

KfK 3006
Juli 1980

Zum Spannungs- Dehnungsverhalten großer supraleitender Magnete

C. P. Behrens
Institut für Technische Physik

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Technische Physik

KfK 3006

Zum Spannungs-Dehnungsverhalten großer
supraleitender Magnete⁺)

C.P. Behrens

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

⁺) Von der Fakultät für Physik der Universität Karlsruhe
genehmigte Dissertation

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, wie der effektive Elastizitätstensor eines Magnetkomposits mit einer Tensorintegralgleichung von Korringa numerisch ermittelt werden kann. An einem Testkomposit, für das analytische Lösungen vorliegen, wird die Genauigkeit des Verfahrens untersucht. Indem man das Materialverhalten durch einen effektiven Elastizitätstensor beschreibt, werden Aussagen über den Einfluss der Anisotropie auf das maximal erreichbare Zentralfeld eines supraleitenden Solenoids gewonnen. Des Weiteren wird eine Methode zur Spannungs-Dehnungsberechnung von Solenoiden in inhomogenen Magnetfeldern vom Typ eines Tokamak-Reaktors angegeben, die die toroidalen Symmetrieverhältnisse mittels Fourierreihen ausnützt.

To the Stress-Strain Behaviour of Large Superconducting Magnets

Abstract

It is shown that the effective tensor of elasticity of a magnet composit may be determined numerically from a tensor integral equation, given by Korringa. The precision of the procedure is investigated for a test composit by comparison with an analytical solution. Describing the material behaviour by an effective elasticity tensor, the influence of anisotropy on the maximum obtainable central field of a superconducting solenoid is assessed. Furthermore a method is given for the calculation of stress and strain of solenoids in inhomogeneous magnetic fields of the type of a tokamak fusion reactor, which uses toroidal symmetry by Fourier series.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung und Problemstellung	1
2. Vorüberlegungen	5
3. Grundbegriff "effektiver Elastizitätstensor" und sein Zusammenhang mit dem Spannungs-Dehnungsverhalten	7
4. Übertragung der Homogenitätsvorstellung auf ein Magnetkomposit	12
5. Die Gleichung von Korringa	15
5.1 Der konstante Elastizitätstensor	16
5.2 Die Greens-Funktion	16
5.3 Ortsabhängige Materialeigenschaften	18
5.4 Die Integralgleichung für unendliches Volumen	18
6. Entwicklung des numerischen Verfahrens zur Lösung der Gleichung von Korringa	20
6.1 Ermittlung der Eingangsfunktionen	20
6.1.1 Greenstensor und seine Eigenschaften	20
6.1.2 Der Tensor $\underline{\Gamma}$	22
6.1.3 Der Tensor $\underline{\underline{T}}$	23
6.2 Reduktion der Tensorgleichung	24
6.3 Diskretisierung	32
6.4 Zusammenfassung und Programmaufbau	35
7. Anwendung des numerischen Verfahrens	38
7.1 Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse	38
7.2 Berechnung des effektiven Elastizitätstensors eines Testkomposits	40
7.3 Ergebnis der Rechnung und Vergleich mit der exakten Lösung	42
7.4 Diskussion der Genauigkeit des Verfahrens	50
7.5 Grenzen für die Anwendbarkeit des Verfahrens	56

	Seite
7.6 Diskussion eines alternativen Lösungsverfahrens für die Gleichung von Korringa	57
7.7 Berechnung des effektiven Elastizitätstensors des TESPE-Supraleiterpakets	59
8. Anwendung der Vorstellung eines effektiven Elastizitätstensors in der Auslegung von Solenoiden	63
8.1 Spannungs-Dehnungsbeziehungen eines Solenoids in Zylinderkoordinaten	63
8.2 Das maximal erreichbare Zentralfeld eines supraleitenden Solenoids	67
8.3 Erweiterung der Spannungs-Dehnungsgleichungen auf Solenoide in einem inhomogenen Magnetfeld vom Typ eines Tokamak-Reaktors	69
8.3.1 Voraussetzungen	72
8.3.2 Aufstellung des Differentialgleichungssystems	74
8.3.3 Lösung des Differentialgleichungssystems	76
9. Ausblick	82
10. Zusammenfassung	82
ANHANG	85
I. Erweiterung des Green'schen Satzes in Kap. 5.2	86
II. Berechnung des Oberflächenintegrals aus Kap. 6.1.1	88
III. Symmetriebeziehungen des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes und die Voigt'sche Schreibweise	89
IV. Aufbau und Konvergenz des Iterationsverfahrens nach Korringa	92
V. Lösungen aus Kap. 8.3	95
Literaturverzeichnis	99
Symboltabelle	103

1. Einleitung und Problemstellung

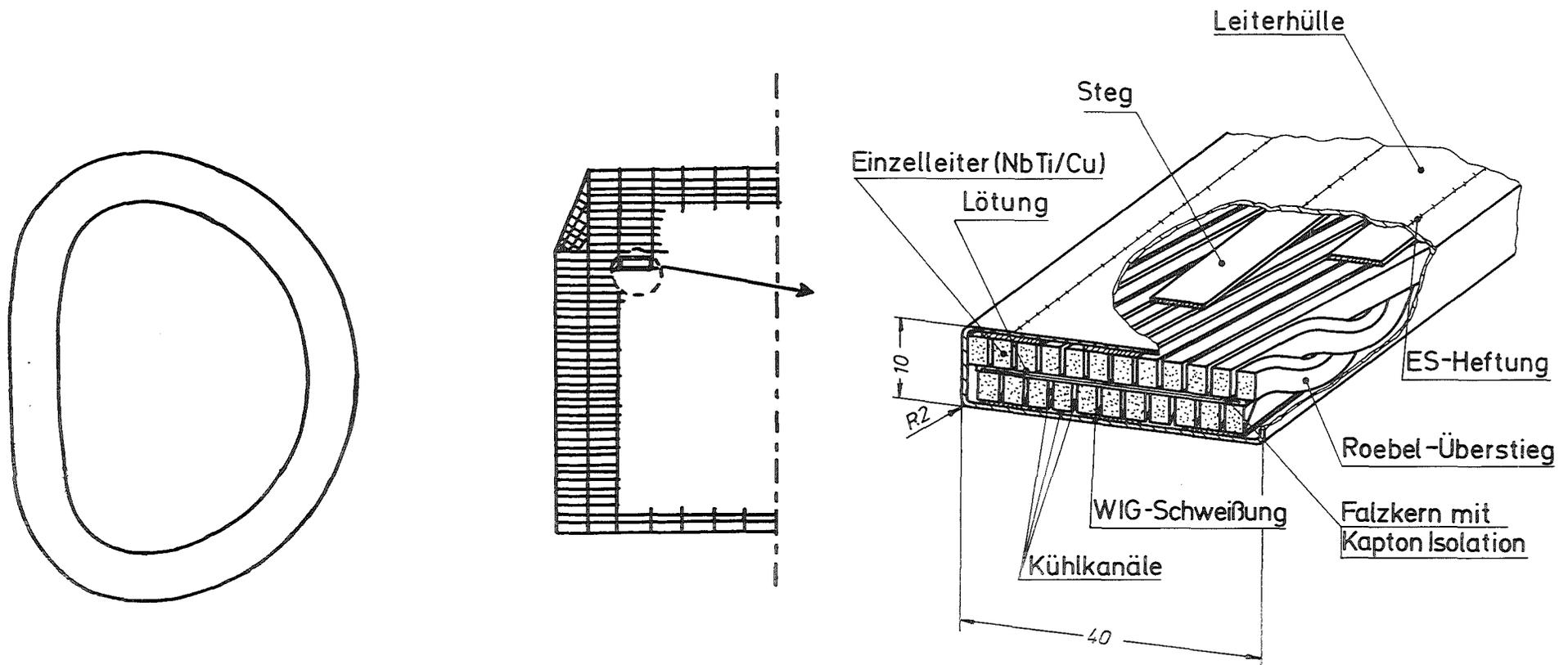
Fusionsreaktoren, die auf dem magnetischen Einschlußprinzip beruhen, verlangen die Anwendung hoher Magnetfelder (für das Hauptfeld in einem Tokamak-Magneten mind. 5-7 T). Sie lassen sich wirtschaftlich nur durch supraleitende Magnete erzeugen. Im Betrieb speichern solche Spulen hohe magnetische Energien (Größenordnung 10 - 100 GJ), die um mindestens einen Faktor 10 - 100 größer sind als bei bisher gebauten supraleitenden Großmagneten. Ein vorzeitiger Übergang der Magnete in die Normalleitung (Quench) muß daher weitgehend ausgeschlossen werden.

Ursache für einen Quench kann sein, daß eine maximal zulässige Dehnung des Supraleiterdrahtes überschritten wird (Ref. 1).

Die Einhaltung dieser Randbedingung in der Auslegung erfordert neben der Wahl geeigneter Spulengeometrien (z.B. D-Spulen) einen entsprechenden dehnungsmindernden Aufbau des Magneten.

Dazu sieht man Verstärkungen durch Stahl-Bänder vor. Zusammen mit dem Leiter, Leitergehäuse, Kühlkanälen und Isolationsmaterial erhält daher ein solcher Magnet einen sehr komplizierten inneren Aufbau. Die so aufgebaute Windung bildet ein Magnetkomposit (Abb. 1b).

Die Überprüfung, ob durch diese Maßnahmen die gestellten Forderungen eingehalten werden, zwingt zu einer genauen Spannungs-Dehnungsanalyse des Magneten. Aufgrund des stark inhomogenen Magnetfeldverlaufs ist eine dreidimensionale Berechnung notwendig. Wegen der dafür nötigen Zahl der Speicherplätze in den verwendeten Finite-Elementprogrammen ist aber die Zahl und Form der Elemente sehr beschränkt (Ref. 3). Speicherkapazitäten und Rechenzeiten der gegenwärtigen Computeranlagen erlauben keine Modellierung, die alle von Ort zu Ort verschiedenen Materialeigenschaften im Magnetkomposit hinreichend berücksichtigen.



a) D-förmige Spule

b) Windungsquerschnitt
(Magnetkomposit)

c) LCT-Leiter

Abb. 1: Aufbau einer supraleitenden Hauptfeldspule eines Tokamakreaktors anhand einer Prototypspule für das LCT-Projekt (Ref.2)

Denkt man sich stattdessen den Magneten aus einem einzigen homogenen Material gebildet, welches nach außen hin die gleichen Eigenschaften zeigt wie ein entsprechendes Teilvolumen ΔV des inhomogenen Magnetkomposits, wird die Berechnung von Dehnungen und Spannungen stark vereinfacht. Die elastischen Eigenschaften dieses gedachten Materials wurden bisher im wesentlichen durch die Mischungsregel ermittelt. Es kann aber sowohl theoretisch wie experimentell (Ref. 4) gezeigt werden, daß bei den hier in Frage stehenden komplizierten Magnetkompositen diese Gesetzmäßigkeit versagt (Kap. 2).

Diese Arbeit stellt sich daher die Aufgabe, die elastischen Eigenschaften des homogenen Materials aus den Eigenschaften des inhomogenen Magnetkomposits zu berechnen. Dazu greift sie auf Begriffe und Methoden aus der Theorie der Polykristallelastizität bzw. der Elastizität von Kunststoffkompositen (z. B. GfK) zurück (Ref. 7, 8, 11-17).

Dort wird das elastische Verhalten der inhomogenen Materialien durch einen einzigen "effektiven Elastizitätstensor" angegeben (Kap. 3). Die homogene Beschreibung durch die Angabe dieses einzigen Materialtensors ist jedoch nur sinnvoll, wenn die Eigenschaften eines Teilvolumens ΔV des inhomogenen Materials an jeder Stelle gleich sind. Dazu muß ΔV so gewählt werden, daß es groß gegen die charakteristische Länge (Korrelationslänge) ist, mit der sich die Materialparameter im Gesamtvolumen wiederholen. Um den Begriff "effektiver Elastizitätstensor" auch auf Magnetkomposite anwenden zu können, muß daher die Homogenität von Magneten untersucht werden. Es muß geklärt werden, ob ein Magnet durch ein homogenes Modell überhaupt sinnvoll beschrieben werden kann (Kap. 4).

Gelingt dies, stellt sich die Frage, wie der effektive Elastizitätstensor berechnet werden kann. Dazu ist im Prinzip die Lösung eines Systems von Differentialgleichungen für Spannungsgleichgewicht mit vorgegebenen Randbedingungen (Kap. 3) nötig. Mit der prinzipiell dafür geeigneten Finite-Element-Methode wird das Verfahren aber sehr aufwendig. Deshalb soll in dieser Arbeit eine einfachere und in der Praxis leichter handhabbare Berechnungsmethode entwickelt werden. Sie läuft auf eine Verbesserung der Mischungsregel hinaus.

Um die Randbedingungen unmittelbar zu erfüllen, geht sie von einem Integralgleichungssystem aus, das Korringa (Ref. 5) für makroskopisch homogene Materialien angegeben hat (Kap. 5). Lösungsmethoden liegen aber außer für eine statistisch vorgegebene Materialverteilung nicht vor. Deshalb wird ein numerisches Lösungsverfahren entwickelt (Kap. 6), das für eine fest vorgegebene Materialverteilung gültig ist. Ein Testkomposit, für das analytische Lösungen vorliegen, ermöglicht die Überprüfung der Genauigkeit des Verfahrens. Es schließt sich eine Diskussion der Anwendbarkeit auf Magnetkomposite an. Daneben gelingt es, mit diesem Verfahren eine von Korringa alternativ zur Lösung angegebene Iterationsmethode zu untersuchen.

Als Anwendungsbeispiel wird der effektive Elastizitätstensor des TESPE-Magnetkomposits (Ref. 24) berechnet (Kap. 7).

Die entwickelte Lösungsmethode liefert den vollständigen effektiven Elastizitätstensor. Daher wird auch das anisotrope Materialverhalten des Komposits ermittelt. Größe der Materialparameter und Anisotropie beeinflussen die Spannungen und Dehnungen im Belastungsfall des Magneten.

Bei einem supraleitenden Magneten fragt sich, wie dieser Zusammenhang über die maximal zulässige Dehnung des Supraleiterdrahts das erreichbare Zentralfeld eines Magneten begrenzt. Dies wurde für ein Solenoid unter Verwendung bestehender zweidimensionaler analytischer Spannungs-Dehnungsgleichungen nach Gray-Ballou (Ref. 6) gezeigt (Kap. 8.2).

Diese Gleichungen nützen nur drei technische Konstanten des effektiven Elastizitätstensors aus, nämlich die E-Module in radialer und in Umfangsrichtung, sowie eine Poissonzahl. Das ist sinnvoll, solange das Solenoid sich in einem axialsymmetrischen Magnetfeld befindet. In einem inhomogenen Magnetfeld, wie es etwa ein Solenoid in einer Tokamak-ähnlichen Anordnung sieht, entstehen aber zusätzlich Scherkräfte, die zu einer Zunahme der Dehnung des Supraleiterdrahtes führen können. Spannungs-Dehnungsanalysen in dieser Geometrie liegen bisher nur in Form von Finite-Element-Rechnungen vor. Ihre Genauigkeit war bisher durch analytische Rechnungen nicht zu überprüfen, da die Gleichgewichtsgleichungen des Problems unter Einbeziehung von Schubmoduli des effektiven Elastizitätstensors komplizierte gekoppelte partielle Differentialgleichungen

chungen werden. Die vorliegende Arbeit nun gibt Lösungen für den Spezialfall eines Tokamak-ähnlichen Magnetfeldes an. Es sind Fourierreihen, die als Spezialfall nullter Ordnung die in der Literatur schon bestehenden Spannungs-Dehnungsgleichungen für axial-symmetrische Magnetfelder, wie sie in Kap. 8.2 benutzt werden, enthalten.

2. Vorüberlegungen

Setzt man zwei verschiedene Materialien zu einem Komposit zusammen, so kann man bei einer einfachen Anordnung (s. Abb. 2) zwei verschiedene Belastungsfälle unterscheiden:

Im ersten Fall (Abb. 2a, Parallelschaltung) werden beide Materialien gleichmäßig gedehnt. Im Materialinnern sind die Dehnungen konstant. Der Volumenmittelwert der E-Moduli $\langle E_i \rangle$ der

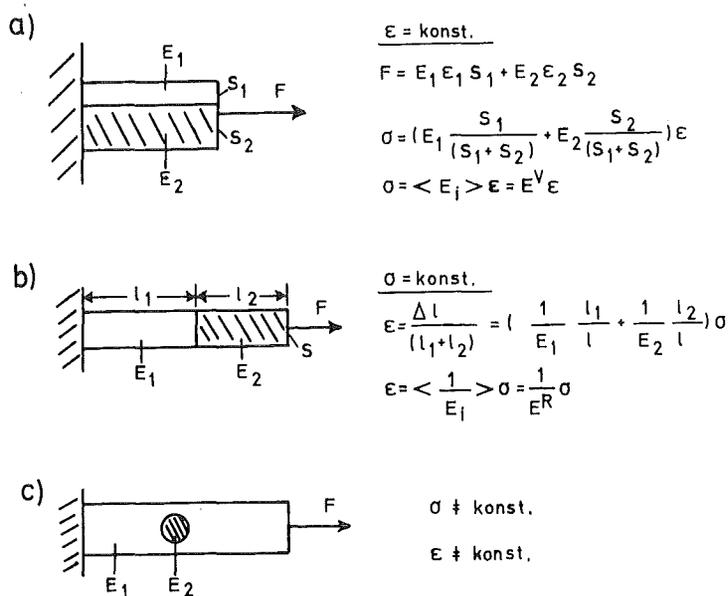


Abb. 2: Parallel- (a) und Reihenschaltung (b) zweier Materialien (Mischungsregel) und ihr Versagen (c).

Einzelmaterialien gibt dann den Zusammenhang zwischen der von außen angelegten Spannung σ und der Dehnung ϵ des Gesamtmaterials an. Im Fall der Reihenschaltung (Abb. 2b) sind die Spannungen in den Einzelmaterialien konstant. Die Gesamtdehnung dieses Komposits ergibt sich als Volumenmittelwert der E-Modulkehrwerte. Im Fall a) kann man dieses Komposit durch ein homogenes Material mit dem Elastizitätsmodul $E^V = \langle E_i \rangle$ (Voigtmodul), im Fall b) durch $E^R = \langle E_i^{-1} \rangle^{-1}$ (Reussmodul) ersetzen, so daß inhomogenes wie homogenes Material nach außen dasselbe Spannungs-Dehnungsverhalten besitzen.

Der Voigtmodul E^V , sowie der Reussmodul E^R sind also "effektive" Elastizitätsmoduli E^{eff} . In beiden Fällen geben sie den Zusammenhang zwischen den Volumenmittelwerten der Spannungen σ und Dehnungen ϵ im Material an, sodaß allg. gilt: $\langle \sigma \rangle = E^{eff} \langle \epsilon \rangle$. Selbst bei gleichen Materialanteilen sind die Werte der "effektiven" Elastizitätsmoduli von der Anordnung abhängig und i.a. voneinander verschieden. (Ein geschichtetes Komposit ist daher i.a. anisotrop; vgl. Kap. 7.2) Versucht man das Materialverhalten komplizierterer Komposite, etwa Magnetkomposite, durch die Reuss- und Voigt-Werte zu beschreiben (Mischungsregel), stellt man keine Übereinstimmung mit dem Experiment fest (Ref. 4). Die Mischungsregel versagt dann.

Gerade aber bei komplizierteren Magnetkompositen ist man zur Spannungs-Dehnungsberechnung in großen Magnetsystemen (etwa Tokamakanordnungen) darauf angewiesen, das Material als homogen zu betrachten. Die Modellierung aller Feinheiten im Magnetaufbau durch Finite-Elemente würde nicht zu bewältigende Speicherplatz- und Rechenzeitprobleme aufwerfen.

Es stellt sich daher die Frage, wie bei komplizierteren Materialanordnungen die elastischen Eigenschaften des homogenen Ersatzmaterials berechnet werden können.

Bei kleineren supraleitenden Magneten genügte die Mischungsregel bisher vollständig, da der Aufbau dieser Spulen zum Teil einfacher ist, zum Teil die zulässigen Supraleiterdehnungen noch nicht erreicht werden. Die Ursache für das Scheitern der Mischungsregel bei komplizierteren Anordnungen läßt sich am Beispiel c) in Abb. 2 erläutern. Wird dieses Komposit wie angegeben belastet, tritt innerhalb des Volumens eine inhomogene Spannungsverteilung auf. Das rührt daher, daß die Phasengrenzfläche des Materials 2 nur an wenigen Stellen parallel oder senkrecht zur Kraftrichtung steht. Es treten nicht nur Zugkomponenten, sondern auch Scherkomponenten der Spannungsbelastung auf. Zusammen mit der Querkontraktion der Materialien entsteht eine inhomogene Dehnungsverteilung. Dies steht im Ge-

gensatz zu den Reuss- und Voigt-Annahmen homogener Spannungs- oder Dehnungsverläufe.

Wegen der auftretenden Scherung wird die Dehnung z.B. in Kraft- richtung nicht nur über die Zugkomponenten des Spannungstensors, sondern auch über dessen Scherkomponenten ermittelt werden, d.h. es muß lokal das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz herangezogen werden (Ref. 19): $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$

Wegen der Symmetrie $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ und $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$ (Ref. 19) muß gelten

$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$ (s. Anhang IIIa). Die Existenz eines elastischen Potentials führt zu der Beziehung $C_{ijkl} = C_{klij}$ (Ref. 19).

Um jetzt eine Verallgemeinerung der Definition "effektiver" Elastizitätsmoduli von homogenen Spannungs- oder Dehnungsverteilungen zur inhomogenen vornehmen zu können, wird im folgenden ein "effektiver Elastizitätstensor" definiert. Der Begriff wird aus der Theorie effektiver Elastizitätstensoren makroskopisch homogener Polykristalle (z.B. Legierungen) und Kunststoffkomposite übernommen (Ref. 7).

In den weiteren Betrachtungen kennzeichnet doppeltes Unterstreichen $\underline{\underline{C}}$ Tensoren 4. Stufe C_{ijkl} , einfaches Unterstreichen \underline{A} Tensoren 2. Stufe (Matrizen) A_{ij} .

3. Grundbegriff "effektiver Elastizitätstensor" und sein Zusammenhang mit dem Spannungs-Dehnungsverhalten

In der Theorie des effektiven Elastizitätstensors wird das mechanische Verhalten eines Kompositmaterials des Volumens V mit dem räumlich variierenden Elastizitätstensor $\underline{\underline{C}}(\vec{x})$ durch das Verhalten eines homogenen Materials mit dem zunächst unbekanntem, räumlich konstanten effektiven Elastizitätstensor $\underline{\underline{C}}^{eff}$ ersetzt. Solches ist dann möglich, wenn in V an jeder Stelle ein Teilvolumen ΔV gefunden werden kann, so daß gilt

$$V \gg \Delta V \gg \Delta l^3 \quad (1)$$

und alle Volumina ΔV die gleichen Eigenschaften aufweisen. Δl gibt die größte Länge im Material an, mit der sich die Eigenschaften des Mediums im Volumen V wiederholen (Korrelationslänge) (vgl. auch Ref. 8). So ist etwa in einem Laminat aus zwei Materialien der Dicken d_1 und d_2 $\Delta l = d_1 + d_2$. Liegt Δl im atomaren Bereich, heißt das Material "makroskopisch homogen". Dies ist z.B. bei einem Polykristall der Fall.

Ob Bedingung (1) auch bei einem Magneten erfüllt werden kann, ist ohne weiteres nicht klar. Es muß daher untersucht werden, ob die Vorstellung eines homogenen Magnetkomposits überhaupt zutrifft (Kap. 4). Ist das der Fall, ergibt sich die Definition des effektiven Elastizitätstensors aus folgender Überlegung: Man betrachtet ein Teilvolumen ΔV mit der Oberfläche S in einem kartesischen Koordinatensystem, dessen Ursprung beispielsweise im geometrischen Mittelpunkt des Teilvolumens liegt. Werden an die Oberfläche S Verschiebungen $u_i^0(\hat{x})$ ($\hat{x} \in S$; $i=1,2,3$) angelegt, die proportional zur Entfernung vom Ursprung zunehmen

$$u_i^0(\hat{x}) = \varepsilon_{ij}^0 \hat{x}_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

entstehen im homogenen Material mit den gesuchten Eigenschaften von $\underline{C}^{\text{eff}}$ räumlich konstante Dehnungen identisch mit ε_{ij}^0 , sowie nach dem Materialgesetz konstante Spannungen σ_{ij}^0 mit

$$\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl}^{\text{eff}} \varepsilon_{kl}^0 \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (3)$$

Legt man dieselben Verschiebungen (2) an die Oberfläche des inhomogenen Materials an, führt das i.a. zu einer inhomogenen Verteilung von Spannungen $\underline{\sigma}(\vec{x})$ und Dehnungen $\underline{\varepsilon}(\vec{x})$ im Volumen ΔV . Man kann aber zeigen (Ref. 7), daß auch bei beliebiger Volumenform von ΔV der Volumenmittelwert der Dehnungen den konstanten Dehnungen $\underline{\varepsilon}^0$ entspricht.

$$\underline{\varepsilon}^0 = \langle \underline{\varepsilon}(\vec{x}) \rangle \quad (4)$$

Weiter muß zur Bestimmung von $\underline{C}^{\text{eff}}$ aus (3) $\underline{\sigma}^0$ ermittelt werden: Da im inhomogenen Material das lokale Materialgesetz

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = C_{ijkl}(\vec{x}) \varepsilon_{kl}(\vec{x})$$

gelten soll, muß nach Volumenmittelung gelten (Tensorschreibweise)

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}) \rangle = \langle \underline{\underline{C}}(\vec{x}) \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{x}) \rangle = \langle \underline{\underline{C}}(\vec{x}) \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{x}) \rangle (\underline{\underline{\varepsilon}}^0)^{-1} \underline{\underline{\varepsilon}}^0$$

Damit entsteht der Form nach eine Beziehung wie in (3). Setzt man also in ΔV ein homogenes Material mit

$$\underline{\underline{C}}^{\text{eff}} = \langle \underline{\underline{C}}(\vec{x}) \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{x}) \rangle (\underline{\underline{\varepsilon}}^0)^{-1} \quad (5)$$

ein, treten die nach (3) geforderten konstanten Spannungen $\underline{\underline{\sigma}}^0$ auf, wobei

$$\underline{\underline{\sigma}}^0 = \langle \underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}) \rangle \quad (6)$$

(5) definiert die gesuchten mechanischen Eigenschaften des homogenen Materials.

Mit (3) stellen deshalb die Gleichungen (4), (6) den Zusammenhang zum Spannungs-Dehnungsverhalten des inhomogenen Materials her:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}) \rangle = \underline{\underline{C}}^{\text{eff}} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{x}) \rangle$$

Daher gibt der effektive Elastizitätstensor an, wie die Volumenmittelwerte der Spannungen und Dehnungen im inhomogenen Material miteinander zusammenhängen. Werden statt den Oberflächenverschiebungen, Oberflächenspannungen $\underline{\underline{\sigma}}^0(\hat{x})$ vorgegeben, findet man eine Definitionsgleichung, die den gleichen Elastizitätstensor $\underline{\underline{C}}^{\text{eff}}$ wie Gleichung (5) liefert.

$$(\underline{\underline{C}}^{\text{eff}})^{-1} = \langle \underline{\underline{C}}^{-1}(\vec{x}) \underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}) \rangle \langle \underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}) \rangle^{-1} \quad (7)$$

Zur Ermittlung des effektiven Elastizitätstensors benötigt man nach (5) bzw. (7) die bei angelegten Oberflächenverschiebungen (Spannungen) im inhomogenen Material auftretenden Dehnungen oder Spannungen. Hat man ihn gefunden, bedeutet seine Verwendung in Spannungs-Dehnungsanalysen die Ermittlung von Volumenmittelwerten der Spannungen und Dehnungen im Kompositmaterial (vgl. Kap. 2).

Spannungs-Dehnungsberechnungen beruhen auf der Lösung der Spannungsgleichgewichtsgleichungen (Ref. 19). Die hierzu benutzten Finite-Element-Methoden (Ref. 9) können sehr aufwendig werden.

Für einfache Geometrien, etwa ein laminiertes Medium (Ref. 10) gelingt die analytische Berechnung dieses effektiven Elastizitätstensors ohne größere Schwierigkeiten. Bei vielen Kompositen jedoch (z.B. bei Polykristallen) ist der innere Aufbau nicht genügend bekannt oder für eine detaillierte Berechnung zu kompliziert, so daß man versucht, Grenzen für die effektiven Materialkonstanten zu finden. Die einfachste Annahme konstanter Dehnungen (Voigt, Ref. 11) oder konstanter Spannungen (Reuss, Ref. 12) führt in (5) zum

$$\text{Voigttensor} \quad \underline{\underline{C}}^V = \langle \underline{\underline{C}}(\vec{x}) \rangle$$

und in (7) zum

$$\text{Reusstensor} \quad \underline{\underline{C}}^R = \langle \underline{\underline{C}}^{-1}(\vec{x}) \rangle^{-1}$$

als Näherungen für $\underline{\underline{C}}^{\text{eff}}$.

