



KfK 2792
April 1979

Kryogene Stabilität badgekühlter Supraleiter

W. Nick
Institut für Technische Physik

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Technische Physik

KfK 2792

Kryogene Stabilität badgekühlter Supraleiter⁺

W. Nick

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

⁺ Diplomarbeit eingereicht bei der Fakultät für
Physik der Universität Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Zusammenfassung

Um Voraussagen ueber die kryogene Stabilitaet von Supraleitern unter verschiedenen Kuehlbedingungen machen zu koennen, wurde ein Computerprogramm zur numerischen Simulation des Leiterverhaltens nach einer externen Stoerung entwickelt, das die eindimensionale Waermeleitungsgleichung unter Verwendung temperaturabhaengiger Materialparameter numerisch loest.

An einem Kupfer-stabilisierten Niob-Titan-Multifilamentleiter unter Helium-Badkuehlungsbedingungen wurden experimentell die zur Quenchausloesung mindestens benoetigte Heizpulsenergie sowie die Ausbreitungsgeschwindigkeit der normaleitenden Zone abhaengig von der Stromstaerke im Leiter bestimmt.

Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment konnte erreicht werden durch Verwendung eines Modells fuer die Zeitabhaengigkeit des Waermeuebergangs und Benutzung eines erhoekten Wertes fuer die Waermeleitfaehigkeit der Matrix im Magnetfeld.

Cryogenic Stability of Bath-Cooled Superconductors

Abstract:

To make predictions about cryogenic stability of superconductors under various cooling conditions, a computer programme was developed to simulate the time-dependent behaviour of a conductor after an external disturbance by solving numerically the one-dimensional heat conduction equation using temperature-dependent material parameters.

In experiments with a copper-stabilized niobium-titanium multifilamentary conductor under helium bath-cooling conditions the minimum heater pulse energy to induce quenching as well as the propagation velocity of the normal zone were determined depending on the current in the conductor.

Agreement between calculation and experiment could be achieved by using a model for transient heat transfer and assuming an increased value for thermal conductivity of the stabilizing copper in the magnetic field.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Grundlagen	
2.1 Gleichungen	5
2.2 Stabilitaetskriterien	8
2.3 Stationaere Zonen	10
3. Experiment	
3.1 Beschreibung des Probentraegers	12
3.2 Stationaere Messungen	16
3.3 Bestimmung der kritischen Heizpulsenergie	18
3.4 Bestimmung der Quenchausbreitungsgeschwindigkeit	22
3.5 Veraenderte Kuehlbedingungen	25
4. Numerisches Programm	
4.1 Numerische Loesung der Waermeleitungsgleichung	27
4.2 Materialparameter	
4.2.1 Elektrischer Widerstand der Matrix	30
4.2.2 Kritische Stromdichte des Supraleiters	30
4.2.3 Spezifische Waermen	31
4.2.4 Waermeleitfaehigkeit des Matrixkupfers	32
4.3 Waermeuebergang	
4.3.1 Stationaerer Waermeuebergang	33
4.3.2 Waermekapazitaet der He-Grenzschicht	34
4.3.3 Transienter Waermeuebergang	35
4.4 Externe Heizleistung	37
5. Ergebnisse der numerischen Rechnungen	
5.1 Zeitabhaengige Loesungen der Waermeleitungsgleichung ..	38
5.2 Stationaere Spannungen	41
5.3 Quenchausbreitungsgeschwindigkeit	42
5.4 Kritische Heizpulsenergien	43
5.5 Zusammenfassende Bemerkungen	45
6. Anhang	
6.1 Eindimensionale Naeherung	47
6.2 Guete der Heizung	48
6.3 Numerisches Verfahren	50
6.4 E*Q-Kriterium	53
6.5 Computerprogramme	
6.5.1 Steuerprogramm QSC.CNTL	55
6.5.2 Hauptprogramm QSC.FORT und Unterprogramme	58
6.5.3 Weitere Programme	73
6.6 Formel fuer die Waermeleistung bei Waermediffusion mit vorgegebener Randbedingung	73

Literaturverzeichnis

1. Einleitung

Auf dem Gebiet des Baus von supraleitenden Spulen sind heute gewaltige Weiterentwicklungen zu beobachten, um beispielsweise in absehbarer Zeit Magnete zu erhalten, die das Toroidalfeld fuer einen Tokamak-Fusionsreaktor rationell erzeugen koennen. Wuerde man dies naemlich mit Wicklungen aus normalleitendem Material, etwa Kupfer versuchen, so laesst sich leicht abschaezzen, dass diese Spulen durch ihren ohmschen Widerstand und fuer die notwendige Kuehlung einen so grossen Teil der erzeugten elektrischen Leistung verbrauchen und die Leistungsbilanz des Fusionsreaktors verschlechtern wuerden, dass dieser unrealisierbar wird. Eine Chance fuer Reaktoren mit magnetischem Plasma-Einschluss wird nur im Einsatz von supraleitenden Magneten gesehen. Hierfuer muessen groessere Spulen als bisher gebaut und vor allem auch zuverlaessig betrieben werden.

Die Betriebssicherheit solcher Magnetspulen ist nun in hohem Masse bestimmt durch die 'Stabilitaet', das heisst das Verhalten des Magneten gegenueber Stoerungen, die einen Teil des Supraleiters in den normalleitenden Zustand versetzen. Solche Stoerungen koennen bei Systemen der benoetigten Groessenordnung nicht mit Sicherheit vermieden werden. Wenn eine solche Stoerung aber anwaechst und zur Freisetzung der gesamten, im Magnetfeld der Spule gespeicherten Energie fuehrt, koennte das wegen der grossen umgesetzten Energiebetrage zu einer Beschaedigung oder gar Zerstoeerung des Magneten fuehren.

Wie eine zunaechst kleine, lokalisierte Stoerung zu solchen Folgen fuehren kann, moechte ich hier kurz an einem einfachen, unstabilierten Leiterkonzept verdeutlichen. Man stelle sich vor, die Spule sei aus massivem Supraleitermaterial gewickelt worden und werde von einem Strom knapp unterhalb der kritischen Stromstaerke durchflossen. Zwar ist der supraleitende Zustand bei festgehaltener Temperatur thermodynamisch durchaus stabil, jedoch reichen wegen der bei tiefen Temperaturen sehr kleinen spezifischen Waerme schon relativ geringe Energiebetrage aus, um den Leiter bis zur kritischen Temperatur zu erwaermen, die dazu noch durch das Magnetfeld verringert ist. Wenn auch nur ein kleines Stueck normalleitend geworden ist, so entsteht dort ohmsche Verlustwaerme, die nun auch die benachbarten Bereiche erwaermt. Der Vorgang setzt sich lawinenartig fort, bis alles normalleitend ist, man spricht vom 'Quenchen' des Magneten. Da solche kleinen Energiefreisetzungen praktisch immer vorhanden sind, erreicht man den kritischen Strom, der jetzt im Gegensatz zu den Spulenverhaeltnissen als Kurzprobenwert bezeichnet wird, erst gar nicht, der Magnet

'quencht' schon viel frueher und meist unvorhersehbar.

Was kann man nun unternehmen, um dieser Probleme Herr zu werden? Wichtig ist natuerlich die Untersuchung der ausloesenden Prozesse und die Groesse der jeweils freigesetzten Energien. Ich moechte mich damit hier nicht beschaeftigen und nur einige bekannte Beispiele fuer solche Ausloeser anfuehren:

- Umverteilungsprozesse von Strom und Magnetfeld im Leiter selbst, die sogenannten Flussspruenge,
- Leiterbewegung unter dem Einfluss der Lorentzkraft und
- Freisetzung von elastisch gespeicherter Spannungsenergie im Metall und im Kunstharz, in das der Leiter oft eingebettet wird.

Eine andere Betrachtungsweise setzt solche momentanen, lokalisierten Energiefreisetzungen als gegeben voraus und versucht, die Auswirkungen eines solchen Ereignisses in Grenzen zu halten. Dazu umgibt man einmal den Supraleiter durch eine Matrix von gut leitfaehigem Kupfer, das im Notfall den Strom uebernehmen und die ohmsche Waermeleistung verringern kann. Zum anderen bringt man bei der kryogenen Stabilisierung den Leiter in direkten Kontakt mit dem Kuehlmittel Helium und sorgt so fuer einen moeglichen Waermeabfluss. Helium ist bei diesen tiefen Temperaturen nicht nur das einzige, sondern auch ein sehr effektives Kuehlmedium, was man erkennt, wenn man seine hohe spezifische Waerme und Verdampfungsenthalpie mit den aeusserst kleinen spezifischen Waermen der Festkoerper vergleicht.

Wie gross ist die durch diese Massnahmen erreichte Stabilitaet? Zunaechst einmal ist zu fragen, ob es bei einer vorgegebenen Stromstaerke ueberhaupt moeglich ist, einen Quench auszuloesen. Hierzu gibt es Stabilitaetskriterien /1,2/, die ich im naechsten Abschnitt kurz erlaeuern moechte. Bei groesseren Stromstaerken als den nach diesen Kriterien erlaubten stellt der supraleitende Zustand nur noch ein metastabiles Gleichgewicht dar. Die Stabilitaet kann dann durch die mindestens benoetigte Groesse einer externen Stoerung ausgedrueckt werden, die gerade ausreicht, um den Leiter zu quenchen.

Das Ziel dieser Arbeit ist, ein numerisches Verfahren zu entwickeln, mit dem das Verhalten eines gegebenen Leiters nach einer solchen Stoerung vorhergesagt werden kann. Das Verfahren soll in der Zukunft fuer den Entwurf von Leiterkonfigurationen herangezogen werden, das heisst, die numerische Simulation sollte quantitativ richtige Ergebnisse liefern. Um dies zu pruefen, wurden Experimente durchgefuehrt, mit deren Resultaten die numerischen

Ergebnisse verglichen werden koennen.

Insbesondere soll herausgefunden werden:

- wieviel thermische Energie dem Leiter in einer räumlich und zeitlich lokalisierten Störung mindestens zugeführt werden muss, um einen Quench auszulösen.

- Wie schnell eine einmal entstandene normalleitende Zone sich längs des Leiters ausbreitet. Diese Ausbreitungsgeschwindigkeit ist wichtig für die Auslegung von Schutzmaßnahmen für den Magneten.

Eine quantitativ richtige Behandlung des Problems erfordert auf jeden Fall,

- dass die Temperatur- und Magnetfeldabhängigkeit der ins Spiel kommenden Materialeigenschaften wie Wärmeleitfähigkeit, spezifische Wärme, elektrischer Widerstand und kritische Stromdichte berücksichtigt werden. Dies macht die Gleichungen nichtlinear, so dass ihnen nur noch mit numerischen Methoden auf dem Computer beizukommen ist.

- Die mit dem Aufbau oder Kollaps einer normalleitenden Zone verbundenen Vorgänge laufen (bei einem Leiter wie hier untersucht) etwa in Millisekunden ab, auf dieser Zeitskala ist der Wärmeübergang an das Kühlmedium Helium jedoch wesentlich zeitabhängig. Brauchbare Informationen über diesen, für die quantitative Erklärung der Stabilität entscheidenden transienten Wärmeübergang gibt es erst seit kurzer Zeit /3,4/.

Ich möchte versuchen, in einem Spezialfall, was Leiterdaten und Kühlbedingungen angeht, zu einer möglichst umfassenden Übereinstimmung von Theorie (Computerrechnung) und Experiment zu kommen. Da sie experimentell leichter zu realisieren ist, möchte ich hier nur die Helium-Badkühlung untersuchen, der Ausgangszustand ist also durch den Siedepunkt des flüssigen Heliums bei Normaldruck zu etwa 4.2K gegeben. Als Leiter wurde ein Kupfer-stabilisierter NbTi-Multifilamentleiter verwendet, wie er ähnlich als Bauelement in einem Kabelleiter für einen geplanten supraleitenden Magneten /5,6/ vorgesehen ist.

Frühere Untersuchungen zur Stabilität hatten nicht das Ziel, umfassend das Verhalten des Leiters nach einer Störung zu beschreiben. Oft wurden stationäre Grenzfälle untersucht, dies ergibt die Stabilitätskriterien von Stekly

/1/ und Maddock /2/ und das Konzept der 'minimum propagating zone' /7,8/ als unter den gegebenen Bedingungen groesstem normalleitenden Bereich, der noch Rueckkehr in den supraleitenden Zustand zeigt. In diesem Modell koennen auch die zur Quenchausloesung mindestens benoetigten Energien abgeschaezt werden. Eine analytische Berechnung dieser Energien ist nur fuer konstante Materialparameter /9/ moeglich, eine zeitabhaengige numerische Berechnung unter Benutzung temperaturabhaengiger Materialeigenschaften und eines Modells fuer den transienten Waermeuebergang wurde von C.Schmidt /10/ durchgefuehrt.

Zur Kalkulation der Quenchausbreitungsgeschwindigkeit sind verschiedene Computerprogramme entwickelt worden /11,12,13/, die jedoch trotz Verwendung temperaturabhaengiger Materialparameter nur eine naeherungsweise Vorhersage ermoeglichen, was auf die groben Modelle fuer den Waermeuebergang zurueckzufuehren ist.

Fuer den praktisch interessierenden Fall der Kuehlung durch forcierte Stroemung von ueberkritischem Helium in Kuehlkanaelen laengs des Leiters gibt es numerische Programme zur Berechnung der Stabilitaet, die jedoch entweder keine transienten Effekte beruecksichtigen /14,15/, oder nur sehr einfache Annahmen hierzu machen /16/.

Fuer grossen Energie-Input ins Kuehlmittel, wie er in einem realen Magneten zu spaeteren Zeitpunkten als der hier untersuchten Anfangsphase des Quenchs auftritt, sollte noch die thermodynamische Zustandsaenderung des Heliums und die instationaere Stroemung beruecksichtigt werden /17/.

2. Grundlagen

2.1 Gleichungen

Um Informationen ueber Temperaturentwicklungen am Leiter zu erhalten, muss man eine Waermebilanz laengs des Leiters aufstellen, also die Waermeleitungsgleichung versehen mit zusaetzlichen Termen fuer Waermeerzeugung und Kuehlung loesen. Ich moechte dies in einer eindimensionalen Naehierung tun, das heisst, die Temperatur T wird als konstant ueber den gesamten Querschnitt A von Matrix und Supraleiter angesehen und soll nur von der x-Koordinate laengs des Leiters und der Zeit t abhaengen. Die Berechtigung dieser Naehierung zeige ich am speziellen Fall des von mir experimentell untersuchten Leiters im Anhang 6.1. Durch diese Annahme sind die beiden waermeleitenden Medien 'parallelgeschaltet' und wir erhalten eine gewoehnliche Waermeleitungsgleichung mit gemittelten Materialparametern:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ A \cdot K(T) \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right\} + G(T) - P \cdot Q(T,t) + F(x,t) = A \cdot C(T) \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

$$K(T) = \frac{A_{mat} \cdot K_{mat}(T)}{A} \quad C(T) = \frac{A_{mat} \cdot C_{mat}(T) + A_{sl} \cdot C_{sl}(T)}{A}$$

A gesamter Querschnitt des Leiters
 A_{mat}, A_{sl} Querschnitt von Matrix und Supraleiter
 K(T) mittlere Waermeleitfaehigkeit
 K_{mat}(T) Waermeleitfaehigkeit der Matrix
 C(T) mittlere spezifische Waerme pro Volumen
 C_{mat}(T), C_{sl}(T) spezifische Waerme von Matrix und Supraleiter
 G(T) ohmsche Waermeerzeugung im Leiter pro Laenge
 P gekuehlter Umfang des Leiters
 Q(T,t) Kuehlleistung pro gekuehlter Oberflaeche
 F(x,t) externe Heizleistung

Die Waermeleitfaehigkeit des Supraleitermaterials /2/ ist verglichen mit der des Matrixkupfers so klein, dass sie ohne weiteres vernachlaessigt werden kann. Durch die stark temperaturabhaengigen Parameter Waermeleitfaehigkeit K und spezifische Waerme C und die zusaetzlichen Inhomogenitaeten G, Q und F erhaelt die Gleichung einen entscheidenden nichtlinearen Charakter. So aendert sich zum Beispiel die spezifische Waerme von Kupfer im Temperaturbereich von 4K bis 10K um einen Faktor 9.

Die Temperaturabhaengigkeit der Waermeerzeugung im Leiter durch ohmsche Heizung wird folgendermassen angenommen:

$$G(T) = \begin{cases} 0 & \text{für } T < T_{cs}(I) \\ \frac{\rho_{ho}}{A_{mat}} \cdot I \cdot (I - I_c(T)) & \text{für } T_{cs}(I) < T < T_c \\ \frac{\rho_{ho}}{A_{mat}} \cdot I^2 & \text{für } T > T_c \end{cases}$$

I Strom im Leiter

$I_c(T)$ kritische Stromstaerke

T_c kritische Temperatur des Supraleiters

ρ_{ho} spezifischer elektrischer Widerstand der Matrix

wobei die Current-Sharing-Temperatur T_{cs} in Abhaengigkeit vom Transportstrom I definiert ist durch

$$I_c(T_{cs}) = I$$

Naeherungsweise wurde hierfuer die temperaturabhaengige Strom/Spannungs-Charakteristik des Supraleiters durch die Geraden $U=0$ im Bereich $I=0$ bis $I=I_c(T)$ und $U=I \cdot R_c$ im Bereich $I > I_c(T)$ approximiert. Dies bedeutet, dass man fuer den kritischen Strom I_c nicht die meist durch das Erreichen einer sehr geringen Spannungsschwelle pro Leiterlaenge definierten Werte verwenden darf. Die am ehesten brauchbare I_c -Definition ist das Erreichen des halben Normalleitungswiderstands. Fuer die kritische Temperatur T_c gilt das sinngemaess. Vernachlaessigt werden in diesem Modell die kleinen Spannungen unterhalb des kritischen Stroms, das sogenannte Flusskriechen, und der nur endliche Normalwiderstand des Supraleitermaterials oberhalb T_c . Gut wiedergegeben werden dagegen die verlustbehafteten Zustaeude des Supraleiters (flux flow) im Current-Sharing-Bereich, wenn im Supraleiter immer genau der temperaturabhaengige kritische Strom fliesst.

Die Waermeabfuhr ans Helium setzt sich zusammen aus dem stationaeren Waermeuebergang und verschiedenen transienten, das heisst zeitabhaengigen Effekten, die ich erst spaeter im Detail diskutieren moechte. Im stationaeren Waermeuebergang bei Badkuehlung (Uebersichtsartikel: /18/) gibt es bei kleinen Temperaturdifferenzen zunaechst die Phase des Blasensiedens (nucleate boiling) bis zu einem Maximalwert (peak nucleate boiling, burnout heat flux), dann folgt ein Uebergangsbereich (transition boiling) mit fallenden Waerme-fluessen trotz steigender Temperaturdifferenzen bis zu einem Minimalwert (minimum film boiling, recovery heat flux) und schliesslich das Filmsieden. Die Zahlenwerte haengen stark von der Oberflaechenbeschaffenheit, Orientierung der

Kuehlflaeche und anderen Bedingungen ab. Der fuer die Leiterkuehlung entscheidende Parameter ist die Groesse des gekuehlten Umfangs P. Zur Verdeutlichung habe ich die Temperaturabhaengigkeit von Waermeerzeugung und stationaerem Waermeuebergang pro Leiterlaenge, so wie sie spaeter im Computerprogramm verwendet werden, fuer den speziellen Fall des von mir experimentell untersuchten Leiters berechnet und in Bild 1 angegeben.

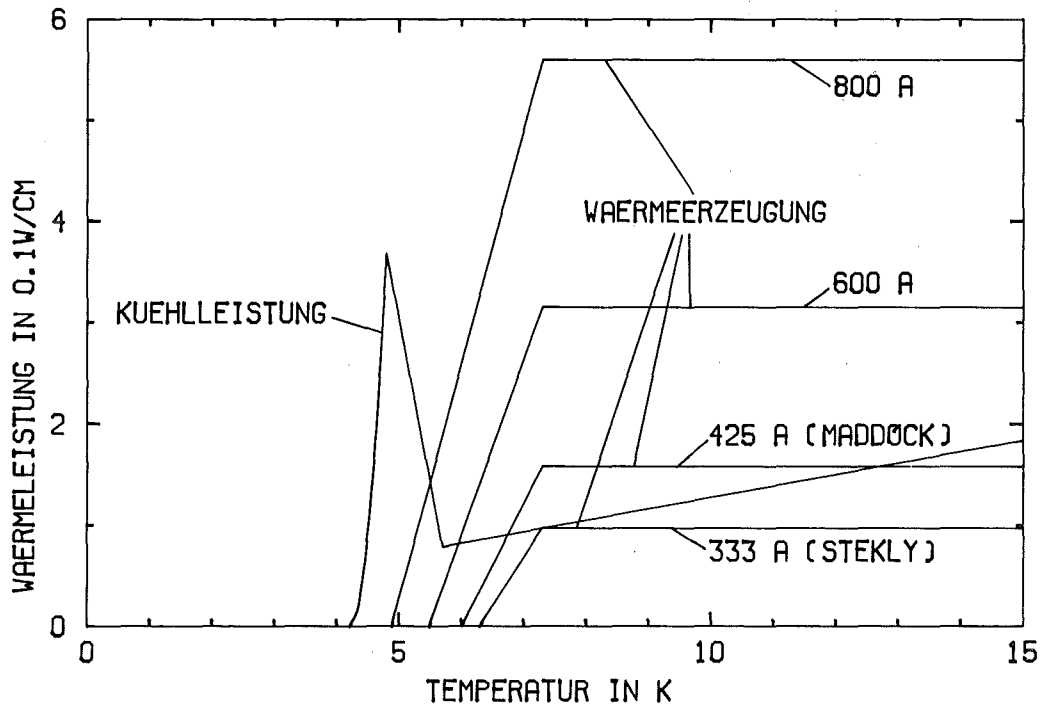


Bild 1:
Stationaere Kuehlleistung/Laenge $P \cdot Q_{stat}$ und
ohmsche Waermeerzeugung/Laenge G (Parameter: Strom I)
abhaengig von der Temperatur

2.2 Stabilitaetskriterien

Das schon lange bekannte Kriterium von Stekly und Zar /1/ verlangt, dass die Waermeerzeugung G an jeder Stelle des Leiters unter der stationaeren Kuehlleistung $P \cdot Q_{\text{stat}}$ liegt, dann muss sich ein Bereich mit hoeherer Temperatur zwangsweise abkuehlen.

$$P \cdot Q_{\text{stat}}(T) > G(T) \quad \text{für alle } T$$

Im speziellen Fall ist die kritische Temperatur T_c des Supraleiters der fuer diese Bedingung entscheidende Punkt. Man erhaelt damit

$$I < \sqrt{\frac{A_{\text{mat}} \cdot P \cdot Q_{\text{stat}}(T_c)}{\rho_{\text{ho}}}}$$

Die Waermeerzeugungskurve fuer die maximal zulaessige Stromstaerke aufgrund dieses Kriteriums ist in Bild 1 eingetragen. Dieser Strom betraegt nur etwa ein Drittel des kritischen Stroms, das Stekly-Kriterium ist oft fuer die Praxis zu pessimistisch. Es kann naemlich durchaus zugelassen werden, dass lokal mehr Waerme erzeugt als ans Helium abgefuehrt wird, wenn nur dieser Ueberschuss durch die Waermeleitung in Gebiete transportiert werden kann, wo die Kuehlung ueberwiegt. Dies zu beruecksichtigen gestattet das Kriterium von Maddock, James und Norris /2/.

Ausgangspunkt ist dabei die Frage, bei welchen Temperaturen der Zustand des Leiters stabil und daher stationaer ist. Dies ist, wie man sich anhand von Bild 1 klarmachen kann, ausser bei der Temperatur des Heliumbads T_b noch bei der Temperatur T_n der Fall, bei der sich Waermeerzeugungs- und Kuehlkurve schneiden. Zur Stabilitaet dieses Punkts braucht man noch $P \cdot dQ_{\text{stat}}/dT > dG/dT$ bei T_n . Durch Integration der Waermeleitungsgleichung zwischen diesen beiden Temperaturen, bei denen der Waermestrom und damit der Temperaturgradient gleich Null sein sollen, kann man das stationaere Temperaturprofil zu berechnen versuchen. Ein solcher stationaerer Temperaturverlauf existiert nur, wenn

$$\int_{T_b}^{T_n} K(T) \cdot \{P \cdot Q_{\text{stat}}(T) - G(T)\} dT = 0$$

ist. Durch das stationaere Temperaturprofil wird an jeder Stelle genau der Differenzbetrag von erzeugter und ans

Kuehlmittel abgegebener Leistung durch Waermeleitung laengs des Leiters abgefuehrt. Durch dieses Profil laesst sich also eine beliebig grosse normaleitende Zone der Temperatur T_n stationaer mit dem Rest des Leiters auf T_b verbinden.

Das Integralkriterium von Maddock ist erfuehrt fuer einen bestimmten Wert des Stromes I_m . Die praktische Anwendung erfordert meist jedoch nicht einmal die Loesung des angegebenen Integrals abhaengig vom Parameter I , denn mit einigermaßen typischen Werten fuer Waermeproduktion und Pool-Boiling-Waermeuebergang ergibt sich I_m so, dass die Waermeerzeugung im normaleitenden Bereich pro Flaeche etwa $Q_m = 0.3 \text{ W/cm}^2$ betraegt. Man braucht also nur diesen Erfahrungswert anstelle von $Q_{stat}(T_c)$ in das oben angegebene Stekly-Kriterium einzusetzen um die Stabilitaetsgrenze nach Maddock zu erhalten.

$$I < I_m = \sqrt{\frac{A_{mat} \cdot P \cdot Q_m}{R_{ho}}} \quad \text{mit } Q_m \approx 0.3 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$$

Das Maddock-Kriterium stellt den entscheidenden Grenzfall fuer die Untersuchung der Stabilitaet in dieser Arbeit dar. Unterhalb ist ein Quenchen des Leiters ueberhaupt nicht moeglich, da beliebig grosse normaleitende Zonen wieder schrumpfen muessen, wenn sie 'kalte' Enden auf der Temperatur des Heliumbads besitzen. Nur oberhalb ist eine Quenchausbreitung moeglich. Voraussetzung dafuer ist allerdings, dass die normaleitende Zone eine bestimmte Mindestgrosse erreicht, die im folgenden Abschnitt naeher erlaeutert werden soll. Wenn die Stoerung jedoch kleiner ist, so dass diese kritische Zonengrosse nicht erreicht wird, kehrt der Leiter wieder in den supraleitenden Zustand zurueck. Dies Verhalten wird als 'Recovery' bezeichnet.

2.3 Stationaere Zonen

Bei Stromstaerken oberhalb der Maddock-Grenze erhaelt man im Grenzfall zwischen Recovery auf der einen und Quench des Leiters auf der anderen Seite ein stationaeres Temperaturprofil. Dieser Temperaturverlauf wird als 'minimum propagating zone' bezeichnet /7/, das heisst die bei gegebenen Umstaenden kleinste normalleitende Zone, die noch (Quench-)Ausbreitung zeigt. Ebenso anschaulich waere wohl der Name 'maximum non-propagating zone', da dies auch die maximale Zonengroesse darstellt, die der Leiter vertragen kann ohne zu quenchen.

