

KfK 2778

Mai 1979

Schalendynamisches Verhalten des kugelförmigen Containments eines Siedewasserreaktors bei Dampfkondensation im Druckabbausystem

B. Göller

Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Nukleare Sicherheit

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Nukleare Sicherheit

KfK 2778

Schalendynamisches Verhalten des kugelförmigen
Containments eines Siedewasserreaktors bei
Dampfkondensation im Druckabbausystem

B. Göller

Als Dissertation genehmigt von der Fakultät für
Maschinenbau der Universität Karlsruhe

Kernforschungszentrum Karlsruhe G.m.b.H., Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

A b s t r a c t

SCHALENDYNAMISCHES VERHALTEN DES KUGELFÖRMIGEN CONTAINMENTS EINES SIEDEWASSERREAKTORS BEI DAMPFKONDENSATION IM DRUCKABBAUSYSTEM

Beim Abblasen von Dampf in den Wasserpool der Kondensationskammer entstehen Druckpulsationen, die die zum Teil aus sehr dünnen Schalen bestehenden Wände des Pools dynamisch belasten. Die Nachrechnung des Strukturverhaltens bei solchen Abblasevorgängen zeigte, daß Standard-Finite-Elemente nicht geeignet sind, solche dünnen Schalen zu modellieren.

Daher wird zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens der äußeren Wand des Pools, die von einem Teil der sehr dünnen Containment-Kugelschale gebildet wird, ein auf der Flügge'schen Schalentheorie aufbauendes halbanalytisches Modell entwickelt. Die Lösung für vereinfachte Randbedingungen wird dargestellt durch modale Superposition. Mit einer aus Experimenten stammenden Belastung wird eine transiente Analyse durchgeführt, deren Ergebnisse gut mit Messungen übereinstimmen.

Das so verifizierte Schalenmodell zeigt ferner, daß die Eigenfrequenzen der Containmentschale sehr dicht beieinander liegen. Dies hat zur Folge, daß bei einer lokalen dynamischen Belastung zunächst auch nur lokale Schwingungen angeregt werden, die sich erst nach vielen Schwingungszyklen auf fernere Schalenbereiche ausdehnen. Zur Darstellung solcher lokalen Verformungen und solcher im Verhältnis zu den Eigenschwingungszeiten sehr langsamen Ausbreitungsvorgänge ist die Berücksichtigung sehr vieler Eigenschwingungsformen erforderlich.

An die so beschriebene Struktur wird der Wasserpool gekoppelt, um in einem vereinfachten halbanalytischen Modell den Einfluß des mitbewegten Fluids zu untersuchen. In einer transienten Analyse zur Simulation einer Blasen Kondensation wird berechnet, wie sich die zunächst lokalen Druckpulsationen allmählich auf den ganzen Wasserpool ausdehnen. Die Ergebnisse stimmen gut mit Messungen an einem Kernkraftwerk-Containment überein.

A b s t r a c t

DYNAMIC BEHAVIOUR OF THE SPHERICAL CONTAINMENT SHELL OF A BOILING WATER REACTOR DURING CONDENSATION OF STEAM IN THE PRESSURE SUPPRESSION SYSTEM.

The condensation of steam blown into the waterpool of the condensation chamber induces pressure oscillations which act upon the thin shell walls of the pool. A first computation of the dynamic behaviour of the pool walls revealed that such very thin shells cannot be described appropriately with standard finite elements.

Therefore a semi-analytical model is developed for the outer wall of the pool, which is formed by a part of the thin spherical containment shell. The model is based on Flügge's shell theory and solved for simplified boundary conditions by modal superposition. Pressures measured during full scale experiments are used as loading to perform a transient analysis. Computed displacements agree quite well with measured values.

The model verified in this way shows that the eigenfrequencies of the spherical containment shell are very close to each other. This property causes a local deformation behaviour: if a local dynamic loading is applied first vibrations are excited with similar local distribution. But after a larger number of vibration cycles the oscillations begin to propagate over further regions of the shell. The description of such a local deformation behaviour with a very slow propagation velocity requires many modes to be superimposed.

Furthermore a simplified analytical model is developed in which the fluid dynamics of the waterpool is coupled with the structural behaviour of the flexible shell. A transient analysis is performed in order to investigate how an applied local pressure fluctuation, simulating a bubble collapse, propagates through the whole pool. The computed results are in good agreement with measurements.

Inhalt:

1. Einleitung	1
1.1 Aufgabenstellung	1
1.2 Durchführung der Untersuchung	2
1.3 Ausblick	5
2. Untersuchung des Containments mit finiten Elementen	6
2.1 Überprüfung der Elementeigenschaften	6
2.2 Anwendung auf das Containment	8
2.3 Versagen des Elements bei sehr dünnen Schalen	10
2.4 Weitere Verfahren zur Berechnung dünner Schalen	11
3. Analytische Beschreibung der Kugelschale	16
3.1 Grundgleichungen der Kugelschale	16
3.2 Fourier-Entwicklung für den Umfang	18
3.3 Elimination der Spannungsresultierenden	20
3.4 Entkopplung der Differentialgleichungen	21
3.5 Allgemeines zu den Randbedingungen	25
3.6 Lösung der Schalendifferentialgleichungen	26
3.7 Anwendung auf die Containmentschale	32
4. Numerische Berechnungen für die Containmentschale	36
4.1 Abschätzungen aus der Membrantheorie	36
4.2 Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen der Schale	37
4.3 Testfälle für das statische Verhalten	39
4.4 Testfall für das dynamische Verhalten	40
4.5 Transiente Analyse	42
5. Verhalten des gekoppelten Fluid-Schale-Systems	44
5.1 Modell des Pools	45
5.2 Fluidbeschreibung	45
5.3 Eigenfrequenzen und Modes	47
5.4 Schwappen und Oberflächenwellen	50
5.5 Simulation eines Blasenkollapses	51
6. Literatur	55
Bilder	61

1. Einleitung

1.1 Aufgabenstellung

Das Sicherheitskonzept für Kernkraftwerke verlangt, daß auch bei einem größeren Störfall keine für die Umgebung bedenkliche Menge an Radioaktivität freigesetzt werden darf. Dies wird unter anderem dadurch erreicht, daß der Reaktordruckbehälter in einem gasdichten Sicherheitsbehälter, dem Containment, untergebracht ist. Bei dem Bruch etwa einer der Primärkühlmittelleitungen kann so der ausströmende radioaktive Dampf vom Containment aufgefangen werden. Der sich dabei ergebende Druckanstieg im Containment wird bei den heutigen Siedewasserreaktoren durch ein Druckabbausystem in zulässigen Grenzen gehalten (Bild 1): der ausgeströmte Dampf wird in das kalte Wasser der Kondensationskammer eingeleitet, wo er dann rasch kondensiert. Dabei entstehen Druckpulsationen in der Wasser- vorlage, die die Wände der Kondensationskammer und damit auch das Containment dynamisch beanspruchen.

Um Auskunft über Größe und Verteilung solcher Druckpulsationen zu erhalten, wurden im Rahmen der von den Genehmigungsbehörden verlangten Abnahmeversuche im Druckabbausystem des Kernkraftwerkes Brunsbüttel Abblasetests durchgeführt. Hierzu wurde über ein Entlastungsrohr, das mit einer speziellen Ausströmdüse versehen war, Dampf in das Wasser der Kondensationskammer geblasen. Dabei traten im gesamten Wasserpool Druckpulsationen auf, die das Containment zu Vibrationen anregten [1].

Eine gründliche Diskussion über die bei der Dampfblasenkondensation beteiligten Vorgänge sowie sicherheitstechnische Abschätzungen zur Integrität des Containments bei solchen Kondensationsvorgängen wurden von Class [2,3] durchgeführt.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine gründliche theoretische Untersuchung des dynamischen Verhaltens des Containments einschließlich der Kondensationskammer bei transienten Druckbelastungen, wie sie bei den Kondensationsprozessen entstehen. Dazu war insbesondere die Entwicklung eines strukturdynamischen Modelles für das aus einer dünnen Kugelschale aufgebaute Containment erforderlich. Über die dynamische Berechnung so komplexer Strukturen liegen kaum Erfahrungen vor, so daß eine experimentelle Überprüfung des Rechenmodelles unerlässlich erscheint. Hierzu boten die Meßergebnisse der Abblasetests in Brunsbüttel Gelegenheit. Mit dem so verifizierten Strukturmodell konnten dann die dynamischen Randbedingungen zur Beschreibung des Fluidpools formuliert werden. Damit war es möglich, ein Näherungsmodell für die Kondensationskammer bestehend aus einer nachgiebigen Kugelschale und den damit gekoppelten Strömungsvorgängen im angrenzenden Wasserpool zu entwickeln.

1.2 Durchführung der Untersuchung

In einem ersten Ansatz wurde zur Modellierung des Containments die Methode der finiten Elemente ([4], [5]) benutzt. Die Standard-Finite-Elemente-Programme (etwa STRUDL [6] oder SAP IV [7]) besitzen ein spezielles Element zur Berechnung dünner Schalen, und zwar ein ebenes Dreieck mit konstanter Membrandehnung und kubischer Biegung. Wie in dieser Arbeit gezeigt wird, ist gerade dieses Element zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens sehr dünner Schalen ($R/h \geq 150$) nur mit großen Einschränkungen anwendbar, da bei solchen Schalen sehr scharfe Gradienten in den Auslenkungen auftreten können. Die zur Modellierung solcher Gradienten erforderliche Feinheit der Diskretisierung kann mit diesen Elementen aber nicht erreicht werden. Die Gründe hierfür liegen auf der einen Seite in der beschränkten Rechnerkapazität, auf der anderen Seite in dem ebenen Elementansatz. Aus diesem Grunde war das mit dem Finite-Elemente-Programm STRUDL formulierte Strukturmodell nicht brauchbar.

Um unabhängig von eventuellen weiteren unbekanntem Einflußgrößen die Eigenschaften sehr dünner Schalen grundsätzlich zu untersuchen und um bessere Einsicht in die beteiligten physikalischen Vorgänge zu erhalten, wurde für den Teil der Kugelschale, der die Außenwand der Kondensationskammer darstellt, das halbanalytische Modell SPHERE entwickelt. Es baut auf der Flügge'schen Theorie für Kugelschalen auf [8], die um translatorische Trägheiten erweitert wurde und arbeitet nach dem Prinzip der modalen Superposition.

Zunächst wurden mit diesem Modell die statischen Eigenschaften der Kugelschale untersucht. Dabei ergab sich, daß sie ein stark lokales Verhalten besitzt, d.h., daß nennenswerte Verformungen nur in belasteten Schalenbereichen auftreten. Ferner wurden die erwarteten scharfen Gradienten in den Auslenkungen gut wiedergegeben.

Bei der Untersuchung des dynamischen Verhaltens ergab sich, daß bei lokaler Anregung die Kugelschale zunächst auch nur lokale Schwingungen ausführte, die sich erst allmählich auf andere Bereiche der Schale ausdehnten. Dabei breitet sich jede einzelne angeregte Eigenschwingungsform mit "unendlicher" Geschwindigkeit auf die gesamte Struktur aus. Weitergehende Untersuchungen zeigten, daß es in erster Linie von der relativen Lage der beteiligten Eigenfrequenzen zueinander abhängt, wie rasch eine lokale Störung fernere Schalenbereiche erreicht. Da bei der untersuchten Kugelschale die Eigenfrequenzen sehr dicht beieinander liegen, ergibt sich die beobachtete niedrige effektive Ausbreitungsgeschwindigkeit. Solche sehr langsamen dynamischen Ausbreitungsvorgänge werden vom Rechenmodell nur dann richtig beschrieben, wenn genügend viele Modes aufgelöst und berücksichtigt werden.

Dieses entwickelte Schalenmodell wurde in einer transienten Analyse benutzt, um mit einer während der Abblasetests gemessenen Druckverteilung Auslenkungen der äußeren Wand der Kondensationskammer zu berechnen. Der Vergleich mit gemessenen Auslenkungen zeigt eine recht befriedigende Übereinstimmung. Auf diese Weise konnte gezeigt werden, daß es zur Darstellung der strukturmechanischen Eigenschaften des Containments bei den

hier betrachteten Belastungen durch die Dampfkondensation ausreicht, sich lediglich auf die elastische kugelschalige Außenwand der Kondensationskammer zu beschränken.

Mit diesem verifizierten Strukturmodell konnten nun die dynamischen Randbedingungen zur Beschreibung des Fluidpools formuliert werden. Da die gerade vorgestellten statischen und dynamischen Untersuchungen der Kugelschale gezeigt hatten, daß eine "Fernwirkung" kaum vorhanden ist, konnte die Struktur in guter Näherung dargestellt werden durch ein rein lokales Schalengesetz, bei dem die radiale Auslenkung eines Schalenpunktes nur proportional zur Druckbelastung desselben Punktes ist. Die komplizierte Geometrie des Pools wurde durch eine Zylinder-Geometrie angenähert. Mit dem durch die linearisierten Eulergleichungen beschriebenen Fluid konnte nun das gekoppelte Fluid-Struktur-System halb-analytisch untersucht werden. Dabei ergab sich, daß die Eigenfrequenzen des gekoppelten Systems wesentlich kleiner als die der Schale allein waren, was die Bedeutung der Fluid-Struktur-Kopplung im vorliegenden Fall unterstreicht. Die Berücksichtigung der Fluidkompressibilität führt zu einer weiteren, allerdings nur geringfügigen Absenkung der Eigenfrequenzen, so daß in der transienten Rechnung die Fluidkompressibilität ganz außer acht gelassen werden konnte. Obwohl das Fluid damit eine unendliche Schallgeschwindigkeit besitzt, ergibt sich doch eine relativ kleine effektive Ausbreitungsgeschwindigkeit für lokale Störungen des gekoppelten Systems.

Diese berechneten Ergebnisse, die Eigenfrequenzen und das globale Verhalten des Pools bei lokaler Anregung stimmen recht gut mit experimentellen Beobachtungen überein. Auf diese Weise konnte gezeigt werden, daß die während der Kondensationsexperimente beobachteten Vorgänge [1] Eigenschwingungen des praktisch inkompressiblen Wassers in der elastischen Schale des Containments waren, die durch die Kondensationsvorgänge angeregt wurden.

1.3 Ausblick

Nachdem in dieser Arbeit ein experimentell überprüftes schalendynamisches Modell für die Außenwand der Kondensationskammer und ein groberes Modell für die gekoppelten fluid-strukturdynamischen Vorgänge entwickelt wurde, kann nun eine genauere Berechnung des dynamischen Verhaltens der Kondensationskammer durchgeführt werden. Dabei soll das Fluid in der richtigen Geometrie mit speziell entwickelten Singularitätenverfahren von Krieg [9, 10] beschrieben werden. Die elastischen Schaleneigenschaften werden durch eine Steifigkeitsmatrix dargestellt, die aus dem hier beschriebenen Modell SPHERE abgeleitet wird. Diese Verfahren sind zur Zeit in der Entwicklung; erste Ergebnisse [11] stimmen gut mit den Ergebnissen dieser Arbeit überein.

2. Untersuchung des Containments mit finiten Elementen

2.1 Überprüfung der Elementeigenschaften

Die Methode der finiten Elemente hat sich weitgehend durchgesetzt, um komplexe strukturmechanische Probleme zu bearbeiten, insbesondere dort, wo analytische Lösungen nicht leicht ermittelt werden können. Daher wurde auch hier die Lösung zunächst mit dieser Methode versucht. Für die dynamische Analyse wurde das Programm STRUDL benutzt [6]. Es enthält für die Untersuchung dünner Schalen ein spezielles Element, und zwar ein ebenes Dreieck mit konstanter Dehnung und kubischer Biegung. Da das Element eben ist, sind Membran- und Biegekräfte nicht gekoppelt, wie es bei einer korrekten Schalenbeschreibung eigentlich sein müßte. Die Kopplung entsteht bei STRUDL erst durch den Anstellwinkel benachbarter Elemente, wodurch Membrankräfte in einem Element Biegemomente im Nachbarelement erzeugen und umgekehrt. Trotz dieser Abweichung von der Schalentheorie lassen sich nach Zienkiewicz [4] mit diesem Element durchaus brauchbare Ergebnisse erzielen. Dies wurde durch Nachrechnung des folgenden Experimentes bestätigt:

Sewall [12] hatte eine einseitig eingespannte Zylinderschale aus Aluminium mit 304.8 mm Radius, 0.813 mm Wandstärke und 595 mm Länge experimentell untersucht. Bei der Nachrechnung mit STRUDL wurde aus Symmetriegründen nur die Hälfte der Zylinderschale diskretisiert, und zwar mit 30 Knoten am halben Umfang und 12 Knoten in axialer Richtung. Mit diesem Modell wurden Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen berechnet. Jede dieser Eigenschwingungsformen läßt sich beschreiben durch ihre Umfangsordnung, das ist die Anzahl der sich am Umfang ausbildenden Cosinus-Wellen, und durch ihre axiale Ordnung, das ist die Anzahl der Schwingungsknoten auf einer axialen Mantellinie. Die zu den so geordneten Modes gehörenden Eigenfrequenzen aus den Experimenten und aus den STRUDL-Rechnungen sind in Bild 2 dargestellt.

Die niedrigste Eigenfrequenz dieser Zylinderschale gehört zu einer Eigenschwingungsform der Umfangsordnung sechs. Einfachere Schwingungsformen haben höhere Eigenfrequenzen. Dieses merkwürdige Schalenverhalten ist zu erklären durch das Zusammenspiel von Membranverformungen, die bei niedrigen Umfangsordnungen überwiegen, und von Biegeverformungen, die bei hohen Umfangsordnungen überwiegen [13]. Die niedrigeren Umfangsordnungen lassen sich nach Sewall auch mit aufwendiger Versuchstechnik nur schwer oder zum Teil auch gar nicht anregen; auch andere Experimentatoren haben dies festgestellt [14]. Wie Bild 2 zeigt, ist die Übereinstimmung der experimentellen Daten mit den Rechenergebnissen sehr gut. Insbesondere wird auch das für sehr dünne Zylinderschalen typische Eigenfrequenz-Minimum bei hoher Umfangsordnung des Modes gut wiedergegeben. Das in STRUDL implementierte finite Element erscheint daher zur Untersuchung schalendynamischer Probleme doch geeignet. Untersuchungen dieses Beispiels mit verschiedenen Diskretisierungen zeigten ferner, daß Eigenfrequenzen ausreichend genau berechnet werden, solange eine einzelne "Welle" der Eigenschwingungsform durch mindestens vier Elemente beschrieben wird. Auf der anderen Seite darf die Diskretisierung nicht so fein werden, daß der Anstellwinkel benachbarter Elemente kleiner als etwa 6° wird. Diese beiden Bedingungen bedeuten, daß bei der Untersuchung von Rotationsschalen nur Eigenschwingungsformen mit Umfangsordnungen von höchstens 12 bis 15 bestimmt werden können.

2.2 Anwendung auf das Containment

Mit dem so getesteten Element wurde das Containment einschließlich der inneren Wände der Kondensationskammer diskretisiert. Zuerst wurden die wichtigsten Baugruppen voneinander isoliert untersucht [15, 16]:

Für die innere Zylinderschale ergab sich eine tiefste Eigenfrequenz von 22 Hz bei der Umfangsordnung 10; die obere Kegelschale hat eine tiefste Frequenz von 7 Hz bei der Umfangsordnung 9. Für den Teil der Kugelschale, der die äußere Wand der Kondensationskammer bildet, ergab sich eine tiefste Eigenfrequenz von 57 Hz bei der Umfangsordnung Null; zu höheren Umfangsordnungen gehörten hier höhere Eigenfrequenzen.

Unter Beachtung dieser Ergebnisse und der beschränkten Rechnerkapazität erschien für das Gesamtsystem ein Netz aus 389 Knoten (entsprechend etwa 2100 Freiheitsgraden) als angemessen (Bild 3). Durch kinematische Kondensation wurde die Zahl der Freiheitsgrade auf 520 reduziert, so daß das Containment noch durch etwa 180 Knoten mit je 3 translatorischen Freiheitsgraden beschrieben wurde. Daraus wurden die ersten 60 Modes und Eigenfrequenzen berechnet. Neben vielen "lokalen Modes", in denen lediglich einzelne Baugruppen (Zylinderschale, Kegelschale) schwingen, traten globale Modes auf, die das gesamte Containment betrafen. Bild 4 zeigt eine balkenähnliche Eigenschwingungsform des Containments bei 12 Hz, Bild 5 zeigt einen Ovalisierungs-mode bei 43 Hz. Noch höhere Modes hatten sehr scharfe Peaks innerhalb weniger Elemente, was auf zu grobe Diskretisierung für diese Modes schließen läßt; sie wurden daher bei der transienten Analyse nicht berücksichtigt. Dieses Vorgehen erschien berechtigt, da die Eigenfrequenzen der unberücksichtigten Modes etwa um den Faktor 5 größer waren als die dominierende Belastungsfrequenz.

In dem hier untersuchten Brunsbüttel-Experiment wurde über ein Entlastungsrohr, das mit einer speziellen Ausströmdüse bestückt ist, kurzzeitig Dampf in das Wasser geblasen. (Versuch 77, November 1974, Druck im Reaktor-druckbehälter 70 bar, Wassertemperatur in der Kondensationskammer 34°C .) Hierdurch entstanden im gesamten Wasserpool Druckpulsationen, die das Containment belasteten. Aus den an einzelnen Punkten der Schalen gemessenen Druck-Zeitverläufen wurde eine Schalenbelastung interpoliert, die in einer groben Näherung jeweils in Sektoren von 45° als gleich groß angenommen wurde. Daraus wurden Knotenkräfte berechnet, mit denen in der transienten Analyse Containmentsauslenkungen ermittelt werden konnten.

Bild 6 zeigt die so berechneten Radialauslenkungen eines Punktes der Kugelschale in der Nähe des abblasenden Rohres. Mit eingezeichnet sind Verschiebungen desselben Punktes, wie sie aus der zweifachen Integration der im Versuch ebenfalls gemessenen Beschleunigungen ermittelt wurden. Eine gewisse Übereinstimmung erscheint auf den ersten Blick noch vorhanden zu sein. Weitere Vergleiche zeigten aber, daß in der STRUDL-Rechnung in erster Linie der Balkenmode des Containments (Bild 4) angeregt wurde, was mit experimentellen Beobachtungen gar nicht übereinstimmt. So ergaben die Rechnungen beispielsweise sehr große Auslenkungen am Pol der Kugel, während bei den Experimenten dieser Punkt praktisch in Ruhe blieb.