Sie nutzen nur die Information über die Volumenanteile der Einzelmaterialien. Die in Kap. 2 erwähnte Mischungsregel stellt also die lineare Näherung des Voigt- bzw. Reusstensors dar.

Im dreidimensionalen Fall geben, wie das Beispiel aus Abb. 2 zeigt, diese Tensoren nur Näherungen an. Im Fall 2a ist z.B. die Konstanz der Dehnungen nur in einer Richtung erfüllt. Trotzdem liefern die Tensoren sinnvolle Grenzen für die Elemente des effektiven Elastizitätstensors.

Legt man nämlich an Materialien mit den Elastizitätstensoren $\underline{\underline{C}}^V$, $\underline{\underline{C}}^R$, $\underline{\underline{C}}^{\text{eff}}$ konstante Dehnungen $\underline{\underline{\epsilon}}$ an, so besteht für die mechanischen Energiedichten die Relation (Ref. 13):

$$\boxed{\frac{1}{2} \underline{\underline{C}}^V \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{\epsilon}} \geq \frac{1}{2} \underline{\underline{C}}^{\text{eff}} \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{\epsilon}} \geq \frac{1}{2} \underline{\underline{C}}^R \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{\epsilon}} \geq 0} \quad (8)$$

(Hill'sche Regel), mit z.B. $\underline{\underline{C}}^V \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{\epsilon}} = C_{ijkl}^V \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}$.

Für ein isotropes Komposit findet man daraus für die E-Moduli die Beziehung

$$E^V \geq E^{\text{eff}} \geq E^R \quad (9)$$

der Voigt-E-Modul ist größer als der Reuss-E-Modul. Dies ist von der Mischungsregel her schon bekannt.

Die Ungleichung (8) stellt ein Kriterium für die Richtigkeit berechneter effektiver Elastizitätstensoren dar.

Jedoch können die Einzelelemente der Tensoren damit nicht eingegrenzt werden.

Weiterhin kann auch die Form der Anisotropie eines Komposits (Ref. 14) aus der Hill'schen Regel nicht ermittelt werden.

Eine weitere Methode, die zunächst noch von dem Wissen über die Volumenanteile der Einzelmaterialien ausgeht, ist der Variationsansatz von Hashin-Shtrikman (Ref. 15, 16). Wegen der Kompliziertheit der Lösungen beschränkt sich die Methode auf isotrope bzw. transversal isotrope Composite. Sie eignet sich besonders dann, wenn Phasengrenzen nicht bekannt sind.

Von diesen Überlegungen ausgehend, wurde in Anlehnung an Methoden aus der Turbulenztheorie von Flüssigkeiten, eine statistische Theorie der Polykristallelastizität entwickelt (Ref. 17). Ohne auf Einzelheiten einzugehen sei hier erwähnt, daß darin z.B. der Voigttensor als erster Näherungswert und Ensemblemittelwert aufgefaßt wird.

Statt, wie in den bisher diskutierten Verfahren, von einem Differentialgleichungssystem auszugehen, gibt es auch die Möglichkeit, die Spannungen und Dehnungen aus einem Integralgleichungssystem zu berechnen. Die Lösungen erfüllen dann unmittelbar die durch (2) definierten Randbedingungen. Korrington (Ref. 5) stellt eine solche Integralgleichung mit Hilfe der Green'schen Funktion auf. Die Definition des effektiven Elastizitätstensors (5) wird mit einbezogen.

Insbesondere führt er einen Grenzwertprozeß $V \rightarrow \infty$ durch, mit dem er der Annahme eines unendlich ausgedehnten Materials Rechnung trägt.

Da ein Lösungsformalismus für dieses Integralgleichungssystem, außer für statistisch vorgegebene Materialverteilungen, nicht existiert, stellt sich diese Arbeit die Aufgabe, es numerisch zu lösen.

Für die Anwendung bei einem Magnetkomposit ist zu untersuchen, inwieweit es sich um ein homogenes Material im Sinne der Definition (1) handelt (Kap. 4). Zudem muß die Frage beantwortet werden, ob auch bei vorgegebenem endlichen Materialvolumen sinnvolle Näherungslösungen gefunden werden können, trotz des von Korringa durchgeführten Grenzwertprozesses $V \rightarrow \infty$ (Kap. 7.4).

4. Übertragung der Homogenitätsvorstellung auf ein Magnetkomposit

Die in der Theorie effektiver Elastizitätstensoren entwickelten Methoden setzen voraus, daß das vorliegende Materialkomposit als homogenes Material beschrieben werden kann. Es muß also die in Kap. 3 angegebene Definition (1) erfüllen.

Jedem Teilvolumen ΔV_1 eines Magnetkomposits kann man nun Materialparameter C_{ijkl} zuweisen. Entnimmt man ein solches Teilvolumen ΔV_1 , etwa bei einem Solenoid (Abb. 3), in großer Entfernung von der Symmetrieachse, so sind sie den Materialparametern eines entsprechenden nicht gekrümmten Komposits näherungsweise gleich.

Erfüllt das Teilvolumen die Bedingung (1) und das Magnetkomposit wäre homogen, sollte es dieselben Materialparameter besitzen wie ein Teilvolumen $\Delta V_1'$ gleicher Form und Größe, das in der Nähe der Symmetrieachse entnommen wird. Dies ist sicherlich nicht der Fall, da wegen der stärkeren Krümmung der Lagen in $\Delta V_1'$ andere Materialparameter festgestellt werden.

Das Magnetkomposit eines Solenoids ist daher streng genommen nach Definition (1) inhomogen. Das trifft auf alle Systeme mit ausgezeichneter Symmetrieachse zu.

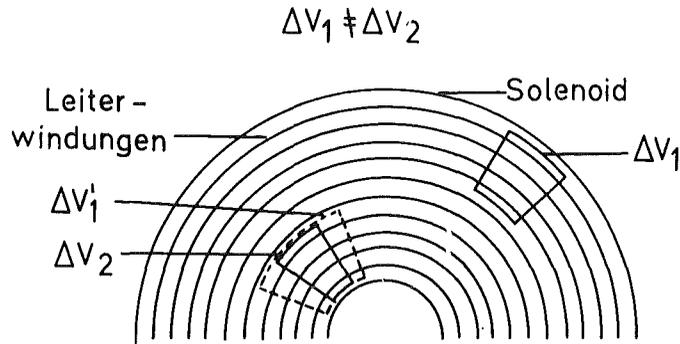


Abb. 3: Inhomogener Aufbau eines Solenoids

Verringert man aber das Volumen von $\Delta V_1'$, kann man ein Volumen ΔV_2 finden, in dem die Krümmung der Leiterwindungen ebenfalls vernachlässigt werden darf und in dem dieselben Materialparameter wie in ΔV_1 gefunden werden. Je näher an der Symmetrieachse die Teilvolumina ΔV gewählt werden, desto kleiner muß ΔV sein, um die Krümmung der Einzelmaterialschicht vernachlässigen zu können und damit die gleichen Materialparameter C_{ijkl} definieren zu können. Gleiche Eigenschaften der Teilvolumina ΔV wird man nur dann finden, wenn ihre Größe unter Einhaltung der Bedingung (1) je nach Ort gewählt wird. Diese freie Wählbarkeit der Teilvolumina wird also eingeschränkt. Läßt man aber diese Beschränkung von (1) zu, so gewinnt man konstante Materialparameter für das Solenoid. Solche Systeme sollen im folgenden allgemein quasihomogen genannt werden.

Die Parameter gibt man in einem zylindrischen Koordinatensystem an, dessen z-Achse auf der Symmetrieachse liegt. Dann muß z.B. der E-Modul auf jedem Radius in Umfangsrichtung des Solenoids konstant sein.

Zur Bestimmung der Eigenschaften eines Teilvolumens ΔV des quasihomogenen Solenoids, wird man es so entnehmen, daß die Krümmung der Lagen gering ist und die Form durch einen Quader angenähert werden kann (Abb. 4). Die Materialparameter C_{ijkl} in kartesischen Koordinaten, die man ermittelt, sind dann annähernd identisch mit den Materialparametern in Zylinderkoordinaten des Solenoids.

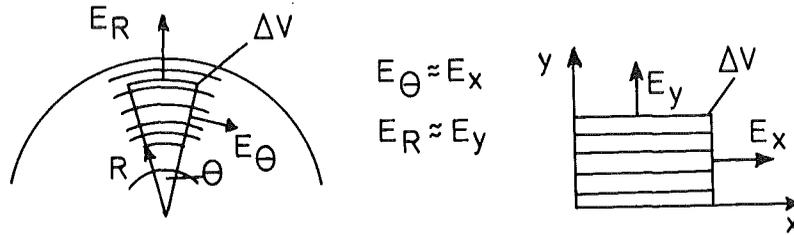


Abb. 4: Zusammenhang der Materialparameter eines Magnetkomposits im kartesischen und zylindrischen Koordinatensystem

Läßt sich für ein quasihomogenes Magnetkomposit kein orthogonales Koordinatensystem angeben, in dem die Materialparameter räumlich konstant sind, so findet man ihre Ortsabhängigkeit durch geeignetes Drehen des quaderförmigen Teilvolumens ΔV am Umfang eines solchen Magneten (z.B. eine D-Spule in Abb. 5). Die Transformationsformeln für die Drehung der in kartesischen Koordinaten angegebenen Materialparameter stehen zur Verfügung (Ref. 14).

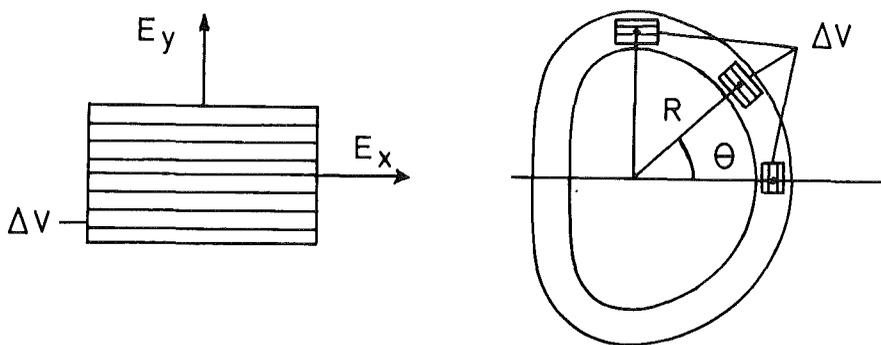


Abb. 5: Drehung eines Teilvolumens ΔV am Umfang einer D-Spule

Durch Angabe der effektiven Materialparameter eines Teilvolumens ΔV eines Magnetkomposits in einem kartesischen Koordinatensystem wird ein Magnet vollständig beschrieben. Das Teilvolumen muß aber groß gegen die charakteristische Länge sein, mit der sich die Materialparameter im Gesamtvolumen des Magneten wiederholen (Korrelationslänge).

5. Die Gleichung von Korrिंगa

Hier stellt sich die Frage, ob mit dem so ausgewählten endlichen Materialvolumen die Gleichung von Korrिंगa sinnvolle Ergebnisse liefert.

Die Ermittlung des effektiven Elastizitätstensors erfordert nach Definition (5) die Bestimmung der Dehnung $\underline{\underline{\epsilon}}(\vec{x})$ im Materialvolumen V , wenn an der Oberfläche S Verschiebungen $u_i^0(\hat{x})$ ($\hat{x} \in S$) als Randbedingungen vorgegeben sind. Die Dehnungen stellen sich gemäß der Materialverteilung $\underline{\underline{C}}(\vec{x})$ nach den statischen Gleichgewichtsbedingungen ein. Mit der Volumenkraft f_i lauten sie (Ref. 19):

$$\partial_j \sigma_{ij} = f_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (10)$$

(Hier und in folgenden wird die Einstein-Summationskonvention benutzt). Mit der Annahme, daß das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz auch lokal gilt ($\vec{x} \in V$):

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = C_{ijkl}(\vec{x}) \epsilon_{kl}(\vec{x}), \quad (11)$$

der Definition der Dehnungen

$$\epsilon_{kl}(\vec{x}) = \frac{1}{2} (\partial_k u_l(\vec{x}) + \partial_l u_k(\vec{x})) \quad (12)$$

($u_l(\vec{x})$): Verschiebungen im Volumen V).

und der Symmetrie des Elastizitätstensors: $C_{ijkl}(\vec{x}) = C_{ijlk}(\vec{x})$ (Ref. 19), findet man aus (10) das allgemeine partielle

Differentialgleichungssystem, dessen Lösungen die Verschiebungen im inhomogenen Material angeben:

$$\partial_j C_{ijkl}(\vec{x}) \partial_k u_l(\vec{x}) = f_i \quad \text{oder abgekürzt} \quad F_{il}(\vec{x}) u_l(\vec{x}) = f_i \quad (13)$$

wobei $F_{il}(\vec{x})$ ein ortsabhängiger Tensoroperator zweiter Stufe ist. Mit (12) findet man daraus die gesuchten Dehnungen im Volumen V . Der genaueste Weg hierzu wäre die Anwendung der Methode der Finiten Elemente (Ref. 9), was aber bei Berücksichtigung der Randbedingungen (2) sehr aufwendig wäre.

Um die Lösungen aber diesen unmittelbar anzupassen, bietet sich an die Gleichung (13) in eine Integralgleichung umzuwandeln. Dies wurde von Korringa (Ref. 5) vorgenommen. Im folgenden wird der eingeschlagene Weg und seine Ergebnisse kurz referiert.

5.1 Der konstante Elastizitätstensor \underline{C}^0

Wegen des ortsabhängigen Operators $F(\vec{x})$ kann der Green'sche Satz zur Umwandlung von (13) in eine Integralgleichung direkt nicht angewendet werden.

Korringa (Ref. 5) behilft sich durch Einführung eines Bezugsmediums mit beliebig gewählten, aber räumlich konstanten Elastizitätstensor \underline{C}^0 , dessen Gleichgewichtsgleichungen in Integralgleichungen umgewandelt werden können. In einem solchen Medium gehorchen die Verschiebungen $u_l^0(\vec{x})$ analog zu (13) dem Gleichungssystem

$$F_{il}^0 u_l^0(\vec{x}) = f_i \quad \text{mit} \quad F_{il}^0 = C_{ijkl}^0 \partial_j \partial_k \quad (14)$$

für das sich mit dem Green'schen Satz entsprechende Integralgleichungen aufstellen lassen.

5.2 Die Greens-Funktion

Das System (14) ist eine Verallgemeinerung der Laplace-Gleichung der Elektrostatik. Dort ergibt sich das Feld in einem ladungsfreien Raum aus der Überlagerung der Felder $G(\vec{x}, \hat{x}) \Psi_0$ der Ladungsdichte Ψ_0 auf der Oberfläche des Volumens.

n_m : Komponenten des Einheitsnormalenvektors auf der Oberfläche S' .

Anwendung von (14) und (15) in der linken Seite der Gleichung würde $u_i^0(\vec{x})$ als Funktion der Randwerte $u_i^0(\hat{x})$ liefern.

Mit den Randbedingungen (2) verifiziert man, daß die Verschiebungen die Form $u_i^0(\vec{x}) = \varepsilon_{ij}^0 \hat{x}_j$ ($\vec{x} \in V$) mit $u_i^0(\hat{x}) = \varepsilon_{ij}^0 \hat{x}_j$ besitzen, es sich also um konstante Dehnungen $\underline{\varepsilon}^0$ im Volumen handelt. Dies ist bei dem angesetzten räumlich konstanten Tensor \underline{C}^0 zu erwarten.

5.3 Ortsabhängige Materialeigenschaften

Gleichung (16) stellt den Zusammenhang zwischen einem beliebigen Verschiebungsfeld $U_i(\vec{x})$ in V und den Verschiebungen auf der Oberfläche $U_i(\hat{x})$ über den Greenstensor \underline{G} des Mediums \underline{C}^0 her.

Für die Berechnung des effektiven Elastizitätstensors werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle Volumenkräfte f_i zu Null gesetzt.

Wählt man als $U_i(\vec{x}) = u_i(\vec{x}) - u_i^0(\vec{x})$ und als Randwerte gemäß (2) $U_i(\hat{x}) = u_i(\hat{x}) - u_i^0(\hat{x}) = 0$, ergibt sich daraus eine Gleichung, die als einzige unbekannte Funktion die Verschiebung $u_i(\vec{x})$ im inhomogenen Material enthält. Mit (13) und (14) wird

$$F_{ij}^0 U(\vec{x}) = F_{ij}^0 (u_j(\vec{x}) - u_j^0(\vec{x})) = (F_{ij}^0 - F_{ij}(\vec{x})) u_j(\vec{x}).$$

Damit wird die Verteilung des Elastizitätstensors $\underline{C}(\vec{x})$ im inhomogenen Material eingebracht. Dies erinnert an Störungsmethoden. Die Gleichung (16) schreibt jetzt vor, wie sich die Verschiebungen im Volumen V ändern müssen, wenn man vom homogenen Material (Operator \underline{F}^0) zum inhomogenen Material (Operator $\underline{F}(\vec{x})$) bei gleichen Randbedingungen übergeht.

5.4 Die Integralgleichung für unendliches Volumen

Nach Einbringen der Dehnungs-Verschiebungsbeziehung (12) und Anwendung der Volumenmittelung, beweist Korringa die in Gl. (4) ausgedrückte Beziehung $\langle \underline{\varepsilon}(\vec{x}) \rangle = \underline{\varepsilon}^0$. Nach einem Grenzwertprozeß ($V \rightarrow \infty$) entsteht eine von der Volumenform unabhängige Tensorintegralgleichung der unbekanntten Funktion $\varepsilon_{kl}(\vec{x})$, mit

einem Hauptwertintegral um die Singularitätsstelle $\vec{x} = \vec{x}'$:

$$\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0 + \int_{V-v} T_{klij}(\vec{x}-\vec{x}') p_{ij}(\vec{x}') d^3x' - \Gamma_{klij}(p_{ij}(\vec{x}) - \langle p_{ij}(\vec{x}) \rangle) = 0 \quad (17)$$

$V \rightarrow v$
 $V \rightarrow \infty$
 $v \rightarrow 0$

$i, j, k, l = 1, 2, 3$

Gleichung von Korringa

mit $p_{ij}(\vec{x}) = (C_{ijkl}(\vec{x}) - C_{ijkl}^0) \epsilon_{kl}(\vec{x})$

v ist ein Volumen um die Stelle $\vec{x} = \vec{x}'$.

$\underline{T}(\vec{x}-\vec{x}')$ und $\underline{\Gamma}$ sind bekannte Größen, die vom frei wählbaren Tensor \underline{C}^0 abhängen:

$$T_{klij}(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{4} (\partial_l \partial_j G_{ik} + \partial_l \partial_i G_{jk} + \partial_k \partial_j G_{il} + \partial_k \partial_i G_{jl}) \quad (18)$$

$$\Gamma_{ijkl} = \oint_S \frac{1}{2} (\partial_i G_{jk}(\hat{x}, \vec{x}') + \partial_j G_{ik}(\hat{x}, \vec{x}')) n_l(\hat{x}) d^2\hat{x} \quad (19)$$

Die Greens-Funktion muß von der Form $G_{ik} \sim |\vec{x}-\vec{x}'|^{-1}$ sein.

Der effektive Elastizitätstensor ist selbstverständlich von \underline{C}^0 unabhängig. Er ergibt sich aus:

$$\underline{C}^{eff} = \underline{C}^0 + \langle \underline{g}(\vec{x}) \rangle \quad (20)$$

wobei

$$\underline{g}(\vec{x}) = (\underline{C}(\vec{x}) - \underline{C}^0) \underline{\epsilon}(\vec{x}) (\underline{\epsilon}^0)^{-1} \quad \text{ist.}$$

Der Volumenmittelwert $\langle \underline{g}(\vec{x}) \rangle$ erstreckt sich über unendliches Volumen. Er gibt an, wie die elastischen Materialeigenschaften des inhomogenen Materials von denen eines willkürlich vorgegebenen homogenen Materials abweichen.

6. Entwicklung des numerischen Verfahrens zur Lösung der Gleichung von Korringa

Nachdem in den Kapiteln 3 und 4 gezeigt wurde, daß der Begriff des effektiven Elastizitätstensors auch bei einem Magnetkomposit Anwendung finden kann, sowie eine dem Homogenitätsbegriff angepaßte Ausgangsgleichung gefunden wurde, stellt sich die Aufgabe, die Gleichung zu lösen. Dazu müssen zunächst die Eingangsfunktionen von (17) gefunden werden.

6.1 Ermittlung der Eingangsfunktionen

In der Tensorgleichung (17) sind die Tensoren $\underline{\Gamma}$ und $\underline{T}(\vec{x}-\vec{x}')$ Funktionen des Wahltensors \underline{C}^0 . Sie werden über den Greenstensor \underline{G} ermittelt, dessen Form von den gewählten Randbedingungen auf der Oberfläche des vorgegebenen Volumens abhängt.

6.1.1 Greenstensor und seine Eigenschaften

Korringa leitet seine Gleichung mit der Forderung ab, daß die Greensfunktion mindestens wie $\underline{G} \sim |\vec{x}-\vec{x}'|^{-1}$ zu Null wird. Bekanntlich sind Funktionen dieser Form nicht Fourierentwickelbar, so daß die in der statistischen Theorie effektiver Elastizitätstensoren verwendeten Fourieransätze für Greenstensoren (Ref. 17) nicht benutzt werden können.

Da der Gleichung von Korringa ein Grenzwertprozeß $V \rightarrow \infty$ zugrunde liegt, fordern wir die einfachste mögliche Abhängigkeit für die Greensfunktion:

$$\boxed{G_{jk}(\vec{x}-\vec{x}') = g_{jk} |\vec{x}-\vec{x}'|^{-1}} \quad (21)$$

g_{jk} = Konstante.

Erfüllt diese Funktion die Definition (15) von \underline{G} , gibt sie die Verschiebungen in den drei Raumrichtungen x_j ($j = 1, 2, 3$) an,

wenn am Quellpunkt \vec{x}' eine Einheitsvolumenkraft in Richtung x_k angebracht wird. Dies soll zunächst gezeigt werden:

Mit (15) und Anwendung des Gauss'schen Satzes ergibt sich:

$$\int_V F_{ij}^0 G_{jk} d^3x = C_{imnj}^0 \int_V \partial_m \partial_n G_{jk} d^3x = C_{imnj}^0 \oint_S \partial_n G_{jk} n_m d^2x$$

Einsetzen von (21) und Ausführung des Oberflächenintegrals (s. Anhang II) liefert daraus

$$-\frac{4}{3}\pi C_{imnj}^0 g_{jk} \delta_{nm} = -\delta_{ik} \int_V \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') d^3x = -\delta_{ik}$$

Damit ist gezeigt, daß G_{jk} (15) erfüllt, also Greenstensor ist, wenn die Greensfaktoren g_{jk} der folgenden Gleichung genügen:

$$C_{imnj}^0 g_{jk} \delta_{nm} = \frac{3}{4\pi} \delta_{ik} \quad (22)$$

Setzt man $B_{ij} = \sum_{n=1}^3 C_{innj}^0$, wird daraus eine Matrixgleichung zur Bestimmung der g_{jk} :

$$B_{ij} g_{jk} = \frac{3}{4\pi} \delta_{ik} \quad (23)$$

Diese Gleichung normiert die Greensfunktionen.

Wegen der Symmetrie des Elastizitätstensors (Ref. 19 und Kap. 2)

$$C_{ijjn}^0 = C_{jnij}^0 = C_{njji}^0 = C_{ijnj}^0$$

folgt, daß die Matrix B_{ij} symmetrisch ist. Wegen (23) ist daher auch die Matrix der Greensfaktoren symmetrisch:

$$g_{jk} = g_{kj} \quad (24)$$

Der Greenstensor ist damit symmetrisch.

6.1.2 Der Tensor $\underline{\Gamma}$

Mit dem gefundenen Greenstensor kann der nach (19) gegebene räumlich konstante Tensor $\underline{\Gamma}$ bestimmt werden. Er ist definiert durch

$$\Gamma_{ijkl} = \oint_S \frac{1}{2} (\partial_i G_{jk}(\hat{x}) + \partial_j G_{ik}(\hat{x})) n_l(\hat{x}) d^2 \hat{x} \quad (25)$$

das Oberflächenintegral über eine Fläche um den Punkt $\vec{x} = \vec{x}'$.

Zunächst läßt sich die räumliche Konstanz nachweisen:

Dazu wird die linke Seite von Gleichung (15) in zwei Summanden aufgespalten. Nach Umbenennung der Indizes $n \leftrightarrow j$ im zweiten Summanden, der Anwendung der Symmetrie $C_{imjn}^O = C_{imnj}^O$ und des Gauß'schen Satzes kann die Definition von $\underline{\Gamma}$ (25) benutzt werden:

$$\begin{aligned} \int_V F_{ij}^O G_{jk} d^3 x &= \int_V \frac{1}{2} (C_{imnj}^O \partial_m \partial_n G_{jk} + C_{imnj}^O \partial_m \partial_n G_{jk}) d^3 x = \\ &= \int_V \frac{1}{2} C_{imnj}^O \partial_m \partial_n G_{jk} d^3 x + \int_V \frac{1}{2} C_{imjn}^O \partial_m \partial_j G_{nk} d^3 x = \\ &= \oint_S \frac{1}{2} C_{imnj}^O \partial_n G_{jk} n_m d^2 \hat{x} + \oint_S \frac{1}{2} C_{imnj}^O \partial_j G_{nk} n_m d^2 \hat{x} = \\ &= \oint_S C_{imnj}^O \frac{1}{2} (\partial_n G_{jk} + \partial_j G_{nk}) n_m d^2 \hat{x} ; \end{aligned}$$

Man erhält als Bestimmungsgleichung für $\underline{\Gamma}$:

$$C_{imnj}^O \Gamma_{njkm} = - \delta_{ik} \quad (26)$$

D.h. $\underline{\Gamma}$ ist ein konstanter Tensor.

Bei der Herleitung von (26) und (23) wurden, ausgehend von der Normierungsgleichung des Greenstensors (15), in jeweils ähnlicher Weise Normierungskonstanten zum einen in Form eines Tensors 2. Stufe g_{jk} , zum anderen in Form eines Tensors 4. Stufe Γ_{ijkl} gefunden. Da sie beide vom Ausgangstensor $\underline{\underline{C}}^0$ abhängen, stehen sie miteinander in Zusammenhang.

Mit der Definition von $\underline{\underline{\Gamma}}$ (25) ergibt sich nach Anhang II:

$$\Gamma_{n j k m} = \frac{1}{2} \int_S \partial_n G_{j k} n_m d^2 \hat{x} + \frac{1}{2} \int_S \partial_j G_{n k} n_m d^2 \hat{x} =$$

$$= -\frac{2}{3} \pi (g_{j k} \delta_{n m} + g_{n k} \delta_{j m}); \quad (27)$$

Einsetzen von (27) in (26) liefert wieder die Beziehung (23).

6.1.3 Der Tensor $\underline{\underline{T}}$

In der Integralgleichung (17) tritt weiterhin der noch zu bestimmende ortsabhängige Tensor $\underline{\underline{T}}$ auf, der ebenfalls eine Funktion des Ausgangstensors $\underline{\underline{C}}^0$ und des Greenstensors $\underline{\underline{G}}$ ist. Nach (18) ist er definiert als

$$T_{k l i j}(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{4} (\partial_l \partial_j G_{i k} + \partial_l \partial_i G_{j k} + \partial_k \partial_j G_{i l} + \partial_k \partial_i G_{j l}) \quad (28)$$

Mit $G_{i k} = g_{i k} |\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$ wird z. B.

$$\partial_l \partial_j G_{i k} = -\delta_{l j} g_{i k} |\vec{x} - \vec{x}'|^{-3} + 3g_{i k} (x_j - x'_j) (x_l - x'_l) |\vec{x} - \vec{x}'|^{-5}$$

und die restlichen Summanden ergeben sich durch sukzessive Vertauschung:

$$T_{k l i j}(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{4} |\vec{x} - \vec{x}'|^{-3} (\delta_{l j} g_{i k} + \delta_{l i} g_{j k} + \delta_{k j} g_{i l} + \delta_{k i} g_{j l}) +$$

$$+ \frac{3}{4} |\vec{x} - \vec{x}'|^{-5} ((x_l - x'_l) (x_j - x'_j) g_{i k} + (x_l - x'_l) (x_i - x'_i) g_{i k} +$$

$$+ (x_k - x'_k) (x_j - x'_j) g_{i l} + (x_k - x'_k) (x_i - x'_i) g_{i l}); \quad (29)$$

Ferner gilt $\underline{\underline{T}} (\vec{x}-\vec{x}') = \underline{\underline{T}} (\vec{x}'-\vec{x})$.

