

KfK 3109
März 1981

Zellularkonvektion in Fluidschichten mit zwei festen seitlichen Berandungen

H. Frick
Institut für Reaktorbauelemente

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Institut für Reaktorbauelemente

KfK 3109

Zellularkonvektion in Fluidschichten
mit zwei festen seitlichen Berandungen

H. Frick

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität
Karlsruhe (TH) genehmigte Dissertation.

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Zusammenfassung

Der Einfluß der seitlichen Begrenzungsflächen einer von unten beheizten Fluidschicht auf die thermische Zellularkonvektion wird untersucht. Diese Schicht ist in x-Richtung unendlich ausgedehnt und wird seitlich von zwei vertikalen und zwei horizontalen Rändern begrenzt. Als charakteristische Geometriegröße tritt das Höhen-zu-Breitenverhältnis auf; es wird mit A bezeichnet. Infolge der Berandungen ist die Konvektionsströmung von allen drei Raumkoordinaten abhängig, jedoch reicht für einen großen Bereich von Höhen-zu-Breitenverhältnissen A und Rayleigh-Zahlen die Berücksichtigung von zwei Geschwindigkeitskomponenten aus.

Zur Beschreibung des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes werden die Navier-Stokes-Gleichungen und die Energiegleichung mit Hilfe der Boussinesq-Approximation vereinfacht und mit einem Galerkin-Verfahren gelöst.

Für einen großen Bereich von Werten A zwischen $A=0$ (Bénard-Konvektion) und $A=100$ (Hele-Shaw-Konvektion) werden Lösungen für die stationäre Konvektion vom Einsetzen bis in einen weit überkritischen Zustand vorgestellt. Der Einfluß der Seiten auf die kritische Rayleigh- bzw. Wellenzahl und auf den Wärmetransport wird für verschiedene Kombinationen von Randbedingungen (horizontale Ränder: isotherm und fest oder frei; vertikale Ränder: fest und adiabat oder perfekt wärmeleitend) untersucht. Instationäre Strömungsvorgänge werden am Beispiel der Hele-Shaw-Konvektion diskutiert.

Ein Vergleich mit experimentellen Ergebnissen ergibt, soweit dies möglich ist, eine gute Übereinstimmung.

Free convection in fluid layers with two rigid sidewalls

Summary

The influence of sidewalls on free convection behaviour of a fluid layer heated from below is investigated. This layer of infinite extent in x-direction is limited by two vertical and two horizontal sidewalls. The problem is characterized by the height to width ratio A . Because of the sidewalls the convection depends on all three spatial coordinates. However for a large variety of aspect ratios A and Rayleigh numbers, only two velocity components are of importance.

To describe the temperature and the velocity fields the Boussinesq approximation is applied on the Navier Stokes equations and on the energy equation. The resulting system of differential equations is solved by means of a Galerkin method.

For a wide range of the aspect ratio A between $A=0$ (Bénard convection) to $A=100$ (Hele-Shaw convection) solutions are presented ranging from the onset of free convection up to Rayleigh numbers being about 30 times above the critical linear stability value. The influence of the sidewalls on the critical Rayleigh number and wave number and on the heat transport is investigated for several combinations of boundary conditions (horizontal boundaries : isotherm and rigid or free; vertical boundaries: rigid and insulated or perfectly conducting). Transient convection is discussed in the case of Hele-Shaw convection.

Where comparison with experimental results is possible, good agreement is found.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	<u>Seite</u>
Bezeichnungen	II
1. Einleitung und Problemstellung	1
2. Mathematische Formulierung des Problems	4
2.1 Grundgleichungen	4
3. Lösungsmethode	8
3.1 Galerkin-Verfahren	8
3.2 Versuchsfunktionen	9
3.3 Galerkin-Gleichungen	11
3.4 Lösungsweg des linearisierten Problems	14
3.5 Lösungsweg des nichtlinearen Problems	15
4. Ergebnisse	19
4.1 Einsetzen der Konvektion	20
4.2 Stationäre Konvektion	25
4.2.1 Adiabater Fall	25
4.2.2 Perfekt wärmeleitender Fall im Vergleich mit dem adiabaten Fall	32
4.3 Instationäre Konvektion	36
4.3.1 Konvektionsrollen mit $\alpha = \pi/2$	38
4.3.2 Konvektionsrollen mit $\alpha = \pi$	41
4.3.3 Konvektionsrollen mit $\alpha = 2\pi$	45
4.3.4 Zusammenstellung der Ergebnisse der instationären Konvektion und Vergleich mit der Literatur	52
5. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	58
Literatur	62

Bezeichnungen

$A = h/d$	Höhen-zu-Breitenverhältnis
b	Lösungsvektor für θ
c	Lösungsvektor für ψ
c_p	spezifische Wärme
d	Spaltbreite
g	Erdbeschleunigung
h	Höhe
I	Matrizen
i, j, k	Einheitsvektoren
l, n, m	Summationsindizes
N	Anzahl der Versuchsfunktionen
Nu	Nusselt-Zahl
NT	Abbruchparameter
$Pr = \nu/\kappa$	Prandtl-Zahl
q	Wärmestromdichte
$R = \frac{\gamma g \Delta T h^3}{\nu \kappa}$	Rayleigh-Zahl
R_c	kritische Rayleigh-Zahl
T_0	untere Randtemperatur
T_1	obere Randtemperatur
$\Delta T = T_0 - T_1$	angelegte Temperaturdifferenz
$T(z)$	Temperaturverteilung bei Wärmeleitung
$T^* = \frac{T(z) + \theta}{\Delta T}$	normierte Temperaturverteilung
t	Zeit
Δt	Zeitschritt
t_0	Startzeit
t_{max}	Endzeit
\vec{v}	Geschwindigkeitsvektor
x, y, z	Ortskoordinaten
α	Wellenzahl
α_c	kritische Wellenzahl
γ	thermischer Ausdehnungskoeffizient
Γ	Druck

III

ε	Genauigkeitsschranke
Θ	Störtemperatur
$\kappa = \frac{\lambda}{\rho c_p}$	Temperaturleitzahl
λ	Wärmeleitfähigkeit
$\lambda, \nu, \beta, \kappa, \mu, \gamma, \rho, \pi, \delta$	Summationsindizes
ν	kinematische Viskosität
ϕ	Skalarfunktion
ψ	Stromfunktion
ad	adiabat
pc	perfekt wärmeleitend

1. Einleitung und Problemstellung

Zellularkonvektion in einer unendlich ausgedehnten Fluidschicht, die von unten beheizt wird (Bénard-Problem), ist im Hinblick auf Strömungsformen und Wärmetransport für einen großen Bereich von Rayleigh-Zahlen bereits ausführlich untersucht worden. Beim Einsetzen der Konvektion bilden sich zunächst zweidimensionale Rollen. Für Fluide mit einer Prandtl-Zahl $Pr > 10$ stellen diese Rollen bis zu einer zehnfachen kritischen Rayleigh-Zahl die einzige stabile Strömungsform dar (Busse, /1/). Die Konvektionsrollen weisen keine bevorzugte Orientierung auf.

Im Gegensatz dazu richten sich in rechteckigen Behältern die Rollen infolge der vertikalen Berandungen parallel zu den kürzeren Seiten aus. Diese zusätzlichen Begrenzungsflächen behindern die Strömung in ihrer Nähe und die kritische Rayleigh-Zahl nimmt gegenüber der des Bénard-Problems zu. Durch den Einfluß der seitlichen Ränder hängt die Strömung von allen drei Raumkoordinaten ab. Erstmals ist von Pellew & Southwell /2/ auf den Einfluß von Seitenberandungen auf die Konvektion hingewiesen worden. Zierep /3/ hat unter Voraussetzung von freien Rändern die theoretischen Untersuchungen zu diesem Problemkreis des Einsetzens der Konvektionsströmung in Gefäßen endlicher horizontaler Ausdehnung begonnen. Für Rechteckbehälter mit festen Rändern hat Davis /4/ theoretisch und haben Stork und Müller /5/ experimentell nachweisen können, daß sich nach dem Einsetzen der Konvektion die Achsen der Konvektionsrollen parallel zu den kürzeren Seiten ausrichten. Rechnungen mit einem allgemeinen dreidimensionalen Strömungsansatz sind von Davies-Jones /6/ und von Frick und Clever /7/ durchgeführt worden. Sie haben für eine in x-Richtung unendlich ausgedehnte von vier Seiten begrenzte Fluidschicht das Einsetzen der Konvektion bei freien und festen horizontalen Rändern bestimmt. Für einen Rechteckbehälter sind von Bühler et al. /8/ und Oertel /9/ experimentell und numerisch dreidimensionale Strömungseffekte infolge der seitlichen Berandungen aufgezeigt worden. In Experimenten haben Arnold /10/, Edwards et al. /11/ und Wu und Edwards /12/ für verschiedene Geometrieverhältnisse die Einflüsse der Ränder sowohl auf die kritische Rayleigh-Zahl als auch im über-

kritischen Gebiet auf die Nusselt-Zahl behandelt. In ihren Untersuchungen betrachten sie Fluidschichten, deren Höhen bis zu achtmal der Spaltbreite entsprechen, bei Rayleigh-Zahlen bis etwa der zehnfach kritischen.

Beim Annähern des Grenzfalles sehr dünner vertikaler Fluidschichten vereinfacht sich bei festen vertikalen Seiten die Konvektionsströmung; die Geschwindigkeitskomponenten nehmen über die Spaltbreite in Richtung der Rollenachsen ein parabolisches Profil an. Eine solche zweidimensionale Strömung bezeichnet man als Hele-Shaw-Strömung (Hele-Shaw, /13/). Unter gewissen Einschränkungen gilt eine Analogie zur zweidimensionalen Konvektionsströmung in einer Schicht aus porösen mit einem Fluid gefüllten Material (Kvernfold, /14/). In den folgenden Ausführungen wird diese Strömung als Konvektion in porösen Medien bezeichnet. Horton & Rogers /15/ und Lapwood /16/ haben das Einsetzen der stationären zweidimensionalen Konvektion in porösen Medien in seiner Abhängigkeit von der Wellenzahl α bestimmt. Im überkritischen Bereich hat Straus /17/ Stabilitätsuntersuchungen durchgeführt und gezeigt, daß zwei- und dreidimensionale Konvektion auftritt. Ebenso konnte ein Gebiet zeitabhängiger Konvektion mit Hilfe von instationären Rechnungen (z.B. Horne & O'Sullivan /18/, Horne /19/, Caltagirone /20/, Schubert & Straus /21/) für beide Strömungsformen angegeben werden. In dem Gültigkeitsbereich der Analogie läßt sich durch die Wahl eines geeigneten Permeabilitätsfaktors die Strömungs- und Temperaturverteilung in porösen Medien mit der in einer Hele-Shaw-Zelle vergleichen. Experimentelle Untersuchungen der Hele-Shaw-Konvektion sind von Elder /22/, Hartline & Lister /23/ und Koster /24/ durchgeführt worden. Unter Verwendung der bei Hartline und Lister /23/ aufgestellten Beziehungen für das Geschwindigkeitsfeld und die Rayleigh-Zahl hat Kvernfold /14/ die Gleichungen für Naturkonvektion in porösen Medien numerisch gelöst und die Lösungen auf Stabilität hin untersucht.

In der vorliegenden Arbeit wird die freie Konvektion in einer von unten beheizten und seitlich berandeten horizontalen Fluidschicht theoretisch untersucht. Betrachtet wird eine von zwei vertikalen und zwei horizontalen Seiten begrenzte Schicht. Das Ziel ist, möglichst genaue Aussagen über den Einfluß der kinematischen

und thermischen Bedingungen dieser Ränder auf die Konvektion zu erreichen. Hierzu werden die horizontalen Ränder als isotherm und als fest oder frei angenommen. Für die festen vertikalen Seiten werden als thermische Randbedingungen die beiden Grenzfälle adiabat und perfekt wärmeleitend vorgegeben. Durch die Begrenzung der Fluidschicht auf vier Seiten läßt sich eine Geometriegröße A (Höhe-zu-Spaltbreite) einführen, die es erlaubt, sowohl das Bénard- ($A=0$) als auch das Hele-Shaw-Problem ($A \rightarrow \infty$) zu untersuchen. Beim erstgenannten Problem handelt es sich um eine unendlich ausgedehnte Fluidschicht, wobei der Einfluß der horizontalen Ränder bestimmend ist. Beim zweitgenannten Problem einer dünnen vertikalen Fluidschicht sind die seitlichen Begrenzungsflächen entscheidend, und die horizontalen Ränder spielen in bezug auf den kinematischen Einfluß eine untergeordnete Rolle. Für verschiedene Kombinationen von Randbedingungen wird die Frage behandelt, ab welchem Höhen-zu-Breitenverhältnis A von einem Bénard- bzw. einem Hele-Shaw-Problem gesprochen werden kann. Hierzu werden das Einsetzen der Konvektion, die Wärmeübertragung bei stationärer Konvektion und für eine dünne vertikale Schicht die instationären Lösungen in bezug auf Strömungsformen und Wärmetransport untersucht. Der Einfluß der Ränder auf die Größe der Konvektionsrollen wird durch die Einführung einer Wellenzahl berücksichtigt. Zur Behandlung dieses Problemkreises werden die Navier-Stokes-Gleichungen und die Energiegleichung mit einem Galerkin-Verfahren numerisch gelöst.

2. Mathematische Formulierung des Problems

2.1 Grundgleichungen

Betrachtet wird eine in x -Richtung unendlich ausgedehnte Fluidschicht mit der Höhe h und der Breite d (Abb. 1). Seitlich begrenzt ist diese Schicht durch feste parallele Wände, die einmal als adiabatisch und einmal als perfekt wärmeleitend betrachtet werden. Die horizontalen Ränder werden als fest bzw. frei angenommen und auf konstanter Temperatur gehalten, wobei die untere Temperatur T_0 größer ist als die obere T_1 .

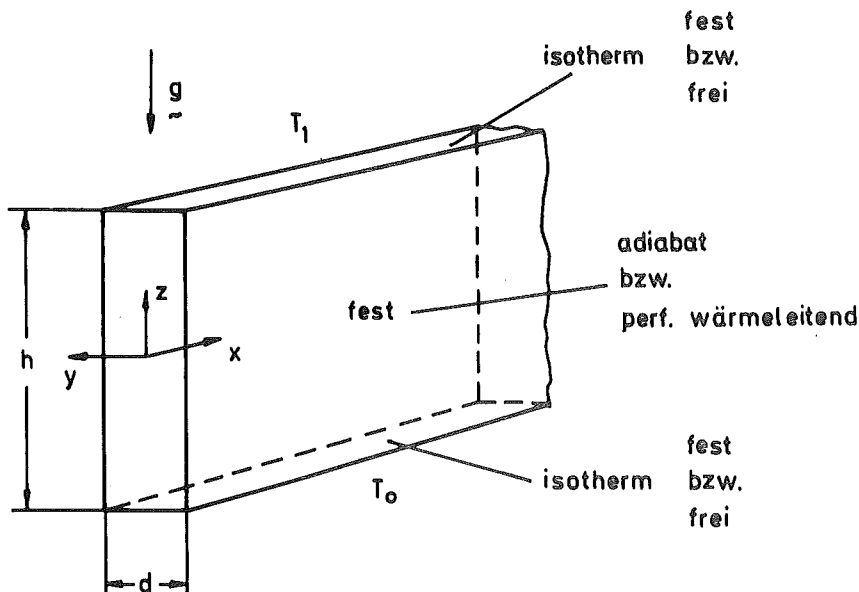


Abb. 1 : Geometrie und Koordinatensystem

Zur Beschreibung der Konvektionsströmung werden die Navier-Stokes-Gleichungen und die Energiegleichung unter Benutzung der Boussinesq-Approximation verwendet. Mit den Einheiten h und d für Längen in z - bzw. y -Richtung, h^2/κ und $(T_0 - T_1)/R$ für Zeit und Temperatur, wobei κ die Temperaturleitzahl und R die Rayleigh-Zahl ist, ergeben sich nach Abzug der Wärmeleitlösung die folgenden dimensionslosen Gleichungen für den Geschwindigkeitsvektor \vec{y} und für die Abweichung der Temperatur vom Wärmeleitzustand θ :

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \underline{v} + k\theta - \nabla \Gamma = \frac{1}{Pr} (\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + \partial_t \underline{v}), \quad (2)$$

$$\nabla^2 \theta + Rk \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \nabla \theta + \partial_t \theta. \quad (3)$$

Mit den Einheitsvektoren \underline{i} , \underline{j} und \underline{k} werden die rechtwinkligen Koordinaten x , y und z festgelegt. Der Laplace-Operator

$$\nabla^2 = \partial_{xx}^2 + A^2 \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2 \quad (4)$$

berücksichtigt die Abhängigkeit des Problems vom dimensionslosen Höhen-zu-Breitenverhältnis A . Weiter treten als dimensionslose Parameter in den Gleichungen (1) bis (3) die Rayleigh-Zahl R und die Prandtl-Zahl Pr mit

$$R = \frac{\gamma g \Delta T h^3}{\nu \kappa} \quad \text{und} \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (5)$$

auf. Hierin ist γ der thermische Ausdehnungskoeffizient, ν die kinematische Viskosität, g der Betrag der Erdbeschleunigung und ΔT die angelegte Temperaturdifferenz zwischen unterem und oberem Rand. In $\nabla \Gamma$ werden in Gleichung (2) alle Terme, die sich als Gradient ausdrücken lassen, zusammengefaßt.

Durch Einführung eines quellfreien Vektorfeldes für die Geschwindigkeit \underline{v} in folgender Form

$$\underline{v} = \delta \phi + \varepsilon \psi \quad (6a)$$

mit den Operatoren

$$\delta \phi = \nabla \times (\nabla \times \underline{j} \phi), \quad (6b)$$

$$\varepsilon \psi = \nabla \times (\underline{j} \psi). \quad (6c)$$

ist die Kontinuitätsgleichung (1) bereits erfüllt. Wendet man die Operatoren $\underline{j} \cdot \nabla \times$ ($\nabla \times$ und $\underline{j} \cdot \nabla \times$) auf die Impulsgleichung (2) an und setzt den Ausdruck (6a) für \underline{v} ein, so ergeben sich die folgenden Gleichungen für die skalaren Variablen ϕ , ψ und θ :

$$\nabla^4 \Delta_2 \phi + A \partial_{yz}^2 \theta = \frac{1}{Pr} \{ \delta \cdot ((\delta \phi + \varepsilon \psi) \cdot \nabla (\delta \phi + \varepsilon \psi)) + \partial_t \nabla^2 \Delta_2 \phi \}, \quad (7)$$

$$\nabla^2 \Delta_2 \psi + \partial_x \theta = \frac{1}{Pr} \{ \varepsilon \cdot ((\delta \phi + \varepsilon \psi) \cdot \nabla (\delta \phi + \varepsilon \psi)) + \partial_t \Delta_2 \psi \}, \quad (8)$$

$$\nabla^2 \theta + R (A \partial_{yz}^2 \phi + \partial_x \psi) = (A \partial_{xy}^2 \phi - \partial_z \psi) \partial_x \theta - A \Delta_2 \phi \partial_y \theta + (A \partial_{yz}^2 \phi + \partial_x \psi) \partial_z \theta + \partial_t \theta, \quad (9)$$

wobei der Laplace-Operator Δ_2 wie folgt definiert ist:

$$\Delta_2 = \partial_{xx}^2 + \partial_{zz}^2 \quad (10)$$

Die Gleichungen (7) bis (9) stellen ein gekoppeltes System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen für ϕ , ψ und θ dar. Für den Fall fester horizontaler Ränder kommt eine weitere Kopplung von ϕ und ψ durch die Randbedingungen zustande (Frick & Clever, /7/). Am Beispiel freier horizontaler Ränder hat Davies-Jones /6/ gezeigt, daß infolge der vertikalen Ränder die kritische Rayleigh-Zahl bei Verwendung eines allgemeinen dreidimensionalen Strömungsansatzes niedriger sein muß als für eine zweidimensionale Lösung, bei der ϕ nicht berücksichtigt wird. Der maximale Unterschied in der kritischen Rayleigh-Zahl bei adiabaten vertikalen Seiten liegt bei $A = 0.3$ und beträgt 6 %. Demgegenüber unterscheiden sich die kritischen Rayleigh-Zahlen bei festen horizontalen Rändern um maximal 1 % bei $A = 0.5$. Dieser Unterschied nimmt mit zunehmendem A stark ab (Frick & Clever, /7/). Hieraus läßt sich folgern, daß für das lineare Problem in der Darstellung des Vektorfeldes die Variable ϕ von geringer Bedeutung ist. Beim nichtlinearen Problem kommt eine weitere Kopplung von ϕ und ψ durch die nichtlinearen Terme auf der rechten Seite der Gleichung (7) und (8) hinzu. Aus Gründen der Vereinfachung werden nur Fluide mit großer Prandtl-Zahl ($Pr \rightarrow \infty$) betrachtet. Dies impliziert, daß die Impulsadvektion gegenüber der Wärmeadvektion vernachlässigt wird und die rechten Seiten der Gleichungen (7) und (8) zu Null werden. Durch die Tatsache, daß mit zunehmendem A die Strömung wieder in eine zweidimensionale Bewegung übergeht und damit der Einfluß von ϕ stark reduziert wird, ist es weiter möglich ϕ zu vernachlässigen. Somit ergibt sich folgendes Gleichungssystem für ψ und θ :

$$\nabla^2 \Delta_2 \psi + \partial_x \theta = 0, \quad (11)$$

$$\nabla^2 \theta + R \partial_x \psi = -\partial_z \psi \partial_x \theta + \partial_x \psi \partial_z \theta + \partial_t \theta. \quad (12)$$

Für die festen bzw. freien horizontalen Ränder lauten die Randbedingungen:

$$\begin{array}{l} \psi = \partial_z \psi = \theta = 0 \\ \text{bzw.} \\ \psi = \partial_z^2 \psi = \theta = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \psi = \partial_z \psi = \theta = 0 \\ \text{bzw.} \\ \psi = \partial_z^2 \psi = \theta = 0 \end{array}} \right\} z = \pm 0.5 \quad \begin{array}{l} (13a) \\ (13b) \end{array}$$

Die vertikalen Ränder werden als adiabat oder perfekt wärmeleitend betrachtet

$$\begin{array}{l} \psi = \partial_y \theta = 0 \\ \text{oder} \\ \psi = \theta = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \psi = \partial_y \theta = 0 \\ \text{oder} \\ \psi = \theta = 0 \end{array}} \right\} y = \pm 0.5, \quad \begin{array}{l} (14a) \\ (14b) \end{array}$$

wobei sie immer als fest angenommen werden.

Als Startwerte für die instationären Rechnungen werden Lösungen gewählt, die bereits bei niedrigerer oder höherer Rayleigh-Zahl berechnet worden sind.

