

KfK 2737  
Dezember 1978

# **Ein induktives Modell für die Ausbreitung der Normalleitung im supraleitenden Magneten**

W. Goll  
Institut für Technische Physik

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE  
Institut für Technische Physik  
KfK 2737

Ein induktives Modell für die Ausbreitung der  
Normalleitung im supraleitenden Magneten <sup>+</sup>

W. Goll

<sup>+</sup> von der Fakultät für Physik der Universität (TH)  
Karlsruhe genehmigte Dissertation

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
ISSN 0303-4003

### Ein induktives Modell für die Ausbreitung der Normalleitung im supraleitenden Magneten

Für die Ausbreitung der Normalleitung zwischen benachbarten Windungen supraleitender Magnete wird ein Modell angegeben. Flußänderungen, die von Änderungen der Stromdichteverteilung während des Normalübergangs verursacht werden, treiben die Ausbreitung voran. Das Ausbreitungsverhalten wird im wesentlichen durch ein Modell aus zwei induktiv gekoppelten Kreisen bestimmt. Die thermische und die induktive Ausbreitung werden miteinander und mit der Messung verglichen; hierbei deutet sich an, daß in gewissen Strom- und Feldbereichen die Ausbreitung mit dem induktiven Modell interpretiert werden kann.

### An Inductive Model for the Propagation of Normal Conductivity in Superconducting Magnets

A model is presented for the propagation of normal conductivity among adjacent turns of superconducting magnets. The propagation is driven by flux changes in the magnet. They are caused by changes of the current density distribution during the normal transition of the magnet. The behaviour of propagation is mainly provided by two circuits coupled inductively. The thermal and the inductive propagation are compared with one another and with measurements. It turns out that the propagation may be interpreted by the inductive model within certain current and field regions.

## INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. Einleitung	1
2. Entwicklung der Modellvorstellung	
2.1 Grundlegendes	3
2.2 Elektrische Modelle mit exakten Lösungen	
2.2.1 2-Kreis-Modell	8
2.2.2 3-Kreis-Modell	16
2.3 Verallgemeinerung	
2.3.1 Lineare Ringanordnung	22
2.3.2 Solenoidförmige Ringanordnung	27
3. Vergleich zwischen induktivem und thermischem Ausbreitungsverhalten	36
4. Zusammenfassung	49
Anhang	
A Abschätzung der Diffusionzeit der Stromdichte	
B Berechnung der Lösungen des 3-Kreis-Modells	
C Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung in Zylinderkoordinaten	

Literaturverzeichnis

## 1. Einleitung

Beim Normalübergang eines supraleitenden Magneten treten lokal thermische, elektrische und mechanische Belastungen auf, deren Größe vom Ausbreitungsverhalten der normalleitenden Zone abhängt. Es gibt eine Reihe von Arbeiten, die sich mit der Ausbreitung sowohl im einzelnen Leiter als auch im Magneten befassen. Das Hauptaugenmerk der Untersuchungen wird dabei auf die eindimensionale Ausbreitung längs des Drahtes gerichtet. Die ersten Theorien von Cherry und Gittleman<sup>1)</sup>, Whetstone und Roos<sup>2)</sup>, Broom und Rhoderick<sup>3)</sup> wurden für nichtstabilisierte Leiter formuliert und haben demzufolge bei stabilisierten Leitern nur begrenzte Gültigkeit<sup>7), 8), 15)</sup>. Den stabilisierten Leitern eher angepaßt ist die Theorie von Altov et al.<sup>4)</sup>, welche die Stromaufteilung zwischen Stabilisierungsmaterial und Supraleiter beim Normalübergang berücksichtigt und von Dresner et al.<sup>5)</sup> um temperaturabhängige Materialparameter erweitert wurde. Zur Beschreibung der Vorgänge im Magneten werden dann entweder eindimensionale Vorgänge überlagert<sup>6)</sup>, oder es wird numerisch die Wärmeleitungsgleichung gelöst<sup>7), 9)</sup>. Die Ausbreitung der Normalleitung im Magneten beruht bei all diesen Modellen immer auf Wärmeströmen, die längs und quer zum Leiter fließen.

In dieser Arbeit dagegen wird ein anderer Ausbreitungsmechanismus erörtert. Er beruht nicht auf Wärmeströmen, sondern auf der elektromagnetischen Induktion. Insbesondere wird die Ausbreitung quer zum Supraleiter untersucht, bei der die induktive Kopplung zwischen den Windungen des Magneten zum Tragen kommt.

Dazu wird zunächst in Abschnitt 2.1 ein elektrisches Modellsystem entwickelt, welches die beim Normalübergang des Magneten auftretenden Änderungen der Stromdichteverteilung nachbildet. Da für diese grundlegenden Untersuchungen eine solenoidförmige Geometrie gewählt wird, ergibt sich als Modellsystem ein System koaxialer Ringe. Besondere Bedeutung hat das System aus zwei Ringen, weil es auch für Systeme höherer Ringzahl anwendbar ist. Im Abschnitt 2.2.1 wird daher das 2-Kreis-Modell ausführlich be-

handelt. Seine Ergebnisse lassen sich in der Aussage zusammenfassen, daß die induktive Ausbreitung nur wenig vom Durchmesser des Ringsystems abhängt.

Mit dem 3-Kreis-Modell, das in Abschnitt 2.2.2 analytisch gelöst wird, deutet sich an, daß der induktive Ausbreitungsvorgang in Vorgänge zerlegt werden kann, die mit dem 2-Kreis-Modell beschreibbar sind. Diese Aussage wird bestätigt, wenn Modelle höherer Kreiszahl numerisch mit dem Rechenprogramm NETZ 3<sup>20</sup> untersucht werden (Abschnitt 2.3). Bei der solenoidförmigen Ringanordnung bilden sich dazu Ringgruppen, die den Gesetzen des 2-Kreis-Modells gehorchen. Am Ende des Abschnitts 2.3 wird die Vorhersage des 2-Kreis-Modells über das fast gleiche induktive Ausbreitungsverhalten zweier Solenoide mit unterschiedlichem Durchmesser, aber sonst gleichen Eigenschaften, bestätigt.

Um das induktive und das thermische Ausbreitungsverhalten quer zum Leiter zu vergleichen, wird in Abschnitt 3 zunächst die Wärmeleitungsgleichung in Zylinderkoordinaten gelöst. Zum Beispiel ergibt sich bei einem Modellsolenoiden aus 25 Windungen eine thermische Ausbreitungsgeschwindigkeit quer zum Leiter von ca. 2 m/s. Die induktive Ausbreitungsgeschwindigkeit ist bei diesem Beispiel ca. 10 m/s. Da die Lagenisolation bei der induktiven Ausbreitung im Gegensatz zur thermischen Ausbreitung nur eine untergeordnete Rolle spielt, erfolgt eine weitere Verschiebung zugunsten der induktiven Ausbreitung, wenn der thermische Widerstand zwischen den Windungen wächst.

Weiterhin wird in Abschnitt 3 aus bestehenden thermischen Modellen eine Beziehung abgeleitet, mit der der Existenzbereich der thermischen und der induktiven Querausbreitung abgegrenzt werden kann, falls die Ausbreitung längs des Drahtes keine Rolle spielt. Beim Vergleich mit Messungen zeigt sich, daß in gewissen Strom- und Feldbereichen, die Meßergebnisse mit Hilfe der Rechnungen des induktiven Modells interpretierbar sind.

## 2. Entwicklung der Modellvorstellung

### 2.1 Grundlegendes

In diesem Abschnitt soll ein Modell für die Ausbreitung einer normalleitenden Zone in einem supraleitenden Magneten angegeben werden. Ist der Magnet supraleitend, so wird der Strom von den supraleitenden Filamenten getragen; im normalleitenden Zustand fließt der Strom im wesentlichen durch die Cu-Matrix, da der spezifische Widerstand von NbTi<sup>12</sup> dann um etwa einen Faktor 1000 größer als der von Cu ist. Beginnt Strom im Cu zu fließen, so wird einerseits Wärme produziert, und andererseits ändert sich der Fluß außerhalb des Leiters<sup>13</sup>. Dadurch kann sich die Normalleitung ausbreiten. Die Ausbreitung erfolgt im Magneten sowohl längs des Leiters als auch quer zum Leiter. In dem hier zu betrachtenden Modell wird nur die Ausbreitung quer zum Leiter in Nachbarleiter hinein unter der treibenden Kraft von Flußänderungen im Magneten untersucht.

Das Ersatzschaltbild für einen Magneten ist im allgemeinen ein Netzwerk aus gekoppelten Windungsinduktivitäten, -widerständen und Kapazitäten. Ob die Windungskapazitäten auf einen Vorgang im Magneten bedeutenden Einfluß haben, hängt von der Frequenz des betrachteten Vorgangs ab<sup>14</sup>. Liegt diese z.B. um Größenordnungen unterhalb der Resonanzfrequenz des Windungssystems, so kann die Windungskapazität vernachlässigt werden.

Zur Abschätzung der Resonanzfrequenz wird als Beispiel ein supraleitendes Solenoid<sup>10</sup>, wie es in Abb. 1 skizziert ist, gewählt.

Seine Bohrung ist 65 mm, sein Außendurchmesser 175 mm und seine Länge 200 mm. Es ist aus einem handelsüblichen Supraleiter gewickelt, dessen Querschnitt in Abb. 2 zu sehen ist. Die supraleitenden Filamente aus NbTi sind als dunkle Flecke zu erkennen. Der helle Hintergrund stellt die Cu-Matrix dar, die die Filamente thermisch und magnetisch stabilisiert<sup>11</sup>. Um die Resonanzfrequenz einer einzelnen Windung abzuschätzen, wird die Resonanzfrequenz eines freien gedämpften Schwingkreises mit der Windungsinduktivität  $L$ , der Windungskapazität  $C$  und dem Windungswiderstand  $R$  der Cu-Matrix berechnet.

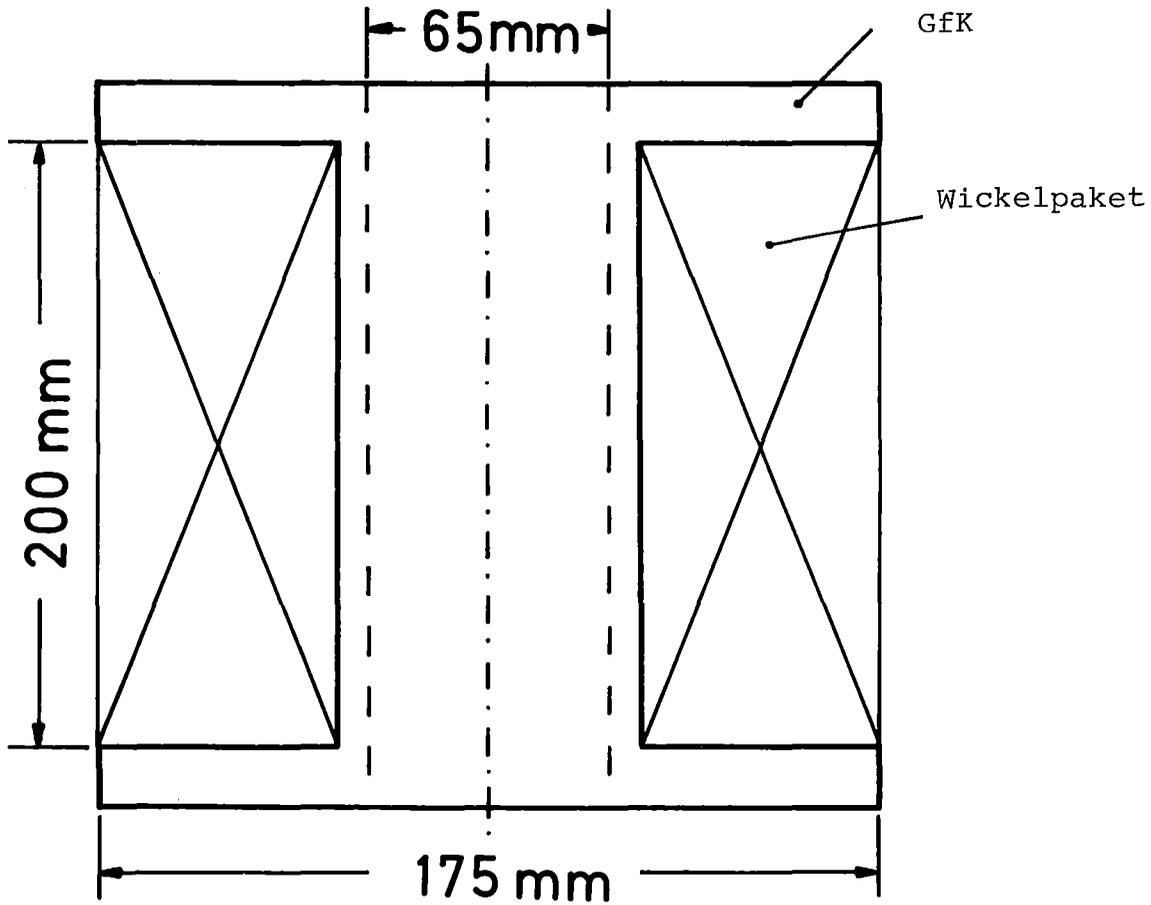


Abb. 1: Supraleitendes Solenoid mit 65 mm Bohrung, 175 mm Außendurchmesser und 200 mm Wickelpaketlänge. Das Wickelpaket besteht aus 17500 Windungen eines handelsüblichen Supraleiters, dessen Schliffbild in Abb. 2 zu sehen ist. Der Spulenkörper ist aus glasfaserverstärktem Kunststoff (GfK) gefertigt.

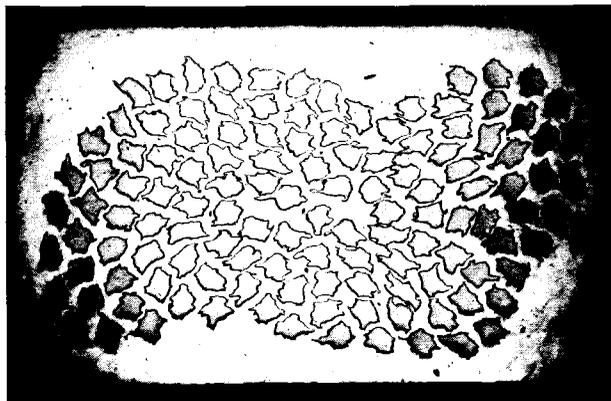


Abb. 2: Schliffbild eines handelsüblichen Supraleiters (Hersteller VAC Hanau) mit  $1 \times 0.6 \text{ mm}^2$  Querschnittsfläche. Die 130 NbTi-Filamente (dunkle Flecke) sind in eine Cu-Matrix eingebettet, deren Querschnittsfläche hier genau doppelt so groß ist wie die aller Filamente zusammen. Der Stand der Fertigungstechnik entspricht dem Anfang der 70er Jahre.

Hierfür gilt:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (2.1)$$

Bei obigem Solenoiden ist  $L \approx 0.4 \mu\text{H}$ ,  $C \approx 0.2 \text{ nF}$  und  $R$  bei Heliumtemperatur  $\approx 0.3 \text{ m}\Omega$  und damit die Frequenz  $f \approx 20 \text{ MHz}$ . Dieses Ergebnis besagt, daß zur Beschreibung von Vorgängen mit Frequenzen um  $20 \text{ MHz}$ , bzw. charakteristischen Zeiten von  $\frac{1}{f} = 50 \text{ ns}$  die Windungskapazitäten berücksichtigt werden müssen.

Bei der numerischen Auswertung von Gl. (2.1) zeigt sich, daß  $1/LC$  sehr viel größer ist als  $R^2/4L^2$ . Während der Resonanzterm die charakteristische Zeit von  $50 \text{ ns}$  ergibt, liefert der Dämpfungsterm eine Zeitkonstante von  $\tau = 2L/R \approx 0.3 \text{ ms}$ . Die Ausbreitung der Normalleitung wird wesentlich vom Widerstand gesteuert, so daß die Zeitkonstante  $\tau$  eine charakteristische Zeit für sie ist. Dies wird durch Messungen der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_q$  quer zum Leiter gestützt. Sie ergeben Werte der Größenordnung  $0.1 \text{ m/s}$ .<sup>15</sup> Ist der Leiterabstand zweier Windungen  $d = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , so ist eine charakteristische Zeit  $\tau = d/v_q = 0.5 \text{ ms}$ .

Die charakteristischen Zeiten für die Ausbreitung der Normalleitung sind aber ca. 4 Zehnerpotenzen größer als die, die sich bei Berücksichtigung der Windungskapazitäten ergeben. Daher werden bei einem Modell für die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_q$  kapazitive Einflüsse in diesem Beispiel nicht einbezogen. Auch bei größeren Magneten gelten ähnliche Verhältnisse, so daß der Einfluß der Windungskapazität im allgemeinen vernachlässigt werden kann. Somit werden zur elektrischen Beschreibung der Ausbreitung nur Widerstände und gekoppelte Induktivitäten berücksichtigt.

Um den Mechanismus der Ausbreitung der Normalleitung darzustellen, wird der Vorgang im Supraleiter näher betrachtet:

Wenn der Normalübergang an einer Stelle in einem Leiter auftritt, so verlagert sich der Strom aus dem nunmehr resistiv werdenden Filamentsystem in die Cu-Matrix. Für einen Punkt  $(x, y, z)$  innerhalb des Leiters ändert sich daher die Stromdichte  $\vec{j}$ . Da die Stromdichte  $\vec{j}$  und das elektrische Feld  $\vec{E}$  zueinander proportional sind, verursachen Stromdichteänderungen Änderungen des elektrischen Feldes. Das elektrische Feld und die Stromdichte sind über das Ampèresche Gesetz in differentieller Form mit dem Magnetfeld  $\vec{B}$  am Ort  $(x, y, z)$  verbunden. Es lautet

$$\text{rot } \vec{B}(x, y, z) = \mu_0 \left( \vec{j}(x, y, z) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(x, y, z)}{\partial t} \right) \quad (2.2)$$

und besagt, daß ein Magnetfeld  $\vec{B}(x, y, z)$  durch einen Strom oder durch eine zeitliche Änderung des elektrischen Feldes bei  $(x, y, z)$  erzeugt wird, wobei die Änderung des elektrischen Feldes durch Stromdichteänderungen hervorgerufen wird. Stromdichteänderungen ändern somit den Fluß  $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$  im Magneten. Aufgrund der Lenzschen Regel ändert sich dann seine Stromdichteverteilung. Erreicht diese in einem Leiter an einer Stelle den kritischen Wert, der den supraleitenden Zustand zerstört, so ändert sich in diesem Gebiet die Stromdichte; es treten Flußänderungen im Magneten auf und in Nachbarleitern kann die Stromdichte ihren kritischen Wert erreichen. Diese ineinandergreifenden Vorgänge wiederholen sich fortwährend und bewirken so eine Ausbreitung der Normalleitung im Magneten.

Die bisherige lokale Betrachtungsweise des Normalübergangs bedarf noch einer Ergänzung, die aussagt, wie groß der normalleitende Bereich in einem Leiter ist, der gerade die kritische Stromdichte

überschritten hat. Dazu wird ein beliebig kleines, aber endliches Zeitintervall, nachdem der erste Punkt im Leiter die kritische Stromdichte erreicht hat, angesehen. Da die Flußänderungen bei lokalen Stromdichteänderungen in einem großen Volumen wirksam sind, muß im Verlauf der Ausbreitung der Normalleitung ein immer größerer Bereich die kritische Stromdichte im betrachteten Zeitintervall überschreiten.

Da hier die Prinzipien des induktiven Ausbreitungsmechanismus erörtert werden sollen, wird vorausgesetzt, daß die Flußänderungen allein von Stromdichteänderungen herrühren und in der ganzen Leiterschleife auftreten. Der Betriebsstrom  $I_b$  des Magneten braucht sich dabei nicht zu ändern, denn die Flußänderungen entstehen durch sich ändernde Induktivitäten.

Das integrale Verhalten eines Magneten, in dem sich die Induktivitäten bei konstantem Betriebsstrom  $I_b$  ändern, wird mit einem Modellsystem nachgebildet bei dem sich die Ströme ändern und die Windungsinduktivitäten konstant sind.

Ein supraleitendes Solenoid wird in dieser Modellvorstellung als ein System aus nur induktiv gekoppelten konzentrischen Ringen betrachtet, in denen jeweils der Suprastrom  $I_b$  fließt.

Werden im realen Solenoiden eine oder mehrere Leiterschleifen normalleitend, weil sie die kritische Stromdichte erreicht haben, so werden im Modell entsprechende Ringe ebenfalls normalleitend. Die Stromabnahme in den Ringen bewirkt wegen der Flußerhaltung eine Stromzunahme in den noch supraleitenden übrigen Ringen. Überschreitet in einem Ring der Strom einen kritischen Wert, den sogenannten Grenzstrom  $I_g$ , dann wird dieser Ring normalleitend. Infolge der Flußerhaltung werden weitere benachbarte Ringe ebenfalls normalleitend, wenn dort der Abschirmstrom den Grenzstrom erreicht. Auf diese Weise kann sich die Normalleitung im Modellsystem ausbreiten.