2.3 Versagen des Elementes bei sehr dünnen Schalen

Weitere Vergleiche von STRUDL-Ergebnissen mit experimentellen Beobachtungen legten die Vermutung nahe, daß vor allem das elastische Verhalten des Teils der Kugelschale, der die äußere Wand der Kondensationskammer bildet, durch die finiten Elemente nicht richtig beschrieben wird. Dieser Verdacht wird durch eine vereinfachte Abschätzung des Verhaltens dünner Kugelschalen bestätigt: Die inneren Schnittquerkräfte Q_y , die von einer aufgeprägten Querkraftbelastung Q_0 hervorgerufen werden, nehmen mit zunehmendem meridionalen Abstand s von der Kraftangriffsstelle sehr rasch ab $\sim s^{-1.7}$. Für eine rotationssymmetrische statische Randbelastung durch eine Querkraft wird dieses Verhalten beschrieben durch:

$$Q_y(s) = -Q_0 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-s/s^*} \cdot \sin\left(\frac{s}{s^*} - \frac{\pi}{4}\right)$$

mit $s^* \approx \frac{\sqrt{R \cdot h}}{4 \sqrt{3(1-\nu^2)}}$.

Hierin ist R der Schalenradius, h die Schalendicke und ν die Querkontraktionszahl. Für Stahl mit $\nu = 0.3$ ergibt sich

$$s^* = 0.778 \cdot \sqrt{Rh}$$

Bei der Kugelschale des Brunsbüttel-Containments ergibt sich eine Abklinglänge von $s^* = 0.4\text{m}$, entsprechend einem Zentriwinkel von 1.7° . Dies bedeutet, daß der Einfluß einer Querkraft in einem Abstand von etwa 5° auf 5 % abgeklungen ist. Im dynamischen Fall sind solche Querkräfte auch die Trägheitskräfte der radialen Verformungen. Eine Diskretisierung der Containmentschale mit einer Maschenweite von etwa 12° , wie sie in den STRUDL-Rechnungen vorlag, kann daher keine korrekten Ergebnisse liefern.

Wählt man eine der Abklinglänge s^* entsprechende Elementgröße, dann kann die Forderung nach einem Anstellwinkel zwischen benachbarten Elementen von mindestens 6° nur eingehalten werden, wenn $R/h \leq 150$ ist (für die Brunsbüttel-Containmentschale ist dieses Verhältnis $R/h = 675$). Die Beschreibung sehr dünner Schalen mit den in STRUDL wie auch in anderen Standard-Finite-Element-Programmen vorgesehenen Elementen ist daher fragwürdig. Zwar können Eigenschwingungsformen mit niedriger Ordnung und die zugehörigen Eigenfrequenzen berechnet werden, aber die tiefsten Eigenfrequenzen der Schale müssen nicht zwangsweise darunter sein. Ferner ist die Durchführung einer transienten Analyse mit lokalen Belastungen oder gar die Berechnung von Spannungen an Rändern oder Verbindungsstellen mit anderen Bauteilen nicht zulässig.

2.4 Weitere Verfahren zur Berechnung dünner Schalen

Bei den Standard-Finite-Element-Programmen war der Feinheit der Diskretisierung eine elementbedingte Grenze gezogen (Anstellwinkel). Mit zweifach gekrümmten dreieckigen Schalenelementen etwa von Cowper [18] wäre eine wesentlich feinere Diskretisierung erreichbar. Allerdings sind solche von schwach gekrümmten Schalen abgeleiteten Elemente genau genommen auch nicht konform, wenn sie für stark gekrümmte Schalen eingesetzt werden, da in der Bezugsebene - und damit auch im Koordinatensystem - benachbarter Elemente ein Knick vorhanden ist [19]. Die modernsten Schalenelemente, wie etwa das von Laursen [20], enthalten diese Vereinfachungen nicht; sie benutzen ferner gleichzeitig Ansätze sowohl für die Verformungen wie für die Spannungen, wodurch für beide Variablengruppen gleiche Genauigkeit erreicht wird. Bei Anwendung solcher Elemente für in Umfangsrichtung geschlossene sehr dünne Schalen wird aber rasch eine so hohe Anzahl von Elementen erreicht, daß die Lösung numerisch nicht mehr möglich ist. Bei dynamischen Schalenuntersuchungen genügt

es nämlich nicht, etwa nur einen kleinen interessierenden Schalenbereich entsprechend fein zu diskretisieren. Die feine Diskretisierung muß sich vielmehr auf die ganze Schale erstrecken, wie folgende Überlegung zeigt:

Jeder Verformungszustand eines linearen Systems läßt sich durch geeignetes Überlagern der Eigenschwingungsformen darstellen [21]. Zur Beschreibung so scharfer Gradienten, wie sie bei der Kugelschale des Containments auftreten können, sind dann Modes sehr hoher Ordnungen zu superponieren. Da es bei einer vollständigen Kugelschale keine Vorzugsrichtung gibt, ist auch in Umfangsrichtung ein so scharfes Abklingverhalten zu erwarten, d.h., es sind auch Modes sehr hoher Umfangsordnung zu überlagern. Solche Modes hoher axialer Ordnung und hoher Umfangsordnung können sich im numerischen Modell nur dann ausbilden, wenn die entsprechenden Freiheitsgrade vorhanden sind, wenn also auf der gesamten Schale die Diskretisierung entsprechend fein ist.

Bei Schalen mit rotationssymmetrischer Geometrie bietet sich als Ausweg eine Fourierentwicklung für den Umfang an, wodurch die Schalendifferentialgleichungen in Systeme mit nur noch einer Unabhängigen zerfallen, die für jede Umfangsordnung einzeln gelöst werden können. Hierzu könnten gekrümmte Fourier-Schalenring-Elemente eingesetzt werden, wie sie etwa von Gould [26] oder Schrader [27] entwickelt wurden. Bei diesem Vorgehen wurde beobachtet, daß sich die Abklinglängen mit zunehmender Umfangsordnung weiter verkürzen. Gould [22] leitet aus statischen Untersuchungen an Zylinderschalen eine weiter verkleinerte Gitterweite von $s^*/2^p$ ab, mit $p = \sqrt[3]{m}$ und m der Umfangsordnung. Die gleiche Problematik führte bei Smith [23] bei der Anwendung von finiten Differenzen auf eine Maschenweite von der Größenordnung der Schalendicke. Die Berücksichtigung dieses Verhaltens in der Diskretisierung führt bei sehr dünnen Schalen auf immer noch recht große Gleichungssysteme. Optimaler könnte hier der Einsatz der direkten numerischen Integration der Schalendifferentialgleichungen sein, wobei eine automatische

Steuerung der Integrationsschrittweite möglich wäre. Bei sehr dünnen Schalen versagt aber diese Methode der numerischen Integration: nach Kalnins [24] und Sutcliffe [25] können die Schalendifferentialgleichungen aus numerischen Gründen kaum über mehr als das Drei- bis Fünffache der Abklinglänge s^* integriert werden; daher führen sie Segmente dieser Größe ein, innerhalb derer die Schalengleichungen numerisch integriert werden, und die dann über die Verträglichkeitsbedingungen miteinander gekoppelt werden. Damit wäre aber der Vorteil dieses Verfahrens - eine automatisch problemangepaßte Diskretisierung - verspielt.

Diese hier skizzierten numerischen Methoden wurden bisher aber lediglich für "dickere" Schalen angewendet ($R/h \leq 30$ bei [20], [23], [24]); bei der Untersuchung von so dünnen Schalen wie sie hier vorliegen wurde nur rotations-symmetrisch oder mit sehr wenigen Umfangsordnungen gerechnet ([26], [27], [28]). Bei auch in Umfangsrichtung lokalen Belastungen sind aber auch höhere Umfangsordnungen in der Last enthalten, die Schalenverformungen entsprechender Ordnung hervorrufen. Unter Umständen können solche höheren Ordnungen einen unverhältnismäßig großen Anteil an der Gesamtverformung haben. Dies ist z.B. bei der oben untersuchten Zylinderschale der Fall, bei der die niedrigste Eigenfrequenz zu einem Mode höherer Ordnung gehört (Bild 2):

Stellt man die Eigenfrequenzen durch den Rayleigh-Quotienten dar, dann ergibt sich - da sich die schwingende Masse der Schale mit zunehmender Schwingungsordnung nur unwesentlich ändert -, daß das Quadrat der Eigenfrequenz unmittelbar die Steifigkeit der Schale gegen eine Verformung der entsprechenden Ordnung beschreibt. Bei der erwähnten einseitig eingespannten Zylinderschale heißt dies z.B., daß eine Verformung sechster Umfangsordnung etwa zehnmal so leicht wie eine ovalisierende Verformung gleicher Größe (Umfangsordnung 2) aufgeprägt werden kann.

Diese Überlegungen zeigen, daß auch die höheren Verformungsordnungen bei dünnen Zylinderschalen einen großen Einfluß haben können. Ob die hohen Verformungsordnungen auch bei dem dünnen, ringförmigen Teil der Kugelschale, der die Außenwand der Kondensationskammer bildet, einen ähnlich großen Einfluß haben, ist nicht bekannt. Die hierzu durchgeführten Rechnungen mit STRUDL können keinen Aufschluß geben, da gerade die höheren Eigenschwingungsordnungen schlecht oder gar nicht mehr dargestellt werden; sonstige Untersuchungen eines solchen Kugelschalenringes sind nicht bekannt. Um unabhängig von numerischen Schwierigkeiten das Verhalten dieses Bauteiles gründlich zu studieren und um einen besseren Einblick in die beteiligten Vorgänge zu erhalten, soll hier das Problem analytisch beschrieben und so weit wie möglich aufbereitet werden.

Bei der Entwicklung von analytischen Modellen für rotations-symmetrische Schwingungen von Kugelschalen stellt Kalnins [31] fest, daß die Berücksichtigung der tangentialen Trägheitskräfte bei stark gekrümmten Kugelschalen unbedingt erforderlich ist. Ferner reicht die Membrantheorie lediglich aus zur Darstellung der höherfrequenten Membranmodes, während nur die niedrigsten Ordnungen der tieffrequenten Biegemodes brauchbar dargestellt werden. Das zu entwickelnde analytische Modell muß daher die Biegetheorie der Schalen enthalten sowie die tangentialen Trägheitseinflüsse berücksichtigen.

Wilkinson [29] leitet aus der Schalentheorie von Naghdi [30] ein entkoppeltes Gleichungssystem zehnter Ordnung ab, das Querkraftverformungen und Rotationsträgheit berücksichtigt. Da dynamische Druckbelastungen nicht enthalten sind, kann das System hier nicht übernommen werden. Auf der anderen Seite ist bei dem hier zu untersuchenden Problem die Berücksichtigung von Querkraftverformungen und Rotationsträgheit nicht erforderlich, da die Wellenlänge der noch zu berücksichtigenden Modes wesentlich größer als die Schalendicke bleibt. Zur Beschreibung des Schalenverhaltens wird

daher, auch bei den hier noch zu untersuchenden hohen Verformungsordnungen, eine Theorie für dünne Schalen ausreichen.

Die genannten Forderungen werden von der Flügge'schen Schalentheorie erfüllt, die lediglich um translatorische Trägheitskräfte zu erweitern ist.

3. Analytische Beschreibung der Kugelschale

3.1 Grundgleichungen der Kugelschale

Die Flügge'sche Schalentheorie [8] wird um die tangentialen Trägheitskräfte erweitert. Mit den in Bild 7 bezeichneten Größen lautet dann das Gleichgewicht am Element der Kugelschale:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi} \cdot \sin \varphi) + \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - N_{\theta} \cdot \cos \varphi - Q_{\varphi} \cdot \sin \varphi + p_{\varphi} R \cdot \sin \varphi = \rho h \ddot{u}_{\varphi} R \cdot \sin \varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi\theta} \cdot \sin \varphi) + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + N_{\theta\varphi} \cdot \cos \varphi - Q_{\theta} \cdot \sin \varphi + p_{\theta} \cdot R \cdot \sin \varphi = \rho h \ddot{u}_{\theta} R \cdot \sin \varphi$$

$$-\frac{\partial}{\partial \varphi} (Q_{\varphi} \cdot \sin \varphi) - \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} - (N_{\varphi} + N_{\theta}) \cdot \sin \varphi + p_{r} R \cdot \sin \varphi = \rho h \ddot{w} R \cdot \sin \varphi \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (M_{\varphi} \cdot \sin \varphi) + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - M_{\theta} \cdot \cos \varphi - Q_{\varphi} R \cdot \sin \varphi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (M_{\varphi\theta} \cdot \sin \varphi) + \frac{\partial M_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + M_{\theta\varphi} \cdot \cos \varphi - Q_{\theta} R \cdot \sin \varphi = 0$$

Das Momentengleichgewicht um die Normale des Schalenelementes wird bei Kugelschalen automatisch erfüllt, da

$$M_{\varphi\theta} = M_{\theta\varphi} \quad \text{und} \quad N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$$

gelten.

Zwischen den drei Verschiebungen u_φ , u_θ und w der Schalenmittelfläche und den Spannungsergebnierenden gibt Flügge [8] folgendes elastisches Gesetz an:

$$\begin{aligned}
 N_\varphi &= \frac{D}{R} \cdot \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + w + \nu \cdot \csc \varphi \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \nu u_\varphi \cdot \cot \varphi + \nu w \right) \\
 N_\theta &= \frac{D}{R} \cdot \left(\csc \varphi \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\varphi \cdot \cot \varphi + w + \nu \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \nu w \right) \\
 N_{\varphi\theta} &= N_{\theta\varphi} = \frac{D}{R} \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - u_\theta \cdot \cot \varphi + \csc \varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right) \\
 M_\varphi &= k \cdot D \cdot \left(-\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \nu \cdot \csc \varphi \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \nu u_\varphi \cdot \cot \varphi \right. \\
 &\quad \left. + \nu \cdot \cot \varphi \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \nu \cdot \csc^2 \varphi \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\
 M_\theta &= k \cdot D \cdot \left(-\csc \varphi \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - u_\varphi \cdot \cot \varphi + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cdot \cot \varphi + \csc^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right. \\
 &\quad \left. - \nu \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \\
 M_{\varphi\theta} &= M_{\theta\varphi} = k \cdot D \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \left(u_\theta \cdot \cot \varphi - \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \csc \varphi \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \csc^2 \varphi \cdot \cos \varphi + 2 \cdot \csc \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} \right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Hierin ist

$$D = \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \quad k = \frac{h^2}{12R^2} \quad \csc \varphi = \frac{1}{\sin \varphi}$$

- E Elastizitätsmodul
- ν Poissonzahl
- h Schalendicke
- R Schalenradius
- ϱ Schalendichte
- u_φ Tangentialauslenkung meridional
- u_θ Tangentialauslenkung in Umfangsrichtung
- w Radialauslenkung

Dieses elastische Gesetz setzt voraus, daß Querkraftverformungen und Dehnungen in Normalenrichtung nicht auftreten ($\gamma_{z\varphi} = \gamma_{z\theta} = \epsilon_z = 0$). Ferner wurden bei der Integration zur Ermittlung der Spannungsergebnisierenden Reihenglieder mit $(h/R)^5$ und höhere Ordnungen vernachlässigt.

3.2 Fourier-Entwicklung für den Umfang

Die zu untersuchende Kugelschale ist in Umfangsrichtung geschlossen, alle das Problem beschreibende Variablen müssen daher in der Umfangskoordinate θ periodisch sein und sich daher als Fourier-Summe darstellen lassen. Mit den folgenden Ansätzen für die Belastungen

$$p_{\theta} = \sum_m p_{\theta m}(\varphi, t) \cdot \sin m\theta$$

$$p_{\varphi} = \sum_m p_{\varphi m}(\varphi, t) \cdot \cos m\theta$$

$$p_r = \sum_m p_{rm}(\varphi, t) \cdot \cos m\theta \quad ,$$

die Verschiebungen

$$u_{\theta} = \sum_m u_{\theta m}(\varphi, t) \cdot \sin m\theta$$

$$u_{\varphi} = \sum_m u_{\varphi m}(\varphi, t) \cdot \cos m\theta$$

$$w = \sum_m w_m(\varphi, t) \cdot \cos m\theta \quad ,$$

und die Spannungsergebnisierenden

$$N_{\theta} = \sum_m N_{\theta m}(\varphi, t) \cdot \cos m\theta$$

$$M_{\theta} = \sum_m M_{\theta m}(\varphi, t) \cdot \cos m\theta$$

$$N_{\varphi} = \sum_m N_{\varphi m}(\varphi, t) \cdot \cos m\theta$$

$$M_{\varphi} = \sum_m M_{\varphi m}(\varphi, t) \cdot \cos m\theta$$

$$N_{\varphi\theta} = \sum_m N_{\varphi\theta m}(\varphi, t) \cdot \sin m\theta$$

$$M_{\varphi\theta} = \sum_m M_{\varphi\theta m}(\varphi, t) \cdot \sin m\theta$$

$$Q_{\varphi} = \sum_m Q_{\varphi m}(\varphi, t) \cdot \cos m\theta$$

$$Q_{\theta} = \sum_m Q_{\theta m}(\varphi, t) \cdot \sin m\theta$$

läßt sich das Differentialgleichungssystem (1) und (2) in unendlich viele Systeme aufspalten, die jeweils für eine einzelne Umfangsordnung m für sich zu erfüllen sind [8]. Daher genügt es, im folgenden die Umfangsordnungen einzeln zu betrachten. Die Ableitungen nach θ können ausgeführt werden; die Ableitung nach φ wird durch ' gekennzeichnet; der Index m wird fortgelassen.

Die Gleichgewichtsbedingungen (1) lauten nun:

$$\begin{aligned}
 (N_{\varphi} \cdot \sin \varphi)' + m N_{\varphi e} - N_e \cdot \cos \varphi - Q_{\varphi} \cdot \sin \varphi + p_{\varphi} R \cdot \sin \varphi &= \rho h u_{\varphi} R \cdot \sin \varphi \\
 (N_{\varphi e} \cdot \sin \varphi)' - m N_e + N_{\varphi e} \cdot \cos \varphi - Q_e \sin \varphi + p_e R \cdot \sin \varphi &= \rho h u_e R \cdot \sin \varphi \\
 (Q_{\varphi} \cdot \sin \varphi)' + m Q_e + (N_{\varphi} + N_e) \cdot \sin \varphi - p_R R \cdot \sin \varphi &= -\rho h \dot{w} R \cdot \sin \varphi \\
 (M_{\varphi} \cdot \sin \varphi)' + m M_{\varphi e} - M_e \cdot \cos \varphi - Q_{\varphi} R \cdot \sin \varphi &= 0 \\
 (M_{\varphi e} \cdot \sin \varphi)' - m M_e + M_{\varphi e} \cdot \cos \varphi - Q_e R \cdot \sin \varphi &= 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

Das elastische Gesetz (2) nimmt die Form an:

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi} &= \frac{D}{R} \cdot (u_{\varphi}' + w + \nu \cdot \csc \varphi \cdot m u_e + \nu u_{\varphi} \cdot \cot \varphi + \nu w) \\
 N_e &= \frac{D}{R} \cdot (\csc \varphi \cdot m u_e + u_{\varphi} \cdot \cot \varphi + w + \nu u_{\varphi}' + \nu w) \\
 N_{\varphi e} &= \frac{D}{R} \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot (u_e' - u_e \cdot \cot \varphi - \csc \varphi \cdot m u_{\varphi}) \\
 M_{\varphi} &= k \cdot D \cdot (w'' - u_{\varphi}' - \nu \cdot \csc \varphi \cdot m u_e - \nu u_{\varphi} \cdot \cot \varphi \\
 &\quad + \nu \cdot \cot \varphi \cdot w' - \nu m^2 \cdot \csc^2 \varphi \cdot w) \\
 M_e &= k \cdot D \cdot (-m^2 \cdot \csc^2 \varphi \cdot w + w' \cdot \cot \varphi - u_{\varphi} \cdot \cot \varphi - m \cdot \csc \varphi \cdot u_e - \nu u_{\varphi}' + \nu w'') \\
 M_{\varphi e} &= k \cdot D \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot (u_e \cdot \cot \varphi - u_e' + \csc \varphi \cdot m u_{\varphi} + 2m w \cdot \csc^2 \varphi \cdot \cos \varphi - 2 \cdot \csc \varphi \cdot m w')
 \end{aligned} \tag{4}$$

3.3 Elimination der Spannungsergebnisse

Aus den beiden letzten Gleichgewichtsbedingungen (3) können die Querkräfte bestimmt werden und mit den Kräften aus dem elastischen Gesetz (4) in die ersten drei Gleichgewichtsbedingungen (3) eingesetzt werden. Auf diese Weise werden drei gekoppelte Differentialgleichungen in den drei Auslenkungen u_φ , u_θ und w erhalten:

$$\begin{aligned}
 & -w'''' k \cdot \sin\varphi - w'' k \cdot \cos\varphi + w' \cdot \sin\varphi \cdot \left[-1 + \nu + k\nu - k + k \cdot \csc^2\varphi \cdot (1+m^2) \right] \\
 & - 2wkm^2 \cdot \csc^2\varphi \cdot \cos\varphi \\
 & + u_\varphi'' \cdot (1+k) \cdot \sin\varphi + u_\varphi' \cdot (1+k) \cdot \cos\varphi - u_\varphi \cdot (1+k) \cdot \csc\varphi \cdot \left(\nu \cdot \sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \frac{1-\nu}{2} \cdot m^2 \right) \quad (5.1) \\
 & + u_\theta' m \frac{1+\nu}{2} (1+k) - u_\theta m \cdot \cot\varphi \cdot \frac{3-\nu}{2} \cdot (1+k) \\
 & + p_\varphi \frac{R^2}{D} \cdot \sin\varphi = \quad \rho \cdot \ddot{u}_\varphi \frac{R^2}{D} \cdot \sin\varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & w'' km + w' km \cdot \cot\varphi + w m \cdot (k - k\nu - 1 - \nu - km^2 \cdot \csc^2\varphi) \\
 & - u_\varphi' m (1+k) \frac{1+\nu}{2} - u_\varphi m \cdot \cot\varphi \cdot \frac{3-\nu}{2} \cdot (1+k) \\
 & + u_\theta'' \frac{1-\nu}{2} \cdot (1+k) \cdot \sin\varphi + u_\theta' \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot (1+k) \cdot \cos\varphi \quad (5.2) \\
 & - u_\theta \cdot (1+k) \cdot \csc\varphi \cdot \left(m^2 - \frac{1-\nu}{2} \cdot \sin^2\varphi + \frac{1-\nu}{2} \cdot \cos^2\varphi \right) \\
 & + p_\theta \frac{R^2}{D} \cdot \sin\varphi = \quad \rho \cdot \ddot{u}_\theta \frac{R^2}{D} \cdot \sin\varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & w'''' k \cdot \sin\varphi + w'''' \cdot 2 \cdot k \cdot \cos\varphi - w'' k \cdot \csc\varphi \cdot (1 + \nu \cdot \sin^2\varphi + 2m^2) \\
 & - w' k \cdot \cos\varphi \cdot (1 - \nu + 2m^2 \cdot \csc^2\varphi + \csc^2\varphi) \\
 & + w \cdot \left[-2(1+\nu) \cdot \sin\varphi - m^2 k \cdot \csc\varphi \cdot (3-\nu + 4 \cdot \cot^2\varphi) + m^4 k \csc^3\varphi \right] \\
 & - u_\varphi'' k \cdot \sin\varphi - u_\varphi'' \cdot 2 \cdot k \cdot \cos\varphi \quad (5.3) \\
 & + u_\varphi' \cdot \sin\varphi \cdot \left[-(1+\nu)(1+k) + m^2 k \csc^2\varphi + k \cdot \cot^2\varphi \right] \\
 & + u_\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left[-(1+\nu) + k(\nu - \csc^2\varphi - 1 + m^2 \cdot \csc^2\varphi) \right] \\
 & - u_\theta'' km + u_\theta' km \cdot \cot\varphi + u_\theta m \cdot \left[-1 + \nu + k\nu - 2k - k \cdot \cot^2\varphi + km^2 \csc^2\varphi \right] \\
 & - p_r \frac{R^2}{D} \cdot \sin\varphi = \quad -\rho \cdot \ddot{w} \frac{R^2}{D} \cdot \sin\varphi
 \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichungen entsprechen den Flügge'schen bis auf die hier zusätzlich mitgeführten Belastungen und Trägheitskräfte.