3. Lösungsmethode

Zum Lösen des Gleichungssystems (11) - (12) mit den Randbedingungen (13) wird ein analytisches Näherungsverfahren, die Galerkin-Methode, verwendet. Dieses Verfahren stellt eine gute Alternative zu den üblich angewandten finiten Differenzen-Methoden gerade auf dem Gebiet des Lösen von Zellularkonvektionsproblemen dar (Denny & Clever /25/; Clever & Busse /26/; Bühler /27/; Oertel /28/). Außerdem ist es zum Behandeln von Eigenwertproblemen gut geeignet. Bei diesem Näherungsverfahren wird für die gesuchten Variablen, in unserem Fall die Temperatur θ und die Stromfunktion ψ , jeweils ein Reihenansatz bestehend aus unbekanntem Koeffizienten und geeignet gewählten Versuchsfunktionen angesetzt. Diese werden in die zu lösenden Gleichungen für ψ und θ eingesetzt, mit den entsprechenden Versuchsfunktionen multipliziert und über den Lösungsbereich integriert. Die sich somit ergebenden Gleichungen (Galerkin-Gleichungen) dienen zur Bestimmung der unbekanntem Koeffizienten in den Reihenansätzen und damit von ψ und θ .

In diesem Kapitel wollen wir nun den oben kurz beschriebenen Lösungsweg in einzelnen Abschnitten von einer allgemeinen Darstellung des Galerkin-Verfahrens über die spezielle Auswahl der Versuchsfunktionen für dieses hier zu untersuchende Problem bis hin zum Aufstellen und Lösen der Galerkin-Gleichungen betrachten.

3.1 Galerkin-Verfahren

Der Grundgedanke des Galerkin-Verfahrens soll im Rahmen der allgemeinen Methoden der "weighted residuals" wie bei Finlayson /29/ beschrieben, im folgenden geschildert werden.

In einem Gebiet V gelte die Differentialgleichung

$$L(u) = 0 \quad (15)$$

mit dem Differentialausdruck L . Gesucht ist die Lösung $L(u) = 0$, welche auf dem Rand S des Gebietes V bestimmte Randbedingungen

erfüllt. Für die Lösung u der Gleichung (15) läßt sich eine Näherungslösung u^* folgender Form ansetzen:

$$u = u^* = \sum_{i=1}^N a_i u_i. \quad (16)$$

Für diese Darstellung müssen die Versuchsfunktionen u_i entsprechend dem gegebenen Problem hinreichend oft stetig differenzierbar sein und die Randbedingungen der Lösung u erfüllen, und u^* muß mit zunehmender Anzahl N Funktionen gegen die exakte Lösung u konvergieren. Wird der Ansatz für u^* in die Differentialgleichung (15) eingesetzt

$$L\left(\sum_{i=1}^N a_i u_i\right) = R, \quad (17)$$

so ist diese bis auf einen Abbruchfehler R erfüllt. Die unbekanntenen Koeffizienten a_i werden aus der Bedingung bestimmt, daß der Fehler R zu beliebig gewählten Funktionen W_j (sogenannte Gewichtsfunktionen) in der Anzahl N orthogonal ist, d.h.

$$\int_V R W_j dV = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

Das Verfahren von Galerkin besteht nun darin, für W_j die Versuchsfunktionen u_j selbst zu verwenden.

$$\int_V u_j \left\{ L\left(\sum_{i=1}^N a_i u_i\right) \right\} dV = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

Die sich hieraus ergebenden algebraischen Gleichungen dienen zur Bestimmung von a_i und werden üblich als Galerkin-Gleichungen bezeichnet.

3.2 Versuchsfunktionen

Zur Lösung der Gleichungen (11) und (12) mit den Randbedingungen (13) und (14) werden ψ und ϕ in folgender Form angesetzt:

$$\psi = \sum_{\lambda\nu\beta} i c_{\lambda\nu\beta} h_{\nu}^y(y) h_{\beta}^z(z) e^{i\lambda\alpha x} \equiv \sum_{\lambda\nu\beta} i c_{\lambda\nu\beta} \psi_{\lambda\nu\beta}, \quad (20)$$

$$\theta = \sum_{\lambda\nu\beta} b_{\lambda\nu\beta} f_{\nu}^y(y) f_{\beta}^z(z) e^{i\lambda\alpha x} \equiv \sum_{\lambda\nu\beta} b_{\lambda\nu\beta} \theta_{\lambda\nu\beta}, \quad (21)$$

wobei die Amplituden $c_{\lambda\nu\beta}$ und $b_{\lambda\nu\beta}$ reelle Konstanten sind. Mit dem Symbol i wird die Beziehung $i^2 = -1$ berücksichtigt. Die einzelnen Versuchsfunktionen ψ_ν^y , ψ_β^z , θ_ν^y und θ_β^z sind Funktionen einer Veränderlichen und erfüllen die entsprechenden Randbedingungen.

Die zur Behandlung dieses Konvektionsproblems verwendeten Funktionen sind nachfolgend in Abhängigkeit von verschiedenen Randbedingungen aufgeführt.

Für die Funktionen ψ und θ werden in y -Richtung die folgenden symmetrischen Versuchsfunktionen verwendet:

$$\psi_\nu^y = \cos((2\nu-1)\pi y) \quad (22)$$

$$\theta_\nu^y = \begin{cases} \cos((2\nu-2)\pi y) & \text{bei adiabaten Seiten} & (23) \\ \sin\nu\pi(y+0.5) & \text{bei perfekt wärmeleitenden} & (24) \\ & \text{Seiten} \end{cases}$$

Wie Davies-Jones /6/ gezeigt hat, ist die kritische Rayleigh-Zahl bei Verwendung symmetrischer Funktionen niedriger als bei antisymmetrischen Versuchsfunktionen.

Bei Betrachtung fester bzw. freier horizontaler Ränder werden entsprechend dem Vorschlag von Clever & Busse /26/ für ψ und θ in z -Richtung die nachfolgenden Ausdrücke angesetzt:

$$\psi_\beta^z = \begin{cases} S_{\frac{1}{2}\beta}(z) & \text{für gerade } \beta & (25a) \\ C_{\frac{1}{2}(\beta+1)}(z) & \text{für ungerade } \beta & (25b) \end{cases}$$

$$\psi_\beta^z = \sin(\beta\pi(z+0.5)) \quad (25c)$$

und für θ

$$\theta_\beta^z = \sin(\beta\pi(z+0.5)). \quad (26)$$

Die Ausdrücke $S_{1/2\beta}$ und $C_{1/2(\beta+1)}$ sind von Chandrasekhar /30/, S. 635) eingeführt worden und erfüllen die Randbedingungen vom Typ (13a) für ψ .

Günstig ist es, anstelle der komplexen Darstellung in den Reihenansätzen für ψ und ϕ eine trigonometrische Darstellung für die x -Abhängigkeit des Problems einzuführen. So wird der Ausdruck $e^{i\alpha x}$ in (22) bzw. (23) durch

$$\psi_{\lambda}^x = \sin \lambda \alpha x \quad (27)$$

bzw.

$$\theta_{\lambda}^x = \cos \lambda \alpha x \quad (28)$$

und $ic_{\lambda\nu\beta}$ durch $c_{\lambda\nu\beta}$ ersetzt.

3.3 Galerkin-Gleichungen

Zur Anwendung des Galerkin-Verfahrens werden die Reihenansätze (20) und (21) in das Gleichungssystem (11) und (12) eingesetzt, die ψ -Gleichung mit $\psi_{\kappa\mu\gamma}$, die θ -Gleichung mit $\theta_{\kappa\mu\gamma}$ multipliziert und über die Fluidschicht integriert. Hieraus ergibt sich eine abzählbar unendliche Anzahl von nichtlinearen gekoppelten algebraischen Gleichungen für $c_{\lambda\nu\beta}$ und $b_{\lambda\nu\beta}$. Sie werden im folgenden als Galerkin-Gleichungen bezeichnet.

$$I_{ln}^{11} c_n + I_{ln}^{12} b_n = 0, \quad (29a)$$

$$I_{ln}^{21} b_n + RI_{ln}^{22} c_n + I_{lnm}^{23} c_n b_m + I_{ln}^{24} \partial_t b_n = 0. \quad (29b)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise sind die dreifachen Indizes $\kappa\mu\nu$, $\lambda\nu\beta$ und $\rho\pi\delta$ durch einfache l , n und m ersetzt worden. Die einzelnen Elemente der Matrizen I^{11} bis I^{24} sind die folgenden Integrale:

$$I_{ln}^{11} = \int_V \psi_l \nabla^2 \Delta_2 \psi_n dV, \quad (30a)$$

$$I_{ln}^{12} = \int_V \psi_l \partial_x \theta_n dV, \quad (30b)$$

$$I_{ln}^{21} = \int_V \theta_l \nabla^2 \theta_n dV, \quad (30c)$$

$$I_{1n}^{22} = \int_V \theta_1 \partial_x \psi_n dV, \quad (30d)$$

$$I_{1nm}^{23} = \int_V \theta_1 (-\partial_z \psi_n \partial_x \theta_m + \partial_x \psi_n \partial_z \theta_m) dV, \quad (30e)$$

$$I_{1n}^{24} = - \int_V \theta_1 \theta_n dV, \quad (30f)$$

wobei $\int_V \dots dV$ in abgekürzter Schreibweise für

$$\int_{z=-1/2}^{z=1/2} \int_{y=-1/2}^{y=1/2} \int_{x=-\pi/\alpha}^{x=\pi/\alpha} \dots dx dy dz \quad (31)$$

steht. Da noch kein Verfahren bekannt ist, das ein solch unbegrenztes System von Gleichungen lösen kann, ist es notwendig, den laufenden Index in den Reihenansätzen zu begrenzen, um ein System von endlichen Gleichungen zu erhalten. Eine gebräuchliche Methode ist, einen Abbruchparameter NT einzuführen, so daß alle Koeffizienten mit

$$\lambda + \nu + \beta > NT \quad (32)$$

vernachlässigt werden (Veronis /31/; Clever und Busse /26/), wobei NT eine positive ganze Zahl ist. Um eine ausreichende Genauigkeit der Lösungen zu gewährleisten, wird NT als frei wählbarer Parameter bei konstant gehaltenen Eingabeparametern (R , α , A) mehrfach erhöht, bis die Koeffizienten nur noch eine vernachlässigbare Änderung der Lösung bewirken. Überprüft wird dies beim Lösen des linearen Problems mit Hilfe der kritischen Rayleigh-Zahl R_c und beim nicht-linearen Problem mit Hilfe der Nusselt-Zahl Nu , die das Verhältnis der Wärmetransporte zur Konvektion und Wärmeleitung beschreibt. Als erfüllt angesehen wird die obige Forderung, wenn sich der Wert von R_c bzw. Nu um weniger als 1 % bei Erhöhung des Abbruchparameters von NT auf $NT+2$ ändert (Busse /32/). Aufgrund von numerischen und experimentellen Untersuchungen (Kvernold /14/); Schubert & Straus /21/; Koster /24/) ist eine Einschränkung auf symmetrische Lösungen in der x - z -Ebene (gerade Werte von $\lambda+\nu$) für den hier untersuchten Parameterbereich zulässig. Der Bezug auf die experi-

mentellen Ergebnisse von Koster /24/ gilt nur für die Untersuchungen in engen vertikalen Spalten mit großer horizontaler Ausdehnung.

In den beiden folgenden Kapiteln werden die Lösungswege zu dem Problem des Einsetzens der stationären Konvektion (linearisiertes Problem) und der Konvektion endlicher Amplitude (nichtlineares Problem) erläutert.

3.4 Lösungsweg des linearisierten Problems

Das Einsetzen der Konvektion wird bereits durch Linearisierung des Gleichungssystems (11) - (12) beschrieben. Dies kann angenommen werden, wenn die Amplitude der Konvektion klein ist, so daß die Terme $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ und $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta$ in Gleichung (2) und (3) vernachlässigt werden können. Chandrasekhar/30/ hat gezeigt, daß die Analyse der Konvektion in einer wie hier zu betrachtenden Fluidschicht nahe der neutralen Stabilitätskurve auf ein zeitunabhängiges Problem beschränkt werden kann ("principle of exchange of stability"). Entsprechend vereinfacht sich das System von Galerkin-Gleichungen unter Berücksichtigung des Abbruchparameters NT in den Reihenansätzen auf ein System endlicher Gleichungen folgender Form:

$$I_{ln}^{11} c_n + I_{ln}^{12} b_n = 0, \quad (33)$$

$$I_{ln}^{21} b_n + R I_{ln}^{22} c_n = 0. \quad (34)$$

Durch diese Art der Festlegung sind die Koeffizienten c_n und b_n nicht mehr von der Zeit abhängig. Die beiden Gleichungen (33) und (34) lassen sich durch die Elimination von c_n auf eine Beziehung für b_n reduzieren. Hierzu wird c_n aus Gleichung (33) bestimmt.

$$\hat{I}_{kn}^{11} I_{ln}^{11} c_n + \hat{I}_{kn}^{11} I_{ln}^{12} b_n = 0, \quad (35)$$

$$\Rightarrow c_k = \hat{I}_{kn}^{11} I_{ln}^{12} b_n \equiv I_{kn}^1 b_n. \quad (36)$$

Im Gegensatz zur üblichen Bezeichnung wird die inverse Matrix mit \hat{I} gekennzeichnet, wobei gilt $\hat{I}_{kn} I_{nm} = \delta_{km}$. Mit δ_{km} ist das Kronecker-Symbol dargestellt. Wird der Ausdruck (36) in die Gleichung (34) eingesetzt, ergibt sich für b_n folgende Beziehung:

$$(I_{ln}^{21} + R I_{ln}^{22}) b_n = 0 \quad (37)$$

$$I_{lk}^2 \equiv I_{ln}^{22} I_{nk}^1. \quad (37)$$

Die Rayleigh-Zahl R tritt hier als Parameter in einem homogenen linearen Gleichungssystem auf. Dieses System hat nur für bestimmte Werte von R , welche man Eigenwerte nennt, nichttriviale Lösungen. Gelöst wird die Gleichung (37) mit Hilfe von Standard-Rechenprogrammen, die im Scientific Subroutine Package-Programmer's Manual der Firma IBM beschrieben sind (IBM, /33/).

3.5 Lösungswege des nichtlinearen Problems

In den Abschnitten 3.1 bis 3.3 haben wir besprochen, wie die Galerkin-Gleichungen für dieses hier zu untersuchende Problem aufgestellt werden. Wir wollen nun den Lösungsweg zur Bestimmung der Koeffizienten c_n und b_n aus diesen Gleichungen mit den besprochenen Einschränkungen erläutern. Dabei handelt es sich um das Gleichungssystem (29) mit der Einschränkung auf eine endliche Anzahl von Gleichungen und der Vernachlässigung der Koeffizienten mit ungeraden Werten von $\lambda + \beta$:

$$I_{ln}^{11} c_n + I_{ln}^{12} b_n = 0, \quad (39)$$

$$I_{ln}^{21} b_n + RI_{ln}^{22} c_n + I_{lnm}^{23} c_n b_m + I_{ln}^{24} \partial_t b_n = 0. \quad (40)$$

Das bekannte Ziel der Arbeit ist, stationäre und instationäre Konvektionsvorgänge zu berechnen. Für die stationären Rechnungen wird der Term $I_{ln}^{24} \partial_t b_n$ nicht berücksichtigt, und die Gleichung (40) vereinfacht sich zu:

$$I_{ln}^{21} b_n + RI_{ln}^{22} c_n + I_{lnm}^{23} c_n b_m = 0. \quad (41)$$

Im Falle der transienten Rechnung wird in Gleichung (40) statt der Ableitung nach der Zeit eine Diskretisierung vorgenommen und diese Gleichung nach dem Crank-Nicolson-Verfahren (s. Roache /34/) entwickelt, wobei die nichtzeitabhängigen Terme zu den Zeiten t und

$t + \Delta t$ wie folgt angesetzt und gemittelt werden:

$$\begin{aligned}
 & 1/2 \{ I_{1n}^{21} (b_n^t + b_n^{t+\Delta t}) + R (I_{1n}^{22} (c_n^t + c_n^{t+\Delta t}) + I_{1nm}^{23} (c_n^t b_m^t + c_n^{t+\Delta t} b_m^{t+\Delta t})) \} \\
 & + I_{1n}^{24} (b_n^t + b_n^{t+\Delta t}) / \Delta t = 0.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Die sich somit aus (39) und (41) bzw. (39) und (42) ergebenden Gleichungen werden mit einem Newton-Raphson-Iterationsverfahren (Willers /35/) gelöst. Die transiente Rechnung (39) und (42) wird dabei für die Zeit von t auf $t + \Delta t$ durchgeführt. Um eine genügend genaue Lösung für entsprechend vorgegebene Parameter (R , ϵ , A , Δt und NT) zu gewährleisten, wird für jeden Iterationsschritt i der Betrag der relativen Änderung der einzelnen Koeffizienten c_n und b_n gegenüber einer vorgegebenen Genauigkeits-schranke ϵ überprüft; hier dargestellt am Beispiel c_n :

$$\left| \frac{c_n^i - c_n^{i-1}}{c_n^i} \right| < \epsilon \tag{43}$$

Ist diese Genauigkeitsabfrage erfüllt, wird die Nusselt-Zahl Nu berechnet. Sie stellt das Verhältnis von Wärmetransport mit Konvektion q_k zum Wärmeleitungszustand q_l über der Fluidschicht dar.

$$Nu = \frac{q_k}{q_l} = 1 - 1/R \int_F \partial_z \theta |_{z=-1/2} dF \tag{44}$$

wobei $\int_F \dots dF$ in abgekürzter Schreibweise für

$$\int_{y=-1/2}^{y=1/2} \int_{x=-\pi/\alpha}^{x=\pi/\alpha} \dots dx dy \tag{45}$$

steht.

Für die instationäre Rechnung erfolgt nach Bestimmung von Nu eine weitere Zeitintegration um Δt , und das Gleichungssystem wird erneut iterativ gelöst. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis zur vorgegebenen Zeit t_{\max} aufintegriert ist.

Um den Abbruchparameter NT zu bestimmen, wird die Änderung der Nusselt-Zahl mit steigendem NT kontrolliert. Ändern sich die Nusselt-Zahlen der Rechnung mit NT und NT+2 um weniger als 1 %, nehmen wir an, daß die Lösung genügend genau ist. Die somit berechneten Koeffizienten b_n und c_n werden entweder für weitere Rechnungen als Startwerte abgespeichert oder zur Bestimmung der Temperatur- und Stromlinienfelder in die Reihenansätze für θ und ψ eingesetzt.

Zusammenfassend ist der soeben beschriebene Lösungsweg in Abb. 2 schematisch nochmals aufgezeichnet. Der hier dargestellte Algorithmus wurde als Rechenprogramm in FORTRAN IV geschrieben und die Rechnungen wurden auf der IBM 3033 und IBM 370-168 des Kernforschungszentrums Karlsruhe durchgeführt. Die zu bestimmende Anzahl der Koeffizienten verhält sich proportional zu NT^3 und die Rechenzeiten pro Iterationsschritt verhalten sich proportional zu NT^8 . Eine typische Rechenzeit war bei $NT = 11$ und 6 Iterationen etwa 100 sec.

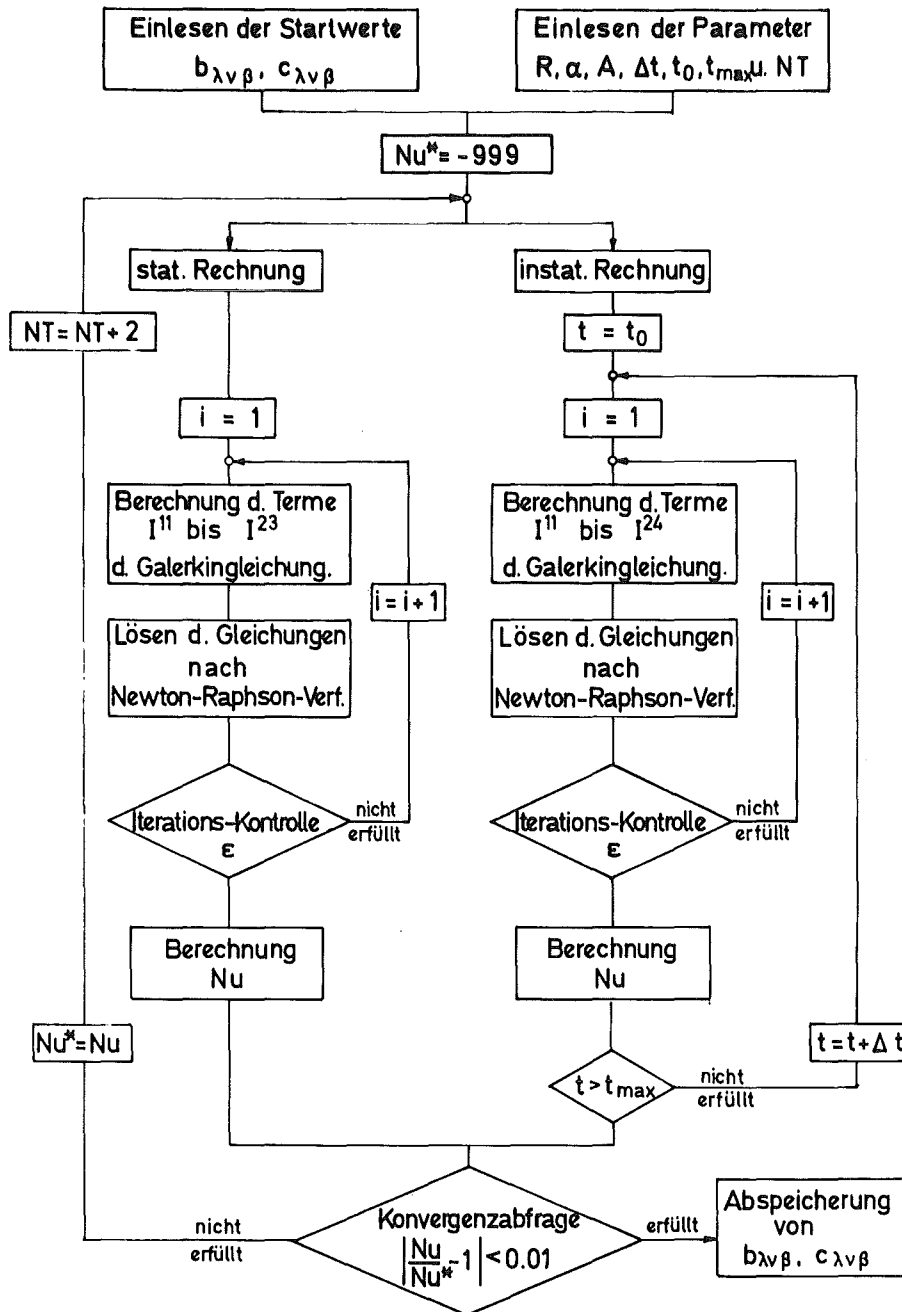


Abb. 2: Lösungsschema

4. Ergebnisse

Die Gleichungen des Problems sind für einen großen Parameterbereich (Rayleigh-Zahl R , Wellenzahl α und Höhen-zu-Breitenverhältnis A) numerisch gelöst worden. Außerdem ist die Abhängigkeit der Lösungen von den vertikalen thermischen (adiabat oder perfekt wärmeleitend) und von den horizontalen kinematischen (frei oder fest) Randbedingungen untersucht worden.

