

KfK 3252
März 1982

Numerische Ermittlung eines effektiven Elastizitätstensors und der extremalen Spannungen für beliebige Magnetkomposite

T. Iwanicki
Institut für Technische Physik

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Technische Physik

KfK 3252

Numerische Ermittlung eines effektiven Elastizitätstensors
und der extremalen Spannungen für beliebige Magnetkomposite⁺)

T. Iwanicki

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

⁺) Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität
Karlsruhe genehmigte Dissertation.

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Berechnung der strukturmechanischen Eigenschaften großer Magnetspulen bzw. Magnetsysteme ist eine sehr feine Unterteilung der Struktur notwendig. Dadurch kann sich eine so große Zahl von Einzelementen ergeben, daß bei diesen Systemen die Grenzen von Speicherkapazität und auch Rechenzeit heutiger Rechner überschritten werden. Daher ist man gezwungen, bestimmte Vereinfachungen vorzunehmen. Aufgabe dieser Arbeit war, solche Vereinfachungen zu finden, die noch zuverlässige Werte bei der Spannungs-Dehnungsanalyse liefern.

Es wird eine numerische Methode angegeben, sog. „numerische Simulation“, mit deren Hilfe ein effektiver Elastizitätstensor ermittelt wird. Die Struktur kann dabei beliebig kompliziert werden, sogar geometrische Diskontinuitäten z.B. Kühlkanäle enthalten, die strukturmechanisch Schwachstellen sind. Die Struktur muß nur die Bedingung der Homogenität erfüllen, d.h. es muß sich ein „repräsentatives Volumenelement“ (RVE) aufstellen lassen. Mit einem so aufgestellten effektiven Elastizitätstensor für ein RVE lassen sich die mittleren und mit Hilfe der Oberflächenverschiebungsmethode auch die extremalen Spannungen an jeder beliebigen Stelle der Struktur errechnen.

Es ist eine sehr gute Übereinstimmung der gerechneten mit den experimentellen E-Moduli festzustellen.

NUMERICAL CALCULATIONS OF AN EFFECTIVE ELASTICITY TENSOR AND EXTREMAL STRESSES FOR ARBITRARY MAGNET COMPOSITES

ABSTRACT

For the calculation of mechanical properties of large magnet systems in 3-dimensional space, a very fine subdivision of the magnetstructure is necessary. In the finite element programmes, this will lead to unacceptably long computing times and to the limits of computer-storage capacity.

This limitation requires a simplification of the structure model.

The objective of this work is to find such simplifications that yield still reliable results by the stress-strain analysis.

This problem can be solved by the numerical method, called „ numerical simulation“, by which an effective elasticity tensor will be obtained for a composite material. The structure can be arbitrarily complicated and may contain voids, e.g. cooling channels, which are weak elements for the structural analysis. The structure has to perform only a homogeneity condition, i.e. it must be possible to define a „ representative volume element“ (RVE). With the effective elasticity tensor, which can be found for such RVE, it is possible to calculate the average stress and with the surface displacement method also the extremal stresses in each point of the structure.

It is found a good agreement between experimental and theoretical moduli of elasticity.

INHALT

1. Einführung.....	1
2. Grundlagen zur Berechnung des effektiven Elastizitätstensors.....	5
2.1 Spannungs-Dehnungsbeziehungen für anisotrope Materialien.....	6
3. Der Begriff des repräsentativen Volumenelements (RVE) und die Homogenisierung der Struktur.....	8
3.1 Verwendung des Berechnungsverfahrens von Korringa-Behrens.....	8
3.2 Numerische Berechnung des Elastizitätstensors am Beispiel des NbTi/Cu-Komposits.....	8
3.3 Kurze Interpretation der Ergebnisse.....	11
3.4 Ermittlung des Elastizitätstensors für den LCT-Leiter.....	13
4. Anwendung der Finite-Element-Methode.....	15
4.1 Einführung in die Finite-Element-Methode.....	15
4.2 Ermittlung mittlerer Spannungen und Dehnungen in einer supraleitenden Spule.....	19
5. Die Methode zur Berechnung der extremalen Spannungs-Dehnungszustände in einem elastischen Körper.....	27
5.1 Berechnung der extremalen Spannungs- und Dehnungszustände in einem aus der Spule herausgegriffenen RVE.....	31
5.1.1 Das Modell ohne Röbelung.....	33
5.1.2 Das Modell mit Röbelung.....	54
5.1.3 Kurze Zusammenfassung.....	70
6. Die Methode zur numerischen Ermittlung des Elastizitätstensors für ein RVE mit gleichzeitiger Angabe der dazugehörigen extremalen Spannungen	72
6.1 Ermittlung des effektiven Elastizitätstensors am Beispiel des LCT-Leiters.....	74
6.2 Berechnung der mittleren Spannungen und Dehnungen in einem Magnetkomposit mit Abschätzung der extremalen Werte.....	87
7. Zusammenfassung.....	94
ANHANG.....	96
I. Darstellung der Elastizitätsmatrix.....	96
II. Die Voigt- und Reuss-Matrix.....	98
III. Abschätzung des Twisteinflusses.....	99
Literaturhinweise.....	101

1. EINFÜHRUNG

Fusionsreaktoren, die auf dem magnetischen Einschlußprinzip beruhen, erfordern die Anwendung hoher Magnetfelder (6÷8 Tesla). Durch die entsprechende Wahl der Innen- und Aussenkonfiguration der Magnetspulen wird versucht, die notwendigen Magnetfelder zu erreichen, und die dabei auftretenden enormen elektromechanischen Kräfte abzufangen. Der Innenaufbau solcher Spulen setzt sich aus den stromtragenden Supraleitern, Verstärkungen, Isolationsmaterial und Kühlkanäle zusammen (Abb.1.1).

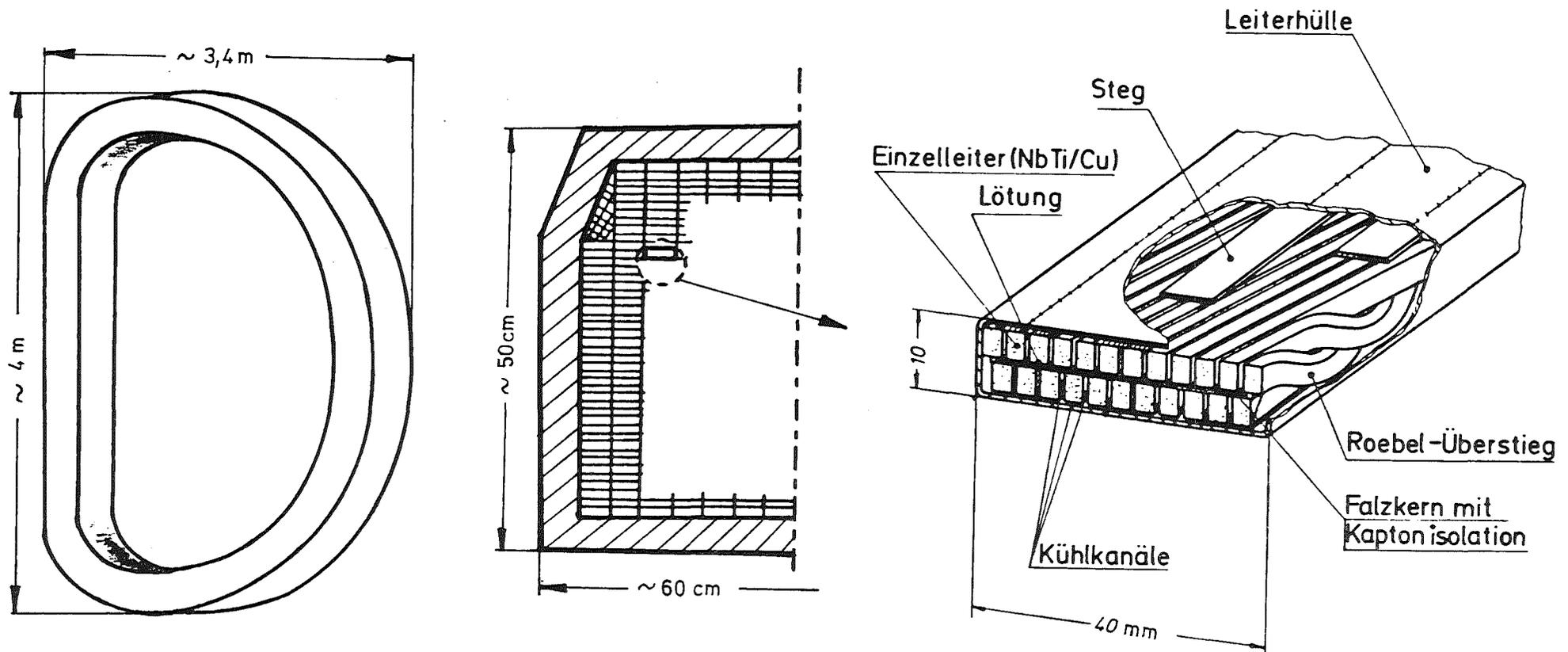
Die so aufgebaute Windung bildet ein Magnetkomposit.

Die meistens spröden, dünnen Supraleiter (Multifilamentleiter) müssen mit flüssigem Helium gekühlt werden, und dürfen dabei eine maximal zulässige Dehnung nicht überschreiten /1/. Ein vorzeitiger Verlust der supraleitenden Eigenschaften muß, um die Sicherheit der Anlage zu gewährleisten, auf jeden Fall ausgeschlossen werden.

Die struktur-mechanische Berechnung der großen supraleitenden Magnet-systeme für die Kernfusion erzwingt wegen der komplizierten Lasten und Bauweise der Spule eine genaue dreidimensionale Analyse. Damit ergibt sich das Problem der Bestimmung elastischer Materialeigenschaften der Struktur bestehend aus vielen Einzelmaterialien. Infolgedessen ist dies, im Hinblick auf die kritische Dehnung des Supraleiters, ein Problem der Berechnung des zuverlässigen Spannungs-Dehnungszustandes.

Eine gleichzeitige Erfassung maximaler Spannungen bzw. Dehnungen in einem Multifilamentleiter ist bisher eine ungelöste Aufgabe gewesen. Eine analytische Lösung scheitert an der Kompliziertheit der Struktur und der magnetischen Kraftbelastung. Eine vollständige numerische Berechnung einer solchen Konfiguration würde mit heutigen Computern mehrere Jahre Rechenzeit erfordern, abgesehen von der Speicherkapazität derzeitiger Rechenanlagen /2,3,36/.

Bisherige Berechnungen der elastischen Eigenschaften der Strukturmaterialien bezogen sich auf isotrope, inhomogene /4,5/ bzw. transversal isotrope, inhomogene Komposite /6,7,8/. Alle behandeln lediglich maximal zwei Werkstoffkomponenten. Halbanalytische Lösungen sind bekannt



a) D-förmige Spule

b) Windungsquerschnitt
(Magnetkomposit)

c) LCT-Leiter

Abb.1.1: Aufbau einer supraleitenden Toroidalfeldspule für das LCT-Projekt („Large Coil Task“) /22/

für sog. Glasfaserverbundwerkstoffe /9,10/, die allerdings nur isotrope Eigenschaften aufweisen.

Man ist auf numerische Methoden angewiesen /2,14/, die für beliebige Komposite angewendet werden können, mit Ausnahme der Strukturen, die Leerräume enthalten. Die Rechnungen beziehen sich auf den elastischen Bereich. Ausgehend von den Elastizitätsmatrizen der einzelnen Komponenten werden die numerischen Rechnungen ausgewertet, und die numerischen Fehler, die als neue technische Konstanten zur Erscheinung kommen, werden unterdrückt. Diese neuen Scheinkonstanten erhöhen den Anisotropiegrad des effektiven Elastizitätstensors. Es wird dabei eine Reduktion der E-Moduli, verursacht durch die Verseilung der einen Komponente, abgeschätzt.

Die Ermittlung einer effektiven Elastizitätsmatrix nach /2,14/ für Komposite, die Leerräume, etwa Kühlkanäle enthalten, scheitert wegen numerischer Instabilität.

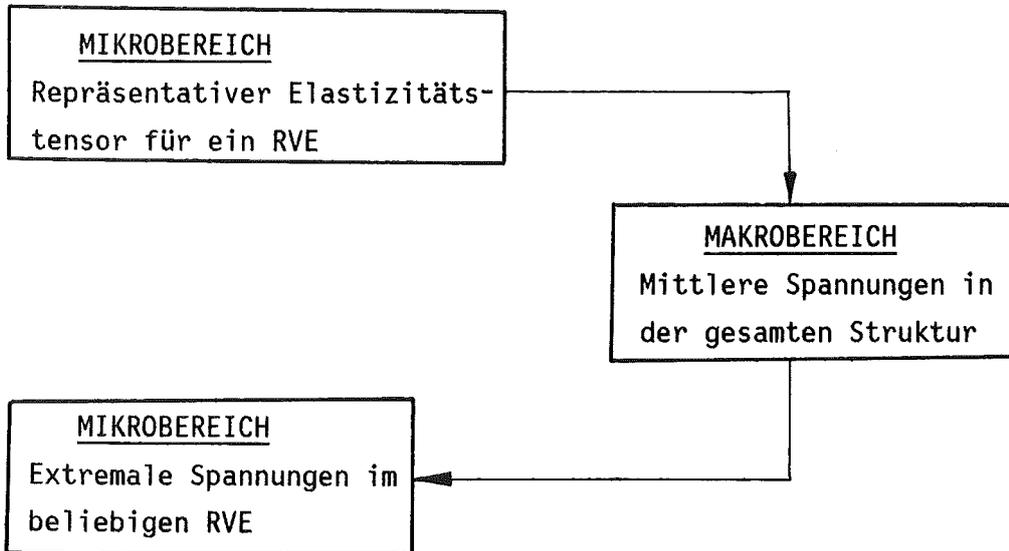
Für beliebige Komposite, die sogar Löcher enthalten können, wird in dieser Arbeit eine numerische Methode angegeben, die einen effektiven Elastizitätstensor und eine gleichzeitige Erfassung maximaler Spannungen bzw. Dehnungen in der Mikrostruktur (z.B. einem Multifilamentleiter) gestattet.

Das elastische Verhalten inhomogener Materialien, die durchaus anisotrope Eigenschaften aufweisen können, wird durch einen sog. effektiven Elastizitätstensor beschrieben. Die Homogenisierung durch die Angabe eines einzigen Materialtensors ist nur dann sinnvoll, wenn die Eigenschaften eines Teilvolumens ΔV des inhomogenen Materials an jeder Stelle gleich sind. Der effektive Elastizitätstensor eines solchen Elementes gibt an, wie die Volumenmittelwerte der Spannungen und Dehnungen im inhomogenen Material zusammenhängen /11/. Ein solches Element wird als repräsentatives Volumenelement, auch RVE genannt /12,13/.

Gelingt es, für ein RVE den effektiven Elastizitätstensor zu bestimmen, so lassen sich im gesamten Körper (z.B. Magnetspule) bei einer relativ groben Unterteilung der Struktur die mittleren Spannungen und Dehnungen schnell berechnen.

Kennt man die mittleren Spannungen und Dehnungen in dem gesamten Magneteten, so sind diese auch in einem RVE bekannt. Gesucht wird dann eine Methode, die mit Hilfe der mittleren Werte für das RVE, die extremalen Spannung- Dehnungszustände in dem RVE zu berechnen gestattet. Ist dies möglich, so lassen sich die extremalen Werte in jedem beliebig aus der Struktur herausgegriffenen RVE bestimmen.

Somit ergibt sich eine Methode, die ausgehend von dem Mikrobereich, einen repräsentativen Elastizitätstensor für ein RVE ermittelt, mit diesem die gesamte Struktur berechenbar macht und schließlich mit den Ergebnissen aus dem Makrobereich die extremalen Spannungszustände in dem Mikrobereich berechnen läßt, wie es im folgenden Strukturdiagramm dargestellt ist.



Mit Hilfe dieser Methode werden am Beispiel eines supraleitenden Magnetkomposits die Spannungen und Dehnungen in der Struktur ermittelt. Der Röhreneinfluß einzelner Leiter in der Spule wird dabei untersucht.

2. GRUNDLAGEN ZUR BERECHNUNG DES EFFEKTIVEN ELASTIZITÄTSTENSORS

Im 3-D Raum wird aus der einfachen Beziehung $\sigma = E\varepsilon$ (Hooke'sches Gesetz 1660) eine Tensorgleichung, die als verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz /15/ geschrieben werden kann:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

wo σ_{ij} die Spannungskomponenten, C_{ijkl} der Elastizitätstensor und ε_{kl} die Dehnungskomponenten sind. Für ein beliebiges Komposit kann gemäß der Definition der makroskopisch homogenen Körper /16/ der Mittelwert der Spannungen und Dehnungen geschrieben werden als

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int \sigma_{ij}(x_i) dv \quad (2.2)$$

und

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int \varepsilon_{ij}(x_i) dv \quad (2.3)$$

Führt man die Mittelung nach (2.2, 2.3) in (2.1) aus, so ergibt sich

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^{eff} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (2.4)$$

Der effektive Elastizitätstensor C_{ijkl} gibt an, wie die Volumennittelwerte der Spannungen und Dehnungen in inhomogenem Material miteinander zusammenhängen.

Mit der Annahme konstanter Spannungen /17/ oder Dehnungen /18/ für die einfachsten Geometrien führt C_{ijkl} zum

$$\text{Reusstensor } C_{ijkl}^R = \langle C_{ijkl}^{-1} \rangle^{-1} \quad (2.5)$$

$$\text{Voigtensor } C_{ijkl}^V = \langle C_{ijkl} \rangle \quad (2.6)$$

Im dreidimensionalen Fall geben diese Tensoren nur Näherungen an, da die Annahme konstanter Spannungen bzw. Dehnungen nicht in allen Richtungen gleichzeitig erfüllt werden kann. Der Voigt- und Reusstensor stellen die obere und untere Schranke für die Richtigkeit berechneter effektiver Elastizitätstensoren dar (Hill'sche Regel/19/),

$$C_{ijk}^{R \leq C_{ijk}^{eff} \leq C^V} \quad (2.7)$$

Diese Näherung stellt ein sinnvolles Kriterium für die Richtigkeit der berechneten effektiven Elastizitätstensoren dar. Die Einzelemente können jedoch damit nicht eingegrenzt werden.

2.1 SPANNUNGS- DEHNUNGSBEZIEHUNGEN FÜR ANISOTROPE MATERIALIEN

Sind die Spannungs-Dehnungstensoren in (2.1) symmetrisch, so erhält der Elastizitätstensor 36 unabhängige Konstanten. Ausgehend von der Energiegleichung kann leicht nachgewiesen werden, daß für den elastischen Körper ein elastisches Potential existiert. Dies führt zur Symmetrie des Elastizitätstensors C_{ijkl} , der 21 unabhängige Konstanten besitzt.

In der verkürzten Tensorschreibweise /20/ lautet das allgemeine Hooke'sche Gesetz (vgl. Anhang I)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Ein Material mit diesen Eigenschaften wird als anisotrop bezeichnet (alternativer Name triklin), wegen des Fehlens der Symmetrie des elastischen Materialverhaltens.

Besitzt ein Material eine Symmetrieebene, wird die Elastizitätsmatrix C_{ij}

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & & & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & & & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & \\ & & & C_{45} & C_{55} & \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Es existieren in dem Fall 13 unabhängige Konstanten. Solches Material wird als monoklin oder allgemein orthotrop bezeichnet.

Sind zwei Symmetrieebenen vorhanden, so vereinfacht sich die Elastizitätsmatrix zu

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Ein Material mit der Eigenschaft (2.10) wird als speziell orthotrop genannt. Mehrere Symmetrieebenen führen zu transversal orthotropen und isotropen Materialeigenschaften (Ref./15/). Die Anzahl der Unbekannten reduziert sich dementsprechend.

Eine wichtige Eigenschaft unterscheidet (2.10) von (2.9), die für eine spätere Betrachtung von Bedeutung ist, nämlich, daß es in (2.10) keine Wechselwirkung zwischen den Normalspannungen σ_{ij} und den Scherungen γ_{ij} gibt. Wird z.B. ein Material mit den Eigenschaften von (2.9) der Normalspannung σ_{ij} unterworfen, so verursacht diese eine Scherung γ_{ij} , oder wird eine Scherspannung τ_{ij} angelegt, so verursacht diese eine Dehnung ε_{ij} .

Die C_{ij} ($i=1,2,3, j=6$) sind als Wechselwirkungskoeffizienten erster und zweiter Art bekannt. C_{45} wird als Chentsov-Koeffizient bezeichnet /15/. In einem speziell orthotropen Material (2.10) sind diese Koeffizienten Null. Bei einer Transformation der Matrix (2.10) um einen beliebigen Winkel (ausgenommen $0, \pi/2, \pi \dots$) mit Hilfe einer entsprechenden Transformationsmatrix /20/ erscheinen die Wechselwirkungs- und Chentsov-Koeffizienten jedoch sofort. Wird ein speziell orthotropes Material nicht in der Richtung seiner Hauptachsen beansprucht, so ist mit einer Koppelung zwischen der Normalspannung und Scherspannung zu rechnen.

3. DER BEGRIFF DES RVE UND DIE HOMOGENISIERUNG DER STRUKTUR

Zur Bestimmung eines RVE ist zunächst die Anordnung und die Dimension einzelner Komponenten in der gesamten Struktur notwendig.

Ein RVE läßt sich bestimmen, wenn

$$V_{\text{ges}} \gg \Delta V = RVE \geq l^3 \quad (3.1)$$

wobei l die charakteristische Länge ist, mit der sich die Parameter des Mediums in dem Volumen V wiederholen. Die gesamte Struktur kann dann als homogen betrachtet werden vorausgesetzt, die Eigenschaften des so gewählten Volumens ΔV sind unabhängig von dem Koordinatensystem.

Wird nur in einem Koordinatensystem gerechnet, wie z.B. die Magnete in Zylinderkoordinaten, so kann für diese Koordinaten Homogenität gewährleistet werden. Die Annahme ist, daß beliebig kleine Volumina ΔV die gleichen Eigenschaften an jedem Ort des Mediums aufweisen, so daß die Krümmung der Einzelvolumina an jedem Ort näherungsweise gleich ist. Vergleicht man die Dimension der einzelnen RVE in dem Magneten (Abb.1.1), so ist die Homogenität gewährleistet.

3.1 VERWENDUNG DES BERECHNUNGSVERFAHRENS VON KORRINGA-BEHRENS

Mit der "EFEHMA" Routine /2/ kann man einen effektiven Elastizitätstensor eines beliebig zusammengesetzten Komposits berechnen. In dieser Routine wird eine Tensorintegralgleichung /14/ verwendet, sowie die Definition des effektiven Elastizitätstensors gemäß

$$C^{\text{eff}} = C^0 + \langle q(x) \rangle \quad (3.2)$$

wobei C^0 ein vorgegebener Elastizitätstensor ist und $\langle q(x) \rangle$ die Lösung der Integralgleichung. Als C^0 wird entweder der Voigt- oder Reuss- Tensor, berechnet nach der Mittelungsregel (2.5,6), eingesetzt. Eine ausführliche Form der Gl.(3.2) ist in /2,14/ angegeben.

3.2 NUMERISCHE BERECHNUNG DES ELASTIZITÄTSTENSORS AM BEISPIEL DES NbTi/Cu-KOMPOSITS

Für die Homogenisierung der gesamten Struktur wird zunächst ein Einzeleiter, wie er in Abb.1.1c zu sehen ist, homogenisiert.

Der LCT-Einzelleiter (Abb.3.1) besitzt zwei Komponenten, deren Elastizitätsmatrizen folgende Gestalt haben (die Einheit in GPa):

$$\underline{\text{Cu}} \begin{bmatrix} 161.0 & 69.0 & 69.0 & & & \\ 69.0 & 161.0 & 69.0 & & & \\ 69.0 & 69.0 & 161.0 & & & \\ & & & 46.0 & & \\ & & & & 46.0 & \\ & & & & & 46.0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\underline{\text{NbTi}} \begin{bmatrix} 108.0 & 46.2 & 46.2 & & & \\ 46.2 & 108.0 & 46.2 & & & \\ 46.2 & 46.2 & 108.0 & & & \\ & & & 30.8 & & \\ & & & & 30.8 & \\ & & & & & 30.8 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

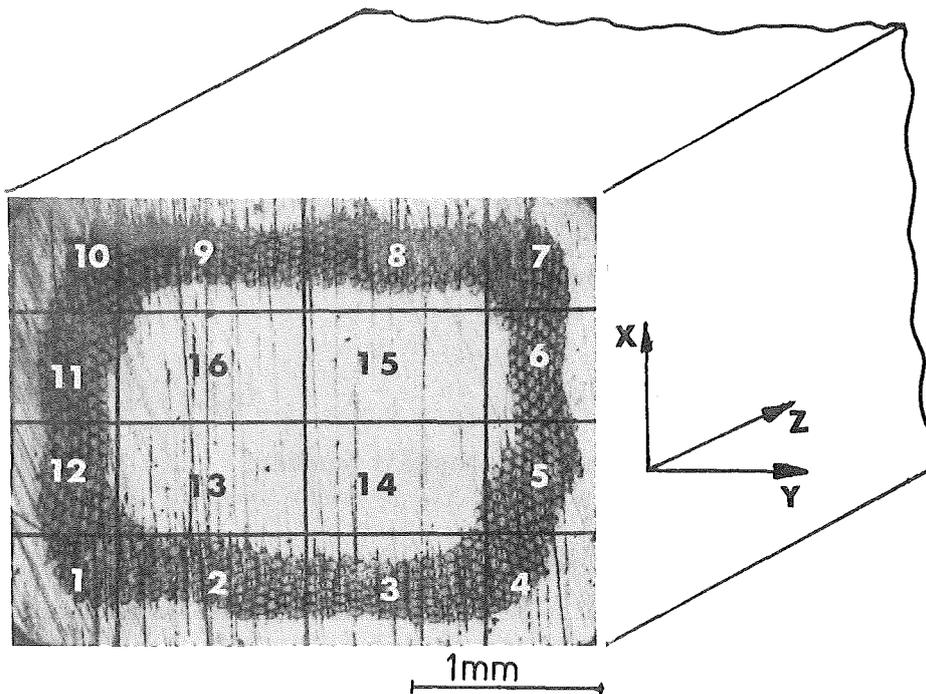


Abb.3.1: Der NbTi/Cu Einzelleiter /22/

Beide Komponenten sind isotrop. Ihre technischen Konstanten /21/ betragen:

	E-Modul /GPa/	Poisson Zahl ν
Cu	120.0	0.3
NbTi	80.0	0.3

Die Beziehung zwischen den technischen Konstanten und C_{ij} ist im Anhang I angegeben.

Der NbTi/Cu Einzelleiter besitzt folgende geometrische Daten:

Anzahl der NbTi-Strands	774
Durchmesser des NbTi-Strands	4.632×10^{-3} /cm/
Verhältnis Cu/NbTi	4.67
Querschnittsfläche des Cu	0.061 /cm ² /
Querschnittsfläche des NbTi	0.01304 /cm ² /

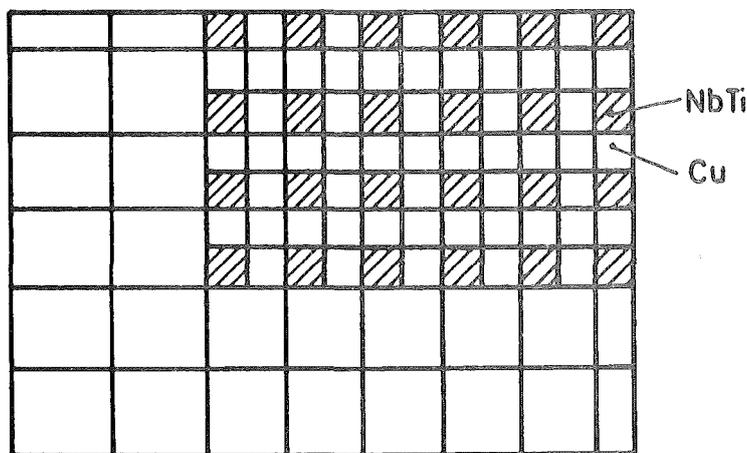


Abb.3.2: Ein Modell für die linke, untere Ecke des NbTi/Cu-Einzelleiters

Wegen der Speicherkapazität des Computers wurde der LCT-Leiter in 23 Bereiche geteilt, die getrennt behandelt wurden.

Zunächst wurde der effektive Elastizitätstensor des Teilbereiches 1 berechnet (s. Abb.3.1). Das Modell für diese Ecke des Leiters (Abb.3.2) hat eine für diesen Bereich entsprechend anfallende Anzahl von NbTi-Filamenten mit einem dazugehörigen Anteil an Cu. Als Input wurden die Elastizitätsmatrizen des NbTi und Cu eingegeben. Der daraus mit EFEHMA für diese Ecke berechnete effektive Elastizitätstensor kann durch eine entsprechende Transformation (Rotation) auf die restlichen Ecken übertragen werden. Ähnlich wurde mit den Teilen 2,3,8,9 verfahren.

Im letzten Schritt wurde für den gesamten Leiter die aus den früheren Rechnungen berechneten Elastizitätstensoren als Eingabe benutzt.

Für die Anteile 13,14,15,16 wurden die Cu Tensoren genommen. Die daraus errechnete Elastizitätsmatrix des NbTi/Cu-Komposits hat folgende Gestalt (Einheit in Pa):

$$\begin{bmatrix} 1.395E11 & 0.498E11 & 0.579E11 & -.643E-2 & 0.151E-1 & 0.600E09 \\ 0.498E11 & 1.175E11 & 0.504E11 & -.102E-1 & 0.456E-1 & 0.731E08 \\ 0.579E11 & 0.504E11 & 1.456E11 & -.966E-3 & 0.216E-1 & 0.949E08 \\ -.643E-2 & -.102E-1 & -.966E-3 & 0.439E11 & 0.163E08 & 0.867E-2 \\ 0.151E-1 & 0.456E-1 & 0.216E-1 & 0.163E08 & 0.465E11 & 0.322E-3 \\ 0.600E09 & 0.731E08 & 0.949E08 & 0.867E-2 & 0.322E-3 & 0.418E11 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Die dazugehörigen technischen Konstanten:

	xx	yy	zz			
E-Modul /GPa/	107	92	112			
	xy	yx	zy	yz	xz	zx
v Zahl	0.297	0.255	0.298	0.244	0.294	0.308
Schubmodul /GPa/	41.9			43.9	46.5	

Die gesamte CPU-Zeit (IBM-3033) zur Berechnung des effektiven Elastizitätstensors betrug ca. 10 min.

3.3 KURZE INTERPRETATION DER ERGEBNISSE

Der effektive E-Tensor wird als speziell orthotrop betrachtet, aus Gründen, die in der späteren Diskussion angegeben werden.

Die Matrix (3.5) ist wie erwartet positiv-definit (d.h. alle $C_{ij} > 0$ $i=1,2...6$ Ref./20/). Eine Inversion von (3.5) $C_{ij} * S_{ij} = I$, wo I die Einheitsmatrix und S_{ij} die inverse Matrix bedeuten, führt zu Beschränkungen vom Typ

$$\begin{aligned} S_{23} &< (S_{22} S_{33})^{\frac{1}{2}} \\ S_{13} &< (S_{11} S_{33})^{\frac{1}{2}} \\ S_{12} &< (S_{11} S_{22})^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Somit sind Schranken für die technischen Konstanten wie v, E und G

für eine experimentelle Auswertung angegeben.

Außer der numerischen Fehler in (3.5) (z.B. $C_{14}, C_{15}, C_{25} \dots$, wo Voigt und Reuss-Tensoren als absolute Schranken für C^{eff} Nullwerte für diese Koeffizienten zeigen ; siehe Anhang II), wird zunächst eine allgemeine Orthotropie (vgl. (2.9)) vermutet, aufgrund der erschienenen Chentsov- und Wechselwirkungskoeffizienten.