Ausgehend von der Wahl der Greens-Funktion und der gegebenen Tensoren $\underline{\underline{C}}^0$ sowie der Materialverteilung $\underline{\underline{C}}(\vec{x})$ wurden in den vorhergehenden Abschnitten die Tensoren $\underline{\underline{g}}$, $\underline{\underline{\Gamma}}$ und $\underline{\underline{T}}$ bestimmt, so daß die Integralgleichung (17) in einer lösbaren Form vorliegt.

6.2 Reduktion der Tensorgleichung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Tensorintegralgleichung (17) aufgrund der Symmetrien der beteiligten Tensoren 4. Stufe auf eine Matrizenintegralgleichung reduziert werden kann, deren Eingabematrizen symmetrisch sind. Damit wird die Zahl der Unbekannten verringert und eine numerische Lösung der Gleichung, beispielsweise durch Inversionsprogramme für Matrizen, erleichtert.

Die Integralgleichung (17) lautet:

$$\epsilon_{kl}(\vec{x}) - \epsilon_{kl}^0 + \int_{PV} \underline{\underline{T}}_{klij}(\vec{x}-\vec{x}') p_{ij}(\vec{x}') d^3x' - \Gamma_{klij} (p_{ij}(\vec{x}) - \langle p_{ij}(\vec{x}) \rangle) = 0 ; \quad (30)$$

PV = Hauptwertintegral, wie in (17) angegeben. $i, j, k, l = 1, 2, 3$

Die p_{ij} sind Funktionen von $\epsilon_{kl}(\vec{x})$, der gesuchten Funktion in (5).

Symmetrieeigenschaften der Tensoren in (30):

Gleichung (30) kann vereinfacht werden, wenn die beteiligten Tensoren Symmetrien besitzen. Diese Symmetrieeigenschaften sollen zunächst untersucht werden:

a) Symmetrie von $\underline{\underline{\epsilon}}$, $\underline{\underline{\epsilon}}^0$, $\underline{\underline{p}}$:

Die Dehnungstensoren sind symmetrisch, $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$ und $\epsilon_{kl}^0 = \epsilon_{lk}^0$,

ebenso die Elastizitätstensoren: $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} = C_{ijlk}$ (31)

(vergleiche Ref. 19).

Daraus folgt die Symmetrie der $p_{ij} = p_{ji}$, die definiert sind durch

$$p_{ij}(\vec{x}) = (c_{ijkl}(\vec{x}) - c_{ijkl}^0) \varepsilon_{kl}(\vec{x}) \quad (32)$$

Sie hängen mit den in (20) definierten Funktionen $q_{ijkl}(\vec{x})$ zusammen:

$$p_{ij} = q_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 \quad (33)$$

Wegen der Symmetrien von p und $\underline{\varepsilon}^0$ muß gelten:

$$q_{ijkl} = q_{jikl} = q_{ijlk}$$

(Beweis in Anhang IIIa)

Von den neun Komponenten der Tensoren $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon}^0$, \underline{p} sind wegen ihrer Symmetrie nur sechs unabhängig.

Gleichung (30) enthält daher nur sechs unbekannte Funktionen ε_{kl} .

b) Symmetrie der Eingabetensoren \underline{T} , $\underline{\Gamma}$:

Für den Tensor \underline{T} gilt eine Vertauschungsrelation, die unter Verwendung der Symmetrie des Greenstensors $G_{jk} = G_{kj}$ und der Definition (28) gezeigt werden kann:

$$T_{ijkl} = T_{jikl} = T_{klij} = T_{ijkl} \quad (34)$$

Durch Einsetzen von Definition (27) bestätigt man, daß für den Tensor $\underline{\Gamma}$ gilt:

$$\Gamma_{klij} = \Gamma_{lkij} \quad (35)$$

jedoch

$$\Gamma_{klij} \neq \Gamma_{klji} \quad \text{und} \quad \Gamma_{klij} \neq \Gamma_{ijkl} .$$

Der Eingabetensor \underline{T} zeigt volle Symmetrie. Von seinen 81 Komponenten sind daher 21 unabhängig. Von den 81 Komponenten des Tensors \underline{T} sind wegen (35) 54 unabhängig.

Vereinfachung der Integralgleichung (30)

Nachdem gezeigt ist, daß die Tensoren in (30) die zuvor angegebenen Symmetrien besitzen, läßt sich das Gleichungssystem (30) vereinfachen. Dies geschieht in drei Schritten:

a) Verminderung der Zahl der Gleichungen

Gleichungssystem (30) besteht aus 9 Gleichungen der Indexkombinationen $k, l=1, 2, 3$. Wegen oben erwähnter Symmetrie der Tensoren in den Indizes k und l sind von diesen 9 Gleichungen 6 Gleichungen unabhängig. 3 Gleichungen können gestrichen werden.

Im folgenden werden daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur noch die sechs Gleichungen von (30) der Indexkombinationen

$$kl = 11, 22, 33, 23, 31, 12$$

verwendet. Den verbleibenden sechs Gleichungen entsprechen sechs Unbekannte ϵ_{kl} .

b) Verminderung der Zahl der Summanden

Dieses System läßt sich weiter vereinfachen, wenn in den auftretenden Summen Summanden zusammengefaßt werden können. Ziel ist es dabei, ein Matrizenintegralgleichungssystem aufzustellen, dessen Eingabematrizen symmetrisch sind. Dies erleichtert die spätere numerische Lösbarkeit der Integralgleichung.

Das Verfahren hierzu ist analog der Umwandlung des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes in die Voigt'sche Schreibweise (Ref. 19). Es wird in Anhang IIIb beschrieben.

In (30) treten zwei Summen auf, in denen jeweils über die Indizes i, j summiert wird:

$$1. \quad \Gamma_{klij} p_{ij} \text{ bzw. } \Gamma_{klij} \langle p_{ij} \rangle$$

Beispielsweise können von den neun Summanden der Summe $\Gamma_{klij} p_{ij}$ aus (30) wegen der Symmetrie der p_{ij} sechs Summanden zusammengefaßt werden, etwa

$$\begin{aligned} (\Gamma_{k123} p_{23} + \Gamma_{k132} p_{32}) &= (\Gamma_{k123} + \Gamma_{k132}) p_{23}, \text{ usw.} \\ &:= \Gamma_{k123}^+ \cdot p_{23} \end{aligned}$$

In dieser Weise läßt sich die ursprüngliche Summe $\Gamma_{klij} p_{ij}$, die über alle Indizes $i, j = 1, 2, 3$ läuft, in eine Summe

$$\Gamma_{klij}^+ p_{ij}$$

zusammenfassen, die nur über folgende Indexkombinationen läuft:

$$ij = 11, 22, 33, 23, 31, 12$$

Mit der Definition von $\underline{\Gamma}$ in (27) nimmt der Tensor Γ_{klij}^+ folgende Form an:

$\frac{3}{4\pi} \cdot \Gamma_{klij}^+$	11	22	33	23	31	12	ij
11	g_{11}	0	0	0	g_{13}	g_{12}	
22	0	g_{22}	0	g_{23}	0	g_{21}	
33	0	0	g_{33}	g_{32}	g_{31}	0	
23	0	$\frac{1}{2}g_{32}$	$\frac{1}{2}g_{23}$	$\frac{1}{2}(g_{22}+g_{33})$	$\frac{1}{2}g_{21}$	$\frac{1}{2}g_{31}$	
31	$\frac{1}{2}g_{31}$	0	$\frac{1}{2}g_{13}$	$\frac{1}{2}g_{12}$	$\frac{1}{2}(g_{11}+g_{33})$	$\frac{1}{2}g_{32}$	
12	$\frac{1}{2}g_{21}$	$\frac{1}{2}g_{12}$	0	$\frac{1}{2}g_{13}$	$\frac{1}{2}g_{23}$	$\frac{1}{2}(g_{11}+g_{22})$	
kl							

Trotz der Symmetrie der g_{ij} ist diese Matrix Γ^+ nicht symmetrisch. Sie wird es allerdings, wenn man für alle Summanden mit $i \neq j$ setzt:

$$\Gamma_{kl,ij}^+ p_{ij} = \left(\frac{1}{2} \Gamma_{kl,ij}^+\right) (2 p_{ij}) := \Gamma'_{kl,ij} p'_{ij}$$

Damit entsteht aus der ursprünglichen Summe $\Gamma_{kl,ij} p_{ij}$ in (30) ein Matrizenprodukt zwischen der symmetrischen (6x6)-Matrix Γ' und einer (6x1)-Matrix p' , wobei Γ' gegeben ist durch:

$\frac{3}{4\pi}\Gamma'$	11	22	33	23	31	12	ij
11	g_{11}	0	0	0	$\frac{1}{2}g_{31}$	$\frac{1}{2}g_{12}$	
22	0	g_{22}	0	$\frac{1}{2}g_{23}$	0	$\frac{1}{2}g_{12}$	
33	0	0	g_{33}	$\frac{1}{2}g_{23}$	$\frac{1}{2}g_{31}$	0	(36)
23	0	$\frac{1}{2}g_{23}$	$\frac{1}{2}g_{23}$	$\frac{1}{4}(g_{22}+g_{33})$	$\frac{1}{4}g_{12}$	$\frac{1}{4}g_{31}$	
31	$\frac{1}{2}g_{31}$	0	$\frac{1}{2}g_{31}$	$\frac{1}{4}g_{12}$	$\frac{1}{4}(g_{11}+g_{33})$	$\frac{1}{4}g_{23}$	
12	$\frac{1}{2}g_{12}$	$\frac{1}{2}g_{12}$	0	$\frac{1}{4}g_{31}$	$\frac{1}{4}g_{23}$	$\frac{1}{4}(g_{11}+g_{22})$	
kl							

2. $\boxed{T_{kl,ij} p_{ij}}$

Das eben beschriebene Verfahren läßt sich auch auf die Summe $T_{kl,ij} p_{ij}$ in (30) anwenden. Dies führt zu einem $\underline{T}' p'$ entsprechenden Matrizenprodukt $\underline{T}' p'$ mit

$$\underline{T}' = (T_{kl,ij}), \text{ wobei } kl,ij = 11,22,33,23,31,12 \text{ ist} \quad (37)$$

\underline{T}' ist ebenfalls eine symmetrische (6 x 6) Matrix.

Man beachte nochmals, daß p' von p durch den Faktor 2 in den letzten drei Komponenten unterschieden ist.

c) Neuindizierung

Führt man jetzt für das so reduzierte und zusammengefaßte Gleichungssystem (30) eine Neuindizierung, mit

kl bzw. ij:	11	22	33	23	31	12
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
s bzw. t:	1	2	3	4	5	6

durch, entsteht eine Matrizenintegralgleichung mit symmetrischen Eingabematrizen \underline{T}' und $\underline{\Gamma}'$:

$$\epsilon_s(\vec{x}) - \epsilon_s^0 + \int_{PV} T'_{st}(\vec{x} - \vec{x}') p'_t(\vec{x}') d^3x' - \Gamma'_{st}(p'_t(\vec{x}) - \langle p'_t(\vec{x}) \rangle) = 0 \quad (38)$$

PV: Hauptwertintegral, wie in (17).

Das Verfahren zur Vereinfachung der Gleichung von Korringa (17) besteht aus der Untersuchung der Symmetrieeigenschaften ihrer Tensoren, der daraus resultierenden Möglichkeit zur Verminderung der Zahl der Gleichungen und Summanden, sowie einer Neuindizierung der verbleibenden Komponenten. Es muß im folgenden noch auf den Zusammenhang zwischen den unbekannt Funktionen $\underline{\epsilon}(\vec{x})$ und \underline{p} bzw. dem gesuchten Tensor \underline{C}^{ijkl} angewandt werden.

Beziehung zwischen $\underline{\epsilon}(\vec{x})$ und $\underline{p}(\vec{x})$:

Um die Gleichung lösbar zu machen, muß noch der Zusammenhang zwischen den unbekannt Funktionen $\epsilon_s(\vec{x})$ und $p'_s(\vec{x})$ einbezogen werden. Dazu wird auf Gleichung (32)

$$p_{ij} = (C_{ijkl} - C_{ijkl}^0) \epsilon_{kl} := D_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

das zuvor beschriebene Verfahren zur Umwandlung in eine Matrizen-gleichung (s. auch Anhang IIIb) angewandt.

Es entsteht die Beziehung

$$p'_t = D'_{ts} \epsilon_s \quad s, t = 1, 6 \quad (39)$$

wobei \underline{D}' eine symmetrische Matrix ist und $D_{ijkl} = C_{ijkl} - C_{ijkl}^0$:

\underline{D}'	11	22	33	23	31	12	kl (s)
11	D_{1111}	$2 \cdot D_{1123}$	2...	2...	(40)
22	2.....	2...	2...	
33	2.....	2...	2...	
23	$2 \cdot D_{2311}$	2...	2...	$4 \cdot D_{2323}$	4...	4...	
31	$2 \cdot \dots$	2...	2...	$4 \cdot \dots$	4...	4...	
12	$2 \cdot \dots$	2...	2...	$4 \cdot \dots$	4...	4...	
ij							
(t)							

Eine (6 x 6) Matrix ohne die Faktoren 2 bzw. 4 wird im folgenden ohne einen Strich rechts oben gekennzeichnet. Sie gewinnt man aus der gestrichenen Matrix (etwa \underline{D} aus \underline{D}') durch Einbeziehen der entsprechenden Kehrfaktoren k_{st} ($\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{4}$).

Mit (39) erhält man den Zusammenhang zwischen ϵ_s und p'_t :

$$\epsilon_s = (D')_{st}^{-1} p'_t \quad (41)$$

In gleicher Weise gewinnt man aus (33) die Beziehung

$$p'_t = q'_{tm} \epsilon_m^0 \quad t, m = 1, \dots, 6 \quad (42)$$

wobei \underline{q}' dieselbe Form wie \underline{D}' in (40) hat.

Einsetzen von (40) und (41) in (37) liefert als Endgleichung

$$(D^{-1})_{st} q'_{tm} \epsilon_m^0 + \int_{PV} T'_{st} q'_{tm} \epsilon_m^0 d^3 x' - \Gamma'_{st} (q'_{tm} \epsilon_m^0 - \langle q'_{tm} \epsilon_m^0 \rangle) = \epsilon_s^0$$

Durch die so eingeführte unbekannte Funktion \underline{q}' gelingt es, eine Integralgleichung aufzustellen, die von der Vorgabe der Randbedingung $\underline{\varepsilon}^0$ unabhängig ist:

$$\left((D^{-1})_{st}(\vec{x}) - \Gamma'_{st} \right) q'_{tm}(\vec{x}) + \int_{PV} T'_{st}(\vec{x} - \vec{x}') q'_{tm}(\vec{x}') d^3x' + \Gamma'_{st} \langle q'_{tm}(\vec{x}) \rangle = \delta_{sm} \quad (43)$$

Dabei ist $(D^{-1})_{st} = (C_{st}(\vec{x}) - C_{st}^0)^{-1}$

und T'_{st} durch (37) bzw. (29) und Γ'_{st} durch (36) gegeben. Es sind symmetrische Eingabematrizen, während die gesuchte Funktion \underline{q}' unsymmetrisch sein kann.

Beziehung zwischen $\underline{\varepsilon}(\vec{x})$ bzw. $\underline{q}(\vec{x})$ und \underline{C}^{eff} :

Nach Umwandlung von Gleichung (17) in eine Matrizenintegralgleichung (43) muß zur Bestimmung des effektiven Elastizitätstensors Gleichung (20) in eine Matrixgleichung umgewandelt werden:

Mit (32) und (33) gilt: $(C_{ijkl} - C_{ijkl}^0) \varepsilon_{kl} = q_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0$

nach Definition (5) ist ferner: $\langle C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \rangle = C_{ijkl}^{eff} \langle \varepsilon_{kl} \rangle$

Wegen der Symmetrien von ε_{kl} und C_{ijkl} lassen sich beide Gleichungssysteme, wie beim Verfahren für \underline{T} , reduzieren:

$$(C_{st} - C_{st}^0) \varepsilon'_t = q_{st} \varepsilon_t^0 \quad (44)$$

$$\langle C_{st} \varepsilon'_t \rangle = C_{st}^{eff} \langle \varepsilon'_t \rangle \quad s, t = 1, \dots, 6 \quad (45)$$

Analog zu \underline{p}' ist

$$\varepsilon'_t = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}) \quad (\text{Voigt'sche Schreibweise})$$

zu \underline{T}' ist

$$C_{st} = (C_{ij,kl})$$

Mittelwertbildung von (44) und Einsetzen von (45) liefert mit $\langle \underline{\varepsilon}'_t \rangle = \underline{\varepsilon}^0_t$

$$C_{st}^{eff} = C_{st}^0 + \langle q_{st} \rangle$$

und $q_{st} = (q_{ij,kl})$

oder mit der Beziehung zwischen \underline{q}' und q über die Faktoren k_{st} aus (40):

$$\underline{C}^{eff} = \underline{C}^0 + k_{st} \langle \underline{q}' \rangle \quad (46)$$

Der effektive Elastizitätstensor, den man mit Gleichung (43) gewinnt, ist ein Voigt'scher Elastizitätstensor (Anhang IIIb) mit

$$\sigma_s = C_{st}^{eff} \varepsilon'_t$$

Wegen der Symmetrie von \underline{C}^{eff} und \underline{C}^0 muß auch der Volumenmittelwert $\langle \underline{q}' \rangle$ symmetrisch sein.

6.3 Diskretisierung

Zur Lösung der Integralgleichung (43) wird ein klassisches Diskretisierungsverfahren benutzt. Es führt zu einer einfachen Rechenzeit ersparenden Methode zur Bestimmung des effektiven Elastizitätstensors. Auf denkbare andere Verfahren, wie sukzessive Approximation, FEM-Lösung etc., wird hier nicht eingegangen.

Es sei ein endliches Volumen V vorgegeben, in dem an jedem Punkt \vec{x} ein Elastizitätstensor $\underline{C}(\vec{x})$ gegeben ist. V soll dem in der Homogenitätsbedingung (Kap.4) gegebenen Teilvolumen ΔV entsprechen.

Es wird in eine Auswahl von N Teilvolumina ΔV_i unterteilt. Die unbekannte Funktion $\underline{q}'(\vec{x})$ wird jeweils für die Schwerpunkte \vec{x}_i ($i = 1, \dots, N$) der Teilvolumen berechnet.

Das Hauptwertintegral in (43) mit der Singularitätsstelle $\vec{x} = \vec{x}'$ wird durch ein Integral über das endliche Volumen V unter Ausschluß des jeweiligen Teilvolumens ΔV_i ersetzt. Umformung dieses Integrals sowie des Volumenmittelwerts $\langle \underline{q}' \rangle$ in Summenschreibweise liefert aus (43):

$$\begin{aligned} ((D')_{st}^{-1}(\vec{x}_i) - \Gamma'_{st}) q'_{tm}(\vec{x}_i) + \sum_{j \neq i}^N T'_{st}(\vec{x}_i - \vec{x}_j) q'_{tm}(\vec{x}_j) \Delta V_j + \\ + \Gamma'_{st} \frac{1}{V} (\sum_{i=1}^N q'_{tm}(\vec{x}_i) \Delta V_i) = \delta_{sm} \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt an jeder Stützstelle \vec{x}_i .

Mit $w_{tm}(\vec{x}_i) := \frac{\Delta V_i}{V} q'_{tm}(\vec{x}_i)$ folgt

$$\left(\frac{V}{\Delta V_i} (D'_{st})^{-1}(\vec{x}_i) - \left(\frac{V}{\Delta V_i} - 1\right) \Gamma'_{st}\right) w_{tm}(\vec{x}_i) + \sum_{j \neq i}^N (V T'_{st}(\vec{x}_i - \vec{x}_j) + \Gamma'_{st}) w_{tm}(\vec{x}_j) = \delta_{sm} \quad (47)$$

Damit ist $\underline{w}_i := \underline{w}(\vec{x}_i)$ die gesuchte Funktion.

In Matrixschreibweise entsteht aus (47) ein lineares Matrixgleichungssystem der N unbekanntem (6×6) Matrizen \underline{w}_i und der bekannten (6×6) Matrizen \underline{a}_{ij}

$$\sum_{j=1}^N \underline{a}_{ij} \underline{w}_j = \underline{1} \quad ; \quad i=1, \dots, N$$

mit

$$\underline{a}_{ij} = \begin{cases} \frac{V}{\Delta V_i} ((D')^{-1}(\vec{x}_i) - (\frac{V}{\Delta V_i} - 1) \underline{\Gamma}') & \text{für } i=j \\ V \underline{T}'(\vec{x}_i - \vec{x}_j) + \underline{\Gamma}' & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (48)$$

Zur Aufstellung des Systems muß für $i = j$ das Inverse von \underline{D}' gebildet werden. Da \underline{D}' aus $\underline{C}(\vec{x}) - \underline{C}^0$ entsteht (40), muß \underline{C}^0 so gewählt sein, daß an jeder Stelle $\underline{C}(\vec{x}) \neq \underline{C}^0$ ist.

Das Matrixgleichungssystem läßt sich in Form einer Übermatrixgleichung zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \dots & \underline{a}_{1N} \\ \cdot & & \cdot \\ \underline{a}_{N1} & \dots & \underline{a}_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{w}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{w}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{1} \end{pmatrix} \quad (49)$$

$$\underline{A} \cdot \underline{W} = \underline{1}'$$

\underline{A} hat die Dimension $(6N \times 6N)$ und \underline{W} sowie $\underline{1}'$ die Dimension $(6N \times 6)$. Die Untermatrizen über der Diagonale von \underline{A} enthalten mit $\underline{C}(\vec{x})$ die Information über die Materialverteilung, während die übrigen Matrizen Funktionen der Ausgangsmatrix \underline{C}^0 sind (vergl. (48)).

Gleichung (49) kann als ein normales lineares Gleichungssystem aufgefaßt werden. Die Lösung ist genau dann durch Inversion von \underline{A} möglich, wenn die Matrix \underline{A} nicht singulär ist. (Anmerkung S. 98)

Die gesuchte Matrix \underline{W} ergibt sich dann aus:

$$\underline{W} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{1}', \quad \text{wobei } \underline{A}^{-1} =: (\underline{b}_{ij}).$$

\underline{b}_{ij} sind die den \underline{a}_{ij} entsprechenden (6×6) Untermatrizen der Inversen \underline{A}^{-1} . Mit ihnen ergibt sich

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{w}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{b}_{11} + \underline{b}_{12} + \dots + \underline{b}_{1N} \\ \underline{b}_{21} + \underline{b}_{22} + \dots + \underline{b}_{2N} \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{b}_{N1} + \underline{b}_{N2} + \dots + \underline{b}_{NN} \end{pmatrix} \quad (50a)$$

Ferner wird nach (46) zur Bestimmung von $\underline{C}^{\text{eff}}$ der Volumenmittelwert $\langle \underline{g}' \rangle$ benötigt. In Summenschreibweise ermittelt er sich mit (50a) aus

$$\langle \underline{g}' \rangle = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \underline{g}'(\vec{x}_i) \Delta V_i = \sum_{i=1}^N \underline{w}_i = \sum_{i,j=1}^N \underline{b}_{ij} \quad (50b)$$

Damit ergibt sich die Summe aus allen (6 x 6)-Untermatrizen der inversen Matrix \underline{A}^{-1} . Diese Berechnung wird vereinfacht, wenn man die Symmetrie der Matrix \underline{A} verwendet:

Wegen $\underline{T}'(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \underline{T}'(\vec{x}_j, \vec{x}_i)$ muß in (48) gelten:

$$\underline{a}_{ij} = \underline{a}_{ji}$$

Ferner ist jede Matrix \underline{a}_{ij} selbst eine symmetrische Matrix. Beide Eigenschaften zusammen führen dazu, daß die Übermatrix \underline{A} spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonale wird. \underline{A}^{-1} ist daher ebenfalls eine symmetrische Matrix.

Damit wird zur Bestimmung des effektiven Elastizitätstensors im wesentlichen die Aufstellung der Matrix \underline{A} , deren Inversion sowie die Aufsummation der Untermatrizen benötigt.

6.4 Zusammenfassung und Programmaufbau

Der beschriebene Lösungsformalismus wurde mit dem Ziel aufgebaut, eine einfache Methode zur Bestimmung des effektiven Elastizitätstensors eines Magnetkomposits zu finden, die mit möglichst geringen Rechenaufwand Näherungswerte liefert und insbesondere FEM-Rechnungen vermeidet. Ausgehend von der einfachst möglichen Greensfunktion (21) werden die Eingangsfunktionen $\underline{\Gamma}$ und \underline{T} gefunden. Es sind Funktionen der Greensfaktoren \underline{g} , die mit Gleichung (23) aus \underline{C}^0 bestimmt werden können. Nach Untersuchung der Symmetrieeigenschaften dieser Tensoren kann die Integralgleichung von Korringa mit dem Ziel einer Matrizenintegralgleichung mit

symmetrischen Eingabematrizen vereinfacht werden. Dabei wird zum einen die Zahl der Gleichungen von 9 auf 6 vermindert, zum andern die Zahl der Summanden in den Tensorprodukten verringert und die verbleibenden Tensorelemente neu indiziert. Durch Einbeziehen der gesuchten Dehnungen $\underline{\underline{\epsilon}}(\vec{x})$ und der Funktion $\underline{p}(\vec{x})$ in dieses Verfahren entsteht eine von den Randbedingungen $\underline{\underline{\epsilon}}^0$ unabhängige Integralgleichung (43) mit symmetrischen Eingangsmatrizen. Desgleichen wird die Beziehung zwischen dem Schätztensor $\underline{\underline{c}}^0$, der Lösung \underline{g} der Integralgleichung und den gesuchten $\underline{\underline{c}}^{\text{eff}}$ -Werten entsprechend verändert. Die Integralgleichung wird numerisch nach der Umwandlung in eine Summengleichung gelöst. Hierzu genügt es eine Übermatrix \underline{A} aus den (6x6)-Matrizen \underline{a}_{ij} (48) aufzustellen, zu invertieren und nach (6x6)-Matrizen aufzusummieren.

Auf diesem theoretischen Hintergrund baut das entwickelte Programm auf:

Nach Eingabe der Stützstellenkoordinaten und Elementvolumina mit den jeweiligen Materialtensoren in Voigt'scher Darstellung werden die Reuss- und Voigt-Tensoren als Vergleichsgrößen berechnet. Sie können wahlweise als Ausgangstensor $\underline{\underline{c}}^0$ benutzt werden.

Aus ihm ermitteln sich über Gleichung (23) die Greensfaktoren \underline{g} , mit denen über die Matrix (36) $\underline{\Gamma}'$ gebildet wird. Der Aufbau der Übermatrix \underline{A} geschieht mit den Matrizen (48). Dazu werden \underline{D}'_i und \underline{T}'_{ij} nach (40) und (29) berechnet.

Wegen der Symmetrie von \underline{A} genügt die Darstellung in der Form einer Dreiecksmatrix, was Speicherplatz spart.

Zur Inversion der Übermatrix benötigt man ein Programm, das auch symmetrisch indefinite Matrizen verarbeiten kann. Dazu bietet sich das in vielen Programmbibliotheken implementierte Verfahren von Bunch und Parlett (Ref. 22) an.

Als Speicherplatz wird der Platz für zwei Dreiecksmatrizen benötigt. Dies entspricht bei N Stützstellen $(6N)^2 + 6N$ Wörter. Bei Rechnung mit doppelter Genauigkeit (Wortlänge 8 Bytes) ist im anschließend beschriebenen Beispiel mit $N = 24$ ein Speicherplatz von ca. 160 kBytes erforderlich.

Nach Inversion von \underline{A} ist beim Aufsummieren darauf zu achten, daß die Untermatrizen \underline{b}_{ij} selbst nicht mehr symmetrisch sind und daher zu ihren spiegelbildlichen Matrizen addiert werden müssen.

Danach ergibt sich mit (46) und dem Wahltensor \underline{C}^0 der effektive Elastizitätstensor.

Daneben werden Euklidische Norm, Energiedichte der auftretenden Matrizen, die Steifigkeitsmatrix $(\underline{C}^{eff})^{-1}$ und die technischen Konstanten nach Definition in Ref. 14 aus \underline{C}^{eff} gewonnen.

7. Anwendung des numerischen Verfahrens

7.1 Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse

Nach der Entwicklung des Programms stellt sich die Frage nach der Genauigkeit der Rechnung und ob die Ergebnisse die physikalischen Verhältnisse sinnvoll beschreiben.

Dazu gibt es folgende Kriterien:

- a) Die Symmetrie des gewonnenen effektiven Elastizitätstensors muß erfüllt sein.

Diese Eigenschaft ergibt sich in der Mechanik aus der Existenz eines elastischen Potentials (Ref. 19). In dem in 6.4 geschriebenen Verfahren dagegen wird $\underline{C}^{\text{eff}}$ symmetrisch, weil die Untermatrizen \underline{b}_{ij} von \underline{A}^{-1} (50) spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonale von \underline{A}^{-1} sind. Dadurch entsteht beim Aufsummieren prinzipiell eine symmetrische Matrix. Tritt als Ergebnis eine unsymmetrische Matrix auf, weist dies auf einen Programmierfehler hin.