Zuerst wollen wir das Einsetzen der Konvektion (linearisiertes Problem) mit den verschiedenen Randbedingungen betrachten, um den Einfluß der Geometriegröße A in einem Bereich $0 \leq A \leq 100$ auf die kritische Rayleigh-Zahl und die kritische Wellenzahl zu bestimmen. Nach dem Einsetzen der Konvektion stellen sich zunächst stationäre Strömungszustände ein ("Principle of Exchange of Stabilities"; Chandrasekhar, /30/), die dann je nach Prandtl-Zahl und genügend großer Rayleigh-Zahl instationär werden. Aus diesem Grund diskutieren wir im zweiten Teil dieses Abschnittes die Ergebnisse der stationären Rechnungen für das nichtlineare Problem. Hauptsächlich wird uns hierzu der Wärmetransport über die Schichthöhe, dargestellt in Form von Nusselt-Zahlen für Rayleigh-Zahlen bis $2.5 \cdot 10^7$, und Höhen-zu-Breitenverhältnisse $A \leq 100$ interessieren. Für die Untersuchungen der instationären Konvektionsströmung werden wir uns auf das Hele-Shaw-Problem im dritten Teil dieses Abschnitts beschränken, da hier auch die zeitabhängige Konvektion zweidimensional ist. Im Gegensatz zum Bénard-Problem, bei dem die instationären Konvektionsvorgänge dreidimensional sind (Clever & Busse, /26/). Zu dieser Hele-Shaw-Konvektion werden wir die zeitlichen Verläufe der Nusselt-Zahlen und die dazugehörigen Isothermen- und Stromlinienbilder in ihrer Abhängigkeit von R/R_c und α/α_c in den Bereichen $5 \leq R/R_c \leq 23$ und $0.5\pi \leq \alpha/\alpha_c \leq 2\pi$ erläutern. Mit R_c wird die minimale Rayleigh-Zahl bezeichnet, bei der Konvektion einsetzt. Die dazugehörige Wellenzahl ist α_c . Bei allen in diesem Abschnitt betrachteten Fluidschichten sind die vertikalen Berandungen immer fest und die horizontalen immer isotherm.

4.1 Einsetzen der Konvektion

Um den Einfluß der Berandungen auf das Einsetzen der Konvektion in Abhängigkeit des Höhen-zu-Breitenverhältnisses A zu untersuchen, wird für ein vorgegebenes A und entsprechend gewählte Randbedingungen die Rayleigh-Zahl R , bei der die Strömung einsetzt, als Funktion der Wellenzahl α berechnet.

Abbildung 3 zeigt diese Rayleigh-Zahlen in Abhängigkeit von den Wellenzahlen als Kurven der Neutralstabilität bei allseits festen Rändern. Die vertikalen Berandungen werden einmal als adiabat und einmal als perfekt wärmeleitend betrachtet. Ausgehend vom Bénard-Fall ($A=0$), bei dem kein Einfluß der Seitenränder vorhanden ist, steigt mit zunehmendem A der Einfluß der Seitenränder, und die Kurven der Neutralstabilität verschieben sich in Bereiche höherer Rayleigh-Zahlen.

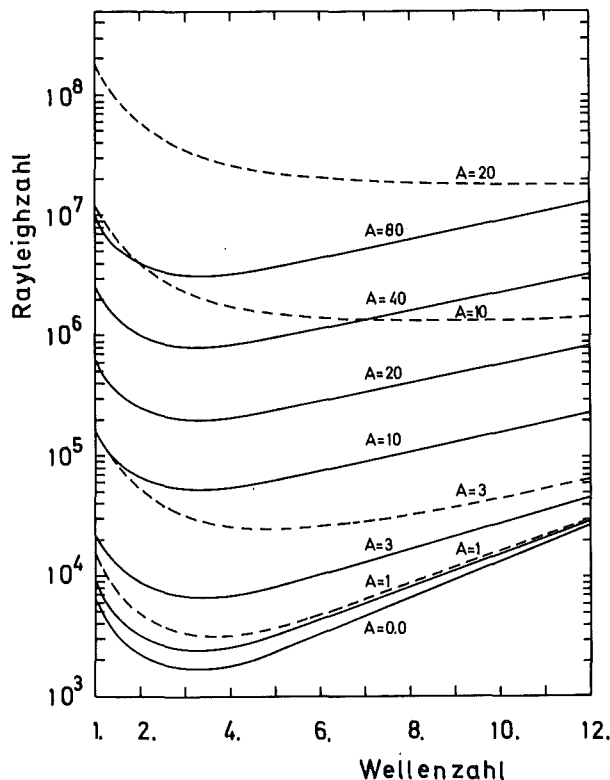


Abb. 3: Kurven der Neutralstabilität. Abhängigkeit der Rayleighzahl von der Wellenzahl für verschiedene Höhen-zu-Breitenverhältnisse A bei allseits festen Rändern und adiabat (—) bzw. perfekt wärmeleitenden (---) Seitenwänden.

Die einzelnen Verläufe der Stabilitätsgrenzen weisen bei adiabaten Seiten nur geringe Unterschiede untereinander in der Abhängigkeit von der Wellenzahl auf. Anders verhält sich dies bei perfekt wärmeleitenden Seiten, wo sich mit zunehmendem A das Minimum zu großen Wellenzahlen verschiebt. Die minimale Rayleigh-Zahl einer Stabilitätskurve wird als die kritische Rayleigh-Zahl R_c bezeichnet. Die dazugehörige Wellenzahl ist die kritische mit α_c . Um den Einfluß jeweils in Abhängigkeit von A auf die kritische Rayleigh- und Wellenzahl zu verdeutlichen, wird in Abb. 4 der Verlauf von R_c und in Abb. 5 der von α_c für verschiedene Randbedingungen dargestellt. Damit soll einerseits der Einfluß der thermischen Randbedingungen der vertikalen Seiten und andererseits der Unterschied zwischen festen und freien horizontalen Rändern für verschiedene A auf R_c verdeutlicht werden. Die Rechnungen zeigen, daß für den Fall $A < 0.3$ der Einfluß der vertikalen Ränder bei festen horizontalen Rändern vernachlässigbar klein wird, und es ergibt sich im Grenzfall $A \rightarrow 0$ die für das Bénard-Problem gültige kritische Rayleigh-Zahl $R_c = 1708$. Mit größer werdendem A steigt die kritische Rayleigh-Zahl bei perfekt wärmeleitenden Seitenrändern gegenüber dem adiabaten Fall wesentlich stärker an. Diese Zunahme wird durch den erhöhten Reibungsverlust und für den perfekt wärme-

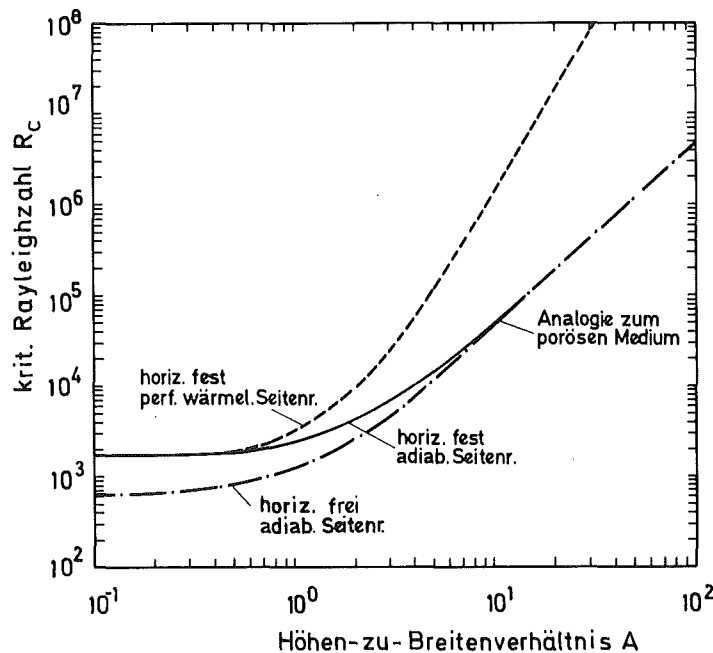


Abb. 4: Einfluß der vertikalen Ränder auf die kritische Rayleigh-Zahl in Abhängigkeit von A .

leitenden Fall zusätzlich durch den Wärmestrom über die Seitenwände verursacht. Um das Ab- oder Zufließen der Wärme über die Seiten besser verstehen zu können, betrachten wir die Isothermenverläufe in der Auf- bzw. Abtriebszone einer Konvektionsrolle über der Spaltbreite der Fluidschicht. Perfekt wärmeleitende Seiten bedeuten, an den vertikalen Rändern liegt die Temperatur der Grundlösung (linearer Temperaturverlauf über der Höhe) an. Damit sind die Temperaturen an den Seiten fest vorgegeben, und entsprechend der Auf- bzw. Abtriebsströmung werden die Isothermen in Strömungsrichtung ausgelenkt. Die dabei über die Seiten fließende Wärme hemmt das Einsetzen der Konvektion.

Gehen wir zu dünnen vertikalen Fluidschichten über, so bestimmen ausschließlich die vertikalen Berandungen die Größe von R_c . Für genügend große $A (A > 20)$ verschwindet der Einfluß der horizontalen Ränder, und die kritische Rayleigh-Zahl wird maßgeblich durch das Höhen-zu-Breitenverhältnis bestimmt. Wie aus Abb. 4 ersichtlich, verhält sich bei adiabaten Seiten $R_c \sim A^2$ und bei perfekt wärmeleitenden Seiten $R_c \sim A^4$. Für den adiabaten Fall läßt sich durch die Analogie zum porösen Medium die kritische Rayleigh-Zahl mit $R_c = 12 \cdot A^2 \cdot R_{pM}$ für $A \rightarrow \infty$ angeben, wobei $R_{pM} = 4\pi^2$ die kritische Rayleigh-Zahl für poröses Medium ist. Diese Beziehung erhält man durch Einführung des Ausdruckes $d/H=1/A$ in die z.B. von Hartline & Lister /23/ definierte Rayleigh-Zahl.

Gleichen Einfluß zeigen die verschiedenen Randbedingungen auf die kritischen Wellenzahlen in Abhängigkeit von der Geometriegröße A (Abb. 5). Für $A < 0.3$ verschwindet der Einfluß der vertikalen Ränder und die horizontalen Berandungen (fest oder frei) sind für das Einsetzen der Konvektion bestimmend. Die kritischen Wellenzahlen unterscheiden sich hier am stärksten. Mit größer werdendem A nimmt der Reibungsverlust und bei perfekt wärmeleitenden Seiten der Wärmestrom über die Ränder zu und damit auch α_c . So steigt der Wert der kritischen Wellenzahl bei perfekt wärmeleitenden Seiten, z.B. für $A = 20$ auf $\alpha_c = 12$. Am Fall der adiabaten Seiten läßt sich für freie horizontale Ränder die starke Einflußnahme der vertikalen Ränder infolge der Zunahme des Reibungsverlustes auf die Wellenzahl verdeutlichen. Ausgehend vom Bénard-Problem ($A=0$) steigt die

kritische Wellenzahl von $\alpha_c > 2.22$ mit A an und nähert sich für $A > 20$ asymptotisch der kritischen Wellenzahl der Hele-Shaw-Konvektion mit $\alpha_c = \pi$. Das Maximum der Wellenzahl (Fall: fest + ad) in Abb. 5 läßt sich dadurch erklären, daß bis $A = 5$ die Haftbedingungen der horizontalen und vertikalen Ränder die Strömung zusammen noch beeinflussen. Mit weiter zunehmendem A überwiegt der Einfluß der vertikalen Berandungen.

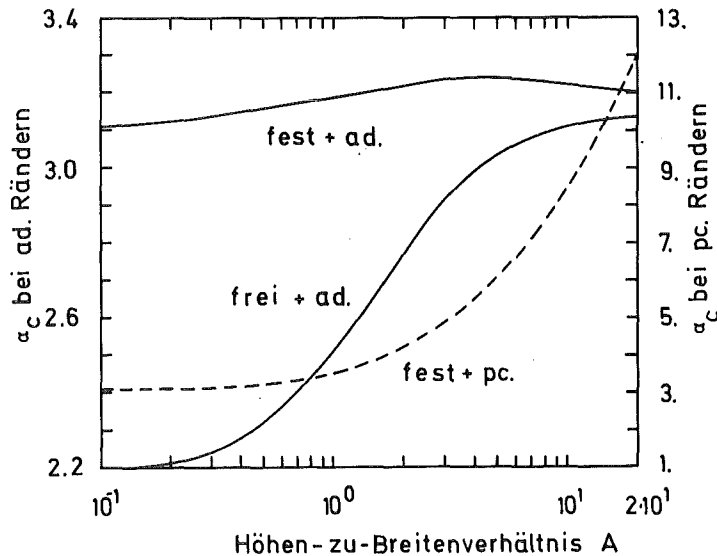


Abb. 5: Einfluß der Berandungen auf die kritische Wellenzahl α_c in Abhängigkeit von A.

Ein Vergleich der hier gewonnenen kritischen Rayleigh-Zahlen mit denen aus anderen Arbeiten, so weit dies möglich ist, zeigt eine gute Übereinstimmung. In Tabelle 1 werden theoretische und experimentelle Ergebnisse miteinander verglichen. Die numerischen Untersuchungen von Catton /36/ und Oertel et al. /37/ sind mit Hilfe eines Galerkin-Verfahrens für endliche Geometrien durchgeführt worden. Der dabei verwendete Ansatz für die Strömung berücksichtigt eine Überlagerung von zweidimensionalen nichtkoaxialen Konvektionsrollen. Ozoe et al. /38/ haben die Konvektionsströmung in einem Kanal mit einem finiten Differenzverfahren dreidimensional berechnet und die kritische Rayleigh-Zahl aus nichtlinearen Rechnungen durch Extrapolation ermittelt. Die Übereinstimmung der numerisch ermittelten kritischen Rayleigh-Zahlen mit den experimentellen Ergebnissen von Arnold /10/ und Oertel et al. /37/ ist gut. Das experimentelle Ergebnis von Wu & Edwards

/12/ für $A = 8$ sei der Vollständigkeit halber erwähnt. Infolge der Abweichung von idealisierten Randbedingungen ist höchstens eine größenordnungsmäßige Übereinstimmung zu erwarten. Gerade bei großen Höhen-zu-Breitenverhältnissen wirken sich kleine Abweichungen von idealisierten thermischen Randbedingungen auf die kritische Rayleigh-Zahl stark aus.

Vergleich der theoretischen Ergebnisse:

A	Catton ¹	Oertel et al. ²	Ozoe et al. ³	eigene Arbeit
0.25		1815		1773
0.33	1855			1814
0.5	1967			1926
1.0	2453		2300	2409
2.0	4118			4056
4.0	10426			10238
8.0	35193			34220

¹ $A_x = h/h_x = 0.087$

² $A_x = 0.1$

³ extrapoliert aus nichtlinearen Rechnungen, $A_x=0$

} dreidimensionale Rechnungen

h_x - Länge der Fluidschicht in x-Richtung

Vergleich Experiment - Theorie:

A	Arnold	Oertel et al.	Wu & Edwards	eigene Arbeit (theoret.)
0.25		1780 ⁶		1773
1	2600 ⁴			2409
4	11000 ⁵			10238
8			≈ 50000 ⁷	34220

⁴ $A_x = 0.2$

⁶ $A_x = 0.25$

⁵ $A_x = 0.04$

⁷gesonderte Geometrie ("honeycomb")

Tabelle 1 Vergleich der kritischen Rayleigh-Zahlen mit denen aus früheren theoretischen und experimentellen Untersuchungen für allseits feste Ränder und adiabate Seiten.

4.2 Stationäre Konvektion

Zur Behandlung des stationären Konvektionsproblems werden die nichtlinearen Gleichungen gelöst und die numerischen Ergebnisse anhand von Nusselt-Zahlen und Isothermen- bzw. Stromlinienbildern diskutiert. Als Parameter treten die Rayleigh-Zahl R , das Höhen-zu-Breitenverhältnis A und die Wellenzahl α auf. Variiert wird die Geometriegröße A zwischen $A = 0$ (Bénard-Problem) und $A = 100$ (Hele-Shaw-Problem). Die hierzu in einem Bereich $R_c < R < 30 \cdot R_c$ berechneten Lösungen sind jeweils unter Berücksichtigung der erforderlichen numerischen Konvergenz erzielt worden. Begrenzt wird diese durch den Abbruchparameter NT . Neben diesen Parameteruntersuchungen ist auch der Einfluß der Wellenzahl α auf den konvektiven Wärmetransport untersucht worden. Um frühere experimentelle und theoretische Ergebnisse auf dem Gebiet der Konvektion in einer Hele-Shaw-Zelle und im porösen Medium vergleichen zu können, werden die horizontalen Ränder als fest und als frei betrachtet. Die Einflüsse der beiden thermischen Randbedingungen (adiabat und perfekt wärmeleitend) auf die Nusselt-Zahlen und Isothermen- bzw. Stromlinienbildern werden gezeigt und miteinander verglichen.

4.2.1 Adiabater Fall

Zunächst wird für den Fall adiabater Seiten der Einfluß von R , A und α auf die stationäre Konvektion diskutiert. In Abb. 6 sind die Nusselt-Zahlen in Abhängigkeit von der Geometriegröße A bei $\alpha = \alpha_c$ und festen horizontalen Rändern über der Rayleigh-Zahl aufgetragen. Ausgehend von dem Bénard-Problem ($A = 0$) zeigen die Nusselt-Zahlen einen relativ steilen Anstieg bei zunehmender Rayleigh-Zahl für nicht zu weit überkritische Verhältnisse. Verstärkt wird dieses Ansteigen mit größer werdendem A . Im Bereich großer Rayleigh-Zahlen ist der kleine Effekt des Höhen-zu-Breitenverhältnisses auf den Wärmetransport interessant. So ändert sich bei einer Rayleigh-Zahl $R = 10^5$ der Wärmetransport für $A = 10$ um einen Faktor 2.3 und bei $R = 10^6$ für $A = 10$ um 1.5 bzw. für $A = 20$ um 2 gegenüber dem Fall $A = 0$. Der Grund hierfür liegt in dem viel kleineren Anstieg der Nusselt-Zahl für weit überkritische Verhältnisse gegenüber dem

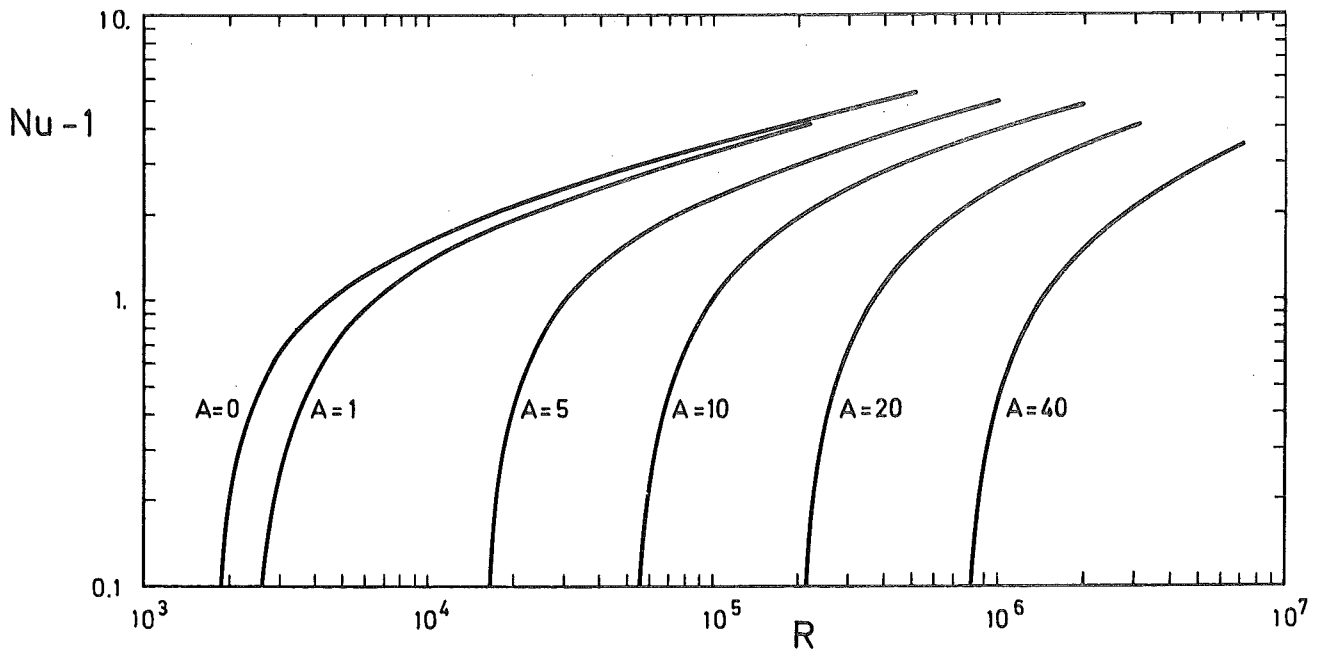


Abb. 6: Nusselt-Zahl Nu als Funktion der Rayleigh-Zahl R in Abhängigkeit von A bei allseits festen Rändern und adiabaten Seiten. Alle Kurven für $\alpha = \alpha_c$.

anfänglich großen Anstieg. Für diese Verhältnisse steigt der Wärmetransport proportional zu $R^{0,3}$ wie im Fall der zweidimensionalen Bénard-Konvektion und ändert sich nur noch gering mit der Geometriegröße A .

