

KfK 3022
November 1980

**Ein neues Monte-Carlo-
Programm zur Berechnung der
Energieübertragung von einem
 π^- -Mesonenstrahl auf ein
gewebeähnliches Phantom**

G. Przybilla
Institut für Kernphysik

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Kernphysik

KfK 3022

Ein neues Monte-Carlo-Programm zur Berechnung der Energieübertragung
von einem π^- -Mesonenstrahl auf ein gewebeähnliches Phantom^{*)}

Gerrit Przybilla

^{*)} von der Fakultät für Physik der Universität Karlsruhe
genehmigte Diplomarbeit

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit berichtet über den Aufbau eines Monte-Carlo-Rechenprogrammes, mit dem die Verteilung der Energie eines negativen Pionenstrahls an gewebeähnliche Phantome berechnet werden kann. Jedes Pion oder ein von ihm erzeugtes Sekundärteilchen wird bis zum vollständigen Verlust seiner kinetischen Energie verfolgt, wobei alle häufigen physikalischen Vorgänge berücksichtigt werden. Die Auswirkung von Prozessen wie Vielfachstreuung, Reaktionen im Flug und Absorption gestoppter Pionen auf den Verlauf der Tiefendosiskurve wird ausführlich diskutiert. Es werden möglichst viele experimentell abgesicherte Eingabedaten verwendet und nur dort physikalische Modelle für Reaktionsabläufe angesetzt, wo solche Daten fehlen. Tiefendosiskurven für einen fadenförmigen Strahl von 170 MeV/c in einem Wasser-Phantom werden als Funktion verschiedener Parameter diskutiert. Anschließend werden die berechneten Verteilungen mit einem räumlich ausgedehnten Strahlprofil gefaltet und die Ergebnisse in Form von Isodosen aufgetragen.

A new Monte Carlo programme for calculations of dose distributions
within tissue equivalent phantoms irradiated from π^- -meson beams

Abstract

The present paper reports on the structure and first results from a new Monte Carlo programme for calculations of energy distributions within tissue equivalent phantoms irradiated from π^- -beams. Each pion or generated secondary particle is transported until to the complete loss of its kinetic energy taking into account pion processes like multiple Coulomb scattering, pion reactions in flight and absorption of stopped pions. The code uses mainly data from experiments, and physical models have been added only in cases of lacking data. Depth dose curves for a pencil beam of 170 MeV/c within a water phantom are discussed as a function of various parameters. Isodose contours are plotted resulting from a convolution of an extended beam profile and the dose distribution of a pencil beam.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
<u>I. EINLEITUNG</u>	3
<u>II. PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN</u>	6
II.1 Energieverlust durch Ionisation und Anregung	6
II.2 Reichweite, Eindringtiefe, Straggling	9
II.3.1 Vielfach-Coulomb-Streuung	11
II.3.2 Die Theorie von Molière	12
II.4 Pionprozesse im Fluge	14
II.4.1 Elastische Streuung	17
II.4.2 Inelastische Streuung	19
II.4.3 Streuung am gebundenen Nukleon	19
II.5 Absorption gestoppter negativer Pionen	22
<u>III. AUFBAU DES PROGRAMMES</u>	25
III.1 Geometrie des Targetvolumens	25
III.2 Strahlparameter	26
III.3 Stark vereinfachte Programmstruktur	26
III.4 Behandlung der Energieablagerung	29
III.5 Berücksichtigung von Bahnlängenstraggling und endlicher Impulsauflösung	30
III.6 Durchführung der Coulomb-Vielfach-Streuung	33
III.7 Vergleich der Ergebnisse eines Streuexperimentes mit der Molière-Theorie	37
III.8 Bestimmung der freien Weglänge für ein Pion	38
III.9 Integrale Reichweitenkurve	40
III.10 Erzeugung und Behandlung von Sekundärteilchen	41
III.10.1 Bestimmung der Prozeßart	41
III.10.2 Zwei-Körper-Reaktionen	41
III.10.3 Absorptionsprozesse	42
III.10.4 Transport der geladenen Teilchen	44
III.10.5 Transport der neutralen Teilchen	46

IV.	<u>RESULTATE FÜR DIE TIEFENDOSISKURVE</u>	49
V.	<u>DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE IN FORM VON ISODOSEN</u>	52
VI.	Schlußbemerkung	56
	Anhang	58
	Literaturverzeichnis	

I. EINLEITUNG

Der Erfolg bei der Behandlung von bösartigen Geschwülsten (Tumoren) mit ionisierenden Strahlen ist in vielen Fällen unbestritten. Die heute gebräuchlichen Strahlenarten: Photonen, Elektronen sowie in geringem Umfang auch Neutronen zeigen einen annähernd exponentiellen Abfall der Dosis mit zunehmender Eindringtiefe. Durch einen derartigen Dosisverlauf werden die Gewebezonen an der Oberfläche des Patienten intensiver bestrahlt als tieferliegende Bereiche. Deshalb ist in den zurückliegenden Jahren der Einsatz von schweren, geladenen Teilchen in der Strahlentherapie ausführlich diskutiert und in speziellen Fällen praktisch erprobt worden. Ein kritischer Vergleich über die Eignung von Protonen, He-Ionen und Pionen für die Strahlentherapie unter Berücksichtigung aller physikalischen und biologischen Faktoren ist von Büche et al. [1] durchgeführt worden.

Im Gegensatz zu den bisher in der Therapie verwendeten Strahlenarten haben die schweren, geladenen Teilchen eine endliche Reichweite, die durch ihre Energie bestimmt ist. Durch solche Teilchen wird das Gewebe hinter einem tiefliegenden Tumor nicht oder nur gering belastet und das davorliegende Gewebe wird durch die schwach ionisierende Wirkung schnell bewegter Teilchen weitgehend geschont. Darüber hinaus nimmt die Ionisation entlang des Weges insbesondere gegen das Ende der Bahn zu (Braggsche Kurve), so daß ein großer Teil der kinetischen Energie der schweren, geladenen Teilchen auf das Tumorgebiet übertragen wird.

Für die zerstörende Wirkung, die von ionisierenden Teilchen auf das getroffene Gewebe ausgeht, ist neben der auf ein Massenelement übertragenen Energie (absorbierte Dosis) auch die Dichte der Ionisation entlang der Teilchenspur von Bedeutung. Ein Maß für diese Ionisationsdichte ist der sogenannte Lineare Energie-Transfer (LET), wobei in weiten Grenzen zunehmende Ionisationsdichte mit steigender Relativer Biologischer Effektivität (RBE) einhergeht.

Bei vorgegebener Eindringtiefe weisen Teilchen mit großer Masse wie z.B. Helium-Ionen entlang ihrer Wegstrecke eine erhöhte Ionisationsdichte auf. Hingegen ionisieren vergleichsweise leichte Teilchen wie Proton und Pion auf dem größten Teilstück ihrer Bahn

schwach und entsprechen in ihrer Wirkung auf das Gewebe in diesem Bereich der Wirkung von Photonen und Elektronen. Unter den bereits genannten Teilchenarten zeichnen sich die negativen Pionen dadurch aus, daß sie am Ende ihrer Bahn von Kernen eingefangen werden und einen Großteil ihrer Ruheenergie in kinetische Energie von stark ionisierenden Kernbruchstücken umsetzen (Sternbildung). Negativ geladene Pionen sind deshalb bei einer Anwendung in der Strahlentherapie besonders erfolgversprechend: sie ionisieren am Anfang ihrer Bahn durch gesundes Gewebe schwach und pflanzen am Ende ihrer Bahn einem tiefliegenden Tumor durch ihre Sternbildung eine stark ionisierende 'Strahlenquelle' ein. Eine Zusammenfassung der Eigenschaften von negativen Pionen im Hinblick auf ihre Anwendung in Strahlenbiologie und -medizin ist von Raju und Richman [2] sowie für schwere, geladene Teilchen von Raju et al. [3] veröffentlicht worden.

Die räumliche Verteilung der übertragenen Energie in der Bremssubstanz wird meist auf die Strahlachse projiziert und in der sogenannten Tiefendosiskurve dargestellt. Diese bildet den Ausgangspunkt für die Therapieplanung, die zu Beginn jeder Behandlung mit ionisierenden Strahlen durchgeführt werden muß. Bei der Therapieplanung werden die Parameter von Strahlenbündeln so festgelegt, daß man unter Beachtung von Form und Lage des Tumors eine für den speziellen Fall günstige Verteilung der wirksamen Dosis erzielt. Therapieplanungsprogramme für Pionen sind an allen 'Mesonenfabriken' in Vorbereitung. Als Grundlage für diese Programme dienen sowohl gemessene als auch berechnete Tiefendosiskurven für fadenförmige Strahlen unter Beachtung der RBE für die übertragenen Energien. Im Gegensatz zu solchen Therapieplanungsprogrammen gibt es nur wenige Rechenprogramme, mit denen die Verteilung der Energie eines Pionenstrahls an ein gewebeähnliches Phantom in Form von Tiefendosiskurven selbst bestimmt werden kann.

Die ersten Tiefendosiskurven von negativen Pionen sind von Fowler und Perkins [4] 1961 veröffentlicht worden. Das Programm von Armstrong et al. [5,6,7,8](HETC) ist für Abschirmungsrechnungen an Hochenergiebeschleunigern entwickelt worden und umfaßt den Energiebereich von 2 GeV bis hinab zu etwa 10 MeV. Mit diesem sehr allgemein gehaltenen Programm lassen sich auch Verteilungen berechnen, die von Pionen unterhalb von 120 MeV erzeugt werden.

Da die Wirkungsquerschnitte und die Spektren der Sekundärteilchen im Pionenstern in diesem Rechencode nur modellmäßig enthalten sind, kann man Verteilungen für niederenergetische Pionen nur mit beschränkter Genauigkeit erwarten. Speziell für Pionen mit niedriger Energie (<125 MeV) ist von Turner et al. [9,10,11] ein Monte-Carlo-Programm entwickelt worden.* Dieses Programm verwendet die von Guthrie et al. [12] berechneten Spektren von Sekundärteilchen aus den Pionabsorptionsprozessen und berücksichtigt die Pionwechselwirkung im Fluge in stark vereinfachter Form. Tiefendosiskurven, die Turner et al.[9] selbst gemessen haben, stimmen mit deren Rechnung weitgehend überein, jedoch treten im Plateau-Bereich Abweichungen auf.

Die vorliegende Arbeit berichtet über ein neu erstelltes Rechenprogramm nach dem Monte-Carlo-Verfahren, mit dem die Verteilung der Energie, die ein fadenförmiger π^- -Mesonenstrahl einem Phantom überträgt, als Grundlage für die Therapieplanung gewonnen werden kann. Die physikalischen Effekte, die hierzu von Bedeutung sind, werden eingehend behandelt. Dabei stützt sich das Programm vor allem auf experimentell abgesicherte Daten. Nur in solchen Fällen, in denen keine gemessenen Werte vorliegen, oder Extrapolationen aus solchen nicht mehr möglich sind, werden die Berechnungen mit Hilfe von Modellen durchgeführt. Die Struktur des Programmes gestattet es jederzeit, die verwendeten Daten und modellmäßigen Annahmen durch Resultate aus weiteren Experimenten zu ergänzen. Für die Darstellung von Ergebnissen wird die Tiefendosiskurve eines Strahls von Pionen mit 170 MeV/c in Wasser gewählt. Die Verteilung der abgelagerten Energie, insbesondere für ausgedehnte Strahlenbündel, kann auch in Form von Isodosen aufgezeichnet werden. Darüber hinaus können vom Programm Daten für die Berechnung von LET-Spektren zur Verfügung gestellt werden.

*Die Beschreibung des neuesten Standes (Rad.Res.79 (1979) 1) ist nach Fertigstellung des Manuskripts erschienen

II. PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

II.1 Energieverlust durch Ionisation und Anregung

(Bethe-Bloch-Formel)

Geladene Teilchen verlieren auf ihrem Weg durch Materie Energie, hauptsächlich bei inelastischen Stößen mit den gebundenen Elektronen der Bremssubstanz. Hierbei werden die Atome angeregt bzw. ionisiert und die einlaufenden Teilchen gleichsam kontinuierlich gebremst. Bohr [13], Bloch [14] und Bethe [15] haben die inelastischen Stöße mit den Atomelektronen theoretisch beschrieben. Der in der sogenannten Bethe-Bloch-Formel angegebene Zusammenhang zwischen dem Energieverlust pro Wegstrecke und der kinetischen Energie eines geladenen Teilchens lautet (siehe die zusammenfassenden Darstellungen über den Energieverlust von geladenen Teilchen in Ref.[16],[17]):

$$-\frac{dE}{dx} = n \cdot \frac{4\pi e^4}{m_e} \cdot \frac{z^2}{v^2} \left[\ln \frac{2m_e v^2}{I} - \ln(1-\beta^2) - \beta^2 - \delta - \frac{C}{Z} \right] \quad (1)$$

n = Zahl der Elektronen/cm³ in der Bremssubstanz

m_e = Masse des Elektrons e = Elementarladung

v = Geschwindigkeit des Teilchens $\beta = v/c$

z = Ladung des Teilchens I = Mittleres Ionisationspotential

δ = Dichte-Effekt C/Z = Schalen-Korrektur

Die in Formel (1) aufgeführten relativistischen Terme $(-\ln(1-\beta^2)-\beta^2-\delta)$ sind erst im Energiebereich oberhalb der 2,5-fachen Ruheenergie des Teilchens wichtig und fallen außerhalb des Rahmens der in dieser Arbeit betrachteten Vorgänge. Unterhalb der 2,5-fachen Ruheenergie eines Teilchens nimmt der Energieverlust mit fallender Energie proportional $1/v^2$ zu. Das heißt, je kleiner die kinetische Energie desto größer werden die Wechselwirkungszeiten und damit die Impulsüberträge an den Stoßpartner. Bei Werten von v in der Größenordnung der Geschwindigkeit der Atomelektronen auf den Bohrschen Bahnen wird der Schalenkorrekturterm $(-C/Z)$ zunehmend wichtiger. Diese Korrektur berücksichtigt die Wechselwirkung der Elektronen auf den verschiedenen Bahnen untereinander. Eine theoretische Beschreibung dieses Effektes hat Walske [18] durchgeführt. Bei Geschwindigkeiten unterhalb

derjenigen von Elektronen auf Bohrschen Bahnen gilt die Bethe-Bloch-Formel nicht mehr. Durch einen Austausch von Elektronen zwischen der Bremssubstanz und dem einfallenden Teilchen ändert sich dessen effektive Ladung ($Z \rightarrow Z^*$). Barkas et al. [19] gibt hierfür die empirische Formel (2) an:

$$Z^* = Z \cdot [1 - \exp(-125\beta \cdot Z^{-2/3})] \quad (2)$$

Die Änderung der effektiven Ladung führt zu einer Kompensation der $(1/v^2)$ -Abhängigkeit des Energieverlustes pro Wegstrecke. Nach einem Maximum nimmt der Energieverlust mit fallender Energie des Teilchens ab. Werden die Partikeln noch stärker abgebremst, so gelangen sie in den 'thermischen Bereich'. Dort stößt das Teilchen elastisch mit den Elektronen bzw. den Atomen der Materie, bis es im Mittel gleichviel Energie bei Stößen verliert, wie es wieder gewinnt. Diese Vorgänge sind ausführlich in der Arbeit von Lindhard et al. [20] beschrieben worden.

Die Größe I , das sogenannte mittlere Ionisationspotential, ist ein freier Parameter in der Bethe-Bloch-Formel (1). Numerische Werte von I sind in den Tabellen von Barkas et al. [19], Janni [21] und Sternheimer [22] aufgeführt. Näherungsweise kann I aus der Formel

$$I = K \cdot Z \quad (3)$$

mit $K \approx 13$ eV und Z der Kernladung bestimmt werden. Für Moleküle läßt sich das mittlere Ionisationspotential wie folgt aus den Ionisationspotentialen der einzelnen Komponenten berechnen (Braggsche Regel):

$$\ln I = \frac{\sum N_i Z_i \ln I_i}{\sum N_i Z_i} \quad N_i = \text{Atomdichte} \quad (4)$$

Bei einem Stoß zwischen einem geladenen Teilchen und einem Atom-elektron kann unter Umständen dieses Elektron aus der Atomhülle herausgeschlagen werden. Ein Elektron, bei dem der Energiebetrag so groß ist, daß es als ionisierendes Sekundärteilchen Energie von der ursprünglichen Ionisationsspur wegtragen kann, nennt man δ -Elektron.

Sein Beitrag zur räumlichen Ablagerung der kinetischen Energie wird im Rahmen dieser Arbeit nicht mitbehandelt. Jedoch müssen diese Anteile bei der Bestimmung der LET-Verteilung unbedingt berücksichtigt werden.

Nach der Bethe-Bloch-Formel (1) hängt der Energieverlust pro Wegstrecke nur von der Geschwindigkeit und der Ladung eines Teilchens ab. Deshalb ist es möglich, aus einer, z.B. für Protonen, erstellten Tabelle mit Werten für Energie und Energieverlust durch Anwendung eines Skalenfaktors die entsprechenden Daten für eine andere Teilchensorte zu gewinnen.

Die in dieser Arbeit verwendeten Tabellen werden mit Hilfe eines Computer Programmes von Armstrong und Chandler, genannt SPAR [23] (Stopping Power And Ranges), berechnet. SPAR liefert den Energieverlust und die Reichweite für Protonen, Myonen, Pionen und schweren, geladenen Ionen in allen nicht gasförmigen Bremssubstanzen. Diese Datensammlung hat den Vorzug, daß sie die benötigten Werte für das gesamte Energieintervall von 10^{-3} MeV bis 10^{+2} MeV zur Verfügung stellt. Einen Vergleich von Resultaten aus dem SPAR-Programm mit anderen Tabellen haben die Autoren selbst durchgeführt. Er wird in Figur 1 wiedergegeben. Eine Zusammenstellung des Energieverlustes in gewebeähnlichen Substanzen als Funktion der kinetischen Energie für die wichtigsten Teilchensorten gibt Figur 2.

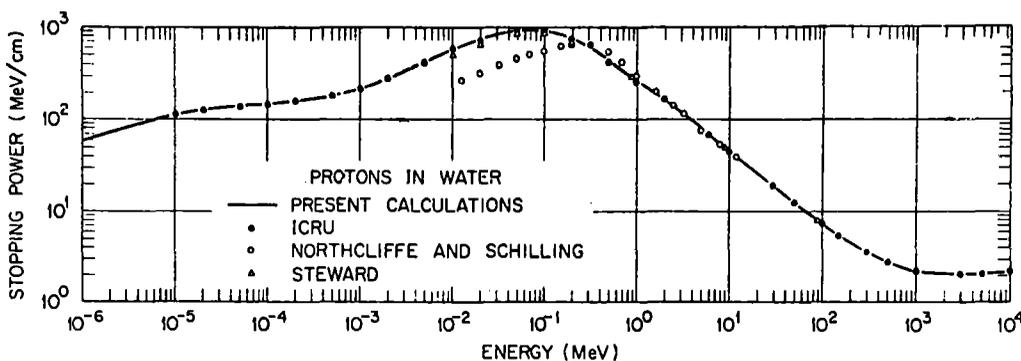


Fig.1: Vergleich von SPAR-Resultaten mit denen anderer Autoren [23].

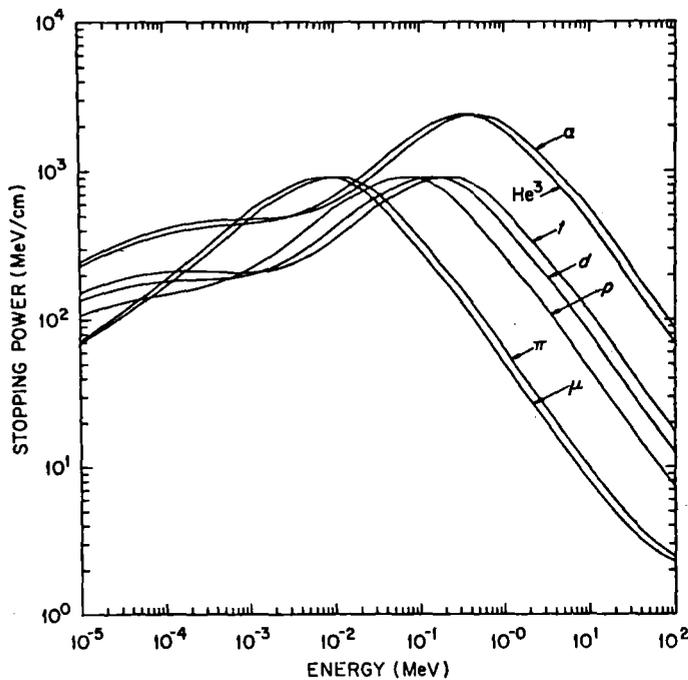


Fig. 2:
dE/dx für verschiedene Teilchenarten in gewebeähnlicher Substanz als Funktion der kinetischen Energie [23]

II.2 Reichweite, Eindringtiefe, Straggling

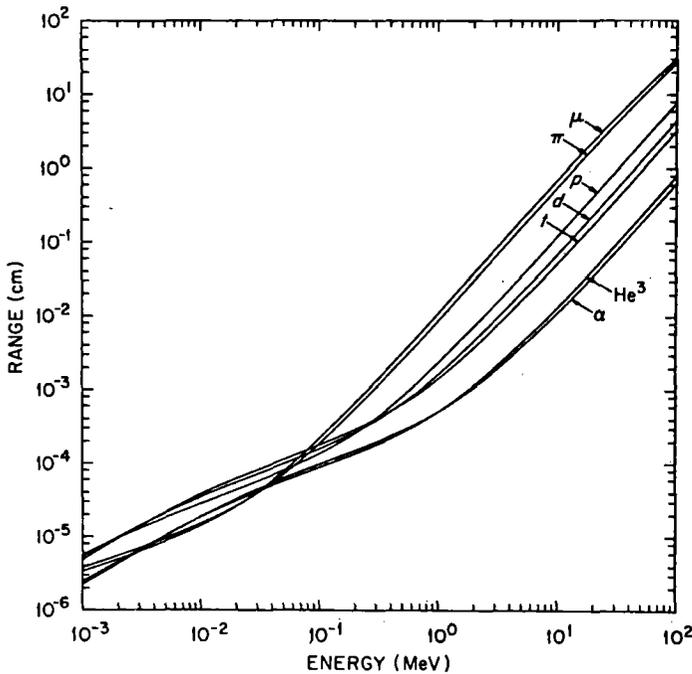
Der Energieverlust pro Wegstrecke nach Formel (1) hat die Bedeutung eines Mittelwertes. Durch einfache Integration läßt sich daraus die mittlere Reichweite gewinnen.

$$\bar{R} = \int_0^{E_0} \left(\frac{dE}{dx}\right)^{-1} dE \quad (5)$$

Diese Größe \bar{R} wird auch als mittlere Bahnlänge bezeichnet. Sie ist nicht zu verwechseln mit der Eindringtiefe, worunter im folgenden die Projektion der Reichweite auf die Strahlachse (z-Achse) verstanden werden soll. In Figur 3 sind die Reichweiten verschiedener Teilchen in gewebeähnlicher Substanz als Funktion ihrer kinetischen Energie wiedergegeben.