3.4 Entkoppelung der Differentialgleichungen

Zur analytischen Lösung sind die drei Differentialgleichungen (5) zu entkoppeln. Da die einzelnen Eliminationsschritte recht längliche Umformungen enthalten, sollen hier nur die Ergebnisse der wichtigsten Schritte wiedergegeben werden.

Durch eine von Kalnins [24] benutzte Substitution

$$\begin{aligned} u_\varphi &= U' - \Psi \cdot \sin \varphi \\ u_\theta &= -mU \cdot \csc \varphi \end{aligned} \quad (6)$$

sowie durch die Einführung des Laplace-Operators für die Kugelfläche

$$\nabla^2 f = f'' + \cot \varphi \cdot f' - m^2 \cdot \csc^2 \varphi \cdot f \quad (7)$$

lassen sich die Differentialgleichungen (5) in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned} &-k \cdot \sin \varphi \cdot (\nabla^2 w)' + (1+\nu+k\nu-k) \cdot \sin \varphi \cdot w' \\ &-(1+k) \cdot \sin \varphi \cdot (\nabla^2 U)' + (1+k)(1-\nu) \cdot \sin \varphi \cdot U' \\ &-\Psi'' \cdot (1+k) \cdot \sin^2 \varphi - \Psi' \cdot (1+k) \cdot 3 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \Psi \cdot (1+k) \cdot \left[\sin^2 \varphi \cdot (1+\nu) + \frac{1-\nu}{2} m^2 \right] \\ &+ p_\varphi \frac{R^2}{D} \cdot \sin \varphi = \frac{R^2}{D} \int h \cdot \sin \varphi \cdot (\ddot{U}' - \ddot{\Psi} \cdot \sin \varphi) \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} &km \nabla^2 w - (1+\nu+k\nu-k) m w \\ &-m(1+k) \nabla^2 U - m(1+k)(1-\nu) U \\ &+ \Psi' \cdot m(1+k) \frac{1+\nu}{2} \cdot \sin \varphi + 2\Psi m(1+k) \cdot \cos \varphi \\ &+ p_\theta \frac{R^2}{D} \cdot \sin \varphi = - \frac{R^2}{D} \int h m \dot{U} \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} &k \cdot \sin \varphi \cdot \nabla^4 w + k(1-\nu) \cdot \sin \varphi \cdot \nabla^2 w + 2(1+\nu) \cdot \sin \varphi \cdot w \\ &-k \cdot \sin \varphi \cdot \nabla^4 U + (1+\nu+k\nu-k) \cdot \sin \varphi \cdot \nabla^2 U \\ &+ k \cdot \sin^2 \varphi \cdot (\nabla^2 \Psi)' + 4k \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \nabla^2 \Psi - \left[(1+\nu)(1+k) + 2k \right] \cdot \sin^2 \varphi \cdot \Psi' \\ &\quad - 2(1+\nu)(1+k) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \Psi \\ &- p_r \frac{R^2}{D} \cdot \sin \varphi = - \frac{R^2}{D} \int h \cdot \sin \varphi \cdot \ddot{w} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Zur Abkürzung wird für die zeitlichen Ableitungen die Laplace-
transformation benutzt ($s \cdot f = \partial f / \partial t$); da tangentiale Belastungen
nicht aufgebracht werden sollen, wird $p_\psi = 0$ und $p_\theta = 0$ gesetzt;
ferner wird der Zeitmaßstab T eingeführt:

$$T^2 = \frac{R^2}{D} \cdot \rho \cdot h \quad (9)$$

Im ersten Eliminationsschritt wird aus (8.1) und (8.2) U und w
eliminiert durch die Operation:

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} (8.2) \cdot \sin \psi + (8.1). \quad (m \neq 0) \quad (10)$$

Mit Hilfe der dadurch erhaltenen Beziehung (11.1) werden
dann aus (8.2) und (8.3) alle zweiten und höheren Ableitun-
gen von ψ eliminiert. Damit lauten die Differential-
gleichungen:

$$\nabla^2 \psi + 2\psi - \frac{2}{(1+k)(1-\nu)} \cdot T^2 s^2 \cdot \psi = 0 \quad (11.1)$$

$$k \nabla^2 w - (1 + \nu + k\nu - k) \cdot w \quad (11.2)$$

$$-(1+k) \nabla^2 U - \frac{1}{(1+k)(1-\nu)} - T^2 s^2 \cdot U$$

$$+ \psi' \cdot \sin \psi \cdot (1+k) \cdot \frac{1+\nu}{2} + 2\psi \cdot \cos \psi \cdot (1+k) = 0$$

$$k \nabla^4 w + k(1-\nu) \cdot \nabla^2 w + \frac{2}{(1+k)(1-\nu)} + T^2 s^2 \cdot w \quad (11.3)$$

$$-k \nabla^4 U + (1+\nu+k\nu-k) \nabla^2 U$$

$$-\psi' \cdot \sin \psi \cdot \frac{1}{(1+k)(1-\nu)} - k \cdot \frac{1}{1+k} \cdot \frac{1}{1-\nu} \cdot T^2 s^2 \cdot U$$

$$-2\psi \cdot \cos \psi \cdot \frac{1}{(1+k)(1-\nu)} - 4k \cdot \frac{1}{1+k} \cdot \frac{1}{1-\nu} \cdot T^2 s^2 \cdot U = \frac{R^2}{D} \cdot p_r$$

Aus den Gleichungen (11.2) und (11.3) läßt sich unter Beachtung
von Gleichung (11.1) U und ψ eliminieren durch die Operation

$$(1+\nu+k\nu-k) \cdot \nabla^2 (11.2) - k \cdot \nabla^4 (11.2) \quad (12)$$

$$+ \frac{1}{(1+k)(1-\nu)} - T^2 s^2 \cdot U \cdot (11.3) + (1+k) \cdot \nabla^2 (11.3)$$

so daß sich eine Differentialgleichung in w allein ergibt (14.1).
Durch die Operation

$$-k \cdot \nabla^2(11.2) + \nabla^{-1+\nu} - \frac{k}{1+k} T^2 s^2 \nabla \cdot (11.2) + (1+k) \cdot (11.3) \quad (13)$$

ergibt sich schließlich Gleichung (14.3), aus der U eindeutig bestimmbar ist. Damit lautet das in den drei Auslenkungen entkoppelte Gleichungssystem zur Beschreibung der Kugelschale:

$$\begin{aligned} & k \nabla^6 w + k(4 - T^2 s^2) \nabla^4 w \\ & + \nabla^{-1} (1 + 5k - \nu^2 - k\nu^2) + (1 + k\nu) T^2 s^2 \nabla \cdot \nabla^2 w \\ & + \nabla^{-2} (1 - \nu^2)(1 + k) - (1 + 3\nu + \nu k - k) T^2 s^2 - T^4 s^4 \nabla \cdot w \\ & = \frac{R^2}{D} \cdot \nabla^{-1} (1 + k)(1 - \nu) - T^2 s^2 \nabla p_r + \frac{R^2}{D} \cdot (1 + k) \nabla^2 p_r \end{aligned} \quad (14.1)$$

$$\nabla^2 \psi + 2\psi - 2 \cdot \frac{1}{1+k} \cdot \frac{1}{1-\nu} \cdot T^2 s^2 \psi = 0 \quad (14.2)$$

$$\begin{aligned} & \nabla^{-1} (1 + k)(1 - \nu^2) - (1 + \nu + k - k\nu) T^2 s^2 + \frac{k}{1+k} T^4 s^4 \nabla \cdot U = \\ & k \nabla^4 w + \nabla^{-3+\nu} - \frac{k}{1+k} T^2 s^2 \nabla k \nabla^2 w \\ & + \nabla^{-1} (1 + \nu)(1 + 3k - \nu - k\nu) + (1 + \nu + k\nu - k) \cdot \frac{k}{1+k} T^2 s^2 + (1 + k) T^2 s^2 \nabla \cdot w \\ & + \frac{2}{1-\nu} \cdot 4 \cdot k T^2 s^2 \cdot \psi \cdot \cos \varphi + \nabla^{-1} (1 + k)(1 + \nu) + k T^2 s^2 \nabla \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \psi' \cdot \sin \varphi \\ & - \frac{R^2}{D} \cdot (1 + k) p_r \end{aligned} \quad (14.3)$$

Der Fall rotationssymmetrischer Belastungen und Verformungen ($m = 0$) war im obigen Eliminationsprozeß ausgeschlossen und muß daher gesondert betrachtet werden. Gleichung (8.2), die Gleichgewicht in θ -Richtung verlangt, verschwindet. Setzt man in der Substitution (6) $\psi = 0$, so daß lediglich

$$u_\varphi = U' \quad (15)$$

bleibt und führt dies in Gl. (8.1) ein, dann ergibt sich nach kürzen von $\sin\varphi$:

$$\begin{aligned} & -k (\nabla^2 w)' + (1+\nu+k\nu-k)w' \\ & + (1+k)(\nabla^2 U)' + (1+k)(1-\nu)U' \\ & = T^2 \cdot \ddot{U}' \end{aligned} \tag{16}$$

Diese Gleichung kann leicht einmal über φ integriert werden und entspricht dann (11.2) unter Beachtung von $\psi = 0$. Damit kann der gleiche letzte Schritt des Eliminationsprozesses angewendet werden, um die schon bekannte Differentialgleichung sechster Ordnung in w zu erhalten. Bei der Integration von (16) kann eine beliebige Integrationskonstante gewählt werden, da sie durch Differentiationen im Eliminationsprozeß (12) sowie wegen (15) wieder verschwindet. Das Gleichungssystem (14) gilt daher auch für den Sonderfall $m = 0$, falls $\psi = 0$ gesetzt wird.

3.5 Allgemeines zu den Randbedingungen

Die Lösung des Systems (14) enthält acht freie Konstanten (6 in (14.1) für w , 2 in (14.2) für ψ), so daß acht vorgegebene Randbedingungen (jeweils 4 an den zwei Rändern $\varphi = \text{const.}$) notwendig sind. An jedem Rand können aber 5 Kräfte (Bild 7) vorgegeben werden; hierzu müßte dann allerdings auch der Spannungszustand über der Schalendicke in den Randbedingungen eindeutig festgelegt werden. Da reale Randbedingungen jedoch kaum Aussagen zur Spannungsverteilung über der Schalendicke machen, und da nach dem Prinzip von Saint-Venant die Verteilung der Randspannungen über der Dicke auch keinen weitreichenden Einfluß hat, werden üblicherweise statisch äquivalente Ersatzkräfte [32, 33] eingeführt:

$$V_{\varphi} = Q_{\varphi} + m \cdot M_{\varphi\theta} / R$$

$$T_{\varphi\theta} = N_{\varphi\theta} - M_{\varphi\theta} / R$$

Damit lassen sich für einen Rand $\varphi = \text{const.}$ die folgenden vier Größen vorgeben:

$$\begin{array}{ll} N_{\varphi} & \text{oder } u_{\varphi} \\ T_{\varphi\theta} & \text{oder } u_{\theta} \\ V_{\varphi} & \text{oder } w \\ M_{\varphi} & \text{oder } \beta_{\varphi}, \end{array}$$

mit dem Neigungswinkel β_{φ} :

$$\beta_{\varphi} = (w' - u_{\varphi}) / R$$

Im allgemeinen Fall sind 2 Ränder mit nun acht Bedingungen zur Ermittlung der acht Konstanten gegeben. Im Sonderfall $m = 0$ reduziert sich die Zahl der Randbedingungen und Unbekannten wegen $u_{\theta} = 0$ und $\psi = 0$ auf sechs. Im Falle einer am Apex geschlossenen Kugelschale liegen nur vier Randbedingungen vor; die vier überzähligen Konstanten folgen dann aus Verträglichkeitsbedingungen am Apex.

3.6 Lösung der Schalendifferentialgleichungen

3.6.1 Lösungsfunktionen

Zur Lösung des linearen, inhomogenen Differentialgleichungssystems (14) sind zunächst die homogenen Lösungsfunktionen zu ermitteln. Für diesen Zweck lassen sich die beiden Differentialgleichungen (14.1) und (14.2) in der folgenden Form darstellen:

$$(\nabla^2 - \alpha_1) \cdot (\nabla^2 - \alpha_2) \cdot (\nabla^2 - \alpha_3) \cdot w = 0 \quad (17.1)$$

$$(\nabla^2 - \alpha_\psi) \cdot \psi = 0 \quad (17.2)$$

Darin sind α_1 , α_2 und α_3 die Wurzeln des Polynoms:

$$k\alpha^3 + k(4 - T^2 s^2)\alpha^2 + \sqrt{(1+5k-\nu^2 - k\nu^2)} + (1+k\nu)T^2 s^2 \alpha + \sqrt{-2(1-\nu^2)(1+k) - (1+3\nu+\nu k-k)T^2 s^2 - T^4 s^4} = 0. \quad (18)$$

α_ψ folgt unmittelbar durch Koeffizientenvergleich zu:

$$\alpha_\psi = -2 + 2 \cdot \frac{T^2 s^2}{(1+k)(1-\nu)} \quad (19)$$

Die gesuchten homogenen Lösungsfunktionen müssen daher Lösungen der Differentialgleichung des folgenden Typs sein:

$$\nabla^2 w - \alpha w = 0 \quad \text{bzw.} \quad w'' + \cot \psi \cdot w' - m^2 \csc^2 \psi \cdot w - \alpha w = 0 \quad (20)$$

Hierbei handelt es sich um die Legendre'sche Differentialgleichung, deren Lösungen die Legendrefunktionen erster und zweiter Art sind [34, 35]:

$$w_1 = P_{\tilde{\nu}}^m(\cos \psi) \quad w_2 = Q_{\tilde{\nu}}^m(\cos \psi)$$

Darin ist $\tilde{\nu}$ ein Parameter, der die meridionale Ordnung charakterisiert:

$$\tilde{\nu} \cdot (\tilde{\nu} + 1) = -\alpha$$

Magnus und Erdelyi geben in [34] und [35] zahlreiche Reihenentwicklungen für die Legendrefunktionen an, von denen jedoch nur wenige für den ganzzahligen Parameter m anwendbar

sind. Insbesondere die Formeln für die zweite Legendrefunktion Q für ganzzahlige m sind äußerst unübersichtlich und lassen einen hohen Berechnungsaufwand erwarten. Andere sehr einfache Beziehungen berechnen $Q(x)$ aus $P(x)$ und $P(-x)$; dieser Weg versagt aber, wenn der Parameter $\tilde{\nu}$ ganzzahlig wird. Aus diesen Gründen wurden hier mit Beziehungen aus [34] die folgenden zwei orthogonalen Lösungen aus der hypergeometrischen Differentialgleichung abgeleitet, die für alle Werte der Parameter m und $\tilde{\nu}$ angewendet werden können:

$${}_1P_{\tilde{\nu}}^m(\cos\varphi) = (\sin\varphi)^m \cdot F\left(\frac{1+m+\tilde{\nu}}{2}, \frac{m-\tilde{\nu}}{2}, \frac{1}{2}, \cos^2\varphi\right)$$

$${}_1Q_{\tilde{\nu}}^m(\cos\varphi) = \cos\varphi \cdot (\sin\varphi)^m \cdot F\left(\frac{2+m+\tilde{\nu}}{2}, \frac{1+m-\tilde{\nu}}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2\varphi\right)$$

Darin ist $F(a, b, c, x)$ die hypergeometrische Reihe:

$$F(a, b, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1) \cdot \Gamma(b+1)}{\Gamma(c+l)} \cdot \frac{x^l}{l!},$$

mit Γ der Gammafunktion. Die ersten Ableitungen der obigen Lösungsfunktionen sind:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} ({}_1P_{\tilde{\nu}}^m) = m \cdot \cot\varphi \cdot {}_1P_{\tilde{\nu}}^m - (1+m+\tilde{\nu}) \cdot (m-\tilde{\nu}) \cdot {}_1Q_{\tilde{\nu}}^{m+1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} ({}_1Q_{\tilde{\nu}}^m) = m \cdot \cot\varphi \cdot {}_1Q_{\tilde{\nu}}^m - {}_1P_{\tilde{\nu}}^{m+1}$$

Höhere Ableitungen lassen sich durch wiederholte Anwendung dieser Beziehungen oder auch aus der Legendreschen Differentialgleichung ermitteln.

Die beiden Lösungsfunktionen ${}_1P$ und ${}_1Q$ besitzen an der Stelle $\varphi=0$ einen Pol. Für die Berechnung einer am Apex geschlossenen Kugelschale sind sie so zu überlagern, daß dort endliche Auslenkungen auftreten. Diese Forderung führt auf die folgende Darstellung der Lösungsfunktion:

$${}_2P_{\tilde{\nu}}^m(\cos\psi) = (\sin\psi)^m \cdot F(1+m+\tilde{\nu}, m-\tilde{\nu}, 1+m, \sin^2 \frac{\psi}{2})$$

Die erste Ableitung dieser Funktion ist:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} ({}_2P_{\tilde{\nu}}^m) = m \cdot \cot\psi \cdot {}_2P_{\tilde{\nu}}^m + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+m+\tilde{\nu})(m-\tilde{\nu})}{(1+m)} \cdot {}_2P_{\tilde{\nu}}^{m+1}$$

Nach Erfüllung der Verträglichkeitsbedingungen am Pol sind noch vier verbliebene Randbedingungen durch geeignetes Überlagern der vier Lösungsfunktionen ${}_2P$ zu erfüllen. Bei der Untersuchung von Halbkugelschalen ist dies besonders leicht möglich, da die Funktionswerte und alle ihre Ableitungen für $\psi = 90^\circ$ geschlossen angegeben werden können.

Bei der hier vorliegenden Kugelringschale können solche Erleichterungen nicht ausgenutzt werden. Vielmehr müssen hier beide Lösungsfunktionen ${}_1P$ und ${}_1Q$ benutzt werden, deren Reihen schlecht konvergieren und deren Berechnung für höhere Ordnungen, d.h. für größere Werte von m und $\tilde{\nu}$, numerisch sehr schwierig ist: die einzelnen Summanden enthalten Gammafunktionen, die sehr große Werte annehmen können und die für negative Argumente sehr stark oszillieren. In numerischen Rechnungen sind beispielsweise Summenglieder von der Größenordnung 10^{10} aufgetreten, obwohl der Funktionswert selbst in der Größenordnung von 1 lag.

3.6.2 Statische Lösung

Für den statischen Fall ($s=0$) lassen sich die drei Wurzeln des Polynoms (18) leicht ermitteln:

$$\alpha_1 = -2$$

$$\alpha_{2,3} = -1 \pm i \sqrt{\frac{1-\nu^2 - k\nu^2}{k}}$$

Aus (19) folgt:

$$\alpha_\psi = -2,$$

so daß damit acht Legendrefunktionen zur Beschreibung der statischen homogenen Lösung vorliegen. Die Wurzeln $\alpha = -2$ beschreiben den Membranzustand der Kugelschale, da sie sich auch unmittelbar aus (14) ergeben würden, wenn dort der Einfluß der Biegung mit $k = 0$ unterdrückt würde. Die Wurzeln $\alpha_{2,3}$ beschreiben den Biegezustand der Schale ($k \neq 0$). Sein Einfluß kann für die Nähe des Äquators leicht abgeschätzt werden: die Differentialgleichung geht mit $\varphi = 90^\circ$ über in

$$w'' - \alpha_{2,3}^2 \cdot w = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha_{2,3}^2 = m^2 + \alpha_{2,3}$$

Lösungen sind die Exponentialfunktionen $e^{\pm \alpha \varphi}$, die ein oszillierend abklingendes Verhalten beschreiben. Dabei legt der Realteil von α die Abklinglänge s^* fest ($s^* = R/\text{Re}(\alpha)$, $R = \text{Schalenradius}$). Für die hier vorliegende Containmentschale ($R = 13.5 \text{ m}$, $k = 2 \cdot 10^{-7}$) ergeben sich folgende Abklinglängen für verschiedene Umfangsordnungen m :

m	:	0	20	40	60
s^* in m:		0.40	0.37	0.29	0.22

Diese Übersicht zeigt, daß der Biegeeinfluß mit zunehmender Umfangsordnung noch schneller abklingt.

Eine partikuläre Lösung zu (14.1) kann leicht ermittelt werden, wenn die Druckbelastung p_r durch Superposition von Legendrefunktionen dargestellt ist:

$$p_r(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{p}_n \cdot 2P_n^m(\cos\varphi).$$

Mit dem Ansatz für die Radialauslenkungen

$$w(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{w}_n \cdot 2P_n^m(\cos\varphi)$$

lassen sich leicht die Amplituden \hat{w}_n aus (14.1) ermitteln:

$$\hat{w}_n = \frac{R^2}{D} \hat{p}_n \frac{(1+k) \cdot (1-\nu + \alpha_n)}{k \cdot \alpha_n^3 + 4k \cdot \alpha_n^2 + (1+5k-\nu^2 - k\nu^2) \cdot \alpha_n + 2(1-\nu^2)(1+k)},$$

$$\alpha_n = -n \cdot (n+1).$$

Damit ist die statische Lösung des Schalenproblems gefunden.