Wie diese induktive Ausbreitung der Normalleitung im einzelnen geschieht und welche Prinzipien dabei gelten, folgt aus den Lösungen für das Ersatzschaltbild der konzentrischen Ringe. Zunächst werden zwei induktiv gekoppelte Ringe betrachtet. Dieses 2-Kreis-System erweist sich als gutes Näherungsmodell gerade auch für Mehr-Kreis-Systeme.

## 2.2 Elektrische Modelle mit exakten Lösungen

### 2.2.1 2-Kreis-Modell

Das 2-Kreis-Modell ist ein Modell für das einfachste im Magneten induktiv wechselwirkende System: ein System aus 2 Leiterschleifen. Die beiden Kreise seien  $j$  und  $j+1$ . Sie sind in Abb. 3 elektrisch und geometrisch dargestellt. Abb. 3a zeigt das Schaltbild des 2-Kreis-Modells und Abb. 3b einen Schnitt durch die dazugehörige geometrische Anordnung. Bei gegebenem Kreis  $j$  soll der Kreis  $j+1$  derjenige Kreis sein, der die größte Wechselinduktivität  $M$  mit dem Kreis  $j$  besitzt. Falls mehrere Induktivitäten gleich sind, müssen sie zu einer Gruppe mit der entsprechenden Gesamtinduktivität zusammengefasst werden. Dieser Fall wird in Abschnitt 2.3.2 diskutiert. Die Kreise haben die Selbstinduktivität  $L_j$  und  $L_{j+1}$ . Damit sich der Strom  $I_j$  im Kreis  $j$  ändern kann, wird der konstante Widerstand  $R_j$ , dessen Zeitabhängigkeit vernachlässigt wird, in den Kreis geschaltet. Im Kreis  $j+1$  fließe der Suprastrom  $I_{j+1}$ .

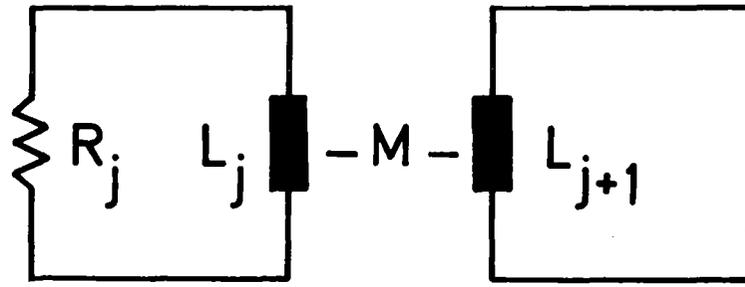
Die Dglen für das 2-Kreis-Modell sind solange der Koppelkreis  $j+1$  supraleitend ist<sup>16</sup>, ( $\dot{\phantom{x}}$  bedeutet zeitliche Ableitung)

$L_j \dot{I}_j + I_j R_j + M \dot{I}_{j+1}$	$= 0$	(2.3)
$L_{j+1} \dot{I}_{j+1} + M \dot{I}_j$	$= 0$	(2.4)

mit den Anfangsbedingungen: zur Zeit  $t_j = 0$  sei  $I_j = I_j^0$   
 und  $I_{j+1} = I_{j+1}^0$  (2.5)

Die Lösungen von (2.3,4) sind bekannt. Der Lösungsweg wird Aus (2.4) folgt skizziert.

$$\dot{I}_{j+1} = - \frac{M}{L_{j+1}} \dot{I}_j \quad (2.6)$$



normalleitend

$$R_j \neq 0$$

supraleitend

$$R_{j+1} = 0$$

Abb. 3a: Elektrisches Schaltbild des 2-Kreis-Modells

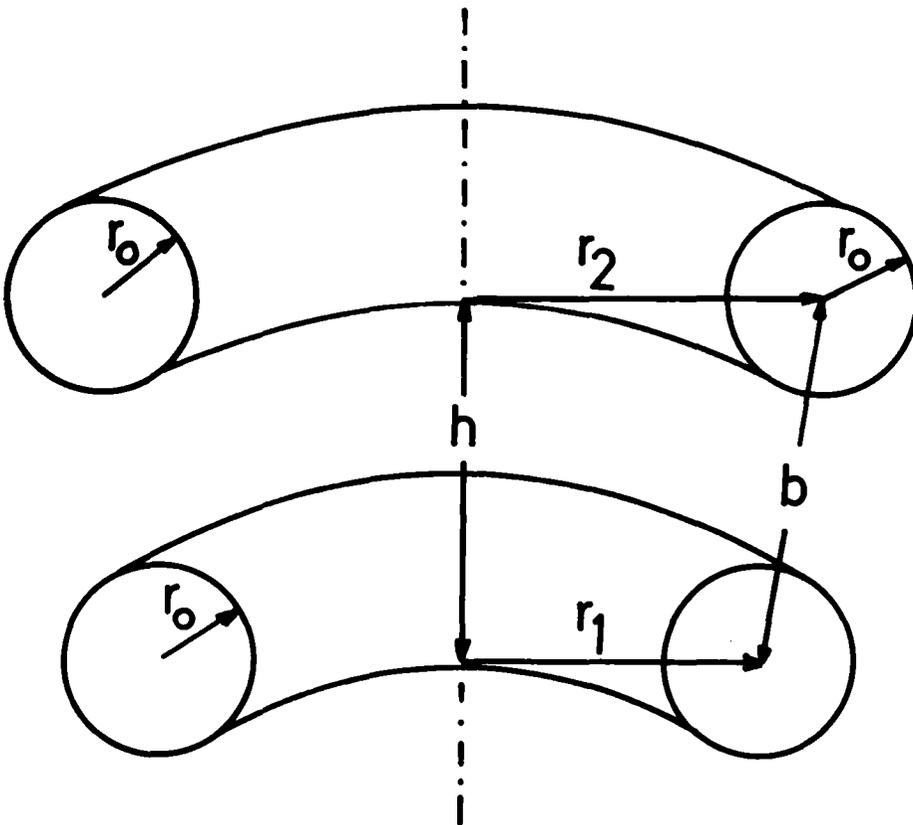


Abb. 3b: Geometrische Anordnung des 2-Kreis-Modells

(2.5) eingesetzt in (2.4) ergibt umgeformt (2.7)

$$(L_j L_{j+1} - M^2) \dot{I}_j + I_j R_j L_{j+1} = 0 \quad (2.7)$$

Die Lösung von (2.7) lautet:

$$I_j = C e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.8)$$

mit

$$\tau = (L_j \cdot L_{j+1} - M^2) / L_{j+1} \cdot R_j \quad (2.9)$$

Aus den Anfangsbedingungen (2.5) folgt

$$C = I_j^0$$

Also ist

$$I_j = I_j^0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.10)$$

Mit (2.10) wird aus (2.4)

$$\dot{I}_{j+1} = -\frac{M}{L_{j+1}} I_j^0 \left( -\frac{R_j L_{j+1}}{L_j L_{j+1} - M^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.11)$$

deren Lösung mit (2.5)

$$I_{j+1} = \frac{M}{L_{j+1}} I_j^0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + I_{j+1}^0 \quad (2.12)$$

ist.

Bei der Ausbreitung ist die interessierende Größe das Zeitintervall  $\Delta t_j$ , in dem  $I_{j+1}$  den Grenzstrom  $I_g$  erreicht. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_q$  ist dann der Quotient aus dem Abstand  $b$  zweier benachbarter Ringe und dieser Schaltzeit  $\Delta t_j$ .

Um  $\Delta t_j$  zu erhalten, wird in (2.12)  $I_{j+1} = I_g$  gesetzt:

$$I_g = \frac{M}{L_{j+1}} \cdot I_j^{\circ} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t_j}{\tau}} \right) + I_{j+1}^{\circ} \quad (2.13)$$

Daraus folgt:

$$\Delta t_j = -\tau \ln \left( 1 + \frac{L_{j+1}}{M \cdot I_j^{\circ}} (I_{j+1}^{\circ} - I_g) \right) \quad (2.14)$$

Dies ist die Zeit  $\Delta t_j$ , die der Strom  $I_{j+1}$  benötigt, um von  $I_{j+1}^{\circ}$  ausgehend den Grenzstrom  $I_g$  zu erreichen, wenn sich  $I_j$  mit der Zeitkonstanten  $\tau$  ändert.

Bei dieser Betrachtung wird  $I_j^{\circ} = I_g$  gesetzt, das bedeutet, daß zur Zeit  $t=0$  der Kreis  $j$  normalleitend geworden ist. Dann folgt:

$$\Delta t_j = -\tau \ln \left( 1 + \frac{L_{j+1}}{M} \cdot \frac{(I_{j+1}^{\circ} - I_g)}{I_g} \right) \quad (2.15)$$

und mit  $i_g = I_g / I_{j+1}^{\circ}$  wird

$$\Delta t_j = -\tau \ln \left( 1 + \frac{L_{j+1}}{M} \left( \frac{1-i_g}{i_g} \right) \right) \quad (2.16)$$

In der Formel (2.16) sind die bestimmenden Parameter des induktiven Modells zu erkennen. Diese Parameter sind

- die Kopplungskonstante  $M/L_{j+1}$
- die Zeitkonstante  $\tau = (L_j \cdot L_{j+1} - M^2) / L_{j+1} \cdot R_j$
- der normierte Grenzstrom  $i_g = I_g / I_{j+1}^{\circ}$

Der Kopplungskonstanten und der Zeitkonstanten ist gemeinsam, wenig empfindlich gegen Änderungen des Kreisradius zu sein.

Für die Kopplungskonstante folgt dies durch Einsetzen der Formeln für die Selbstinduktivität  $L_{j+1}$  und für die Gegeninduktivität  $M$  als Funktion des Ringradius  $a$  für die in Abb. 3b skizzierte Ringanordnung. Die Selbstinduktivität  $L$  eines kreisförmigen Drahttrings vom Kreisradius  $a$  und vom Drahtradius  $r_0$  ist <sup>17</sup>

$$L = \mu_0 a \left( \ln \frac{8a}{r_0} - \frac{7}{4} \right) \quad (2.17)$$

falls  $r_0 \ll a$ . Für die Gegeninduktivität  $M$  zweier koaxialer Kreisringe, deren Radius  $r_1$  und  $r_2$  annähernd gleich  $a$  ist und deren Abstand  $b \ll a$  ist, gilt <sup>17</sup>

$$M = \mu_0 a \left( \ln \frac{8a}{b} - 2 \right) \quad (2.18)$$

wobei  $b = (h^2 + (r_1 - r_2)^2)^{1/2}$  den Abstand der beiden Kreisringe bedeutet.

Mit (2.17) und (2.18) wird die Kopplungskonstante

$$\frac{M}{L_{j+1}} = \frac{\ln \frac{8a}{b} - 2}{\ln \frac{8a}{r_0} - \frac{7}{4}} \quad (2.19)$$

Der Kreisradius  $a$  steht nur noch im Argument der beiden Logarithmen. Bleibt der Drahtradius  $r_0$  und der Drahtabstand  $b$  erhalten -im Magneten bleibt entsprechend die Geometrie des Wickelquerschnitts und des Leiters unverändert -so beeinflussen unterschiedliche Kreisradien die Kopplungskonstante wenig.

Die Zeitkonstante  $\tau$  ist ebenfalls wenig empfindlich gegen Änderungen des Kreisradius  $a$ . Da während des Normalübergangs Strom in der Matrix fließt, gilt für den Widerstand  $R_j$  im  $j$ -ten Ring, wenn  $\rho$  der mittlere spezifische elektrische Widerstand der Matrix,  $a$  der Kreisradius,  $r_0$  der Drahtradius und  $v$  der mittlere Quotient aus

stromdurchflossener Matrixfläche und Drahtquerschnitt  $\pi r_0^2$  ist

$$R_j = \rho \frac{2\pi a}{\sqrt{\pi} r_0^2} = \rho \frac{2a}{\sqrt{r_0^2}} \quad (2.20)$$

Damit und mit Gl. (2.17) und (2.18) wird die Zeitkonstante, da  $L_j = L_{j+1} = L$  ist:

$$\tau = \frac{L^2 - M^2}{L \cdot R_j} = \mu_0 \frac{\sqrt{r_0^2}}{2\rho} \left(1 - \left(\frac{M}{L}\right)^2\right) \cdot \left(\ln \frac{8a}{r_0} - \frac{7}{4}\right) \quad (2.21)$$

Sie ist nur schwach vom Kreisradius  $a$  abhängig.

Variiert  $a$  z.B. zwischen 0.1 m und 10 m und ist  $r_0 = 0,5$  mm,  $\rho = 2 \cdot 10^{-10} \Omega m$ ,  $\nu = 0.5$  und  $b = 1.1$  mm, so ändert sich die Zeitkonstante für das Modellsystem nur zwischen 0.74 ms und 0.77 ms. Bei der Analyse der Formel (2.21) für die Zeitkonstante  $\tau$  ist als dominierender Faktor  $\mu_0 \sqrt{r_0^2} / \rho$  zu erkennen. Da er hauptsächlich von einer charakteristischen Länge  $r_0 \sqrt{\nu}$  in der Matrix abhängt und die Dimension einer Zeit hat, liegt es nahe, ihn mit der Diffusionszeit  $\tau_D$  der Stromdichte quer zum Leiter in Verbindung zu bringen.

Mit Hilfe vereinfachender Annahmen, insbesondere temperaturunabhängiger Materialparameter, wird in Anhang A gezeigt, daß  $\tau_D \approx \mu \cdot \frac{d^2}{\rho}$  ist, wobei  $d$  eine charakteristische Diffusionslänge für die Stromdichte bedeutet. Da  $d$  und  $r_0 \sqrt{\nu}$  im wesentlichen der gleiche Parameter ist, kann  $\mu_0 \sqrt{r_0^2} / \rho$  als eine mittlere Diffusionszeit  $\tau_D$  der Stromdichte in der Matrix des Supraleiters angesehen werden.

Der in Gl. (2.21) verbleibende Faktor  $\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{M}{L}\right)^2\right) \cdot \left(\ln \frac{8a}{r_0} - \frac{7}{4}\right)$  ist ein Geometrieterm der Leiteranordnung, der in der Größenordnung von 1-5 bleibt. Die Stromänderungen im Modellsystem werden also vorwiegend von den Stromdichteänderungen in der Matrix bestimmt, während die Leiteranordnung nur geringen Einfluß ausübt.

Der noch zu diskutierende Parameter des induktiven Modells ist der normierte Grenzstrom  $i_g$ . Er ist in diesem Modell der kritischen Stromdichte im Magneten äquivalent, und beschreibt damit den temperatur-, magnetfeld- und stromdichteabhängigen Zustand<sup>18</sup> des Supraleiters.

Treten Flußänderungen im Magneten auf, so werden sie durch Änderungen der Stromdichteverteilung im Filamentsystem des Leiters kompensiert. Dies geschieht immer unter der Randbedingung, daß lokal die kritische Stromdichte herrscht.<sup>19</sup> Bei hinreichend großen Flußänderungen kann das Filamentsystem im Leiter die Stromdichteänderung nicht mehr selber auffangen, ohne lokal die kritische Stromdichte zu überschreiten. Es wird Strom in der Matrix fließen, und der Leiter kann normalleitend werden, vorausgesetzt er ist nicht kryogen stabilisiert<sup>18</sup>. Im realen Magneten ist also ein Normalübergang bei einem bestimmten Betriebsstrom  $I_b$ , der kleiner ist als der kritische Strom  $I_c$ , darauf zurückzuführen, daß lokal die kritische Stromdichte überschritten wird. Um beim Modellsystem die Normalleitung zu erreichen, muß entsprechend über den kritischen Strom  $I_c$  hinausgegangen werden. In den Modellrechnungen wurde angenommen, daß der Betriebsstrom  $I_b$  85% von  $I_c$  beträgt. Wird der Grenzstrom auf diesen Betriebsstrom  $I_b$  normiert, so ist  $i_g = I_g/I_b = I_c/I_b = 1.2$ .

Im allgemeinen braucht  $I_c$  nicht gleich  $I_g$  zu sein. Da lokal die kritische Stromdichte ohne Normalübergang überschritten werden kann, falls die minimale Ausbreitungszone<sup>24</sup> nicht erreicht wird, ist einerseits der Fall denkbar, daß  $I_g$  größer sein kann als der kritische Strom  $I_c$  des Magneten. Andererseits können bei schnellen Stromumverteilungen auch Verluste auftreten, die den Leiter vorzeitig normalleitend werden lassen, wodurch  $I_g$  kleiner wird als  $I_c$ . In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, daß  $I_g = I_c$  ist.

Die wesentlichen Aussagen dieses 2-Kreis-Modells deuten auf ein Scaling Gesetz für die induktiven Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $v_{q1}$  und  $v_{q2}$  hin.

Für das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeiten, gilt für unterschiedliche Radien  $a_1$  und  $a_2$  mit Gl. (2.16) und  $L_{j,1} \approx L_{j+1,1} = L_1$ , bzw.  $L_{j,2} \approx L_{j+1,2} = L_2$

$$\frac{v_{q1}}{v_{q2}} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{\tau_2 \ln\left(1 + \frac{L_2}{M_2} \frac{1-i_{g2}}{i_{g2}}\right)}{\tau_1 \ln\left(1 + \frac{L_1}{M_1} \frac{1-i_{g1}}{i_{g1}}\right)} \quad (2.23)$$

Da  $\tau_1$  bzw.  $\tau_2$  vorwiegend das Diffusionsverhalten der Stromdichte im Leiter widerspiegeln, wird  $\tau_1$  und  $\tau_2$  nicht sehr differieren, wenn der gleiche Leiter unter den gleichen Bedingungen verwendet wird. Außerdem ist die Kopplungskonstante  $M/L$  wenig empfindlich auf Durchmesseränderungen. Damit hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit im wesentlichen nur noch von den Grenzströmen  $i_{g1}$  und  $i_{g2}$  ab, d.h. vom Zustand des Supraleiter.

Das Scaling-Gesetz lautet dann:

Die induktive Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt nur schwach von Ringradius ab. Voraussetzung dafür, ist der gleichzeitige Normalübergang einer ganzen Leiterschleife.

### 2.2.2 3-Kreis-Modell

Am 3-Kreis-Modell ist zu erkennen, wie sich die Stromverteilung ändern wird, wenn viele Kreise induktiv gekoppelt sind und ein Kreis eine Flußänderung bewirkt.

