

KfK 3213
September 1981

**Statistische Untersuchungen
zur optimalen
Datenauswertungsprozedur in
der internationalen
Spaltstoffflußkontrolle**

R. Beedgen
Institut für Datenverarbeitung in der Technik
Projekt Spaltstoffflußkontrolle

Kernforschungszentrum Karlsruhe

Kernforschungszentrum Karlsruhe
Institut für Datenverarbeitung in der Technik
Projekt Spaltstoffflußkontrolle

KfK 3213

Statistische Untersuchungen zur optimalen Datenauswertungsprozedur in der
internationalen Spaltstoffflußkontrolle

Rainer Beedgen

von der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
der Universität Karlsruhe genehmigte Dissertation

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Zusammenfassung

In der internationalen Kernmaterialüberwachung ist die Materialbilanzierung ein wesentliches Prinzip der Internationalen Atomenergie Organisation. Die Materialbilanz wird mit den Betreiberdaten geschlossen, nachdem sie vom Inspektor stichprobenartig durch unabhängige Messungen überprüft wurden.

Die Ergebnisse des Inspektors haben wegen des Stichprobenziehens und der Meßfehler zufälligen Charakter.

Ein Entwender hat prinzipiell zwei Möglichkeiten

- Entwendung ohne Datenverfälschung unter Ausnutzung der Meßungenauigkeiten
- Entwendung mit Datenverfälschung, daß die Materialbilanz korrekt erscheint.

Die Strategien des Inspektors sind

- Schließung der Materialbilanz
- unabhängige Verifizierung der Betreiberdaten.

Die Frage wird beantwortet welches Testverfahren unter bestimmten Voraussetzungen zur höchsten Entdeckungswahrscheinlichkeit führt, wobei die Fehlalarmwahrscheinlichkeit festgehalten wird. Die Möglichkeit einer optimalen Strategie des Entwenders wird berücksichtigt. Die Ergebnisse werden teilweise anhand konkreter Beispiele illustriert.

Statistical Investigations for an Optimal Evaluation of Data in International Safeguards

Rainer Beedgen

Abstract

In international Safeguards of nuclear material the material accountancy is an essential principle of the International Atomic Energy Agency (IAEA). The material balance is closed with the operator's data which are verified by the inspector at the hand of independent measurements on a random sampling basis.

The results of the inspector have a probabilistic character because of measurement uncertainties and sampling.

A diverter has in principle two possibilities

- diversion without data falsification and playing with the measurement uncertainties
- diversion with data falsification that the material balance seems to be correct.

The strategies of the inspector are

- closing the material balance
- independent verification of the operator's data.

The question is answered which test procedure leads under certain assumptions to the highest detection probability where the false alarm probability is fixed. The possibility of an optimal strategy of the diverter is taken into account. The results are partly illustrated at the hand of examples.

Gliederung

Einleitung

Teil I: Untersuchung parametrischer statistischer Tests
mit Hypothesen unter Nebenbedingungen

1. Definition der Zufallsvariablen
2. Beschreibung der statistischen Entscheidungssituation
3. Formulierung der Nebenbedingungen für die Hypothesen
und Darstellung von optimalen Tests
4. Lösung einer Minimax-Aufgabe
5. Betrachtungen für spezielle Parameterwerte

Teil II: Anwendung der theoretischen Ergebnisse auf Fragen
der Spaltstoffflußkontrolle

6. IAEA-Kontrollen
7. Materialbilanztest
8. Datenverifizierungstest
9. Entwendungsstrategien und Gegenstrategien
10. Anwendung der Theorie auf die D-MUF-Problematik
11. (D,MUF)-Test und MUF-D-Test bei geänderten Voraussetzungen
12. Abschließende Bemerkungen
13. Referenzen

Bezeichnungen

Mir \mathbb{R} soll im folgenden der Körper der reellen Zahlen bezeichnet werden.

Das Symbol $f: A \rightarrow B$ bedeutet, daß f eine Abbildung der Menge A in die Menge B ist.

Teilweise wird die Schreibweise $A:=B$ verwendet, um anzudeuten, daß das Objekt A definitionsgemäß dem Objekt B ist.

Für eine Zufallsvariable X bezeichnet $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$, deren Verteilungsfunktion.

Das Symbol $E[X]$ steht für den Erwartungswert einer Zufallsvariablen X . Durch Hinzufügen eines Index H , d.h. $E_H[X]$, wird angedeutet, daß die Verteilung der Hypothese H zugrunde gelegt wird.

Im folgenden kennzeichnet $\text{Var}[X]$ die Varianz einer Zufallsvariablen X .

Das Zeichen $\text{Cov}[X_1, X_2]$ steht für die Kovarianz der beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 .

Im Text bedeutet $P_H\{A\}$ die Wahrscheinlichkeit der Menge A , wobei die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Hypothese H zugrunde gelegt wird.

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein reeller n -dimensionaler Vektor, dann steht x^T für den transponierten Vektor.

Für das reelle abgeschlossene Intervall mit dem unteren Randpunkt a und dem oberen Randpunkt b wird das Symbol $[a, b]$ verwendet.

Bei der reellen Abbildung $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bedeutet $\sup_{a \in A} f(a)$ das
Supremum, $\min_{a \in A} f(a)$ das Minimum und $\max_{a \in A} f(a)$ das Maximum der
Menge $\{f(a) \mid a \in A\} \subseteq \mathbb{R}$, wobei \subseteq die mengenmäßige Inklusion
bezeichnet.

Das Zeichen \square deutet das Ende eines Beweises oder einer Definition
an, und das Zeichen \circ das Ende einer Bemerkung.

Einleitung

Trotz gravierender Einwände wird der Elektrizitätsversorgung durch mit Kernbrennstoffen betriebene Kraftwerke in der Bundesrepublik Deutschland ebenso wie in vielen anderen Staaten eine immer größere Bedeutung zukommen. Einer der Einwände beruht auf der Tatsache, daß der Betrieb solcher Kernkraftwerke die Handhabung großer Mengen von angereichertem Uran und Plutonium mit sich bringt, daß jedoch nur wenige Kilogramm dieser spaltbaren Materialien zur Erstellung einer Kernwaffe erforderlich sind. Dabei wird einerseits die Herstellung von Kernwaffen durch kleine subnationale Gruppen z.B. für Erpressungszweck, andererseits jedoch die Produktion von Kernwaffen durch weitere Staaten und damit die erhöhte Gefahr eines Nuklearkrieges befürchtet.

Schon zu Beginn des Atomzeitalters gab es in den USA Vorkehrungen, mit deren Hilfe der Verlust z.B. Diebstahl von spaltbarem Material verhindert werden sollte (Willrich, Taylor 1974). Diese Vorkehrungen zielten jedoch im wesentlichen darauf, die Umwelt vor den hochgiftigen radioaktiven Materialien zu schützen (physical protection); sie bestanden daher im wesentlichen aus Einschließungs- und Versiegelungsmaßnahmen. Da solche Maßnahmen jedoch unter anderem mit der Ausübung hoheitlicher Rechte (beispielsweise der Postierung bewaffneter Wachen) verbunden sind, konnten sie natürlich für die Zwecke einer internationalen Überwachung nicht eingesetzt werden; hier mußten ganz neue Wege beschritten werden.

Die Überwachung des spaltbaren Materials war von Anfang an ein internationales Anliegen: Schon drei Monate nach dem Abwurf der ersten Atombombe in Japan im August 1945 schlugen Großbritannien, Kanada und die USA in einer gemeinsamen Erklärung die Bildung einer Kommission im Rahmen der Vereinten Nationen vor, deren Aufgabe es sein sollte, den Gebrauch der Atomenergie für kriegerische Zwecke zu verhindern und nach Mitteln für ihre friedliche Verwendung zu suchen (Ungerer 1975).

Im europäischen Rahmen hat sich ab 1957 EURATOM dieses Problems angenommen. Die Ziele von EURATOM sind auf der einen Seite

- Bedingungen zu schaffen, die für eine zügige Entwicklung der nuklearen Industrie innerhalb der Europäischen Gemeinschaft notwendig sind, auf der anderen Seite jedoch
- durch geeignete Kontrollmaßnahmen zu garantieren, daß spaltbares Material nicht für unbeabsichtigte Zwecke verwendet wird.

Im Jahre 1957 wurde auf eine Initiative der USA hin - von Präsident Eisenhower im "Atoms for Peace" Programm 1953 vorgeschlagen - die Internationale Atomenergie-Organisation (IAEO) mit Sitz in Wien gegründet. Ganz allgemein ist es die Aufgabe dieser Organisation, den Beitrag zu fördern, den die Atomenergie zu Frieden, Gesundheit und Wohlstand in der Welt leisten kann. Im Rahmen dieser allgemeinen Ziele wurde die IAEO beauftragt, bei bilateralen Lieferverträgen von spaltbarem Material Überwachungsaufgaben wahrzunehmen.

Am 5. März 1970 trat nach jahrelangen Verhandlungen der "Vertrag zur Nicht-Verbreitung von Kernwaffen" (NV-Vertrag) in Kraft nachdem er von 43 Staaten ratifiziert worden war (IAEO 1970). Dieser Vertrag, der von den drei Staaten Großbritannien, Sowjetunion und U.S.A. inauguriert und am 1. Juli 1968 unterzeichnet worden war, soll verhindern, daß außer den Staaten, die bis zu diesem Zeitpunkt schon im Besitz von Kernwaffen waren, noch weitere Staaten in den Besitz solcher Waffen gelangen. Aus diesem Grund sieht der NV-Vertrag internationale Kontrollen vor, die garantieren sollen, daß eine Abzweigung von spaltbarem Material aus dem friedlichen Sektor des Kernbrennstoff-Zyklus rechtzeitig entdeckt wird. Träger dieser Kontrollen wurde die aufgrund ihrer früheren Aufgaben dafür prädestinierte IAEO in Wien.

Es stellte sich in den Verhandlungen zum NV-Vertrag sehr bald heraus, daß eine *internationale Kontrolle von nationalen Kernindustrien* ganz neue Probleme aufwerfen würde. Aus diesem Grund wurden in verschiedenen Ländern Aktivitäten ins Leben gerufen mit dem Ziel, ein praktikables internationales Überwachungssystem zu entwickeln. Für die Bundesrepublik Deutschland war die Schaffung eines solchen Systems von besonderer Bedeutung, da sie neben Japan der Staat mit der größten Kernindustrie ist, der keine Kernwaffen besitzt (Kernwaffen-Staaten unterliegen entsprechend dem Wortlaut des Vertrages nicht dem Zwang einer Kontrolle, sie können jedoch freiwillig ihre nicht-militärische Kernindustrie kontrollieren lassen). Daher wurde in den Jahren 1967/68 am Kernforschungszentrum Karlsruhe das Projekt Spaltstoffflußkontrolle (PSpFK) gegründet, mittels dessen an der Entwicklung eines vertrags-gerechten Kontrollsystems mitgewirkt werden sollte (Gupta, Häfele 1968).

Ein erster Abschluß der weltweiten Bemühungen um ein von allen Staaten akzeptierbares Überwachungssystem wurde erreicht als es dem vom Gouverneursrat der IAEA eingesetzten "Safeguards Committee", in dem über 40 Staaten vertreten waren und das vom Juli 1970 bis zum Februar 1971 tagte, gelang, ein Modellabkommen zu erstellen, das als Muster für die einzelnen zwischen den betroffenen Staaten und der IAEA abzuschließenden Überwachungsverträge dienen sollte (IAEA 1971).

Entsprechen diesem Modellabkommen beruht das internationale Überwachungssystem auf den drei Prinzipien der *Materialbilanzierung*, der *dichten Umhüllung* und der *Beobachtung*:

- Unter der Materialbilanzierung (material accountancy) ist bei der hier gegebenen Problematik der Vergleich zwischen dem *Buchinventar*, d.h. dem *realen Anfangsinventar* zu Beginn plus den aufaddierten Materialein- und ausgängen in bzw. aus einer *Materialbilanzzone* (im einfachsten Fall eine kerntechnische Anlage) während einer *Inventurperiode*, mit dem *realen Endinventar* am Ende der Inventurperiode zu verstehen. Hierzu ist notwendig, daß es vorbezeichnete Orte für das Inventar und Kanäle für den Inventarfluß gibt, da sonst eine Erfassung bzw. Messung des Inventars gar nicht möglich ist. Man kommt so auf ganz natürliche Weise zum Konzept der *strategischen Punkte* (IAEA 1970, Art. 116), worunter zu verstehen ist, daß man den Materialfluß bzw. die Überwachung desselben so einrichtet, daß die Überwachungsaktivität nur auf ganz wenige Orte in einer Anlage (eben die strategischen Punkte) beschränkt bleiben. Die Vorzüge eines solchen Konzeptes, z.B. Schutz vor Industriespionage, Durchsichtigkeit der Überwachung etc. verstehen sich ganz von selbst.
- Unter der dichten Umhüllung (containment) ist sowohl die physische Sicherung des spaltbaren Materials z.B. durch Betonmauern oder durch unfallsichere Behälter (birdcages) zu verstehen, als auch die Anbringung von Siegeln, die Einrichtung von Alarmanlagen etc.. Es ist hier wie schon erwähnt ein Unterschied zu machen zwischen der physischen Sicherung gegen Einbruch, Diebstahl, Unfall - diese liegt in der Verantwortung des Anlage-Betreibers bzw. des Staates- und der Überwachung im Rahmen des NV-Vertrages. Während die meisten der Umhüllungsmaßnahmen dem ersteren Zwecke dienen, sind es u.a. die Siegel oder die Maßnahmen die der Kanalisierung des Materialflusses dienen (conduitfunction), die auch dem Zwecke der internationalen Überwachung dienen.

- Es gibt Orte und Situationen in der Kernindustrie, an und bei denen als einzige Überwachungsmaßnahme nur die *direkte Beobachtung* durch Inspektoren denkbar ist (z.B. bei Umladevorgängen in Reaktoren). Es ist klar, daß bei diesem Überwachungsprinzip der im folgenden angesprochenen Problematik der *objektiven Beurteilung* der Maßnahmen ein besonderes Gewicht zukommt.

Die Berücksichtigung der aufgrund der internationalen Situation gegebenen Randbedingungen sowie die genaue Formulierung der *Überwachungsziele* haben sich für Konstrukteure und Analytiker als zentrale Probleme herausgestellt. Die wichtigsten Randbedingungen sind mit den Begriffen *rational, objektiv* und *formalisiert* beschrieben worden. Darunter ist zu verstehen, daß z.B. nicht der subjektive Eindruck eines einzelnen Inspektors darüber entscheiden darf, ob eine Entwendung spaltbaren Materials zu konstatieren ist oder nicht; vielmehr muß ein formalisiertes, auf quantitativen Aussagen bestehendes System der Überwachung aufgebaut werden. Es bedurfte überdies eines längeren Arbeitsprozesses festzustellen, daß das Ziel der internationalen Kontrolle nur in der *Entdeckung* (detection) einer Abzweigung spaltbaren Materials bestehen kann, nicht in der *Verhinderung* (prevention) - die letztere gehört wie erwähnt in den Bereich der Verantwortung des Anlage-Betreibers bzw. des Staates. Es leuchtet jedoch ein, daß die Garantie einer rechtzeitigen Entdeckung auch eine verhin- derte Wirkung ausübt ('deterrence by the risk of early detection').

Aus der bisherigen Darstellung folgt, daß dem Materialbilanzierungsprinzip eine besondere Bedeutung zukommt, da dieses von allen drei genannten Prinzipien die obigen Kriterien am besten zu erfüllen vermag; in der Tat wurde dies auch im Modellabkommen (IAEO 1971) festgeschrieben. Dabei hat man sich den *Ablauf der Überwachungsprozedur* in folgender Form vorzustellen: Der Anlage-Betreiber nimmt alle Daten auf, die zur Erstellung einer Materialbilanz notwendig sind (source data): Die Daten des realen Inventars am Beginn und am Ende einer Inventurperiode sowie die Daten der Eingangs-, Produkt- und Abfallströme. Der Inspektor vor Ort, der nicht imstande ist, jede einzelne Messung zu überwachen, verifiziert stichprobenartig einen Teil der Messungen mit Hilfe eigener unabhängiger Messungen oder durch Beobachtungen und übernimmt dann alle Betreiber-Daten, falls beim Vergleich von Inspektions- und Betreiber-Daten keine Unstimmigkeiten aufgetreten sind. Allerdings ist zu berücksichtigen, daß wegen der großen technischen Schwierigkeiten, die

sich bei der Messung der Materialgehalte der Meßeinheiten ergeben, Meßfehler auftreten, die 2% und mehr der zu bestimmenden wahren Werte der Materialgehalte betragen können.

Es folgt aus den bisherigen Ausführungen, daß alle Inspektionsausagen *Wahrscheinlichkeitsaussagen* sind aus im wesentlichen zwei Gründen: Wegen der nicht zu eliminierenden Meßfehler und wegen der stichprobenartigen Verifikation der Daten des Anlage-Betreibers. Anders als bei der Qualitätskontrolle, bei der der Partner des Kontrolleurs die unbelebte Natur bzw. die Technik ist, die sich von vornherein auf eine bestimmte *Strategie* in Form einer Verteilungsfunktion festgelegt hat, besteht das Problem der internationalen Kernmaterialüberwachung darin, daß es die Überwachungsbehörde mit einem Partner (dem Anlage-Betreiber bzw. dem Staat) zutun hat, der bewußt zu handeln imstande ist und von dem angenommen werden muß, daß er spaltbares Material entwenden will (müßte dies nicht angenommen werden, so wäre die Überwachung ja unnötig!). So ist zu verstehen, daß für die Analyse der stichprobenartigen Verifikation der Betreiber-Daten nicht nur die bekannten Methoden der Qualitätskontrolle zum Einsatz kommen können, sondern daß viel allgemeinere *spieltheoretische Methoden* herangezogen werden müssen.

Im Modellabkommen der IAEO (IAEO 1971) ist, wenn auch nicht in expliziter Weise festgestellt worden, daß nur das deklarierte spaltbare Material Gegenstand der Überwachung sein sollte. Dies bedeutet aber, daß es für den Anlagen-Betreiber bzw. den Staat nur zwei prinzipiell verschiedene Möglichkeiten (Strategiemengen) gibt, den NV-Vertrag nicht einzuhalten, nämlich

- Entwendung von deklariertem Material im Rahmen der Meßgenauigkeit ohne Datenverfälschung in der Hoffnung, daß die Meßgenauigkeit den Fehlbetrag in der Bilanz verschleiern, und
- Entwendung von deklariertem Material mit Hilfe von Datenverfälschung derart, daß die Materialbilanz scheinbar "aufgeht".

Die dazugehörigen Gegenstrategien der Überwachungsbehörde sind

- Überprüfung der Materialbilanz, und
- stichprobenartige Kontrolle der Daten durch unabhängige Messungen bzw. Beobachtungen.

Bei der Beurteilung des Überwachungssystems spielt die Frage nach der *Häufigkeit von Fehlalarmen*, d.h. von fälschlichen Verdächtigungen des Anlage-Betreibers durch den Inspektor eine wesentliche Rolle. Diese Fehlalarme sind eine Folge der unvermeidbaren Meßfehler, aber im Sinne der Kriterien "objektiv" und "formalisiert" gilt es, auch den Anlage-Betreiber vor dem übereifrigen Inspektor zu schützen, der viele Fehlalarme riskiert, um ja keinen echten Alarm zu versäumen. Im übrigen diskreditieren ja zu viele Fehlalarme bekanntermaßen die Glaubwürdigkeit jedes Überwachungssystems. Diese Problematik führte unmittelbar zur Themenstellung der vorliegenden Arbeit: Entsprechend der oben geschilderten Überwachungsprozedur führt der Inspektor zwei statistische Hypothesentests durch, den Datenverifizierungstest und den Materialbilanzierungstest. Beide Tests schließen die Möglichkeit eines Fehlalarms ein, dies bedeutet also, daß sie so einzurichten sind, daß die resultierende Fehlalarmwahrscheinlichkeit einen vorgegebenen Wert nicht überschreitet. Da beide Tests jedoch nicht unabhängig sind - die Daten des Anlage-Betreibers werden ja bei beiden Tests verwendet - ergeben sich komplizierte Relationen für den Zusammenhang zwischen den Fehlalarmwahrscheinlichkeiten der Einzeltests und der resultierenden Fehlalarmwahrscheinlichkeit.

Die Durchführung zweier getrennter Tests stellt nun aber nur eine Möglichkeit der Auswertung der überwachungsrelevanten Daten durch den Inspektor dar. Eine andere zum ersten Mal im Jahr 1974 (Hough et al. 1974) diskutierte Möglichkeit besteht darin, den besten gemeinsamen Test für das Gesamtproblem im Sinne der Gesamt-Entdeckungswahrscheinlichkeit, d.h. den Neyman-Pearson-Test (Witting 1966) zu bestimmen.

Bei der Bewertung aller dieser und denkbarer weiterer Verfahren muß man wie erwähnt davon ausgehen, daß der Anlage-Betreiber seine Entwendung so plant, daß die Erfolgsaussichten des Inspektors möglichst gering sind, d.h. daß der Anlage-Betreiber das spaltbare Material so entwenden wird, daß die Gesamt-Entdeckungswahrscheinlichkeit möglichst gering ist.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht daher darin, die im Sinne der Gesamt-Entdeckungswahrscheinlichkeit beste Datenauswertungsprozedur bei vorgegebener Gesamt-Fehlalarmwahrscheinlichkeit und bei für den Anlage-Betreiber als potentiellm Entwender spaltbarem Materials, optimaler Entwendungsstrategie zu bestimmen.

Wegen der Komplexität der Aufgabenstellung lassen sich nur in begrenztem Umfang allgemeingültige analytische Aussagen machen. Aus diesem Grunde wurde im Detail ein konkretes Beispiel aus der kerntechnischen Industrie analysiert, anhand dessen Vorschläge für die von Inspektor einzuschlagende Vorgehensweise gemacht werden konnten (Avenhaus, Beedgen, Neu 1980).

Dieser der vorliegenden Arbeit zugrunde liegende Struktur entspricht auch ihr äußerer Aufbau: Der erste abstrakte Teil ist mathematisch formal abgefaßt, der zweite dagegen verzichtet auf strenge Formalität zugunsten einer dem Charakter des konkreten Anwendungsbeispiels angemessener erscheinenden Darstellung.

Im ersten theoretischen Teil der Arbeit werden zunächst die Zufallsvariablen definiert, mit denen gearbeitet wird. In Kapitel zwei wird der statistische Rahmen abgesteckt, in dem Testtheorie betrieben werden soll: Es werden einfache Hypothesen behandelt, d.h. Nullhypothese und Alternativhypothese bestehen aus einem Element. Diese Annahme ist sehr wichtig; sie ermöglicht es, bei Optimalitätsbetrachtungen das Lemma von Neyman-Pearson (Witting 1966) anzuwenden, was uns zu besten Tests, zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art (Fehlalarmwahrscheinlichkeit) führt. Ferner werden weitere Tests für diese Hypothesen beschrieben. Im dritten Kapitel wird die statistische Entscheidungssituation in der Weise erweitert, indem man nun eine Menge von Alternativhypothesen, die einer Randbedingung genügen, zuläßt.

Für einzelne Elemente aus der Menge der Alternativhypothesen werden Neyman-Pearson-Tests konstruiert und dasjenige Element bestimmt, bei dem der Neyman-Pearson-Test die geringste Güte hat. Im vierten Kapitel

wird ein Test diskutiert, der auf einer bivariaten Zufallsvariablen basiert. Bei der Untersuchung dieses Testes tritt ein Minimax-Problem auf, das gelöst wird. Weiter wird nach Bedingungen für die Existenz eines Sattelpunktes gefragt. Im letzten Kapitel des theoretischen Teils werden spezielle Parameterwerte untersucht.

Im zweiten Teil der Arbeit wird versucht, die Ergebnisse aus dem ersten Teil auf Fragestellungen der internationalen Spaltstoffflußkontrolle anzuwenden. Im sechsten Kapitel werden die Prinzipien der IAEO-Kontrollen dargelegt. In den Kapiteln sieben und acht werden die diesen Prinzipien entsprechenden statistischen Tests behandelt. Das sind der Materialbilanztest (MUF-Test) und der Datenverifizierungstest (D-Test). Im Rahmen dieses Überwachungssystems sind verschiedene Entwendungs- und Kontrollstrategien möglich. Diese Thematik wird in Kapitel neun behandelt. Kapitel zehn ist den verschiedenen Testmöglichkeiten gewidmet. Diese Tests werden anhand ihrer Nichtehtdeckungswahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art) verglichen. Schließlich werden in Kapitel elf noch einige Aussagen bezüglich der D-MUF-Problematik bei Änderung von gewissen Voraussetzungen gemacht, wie sie in der Überwachungspraxis vorkommen können.

Teil I: Untersuchung parametrischer statistischer Tests mit Hypothesen
unter Nebenbedingungen

Im ersten Teil der Arbeit werden Aussagen über parametrische Tests gemacht. Die zu testenden Hypothesen sind einfach, d.h. Nullhypothese und Alternativhypothese bestehen aus einem Element. Die für spezielle einfache Hypothesen entwickelten Tests werden nun auf eine Menge von Hypothesen und auf zusammengesetzte Hypothesen angewandt. Dabei stellt sich eine Minimaxaufgabe für die Auswahl der Hypothesen und die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für die Fehler 1. Art einzelner Tests. Es wird nach Bedingungen gefragt, unter denen die Lösung der Minimaxaufgabe einen Sattelpunkt darstellt.

1. Definition der Zufallsvariablen

Zunächst sollen die Zufallsvariablen erklärt werden, mit denen im weiteren gearbeitet wird. Sie bilden zusammen mit den sie beschreibenden Parametern den Rahmen, in dem mathematische Statistik betrieben wird.

Definition 1.1:

Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) und zwei stetige normalverteilte Zufallsvariablen

$$X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den Verteilungsfunktionen

$$F_{X_i}(x) := P\{X_i \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_i} \cdot \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(t-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right] dt, i = 1, 2 \quad (1-1)$$

für $x \in \mathbb{R}$ mit $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+$ und $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

Die Kovarianz beider Zufallsvariablen ist

$$\text{Cov}[X_1, X_2] = \rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \quad (1-3)$$

mit

$$0 \leq |\rho| \leq 1$$

Folgerung 1.1:

Für $\rho \neq 0$ sind X_1 und X_2 zwei stochastisch abhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswerten μ_i und Varianzen σ_i^2 für $1 \leq i \leq 2$. Die gemeinsame Verteilungsfunktion der zweidimensionalen Zufallsvariablen

$$\underline{X} := (X_1, X_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (1-3)$$

hat dann für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Form (Feller 1971)

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \exp \left[-\frac{1}{2}(t-\mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (t-\mu) \right] \quad (1-4)$$

mit

$$t := \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \mu := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

wobei $|\Sigma|$ die Determinante der Kovarianzmatrix Σ bezeichnet,

und Σ^{-1} die Inverse von Σ ist.

Definition 1.2 :

\mathcal{X} sei der Stichprobenraum der Zufallsvariablen \underline{X} aus (1-4), d.h.

$$\mathcal{X} := \left\{ (X_1(\omega), X_2(\omega)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \omega \in \Omega \right\} . \quad (1-5)$$

□

2. Beschreibung der statistischen Entscheidungssituation

Im folgenden wird angenommen, daß $\sigma_1^2 = \text{Var}(X_1)$, $\sigma_2^2 = \text{Var}(X_2)$ und ρ bekannte gegebene Größen sind; Unsicherheit liege nur bei den Erwartungswerten

$$E[X_1] = -\mu_1 \quad \text{und} \quad E[X_2] = \mu_2$$

mit $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ vor.