- b) Die Hill'sche Regel (8) muß erfüllt sein.

Wird diese Bedingung vom berechneten effektiven Elastizitätstensor verletzt, ist seine Angabe physikalisch sinnlos, da Reuss- und Voigttensor bessere Näherungswerte für den tatsächlichen Tensor angeben.

- c) Die Form des effektiven Elastizitätstensors muß den Symmetrieverhältnissen im Komposit entsprechen (Ref.14).

Die bei Magneten auftretenden Komposite besitzen meist drei zueinander senkrechte Symmetrieebenen. Ein solches Material heißt orthotrop. Es besitzt einen Elastizitätstensor mit neun unabhängigen Materialparametern.

Für solche Materialien gelten die folgenden Spannungs-Dehnungsbeziehungen (Voigt'sche Schreibweise nach Anhang IIB):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \\ \sigma_3 &= C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3 \\ \sigma_4 &= 2C_{44}\varepsilon_4 \\ \sigma_5 &= 2C_{55}\varepsilon_5 \\ \sigma_6 &= 2C_{66}\varepsilon_6\end{aligned}\tag{51}$$

Sind zwei der drei Symmetrieebenen einander gleichwertig, genügen zur vollständigen Beschreibung des Materials fünf unabhängige Konstanten. Das Material heißt dann transversal isotrop. Liegen etwa in x_2 - und x_3 -Richtung die gleichen mechanischen Verhältnisse vor, werden in (51)

$$C_{22} = C_{33} ; \quad C_{55} = C_{66} \quad \text{und} \quad C_{12} = C_{13}$$

Desweiteren muß gelten: $C_{44} = \frac{1}{2} (C_{22} - C_{23})$ (52)

d) Die berechneten Werte mit Meßergebnissen vergleichen.

Diese Möglichkeit wird erschwert, da keine zuverlässigen Meßmethoden für Magnetkomposite von Großmagneten vorliegen. Akustische Messungen, die den vollständigen Elastizitätstensor liefern, gibt es nur für Kleinmagnete (Ref. 18). Wegen des statistischen Windungsaufbaus sind sie aber der Rechnung mit der hier entwickelten Methode nur bedingt zugänglich. Für große Magnete ist wegen der dazu notwendigen Frequenzen und der Streuung des Signals diese Messung nicht anwendbar.

Die alternative Möglichkeit, die Materialparameter durch Druckmessungen zu ermitteln (Ref. 4), scheitert im wesentlichen an zwei Schwierigkeiten:

Die außen angelegte Spannungsverteilung muß homogen sein. Da diese Bedingung bei vielen Apparaturen nur ungenügend erreicht wird, weisen schon die Messungen homogener Materialien Abweichungen von denen mit Zugversuchen bis zu 40% auf.

Ferner müssen zur Ermittlung der Materialparameter eines Komposits auch Scherkomponenten an der Oberfläche des Materials gemessen werden (siehe z.B. Gleichung (52)). Dies ist wegen deren inhomogener Verteilung praktisch nicht durchführbar.

Aus diesen Gründen konnten die Ergebnisse dieser Arbeit nicht durch Messungen kontrolliert werden.

Künftigen Messungen der Oberflächenverschiebungen an Großmagneten, die sich im Betrieb befinden, bleibt es daher vorbehalten durch Vergleich mit Spannungs-Dehnungsberechnungen die Materialparameter des Magneten indirekt zu bestätigen.

e) Die berechneten Werte mit exakten analytischen Lösungen vergleichen.

Dies liefert Aussagen darüber, ob die entwickelte Methode hinreichend genau ist. Leider liegen nur wenige Komposite vor, für die exakte effektive Materialparameter analytisch berechnet werden können (Ref. 7).

7.2 Berechnung des effektiven Elastizitätstensors eines Testkomposits

Mit den in 7.1 entwickelten Kriterien soll im folgenden das Verfahren überprüft werden. Dazu wird der effektive Elastizitätstensor eines einfach aufgebauten Komposits berechnet und mit vorliegenden exakten Lösungen (Ref. 7 bzw. 10) verglichen.

Dieses Testkomposits besteht aus einer Kupfer/Stahl Schichtung mit 20,4 % Stahl-Anteil (V2A). Fügt man in dieses Laminat in der in Abb. 6 beschriebenen Weise Hohlräume in die Stahlschicht ein, wird der typische Aufbau vieler Magnete, insbesondere das Magnetkomposit des TESPE-Magneten (Ref. 24) (vgl. auch Abb. 17) simuliert. Der Kupferanteil entspricht volumenmäßig dem Leiter,

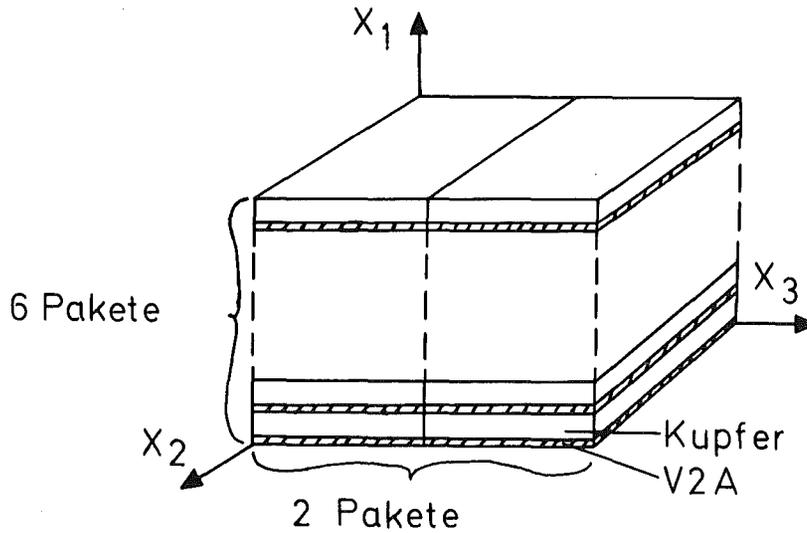


Abb. 6: Probevolumen ΔV eines Testkomposits zur Überprüfung der Berechnung des effektiven Elastizitätstensors.

der Stahlanteil der Isolation der einzelnen Lagen des Magneten.

Die Größe des Volumens ΔV , an dem die Rechnung durchgeführt wurde, erfüllt die Homogenitätsbedingung (1).

Unter Annahme isotroper Einzelmaterialien wurde mit folgenden Eingangsdaten für den E-Modul E und Poissonzahl ν gerechnet:

Kupfer:	$E = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$	$\nu = 0,3$
V2A :	$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$	$\nu = 0,3$

Mit der Definition der Lamé-Konstanten (Ref. 19)

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ergibt sich für die Form der Eingabeelastizitätstensoren (6x6-Matrix) für Kupfer und V2A:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu) & \chi & \chi & & & \\ \chi & (\lambda+2\mu) & \chi & & & \\ \chi & \chi & (\lambda+2\mu) & & & \\ & & & \chi & & \\ & & & & \chi & \\ & & & & & \chi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ 2\epsilon_4 \\ 2\epsilon_5 \\ 2\epsilon_6 \end{pmatrix} \quad (53)$$

Das zur Rechnung verwendete Materialpaket besteht aus 24 Materialblöcken. Die Stützstellen wurden in die Schwerpunkte dieser Blöcke gelegt und das Elementvolumen ΔV_i mit dem Volumen des zugehörigen Blocks gleichgesetzt.

7.3 Ergebnis der Rechnung und Vergleich mit der exakten Lösung

Zunächst sollen hier die Ergebnisse für das in 7.2 beschriebene Komposit mit einem Volumenanteil von 20.4% V2A vorgestellt und anhand der Kriterien aus 7.1 überprüft werden.

Das Programm liefert als effektiven Elastizitätstensor \underline{C}^{eff} in Voigt'scher Darstellung (Anhang IIIb):

$$\begin{matrix}
 1.742 & 0.755 & 0.755 & 0 & 0 & 0 \\
 0.755 & 1.810 & 0.757 & 0 & 0 & 0 \\
 0.755 & 0.757 & 1.810 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0.527 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0.476 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.475
 \end{matrix} \quad (10^{11} \text{ N/m}^2) \quad (54)$$

Diese Ergebnisse sind gerundet.

Ergänzend hierzu seien die daraus gewonnenen technischen Konstanten (Ref. 14) angegeben. Um eine einfache Schreibweise zu ermöglichen, wird das Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) mit (x, y, z) bezeichnet:

E-Modul:

$$E_x = 1.297 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 ; E_y = 1.358 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 ; E_z = 1.359 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Schubmodul:

$$G_{yz} = 0.527 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 ; G_{xz} = 0.476 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 ; G_{xy} = 0.475 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Poissonzahl:

$$\begin{array}{ll} \nu_{yx} = 0.295 & \nu_{xy} = 0.309 \\ \nu_{zy} = 0.290 & \nu_{yz} = 0.289 \\ \nu_{xz} = 0.309 & \nu_{zx} = 0.295 \end{array}$$

Die Poissonzahl ν_{yx} z.B. gibt die Querkontraktion in $x(x_1)$ -Richtung bei vorgegebener Dehnung in $y(x_2)$ -Richtung an. Überprüft man diese Ergebnisse (54) nach den Kriterien aus 7.1 findet man:

a) $\underline{C}^{\text{eff}}$ erfüllt die Symmetrieforderung.

Matrizen, die symmetrisch sind, werden von jetzt an durch alleinige Angabe einer Dreiecksmatrix dargestellt.

b) Zur Überprüfung der Hill'schen Regel erweist sich hier und im folgenden ihre Darstellung durch die Euklidische Norm äquivalent zur Formulierung über die Energiedichte (8):

$$||\underline{C}^V|| \geq ||\underline{C}^{\text{eff}}|| \geq ||\underline{C}^R|| \quad (55)$$

Der angegebene Tensor $\underline{C}^{\text{eff}}$ erfüllt mit $||\underline{C}^{\text{eff}}|| = 3.710 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ diese Ungleichung, da für dieses Komposit

$$||\underline{C}^V|| = 3.875 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \text{ und } ||\underline{C}^R|| = 3.680 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \text{ ist.}$$

- c) Das Testkomposit (Abb. 6) besitzt in x_2 - und x_3 -Richtung gleiche mechanische Verhältnisse (Hohlräume werden vernachlässigt). Dieses transversal isotrope Material besitzt fünf unabhängige Materialparameter. Dies bestätigt sich in (54):

$$C_{11}=C_{22} \quad \text{und} \quad C_{55}=C_{66} \quad , \quad \text{sowie} \quad C_{12}=C_{13}$$

Des weiteren ist

$$\frac{1}{2} (C_{22}-C_{23}) = 0.52734 \cdot 10^{11} \text{N/m}^2 \quad : = C_{44}$$

mit einer Abweichung von $2.7 \cdot 10^7 \text{N/m}^2$.

Der gewonnene Tensor (54) beschreibt ein transversal isotropes Material.

- d) Messungen wurden aus den in 7.1 erwähnten Gründen nicht durchgeführt.
- e) Für dieses Komposit liegt eine exakte analytische Lösung (Ref.7) vor, die folgende Werte liefert:

$$\begin{array}{ccccccc} 1.765 & 0.756 & 0.756 & 0 & 0 & 0 & \\ & 1.841 & 0.779 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 1.841 & 0 & 0 & 0 & (10^{11} \text{N/m}^2) \quad (56) \\ & & & 0.531 & 0 & 0 & \\ & & & & 0.504 & 0 & \\ & & & & & & 0.504 \end{array}$$

Sie wird im folgenden als theoretische Lösung $C_{\text{theo}}^{\text{eff}}$ bezeichnet. Zwischen ihr und der berechneten Lösung C^{eff} findet man die Differenz:

0.023	0.00042	0.00043	0	0	0
1.2 %	0.05 %	0.05 %			
	0.031	0.022	0	0	0
	1.7 %	2.8 %			
		0.03	0	0	0 (10 ¹¹ N/m ²)
		1.6 %			
			0.0044	0	0
			0.82 %		
				0.029	0
				5.6 %	
					0.029
					5.7 %

Es zeigt sich teilweise eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit dem theoretischen Tensor. Nur die Schubmoduli C_{55} , C_{66} weisen größere Abweichungen auf.

Es soll noch zu e) ergänzt werden, daß dieser theoretische Tensor die Hill'sche Regel mit $||\underline{C}_{\text{theo}}^{\text{eff}}|| = 3.73 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ erwartungsgemäß erfüllt.

- f) Zusätzlich zu den vorgenannten Eigenschaften ist vom Tensor (54) speziell für dieses Komposit zu fordern, daß seine Elemente den im folgenden beschriebenen Relationen gehorchen:

Das Komposit in Abb. 6 besteht in x_1 -Richtung aus einer Reihenschaltung von Kupfer/V2A-Schichten, während in x_2 - und x_3 -Richtung eine Parallelschaltung vorliegt. Es ist anschaulich klar (wie in Abb. 2a und 2b), daß daher in x_1 -Richtung das Material eine geringere Steifigkeit als in x_2 - bzw. x_3 -Richtung aufweisen muß. Da C_{11}^{eff} , C_{22}^{eff} und C_{33}^{eff} ein Maß für die E-Moduli in den drei Raumrichtungen sind, gilt daher die Ungleichung:

$$C_{11}^{\text{eff}} \leq C_{22}^{\text{eff}}, C_{33}^{\text{eff}} \text{ und } C_{22}^{\text{eff}} = C_{33}^{\text{eff}}.$$

Diese Bedingung erfüllt auch der berechnete Tensor (54).

Eine ähnliche Beziehung gilt für die Schubmoduli. Z. B. gibt C_{55}^{eff} an, welche Scherspannung $\sigma_5 = C_{55}^{\text{eff}} 2 \varepsilon_5$ notwendig ist, um eine Winkeländerung $\varepsilon_5 = \varepsilon_{31}$ (in der Doppelindizierung aus Kap. 6.2) der Achsen x_1 und x_3 zueinander in der Ebene (x_1, x_3) zu erzeugen.

Entsprechend gibt C_{66}^{eff} an, welche Scherspannung $\sigma_6 = C_{66}^{\text{eff}} 2 \varepsilon_{12}$ für eine Winkeländerung in der (x_1, x_2) -Ebene notwendig ist.

Da in dem vorgegebenen Komposit in diesen Ebenen dieselben mechanischen Verhältnisse vorliegen, muß, wie in c) schon erwähnt, $C_{55}^{\text{eff}} = C_{66}^{\text{eff}}$ sein.

Bringt man eine Scherung $\varepsilon_4 = \varepsilon_{23}$ an, wird eine Winkeländerung der Achsen x_2 und x_3 zueinander bewirkt. Dies bedeutet eine Winkeländerung der Ebenen (x_1, x_2) und (x_1, x_3) zueinander. Damit erfährt jede Lage des Komposits (s. Abb. 6) dieselben Winkeländerung (Scherungen). Es liegt dann der Fall konstanter Dehnung vor, und man kann analog zu einem Zugversuch von einer "Parallelschaltung" der Materialschichten (vgl. Abb. 2a) sprechen. Die Gesamtkraft, die etwa in x_2 -Richtung zur Scherung notwendig ist, summiert sich aus den Einzelkräften auf, die zur gleichen Scherung der verschiedenen Materiallagen notwendig sind.

Legt man diese Gesamtkraft etwa in der (x_1, x_2) -Ebene in x_2 -Richtung an, erfährt jede Materiallage dieselbe Scherkraft. Analog zum Zugversuch (Abb. 2b) kann man von einer "Reihenschaltung" der Materialschichten sprechen.

Die Gesamtscherung ε_{12} summiert sich aus den Einzelscherungen der verschiedenen Materiallagen auf. Das Komposit erweist sich daher "weicher" hinsichtlich einer Scherung in dieser Ebene als in der (x_2, x_3) -Ebene. Die für beide Fälle maßgebenden Schubmoduli müssen damit der Ungleichung gehorchen:

$$C_{44}^{\text{eff}} \geq C_{55}^{\text{eff}}, C_{66}^{\text{eff}}$$

Auch diese Beziehung erfüllt der berechnete Tensor (54).

Der für 20,4 % V2A (TESPE-Volumenverhältnis) gewonnene effektive Elastizitätstensor erfüllt die in Kap. 7.1 aufgestellten Kriterien für die Richtigkeit der Ergebnisse. Die ermittelten Genauigkeiten der Methode werden sich aber ändern, wenn das Kupfer/

Stahl-Verhältnis und damit die Schichtdicke der verschiedenen Materiallagen verändert wird.

Abb. 7 zeigt die euklidischen Normen der Reuss- und Voigt-Matrizen und der theoretischen effektiven Elastizitätsmatrix (Ref. 8) in Abhängigkeit vom Anteil an Stahl. Die ausgefüllten Punkte zeigen die mit der entwickelten Methode gewonnenen Werte. Insgesamt nähert das Verfahren den theoretischen Verlauf sehr gut an. Eine Aussage über die Genauigkeit der berechneten Tensorelemente kann damit aber nicht gewonnen werden.

Sie soll anhand der Abhängigkeit der Einzelelemente auf der Hauptdiagonalen der Matrizen vom Volumenanteil Stahl gezeigt werden (Abb. 8 und 9). Es fällt auf, daß C_{11} den theoretischen Wert am besten, C_{22} noch mit hinreichender Genauigkeit nähert. Beide Koeffizienten sind charakteristisch für die E-moduli in x_1 - bzw. x_2 -Richtung. Die Abweichung zwischen beiden Koeffizienten ist ein Maß für die Anisotropie des Komposits. Sie zeigt sich auch im Verlauf der Schubmoduli C_{44} und C_{55} . C_{44} wird dabei hinreichend durch das Programm berechnet. Demgegenüber zeigen sich für C_{55} größere Fehler. Sowohl in Abb. 8 wie in Abb. 9 sind die Unterschiede zu den theoretischen Werten für gleiche Anteile Kupfer und Stahl am größten. Dies äußert sich ebenfalls in der Anisotropie $n = C_{22}/C_{11}$ (Abb. 10).

Von den beschriebenen Abweichungen abgesehen, erfüllen alle für die Diagramme 7 bis 10 herangezogenen Werte sowohl die allgemeinen Anforderungen aus Kap. 7.1 als auch die spezielle Forderung für die Beziehung der Haupttensorelemente untereinander (f).

Die Unterschiede der Matrixelemente zu den Werten nach Achenbach (Ref. 8) bleiben im allgemeinen in dem von der recht groben Diskretisierung her erwarteten Rahmen. Sie erreichen erst für Volumenverhältnisse, die mit hohen Anisotropiegraden einhergehen, größere Werte (im Beispiel maximal 7 %). Ursachen dafür und Verbesserungsmöglichkeiten werden im anschließenden Kapitel 7.4 diskutiert.

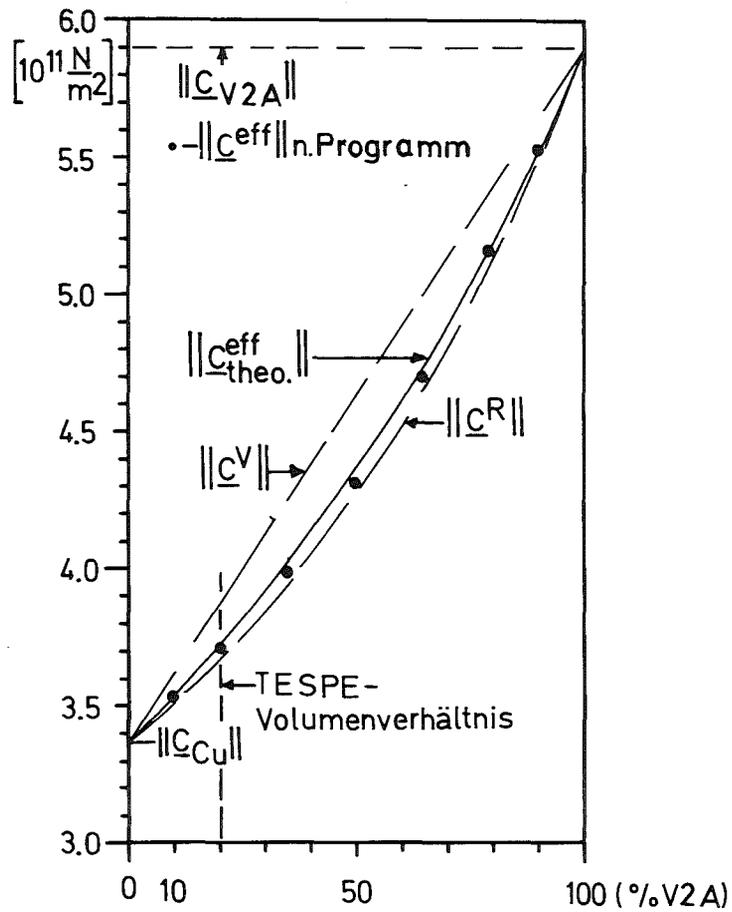


Abb. 7: Euklidische Norm von Reuss- und Voigt-Tensor sowie des berechneten effektiven Elastizitätstensors eines Testkomposits in Abhängigkeit vom Volumenanteil Stahl.

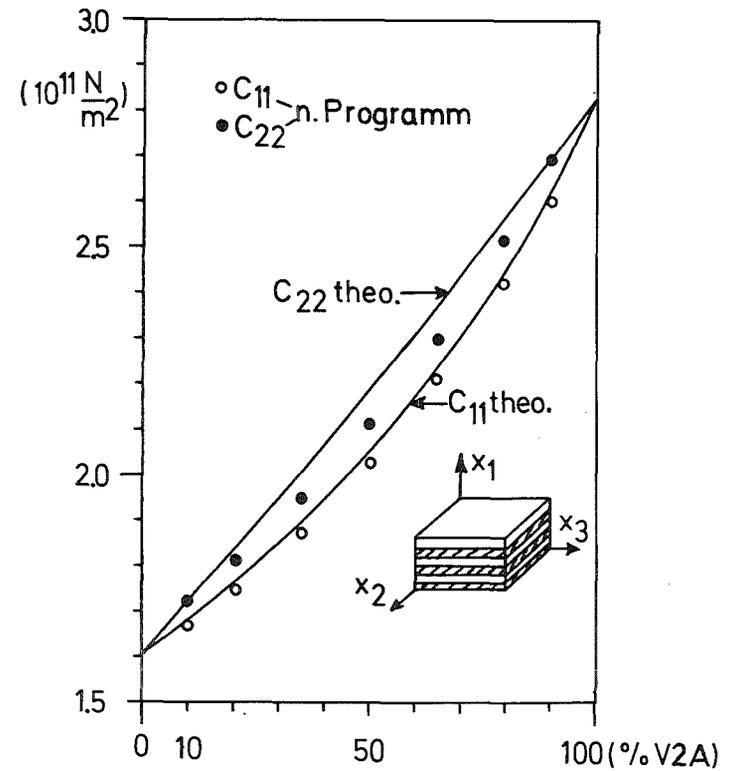


Abb. 8: Abhängigkeit der Tensorelemente C_{11} und C_{22} des Testkomposits vom Volumenanteil Stahl.

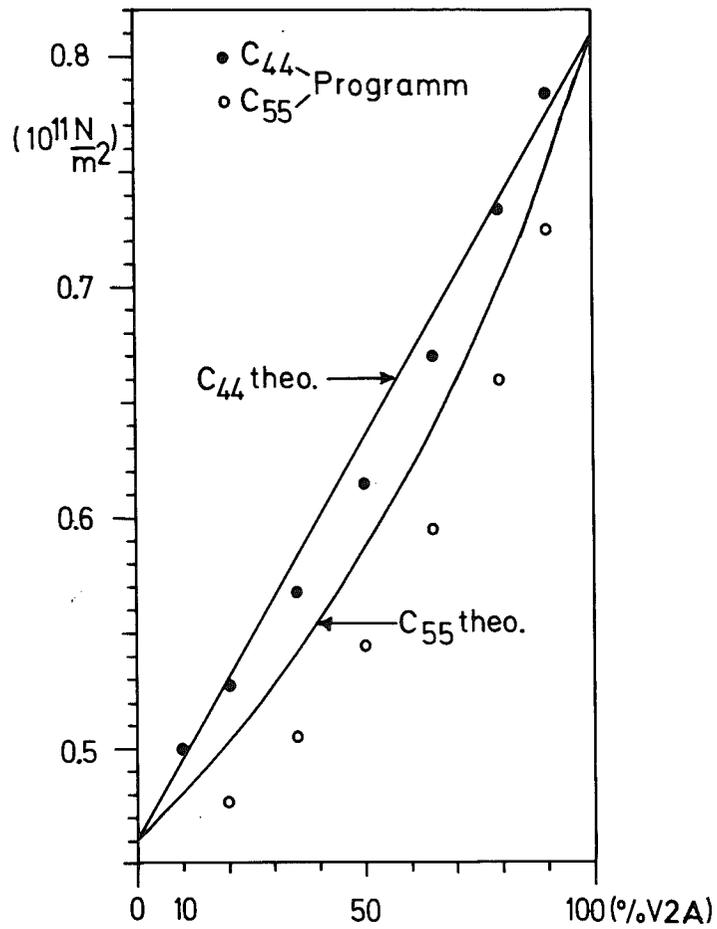


Abb. 9: Abhängigkeit der Tensorelemente C_{44} und C_{55} des Testkomposits vom Volumenanteil Stahl.

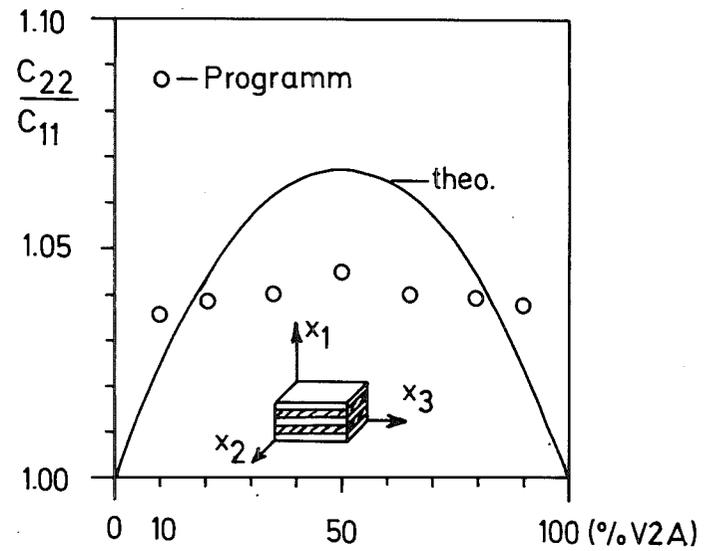


Abb. 10: Anisotropiegrad $n = C_{22}/C_{11}$ des Testkomposits vom Volumenanteil Stahl.

7.4 Diskussion der Genauigkeit des Verfahrens

Nach der qualitativen Diskussion der Ergebnisse wird untersucht, wie deren Genauigkeit verbessert werden kann.

Abb. 11 und 12 zeigen die prozentualen Abweichungen der ermittelten Matrizenelemente des Testkomposits von den theoretischen Werten in Abhängigkeit vom Volumenanteil Stahl. Es fällt auf, daß die Fehler von C_{11} gering sind und praktisch keine Abhängigkeit von den Volumenverhältnissen der beteiligten Materialien zeigen. Die übrigen Größen weisen für gleiche Volumenanteile Stahl und Kupfer die größten Fehler auf. Der höchste Wert tritt mit 7% beim Schubmodul C_{55} auf.

Diese Ergebnisse findet man mit 24 Stützstellen, die in den Schwerpunkten der Materialblöcke von Abb. 6 angebracht sind. Die Elementvolumina entsprechen den Blockvolumina. Das Gesamtvolumen des diskretisierten Komposits bestand aus zwei Stapel zu 6 Materialpaketen aus je einem Kupfer- und Stahlblock.

Der Einfluß der Parameter Gesamtvolumen, Stützstellenanordnung und Elementvolumen auf das Endergebnis soll durch numerische Untersuchungen geprüft werden, da aufgrund der Matrizennatur der auftretenden Gleichungen Fehlerabschätzungen allenfalls für eine Norm festgestellt werden können.

Für die Wahl des *Gesamtvolumen* V fordert die Homogenitätsbedingung in Kap. 3, daß es groß gegenüber der größten Länge im Material ist, mit der sich die Eigenschaften des Mediums wiederholen (Korrelationslänge). Mit zunehmender Größe von V sollten sich die gewonnenen Materialparameter C_{ij} nicht mehr wesentlich ändern. Das Komposit wird dann durch einen einzigen räumlich konstanten Parametersatz C_{ij} beschrieben.