In Abb. 4a ist das elektrische Schaltbild für ein System aus 3 nur induktiv gekoppelten Kreisen zu sehen. In die Kreise 1 und 2 sind die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  geschaltet. Der Kreis 3 ist immer supraleitend. Ist die Induktivität  $L$  in allen drei Kreisen gleich und bezeichnet  $M_{12}$  die Wechselinduktivität zwischen Kreis 1 und 2,  $M_{13}$  diejenige zwischen Kreis 1 und 3, und  $M_{23}$  diejenige zwischen Kreis 2 und 3, so gilt für die Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  in den Kreisen 1, 2 und 3 folgendes System gewöhnlicher Dglen:

$$L \dot{I}_1 + R_1 I_1 + M_{12} \dot{I}_2 + M_{13} \dot{I}_3 = 0 \quad (2.24)$$

$$L \dot{I}_2 + R_2 I_2 + M_{12} \dot{I}_1 + M_{23} \dot{I}_3 = 0 \quad (2.25)$$

$$L \dot{I}_3 + M_{23} \dot{I}_2 + M_{13} \dot{I}_1 = 0 \quad (2.26)$$

mit den Anfangsbedingungen  $I_1 = I_{10}$ ,  $I_2 = I_{20}$  und  $I_3 = I_{30}$  zur Zeit  $t = t_s$ . Mit diesen Anfangsbedingungen lauten die Lösungen des Dgl.-Systems (2.24, 25, 26).

$$I_1 = \frac{I_{10}(c-r_2)-dI_{20}}{r_1-r_2} \cdot e^{r_1(t-t_s)} + \frac{dI_{20}-(c-r_1)I_{10}}{r_1-r_2} \cdot e^{r_2(t-t_s)} \quad (2.27)$$

$$I_2 = \frac{c-r_1}{d} \cdot \frac{I_{10}(c-r_2)-dI_{20}}{r_1-r_2} \cdot e^{r_1(t-t_s)} + \frac{c-r_2}{d} \cdot \frac{dI_{20}-(c-r_1)I_{10}}{r_1-r_2} \cdot e^{r_2(t-t_s)} \quad (2.28)$$

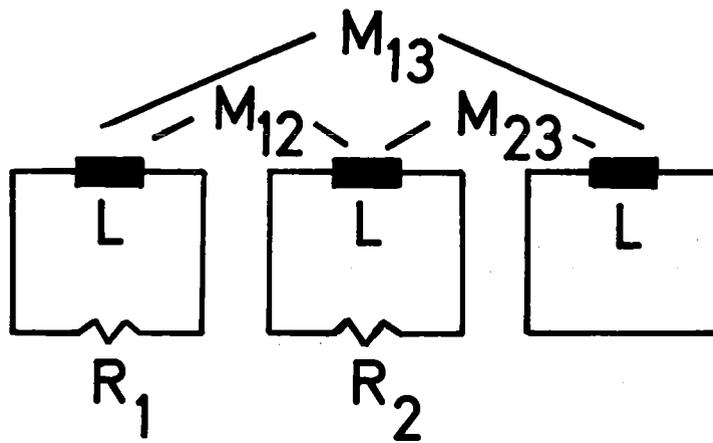


Abb. 4a: Elektrisches Schaltbild des 3-Kreis-Modells

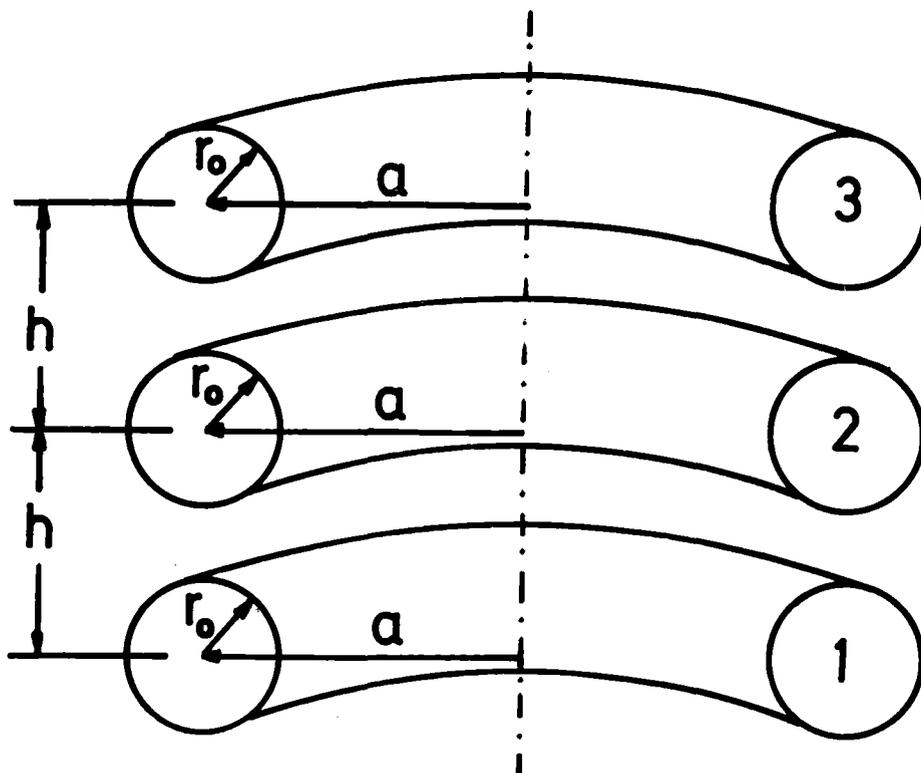


Abb. 4b: Geometrische Anordnung des 3-Kreis-Modells

$$\begin{aligned}
 I_3 = & - \frac{I_{10}(c-r_2) - dI_{20}}{L(r_1-r_2)} \cdot (M_{13} + M_{23} \frac{c-r_1}{d}) \cdot e^{r_1(t-t_s)} - \frac{dI_{20} - (c-r_1)I_{10}}{L(r_1-r_2)} \\
 & \cdot (M_{13} + M_{23} \frac{c-r_2}{d}) \cdot e^{r_2(t-t_s)} \quad (2.29) \\
 & + I_{30} + I_{10} \frac{M_{13}}{L} + I_{20} \cdot \frac{M_{23}}{L}
 \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$d = R_2 L a_2 / (a \cdot a_3)$$

$$c = -R_1 L a_1 / (a \cdot a_3)$$

$$r_{1,2} = \frac{c-\beta}{2} \pm \frac{1}{2} ((c+\beta)^2 - 4d\alpha)^{1/2}$$

wobei

$$a_1 = L^2 - M_{23}^2$$

$$a_3 = L^2 - M_{13}^2$$

$$a_2 = M_{23}M_{13} - L M_{12}$$

$$a = (a_1 a_3 - a_2^2) / a_3$$

$$b = -R_1 L a_2 / a_3$$

$$\alpha = b/a$$

$$\beta = R_2 L / a$$

ist, vgl. hierzu Anhang B.

Zur Diskussion der Lösung wird jetzt zu einem Beispiel übergegangen:

Die geometrische Anordnung für Kreis 1, 2 und 3 ist dabei ein System aus 3 koaxialen Ringen 1, 2 und 3, wie in Abb. 4b dargestellt. Die Ringe haben jeweils den Kreisradius  $a = 10$  cm und den Drahradius  $r_0 = 0,5$  mm. Der Abstand  $h$  in  $z$ -Richtung zwischen zwei Ringen ist immer  $h = 1,1$  mm. Mit diesen Daten lassen sich die Selbst- und Wechselinduktivitäten Gl. (2.17, 18) für das Ringsystem ausrechnen. Es ergibt sich für die Induktivitätsmatrix

$$L(\mu\text{H}) = \begin{pmatrix} L_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & L_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.709 & 0.578 & 0.491 \\ 0.578 & 0.709 & 0.578 \\ 0.491 & 0.578 & 0.709 \end{pmatrix}$$

In diesem Beispiel geschieht der Normalübergang im 1. Ring; die beiden anderen Ringe sind supraleitend. Zur Simulation des Normalübergangs wird der Ring 1 mit dem Widerstand  $R_1$  entladen und  $R_2 \ll R_1$  gemacht. In diesem Beispiel ist mit  $v^{-1}$ .  $\rho = 8,5 \cdot 10^{-10} \Omega\text{m}$ , vgl. Gl. (2.20),  $R_1 = \rho \frac{2a}{vr_0^2} = 0,7 \text{ m}\Omega$  und  $R_2 = 1 \cdot 10^{-8} \Omega$ .

Als Anfangsbedingung wird  $I_{10} = I_{20} = I_{30} = I_b$  oder in normierter Form  $i_{10} = i_{20} = i_{30} = 1$  gewählt.

Die Lösungen für  $i_1, i_2, i_3$ , Gl. (2.23, 24, 25) sind im Zeitintervall  $|0, t_{s1}|$  der Abb. 5 zu sehen. Der Strom  $i_1$  im Ring 1 nimmt ab, und aufgrund der Flußerhaltung nimmt der Strom  $i_2$  im Ring 2 zu. Er nimmt so zu, daß Ring 3 von der Flußänderung des Rings 1 fast vollständig abgeschirmt wird, denn  $i_3$  ändert sich nur um ca. 2 % während sich  $i_1$  und  $i_2$  um über 20 % ändern. Der Strom  $i_2$  im Ring 2 nimmt so lange zu, bis er bei  $t = t_{s1}$  den Grenzstrom  $i_g$  erreicht.

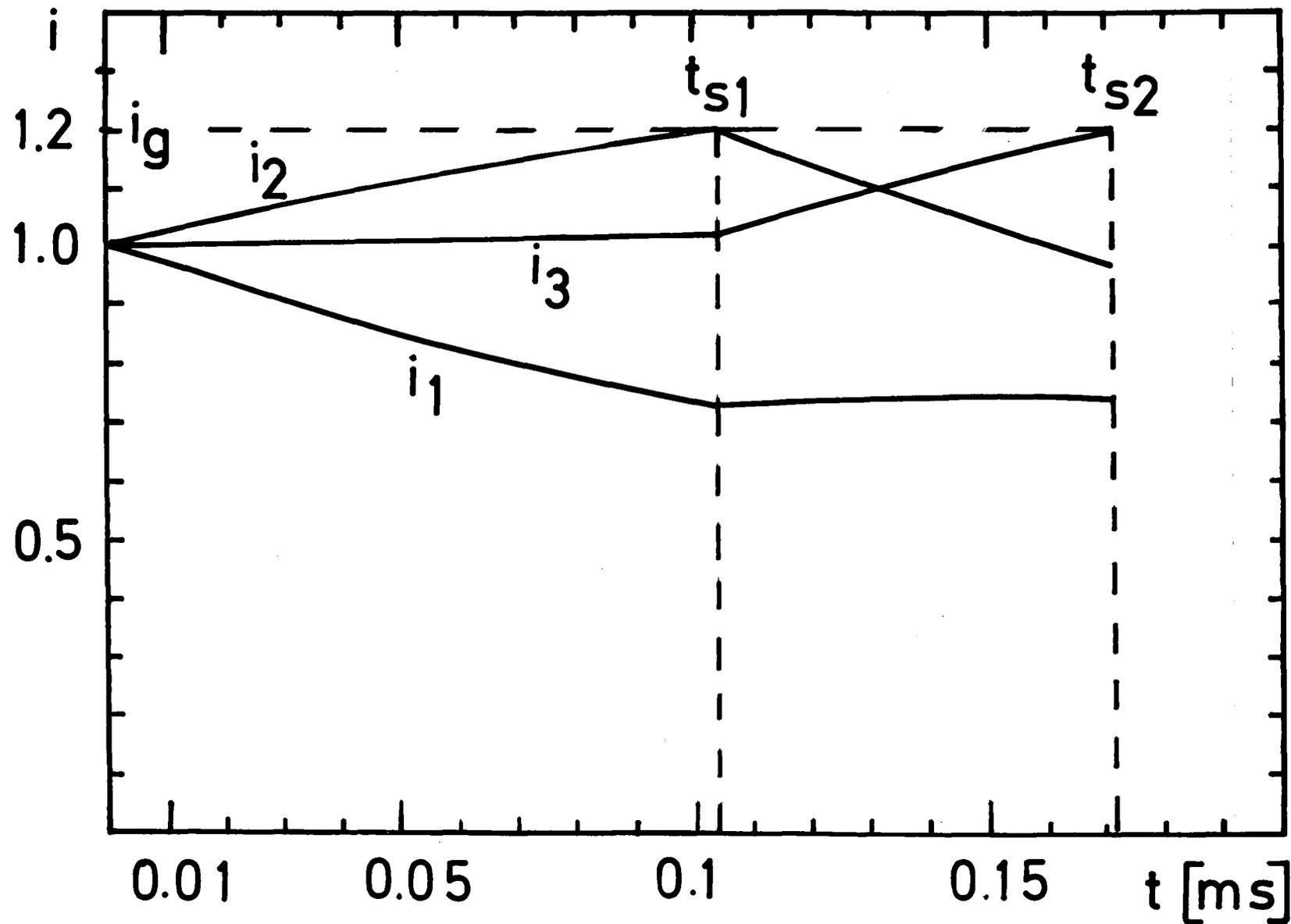


Abb. 5: Beispiel für die Ströme  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  des 3-Kreis-Modells Gl. (2.27, 28, 29) als Funktion der Zeit  $t$ . Bei  $t = t_{s1}$  wird der Ring<sup>3</sup> 2 normalleitend.

Dann wird Kreis 2 normalleitend, und der Widerstand  $R_2$  wird auf den Wert  $R_2 = R_1$  sprunghaft erhöht. Der Strom  $i_2$  sinkt ab und  $i_3$  kompensiert die Flußänderung; währenddessen ändert sich  $i_1$  nur noch wenig im Vergleich zu den Änderungen von  $i_2$  und  $i_3$ . Zur Zeit  $t_{s2}$  erreicht  $i_3$  den Grenzstrom und somit ist das gesamte Ringsystem normalleitend.

An diesem Beispiel ist zu sehen, daß nur die beiden unmittelbar im Bereich der Ausbreitungsfront liegenden Ringe größere Stromänderungen erfahren. Dieses Abschirmverhalten ist deutlich zu sehen, obwohl sich die Kopplungen  $M_{12}/L$  und  $M_{13}/L$  nur um ca. 20% unterscheiden. Wichtig für dieses Verhalten ist, daß sich die Kreise elektrisch ähnlich verhalten, z.B. muß die Zeitkonstante jedes entladenen, isoliert gedachten Kreises ungefähr gleich sein.

Die Ausbreitung der Normalleitung kann also beim 3-Kreis-Modell auch mit dem 2-Kreis-Modell beschrieben werden, da für sie nur die Stromänderung in Nachbarkreisen wichtig ist. Das 2-Kreis-Modell vernachlässigt für Zeiten kleiner als  $t_{s1}$  den Kreis 3 und für Zeiten zwischen  $t_{s1}$  und  $t_{s2}$  entsprechend Kreis 1.

### 2.3 Verallgemeinerung

Beim 3-Kreis-Modell hat sich ergeben, daß der Ausbreitungsvorgang in Vorgänge zerlegt werden kann, die jeweils mit dem 2-Kreis-Modell zu verstehen sind. Auch bei Systemen mit höherer Kreiszahl ist das 2-Kreis-Modell entsprechend interpretiert so anwendbar. Dies wird in zwei Abschnitten gezeigt. Zunächst wird die lineare Ringanordnung des 3-Kreis-Modells auf 6 und dann auf 24 Ringe erweitert, und im zweiten Abschnitt wird das Verhalten einer auch radial ausgedehnten solenoidförmigen Anordnung aus 25 Ringen betrachtet. In allen Fällen erfolgt die Lösung des Dgl.-Systems für die Ringströme mit "NETZ 3", einem im IPP Garching entwickelten Programm zur Netzwerkanalyse.<sup>20</sup> Es berechnet das transiente Verhalten von Strömen und Spannungen in einem beliebig vermaschten, elektrischen Netzwerk.

### 2.3.1 Lineare Ringanordnung

Bei der linearen Ringanordnung mit unterschiedlicher Ringzahl werden immer die gleichen Ringe und der gleiche Ringabstand verwendet, wodurch sich mit der Ringzahl lediglich die Stapelhöhe der konzentrischen Ringe ändert. Da das 3-Kreis-Modell erweitert werden soll, werden die Ringabmessungen und der Kreiswiderstand  $R = 0.7 \text{ m}\Omega$  des dortigen Beispiels übernommen. Die Ringanordnung des linearen 6-Kreis-Modells mit den Ringbezeichnungen ist in Abb. 6 zu sehen.

Die dazugehörige Induktivitätsmatrix lautet

$$L \text{ } |\mu\text{H}| = \begin{pmatrix} 0.709 & 0.578 & 0.491 & 0.440 & 0.404 & 0.375 \\ 0.578 & 0.709 & 0.578 & 0.491 & 0.440 & 0.404 \\ 0.491 & 0.578 & 0.709 & 0.578 & 0.491 & 0.440 \\ 0.440 & 0.491 & 0.578 & 0.709 & 0.578 & 0.491 \\ 0.404 & 0.440 & 0.491 & 0.578 & 0.709 & 0.578 \\ 0.375 & 0.404 & 0.440 & 0.491 & 0.578 & 0.709 \end{pmatrix}$$

Sind die Anfangsbedingungen für die Ströme  $i_{10} = \dots = i_{60} = 1$ , der Grenzstrom  $i_g = 1.2$  und wird von einem Normalübergang des 1. Ringes ausgegangen, so ergeben sich die in Abb. 7 dargestellten Lösungen.

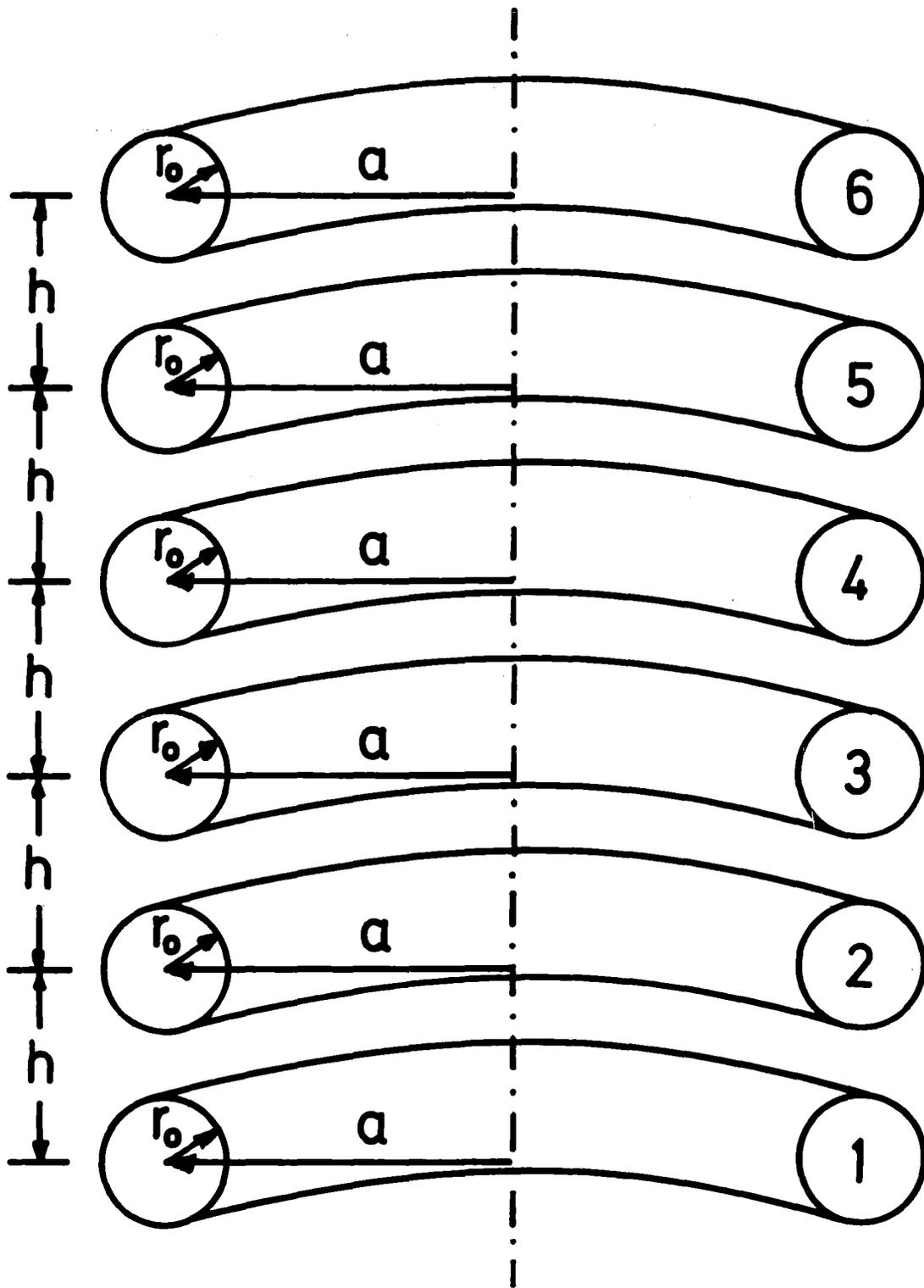


Abb. 6: Geometrische Anordnung des 6-Kreis-Modells

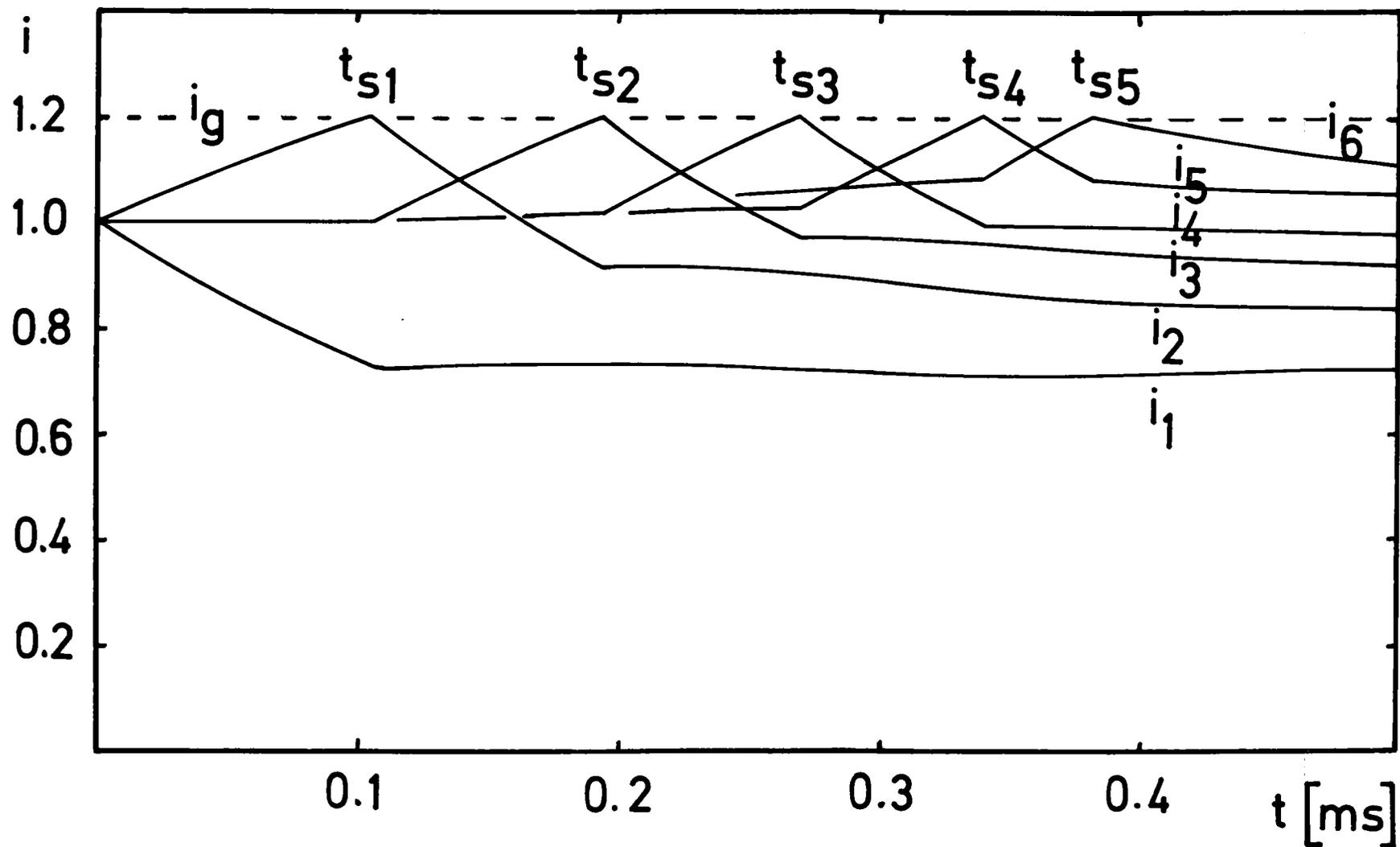


Abb. 7: Beispiel für die Ströme  $i_1, i_2, \dots, i_6$  des 6-Kreis-Modells als Funktion der Zeit  $t$ . Bei  $t = t_{s1}, t_{s2}, \dots, t_{s5}$  werden jeweils die Ringe 2, 3....6 normalleitend.