Wenn die Komponenten des NbTi/Cu-Komposits isotrope Eigenschaften besitzen und die Winkelanordnung der einzelnen Komponenten lediglich 0 bzw. $\pi/2$ beträgt, ist keine Koppelung zwischen den Normal- und Scherdehnungen zu erwarten (vgl. Kap. 2.1). Eine Bestätigung dafür ist auch in der Theorie der Verbundplatten /20,23/ zu finden, wonach für die sog. regulär-symmetrisch zusammengesetzten Platten, die aus den isotropen Einzelmaterialien aufgebaut sind, in den Hauptrichtungen keine allgemeine Orthotropie festzustellen ist. Sogar für eine Biegung solcher Platten ist nach der Kirchhof-Love Theorie /23/ keine Koppelung zwischen den Normalkräften und der Biegung bzw. dem Twist zu erwarten. Es sind daher die Chentsov- und Wechselwirkungskoeffizienten in der Elastizitätsmatrix (3.5) als Null zu setzen. Eine analytische Lösung für einen LCT-Einzelleiter ist wegen der großen Anzahl von NbTi-Strands und der Komplexität nicht durchführbar.

Die experimentell ermittelten E-Moduli für den LCT-Einzelleiter /33/ (in axialer Richtung) zeigen eine Übereinstimmung im Rahmen von weniger als 10% mit den hier numerisch errechneten Werten (vgl. Abb. 6.1). Zu erwähnen ist, daß die Experimente bei Zimmertemperatur durchgeführt wurden, die numerische Simulation dagegen bei 4K. Daraus folgt, daß bei gleicher Temperatur die Differenz noch geringer wird.

Andererseits ist in der numerischen Berechnung für das Komposit kein Twist der NbTi/Cu Filamente berücksichtigt, der zu einer Abnahme des E-Moduls führen kann. Nach Whitney /24/ ist für ein seilartiges Gebilde mit einer Reduktion des E-Moduls zu rechnen, die eben durch die Verseilung verursacht wurde. Wenn das E_{θ} der E-Modul für den Neigungswinkel θ eines Strands und E in der axialen Richtung des Seils ist, so gilt

$$\frac{E}{E_{\theta}} = \frac{1}{1 + 4\pi \frac{R^2}{N^2}} \quad (3.7)$$

wo R und N den Radius und den Twist pro Längeneinheit in dem Seil bedeuten (siehe Anhang III). Bei Anwendung von (3.7) auf das betrachtete NbTi/Cu Komposit ist mit einer Verminderung im $^{\circ}/\infty$ -Bereich zu rechnen. Allerdings ist die Anwendung von (3.7) eingeschränkt, da sich die NbTi-Strands in einer unverseilten Matrix befinden.

3.4 ERMITTLUNG DES ELASTIZITÄTSTENSORS FÜR DEN LCT-LEITER

Für ein beliebiges Komposit, das keine geom. Diskontinuitäten aufweist, kann ein effektiver Elastizitätstensor berechnet werden (s. Kap. 3.1). Enthält jedoch ein RVE Löcher, so ist mit der Korringa-Behrens Methode die Ermittlung eines solchen effektiven Elastizitätstensors fraglich. Die oben geschilderte Methode stellt bei der Berechnung eines solchen Tensors eine starre Verbindung zwischen zwei Materialien her, wenn sie durch ein Loch getrennt werden, wie in Abb. 3.3 gezeigt.

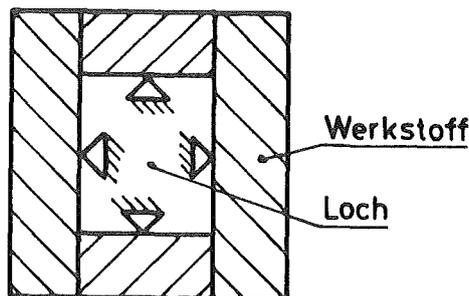


Abb. 3.3: Die geometrische Diskontinuität in der Struktur wirkt in der Korringa Methode wie eine starre Verbindung.

Es leuchtet ein, daß man eine solche geom. Diskontinuität in Form von Kühlkanälen durch ein Material ersetzen kann, das eine sehr "weiche" Elastizitätsmatrix besitzt (vgl. Kap. 5). Leider ist man hier sehr begrenzt, da der Unterschied z. B. zwischen Stahl und Loch bezüglich der Elastizitätsmoduli maximal 6 betragen darf. Niedrigere Werte führen zu numerischen Instabilitäten wie z. B. bei Matrizeninversionen. Dies bedeutet, daß ein Loch höchstens mit einem Elastizitätsmodul von 30 GPa ersetzt werden kann.

Als Testbeispiel wird ein aus der LCT-Spule herausgegriffenes RVE dienen (Abb.1.1). In Tabelle 1 sind die geometrischen Abmessungen des LCT-Leiters angegeben.

Komponente	Abmessungen mm	Flächenanteil/mm ²
GFK-Hülle	0.3x41.0	24.6
GFK-Hülle	5.0x2.0	10.0
Stege	0.6x7.0	25.2
Falzkern	1.0x33.7	33.7
Einzeleiter	2.35x 3.1	167.55
Stahlhülle	0.8x40.0	64.0
Stahlhülle	0.8x8.4	13.44

Gesamt (ohne Kühlkanäle) $\Sigma=338.4$
 Gesamt (mit Löchern) $41 \times 10.6 = 434.6$

Tab.1: Geometrische Abmessungen und Flächenanteile des LCT-Leiters

Für die Einzelmaterialien des so gewählten Volumens ΔV wurden folgende Elastizitätsmatrizen genommen (Einheit GPa):

Für den NbTi/Cu Einzeleiter (s.Kap.3.2):

$$\begin{bmatrix}
 139.5 & 49.8 & 57.9 & & & \\
 49.8 & 117.5 & 50.4 & & & \\
 57.9 & 50.4 & 145.6 & & & \\
 & & & 43.9 & & \\
 & & & & 46.5 & \\
 & & & & & 41.8
 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Für die Stege, Hülle und den Falzkern:

$$\begin{bmatrix}
 283.1 & 121.0 & 121.0 & & & \\
 121.0 & 283.1 & 121.0 & & & \\
 121.0 & 121.0 & 283.1 & & & \\
 & & & 81.00 & & \\
 & & & & 81.00 & \\
 & & & & & 81.00
 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Für GFK-Material:

$$\begin{bmatrix} 71.48 & 25.76 & 14.76 & & & \\ 25.76 & 71.48 & 14.76 & & & \\ 14.76 & 4.76 & 31.19 & & & \\ & & & 22.65 & & \\ & & & & 11.73 & \\ & & & & & 11.73 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Für das Loch:

$$\begin{bmatrix} 31.19 & 25.76 & 14.76 & & & \\ 25.76 & 71.48 & 14.76 & & & \\ 14.76 & 14.76 & 71.48 & & & \\ & & & 22.65 & & \\ & & & & 11.73 & \\ & & & & & 11.73 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Werden diese Materialien als Eingabe für die Korringa Methode benutzt, so erhält man als Ergebnis folgende effektive Elastizitätsmatrix für das RVE:

$$\begin{bmatrix} 145.1 & 44.9 & 54.9 & & & \\ 44.9 & 141.9 & 52.3 & & & \\ 54.9 & 52.3 & 174.5 & & & \\ & & & 55.01 & & \\ & & & & 53.62 & \\ & & & & & 48.93 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Die Matrix (3.12) stellt das homogenisierte RVE dar. Die gesamte Struktur, bestehend aus vielen RVE's, läßt sich dann bei relativ grober Unterteilung einfacher berechnen.

4. ANWENDUNG DER FINITE-ELEMENT-METHODE

4.1 EINFÜHRUNG IN DIE FINITE-ELEMENT-METHODE

An dieser Stelle ist die Verschiebungsmethode erwähnt worden,

die sich in der jüngsten Anwendung bestens bewährt hat, und die Probleme der Strukturmechanik nahezu nur mit dieser Methode behandelt werden. Zur Genauigkeitssteigerung ist es sinnvoll geeignete finite Elemente abhängig von der Struktur zu formulieren für die dann ein effektiver Verschiebungsansatz formuliert wird (siehe Effektivitätsuntersuchung in /37/). Daneben hat man die Möglichkeit der Nutzbar-machung der "erweiterten Funktionale" zur weiteren Steigerung der Konvergenzgeschwindigkeit z.B. mit dem Hybridverfahren /38,39,40,41/.

Zur Berechnung der strukturmechanischen Eigenschaften der als Testbei-spiel ausgewählten Spule (Abb.1.1) wird ein Finite-Element-Programm ASKA (Automatic System for Kinematic Analysis) /25/ benutzt.

Die Grundlage für die Anwendung der Näherungsmethoden in der Elasti-zitätstheorie (wie z.B. für ASKA) ist das Prinzip der virtuellen Arbeit /26/. Dies wird im folgenden geschildert.

Die Arbeitszunahme δW_a , die von der äußeren Belastung mit virtuellen Verschiebungen geleistet wird, ist gleich der Arbeit δW_i , die von den Spannungen mit den virtuellen Dehnungen geleistet wird, wenn die Spannungen mit der äußeren Belastung statisch verträglich sind. Bezeichnet man mit \underline{p}^* die Volumenkraftmatrix und mit \underline{S} die Randspannungsmatrix, so wird bei einer Zunahme der inkrementellen Verschiebung $\delta \underline{u}$ die Arbeitszunahme /27/:

$$\delta W_a = \int_V \underline{p}^t \delta \underline{u} dv + \int_A \underline{S}^t \delta \underline{u} dA \quad (4.1)$$

Andererseits ergibt sich die infinitesimale innere virtuelle Arbeit:

$$\delta W_i = - \int_V \underline{\sigma}^t \delta \underline{\epsilon} dv \quad (4.2)$$

wobei $\underline{\sigma}$ - die Spannungsmatrix und $\underline{\epsilon}$ - die Dehnungsmatrix bedeutet. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen fordert, daß die Summe der virtuellen Arbeiten verschwindet.

$$\delta W_i + \delta W_a = 0 \quad (4.3)$$

*) Spalten- und Zeilenmatrizen sind durch $\underline{\quad}$ Quadrat- oder Rechteck-matrizen durch $\underline{\quad}$ gekennzeichnet.

In der Formulierung als Variationsprinzip können Gl.(4.1,2,3) umformuliert werden zu

$$\int_V \underline{\sigma}^t \delta \underline{\varepsilon} dv - \int_V \underline{p}^t \delta \underline{u} dv - \int_A \underline{s}^t \delta \underline{u} dA = 0 \quad (4.4)$$

Jetzt gelte Kausalität zw. Statik- und Kinematikgruppe d.h. man kann ein äußeres Potential (Π_a) und ein elastisches Potential (Π_i) wie folgt definieren:

$$\delta \Pi_a = - \int_V \underline{p}^t \delta \underline{u} dv - \int_A \underline{s}^t \delta \underline{u} dA \quad (4.5)$$

$$\delta \Pi_i = \int_V \underline{\sigma}^t \delta \underline{\varepsilon} dv \quad (4.6)$$

Für die Variation sind \underline{p}^t und \underline{s}^t konstante Matrizen, so daß folgt:

$$\delta \Pi_a = \delta \left(- \int_V \underline{p}^t \underline{u} dv - \int_A \underline{s}^t \underline{u} dA \right)$$

Π_a

Für Hooke'sches Stoffgesetz gilt $\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\varepsilon}$, so daß Gl.(4.6) lautet

$$\delta \Pi_i = \int_V \underline{\varepsilon}^t \underline{E} \delta \underline{\varepsilon} dv$$

Die Integration über $\underline{\varepsilon}$ liefert für das elastische Potential Π_i :

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}^t \underline{E} \underline{\varepsilon} dv = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}^t \underline{\varepsilon} dv$$

Aus (4.4,5,6) folgt, daß

$$\delta (\Pi_i + \Pi_a) = 0 \quad (4.7)$$

d.h. die erste Variation der potentiellen Energie verschwindet. Gl.(4.7) liefert somit eine Bestimmungsgleichung für die Erzeugung der Steifigkeitsbeziehung der Finite-Element-Methode (FEM).

Eine globale Matrix \underline{K} , die einen verallgemeinerten Verschiebungsvektor \underline{d} mit einem Kraftvektor \underline{F} entsprechend

$$\underline{F} = \underline{K} \underline{d} \quad (4.8)$$

verknüpft, heißt Steifigkeitsmatrix. Die Steifigkeit kann allgemein als Kraft/Verschiebung definiert werden. Ist ein verallgemeinerter Kraftvektor und die Gesamtsteifigkeitsmatrix bekannt, so lassen sich die gesuchten verallgemeinerten Verschiebungen ermitteln.

In der FEM- Methode wird ein elastischer Körper beliebiger Gestalt diskretisiert so, daß er aus den sog. finiten Elementen besteht, die miteinander

mittels Knotenpunkten am Rande jedes Elementes verbunden sind. Innerhalb eines jeden Elementes wird ein zu den Nachbarelementen kompatibler, linearer oder nichtlinearer Verschiebungsansatz (sog. shape function) gemacht. Für den Verschiebungsansatz werden geeignete Formfunktionen eingeführt, um erwartete, wirkliche Verformungen des Körpers möglichst gut wiedergeben zu können. Der Verschiebungsansatz in einem Element lautet zunächst

$$\underline{u} = \underline{G}\alpha$$

$$\underline{d} = \underline{H}\alpha$$

mit $\det. \underline{H} \neq 0$ folgt:

$$\underline{u} = \underline{N}\underline{d} \tag{4.9}$$

wobei $\underline{N} = \underline{G}\underline{H}^{-1}$

ist. Die Dehnung ist gegeben durch:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B}\underline{d}$$

Dabei sind die α 's freie noch zu bestimmende Koeffizienten und die \underline{d} 's verallgemeinerte Knotenpunktverschiebungen. Die verallgemeinerten Knotenpunktverschiebungen lassen sich bestimmen, wenn man die Variation des Gesamtpotentials entsprechend anwendet (4.7) (die Volumenkräfte werden vernachlässigt).

$$\Pi = \sum_V \int \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^t \underline{E} \underline{\varepsilon} dv - \int_A \underline{S}^t \underline{u} dA \tag{4.10}$$

Einsetzen von (4.9) in (4.10) ergibt

$$\Pi = \sum_V \int \frac{1}{2} \underline{d}^t \underline{B}^t \underline{E} \underline{B} \underline{d} dv - \int_A \underline{S}^t \underline{N} \underline{d} dA \tag{4.11}$$

Bezeichnet man mit $\underline{K} = \sum_V \int \underline{B}^t \underline{E} \underline{B} dv$ die Einzelsteifigkeitsmatrix und mit

$\underline{F}^t = \int_A \underline{S}^t \underline{N} dA$ die verallgemeinerten Knotenpunktskräfte, so wird

$$\Pi = \sum \frac{1}{2} \underline{d}^t \underline{K} \underline{d} - \underline{F}^t \underline{d} \tag{4.12}$$

Die Variation des Gesamtpotentials Π liefert

$$\delta \Pi = 0 = \underline{K} \underline{d} - \underline{F} \tag{4.13}$$

wo \underline{K} die Gesamtsteifigkeitsmatrix bedeutet. Somit stimmen die Gleichungen (4.13) mit (4.8) formal überein.

Die Steifigkeitsmatrix ist infolge der zunächst noch erlaubten allen denkbaren Starrkörperverschiebungen singulär. Durch Unterdrückung

bestimmter Freiheitsgrade (Verschiebungsrichtungen), etwa durch sinnvolle Unterstützung der Struktur, verliert die Steifigkeitsmatrix ihre Singularität. Auf diese Weise werden die Randbedingungen berücksichtigt. Die Steifigkeitsmatrix hat bei entsprechender Nummerierung der Knotenpunkte eine Bandstruktur. Zur Inversion einer solchen Matrix wird das sog. Cholesky-Verfahren /28/ verwendet.

Bei Berechnung komplizierter Strukturen, in denen sehr viele Elemente vorkommen, ist es möglich das Berechnungsmodell mittels ASKA in sog. Substrukturen zu unterteilen. Für jede Substruktur wird eine Steifigkeitsmatrix aufgebaut, wobei die Außenknotenpunkte externe Knotenpunkte genannt werden, die wiederum Kontakt zu einer anderen Superstruktur haben können. Somit können Superstrukturen (Superelemente) einzeln berechnet und ihre externen Knotenpunkte mit anderen gekoppelt werden. Damit ist u.a. das Gleiten zwischen den beiden Superelementen bzw. ein leichter topologischer Aufbau der gesamten Struktur möglich.

4.2 ERMITTLUNG MITTLERER SPANNUNGEN UND DEHNUNGEN IN EINER SUPRALEITENDEN SPULE

Bei bekannten effektiven Elastizitätstensoren der homogenisierten Struktur (Gl.3.12) können somit die mittleren, mechanischen Eigenschaften des gesamten Körpers ermittelt werden.

Für die als Testbeispiel gewählte Spule (Abb.1.1) wurde zunächst ein idealisiertes Rechenmodell aufgestellt. Die Lastmatrix für den Normalbetrieb der Spule wurde mit Hilfe des Programms HEDO /29/ in solcher Form erstellt, die für das ASKA Programm verträglich ist.

Das Rechenmodell enthält verschiedene Volumenelemente. Für die Wicklung wurden Hexaederelemente mit quadratischem Verschiebungsansatz, für das Stahlgehäuse Dreieckselemente mit Biegeteil gewählt. Die Wahl der Elemente ergab sich aus der vertretbaren Rechenzeit und Speicherkapazität des Computers, sowie gewünschter Genauigkeit der Analyse. Zwischen dem Gehäuse und der Wicklung ergab sich die Notwendigkeit der Koppelung externer Knotenpunkte in radialer Richtung. Dadurch wurde das Gleiten zwischen Wicklung und Gehäuse ermöglicht (Axial-,Umfangsrichtung Abb.4.1). Wegen der symmetrischen Belastung wurde nur eine Spulenhälfte betrachtet. Die Gehäuseseitenwände besaßen Wandstärken von je 50 mm, der Außenring 45mm, der Innenring 40mm. Die Wicklung stützt sich bei Normalbelastung

gegen den Gehäuseaußenring ab. Das Gehäuse wurde gegen den Zentralpfosten gestützt, der im Rechenmodell eine starre Bettungsform darstellt.

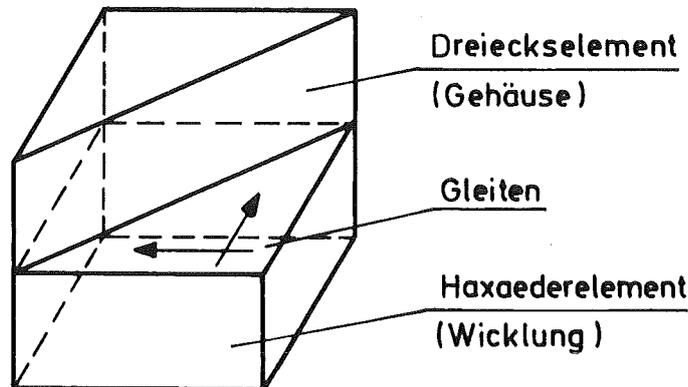


Abb.4.1: Bausteine für das Rechenmodell der LCT-Spule

Abb.4.2 zeigt die verformte Wicklung der Spule bei stationärer Betriebsbelastung. Das Gehäuse und die Bettung ist nicht gezeigt. Die Verformungen sind maßstäblich vergrößert, die gestrichelten Linien zeigen die unverformte, die vollen Linien die verformte Struktur. Es ist deutlich die „Atmung“ der Spule zu erkennen.

Da der Verlauf der Spannungen bzw. Dehnungen in globalen Koordinaten wenig sinnvoll ist, sind alle Spannungen und Dehnungen in lokalen Koordinaten dargestellt. Die Richtung der Koordinaten ist in Abb.4.2 angegeben. Die gezeichneten Spannungen sind die über jeden Knotenpunkt gemittelten Werte, örtliche Spannungsspitzen können bis zu 30% höher liegen.

Abb.4.3 zeigt die Isolinien der Umfangsspannungen im Gehäuse auf der Innenseite des Seitenrings (die Spannungen dort sind höher als auf der Außenseite). Bei einem mittleren Wert von 70 MPa ist eine deutliche Spannungserhöhung am kleinsten Krümmungsradius der Spule zu sehen. Dieser Bereich wird bei allen Toroidalfeldspulen vom Typ Tokamak besonders beansprucht.

In Abb.4.4 sind die Radialspannungen (Isolinien) für die Gehäuseseitenwand dargestellt. Die lokalen Radialspannungen spielen nur in der Nähe des kleinsten Krümmungsradius eine Rolle. Das Gehäuse ist in der Nähe des Zentralpfostens in radialer Richtung nicht ausgenutzt.

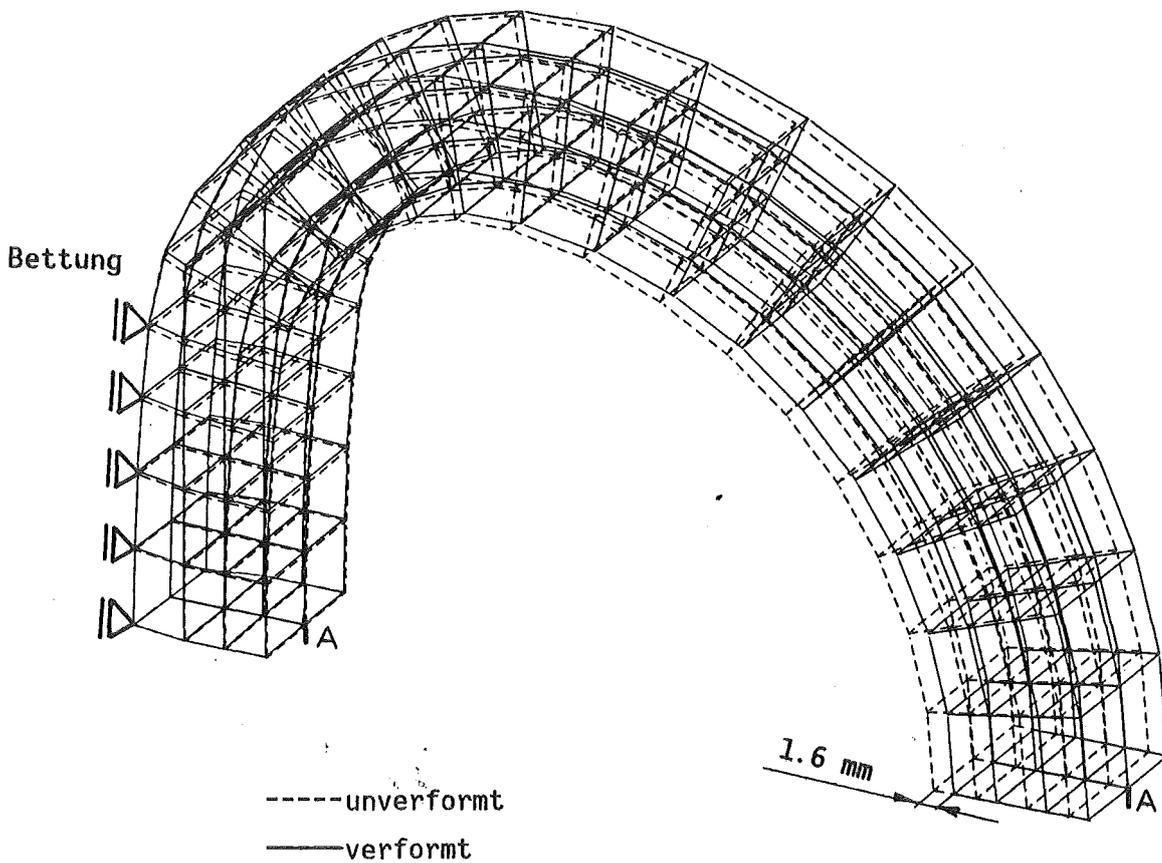
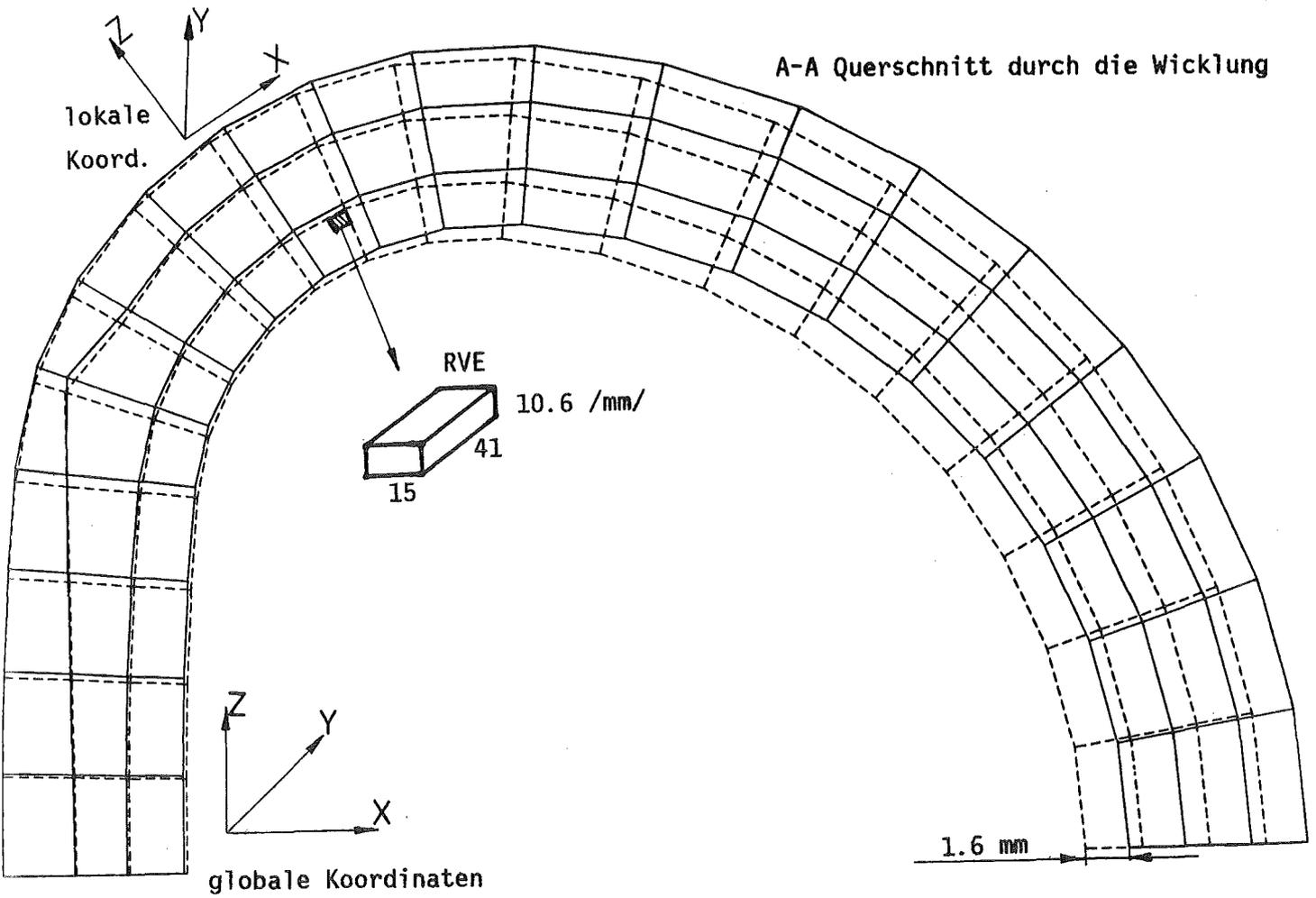
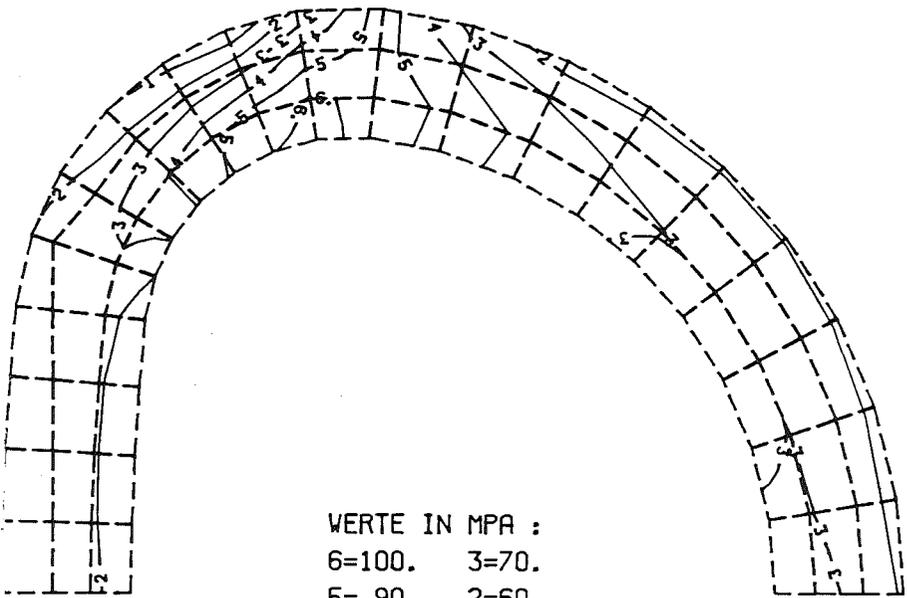
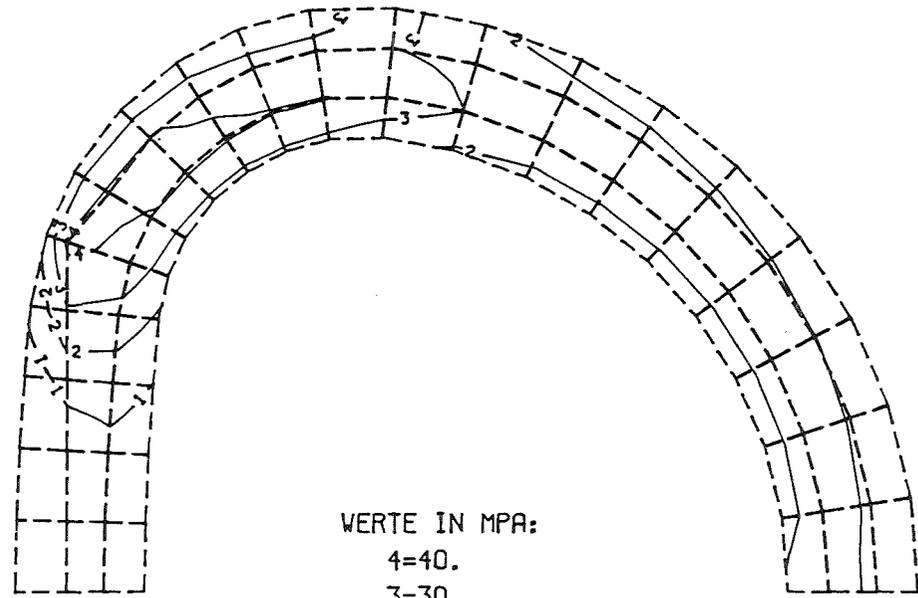


Abb.4.2: Verformte Spule in vergrößertem Maßstab



WERTE IN MPA :
6=100. 3=70.
5= 90. 2=60.
4= 80. 1=50.

Abb.4.3: Isolinien der Umfangsspannungen in lokalen Koordinaten (Gehäuseinnenwand)



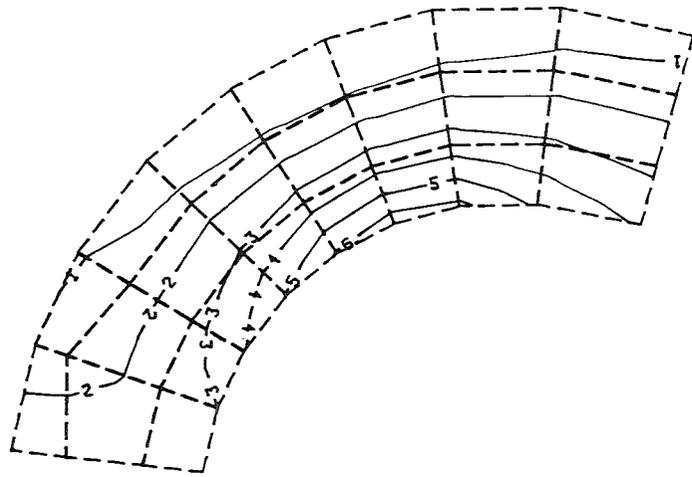
WERTE IN MPA:
4=40.
3=30.
2=20.
1=10.