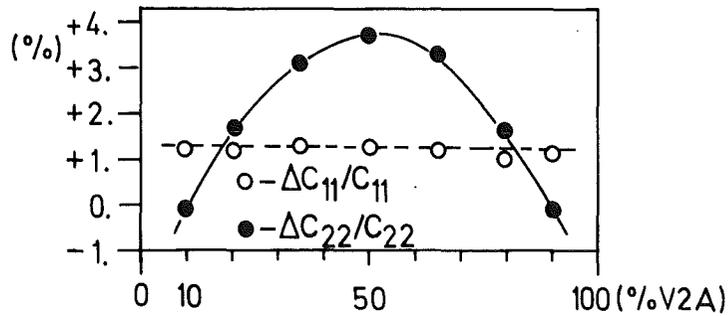


Abb. 11: Prozentuale Abweichungen von C_{11} und C_{22} vom theoretischen Wert in Abhängigkeit vom Volumenanteil Stahl beim Testkomposit.

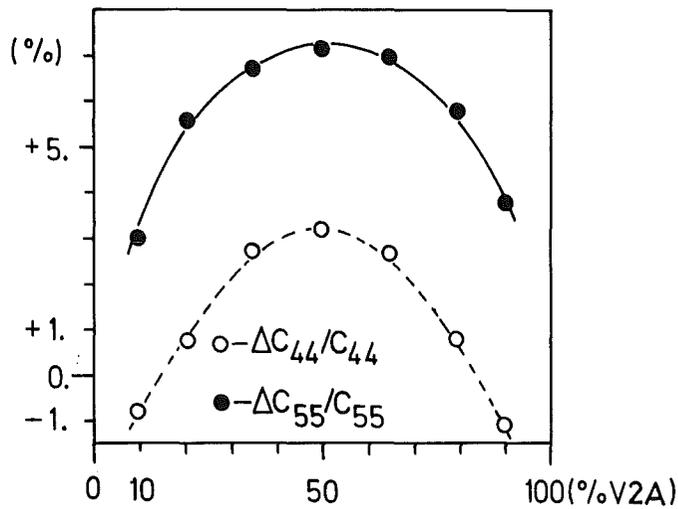


Abb. 12: Prozentuale Abweichungen von C_{44} und C_{55} vom theoretischen Wert in Abhängigkeit vom Volumenanteil Stahl beim Testkomposit.

Um dieses Verhalten zu überprüfen, wurde zu dem oben beschriebenen Ausgangskomposit weitere Materialblöcke hinzugefügt und so das Gesamtvolumen V erhöht.

Im Schwerpunkt jedes Materialblocks befindet sich eine Stützstelle. Damit erhöht sich die Stützstellenzahl N , aber die Größe der Elementvolumina ΔV_i und damit der jeweilige Anteil eines Materials am Gesamtvolumen bleibt konstant.

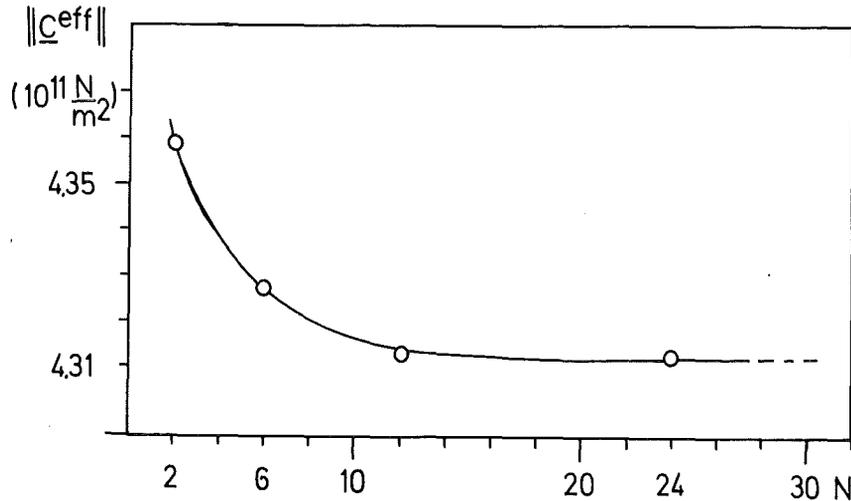


Abb. 13: Abhängigkeit der Euklidischen Norm des effektiven Elastizitätstensors vom Gesamtvolumen bzw. der Zahl der Stützstellen.

Abb. 13 zeigt die Abhängigkeit des Ergebnisses vom Gesamtvolumen bzw. der Zahl der Stützstellen. Man erkennt, daß durch diese periodische Fortsetzung des Komposits erwartungsgemäß keine wesentliche Änderung der Resultate eintritt. Für Volumina, deren Seitenlänge in die Größenordnung der Länge kommen, auf der sich die Eigenschaften des Komposits wiederholen (z.B. bei zwei Materialblöcken Kupfer und Stahl), treten die stärksten Änderungen der Ergebnisse auf. Da in diesem Fall die Homogenitätsbedingung verletzt wird, ist dieses Verhalten erklärlich. Dieses Ergebnis hängt auch nicht von der Richtung ab, in der Materialblöcke hinzugefügt werden.

Damit ist gezeigt, daß die entwickelte Methode die Einhaltung der Homogenitätsbedingung (1) erfordert und so eine sinnvolle Homogenisierung eines Komposits durchführt.

Eine numerische Ursache für dieses Verhalten des Programms ist in der Form des Tensors \underline{T} zu sehen. Er ist eine Funktion des Abstandes R zweier Stützstellen und von der Form R^{-3} (vgl. (29)). Sehr weit entfernte Stützstellen, wie sie bei der beschriebenen Volumenvergrößerung auftreten, tragen daher nur noch wenig zum Endergebnis bei. Statt den in Gleichung (17) zur Bildung des Integrals vorgeschriebenen Grenzwertprozeß $V \rightarrow \infty$ durchzuführen, genügt es also den effektiven Elastizitätstensor für ein endliches Volumen zu berechnen, das nach der Homogenitätsbedingung ausgewählt wurde.

Ist dieses endliche Volumen vorgegeben, kann das Ergebnis durch die *Feinheit der Diskretisierung* verändert werden. Sie ist zum einen durch den Abstand zu den nächsten Stützstellennachbarn einer Stützstelle, zu andern durch die Größe der Elementvolumina ΔV_i und damit die Zahl der Stützstellen im Volumen bestimmt.

In der ursprünglichen Diskretisierung mit 24 Stützstellen ist der Stützstellenabstand $h_x = 2.45$ mm in x_1 -Richtung geringer als in x_3 -Richtung mit $h_z = 17.6$ mm. Dieser Abstand h_z wurde zunächst unter *Beibehaltung der Größe der Elementvolumina ΔV_i* variiert, um zeigen zu können, daß er für die Werte der Tensorelemente dieser Richtung (z.B. C_{33}) verantwortlich ist. Abb. 14 zeigt, daß große Stützstellenabstände das Endergebnis nur wenig beeinflussen, während mit kleiner werdendem Abstand die theoretischen Werte erreicht werden.

Entsprechendes gilt auch für C_{55} , dem Schubmodul G_{zx} :

h_z (mm)	2.5	4.4	8.8	17.6	theoretisch
C_{33} (10^{11} N/m ²)	2.225	2.134	2.112	2.108	2.189
C_{55} (10^{11} N/m ²)	0.562	0.552	0.546	0.545	0.587

Die *Feinheit der Diskretisierung in einer Raumrichtung des Gesamtvolumens* beeinflusst also die Genauigkeit der berechneten Tensorelemente für die jeweilige Richtung.

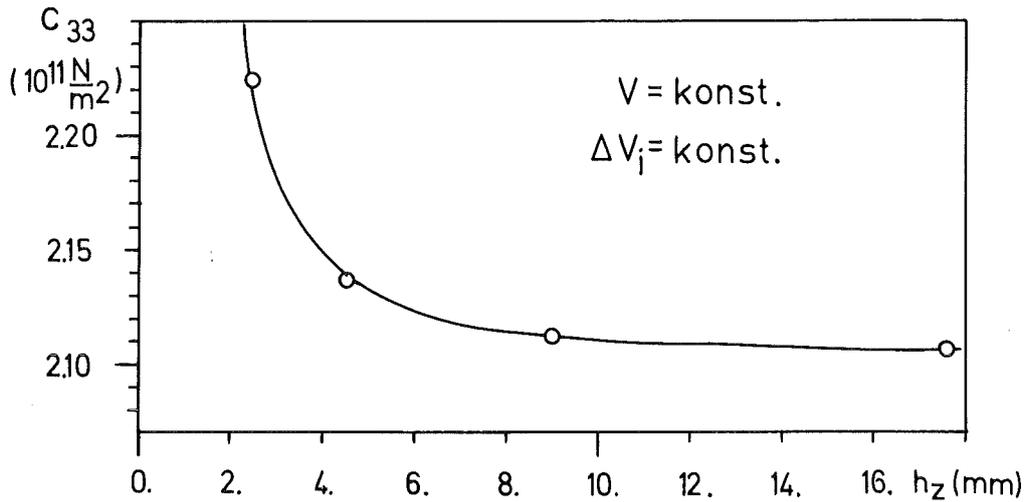


Abb. 14: Abhängigkeit des berechneten effektiven Tensor-
elements C_{33} von Stützstellenabstand in $x_3(z)$ -
Richtung.

Von der Anschauung her erwartet man, daß die Größe der Elementvolumina ΔV_i (oder die Zahl der Stützstellen) so groß gewählt werden sollte, daß sie kleiner als Δl^3 , der schon erwähnten Korrelationslänge, ist.

Fügt man in x_1 -Richtung in jeden Materialblock eine weitere Stützstelle hinzu, verkleinert also das Elementvolumen und verringert in dieser Richtung den Stützstellenabstand, müßten die Ergebnisse verbessert werden. Dies wird bestätigt:

mit 24 Stützstellen:

$$\begin{array}{lll} C_{11} = 2.025 & C_{22} = 2.107 & C_{33} = 2.108 \\ C_{44} = 0.614 & C_{55} = 0.545 & C_{66} = 0.544 \end{array} \quad (10^{11} \text{ N/m}^2)$$

mit 36 Stützstellen:

$$\begin{array}{lll} C_{11} = 2.046 & C_{22} = 2.060 & C_{33} = 2.060 \\ C_{44} = 0.590 & C_{55} = 0.587 & C_{66} = 0.587 \end{array} \quad (10^{11} \text{ N/m}^2)$$

theoretische Werte:

$$\begin{array}{lll} C_{11} = 2.052 & C_{22} = 2.189 & C_{33} = 2.189 \\ C_{44} = 0.635 & C_{55} = 0.587 & C_{66} = 0.587 \end{array} \quad (10^{11} \text{ N/m}^2)$$

Offensichtlich haben sich die Werte für die Parameter, die von der x_1 -Richtung abhängen, wie C_{11} , C_{55} , C_{66} , dadurch wesentlich verbessert. Die Werte für die Parameter C_{22} , C_{33} zeigen grössere Abweichungen, da hier sehr große Stützstellenabstände auftreten ($h_y = \infty$, da alle Punkte in der x_1, x_3 -Ebene liegen und $h_z = 17.6$ mm).

Die numerische Ursache dafür, daß eine Verringerung des Stützstellenabstandes zu einer Verbesserung des Ergebnisses führt, ist wiederum in der Eigenschaft des Tensors \underline{T} zu suchen, wegen der R^{-3} -Skalierung nur Punkte in nächster Umgebung einer vorgegebenen Stützstelle im Endergebnis zu berücksichtigen.

Damit werden auch die Fehler in der Diskretisierung aus 7.3 erklärlich. Da in x_1 -Richtung eine feine Unterteilung in Einzelvolumina vorliegt (geringer Stützstellenabstand), wird C_{11} sehr genau berechnet. In den übrigen Raumrichtungen ist der Stützstellenabstand zu groß, um die entsprechenden Parameter, wie C_{22} , C_{33} , genauer berechnen zu können.

eine dreidimensionale Diskretisierung wird in der Praxis wegen der Größe der Matrix \underline{A} (vgl. Kap. 6.4) nicht zu erreichen sein. Es muß daher ein Kompromiß eingegangen werden.

7.5 Grenzen für die Anwendbarkeit des Verfahrens

Folgende Annahmen begrenzen die Gültigkeit des Verfahrens:

- a) Rein elastisches Materialverhalten der Einzelmaterialien.
- b) Im Materialvolumen sind keine Rest- oder Eigenspannungen vorhanden.
- c) Das Material muß sich im Temperaturgleichgewicht befinden.
- d) Das Material darf nur statisch belastet werden, da bei dynamischer Belastung Gleichung (10) nicht mehr gültig ist.
- e) Materialbewegungen im Innern des Volumens, wie Gleiten von Materialschichten etc., dürfen nicht vorkommen.

Praktisch wird Bedingung a) die am ehesten verletzt sein, da in jedem Komposit damit zu rechnen ist, daß an Stellen, an denen hohe Spannungswerte bei Belastung auftreten, z.B. bei Löchern im Material, plastisches Verhalten einsetzt. Wie bei Polykristalliten besteht jedoch die Hoffnung, daß sich die auftretenden Dehnungen so herausmitteln, daß das Komposit nach außen hin das erwartete elastische Verhalten zeigt.

Legt man den Vergleich mit dem Testkomposit zu Grunde, liefert die Methode bei einfacher Diskretisierung Elastizitätstensoren mit maximalen Fehlern in der Größenordnung von 10%. Bedenkt man die einfache Methode zur Berechnung (Aufstellung und Inversion einer Übermatrix), sowie die Möglichkeit zur Verbesserung des Ergebnisses durch Verfeinerung der Diskretisierung stellt die aufgezeigte Methode eine nützliche Alternative zu FEM-Rechnungen dar.

Die endgültige Genauigkeit wird aber wegen der großen Schwierigkeiten Messungen an einem Magnetkomposit durchführen zu können, letztlich nur durch Messungen der Verschiebungen an einem Magneten ermittelt werden können.

7.6 Diskussion eines alternativen Lösungsverfahrens für die Gleichung von Korringa (vgl. Anhang IV.)

Zur Bestimmung des effektiven Elastizitätstensors schlägt Korringa (Ref.5) einen alternativen Weg vor. Er geht von der Idee aus, daß ein Wahltensor \underline{C}^0 , für den die Lösung von Gleichung (17) $\langle \underline{q} \rangle = \underline{0}$ ergibt, wegen Gleichung (20) gerade der gesuchte effektive Elastizitätstensor $\underline{C}^{\text{eff}}$ sein muß. Setzt man in der Gleichung von Korringa $\langle \underline{q} \rangle = \underline{0}$ ein, so kann man mit der verbleibenden Gleichung und (20) ein Iterationsverfahren zur Bestimmung von $\underline{C}^{\text{eff}}$ über \underline{C}^0 aufbauen. \underline{C}^0 wird durch sukzessive Approximation solange variiert bis $\langle \underline{q} \rangle = \underline{0}$ wird (Details in Anhang IV.).

Da auch bei dieser Methode Funktionen $\underline{q}(\vec{x})$ aus einer abgewandelten Gleichung (17) bestimmt werden müssen, wurde das entwickelte Lösungsverfahren aus Kap.6 auf diese Gleichung angewendet und untersucht, ob damit das vorgeschlagene Iterationsverfahren ebenfalls praktikabel ist.

Voraussetzung für den Erfolg des Verfahrens ist, daß die Iteration von \underline{C}^0 für verschiedene Starttensoren zum selben Tensor $\underline{C}^{\text{eff}}$ konvergiert. Dies trat jedoch erst nach Einführung eines Konvergenzfaktors, dessen Definition und Wirkungsweise im Anhang IV. beschrieben wird, ein. Abb. 15 zeigt den damit erreichten Konvergenzverlauf für das Testkomposit mit 24 Stützstellen und 20.4% Stahlanteil.

Als Starttensor wurde Reuss- und Voigttensor benutzt. Der Grenztensor ist offensichtlich davon unabhängig, liegt aber außerhalb des Hill'schen Bereichs. Nach 7.1 b) ist er damit sinnlos.

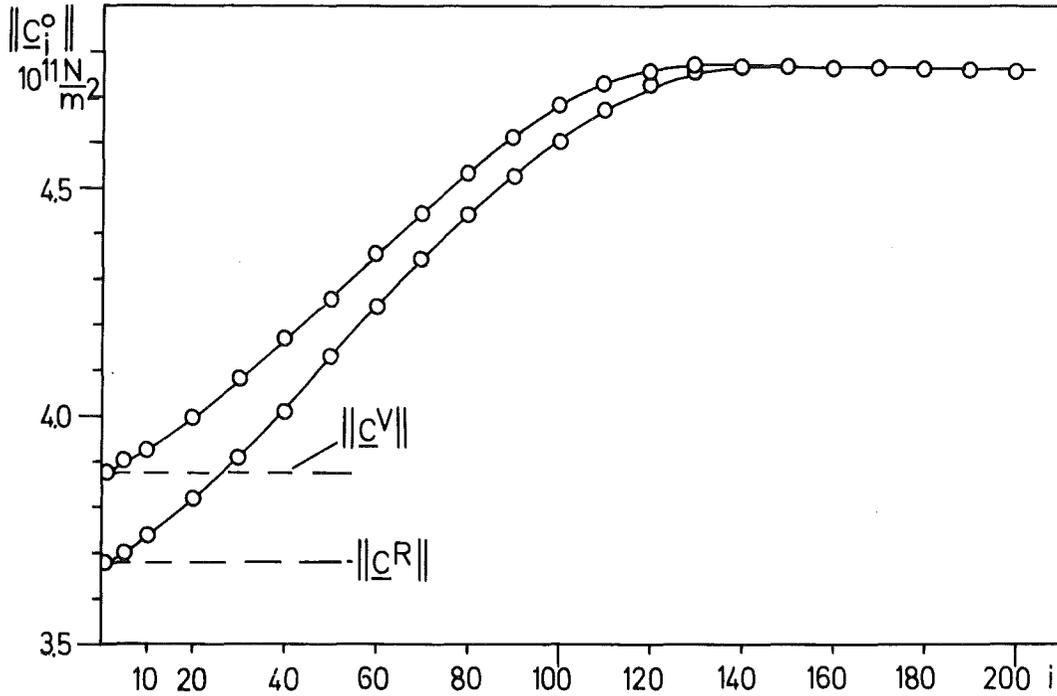


Abb.15: Konvergenzverlauf des Iterationsverfahrens anhand der Euklidischen Norm von \underline{C}_i^0 über 200 Iterationsschritte (20.4% Stahl).

Für 200 Iterationsschritte wurden ca. 15 min. CPU-Zeit (IBM 3033) benötigt. Dies schließt aus, die Diskretisierung zu verfeinern, da das mit einer entsprechenden Vergrößerung der Matrix \underline{A} (49) und der Rechenzeit einhergehen würde. Stattdessen wurde die Stützstellenzahl verringert. Es zeigt sich, daß die Ergebnisse für 20.4% Stahl sich vom Hill'schen Bereich entfernen: (100 Iterationen):

Zahl der Stützstellen	2	6	12	24
$ \underline{C}_{100}^0 (10^{11} \text{N/m}^2)$	4.687	4.683	4.601	4.602

Man erwartet daher, daß die Ergebnisse des Iterationsverfahrens sich dem Hill'schen Bereich annähern, wenn die Zahl der Stützstellen erhöht und die Diskretisierung verfeinert wird.

Mangelhafte Diskretisierung ist also sehr wahrscheinlich die Ursache für den Mißerfolg des Alternativverfahrens. Da aber aus praktischen Gründen (Rechenzeit) die Methode nicht verbessert werden kann, scheidet sie zur Berechnung des effektiven Elastizitätstensors aus.

7.7 Berechnung des effektiven Elastizitätstensors des TESPE-Supraleiterpakets

Um die Anwendbarkeit des Verfahrens auf ein unbekanntes Magnetkomposit zeigen zu können, wurde ein Leiterpaket des Experiments TESPE (Ref.24) modelliert (Abb.17). Der Leiter besteht aus einem Stahlkern, der von den NbTi-Supraleiter-Strands umgeben ist. Zur elektrischen Isolation der einzelnen Lagen untereinander dient GfK.

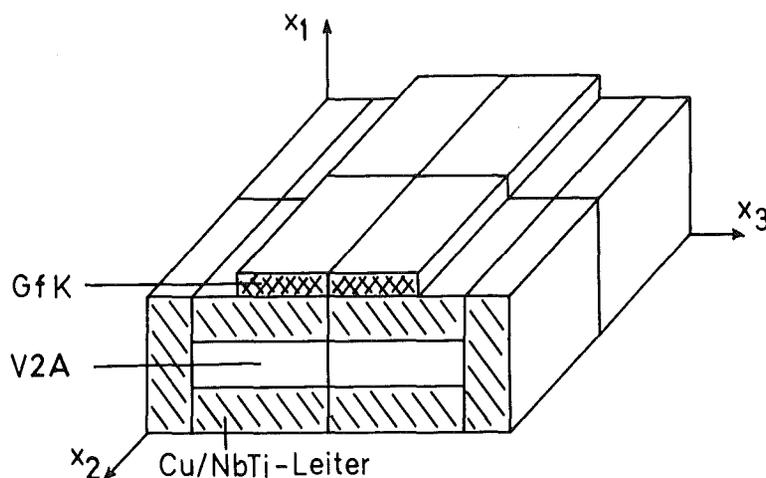


Abb.17: Diskretisierung eines Leiterpakets von TESPE (Ref. 24)

Gerechnet wurde mit zwei Leiterpaketen, die zusammen 40 Stützstellen ergeben. Diese Stützstellen werden in die Schwerpunkte der in Abb.17 eingezeichneten Materialblöcke gelegt. Lotmaterial wird vernachlässigt, da es mengenmäßig gering ist und nicht als elastisches Material betrachtet werden kann.

Als Eingabematrizen wurden verwendet:

Stahl: gleiche Werte, wie für das Testkomposit in Kap.7.2

Cu/NbTi-Leiter:

1.410	0.603	0.603	0	0	0	
	1.410	0.603	0	0	0	
		1.410	0	0	0	
			0.402	0	0	(10^{11} N/m ²)
				0.402	0	
					0.402	

GfK-Material (G10):

0.275	0.059	0.059	0	0	0	
	0.657	0.200	0	0	0	
		0.657	0	0	0	
			0.228	0	0	(10^{11} N/m ²)
				0.117	0	
					0.117	

Die Symmetrieverhältnisse des Materialpakets lassen ein orthotropes Materialverhalten erwarten. Es existieren drei zueinander senkrechte Symmetrieebenen.

Die Näherungstensoren nach Voigt und Reuss liegen in diesem Fall weit auseinander, wie die Euklidische Norm der Matrizen zeigt:

$$||\underline{C}^V|| = 3.30 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \quad ||\underline{C}^R|| = 2.45 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Hier zeigt sich die Notwendigkeit eines genaueren Berechnungsverfahrens für $\underline{C}^{\text{eff}}$.

Ursache für den großen Bereich ist der relativ große Unterschied in den Elastizitätstensoren der Einzelmaterialien. Insbesondere sind die E-Moduli des GfK-Materials (G10) um eine Größenordnung kleiner als die von Kupfer und Stahl. Die hohe Anisotropie des Kunststoffmaterials führt zu anisotropen Voigt- und Reusstensoren.

Das Programm liefert als effektiven Elastizitätstensor:

$$\begin{array}{cccccc}
 1.092 & 0.494 & 0.473 & 0 & 0.030 & 0 \\
 & 1.390 & 0.560 & 0 & 0.020 & 0 \\
 & & 1.289 & 0 & 0.070 & 0 \\
 & & & 0.452 & 0 & 0.120 & (10^{11} \text{N/m}^2) & (57) \\
 & & & & 0.239 & 0 \\
 & & & & & & & 0.693
 \end{array}$$

mit $||\underline{C}^{\text{eff}}|| = 2.67 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$.

Abgesehen von den in der 5. und 6. Spalte auftretenden gemischten Elementen zeigt der Tensor Orthotropie (neun voneinander unabhängige Konstanten, vgl. (51)).

Eine Beziehung für die Tensorelemente in Form einer Ungleichung kann hier nicht aufgestellt werden, da in x_1 - und x_3 - Richtung (Abb. 17) sowohl eine Parallel- wie Serienschaltung der Einzelmaterialien vorliegt.

Als technische Konstanten ergeben sich:

$$E_x = 0.845 \quad E_y = 1.055 \quad E_z = 0.968$$

$$G_{yz} = 0.431 \quad G_{xz} = 0.234 \quad G_{xy} = 0.661 \quad (10^{11} \text{ N/m}^2)$$

mit den Poissonzahlen ν :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 \nu_{yx} & \nu_{xy} & \nu_{zy} & \nu_{yz} & \nu_{xz} & \nu_{zx} \\
 \hline
 0.251 & 0.313 & 0.321 & 0.294 & 0.293 & 0.256
 \end{array}$$

Die in Abb. 17 angegebene x_1 -Richtung entspricht der Radialrichtung des D-förmigen TESPE-Magneten, die x_2 -Richtung der Umfangsrichtung. Definiert man als Anisotropiegrad in dieser x_1, x_2 -Ebene $n = E_y / E_x$ findet man $n = 1.25$, eine 25 %-ige Anisotropie, die in der Spannungs-Dehnungsberechnung der Magnetspulen nicht mehr vernachlässigt werden kann.

Es sei nochmals angemerkt, daß hierzu die im kartesischen Koordinatensystem gewonnenen Elastizitätstensoren in das Koordinatensystem des TESPE-Magneten übertragen werden müssen. Das Verfahren wurde in Kap. 4 (Abb.5) beschrieben.

8. Anwendung der Vorstellung eines effektiven Elastizitätstensors in der Auslegung von Solenoiden

8.1 Spannungs-Dehnungsbeziehungen eines Solenoids in Zylinderkoordinaten

Mit den gewonnenen Materialparametern eines Magnetkomposits lassen sich Spannungs-Dehnungsberechnungen auch komplizierter Magnetformen (etwa D-förmiger Spulen) mit Hilfe von Finite-Element-Methoden (Ref. 3 und Ref. 9) durchführen. Für Solenoide stehen zweidimensional aber auch analytische Lösungen zur Verfügung. Gleichungen, die das anisotrope Materialverhalten eines Magnetkomposits berücksichtigen, wurden von Gray und Ballou (Ref. 6) sowie Arp (Ref. 25) entwickelt.

Die Grundlagen und Ergebnisse dieser Rechnungen sollen kurz skizziert werden:

Ohne die Bedingungen hierfür (Kap. 4) näher zu untersuchen, gehen sie von der Vorstellung eines homogenen Magnetmaterials aus. Nach ihr kann man für ein Magnetkomposit einen räumlich konstanten Elastizitätstensor angeben. Er ermittelt sich etwa mit der in Kap. 7 vorgeschlagenen Methode.

Die zugehörige Form des Koordinatensystems ergibt sich aus den Vorzugsrichtungen im Magneten, die die Folge des regelmäßigen Aufbaus sind. Treten Vorzugsrichtungen auf, bezeichnet man das Material als anisotrop. Sie sind die Ursache für Symmetrien (z.B. Spiegelsymmetrien) im Material und führen zu elastischen Symmetrien.

Bei einem Solenoid gibt es drei zueinander senkrechte Symmetrieflächen (Abb. 18), was man als Orthotropie bezeichnet. Wegen der vorhandenen ausgezeichneten Linie ist eine der Symmetrieflächen gekrümmt.

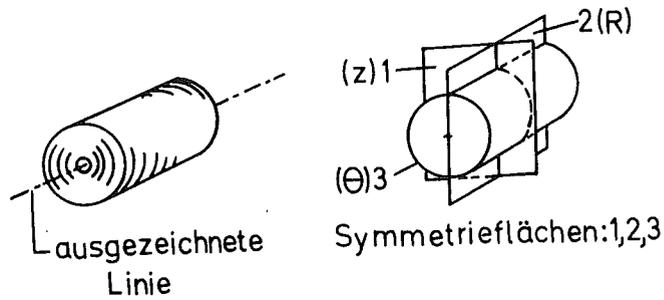


Abb. 18: Orthotropie in Zylinderkoordinaten bei einem Solenoid

Entsprechend spricht man von krummliniger Anisotropie (Ref. 14). Es ist augenscheinlich klar, daß hiermit ein Zylinderkoordinatensystem zur Angabe räumlich konstanter Materialparameter vorgegeben wird. Der E-Modul in Radialrichtung E_R , in Umfangsrichtung E_θ und Axialrichtung E_z muß an jeder Stelle gleich sein. Für einen orthotropen Körper in Zylinderkoordinaten gilt analog zu (51) nach Ref.14 als Dehnungs-Spannungszusammenhang in technischen Konstanten geschrieben.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ 2\epsilon_{\theta z} \\ 2\epsilon_{Rz} \\ 2\epsilon_{R\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_R & -\nu_{\theta R}/E_\theta & -\nu_{zR}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{R\theta}/E_R & 1/E_\theta & -\nu_{z\theta}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{Rz}/E_R & -\nu_{\theta z}/E_\theta & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{\theta z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{Rz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{R\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{Rz} \\ \sigma_{R\theta} \end{pmatrix} \quad (58)$$

Der Elastizitätstensor enthält neun unabhängige Komponenten. Die Poissonzahl $\nu_{\Theta R}$ z.B. gibt die Querkontraktion in R-Richtung bei Dehnung in Θ -Richtung an.

