exponentialverteilt angenommen.

Bei der Anwendung des "Importance Sampling" ergeben sich jedoch eine Reihe von mathematischen Problemen. So setzt die Anwendung des Verfahrens zum Beispiel umfangreichere analytische Rechnungen voraus, die auf Optimierungsprobleme führen, die bei komplexen Systemen nicht mehr geschlossen gelöst werden können. In solchen Fällen muß man sich mit einer Teiloptimierung begnügen; der Erfolg einer solchen Vorgehensweise wird an der erzielten Rechenzeitverkürzung gemessen. Umgekehrt läßt sich die Teiloptimierung bei den aus parallelgeschalteten Komponenten bestehenden Subsystemen in überraschend einfacher Weise lösen, da sich herausstellt, daß bei beliebigen n-komponentigen Parallelsystemen im wesentlichen nur die n-te Komponente von Bedeutung ist.

Neben den mathematischen ergeben sich jedoch auch programm- und organisationsbedingte Probleme. So benötigt man zum Beispiel für den Gewichtungsfaktor die Lebensdauern aller Komponenten. Fällt das System vorzeitig aus, so muß man die noch fehlenden Lebensdauerdaten nachziehen, um zu einem richtigen Gewichtungsfaktor zu kommen. Das kostet viel Zeit und bedingt einen zusätzlichen Programmaufwand im Gegensatz zur direkten Simulation, bei der man bei einem Ausfall sofort diesen Simulationslauf abbrechen kann. Des weiteren führt die unterschiedliche Bedeutung der Komponenten in den Minimalschnitten - den kleinsten Kombinationen von Komponenten, bei deren gemeinsamen Ausfall das System ausfällt - dazu, daß man für jeden Minimalschnitt und für jede beteiligte Komponente die im Sinne des "Importance Sampling" optimalen Parameter abspeichern und abrufen muß. Schließlich erfordert die Berücksichtigung der statistischen Abhängigkeit der Komponenten in den Minimalschnitten eine genaue Kenntnis der Zufallslebensdauern der Komponenten in den einzelnen Inspektionsintervallen.

Es war von Anfang an klar, daß bei der sehr schwierigen Problematik der Analyse der Zuverlässigkeit komplexer Systeme keine mathematisch geschlossenen Lösungen erzielt werden können, die in gleicher Weise eine optimale Vorgehensweise für Fehlerbäume unterschiedlicher Struktur liefern. Vielmehr war es das Ziel, Verfahren bzw. Programme zu entwickeln, die mit vertretbarem Rechenaufwand die anstehenden Fehlerbäume zu behandeln gestatten. Aus diesem Grund wählen wir den Weg, daß zwei theoretisch konstruierte Fehlerbäume mit gegensätzlicher Struktur sowie ein aus der Praxis entnommener Fehlerbaum analysiert und vollständig berechnet werden, um Antworten auf Fragen der folgenden Art zu gewinnen

- Ist die Simulation der geeignete Weg zur Lösung des Problems?
- Welche Verbesserungen ergeben sich beim Einsatz von "Importance Sampling"?
- Welche Baumstruktur muß gegeben sein, um "Importance Sampling" oder direkte Simulation zu favorisieren?

Bekanntlich läßt sich ein Fehlerbaum auch durch sein Ersatzschaltbild, d.h. durch eine Serienschaltung von parallelgeschalteten Komponenten - den sogenannten Minimalschnitten - darstellen. Diese Möglichkeit gestattet es uns, die Simulation auf zwei verschiedene Arten durchzuführen, einmal durch direkte Simulation des Baumes und zum anderen durch direkte Simulation der in Serie geschalteten Minimalschnitte. Das "Importance Sampling" läßt sich dann im Prinzip auf diese beiden Verfahren anwenden. Aus diesen Überlegungen ergibt sich das in Tabelle 1-1 dargestellte Arbeitsprogramm, wobei sich aus einer groben Voranalyse die in der Tabelle aufgeführten Tendenzen ableiten lassen.

Entsprechend dieser Aufgabenstellung ist diese Arbeit wie folgt aufgebaut: Im zweiten Kapitel werden am Beispiel des Parallelsystems mit zwei periodisch inspizierten Komponenten (S_2) die grundlegenden

Tabelle 1-1: Übersicht über die verschiedenen Simulationsverfahren und deren Vor- und Nachteile bei Anwendung auf die 3 Fallbeispiele

	Baum I	Baum II	TRIGA
Charakteristika	komplexe Struktur (viele Tore, aber wenig Schnitte) sehr theoretisch	viele Minimal-schnitte	Mischtyp (zwischen Baum I und II) aus der Praxis
Direkte Simulation des Baumes (A)	möglich, Rechenzeit wahrscheinlich länger als bei (B)	möglich	möglich, keine Voraussage über Rechenzeit mit (A) und (B) möglich
Direkte Simulation über Minimalschnitte (B)	möglich	möglich, Rechenzeit wahrscheinlich länger als bei (A)	möglich
Simulation des Baumes mit Importance Sampling	da eine Optimierung nicht möglich ist (Varianz läßt sich nicht angeben), könnte sich bei unglücklicher Parameterwahl eine Verschlechterung des Ausgangszustandes ergeben		
Simulation über Minimalschnitte mit Importance Sampling	Bei allen drei Bäumen Verbesserung der Rechenzeit gegenüber (B) Demnach erst recht besser als (A)	Im Voraus keine Aussage möglich ob besser als (A)	Im Voraus keine Aussage möglich

Formeln für die Ausfallwahrscheinlichkeiten, das Monte-Carlo-Verfahren ohne und mit "Importance Sampling" sowie sich das daraus ergebende Optimierungsproblem eingeführt. Im dritten Kapitel werden die entsprechenden Verfahren noch einmal für Parallelsysteme mit drei bzw. n Komponenten (S_3 bzw. S_n) zusammengestellt, da für $n > 2$ die Komplexität so schnell wächst, daß explizite Betrachtungen nicht mehr möglich sind.

Die im zweiten und dritten Kapitel eingeführten Formeln und Verfahren werden im vierten Kapitel auf Fehlerbäume und deren Ersatzschaltbilder übertragen. Das fünfte Kapitel vermittelt einen Einblick in die Probleme der Programm- und Organisationsstruktur bei der Übertragung der genannten Verfahren auf EDV-Anlagen und deren Lösung. Die Anwendung der EDV-Programme auf die oben genannten drei Fehlerbäume und die Auswertung der erzielten Ergebnisse ist im sechsten und siebten Kapitel dargestellt: wie zu erwarten war, hängen die qualitativen Ergebnisse sehr stark von der Struktur der jeweils vorliegenden Fehlerbäume ab; eine quantitative Übersicht vermittelt Tabelle 7-1.

2. Parallelsystem S_2 mit periodischer Inspektion

2.1 Beschreibung des Parallelsystems

Wie schon anfangs in der Einleitung angedeutet, sollen die Verfahren an einem kleinen, praxisrelevanten Modell erprobt werden. In der technischen Praxis, z.B. bei dem Atomreaktorbau, trifft man häufig auf folgendes Komponentenverhalten, das dieser Arbeit in diesem und den nächsten Kapiteln zu Grunde gelegt wird.

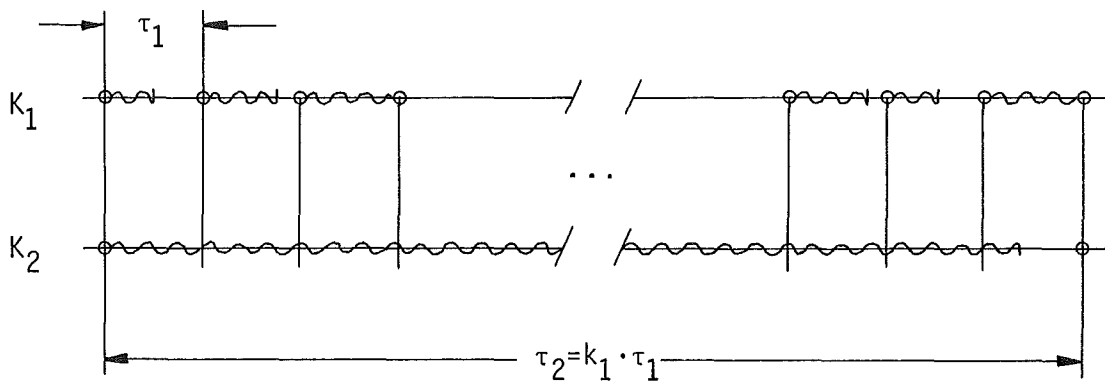
Die Komponenten haben exponentialverteilte Ausfallraten (diese Annahme wird meistens bei technischen Bauelementen gemacht) und ein konstantes Inspektionsintervall. Dies bedeutet, daß die Komponenten nur zu bestimmten, vorher genau festgelegten Inspektionszeitpunkten gewartet oder repariert werden. Fällt eine Komponente vor dem Inspektionszeitpunkt aus, so leistet sie bis zu diesem Punkt keinen Beitrag zum Funktionieren des Systems.

Wir gehen von der Annahme aus, daß unser Modell nur Komponenten des oben beschriebenen Typs enthält. Dies ist keine grobe Einschränkung, da sich auch so schon die wesentlichen Punkte studieren lassen. Eine Erweiterung auf andere Komponententypen ist ohne allzu große Schwierigkeiten möglich.

Das Ausfallverhalten des Parallelsystems wird durch die Ausfallzeiten der einzelnen Komponenten bestimmt. Der Systemausfall tritt ein, wenn alle Komponenten ausgefallen sind.

Wir beschränken uns auf Parallelsysteme, die wie folgt charakterisiert sind (siehe Figur 2-1):

Figur 2-1: Diagramm zur Beschreibung des Systems S_2



$$k_1 = 1, 2, 3 \dots$$

— Ausfall der Komponente

~ Betrieb der Komponente

0 Inspektionszeitpunkt

τ_i Inspektionsintervall der i -ten Komponente

Charakteristik des Parallelsystems:

- die Lebensdauer der i -ten Komponente ist exponentialverteilt mit der Ausfallrate λ_i
- die Reparatur erfolgt nur zu festen Inspektionszeitpunkten
- fällt die Komponente vorher aus, so bleibt sie bis zum Inspektionszeitpunkt ausgefallen
- die Reparaturdauer ist vernachlässigbar klein
- nach jedem Inspektionszeitpunkt erhält die Komponente das Alter null
- Die Inspektionsintervalle sind ganzzahlige Vielfache des kleinsten Intervalls.

2.2 Exakte analytische Lösung

Gegeben sei das in 2.1 beschriebene Parallelsystem S_2 . Ferner sei a die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall der Komponente K_1 im Intervall $((i-1) \cdot \tau_1, i \cdot \tau_1)$, und b_i die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall der Komponente K_2 im Intervall $(0, i \cdot \tau_1)$, wobei $i=1, \dots, k_1$:

$$a := w\{\text{Ausfall von Komponente } K_1 \text{ in } ((i-1) \cdot \tau_1, i \cdot \tau_1)\} \quad (2-1)$$

$$b_i := w\{\text{Ausfall von Komponente } K_2 \text{ in } (0, i \cdot \tau_1)\} \quad (2-2)$$

Die Formel für die Wahrscheinlichkeit q_2 für einen Systemausfall im Zeitraum $(0, \tau_2)$ läßt sich für $k_1=3$ wie folgt ableiten (siehe Figur 2-2):

Es gilt

$$w\{\text{Systemausfall in } (2\tau_1, 3\tau_1)\} = a \cdot b_3$$

$$w\{\text{Systemausfall in } (\tau_1, 2\tau_1)\} = a \cdot (1-a) \cdot b_2$$

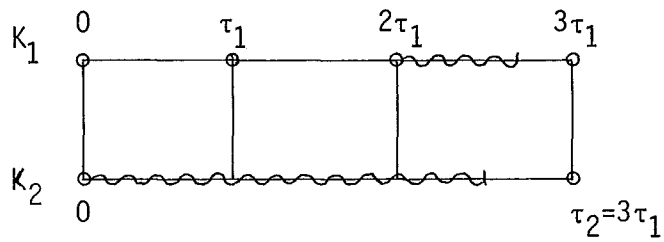
$$w\{\text{Systemausfall in } (0, \tau_1)\} = a \cdot (1-a)^2 \cdot b_1$$

somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit des Systemausfalls in $(0, \tau_2)$

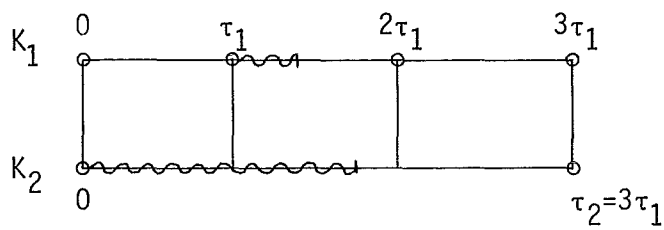
$$\begin{aligned} q_2 &:= w\{\text{Systemausfall in } (0, \tau_2)\} \\ &= a \cdot (b_3 + (1-a) \cdot b_2 + (1-a)^2 \cdot b_1) \\ &= a \cdot \sum_{i=1}^3 (1-a)^{3-i} \cdot b_i \end{aligned} \quad (2-3)$$

Figur 2-2: Ereignisse, die zum Ausfall des Systems S_2 für den Fall $k_1=3$ führen

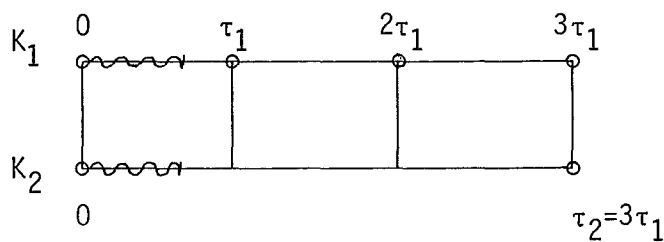
Ausfall im 3 ten Intervall:



Ausfall im 2 ten Intervall:



Ausfall im 1 ten Intervall:



— = Ausfall

~ = Betrieb

0 = Regenerationspunkt

Wie leicht einzusehen ist, gilt für beliebiges $k_1 \in \mathbb{N}^*$ /1/ *)

$$q_2 = a \cdot \sum_{i=1}^{k_1} (1-a)^{k_1-i} \cdot b_i \quad (2-4)$$

Für den Fall exponentialverteilter Lebensdauern gilt:

$$a = q_1 = 1 - \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_1) \quad (2-5)$$

$$b_i = 1 - \text{EXP}(-i \cdot \lambda_2 \cdot \tau_1) \quad (2-6)$$

Somit ergibt sich aus (2-4)

$$\begin{aligned} q_2 &= (1 - \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_1)) \\ &\cdot \sum_{i=1}^{k_1} \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_1)^{k_1-i} \cdot (1 - \text{EXP}(-i \cdot \lambda_2 \cdot \tau_1)) \\ &= 1 - \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_2) \\ &+ (1 - \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_1)) \cdot \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_2) \quad (2-7) \\ &\cdot \frac{1 - \text{EXP}((\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \tau_2)}{1 - \text{EXP}(-(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \tau_1)}, \end{aligned}$$

wobei entsprechend Figur 2-1: $\tau_2 = k_1 \cdot \tau_1$ ist .

*) Formel (2-4) ist plausibel, aber nicht einfach in Strenge zu beweisen.

2.3 Monte Carlo Simulation ohne Importance Sampling

Betrachten wir unser System S_2 mit Inspektion, so ergibt sich für die Dichten der Lebensdauerverteilungen in den einzelnen Inspektionsperioden für Komponente K_1 :

$$\begin{aligned}w\{t_{1i} < T_{1i} \leq t_{1i} + dt_{1i}\} &= f_i(t_{1i})dt_{1i} \\ &= \lambda_{1i} \cdot \text{EXP}(-\lambda_{1i} \cdot t_{1i}) dt_{1i}\end{aligned}\tag{2-8}$$

mit $i=1, 2, \dots, k_1$

$$\lambda_{1i} = \lambda_1$$

und für Komponente K_2 :

$$\begin{aligned}w\{t_2 < T_2 \leq t_2 + dt_2\} &= f_{k_1+1}(t_2) dt_2 \\ &= \lambda_2 \text{EXP}(-\lambda_2 t_2) dt_2\end{aligned}$$

$$t_2 = k_1 \cdot t_1$$

Auf Grund der stochastischen Unabhängigkeit in den einzelnen Inspektionsperioden folgt für das System S_2

$$\begin{aligned}
 & w\{t_{11} < T_{11} \leq t_{11} + dt_{11}, \dots, t_{1k_1} < T_{1k_1} \leq t_{1k_1} + dt_{1k_1}, t_2 < T_2 \leq t_2 + dt_2\} \\
 & = \lambda_1^{k_1} \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \sum_{i=1}^{k_1} t_{1i}) \cdot \lambda_2 \text{EXP}(-\lambda_2 t_2) \underline{dt_1} dt_2 \quad (2-10)
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \underline{dt_1} = dt_{11}, dt_{12}, \dots, dt_{1k_1}$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit für S_2 läßt sich nun in folgender Form schreiben:

$$q_2 = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Phi(\underline{t_1}, t_2) \cdot \prod_{i=1}^{k_1} f_i(t_{1i}) \cdot f_{k_1+1}(t_2) \underline{dt_1} dt_2$$

k_1+1 -fach

und explizit

$$q_2 = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Phi(\underline{t_1}, t_2) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \sum_{i=1}^{k_1} t_{1i}) \cdot \lambda_2 \cdot \text{EXP}(-\lambda_2 t_2) \underline{dt_1} dt_2$$

k_1+1 -fach

(2-11)

wobei die Strukturfunktion $\Phi(t_1, t_2)$ gegeben ist durch:

$$\Phi(\underline{t_1}, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } \underline{t_1}, t_2 : \text{System in Betrieb} \\ 1 & \text{für } \underline{t_1}, t_2 : \text{System ausgefallen} \end{cases} \quad (2-12)$$

Beispiel: Für $k_1=2$ gilt mit (2-4) und (2-11):

$$q_2 = \int_{\tau}^{\infty} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} f_1(t_{11}) \cdot f_2(t_{12}) \cdot f_3(t_2) dt_{11} dt_{12} dt_2$$

$$+ \int_0^{\infty} \int_0^{\tau} \int_0^{2\tau} f_1(t_{11}) \cdot f_2(t_{12}) \cdot f_3(t_2) dt_{11} dt_{12} dt_2$$

d.h. es gilt:

$$\Phi(t_{11}, t_{12}, t_2) = \begin{cases} 1 & \tau \leq t_{11} < \infty, 0 \leq t_{12} < \tau, 0 \leq t_2 < \tau \text{ oder} \\ & 0 \leq t_{11} < \infty, 0 \leq t_{12} < \tau, 0 \leq t_2 < 2\tau \\ 0 & \text{für sonst} \end{cases}$$

Um diese Wahrscheinlichkeit (Formel 2-11) mit Hilfe des Monte Carlo Verfahrens abschätzen zu können, deuten wir die Ausfallwahrscheinlichkeit q_2 als Erwartungswert der Strukturfunktion Φ :

$$q_2 = E(\Phi) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \Phi(\underline{t}_1, t_2) \cdot \prod_{i=1}^{k_1} f_i(t_{1i}) \cdot f_{k_1+1}(t_2) \underline{dt}_1 dt_2 \quad (2-13)$$

k_1+1 -fach

Mit Hilfe dieses Kunstgriffes können wir nun einen Schätzwert \hat{q}_2 für q_2 angeben, wenn wir von den folgenden Realisationen $\underline{t}_{1j}, t_{2j}, j=1 \dots n$,

für die Betriebszeiten ausgehen /2/ :

$$S_2 = \hat{q}_2 = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m \Phi(\underline{t}_{1j}, t_{2j}) \quad . \quad (2-14)$$

Die Schätzfunktion S_2 hat den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E(S_2) &= \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m E(\Phi(\underline{t}_{1j}, t_{2j})) \\ &= \frac{1}{m} \cdot m \cdot E(\Phi(\underline{t}_1, t_2)) \\ &\text{nach (2-13)} \\ &= \frac{1}{m} \cdot m \cdot q_2 = q_2 \end{aligned} \quad (2-15)$$

das heißt, die Schätzung ist erwartungstreu. Für die Varianz folgt:

$$V(S_2) = \frac{1}{m^2} \cdot \sum_{j=1}^m V(\Phi(\underline{t}_{1j}, t_{2j}))$$

mit

$$V(\Phi(\underline{t}_{1j}, t_{2j})) = E(\Phi^2(\underline{t}_1, t_2)) - E^2(\Phi(\underline{t}_1, t_2))$$

und da

$$\Phi^2(\underline{t}_1, t_2) = \Phi(\underline{t}_1, t_2)$$

folgt deshalb

$$V(\Phi(\underline{t}_{1j}, t_{2j})) = q_2 - q_2^2$$

$$V(S_2) = \frac{1}{m^2} \cdot m \cdot (q_2 - q_2^2) = \frac{1}{m} \cdot q_2(1 - q_2) \quad (2-16)$$

Bei großen Stichproben ist

$$\hat{V}(S_2) = \frac{\sum_{j=1}^m (\Phi(t_{1j}, t_{2j}) - \hat{q}_2)^2}{m(m-1)} \quad (2-17)$$

ein brauchbarer Schätzwert für $V(S_2)$ /3/ .

2.4 Monte Carlo Simulation mit Importance Sampling

Wie schon in der Einleitung angedeutet und in Abschnitt 2.5 durch ein numerisches Beispiel illustriert, besteht die Notwendigkeit, die Varianz der Schätzung zu reduzieren. Gelingt dies, so braucht man bei gleicher Varianz weniger Monte Carlo-Spiele ¹⁾ zu durchlaufen, und spart somit wertvolle Rechenzeit. Eines dieser varianzreduzierenden Verfahren /3/, /4/, /5/ ist Importance Sampling, das soviel wie gewichtete Stichprobenerhebung bedeutet. Bei diesem Verfahren erhebt man die Stichprobe aus einer neuen Dichte und korrigiert das Ergebnis anschließend mit einem Gewichtungsfaktor. Anschaulich gesprochen, erhöht man z.B. bei der Exponentialverteilung die Ausfallraten ausgewählter Komponenten und erhält somit mehr Ausfälle, bezogen auf eine bestimmte Anzahl von Monte Carlo-Spielen.

¹⁾ Ein Monte Carlo-Spiel ist hier definiert als eine Realisation des Systemverhaltens bis zum Systemregenerationspunkt; ein solches Spiel bedeutet beim System S_2 die Ziehung von maximal k_1+1 Zufallszahlen.

Zur Darstellung dieses Verfahrens schreiben wir die Ausfallwahrscheinlichkeit q_2 in folgender Form:

$$q_2 = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \underbrace{\Phi(t_1, t_2)}_{k_1+1\text{-fach}} \cdot \frac{f(t_1, t_2)}{f^*(t_1, t_2)} \cdot f^*(t_1, t_2) \, dt_1 \, dt_2 \quad (2-18)$$

wobei $f^*(t_1, t_2)$ sich von $f(t_1, t_2)$ lediglich durch andere Parameterwerte, nicht jedoch durch die Struktur unterscheidet. Dies bedeutet, daß wir q_2 jetzt als Erwartungswert von

$$\Psi := \Phi \cdot w = \Phi \cdot \frac{f}{f^*} \quad (2-19)$$

bezüglich der Dichte $f^*(t_1, t_2)$ auffassen:

$$q_2 = E(\Psi) = E(\Phi \cdot w) .$$

Die Schätzfunktion S_2^* für q_2 lautet dementsprechend anstelle von (2-14)

$$S_2^* = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m \Phi(\underline{t_{1j}}, t_{2j}) \cdot w(\underline{t_{1j}}, t_{2j}) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m \Phi_j \cdot w_j . \quad (2-20)$$

Explizit lautet der Korrekturfaktor in unserem Fall, wenn wir f^*

aus Exponentialverteilungen mit Parametern λ^* aufbauen: ¹⁾

$$w(t_{1j}, t_{2j}) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1^*} \right)^{k_1} \cdot \text{EXP} \left(-(\lambda_1 - \lambda_1^*) \cdot \sum_{i=1}^{k_1} t_{1i} \right) \quad (2-21)$$
$$\cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2^*} \cdot \text{EXP} \left(-(\lambda_2 - \lambda_2^*) \cdot t_2 \right) \cdot$$

Entsprechend der Problemstellung wird man den Gewichtungsfaktor w , bzw. in unserem Fall die Werte der Parameter λ_1^* und λ_2^* so wählen, daß die Varianz der Schätzung S_2^* minimal wird.

2.4.1 Varianz der Schätzfunktion

Zur Berechnung der Varianz $V(S_2^*)$ von S_2^* gehen wir wegen der Unabhängigkeit der einzelnen Realisationen mit (2-20) von folgender Form aus:

$$V(S_2^*) = \frac{1}{m^2} \cdot \sum_{j=1}^m V(\phi_j \cdot w_j) \quad (2-22)$$

¹⁾ Im Prinzip kann man natürlich f^* aus beliebigen Verteilungen aufbauen; aus rechentechnischen Gründen wird man jedoch bestrebt sein, den Typ der Ausgangsverteilung zu erhalten (siehe auch Ref. /6/).

Da die einzelnen Realisationen unabhängige Wiederholungen derselben Zufallsvariablen $\Psi = \Phi \cdot w$ sind, können wir (2-22) auch wie folgt schreiben:

$$V(S_2^*) = \frac{1}{m} \cdot \left[E(\Psi^2) - E^2(\Psi) \right] ,$$

wobei

$$E(\Psi) = q_2 ,$$

$$E(\Psi^2) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \underbrace{\Phi^2(t_1, t_2)}_{k_1+1\text{-fach}} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1^*} \right)^{2k_1} \cdot \text{EXP} \left(-2(\lambda_1 - \lambda_1^*) \cdot \sum_{i=1}^{k_1} t_{1i} \right) \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2^*} \right)^2 \cdot \text{EXP} \left(-2(\lambda_2 - \lambda_2^*) \cdot t_2 \right) \cdot \lambda_1^{*k_1} \cdot \text{EXP} \left(-\lambda_1^* \sum_{i=1}^{k_1} t_{1i} \right) \cdot \lambda_2^* \cdot \text{EXP} \left(-\lambda_2^* t_2 \right) \underline{dt_1 dt_2} \quad (2-23)$$

Da $\Phi(\underline{t_{1j}}, t_{2j})$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen kann, ist

$$\Phi^2(\underline{t_{1j}}, t_{2j}) = \Phi(\underline{t_{1j}}, t_{2j})$$

siehe (2-12), und es gilt:

$$E(\Psi^2) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \underbrace{\Phi(\underline{t}_1, t_2)}_{k_1+1\text{-fach}} \cdot \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^*}\right)^{k_1} \cdot \text{EXP}\left(- (2\lambda_1 - \lambda_1^*) \sum_{i=1}^{k_1} t_{1i}\right) \quad (2-24)$$

$$\cdot \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^*}\right) \cdot \text{EXP}\left(- (2\lambda_2 - \lambda_2^*) t_2\right) \underline{dt}_1 dt_2 \quad .$$

Erweitern wir (2-24) zu:

$$E(\Psi^2) = \left[\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^* (2\lambda_1 - \lambda_1^*)} \right]^{k_1} \cdot \left[\frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^* (2\lambda_2 - \lambda_2^*)} \right]$$

$$\cdot \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \underbrace{\Phi(\underline{t}_1, t_2)}_{k_1+1\text{-fach}} \cdot (2\lambda_1 - \lambda_1^*)^{k_1} \cdot \text{EXP}\left(- (2\lambda_1 - \lambda_1^*) \sum_{i=1}^{k_1} t_{1i}\right) \quad (2-25)$$

$$\cdot (2\lambda_2 - \lambda_2^*) \cdot \text{EXP}\left(- (2\lambda_2 - \lambda_2^*) \cdot t_2\right) \underline{dt}_1 dt_2$$

und vergleichen wir den Ausdruck (2-25) mit der Ausfallwahrscheinlichkeit q_2 für das System S_2 (2-11), so sehen wir, daß wir das k_1+1 -fache Integral in (2-25) aus der Formel (2-11) gewinnen, indem

Die Divergenz für $\lambda_1^* > 2\lambda_1$ ergibt sich aus der Definition der Strukturfunktion (2-12), siehe auch das Beispiel auf der gleichen Seite: In einigen Fällen muß über $t_{11} \dots t_{1k_1}$ bis unendlich integriert werden; diese Integrale existieren jedoch nicht für $\lambda_1^* > 2\lambda_1$.