Abb.4.4: Isolinien der Radialspannungen in lokalen Koordinaten (Gehäuseinnenseite)

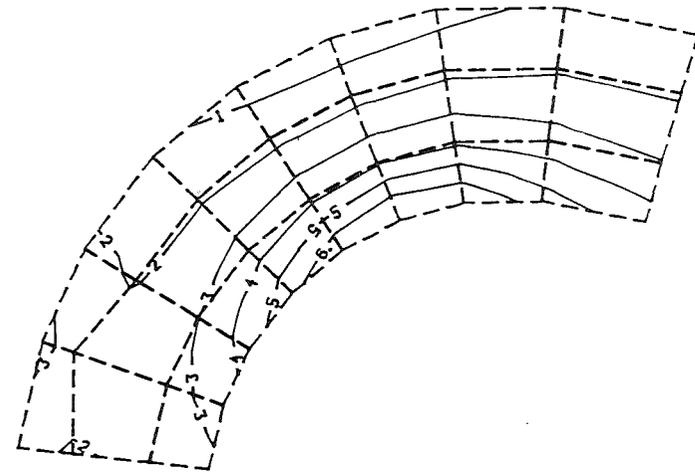
Der am meisten beanspruchte Bereich ist der mit dem kleinsten Krümmungsradius. Dieser Teil wird gewählt, um den Spannungs-Dehnungszustand hier genauer zu untersuchen. Für das Gehäuse ist wegen der hohen Spannungen eine genaue Erfassung der hier herrschenden Verhältnisse erforderlich. Die Wicklung mit ihren supraleitenden Filamenten stellt in diesem Bereich den kritischsten Punkt dar. Da bekannt ist, daß bei bestimmten Dehnungen für den Supraleiter im Bereich von 0.3% die supraleitenden Eigenschaften verloren gehen /34/, müssen gerade in diesem kritischsten Teil der Spule die auftretenden Dehnungen bekannt sein, um sicher zu sein, daß die Maximalwerte nicht überschritten werden.

In Abb.4.5 und 4.6 sind die Isolinien mittlerer Vergleichsspannungen nach der Gestaltänderungsenergiehypothese (von Mises, Hencky) /35/, sowie die mittleren Umfangsspannungen für die Wicklung in dem kritischen Bereich dargestellt. Man stellt fest, daß in diesem Bereich fast ein eindimensionaler Zustand herrscht, da die Umfangskomponente fast der Vergleichsspannung gleicht.

Die Spule wird bei Normallast aufgrund des Magnetfeldes in radialer Richtung gedrückt und in Umfangsrichtung gezogen. In Axialrichtung zieht sich die Wicklung zusammen. Die Radialkomponente (Abb.4.7) zeigt außer schwachen Druck- auch Zugspannungen. Die mittleren Axialspannungen (Abb.4.8) sind praktisch vernachlässigbar. Die positiven Spannungen in der Nähe des Stützpfostens sind der starren Bettung und dem Wechselspiel zwischen dem unter Biegung beanspruchten, gekrümmten Balken und dem steifen Gehäuse zuzuschreiben. Der Zugspannungsbereich in der Innenringnähe tritt für dickwandige Solenoide verstärkend auf /30/, wenn dessen Krümmungsradiusverhältnis γ ($\gamma = R_a/R_i$, R_a -Aussenradius, R_i -Innenradius) höher liegt als 1.5 (das Maximum der Volumenkräfte wandert ins Magnetinnere). Eine D-förmige Tokamakspule läßt sich durch Kreisbögen (Teilsolenoide) annähern. Im Falle der LCT-Spule wurden vier gewählt. Bei gleicher Spulendicke zeigt der Bereich mit kleinstem Krümmungsradius das größte Krümmungsradiusverhältnis (für die LCT-Spule =1.64). Infolgedessen sind dort positive Radialkomponenten zu erwarten (Abb.4.9). Die radiale Zugspannungskomponente spielt eine wichtige Rolle bei der späteren Ermittlung des effektiven Elastizitätstensors.



Wicklung



WERTE IN MPA:
 6=90. 3=60.
 5=80. 2=50.
 4=70. 1=40.

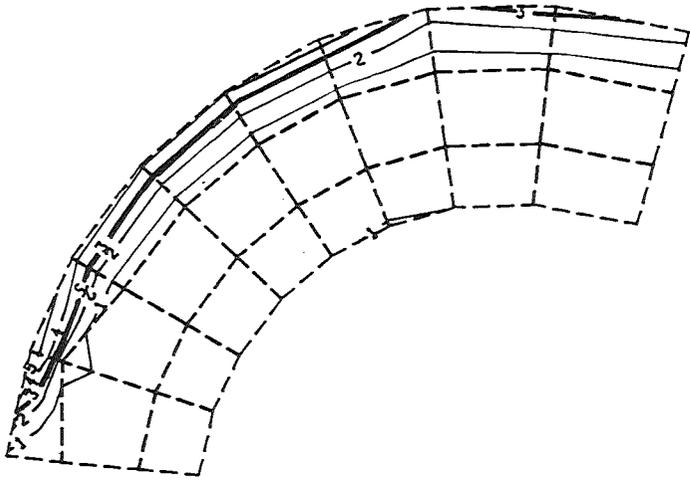
WERTE IN MPA:
 7=90. 3=50.
 6=80. 2=40.
 5=70. 1=30.
 4=60.

Abb.4.5: Isolinien der Vergleichsspannungen
 in lokalen Koordinaten

Abb.4.6: Isolinien der Umfangsspannungen
 in lokalen Koordinaten

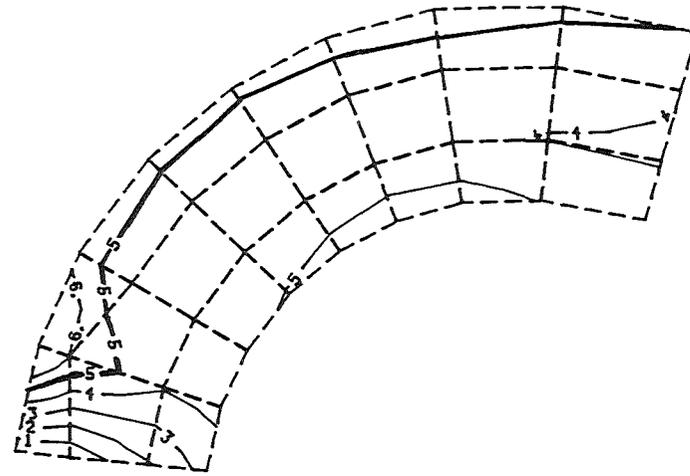
Bem.: Man beachte die verschiedenen Spannungswerte für verschiedene Zahlen!

Wicklung



WERTE IN MPA:
5=05. 2=-02.
4=02. 1=-05.
3=00.

Abb.4.7: Isolinien der Radialspannungen
in lokalen Koordinaten



WERTE IN MPA:
6=05. 3=-10.
5=00. 2=-15.
4=-0.5 1=-20.

Abb.4.8: Isolinien der Axialspannungen
in lokalen Koordinaten

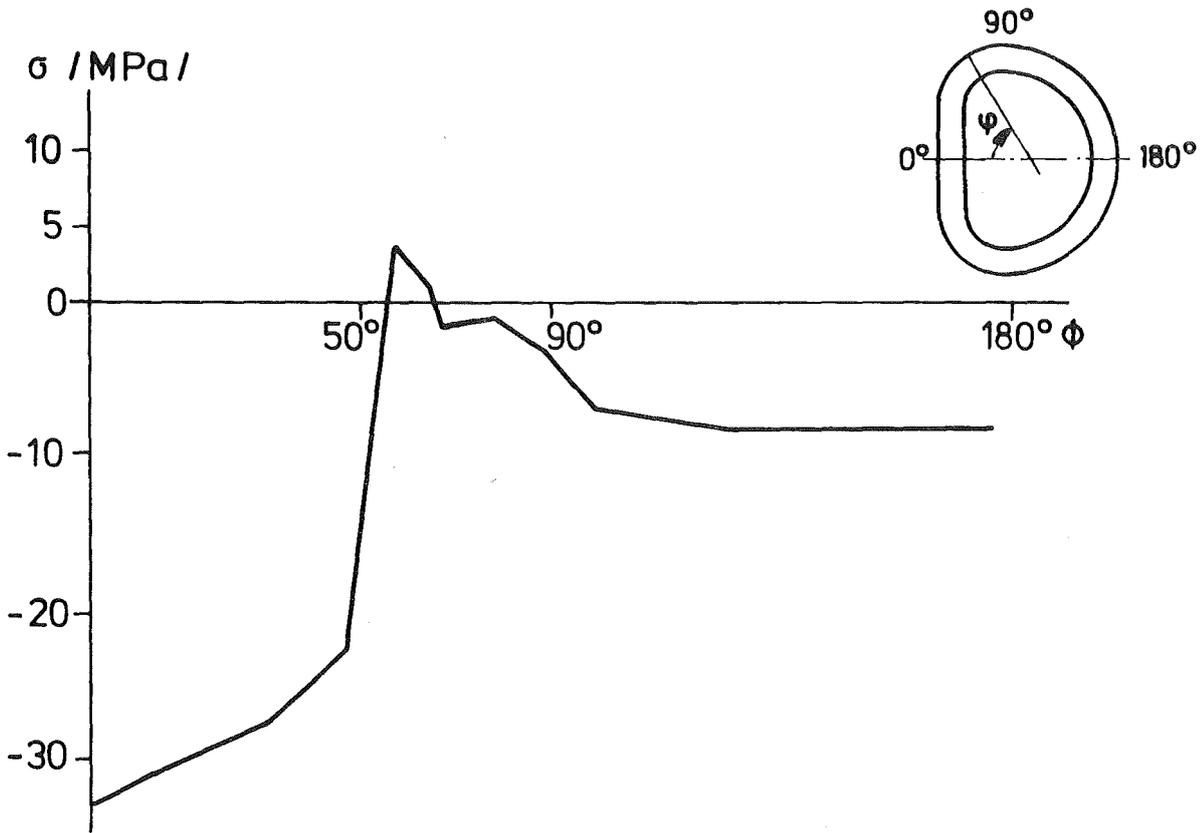


Abb.4.9: Verlauf der Radialspannungskomponente am Innenrand der Wicklung für die gesamte Spule als Funktion des Winkels ϕ .

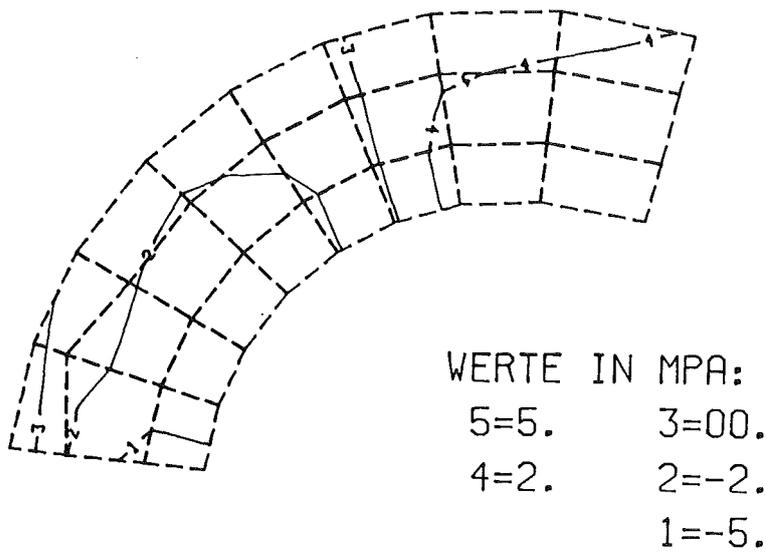


Abb.4.10: Isolinien der mittleren Schubspannungskomponenten in Radial-Umfangsrichtung (lokale Koord.)

Von den mittleren Schubspannungen sind nur die Schubspannungen in Radial-Umfangsrichtung von Bedeutung. Wie Abb.4.10 zeigt, sind die Maximalwerte etwa 5 MPa. Die Schubspannungen normal zur Radial-Umfangsrichtung sind etwa halb so groß.

Die mittleren Spannungen sagen noch nichts aus über die möglichen, extremalen Spannungsspitzen, die in einem Leiter innerhalb der Spule vorkommen können. Das Ziel ist nun, mit Hilfe der mittleren Werte in die Mikrostruktur hinein zu gelangen, um den extremalen Spannungs-Dehnungszustand zu ermitteln.

5. DIE METHODE ZUR BERECHNUNG DER EXTREMALEN SPANNUNGS- DEHNUNGSZUSTÄNDE IN EINEM ELASTISCHEN KÖRPER

Nach einer Homogenisierungsmethode für ein RVE und Ermittlung des mittleren Spannungs-Dehnungszustandes im gesamten Körper sind gleichzeitig die mittleren Werte für ein sich noch in der Struktur befindendes RVE bekannt. Um mit Hilfe der mittleren Werte in der Struktur, die mittleren und dann die extremalen Spannungen im RVE bestimmen zu können, muß vorher das RVE aus der Struktur herausgenommen werden. Dabei muß so verfahren werden, daß die mittleren Spannungen des getrennt behandelten RVE gleich sind mit denen des sich noch in der Struktur befindlichen RVE.

Zur Ermittlung der mittleren und der extremalen Spannungen im getrennt behandelten RVE stehen zunächst drei numerische Methoden zur Verfügung:

1. Verfeinerung durch Interpolation der Volumen- und Reaktionskräfte.
2. Vorgabe der Oberflächenspannungen
3. Vorgabe der Oberflächenverschiebungen

Für das ASKA-Programm scheiden die zwei ersten Methoden aus, da die Steifigkeitsmatrix singular wird. Durch eine Interpolation der Kräfte bzw. Spannungen zwischen den Knotenpunkten ließe sich ein immer kleineres Volumenelement berechnen. Für beide Methoden fehlen jedoch zusätz-

liche Randbedingungen, d.h. die Verhinderung der Starrkörperbewegungen für jedes Volumenelement. Durch die Bewegung der Struktur der gesamten Spule in allen drei Richtungen wird die globale Steifigkeitsmatrix (4.13) singular.

Einen Ausweg bietet die dritte Methode, bei der mit Hilfe der Interpolation der Verschiebungen zwischen den Knotenpunkten immer Verschiebungen als Randbedingungen vorgegeben werden. Durch die Vorgabe der Verschiebungen in allen drei Richtungen wird die Singularität vermieden, weil die Struktur im Raum fest vorgeschrieben ist. Aus den vorgegebenen Verschiebungen Δu bei bekanntem Elastizitätsmodul E und der Fläche A lassen sich die Kräfte und Spannungen bestimmen.

$$F = AE \frac{\Delta u}{u} \quad (5.1)$$

Interpoliert man z.B. für ein RVE, das zunächst als homogen zu betrachten ist, die Oberflächenverschiebungen derart, daß nach deren Vorgabe der Spannungs-Dehnungszustand im so getrennt behandelten RVE gleich dem mittleren in der Struktur ist (vgl. Abb. 5.1), so hat man durch die Oberflächenverschiebungen im homogenen RVE den mittleren Zustand bestimmt, vorausgesetzt, daß die mittlere Elastizitätsmatrix des RVE gleich der Matrix der gesamten Struktur ist.

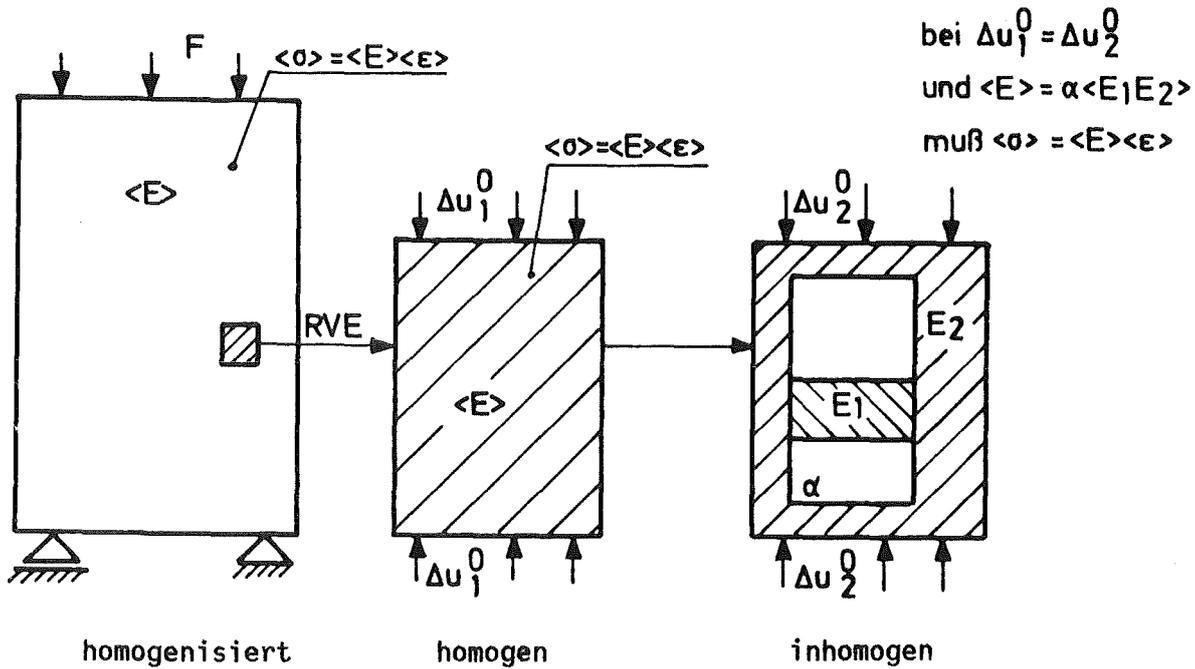
Ist ein mittlerer Spannungs-Dehnungszustand für ein RVE gefunden, so sind seine Oberflächenverschiebungen bekannt. Legt man die gleichen Oberflächenverschiebungen auf ein inhomogenes RVE und setzt voraus, daß $\langle E \rangle_h = \alpha \langle E_1, E_2 \rangle_{inh}$ derart, daß die entsprechenden Flächen $\alpha A_h = A_{inh}$ (α gewählt $1 \geq \alpha \geq 0$ z.B. Lochanteil), so müssen die mittleren Dehnungen $\langle \epsilon \rangle$ und der Lastvektor in beiden RVE gleich sein.

Man stellt fest, daß die mittleren Spannungen $\langle \sigma \rangle$ in der homogenisierten Struktur immer kleiner sind als die in der inhomogenen. Eine Überprüfung der Belastungsäquivalenz beider Volumenelemente erfolgt dann mittels des Lastvektors, der in beiden Fällen gleich sein muß.

Für ein homogenisiertes RVE ist

$$\left\langle \frac{F}{A_h} \right\rangle = \langle E_h \rangle \left\langle \frac{\Delta u}{u} \right\rangle \quad (5.2)$$

wobei $A_{in} = \alpha A_h$ und $E_h = \alpha E_{in}$ ist.



bei $\Delta u_1^0 = \Delta u_2^0$
und $\langle E \rangle = \alpha \langle E_1 E_2 \rangle$
muß $\langle \sigma \rangle = \langle E \rangle \langle \epsilon \rangle$

- homogenisiert
- homogen
- inhomogen
- $\langle \rangle$ - mittlere Werte
- E - Elastizitätstensor
- $\sigma = F/A$ - Spannung
- ϵ - Dehnung
- Δu^0 - Oberflächenverschiebungen

Abb.5.1: Schema zur Ermittlung extremer Spannungen in einem RVE

Bei gleicher $\frac{\Delta u}{u}$ folgt für ein inhomogenes RVE:

$$\left\langle \frac{F}{\alpha A_h} \right\rangle = \left\langle \frac{E_h}{\alpha} \right\rangle \left\langle \frac{\Delta u}{u} \right\rangle \quad (5.3)$$

In beiden Fällen folgt die Gleichheit von F bei gleichen $\frac{\Delta u}{u}$.
Für $1 \geq \alpha \geq 0$ folgt immer

$$\left\langle \frac{F}{A_h} \right\rangle \ll \left\langle \frac{F}{A_{in}} \right\rangle \quad (5.4)$$

Enthält die homogenisierte Struktur Löcher und ist für diese Struktur ein effektiver Elastizitätstensor gefunden worden, so sind die berechneten mittleren Spannungen in einer solchen Struktur fiktiv. Diese Spannungen sind immer kleiner als die wirklichen Mittelwerte.

Nur die mittleren Dehnungen liefern immer die wirklichen Mittelwerte. Nach Vorgabe der gleichen Oberflächenverschiebungen in einem inhomogenen RVE (Gl.5.3), der einzelnen Elastizitätstensoren und Überprüfung der Belastungsäquivalenz, ergeben sich sofort die Spannungsverläufe innerhalb des inhomogenen RVE.

Besitzt die gesamte Struktur keine Schwachstellen, so ist $\alpha=1$ und die berechneten, mittleren Spannungen in der Struktur stellen die Mittelwerte dar. Sie sind in dem homogenen sowie inhomogenen RVE gleich.

Eine bessere Näherung der Oberflächenverschiebungen könnte erreicht werden, wenn man zunächst ein größeres Volumenelement aus der Struktur herausgriffen hätte und erst dann deren Mittelteil als ein RVE betrachtet hätte. Wird nämlich in einem größeren, homogenen Volumenelement (s. Abb.5.2) der mittlere Spannungs-Dehnungszustand erreicht,

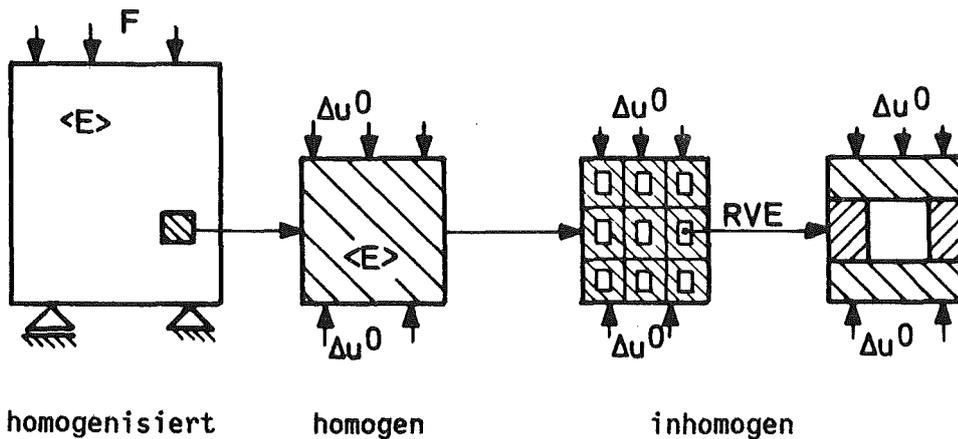


Abb.5.2: Oberflächenverschiebungsmethode mit einer Zwischenstufe

dieses grob modelliert und erst dann aus dem Volumen ein RVE herausgenommen (feine Modellierung), so wäre der Belastungszustand in einem solchen Volumenelement wesentlich besser angenähert. Die Oberflächenverschiebungen enthalten auf diese Weise bessere Informationen über die Oberflächenverformung des RVE und liefern sicherlich genauere Ergebnisse. Diese Zwischenstufe führt aber über die Speicherkapazität heutiger Computer hinaus.

5.1 BERECHNUNG EXTREMALER SPANNUNGS-DEHNUNGSZUSTÄNDE IN EINEM AUS DER STRUKTUR HERAUSGEGRIFFENEN RVE

Für die Spannungs-Dehnungsanalyse in einem RVE wird aus der Spule ein Leiterstück gewählt, dessen Größe im vorgegebenen Fall der Abb.4.2 zu entnehmen ist. Eine solche Dimension des RVE ergab sich aus vorherigen Abschätzungen der verträglichen Rechenzeit und Speicherkapazität des Computers.

Nach erfolgreicher Ermittlung des mittleren Spannungszustandes in einem homogenen RVE, beginnt die Inhomogenisierung des Volumenelementes mittels finiter Elemente.

Das Leiterstück, wie es in Abb.1.1c zu sehen ist, besitzt eine zusätzliche Hülle aus GFK-Material. Die elastischen Eigenschaften (Elastizitätstensoren) der Einzelstoffe sind in Kap.3 angegeben. Das Modell besteht aus zwei Superelementen (in FEM-Sprache), das erste besteht aus den Stegen, GFK- und Stahlhülle, das zweite aus 23-Einzelleitern (NbTi/Cu) und dem Falzkern (Stahl). Die Superelemente ermöglichen die schon in Kap. 4.1 erwähnte Gleitung untereinander. Das 1. Netz besteht aus 3724 Knotenpunkten und 1382 Elementen, das zweite aus ebenso 3724 Knotenpunkten und 1211 Elementen. Als Bausteine sind hexahedronale und pentahedronale Elemente gewählt worden (Abb.5.3). Beide sind kinematisch verträglich.

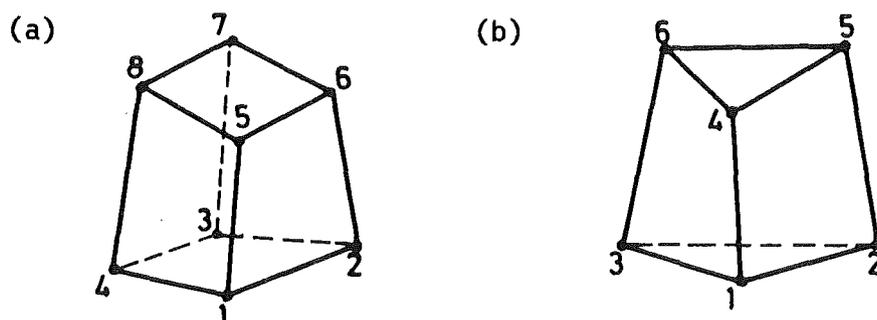


Abb.5.3: Beispiel für ein hexahedronales (a) und ein pentahedronales (b) Element.

Innerhalb des inhomogenen RVE sind die Einzelleiter, die bei Normallast Volumenkräfte tragen, stromlos gemacht, d.h. die magnetische Belastung der gesamten Spule ist dann um einen RVE-Anteil kleiner. Der Unterschied liegt aber im Prozentbereich und wird daher vernachlässigt.

Im folgenden werden zwei verschieden aufgebaute RVE betrachtet, und zwar das eine ohne jegliche Röbelung der Einzelleiter, das zweite mit Röbelung, wie sie in der LCT-Spule auftritt. Die unterschiedliche Bauweise soll den Röbeleinfluß untersuchen.

Es werden für beide RVE jeweils die Vergleichsspannungen und deren Normalkomponenten im Einzelnen dargestellt. Der dreidimensionale Spannungszustand erzwingt die Einzeldarstellung des jeweiligen Modells, um den Spannungsverlauf innerhalb des RVE zu verfolgen, und um festzustellen, ob die sensitive Dehnungsgrenze des Supraleiters nicht überschritten wird. Die Schubspannungen werden nur dann betrachtet, wenn sie für das Strukturverhalten von Bedeutung sind.

Der Leser, den eine genaue Auswertung der beiden RVE nicht interessiert, wird auf eine kurze Zusammenfassung (Kap.5.1.3) verwiesen.

5.1.1 DAS MODELL OHNE ROBELUNG

Nach dem Aufstellen des inhomogenen Modells und Vorgabe entsprechender Oberflächenverschiebungen (homogen=inhomogen) ergeben sich im Vergleich zu den mittleren unterschiedliche Spannungen.

Im folgenden werden die Ergebnisse der Abb.5.4 bis 5.23 diskutiert. Abb. 5.4÷5.7 zeigen die Spannungsverläufe für die Hülle und die Einzelleiter, während Abb.5.8÷5.20 die Spannungen in den Einzelkomponenten, nämlich Hülle (Abb.5.8÷5.12), Einzelleiter (Abb.5.13÷5.17) und Falzkern (Abb.5.18÷5.20) darstellen. In Abb.5.21, 5.22 sind die Verformungen der Einzelkomponenten dargestellt. Schließlich zeigt Abb.5.23 die Isolinien der Umfangsdehnungen.

Die Hülle hat in axialer Richtung Kontakt mit jeweils nur einem Einzelleiter, so daß die axialen Belastungen nur über diese Einzelleiter übertragen werden. In radialer Richtung sind über die gesamte Länge nur jeweils 2 bis 3 Einzelleiter belastet, derart daß die Kraft über einen Teil der Leiterhülle -Steg-Einzelleiter -Falzkern-Einzelleiter usw. übertragen wird. In allen Bildern ist die Spannungshöhe jeweils einer Zahl zugeordnet, die eine Isolinie repräsentiert.

Die Hülle und die Einzelleiter

Bei mittlerer Vergleichsspannung (s.Abb.4.5) von 65 MPa, beträgt die Höchstspannung in Abb.5.4 100 MPa, die in der Stahlhülle liegt. Die Minimalspannung liegt im GFK mit 30 MPa. Beim Vergleich der von Mises- und Umfangsspannungen (Abb.5.4 und 5.5) wird deutlich, daß die Umfangskomponente den größten Beitrag liefert. Dies ist einleuchtend, weil die magnetischen Felder vorwiegend die sog. Reifenkräfte erzeugen, die die gesamte Spule zu sprengen versuchen.

Einen wesentlich kleineren Anteil der Vergleichsspannung tragen die Axial- und Radialspannungen (Abb.5.6 und 5.7). Zu bemerken ist die Erhöhung der Vergleichsspannung in der Nähe des Falzkerns, die durch die Axialspannungen hervorgerufen ist. Die Verformungen der Einzelleiter (Abb.5.22) zeigen an der Verbindungsstelle Falzkern-Einzelleiter deutliche

Querschnittsverengungen, verursacht durch die Querkräfte, die vor allem durch den Falzkern übertragen werden. Die unterschiedlichen Poissonkoeffizienten können den Zustand verstärken. Der Leiter ist in Querrichtung überwiegend kompressiv belastet (Abb.5.7) ; es sind auch Zugspannungen festzustellen im Bereich, wo die einzelnen Elemente die Leerräume zu füllen versuchen und dabei eine Biegung erfahren (siehe auch Abb.5.22).

Die Radialkraft wird überwiegend durch die unter den Stegen liegenden Einzelleiter übertragen. In diesen Bereichen sind deutliche Spannungserhöhungen zu sehen (Abb.5.7).

Für die Beurteilung der komplizierten Verläufe ist auch die Verformung der Struktur in Abb.5.21 und 5.22 behilflich.

Die Hülle

Um festzustellen wie der Spannungszustand innerhalb der Struktur verläuft, wird die Hülle mit den Stegen einzeln betrachtet.

Wegen der parallellaufenden Einzelleiter ist zu erwarten, daß sich die Spannungen mit der Länge des Leiters nicht ändern. Der Verlauf der Umfangsspannungen bestätigt dies (Abb.5.9). Die Vergleichsspannung (Abb.5.8) innerhalb der Hülle beträgt max./min. 100/30 MPa und hat einen ebenso ausgeglichenen Charakter.

Für die Axial- und Radialkomponente (Abb.5.10,5.11) gilt ähnliches.

Durch die kompressiven Querkräfte tritt hier eine wellenförmige Verformung der Hülle (Abb.5.21) auf, die zu starken Gradienten der Querkomponenten führt. Die Biegung wie z.B. die der Seitenhülle in Abb.5.21, trägt dann zur Abschwächung bzw. Verstärkung des jeweiligen Querspannungszustandes bei (Abb.5.10 und 5.11). Man sieht eine starke Spannungserhöhung am Rande von Kühlkanälen, die den Querkomponenten zuzuschreiben ist.

Wie sich bei einer späteren Betrachtung des RVE zeigen wird, ist die mechanische Stabilität des Leiters in Querrichtung von Bedeutung. In Abb. 5.12 sind die Isolinien der Schubspannungen in Querrichtung des Leiters dargestellt. Der Wert von 3 MPa ist für die Hülle genügend klein, ebenso die übrigen Schubspannungen, die im einzelnen hier nicht gezeigt worden sind.