SPAR [23]	19,486 cm
Barkas [19]	19,18 cm
Serré [24]	19,35 cm
Measday [25]	19,0 cm

Tabelle 1: Vergleich der Reichweite für Pionen mit einer kinetischen Energie von 80 MeV in Wasser aus verschiedenen Tabellen.



Figur 3:

Reichweite der verschiedenen Teilchen in gewebeähnlichem Material als Funktion der kinetischen Energie [23].

Wie Tabelle 1 zeigt, liefern verschiedene Datensammlungen nicht dieselben Werte für die Reichweite von Pionen mit definierter Energie. Die Ursache hierfür liegt in geringen Unterschieden der verwendeten dE/dx -Werte, deren Maximalwert z.B. ebenfalls nicht einheitlich angegeben wird. Um solche Diskrepanzen ausschließen zu können, erhebt sich die Frage, ob experimentelle Bestimmungen der Reichweite genauer sein können als durch die Streuung der Werte in Tabelle 1 angedeutet ist. Wie später in Kapitel II.4 gezeigt wird, geht in die Analyse einer integralen Reichweitenkurve die Kenntnis einer ganzen Reihe von Prozessen sowohl der starken wie auch der elektromagnetischen Wechselwirkung ein, so daß es schwierig erscheint, eine mittlere Reichweite in der hierfür benötigten Form auf besser als $\pm 1\%$ genau festzulegen.

Ein Teilchen wird durch eine Vielzahl von inelastischen Stößen gebremst. Die Energieabgabe individueller Teilchen hat bei gleicher kinetischer Energie nicht immer den gleichen festen Wert, sondern streut um den mittleren Energieverlust. Dieser statistische Vorgang führt zu einer für jedes Teilchen unterschiedlichen Reichweite. Demnach schwanken die Bahnlängen von Teilchen mit ein und derselben festen Energie um die mittlere Bahnlänge \bar{R} . Eine Schwankung dieser Art bezeichnet man als STRAGGLING. Die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten, bestimmte Bahnlängen zu erhalten, ist gaußförmig.

Der Wert für die Standardabweichung

$$\sigma_R = 0,0246 \times \bar{R} \quad (6)$$

wird von Bichsel [26], Sternheimer [27] und Curtis [28] in dieser Form angegeben. Für die Reichweite von π^- (170 MeV/c; H_2O) ergibt sich somit

$$R(\pi^-; 170 \text{ MeV/c; } H_2O) = 19,6 \pm 0,56 \text{ cm (FWHM)} \quad (7)$$

Eine Schwankung führt zu einer deutlichen Verbreiterung des Bragg-Peaks.

II.3.1 Vielfach-Coulomb-Streuung

Die Querschnittsfläche eines parallel einfallenden Strahles geladener Teilchen dehnt sich beim Eindringen in Materie mit zunehmender Tiefe aus. Diese Aufweitung des 'Strahlfleckes' kommt durch die Coulomb-Wechselwirkung zwischen dem einfallenden Teilchen und den Kernen, in geringem Maße auch den Elektronen, des Materials zustande. Die Coulomb-Streuung wird durch den Rutherford'schen Streuquerschnitt beschrieben. Danach sind viele Streuungen um kleine Winkel und nur wenige um mittlere und große Ablenkwinkel zu erwarten. Man beobachtet deshalb zwei nicht streng getrennte Einflüsse auf ein Teilchenbündel, die sogenannte Vielfach- oder Kleinwinkelstreuung und die Einfachstreuung. Da die Vielfachstreuung sehr stark überwiegt, wird bei Berechnungen von Strahlverbreiterungen die Einfachstreuung meist vernachlässigt. Wie später (Formel (8)) gezeigt wird, können die bei Vielfachstreuung auftretenden kleinen Winkel durch eine Gaußsche Häufigkeitsverteilung beschrieben werden. Die Berücksichtigung der Einfachstreuung verzerrt die Form der Gaußverteilung durch einen langen Ausläufer zu großen Winkeln hin.

Ein Vergleich der verschiedenen theoretischen Beschreibungen der Vielfach- und Einfach-Streuung ist von Scott [29] veröffentlicht worden. Mayes et al. [30] zeigen, daß eine modifizierte Molière-Theorie

die beste Übereinstimmung mit experimentellen Daten ergibt. Im folgenden sollen daher kurz die wichtigsten Größen und Begriffe der Theorie von Molière [31] aufgeführt werden.

II.3.2 Die Theorie von Molière

G. Molière erweitert die Beschreibung von Einfachstreuungen in einer Materialschicht und liefert eine Verteilungsfunktion $F(\theta, \phi, t)$, welche die Wahrscheinlichkeit pro Raumwinkel angibt, daß ein Teilchen nach Durchlaufen dieser Schicht der Dicke t in eine Richtung mit den Winkeln (θ, ϕ) bezogen auf die Einfallrichtung gestreut wird. Die Bezeichnung der einzelnen Winkel ist in Figur 4 definiert.

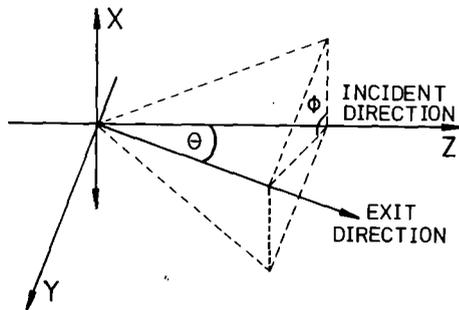


Fig. 4:

Definition der Winkel (θ, ϕ) zur Beschreibung der Häufigkeitsverteilung bei der Vielfachstreuung.

Für Materialien, die keine Richtung auszeichnen, hängt die Verteilungsfunktion $F(\theta, \phi, t)$ nicht mehr vom Winkel ϕ ab. Für $F(\theta, t)$ gibt Molière folgende Reihenentwicklung an:

$$F(\theta, t) d\theta = [2e^{-\vartheta^2} + f^{(1)}(\vartheta)/B + f^{(2)}(\vartheta)/B^2] \vartheta d\vartheta \quad (8)$$

Hierin beschreibt der Gaußsche Term die Vielfachstreuung, während der Anteil der Einfachstreuung durch die beiden anderen Terme wiedergegeben ist. Die Größen ϑ und θ sind über die Beziehung

$$\vartheta = \theta / (\chi_c \cdot \sqrt{B}) \quad (9)$$

miteinander verknüpft. Der Parameter χ_c wird von Molière als der charakteristische Winkel bezeichnet.

$$\chi_c = 4\pi e^4 z^2 Z^2 \cdot N \cdot t / (p^2 \cdot \beta^2). \quad (10)$$

Darin bedeuten z die Ladung, p der Impuls und $\beta = v/c$ die Geschwindigkeit des Teilchens sowie Z die Ladung, t die Dicke und N die Anzahl der Atome/cm³ des Streumaterials. Der charakteristische Winkel χ_c übernimmt die Rolle einer Standardabweichung für den gaußförmigen Anteil und ist umgekehrt proportional zu Potenzen der Geschwindigkeit und der Masse des Teilchens. Die Aufstreuung eines Strahls nimmt deshalb mit abnehmender Geschwindigkeit zu und zwar umso stärker je leichter das Teilchen ist. Umgekehrt gilt: je größer die Masse, desto geringer die Seitenstreuung beim Abbremsprozess und desto kleiner ist der Unterschied zwischen Eindringtiefe und mittlerer Reichweite.

Die Größe B genügt der Gleichung

$$B - \ln B = \ln\left(\frac{e}{2} \cdot \frac{\chi_c^2}{\chi_a^2}\right) \quad (11)$$

mit

$$\frac{\chi_c^2}{e} = 1,167 \quad (12)$$

Scott [29] zeigt in seinem Artikel, daß der Ausdruck (11) durch den folgenden angenähert werden kann:

$$B = 1,153 + 2,583 \log_{10} (\chi_c^2 / \chi_a^2). \quad (13)$$

Der hier auftretende Winkel χ_a^2 ist der sogenannte Abschirmwinkel. Er hängt von χ_0 , dem bekannten Bornschen Abschirmwinkel, ab:

$$\chi_a^2 = f(\alpha^2) \cdot \chi_0^2. \quad (14)$$

Mayes et al. [30] vergleichen experimentelle Daten für π^+ und π^- in einem Energieintervall von 139 MeV bis 220 MeV mit den Ergebnissen der Molière-Theorie und finden, daß mit dem Ausdruck der Form

$$f(\alpha^2) = 0,59 + 3,44 \alpha^2 \quad (15)$$

mit

$$\alpha = z \cdot Z \cdot \alpha_0 / \beta \quad (16)$$

und $\alpha_0 = 1/137$ der Feinstrukturkonstante anstelle des von Molière angegebenen Terms eine bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment erreicht wird.

II.4 Pionprozesse im Fluge

Neben der Abbremsung und der Vielfachstreuung können Pionen während ihres Fluges vermöge ihrer starken Wechselwirkung mit Kernen des Absorbers weitere Prozesse auslösen. Die Wahrscheinlichkeiten hierfür sind durch die von der Energie E des Pions abhängigen Wirkungsquerschnitte $\sigma(E)$ gegeben. Da Muskelgewebe etwa der Summenformel $C_5H_{40}O_{18}N$ entspricht, ist die Kenntnis der Wirkungsquerschnitte für Pionenprozesse an 1H , ^{12}C , ^{14}N und ^{16}O erforderlich. In diesem Abschnitt werden die vorliegenden experimentellen Werte zusammengestellt und ihre Ergänzung zu einem vollständigen Datensatz in der hier benötigten Form kurz angedeutet^{*)}. In den zurückliegenden Jahren hat sich das Interesse der Experimentatoren vorwiegend auf den Bereich der $\Delta(1236 \text{ MeV})$ -Resonanz konzentriert. Deshalb liegen nur wenige Daten aus Messungen in dem Energiebereich unterhalb von 120 MeV vor; die meisten von ihnen stammen aus Experimenten an ^{12}C und 1H . Erst in jüngster Zeit findet das Gebiet der niederenergetischen Pion-Kern-Streuung zunehmend Beachtung.

Der Verlauf des totalen Wirkungsquerschnittes, sowie der Querschnitte für Reaktionen und Absorption als Funktion der kinetischen Energie des Pions ist für ^{12}C in Figur 5 und für ^{16}O in Figur 6 dargestellt. Die eingezeichneten experimentellen Daten sind den Referenzen [32-37] entnommen. Die gezeigten Kurven geben die im Programm verwendeten Wirkungsquerschnitte wieder. Dazu wurde angenommen, daß der totale Wirkungsquerschnitt aus den Querschnitten für die folgenden Kanäle (am Beispiel des ^{12}C) zusammengesetzt ist:

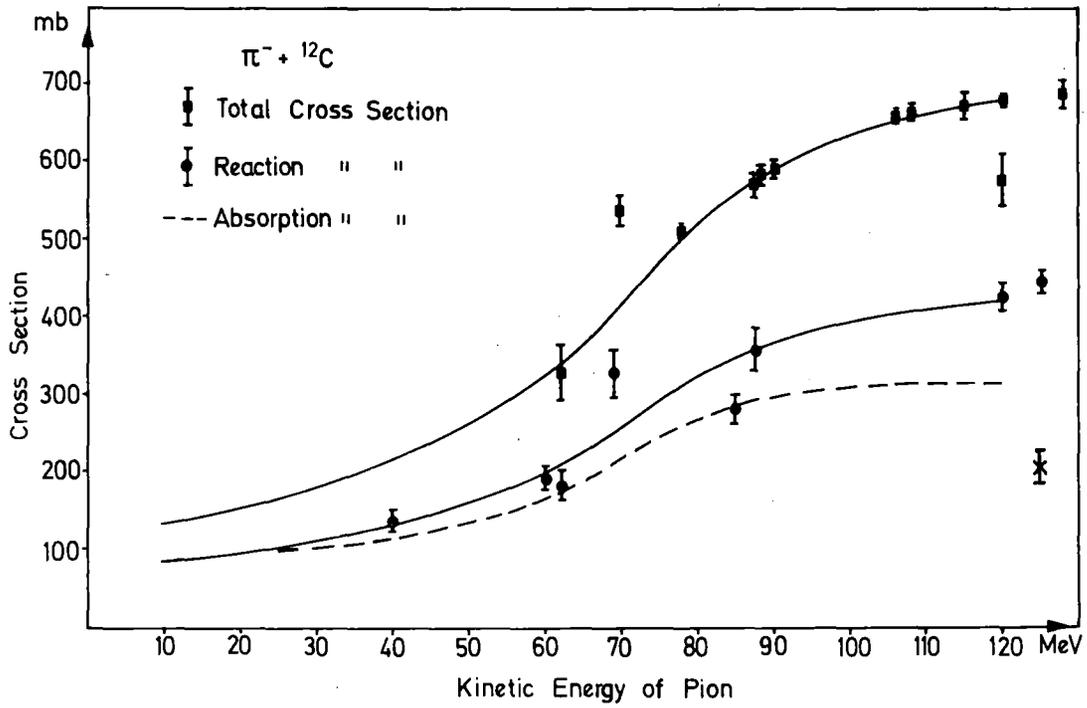


Fig. 5: Wirkungsquerschnitte für π^- -Prozesse an ${}^{12}\text{C}$ [32-37]

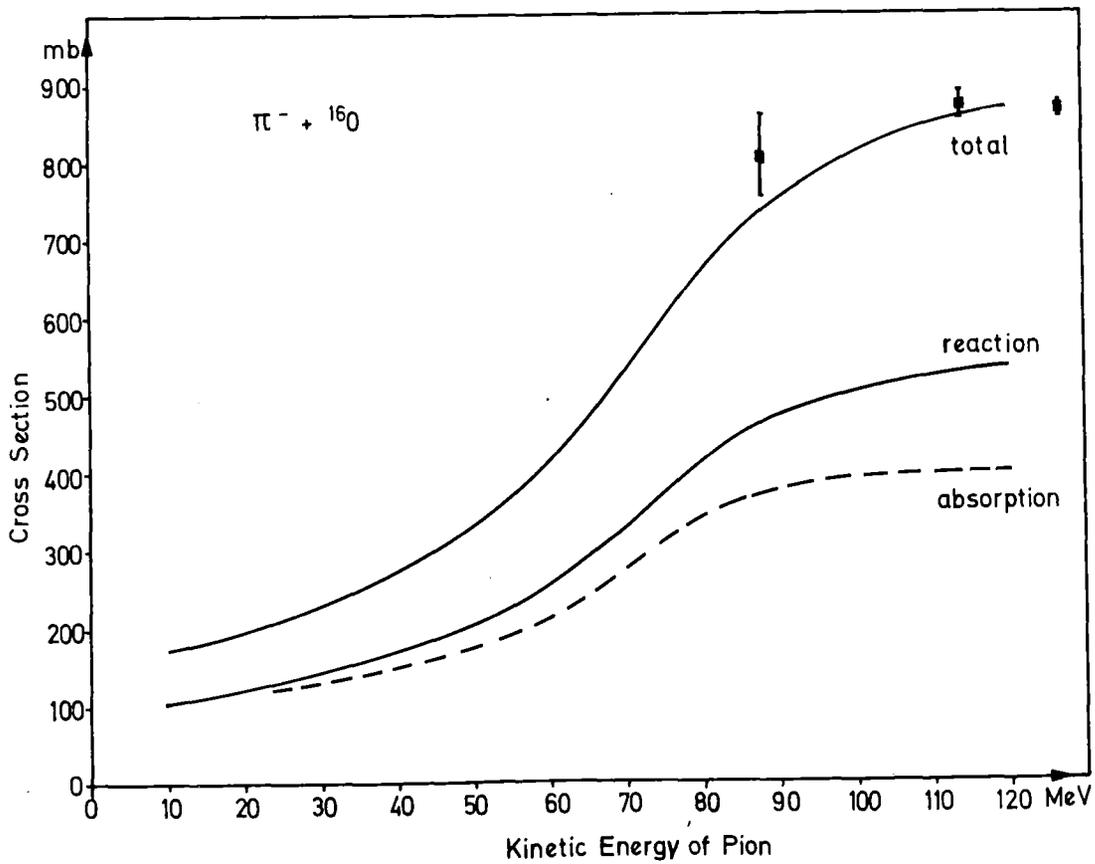


Fig. 6: Wirkungsquerschnitte für π^- -Prozesse an ${}^{16}\text{O}$ [32]

Elastische Streuung	$^{12}\text{C}(\pi^-, \pi^-)^{12}\text{C}$
Inelastische Streuung	$^{12}\text{C}(\pi^-, \pi^-)^{12}\text{C}^*$
Quasielastische Streuung am Proton	$^{12}\text{C}(\pi^-, \pi^- p)^{11}\text{B}$
Quasielastische Streuung am Neutron	$^{12}\text{C}(\pi^-, \pi^- n)^{11}\text{C}$
Ladungsaustausch am gebundenen Proton	$^{12}\text{C}(\pi^-, \pi^0 n)^{11}\text{B}$
Absorption	$\pi^- + ^{12}\text{C} \rightarrow \text{Stern von Sekundärteilchen}$

Weitere mögliche Prozesse, wie $(\pi^-, \pi^0 p)$ oder $(\pi^-, \pi^- 2n)$ etc., die über mehrere Stufen ablaufen, wurden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Ihre Wirkungsquerschnitte betragen nur einen kleinen Bruchteil, gemessen am totalen Wirkungsquerschnitt.

Da die überwiegende Anzahl der Messungen an ^{12}C vorgenommen wurde, ist der benötigte Satz von Werten für dieses Nuklid erstellt worden. Hieraus sind die Werte für ^{16}O mit Hilfe eines Skalenfaktors

$$\text{SK (120 MeV)} = \frac{\sigma_{\text{tot}}(^{16}\text{O})}{\sigma_{\text{tot}}(^{12}\text{C})} = 1,27 \quad (17)$$

bestimmt worden. Falls angenommen wird, daß die Wechselwirkung des Pions mit dem Kern im wesentlichen auf dessen Oberflächenzone beschränkt ist, beträgt das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte

$$\left(\frac{A(^{16}\text{O})}{A(^{12}\text{C})}\right)^{2/3} = 1,21 \quad (18)$$

und kommt damit dem verwendeten Skalenfaktor SK sehr nahe.

In den folgenden Abschnitten IV.1 bis IV.3 werden die Energieabhängigkeiten der Wirkungsquerschnitte und die entsprechenden Winkelverteilungen aufgeführt. Da der Absorptionsquerschnitt bis jetzt noch nicht durch Meßdaten belegt werden kann^{*)}, wurde er aus der Differenz zwischen dem totalen Wirkungsquerschnitt und den Querschnitten für die oben aufgeführten Prozesse gebildet. Das Programm enthält die integrierten Wirkungsquerschnitte absolut und die dazugehörigen Winkelverteilungen in normierter Form.

^{*)} I. Navon et al.; Phys.Rev.Lett. 42 (1979) 1465, geben $\sigma_{\text{ABS}} = 207 \pm 30$ mb für die π^- -Absorption an ^{12}C bei 125 MeV an. Dieser Wert weicht stark von der Kurve in Fig. 5 ab. Die Diskrepanz kann bei den wenigen, insgesamt vorliegenden Daten, nicht schlüssig erklärt werden.

II.4.1 Elastische Streuung

Die Wirkungsquerschnitte für elastische Pion-Streuung sind von Schlaile et al. [38] in einer Streuamplitudenanalyse untersucht worden. Die ausgezogenen Kurven in Figur 7 stellen Werte dar, die durch Integration der berechneten Winkelverteilungen für elastische Streuung an ^{16}O einschließlich des Coulomb-Anteiles im Bereich zwischen 10° und 180° erhalten wurden. Der Anteil der starken Wechselwirkung allein ist durch die Kurve für das ungeladene Pion gegeben. Die eingetragenen experimentellen Daten werden durch die Analyse gut wiedergegeben, wobei kein wesentlicher Unterschied in den Werten für ^{16}O und den ebenfalls eingetragenen für ^{12}C zu erkennen ist. Anhand der Kurven für die geladenen Pionen sieht man deutlich, daß der elektromagnetische Anteil an der elastischen Streuung unterhalb von 50 MeV eine entscheidende Rolle spielt. Dieser Anteil ist aber bei der Vielfachstreuung bereits berücksichtigt worden. Durch die in der Arbeit vorgenommene

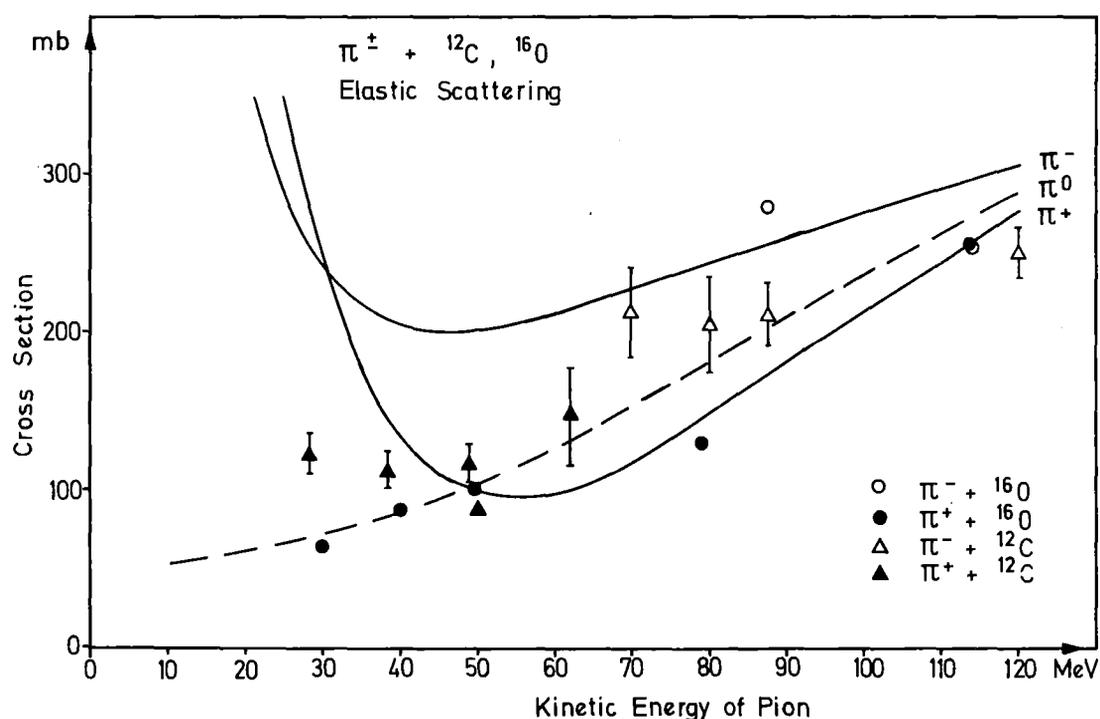


Fig. 7: Wirkungsquerschnitte für die elastische Pion-Streuung an ^{16}O bzw. ^{12}C . Die eingezeichneten Kurven sind aus einer Streuamplitudenanalyse für ^{16}O berechnet worden [34,35,55-62].