Repräsentativ für das allgemeine Verhalten der Ströme ist z. B. das Verhalten der Ströme im Zeitintervall  $|t_{s2}, t_{s3}|$ . Bei  $t_{s2}$  erreicht  $i_3$  den Grenzstrom und Ring 3 wird normalleitend. Von diesem Zeitpunkt ab ändert sich der bis dahin nahezu konstante Strom  $i_4$ . Die Ströme  $i_1, i_2, i_5, i_6$  ändern sich nur wenig im betrachteten Zeitintervall. Somit wechselwirken dort nur die beiden Ringe 3 und 4. Diese Wechselwirkung genügt den Voraussetzungen des 2-Kreis-Modells. Ebenso gilt dies für die Ringkombination 2-3 im Zeitintervall  $|t_{s1}, t_{s2}|$  und 4-5 im Zeitintervall  $|t_{s3}, t_{s4}|$ .

Die Ringkombination 1-2 und 5-6 weichen etwas davon ab, weil der Ring 1 als der den Normalübergang initiiierende Ring eine Einstellphase besitzt und der Ring 6 von Flußänderungen am anderen Ende der Ringanordnung beeinflusst wird.

Die Auswertung der Lösungen ergibt die Schaltzeiten  $\Delta t_2 = t_{s2} - t_{s1} = 0.088$  ms,  $\Delta t_3 = t_{s3} - t_{s2} = 0.077$  ms und  $\Delta t_4 = t_{s4} - t_{s3} = 0.070$  ms. Sie sind mit der Schaltzeit von  $\Delta t_j = 0.078$  ms aus dem 2-Kreis-Modell, Gl. (2.16) verträglich.

Bei genauerem Hinsehen ist eine abnehmende Schaltzeit mit zunehmender Anzahl von Normalübergängen zu beobachten. Die Ursache dafür ist die nicht völlige Abschirmung des  $j+1$ -ten Ringes von allen vorausgegangenen Flußänderungen im Ringsystem, wie es sich beim 3-Kreis-Modell schon ankündigte. Für das 2-Kreis-Modell bedeutet dieses nichtideale Abschirmverhalten ein Anwachsen des Anfangswertes für den Strom  $I_{j+1}$  mit zunehmender Zahl  $j$  von Normalübergängen. Aus Gl. (2.15) des 2-Kreis-Modells folgt daraus eine Abnahme der Schaltzeit  $\Delta t_j$ ...

Um das Verhalten der Schaltzeit mit zunehmender Zahl von Normalübergängen weiter zu verfolgen, wird jetzt zu einer linearen Anordnung aus 24 Ringen übergegangen. Werden die Anfangsbedingungen sowie die elektrischen und geometrischen Parameter der Anordnung aus 6 Ringen entsprechend übertragen, so ergeben sich die in Abb. 8 dargestellten Lösungen. Der Normalübergang wird im äußersten ersten Ring initiiert und pflanzt sich über Kreis 2, 3, ..... fort. Die Ströme  $i_1$

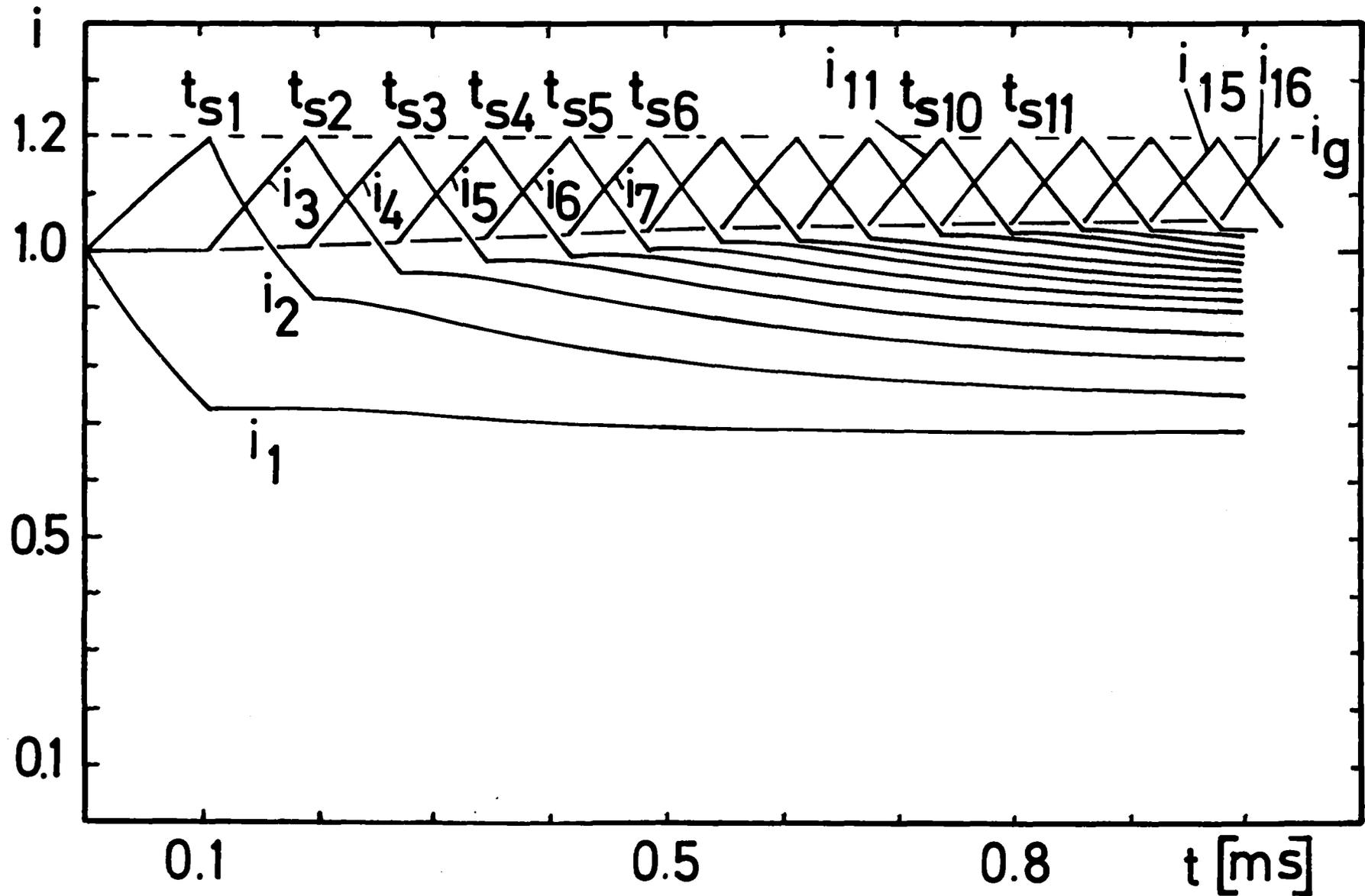


Abb. 8: Beispiel für die Ströme  $i_1, i_2, \dots, i_{16}$  des 24-Kreis-Modells als Funktion der Zeit  $t$ .  
 Bei  $t = t_{s1}, t_{s2}, \dots$  werden die Ringe 2, 3, ... jeweils normalleitend.

bis  $i_5$  stimmen bis  $t = 0.35$  ms erwartungsgemäß mit den entsprechenden Strömen der 6-Ring-Anordnung überein. Weiterhin wird nochmals die Voraussetzung des 2-Kreis-Modells bestätigt, daß zwischen zwei Schaltpunkten nur unmittelbar benachbarte Kreise ihren Strom wesentlich ändern, während in diesem Zeitintervall alle anderen Ströme im Vergleich dazu sich wenig ändern. Das Langzeitverhalten der Schaltzeit wird durch das Driften des Anfangswertes für  $I_{j+1}$  zu höheren Werten bestimmt, wie es sich hier ganz deutlich zeigt. Nach 10 Schaltvorgängen ist aus den Lösungen (Abb. 8) für den Anfangswert von  $i_{11}$   $i_{11}^0 = 1.05$  abzulesen und mit Gl. (2.16) wird dann 
$$\Delta t_{10} = -\tau \cdot \ln \left( 1 + \frac{L}{M} \frac{1.05 - i_g}{i_g} \right) = 0.057 \text{ ms}$$
 in Übereinstimmung mit den exakten Lösungen. Die Änderung der Schaltzeit kann also im Laufe der Zeit erheblich werden. Unabhängig davon ist die Gültigkeit des 2-Kreis-Modells, das immer nur für das Zeitintervall zwischen zwei Schaltpunkten mit den dort gültigen Anfangsbedingungen gilt.

### 2.3.2 Solenoidförmige Ringanordnung

Die solenoidförmige Ringanordnung, vgl. Abb. 9, ist ein Modell für einen Solenoiden mit 25 Windungen. Der innere Ringradius  $r_i$  ist 10.00 cm, der äußere  $r_a = 10.44$  cm, der Drahtradius  $r_o$  ist 0.5 mm und der Drahtmittenabstand  $b = 1.1$  mm. Der Drahtwiderstand ergibt sich wie bisher aus Gl. (2.20) mit  $\nu^{-1} \cdot \rho = 8,5 \cdot 10^{-10} \Omega \text{m}$ . Das Verhalten des Ringsystems beim Normalübergang wird mit zwei Beispielen dargestellt; im einen Fall geschieht der Normalübergang im Symmetriezentrum des Wickelpakets, im Ring 13, und im anderen Fall geschieht er am Rand des Solenoiden im Ring 11. In beiden Fällen wird angenommen, daß zur Zeit  $t = 0$   $i_1 = i_2 = \dots = i_{25} = 1$  und der normierte Grenzstrom  $i_g = 1.2$  ist.

#### Symmetrischer Fall

Zunächst wird der symmetrische Fall betrachtet. In Abb. 10 ist dazu die Anzahl  $K$  der Kreise, die zur Zeit  $t$  normalleitend sind, aufgetragen. Zur Zeit  $t = 0$  ist es ein Kreis, nämlich Kreis 13, und zur Zeit  $t = 0.48$  ms sind es alle 25 Kreise. Die Zahlen bei

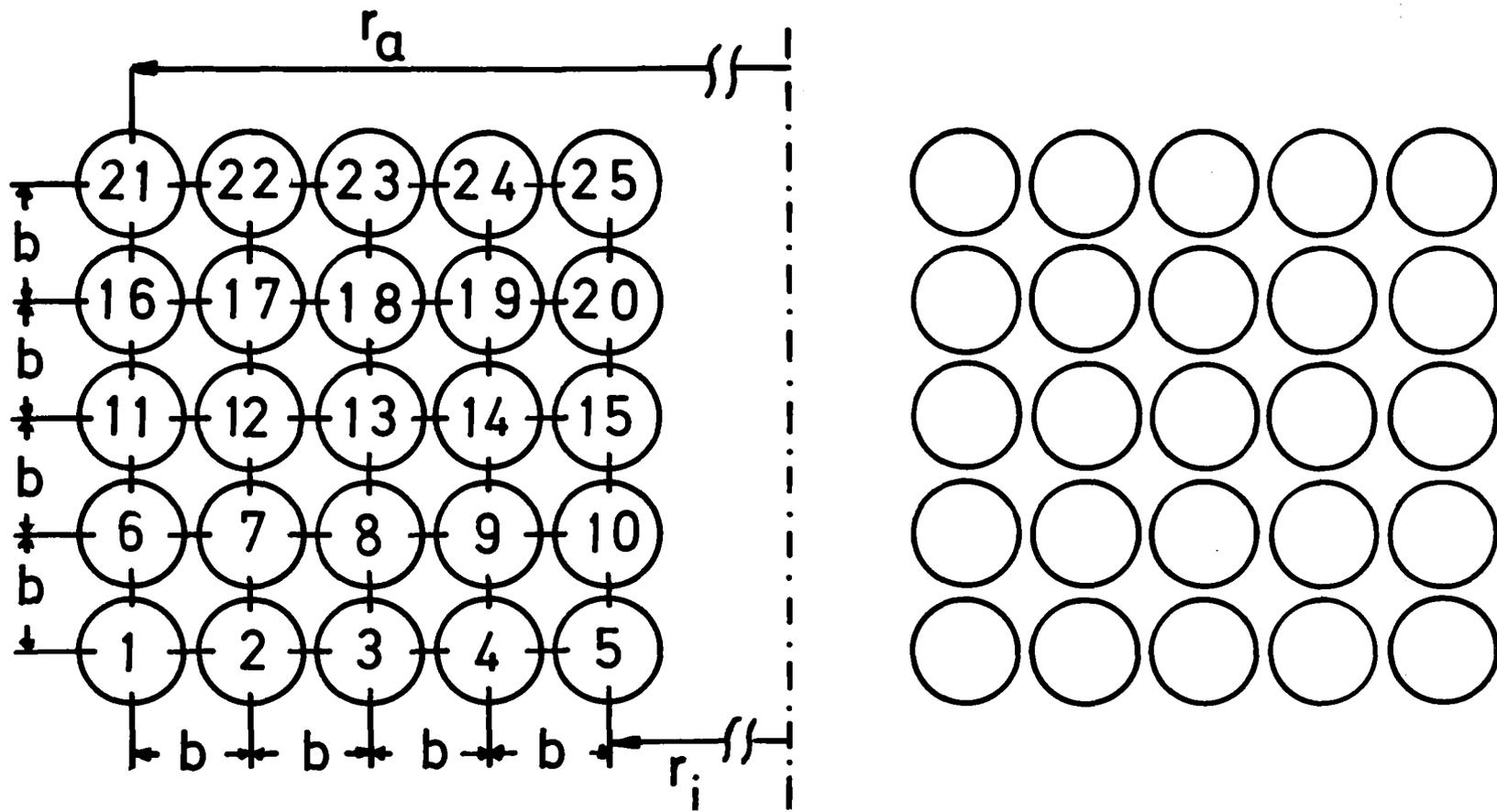


Abb. 9: Geometrien und Bezeichnungen der 25 Ringe der solenoidförmigen Ringanordnung.

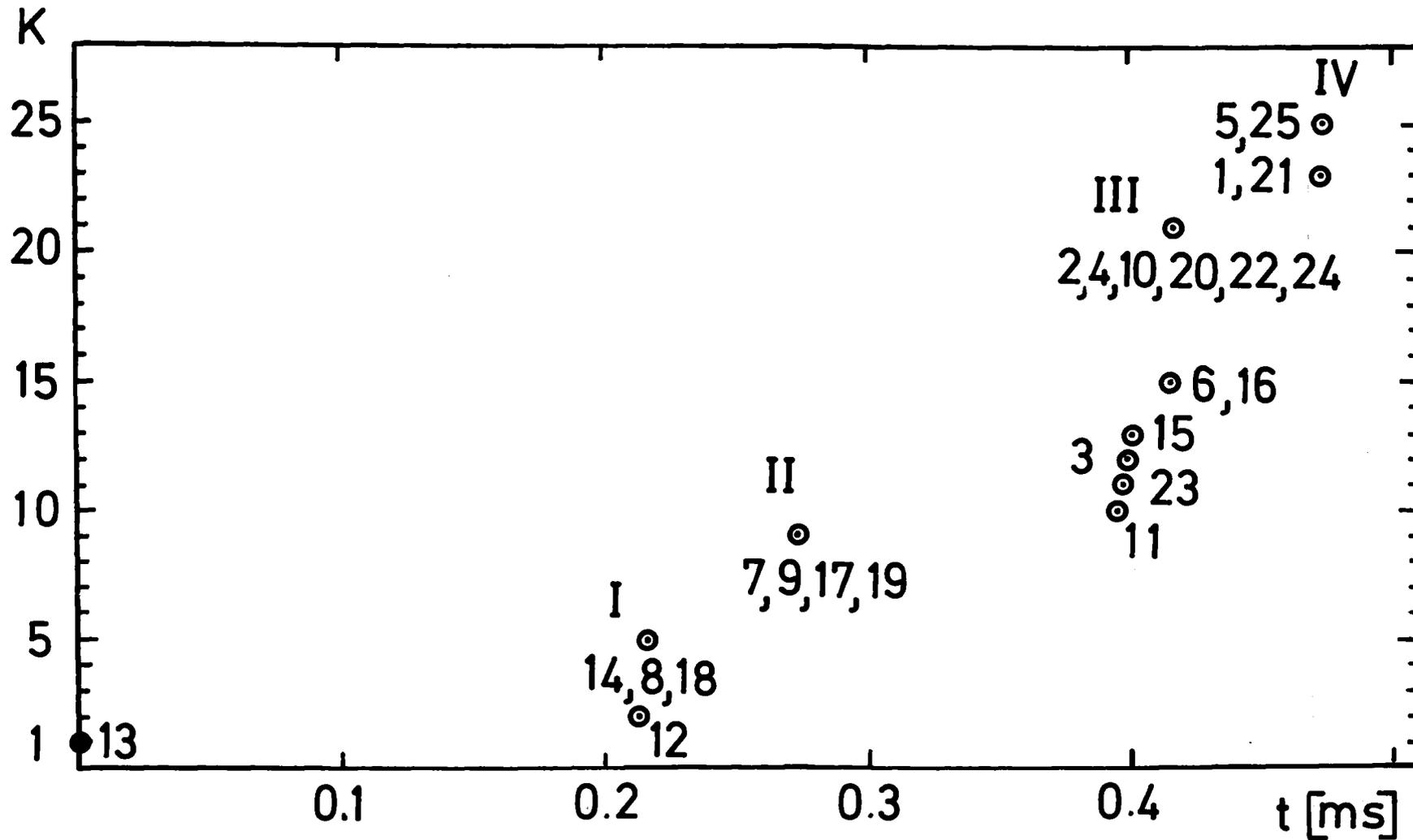


Abb. 10: Anzahl  $K$  der normalleitenden Ringe über der Zeit  $t$  aufgetragen. Der Normalübergang beginnt in der Mitte der Ringanordnung mit Ring 13, vgl. Abb. 9 zur Zeit  $t = 0$  und umfaßt bei  $t \sim 0.48$  ms alle 25 Ringe. Die Zahlen nennen den Ring, gemäß Abb. 9, der zu diesem Zeitpunkt normalleitend wird. Der Normalübergang geschieht im wesentlichen an 4 Zeitpunkten, weshalb eine Unterteilung in 4 Ringgruppen I-IV möglich ist.