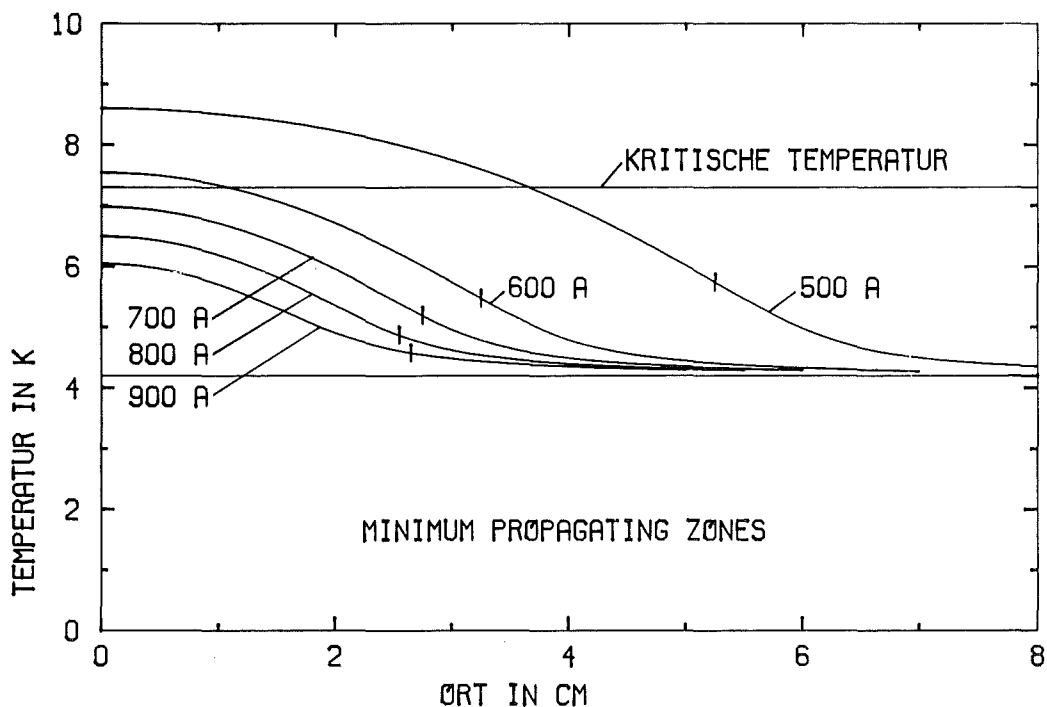


Bild 2:
Stationaere Temperaturprofile (minimum propagating zones)
bei verschiedenen Stromstaerken
mit den im Computerprogramm verwendeten Daten
senkrechter Strich: Beginn des 'current sharing'

Dieser Temperaturverlauf laesst sich berechnen /8/, indem man in der kompletten Waermeleitungsgleichung den Term dT/dt gleich Null setzt und nur den stationaeren Waermeuebergang verwendet. Die entstandene gewoehnliche, wenn auch nichtlineare Differentialgleichung 2.Ordnung wird mit geeigneten Randbedingungen fuer die Mitte der Zone ($T=T_1, dT/dx=0$) zum Beispiel durch das Verfahren von Runge und Kutta integriert. Bei Stromstaerken oberhalb der Maddock-Grenze, bei der eine beliebig grosse normalleitende Zone stabil ist, kann sich der Leiter von einer Stoerung also nur erholen (Recovery), wenn der normalleitend

gewordene Bereich kleiner ist als dieser stationaere Grenzfall. Zur besseren Veranschaulichung habe ich den Temperaturverlauf dieser stationaeren Zonen mit den im Programm verwendeten Daten des experimentell untersuchten Leiters berechnet und in Bild 2 wiedergegeben (zum Programm siehe Anhang 6.5.3).

All diese Kriterien geben jedoch leider keine Auskunft ueber das zeitliche Verhalten des Leiters nach einer Stoerung. Ausserdem moechte man gern die verglichen mit der stationaeren Kuehlung wesentlich hoeheren transienten Waermeuebergaenge beruecksichtigen, die die Stabilitaet eines Leiters offensichtlich stark erhoehen. Dies ist jedoch nur auf numerischem Wege moeglich, das Programm dazu wird im uebernaechsten Abschnitt erlaeutert werden.

3. Experiment

Um die Computerrechnungen an der Realitaet zu messen, wurde versucht, die Anfangsphase des Stoerfalls in einem realen Magneten, das heisst die Ausloesung eines Quenchs durch eine lokalisierte, kurzzeitige Energiefreisetzung an einer Kurzprobe experimentell zu simulieren. Ideale Messsonden waeren dafuer schnelle Temperaturfuehler an vielen Stellen des Leiters. In der Durchfuehrung duerfte ein solcher Versuch, zum Beispiel mit Thermoelementen, jedoch aeusserst schwierig sein. Auf einfachere Weise und mit geringeren Eingriffen am Leiter laesst sich bereits viel Information ueber die raum-zeitlichen Vorgaenge sammeln, wenn man die elektrische Spannung ueber einzelne Bereiche des Leiters aufzeichnet.

Fuer diese Messungen konnte ein Kryostat mit eingebautem supraleitendem Dipol-Magnet uebernommen werden, nur der eigentliche Proben traeger mit dem zu testenden Supraleiter musste neu angefertigt werden. Daten des verwendeten Leiters sind in der Tabelle 1 zusammengefasst, ein Schliffbild (Bild 3) gibt Auskunft ueber die Verteilung von Filamenten und Stabilisierungskupfer ueber den Querschnitt.

Tabelle 1:
Daten des experimentell untersuchten Leiters

Hersteller: Vacuumschmelze, Hanau (BRD)
Abmessungen: 0.245cm * 0.14cm
Typ: Niob-Titan-Multifilamentleiter
Supraleiter-Zusammensetzung: NbTi-50
Stabilisierungsmaterial: Kupfer
Kupfer/Supraleiter-Verhaeltnis: 5.0
Zahl der Filamente: 300
mittlerer Filamentdurchmesser: 0.05 mm
kritischer Strom bei T=4.2K, B=4T: rd. 1000 A
Restwiderstandsverhaeltnis(Cu) bei 4T: rd. 70

3.1 Beschreibung des Proben traegers

Der in den Experimenten verwendete Proben traeger ist schematisch in Bild 4 dargestellt.

Um eine Bewegung des Leiters bei Heliumtemperatur aufgrund der unterschiedlichen thermischen Kontraktion von Leiter (=Kupfer) und Proben traeger (=glasfaserverstaerkter Kunststoff) zu verhindern, wurde der Leiter U-foermig auf den Proben traeger aufgespannt und im gespannten Zustand durch Anpressplatten aus V2A-Stahl fixiert. Erst anschliessend konnte er an die Kupfer-Kontaktplatten zur Stromzufuehrung angeloetet werden.

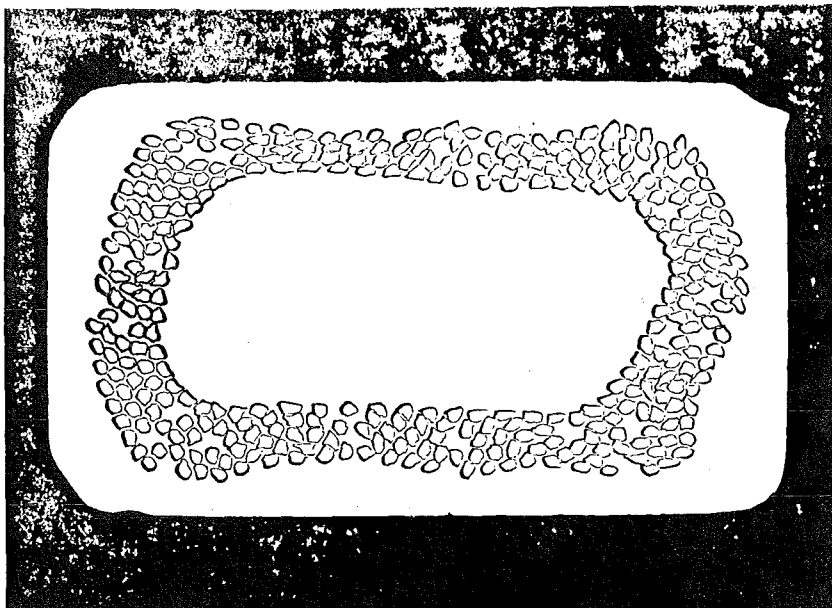


Bild 3:
Schliffbild des experimentell untersuchten Leiters
Vergrößerung: 40-fach

Auf drei Seiten wird der Leiter durch das Heliumbad direkt gekühlt, der gekühlte Umfang P beträgt daher 0.525cm . Das U des Leiters steht senkrecht im Kryostaten, so dass alle Kühlflächen ausser denen im unteren gekrümmten Teil ebenfalls vertikal orientiert sind. Die Kühlkanäle auf den Schmalseiten des Leiters wurden so gross gewählt, dass dort entstehende He-Gasblasen ins Flüssigkeitsvolumen entkommen können und nicht durch die allzu beengte Geometrie festgehalten werden und dadurch den Wärmeübergang verschlechtern. Wie man aus der Querschnittszeichnung in Bild 4 erkennen kann, ist das zur Verfügung stehende He-Flüssigkeitsvolumen recht gross. Eine Begrenzung der Stabilität durch die vorhandene Kühlmittelmenge wie beispielsweise im engen Kühlkanal eines realen Magneten besteht daher in meinem Experiment nicht.

In der Mitte des untersuchten Leiterstücks wurde eine Heizwicklung aus lackisoliertem Widerstandsdraht von nur 0.05mm Durchmesser ($2.4\ \Omega/\text{cm}$) aufgebracht. Um ein gutes Anliegen des Heizdrahtes zu ermöglichen, wurden die Kanten des Leiters hier vorsichtig abgerundet. Damit das Normleitendwerden thermisch und nicht durch ein lokal höheres Magnetfeld bewirkt wird, muss die Heizung bifilar ausgeführt werden, was zur Folge hat, dass die Induktivität klein ist. Die Flanken eines rechteckigen Strompulses sind dadurch recht kurz (kleiner als eine Mikrosekunde), was eine genaue Bestimmung der Heizpulsenergie ermöglicht.

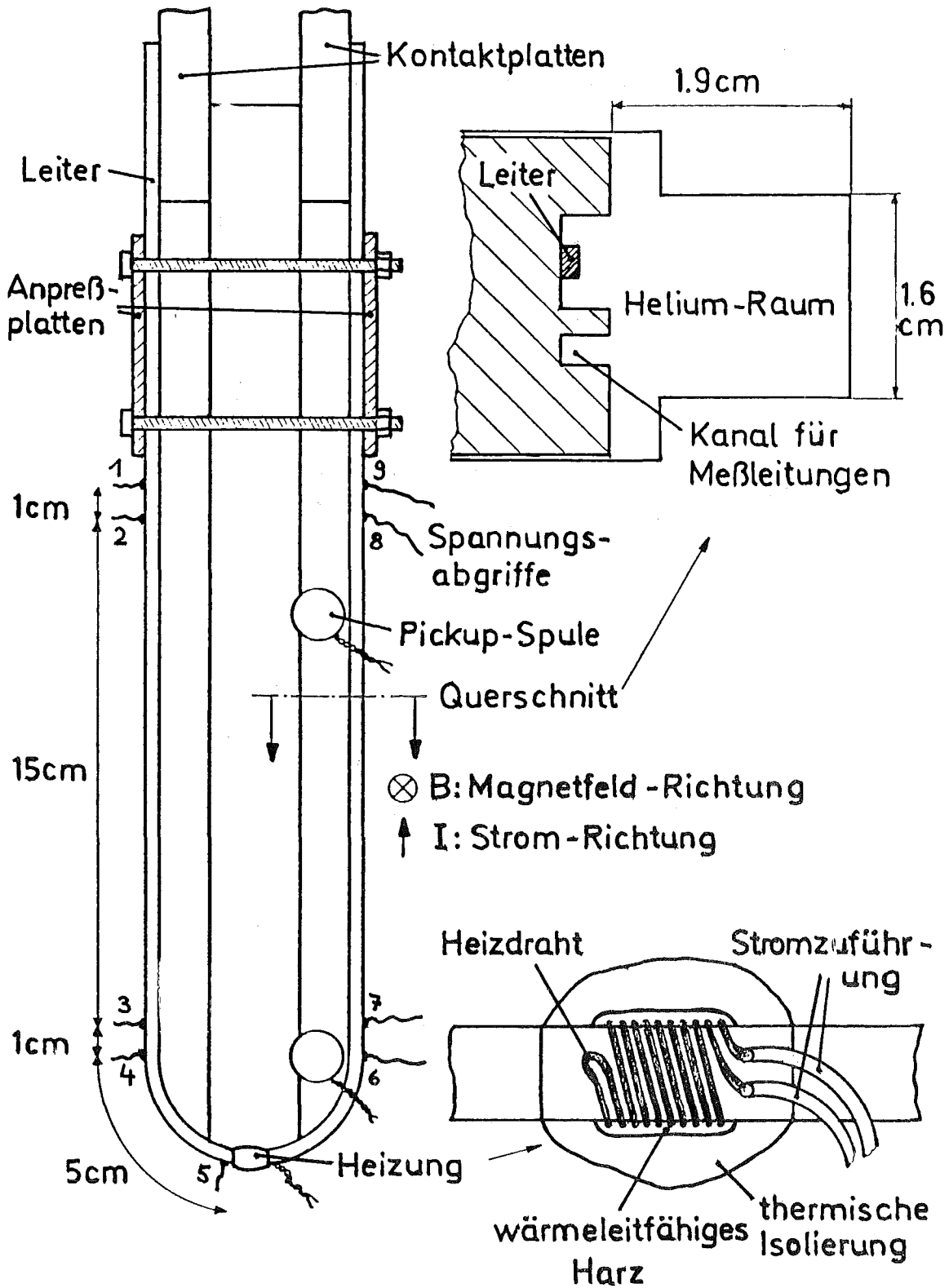


Bild 4:
Probentraeger, schematisch

Um einen vorhandenen Pulsgenerator verwenden zu koennen, wurde der Widerstand der Heizung auf etwa 50 Ohm festgesetzt. Die gesamte Laenge der Heizwicklung betrug so 0.2cm. Der Uebergang zu einem dickeren Stromzufuehrungsdraht geschah noch auf der Leiteroberflaeche, um einerseits die Laenge des Heizdrahts, die nicht in direktem thermischen Kontakt zum Leiter steht, so kurz wie moeglich zu halten, andererseits die induktive Kopplung des Heizpulses auf die anderen Messsignale zu verringern, was durch Verdrillen der Stromzufuehrungsdrahte bis dicht an die Heizung heran moeglich ist.

Bereits in den ersten Versuchsreihen wurde klar, dass die gute thermische Kopplung zwischen Heizdraht und Leiter bei gleichzeitiger Isolierung vom Heliumbad von entscheidender Bedeutung ist. Deshalb wurde versucht, den Raum zwischen den einzelnen Windungen und dem Leiter durch ein Kunstharz von relativ hoher Waermeleitfaehigkeit (*) auszufuellen, die ganze Heizung wurde anschliessend von einem Tropfen 'Stycast' (***) eingehuellt. Dieser Kunstharzkleber verbindet sich gut mit der Leiteroberflaeche und hat eine aehnliche Waermeausdehnung wie Kupfer, so dass der Heizdraht auch bei Heliumtemperatur gut thermisch vom Kuehlmittel abgeschirmt war. Eine Abschaetzung der 'Guete' dieser Heizung, das heisst eine Untersuchung der Frage, ein wie grosser Teil der Heizpulsenergie wie schnell in den Leiter gelangt, ist im Anhang 6.2 gegeben.

Fussnote

- (*) Kunstharz Epo-Tek 920 FL
Hersteller: Epoxy Technology Inc.
65 Grove Street, Watertown, Mass. 02172, USA
- (**) Kunstharz Stycast 2850 FT
Hersteller: Emerson + Cuming Europe, N.V.
Nijverheidstraat 24, Oevel, Belgium

In verschiedenen Abstaenden von der Heizung waren Potentialabgriffe am Leiter angehoet. Die Spannungen zwischen diesen Punkten wurden auf einem Oszillographen sichtbar gemacht. Die Laenge der supraleitenden Teststrecke zwischen den aeussersten Spannungsabgriffen betrug etwa 45cm.

Der ganze Probenraeger befand sich in einem Magnetfeld von etwa 4T. Dies wurde durch elektronische Integration des Signals von zwei Pickup-Spulen gemessen, deren effektive Windungsflaeche vorher in einem Eichmagneten bei Raumtemperatur bestimmt worden war. Durch diese Pickup-Spulen war es auch moeglich, die Stromrichtung im Leiter so zu waehlen, dass dieser durch die Lorentzkraft an den Probenraeger hin gedrueckt wird.

Gegen Durchbrennen nach einem Quench war der Leiter dadurch geschuetzt, dass die Gesamtspannung zwischen den Kontaktplatten in einem sogenannten Quenchdetektor mit einer einstellbaren Spannungsschwelle verglichen wird. Bei deren Ueberschreitung schaltet der Quenchdetektor mit einer geringen Verzoegerung die Stromversorgung ab. Diese Abschaltung ist auch auf einigen der hier wiedergegebenen Oszillographenbilder zu erkennen.

3.2 Stationaere Messungen

Es wurde versucht, aus Messungen der stationaeren Strom/Spannungs-Charakteristik moeglichst viele der tatsaechlichen Leiterdaten experimentell zu bestimmen und dadurch die Unsicherheiten bei den Eingabedaten des numerischen Programms zu reduzieren. Ein Beispiel einer solchen U/I-Schreiberkurve ist in Bild 5 gegeben.

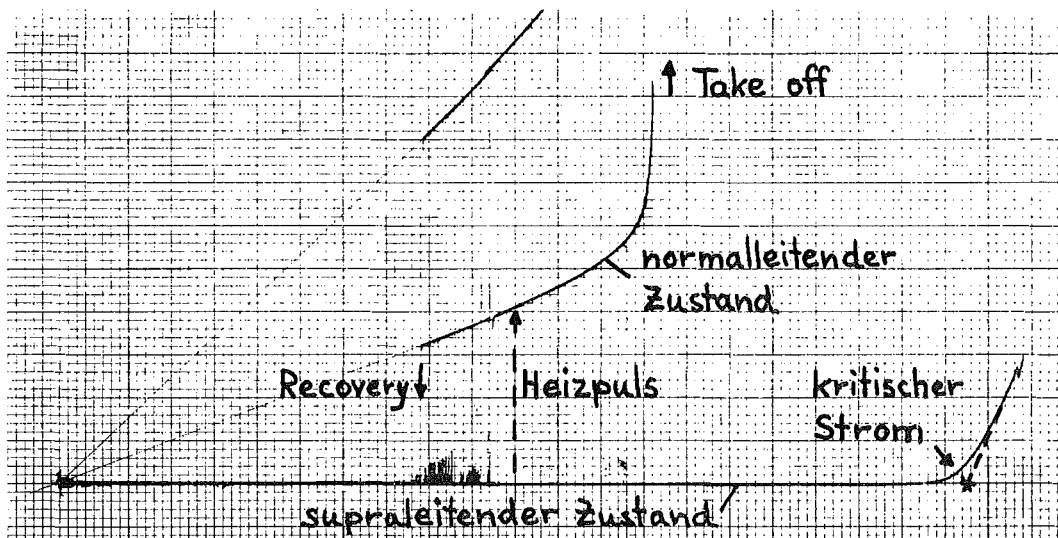


Bild 5:
Strom/Spannungs-Charakteristik des Leiters

nach rechts: Strom I
durch Spannung ueber Shunt von 20Mikro-Ohm
Empfindlichkeit des Schreibers: 1mV/div
nach oben : Spannung ueber 45cm des Leiters
Empfindlichkeit: untere Kurve 1mV/div
mittlere Kurve 5mV/div
obere Kurve 2mV/div

Die untere der Messkurven in Bild 5 zeigt die bekannte U/I-Charakteristik des Supraleiters. Entsprechend der oben gegebenen Definition des kritischen Stromes wurde die Spannung im Current-Sharing-Bereich oberhalb I_c graphisch bis zur Achse $U=0$ extrapoliert. Der so erhaltene Zahlenwert

lag mit nur geringen Abweichungen zwischen den verschiedenen untersuchten Proben bei etwa 1030A (B=4T).

Man kann nun versuchen, den Leiter durch einen externen Heizpuls normalleitend zu machen. Wenn die Energie des Heizpulses bei der gegebenen Stromstaerke nicht gross genug ist, tritt nur kurzzeitig eine kleine Spannung auf. Auf diese Weise sind die Zacken der unteren Kurve entstanden. Mit groesseren Heizpulsen kann man den Leiter schliesslich in einen stabilen, normalleitenden Zustand versetzen (mittlere und obere Kurve). Dies war nur moeglich im Bereich der Stroeme zwischen I_r (Recovery-Strom) und I_t (Takeoff-Strom), die im gezeigten Beispiel etwa 420 beziehungsweise 660A betragen. Fuer Stroeme, die nicht zu nahe bei I_t liegen, erkennt man die ohmsche Gerade der normalleitenden Kupfermatrix. Aus ihrer Steigung ergibt sich der Restwiderstand des Kupfers im Magnetfeld.

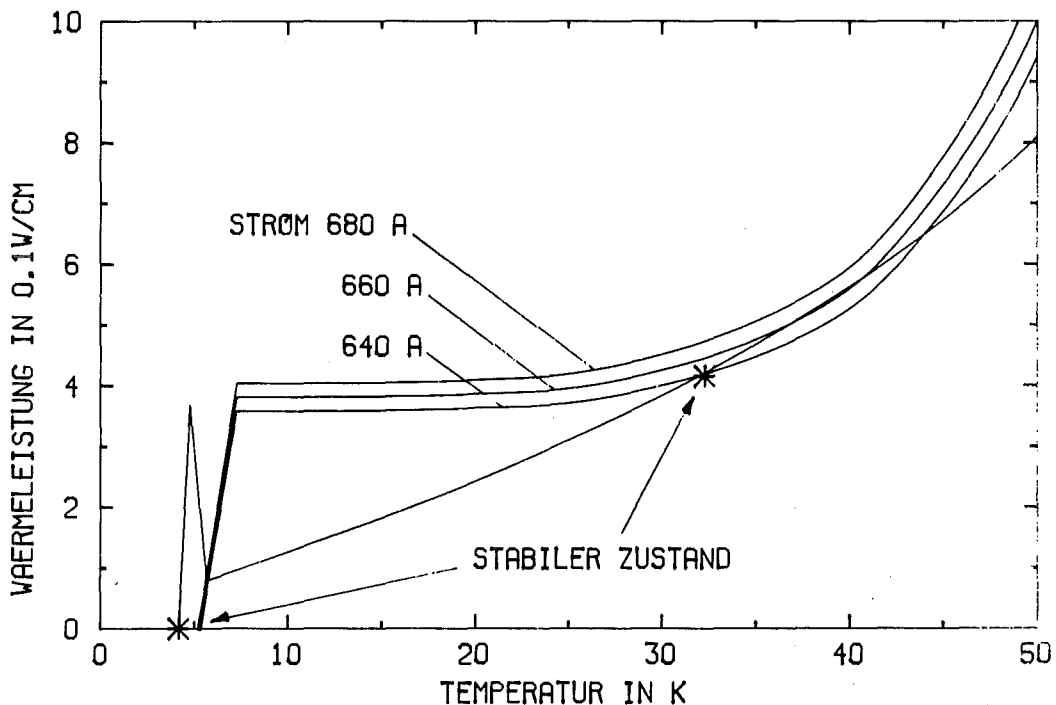


Bild 6:
Waermeerzeugung und Kuehlung abhaengig von der Temperatur
in der Naehة des Takeoff-Stroms, schematisch
Stern: moeglicher stationaerer Zustand

Wenn der Strom den Wert von I_r unterschritt, kehrte der Leiter spontan in den supraleitenden Zustand zurueck. Unterhalb von I_r ist eine normalleitende Zone offensichtlich nicht stabil. Dies laesst sich so interpretieren, dass bei diesem Strom das Maddock-Kriterium gerade erfuehlt ist und daher bei kleineren Stroemen der normalleitende Bereich von seinen gut gekuehlten Enden her schrumpft. Aus dem Wert von

Ir errechnet sich die ohmsche Waermeleistung pro gekuehlter Flaechen im normaleitenden Gebiet zu 0.294 W/cm^2 , was sich gut mit in der Literatur angegebenen Werten deckt /19,20,21/.

Wenn sich der Strom dem Wert von I_t naehert, waechst die Spannung staerker als linear mit dem Strom. Dies ist darauf zurueckzufuehren, dass die Temperatur des Leiters steigt und der Widerstand groesser als der Restwiderstand wird. Was bei I_t selbst passiert, wird deutlich, wenn man Waermeerzeugung und Kuehlung als Funktion der Leitertemperatur auftraegt und dabei die Temperaturabhaengigkeit des elektrischen Widerstands beruecksichtigt. Wie man in Bild 6 sieht, gibt es unterhalb von I_t zwei stabile (das heisst $P \cdot dQ_{\text{stat}}/dT > dG/dT$) Schnittpunkte der Kurven, die dem supraleitenden und dem normaleitenden Zustand des Leiters entsprechen. Bei I_t beruehren sich die Kurven gerade noch. Oberhalb gibt es den normaleitenden Arbeitspunkt nicht mehr, der Leiter heizt sich weiter auf und die Spannung steigt bis schliesslich der Strom abgeschaltet werden muss.

Die Werte von I_r und I_t erlauben so eine naeherungsweise, indirekte Bestimmung des stationaeren Waermeuebergangs. Die in den Rechnungen dann verwendete Kurve wurde schon in Bild 1 graphisch dargestellt.

3.3 Bestimmung der kritischen Heizpulsenergie

In zeitabhaengigen Messungen wurden die fuer die Stabilitaet entscheidenden Groessen bestimmt:

- wieviel Energie wird zum Ausloesen eines Quenchs mindestens benoetigt und
- wie schnell breitet sich der Quench dann laengs des Leiters aus.

Zur Bestimmung der Energie des Heizpulses wurde die Spannung ueber den Heizer vom Oszillographenschirm photographiert. Aus der gemessenen Pulshoehe, Dauer und dem bekannten Widerstand der Heizung laesst sie sich leicht berechnen. Die Heizpulsenergie wurde dann variiert, um so nahe wie moeglich an den Grenzfall zwischen Recovery auf der einen und Quench auf der anderen Seite heranzukommen. Die zur Quenchausloesung benoetigte Minimalenergie haengt natuerlich von der Heizpulsdauer ab, denn wenn man die Energie dem Leiter langsamer zufuehrt, kann er mehr 'vertragen'. Wie man aus Bild 7 erkennt, ist sie bis zu Pulsdauern von etwa 1msc im Rahmen der experimentellen Fehlergrenzen konstant, die vor allem auf die Ungenauigkeit der graphischen Auswertung der Oszillographenbilder zurueckzufuehren sind. Dieser Wert gibt also in etwa die Zeitkonstante der thermischen Kopplung von Heizung und Supraleiter (vergleiche Abschnitt 4.4). Aus diesem Grunde habe ich ausser bei 500A, wo die Leistung des

Pulsgenerators zum Quenchen nicht ausgereicht haette, immer mit Pulsdaeuern unter 1msec gearbeitet.

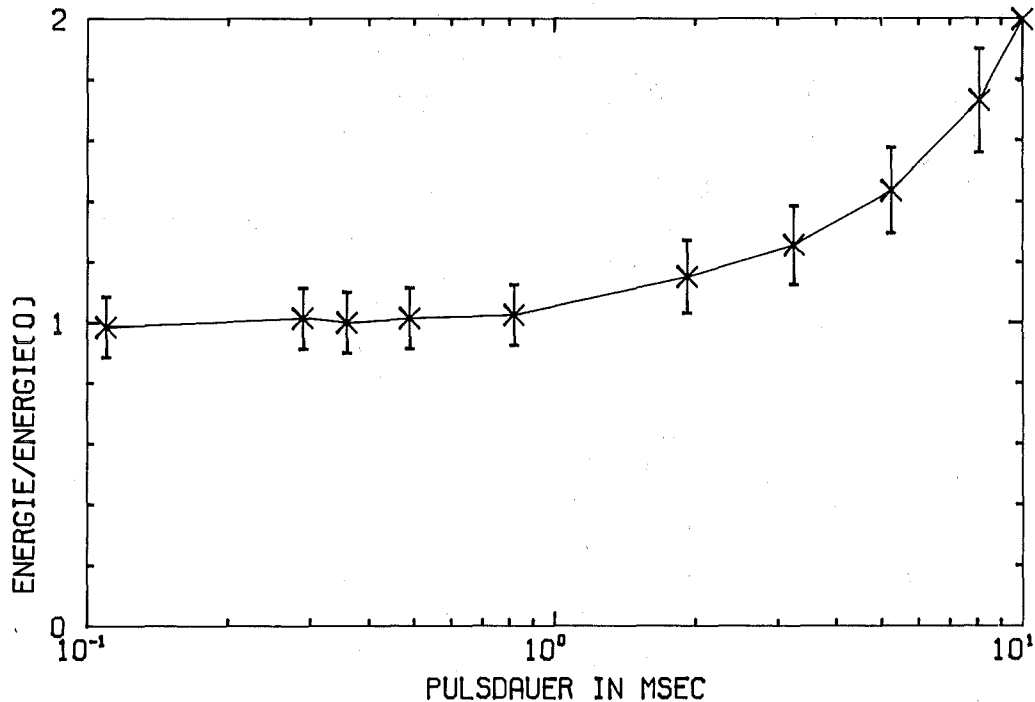


Bild 7:
Kritische Heizpulsenergie abhaengig von der Pulsdauer
Stromstaerke 700 A

Einige Beispiele fuer den zeitlichen Verlauf der Spannung ueber den Leiter (Potentialabgriffe 1-9, siehe Bild 4) bei verschiedenen Stromstaerken sind in Bild 8 gegeben. In den links gezeigten Faellen erholt sich der Leiter von der Stoerung, wir haben Recovery. Die Schaerfe der Stabilitaetsgrenze erkennt man daran, dass zum Ausloesen eines Quenchs wie in den Oszillogrammen rechts eine nur um Procente hoehere Heizpulsenergie benoetigt wird. Die Spannung ueber den Leiter tritt mit nur geringer Verzoegerung gegenueber dem Heizpuls auf und erreicht schon nach kurzer Zeit einen in beiden zusammengehoeerenden Faellen fast gleichen, stationaeren Wert. Dieser recht stabile Zwischenzustand kann aufgrund der Ergebnisse der numerischen Rechnungen als das stationaere Temperaturprofil einer 'minimum propagating zone' identifiziert werden. Erst nach einiger Zeit beginnt die Spannung entweder weiter anzusteigen, ein Quench breitet sich aus, oder sie faellt wieder auf Null zurueck.