Für die geschlossene Form findet man:

$$E(\psi^2) = \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^* \cdot (2\lambda_1 - \lambda_1^*)} \right]^{k_1} \cdot \left[\frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^* \cdot (2\lambda_2 - \lambda_2^*)} \right] \\ \cdot \left[1 - \text{EXP} \left(-(2\lambda_1 - \lambda_1^*) \cdot \tau_2 \right) \right. \\ \left. + \left(1 - \text{EXP} \left(-(2\lambda_1 - \lambda_1^*) \cdot \tau_1 \right) \right) \right] \\ \cdot \text{EXP} \left(-(2\lambda_1 - \lambda_1^*) \cdot \tau_2 \right) \\ \cdot \left. \frac{1 - \text{EXP} \left(+(2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_1^* - \lambda_2^*)) \cdot \tau_2 \right)}{1 - \text{EXP} \left(-(2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_1^* - \lambda_2^*)) \cdot \tau_1 \right)} \right] \end{array} \right. \quad (2-27)$$

für $0 \leq \lambda_1^* < 2\lambda_1$
 $0 \leq \lambda_2^*$

∞ für $\lambda_1^* \geq 2\lambda_1$

Zur Berechnung der Varianz der Schätzfunktion $V(S_2^*) = E(\psi^2) - E^2(\psi)$ benötigt man noch $E^2(\psi)$. In Gleichung (2-7) liegt der exakte Ausdruck für $E(\psi) = q_2$ vor. Im folgenden sei die Varianz $V(S_2^*)$ angegeben, die sich mit der exakten Lösung von q_2 ergibt:

$$\begin{aligned}
 V(S_2^*) = & \left\{ \frac{1}{m} \left[\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^* \cdot (2\lambda_1 - \lambda_1^*)} \right]^{k_1} \cdot \left[\frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^* \cdot (2\lambda_2 - \lambda_2^*)} \right] \right. \\
 & \cdot \left[1 - \text{EXP} \left(-(2\lambda_1 - \lambda_1^*) \cdot \tau_2 \right) \right. \\
 & \left. \left. + \left(1 - \text{EXP} \left(-(2\lambda_1 - \lambda_1^*) \cdot \tau_1 \right) \right) \right] \right. \\
 & \cdot \text{EXP} \left(-(2\lambda_1 - \lambda_1) \cdot \tau_2 \right) \quad \text{für } 0 \leq \lambda_1^* < 2\lambda_1 \\
 & \quad \quad \quad 0 \leq \lambda_2^* \\
 & \left. \cdot \frac{1 - \text{EXP} \left(+(2(\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_1^* - \lambda_2^*)) \cdot \tau_2 \right)}{1 - \text{EXP} \left(-(2(\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_1^* - \lambda_2^*)) \cdot \tau_1 \right)} \right] \\
 & - \left[1 - \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_2) + (1 - \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_1)) \right. \\
 & \left. \cdot \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_2) \cdot \frac{1 - \text{EXP} \left(+(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \tau_2 \right)}{1 - \text{EXP} \left(-(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \tau_1 \right)} \right]^2 \left. \right\} \\
 & \quad \quad \quad \infty \quad \quad \quad \text{für } \lambda_1^* \geq 2\lambda_1
 \end{aligned} \tag{2-28}$$

Die Varianz $V(S_2^*)$ hat nur für den Bereich $0 \leq \lambda_1^* < 2\lambda_1$, einen endlichen Wert, weil bezüglich der Integrationsvariablen t_{1j} , $j=1, \dots, k_1$ entsprechend (2-25) bis ∞ integriert werden kann, woraus die obige Bereichseinschränkung für λ_1^* folgt, während bezüglich der Integrationsvariablen t_2 nur bis $k_1 \cdot \tau$ integriert wird, d.h. λ_2^* kann beliebige Werte größer null annehmen.

Wie sich leicht einsehen läßt, gilt beim System S_n , daß beim entsprechend gewählten Beschleunigungsverfahren die Varianz $V(S_n^*)$ nur für die Bereiche $0 \leq \lambda_i^* < 2\lambda_i$, $i=1, \dots, n-1$, definiert ist, während λ_n^* beliebige Werte größer null annehmen kann.

2.4.2 Optimierung der Parameter

Um die höchstmögliche Effektivität des Importance Sampling Verfahrens zu erreichen, muß die Varianz (2-28) der Schätzfunktion (2-20) bezüglich der Variablen λ_1^* und λ_2^* minimiert werden. Dabei ist nur der Bereich

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^* < 2\lambda_1, \quad \lambda_2 \leq \lambda_2^*$$

von Interesse, da für λ^* kleiner λ die Zahl der Ausfälle zu gering wird, und für $\lambda_1^* \geq 2\lambda_1$ entsprechend (2-25) die Varianz unendlich wird (vgl. auch /4/).

Wie ausführliche numerische Rechnungen gezeigt haben, bringt eine Variation von λ_1^* im Intervall $(\lambda_1, 2\lambda_1)$ eine nur unwesentliche Verkleinerung der Varianz $V(S_2^*)$; dies leuchtet auch unmittelbar ein,

da nur eine sehr große Vergrößerung von λ eine Dichte mit entsprechend vielen Ausfällen liefert. Infolgedessen beschränken wir uns im folgenden auf die Minimierung der Varianz $V(S_2^*)$ bezüglich der Variablen λ_2^* bzw. beim System S_n auf eine Minimierung der Varianz $V(S_n^*)$ bezüglich der Variablen λ_n^* .

Das reduzierte Optimierungsproblem besteht dann, wenn wir im Ausdruck (2-28) λ_1^* durch λ_1 ersetzen, in der Minimierung der Varianz

$$\begin{aligned}
 V(S_2^*) = \frac{1}{m} & \left\{ \frac{\lambda_2}{\lambda_2^* \cdot (2\lambda_2 - \lambda_2^*)} \left[1 - \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_2) \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left(1 - \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_1) \right) \cdot \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_2) \right. \right. \\
 & \cdot \left. \left. \frac{1 - \text{EXP}\left((\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2^*) \cdot \tau_2\right)}{1 - \text{EXP}\left((\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2^*) \cdot \tau_1\right)} \right] \right. \\
 & - \left. \left[1 - \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_2) + (1 - \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_1)) \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \text{EXP}(-\lambda_1 \cdot \tau_2) \cdot \frac{1 - \text{EXP}\left(+(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \tau_2\right)}{1 - \text{EXP}\left(-(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \tau_1\right)} \right]^2 \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2-29}$$

bezüglich der Variablen λ_2^* im Bereich $\lambda_2^* > \lambda_2$.

In Tabelle 2-1 ist ein ausgewähltes numerisches Beispiel für $\lambda_1 = .33 \cdot 10^{-4}$, $\lambda_2 = .60 \cdot 10^{-5}$, $V(S_2) = .295 \cdot 10^{-4}$, $m = 1$ dargestellt. In dieser Tabelle wurden λ_1^* und λ_2^* in den erlaubten Bereichen variiert. Es zeigt sich, wie oben schon ausgeführt, daß eine Variation von λ_1^* nur geringen Einfluß auf die Varianz $V(S_2^*)$, bzw. auf den Varianzreduktionsfaktor:

$$F := \sqrt{\frac{V(S_2)}{V(S_2^*)}}$$

hat. Dagegen führt eine Variation von λ_2^* zu einer erheblichen Rechenzeitverbesserung. Dabei ist zu bemerken, daß sich $V(S_2^*)$ in der Umgebung der Minimalstelle nur wenig ändert, d.h. daß es nicht notwendig ist, exakt das Minimum zu bestimmen. In Figur 2-3 ist anschaulich die "Rinnenform" der Funktion $V(S_2^*)$ der beiden Variablen λ_1^* und λ_2^* zu erkennen.

2.5 Numerische Rechnungen

Sind die Ausfallwahrscheinlichkeiten sehr groß, so ist es ohne weiteres möglich, eine Schätzung mit direkter Simulation anzugeben. Ein in Tabelle 2-2 dargestelltes numerisches Beispiel möge dies verdeutlichen.

Will man jedoch das in Tabelle 2-1 vorgestellte System S_2 mit $q_2 = .295 \cdot 10^{-4}$ abschätzen, so würde man schon $3.45 \cdot 10^6$ Monte Carlo Spiele

Tabelle 2-1: Rechenzeitverbesserung durch Variation der Parameter λ_1^* und λ_2^* für

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= .33 \cdot 10^{-4} \\ \lambda_2 &= .60 \cdot 10^{-5} \\ V(S_2) &= .295 \cdot 10^{-4} \\ m &= 1\end{aligned}$$

λ_1^*	λ_2^*	$V(S_2^*)$	F
$.330 \cdot 10^{-4}$	$.387 \cdot 10^{-2} \dots .399 \cdot 10^{-2}$	$.105 \cdot 10^{-6}$	16.76
$.363 \cdot 10^{-4}$	$.391 \cdot 10^{-2} \dots .395 \cdot 10^{-2}$	$.994 \cdot 10^{-7}$	17.22
$.396 \cdot 10^{-4}$	$.388 \cdot 10^{-2} \dots .399 \cdot 10^{-2}$	$.103 \cdot 10^{-6}$	16.91
$.429 \cdot 10^{-4}$	$.383 \cdot 10^{-2} \dots .403 \cdot 10^{-2}$	$.118 \cdot 10^{-6}$	15.80

F= Varianzreduktionsfaktor

Figur 2-3: Darstellung der Funktion $V(S_2^*)$ von λ_1^* und λ_2^* als Fläche des R^3 .

Drehwinkel 45°

Blickwinkel 75°

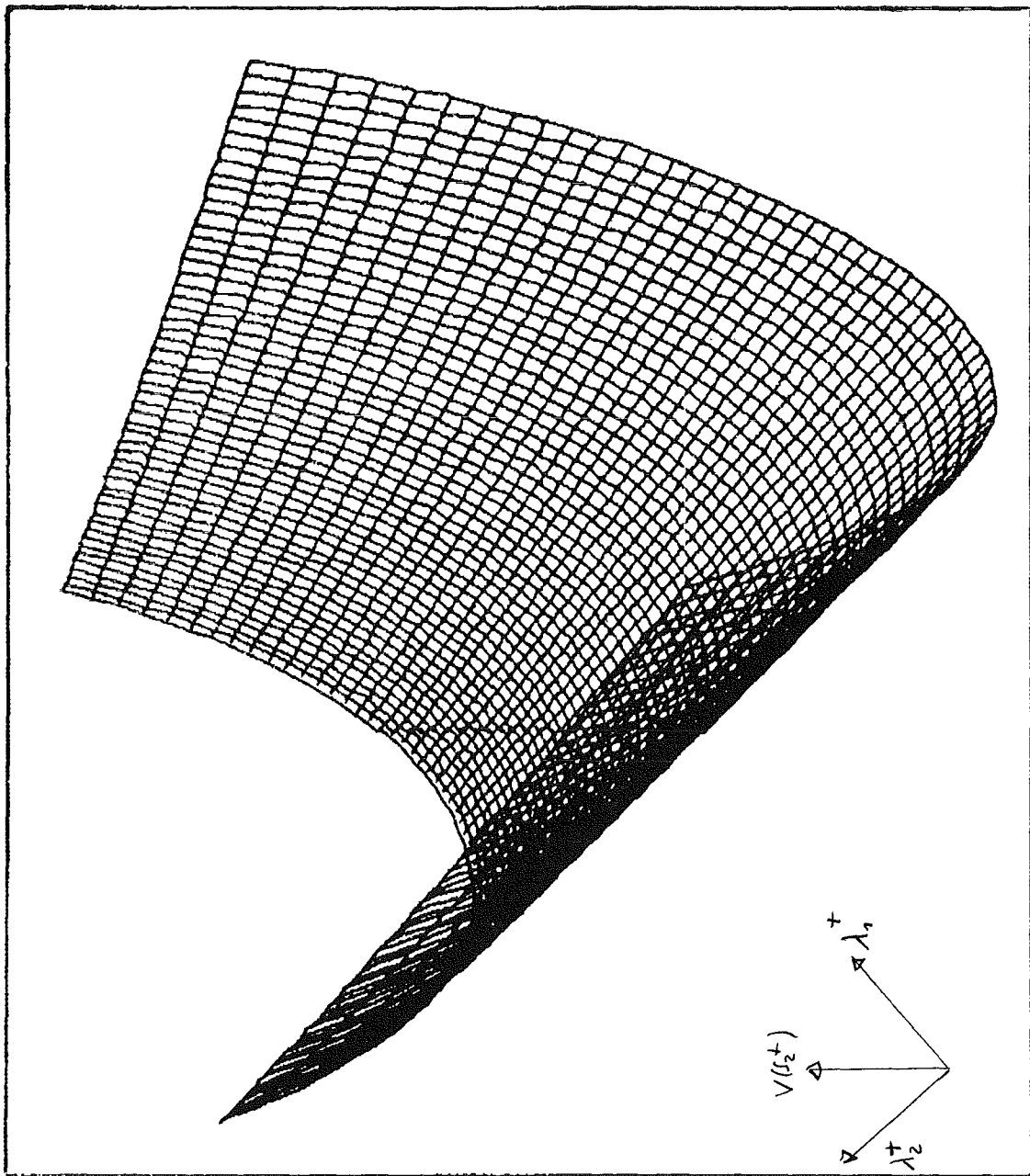


ABB. 000001

Tabelle 2-2: Anzahl benötigter Monte Carlo Spiele für ein System S_2 und verschiedene Ausfallwahrscheinlichkeiten

q_2	.80	.50	.20	.05
MCS	125	200	500	2000
R	.0125	.0333	.0666	.243

q_2 = Ausfallwahrscheinlichkeit des Parallelsystems
 $k_1 = 5$ Intervalle

MCS = Anzahl benötigter Monte Carlo Spiele um q_2
mit einem Fehler von 10 % abschätzen zu können

R = Rechenzeit auf einem IBM-Computer 370/168 in
Sekunden

benötigen, bei einem zugelassenen Fehler von 10 %. Um diese Größenordnung von q_2 , die in der Zuverlässigkeit häufig betrachtet wird, abschätzen zu können, ist es daher unumgänglich, ein Beschleunigungsverfahren anzuwenden, z.B. Importance Sampling.

In Tabelle 2-3 sind Ergebnisse numerischer Rechnungen für ein System S_2 dargestellt. Es zeigt sich, daß

- die theoretischen Varianzen mit den Stichprobenvarianzen für mehr als 10^3 Spiele recht gut übereinstimmen und
- die Rechenzeit um den durch Verwendung von Importance Sampling erzielten Faktor verkürzt wurde.

Dabei erbrachte die Verwendung des in Tabelle 2-1 dargestellten Faktors $F = 16.67$ eine Reduzierung von $3.45 \cdot 10^6$ auf 206 456 Monte Carlo Spiele, wobei ein Fehler von 10 % zu Grunde gelegt wurde. Die Rechenzeit verkürzte sich von 16,03 Minuten auf 57 Sekunden. Die Verwendung des besseren Faktors von $F = 17.22$ hätte nur eine Rechenzeitverbesserung von 2 Sekunden gegenüber dem Faktor $F = 16.67$ zur Folge gehabt.

Tabelle 2-3: Beispiel der Simulation eines Systems S_2 mit kleiner Ausfallwahrscheinlichkeit unter Verwendung des Faktors $F = 16.67$ aus Tabelle 2-1

Ausgangswerte:

$$\lambda_1 = .33 \cdot 10^{-4} \quad , \quad \lambda_1^* = \lambda_1 \quad , \quad \tau_1 = 100 \text{ h}$$

$$\lambda_2 = .60 \cdot 10^{-5} \quad , \quad \lambda_2^* = .39 \cdot 10^{-2} \quad , \quad \tau_2 = 500 \text{ h}$$

MCS		10^3	10^4	10^5
A N A	$\left\{ \begin{array}{l} q_{2/TH} \\ \sigma_{TH/OIS} \\ \sigma_{TH/MIS} \end{array} \right.$	$.29 \cdot 10^{-4}$	$.29 \cdot 10^{-4}$	$.29 \cdot 10^{-4}$
		$.17 \cdot 10^{-3}$	$.54 \cdot 10^{-4}$	$.17 \cdot 10^{-4}$
		$.10 \cdot 10^{-4}$	$.32 \cdot 10^{-5}$	$.10 \cdot 10^{-5}$
O I S	$\left\{ \begin{array}{l} AUSF \\ q_{2/ST} \\ \sigma_{ST} \\ R \end{array} \right.$	0	4	30
		0	$.40 \cdot 10^{-4}$	$.30 \cdot 10^{-4}$
		0	$.51 \cdot 10^{-4}$	$.17 \cdot 10^{-4}$
		.28	2.8	27.8
M I S	$\left\{ \begin{array}{l} AUSF \\ q_{2/ST} \\ \sigma_{ST} \end{array} \right.$	13	99	1049
		$.34 \cdot 10^{-4}$	$.29 \cdot 10^{-4}$	$.29 \cdot 10^{-4}$
		$.10 \cdot 10^{-4}$	$.33 \cdot 10^{-5}$	$.11 \cdot 10^{-5}$

Legende:

MCS = MONTE-CARLO-SPIELE

ANA = ANALYTISCH ERMITTELTE WERTE

OIS = DIREKTE SIMULATION OHNE IMPORTANCE SAMPLING

MIS = DIREKTE SIMULATION MIT IMPORTANCE SAMPLING

ST = STICHPROBE

TH = THEORETISCH

q = Systemausfallwahrsch.
 σ = Streuung
R = Rechenzeit in Sekunden
AUSF = Anzahl der Systemausfälle

3. Parallelsysteme S_3 und S_n mit periodischer Inspektion

3.1 Beschreibung der Parallelsysteme

Die in 2.1 gemachten Annahmen und Erklärungen gelten unverändert auch für die Systeme S_3 bzw. S_n , d.h. für Parallelsysteme, die nunmehr 3 bzw. n Komponenten aufweisen. Für die Praxis bedeutet das, daß im Gegensatz zum Parallelsystem S_2 mehr Komponenten ausfallen müssen, bevor der Systemausfall eintritt, d.h. die Zuverlässigkeit verbessert sich bei festgehaltener Ausfallwahrscheinlichkeit der Komponenten.

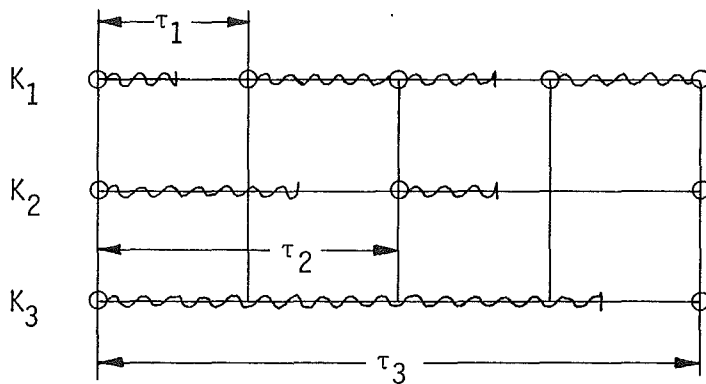
Die auf der folgenden Seite dargestellten Figuren 3-1 und 3-2 zeigen den schematischen Aufbau der Systeme S_3 und S_n . Wichtig ist dabei, daß das i -te Inspektionsintervall ein ganzzahliges Vielfaches des $(i-1)$ -ten Inspektionsintervalls ist ($i=2, \dots, n$).

3.2 Exakte analytische Lösung

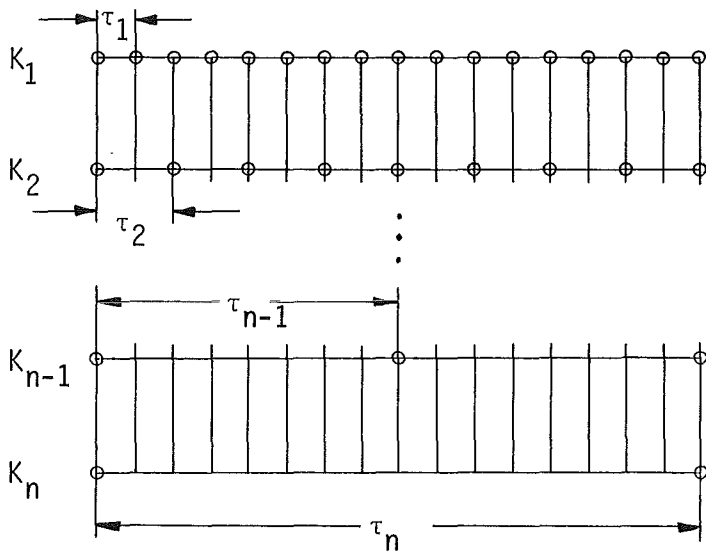
Die exakten Lösungen für die Systeme S_3 und S_n ergeben sich nach dem in 2.2 vorgestellten Formalismus. An dieser Stelle sollen die Formeln für die offene und geschlossene Form angegeben werden.

Formel (3-1) stellt keine direkte Verallgemeinerung von (2-4) dar: Entweder leitet man (3-1) über mühsame direkte Abzählung her oder aber indem man die relevanten Ereignisse im zugehörigen Produktraum "abzählt" (siehe Ref. /1/).

Figur 3-1: Diagramm zur Beschreibung eines Systems S_3



Figur 3-2: Diagramm zur Beschreibung eines Systems S_n



Legende zu Figur 3-1 und 3-2:

— = Ausfall der Komponente

~~~~ = Betrieb der Komponente

0 = Inspektionszeitpunkt

$\tau_i$  = Inspektionsintervall der Komponente  $i$ , wobei

$$\tau_2 = k_1 \cdot \tau_1$$

$$\tau_3 = k_2 \cdot \tau_2 = k_1 \cdot k_2 \cdot \tau_1$$

$$\tau_4 = k_3 \cdot \tau_3 = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \tau_1$$

$$\vdots$$

$$\tau_n = k_{n-1} \cdot \tau_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} k_i \cdot \tau_1$$

$$q_3 = q_1 \cdot \sum_{j=1}^{k_2} (1-q_2)^{k_2-j} \cdot \sum_{i=1}^{k_1} (1-q_1)^{k_1-i} \cdot \left(1-\text{EXP}(-i \cdot \lambda_2 \cdot \tau_1)\right) \cdot \left(1-\text{EXP}\left(-\left(i+k_1 \cdot (j-1)\right) \cdot \lambda_3 \cdot \tau_1\right)\right) \quad (3-1)$$

wobei  $q_1$  und  $q_2$  (vgl. (2-5) und (2-7)) die entsprechenden Formen für die Systeme  $S_1$  bzw.  $S_2$  und  $k_1$  und  $k_2$  wie in Figur 3-2 erläutert definiert sind.

Die geschlossene Form lautet bei Exponentialdichten als Lebensdauer-  
verteilungen:

$$\begin{aligned}
 q_3 = q_1 \cdot (1-q_2)^{k_2} \cdot & \left[ \frac{\text{EXP}(-\lambda_1 \tau_1 k_1) \cdot (1-1/(1-q_2))^{k_2}}{(1-q_2) \cdot (1-1/(1-q_2)))} \right. \quad (3-2) \\
 & \cdot \left( \text{EXP}(\lambda_1 \tau_1) \cdot \frac{1-\text{EXP}(-\lambda_1 \tau_1 k_1)}{1-\text{EXP}(-\lambda_1 \tau_1)} - \text{EXP}(-(\lambda_2-\lambda_1) \tau_1) \cdot \frac{1-\text{EXP}(-(\lambda_2-\lambda_1) \tau_1 k_1)}{1-\text{EXP}(-(\lambda_2-\lambda_1) \tau_1)} \right) \\
 & - \left( \text{EXP}(-(\lambda_3-\lambda_1) \tau_1) \cdot \frac{1-\text{EXP}(-(\lambda_3-\lambda_1) \tau_1 k_1)}{1-\text{EXP}(-(\lambda_3-\lambda_1) \tau_1)} \right. \\
 & - \left. \left. \text{EXP}(-(\lambda_3+\lambda_2-\lambda_1) \tau_1) \cdot \frac{1-\text{EXP}(-(\lambda_3+\lambda_2-\lambda_1) \tau_1 k_1)}{1-\text{EXP}(-(\lambda_3+\lambda_2-\lambda_1) \tau_1)} \right) \right) \\
 & \cdot \left. \frac{\text{EXP}(-\lambda_3 \tau_1 k_1) \left( 1 - \left( \frac{\text{EXP}(-\lambda_3 \tau_1 k_1)}{1-q_2} \right)^{k_2} \right)}{(1-q_2) \left( 1 - \frac{\text{EXP}(-\lambda_3 \tau_1 k_1)}{1-q_2} \right)} \right] .
 \end{aligned}$$

Bei den nachfolgenden numerischen Rechnungen werden wir sowohl von  
der offenen Form (3-1) als auch von der geschlossenen Form (3-2)  
Gebrauch machen: Die geschlossene Form hat den Vorzug, genauere Er-  
gebnisse zu liefern, wird jedoch in Spezialfällen (z.B.  $\lambda_1=\lambda_2$ ) zur

unbestimmten Form, d.h. zur EDV-Auswertung ungeeignet. Diese Schwierigkeit tritt bei der offenen Form (3-1) nicht auf.

Für das System  $S_n$  sei an dieser Stelle der Vollständigkeit halber der Ausdruck für die offene Form angegeben

$$\begin{aligned}
 q_n = & q_1 \cdot \sum_{i_1=1}^{k_{n-1}} (1-q_{n-1})^{k_{n-1}-i_1} \cdot \sum_{i_2=1}^{k_{n-2}} (1-q_{n-2})^{k_{n-2}-i_2} \dots \\
 & \dots \sum_{i_{n-2}=1}^{k_2} (1-q_2)^{k_2-i_{n-2}} \cdot \sum_{i_{n-1}=1}^{k_1} (1-q_1)^{k_1-i_{n-1}} \quad (3-3)
 \end{aligned}$$

$$\cdot (1-\text{EXP}(-i_{n-1} \cdot \lambda_2 \tau_1)) \cdot (1-\text{EXP}(-(i_{n-1}+k_1 \cdot (i_{n-2}-1)) \lambda_3 \tau_1)) \dots$$

$$\dots (1-\text{EXP}(-(i_{n-1}+k_1(i_{n-2}-1))+k_1 k_2(i_{n-3}-1)+ \dots + \prod_{\ell=1}^{n-1} k_{\ell}(i_1-1)) \lambda_n \tau_1)).$$

In den nachfolgenden numerischen Rechnungen werden wir uns auf die Behandlung der Systeme  $S_2$  und  $S_3$  beschränken.

### 3.3 Monte Carlo Simulation ohne Importance Sampling

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf eine Darstellung der später verwendeten Formeln für das Parallelsystem  $S_n$ , da die entsprechenden Formeln für das Parallelsystem  $S_3$  durch eine direkte Spezialisierung gewonnen werden können.

Entsprechend der im zweiten Kapitel definierten Strukturfunktion  $\Phi(t_1, t_2)$  definieren wir die Strukturfunktion für das System  $S_n$  in folgender Form:

$$\Phi(\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, t_n) = \begin{cases} 0 & (\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, t_n): \text{System in Betrieb} \\ \text{für} & \\ 1 & (\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, t_n): \text{System ausgefallen} \end{cases} \quad (3-4)$$

Mit Hilfe dieser Strukturfunktion läßt sich die Ausfallwahrscheinlichkeit für das System  $S_n$  wie folgt angeben:

$$q_n = E(\Phi(\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, t_n)) = \int \dots \int_{\text{e-fach}} \Phi(\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, t_n) \cdot f(\underline{t}_1) \dots f(t_n) dt_1 \dots dt_n =$$

oder explizit

$$\begin{aligned}
 q_n = & \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \underbrace{\phi(t_1, t_2, \dots, t_n)}_{\text{e-fach}} \cdot \lambda_1^{\ell_1} \cdot \text{EXP}(-\lambda_1 \sum_{i=1}^{\ell_1} t_{1i}) \\
 & \dots \lambda_{n-1}^{\ell_{n-1}} \cdot \text{EXP}(-\lambda_{n-1} \sum_{i=1}^{\ell_{n-1}} t_{n-1i}) \lambda_n^{\ell_n} \cdot \text{EXP}(-\lambda_n t_n) \\
 & \cdot \underbrace{dt_1}_{\dots} \underbrace{dt_2}_{\dots} \dots \underbrace{dt_{n-1}}_{\dots} dt_n
 \end{aligned} \tag{3-5}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \lambda_i &= \tau_n / \tau_i \\
 e &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad .
 \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, n .$$

Die Schätzfunktion für die Ausfallwahrscheinlichkeit  $q_2$  lautet somit in Analogie zu (2-14):

$$S_n = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \phi(\underbrace{t_{1j}}_{\dots}, \underbrace{t_{2j}}_{\dots}, \dots, \underbrace{t_{n-1j}}_{\dots}, t_{nj}) \quad . \tag{3-6}$$

Die Schätzfunktion ist aufgrund ihrer Konstruktion erwartungstreu:

$$E(S_n) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m E(\phi(\underline{t_{1j}}, \dots, t_{nj}))$$

(3-7)

$$= \frac{1}{m} \cdot m \cdot q_n = q_n \quad .$$

Und für die Varianz

$$V(S_n) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m V(\phi(\underline{t_{1j}}, \dots, t_{nj}))$$

ergibt sich wegen

$$V(\phi) = E(\phi^2) - E^2(\phi)$$

$$\phi^2 = \phi$$

und weiter wegen (3-6)

$$V(S_n) = \frac{1}{m^2} \cdot m \cdot (q_n - q_n^2)$$

$$= \frac{1}{m} \cdot q_n(1 - q_n) \quad .$$

(3-8)



### 3.4 Monte Carlo Simulation mit Importance Sampling

Ziehen wir jetzt die Stichprobe nicht aus der Dichte  $f(t_1, \dots, t_n)$ , sondern aus der neuen Dichte  $f^*(t_1, \dots, t_n)$  und führen das Gewicht

$$w = \frac{f(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n)}{f^*(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n)}$$

ein, so können wir die Ausfallwahrscheinlichkeit  $q_n$  entsprechend (3-5) in der folgenden Form schreiben:

$$q_n = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \underbrace{\Phi(t_1, \dots, t_n)}_{\text{e-fach}} \cdot w \cdot f^*(t_1, \dots, t_n) dt_1, \dots, dt_n \quad (3-9)$$

Eine erwartungstreue Schätzung für  $q_n$  ist gegeben durch

$$S_n^* = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \Phi(t_{1j}, \dots, t_{nj}) \cdot w_j, \quad (3-10)$$

wobei

$$w_j = \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1^*} \right)^{\ell_1} \cdot \text{EXP}(-(\lambda_1 - \lambda_1^*) \cdot \sum_{i=1}^{\ell_1} t_{1i}) \cdot \dots \quad (3-11)$$

$$\left( \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-1}^*} \right)^{\ell_{n-1}} \cdot \text{EXP}(-(\lambda_{n-1} - \lambda_{n-1}^*) \cdot \sum_{i=1}^{\ell_{n-1}} t_{n-1i}) \cdot \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_n^*} \right)^{\ell_n}$$

$$\cdot \text{EXP}(-(\lambda_n - \lambda_n^*) \cdot \sum_{i=1}^{\ell_n} t_{ni}) \quad .$$

### 3.4.1 Varianz der Schätzfunktion

Für die Varianz der durch (3-10) gegebenen Schätzung  $S_n^*$  ergibt sich mit  $\Phi(\underline{t}_{1j}, \dots, t_{nj}) = \Phi_j$ ,  $w(\underline{t}_{1j}, \dots, t_{nj}) = w_j$

$$V(S_n^*) = \frac{1}{m^2} \cdot \sum_{j=1}^m V(\Phi_j \cdot w_j) \quad (3-12)$$

wobei mit  $\Psi_j = \Phi_j \cdot w_j$

$$\begin{aligned}
 V(\phi_j \cdot w_j) &= E(\phi_j^2 \cdot w_j^2) - E^2(\phi_j \cdot w_j) \\
 &= E(\psi^2) - E^2(\psi) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{3-13}$$

Wegen  $E(\psi_j^2) = E(\psi^2)$  und  $E(\psi_j) = q_n$  für alle  $j$  ergibt sich somit aus (3-12)

$$V(S_n^*) = \frac{1}{m} \cdot (E(\psi^2) - q_n^2) \quad .
 \tag{3-14}$$

Die Berechnung erfolgt nach dem in 1.5.1 vorgestellten Verfahren. An dieser Stelle soll auf die Berechnung verzichtet werden, und es sei nur die Endform genannt. Es ergibt sich für die Varianz (3-12) daher mit (3-14):

$$V(S_n^*) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{m} \cdot \left[ \prod_{i=1}^{n-1} g(\lambda_i, \lambda_i^*)^{\lambda_i} \cdot g(\lambda_n, \lambda_n^*) \right. & 0 \leq \lambda_i^* \leq 2\lambda_i \\ \left. \cdot q_n(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n) - q_n^2 \right] & i=1, \dots, n-1 \\ \infty & \text{für } 0 \leq \lambda_n \end{array} \right. \tag{3-15}$$

sonst

wobei

$$g(x,y) = \frac{x^2}{y(2x-y)}$$

$$\hat{\lambda}_i = 2\lambda_i - \lambda_i^* \quad \text{für } i=1, \dots, n$$

und wobei weiter  $q_n(\hat{\lambda}_1 \dots \hat{\lambda}_n)$  gegeben ist durch einen Ausdruck, den wir aus (3-5) erhalten, indem wir  $\lambda_i$  durch  $\hat{\lambda}_i$ ,  $i=1 \dots n$ , ersetzen.

### 3.4.2 Optimierung der Parameter

Die Minimierung der Varianz  $V(S_n^*)$  nach den Parametern  $\lambda_i^*$  erfolgt nach den gleichen Kriterien wie bei dem System  $S_2$ . Auch hier dürfen wir die Parameter  $\lambda_i^*$  für  $i \neq n$  nur in den Bereichen  $\lambda_i \leq \lambda_i^* < 2\lambda_i$ ,  $i=1, \dots, n-1$  variieren, während für  $\lambda_n^*$  der Bereich  $\lambda_n \leq \lambda_n^*$  gilt, da sonst die Varianz unendlich groß wird.

Die geringe Variationsmöglichkeit der Parameter  $\lambda_i^*$ ,  $i \neq n$  minimiert die Varianz  $V(S_n^*)$  nicht entscheidend. Der Hauptbeitrag wird, wie schon beim System  $S_2$ , von der  $n$ -ten Komponente erbracht. Das vereinfacht die Optimierung und das Erstellen der Gewichtsfunktion entscheidend, da man nur noch die  $n$ -te Komponente berücksichtigen muß.

#### 4. Auswertung von Fehlerbäumen mit periodischer Inspektion

##### 4.1 Beschreibung des Fehlerbaumes

Angelpunkt unserer Überlegungen ist der Fehlerbaum. Er ist das logische Äquivalent eines Systems, dessen Zuverlässigkeitsdaten man ermitteln will. Laut DIN 25424 /9/ wird er wie folgt beschrieben:

"Der Fehlerbaum ist eine graphische Darstellung der logischen Zusammenhänge zwischen den Fehlerbaumeingängen, die zu einem vorgegebenen unerwünschten Ereignis führen".

Hierbei handelt es sich meist um technische Systeme, wie z.B. Flugzeuge, Atomreaktoren, Prozeßabläufe oder Subsysteme wie z.B. Kühlwasserkreislauf eines Reaktors, Notstromversorgung einer Weltraumkapsel. Vor Erstellung des Fehlerbaumes erfolgt eine genaue Systemanalyse der spezifischen Kenngrößen wie Struktur, Ausfallverhalten der Komponenten, Abhängigkeiten, Komponentendaten usw. Hat man alle Einflußkriterien bestimmt, so kann man den Fehlerbaum generieren. Hierbei gibt es verschiedene Techniken, die einen Baum teilweise automatisch erzeugen /10/. Mit Hilfe des Fehlerbaumes lassen sich sodann die probabilistischen Kenngrößen ermitteln, die eine Aussage über das Ausfallverhalten des Systems ermöglichen, wenn man zuvor die Minimalschnitte bestimmt hat (vgl. Figur 4-1).

Der Fehlerbaum ist ein Modell, das graphisch und logisch die verschiedenen möglichen Ereignisse (z.B. Ausfall oder Betrieb) repräsentiert, die in dem System vorkommen können, und zu dem TOP-Ereignis führen (in unserem Fall der Systemausfall). Er besteht aus einer endlichen Anzahl von Komponenten und Toren. Dabei können die Tore beliebig viele Eingänge in Form von Toren oder Komponenten haben und beliebig viele Ausgänge zu anderen Toren sein. Einziger Ausgang des Fehlerbaumes ist das TOP-Ereignis, das entsprechend der jeweiligen Fragestellung definiert wird.

Wir beschränken uns auf zwei Arten von Toren:

AND - Tor dieses Tor ist ausgefallen, falls alle Eingänge (Komponenten oder Tore) ausgefallen sind;

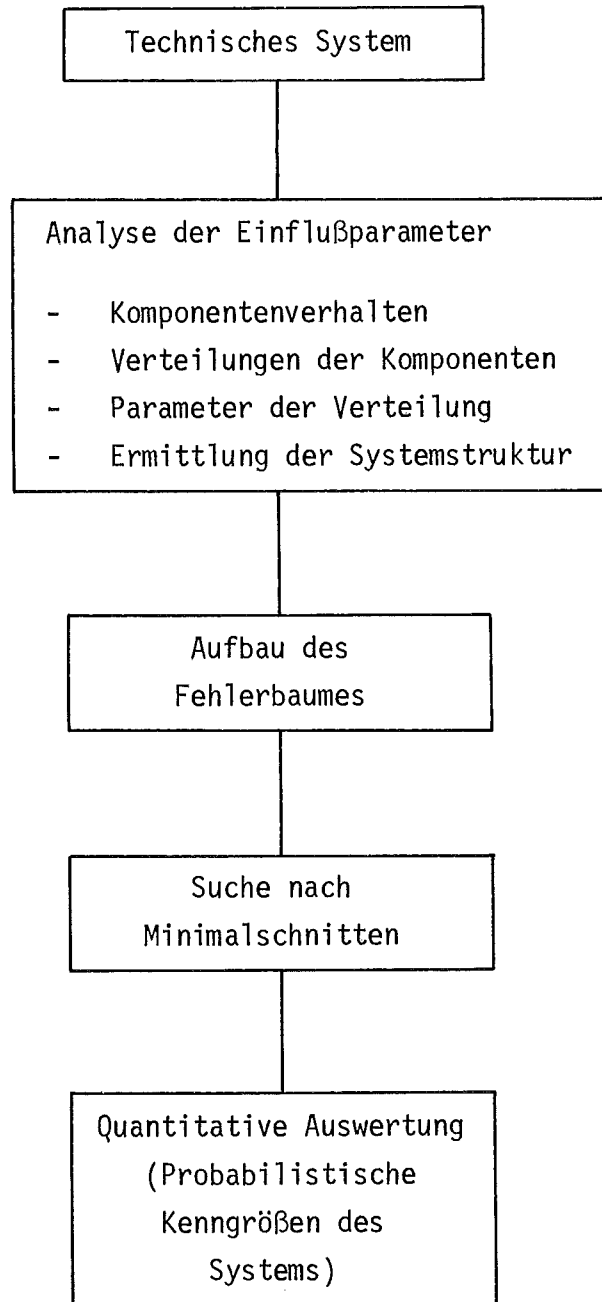
OR - Tor dieses Tor ist ausgefallen, falls wenigstens ein Eingang ausgefallen ist;

wobei das AND - Tor die Charakteristik eines Parallelsystems, und das OR - Tor die eines Seriensystems hat /11/. In Figur 4-2a sind die graphischen Symbole für AND- und OR - Tore dargestellt. Wir nehmen an, daß sich die Komponenten nur in zwei Zuständen befinden können, sie sind ausgefallen oder intakt. Auch bei dem System wird lediglich zwischen einwandfreier Funktion und Ausfall unterschieden. Jede Möglichkeit einer teilweisen Funktionsfähigkeit des Gesamtsystems oder seiner Komponenten wird ausgeschlossen. Der Betrieb oder Ausfall des Systems wird allein durch den Zustand der Komponenten bestimmt /12/.

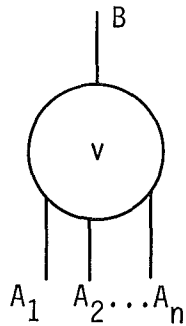
Das oben beschriebene Modell ist in der Lage, eine große Klasse von Systemen mittels eines Fehlerbaumes darzustellen. Es soll darüberhinaus an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß neuere Theorien sich mit Fehlerbäumen, die mehrere Ausgänge haben und deren Komponenten mehrere Zustände annehmen können, befassen /13/. Wir jedoch beschränken uns auf die obigen Modellannahmen.

Der Zustand der Komponenten des betrachteten Systems sowie des gesamten Systems läßt sich nun durch binäre oder Boolesche Variable beschreiben, d.h. durch Variable, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen können /14/. In Figur 4-2b sind die den oben eingeführten Toren entsprechenden Verknüpfungssymbole für AND - und OR - Tore dargestellt.

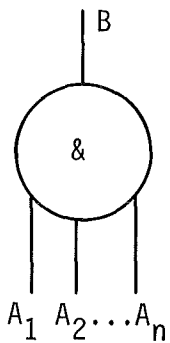
Figur 4-1: Vorgehensweise bei der Fehlerbaumanalyse



Figur 4-2a: Darstellung von OR - Tor und AND - Tor



$$\begin{aligned} \text{OR - Tor } B &= A_1 \text{ or } A_2 \dots \text{ or } A_n \\ &= A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{AND - Tor } B &= A_1 \text{ and } A_2 \dots \text{ and } A_n \\ &= A_1 \cdot A_2 \dots A_n \end{aligned}$$

Figur 4-2b: Wahrheitstafel für OR - Tor und AND - Tor für jeweils zwei Eingänge

| Eingänge |       | Boolesche Addition<br>OR - Tor | Boolesche Multiplikation<br>AND - Tor |
|----------|-------|--------------------------------|---------------------------------------|
| $A_1$    | $A_2$ | $B = A_1 \vee A_2$             | $B = A_1 \cdot A_2$                   |
| 1        | 1     | 1                              | 1                                     |
| 0        | 1     | 1                              | 0                                     |
| 1        | 0     | 1                              | 0                                     |
| 0        | 0     | 0                              | 0                                     |



Beschreiben wir den Zustand der  $i$ -ten Komponente mit Hilfe der Booleschen Variablen  $x_i$  in folgender Form:

$$x_i := \begin{cases} 0 & \text{Komponente } i \text{ funktioniert} \\ 1 & \text{Komponente } i \text{ ist ausgefallen} \end{cases} \quad (4-1)$$

für  $i = 1, \dots, n$

$n =$  Anzahl der Komponenten im System,

so läßt sich der Zustand des gesamten Systems mit Hilfe einer Booleschen Funktion  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  beschreiben, die definiert ist durch

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) := \Phi(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{System funktioniert} \\ 1 & \text{System ist ausgefallen.} \end{cases} \quad (4-2)$$

Diese Funktion, die eine Indikatorfunktion des TOP-Ereignisses darstellt, wird als Strukturfunktion des Systems bezeichnet.

Definieren wir weiter

$$\Phi(1, \dots, 1) = 1 \quad (4-3)$$

$$\Phi(0, \dots, 0) = 0 \quad (4-4)$$

$$\Phi(\underline{x}^1) \leq \Phi(\underline{x}^2) \quad \text{mit} \quad \underline{x}^1 \leq \underline{x}^2 \quad (4-5)$$

und nehmen wir weiter an, unser System bestehe nur aus wesentlichen Komponenten <sup>1)</sup>, so nennen wir den Fehlerbaum kohärent /15/. In unseren Überlegungen betrachten wir nur kohärente Fehlerbäume.

Bemerkung:

In Kapitel 2 haben wir die Strukturfunktion in einer anderen Form eingeführt (siehe (2-12), bzw. (3-4)). Wir erhalten die Form (4-2) jedoch in einfacher Weise aus der das zu betrachtende System beschreibenden und entsprechenden Form (3-4), indem wir die folgende Transformation durchführen

$$t_{ij} \rightarrow x_{ij}; \quad x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } t_{ij} \geq \tau_{ij} \\ 1 & \text{für } t_{ij} < \tau_{ij} \end{cases},$$

wobei  $t_{ij}$  bzw.  $x_{ij}$  den Zustand der  $i$ -ten Komponente im  $j$ -ten Intervall beschreibt. Der Einfachheit halber bezeichnen wir beide Typen von Strukturfunktion mit dem gleichen Buchstaben  $\Phi$ .

---

<sup>1)</sup> die  $i$ -te Komponente heißt unwesentlich, wenn

$$\Phi(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$

$$\Phi(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

für alle Realisierungen gilt. Andernfalls heißt die Komponente  $i$  wesentlich.

## 4.2 Darstellung mittels Ersatzschaltbilder

Zur Ermittlung der Strukturfunktion ist es nötig, den Fehlerbaum in ein Ersatzschaltbild zu zerlegen. Eines dieser Ersatzschaltbilder ist die Darstellung mittels Minimalschnitte. Ein Schnitt ist eine Kombination von Komponenten, bei deren gemeinsamen Ausfall das System ausfällt. Ein Schnitt ist minimal, wenn er keinen anderen Schnitt als Untermenge enthält /16/.

Anschaulich gesprochen entspricht ein Minimalschnitt der Parallelschaltung der ihn bildenden Komponenten. Die Serienschaltung aller Minimalschnitte repräsentiert dann den Fehlerbaum.

Bei großen Bäumen ist es recht mühselig alle Schnitte zu finden, da z.B. ein Baum von nur 30 Komponenten und 47 Toren schon über 200.000 Schnitte mit 216 Minimalschnitten aufwies, wobei nur Minimalschnitte mit weniger als 8 Komponenten berücksichtigt wurden. In der Praxis erzeugt man die Schnitte mit EDV-Programmen, die auf der Simulation oder auf der analytischen Berechnung der Schnitte beruhen /17/, /18/, /19/. Nachdem inzwischen gute analytische Methoden zur Verfügung stehen, wird der Weg der Simulation kaum mehr angewandt. Im allgemeinen wird der Algorithmus von Fussell bevorzugt, da er mit sehr kleinen Rechenzeiten die Schnitte erzeugt.

Für die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems haben die Schnitte mit vielen Komponenten nur geringe Bedeutung, da ihr Beitrag zur Ausfallwahrscheinlichkeit oder Unverfügbarkeit des Systems gering ist. Vernünftigerweise wird man nur Schnitte einer bestimmten Maximallänge zulassen, um den Rechenaufwand nicht unnötig anwachsen zu lassen. Ab welcher Komponentenzahl man abschneidet hängt von der jeweiligen Fragestellung ab (Varianzforderungen, Struktur des Systems, Ausfallwahrscheinlichkeit der Komponenten).

Seien  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$  die den Zustand der Komponenten eines Minimalchnittes beschreibenden Booleschen Variablen, so wird der Zustand des  $i$ -ten Schnittes durch das Boolesche Produkt

$$C_i = x_{i1} \cdot x_{i2} \cdot \dots \cdot x_{ik} \quad (4-6)$$

beschrieben und die Strukturfunktion  $\Phi(\underline{x})$  des Systems ergibt sich zu

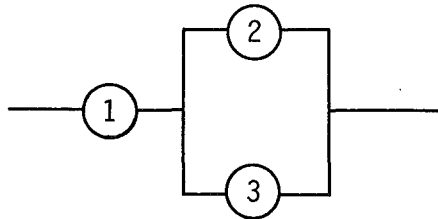
$$\begin{aligned} \Phi(\underline{x}) &= 1 - \prod_{i=1}^r (1 - C_i) \\ &= \sum_i C_i - \sum_{i \neq j} C_i \cdot C_j + \sum_{i \neq j \neq k} C_i \cdot C_j \cdot C_k - + \dots \\ &\quad + (-1)^{r-1} \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \dots \cdot C_r, \end{aligned} \quad (4-7)$$

$$i = 1, \dots, r$$

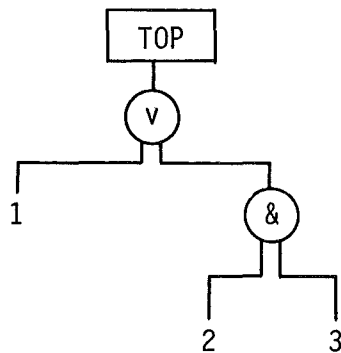
$r$  : Anzahl der Minimalchnitte des Systems

wobei wir die logische Struktur auf ein OR - Tor, bei dem die Minimalchnitte die Eingänge sind, reduziert haben. In Figur 4-3 wird dies mit Hilfe eines einfachen Beispiels erläutert; gleichzeitig stellt diese Figur eine Illustration der in Figur 4-1 schematisch vorgestellten Vorgehensweise des Fehlerbaumes dar. Die der Vollständigkeit halber in Figur 4-3 angegebene Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems wird im nächsten Abschnitt erläutert.

Figur 4-3: Beispiel zur Ermittlung der Strukturfunktion und der Ausfallwahrscheinlichkeit für ein einfaches System im Systemregenerationsintervall



System



Fehlerbaum

$$C_1 = x_1, \quad C_2 = x_2 x_3$$

Minimalschnitte

$$\Phi(\underline{x}) = 1 - \prod_{i=1}^2 (1 - C_i)$$

$$= 1 - (1 - x_1) (1 - x_2 x_3)$$

Strukturfunktion

$$= x_1 + x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3$$

$$q_s = E(\Phi(\underline{x})) = q_{x_1} + q_{x_2 x_3} - q_{x_1 x_2 x_3}$$

Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems

$$q_s = q_{x_1} + q_{x_2 x_3} - q_{x_1} \cdot q_{x_2 x_3}$$

bei Unabhängigkeit der Komponenten