Im Gegensatz dazu zeigen sich Unterschiede beim Vergleich mit den asymptotischen Ergebnissen für die Konvektion in einer Hele-Shaw-Zelle. Hier sind die Nusseltzahlen und alle Eigenschaften der Konvektion von der Größe R/A^2 für den Grenzfall $A \rightarrow \infty$ abhängig. Für den Fall der Konvektion kleiner Amplitude ist die Hele-Shaw-Approximation bereits für $A = 20$ ausreichend. Um die Hele-Shaw-Ergebnisse ($A \rightarrow \infty$) im Bereich größerer Verhältnisse von R/R_c anzunähern, muß A mit R/R_c ansteigen. In Abb. 7 sind hierzu die Nusselt-Zahlen für verschiedene A über R/R_c aufgetragen. Die numerischen Ergebnisse zeigen, daß für jeden Wert von A die Hele-Shaw-Approximation für einen genügend großen Wert von R/R_c unzulässig wird. Um zu besseren Aussagen über den Einfluß von A auf die Hele-Shaw-Approximation zu kommen, werden die Ergebnisse mit denen des Falles freier horizontaler Ränder für $R/R_c = 5$ und $R/R_c = 8$ verglichen (Abb. 8). Für beide Rayleigh-Zahlen wird bei freien Rändern ab $A = 20$ eine gute Approximation der asymptotischen Hele-Shaw-Lösung

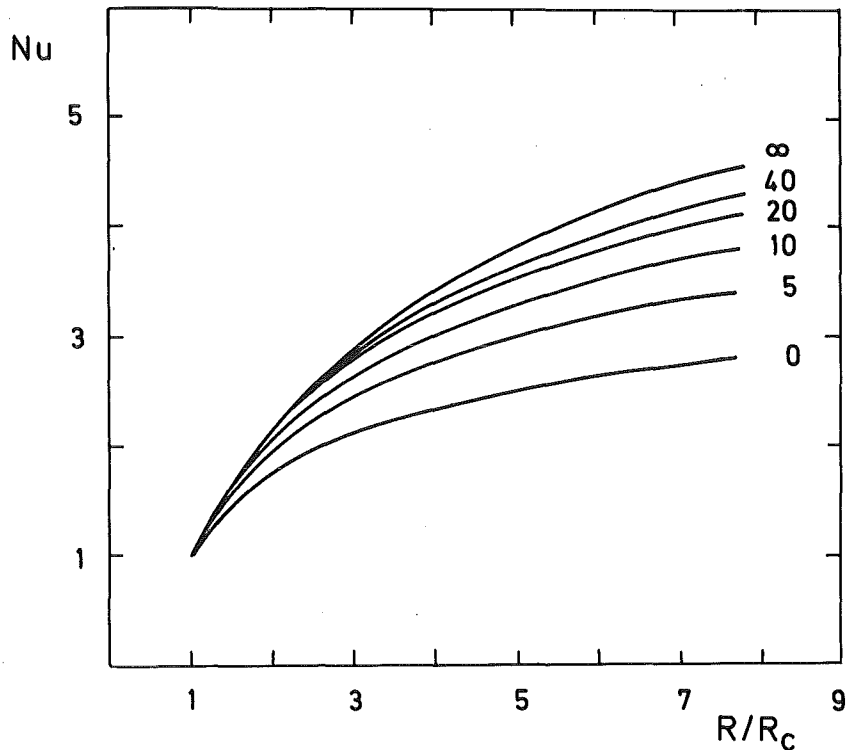


Abb. 7: Nusselt-Zahl Nu als Funktion des überkritischen Verhältnisses R/R_c für verschiedene Höhen-zu-Breitenverhältnisse.

erreicht. Dagegen sind die Unterschiede der Hele-Shaw-Approximation bei festen Rändern bemerkenswert groß. So ist die Abweichung bei $A = 20$ noch größer als 10 %.

Für den Fall $A \rightarrow \infty$ ist es möglich gewesen, die Analogie zwischen der Konvektion in einer Hele-Shaw-Zelle und der in porösen Medien zu bestätigen (Kap. 4.1). In beiden Fällen wird das Einsetzen der Konvektion durch zweidimensionale Störungen verursacht. Wie die beiden Stabilitätsdiagramme für die Konvektion in einer Hele-Shaw-Zelle und in porösen Medien (Kvernfold, /14/) zeigen, gilt im weit überkritischen Bereich ($R/R_c > 5$ und $\alpha/\alpha_c = 1$) die erwähnte Analogie nicht mehr. In diesem Bereich sind die zweidimensionalen Konvektionsrollen für poröses Medium instabil gegenüber dreidimensionalen Störungen (Straus, /17/). Zusätzlich zu dem Einfluß der Geometriegröße A auf die rein zweidimensionale Konvektion in einer Hele-Shaw-Zelle scheint es noch einen weiteren Unterschied zu porösen Medien zu geben. So hat Straus /17/ durch einen Ver-

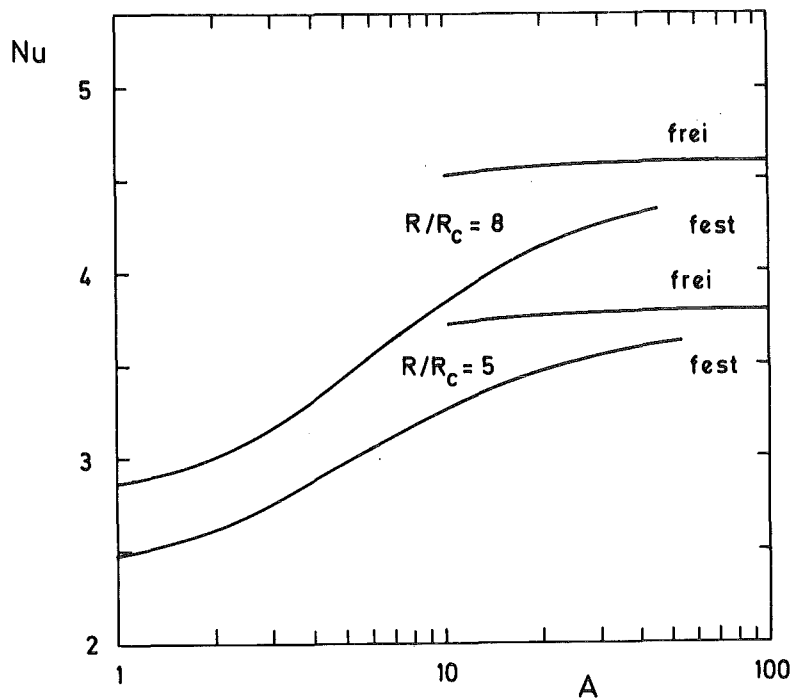


Abb. 8: Unterschiede in der Hele-Shaw-Approximation zwischen festen und freien horizontalen Rändern für $R/R_c=5$ und $R/R_c=8$.

gleich von Theorie und Experiment für poröses Medium festgestellt, daß der Wärmetransport berechnet als maximale Nusselt-Zahl, in Abhängigkeit von der Wellenzahl, die beste Übereinstimmung ergibt. Demgegenüber zeigen die Hele-Shaw-Experimente von Koster (/24/, S. 43), daß keine Änderung der Wellenzahl auftritt und somit die Berechnung des Wärmetransports bei kritischer Wellenzahl erfolgen sollte. In Abb. 9 sind diese Effekte der Wellenzahl auf den Wärmetransport und der damit verbundene Anstieg von α/α_c (---) am Beispiel $A = 20$ aufgezeigt. Einen deutlichen Unterschied zwischen dem optimalen Wärmetransport (---) und dem bei α_c (—) bestimmten wird ab $R/R_c > 3$ sichtbar. Erreicht wird dies durch die Bildung zunehmend schmalere Konvektionsrollen (Anwachsen der Wellenzahl---).

Ein Vergleich der Nusselt-Zahlen mit denen aus Experimenten ist in Abb. 10 für verschiedene Höhen-zu-Breitenverhältnisse dargestellt. Gezeigt werden die Ergebnisse für $A = 1$ und $A = 4$ von Arnold /10/ und für $A = 8$ von Wu & Edwards /12/. Für $A = 1$ läßt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment feststellen. Aufgrund dieser guten Übereinstimmung können wir folgern, daß die hier verwendete Approximation der Konvektionsrollen

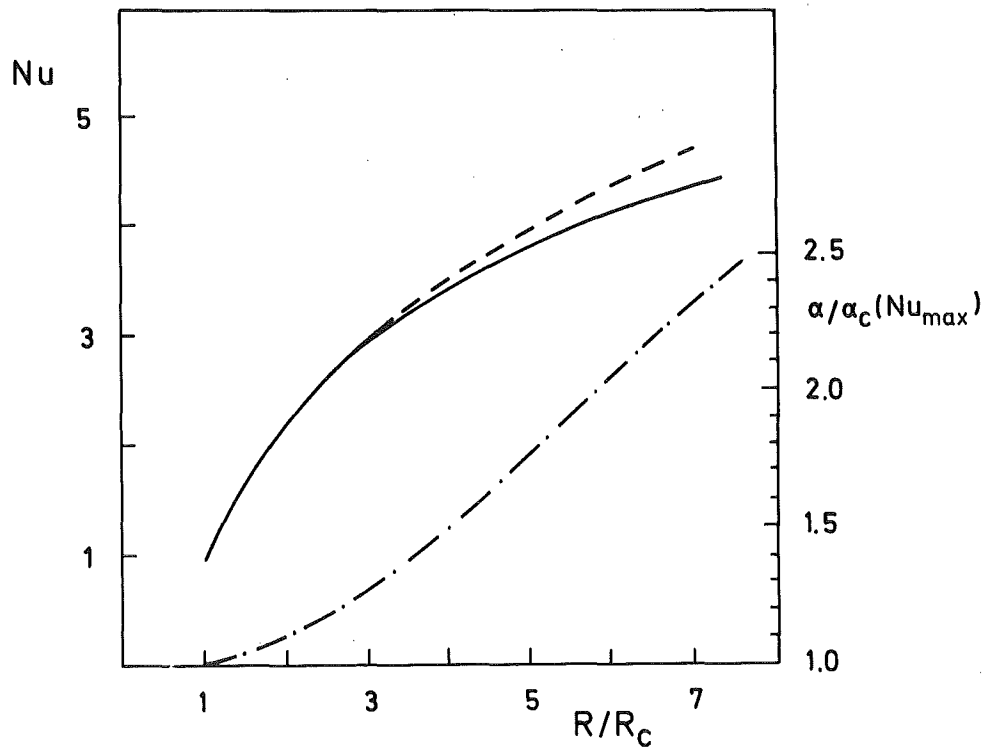


Abb. 9: Abhängigkeit der Nusselt-Zahl von der Wellenzahl bei $A=20$ und freien horizontalen Rändern über R/R_c . Obere Kurve (---) berechnet mit Wellenzahlen, die den maximalen Wärmetransport ergeben; mittlere Kurve (—) bei $\alpha = \alpha_c$. Verhältnis von α/α_c bei maximaler Nusselt-Zahl als Funktion von R/R_c (-·-·-).

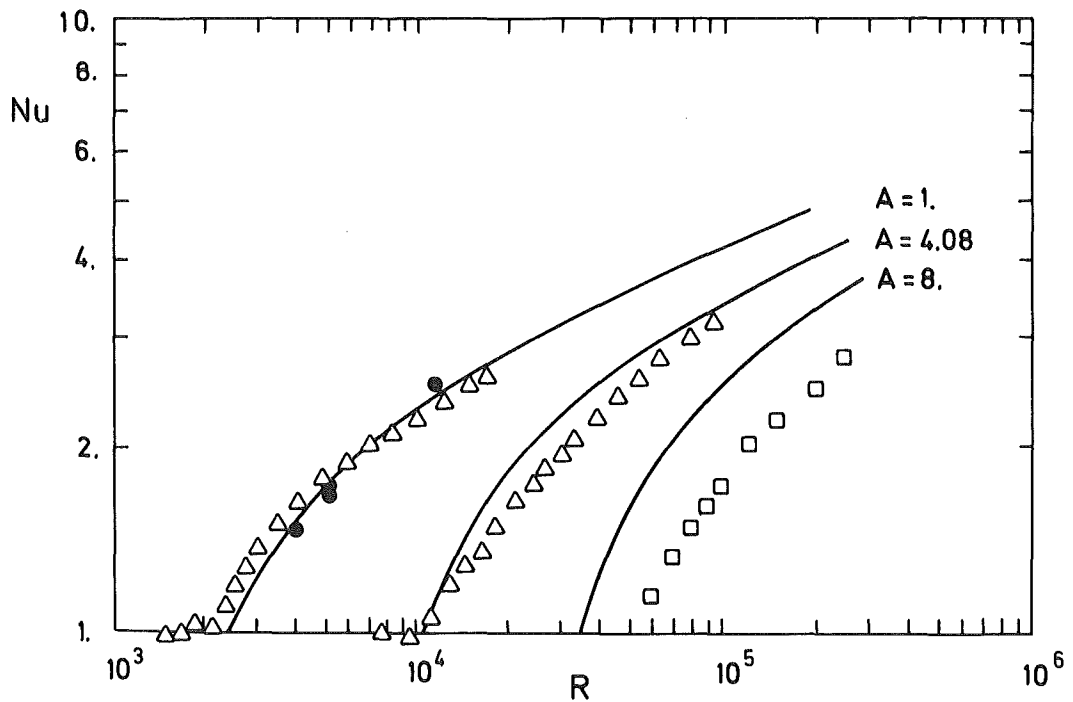


Abb. 10: Numerisch und experimentell bestimmte Nusselt-Zahlen. Experimente: Δ Arnold /10/; \bullet Ozoe et al. /39/; \square Wu & Edwards /12/.

mit nur zwei Geschwindigkeitskomponenten berechtigt ist. Für $A = 4$ und besonders bei $A = 8$ sind die Unterschiede zwischen den berechneten und experimentellen Ergebnissen groß. Dies ist durch die Abweichung von seitlichen idealen thermischen Randbedingungen, wie sie bei der theoretischen Betrachtung vorliegen, im Experiment bedingt. Als Materialien wurden für die Seitenränder in den experimentellen Untersuchungen schlecht wärmeleitende Kunststoffe verwendet, um so den adiabaten Fall annähern zu können.

Zusätzlich zu dem Wärmetransport, welcher eine integrale Größe der Konvektion darstellt, ist auch von Interesse, lokale Eigenschaften zu betrachten. Hierzu sind in Abb. 11 neben den Stromlinien und Isothermen die Größen $\partial\rho/\partial z$ und $\partial\rho/\partial x$, welche von Bühler et al. /8/ für $A = 0.25$ bei $R = 6270$ experimentell bestimmt wurden,

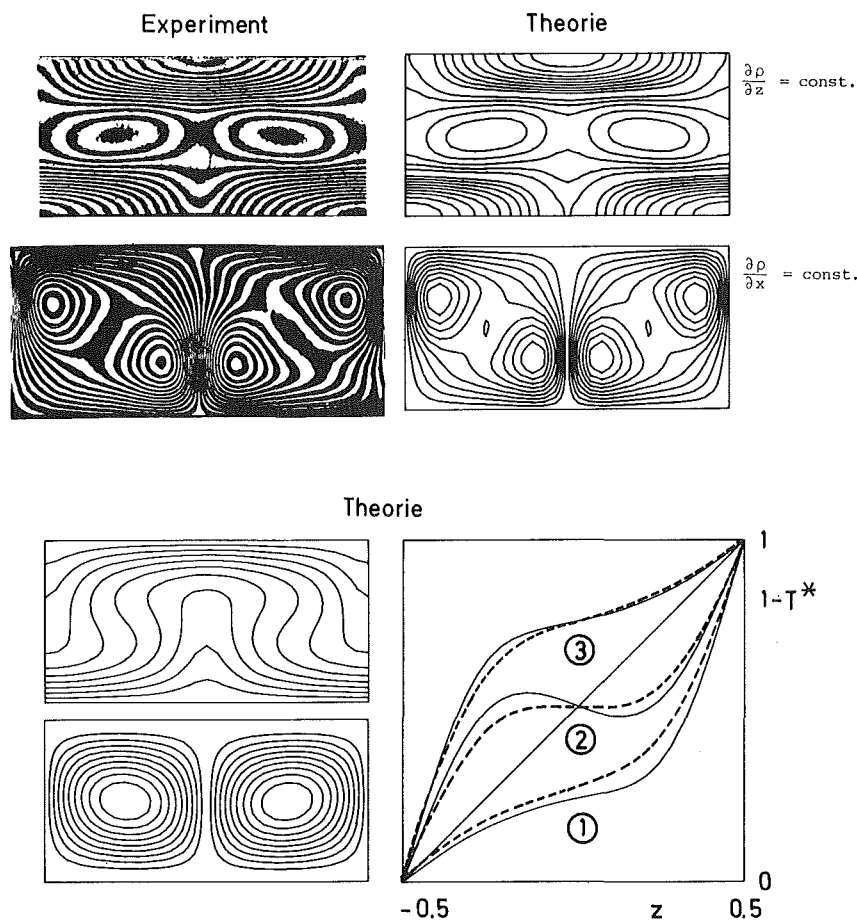


Abb. 11: Vergleich des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes mit dem aus Experimenten von Bühler et al. /8/ bei $R = 6270$ und $A = 0,25$. Temperaturprofil in einer Konvektionsrolle (Experiment ---, Theorie —):
1 Auftriebzone, 2 Mitte der Zelle, 3 Abtriebzone.

berechnet worden. Aus diesen Differentialinterferogrammen läßt sich das Temperaturprofil in der Auftriebs- bzw. Abtriebszone und in der Mitte einer Konvektionsrolle bestimmen. Ein Vergleich von Theorie und Experiment weist eine gute Übereinstimmung auf.

Ein Vergleich des berechneten Temperaturfeldes mit Ergebnissen aus dem Hele-Shaw-Experiment von Koster /24/ wird in Abb. 12 gezeigt. Dargestellt sind die experimentell und numerisch bestimmten Isothermen für zwei Konvektionsrollen bei zweifach überkritischer Rayleigh-Zahl. Zusätzlich werden die Temperaturprofile in der Auf- bzw. Abtriebszone und in der Mitte einer Konvektionsrolle neben den Stromlinien gezeigt. Die experimentelle Bestimmung des Temperaturfeldes in einer Hele-Shaw-Meßkammer ist mit Hilfe eines holographischen Echtzeit-Interferometers möglich gewesen. Hierzu ist eine Meßkammer mit einem Höhen-zu-Breitenverhältnis $A = 18$ und mit durchsichtigen Seitenwänden aus Plexiglas verwendet worden.

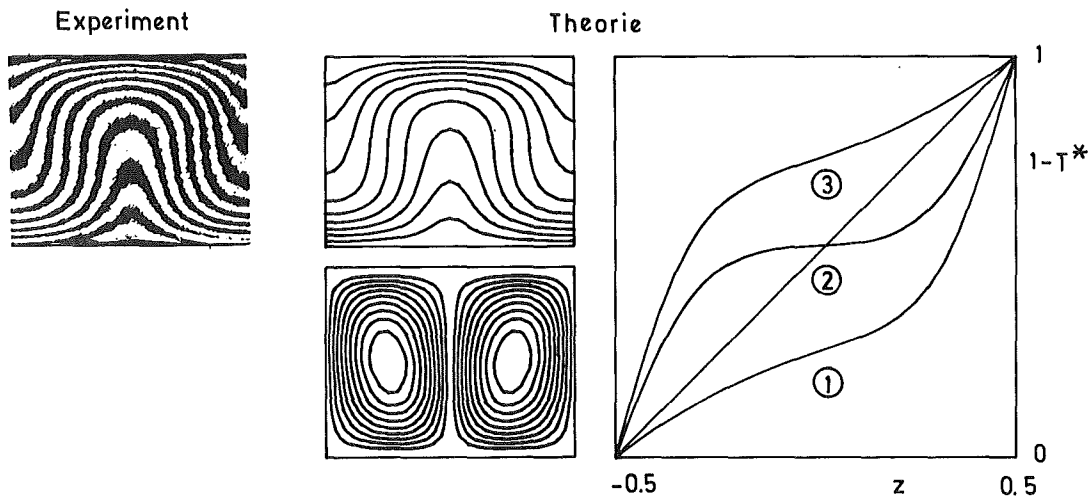


Abb. 12: Numerisch und experimentell ermitteltes Temperaturfeld der Hele-Shaw-Konvektion ($A = 18$, $R = 2R_c$ und $\alpha = 4,8$).

Temperaturprofil in einer Konvektionsrolle:

1 Auftriebszone, 2 Mitte der Zelle, 3 Abtriebszone

4.2.2 Perfekt wärmeleitender Fall im Vergleich mit dem adiabaten Fall

In den hier durchgeführten Untersuchungen zum Problem der stationären Konvektion unter Berücksichtigung von Wandeinflüssen thermischer und kinematischer Art wird in diesem Abschnitt der Fall der perfekt wärmeleitenden Seiten bei festen horizontalen Rändern untersucht und mit dem adiabaten Fall verglichen. Dazu werden die Nusselt-Zahlen in Abhängigkeit vom Höhen-zu-Breitenverhältnis A bei jeweils kritischer Wellenzahl ($\alpha = \alpha_c$) und der Rayleigh-Zahl R diskutiert. Am Beispiel einer dünnen vertikalen Fluidschicht ($A = 10$) werden die Unterschiede in den verschiedenen Temperatur- und Stromlinienverläufen aufgezeigt.

In Abb. 13 sind die Nusselt-Zahlen für verschiedene A , ausgehend vom Bénard-Problem ($A = 0$) bis zum angenäherten Hele-Shaw-Problem ($A = 20$), bei adiabaten und perfekt wärmeleitenden Seiten über der Rayleigh-Zahl dargestellt. Betrachten wir zunächst nur den perfekt wärmeleitenden Fall (—). Auch hier werden die verschiedenen Verläufe der Nusselt-Zahlen durch die Kurve des Bénard-Falles begrenzt. Ausgehend von $A = 0$ nimmt der relativ steile Anstieg der Nusselt-Zahlen mit größer werdender Rayleigh-Zahl und Geometriegröße für nicht zu große R/R_c zu. So unterscheidet sich z. B. der

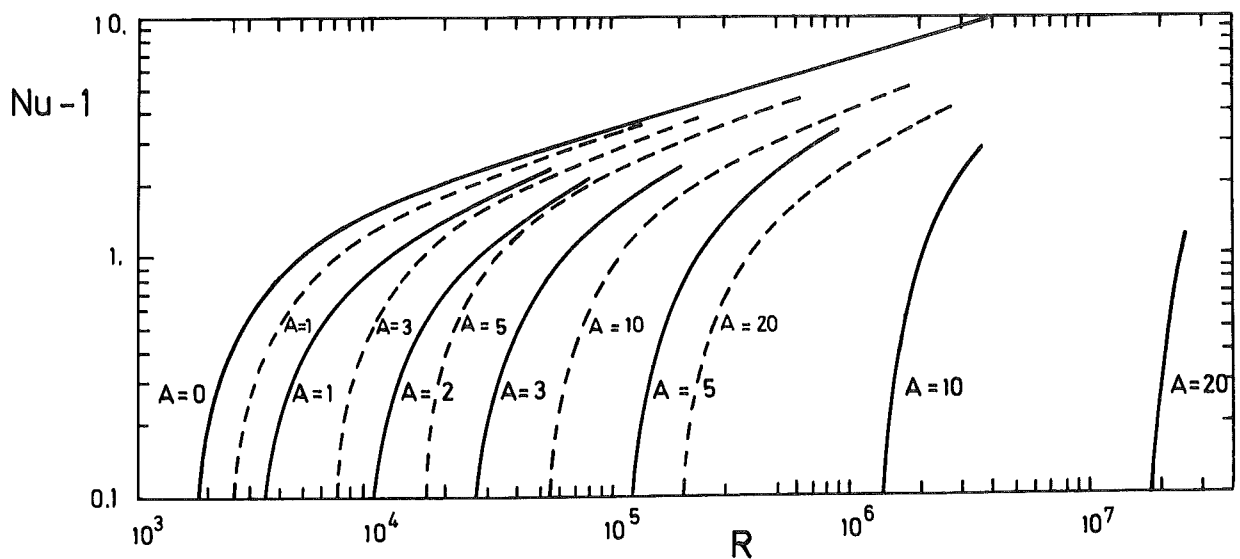


Abb. 13: Nusselt-Zahlen Nu als Funktion der Rayleigh-Zahl R in Abhängigkeit von A bei allseits festen Rändern und perfekt wärmeleitenden (—) bzw. adiabaten (---) Seiten.

Wärmetransport über der Fluidschicht zwischen $A = 10$ und $A = 5$ bei zweifach überkritischer Rayleigh-Zahl um einen Faktor von 1,5. Im Bereich großer Rayleigh-Zahlen wird dann der Einfluß von A kleiner und die Kurven nähern sich der des Bénard-Falles.