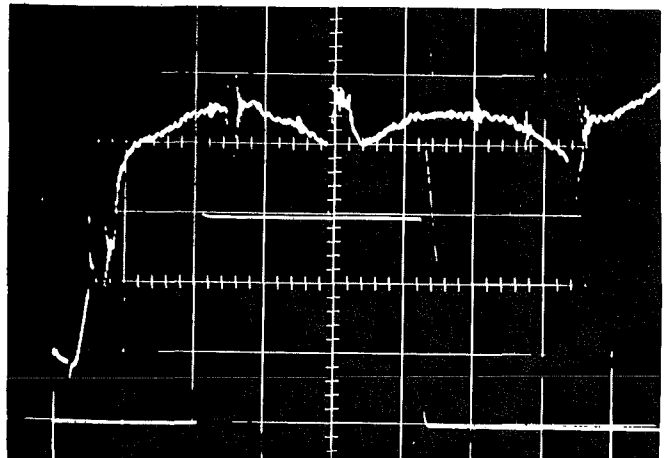
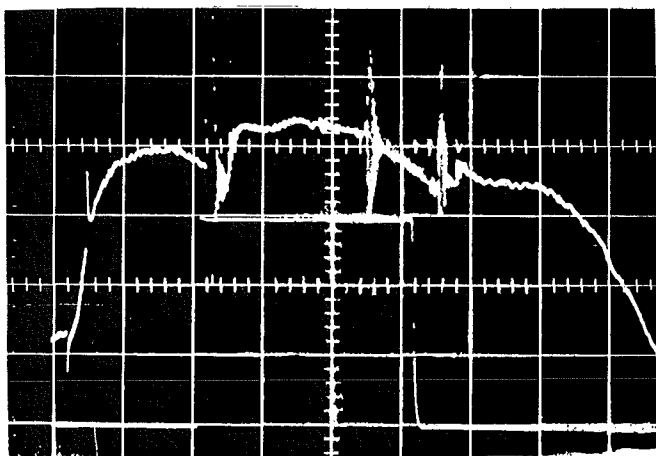
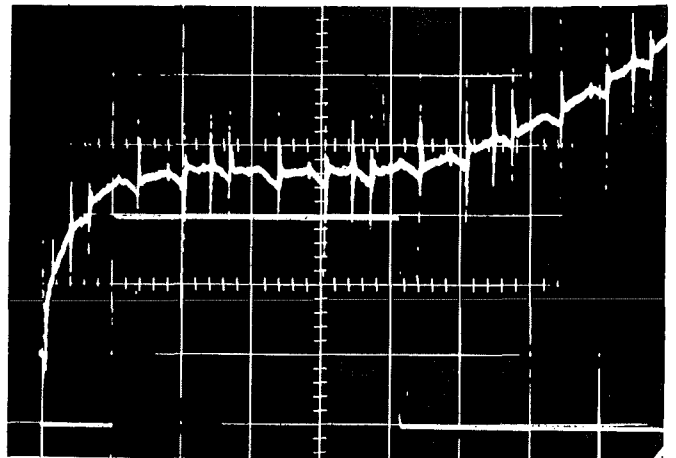
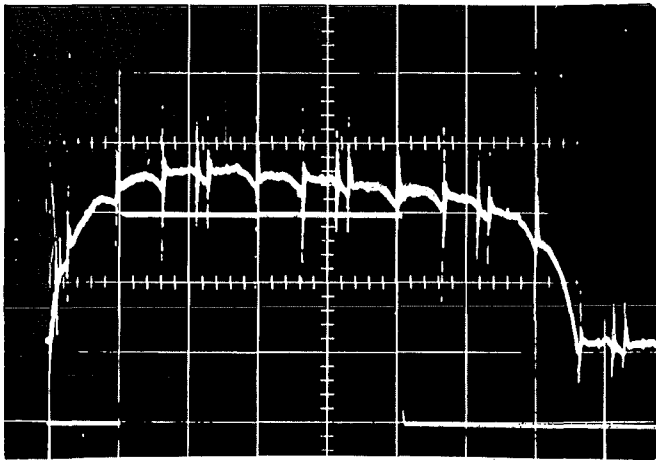
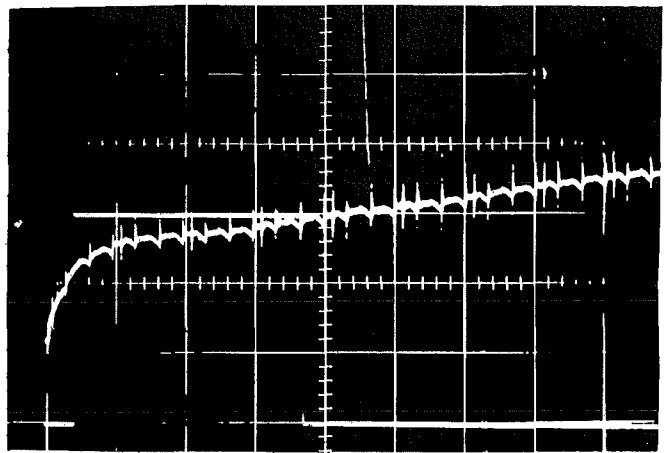
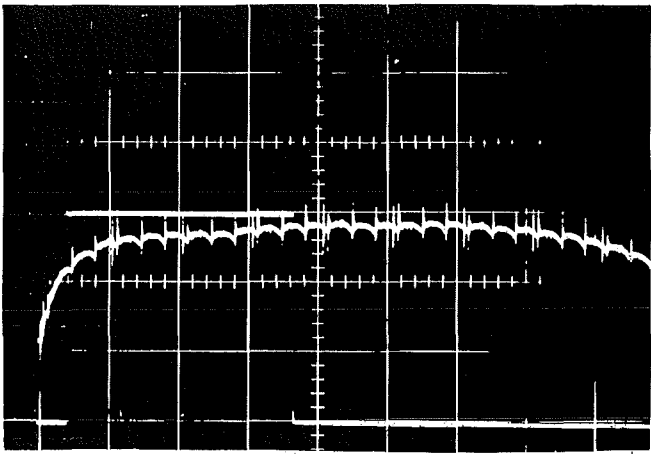


Bild 8:
Oszillogramme der Spannung ueber den Leiter
Erlaeuterung: naechste Seite

Erlaeuterung zu Bild 8:
 Oszillogramme der Spannung ueber den Leiter
 zur Bestimmung der kritischen Heizpulsenergie

obere Spur: Gesamtspannung ueber den Leiter
 untere Spur: Spannung ueber die Heizung (Rechteckpuls)
 linke Spalte: Recovery
 rechte Spalte: Quench

1. Reihe: Strom 500A, Empfindlichkeiten	2mV/div - 10msec/div
	10V/div - 0.5msec/div
2. Reihe: Strom 600A	1mV/div - 5msec/div
	10V/div - 0.2msec/div
3. Reihe: Strom 800A	0.5mV/div - 1msec/div
	10V/div - 0.1msec/div

Tabelle 2:
 Ergebnisse der Experimente

Strom	500	600	700	800	900	1000 A
kritische Heizpulsenergie	23.3	11.5	6.6	4.4	2.6	1.3 mJ
Spannung des stat. Zustands	3.6	2.5	1.8	1.6	1.4	1.2 mV
max. Dauer des stat. Zustands	100	40	12	8	3	2 msec
Ausbreitungsgeschwindigkeit	0.8	1.7	2.7	3.6	5.0	6.3 m/sec

Die Dauer des stationaeren Zwischenzustands haengt davon ab, wie nahe man zufaellig an den Grenzfall zwischen Recovery und Quench herangekommen ist. Die maximal gemessenen Zeiten, aufgelistet in der Tabelle 2, zeigen, dass die Stabilitaetsgrenze bei groesseren Stromstaerken 'schaerfer' wird, und man somit, um eine ebenso lange Dauer des stationaeren Zustands zu erreichen, wesentlich naeher an den Grenzfall herankommen muesste.

Die starke Zunahme der Stabilitaet bei kleineren Stroemen zeigt sich nicht nur im Zahlenwert der benoetigten Heizpulsenergien, graphisch dargestellt in Bild 9, sondern auch in der Groesse der stationaeren Spannung, die ein Mass fuer die Laengenausdehnung der 'minimum propagating zone' ergibt. Die Resultate dieser Messungen sind in der Tabelle 2 zusammengestellt.

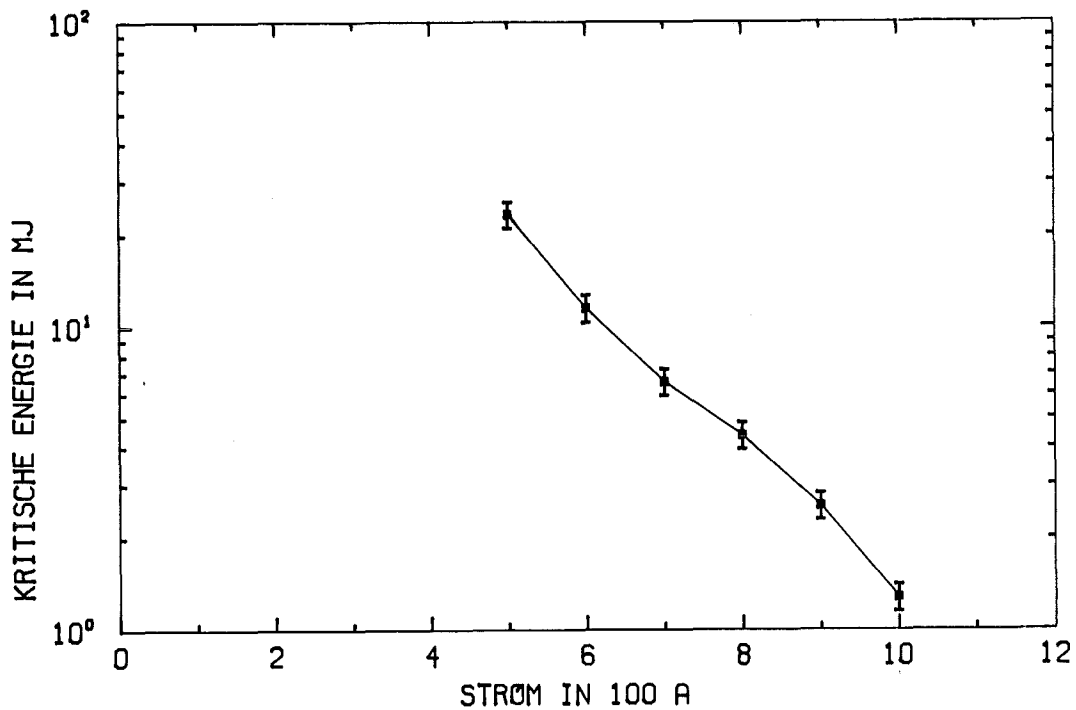


Bild 9:
Kritische Heizpulsenergie abhaengig vom Strom

3.4 Bestimmung der Quenchausbreitungsgeschwindigkeit

Unter Benutzung des aus den stationaeren Messungen gewonnenen Wertes fuer den Restwiderstand der Matrix kann aus dem Spannungsanstieg auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit geschlossen werden, wenn die Voraussetzung erfuehlt ist, dass der Widerstand im Restwiderstandsbereich liegt, die Temperatur des Leiters also unter etwa 20K bleibt. Im Bild 10 sind Spannungsverlaeuft auf beiden Seiten der Heizung wiedergegeben (Potentialabgriffe 1-5 und 5-9, siehe Bild 4). Man sieht, dass der Quench ungefaehr symmetrisch laeuft. Aus dem fast linearen Spannungsanstieg erkennt man, dass hier in der Tat von einer konstanten Ausbreitungsgeschwindigkeit gesprochen werden darf, was bei Waermediffusionsproblemen nicht selbstverstaendlich ist. Dass die obige Voraussetzung erfuehlt ist, folgt einerseits aus dem nur noch geringfuegigen Spannungsanstieg, wenn schon die gesamte Teststrecke normaleitend ist, andererseits aus der Uebereinstimmung mit den durch eine Laufzeitmessung bestimmten Geschwindigkeiten.

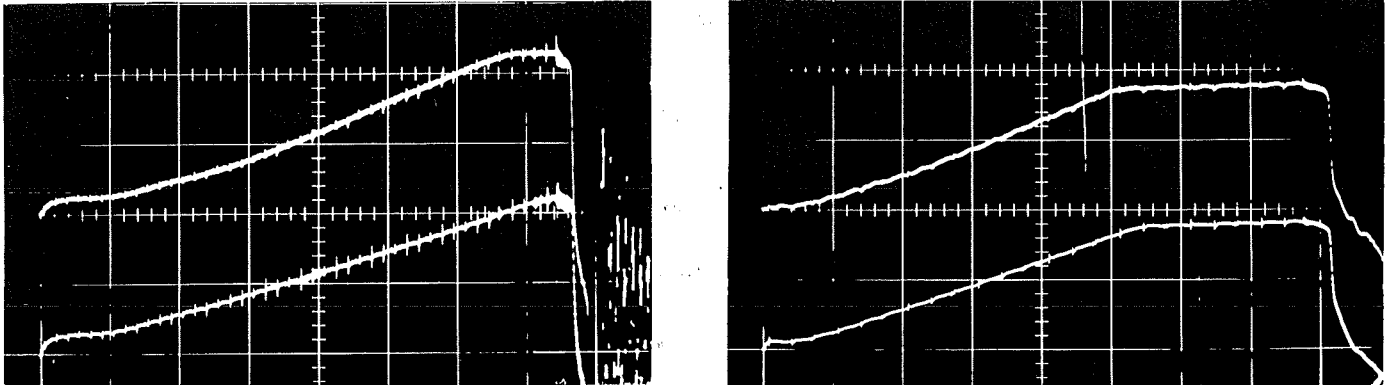


Bild 10:
Oszillogramme
zur Bestimmung der Quenchausbreitungsgeschwindigkeit
aus dem Spannungsanstieg ueber beide Leiterhaelften

links : Strom 600A, Empfindlichkeiten: 5mV/div - 20msec/div
rechts: Strom 900A 10mV/div - 10msec/div

Zur Laufzeitmessung dienten die Paare von Potentialabgriffen ueber etwa 1cm des Leiters in verschiedenem Abstand von der Heizung auf beiden Seiten des Leiters (Potentialabgriffe 1-2 und 3-4 bzw. 6-7 und 8-9, siehe Bild 4). Abbildung 11 zeigt die zu den gleichen Stroemen wie in Bild 10 gehoerenden Oszillogramme. Aus der Wegstrecke von 15cm und dem zeitlich verschobenen Normalleitendwerden der einzelnen Teilstrecken kann sehr leicht und unabhaengig von anderen Messungen die Quenchausbreitungsgeschwindigkeit berechnet werden.

Die mit diesen beiden Methoden bestimmten Geschwindigkeiten wurden schon in der Tabelle 2 aufgelistet, sie sind in Bild 12 graphisch dargestellt. Man erkennt, dass die Ausbreitung normalleitender Zonen erst oberhalb einer bestimmten Stromstaerke moeglich ist, von diesem Punkt an nimmt die Geschwindigkeit linear mit dem Strom zu um erst in der Naeh des kritischen Stroms etwas staerker anzuwachsen. Aus einer Extrapolation der gemessenen Geschwindigkeiten nach Null erhaelt man einen Wert fuer den Strom von etwa 420A, was sich gut mit der oben angegebenen Interpretation der stationaeren Messungen deckt, dass an dieser Stelle das Maddock-Kriterium erfuehlt ist.

Die gemessenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten sind auf beiden Seiten des Leiters systematisch etwas verschieden, und zwar groesser bei Quenchausbreitung in Stromrichtung. Sie sind in Bild 12 durch die Enden der Fehlerbalken dargestellt. Da ich nur an einer Probe die Geschwindigkeiten in beiden Richtungen gemessen habe, kann ich keine Aussage darueber machen, ob die Stromrichtung die Ursache fuer diese Asymmetrie ist oder nur zufaellige Unterschiede der Kuehlbedingungen auf beiden Seiten.

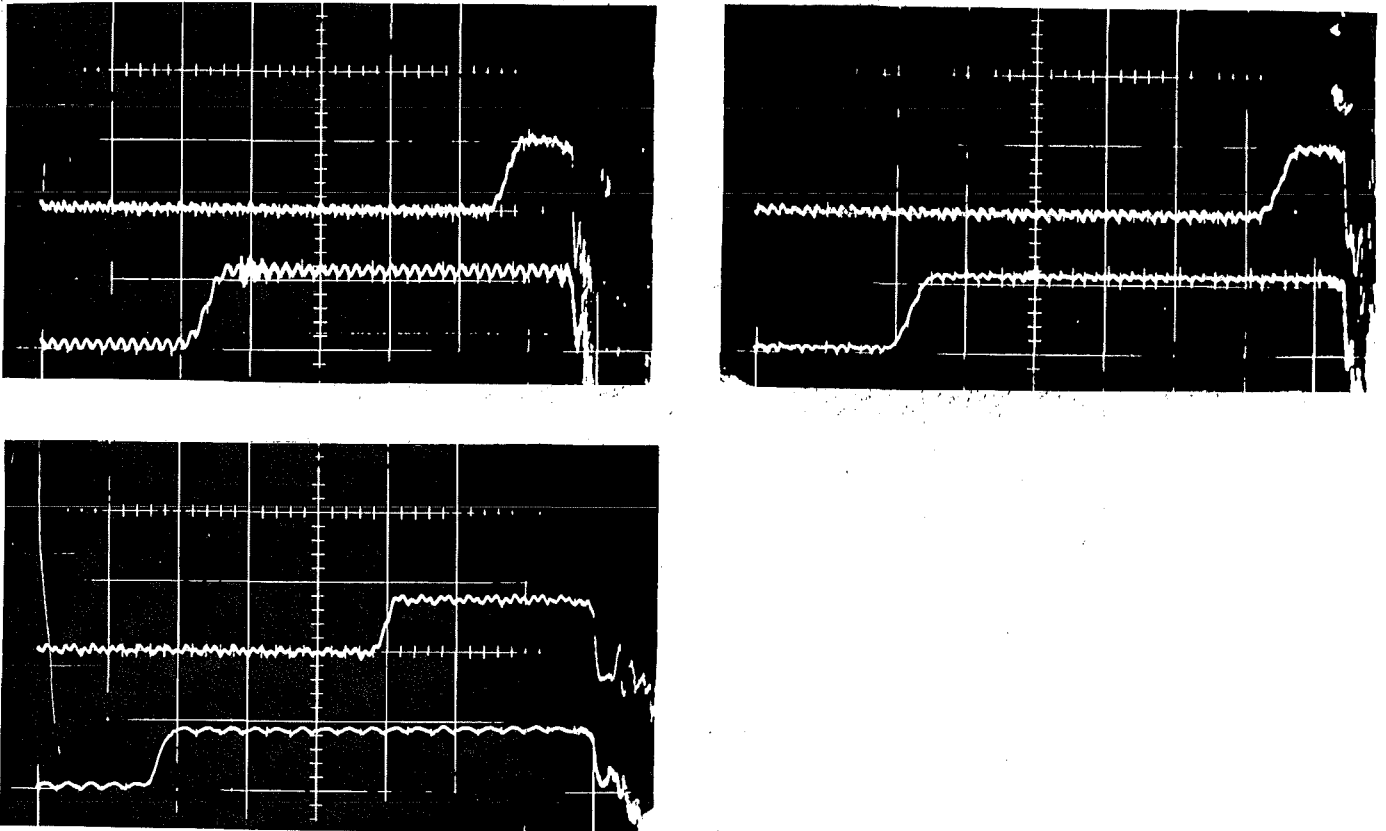


Bild 11:
Oszillogramme zur Bestimmung der
Quenchausbreitungsgeschwindigkeit durch Laufzeitmessung

oben : Strom 600A, Empfindlichkeiten: 0.5mV/div - 20msec/div

unten: Strom 900A 1mV/div - 10msec/div

Die Photos links entsprechen der oberen Spur in Bild 10.

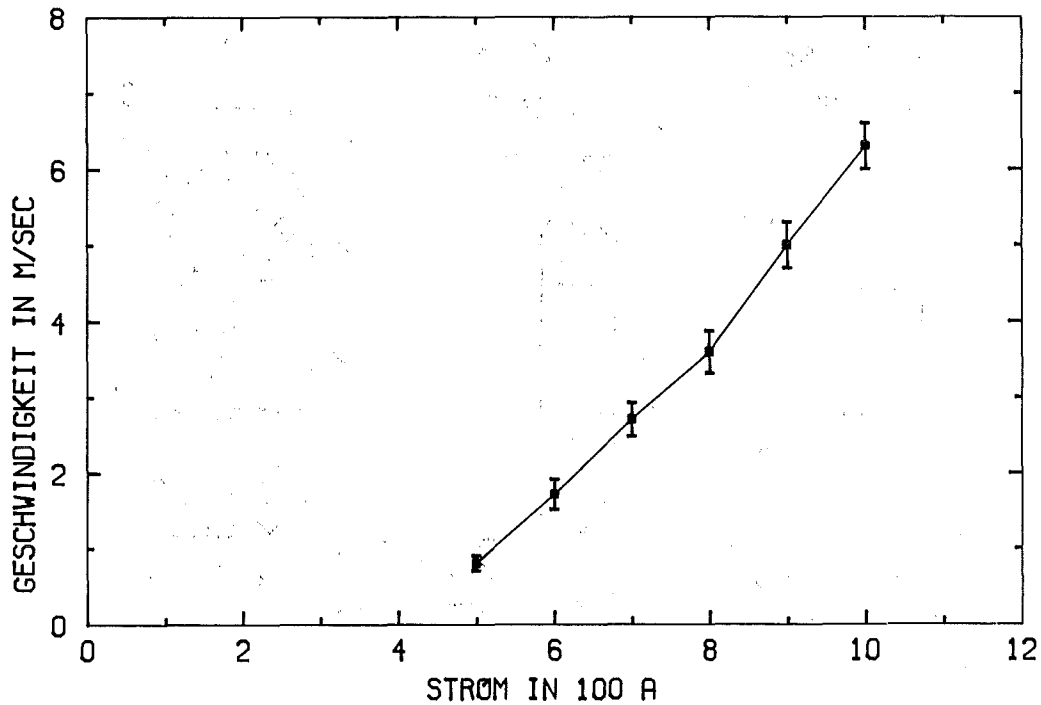


Bild 12:
Quenchausbreitungsgeschwindigkeit abhaengig vom Strom

3.5 Veraenderte Kuehlbedingungen

In weiteren Versuchsreihen wurden die Seiten des Leiters beziehungsweise der ganze Leiter durch ein hochgefuehltes Harz (*) bedeckt, um so einen fuer die Stabilitaet wichtigen Parameter, die Groesse des gekuehlten Umfangs P zu variieren. Eine gute Methode, die Stabilitaet des Leiters ohne Kuehlung (P=0) zu untersuchen, sind Messungen im Vakuum /10/. Zu diesem Zweck war jedoch die benutzte Apparatur nicht geeignet.

(*) Fussnote:

Kunstharz 'Green Putty': XD 580 Epoxy Resin
Hersteller: Ciba-Geigy Limited,
Duxford, Cambridge, CB2 4QA, U.K.

Das Ziel, dass der Leiter durch die abgedeckten Oberflaechen keine Waerme mehr abfuehren kann, wurde jedoch offensichtlich nicht erreicht. Dies zeigten schon die stationaeren Messungen. Es wurden viel zu hohe Recoverystroeme gemessen (360 bzw. 220A), die sich mit Hilfe des Maddock-Kriteriums nur unter der Hypothese erklaren lassen, dass der Leiter auf diesen 'isolierten' Oberflaechen noch eine Kuehlung mit einem Waermeuebergangskoeffizienten von groessenordnungsmaessig $0.015\text{W/cm}^2\text{K}$ hatte.

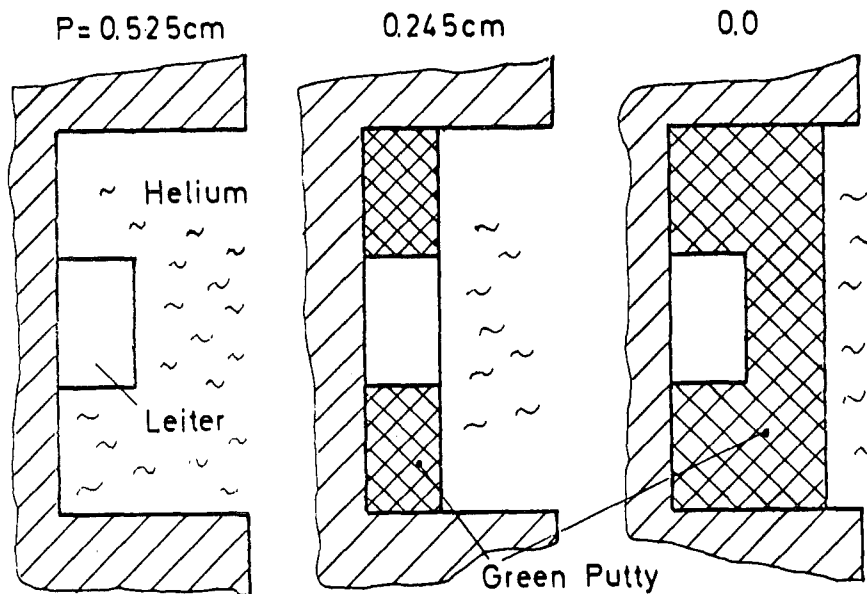


Bild 13:
Querschnitt des Leiters
in den Experimenten mit veraenderten Kuehlbedingungen

Das kann sicher zum Teil durch transversale Waermeleitung erklart werden, mit einer Waermeleitfaehigkeit von $1\text{mW/cm}^*\text{K}$ und einer Diffusionsstrecke von 0.1cm erhaelt man zum Beispiel $0.01\text{W/cm}^{**2}\text{K}$. Moeglicherweise sind auch bei der tiefen Temperatur Spalte im 'Isoliermaterial' aufgetreten, durch die Helium an den Leiter gelangte.

Unter diesen 'isolierten' Bedingungen nahmen die zur Quenchausloesung benoetigten Energien zwar ab, jedoch nicht so stark, wie es beispielsweise mit dem unten angegebenen Programm berechnet werden kann. Die Geschwindigkeiten waren im Versuch mit $P=0.245\text{cm}$ nur wenig hoeher als im besser gekuehlten Vergleichsfall, was auf eine relativ grosse transiente Kuehlung schliessen laesst. Auch im Versuch mit vollstaendig 'isoliertem' Leiter erreichten die Ausbreitungsgeschwindigkeiten nicht die Werte, die unter der Annahme abgeschaezt werden koennen, dass Waerme nur laengs des Leiters abgefuehrt werden kann /11,12,13/.