3.6.3 Dynamische Lösung

Die dynamische Lösung von (14) kann durch geeignetes Überlagern von Eigenschwingungsformen $i = 1, 2, \dots$ dargestellt werden. Zur Durchführung dieses Konzepts der modalen Superposition sind zunächst Eigenschwingungsformen und Eigenfrequenzen zu ermitteln. Eine Eigenschwingungsform liegt vor, wenn die ganze Struktur bei verschwundener Anregung mit der Kreisfrequenz Ω_i schwingt:

$$\begin{aligned} w_i(\psi, t) &= \tilde{w}_i(\psi) \cdot \sin \Omega_i t \\ \psi_i(\psi, t) &= \tilde{\psi}_i(\psi) \cdot \sin \Omega_i t \\ u_i(\psi, t) &= \tilde{u}_i(\psi) \cdot \sin \Omega_i t \end{aligned}$$

$\tilde{w}_i(\psi)$ ist dann die Eigenschwingungsform der Radialauslenkungen, $\tilde{\psi}_i(\psi)$ und $\tilde{u}_i(\psi)$ beschreiben die zugehörigen Tangentialauslenkungen.

Für diese Ansätze gilt $s = j\Omega$, so daß das System (14) über geht in:

$$\begin{aligned} k\nabla^6 \tilde{w}_i + k(4+T^2 \cdot \Omega_i^2) \nabla^4 \tilde{w}_i + \nabla^2 (1+5k-\nu^2-k\nu^2) - (1+k\nu) T^2 \cdot \Omega_i^2 \nabla^2 \tilde{w}_i \\ + \nabla^2 (1-\nu^2)(1+k) + (1+3\nu+\nu k-k) T^2 \cdot \Omega_i^2 - T^4 \cdot \Omega_i^4 \nabla^2 \tilde{w}_i = 0 \end{aligned} \quad (21.1)$$

$$\nabla^2 \tilde{\psi}_i + (2+2 \cdot \frac{1}{1+k} \cdot \frac{1}{1-\nu} \cdot T^2 \cdot \Omega_i^2) \cdot \tilde{\psi}_i = 0 \quad (21.2)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 (1+k)(1-\nu^2) + (1+\nu+k-k\nu) T^2 \cdot \Omega_i^2 + \frac{k}{1+k} T^4 \cdot \Omega_i^4 \nabla^2 \tilde{u}_i \\ = k\nabla^4 \tilde{w}_i + \nabla^2 (3+\nu + \frac{k}{1+k} T^2 \cdot \Omega_i^2) \nabla^2 \tilde{w}_i \\ + \nabla^2 (1+\nu)(1+3k-\nu-k\nu) + (1+k\nu + \frac{2k}{1+k}) T^2 \cdot \Omega_i^2 \nabla^2 \tilde{w}_i \\ - \frac{8k}{1-\nu} \cdot T^2 \cdot \Omega_i^2 \cdot \tilde{\psi}_i \cdot \cos \varphi - \nabla^2 (1+k)(1+\nu) + k T^2 \cdot \Omega_i^2 \nabla^2 \tilde{w}_i \cdot \frac{1-\nu}{2} \tilde{\psi}_i' \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (21.3)$$

Das Polynom (18) lautet nun:

$$k\alpha^3 + (4 + \Omega_i^2 T^2) k \alpha^2 + \sqrt{(1+5k-\nu^2 - k\nu^2) - (1+k\nu)} \Omega_i^2 T^2 \alpha + \sqrt{-2(1-\nu^2)(1+k) + (1+3\nu+\nu k-k)} \cdot \Omega_i^2 T^2 - \Omega_i^4 T^4 = 0 \quad (22)$$

Aus (19) wird:

$$\alpha_{\psi i} = -2 - \frac{\Omega_i^2 T^2}{(1+k)(1-\nu)} \quad (23)$$

Die Ermittlung von Modes und Eigenfrequenzen bereitet nun formal keine Schwierigkeiten mehr: man wähle eine Frequenz Ω_i und berechne die drei Wurzeln α_{1i} , α_{2i} und α_{3i} des charakteristischen Polynoms (22) sowie $\alpha_{\psi i}$ aus (23). Daraus folgen dann die Parameter $\tilde{\nu}_{1i}$, $\tilde{\nu}_{2i}$, $\tilde{\nu}_{3i}$ und $\tilde{\nu}_{\psi i}$ der acht Legendrefunktionen. Diese acht Teillösungen sind mit den zunächst noch unbekanntem acht Konstanten d und e zu überlagern:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_i(\psi) &= \sum_{k=1}^3 d_{ki} \cdot P_{\tilde{\nu}_{ki}}^m(\cos\psi) + e_{ki} \cdot Q_{\tilde{\nu}_{ki}}^m(\cos\psi) \\ \tilde{\Psi}_i(\psi) &= d_{\psi i} \cdot P_{\tilde{\nu}_{\psi i}}^m(\cos\psi) + e_{\psi i} \cdot Q_{\tilde{\nu}_{\psi i}}^m(\cos\psi) \end{aligned} \quad (24)$$

Aus (21.3) läßt sich dann eindeutig die Hilfsgröße \tilde{U}_i bestimmen, aus der Substitutionsbeziehung (6) folgen die beiden Tangentialauslenkungen, und aus dem elastischen Gesetz (4) schließlich die inneren Kräfte. Damit ist der Verformungs- und Spannungszustand der Schale bekannt, abhängig von den "Amplituden" d und e der acht in (24) überlagerten Teillösungen. Lassen sich diese acht Konstanten so wählen, daß sich an den beiden Rändern $\psi = \psi_1$ und $\psi = \psi_2$ gerade die acht vorgegebenen Randbedingungen einstellen, dann ist eine Lösung für den gesuchten Eigenschwingungszustand gefunden, die anfangs gewählte Frequenz Ω_i ist eine Eigenfrequenz.

Dieser Lösungsweg führt auf ein homogenes Gleichungssystem achter Ordnung, das nichttriviale Lösungen für die Konstanten d und e in (24) nur dann besitzt, wenn die aus den Legendre-

funktionen gebildete Koeffizientendeterminante verschwindet. Die Wurzeln $\tilde{\nu}_{2i}$ und $\tilde{\nu}_{3i}$ können auch komplex werden; in diesem Fall sind auch die zugehörigen Legendrefunktionen und damit auch das zu lösende Gleichungssystem komplex.

3.7 Anwendung auf die Containmentschale

Das gerade skizzierte Determinantensuchverfahren zur Ermittlung der Eigenfrequenzen der Schale bei beliebigen Randbedingungen erfordert einen großen numerischen Aufwand, da die Reihenentwicklungen der Legendrefunktionen für größere Beträge der Parameter m und $\tilde{\nu}$ schlecht konvergieren. Daher sollen hier spezielle Randbedingungen gewählt werden, die eine möglichst einfache Lösung des Problems erlauben und den Bedingungen frei aufliegend nahe kommen. Die tatsächliche Größe der Randkräfte und -verschiebungen kann dann später auf ihre Zulässigkeit überprüft werden.

Die Gleichung sechster Ordnung für w (21.1) kann am leichtesten gelöst werden für die Randbedingungen

$$w(\psi_1) = 0 \quad w(\psi_2) = 0 \quad (25.1)$$

$$\nabla^2 w(\psi_1) = 0 \quad \nabla^2 w(\psi_2) = 0 \quad (25.2)$$

Jede Lösung der Teildifferentialgleichung

$$\nabla^2 \tilde{w}_i - \alpha_i \tilde{w}_i = 0, \quad (26)$$

die eine der obigen Randbedingungen erfüllt, erfüllt automatisch auch die andere. Andererseits ist jede Lösung von (26) wegen (17.1) auch eine Lösung von (14.1) bzw. (21.1). Zur Lösung des Problems sind daher die Werte α_i zu suchen, für die es unter Beachtung der Randbedingung (25.1) eine Lösung von (26) gibt.

Aus der charakteristischen Gleichung (22) lassen sich dann die zu α_i gehörenden Eigenfrequenzen berechnen:

$$\begin{aligned}
 & + \Omega_i^4 T^4 - \Omega_i^2 T^2 \cdot \left\{ (1+3\nu+\nu k-k)-(1+k) \alpha_i + k \alpha_i^2 \right\} \\
 & - \left\{ 2(1-\nu^2)(1+k) + (1+5k-\nu^2-k\nu^2) \alpha_i + 4k \alpha_i^2 + k \alpha_i^3 \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{27}$$

Zu jedem Eigenwert α_i , d.h. zu jeder Eigenschwingungsform mit einer bestimmten Verteilung der Radialauslenkungen, gibt es zwei zugehörige Eigenfrequenzen Ω_{1i} und Ω_{2i} , zu denen wegen (21.2) zwei verschiedene Verteilungen der Tangentialauslenkungen gehören.

Mit bekannten Modes und Eigenfrequenzen kann nun die Lösung des Schalenproblems für beliebige zeitabhängige Belastungen durch geeignete Überlagerung der Eigenformen dargestellt werden:

$$w(t, \psi) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \cdot \tilde{w}_i(\psi) \tag{28}$$

Hierin ist $q_i(t)$ die unbekannte modale Auslenkung.

Mit diesem Ansatz folgt aus der Systemdifferentialgleichung (14.1) unter Beachtung von (26):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ k \alpha_i^3 + k(4 - T^2 s^2) \alpha_i^2 + \left[-(1+5k-\nu^2-k\nu^2) + (1+k\nu) T^2 s^2 \right] \alpha_i \right. \\
 & \left. + \left[-2(1-\nu^2)(1+k) - (1+3\nu+k\nu-k) T^2 s^2 - T^4 s^4 \right] \right\} \cdot q_i \cdot \tilde{w}_i \\
 & = \frac{R^2}{D} \cdot \left[-(1+k)(1-\nu) - T^2 s^2 \right] \cdot p_r + \frac{R^2}{D} \cdot (1+k) \cdot \nabla^2 p_r
 \end{aligned}$$

Die geschweifte Klammer läßt sich in 2 Faktoren aufspalten, wobei Ω_{1i} und Ω_{2i} die Wurzeln von (27) sind:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ -(s^2 T^2 + \Omega_{1i}^2 T^2) \cdot (s^2 T^2 + \Omega_{2i}^2 T^2) \right\} \cdot q_i \cdot \tilde{w}_i \\
 & = \frac{R^2}{D} \left[-(1+k)(1-\nu) - T^2 s^2 \right] \cdot p_r + \frac{R^2}{D} (1+k) \cdot \nabla^2 p_r
 \end{aligned} \tag{29}$$

Mit Hilfe der Orthogonalitätsbedingung, die sich im vorliegenden Fall vereinfacht zu

$$(\alpha_i - \alpha_j) \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tilde{w}_i(\varphi) \cdot \tilde{w}_j(\varphi) \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = 0 \quad (30)$$

lassen sich die Glieder der Summe für sich ermitteln:

(29) wird mit $\tilde{w}_j \cdot \sin\varphi$ multipliziert und über φ integriert zwischen den beiden Grenzen φ_1 und φ_2 . Die Summe der linken Seite reduziert sich so auf ein einziges Glied mit $i = j$.

Der Term mit $\nabla^2 p_r$ auf der rechten Seite läßt sich durch zweifache partielle Integration umwandeln:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\nabla^2 p) \cdot \tilde{w}_j \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(\nabla^2 \tilde{w}_j) \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = \alpha_j \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p \cdot \tilde{w}_j \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi$$

(Dabei wurden an den Rändern verschwindende Drücke und Auslenkungen angenommen.)

Mit der modalen Belastung \tilde{p}_j

$$\tilde{p}_j(s) = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(\varphi, s) \cdot \tilde{w}_j(\varphi) \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tilde{w}_j^2(\varphi) \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi} \quad (31)$$

ergibt sich schließlich die Bestimmungsgleichung der Modalauslenkungen:

$$(s^2 + \Omega_{1j}^2)(s^2 + \Omega_{2j}^2) \cdot q_j = \frac{R^2}{D} \cdot \frac{1}{T^4} \cdot \mathcal{L}^{-(1+k)}(\nu - 1 - \alpha_j) + T^2 s^2 \cdot \tilde{p}_j \quad (32)$$

In den Zeitbereich zurücktransformiert lautet diese Gleichung:

$$\ddot{q}_j + (\Omega_{1j}^2 + \Omega_{2j}^2) \cdot \dot{q}_j + \Omega_{1j}^2 \cdot \Omega_{2j}^2 \cdot q_j = \frac{R^2}{D} \cdot \frac{1}{T^4} \cdot \mathcal{L}^{-(1+k)}(\nu - 1 - \alpha_j) \tilde{p}_j + T^2 \ddot{p}_j \quad (33)$$

Sie kann mit elementaren Methoden, z.B. leicht über die Partialbruchzerlegung gelöst werden:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{1j} + \Omega_{1j}^2 \cdot q_{1j} &= a_{1j} \cdot \frac{\tilde{p}_j}{\gamma h} \\ \ddot{q}_{2j} + \Omega_{2j}^2 \cdot q_{2j} &= a_{2j} \cdot \frac{\tilde{p}_j}{\gamma h} \end{aligned} \quad q_j = q_{1j} + q_{2j} \quad (34)$$

$$a_{1j} = \frac{(1+k)(\nu-1-\alpha_j) - T^2 \Omega_{1j}^2}{T^2 \cdot (\Omega_{2j}^2 - \Omega_{1j}^2)}$$

$$a_{2j} = \frac{-(1+k) \cdot (\nu-1-\alpha_j) + T^2 \Omega_{2j}^2}{T^2 \cdot (\Omega_{2j}^2 - \Omega_{1j}^2)}$$

Damit ist das Schalenproblem für jede statische und dynamische Belastung gelöst: Für jede Fourier-Umfangsordnung m werden aus dem Eigenwertproblem (26) mit der Randbedingung (25.1) die Eigenschwingungsformen berechnet. Aus der charakteristischen Gleichung (27) ergeben sich die zugehörigen Eigenfrequenzen. Für jede einzelne Umfangsordnung der gegebenen Belastung werden aus (31) die modalen Lasten ermittelt. Mit ihnen folgen aus (34) die modalen Auslenkungen, die gemäß (28) zur Schalenauslenkung einer Umfangs-Fourierordnung aufsummiert werden. Diese werden entsprechend den Fouriersummen in Kapitel 3.2 schließlich zur Gesamtverformung der Kugelschale aufsummiert.

Dieses soweit analytisch aufbereitete Schalenproblem ist Grundlage des PL1-Computerprogrammes SPHERE.

4. Numerische Berechnungen für die Containmentschale

4.1 Abschätzungen aus der Membrantheorie

In der Differentialgleichung für die Radialauslenkungen (14.1) beschreibt k die Biegesteifigkeit im Vergleich zur MembranstEIFigkeit. Da hier k sehr klein ist ($k \approx 2 \cdot 10^{-7}$), kann für erste Abschätzungen bei hinreichend gleichmäßiger Belastungsverteilung die Biegesteifigkeit außer acht gelassen werden. Für den statischen Fall ergibt sich dann die Differentialgleichung der Membrantheorie für die Kugelschale:

$$\nabla^2 w + 2w = \frac{R^2}{Eh} \cdot \cos^2(1-\psi) \cdot p_r + \nabla^2 p_r \quad (35)$$

Die Containmentschale erstreckt sich auf Bereiche in der Nähe des Kugeläquators ($\psi = 90^\circ$), so daß bei rotationssymmetrischen Belastungen $\nabla^2 w = w''$ gesetzt werden darf. Ist w und p_r sinoidal verteilt, gemäß $w \sim \sin \lambda \psi$, dann ist die Membrangleichung (35) eine gute Annäherung, solange $|-k \cdot \lambda^6 + 4k\lambda^4| \ll |-\lambda^2 + 2|$ gilt. Diese Bedingung ist hier erfüllt für $\lambda \leq 25$ ($|-k\lambda^6 + 4k\lambda^4| = 49$, $|-\lambda^2 + 2| = 623$), d.h. bei Belastungshalbwellenlängen von mehr als 7° . Bei den hier vorliegenden Rändern mit einem Abstand von etwa 60° voneinander wäre die neunte Meridianordnung gerade noch durch die Membrantheorie allein beschreibbar.

Andererseits überwiegen bei diesen Ordnungen die zweiten Ableitungen gegenüber der Funktion selbst, etwa solange $\lambda^2 \gg 1$. Dies gilt für $\lambda > 3$, was einer halben Belastungswellenlänge von 60° entspricht. Für diesen Fall folgt aus (35):

$$w = \frac{R^2}{Eh} \cdot p_r \quad (36)$$

Für die Daten des Containments erhält man:

$$w = \left(4.4 \frac{\text{mm}}{\text{bar}}\right) \cdot p_r$$

Aus dieser so definierten Schalensteifigkeit lassen sich Eigenfrequenzen abschätzen:

$$\Omega^2 = \frac{Eh/R^2}{\rho \cdot h}$$

Für die Containmentschale ergeben sich so Eigenfrequenzen von rund 60 Hz. Diese Ergebnisse sind unabhängig von Randbedingungen und genauen Abmessungen der Schale, was für die Unempfindlichkeit der Schale gegen Randeinflüsse spricht.

Falls die Belastung dagegen sehr schwache meridionale Gradienten hat ($\lambda^2 \ll 1$), wie etwa bei einer Kugelschale unter gleichmäßigem Innendruck, können die Ableitungen gegenüber der Funktion selbst vernachlässigt werden. Dann folgt aus (35):

$$w = \frac{R^2}{Eh} \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot p_r,$$

ein Ergebnis, das auch leicht aus der Kesselformel abgeleitet werden kann.

Der Vergleich dieses Ergebnisses mit (36) zeigt, daß die Schale gegen nur örtliche Belastungen, wie sie durch Superposition der zu (36) gehörenden höheren Ordnungen dargestellt werden können, etwa dreimal nachgiebiger ist als gegen globale, gleichmäßig verteilte Lasten.

4.2 Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen der Schale

Die Berechnung von Eigenfrequenzen und Modes verlangt die Lösung des durch (25.1) und (26) gegebenen Eigenwertproblems. Hierfür wird das in Abschnitt 3.6.3 für den allgemeinen Fall skizzierte Determinantensuchverfahren angewendet, das bei den hier gewählten vereinfachten Randbedingungen auf ein Problem zweiter Ordnung führt. Allerdings bereitet die Berechnung der

Legendrefunktionen große numerische Schwierigkeiten, da selbst dreißig dezimale Rechenstellen nicht ausreichen, die Funktionswerte bei höheren Ordnungen (etwa ab dreißigste Ordnung) hinreichend genau zu bestimmen. Aus diesem Grunde wurde die hypergeometrische Reihe in Integer-Arithmetik programmiert, wodurch sich Stellenverluste fast ganz vermeiden lassen. Die Determinante wird für äquidistante Werte des Parameters $\tilde{\nu}$ berechnet; die Lage der Nulldurchgänge wird durch Intervallschachtelung genauer ermittelt.

Bild 8 zeigt die so berechneten Eigenfrequenzen, abhängig von der zugehörigen Eigenschwingungsordnung. Man sieht, daß die Eigenfrequenzen im Bereich von 60 Hz sehr dicht beieinander liegen, d.h., daß sehr unterschiedliche Eigenschwingungsformen "fast gleiche" Eigenfrequenzen haben können. Zwischen 60 und 70 Hz liegen hier etwa 300 Eigenschwingungsformen. Die Erwartungen aus Kap. 4.1 sind damit bestätigt. In früher durchgeführten Rechnungen mit dem Finit-Element-Programm STRUDL für das gleiche Schalenstück ergaben sich niedrigste Eigenfrequenzen bei ebenfalls 60 Hz. Die Vielfalt der in diesem Frequenzbereich vorhandenen Eigenformen konnte aber von STRUDL bei weitem nicht erzielt werden: zwischen 60 und 70 Hz konnte STRUDL nur etwa 20 Eigenformen entdecken.

Bild 9 zeigt einige Eigenschwingungsformen des Schalenmeridians, und zwar die ersten drei meridionalen Eigenformen bei rotationssymmetrischer Schwingung ($m = 0$) sowie die erste meridionale Ordnung für verschiedene Umfangsordnungen. Bei höheren Umfangsordnungen scheinen sich die Schwingungen am Äquator zu konzentrieren. Mit zunehmender Entfernung vom Äquator wird die Schale gegen Biegung in Umfangsrichtung steifer, da der Umfang des Breitenkreises kleiner wird (dieselbe Anzahl von "Biege-Wellen" muß auf kleinerer Länge erzeugt werden); die Eigenform reagiert darauf mit kleiner werdender Auslenkung.

Aus den Eigenschwingungsformen lassen sich nach (31) für jede Belastung die zugehörigen Modallasten berechnen. Aus (34) folgt damit die modale Flexibilität f_j (statisch):

$$f_j = \frac{q_j}{p_j} = \frac{a_{1j}}{\zeta^h \Omega_{1j}^2} + \frac{a_{2j}}{\zeta^h \Omega_{2j}^2} ;$$

Da die Eigenfrequenzen sehr dicht beieinander liegen, ergeben sich auch dicht beieinander liegende modale Flexibilitäten, Bild 10. Da bei nur lokalen Belastungen der Schale die Modallasten \tilde{p}_j nur sehr langsam mit höher werdender Ordnung abnehmen, müssen bei der Berechnung der Schalenantwort entsprechend viele Ordnungen berücksichtigt werden. Das ist aber nur möglich, wenn das Rechenmodell (wie etwa das vorliegende SPHERE) diese Ordnungen auch enthält, d.h. eine entsprechend feine Auflösung hat.

4.3 Testfälle für das statische Verhalten

Der Kugelschale wird eine statische Testlast aufgeprägt, und zwar eine lokale Druckverteilung in dem vom Wasser benetzten Schalenbereich. Die Integrationen zur Ermittlung der Modallasten (31) werden in SPHERE mit der Trapezregel durchgeführt; die Fourier-Umfangsentwicklung erfolgt analytisch. Zur Kontrolle dieser Zerlegung werden die Modallasten wieder superponiert. Die statischen Modalamplituden werden aus (34) berechnet und dann gemäß (28) superponiert.

Die Ergebnisse sind in Bild 11 dargestellt, und zwar für eine rechteckige Druckverteilung und für eine Verteilung gemäß einer Sinus-Halbwellen. (Die "Rauhigkeiten" der gezeichneten rechteckigen Druckverteilung entstehen durch Abbruch der Superposition bei der vierzigsten meridionalen bzw. bei der fünfzigsten Umfangsordnung). Nennenswerte Radialauslenkungen treten nur im belasteten Schalenbereich auf. Die Radialauslenkungen haben eine Verteilung, die der Druckverteilung sehr

ähnlich ist. Besonders scharfe Gradienten der Schalenauslenkungen treten bei der rechteckigen Belastung sowohl am festgehaltenen Rand als auch an "freien" Schalenbereichen auf. Zur Erzielung dieses Ergebnisses wurden 2000 Eigenformen überlagert. Dieses Ergebnis zeigt, daß die benutzte Lösungsmethode in der Lage ist, die in Kap. (2) erwarteten scharfen Abklingeigenschaften richtig wiederzugeben.