Beim Vergleich der Nusselt-Verläufe der beiden thermischen Grenzfälle, adiabat und perfekt wärmeleitend, ist bemerkenswert, daß die Kurven für konstante A mit zunehmender Rayleigh-Zahl bei perfekt wärmeleitenden Seiten stärker ansteigen als im adiabaten Fall. Im Bereich großer Rayleigh-Zahlen nähern sich dann die beiden Kurven asymptotisch dem Verlauf für $A = 0$. Für große A ($A \geq 10$) kann dieses Verhalten bei perfekt wärmeleitenden Seiten aufgrund von numerischen Problemen nur angedeutet werden. Durch die starke Auslenkung des Temperaturprofils über der Spaltbreite mußte aus Konvergenzgründen die Anzahl der Versuchsfunktionen NT in den Reihenansätzen für ψ und θ erhöht werden. Sie beläuft sich z.B. bei zweifach überkritischer Rayleigh-Zahl und $A = 10$ beim adiabaten Fall auf 11 und beim perfekt wärmeleitenden Fall auf 15. Für dieses Beispiel werden in Abb. 14 die Isothermen- und Stromlinienverläufe in zwei Schnittebenen an der Stelle $y = 0,0$ (Spaltmitte) und $y = 0,3$ (Wandnähe), die parallel zu den vertikalen Seiten verlaufen, für beide thermische Grenzfälle gezeigt. Die Strömungszustände sind jeweils für Konvektionsrollen mit kritischer Wellenzahl α_c dargestellt. Für den adiabaten Fall bei $A = 10$ ist $\alpha_c = 3,22$ und für den perfekt wärmeleitenden Fall $\alpha_c = 8,53$.

Die Rayleigh- und Nusselt-Zahlen haben beim zweifach überkritischen Konvektionszustand, der hier betrachtet wird, den Wert $R_{ad} = 1,04 \cdot 10^5$ bzw. $R_{pC} = 2,65 \cdot 10^6$ und $Nu_{ad} = 2,09$ bzw. $Nu_{pC} = 2,93$. Diese doch große Differenz in den Nusseltzahlen bei nur zweifach überkritischer Rayleigh-Zahl deutet neben den oben erwähnten numerischen Konvergenzproblemen auf Unterschiede in dem Temperatur- und Strömungsverhalten beider Fälle hin. Im Verlauf der Stromlinien ist eine Abweichung nur in der Rollenform infolge der verschiedenen kritischen Wellenzahlen zu erkennen. Für beide Fälle weisen die Stromlinien infolge der Haftbedingung ($\psi = 0$) an den vertikalen Rändern und der relativ kleinen Spaltbreite gegenüber der Fluidschichthöhe eine starke y -Abhängigkeit auf. Dagegen zeigen die Isothermenverläufe der beiden Fälle einen gegenseitig unterschiedlichen Verlauf.

Im Falle adiabater Ränder ändern sich die Isothermen im Rahmen der Näherung im Gegensatz zum perfekt wärmeleitenden Fall über der Spaltbreite nicht. In einer Schnittebene an der Stelle $y = 0.0$ verlaufen die Isothermen am unteren Rand infolge der viel größeren Vertikalkomponente der Geschwindigkeit dichter als im adiabaten Fall. Beim Vergleich der Größe der Vertikalkomponenten in der Ab- bzw. Auftriebszone ist diese auf halber Höhe der Fluidschicht etwa 50mal größer als beim adiabaten Fall. Betrachten wir weiter das Verhalten der Isothermen zum Rand hin, so verringert sich der dichte Verlauf der Isothermen ($y = 0,32$) und nimmt an der Berandung selbst ($y = 0,5$) einen linearen Verlauf über der Fluidschichthöhe an.

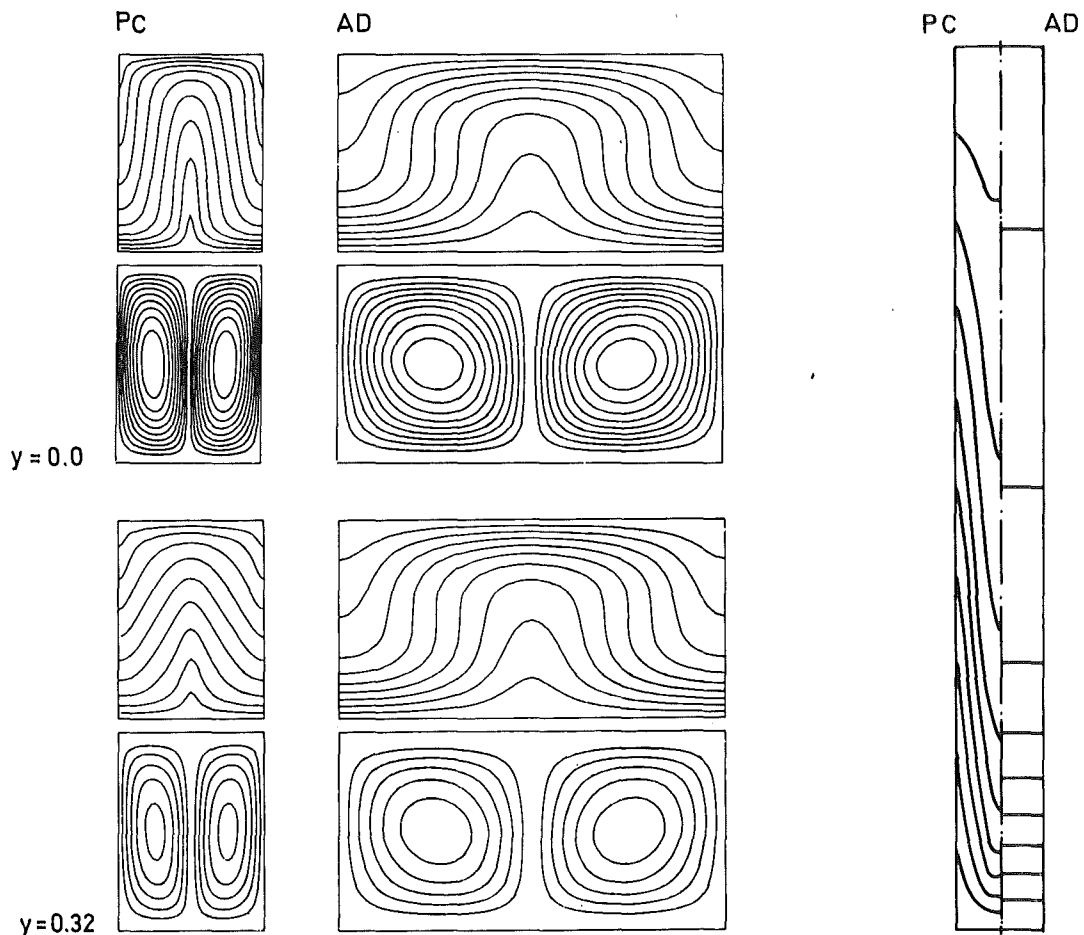


Abb. 14: Isothermen- und Stromlinienfelder bei adiabaten (AD) und perfekt wärmeleitenden (PC) Seiten für $A = 10$, $R = 2R_c$ und $\alpha = \alpha_c$ in Schnittebenen an den Stellen $y = 0.0$ und $y = 0.32$. Dazugehörige Temperaturverteilung über der Spaltbreite in der Abtriebszone.

Um die y -Abhängigkeit der Isothermen für beide thermische Grenzfälle zu verdeutlichen, sind die Isothermenverläufe zwischen den vertikalen Seiten jeweils für eine Spaltbreitenhälfte zusätzlich in Abb. 14 dargestellt. Beim adiabaten Fall verlaufen die Isothermen konstant über den Spalt. Im Gegensatz dazu werden infolge der perfekt wärmeleitenden Rändern die Isothermen in Strömungsrichtung ausgelenkt. Diese starke Änderung über der Spaltbreite ist durch die Festlegung der Temperatur an den vertikalen Seiten (linearer Temperaturverlauf über der Höhe) infolge der Randbedingungen mitbegründet.

4.3 Instationäre Konvektion

Ausführliche Untersuchungen zu dem Phänomen instationärer Konvektion sind als erstes am Beispiel einer unendlich ausgedehnten horizontalen Fluidschicht durchgeführt worden. Experimentelle und theoretische Arbeiten (z. B. von Krishnamurti /40/ und Clever & Busse /26/) haben gezeigt, daß diese zeitabhängigen Lösungen von der Rayleigh-, Wellen- und Prandtl-Zahl abhängen und aufgrund von Stabilitätsuntersuchungen auf dreidimensionale Strömungseffekte zurückzuführen sind. Im Gegensatz dazu ist für den Grenzfall einer dünnen vertikalen Schicht (Hele-Shaw-Problem) die Strömung immer zweidimensional. In der von Kvernold /14/ durchgeführte Stabilitätsuntersuchung der Hele-Shaw-Konvektion tritt sowohl stationäre als auch instationäre Konvektion in Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl R und der Wellenzahl α auf. Die oszillatorische Stabilitätsgrenze verläuft von etwa $R \approx 3,8 \cdot R_c$ und $\alpha \approx 0,4 \alpha_c$ bis etwa $R \approx 8 \cdot R_c$ und $\alpha \approx 1,2 \alpha_c$ (Kvernold, /41/).

Aufgrund der weniger komplexen Strömung in einer Hele-Shaw-Zelle und dem damit verbundenen geringeren numerischen Aufwand sind nur hierzu instationäre Rechnungen durchgeführt worden. Zur möglichst guten Approximation der Hele-Shaw-Strömung wird eine schmale Fluidschicht ($A = 1000$) mit freien horizontalen und adiabaten vertikalen Seiten betrachtet. Dadurch ist es zulässig, als Strömungsverteilung über die Spaltbreite ein parabolisches Profil anzusetzen und somit die Anzahl der Funktionen in den Reihenansätzen für ψ und θ zu reduzieren. Um die instationären Vorgänge besser verstehen zu können, werden die zeitlichen Verläufe der Nusselt-Zahlen Nu und die damit verbundenen Isothermen- und Stromlinienbilder dargestellt und analysiert. Da das Einsetzen der Oszillation sowohl von der Wellenzahl als auch von der Rayleigh-Zahl abhängt, wird ein Bereich von Wellenzahlen, ausgehend vom Beginn der oszillatorischen Stabilitätsgrenze ($\alpha = 0,4 \alpha_c$) bis zu $\alpha = 2 \alpha_c$ untersucht. Entscheidend für die numerische Konvergenz (Anzahl der Funktionen NT und Zeitschritt Δt) war die Größe der Nusselt-Zahl mit ihrem zeitlichen Verlauf und die "Güte" der Isothermenverläufe in der gesamten Zelle. Hierbei hat sich gezeigt, daß die Nusselt-Zahlen

mit NT schneller konvergieren als die Gesamtheit der Isothermen. So ist z. B. für $\alpha = \pi$ und $R/R_c = 11$ eine ausreichende Konvergenz für Nu bei $NT = 13$ und erst bei $NT = 17$ für die Isothermenverläufe in der gesamten Zelle erreicht worden. Die Größe des Zeitschrittes Δt wurde dadurch bestimmt, daß eine Verkleinerung von Δt keine Änderung sowohl der Amplitude als auch der Frequenz der Nusselt-Zahl bewirkt hat. Verwendet wurde ein Δt , das 50mal kleiner als der zeitliche Abstand zwischen zwei minimalen Nusselt-Zahlen war. Die in diesem Abschnitt gezeigten Nusselt-Zahlen sind während eines Rechenvorganges für jeden Zeitschritt auf der Rechenanlage abgespeichert und anschließend mit Hilfe eines Zeichenprogrammes über der Zeit aufgetragen worden.

In dem Stabilitätsdiagramm für die Hele-Shaw-Konvektion beginnt die oszillatorische Grenzkurve bei $\alpha \approx 0,4$ $\alpha_c = 1,25$ und $R/R_c = 3,8 R_c$. Für diese kleine Wellenzahl und ein Verhältnis von $R/R_c = 4$ führt die instationäre Rechnung zu einer Teilung der breiten Konvektionsrollen in stabilere schmalere Rollen und die Lösung verschiebt sich in das Stabilitätsgebiet der stationären Konvektion. Erst ab $\alpha > 0,5$ $\alpha_c = 1,57$ bleibt die eingestellte Wellenzahl erhalten.

Am Beispiel dreier verschiedener Wellenzahlen ($\alpha = 0,5$ $\alpha_c = 1,57$ - breite Konvektionsrollen, $\alpha = \alpha_c = \pi$ - Konvektionsrollen mit einer Höhe gleich der Breite, $\alpha = 2\alpha_c = 6,28$ - schmale Konvektionsrollen) wird das Problem der oszillierenden Konvektion in Abhängigkeit vom überkritischen Verhältnis der Rayleigh-Zahlen R/R_c diskutiert. Hierzu werden die verschiedenen zeitlichen Verläufe der Nusselt-Zahlen und die dazugehörigen Isothermen- und Stromlinienbilder in der Spaltmitte der Fluidschicht gezeigt und erläutert.

4.3.1 Konvektionsrollen mit $\alpha = \pi/2$

Werden breite Konvektionsrollen mit einer Wellenzahl $\alpha = 1,57$ untersucht, so ist bis zu einem überkritischen Verhältnis von $R/R_c = 5$ die Konvektion stationär. Mit weiter zunehmender Rayleigh-Zahl wird die Strömung instationär und der Wärmetransport über die Fluidschicht zeigt einen zeitabhängigen Verlauf. In Abb. 15 ist dieser in Form von Nusselt-Zahlen Nu über der Zeit t bei sechs-, sieben- und achtfach überkritischer Rayleigh-Zahl dargestellt. Die für diese Rayleigh-Zahlen gezeigten zeitlichen Verläufe sind periodisch, wobei mit zunehmendem überkritischem Verhältnis die Periode τ abnimmt. Als Periode wird die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maxima oder Minima bezeichnet.

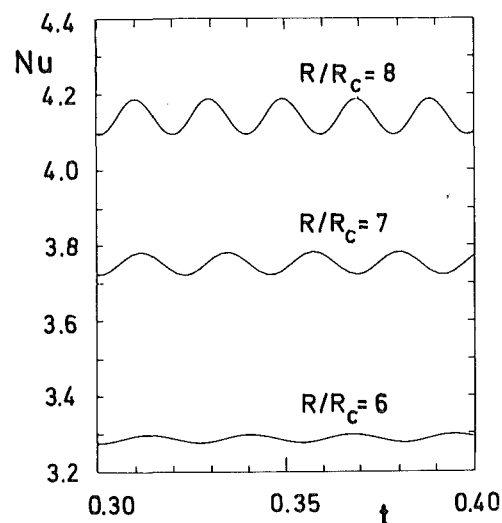


Abb. 15: Zeitlicher Verlauf der Nusselt-Zahl für verschiedene R/R_c bei $\alpha = \pi/2$.

Der Einfluß der Rayleigh-Zahlen wirkt sich auch für die Amplituden der Schwankungen der Nusselt-Zahlen aus, und zwar so, daß diese mit größer werdendem R/R_c anwachsen. Verdeutlicht wird dies beim Betrachten der jeweiligen Isothermen- und Stromlinienbilder bei maximaler und minimaler Nusselt-Zahl. Hierzu sind in Abb. 16 die Isothermen und Stromlinien in der Spaltmitte einer Fluidschicht mit zwei Konvektionsrollen dargestellt. Weiter wird die Temperaturverteilung in der Mitte einer Konvektionsrolle (2) in der Auf-

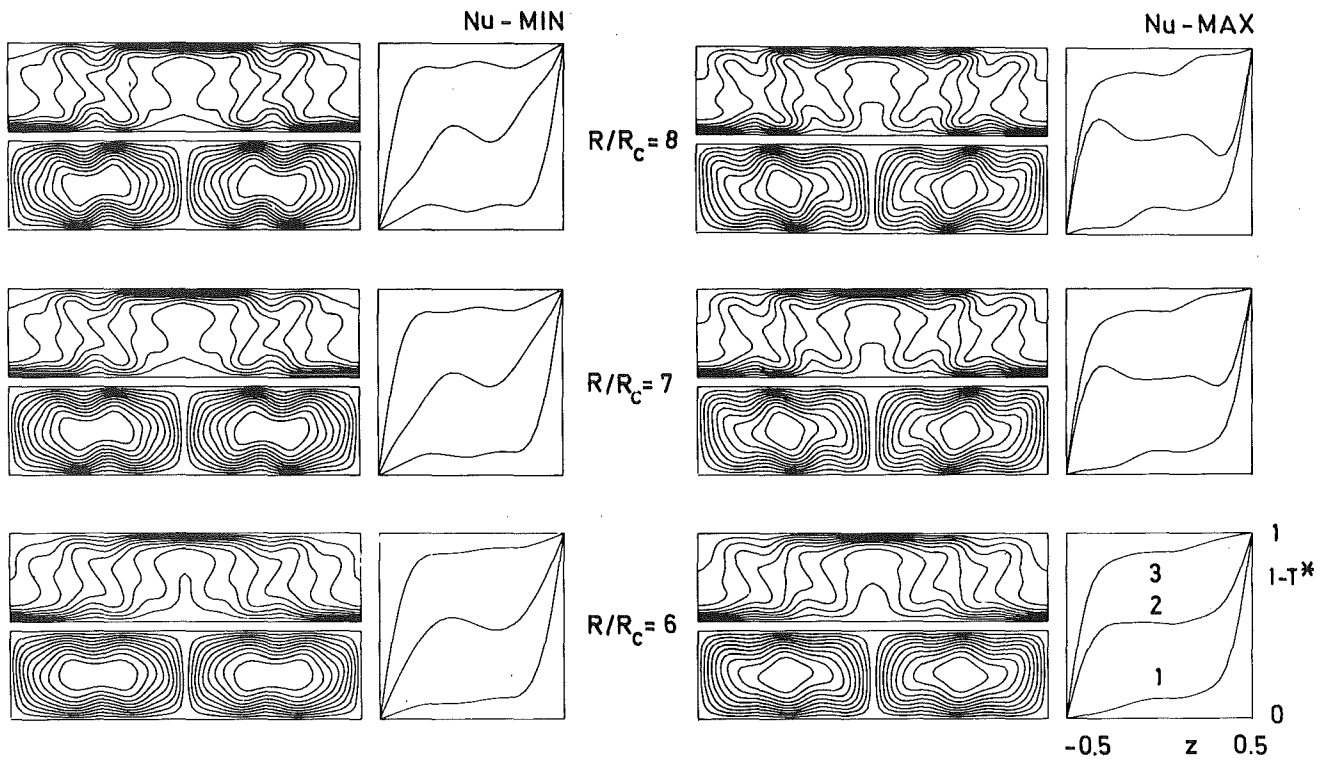


Abb. 16: Vergleich der Isothermen- und Stromlinienfelder bei minimaler und maximaler Nusseltzahl für verschiedene R/R_c bei $\alpha = \pi/2$.

triebs- (3) und Abtriebszone (1) über der Fluidschichthöhe z gezeigt. Anhand der Abbildung läßt sich erkennen, daß die hier dargestellte Oszillation auf wellenartige Störungen - Instabilitäten - in der Grenzschicht zurückzuführen ist. Sie entstehen im Gebiet des maximalen Temperaturgradienten (z. B. am unteren Rand - in der Abtriebszone), wandern der unteren Berandung entlang zur Auftriebszone und lösen sich dort auf. Diese wellenartigen Störungen bewirken in der Grenzschicht eine lokale Verschlechterung des Wärmeüberganges. Verstärkt wird dieser Effekt mit zunehmender Rayleigh-Zahl. In Abb. 17 wird das zeitliche Verhalten der Isothermen und Stromlinien für die Zeit einer Periode gezeigt. Zum besseren Erkennen der Wanderung der wellenartigen Störungen ist jeweils die Mitte der rechten Konvektionsrolle an den Rändern der Fluidschicht gekennzeichnet.

Durch die breiten Konvektionsrollen (kleine Wellenzahl) ist es möglich, das Wandern zweier wellenartiger Störungen in der Grenz-

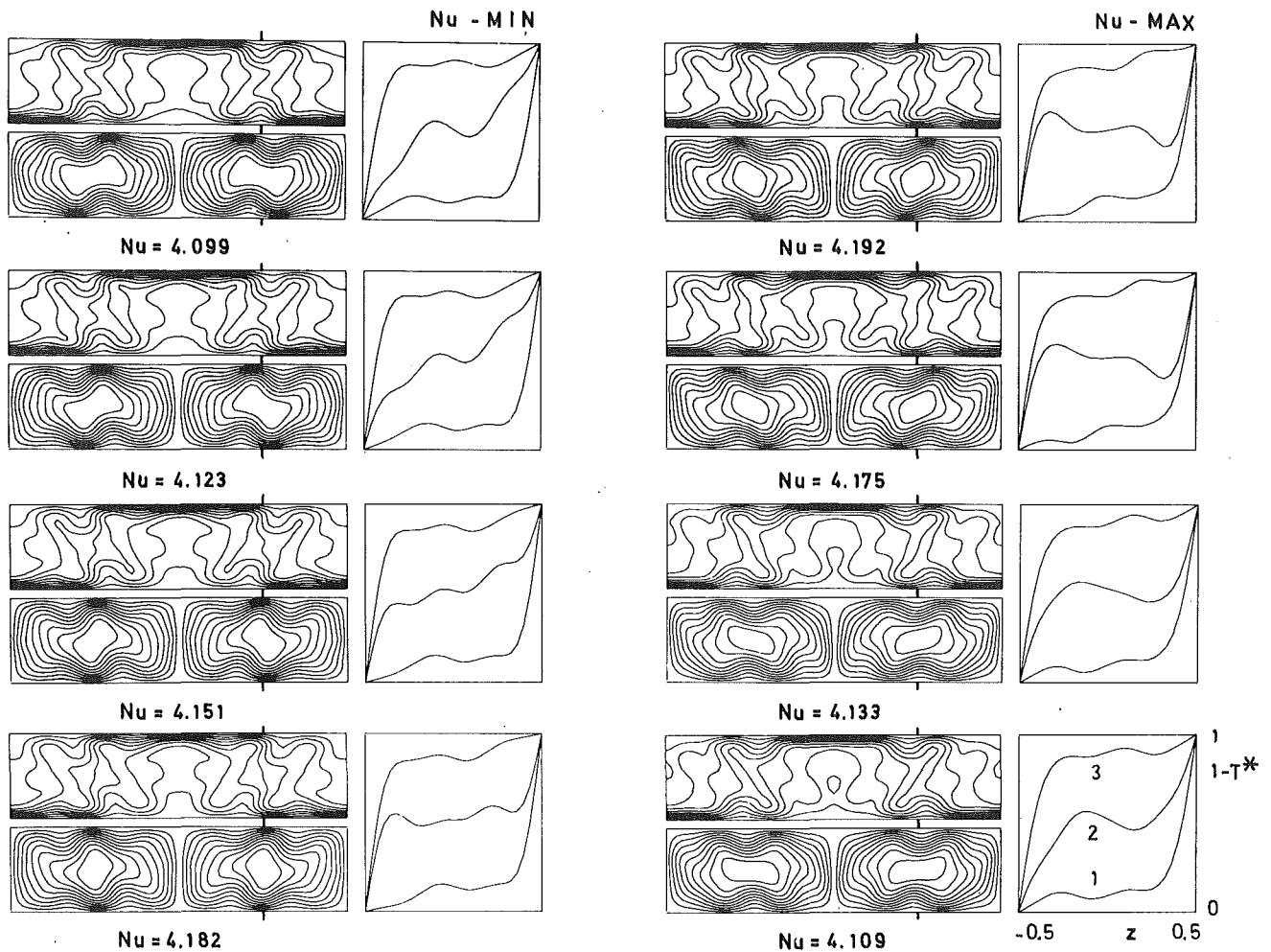


Abb. 17: Zeitlicher Verlauf der Isothermen und Stromlinien bei $R/R_c = 8$ und $\alpha = \pi/2$.

schicht zu beobachten. So läßt sich bei minimaler Nusselt-Zahl aus den Isothermen- und Stromlinienbildern das Entstehen einer solchen Instabilität an der unteren Berandung in der Abtriebszone und an der oberen Berandung in der Auftriebszone neben einer bereits in Höhe der Zellmitte vorhandenen erkennen. Der Vorgang des Instabilwerdens läßt sich wie folgt erklären:

Bei hinreichend großer Rayleigh-Zahl bildet sich eine Temperaturgrenzschicht mit einem genügend großen Temperaturgradienten aus, so daß in dieser Schicht selbst Konvektionsrollen entstehen. Wir wollen sie als Sekundärwirbel bezeichnen. Durch die Überlagerung der großräumigen Konvektionsströmung mit den Sekundärwirbeln bilden sich die bereits erwähnten wandernden wellenartigen Störungen aus.