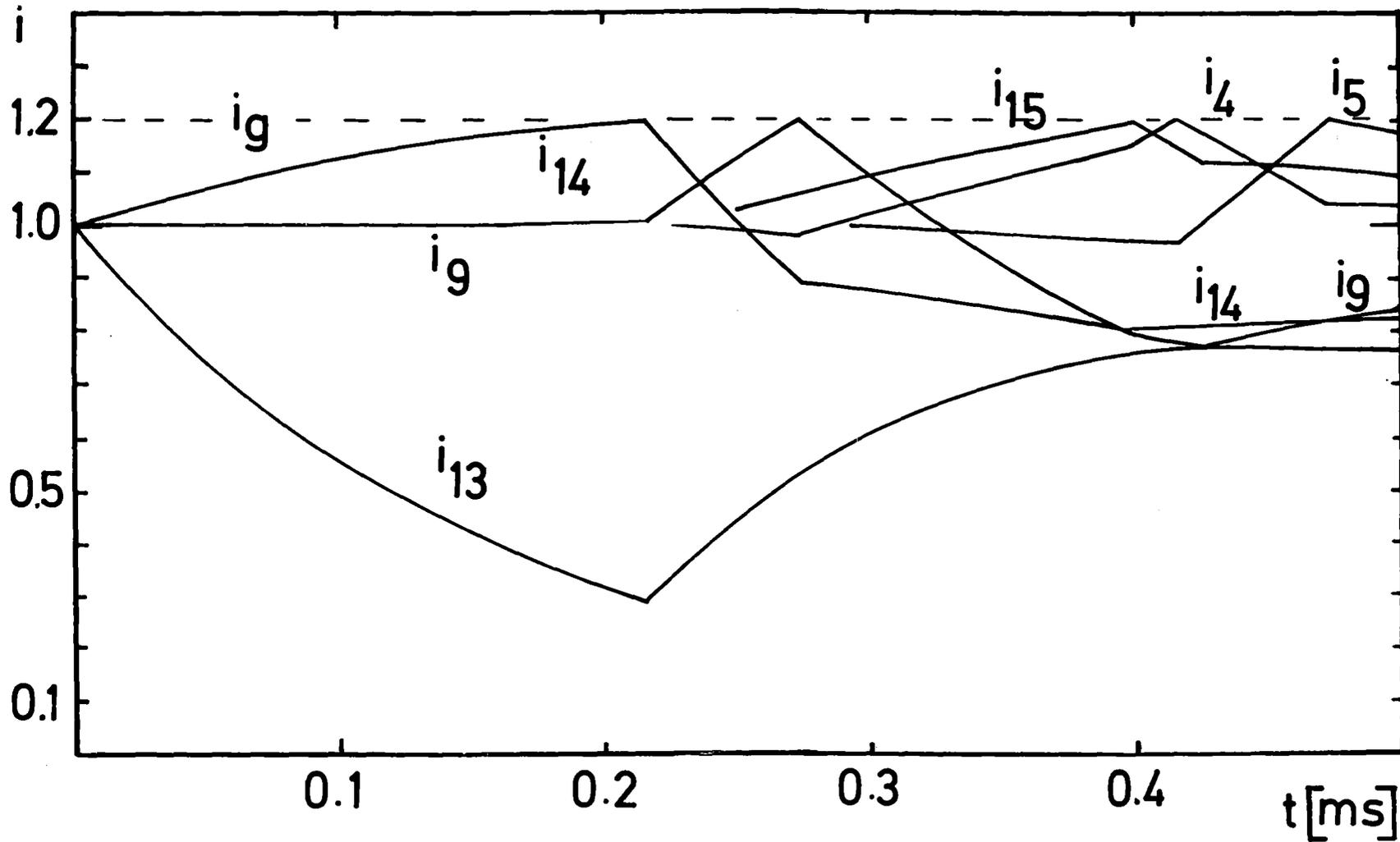


Abb. 11: Beispiel für die Ströme  $i_{13}$ ,  $i_g$ ,  $i_{14}$ ,  $i_{15}$ ,  $i_4$ ,  $i_5$  der solenoidförmigen Ringanordnung aus 25 Ringen, vgl. Abb. 9. Der Normalübergang beginnt in der Mitte der Ringanordnung mit Ring 13.

den Punkten benennen, in Anlehnung an die Ringbezeichnung der Abb. 9, den Ring, der zu diesem Zeitpunkt gerade normalleitend geworden ist. Wegen des Normalübergangs im Symmetriezentrum des Wickelpakets werden immer symmetrische Kreise nahezu gleichzeitig normalleitend. Sie haben einen ähnlichen Strom-Zeit-Verlauf und können daher zu Gruppen zusammengefaßt werden. Die Gruppen wurden in Abb. 10 mit I-IV bezeichnet.

In Abb. 11 ist der Strom-Zeitverlauf für repräsentative Gruppenmitglieder und der Strom  $i_{13}$  im Ring 13, von dem der Normalübergang ausgeht, eingezeichnet. Für die Gruppe III wurden die Ströme  $i_4$  und  $i_{15}$  gewählt. Sie ändern sich, wenn sich Strom  $i_9$  aus der Gruppe II ändert. Währenddessen ändert sich  $i_5$  aus der Gruppe IV wenig, ebenso  $i_{14}$  aus der Gruppe I. Daraus ist zu erkennen, daß sich jetzt alle Gruppenmitglieder so verhalten wie bei der linearen Anordnung einzelner Ringe. Dies wird verständlich, wenn die Wechselinduktivitäten der Gruppenmitglieder mit Ring 13 verglichen werden. Innerhalb einer Gruppe ist die Änderung der Wechselinduktivität  $\lesssim 1\%$ , während sie zwischen 2 benachbarten Gruppen  $\sim 10\%$  beträgt. Die Gruppenmitglieder sind daher vom Ring 13 aus gesehen elektrisch gleichwertig. Beim 2-Kreis-Modell müssen dann die für einen einzelnen Ring geltenden Größen durch die die einzelne Gruppe beschreibende Größe ersetzt werden (vgl. Abschnitt 2.2.1).

Jetzt kann der Fall auftreten, daß zwei wechselwirkende Gruppen unterschiedlich viele Ringe haben können, was unterschiedliche Induktivitäten zur Folge hat. Eine Vergrößerung der Induktivität  $L_{j+1}$  der abschirmenden Gruppe gegenüber der Induktivität  $L_j$  bewirkt eine Erhöhung der Schaltzeit, da in der dafür geltenden Gl. (2.16) im wesentlichen der Logarithmus mit wachsendem  $L_{j+1}$  größer wird. Dies erklärt den Unterschied der Schaltzeiten zwischen Gruppe I und II, wo 4 Ringe 4 Ringe abschirmen, und zwischen II und III, wo jetzt 12 Ringe 4 Ringe abschirmen. Entsprechendes gilt für die Abnahme der Schaltzeit zwischen der Gruppe II und III und zwischen III und IV dieser Abbildung.

Auch bei solenoidförmigen, radialausgedehnten Ringsystemen muß davon ausgegangen werden, daß die Abschirmung der Flußänderungen nicht vollkommen ist. Wegen der Ergebnisse des Abschnitts 2.3.1

sollte die Schaltzeit mit der Anzahl der normalleitenden Gruppen abnehmen. Diesem Effekt wirkt in einem solenoidförmigen System mit unendlich vielen Ringen die Zunahme der Gruppeninduktivität entgegen. Die relative Änderung der Induktivität wird zwar mit wachsendem normalleitendem Gebiet kleiner, jedoch läßt sich auch in Abb. 8 für die lineare Anordnung eine Abnahme der Änderung der Schaltzeit erkennen. Da die Anzahl der Ringe zur Untersuchung dieser Effekte vervielfacht werden müßte, um Randeffekte zu vermeiden, werden auch die numerischen Fehler entsprechend groß, so daß eine gesicherte Aussage nicht möglich erscheint.

#### Asymmetrischer Fall

Bei der Initiierung des Normalübergangs in einem asymmetrisch liegenden Ring ist das Gruppenverhalten anfänglich nicht so deutlich sichtbar. In Abb. 12 ist die Anzahl  $K$  der normalleitenden Kreise über der Zeit aufgetragen, wenn der Normalübergang im Ring 11 am Rand des Solenoiden beginnt. Dort ist zu erkennen, daß sich erst mit der Zeit die Wechselwirkung der Gruppen im Sinne des 2-Kreis-Modells herauskristallisiert. In Abb. 13 sind die Ströme  $i_2, i_3, i_6, i_7, i_8, i_{10}, i_{11}, i_{14}$  über der Zeit ergänzend zu Abb. 12 aufgetragen. Sie ändern sich nur wesentlich, wenn die Ausbreitungsfrent über sie hinwegläuft. Dies bedeutet, daß, selbst wenn das Gruppenverhalten noch nicht deutlich ausgeprägt ist, die Anzahl wechselwirkender Ringe möglichst klein bleibt.

Zusammenfassend ergibt die Untersuchung eines solenoidförmigen Systems, daß die Beschreibung der einzelnen Schaltvorgänge durch das 2-Kreis-Modell gerechtfertigt ist, falls je nach Symmetrie noch eine gewisse Einstellphase in Kauf genommen wird.

#### Scaling:

Wenn das 2-Kreis-Modell gilt, so muß auch das in Abschnitt 2.2.1 daraus abgeleitete Scaling-Gesetz gelten, welches besagt, daß die Schaltzeiten wenig abhängig vom Solenoidradius sind. In Abb. 14 ist dazu die Anzahl  $K$  der normalleitenden Kreise über der Zeit für einen zehnfach größeren inneren Ringradius, als für das Beispiel in Abb. 10, aufgetragen, unter Beibehaltung aller anderen Geometrie-, Materialparameter und Anfangsbedingungen.

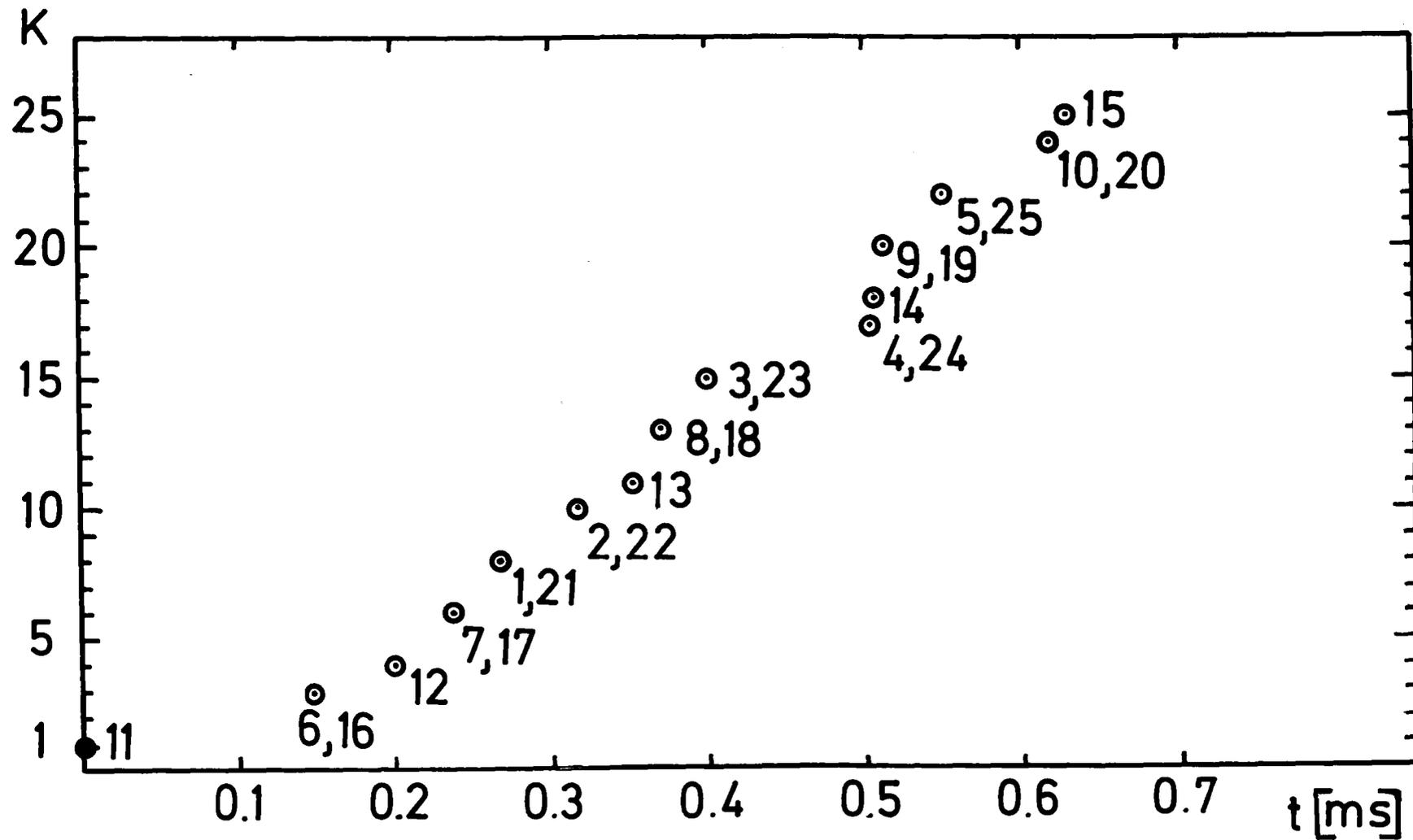


Abb. 12: Anzahl K der normalleitenden Ringe über der Zeit t aufgetragen. Der Normalübergang beginnt am Rand der Ringanordnung mit Ring 11, vgl. Abb. 9, zur Zeit  $t = 0$  und umfaßt bei  $t \approx 0.65$  ms alle 25 Ringe. Die Zahlen nennen den Ring, gemäß Abb. 9, der zu diesem Zeitpunkt normalleitend wird.

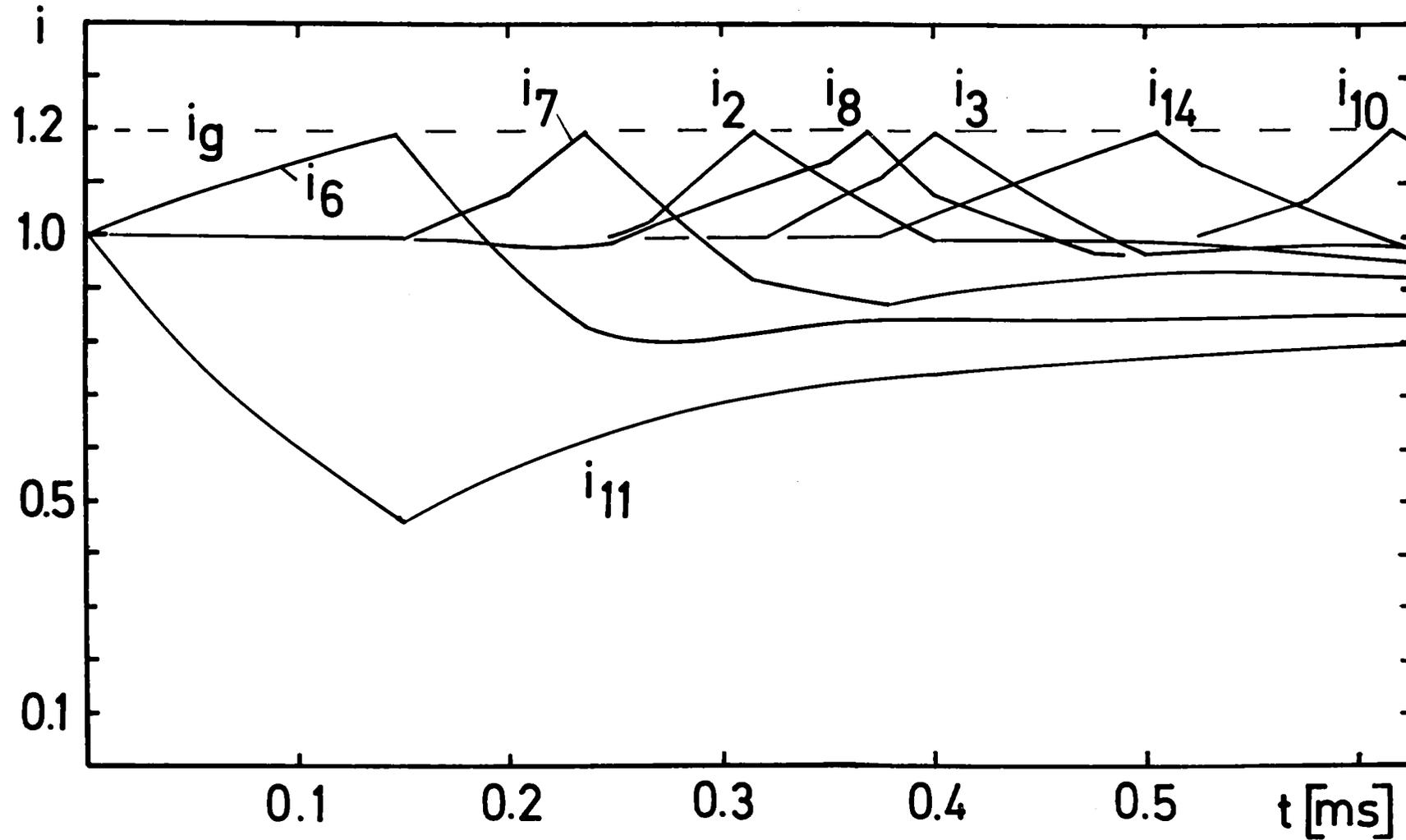


Abb. 13: Beispiel für die Ströme  $i_{11}$ ,  $i_6$ ,  $i_7$ ,  $i_2$ ,  $i_8$ ,  $i_3$ ,  $i_{14}$ ,  $i_{10}$  der solenoidförmigen Ringanordnung aus 25 Ringen, vgl. Abb. 9. Der Normalübergang beginnt am Rand der Ringanordnung mit Ring 11.

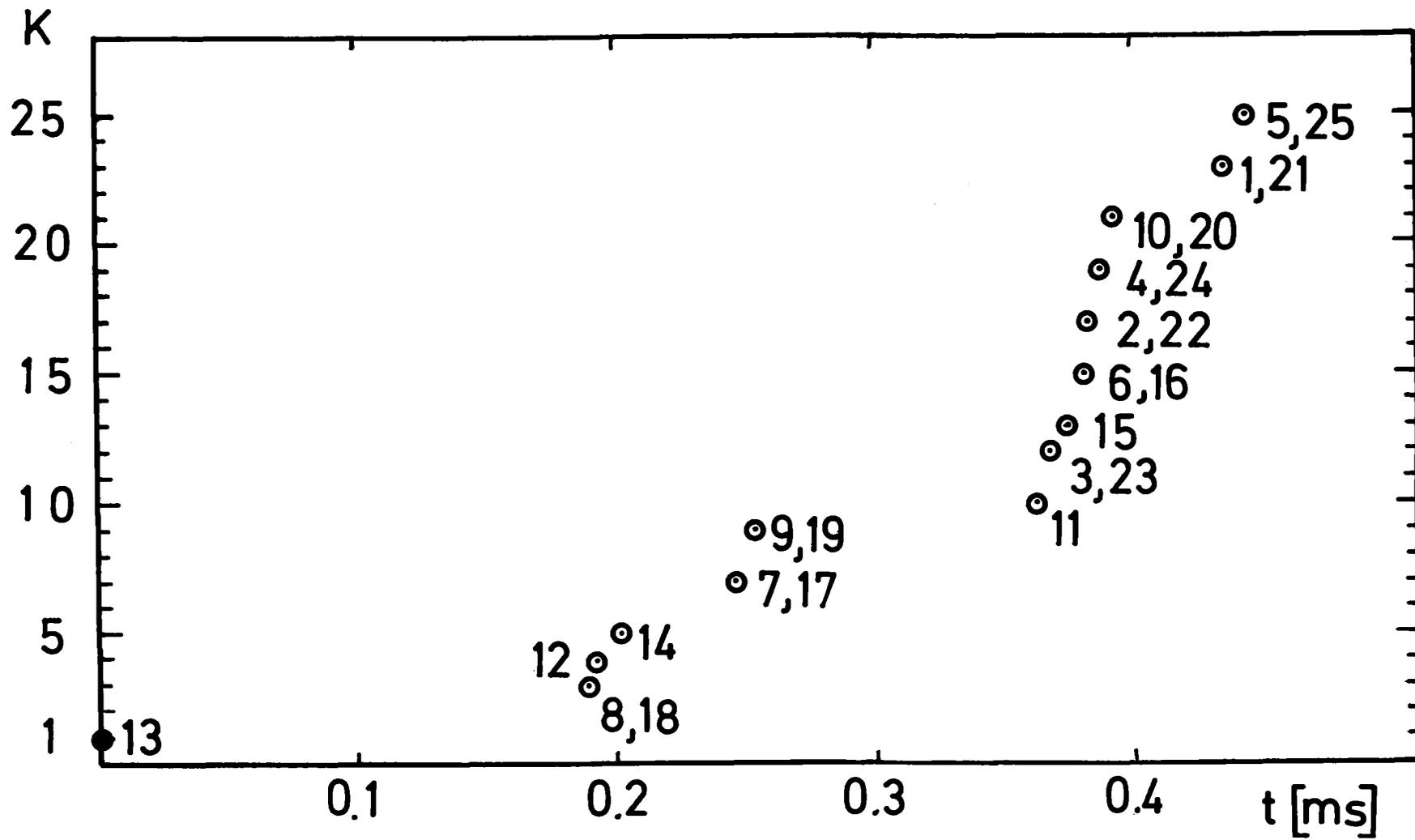


Abb. 14: Anzahl K der normalleitenden Ringe über der Zeit t aufgetragen für ein Ringsystem wie in Abb. 9 skizziert, jedoch mit einem 10-fachen Ringradius wie bei Abb. 10. Der Normalübergang beginnt ebenfalls in der Mitte der Ringanordnung mit Ring 13 und umfaßt bei  $t \approx 0.45$  ms alle 25 Ringe. Die Zahlen nennen den Ring gemäß Abb. 9, der zu diesem Zeitpunkt normalleitend wird.