4.4 Testfall für das dynamische Verhalten

Die Sinus-Druckverteilung aus Bild 11 wird nun dynamisch aufgebracht mit einem Zeitverlauf eines Dirac-Impulses. Die Bewegungsgleichungen (34) können für diesen Fall leicht analytisch gelöst werden:

$$q_j = a_{1j} \cdot \frac{\tilde{I}_j}{\rho h \Omega_{1j}^2} \cdot \Omega_{1j} \cdot \sin \Omega_{1j} t + a_{2j} \cdot \frac{\tilde{I}_j}{\rho h \Omega_{2j}^2} \cdot \Omega_{2j} \cdot \sin \Omega_{2j} t \quad (37)$$

mit dem modalen Impuls

$$\tilde{I}_j = \tilde{p}_j \cdot \int_0^{\infty} \delta(t) dt = \tilde{p}_j \cdot \Delta t$$

Bild 12 zeigt für verschiedene Zeitpunkte den Verformungszustand der Schale. Zunächst treten nur lokale Schwingungen am Ort des Belastungsstoßes auf, wo eine "Beule" mit etwa 60 Hz schwingt. Erst nach einer ganzen Reihe von Zyklen beginnen sich die Auslenkungen auf andere Schalenbereiche auszudehnen.

Dieses sehr bemerkenswerte Ergebnis ist durch die dichte Lage der Eigenfrequenzen zueinander zu erklären:

Im Moment des Stoßes werden alle Modes der Schale gleichzeitig gleichphasig angestoßen, und zwar so, daß jede einzelne Eigenschwingungsform eine Anfangsgeschwindigkeit erhält, die proportional zur Modallast \tilde{p}_j ist.

In den unbelasteten Bereichen der Schale überlagern sich daher die modalen Anfangsgeschwindigkeiten genauso zu Null wie die modalen Belastungen. Die Geschwindigkeitsverteilung für die einzelnen Schalenpunkte unmittelbar nach dem Stoß gibt daher die Lastverteilung genau wieder. (Das folgt auch für den allgemeinen Fall aus dem ersten Newton'schen Axiom und den Eigenschaften des δ -Impulses.) Wenn alle so angestoßenen Modes die gleiche Eigenfrequenz hätten, dann würden sie alle im gleichen Takt weiterschwingen, das Überlagerungsbild würde sich nicht ändern, die Anfangsstörung würde sich nicht ausbreiten.

Bei der vorliegenden Kugelschale sind nun "sehr viele Eigenfrequenzen fast gleich", so daß sich auch nach einigen modalen Schwingungen noch fast das gleiche Überlagerungsbild ergibt, d.h., daß sich die anfängliche Auslenkungsverteilung kaum geändert hat. Erst nach mehreren Schwingungszyklen sind merkbare Phasenunterschiede in den modalen Schwingungen aufgetreten, so daß sich andere Überlagerungen ergeben und damit auch entferntere Schalenbereiche zu schwingen beginnen.

Aus diesen Überlegungen folgt, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Transversalwellen von der mehr oder weniger dichten Lage der Eigenfrequenzen zueinander abhängt. Je dichter die Eigenfrequenzen beieinander liegen, desto langsamer breiten sich Störungen aus; bei stärkerer Abweichung der Frequenzen voneinander ergeben sich raschere Ausbreitungen. Diesen Effekt kann man auch in Bild 12 beobachten, wo die Ausbreitung in Umfangsrichtung langsamer erfolgt als in Meridianrichtung. Die für die Umfangsausbreitung maßgebenden Umfangsordnungen liegen mit ihren Frequenzen wesentlich dichter beieinander als die verschiedenen Meridianordnungen (Bild 8).

Solche Ausbreitungsvorgänge, die ja in jedem physikalischen System vorhanden sind, können numerisch nur dann richtig erfaßt werden, wenn genügend viele Ordnungen berücksichtigt werden. Die Auflösung der numerischen Beschreibung des Problems muß so fein sein, daß die vielen hohen Ordnungen noch dargestellt werden können. Diese vielen Ordnungen müssen überlagert werden, um an vielen Stellen der Schale Null zu erzeugen.

4.5 Transiente Analyse

Das Schalenmodell SPHERE soll nun an experimentellen Daten überprüft werden. In Untersuchungen am Containment des Kernkraftwerkes Brunsbüttel wurde aus einem Entlastungsrohr kurzzeitig Dampf in den Pool geblasen. An verschiedenen Punkten der Kugelschale wurden die im Wasser hervorgerufenen Druckpulsationen sowie die Reaktion der Schale hierauf gemessen. Die gemessenen Druckzeitverläufe wurden dem Schalenmodell aufgeprägt, um in einer transienten Analyse die Schalenverformungen zu berechnen. Die berechneten Auslenkungen konnten so mit gemessenen Werten verglichen werden, um das Schalenmodell zu verifizieren.

Für die Druckmessung standen nur Daten an acht äquidistanten Punkten am Umfang der Schale zur Verfügung. Für die eine Hälfte des Umfangs sind die Druckverläufe in Bild 13 dargestellt. Da die Drücke im Radialschnitt etwa gleiche Größe haben ≈ 1 , wurde für die Kugelschale in Meridianrichtung eine konstante Druckverteilung angenommen. In Umfangsrichtung wurden die Drücke zwischen den Meßpunkten linear interpoliert. Für jeden Zeitpunkt (alle 2 ms) wurden die modalen Belastungen \tilde{p}_j ermittelt; die dabei benötigten Integrationen wurden für die Umfangsrichtung analytisch, für die Meridianrichtung mit der Trapezregel numerisch durchgeführt. Für jeden so ermittelten Zeitverlauf der modalen Belastungen wurde die

Bewegungsgleichung (34) numerisch integriert mit dem "unconditional stable" Integrationsverfahren nach Wilson [38_7]. Die Modalamplituden wurden zur Systemauslenkung summiert.

Bild 14 zeigt zum Vergleich die so berechneten und die aus den Experimenten gewonnenen Auslenkungen eines Punktes der Kugelschale direkt beim anregenden Rohr. Die recht gute Übereinstimmung, auch der rascheren Oszillationen, spricht für die Richtigkeit des benutzten Schalenmodelles.

Im Zuge der Auswertungen von Kondensationsversuchen, die ebenfalls im Kernkraftwerk Brunsbüttel durchgeführt wurden, hat Kadlec [1_7] ferner festgestellt, daß nennenswerte Schalenauslenkungen oberhalb des Wasserbereiches der Kondensationskammer -d.h. im unbelasteten Schalenbereich - nicht auftreten. Auch diese Beobachtung wird von dem entwickelten Schalenmodell gut wiedergegeben.

Diese gute Übereinstimmung der Rechnung mit Experimenten spricht für die Zulässigkeit des benutzten Modelles; insbesondere ist es gerechtfertigt, das dynamische Verhalten des Containments bei den hier zu untersuchenden Vorgängen durch die äußere Wand der Kondensationskammer allein darzustellen und die Flexibilitäten der anderen Containmentbauteile außer acht zu lassen.

5. Verhalten des gekoppelten Fluid-Schale-Systems

Mit dem verifizierten Schalenmodell könnten nun Containmentbeanspruchungen aus beliebigen Abblasevorgängen im Druckabbau-system nachgerechnet werden, wenn nur die Druckverteilung an der Schale bekannt wäre. Eine richtige Druckverteilung kann jedoch nur aus aufwendigen Experimenten gewonnen werden, wobei auch die Schalennachgiebigkeit richtig zu modellieren ist. Aber dann könnte auch gleich die Schale experimentell mituntersucht werden und Berechnungen wären überflüssig. Ziel dieser Arbeit ist es aber, das Verhalten des Containments zu beschreiben, bevor es gebaut ist, d.h., bevor full-scale Experimente möglich sind. Von experimentell ermittelten Belastungen wird man nur dann unabhängig, wenn der Einfluß des an die Schale gekoppelten Wassers berücksichtigt wird, d. h., wenn das Zusammenwirken des Wasserpools mit der Schalendynamik mit in die theoretische Untersuchung aufgenommen wird.

Da im gekoppelten Bereich bei Strukturbewegungen das Fluid mitbewegt werden muß, sind dessen Trägheitskräfte zusätzlich zur Strukturträgheit zu berücksichtigen. Bei Vernachlässigung der Wasserkompressibilität kann dies durch "added masses" geschehen, die der Strukturmasse zugeschlagen werden und die etwa mit der Methode der finiten Elemente [4] berechnet werden können. Für zweidimensionale Probleme wird dieser Weg mit Erfolg [39, 40, 41] besprochen. Bei dreidimensionalen Aufgaben führt die Anwendung finiter Elemente oder auch finiter Differenzen zu einem sehr großen Diskretisierungs- und Rechenaufwand. Einen Ausweg bieten hier neuentwickelte Singularitätenverfahren, die über Integralgleichungen das räumliche Fluid auf seine zweidimensionale Randfläche abbilden [9, 10]. Ein weiterer Weg bietet sich bei rotationssymmetrischer Geometrie an, wo für die Umfangsrichtung Fourierentwicklungen durchgeführt werden können. Dadurch entkoppeln sich die fluiddynamischen Gleichungen, so daß die verbleibenden "unendlich" vielen zweidimensionalen Probleme mit "schnellen Poisson-Solvern" bei tragbarem Aufwand gelöst werden können [42].

In dieser Arbeit wird dagegen als erste Näherung ein analytischer Ansatz benutzt, der gerade die wesentlichsten physikalischen Vorgänge enthält, um mit geringem Aufwand das dynamische Verhalten des Wasserpools zu beschreiben und den Einfluß der beteiligten physikalischen Vorgänge abzuschätzen.

5.1 Modell des Pools

Für eine analytische Beschreibung hat der Pool eine recht schwierige Geometrie. Er wird daher zu einem abgewinkelten Ringkanal mit rechteckigem Querschnitt vereinfacht (Bild 15), dessen starrer Boden etwas über dem Anfang der weichen Kugelschale liegt und dessen äußere, jetzt zylindrische Wand die elastischen Eigenschaften erhält, wie sie für die Kugelschale ermittelt wurden. Der groben Näherung für die Geometrie entsprechend soll hierfür das sehr einfache elastische Gesetz aus der Membran-Abschätzung (36) benutzt werden. Die statischen und dynamischen Testrechnungen zeigten ja, daß eine Ausbreitung von lokalen Störungen auf andere Schalenbereiche in recht guter Näherung außer acht gelassen werden kann. (Gegebenenfalls könnten auch für verschiedene Auslenkungsformen verschiedene modale Steifigkeiten - statt des hier benutzten einen einzigen Wertes - zur Schalenbeschreibung benutzt werden.)

5.2 Fluidbeschreibung

Für kleine Strömungsgeschwindigkeiten folgt aus den Euler-Gleichungen:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (38.1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (38.2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (38.3)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet für nur geringe örtliche Dichteänderungen näherungsweise:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho_w} \cdot \frac{\partial \rho_w}{\partial t} = 0 \quad (39)$$

Die Dichteänderungen sind den Druckänderungen proportional:

$$\partial \rho_w = \frac{1}{a^2} \cdot \partial p \quad (40)$$

In diesen Beziehungen ist:

p Druck

t Zeit

ρ_w Fluiddichte

v Geschwindigkeit

a Schallgeschwindigkeit im Fluid

Aus (38), (39) und (40) läßt sich eine Differentialgleichung für den Druck gewinnen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (41)$$

Diese Gleichung ist für die folgenden Randbedingungen (Bild 15) zu lösen. An der starren Innenwand ist wegen $v_x = 0$:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (42)$$

Am starren Boden ist wegen $v_y = 0$:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (43)$$

An der freien Oberfläche ist:

$$p(y_0, t) = 0 \quad (44)$$

An der nachgiebigen Außenwand soll das vereinfachte Schalengesetz (36) gelten, wobei die Schalenträgheit außer acht gelassen wird:

$$p_s = c \cdot w \quad \text{mit} \quad c = \frac{Eh}{R^2}$$

Hierin ist p_s die Schalenbelastung, w deren Radialauslenkung und c die Schalensteifigkeit. Die Koppelung von Schale und Fluid verlangt die Übereinstimmung von Fluiddruck und Schalenbelastung

$$p_s = p \Big|_{x=x_0}$$

sowie die Gleichheit von Fluidbeschleunigung und Schalenbeschleunigung:

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial t} \right|_{x=x_0} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Mit (38.1) und dem vereinfachten Schalengesetz folgt daraus schließlich:

$$-\frac{1}{\rho_w} \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \frac{1}{c} \cdot \left. \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right|_{x=x_0} \quad (45)$$

Statt eine konstante Schalensteifigkeit c für alle Verformungszustände zu benutzen, könnte hier auch leicht eine modale Steifigkeit eingeführt werden, um die größere "Härte" der Schale bei höheren Verformungsordnungen zu berücksichtigen. Bei der hier vorliegenden Schale ist das aber nicht erforderlich.

5.3 Eigenfrequenzen und Modes

Mit dem folgenden Ansatz für die Eigenschwingung lassen sich alle Bedingungen (41-45) erfüllen:

$$p(x,y,z,t) = p_0 \cdot \text{ch} \alpha x \cdot \cos \beta y \cdot \cos m \frac{z}{R_w} \cdot \sin \Omega t \quad (46)$$

Hierin ist R_w der mittlere Poolradius; α , β und m beschreiben das räumliche Druckfeld der Eigenschwingungsform, Ω ist die zugehörige Eigenfrequenz. Aus der Differentialgleichung (41) und den Randbedingungen (44 und 45) folgt mit diesem Ansatz:

$$\alpha^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{R_w^2} + \frac{\Omega^2}{a^2} = 0$$

$$\beta y_0 = (2n-1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (47)$$

$$\frac{c \cdot \alpha}{\rho_w} \cdot \text{th} \alpha x_0 = \Omega^2$$

Die Randbedingungen (42) und (43) an den starren Wänden sind von selbst erfüllt. Nach Vorgabe einer Umfangsordnung m und einer axialen Ordnung n des Druckfeldes lassen sich die zugehörige Eigenfrequenz Ω und die Parameter α und β berechnen.

Bild 16 zeigt die Eigenfrequenzen des Pools abhängig von der Schwingungsordnung. Es ergeben sich tiefste Werte von etwa 10 Hz im Vergleich zu den tiefsten Eigenfrequenzen der Kugelschale ohne Wasserbeaufschlagung von rund 60 Hz. Diese starke Absenkung der Eigenfrequenzen unterstreicht die Bedeutung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung beim vorliegenden Containment.

Um den Einfluß der Kompressibilität des Wassers abzuschätzen, wurden auch mit der sehr niedrigen Schallgeschwindigkeit von 400 m/s Eigenfrequenzen berechnet. Eine so niedrige Schallgeschwindigkeit kann sich nach [43] in Wasser ergeben, wenn nur 1 Vol-% Luft in Form von feinsten Bläschen enthalten ist. Die Ergebnisse in Bild 16 zeigen, daß die Eigenfrequenzen mit kompressiblem Fluid kleiner werden. Der Einfluß der Kompressibilität ist aber sehr gering. Insbesondere bei luftfreiem Wasser mit einer Schallgeschwindigkeit von 1500 m/s kann die Kompressibilität in sehr guter Näherung ganz außer acht gelassen werden.

Aus (46) folgt, daß in der Ecke zwischen starrem Boden und elastischer Wand ($x=x_0$, $y=0$) der größte Druck herrscht. Das einfache elastische Schalengesetz verlangt, daß auch dort dann die größte Auslenkung auftritt, was mit den tatsächlichen Randbedingungen nicht ganz übereinstimmt. Auf der anderen Seite zeigt aber Bild 11, daß an der Schale sehr scharfe Gradienten in den Auslenkungen möglich sind. Zusätzlich wurde der untere Boden des Modelles etwas oberhalb des festen Auflagers der Kugelschale angenommen, so daß die reale Schale noch ca 0,5 m Übergangsbereich bis zum festen Auflager hat. Aus diesen Gründen dürfte sich dieser Mangel des Modells auf die Eigenfrequenzen kaum auswirken.

In den Brunsbüttel-Experimenten wurden in Versuchen mit luftfreier Kondensation in den Drucksignalen folgende dominierende Frequenzen beobachtet [17]:

11.5, 14, 16, 22 und 27 Hz.

Durch Kreuzkorrelationen von Meßsignalen von verschiedenen Punkten des Kondensationskammerumfangs wurde gezeigt, daß zur 14 Hz-Frequenz eine zweite Umfangsordnung gehört. Der 22 Hz-Schwingung konnte bei deutlich schlechterer Umfangskohärenz - eine vierte Umfangsordnung zugeordnet werden.

Mit den hier berechneten Eigenfrequenzen lassen sich diese Meßergebnisse wie folgt interpretieren: Die beobachteten Frequenzen stellen Eigenfrequenzen der Kondensationskammer dar, und zwar Schwingungen des praktisch inkompressiblen Wassers in der elastischen äußeren Schale. Die Frequenzen von 11.5, 14 und 16 Hz gehören zur Umfangsordnung 0, 2 und 4 der ersten meridionalen Ordnung. Die Frequenz 22 Hz gehört zur zweiten meridionalen Ordnung, der die 4. Umfangsordnung - aber auch andere Umfangsordnungen - zugeordnet werden können. Die Frequenz 27 Hz schließlich gehört zur dritten meridionalen Ordnung.

Die recht gute Übereinstimmung der hier berechneten Ergebnisse mit in den Brunsbüttel-Experimenten gemessenen Daten bestätigt die Zulässigkeit dieses Modells: Für die Untersuchung des dynamischen Verhaltens des Containments bei Kondensationsvorgängen reicht die Beschränkung auf den Pool der Kondensationskammer mit inkompressiblem Wasser und einer elastischen Außenwand aus. Die beim Abblasen auftretenden Kondensationsvorgänge können die Kondensationskammer zu Eigenschwingungen anregen, und zwar zu Schwingungen des praktisch inkompressiblen Wassers mit der elastischen äußeren Wand als Rückstellfeder. Die in den Brunsbüttel-Experimenten beobachteten Frequenzen gehören zu solchen Eigenschwingungen.

5.4 Schwappen und Oberflächenwellen

Schwingungsvorgänge des Pools mit der Erdanziehung als Rückstellkraft sind in dem gerade untersuchten Modell nicht enthalten. Da die Gravitationsrückstellkräfte $\rho_w \cdot g$ hier um den Faktor 10^4 kleiner sind als die Schalensteifigkeit c , ist eine nennenswerte gegenseitige Beeinflussung von Schwappen und Fluid-Struktur-Schwingungen nicht zu erwarten, so daß nun eine starre Schale angenommen werden kann. Da die erwarteten Frequenzen um Größenordnungen unter den gekoppelten Fluid-Strukturschwingungen liegen, ist der Einfluß der Kompressibilität hier ohne jede praktische Bedeutung.

Das Fluidverhalten wird deshalb durch die Differentialgleichung (41) mit $a = \infty$ beschrieben. Die Randbedingung an der freien Oberfläche ist nun:

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right|_{y=y_0} + g \cdot \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=y_0} = 0$$

An der starren Außenwand ist

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0$$

Mit dem Ansatz

$$p = p_0 \cdot \cos \alpha x \cdot \operatorname{ch} \beta y \cdot \cos m \frac{z}{R_w} \cdot \sin \Omega t$$

folgt aus der Differentialgleichung (41) und den obigen Randbedingungen:

$$-\alpha^2 + \beta^2 - \frac{m^2}{R_w^2} = 0$$

$$-\Omega^2 + g \cdot \beta \cdot \operatorname{th} \beta y_0 = 0$$

$$\alpha x_0 = l\pi, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Daraus folgt eine niedrigste Frequenz - abgesehen von der Starrkörperbewegung - für $l = 0$, $m = 1$ von $f = 0.1$ Hz. Dabei schwingt der Pool an diametral gegenüberliegenden Punkten gegenphasig. Beim rotationssymmetrischen Schwappen quer

zum Kanal ($m=0$, $l=1$) ergibt sich eine Frequenz von $f=0.34$ Hz. Zu Frequenzen von etwa 10 Hz - den tiefsten Eigenfrequenzen des gekoppelten Fluid-Struktur-Systems - gehören sehr kurze Oberflächenwellen (z.B. $m=0$, $l=800$) mit einer Wellenlänge von 2.5 mm. Solche Vorgänge klingen aber schon in sehr geringer Entfernung von der Oberfläche ab.

Diese Ergebnisse sprechen dafür, daß Schwappen und die gekoppelten Fluid-Strukturschwingungen in sehr guter Näherung als völlig unabhängig voneinander betrachtet werden können: Beim tieffrequenten, globalen Schwappen erfährt die Schale zusätzlich im wesentlichen die quasi-statische Belastung des hydrostatischen Druckes des "ausgelenkten" Fluids. Durch die Fluid-Strukturschwingungen können zwar Oberflächenwellen im Pool angeregt werden. Wegen der sehr kurzen Wellenlängen ist aber nur eine sehr dünne Fluidschicht betroffen, so daß zusätzliche nennenswerte Schalenbelastungen hierdurch nicht auftreten können.

5.5 Simulation eines Blasenkollapses

Durch das Einblasen von Dampf bilden sich an den Mündungen der Einblaserohre Dampfblasen, die nach kurzer Zeit kollabieren. Das durch diesen Vorgang bewirkte Verdrängen und Zurückströmen des umgebenden Wassers regt den Wasserpool des Containments zu Schwingungen an. Zur Untersuchung dieses Anregemechanismus ist diese transiente Flüssigkeitsverdrängung nachzubilden. Hierzu wäre am besten eine transiente Kugelquelle am Rohrende geeignet, was in dem hier benutzten Modell aber nicht beschrieben werden kann. Zur Untersuchung der wichtigsten Effekte darf die Blase jedoch etwas verschoben und verformt werden, ohne daß damit das globale Verhalten des Pools nennenswert verändert wird. Die durch die Dampfblasen verursachten Flüssigkeitsverdrängungen sollen hier daher durch eine aufgeprägte lokale Verformung der an sich starren Innenwand simuliert werden. Wegen ihres geringen Einflusses sollen Fluidkompressibilität und Gravitation unberücksichtigt bleiben.