Trennung in der Behandlung von Coulomb-Anteil und hadronischem Anteil wird die Interferenz der beiden Amplituden vernachlässigt. Diese ist in Figur 8 deutlich an den Winkelverteilungen für die betreffenden Energien zu erkennen.

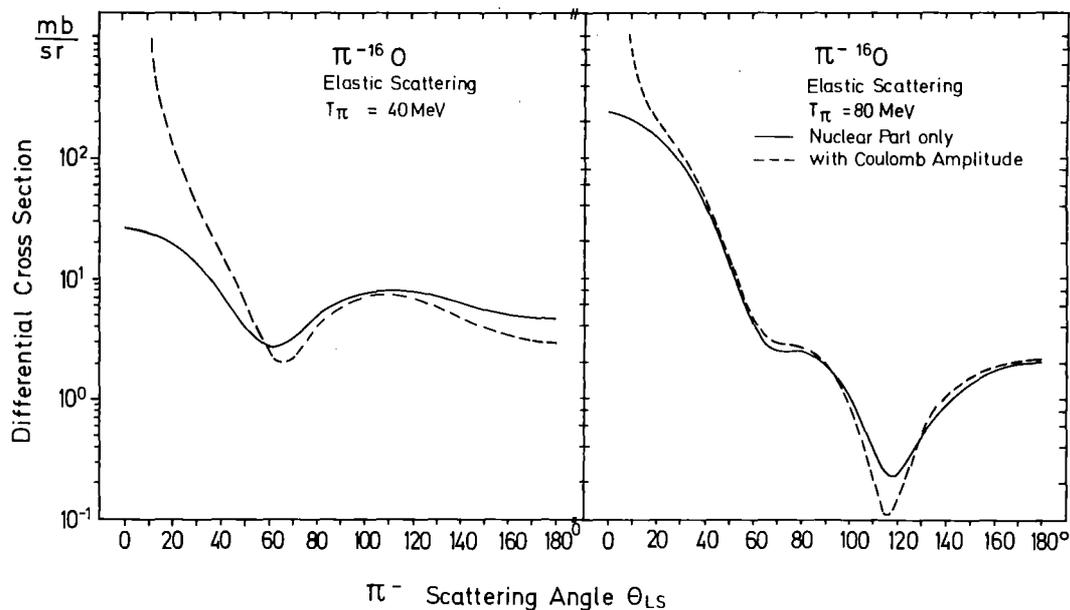


Fig. 8: Winkelverteilungen für die elastische Streuung von π^- an ^{16}O [38]

Binon et al. [34] geben aufgrund einer Analyse ihrer Daten das in Figur 9 wiedergegebene Verhältnis für den elastischen und den Reaktionsquerschnitt an. Dieses Verhältnis wurde in der vorliegenden

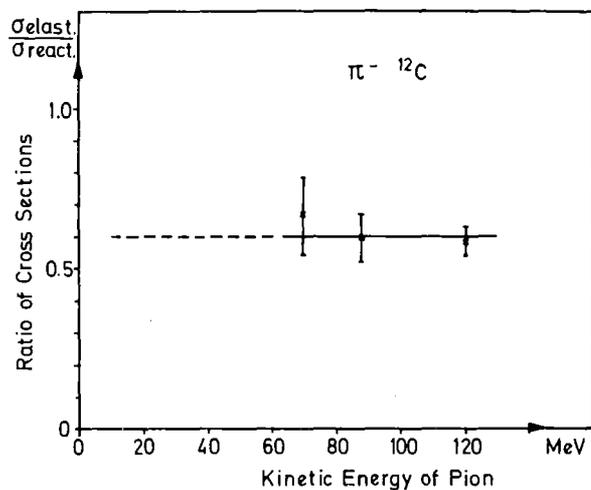


Fig. 9: Verhältnis der Wirkungsquerschnitte für die elastische Streuung und Reaktionen von π^- an ^{12}C als Funktion der kinetischen Energie des Pions [34].

Arbeit zu niederen Energien hin konstant fortgesetzt und unter Benutzung des elastischen Wirkungsquerschnittes aus Figur 7 der Verlauf von σ_{tot} in Figur 5 im Bereich niederer Energien gewonnen.

II.4.2 Inelastische Streuung

Bei der inelastischen Streuung wird Energie von einem Pion auf einen Kern übertragen, welcher dabei in einen angeregten Zustand übergeht. Für die Bildung des ersten angeregten Zustandes im Kohlenstoff ^{12}C ist eine Energie von 4,43 MeV nötig. Die von Binon et al. [34] durchgeführten Experimente ergeben bei einer Energie des Pions von 120 MeV einen Wirkungsquerschnitt für die Anregung dieses Niveaus, dessen Wert etwa 8% vom elastischen Streuquerschnitt beträgt. Den gleichen Prozentsatz erhält man, wenn die Werte des differentiellen Wirkungsquerschnittes von Piffaretti et al. [39] bei 150 MeV aufintegriert werden. Der Wirkungsquerschnitt für die inelastische Streuung wurde deshalb im vorliegenden Programm zu 8% des elastischen Wirkungsquerschnittes gewählt. Für die Winkelverteilungen wurden im gesamten Energiebereich konstant die Werte von Binon et al. [34] übernommen. Für die Berechnung der Kinematik wird jeweils die Energie des ersten angeregten Zustandes im Kern eingesetzt.

II.4.3 Streuung am gebundenen Nukleon

Der Wirkungsquerschnitt für die quasielastische Streuung am gebundenen Neutron ist aus den Arbeiten von Reeder [40], Batist [41] und Dropesky [42] recht genau bekannt. Die in Figur 10 eingezeichneten Werte sind aus Messungen der Aktivität von ^{11}C gewonnen. Da bei Aktivitätsmessungen nur der Grundzustand des Folgekerns untersucht wird, stellt der gemessene Wirkungsquerschnitt die Summe über eine Reihe von angeregten Endzuständen dieses Kerns dar. Zum Vergleich mit der Streuung an gebundenen Neutronen ist in Figur 10 der Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung am 'freien' Neutron mit eingetragen. Obwohl der Querschnitt am freien Neutron nicht gemessen worden ist, kann er aufgrund der Pion-Nukleon Streudaten unter der Annahme der Ladungsunabhängigkeit der Pion-Nukleon-Wechselwirkung aus der π^+p -Streuung gewonnen werden.

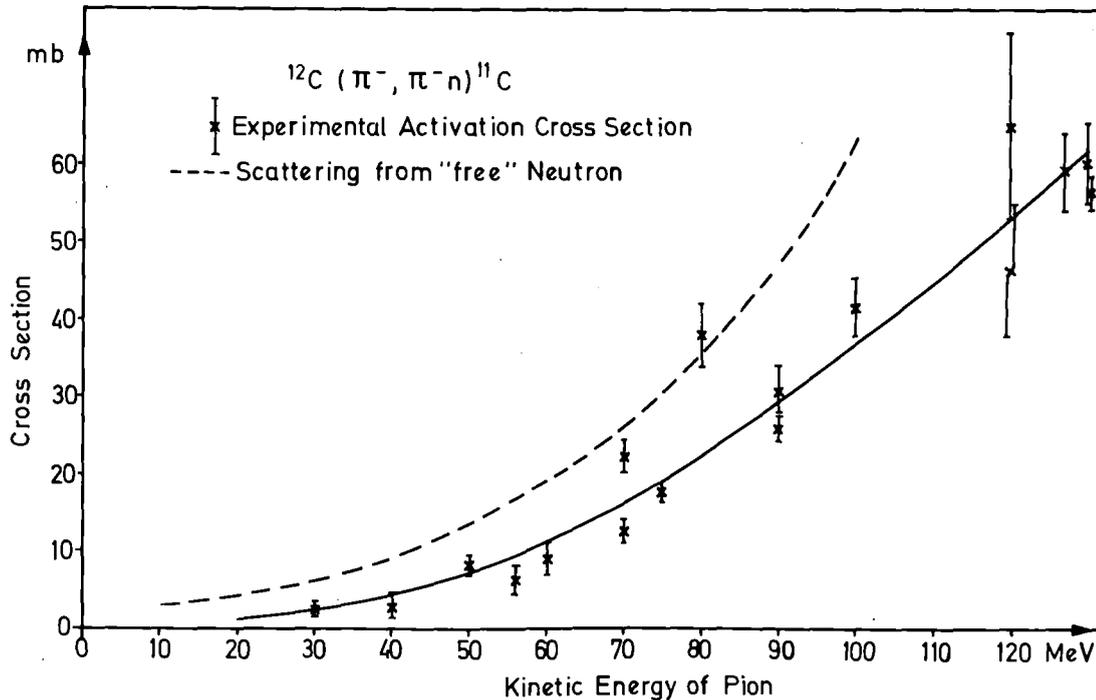


Fig. 10: Wirkungsquerschnitte für quasielastische Streuung an einem Neutron, das im ^{12}C -Kern gebunden ist. Die ausgezogene Kurve ist eine glatte Verbindung von Meßpunkten, die gestrichelte Kurve gibt den hadronischen Anteil der π^+p -Streuung an [40-42].

Der Verlauf beider Kurven in Figur 10 ist sehr ähnlich und ihre Werte weichen etwa 30% voneinander ab. Diese qualitativ gute Übereinstimmung legt nahe, in den übrigen Fällen von quasielastischen Streuprozessen wie (π^-, π^-p) und (π^-, π^0n) , bei denen erheblich weniger Daten zur Verfügung stehen, die Werte aus den Pion-Nukleon-Streudaten [43] in Figur 11 zu verwenden. Für die Winkelverteilung der Pionen nach quasielastischen Prozessen liegen keine experimentellen Daten vor. Die vorliegende Arbeit benutzt daher die entsprechenden Verteilungen aus den Pion-Nukleon-Streudaten, welche in Figur 12 bis 14 dargestellt sind.

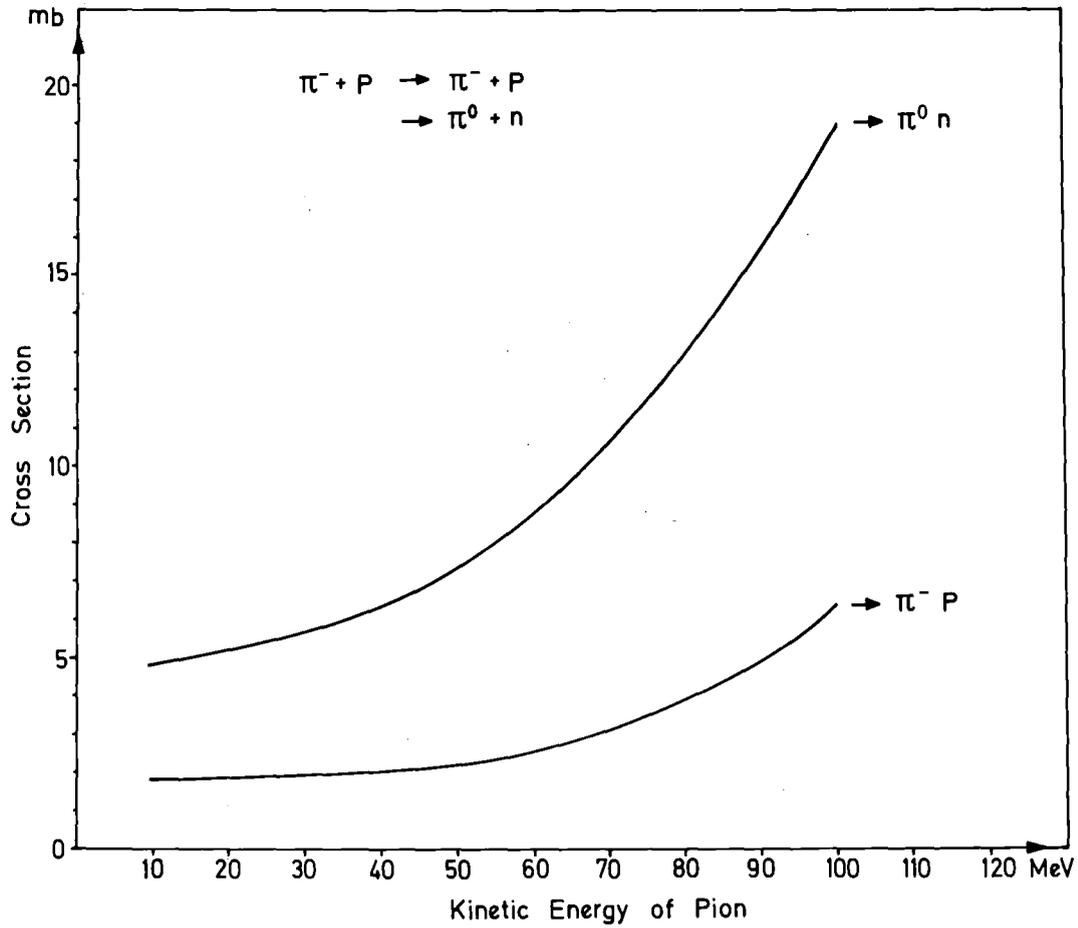


Fig. 11: Wirkungsquerschnitte für elastische π^- p-Streuung und Ladungsaustausch [43]

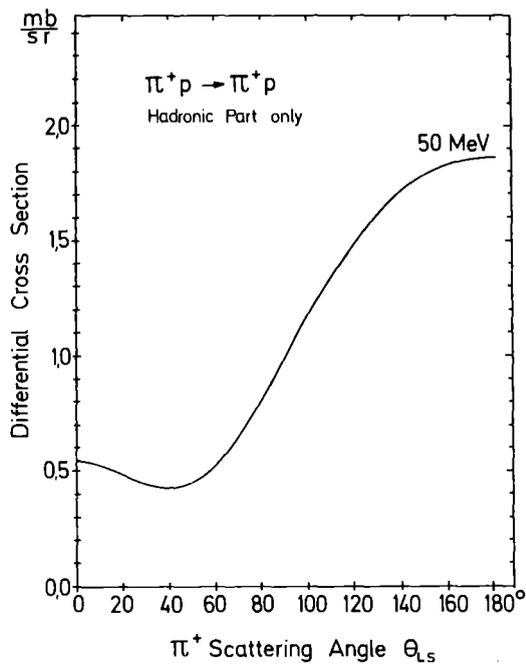


Fig. 12: Differentieller Wirkungsquerschnitt für π^+ p-Streuung [43]

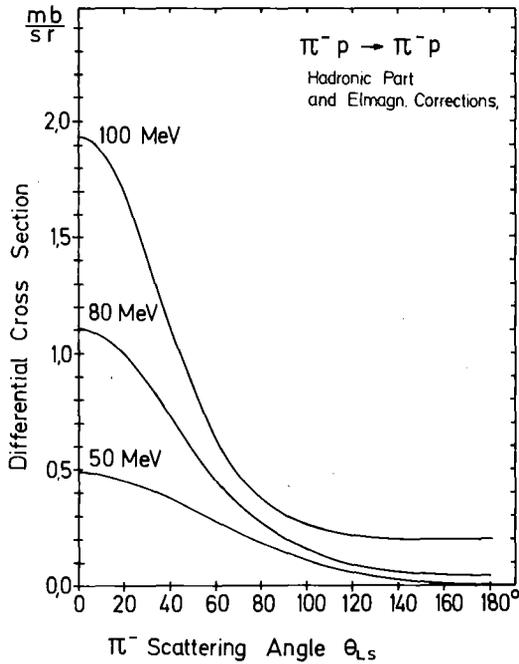


Fig. 13:
Differenzielle Wirkungsquerschnitte für elastische π^-p -Streuung [43]

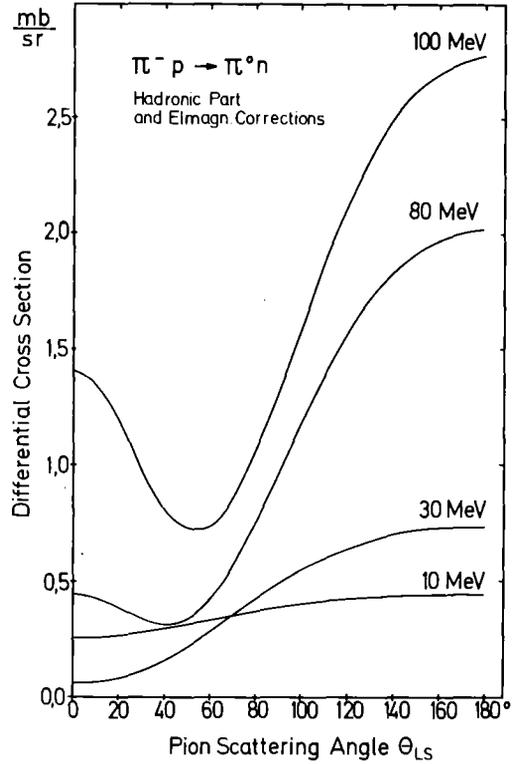


Fig. 14:
Differenzielle Wirkungsquerschnitte für $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ [43]

II.5 Absorption gestoppter negativer Pionen (Sternbildung)

Hat ein Pion seine kinetische Energie an die Bremssubstanz abgegeben, wird es von einem Atom in eine Bohrsche Bahn eingefangen. Daran schließt sich eine elektromagnetische Kaskade zu tiefliegenden Zuständen dieses Atoms an, aus denen heraus es vom Kern absorbiert wird. Ist die Bremssubstanz aus mehreren Elementen aufgebaut, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Pion von einem Kern eines bestimmten Elementes eingefangen wird, von dessen Ordnungszahl Z abhängig.

Für biatomare Verbindungen der Form $A_n B_m$ verhalten sich die Einfangswahrscheinlichkeiten W entsprechend dem Z -Gesetz von Fermi-Teller [44]:

$$\frac{W(A)}{W(B)} = \frac{n}{m} \frac{Z_A}{Z_B} \quad (19)$$

Für wasserstoffhaltige Verbindungen $Z_m H_n$ ist der Einfang am Wasserstoff stärker unterdrückt als nach Formel (19) zu erwarten wäre. Näherungsweise gilt [45]:

$$\frac{W(H)}{W(Z)} \sim \frac{n}{m} \cdot Z^{-3}. \quad (20)$$

Für die Behandlung des Pioneneinfangs in gewebeähnlichem Material müssen die entsprechenden Einfangswahrscheinlichkeiten im Programm berücksichtigt werden. Bei kompliziert zusammengesetzten, organischen Verbindungen sind die Einfangsverhältnisse noch nicht systematisch untersucht worden. Sie müssen vielmehr für Gewebe bzw. die in Frage kommenden Phantommaterialien erst experimentell bestimmt werden. Das vorliegende Programm enthält nur die Wahrscheinlichkeit für den Einfang von Pionen am Sauerstoff im Wasser. Diese ist nach Formel (20) praktisch 1.

Bei der Absorption eines negativ geladenen Pions durch den Kern wird die Ruheenergie des Pions von rund 140 MeV auf den Kern übertragen. Da dieser Betrag wesentlich über der Bindungsenergie liegt (bei Kohlenstoff etwa 40 MeV), zerplatzt der Kern in Bruchstücke. Die Spektren der geladenen Sekundärteilchen nach der Absorption durch die biologisch relevanten Kerne ^{12}C , ^{16}O und ^{40}Ca sind von Mechttersheimer [46,47,48], Münchmeyer [49] und Randoll [50] gemessen und die zugehörigen Neutronenspektren sind von Klein [51,52] bestimmt worden. Während die Spektren von ^{12}C vorliegen, sind die Ergebnisse aus den Messungen von Münchmeyer an sauerstoffhaltigen, organischen Verbindungen noch nicht in Kohlenstoff- und Sauerstoffanteile getrennt worden. Deshalb konnten in der vorliegenden Arbeit die Sekundärteilchenspektren von ^{16}O noch nicht exakt berücksichtigt werden; stattdessen wurden sie durch die Spektren von ^{12}C angenähert. Die mittleren Energien der Sekundärteilchen und deren relative Anzahlen pro gestopptem Pion sind in Tabelle 2 wiedergegeben. Münchmeyer stellt Unterschiede zwischen den Sekundärteilchenspektren von ^{12}C und ^{16}O fest, die sich in einer kleineren mittleren Energie der geladenen Teilchen beim sauerstoffreicheren Target äußern. Diese Beobachtung wird durch das Ergebnis von Klein ergänzt, daß bei ^{16}O ein größerer Energiebetrag durch Neutronen weggetragen wird.

Tabelle 2: Produktionsspektren von ^{12}C nach Mechttersheimer [46]

Teilchenart	Teilchen/ π^- -Stopp	Mittlere Energie/ π^- -Stopp [MeV]
n	2.5	76.0
p	0.485	10.4
d	0.356	6.3
t	0.249	3.0
^3He	0.064	0.6
^4He	0.772	5.6
Li	0.24	1.6
B,Be	0.258	0.29
γ		~2

III. AUFBAU DES PROGRAMMES

III.1 Geometrie des Targetvolumens

Vom Rechenprogramm wird erwartet, daß es übertragene Energie als Funktion des Ortes im Target darstellen kann. Dazu muß das Targetvolumen durch die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems parametrisiert werden. Da die zu behandelnden Probleme keine spezielle Symmetrie nahelegen, wurde ein rechtwinkliges, kartesisches Koordinatensystem gewählt, dessen z-Richtung mit der Strahlrichtung zusammenfällt.