Tatsächlich sind die Schaltzeiten zwischen den Gruppen nur geringfügig verschieden. Die Vorstellungen des 2-Kreis-Modells werden also bei solenoidförmigen Systemen gut bestätigt.

### 3. Vergleich zwischen induktivem und thermischem Ausbreitungsverhalten

Um die thermische Ausbreitung in Bezug zur induktiven Ausbreitung zu setzen, wird zunächst die Wärmeleitungsgleichung in Zylinderkoordinaten<sup>21</sup>

$$\frac{\kappa_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\kappa_1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \kappa_3 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{A(T)}{d \cdot c(T)} \quad (3.1)$$

für einen Modellsolenoiden numerisch gelöst.

Hierbei bedeutet

$$\kappa_i = \frac{K_i}{d \cdot c(T)} \quad \text{die thermische Diffusivität in } r\text{-, } \varphi\text{- oder } z\text{-Richtung}$$

$K_i$  = mittlere thermische Leitfähigkeit in r-,  $\varphi$ - oder z-Richtung

d = mittlere Dichte

$c(T) = A_1 T^3 + A_2 T$  = spezifische Wärme

$$A(T) = \rho \cdot j^2 = \begin{cases} 0 & : T_B \leq T \leq T_C \\ DT-E & : T \geq T_C \end{cases}$$

j = mittlere Stromdichte

$\rho(T)$  = spezifischer elektrischer Widerstand des Leiters.

Als Randbedingung wird gefordert, daß der Wärmestrom Q in das den Hohlzylinder umgebende Medium mit der Temperatur  $T_B$  und dem Wärmeübergangskoeffizienten h

$$Q = h (T - T_B) \quad (3.2)$$

jeweils gleich dem Wärmestrom im Magneten an seinem Rand ist.

Die ausführliche Formelzusammenstellung zur numerischen Lösung ist in Anhang C zu finden. An dieser Stelle sollen nur die Ergebnisse referiert werden.

Dazu wird die mehrlagige Ringanordnung Abb. 9 benützt. Um diese Anordnung zu einem Solenoiden üblicher Bauweise zu machen, werden die Zwischenräume zwischen den aus Cu bestehend gedachten Ringen mit einem Isolationsmedium, dessen Wärmeleitfähigkeit<sup>22</sup> im Mittel  $1 \times 10^{-3}$  W/cm·K beträgt, aufgefüllt. Außerdem wird zu dem einfacher berechenbaren rechteckigen Leiterquerschnitt mit der Seitenlänge 0.1 cm übergegangen, da die Querleitfähigkeit ohnehin nur abgeschätzt werden kann. Die sich ergebende Anordnung ist in Abb. 15 skizziert. Die mittlere Wärmeleitfähigkeit senkrecht zum Leiter berechnet sich dann nach der Formel<sup>21</sup>

$$K_i = x_d / \left( \sum_{l=1}^n \frac{s_l}{K_l} \right) \quad (3.3)$$

für eine aus n Materialien der Wärmeleitfähigkeit  $K_l$  und der Dicke  $s_l$  zusammengesetzte Anordnung der Dicke  $x_d$ .

Bei der numerischen Rechnung werden außerdem folgende Parameter verwendet<sup>10,22</sup> :

mittlere Stromdichte	$j = 1.4 \cdot 10^4$ A/cm <sup>2</sup>
mittlere Wärmeleitfähigkeit in r-Richtung	$K_2 = 0.02$ W/cm K
mittlere Wärmeleitfähigkeit in z-Richtung	$K_3 = 0.02$ W/cm K
Innenradius	$R_i = 9.945$ cm
Außenradius	$R_a = 10.495$ cm
Länge	$z_o = 0.55$ cm
Koeffizienten der spezifischen Wärme c(T)	$A_1 = 0.785 \cdot 10^{-6}$ J/g K <sup>4</sup>
	$A_2 = 0.3744 \cdot 10^{-4}$ J/g K <sup>2</sup>
Badtemperatur	$T_B = 4.0$ K
Kritische Temperatur des Supraleiters	$T_C = 4.5$ K
Koeffizienten der Leistungsdichte A(T)	$D = 0.77$ W/cm <sup>3</sup> K
	$E = 3.48$ W/cm <sup>3</sup>
Wärmeübergangskoeffizient ins umgebende Helium <sup>23</sup>	$h = 0.1$ W/cm <sup>2</sup>
mittlere Dichte der Wicklung	$d = 7$ g/cm <sup>3</sup>
Anzahl der Gitterpunkte, vgl. Anhang C	$M_j \cdot M_l \cdot M_i = 26 \cdot 26 \cdot 3$

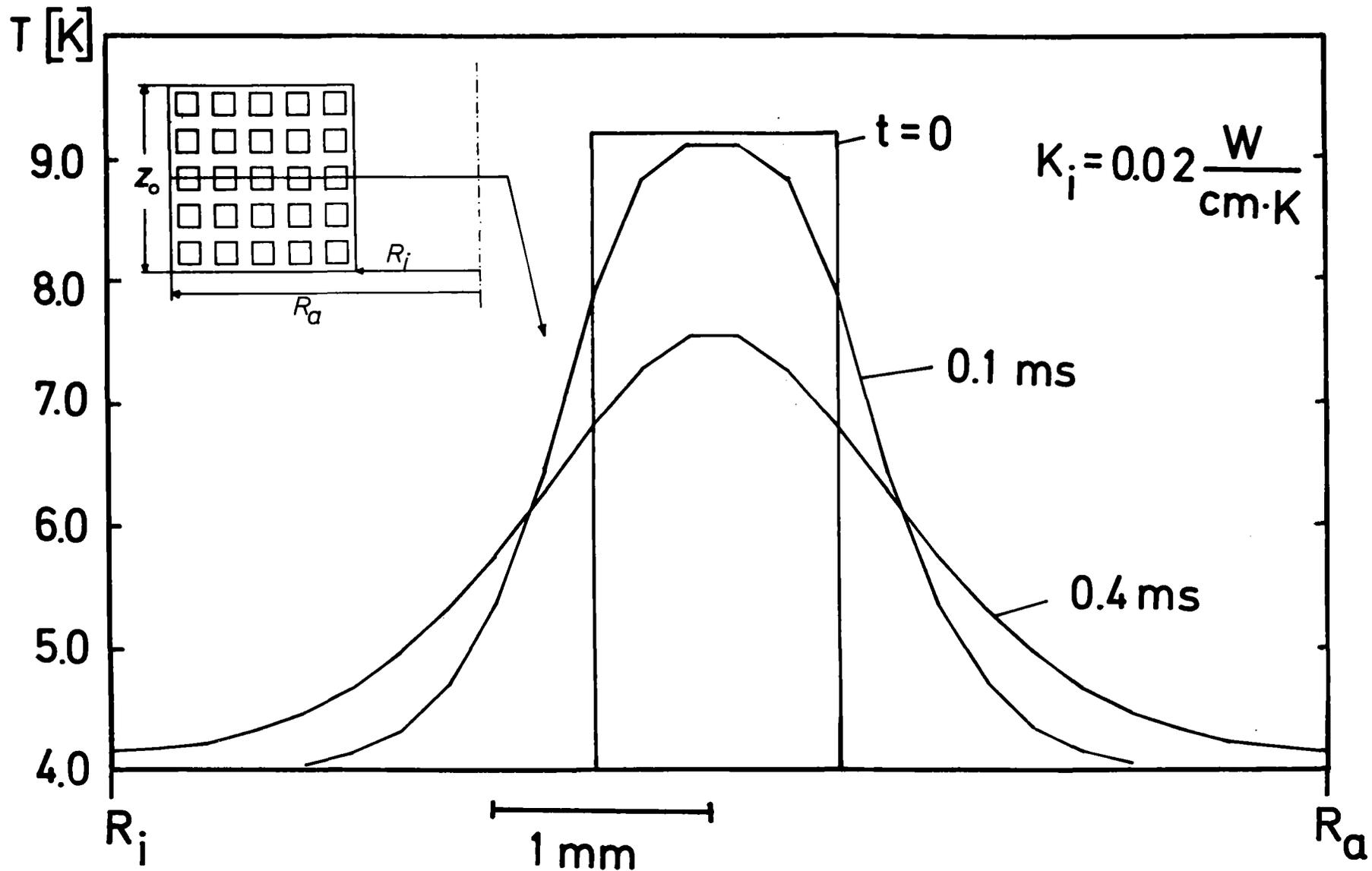


Abb. 15: Temperaturverteilung längs eines Schnittes durch das Wickelpaket des Modellsolenoiden mit dem Innenradius  $R_i$ , dem Außenradius  $R_a$  und der Höhe  $z_0$ , wie in der kleinen Skizze angedeutet, für verschiedene Zeiten  $t$ . Die Wärmeleitfähigkeit  $K_i$  senkrecht zum Leiter ist jeweils  $K_i = 0.02$  W/cmK.

Ein wichtiger Punkt bei der numerischen Lösung der Wärmeleitungsgleichung (3.1) ist, die richtige Anfangsbedingung zu wählen. Je nach Anfangsbedingung kann sich die normaleleitende Zone ausbreiten, stehen bleiben oder schrumpfen<sup>24</sup>. Da hier ein Vergleich zwischen thermischer und induktiver Ausbreitung gemacht werden soll, wird aus Analogiegründen die Normalleitung vom Einzelleiter ausgehend gestartet. Dafür wird die in der Mitte des Wickelpakets liegende Leiterschleife gewählt, vergleiche dazu die Skizze in Abb. 15, um Randeffekte auszuschließen. Außerdem wird angenommen, daß zur Zeit  $t = 0$  in der Leiterschleife über ihren Querschnitt, der halben sie umgebenden Isolationsschicht und längs ihres Umfangs eine Temperaturerhöhung von 5.2 K über der Badtemperatur  $T_B = 4$  K besteht. Der NbTi-Leiter ist also anfänglich normaleleitend. In der Abb. 15 ist die Entwicklung dieser Temperaturverteilung mit der Zeit als Parameter aufgezeichnet. Es ist ein Schnitt in radialer Richtung durch die mittleren Leiterschleifen wie in der ergänzenden Skizze der Abbildung angedeutet ist. Aus Symmetriegründen sehen andere Schnitte in der Wickelebene ähnlich aus. Bei der relativ guten Wärmeleitfähigkeit von 0.02 W/cm K zerfließt die Temperaturverteilung. Nach etwa 0.4 ms erreichen Ausläufer der Temperaturerhöhung den Rand des Wickelpakets. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist ungefähr 1.6 m/s bei  $T_C = 4.5$  K. Im Vergleich dazu ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Normalleitung beim induktiven Modell (Abb. 10) von ungefähr 10 m/s höher. Bedeutende Unterschiede ergeben sich, wenn die Wärmeleitfähigkeit zwischen den Leitern erheblich schlechter wird, zum Beispiel durch andere Isolationsmaterialien oder größeren Drahtabstand. In Abb. 16 ist die Entwicklung der gleichen Temperaturverteilung wie oben für eine zwanzigmal kleinere Wärmeleitfähigkeit senkrecht zum Leiter dargestellt. In Zeiträumen vergleichbar mit denen des induktiven Modells von einigen 0.1 ms, erfolgt keine bedeutende thermische Ausbreitung. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist nur noch ungefähr 0.3 m/s bei  $T_C = 4.5$  K.

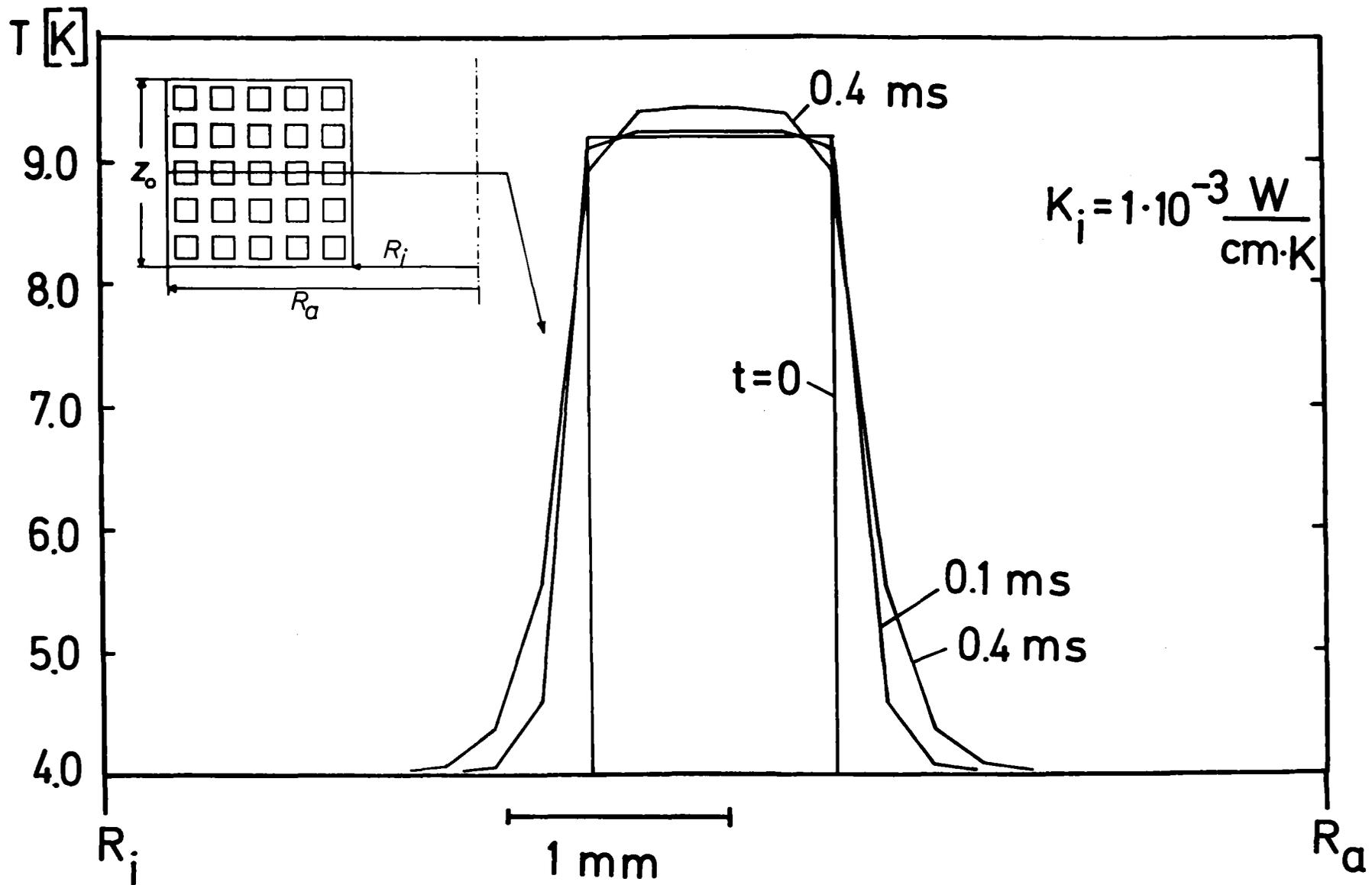


Abb. 16: Temperaturverteilung längs eines Schnittes durch das Wickelpaket des Modellsolenoiden mit dem Innenradius  $R_i$ , dem Außenradius  $R_a$  und der Höhe  $z_0$ , wie in der kleinen Skizze angedeutet, für verschiedene Zeiten  $t$ . Die Wärmeleitfähigkeit  $K_i$  senkrecht zum Leiter ist jeweils  $K_i = 1 \cdot 10^{-3} \text{ W/cm K}$ .

Die numerische Lösung zeigt, daß die induktive Ausbreitung quer zum Leiter schneller als die thermische geschehen kann. Die longitudinale Ausbreitungsgeschwindigkeit wird von der transversalen induktiven hier offenbar nicht überschritten.

Messungen an ähnlichen Leitern unter ähnlichen Bedingungen ergeben hierfür Geschwindigkeiten von einigen 10 m/s.<sup>13</sup>

Um zu klären, wann die induktive Ausbreitung im Magneten zu erwarten ist, wird auf bestehende thermische Modelle zurückgegriffen.<sup>1,2,3,4</sup> Die Modelle wurden alle zur Berechnung der longitudinalen thermischen Ausbreitung im Leiter entwickelt. Wird der Magnet durch ein homogenes Gebilde mit gemittelten Materialeigenschaften angenähert, so sind dieselben Differentialgleichungen auch für Ausbreitungen quer zum Leiter richtig<sup>6</sup>. Für die thermische Ausbreitung gibt es zwei Klassen von Theorien. Bei der einen Klasse, hierzu gehören die Arbeiten von Cherry und Gittleman<sup>1</sup>, Whetstone und Roos<sup>2</sup>, Broom und Rhoderick<sup>3</sup>, wird angenommen, daß bei der Ausbreitung der Bereich des Leiters unterhalb  $T_c$  supraleitend ist, während der Bereich oberhalb  $T_c$  normalleitend ist. Bei der anderen Klasse, die auf die Arbeit von Altov et al<sup>4</sup> zurückgeht, wird die Stromaufteilung zwischen der Matrix und dem Supraleiter in einem gewissen Übergangstemperaturbereich berücksichtigt. Diese Betrachtungsweise erscheint für Leiter mit hohem stabilisierendem Matrixanteil angebracht,<sup>5</sup> während bei weniger gut stabilisierten Leitern die zuerst aufgeführte Klasse, zumindest in bestimmten Stromdichteintervallen, ausreicht<sup>7,8,13,15</sup>. Alle Modelle sind eindimensional. Die radiale Kühlung des Leiters wird gegebenenfalls durch einen in der Temperatur linearen Korrekturterm zum Produktionsterm bei der Wärmeleitungsgleichung berücksichtigt. Erfolgt der Normalübergang gleichmäßig längs des Solenoidumfangs, so entfällt die radiale Kühlung. Die stationäre Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_{th}$  ist in diesem Fall bei allen Modellen gleich, falls die Stromdichte  $j$  nicht nahe der kritischen Stromdichte  $j_{co}(T_B)$  ist.

Für die thermische Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_{th}$  quer zum Leiter gilt dann mit den Bezeichnungen dieses Kapitels

$$v_{th} = \frac{j}{d \cdot c} \left( \frac{K \cdot \rho}{T_C - T_B} \right)^{1/2} \quad (3.4)$$

oder mit  $j/j_{co} = (T_C - T_{co}) / (T_B - T_{co})$  und  $v_{th o} = \frac{j_{co}}{dc} \cdot \left( \frac{K \rho}{T_{co} - T_B} \right)^{1/2}$

$$v_{th} = v_{th o} \frac{j/j_{co}}{(1 - j/j_{co})^{1/2}} \quad (3.5)$$

Für die beiden Beispiele der numerischen Rechnung, Abb. 15 u. 16, ergibt sich ein  $v_{th}$  aus (3.5) von 2.4 m/s bzw. 0.5 m/s gegenüber den mit dem Rechenprogramm ermittelten 1.6 m/s bzw. 0.3 m/s. Dabei wurden die Materialparameter über Temperaturintervalle, die sich an der numerischen Lösung orientierten, gemittelt. Die einfache Formel (3.4) gibt also den komplizierten instationären thermischen Ausbreitungsvorgang näherungsweise wieder. Die induktive Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_i$  kann daher mit der thermischen Ausbreitungsgeschwindigkeit, wie sie diese Formel (3.4) beschreibt, verglichen werden. Dazu wird die induktive Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_i$  mit Hilfe der Gleichung (2.16) in folgender Form geschrieben

$$v_i = v_{io} \frac{1}{-\ln \left( \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \frac{j}{j_{co}} \right)} \quad (3.6)$$

mit den Abkürzungen  $v_{i0} = b/\tau$ ,  $\eta = M/L_{j+1}$  und  $j = (I/I_g) \cdot j_{co}$ , wobei  $b$  der Leiterabstand,  $\tau$  die Zeitkonstante nach Gl. (2.9),  $M$  die Wechselinduktivität zwischen dem  $j$ - und  $j+1$ -ten Kreis,  $L$  die Induktivität des  $j+1$ -ten Kreises,  $I$  der Betriebsstrom des  $j+1$ -ten Kreises,  $I_g$  der Grenzstrom und  $j_{co}$  die kritische Stromdichte bei der Badtemperatur ist.