Das Poolverhalten wird wieder durch (41 bis 45) mit $a = \infty$ beschrieben; lediglich für die Innenwand mit der nun aufzuprägenden Auslenkung w_b ist die Randbedingung (42) zu ersetzen durch:

$$\bar{w}_b = - \frac{1}{\rho_w} \cdot \frac{dp}{dx} \Big|_{x=0} \quad (48)$$

Das Verhalten des Pools soll durch modale Superposition beschrieben werden. Mit den folgenden Ansätzen für das Druckfeld p und die Verformung w_b der anregenden Innenwand lassen sich alle Bedingungen (41, 43, 44, 45 und 48) erfüllen:

$$p(x,y,z,t) = \sum_l \left\{ [p_{1l}(t) \cdot \text{ch} \alpha_1 x + p_{2l}(t) \cdot \text{sh} \alpha_1 x] \cdot \cos \beta_1 y \cdot \cos m_1 \frac{z}{R_w} \right\} \quad (49)$$

$$w_b(y,z,t) = \sum_l [\hat{w}_1 \cdot \cos \beta_1 y \cdot \cos m_1 \frac{z}{R}] \cdot w_t(t) \quad (50)$$

Jedes Glied der Summe erfüllt für sich die genannten Bedingungen, so daß im folgenden die Summation und der Summationsindex fortgelassen werden können. Dann folgt aus der Fluidifferentialgleichung (41) und den Randbedingungen (44, 45, 48):

$$\alpha^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{R_w^2} = 0 \quad (51)$$

$$\beta y_0 = (2n-1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (52)$$

$$\bar{p}_1 \cdot \text{ch} \alpha x_0 + p_1 \cdot \frac{\alpha c}{\rho_w} \cdot \text{sh} \alpha x_0 + \bar{p}_2 \cdot \text{sh} \alpha x_0 + \frac{\alpha c}{\rho_w} \cdot \text{ch} \alpha x_0 \cdot p_2 = 0 \quad (53)$$

$$\bar{w} = - \frac{\alpha}{\rho_w} \cdot p_2 \quad (\text{mit } w = \hat{w}_1 \cdot w_t(t)) \quad (54)$$

Bei vorgegebener modaler 'Blasengeschichte' w sind dann die folgenden Differentialgleichungen zu lösen:

$$p_2 = - \frac{\rho_w \bar{w}}{\alpha} \quad (55)$$

$$\bar{p}_1 + \frac{\alpha c}{\rho_w} \cdot \text{th} \alpha x_0 \cdot p_1 = \frac{\rho_w}{\alpha} \cdot \text{th} \alpha x_0 \cdot \ddot{\bar{w}} + c \bar{w}$$

Aus (55) und (49) ergibt sich die modale Druckamplitude p_w für die äußere Wand des Pools ($x=x_0$):

$$\ddot{p}_w + \frac{\alpha c}{\xi_w} \cdot \text{th} \alpha x_0 \cdot p_w = \frac{c}{\text{ch} \alpha x_0} \cdot \ddot{w} \quad (56)$$

$$\text{mit } p_w = [p_{11}(t) \cdot \text{ch} \alpha_1 x_0 + p_{21}(t) \cdot \text{sh} \alpha_1 x_0]$$

Hier ist die Eigenfrequenz des Pools wieder (aus 56):

$$\Omega^2 = \frac{\alpha c}{\xi_w} \cdot \text{th} \alpha x_0$$

Zur Simulation eines Freibleseversuches soll der Pool kurzzeitig lokal angeregt werden bei $z=0$ bzw. $\theta=z/R_w=0$ mit:

$$w_b(y, z, t) = w_{\max} \cdot \sin \frac{\pi y}{\Delta y} \cdot \cos \frac{\pi z}{\Delta z} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos \frac{2\pi t}{T}) \quad (57)$$

$$0 \leq y \leq \Delta y; \quad -\frac{\Delta z}{2} \leq z \leq +\frac{\Delta z}{2}; \quad 0 \leq t \leq T; \quad \text{sonst } w_b=0.$$

Unter Beachtung der Orthogonalitätsbeziehungen der Winkel­funktionen lassen sich die modalen Blasenamplituden \hat{w}_1 in (50) analytisch ermitteln:

$$\hat{w}_{1n} = \frac{2\Delta y}{y_0} \cdot \cos^2 \left[(2n-1) \frac{\pi \Delta y}{4y_0} \right] \cdot \left[\frac{1}{1+(2n-1) \cdot \frac{\Delta y}{2y_0}} + \frac{1}{1-(2n-1) \cdot \frac{\Delta y}{2y_0}} \right] \quad (58)$$

$$\hat{w}_{1m} = \frac{c_m}{\pi} \cdot \cos m \frac{\Delta z}{2R} \cdot \left[\frac{1}{\frac{\pi R}{\Delta z} - m} + \frac{1}{\frac{\pi R}{\Delta z} + m} \right]; \quad c_0 = \frac{1}{2}; \quad c_{m \neq 0} = 1;$$

$$\hat{w}_1 = \hat{w}_{1n} \cdot \hat{w}_{1m}$$

Die Differentialgleichungen (55) und (56) können mit der gewählten Anregungsfunktion leicht geschlossen gelöst werden. Für den Druck an der äußeren Schale ergibt sich:

$$p_w^* = \begin{cases} \frac{c\hat{w}}{2\text{ch}\alpha x_0} \cdot \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \cdot (\cos \omega t - \cos \Omega t), & \Omega \neq \omega = \frac{2\pi}{T} \\ \frac{c\hat{w}}{4\text{ch}\alpha x_0} \cdot \Omega t \cdot \sin \Omega t & , \quad \Omega = \omega = \frac{2\pi}{T} \end{cases} \quad (59)$$

$$p_w(t) = p_w^*(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

$$p_w(t) = p_w^*(t) - p_w^*(t-T) \quad , \quad t \geq T$$

Diese analytischen Beziehungen sind Grundlage eines Computerprogrammes, mit dem für verschiedene Punkte des Schalenumfanges die Druckbelastungen des gekoppelten Fluid-Struktur-Systems berechnet werden können.

Bild 17 zeigt für äquidistante Punkte des Schalenumfanges die Druckpulsationen auf eine Anregung von $T=100$ ms Dauer bei einem größten Blasenvolumen von rund 150 l. Die Druckpulsationen liegen dann bei etwa ± 300 mbar, was Schalenauslenkungen von rund ± 1.5 mm verursacht.

Die langsame Ausbreitung der lokalen Anfangsstörung auf den ganzen Pool stimmt gut mit Meßergebnissen (Bild 13) überein. Das zunächst stärkere Abklingen der Amplituden der untersten Kurve in Bild 17 ist durch die Ausbreitung der zunächst lokal konzentrierten Energie auf den ganzen Pool zu erklären; es handelt sich nicht um Dämpfungsvorgänge! Jeder Mode behält (nach dem Ende der Anregung) die einmal erhaltene Gesamtenergie bei. Sie pendelt mit der Frequenz des Modes zwischen potentieller und kinetischer Energie hin und her. Ob sich in irgendeinem Zeitpunkt an irgendeinem Punkt des Systems die gesamte potentielle Energie konzentrieren kann, hängt von dem Zusammenspiel der Eigenfrequenzen ab. Bei etwa 800 ms nehmen die Amplituden wieder zu und erreichen fast wieder ihre Anfangsmaxima. Hier tritt eine solche Konzentration der potentiellen Energie auf. Anschaulich kann dieser Anstieg auch durch Überlagerungseffekte von Druckwellen erklärt werden, die von der Anregungsstelle in beiden Richtungen durch den Pool laufen und nun ihre Ausgangsstelle wieder erreichen. Daß dieser erneute Anstieg in den Experimenten nicht beobachtet wurde, liegt vermutlich an der im System doch vorhandenen schwachen Dämpfung. Bild 18 zeigt eine Rechnung, bei der in (56) eine schwache modale Dämpfung von 2% (Lehrsches Dämpfungsmaß) eingebaut war. Die gemessenen Signale - gestrichelt eingezeichnet - werden recht gut getroffen.

6. Literatur

- [- 1_] K.D. Appelt, M. Cramer, F. Eberle, J. Kadlec, P. Klima, G. Lang:
Untersuchung der Druckpulsationen im Druckabbausystem und der dynamischen Reaktion des Sicherheitsbehälters im Rahmen der Entlastungsventilversuche im Kernkraftwerk Brunsbüttel.
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Jan. 1976, KfK-Ext. 8/75-5
- [- 2_] G. Class:
Untersuchung der bei der Dampfkondensation im Druckabbausystem von Siedewasserreaktoren entstehenden Wandbelastungen.
Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1978, KfK 2549.
- [- 3_] G. Class:
Theoretische Untersuchung der Druckpulsentstehung bei der Dampfkondensation im Druckabbausystem von Siedewasserreaktoren - Rechenprogramm KONDAS.
Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1977, KfK 2487
- [- 4_] O.C. Zienkiewicz:
Methode der finiten Elemente.
Carl Hauser, München, 1975
- [- 5_] Huebner:
The Finite Element Method for Engineers.
John Wiley, New York, 1975
- [- 6_] McDonnell Douglas Automation Company:
ICES STRUDL DYNAL - User's-Manual.
St. Louis, USA, May 1974
- [- 7_] E.L. Wilson, K.J. Bathe et.al.:
SAP - a Structural Analysis Programme for Linear Systems.
Nuclear Engineering and Design, Vol 25, 1973, 257-274

- [8] W. Flügge:
Stresses in Shells.
Springer, New York, 1966
- [9] R. Krieg:
Three Dimensional Flow Fields Caused by Transient Dipoles
Uniformly Distributed on Rectangular Plane Elements.
Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1976, KfK-Ext. 8/76-2
- [10] R. Krieg, G. Hailfinger:
SING1 - Ein Computercode zur Berechnung transienter,
dreidimensionaler, inkompressibler Potentialströmungen
nach einem Singularitätenverfahren.
Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1978, KfK 2505
- [11] B. Göller, G. Hailfinger, R. Krieg:
Vibrations of the Pressure Suppression System of a
Boiling Water Reactor.
Proceedings of the B.N.E.S.-Conference Vibration in
Nuclear Plant, Keswick U.K., May 1978, Paper 6.4, 1-15
- [12] J.L. Sewall, C.G. Pusey:
Vibration Study of Clamped-Free Elliptical Cylindrical Shells.
AIAA-Journal, Vol 9, No 6, June 1971, 1004-1011
- [13] C.B. Sharma:
Calculation of Natural Frequencies of Fixed-Free
Circular Cylindrical Shells.
Journal of Sound and Vibration, Vol 35, No 1, 1974, 55-76
- [14] H. Chung, P. Turula, T.M. Mulcahy, J.A. Jendrzejczyk:
Analysis of a Cylindrical Shell Vibrating in a
Cylindrical Fluid Region.
Argonne National Laboratory, ANL-76-48, Aug 1976

- [15] K.D. Appelt, M. Cramer, F. Eberle, B. Göller, J. Kadlec, B.M. Laursen, E.G. Schlechtendahl:
Experimental and Theoretical Investigations on the Dynamic Response of the Containment at the Brunsbüttel BWR During Blowdown.
Proceedings of the 3rd International Conference SMIRT, London, Sept 1975, Paper J4/3, 1-8
- [16] B. Göller, B.M. Laursen, E.G. Schlechtendahl:
Results of Calculations of the Pressure Suppression System during Blowdown.
Proceedings of the International Seminar ELCALAP, Berlin 1975, Paper Q1/3, 1-18
- [17] I. Szabó:
Höhere Technische Mechanik
Springer, Berlin 1972
- [18] G.R. Cowper, G.M. Lindberg, M.D. Olson:
A Shallow Shell Finite Element of Triangular Shape.
International Journal of Solids and Structures, Vol 6, 1970, 1133-1156
- [19] Y.C. Fung, E.E. Sechler (Editor):
Thin-Shell Structures. Theory, Experiment and Design.
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974
- [20] M.E. Laursen, M.P. Neilsen, M. Gellert:
Application of a new Stress Finite Element to Analysis of Shell Structures.
Computers and Structures, Vol 7, 1977, 751-757
- [21] K. Magnus:
Schwingungen.
Teubner, Stuttgart, 1961

- [22] S.K. Sen, P.L. Gould:
Criteria for Finite Element Discretisation of Shells of Revolution.
International Journal for Numerical Methods in Engineering,
Vol 6, 1973, 265-274
- [23] T.A. Smith:
Numerical Analysis of Rotationally Symmetric Shells
under Transient Loadings.
AIAA-Journal, Vol 9, No 4, Apr 1971, 637-643
- [24] A. Kalnins:
Free Vibrations of Rotationally Symmetric Shells.
The Journal of the Acoustical Society of America,
Vol 36, No 7, July 1964, 1355-1365
- [25] W.J. Sutcliffe, J. Mistry:
Shell Segmentation Requirements for Numerical Integration
Solutions.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,
Vol 7, 1976, 179-190
- [26] S.K. Sen, L. Gould:
Free Vibration of Shell of Revolution Using FEM.
Journal of the Engineering Mechanics Division,
Vol EM2, Apr 1974, 283-303
- [27] K.H. Schrader, N. Krutzik, G. Winkel:
Vibrations of Composite Circular Shell Structures
Due to Transient Loads.
Proceedings of the 3rd International Conference SMIRT,
London, Sept 1975, Paper J4/5, 1-14
- [28] J.W. Hammel:
Stoß eines Flugkörpers auf eine Kugelschale
Dissertation T.H. Darmstadt, D 17, 1974

- [29] J.P. Wilkinson, A. Kalnins:
On Nonsymmetric Dynamic Problems of Elastic Spherical Shells.
Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Series E, Sept 1965, 525-532
- [30] P.M. Naghdi:
On the Theorie of thin Elastic Shells.
Quarterly of Applied Mathematics, Vol 14, No 4, 1957, 369-380
- [31] A. Kalnins:
Effect of Bending on Vibrations of Spherical Shells.
The Journal of the Acoustical Society of America, Vol 36, 1964, 74-81
- [32] H. Kraus:
Thin Elastic Shells.
John Wiley, New York, 1967
- [33] P. Seide:
Small Elastic Deformations of Thin Shells.
Noordhoff, Leyden, 1975
- [34] W. Magnus, F. Oberhettinger:
Formulas and Theorems for Special Functions of Mathematical Physics.
Springer, New York, 1966
- [35] Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Triconi:
Higher Transcendental Functions.
McGraw Hill, New York, 1953
- [36] D. Faddejev, V. Faddejewa:
Numerische Methoden der linearen Algebra.
München, 1964

- [37] E. Stiefel:
Einführung in die numerische Mathematik.
Stuttgart, 1965
- [38] K.J. Bathe, E.L. Wilson:
Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration
Methods.
Earthquake Engineering and Structural Dynamics,
Vol 1, 1973, 283-291
- [39] S. Levy, J.P.D. Wilkinson:
Calculation of Added Water Mass Effects for Reactor
System Components.
Proceedings of the 3rd International Conference SMIRT,
London 1975, Paper F2/5, 1-14
- [40] A.N. Nahavandi, J. Bohm, R. Pedrido:
Structurally Compatible Fluid Finite Elements for
Solid Fluid Interaction Studies.
Nuclear Engineering and Design, 1975, 335-347
- [41] T.J. Chung, R.H. Rush:
Dynamically Coupled Motion of Surface-Fluid-Shell System.
Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME,
Sept 1976, 507-508
- [42] U. Schumann:
Über die direkte Lösung der diskretisierten Poisson-
Gleichung mittels zyklischer Reduktion.
Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK-Ext. 8/75-6, 1976
- [43] P. von Böckh, J.M. Chawla:
Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Druckstörung in
Flüssigkeits-Gasgemischen.
Brennstoff-Wärme-Kraft, Vol 26, 1974, 63-67

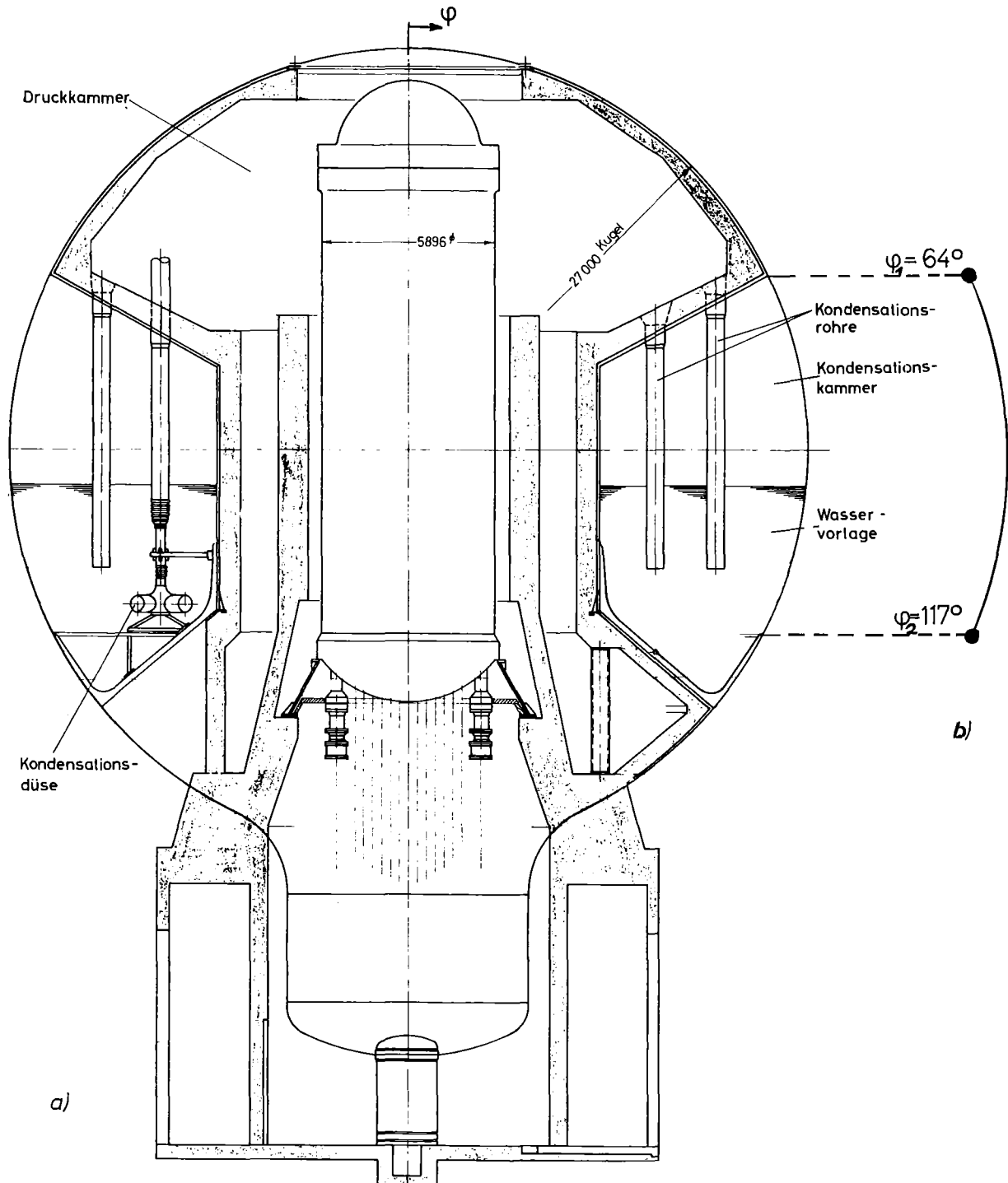


Bild 1: a) Druckabbausystem des Kernkraftwerkes Brunsbüttel
b) Analytisch beschriebener Schalenteil

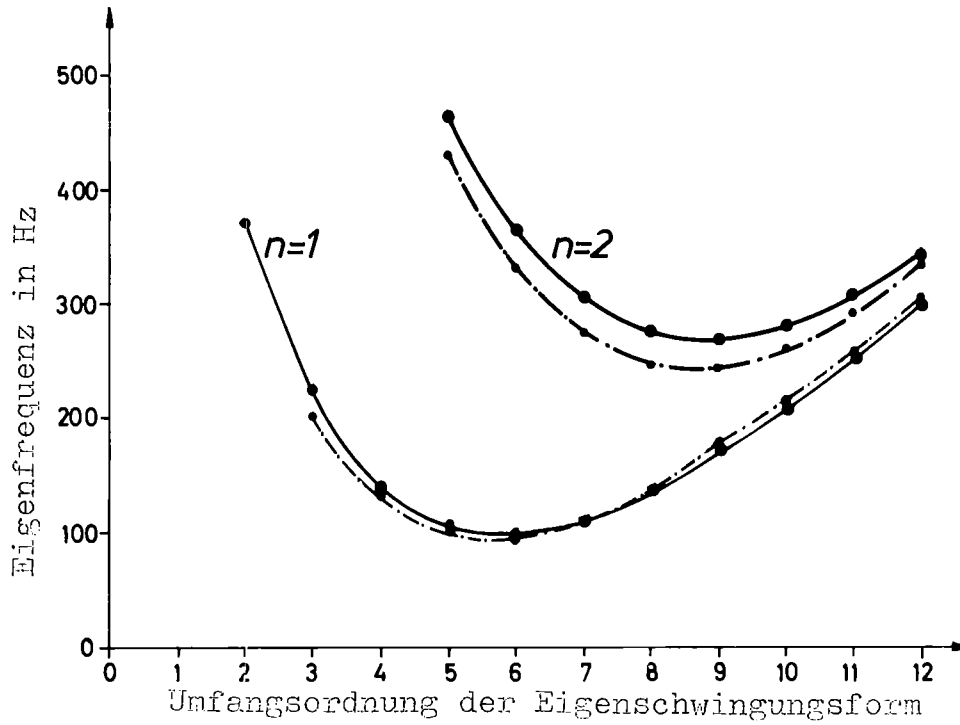


Bild 2: Eigenfrequenzen einer einseitig eingespannten Zylinderschale. (n = axiale Ordnung des Modes)
- · - Experimente von Sewall
— Ergebnisse von STRUDL-Rechnungen

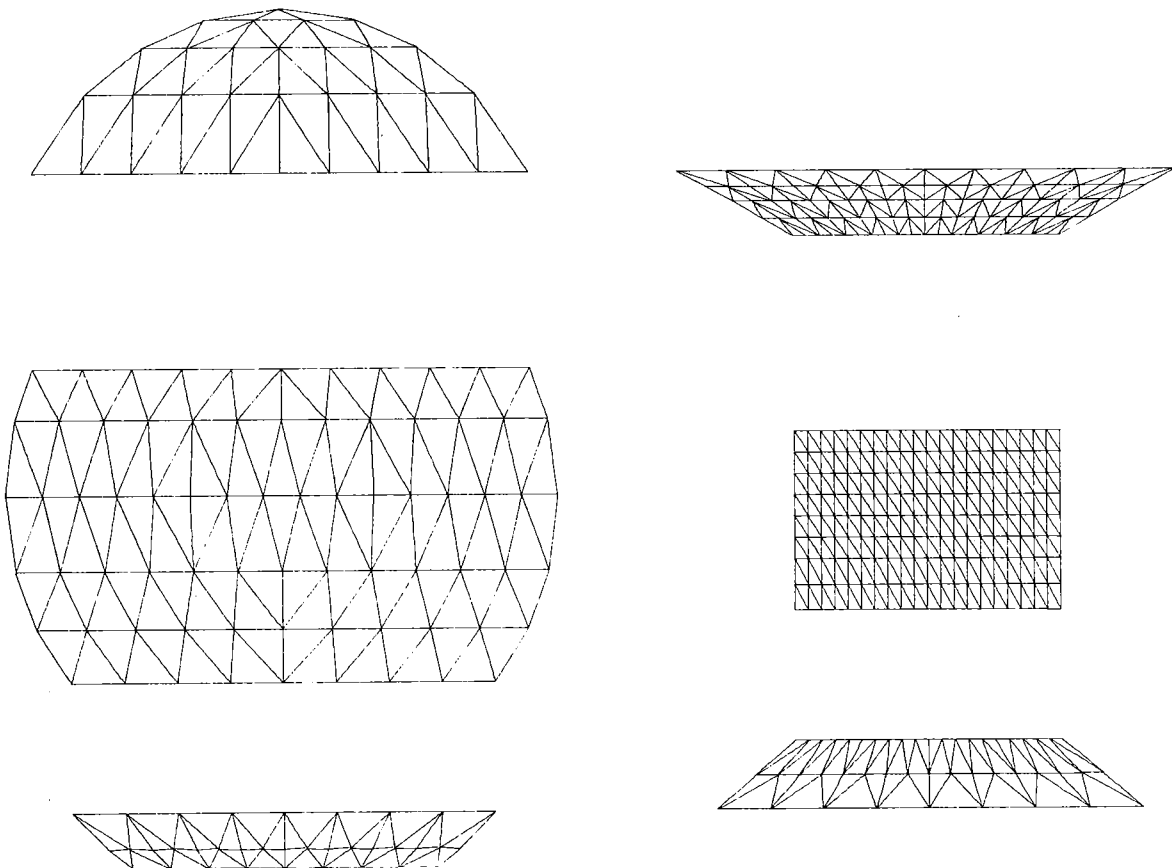


Bild 3: Diskretisierung des Containments mit finiten Elementen.