Die x-y-Ebene wird in 40×40 Rechtecke unterteilt. Für die Durchzählung der Elemente wird der Nullpunkt in die linke obere Ecke gelegt. Der Durchstoßpunkt der Strahlrichtung liegt im Ursprung der x-y-Ebene, demnach im Element (21,21). Für beide Kantenlängen eines Rechtecks wurden 0,5 cm gewählt. Diese Maschenweite kann jederzeit durch einen anderen, auch in x- und y-Richtung unterschiedlichen Wert, ersetzt werden. Mit den angegebenen Werten erhält man einen Bereich von ±10 cm in beiden Richtungen vom Strahlmittelpunkt. Durch Verschieben des Ursprungs kann bei der einschränkenden Vorgabe von Symmetrien des Problems der Abstand Strahlmittelpunkt - Targetgrenze bei festgehaltener Elementzahl zusätzlich vergrößert werden.

In z-Richtung ist der Raum in 3 Bereiche gegliedert. Der erste reicht von 0-15 cm mit einem Netzabstand von 1 cm. Die darauf folgenden 10 cm haben einen Netzabstand von 0,2 cm. Dadurch erhält man in dem interessanten Bereich um den Bragg-Peak bei etwa 19 cm eine größere Auflösung. Für $25 \text{ cm} \leq z \leq 30 \text{ cm}$ beträgt der Netzabstand wieder 1 cm.

Es hat sich im Laufe der Arbeit gezeigt, daß mit der hier gegebenen Unterteilung des Targetvolumens alle auftretenden Energieablagerungen hinreichend fein gespeichert werden können. Bei dieser Geometrie werden nicht alle Neutronen gestoppt, sondern ein Teil ihrer Energie geht durch seitliches Austreten verloren. Um die Energieablagerung in speziellen Raumbereichen noch besser aufzulösen, kann die Unterteilung noch verfeinert werden. Gleichzeitig sollte jedoch die räumliche Ausdehnung verringert werden, da die oben angegebene Geometrie bereits rund 500000 Speicherplätze benötigt und eine Erweiterung schnell an die Grenzen des noch vertretbaren Speicherplatzbedarfes stößt.

III.2 Strahlparameter

Ein Pionenstrahl in seiner Eigenschaft als sekundärer Teilchenstrahl weist stets eine Kontamination von Elektronen und Myonen auf. Im Falle des $\pi E3$ -Kanals des SIN (Schweizerisches Institut für Nuklearforschung) liegt der prozentuale Anteil bei Pionen mit einem Impuls von 170 MeV/c bei 9,5% bzw. 3,5%. Da die Teilchen durch magnetische Systeme selektiert werden, besitzen alle drei Teilchensorten den gleichen Impuls. Die Reichweite von Elektronen und Myonen aus dem Kanal sind deshalb größer als diejenigen für die Pionen. Der steile Abfall der Tiefendosiskurve für Pionen hinter dem Peakbereich wird durch Beiträge dieser längerreichweitigen Teilchen abgeflacht. In dem hier angegebenen Energiebereich kann der Energieverlust der Myonen analog zu dem der Pionen behandelt werden. Für Elektronen hingegen muß neben dem Ionisationsverlust auch der Energieverlust durch Strahlung berücksichtigt werden. Die hierzu erforderlichen Tabellen wurden noch nicht in das Rechenprogramm aufgenommen. Aus diesem Grunde kann die Kontamination eines Pionenstrahles in der vorliegenden Arbeit noch nicht behandelt werden.

Ein Teilchenstrahl wird durch die Verteilungen von Intensität und Richtung der Teilchen über seiner Querschnittsfläche beschrieben. Bei seinem gegenwärtigen Stand kann das Programm fadenförmige Strahlen oder ausgedehnte, parallele Strahlenbündel für eine ganze Reihe von denkbaren Querschnittsflächen bearbeiten. Um mit möglichst geringem zeitlichen Rechenaufwand (besonders bei großen räumlichen Ausdehnungen des Strahles) eine Form der Verteilung der abgelagerten Energie aufzubauen, die nur noch kleine Schwankungen aufweist, wird das Auswürfeln der Strahlfleckverteilung und der Transport der Teilchen getrennt durchgeführt. Zunächst wird die Energieverteilung eines Fadenstrahles aus einigen 10^3 Teilchen berechnet. Darauf wird in einem zweiten Schritt die Verteilung des Fadenstrahls mit der Ausdehnung der Querschnittsfläche gefaltet.

III.3 Stark vereinfachte Programmstruktur

Figur 15 zeigt ein stark vereinfachtes Flußdiagramm des Rechenprogrammes. Im Abschnitt 'INPUT' werden alle notwendigen Tabellen für Energieverlust, Reichweite, totale und differentielle Wirkungsquerschnitte, sowie die Spektren der verschiedenen Sekundärteilchen eingelesen. Die Parameter

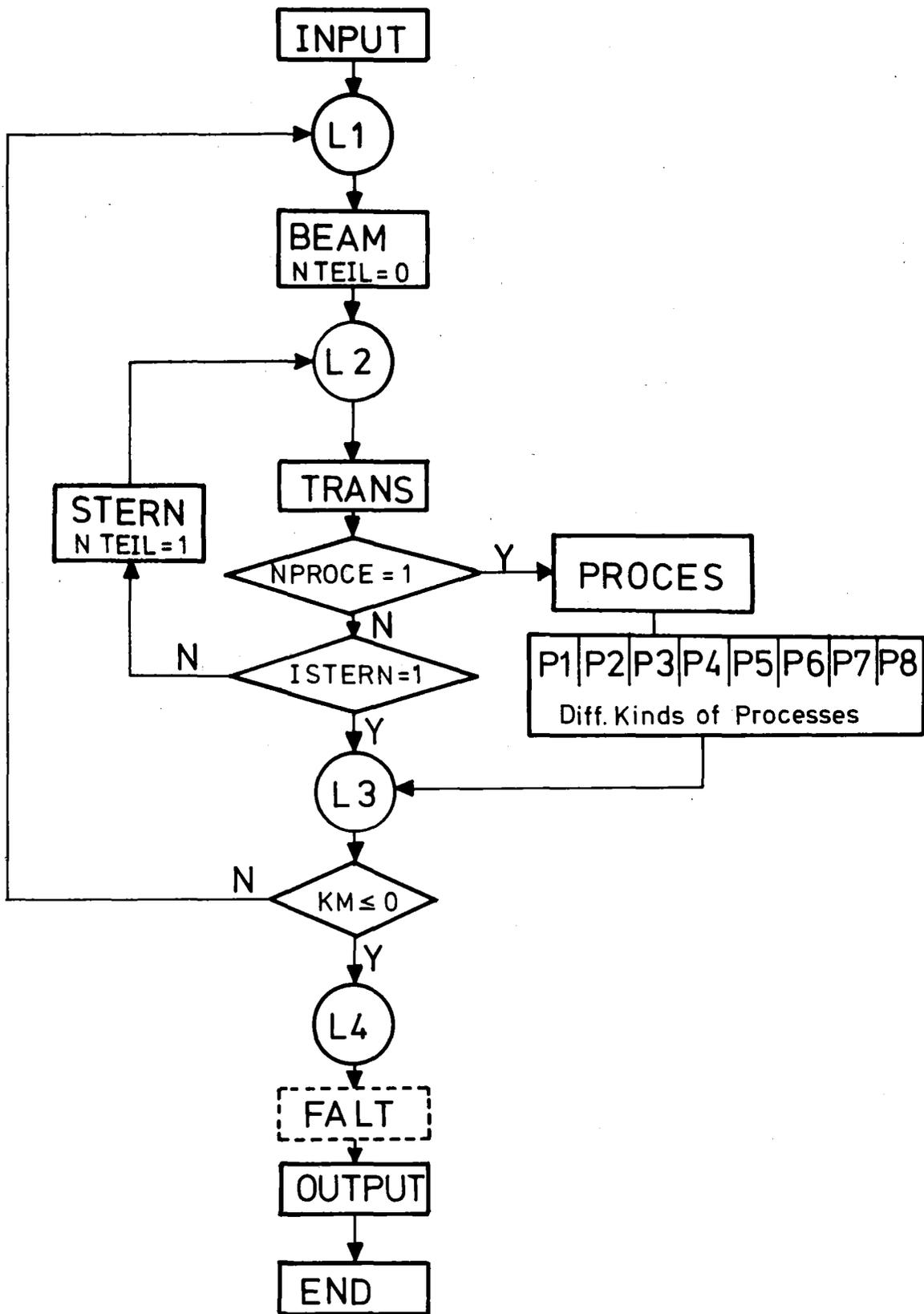


Fig. 15: Vereinfachtes Blockschalbild des Programmes

für die Unterteilung des Targets, die Anzahl der einfallenden Teilchen, die Form des Strahles, sowie die Energie des Teilchens werden ebenfalls an dieser Stelle festgelegt. Ferner wird hier entschieden, welche physikalischen Prozesse im Programmablauf behandelt oder unterdrückt werden sollen, d.h. ob Absorption in Ruhe (Sternbildung), Prozesse im Fluge oder etwa die Vielfachstreuung für Zwecke der Darstellung zu berücksichtigen oder auszuschalten sind. Der Programmteil 'INPUT' ist so gegliedert, daß durch Austausch von Tabellen oder Abänderung einzelner Parameter die Berechnung von Energieablagerungen anderer Strahlteilchen bzw. von Ablagerungen in anderen Targetmaterialien möglich ist. Neue experimentelle Daten können dadurch ebenfalls direkt in das Programm übernommen werden.

Das Kernstück des Rechenprogrammes ist das Transportprogramm 'TRANS'. Mit diesem Unterprogramm werden alle Teilchenarten transportiert und die auftretenden Energieverluste als Funktion des Ortes und stellenweise sogar zusätzlich als Funktion der Teilchensorte abgelagert. Die Unterprogramme 'BEAM', 'STERN' und 'PROCES' erzeugen Teilchen mit definierter Energie und Richtung, die dann zur Weiterbehandlung dem Programmstück 'TRANS' übergeben werden.

Im Unterprogramm 'BEAM' werden die Eigenschaften individueller Pionen gewählt, d.h. die Gesamtheit aller Pionen zeigt die vorgegebenen Eigenschaften wie Impuls- und Richtungsverteilung sowie die noch näher zu beschreibende Verteilung der freien Weglängen.

Das Unterprogramm 'STERN' generiert Art und Anzahl der Sekundärteilchen, die nach einem Absorptionsprozeß in Ruhe entstehen.

In dem Komplex der Unterprogramme 'P1...P8' wird zunächst die Art des Prozesses im Fluge ('PROCES') gewürfelt und daraufhin die Energie und Richtung der entstandenen Sekundärteilchen bestimmt.

Sobald alle Wechselwirkungen eines Pions bearbeitet sind, generiert das Programm im Teil 'BEAM' ein neues Pion. Ist die vorgegebene Anzahl der einfallenden Pionen erreicht, ist die Berechnung der Energieverteilung eines Fadenstrahls abgeschlossen. Falls eine ausgedehnte Strahlgeometrie berechnet werden soll, schließt sich daran die Faltung der Energieverteilung eines Fadenstrahls mit der Ausdehnung des Parallelstrahles an ('FALT').

III.4 Behandlung der Energieablagerung

In diesem Abschnitt wird beschrieben, auf welche Weise der Energieverlust des Pions, sinngemäß auch der aller anderen auftretenden Teilchen, in dem Programm bestimmt und in der Matrix für das Targetvolumen abgespeichert wird. Die benötigten Eingabedaten sind eine mit Hilfe des Programms SPAR berechnete Tabelle für den Energieverlust [MeV/cm] und die Reichweite [cm] von Pionen in Wasser über einen Energiebereich von 10^{-3} bis 10^2 MeV. Der zu einer vorgegebenen Energie gehörende Energieverlust bzw. die entsprechende Reichweite wird aus den Tabellen durch quadratische Interpolation bestimmt. Der tatsächliche Bahnverlauf eines Teilchens im Target wird durch die Zerlegung in einzelne, gerade Wegelemente simuliert. Zu Beginn des Weges (Targeteintritt) beträgt die Länge eines Wegstückes 1 mm. Die Restbahnlänge ergibt sich, indem jeder einzelne Schritt von der beim Eintritt in die Materie berechneten Bahnlänge subtrahiert wird. Bei einer Restbahnlänge vom 1,5-fachen der Schrittweite verkleinert sich die Schrittweite um den Faktor 100. Damit wird erreicht, daß der hohe Energieverlust am Reichweitenende fein herausgearbeitet wird. Dieses ist außerordentlich wichtig für die spätere Bestimmung der LET-Verteilung. Hat ein Pion die Restreichweite Null, ist sein Transport beendet.

Vor jedem neuen Wegschritt ist ein neuer Energieverlust zu berechnen. Die hierzu benötigte Restenergie (vgl. Restreichweite) des Teilchens bestimmt sich aus den um die bisherigen Energieabgaben verminderten Einfallsenergien. Wird der berechnete Energieverlust größer als die Restenergie, setzt das Programm den Energieverlust der noch vorhandenen Energie und die Schrittweite gleich der Restbahnlänge. Bei der Restenergie Null bricht das Programm ab.

Der bei jedem Bahnelement auftretende Energieverlust wird in der Targetmatrix folgendermaßen abgelagert: Bei einem Vergleich von Anfangs- und Endkoordinaten eines Wegelementes zeigt es sich, ob ein Volumenelement des Targets auf diesem Wegstück verlassen wird oder nicht. Beim Austritt aus einem Volumenelement ist der Energieverlust entsprechend den anteiligen Weglängen auf die verschiedenen Raumelemente aufzuteilen. Im anderen Fall wird die gesamte Energie in dem betreffenden Volumenelement deponiert.

III.5 Berücksichtigung von Bahnlängenstraggling und endlicher Impulsauflösung

Linsensysteme einer Strahlführung zeigen nur eine endliche Auflösung und liefern keine monoenergetischen Teilchen, sondern Teilchen mit einem ganzen Band von Impulsen. Der Effekt ist die Existenz einer Bahnlängenverteilung, die zusammen mit dem Bahnlängenstraggling auftritt. Mathematisch kann das Bahnlängenstraggling auch als eine Impulsverschmierung interpretiert werden. Es liegt daher nahe, die endliche Impulsauflösung und das Bahnlängenstraggling gemeinsam zu behandeln. Die in Formel (6) angegebene Standardabweichung für das Bahnlängenstraggling entspricht einer Standardabweichung des Impulses

$$\sigma_B = 1.03\% \quad (21)$$

bei einem mittleren Impuls von 170 MeV/c in Wasser. Jedes einfallende Pion erhält einen Betrag seines Impulses, wobei die Gesamtheit aller Impulsbeträge eine Gaußverteilung mit der Standardabweichung σ_B um den mittleren Impuls (170 MeV/c) aufweist.

Im folgenden wird nicht notwendigerweise vorausgesetzt, daß das Impulsband ebenfalls gaußförmig verteilt ist. Würden nur gaußförmige Verteilungen zugelassen, könnten die beiden Standardabweichungen einfach quadratisch addiert

$$\sigma^2 = \sigma_B^2 + \sigma_p^2 \quad (22)$$

und der Impuls des einfallenden Pions in einem Schritt erzeugt werden. Sollen auch andere (nicht gaußförmige) Impulsverteilungen berücksichtigt werden können, wie sie möglicherweise bei speziellen Therapieplänen auftreten, so muß die Impulsverteilung (herrührend aus dem Bahnlängenstraggling und der endlichen Impulsbreite des Kanals) in zwei Schritten generiert werden. Zunächst wird ein Impuls, der der Bahnlängenverteilung entspricht, generiert. Dieser Wert wird dann als neuer 'Mittelwert' in der Verteilung der endlichen Impulsauflösung verwendet. Der aus der zweiten Verteilung gewürfelte Impuls ist derjenige, mit welchem dann das Pion in das Phantom eintritt.

Um die Beiträge der in diesem Abschnitt besprochenen physikalischen Effekte zur Form der Tiefendosiskurve besser darzustellen, wird die endgültige Kurve schrittweise aufgebaut. Die Veränderungen werden an der sogenannten Braggschen Kurve deutlich gemacht. Hierbei handelt es sich um die Darstellung der abgelagerten Energie als Funktion der Eindringtiefe. Es wird von einem monoenergetischen Strahl mit einem Impuls von 170 MeV/c ausgegangen. Die in der Strahlentherapie erforderlichen Reichweiten von ca. 20 cm in Wasser legen die Wahl dieses Impulswertes nahe. Figur 16 zeigt die Braggsche Kurve für einen monoenergetischen Pionenstrahl. Man erkennt deutlich, daß der Energieverlust bis kurz

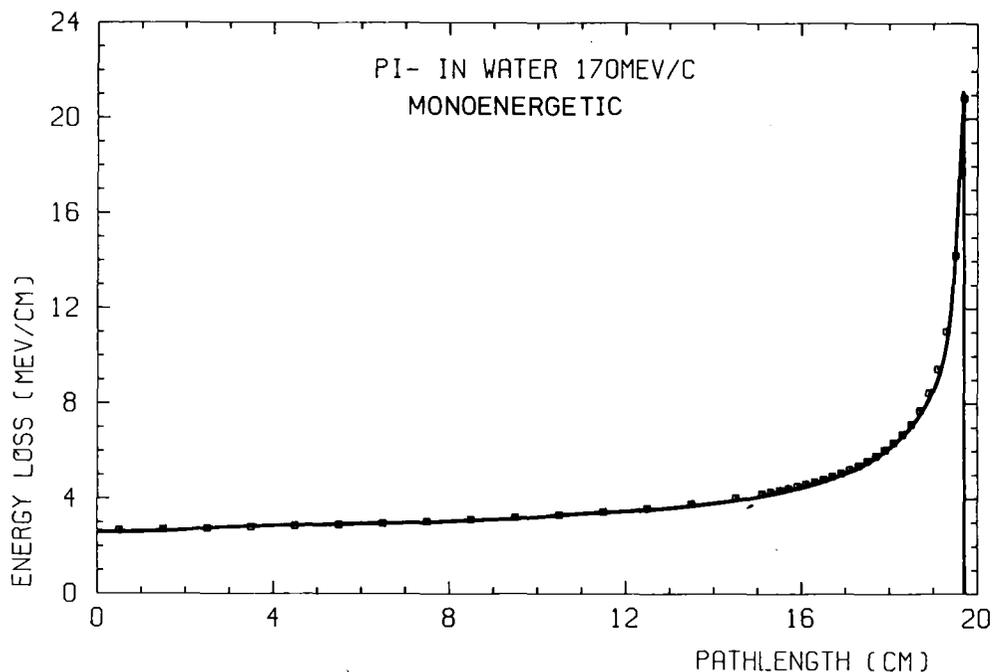


Fig. 16: Ablagerung der kinetischen Energie eines monoenergetischen Strahls.

vor die mittlere Reichweite nahezu konstant bleibt (sogenannter Plateau-Bereich) und danach zum Bragg-Peak hin sehr stark ansteigt. Die absolute Höhe des Bragg-Peaks aus Figur 2 beträgt etwa 90 MeV/cm. Dagegen ist der in Figur 16 wiedergegebene Wert von der gewählten Maschenweite der Targetmatrix im Peak abhängig. Da für alle praktischen Fälle das Bahnlängenstragging sowie die endliche

Impulsauflösung bereits Unsicherheiten über das genaue Bahnde nach sich ziehen, ist die in der Darstellung gewählte Schrittweite von 2 mm für die Berechnung realistischer Tiefendosiskurven angemessen.

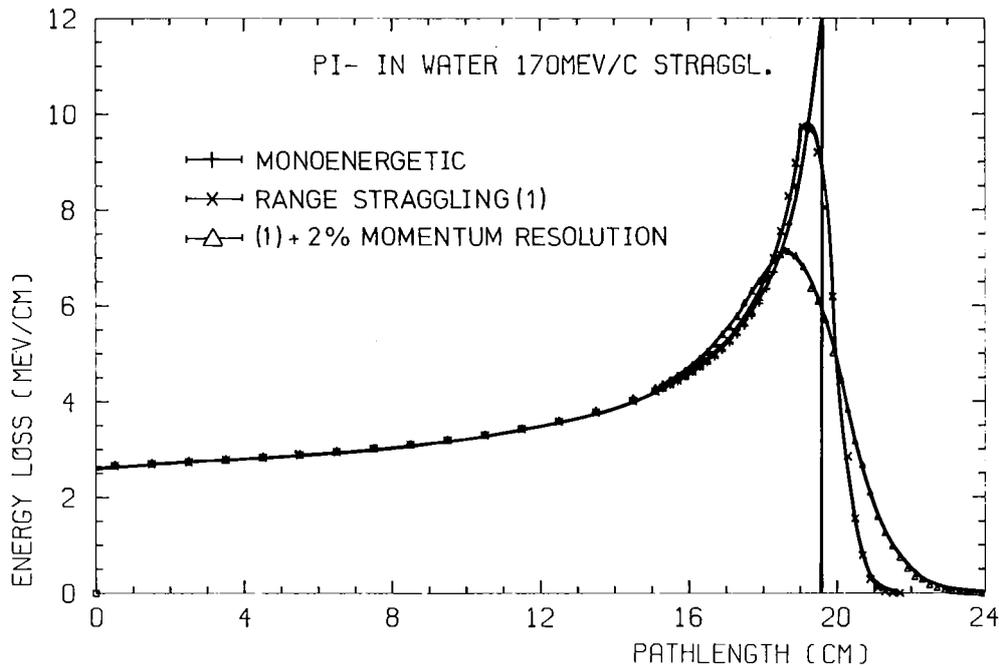


Fig. 17: Einfluß von Bahnlängenstraggling und Impulsauflösung auf einen monoenergetischen Strahl.

Figur 17 zeigt, ausgehend von der Kurve für einen monoenergetischen Strahl, additiv die Einflüsse von Bahnlängenstraggling und endlicher Impulsbandbreite. Sowohl das Straggling als auch die Impulsunschärfe lassen den Bragg-Peak niedriger, dafür aber breiter werden. Die Lage des Maximums rückt zu kleineren Eindringtiefen vor. Dieses Verhalten wird noch deutlicher, wenn die Impulsbandbreite gesteigert wird (Figur 18).