Zwischen den beiden einfachen Hypothesen

$$H_0 := \left\{ F_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \cdot |\Sigma|^{1/2}} \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot t^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot t \right] \right\} \quad (2-1)$$

und

$$H_1 := \left\{ F_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \cdot |\Sigma|^{1/2}} \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot (t-\mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (t-\mu) \right] \right\}$$

wobei gelte

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

soll mit Hilfe statistischer Tests auf Grund einer Stichprobe eine Entscheidung getroffen werden.

In Definition 2.1 wird ein solcher nichtrandomisierter Test vorgestellt.

(siehe dazu auch Avenhaus 1979)

Definition 2.1:

Für $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$ wird der Test

$$d_1: \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$$

mit

$$d_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } -x_1 \leq s_1, x_2 \leq s_2 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2-3)$$

definiert. □

Damit d_1 ein Test zum Niveau α , $0 < \alpha < 1$, wird, legt man die Schranken s_i , $1 \leq i \leq 2$, entsprechend fest, d.h. unter der Nullhypothese H_0 soll

$$\alpha = E_{H_0} [d_1(X_1, X_2)] \quad (2-4)$$

gelten, wobei E_{H_0} den Erwartungswert der Zufallsvariablen unter der

Hypothese H_0 bezeichnet. Mit (2-4) folgt

$$1 - \alpha = F_0(s_1, s_2) \quad (2-5)$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot |\Sigma|^{1/2}} \int_{-\infty}^{s_1} dt_1 \int_{-\infty}^{s_2} dt_2 \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot t^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot t\right)$$

für $0 < |\rho| < 1$.

Definition 2.2:

Mit den s_i aus (2-3) werden nun α_i , $1 \leq i \leq 2$ definiert:

$$\alpha_i = 1 - \Phi \left(\frac{s_i}{\sigma_i} \right) \quad (2-6)$$

für $i = 1, 2$. Dabei ist

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot t^2 \right) dt$$

für $x \in \mathbb{R}$. □

Die α_i kann man nun mit Hilfe von Definition 2.3 als Wahrscheinlichkeiten der Fehler 1. Art für die Einzeltests interpretieren.

Definition 2.3:

Für die Stichprobenräume

$$\mathcal{X}_1 := \left\{ X_1(\omega) \in \mathbb{R} \mid \omega \in \Omega \right\}$$

$$\mathcal{X}_2 := \left\{ X_2(\omega) \in \mathbb{R} \mid \omega \in \Omega \right\}$$

werden nun mit den s_i aus (2-3) die nichtrandomisierten Tests

$$\psi_1 : \mathcal{X}_1 \rightarrow [0, 1]$$

mit
$$\psi_i(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } -x_i \leq s_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, x_i \in \mathcal{X}_i \quad (2-7)$$

und

$$\psi_2 : \mathcal{X}_2 \rightarrow [0, 1]$$

mit

$$\psi_2(x_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_2 \geq s_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad x_2 \in \mathcal{X}_2 \quad (2-8)$$

definiert. □

Bemerkung 2.1:

a) Der Test ψ_1 in (2-7) ist ein Neyman-Pearson-Test für

$$H_{0, X_1} := \left\{ \phi \left(\frac{x}{\sigma_1} \right) \right\} \quad (2-9)$$

gegen

$$H_{\mu_1, X_1} := \left\{ \phi \left(\frac{x + \mu_1}{\sigma_1} \right) \right\} \quad (2-10)$$

b) Der Test ψ_2 in (2-8) ist ein Neyman-Pearson-Test für

$$H_{0, X_2} := \left\{ \phi \left(\frac{x}{\sigma_2} \right) \right\} \quad (2-11)$$

gegen

$$H_{\mu_2, X_2} := \left\{ \phi \left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2} \right) \right\} \quad (2-12)$$

○

Mit Definition 2.3 gilt nun

$$E_{H_{0, X_1}} \left[\psi_1(X_1) \right] = 1 - \phi \left(\frac{s_1}{\sigma_1} \right) = \alpha_1 \quad (2-13)$$

und

$$E_{H_{0, X_2}} \left[\psi_2(X_2) \right] = 1 - \phi \left(\frac{s_2}{\sigma_2} \right) = \alpha_2 \quad (2-14)$$

Aus den Gleichungen (2-13) und (2-14) folgt nun sofort

$$s_1 = \sigma_1 \cdot U_{1-\alpha_1} \quad (2-15)$$

und

$$s_2 = \sigma_2 \cdot U_{1-\alpha_2} \quad (2-16)$$

wobei $U_x := \Phi^{-1}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

Nimmt man nun die Gleichungen (2-15) und (2-16) zuhilfe, dann läßt sich Formel (2-5) darstellen als

$$1-\alpha = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_1}} dt_1 \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_2}} dt_2 \exp \left[- \frac{t_1^2 - 2 \cdot \rho \cdot t_1 \cdot t_2 + t_2^2}{2 \cdot (1-\rho^2)} \right] \quad (2-17)$$

Die Relation (2-17) legt bei vorgegebenen α und ρ die α_i , $1 \leq i \leq 2$, nicht eindeutig fest. Für eine eindeutige Festlegung der Kombination von α_1 und α_2 mit Hilfe der Randbedingung (2-17) sind zusätzliche Bedingungen notwendig. Bei Avenhaus 1979 wird zum Beispiel die Möglichkeit

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

erwogen. Ferner wird dort die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art als Entscheidungskriterium erwähnt.

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art des Testes d_1 , die mit β bezeichnet wird, läßt sich nun wie folgt darstellen:

$$\beta := 1 - E_{H_1} \left[d_1(X_1, X_2) \right] \quad (2-18)$$

Dabei gilt

$$E_{H_1} \left[d_1(X_1, X_2) \right] = 1 - P_{H_1} \left\{ -X_1 \leq s_1, X_2 \leq s_2 \right\}$$

und

$$P_{H_1} \left\{ -X_1 \leq s_1, X_2 \leq s_2 \right\} = P_{H_1} \left\{ \frac{-X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \leq \frac{s_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} \leq \frac{s_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\frac{s_1 - \mu_1}{\sigma_1}} dt_1 \int_{-\infty}^{\frac{s_2 - \mu_2}{\sigma_2}} dt_2 \exp \left[- \frac{t_1^2 - 2 \cdot \rho \cdot t_1 \cdot t_2 + t_2^2}{2 \cdot (1-\rho^2)} \right] \quad (2-19)$$

Daraus ergibt sich nun sofort β als

$$\beta = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1}} dt_1 \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_2} - \frac{\mu_2}{\sigma_2}} dt_2 \exp \left[- \frac{t_1^2 - 2 \cdot \rho \cdot t_1 \cdot t_2 + t_2^2}{2 \cdot (1-\rho^2)} \right] \quad (2-20)$$

Aus (2-17) und (2-20) ergibt sich

$$1 - \beta \geq \alpha$$

und daraus folgt, daß der Test d_1 ein unverfälschter Test zum Niveau α ist.

Eine Möglichkeit, α_1 und α_2 aus (2-17) zu bestimmen, besteht nun darin, diejenige Kombination zu wählen, die β minimiert. Auf diesen Punkt wird im Laufe der Arbeit noch eingegangen.

Für Spezialfälle erhält man einfache Ausdrücke für die Gleichungen (2-4) bzw. (2-17). Dazu wird der folgende Satz formuliert, dessen Beweis aus illustrativen Gründen dargestellt wird (Avenhaus 1979).

Satz 2.1:

Gegeben seien nun die Gleichungen

$$\alpha = E_{H_0} \left[d_1 (X_1, X_2) \right], \quad 0 < \alpha < 1$$

und

$$\alpha_1 = E_{H_0, X_1} \left[\psi_1(X_1) \right], \quad \alpha_2 = E_{H_0, X_2} \left[\psi_2(X_2) \right]$$

dann gilt

(i) für $\rho = 0$

$$1 - \alpha = (1 - \alpha_1) \cdot (1 - \alpha_2) \tag{2-21}$$

(ii) für $\rho = -1$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \tag{2-22}$$

(iii) für $\rho = 1$

$$\alpha = \max \{ \alpha_1, \alpha_2 \} \tag{2-23}$$

In Gleichung (2-17) gilt für $0 < |\rho| < 1$

$$(iv) \quad \alpha = \begin{cases} \alpha_1 & \text{falls } \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 & \text{falls } \alpha_1 = 0 \end{cases} \tag{2-24}$$

Beweis:

(i) Gilt $\rho=0$ so sind die Zufallsvariablen X_1 und X_2 stochastisch unabhängig.
Somit folgt

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P_{H_0} \left\{ X_1 \leq s_1 \right\} \cdot P_{H_0} \left\{ X_2 \leq s_2 \right\} \\ &= P_{H_0} \left\{ \frac{X_1}{\sigma_1} \leq \frac{s_1}{\sigma_1} \right\} \cdot P_{H_0} \left\{ \frac{X_2}{\sigma_2} \leq \frac{s_2}{\sigma_2} \right\} \\ &= \Phi \left(\frac{s_1}{\sigma_1} \right) \cdot \Phi \left(\frac{s_2}{\sigma_2} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{\sigma_1 \cdot U_{1-\alpha_1}}{\sigma_1} \right) \cdot \Phi \left(\frac{\sigma_2 \cdot U_{1-\alpha_2}}{\sigma_2} \right) \\ &= (1-\alpha_1) \cdot (1-\alpha_2) \end{aligned}$$

(ii) Aus $\rho^2 = 1$ folgt (siehe Fisz 1963)

$$P_{H_0} \left\{ X_2 = a \cdot X_1 + b \right\} = 1$$

Damit gilt

$$0 = E_{H_0} [X_2] = a \cdot E_{H_0} [X_1] + b$$

woraus

$$b = 0$$

folgt.

Mit $\rho = -1$ gilt also

$$E \left[X_1 \cdot X_2 \right] = -\sigma_1 \cdot \sigma_2$$

d.h.

$$E \left[X_1 \cdot a \cdot X_1 \right] = -\sigma_1 \cdot \sigma_2$$

d.h.

$$a \cdot \sigma_1^2 = -\sigma_1 \cdot \sigma_2$$

woraus

$$\sigma_2 = -a \cdot \sigma_1$$

folgt und daraus

$$a < 0$$

(2-25)

Aus

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{H_0} \left\{ (X_1 \geq s_1) \cup (X_2 \geq s_2) \right\} \\ &= P_{H_0} \left\{ X_1 \geq s_1 \right\} + P_{H_0} \left\{ X_2 \geq s_2 \right\} \\ &\quad - P_{H_0} \left\{ (X_1 \geq s_1) \cap (X_2 \geq s_2) \right\} \end{aligned}$$

folgt dann wegen (2-25)

$$P_{H_0} \left\{ (X_1 \geq s_1) \cap (X_2 \geq s_2) \right\} = 0$$

und daraus

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad .$$

(iii) Analoge Überlegungen wie in (ii) liefern die Behauptung.

(iv) Folgt sofort aus Gleichung (2-17)

□

Bemerkung 2.2:

Für die Fehler 1. Art in Gleichung (2-17) gelten noch folgende Beziehungen

$$(i) \quad 1 - \alpha \geq (1 - \alpha_1) \cdot (1 - \alpha_2) \quad \text{für } \rho \geq 0 \quad (2-26)$$

$$(ii) \quad (1 - \alpha_1) \cdot (1 - \alpha_2) \geq 1 - \alpha \geq 1 - \alpha_1 - \alpha_2 \quad \text{für } \rho \leq 0 \quad (2-27)$$

Beweis:

Siehe dazu Cramer, Leadbetter 1963 und Sidak 1967.

□

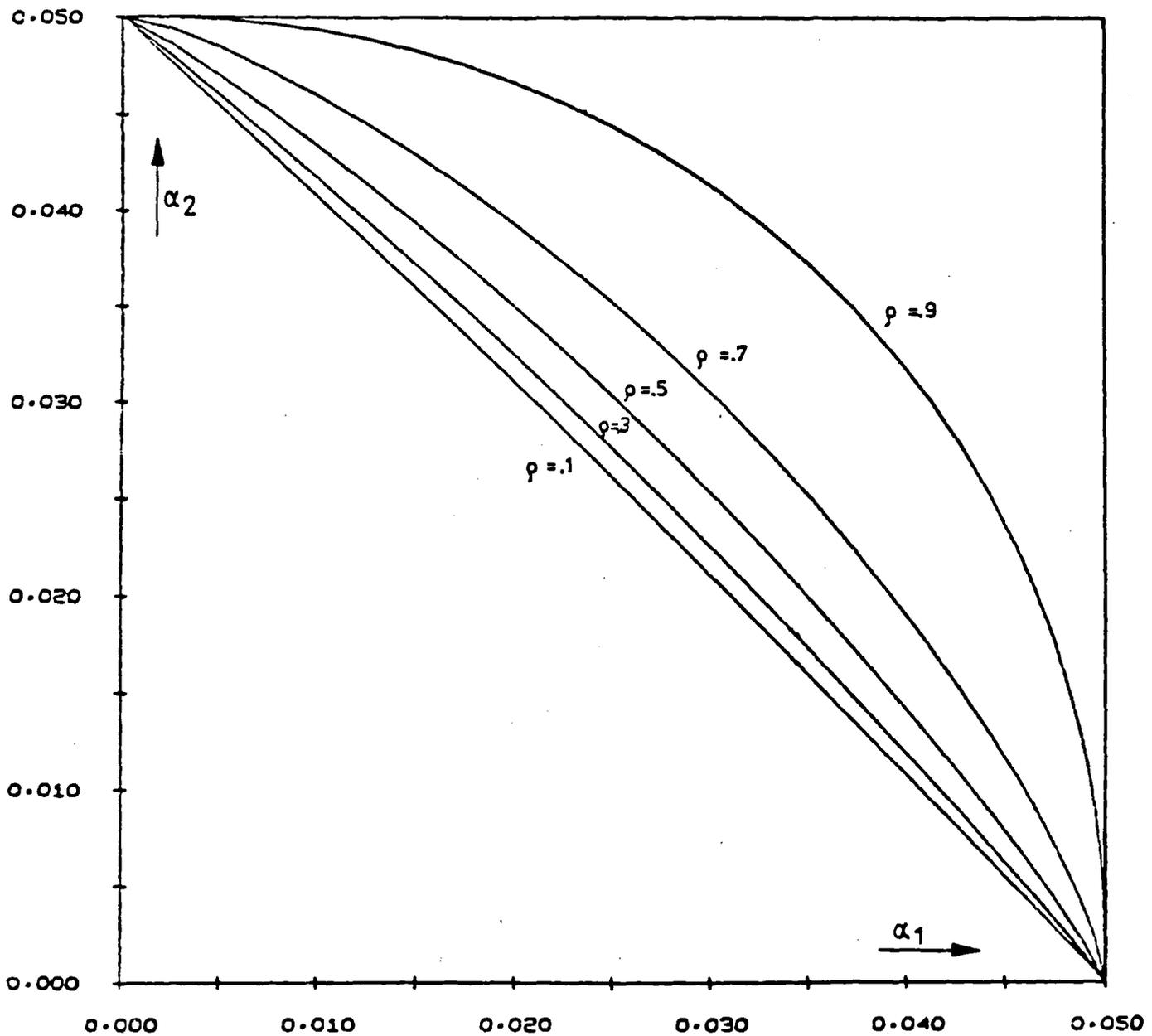
Die Relation zwischen α_1 und α_2 in Gleichung (2-27) ist im allgemeinen Fall nur numerisch darstellbar. Die Figur 1 stellt den Zusammenhang für einige ausgewählte Parameterwerte dar (siehe Avenhaus 1979).

Korollar 2.1:

(i) Für $\alpha_1 = \alpha$ gilt

$$d_1(x_1, x_2) = \psi_1(x_1) \quad ,$$

für alle $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$.



Figur 1:

Graphische Darstellung der Gleichung

$$1-\alpha = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{1-\alpha_1} dt_1 \int_{-\infty}^{1-\alpha_2} dt_2 \exp\left(-\frac{t_1^2 - 2\rho t_1 t_2 + t_2^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

zwischen α_1 und α_2 für $\alpha=0.05$ und ρ als Parameter (siehe auch Avenhaus 1979).

(ii) Für $\alpha_1 = 0$ gilt

$$d_2(x_1, x_2) = \psi_2(x_2)$$

für alle $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$.

Beweis:

(i) Sei $\alpha_1 = \alpha$, Dann folgt mit Satz 2.1, daß $\alpha_2 = 0$ gilt, d.h. für s_1 in d_1 folgt

$$s_1 = \sigma_1 \cdot U_{1-\alpha}$$

und für s_2 gilt

$$s_2 = -\infty$$

Somit hat d_1 die Form

$$d_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } -x_1 > s_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

woraus sofort Behauptung (i) folgt.

(ii) Für $\alpha_1 = \alpha$ geht der Beweis analog. □

Da nun aus dem Bisherigem hervorgeht, daß für den Test d_1 kein eindeutiges α_1 existiert, wird nun Klarheit geschaffen.

Definition 2.4:

Gegeben seien die Hypothesen H_0 und H_1 und d_1 sei der in Definition 2.1 beschriebene Test für H_0 gegen H_1 zum Niveau α mit

$$1 - \alpha_1 = \Phi\left(\frac{s_1}{\sigma_1}\right),$$

dann wird

$$d_{1,\alpha_1}(x_1, x_2) := d_1(x_1, x_2) \quad (2-28)$$

definiert für alle $(x_1, x_2) \in \mathcal{A}$.

Bei den weiteren Überlegungen seien f_i die Dichten der Verteilungsfunktionen F_i , $i=0,1$, d.h.

$$f_0(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi \cdot |\Sigma|^{1/2}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot (t_1, t_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \right] \quad (2-29)$$

und

$$f_1(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi \cdot |\Sigma|^{1/2}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot (t_1 - \mu_1, t_2 - \mu_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} t_1 - \mu_1 \\ t_2 - \mu_2 \end{pmatrix} \right] \quad (2-30)$$

für alle $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Definition 2.5 :

Die Wahrscheinlichkeitsdichten aus (2-29) und (2-30) seien gegeben, dann werde für $(x_1, x_2) \in \mathcal{A}$ der nichtrandomisierte Test

$$d_2 : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

mit

$$d_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } f_1(x_1, x_2)/f_0(x_1, x_2) \geq k_\alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2-31)$$

definiert, wobei k_α für $0 < \alpha < 1$ durch

$$\alpha = P_{H_0} \left\{ \frac{f_1(X_1, X_2)}{f_0(X_1, X_2)} \geq k_\alpha \right\} \quad (2-32)$$

bestimmt wird. P_{H_0} bezeichnet dabei das Wahrscheinlichkeitsmaß bei

Vorliegen von H_0 . Dabei ist α aus (2-32) der Fehler 1. Art des Testes d_2 . \square

Satz 2.2 : (siehe auch Avenhaus, Frick 1979)

Der Test d_2 aus Definition 2.5 ist ein Neyman-Pearson Test zum Niveau α für die Hypothese H_0 gegen die Alternative H_1 .

Beweis:

Die Behauptung folgt sofort aus der Definition (2-31) und der Tatsache, daß H_0 und H_1 einfache Hypothesen sind. \square

Der Leser fragt sich natürlich, warum überhaupt der Test d_1 für H_0 gegen H_1 erwogen wird, da ja der Test d_2 ein bester Test zum Niveau α ist, und obwohl diese Eigenschaft für d_1 nicht bewiesen werden konnte. Zur Beantwortung dieser Frage wird auf den zweiten Teil der Arbeit verwiesen, wo unter gewissen Voraussetzungen eine sinnvolle Anwendung von d_2 begründet wird.

Zunächst wenden wir uns noch einmal dem Quotienten $f_1(x_1, x_2) / f_0(x_1, x_2)$ zu. Mit (2-29) und (2-30) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_0(x_1, x_2)} &= \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \left\{ (x_1, x_2) - (-\mu_1, \mu_2) \right\} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \right\} \right]}{\exp \left[-\frac{1}{2} \cdot (x_1, x_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \right]} \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot (x_1, x_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot (-\mu_1, \mu_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot (x_1, x_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot (-\mu_1, \mu_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot (x_1, x_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

woraus mit

$$(-\mu_1, \mu_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

folgt:

$$\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_0(x_1, x_2)} = \exp \left[(x_1, x_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (-\mu_1, \mu_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \right] \quad (2-32')$$

Gleichung (2-32') besagt nun, daß

$$\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_0(x_1, x_2)} \geq k_\alpha$$

genau dann gilt, wenn

$$(x_1, x_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \geq k_\alpha' \quad (2-33)$$

ist. Mit Hilfe von (2-33) hat dann d_2 die einfache Form

$$d_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (x_1, x_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \geq k_\alpha' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2-34)$$

für $(x_1, x_2) \in \mathcal{A}$. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art läßt sich nun mit (2-34) darstellen als

$$\alpha = E_{H_0} \left[d_2 (X_1, X_2) \right]$$

oder

$$\alpha = P_{H_0} \left\{ (X_1, X_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \geq k_\alpha \right\} \quad (2-35)$$

Die Zufallsvariable

$$(X_1, X_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad (2-36)$$

unterliegt einer Normalverteilung mit den Erwartungswerten

$$E_{H_0} \left[(X_1, X_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (2-37)$$

$$E_{H_1} \left[(X_1, X_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \right] = (-\mu_1, \mu_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad (2-38)$$

und der Varianz

$$\text{Var} \left[(X_1, X_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \right] = (-\mu_1, \mu_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}. \quad (2-39)$$

Mit Hilfe von (2-36), (2-37) und (2-39) folgt nun aus (2-35)

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P_{H_0} \left\{ (X_1, X_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \leq k_\alpha \right\} \\ &= \Phi \left(\frac{k_\alpha}{\sqrt{\mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu}} \right) \end{aligned}$$

und daraus

$$k'_\alpha = \sqrt{\mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu} \cdot U_{1-\alpha} \quad . \quad (2-40)$$

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art des Testes d_2 hat die Form

$$\beta = P_{H_1} \left\{ (X_1, X_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu \leq k'_\alpha \right\} \quad , \quad (2-41)$$

womit

$$\beta = \Phi \left(\frac{k'_\alpha - \mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu}{\sqrt{\mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu}} \right) \quad (2-42)$$

und daraus mit (2-40)

$$\beta = \Phi \left(U_{1-\alpha} - \sqrt{\mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu} \right) \quad (2-43)$$

folgt. Daraus resultiert dann

$$1-\beta = \Phi \left(\sqrt{\mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu} - U_{1-\alpha} \right) \quad (2-44)$$

wobei

$$\mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu = \frac{1}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 \cdot (1-\rho^2)} \cdot \left[\sigma_2^2 \cdot \mu_1^2 + 2 \cdot \rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \mu_1 \mu_2 + \sigma_1^2 \cdot \mu_2^2 \right]$$

gilt.

(2-45)

3. Formulierung der Nebenbedingungen für die Hypothesen und Darstellung von optimalen Tests

In Kapitel 2 der Arbeit wurde die statistische Entscheidungssituation dargestellt, wobei unter der Alternativhypothese H_1

$$E_{H_1} [X_1] = -\mu_1 \quad , \quad E_{H_1} [X_2] = \mu_2$$

mit

$$\begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$

galt. Im folgenden wird nun eine weitere Annahme über μ_1 und μ_2 gemacht. Es gelte im weiteren Teil I

$$\mu_1 + \mu_2 = M \tag{3-1}$$

wobei $M \geq 0$ sei.

Definition 3.1:

Die Menge \mathcal{H}_1 der einfachen Hypothesen H_1 aus (2-2), die (3-1) erfüllen, sei:

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ F_1(x_1, x_2) \mid \begin{array}{l} \mu_1 + \mu_2 = M > 0 \\ \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{array} \right\} \quad , \tag{3-2}$$

weiter sei

$$H_{11} := \left\{ F_1(x_1, x_2) \mid \mu_1 = M, \mu_2 = 0 \right\} \in \mathcal{H}_1 \tag{3-3}$$

$$H_{12} := \left\{ F_1(x_1, x_2) \mid \mu_1 = 0, \mu_2 = M \right\} \in \mathcal{H}_1 \tag{3-4}$$

□

Eine weitere in die folgenden Betrachtungen wesentlich eingehende Annahme ist

$$\text{Cov} \left[\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \right] = \sigma_2^2 < \sigma_1^2, \quad (3-5)$$

woraus mit (1-3)

$$\rho = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (3-6)$$

folgt. Mit Hilfe von (2-45) und (3-5) läßt sich $\mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu$ darstellen als

$$\begin{aligned} \mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu &= \frac{1}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 \cdot (1 - \sigma_2^2/\sigma_1^2)} \cdot \left[\sigma_2^2 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot (M - \mu_1) + (M - \mu_1)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \cdot \left[\mu_1^2 + 2 \cdot \mu_1 \cdot (M - \mu_1) - \rho^{-2} \cdot (M - \mu_1)^2 \right] \end{aligned} \quad (3-7)$$

Nach den bisherigen Annahmen und Überlegungen soll der folgende Satz bewiesen werden.

Satz 3.1:

Gegeben seien die Verteilungsfunktion $F(x_1, x_2)$ aus (1-4) mit $\rho = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \neq 1$, die Nullhypothese H_0 aus (2-1) und die Menge der Alternativhypothesen \mathcal{A}_1 aus (3-2).

(i) Dann ist der nichtrandomisierte Test

$$\tilde{d}_2(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{M}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \cdot (x_2 - x_1) \geq r_\alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3-8)$$

für $(x_1, x_2) \in \mathcal{A}$ und

$$P_{H_0} \left\{ \frac{M}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \cdot (X_2 - X_1) \geq r_\alpha \right\} = \alpha$$

ein Neyman - Pearson - Test zum Niveau α für die Nullhypothese H_0 gegen die Alternativhypothese $H_{11} \in \mathcal{H}_1$.

(ii) Es gilt

$$E_{H_{11}} \left[\tilde{d}_2 (X_1, X_2) \right] < E_{H_1'} \left[d_2 (X_1, X_2) \right]$$

mit für alle $H_1' \in \mathcal{H}_1$ und $H_1' \neq H_{11}$, wobei d_2 der in Definition 2.5 beschriebene Test für die Hypothese H_0 gegen die Alternativhypothese H_1' zum Niveau α ist.

(iii) Der Test \tilde{d}_2 aus (3-8) ist ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α für die Nullhypothese H_0 gegen die Alternativhypothese

$$\hat{H}_{11} := \left\{ F_1 (x_1, x_2) \mid \mu_2 = 0, \mu_1 \geq M \right\}. \quad (3-9)$$

(iv) Der Neyman - Pearson - Test zum Niveau α für die Nullhypothese H_0 gegen die Alternativhypothese H_{12} ist ein gleichmäßig bester Test für H_0 gegen die Alternativhypothese

$$\hat{H}_{12} := \left\{ F_1 (x_1, x_2) \mid \mu_1 = 0, \mu_2 \geq M \right\}. \quad (3-10)$$

(v) Der Neymann - Pearson - Test für die Hypothese H_0 gegen die Alternativhypothese

$$H_1^0 := \left\{ F_1 (x_1, x_2) \mid \mu_1^0 + \mu_2^0 = M, \mu_1^0, \mu_2^0 \neq 0 \right\} \in \mathcal{H}_1$$

ist im allgemeinen kein gleichmäßig bester Test für H_0 gegen

$$\hat{H}_1^0 := \left\{ F_1 (x_1, x_2) \mid \mu_1^0 + a, \mu_2^0 + b, a, b \geq 0 \right\}$$

Beweis:

(i) (siehe dazu auch Avenhaus, Frick 1979)

Mit $\mu_1 = M$, $\mu_2 = 0$ und $\rho = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \neq 1$ folgt

$$(X_1, X_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu = \frac{M}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} (X_2 - X_1) \quad (3-11)$$

Aus (3-11) ergibt sich mit (2-34) und mit

$$P_{H_0} \left\{ \frac{M}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \cdot (X_2 - X_1) \geq r_\alpha \right\} = \alpha$$

die Behauptung.