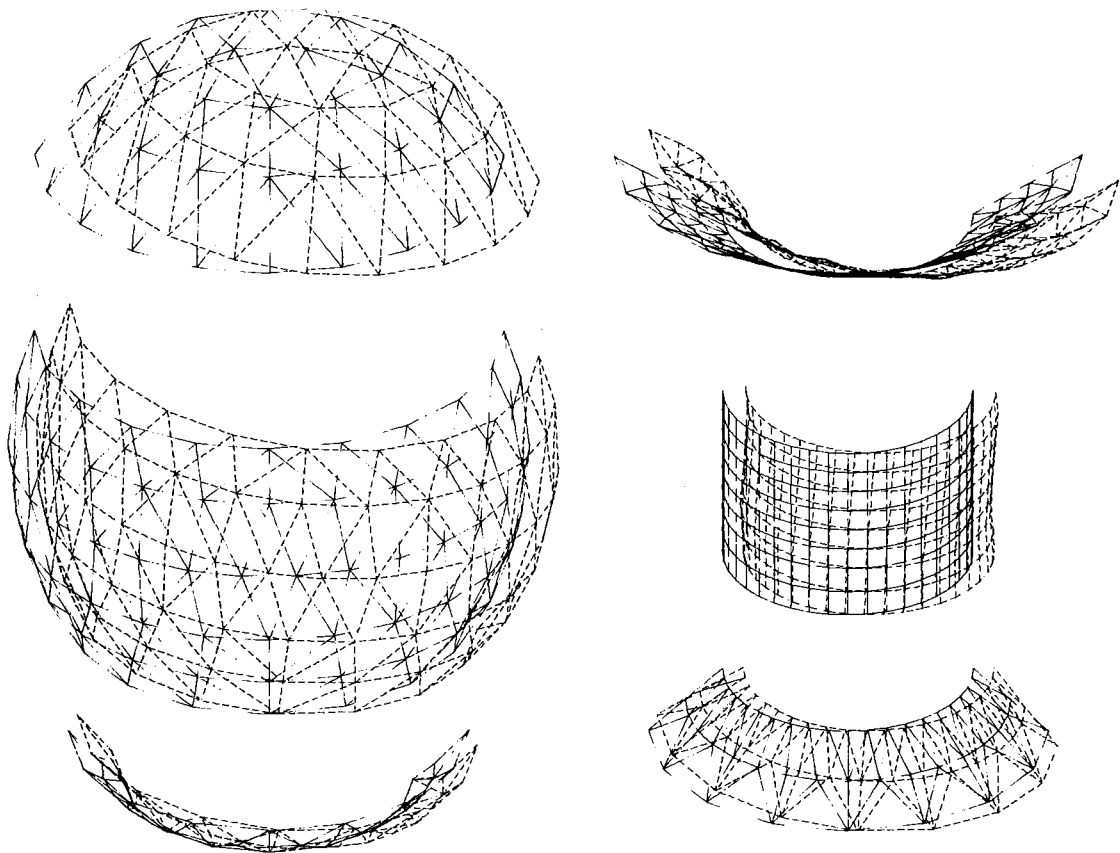


Bild 4: Eigenschwingungsform des Containments bei 12 Hz.

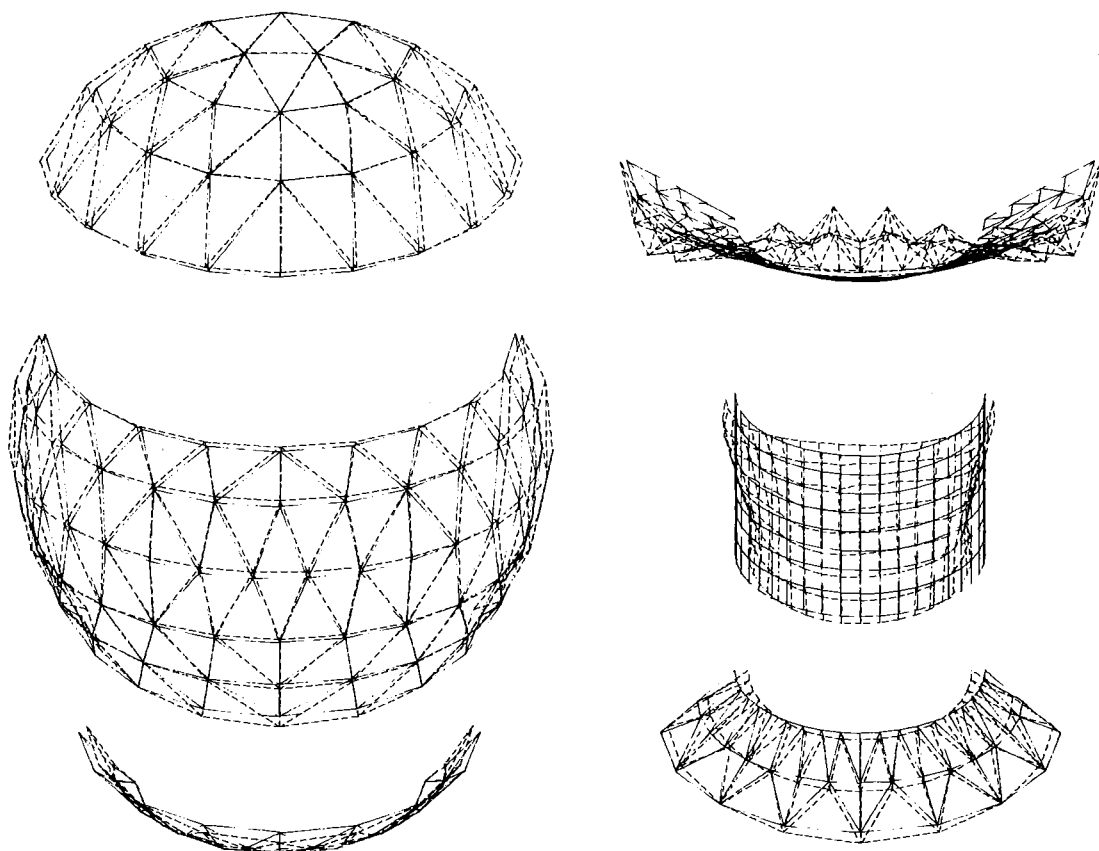


Bild 5: Eigenschwingungsform des Containments bei 43 Hz.

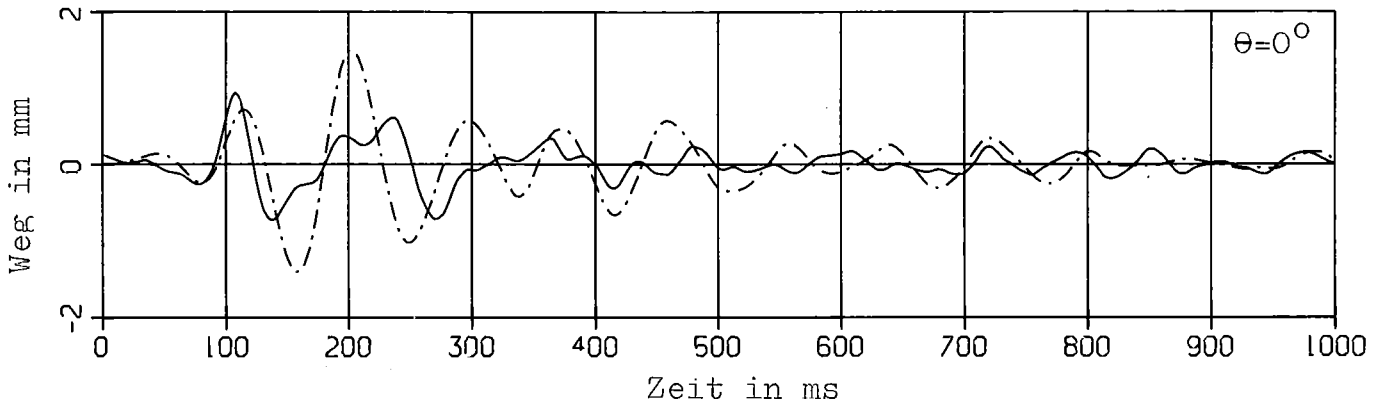


Bild 6: Vergleich von gemessenen Schalenverformungen (—) mit Ergebnissen der transienten Analyse durch STRUDL (---).

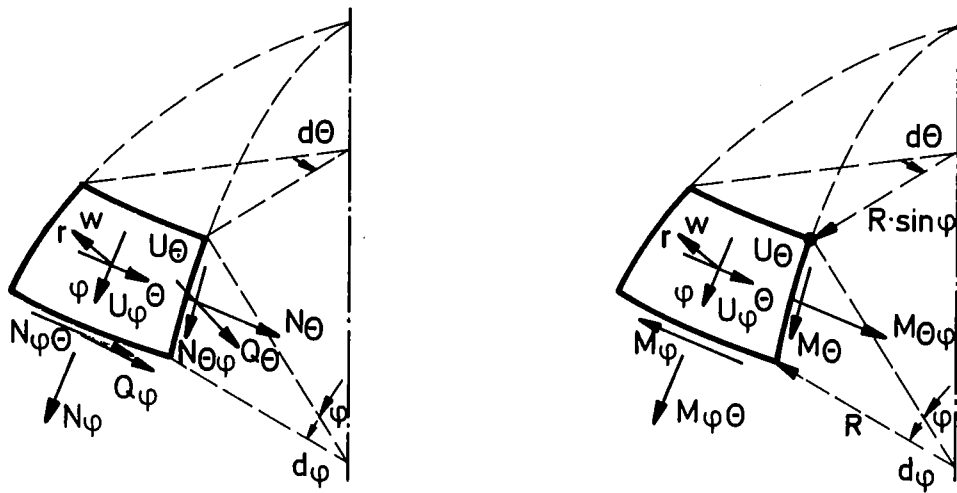


Bild 7: Spannungsergebnisse am Schalenelement.

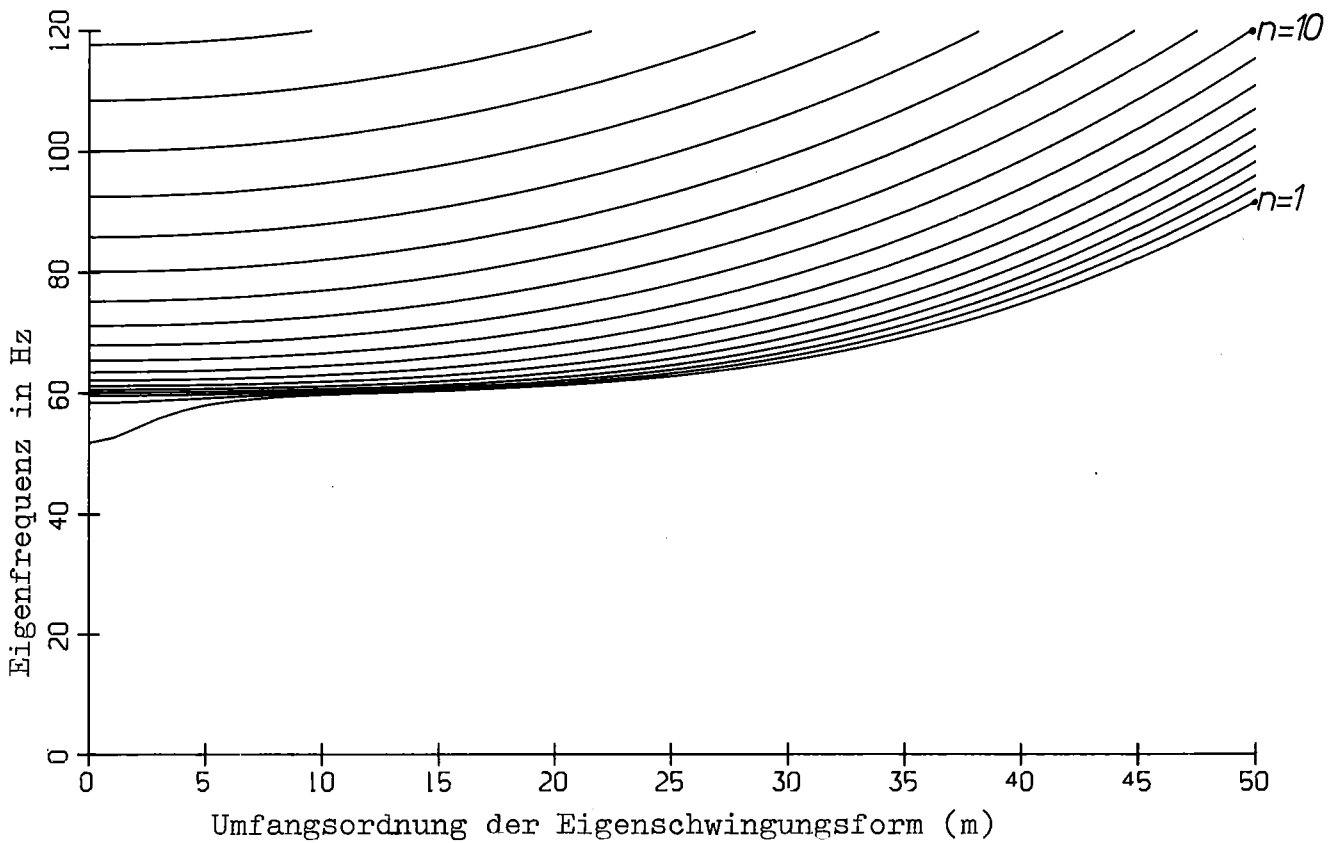


Bild 8: Eigenfrequenzen der Außenwand der Kondensationskammer
(n = meridionale Ordnung der Eigenschwingungsform)

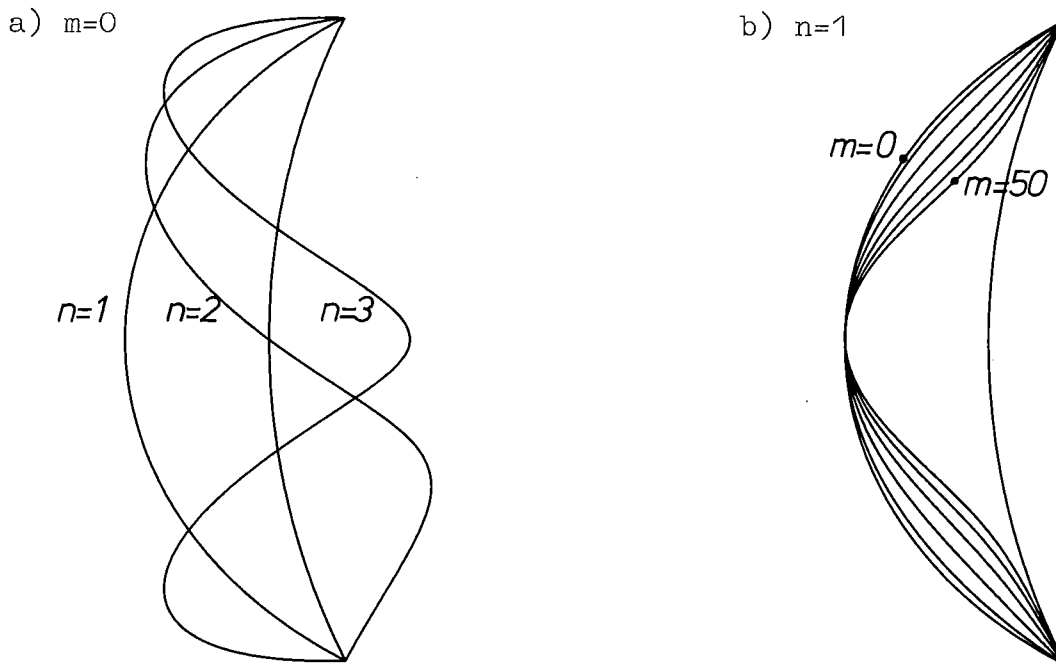


Bild 9: Eigenschwingungsformen eines Meridians der Außenwand der Kondensationskammer.

- a) achsensymmetrische Schwingungen verschiedener meridionaler Ordnungen n
- b) erste meridionale Ordnung für die Umfangsordnungen m = 0, 10, 20, 30, 40 und 50.

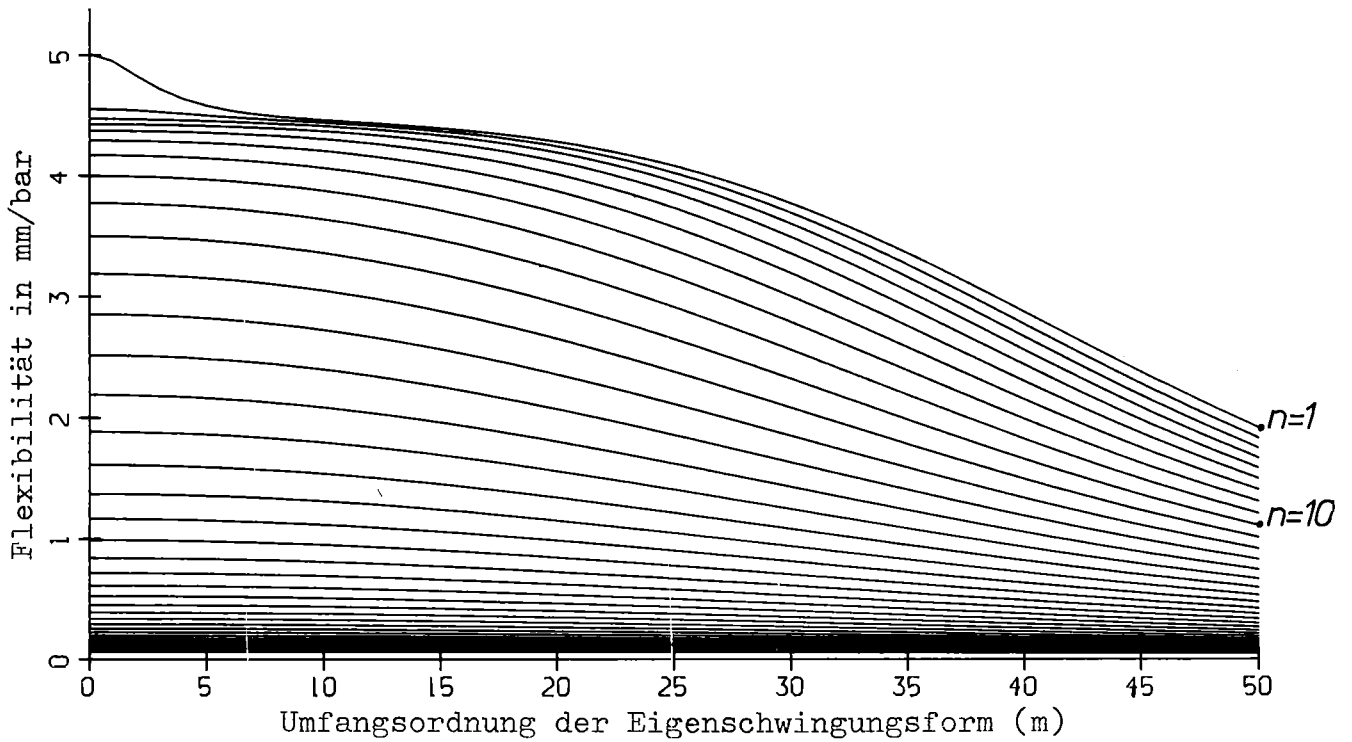


Bild 10: Modale Flexibilitäten der Außenwand der Kondensationskammer. (n = meridionale Ordnung)