Wegen dieser schlecht definierten Kuehlbedingungen hat es keinen Zweck, die Ergebnisse dieser Versuche quantitativ interpretieren zu wollen. Deshalb koennen nur die Messungen mit dem dreiseitig gekuehlten Leiter, bei dem die direkte Kuehlung durch das Helium sicher dominierend war, zum Vergleich mit den numerischen Rechnungen herangezogen werden.

4. Numerisches Programm

4.1 Numerische Loesung der Waermeleitungsgleichung

Die Waermeleitungsgleichung ist in unserem Fall die entscheidende Gleichung, die die Temperaturen an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeitpunkten miteinander verbindet.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(T) \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right\} + Z(T,x,t) = C(T) \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

Die verschiedenen Inhomogenitaeten, ohmsche Waermeerzeugung, Kuehlung und externe Heizung, sind hier im Term $Z(T,x,t)$ zusammengefasst. Wie bereits oben ausgefuehrt wurde, soll sie nur eindimensional angenaehert werden, sie ist aber wegen der Temperaturabhaengigkeit der Materialparameter und der komplizierten Waermeerzeugungs- und Kuehlkurven so stark nichtlinear, dass es hoffnungslos waere, nach analytischen Loesungen zu suchen.

Um diese Gleichung auf dem Computer zu approximieren, ueberzieht man das Raum-Zeit-Kontinuum mit einem Netz von Gitterpunkten. Die Wahl der Diskretisierung, das heisst der Art und Weise, wie die Differentialquotienten der partiellen Differentialgleichung durch Funktionswerte an den einzelnen Gitterpunkten ausgedrueckt werden, ist von entscheidender Bedeutung dafuer, ob das numerische Verfahren stabil ist, wie grosse Schrittweiten es erlaubt, und ob die erhaltenen Funktionswerte an den Gitterpunkten eine Approximation der urspruenglichen Differentialgleichung darstellen. Wegen der Nichtlinearitaeten muss in unserem Spezialfall hierbei besondere Vorsicht angewandt werden.

Nehmen wir an, dass alle Temperaturen zu einem bestimmten Zeitpunkt gegeben sind und versuchen, daraus die 'neue' Temperaturverteilung zu berechnen. Das einfachste Verfahren ist es, Waermeleitung, -erzeugung und Kuehlung aus den Daten der alten Zeitschicht zu bestimmen, die 'neue' Temperatur kommt nur durch die Approximation der Zeitableitung $dT/dt = (T_{neu} - T_{alt})/dt$ herein. Die entstandenen Gleichungen (eine fuer jedes Ortselement) lassen sich explizit nach den 'neuen' Temperaturen aufloesen. Dies sogenannte explizite Verfahren ist jedoch numerisch sehr instabil, es laesst nur Zeitschritte kleiner als hoechstens $dx^2 / (2 \cdot K/C)$ zu, was in unserem Spezialfall bei einer Ortsschrittlaenge von 0.1cm etwa 1 Mikrosekunde ergibt (4 Mikrosekunden bei Beruecksichtigung der Waermekapazitaet der He-Grenzschicht).

Darueberhinaus erhaelt man systematische Fehler dadurch, dass bei diesem Verfahren alle im Intervall dt mit der

Temperatur sich aendernden Groessen aus den Temperaturwerten am Anfang des Zeitschritts bestimmt werden. Ich habe deshalb ein Verfahren gesucht, das bei besserer numerischer Stabilitaet groessere Zeitschritte erlaubt und es modifiziert, um die Aenderungen der Parameter waehrend eines Zeitschritts beruecksichtigen zu koennen.

Die Einzelheiten des verwendeten impliziten Crank-Nicolson-Verfahrens /22,23/ moechte ich im Anhang 6.3 ausfuehrlich darlegen, es soll deshalb hier nur beschrieben werden. Der entscheidende Punkt ist, dass der Waermeleitungsterm $d/dx(K*dT/dx)$ zwischen der 'alten' und der 'neuen' Zeitschicht gemittelt wird. Dadurch ergibt sich ein System von simultanen Gleichungen fuer die 'neuen' Temperaturen, das aufgrund seiner verhaeltnismaessig einfachen Struktur leicht loesbar ist. Um die Aenderungen der temperaturabhaengigen Groessen waehrend des Zeitschritts zu beruecksichtigen, werden diese aus einem Mittel der 'alten' und eines Schaetzwerts fuer die 'neue' Temperatur berechnet. Die Loesung des Gleichungssystems ergibt dann eine verbesserte Schaetzung. Das Programm iteriert in dieser Weise solange, bis sich die aufeinander folgenden Schaetzwerte an keiner Stelle um mehr als $1/1000K$ unterscheiden.

Aus Symmetriegrunden braucht man nur eine 'halbe' Zone zu berechnen. Die Randbedingung ist deshalb $dT/dx=0$ bei $x=0$. Am anderen Ende des gerechneten Leiterstuecks setze ich $T=4.2K$, wobei zu beachten ist, dass dieser Punkt weit genug entfernt ist, damit die Ergebnisse der Rechnung nicht allzusehr durch diese offensichtlich willkuerliche Bedingung beeinflusst werden.

Getestet wurde das Programm dadurch, dass die Ergebnisse mit der analytischen Loesung der Waermeleitungsgleichung durch eine Fourier-Reihe (fuer konstante Waermeleitfaehigkeit und spezifische Waerme, ohne Waermequellen und -senken und bei vorgegebener Anfangsbedingung /23/) verglichen wurden (siehe Bild 14). Die Abweichungen der numerischen Ergebnisse von der exakten Loesung an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeitpunkten sind in der Tabelle 3 aufgelistet. In diesen Rechnungen wurden sehr grosse Zeitschritte verwendet, bei den eigentlichen Stabilitaetsrechnungen (siehe unten) duerfte dieser Fehler kleiner und daher, gemessen an den sonstigen Unsicherheiten, zu vernachlaessigen sein.

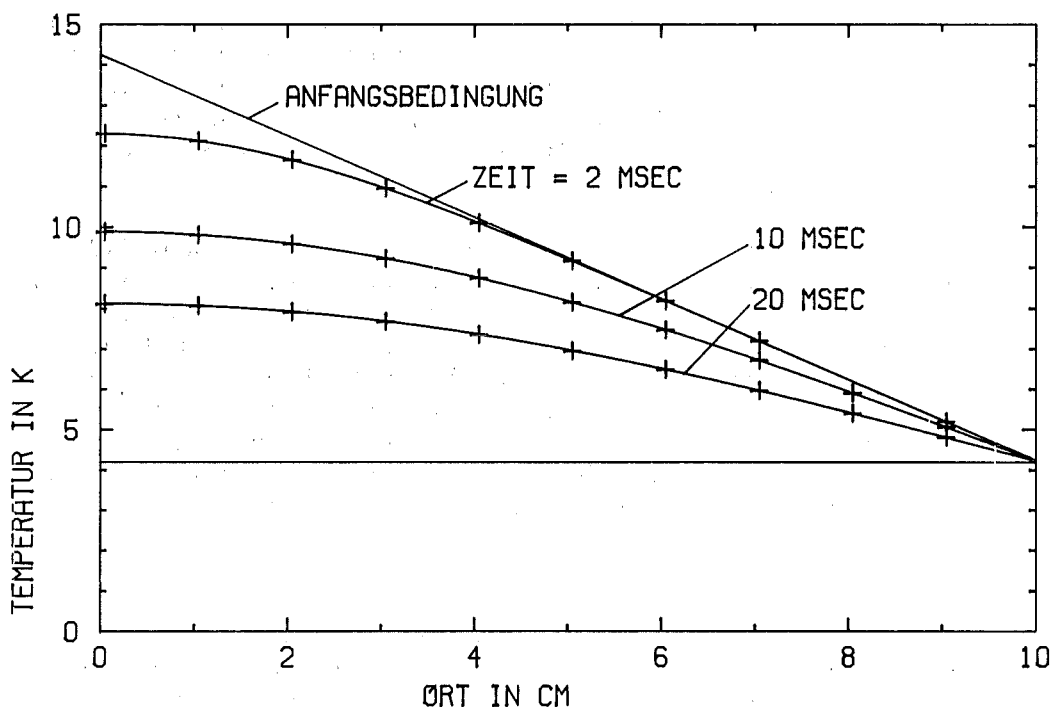


Bild 14:
 Testen des Programms fuer konstantes K und C
 ausgezogene Linie: numerische Loesung
 Kreuze: analytische Loesung durch Fourier-Reihe

Tabelle 3:
 Vergleich von numerischer und analytischer Loesung

 dx = 0.1cm
 K/C = 1500cm**2/sec
 dt = 6*dx**2/(2*K/C) = 20Mikrosekunden
 Randbedingungen: dT/dx = 0 bei x = 0
 T = 4.2K bei x = 10.05 cm
 Anfangsbedingung: T = 14.25K bei x = 0
 T = 4.2K bei x = 10.05 cm
 dazwischen linear

T(numerisch) - T(analytisch):

	x = 1.05cm	4.05cm	8.05cm
t = 2msec	0.002K	0.003K	0.001K
10msec	0.009K	0.008K	0.003K
20msec	0.013K	0.011K	0.004K

Wenn man mit temperaturabhaengigen Materialdaten rechnet, muessen die Schrittweiten in Raum und Zeit schon deshalb ziemlich klein gewaehlt werden, um keine systematischen Fehler beim Mitteln ueber zu grosse Temperaturspannen zu erhalten. Zum Beispiel wurde die Ortsschrittlaenge auf 0.1cm gesetzt, um die real vorgegebenen Temperaturgradienten gut

darstellen zu koennen. Eine hinsichtlich erreichter Genauigkeit und dazu benoetigtem Rechenzeitaufwand vernuenftige Zeitschrittgroesse ist nach meinen Erfahrungen dann ein 'kleines Vielfaches' (beispielsweise Faktor 2) der maximal zulaessigen Schrittweite des expliziten Verfahrens $dx^2/(2K/C)$.

Zu grosse Schrittweiten machen sich im Programm dadurch bemerkbar, dass die Zahl der pro Zeitschritt benoetigten Iterationen ansteigt, so dass trotz groesserer Schrittweite und kleinerer Genauigkeit mehr CPU-Zeit auf dem Computer verbraucht wird. Die hier angegebenen Rechnungen wurden mit einem Wert von 10 Mikrosekunden durchgefuehrt, was nur wenig mehr als durchschnittlich eine Iteration pro Zeitschritt erfordert, bei einer Verdoppelung ergeben sich aber noch keine wesentlichen Aenderungen der Ergebnisse.

4.2 Materialparameter

Da die Ergebnisse der Computerrechnungen teilweise sehr starke Abhaengigkeiten von den fuer die Materialparameter verwendeten Zahlenwerten zeigten, habe ich versucht, diese soweit irgend moeglich aus dem Experiment zu bestimmen. Ansonsten musste auf veroeffentlichte Daten zurueckgegriffen werden.

4.2.1 Elektrischer Widerstand der Matrix

Die Groesse des spezifischen elektrischen Restwiderstands des verwendeten Matrixkupfers im transversalen Magnetfeld von etwa 4T kann sowohl aus den zeitabhaengigen, als auch aus den stationaeren Messungen in der oben beschriebenen Weise leicht bestimmt werden. Man erhaelt

$$\rho(B = 4T, \text{ transversal}) = 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ Ohm} \cdot \text{cm}$$

Dieser Wert wurde temperaturunabhaengig in die Rechnungen eingesetzt, da der Widerstand des Kupfer erst bei Temperaturen um 20K merklich anzusteigen beginnt /24/ und ich mich vor allem fuer die Temperaturentwicklung direkt nach der Quenchausloesung interessiere. Aus den Experimenten geht ausserdem hervor, dass in der Zeit bis zum Normalleitendwerden der gesamten Teststrecke diese Temperatur auch in der Mitte noch nicht wesentlich ueberschritten wird.

4.2.2 Kritische Stromdichte des Supraleiters

Der kritische Strom des Supraleiters wurde ebenfalls aus der stationaeren Strom/Spannungs-Charakteristik entnommen

(Definition siehe Abschnitte 2.1 und 3.2). Fuer die kritische Stromdichte von Niob-Titan-50 bei He-Badtemperatur im transversalen Magnetfeld von 4T (senkrecht auf der schmalen Seite des Rechteckleiters) ergibt sich:

$$j_c (T = 4.2K, B = 4T, \text{transversal}) = 1.8 \cdot 10^5 \frac{A}{cm^2}$$

was mit in der Literatur veroeffentlichten Daten uebereinstimmt. Zur kritischen Temperatur habe ich keine experimentellen Hinweise. Entsprechend der oben gegebenen Definition wurde sie der Literatur entnommen /25,26/:

$$T_c (B = 4T, \text{transversal}) = 7.3K$$

Es wurde angenommen, dass die kritische Stromdichte im Bereich zwischen Heliumbadtemperatur und kritischer Temperatur linear abnimmt.

4.2.3 Spezifische Waermen

Die spezifische Waerme von Kupfer ist als Funktion der Temperatur sehr gut bekannt /24,27/:

$$\frac{C_{mat}(T)}{J/cm^3K} = 6.661 \cdot 10^{-6} \left(\frac{T}{K}\right)^3 + 9.612 \cdot 10^{-5} \frac{T}{K}$$

Fuer die spezifische Waerme von Niob-Titan existieren nur sehr wenig Daten /28,29/, obwohl dies Material heute schon oft fuer supraleitende Magnete technisch Verwendung findet. Es gibt auch keine einfache Theorie, wie man die spezifische Waerme dieses harten TypII-Supraleiters im stromtragenden Zustand im Magnetfeld aus der im Normalzustand und eventuell Daten von Magnetisierungsmessungen errechnen koennte. Die angegebenen Formeln stellen also nur eine Naehering dar.

$$\frac{C_{sl}(T)}{J/cm^3K} = \begin{cases} 5.592 \cdot 10^{-5} \left(\frac{T}{K}\right)^3 + 3.6 \cdot 10^{-4} \frac{T}{K} & T < 7.1K \\ \text{linear} & 7.1K < T < 7.5K \\ 1.41 \cdot 10^{-5} \left(\frac{T}{K}\right)^3 + 1.314 \cdot 10^{-3} \frac{T}{K} & T > 7.5K \end{cases}$$

Fuer sehr homogene Bedingungen wuerde man einen Sprung in der spezifischen Waerme an der Stelle $T_c(B)$ erwarten. Nicht zuletzt aus Gruenden der numerischen Stabilitaet wurde dieser durch einen linearen Uebergangsbereich ersetzt. Die verschiedenen im Programm verwendeten spezifischen Waermen sind zusammen in Bild 15 dargestellt.

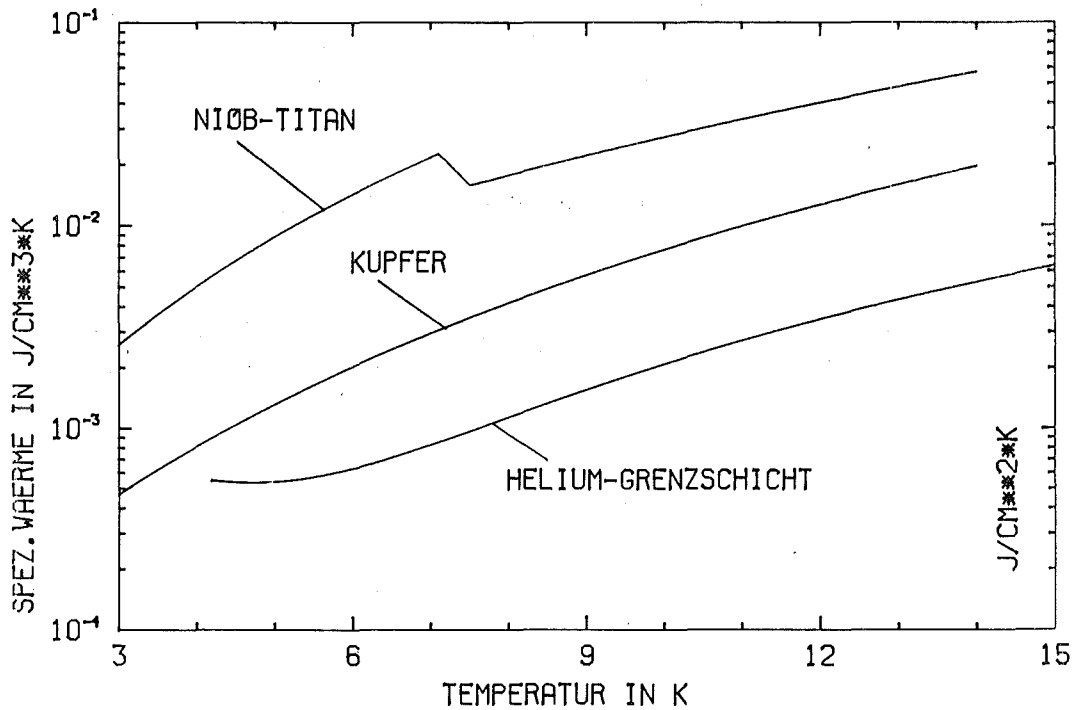


Bild 15:
Spezifische Waermen abhaengig von der Temperatur von Matrixkupfer und Supraleiter in J/(cm³*K) und Helium-Grenzschicht (siehe 4.3.2) in J/(cm²*K)

4.2.4 Waermeleitfaehigkeit des Matrixkupfers

Unter der Annahme, dass fuer das verwendete Kupfer bei He-Temperatur das Wiedemann-Franz'sche Gesetz

$$\frac{K(B,T) \cdot \rho(B)}{T} = \text{const} = \text{Lorenz-Zahl}$$

auch die Variation der Waermeleitfaehigkeit mit dem Magnetfeld richtig beschreibt, erhaelt man aus dem experimentellen Wert fuer den Restwiderstand der Matrix einen Wert von etwa 4W/cm²*K bei 4.2K und 4T. Die Waermeleitfaehigkeit aendert sich dann bis etwa 15K proportional zur Temperatur /24/, was experimentell gut gesichert ist. Wenn man diesen Zahlenwert verwendet, erhaelt man jedoch grosse Diskrepanzen bei allen zwischen Experiment und Computerrechnung zu vergleichenden Groessen. Deshalb habe ich versucht, die Waermeleitfaehigkeit indirekt aus den Messergebnissen zu bestimmen:

Wie ich bereits bei der Interpretation des Experiments anfuehrte, deute ich die Phase konstanter Spannung, bevor entweder Quench oder Recovery eintritt, als 'minimum

propagating zone'. Dies Temperaturprofil laesst sich in einer stationaeren Rechnung, wie in Abschnitt 2.3 angegeben, unabhaengig von den zeitabhaengigen Stabilitaetsrechnungen kalkulieren (zum Programm siehe Anhang 6.5.3, Ergebnisse: Bild 2), und haengt von ohmscher Waermeerzeugung, (stationaerer) Kuehlung und der Waermeleitfaehigkeit ab. Die Waermeerzeugungskurve ist durch die Messung von Rho und Ic vorgegeben, die stationaere Kuehlcharakteristik ergibt sich aus dem gemessenen Recovery- und Takeoff-Strom. Variiert werden kann also nur die Waermeleitfaehigkeit.

Setzt man $K(T)=\text{const} \cdot T$ voraus, so ist die Laenge der Zone und die Spannung proportional zu $\text{const}^{**0.5}$, was man sich leicht klarmachen kann. Zonen von der Groesse der experimentell festgestellten 'minimum propagating zones' ergeben sich bei Benutzung einer hoeheren Waermeleitfaehigkeit, es wurde deshalb ein um den Faktor 2.6 groesserer Zahlenwert verwendet.

$$K_{\text{mat}}(T=4.2\text{K}, B=4\text{T}, \text{transversal}) = 10.5 \frac{\text{W}}{\text{cm} \cdot \text{K}}$$

Dieser Wert widerspricht den Messungen von Fevrier und Morize /30/ und sollte deshalb unbedingt experimentell ueberprueft werden, was mir im begrenzten Rahmen dieser Arbeit nicht moeglich war. Neue Messungen /31/ deuten jedoch darauf hin, dass fuer Kupfer bei diesen Temperaturen die Lorenz-Zahl im Magnetfeld erhoehrt ist. Eine Unterstuetzung des von mir verwendeten Wertes besteht darin, dass so nicht nur die Spannungen ueber die 'minimum propagating zones', sondern auch die kritischen Ausloeseenergien und die Ausbreitungsgeschwindigkeiten normalleitender Zonen fuer alle Stroeme in Uebereinstimmung zu den gemessenen Werten kommen.

4.3 Waermeuebergang

4.3.1 Stationaerer Waermeuebergang

Die Temperaturabhaengigkeit der stationaeren Kuehlleistung ist schon qualitativ erlaeutert worden (Abschnitt 2.1), ebenso die Tatsache, dass der quantitative Verlauf in etwa aus den zeitunabhaengigen Messungen (Recovery- und Takeoff-Strom, siehe Abschnitt 3.2) bestimmt werden kann. In der Rechnung wurde verwendet /18,32,8/:

- Quadratischer Anstieg mit $dT=T-4.2\text{K}$ bis zum 'nucleate boiling maximum' von $0.7\text{W}/\text{cm}^{**2}$ bei $dT=0.6\text{K}$

$$Q_{\text{stat}}(T) = A_1 \cdot \Delta T^2 \quad \Delta T < 0.6\text{K}$$

- Linearer Abfall bis zum 'film boiling minimum'
von 0.15W/cm^2 bei $dT=1.5\text{K}$

$$Q_{\text{stat}}(T) = A_2 \cdot \Delta T + B_2 \quad 0.6\text{K} < \Delta T < 1.5\text{K}$$

- Linearer Anstieg mit dT im Filmsieden,
charakterisiert durch einen weiteren Punkt, naemlich
 0.29W/cm^2 bei $dT=8.0\text{K}$

$$Q_{\text{stat}}(T) = A_3 \cdot \Delta T + B_3 \quad \Delta T > 1.5\text{K}$$

Mit dieser Kuehlcharakteristik errechnet sich der Strom, bei dem Stabilitaet nach Maddock eintritt, zu 425A , was sich ungefaehr mit dem experimentellen Wert deckt.

4.3.2 WaermeKapazitaet der Helium-Grenzschicht

Aus Waermeuebergangsmessungen im Filmsiedebereich von Y.Iwasa /4/ ergibt sich, dass die Beruecksichtigung der WaermeKapazitaet der He-Grenzschicht ('Helium-Gasfilm') unmittelbar an der gekuehlten Leiteroberflaechen einen Beitrag zum Waermeuebergang liefert, der proportional zur lokalen Aenderungsrates der Temperatur ist. Der Proportionalitaetsfaktor kann interpretiert werden durch die unterschiedliche Dicke (Waermeinhalt) dieser Schicht bei verschiedenen Temperaturen. Bei der direkten Programmierung der von Iwasa angegebenen Formel (= Benutzung der Schaetzwerte fuer die 'neuen' Temperaturen) wird das numerische Verfahren voellig instabil. Da dieser Term aber proportional zu dT/dt ist, kann er im Programm wie eine effektive spezifische Waerme des Leiters pro gekuehlter Oberflaechen behandelt werden, und erhoehrt in diesem Fall die numerische Stabilitaet sogar noch. Die gemittelte spezifische Waerme bestand im Computerprogramm also aus drei Anteilen, denen von Kupfer und Supraleiter, gewichtet durch ihre jeweiligen Flaechenanteile, und dieser 'spezifischen Waerme' des He-Films mit dem Wichtungsfaktor des gekuehlten Umfangs P.

$$\frac{C_{\text{film}}(T)}{\text{J/cm}^2\text{K}} = 0.55 \cdot 10^{-3} \left\{ 1 - 0.1 \frac{\Delta T}{\text{K}} + 0.1 \left(\frac{\Delta T}{\text{K}} \right)^2 \right\}$$

C_{film} ist in Bild 15 graphisch dargestellt, es liegt etwa 10% ueber den von Iwasa angegebenen Werten. Diese Formel wurde im gesamten Temperaturbereich angewandt und nicht nur im Filmsieden, was jedoch keine grossen Fehler verursacht. Ich moechte noch darauf hinweisen, dass dieser eigentlich

nur sehr ungenau bekannte Term bei den spezifischen Waermen den dominierenden Anteil stellt.

4.3.3 Transienter Waermeuebergang

Wie man aus zeitaufgeloesten Waermeuebergangsexperimenten bei konstantem Waermefluss /3,4,33,34/ sehen kann, gibt es vor dem Einsetzen des schon beschriebenen stationaeren 'pool boilings' eine Zeitspanne mit kleiner Temperaturdifferenz und entsprechend hohem Waermeuebergangskoeffizient, bevor sich die Oberflaeche mit Gasblasen beziehungsweise einem Gasfilm bedeckt. C.Schmidt /3/ fand nun, dass die Dauer dieser Phase, in der der Kapitza-Waermeuebergangswiderstand ausschlaggebend ist, umgekehrt proportional zur (konstanten) Waermeleistung im Quadrat ist. Dies laesst sich in einfacher Form dadurch ausdruecken, dass am Ende dieser Phase das Produkt $E \cdot Q$ aus bisher uebertragener Energie pro Flaeche E mal augenblicklichem Waermefluss Q einen bestimmten, charakteristischen Wert hat. Interpretiert wird diese Formel so, dass nach dieser Zeit die ins Helium eingedrungene Waermeenergie pro Volumen etwa den Wert der Verdampfungsenthalpie erreicht.

Denselben Formalismus uebertrage ich nun auf den Fall zeitlich variabler Waermestrom. Dass das $E \cdot Q$ -Kriterium auch hier sinnvoll angewandt werden kann, moechte ich an einem Beispiel im Anhang 6.4 verdeutlichen. Solange das Produkt $E \cdot Q$ kleiner als der Wert

$$(E \cdot Q)_{\max} = 2.5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{cm}^2} \cdot \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$$

ist, wird ein transienter Waermeuebergangskoeffizient von

$$H_{tr} = 5 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \cdot \text{K}}$$

verwendet. Das ist eine Entwicklung des Kapitza-Widerstandes fuer kleine Temperaturdifferenzen um den Punkt 4.2K. Es zeigt sich in den Rechnungen, dass die Form und Groesse der transienten Kuehlcharakteristik nicht entscheidend sind, ausschlaggebend ist vielmehr der maximale Wert des Produkts $E \cdot Q$.

Dieser Waermeuebergang kann unabhaengig fuer jedes einzelne Ortselement berechnet werden und erfordert keine explizite Bezugnahme auf den Zeitpunkt der externen Stoerung, wie es (unphysikalischerweise) bei anderen Formeln fuer den transienten Waermeuebergang /10,16/ notwendig ist.

Diese drei verschiedenen Kuehlmechanismen ergeben zusammengenommen den gesamten Waermeuebergang $Q(T,t)$ gemass der Formel

$$Q(T,t) = \begin{cases} H_{tr} \cdot \Delta T \\ Q_{stat}(T) \end{cases} + C_{film}(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad \begin{array}{l} E \cdot Q < (E \cdot Q)_{max} \\ E \cdot Q > (E \cdot Q)_{max} \end{array}$$

wobei die Unterscheidung zwischen Q_{trans} und Q_{stat} aufgrund des $E \cdot Q$ -Kriteriums getroffen wird. Zur Verdeutlichung habe ich mit diesen Annahmen die zeitliche Temperaturentwicklung eines idealen Heizers berechnet, der keine eigene Waerme kapazitaet besitzt. Dies ist mit Hilfe des angegebenen numerischen Verfahrens moeglich (Programm QSC, Anhang 6.5), wenn die Waerme produktion konstant, die spezifische Waerme des Leiters und die Waermeleitfaehigkeit gleich Null gesetzt werden. Die Kurven in Bild 16 zeigen schon eine qualitative Uebereinstimmung mit den zeitlich aufgeloesen Waermeuebergangsmessungen /3,4,33,34/.