### 4.3 Analytische Lösung für die Systemausfallwahrscheinlichkeit über die Minimalschnitte

Zur Berechnung der Systemausfallwahrscheinlichkeit  $q_s$  im Regenerationsintervall <sup>1)</sup> des Systems müssen wir zuerst die Ausfallwahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Minimalschnitte des Systems bestimmen. Aus diesen läßt sich dann mit Hilfe der Formel (4-7) die Systemausfallwahrscheinlichkeit bestimmen. Zuvor jedoch zwei Vorbemerkungen:

#### 1.) Unterschiedliche Regenerationsintervalle von Minimalschnitten

Da wir periodisch inspizierbare Systeme betrachten, ist oftmals der Fall gegeben, daß die Minimalschnitte des Systems unterschiedliche Regenerationspunkte <sup>1)</sup> haben. Zur Berechnung der Systemausfallwahrscheinlichkeit  $q_s$  müssen sich aber alle Minimalschnitte auf das gleiche Regenerationsintervall des Systems beziehen. Folgende Formel ermöglicht die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit  $q_T$  eines Schnittes im Zeitraum  $(0, T)$ , wobei  $T$  der Systemregenerationspunkt ist, wenn die Ausfallwahrscheinlichkeit des Schnittes  $q_t$  für den Zeitraum  $(0, t)$  vorliegt, wobei  $t$  der Regenerationspunkt des Schnittes ist.

$$q_T = 1 - (1 - q_t)^w \quad (4-8)$$

Dabei gilt  $w = T / t$ .

---

<sup>1)</sup> Ein Regenerationsintervall eines  $n$ -komponentigen Parallelsystems (entspricht einem Schnitt) stellt das kleinste gemeinsame Vielfache der Inspektionsperioden der Komponenten dar. Als Regenerationspunkt bezeichnen wir den Endpunkt des Regenerationsintervalles.

2.) Komponenten mit gleichen Inspektionsintervallen im gleichen Minimalschnitt

Die analytische Formel der Ausfallwahrscheinlichkeit  $q_n$  (3-3) eines periodisch inspizierbaren Parallelsystems gilt nur, falls die vorkommenden Komponenten unterschiedliche Inspektionsintervalle  $\tau_j$  haben. Haben mehrere Komponenten die gleichen Inspektionsintervalle, so kann man sie wie folgt zu einer Komponente zusammenfassen.

Seien  $\tau_{i1} = \tau_{i2} = \dots = \tau_{in}$  die gleichen Inspektionsperioden verschiedener Komponenten, die wir zu der Komponente  $i$  zusammenfassen wollen, so gilt für die Ausfallwahrscheinlichkeit  $q_i$  dieser Komponente  $i$ , wenn  $q_{ij}$ ,  $i=1, \dots, n$ , die Ausfallwahrscheinlichkeit der  $j$ -ten Unterkomponente ist:

$$q_i = q_{i1} \cdot q_{i2} \cdot \dots \cdot q_{in} \cdot$$

Sind die Lebensdauern  $\lambda_{ij}$  der Unterkomponenten alle gleich, so erhalten wir einfach:

$$q_i = q_{i1}^n \cdot$$

Im folgenden gehen wir von einem wohldefinierten Systemregenerationspunkt sowie von der Annahme aus, daß alle Komponenten eines Schnitts unterschiedliche Inspektionsintervalle haben.

Für die  $i$ -te Komponente des Systems, die wir durch die Boolesche Variable  $x_i$  darstellen, ist die Ausfallwahrscheinlichkeit  $q_i$  gegeben durch

$$w(x_i = 1) = q_i = 1 \cdot q_i + 0 \cdot (1 - q_i) = E(x_i) . \quad (4-9)$$

Somit ist die Ausfallwahrscheinlichkeit des i-ten Schnittes, der durch das Boolesche Produkt (4-6) charakterisiert wird, gegeben durch

$$w(C_i = 1) = q_{C_i} = E(C_i) = E(x_{i1} \cdot \dots \cdot x_{ik}) . \quad (4-10)$$

Die Formel (4-10) läßt sich wegen der unterschiedlichen Inspektionszeiten der Komponenten im allgemeinen nicht faktorisieren, auch dann nicht, wenn die Komponenten des Schnittes unabhängig sind.

Die Systemausfallwahrscheinlichkeit  $q_s$  im Systemregenerationsintervall läßt sich nun mit Hilfe der Formeln (4-6), (4-7) und (4-10) wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} w(\Phi(\underline{x}) = 1) &= q_s = E(\Phi(\underline{x})) = E\left(1 - \prod_{i=1}^r (1 - C_i)\right) \quad (4-11) \\ &= \sum_i E(C_i) - \sum_{i \neq j} E(C_i \cdot C_j) + \dots (-1)^{r-1} \cdot E(C_1 \cdot C_2 \dots C_r) \\ &= \sum_i q_{C_i} - \sum_{i \neq j} E(C_i \cdot C_j) + \dots (-1)^{r-1} \cdot E(C_1 \cdot C_2 \dots C_r) , \end{aligned}$$

wobei hier alle Ausfallwahrscheinlichkeiten der Minimalschnitte auf das Systemregenerationsintervall bezogen sein müssen.

Für den Fall, daß keine der Systemkomponenten in mehreren Minimalschnitten vorkommt, gilt



$$E(C_i \cdot C_j) = E(C_i) \cdot E(C_j) = q_{C_i} \cdot q_{C_j}, \quad i \neq j$$

und wir erhalten aus (4-11)

$$q_s = \sum_i q_{C_i} - \sum_{i \neq j} q_{C_i} \cdot q_{C_j} + \dots (-1)^{r-1} \cdot q_{C_1} \cdot \dots \cdot q_{C_r} \quad (4-12)$$

Ein einfaches Beispiel ist in Figur 4-3 gegeben.

Andernfalls lassen sich die Summanden in (4-11) nicht faktorisieren. Die dann auftretenden Summanden

$$E(C_i \cdot C_j) = q_{C_i C_j}, \quad E(C_i \cdot C_j \cdot C_k) = q_{C_i C_j C_k}, \quad \dots$$

entsprechen den Ausfallwahrscheinlichkeiten von Parallelsystemen mit periodischer Inspektion mit entsprechend vielen Komponenten.

Als Beispiel betrachten wir einen Fehlerbaum mit den Minimalschnitten  $x_1 x_2 x_3$ ,  $x_4 x_5$ ,  $x_2 x_4$ . Entsprechend (4-7) lautet die Strukturfunktion des zugehörigen Systems

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{x}) &= x_1 x_2 x_3 + x_4 x_5 + x_2 x_4 - x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ &\quad - x_1 x_2 x_3 x_4 - x_2 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ &= x_1 x_2 x_3 + x_4 x_5 + x_2 x_4 - x_1 x_2 x_3 x_4 - x_2 x_4 x_5 \end{aligned}$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit dieses Systems ist dann gegeben durch

$$q_s = q_{123} + q_{45} + q_{24} - q_{1234} - q_{245} \quad .$$

#### 4.4 Direkte Simulation des Baumes

##### 4.4.1 Einführung

Bei der direkten Simulation eines Fehlerbaumes müssen wir für jeden Ereignispunkt prüfen, ob der Systemausfall eintritt oder nicht, d.h. jede einzelne Komponente wird auf Funktionieren oder Ausfall abgefragt, und mit dieser Information wird der Baum abgearbeitet. Dabei versteht man unter einem Ereignispunkt einen Zeitpunkt, an dem eine Komponente ihren Zustand ändert (z.B. Komponenten fallen aus, Reparaturzeiten beginnen oder Komponenten gehen wieder in Betrieb).

In unserem Modell der periodischen Inspektion sind von vornherein Ereignispunkte durch die Regenerationspunkte der Komponenten festgelegt. An jedem dieser Punkte läßt sich eine klare Aussage machen, ob die Komponente in Betrieb oder ausgefallen ist. Unser System ist bis zum Systemregenerationspunkt nicht ausgefallen, falls es bei allen Ereignispunkten in Betrieb ist.

Die folgenden Abschnitte 4.4.2 und 4.4.3 stellen eine sinngemäße Übertragung der Abschnitte 2.3 und 2.4 auf Fehlerbäume dar.

#### 4.4.2 Monte Carlo Simulation ohne Importance Sampling

Entsprechend der Vorgehensweise in Abschnitt 2.3 läßt sich mit Hilfe der Strukturfunktion  $\Phi(\underline{t})$  des betrachteten Fehlerbaumes, die gegeben ist durch

$$\Phi(\underline{t}) = \begin{cases} 0 & \underline{t}: \text{ System in Betrieb} \\ \text{für} & \\ 1 & \underline{t}: \text{ System ausgefallen} \end{cases},$$

die Systemausfallwahrscheinlichkeit  $q_s$  in folgender Form darstellen

$$q_s = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \Phi(\underline{t}) \cdot \prod_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^{k_i} \lambda_i \cdot \text{EXP}(-\lambda_i \cdot t_{ij}) \right) dt \quad (4-13)$$

$$= \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \Phi(\underline{t}) \cdot \prod_{i=1}^n \lambda_i^{k_i} \cdot \text{EXP}(-\lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{k_i} t_{ij}) dt$$

$$i = 1, \dots, n$$

$n$  = Anzahl der Komponenten im Fehlerbaum

$S$  = Systemregenerationsintervall

$k_i$  =  $S/\tau_i$ , Anzahl der Inspektionsintervalle der  $i$ -ten Komponente im Regenerationsintervall

$\tau_i$  = Inspektionsintervall der  $i$ -ten Komponente

$$e = \sum_{i=1}^n k_i$$

Weiter deuten wir die Systemausfallwahrscheinlichkeit wieder als Erwartungswert der Strukturfunktion  $\Phi$ ,

$$q_S = E(\Phi) \quad .$$

Somit ist eine Schätzfunktion  $S$  für die Systemausfallwahrscheinlichkeit  $q_S$  gegeben durch

$$S = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m \Phi(\underline{t}_j) \quad . \quad (4-14)$$

Entsprechend der Ableitung von (2-15) und (2-16) sieht man, daß  $S = \hat{q}_S$  eine erwartungstreue Schätzung ist, und für die Varianz gilt

$$V(S) = \frac{1}{m} \cdot q_S \cdot (1 - q_S) \quad . \quad (4-15)$$

#### 4.4.3 Monte Carlo Simulation mit Importance Sampling

Zur Reduzierung der Varianz der Schätzfunktion  $S$  führen wir die neue Dichte  $f^*(\underline{t})$  ein, so daß wir für die Systemausfallwahrscheinlichkeit  $q_S$  schreiben können

$$q_S = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Phi(\underline{t}) \cdot w(\underline{t}) \cdot f^*(\underline{t}) \, \underline{dt} \quad , \quad (4-16)$$

e-fach

wobei

$$f^*(\underline{t}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{*k_i} \cdot \text{EXP}\left(-\lambda_i^* \cdot \sum_{j=1}^{k_i} t_{ij}\right) \quad (4-17)$$

und

$$w(\underline{t}) = \frac{f(\underline{t})}{f^*(\underline{t})} = \left[ \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i^*}\right)^{k_i} \right] \cdot \text{EXP}\left(\sum_{i=1}^n (-\lambda_i + \lambda_i^*) \cdot \sum_{j=1}^{k_i} t_{ij}\right) \quad (4-18)$$

ist .

Die Schätzfunktion  $S^*$  für  $q_2$  lautet dementsprechend anstelle von (4-14)

$$S^* = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m \phi(\underline{t}_j) \cdot w_j \quad (4-19)$$

#### 4.4.4 Varianz der Schätzfunktion

Die Varianz der Schätzfunktion läßt sich in folgender Form schreiben

$$V(S^*) = \frac{1}{m^2} \cdot \sum_{j=1}^m V(\phi(\underline{t}_j) \cdot w_j) \quad (4-20)$$

wobei man für  $V(\phi(\underline{t}_j) \cdot w_j)$  mit  $\phi \cdot w = \Psi$  auch

$$\begin{aligned} & E(\phi^2(\underline{t}_j) \cdot w_j^2) - E(\phi(\underline{t}_j) \cdot w_j)^2 \\ &= E(\Psi^2) - q_s^2 \end{aligned}$$

schreiben kann und wobei  $E(\Psi^2)$  gegeben ist durch

$$\begin{aligned} E(\Psi^2) &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \phi^2(\underline{t}) \cdot \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i^*}\right)^{2k_i} \cdot \text{EXP}(-2(\lambda_i - \lambda_i^*) \cdot \sum_{j=1}^{k_i} t_{ij}) \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^n \lambda_i^{*k_i} \cdot \text{EXP}(-\lambda_i^* \cdot \sum_{j=1}^{k_i} t_{ij}) \, dt \end{aligned}$$

In Abschnitt 2.4.1 konnten wir den entsprechenden durch (2-25) gegebenen Ausdruck  $E(\Psi^2)$  explizit angeben, da er sich auf den bekannten Ausdruck (2-11) für  $q_2$  zurückführen ließ. Da die Systemausfallwahrscheinlichkeit  $q_s$  für kompliziertere Fehlerbäume sich im allgemeinen nicht explizit angeben läßt, lassen sich auch die die Varianz optimierenden Parameter  $\lambda_i^*$  nicht angeben.

Bei manchen Fehlerbäumen läßt sich jedoch eine Verbesserung dadurch erreichen, indem man willkürlich gewählte Parameter  $\lambda_i^*$  festlegt. Eine Vorgehensweise besteht darin, daß man alle Parameter  $\lambda_i$  um den gleichen Faktor variiert. Es zeigt sich jedoch, daß man die Faktoren nur in dem Bereich zwischen 1.1 und 1.5 wählen darf, um

realistische Ergebnisse zu erhalten. Die Wahl unterschiedlicher Faktoren für verschiedene Parameter kann eine Verbesserung gegenüber dem konstanten Faktor für alle Parameter bewirken, jedoch benötigt man eine genaue Kenntnis des Systems. Numerische Beispiele werden in Kapitel 6 gegeben.

#### 4.5 Simulation des Baumes über die Minimalschnitte

##### 4.5.1 Einführung

Erfolgt die Simulation des Fehlerbaumes über die Minimalschnitte, so erhalten wir einen Systemausfall ( $TOP = 1$ ), wenn mindestens ein Minimalschnitt ausgefallen ist. Es bietet sich an, die häufig ausfallenden Minimalschnitte zuerst zu behandeln, da man bei einem Ausfall sofort den nächsten Simulationslauf starten kann, und somit wertvolle Rechenzeit spart. Dies ist vor allem bei großen Systemen mit vielen Minimalschnitten von Bedeutung.

##### 4.5.2 Monte Carlo Simulation ohne Importance Sampling

Führen wir für den  $i$ -ten Minimalschnitt die Strukturfunktion  $\Phi_i(\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n) := \Phi_i(\underline{t}_i)$  ein, wobei die Strukturfunktion gegeben ist durch

$$\phi_i(\underline{t}_i) = \begin{cases} 0 & (\underline{t}_i): \text{Minimalschnitt in Betrieb} \\ \text{für} & \\ 1 & (\underline{t}_i): \text{Minimalschnitt ausgefallen,} \end{cases} \quad (4-21)$$

so ergibt sich die Strukturfunktion  $\phi$  des Systems mit (4-7) zu

$$\phi(\underline{t}) = 1 - \prod_{i=1}^r (1 - \phi_i(\underline{t}_i)) \quad , \quad (4-22)$$

wobei

$$i = 1, \dots, r$$

$r$  = Anzahl der Minimalschnitte des Systems.

Entsprechend früherer Ausführungen läßt sich die Systemausfallwahrscheinlichkeit  $q_s$  wie folgt angeben

$$q_s = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \phi(\underline{t}) f_s(\underline{t}) \underline{dt} \quad . \quad (4-23)$$

e-fach

Deuten wir die Systemausfallwahrscheinlichkeit wieder als Erwartungswert der Strukturfunktion, so können wir eine Schätzfunktion  $S$  für  $q_s$  angeben:

$$S := \hat{q}_s = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m \phi(\underline{t})_j \quad . \quad (4-24)$$



Diese Schätzung ist erwartungstreu (vgl. (2-15)); für die Varianz findet man entsprechend (2-16) bzw. (4-15) den folgenden Ausdruck:

$$V(S) = \frac{1}{m} \cdot q_s \cdot (1 - q_s) \quad . \quad (4-25)$$

#### 4.5.3 Monte Carlo Simulation mit Importance Sampling

Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 2.5 besteht die Notwendigkeit den Rechenaufwand für die Schätzung (4-24) bei festgehaltener Genauigkeit der Schätzung zu reduzieren. Zu diesem Zweck wenden wir wieder das Importance Sampling-Verfahren an, bei dem die Stichprobe aus einer Grundgesamtheit mit modifizierter Dichte gezogen wird.

Zur Darstellung der Vorgehensweise gehen wir von der Ausfallwahrscheinlichkeit (4-23) aus, die wir mit (4-22) explizit wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} E(\phi) = q_s &= \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \phi(\underline{t}) f_s(\underline{t}) \underline{dt} = \\ &\quad \text{e-fach} \quad (4-26) \\ &= \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \left( \sum_i \phi_i(\underline{t}_i) - \sum_{i \neq j} \phi_i(\underline{t}_i) \cdot \phi_j(\underline{t}_j) + \dots \right) \cdot f_s(\underline{t}) \underline{dt} = \\ &= \sum_i \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \phi_i(\underline{t}) \cdot f_i(\underline{t}) \underline{dt} \\ &\quad - \sum_{i \neq j} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \phi_i(\underline{t}_i) \cdot \phi_j(\underline{t}_j) \cdot f_{ij}(\underline{t}) \underline{dt} + \dots \end{aligned}$$

Wie beim Ausdruck (2-18) können wir die einzelnen Summanden mit Er-  
satzdichten erweitern und erhalten

$$\begin{aligned}
 E(\Phi) &= \sum_i \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Phi_i(\underline{t}) \cdot f_i(\underline{t}) \cdot \frac{f_i^*(\underline{t})}{f_i^*(\underline{t})} dt \\
 &\quad - \sum_{i \neq j} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Phi_i(\underline{t}) \cdot \Phi_j(\underline{t}) \cdot f_{ij}(\underline{t}) \cdot \frac{f_{ij}^*(\underline{t})}{f_{ij}^*(\underline{t})} dt + \dots \\
 &= \sum_i \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Phi_i(\underline{t}) \cdot w_i(\underline{t}) \cdot f_i^*(\underline{t}) \underline{dt} \\
 &\quad - \sum_{i \neq j} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Phi_i(\underline{t}) \cdot \Phi_j(\underline{t}) \cdot w_{ij}(\underline{t}) \cdot f_{ij}^*(\underline{t}) \underline{dt} + \dots
 \end{aligned}$$

wobei

$$w_i(\underline{t}) = \frac{f_i(\underline{t})}{f_i^*(\underline{t})}, \quad w_{ij}(\underline{t}) = \frac{f_{ij}(\underline{t})}{f_{ij}^*(\underline{t})} \quad \text{usf.}$$

Falls die einzelnen Minimalschnitte unabhängig sind in dem Sinn, daß  
ein und dieselbe Komponente nicht in verschiedenen Schnitten auftaucht,  
lassen sich die Dichten  $f_{ij}$ ,  $f_{ijk}$ , ... bzw. die Gewichte  
 $w_{ij}$ ,  $w_{ijk}$ , ... faktorisieren, und wir erhalten mit

$$\Phi_i(\underline{t}) \cdot w_i(\underline{t}) = \Psi_i(\underline{t})$$

den Ausdruck

$$E(\Phi) = \sum_i \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \psi_i(\underline{t}) f_i^*(\underline{t}) dt$$

$$- \sum_{i \neq j} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \psi_i(\underline{t}) \cdot \psi_j(\underline{t}) \cdot f_i^*(\underline{t}) \cdot f_j^*(\underline{t}) dt + \dots$$

In Abschnitt 2.4 waren wir nun so vorgegangen, daß wir die Varianz der modifizierten Schätzung bestimmt und diese bezüglich der freien Parameter minimiert hatten. Dieses Verfahren stößt nun auf Schwierigkeiten, da wir die Varianz einer Schätzung, die auf der Basis des Ausdruckes

$$E(\Phi) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \Phi(\underline{t}) \cdot \frac{f_s(\underline{t})}{f_s^*(\underline{t})} \cdot f_s^*(\underline{t}) dt$$

$$= \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \Phi(\underline{t}) \cdot w(\underline{t}) \cdot f_s^*(\underline{t}) dt$$

zu bilden wäre, nicht angeben können.

Stattdessen gehen wir wie folgt vor: Wir brechen die Reihenentwicklung (4-26) mit den linearen Termen ab - dies läßt sich durch numerische Rechnungen rechtfertigen (s. Kap. (6)) - und bestimmen die freien Parameter in den Ersatzdichten  $f_i^*(\underline{t})$  so, daß die Varianzen der Schätzungen der Lebensdauern der einzelnen Schritte, die auf der Basis der Ausdrücke

$$\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \phi_i(\underline{t}) \cdot w_i(\underline{t}) \cdot f_i^*(\underline{t}) \underline{dt}$$

gebildet werden, minimiert werden. Es läge natürlich nahe, die freien Parameter der Ersatzdichten so zu bestimmen, daß die Gesamtvarianz der auf der Basis des linearisierten Ausdruckes gebildeten Schätzung,

$$V(S^*) = \frac{1}{m} \cdot V\left(\sum_{i=1}^r \psi_i(\underline{t})\right)$$

(m Anzahl der Spiele) minimiert wird. Dieser Ausdruck läßt sich jedoch wieder nicht explizit ausrechnen, wenn zwischen den Schnitten Abhängigkeiten der oben erwähnten Art existieren. Wir beschränken uns also auf die Minimierung der Varianzen der Schätzungen für die einzelnen Minimalschnitte entsprechend den Ausführungen im zweiten und dritten Kapitel (Minimierung von (2-28) bzw. (3-15)) und prüfen den Erfolg des Verfahrens mit Hilfe der numerischen Resultate (siehe Kapitel 6). Eine Illustration der hier angesprochenen Problematik wird an Hand eines einfachen Beispiels im Anhang gegeben.

Zu bemerken ist, daß es bei der Minimierung der Varianzen der Schätzungen für die einzelnen Minimalschnitte vorkommen kann, daß der gleichen, in verschiedenen Schnitten vorkommenden Komponente verschiedene optimale Parameter zugeordnet werden, je nach der Bedeutung der Komponente in den einzelnen Schnitten. Es soll jedoch hier betont werden, daß die stochastische Abhängigkeit verschiedener Minimalschnitte, die durch das Auftreten der gleichen Komponente in diesen Minimalschnitten gegeben ist, dadurch berücksichtigt wird, daß für diese Komponente nur einmal eine (0,1)-gleichverteilte Zufallszahl gezogen wird, die dann aber unterschiedlich gemäß der jeweiligen Wichtung der Komponente in den Schnitten transformiert wird.

## 5. Probleme der Programm- und Organisationsstruktur

### 5.1 Einführung

Zur Lösung unserer Problemstellung wollen wir gemäß der Zielvorstellung neben dem Weg über die Minimalschnitte auch die direkte Simulation des Baumes untersuchen. Bei der Lösung mittels EDV braucht man die Minimalschnitte des Fehlerbaumes und den Fehlerbaum. Beide Eingangsinformationen liefert das Programmpaket PREP & KITT /19/, wobei der Fehlerbaum als Fortran-Subroutine TREE generiert wird, die den Fehlerbaum in einer maschinenlesbaren Struktur abbildet. Diese Subroutine TREE ist ein Unterprogramm des Programmes BAUM, welches die direkte Simulation des Baumes übernimmt. Verfolgen wir diesen Weg, so erhalten wir eine Aussage über die Ausfallwahrscheinlichkeit des Baumes.

Das Programmpaket MINCUT verfolgt den zweiten Weg, indem es die Ausfallwahrscheinlichkeit über die Minimalschnitte simuliert. Dabei ist dieses Programm auch in der Lage, neben der Simulation von Minimalschnitten einzelne Parallelsysteme, die aus  $n$  Komponenten bestehen können, zu simulieren und verschiedene Organisationsformen (vgl. 5.2.2 und 5.2.3) zu testen.

Da wir bei der Simulation über die Minimalschnitte eine Optimierung der Parameter vornehmen können, wenn wir Importance Sampling verwenden, wurden verschiedene Optimierungsprogramme getestet. Ein IBM-Dienstprogramm, welches auf der Gradientenmethode aufbaut, konvergiert sehr schlecht und benötigt den Optimalbereich als Startwertvorgabe, ohne den es meistens keine Optimalstellen findet. Da geeignete Näherungen der zu optimierenden Funktion keine guten Startwerte ergaben, wurde ein Rasterprogramm vorgeschaltet, welches die Minimalschnitte auf minimumverdächtige Stellen untersucht und die Startwerte für das IBM-Programm liefert. Die Verwendung ei-