E_R, E_Θ, E_z sind die E-Moduli für die drei Vorzugsrichtungen. G geben die Schubmoduli an.

Wegen der Symmetrie des Tensors gilt der Zusammenhang:

$$\frac{\nu_{R\Theta}}{E_R} = \frac{\nu_{\Theta R}}{E_\Theta} \quad ; \quad \frac{\nu_{Rz}}{E_R} = \frac{\nu_{zR}}{E_z} \quad ; \quad \frac{\nu_{z\Theta}}{E_z} = \frac{\nu_{\Theta z}}{E_\Theta} \quad (59)$$

Daher sind i.a. die Poissonzahlen $\nu_{R\Theta}$ und $\nu_{\Theta R}$ verschieden, falls die E-Moduli in Radial- und Umfangsrichtung unterschiedlich sind.

Zusätzlich zu dem Materialgesetz (58) wird bei den Rechnungen von Gray-Ballou von folgenden Annahmen ausgegangen (Abb. 19a):

- Das Solenoid befindet sich im Eigenfeld, dessen z-Komponente linear über dem Radius variieren soll.
- Das Solenoid soll unendlich ausgedehnt sein. Es treten daher keine Axialspannungen σ_z auf (ebener Spannungszustand).
- Die Berechnung wird für die Zentralebene (R, Θ) des Solenoids durchgeführt.
- Die Stromdichte j_Θ soll über dem Radius konstant sein.
- Es sollen keine Umfangsabhängigkeiten auftreten.
- Scherungen werden vernachlässigt.
- Das Solenoid ist freitragend.

Damit ergeben sich nach Ref. 6 bzw. 25 für die Spannungs-Dehnungsverhältnisse eines Solenoids folgende Erkenntnisse:

Ein dünnes Solenoid verhält sich in erster Näherung wie ein Zylinder, der einem Innendruck unterliegt, so als würde es durch Flächenkräfte belastet. Dadurch weisen die Umfangsdehnungen ihr Maximum am Innenrand auf und fallen monoton mit dem Radius ab. Mit zunehmender Dicke des Magneten wandert das Maximum der Lorentzkräfte vom Innenrand in den Magneten hinein. Dadurch ändert sich

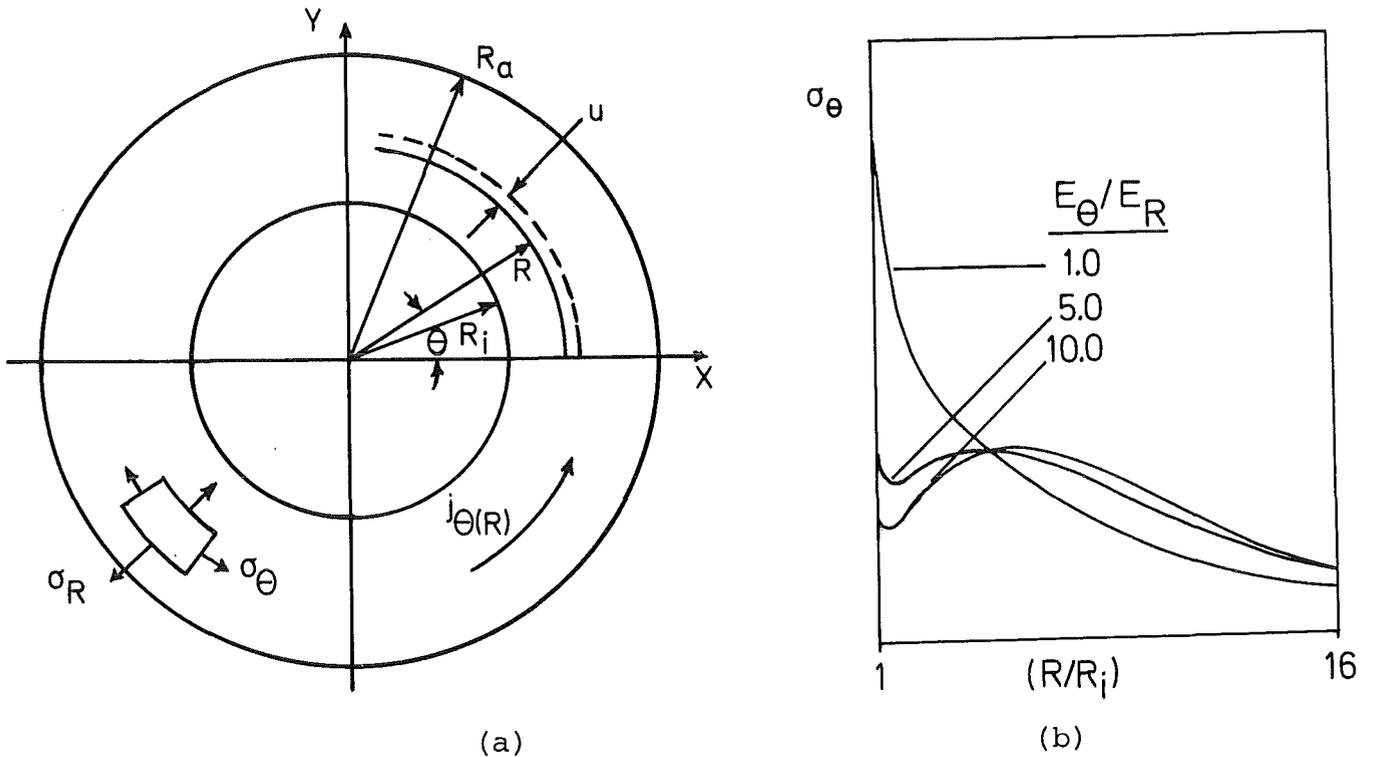


Abb. 19: (a) Koordinatensystem in der Zentralebene des Solenoids
 (b) schematischer Verlauf der Umfangsspannung σ_θ eines Solenoids ($\alpha = 16.0$) nach Ref.6

die Belastungscharakteristik des Magneten. Er verhält sich eher wie ein Körper, der durch Kräfte im Innern des Materials expansiv belastet wird. Während beim dünnen Magneten in radialer Richtung die Kompression überwiegt, expandiert er jetzt vorwiegend. Deutlich erkennbar ist dieses Verhalten an den Radialspannungen, deren Maxima jetzt im Magneten liegen und vorwiegend Zugbelastungen darstellen.

Die, bei konstantem Umfangs-E-Modul, zunehmende Anisotropie führt beim dünnen Magneten wegen des abnehmenden Radial-E-Modul zu einer starken Zunahme der kompressiven Radialdehnungen, während die Umfangsdehnungen sich nur geringfügig aufgrund der Querkontraktion erhöhen.

Bei dicken Magneten führt die Abnahme des E-Moduls in Radialrichtung zu einem starken Anstieg der - jetzt allerdings expansiven - Radialdehnung und infolge der Querkontraktion zur Abnahme der Umfangsdehnungen, bis deren Maxima im Magneten liegt. Dieses ändert sich nur noch wenig mit der Anisotropie. Die Spannungen werden allgemein reduziert.

Anisotropes Materialverhalten hat also insbesondere bei dicken Magneten (hohes α) einen mindernden Einfluß auf Umfangsdehnungen, Radial- und Umfangsspannungen, während die Radialdehnungen beträchtlich zunehmen. Bei dünnen Magneten ist nur die Zunahme der Radialdehnung von Bedeutung. Es muß dabei aber berücksichtigt werden, daß Spannungen und Dehnungen bei dicken Magneten sowieso einen höheren Betrag besitzen als bei dünnen. Nimmt man letzteres in Kauf, ist man also gezwungen, um die Anisotropie zu erhöhen, zusätzliche Verstärkungen in Umfangsrichtung (etwa Stahlbänder etc.) vorzusehen.

8.2 Das maximal erreichbare Zentralfeld eines supraleitenden Solenoids

Läßt man aus Stabilitätsgründen in einem supraleitenden Magneten (Solenoid) nur eine bestimmte Relativdehnung ϵ_0 des Leitermaterials zu (Ref. 1), ergibt sich danach ein maximal mögliches Zentralfeld B_{\max} , das auch vom Anisotropiegrad $n = E_\theta/E_R$ abhängt.

Dieses wird durch folgende Überlegung ermittelt:

Erhöht man das Magnetfeld soweit, bis an einer Stelle γ ϵ_0 erreicht ist, so ergibt sich dieses Zentralfeld $B_m(\gamma)$ aus (Ref. 6):

$$\begin{aligned} \epsilon_0(\gamma) &:= \frac{1}{E_\theta} \cdot j_\theta \cdot B_i \cdot R_i (n - v_{\theta R}^2) \left(c_1 \gamma^{\sqrt{n-1}} + c_2 \gamma^{-\sqrt{n-1}} - \frac{(1-d)}{(4-n)} \gamma \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{(4-n)} \gamma^2 \right) := \frac{1}{E_\theta} \cdot j_\theta \cdot B_i \cdot R_i \epsilon_\theta^+(\gamma) \end{aligned} \quad (60)$$

Damit ist ϵ_θ^+ eine normierte Umfangsdehnung, wobei c_1 und c_2 Funktionen von n und der Geometrie (α, β) des Solenoids sind:

Ist R_a der Außenradius, R_i der Innenradius und L die Länge des Solenoids, gilt

$$\alpha = \frac{R_a}{R_i} \quad ; \quad \beta = \frac{L}{2R_i} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{R}{R_i}$$

Ist B_a und B_i das Magnetfeld am Außen- bzw. Innenradius des Solenoids und

$$k_0 = \frac{B_m}{B_i} \quad \text{sowie} \quad k_1 = \frac{B_a}{B_i}$$

gibt d den Abfall des Magnetfeldes über dem Radius an:

$$d = \frac{k_0 k_1 - 1}{\alpha - 1}$$

Er hängt nur noch von der Geometrie der Spule ab.

Gibt λ das Verhältnis stromdurchflossene Fläche zu Gesamtwindungsfläche an (Füllfaktor), wird das Zentralfeld B_m bestimmt durch (Ref. 26):

$$B_m = \mu_0 j_\Theta \lambda R_i \ln \left(\frac{\alpha + (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{1 + (1 + \beta^2)^{1/2}} \right) \quad (61)$$

Einsetzen von (61) in (60) und auflösen, ergibt:

$$B_m(\gamma) = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_+(\gamma)} (\mu_0 \lambda \beta k_0 E_\Theta \ln \left(\frac{\alpha + (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{1 + (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \right)) \right)^{1/2} \quad (62)$$

Das maximal zulässige Zentralfeld B_{max} ergibt sich als Minimum der Werk $B_m(\gamma)$ für alle γ .

Für verschiedene Magnete bei konstantem Volumen zeigt Abb. 20 die Abhängigkeit des maximal erreichbaren Zentralfeldes B_{max} von der Dicke α . Die Kurven überschreiten ein Maximum, da mit zunehmender Dicke α und abnehmender Länge das erzeugte Magnetfeld abnimmt. Zunehmende Anisotropie erhöht das mögliche Magnetfeld, weil die Umfangsdehnungen dann zurückgehen. Dies

zeigt sich auch in Abb. 21 in der die Abhängigkeit von der Anisotropie $n = E_{\theta}/E_R$ angegeben wird. Bei extremer Anisotropie (und hohem α) tritt allerdings wieder der Effekt hervor, daß die maximalen Umfangsdehnungen in den Magneten wandern und dort zunehmen, was zu einem Maximum in der $B_{\max}(n)$ -Kurve führt. Die gewählten α -Werte sind jedoch noch nicht so klein, daß das Modell eines durch Flächenkräfte belasteten Körpers angewandt werden kann. Erst am Beispiel des IAK- und 30 T-Magnetteils⁺ (Abb. 22 und 23) tritt der schon zuvor beschriebene Effekt auf, daß die Anisotropie zu einer leichten Zunahme der Umfangsdehnungen führt. Die Folge ist nun eine geringfügige Abnahme des maximal zulässigen Magnetfeldes mit zunehmender Anisotropie.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß Magnete bis zu einem $\alpha \approx 3$, falls keine extremen Anforderungen an sie gestellt werden, ohne Berücksichtigung eines anisotropen Materialverhaltens betrieben (und ausgelegt) werden können. Für Anisotropiegrade $n \ll 1$ sollte man Vorsicht walten lassen, da hier die B_{\max} -Kurven abfallen (wurde in den Diagrammen nicht berücksichtigt).

8.3 Erweiterung der Spannungs-Dehnungsgleichungen auf Solenoide in einem inhomogenen Magnetfeld vom Typ eines Tokamakreaktors

Analytische Spannungs-Dehnungsberechnungen für Solenoide wurden bisher ohne Berücksichtigung einer Umfangsabhängigkeit der auftretenden Spannungen und Dehnungen durchgeführt (Ref. 6 und 25). Diese Betrachtung ist solange gerechtfertigt, wie das Magnetfeld punktsymmetrisch zur Zentralachse des Magneten ist. In diesem Fall führen die Volumenkräfte in der Zentralebene zu keinen zusätzlichen Scherungen. Zur mathematischen Behandlung genügt bei einer zweidimensionalen anisotropen Rechnung eine einzige Differentialgleichung.

⁺) Beide Solenoide wurden am Institut für Technische Physik (KfK) konzipiert.

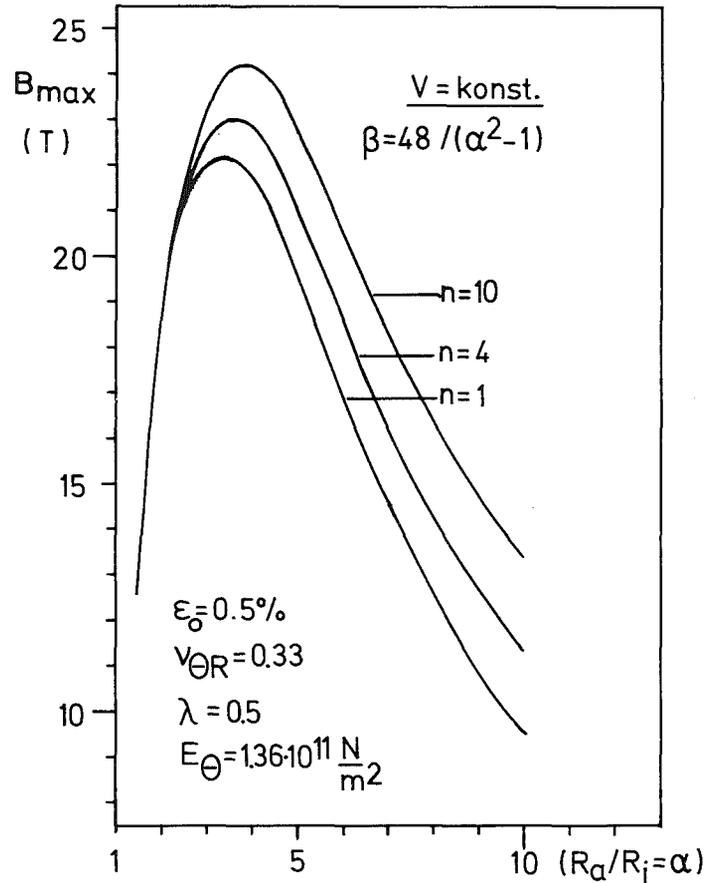


Abb. 20: Abhängigkeit des maximal erreichbaren Zentralfeldes eines Solenoids vom Verhältnis α Außen- zu Innenradius und verschiedenen Anisotropiegraden n (Volumen konstant)

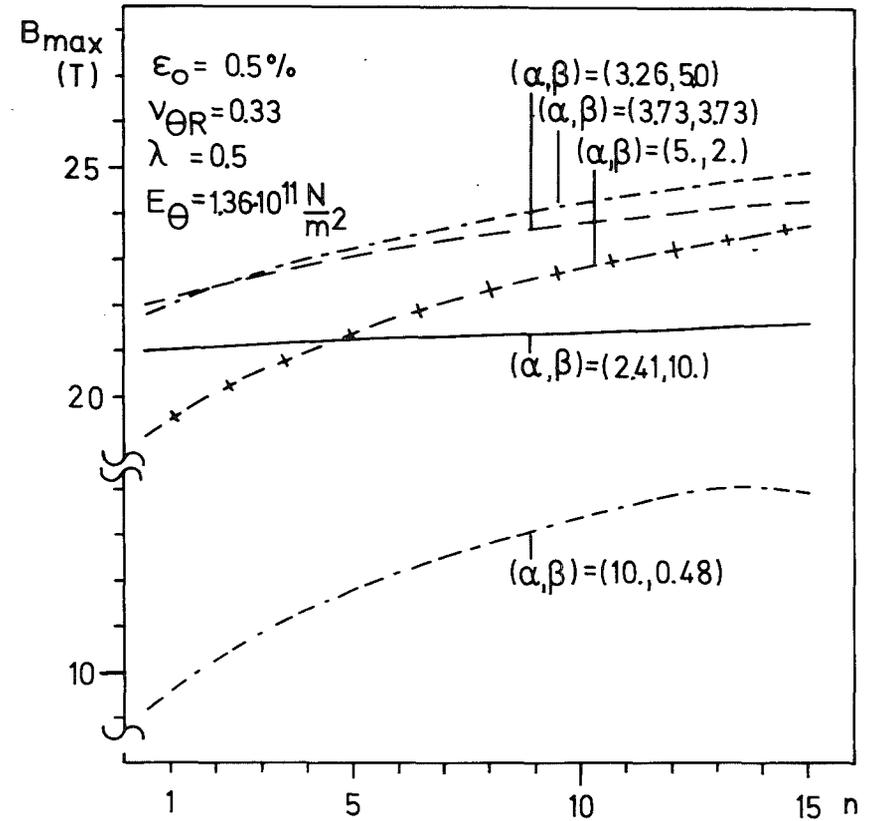


Abb. 21: Abhängigkeit des maximal erreichbaren Zentralfeldes von Solenoiden verschiedener Geometrien in Abhängigkeit vom Anisotropiegrad $n = E_{\theta}/E_R$

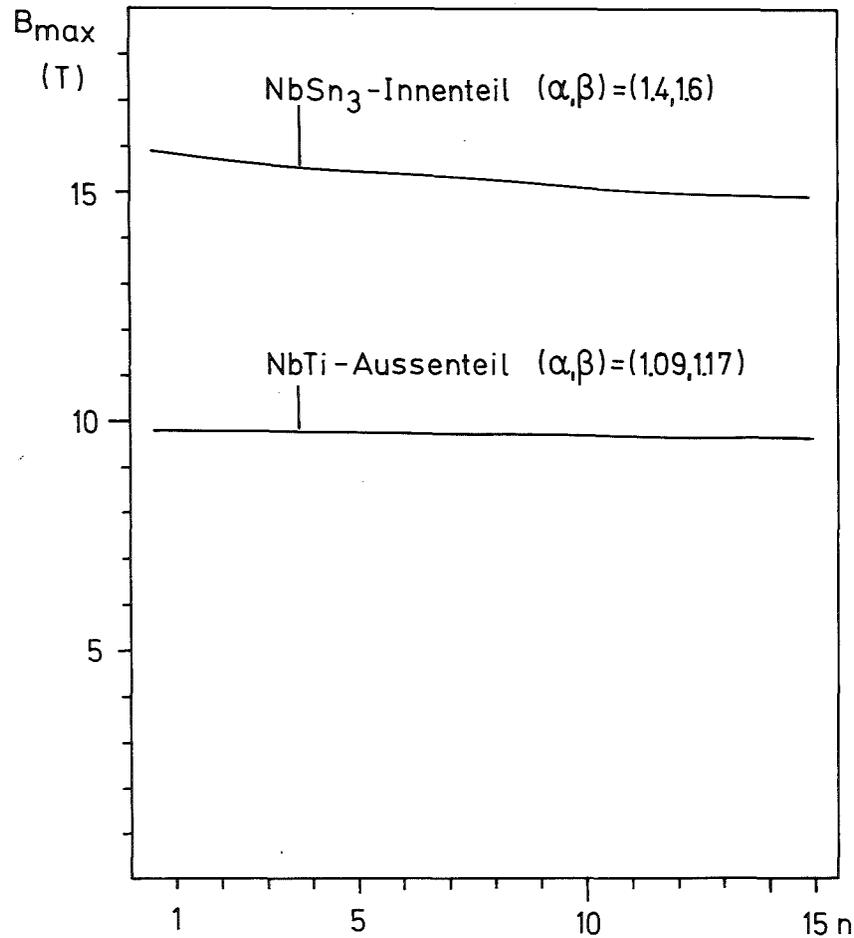


Abb. 22: Abhängigkeit des maximal erreichbaren Zentralfeldes des IAK-Magnets vom Anisotropiegrad $n = E_{\theta}/E_R$

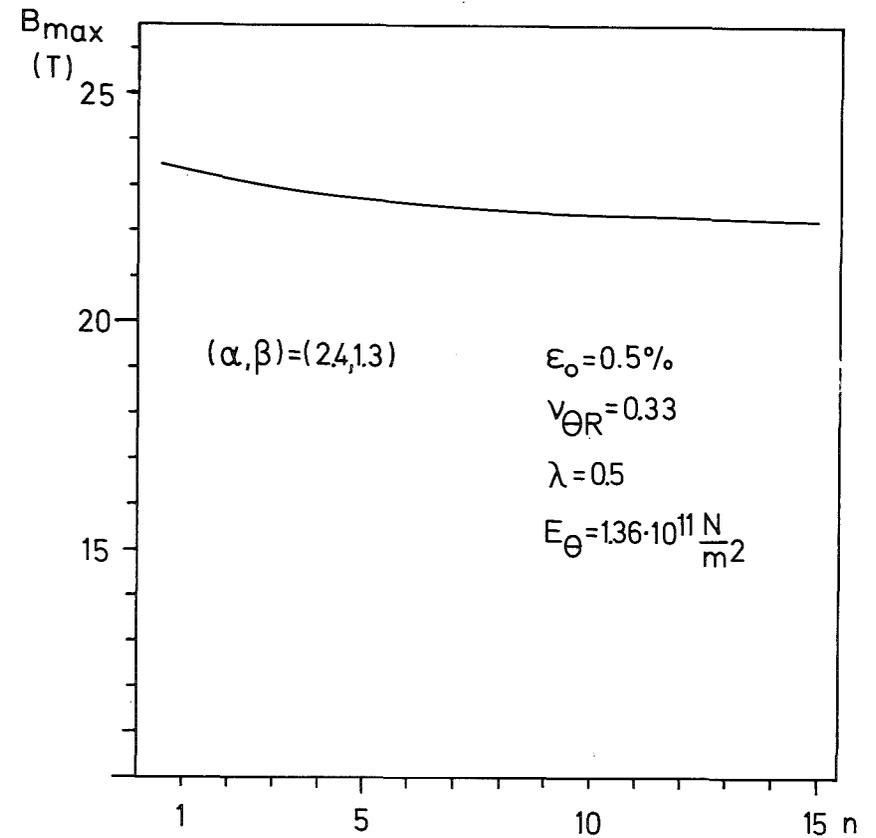


Abb. 23: Abhängigkeit des maximal erreichbaren Zentralfeldes des NbTi -Außenteils des 30 T-Magneten in Abhängigkeit vom Anisotropiegrad $n = E_{\theta}/E_R$

Wird die obige Bedingung verletzt, liegt also der Hauptangriffspunkt der Volumenkräfte nicht mehr auf der Zentralachse, ist es einsichtig, daß Scherungen auf Grund der Volumenkraftverteilung auftreten. Diese müssen berücksichtigt werden. Im folgenden sollen zweidimensional die Spannungen und Dehnungen in einem Magneten vom Typ eines Solenoids berechnet werden, das sich in einem inhomogenen Magnetfeld befindet, wie es etwa im Torusverband eines Tokamakfusionsreaktor (Ref. 2) auftritt (Abb. 24). Die Lösungen können sowohl für Parameterstudien wie in 8.2, als auch zur Überprüfung von FEM-Programmen genutzt werden. Letzteres ist von Interesse, da bei inhomogenen Magnetfeldern notwendigerweise eine Mittelung der Volumenkräfte über die Elementvolumina vorgenommen werden muß.

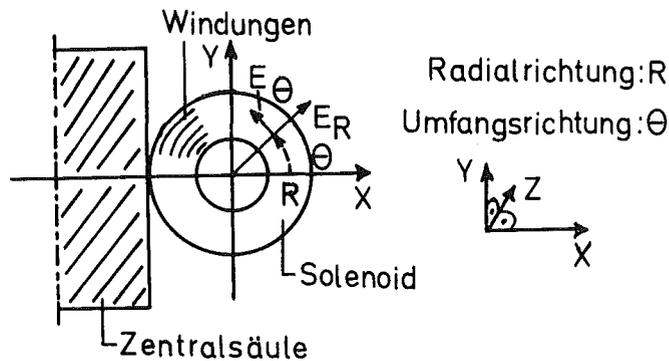


Abb. 24: Solenoid in einem Magnetfeld vom Tokamaktyp

8.3.1 Voraussetzungen

Das Magnetfeld fällt von der Zentralsäule nach außen hin mit $1/R$ ab. Diese Eigenschaft ist aber für die Berechnung keine Beschränkung, da beliebige Magnetfeldkonfigurationen behandelt werden können, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Das Magnetfeld hat in der betrachteten Ebene nur eine Komponente in Richtung der Solenoidachse.
- Das Magnetfeld muß spiegelsymmetrisch zu einer Ebene (in Abb. 24 der x, z -Ebene) sein, welche senkrecht zur Ebene steht, in der die Spannungen und Dehnungen berechnet werden sollen.

- c) Weiterhin wird die Annahme gemacht, daß im Solenoid ein ebener Spannungszustand vorliegt. Es sollen also keine Spannungen auftreten, die in Richtung der Magnetachse liegen.
- d) Die Stromdichteverteilung kann radial beliebig variieren, wobei nur eine Komponente in Umfangsrichtung auftreten soll. Der Magnet wird als quasihomogen betrachtet (Kap. 4). Ein Solenoid verhält sich i.a. mechanisch orthotrop, sodaß die hierfür geeigneten Materialgleichungen herangezogen werden müssen. Grundsätzlich wird elastisches Materialverhalten vorausgesetzt.

Obige Annahmen schreiben sich in mathematischer Form unter Verwendung des Koordinatensystems aus Abbildung 24, wie folgt:

aus a) Magnetfeld $\vec{B} = (B_R, B_\theta, B_z) = : (0, 0, B_z(R, \theta))$ (63)

b) Symmetrie $B_z(R, \theta) = B_z(R, -\theta)$ (64)

c) ebener Spannungszustand $\sigma_z = \sigma_{\theta z} = \sigma_{Rz} = 0$ (65)

d) Stromdichte $\vec{j} = (j_R, j_\theta, j_z) = : (0, j_\theta(R), 0)$ (66)

Die Materialgleichungen des orthotropen Körpers mit (65) in Zylinderkoordinaten lauten:

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \frac{E_\theta}{n - \nu_{\theta R}} (\epsilon_R + \nu_{\theta R} \epsilon_\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E_\theta}{n - \nu_{\theta R}} (\nu_{\theta R} \epsilon_R + n \epsilon_\theta) \end{aligned} \quad (67)$$

$$\sigma_{R\theta} = G_{R\theta} \epsilon_{R\theta}$$

wobei $n = \frac{E_\theta}{E_R}$, den Anisotropiegrad angibt;

E_θ : E-Modul in Umfangsrichtung

E_R : " in Radialrichtung

$\nu_{\theta R}$: Poissonzahl Umfangs-/Radialrichtung

$G_{R\theta}$: Schubmodul Radial-/Umfangsrichtung

8.3.2 Aufstellung des Differentialgleichungssystems

Mit (63), (65), (66) wird aus den Gleichgewichtsbedingungen (Ref. 14) für einen Körper in Zylinderkoordinaten:

$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{R\Theta}}{\partial \Theta} + \frac{1}{R} (\sigma_R - \sigma_\Theta) + j_\Theta B_z = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{R\Theta}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{2}{R} \sigma_{R\Theta} = 0$$
(68)

Zwischen den Dehnungen und den Verschiebungen besteht der Zusammenhang:

$$\epsilon_R = \frac{\partial u}{\partial R}; \quad \epsilon_\Theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \Theta} + u \right); \quad \epsilon_{R\Theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial R} - \frac{v}{R}$$
(69)

u gibt dabei die Verschiebung in Radial-, v die Verschiebung in Umfangsrichtung an.