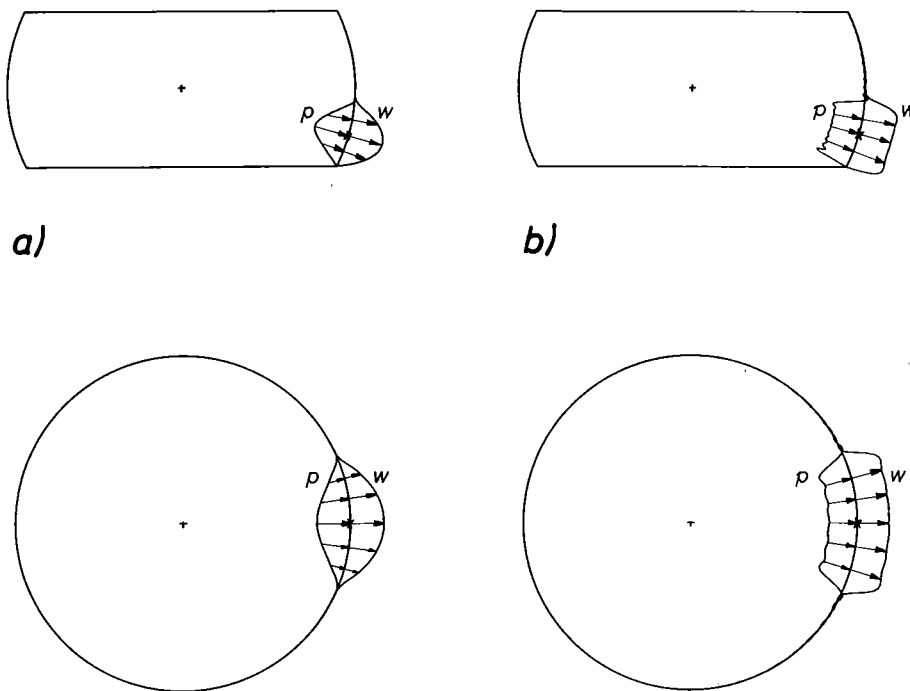


Bild 11: Belastung der Schale durch den statischen Druck p und hervorgerufene Radialauslenkungen w .
a) Druckverteilung sinoidal
b) Druckverteilung konstant

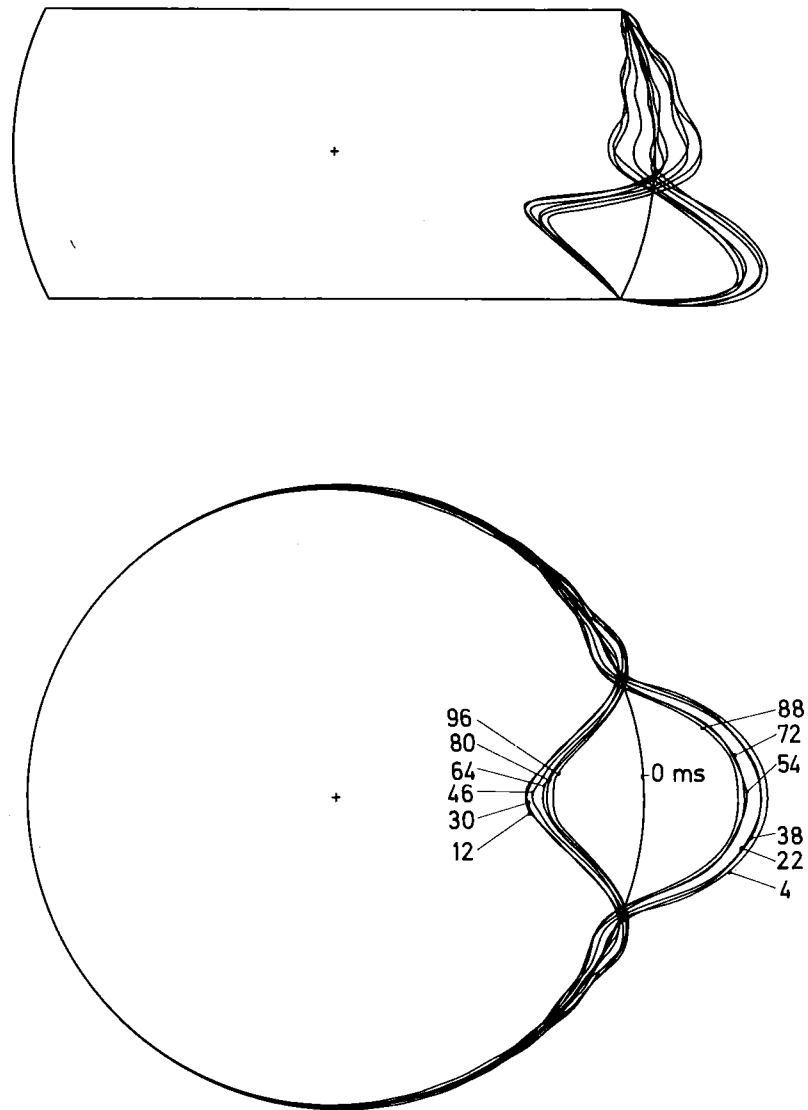


Bild 12: Verhalten der Kugelschale nach Belastung mit einem lokalen Dirac-Impuls.

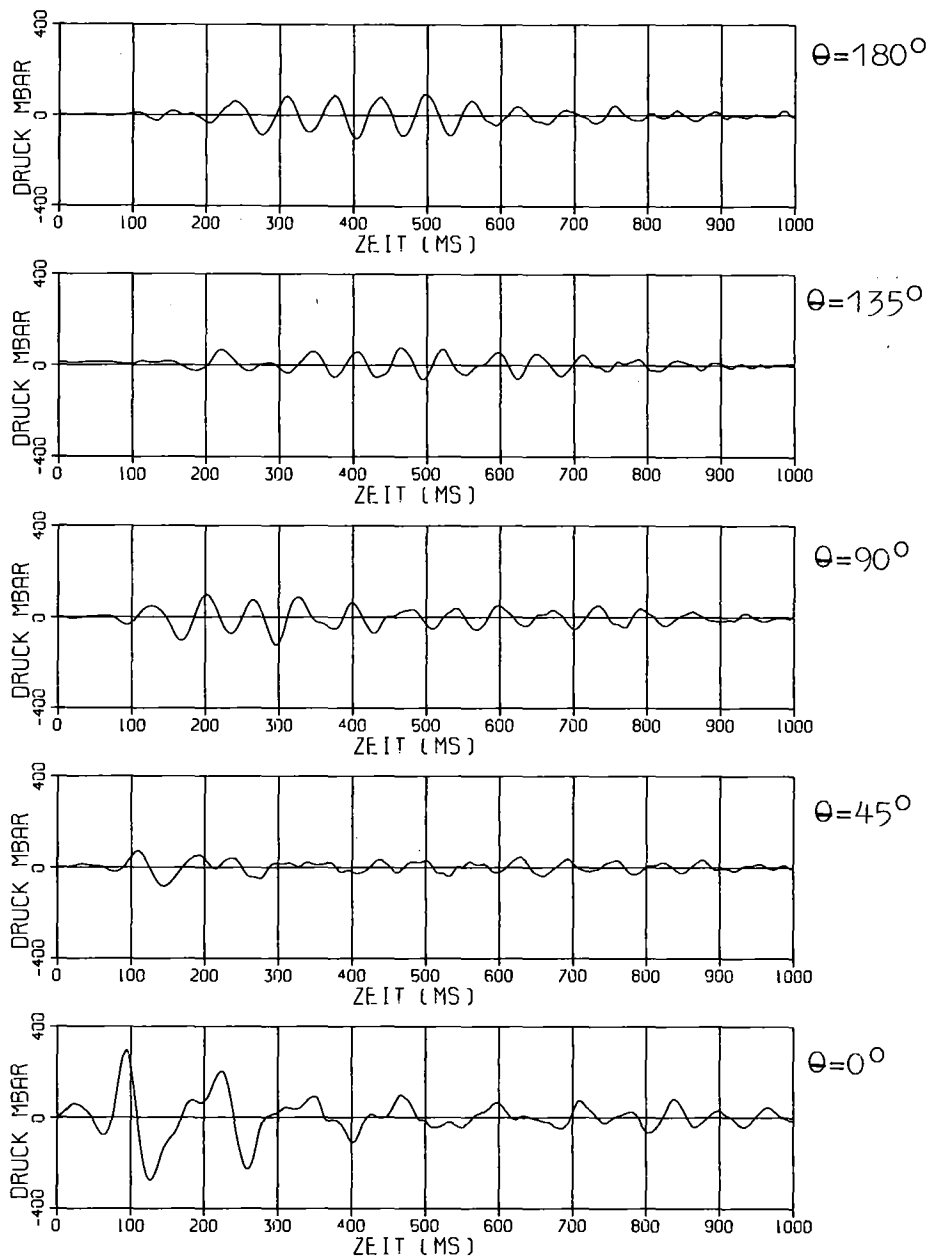


Bild 13: Gemessene Druckverläufe an äquidistanten Punkten des Schalenumfanges.

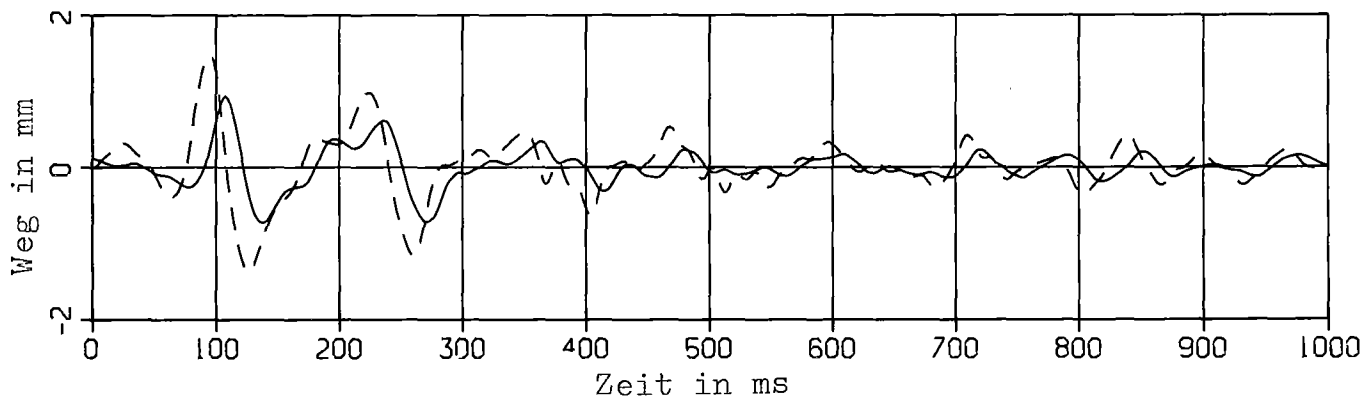


Bild 14: Vergleich von gemessenen Schalenverformungen (—) mit Ergebnissen der transienten Analyse durch SPHERE (---).

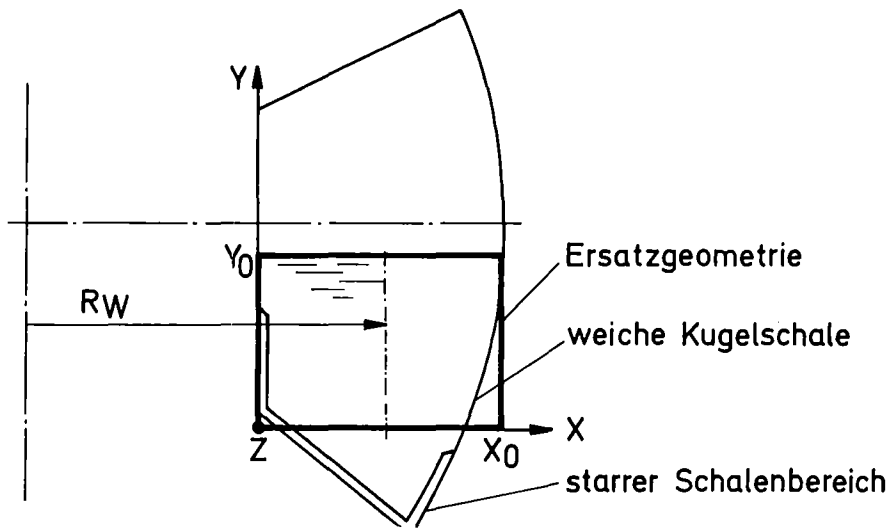


Bild 15: Vereinfachtes Modell des Wasserpools der Kondensationskammer ($x_0=6.5$ m; $y_0=5$ m; $R_W=9.5$ m).

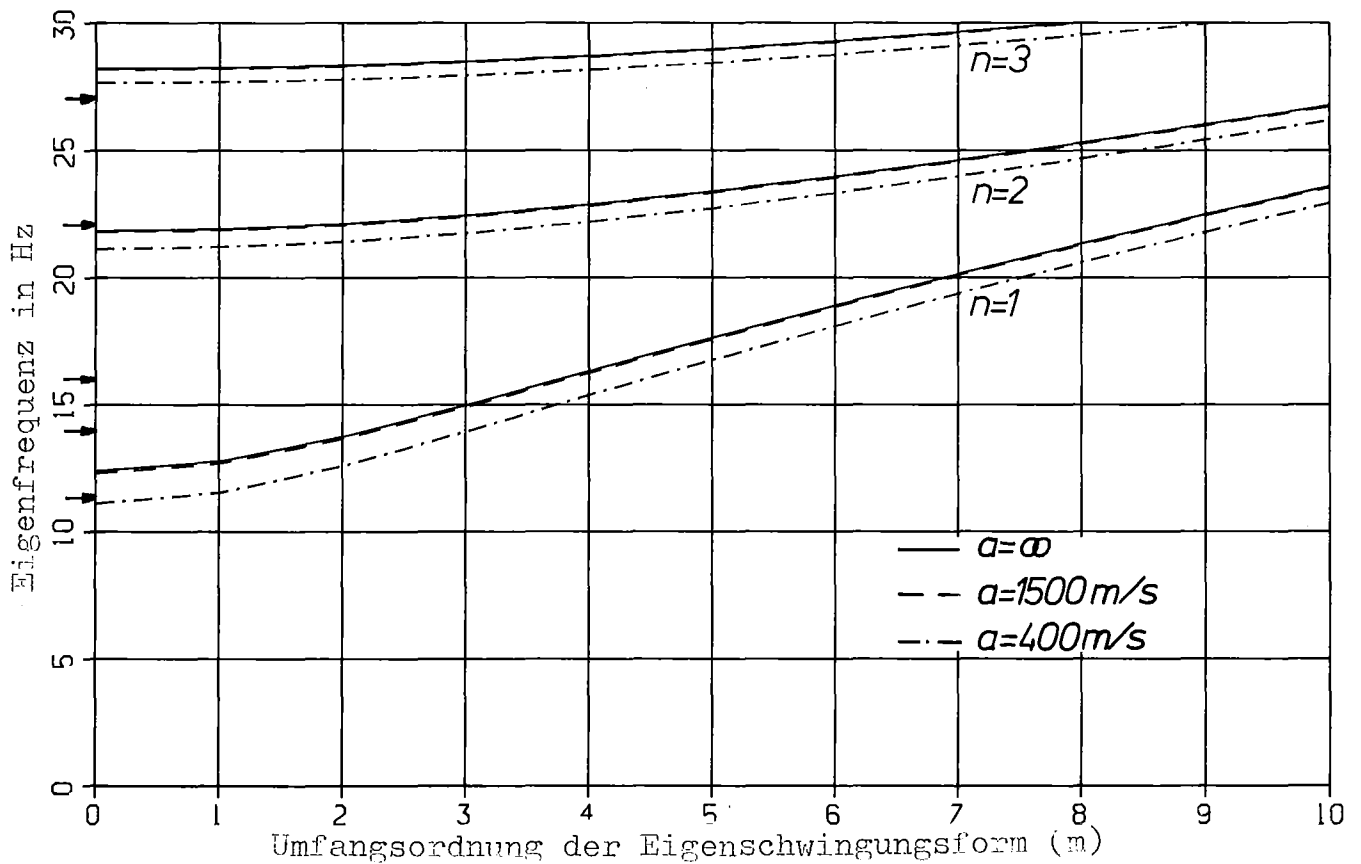


Bild 16: Eigenfrequenzen des Wasserpools der Kondensationskammer, berechnet aus dem vereinfachten Poolmodell.
 a : Schallgeschwindigkeit des Wassers
 \rightarrow : in den Experimenten beobachtete Frequenzen

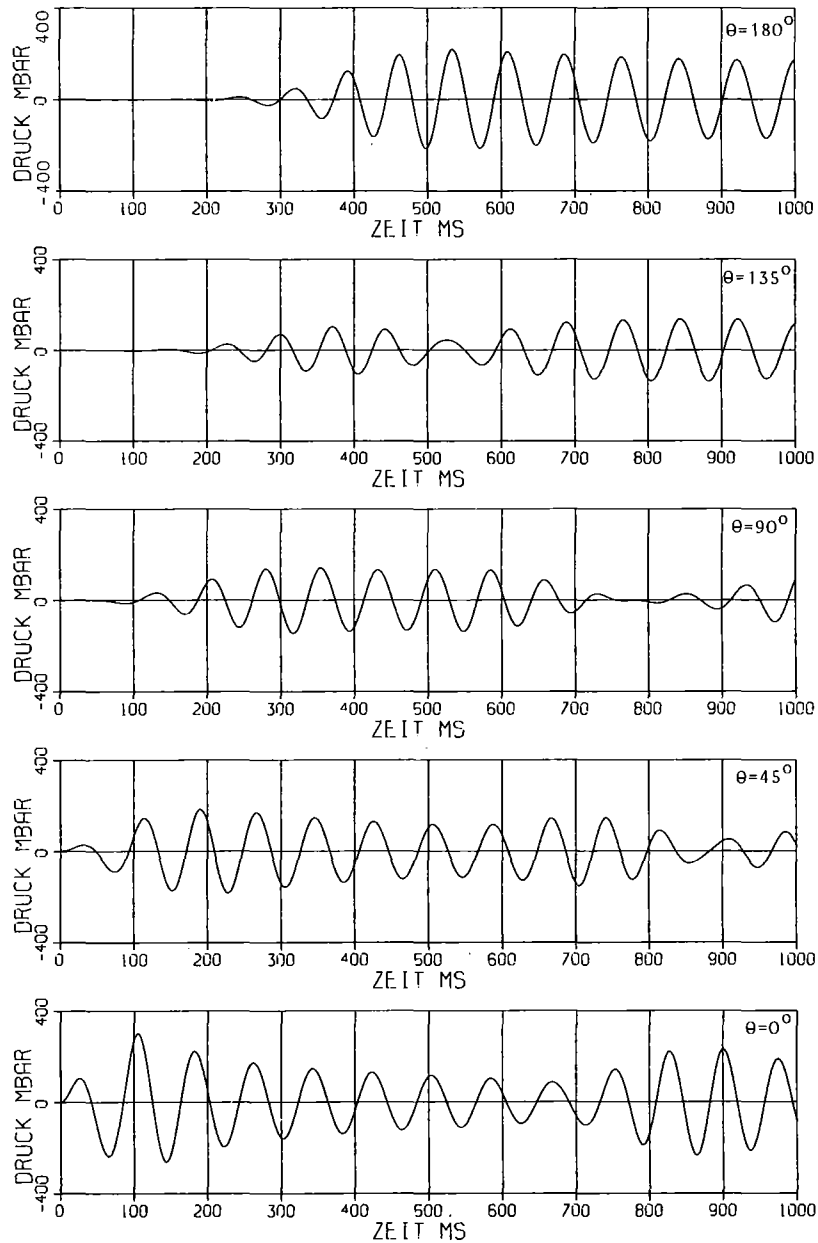


Bild 17: Berechnete Druckverläufe an äquidistanten Punkten des Schalenumfangs bei einer simulierten Blasen Kondensation in dem vereinfachten Poolmodell ohne Dämpfung.

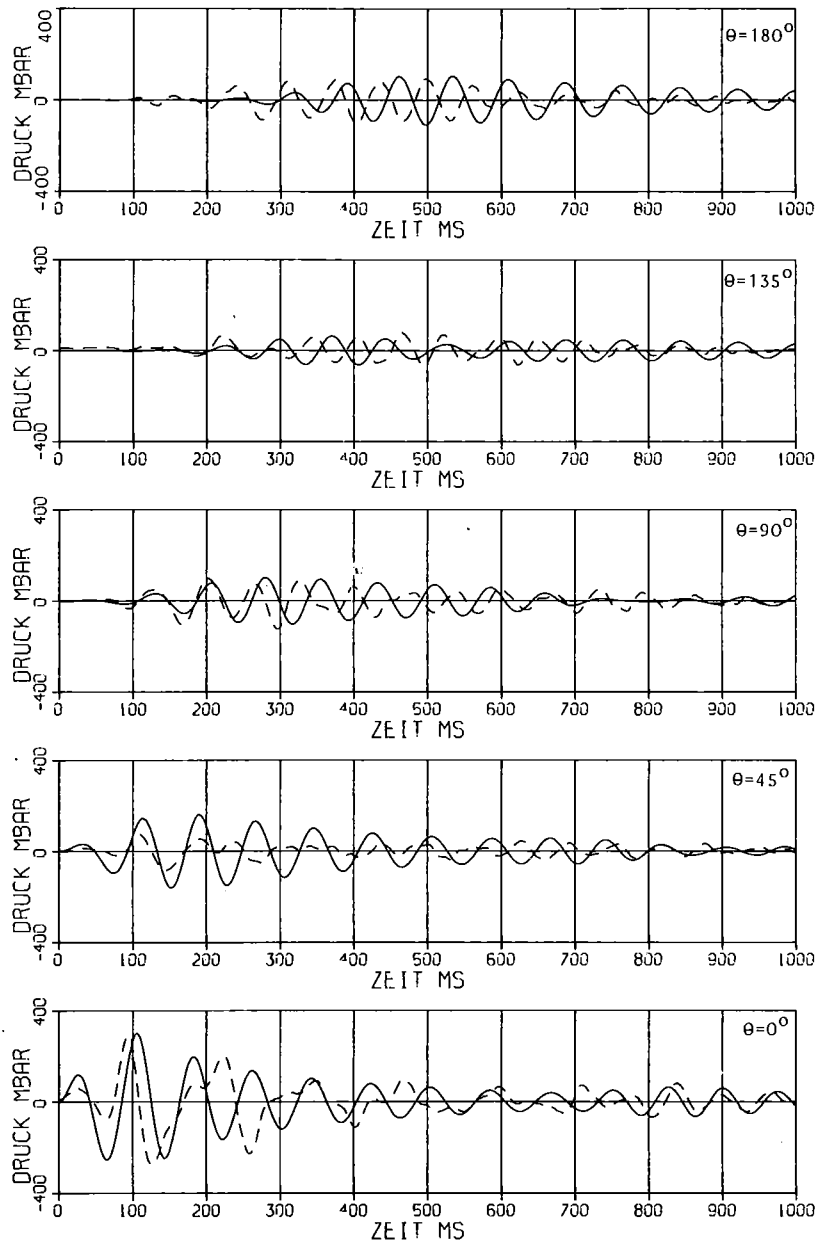


Bild 18: Berechnete Druckverläufe an äquidistanten Punkten des Schalenumfanges bei einer simulierten Blasencondensation in dem vereinfachten Poolmodell mit 2 % modaler Dämpfung (—). Bei einem Freibläseversuch gemessene Druckverläufe (— — —).