nes Rasterprogrammes ist nötig, da die zu minimierende Funktion  $V(S_n^*)$  (vgl. (3-15)) so flach verläuft (vgl. Figur 2-3), daß das IBM-Programm ohne Startwerte kein Minimum findet, da der Algorithmus oftmals an einer ungünstigen Ecke beginnt. Zudem wächst ohne Startwertvorgabe die Rechenzeit beträchtlich an, was man ja auch vermeiden will.

Aufgrund dieser unbefriedigenden Ergebnisse wurde mit einem anderen Programm die Nullstellen der Ableitungen untersucht. Dieses Programm liefert uns die optimalen Parameter ohne die Nachteile des IBM-Programmes zu haben. Erstaunlich ist, daß auch das einfache Rasterprogramm die Optimalstellen findet, jedoch mit einem bedeutend höheren Rechenzeitaufwand.

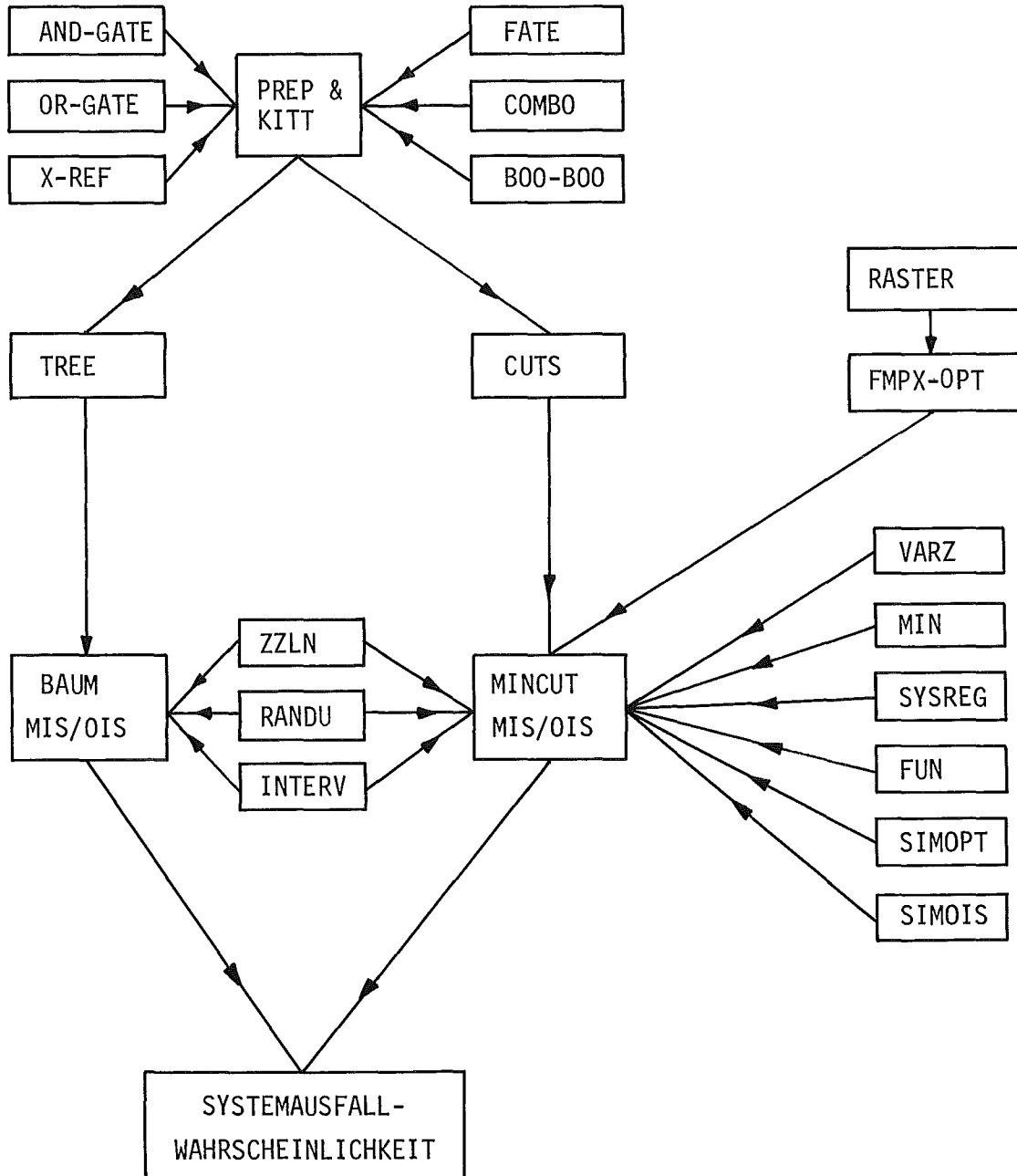
Sowohl BAUM, als auch MINCUT sind in verschiedenen Versionen verfügbar, je nachdem man mit oder ohne Importance Sampling, oder mit oder ohne stochastische Unabhängigkeit der Komponenten in den Schnitten simulieren will. Dabei ist Importance Sampling bei dem Programm BAUM nur ohne Optimierung möglich, indem wir die Parameter  $\lambda_i^*$  der neuen Dichte willkürlich wählen, während bei MINCUT eine Optimierung zu realisieren ist.

Figur 5-1 zeigt die Verknüpfung der einzelnen Haupt- und Unterprogramme in einer übersichtlichen Darstellung.

## 5.2 Simulation des Systemausfalls eines periodisch inspizierbaren Parallelsystems mit einer EDV-Anlage

Bei der Monte-Carlo-Simulation versucht man die Lebensdauern der Komponenten mit Hilfe von Pseudozufallszahlen nachzubilden. Diese Zufallszahlen liefert ein Zufallsgenerator, der heute in den meisten Fällen in Form eines EDV-Programmes vorliegt, da oftmals Millionen von Zufallszahlen benötigt werden /21/. Die meisten Zufalls-

Figur 5-1: Verknüpfung der Programme zur Ermittlung der Systemausfallwahrscheinlichkeit  $q_s$ .



Erläuterung zu Figur 5-1;

|            |                                                                                                           |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| TREE :     | Fehlerbaum in Fortranlogik                                                                                |
| CUTS :     | Eingabe der Minimalschnitte (kein echtes Unterprogramm)                                                   |
| BAUM       |                                                                                                           |
| MIS/OIS :  | Hauptprogramm zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit des Baumes (mit bzw. ohne Importance Sampling) |
| MINCUT :   | Hauptprogramm, Berechnung über Minimalschnitte                                                            |
| RANDU :    | Zufallszahlengenerator (0,1) gleichverteilt                                                               |
| ZZLN :     | Transformation von (0,1) gleichverteilte Zufallszahlen in exponentialverteilte Zufallszahlen              |
| INTERV :   | Anzahl der Intervalle aller Komponenten bis zum Systemregenerationspunkt                                  |
| RASTER     |                                                                                                           |
| FMPX-OPT : | Optimierung der Parameter der Ersatzdichten für die Minimalschnitte                                       |
| VARZ :     | Var ( $S_2$ )                                                                                             |
| MIN :      | Ordnung der Eingabedaten                                                                                  |
| SYSREG :   | Berechnung des Systemregenerationspunktes                                                                 |
| SIMOPT,    |                                                                                                           |
| SIMOIS :   | Simulation der Minimalschnitte                                                                            |



generatoren verwenden die lineare Kongruenzmethode, bei der die Zufallszahl durch Multiplikation der alten Zufallszahl mit einer Konstanten  $a$ , anschließender Addition einer Konstanten  $c$  und Division durch die dritte Konstante  $m$ , wobei der Divisionsrest die neue Zufallszahl ergibt /22/, ermittelt wird.

$$R_{i+1} = (a \cdot R_i + c) \bmod m$$

|                 |               |
|-----------------|---------------|
| $R_0 \geq 0$    | Startwert     |
| $a \geq 0$      | Multiplikator |
| $c \geq 0$      | Inkrement     |
| $m > R_0, a, c$ | Modul         |

Je nachdem wie die Konstanten gewählt werden, unterscheidet man zwischen den folgenden Varianten der Kongruenzmethode:

- i.     additiv              $a = 1$
- ii.    multiplikativ     $c = 0$
- iii.   gemischt            $a \neq 1, c \neq 0$  .

Bei geschickter Konstantenwahl liefert die Methode ausreichend große Periodenlängen, z.B.  $L = 2^{29} = 5.36 \cdot 10^8$  .

In unserem Fall der Exponentialverteilung besteht die Notwendigkeit, exponentialverteilte Zufallszahlen zu erzeugen. Wir erhalten diese, wenn wir ausgehend von den (0,1) gleichverteilten Pseudozufallszahlen  $R_i$  folgende Transformation durchführen /23/

$$X_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(R_i) \quad ,$$

wobei  $X_i$  exponentialverteilte Zufallszahlen des Parameters  $\lambda_i$  sind. Bei uns symbolisieren die  $X_i$  die Lebensdauern der einzelnen Komponenten. Falls  $X_i < \tau_i$  ist, sind die Komponenten vor dem Inspektionszeitpunkt ausgefallen, für  $X_i \geq \tau_i$  sind sie in Betrieb. Simulieren wir die Lebensdauern der Komponenten in allen Inspektionsperioden, so erhalten wir eine eindeutige Aussage, ob unser System in Betrieb ist oder nicht ( $\phi(t_{i,j}) = 0$  oder  $\phi(t_{i,j}) = 1$ ): Dies ist dann der Fall, wenn in einem beliebigen Minimalschnitt alle diesen Schnitten bildenden Komponenten zum gleichen Zeitpunkt ausgefallen sind.

### 5.3 Programmtechnische Lösungsalternativen bei Parallelsystemen

#### 5.3.1 Das Problem des Rasters

Bei der Lösung der Simulationsaufgabe mittels EDV-Programm ist die Frage des Rasters von Bedeutung, um die zeitliche Abhängigkeit organisieren zu können. Hierbei besteht die Möglichkeit eines festen, variablen oder freien Rasters. Der Fall des freien Rasters wurde nicht näher betrachtet, da von programmtechnischer Seite der Rechenzeitgewinn nicht im Verhältnis zum Organisationsaufwand steht. Es kann sich deshalb sogar eine Rechenzeitverlängerung ergeben.

Die Wahl eines festen Rasters bietet sich bei periodisch inspizierbaren Systemen an, da die Inspektionsintervalle für die verschiedenen Komponenten konstant sind. Für die optimale Wahl des Rasters müssen zwei Randbedingungen erfüllt sein:

- das Raster soll möglichst groß gewählt werden, um die Rechenzeit zu minimieren;

- das Raster muß so klein gewählt werden, daß alle Komponenten richtig abgearbeitet werden.

Zur Erfüllung beider Randbedingungen wählt man das Raster als GGT (größten gemeinsamen Teiler) aller Inspektionsintervalle. Sind z.B. die Inspektionsintervalle Vielfache des kleinsten Intervalls, was bei den von uns betrachteten Systemen der Fall ist, so wird das Raster gleich dem kleinsten Intervall gewählt. Ist dies nicht der Fall, so ist das Raster kleiner als das kleinste Intervall.

Bei der Verwendung anderer Komponententypen, bei denen z.B. die Reparaturdauer eine Zufallsvariable ist, liegt aufgrund der stochastischen Reparaturdauern kein natürliches Raster vor. Eine Lösung mit festem Raster erscheint nicht günstig, da das Raster sehr klein gewählt werden müßte, um die Ausfälle zeitrichtig zu erfassen. Wählt man das Raster zu groß, so spart man Rechenzeit, zählt aber eventuell nicht alle Ausfälle. Bei derartigen Komponenten wählt man viel günstiger ein freies Raster, bei dem nur die Reparaturanfangs- und -endpunkte eine Rolle spielen.

### 5.3.2 Simulation eines Parallelsystems

Bei der Simulation eines Parallelsystems suchen wir nach einer Lösung, bei der wir mit minimaler Rechenzeit die Ausfallwahrscheinlichkeit abschätzen können. Eine Organisationsform, bei der wir für jede Komponente und jedes Instandhaltungsintervall das Ausfallverhalten bis zu einem fest definierten Systemerneuerungspunkt simulieren und dann feststellen, ob das System ausgefallen oder in Betrieb ist, ist aufwendig und rechenzeitintensiv. Diese Organisationsform, bei der wir alle Zufallslebensdauern der Komponenten in allen Inspektionsperioden simulieren, benötigen wir bei der Anwendung von

Importance Sampling, um die Gewichtsfunktion richtig berechnen zu können.

Bei der Simulation ohne Importance Sampling wird man das System sofort verlassen, wenn ein Systemausfall eintritt, und die nachfolgende Zeitperiode bis zum Systemerneuerungspunkt nicht mehr betrachten. Für eine optimale Organisation betrachtet man zuerst diejenigen Komponenten, die am ehesten ausfallen können. Dazu muß man die Komponenten nach den Instandhaltungsintervallen und Ausfallraten sortieren. Dieser erhöhte Organisationsaufwand wird durch den Rechenzeitgewinn wieder kompensiert. Eine bevorzugte Behandlung der Komponenten mit den längsten Inspektionsintervallen dient ebenfalls dem Zweck der Rechenzeitverkürzung.

Der Organisationsgrad steigt bei n-komponentigen Systemen an, da man ja möglichst wenig Zufallszahlen ziehen will (dieser Vorgang ist sehr rechenzeitintensiv), und bei einem Ausfall einer Komponente und nachfolgendem Betrieb des Systems durch das Funktionieren einer anderen Komponente die optimale Komponente herausfinden muß, mit der man das System weiter simulieren will.

### 5.3.3 Programmtechnische und organisationsbedingte Abhängigkeiten

Für die Wahl der jeweiligen Organisationsform ist die Kenntnis der Auswirkungen der systembedingten Abhängigkeiten von Bedeutung. Bei den periodisch inspizierbaren Systemen beeinflusst die Anzahl der Monte-Carlo-Spiele, die Veränderung der Ausfallwahrscheinlichkeit, die Betrachtung n-komponentiger Systeme und die steigende Intervallanzahl die Rechenzeit. Hierfür ergaben sich im Mittel folgende Werte /24/:

- Zwischen der Anzahl der Monte-Carlo-Spiele und der Rechenzeit besteht ein nahezu linearer Zusammenhang. So beträgt die Abweichung

von der linearen Zunahme zwischen  $10^3$  und  $10^4$  Spielen im Mittel 1 % .

- Die Abnahme der Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems ergibt eine progressive Reduzierung der Rechenzeit im Bereich zwischen 100 % und 1 %, danach wirkt sich die Verbesserung nicht mehr so stark aus. So ergibt sich z.B. bei 80 % statt 20 % Ausfallwahrscheinlichkeit bei 20 Intervallen eine Rechenzeitverbesserung um den Faktor 1.94.
- Die höhere Organisationsform mit  $n$  Komponenten benötigt einen geringen Mehraufwand an Rechenzeit. Dies ist jedoch von der Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems abhängig und steigt an bei steigender Systemausfallwahrscheinlichkeit.
- Die Abhängigkeit von der Intervallanzahl zeigt eine degressive Erhöhung der Rechenzeit. So ergibt sich bei  $q_2 = 80\%$  beim Übergang von 5 auf 20 Intervalle eine Erhöhung der Rechenzeit um den Faktor 2.52.

#### 5.3.4 Diskussion der Alternativen

Eine eindeutige Bevorzugung einer Programmversion ist nicht möglich, da die Vor- und Nachteile sich gegenseitig überschneiden. Wir verwenden zwei Programme, die entweder das kleinste (Programm I) oder das größte Intervall (Programm II) zuerst abarbeiten. Bei der direkten Simulation der Parallelsysteme erweist sich Programm II als sehr vorteilhaft, während Programm I bei Ausfallwahrscheinlichkeiten größer als 10 % schneller rechnet. Der Unterschied resultiert aus dem Nachziehen der Zufallszahlen. Bei Programm II wird bei kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten sehr selten ein Ausfall erreicht, so daß deshalb wenig Zufallszahlen nachgezogen werden müssen. Tritt

der Ausfall ein, so ist Programm I dann schneller, da aufgrund der anderen Organisationsform schon mehr Zufallszahlen gezogen wurden.

Wie schon vorher angedeutet, benötigt das Verfahren Importance Sampling alle Zufallslebensdauern der Komponenten in allen Inspektionsintervallen. Dies bedeutet, daß wir bei einem Systemausfall die noch benötigten Zufallslebensdauern der Komponente nachziehen müssen, um das Gewicht errechnen zu können. Für die Simulation mit Importance Sampling ist deshalb Programm I günstiger.

#### 5.4 Simulation eines Fehlerbaumes

Bei der Simulation eines Fehlerbaumes können wir eine Optimierung der Rechenzeit über die Intervalllängen nicht betreiben, da wir gezwungen sind, bei jedem Ereignispunkt (vgl. 4.4.1) die Fehlerbaumlogik zu durchlaufen, um feststellen zu können, ob der Systemausfall vorliegt. Wie bei dem vorhergehenden Fall der Parallelsysteme liefern uns die exponentialverteilten Zufallslebensdauern der Komponenten eine Aussage, welche der Komponenten zu dem Ereignispunkt ausgefallen sind, wenn wir die Lebensdauern mit den Inspektionsintervallen vergleichen. Die anschließende Prüfung des Fehlerbaumes mit dieser Information ermittelt, ob die Strukturfunktion an diesem Ereignispunkt 0 oder 1 ist. Bei einem Ausfall des Systems vor dem Systemregenerationspunkt können wir sofort mit dem nächsten Simulationsspiel beginnen.

#### 5.5 Simulation von Minimalschnitten

Die Simulation der Minimalschnitte entspricht der Simulation der Parallelsysteme. Hierfür gilt das in 5.3 Gesagte unverändert. Eine

Besonderheit entsteht dadurch, daß wir diese Parallelsysteme in Serie anordnen müssen. Sobald ein Parallelsystem (Minimalschnitt) ausfällt, ist unser Gesamtsystem ausgefallen. Wenn wir uns diese Eigenschaft zu Nutzen machen, läßt sich eine Rechenzeitoptimierung dadurch erreichen, indem man zuerst die Minimalschnitte betrachtet, die die größte Ausfallwahrscheinlichkeit haben. Diese Optimierung wird jedoch nur bei großen Ausfallwahrscheinlichkeiten eine deutliche Rechenzeitverkürzung zeigen. Bei den anderen Fällen haben wir selten Ausfall und müssen somit meistens alle Minimalschnitte simulieren. Als Ausweg soll Importance Sampling zur Lösung herangezogen werden.

#### 5.6 Probleme bei Importance Sampling

Die Einführung von Importance Sampling bedingt einen organisatorischen Mehraufwand, der sich in einer höheren Rechenzeit niederschlägt und somit die positiven Effekte mindert. Bei der direkten Simulation des Fehlerbaumes ist der Aufwand nicht so groß, da man alle oder nur ausgewählte Komponenten variiert, und sich die Gewichtung schnell errechnet. Zeitaufwendig ist das Nachziehen von Zufallszahlen, sofern der Ausfall zu einem früheren Zeitpunkt sich ereignet. Der Speicheraufwand der Einzelgewichte der Komponenten ist vernachlässigbar gering.

Bei der Verwendung von Minimalschnitten erhöht sich der Aufwand, da man für jeden Minimalschnitt alle optimalen Parameter der ihn bildenden Komponenten abspeichern muß. Auch falls Komponenten in verschiedenen Minimalschnitten mehrmals vorkommen, so können sich doch unterschiedliche optimale Parameter für die Schnitte ergeben. Wir benötigen mehr Speicherplatz und eine größere Zugriffszeit. Dies wirkt sich dann besonders bei großen Systemen aus. Demgegenüber erlaubt die Optimierung der Minimalschnitte eine größere Reduzierung der Rechenzeit. Wie groß diese im Einzelnen ausfällt zeigen die Untersuchungen in Kapitel 6 .

## 6. Ausgewählte Fehlerbäume

### 6.1 Einführung

Für die Anwendung der in den Kapiteln 2, 3 und 4 erarbeiteten Grundlagen auf konkrete Probleme ist es schwer, zu allgemein gültigen Aussagen zu kommen. Die Problemstellung ist so komplex, da sich die Fehlerbäume in der Praxis nur schwer klassifizieren lassen (schon eine kleine Veränderung an einem bekannten Baum kann ein völlig neues Problem mit einem total anders strukturierten Baum machen), und die dem Baum zugehörigen Einflußkriterien (z.B. wie beeinflußt die Zahl der AND-Tore (ODER-Tore) oder die Anzahl der Minimalschnitte die Rechenzeit, welche Verbesserung erbringt Importance Sampling in Abhängigkeit von der Struktur des Baumes usw.) lassen sich nur sehr schwer bestimmen.

Da sich die oben angeschnittenen Fragen nicht allgemein beantworten lassen, werden drei charakteristische Typen von Fehlerbäumen betrachtet, an Hand derer diese Fragen diskutiert werden sollen. Bei der Auswahl der Bäume wurden verschiedene Merkmale ähnlich oder gleich gewählt, um zu vergleichbaren Aussagen zu kommen. So ist die Zahl der Komponenten und die Länge der Minimalschnitte bei Baum I und Baum II gleich. Die Kenndaten von Baum TRIGA unterscheiden sich nur unwesentlich von den anderen Bäumen. Tabelle 6-1a und 6-1b zeigt die Unterschiede der drei Bäume schematisch.

Die Bäume I und II werden nach einem theoretischen Bildungsgesetz (vgl. 6.2.1 und 6.3.1) erzeugt, d.h. wir können viele Bäume der gleichen Struktur entwickeln. Diese Bäume, die in der Praxis so kaum vorkommen, weichen in Bezug auf die Komplexität des Baumes und die Anzahl der Minimalschnitte extrem voneinander ab. Dadurch ist es uns möglich, den Einfluß von Importance Sampling zu studieren, der zum großen Teil



Tabelle 6-1a: Fallunterscheidung zwischen den Bäumen

- Baum I : Dieser Baum besitzt wenig Schnitte und viele Tore, d.h. die Struktur ist komplexer wie bei Baum II. Der Baum wurde nach einem theoretischen Bildungsgesetz erzeugt.
- Baum II : Dieser Baum hat viele Schnitte und wenig Tore, d.h. die Struktur ist einfacher wie bei Baum I. Dieser Baum wurde theoretisch erzeugt.
- Baum TRIGA : Bei diesem Baum handelt es sich um einen Fehlerbaum aus der Praxis. Er ist ein Mischtyp zwischen Baum I und II mit einer komplexen Struktur und relativ vielen Schnitten.

Tabelle 6-1b: Bestimmungskriterien der drei Bäume

|            | Komponenten | OR-Tore | AND-Tore | Tore gesamt | Minimal-schnitte | Länge der Minimalschnitte |
|------------|-------------|---------|----------|-------------|------------------|---------------------------|
| Baum I     | 15          | 4       | 12       | 16          | 9                | 3                         |
| Baum II    | 15          | 3       | 1        | 4           | 125              | 3                         |
| Baum TRIGA | 22          | 19      | 6        | 25          | 51               | 1,2,3,4                   |

von der Anzahl der Minimalschnitte mitbestimmt wird. Baum TRIGA ist ein konkretes Beispiel aus der Praxis, welches uns durch die Ähnlichkeit zu den theoretischen Bäumen I und II den Bezug zur Praxis herstellt. Die meisten in der Praxis vorkommenden Fehlerbäume werden je nach Struktur sich in dem Zwischenfeld von Baum I und II bewegen.

#### Bemerkung:

Vergleichsmerkmal der Bäume ist neben der Anzahl der Minimalschnitte die Komplexität der Bäume /25/. Die Komplexität eines Fehlerbaumes läßt sich nur schwer definieren, da neben der Anzahl der OR-Tore und AND-Tore deren Gewichtung, die Struktur des Baumes, Subsysteme usw. Bestimmungsfaktoren für die Komplexität sind. In der Theorie ist zu dieser Fragestellung noch keine abschließende Meinung vorhanden, so daß hier unter der Komplexität eines Fehlerbaumes die Summe aus AND- und OR-Toren verstanden wird. Diese Art der Definition findet man meistens in der Theorie.

## 6.2 Fehlerbaum I

### 6.2.1 Beschreibung des Baumes

Gemäß unserer Zielvorstellung wollen wir einen Fehlerbaum mit einer komplexen Struktur, d.h. vielen Toren, verbunden mit möglichst wenig Minimalschnitten erzeugen. Andererseits sehen wir uns der Einschränkung gegenübergestellt, einen Baum zu generieren, bei dessen Darstellung mittels Minimalschnitten nur maximal drei Komponenten pro Minimalschnitt vorkommen können - diese Restriktion resultiert aus der Optimierung der Varianz der Minimalschnitte, da unser EDV-Programm bisher nur maximal drei Komponenten verarbeitet.

Es wäre jetzt natürlich möglich, einen einzelnen Baum mit den gewünschten Eigenschaften anzugeben. Ein solcher Weg erscheint jedoch unbefriedigend, da die anhand eines solchen Baumes erzielten Ergebnisse wenig verallgemeinerungsfähig erscheinen. Statt dessen soll hier eine Klasse von Bäumen mit den gewünschten Eigenschaften angegeben werden. Es mögen  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ ,  $b_{1j}$ ,  $c_{j1}$ ,  $i = 1, \dots, N$  drei Arten von Komponenten mit jeweils gleichen Charakteristika (Ausfallrate, Inspektionsperiode) bezeichnen. Dann lautet das Bildungsgesetz für die zu betrachtende Klasse von Fehlerbäumen