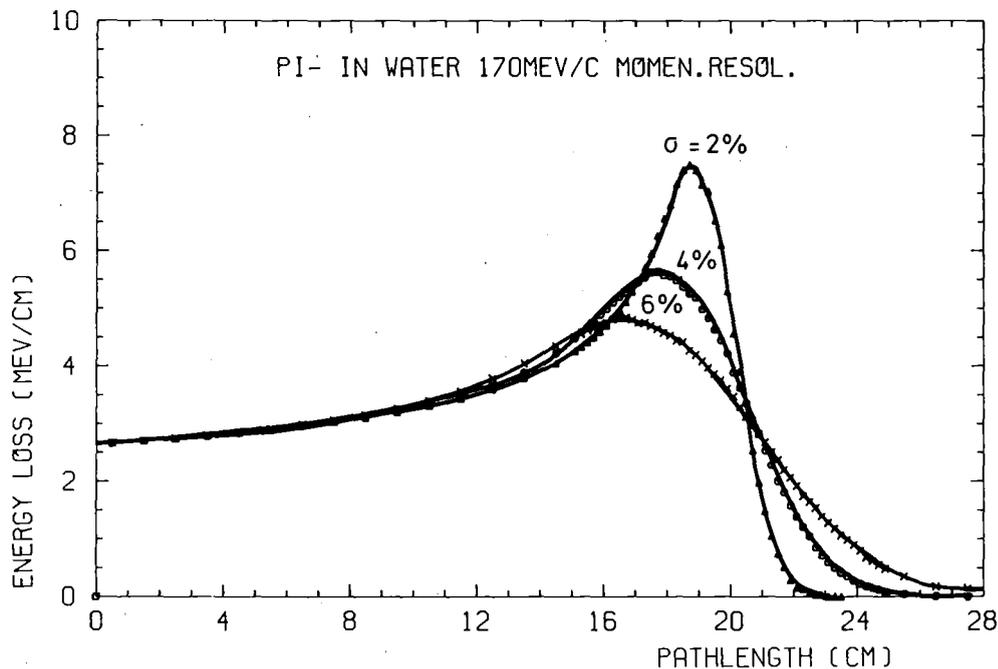


Fig. 18: Variation der Impulsbandbreite

III.6 Durchführung der Coulomb-Vielfach-Streuung

Im Programm wird die Vielfach-Streuung zusammen mit dem Teilchen-transport behandelt. Am Anfang eines Wegelementes wird gemeinsam mit dem Energieverlust eine neue Richtung für das Teilchen berechnet und diese wird über die gesamte Länge eines Wegstückes konstant gehalten. Die für die Festlegung der Richtung benötigten Winkel (θ, ϕ) sind nach der Molière-Theorie durch die Größe des zurückgelegten Wegelementes bestimmt.* Die Richtung (θ_z, ϕ_z) , aus der das Teilchen ankommt, muß deshalb um die Winkel θ und ϕ in die neue Flugrichtung (θ'_z, ϕ'_z) transformiert werden. Die Erzeugung der Winkel θ geschieht, wie näher im Anhang beschrieben, nach dem Monte-Carlo-Verfahren. Der Winkel ϕ ist für Materialien mit homogener, isotroper Zusammensetzung zwischen 0 und 2π gleichförmig verteilt. Am Ende der Bahnlänge wird für die Berechnung des Energieverlustes die Schrittweite um den Faktor 100 verkleinert. Um jedoch den zeitlichen Rechenaufwand vertretbar zu halten, wird das Teilchen ab diesem Punkt nicht mehr nach jedem Schritt neu 'gestreut', sondern behält seine letzte Richtung auf der noch verbleibenden Bahnlänge bei.

* In dieser Arbeit wird die Häufigkeitsverteilung (8) auf den gaußförmigen Anteil beschränkt.

Durch die Aufweitung des Strahles wird Energie außerhalb derjenigen Volumenelemente abgelagert, die den Fadenstrahl direkt umgeben. Von der Kantenlänge dieser Elemente in x- und y-Richtung hängt es ab, wieviel Energie im 'Fadenstrahl-Volumen' abgelagert wird. Die Kurven in Figur 19 stellen die Energieablagerungen mit jeweils unterschiedlicher Querschnittsfläche als Funktion der Tiefe dar. Bei einer Kantenlänge der Querschnittsfläche von $\pm 0,5$ cm sieht man, daß bereits nach geringer Eindringtiefe mehr Energie aus diesem Volumen herausgetragen wird, als dem Anstieg des Energieverlustes entspricht. Der Braggsche Peak ist nur noch schwach ausgeprägt und verschwindet vollständig bei weiterer Reduktion der Kantenlänge. Verdoppelt man die Kantenlänge auf ± 1 cm so wird der typische Braggsche Kurvenverlauf wieder deutlich erkennbar. Summiert man in einem weiteren Schritt alle Volumenelemente der x-y-Ebene in einer Schichttiefe auf, so erhält man eine Projektion der räumlichen Energieverteilung auf die Strahlachse. (In Figur 19 mit 'TOTAL' bezeichnet)

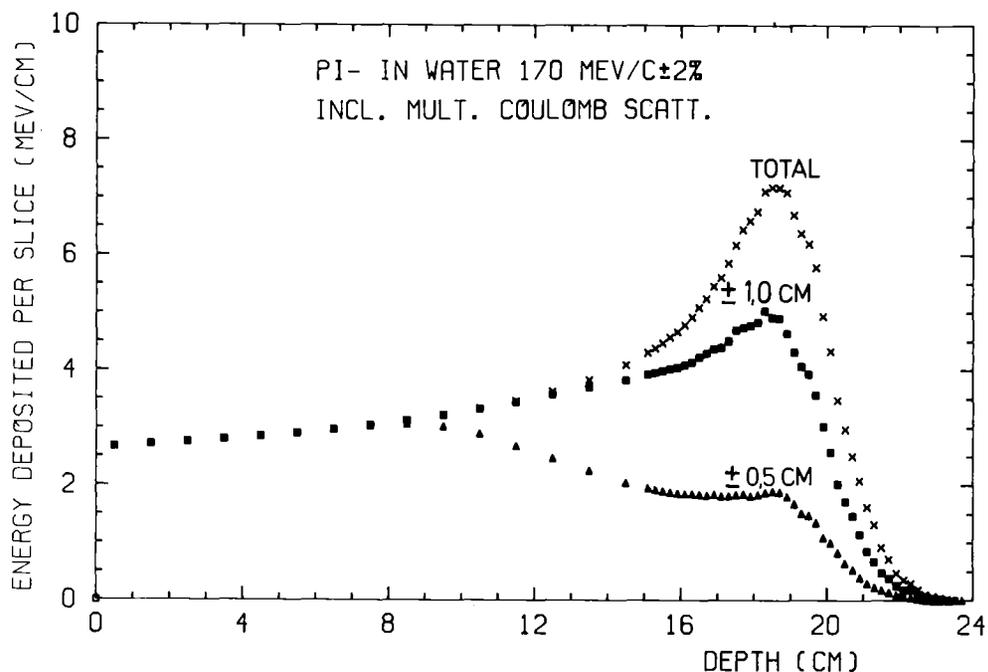
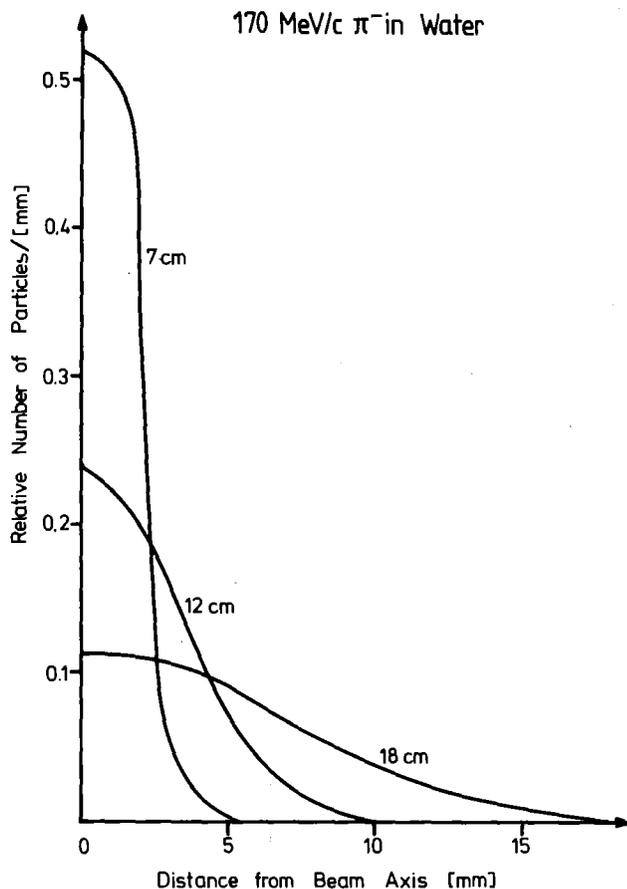


Fig. 19: Tiefendosiskurven einschließlich der Coulomb-Vielfach-Streuung nach Molière bei verschiedenen Abmessungen der Querschnittsfläche derjenigen Volumina, die den Fadenstrahl einschließen.

Die Verbreiterung des Strahles wird in Figur 20 nochmals für drei verschiedene Eindringtiefen dargestellt. Bei kleinen Eindringtiefen



Figur 20:

Verbreiterung eines Pionenstrahls durch die Wirkung der Coulomb-Vielfachstreuung als Funktion der Eindringtiefe.

wird die gesamte Energie innerhalb eines kleinen räumlichen Bereiches abgelagert und mit zunehmender Tiefe immer weiter von der Strahlachse weggetragen. Die Vielfachstreuung tritt mit zunehmender Anfangsenergie der Pionen immer mehr in Erscheinung. In Figur 21 ist die Bragg-Kurve für verschiedene Impulse der Pionen bei konstantem $\Delta P/P$ aufgetragen. Man erkennt, wie mit wachsendem Impuls das Verhältnis der abgelagerten Energie im Peak- und Plateaubereich als Funktion der Impulsverschmierung, des Straggling und der Vielfachstreuung abnimmt und der Peak verbreitert wird.

Figur 22 zeigt nochmals alle bisher diskutierten Einflüsse auf die Tiefendosiskurve. Die endliche Impulsauflösung, das Bahn-längenstraggling und die Kleinwinkelstreuung führen jeweils zu einer Verbreiterung des Peaks bei gleichzeitiger Reduktion der Höhe. Besonders wichtig ist die auftretende Verschiebung des Maximums zu geringeren Eindringtiefen hin. Vergleicht man die Projektion der räumlichen Energieverteilung auf die z-Achse aus Figur 19 mit der entsprechenden Kurve ohne Berücksichtigung der Vielfachstreuung in Figur 17, so stellt man fest, daß der Peak nur in der Größenordnung der gewählten Rastereinteilung von 2 mm verschoben ist.

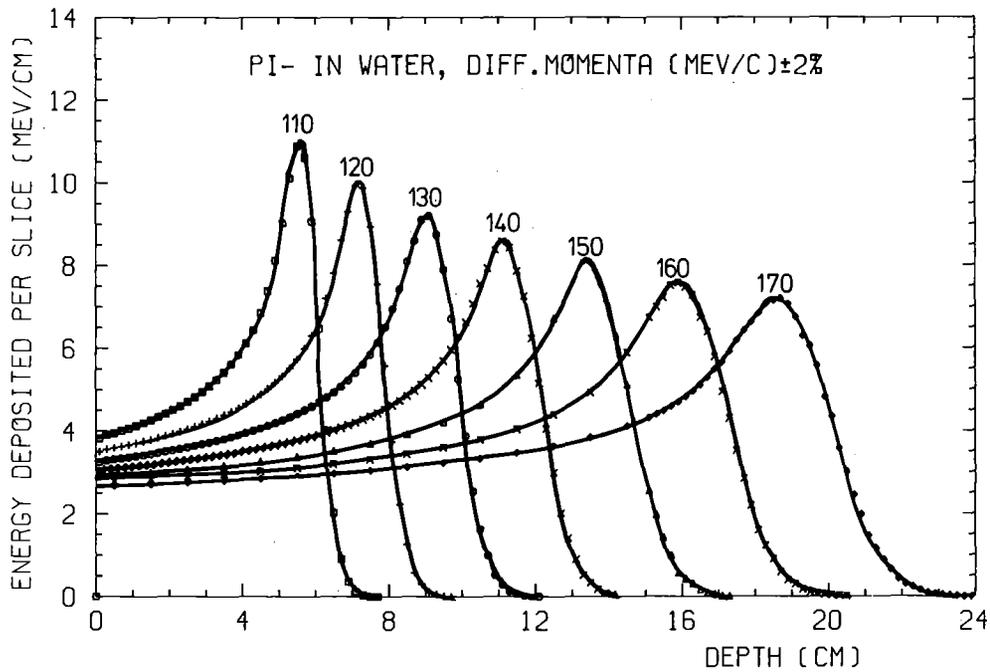


Fig. 21: Tiefendosiskurven als Funktion des Pionenimpulses bei konstanter Impulsauflösung

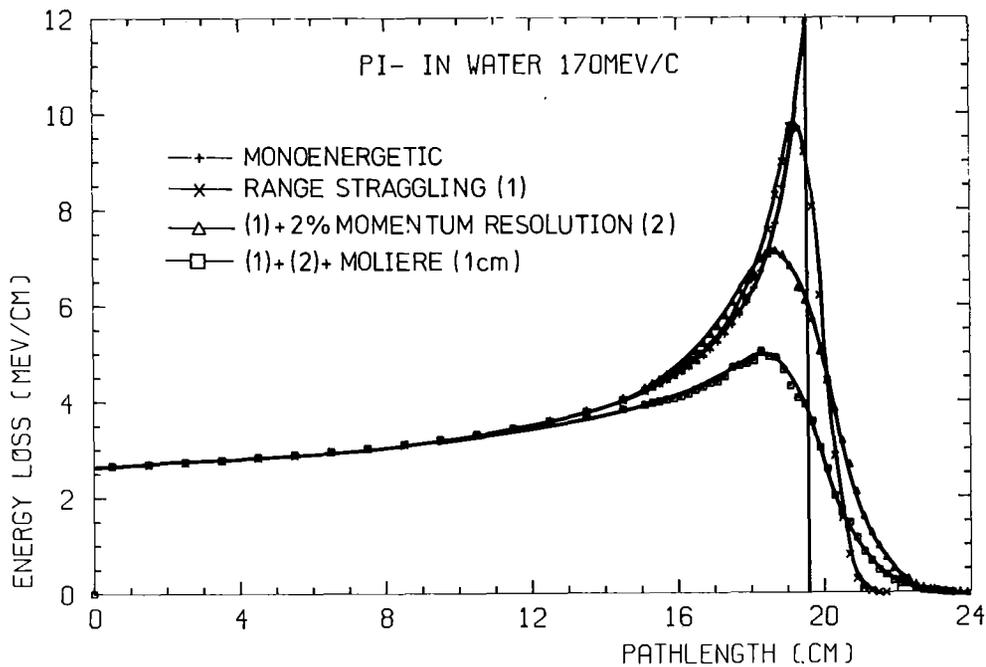


Fig. 22: Zusammenstellung aller bis jetzt aufgeführten Einflüsse auf den Verlauf der Tiefendosiskurve

Aus dieser Tatsache ziehen Curtis et al. [28] den Schluß, daß bei ausgedehnten Strahlgeometrien (abgesehen von den Randbereichen) die Vielfachstreuung vernachlässigt werden darf.

III.7 Vergleich der Ergebnisse eines Streuexperimentes mit der Molière-Theorie

Die einzigen vorhandenen experimentellen Daten über die Vielfachstreuung von negativen Pionen in gewebeähnlicher Substanz bei Energien unterhalb von 100 MeV stammen aus einem Streuexperiment unserer Forschungsgruppe [53]. Die Auffächerung des Teilchenstrahls wurde an den biologisch relevanten Streumaterialien Kohlenstoff, Wasser und Kalzium mit verschiedenen dicken Streuern untersucht. Die genaue Festlegung des Ortes und der Richtung, sowohl vom einfallenden als auch vom gestreuten Pion, erzielte man mit Hilfe von vier Vieldrahtproportionalkammern und einem Arrangement von Szintillationszählern. In Figur 23 ist die Streuung eines Teilchens schematisch dargestellt. Aus der Kenntnis von Einfalls- und Ausfallsrichtung läßt sich auf den Streuwinkel zurückrechnen. Die Wirkung des Streuers auf einen Fadenstrahl wird durch die Verteilung der Durchstoßpunkte der Teilchentrajektorien

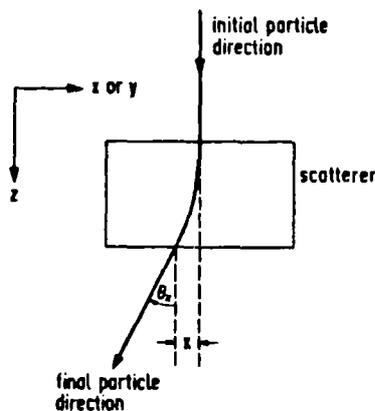


Fig. 23:

Schematische Darstellung des Streuvorganges

am Ende des Streuers sowie durch die Ablenkung aus der Einfallrichtung charakterisiert. Die Häufigkeitsverteilungen für den Streuwinkel θ_x sowie für den Abstand x zwischen den Durchstoßpunkten von Teilchenbahnen und Einfallrichtung (vgl. Fig.23) werden durch Gaußsche Funktionen angenähert. Die diesbezüglichen Standardabweichungen gelten als ein Maß für die Wirkung des Streuers. In Figur 24 werden die Resultate aus diesem Experiment solchen aus

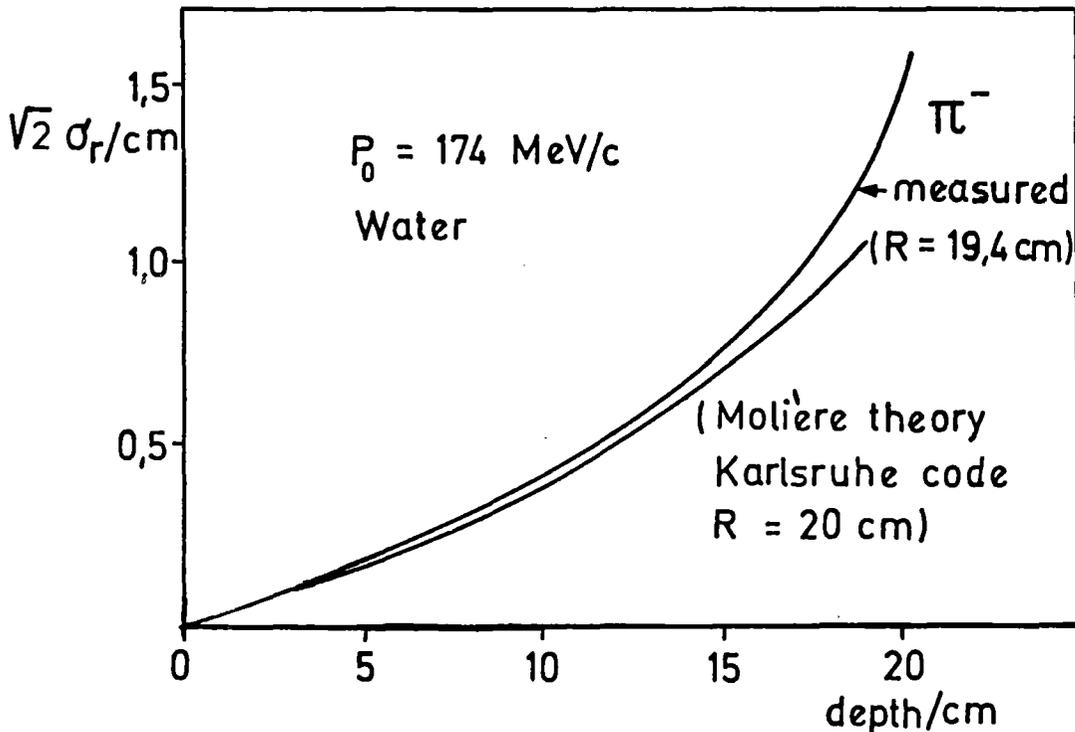


Fig. 24: Vergleich der Resultate aus einem Streuexperiment mit denen der Molière-Theorie

dem vorliegenden Rechenprogramm gegenübergestellt. Der Parameter σ_r für die Werte der Durchstoßpunkte ist über der Eindringtiefe aufgetragen. Beide Kurven stimmen fast über die gesamte Reichweite innerhalb von 10% überein. Die vorhandene Abweichung konnte bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch nicht endgültig geklärt werden. An den vorliegenden experimentellen Daten sind noch nicht alle notwendigen Korrekturen, wie Aufstreuung in den Zählern sowie eventuelle Fehler in der Festlegung der Abstände zwischen Target und den ortsbestimmenden Detektoren, endgültig angebracht. Die genannten Einflüsse können zu einem geringeren mittleren Abstand der Teilchen von der Strahlachse führen, womit sich dann eine noch bessere Übereinstimmung ergeben würde. Eine weitere Unsicherheit folgt aus den schon erörterten Diskrepanzen zwischen den verschiedenen Reichweitentabellen.