Die Einzelleiter

Wie schon mehrmals erwähnt wurde, liefert die Umfangskomponente (Abb.5.14) den größten Beitrag zur Vergleichsspannung (Abb.5.13). Wegen typischer Parallelschaltung der Einzelkomponenten des Leiters sind keine Spannungsspitzen in der Umfangsrichtung zu erwarten. Anders ist es mit den Radial- und Axialkomponenten, deren Werte örtlich stark variieren (Abb.5.15,5.16). Die Axialkomponente liefert einen vorwiegend kompressiven Charakter in der Nähe des Falzkerns. Die axiale Belastung wird durch die beiden Seiteneinzelleiter und den Falzkern übertragen. Dieser Bereich ist axial am meisten beansprucht. In der Querrichtung können die Einzelleiter durchaus Zugspannungen erfahren. Die weichen Einzelleiter werden stärker deformiert, sodaß sie in bestimmten Richtungen (Querrichtungen) eine Volumenzunahme erfahren. Der Verlauf der Radial- bzw. Axialspannungen ist in jedem Leiterquerschnitt gleich (Abb.5.15, 5.16), was einem regelmäßigen Aufbau des Leiters entspricht.

Von den Schubspannungen ist die Radial-Umfangsspannung wegen der mittleren Werte dieser Komponente von Bedeutung (Vgl. Abb.4.10). Für die Mikrostruktur überschreiten sie nicht 1 MPa (Abb.5.17) so, daß sie für die Einzelleiter vernachlässigbar sind.

Der Falzkern

Einen kritischen Punkt stellt die Lötverbindungsstelle Einzelleiter-Falzkern dar. Aus Stabilitätsgründen muß die Bewegung der Einzelleiter weitgehend ausgeschlossen werden. Bei überwiegend gleichen Dehnungen in Umfangsrichtung (s. auch Abb.5.23) und kompressiven Kräften in Querrichtung soll die Lötung praktisch keine Kräfte aufnehmen. Dagegen könnten die Schubspannungen, die auf Grund einer inhomogenen Kräfteverteilung bzw. Röbelung des Leiters auftreten, zum Verlust des Kontaktes Falzkern-Einzelleiter führen. Die Schubspannungen, die Lötstellen vertragen können, betragen max. ~ 5 MPa. Wie die Abb. 5.18 bis 5.20 zeigen, schwanken die Werte um 1 MPa. Somit ist für einen ungeröbelten Leiter eine Sicherheitsmarge vorhanden.

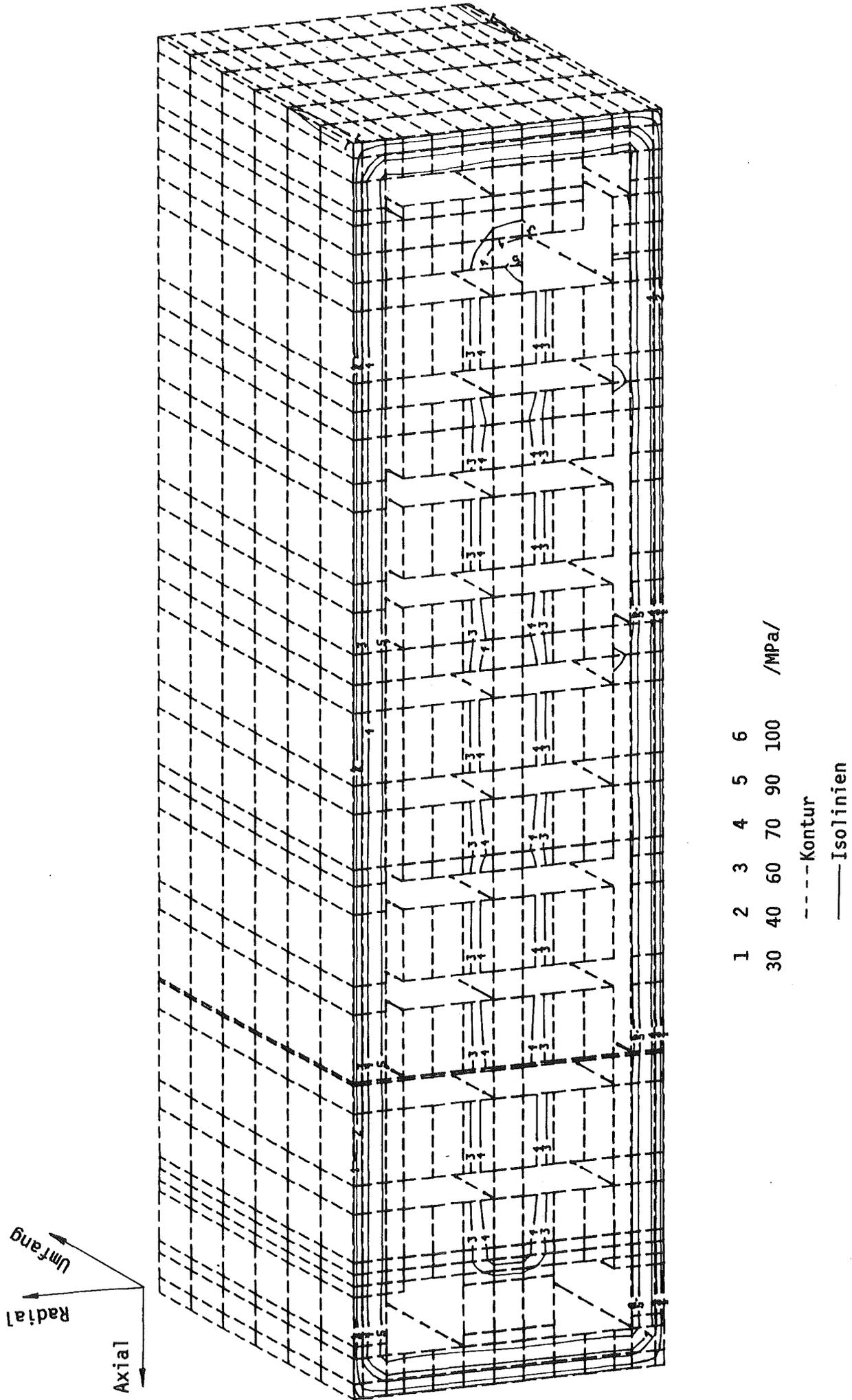
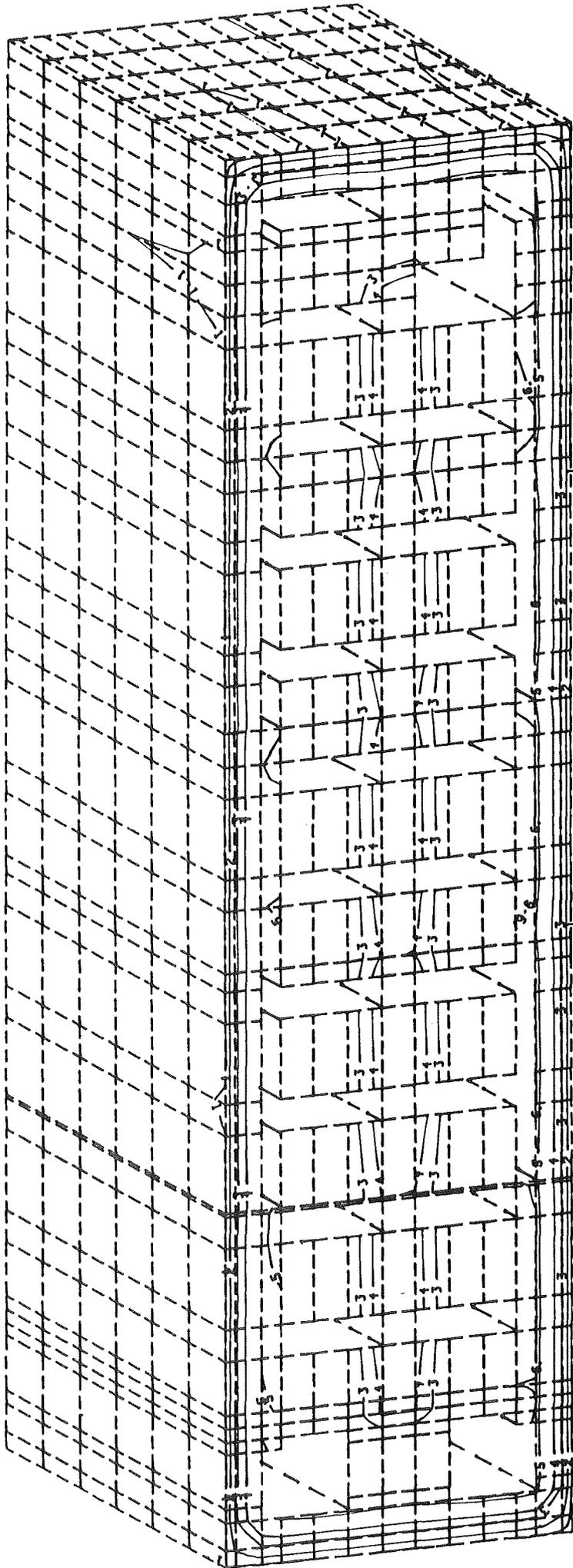
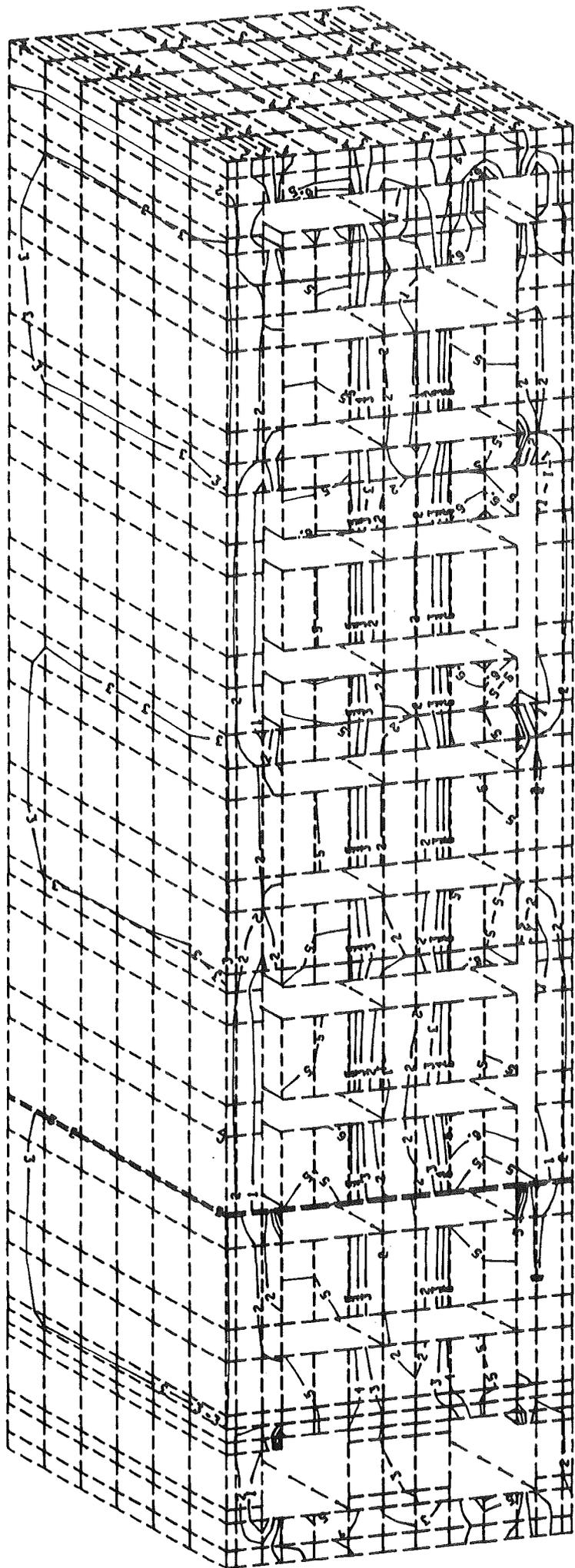


Abb. 5.4: Isolinien der Vergleichsspannungen



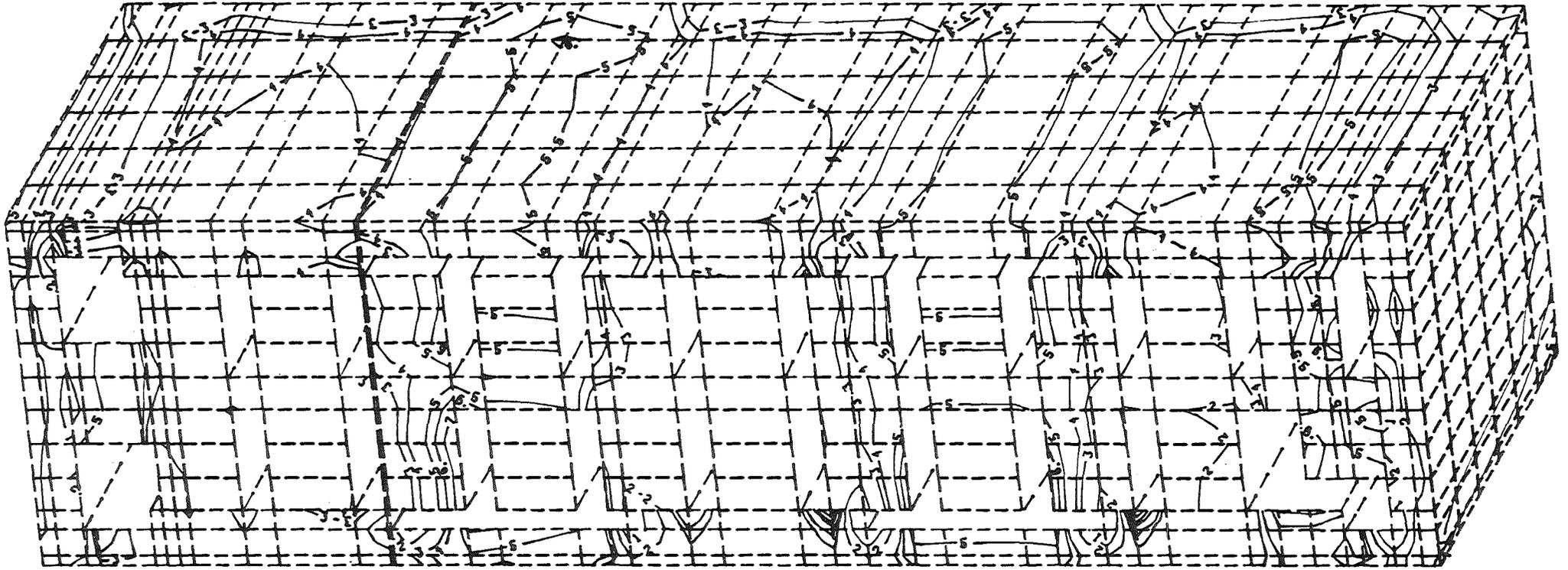
1 2 3 4 5 6
25 40 60 70 90 95 /MPa/

Abb. 5.5: Isolinien der Umfangsspannungen



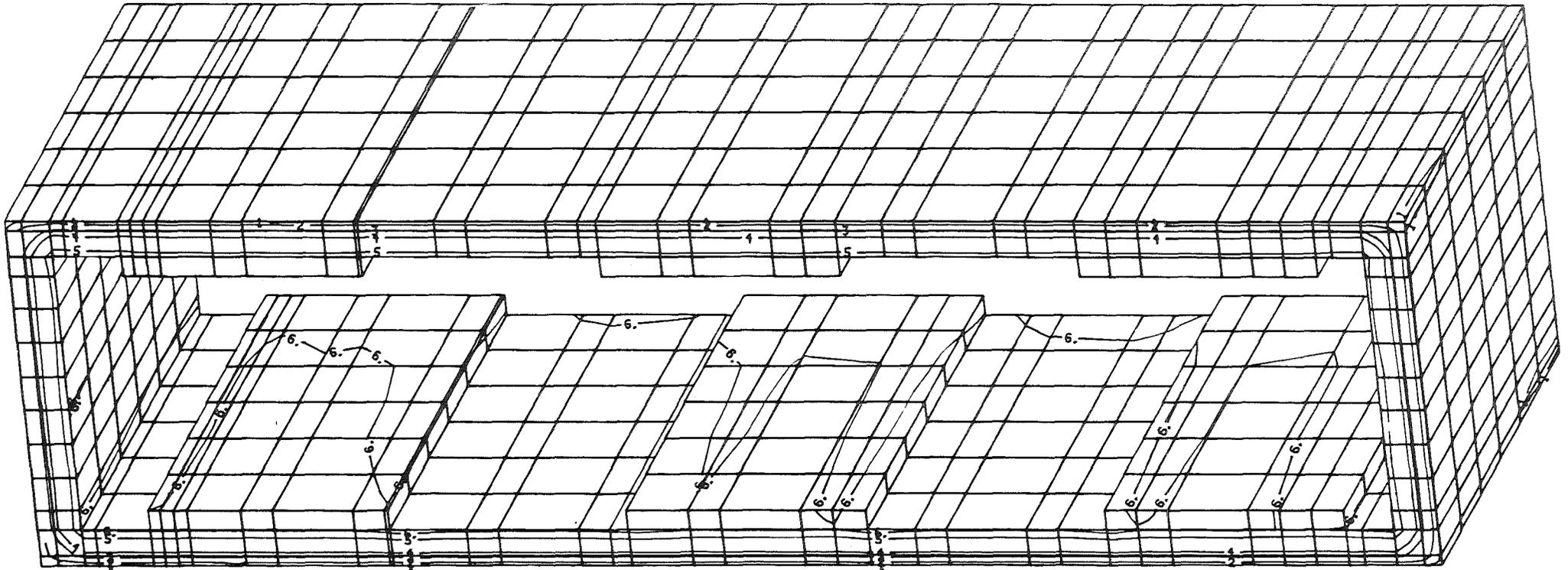
- 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
 - 6
 - 7
 - 12
 - 8
 - 4
 - 2
 - 0
 - 1
 - 2
- /MPa/

Abb.5.6: Isolinien der Axialspannungen



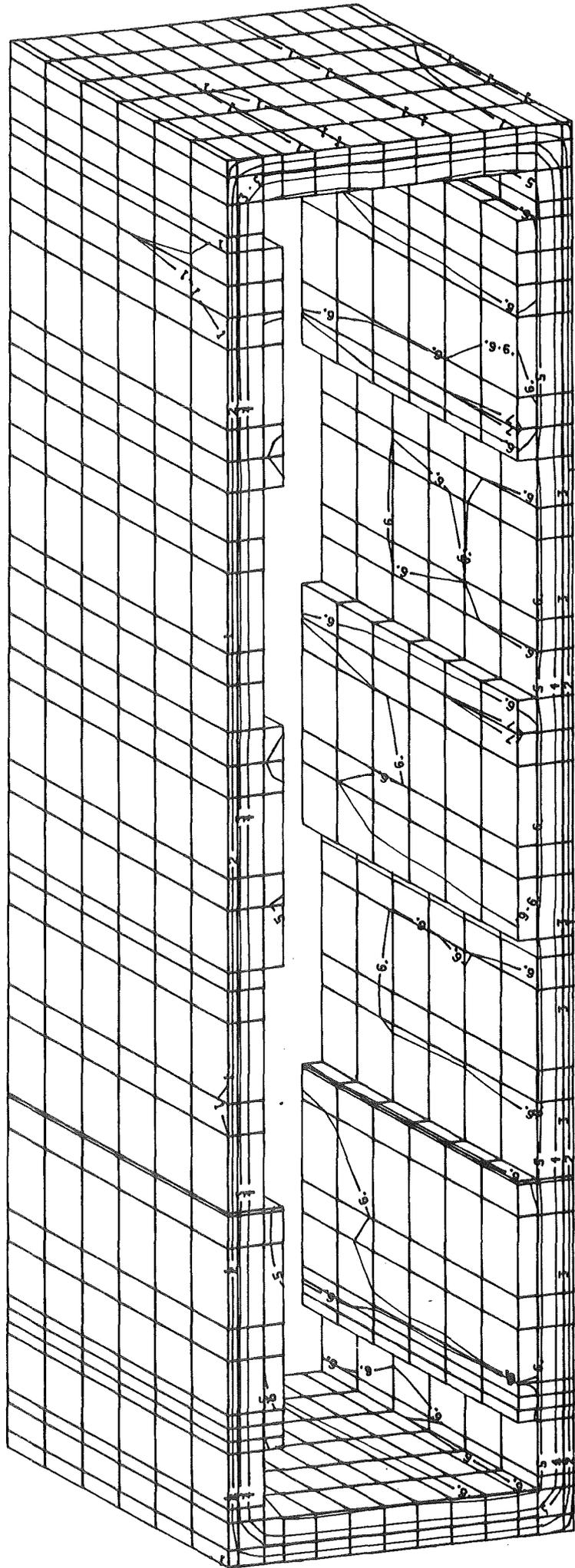
1	2	3	4	5	6	7	
-9	-6	-3	-2	0	1	2	/MPa/

Abb.5.7: Isolinien der Radialspannungen



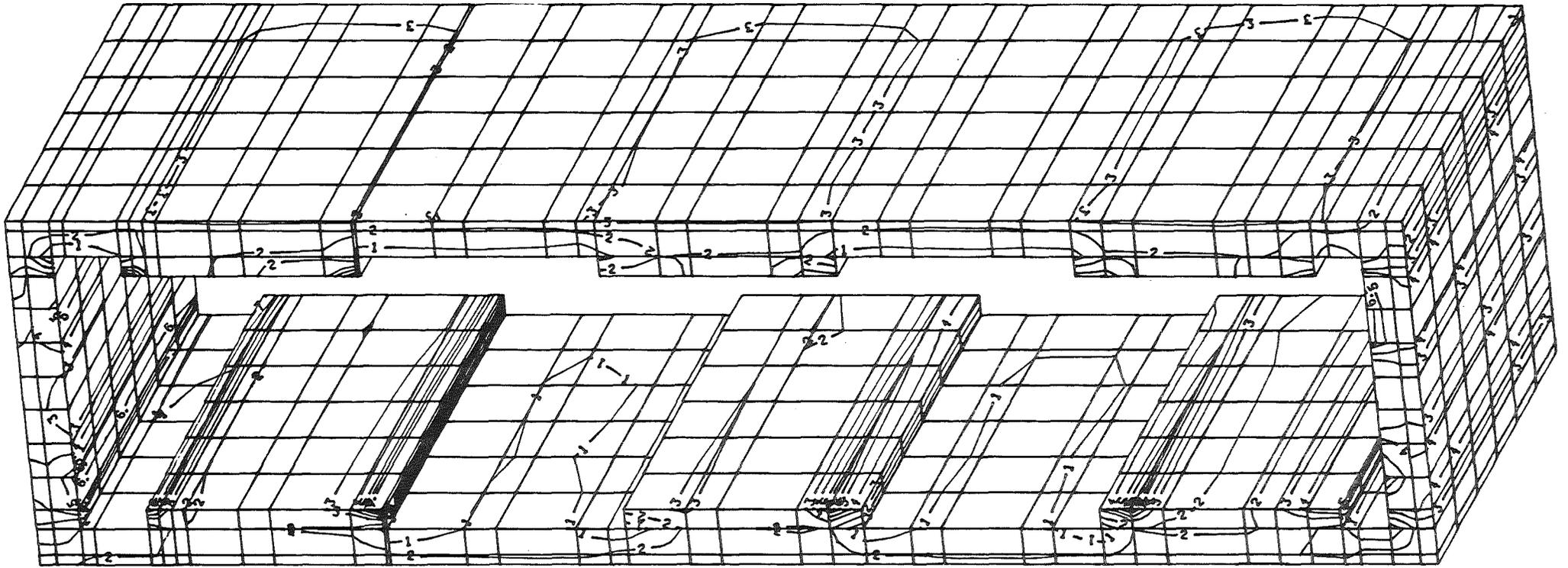
1 2 3 4 5 6
30 40 60 70 90 100 /MPa/

Abb.5.8: Hülle: Vergleichsspannungen in lokalen Koordinaten



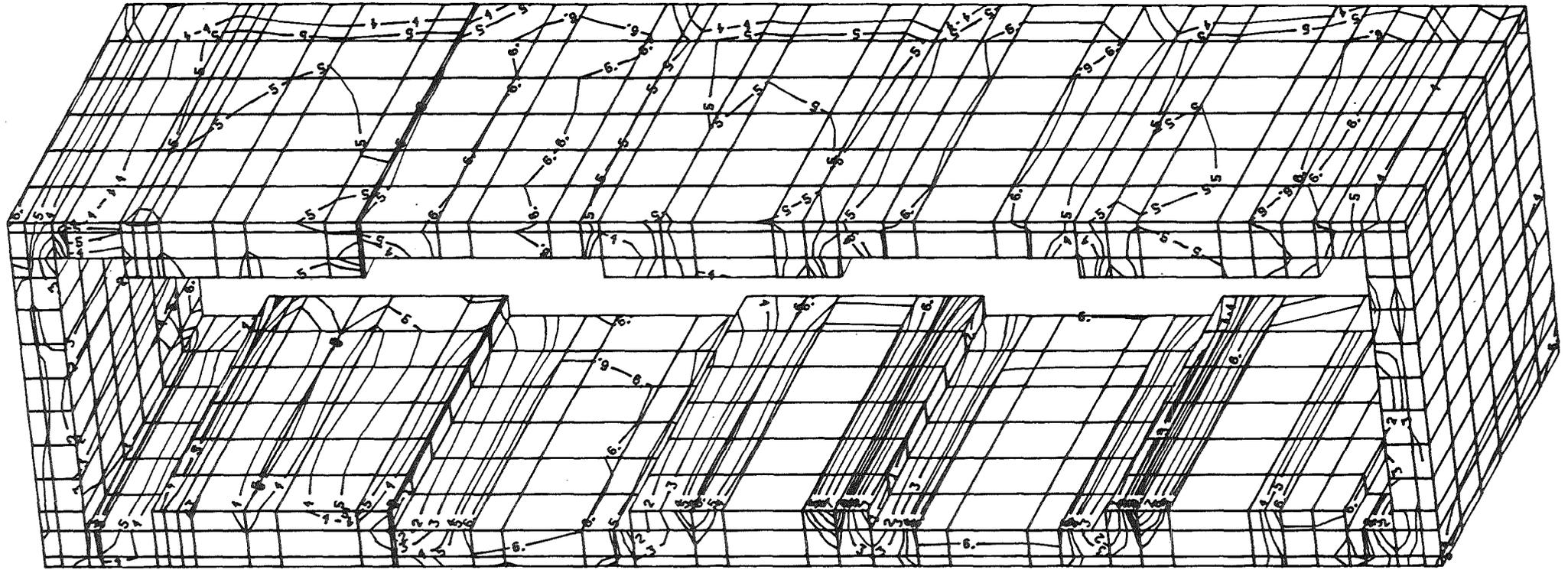
1 2 3 4 5 6 7
25 40 60 70 90 95 100 /MPa/

Abb. 5.9: HülTe: Umfangsspannungen in lokalen Koordinaten



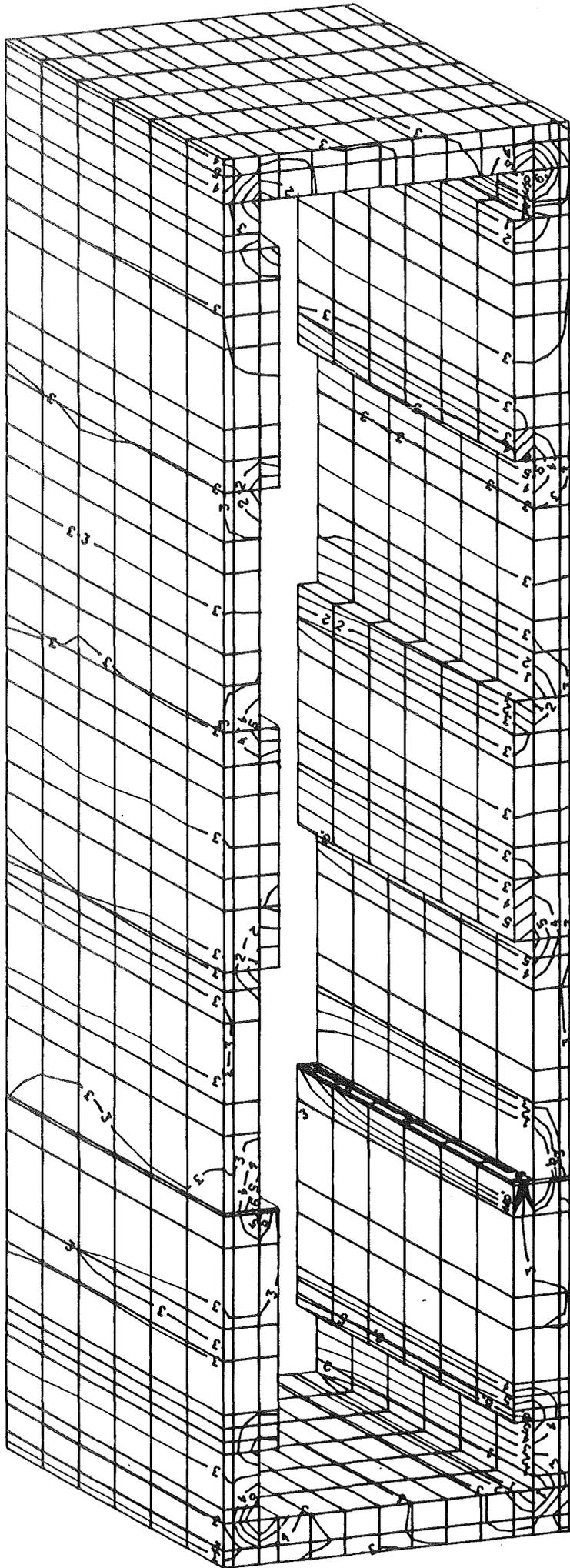
1	2	3	4	5	6	7	
-12	-8	-4	-2	0	1	2	/MPa/

Abb. 5.10: Hülle: Axialspannungen in lokalen Koordinaten



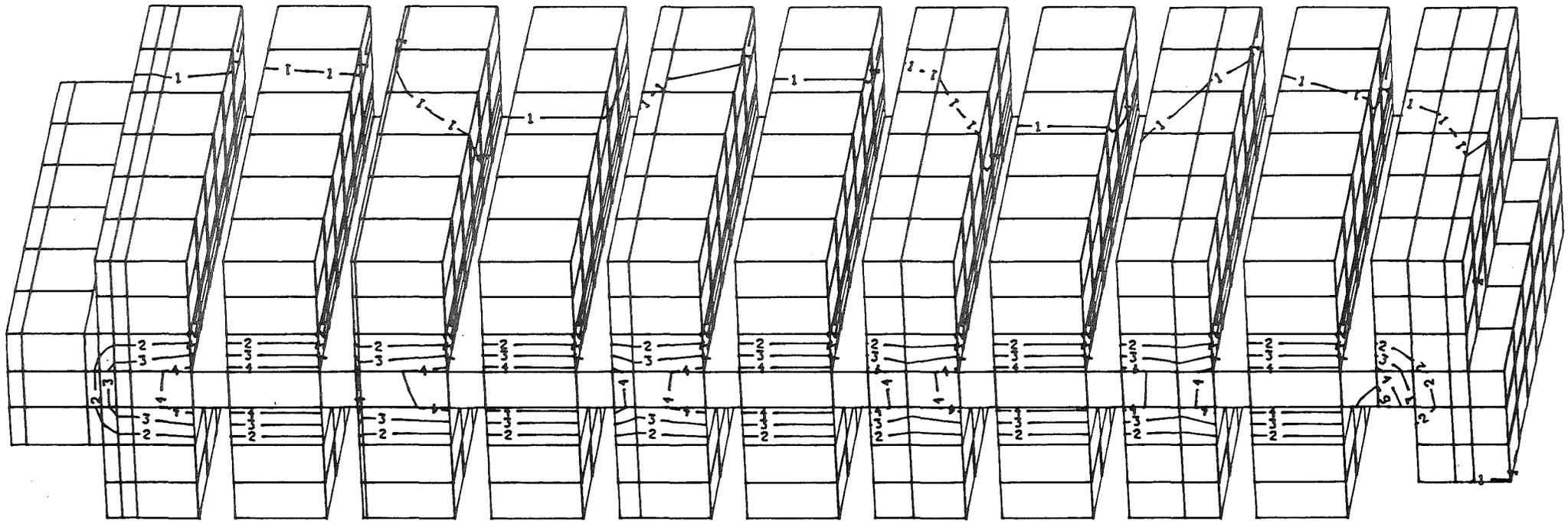
1	2	3	4	5	6	7	
-15	-9	-6	-3	-2	0	2	/MPa/