$$(b_{11} \dots b_{1N}) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ & \dots & \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{N1} \end{pmatrix} ,$$

wobei die Summanden dieses Skalarproduktes als Minimalschnitte des Fehlerbaumes gedeutet werden.

Dabei ergeben sich in Abhängigkeit von  $N$  die folgenden Zahlenwerte für die Charakteristika des Fehlerbaumes:

|                                           | 2 | 3  | 4  | 5  | ... | N           |
|-------------------------------------------|---|----|----|----|-----|-------------|
| Komponenten                               | 8 | 15 | 24 | 35 | ... | $N^2 + 2N$  |
| Minimalschnitte                           | 4 | 9  | 16 | 25 | ... | $N^2$       |
| Länge der Schnitte                        | 3 | 3  | 3  | 3  | ... | 3           |
| OR - Tore                                 | 3 | 4  | 5  | 6  | ... | $N + 1$     |
| AND - Tore                                | 6 | 12 | 20 | 30 | ... | $N^2 + N$   |
| Komplexität (Summe von OR- und AND-Toren) | 9 | 16 | 25 | 36 | ... | $(N + 1)^2$ |

Im folgenden betrachten wir bei der Erzeugung von Baum I den Fall  $N = 3$ , um eine Übereinstimmung mit wesentlichen Merkmalen von Baum II und TRIGA herzustellen. Dabei ergaben sich die Minimalschnitte des Baumes über die Form

$$(a_{11} \ a_{12} \ a_{13}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}$$

in folgender Weise:

$$\begin{aligned} a_{11} \ b_{11} \ c_{11} , \quad a_{11} \ b_{12} \ c_{21} , \quad a_{11} \ b_{13} \ c_{31} , \\ a_{12} \ b_{21} \ c_{11} , \quad a_{12} \ b_{22} \ c_{21} , \quad a_{12} \ b_{23} \ c_{31} , \\ a_{13} \ b_{31} \ c_{11} , \quad a_{13} \ b_{32} \ c_{21} , \quad a_{13} \ b_{33} \ c_{31} . \end{aligned}$$

Figur 6-1 zeigt Baum I in einer übersichtlichen graphischen Darstellung.

### 6.2.2 Numerische Rechnungen

Für die numerische Auswertung des Fehlerbaumes wurden vier verschiedene Systemausfallwahrscheinlichkeiten gewählt. Tabelle 6-2 zeigt die Inspektionsperioden  $\tau$ , die Ausfallraten  $\lambda$  und die optimalen Parameter  $\lambda^*$  für die Ersatzdichten der Komponenten. Dabei wurde der analytische Wert der Systemausfallwahrscheinlichkeit nach dem Verfahren aus Kapitel 4 errechnet. Der analytische Wert dient uns als Maßstab für die Zuverlässigkeit der Monte Carlo Simulation. Im einzelnen verwenden wir folgende Ausfallwahrscheinlichkeiten

Figur 6-1: Baum I, komplexe Struktur mit wenig Minimalschnitten

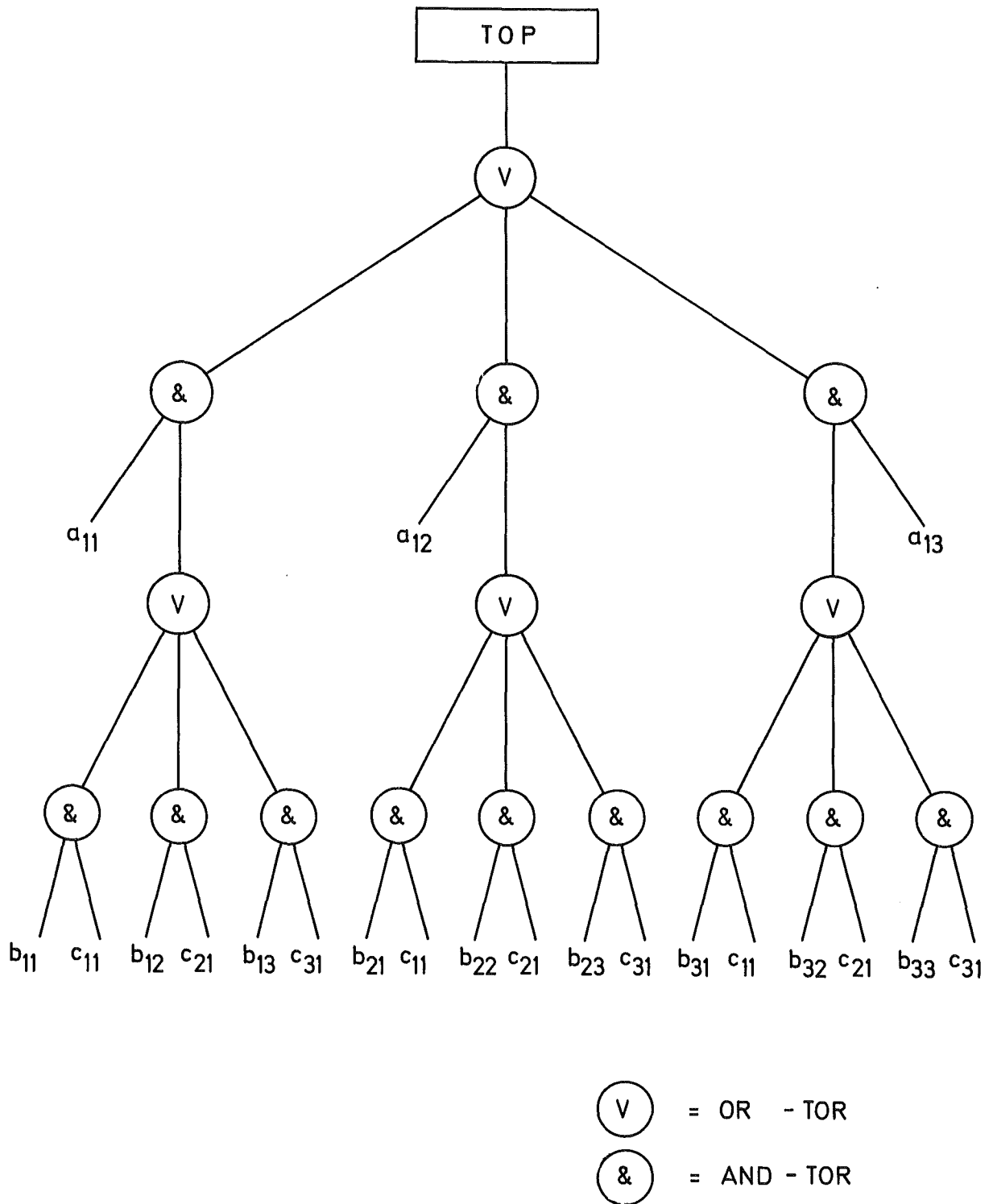


Tabelle 6-2: Baum I, Eingabeparameter für verschiedene Ausfallwahrscheinlichkeiten  $q_j$

| Komponenten- <sup>1)</sup><br>typ | $\tau$                  | $\lambda$                                                               | $\lambda^*$                                                             |
|-----------------------------------|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $q_1$ {<br>A<br>B<br>C            | 100.0<br>200.0<br>400.0 | $.198 \times 10^{-2}$<br>$.102 \times 10^{-2}$<br>$.498 \times 10^{-3}$ | $.222 \times 10^{-2}$<br>$.133 \times 10^{-2}$<br>$.488 \times 10^{-2}$ |
| $q_2$ {<br>A<br>B<br>C            | 100.0<br>200.0<br>400.0 | $.660 \times 10^{-3}$<br>$.340 \times 10^{-3}$<br>$.166 \times 10^{-3}$ | $.753 \times 10^{-3}$<br>$.449 \times 10^{-3}$<br>$.473 \times 10^{-2}$ |
| $q_3$ {<br>A<br>B<br>C            | 100.0<br>200.0<br>400.0 | $.297 \times 10^{-3}$<br>$.153 \times 10^{-3}$<br>$.747 \times 10^{-4}$ | $.339 \times 10^{-3}$<br>$.203 \times 10^{-3}$<br>$.470 \times 10^{-2}$ |
| $q_4$ {<br>A<br>B<br>C            | 100.0<br>200.0<br>400.0 | $.165 \times 10^{-3}$<br>$.850 \times 10^{-4}$<br>$.415 \times 10^{-4}$ | $.188 \times 10^{-3}$<br>$.113 \times 10^{-3}$<br>$.469 \times 10^{-2}$ |

$$q_1 = .973 \times 10^{-1}, \quad q_2 = .478 \times 10^{-2}$$

$$q_3 = .455 \times 10^{-3}, \quad q_4 = .710 \times 10^{-4}$$

1) Da bei uns alle Schnitte gleiche Ausfallwahrscheinlichkeiten haben, sind an Stelle von allen 15 Komponenten nur die an jedem Schnitt beteiligten Typen aufgeführt.

(vgl. Figur 6-1:  $a_{11} = a_{12} = \dots = a_{33} = A$ )

Tabelle 6-3: Zusammenstellung der verwendeten Programme und ihre wesentlichsten Merkmale

| Programmbezeichnung | Simulation des Baumes | Simulation der Minimal-schnitte | Importance Sampling |                      |
|---------------------|-----------------------|---------------------------------|---------------------|----------------------|
|                     |                       |                                 | Konstanter Faktor   | Optimierte Parameter |
| BAUM                | X                     |                                 |                     |                      |
| BAUMIS1             | X                     |                                 | X                   |                      |
| BAUMIS2             | X                     |                                 |                     | X                    |
| MINCUTOIS           |                       | X                               |                     |                      |
| MINCUTMIS           |                       | X                               |                     | X                    |

Tabelle 6-4: Baum I, Darstellung der Simulationsergebnisse der verschiedenen Programme

|          | ANAL                  | BAUM                  | BAUMIS1               | BAUMIS2               | MINCUT<br>OIS         | MINCUT<br>MIS         | F   | RF   |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----|------|
| q        | $.973 \times 10^{-1}$ | $.988 \times 10^{-1}$ | $.796 \times 10^{-1}$ | $.853 \times 10^{-1}$ | .105                  | $.954 \times 10^{-1}$ | 2,4 | 3,4  |
| $\sigma$ | $.973 \times 10^{-2}$ | $.821 \times 10^{-2}$ | $.111 \times 10^{-1}$ | $.211 \times 10^{-1}$ | $.933 \times 10^{-1}$ | $.850 \times 10^{-2}$ |     |      |
| N        |                       | 1.078                 | 1.078                 | 1.078                 | 1.078                 | 100                   |     |      |
| R        |                       | 2,02                  | 2,13                  | 2,21                  | 1,103                 | ,30                   |     |      |
| q        | $.478 \times 10^{-2}$ | $.483 \times 10^{-2}$ | $.372 \times 10^{-2}$ | $.317 \times 10^{-2}$ | $.479 \times 10^{-2}$ | $.455 \times 10^{-2}$ | 3,9 | 5,9  |
| $\sigma$ | $.478 \times 10^{-3}$ | $.475 \times 10^{-3}$ | $.660 \times 10^{-3}$ | $.413 \times 10^{-2}$ | $.488 \times 10^{-3}$ | $.471 \times 10^{-3}$ |     |      |
| N        |                       | 21.322                | 21.322                | 21.322                | 21.322                | 1.500                 |     |      |
| R        |                       | 40,53                 | 41,20                 | 41,66                 | 17,05                 | 2,87                  |     |      |
| q        | $.455 \times 10^{-3}$ | $.460 \times 10^{-3}$ | $.540 \times 10^{-3}$ | $.213 \times 10^{-3}$ | $.523 \times 10^{-3}$ | $.466 \times 10^{-3}$ | 5,8 | 10,7 |
| $\sigma$ | $.455 \times 10^{-4}$ | $.458 \times 10^{-4}$ | $.770 \times 10^{-4}$ | $.812 \times 10^{-3}$ | $.534 \times 10^{-4}$ | $.441 \times 10^{-4}$ |     |      |
| N        |                       | 217.391               | 217.391               | 217.391               | 217.391               | 8.000                 |     |      |
| R        |                       | 413,5                 | 415,2                 | 417,0                 | 155,6                 | 14,54                 |     |      |
| q        | $.710 \times 10^{-4}$ | $.801 \times 10^{-4}$ | $.790 \times 10^{-4}$ | $.417 \times 10^{-4}$ | $.652 \times 10^{-4}$ | $.717 \times 10^{-4}$ | 7,8 | 17,3 |
| $\sigma$ | $.710 \times 10^{-5}$ | $.770 \times 10^{-5}$ | $.890 \times 10^{-5}$ | $.132 \times 10^{-4}$ | $.851 \times 10^{-5}$ | $.689 \times 10^{-5}$ |     |      |
| N        |                       | 1.408.450             | 1.408.450             | 1.408.450             | 1.408.450             | 30.000                |     |      |
| R        |                       | 2.687,0               | 2.692,3               | 2.705,2               | 983,6                 | 56,85                 |     |      |

**Legende:** ANAL = Analytische Werte  
 q = Ausfallwahrscheinlichkeit  
 $\sigma$  = Streuung (10 %)  
 N = Anzahl der Simulationsspiele  
 R = Rechenzeit in Sekunden  
 F =  $\emptyset$  Varianzreduktionsfaktor  
 RF = Rechenzeitverbesserungsfaktor



$$\begin{aligned} q_1 &= .973 \times 10^{-1} , & q_2 &= .478 \times 10^{-2} , \\ q_3 &= .455 \times 10^{-3} , & q_4 &= .710 \times 10^{-4} . \end{aligned}$$

Diese Ausfallwahrscheinlichkeiten wurden als Mittelwerte zwischen der oberen und unteren Schranke gewählt, die durch Berücksichtigung der ersten Durchschnitte gewonnen wurden:

$$\begin{aligned} .104 &\leq q_1 \leq .090 \\ .482 \times 10^{-2} &\leq q_2 \leq .474 \times 10^{-2} \\ .456 \times 10^{-3} &\leq q_3 \leq .455 \times 10^{-3} \\ .712 \times 10^{-4} &\leq q_4 \leq .708 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Wie man sieht, ergibt diese vereinfachte Rechnung schon relativ genaue Werte für die Ausfallwahrscheinlichkeiten, womit auch das Abbrechen nach den linearen Termen (s. Abschnitt 4.5.3) gerechtfertigt ist.

Der Einfachheit halber wurde für alle Komponenten mit übereinstimmenden Inspektionsintervallen auch die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit gewählt. Dadurch erhalten alle Minimalschnitte die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit.

Bezugnehmend auf Tabelle 6-4, in der die Simulationsergebnisse der verschiedenen Programme für die unterschiedlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten dargestellt sind, sollen hier kurz die Simulationsverfahren erläutert werden.

Das Programm BAUM simuliert den Fehlerbaum direkt, wobei der Fehlerbaum in Form der durch das Programm PREP & KITT generierten Subroutine TREE eingeht. BAUMIS1 verwendet ebenfalls die Subroutine TREE, jedoch wird jetzt Importance Sampling verwendet. Nach der Theorie in 4.4.3 werden die Parameter der Ersatzdichte versuchsweise durch Multiplika-

tion der Ausgangswerte mit dem Faktor 1,3 gewählt. Bei BAUMIS2 werden die Parameter der Ersatzdichten im Gegensatz zu BAUMIS1 der Optimierungsrechnung für die Minimalschnitte genommen.

Das Programmpaket MINCUT beschreibt zur Simulation des Fehlerbaumes den Weg über die Minimalschnitte. Dabei simuliert MINCUTOIS die Minimalschnitte direkt, während MINCUTMIS Importance Sampling anwendet, wobei jeder Minimalschnitt mit Parametern der Ersatzdichten gemäß der Optimierungsrechnung aus Kapitel 2 und 3 belegt ist.

In Tabelle 6-3 sind die 5 verwendeten Programme sowie ihre wesentlichsten Merkmale noch einmal zusammengestellt.

Der Faktor  $F$  in der Tabelle 6-4 wird aus dem Mittelwert der Varianzreduktionsfaktoren (vgl. 2.4.2) der beteiligten Minimalschnitte gebildet, die sich aus der Optimierungsrechnung ergeben. Den Faktor  $RF$  bezeichnen wir als Rechenzeitverbesserungsfaktor. Er entsteht durch Vergleich der Simulation mit Importance Sampling über die Minimalschnitte (MINCUTMIS) mit dem Simulationsprogramm, welches auf dem direkten Weg die kürzeste Rechenzeit aufweist (BAUM oder MINCUTOIS). Dieser Faktor liefert uns die Rechenzeitverbesserung durch Anwendung des Importance Samplingverfahrens. Hierbei sind die das Importance Samplingverfahren verschlechternden Einflußgrößen schon berücksichtigt.

### 6.2.3 Diskussion der Ergebnisse

Bei der Analyse von Tabelle 6-4 erkennt man, daß die direkte Simulation des Baumes und der Minimalschnitte und die Simulation der Minimalschnitte mit Importance Sampling die abzuschätzende Ausfallwahrscheinlichkeit des Fehlerbaumes innerhalb der geforderten Toleranz

liefert. Bezugsgröße ist ein zugelassener Fehler von  $f = 0.1 \hat{=} 10\%$ , d.h. die Streuung der Schätzung von  $q$  ist  $f \cdot q = 0.1 \cdot q$ . Wir ermitteln die Anzahl der benötigten Simulationsspiele  $N$ , um die Ausfallwahrscheinlichkeit  $q$  des Fehlerbaumes mit dem Fehler  $f$  abzuschätzen mit Hilfe der für kleine Ausfallwahrscheinlichkeiten gültigen Näherungsformel

$$N = \frac{1}{f^2 \cdot q} \quad .$$

Im einzelnen findet man folgende Einzelergebnisse:

- Die Programme BAUM, MINCUTOIS und MINCUTMIS liefern die abzuschätzende Ausfallwahrscheinlichkeit innerhalb der Fehlervorgabe.
- Bei der direkten Simulation ist der Weg über die Minimalschnitte ungefähr dreimal schneller als der Weg über die Simulation des Baumes. Dies leuchtet ein, da die geringe Anzahl der Minimalschnitte ein schnelleres Abarbeiten als die komplexe Struktur des Baumes erlaubt.
- Die Berücksichtigung der Abhängigkeit der Komponenten in den Minimalschnitten ist unbedingt erforderlich, da man sonst eine zu große Abschätzung erhält.
- Die Anwendung von Importance Sampling bei der Simulation des Baumes mit den Programmen BAUMIS1 und BAUMIS2 mit Hilfe der Subroutine TREE führt zu keinen brauchbaren Ergebnissen, da die Streuung größer wird als bei direkter Simulation. Dabei liefert BAUMIS2 schlechtere Ergebnisse als BAUMIS1.
- Importance Sampling bei der Simulation über die Minimalschnitte liefert gute Ergebnisse mit beträchtlichem Rechenzeitgewinn. Die Rechenzeitverbesserung gegenüber der direkten Simulation steigt

mit kleiner werdender Ausfallwahrscheinlichkeit. Dies liegt daran, daß bei sinkender Ausfallwahrscheinlichkeit immer weniger Zufallslebensdauern simuliert werden müssen, um den Systemzustand zu ermitteln. Im günstigsten Fall werden bei  $k$  Minimalschnitten nur  $k$  Zufallszahlen gezogen.

- Vergleicht man bei der Simulation der Minimalschnitte die Anzahl der benötigten Simulationsspiele bei direkter Simulation einerseits und Simulation mit Importance Sampling andererseits, so ergibt sich ein größerer Rechenzeitverbesserungsfaktor als in Tabelle 6-4 angegeben. Dies ist auf den erhöhten Organisationsaufwand für das Importance Sampling-Verfahren zurückzuführen.

## 6.3 Fehlerbaum II

### 6.3.1 Beschreibung des Baumes

Einen Fehlerbaum mit vielen Minimalschnitten und einfacher Struktur erhält man, indem man mehrere OR-Tore als Eingänge eines AND-Tores wählt. Dabei entscheidet die Anzahl der verwendeten OR-Tore über die Zahl der an einem Minimalschnitt beteiligten Komponenten (z.B. drei OR-Tore erzeugen Minimalschnitte der Länge drei). Die Gesamtanzahl der Minimalschnitte, die einen Fehlerbaum repräsentieren, erhält man durch Multiplikation der Summen der Komponenten, die Eingänge zu einem OR-Tor sind.

Wir verwenden einen Baum mit drei OR-Toren, wobei jedes OR-Tor fünf Komponenten als Eingänge hat. Somit erhalten wir 125 Minimalschnitte, die folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 c_1, \quad a_1 b_1 c_2, \quad a_1 b_1 c_3, \quad a_1 b_1 c_4, \quad a_1 b_1 c_5, \\ & a_1 b_2 c_1, \quad a_1 b_2 c_2, \quad \dots \\ & \dots \\ & \dots \quad a_5 b_5 c_4, \quad a_5 b_5 c_5. \end{aligned}$$

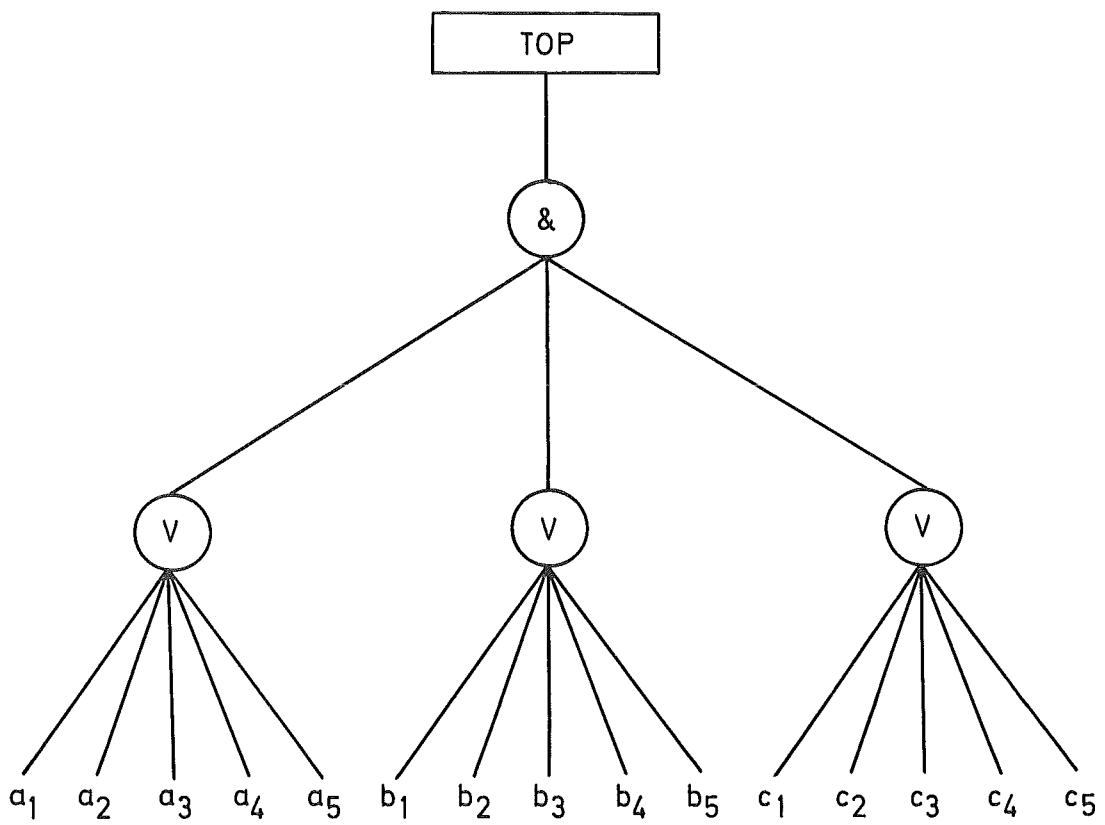
Figur 6-2 zeigt den Fehlerbaum II in einer graphischen Darstellung.

### 6.3.2 Numerische Rechnungen

Entsprechend dem Vorgehen bei Baum I wählen wir wieder vier verschiedene Ausfallwahrscheinlichkeiten, um die Unterschiede studieren können. Tabelle 6-5 zeigt die Inspektionsintervalle, Ausfallraten und optimalen Parameter der Ersatzdichten von den Komponenten, die zu den Ausfallwahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} q_1 &= .110, & q_2 &= .420 \times 10^{-2} \\ q_3 &= .558 \times 10^{-3}, & q_4 &= .697 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Figur 6-2: Baum II, einfache Struktur mit vielen Minimal Schnitten



(V) = OR - TOR  
(&) = AND - TOR

Tabelle 6-5: Baum II , Eingabeparameter für verschiedene Ausfallwahrscheinlichkeiten

| Komponenten-<br>typ <sup>1)</sup> | $\tau$                  | $\lambda$                                                               | $\lambda^*$                                                             |
|-----------------------------------|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $q_1$ {<br>A<br>B<br>C            | 100.0<br>200.0<br>400.0 | $.990 \times 10^{-3}$<br>$.510 \times 10^{-3}$<br>$.249 \times 10^{-3}$ | $.112 \times 10^{-2}$<br>$.673 \times 10^{-2}$<br>$.476 \times 10^{-2}$ |
| $q_2$ {<br>A<br>B<br>C            | 100.0<br>200.0<br>400.0 | $.264 \times 10^{-3}$<br>$.136 \times 10^{-3}$<br>$.664 \times 10^{-4}$ | $.301 \times 10^{-3}$<br>$.181 \times 10^{-3}$<br>$.470 \times 10^{-2}$ |
| $q_3$ {<br>A<br>B<br>C            | 100.0<br>200.0<br>400.0 | $.132 \times 10^{-3}$<br>$.680 \times 10^{-4}$<br>$.332 \times 10^{-4}$ | $.150 \times 10^{-3}$<br>$.904 \times 10^{-4}$<br>$.468 \times 10^{-2}$ |
| $q_4$ {<br>A<br>B<br>C            | 100.0<br>200.0<br>400.0 | $.660 \times 10^{-4}$<br>$.340 \times 10^{-4}$<br>$.160 \times 10^{-4}$ | $.752 \times 10^{-4}$<br>$.452 \times 10^{-4}$<br>$.467 \times 10^{-2}$ |

$$q_1 = .110$$

$$q_2 = .420 \times 10^{-2}$$

$$q_3 = .558 \times 10^{-3}$$

$$q_4 = .697 \times 10^{-4}$$

1) Da alle Minimalschnitte die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit haben, sind an Stelle von allen 15 Komponenten nur die an jedem Schnitt beteiligten Typen aufgeführt

(vgl. Figur 6-2;  $a_1 = a_2 = \dots = a_5 = A$ ).

Tabelle 6-6: Baum II, Darstellung der Simulationsergebnisse der verschiedenen Programme

|   | ANAL                  | BAUM                  | BAUMIS1               | BAUMIS2               | MINCUT<br>OIS         | MINCUT<br>MIS         | F    | RF   |
|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------|------|
| q | .110                  | .122                  | .116                  | .136                  | .115                  | .126                  | 3,26 | 2,11 |
| σ | .011                  | .011                  | .014                  | .013                  | .011                  | .010                  |      |      |
| N |                       | 910                   | 910                   | 910                   | 910                   | 80                    |      |      |
| R |                       | 1,77                  | 1,92                  | 2,31                  | 5,64                  | 0,84                  |      |      |
| q | $.420 \times 10^{-2}$ | $.437 \times 10^{-2}$ | $.402 \times 10^{-2}$ | $.510 \times 10^{-2}$ | $.479 \times 10^{-2}$ | $.485 \times 10^{-2}$ | 6,12 | 6,02 |
| σ | $.420 \times 10^{-3}$ | $.410 \times 10^{-3}$ | $.568 \times 10^{-3}$ | $.162 \times 10^{-2}$ | $.382 \times 10^{-3}$ | $.401 \times 10^{-3}$ |      |      |
| N |                       | 25.840                | 25.840                | 25.840                | 25.840                | 670                   |      |      |
| R |                       | 51,60                 | 52,92                 | 60,31                 | 156,0                 | 8,37                  |      |      |
| q | $.558 \times 10^{-3}$ | $.565 \times 10^{-3}$ | $.610 \times 10^{-3}$ | $.762 \times 10^{-3}$ | $.512 \times 10^{-3}$ | $.535 \times 10^{-3}$ | 8,72 | 7,7  |
| σ | $.558 \times 10^{-4}$ | $.551 \times 10^{-4}$ | $.790 \times 10^{-4}$ | $.309 \times 10^{-3}$ | $.515 \times 10^{-4}$ | $.583 \times 10^{-4}$ |      |      |
| N |                       | 185.873               | 185.873               | 185.873               | 185.873               | 2.000                 |      |      |
| R |                       | 366,6                 | 377,2                 | 392,1                 | 1.078,2               | 47,71                 |      |      |
| q | $.697 \times 10^{-4}$ | $.704 \times 10^{-4}$ | $.593 \times 10^{-4}$ | $.618 \times 10^{-4}$ | $.701 \times 10^{-4}$ | $.733 \times 10^{-4}$ | 12,5 | 12,7 |
| σ | $.697 \times 10^{-5}$ | $.750 \times 10^{-5}$ | $.911 \times 10^{-5}$ | $.134 \times 10^{-4}$ | $.685 \times 10^{-4}$ | $.701 \times 10^{-5}$ |      |      |
| N |                       | 1.250.000             | 1.250.000             | 1.250.000             | 1.250.000             | 8.000                 |      |      |
| R |                       | 2.441,0               | 2.450,3               | 2.501,2               | 7.249,57              | 191,16                |      |      |

Legende: ANAL = Analytische Werte  
 q = Ausfallwahrscheinlichkeit  
 σ = Streuung (10 %)  
 N = Anzahl der Simulationsspiele  
 R = Rechenzeit in Sekunden  
 F = Ø Varianzreduktionsfaktor  
 RF = Rechenzeitverbesserungsfaktor