(ii) Zunächst wird

$$h(\mu_1) := \left[\mu_1^2 + 2 \cdot \mu_1 \cdot (M - \mu_1) + \rho^{-2} \cdot (M - \mu_1)^2 \right] / (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \quad (3-12)$$

für $\mu_1 \in [0, M]$ definiert. Dann gilt

$$h'(\mu_1) = \left[2 \cdot (M - \mu_1) - 2 \cdot \rho^{-2} \cdot (M - \mu_1) \right] / (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) < 0 \quad (3-13)$$

für alle $\mu_1 \in (0, M)$ und daraus folgt, daß $h(\mu_1)$ eine streng monoton fallende Funktion in $[0, M]$ ist. Somit liegt das Minimum von $h(\mu_1)$ bei $\mu_1 = M$, d.h. aus (3-13) folgt dann sofort

$$h(M) < h(\mu_1) \quad (3-14)$$

für alle $\mu_1 \in [0, M)$.

$\Phi \left(\sqrt{\mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu} - U_{1-\alpha} \right)$ ist nun eine streng monoton wachsende

Funktion in $\mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu$. Mit (2-44) und (3-14) folgt dann, daß

$$E_{H_{11}} \left[\tilde{d}_2 (X_1, X_2) \right] = \Phi \left(\sqrt{h(M)} - U_{1-\alpha} \right) < \Phi \left(\sqrt{h(\mu_1)} - U_{1-\alpha} \right) = E_{H_1} \left[d_2 (X_1, X_2) \right]$$

für alle $H_1' \in \mathcal{H}_1$ und $H_1' \neq H_{11}$ gilt.

(iii):

Der Test \tilde{d}_2 hat wegen (3-8) sicherlich das Niveau α .

Sei nun

$$\Psi_\alpha := \left\{ \Psi \text{ ist Test für } H_0 \text{ gegen } \hat{H}_{11} \text{ mit } E_{H_0} [\Psi(X_1, X_2)] \leq \alpha \right\} \quad (3-15)$$

die Menge der Tests für die Nullhypothese H_0 gegen die Alternativhypothese \hat{H}_{11} mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art, die kleiner oder gleich α ist, dann ist

$$E_{\mu_1} \left[\tilde{d}_2 (X_1, X_2) \right] = \sup_{\psi \in \Psi_\alpha} E_{\mu_1} \left[\psi (X_1, X_2) \right] \quad (3-16)$$

zu zeigen, wobei E_{μ_1} den Erwartungswert der Zufallsvariablen unter der Alternativhypothese H_1 mit

$$E \left[X_1 \right] = -\mu_1 \quad , \quad \mu_1 \geq M$$

und

$$E \left[X_2 \right] = 0$$

(3-17)

bedeutet.

Unter H_1 gilt dann

$$E_{\mu_1} \left[\frac{M}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \cdot (X_1 - X_2) \right] = \frac{M \cdot \mu_1}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \quad (3-18)$$

und

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\frac{M}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \cdot (X_1 - X_2) \right] &= \frac{M}{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2} \cdot (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 \\ &= \frac{M^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \end{aligned} \quad (3-19)$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
 E_{\mu_1} \left[\tilde{d}_2 (X_1, X_2) \right] &= P_{\mu_1} \left\{ \frac{M}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \cdot (X_1 - X_2) \geq r_\alpha \right\} \\
 &= \Phi \left(\frac{\frac{M \cdot \mu_1}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} - r_\alpha}{\frac{M}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}} \right)
 \end{aligned} \tag{3-20}$$

wobei

$$r_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \cdot U_{1-\alpha}$$

ist.

Zusammen mit Gleichung (3-20) ergibt sich nun

$$E_{\mu_1} \left[\tilde{d}_2 (X_1, X_2) \right] = \Phi \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}} - U_{1-\alpha} \right). \tag{3-21}$$

Aus Teil (i) des Satzes ziehen wir die Erkenntnis, daß

$$\tilde{\psi} (x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{\mu_1'}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \cdot (x_2 - x_1) \geq r_\alpha' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Neyman-Pearson-Test zum Niveau α für

$$H_0 = \left\{ F_0 (x_1, x_2) \right\}$$

gegen die Alternativhypothese

$$H_1 = \left\{ F_1 (x_1, x_2) \mid \mu_2 = 0, \mu_1 = \mu_1' \right\}$$

ist. Daraus folgt dann

$$E_{\mu_1'} \left[\tilde{\psi}(X_1, X_2) \right] \geq E_{\mu_1'} \left[\psi(X_1, X_2) \right]$$

für alle $\psi \in \Psi_\alpha$. Nun läßt sich die folgende Beziehung herleiten:

$$\begin{aligned} E_{\mu_1'} \left[\tilde{\psi}(X_1, X_2) \right] &= \Phi \left(\frac{\mu_1'}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}} - U_{1-\alpha} \right) \\ &= E_{\mu_1'} \left[\tilde{d}(X_1, X_2) \right] \\ &\geq E_{\mu_1'} \left[\psi(X_1, X_2) \right] \end{aligned}$$

für alle $\psi \in \Psi_\alpha$.

Damit ist (3-16) gezeigt und Behauptung (iii) bewiesen.

(iv) :

Der Beweis geht analog wie in (iii).

(v) :

Der Neyman - Pearson Test d_2 zum Niveau α für

$$H_0 = \left\{ F_0(x_1, x_2) \right\}$$

gegen die Alternativhypothese

$$H_1 = \left\{ F_1(x_1, x_2) \mid \mu_1 + \mu_2 = M \right\}$$

hat bei der Alternativhypothese

$$H_1^a := \left\{ F_1(x_1, x_2) \mid \mu_1 + a, \mu_2 ; \mu_1 + \mu_2 = M \right\}$$

die Güte

$$E_{H_1^a} \left[d_2(X_1, X_2) \right] = \Phi \left(\frac{\mu_1 \cdot \mu_2 + M \cdot \mu_1 + \rho^{-2} \cdot \mu_2^2 + M \cdot a}{\sqrt{[(\mu_1 + \rho^{-2} \cdot \mu_2)^2 - 2 \cdot (\mu_1 + \rho^{-2} \cdot \mu_2) \cdot M] \cdot \sigma_2^2 + M^2 \cdot \sigma_1^2}} - U_{1-\alpha} \right) \quad (3-22)$$

Der Neyman-Pearson-Test $d_{2,a}$ für die Hypothese H_0 gegen die Alternativhypothese H_1^a hat unter H_1^a die Güte

$$E_{H_1^a} \left[d_2^a(X_1, X_2) \right] = \Phi \left(\frac{\mu_1 \cdot \mu_2 + \rho^{-2} \cdot \mu_2^2 + (M+a) \cdot \mu_1 + \mu_2 \cdot a + (M+a) \cdot a}{\sqrt{[(\mu_1 + a + \rho^{-2} \cdot \mu_2)^2 - 2 \cdot (\mu_1 + a + \rho^{-2} \cdot \mu_2) \cdot (M+a)] \cdot \sigma_2^2 + (M+a)^2 \cdot \sigma_1^2}} - U_{1-\alpha} \right) \quad (3-23)$$

Wählt man nun

$$\mu_1 = \mu_2 = a = \frac{M}{2}$$

und

$$\rho = \frac{1}{2}$$

dann folgt mit (3-22) und (3-23)

$$E_{H_1^a} \left[d_2(X_1, X_2) \right] = \Phi(0,9 - U_{1-\alpha}) < \Phi(2 - U_{1-\alpha}) = E_{H_1^a} \left[d_2^a(X_1, X_2) \right]$$

was zu beweisen war. □

Korollar 3.1:

- (i) Der Neyman-Pearson-Test \tilde{d}_2 aus (3-8) für die Hypothese H_0 gegen die Alternativhypothese $H_{11} \in \mathcal{H}_1$ zum Niveau α erfüllt die Beziehung

$$E_{H_{11}} \left[\tilde{d}_2 (X_1, X_2) \right] > E_{H_{M, X_1}} \left[\psi_1 (X_1) \right] \quad (3-24)$$

wobei ψ_1 der Neyman-Pearson-Test der Hypothese

$$\left\{ \phi \left(\frac{x}{\sigma_1} \right) \right\}$$

gegen die Alternativhypothese

$$\left\{ \phi \left(\frac{x-M}{\sigma_1} \right) \right\}$$

zum Niveau α ist.

- (ii) Der Neyman-Pearson-Test δ für die Hypothese H_0 gegen die Alternativhypothese $H_{12} \in \mathcal{H}_1$ zum Niveau α erfüllt die Beziehung

$$E_{H_{12}} \left[\delta (X_1, X_2) \right] > E_{H_{M, X_2}} \left[\psi_2 (X_2) \right] , \quad (3-25)$$

wobei ψ_2 der Neyman-Pearson-Test der Hypothese

$$\left\{ \phi \left(\frac{x}{\sigma_2} \right) \right\}$$

gegen die Alternativhypothese

$$\left\{ \phi \left(\frac{x-M}{\sigma_2} \right) \right\}$$

zum Niveau α ist.

Beweis:

(i) Aus (3-8) ergibt sich für \tilde{d}_2

$$\tilde{d}_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_2 - x_1 > t_\alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei t_α aus

$$E_{H_0} \left[\tilde{d}(X_1, X_2) \right] = \alpha$$

bestimmt wird. Unter der Hypothese H_{11} gilt nun:

$$\begin{aligned} E_{H_{11}} \left[\tilde{d}_2(X_1, X_2) \right] &= 1 - P_{H_{11}} \left\{ X_2 - X_1 \leq t_\alpha \right\} \\ &= 1 - \Phi \left(\frac{t_\alpha - M}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{M - t_\alpha}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{M}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}} - U_{1-\alpha} \right) \end{aligned} \tag{3-26}$$

und für den Test ψ_1 gilt

$$E_{H_{M, X_1}} \left[\psi_1(X_1) \right] = \Phi \left(\frac{M}{\sigma_1} - U_{1-\alpha} \right) \tag{3-27}$$

Da nun nach den Voraussetzungen die Beziehung

$$0 < \sigma_1^2 - \sigma_2^2 < \sigma_1^2$$

erfüllt ist, folgt

$$E_{H_{11}} \left[\tilde{d}(X_1, X_2) \right] = \Phi \left(\frac{M}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}} - U_{1-\alpha} \right) > \Phi \left(\frac{M}{\sigma_1} - U_{1-\alpha} \right) = E_{H_{M, X_1}} \left[\psi_i(X_1) \right]$$

und damit Behauptung (i).

(ii) Aus (2-34) folgt für den Neyman-Pearson-Test δ für H_0 gegen H_{12}

$$\delta(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{für } \rho^{-2} \cdot x_2 - x_1 > p_\alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei p_α aus

$$E_{H_0} \left[\delta(X_1, X_2) \right] = \alpha$$

bestimmt wird. Unter der Hypothese H_{12} gilt nun

$$\begin{aligned} E_{H_{12}} \left[\delta(X_1, X_2) \right] &= 1 - P_{H_{12}} \left\{ \rho^{-2} \cdot X_2 - X_1 \leq p_\alpha \right\} \\ &= 1 - \Phi \left(\frac{p_\alpha - \rho^{-2} \cdot M}{\sqrt{\rho^{-4} \cdot \sigma_2^2 - \rho^{-2} \cdot \sigma_2^2}} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{\rho^{-2} \cdot M}{\sqrt{\rho^{-4} \cdot \sigma_2^2 - \rho^{-2} \cdot \sigma_2^2}} - U_{1-\alpha} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{M}{\sqrt{\sigma_2^2 - \rho^2 \cdot \sigma_2^2}} - U_{1-\alpha} \right) \end{aligned}$$

Da nun $0 < \rho^2 < 1$ ist folgt

$$E_{H_{12}} \left[\delta (X_1, X_2) \right] = \Phi \left(\frac{M}{\sqrt{\sigma_2^2 - \rho^2 \cdot \sigma_2^2}} - U_{1-\alpha} \right) > \Phi \left(\frac{M}{\sigma_2} - U_{1-\alpha} \right) = E_{H_{M, X_2}} \left[\psi_2 (X_2) \right]$$

und damit die Behauptung (ii). □

Bemerkung 3.1:

Ein Ergebnis von Korollar 3.1 ist, daß, wenn der Erwartungswert nur einer der beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 unsicher ist und getestet werden soll, die reinen Tests ψ_1 und ψ_2 nicht die größte Schärfe haben. Vielmehr ließ sich zeigen, daß X_1 und X_2 so korreliert sind, daß "gemischte" Tests existieren, die eine größere Schärfe besitzen. C

4. Lösung einer Minimax-Aufgabe

Aus Satz 3.1 weiß man, daß der Test \tilde{d}_2 ein Neyman-Pearson-Test für die Hypothese H_0 gegen die Alternative H_{11} zum Niveau α ist. Es soll zunächst die Frage untersucht werden, wie sich dieser Test \tilde{d}_2 bei Vorliegen einer beliebigen Alternative $H_1 \in \mathcal{H}_1$ mit

$$H_1 = \left\{ F_1(x_1, x_2), \mu_1 \neq M \right\}$$

im Vergleich zum Test d_{1, α_1} unter H_1 verhält. Der folgende Satz geht auf dieses Problem ein.

Satz 4.1:

Gegeben sei die Hypothese H_0 , die Menge der Alternativhypothesen \mathcal{H}_1 und

$$\sigma_1^2 > 2 \cdot \sigma_2^2,$$

dann existieren Hypothesen $H_1 \in \mathcal{H}_1$ so, daß der Test d_{1, α_1} für gewähltes $\alpha_1 \in [0, \alpha]$ die Ungleichung

$$E_{H_1} \left[d_{1, \alpha_1}(X_1, X_2) \right] > E_{H_1} \left[\tilde{d}_2(x_1, x_2) \right]$$

erfüllt.

Beweis:

Zunächst wird die Funktion $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ definiert:

$$\beta(\mu_1, \alpha_1) := \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1}} dt_1 \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2}} dt_2 \exp \left[-\frac{t_1^2 - 2 \cdot \rho \cdot t_1 \cdot t_2 + t_2^2}{2 \cdot (1-\rho^2)} \right]$$

wobei $\rho = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ ist, und α_1 bzw. α_2 der Randbedingung (2-17) genügen. $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ ist für festes $\mu_1 \in [0, M]$ eine stetige reelle Funktion in $\alpha_1 \in [0, \alpha]$ und für festes $\alpha_1 \in [0, \alpha]$ stetig in μ_1 . Für $\alpha_1 = 0$ folgt aus

Korollar 2.1

$$\beta(\mu_1, 0) = \Phi \left(U_{1-\alpha} - \frac{M - \mu_1}{\sigma_2} \right)$$

und daraus

$$\beta(0, 0) = \Phi \left(U_{1-\alpha} - \frac{M}{\sigma_2} \right) .$$

Sei nun die Hypothese $H_{12} \in \mathcal{H}_1$ gegeben, dann ist

$$E_{H_{12}} \left[d_{1,0}(X_1, X_2) \right] = 1 - \beta(0, 0) = \Phi \left(\frac{M}{\sigma_2} - U_{1-\alpha} \right)$$

wobei noch einmal erwähnt werden soll, daß $d_{1,0}$ der Test d_1 für H_0 gegen H_{12} mit $\alpha_1 = 0$ ist.

Eine Voraussetzung des Satzes 4.1. ist

$$\sigma_1^2 > 2 \cdot \sigma_2^2 ,$$

woraus

$$\sigma_1^2 - \sigma_2^2 > \sigma_2^2$$

folgt und damit

$$E_{H_{12}} \left[\tilde{d}_2(X_1, X_2) \right] = \Phi \left(\frac{M}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}} - U_{1-\alpha} \right) < \Phi \left(\frac{M}{\sigma_2} - U_{1-\alpha} \right) .$$

Somit ist

$$E_{H_{12}} \left[\tilde{d}_2 (X_1, X_2) \right] < E_{H_{12}} \left[d_{1,0} (X_1, X_2) \right]$$

und die Behauptung des Satzes ist beweisen. □

Bemerkung 4.1:

Die im Beweis von Satz 4.1 definierte Funktion $\beta'(\mu_1, \alpha_1)$ ist stetig in μ_1 und α_1 , d.h. es existiert für die Hypothese H_{12} ein offenes Intervall $(0, \delta) \subseteq (0, \alpha]$ so, daß für alle $\alpha_1 \in (0, \delta)$

$$E_{H_{12}} \left[\tilde{d}_2 (X_1, X_2) \right] < E_{H_{12}} \left[d_{1,\alpha_1} (X_1, X_2) \right]$$

gilt. Ferner existiert für $\alpha_1=0$ ein offenes Intervall $(0, K) \subseteq (0, M]$ so, daß für $\mu_1 \in (0, K)$ und $H_1 = \left\{ F_1(x_1, x_2) \mid \mu_1, M-\mu_1 \right\}$ die Beziehung

$$E_{H_1} \left[\tilde{d}_2 (X_1, X_2) \right] < E_{H_1} \left[d_{1,0} (X_1, X_2) \right]$$

gültig ist. ○

Jetzt wird wieder der Test d_{1,α_1} für die Hypothese H_0 gegen Alternative $H_1 \in \mathcal{H}_1$ aufgegriffen. Die Wahl von α_1 und α_2 ist bei diesem Test noch nicht gelöst. In Kapitel 2 wurde $\alpha_1 = \alpha_2$ vorgeschlagen. Diese Maßnahme erscheint zwar naheliegend, aber sie ist im Grunde genommen willkürlich. Ein weiterer Weg zur Bestimmung von α_1 ist die Lösung des Optimierungsproblems (Avenhaus, Beedgen 1980)

$$\min_{\alpha_1} \max_{\mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) \tag{4-2}$$

wobei $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ in (4-1) gegeben ist, und α_1 bzw. α_2 der Randbedingung (2-17) und μ_1 bzw. μ_2 der Randbedingung (3-1) genügen. Zur Lösung von (4-2) nun

Satz 4.2:

Gegeben sei die Funktion

$$\beta(\mu_1, \alpha_1) : [0, M] \times [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R},$$

die in (4-1) definiert ist, mit beliebigem $\alpha \leq 0,5$ wobei α_1 bzw. α_2 der Randbedingung (2-17) und μ_1 bzw. μ_2 der Randbedingung (3-1) genügen. Dann existieren

$$\alpha_1^* \in [0, \alpha] \tag{4-3}$$

und

$$\mu_1^* \in [0, M], \tag{4-4}$$

die das Optimierungsproblem (4-2) lösen, falls

$$\rho \cdot U_{1-\alpha_1} + U_{1-\alpha_2} > \frac{M}{\sigma_2} \tag{4-5}$$

für alle α_1 bzw. α_2 gilt, und eine Lösung des Gleichungssystems

$$1-\alpha = \frac{1}{2 \cdot \pi \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_1}} dt_1 \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_2}} dt_2 \exp \left[- \frac{t_1^2 - 2 \cdot \rho \cdot t_1 \cdot t_2 + t_2^2}{2 \cdot (1-\rho^2)} \right] \tag{4-6}$$

$$0 = \exp \left(\frac{U_{\alpha_1}^2}{2} \right) \cdot \phi \left(\frac{U_{1-\alpha_1} - \rho \cdot U_{1-\alpha_2}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) - \rho \cdot \exp \left(\frac{U_{\alpha_2}^2}{2} \right) \cdot \phi \left(\frac{U_{1-\alpha_2} - \rho \cdot U_{1-\alpha_1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right)$$

in diesen Randbedingungen existiert.

Beweis:

Zunächst zur Lösung von $\max \beta(\mu_1, \alpha_1)$ bei beliebig fixiertem α_1 . Hierzu werden 3 Fälle unterschieden.

a) $\alpha_1 = 0$:

Aus $\alpha_1 = 0$ folgt aus dem bisherigen $\alpha_2 = \alpha$, somit

$$\beta(\mu_1, 0) = \phi \left(U_{1-\alpha} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2} \right)$$

und auf Grund der Monotonieigenschaften der Normalverteilungsfunktion gilt

$$\max_{\mu_1} \beta(\mu_1, 0) = \beta(M, 0) = 1 - \alpha \quad (4-7)$$

b) $\alpha_1 = \alpha$:

Wieder ergibt sich aus dem Bisherigem $\alpha_2 = 0$ und

$$\beta(\mu_1, \alpha) = \Phi\left(U_{1-\alpha} - \frac{\mu_1}{\sigma_1}\right)$$

womit

$$\max_{\mu_1} \beta(\mu_1, \alpha) = \beta(0, \alpha) = 1 - \alpha \quad (4-8)$$

folgt.

c) $0 < \alpha_1 < \alpha$:

Für festes α_1 ist $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ eine Funktion von μ_1 , die im Innern von $[0, M]$ differenzierbar ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) &= - \frac{1}{\sigma_1} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right) \cdot \\ &\quad \cdot \Phi\left(\frac{U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2} - \rho \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\sigma_2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2}\right)^2\right) \cdot \\ &\quad \cdot \Phi\left(\frac{U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1} - \rho \cdot \left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \end{aligned} \quad (4-9)$$

für $\mu_1 \in (0, M)$.

Eine notwendige Bedingung dafür, daß μ_1^* ein Maximum in $(0, M)$ ist, stellt

$$\frac{\partial}{\partial \mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) \Big|_{\mu_1^*} = 0 \quad (4-10)$$

dar, d.h. μ_1^* muß Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_1} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right) \cdot \phi\left(\frac{U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2} - \rho \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma_2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2}\right)^2\right) \cdot \phi\left(\frac{U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1} - \rho \cdot \left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \end{aligned} \quad (4-11)$$

sein.

Nun wird das Minimum von $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ für festes μ_1 bezüglich α_1 gesucht.

$\beta(\mu_1, \alpha_1)$ ist für festes μ_1 eine Funktion von α_1 , die im Innern von $[0, \alpha]$ differenzierbar ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) &= - \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right) \cdot \phi\left(\frac{U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2} - \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \cdot \\ & \cdot \exp\left(\frac{U_{\alpha_1}^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2}\right)^2\right) \cdot \\ & \cdot \phi\left(\frac{U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1} - \rho \cdot \left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \cdot \exp\left(\frac{U_{\alpha_2}^2}{2}\right) \cdot \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \end{aligned}$$

(4-12)

Eine notwendige Bedingung dafür, daß für festes μ_1 in $\alpha_1^* \in (0, \alpha)$ ein Minimum vorliegt, ist

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) \Big|_{\alpha_1^*} = 0. \quad (4-13)$$

Falls nun ein μ_1^* existiert, welches (4-11) erfüllt, gilt für die Ableitung von $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ nach α_1 im Punkt μ_1^*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) \Big|_{\mu_1^*} &= - \exp \left(- \frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1^*}{\sigma_1} \right)^2 \right) \cdot \\ &\cdot \Phi \left(\frac{U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1^*}{\sigma_2} - \rho \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1^*}{\sigma_1} \right)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \cdot \exp \left(\frac{U_{\alpha_1}^2}{2} \right) \\ &- \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \exp \left(- \frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1^*}{\sigma_1} \right)^2 \right) \cdot \\ &\cdot \Phi \left(\frac{U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1^*}{\sigma_2} - \rho \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1^*}{\sigma_1} \right)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \cdot \exp \left(\frac{U_{\alpha_2}^2}{2} \right) \cdot \frac{d_{\alpha_2}}{d_{\alpha_1}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort, daß

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) \Big|_{\mu_1^*} = 0$$

genau dann gilt, wenn

$$\exp \left(\frac{U_{\alpha_1}^2}{2} \right) + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \exp \left(\frac{U_{\alpha_2}^2}{2} \right) \cdot \frac{d_{\alpha_2}}{d_{\alpha_1}} = 0 \quad (4-14)$$

erfüllt ist.

Aus (2-17) erhält man nach implizierter Differentiation

$$\frac{dU_{1-\alpha_2}}{dU_{1-\alpha_1}} = - \frac{\exp\left(-\frac{U_{\alpha_1}^2}{2}\right) \cdot \phi\left(\frac{U_{1-\alpha_2} - \rho \cdot U_{1-\alpha_1}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}{\exp\left(-\frac{U_{\alpha_2}^2}{2}\right) \cdot \phi\left(\frac{U_{1-\alpha_1} - \rho \cdot U_{1-\alpha_2}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)} \quad (4-15)$$

und daraus ergibt sich mit

$$\frac{dU_{1-\alpha}}{d\alpha} = -\sqrt{2\pi} \cdot \exp\left(\frac{U_{\alpha}^2}{2}\right)$$

der Ausdruck

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = - \frac{\phi\left(\frac{U_{1-\alpha_2} - \rho \cdot U_{1-\alpha_1}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}{\phi\left(\frac{U_{1-\alpha_1} - \rho \cdot U_{1-\alpha_2}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}$$

Gleichung (4-14) ändert sich damit in

$$\exp\left(\frac{U_{\alpha_1}^2}{2}\right) \cdot \phi\left(\frac{U_{1-\alpha_1} - \rho \cdot U_{1-\alpha_2}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - \rho \cdot \exp\left(\frac{U_{\alpha_2}^2}{2}\right) \cdot \phi\left(\frac{U_{1-\alpha_2} - \rho \cdot U_{1-\alpha_1}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) = 0 \quad (4-16)$$

Da nun der Test d_1 ein unverfälschter Test zum Niveau α ist, und $\max_{\mu_1} \beta(\mu_1, \alpha) = 1 - \alpha = \max_{\mu_1} \beta(\mu_1, 0)$ gilt, folgt, falls das Gleichungssystem bestehend aus den Gleichungen (2-17) und (4-16) Lösungen besitzt, daß ein α_1^* bzw. α_2^* existiert, welches

$$\max_{\mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1)$$

in $[0, \alpha]$ minimiert.

Eine weitere Frage ist, ob das μ_1^* , welches (4-11) löst in der Tat ein Maximum der Funktion $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ ist? Dazu wird die zweite Ableitung betrachtet. Zunächst werden zur Vereinfachung der Schreibweise einige Definitionen getroffen:

$$A_1 := -\frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1} \right)^2$$

$$A_2 := \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2} - \rho \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1} \right) \right)$$

$$B_1 := -\frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2} \right)^2$$

$$B_2 := \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1} - \rho \cdot \left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2} \right) \right) \cdot$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial^2 \mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) &= -\rho \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1} \right) \cdot \exp(A_1) \cdot \frac{1}{\sigma_1} \cdot \phi(A_2) \\ &\quad - \rho \cdot \exp(A_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot A_2^2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sigma_2} + \frac{\rho}{\sigma_1}\right) \\ &\quad - \left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2} \right) \cdot \exp(B_1) \cdot \phi(B_2) \cdot \frac{1}{\sigma_2} \\ &\quad + \exp(B_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot B_2^2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sigma_1} - \frac{\rho}{\sigma_2}\right) \end{aligned} \tag{4-17}$$

Aus der notwendigen Bedingung (4-11) folgt

$$\rho \cdot \exp(A_1) \cdot \Phi(A_2) = \exp(B_1) \cdot \Phi(B_2) .$$

Ferner gilt

$$A_1 - \frac{1}{2} \cdot A_2^2 = B_1 - \frac{1}{2} \cdot B_2^2 .$$

Damit und mit (4-17) ergibt sich

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial^2 \mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) \Big|_{\mu_1^*} &= \exp(A_1) \cdot \Phi(A_2) \cdot \left[-\rho \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1^*}{\sigma_1} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[\frac{1}{\sigma_1} - \rho \cdot \frac{1}{\sigma_2} \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{M - \mu_1^*}{\sigma_2} \right) \right] \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp \left(A_1 - \frac{1}{2} \cdot A_2^2 \right) \cdot \\ &\quad \left[\rho \cdot \left(\frac{1}{\sigma_2} + \frac{\rho}{\sigma_1} \right) + \frac{1}{\sigma_1} + \frac{\rho}{\sigma_2} \right] \end{aligned} \quad (4-18)$$

gilt nun

$$\rho \cdot U_{1-\alpha_1} + U_{1-\alpha_2} > \frac{M}{\sigma_2} ,$$

dann gilt

$$-\rho \cdot U_{1-\alpha_1} - U_{1-\alpha_2} + \rho \cdot \frac{\mu_1^*}{\sigma_1} - \frac{\mu_1^*}{\sigma_2} + \frac{M}{\sigma_2} < 0$$

woraus

$$-\rho \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1^*}{\sigma_1} \right) \cdot \frac{1}{\sigma_1} - \rho \cdot \frac{1}{\sigma_2} \cdot \left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M - \mu_1^*}{\sigma_2} \right) < 0$$

folgt.