Abb.5.11: Hülle:Radialspannungen in lokalen Koordinaten



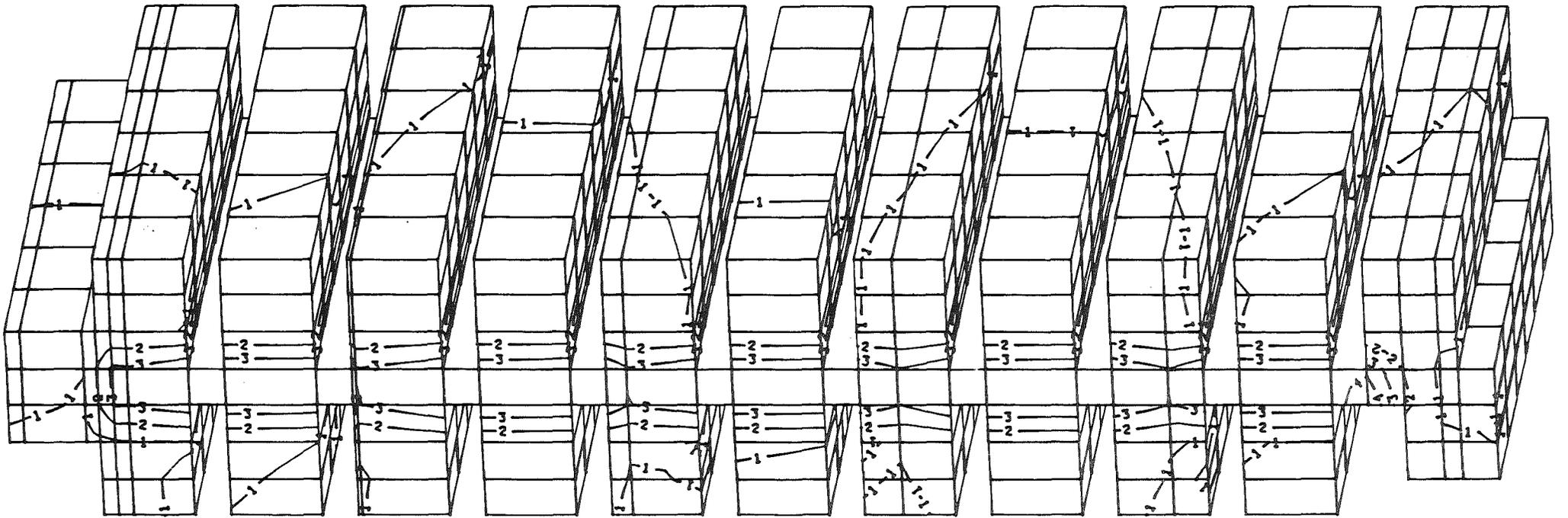
1 2 3 4 5 6
-2 -1 0 1 2 3 /MPa/

Abb. 5.12: Hülle: Schubspannungen σ_{yz} in lokalen Koordinaten



1 2 3 4 5
 50 60 70 80 90 /MPa/

Abb. 5.13: Einzelleiter: Vergleichsspannungen in lokalen Koordinaten



1 2 3 4 5
50 60 70 80 90 /MPa/

Abb.5.14: Einzelleiter: Umfangsspannungen in lokalen Koordinaten



1	2	3	4	5	6
-12	-8	-4	-1	0	2
/MPa/					

Abb. 5.15: Einzelleiter: Axialspannungen in lokalen Koordinaten



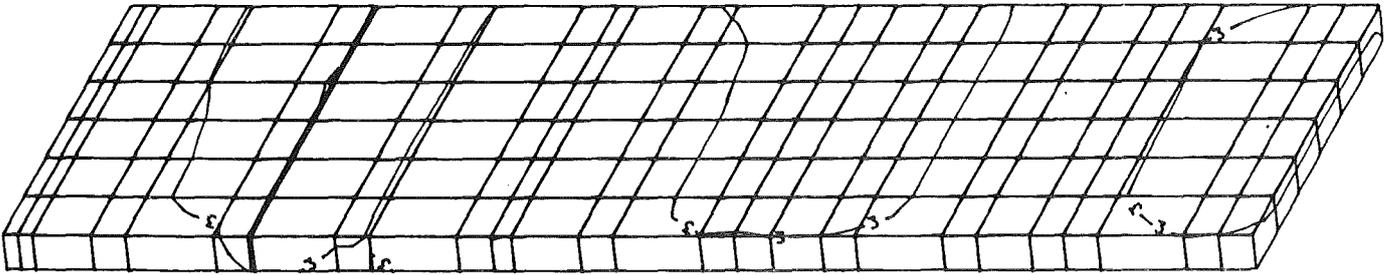
1	2	3	4	5	6
-8	-6	-3	-1	0	2
/MPa/					

Abb. 5.16: Einzeleiter: Radialspannungen in Lokalen Koordinaten



1	2	3	4
-0.6	-0.3	0	0.2
/MPa/			

Abb. 5.17: Einzelleiter: Schubspannungen σ_{zx} in lokalen Koordinaten



1	2	3	4	5	
-1.	-0.5	0	0.5	0.9	/MPa/

Abb. 5.18: Falzkern: Schubspannungen σ_{xy} in lokalen Koordinaten

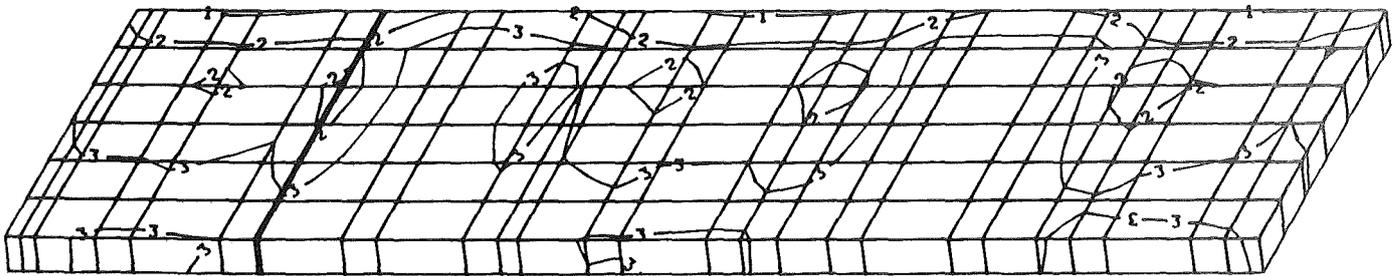


1	2	3	4	5	
-1	-0.5	0	0.5	1	/MPa/

Abb. 5.19: Falzkern: Schubspannungen σ_{yz} in lokalen Koordinaten

Die Umfangsdehnungen betragen an der kritischsten Stelle der gesamten Spule max $0.6^0/00$ (Abb.5.23). Dies liegt weit unter der maximal zulässigen Dehngrenze für den Supraleiter.

Die Verformungen der Einzelleiter sind höher als die der Hülle (Abb.5.21 und 5.22). Die wesentlich steifere Hülle zwingt die Einzelleiter zu einer Verformung. Innerhalb der Spule besitzt die Hülle seitliche Nachbarn so, daß sie dazu neigen wird, die Innenräume zu füllen. Die Einzelleiter hindern die Hülle nur schwach. Andererseits werden die Einzelleiter zum Teil durch die steife Hülle vor den großen Querbelastungen geschützt.



1 2 3
-1 -0.6 -0.3 /MPa/

Abb. 5.20: Falzkern: Schubspannungen σ_{zx} in lokalen Koordinaten

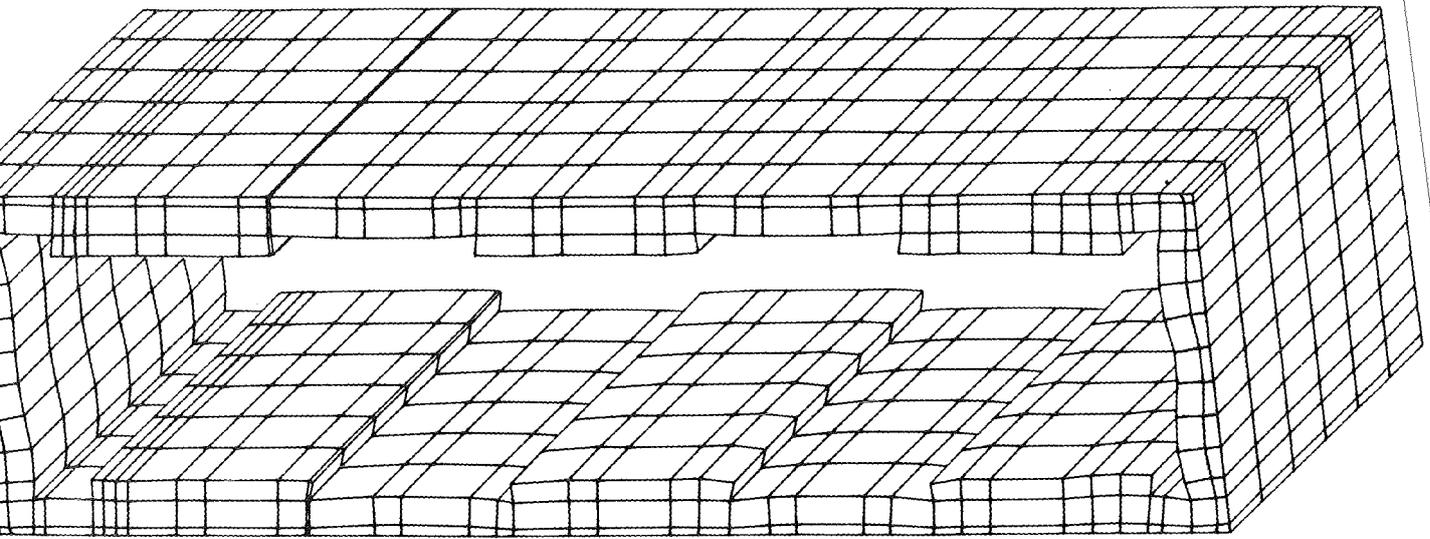


Abb. 5.21: Verformung der Hülle und der Stege in stark vergrößertem Maßstab (x1100)

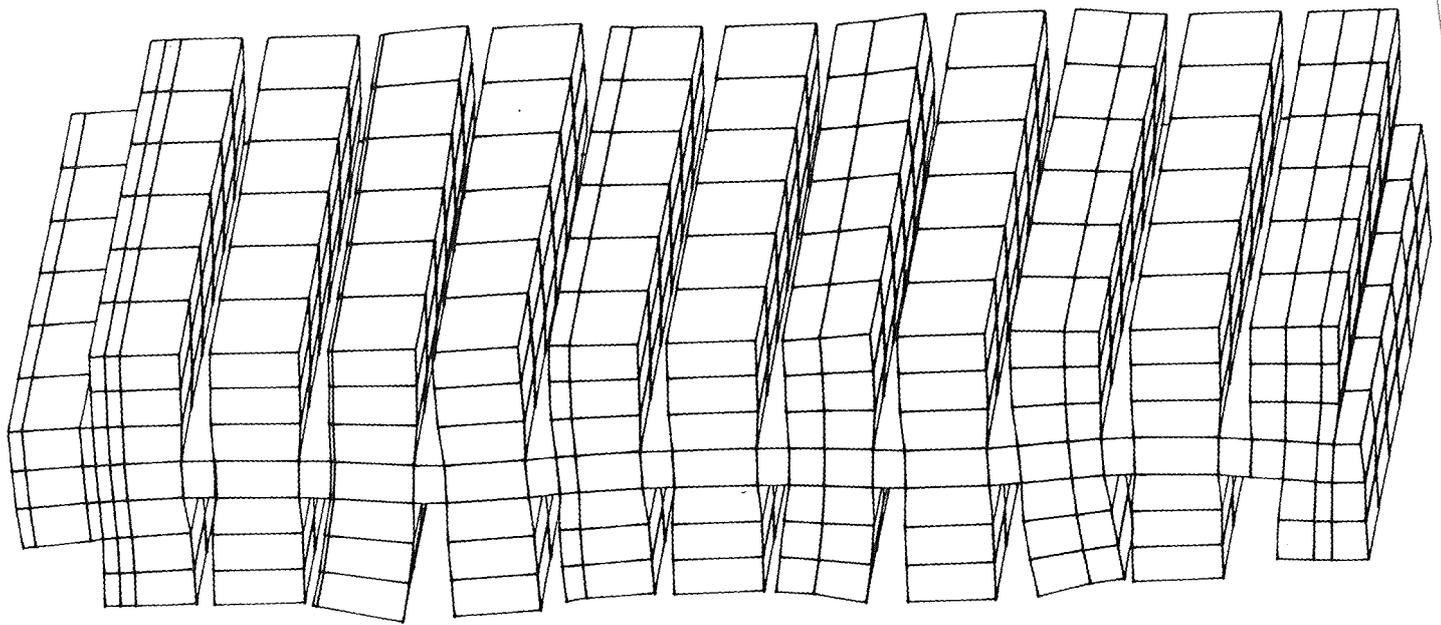


Abb. 5.22: Verformung der Einzelleiter und des Falzkerns in stark vergrößertem Maßstab (x600)



1 2 3 4
5.6 5.8 6 6.5 /x10⁻⁴ /

Abb. 5.23: Isolinien der Umfangsdehnungen

5.1.2 DAS MODELL MIT RÖBELUNG

Werden die gleichen Oberflächenverschiebungen für einen geröbelten Leiter vorgegeben, so ergibt sich wegen der veränderten Geometrie ein anderes Bild. Die Kräfte in radialer Richtung werden jeweils von den Stegen auf die Einzelleiter übertragen, die gegenüber der Umfangsrichtung unter einem Neigungswinkel von 9° auf der flachen Seite liegen. Die Axialbelastung wird jeweils nur von einem Teil des gerade geröbelten Leiters übertragen. Der Neigungswinkel auf dieser Seite beträgt 19° gegenüber der Umfangsrichtung.

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Abb. 5.24 bis 5.37 diskutiert. Der Spannungsverlauf ist in Abb. 5.24÷5.27 (Hülle und Stege) und Abb. 5.28÷5.32 (Einzelleiter, Falzkern, Hülle) dargestellt. In Abb. 5.32 bis 5.35 sind die Schubspannungen dargestellt (Hülle und Einzelleiter, Falzkern). Abb. 5.36 und 5.37 zeigen die Verformung der Einzelkomponenten.

Für die Einzelleiter (5.28÷5.30) werden lokale Koordinaten benutzt, d.h. die betreffende Spannungskomponente bildet mit der Einzelleiter-richtung eine Rechtsschraube, z.B. ist die Umfangskomponente in Abb. 5.29 längs der Einzelleiterrichtung gelegt.

Die Hülle

Die Röbelung beeinflusst die Hülle und die Stege nur schwach. Die Vergleichsspannung sieht demzufolge ähnlich wie in dem ungeröbelten Modell aus, denn in beiden Fällen wird die Belastung überwiegend durch die Hülle getragen. Für die Hülle ist die Umfangskomponente die beherrschende Spannung (vgl. Abb. 5.24, 5.25). Ähnlich einer Parallelschaltung sind die Umfangsspannungen für die Stahlhülle und Stege ungefähr gleich und betragen max. 95 PMA; für die GFK-Hülle 30 MPa.

Die magnetischen Kräfte in Querrichtung liefern für die mittleren Axial- und Radialkomponenten Druckspannungen (Abb. 4.7, 4.8 neg. Vorzeichen). Die örtlichen Querkomponenten jedoch können durchaus Zugspannungen (pos. Vorzeichen) aufweisen. Abb. 5.36 zeigt die Verformung der Hülle. Hier kommt deutlich der Einfluß der Röbelung zum Ausdruck. Die

linke Seitenwand der Hülle z.B. zeigt einen Knickmodus an. Eine derartig starke Verformung der Hüllenseite kann zu völligem Verdrängen der GFK-Isolation und somit zu einem direkten Kontakt zum Nachbarleiter führen. Solche örtliche Biegung führt an dieser Stelle zu erhöhten Umfangsspannungen (vgl. Abb.5.25). Wie aus Abb.5.26 und 5.27 ersichtlich, trägt die örtliche Biegung in erster Linie zu positiven Spannungszuständen in Querrichtung bei. Die Kraft in axialer Richtung wird vorwiegend durch die Hülle übertragen, in dieser Richtung sind die Stege weniger ausgelastet (Abb.5.26). Aus den Abb.5.36 und 5.37 liest man ab, daß die Struktur Leerräume zu füllen versucht und dabei Biegung verursacht, die wiederum zu positiven Querspannungen führen kann. Für die radiale Komponente gilt, daß die Kraft vorwiegend durch die Seitenwand und Stege geleitet wird (Abb.5.31). Allerdings sind auch hier Zugspannungen möglich wie z.B. in den Leerräumen, d.h. den Kühlkanälen. Die durch die Röbelung verursachten Spannungsgradienten in Querrichtung tragen jedoch wenig zu der Vergleichsspannung bei.

Die Einzelleiter und die Hülle

Infolge der Röbelung besitzen die Vergleichsspannungen innerhalb des Leiters einen komplizierteren Verlauf als die des ungeröbelten. Für die Einzelleiter und den Falzkern sind die Umfangsspannungen dominierend (Abb.5.28, 5.29). Die Vergleichsspannungen variieren zwischen 25 und 70 MPa. Während die geradelaufenden Einzelleiter einen ausgeglichenen Verlauf zeigen (~ 40 MPa), sind die gerade den Röbel ausführenden besonders beansprucht. Deutlich höher liegt die Umfangskomponente an jedem gebogenen Teil des Einzelleiters, wobei die Oberfläche den größten Wert annimmt, der schnell mit zunehmender Tiefe des Einzelleiters abklingt, wenn man sich in Querrichtung des Einzelleiters (radial zum Torus) fortbewegt. Die gerade gegenüber liegende Fläche spürt den minimalen Wert. Wird nämlich, wie in Abb.5.38 gezeigtem Schema, ein Leiter in Längsrichtung gezogen, so ist der oben beschriebene Sachverhalt einleuchtend. Die sich nah der Einzelleiteroberfläche befindlichen supraleitenden Filamente werden aus diesem Grund besonders beansprucht.

Das Zusammenspiel der Querkontraktionszahlen und verschiedenen Längen für Stahl und Einzelleiter führt dazu, daß der Falzkern in Querrichtung eine größere Kontraktion als die Einzelleiter erfährt. Die Einzel-

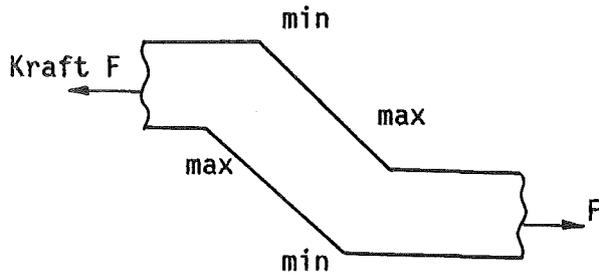


Abb.5.38: Ein auf Zug beanspruchter, gebogener Leiter spürt örtlich variierende Spannungen

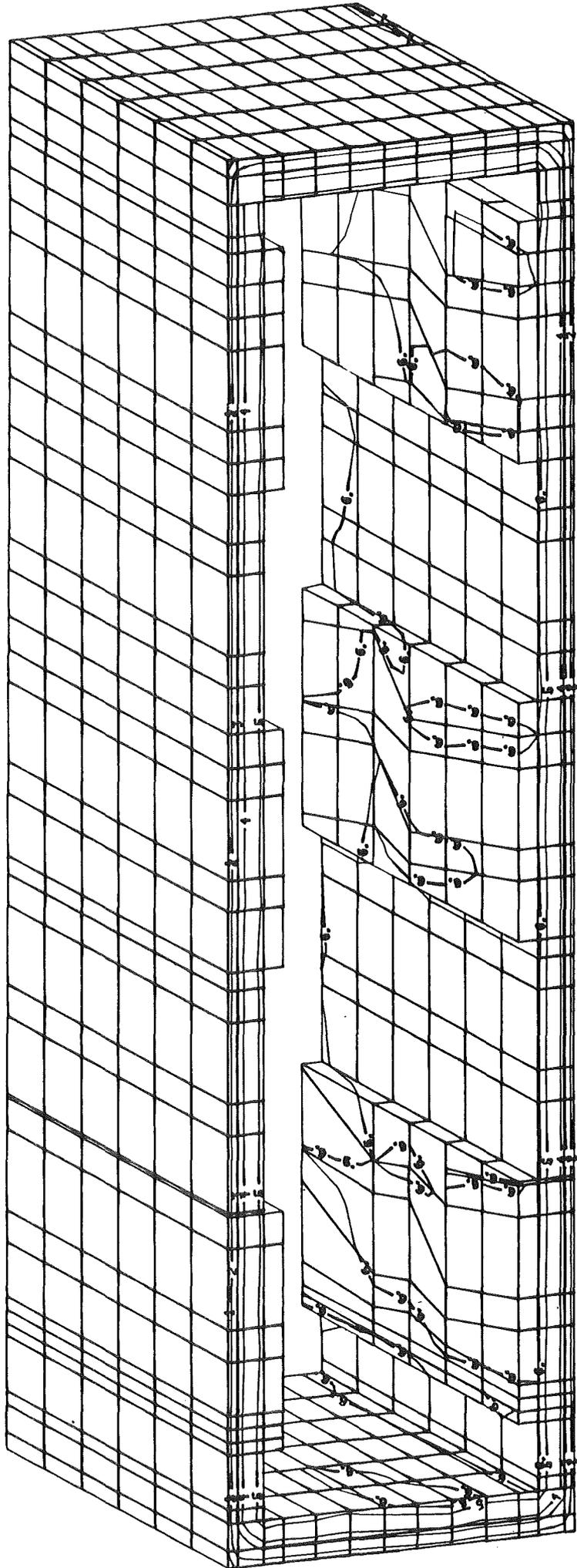
Leiter werden in der Nähe des Falzkerns zusammenschrumpfen (Abb.5.37). Dies zeigt sich in erhöhter Druckspannung der Axialkomponente in der Nähe des Falzkerns. Die Axialspannungen in Einzelleitern sind mit Vorsicht zu betrachten, weil es durch eine nicht paarweise Unterstüztung der Einzelleiter in axialer Richtung zur Verbiegung der geradelaufenden Einzelleiter kommt (leichter Spannungsgradient in Querrichtung der Einzelleiter in Abb.5.30).

Infolge der Röbelung nehmen alle Einzelleiter an der Radialkraftübertragung teil. Das Verhalten der Radialspannungen zeigt Abb.5.31. Positive Spannungswerte sind in den Bereichen zu sehen, in denen die Einzelleiterteile Gelegenheit haben, sich radial bzw.axial zu entspannen (vgl.Abb.5.37).

Von der mechanischen Leiterstabilität in Querrichtung ist die Radial-Axialkomponente von Bedeutung. Für die Einzelleiter trägt die Röbelung zur Erhöhung der Querschubspannungen bei. Die Erhöhung der Schubspannungen kommt durch den seitlichen Hüllenkontakt jedes Einzelleiters (vgl.Abb.5.32) zustande.

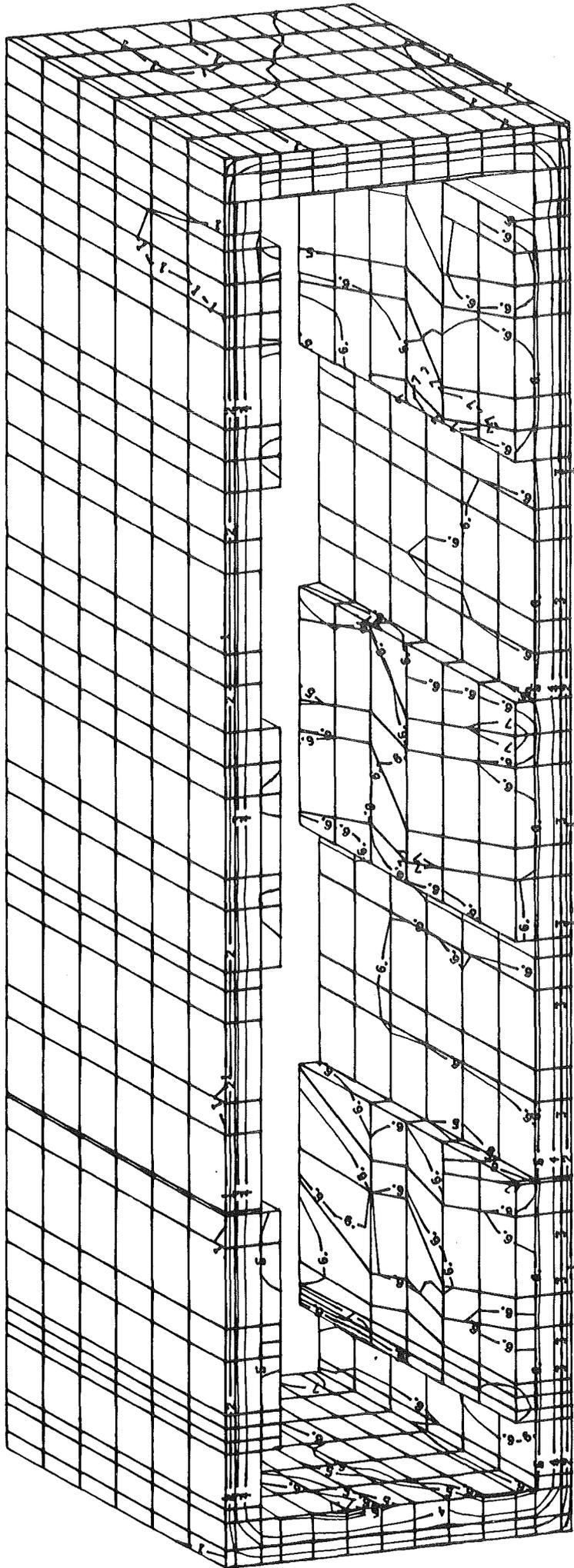
Der Falzkern

Von Interesse bezüglich der Schubspannungen ist der Bereich zwischen den Einzelleitern und dem Falzkern. Abb.5.33 bis 5.35 zeigen den Verlauf aller Schubkomponenten. Es ist ein Anstieg der Schubspannungen gegenüber des ungeröbelten Modells festzustellen, die Werte für alle Spannungen überschreiten jedoch nicht 3 MPa. Wie schon erwähnt ist durch eine ungenügende Länge des RVE zu erwarten, daß die Schubspannungen konservativ berechnet worden sind.



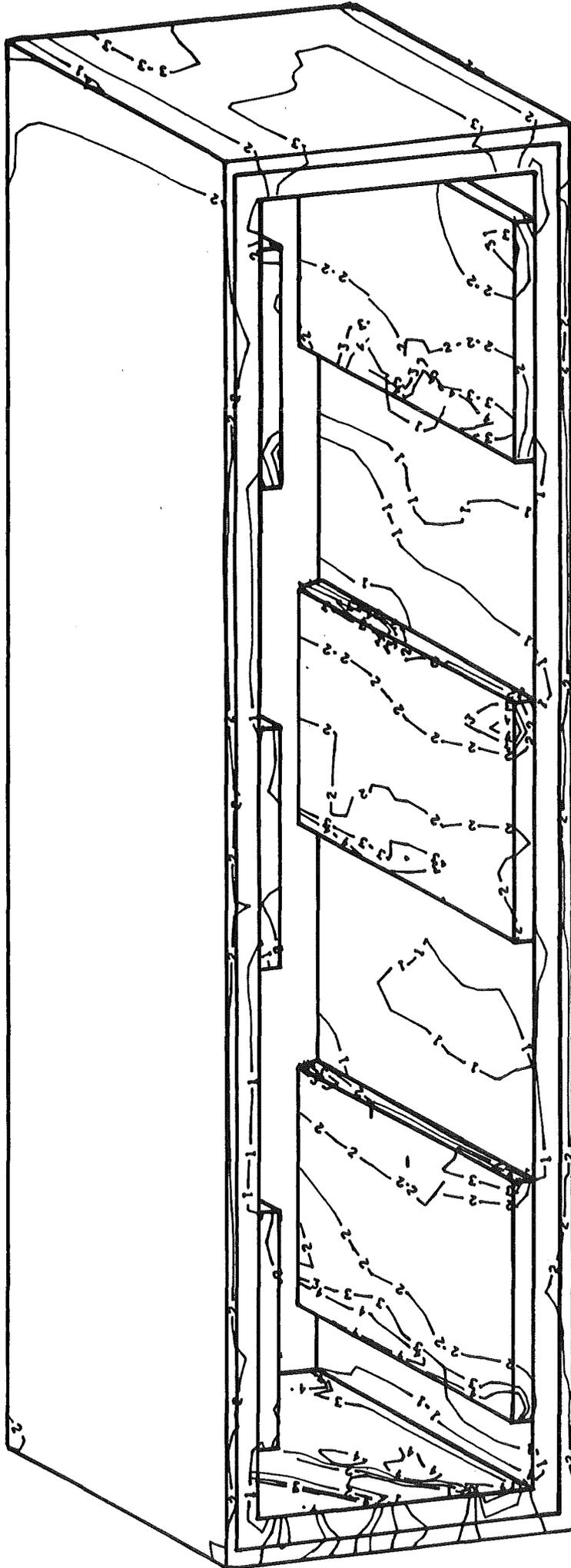
- 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
 - 6
- 30 40 60 70 90 100 /MPa/

Abb. 5.24: Isolinien der Vergleichsspannungen



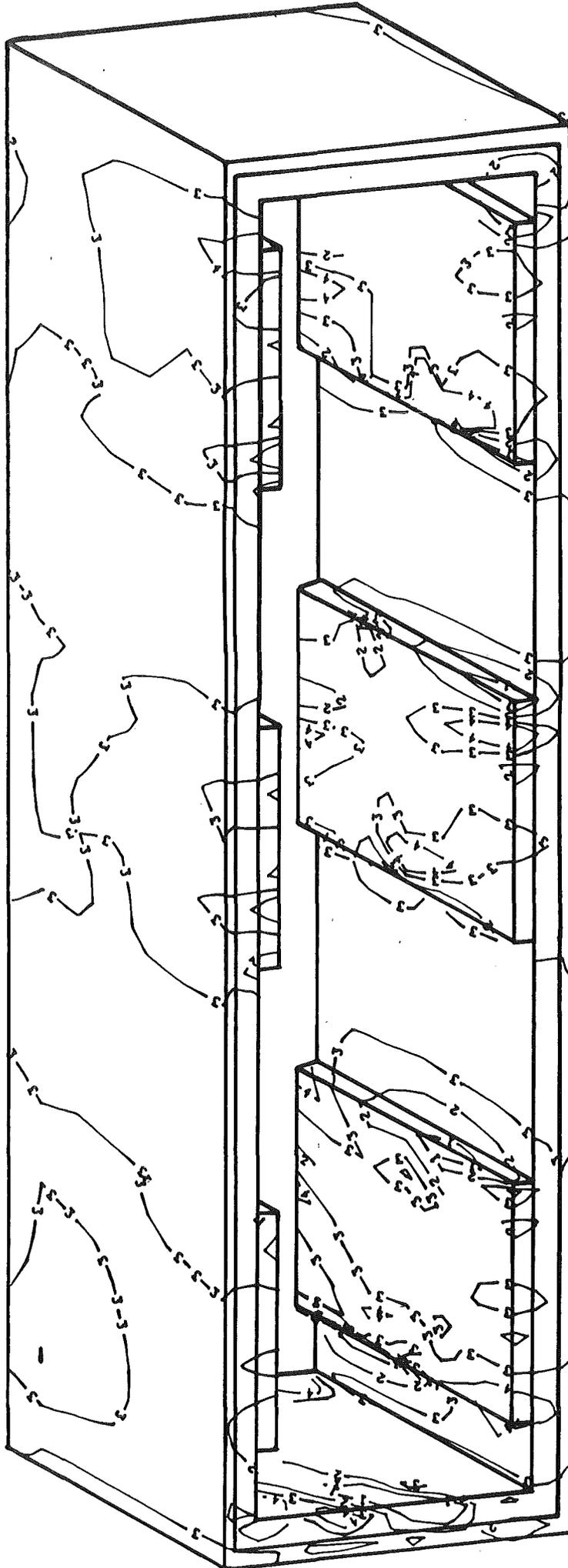
1 2 3 4 5 6 7
25 40 60 70 90 95 100 /MPa/