Das Wandern dieser Störungen bewirkt auch eine starke Verformung der Stromlinien und des Temperaturverlaufes bis hin in die Zentren der Konvektionsrollen. Gleichzeitig wird durch das Wandern warmes Medium zur Auftriebszone transportiert und die aufsteigenden Isothermen werden eingeschnürt. Verbunden damit ist ein Anwachsen der Nusselt-Zahl. Nach Erreichen des maximalen Wertes beginnt der Ablösevorgang des ersten Wirbels. Erst kurz vor Erreichen der minimalen Nusselt-Zahl löst sich ein kleiner Ballen warmen Mediums vom unteren Rand ab und steigt in den kälteren Bereich auf. Die zweite Instabilität befindet sich nun auf der Höhe der Rollenmitte und der Ablösevorgang beginnt von neuem. Vom Entstehen bis zum Ablösen benötigt eine solche wellenartige Störung eine Zeit von zwei Perioden.

4.3.2 Konvektionsrollen mit $\alpha = \pi$

Beim Übergang in einen Bereich größerer Wellenzahlen verschiebt sich das Einsetzen der Oszillation zu höheren Werten von R/R_c . In den folgenden Ausführungen wird hierzu der Fall mit einer Wellenzahl gleich der kritischen ($\alpha = \pi$) besprochen. Die zeitabhängige Konvektion setzt bei $R/R_c \approx 8$ ein. Mit weiter ansteigender Rayleigh-Zahl erhöhen sich die Nusselt-Zahlen, verbunden mit einer zeitlichen Änderung ihrer Verläufe. Hierzu sind in Abb. 18 die Nusselt-Zahlen über der Zeit für drei Verhältnisse von R/R_c , und zwar $R/R_c = 9, 11$ und 13 dargestellt. Wie im Fall mit $\alpha = 1,57$ läßt sich mit zunehmender Rayleigh-Zahl eine Abnahme der Periodendauer feststellen. Demgegenüber werden die Amplituden der Schwankungen von Nu größer. Beginnend mit $R/R_c = 9$ sind nur geringe zeitliche Änderungen in der Nusselt-Zahl festzustellen. Wird die Rayleigh-Zahl um einen Wert $R = 2 R_c$ erhöht, vergrößern sich die Amplituden gegenüber R/R_c auf $\Delta Nu = 0,34$ ($\Delta Nu = Nu_{\max} - Nu_{\min}$). Bis zu dieser Rayleigh-Zahl setzt sich der Verlauf von Nu aus einfachen, sich wiederholenden Schwankungen zwischen zwei Werten mit einer konstanten Periode zusammen. In solch einer Situation spricht man von einem periodischen Vorgang.

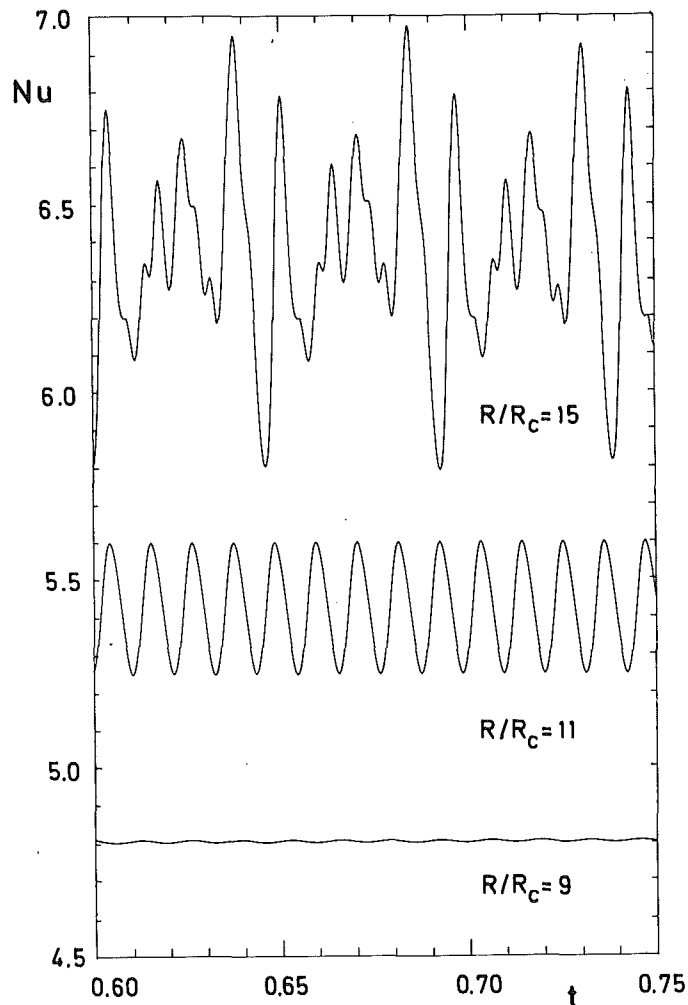


Abb. 18: Zeitlicher Verlauf der Nusselt-Zahl für verschiedene Rayleigh-Zahlen $\alpha = \pi$.

Bei $R/R_c = 15$ ist dies anders. Es treten verschieden große Maxima und Minima in dem Verlauf der Nusselt-Zahl auf, die sich periodisch mit der dimensionslosen Zeit $\tau_1 \approx 0,048$ fortsetzen. Markant dabei sind zwei Maxima, und zwar $Nu = 6,95$ und $Nu = 6,8$. Die Zeit zwischen diesen beiden Größen ist $\tau_2 \approx 0,012$ und somit ein rationales Vielfaches von τ_1 . Bei diesem Verlauf handelt es sich um einen quasiperiodischen Vorgang mit Periodenkopplung, wobei die Koppelperiode τ_1 und die Grundperiode τ_2 ist. Um Aussagen über weitere Perioden treffen zu können, müsste der Nu-Verlauf Fourier-analysiert werden. Wegen der großen Periodendauer τ_1 und des hier erforderlichen, sehr kleinen numerischen Zeitschrittes ist es nur schwer möglich, die instationären Vorgänge anhand der zugehörigen Isothermen- und Stromlinienbildern zu verfolgen. Aus diesem Grunde

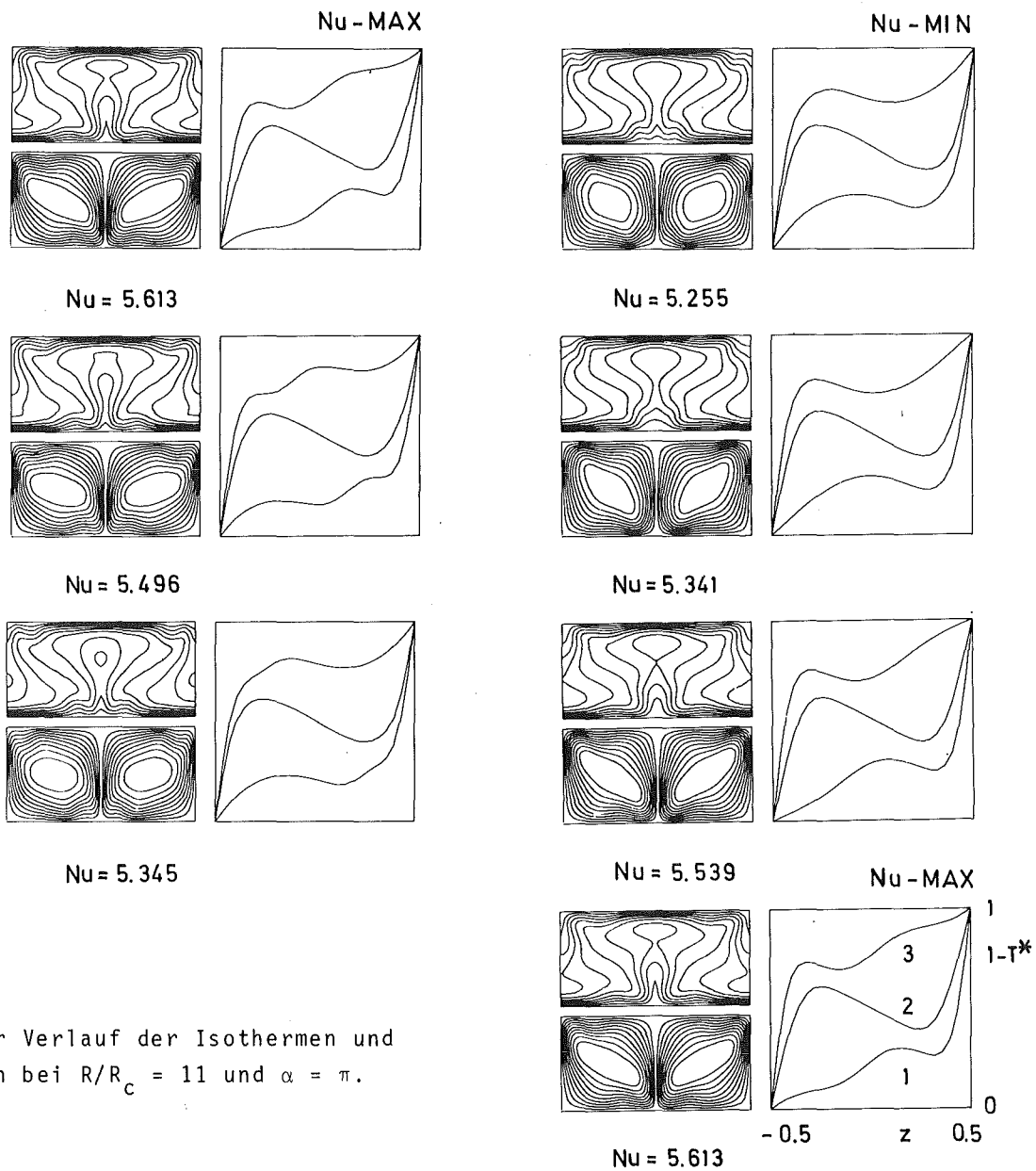


Abb. 19:

Zeitlicher Verlauf der Isothermen und Stromlinien bei $R/R_c = 11$ und $\alpha = \pi$.

wird an dem einfacheren Beispiel mit $R/R_c = 11$ das instationäre Verhalten der Konvektionsströmung bei $\alpha = \pi$ gezeigt. In Abb. 19 sind die Isothermen und Stromlinien zu verschiedenen Zeitpunkten während einer Periode dargestellt. Die Temperaturverläufe in der Mitte der Konvektionsrolle (2) und in der Auf- (3) und Abtriebszone, (1), aufgetragen über der Fluidschichthöhe, dienen zu einem besseren Erkennen der Temperaturgradienten in diesen Zonen. Auch hier beruht das instationäre Verhalten der Strömung auf einer wellenartigen Störung der Grenzschicht. Dieses Instabilwerden erfolgt in der Abtriebszone. Durch die großräumige Konvektionsströmung läuft die wellenartige Störung zur Abtriebszone und

verursacht dort ein Ablösen von warmem Medium. Gegenüber dem Beispiel mit $\alpha = 1,57$ können wir hier nur eine wellenartige Störung der Grenzschicht beobachten. Damit ist auch verbunden, daß der Vorgang vom Instabilwerden bis zum Ablösen sich bereits nach einer Periode wiederholt.

In den bisherigen Betrachtungen haben wir die Schwankungen der Nusseltzahlen und damit verbunden das Verhalten der Isothermen- und Stromlinien für die beiden Fälle $\alpha = \pi/2$ und $\alpha = \pi$ diskutiert. Dabei konnte bestätigt werden, daß sich das Einsetzen der Oszillation mit steigender Wellenzahl in Bereiche höherer Rayleigh-Zahlen verschiebt.

Wie ändern sich nun die Nusselt-Zahlen in Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl vom Beginn der Konvektion an bis hin in einen weit überkritischen Bereich? Hierzu sind in Abb. 20 die berechneten Nusselt-Zahlen über dem Verhältnis R/R_c für die beiden Fälle $\alpha = \pi/2$ und $\alpha = \pi$ aufgetragen. Mit größer werdendem Verhältnis von R/R_c steigen die Nusselt-Zahlen stetig an. Wird die Rayleigh-Zahl so groß, daß die Konvektion den stationären Zustand verläßt und in den oszillatorischen Bereich kommt, verzweigen sich die Verläufe der Nusselt-Zahlen aus instationärer und stationärer Rechnung. Dabei liegen die Ergebnisse der zeitabhängigen Rechnung in dem hier betrachteten Rayleigh-Zahlen-Bereich im Mittel immer über denen der stationären Rechnung.

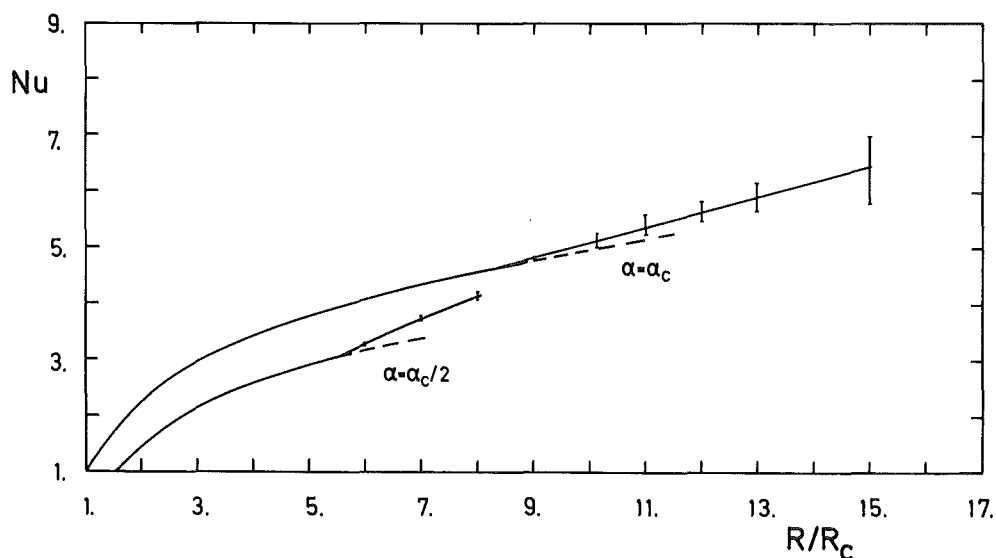


Abb. 20: Nusselt-Zahl als Funktion von R/R_c bei $\alpha = \pi$ und $\alpha = \pi/2$ im Gebiet der stationären und instationären Konvektion.

4.3.3 Konvektionsrollen mit $\alpha = 2\pi$

Konvektionsrollen mit einer Wellenzahl $\alpha = 2\pi$ weisen bis zu einer Rayleigh-Zahl $R = 17 R_c$ stationäres Verhalten auf. Bei weiterer Erhöhung von R wird die Strömung instabil und es stellen sich oszillatorische Zustände ein. In dem hierzu numerisch untersuchten Bereich der Rayleigh-Zahlen $17 \leq R/R_c \leq 27$ sind zwei Strömungskonfigurationen, wie in Abb. 21 dargestellt, gefunden worden.

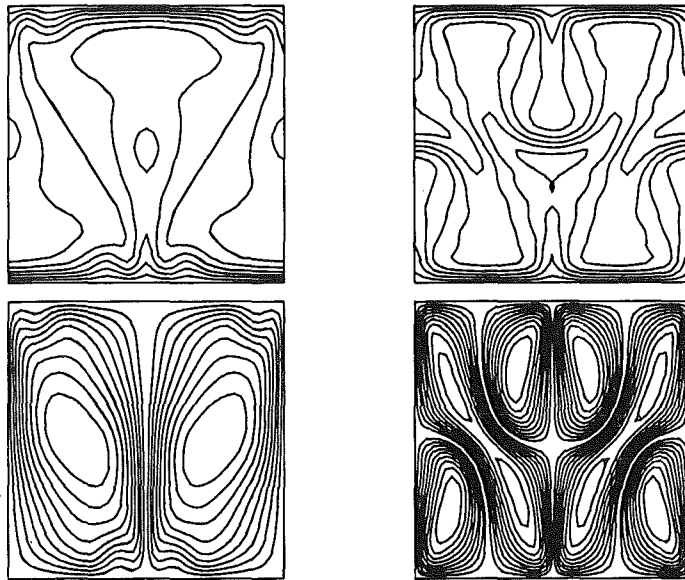


Abb. 21: Strömungszustände bei $\alpha = 2\pi$ mit wellenartiger Grenzschichtinstabilität (Grundlösung) und Diagonalzirkulation.

Es handelt sich um die bereits bei $\alpha = \pi$ gefundene oszillatorische Grenzschichtinstabilität und um eine zwischen zwei Zirkulationszuständen hin- und herschwankende Bewegung einer Diagonalrolle mit zwei Eckrollen. Den genaueren zeitlichen Verlauf dieser Bewegung wollen wir erst später diskutieren. Im folgenden soll uns nun die Frage interessieren, welche Kriterien für das Einstellen der verschiedenen Strömungszustände verantwortlich sind. Hierzu betrachten wir die sich eingestellten Strömungsformen (Fall I bis IV) in Abhängigkeit von vorgegebenen, verschieden großen Änderungen von R/R_c . Diese sind in Abb. 22 schematisch dargestellt. Ausgehend vom stationären Zustand ($R/R_c = 17$) stellt sich mit Erhöhung der




















Fall	R/R _c									
	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
I										
II										
III										
IV										

Abb. 22: Schematische Darstellung der berechneten Lösungstypen in Abhängigkeit von R/R_c .
 Grundlösung,  Diagonalzirkulation.

Rayleigh-Zahl (Fall I) auf $R/R_c = 18, 20, 23$ und $R/R_c = 25$ die bei $\alpha \leq \pi$ gefundene oszillatorische Lösung ein. Wir wollen sie in diesem Abschnitt als Grundlösung bezeichnen. In Abb. 22 ist sie schematisch mit einer Rolle angedeutet. Bei weiterem Ansteigen der Rayleigh-Zahl von $R/R_c = 25$ auf $R/R_c = 27$ wechselt die Strömung in die Zirkulationsbewegung einer Diagonalrolle mit Eckrollen über. Diese Bewegung werden wir als Diagonalzirkulation bezeichnen und in Abb. 22 mit drei Rollen kennzeichnen. Lassen wir die Rayleigh-Zahl um die gleichen Änderungen von R/R_c (Fall II) wieder abnehmen, so ist die Diagonalzirkulation noch bei $R/R_c = 25$ und $R/R_c = 23$ vorhanden. Von $R/R_c = 23$ auf $R/R_c = 20$ findet wieder ein Wechsel auf die Grundlösung statt. Wird dagegen von $R/R_c = 23$ die Rayleigh-Zahl um jeweils nur R_c erniedrigt (Fall III), so bleibt die Diagonalzirkulation bis zur oszillatorischen Stabilitätsgrenze angeregt. Ein großer Sprung in der Rayleigh-Zahl (Fall IV) von $R/R_c = 20$ auf $R/R_c = 25$ bewirkt einen erneuten Wechsel in den Strömungszuständen, und zwar einen Übergang von der Grundlösung in die Diagonalzirkulation. Aus Konvergenzgründen ist für diese Ergebnisse ein Abbruchparameter $NT = 17$ erforderlich gewesen.

Rechnungen mit einer stark reduzierten Anzahl von Funktionen ($NT = 11$), mit der die erforderliche Konvergenz der Lösung nicht erfüllt ist, haben für jede Rayleigh-Zahl im betrachteten Bereich immer die Lösung der Diagonalzirkulation ergeben. Bei Weiterrechnung

mit dieser Lösung als Startwert für die gleiche Rayleigh-Zahl, jedoch mit dem notwendig größeren NT ($NT = 17$), ist der Lösungstyp der Diagonalzirkulation erhalten geblieben.

Aus den hier gewonnenen Ergebnissen läßt sich über die Einstellung einer bestimmten Lösung in einem Gebiet, in dem mehrere Lösungsmöglichkeiten vorhanden sind, folgende Erkenntnis gewinnen:

Das Einstellen einer gewissen Lösung (Grundlösung oder Diagonalzirkulation) wird bestimmt durch die Wahl des Ausgangszustandes (Grundlösung oder Diagonalzirkulation) und durch die Art des Erreichens des Endzustandes (großer oder kleiner Sprung in der Rayleigh-Zahl). Für die Fälle I und II von $R/R_c = 25$ auf $R/R_c = 27$ und für den Fall III in Abb. 22 sind numerisch keine eingelaufenen Zustände angestrebt worden. Dies war nicht nötig, da bereits nach einer Zeit von wenigen Perioden aufgrund des zeitlichen Verlaufs der Nusselt-Zahl der sich einstellende Lösungstyp klar zu erkennen war. Einen ganz typischen Verlauf der Nusselt-Zahl, der sich wesentlich von dem der Grundlösung unterscheidet, weist der Typ der Diagonalzirkulation auf. Wir wollen hierzu die zeitlichen Verläufe der beiden Lösungstypen bei $R/R_c = 20$ und $R/R_c = 23$ betrachten (Abb. 23).