Damit gilt mit (4-13) die Beziehung

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 \mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) \Big|_{\mu_1^*} < 0 ,$$

woraus folgt, daß μ_1^* ein Maximum ist, was zu beweisen war. □

Bemerkung 4.2

Wie aus dem Gleichungssystem (4-6) zu entnehmen ist, kann man α_1^* bzw. α_2^* bestimmen, ohne die Alternativhypothese, d.h. M, festzulegen. Dieser Sachverhalt ist für die Planung des Testes besonders angenehm.

Die Figur 3 zeigt nun anhand konkreter Parameterwerte die graphische Bestimmung von α_1^* bzw. α_2^* . Da für diese Parameterwerte genau ein α_1^* bzw. α_2^* existiert, welches das Gleichungssystem (4-6) löst, folgt aus Satz 4.2 sofort, daß dieses α_1^* das gesuchte zur Lösung des Optimierungsproblems (4-2) darstellt, wenn die übrigen Bedingungen erfüllt sind. ○

Bemerkung 4.3:

Gleichung (4-14) besagt, daß

$$\exp\left(\frac{U_{\alpha_1}^2}{2}\right) + \rho \cdot \exp\left(\frac{U_{\alpha_2}^2}{2}\right) \cdot \frac{d_{\alpha_2}}{d_{\alpha_1}} = 0 \tag{4-19}$$

die hinreichende Bedingung für die Existenz eines Maximums für α_1 bei optimalen μ_1^* bzw. μ_2^* ist. ○

Die Differenzialgleichung (4-19) hat nun die allgemeine Lösung

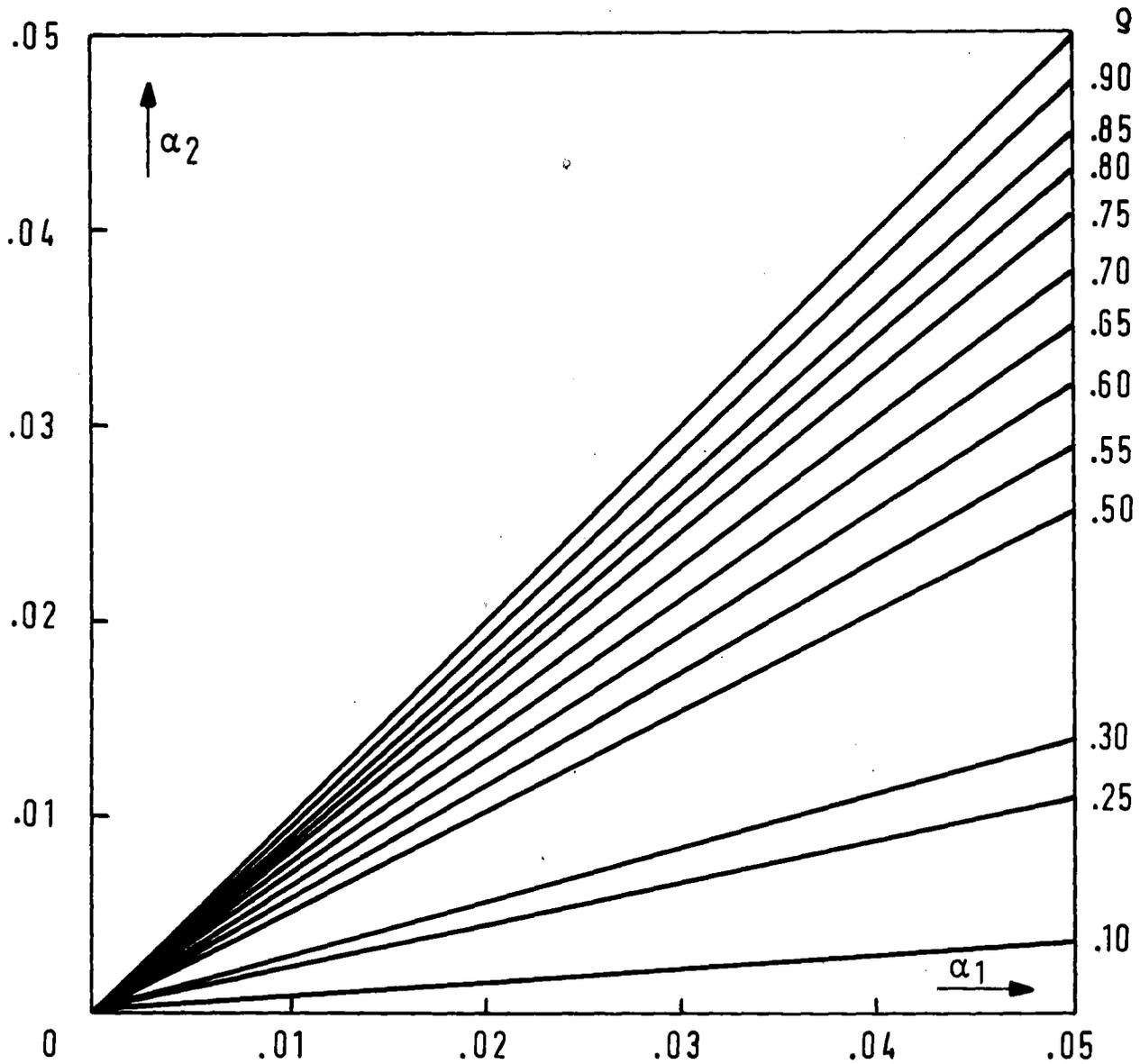
$$U_{\alpha_1} + \rho \cdot U_{\alpha_2} = \text{const.}$$

oder

$$U_{1-\alpha_1} + \rho \cdot U_{1-\alpha_2} = \text{const.}$$

} (4-20)

d. h. die Lösung ist eine Geradenschar mit Steigung $-\frac{1}{\rho}$ in der $U_{1-\alpha_1} - U_{1-\alpha_2}$ - Ebene.

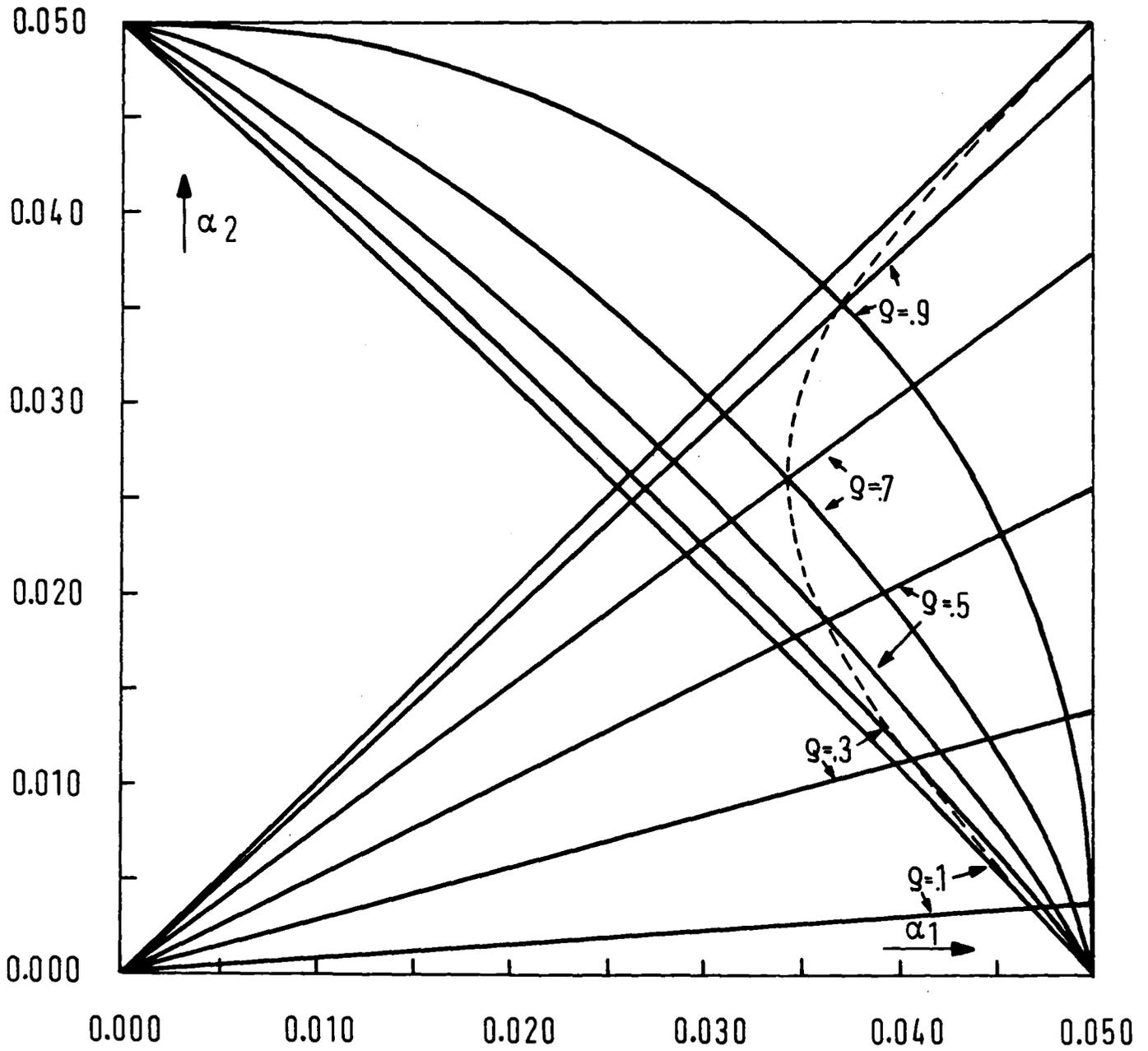


Figur 2:

Graphische Darstellung der Beziehung

$$\exp\left(\frac{U_{\alpha_1}^2}{2}\right) \cdot \phi\left(\frac{U_{1-\alpha_1}^{-\rho} \cdot U_{1-\alpha_2}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - \rho \cdot \exp\left(\frac{U_{\alpha_2}^2}{2}\right) \cdot \phi\left(\frac{U_{1-\alpha_2}^{-\rho} \cdot U_{1-\alpha_1}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) = 0$$

für α_1 und α_2 mit $\alpha = 0,05$ und ρ als Parameter.



Figur 3:

Verknüpfung von Figur 1 und Figur 2, die gestrichelte Linie gibt die optimalen α_1^* und α_2^* für die Lösung des Optimierungsproblems (4-2) an.

Wenn nun eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems (4-6) existiert, muß die Konstante in (4-20) so gewählt werden, daß die Lösungsgerade die Tangente der Kurve ist, welche die Randbedingung (2-17) erfüllt. Graphisch ist dieser Sachverhalt in Figur 4 dargestellt.

Aus (4-20) folgt

$$\frac{dU_{1-\alpha_2}}{dU_{1-\alpha_1}} = -\frac{1}{\rho} \quad (4-21)$$

(4-21) in (4-15) eingesetzt ergibt gerade wieder die Beziehung (4-16). Es sollte noch bemerkt werden, daß für eine graphische Bestimmung der optimalen α_1^* bzw. α_2^* Figur 3 angenehmer erscheint, da die Bestimmung eines Schnittpunktes von Geraden graphisch eindeutiger ist, als die eines Berührungspunktes. Ein Vorteil von Figur 4 ist, daß die Berechnung von (4-16) nicht notwendig ist, um α_1^* bzw. α_2^* festzulegen.

Hat nun die Minimax-Aufgabe aus (4-2) eine eindeutige Lösung (α_1^*, μ_1^*) , so schließt sich sofort die Frage an, ob diese Lösung auch das Optimierungsproblem

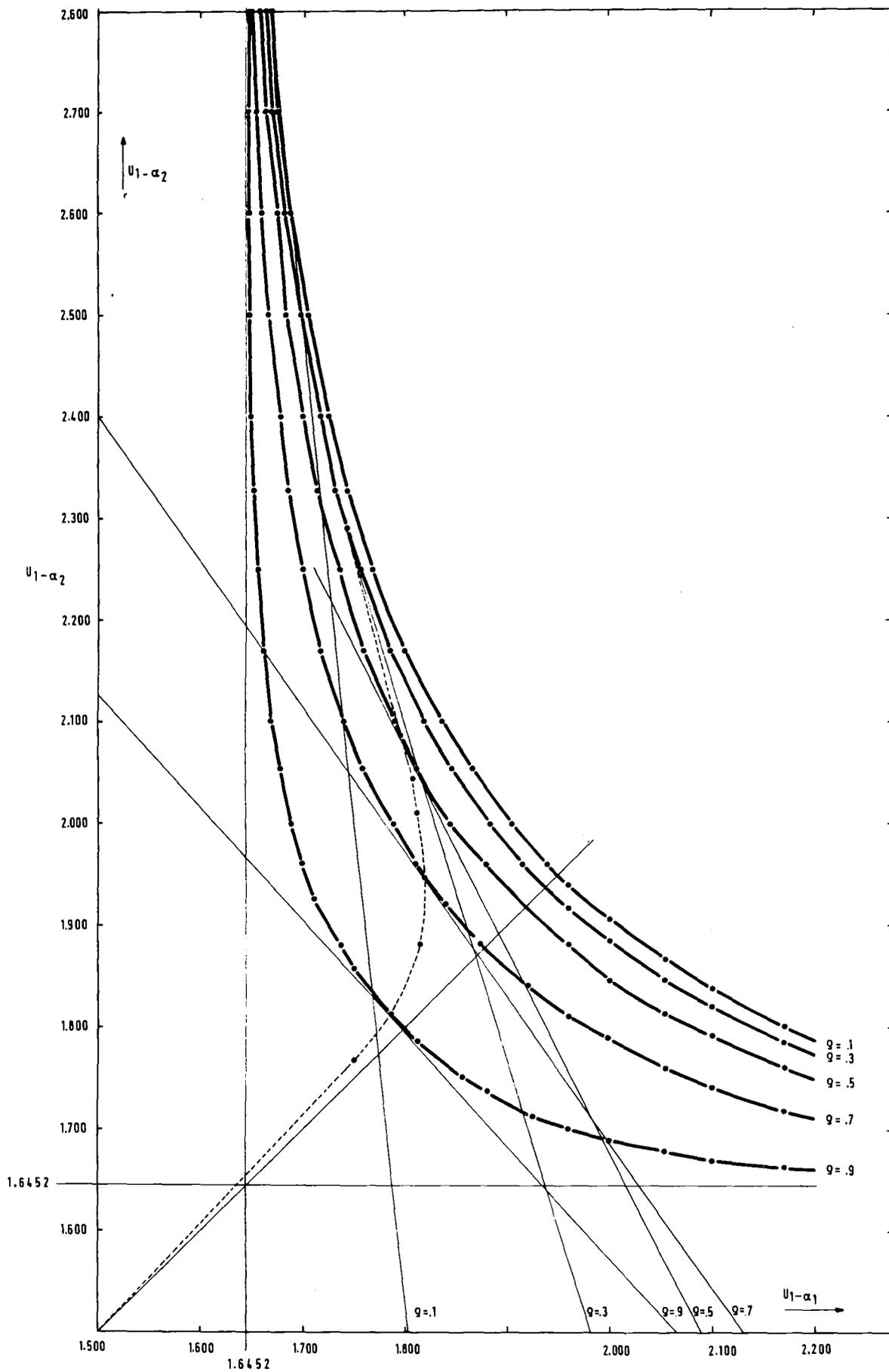
$$\max_{\mu_1} \min_{\alpha_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) \quad (4-22)$$

löst, d.h. einen Sattelpunkt darstellt. Satz 4.3 gibt darauf eine Antwort.

Satz 4.3:

Sei die Funktion $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ aus Satz 4.2 gegeben mit $\alpha \leq 0,5$; ferner gelte

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \rho \cdot U_{1-\alpha_1} - \frac{M}{\sigma_1} > 0 \\ \text{(ii)} \quad & U_{1-\alpha_2} - \frac{M}{\sigma_2} > 0 \end{aligned} \quad (4-23)$$



Figur 4:

Graphische Lösung des Optimierungsproblems (4-2),
wobei $\mu_1 + \mu_2 = M$ gilt und α_1, α_2 der Randbedingung (2-17) genügen.
Ferner seien die Voraussetzungen von Satz 4.2 erfüllt.

für alle α_1 und α_2 und die Beziehung

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{2\pi} \cdot \exp(A_1) \cdot \phi(A_2) \cdot \exp(U\alpha_1^2) \cdot \frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp(A_1 - \frac{1}{2} \cdot A_2^2) \cdot \exp(U\alpha_2^2) \cdot (-\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2}) \\
 & + \sqrt{2\pi} \cdot (-U\alpha_2) \exp(B_1) \cdot \phi(B_2) \cdot \exp(U\alpha_2^2) \cdot (\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1})^2 + \exp(B_1) \cdot \phi(B_2) \cdot \exp(\frac{U\alpha_2^2}{2}) \cdot (-\frac{d^2\alpha_2}{d^2\alpha_1}) \\
 & > \frac{2}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp(A_1 - \frac{1}{2} \cdot A_2^2) \cdot \exp(\frac{U\alpha_1^2}{2} + \frac{U\alpha_2^2}{2}) \cdot (-\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}) \\
 & + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp(A_1 - \frac{1}{2} \cdot A_2^2) \cdot \exp(U\alpha_1^2) + (U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2}) \cdot \exp(B_1) \cdot \phi(B_2) \cdot \\
 & \cdot \exp(\frac{U\alpha_2^2}{2}) \cdot (-\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1})
 \end{aligned} \tag{4-24}$$

für beliebiges oder festes $\mu_1 \in [0, M]$ und beliebige $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \alpha]$, die der Randbedingung (2-17) genügen. Die A_i, B_i , für $i=1,2$, seien definiert wie im Beweis von Satz 4.2.

Hat nun das Gleichungssystem (4-6) eine eindeutige Lösung, so existiert $\alpha_1^* \in [0, \alpha]$ und $\mu_1^* \in [0, M]$, die das Optimierungsproblem (4-2) lösen und es gilt

$$\min_{\alpha_1} \max_{\mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) = \max_{\mu_1} \min_{\alpha_1} \beta(\mu_1, \alpha_1)$$

d.h. (α_1^*, μ_1^*) ist ein Sattelpunkt von $\beta(\mu_1, \alpha_1)$.

Beweis:

Aus (4-23) folgt

$$0 < \rho \cdot U_{1-\alpha_1} - \frac{M}{\sigma_1} \leq \rho \cdot U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1} \leq U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_2} \tag{4-25}$$

und

$$0 < U_{1-\alpha_2} - \frac{M}{\sigma_2} \leq U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2} \tag{4-26}$$

Die Ungleichungen (4-25) und (4-26) lassen den Schluß

$$\rho \cdot U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_2} + U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2} > 0$$

zu. Daraus folgt aber sofort

$$\rho \cdot U_{1-\alpha_1} + U_{1-\alpha_2} > \frac{M}{\sigma_2} .$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 4.2 gegeben und damit die Existenz einer Lösung (α_1^*, μ_1^*) für das Optimierungsproblem (4-2) bewiesen. Zu zeigen bleibt noch, daß (α_1^*, μ_1^*) auch das Optimierungsproblem

$$\max_{\mu_1} \quad \min_{\alpha_1} \quad \beta(\mu_1, \alpha_1)$$

löst. Nach dem Satz von Sion-Kakutani ist zu zeigen, daß $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ für festes α_1 konkav in μ_1 und für festes μ_1 konvex in α_1 ist (Stoer, Witzgall 1970). Zuerst wird gezeigt, daß $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ für festes α_1 konkav in μ_1 ist. Dazu betrachtet man

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial^2 \mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) &= -\frac{1}{\sigma_1} \cdot \left[\left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1} \right) \cdot \frac{1}{\sigma_1} \cdot \exp(A_1) \cdot \phi(A_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(A_1 - \frac{1}{2} \cdot A_2^2\right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma_2} + \frac{\rho}{\sigma_2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sigma_2} \cdot \left[- \left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2} \right) \cdot \frac{1}{\sigma_2} \cdot \exp(B_1) \cdot \phi(B_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sigma_1} - \frac{\rho}{\sigma_2} \right) \cdot \exp\left(B_1 - \frac{1}{2} \cdot B_2^2\right) \right] . \end{aligned}$$

(4-27)

Aus (4-27) folgt, daß

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 \mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) < 0$$

ist, falls

$$U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1} > 0$$

und

$$U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2} > 0$$

gilt. Dies wird aber gerade durch Voraussetzung (4-23) erreicht.

Damit ist $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ konkav in μ_1 .

Als nächstes ist die Konvexität von $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ bezüglich α_1 zu zeigen.

Dazu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial^2 \alpha_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) &= \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1} \right) \cdot \exp(A_1) \cdot \phi(A_2) \cdot \exp\left(-\frac{U_{\alpha_1}^2}{2}\right) \cdot \frac{dU_{1-\alpha_1}}{d\alpha_1} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(A_1 - \frac{1}{2} \cdot A_2^2\right) \cdot \exp\left(-\frac{U_{\alpha_1}^2}{2}\right) \cdot \frac{dU_{1-\alpha_2}}{d\alpha_1} \\ &\quad + \frac{\rho}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(A_1 - \frac{1}{2} \cdot A_2^2\right) \cdot \exp\left(-\frac{U_{\alpha_1}^2}{2}\right) \cdot \frac{dU_{1-\alpha_1}}{d\alpha_1} \\ &\quad - U_{\alpha_1} \cdot \exp(A_1) \cdot \phi(A_2) \cdot \exp\left(-\frac{U_{\alpha_1}^2}{2}\right) \cdot \frac{dU_{\alpha_1}}{d\alpha_1} \\ &\quad + \left(U_{1-\alpha} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2} \right) \cdot \exp(B_1) \cdot \phi(B_2) \cdot \exp\left(-\frac{U_{\alpha_2}^2}{2}\right) \cdot \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp \left(B_1 - \frac{1}{2} \cdot B_2^2 \right) \cdot \exp \left(\frac{U_{\alpha_2}^2}{2} \right) \cdot \frac{dU_{1-\alpha_1}}{d\alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \\
 & + \frac{\rho}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp \left(B_1 - \frac{1}{2} \cdot B_2^2 \right) \cdot \exp \left(\frac{U_{\alpha_2}^2}{2} \right) \cdot \frac{dU_{1-\alpha_1}}{d\alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \\
 & - U_{\alpha_2} \cdot \exp \left(B_1 \right) \cdot \phi \left(B_2 \right) \cdot \exp \left(\frac{U_{\alpha_2}^2}{2} \right) \cdot \frac{dU_{\alpha_2}}{d\alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \\
 & - \exp \left(B_1 \right) \cdot \phi \left(B_2 \right) \cdot \exp \left(\frac{U_{\alpha_2}^2}{2} \right) \cdot \frac{d^2\alpha_2}{d\alpha_1^2} \quad . \quad (4-28)
 \end{aligned}$$

Notwendig und hinreichend für die Konvexität von $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ bezüglich α_1 ist

$$\frac{\partial^2}{\partial^2\alpha_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) > 0 \quad . \quad (4-29)$$

Aus (4-28) folgt nun

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial^2\alpha_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) & = \sqrt{2\pi} \cdot \exp \left(A_1 \right) \cdot \phi \left(A_2 \right) \cdot \exp \left(U_{\alpha_1}^2 \right) \cdot \frac{\mu_1}{\sigma_1} \\
 & + \frac{2}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp \left(A_1 - \frac{1}{2} \cdot A_2^2 \right) \cdot \exp \left(\frac{U_{\alpha_1}^2}{2} + \frac{U_{\alpha_2}^2}{2} \right) \cdot \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \\
 & - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp \left(A_1 - \frac{1}{2} \cdot A_2^2 \right) \cdot \exp \left(U_{\alpha_1}^2 \right) \\
 & + \left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M-\mu_1}{\sigma_2} \right) \cdot \exp \left(B_1 \right) \cdot \phi \left(B_2 \right) \cdot \exp \left(\frac{U_{\alpha_2}^2}{2} \right) \cdot \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \\
 & - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp \left(A_1 - \frac{1}{2} \cdot A_2^2 \right) \cdot \exp \left(U_{\alpha_2}^2 \right) \cdot \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \quad .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sqrt{2\pi} \cdot U_{\alpha_2} \cdot \exp(B_1) \cdot \phi(B_2) \cdot \exp(U_{\alpha_2}^2) \cdot \left(\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right)^2 \\
 & - \exp(B_1) \cdot \phi(B_2) \cdot \exp\left(\frac{U_{\alpha_2}^2}{2}\right) \cdot \frac{d^2\alpha_2}{d^2\alpha_1}
 \end{aligned} \tag{4-30}$$

und somit gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial^2\alpha_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) > 0$$

falls (4-24) erfüllt ist. Nun sind die Voraussetzungen des Satzes von Sion - Kakutani gegeben und es ist bewiesen, daß (μ_1^*, α_1^*) ein Sattelpunkt von $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ ist. □

Satz 4.4

Seien die Voraussetzungen von Satz 4.2 und (4-23) gegeben mit

$$\sigma^2_1 \leq 2 \cdot \sigma^2_2 \tag{4-31}$$

dann gilt

$$E_{H_1} \left[d_{1, \alpha_1}(X_1, X_2) \right] \leq E_{H_1} \left[\tilde{d}_2(X_1, X_2) \right] \tag{4-32}$$

für alle α_1 , die die Randbedingung (2-17) erfüllen, und für alle $H_1 \in \mathcal{H}_1$.