In Abb. 17 ist  $v_i/v_{i0}$  aus Gleichung (3.6) für  $\eta = \frac{M}{L} = 0.8$  bzw.  $0.5$  und  $v_{th}/v_{th0}$  nach Gleichung (3.5) über  $j/j_{co}$  aufgetragen. Es ist zu erkennen, daß induktive Ausbreitung prinzipiell nur oberhalb eines minimalen Stromes möglich ist. Dies ist verständlich, da die Kopplung zwischen den Kreisen nicht ideal ist. Auch bei der thermischen Querausbreitung gibt es im Realfall einen Minimalstrom, so daß die Kurve  $v_{th}/v_{th0}$  die maximal mögliche thermische Ausbreitungsgeschwindigkeit wiedergibt. Aus der Abb. 17 ist weiterhin zu erkennen, daß die induktive Ausbreitung schon für mittlere  $j/j_{co}$  dominant ist, falls

$$v_{i0} > v_{th0}$$

und die Kopplung  $\eta = \frac{M}{L}$  besser als  $0.5$  ist.

Wir  $v_{i0} = \frac{b}{\tau}$  und Gl. (3.4, 5) in die obige Gleichung eingesetzt, so gilt

$$\frac{b}{\tau} \geq \frac{j_{co}}{dc} \left( \frac{k \cdot \rho}{T_{co} - T_B} \right)^{1/2} \quad (3.7)$$

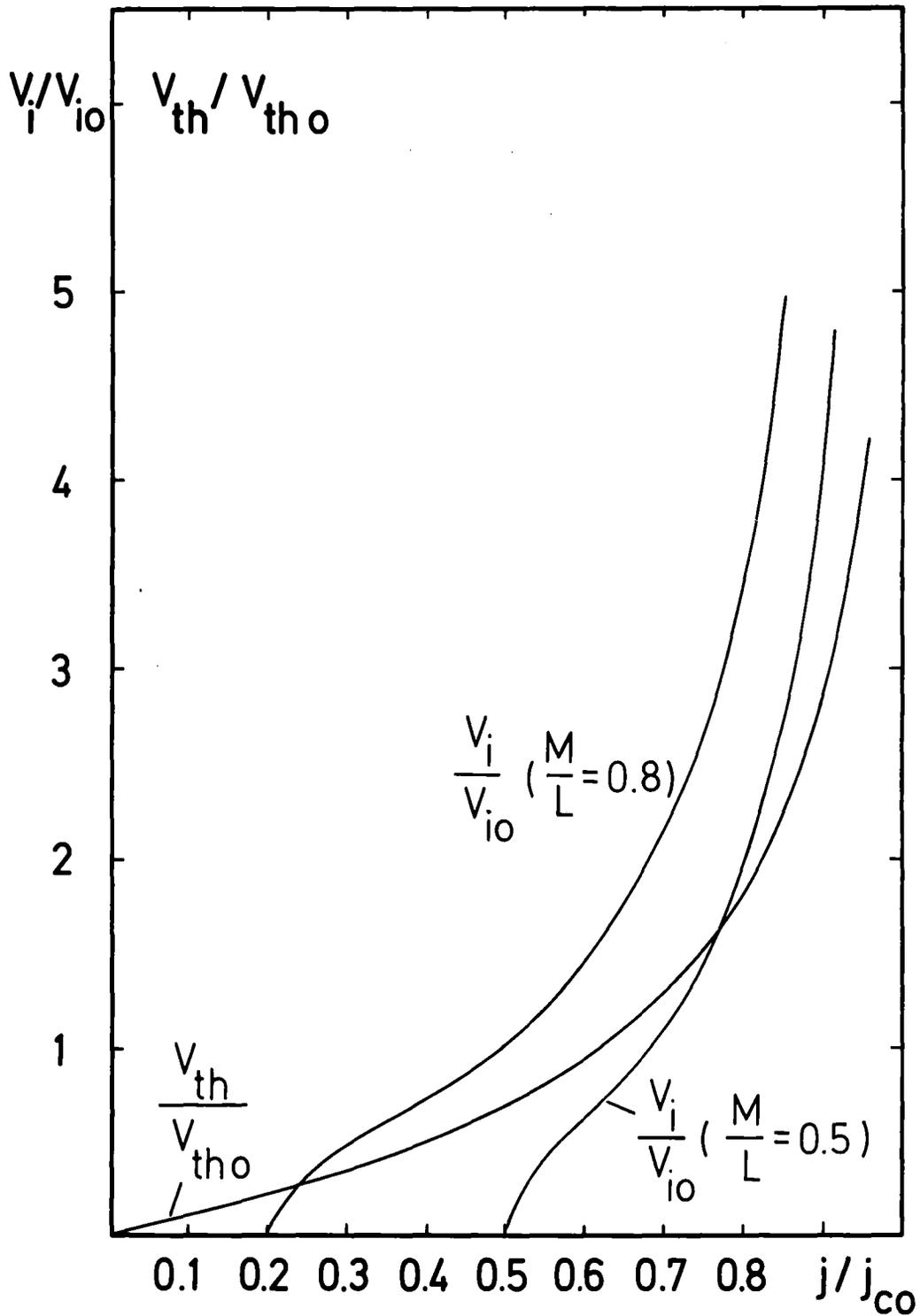


Abb. 17: Die normierte induktive Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_i/v_{io}$  für  $\frac{M}{L} = 0.8$  bzw.  $0.5$ , und die normierte Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_{th}/v_{tho}$  über der normierte Stromdichte  $j/j_{co}$ .

Mit  $\tau = \frac{L^2 - M^2}{L \cdot \rho \frac{2a}{v_{r_0}^2}}$  vgl. dazu Gl. (2.9) und (2.20) wird aus (3.7)

$$1 \geq \left( \frac{L^2 - M^2}{L} \frac{j_{co} v_{r_0}^2}{bdc2a} \right)^2 \frac{K}{\rho (T_{co} - T_B)} \quad (3.8)$$

Mit dieser Formel kann abgeschätzt werden, ob die transversale Ausbreitung bei hinreichender Kopplung schon ab mittleren  $j/j_{co}$ -Werten induktiv oder vorwiegend thermisch ist. Für obigen Modellsolenoiden hat erwartungsgemäß für den Fall kleinerer thermischer Querleitfähigkeit der rechte Term die Größenordnung  $1/10$ , während er bei besserer Querleitfähigkeit die Größenordnung  $1$  hat. Aus der Formel (3.8) läßt sich ablesen, welche Eigenschaften eines Magneten die induktive Ausbreitung für mittlere  $j/j_{co}$ -Werte begünstigen: zum Beispiel ist dies eine kleine kritische Stromdichte  $j_{co}$ , eine kleine thermische Querleitfähigkeit  $K$  und ein großer spezifischer Matrixwiderstand  $\rho$ . Die Formel (3.8) verliert aber ihre Gültigkeit, wenn bei der Ausbreitung der Normalleitung außer der transversalen auch die longitudinale Ausbreitung berücksichtigt werden muß.

Hagedorn und Dullenkopf<sup>15</sup> haben die Ausbreitungsgeschwindigkeit quer zum Leiter in einem kleinen Solenoiden, allerdings in einem niederen  $j/j_{co}$ -Bereich, direkt gemessen. Da die Normalleitung lokal ausgelöst wurde, ist die Ausbreitung im wesentlichen elliptisch. In einem solchen Fall hängt der gemittelte Widerstand  $R_j$ , vgl. Gl. (2.20) von schwer faßbaren Randbedingungen ab und läßt sich daher nur grob abschätzen. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit senkrecht zum Leiter ungefähr zehnmal kleiner ist als die longitudinale Ausbreitungsgeschwindigkeit,

ist der normalleitende Bereich der Ausbreitungsfront längs des Drahtes ungefähr zwanzigmal größer als der Drahtabstand von 0.6 mm. Der normalleitende Bereich  $l$  längs des Drahtes ist also im zeitlichen Mittel  $l \approx \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0.6 \text{ mm} = 6 \text{ mm}$ . Bei der Abschätzung von  $R_j$  kann der gesamte Querschnitt  $Q_M$  der Cu-Matrix eingesetzt werden, da die Diffusionszeit des Stromes in der Cu-Matrix, vgl. dazu Anhang A, ungefähr eine Größenordnung kleiner ist, als die gemessene Schaltzeit von einigen ms. Ist  $\rho = 4 \cdot 10^{-10} \Omega \text{m}$ , der spezifische Widerstand von Cu bei 6 T, so ist  $R_j = \rho \cdot \frac{l}{Q_M} \approx 2 \cdot 10^{-5} \Omega$ .

Die Selbst- und Wechselinduktivitäten  $L$  und  $M$  nach Gl. (2.17,18) ergeben sich mit  $a = 8 \text{ mm}$ ,  $r_o = 0.2 \text{ mm}$ ,  $b = 0.62 \text{ mm}$  zu  $L = 4 \cdot 10^{-8} \text{ H}$  und  $M = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ H}$ . Damit ist  $v_{i0}(6 \text{ T}) = \frac{bLR_j}{L^2 - M^2} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

In Abb. 18 ist eine Meßkurve<sup>15</sup>, sie ist durch offene Punkte gekennzeichnet, für die Ausbreitungsgeschwindigkeit bei 6 T senkrecht zum Leiter in axialer Richtung über dem Strom aufgetragen. Der kritische Strom  $I_{CO}$  ist hierbei 135 A. Die andere Kurve zeigt die aus dem induktiven 2-Kreis-Modell mit Hilfe obiger Abschätzung errechnete induktive Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_i$  nach Gl. (3.7). Wenig oberhalb des minimalen induktiven Stroms  $I_{mi}$  überschreitet die induktive Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_i$  die Meßkurve. Dies beruht hauptsächlich auf der unsicheren Abschätzung des Widerstandes  $R_j$ . Trotz dieser Abweichung deutet sich aber an, daß über gewisse Strombereiche die induktive Ausbreitung jedenfalls wesentlichen Anteil hat und dort die Ausbreitung mit dem induktiven Modell wiedergegeben werden kann. Umfangreichere Vergleiche bei anderen Strömen und Feldern lassen sich nicht ziehen, da immer nur bis 70 A gemessen wurde und der minimale induktive Strom  $I_{mi}$  mit zunehmendem kritischem Strom  $I_{CO}$  wächst. Bei  $I_{CO}(4\text{T})=225 \text{ A}$  ist  $I_{mi}$  schon 79 A.

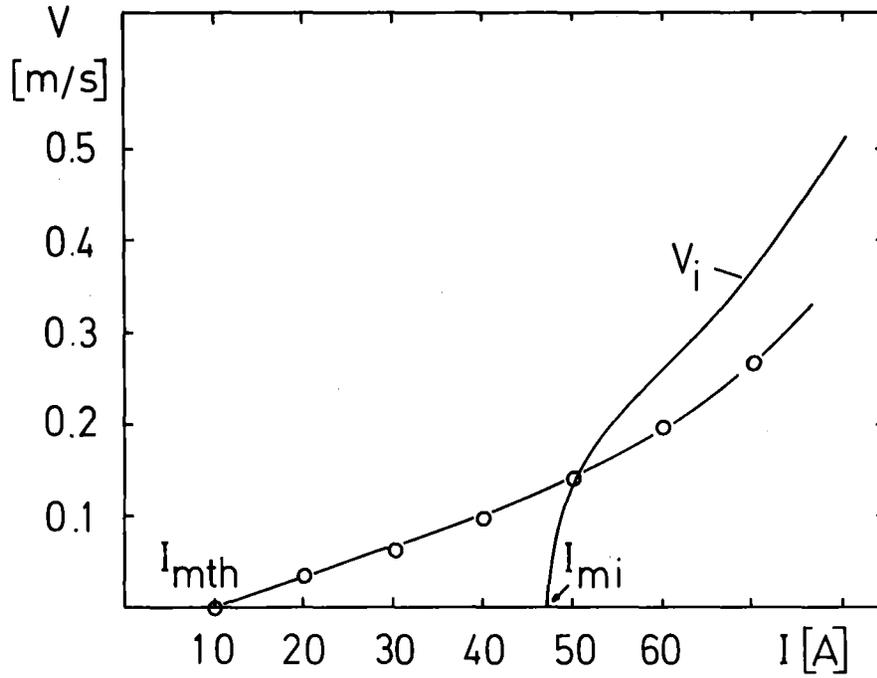


Abb. 18: Messung der Querausbreitungsgeschwindigkeit (offene Punkte) in einem Solenoiden in axialer Richtung bei 6 T über dem Strom  $I$  ( $I_{co} = 135$  A) aufgetragen, im Vergleich zu einer Abschätzung  $v_i$  mit dem induktiven Modell.

Bei der Ausdehnung der Rechnung auf Magnete, die aus verkabelten Leitern gewickelt sind, muß folgendes berücksichtigt werden. Da bei verseilten Strands die Wechselinduktivität zwischen zwei Strands eines Kabels immer größer ist als die Wechselinduktivität zwischen Strands benachbarter Kabel, werden die von einem Strand verursachten Flußänderungen zunächst durch Strands des gleichen Kabels kompensiert. Dieser interne Abschirmmechanismus verzögert die induktive Ausbreitung zwischen den Kabeln. Bei einer makroskopischen elektrischen Betrachtung einer Magnetwindung aus einem Kabel äußert sich die Verseilung der Strands in einer höheren Selbstinduktivität und geringeren Wechselinduktivität der Windungen als bei unverseilten parallelen Strands. Wie eigene Messungen an ähnlichen Systemen ergaben, können die Änderungen der Selbstinduktivität durch Verseilen der Strands im Bereich von 10 % sein, gegenüber dem gut berechenbaren Fall unverseilter paralleler Strands.

Eine Geschwindigkeitsmessung von Dustmann<sup>30</sup> an einem Pancake aus 5 Windungen eines dem TESPE<sup>29</sup>-Kabel ähnlichen 8-Strandkabels ergibt ca. 4 cm/s bei 3 T und  $j/j_{co} = 0,5$ . Die Messung liefert außerdem einen mittleren Widerstand  $R_j$  von  $1 \cdot 10^{-5} \Omega$ , und L bzw. M sind für die innersten Windungen für unverseilte parallele Strands aus der Rechnung 0.64  $\mu\text{H}$  bzw. 0.53  $\mu\text{H}$ . Die induktive Ausbreitungsgeschwindigkeit ist dann noch ungefähr einen Faktor 2 größer, falls eine 30 %-ige Selbstinduktivitätsüberhöhung durch das Verseilen angenommen wird. Die Verringerung der Wechselinduktivität verseilter Leiter hat ebenfalls eine Reduzierung der induktiven Ausbreitungsgeschwindigkeit zur Folge. Wie groß die Induktivitäten der Windungen genau sind, oder ob hier die Kühlung eine Rolle spielt, kann aber nur durch direkte Messung aller elektrischer Größen entschieden werden.

#### 4. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein Modell und seine Gesetzmäßigkeiten für die transversale Ausbreitung einer normalleitenden Zone in einem Solenoiden dargestellt. Die Ausbreitung beruht dabei nicht auf Wärmeströmen, sondern auf Flußänderungen aufgrund von Stromdichteänderungen beim Normalübergang. Sie wird mit einem Modellsystem aus koaxialen Ringen, deren Geometrie den Solenoidwindungen entspricht, beschrieben. Es zeigt sich, daß die Gesetzmäßigkeiten für ein einlagiges System koaxialer Ringe weitgehend mit einem 2-Kreis-System verstanden werden können. Bei einem mehrlagigen System koaxialer Ringe wechselwirken ganze Ringgruppen. Dieses Verhalten kann in den meisten Fällen ebenso mit dem 2-Kreis-Modell gedeutet werden, wenn seine elektrischen Größen den Gruppen angepaßt werden. Aus dem 2-Kreis-Modell folgt, daß der Magnetradius das induktive Ausbreitungsverhalten wenig beeinflußt.

Um zu klären, welche Rolle der induktive Ausbreitungsmechanismus im Magneten spielt, wurde er an einem Modellsolenoiden mit dem thermischen Ausbreitungsmechanismus verglichen. Dabei erweist sich, daß die induktive Ausbreitungsgeschwindigkeit durchaus mit der thermischen vergleichbar ist und bei entsprechender Windungsisolation sogar erheblich schneller als die thermische Ausbreitungsgeschwindigkeit wird. Weiterhin konnten mit Hilfe bestehender Modelle die Gültigkeitsbereiche der thermischen und induktiven Ausbreitung abgeschätzt werden, falls nur transversale Ausbreitung auftritt. Dabei ergibt sich, daß durch Verringern der kritischen Stromdichte oder der thermischen Querleitfähigkeit oder durch Vergrößern des spezifischen elektrischen Matrixwiderstandes die induktive Ausbreitung begünstigt wird.



Anhang A

Abschätzung der Diffusionszeit der Stromdichte

Zur Abschätzung der Diffusionszeit  $\tau_D$  der Stromdichte in der Matrix des Leiters wird die Diffusionsgleichung für ebene Geometrie und konstanten spezifischen elektrischen Widerstand  $\rho$  betrachtet. Sie lautet <sup>25</sup> für die Stromdichte  $j_x$

$$\frac{\partial^2 j_x(y,t)}{\partial y^2} = \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial j_x}{\partial t}(y,t) \quad (1)$$

Macht  $j_x$  bei  $y=0$  zur Zeit  $t=0$  den Sprung  $j_0$ , so ist die Lösung der Diffusionsgl. (1) <sup>21</sup>

$$j_x(y,t) = j_0 \left( 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{a_D \cdot t}}\right) \right) \quad (2)$$

wobei  $a_D = \frac{\rho}{\mu_0}$

und

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z'^2} dz'$$

die Fehlerfunktion <sup>26</sup> bedeutet.