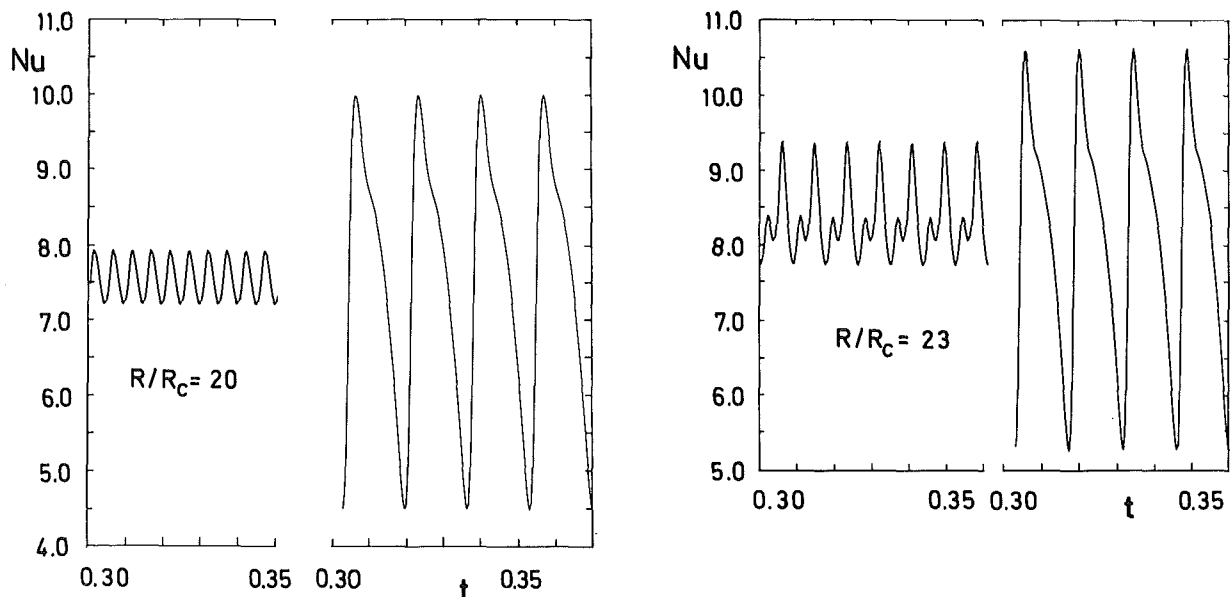


Abb. 23: Zeitlicher Verlauf der Nusselt-Zahlen der Grundlösung und Diagonalzirkulation für $R/R_c = 20$ und $R/R_c = 23$ bei $\alpha = 2\pi$:

In den linken Hälften der Diagramme für $R/R_c = 20$ bzw. $R/R_c = 23$ in Abb. 23 sind die zeitlichen Verläufe der Nusselt-Zahlen der Grundlösung und in den rechten Hälften die der Diagonalzirkulation dargestellt. Wie in dem bisher betrachteten Wellenzahlenbereich, nimmt auch bei $\alpha = 2\pi$ die Periode für beide Lösungen mit steigender Rayleigh-Zahl ab, während sich die Amplitudenschwankungen der Nusselt-Zahlen vergrößern. In dem hier untersuchten Rayleigh-Zahlen-Bereich weisen die Nusselt-Zahlen für beide Lösungstypen periodisches Verhalten auf. Dabei tritt im Fall der Diagonalzirkulation keine Änderung des Musters im zeitlichen Verlauf der Nusselt-Zahl auf. Anders verhält sich dies bei der Grundlösung. Mit Erhöhung der Rayleigh-Zahl von $R/R_c = 20$ auf $R/R_c = 23$ wechselt die Nusselt-Zahl von einem periodischen Verlauf mit konstanten Maxima und Minima in einen Verlauf mit zwei unterschiedlichen Maxima und Minima, die sich periodisch fortsetzen, über. Dabei deutet bei $R/R_c = 23$ der Zeitabstand zwischen zwei gleichen Maxima und zwei unterschiedlich großen Maxima in den Nusselt-Zahlen auf eine Periodenkopplung im Verhältnis 7:3 hin. Das periodische Verhalten der Grenzschichtinstabilität, wie es im Fall $R/R_c = 23$ auftritt, ist bereits anhand der Isothermen- und Stromlinienbilder für Wellenzahlen $\alpha \leq \pi$ ausführlich diskutiert worden. Entscheidendes Merkmal ist dabei gewesen, daß kurz vor Erreichen der minimalen Nusselt-Zahlen ein warmer Fluidballen sich ablöst und in Strömungsrichtung aufsteigt. Wie verhalten sich dagegen die Isothermen und Stromlinien bei $R/R_c = 23$ im Fall der Grundlösung und der Diagonalzirkulation?

Betrachten wir zuerst den Grundlösungstyp und verfolgen die Entwicklung der Isothermen und Stromlinien mit dem zeitlichen Verhalten der Nusselt-Zahl in Abb. 24! Auffallend bei diesem zeitabhängigen Konvektionsverhalten ist, daß zwei Ablösevorgänge und trotz kleiner Rollenbreite zwei wellenartige Grenzschichtinstabilitäten auftreten. Zum besseren Erkennen sind sie in Abb. 24 mit I und II gekennzeichnet. Diese beiden Instabilitäten bewirken unterschiedlich stark ausgeprägte Störungen der Grenzschicht, die auch ein verschieden großes Ablösen von warmen Fluidballen hervorrufen. Damit verbunden ist auch das unterschiedliche Absinken bzw. Ansteigen der Nusselt-Zahlen.

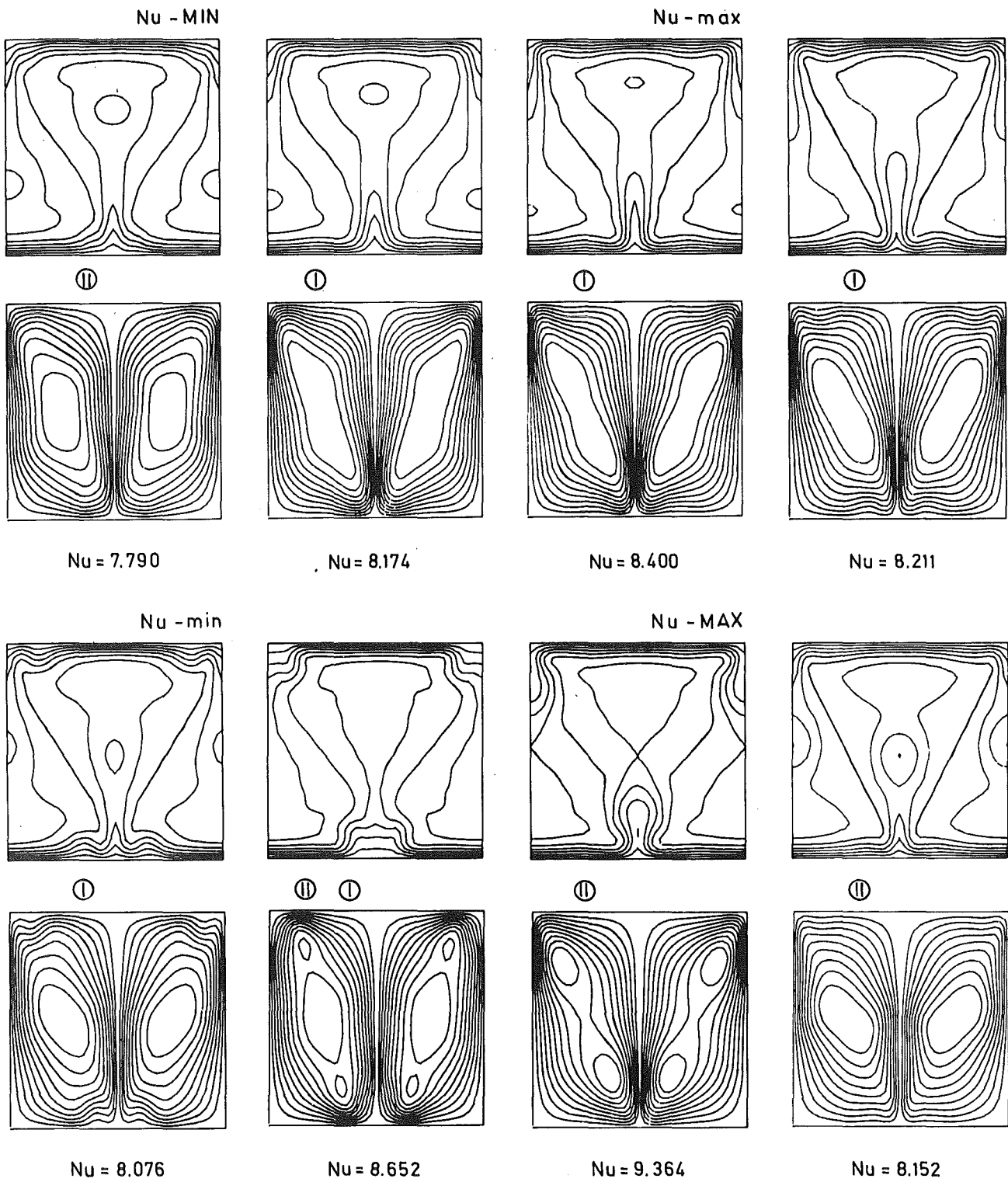


Abb. 24: Zeitlicher Verlauf der Isothermen und Stromlinien der Grundlösung bei $R/R_c = 23$ und $\alpha = 2\pi$.

Ein wesentlich anderes Verhalten zeigt die Diagonalzirkulation in bezug auf Nusselt-Zahl (Abb. 23) und Isothermen bzw. Stromlinien (Abb. 25). Charakteristisch für den Verlauf der Nusselt-Zahl sind die großen Amplitudenschwankungen ($Nu_{\max} \approx 2 Nu_{\min}$) mit dem unterschiedlich steilen An- und Abstieg. Betrachten wir mit dem zeitlichen Verlauf der Nusselt-Zahlen die Entwicklung der Isothermen und Stromlinien. Der minimale Wärmetransport wird durch eine großräumige Diagonalrolle mit kleinen Eckenwirbeln und dem

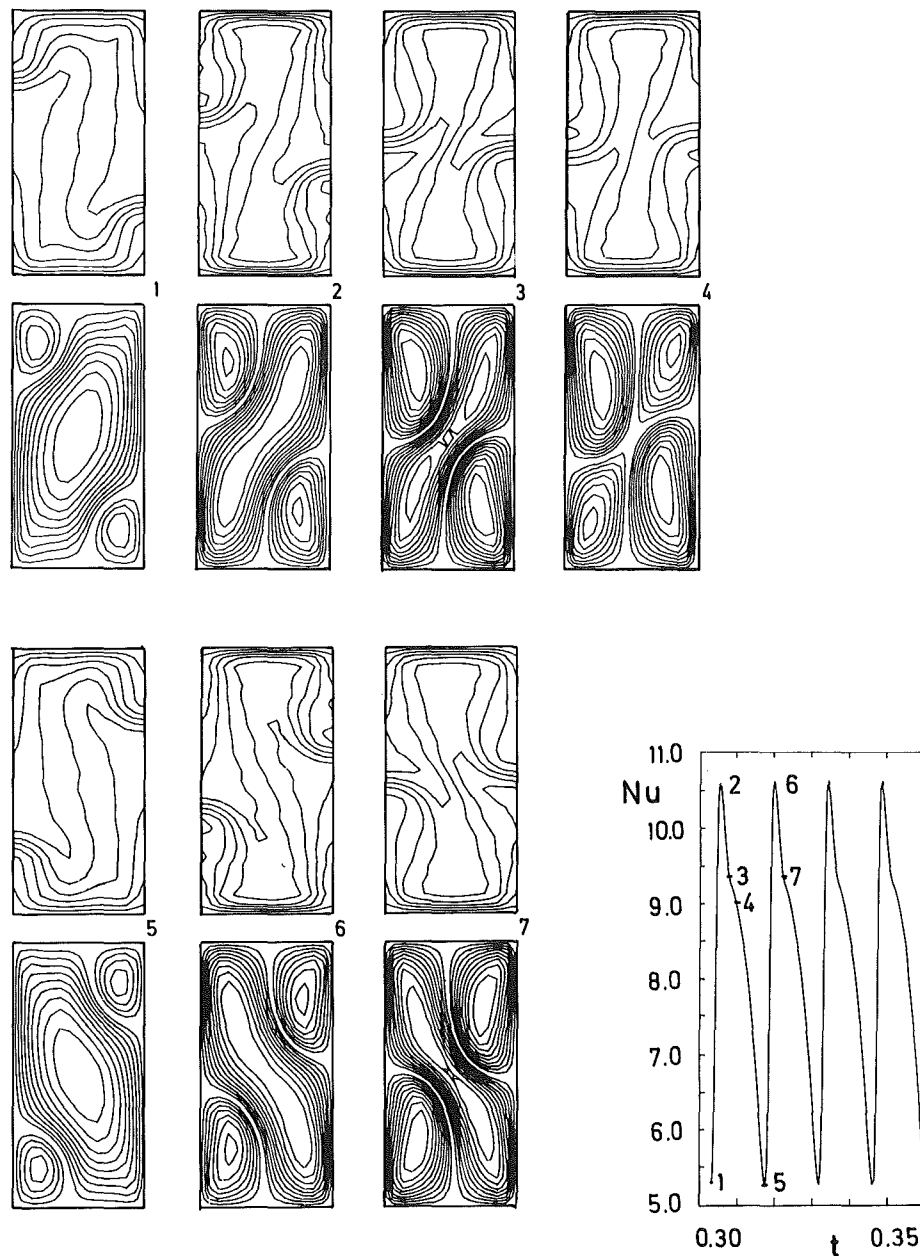


Abb. 25: Zeitlicher Verlauf der Isothermen und Stromlinien der Diagonalzirkulation bei $R/R_c = 23$ und $\alpha = 2\pi$.

damit verbundenen schwachen Temperaturgradienten an den horizontalen Rändern verursacht. Durch das Verengen der Diagonalrolle und dem gleichzeitigen Anwachsen der Eckrollen nimmt die Nusselt-Zahl zu. Der maximale Wert ist erreicht, wenn an den horizontalen Rändern beide Rollen, die Diagonal- und die Eckrolle, gleich breit sind. Mit dem Weiteranwachsen der Eckrollen wird die Diagonalrolle so weit eingeschnürt, bis eine Teilung erfolgt und die anfänglichen Eckrollen sich zu einer Diagonalrolle zusammenschließen. Dieser Vorgang erzwingt ein Absinken der Nusselt-Zahl, bis ein erneutes Einengen der Diagonalrolle erfolgt und sich das gleiche zeitliche Verhalten des Wärmetransports wiederholt. Die ursprüngliche Lage der Diagonalrolle wird erst nach einer Zeit von zwei Perioden wieder erreicht.

Zusammenfassend werden im nachfolgenden Abschnitt die Ergebnisse der instationären Konvektion in einer Tabelle dargestellt und die gefundene Stabilitätsgrenze in dem von Kvernold /14/, /41/ aufgestellten Stabilitätsdiagramm für die Hele-Shaw-Konvektion eingetragen.

4.3.4 Zusammenstellung der Ergebnisse der instationären Konvektion und Vergleich mit der Literatur

In Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl und der Wellenzahl ist in einem Bereich $\pi/2 < \alpha < 2\pi$ zeitabhängige Konvektion mit Hilfe von instationären Rechnungen gefunden worden. Die von Kvernold /14/, /41/ für das Hele-Shaw-Problem aus Stabilitätsuntersuchungen bestimmte Grenzkurve zur oszillatorischen Konvektion für $0,4 \pi < \alpha < \pi$ konnte für Wellenzahlen $\alpha > \pi/2$ bestätigt und bis zu einer Wellenzahl $\alpha = 2\pi$ erweitert werden (Abb.26). Für Rechnungen mit Wellenzahlen $\alpha < \pi/2$ hat sich die Lösung aus dem Gebiet der oszillatorischen Konvektion durch Teilung der breiten Rolle in das Gebiet der stationären Konvektion verschoben.

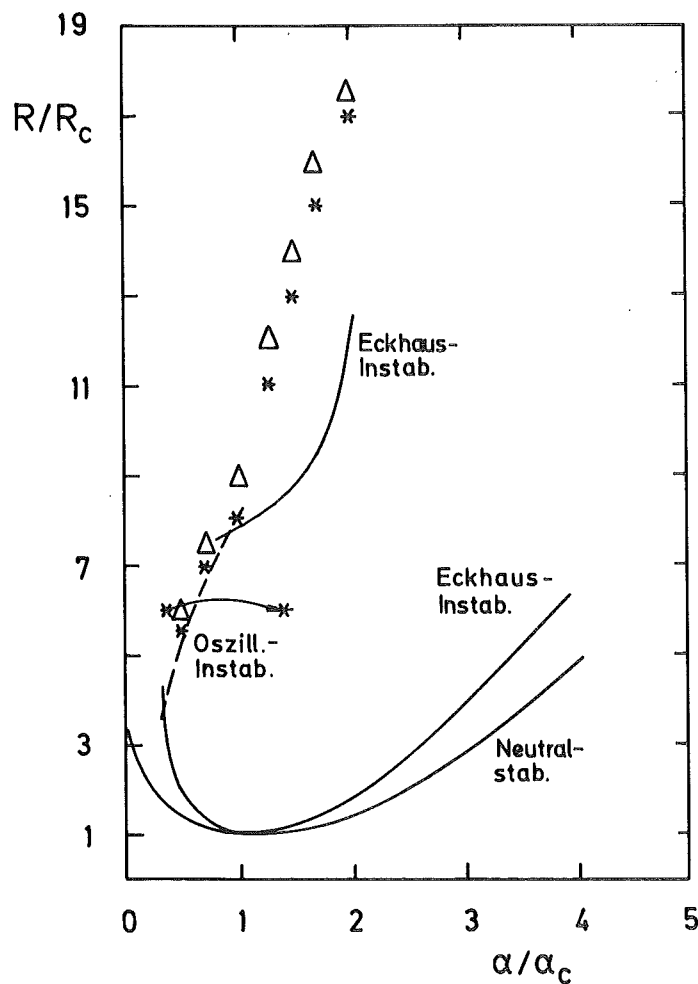


Abb. 26: Erweitertes Stabilitätsdiagramm der Hele Shaw-Konvektion.
* stationäre Konvektion; Δ instationäre Konvektion.

Der Übergang von stationärer zu zeitabhängiger Konvektion erfolgt z. B. für $\alpha = \pi$ bei $R/R_c = 8 \div 9$ und für $\alpha = 2\pi$ bei $R/R_c = 17$. Die von Schubert und Straus /21/ numerisch ermittelten Ergebnisse für das Einsetzen der zweidimensionalen zeitabhängigen Konvektion in porösen Medien bestätigen die beiden obigen Werte. Koster /24/ gibt aufgrund seiner experimentellen Untersuchungen zum zeitlichen Verhalten der Konvektionsströmung in einer horizontal lang gestreckten Hele-Shaw-Zelle die zweite kritische Rayleigh-Zahl mit $R/R_c = 10$ bei $\alpha/\alpha_c = 1$ an. Die von ihm vermutete Abgrenzung der stabilen zweidimensionalen Konvektion zu großen Rayleigh-Zahlen hin durch oszillatorische Zustände bei $R/R_c = 16$ und $\alpha/\alpha_c = 2,5$ kann nicht bestätigt werden.

Um das Verhalten der Konvektionsströmung im oszillatorischen Gebiet verstehen zu können, sind Nusselt-Verläufe und Isothermen- bzw. Stromlinienbilder diskutiert worden. Aufgrund der hier durchgeführten Untersuchungen kann festgestellt werden, daß das Einsetzen der Konvektion mit einem periodischen Vorgang beginnt und mit zunehmender Rayleigh-Zahl in einen quasiperiodischen Vorgang übergeht. Wegen des zeitlichen Verhaltens der Nusselt-Zahl bei $\alpha = \pi$ und $R/R_c = 15$ dürfte mit Erhöhung der Rayleigh-Zahl ein Übergang zu einer Strömung mit stochastischer Struktur stattfinden. Hierbei scheint sich anzudeuten, daß die Hele-Shaw Strömung den Charakter des Lorenz-Modells /42/ hat, wie Koster /24/ bereits festgestellt hat. Diese Modellvorstellung besagt, daß mit Erhöhung der Rayleigh-Zahl die stationäre Konvektion in eine zeitabhängige Strömung mit stochastischem Verhalten übergeht. Untersuchungen in quaderförmigen und zylindrischen Behältern mit großer horizontaler Erstreckung z. B. von Gollub & Swinney /43/, Dubois & Bérge /44/ und Ahlers /45/ bestätigen ebenfalls diese Übergänge im zeitlichen Verhalten der Strömung. Betrachtet man die Größe der Schwankungen der Nusselt-Zahlen und ihre Periodendauer, so vergrößern sich mit zunehmender Rayleigh-Zahl die Amplituden von Nu , während die Perioden ein entgegengesetztes Verhalten zeigen. Auch das Ansteigen der Wellenzahl bewirkt ein Abnehmen der Periode.

Zurückzuführen ist das zeitabhängige Verhalten der Konvektionsströmung auf das Wandern von wellenartigen Störungen in der Tempe-

raturgrenzschicht und damit verbunden ein periodisches Ablösen von warmen Fluidballen in der Abtriebs- und Auftriebszone. Diese Strömungsform ist hier als Grundlösung bezeichnet worden. Neben dieser wellenartigen Instabilität ist bei einer Wellenzahl $\alpha = 2\pi$ ein weiterer Strömungstyp mit oszillatorischem Verhalten gefunden und als Diagonalzirkulation bezeichnet worden. Caltagirone /20/ hat anhand von Isothermen und Stromlinien bei $\alpha = 3,8$ das entsprechende zeitliche Verhalten des Grundlösungstyps im Bereich der Konvektionsströmung in porösen Medien numerisch nachgewiesen. Bei den von Koster /24/ in verschiedenen Experimenten untersuchten Konvektionsrollen mit Wellenzahlen von $1 < \alpha/\alpha_c < 4$ trat im Bereich der oszillatorischen Hele-Shaw Konvektion ausschließlich der Strömungstyp der Grundlösung auf. Hierzu sind in Abb. 27 Ausschnittsabbildungen von diesen Temperaturgrenzschicht-Instabilitäten bei großen Wellenzahlen ($\alpha > 2\pi$) aus Experiment /24/ und Theorie zu sehen.

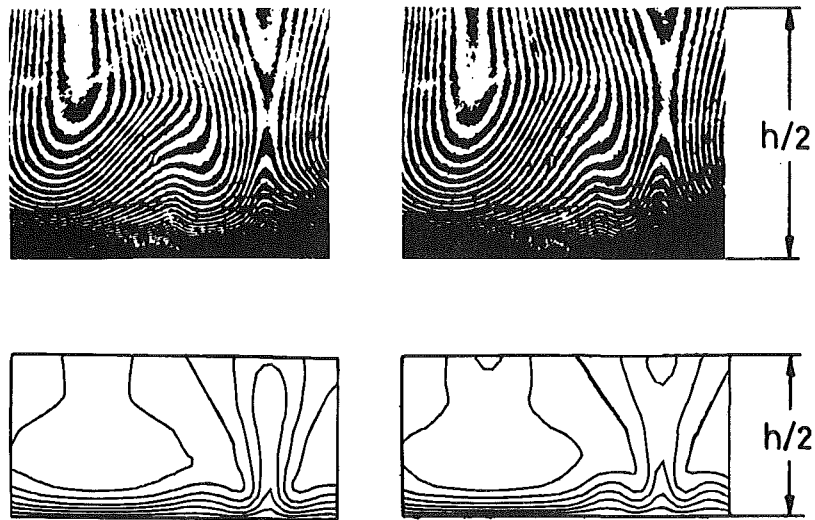


Abb. 27: Ausschnittsabbildungen der oszillatorischen Instabilitäten der Temperaturgrenzschicht.
Experiment: $\alpha \approx 8.3$; Theorie: $\alpha = 2\pi$.