III.8 Bestimmung der freien Weglänge für ein Pion

Nicht alle Teilchen können ihre Bahnlänge ganz durchlaufen, ohne daß sie aufgrund der starken Wechselwirkung einen Prozeß auslösen. Deshalb muß für jedes einzelne Pion vor seinem Eintritt ins Phantom

eine freie Weglänge (zwischen null und der vollen Bahnlänge) ermittelt werden, entlang der das Teilchen durch Abbremsen Energie verliert. Wie im folgenden gezeigt wird, hängt die Verteilung der erzeugten freien Weglängen von den totalen Wirkungsquerschnitten der Kerne in der Bremssubstanz und damit von der Einfallenergie des Teilchens ab. Hat ein Pion die ihm zugeordnete Bahnlänge durchlaufen, löst es einen Prozeß aus (siehe Kapitel III.11). Die Abnahme Δn der normierten Anzahl n von Partikeln in einem Teilchenstrom hängt in der bekannten Weise von der durchdrungenen Schichtdicke Δx des Targetmaterials, der Anzahl der Stoßpartner pro Volumenelement und dem totalen Wirkungsquerschnitt ab:

$$-\Delta n = n(x) \cdot \rho(L/A) \sigma(E(x)) \cdot \Delta x. \quad (23)$$

Dabei bedeutet ρ die Dichte, A die Atommasse des Materials, L die Loschmidt-Konstante und σ hängt indirekt über die noch vorhandene Energie E vom Ort x ab. Da die Restenergie E mit dem Weg x eindeutig verknüpft ist, können alle in Gleichung (23) vorkommenden Größen durch ihre Energieabhängigkeit ausgedrückt werden:

$$\Delta n(E) = n(E) \cdot \rho(L/A) \sigma(E) \cdot \left(-\frac{dE}{dx}\right)^{-1} \cdot \Delta E. \quad (24)$$

Die Lösung der Gleichung (24) mit der Anfangsbedingung $n(E_0) = 1$ für $E = E_0$ lautet:

$$n(E) = \exp\left(-\rho(L/A) \cdot \int_E^{E_0} \sigma(E') \left(-\frac{dE'}{dx}\right)^{-1} dE'\right) \quad (25)$$

Die Größe $n(E)$ ist die relative Anzahl der Teilchen, die bei der Restenergie E noch vorhanden sind, und

$$r(E) = 1 - n(E) \quad (26)$$

ist die relative Anzahl derjenigen Teilchen, die einen Prozeß ausgelöst haben. Die Gesamtzahl der Ereignisse ergibt sich aus der Gleichung (26) für die Restenergie $E = 0$

$$r(0) = 1 - n(0) = r_0 \quad (27)$$

wobei $0 \leq r \leq r_0 < 1$ ist.

Die freien Weglängen werden nach dem Monte-Carlo-Verfahren erzeugt. Genügt die Zufallszahl z der Bedingung

$$z \leq r_0, \quad (28)$$

so findet ein Prozeß statt. Zu der gewürfelten Zahl z erhält man auf die im Anhang angegebene Weise eine Energie E_z . Diese ist mit einer Bahnlänge $S(E_z)$ verknüpft, die das Teilchen nicht mehr zurücklegen kann, da es einen Prozeß ausgelöst hat. Demnach ergibt sich die Wegstrecke S bis zu dem Ort, an dem ein Prozeß stattfindet, aus

$$S = S(E_0) - S(E_z). \quad (29)$$

Entlang dieser Wegstrecke wird das Teilchen kontinuierlich gebremst.

III.9 Integrale Reichweitenkurve

Die im Programm erzeugten freien Weglängen bewirken den Abfall der beiden Kurven in Figur 25. Dieses Diagramm entspricht der sogenannten integralen Reichweitenkurve. Die gezeigten Kurven für zwei biologisch relevante Materialien (H_2O, CH_2) haben ideale Form, d.h. ihre Gestalt ist frei von Einflüssen wie der apparativen Auflösung eines Reichweitenteleskops, der Impulsauflösung oder des Bahnlängenstragglings. Die genannten Effekte führen in erster Näherung zu einer Abrundung der Reichweitenkurven bei großen Eindringtiefen. Die verwendeten Wirkungsquerschnitte für Sauerstoff ^{16}O und Kohlenstoff ^{12}C legen fest, daß in Wasser 64% und in Polyäthylen 70% aller einfallenden Pionen ihre volle Bahnlänge durchlaufen. Diejenigen Anteile der Pionen, die im Wasser bzw. Äthylen aus dem Strahl weggefangen werden, verhalten sich erwartungsgemäß wie der Skalenfaktor SK mit welchem die Wirkungsquerschnitte des ^{12}C auf diejenigen des ^{16}O umgerechnet werden. Die beiden Kurven in Figur 25 sind keine Exponentialkurven, wie man sie bei konstantem Wirkungsquerschnitt erhalten würde, sondern spiegeln vielmehr die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von der Energie wieder.

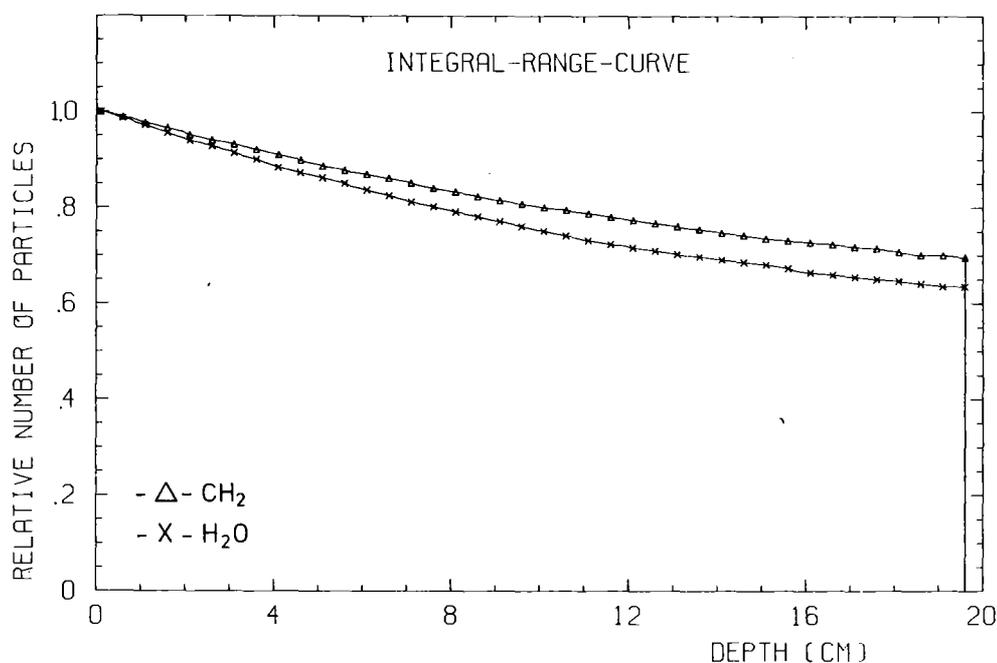


Fig. 25: Integrale Reichweitenkurven für π^- mit 170 MeV/c in Polyäthylen bzw. Wasser

III.10 Erzeugung und Behandlung von Sekundärteilchen

III.10.1 Bestimmung der Prozeßart

Hat ein Pion die ihm zugeordnete freie Weglänge zurückgelegt, wird der Transport im Programm beendet. Unterhalb einer Schwelle von 5 MeV für die Restenergie des Teilchens wird allein der Abbremsprozeß fortgeführt und das Teilchen als gestopptes Pion weiterbehandelt. Oberhalb dieser Schwelle wird die Art des Prozesses aufgrund der relativen Anteile der partiellen Wirkungsquerschnitte am totalen Wirkungsquerschnitt entschieden.

III.10.2 Zwei-Körper-Reaktionen

Elastische und inelastische Streuung sind 2-Körper-Reaktionen, während die quasielastischen Streuprozesse und der Ladungsaustausch am gebundenen Nukleon näherungsweise so behandelt werden können. Bei dieser Art von 2-Körper-Reaktionen ist durch den Anfangszustand und einen Parameter des Endzustandes, z.B. den Winkel eines

auslaufenden Teilchens, die Kinematik vollständig bestimmt. In der vorliegenden Arbeit wird der Winkel des auslaufenden Pions entsprechend den Winkelverteilungen nach dem Monte-Carlo-Verfahren festgelegt. Damit lassen sich die Energien der beiden Teilchen sowie die Richtung des Stoßpartners berechnen. Das gestreute Pion, sofern es sich um ein geladenes handelt, wird in der bereits näher beschriebenen Weise bis zu seinem Reichweitenende in der neuen Richtung transportiert. Bei auftretenden π^0 -Teilchen wird angenommen, daß die beiden Photonen aus dem Zerfall das Phantom ohne Wechselwirkung verlassen. Von den geladenen Reaktionspartnern werden die Protonen geradlinig bis zum vollständigen Verlust ihrer kinetischen Energie transportiert. Freigesetzte Neutronen werden beim gegenwärtigen Entwicklungsstand des Programmes nicht transportiert. Bei schweren Rückstoßkernen wie z.B. ^{12}C wird aufgrund ihrer sehr kurzen Reichweite angenommen, daß sie ihre Energie lokal ablagern.

III.10.3 Absorptionsprozesse

Der Einfang eines negativen Pions durch einen Kern führt zur Emission von geladenen und neutralen Bruchstücken in Form eines Sterns. Die Gesamtheit der Teilchen jedes Sterns von Sekundärteilchen erfüllt die Erhaltungssätze z.B. für Energie, Impuls, Baryonenzahl und elektrische Ladung. Dadurch sind die Teilchen in mehrfacher Hinsicht korreliert. In den Experimenten von Mechttersheimer [46,47,48], Münchmeyer [49] und Randoll [50] sind nur die Energiespektren jeder einzelnen Teilchenart für sich und die zugehörigen relativen Häufigkeiten gemessen worden. Aussagen über etwaige Korrelationen sind noch sehr unvollkommen [49]. Daher war es nicht möglich, einen individuellen Stern unter Beachtung der Erhaltungssätze und der gemessenen Häufigkeitsverteilungen zu rekonstruieren. Deshalb werden folgende Näherungen getroffen. Die in einem Stern erzeugten Teilchen sind bezüglich ihrer Energien und Impulse nicht korreliert. Bei der Absorption eines gestoppten Pions werden die Sekundärteilchen unabhängig voneinander isotrop emittiert. Die Energieverteilung jeder Art und die relative Häufigkeit werden erst durch die Gesamtheit aller erzeugten Sterne wiedergegeben.

Sekundärteilchenspektren für Pion-Absorption im Fluge sind bisher noch nicht gemessen worden. Deshalb werden im vorliegenden Programm

die Spektren von gestoppten Pionen benutzt und wie folgt vorgegangen (vgl. Fig.26). Im Schwerpunktsystem (CM-System) werden die Sekundärteilchen isotrop emittiert, wobei die

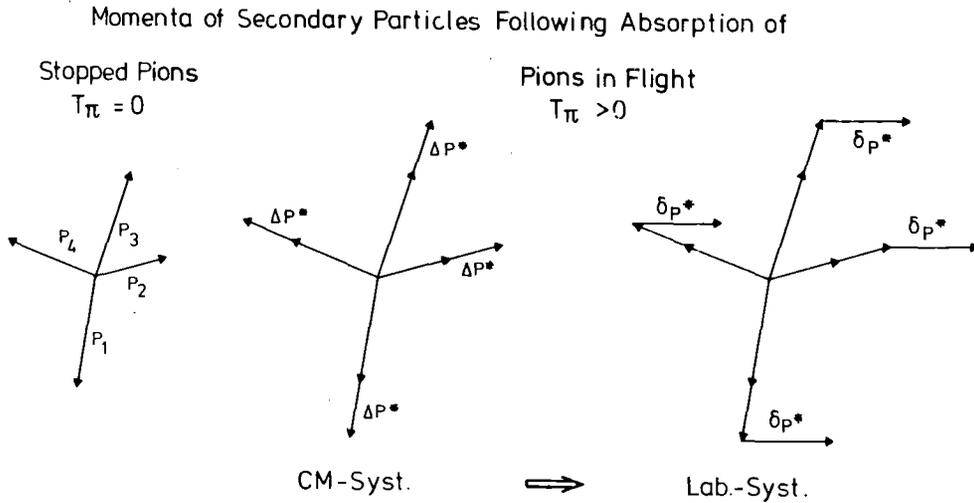


Fig. 26: Modell für die Weitergabe der kinetischen Energie des Pions an die Sekundärteilchen bei Absorption im Fluge.

Erhaltungssätze wieder nur im Mittel über alle erzeugten Sterne erfüllt werden. Die zur Verfügung stehende kinetische Energie wird in Form eines zusätzlichen Impulses ΔP^* auf die Teilchen verteilt. Anschließend werden die Impulse ins Laborsystem transformiert.

Die von Teilchen in einem Stern nach der Absorption eines gestoppten Pion weggetragene Energie ist:

$$E_{\text{Stern}} = \sum_i \bar{E}_i \cdot h_i \quad (30)$$

wobei $\bar{E}_i = \bar{p}_i^2 / 2m_i$ die mittlere kinetische Energie und h_i die mittlere Häufigkeit der Teilchenart i bedeuten. Mit Hilfe dieser Energie kann ein mittlerer Impuls \bar{p}_R^* definiert werden,

$$E_{\text{Stern}} = \sum_i \frac{h_i}{2m_i} \bar{p}_i^2 \equiv \bar{p}_R^{*2} \cdot \sum_i \frac{h_i}{2m_i} \quad (31)$$

der auf jedes Sekundärteilchen übertragen wird. Bei endlicher kinetischer Energie T^* im Schwerpunktsystem treten die Teilchen mit einem mittleren Impuls \bar{p}_F^* auf

$$E_{\text{Stern}} + T^* \equiv P_F^{*2} \sum_i \frac{h_i}{2m_i} \quad (32)$$

Die Differenz ΔP^* der beiden mittleren Impulse

$$\Delta P^* = \overline{P}_F^* - \overline{P}_R^* \quad (33)$$

wird den generierten Werten $P_i^!$ parallel addiert,

$$\vec{p}_{i,CM}^! = \vec{p}_i^! \left(1 + \frac{\Delta P^*}{|P_i^!|}\right) \quad (34)$$

um die Impulse $P_{i,CM}^!$ im Schwerpunktsystem von Pion und Kern zu erhalten. Bei der Transformation der Impulsvektoren ins Laborsystem wird jedem Teilchen noch der Anteil $\delta \vec{P}^*$ des Schwerpunktpulses \vec{P}_{LS}^* addiert.

$$\vec{p}_{i,LS}^! = \vec{p}_{i,CM}^! + \delta \vec{P}^* \quad \text{mit} \quad \delta \vec{P}^* = \vec{P}_{LS}^* / \sum_i h_i \quad (35)$$

Dieses Modell erhält im Mittel Energie und Impuls bei gleichzeitiger Annäherung der Kinematik des Absorptionsprozesses im Flug.

III.10.4 Transport der geladenen Teilchen

Nur die leichten unter den Sekundärteilchen mit hoher Energie haben Reichweiten, die erheblich größer sind als etwa der Netzabstand des Rasters im Phantom. Daher können einige Teilchen so behandelt werden, als würden sie ihre kinetische Energie lokal deponieren. In der Folge von Figuren 27a bis c ist die abgelagerte Energie als Funktion des Abstandes vom Produktionsort der Sekundärteilchen aufgetragen. Jede dieser Figuren enthält diejenige Kurve, bei der alle auftretenden Sekundärteilchen transportiert worden sind. Figur 27a vergleicht damit eine Kurve, bei der nur Protonen Energie vom Ursprung wegtragen. Unterschiede zwischen beiden Kurven erstrecken sich über mehrere Zentimeter Abstand. Werden auch Deuteronen transportiert, so verringern sich die Unterschiede bei den Kurven beträchtlich (Fig. 27b). In vergrößertem Maßstab zeigt Figur 27c, daß der Unterschied praktisch verschwindet, wenn alle Wasserstoffisotope p, d, und t transportiert werden. Dementsprechend werden im

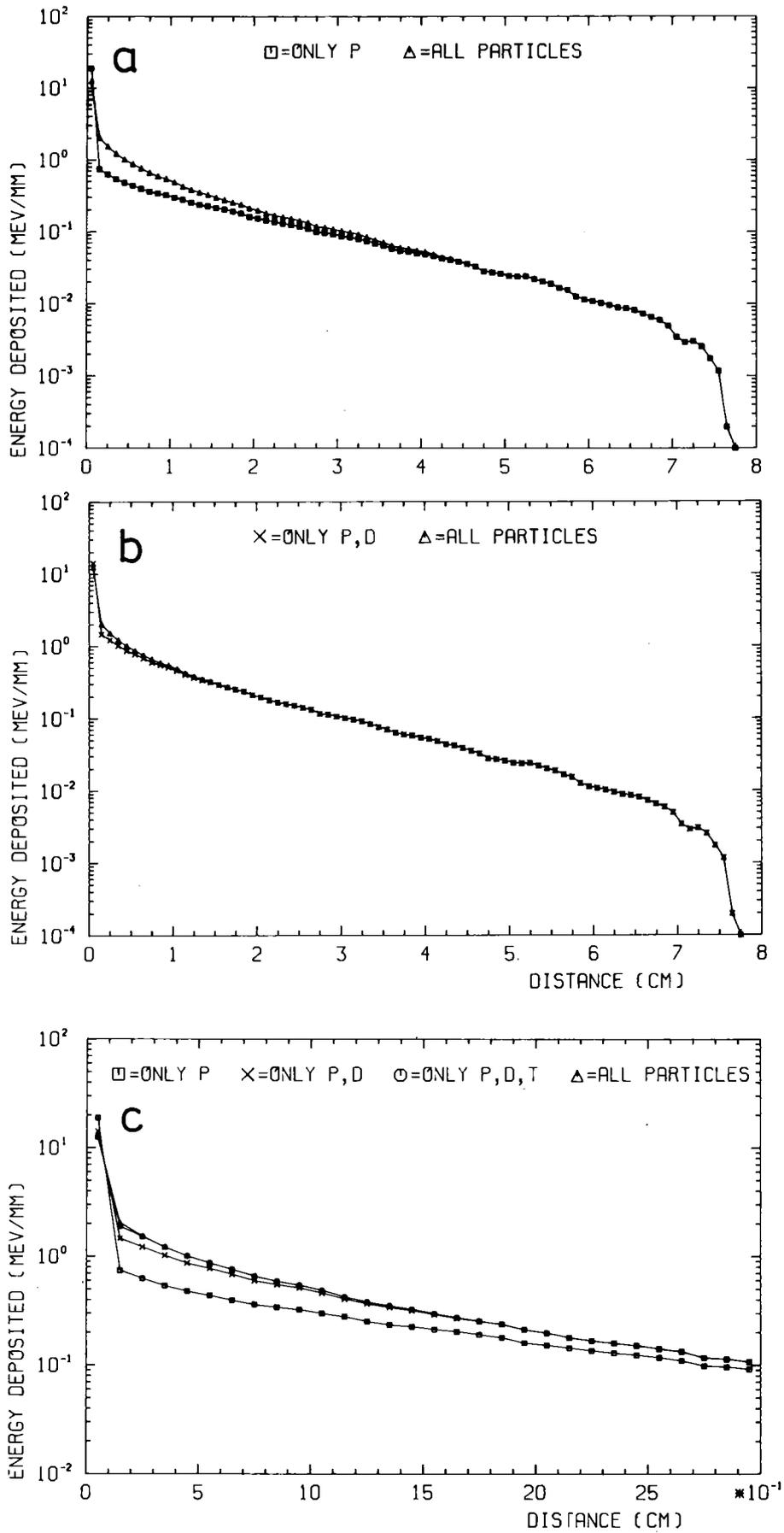


Fig. 27: Von geladenen Sekundärteilchen abgelagerte Energie als Funktion des Abstandes von ihrem Entstehungsort im Wasserphantom

vorliegenden Programm nur die Wasserstoffisotope transportiert, während alle schweren Teilchen ihre Energie auf der ersten Schrittweite des Abstandes vom Entstehungsort verlieren.

III.10.5 Transport der neutralen Teilchen

Bei einem Absorptionsprozess werden neben geladenen Teilchen auch Photonen und Neutronen emittiert. Nach Tabelle 2 tragen Photonen eine Energie von ca. 2 MeV aus der Einfangsregion. Diese Energie bleibt der Einfachheit halber im vorliegenden Programm unberücksichtigt. Dagegen beträgt nach den Experimenten von Klein [51,52] der Anteil der Neutronen bei Absorption in Ruhe 30,4 MeV/Neutron bei einer relativen Häufigkeit von 2,5 Neutronen pro Pionenstopp. Aufgrund ihrer freien Weglänge verteilen Neutronen ihre Energie breit im Target, wobei ein gewisser Anteil die endliche Targetberandung verläßt. Neutronen übertragen ihre Energie in Stößen mit den Kernen des Absorbers, in wasserhaltigen Substanzen insbesondere an Protonen. Bei einer exakten Behandlung der Energieübertragung müßte jedes einzelne Neutron mit Hilfe eines Neutronentransportprogrammes verfolgt werden. Derartige Transportprogramme sind umfangreich und erfordern einen hohen Rechenaufwand.

Für ein vorgegebenes Energiespektrum kann mit einer nur einmal durchzuführenden Rechnung die Verteilung der abgelagerten Energie als Funktion des Abstandes vom Erzeugungsort der Neutronen bestimmt werden. Diese Ergebnisse lassen sich in einer Tabelle für die Energieabgabe pro 'Wegstrecke' zusammenfassen. Eine solche Tabelle gestattet es, auch Neutronen einen dE/dx -Wert zuzuordnen. Eine Tabelle des Energieverlustes als Funktion des Abstandes für ein definiertes Neutronenspektrum ist von Turner et al. [54] erstellt worden. Diese in Tabelle 3 wiedergegebenen Werte beruhen auf dem Spektrum von Guthrie [12], das für die Absorption von π^- an gewebeähnlichem Material mit Hilfe eines intranuklearen Kaskadenmodells berechnet wurde. Die experimentellen Ergebnisse von Klein [51,52] weichen von den oben genannten Neutronenspektren ab, indem sie bei niederen Energien an gewebeähnlichen Substanzen deutlich weniger Teilchen aufweisen. Die vorliegende Tabelle 3 muß deshalb für künftige Anwendungen neu berechnet werden. Die zu erwartenden

Tabelle 3: Durch Neutronen (2 'Neutronenstrahlen'/Stern) an gewebeähnliche Substanz übertragene Energie als Funktion seiner Weglänge

Weglänge [cm]	Energie [MeV]
0,0	0,0
1,0	0,48
3,0	1,51
5,0	2,74
7,0	4,08
9,0	5,56
11,0	7,20
13,0	8,99
15,0	10,90
17,0	13,00
19,0	15,20
21,0	17,60
23,0	19,80
24,0	21,00
25,0	22,10

Korrekturen werden sich dahingehend auswirken, daß der Energieverlust in der Umgebung des Entstehungsortes der Neutronen niedriger wird.