Beweis:

Aus dem Beweis von Satz 4.1 folgt

$$E_{H_{12}} \left[d_{1,0}(X_1, X_2) \right] = \Phi\left(\frac{M}{\sigma_2} - U_{1-\alpha}\right) = 1 - \beta(0,0)$$

und aus (4-31) folgt

$$\Phi\left(\frac{M}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}} - U_{1-\alpha}\right) \geq \Phi\left(\frac{M}{\sigma_2} - U_{1-\alpha}\right) . \quad (4-33)$$

Als nächstes wird

$$\min_{\alpha_1} \beta(0, \alpha_1) = \beta(0, 0) \quad (4-34)$$

gezeigt. Dazu definiert man

$$v(t_1, t_2) := \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left[-\frac{t_1^2 - 2 \cdot \rho \cdot t_1 \cdot t_2 + t_2^2}{2(1-\rho^2)}\right] \quad (4-35)$$

und

$$A(\alpha_1) := \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_1}} dt_1 \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_2}} dt_2 v(t_1, t_2) - \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_1}} dt_1 \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_2} - \frac{M}{\sigma_2}} dt_2 v(t_1, t_2) \quad (4-36)$$

$$= \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_1}} dt_1 \int_{U_{1-\alpha_2} - \frac{M}{\sigma_2}}^{U_{1-\alpha_2}} dt_2 v(t_1, t_2)$$

Aus der Beziehung (4-23) folgt

$$\Phi\left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M}{\sigma_2}\right) - \Phi\left(U_{1-\alpha} - \frac{M}{\sigma_2}\right) \geq \Phi(U_{1-\alpha_2}) - \Phi(U_{1-\alpha}) = \alpha - \alpha_2 . \quad (4-37)$$

Mit (4-37) ergibt sich

$$1 - \alpha - \Phi\left(U_{1-\alpha} - \frac{M}{\sigma_2}\right) \geq 1 - \alpha_2 - \Phi\left(U_{1-\alpha_2} - \frac{M}{\sigma_2}\right)$$

oder

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{U_{1-\alpha} - \frac{M}{\sigma_2}}^{U_{1-\alpha}} dt_2 v(t_1, t_2) \geq \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{U_{1-\alpha_2} - \frac{M}{\sigma_2}}^{U_{1-\alpha_2}} dt_2 v(t_1, t_2)$$

(4-38)

$$\geq \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_1}} dt_1 \int_{U_{1-\alpha_2} - \frac{M}{\sigma_2}}^{U_{1-\alpha_2}} dt_2 v(t_1, t_2)$$

und aus (4-38) folgt

$$\max_{\alpha_1} A(\alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{U_{1-\alpha} - \frac{M}{\sigma_2}}^{U_{1-\alpha}} dt_2 v(t_1, t_2) ,$$

woraus dann sofort (4-34) folgt. Da nun

$$1-\beta(\mu_1, \alpha_1)$$

für beliebiges fixiertes α_1 eine konvexe Funktion in μ_1 ist und

$$E_{H_{11}} \left[d_{1, \alpha_1}(X_1, X_2) \right] \leq E_{H_{11}} \left[\tilde{d}_2(X_1, X_2) \right]$$

für alle α_1 gilt, folgt (4-32) sofort.

□

5. Betrachtungen für spezielle Parameterwerte

Im Falle des Neyman-Pearson-Testes zeigt Satz 3.1, daß unter der Hypothese $H_{11} \in \mathcal{H}_1$ der Test die kleinste Schärfe besitzt. Dieses Erkenntnis ist für die in Teil II behandelten Anwendungen von Bedeutung, d.h. dort ist die Hypothese, die

$$\max_{H_{11} \in \mathcal{H}_1} (1 - E_{H_{11}} [d_2(X_1, X_2)]) \quad (5-1)$$

löst, durch H_{11} gegeben. Beim Optimierungsproblem (4-2) dagegen ist die Bestimmung von μ_1^* nicht so einfach möglich. Man weiß nur, daß dasjenige μ_1 , welches

$$\max_{\mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) \quad (5-2)$$

für ein bestimmtes fixiertes $\alpha_1 \in (0, 1)$ erfüllt, die Gleichung (4-11) erfüllen muß. Wo dieses μ_1^* nun im Intervall $[0, M]$ liegt, geht daraus nicht hervor. Auf dieses Problem soll nun kurz eingegangen werden. Dazu werden zunächst einige Überlegungen angestellt.

Gilt nun $\rho \geq 0,9$, so kann bei der Lösung des Optimierungsproblems (4-2) näherungsweise

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

angenommen werden, was aus Figur 3 deutlich wird. Diese Annahme bringt etwas Licht ins Dunkel von μ_1 .

Satz 5.1:

Gegeben sei die Funktion $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ aus Satz 4.2 mit $\alpha_1 = \alpha_2$ fest, wobei die Randbedingung (2-17) erfüllt ist und es gelte (4-5).

Dann gilt

$$\mu_1^* \in \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot M, M \right] \quad (5-3)$$

wobei

$$\beta(\mu_1^*, \alpha_1) = \max_{\mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1)$$

gilt

Beweis:

Aus dem Beweis von Satz 4.2 folgt zunächst

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 \mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) < 0 .$$

An der Stelle

$$\mu_1' = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot M \quad (5-4)$$

gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) \Big|_{\mu_1'} = \\ & = -\frac{1}{\sigma_1} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot M \cdot \frac{1}{\sigma_1} \right)^2 \right) \cdot \\ & \cdot \phi \left(\frac{U_{1-\alpha_1} - \frac{M - \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot M}{\sigma_2} - \rho \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot M \cdot \frac{1}{\sigma_1} \right)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \cdot \\ & + \frac{1}{\sigma_2} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{M - \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot M}{\sigma_2} \right)^2 \right) \cdot \\ & \cdot \phi \left(\frac{U_{1-\alpha_1} - \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot M \cdot \frac{1}{\sigma_1} - \rho \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{M - \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot M}{\sigma_2} \right)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{\sigma_1} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{M}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)^2\right) \cdot \phi\left(\frac{U_{1-\alpha_1} - \frac{M}{\sigma_1 + \sigma_2} - \rho \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{M}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \\
 &+ \frac{1}{\sigma_2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{M}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)^2\right) \cdot \phi\left(\frac{U_{1-\alpha_1} - \frac{M}{\sigma_1 + \sigma_2} - \rho \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{M}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{M}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)^2\right) \cdot \phi\left(\frac{U_{1-\alpha_1} - \frac{M}{\sigma_1 + \sigma_2} - \rho \cdot \left(U_{1-\alpha_1} - \frac{M}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)
 \end{aligned}$$

Da nun $\sigma_2 < \sigma_1$ angenommen wurde, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial \mu_1} \beta(\mu_1, \alpha_1) \Big|_{\mu_1'} > 0$$

und aus dieser Beziehung sofort die Behauptung. □

Bemerkung 5.1:

Das μ_1' aus (5-4) ist gerade der Punkt im Intervall $[0, M]$ der

$$E_{H_{\mu_1, X_1}} \left[\Psi_1(X_1) \right] = E_{H_{M-\mu_1, X_2}} \left[\Psi_2(X_2) \right]$$

erfüllt, wobei Ψ_1 und Ψ_2 die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art α_1 haben, da er der Gleichung

$$\Phi\left(U_{1-\alpha_1} - \frac{\mu_1}{\sigma_1}\right) = \Phi\left(U_{1-\alpha_1} - \frac{M}{\sigma_2} + \frac{\mu_1}{\sigma_2}\right)$$

genügt. ○

Spezialfall $\rho = 1$

Das Optimierungsproblem (4-2) ist bis jetzt nur für den Fall $0 < \rho < 1$ betrachtet worden. Im Fall $\rho = 1$ ist eine Darstellung von $\beta(\mu_1, \alpha_1)$ in der Form (2-20) nicht möglich, d.h. Satz 4.2 kann in diesem Fall nicht angewendet werden. Der Fall $\rho = 1$ ist nur in Zusammenhang mit Satz 5.1 von Interesse.

Gilt nun $\rho = 1$, so folgt

$$P \left\{ X_1 = a \cdot X_2 \right\} = 1$$

mit $a > 0$.

Da nun in unserem Fall

$$\rho = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

gilt, folgt also

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

und daraus

$$\sigma_1^2 = \text{Var} [X_1] = \text{Var} [aX_2] = a^2 \cdot \text{Var} [X_2] = a^2 \cdot \sigma_1^2$$

und somit

$$a = 1. \tag{5-5}$$

Aus dem bisherigen Überlegungen ergibt sich

$$E [X_1] = E [X_2] \tag{5-6}$$

d.h. bei der Formulierung der Alternativhypothese ist nur der Fall

$$\mu_1 = \mu_2 \tag{5-7}$$

sinnvoll.

Mit der Randbedingung

$$\mu_1 + \mu_2 = M$$

ergibt sich dann sofort

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{M}{2} \quad . \quad (5-8)$$

Für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art α des bivariaten Testes ergibt sich

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P_{H_0} \left\{ (X_1 \leq s_1) \cap (X_2 \leq s_2) \right\} \\ &= P_{H_0} \left\{ X_{i_0} \leq s_{i_0} \right\} \end{aligned}$$

für $s_{i_0} = \max(s_1, s_2)$, d.h.

$$1-\alpha = 1-\alpha_{i_0}$$

oder

$$\alpha = \alpha_{i_0} \quad . \quad .$$

Sei nun o.E. d.A.

$$\alpha_{i_0} = \alpha_1$$

dann kann man

$$\alpha_2 \leq \alpha$$

beliebig wählen.

Somit bleibt beim Optimierungsproblem (4-2) für $\rho = 1$ gar keine Wahl, sondern die Überlegungen in oberem Fall führen sofort auf

$$\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 \leq \alpha$$

und

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{M}{2} .$$

Teil II: Anwendung der theoretischen Ergebnisse auf Fragen der Spaltstoff-
flußkontrolle

Im folgenden werden die theoretischen Problemstellungen aus Teil I auf konkrete Fragestellungen der internationalen Spaltstoffflußkontrolle angewendet. Es zeigt sich, daß diese zum Teil sehr theoretischen Probleme zu sinnvollen Antworten bei der Lösung von Überwachungsproblemen führen.

Zu Demonstrationen der verschiedenen Verfahren wurden Daten verwendet, wie sie bei der Überwachung von nuklearen Anlagen auftreten (Avenhaus, Beedgen, Neu 1980). Man kann sich auf diese Weise einen besseren Eindruck von der Leistungsfähigkeit des eingesetzten statistischen Werkzeugs verschaffen. Gerade in der Statistik kommt diesem Aspekt wesentliche Bedeutung bei.

6. IAEO - Kontrollen

Ausführendes Organ der internationalen Spaltstoffflußkontrolle ist wie schon in der Einleitung erwähnt die Internationale Atomenergieorganisation (IAEO) in Wien. Sie soll durch ihre Kontrolle gewährleisten, daß diejenigen Nichtkernwaffenstaaten, die den Atomwaffensperrvertrag ratifiziert haben, nicht in den Besitz von nuklearen Sprengkörpern gelangen. Gemäß dem Modellabkommen INFCIRC 153 (IAEO 1971) ist das Prinzip der Materialbilanzierung für diese Kontrollen von fundamentaler Bedeutung. Das bedeutet, daß die Materialbilanzierung in nuklearen Anlagen außer zur Überwachung des darin laufenden Prozesses auch zur Kontrolle spaltbaren Materials benutzt wird.

Das Überwachungsverfahren ist wie ebenfalls schon in der Einleitung erwähnt so organisiert, daß der Anlagenbetreiber einer nuklearen Anlage die Quelldaten, die eine Materialbilanz ermöglichen, aufzeichnet und sie in einer zusammengefaßten Form der nationalen bzw. regionalen Behörde übermittelt. Diese wiederum schickt sie an die IAEO. Die IAEO verifiziert nun die erhaltenen Daten mit Hilfe unabhängiger eigener Messungen. Stimmen die Betreiberdaten mit den IAEO-Messungen unter Berücksichtigung der Messungsungenauigkeiten überein, werden nach diesem System die Betreiberdaten akzeptiert und mit ihnen wird die Materialbilanz erstellt.

Im 1971er Modellabkommen sind die Überwachungsziele nur sehr allgemein umschrieben worden. Dort heißt das Ziel "timely detection of diversion of significant amounts". Es wurde nicht darauf eingegangen, was unter einer rechtzeitigen Entdeckung und einer signifikanten Menge zu verstehen ist. Man hatte auch keine Vorstellungen darüber, welche Parameter bei der Überwachungsprozedur von Bedeutung sind und daher zahlenmäßig festgelegt werden müssen, wie zum Beispiel Entdeckungswahrscheinlichkeit, Fehlalarmwahrscheinlichkeit oder Zielmenge. In den letzten Jahren hat man sich nun den Aufgaben gestellt, die gegebenen Modelle mathematisch klar zu definieren, um qualitative und quantitative Aussagen über diese Systemparameter machen zu können. Im folgenden wird die auf der Materialbilanzierung und der Datenverifizierung beruhenden Überwachungsprozedur unter obigen Gesichtspunkten analysiert. Vor allem sollen aber qualitative und quantitative Aussagen über die Effizienz dieser Überwachungsprozedur

gemacht werden. Es wird gezeigt, wie die statistischen Tests aus der Modellbildung heraus entstehen. Bei der Bestimmung der Effizienz, d.h. der Entdeckungswahrscheinlichkeit der Prozedur, werden die dem Überwachungssystem entsprechenden Entwendungsmöglichkeiten dargestellt und Entwendungen des Betreibers angenommen. Es wird dabei berücksichtigt, daß eine bestimmte Menge an Material auf vielfältige Art und Weise in diesem System entwendet werden kann.

Es wird sich zeigen, daß die Abstrahierung dieser komplizierten Fragestellung gerade zu den in Teil I behandelten mathematischen Überlegungen führt und somit deren Anwendung in einem sehr wichtigen Teilbereich der Kernenergienutzung darstellt.

7. Materialbilanztest

In diesem Kapitel soll das Materialbilanzprinzip dargestellt werden (siehe Beedgen, Neu 1980). Es wird eine Materialbilanzzone beschrieben, durch die sich in einem gegebenen Zeitintervall eine Menge eines bestimmten Materials bewegt. Das Buchinventar wird als vorhandenes Anfangsinventar plus Eingänge minus Ausgänge definiert und das Bilanzprinzip formuliert. Es besagt, daß, wenn kein Material verloren gegangen ist oder entwendet wurde, das Buchinventar zu einem beliebigen Zeitpunkt gleich dem tatsächlich vorhandenen Inventar ist.

In vielen Fällen ist die Ermittlung des Inventars mit zufälligen Fehlern behaftet, zum Beispiel bei Messungen von spaltbarem Material. Aus dieser Tatsache heraus entwickelt sich ein Entscheidungsproblem. Es muß eine Aussage darüber gemacht werden, worauf eine Ungleichheit von Buchinventar und gemessenem Inventar zurückzuführen ist. Dieses Entscheidungsproblem soll mit Hilfe mathematischer Tests gelöst werden.

Materialbilanzprinzip für eine Inventurperiode

Es werde nun eine wohldefinierte geschlossene Box betrachtet, die zum Zeitpunkt t_0 ein bestimmtes Material enthält. Im Zeitintervall (t_0, t_1) kommt von diesem Material von außen in die Box hinein, und eine gewisse Menge dieses Materials verläßt die Box. Diese Box soll im folgenden Materialbilanzzone genannt werden und kann zum Beispiel eine Industrieanlage sein, die mit spaltbarem Material arbeitet.

Die Materialmenge, die sich zur Zeit t_0 in der Materialbilanzzone befindet, wird mit I_0 bezeichnet. Die Materialzugänge in (t_0, t_1) mit R und die Materialabgänge in (t_0, t_1) mit S . Das Buchinventar B zur Zeit t_1 ist nun definiert als

$$B := I_0 + R - S \quad . \quad (7-1)$$

Die Materialmenge, die sich zur Zeit t_1 in der Materialbilanzzone befindet, wird mit I_1 bezeichnet. Figur 5 soll das Materialbilanzkonzept illustrieren.

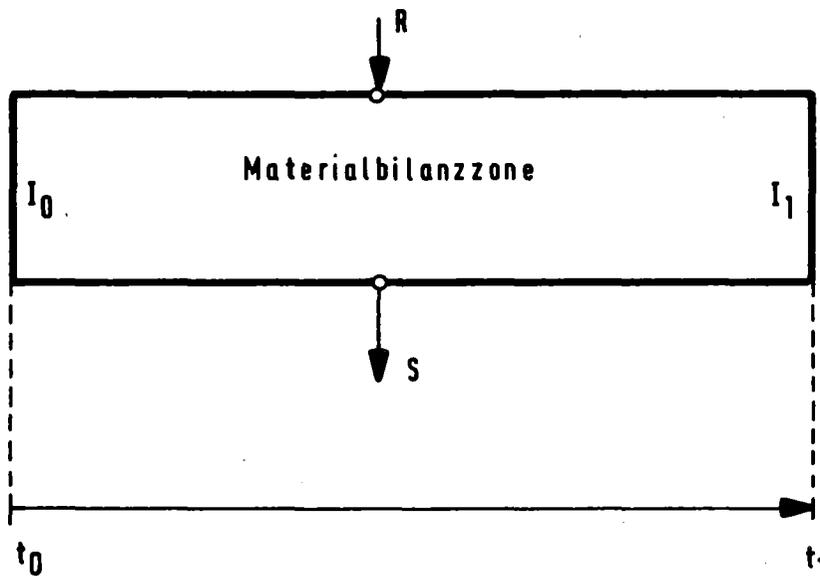
Wenn nun kein Material in der Zeitspanne (t_0, t_1) auf irgend eine Art und Weise verschwindet und alle Materialbestimmungen und Materialbewegungen genau registriert werden, gilt

$$B - I_1 = I_0 + R - S - I_1 = 0 .$$

Sind die obigen Voraussetzungen aber nicht alle gegeben kann der Fall

$$B - I_1 \neq 0$$

eintreten.



Figur 5 : Das Materialbilanzkonzept

- $[t_0, t_1]$: Zeitraum der Materialbilanzierung
- I_0 : Vorhandene Materialmenge zur Zeit t_0
- I_1 : Vorhandene Materialmenge zur Zeit t_1
- R : Materialzugänge in (t_0, t_1)
- S : Materialabgänge in (t_0, t_1)

Die Differenz zwischen Buchinventar B und vorhandenem Material I_1 wird definiert als

$$\text{MUF} \stackrel{1)}{:=} B - I_1 = I_0 + R - S - I_1 \quad (7-2)$$

Mit der Definition

$$D := R - S \quad (7-3)$$

folgt dann aus (7-2)

$$\text{MUF} = I_0 + D - I_1 \quad (7-4)$$

Tritt nun der Fall $\text{MUF} \neq 0$ ein, entsteht das Entscheidungsproblem, herauszufinden was die Ursachen sind. Das gegebene Entscheidungsproblem soll nun mit Hilfe eines parametrischen statistischen Tests gelöst werden.

Formulierung des Materialbilanztestes

Im folgenden wird angenommen, daß die Bestimmungen der realen Materialbestände I_0 und I_1 sowie der Zugänge R und Abgänge S durch Messungen stattfinden, die mit Meßfehlern behaftet sind. Es ist nun zu entscheiden, ob der Fall "MUF ungleich Null" auf die Meßfehler zurückgeführt werden kann oder ob eine andere Ursache, zum Beispiel Materialentwendung, der Grund dafür ist.

Um dieses Entscheidungsproblem mit Hilfe der mathematischen Testtheorie behandeln zu können, ist zuerst eine mathematische Formulierung notwendig. Es wird angenommen, daß I_0 , I_1 , R und S aus K Materialklassen bestehen mit jeweils N_i , $1 \leq i \leq K$, Elementen. Die Betreibermessung eines Elementes j in Klasse i sei

$$X_{ij} := T_{ij} + e_{Oij} + d_{0i} \quad \begin{array}{l} i=1,2,\dots,K \\ j=1,2,\dots,N_i \end{array} \quad (7-5)$$

wobei T_{ij} der wahre Materialgehalt des Elementes, d_{0i} die Zufallsvariable

1) MUF ist eine Abkürzung von 'material unaccounted for'. Der Begriff wurde von K.B. Stewart eingeführt (siehe Stewart 1959).

des systematischen Fehlers der Messung in Klasse i und e_{Oij} die Zufallsvariable des zufälligen Fehlers bei Messung von Element j in Klasse i sind. Es wird weiter angenommen, daß die zufällige und systematischen Fehler stochastisch unabhängig und normalverteilt sind mit

$$E \left[e_{Oij} \right] = E \left[d_{Oi} \right] = 0 \quad \begin{array}{l} i=1,2,\dots, K \\ j=1,2,\dots, N_i \end{array} \quad (7-6)$$

$$\text{Cov} \left[d_{Oi}, d_{Oi'} \right] = 0 \quad \text{für } i \neq i'$$

$$\text{Cov} \left[e_{Oij}, e_{Oij'} \right] = 0 \quad \text{für } (i, j) \neq (i', j')$$

und es sei

$$\sigma^2_{Ori} := \text{Var} \left[e_{Oij} \right] \quad (7-7)$$

$$\sigma^2_{Osi} := \text{Var} \left[d_{Oi} \right]$$

für $i=1,2,\dots,K$, $j=1,2,\dots, N_i$ definiert.

Nach Darlegung dieser Voraussetzungen ergibt sich, daß I_0 , I_1 , R und S normalverteilte Zufallsvariablen sind, und somit mit (7-2) MUF eine normalverteilte Zufallsvariable ist.

Wird nun kein Material entwendet, gilt

$$E \left[\text{MUF} \right] = 0 \quad . \quad (7-8)$$

Wird dagegen Material der Menge M_2 entwendet, so gilt

$$E \left[\text{MUF} \right] = M_2 \quad , \quad (7-9)$$

denn für $E [I_1]$ gilt in diesem Fall die Gleichung

$$E [I_1] = E [I_0] + E [R] - E [S] - M_2, \quad (7-10)$$

wenn der Betreiber alle Daten korrekt berichtet.

Man hat also nun die Grundlage für einen parametrischen Test für den Parameter $E [MUF]$ der Zufallsvariablen MUF. Die beiden Hypothesen sind nun

$$H_0 : E [MUF] = 0 \quad H_1 : E [MUF] = M_2 > 0, \quad (7-11)$$

wobei die Formulierung der Hypothesen zeigen soll, daß nur die Erwartungswerte getestet werden.

Sei nun

$$\{\widehat{MUF}\} \subseteq \mathbb{R} \quad (7-12)$$

der Stichprobenraum der Zufallsvariablen MUF, dann wird der Test Ψ_{MUF} definiert:

$$\Psi_{MUF}(\widehat{MUF}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \widehat{MUF} > s_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7-13)$$

Die Größe s_2 bestimmt sich aus der Vorgabe eines Fehlers 1. Art $\alpha \in (0, 1)$, und zwar

$$\alpha = P_{H_0} \{MUF > s_2\} \quad (7-14)$$

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art β läßt sich darstellen als

$$\beta = P_{H_1} \{MUF \leq s_2\} \quad (7-15)$$

Der Test Ψ_{MUF} gibt nun die folgenden Entscheidungen auf Grund einer Realisierung \widehat{MUF} von MUF.

- (i) " H_0 ist richtig", falls $\widehat{MUF} \leq s_2$
- (ii) " H_0 ist nicht richtig" oder " H_1 ist richtig", falls $\widehat{MUF} > s_2$.

Da es nun bei der Kontrolle von spaltbarem Material, in dessen Zusammenhang die obigen Überlegungen entstanden sind, darum geht, ob Material entwendet wurde oder nicht, bezeichnet man α als *Fehlalarmwahrscheinlichkeit*, d.h. irgendein Kontrolleur entscheidet, daß eine Entwendung M_2 stattgefunden hat, wenn in Wirklichkeit dies nicht der Fall ist. Die Größe β wird dann *Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit* genannt, da in diesem Fall der Kontrolleur die Aussage "keine Entwendung M_2 " macht, obwohl dies in Wirklichkeit der Fall ist.

Da nach den getroffenen Annahmen eine Normalverteilung von MUF vorliegt, haben die Fehlalarmwahrscheinlichkeit α und die Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit β dann die Gestalt (siehe auch Avenhaus 1978)

$$1-\alpha = \Phi\left(\frac{s_2}{\sigma_2}\right) \quad (7-16)$$

$$1-\beta = \Phi\left(\frac{M_2}{\sigma_2} - U_{1-\alpha}\right) \quad (7-17)$$

mit

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot t^2\right) dt \quad (7-18)$$

$$U_x := \Phi^{-1}(x)$$

$$\sigma_2^2 := \text{Var} \left[\text{MUF} \right] \quad .$$

Den Test Ψ_{MUF} bezeichne ich im folgenden kurz mit MUF-Test, was einer allgemeinen Konvention entspricht.

8. Datenverifizierungstest

In Kapitel 7 wurde angenommen, daß alle Daten einer Materialbilanz bis auf Meßfehler korrekt sind. Es wurde also keine Verfälschung angenommen, die nicht auf diese zufälligen Meßfehler zurückgeführt werden kann.

Weil nun das Materialbilanzprinzip zur Materialüberprüfung benutzt, können solche bewußten Datenverfälschungen nicht ausgeschlossen werden. Damit also die Kontrollfunktion der Materialbilanzierung weiterhin gegeben sein soll, muß eine Datenverifizierung (Avenhaus 1978) durchgeführt werden. Die Verifizierung der Daten geschieht in der Regel stichprobenartig. Damit erhebt sich das Problem der Auswahl der Stichproben. Auf dieses Problem soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden; es wird auf entsprechende Literatur verwiesen (Avenhaus 1978, Jaech 1973).

Inventarverifikation

Sei nun eine Inventurperiode, wie in Kapitel 7 beschrieben, gegeben. Ferner werde eine Materialkontrolle mit dem Materialbilanzierungsprinzip durchgeführt. Die angegebenen Daten sollen nun mit unabhängigen Messungen des Kontrollleurs stichprobenartig überprüft werden.

a) Inventar bestehend aus einer Materialklasse.

Gegeben sei eine Klasse eines wohlbestimmten Materials. Diese Klasse besteht aus $N \in \mathbb{N}$ wohldefinierten Elementen. Die Messung des Anlagenbetreibers für Element $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ sei

$$X_j := T_j + d_0 + e_{0j}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (8-1)$$

wobei $T_j \in \mathbb{R}^+$ der wahre Materialgehalt des Elementes sei, d_0 die Zufallsvariable des systematischen Fehlers der Messung und e_{0j} die Zufallsvariable des zufälligen Fehlers der Messung j . Es gelte

$$\text{Cov} [d_0, e_{0j}] = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad E [d_0] = 0; \quad E [e_{0j}] = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$\sigma_{0s}^2 := \text{Var} [d_0]; \quad \sigma_{0r}^2 := \text{Var} [e_{0j}] \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, N$$

(8-2)

Mit Hilfe eines Stichprobenplanes zieht nun der Kontrolleur n Elemente ohne Zurücklegen und mißt ihren Materialgehalt. Nach Umindizierung kann man annehmen, daß der Kontrolleur die ersten n Elemente der Klasse unabhängig vom Betreiber mißt. Die Messung des Kontrolleurs für Element $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sei

$$Y_i = T_i + d_I + e_{Ii} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8-3)$$

falls der Betreiber kein Material von Element i entwendet hat. Dabei sei d_I die Zufallsvariable des systematischen Fehlers des Kontrolleurs und e_{Ii} die Zufallsvariable des zufälligen Fehlers der Messung i . Es gelte

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[d_I, e_{Ii} \right] &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad E \left[d_I \right] = 0; \quad E \left[e_{Ii} \right] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \sigma_{Is}^2 &:= \text{Var} \left[d_I \right], \quad \sigma_{Ir}^2 := \text{Var} \left[e_{Ii} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (8-4)$$

Nimmt man nun an, daß der Betreiber nach seinen Materialmessungen von r Elementen jeweils die Materialmenge μ entfernt, folgt für die Inspektormessungen dieser Elemente wieder nach entsprechender Umindizierung

$$Y_j = T_j - \mu + d_I + e_{Ij} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (8-5)$$

Die hier behandelte Statistik, die die Betriebsmessungen mit denen des Kontrolleurs vergleicht, ist die sogenannte *D-Statistik*. Sie wurde von K.B. Stewart (1971) eingebracht. Die Statistik D ist definiert als

$$D := K - I \quad (8-6)$$

wobei I definiert ist als

$$I := \frac{N}{n} \cdot \sum_{j=1}^n Y_j \quad (8-7)$$

und β als

$$K := \frac{N}{n} \cdot \sum_{j=1}^n X_j \quad (8-8)$$

I ist eine erwartungstreue Schätzung des Materialgehalts in der gegebenen Klasse mit Inspektordaten. B ist eine Schätzung des Materialgehalts mit den Betreiberdaten.