Das Einstellen von schmalen Konvektionsrollen ($\alpha/\alpha_c > 1$) in dem hier zum Vergleich erwähnten Hele-Shaw Experiment ist durch gezielte Aufheizraten erreicht worden. Eine andere Möglichkeit, das Verhalten einer einzelnen schmalen Konvektionsrolle zu untersuchen, ist die Vorgabe einer in horizontaler Richtung eng begrenzten Hele-Shaw Zelle mit allseits festen Berandungen. Putin & Thacheva /45/ und auch Koster /24/ haben hierzu experimentelle Untersuchungen in

Hele-Shaw-Zellen mit Höhen-zu-Längenverhältnissen $A^* = 2$ und $A^* = 3,5$ durchgeführt. Als Meßkammer ist ein Behälter mit Seitenwänden aus Plexiglas verwendet worden, um so seitliche adiabate Randbedingungen anzunähern und um das Strömungsverhalten sichtbar machen zu können. In Ihren Untersuchungen erfolgt das Einsetzen der Konvektion mit einer Rolle und geht mit wachsender Rayleigh-Zahl in eine oszillierende Doppelrolle und anschließend in eine inversionssymmetrische Oszillationsbewegung (Vier-Wirbel-Oszillation) über. Diese Vier-Wirbel-Oszillation, wie sie Putin & Tkacheva /46/ und auch Koster /24/ bezeichnet haben, ist mit der in der vorliegenden theoretischen Arbeit gefundenen Diagonalzirkulation identisch (Abb. 28).

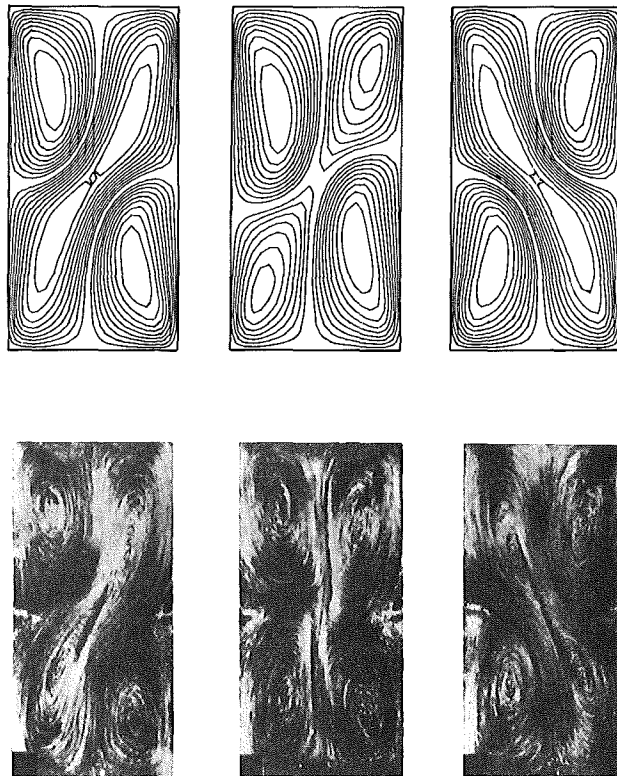


Abb. 28: Vergleich der Strömungsfelder aus Theorie und Experiment im Falle der Diagonalzirkulation.

Numerische Untersuchungen mit Hilfe eines finiten Differenzenverfahrens zum Problem der instationären Hele-Shaw Strömung bei $A^* = 3,5$ sind von Günther /47/ durchgeführt worden. Seine Ergebnisse zeigen, daß mit Erhöhung der Rayleigh-Zahl die stationäre Einzelrolle im Bereich der zeitabhängigen Konvektion direkt in die Diagonalzirkulation übergeht. Ausgehend von dieser Lösung findet mit abnehmender Rayleigh-Zahl der Übergang zur stationären Rolle durch das Auftreten einer weiteren Strömungsform statt. Gekennzeich-

net ist dieses Strömungsmuster durch zwei oszillierende Stockwerkzellen. Strömungstypen dieser Art können aufgrund der Wahl von symmetrischen Versuchsfunktionen mit dem hier benutzten Galerkinverfahren nicht gefunden werden. Andererseits bestätigen die Ergebnisse von Koster /24/ bei schmalen Konvektionsrollen ($\alpha > 2\pi$) in einer lang gestreckten Hele-Shaw Zelle die Zulässigkeit dieser Symmetriebedingung.

Abschließend sind in Tabelle 2 zu den in der vorliegenden Arbeit diskutierten Oszillationen der Nusselt-Zahlen jeweils der minimale und maximale Wert und die Periode τ in Abhängigkeit von der Wellenzahl α und dem überkritischen Verhältnis der Rayleigh-Zahlen R/R_c aufgelistet.

α	R/R_c	Nu	τ	Δt	NT
1.572	6	3.28 - 3.0	0.0275	$1 \cdot 10^{-3}$	11
	7	3.724 - 3.784	0.024		
	8	4.098 - 4.193	0.02		
2.20	7.5	4.074 - 4.136	0.018		
3.14	9	4.807 - 4.813	0.013	$4 \cdot 10^{-4}$	13
	11	5.27 - 5.61	0.011		15
	13	5.65 - 6.142	0.0095	$2 \cdot 10^{-4}$	
	15	5.79 - 7.05	0.003-0.047		
3.9	12	5.535 - 5.682	0.0096	$4 \cdot 10^{-4}$	15
4.712	14	6.0846-6.085	0.008		
	15	6.18 -6.328	0.007		
5.34	16	6.527-6.5274	0.0068		
6.28		Grundlösung			17
	18	7.024 - 7.025	0.006		
	20	7.22 - 7.916	0.0055		
	23	8.086 - 9.39	0.0036-0.0088		
		Diagonal- zirkulation			
	17.5	3.88 - 9.205	0.019		
	18	4.0 - 9.35	0.0188		
	20	4.48 - 9.986	0.0172		
	23	5.27 - 10.63	0.0144		
	25	5.3 - 10.8	0.0128		

Tabelle 2: Ergebnisse der instationären Rechnung

5. Zusammenfassung der Schlußfolgerungen

Der Einfluß von Begrenzungsflächen einer von unten beheizten Fluidschicht wirkt sich, wie die hier durchgeführten Betrachtungen gezeigt haben, auf das Einsetzen der Konvektion, den Wärmetransport und auch auf die Stabilität der Strömung aus. Der maßgebliche Parameter ist die mehr oder weniger starke Einflußnahme der verschiedenen Randbedingungen der horizontalen oder vertikalen Ränder auf das Konvektionsverhalten. Durch die Einführung der Geometriegröße A ist es möglich gewesen, sowohl das Bénard-Problem ($A \rightarrow 0$; eine horizontal nahezu unendlich ausgedehnte Fluidschicht) als auch das Hele-Shaw-Problem ($A \rightarrow \infty$; eine dünne vertikale Fluidschicht) zu untersuchen. Infolge der seitlichen Begrenzungsflächen kann die hier berechnete Konvektionsströmung unter Berücksichtigung von zwei Geschwindigkeitskomponenten für einen großen Bereich von Höhen-zu-Breitenverhältnissen nur als eine gute Approximation der im allgemeinen Fall dreidimensionalen Strömung angesehen werden. Ausgenommen sind die beiden Grenzfälle $A \rightarrow 0$ (für $R/R_c < 13$) und $A \rightarrow \infty$, bei denen die Strömung streng zweidimensional ist. Für das Einsetzen der Konvektion haben Davies-Jones /6/ und Frick & Clever /7/ in Abhängigkeit von A theoretisch gezeigt, daß eine allgemeine dreidimensionale Betrachtung nur einen geringen Einfluß auf die kritische Rayleigh-Zahl ausübt. Auch die Experimente von Bühler et al. /8/, Oertel /9/ und Arnold /10/ bestätigen die Zulässigkeit der hier verwendeten Betrachtungsweise.

Mit Hilfe der linearen Stabilitätstheorie ist es möglich gewesen, den Einfluß von A für verschiedene Kombinationen von Randbedingungen auf die kritische Rayleigh-Zahl R_c und die kritische Wellenzahl zu bestimmen und in Stabilitätsdiagrammen darzustellen. Dabei zeigt sich, daß mit größer werdendem A sich die kritische Rayleigh-Zahl und die kritische Wellenzahl infolge des zunehmenden Reibungsverlustes durch die Seitenwände erhöht. Bei perfekt wärmeleitenden Seiten wird die Zunahme von R_c zusätzlich durch den Wärmetransport über die Seitenwände verstärkt. Für dünne vertikale Fluidschichten gilt im Bereich $A > 20$ die Beziehung $R_c \sim A^2$ bei adiabaten

Seiten und $R_c \sim A^4$ bei perfekt wärmeleitenden Seiten. Die kritische Wellenzahl α_c nähert sich dabei im adiabaten Fall asymptotisch dem Wert $\alpha_c = \pi$. Ein anderes Verhalten von α_c stellt sich beim Vorhandensein von perfekt wärmeleitenden Seiten ein; mit steigendem A bilden sich immer schmalere Konvektionsrollen aus. Ein Vergleich experimentell bestimmter kritischer Rayleigh-Zahlen für $A > 20$ von Koster /24/ und für $A=8$ von Wu & Edwards /12/ zeigt, daß sich experimentell die theoretischen Grenzfälle adiabatisch und perfekt wärmeleitend bei dünnen vertikalen Behältern nur annähern lassen. Um noch mit optischen Untersuchungsmöglichkeiten bei Hele-Shaw-Behältern arbeiten zu können, hat z.B. Koster /24/ zur Simulation von adiabatischen Seitenflächen eine Materialpaarung (Seitenscheiben-Fluid) von Plexiglas und Wasser verwendet. Eine gute Annäherung von perfekt wärmeleitenden Seiten ergibt sich bei einer Kombination von Kristallglas und Silikonöl.

Im Bereich der stationären Konvektion endlicher Amplitude ist die Diskussion der Ergebnisse hauptsächlich anhand von Nusselt-Zahlen in Abhängigkeit von A geführt worden. Besonderes Interesse hat dabei dem Vergleich der beiden thermischen Grenzfälle adiabatisch und perfekt wärmeleitend gegolten. Mit zunehmender Rayleigh-Zahl weisen die Verläufe der Nusselt-Zahlen für jeweils konstante A anfänglich einen relativ steilen Anstieg auf. Dieser Effekt tritt beim perfekt wärmeleitenden Fall mit größer werdendem A verstärkt gegenüber dem des adiabaten Falles auf. Experimentell /24/ ist dies in einem Vergleich lokaler Wärmeübergänge für Höhen-zu-Breitenverhältnisse zwischen $A=18$ und $A=23$ bestätigt worden. Die hier durchgeführten theoretischen Untersuchungen zeigen weiter, daß sich für genügend große Rayleigh-Zahlen die Verläufe der Nusselt-Zahlen des perfekt wärmeleitenden Falles dem des jeweiligen adiabaten Falles angleichen. Beide Kurven (konstantes A) nähern sich dann in einem genügend weit überkritischen Bereich asymptotisch der Kurve des Bénard-Falles ($A \rightarrow 0$). Somit ändern sich die Nusselt-Zahlen unabhängig von A und den thermischen Randbedingungen approximativ mit $R^{0.3}$. Aufgrund der durchgeführten Wärmeübergangsbetrachtungen für dünne vertikale Schichten hat sich gezeigt, daß Abweichungen des realistischen Falles mit endlichem A ($A > 20$) gegenüber der idealisierten Hele-Shaw-Konvektion mit $A \rightarrow \infty$ auftreten können. Um Ungenauigkeiten in der Hele-Shaw-Approximation zu vermeiden, muß mit

steigender Rayleigh-Zahl ($R/R_c > 3$) der Wert von A erhöht werden.

Instationäres Verhalten einer zweidimensionalen Strömung ist am Beispiel der Hele-Shaw-Konvektion diskutiert worden. Die parallel zu den experimentellen Untersuchungen von Koster /24/ zur oszillatorischen Hele-Shaw-Strömung durchgeführten Rechnungen ergeben eine qualitative und zum Teil quantitative Übereinstimmung mit den Experimenten. Das Einsetzen der zeitabhängigen Konvektion erfolgt in Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl und der Wellenzahl, wobei sich die zweite kritische Rayleigh-Zahl (Einsetzen der Oszillation) zu höheren Werten mit zunehmender Wellenzahl verschiebt.

Das Phänomen der oszillatorischen Konvektion ist, wie aus den numerisch ermittelten Isothermen- und Stromlinienbildern ersichtlich, auf ein Instabilwerden der Temperaturgrenzschicht zurückzuführen. Die optischen Untersuchungen /24/ bestätigen diese Aussage. Folgt man der asymptotischen Betrachtungsweise zur Grenzschicht-Analyse, die auf heuristischen Argumenten basiert (s. z.B. Busse /32/), so läßt sich ebenfalls das Einsetzen der oszillatorischen Konvektion in einer Hele-Shaw-Zelle mit dem Instabilwerden der Grenzschicht erklären. Vergleichbar ist der Übergang der Hele-Shaw-Konvektion von stationärer zu instationärer Strömung mit dem Einsetzen der bimodalen Konvektion im Falle des Bénard-Problems bei $Pr \rightarrow \infty$ (Busse /32/). Der Grund liegt auch hier im Instabilwerden der Grenzschicht. Allerdings hat im Bénard-Fall die Strömung die Möglichkeit, in der Grenzschicht Sekundärrollen im rechten Winkel zu den Grundrollen und somit eine dreidimensionale Strömung zu bilden. Im Gegensatz dazu handelt es sich bei der Hele-Shaw-Konvektion immer um eine zweidimensionale Strömung und das Instabilwerden der Grenzschicht kann somit nur zu einer oszillatorischen Strömung führen.

Zur Erläuterung der Struktur der oszillatorischen Konvektion ist es möglich gewesen, neben der zeitlichen Entwicklung der Isothermenverteilung in der Fluidschicht auch die der Strömungsformen und die des Wärmeüberganges aufzuzeigen. Dies stellt eine gute Ergänzung zu den experimentellen Ergebnissen von Koster /24/ und Putin & Tkacheva /46/ dar, da Strömungsform und Wärmeübergang nur mit einem hohen Experimentieraufwand erfaßt werden können.

An qualitativen Ergebnissen ist in Übereinstimmung mit den experimentellen Untersuchungen gefunden worden, daß das Einsetzen der Oszillation mit einem periodischen Vorgang beginnt und mit zunehmender Rayleigh-Zahl in einen quasiperiodischen Zustand übergeht. Gleichzeitig nimmt die Periodendauer mit steigender Rayleigh-Zahl ab. Der experimentell gefundene Übergang zum stochastischen Verhalten der Konvektionsströmung kann aufgrund der zeitlichen Entwicklung der berechneten Wärmeübergänge bei weiterer Erhöhung der Rayleigh-Zahl erwartet werden. Weiterführende Berechnungen auf diesem Gebiet wären wünschenswert, hätten aber eine wesentliche Erhöhung des Rechenaufwandes zur Folge.

Eine der wichtigsten Fragestellungen in neuerer Zeit auf dem Gebiet der Hydrodynamik dürfte das Einsetzen der Turbulenz sein. Phänomene der hydrodynamischen Instabilität verbunden mit dem Übergang zur Turbulenz lassen sich am Verhalten der thermischen Konvektion sowohl experimentell als auch theoretisch gut untersuchen. Als ein besonders geeignetes Beispiel, an dem sich Übergänge zur Turbulenz studieren lassen, kann die Hele-Shaw-Zelle mit stets zweidimensionaler Strömung angesehen werden.

Literatur:

- /1/ Busse, F.H.:
Non-linear properties of thermal convection.
Rep. Prog. Phys. 41, 1929 (1978)
- /2/ Pellew, A., Southwell, R.V.:
On maintained convective motion in a fluid heated
from below.
Proc. Roy. Soc. A 176, 312 (1940)
- /3/ Zierep, J.:
Zellularkonvektion in Gefäßen endlicher horizontaler
Ausdehnung.
Beitr. Phys. Atmos 36, 70 (1963)
- /4/ Davis, S.H.:
Convection in a box; linear theory.
J. Fluid Mech. 30, 3, 465 (1967)
- /5/ Stork, K., Müller, U.:
Convection in boxes: Experiments.
J. Fluid Mech. 54, 4, 599 (1972)
- /6/ Davies-Jones, R.P.,
Thermal convection in a infinite channel with no-slip
sidewalls.
J. Fluid Mech. 44, 695 (1971)
- /7/ Frick, H.; Clever, R.M.:
Einfluß der Seitenwände auf das Einsetzen der Konvektion
in einer horizontalen Flüssigkeitsschicht.
ZAMP 31, 502 (1980)
- /8/ Bühler, K., Kirchartz, K.R., Oertel, H. jun.:
Steady convection in a horizontal fluid layer.
Acta Mechanica 31, 155 (1979)

- /9/ Oertel, H. jun.:
Three-dimensional convection within rectangular boxes.
The 19th national heat transfer conference,
ASME 8 (1980)
- /10/ Arnold, I.N.:
Heat transfer by natural-convection in enclosed rectangular
cavities.
Dissertation, University of California,
Los Angeles (1978)
- /11/ Edwards, D.K., Arnold, I.N., Wu P.S.:
Correlations for natural convection through high L/D
rectangular cells.
J. Heat Trans. 101, 741 (1979)
- /12/ Wu, P.S., Edwards, D.K.:
Effect of combined tilt and end clearance upon
natural convection in high L/D rectangular honeycomb.
Solar Energy 25, 471 (1980)
- /13/ Hele-Shaw, H.S.J.:
Investigation of the nature of surface resistance of
water and of stream motion under certain experimental
conditions.
Trans. Inst. Nav. Arch. 40, 21 (1898)
- /14/ Kvernfold, O.:
On the stability of non-linear convection in a
Hele-Shaw-cell.
Int. J. Heat Transfer 22, 395 (1979)
- /15/ Horton, C.W., Rogers, F.T.:
Convection currents in a porous media.
J. Appl. Phys. 16, 367 (1945)

- /16/ Lapwood, E.R.:
Convection of a fluid in a porous medium.
Proc. Camb. Phil. Soc. 44, 508 (1948)
- /17/ Straus, J.M.:
Large amplitude convection in porous media.
J. Fluid Mech. 64, 51 (1974)
- /18/ Horne, R.N., O'Sullivan, M.J.:
Oscillatory convection in a porous media heated
from below.
J. Fluid Mech. 66, 339 (1974)
- /19/ Horne, R.N.:
Three dimensional natural convection in a confined
porous medium heated from below.
J. Fluid Mech. 92, 751 (1979)
- /20/ Caltagirone, J.P.:
Thermoconvective instabilities in a horizontal porous
layer.
J. Fluid Mech. 72, 269 (1975)
- /21/ Schubert, G., Straus, J.M.:
Three-dimensional and multicellular steady and unsteady
convection in fluid saturated porous media at high
Rayleigh numbers.
J. Fluid Mech. 94, 25 (1979)
- /22/ Elder, J.W.:
Steady free convection in a porous medium heated
from below.
J. Fluid Mech. 27, 29 (1967)
- /23/ Hartline, P.K., Lister, C.R.B.:
Thermal convection in a Hele-Shaw-cell.
J. Fluid Mech. 79, 379 (1977)

- /24/ Koster, J.N.:
Freie Konvektion in vertikalen Spalten.
Dissertation, Universität (TH) Karlsruhe (1980)
- /25/ Denny, V.E., Clever, R.M.:
Comparisons of Galerkin and finite-difference methods
for solving highly nonlinear thermally driven flows.
J. Comp. Phys. 16, 271 (1974)
- /26/ Clever, R.M., Busse, F.H.:
Transition to time-dependent convection.
J. Fluid Mech. 65, 625 (1974)
- /27/ Bühler, K.:
Zellularkonvektion in rotierenden Behältern.
Dissertation, Universität (TH) Karlsruhe (1979)
- /28/ Oertel, H. jun.:
Thermische Zellularkonvektion.
Habilitationsschrift, Universität (TH)
Karlsruhe (1979)
- /29/ Finlayson, B.A.:
The method of weighted residuals and variational
principles.
Academic Press (1972)
- /30/ Chandrasekhar, S.:
Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability.
Oxford: Clarendon Press (1961)
- /31/ Veronis, G.:
Large-amplitude Bénard convection.
J. Fluid Mech. 26, 49 (1966)

- /32/ Busse, F.H.:
On the stability of two dimensional convection
in a layer heated from below.
J. Math. & Phys. 46, 140 (1967)
- /33/ IBM:
System/360 Scientific-Subroutine Package (360A-CM-03X)
Version III, Programmers's Manual.
IBM, Technical Publications (1978)
- /34/ Roache, P.J.:
Computational fluid dynamics
Hermosa publishes, Albuquerque (1972)
- /35/ Willers, F.A.:
Methoden der praktischen Analysis.
Walter de Gruyter & Co, Berlin (1957)
- /36/ Catton, I.:
The effect of insulating vertical walls on the
onset of motion in a fluid heated from below.
Int. J. Heat Transfer 15, 665 (1972)
- /37/ Oertel, H.jun., Bühler, K., Kirchartz, K.R., Srulijes, J.:
Experimentelle und theoretische Untersuchung der
Zellularkonvektion.
Mitteilungen des Instituts für Strömungslehre und
Strömungsmaschinen,
Universität (TH) Karlsruhe, 24, 40 (1978)
- /38/ Ozoe, H., Yamamoto, K., Churchill, S.W., Sayama, H.:
Three-dimensional numerical analysis of laminar natural
convection in a confined fluid heated from below.
J. Heat Transfer 98, 202 (1976)

- /39/ Ozoe, H., Sayama, H., Churchill, S.W.:
Natural convection in a inclined square channel.
Int. J. Heat Mass Transfer 17, 401 (1974)
- /40/ Krishnamurti, R.:
On the transition to turbulent convection.
Part 1 + 2
J. Fluid Mech. 42, 295 (1970)
- /41/ Kvernfold, O.:
persönliche Mitteilung (1980)
- /42/ Lorenz, E.N.:
Deterministic nonperiodic flow.
J. Atmos. Sci. 20, 130 (1963)
- /43/ Gollub, J.P., Swinney, S.V.:
Onset of turbulence in a rotating fluid.
Phys. Rev. Lett. 35, 927 (1975)
- /44/ Dubois, M., Bergé, P.:
Experimental evidence for the oscillators in a convective
biperiodic regime
Phys. Lett. 76A, 53 (1980)
- /45/ Ahlers, G.:
Low-temperature studies of the Rayleigh-Bénard instability
and turbulence.
Phys. Rev. Lett. 33, 1185 (1974)
- /46/ Putin, G.F., Tkacheva, E.A.:
Experimental investigation of supercritical convective
motions in a Hele-Shaw-cell.
Fluid Dynamics (Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhid. I Gaza)
14, (1979)
- /47/ Günther, Cl.:
Numerische Untersuchung der Naturkonvektion in einer von
unten beheizten, schmalen Hele-Shaw-Zelle.
KfK 3142 (1981)