führen. Die analytische Berechnung führt zu einer größeren Spanne zwischen oberer- und unterer Abschätzung als bei Baum I, da die größere Anzahl von Minimalschnitten zu einer größeren Gewichtung der Durchschnitte führt. Wir verwenden wieder als Maßstab für die Systemausfallwahrscheinlichkeiten  $q_1$  bis  $q_4$  die Mittelwerte zwischen den oberen und unteren Schranken.

$$\begin{aligned} .171 & \leq q_1 \leq .050 \\ .457 \times 10^{-2} & \leq q_2 \leq .384 \times 10^{-2} \\ .581 \times 10^{-3} & \leq q_3 \leq .535 \times 10^{-3} \\ .711 \times 10^{-4} & \leq q_4 \leq .683 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Für übereinstimmende Inspektionsintervalle wählen wir wieder gleiche Ausfallraten für die Komponenten, so daß alle Minimalschnitte die gleichen Ausfallwahrscheinlichkeiten haben.

Tabelle 6-6 entspricht im Aufbau Tabelle 6-4 und zeigt die Simulationsergebnisse der verschiedenen Programme für die vier verschiedenen Ausfallwahrscheinlichkeiten. Die verwendeten Simulationsverfahren wurden in 6.2.2 ausführlich behandelt, so daß an dieser Stelle auf eine neuerliche Erläuterung verzichtet und auf Tabelle 6-3 verwiesen wird.

### 6.3.3 Diskussion der Ergebnisse

Auch bei Baum II zeigt sich, daß nur die direkte Simulation des Baumes und der Minimalschnitte und die Simulation mit Importance Sampling über die Minimalschnitte zum Ziel führt.

Die Programme BAUMIS1 und BAUMIS2 liefern schlechtere Ergebnisse als die direkte Simulation des Baumes, so daß die Simulation mit Importance Sampling mit der Subroutine TREE eine Verschlechterung bedeutet. Im folgenden sind die Ergebnisse tabellarisch dargestellt:

- Die Programme BAUM, MINCUTOIS und MINCUTMIS liefern das gewünschte Ergebnis innerhalb der vorgegebenen Streuung.
- Bei der direkten Simulation ist auf Grund der hohen Anzahl der Minimalschnitte und der einfachen Struktur des Baumes der Weg über den Fehlerbaum direkt ungefähr dreimal schneller als die Simulation der Minimalschnitte.
- Bei Abhängigkeit der Komponenten in den Minimalschnitten ist dies bei der Simulation zu berücksichtigen, da sonst die Ausfallwahrscheinlichkeit zu ungenau ermittelt wird.
- Importance Sampling auf die Simulation des Baumes mit den Programmen BAUMIS1 und BAUMIS2 angewendet liefert uns eine größere Streuung als die direkte Simulation des Baumes. Dabei ist die Streuung bei BAUMIS2 größer als bei dem Programm BAUMIS1.
- Importance Sampling auf die Simulation der Minimalschnitte angewendet liefert verwendbare Ergebnisse mit dem erhofften Rechenzeitgewinn, wobei die Verbesserung mit sinkender Ausfallwahrscheinlichkeit aus dem schon in Abschnitt 6.2.3 gegebenen Grund ansteigt.
- Ein Vergleich der benötigten Simulationsspiele bei der Simulation über die Minimalschnitte zwischen direkter Simulation und Simulation mit Importance Sampling zeigt auch hier wie bei Baum I, daß ein großer Anteil der Rechenzeitverbesserung durch das Importance Sampling-Verfahren verbraucht wird.

## 6.4 Fehlerbaum TRIGA

### 6.4.1 Beschreibung des Baumes

Der aus der Praxis stammende Baum TRIGA /26/ beschreibt die Ausfallwahrscheinlichkeit des Abschaltsystems eines Reaktors, wenn die Betriebsleistung 1 MW überschritten hat. Der Fehlerbaum weist neben einer komplexen Struktur auch eine große Zahl von Minimalschnitten auf, die die Länge eins, zwei, drei und vier haben. Dabei ist der Baum so strukturiert, daß sich die Anzahl der Minimalschnitte von 51 auf 24 reduziert, falls man Komponente 13 so auslegt, daß sie nie ausfällt. Der reduzierte Baum enthält dann nur Minimalschnitte der Länge eins, zwei und drei, was für die Optimierungsrechnung und den Vergleich mit Baum I und II vorteilhafter ist. Aus diesem Grund verwenden wir den reduzierten Baum als Testbeispiel der Praxis. Bei der Auflösung des Baumes in Schnitte erhält man folgende Minimalschnitte

|    |    |    |
|----|----|----|
| 19 |    |    |
| 20 |    |    |
| 21 |    |    |
| 22 |    |    |
| 1  | 13 |    |
| 2  | 13 |    |
| 2  | 16 |    |
| 1  | 16 |    |
| 5  | 6  | 7  |
| 11 | 12 | 16 |
| 11 | 15 | 16 |
| 11 | 16 | 18 |
| 12 | 14 | 16 |
| 14 | 15 | 16 |
| 14 | 16 | 18 |

|    |    |    |
|----|----|----|
| 12 | 16 | 17 |
| 15 | 16 | 17 |
| 16 | 17 | 18 |
| 3  | 6  | 7  |
| 4  | 6  | 7  |
| 3  | 5  | 7  |
| 4  | 5  | 7  |
| 3  | 5  | 6  |
| 4  | 5  | 6  |

Das Auftreten von Minimal Schnitten der Länge eins bewirkt bei einem Ausfall nur einer dieser Komponenten den Ausfall des Gesamtsystems. Normalerweise ist man versucht, solche Ereignisse durch andere Schaltungen zu vermeiden, jedoch ist der vorliegende Fall sinnvoll, da es aus Sicherheitsgründen unbedingt erforderlich ist, den Reaktor abzuschalten, wenn ein Defekt an den Kontrollstäben auftritt (Verklemmen, Kurzschluß usw.).

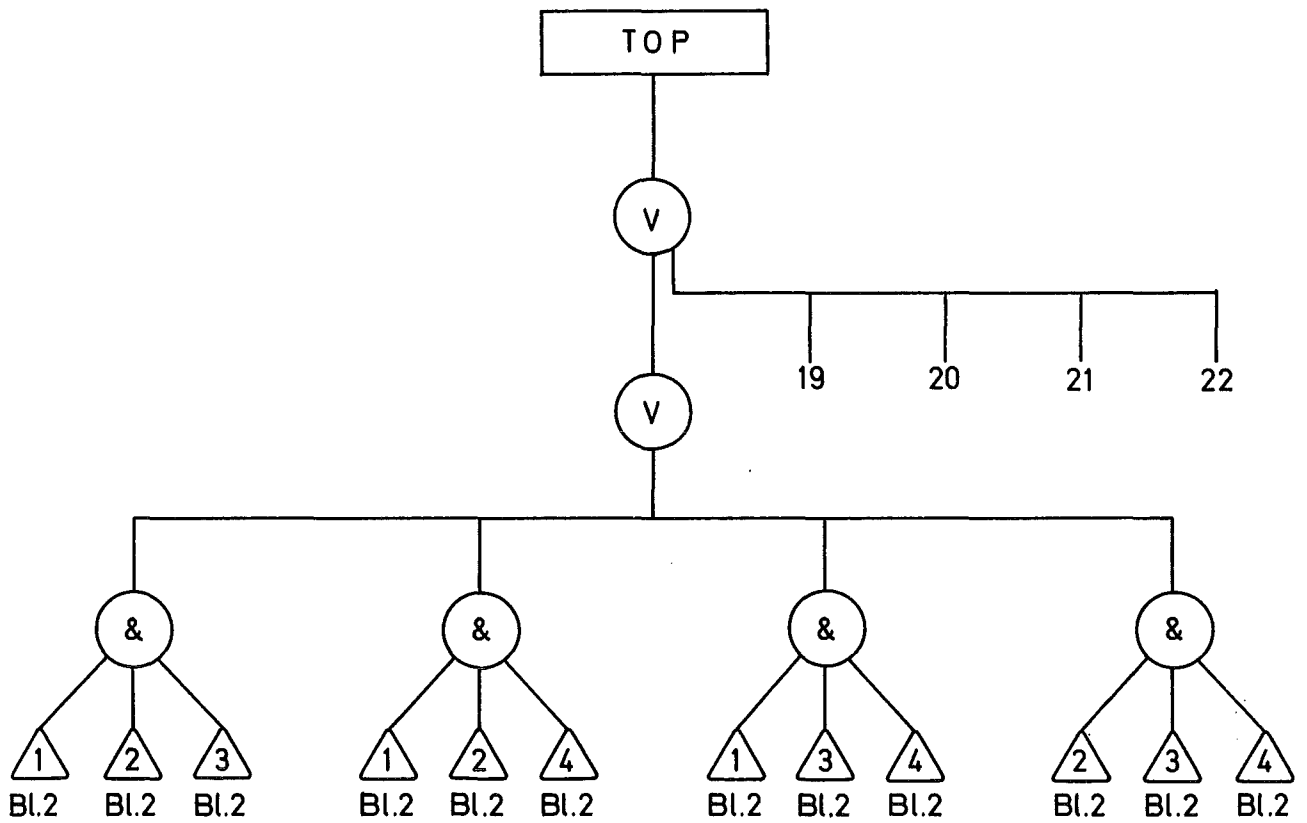
Figur 6-3 zeigt den Fehlerbaum TRIGA, wobei die numerierten Dreiecke die Verbindung zwischen den einzelnen Subsystemen des Baumes zu einem Ganzen herstellen.

#### 6.4.2 Numerische Rechnungen

Auf Grund der unterschiedlichen Minimal Schnitte haben die einzelnen Minimal Schnitte größtenteils verschiedene Ausfallwahrscheinlichkeiten, so daß die Eingabeparameter, die zu den Ausfallwahrscheinlichkeiten

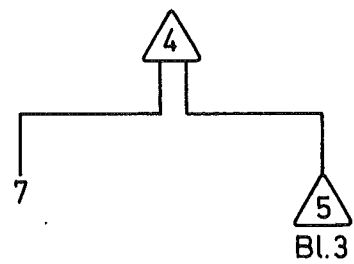
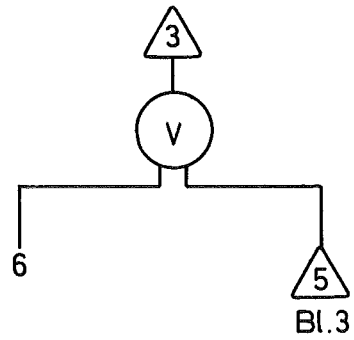
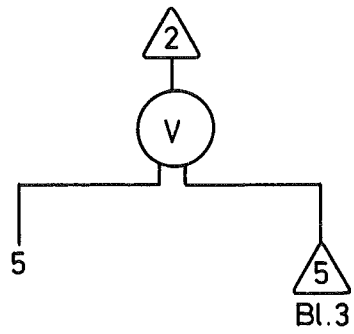
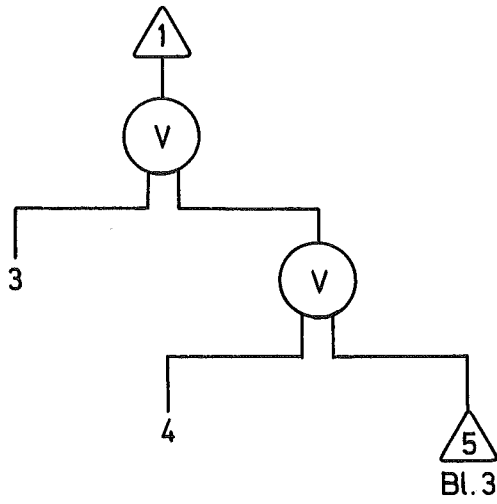
Figur 6-3: Baum TRIGA, Mischtyp zwischen Baum I und II aus der Praxis mit komplexer Struktur und vielen Minimalschnitten

Blatt 1



Blatt 2

Fehlerbaum TRIGA



Blatt 3

Fehlerbaum TRIGA

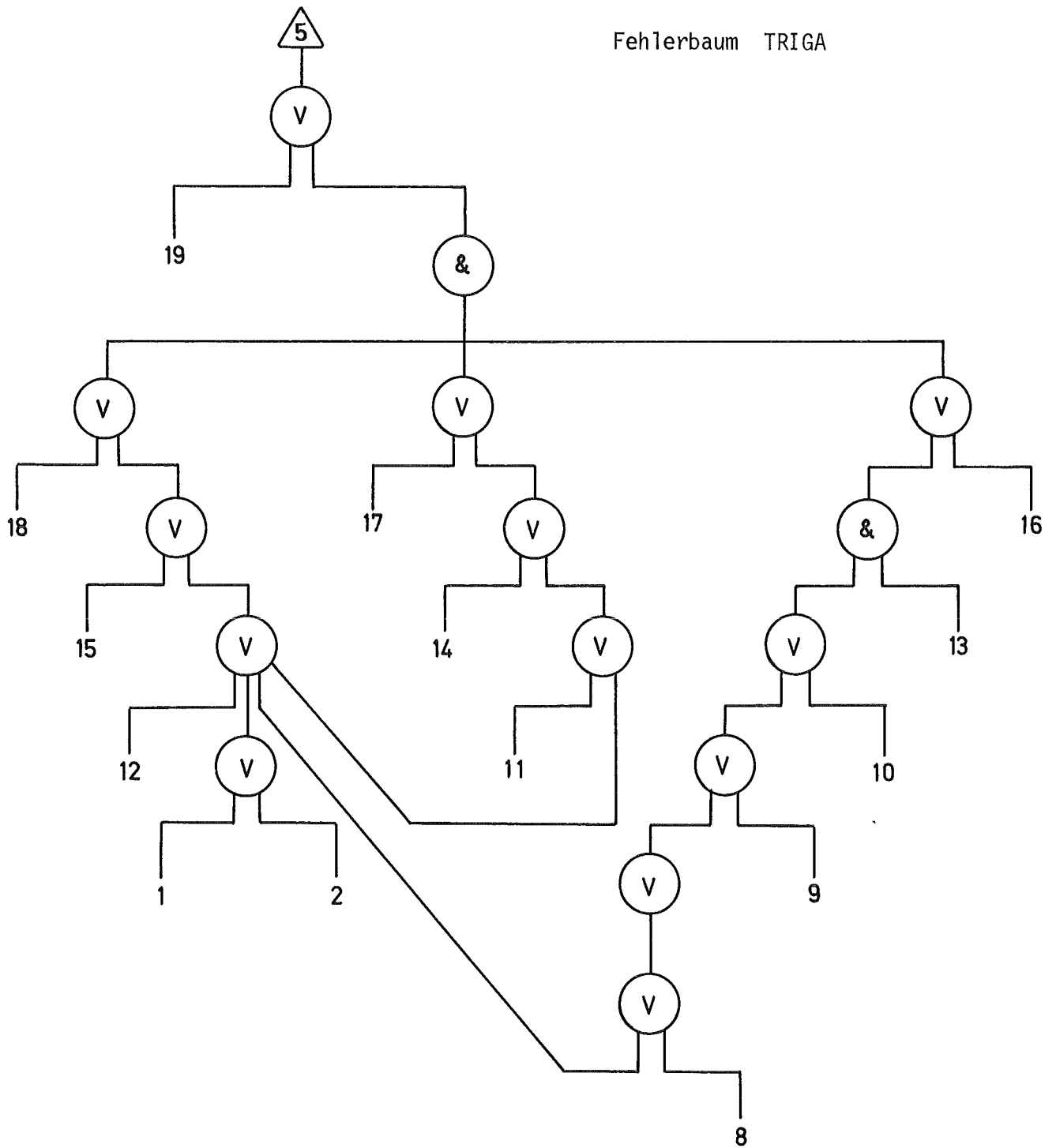


Tabelle 6-7: Baum TRIGA , Eingabeparameter für die Ausfallwahrscheinlichkeit

$$q_1 = .376 \times 10^{-1}$$

| Komponente | $\tau$ | $\lambda$             | $\lambda^*$           |
|------------|--------|-----------------------|-----------------------|
| 1          | 200.0  | $.170 \times 10^{-3}$ | $.225 \times 10^{-3}$ |
| 2          | 200.0  | $.170 \times 10^{-3}$ | $.225 \times 10^{-3}$ |
| 3          | 400.0  | $.830 \times 10^{-4}$ | $.449 \times 10^{-2}$ |
| 4          | 400.0  | $.830 \times 10^{-4}$ | $.449 \times 10^{-2}$ |
| 5          | 200.0  | $.170 \times 10^{-3}$ | $.226 \times 10^{-3}$ |
| 6          | 200.0  | $.170 \times 10^{-3}$ | $.226 \times 10^{-3}$ |
| 7          | 200.0  | $.170 \times 10^{-3}$ | $.226 \times 10^{-3}$ |
| 8          | 100.0  | $.330 \times 10^{-2}$ | $.330 \times 10^{-2}$ |
| 9          | 100.0  | $.330 \times 10^{-2}$ | $.330 \times 10^{-2}$ |
| 10         | 100.0  | $.330 \times 10^{-2}$ | $.330 \times 10^{-2}$ |
| 11         | 100.0  | $.330 \times 10^{-2}$ | $.330 \times 10^{-2}$ |
| 12         | 200.0  | $.170 \times 10^{-2}$ | $.218 \times 10^{-2}$ |
| 13         | 400.0  | $.830 \times 10^{-4}$ | $.447 \times 10^{-2}$ |
| 14         | 100.0  | $.330 \times 10^{-2}$ | $.372 \times 10^{-2}$ |
| 15         | 200.0  | $.170 \times 10^{-2}$ | $.218 \times 10^{-2}$ |
| 16         | 400.0  | $.830 \times 10^{-4}$ | $.462 \times 10^{-2}$ |
| 17         | 100.0  | $.330 \times 10^{-2}$ | $.372 \times 10^{-2}$ |
| 18         | 200.0  | $.170 \times 10^{-2}$ | $.218 \times 10^{-2}$ |
| 19         | 400.0  | $.300 \times 10^{-5}$ | $.300 \times 10^{-5}$ |
| 20         | 400.0  | $.300 \times 10^{-5}$ | $.300 \times 10^{-5}$ |
| 21         | 400.0  | $.300 \times 10^{-5}$ | $.300 \times 10^{-5}$ |
| 22         | 400.0  | $.300 \times 10^{-5}$ | $.300 \times 10^{-5}$ |



Tabelle 6-8: Baum TRIGA , Eingabeparameter für die Ausfallwahrscheinlichkeit

$$q_2 = .323 \times 10^{-2}$$

| Komponente | $\tau$ | $\lambda$             | $\lambda^*$           |
|------------|--------|-----------------------|-----------------------|
| 1          | 200.0  | $.510 \times 10^{-4}$ | $.225 \times 10^{-3}$ |
| 2          | 200.0  | $.510 \times 10^{-4}$ | $.225 \times 10^{-3}$ |
| 3          | 400.0  | $.250 \times 10^{-4}$ | $.446 \times 10^{-2}$ |
| 4          | 400.0  | $.250 \times 10^{-4}$ | $.446 \times 10^{-2}$ |
| 5          | 200.0  | $.510 \times 10^{-4}$ | $.225 \times 10^{-3}$ |
| 6          | 200.0  | $.510 \times 10^{-4}$ | $.225 \times 10^{-3}$ |
| 7          | 200.0  | $.510 \times 10^{-4}$ | $.225 \times 10^{-3}$ |
| 8          | 100.0  | $.990 \times 10^{-3}$ | $.990 \times 10^{-3}$ |
| 9          | 100.0  | $.990 \times 10^{-3}$ | $.990 \times 10^{-3}$ |
| 10         | 100.0  | $.990 \times 10^{-3}$ | $.990 \times 10^{-3}$ |
| 11         | 100.0  | $.990 \times 10^{-3}$ | $.990 \times 10^{-3}$ |
| 12         | 200.0  | $.510 \times 10^{-3}$ | $.673 \times 10^{-3}$ |
| 13         | 400.0  | $.250 \times 10^{-4}$ | $.446 \times 10^{-2}$ |
| 14         | 100.0  | $.990 \times 10^{-3}$ | $.113 \times 10^{-2}$ |
| 15         | 200.0  | $.510 \times 10^{-3}$ | $.673 \times 10^{-3}$ |
| 16         | 400.0  | $.250 \times 10^{-4}$ | $.446 \times 10^{-2}$ |
| 17         | 100.0  | $.990 \times 10^{-3}$ | $.113 \times 10^{-2}$ |
| 18         | 200.0  | $.510 \times 10^{-3}$ | $.673 \times 10^{-3}$ |
| 19         | 400.0  | $.900 \times 10^{-6}$ | $.900 \times 10^{-6}$ |
| 20         | 400.0  | $.900 \times 10^{-6}$ | $.900 \times 10^{-6}$ |
| 21         | 400.0  | $.900 \times 10^{-6}$ | $.900 \times 10^{-6}$ |
| 22         | 400.0  | $.900 \times 10^{-6}$ | $.900 \times 10^{-6}$ |

Tabelle 6-9: Baum TRIGA , Eingabeparameter für die Ausfallwahrscheinlichkeit

$$q_3 = .590 \times 10^{-3}$$

| Komponente | $\tau$ | $\lambda$             | $\lambda^*$           |
|------------|--------|-----------------------|-----------------------|
| 1          | 200.0  | $.153 \times 10^{-4}$ | $.679 \times 10^{-4}$ |
| 2          | 200.0  | $.153 \times 10^{-4}$ | $.679 \times 10^{-4}$ |
| 3          | 400.0  | $.747 \times 10^{-5}$ | $.446 \times 10^{-2}$ |
| 4          | 400.0  | $.747 \times 10^{-5}$ | $.446 \times 10^{-2}$ |
| 5          | 200.0  | $.153 \times 10^{-4}$ | $.679 \times 10^{-4}$ |
| 6          | 200.0  | $.153 \times 10^{-4}$ | $.679 \times 10^{-4}$ |
| 7          | 200.0  | $.153 \times 10^{-4}$ | $.679 \times 10^{-4}$ |
| 8          | 100.0  | $.297 \times 10^{-3}$ | $.297 \times 10^{-3}$ |
| 9          | 100.0  | $.297 \times 10^{-3}$ | $.297 \times 10^{-3}$ |
| 10         | 100.0  | $.297 \times 10^{-3}$ | $.297 \times 10^{-3}$ |
| 11         | 100.0  | $.297 \times 10^{-3}$ | $.297 \times 10^{-3}$ |
| 12         | 200.0  | $.153 \times 10^{-3}$ | $.203 \times 10^{-3}$ |
| 13         | 400.0  | $.747 \times 10^{-5}$ | $.446 \times 10^{-2}$ |
| 14         | 100.0  | $.297 \times 10^{-3}$ | $.339 \times 10^{-3}$ |
| 15         | 200.0  | $.153 \times 10^{-3}$ | $.203 \times 10^{-3}$ |
| 16         | 400.0  | $.747 \times 10^{-5}$ | $.446 \times 10^{-2}$ |
| 17         | 100.0  | $.297 \times 10^{-3}$ | $.339 \times 10^{-3}$ |
| 18         | 200.0  | $.153 \times 10^{-3}$ | $.203 \times 10^{-3}$ |
| 19         | 400.0  | $.270 \times 10^{-6}$ | $.270 \times 10^{-6}$ |
| 20         | 400.0  | $.270 \times 10^{-6}$ | $.270 \times 10^{-6}$ |
| 21         | 400.0  | $.270 \times 10^{-6}$ | $.270 \times 10^{-6}$ |
| 22         | 400.0  | $.270 \times 10^{-6}$ | $.270 \times 10^{-6}$ |

Tabelle 6-10: Baum TRIGA , Eingabeparameter für die Ausfallwahrscheinlichkeit

$$q_4 = .493 \times 10^{-4}$$

| Komponente | $\tau$ | $\lambda$             | $\lambda^*$           |
|------------|--------|-----------------------|-----------------------|
| 1          | 200.0  | $.170 \times 10^{-5}$ | $.226 \times 10^{-5}$ |
| 2          | 200.0  | $.170 \times 10^{-5}$ | $.226 \times 10^{-5}$ |
| 3          | 400.0  | $.830 \times 10^{-6}$ | $.445 \times 10^{-2}$ |
| 4          | 400.0  | $.830 \times 10^{-6}$ | $.445 \times 10^{-2}$ |
| 5          | 200.0  | $.170 \times 10^{-5}$ | $.226 \times 10^{-5}$ |
| 6          | 200.0  | $.170 \times 10^{-5}$ | $.226 \times 10^{-5}$ |
| 7          | 200.0  | $.170 \times 10^{-5}$ | $.226 \times 10^{-5}$ |
| 8          | 100.0  | $.330 \times 10^{-4}$ | $.330 \times 10^{-4}$ |
| 9          | 100.0  | $.330 \times 10^{-4}$ | $.330 \times 10^{-4}$ |
| 10         | 100.0  | $.330 \times 10^{-4}$ | $.330 \times 10^{-4}$ |
| 11         | 100.0  | $.330 \times 10^{-4}$ | $.330 \times 10^{-4}$ |
| 12         | 200.0  | $.170 \times 10^{-4}$ | $.226 \times 10^{-4}$ |
| 13         | 400.0  | $.830 \times 10^{-6}$ | $.445 \times 10^{-2}$ |
| 14         | 100.0  | $.330 \times 10^{-4}$ | $.337 \times 10^{-4}$ |
| 15         | 200.0  | $.170 \times 10^{-4}$ | $.226 \times 10^{-4}$ |
| 16         | 400.0  | $.830 \times 10^{-6}$ | $.445 \times 10^{-2}$ |
| 17         | 100.0  | $.330 \times 10^{-4}$ | $.337 \times 10^{-4}$ |
| 18         | 200.0  | $.170 \times 10^{-4}$ | $.226 \times 10^{-4}$ |
| 19         | 400.0  | $.300 \times 10^{-7}$ | $.300 \times 10^{-7}$ |
| 20         | 400.0  | $.300 \times 10^{-7}$ | $.300 \times 10^{-7}$ |
| 21         | 400.0  | $.300 \times 10^{-7}$ | $.300 \times 10^{-7}$ |
| 22         | 400.0  | $.300 \times 10^{-7}$ | $.300 \times 10^{-7}$ |

Tabelle 6-11: Baum TRIGA, Darstellung der Simulationsergebnisse der verschiedenen Programme

|          | ANAL                  | BAUM                  | BAUMIS1               | BAUMIS2               | MINCUT<br>OIS         | MINCUT<br>MIS         | F    | RF   |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------|------|
| q        | $.376 \times 10^{-1}$ | $.403 \times 10^{-1}$ | $.460 \times 10^{-1}$ | $.596 \times 10^{-2}$ | $.394 \times 10^{-1}$ | $.339 \times 10^{-1}$ | 3,8  | 3,8  |
| $\sigma$ | $.376 \times 10^{-2}$ | $.352 \times 10^{-2}$ | $.431 \times 10^{-2}$ | $.156 \times 10^{-1}$ | $.356 \times 10^{-2}$ | $.367 \times 10^{-2}$ |      |      |
| N        |                       | 3.125                 | 3.125                 | 3.125                 | 3.125                 | 700                   |      |      |
| R        |                       | 8,623                 | 8,847                 | 8.571                 | 5,583                 | 1,469                 |      |      |
| q        | $.323 \times 10^{-2}$ | $.322 \times 10^{-2}$ | $.347 \times 10^{-2}$ | $.640 \times 10^{-3}$ | $.296 \times 10^{-2}$ | $.321 \times 10^{-2}$ | 5,5  | 6,2  |
| $\sigma$ | $.323 \times 10^{-3}$ | $.289 \times 10^{-3}$ | $.372 \times 10^{-3}$ | $.244 \times 10^{-2}$ | $.315 \times 10^{-3}$ | $.348 \times 10^{-3}$ |      |      |
| N        |                       | 30.960                | 30.960                | 30.960                | 30.960                | 2.400                 |      |      |
| R        |                       | 107,6                 | 109,3                 | 111,7                 | 65,08                 | 10,497                |      |      |
| q        | $.590 \times 10^{-3}$ | $.566 \times 10^{-3}$ | $.483 \times 10^{-3}$ | $.130 \times 10^{-4}$ | $.548 \times 10^{-3}$ | $.610 \times 10^{-3}$ | 7,5  | 8,7  |
| $\sigma$ | $.590 \times 10^{-4}$ | $.578 \times 10^{-4}$ | $.659 \times 10^{-4}$ | $.409 \times 10^{-3}$ | $.576 \times 10^{-4}$ | $.605 \times 10^{-4}$ |      |      |
| N        |                       | 169.500               | 169.500               | 169.500               | 169.500               | 8.400                 |      |      |
| R        |                       | 511,9                 | 510,9                 | 511,7                 | 306,3                 | 35,20                 |      |      |
| q        | $.493 \times 10^{-4}$ | $.476 \times 10^{-4}$ | $.485 \times 10^{-4}$ | $.373 \times 10^{-5}$ | $.453 \times 10^{-4}$ | $.538 \times 10^{-4}$ | 15,6 | 17,5 |
| $\sigma$ | $.493 \times 10^{-5}$ | $.577 \times 10^{-5}$ | $.623 \times 10^{-5}$ | $.211 \times 10^{-4}$ | $.488 \times 10^{-5}$ | $.488 \times 10^{-5}$ |      |      |
| N        |                       | 2.028.397             | 2.028.397             | 2.028.397             | 2.028.397             | 60.000                |      |      |
| R        |                       | 4.870,2               | 4.882,0               | 4.901,2               | 2.705,5               | 154,6                 |      |      |

Legende: ANAL = Analytische Werte  
 q = Ausfallwahrscheinlichkeit  
 $\sigma$  = Streuung (10 %)  
 N = Anzahl der Simulationsspiele  
 R = Rechenzeit in Sekunden  
 F =  $\emptyset$  Varianzreduktionsfaktor  
 RF = Rechenzeitverbesserungsfaktor

$$\begin{aligned} q_1 &= .376 \times 10^{-1} , & q_2 &= .323 \times 10^{-2} \\ q_3 &= .590 \times 10^{-3} , & q_4 &= .493 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

führen, auf einer jeweils eigenen Tabelle 6-7, 6-8, 6-9 und 6-10 dargestellt sind.

Als Maßstab für die Systemausfallwahrscheinlichkeiten nehmen wir wieder den Mittelwert zwischen der oberen- und unteren Schranke, der sich aus folgenden Werten bildet:

$$\begin{aligned} .526 \times 10^{-1} &\leq q_1 \leq .226 \times 10^{-1} \\ .327 \times 10^{-2} &\leq q_2 \leq .320 \times 10^{-2} \\ .592 \times 10^{-3} &\leq q_3 \leq .589 \times 10^{-3} \\ .493 \times 10^{-4} &\leq q_4 \leq .493 \times 10^{-4} . \end{aligned}$$

Wie auch schon bei Baum I und II wurden die Ausfallraten der an einem Minimalschnitt beteiligten Komponenten so gewählt, daß der Ausfall des Schnittes durch jede Komponente gleich häufig erfolgt.

In Tabelle 6-11 sind die Ergebnisse der verschiedenen Simulationsprogramme, die schon in 6.2.2 behandelt und in Tabelle 6-3 zusammengestellt wurden, für die verschiedenen Ausfallwahrscheinlichkeiten aufgezeigt.

### 6.4.3 Diskussion der Ergebnisse

Die direkte Simulation des Baumes und der Minimalschnitte und die Simulation mit Importance Sampling über die Minimalschnitte vermittelt uns ausreichend gute Ergebnisse. So wie bei Baum I und II ist die Simulation mit Importance Sampling des Baumes unbefriedigend, da die Streuung mit Importance Sampling wieder größer ist als die Streuung ohne dieses Verfahren. Bei genauer Analyse der Ergebnisse kommt man zu folgenden Resultaten:

- Die Programme BAUM, MINCUTOIS und MINCUTMIS ermitteln die Systemausfallwahrscheinlichkeit richtig mit der erwünschten Toleranz.
- Bei der direkten Simulation des Baumes und der Minimalschnitte ist der Weg über die Minimalschnitte ungefähr 1,6 mal schneller als die Simulation des Baumes.
- Bei Abhängigkeit der Komponenten innerhalb der Minimalschnitte ist dies bei der Programmgestaltung zur Ermittlung richtiger Ausfallwahrscheinlichkeiten zu berücksichtigen, da andernfalls die Ergebnisse zu ungenau werden.
- Bei der Simulation des Baumes mit Importance Sampling über die Programme BAUMIS1 und BAUMIS2 erhalten wir unbefriedigende Ergebnisse, da sich die Streuung gegenüber der Ausgangsstreuung ohne Importance Sampling verschlechtert.
- Bei einem Vergleich zwischen BAUMIS 1 und BAUMIS2 zeigt sich, daß die Wahl der optimalen Parameter aus der Optimierungsrechnung für die Minimalschnitte zu schlechteren Ergebnissen führt, als die Bestimmung der optimalen Parameter durch einen festen Faktor.

- Das Verfahren Importance Sampling liefert nur bei der Simulation über die Minimalschnitte gute Ergebnisse mit dem erhofften Rechenzeitgewinn. Dabei wird die Rechenzeitverbesserung bei sinkender Systemausfallwahrscheinlichkeit größer.
- Bei einem Vergleich der benötigten Anzahl von Simulationsspielen zwischen direkter Simulation und Simulation mit Importance Sampling über die Minimalschnitte zeigt sich, daß der organisatorische Programmaufwand einen großen Teil der möglichen Rechenzeitverbesserung wieder zunichte macht.

## 7. Abschlußdiskussion

Bei allen betrachteten Fallbeispielen hat sich gezeigt, daß die direkte Simulation des Fehlerbaumes einerseits und die direkte Simulation der Minimalschnitte andererseits verwendbare Schätzwerte, d.h. Schätzwerte innerhalb vorgegebener Fehlertoleranzen, für die Systemausfallwahrscheinlichkeit liefert. Ein Vergleich der Rechenzeiten zeigte, daß die direkte Simulation des Baumes nur bei Baum II (einfache Struktur, viele Minimalschnitte) in kürzeren Zeiten zu realisieren war als die Simulation der Minimalschnitte. Bei Baum I und TRIGA lag die Simulation der Minimalschnitte in Bezug auf die Rechenzeiten besser als die Simulation des Baumes. Der Unterschied der Rechenzeiten zwischen den beiden Vorgehensweisen hängt von der Komplexität und der Anzahl der Minimalschnitte ab. Es läßt sich somit keine eindeutige Bevorzugung für eines der beiden direkten Simulationsverfahren angeben. Aufgrund der Erfahrung kann man jedoch in vielen Fällen abschätzen, welches Verfahren schneller arbeitet: Bei einer großen Anzahl von Minimalschnitten und einfacher Baumstruktur wird man die direkte Simulation des Baumes wählen, während man sich wahrscheinlich bei einem komplexen Baum mit wenig Minimalschnitten für die direkte Simulation über die Minimalschnitte entscheidet.