Entwendet der Betreiber nun kein Material aus der Klasse, dann gilt mit (8-1) und (8-3)

$$E [D] = 0 .$$

Entwendet er aber aus r Elementen jeweils den Betrag μ , dann gilt mit (8-1) und (8-5)

$$E [D] = \mu \cdot r =: M_1 > 0 .$$

Nimmt man nun weiter an, daß die X_i , $1 \leq i \leq N$, und Y_j , $1 \leq j \leq n$, einer Normalverteilung unterliegen, wobei der systematische und der zufällige Fehler stochastisch unabhängig sind, ist wiederum die Grundlage für einen parametrischen Test gegeben. Die beiden Hypothesen lauten dann

$$H_0 : E [D] = 0 \tag{8-9}$$

$$H_1 : E [D] = M_1 > 0 . \tag{8-10}$$

wobei

$$\text{Var} [X_j] = \sigma_{0s}^2 + \sigma_{0r}^2, \quad \text{Var} [Y_j] = \sigma_{1s}^2 + \sigma_{1r}^2, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

gilt. Sei nun

$$\{ \hat{D} \} \subseteq \mathbb{R} \tag{8-11}$$

der Stichprobenraum der Zufallsvariablen D, dann wird der Test ψ_D definiert:

$$\psi_D (\hat{D}) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \hat{D} > s_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \tag{8-12}$$

s_1 bestimmt sich um wiederum aus dem Fehler 1. Art bei einer Vorgabe von $\alpha \in (0, 1)$, d.h.

$$\alpha = P_{H_0} \left\{ D \geq s_1 \right\} . \quad (8-13)$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art gleich

$$\beta = P_{H_1} \left\{ D \leq s_1 \right\} . \quad (8-14)$$

Äquivalent zum MUF-Test wird der Test ψ_D D-Test genannt, α Fehlalarmwahrscheinlichkeit und die Größe $1-\beta$ Entdeckungswahrscheinlichkeit des D-Testes. Die Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit β als Funktion der Fehlalarmwahrscheinlichkeit α ist durch die Formel

$$\beta = \sum_{l=\max(0, n+r-N)}^{\min(n, r)} \phi \left(U_{1-\alpha} - \frac{\mu \cdot l}{\sqrt{n \cdot \sigma_r^2 + n^2 \cdot \sigma_s^2}} \right) \cdot \frac{\binom{r}{l} \cdot \binom{N-r}{n-l}}{\binom{N}{n}} \quad (8-15)$$

gegeben, wobei

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &:= \sigma_{Or}^2 + \sigma_{Ir}^2 \\ \sigma_s^2 &:= \sigma_{Os}^2 + \sigma_{Is}^2 \end{aligned} \quad (8-16)$$

definiert ist. Die Ableitung der Formel findet man bei Avenhaus 1974.

Gilt nun $r = N$, d.h. alle Elemente der Klasse werden um den Betrag μ verfälscht, dann gilt

$$\begin{aligned} \beta &= \phi \left(U_{1-\alpha} - \frac{\mu \cdot n}{\sqrt{n \cdot \sigma_r^2 + n^2 \cdot \sigma_s^2}} \right) \\ &= \phi \left(U_{1-\alpha} - \frac{\mu \cdot N}{\sqrt{\frac{N^2}{n} \cdot \sigma_r^2 + N^2 \cdot \sigma_s^2}} \right) \\ &= \phi \left(U_{1-\alpha} - \frac{M_1}{\sqrt{\frac{N^2}{n} \cdot \sigma_r^2 + N^2 \cdot \sigma_s^2}} \right) \end{aligned} \quad (8-17)$$

b) Inventar bestehend aus mehreren Materialklassen:

Teil a) wird nun insofern erweitert, daß nun $K \geq 1$ verschiedene Materialklassen gegeben sind. Der Materialgehalt der einzelnen Elemente in den verschiedenen Klassen sei unterschiedlich. Eine Klasse i , $1 \leq i \leq K$, enthalte N_i Elemente. Die Betreibermessung zur Bestimmung seines Inventars sei

$$X_{ij} = T_{ij} + d_{0i} + e_{0ij} \quad (8-18)$$

für $i = 1, 2, \dots, K$ und $j = 1, 2, \dots, N_i$.

d_{0i} sei die Zufallsvariable des systematischen Fehlers und e_{0ij} die des zufälligen Fehlers der Messung. Beide Zufallsvariablen seien stochastisch unabhängig normalverteilt und es gelte

$$E [d_{0i}] = E [e_{0ij}] = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, K \quad j = 1, 2, \dots, N_i$$

$$\text{Cov} [e_{0ij}, e_{0i'j'}] = 0 \quad \text{für } (i, j) \neq (i', j')$$

$$\text{Cov} [d_{0i}, d_{0i'}] = 0 \quad \text{für } i \neq i'$$

und es wird

(8-19)

$$\sigma_{0ri}^2 := \text{Var} [e_{0ij}]$$

$$\sigma_{0s}^2 := \text{Var} [d_{0i}]$$

für $i = 1, 2, \dots, K$ und $j = 1, 2, \dots, N_i$ definiert.

Es wird nun angenommen, daß der Kontrolleur in jeder der K Klassen n_i , $1 \leq i \leq K$, Elemente mit Hilfe eines Stichprobenplanes auswählt, um den Materialgehalt mit unabhängigen Messungen zu bestimmen. Y_{ij} sei das Ergebnis der Kontrolleurmessung für das j -te Element in Klasse i . Nach entsprechender Umindizierung gilt dann wieder $j = 1, 2, \dots, n_i$. Die Zufallsvariable des systematischen Fehlers der Kontrolleurmessung sei d_{1i} für $i = 1, 2, \dots, K$ und

e_{Iij} für $i = 1, 2, \dots, K$, $j = 1, 2, \dots, n_i$ sei die Zufallsvariable des zufälligen Fehlers der Messung Y_{ij} . Wieder wird angenommen, daß die Zufallsvariablen des systematischen und zufälligen Fehlers stochastisch unabhängig und normalverteilt sind. Nimmt man nun weiter an, daß der Betreiber kein Material den Elementen entnimmt, wird Y_{ij} wie folgt dargestellt:

$$Y_{ij} := T_{ij} + d_{Ii} + e_{Iij} \quad (8-20)$$

für $i = 1, 2, \dots, K$ und $j = 1, 2, \dots, n_i$. Es gilt

$$E \left[e_{Iij} \right] = E \left[d_{Ii} \right] = 0 \quad \begin{array}{l} \text{für } i = 1, 2, \dots, K \\ \text{und } j = 1, 2, \dots, n_i \end{array} \quad (8-21)$$

$$\text{Cov} \left[e_{Iij}, e_{Ii'j'} \right] = 0 \quad \text{für } (i, j) \neq (i', j')$$

$$\text{Cov} \left[d_{Ii}, d_{Ii'} \right] = 0 \quad \text{für } i \neq i'$$

und es wird

$$\begin{aligned} \sigma_{Isi}^2 &:= \text{Var} \left[d_{Ii} \right] \\ \sigma_{Iri}^2 &:= \text{Var} \left[e_{Iij} \right] \end{aligned} \quad (8-22)$$

für alle Fälle $i = 1, 2, \dots, K$ und $j = 1, 2, \dots, n_i$ definiert.

Unter der Annahme, daß der Anlagenbetreiber in jeder Klasse i bei $r_i \leq N_i$ Elemente den Betrag μ_i an Material entfernt, gilt nach entsprechender Umindizierung

$$Y_{ij} = T_{ij} - \mu_i + d_{Ii} + e_{Iij} \quad (8-23)$$

für $i = 1, 2, \dots, K$ und $j = 1, 2, \dots, r_i$.

Die Statistik D aus (8-6) läßt sich nun im K-Klassen-Fall sofort verallgemeinern:

$$D := \sum_{i=1}^K \frac{N_i}{n_i} \cdot \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - Y_{ij}) . \quad (8-24)$$

Unter der Annahme, daß der Betreiber kein Material entwendet gilt mit (8-18) und (8-20)

$$E [D] = 0$$

wobei (Avenhaus 1978) (8-25)

$$\text{Var} [D] = \sum_{i=1}^K N_i^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{ri}^2}{n_i} + \sigma_{si}^2 \right)$$

gilt mit den Definitionen:

$$\sigma_{ri}^2 := \sigma_{Ori}^2 + \sigma_{Iri}^2 ; \quad \sigma_{si}^2 := \sigma_{Osi}^2 + \sigma_{Isi}^2 .$$

Unter der Annahme der Verfälschung von $r_i \leq N_i$ Elementen um den Betrag μ_i gilt (Avenhaus 1978)

$$E [D] = \sum_{i=1}^K \mu_i \cdot r_i =: M_1 > 0 \quad (8-26)$$

wobei die Beziehung

$$\text{Var} [D] = \sum_{i=1}^K N_i^2 \cdot \left[\frac{\sigma_{ri}^2}{n_i} + \sigma_{si}^2 + \mu_i^2 \cdot \frac{r_i}{N_i} \cdot \frac{N_i - r_i}{N_i} \cdot \left(\frac{1}{n_i} \cdot \frac{N_i}{N_i - 1} - \frac{1}{N_i - 1} \right) \right] . \quad (8-27)$$

gültig ist.

Wird nun $r_i = N_i$ oder $n_i = N_i$ für alle $i = 1, 2, \dots, K$ angenommen, folgt

$$\sum_{i=1}^K N_i^2 \cdot \left[\frac{\sigma_{ri}^2}{n_i} + \sigma_{si}^2 + \mu_i^2 \cdot \frac{r_i}{N_i} \cdot \frac{N_i - r_i}{N_i} \cdot \left(\frac{1}{r_i} \cdot \frac{N_i}{N_i - 1} - \frac{1}{N_i - 1} \right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^K N_i^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{ri}^2}{n_i} + \sigma_{si}^2 \right)$$

d.h. die Varianz von D unter der Annahme, daß eine Datenverfälschung vorliegt, ist gleich der Varianz von D unter der Annahme, daß keine Datenverfälschung vorliegt. Ferner ist sofort klar, daß aus der Annahme $r_i = N_i$ für alle $i = 1, 2, \dots, K$ folgt, daß D normalverteilt ist mit Erwartungswert

$$E [D] = \sum_{i=1}^K N_i \cdot \mu_i = M_1 > 0$$

und Varianz

$$\text{Var} [D] = \sum_{i=1}^K N_i^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{ri}^2}{n_i} + \sigma_{si}^2 \right) .$$

(8-28)

Bei der Verifizierung einer Materialbilanz gilt im Falle einer Datenverfälschung um den Betrag M_1 die Beziehung (Avenhaus, Frick 1979)

$$E [D] = - M_1 \quad , \quad M_1 > 0 . \quad (8-29)$$

Bei den weiteren Betrachtungen wird nun (8-29) angenommen. Außerdem ist es vernünftig anzunehmen, daß $\text{Var}[D]$ von M_1 unabhängig ist (Avenhaus, Beedgen, Neu 1980). Damit ist wieder die Grundlage für einen parametrischen Test gegeben. Die beiden Hypothesen über den Parameter $E[D]$ lauten

$$\begin{aligned}
 H_0 &: E [D] = 0 \\
 H_1 &: E [D] = - M_1 < 0 \quad , \quad (8-30)
 \end{aligned}$$

wobei D normalverteilt ist mit Varianz

$$\sigma_D^2 := \text{Var} [D] = \sum_{i=1}^K N_i^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{ri}^2}{n_i} + \sigma_{si}^2 \right) . \quad (8-31)$$

Wieder sei

$$\left\{ \hat{D} \right\} \subseteq R \quad (8-32)$$

der Stichprobenraum der Zufallsvariablen D, dann wird der Test ψ'_D definiert:

$$\psi'_D (\hat{D}) := \begin{cases} 1 & \text{falls } -\hat{D} > s_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

s_1 bestimmt sich dabei aus der Gleichung

$$1 - \alpha = P_{H_0} \left\{ -D \leq s_1 \right\} = \Phi \left(\frac{s_1}{\sigma_D} \right) . \quad (8-33)$$

Der Test ψ'_D wird wieder kurz D-Test genannt, α ist die Fehlalarmwahrscheinlichkeit und

$$1 - \beta := \Phi \left(\frac{M_1}{\sigma_D} - U_{1-\alpha} \right) \quad (8-34)$$

die Entdeckungswahrscheinlichkeit.

9. Entwendungsstrategien und Gegenstrategien

In Kapitel 6 wurde nun die Überwachungsprozedur der IAEO für spaltbares Material beschrieben. Dieses Verfahren gibt einem potentiellen Entwender von solchem Material die beiden Entwendungsmöglichkeiten:

- (i) Der Betreiber verfälscht die Daten (d.h. der tatsächliche Gehalt an spaltbarem Material entspricht nicht der Angabe des Betreibers) so, daß die Materialbilanz korrekt erscheint, d.h. $MUF = 0$ gilt.
- (ii) Der Betreiber entwendet Material, ohne die Daten zu fälschen. Dabei versucht er die Messungsgenauigkeiten bei der Erstellung der Materialbilanz zu seinen Gunsten auszunutzen.

Im folgenden werden die Entwendungsmöglichkeit (i) kurz "*Entwendung über Datenverfälschung*" und die Möglichkeit (ii) "*Entwendung über MUF*" genannt.

Der in Kapitel 8 entwickelte mathematische D-Test ist nun ein statistisches Entscheidungsverfahren, um Entwendung über Datenverfälschung zu entdecken. Zur Entdeckung der Entwendung über MUF wurde in Kapitel 7 der MUF-Test dargestellt.

Im allgemeinen kann nun der Betreiber beide Entwendungsmöglichkeiten gleichzeitig anwenden. Dazu wird angenommen, daß der Betreiber eine gewisse Menge M an spaltbarem Material entwenden will und diese Entwendung auf die beiden Möglichkeiten, Entwendung über Datenverfälschung oder Entwendung über MUF, auf teilt. Dabei sei M_1 die Menge der Entwendung über Datenverfälschung und M_2 entspreche der Entwendung über MUF. Es läßt sich dann sofort der Zusammenhang

$$M = M_1 + M_2 \quad (9-1)$$

formulieren. Es soll an dieser Stelle betont werden, daß bis jetzt noch nicht auf das Problem eingegangen worden ist, wie der Entwender seine Gesamtentwendung M auf M_1 und M_2 aufteilt, d.h. welche *Entwendungsstrategie* er einschlägt. Da nun der Kontrolleur die kombinierte Entwendungsmöglichkeit des Betreibers kennt, steht er vor der Frage, welche Tests er zur Entdeckung einer sogenannten gemischten Strategie, d.h. M_1 und M_2 sind beide nicht Null, beliebig fixiert und erfüllen die Randbedingung (9-1), heranziehen soll. Ein

Problem für ihn besteht auch darin, daß er diese Strategie nicht kennt. Es liegt nun nahe, eine Kombination des D- und des MUF-Testes ins Auge zu fassen.

Nimmt man nun wieder wie in Kapitel 8 an, daß K-Klassen mit jeweils N_i , $1 \leq i \leq K$, Elementen vorliegen, so folgt mit (7-4) und (7-5)

$$\text{MUF} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij} \cdot \delta_{ij} \quad (9-2)$$

wobei

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_{ij} \text{ Messung für } I_0 \text{ oder R} \\ -1 & \text{falls } X_{ij} \text{ Messung für } I_1 \text{ oder S} \end{cases}$$

gilt. D habe die Form (8-24). Dann gilt

$$\text{Cov} [D, \text{MUF}] = \text{Var} [\text{MUF}] < \text{Var} [D] \quad (9-3)$$

was aus

$$\text{Cov} [D, \text{MUF}] = E [D \cdot \text{MUF}] - E [D] \cdot E [\text{MUF}]$$

und der Anwendung der Rechenregeln über Erwartungswerte und Varianzen folgt. Unter der Annahme der Normalverteilung der X_{ij} bedeutet (9-3), daß D und MUF normalverteilt aber stochastisch abhängig sind. Das ist auch plausibel, denn Betreibermessungen gehen in beide Zufallsvariablen ein.

Nach (9-3) gilt nun für die Korrelation ρ zwischen D und MUF:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{\text{Cov} [D, \text{MUF}]}{(\text{Var} [D] \cdot \text{Var} [\text{MUF}])^{1/2}} \\
 &= \frac{\text{Var} [\text{MUF}]}{(\text{Var} [D] \cdot \text{Var} [\text{MUF}])^{1/2}} \\
 &= \frac{\sigma_{\text{MUF}}^2}{\sigma_D \cdot \sigma_{\text{MUF}}} \\
 &= \frac{\sigma_{\text{MUF}}}{\sigma_D} .
 \end{aligned}
 \tag{9-4}$$

Da nun σ_D , $\sigma_{\text{MUF}} > 0$ und $\sigma_{\text{MUF}} < \sigma_D$ gilt, folgt

$$0 < \rho < 1. \tag{9-5}$$

Spieltheoretisches Modell

Das Überwachungsverfahren für nukleare Anlagen, läßt sich allgemein als nichtkooperatives Zweipersonenspiel auffassen, wobei die Überwachungsbehörde und ihre Kontrolleure als Spieler 1 und der Anlagenbetreiber als Spieler 2 anzusehen sind. Es wird angenommen, daß der Betreiber im Falle eines illegalen Verhaltens die Menge M an Material entwendet. Der Sinn und Zweck der Kontrolleurtätigkeit ist es nun, so eine Entwendung zu entdecken.

Definition 9.1 :

Die Auszahlungen an den Kontrolleur als Spieler 1 und an den Betreiber als Spieler 2 werden nun durch die folgenden Wertepaare definiert:

(-a, -b) im Falle von Entwendung und Entdeckung

(-c, d) im Falle von Entwendung und Nichtentdeckung

(9-6)

$(-e, -f)$ im Falle Nichtentwendung und "Entdeckung" (Fehlalarm)

$(0,0)$ im Falle Nichtentwendung und Nichtentdeckung

wobei $(a,b,c,d,e,f) > (0,0,0,0,0,0)$ gelten soll, mit $a < c$, d.h. der Verlust des Inspektors bei einer entdeckten Entwendung ist kleiner als bei einer nichtentdeckten Entwendung, und $b > f$, d.h. der Verlust des Betreibers bei einer entdeckten Entwendung ist größer, als im Falle eines Fehlalarmes. □

Im Verlaufe dieser Arbeit wurde ja nun eine statistische Methode vorgestellt, den Betreiber zu kontrollieren. Im nächsten Kapitel wird diese Kontrolltätigkeit noch näher beschrieben werden. Dort wird auch klar, was man unter der Entdeckung einer Entwendung versteht.

Definition 9.2

Sei nun $1-\beta$ die Entdeckungswahrscheinlichkeit einer Entwendung und α die Fehlalarmwahrscheinlichkeit, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß der Kontrolleur eine Entwendung feststellt, obwohl sich der Betreiber legal verhalten hat. Die erwarteten Auszahlungen an Kontrolleur und Betreiber sind nun:

$(-a \cdot (1-\beta) - c \cdot \beta, -b \cdot (1-\beta) + d \cdot \beta)$ im Falle einer Entwendung

$(-e \cdot \alpha, -f \cdot \alpha)$ im Falle einer Nichtentwendung

Entwendet nun der Betreiber mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$, dann sind die erwarteten Auszahlungen definiert durch:

$$K := (-a + (a-c) \cdot \beta) \cdot p - e \cdot \alpha \cdot (1-p) \text{ für den Kontrolleur} \tag{9-7}$$

$$B := (-b + (b+d) \cdot \beta) \cdot p - f \cdot \alpha \cdot (1-p) \text{ für den Betreiber} \tag{9-8}$$

□

Man nimmt nun weiter an, daß der Kontrolleur den Wert α und der Betreiber den Wert p wählen kann. Ebenso stehen dem Kontrolleur Kontrollstrategien X und dem Betreiber Entwendungstrategien Y zur Verfügung.

Schließt man nun ein kooperatives Verhalten aus, führt der Weg auf ein nichtkooperatives Zweipersonenspiel, dessen Lösung der sogenannte Gleichgewichtspunkt darstellt.

Definition 9.3

Wir betrachten das nichtkooperative Zweipersonenspiel

$$(\{\alpha\} \times X, \{p\} \times Y; K, B) \quad . \quad (9-9)$$

Der Gleichgewichtspunkt

$$(\alpha^*, x^*, p^*, y^*), \text{ wobei } \alpha^* \in \{\alpha\} \quad (9-10)$$

$$x^* \in X$$

$$p^* \in \{p\}$$

$$y^* \in Y$$

gilt, wird als Lösung des Spieles (9-9) bezeichnet. Der Gleichgewichtspunkt (9-10) ist durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} & (e \cdot \alpha^* - a + (a-c) \cdot \beta(x^*, y^*; \alpha^*)) \cdot p^* - e \cdot \alpha^* \cdot (1-p^*) \geq (e \cdot \alpha - a + (a-c) \cdot \beta(x, y^*; \alpha)) \cdot \\ & \cdot p^* - e \cdot \alpha \cdot (1-p^*) \quad \text{für alle } \alpha \in (0, 1) \text{ und } x \in X \end{aligned} \quad (9-11)$$

$$\begin{aligned} & (f \cdot \alpha^* - b + (b+d) \cdot \beta(x^*, y^*; \alpha^*)) \cdot p^* - f \cdot \alpha^* \cdot (1-p^*) \geq (f \cdot \alpha - b + (b+d) \cdot \beta(x^*, y; \alpha)) \cdot \\ & \cdot p - f \cdot \alpha \cdot (1-p) \quad \text{für alle } p \in [0, 1] \text{ und } y \in Y. \quad \square \end{aligned} \quad (9-12)$$

Für das folgende Spiel (9-9) läßt sich nun der folgende Satz beweisen, der sich an Theorem 3 bei Avenhaus 1980 anlehnt.

Satz 9.1 :

Sei $(x^*(\alpha), y^*)$ ein Sattelpunkt von $\beta(x, y, \alpha)$ auf der Strategiemenge $X \times Y$ für einen beliebigen Wert $\alpha \in (0, 1)$, d.h.

$$\beta(x^*(\alpha), y, \alpha) \leq \beta(x^*(\alpha), y^*, \alpha) \leq \beta(x(\alpha), y^*, \alpha) \quad (9-13)$$

und erfüllt α^* und p^* die Ungleichungen

$$\begin{aligned} & (-a + (a-c) \cdot \beta(x^*(\alpha^*), y^*, \alpha^*)) \cdot p^* - e \cdot \alpha^* \cdot (1-p^*) \geq \\ & (-a + (a-c) \cdot \beta(x^*(\alpha), y^*, \alpha)) \cdot p^* - e \cdot \alpha \cdot (1-p^*) \end{aligned} \quad (9-14)$$

$$\begin{aligned} & (-b + (b+d) \cdot \beta(x^*(\alpha^*), y^*, \alpha^*)) \cdot p^* - f \cdot \alpha^* \cdot (1-p^*) \geq \\ & (-b + (b+d) \cdot \beta(x^*(\alpha), y, \alpha)) \cdot p - f \cdot \alpha \cdot (1-p) \end{aligned} \quad (9-15)$$

Dann ist

$$(x^*(\alpha^*), y^*; \alpha^*, p^*)$$

ein Gleichgewichtspunkt des Spieles (9-9) .

Beweis:

Aus der rechten Ungleichung von (9-13) folgt wegen $a < c$

$$\begin{aligned} & (-a + (a-c) \cdot \beta(x^*(\alpha), y^*, \alpha)) \cdot p^* - e \cdot \alpha \cdot (1-p^*) \geq (-a + (a-c) \cdot \beta(x(\alpha), y^*, \alpha)) \cdot p^* \\ & - e \cdot \alpha \cdot (1-p^*) \end{aligned}$$

für beliebiges p^* und $\alpha \in (0, 1)$. Daraus folgt dann zusammen mit Ungleichung (9-14) die Ungleichung (9-11). Aus der linken Ungleichung von (9-13) folgt

$$\begin{aligned} & (-b + (b+d) \cdot \beta(x^*(\alpha), y^*, \alpha)) \cdot p - f \cdot \alpha \cdot (1-p) \geq (-b + (b+d) \cdot \beta(x(\alpha), y^*, \alpha)) \cdot p \\ & - f \cdot \alpha \cdot (1-p) \end{aligned}$$

für beliebiges $p \in [0,1]$ und $\alpha \in (0,1)$. Daraus folgt dann zusammen mit Ungleichung (9-15) die Ungleichung (9-12), was zu beweisen war. □

Der Satz 9.1 beinhaltet nun, daß man den Gleichgewichtspunkt des Spieles $(\{\alpha\} \times X, \{p\} \times Y; K, B)$ mittels eines zweistufigen Verfahrens berechnen kann. Zuerst löst man das Zweipersonennullsummenspiel $(X, Y; 1-\beta)$ für beliebige Werte $\alpha \in (0,1)$. In einer zweiten Stufe sucht man den Gleichgewichtspunkt des Spieles $(\{\alpha\}, \{p\}; K, B)$. Diese Tatsache gibt dem bisherigen Vorgehen einen Sinn, daß in unserem Fall die Fehlalarmwahrscheinlichkeit α als fester vorgegebener Parameter angesehen wird und man zunächst nach Lösungen der ersten Stufe Ausschau gehalten hat. Siehe dazu zum Beispiel Satz 4.3: Im obigen Satz wurde angenommen, daß die optimale Entwenderstrategie von α unabhängig ist. Aus Gleichung (4-11) geht jedoch hervor, daß dies in unserem Fall nicht gilt, was aber die allgemeine spieltheoretische Einordnung des Problem es doch ermöglicht. Die zweite Stufe wird in dieser Arbeit nicht behandelt, weil hier statistische Fragestellungen, die mit der ersten Stufe zusammenhängen, interessierten und weil gerade bei der Spaltstoffflußkontrolle die Auszahlungsparameter nur sehr schwer abzuschätzen sind.

10. Anwendung der Theorie auf die D-MUF-Problematik

Nun soll eine Brücke von der D-MUF-Problematik, wie sie in den bisherigen Kapiteln des II. Teiles dargelegt wurde, zum theoretischen I. Teil der Arbeit geschlagen werden. Es geht darum, aus den theoretischen Ergebnissen Schlußfolgerungen für Entwender und Kontrolleur beim gegebenen Überwachungsverfahren zu ziehen.

Nach den Darlegungen der gegebenen Situation in den Kapiteln 7,8 und 9 sind D und MUF zwei Zufallsvariablen, die die Voraussetzungen, wie sie in Definition 1.1 gegeben sind, erfüllen. Für festes M_1 und M_2 ist dann gerade die statistische Entscheidung zwischen H_0 (siehe (2-1)) und H_1 (siehe (2-2)) zu treffen, wobei H_0 die Situation "keine Entwendung" repräsentiert, und H_1 den Fall "Entwendung der Materialmenge $M_1 + M_2$, wobei M_1 über Datenverfälschung und M_2 über MUF geschieht" darstellt. Der Test d_1 aus Definition 2.1 wird jetzt als bivariater Test $\Psi_{D,MUF}$ bezeichnet.

Er hat die folgende Form:

$$\Psi_{D,MUF}(\hat{D}, \hat{MUF}) := \begin{cases} 0 & \text{für } -\hat{D} \leq s_1, \quad \hat{MUF} \leq s_2 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (10-1)$$

Der Test $\Psi_{D,MUF}$ wird im folgenden (D,MUF)-Test genannt. Figur 1 zeigt, daß man bei vorgegebenen ρ und einer vorgegebenen Fehlalarmwahrscheinlichkeit α mehrere Möglichkeiten hat, s_1 und s_2 , d.h. die Fehlalarmwahrscheinlichkeiten α_1 (D-Test) und α_2 (MUF-Test), zu bestimmen.