Einsetzen von (67), (69) in (68) ergibt ein Differentialgleichungssystem für die Umfangs- und Radialverschiebungen u, v, welches zusammen mit den Randbedingungen das Problem vollständig bestimmt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial R} - n \frac{1}{R^2} u + a_1 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + a_2 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \Theta \partial R} - a_3 \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \Theta} + a_4 j_\Theta B_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial R} - \frac{1}{R^2} v + b_1 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2} + b_2 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta \partial R} + b_3 \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \Theta} = 0$$

(70)

$$a_1 = \frac{G_{\Theta R}}{E_{\Theta}} (n - v_{\Theta R}^2)$$

$$b_1 = \frac{E_{\Theta}}{G_{\Theta R}} \frac{n}{(n - v_{\Theta R}^2)}$$

$$a_2 = a_1 + v_{\Theta R}$$

$$b_2 = 1 + \frac{E_{\Theta} \cdot v_{\Theta R}^2}{G_{\Theta R} (n - v_{\Theta R}^2)}$$

$$a_3 = a_1 + n$$

$$b_3 = 1 + \frac{E_{\Theta} \cdot n}{G_{\Theta R} (n - v_{\Theta R}^2)}$$

Anisotropiegrad:

$$n = \frac{E_{\Theta}}{E_R}$$

$$a_4 = \frac{1}{E_{\Theta}} (n - v_{\Theta R}^2)$$

Die Lösungen u , v dieses Systems ergeben zusammen mit den Gleichungen (67) und (65) die gesuchten Dehnungen und Spannungen im Magneten.

Setzt man $R = R_0 e^t$ und multipliziert (70) mit R^2 durch, ergibt sich:

$$u_{tt} - n u - a u_{\Theta\Theta} + abv_{\Theta t} - acv_{\Theta} + H(t, \Theta) = 0 \quad (71)$$

$$v_{tt} - v + \frac{n}{a} v_{\Theta\Theta} + bu_{\Theta t} + cu_{\Theta} = 0$$

(Index bedeutet partielle Ableitung nach dem jeweiligen Parameter).

Dabei ist:

$$a = \frac{G_{\Theta R}}{E_{\Theta}} (n - v_{\Theta R}^2) ; b = 1 + \frac{E_{\Theta} v_{\Theta R}}{G_{\Theta R} (n - v_{\Theta R}^2)} ; c = 1 + \frac{E_{\Theta} n}{G_{\Theta R} (n - v_{\Theta R}^2)} \quad (72)$$

und

$$H(t, \Theta) = \frac{(n - v_{\Theta R}^2)}{E_{\Theta}} R_0^2 e^{2t} j_{\Theta}(t) B_z(t, \Theta) \quad (73)$$

8.3.3 Lösung des Differentialgleichungssystems

Das inhomogene Differentialgleichungssystem (71) ist gekoppelt und im allgemeinen nicht lösbar. Spezielle Lösungen finden sich, wenn man die Symmetrien des gestellten Problems untersucht:

Mit der Symmetrie des Magnetfeldes (64) folgt für (73):

$$H(t, \theta) = H(t, -\theta)$$

daneben gilt:

$$H(t, \theta) = H(t, \theta + 2\pi)$$

Wegen dieser Zylindersymmetrie liegt ein Ansatz über Fourierreihen nahe. Da $H(t, \theta)$ bekannt ist, läßt sich diese Funktion entwickeln:

$$H(t, \theta) = \frac{1}{2} F_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i(t) \cos(i\theta) \quad (74)$$

wobei

$$F_i(t) = \frac{1}{\pi} \frac{(n-v_{\theta R}^2)}{E_{\theta}} R_0^2 e^{2t} j_{\theta}(t) \int_{-\pi}^{+\pi} B_z(t, \theta) \cos(i\theta) d\theta$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

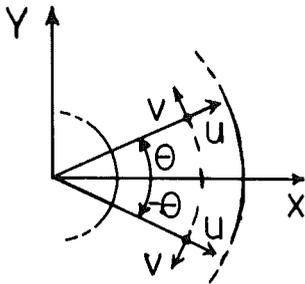


Abb. 25: Symmetrieverhältnisse für die Verschiebungen im Solenoid

Aufgrund der oben beschriebenen Symmetrieverhältnisse des Magnetfeldes müssen die Verschiebungen folgende Symmetrieeigenschaften besitzen (Abb. 25)

$$\begin{aligned} u(t, \theta) &= u(t, -\theta) \\ v(t, \theta) &= -v(t, -\theta) \end{aligned} \quad (75)$$

Dies führt zu dem Lösungsansatz

$$\begin{aligned} u(t, \theta) &= \frac{1}{2} X_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} X_i(t) \cos(i\theta) \\ v(t, \theta) &= \frac{1}{2} Y_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(t) \sin(i\theta) \end{aligned} \quad (76)$$

Die von t bzw. R abhängigen Funktionen $X_i(t)$, $Y_i(t)$ $i = 0, 1, 2, \dots$ müssen bestimmt werden.

Durch Einsetzen des Ansatzes (74), (76) in die Ausgangsdifferentialgleichungen (70) und Koeffizientenvergleiche der Reihen ergibt sich für jeden Laufindex $i = 0, 1, 2, \dots$ ein weiteres System (77), (78) von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Variablen t . Die Variable θ wurde also durch den Fourieransatz eliminiert.

$$X_0'' - nX_0 + F_0(t) = 0 \quad (77)$$

$$Y_0'' - Y_0 = 0$$

$$X_i'' - (n+ai^2)X_i + abiY_i' - aciY_i + F_i(t) = 0 \quad (78)$$

$$Y_i'' - (1 + \frac{n}{a}i^2)Y_i - biX_i' - ciX_i = 0$$

Die Gleichungen (77) besitzen die allgemeinen Lösungen (Ref. 27, S. 398):

$$X_0(t) = C_1^0 e^{\sqrt{n}t} + C_2^0 e^{-\sqrt{n}t} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_{t_0}^t F_0(\xi) \left(e^{-\sqrt{n}(t-\xi)} - e^{\sqrt{n}(t-\xi)} \right) d\xi \quad (79)$$

mit $t_0 = \ln(R_i/R_0)$ und R_i dem Innenradius des Solenoids und

$$Y_0(t) = C_3^0 e^t + C_4^0 e^{-t} \quad (80)$$

$C_1^0, C_2^0, C_3^0, C_4^0$ sind Konstanten, die durch Anpassung der Lösungen an die Randbedingungen des Problems gefunden werden können.

Durch Vergleich mit den Lösungen von Gray, Ballou (Ref. 6) stellt man fest, daß (79) die Radialverschiebungen eines Solenoids im axialsymmetrischen Magnetfeld sind. Die Umfangsverschiebungen $v(t, \theta)$ sind dann Null oder konstant.

Das Reihenglied nullter Ordnung der Fourierreihe (76) stellt den Fall eines axialsymmetrischen Magnetfeldes dar (nur radiale Abhängigkeit des Magnetfeldes vorhanden).

Die Gleichungen (78) lassen sich durch Einführung der Matrixschreibweise in eine lineare inhomogene Matrixdifferentialgleichung zweiter Ordnung (lineares System) umschreiben:

$$\underline{1} \ddot{\vec{y}}_i(t) + \underline{B}_i \dot{\vec{y}}_i(t) + \underline{C}_i \vec{y}_i(t) + \vec{f}_i(t) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (81)$$

mit

$$\vec{y}_i(t) = \begin{pmatrix} X_i(t) \\ Y_i(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{f}_i(t) = \begin{pmatrix} F_i(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (i \neq 0)$$

$$\underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \underline{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & abi \\ -bi & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{C}_i = \begin{pmatrix} -(n+a^2) & -aci \\ -ci & -(1+\frac{n_i^2}{a}) \end{pmatrix}$$

Die Lösungen geben die Abweichungen höherer Ordnung ($i=1,2,\dots$) der Endlösung (76) vom Fall eines axialsymmetrischen Magnetfeldes ($i=0$) an. Sie zu ermitteln erfordert einen beträchtlichen Rechenaufwand und soll, da keine wesentlich neuen Überlegungen hinzutreten, in aller Kürze angegeben werden. Die expliziten Endlösungen sind im Anhang V aufgeführt.

Die Lösung von (81) ergibt sich als Summe der Lösung der homogenen Gleichung ($\vec{f}_i(t)=\vec{0}$) und einer Speziallösung der inhomogenen Gleichung (81).

Die Lösung der homogenen Gleichung (Ref. 26, S. 392) ist eine Summe von e-Funktionen:

$$\vec{y}_i^{\text{hom}}(t) = \sum_{j=1}^4 \vec{c}_j^i e^{r_j^i \cdot t} \quad \vec{c}_j^i \neq \vec{0} \quad (82)$$

i ist hier ein Index!

\vec{c}_j^i ist ein Eigenvektor, r_j^i der zugehörige Eigenwert. Diese Größen findet man durch Einsetzen von (82) in (81). Es entsteht eine biquadratische Eigenwertgleichung. Für den Fall, daß alle Eigenwerte reell sind, ergibt sich als Lösung

$$\vec{y}_i^{\text{hom}}(t) = \sum_{j=1}^4 \alpha_j^i \vec{c}_j^E e^{r_j^i t} \quad (83)$$

mit

$$\vec{c}_j^E = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(br_j^i + c)}{((r_j^i)^2 - (1 + \frac{n}{a} i^2))} \end{pmatrix} \quad (84)$$

$i = 1, \dots, \infty$ (Laufindex der Fourierreihe)

$j = 1, \dots, 4$ (Index des Eigenwerts)

$$r_1^i = \sqrt{P} + \frac{1}{2} \sqrt{Q} ; \quad r_2^i = \sqrt{P} - \frac{1}{2} \sqrt{Q} ; \quad r_3^i = -r_1^i ; \quad r_4^i = -r_2^i \quad (85)$$

$$\text{mit } P = -\frac{1}{2} \left((ab^2 - \frac{n}{a} - a) i^2 - (1+n) \right)$$

$$Q = \left((ab^2 - \frac{n}{a} - a) i^2 - (1+n) \right)^2 - 4 \left(1 + \frac{n}{a} i^2 \right) (n + ai^2)$$

α_j^i sind Konstanten, die durch Anpassung an die Randbedingungen gefunden werden.

Die Speziallösung für die inhomogene Gleichung ($\vec{f}_i(t) \neq \vec{0}$) findet man z.B. durch Anwendung der Operatorenmethode (Ref. 28, S. 100/110). Dabei wird der Operator $D = \frac{d}{dt}$ bzw. $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ als formale Größe behandelt.

Das System (81) läßt sich mit dieser Schreibweise formal auflösen. Man erhält mit

$$D' = (D^2 - (n+ai^2)) (D^2 - (1 + \frac{n}{a} i^2)) + (abiD - aci) (biD + ci)$$

$$\vec{y}_i^{\text{inh}}(t) = \begin{pmatrix} x_i^p \\ y_i^p \end{pmatrix} = \frac{1}{D'} \cdot \begin{pmatrix} (D^2 - (1 + \frac{n}{a} i^2)) (-F_i(t)) \\ (biD + ci) (-F_i(t)) \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung einer Partialbruchzerlegung in vier Terme mit den Konstanten $A_1, \dots, 4$ und $B_1, \dots, 4$, sowie der Identität

$$\frac{1}{(D - r_j^i)} (-F_i(t)) = e^{r_j^i t} \int_{t_0}^t e^{-r_j^i \xi} (-F_i(\xi)) d\xi \quad (\text{Ref. 28, S.106})$$

erhält man als Speziallösung:

$$\vec{y}_i^{\text{inh}}(t) = - \sum_{j=1}^4 \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} \exp(r_j^i t) \int_{t_0}^t \exp(-r_j^i \xi) F_i(\xi) d\xi \quad (86)$$

$$r_1^i = -r_3^i \quad \text{und} \quad r_2^i = -r_4^i \quad (\text{vgl. (85)})$$

Die Konstanten A_j und B_j sind im Anhang angegeben.

Summe von Speziallösung (86) und homogener Lösung (83) in (76) eingesetzt, ergibt die Endlösung für die Verschiebungen u, v in den Variablen $t = \ln(R/R_0)$ und θ .

Um die willkürlichen Konstanten C_j^0 aus (79) und (80) und α_j^i aus (83) an die Randbedingungen anzupassen, werden acht Bestimmungsgleichungen benötigt. Sie können etwa mit der Annahme gewonnen werden, der Magnet drücke gegen eine Zentralsäule (Abb. 24), wie sie im Tokamakreaktor vorhanden ist. Da die Auflösung dieses Gleichungssystems sehr aufwendig ist, wird auf diese Darstellung verzichtet.

Durch Einsetzen der Lösungen für die Verschiebungen in die Gleichungen (69) ergeben sich die Dehnungen und über die Materialgleichungen (67) die Spannungen im Magneten.

Somit stehen zur Spannungs-Dehnungsberechnung von Solenoiden in inhomogenen Magnetfeldern, die spiegelsymmetrisch zu einer Ebene in Axialrichtung des Magneten sind, analytische Lösungen zur Verfügung. Es sind Fourierreihen, deren Koeffizienten radiusabhängig sind und durch Anwendung der Theorie linearer Systeme aus einem gekoppelten Differentialgleichungssystem gefunden wurden. Die Reihenglieder nullter Ordnung geben die Lösungen für den Fall eines axialsymmetrischen Magnetfeldes an.

Bei Finite-Elemente-Programmen für die Spannungs-Dehnungsberechnung in inhomogenen Magnetfeldern tritt z.B. die Frage auf, wieweit die Umwandlung der Lorentz-Kräfte in Knotenkräfte die Genauigkeit der Ergebnisse beeinflusst. Dies kann mit den vorliegenden Lösungen geklärt werden.

9. Ausblick

Die vorgestellte Methode zur Berechnung des effektiven Elastizitätstensors ersetzt die Mischungsregel. Ihre Genauigkeit muß weiter durch Finite-Element-Rechnungen oder Messungen an Magneten überprüft werden.

Daneben bleibt noch die Frage offen, wieweit die tatsächlich im Magneten auftretenden Spannungen und Dehnungen von den berechneten Volumenmittelwerten abweichen. Dies ist im Hinblick auf mögliche plastisch deformierte Bereiche für die Auslegung eines Magneten von Bedeutung. Daher kann es wünschenswert werden, eine erweiterte Theorie, die elastisch-plastisches Materialverhalten mit einbezieht, zur Verfügung zu haben.

Die vorgestellte analytische Spannungs-Dehnungsberechnungsmethode sollte hinsichtlich der Genauigkeit und Konvergenz der Fourierreihen mit Finite-Element-Rechnungen verglichen werden.

10. Zusammenfassung

Während bei der Untersuchung des mechanischen Verhaltens normalleitender Magnete vor allem die Festigkeitsmäßige Auslegung im Vordergrund steht, muß bei supraleitenden Magneten zusätzlich die Forderung beachtet werden, einen Quench der Spule zu vermeiden. Da ein solcher Übergang in die Normalleitung letztlich durch alle Spannungs- und Dehnungsarten verursacht werden kann, müssen insbesondere bei supraleitenden Großmagneten, etwa für Fusionsanwendungen, möglichst alle mechanischen Belastungen erfasst werden. Aus Rechenzeit- und Speicherplatzgründen sind in der Finite-Element-Rechnung aber Beschränkungen in der Diskretisierung des Windungsquerschnitts (Magnetkomposits) notwendig. In den Elementvolumina muss der Magnet als homogen aufgefaßt werden. Der gesamte Magnet ist jedoch nicht homogen, da seine Leiterwindungen gekrümmt sind. Deshalb müssen die Elementvolumina so gewählt werden, daß diese Krümmung vernachlässigt werden kann.

Für die Berechnung der Materialeigenschaften kann der Begriff des effektiven Elastizitätstensors herangezogen werden. Er stellt den Zusammenhang zwischen den Volumennittelwerten der Spannungen und Dehnungen im jeweiligen Teilvolumen her. Aus seiner allgemeinen Definition ergibt sich, daß die bisher verwandte Mischungsregel nur eine lineare Näherung ist, die für Kleinmagnete ausreicht. Bei Großmagneten versagt sie wegen des komplizierten inneren Aufbaus des Magnetkomposits. Zwar kann dort der effektive Elastizitätstensor auch durch Finite-Element-Rechnungen ermittelt werden, jedoch würde das einen erheblichen Rechenaufwand erfordern. Um dies zu vermeiden wurde eine wesentlich einfachere Berechnungsmethode entwickelt, die auch die Anisotropie des Magnetkomposits einbezieht. Dazu wird ein Tensorintegralgleichungssystem gelöst, das sich über ein unendliches Volumen erstreckt. Dies ermöglicht Lösungen, die unabhängig von den vorgegebenen Randbedingungen und von der Volumenform sind. Zusätzlich ist das Gleichungssystem dadurch vereinfacht.

Die Anwendung dieser ursprünglich für makroskopisch homogene Materialien entwickelten Gleichung erfordert zum einen den Aufbau eines günstigen, möglichst einfachen numerischen Verfahrens zur Lösung, zum anderen die Untersuchung, ob sich damit für die in Frage stehenden endlichen Teilvolumina von Magnetkompositen sinnvolle Näherungswerte ergeben.

Dies wurde erreicht durch die Wahl der einfachst möglichen Greensfunktion, der Reduktion der Tensorintegralgleichung 4. Stufe zu einer Matrizenintegralgleichung aus symmetrischen Eingabematrizen und der numerischen Lösung durch klassische Diskretisierung. Zur Bestimmung des effektiven Elastizitätstensors genügt es letztlich eine Übermatrix aufzustellen, zu invertieren und nach (6×6) -Untermatrizen aufzusummieren. Unter Benutzung des Reuss- und Voigtensors als ersten Näherungstensor liefert das Verfahren alle technischen Konstanten.

Der Vergleich mit einer exakten Lösung zeigt bei grober Diskretisierung maximale Abweichungen von 7%. Insbesondere ergibt sich die Anisotropieform des Komposits. Die Genauigkeit der Methode hängt von der Größe des Kompositvolumens und der Feinheit der Diskretisierung ab.

Damit kann die Tensorintegralgleichung von Korringa zur Berechnung des effektiven Elastizitätstensors beliebig aufgebauter und zusammengestellter Magnetkomposite, auch mit endlicher Teilvolumina, herangezogen werden. Sie beschränkt sich auf elastisches Materialverhalten.

Die von Korringa alternativ angegebene Iterationsmethode führt für praktische Anwendungen zu keinen vernünftigen Näherungstensoren.

Mit dem effektiven Elastizitätstensor gelangt man durch eine Spannungs-Dehnungsrechnung zu Abhängigkeiten des erreichbaren Zentralfeldes eines supraleitenden Solenoids vom Anisotropiegrad des Magnetkomposits und von der Geometrie des Magneten. Bis zu einem Verhältnis Außen- zu Innenradius von $\alpha = 3$ kann ein solcher Magnet ohne Berücksichtigung eines anisotropen Materialverhaltens ausgelegt werden. Dickere Magnete zeigen eine Zunahme des maximal erreichbaren Zentralfeldes mit dem Anisotropiegrad, jedoch überschreitet es ein Maximum.

Zur Ermittlung der Genauigkeit der FEM-Rechnungen in Tokamakmagneten kann die entwickelte analytische Spannungs-Dehnungsrechnung beitragen. Mit ihr wurde eine Methode gefunden auch in inhomogenen Magnetfeldern vom Tokamaktyp die Spannungen und Dehnungen in einem Solenoiden mit anisotropem Materialverhalten unter Berücksichtigung von Scherungen analytisch zu berechnen. Dazu werden die herrschenden Symmetrieverhältnisse mittels Fourierreihen ausgenützt.

ANHANG

I. Erweiterung des Green'schen Satzes in Kap. 5.2

Hier soll gezeigt werden, daß durch Anwendung des Green'schen Satzes in der Form

$$\int_V \phi \operatorname{div} \vec{A} \, dV = - \int_V \vec{A} \operatorname{grad} \phi \, dV + \oint_S \phi \vec{A} \, d\vec{s} \quad (a)$$

die Beziehung (16) aus Kapitel 5.2 gewonnen werden kann. Dabei ist ϕ eine Skalar-, \vec{A} eine Vektorfunktion.

Die linke Seite von Gleichung (16) lautet:

$$\int_{V'} G_{ik}(\vec{x}-\vec{x}') F_{ij}^O(\vec{x}') u_j^O(\vec{x}') d^3x' - \int_{V'} u_i^O(\vec{x}') F_{ij}^O(\vec{x}') G_{jk}(\vec{x}-\vec{x}') d^3x' := I_1 - I_2$$

Mit der Definition von F^O (14) (Ableitungen sind im gestrichenen Koordinatensystem angegeben) wird:

$$I_1 = \int_{V'} G_{ik} \partial_m C_{imnj}^O \partial_n u_j^O d^3x' = \int_{V'} G_{ik} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{i1nj}^O \partial_n u_j^O \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} d^3x'$$

Mit (a) ergibt sich daraus:

$$I_1 = - \int_{V'} \begin{pmatrix} C_{i1nj}^O \partial_n u_j^O \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 G_{ik} \\ \partial_2 \dots \\ \partial_3 \dots \end{pmatrix} d^3x' + \oint_{S'} G_{ik} \begin{pmatrix} C_{i1nj}^O \partial_n u_j^O \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} d^2x' =$$

$$= - \int_{V'} C_{imnj}^O \partial_n u_j^O \partial_m G_{ik} d^3x' + \oint_{S'} G_{ik} C_{imnj}^O \partial_n u_j^O n_m d^2x' ;$$

Analog findet man für

$$I_2 = - \int_{V'} C_{imnj}^O \partial_n G_{jk} \partial_m u_i^O d^3x' + \oint_{S'} u_i^O C_{imnj}^O \partial_n G_{jk} n_m d^2x' ;$$

Daher wird

$$\begin{aligned}
 I_1 - I_2 = & \int_{V'} (C_{imnj}^{\circ} \partial_n G_{jk} \partial_m u_i^{\circ} - C_{imnj}^{\circ} \partial_n u_j^{\circ} \partial_m G_{ik}) d^3 x' + \\
 & + \int_{S'} (G_{ik} C_{imnj}^{\circ} \partial_n u_j^{\circ} n_m - u_i^{\circ} C_{imnj}^{\circ} \partial_n G_{jk} n_m) d^2 x'
 \end{aligned} \tag{b}$$

In diesem Ausdruck verschwindet das Volumenintegral. Dies läßt sich durch Umbenennung der Indizes im 2. Summanden dieses Integrals zeigen:

$$i \leftrightarrow j, n \leftrightarrow m$$

Damit folgt:

$$\int_{V'} \dots d^3 x' = \int_{V'} (C_{imnj}^{\circ} \partial_n G_{jk} \partial_m u_i^{\circ} - C_{jnmi}^{\circ} \partial_n G_{jk} \partial_m u_i^{\circ}) d^3 x' \tag{c}$$

und mit $C_{imnj}^{\circ} = C_{jnmi}^{\circ}$ ist dieses Volumenintegral Null.

Mit (b) und (c) ist damit Beziehung (16) aus Kap. 5.2 bewiesen

II. Berechnung des Oberflächenintegrals aus Kap. 6.1.1

Beh.:

$$\oint_S \partial_n G_{jk} n_m d^2 \hat{x} = - \frac{4}{3} \pi g_{jk} \delta_{nm}$$

Beweis:

o. B. d. A. kann S als Kugeloberfläche um den Quellpunkt \vec{x}' gewählt werden. Mit der Annahme für $G_{jk} = g_{jk} |\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$ folgt:

$$\oint_S \partial_n G_{jk} n_m d^2 \hat{x} = g_{jk} \oint_S \partial_n |\vec{x} - \vec{x}'|^{-1} n_m d^2 \hat{x} = - \oint_S \frac{(x_n - x'_n)}{R^3} n_m d^2 \hat{x} \cdot g_{jk}$$

Verschiebt man den Ursprung in den Punkt \vec{x}' , wird daraus:

$$= g_{jk} \oint \frac{x_n}{R^3} n_m d^2 \hat{x} = - g_{jk} \oint \frac{x_n}{R^3} n_m R^2 \sin \theta d\theta d\phi := - g_{jk} \phi_{nm} ;$$

Mit $x_1 = R \sin \theta \cos \phi$	$n_1 = \sin \theta \cos \phi$
$x_2 = R \sin \theta \sin \phi$	$n_2 = \sin \theta \sin \phi$
$x_3 = \cos \theta$	$n_3 = \cos \theta$

wird

$$\phi_{11} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \cos^2 \phi d\theta d\phi = \frac{4}{3} \pi ;$$

$$\phi_{22} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \sin^2 \phi d\theta d\phi = \frac{4}{3} \pi ;$$

$$\phi_{33} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \cos^2 \phi d\theta d\phi = \frac{4}{3} \pi ;$$

$\phi_{nm} = 0$, für alle $n \neq m$.

Daher ist $\phi_{nm} = \frac{4}{3} \pi \delta_{nm}$ q.e.d.

III. Symmetriebeziehungen des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes und die Voigt'sche Schreibweise

a) Symmetriebeziehungen

Behauptung: Aus $A_{ij} = B_{ijkl} C_{kl}$ und

$$A_{ij} = A_{ji} \text{ , sowie } C_{kl} = C_{lk}$$

$$\text{folgt: } B_{ijkl} = B_{jikl} = B_{ijlk}$$

$$(i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

Beweis: Mit der Symmetrie von \underline{C} wird

$$A_{ij} = B_{ijkl} C_{kl} = B_{ijkl} C_{lk}$$

Umbenennung $l \leftrightarrow k$ ergibt:

$$A_{ij} = B_{ijlk} C_{kl}$$

$$\text{dann folgt: } B_{ijkl} = B_{ijlk}$$

Wegen der Symmetrie von \underline{A} wird:

$$A_{ij} = B_{ijkl} C_{kl} = A_{ji} = B_{jikl} C_{kl}$$

$$\text{Damit folgt: } B_{ijkl} = B_{jikl} \quad \text{q.e.d.}$$

b) Umwandlung des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes in die Voigt'sche Schreibweise

Sinn der Voigt'schen Schreibweise ist es , den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen, wie es das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz vorschreibt

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{a})$$

durch eine symmetrische (6×6)-Matrix angeben zu können.

Dadurch genügen zur Angabe der Materialeigenschaft statt der 81 Konstanten aus der Darstellung in einem Tensor 4. Stufe, 21 unabhängige Konstanten.

Das Gleichungssystem (a) enthält 9 Gleichungen $i, j = 1, 2, 3$. Wegen der Symmetrie $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ können o.B.d.A. drei Gleichungen gestrichen werden. In jeder der sechs verbleibenden Gleichungen können wegen der Symmetrie $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ Terme mit gemischten Indizes $k, l = 1, 2, 3$ zusammengefasst werden.

Wegen der Symmetrie $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ ergibt sich z.B.:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \dots + C_{ij12} \varepsilon_{12} + C_{ij21} \varepsilon_{21} + C_{ij13} \varepsilon_{13} + C_{ij31} \varepsilon_{31} + \dots \\ &= \dots + 2C_{ij12} \varepsilon_{12} + 2C_{ij13} \varepsilon_{13} + \dots\end{aligned}$$

Dieses System enthält sechs Spannungskomponenten und sechs Dehnungskomponenten. Werden mit den auftretenden Faktoren "2" und den drei gemischten Dehnungskomponenten neue Dehnungskomponenten gebildet, kann man die verbleibenden Gleichungen in einer Matrixgleichung angeben

$$\vec{\sigma} = \underline{C} \vec{\varepsilon}' \quad (b)$$

in der $\vec{\sigma}$ ein Vektor mit den sechs Spannungskomponenten

$$\vec{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12})$$

$\vec{\varepsilon}'$ ein Vektor mit den sechs Dehnungskomponenten

$$\vec{\varepsilon}' = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12})$$

ist.

Die (6x6)-Matrix \underline{C} ist symmetrisch und enthält die verbleibenden Konstanten C_{ijkl} mit $ij, kl = 11, 22, 33, 31, 12$.

Nach Ummummerierung der Einzelkomponenten gilt:

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$$

$$\vec{\varepsilon}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 2\varepsilon_4, 2\varepsilon_5, 2\varepsilon_6)$$

Im Kapitel 6. wird

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 = \varepsilon_1' \qquad 2\varepsilon_4 := \varepsilon_4'$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = \varepsilon_2' \qquad 2\varepsilon_5 := \varepsilon_5'$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_3 = \varepsilon_3' \qquad 2\varepsilon_6 := \varepsilon_6'$$

Beziehung (b) wird dann:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j' \qquad i, j = 1, \dots, 6$$

IV. Aufbau und Konvergenz des Iterationsverfahrens nach Korringa

Korringa geht in seinem alternativen Lösungsverfahren von der Überlegung aus, daß ein Wahltensor $\underline{\underline{C}}^0$ für den $\langle \underline{\underline{q}} \rangle = \underline{\underline{0}}$ wird, wegen der Beziehung (20) der effektive Elastizitätstensor $\underline{\underline{C}}^{\text{eff}}$ des unendlichen Volumens ist:

$$\underline{\underline{C}}^{\text{eff}} = \underline{\underline{C}}^0 + \langle \underline{\underline{q}} \rangle := \underline{\underline{C}}^0$$

$\underline{\underline{q}}(\vec{x})$ ist die Lösung der Gleichung von Korringa (17).