Abb. 5.25: Isolinien der Umfangsspannungen



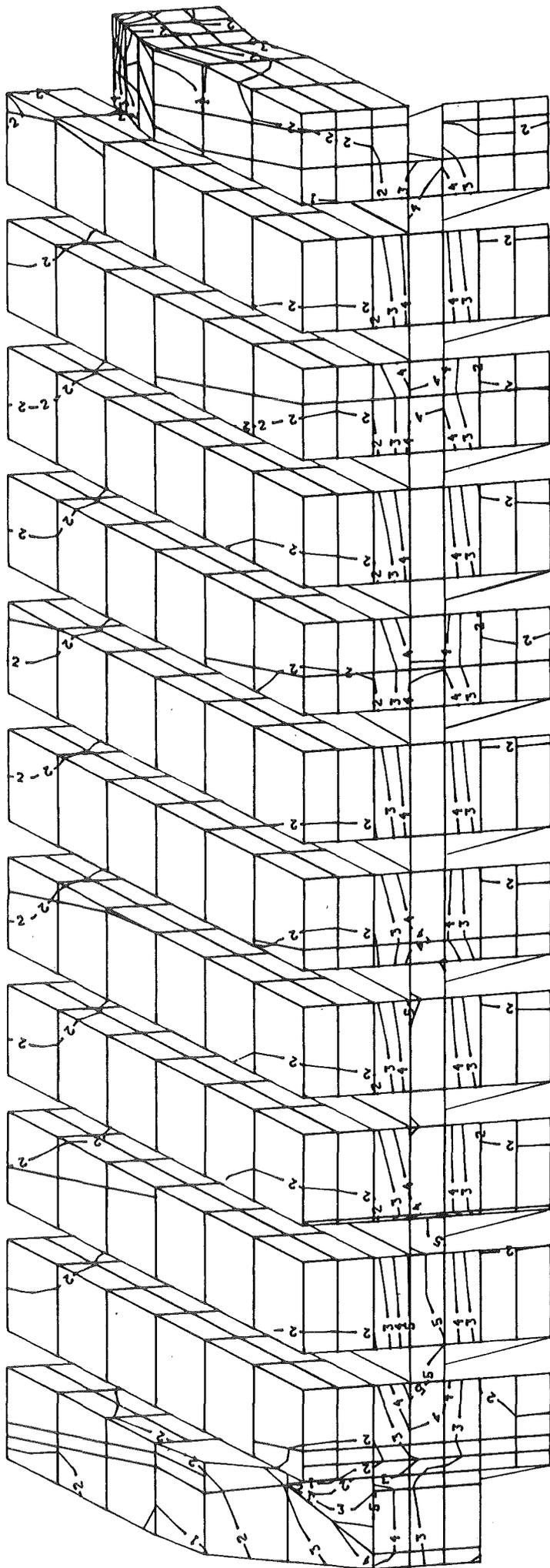
1 2 3 4
-12 -6 -1 2 /MPa/

Abb. 5.26: Isolinien der Axialspannungen



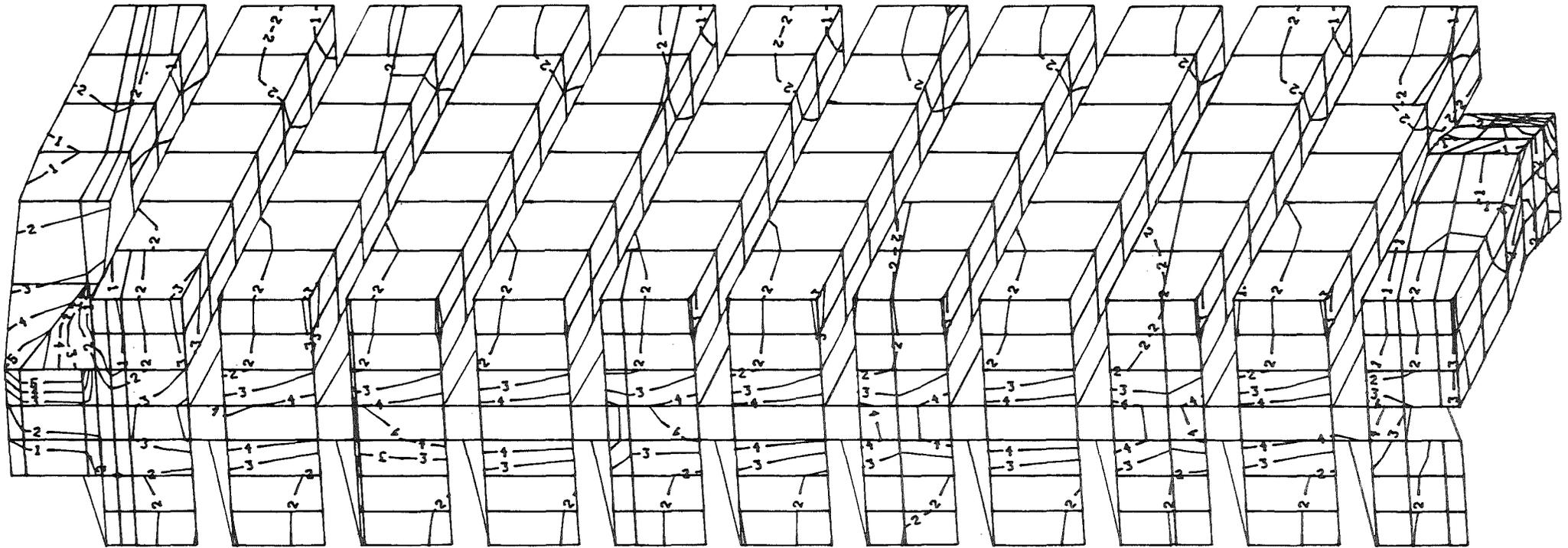
1 2 3 4
-15 -8 -2 2 /MPa/

Abb. 5.27: Isolinien der Radialspannungen



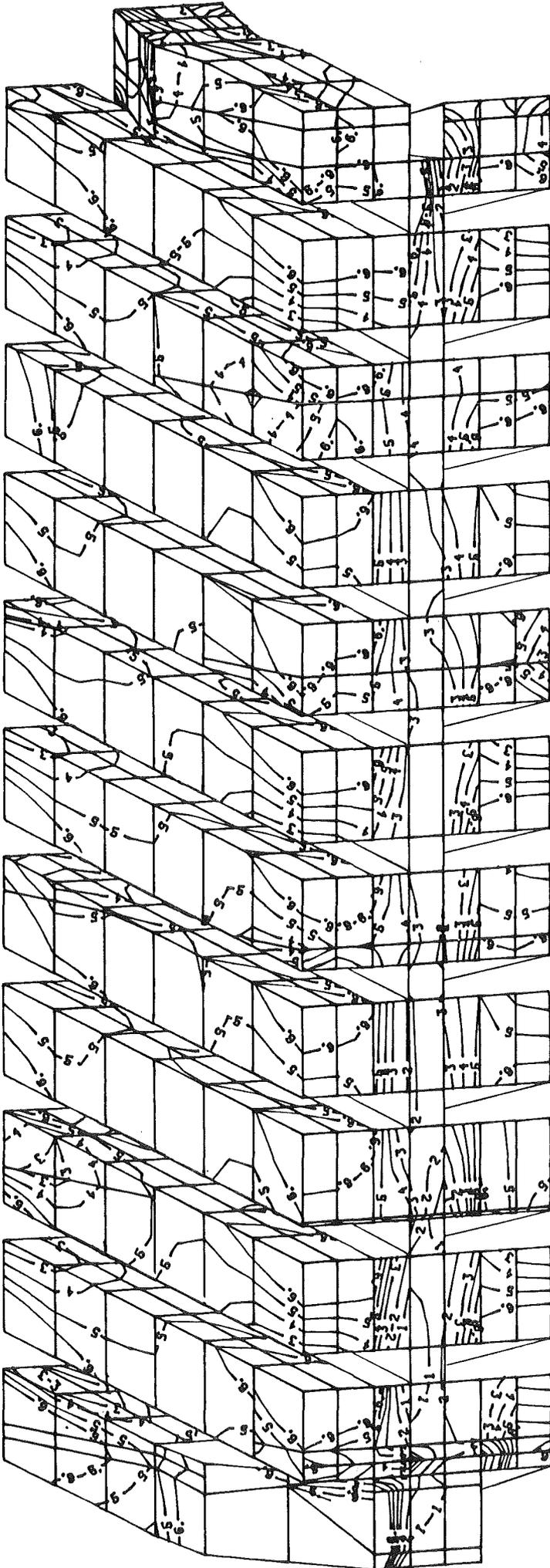
1 2 3 4 5
25 35 50 60 70 /MPa/

Abb. 5.28: Vergleichsspannungen in lokalen Koordinaten



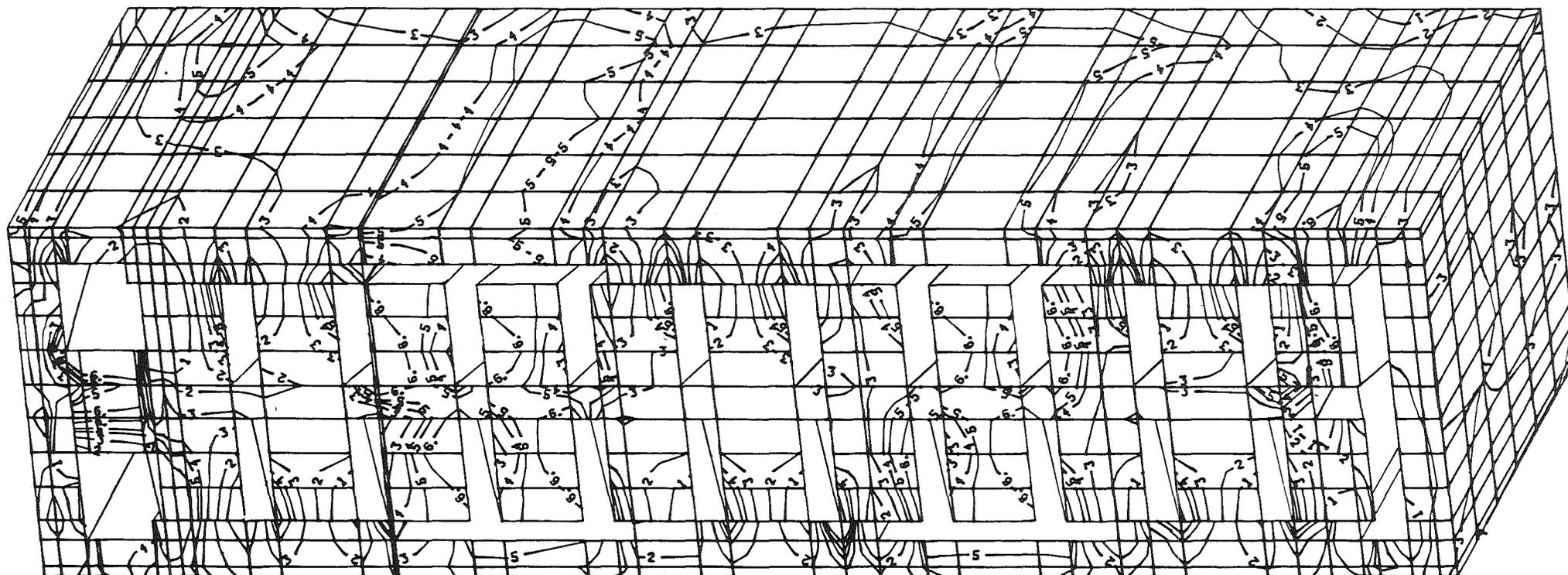
1	2	3	4	5	
25	35	50	60	70	/MPa/

Abb.5.29: Umfangsspannungen in lokalen Koordinaten (die Umfangskomponente jeweils in Einzelleiterrichtung gesehen)



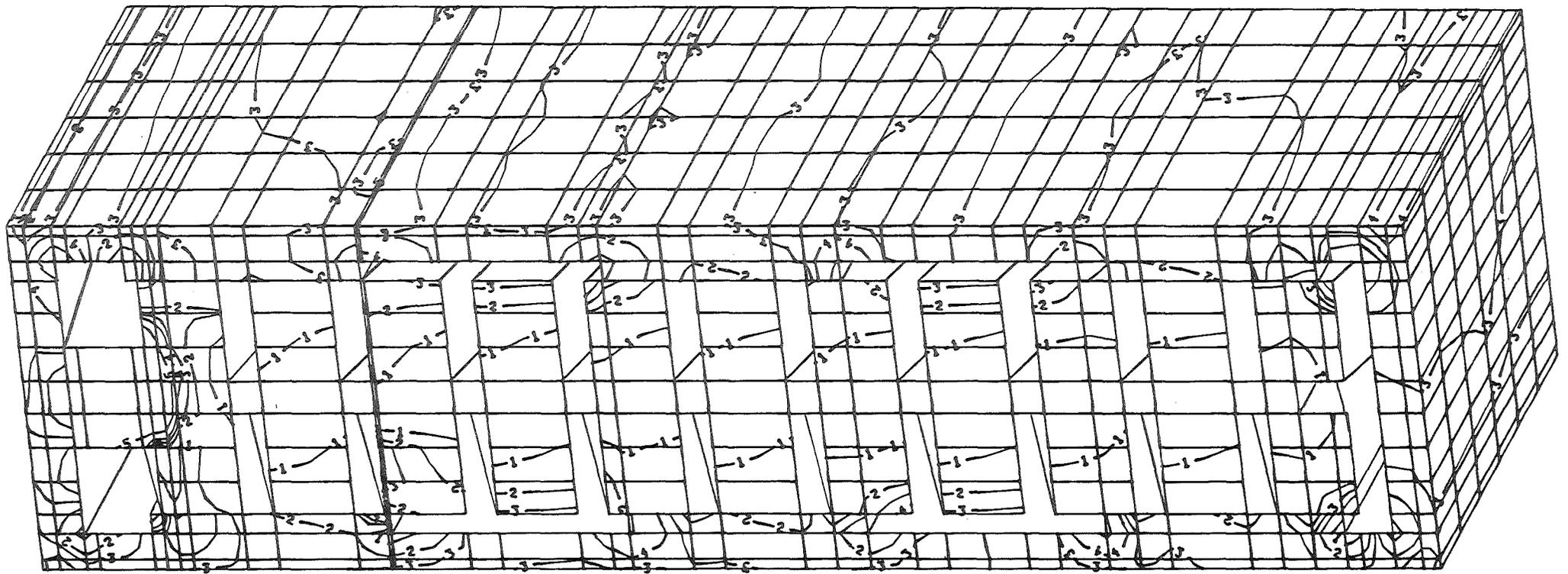
1 2 3 4 5 6
-12 -8 -4 -2 0 2 /MPa/

Abb. 5.30: Axialspannungen in lokalen Koordinaten



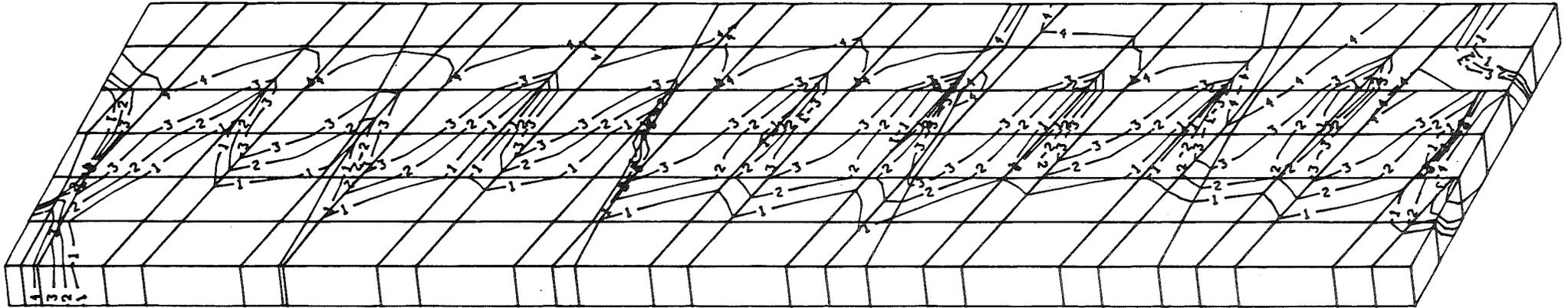
1	2	3	4	5	6	
-9	-6	-3	-1	0	2	/MPa/

Abb. 5.31: Radialspannungen in lokalen Koordinaten



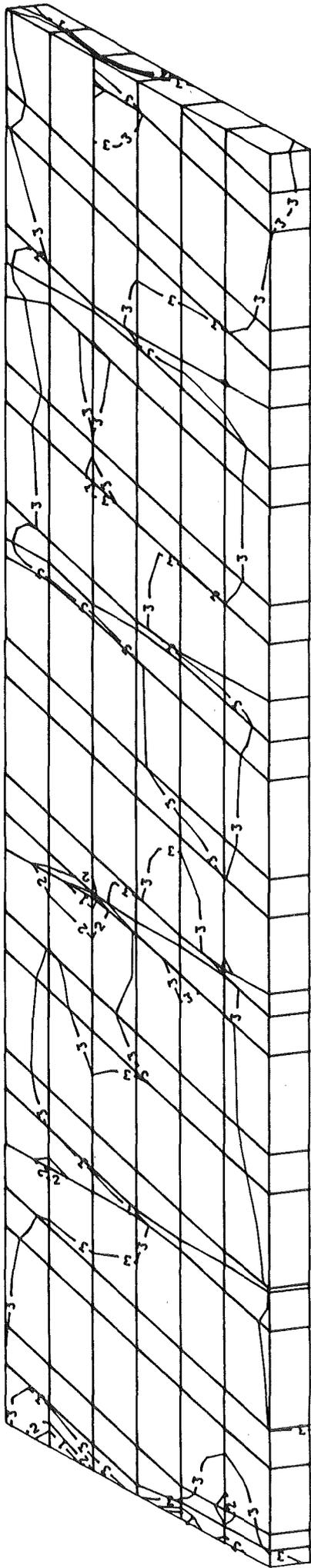
1	2	3	4	5	
-3	-1	0	1	3	/MPa/

Abb. 5.32: Schubspannungen σ_{yz} in lokalen Koordinaten



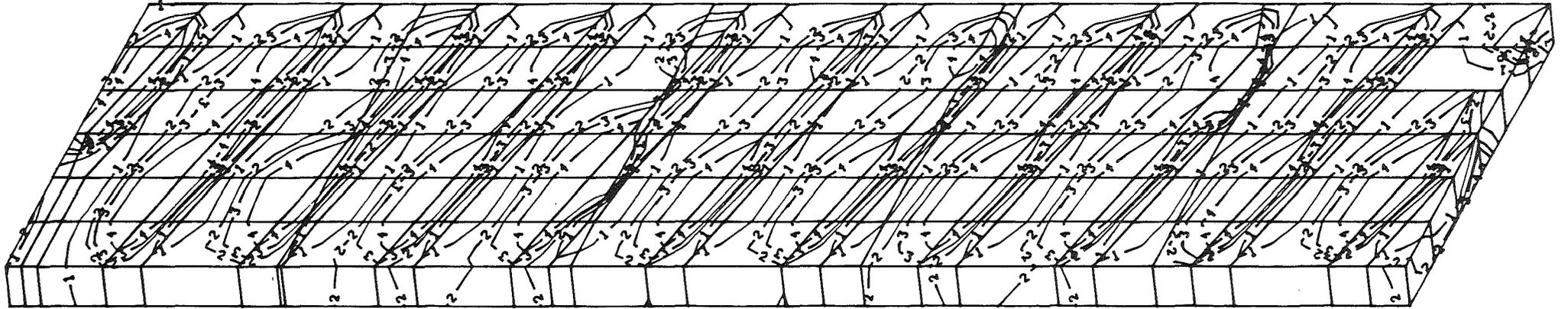
1	2	3	4	
-2	-1	0	3	/MPa/

Abb. 5.33: Falzkern: Schubspannungen σ_{yz} in lokalen Koordinaten



1 2 3 4
-2 -1 1 3 /MPa/

Abb. 5.34: Falzkern: Schubspannungen σ_{xy} in lokalen Koordinaten



1	2	3	4	
-2	0	1	3	/MPa/

Abb.5.35: Falzkern: Schubspannungen σ_{zx} in lokalen Koordinaten

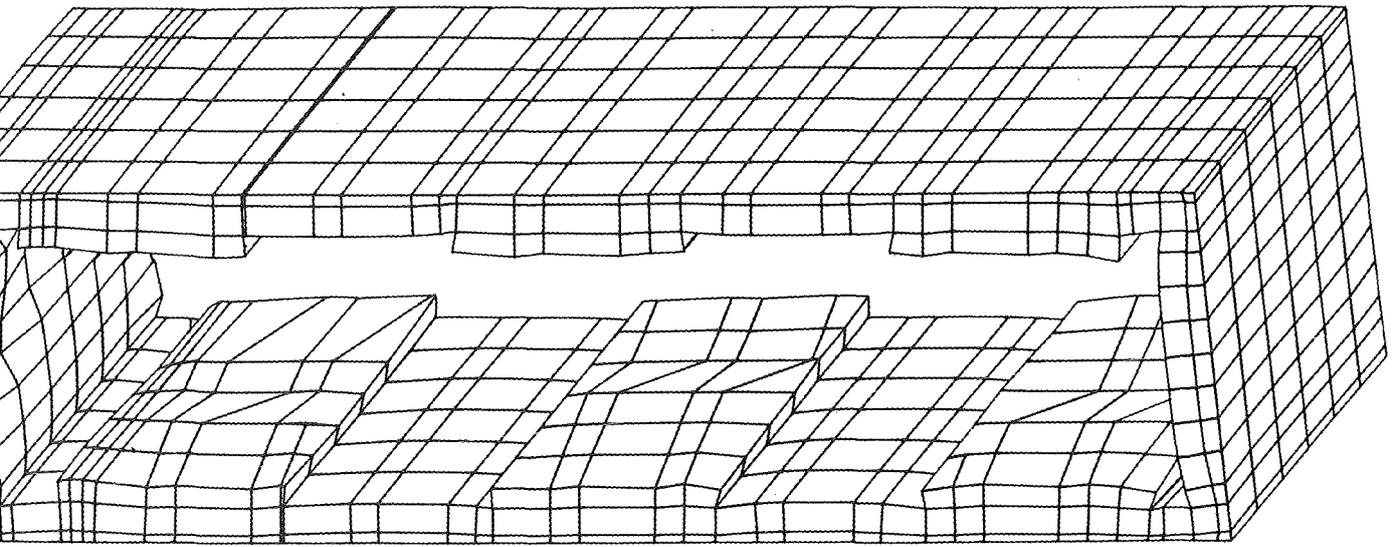


Abb. 5.36: Verformung der Hülle und der Stege in stark vergrößertem Maßstab (x1100)

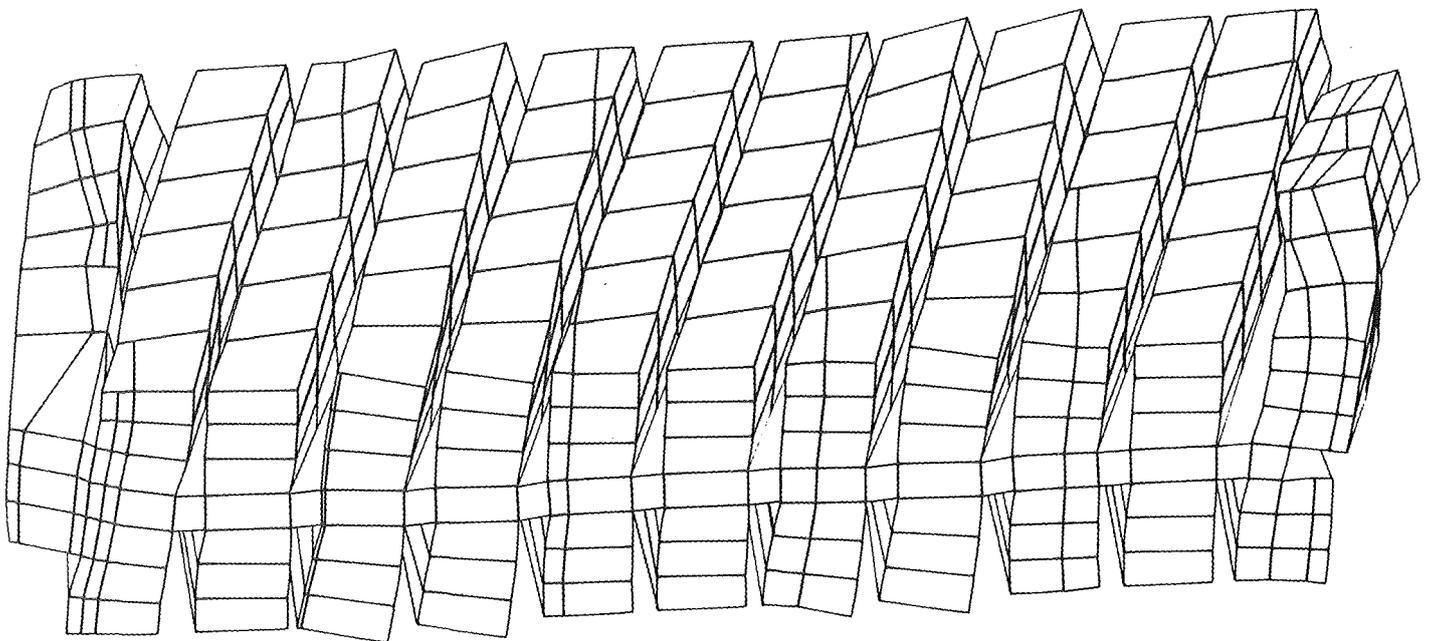


Abb. 5.37: Verformung der Einzelleiter und des Falzkerns in stark vergrößertem Maßstab (x600)

5.1.3 KURZE ZUSAMMENFASSUNG

Die extremalen Spannungen bzw. Dehnungen weichen deutlich von den mittleren ab. Der Unterschied kann bis zu mehr als dem zweifachen Wert des mittleren betragen.

Die magnetischen Kräfte werden überwiegend durch die Stahlhülle übertragen so, daß sie am meisten belastet wird. Der Vergleich beider Modelle (geröbelt, ungeröbelt) zeigt relativ kleine Änderungen der Spannungen in der Hülle und den Stegen. Der Spannungsverlauf für beide RVE zeigt typische Parallel- bzw. Reihenschaltung.

Für die Querkomponenten sind deutliche Spannungserhöhungen am Rande von Löchern festzustellen. Die radiale und axiale Belastung führt sowohl bei geröbeltem als auch bei ungeröbeltem Modell zu wellenförmigen Verformungen der Hülle. Dabei neigt die Hülle dazu in sich zusammenzuschumpfen. Somit werden die Kühlkanäle verengt, und es kann evtl. ein direkter metallischer Kontakt zum Nachbarleiter auftreten. Trotz der negativen mittleren Querspannungen (Makrostruktur) treten innerhalb des RVE die positiven Querkomponenten auf.

Für beide Volumina ist die Umfangsspannung die dominierende Komponente. Es herrscht ein quasi-eindimensionaler Spannungszustand.

Die Einzelleiter werden durch Röbelung örtlich mehr beansprucht als die ungeröbelten, vor allem Bereiche des gerade den Röbel ausführenden Einzelleiters. Hier treten örtlich starke Spannungsgradienten auf, die allerdings sehr schnell mit der Tiefe des Einzelleiters abnehmen. Es können somit örtlich plastische Bereiche auftreten, in denen die nahe an der Oberfläche des Einzelleiters befindlichen Supraleiter besonders beansprucht werden.

Die Schubspannungen, die zum gefürchteten Verlust des Kontaktes Einzelleiter-Falzkern führen könnten, zeigen bei dem geröbelten Modell erhöhte Werte, sie liegen jedoch unterhalb der Sicherheitsgrenze.

Für beide Modelle ist bei der Spannungsauswertung an den Knotenpunkten zwischen verschiedenen Materialien noch Vorsicht geboten, weil an den Knoten die Spannungen von benachbarten Elementen (die einen gemeinsamen

Knotenpunkt haben) gemittelt werden. Die Verformung der Struktur in Verbindung mit dem Spannungsverlauf führt dann zu einer richtigen Auswertung.

Es bleibt noch zu überprüfen, ob die Belastungsäquivalenz (Kap.5) zwischen den homogenen und inhomogenen RVE besteht. Bei gleicher Oberflächenverschiebung muß für alle RVE die Gleichheit der Lastkräfte erfolgen, wenn die jeweiligen Flächen in entsprechenden Verhältnissen zu den Elastizitätsmoduli stehen.

Im ASKA-Programm lassen sich die Kräfte mit einer Subroutine sofort aufsummieren. Eine Überprüfung ergibt, daß in der Umfangsrichtung die Belastung des inhomogenen RVE um ~20% kleiner als die des homogenen ist. In beiden Querrichtungen sind die Lasten bis zu ~40% niedriger. Daraus folgt, daß die Berechnung der effektiven Elastizitätsmatrix (vgl. Kap.3.4) für ein RVE, das Löcher enthält, mit Hilfe der Korrिंगa Methode zu falschen Ergebnissen führt. Dies kann zu enormen Fehlern in der Ermittlung der extremalen Spannungen in einem RVE führen. Somit stellt sich die Frage nach einer zuverlässigen Methode, die zu einem richtigen Elastizitätstensor führt.

6. DIE METHODE ZUR NUMERISCHEN ERMITTLUNG DES ELASTIZITÄTSTENSORS
FÜR EIN RVE MIT GLEICHZEITIGER ANGABE DER DAZUGEHÖRIGEN
EXTREMALEN SPANNUNGEN

Die in Kap.3.4 erwähnte Füllung der Löcher mit einer weichen Elastizitätsmatrix in der Korrिंगa Methode kann zu großen Fehlern führen. Hier wird eine numerische Lösung vorgeschlagen, die „numerische Simulation“. Ein aus der Struktur herausgegriffenes RVE wird einer homogenen Oberflächendehnung numerisch unterworfen. Das Volumenelement wird numerisch verschiedenen Belastungen unterworfen, z.B. gezogen, geschert und daraus werden die einzelnen Elastizitätsmoduli ermittelt. Solche numerische Simulation wird dann notwendig, wenn die experimentellen Untersuchungen für solche Volumina sich nur in bestimmten Richtungen durchführen lassen. Hinzu kommt die Unmöglichkeit der Bestimmung der innerhalb des RVE auftretenden evtl. gefährlichen Spannungsspitzen. Dies trifft für den LCT-Leiter zu.

Die numerische Simulation erlaubt es, beliebig große und komplexe Elementvolumina zu untersuchen, die Lasten exakt zu verteilen und vorzugeben, den Spannungszustand in jedem Punkt des Körpers zu errechnen, unerwünschte Nebeneffekte zu unterdrücken, wie z.B. beim Scherversuch die Eliminierung der Druckkräfte.