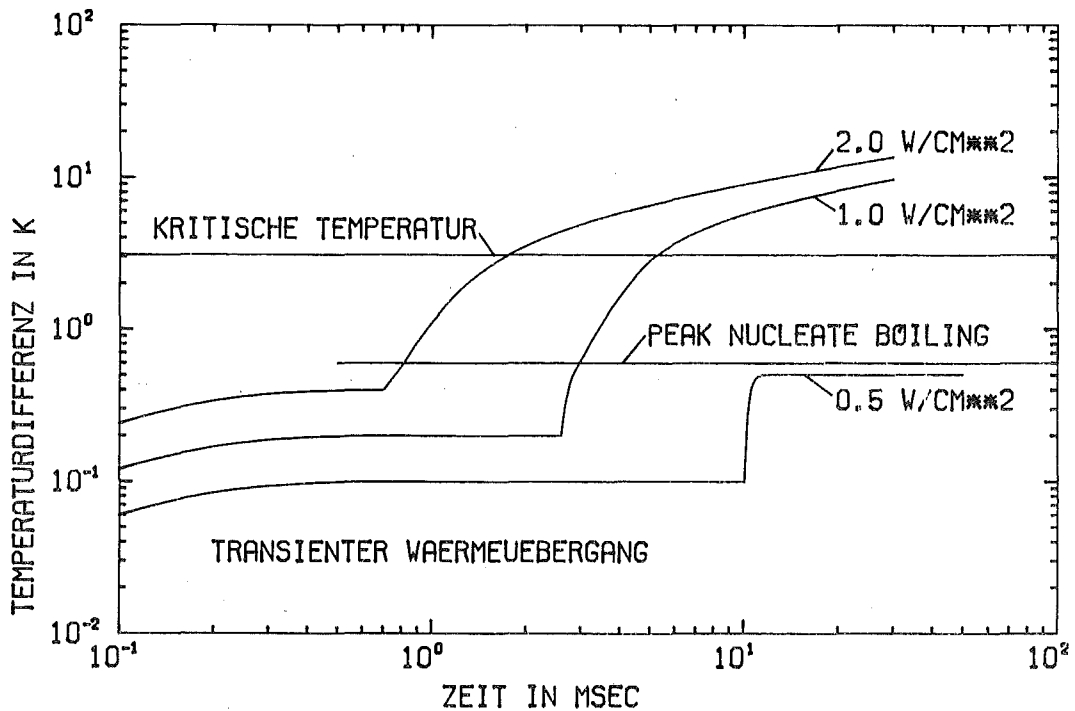


Bild 16:
Zeitliche Temperaturentwicklung eines idealen Heizers
bei konstantem Waerme flux
mit dem angegebenen Modell fuer den Waermeuebergang

4.4 Externe Heizleistung

Um zu vergleichbaren Ergebnissen zu gelangen, muss auch die Art und Weise, wie die Heizpulsenergie am Leiter selbst ankommt, entsprechend den experimentellen Daten nachgebildet werden (siehe Bild 17).

In den Rechnungen wurde 1 Ortselement (=0.1cm) geheizt. Zur Simulation der thermischen Isolation des Heizers in den Experimenten erhielten die ersten 5 Ortselemente (=0.5cm) keine Kuehlung durch das Helium. Fuer den zeitlichen Verlauf der Heizleistung kann man folgende Annahmen machen: Waehrend der (genuegend kurzen) Dauer des Rechteckpulses steigt die Temperatur des Heizdrahtes und damit auch die uebertragene Waermeleistung linear mit der Zeit an. Nach dem Ende des Heizpulses faellt die Heizertemperatur wieder exponentiell ab, die Zeitkonstante kann groessenordnungsmaessig aus den Experimenten abgeschaezt werden (Abschnitt 3.3, Bild 7) Fuer die hier wiedergegebenen Rechnungen wurden folgende Zahlenwerte verwendet:

Anstiegszeit = 0.2 msec
Abfallzeitkonstante = 1.0 msec

Die gesamte Heizenergie kann im Programm aus der maximalen Heizleistung und diesen Zeitkonstanten leicht berechnet werden.

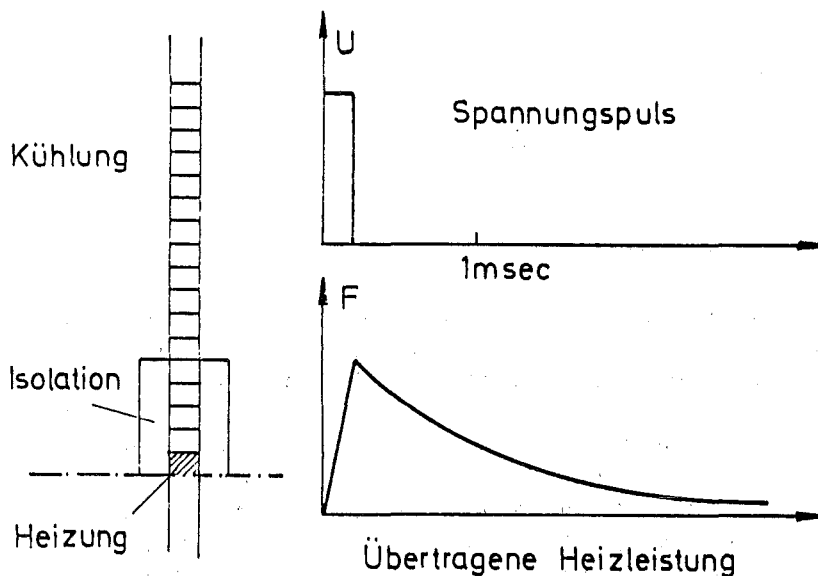


Bild 17:
Modell fuer die Verteilung der Heizleistung
in Raum und Zeit

5. Ergebnisse der numerischen Rechnungen

5.1 Zeitabhaengige Loesungen der Waermeleitungsgleichung

Nach dieser muehsamen Vorarbeit ist es nun fast spannend, zu sehen, ob mit Hilfe der vielen Annahmen und Modelle das numerische Programm in der Lage ist, das zeitliche Verhalten des Leiters in den Experimenten zu simulieren. Besonders anschaulich sind dabei vor allem Bilder der Temperaturverteilung zu verschiedenen Zeitpunkten, einige typische Faelle sind in den Bildern 18 bis 20 gezeigt.

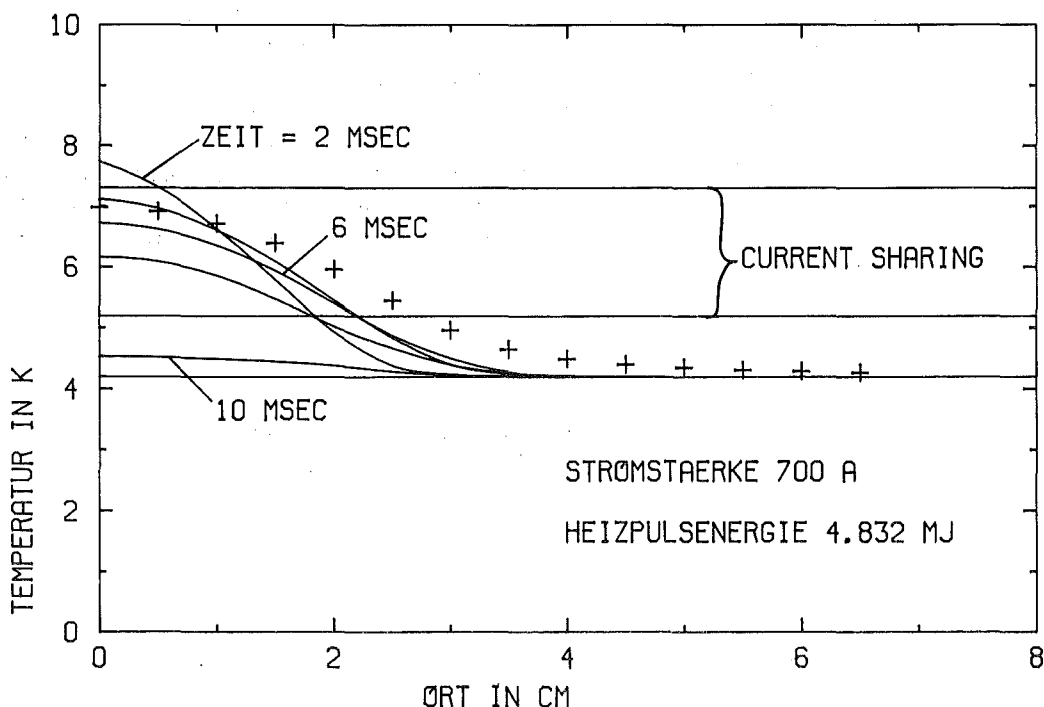


Bild 18:
Berechnete Temperaturprofile in Abstaenden von 2msec
Kreuze: Profil der 'minimum propagating zone'

In Bild 18 sieht man, dass die Heizpulsenergie nicht ausreichend war, um einen groesseren Bereich des Leiters auf Dauer normalleitend zu machen. Schon nach wenigen Millisekunden tritt Recovery ein. In Bild 19 wird durch einen um 10% groesseren Heizpuls ein Quench ausgelost. Die sich schon nach kurzer Zeit einstellende konstante Quenchausbreitungsgeschwindigkeit erkennt man an den Schnittpunkten der Temperaturprofile mit den Linien $T=T_c$ und $T=T_{cs}(I)$, die den Temperaturbereich mit Current-Sharing begrenzen.

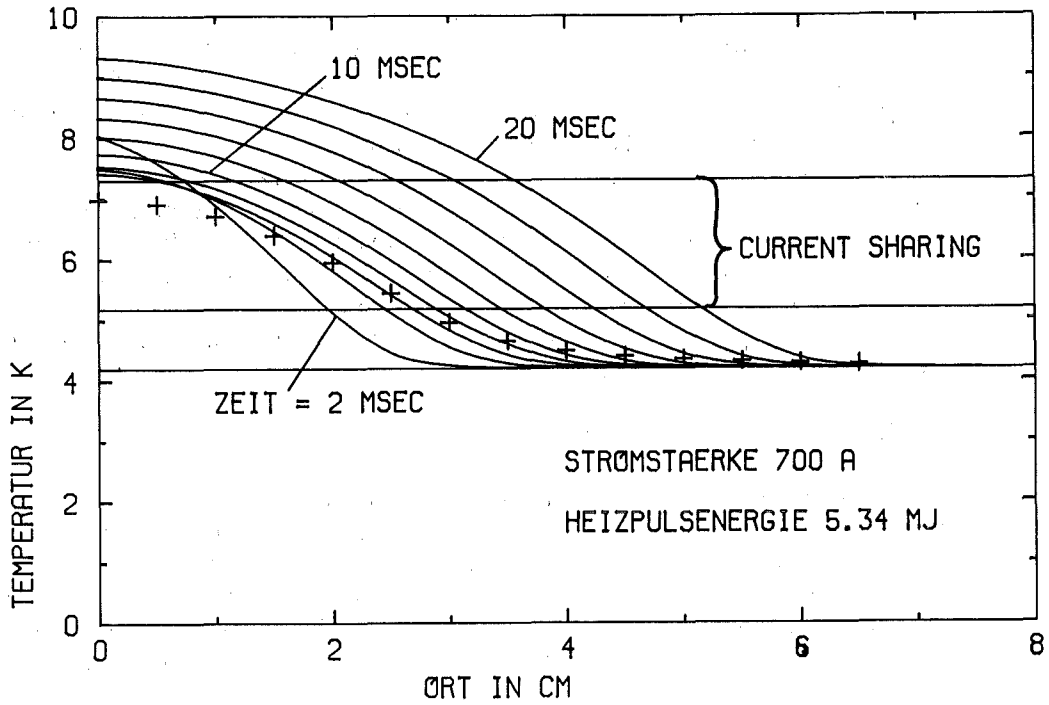


Bild 19:
Berechnete Temperaturprofile in Abständen von 2msec
Kreuze: Profil der 'minimum propagating zone'

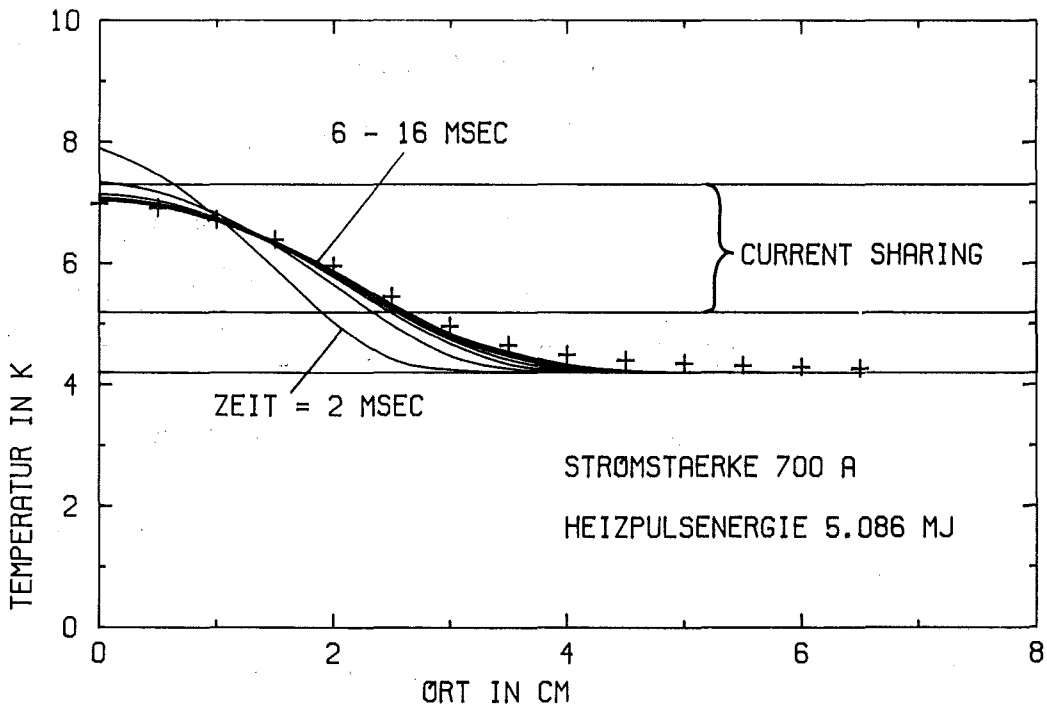


Bild 20:
Berechnete Temperaturprofile in Abständen von 2msec
Kreuze: Profil der 'minimum propagating zone'

In Bild 20 haben wir den interessanten Grenzfall vor uns, der experimentell so schwer zu realisieren ist. Die externe Stoerung hat gerade die Groesse der kritischen Heizpulsenergie, so dass sich ein fast stationaerer Temperaturverlauf einstellt. Dieser stimmt etwa mit dem Profil der 'minimum propagating zone' ueberein, das in einer unabhaengigen Rechnung und nur unter Benutzung des stationaeren Waermeuebergangs errechnet wurde. In den Bildern 18 bis 20 sieht man, wie die Aussage zu verstehen ist, dass 'kleinere' normaleitende Bereiche als die 'minimum propagating zone' Recovery, 'groessere' dagegen Quenchausbreitung zeigen.

Direkt mit dem Experiment vergleichbar ist der Verlauf der elektrischen Spannung ueber den Leiter. Die in Bild 21 dargestellten Kurven zeigen ein Verhalten, wie es auch experimentell festgestellt wurde (siehe Bilder 8 und 10). Wenn nur die Energie des Heizpulses genuegend nahe an der Grenze zwischen Recovery und Quench liegt, erhaelt man eine ziemlich lange Phase mit konstanter Spannung, bevor diese entweder auf Null zurueckgeht oder linear mit der Zeit anzuwachsen beginnt.

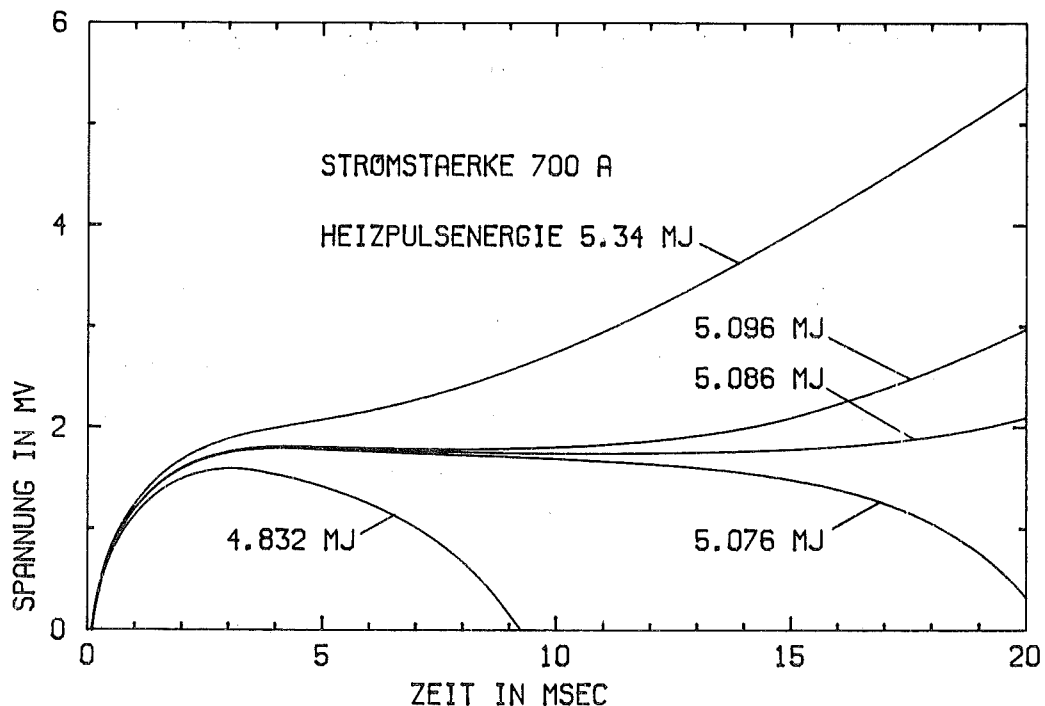


Bild 21:
Berechnete Spannungsverlaeuft ueber den Leiter

In den Grundzuegen scheint das Programm das Verhalten des Leiters also richtig wiederzugeben. Die Ergebnisse der Rechnungen muessen nun jedoch auch quantitativ mit den Messungen verglichen werden. Es erscheint mir jedoch nicht

sehr sinnvoll, berechnete und gemessene Spannungsverlaeuft bei derselben Heizenergie beispielsweise zur Deckung bringen zu wollen. Viele der unbekannt experimentellen Details koennen im Programm nur durch einfache Modelle wiedergegeben werden. Darueberhinaus ist etwa die Zeitdauer bis zum Recovery keine gut definierte Groesse, sie kann genuegend nahe an der Stabilitaetsgrenze beliebig gross werden, haengt dann aber von kleinen Aenderungen irgendwelcher Parameter sehr empfindlich ab. Ich moechte stattdessen globale, 'unempfindlichere' Groessen fuer die Ueberpruefung der Rechnungen heranziehen, das waeren die stationaeren Spannungen, die Quenchausbreitungs geschwindigkeiten und die kritischen Heizpulsenergien. Schliesslich sind dies auch die physikalisch interessanteren Groessen, da sie angeben

- wie gross (lang) eine normalleitende Zone hoechstens werden darf, wenn der Leiter noch Recovery zeigen soll,
- wie schnell der normalleitende Bereich waechst, wenn er die kritische Groesse (minimum propagating zone) einmal erreicht hat, und
- wieviel Energie von aussen zugefuehrt werden muss, um eine solche wachsende Zone zu erzeugen.

5.2 Stationaere Spannung

Diese wurde im Programm, das iterativ zu jeder Stromstaerke durch Variation der Heizpulsenergie die Stabilitaetsgrenze sucht (Programm QSD, siehe Anhang 6.5.3), bestimmt als die maximale Spannung einer normalleitenden Zone, die noch Recovery zeigt.

Sie stellt aber keine unabhaengige Ueberpruefung des Programms dar, da die Waermeleitfaehigkeit gerade so gewaehlt worden war, dass die Spannung ueber eine 'minimum propagating zone' so gross wie die gemessene stationaere Spannung wird. Sie bestaetigt jedoch die Interpretation des relativ stabilen Zwischenzustands konstanter Spannung, bevor entweder Quench oder Recovery eintritt, als 'minimum propagating zone'. Zur Verdeutlichung des grossen Einflusses der Waermeleitfaehigkeit auf die Groesse dieser stationaeren Zonen sind in Bild 22 auch die viel kleineren stationaeren Spannungen eingetragen, die sich bei Verwendung einer mittels des Wiedemann-Franz-Gesetzes aus $\rho(B)$ berechneten Waermeleitfaehigkeit ergeben.

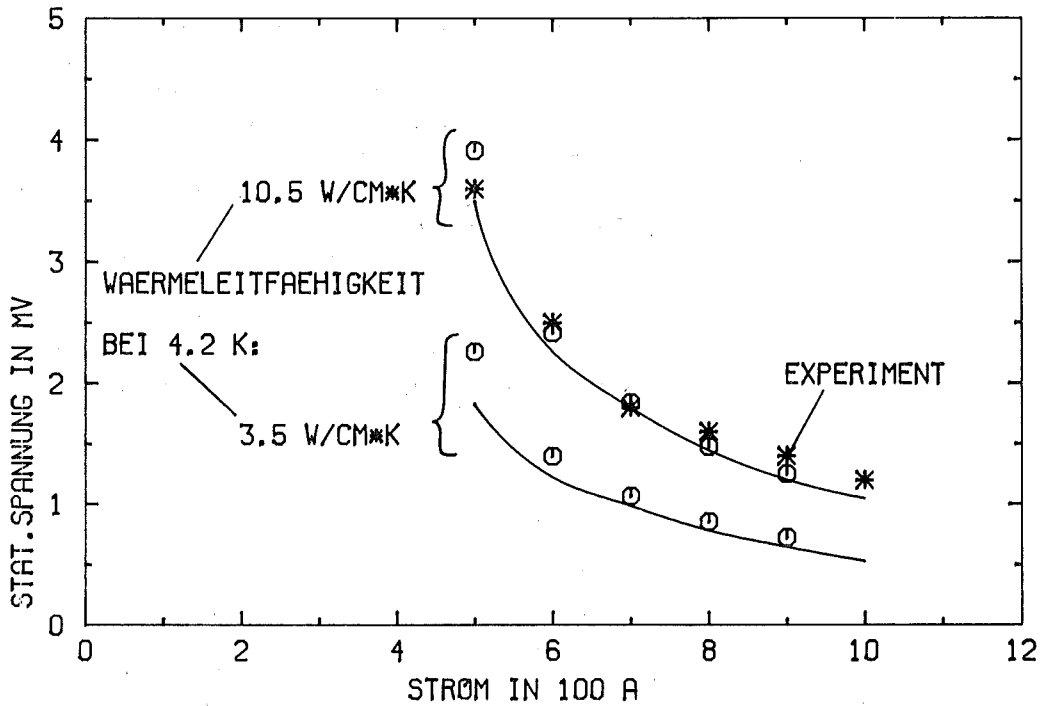


Bild 22:

Stationaere Spannung abhaengig von der Stromstaerke
Parameter: Waermeleitfaehigkeit der Matrix bei 4.2K
Sterne: experimentelle Werte
ausgezogene Linie: zeitabhaengige Computerrechnung
Kreise: Spannung ueber die 'minimum propagating zone'

5.3 Quenchausbreitungsgeschwindigkeit

Sie wurde im Programm sehr einfach bestimmt aus den Zeitpunkten, in denen zwei 7 beziehungsweise 8cm von der Heizung entfernte Ortselemente eine bestimmte Temperatur, beispielsweise die Current-Sharing-Temperatur $T_{cs}(I)$ erreichen. Hierbei ist es wichtig, dass diese beiden Ortselemente weit genug von der Heizung entfernt sind, so dass sich die konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit einstellen konnte. Es muss aber auch der Abstand zum auf 4.2K gehaltenen Ende des Leiters (in den hier wiedergegebenen Rechnungen bei $x=15\text{cm}$) noch gross genug sein, sonst ergeben sich vor allem bei kleinen Stromstaerken grosse Abweichungen, da sozusagen eine zusaetzliche (nicht reale) Kuehlung durch die Randbedingung wirksam wird.

Die so berechneten Ausbreitungsgeschwindigkeiten sind in guter Uebereinstimmung mit den gemessenen Werten. Wie man in Bild 23 sieht, ist dies jedoch nur durch die Einbeziehung des transienten Waermeuebergangs und der Waermekapazitaet der He-Grenzschicht moeglich.

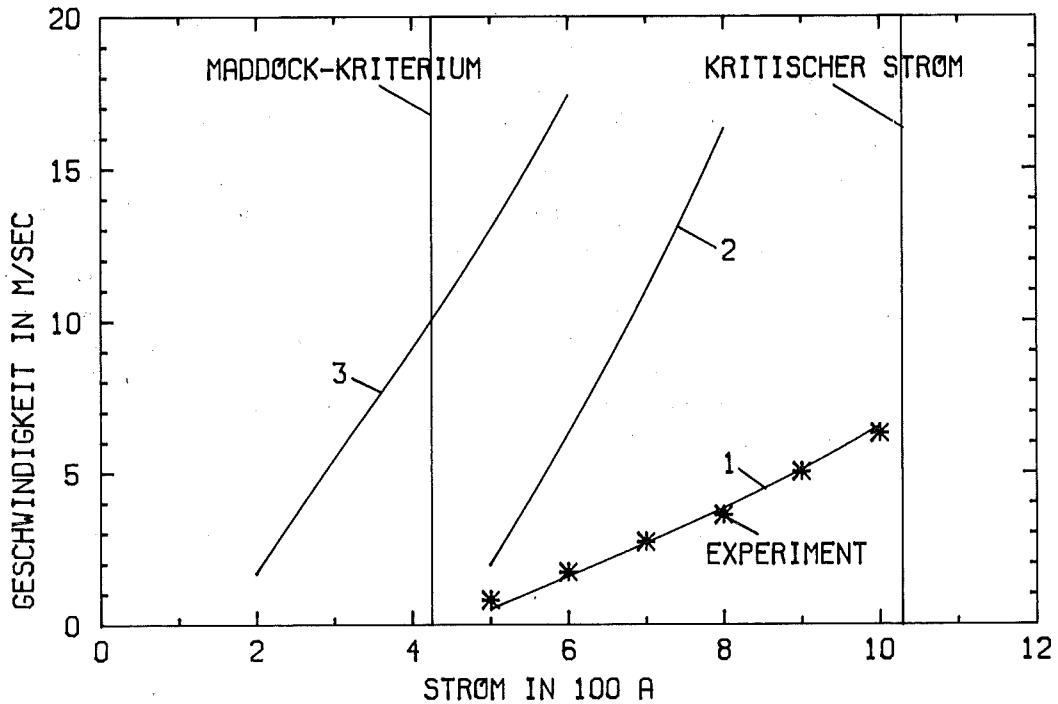


Bild 23:

Quenchausbreitungsgeschwindigkeit abhaengig vom Strom in Experiment (Sterne) und Computersimulation mit
1. dem angegebenen Modell fuer den Waermeuebergang,
2. nur dem stationaeren Waermeuebergang und
3. ohne radiale Kuehlung (nur Waermeleitung)

5.4 Kritische Heizpulsenergien

Im selben iterativen Programm wurde auch die zur Ausloesung eines Quenchs benoetigte Minimalenergie in Abhaengigkeit von der Stromstaerke bestimmt. Die Ergebnisse sind in Bild 24 mit den experimentell gewonnenen Werten verglichen. Die Uebereinstimmung ist recht gut, wenn man sich noch einmal klarmacht, wieviel Annahmen und Idealisierungen in die Rechnung eingegangen sind und wie schwierig es andererseits ist, im Experiment genau zu sagen, wieviel Energie in den Leiter selbst tatsaechlich gelangt ist. Wenn man jedoch nur mit dem stationaeren Waermeuebergang rechnet, findet man eine grosse Diskrepanz.

Die Unterschiede zwischen Experiment und Computerrechnung bei den niedrigen Stromstaerken sind darauf zurueckzufuehren, dass im Experiment nicht die gesamte thermische Energie aus der ohmschen Heizwicklung in den Supraleiter gelangt ist. Die andererseits zu grosse numerische Stabilitaet des Leiters bei grossen Stroemen laesst sich durch das fuer die Strom/Spannungs-Charakteristik des Supraleiters verwendete Modell erklaren (siehe Abschnitt 2.1). Ein realer

Supraleiter zeigt naemlich schon bei Annaeherung an den kritischen Strom kleine Spannungen (Flusskriechen), die ich in den Rechnungen hier vernachlaessigt habe. Diese staendige, wenn auch kleine Energiefreisetzung ist wegen der grossen Empfindlichkeit des Leiters nahe I_c ausreichend, um den Leiter in einen 'vorbelasteten' Zustand zu bringen, dass er dann schon bei kleineren Heizpulsen zum Quenchen kommt. Darueberhinaus ist klar, dass bei den hohen Stroemen die Details von Waermeerzeugung und Kuehlung in der unmittelbaren Umgebung des Heizers viel staerker zum Tragen kommen, als bei niedrigen Stromstaerken, bei denen die stationaeren Zonen eine groessere Ausdehnung haben, und diese unbekannt Details muessen im Programm durch einfache Modelle ersetzt werden.