Im vorliegenden Programm werden die Daten aus Tabelle 3 verwendet. Sie sind folgendermaßen zu interpretieren: Die in einem Stern enthaltenen Neutronen werden durch zwei voneinander unabhängige und isotrop im Raum verteilte 'Neutronenstrahlen' ersetzt. Ein 'Neutronenstrahl' lagert bis zu einer Weglänge von 25 cm eine Energie von 11,05 MeV ab. Auf einer Weglänge von 24 cm verliert er nur noch 10,5 MeV. Die Differenz überträgt der 'Neutronenstrahl' dem Target auf seinem ersten Zentimeter. Der Beitrag der Neutronen zur abgelagerten Energie ist in Figur 28 dargestellt. Während die geladenen Sekundärteilchen den Großteil ihrer kinetischen Energie in unmittelbarer Nähe ihres Entstehungsortes abgeben, wird die Neutronenenergie praktisch gleichmäßig über die gesamte aufgetragene Strecke verteilt.

Das Energiespektrum der Neutronen nach der Absorption im Fluge unterscheidet sich von demjenigen nach Absorption in Ruhe durch Beiträge aus der kinetischen Energie des Pions. Wie sich aus unseren Rechnungen ergibt, gehen rund 2/3 der kinetischen Energie des Pions auf Neutronen und etwa 1/3 auf geladene Sekundärteilchen. Da jedoch noch keine Tabellen für derart veränderte Neutronenspektren zur Verfügung stehen, werden auch bei der Absorption im Fluge die Werte für den Energieverlust

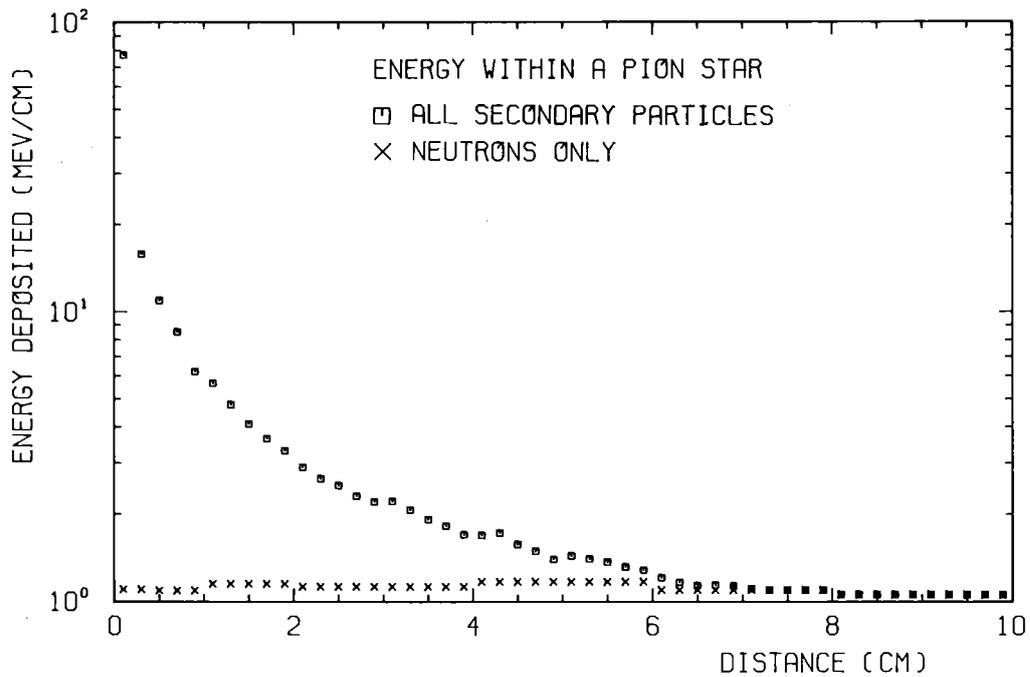


Fig. 28: Die durch einen Pionenstern übertragene Energie als Funktion des Abstandes

aus Tabelle 3 verwendet. Zur Festlegung der Emissionsrichtung der 'Neutronenstrahlen' wird jedoch wie bei der Emission von geladenen Teilchen nach Abschnitt III.10.3 verfahren. Der Impuls der Neutronen im Schwerpunktsystem wird jeweils durch den entsprechenden mittleren Impuls \bar{p}_F^* ersetzt. Bei diesem Vorgehen wird zwar die Änderung des Energieverlustes gegenüber den Werten aus Tabelle 3 vernachlässigt, jedoch die Kinematik bei der Absorption im Fluge angenähert.

IV. RESULTATE FÜR DIE TIEFENDOSISKURVE

Die Figuren 29-32 zeigen eine Reihe von eindimensionalen Energieverteilungen als Funktion der Eindringtiefe der Pionen, wobei die Anteile der verschiedenen Pionenprozesse getrennt eingezeichnet sind. Die unterste Kurve in Figur 29, dargestellt durch Quadrate, zeigt nochmals den Verlauf der übertragenen kinetischen Energie aus Figur 19. Hierzu sind die Beiträge der geladenen Sekundärteilchen und zusätzlich die der Neutronen aus Absorptionsprozessen gestoppter Pionen addiert. Man erkennt, daß

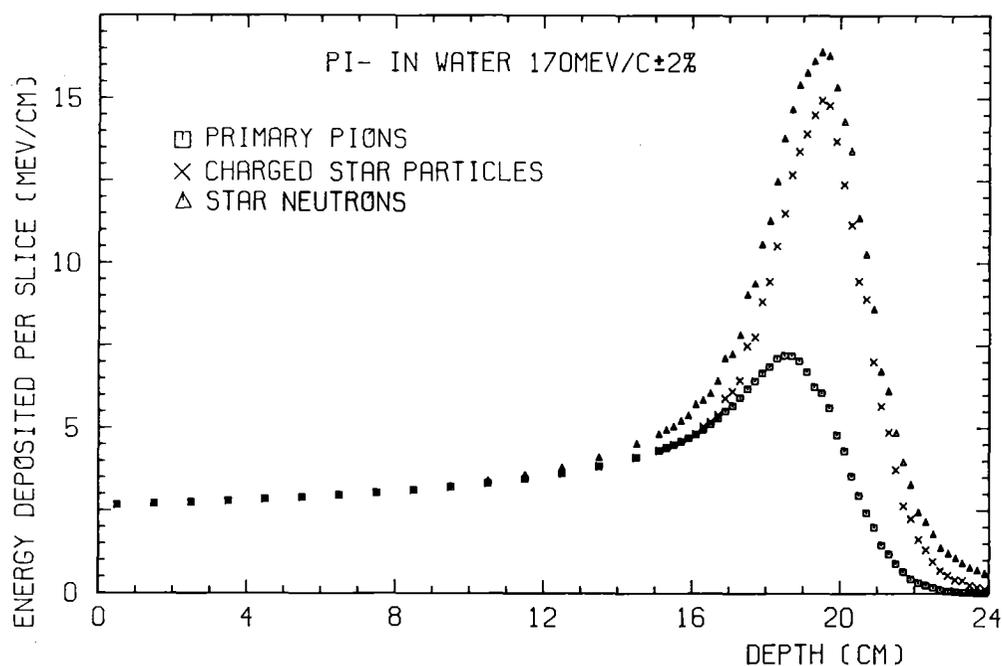


Fig. 29: Abgelagerte Energie als Funktion der Eindringtiefe von Pionen, die am Ende ihrer Bahn eingefangen werden (keine Wechselwirkung im Flug)

der Beitrag der Sekundärteilchen sich über die absteigende Flanke des Bragg-Peaks erhebt und dadurch das Maximum der abgelagerten Energie um ca. 1 cm zu größeren Eindringtiefen hin verschiebt. In Figur 30 sind die Anteile zur abgelagerten Energie unter Berücksichtigung der Prozesse im Flug dargestellt. Man erkennt die Reduktion des Beitrages der primären Pionen im Vergleich mit Figur 29. Im Plateaubereich addieren sich die beiden nahezu konstanten Beiträge von den geladenen Sekundärteilchen sowie von den Neutronen.

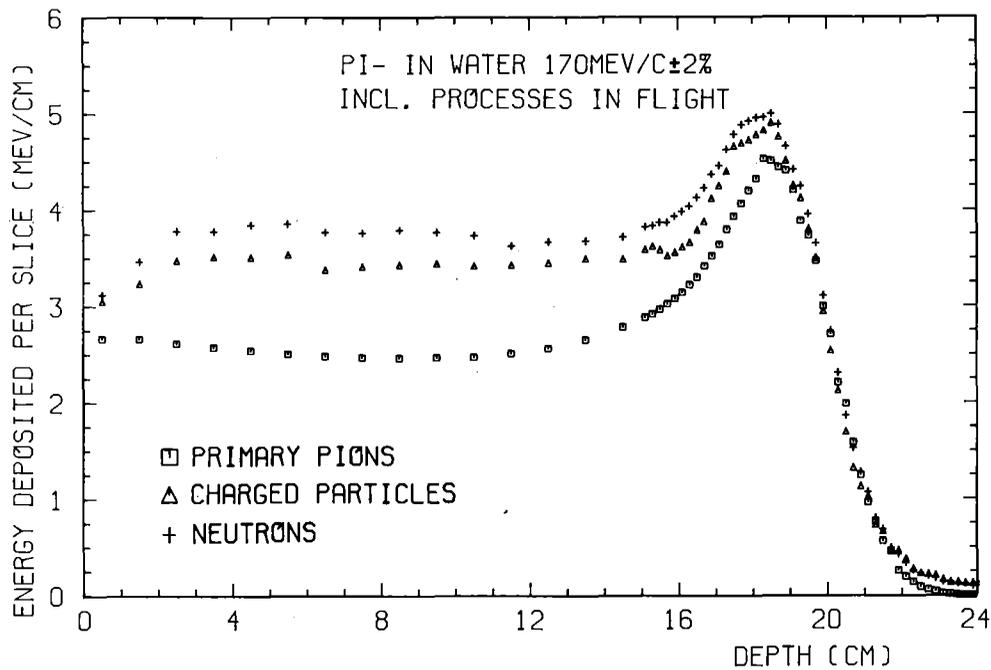


Fig. 30: Abgelagerte Energie als Funktion der Eindringtiefe von Pionen, die Prozesse im Fluge auslösen (keine Absorption am Reichweitenende)

Der Anteil der Sekundärteilchen zeigt in der Oberflächennzone einen Anstieg. Darin äußert sich ein fehlender Beitrag zur Energie, der durch Teilchen in Rückwärtsrichtung aus dem Phantom getragen und nicht durch entsprechende Beiträge in Vorwärtsrichtung kompensiert wird. Der Abfall vor dem Bragg-Peak wird durch die Abnahme des Wirkungsquerschnitts hervorgerufen. Werden alle Einflüsse auf die Tiefendosiskurve zusammengefaßt, so ergibt sich die Verteilung der deponierten Energie in Figur 31 und Figur 32. Die Tiefendosiskurve steigt an der Oberfläche leicht an, zeigt über einen weiten Bereich der Eindringtiefe ein Plateau und einen schmalen, stark überhöhten Bragg-Peak. Für den hier betrachteten Fadenstrahl, dessen räumliche Energieverteilung auf die Strahlachse projiziert wird, verhalten sich die abgelagerten Energien im Peak und im Plateau wie 3,3:1.

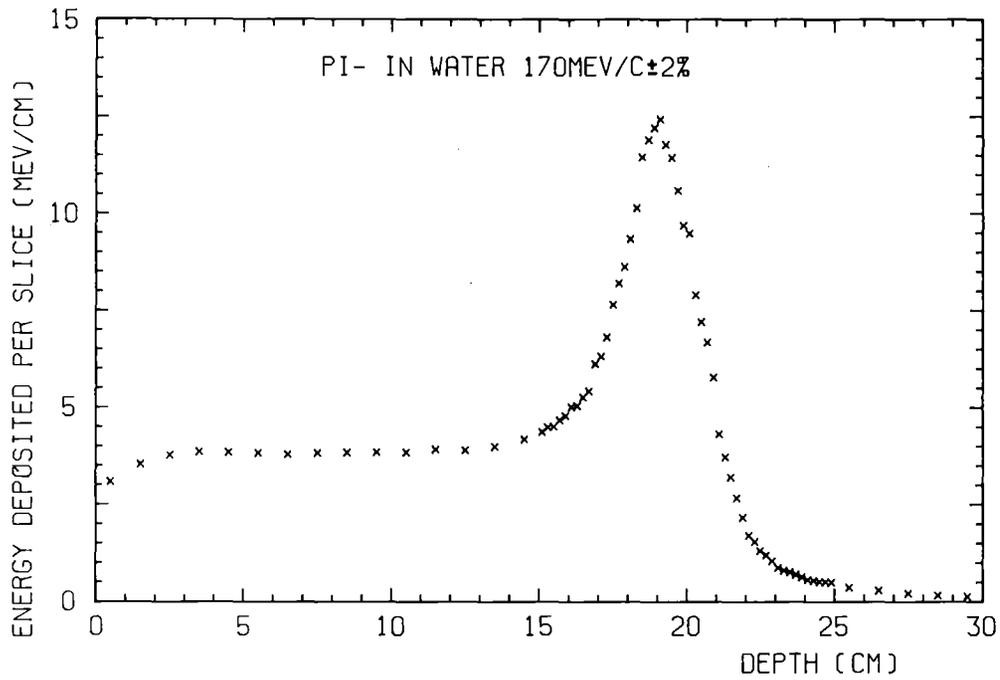


Fig. 31: Tiefendosiskurve mit allen in dieser Arbeit berücksichtigten Beiträgen.

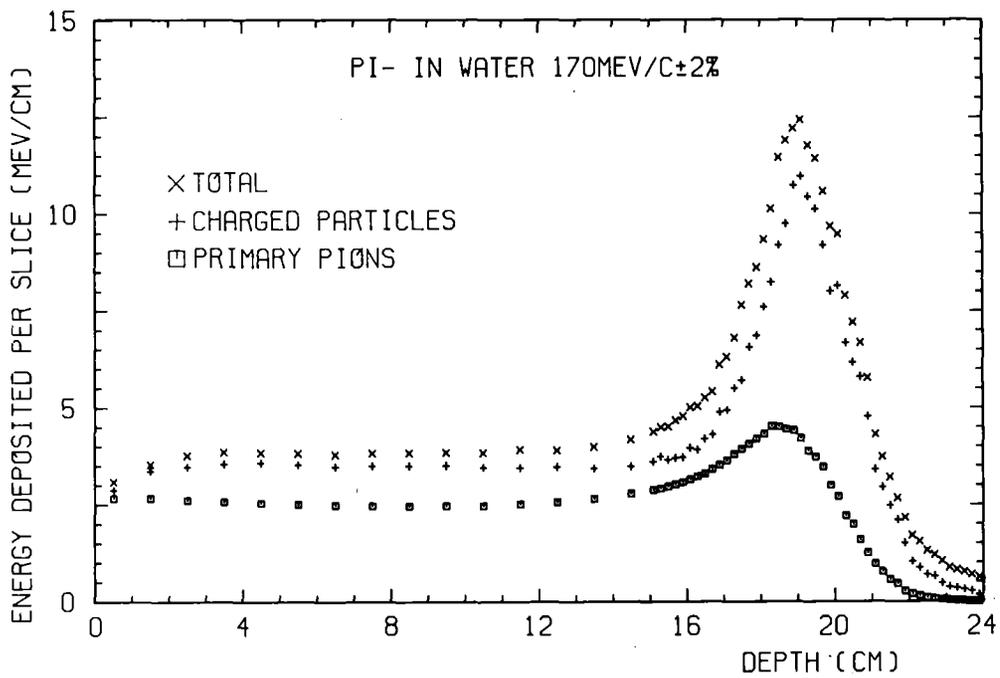


Fig. 32: Tiefendosiskurve für Pionen mit getrennter Darstellung der Beiträge von primären Pionen, von geladenen Sekundärteilchen und von Neutronen.

V. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE IN FORM VON ISODOSEN

Bisher wurde die von einem Fadenstrahl erzeugte räumliche Verteilung der abgelagerten Energie auf die Strahlachse projiziert wiedergegeben. Solche eindimensionalen Diagramme reichen jedoch nicht aus, um eine gegebene Verteilung im Hinblick auf die Therapieplanung beurteilen zu können. Mehr über die Art der Verteilung im Raum läßt sich in zweidimensionalen Diagrammen mit Linien gleicher Energiedichte (Isodosen) darstellen. Die Daten aus dem bisher beschriebenen Rechenprogramm liegen so vor, daß einem bestimmten Volumenelement ein Energiewert zugeordnet ist. Für die Darstellung in Form von Isodosen muß jedoch einem bestimmten Dosiswert ein Element im Raum zugeordnet werden.

Da die Energiewerte als Funktion des Ortes nicht immer streng monoton variieren, sondern als Folge des Monte-Carlo-Verfahrens mit statistischen Schwankungen behaftet sind, müssen die Daten mit glatten Funktionen ausgeglichen werden. Solche Funktionen sollen zwei Extremfälle in den hier vorkommenden Histogrammen gleichermaßen gut wiedergeben können: einerseits den steilen Abfall der Energie-deposition innerhalb einer einzigen Stufenbreite, wie er im Plateaubereich auftritt und andererseits das flache Auseinanderlaufen der Verteilung am Ende der Eindringtiefe. Eine mögliche Funktion, die die gestellten Anforderungen in allen Bereichen erfüllt, ist:

$$D(x) = \frac{A}{1+\exp[(x-R)/D]} \quad (36)$$

Die freien Parameter dieser Funktion haben die Bedeutung einer Amplitude A, einer Reichweite R und der Steilheit des Abfalles D. Die Koordinatenachse der Variablen x verläuft senkrecht zur Strahlachse. Figur 33 zeigt, wie gut die Funktion aus Formel (36) zwei repräsentative Datensätze bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ausgleichen kann. In dieser Arbeit wurde darauf verzichtet, mehrere Glättungsverfahren hintereinander anzuwenden, um nicht eine hohe Genauigkeit vorzutäuschen.

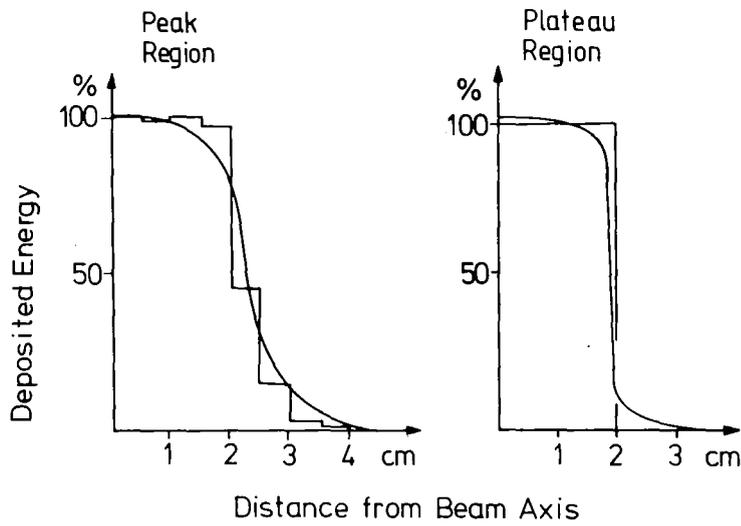


Fig. 33: Daten aus dem Monte-Carlo-Programm mit den angepassten Kurven für zwei charakteristische Fälle im Plateaubereich bzw. im Peak

Die Figuren 34 bis 36 zeigen Isodosenkarten, wie sie durch Faltung der Energieverteilung eines Fadenstrahls (entsprechend den Figuren 19,29,31) mit dem Profil eines homogenen Parallelstrahls von 4 cm Durchmesser erhalten werden. Die relativen Dosiswerte sind als Funktion der

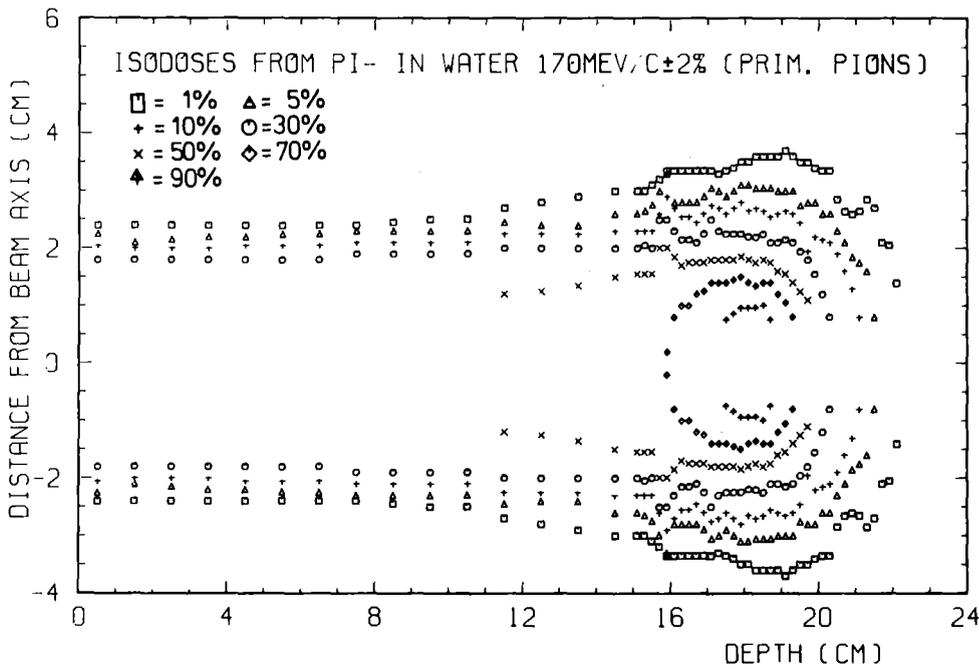


Fig. 34: Isodosen für einen homogenen Parallelstrahl von 4 cm Durchmesser. Dargestellt ist der Anteil der primären Pionen.