Wie in Kap.2 erwähnt, kann der Mittelwert der Spannungen und Dehnungen für einen inhomogenen Körper mit dem Volumen V definiert werden als

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int \sigma_{ij}(x_i) dv \quad (6.1)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int \varepsilon_{ij}(x_i) dv \quad (6.2)$$

wo σ_{ij} (ε_{kl}) die örtlichen Spannungen (Dehnungen) bedeuten. Bezeichnet man den Verschiebungsvektor als u_i ($i=1,2,3$), dann ergibt sich folgender Zusammenhang /31/

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (6.3)$$

$$u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$$

Gl.(6.3) in (6.2) eingesetzt und Verwendung des Gaußschen Satzes führt zu

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) dv = \frac{1}{2V_A} \int (u_i^0 n_j + u_j^0 n_i) dA \quad (6.4)$$

Dabei ist n der Normaleneinheitsvektor zur Fläche A .

Werden auf die Oberfläche A eines homogenen Volumenelements die Verschiebungen $u_i^0(x)$ angelegt, die proportional zur Entfernung vom Ursprung des Koordinatensystems zunehmen

$$u_i^0(A) = \varepsilon_{ij}^0 x_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (6.5)$$

so entstehen in dem Element räumlich konstante Dehnungen ε_{ij} .

Bei Vorgabe der gleichen Oberflächenverschiebungen auf ein inhomogenes Volumenelement ergibt sich Gleichheit der mittleren und konstanten Dehnungen (Gl. 6.7). Beim Einsetzen (6.5) in (6.4) und Beachten, daß

$$\int_A x_k n_j dA = \int_V x_{k,j} dv = V \delta_{kj} \quad (6.6)$$

(δ_{ij} -Kronecker delta), ergibt sich die Beziehung (6.7)

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0 \quad (6.7)$$

Zur Bestimmung des effektiven Elastizitätstensors C_{ijkl}^{eff} nach

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^{eff} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (6.8)$$

muß nur noch der Mittelwert der Spannungen σ_{ij} gefunden werden. Gl. (6.1) gibt eine mathematische Definition des Volumenmittelwertes $\langle \sigma_{ij} \rangle$ /13,32/ an. In einem Experiment ist solche Mittelung wenig sinnvoll. Experimentell wird nur die mittlere Oberflächenspannungskomponente direkt ermittelt, weil die Belastung und die Oberfläche bekannt sind. Wird in einer numerischen Simulation die Last mittels homogener Oberflächenverschiebung vorgegeben, so läßt sich das Volumenintegral (6.1) in ein Flächenintegral umwandeln /32/. Die zu integrierende Fläche ist dann die Oberfläche mit der konstanten Ortskoordinate x_j , auf der die Last ΣP_j wirkt

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int \sigma_{ij} dv = \frac{1}{Ax_i^A} \int \sigma_{ij} x_i dA = \frac{1}{A} \int \sigma_{ij} dA \quad (6.9)$$

Somit ergibt sich die Übereinstimmung des physikalischen Experiments

mit der mathematischen Beschreibung.

Der Mittelwert der Oberflächenspannungen läßt sich sofort leicht ausdrücken als

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{ij} dA = \frac{1}{A} \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum \frac{P_i}{\Delta A_i} \Delta A_i = \frac{1}{A} \sum P_j \quad (6.10)$$

wenn die Oberfläche in relativ feine Elemente unterteilt wird.

In einem FEM-Programm ist dies sofort realisierbar. Bei bekannter Oberfläche (einschließlich Schwachstellen) und der Summation einzelner Knotenpunktskräfte auf der Oberfläche sind die mittleren Spannungen bekannt. Die angelegten Oberflächenverschiebungen liefern die mittleren Dehnungen (6.7). Aus beiden läßt sich der jeweilige Elastizitätsmodul ausrechnen (6.8).

Im folgenden wird der effektive Elastizitätstensor für das Testbeispiel des LCT-Leiters ermittelt.

6.1 ERMITTLUNG DES EFFEKTIVEN ELASTIZITÄTSTENSORS AM BEISPIEL DES LCT-LEITERS

Die Komplexität der Struktur erlaubt für den LCT-Leiter nur eine Messung des E-Moduls in der Längsrichtung des Leiters /33/.

Die Messung wurde bei Zimmertemperatur durchgeführt, während in den Rechnungen die Werte für 4K ermittelt werden, was der Betriebstemperatur des LCT-Leiters entspricht.

In Abb.6.1 ist der experimentelle Wert des NbTi/Cu Einzelleiters (Längsrichtung) leicht ablesbar. Numerisch ermittelte Ergebnisse für diese Komponente bei 4K sind in Kap.3.2 angegeben. Der E-Modul für den gesamten Leiter ohne GFK-Hülle ergibt sich zu ~145 GPa. Die hier angegebene Spannung berücksichtigt nicht den Flächenanteil der Löcher (vgl.Kap.5). Der auf diese Weise bestimmte E-Modul führt bei der Berechnung des mittleren Spannungs-Dehnungszustandes in der Spule zu großen Fehlern. Berücksichtigt man den Kühlkanalanteil (Tab.1), so ergibt sich ein E-Modul von 110 GPa, oder anders ausgedrückt: für eine Dehnung von 0.1% wird eine Kraft von $P=4.34 \cdot 10^4$ N verwendet. Die numerische Simulation liefert beim Anlegen der homogenen Oberflächendehnungen (nach Gl.6.7) von 0.1% und

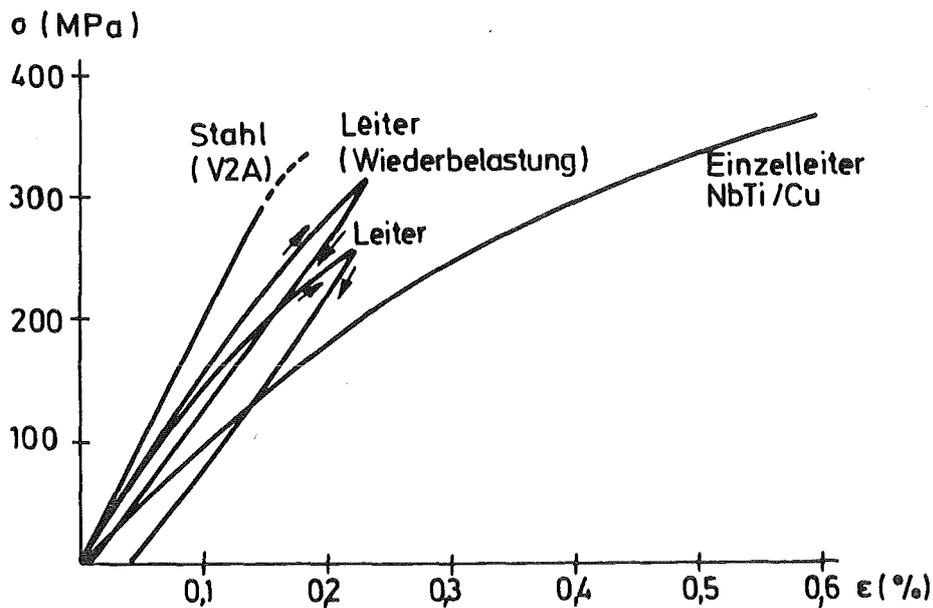


Abb.6.1: Spannungs-Dehnungskurve des LCT-Leiters (bei Zimmertemperatur) und dessen Einzelkomponenten /33/.

der sich daraus ergebenden aufsummierten Kräfte von $\Sigma P = 4.63 \cdot 10^4 \text{ N}$ einen E-Modul von 116 GPa bei Berücksichtigung des Lochanteils. Die Berechnung des E-Moduls liefert eine Abweichung von weniger als 7%. Zu erwähnen ist noch, daß der experimentelle Zugversuch bei Zimmertemperatur durchgeführt wurde. Es ist zu erwarten, daß bei gleicher Temperatur die Abweichungen kleiner werden.

Im folgenden sind die einzelnen elastischen Komponenten und die dazugehörigen extremalen Spannungswerte dargestellt. Bei der Berechnung der Elastizitätsmatrix des Leiters wird noch die GFK-Hülle berücksichtigt, weil sie als eine der Bestandteile in der gesamten Spule auftritt. Die E-Moduli werden nach der folgenden Gleichung ermittelt

$$E = \frac{\Sigma P}{\epsilon A}$$

Für die verschiedenen Richtungen sind die Eingabedaten und die Ergebnisse für die E-Moduli und die dazugehörigen Spannungen in Tab.2 angegeben.

Richtung		Umfangsr.	Axialr.	Radialr.
Dehnung	ε /%/	0.10	0.03658	0.0472
Fläche	A /mm ² /	434.6	159.0	615.0
Belastung	ΣP /N/	4.85×10^4	2.91×10^3	1.52×10^4
E-Modul	/GPa/	111.0	49.9	52.4
$\langle \sigma \rangle$	/MPa/	112.0	-18.0	-24.0
$\sigma_{\max} / \langle \sigma \rangle$		1.8	5.5	4.1
$\sigma_{\min} / \langle \sigma \rangle$		0.53	-0.9	-0.2

Tab.2: Eingabedaten, E-Moduli und dazugehörige Spannungen

Diskussion der Ergebnisse

Umfangsrichtung

In Abb.6.2 sind die dazugehörigen Spannungen in der Zugrichtung dargestellt. Die hier für die Einzelleiter gezeichneten Spannungen sind um den Kosinus des Winkels zwischen der Leiterlängsrichtung und der Einzelleiterrichtung kleiner so, daß der Einzelleiter in seiner Längsrichtung eine um 10÷20% kleinere Spannung sieht. Die maximalen Spannungen treten in der Stahlhülle, die minimalen in der GFK-Hülle auf. Der Einzelleiter spürt eine Spannungserhöhung von 1.62 der mittleren Spannung, die die in dem geröbelten Teil auftritt.

Axialrichtung

In der Spule ist der Leiter wegen der magnetischen Querkräfte vorwiegend auf Druck belastet. Eine Ausnahme bildet der mögliche, allerdings sehr kleine Bereich (s.Abb.4.9) in der Nähe der stärksten Spulenkrümmung. Aus diesem Grund wird der Leiter in Querrichtung nur Drucklasten unterworfen. Der Zug in Querrichtung würde zum Aufblähen des Leiters führen, somit zum Abheben der Stahlhülle von den Einzelleitern, was zu völlig anderen (kleineren) E-Moduli führen würde. Der Leiter würde sich dann anisotrop verhalten. Dank der Druckkräfte in Querrichtung der gesamten Spule bleibt der Leiter orthotrop. Somit reicht zur Ermittlung der E-Moduli in Querrichtung das Anlegen der Drucklasten aus. Der Verlauf der axialen Spannungen ist in Abb.6.3 dargestellt. Die maximale Spannung tritt

in der Stahlhülle auf, während eine Spannungsminderung in dem geröbelten Leiter auftritt, der gleichzeitig der am stärksten belastete Einzelleiter ist. Bei dieser Simulation wurde die Bewegung der Seitenwände gegen Ausbeulung bzw. Knickung unterdrückt. Der Leiter besitzt in der Spule noch seitliche Nachbarn, die das Knicken der Seitenwände verhindern.

Radialrichtung

Abb.6.4 stellt den Verlauf der radialen Spannungen dar. Die Last wird vorwiegend durch die Seitenhülle und die zwischen den Stegen liegenden Einzelleiter geleitet. Die maximale Spannung tritt in der Hülle auf, die minimale (Zugspannung) tritt in den Einzelleitern auf. Die größte Belastung eines Einzelleiters beträgt das 2.5-fache des mittleren.

Querkontraktionszahlen

Die größte Unsicherheit bei der Ermittlung der elastischen Eigenschaften liefern die Poisson-Zahlen. Abb.6.5 zeigt die Verformung des Leiters beim Zug in Längsrichtung. Die Berechnung der Querkontraktion ist bei wellenförmiger Oberfläche des Leiters nur mit geeignetem Mittelungsprozeß durchführbar. Nach einem gewöhnlichen Mittelungsprozeß über die jeweilige Fläche ließen sich alle sechs Poisson-Zahlen getrennt ermitteln. Jeweils zwei von ihnen sind mittels folgender Beziehung

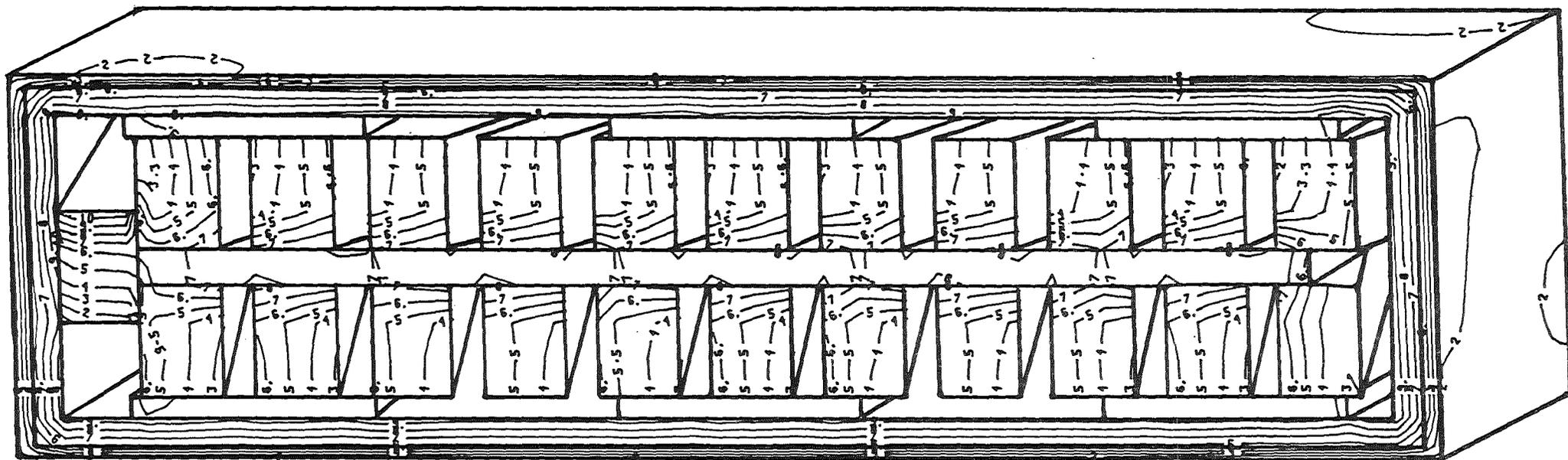
$$\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} = \frac{\nu_{yx}}{E_{yy}} \quad (6.11)$$

miteinander verknüpft. Die numerisch ermittelten und die aus der Gl.(6.11) berechneten Werte würden bis zu 20% divergieren. Deshalb wird der Mittelungsprozeß dem Leiterverhalten in der Spule angepaßt. So wird z.B. für die ν_{xy} nur über den ecknahen Bereich des Leiters gemittelt. Der Leiter in der Struktur stützt sich an den Ecken zum Nachbarleiter ab. Eine solche Mittelung ergibt zufriedenstellende Resultate, so zeigen die sich aus Gl.(6.11) ergebende ν_{yx} und die aus der entsprechenden Mittelung ausgerechneten ν_{yx} gute Übereinstimmung. Die nach solchen Gesichtspunkten ermittelten Querkontraktionszahlen betragen:

$$\nu_{xy} = 0.297$$

$$\nu_{xz} = 0.323$$

$$\nu_{yz} = 0.192$$



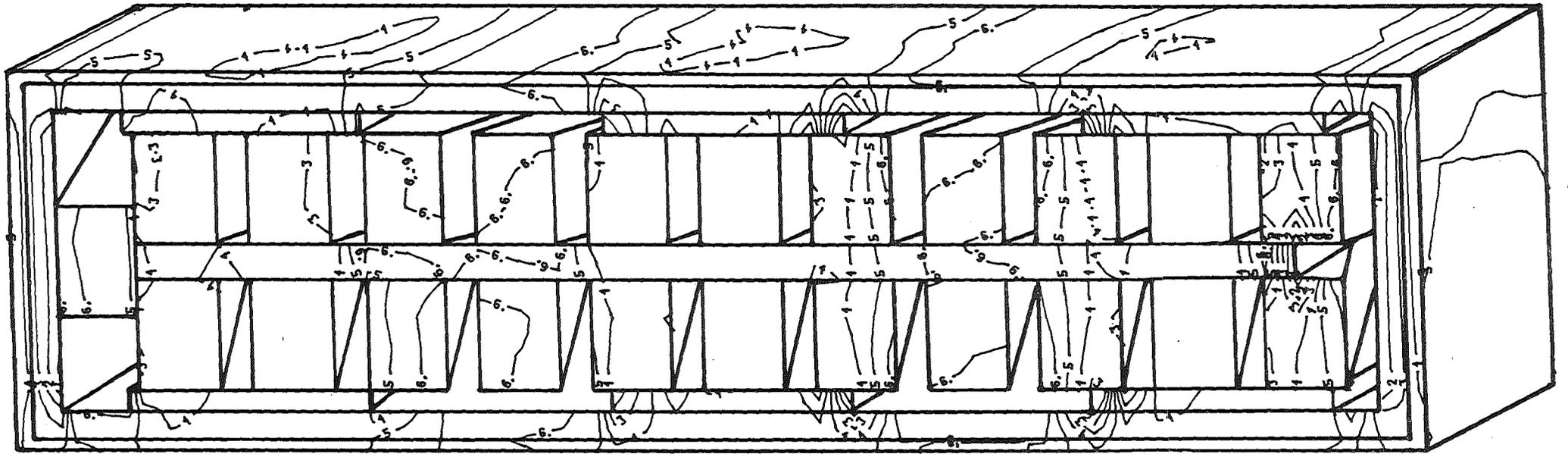
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	/MPa/

Abb.6.2: Isolinien der Umfangsspannungen beim Zug
in Umfangsrichtung



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	/MPa/
-100	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80	

Abb. 6.3: Isolinien der Axialspannungen bei einem Druck
des Leiters in axialer Richtung



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
-100	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80	/MPa/

Abb.6.4: Isolinien der Radialspannungen beim Druck des Leiters in radialer Richtung

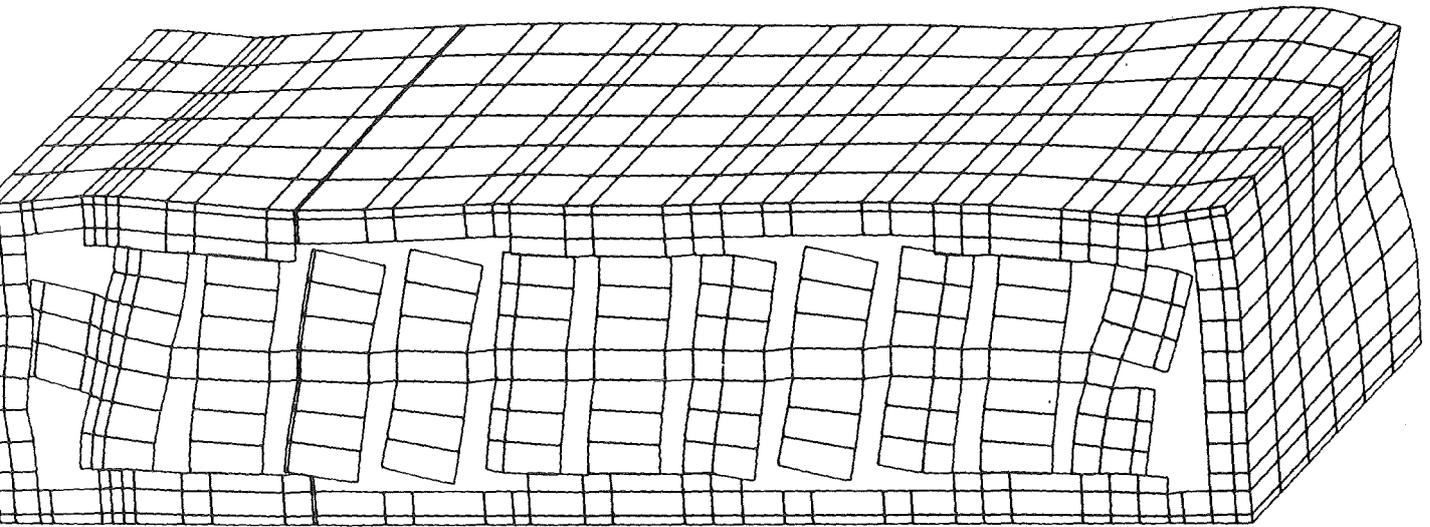


Abb.6.5: Verformung des Leiters in stark vergrößertem Maßstab (x2000) beim Zug in Umfangsrichtung

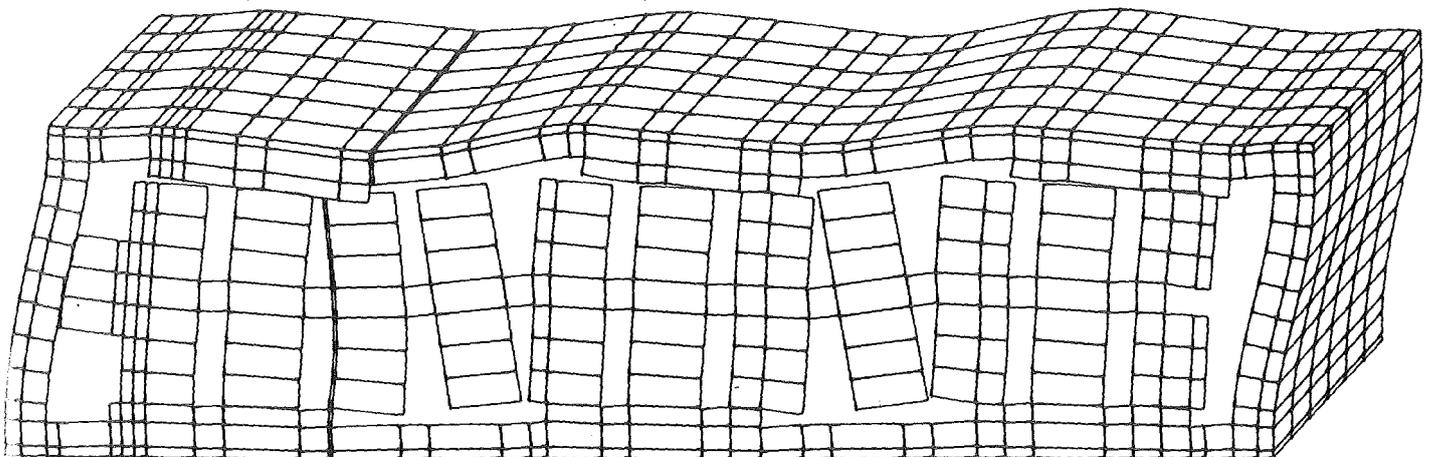


Abb.6.6: Verformung des Leiters in stark vergrößertem Maßstab (5×10^4) bei angelegtem Schub in axial-radialer Richtung (gekoppeltes Modell)

Schubmoduli

Die Berechnung der Schubmoduli wird erschwert durch die Ungewißheit des Leiterverhaltens im Bezug auf die Übertragung der Querkräfte zwischen den Stegen und den Einzelleitern, z.B. im Falle positiver Radialspannungen hebt sich die Leiterhülle von den Einzelleitern ab, und die Schubkräfte würden größtenteils nur durch die Hülle übertragen. Der Schubmodul könnte auf diese Weise z.T. drastisch reduziert werden. Andererseits kennt man aus vorherigen Abschätzungen, daß in der gesamten Struktur eine kompressive Radialkraft zu erwarten ist, die für genügend große Anpresskraft Stege-Einzelleiter sorgen wird.

Die Schubmoduli werden ermittelt nach der Gleichung

$$G = \frac{\Sigma P}{\gamma A}$$

Zum Vergleich des Einflusses des oben geschilderten Verhaltens wird bei der Ermittlung der Schubmoduli mit jeweils zwei Modellen gearbeitet. Im einen ist die Gleitung zwischen den Einzelleitern und den Stegen in axialer Richtung ermöglicht, im anderen wird diese Bewegung unterdrückt (entsprechende Freiheitsgrade gekoppelt). Die Eingabedaten wie Scherdehnungen γ , Fläche A, die Lastkräfte ΣP , die dazugehörigen Spannungen, sowie die ermittelten Schermoduli sind in der Tab.3 angegeben. Die Schubmoduli für das entkoppelte Modell stehen in Klammer.

Richtung		ZY	XZ	XY
Dehnung	$\gamma / \times 10^{-5} /$	1.226	2.642	2.00
Fläche	A /mm ² /	615.0	615.0	434.6
Belastung	ΣP /N/	60.0	216.0	166.0
Schermodul	/GPa/	7.9(1.7)	13.3(8)	19.1(13.4)
< σ >	/MPa/	-0.1	0.35	0.38
σ_{max} / < σ >		4.0	1.7	3.7
σ_{min} / < σ >		0.1	-0.14	0.01

Tab.3: Eingabedaten, Schubmoduli und dazugehörige Spannungen

G_{zy}

Abb.6.6 zeigt die Verformung des Leiters bei angelegten Verschiebungen γ_{zy} . Durch die horizontale Koppelung kommt es zur Verformung der Hülle, die durch die Einzelleiter den Falzkern wellenförmig verbiegt. An dieser Stelle zeigt sich die Begrenzung durch Speicherkapazität und Rechenzeit deutlich. Der berechnete Leiter, oder besser das RVE, wie es für die Rechnung erforderlich gewesen wäre, konnte nicht lang genug gewählt werden. Deshalb ist zu vermuten, daß die hier gezeigte Falzkernbiegung und die relativ große Bewegung der Einzelleiter in Wirklichkeit kleiner wird als die so ermittelten. Abb.6.7 zeigt den dazugehörigen Spannungsverlauf σ_{zy} . Die maximale Schubspannung in den Einzelleitern ist 3-mal größer als die mittlere $\langle\sigma\rangle$.

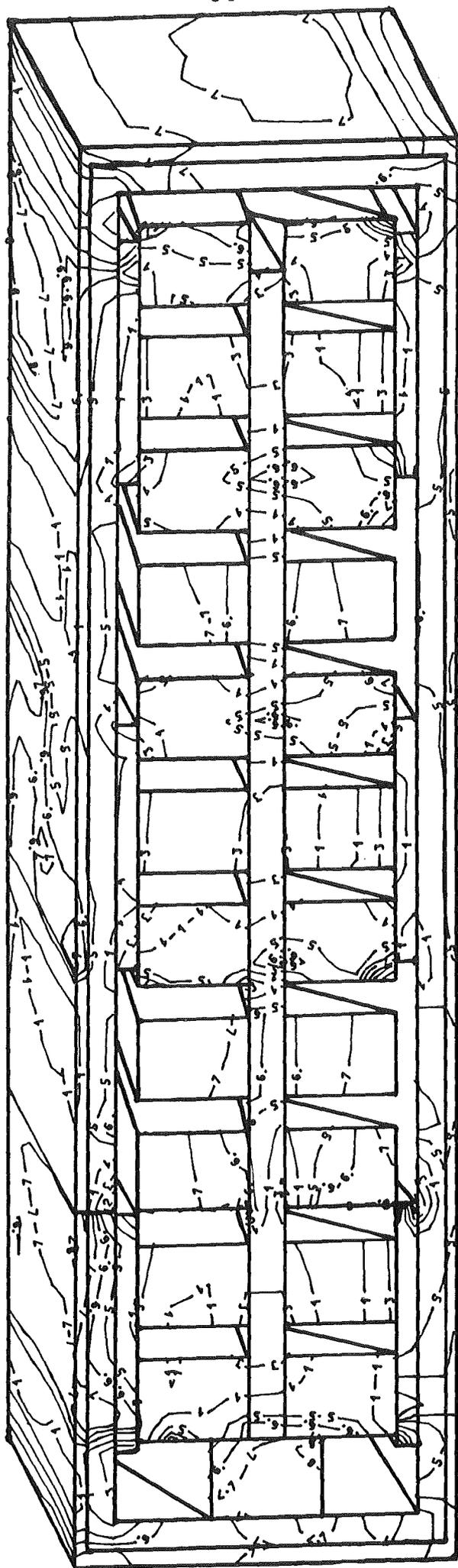
G_{xz}

Das entkoppelte Modell liefert einen um 40% niedrigeren Wert. Abb. 6.8 gibt den Spannungsverlauf σ_{xz} wieder. Die maximale Schubspannung σ_{xz} in den Einzelleitern beträgt 1.14 des mittleren $\langle\sigma\rangle$. Die Kraftbelastung wird vorwiegend durch die Stahlhülle übertragen, wodurch die Scherfestigkeit in der Umfangs-Radialrichtung höher liegt als die in der Radial-Axialrichtung. Die Einzelleiter tragen in diesem Fall mäßig zur Scherfestigkeit bei.

G_{xy}

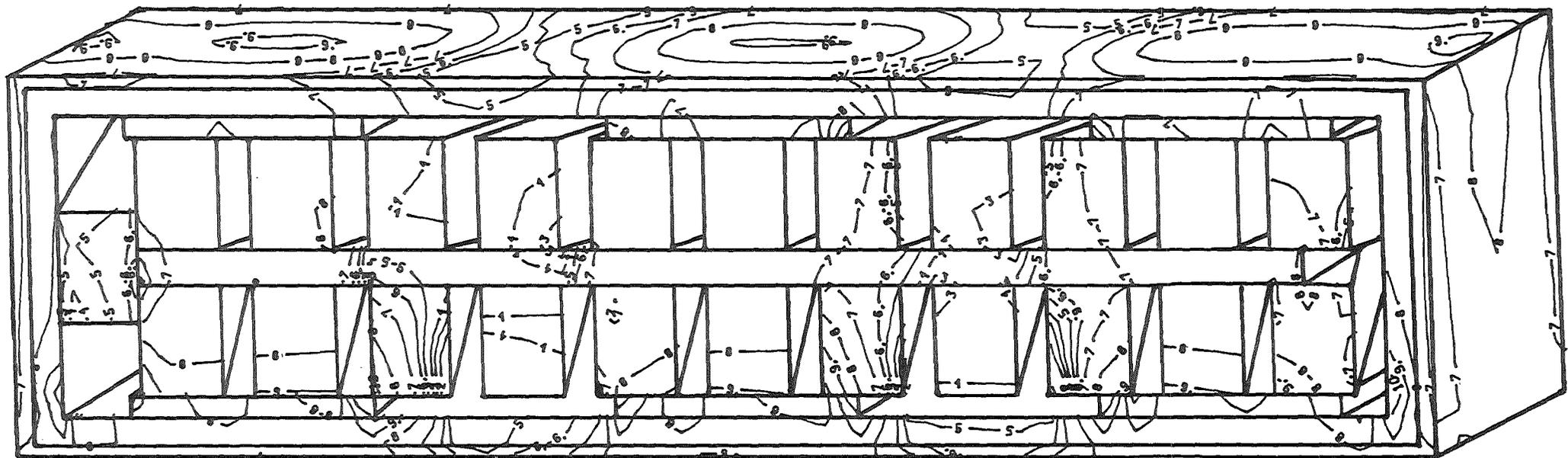
Abb. 6.9 zeigt den dazugehörigen Spannungsverlauf σ_{xy} . Die Schubspannungsspitzen in den Einzelleitern betragen 2.1 des mittleren $\langle\sigma\rangle$. Die höchste Scherfestigkeit besitzt der Leiter in der Umfangs-Axialrichtung. Das entkoppelte Modell liefert einen um 30% niedrigeren Wert. Daraus folgt, daß die Entkoppelung der Einzelleiter von der Hülle in dieser Richtung am wenigsten von allen anderen Richtungen ausmacht.