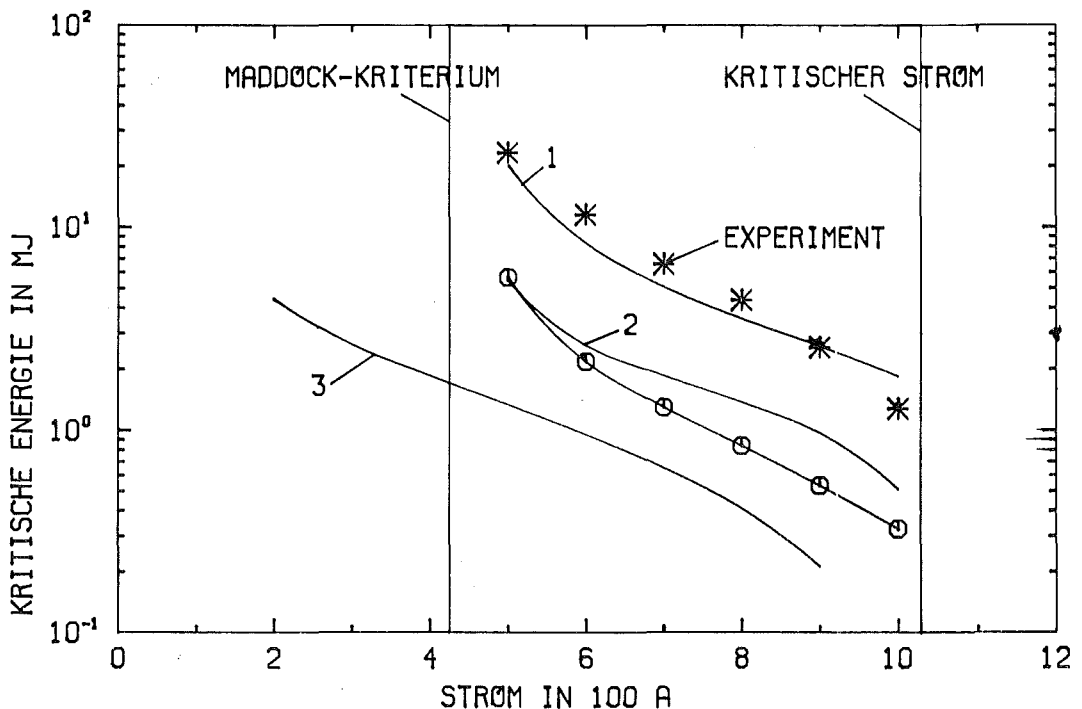


Bild 24:

Kritische Heizpulsenergie abhaengig von der Stromstaerke in Experiment (Sterne) und Computersimulation mit
 1. dem angegebenen Modell fuer den Waermeuebergang,
 2. nur dem stationaeren Waermeuebergang und
 3. ohne radiale Kuehlung (nur Waermeleitung)
 Kreise: Maximaler Energieinhalt des Leiters im Fall von Recovery bei vollem Waermeuebergang

Die gefundenen Heizpulsenergien sind etwa um einen Faktor 3-4 groesser als der maximale Energieinhalt des Leiters im Fall von Recovery, was ungefaehr der Energie einer 'minimum propagating zone' entspricht. Die in einer solchen Zone steckende Energie war als obere Grenze fuer die Energie einer Stoerung vorgeschlagen worden, die der Leiter ohne

Quench vertragen kann /8/. Die groesseren kritischen Heizpulsenergien sind einerseits auf den hohen transienten Waermeuebergang zurueckzufuehren, andererseits darauf, dass ein grosser Teil der thermischen Energie in der Helium-Grenzschicht und nicht im Leiter selbst gespeichert wird.

Wenn man die kritischen Heizpulsenergien bei 'vollem' Waermeuebergang mit denen bei stationaerer Kuehlung vergleicht, so erkennt man deutlich, wie entscheidend die Hinzunahme der beiden nichtstationaeren Waermeuebergangsmechanismen fuer die Erklaerung der Stabilitaet ist. Der Unterschied von einem Faktor 3 ist etwa ebenso gross wie der zwischen den mit stationaerem Waermeuebergang und ganz ohne Kuehlung berechneten Energien.

5.5 Zusammenfassende Bemerkungen

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass durch ein numerisches Programm das zeitliche Verhalten eines badgekuehlten, Kupfer-stabilisierten Supraleiters gut simuliert werden kann. Mit diesem Programm koennen sowohl die Ausbreitungsgeschwindigkeiten normalleitender Zonen als auch die zur Quenchausloesung mindestens benoetigten Energien in ausreichender Uebereinstimmung mit dem Experiment berechnet werden.

Ich moechte nun noch einmal die zur Erreichung dieses Ziels notwendigen Annahmen rekapitulieren und sich daraus ergebende Konsequenzen kurz ansprechen:

Durch die eindimensionale Naeherung werden die transversalen, thermischen und elektromagnetischen Diffusionsprozesse ueber den Leiterquerschnitt vernachlaessigt. Es bleibt nur eine longitudinale Waermeleitungsgleichung mit gemittelten Materialparametern uebrig. Aus diesem Grunde ist das Programm besonders fuer die Analyse von im wesentlichen eindimensionalen Situationen geeignet. Bei Magneten mit kompakter Wicklung, die nur aussen durch Helium gekuehlt wird, ist diese Bedingung schlechter erfuehrt als beispielsweise bei Leiterkonzepten mit einer Unterteilung in mehrere, einzeln gekuehlte 'strands', wie sie fuer die naechste Generation grosser Magnete geplant ist.

Der Waermeuebergang ans Helium besteht aus drei Anteilen. Die stationaere Kuehlcharakteristik ist grundsaeztlich bekannt, die Zahlenwerte haengen jedoch von der speziellen Kuehlgeometrie und anderen Faktoren ab. Der transiente Waermeuebergang in der Anfangsphase ist vom Kapitza-Widerstand des Materials und vom Zustand der Oberflaechen abhaengig. Unsicher ist ausserdem die Groesse

der Waermekapazitaet der Helium-Grenzschicht, dabei stellt diese den Hauptanteil der 'thermischen Traegheit' des gesamten Leiters. Auf diesem Gebiet kann also noch einige Arbeit geleistet werden, damit die Eingabedaten fuer Stabilitaetsrechnungen mit der notwendigen Genauigkeit bekannt sind.

Der hohe, fuer die Waermeleitfaehigkeit der Kupfermatrix im Magnetfeld verwendete Zahlenwert kann im Rahmen dieser Arbeit nur als Hypothese vorgestellt werden, die allerdings ausgezeichnet in der Lage ist, die verschiedenen gemessenen Groessen einschliesslich ihrer Abhaengigkeit von der Stromstaerke im Leiter vorherzusagen. Ob das Wiedemann-Franz'sche Gesetz tatsaechlich die Variation von thermischer und elektrischer Leitfaehigkeit mit dem Magnetfeld nicht richtig beschreibt, indem beispielsweise durch das Magnetfeld die thermische Leitfaehigkeit nicht im selben Masse herabgesetzt wird wie die elektrische, sollte unbedingt in direkten Waermeleitfaehigkeitsmessungen herausgefunden werden. Eine solche Untersuchung scheint mir auch deswegen wichtig, da die hier vorgestellten Rechnungen ergeben haben, dass durch die erhoehrte Waermeleitfaehigkeit die Stabilitaet des Leiters um etwa den gleichen Zahlenfaktor zunimmt.

Zuletzt moechte ich noch auf die Wichtigkeit der Bestimmung der Groesse der in einem realen Magneten freigesetzten Energiebetrage hinweisen. Mit dem hier vorgestellten Programm lassen sich zwar die zum Quenchen eines Leiters benoetigten Energien berechnen, Aussagen ueber die einem Magneten zumutbare Stromstaerke lassen sich erst daraus gewinnen, wenn bekannt ist, wie grosse Stoerungen mit einiger Wahrscheinlichkeit beim Betrieb des Magneten zu erwarten sind.

6. Anhang

6.1 Eindimensionale Naeherung

Eine eindimensionale Naeherung setzt voraus, dass die Ausgleichsprozesse ueber den Leiterquerschnitt genuegend schnell ablaufen. Betrachtet werden muessen hier sowohl Waermeleitung als auch elektromagnetische Umverteilungsprozesse von Strom und Magnetfeld. Eine genaue Untersuchung dieser gekoppelten Diffusionsgleichungen ist mir nicht moeglich /35/, ich moechte deshalb nur eine Abschaetzung der jeweiligen Zeitkonstanten angeben.

Ohmsche Verlustwaerme entsteht zunaechst vor allem in den Filamenten, die noch den groessten Teil des Stromes tragen. Damit der ganze Kupferquerschnitt mit seiner guten longitudinalen Waermeleitfaehigkeit zum Tragen kommt, muss die Waerme wegen der speziellen Verteilung der Filamente ueber den Leiterquerschnitt (siehe Bild 3) erst etwa 0.05cm in radialer Richtung transportiert werden. Die thermische Diffusivitaet des Kupfers bei 5K betraegt etwa

$$D_{th} = \frac{\kappa_{mat}(T)}{C_{mat}(T)} = 10^4 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \quad \text{bei } T = 5\text{K}$$

Die Diffusionszeit fuer $l=0.05\text{cm}$ laesst sich also abschaetzen zu

$$t = \frac{l^2}{4D_{th}} = 0.06 \mu\text{sec}$$

Dies ist so klein, dass es sehr gut berechtigt erscheint, mit einer konstanten Temperatur ueber den gesamten Leiterquerschnitt zu rechnen.

Die magnetische Diffusionszeit gibt nun an, wie lange der Umverteilungsprozess bis zu einer homogenen Stromdichte im ganzen Querschnitt etwa dauert. Wenn der Strom gerade aus den Filamenten herausgetrieben wurde, steht ihm zunaechst nur ein kleiner Bruchteil des gesamten Kupferquerschnitts zur Verfuegung, die ohmschen Verluste sind dementsprechend hoeher. Die magnetische Diffusivitaet ist wegen der hohen Leitfaehigkeit des Kupfers viel kleiner als die thermische Diffusivitaet.

$$D_{\text{mag}} = \frac{\text{Rho}(B)}{\mu_0} = 2 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$$

Die benoetigte Zeit fuer eine Diffusionsstrecke von 0.05cm ergibt sich daraus zu

$$t = \frac{l^2}{4D_{\text{mag}}} = 0.3 \text{ msec}$$

Dies liegt noch unterhalb der Zeitskala der untersuchten Phaenome laengs des Leiters. Der Anstieg der Gesamtspannung nach dem Heizpuls geschieht beispielsweise in etwa 1 Millisekunde, das Durchlaufen des ganzen Current-Sharing-Temperaturbereichs an einer festen Stelle beim Quench dauert einige msec. Diese Vorgaenge werden also bei Einbeziehung der radialen Umverteilungsprozesse nur wenig verlangsamt, es ist deshalb zulaessig, von vornherein mit der homogenen Stromverteilung ueber den Querschnitt zu rechnen.

Derartige Ueberlegungen lassen sich natuerlich auch auf ein einzelnes Filament anwenden. Mit der magnetischen Diffusionszeit hat man wegen des hohen Widerstands im normalleitenden Zustand keine Probleme. Die thermische Diffusionszeit ergibt wegen der schlechten Waermeleitfaehigkeit eine obere Schranke fuer den Durchmesser eines Filaments. Bei einem dynamisch stabilen Leiter /36/ ist dieses Kriterium jedoch bereits erfuehlt.

6.2 Guete der Heizung

In diesem Abschnitt moechte ich eine Vorstellung davon vermitteln, welcher Anteil der Heizpulsenergie wirklich in den Leiter gelangt und wie schnell dies geschieht. Dazu verwende ich das in Bild 25 dargestellte einfache Modell.

Da das Kupfer die Waerme so gut leitet, soll fuer diese Betrachtungen angenommen werden, dass es auf Badtemperatur fixiert ist. Die Heizung ist vom Kupfer durch eine duenne, schlecht waermeleitende Schicht getrennt, die sich real schon daraus ergibt, dass auch der Heizdraht selbst eine endliche Dicke (0.05mm) hat und wegen seines hohen elektrischen Widerstands Waerme nur schlecht leitet. Fuer diese Schicht nehme ich eine Dicke dx von 0.03mm bei Werten fuer die Waermeleitfaehigkeit K von $1\text{mW/cm}^*\text{K}$ und spezifische Waerme C von $5\text{mJ/cm}^*3^*\text{K}$ an, wie sie auch fuer den isolierenden Kunststoff auf der anderen Seite der Heizung gelten sollen. Durch die duenne Trennschicht ist die Waerme schnell diffundiert, die benoetigte Zeit betraegt etwa 11 Mikrosekunden. Zu groesseren Zeiten herrscht ein etwa lineares Temperaturprofil in der Grenzschicht, der

Waermefluss ist daher

$$Q_1 = K \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{K}{\Delta x} \cdot \Delta T$$

Auf dieser Seite wird die Heizleistung also mit einem Waermeuebergangskoeffizienten von K/dx abgefuehrt. Auf der anderen Seite haben wir Waermeleitung in ein halbusendlich ausgedehntes Medium, der Waermestrom laesst sich hier als Integral darstellen (Formel: Anhang 6.6).

$$Q_2(t) = \sqrt{\frac{K \cdot c}{\pi}} \cdot \int_0^t \frac{f(t') \cdot dt'}{\sqrt{t-t'}} \quad \text{mit} \quad f(t) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

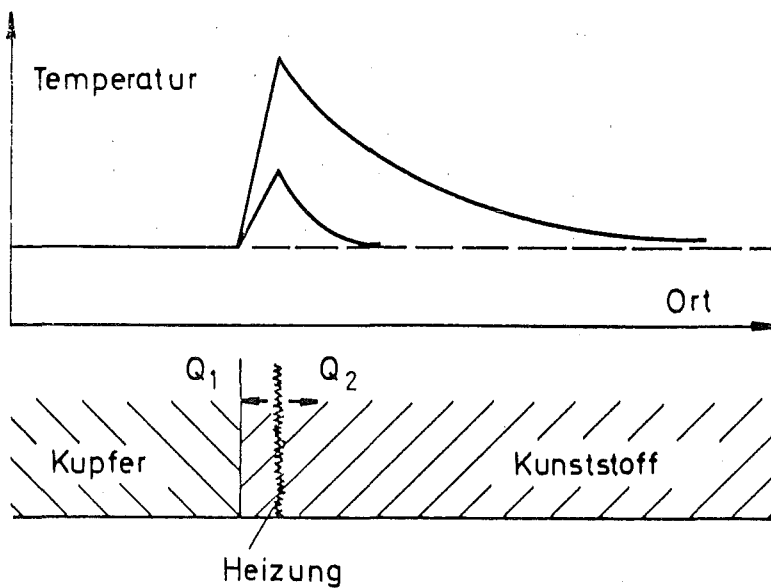


Bild 25:
Modell fuer den Waermeuebergang
von der Heizung zum Leiter

Ich moechte die durch Q_1 und Q_2 in Leiter und isolierenden Kunststoff insgesamt abgegebenen Energien E_1 und E_2 vergleichen. Dazu gebe ich willkuerlich einen linearen Temperaturanstieg von $10K/msec$ in der Heizung vor. Die Resultate sind in der Tabelle 4 dargestellt:

Tabelle 4:
Verteilung der Heizenergie auf Leiter und Isolation

Temperaturverlauf in der Heizung: $dT/dt = 10K/msec$
insgesamt transportierte Energie:

$$E_{1/2}(t) = \int_0^t Q_{1/2}(t') \cdot dt'$$

Zeit msec	dT K	E1(Leiter) mJ/cm**2		E2(Isolation) mJ/cm**2	
0.05	0.5	0.0042	... 42%	0.0059	... 58%
0.1	1.0	0.0167	50%	0.0168	50%
0.2	2.0	0.0667	58%	0.0476	42%
0.4	4.0	0.267	66%	0.135	34%
0.8	8.0	1.067	74%	0.381	26%

Diese Rechnung kann wegen ihres starken Modellcharakters nicht verwendet werden, um quantitativ auszurechnen, welcher Anteil der Heizenergie beim Experiment im Leiter ankommt. Sie macht aber deutlich, dass zumindest in der Anfangsphase, und die ist fuer die Stabilitaet des Leiters entscheidend, ein nicht zu vernachlaessigender Anteil der Energie auch in den zur Waermeisolation gedachten Kunststoff hineindiffundiert.

6.3 Numerisches Verfahren

Die zu approximierende Differentialgleichung lautet

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ A \cdot K(\tau) \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right\} + Z(T,x,t) = A \cdot C(\tau) \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

Wir betrachten einzelne Ortselemente X_i im Abstand dX . Die bekannten Temperaturen in der 'alten' Zeitschicht werden bezeichnet durch $T(X_i,t)=T_i$. Die zu berechnenden Temperaturen in der 'neuen' Zeitschicht seien $T(X_i,t+dt)=T_i'$. Ausserdem haben wir noch eine Schaetzung der 'neuen' Temperaturen T_i' . Der Waermeleitungsterm laesst sich dann in der 'alten' Zeitschicht so ausdruecken:

$$A \cdot (K(T_{i+1}, T_i) \cdot (T_{i+1} - T_i) / dX - K(T_i, T_{i-1}) \cdot (T_i - T_{i-1}) / dX) / dX$$

T_{i-1} in dieser Gleichung ist beispielsweise zu lesen als die Temperatur am Ortselement mit dem Index $(i-1)$ und nicht als Temperatur an der Stelle X_i , vermindert um 1. $K(T_i, T_{i+1})$ soll die zu der zwischen T_i und T_{i+1} gemittelten Temperatur gehoerende Waermeleitfaehigkeit sein. Eine andere, numerisch

aufwendigere Moeglichkeit waere es, die zu den Temperaturen gehoerigen Leitfaehigkeiten $K(T_i)$ und $K(T_{i+1})$ selbst zu mitteln.

Beim Crank-Nicolson-Verfahren wird dieser Ausdruck fuer die 'alte' und die 'neue' Zeitschicht angeschrieben und gemittelt, das ergibt das zu loesende Gleichungssystem fuer die T_i'' . Um eine beliebige Temperaturabhaengigkeit fuer $K(T)$ zulassen zu koennen, setze ich dort fuer die unbekanntnen T_i'' deren Schaetzwerte T_i' ein. Ausserdem bilde ich fuer die Waermeleitfaehigkeit selbst noch einmal das Mittel zwischen den Zeitschichten, ich ersetze also $K(T_i, T_{i+1})$ und $K(T_i', T_{i+1}')$ durch $K(T_i, T_{i+1}, T_i', T_{i+1}')$. Fuer die spezifische Waerme C und die anderen temperaturabhaengigen Groessen, die jetzt in Z stecken, ist es einfacher, sie werden an der Stelle X_i aufgrund der zwischen T_i und T_i' gemittelten Temperatur berechnet. Zur Vereinfachung der Ausdruecke vereinbare ich jetzt:

$$K_i = K(T_i, T_{i+1}, T_i', T_{i+1}') \cdot A / (2 \cdot dx^2)$$

$$C_i = C(T_i, T_i') \cdot A / dt$$

$$Z_i = Z(T_i, T_i', X_i, t + dt/2)$$

Das verwendete Diskretisationsschema ist in Bild 26 graphisch dargestellt. Die Position des Quadrats fuer K_i beispielsweise soll andeuten, dass es aus der mittleren Temperatur von T_i, T_{i+1}, T_i' und T_{i+1}' berechnet wurde.

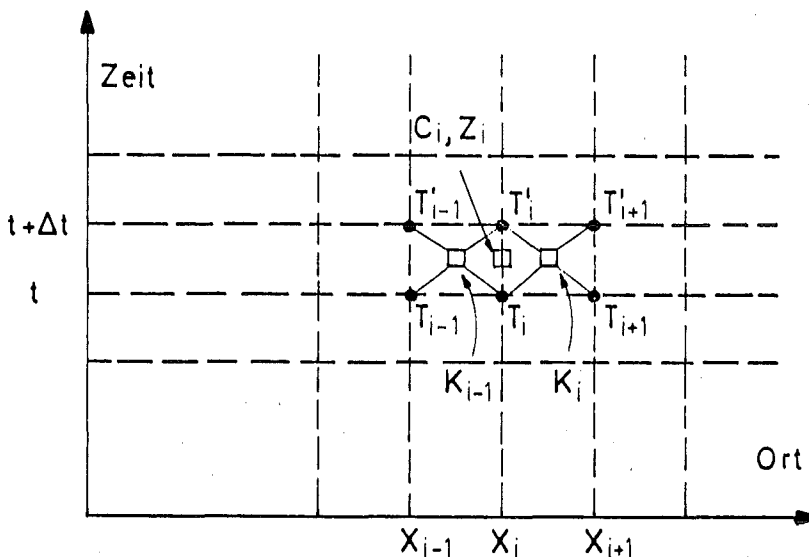


Bild 26:
Diskretisationsschema
zur numerischen Approximation

In dieser Terminologie sieht die Waermeleitungsgleichung, aufgeloeset nach den 'neuen' Temperaturen, dann so aus:

$$-K_{i-1} \cdot T_{i-1}' + (C_i + K_{i-1} + K_i) \cdot T_i' - K_i \cdot T_{i+1}' = \\ = K_{i-1} \cdot T_{i-1} + (C_i - K_{i-1} - K_i) \cdot T_i + K_i \cdot T_{i+1} + Z_i = P_i$$

wodurch die Inhomogenitaeten P_i definiert worden sind. Nun muessen noch die Randbedingungen beruecksichtigt werden. Fuer das auf konstanter Temperatur gehaltene Ende des Leiters gilt $T_{n+1} = T_{n+1}' = T_b$. Das Gleichungssystem braucht also nur fuer $i=1$ bis n geloest zu werden, der Term mit T_{n+1}' in der n . Gleichung wird auf die rechte Seite gebracht.

$$P_n(\text{neu}) = P_n(\text{alt}) + K_n \cdot T_b$$

Aus Symmetriegrunden braucht nur eine 'halbe' Zone berechnet zu werden. Deshalb gilt $T_1 = T_0$ und $T_1' = T_0'$. Dadurch aendert sich die 1. Gleichung zu:

$$(C_1 + K_1) \cdot T_1' - K_1 \cdot T_2' = (C_1 - K_1) \cdot T_1 + K_1 \cdot T_2 + Z_1 = P_1(\text{neu})$$

Das Gleichungssystem ist jetzt in Matrixschreibweise tridiagonal und laesst sich deshalb verhaeltnismaessig leicht aufloesen /22/. Man bestimmt zunaechst die Hilfsgruessen R_i und Q_i .

$$R_1 = -K_1 / (C_1 + K_1) \\ Q_1 = P_1 / (C_1 + K_1)$$

$$\text{und fuer } i=2 \text{ bis } n \\ R_i = -K_i / (C_i + K_i + K_{i-1} + K_{i-1} \cdot R_{i-1}) \\ Q_i = (P_i + K_{i-1} \cdot Q_{i-1}) / (C_i + K_i + K_{i-1} + K_{i-1} \cdot R_{i-1})$$

Die 'neuen' Temperaturen ergeben sich daraus zu $T_n' = Q_n$ und fuer $i=n-1$ bis 1 $T_i' = Q_i - R_i \cdot T_{i+1}'$

Wenn diese 'neuen' Temperaturen sich noch stark von der letzten Schaetzung unterscheiden, koennen sie als verbesserte Schaetzwerte betrachtet werden und das Verfahren wird iteriert. Andernfalls ist die Rechnung fuer diesen Zeitschritt beendet.

Ob dies Verfahren fuer die Praxis brauchbar ist, haengt vom Gesamtfehler ab, der sich aus 2 Anteilen zusammensetzt /23/, Diskretisations- und Stabilitaetsfehler. Der Stabilitaetsfehler kommt durch das Aufschaukeln kleiner, in der numerischen Rechnung unvermeidlicher Fehler zustande, die numerische Loesung ist dann nicht die exakte Loesung der Differenzgleichungen. Bei einem stabilen Verfahren werden

die einzelnen Fehler gedämpft an die nächste Zeitschicht weitergegeben, in diesem Sinne ist das verwendete Crank-Nicolson-Verfahren selbst bei beliebig grossen Zeitschritten stabil.

Der Unterschied zwischen der exakten Lösung der Differenzgleichungen und der gesuchten Lösung der Differentialgleichung in den Gitterpunkten wird als Diskretisationsfehler bezeichnet. Er hängt vom verwendeten Diskretisationsschema ab. Bei einem mit der Differentialgleichung kompatiblen Differenzenverfahren geht er gegen Null, wenn die Schrittweiten gegen Null gehen. Für das Crank-Nicolson-Verfahren kann dies nachgewiesen werden. Die Grösse dieser Fehler ist in Bild 14 und Tabelle 3 (Seite 32) schon dargestellt worden, denn in diesem Sonderfall (konstantes K und C , keine Inhomogenitäten) benötigt das Verfahren keine Iterationen.

Zu diesen gut bekannten Eigenschaften des Crank-Nicolson-Verfahrens kommen in meinem Fall noch die des Iterationsverfahrens dazu. Dadurch könnte das gesamte Verfahren sogar numerisch instabil werden, wenn nämlich die errechnete Temperaturverteilung eine noch schlechtere Näherung darstellt als der vorherige Schätzwert. Die Zahl der zur Konvergenz bei verschiedener Zeitschrittgrösse benötigten Iterationen wurde 'experimentell', das heisst durch Probieren, bestimmt. Es zeigte sich, dass mit den aus Gründen des Diskretisationsfehlers verlangten Zeitschritten diese Konvergenz sehr schnell erfolgt.

Bei diesen Zeitschrittgrössen ist auch das physikalisch sehr einsichtige Argument erfüllt, dass die Änderung der Temperatur über ein Ortselement während eines Zeitschritts so klein ist, dass die Materialparameter zur mittleren Temperatur eine gute Näherung für die mittleren Materialparameter darstellen.

6.4 $E*Q$ -Kriterium

Ich möchte zunächst verdeutlichen, wie man dies Kriterium für konstante Wärmeflüsse herleiten kann /3/, und es dann auf einen Fall zeitlich variabler Wärmeleistungen anwenden. Als Modell betrachtet man Wärmeleitung in ein halbunendliches Medium hinein. Die Temperaturdifferenz zur geheizten Oberfläche wird in der transienten Phase durch den Kapitza-Widerstand bestimmt, die Ausbreitung der Energie im Helium geschieht durch Wärmediffusion. Bei konstantem Wärmefluss Q steigt die übertragene Energie linear mit der Zeit. Sie sei gleichmässig in einer Schicht der Dicke l verteilt.

$$l(t) = \sqrt{4t \cdot \frac{K}{C}}$$

Man bestimmt nun das Ende des transienten Waermeuebergangs, den Zeitpunkt t_1 , durch die Forderung, dass die Energie pro Volumen $E(t)/l(t)$ einen bestimmten Wert L haben soll, etwa den der Verdampfungsenthalpie. Es ergibt sich, dass zu diesem Zeitpunkt gilt:

$$E(t_1) \cdot Q = 4L^2 \cdot \frac{K}{C}$$

Nun gebe ich einen Temperaturverlauf vor, naemlich konstante Anstiegsrate A . Dann laesst sich der zeitliche Verlauf der Waermeleistung (Formel: Anhang 6.6), daraus die uebertragene Energie und schliesslich der Zeitpunkt t_2 bestimmen, in dem das obige $E \cdot Q$ -Kriterium erfuehlt ist. Man erhaelt:

$$Q(t) = \sqrt{\frac{K \cdot C}{\pi}} \cdot \int_0^t \frac{A \cdot dt'}{\sqrt{t-t'}} = 2A \cdot \sqrt{\frac{K \cdot C \cdot t}{\pi}}$$

$$E(t) = \int_0^t Q(t') \cdot dt' = \frac{4A}{3} \cdot \sqrt{\frac{K \cdot C}{\pi}} \cdot t^{3/2}$$

Aus $E(t_2) \cdot Q(t_2) = 4 \cdot L^2 \cdot K/C$ folgt dann

$$t_2 = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{L}{A \cdot C}$$

Zu diesem Zeitpunkt bestimme ich die Energie pro Volumen in der Grenzschicht. Es ergibt sich

$$\frac{E(t_2)}{l(t_2)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot L \approx 0.82 \cdot L$$

Dies stimmt hinreichend mit dem geforderten Wert $1 \cdot L$ ueberein, wenn man sich noch einmal die benutzte Annahme klarmacht, dass die uebertragene Energie gleichmaessig in der Diffusionsschichtdicke verteilt sei.