Wird die Diffusionszeit des Punktes

$$j_x(y_e(t)) = j_0/e = 0.37 j_0 \quad (3)$$

als für die Diffusionszeit der Stromdichte typisch definiert, so folgt aus (2)

$$\frac{1}{e} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y_e}{2\sqrt{a_D \cdot t}}\right) \quad (4)$$

Also

$$\operatorname{erf}\left(\frac{y_e}{2\sqrt{a_D \cdot t}}\right) = 0.63 \quad (5)$$

Die Reihenentwicklung der Fehlerfunktion<sup>26</sup>

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (6)$$

zeigt, daß, falls  $\operatorname{erf}(z)$  kleiner ist als 0.75, die Näherung

$$\operatorname{erf}(z) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot z \quad (7)$$

sinnvoll ist. Wird sie bei (5) angewandt, dann ist

$$\frac{y_e}{\sqrt{\pi a_D \cdot t}} = 0.63 \quad (8)$$

und mit  $t = \tau_D$  und  $y_e = d$  wird daraus

$$\tau_D = 0.8 \frac{d^2}{a_D} \approx \frac{\mu_0}{\rho} d^2 \quad (9)$$

Die Diffusionszeit  $\tau_D$  ist im Bereich von 0.1 - 1 ms, wenn  $a_D \approx 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  ist, wie bei Cu und  $d = 0.1 - 0.5 \text{ mm}$ , was der radialen Größenordnung üblicher Supraleiter entspricht.<sup>10</sup>

Anhang B

Berechnung der Lösungen des 3-Kreis-Modells

Um das Dgl.-System erster Ordnung

$$L\dot{I}_1 + R_1 I_1 + M_{12}\dot{I}_2 + M_{13}\dot{I}_3 = 0 \quad (1)$$

$$L\dot{I}_2 + R_2 I_2 + M_{12}\dot{I}_1 + M_{23}\dot{I}_3 = 0 \quad (2)$$

$$L\dot{I}_3 + M_{13}\dot{I}_1 + M_{23}\dot{I}_2 = 0 \quad (3)$$

mit der Anfangsbedingung  $I_1 = I_{10}$ ,  $I_2 = I_{20}$  und  $I_3 = I_{30}$  zur Zeit  $t = t_s$  zu lösen, muß es zunächst auf seine Normalform gebracht werden. <sup>27</sup> Dazu wird mit Hilfe von Gl.(3)  $\dot{I}_3$  in Gl.(1) und (2) eliminiert. Gl. (3) nach  $\dot{I}_3$  aufgelöst, ergibt

$$\dot{I}_3 = -\frac{M_{13}}{L} \dot{I}_1 - \frac{M_{23}}{L} \dot{I}_2 \quad (4)$$

Mit (4) wird aus (1)

$$(L^2 - M_{13}^2)\dot{I}_1 + R_1 L \cdot I_1 + (LM_{12} - M_{23}M_{13}) \dot{I}_2 = 0 \quad (5)$$

Ebenso wird mit (4) aus (2)

$$(L^2 - M_{23}^2)\dot{I}_2 + R_2 L \cdot I_2 + (LM_{12} - M_{23}M_{13}) \dot{I}_1 = 0 \quad (6)$$

Wird mit Gl. (6) in Gl. (5)  $\dot{I}_2$  ersetzt, so wird aus (5)

$$\dot{I}_1 = \left( \frac{M_{23}M_{13} - LM_{12}}{L^2 - M_{13}^2} \cdot \frac{b}{a} - \frac{R_1 L}{L^2 - M_{13}^2} \right) \cdot I_1 - \frac{M_{23}M_{13} - M_{12}L}{L^2 - M_{13}^2} \cdot \frac{R_2 L}{a} \cdot I_2 \quad (7)$$

Hierbei ist

$$a = (L^2 - M_{23}^2) - \frac{(M_{23}M_{13} - LM_{12})^2}{L^2 - M_{13}^2}$$

und

$$b = \frac{R_1 L}{L^2 - M_{13}^2} (LM_{12} - M_{23}M_{13})$$

Entsprechend läßt sich mit Gl.(5)  $\dot{I}_1$  in Gl.(6) ersetzen. Es gilt dann mit den gleichen Abkürzungen wie bei Gl. (7)

$$\dot{I}_2 = \frac{b}{a} I_1 - \frac{R_2 L}{a} \cdot I_2 \quad (8)$$

Da sowohl  $\dot{I}_1$  als auch  $\dot{I}_2$  nur noch eine Funktion von  $I_1$  und  $I_2$  sind, genügt es, Gl.(7) und Gl.(8) gemeinsam zu lösen. Aus (4) läßt sich dann die Lösung für  $I_3$  mit diesen Lösungen errechnen. Vorher ist es zweckmäßig noch einige Abkürzungen einzuführen.

$$a_1 = L^2 - M_{23}^2 \quad (9)$$

$$a_3 = L^2 - M_{13}^2 \quad (10)$$

$$a_2 = M_{23}M_{13} - LM_{12} \quad (11)$$

Damit schreibt sich

$$a = (a_1 a_3 - a_2^2) / a_3 \quad (12)$$

$$b = - R_1 L a_2 / a_3 \quad (13)$$

$$c = - R_1 L a_1 / (a a_3) \quad (14)$$

$$d = R_2 L a_2 / (a a_3) \quad (15)$$

$$\alpha = b/a \quad (16)$$

$$\beta = R_2 L / a \quad (17)$$

Unter Ausnutzung obiger Abkürzungen wird aus Gl. (7) und (8)

$$\dot{I}_1 = c I_1 - d I_2 \quad (18)$$

$$\dot{I}_2 = \alpha I_1 - \beta I_2 \quad (19)$$

Um die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (18), (19) zu finden, muß die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} c - r & - d \\ \alpha & - \beta - r \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

gelöst werden.

Die Wurzeln  $r_1$  und  $r_2$  der charakteristischen Gleichung (20) sind

$$r_{1,2} = \frac{c-\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \left( (c+\beta)^2 - 4 d \alpha \right)^{1/2} \quad (21)$$

Damit lauten die partikulären Lösungen von (18) und (19)

$$I_1^p = A_1 e^{r_1 t}, \quad I_2^p = A_2 e^{r_2 t} \quad (22)$$

bzw.

$$I_2^p = \bar{A}_1 e^{r_1 t}, \quad I_1^p = \bar{A}_2 e^{r_2 t} \quad (23)$$

Die Koeffizienten  $A_1, A_2, \bar{A}_1, \bar{A}_2$  der partikulären Lösungen bestimmen sich aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (c-r_1) A_1 - d\bar{A}_1 &= 0 \\ \alpha A_1 - (\beta+r_1) \bar{A}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

und dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (c-r_2) A_2 - d\bar{A}_2 &= 0 \\ \alpha A_2 - (\beta+r_2) \bar{A}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Aus (24) und (25) folgt

$$\bar{A}_1 = \frac{c-r_1}{d} \cdot A_1 \quad (26)$$

$$\bar{A}_2 = \frac{c-r_2}{d} \cdot A_2 \quad (27)$$

Also ist die allgemeine Lösung für das Dgl.-System (18) und (19)

$$I_1 = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \quad (28)$$

$$I_2 = \frac{c-r_1}{d} A_1 e^{r_1 t} + \frac{c-r_2}{d} A_2 e^{r_2 t} \quad (29)$$

Die Lösungen (28), (29) eingesetzt in Gl. (4) ergibt

$$\dot{I}_3 = -\frac{A_1}{L} r_1 (M_{13} + M_{23} \frac{c-r_1}{d}) e^{r_1 t} - \frac{A_2}{L} r_2 (M_{13} + M_{23} \frac{c-r_2}{d}) e^{r_2 t} \quad (30)$$

und integriert

$$I_3 = -\frac{A_1}{L} (M_{13} + M_{23} \frac{c-r_1}{d}) e^{r_1 t} - \frac{A_2}{L} (M_{13} + M_{23} \frac{c-r_2}{d}) e^{r_2 t} + C \quad (31)$$

Die Konstanten  $A_1$ ,  $A_2$  und  $C$  der Lösungen (28), (29) und (31) bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen zur Zeit  $t = t_s$  :

$$I_1 = I_{10}, I_2 = I_{20} \text{ und } I_3 = I_{30}$$

Mit diesen Anfangsbedingungen lauten die Lösungen des Dgl.-Systems (1,2,3) mit (21, 9-17)

$$I_1 = \frac{I_{10}(c-r_2) - dI_{20}}{r_1 - r_2} \cdot e^{r_1(t-t_s)} + \frac{dI_{20} - (c-r_1)I_{10}}{r_1 - r_2} \cdot e^{r_2(t-t_s)} \quad (32)$$

$$I_2 = \frac{c-r_1}{d} \cdot \frac{I_{10}(c-r_2) - dI_{20}}{r_1 - r_2} \cdot e^{r_1(t-t_s)} + \frac{c-r_2}{d} \cdot \frac{dI_{20} - (c-r_1)I_{10}}{r_1 - r_2} \cdot e^{r_2(t-t_s)} \quad (33)$$

$$I_3 = -\frac{I_{10}(c-r_2) - dI_{20}}{L(r_1 - r_2)} \cdot (M_{13} + M_{23} \frac{c-r_1}{d}) \cdot e^{r_1(t-t_s)} - \frac{dI_{20} - (c-r_1)I_{10}}{L(r_1 - r_2)} \cdot (M_{13} + M_{23} \frac{c-r_2}{d}) \cdot e^{r_2(t-t_s)} + I_{30} + I_{10} \frac{M_{13}}{L} + I_{20} \frac{M_{23}}{L}$$

(34)

Anhang C

Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung in Zylinderkoordinaten

Zur numerischen Lösung der Wärmeleitungsgl. für eine solenoidförmige Geometrie

$$K_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + K_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + K_3 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - g(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = A(T) \quad (1)$$

wobei  $g$  und  $A$   $T$ -abhängige Funktionen sind, wird ein explizites Lösungsverfahren<sup>28</sup> gewählt.

$\phi(r, \varphi, z, t)$  bezeichne die Näherungslösung von  $T(r, \varphi, z, t)$ . Die partiellen Ableitungen gehen dann in folgende Differenzquotienten über

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \\ \rightarrow \frac{1}{\Delta r \cdot r} (\phi(r+\Delta r, \varphi, z, t) - \phi(r-\Delta r, \varphi, z, t)) &+ \frac{1}{\Delta r^2} (\phi(r+\Delta r, \varphi, z, t) \\ - 2\phi(r, \varphi, z, t) + \phi(r-\Delta r, \varphi, z, t)) &= \frac{1}{\Delta r^2} \left( \left( \frac{\Delta r}{r} + 1 \right) \phi(r+\Delta r, \varphi, z, t) \right. \\ - 2\phi(r, \varphi, z, t) + \left. \left( 1 - \frac{\Delta r}{r} \right) \phi(r-\Delta r, \varphi, z, t) \right) & \quad (2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \rightarrow \frac{1}{\Delta \varphi^2} (\phi(r, \varphi+\Delta \varphi, z, t) - 2\phi(r, \varphi, z, t) + \phi(r, \varphi-\Delta \varphi, z, t)) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \rightarrow \frac{1}{\Delta z^2} (\phi(r, \varphi, z+\Delta z, t) - 2\phi(r, \varphi, z, t) + \phi(r, \varphi, z-\Delta z, t)) \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{\tau} (\phi(r, \varphi, z, t+\tau) - \phi(r, \varphi, z, t)) \quad (5)$$

In den Solenoiden mit dem Innenradius  $R_i$ , dem Außenradius  $R_a$  und der Länge  $Z_0$  wird jetzt ein Punktgitter mit den Abständen  $\Delta r$ ,  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta z$  in die 3 Raumrichtungen gelegt. Die Koordinaten  $r, \varphi, z$  eines Gitterpunktes sind:

$$r = R_1 + r \cdot (j-1) = R_i + \frac{R_a - R_i}{M_j} (j-1) \quad \text{mit } j = 1, 2, \dots, M_j$$

$$\varphi = \Delta \varphi \cdot i = \frac{2\pi}{M_i} \cdot (i-1) \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, M_i$$

$$z = \Delta z \cdot (l - 1) \quad \text{mit } l = 1, 2, \dots, M_l$$

Das Punktgitter gibt die Stelle  $(j, i, l)$  an, an der die Näherungslösung  $\phi(r, \varphi, z, t)$  zeitabhängig berechnet wird.

Mit Hilfe der Indizes  $j, i, l$  läßt sich die Näherungslösung zur Zeit  $t$  auch in der Form  $\phi_{j,i,l}^t$  schreiben.

Die Differenzenquotienten (2,3,4,5) lauten dann

$$(2) = \frac{1}{\Delta r^2} \left( \left( \frac{\Delta r}{r} + 1 \right) \phi_{j+1,i,l}^t - 2\phi_{j,i,l}^t + \left( 1 - \frac{\Delta r}{r} \right) \phi_{j-1,i,l}^t \right) \quad (6)$$

$$(3) = \frac{1}{\Delta \varphi^2} \left( \phi_{j,i+1,l}^t - 2\phi_{j,i,l}^t + \phi_{j,i-1,l}^t \right) \quad (7)$$

$$(4) = \frac{1}{\Delta z^2} \left( \phi_{j,i,l+1}^t - 2\phi_{j,i,l}^t + \phi_{j,i,l-1}^t \right) \quad (8)$$

$$(5) = \frac{1}{\tau} \left( \phi_{j,i,l}^{t+\tau} - \phi_{j,i,l}^t \right) \quad (9)$$

(6, 7, 8, 9) in Gl. (1) eingesetzt und nach  $\phi_{j,i,l}^{t+\tau}$  aufgelöst, ergibt

$$\begin{aligned} \phi_{j,i,l}^{t+\tau} = & \phi_{j,i,l}^t + \frac{\tau}{g} \cdot \left\{ \frac{K_1}{r^2 \Delta r^2} (\phi_{j,i+1,l}^t - 2\phi_{j,i,l}^t + \phi_{j,i-1,l}^t) \right. \\ & + \frac{K_2}{\Delta r^2} \left( \left( \frac{\Delta r}{r} + 1 \right) \phi_{j+1,i,l}^t - 2\phi_{j,i,l}^t + \left( 1 - \frac{\Delta r}{r} \right) \phi_{j-1,i,l}^t \right) \\ & \left. + \frac{K_3}{\Delta z^2} (\phi_{j,i,l+1}^t - 2\phi_{j,i,l}^t + \phi_{j,i,l-1}^t) - A \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

Da ein explizites Verfahren benutzt wird, ist  $g = g(\phi_{j,i,l}^t)$  und  $A = A(\phi_{j,i,l}^t)$ . Gleichung (10) erlaubt aus den Temperaturen

$\phi_{j,i,l}^t, \phi_{j-1,i,l}^t, \phi_{j+1,i,l}^t, \phi_{j,i-1,l}^t, \phi_{j,i+1,l}^t, \phi_{j,i,l-1}^t, \phi_{j,i,l+1}^t$  zur Zeit  $t$  die Temperatur an der Stelle  $j,i,l$  innerhalb des Solenoiden zur Zeit  $t = t + \tau$  zu berechnen. Um die Temperaturen zur Zeit  $t = t + \tau$  am Solenoidrand zu bestimmen, müssen Randbedingungen angenommen werden. Dazu wird davon ausgegangen, daß sich die Temperatur am Solenoidrand so einstellt, daß der Wärmestrom in die Umgebung des Solenoiden gleich dem Wärmestrom im Solenoiden an seinem Rand ist.

Ist  $h$  der Wärmeübergangskoeffizient in die Umgebung und  $u_B$  die Umgebungstemperatur, so gilt für die Gitterpunkte am Solenoidrand

$$\frac{K_2}{\Delta r} (\phi_{M_{j-1},i,l}^t - \phi_{M_{j,i,l}}^{t+\tau}) = h (\phi_{M_{j,i,l}}^{t+\tau} - u_B) \quad \forall i,l \quad (11)$$

$$\frac{K_2}{\Delta r} (\phi_{2,i,1}^t - \phi_{1,i,1}^{t+\tau}) = h (\phi_{1,i,1}^{t+\tau} - u_B) \quad \forall i,1 \quad (12)$$

$$\frac{K_3}{\Delta z} (\phi_{j,i,M_1-1}^t - \phi_{j,i,M_1}^{t+\tau}) = h (\phi_{j,i,M_1}^{t+\tau} - u_B) \quad \forall i,1 \quad (13)$$

$$\frac{K_3}{\Delta z} (\phi_{j,i,2}^t - \phi_{j,i,1}^{t+\tau}) = h (\phi_{j,i,1}^{t+\tau} - u_B) \quad \forall j,i \quad (14)$$

Nach den gesuchten Temperaturen zur Zeit  $t+\tau$  auf der Solenoidoberfläche aufgelöst

$$\phi_{M_j,i,1}^{t+\tau} = (\phi_{M_j-1,i,1}^t + \frac{h \cdot \Delta r}{K_2} u_B) / (\frac{h \cdot \Delta r}{K_2} + 1) \quad \forall i,1 \quad (15)$$

$$\phi_{1,i,1}^{t+\tau} = (\phi_{2,i,1}^t + \frac{h \cdot \Delta r}{K_2} u_B) / (\frac{h \cdot \Delta r}{K_2} + 1) \quad \forall i,1 \quad (16)$$

$$\phi_{j,i,M_1}^{t+\tau} = (\phi_{j,i,M_1-1}^t + \frac{h \cdot \Delta z}{K_3} u_B) / (\frac{h \cdot \Delta z}{K_3} + 1) \quad \forall j,1 \quad (17)$$

$$\phi_{j,i,1}^{t+\tau} = (\phi_{j,i,2}^t + \frac{h \cdot \Delta z}{K_3} u_B) / (\frac{h \cdot \Delta z}{K_3} + 1) \quad \forall j,1 \quad (18)$$

Mit den Gleichungen (10, 15, 16, 17, 18) können jetzt ausgehend vom Temperaturprofil zur Zeit  $t = 0$  sukzessive für die Zeiten  $t = \tau, 2\tau, \dots, n \cdot \tau$  die Näherungslösungen  $\phi_{j,i,1}^t \quad \forall j,i,1$  berechnet werden.

## Literaturverzeichnis

- 1 Cherry, W.H., Gittelman, J.T.  
Thermal and Electrodynamic Aspects of the Superconducting  
Transition Process  
Solid-State Electronics 1 (1960), S. 287
- 2 Whetstone, C.N., Roos, C.E.  
Thermal Phase Transitions in Superconducting Nb-Zr Alloys  
J. Appl. Phys. 36 (1965), S. 783
- 3 Broom, R.F., Rhoderick, E.H.  
Thermal propagation of a normal region in a thin supercon-  
ducting film and its application to a new type of bistable  
element  
British Journal of Appl. Phys. 11 (1960), S. 292
- 4 Altov, V.V., Kremlev, M.G., Sytchev, V.V., Zenkevitch, V.B.  
Calculation of propagation velocity of normal and super-  
conducting regions in composite conductors  
Cryogenics 13 (1973), S. 420
- 5 Dresner, L., Miller, J.R., Donaldson, G.W.  
Propagation of normal zones in composite superconductors  
6<sup>th</sup> Symposium of Engineering Problems of Fusion Research  
San Diego, Calif. (1975), S. 266
- 6 Stekly, Z.J.J.  
Theoretical and Experimental Study of an Unprotected Super-  
conducting Coil Going Normal  
Advances in Cryogenic Engineering 8 (1963), S. 585
- 7 Mulhall, B.E., Prothero, D.U.  
The quenching of large superconducting coils  
Cryogenics 15 (1975), S. 31

- 8 Shimamoto, S., Desportes, H.  
Study of the Quenching Propagation of Bare and Insulated Semi-stabilized Superconducting Wires  
J. Appl. Phys. 41 (1970), S. 3286
- 9 Yeh, H.T.  
Thermal aspects of a superconducting coil for fusion reactor  
6<sup>th</sup> Symposium of Engineering Problems of Fusion Research  
San Diego, Calif. (1975), S. 271
- 10 Herausgeber: Maurer, W.  
Entwicklungen auf dem Gebiet der Hochstrom-Supraleitung  
im Kernforschungszentrum Karlsruhe  
KFK 2290 (1976), Kap. IV-3-1
- 11 Wilson, N.M., Walters, C.R., Levin, J.D., Smith, P.F.  
Experimental and theoretical studies of filamentary superconducting composites  
J. Phys. D 3 (1970), S. 1517
- 12 Brechna, H.  
Superconducting Magnet Systems  
Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·New York, 1973
- 13 Scherer, M., Turowski, P.  
Investigations of the propagation velocity of a normal-conducting zone in technical superconductors  
Wird veröffentlicht (in Cryogenics)
- 14 Meinke, H., Gundlach, F.W.  
Taschenbuch der Hochfrequenztechnik  
Springer-Verlag, Berlin·Göttingen·Heidelberg, 1962, S. 27
- 15 Hagedorn, D., Dullenkopf, P.  
The propagation of the resistive region in high current density superconducting coils  
Cryogenics 14 (1974), S. 264
- 16 Rüdtenberg, R.  
Elektrische Schaltvorgänge  
Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·New York, 1974, S.61

- 17 Becker, R., Sauter, F.  
Theorie der Elektrizität  
B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart, 1962, S. 136-140
- 18 Hoffer, J.K., Kerr, E.C., Laquer, H.L.  
Stabilizing superconductors for power engineering applications  
IEEE Trans. on Power Apparates and Systems, Vol. PAS-94,  
No. 6 (1975), S. 2009
- 19 Bean, C.P.  
Magnetization of Hard Superconductors  
Phys. Rev. Lett. 8 (1962), S. 250
- 20 Preis, H.  
Calculation of the Magnetic Field, Magnetic Forces and  
Behavior of Large Coil Systems for Fusion Experiments  
IPP III/24, Garching 1976
- 21 Carslaw, H.S., Jaeger, J.C.  
Conduction of Heat in Solids  
At the Clarendon Press, Oxford 1959
- 22 Johnson, V.J.  
Properties of Materials at low Temperatures (Phase II)  
Pergamon Press 1961
- 23 Montgomery, D.B.  
Solenoid Magnet Design  
Wiley-Interscience 1969, S. 155
- 24 Martinelli, A.P., Wipf, S.L.  
Investigation of Cryogenic Stability and Reliability of  
Operation of Nb<sub>3</sub>Sn Coils in Helium Gas Environment  
Proc. ASC Annapolis Maryland (1972) 331 IEEE 72 CH 0682-5-TABSC
- 25 Fischer, J.  
Elektrodynamik  
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976, S. 338

- 26 Abramowitz, M., Stegun, I.A.  
Handbook of mathematical functions  
Power Publications, Inc. New York, S. 297
- 27 Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A.  
Taschenbuch der Mathematik  
Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt/M. 1969, S. 391
- 28 Marsal, D.  
Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen  
in Wissenschaft und Technik  
Bibliographisches Institut, Zürich 1976, S. 130
- 29 Dustmann, C.H.  
TESPE, a small superconducting compact torus  
Proceedings of the 7<sup>th</sup> Symposium on Engineering Problems  
of Fusion Research, Vol. 1, Knoxville (1977), S. 339
- 30 Dustmann, C.H.  
Private Mitteilung