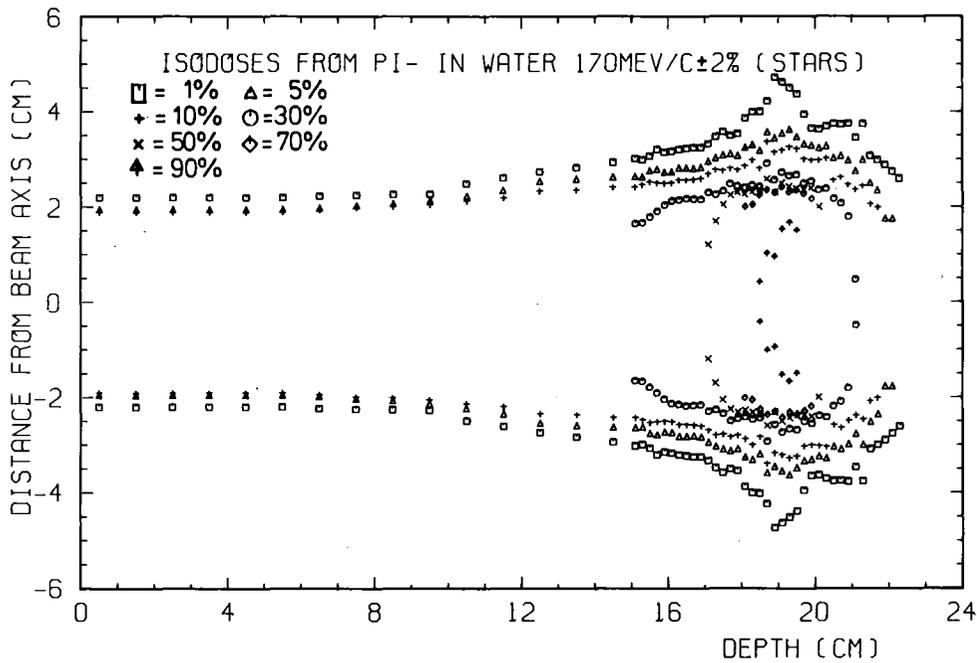


Fig. 35: Isodosen für einen homogenen Parallelstrahl von 4 cm Durchmesser. Dargestellt ist der Ionisationsanteil der primären Pionen sowie die Beiträge der Sekundärteilchen aus den Absorptionsprozessen gestoppter Pionen.

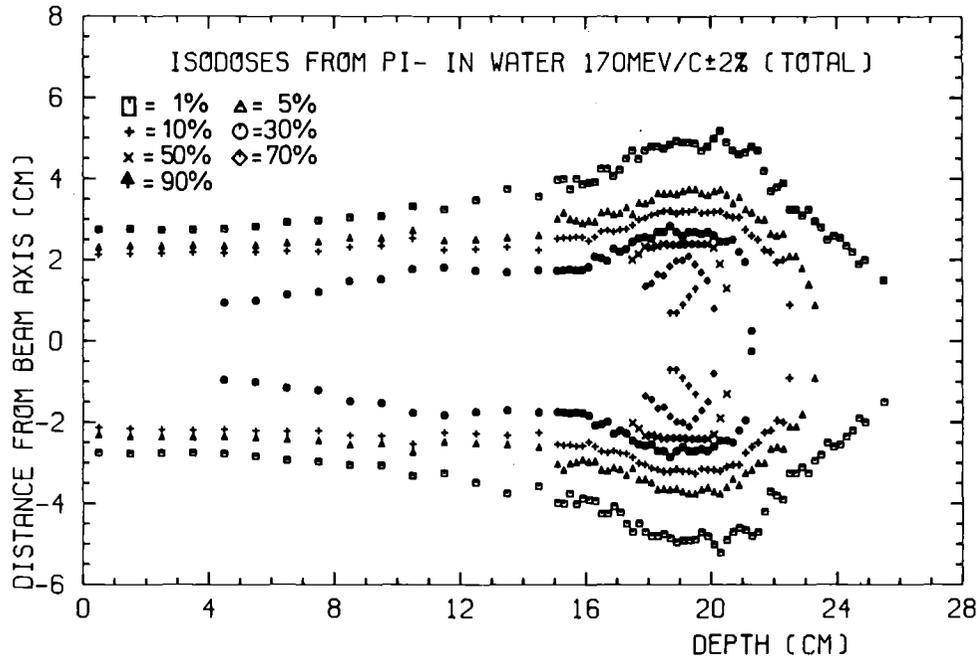


Fig. 36: Isodosen für einen homogenen Parallelstrahl von 4 cm Durchmesser unter Berücksichtigung der Prozesse im Flug sowie der Absorption gestoppter Pionen.

Eindringtiefe und des Abstandes von der Strahlachse dargestellt, wobei die Ausdehnung in der dritten Dimension konstant 0,5 cm beträgt. In jeder Darstellung sind die Werte auf den dort vorkommenden Maximalwert bezogen. Markiert sind jeweils Stellen, an denen die Dosis in der Phantomscheibe 90%, 70%,...,1% des Maximalwertes beträgt. Figur 34 stellt den Ionisationsanteil der primären Pionen dar. Man erkennt z.B. an der 1%-Isodose die Aufweitung des Strahlprofils durch die Vielfachstreuung der Pionen ab etwa 10 cm Eindringtiefe. Der Bereich der maximalen Energieablagerung, repräsentiert durch die 90% Isodose, ist kleiner als der Strahlquerschnitt. Der Einfluß, den die gestoppten Pionen auf die Verteilung ausüben, wird in Figur 35 verdeutlicht. Der Bragg-Peak wird stark überhöht, was sich in einer Konzentration der Linien für hohe Prozentsätze auf die Einfangsregion äußert. Gegenüber Figur 34 ist eine Versetzung des Maximalwertes zu großen Eindringtiefen hin erkennbar.

Figur 36 gibt diejenige Verteilung wieder, bei der alle Pionenprozesse berücksichtigt werden. Die Auswirkungen der Pionwechselwirkung im Fluge machen sich besonders bemerkbar im Verlauf der 30%-Isodose. Diese Isodose wird, verglichen mit Figur 35, weit in den Plateaubereich hinein ausgedehnt. Die hohe Verdichtung der abgelagerten Energie durch Einfangprozesse im Bragg-Peak bleibt jedoch erhalten. Da der Maximalwert der abgelagerten Energie in Figur 36 reduziert ist gegenüber dem betreffenden Wert in Figur 35, verläuft die 1%-Isodose weiter außen. In diesem Bereich ist aber die statistische Genauigkeit der Energiewerte vergleichsweise klein, so daß die Bestimmung der 1%-Isodosen bei sehr hohen Eindringtiefen ungenau wird und scheinbare Deformationen durch das gewählte Ausgleichsverfahren auftreten. Die Breite für die Übergangszone an den Grenzen des Strahlbündels ist im Bereich der Eintrittsfläche des Phantoms bei allen drei Isodosenkarten unterschiedlich. Da jede Isodosenkarte auf ihren Maximalwert normiert ist, treten gleiche Prozentsätze der Dosis in unterschiedlich steilen Bereichen des Dosisgefälles auf.

VI. SCHLUSSBEMERKUNG

Die Beurteilung der Ergebnisse aus einem Rechenprogramm dieser Art wird nur über einen Vergleich mit experimentellen Daten objektiv. Die in der Literatur aufgeführten Tiefendosiskurven aus Experimenten sind meistens nicht so detailliert beschrieben, daß alle für das Programm notwendigen physikalischen Eingabedaten wie Impuls, Impulsauflösung, Strahlgeometrie, Geometrie des Meßvolumens etc. entnommen werden könnten. Deshalb dürfte ein Vergleich zwischen den Resultaten aus dem vorliegenden Programm und einer experimentell bestimmten Tiefendosiskurve erst nach der Inbetriebnahme des medizinischen Applikators am Schweizerischen Institut für Nuklearforschung (SIN) möglich sein. Hingegen konnte die Aufweitung eines Pionenstrahls aufgrund der Vielfachstreuung durch entsprechende Daten aus einem Experiment unserer Forschungsgruppe (Amols et al.[53]) abgesichert werden. Daneben sind bis jetzt Resultate aus dem Programm von Turner et al.[54] und dem vorliegenden für einige abgesprochene Teilprobleme miteinander verglichen worden, bei denen jeweils Übereinstimmung erzielt werden konnte. Weitere Kontrollen dieser Art werden fortgesetzt.

In der vorliegenden Arbeit wurde über den Aufbau eines neu erstellten Monte-Carlo-Programmes berichtet, das die räumliche Verteilung der Energiedichte liefert, die ein gestoppter π^- -Mesonenstrahl in einem gewebeähnlichen Phantom erzeugt. Das Programm verwendet möglichst viele experimentell abgesicherte Eingabedaten, und seine Struktur wurde so gehalten, daß weitere experimentelle Daten jederzeit eingebracht werden können. Die Behandlung von Kern-Reaktionen mit Pionen im Fluge erforderten ganze Sätze von Wirkungsquerschnitten und Winkelverteilungen, die eigens hierfür zusammengestellt bzw. ergänzt werden mußten. Die echten 2-Körper-Reaktionen wurden vollständig und die quasielastischen Pion-Streuprozesse an gebundenen Nukleonen näherungsweise behandelt. Die Kinematik der Sekundärteilchen bei Absorptionsprozessen im Fluge wurde für Programme dieser Art erstmals mit Hilfe eines Modells erfaßt. Die Kenntnisse sowohl über den absoluten Wert des totalen Wirkungsquerschnittes als auch über seine Zusammensetzung aus den einzelnen Prozessen sind noch lückenhaft, sie bestimmen jedoch Wert und Verlauf der Dosis in der Plateauregion. Die vorgelegten Ergebnisse für diesen Bereich müssen daher an künftigen experimentellen Daten überprüft werden.

Das Programm ist darauf vorbereitet, an charakteristischen Stellen im Phantom die Verteilungen der Dosis als Funktion des Linearen Energie-Transfers (sogenannte LET-Verteilungen) zu berechnen. Das vorgelegte Programm stellt damit einen weiteren Schritt zu einem möglichst umfassenden Verständnis dar, auf welche Weise die gesamte Energie in einem Strahl negativer Pi-Mesonen an ein gewebeähnliches Phantom verteilt wird.

A N H A N G

Anwendung des Monte-Carlo-Verfahrens auf das Problem der Erzeugung einer Wertefolge für eine Variable, die einer vorgegebenen Häufigkeitsverteilung genügt

An mehreren Stellen der Arbeit wird das Monte-Carlo-Verfahren angewendet, um einer Variablen nacheinander Werte zuzuweisen, die sowohl statistisch verteilt sind, als auch bei hinreichend häufiger Wiederholung eine vorgegebene Häufigkeitsverteilung aufweisen. Hierbei wird ein Zahlengenerator verwendet, der Pseudozufallszahlen z erzeugt, die über das Intervall $[0,1]$ homogen verteilt sind. Die Zufallszahlen z_i müssen den Werten x_i derart zugeordnet werden, daß die Gesamtheit aller x_i der Häufigkeitsverteilung $H(x)$ genügt. Um eine solche Zuordnung finden zu können, muß die Verteilungsfunktion folgende Voraussetzungen erfüllen:

- a) Normierbarkeit des Integrals über der Verteilung,
- b) die Funktion an der oberen Grenze muß umkehrbar sein.

Die Notwendigkeit dieser Bedingungen wird durch die folgende Beschreibung der Abbildung von z auf x deutlich. Die Verteilungsfunktion $H(x)$ wird folgendermaßen normiert:

$$\int_a^b H(x') dx' =: 1 \quad a < b \quad (A.1)$$

Variiert man bei diesem Integral die obere Grenze, so nimmt das Integral Werte $W(x)$ aus dem Intervall $[0,1]$ an. Jetzt überdecken sich die Wertemengen der homogen verteilten Zufallszahlen z und des unbestimmten Integrals. Gibt man nun eine Zufallszahl z vor und verlangt, daß das Integral diesen Wert annimmt, so legt man über die Größe von z die obere Grenze x des Integrals fest.

$$\int_a^x H(x') dx' = W(x) =: z \quad a < x \quad (A.2)$$

Die Umkehrfunktion $x = W^{-1}(z)$ liefert dann die Werte x_i als eine Funktion der Pseudozufallszahlen z_i ,

$$x_i = W^{-1}(z_i) \quad x_i \in (a, b) \quad (\text{A.3})$$

die der vorgegebenen Verteilung $H(x)$ genügen.

Der geschilderte Ablauf kann auf jedes Problem angewendet werden, sofern die Häufigkeitsfunktion $H(x)$ die getroffenen Voraussetzungen erfüllt. Das beschriebene Verfahren wird im folgenden auf den konkreten Fall der Erzeugung von Streuwinkeln angewandt, welche der von Molière angegebenen Häufigkeitsverteilung (s. Kap. II.3) für die Vielfach-Coulomb-Streuung entsprechen.

Bei Molière ist die Funktion $F(\theta, \phi, t)$ folgendermaßen definiert:

$$\int_0^{\infty} F(\theta) \theta d\theta = 1 \quad (\text{A.4})$$

Setzt man die Funktion aus dem Kapitel II.3 mit den dort geschilderten Einschränkungen ein, so ergibt sich:

$$\int_0^{\infty} 2e^{-\theta^2} \theta d\theta = 1 \quad (\text{A.5})$$

Die Zufallszahlen z_i mit $0 \leq z_i \leq 1$ ist einem θ_i zugeordnet durch

$$2 \times \int_0^{\theta_i} e^{-\theta^2} \theta d\theta = z_i \quad (\text{A.6})$$

Nach Bildung der Umkehrfunktion erhält man

$$\theta_i = \sqrt{-\ln(1-z_i)} \quad (\text{A.7})$$

Die Gesamtheit der so generierten Winkel genügt einer Gaußverteilung.

Literaturverzeichnis

- [1] G. Büche, H. Appel, A. Citron, W. Kluge, H. Matthäy;
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Externer Bericht 3/76-3 (1976)
- [2] M.R. Raju, C. Richman;
Current Topics in Radiation Research Quarterly 8 (1972) 159
- [3] M.R. Raju, H.I. Amols, J.F. Dicello, J. Howards, J.T. Lyman,
A.M. Koehler, R. Graves, J.B. Smathers;
Brit. Jour. of Rad., 51 (1978) 699
- [4] P.H. Fowler, D.H. Perkins;
Nature 189 (1961) 524
- [5] T.W. Armstrong, K.C. Chandler;
Rad.Res. 52 (1972) 247
- [6] K.C. Chandler, T.W. Armstrong;
ORNL-4744 (1972)
- [7] T.W. Armstrong, K.C. Chandler;
Rad.Res. 58 (1974) 293
- [8] R.G. Alsmiller jr., R.T. Santoro, T.W. Armstrong, J. Barish,
K.C. Chandler, G.T. Chapman;
ORNL-TM-4369 (1974)
- [9] J.E. Turner, J. Dutrannois, H.A. Wright, R.N. Hamm, J. Baarli,
A.H. Sullivan, M.J. Berger, S.M. Seltzer;
Rad.Res. 52 (1972) 229
- [10] R.N. Hamm, H.A. Wright, J.E. Turner;
Jour.of App.Phys., 46 (1975) 4445
- [11] H.A. Wright, R.N. Hamm, J.E. Turner;
ORNL-TM-5088 (1975)
- [12] M.P. Guthrie, R.G. Alsmiller jr, H.W. Bertini;
Nucl.Instr.and Meth. 66 (1968) 29
+ Erratum Nucl.Instr. and Meth. 91 (1971) 669

- [13] N. Bohr;
Phil.Mag. 25 (1913) 10 + Phil.Mag. 30 (1915) 581
- [14] A. Bloch;
Zeitschr.f.Physik 81 (1933) 363
- [15] H.A. Bethe;
Ann. der Physik 5 (1930) 325
- [16] H.A. Bethe, J. Ashkin;
in: E. Segré, ed. Experimental Nuclear Physics, John Wiley & Sons Inc.,
New York and London, Vol.I, Part II, 1953
- [17] R.M. Sternheimer;
in 'Methods of Experimental Physics', Vol.5 Part A, Academic Press
New York 1961
- [18] M.C. Walske;
Phys.Rev. 88 (1952) 1283 + Phys.Rev. 101 (1956) 940
- [19] W.H. Barkas, M.J. Berger;
NASA SP-3013 (1964)
- [20] J. Lindhard, M. Scharff;
Dan.Mat.Fys.Medd. 27 (1953)
- [21] J.F. Janni;
AFWL-TR-65-150 (1966)
- [22] R.M. Sternheimer;
Phys.Rev. 145 (1966) 247
- [23] T.W. Armstrong, K.C. Chandler
ORNL-4869 (1973) + Nucl.Instr.and Meth.113 (1973) 313
- [24] C. Serré;
CERN 67-5, Division Synchrocyclotron 1967
- [25] F.D. Measday, H.R. Menard, J.E. Spuller; TRIUMF
Kinematics Handbook, University of British Columbia, Vancouver, o.J.(nach 1972)
- [26] H. Bichsel;
American Institute of Physics Handbook, 2nd Edition, McGraw-Hill,
New York 1963, 8-20

- [27] R.M. Sternheimer;
Phys.Rev. 117 (1960) 485
- [28] S.B. Curtis, M.R. Raju;
Rad.Res. 34 (1968) 239
- [29] W.T. Scott;
Rev.Mod. Phys. 35 (1963) 231
- [30] B.W. Mayes, L.Y. Lee, J.C. Allred, C. Goodman, G.S. Mutschler,
E.V. Hungerford, M.L. Scott, G.C. Phillips;
Nucl.Phys. A230 (1974) 515
- [31] G. Molière;
Zeit.f.Naturforschung 3a (1948) 78
- [32] A.S. Clough, G.K. Turner, B.W. Allardyce, C.J. Batty, D.J. Baugh,
H.J. McDonald, R.A.J. Riddle, L.H. Watson, M.E. Cage, J.J. Pyle, G.T.A. Squier;
Nucl.Phys. B76 (1974) 15
- [33] C. Wilkin, C.R. Cox, J.J. Domingo, K. Gabathuler, E. Pedroni, J. Rohlin,
P. Schwaller, N.W. Tunner;
Nucl.Phys. B62 (1973) 61
- [34] F. Binon, P. Duteil, J.P. Garron, J. Gorres, L. Hugon, J.P. Peigneux,
C. Schmitt, M. Spighele, J.B. Scott;
Nucl.Phys. B17 (1970) 168
- [35] H. Byfield, J. Kessler, L.M. Lederman;
Phys.Rev. 86 (1952) 17
- [36] P.J. Isaacs, A.M. Sachs, J. Steinberger;
Phys.Rev. 85 (1952) 803
- [37] D.T. Chivers, E.M. Rimmer, B.W. Allardayce, R.C. Witcomb, J.J. Domingo,
N.W. Tamm;
Nucl.Phys. A126 (1965) 129
- [38] R. Jäckle, H. Pilkuhn, H.G. Schlaile;
Phys.Lett. 76B (1978) 177; + H.G. Schlaile, private Mitteilung
- [39] J.Piffaretti, R. Corfu, J.P. Egger, P. Gretillat, C. Lemke, E. Schwarz;
Phys.Lett. 67B (1977) 289

- [40] P.L. Reeder, S.S. Markowitz;
Phys.Rev. 133 (1964) B 639
- [41] L.H. Batist, V.D. Vetman, V.P. Kepter, M.M. Makarov, A.A. Naberezkriov,
V.V. Nelyubin, G.Z. Obrant, V.V. Sarantsev, G.V. Scherbakov;
Nucl.Phys. A254 (1975) 480
- [42] F. Drolesky, G.W. Butler, C.J. Orth, R.A. Williams, G. Friedlands,
M.A. Yates, S.B. Kaufmann;
Phys.Rev.Lett. 34 (1975) 821
- [43] G. Höhler, F. Kaiser, R. Koch, E. Pietarinen;
Handbook of Pion-Nucleon Scattering, Physik Daten No.12-1 (1979),
Fachinformationszentrum Karlsruhe; und R. Koch, private Mitteilung
- [44] E. Fermi, E. Teller;
Phys.Rev. 72 (1947) 399
- [45] L.I. Ponomarev;
Ann.Rev.of Nucl.Sci. 23 (1973) 395
- [46] G. Mechttersheimer;
Diplomarbeit, Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK-Ext. 3/78-7 (1978)
- [47] G. Mechttersheimer, G. Büche, U. Klein, W. Kluge, H. Matthäy, A. Moline,
D. Münchmeyer;
Phys.Lett. 73B (1978) 115
- [48] G. Mechttersheimer, G. Büche, U. Klein, W. Kluge, H. Matthäy, D. Münchmeyer;
Nucl.Phys. A234 (1979) 379
- [49] D. Münchmeyer;
Diplomarbeit Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK 2786B (1979)
- [50] H. Randoll;
Diplomarbeit, Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK 2876B (1979)
- [51] U. Klein;
Diplomarbeit, Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK-Ext. 3/78-6 (1978)
- [52] U. Klein, G. Büche, W. Kluge, H. Matthäy, G. Mechttersheimer, A. Moline;
Nucl.Phys.A, 329 (1979) 339

- [53] H.I. Amols, G. Büche, W. Kluge, H. Matthäy, A. Moline, D. Münchmeyer,
D. Schmidt, F. Stabl, H.P. Walther;
Phys.Med.Biol. 1980 (in press)
- [54] J.E. Turner, R.N. Hamm, H.A. Wright;
private Mitteilung
- [55] W.F. Baker, J. Rainwater, R.E. Williams;
Phys.Rev. 112 (1958) 1763
- [56] R.M. Edelstein, W.F. Baker, J. Rainwater;
Phys.Rev.122 (1961) 252
- [57] J.P. Albanèse, R. Arvieux, E. Boschitz, C.H.Q. Ingram, L. Pflug,
C. Wiedner, J. Zichy;
Phys.Lett. 73B (1978) 119
- [58] Q. Ingram, E. Boschitz, L. Pflug, J. Zichy, J.P. Albanèse, J. Arvieux;
Phys.Lett. 76B (1978) 173
- [59] R.R. Johnson, T.G. Masterson, K.L. Erdman, A.W. Thomas, R.H. Landau;
Elastic scattering of positive pions from ^{12}C at 30, 40 and 50 MeV
Nucl.Phys. A296 (1978) 444
- [60] R.R. Johnson, B. Bassalleck, K. Erdman, B. Gyles, T. Marks, T. Masterson,
D.R. Gill, C. Sabev;
Phys.Lett. 78B (1978) 560
- [61] M.A. Moinester, R.L. Burman, R.P. Redwine, M.A. Yates-Williams, D.J. Malbrough,
C.W. Darden, R.D. Edge, T. Marks, S.H. Dam, B.M. Preedom, F.E. Bertrand,
T.P. Cleary, E.E. Gross, C.A. Ludemann, M. Blecher, K. Gotow, D. Jenkins,
F. Milder;
Phys.Rev. C18 (1978) 2678
- [62] D.J. Malbrough, C.W. Darden, R.D. Edge, T. Marks, B.M. Preedom, R.L. Burman,
M.A. Moinester, R.P. Redwine, F.E. Bertrand, T.P. Cleary, E.E. Gross,
C.A. Ludemann, K. Gotow;
Phys.Rev. C17 (1978) 1395-1401