6.5 Computerprogramme

6.5.1 Steuerprogramm QSC.CNTL

Alle Programme sind zur Verwendung von einem TSO-Terminal aus geschrieben (time sharing operation), was besonders leichtes und uebersichtliches Variieren der Parameter erlaubt, die teils vom Terminal eingegeben werden, teils auf TSO-Dateien stehen. Das Oberprogramm QSC.CNTL enthaelt die Steuerbefehle und die Daten. Es ruft das auszufuehrende Hauptprogramm QSC.FORT auf, die benoetigten Unterprogramme ICSL, CLEIT, CFILM, QHELI und EXHZG stehen in der Bibliothek OBLIB.OBJ. Die Temperaturverteilung am Anfang wird von QSC.TVERT0.DATA geholt, am Ende wird sie wieder nach QSC.TVERT1.DATA gespeichert. Bilder von Temperaturverteilungen, der Verlauf von elektrischer Spannung, der verschiedenen Waermeleistungen und Energien werden durch das Unterprogramm PLOTA auf QSC.BILD.DATA abgelegt und koennen von TSO aus mit dem Tektronix-Bildschirm betrachtet werden.

```
//ITP622C0 JOB (0622,130,POC7B),RIES,NOTIFY=ITP622,TIME=3
// EXEC FGCLG
//C.SYSPRINT DD SYSOUT=A
//C.SYSIN DD DSN=TSO622.QSC.FORT,DISP=SHR
//L.DD1 DD DSN=TSO622.OBLIB.OBJ,DISP=SHR
//L.SYSIN DD *
  INCLUDE DD1(ICSL,CLEIT,CFILM,QHELI,EXHZG)
//G.FT06F001 DD SYSOUT=A
//G.FT07F001 DD DSN=TSO622.QSC.BILD.DATA,DISP=SHR
//G.FT03F001 DD DSN=TSO622.QSC.TVERT0.DATA,DISP=SHR
//G.FT04F001 DD DSN=TSO622.QSC.TVERT1.DATA,DISP=SHR
//G.SYSIN DD *
BERECHNEN DER ZEITLICHEN LEITERENTWICKLUNG DURCH PROGRAMM QSC...23.10.78
SCHRITTWEITE/CM, ZAHL DER ORTSELEMENTE (KLEINER= 150)
  0.1          150
ZEITSCHRITTLAENGE/SEC, MAX.ZEIT
  10.0 E-06 10.0 E-03
QUERSCHNITT/CM**2, GEK. UMFANG/CM, MATRIX: SUPRALEITER-VERHAELTNIS
  0.0343      0.525      5.0
STROMSTAERKE/A
  700.0
HEIZENERGIE/W*SEC
  2.416E-03
ZAHL DER GEH.ORTSELEMENTE, ANSTIEGS- UND ABKLINGZEIT DER HEIZG/SEC
  1 0.2 E-03 1.0 E-03
ZAHL DER UNGEKUEHLTEN ORTSELEMENTE AN DER HEIZUNG
  5
ZEITGRENZE/SEC, ORTSELEMENTE ZUR PRUEFUNG OB RECOVERY ODER QUENCH
  1.5 E-03      70      80
GENAUGIGKEIT/K, MAX.ITERATIONSZAHL
  0.001          20
WAERMELEITFAEHIGKEIT BEI 4.2K IN W/(CM*K)
  10.5
SPEZIFISCHER WIDERSTAND DER MATRIX IN OHM*CM
  2.5 E-08
KRIT.STROMDICHT BEI 4.2K IN A/CM**2, KRIT.TEMPERATUR IN K
  1.8 E+05 7.3
KOEFFIZIENTEN FUER DIE SPEZIFISCHE WAERME DER MATRIX/(W*SEC/K*CM**3)
  9.612E-05 6.661E-06
KOEFFIZIENTEN FUER DIE SPEZIFISCHE WAERME DES SUPRALEITERS UNTERHALB UCU
  3.600E-04 5.592E-05
KOEFFIZIENTEN FUER DIE SPEZIFISCHE WAERME DES SUPRALEITERS OBERHALB UCO
  1.314E-03 1.410E-05
TEMPERATUREN FUER DEN SUPRALEITER/NORMALLEITER-UEBERGANG
  7.1      7.5
KOEFFIZIENTEN FUER DIE SPEZ.WAERME DES HE-FILMS/OBERFLAECHE
  0.55 E-03-0.055E-03 0.055E-03
TRANSIENTER WAERMEUEBERGANG/(W/CM**2*K), MAX.E*Q/(J/CM**2*W/CM**2)
  5.0      2.5 E-03
TEMPERATURDIFFERENZEN/K FUER STATIONAEREN WAERMEUEBERGANG
  0.6      1.5      8.0
DAZU GEHOERIGE WAERMEFLUESSE/(W/CM**2)
```

0.7 0.15 0.29
ZEITSCHRITTE, BEI DENEN GEPLOTTET WERDEN SOLL
100 200 300 400 500
600 700 800 900 1000
ORTSELEMENTE, BEI DENEN DER TEMPERATURVERLAUF GEPLOTTET WERDEN SOLL
1 10 20 30 40
50 60 70 80 90
GRENZEN FUER DIE PLOTS(TEMPERATUR, SPANNUNG, LEISTUNG, ENERGIE)
0.0 10.0 0.0 2.0 E-03
-0.5 1.0 0.0 5.0 E-03
IDENTIFIKATION UND TITEL DER PLOTS
1000TEMPERATURPROFIL(X) T0=0 DT=1MSEC
2000TEMPERATURVERLAUF(T) ORTSELEMENT(1,10,20,30,...90)
3000ELEKTRISCHE SPANNUNG(T) 700 A 4.832 MJ
4000WAERMELEISTUNGEN(T) LEITER, FILM, HELIUM, OHMSCH, HEIZUNG, RAND
5000ENERGIEBILANZ(T)

/*
//

6.5.2 Hauptprogramm QSC.FORT und Unterprogramme

Um das Verstaendnis des Programms etwas zu erleichtern, moechte ich hier kurz die Namen der wichtigsten Variablen auflisten und erlaeuern.

Felder:

U,UA,UN Temperaturverteilungen (alt,neu)
K mittlere Waermeleitfaehigkeit, multipliziert mit $A/(2*dx**2)$
C mittlere spezifische Waerme, multipliziert mit A/dt
C1,C2 spezifische Waermen von Leiter und He-Film
Q1 Waermeuebergang ans Helium pro Laenge
Q2 aufsummierter Waermeuebergang, proportional zur Energie
R1,R2 Hilfsfelder zur Loesung des Gleichungssystems
TEXT Feld fuer Kommentar zur Erlaeuterung der Eingabe
JBLD Zeitschritte, in denen geplottet werden soll
UBLD Temperaturverteilungen in diesen Zeitschritten
XBLD dazugehoerige Ortskoordinaten
IVERL Ortselemente, bei denen der Temperaturverlauf geplottet wird
UVERL Temperaturverlaeufer in diesen Ortselementen
TVERL dazugehoerige Zeitkoordinate
VVERL Verlauf der elektrischen Spannung
EVERL Energien abhaengig von der Zeit
6 Komponenten wie ELEIT,EFILM,EHELI,EOHM,EHEIZ,ERAND
PVERL Waermeleistungen, analog EVERL
TITEL Beschriftungstext fuer die Plots

einzelne Variablen:

ALEIT Querschnittsflaechen des Leiters
ULEIT gekuehlter Umfang des Leiters
ALPHA Kupfer/Supraleiter-Flaechenverhaeltnis
DX,DT Ortsschrittweite, Zeitschrittlaenge
IG Zahl der Ortselemente
TMAX,JMAX maximale Zeit, Zahl der gerechneten Zeitschritte
STROM Stromstaerke
EHZ externe Heizpulsenergie
IEHZ Zahl der geheizten Ortselemente
TANST,TABKL Anstiegs- und Abfallzeit der Heizung
TAN,TAB Zahl der Zeitschritte fuer Anstieg und Abfall
IISO Zahl der ungekuehlten Ortselemente an der Heizung
TGR fruehestens zu diesem Zeitpunkt erfolgt eine Pruefung
auf Recovery (alle Ortselemente unter UCUSH)
IGR1,IGR2 Ortselemente zur Bestimmung der Geschwindigkeit
EPSMX groesste erlaubte Aenderung der Temperatur
zum Abbrechen der Iterationen
NITMX maximale Zahl von Iterationen
KLEIT Faktor zur Bestimmung der Waermeleitfaehigkeit
aus der Temperatur
RHO Restwiderstand der Matrix, geteilt durch Amat
UBMIN,UBMAX Schranken fuer Temperaturbilder
VBMIN,VBMAX Spannung
PBMIN,PBMAX Waermeleistungen

EBMIN,EBMAX Energien
JANF Anfangszeit-schritt-Nummer
VLEIT Spannung ueber den Leiter
ELEIT Energie im Leiter selbst
EFILM im Helium-Film
EHELI ins Kuehlmittel abgegebene Energie
EOHM ohmsch erzeugte Energie
EHEIZ Energie aus der externen Heizung
ERAND in die Randbedingung abgeflossene Energie
PLEIT,PFILM,PHELI,POHM,PHEIZ,PRAND Waermeleistungen, analog
UCUSH Current-Sharing-Temperatur
UKRIT kritische Temperatur des Supraleiters
VMAX Maximum von VLEIT
ELMAX Maximum von ELEIT

Unterprogramme:

ICSL berechnet den kritischen Strom zur gegebenen Temperatur
CLEIT spezifische Waerme des Leiters, multipliziert mit A/dt
CFILM spezifische Waerme des He-Films, multipliziert mit P/dt
QHELI transienter und stationaerer Waermeuebergang/Laenge
EXHZG externe Heizleistung

CC

C

PROGRAMM QSC

C

C SIMULIERT DIE VORGAENGE AM LEITER NACH EINEM EXTERNEN HEIZPULS
C UNTER VERWENDUNG VON TEMPERATURABHAENGIGEN MATERIALPARAMETERN,
C EINES MODELLS FUER DEN TRANSIENTEN WAERMEUEBERGANG (C.SCHMIDT)
C UND MIT BERUECKSICHTIGUNG DES WAERMEINHALTS DER HE-GRENZSCHICHT.
C TEMPERATURVERTEILUNGEN IN BESTIMMTEN ZEITPUNKTEN,
C DER TEMPERATURVERLAUF AN BESTIMMTEN ORTSELEMENTEN, DER VERLAUF
C VON ELEKTRISCHER SPANNUNG, VON LEISTUNGEN UND ENERGIEN UEBER
C DER ZEIT WERDEN AM DRUCKER AUSGEGEBEN UND DURCH PLOTA GEPLOTTET.
C LETZTE AENDERUNGEN: 23.10.78 WOLFGANG NICK

C

DIMENSION U(150),UA(151),UN(151),K(150),C(150),R1(150),R2(150)
DIMENSION C1(150),C2(150),Q1(150),Q2(150),TEXT(18)
DIMENSION JBLD(10),UBLD(151,11),XBLD(151),IVERL(10),UVERL(101,10)
DIMENSION TVERL(101),VVERL(101),PVERL(101,6),EVERL(101,6)
DIMENSION TITEL(15),XX(2),YY(2)
LOGICAL LOG1,LOG2,LOG3
REAL ICSL,K,KLEIT
COMMON ALEIT,ULEIT,ALPHA,DX,DT,TEXT

C

C EINLESEN UND AUSDRUCKEN DER PARAMETER

READ(5,500)TEXT
500 FORMAT(18A4)
WRITE(6,600)TEXT
600 FORMAT(1H1,18A4/)
READ(5,501)TEXT,DX,IG
501 FORMAT(18A4/F10.0,I10)
WRITE(6,601)TEXT,DX,IG
601 FORMAT(1X,18A4/1X,'DX=',F7.2,5X,'IG=',I4)
READ(5,502)TEXT,DT,TMAX
502 FORMAT(18A4/2F10.0)
WRITE(6,602)TEXT,DT,TMAX
602 FORMAT(1X,18A4/1X,'DT=',F9.6,5X,'TMAX=',F9.6)
JMAX=IFIX(TMAX/DT+0.5)
READ(5,503)TEXT,ALEIT,ULEIT,ALPHA
503 FORMAT(18A4/3F10.0)
WRITE(6,603)TEXT,ALEIT,ULEIT,ALPHA
603 FORMAT(1X,18A4/'ALEIT=',F10.6,5X,'ULEIT=',F10.6,5X,'ALPHA=',F7.2)
READ(5,504)TEXT,STROM
504 FORMAT(18A4/F10.0)
WRITE(6,604)TEXT,STROM
604 FORMAT(1X,18A4/1X,'STROM=',F9.2)
READ(5,505)TEXT,EHZ
505 FORMAT(18A4/F10.0)
WRITE(6,605)TEXT,EHZ
605 FORMAT(1X,18A4/1X,'EHZ=',F9.6)
READ(5,506)TEXT,IEHZ,TANST,TABKL
506 FORMAT(18A4/I10,2F10.0)
TAN=FLOAT(IFIX(TANST/DT+0.5))

```
TAB=FLOAT(IFIX(TABKL/DT+0.5))
TANST=TAN*DT
TABKL=TAB*DT
WRITE(6,606)TEXT,IEHZ,TANST,TABKL
606  FORMAT(1X,18A4/1X,'IEHZ=',I3,5X,'TANST=',F9.6,5X,'TABKL=',F9.6)
READ(5,507)TEXT,IISO
507  FORMAT(18A4/I10)
WRITE(6,607)TEXT,IISO
607  FORMAT(1X,18A4/1X,'IISO=',I3)
READ(5,508)TEXT,TGR,IGR1,IGR2
508  FORMAT(18A4/F10.0,2I10)
WRITE(6,608)TEXT,TGR,IGR1,IGR2
608  FORMAT(1X,18A4/1X,'TGR=',F9.6,5X,'IGR1=',I3,5X,'IGR2=',I3)
JTGR=IFIX(TGR/DT+0.5)
READ(5,509)TEXT,EPSMX,NITMX
509  FORMAT(18A4/F10.0,I10)
WRITE(6,609)TEXT,EPSMX,NITMX
609  FORMAT(1X,18A4/1X,'EPSMX=',F7.4,5X,'NITMX=',I3)
READ(5,510)TEXT,KLEIT
510  FORMAT(18A4/F10.0)
WRITE(6,610)TEXT,KLEIT
610  FORMAT(1X,18A4/1X,'K(4.2)=',F7.2)
KLEIT=KLEIT*ALEIT*ALPHA/(ALPHA+1.0)/(4.0*4.2*DX**2)
READ(5,511)TEXT,RHO
511  FORMAT(18A4/F10.0)
WRITE(6,611)TEXT,RHO
611  FORMAT(1X,18A4/1X,'RHO=',1PE12.5)
RHO=RHO*(ALPHA+1.0)/(ALPHA*ALEIT)
Z=ICSL(0.0,0)
Z=CLEIT(0.0,0)
Z=CFILM(0.0,0)
Z=QHELI(0.0,0.0,0)
READ(5,512)TEXT,JBLD
512  FORMAT(18A4/5I10/5I10)
WRITE(6,612)TEXT,JBLD
612  FORMAT(1X,18A4/1X,10I10)
READ(5,513)TEXT,IVERL
513  FORMAT(18A4/5I10/5I10)
WRITE(6,613)TEXT,IVERL
613  FORMAT(1X,18A4/1X,10I10)
READ(5,514)TEXT,UBMIN,UBMAX,VBMIN,VBMAX,PBMIN,PBMAX,EBMIN,EBMAX
514  FORMAT(18A4/4F10.0/4F10.0)
WRITE(6,614)TEXT,UBMIN,UBMAX,VBMIN,VBMAX,PBMIN,PBMAX,EBMIN,EBMAX
614  FORMAT(1X,18A4/1X,'UBMIN=',F6.2,9X,'UBMAX=',F6.2/
*1X,'VBMIN=',F10.6,5X,'VBMAX=',F10.6/1X,'PBMIN=',F10.6,5X,
*'PBMAX=',F10.6/1X,'EBMIN=',F10.6,5X,'EBMAX=',F10.6)
C
C EINLESEN DER ANFANGSBEDINGUNG
READ(3,400)JANF
400  FORMAT(I10)
WRITE(6,630)JANF
630  FORMAT(1H1,'ANFANG:      ZEITSCHRITT-NR.',I7)
```

```
      READ(3,401)VLEIT,ELEIT,EFILM,EHELI,EOHM,EHEIZ,ERAND
401  FORMAT(7F10.6)
      WRITE(6,631)VLEIT,ELEIT,EFILM,EHELI,EOHM,EHEIZ,ERAND
631  FORMAT(1X,'SPANNUNG/V',F9.6/1X,'ENERGIE IM LEITER/(W*SEC)',F9.6/
      *1X,'ENERGIE IN GRENZSCHICHT',F9.6/1X,'ENERGIE IM HELIUM',F9.6/
      *1X,'ENERGIE AUS OHMSCHER HEIZUNG',F9.6/1X,'ENERGIE AUS EXTERNER ',
      *'HEIZUNG',F9.6/1X,'ENERGIE IN RANDBEDINGUNG',F9.6/)
      READ(3,401)PLEIT,PFILM,PHELI,POHM,PHEIZ,PRAND
      READ(3,402)(UA(I),I=1,IG)
402  FORMAT(5F10.3)
      READ(3,402)(Q2(I),I=1,IG)
```

C

C INITIIEREN DES PROGRAMMS

```
      Z=EXHZG(0,EHZ,IEHZ,TAN,TAB,0)
      UCUSH=ICSL(STROM,2)
      UKRIT=ICSL(0.0,2)
      LOG1=.FALSE.
      LOG2=.FALSE.
      LOG3=.FALSE.
      XBLD(1)=0.0
      DO 10 I=1,IG
      XBLD(I+1)=(I-0.5)*DX
      UBLD(I+1,1)=UA(I)
10    UN(I)=UA(I)
      UBLD(1,1)=UBLD(2,1)
      UA(IG+1)=4.2
      UN(IG+1)=4.2
      NVERL=1
      TVERL(NVERL)=JANF*DT
      VVERL(NVERL)=VLEIT
      PVERL(NVERL,1)=PLEIT
      PVERL(NVERL,2)=PFILM
      PVERL(NVERL,3)=PHELI
      PVERL(NVERL,4)=POHM
      PVERL(NVERL,5)=PHEIZ
      PVERL(NVERL,6)=PRAND
      EVERL(NVERL,1)=ELEIT
      EVERL(NVERL,2)=EFILM
      EVERL(NVERL,3)=EHELI
      EVERL(NVERL,4)=EOHM
      EVERL(NVERL,5)=EHEIZ
      EVERL(NVERL,6)=ERAND
      DO 20 N=1,10
      I1=IVERL(N)
      UVERL(NVERL,N)=UA(I1)
20    JBLD(N)=JBLD(N)+JANF
      ELMAX=ELEIT
      VMAX=VLEIT
      JVLMX=(JMAX-1)/100+1
      JVL=0
      JMAX=JANF+JMAX
      J1=JANF+1
```

```
C
C BEGINN EINES NEUEN ZEITSCHRITTS
  DO 120 J=J1,JMAX
    JVL=JVL+1
C
C BEGINN EINER NEUEN ITERATION
  DO 130 NIT=1,NITMX
    VLEIT=0.0
    PHELI=0.0
    PHEIZ=0.0
C
C BERECHNUNG DER RECHTEN SEITEN DES GLEICHUNGSSYSTEMS
  UMR=(UN(1)+UA(1))/2.0
  DO 32 I=1,IG
    UM=UMR
    UMR=(UN(I+1)+UA(I+1))/2.0
    K(I)=KLEIT*(UM+UMR)
    C1(I)=CLEIT(UM,1)
    C2(I)=CFILM(UM,1)
    IF(I.LE.IISO)C2(I)=0.0
    C(I)=C1(I)+C2(I)
    Z=RHO*(STROM-ICSL(UM,1))
    IF(Z.LT.0.0)Z=0.0
    VLEIT=VLEIT+Z
    Q1(I)=QHELI(UM,Q2(I),1)
    IF(I.LE.IISO)Q1(I)=0.0
    PHELI=PHELI+Q1(I)
    Z=Z*STROM-Q1(I)
    IF(I.GT.IEHZ)GOTO 30
    Y=EXHZG(J,0.0,0,0.0,0.0,1)
    PHEIZ=PHEIZ+Y
    Z=Z+Y
30  IF(I.NE.1)GOTO 31
    R1(1)=(C(1)-K(1))*UA(1)+K(1)*UA(2)+Z
    GOTO 32
31  R1(I)=K(I-1)*UA(I-1)+(C(I)-K(I-1)-K(I))*UA(I)+K(I)*UA(I+1)+Z
32  CONTINUE
    R1(IG)=R1(IG)+K(IG)*UA(IG+1)
C
C LOESUNG DES GLEICHUNGSSYSTEMS
  R2(1)=-K(1)/(C(1)+K(1))
  R1(1)=R1(1)/(C(1)+K(1))
  DO 40 I=2,IG
    R2(I)=-K(I)/(C(I)+K(I-1)+K(I)+K(I-1)*R2(I-1))
40  R1(I)=(R1(I)+K(I-1)*R1(I-1))/(C(I)+K(I-1)+K(I)+K(I-1)*R2(I-1))
    U(IG)=UN(IG)
    UN(IG)=R1(IG)
    PRAND=K(IG)*(UN(IG)+UA(IG)-2.0*UA(IG+1))
    PLEIT=(UN(IG)-UA(IG))*C1(IG)
    PFILM=(UN(IG)-UA(IG))*C2(IG)
    EPS=ABS(UN(IG)-U(IG))
    DO 41 I1=2,IG
```

```
I=IG+1-I1
U(I)=UN(I)
UN(I)=R1(I)-R2(I)*UN(I+1)
PLEIT=PLEIT+(UN(I)-UA(I))*C1(I)
PFILM=PFILM+(UN(I)-UA(I))*C2(I)
41  EPS=AMAX1(EPS,ABS(UN(I)-U(I)))
    IF(EPS.LT.EPSMX)GOTO 140
130  CONTINUE
C
C WARNUNG, DASS DIE GEFORDERTE GENAUIGKEIT NICHT ERREICHT WURDE
    WRITE(6,650)J,EPS
650  FORMAT(1X,'WARNUNG ZEITSCHR',I7,5X,'EPS=',1PE12.5)
C
C UMBESETZEN DER FELDER UND EXTRAPOLATION DER TEMPERATURVERTEILUNG
140  DO 50 I=1,IG
      Q2(I)=Q2(I)+Q1(I)
      U(I)=UN(I)
      UN(I)=2.0*UN(I)-UA(I)
50   UA(I)=U(I)
      VLEIT=VLEIT*DX
      VMAX=AMAX1(VMAX,VLEIT)
      PLEIT=PLEIT*DX
      ELEIT=ELEIT+PLEIT*DT
      ELMAX=AMAX1(ELMAX,ELEIT)
      PFILM=PFILM*DX
      EFILM=EFILM+PFILM*DT
      PHELI=PHELI*DX
      EHELI=EHELI+PHELI*DT
      POHM=VLEIT*STROM
      EOHM=EOHM+POHM*DT
      PHEIZ=PHEIZ*DX
      EHEIZ=EHEIZ+PHEIZ*DT
      PRAND=PRAND*DX
      ERAND=ERAND+PRAND*DT
C
C WURDE RECOVERY ERREICHT ?
    IF(UA(1).GT.UCUSH.OR.J.LE.JTGR.OR.LOG1)GOTO 160
    LOG1=.TRUE.
    Z=VMAX/(RHO*STROM)
    WRITE(6,651)J,VMAX,Z,ELMAX
651  FORMAT(1X,'RECOVERY IM ZEITSCHR',I7/1X,'MAX.SPANNUNG',F9.6,5X,
    *'MAX.LAENGE',F6.2,5X,'MAX.LEITERENERGIE',F9.6/)
    Z=J*DT
    WRITE(6,652)ELEIT,EFILM,EHELI,EOHM,EHEIZ,ERAND,Z
652  FORMAT(1X,'ELEIT=',F9.6,4X,'EFILM=',F9.6,4X,'EHELI=',F9.6,4X,
    *'EOHM=',F9.6,4X,'EHEIZ=',F9.6,4X,'ERAND=',F9.6,4X,'ZEIT=',F9.6/)
C
C WURDE EIN QUENCH ERREICHT ?
160  IF(UA(IGR1).LT.UCUSH)GOTO 170
      IF(LOG2)GOTO 161
      LOG2=.TRUE.
      J1=J
```

```
WRITE(6,653)J
653 FORMAT(1X,'QUENCH - IGR1 ERREICHT IM ZEITSCHR',I7)
161 IF(UA(IGR2).LT.UCUSH.OR.LOG3)GOTO 170
LOG3=.TRUE.
IF(J1.EQ.J)GOTO 162
Z=(IGR2-IGR1)*DX/((J-J1)*DT)
WRITE(6,654)J,Z
654 FORMAT(10X,'IGR2 ERREICHT IM ZEITSCHR',I7/
*1X,'MITTL.GESCHWINDIGKEIT/(CM/SEC)',F9.2/)
GOTO 163
162 WRITE(6,655)
655 FORMAT(10X,'IGR2 EBENFALLS ERREICHT, GESCHWINDIGKEIT UNENDLICH'/)
163 Z=J*DT
WRITE(6,652)ELEIT,EFILM,EHELI,EOHM,EHEIZ,ERAND,Z
C
C SOLL EIN BILD DER TEMPERATURVERTEILUNG GEMACHT WERDEN ?
170 DO 61 N=1,10
IF(J.NE.JBLD(N))GOTO 61
DO 60 I=1,IG
60 UBLD(I+1,N+1)=UA(I)
UBLD(1,N+1)=UBLD(2,N+1)
Z=J*DT
WRITE(6,652)ELEIT,EFILM,EHELI,EOHM,EHEIZ,ERAND,Z
61 CONTINUE
C
C SOLL EIN PUNKT DER ZEITVERLAEUFE GEPLOTTET WERDEN ?
IF(JVL.LT.JVLMX)GOTO 120
NVERL=NVERL+1
TVERL(NVERL)=J*DT
VVERL(NVERL)=VLEIT
PVERL(NVERL,1)=PLEIT
PVERL(NVERL,2)=PFILM
PVERL(NVERL,3)=PHELI
PVERL(NVERL,4)=POHM
PVERL(NVERL,5)=PHEIZ
PVERL(NVERL,6)=PRAND
EVERL(NVERL,1)=ELEIT
EVERL(NVERL,2)=EFILM
EVERL(NVERL,3)=EHELI
EVERL(NVERL,4)=EOHM
EVERL(NVERL,5)=EHEIZ
EVERL(NVERL,6)=ERAND
DO 62 N=1,10
I1=IVERL(N)
62 UVERL(NVERL,N)=UA(I1)
JVL=0
120 CONTINUE
C
C ABSPEICHERN DER ANFANGSBEDINGUNG FUER FORTSETZUNG
WRITE(4,400)J
WRITE(4,401)VLEIT,ELEIT,EFILM,EHELI,EOHM,EHEIZ,ERAND
WRITE(4,401)PLEIT,PFILM,PHELI,POHM,PHEIZ,PRAND
```

```
        WRITE(4,402)(UA(I),I=1,IG)
        WRITE(4,402)(Q2(I),I=1,IG)
C
C DRUCKAUSGABE
        WRITE(6,670)JANF,JBLD
670   FORMAT(1H1,5X,'ORT/CM',9X,'TEMPERATURVERTEILUNG IM ZEITSCHR J=' /
        *16X,11I10/)
        I1=IG+1
        WRITE(6,671)(XBLD(I),(UBLD(I,N),N=1,11),I=2,I1)
671   FORMAT(1X,F10.2,5X,11F10.3)
        WRITE(6,672)IVERL
672   FORMAT(1H1,'ZEIT/SEC',5X,'TEMPERATURVERLAUF AM ORTSELEMENT I=' /
        *15X,10I10/)
        WRITE(6,673)(TVERL(J),(UVERL(J,N),N=1,10),J=1,NVERL)
673   FORMAT(1X,F9.6,6X,10F10.3)
        WRITE(6,674)
674   FORMAT(1H1,'ZEIT/SEC',4X,'SPANNUNG',5X,'PLEIT',3X,'PFILM',3X,
        *'PHELI',3X,'POHM',4X,'PHEIZ',3X,'PRAND',3X,'ELEIT',4X,'EFILM',4X,
        *'EHELI',4X,'EOHM',5X,'EHEIZ',4X,'ERAND' /)
        WRITE(6,675)(TVERL(J),VVERL(J),(PVERL(J,N),N=1,6),(EVERL(J,N),
        *N=1,6),J=1,NVERL)
675   FORMAT(1X,F9.6,2X,F9.6,2X,6F8.3,2X,6F9.6)
C
C BESCHRAENKEN DER WERTE FUER DIE PLOTS
        DO 70 I=1,I1
        DO 70 N=1,11
        IF(UBLD(I,N).LT.UBMIN)UBLD(I,N)=UBMIN
        IF(UBLD(I,N).GT.UBMAX)UBLD(I,N)=UBMAX
70   CONTINUE
        DO 72 J=1,NVERL
        IF(VVERL(J).LT.VBMIN)VVERL(J)=VBMIN
        IF(VVERL(J).GT.VBMAX)VVERL(J)=VBMAX
        DO 71 N=1,6
        IF(PVERL(J,N).LT.PBMIN)PVERL(J,N)=PBMIN
        IF(PVERL(J,N).GT.PBMAX)PVERL(J,N)=PBMAX
        IF(EVERL(J,N).LT.EBMIN)EVERL(J,N)=EBMIN
71   IF(EVERL(J,N).GT.EBMAX)EVERL(J,N)=EBMAX
        DO 72 N=1,10
        IF(UVERL(J,N).LT.UBMIN)UVERL(J,N)=UBMIN
        IF(UVERL(J,N).GT.UBMAX)UVERL(J,N)=UBMAX
72   CONTINUE
C
C PLOTAUSGABE
        READ(5,590)TEXT
590   FORMAT(18A4)
        WRITE(6,690)TEXT
690   FORMAT(1H1,18A4/)
        READ(5,591)IDPLOT,TITEL
591   FORMAT(I10,15A4)
        WRITE(6,691)IDPLOT,TITEL
691   FORMAT(1X,'IDPLOT=',I7,5X,15A4/)
        XX(1)=0.0
```



```
XX(2)=IG*DX
YY(1)=4.2
YY(2)=4.2
CALL PLOTA(XX,YY,2,2,1,3,1,1,1,1,1,0,UBMAX,UBMIN,0,TITEL,IDPLOT)
YY(1)=UCUSH
YY(2)=UCUSH
IDPLOT=IDPLOT+1
CALL PLOTA(XX,YY,2,2,1,1,1,1,0,1,1,0,1,1,0,0,IDPLOT)
YY(1)=UKRIT
YY(2)=UKRIT
IDPLOT=IDPLOT+1
CALL PLOTA(XX,YY,2,2,1,1,1,1,0,1,1,0,1,1,0,0,IDPLOT)
DO 80 N=1,11
IDPLOT=IDPLOT+1
80 CALL PLOTA(XBLD,UBLD(1,N),I1,2,1,1,3,1,0,1,1,0,1,1,0,0,IDPLOT)
C
READ(5,591)IDPLOT,TITEL
WRITE(6,691)IDPLOT,TITEL
XX(1)=TVERL(1)
XX(2)=TVERL(NVERL)
YY(1)=4.2
YY(2)=4.2
CALL PLOTA(XX,YY,2,2,1,3,1,1,1,1,1,0,UBMAX,UBMIN,0,TITEL,IDPLOT)
YY(1)=UCUSH
YY(2)=UCUSH
IDPLOT=IDPLOT+1
CALL PLOTA(XX,YY,2,2,1,1,1,1,0,1,1,0,1,1,0,0,IDPLOT)
YY(1)=UKRIT
YY(2)=UKRIT
IDPLOT=IDPLOT+1
CALL PLOTA(XX,YY,2,2,1,1,1,1,0,1,1,0,1,1,0,0,IDPLOT)
DO 81 N=1,10
IDPLOT=IDPLOT+1
81 CALL PLOTA(TVERL,UVERL(1,N),NVERL,2,1,1,3,1,0,1,1,0,1,1,0,
*0,IDPLOT)
C
READ(5,591)IDPLOT,TITEL
WRITE(6,691)IDPLOT,TITEL
CALL PLOTA(TVERL,VVERL,NVERL,2,1,3,1,1,1,1,1,0,VBMAX,VBMIN,0,
*TITEL,IDPLOT)
C
READ(5,591)IDPLOT,TITEL
WRITE(6,691)IDPLOT,TITEL
CALL PLOTA(TVERL,PVERL,NVERL,2,1,3,1,1,1,1,1,0,PBMAX,PBMIN,0,
*TITEL,IDPLOT)
DO 82 N=2,6
IDPLOT=IDPLOT+1
82 CALL PLOTA(TVERL,PVERL(1,N),NVERL,2,1,1,1,1,0,1,1,0,1,1,0,
*0,IDPLOT)
C
READ(5,591)IDPLOT,TITEL
WRITE(6,691)IDPLOT,TITEL
```

```
CALL PLOTA(TVERL,EVERL,NVERL,2,1,3,1,1,1,1,1,0,EBMAX,EBMIN,0,
*TITEL,IDPLOT)
DO 83 N=2,6
  IDPLOT=IDPLOT+1
83 CALL PLOTA(TVERL,EVERL(1,N),NVERL,2,1,1,3,1,0,1,1,0,1,1,0,
*0,IDPLOT)
C
  STOP
  END

C
  REAL FUNCTION ICSL(U,L)
C
C UNTERPROGRAMM FUER DEN KRITISCHEN STROM DES LEITERS
C BESTEHEND AUS MATRIX UND SUPRALEITER IM FLAECHENVERHAELTNIS ALPHA
C STEUERGRÖSSE L
C   L=0 : EINLESEN
C   L=1 : U = TEMPERATUR, ICSL = KRITISCHER STROM
C   L=2 : U = KRITISCHER STROM, ICSL = TEMPERATUR
C
  DIMENSION TEXT(18)
  REAL JCO
  COMMON ALEIT,ULEIT,ALPHA,DX,DT,TEXT
  IF(L.EQ.1)GOTO 100
  IF(L.EQ.2)GOTO 200
  READ(5,500)TEXT,JCO,UC
500  FORMAT(18A4/2F10.0)
  WRITE(6,600)TEXT,JCO,UC
600  FORMAT(1X,18A4/1X,'JCO=',1PE12.5,5X,'UC=',0PF7.2)
  RED=ALEIT/(ALPHA+1.0)
  A=JCO/(UC-4.2)*RED
  B=JCO*RED+4.2*A
  ICSL=1.0
  RETURN

C
100  IF(U.LT.UC)GOTO 110
  ICSL=0.0
  RETURN

C
110  ICSL=B-A*U
  RETURN

C
200  IF(A.EQ.0.0)GOTO 210
  ICSL=(B-U)/A
  WRITE(6,610)U,ICSL
610  FORMAT(1X,'KRIT.STROM=',F9.2,' BEI T=',F7.2/)
  RETURN

C
210  WRITE(6,611)
611  FORMAT(1X,'KEIN SUPRASTROM !!!      UGRENZ=4.25')
  ICSL=4.25
```