Nach Satz 2.2 existiert nun ein Neyman-Pearson-Test für H_0 gegen H_1 , der wie folgt dargestellt wird (siehe dazu auch (2-34)):

$$\Psi_{Np}(\hat{D}, \hat{MUF}) = \begin{cases} 1 & \text{für } (\hat{D}, \hat{MUF}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \rho-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \geq k_\alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (10-2)$$

wobei sich k_α' aus dem Wert α für die Fehlalarmwahrscheinlichkeit berechnet.

Im weiteren wird angenommen, daß der Entwender den Betrag M an Material entwenden will, und daß er diesen Betrag irgendwie auf M_1 und M_2 aufteilt, d.h. es gelte

$$M = M_1 + M_2 \quad . \quad (10-3)$$

Damit ist nun gerade Nebenbedingung (3-1) für die Alternativhypothese H_1 gegeben. Die Aussage von Satz 3.1 bedeutet in diesem Zusammenhang, daß, wenn der Kontrolleur den Neyman-Pearson-Test Ψ_{Np} (10-2) anwendet, die Entdeckungswahrscheinlichkeit für die Entwendung von M am kleinsten ist, wenn der Betreiber seine ganze Entwendung über die Datenverfälschung durchführt, d.h. dann gilt

$$M_1 = M, \quad M_2 = 0 \quad . \quad (10-4)$$

In diesem Fall hat der Neyman-Pearson-Test die Form,

$$\Psi_{Np}(\hat{D}, \hat{MUF}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \hat{MUF} - \hat{D} > k_\alpha'' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (10-5)$$

wobei wir diesen Test fortan *MUF-D-Test* nennen wollen. Aus Satz 3.1.

(c) zieht man nun den Schluß, daß bei einer reinen Entwendung über Datenverfälschung, der MUF-D-Test ein bester Test zum Niveau α für H_0 gegen die Alternative

$$H_1 : M' \geq M \quad (10-6)$$

ist, wobei M' die tatsächlich über Datenverfälschung entwendete Menge bezeichnet. Dieser Sachverhalt ist für einen Kontrolleur von einigem Nutzen, da die Festlegung einer einfachen Gegenhypothese sehr willkürlich erscheint, währenddessen die Absicht, eine Entwendung oberhalb einer gewissen Schranke zu entdecken, eher seiner Intention entspricht.

Korollar 3.1 gibt nun dem Kontrolleur für die Gestaltung seines Testes einige wichtige Hinweise. Die Alternative H_{11} bedeutet in unserem Fall, daß nur eine Entwendung über Datenverfälschung stattfindet, d.h.

$$M_1 = M, \quad M_2 = 0$$

und H_{12} ist die Situation einer reinen Entwendung über MUF, d.h.

$$M_1 = 0, \quad M_2 = M .$$

In diesen beiden Extremsituationen ist es nach dem Ergebnis von Korollar 3.1. nicht optimal für den Kontrolleur im Sinne einer maximalen Entdeckungswahrscheinlichkeit, den reinen D- bzw. MUF-Test durchzuführen. Das Modell ist so strukturiert, daß in beiden Fällen aus D und MUF "gemischte" Tests existieren, die eine höhere Entdeckungswahrscheinlichkeit liefern. Im Falle H_{11} ist dies, wie bereits gezeigt, der MUF-D-Test und im Falle H_{12} der Test

$$\delta_{D,MUF}(\hat{D}, \hat{MUF}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \rho^{-2} \cdot \hat{MUF} \cdot \hat{D} \geq h_\alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (10-7)$$

wobei sich h_α wieder aus der Fehlalarmwahrscheinlichkeit α bestimmt.

Der Leser fragt sich natürlich, warum überhaupt der bivariate (D,MUF)-Test für dieses Entscheidungsproblem herausgezogen wird, wenn doch ein Neyman-Pearson-Test bekannt ist, von dem man weiß, daß kein anderer Test eine höhere Entdeckungswahrscheinlichkeit liefert. Diese Frage taucht auch bei Avenhaus, Frick 1979 auf. Ganz abgesehen davon, daß die getrennte Durchführung der beiden Einzeltests beim (D,MUF)-Test einem natürlichen Vorgehen entspricht, gibt es Argumente für ihn, die für den Kontrolleur von Bedeutung sind. So wird zum Beispiel klar die Datenverifizierung von der Materialbilanzierung getrennt und eine etwaige Signifikanz läßt sich der Datenverifizierung oder Materialbilanzierung zurechnen. Beim Neyman-Pearson-Test (NP-Test) dagegen sind die beiden

Statistiken bei der Durchführung des Testes vermischt, was zu Entscheidungsproblemen über die Ursache einer etwaigen Signifikanz führen kann. Ferner erfordert der NP-Test die genaue Spezifizierung der Alternativhypothese, die der Inspektor i.a. nicht kennt (siehe (10-2)), d.h. er kann den NP-Test für die entsprechende Entwendungsstrategie nicht anwenden. An dieser Stelle wird aus diesem Grund noch einmal auf den MUF-D-Test eingegangen. Lange bevor die Neyman-Pearson-Eigenschaft dieses Tests unter bestimmten Voraussetzungen bewiesen war, wurde er als Testverfahren für den Kontrolleur zur Diskussion gestellt (Hough, Beele 1976). Es gibt nun einige schöne Eigenschaften dieses Testverfahrens. So gilt zum Beispiel:

- (i) der MUF-D-Test ist eine erwartungstreue Schätzung für den Beitrag der Gesamtentwendung, denn

$$\begin{aligned} E \left[\text{MUF-D} \right] &= E \left[\text{MUF} \right] - E \left[D \right] \\ &= M_1 + M_2 \\ &= M \end{aligned}$$

- (ii) bei einer Totalkontrolle durch den Kontrolleur, d.h. alle Daten des Betreibers werden durch unabhängige Messungen überprüft, ist der MUF-D-Test gerade ein Materialbilanztest mit den Kontrolleurdaten. Diese Tatsache ist auch vernünftig, denn warum sollte er sich in solch einem Fall auf Betreibermessungen verlassen.

Der MUF-D-Test ist nun die Lösung des Optimierungsproblem

$$\min_{M_1} \sup_{\delta_{M_1} \in \Psi_{\alpha, M_1}} (1 - \beta_{\delta_{M_1}}) \tag{10-8}$$

wobei

$$\Psi_{\alpha, M_1} := \left\{ \delta_{M_1} \mid \delta_{M_1} \text{ ist Test zum Niveau } \alpha \text{ für } H_0 : \begin{aligned} E \left[D \right] &= 0 \\ E \left[\text{MUF} \right] &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\text{gegen } H_1 : \left. \begin{array}{l} E \begin{bmatrix} D \\ MUF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \\ M_1 + M_2 = M \end{array} \right\}$$

und $1 - \beta_{\delta_{M_1}}$ die Entdeckungswahrscheinlichkeit des Testes δ_{M_1} darstellt.

Im Sinne einer optimalen garantierten Entdeckungswahrscheinlichkeit des Inspektors ist das Optimierungsproblem

$$\sup_{\delta_{M_1} \in \Psi_{\alpha, M_1}} \min_{M_1} (1 - \beta_{\delta_{M_1}})$$

zu lösen. Die konstante Schärfe von \tilde{d}_2 für alle $M_1 \in [0, M]$ und die Beziehung $\min \sup \geq \sup \min$ liefern den Beweis, daß \tilde{d}_2 auch das Sup-Min-Problem löst.

Nach diesen qualitativen Überlegungen stehen nun die beiden Testverfahren

- (i) MUF-D-Test
- (ii) (D, MUF)-Test

zur Diskussion. Eine quantitative Aussage zum Vergleich dieser beiden Verfahren ist nun notwendig. Diese quantitative Analyse betrifft im folgenden einen Vergleich der Entdeckungswahrscheinlichkeit bei den verschiedenen Entdeckungsstrategien, wobei zu beachten ist, daß beim (D, MUF)-Test die Wahl der α_1 und α_2 noch eine Rolle spielt.

Eine teilweise Antwort auf diese Frage liefert der Satz 4.1, der in unserem Falle besagt, daß unter der Voraussetzung

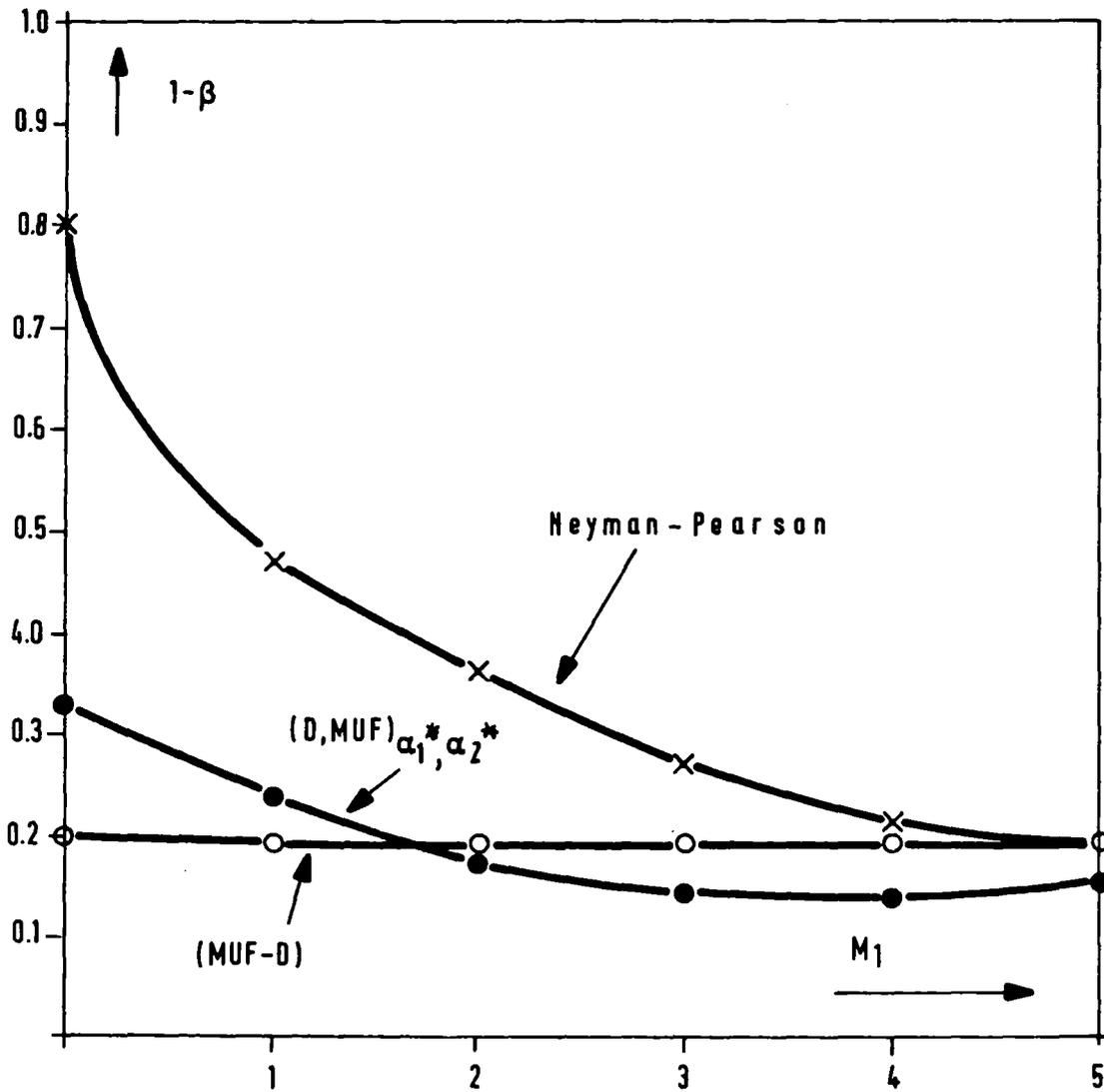
$$\sigma_D^2 > 2 \cdot \sigma_{MUF}^2 \tag{10-9}$$

Entwendungsstrategien existieren, bei denen der (D, MUF)-Test eine höhere Entdeckungswahrscheinlichkeit als der MUF-D-Test liefert. Die Figuren 6 und 7 zeigen das an Beispielen. In Figur 6 ist zum Vergleich noch die Entdeckungswahrscheinlichkeit des Neyman-Pearson-Testes eingetragen. Beim

(D,MUF)-Test wurde die Kombination (α_1^*, α_2^*) für die Fehlalarmwahrscheinlichkeiten gewählt, wie sie aus Figur 3 ermittelt wird. Im weiteren sollen mit α_1^* und α_2^* immer die Fehlalarmwahrscheinlichkeiten des (D,MUF)-Testes bezeichnet werden, die mit Hilfe des graphischen Verfahrens aus Figur 3 ermittelt werden, die also unter den Voraussetzungen von Satz 4.2 das Optimierungsproblem (4-2) lösen. Daß bei Fehlen der Voraussetzung (10-9) keinesfalls Alternativhypothesen existieren müssen, unter denen der (D,MUF)-Test eine höhere Entdeckungswahrscheinlichkeit als der MUF-D-Test liefert, wurde schon in Satz 4.4 unter bestimmten Bedingungen bewiesen, und zeigt an Beispielen auch Figur 7. Dort wurden neben der Wahl von α_1^* und α_2^* noch die Kombinationen $\alpha_1 = 0,01$ und $\alpha_2 = 0,047$ sowie $\alpha_1 = \alpha_2$ für den (D,MUF)-Test gewählt.

Nun wird die Bedeutung des Optimierungsproblem (4-2) für das gegebene Überwachungsproblem erläutert. Dabei wird dem Kontrolleur der Wunsch unterstellt, die Kombination von α_1 und α_2 beim (D,MUF)-Test so zu wählen, daß er eine möglichst hohe *garantierte Entdeckungswahrscheinlichkeit* für eine Entwendung der Menge M erhält, ganz egal wie der Entwendende M auf M_1 und M_2 aufteilt. Löst der Kontrolleur nun das Optimierungsproblem (4-2), so bedeutet das für ihn, daß α_1^* und α_2^* die maximale Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit minimieren, d.h. α_1^* und α_2^* bringen ihm die garantierte Entdeckungswahrscheinlichkeit des (D,MUF)-Testes. Der Entwender kann sein M aufteilen wie er will, er wird keine geringere Entdeckungswahrscheinlichkeit erreichen. Für die optimalen M_1^* und M_2^* des Entwenders entsprechend dem Optimierungsproblem (4-2) konnte keine so schöne graphische Lösung, wie sie Figur 3 darstellt, gefunden werden. Dazu ist die numerische Lösung von Gleichung (4-11) notwendig.

Eine Bemerkung noch zur Bestimmung von α_1^* und α_2^* . Sie ist von M unabhängig, d.h. der Kontrolleur muß die Alternativhypothesen nicht formulieren, um seine Fehlalarmwahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Satz 4.2 beinhaltet nun die hinreichenden Bedingungen (4-5) und (4-6), mit deren Hilfe theoretisch die Lösbarkeit des Optimierungsproblems (4-2) nachgewiesen werden kann. Für die Parameterwerte $\alpha = 0,05$ und $0 < \rho < 1$ wird die Existenz der Lösung des Gleichungssystems (4-6) aus Figur 3 sofort deutlich. An den Beispielen aus den Figuren 5 bis 7 soll nun noch die Bedingung (4-5) verifiziert werden. Dazu werden die Werte α_1^* und α_2^* angegeben.

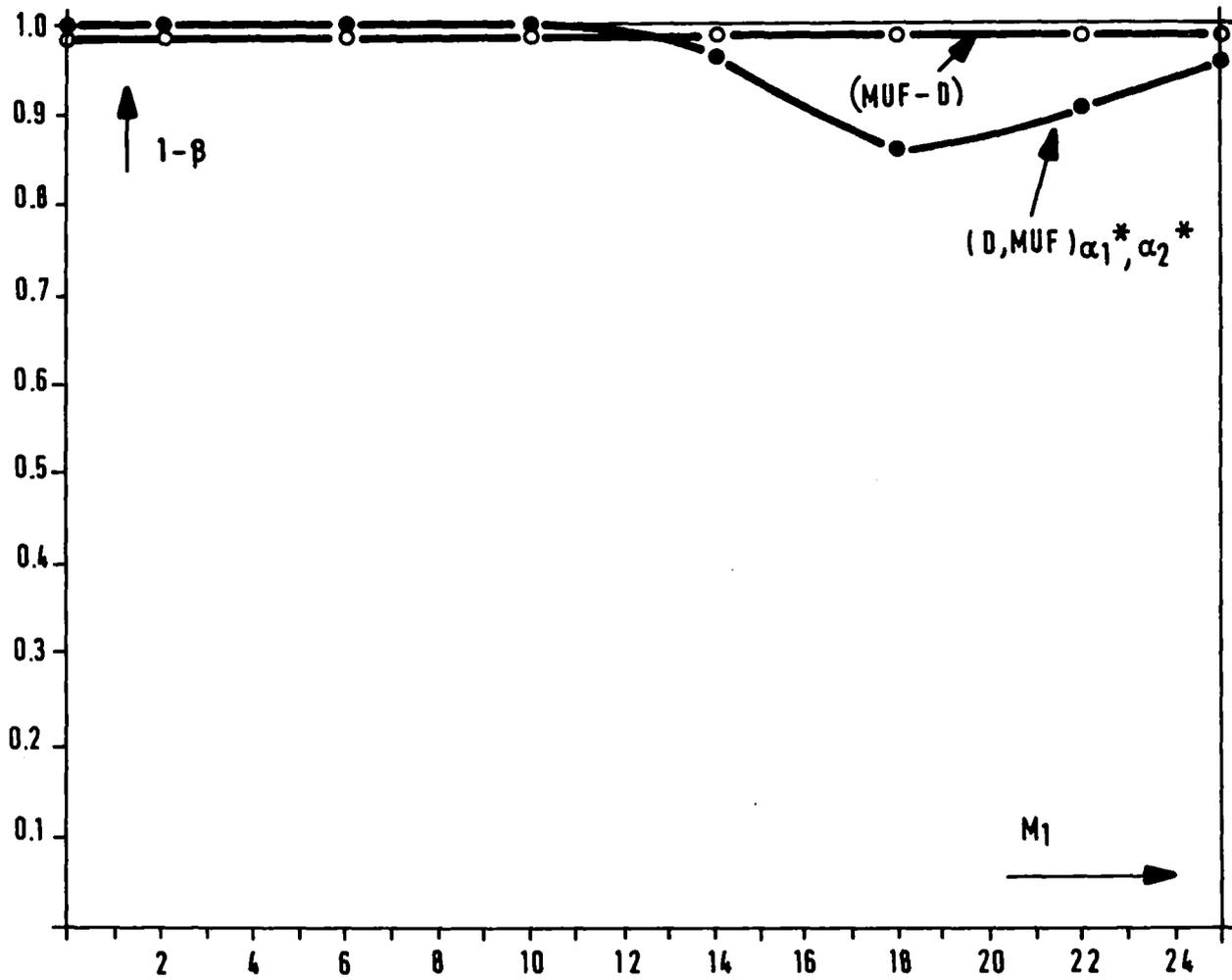


Figur 6 :

Entdeckungswahrscheinlichkeit von Neyman-Pearson-, MUF-D- und (D,MUF)-Tests; Wahl für die Kombination von α_1 und α_2 nach Figur 3

Parameterwerte:

$$\begin{aligned}
 M &= 5 \\
 \sqrt{\text{Var}[D]} &= 7,25 \\
 \sqrt{\text{Var}[MUF]} &= 2,89 \\
 \alpha &= 0,05 \\
 \alpha_1^* &= 0,04 \\
 \alpha_2^* &= 0,014 \\
 \rho &= 0,4
 \end{aligned}$$

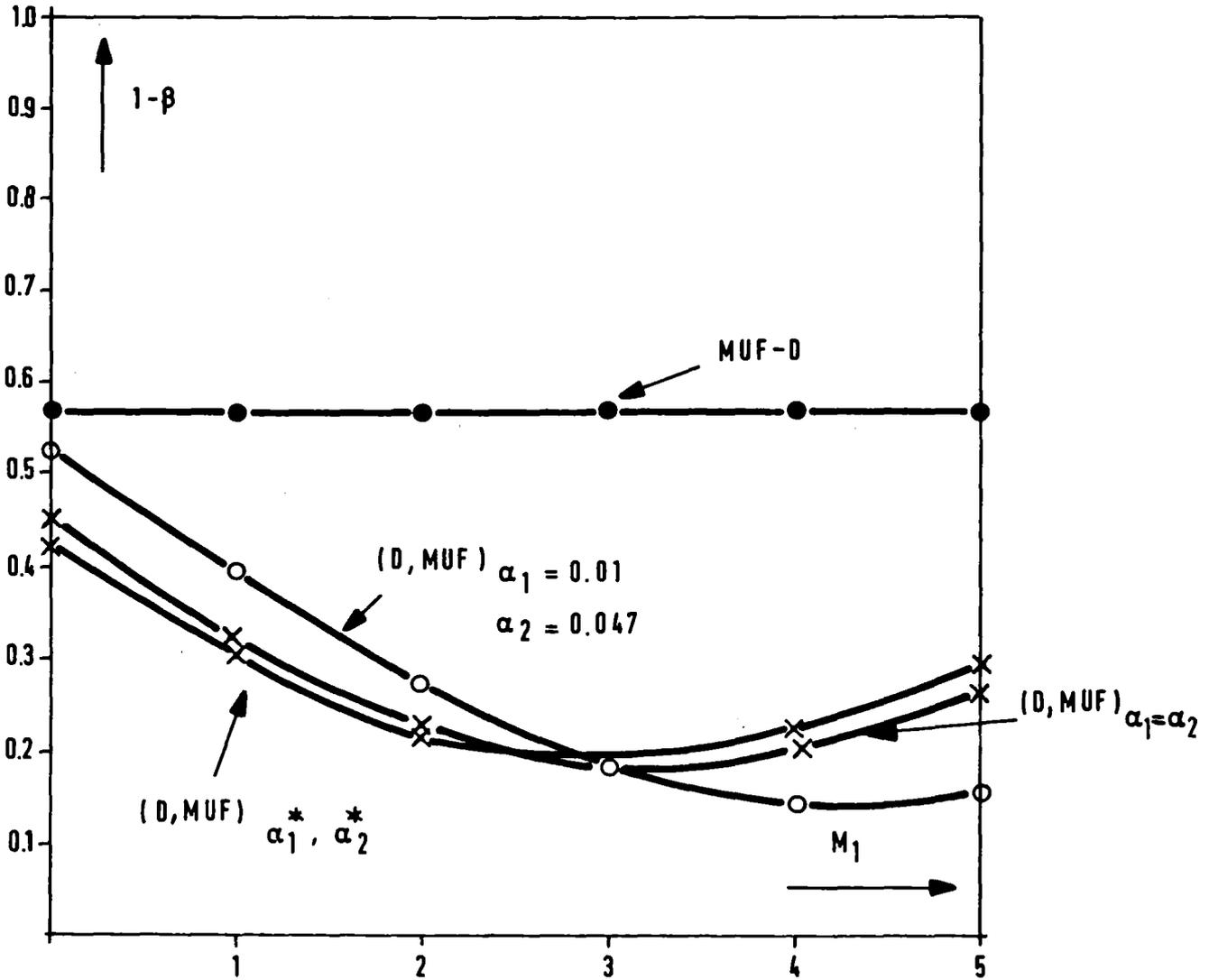


Figur 7 :

Entdeckungswahrscheinlichkeiten von MUF-D-Test und (D,MUF)-Test mit Kombination α_1^* und α_2^* nach Figur 3

Parameterwerte:

$$\begin{aligned}
 M &= 25 \\
 \sqrt{\text{Var} [D]} &= 7,25 \\
 \sqrt{\text{Var} [MUF]} &= 2,89 \\
 \alpha &= 0,05 \\
 \alpha_1^* &= 0,04 \\
 \alpha_2^* &= 0,014 \\
 \rho &= 0,4
 \end{aligned}$$



Figur 8 :

Entdeckungswahrscheinlichkeiten von MUF-D-Test und drei (D,MUF)-Tests mit verschiedenen Kombinationen von α_1 und α_2 .

Parameterwerte:

$$\begin{aligned}
 M &= 5 \\
 \sqrt{\text{Var} [D]} &= 4 \\
 \sqrt{\text{Var} [MUF]} &= 2,89 \\
 \alpha &= 0,05 \\
 \alpha_1^* &= 0,034 \\
 \alpha_2^* &= 0,028 \\
 \rho &= 0,72
 \end{aligned}$$

Figur 6 :

Als Lösung von (4-6) ergibt sich

$$\alpha_1^* = 0,04 \quad , \quad \alpha_2^* = 0,014 \quad . \quad (10-10)$$

Mit numerischen Methoden wurde als Lösung von Gleichung (4-11)

$$M_1^* = 3,62 \quad (10-11)$$

ermittelt. Es bleibt, (4-5) zu verifizieren, d.h.

$$\rho \cdot U_{1-\alpha_1} + U_{1-\alpha_2} > \frac{M}{\sigma_{MUF}}$$

oder

$$0,4 \cdot U_{1-\alpha_1} + U_{1-\alpha_2} > 1,73 \quad . \quad (10-12)$$

Dazu wird eine Fallunterscheidung gemacht.

a) $U_{1-\alpha_2} > 1,73 :$

Dann ist (10-12) sofort klar.

b) $1,6452 \leq U_{1-\alpha_2} \leq 1,73 :$

In diesem Fall gilt unter den gegebenen Parametern

$$U_{1-\alpha_1} > 2,3$$

d.h.

$$U_{1-\alpha_2} + 0,4 \cdot U_{1-\alpha_1} > 0,4 \cdot 2,3 + 1,6452 > 2,5$$

und damit ist (4-5) verifiziert und

$$(\alpha_1^* ; M_1^*) = (0,04 ; 3,62)$$

löst das Optimierungsproblem (4-2).

Figur 7:

Als Lösung von (4-6) hat man

$$\alpha_1^* = 0,04 \quad \alpha_2^* = 0,014 \quad . \quad (10-13)$$

Die Lösung ist wegen derselben Parameterwerte und der Unabhängigkeit von M die gleiche wie in Figur 5. Als Ergebnis für Gleichung (4-11) ermittelt man

$$M_1^* = 18,68 \quad . \quad (10-14)$$

Um (4-5) zu erfüllen, ist nun

$$0,4 \cdot U_{1-\alpha_1} + U_{1-\alpha_2} > 8,65 \quad (10-15)$$

zu verifizieren. Für

$$U_{1-\alpha_2} = 1,73$$

folgt nun

$$U_{1-\alpha_1} < 2,5$$

d.h.

$$0,4 \cdot U_{1-\alpha_1} + U_{1-\alpha_2} < 0,4 \cdot 2,5 + 1,73 \leq 2,8 \quad .$$

Somit ist (10-15) nicht für alle α_1 und α_2 , welche die Randbedingungen (2-17) erfüllen, gültig. Da aber (10-15) eine hinreichende Bedingung ist, wurde der (D,MUF)-Test trotzdem mit den α_1^* und α_2^* aus (10-13) ausgewertet. Es gelang noch nicht nachzuweisen, daß (10-13) und (10-14), (4-2) lösen.