Die Berücksichtigung etwaiger Abhängigkeiten der Komponenten in verschiedenen Minimalschnitten ist bei der Simulation erforderlich, da eine Nichtbeachtung eine zu große Abschätzung der zu schätzenden Systemausfallwahrscheinlichkeit bedingt. Der erforderliche Rechenzeitmehraufwand hält sich in sehr kleinen Grenzen und wird durch das bessere Ergebnis aufgewogen.

Die Simulation des Fehlerbaumes mit dem Importance Sampling Verfahren brachte die Schwierigkeit mit sich, daß sich keine optimalen Parameter für die Ausfallraten der Komponenten angeben lassen, da sich die Varianz der Schätzfunktion nicht explizit ausrechnen läßt, so daß eine



Optimierung nicht möglich ist. Um aber trotzdem eine Rechenzeitverbesserung zu erreichen, wurden willkürliche "optimale" Parameter bestimmt, indem die Ausgangsparameter alle mit einem konstanten Faktor multipliziert wurden. Dies geschah in der Hoffnung, daß ein Hochsetzen der Ausfallraten zu mehr Systemausfällen innerhalb der vorgegebenen Anzahl von Simulationsspielen führt, obwohl man sich bewußt sein sollte, daß die willkürliche Parameterwahl keine Berücksichtigung der jeweiligen Baumstruktur zuläßt. Es war somit auch nicht verwunderlich, daß sich bei allen Fehlerbäumen zeigte, daß der Variationsfaktor nicht größer als 1,5 gewählt werden durfte, um zu vernünftigen Ergebnissen zu kommen, da bei größeren Faktoren innerhalb der Gewichtsfunktion numerische Instabilitäten bei der EDV-Auswertung auftraten. Ein Vergleich der Varianz dieses Verfahrens mit der Varianz der direkten Simulation des Baumes zeigte, daß der negative Effekt einer Varianzvergrößerung bei gleicher Anzahl der Simulationsspiele eintrat. Aus diesem Grund ist das oben geschilderte Verfahren nicht geeignet, die direkte Simulation zu ersetzen.

Nachdem die "optimale" Parameterwahl mit dem konstanten Faktor nicht zum Ziel führte, wurde ein weiterer Vorstoß in der gleichen Richtung unternommen, indem wir für die "optimalen" Parameter die in der Optimierungsrechnung für die Minimalschnitte gefundenen optimalen Parameter einsetzten. Es zeigte sich aber auch hier, daß sich die Varianz mit Importance Sampling gegenüber der Ausgangsvarianz bei direkter Simulation sogar bedeutend stärker als bei der Variation mit dem konstanten Faktor vergrößert. Die Simulation des Baumes mit Importance Sampling hat sich somit als unbrauchbar erwiesen.

Wenden wir aber Importance Sampling auf die Minimalschnitte an, so erhalten wir eine beträchtliche Reduktion der benötigten Simulationsspiele bei festgehaltener Varianz mit der erwünschten Rechenzeiterparnis. Im Gegensatz zur Simulation des Baumes mit Importance Sampling ist eine Optimierung möglich, indem wir für die einzelnen Minimalschnitte eine Optimierung der Varianz durchführen können. Um die

Tabelle 7-1: Vergleich der Effektivität der Simulation der Minimalschnitte mit direkter Simulation und mit Importance Sampling

BAUM I

|    |                       |                       |                       |                      |
|----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| q  | $.973 \times 10^{-1}$ | $.478 \times 10^{-2}$ | $.455 \times 10^{-3}$ | $.70 \times 10^{-5}$ |
| FN | 10,78                 | 14,21                 | 27,17                 | 46,95                |
| FR | 3,48                  | 5,94                  | 10,70                 | 17,30                |

BAUM II

|    |       |                       |                       |                       |
|----|-------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| q  | .110  | $.420 \times 10^{-2}$ | $.558 \times 10^{-3}$ | $.697 \times 10^{-4}$ |
| FN | 11,37 | 38,56                 | 92,93                 | 156,25                |
| FR | 6,71  | 18,63                 | 22,60                 | 37,92                 |

BAUM TRIGA

|    |                       |                       |                       |                       |
|----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| q  | $.376 \times 10^{-1}$ | $.323 \times 10^{-2}$ | $.590 \times 10^{-3}$ | $.493 \times 10^{-4}$ |
| FN | 4,46                  | 12,90                 | 20,18                 | 33,81                 |
| FR | 3,80                  | 6,20                  | 8,70                  | 17,50                 |

Legende: OIS = ohne Importance Sampling  
 MIS = mit Importance Sampling  
 N = Anzahl der benötigten Simulationsspiele  
 R = Rechenzeit in Sekunden  
 q = Systemausfallwahrscheinlichkeit

$$FN = \frac{N_{OIS}}{N_{MIS}}$$

$$FR = \frac{R_{OIS}}{R_{MIS}}$$

Effektivität des Verfahrens beurteilen zu können, vergleichen wir die Simulation der Minimalschnitte mit und ohne Importance Sampling. In Tabelle 7-1 sind die Ergebnisse dieser Untersuchung für die drei Bäume schematisch dargestellt. Der Faktor FN vergleicht die Anzahl der benötigten Simulationsspiele mit und ohne Importance Sampling. Er gibt uns die theoretisch erreichbare Verbesserung durch Einführung von Importance Sampling an. Die Verwendung dieses Verfahrens bedingt jedoch bei der EDV-Lösung einen erheblichen Rechen- und Organisationsaufwand, so daß sich der Faktor FN nicht realisieren läßt. Der Faktor FR berücksichtigt diese Abhängigkeiten, indem er die Rechenzeiten mit und ohne Importance Sampling vergleicht, und somit die effektive Rechenzeiterparnis gegenüber der direkten Simulation angibt.

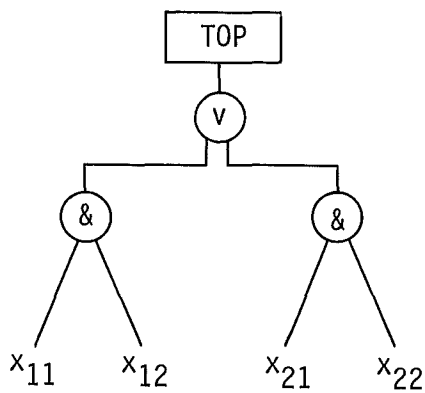
Die Verbesserung der Rechenzeitverkürzung fällt umso stärker aus, je kleiner die Systemausfallwahrscheinlichkeit wird. Dies liegt daran, daß bei sinkender Ausfallwahrscheinlichkeit immer weniger Zufallslebensdauern simuliert werden müssen, um den Zustand dieses Systems zu ermitteln. Im günstigsten Fall werden bei  $k$  Minimalschnitten nur  $k$  Zufallszahlen gezogen.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die Anwendung des Importance Sampling Verfahrens bei der Simulation von Fehlerbäumen mit periodisch inspizierten Komponenten zu einer erheblichen Rechenzeitverkürzung führt. Dabei steigt die Verbesserung bei sinkender Systemausfallwahrscheinlichkeit, was gerade für Systeme der Reaktortechnik oder der Elektronik wegen der dort gegebenen kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten der Komponenten von Bedeutung ist. Natürlich stößt auch dieses Verfahren bei wachsender Komplexität bzw. Zahl der Minimalschnitte an eine durch die Leistungsfähigkeit heutige EDV-Anlagen gegebene Grenze. Auf der anderen Seite ist das Erstellen solch großer Bäume wegen ihrer Unüberschaubarkeit, d.h. Fehlermöglichkeiten ohnehin problematisch; in solchen Fällen sollte man durch Zusammenfassen von Komponenten zu Subsystemen versuchen, die Bäume auf eine überschaubare Größe zu reduzieren.

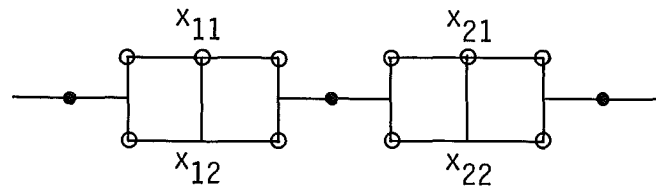
A n h a n g  
=====

Gesamtoptimierung von Systemen mit periodisch inspizierbaren Komponenten und Optimierung von Subsystemen

In diesem Anhang soll der Unterschied zwischen der Gesamt- und der Suboptimierung eines Systems mit periodisch inspizierbaren Komponenten an Hand eines einfachen und überschaubaren Beispiels illustriert werden. Wir wählen einen Fehlerbaum mit zwei Minimal Schnitten, die jeweils zwei Komponenten besitzen. Die folgenden Skizzen zeigen den Fehlerbaum und das zugehörige Ersatzschaltbild in Form der in Serie geschalteten Parallelsysteme. Die Inspektionszeiten der zweiten Komponenten seien doppelt so lang wie die der ersten Komponenten.



Fehlerbaum



Ersatzschaltbild

Dabei ist  $x_{ij}$  die  $j$ -te Komponente des  $i$ -ten Minimalchnittes mit dem Inspektionszeitraum  $\tau_{ij}$ .

Die Strukturfunktionen  $\phi_1$  und  $\phi_2$  der beiden Subsysteme lauten entsprechend dem Beispiel auf p. 13, wenn wir einmal vorläufig die Subsysteme getrennt betrachten,

$$\phi_i(t_{i11}, t_{i12}, t_{i2}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau \leq t_{i11} < \infty, 0 \leq t_{i12} < \tau, \\ & 0 \leq t_{i2} \leq \tau \text{ oder} \\ & 0 \leq t_{i11} < \infty, 0 \leq t_{i12} < \tau, \\ & 0 \leq t_{i2} \leq 2\tau \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

$i = 1, 2$ .

Die Strukturfunktion des Gesamtsystems  $\phi_s$  ist dann gegeben durch den folgenden Ausdruck

$$\phi_s = 1 - (1 - \phi_1) \cdot (1 - \phi_2) = \phi_1 + \phi_2 - \phi_1 \cdot \phi_2, \quad (\text{A-2})$$

wobei wir für den Fall, daß zwei Komponenten des Systems identisch sind, die entsprechenden Zeitvariablen zu identifizieren haben.

Wie auf p. 65 bemerkt, wurden im Hauptteil nur die linearen Terme, die den einzelnen Subsystemen entsprechen, betrachtet, d.h. das "Importance Sampling" wurde auf die einzelnen Minimalschnitte angewandt; In unserem vorliegenden Fall würde man also von der Ausfallwahrscheinlichkeit (2-13) für die Subsysteme ausgehen; das "Importance Sampling" würde dann auf die Minimierung der Varianzen (bezogen auf die Ersatzdichte) der Schätzfunktionen, Formel (2-23), für die Ausfallwahrscheinlichkeiten der beiden Subsysteme hinauslaufen.

Im folgenden wollen wir das Gesamtsystem betrachten, wobei wir zwischen stochastischer Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit zwischen den Subsystemen unterscheiden.

Fall 1: Stochastisch unabhängige Komponenten

In diesem Fall ist die Ausfallwahrscheinlichkeit des Gesamtsystems entsprechend der bekannten Vorgehensweise mit (A-2) gegeben durch

$$\begin{aligned}
 q_s &= E(\phi_s) = E(\phi_1) + E(\phi_2) - E(\phi_1) \cdot E(\phi_2) = \\
 &= q_1 + q_2 - q_1 \cdot q_2 \quad , \quad (A-3)
 \end{aligned}$$

wobei  $q_i$ ,  $i = 1, 2$ , die Ausfallwahrscheinlichkeit des  $i$ -ten Subsystems, gegeben durch Formel (2-7), darstellt.

Zur Anwendung des "Importance Sampling" auf das Gesamtsystem gehen wir aus von der Strukturfunktion  $\phi_s$ , die mit (A-1) und (A-2) gegeben ist durch

$$\phi_s(t_{111}, t_{112}, t_{12}, t_{211}, t_{212}, t_{22}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau \leq t_{111} < \infty, \quad 0 \leq t_{112} \leq \tau, \\ & 0 \leq t_{12} \leq \tau \text{ oder} \\ & 0 \leq t_{111} < \infty, \quad 0 \leq t_{112} \leq \tau, \\ & 0 \leq t_{12} \leq 2\tau \text{ oder} \\ & \tau \leq t_{211} < \infty, \quad 0 \leq t_{212} \leq \tau, \quad (A-4) \\ & 0 \leq t_{22} \leq \tau \text{ oder} \\ & 0 \leq t_{211} < \infty, \quad 0 \leq t_{212} \leq \tau, \\ & 0 \leq t_{22} \leq 2\tau \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Unter expliziter Verwendung der Lebensdauerdichten  $f_1$  und  $f_2$  der Systeme  $S_1$  und  $S_2$  ist die Ausfallwahrscheinlichkeit  $q_s$  des Gesamtsystems für  $\tau_{11} = \tau_{21}$ ,  $\tau_{12} = \tau_{22}$  im Regenerationsintervall gegeben durch

$$q_s = \int \dots \int \phi_s \cdot f_1 \cdot f_2 \, dt = E(\phi_s) \quad ,$$

wobei

$$f_1 = \lambda_{11}^2 \cdot \text{EXP}(-\lambda_{11} \cdot \sum_{i=1}^2 t_{1i}) \cdot \lambda_{12} \cdot \text{EXP}(-\lambda_{12} \cdot t_{12}) = f_{11} \cdot f_{12}$$

$$f_2 = \lambda_{21}^2 \cdot \text{EXP}(-\lambda_{21} \cdot \sum_{i=1}^2 t_{2i}) \cdot \lambda_{22} \cdot \text{EXP}(-\lambda_{22} \cdot t_{22}) = f_{21} \cdot f_{22} \quad .$$

Wie in Abschnitt 2.4 machen wir wieder den Ansatz für das Importance Sampling Verfahren gemäß

$$q_s = \int \dots \int_{\Phi_s} \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1^* \cdot f_2^*} \cdot f_1^* \cdot f_2^* \, dt = E^*(\Phi_s \cdot w) \quad .$$

Zur Minimierung der Varianz

$$V^*(\Phi_s) = E^*(\Phi_s^2 \cdot w^2) - E^{2*}(\Phi_s \cdot w) = E^*(\Phi_s \cdot w^2) - q_s^2$$

interessiert nur der Ausdruck  $E^*(\Phi_s^2 \cdot w^2) =: E^*(\Psi)$ , der explizit gegeben ist durch

$$\begin{aligned} E^*(\Psi) &= \int \dots \int_{\Phi_s} \cdot \left(\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{11}^*}\right)^{2 \cdot 2} \cdot \text{EXP}(-2(\lambda_{11} - \lambda_{11}^*) \cdot \sum_{i=1}^2 t_{11i}) \cdot \left(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}^*}\right)^2 \cdot \\ &\quad \cdot \text{EXP}(-2(\lambda_{12} - \lambda_{12}^*) \cdot t_{12}) \cdot \left(\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{21}^*}\right)^{2 \cdot 2} \cdot \text{EXP}(-2(\lambda_{21} - \lambda_{21}^*) \cdot \sum_{i=1}^2 t_{21i}) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{\lambda_{22}}{\lambda_{22}^*}\right)^2 \cdot \text{EXP}(-2(\lambda_{22} - \lambda_{22}^*) \cdot t_{22}) \cdot \lambda_{11}^{*2} \cdot \text{EXP}(-\lambda_{11}^* \cdot \sum_{i=1}^2 t_{11i}) \cdot \\ &\quad \cdot \lambda_{12}^* \cdot \text{EXP}(-\lambda_{12}^* \cdot t_{12}) \cdot \lambda_{21}^{*2} \cdot \text{EXP}(-\lambda_{21}^* \cdot \sum_{i=1}^2 t_{21i}) \cdot \\ &\quad \cdot \lambda_{22}^* \cdot \text{EXP}(-\lambda_{22}^* \cdot t_{22}) \, dt \\ &= F_1(\lambda_{11}^*, \lambda_{12}^*) \cdot F_2(\lambda_{21}^*, \lambda_{22}^*) \cdot \hat{q}_s \quad , \end{aligned}$$

wobei

$$F_i(\lambda_{i1}^*, \lambda_{i2}^*) = \left[ \frac{\lambda_{i1}^2}{\lambda_{i1}^* \cdot (2\lambda_{i1} - \lambda_{i1}^*)} \right]^2 \cdot \frac{\lambda_{i2}^2}{\lambda_{i2}^* \cdot (2\lambda_{i2} - \lambda_{i2}^*)}$$

und wobei

$$\hat{q}_s = \hat{q}_1 + \hat{q}_2 - \hat{q}_1 \cdot \hat{q}_2$$

dem Ausdruck für  $q_s$ , Formel (A-3), entspricht mit dem Unterschied, daß  $\lambda_{ij}$  zu ersetzen ist durch  $2\lambda_{ij} - \lambda_{ij}^*$ .

Vergleicht man das Kriterium  $E^*(\psi)$  für die Gesamtoptimierung mit den Kriterien  $F_i(\lambda_{i1}^*, \lambda_{i2}^*) \cdot \hat{q}_i$ ,  $i = 1, 2$ , so zeigt sich, daß auch schon bei stochastischer Unabhängigkeit der Komponenten in den Minimalschnitten die beiden Optima voneinander abweichen müssen.

### Fall 2: Stochastisch abhängige Komponenten

Es sei nunmehr  $x_{11} = x_{21}$ ,  $x_{11} \neq x_{12} \neq x_{22}$ . Wir erhalten für die Ausfallwahrscheinlichkeit des Gesamtsystems (Serienschaltung der Parallelsysteme  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ ) nach einiger Rechnung den folgenden Ausdruck:

$$q_s = a(\bar{a} b_1 c_1 + \bar{a} b_1 + b_2 - \bar{a} b_1 c_2 + \bar{a} c_1 + c_2 - \bar{a} c_1 b_2 - b_2 c_2),$$

(A-5)

wobei

$$a := W(\text{Ausfall von } x_{11} \text{ in } (0, \tau_{11})) = 1 - \text{EXP}(-\lambda_{11} \tau_{11})$$

$$b_i := W(\text{Ausfall von } x_{12} \text{ in } (0, i \cdot \tau_{11})) = 1 - \text{EXP}(-\lambda_{12} \cdot \tau_{11} \cdot i)$$

$$c_i := W(\text{Ausfall von } x_{22} \text{ in } (0, i \cdot \tau_{11})) = 1 - \text{EXP}(-\lambda_{22} \cdot \tau_{11} \cdot i).$$



Dieser Ausdruck läßt sich auch in der Form

$$q_s = q_1 + q_2 + a \bar{a} b_1 c_1 - a \bar{a} b_1 c_2 - a \bar{a} c_1 b_2 - a b_2 c_2 \quad ,$$

d.h. als Summe aus den Ausfallwahrscheinlichkeiten der Subsysteme und eines Mischtermen darstellen.

Zur Vorbereitung des Importance Sampling deuten wir die Ausfallwahrscheinlichkeit  $q_s$  wieder als Erwartungswert der Strukturfunktion  $\Phi_s$ , die gegeben ist durch

$$\Phi_s(t_{111}, t_{112}, t_{12}, t_{22}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau_{11} \leq t_{111} < \infty, 0 \leq t_{112} < \tau_{11}, 0 \leq t_{12} < \tau_{11} \\ & \text{oder} \\ & 0 \leq t_{111} < \infty, 0 \leq t_{112} < \tau_{11}, 0 \leq t_{12} < 2\tau_{11} \\ & \text{oder} \\ & \tau_{11} \leq t_{111} < \infty, 0 \leq t_{112} < \tau_{11}, 0 \leq t_{22} < \tau_{11} \\ & \text{oder} \\ & 0 \leq t_{111} < \infty, 0 \leq t_{112} < \tau_{11}, 0 \leq t_{22} < 2\tau_{11} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (A-6)$$

und wir erhalten

$$q_s = E(\Phi_s) = \int \dots \int \Phi_s \cdot f_{11} \cdot f_{12} \cdot f_{22} \, dt$$

wobei

$$f_{11} = \lambda_{11}^2 \cdot \text{EXP}(-\lambda_{11} \cdot \sum_{i=1}^2 t_{11i}); \quad f_{i2} = \lambda_{i2} \cdot \text{EXP}(-\lambda_{i2} \cdot t_{i2}), \quad i = 1, 2 .$$

Wie in Abschnitt 2.4 machen wir wieder den Ansatz für das Importance Sampling Verfahren gemäß

$$q_s = \int \dots \int \Phi_s \cdot \frac{f_{11} \cdot f_{12} \cdot f_{22}}{f_{11}^* \cdot f_{12}^* \cdot f_{22}^*} \cdot f_{11}^* \cdot f_{12}^* \cdot f_{22}^* \, dt = E^*(\Phi_s \cdot w) \quad .$$

Bei der Minimierung der Varianz

$$V^*(\phi_S) = E^*(\phi_S^2 \cdot w^2) - E^{*2}(\phi_S \cdot w) = E^*(\phi_S \cdot w^2) - q_S^2 = E^*(\Psi) - q_S^2$$

nach den Parametern  $\lambda_{11}^*$ ,  $\lambda_{12}^*$ ,  $\lambda_{22}^*$  interessiert nur der Ausdruck  $E^*(\Psi)$ , der sich entsprechend Fall 1 dieses Anhangs ermitteln läßt.

Es ergibt sich

$$E^*(\Psi) = F_{11} \cdot F_{12} \cdot F_{22} \cdot \hat{q}_S ,$$

wobei

$$F_{11} = \left[ \frac{\lambda_{11}^2}{\lambda_{11}^* \cdot (2\lambda_{11} - \lambda_{11}^*)} \right]^2 , \quad F_{i2} = \frac{\lambda_{i2}^2}{\lambda_{i2}^* \cdot (2\lambda_{i2} - \lambda_{i2}^*)} , \quad i = 1, 2 ,$$

und wobei  $\hat{q}_S$  dem Ausdruck von  $q_S$  entspricht mit dem Unterschied, daß  $\lambda_{ij}$  zu ersetzen ist durch  $2\lambda_{ij} - \lambda_{ij}^*$ .

Ganz allgemein läßt sich feststellen: Bei der stochastischen Abhängigkeit von Komponenten wäre man versucht anzunehmen, daß sich auf Grund des formellen Wegfalls von Komponenten ein einfacheres Problem ergibt. Das Gegenteil ist jedoch der Fall; auf Grund der periodischen Inspektion ergibt sich bei stochastisch abhängigen Komponenten ein komplexerer Ausdruck (vgl. (A-5)) für das Gesamtsystem als bei stochastisch unabhängigen Komponenten (vgl. (A-3)). Dieser ist für den allgemeinen Fall nicht mehr ohne weiteres anzugeben, so daß eine Gesamtoptimierung hier erst recht nicht zu realisieren ist.

Literatur

- /1/ Wenzelburger, H.  
Failure Probability of a Periodically Inspected Parallel System  
(1975) unveröffentlicht
- /2/ Buslenko, N.P.; Schreiber, J.A.  
Die Monte Carlo Methode  
Teubner, Leipzig, 1964
- /3/ Nagel, Phyllis  
Importance Sampling in Systems Simulation  
The Boeing Company, Washington, 1969
- /4/ Mazumdar, M.  
Importance Sampling in Reliability Estimation -  
Reliability and Fault Tree Analysis  
SIAM, Philadelphia, 1975
- /5/ Pollyak, Yu.G.  
Estimation of Small Probabilities in Statistical  
Simulation of Systems  
Engineering Cybernetics, 171, p. 342 - 349
- /6/ Kleijnen, J.P.C.  
Statistical Techniques in Simulation  
Dekker, New York, Part I, 1974
- /7/ Hammersley, J.M.; Handscomb, D.C.  
Monte Carlo Methods  
Methuen, London, 1964
- /8/ Wenzelburger, H.  
Abschätzung kleiner Ausfall-Wahrscheinlichkeiten von Systemen  
mit Importance Sampling  
(1976) unveröffentlicht

- /9/ Deutsche Normen  
DIN 25 424 Fehlerbaumanalyse
- /10/ Fussel, J.B.  
Computer Aided Fault Tree Construction  
Reliability and Fault Tree Analysis  
SIAM, Philadelphia, 1975
- /11/ Reinschke, K.  
Zuverlässigkeit von Systemen  
Bd. 1, VEB Verlag Berlin, 1971
- /12/ Birnbaum, Z.W., Esary, J.D., Saunders, S.C.  
Multicomponent Systems and Structures and their Reliability  
Technometrics 3 (1961) 1, p. 55-77
- /13/ Murchland, J.D.  
Fundamental Concepts and Relations for Reliability Analysis  
of Multi-State Systems  
SIAM, Philadelphia, 1975
- /14/ Denis-Papin, M., Faure, R., Kaufmann, A., Malgrange, Y.  
Theorie und Praxis der Booleschen Algebra  
Vieweg, Braunschweig, 1974
- /15/ Barlow, E.R., Proschan, F.  
Statistical Theory of Reliability and Life Testing  
Rinehart and Winston, New York, 1975
- /16/ Apostolakis, G.E.  
Mathematical Methods of Probabilistic Safety Analysis  
UCLA - ENG - 7464, 1974

- /17/ Fussell, J.B.  
A Formal Methodology for Fault Tree Construction  
Nuclear Science and Engineering, 52 (1973), p. 421-432
- /18/ Fussell, J.B.  
MOCUS - A Computer Program to Obtain Minimal Cut Sets  
Aerojet Nuclear Company, Idaho Falls, Idaho, 1974
- /19/ Vesely, W.E., Narum, R.E.  
Computer Codes for the Automatic Evaluation of a Fault Tree  
Aerojet Nuclear Company, Idaho Falls, Idaho, 1970
- /20/ Birnbaum, Z.W., Esary, J.D.  
Modules of Coherent Binary Systems  
Journal on Applied Mathematics, 1965, p 444-462
- /21/ Schneider, Ch.  
Einführung in die Erzeugung und Verwendung von Zufallszahlen  
(1976) unveröffentlicht
- /22/ Knuth, D.  
The Art of Computer Programming  
Reading, Massachusetts, Bd. 2, 1969
- /23/ Martin, F.  
Computer Modelling and Simulation  
New York, 1965
- /24/ Schneider, Ch.  
Untersuchung verschiedener Organisationsformen von Parallel-  
systemen in Hinblick auf die Rechenzeit  
(1976) unveröffentlicht

- /25/ Jokela, S.; Komsu, M.  
Calculation of the Unavailability of Complex Systems with  
Minimized Cuts Sets  
Technical Research Centre of Finland, Reliability Group,  
Report 13/1975
- /26/ Lambert, H.E.  
Fault Trees for Decision Making in Systems Analysis  
PH. D. Thesis, University of California, UCRL-51829, Oct. 1975