Wird $\underline{\underline{C}}^{\text{eff}}$ als Wahltensor $\underline{\underline{C}}^0$ in diese Gleichung eingesetzt, muß sich $\langle \underline{\underline{q}} \rangle = \underline{\underline{0}}$ und damit wieder $\underline{\underline{C}}^{\text{eff}}$ ergeben. Bezeichnet man dieses Verfahren durch einen Operator O , so bedeutet die Bestimmung von $\underline{\underline{C}}^{\text{eff}}$, denjenigen Wahltensor $\underline{\underline{C}}^0$ zu finden, auf den der Operator O angewandt wiederum $\underline{\underline{C}}^0$ ergibt.

$$\underline{\underline{C}}^{\text{eff}} := \underline{\underline{C}}^0 = O\underline{\underline{C}}^0$$

(a)

$\underline{\underline{C}}^0$ heißt Fixpunkt des Operators O .

O. B. d. A. kann zur Bestimmung von $\underline{\underline{q}}(\vec{x})$ in der Gleichung (17) schon $\langle \underline{\underline{q}} \rangle = \underline{\underline{0}}$ eingesetzt werden.

Ist der Operator geeignet beschaffen, kann der gesuchte Tensor $\underline{\underline{C}}^0$ durch sukzessive Approximation gewonnen werden. Dazu muß aber die über den Operator O definierte Lösung von (17) gefunden werden.

Hier bietet sich das in Kap. 6 entwickelte Lösungsverfahren an. Es wird daher zur Bestimmung von $\underline{\underline{q}}$ verwendet.

In diesem Fall wird der effektive Elastizitätstensor in Voigt'scher Schreibweise angegeben.

Wegen $\langle \underline{q} \rangle = \underline{0}$ in (47) ergeben sich dann als Eingabematrizen für \underline{A} in (48):

$$\underline{a}_{ij} = \begin{cases} \frac{v}{\Delta V_i} ((\underline{D}')^{-1}(\vec{x}_i) - \underline{\Gamma}') & \text{für } i=j \\ v \cdot \underline{T}'(\vec{x}_i - \vec{x}_j) & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (b)$$

Nach Wahl eines Starttensors \underline{c}_0^0 kann ein weiterer Tensor \underline{c}_1^0 über

$$\underline{c}_1^0 = O \underline{c}_0^0$$

gefunden werden, der wieder als Eingangstensor für den Operator O dienen kann. Dieses Iterationsverfahren (sukzessive Approximation)

$$\underline{c}_i^0 = O \underline{c}_{i-1}^0 \quad i=1,2,\dots$$

liefert $\underline{c}^{\text{eff}}$, falls $\underline{c}_i^0 \rightarrow \underline{c}^0$ konvergiert.

Nach dem Fixpunktsatz (Ref. 22) ist das genau dann der Fall, wenn für beliebige Tensoren $\underline{X}, \underline{Y}$ eine Konstante $\rho < 1$ existiert, mit

$$\| O\underline{X} - O\underline{Y} \| \leq \rho \| \underline{X} - \underline{Y} \| \quad (c)$$

Dann gibt es genau eine Lösung für (a).

Insbesondere muß dann für das Iterationsverfahren gelten:

$$\| \underline{c}_{i+2}^0 - \underline{c}_{i+1}^0 \| \leq \rho \| \underline{c}_{i+1}^0 - \underline{c}_i^0 \| \quad i=0,1,2,\dots$$

Es zeigt sich nun, daß bei Anwendung des durch den Operator O beschriebenen Lösungsverfahrens in der Praxis keineswegs Konvergenz der Iteration eintritt. Die Bedingungen, unter denen Konver-

genz eintritt, können aber nicht untersucht werden, da der allgemeine Beweis für die Existenz einer Lipschitzkonstanten ρ für den Operator O schwierig, wenn nicht sogar unmöglich ist.

Es zeigte sich aber, daß der effektive Elastizitätstensor gefunden werden konnte, wenn man einen Konvergenzfaktor ω einführt. Statt die Lösung von (49) zu bestimmen, wurde die Lösung \underline{W}' von

$$\omega \cdot \underline{A} \cdot \underline{W}' = \underline{1}' \quad (d)$$

gesucht und damit die Iteration durchgeführt.

Bei entsprechender Wahl von ω trat Konvergenz ein.

Man findet also ein \underline{C}^0 , mit dem die Lösungen \underline{w}'_i aus (d) gerade $\sum_i \underline{w}'_i = \underline{0}$ ergeben. Dieser Matrix \underline{C}^0 führt aber in (49) ($\omega = 1$) zu einer Lösung mit $\sum_i \underline{w}_i = \sum_i \omega \underline{w}'_i = \underline{0}$, ist also der gesuchte Fixpunkt des Operators O .

Ein exakter Beweis, daß die Konvergenz durch Einstellen von ω immer erreicht werden kann, ist nicht möglich. Der Erfolg des Iterationsverfahrens hängt letztlich davon ab, ob die Matrix \underline{A} in diesem Sinne vernünftig ist.

Bei der Anwendung des Iterationsverfahrens auf das erwähnte Testkomposit führten Konvergenzfaktoren von 100 - 1000 zur Konvergenz.

V. Lösungen aus Kap. 8.3

R, θ gegeben wie in Abb. 24

$$t = \ln(R/R_0)$$

Verschiebungen

$$u(t, \theta) = \frac{1}{2} X_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} X_i(t) \cos(i\theta)$$

$$v(t, \theta) = \frac{1}{2} Y_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(t) \sin(i\theta)$$

Dehnungen

$$\epsilon_R(t, \theta) = \frac{1}{R_0} e^{-t} \left(\frac{1}{2} X_0'(t) + \sum_{i=1}^{\infty} X_i'(t) \cos(i\theta) \right)$$

$$\epsilon_{\theta}(t, \theta) = \frac{1}{R_0} e^{-t} \left(\frac{1}{2} X_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (X_i(t) + iY_i(t)) \cos(i\theta) \right)$$

$$\epsilon_{R\theta}(t, \theta) = \frac{1}{R_0} e^{-t} \left(\frac{1}{2} Y_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (Y_i'(t) - iX_i(t)) \sin(i\theta) \right)$$

$$X_i' = \frac{dX}{dt} \text{ etc.}$$

Spannungen

$$\sigma_R(t, \theta) = \frac{E_{\theta}}{(n - \nu_{\theta R}^2)} \frac{1}{R_0} e^{-t} \left(\frac{1}{2} (\nu_{\theta R} X_0(t) + X_0'(t)) + \sum_{i=1}^{\infty} (\nu_{\theta R} X_i(t) + X_i'(t) + i\nu_{\theta R} Y_i(t)) \cos(i\theta) \right)$$

$$\sigma_{\theta}(t, \theta) = \frac{E_{\theta}}{(n - \nu_{\theta R}^2)} \frac{1}{R_0} e^{-t} \left(\frac{1}{2} (n X_0(t) + \nu_{\theta R} X_0'(t)) + \sum_{i=1}^{\infty} (n X_i(t) + \nu_{\theta R} X_i'(t) + i n Y_i(t)) \cos(i\theta) \right)$$

$$\sigma_{R\theta}(t, \theta) = G_{R\theta} \frac{1}{R_0} e^{-t} \left(\frac{1}{2} Y_0'(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (Y_i'(t) - iX_i(t)) \sin(i\theta) \right)$$

$$X_0(t) = C_1^0 e^{\sqrt{n}t} + C_2^0 e^{-\sqrt{n}t} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_{t_0}^t F_0(\xi) (e^{-\sqrt{n}(t-\xi)} - e^{\sqrt{n}(t-\xi)}) d\xi$$

$$Y_0(t) = C_3^0 e^t + C_4^0 e^{-t}$$

$$\vec{Y}_i(t) = \vec{Y}_i^{\text{hom}} + \vec{Y}_i^{\text{inh}} = \begin{pmatrix} X_i(t) \\ Y_i(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^4 \alpha_j^i \vec{C}_j^E e^{r_j^i t} - \sum_{j=1}^4 \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} \exp(r_j^i t) \int_{t_0}^t \exp(-r_j^i \xi) F_i(\xi) d\xi$$

(Beachte: In der letzten Gleichung ist i ein Index!)

Dabei sind C_j^0 und α_j^i anzupassende Konstanten.

$$\vec{C}_j^E = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(br_j^i + c)}{(r_j^i)^2 - (1 + \frac{n}{a}i^2)} \end{pmatrix} \quad j=1, \dots, 4 \quad i=1, \dots, \infty$$

$$A_1 = \frac{(r_j^i)^2 - (1 + \frac{n}{a}i^2)}{2r_1^i((r_1^i)^2 - (r_2^i)^2)} ; \quad A_3 = -A_1 ;$$

$$A_2 = \frac{-((r_2^i)^2 - (1 + \frac{n}{a}i^2))}{2r_2^i((r_1^i)^2 - (r_2^i)^2)} ; \quad A_4 = -A_2 ;$$

$$B_1 = \frac{i(br_1^i + c)}{2r_1^i((r_1^i)^2 + (r_2^i)^2)} ; \quad B_3 = \frac{i(br_1^i - c)}{2r_1^i((r_1^i)^2 - (r_2^i)^2)} ;$$

$$B_2 = \frac{-i(br_2^i + c)}{2r_2^i((r_1^i)^2 - (r_2^i)^2)} ; \quad B_4 = \frac{i(c - br_2^i)}{2r_2^i((r_1^i)^2 - (r_2^i)^2)} ;$$

$$r_1^i = \sqrt{P + \frac{1}{2}\sqrt{Q}} ; \quad r_2^i = \sqrt{P - \frac{1}{2}\sqrt{Q}} ; \quad r_3^i = -r_1^i ; \quad r_4^i = -r_2^i ;$$

und

$$P = -\frac{1}{2}((ab^2 - \frac{n}{a} - a)i^2 - (1+n))$$

$$Q = P^2 - 4(1 + \frac{n}{a}i^2)(n + ai^2)$$

$$a = \frac{G_{\theta R}}{E_{\theta}}(n - v_{\theta R}^2) ; \quad b = 1 + \frac{E_{\theta} v_{\theta R}^2}{G_{\theta R}(n - v_{\theta R}^2)} ;$$

$$c = 1 + \frac{E_{\theta} n}{G_{\theta R}(n - v_{\theta R}^2)} ; \quad n = \frac{E_{\theta}}{E_R} ;$$

$$F_i(t) = \frac{(n - v_{\theta R}^2)}{\pi E_{\theta}} R_0^2 e^{2t} j_{\theta}(t) \int_{t_0}^t B_z(t, \theta) \cos(i\theta) d\theta ;$$

$$i=0, 1, 2, 3, \dots$$

Bemerkung: Die angegebenen Lösungen gelten nur für den Fall

$$P \geq 0 \quad \text{und} \quad (P \pm \frac{1}{2}\sqrt{Q}) \geq 0 ,$$

d.h. alle Eigenwerte r_j^i sind reell!

- E_{θ} : E-Modul in Umfangsrichtung
- E_R : E-Modul in Radialrichtung
- $\nu_{\theta R}$: Poissonzahl Umfangs-/Radialrichtung
- $G_{R\theta}$: Schubmodul Radial-/Umfangsrichtung
- j_{θ} : Stromdichte in Umfangsrichtung
- B_z : z-Komponente des Magnetfeldes

Anmerkung zu Kap. 6.3:

Daß dies prinzipiell der Fall ist, konnte theoretisch nicht nachgewiesen werden. Hierzu müßte eine Abschätzung zwischen den Hauptdiagonalelementen und den Zeilensummen der Nebenelementen (Hadamard'sche Matrix [29]) vorgenommen werden. Betrachtet man die Größenordnung der vorkommenden Matrizen, ergibt sich die Vermutung, daß die Matrix A immer nichtsingulär ist. In allen berechneten Fällen war dies erfüllt.

Literaturverzeichnis

- | 1| J.W. Ekin, A.F. Clark
Effect of Strain on the Critical Current of Nb₃Sn
and NbTi Multifilamentary Composite Wires
Proceedings of the Magnetism and Materials Conference
Pittsburgh, USA (1976)

- | 2| P. Komarek, H. Krauth
'The Large Coil Task', an International Contribution
for the Development of Superconducting Magnets for
Nuclear Fusion
Kerntechnik 20, (1978), 6, S. 274-81

- | 3| J. Erb, H. Zehlein
Finite Element Structure Analysis of Coil and Casing
of a Large Superconducting Toroidal LCT-Magnet
Transactions on the 5th International Conference on
Structural Mechanics on Reactor Technology,
N. 2.1/4, Berlin 13.-17. Aug. (1979)

- | 4| F. Arendt, C.H. Dustmann, G. Friesinger
An Approach to the Modelling of TESPE-Coils for
FEM-Calculations
Proceedings of the 7th Symposium on Engineering Problems
of Fusion Research, Knoxville, USA, Oct. 25.-28.,
(1977), p. 767-71

- | 5| J. Korringa
Theory of Elastic Constants of Heterogeneous Media
J. of Math. Phys., Vol. 14, No.4, (1973), p. 509-13

- | 6| W.H. Gray, J.K. Ballou
Electromechanical Stress Analysis of Transversely
Isotropic Solenoids
J. of Appl. Phys., Vol. 48, No.7, (1977), p. 3100-9

- | 7 | J.D. Achenbach
A Theory of Elasticity with Microstructure for
Directionally Reinforced Composites
Springer-Verlag Wien/New York (1975)
- | 8 | R. Hill
Elastic Properties of Reinforced Solids: Some
Theoretical Principles
J. Mech. Phys. Solids 11, (1963), p. 357
- | 9 | Zienkiewicz
The Finite Element Method
McGraw Hill, London (1971)
- | 10 | G.W. Postma
Wavepropagation in a Stratified Medium
Geophysics 20, (1955), p. 780-806
- | 11 | W. Voigt
Lehrbuch der Kristallphysik
Teubner-Verlag, Berlin (1910)
- | 12 | A. Reuss
Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen
auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle
Z. f. Angewandte Math. Mech. 9, (1929), p.49
- | 13 | R. Hill
The Elastic Behaviour of an Crystalline Aggregate
Proc. Phys. Soc. A 65, (1952), p. 349
- | 14 | S.G. Lekhnitskii
Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body
Holden Day, San Francisco (1963)

- | 15| Z. Hashin, S. Shtrikman
A Variational Approach to the Theory of Elastic
Behaviour of Multiphase Materials
J. Mech. Phys. Solids, 11, (1963), p. 127-40
- | 16| Z. Hashin
Theory of Composite Materials
Proceedings of the 5th Symposium on Naval Structural
Mechanics
Philadelphia, USA, May 8.-10. (1967)
- | 17| M.J. Beran
Application of Statistical Theories to
Heterogeneous Materials
Phys. Stat. Sol. (a), 6, (1971), p. 365-84
- | 18| W.F. Weston
Low-Temperature Elastic Constants of a Super-
conducting Coil Composite
J. of Appl. Phys., Vol.46, No. 10, (1975), p. 4458-65
- | 19| C. Schäfer, M. Päsler
Einführung in die theoretische Physik, Bd.1 Mechanik
W. de Gruyter&Co., Berlin (1970)
- | 20| P.M. Morse, H. Feshbach
Methods of Theoretical Physics, Part I
McGraw Hill Book Company, New York/Toronto/London (1953)
- | 21| W. Gröbner
Matrizenrechnung
Oldenbourg-Verlag München (1956)
- | 22| W. Walter
Gewöhnliche Differentialgleichungen, HTB 110
Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York (1972)

- | 23 | J.R. Bunch, B.N. Parlett
Direct Methods of Solving Symmetric Indefinite
Systems of Linear Equations
SIAM J. of Numer. Anal., 8, (1971), p. 639-55

- | 24 | C.H. Dustmann
TESPE, a Small Superconducting Compact Torus
Proceedings of the 7th Symposium on Engineering
Problems of Fusion Research, Knoxville, USA,
Oct. 25.-28., (1977), p. 339-43

- | 25 | V. Arp
Stresses in Superconducting Solenoids
J. of Appl. Phys., Vol.49, No.5, (1977), p. 2026-36

- | 26 | D.B. Montgomery
Solenoid Magnet Design
J. Wiley & Sons, New York (1969)

- | 27 | I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew
Taschenbuch der Mathematik
Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main (1972)

- | 28 | W.I. Smirnow
Lehrgang der höheren Mathematik, Teil II
2. Aufl., VEB-Verlag, Berlin (1958)

- | 29 | J. Naas, H.L. Schmid
Mathematisches Wörterbuch Bd. 1 (1961)

Symboltabelle

Einfach unterstrichenenes Symbol, etwa \underline{C} , bedeutet Tensor 2. Stufe (Matrix), zweifach unterstrichenenes Symbol, etwa $\underline{\underline{C}}$, bedeutet Tensor 4. Stufe.

Pfeil, etwa \vec{x} , gibt einen Vektor an.

Falls nicht ausdrücklich erwähnt, wird die Einstein-Summationskonvention angewandt.

$$||\underline{C}|| = \sqrt{\sum_{i,j} |C_{ij}|^2} \quad : \text{ Euklidische Norm der Matrix } \underline{C}$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$\langle \rangle$: Volumenmittelwert

In der folgenden Symbolliste ist in Klammern das Kapitel angegeben, in dem das jeweilige Symbol zum ersten Mal auftritt.

a	Konstante in Dgl.	(8.3.2)
$a_{1,2,3,4}$	"	(8.3.2)
\underline{a}_{ij}	Untermatrizen von \underline{A} zur $\underline{C}^{\text{eff}}$ -Bestimmung	(6.3)
b	Konstante in Dgl.	(8.3.2)
$b_{1,2,3,4}$	"	(8.3.2)
\underline{b}_{ij}	Untermatrizen der Inversen von \underline{A}	(6.3)
c	Konstante in Dgl.	(8.3.2)
$c_{j,2}$	Konstante in Gl. für die Umfangsdehnung	(8.2)
\vec{c}_j^1	Eigenvektor der hom. Lösung $\vec{y}_i^{\text{hom}}(t)$	(8.3.3)
\vec{c}_j^E	Eigenvektor zum Eigenwert r_j^i	(8.3.3)
d	gibt die Stärke des Abfalls des Magnetfeldes über dem Radius des Solenoids an	(8.2)
f_i	i-te Volumenkraftkomponente	(5.)
$\vec{f}_i(t)$	Störungsvektor in Dgl.	(8.3.3)
g_{ij}	Greensfaktoren (Proportionalitätsfaktor in der Greensfunktion \underline{G})	(6.1.1)
h	Stützstellenabstand	(7.4)
$h_{x,y,z}$	" in x,y,z-Richtung	(7.4)
i	Laufparameter	(2.)
j	"	(2.)

$\vec{j} = (j_R, j_\theta, j_z)$	Stromdichte in Zylinderkoordinaten	(8.1)
k	Laufparameter	(2.)
k_0	Verhältnis Zentralfeld/Feld am Innenradius des Solenoids	(8.2)
k_1	Verhältnis Feld am Außenradius/Feld am Innenradius des Solenoids	(8.2)
k_{st}	Koeffizienten der Lösung \underline{q}'	(6.2)
l	Laufparameter	(2.)
Δl	Korrelationslänge	(3.)
m	Laufparameter	(6.2)
n	Laufparameter (Index)	(5.2)
n	Anisotropiegrad (Verhältnis Umfangs-E-modul zu Radial-E-modul)	(7.7)
n_m	m-te Komponente des Normaleneinheitsvektors \hat{n} auf einer Oberfläche	(5.2)
p_{ij}	Funktion in Gl. von Korringa	(5.4)
p'_t	reduzierte Matrix \underline{p}	(6.2)
\underline{q}	Lösungsfunktion von Korringa	(5.4)
\underline{q}'	reduzierter Tensor \underline{q}	(6.2)
r_j^i	i-ter Eigenwert zum Eigenvektor \vec{c}_j^E	(8.3.3)
s	Laufparameter	(6.2)
t	"	(6.2)
u	Radialverschiebung	(8.3.2)
u_i	i-te Komponente des Verschiebungsvektors	(3.)
\vec{u}_i^0	Verschiebungsvektor \vec{u}^0 , der proportional der Entfernung vom Ursprung zunimmt	(3.)
v	Umfangsverschiebung im Solenoid	(8.3.2)
w_{st}	Elemente der Lösungsmatrix $\underline{w}(\vec{x})$ der Gleichung von Korringa	(6.3)
$\underline{w}_1 = \underline{w}(\vec{x}_1)$	Lösungsmatrix an der Stützstelle \vec{x}_1	(6.3)
\underline{w}'	"	(IV.)
$x = x_1$	kartes. Ortskoordinate	(7.3)
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$	Ortsvektor, Aufpunkt	(5.2)
\vec{x}'	Quellpunkt	(5.2)
\hat{x}	Punkt auf einer Oberfläche	(3.)
y	kartesische Ortskoordinate	(7.3)
$\vec{Y}_i(t)$	Vektor der Lösungsfunktionen $X_i(t), Y_i(t)$	(8.3.3)
$\vec{Y}_i^{hom}(t)$	homogener Anteil der Lösungsfunktion \vec{Y}_i	(8.3.3)
$\vec{Y}_i^{inh}(t)$	inhomogener Anteil der Lösung \vec{Y}_i	(8.3.3)
z	kartesische Ortskoordinate	(7.3)

\underline{A}	Übermatrix aus der \underline{C}^{eff} bestimmt wird	(6.3)
$A_{1,2,3,4}$	Konstanten der inhomogenen Lösung \vec{Y}_i^{inh}	(8.3.3)
$B_{1,2,3,4}$	"	(8.3.3)
$\vec{B}=(B_R, B_\theta, B_z)$	Magnetfeld in Zylinderkoordinaten	(8.3.1)
B_a	Magnetfeld am Außenrand des Solenoids	(8.2)
B_i	" Innenrand "	(8.2)
B_m	Zentralfeld des Solenoids	(8.2)
B_{max}	max. zulässiges Zentralfeld des Solenoids	(8.2)
B_{ij}	aus \underline{C}^0 gebildete konstante Matrix	(6.1.1)
\underline{B}_i	konstante Eingabematrix	(8.3.3)
$C_{1,2,3,4}^0$	Konstanten der Lösung $Y_0(t)$	(8.3.3)
C_{ijkl}	Elemente des Elastizitätstensors	(2.)
C_{ij}	Elemente der Elastizitätsmatrix	(6.2)
C_{ij}^{eff}	Elemente der effektiven Elastizitätsma.	(7.3)
ΔC_{ij}	Absolutfehler der Matrixelemente C_{ij}^{eff}	(7.3)
\underline{C}_i^0	konstante Matrix in Dgl.	(8.3.3)
\underline{C}_i^0	i-ter Iterationstensor	(7.6)
\underline{C}^V	Voigttensor	(3.)
\underline{C}^R	Reusstensor	(3.)
$\underline{C}_{theo}^{eff}$	analytisch gewonnener eff. Elast.-tensor	(7.3)
D	Differentialoperator $\frac{d}{dt}$	(8.3.3)
\underline{D}	Differenztensor $\underline{C}(\vec{x}) - \underline{C}^0$	(6.2)
\underline{D}	reduzierter Tensor \underline{D}	(6.2)
\underline{D}'	erweiterter Tensor \underline{D}	(6.2)
E	Elastizitätsmodul allg.	(7.2)
E_i	" des i-ten Materials	(2.)
$E_{x,y,z}$	" in x,y,z-Richtung	(7.3)
$E_{R,\theta,z}$	" in R, θ ,z-Richtung	(8.1)
E^{eff}	effektiver Elastizitätsmodul	(3.)
E^R	Reussmodul	(2.)
E^V	Voigtmodul	(2.)
F	Kraft allg.	(2.)
$F_i(t)$	i-te Fourierfunktion des Störterms H	(8.3.3)
$\underline{F}(\vec{x})$	Tensoroperator für Spannungsgleichgewicht in inhomogenen Material	(5.)

\underline{F}^0	Tensoroperator für Spannungsgleichgewicht im homogenen Material	(5.)
G	Greensfunktion allg.	(5.1)
\underline{G}	" (Matrix)	(5.2)
$G_{xy, \dots}$	Schubmodul in $x, y \dots$ -Ebene	(7.3)
$G_{R\theta, \dots}$	" $R, \theta \dots$ -Ebene	(8.1)
$H(t, \theta)$	Störfunktion der Dgl.	(8.3.2)
$I_{1,2}$	Integralausdrücke zur Herleitung des verallg. Green'schen Satzes	(I.)
L	Länge des Solenoids	(8.2)
N	Zahl der Stützstellen	(6.3)
O	Operator des Iterationsverfahrens	(IV.)
P	Konstanten der Lösungsfunktion \vec{Y}_i^{hom}	(8.3.3)
Q	"	(8.3.3)
R	Radius, Abstand	(7.4)
R_i	Innenradius des Solenoids	(8.1)
R_a	Außenradius "	(8.1)
R_o	Radius zur Integrationsgrenze t_o	(8.3.3)
S, S'	Oberflächen in der Mischungsregel	(3.)
S_1, S_2	"	(2.)
\underline{T}	Eingangstensor zur Gl. von Korringa	(5.4)
\underline{T}	reduzierter Tensor \underline{T}	(6.2)
\underline{T}'	erweiterter Tensor \underline{T}	(6.2)
U_i	Verschiebungsdifferenz $u_i - u_i^0$	(5.3)
V	Volumen	(3.)
V'	"	(5.2)
\underline{W}	Lösungsmatrix, aus der $\underline{C}^{\text{eff}}$ bestimmt wird	(6.3)
\underline{W}'	"	(IV.)
$\Delta V_1, \Delta V_1', \Delta V_2$	Teilvolumen	(4.)
ΔV_i	i -tes Elementvolumen	(6.3)
X_i	i -te Fourierfunktion der Lösung $u(t, \theta)$	(8.3.3)
X_i^{inh}	inhomogener Anteil von X_i	(8.3.3)
\underline{X}	willkürliche Matrix	(IV.)
Y_i	i -te Fourierfunktion der Lösung $v(t, \theta)$	(8.3.3)
Y_i^{inh}	inhomogener Anteil von Y_i	(8.3.3)
\underline{Y}	willkürliche Matrix	(IV.)

α	Verhältnis Außen-/Innenradius des Solenoids	(8.2)
α_j^i	Konstante der Lösung \vec{Y}_i^{hom}	(8.3.3)
β	Verhältnis Länge/Durchmesser des Solenoids	(8.2)
γ	Verhältnis Radius/Innenradius im Solenoid	(8.2)
δ_{nm}	Kroneckerdelta	(5.2)
$\delta(\vec{x}, \vec{x}')$	Deltafunktion	(5.2)
ε	Dehnung allg.	(2.)
ε_{ij}	Dehnungsmatrix allg.	(2.)
ε_s	reduzierte Dehnungsmatrix ε_{ij}	(6.2)
ε_s'	erweiterter Dehnungsvektor ε_s	(6.2)
$\underline{\varepsilon}^0$	Proportionalitätsfaktoren der Verschiebungen u^0 ; entspricht der Dehnung auf der Oberfläche	(3.)
ε_{O^+}	maximal zulässige SL-Dehnung	(8.2)
ε_{θ}^+	normierte Umfangsdehnung ε_{θ}	(8.2)
$\varepsilon_{R, \theta, z}$	Dehnungskomponente in Zylinderkoordinaten	(8.1)
λ	Füllfaktor (Verhältnis stromdurchflossene Fläche zu Windungsquerschnitt)	(8.2)
μ	Lamé-Konstante, siehe Def. in	(7.2)
μ_0	Induktionskonstante ($4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am)	(8.2)
ν	Poissonzahl für die Querkontraktion	(7.2)
$\nu_{xy, \dots}$	" im kart. Koordinatensystem	(7.3)
$\nu_{R\theta, \dots}$	" im Zylinderkoordinatensystem	(8.1)
ξ	Integrationsvariable in Spann.-berechn.	(8.3.3)
ρ	Lipschitzkonstante in Konvergenzbedingung	(2.)
σ	Spannung allg.	(2.)
σ_{ij}	Spannungsmatrix allg.	(2.)
$\underline{\sigma}^0$	konstante Spannung im homogenen Material	(3.)
	$\underline{c}^{\text{eff}}$, wenn konstante Dehnungen $\underline{\varepsilon}^0$ angelegt sind	
ϕ	Skalarfunktion, Winkel	(I.)
χ	Lamé-Konstante, siehe Def. in	(7.2)
ω	Konvergenzfaktor des Iterationsverfahrens	(IV.)

$\underline{\Gamma}$	aus $\underline{\Gamma}$ gebildete Eingangsmatrix	(6.2)
$\underline{\underline{\Gamma}}$	konstanter Eingangstensor n. Korringa	(5.4)
$\underline{\Gamma}'$	aus $\underline{\Gamma}^+$ gebildete symmetrische Matrix	(6.2)
θ	Winkel allg.	(8.1)
$\underline{\Phi}$	Einsmatrix mit Vorfaktor $\frac{4}{3}\pi$	(II.)
Ψ_0	Ladungsdichte zur Veranschaulichung des Green'schen Verfahrens	(5.2)
$\vec{0}$	Nullvektor	(8.3.3)
$\underline{0}$	Nullmatrix	(IV.)
$\underline{1}$	Eins-Matrix	(6.3)
$\underline{1}'$	aus Eins-Matrizen gebildete Übermatrix	(6.3)