Figur 8:

In diesem Beispiel lösen

$$\alpha_1^* = 0,034 \qquad \alpha_2^* = 0,028 \qquad (10-16)$$

das Gleichungssystem (4-6) und als Lösung von (4-11) ergibt sich

$$M_1^* = 2,98 \ . \qquad (10-17)$$

Die hinreichende Bedingung (4-5) hat nun die Form

$$0,72 \cdot U_{1-\alpha_1} + U_{1-\alpha_2} > 1,73 \ . \qquad (10-18)$$

Es wird wieder eine Fallunterscheidung gemacht.

a) $U_{1-\alpha_2} > 1,73:$

Dann ist (10-18) klar.

b) $1,6452 \leq U_{1-\alpha_2} \leq 1,73:$

In diesem Bereich gilt

$$U_{1-\alpha_1} > 2,1$$

und damit ist

$$0,72 \cdot U_{1-\alpha_1} + U_{1-\alpha_2} > 0,72 \cdot 2,1 + 1,6452 > 3,1$$

d.h. (10-18) ist erfüllt und

$$(\alpha_1^* ; M_1) = (0,034 ; 2,98)$$

löst (4-2).

Es stellt sich nun die natürliche Frage, welchen Test der Kontrolleur anwenden soll, um eine Entwendung der Menge M zu entdecken. Es hat sich ja im Laufe der Arbeit gezeigt, daß weder der (D,MUF)-Test noch der MUF-D-Test bei Berücksichtigung aller möglichen Entwendungsstrategien und Varianzen für MUF und D einer dem jeweils anderen überlegen ist, d.h. eine höhere Entdeckungswahrscheinlichkeit liefert. Ein Vorteil des MUF-D-Testes liegt ohne Zweifel darin, daß man bei der Berechnung der Entdeckungswahrscheinlichkeit für die Entwendung einer Menge M in der Alternativhypothese keine feste Aufteilung von M in M_1 und M_2 voraussetzen muß. Diesen Zwang zur willkürlichen Spezifizierung hat man beim (D-MUF)-Test durch die Optimierungsprozedur (4-2) teilweise umgangen. Bezeichnet man nun mit $1-\beta_{\text{MUF-D}}$ die Entdeckungswahrscheinlichkeit des MUF-D-Testes, d.h. des Neyman-Pearson-Testes für $M_1 = M$ und $M_2 = 0$, dann gilt mit (4-1)

$$1-\beta(M, \alpha_1) \leq 1-\beta_{\text{MUF-D}} \quad (10-19)$$

(10-19) besagt nun gerade, da $1-\beta_{\text{MUF-D}}$ für eine beliebige Aufteilung von M in M_1 und M_2 konstant ist, daß die garantierte Entdeckungswahrscheinlichkeit des MUF-D-Testes immer größer oder gleich der des (D, MUF)-Testes ist. Die Abbildungen 6, 7 und 8 sind Beispiele dafür, daß die garantierte Entdeckungswahrscheinlichkeit des MUF-D-Testes größer ist.

Sind nun die Voraussetzungen von Satz 4.2 erfüllt, d.h. das Optimierungsproblem (4-2) ist lösbar und $1-\beta(M_1, \alpha_1^*)$ ist eine konvexe Funktion in M_1 , und ist (4-23) mit

$$\sigma_D^2 \leq 2 \cdot \sigma_{\text{MUF}}^2 \quad (10-20)$$

gegeben, dann folgt aus Satz 4.4, daß bei bisheriger Wahl von α_1 , der (D,MUF)-Test immer eine Entdeckungswahrscheinlichkeit liefert, die kleiner oder gleich der des MUF-D-Testes ist. Ein Beispiel für diese Situation liefert Figur 8.

Zieht man nun die garantierte Entdeckungswahrscheinlichkeit als Kriterium zur Beurteilung der Qualität eines Testes heran, ist nach obigen Überlegungen der MUF-D-Test vorzuziehen.

11. (D,MUF)-Test und MUF-D-Test bei geänderten Voraussetzungen

Aus Gleichung (8-27) sieht man sofort, daß die Varianz der D-Statistik unter der Hypothese, daß keine Datenverfälschung stattgefunden hat (H_0), gleich der Varianz der Statistik ist, wenn eine Datenverfälschung (H_1) in der Weise stattgefunden hat, daß der Entwender alle Elemente einer Klasse um einen klassenspezifischen Betrag verfälscht. Die Annahme

$$\sigma_{D|H_0}^2 := \text{Var}_{H_0} [D] = \text{Var}_{H_1} [D] =: \sigma_{D|H_1}^2 \quad (11-1)$$

lag den Betrachtungen und Beispielen in Kapitel 10 zugrunde. Außerdem war die Varianz der D-Statistik unter H_0 für beliebige Aufteilungen der Alternative H_1 konstant, d.h. die Stichprobe war immer dieselbe (siehe dazu Avenhaus, Beedgen, Neu 1980). Man muß sich nun darüber im Klaren sein, daß diese Betrachtungsweise ein ganz bestimmtes Kontroll- und Verfälschungsverhalten darstellt. Es gibt Situationen, in denen der Entwender nicht alle Elemente einer Klasse verfälscht, d.h. $r_i \neq N_i$, und der Kontrolleur seinen Stichprobenplan von M_1 abhängig macht (siehe Avenhaus, Beedgen, Neu 1980). In diesem Fall folgt sofort aus (8-25) und (8-27), daß i.a

$$\sigma_{D|H_0}^2 \neq \sigma_{D|H_1}^2$$

gilt und weiter die Varianz der D-Statistik unter H_0 von M_1 in der Alternativhypothese abhängt. Ein weiterer wesentlicher Punkt ist, daß bei so einer Situation die D-Statistik keine Normalverteilung unter H_1 mehr besitzt. An dieser Stelle wird nun die Annahme gemacht, daß D näherungsweise normalverteilt ist (siehe dazu auch Avenhaus 1974, 1978) und daß die Varianz von D unter H_0 näherungsweise konstant ist.

Es stellt sich dann sofort die Frage, was sich unter diesen geänderten Voraussetzungen an den bisherigen theoretischen Ergebnissen ändert. Einige wichtige Aspekte dieser Frage sollen beantwortet werden. Dazu werden der MUF-D- und der (D,MUF)-Test getrennt betrachtet.

(D,MUF)-Test

Der Test soll also eine Entscheidung zwischen den beiden Alternativen (i) keine Entwendung von Material (H_0) oder (ii) Entwendung der Menge $M=M_1+M_2$ (H_1), wobei man die Bedingung (11-1) fallen läßt. Dazu wird dann

folgendes Testproblem formuliert (siehe auch Avenhaus 1978)

$$\begin{aligned}
 H_0 : \quad & \text{MUF} \sim N(0, \sigma_{\text{MUF}}^2) \\
 & D \sim N(0, \sigma_{D|H_0}^2) \\
 \text{mit} \quad & \text{cov}(D, \text{MUF}) = \sigma_{\text{MUF}}^2 \\
 \text{und} \quad & \rho_0 := \frac{\sigma_{\text{MUF}}}{\sigma_{D|H_0}}
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} H_0 : \\ \text{mit} \\ \text{und} \end{aligned}} \right\} (11-2)$$

$$\begin{aligned}
 H_1 : \quad & \text{MUF} \sim N(0, \sigma_{\text{MUF}}^2) \\
 & D \sim N(0, \sigma_{D|H_1}^2) \\
 \text{mit} \quad & \text{cov}(D, \text{MUF}) = \sigma_{\text{MUF}}^2 \\
 \text{und} \quad & \rho_1 := \frac{\sigma_{\text{MUF}}}{\sigma_{D|H_1}}
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} H_1 : \\ \text{mit} \\ \text{und} \end{aligned}} \right\} (11-3)$$

Läßt man nun die Fehlalarmwahrscheinlichkeit

$\alpha \in (0,1)$ zu, so gilt mit (10-1)

$$1 - \alpha = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_0^2}} \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_1}} dt_1 \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_2}} dt_2 \exp \left[- \frac{t_1^2 - 2 \cdot \rho_0 \cdot t_1 \cdot t_2 + t_2^2}{2 \cdot (1-\rho_0^2)} \right] \quad (11-4)$$

wobei α_1 die Fehlalarmwahrscheinlichkeit des D-Testes und α_2 die des MUF-Testes ist. Für die Nichtentdeckungswahrscheinlichkeit $\tilde{\beta}$ des Testes gilt dann

$$\tilde{\beta}(\alpha_1, M_1) := \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{1-\rho_1^2}} \int_{-\infty}^{\frac{\sigma_{D|H_0}}{\sigma_{D|H_1}} \cdot U_{1-\alpha_1} - \frac{M_1}{\sigma_{D|H_1}}} dt_1 \int_{-\infty}^{U_{1-\alpha_2} - \frac{M_2}{\sigma_{\text{MUF}}}} dt_2 \exp \left[- \frac{t_1^2 - 2 \cdot \rho_1 \cdot t_1 \cdot t_2 + t_2^2}{2 \cdot (1-\rho_1^2)} \right]. \quad (11-5)$$

Für den Kontrolleur stellt sich nun sofort wieder das Optimierungsproblem

$$\min_{\alpha_1} \max_{M_1} \hat{\beta}(\alpha_1, M_1), \quad (11-6)$$

wenn er eine maximale garantierte Entdeckungswahrscheinlichkeit haben will. An dieser Stelle soll gesagt werden, daß die hinreichende Bedingung für α_1 und α_2 zur Lösung des Optimierungsproblems (11-6) auch die Form (4-19) mit $\rho = \rho_0$ hat (siehe dazu Avenhaus, Beedgen 1980).

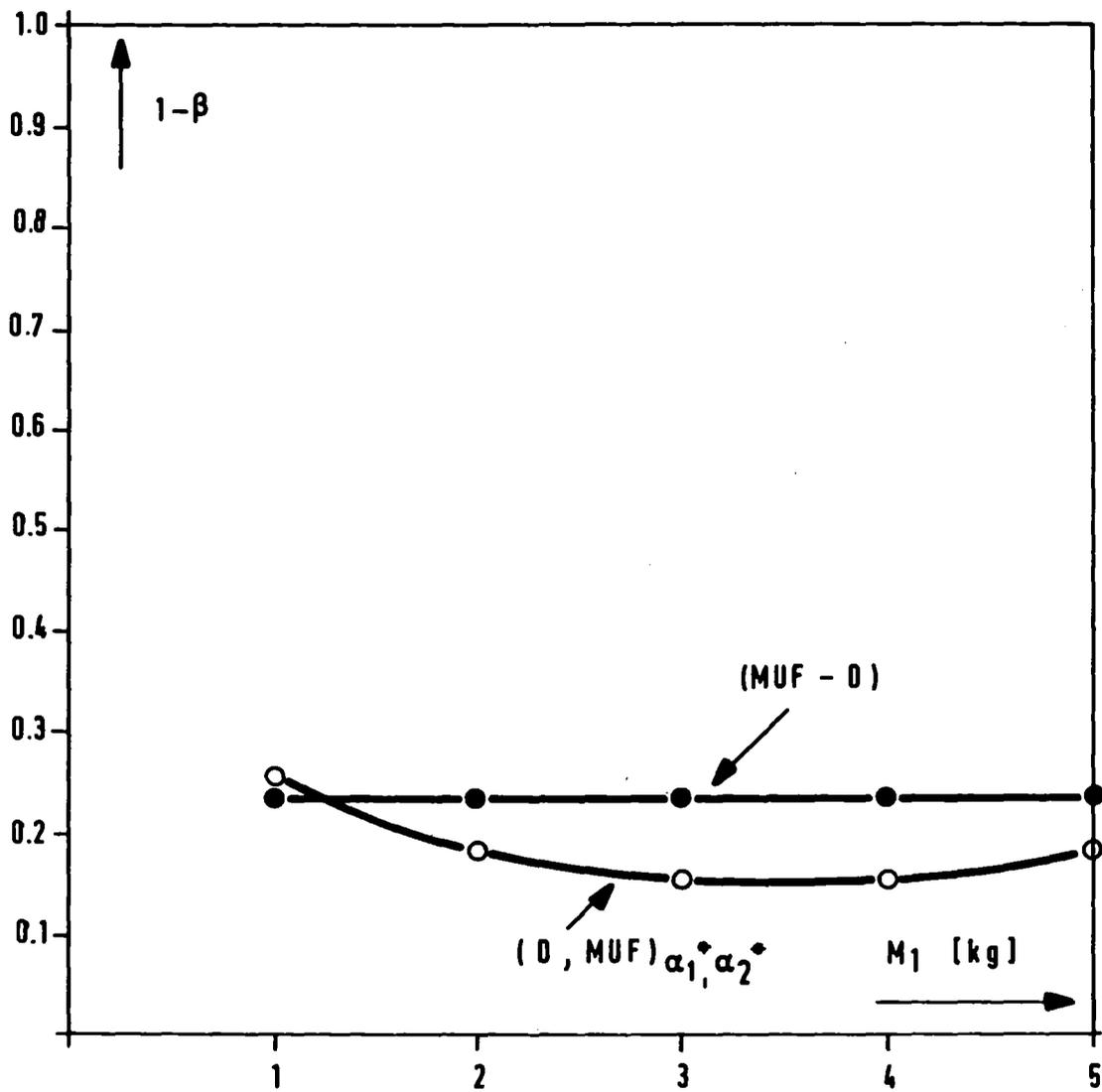
MUF-D-Test:

Der Test hat wieder eine Entscheidung zwischen den Hypothesen H_0 (siehe (11-2)) und H_1 (siehe (11-3)) zu geben, wobei i.a. $\rho_0 \neq \rho_1$ ist. Unter diesen Voraussetzungen konnte für den MUF-D-Test die Neyman-Pearson-Eigenschaft im Falle $M_1 = M, M_2 = 0$ nicht gezeigt werden (Avenhaus, Frick 1979). Es muß an dieser Stelle nochmals erwähnt werden, daß die Varianz der D-Statistik unter H_1 sehr stark von der Annahme über das Ausmaß der Datenverfälschung M_1 , d.h. von r_i und n_i , abhängt und i.a. für verschiedene M_1 , die

$$0 \leq M_1 \leq M$$

erfüllen, verschieden ist. Das bedeutet, daß die Entdeckungswahrscheinlichkeit des MUF-D-Testes im Intervall $M_1 \in [0, M]$ nicht konstant ist.

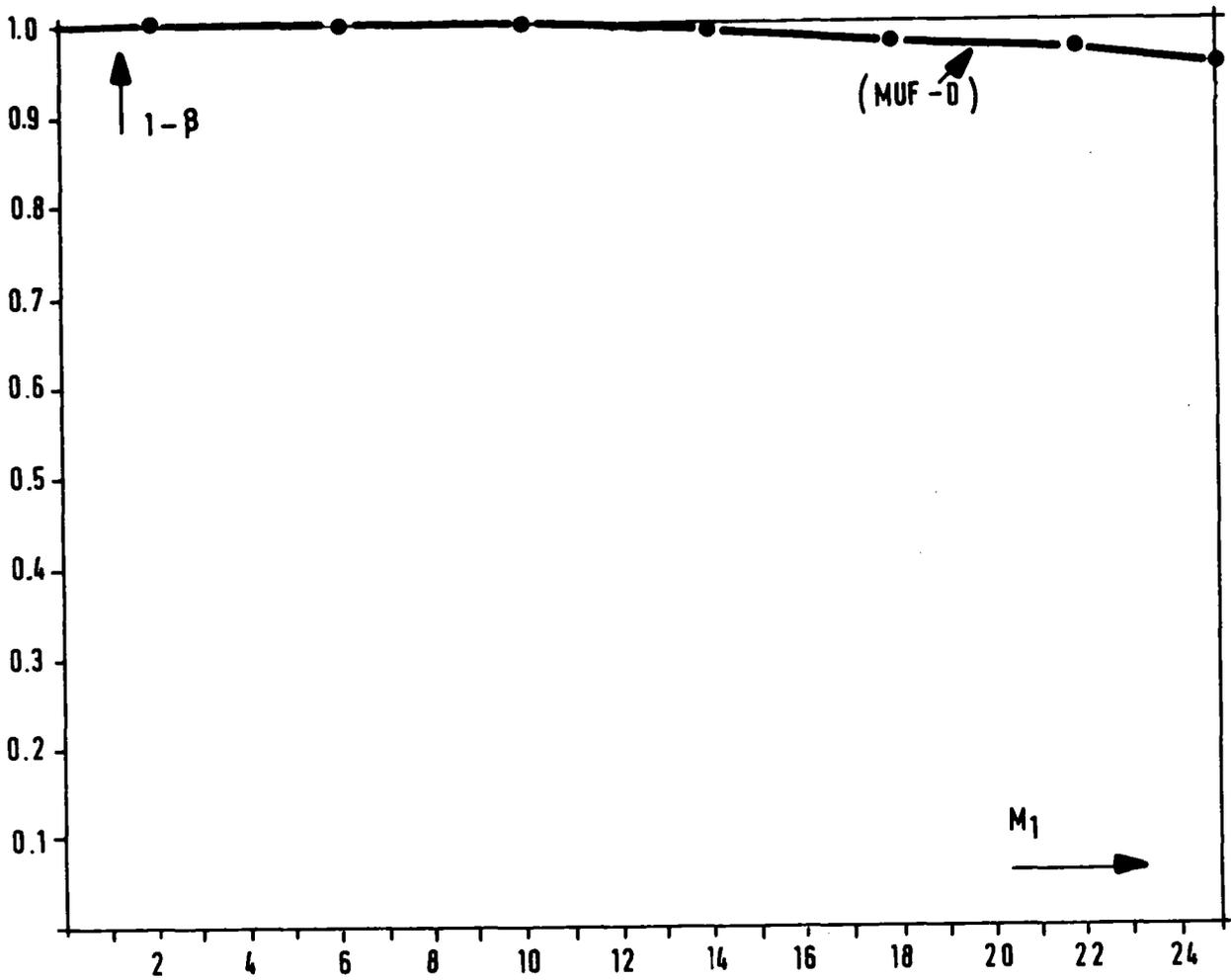
Zur Illustration ist nun ein Beispiel beider Testverfahren in der Figur 9 graphisch dargestellt. Qualitativ läßt sich sagen, daß kein Unterschied im Vergleich zu der Figur 6 im Verhalten der Entdeckungswahrscheinlichkeit beider Tests zu erkennen ist. Den MUF-D-Test kann man auch anwenden, wenn die Varianz von D unter H_0 von M_1 abhängt, da in diesem Fall keine Entscheidung für die Fehlalarmwahrscheinlichkeiten der Einzeltests notwendig ist. In Figur 10 ist graphisch ein Beispiel illustriert. Man sieht deutlich, daß die Entdeckungswahrscheinlichkeit nicht konstant ist. Qualitativ ist jedoch kaum ein Unterschied zu Figur 7 feststellbar. Für eine genauere Beschreibung der Beispiele soll auf Avenhaus, Beedgen, Neu 1980 verwiesen werden.



Figur 9: Entdeckungswahrscheinlichkeiten von MUF-D- und (D,MUF)-Test; Wahl von α_1^* und α_2^* nach Figur 3.

Parameterwerte: $M = 5$, $\alpha = 0,05$, $\sqrt{\text{Var}[MUF]} = 2,89$

M_1	1	2	3	4	5
$\sigma^2_{D H_0}$	39,03	39,14	39,23	39,33	39,44
$\sigma^2_{D H_1}$	39,09	39,45	39,97	40,66	41,60



Figur 10: Entdeckungswahrscheinlichkeit von MUF-D-und (D,MUF)-Test;

Parameterwerte: $M = 25$, $\alpha = 0,05$, $\sqrt{\text{Var}[MUF]} = 2,89$

M_1	1	2	3	4	5	6	10	14	18	22	25
$\sigma_D^2 H_0$	39,03	39,14	39,23	39,33	39,44	39,5	39,9	40,16	40,55	40,9	41,36
$\sigma_D^2 H_1$	39,09	39,45	39,97	40,66	41,6	42,62	48,08	57,7	69,34	85,89	101,62

12. Abschließende Bemerkungen

Diese Arbeit hat sich nun zum einen mit mathematisch-statistischen Problemen im ersten Teil beschäftigt. Die dortigen Erkenntnisse ließen sich dann im zweiten Teil teilweise auf konkrete Probleme der Spaltstoffflußkontrolle anwenden und brachten an Hand von Beispielen konkrete quantitative Ergebnisse für die Kernmaterialüberwachung. Letztendlich geht es einem Kontrolleur darum zu erfahren, welches von den beiden Testverfahren, d.h. MUF-D-Test oder bivariater (D,MUF)-Test, ihm bei einer angenommenen Gesamtentwendung eine höhere Entdeckungswahrscheinlichkeit liefert.

Es haben die Beispiele gezeigt, daß diese Frage bei der Vielschichtigkeit des Problems generell nicht beantwortet werden kann. Die Ergebnisse hängen sehr stark von den Daten der Systemparameter auf der einen Seite, und von der Entwendungsstrategie auf der anderen Seite ab.

Zusätzlich stellt sich die Frage, ob die Entdeckungswahrscheinlichkeit das einzige Kriterium sein soll, nach dem ein Testverfahren bewertet wird. Es gibt zum Beispiel Überlegungen, die eine Trennung von Datenverifizierungs- und Materialbilanztest ins Spiel bringen, um beim Überwachungsverfahren eine klare Entscheidung treffen zu können und um Konfliktmöglichkeiten zu vermeiden. Ein Konflikt kann zum Beispiel entstehen, wenn der Kontrolleur den MUF-D-Test macht und von allen Daten unabhängige eigene Messungen macht. In diesem Fall ist der MUF-D-Test gerade ein Materialbilanztest des Kontrolleurs. Tritt nun der Fall ein, daß beim Materialbilanztest mit den Betreiberdaten die Entscheidung auf Nichtentwendung fällt, beim Materialbilanztest mit den Kontrolleurdaten wird die Entscheidung, daß eine Entwendung stattgefunden hat, getroffen. Was für Konsequenzen sind nun daraus zu ziehen?

Aus diesen Überlegungen wird nun deutlich, daß nach den quantitativen Analysen in Teil II dem Politiker, d.h. u.a. der IAEO, die Aufgabe zufällt, mit Hilfe dieser Ergebnisse eine politische Entscheidung über das Überwachungsverfahren zu treffen. Diese Aufgabe ist nun nicht Inhalt dieser Arbeit gewesen.

13. Referenzen

- R. Avenhaus, "Entscheidungstheoretische Analyse von Überwachungsproblemen in kerntechnischen Anlagen", Habilitationsschrift, Universität Mannheim 1974
- R. Avenhaus, "Material Accountability: Theory, Verification, and Applications", Monograph of the Wiley IIASA Series on Applied System Analysis, New York and Chichester 1977
- R. Avenhaus, "Spieltheoretische Behandlung von Stichprobenkontrollen", Institut für Volkswirtschaftslehre und Statistik der Universität Mannheim Diskussionspapier Nr. 111/78, Mannheim 1978
- R. Avenhaus, "Significance Thresholds of Onesided Tests for Means of Bivariate Normally Distributed Variables", Commun. Statist.-Theory. Meth., A8(3) 1979, S. 223-230
- R. Avenhaus, "Data Verification", eingereicht bei Management Science 1980
- R. Avenhaus,
D. Sellinschegg, "Konsequenzen des großtechnischen Einsatzes der Kernenergie in der Bundesrepublik Deutschland Teil IV: Kernmaterialüberwachung", Bericht Kernforschungszentrum Karlsruhe 2706, Oktober 1978
- R. Avenhaus,
H. Frick, "Statistical Analysis of Alternative Data Evaluation Schemes", Proceedings of the 1st ESARDA-Syposium on Safeguards and Nuclear Material Management, Brüssel 1979, S. 442-446
- R. Avenhaus,
R. Beedgen, "Statistical Analyses of Alternative Data Evaluation Schemes-Part II: Extended Theoretical Considerations ((D,MUF)-Problem)", Proceedings of the 2nd Annual Symposium on Safeguards and Nuclear Material Management, Edinburgh 1980, S. 167-172
- R. Avenhaus,
R. Beedgen,
H. Neu, "Verification of Nuclear Material Balances: General Theory and Application to a Highly Enriched Uranium Fabrication Plant", Bericht Kernforschungszentrum Karlsruhe 2942, Euratom 6406e, 1980

- R. Beedgen,
H. Neu,
"Statistical Analysis of Alternative Data Evaluation Schemes-Part III: Numerical Example with MUF-D- and Bivariate (D,MUF)-Tests", Proceedings of the 2nd Annual Symposium on Safeguards and Nuclear Material Management, Edinburgh 1980, S. 194-201
- H. Cramer,
M.R. Leadbetter,
"Stationary and Related Stochastic Processes", New York 1967, Springer Verlag
- W. Feller,
"An Introduction To Probability Theory and Its Applications Vol I and Vol II", New York 1971, Verlag Wiley
- M. Fisz,
"Probability Theory and Mathematical Statistics", New York, London 1963, Verlag Wiley
- D. Gupta,
W. Häfele,
"Das Prinzip eines instrumentierten Systemes zur Überwachung des Spaltstoffflusses auf dem friedlichen Sektor der Kernenergie", ATKE, 1968, S. 229-236
- W. Häfele,
"Die historische Entwicklung der friedlichen Nutzung der Kernenergie", in "Kernenergie und Internationale Politik", Hrsg. K. Kaiser und B. Lindemann, München, Wien 1975, S. 43-63, Oldenbourg Verlag
- W. Häfele,
W. Gmelin,
G. Gupta,
J. Larisse,
H. Winter,
"Safeguards System Studies and Fuel Cycle Analysis", Bericht Kernforschungszentrum Karlsruhe 900, 1968
- C.G. Hough,
R.A. Schneider,
K.B. Stewart,
J.L. Jaech,
C.A. Bennett,
"Example of Verification of Operator Data-Low Enriched Uranium Fabrication", BNWL 1852, August 1974

- C.G. Hough,
T.M. Beetle "Statistical Methods for the Planning of Inspections",
Proceedings of a Symposium on the Safeguarding of Nuclear
Materials, IAEA Wien 1976
- IAEO, "Treaty on the Non-Proliferation of Nuclear Weapons",
IAEO-Dokument INFCIRC/140/, Wien 1970
- IAEO, "The Structure and Contents of Agreements between the
Agency and States Required in Connection with the Treaty
on the Non-Proliferation of Nuclear Weapons", IAEA-Dokument
INFCIRC /153/, Wien 1971
- J. Jaech, "Statistical Methods in Nuclear Material Control", U.S.
Atomic Energy Agency, Washington D.C. 1973
- E.L. Lehman, "Testing Statistical Hypothesis", New York 1959,
Springer Verlag
- Z. Sidak, "Rectangular Confidence Regions for the Means of Multi-
variate Normal Distributions", J. Amer. Statist. Assoc. 62,
1967, S. 626-633
- K.B. Stewart, "Some Statistical Aspects of PID's and Ending Inventories",
AEC and Contractor SS Materials Management (Germantown
Maryland, May 25-28, 1959) Report No. TID-7581 USAEC
Division of Technical Information 1959, S. 148-160
- K.B. Stewart, "A Cost-Effectiveness Approach to Inventory Verification",
Proceedings of the IAEA-Symposium on Safeguards Techniques,
Vol II, IAEA Wien 1971, S. 387-409
- J. Stoer,
C. Witzgall, "Convexity and Optimization in Finite Dimensions I",
Berlin, Heidelberg, New York 1970, Springer Verlag
- W. Ungerer, "Die Rolle internationaler Organisationen bei der Verhinderung
mißbräuchlicher Verwendung der Kernenergie", in: "Kernenergie
und internationale Politik", Hrsg. K. Kaiser u. B. Lindemann,
München, Wien 1975, S. 153-226, Oldenbourg Verlag

- M. Willrich, "Nuclear Theft: Risks and Safeguards", Cambridge Mass. 1974
T. Taylor,
- H. Witting, "Mathematische Statistik", Stuttgart 1966, Verlag Teubner