RETURN
END

```
C
  FUNCTION CLEIT(U,L)
C
C UNTERPROGRAMM FUER DIE GEMITTELTE SPEZIFISCHE WAERME DES LEITERS
C BESTEHEND AUS MATRIX UND SUPRALEITER IM FLAECHEINVERHAELTNIS ALPHA.
C SOWOHL FUER DEN SUPRALEITER ALS AUCH FUER DIE MATRIX
C WIRD SIE IN DER FORM  $A_3 \cdot T^3 + A_1 \cdot T$  BERECHNET.
C IM UEBERGANGSBEREICH VON UCU BIS UCO WIRD SIE LINEAR APPROXIMIERT.
C STEUERGROESSE L
C     L=0 : EINLESEN
C     L=1 : FUNKTIONSAUFRUF
C
  DIMENSION TEXT(18)
  COMMON ALEIT,ULEIT,ALPHA,DX,DT,TEXT
  IF(L.EQ.1)GOTO 100
  READ(5,500)TEXT,CMAT1,CMAT3
500  FORMAT(18A4/2F10.0)
  WRITE(6,600)TEXT,CMAT1,CMAT3
600  FORMAT(1X,18A4/1X,'CMAT1=',1PE10.3,5X,'CMAT3=',E10.3)
  READ(5,501)TEXT,CSLS1,CSLS3
501  FORMAT(18A4/2F10.0)
  WRITE(6,601)TEXT,CSLS1,CSLS3
601  FORMAT(1X,18A4/1X,'CSLS1=',1PE10.3,5X,'CSLS3=',E10.3)
  READ(5,502)TEXT,CSLN1,CSLN3
502  FORMAT(18A4/2F10.0)
  WRITE(6,602)TEXT,CSLN1,CSLN3
602  FORMAT(1X,18A4/1X,'CSLN1=',1PE10.3,5X,'CSLN3=',E10.3)
  READ(5,503)TEXT,UCU,UCO
503  FORMAT(18A4/2F10.0)
  WRITE(6,603)TEXT,UCU,UCO
603  FORMAT(1X,18A4/1X,'UCU=',F7.2,5X,'UCO=',F7.2)
  RED=(ALEIT/(ALPHA+1.0))/DT
  A1=(ALPHA*CMAT1+CSLS1)*RED
  A3=(ALPHA*CMAT3+CSLS3)*RED
  C1=(ALPHA*CMAT1+CSLN1)*RED
  C3=(ALPHA*CMAT3+CSLN3)*RED
  CUCU=(A1+A3*UCU*UCU)*UCU
  CUCO=(C1+C3*UCO*UCO)*UCO
  B1=(CUCO-CUCU)/(UCO-UCU)
  B0=CUCU-B1*UCU
  CLEIT=2.0
  RETURN
C
100  IF(U.GE.UCU)GOTO 110
  CLEIT=(A1+A3*U*U)*U
  RETURN
110  IF(U.GT.UCO)GOTO 120
  CLEIT=B0+B1*U
```

```
RETURN
120 CLEIT=(C1+C3*U*U)*U
RETURN
END
```

```
C
FUNCTION CFILM(U,L)
C
C BERECHNET DIE SPEZIFISCHE WAERME PRO GEKUEHLTER FLAECHE
C DES DEN LEITER UMGEBENDEN HELIUMFILMS.
C STEUERGROESSE L:
C     L=0 : EINLESEN
C     L=1 : FUNKTIONSAUFRUF
C
COMMON ALEIT,ULEIT,ALPHA,DX,DT,TEXT
DIMENSION TEXT(18)
IF(L.EQ.1)GOTO 100
READ(5,500)TEXT,C0,C1,C2
500 FORMAT(18A4/3F10.0)
WRITE(6,600)TEXT,C0,C1,C2
600 FORMAT(1X,18A4/1X,'C0=',1PE10.3,5X,'C1=',E10.3,5X,'C2=',E10.3)
RED=ULEIT/DT
C0=C0*RED
C1=C1*RED
C2=C2*RED
CFILM=2.5
RETURN
100 UR=U-4.2
CFILM=(C2*UR+C1)*UR+C0
RETURN
END
```

```
C
FUNCTION QHELI(U,E,L)
C
C UNTERPROGRAMM QHEL ZUR BERECHNUNG DES WAERMEUEBERGANGS ANS HELIUM
C SOLANGE DAS PRODUKT AUS BISHER UEBERTRAGENER WAERME PRO FLAECHE
C MAL AKTUELLER WAERMELEISTUNG GEMAESS TRANSIENTEM WAERMEUEBERGANG
C KLEINER ALS EQTR IST, GILT DER TRANSIENTE WAERMEUEBERGANG (SCHMIDT).
C SPAETER WIRD EINE STATIONAERE WAERMEUEBERGANGSKURVE VERWENDET.
C STEUERGROESSE L
C     L=0 : EINLESEN
C     L=1 : U=MITTL.TEMPERATUR, E=UEBERTR.ENERGIE
C           QHELI=KUEHLLLEISTUNG/LAENGE
C     L=2 : UM=WAERMELEISTUNG, QHELI=TEMPERATUR IM STAT.FILMSIEDEN
C
DIMENSION TEXT(18)
COMMON ALEIT,ULEIT,ALPHA,DX,DT,TEXT
IF(L.EQ.1)GOTO 100
IF(L.EQ.2)GOTO 200
```

```
      READ(5,500)TEXT,HTR,EQTR
500  FORMAT(18A4/2F10.0)
      WRITE(6,600)TEXT,HTR,EQTR
600  FORMAT(1X,18A4/1X,'HTR=',F7.2,5X,'EQTR=',F9.6)
      EQTR=EQTR*ULEIT/(DT*HTR)
      HTR=HTR*ULEIT
      READ(5,501)TEXT,UR1,UR2,UR3
501  FORMAT(18A4/3F10.0)
      WRITE(6,601)TEXT,UR1,UR2,UR3
601  FORMAT(1X,18A4/1X,'UR1=',F7.3,5X,'UR2=',F7.3,5X,'UR3=',F7.3)
      READ(5,502)TEXT,Q1,Q2,Q3
502  FORMAT(18A4/3F10.0)
      WRITE(6,602)TEXT,Q1,Q2,Q3
602  FORMAT(1X,18A4/1X,'Q1=',F8.3,5X,'Q2=',F8.3,5X,'Q3=',F8.3)
      A1=Q1/UR1**2*ULEIT
      A2=(Q2-Q1)/(UR2-UR1)*ULEIT
      B2=Q1*ULEIT-A2*UR1
      A3=(Q3-Q2)/(UR3-UR2)*ULEIT
      B3=Q2*ULEIT-A3*UR2
      QHELI=3.0
      RETURN
C
100  UR=U-4.2
      IF(EQTR.EQ.0.0)GOTO 120
      IF(E.EQ.0.0)GOTO 110
      IF(UR.GE.EQTR/E)GOTO 120
110  QHELI=HTR*UR
      RETURN
120  IF(UR.GT.UR1)GOTO 130
      VZ=1.0
      IF(UR.LT.0.0)VZ=-1.0
      QHELI=A1*UR**2*VZ
      RETURN
130  IF(UR.GT.UR2)GOTO 140
      QHELI=A2*UR+B2
      RETURN
140  QHELI=A3*UR+B3
      RETURN
C
200  QHELI=(U-B3)/A3+4.2
      RETURN
      END
```

```
C
      FUNCTION EXHZG(J,EHZ,IEHZ,TAN,TAB,L)
C
C UNTERPROGRAMM FUER DIE EXTERNE HEIZUNG DES LEITERS
C MIT LINEAREM ANSTIEG DER HEIZLEISTUNG BIS TAN*DT
C UND ANSCHLIESSEND EXPONENTIELLEM ABFALL (ZEITKONSTANTE TAB*DT)
C BEI VORGEGEBENER GESAMTHEIZENERGIE EHZ UEBER DIE LAENGE IEHZ*DX
C STEUERGROESSE L
```

```
C      L=0 : INITIALISIEREN DES UNTERPROGRAMMS,  
C      D.H. UEBERGEHEN DER WERTE EHZ, IEHZ, TAN, TAB  
C      L=1 : EINGABE: ZEITSCHRITT, AUSGABE: HEIZLEISTUNG/LAENGE  
C  
      DIMENSION TEXT(18)  
      COMMON ALEIT, ULEIT, ALPHA, DX, DT, TEXT  
      IF(L.EQ.1)GOTO 100  
      T1=TAN  
      T2=TAB  
      FMAX=EHZ/((T1/2.0+T2)*DT*FLOAT(IEHZ)*DX)  
      WRITE(6,600)EHZ  
600   FORMAT(1X, 'HEIZPULSENERGIE=', 1PE12.5/)  
      EXHZG=4.0  
      RETURN  
C  
100   T=FLOAT(J)-0.5  
      IF(T.GT.T1)GOTO 110  
      EXHZG=T/T1*FMAX  
      RETURN  
110   T=(T-T1)/T2  
      IF(T.GT.150)GOTO 120  
      EXHZG=EXP(-T)*FMAX  
      RETURN  
120   EXHZG=0.0  
      RETURN  
      END
```

6.5.3 Weitere Programme

Das Programm QSD ist im Kern ebenso aufgebaut wie das hier angegebene Programm QSC. Es dient zum Suchen der Stabilitaetsgrenze bei verschiedenen Stromstaerken. Zu diesem Zweck enthaelt es zwei zusaetzliche Schleifen. In der aeusseren wird der Strom ueber einen bestimmten Bereich variiert, in der inneren wird iterativ die kritische Heizpulsenergie bestimmt. Ausgegeben wird bei jeder Stromstaerke und Heizpulsenergie, ob ein Quench erfolgt ist zusammen mit der berechneten Ausbreitungsgeschwindigkeit, oder ob Recovery eintrat, dann wird noch die maximale Spannung und Leiterenergie ausgedruckt. Bei 150 Ortselementen benoetigte dies Programm fuer 6 Stromwerte mit je 10 Heizpulsenergien etwa 60 Minuten reine Rechenzeit (CPU).

Dann existiert noch ein kleines Programm zur Auswertung des Maddock-Kriteriums und ein Programm zur Berechnung stationaerer Temperaturprofile. Dies ist fuer die interaktive Verwendung am Terminal geschrieben. Der Startwert fuer die Runge-Kutta-Integration, die Temperatur in der Mitte der Zone, wird am Terminal eingegeben, das Programm rechnet 10 Ortselemente weiter und dann kann jeweils entschieden werden, ob die Rechnung fortgesetzt werden oder ob mit einem anderen Startwert neu begonnen werden soll. Durch geeignete Wahl der Mittentemperatur kann erreicht werden, dass die Temperatur sich asymptotisch der Badtemperatur von 4.2K naehert. Um die zeitabhaengigen Rechnungen wirklich ueberpruefen zu koennen, benuetzte dies Programm eigene, von QSC/QSD unabhaengige Unterprogramme.

6.6 Formel fuer die Waermeleistung bei Waermediffusion mit vorgegebener Randbedingung

Die gesamte Loesung der Waermeleitungsgleichung (konstantes K und C) fuer den einseitig begrenzten, halbunendlichen Stab laesst sich zusammensetzen aus einem Anteil, der die Anfangsbedingung erfuehlt (Randbedingung: $dT=0$), und einem Anteil $U(x,t)$, der die Randbedingung $R(t)$ an der Stelle $x=0$ erfuehlt (Anfangsbedingung: $dT=0$). Dieser kann dargestellt werden durch /37/:

$$u(x,t) = - \int_0^t R(t') \cdot \frac{\partial G(x,t,t')}{\partial t'} \cdot dt'$$

wobei die Einheitssprungantwort $G(x,t,t')$ gegeben ist durch

$$G(x, t, t') = \begin{cases} 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2 \cdot \frac{k}{c} \cdot \sqrt{t-t'}}\right) & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}$$

Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(y)$

$$\operatorname{erf}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^y \exp(-z^2) \cdot dz$$

Durch eine partielle Integration erhaelt man daraus

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{dR(t')}{dt'} \cdot G(x, t, t') \cdot dt'$$

Mich interessiert nur der Waermestrom an der Stelle $x=0$.
Deshalb bilde ich $du(x, t)/dx$, setze $x=0$ und multipliziere
mit $-k$. Das ergibt die gesuchte Formel:

$$\begin{aligned} Q(t) &= -k \cdot \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} \\ &= \sqrt{\frac{k \cdot c}{\pi}} \cdot \int_0^t \frac{dR(t')}{dt'} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-t'}} \cdot dt' \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis:

1. Z.J.J. Stekly and J.L. Zar:
Stable Superconducting Coils,
IEEE Transactions on Nuclear Science,
NS-12, 367 (1965)
2. B.J. Maddock, G.B. James and W.T. Norris:
Superconductive Composites: Heat Transfer and
Steady State Stabilization,
Cryogenics 9, 261 (1969)
3. C. Schmidt:
Transient Heat Transfer to Liquid Helium and Temperature
Measurement with a Response Time in the
Microsecond Region,
Applied Physics Letters 32, 827 (1978)
4. Y. Iwasa and B.A. Apgar:
Transient Heat Transfer to Liquid Helium from Bare and
Coated Copper Surfaces in a Vertical Orientation
I: Film Boiling Regime,
Cryogenics 18, 267 (1978)
5. C.H. Dustmann, K.P. Juengst, P. Komarek, G. Krafft,
H. Krauth, P. Maier, G. Ries, W. Schauer, C. Schmidt,
E. Seibt und P. Turowski:
Supraleitertechnologie fuer Fusionsmagnete,
Institut fuer Experimentelle Kernphysik des
Kernforschungszentrums Karlsruhe,
Karlsruhe, KFK-2359, (1976)
6. H. Krauth et al.:
Conceptual Design of the EURATOM Test Coil for
the Large Coil Task,
in Proceedings of the 10th Symposium on Fusion
Technology, Padua, 4.-9. September 1978,
to be published
7. A.P. Martinelli and S.L. Wipf:
Investigations of Cryogenic Stability and Reliability
of Operation of Nb₃Sn-Coils in Helium Gas Environment,
in Proceedings of the 1972 Applied Superconductivity
Conference, Annapolis, 1.-3. May 1972,
New York 1972, p. 331
8. M.N. Wilson and Y. Iwasa:
Stability of Superconductors against Localized
Disturbances of Limited Magnitude,
Cryogenics 18, 17 (1978)
9. A. Bejan and C.L. Tien:

- Effect of Axial Conduction and Metal-Helium Heat Transfer on the Local Stability of Superconducting Composite Media, *Cryogenics* 18, 433 (1978)
10. C. Schmidt:
The Induction of a Propagating Normal Zone (Quench) in a Superconductor by Local Energy Release, *Cryogenics* 18, 605 (1978)
 11. V.E. Keilin, E.Yu. Klimenko, M.G. Kremlev and B.N. Samoilov:
Stability Criteria for Current in Combined (Normal + Superconducting) Conductors, *Les Champs Magnetique Intenses*, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris (1967), p. 231
 12. V.V. Altov, M.G. Kremlev, V.V. Sytchev and V.B. Zenkevitch:
Calculation of Propagation Velocity of Normal and Superconducting Regions in Composite Conductors, *Cryogenics* 13, 420 (1973)
 13. L. Dresner:
Propagation of Normal Zones in Composite Superconductors *Cryogenics* 16, 675 (1976)
 14. A.Y. Lee:
Cryogenic Recovery Analysis of Forced Flow Supercritical Helium Cooled Superconductors, *Advances in Cryogenic Engineering*, 23, 235 (1978)
 15. M.O. Hoenig, Y. Iwasa, D.B. Montgomery and A. Bejan:
Cryostabilized Single-Phase Cooled Bundle Conductors for Large High Field Superconducting Magnets, in *Proceedings of the 6th Symposium on Engineering Problems of Fusion Research*, San Diego 1975, Piscataway, N.J., 1976, p. 586
 16. Y. Iwasa, M.O. Hoenig and D.B. Montgomery:
Cryostability of a Small Superconducting Coil Wound with Cabled Hollow Conductor, *IEEE Transactions on Magnetism*, MAG-13, 678 (1977)
 17. J. Benkowitsch:
Untersuchung von oertlich und zeitlich veraenderlichen Energieeinkopplungen in das Kuehlssystem eines zwangsgekuehlten, supraleitenden Magneten, Karlsruhe, Diplomarbeit, (1978), (unveroeffentlicht)

18. R.V. Smith:
Review of Heat Transfer to Helium I,
Cryogenics 9, 11 (1969)
19. G.B. James, K.G. Lewis and B.J. Maddock:
Critical Heat Fluxes for Liquid Helium Boiling in
Small Channels,
Cryogenics 9, 480 (1969)
20. M.N. Wilson:
Stabilization of Superconductors for Use in Magnets,
IEEE Transactions on Magnetism,
MAG-13, 440 (1977)
21. Y. Iwasa, M.J. Leupold and J.E.C. Williams:
Large Superconducting Magnets: Experimental Models,
IEEE Transactions on Magnetism,
MAG-13, 20 (1977)
22. D. Marsal:
Die numerische Loesung partieller
Differentialgleichungen,
Zuerich, B.I.-Wissenschaftsverlag, 1976
23. G.D. Smith:
Numerische Loesung von partiellen
Differentialgleichungen,
Braunschweig, Vieweg-Verlag, 1970
24. Handbook on Materials for Superconducting Machinery,
Metals and Ceramics Information Center, MCIC-HB-04
Columbus, Ohio, 1974
25. G. Offermann:
Messung kritischer Stroeme an NbTi-Draehten,
Universitaet Karlsruhe, Diplomarbeit,
(1975), (unveroeffentlicht)
26. H. Hillmann and K.J. Best:
New Measurements of Critical Data of Optimized
NbTi Superconductors,
IEEE Transactions on Magnetism,
MAG-13, 1568 (1977)
27. V.J. Johnson (ed), National Bureau of Standards:
Properties of Materials at Low Temperatures (Phase I),
New York, Pergamon Press, 1961
28. J. Zbasnik, zitiert in:
Y. Iwasa, C. Weggel, D.B. Montgomery, R. Weggel,
J.R. Hale:
Prediction of Transient Stability Limits for

- Composite Superconductors Subject to Flux Jumping,
Journal of Applied Physics,
40, 2006 (1969)
29. P. Bonjour et R. Lagnier:
Rapport Semestriel du Service des Basses Temperatures,
Nov. 1974 - Avril 1975, (unveroeffentlicht)
private Mitteilung von P. Seyfert, CEN Grenoble
30. A. Fevrier and D. Morize:
The Effect of Magnetic Field on the Thermal Conductivity
and Electrical Resistivity of Different Materials,
Cryogenics 13, 603 (1973)
31. J.C. Lottin, J.R. Miller, J.W. Lue and L. Dresner:
Measurements of Traveling Transition Zone along
a Superconductor,
in Proceedings of the 1978 Applied Superconductivity
Conference, Pittsburgh, to be published
32. V.I. Deev, V.E. Keilin, I.A. Kovalev, A.K. Kondratenko
and V.I. Petrovichev:
Nucleate and Film Pool Boiling Heat Transfer
to Saturated Liquid Helium,
Cryogenics 17, 556 (1977)
33. J. Jackson:
Transient Heat Transfer and Stability of
Superconducting Composites,
Cryogenics 9, 103 (1969)
34. W.G. Steward:
Transient Heat Transfer - Phase I: Static Coolant,
International Journal of Heat and Mass Transfer,
21, 863 (1978)
35. J.J. Duchateau and B. Turck:
Dynamic Stability and Quenching Currents of
Multifilamentary Composites under
Usual Cooling Conditions,
Journal of Applied Physics, 46, 4989 (1975)
36. J.E.C. Williams:
Superconductivity and Its Applications,
London, Pion Limited, 1970
37. W.I. Smirnow
Lehrgang der Hoeheren Mathematik,
Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1975

Danksagung

Herrn Professor Heinz bin ich fuer die Ermoeglichung dieser Arbeit und das daran gezeigte Interesse zu Dank verpflichtet.

Meinen Betreuern, Herrn Dr.Krauth und Herrn Dr.Ries danke ich fuer die vielseitige Unterstuetzung und viele ausgedehnte Diskussionen, ohne die diese Arbeit nicht haette gelingen koennen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Heneka fuer die muehsame Kleinarbeit beim Herstellen des Probentraegers.

Ausserdem bedanke ich mich bei Herrn Dr.Turowski fuer die Moeglichkeit, sein Labor fuer diese Untersuchungen benutzen zu koennen.