Im Falle positiver Radialspannungen, d.h. beim Abheben der Stege von den Einzelleitern, können sich die Schubmoduli beträchtlich ändern, extrem davon betroffen ist der Schubmodul G_{zy} . Deshalb müssen auf jeden Fall die Zugspannungen in der Querrichtung der Spule vermieden werden,



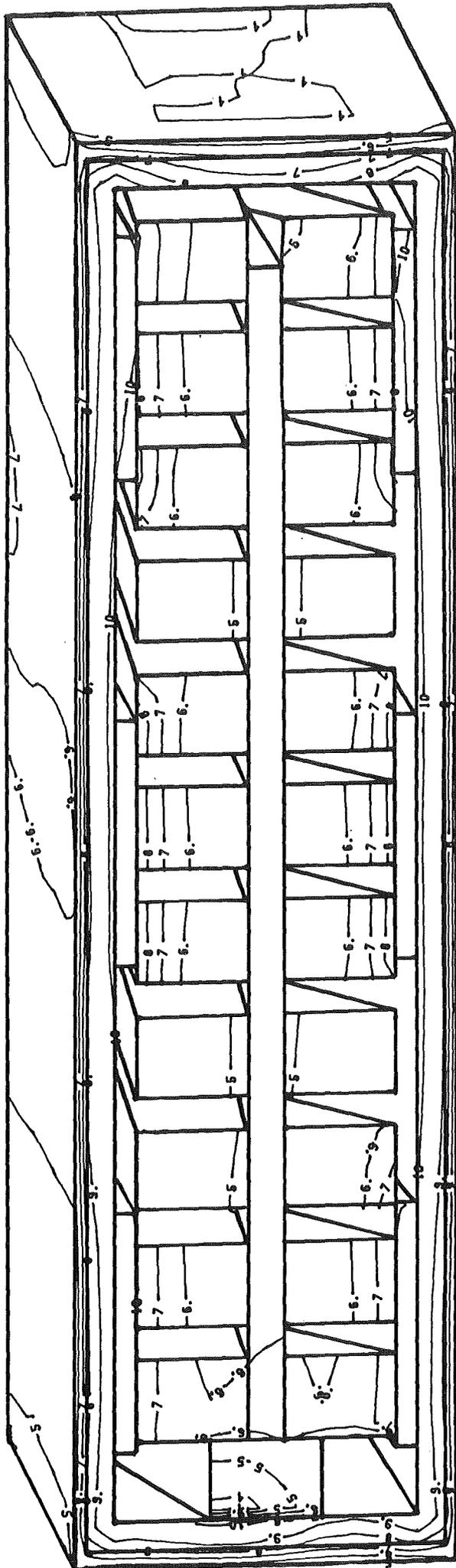
1 2 3 4 5 6 7
-0.5 -0.4 -0.3 -0.2 -0.1 -0.05 -0.01 /MPa/

Abb. 6.7: Isolinien der Schubspannungen σ_{zy} bei einem Schub
in ZY-Richtung



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
-0.3	-0.1	-0.05	-0.01	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	/MPa/

Abb.6.8: Isolinien der Schubspannungen σ_{XZ} beim Schub
in XZ-Richtung



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-0.8	-0.4	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.4

/MPa/

Abb. 6.9: Isolinien der Schubspannungen σ_{xy} beim Schub
in XY-Richtung

wenn man ähnliche Leiterkonzepte verwendet. Andernfalls wird man gezwungen, die gesamte Struktur mit verschiedenen Elastizitätstensoren zu berechnen.

6.2 BERECHNUNG DER MITTLEREN SPANNUNGEN UND DEHNUNGEN IN EINEM MAGNETKOMPOSIT MIT ANGABE DER EXTREMALEN WERTE

Die mit der Korringa Methode in Kap.3.4 errechnete effektive Elastizitätsmatrix für ein RVE, das Löcher enthält, liefert unsichere mittlere Spannungen in der gesamten Struktur. Infolgedessen konnten die berechneten extremalen Spannungen mit Fehlern behaftet werden. Wie in Kap.5.1.3 gezeigt wurde, bestand keine Belastungsäquivalenz zwischen einem homogenen und inhomogenen RVE. Es ist notwendig, mit Hilfe eines neuen, numerisch ermittelten effektiven Elastizitätstensors nach der Oberflächenverschiebungsmethode den Rechengang zu wiederholen, d.h. die mittleren Werte neu zu berechnen. Zeigen die neu errechneten mittleren Werte eine deutliche Differenz von den früheren, so ist eine wiederholte Spannungsanalyse für ein inhomogenes RVE durchzuführen.

Aus den numerisch ermittelten elastischen Eigenschaften für ein RVE läßt sich folgende Elastizitätsmatrix aufstellen (Einheit-GPa):

$$\begin{bmatrix} 125.3 & 21.15 & 23.27 & & & \\ 21.15 & 55.57 & 14.39 & & & \\ 23.27 & 14.39 & 56.63 & & & \\ & & & 19.09 & & \\ & & & & 7.698 & \\ & & & & & 13.29 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Wegen der Differenz beider Elastizitätsmatrizen (Gl.(3.12) und (6.12)) sind Unterschiede in der mittleren Spannungs-Dehnungsanalyse der Struktur und als Folge davon veränderte Extremalspannungen in der Mikrostruktur zu erwarten.

Den zunächst überraschend kleinen Differenzen in der Wicklung zwischen beiden Rechnungen folgen größere Unterschiede für das Gehäuse.

In Abb.6.10 und 6.11 sind die Isolinien der Umfangsspannungen und Radialspannungen an der Wandinnenseite des Gehäuses dargestellt. Vergleicht man diese Werte mit denen aus Abb.4.3 und 4.4, so liegen die ersten um 10÷16% höher für die Umfangsspannungen und 30÷50% höher für die Radialkomponente.

Die Vergleichsspannung in der Wicklung (Abb.6.12) liefert dagegen einen kleineren Betrag im Vergleich zum ersten Rechenmodell (Abb.4.5). Die Differenz ist allerdings sehr klein (<5%). Die betragsmäßig größte Umfangskomponente liefert für das zweite Rechenmodell nur um wenige Prozent unterschiedliche Ergebnisse (Abb.4.6,6.13).

Das Verhalten beider Materialien (homogenisierte Wicklung und Gehäuse) in der gesamten Spule läßt sich beim Vergleich der Rechnungen folgendermaßen erklären: Bei konstanter Spulenbelastung und gleichen elastischen Eigenschaften des Gehäuses nehmen die Spannungen im Gehäuse immer zu, wenn die Elastizitätsmatrix für die Wicklung abnimmt. Im extremen Fall trägt eine sehr weiche Wicklung kaum zu Steifigkeit der Spule bei, und die Belastung wird ausschließlich auf das Gehäuse übertragen. Umgekehrt übernimmt eine steife Wicklung einen größeren Teil der Gehäusespannungen.

Für die Wicklung ist bemerkenswert, daß den großen Änderungen in den Elastizitätsmatrizen nur kleine Spannungsänderungen folgen. Dafür sind größere Änderungen für das Gehäuse zu registrieren.

Definiert man den Anisotropiegrad als das Verhältnis der E-Moduli in Umfangs- und Radialrichtung, so wird das oben beschriebene Verhalten beider Materialkomponenten aus den verschiedenen Anisotropiegraden und Spulenradien resultieren. Bei Betrachtung der Tokamak-Spule als ein mehrfach zusammenhängendes Gebilde, bestehend aus 4 kreisförmigen Spulenteilen mit verschiedenen Radien, kann in erster Näherung jeder Teil als ein Teilsolenoid betrachtet werden. Eine halbanalytische Parameterstudie für die Solenoide /30/ mit nur einer Stoffkomponente, d.h. homogene, nackte Wicklung, zeigt, daß die

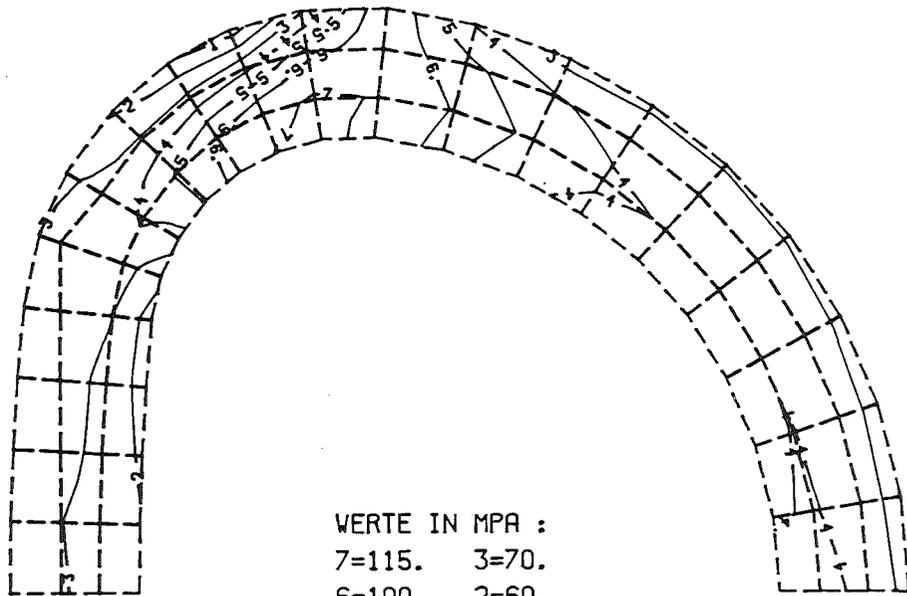
Erhöhung des Anisotropiegrades des Solenoiden eine geringfügige Verringerung (Erhöhung) der Umfangskomponente an der Aussenseite (Innenseite) zur Folge hat, vorausgesetzt, die Solenoiddicke liegt im Bereich $\gamma \leq 2$ (γ -vgl. Kap. 4.2). Für die Radialkomponente ergibt die Parameterstudie eine allgemeine Spannungsminderung mit wachsendem Anisotropiegrad. Ein Vergleich dieser Studie mit den hier vorliegenden Ergebnissen zeigt qualitative Ähnlichkeit (Abb. 4.7, 6.14). Eine genauere Analyse erfordert Parameterstudien, die auf tokamakähnliche Spulen anwendbar sind und zusätzlich zwei Stoffkomponenten behandeln können. Die Axialkomponente behält ihren kompressiven Charakter bei. Die Änderung der Axialkomponente ist wegen des kleinen Betrags zu vernachlässigen (Abb. 4.8 und 6.15).

Zur ersten Abschätzung der in der Wicklung auftretenden „wahren“ Spannungen (Kap. 5) können die mittleren Dehnungen in Umfangsrichtung der Abb. 6.16 entnommen werden. Bei bekannten E-Moduli des Einzelmaterials ist die dazugehörige Spannung sofort bekannt. Eine genauere Analyse der in der Mikrostruktur (RVE) auftretenden Spannungen kann jetzt nach der in Kap. 6. angegebenen Methode durchgeführt werden.

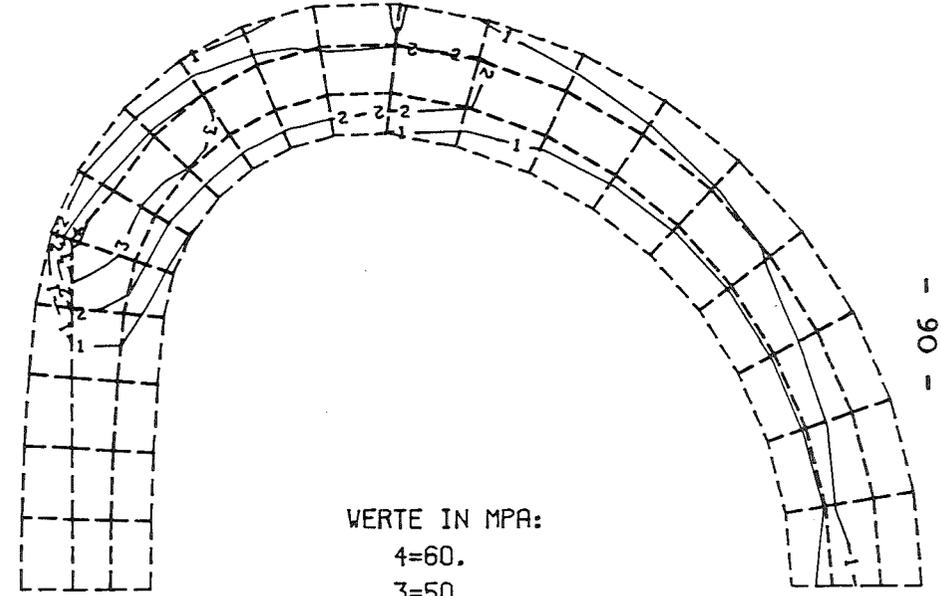
Bei bekannten mittleren Spannungen in der homogenisierten Wicklung und dem Verhältnis der maximalen bzw. minimalen Spannungen zu den mittleren Werten (die vorher in einem numerischen Versuch bestimmt wurden) können die Spannungsspitzen in einem beliebigen RVE leicht bestimmt werden. Die mittlere Spannung $\langle \sigma \rangle$ für ein RVE (s. Abb. 4.6 und 6.13) in Umfangsrichtung beträgt z.B. ~ 65 MPa, die maximal auftretende Spannung in diesem RVE ergibt sich aus der Tabelle 2 (Kap. 6.1) mit $\sigma_{\max} = 1.8 * \langle \sigma \rangle = 108$ MPa und tritt in der Leiterhülle auf. Eine Nachprüfung von σ_{\max} liefert Abb. 5.25, wo eine genaue Analyse des gleichen RVE den maximalen Wert von 100 MPa liefert. Der Unterschied von 8% ergibt die schon in Kap. 5.1.3 erwähnte zu kleine Belastung des RVE.

Ähnliche Betrachtungen können für alle Komponenten durchgeführt werden.

Somit lassen sich die Spannungen in jedem Volumenelement der gesamten, beliebig komplizierten Struktur angeben.



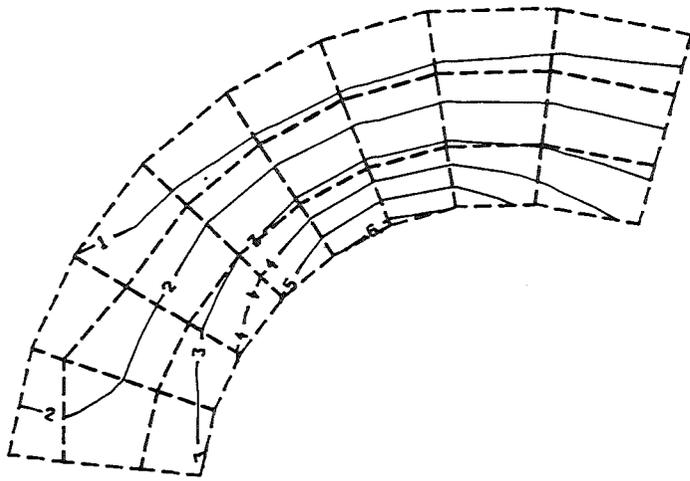
WERTE IN MPA :
 7=115. 3=70.
 6=100. 2=60.
 5= 90. 1=50.
 4= 80.



WERTE IN MPA:
 4=60.
 3=50.
 2=40.
 1=30.

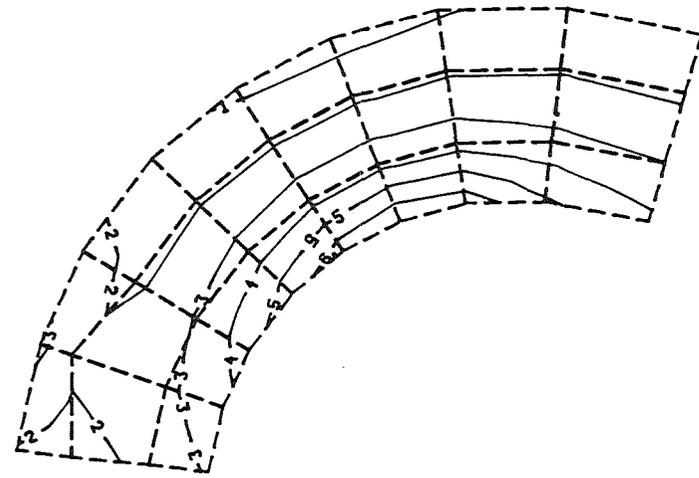
Abb.6.10: Isolinien der Umfangsspannungen in
 Lokalen Koordinaten (Gehäuseinnenwand)

Abb.6.11: Isolinien der Radialspannungen in
 Lokalen Koordinaten (Gehäuseinnenseite)



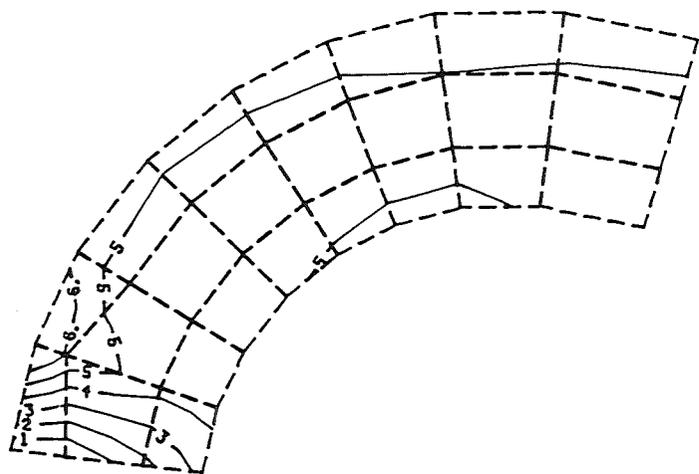
WERTE IN MPA:
 6=90. 3=60.
 5=80. 2=50.
 4=70. 1=40.

Abb.6.12: Isolinien der Vergleichsspannungen
 in lokalen Koordinaten



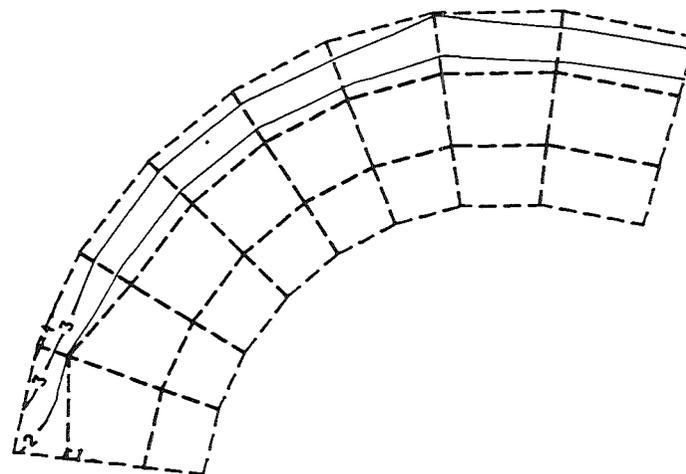
WERTE IN MPA:
 6=80. 3=50.
 5=70. 2=40.
 4=60. 1=30.

Abb.6.13: Isolinien der Umfangsspannungen
 in lokalen Koordinaten



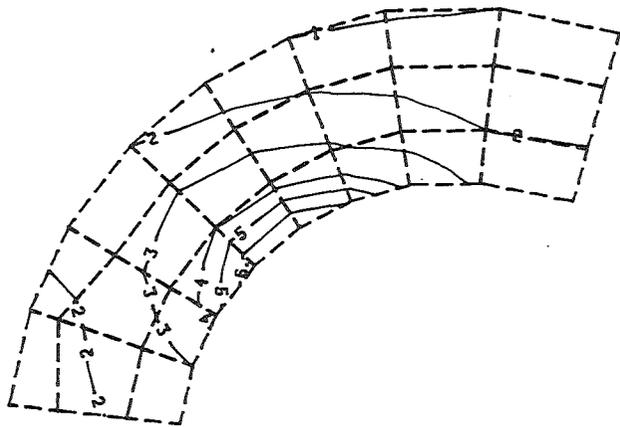
WERTE IN MPA:
 6=05. 3=-10.
 5=00. 2=-15.
 4=-0.5 1=-20.

Abb.6.14: Isolinien der Radialspannungen
 in lokalen Koordinaten



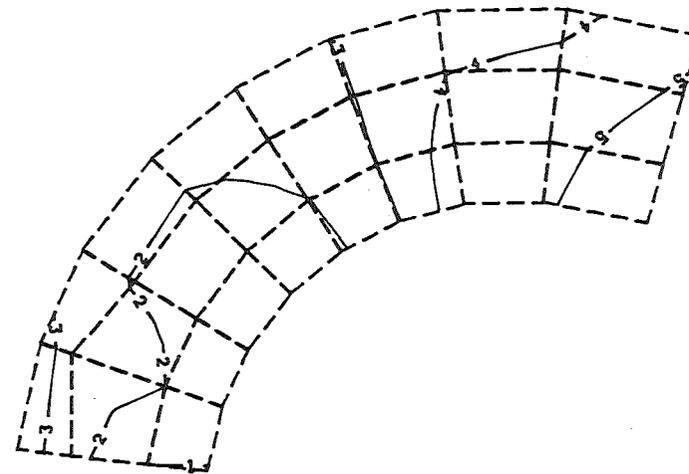
WERTE IN MPA:
 4=05. 2=-05.
 3=00. 1=-10.

Abb.6.15: Isolinien der Axialspannungen
 in lokalen Koordinaten



6=.11E-2 3=.7E-3
 5=.1E-2 2=.5E-3
 4=.9E-3 1=.3E-3

Abb.6.16: Isolinien der Umfangsdehnungen



WERTE IN MPA:
 5=5. 3=00.
 4=2. 2=-2.
 1=-5.

Abb.6.17: Isolinien der mittleren Schubspannungskomponenten
 in Radial-Umfangsrichtung (lokale Koord.)

7. ZUSAMMENFASSUNG

Zur Berechnung großer Spulen ist eine vereinfachte Stukturanalyse notwendig. Die Struktur wird homogenisiert, sodaß sie mit wenigen elastischen Werten berechenbar wird. Es sollen jedoch durch diese vereinfachte Analyse die möglichen, gefährlichen Spannungsspitzen noch erfassbar sein.

Für ein aus beliebig vielen Komponenten zusammengesetztes Komposit, das eine regelmäßige Bauweise aufweist (ohne Leerräume), läßt sich nach der Korringa-Methode ein vollständiger Elastizitätstensor aufbauen.

Zunächst wird das Komposit in einige sog. Unterteile geteilt. Für jeden dieser Bereiche läßt sich ein E-Tensor errechnen.

Im letzten Schritt werden für das ganze Komposit als Input die Zwischenergebnisse der Einzelbereiche vorgegeben. Somit können alle technischen Konstanten im 3-D Raum ermittelt werden. Es muß allerdings in Kauf genommen werden, daß gewisse numerische Fehler auftreten, die jedoch ohne Schwierigkeiten beseitigt werden können, wenn man die Anordnung der Einzelkomponenten genau analysiert.

Bei einem entsprechenden Zusammensetzen von Einzelkomponenten, die um einen bestimmten Winkel angeordnet werden, ist keine Anisotropie für das Gesamtkomposit zu erwarten, wenn die Komponenten isotrope, sogar orthotrope Eigenschaften aufweisen. Die Koppelung zwischen den Normal- und Scherspannungen entfällt dann.

Es können minimale und maximale Werte für eine experimentelle Auswertung angegeben werden.

Eine in der numerischen Rechnung nicht berücksichtigte Verseilung der einen Komponente kann abgeschätzt werden. Die Reduktion des E-Moduls, verursacht durch eine solche Verseilung, liegt im % Bereich und ist daher zu vernachlässigen.

Die Korringa-Behrens-Methode zur Ermittlung eines effektiven Elastizitätstensors kann für beliebig komplizierte Komposite, die keine geometrischen Diskontinuitäten (Löcher) sog. „Schwachstellen“ aufweisen, erfolgreich verwendet werden. Treten jedoch Löcher in

der Struktur auf, so führt sie zu enormen Fehlern, auch wenn man die Löcher durch eine sehr „weiche“ Elastizitätsmatrix zu ersetzen versucht. Hinzu kommt, daß diese Methode keine extremalen Spannungen in der Struktur zu ermitteln gestattet.

In den großen Tokamak-Spulen treten wegen der Notwendigkeit, die supraleitende Filamente zu kühlen, immer Löcher (Kühlkanäle) auf, die zur Abschwächung der Struktur führen. Zur Homogenisierung solcher Strukturen kann die hier angegebene Oberflächenverschiebungsmethode verwendet werden, die eine Erweiterung der Korringa-Methode darstellt. Diese Methode wird am Beispiel einer LCT-Spule dargestellt. Ausgehend von einem RVE, werden in einer numerischen Simulation die einzelnen elastischen Werte bestimmt. Gleichzeitig sind die innerhalb des RVE auftretenden extremalen Spannungen bekannt. Mit einem so ermittelten effektiven Elastizitätstensor wird die gesamte Struktur grob analysiert. Die dabei errechneten mittleren Spannungen in der Makrostruktur können in Verbindung mit den früher ermittelten extremalen Werten innerhalb des RVE eine angenäherte Information über die möglichen, gefährlichen Spannungsspitzen innerhalb der Mikrostruktur geben. Wird eine genauere Analyse verlangt, so ist es möglich, mit Hilfe der Interpolation der Oberflächenverschiebungen ein beliebiges RVE aus der Struktur herauszugreifen und die dort (bis in die einzelnen Filamente) auftretenden extremalen Spannungen zu detektieren. Es besteht dabei die Überprüfungsmöglichkeit der Belastungsäquivalenz in einem solchen Volumenelement.

Es wurde eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den numerischen Ergebnissen und einem experimentellen Zugversuch erzielt; der Unterschied liegt im Bereich von weniger als 7%.

Die Oberflächenverschiebungsmethode verlangt den Einsatz von Großrechnern und ein möglichst vielfältiges Finite-Element-Rechenprogramm, um die Mikro-bzw. Makrostruktur gut wiedergeben zu können.

ANHANG I

Darstellung der Elastizitätsmatrix

Es gilt für die Spannungs-Dehnungsbeziehungen in der verkürzten Schreibweise:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= C_{ij} \varepsilon_j \\ \varepsilon_j &= S_{ij} \sigma_i \end{aligned} \quad i, j, = 1, 2, \dots, 6$$

Die Matrix S_{ij} wird auch die zu C_{ij} inverse Matrix genannt

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \frac{\eta_{23,1}}{E_1} & \frac{\eta_{31,3}}{E_1} & \frac{\eta_{12,1}}{E_1} \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{\eta_{23,2}}{E_2} & \frac{\eta_{31,2}}{E_2} & \frac{\eta_{12,2}}{E_2} \\ & & \frac{1}{E_3} & \frac{\eta_{23,3}}{E_3} & \frac{\eta_{31,3}}{E_3} & \frac{\eta_{12,3}}{E_3} \\ & & & \text{symmetrisch} & \frac{1}{G_{23}} & \frac{\mu_{31,12}}{G_{23}} & \frac{\mu_{12,23}}{G_{23}} \\ & & & & & \frac{1}{G_{31}} & \frac{\mu_{12,31}}{G_{13}} \\ & & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

- E - Elastizitätsmoduli
- ν - Poisson-Zahlen
- η - Wechselwirkungskoeffizienten
- μ - Chentsov-Koeffizienten

$\eta_{12,1}$ -bedeutet z.B. eine Scherung γ in 12-Richtung, verursacht durch die Normalspannung σ in 1-Richtung, d.h.

$$\eta_{12,1} = \frac{\gamma_{12}}{\epsilon_1}$$

$\mu_{12,23}$ -bedeutet z.B. eine Scherung γ in 12-Richtung, verursacht durch die Scherspannung τ in 23-Richtung, d.h.

$$\mu_{12,23} = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}$$

Für die Chentsov- und Wechselwirkungskoeffizienten gilt auch:

$$\frac{\eta_{12,1}}{E_1} = \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}}$$

$$\frac{\mu_{12,23}}{G_{23}} = \frac{\mu_{23,12}}{G_{12}}$$

ANHANG II

Die Voigt- und Reuss-Matrix

Ein Zwischenergebnis aus der EFHEMA Routine, die Voigt- und Reuss-Matrizen für das NbTi/Cu-Komposit angibt:

Voigt-Matrix (Dehnungen konstant):

0.144E+12	0.585E+11	0.619E+11	0.0	0.0	0.413E+09
0.585E+11	0.138E+12	0.594E+11	0.0	0.0	0.624E+08
0.619E+11	0.594E+11	0.149E+12	0.0	0.0	0.597E+08
0.0	0.0	0.0	0.440E+11	0.203E+08	0.0
0.0	0.0	0.0	0.203E+08	0.467E+11	0.0
0.413E+09	0.624E+08	0.597E+08	0.0	0.0	0.422E+11

Energiedichte: 0.926E+10

Euklidische Norm der Matrix: $\|0.29964E+12\|$

Reuss-Matrix (Spannungen konstant):

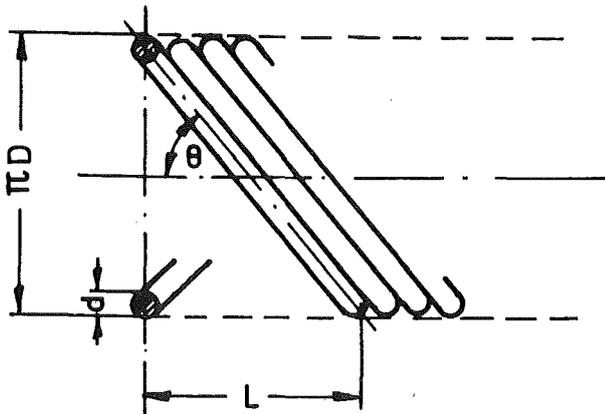
0.140E+12	0.514E+11	0.587E+11	0.0	0.0	0.524E+09
0.514E+11	0.122E+12	0.524E+11	0.0	0.0	0.840E+08
0.587E+11	0.524E+11	0.146E+12	0.0	0.0	0.731E+08
0.0	0.0	0.0	0.434E+11	0.170E+08	0.0
0.0	0.0	0.0	0.170E+08	0.463E+11	0.0
0.524E+09	0.840E+06	0.731E+08	0.0	0.0	0.417E+11

Energiedichte: 0.865E+10

Euklidische Norm der Matrix: $\|0.28139E+12\|$

ANHANG III

Abschätzung des Twisteinflusses



Mantel aufgeschnitten

N - Twist=1/L

L - charakteristische Länge

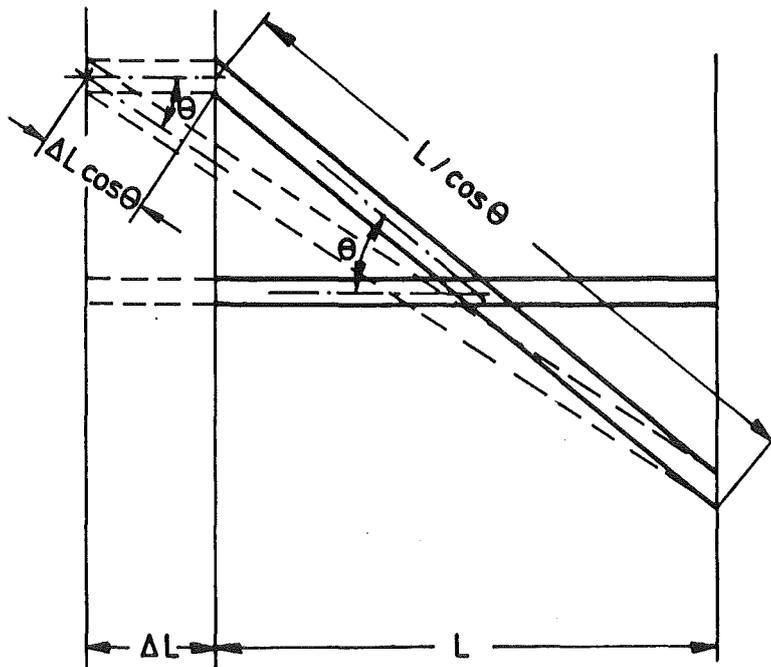
D - Durchmesser des Seils = 2R

d - Durchmesser des Strands

θ - Neigungswinkel

$$\tan\theta = \frac{\pi(D-d)}{L} = \pi(D-d)N$$

für $D \gg d$ ist $(D-d)^2 \approx D^2$



$$\Delta L_{\theta} = \Delta L \cos\theta$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{\Delta L \cos\theta}{L/\cos\theta} = \frac{\Delta L}{L} \cos^2\theta$$

$$\epsilon_{\theta} = \epsilon \cos^2\theta$$

$$\tau_{\theta} = E_{\theta} \epsilon_{\theta}$$

$$\tau_{\theta} = E_{\theta} \epsilon \cos^2\theta$$

$$\frac{\tau_{\theta}}{\tau} = \frac{E_{\theta}}{E} \cos^2\theta = \text{const} \quad \curvearrowright$$

$$\frac{E}{E_{\theta}} \approx \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+4\pi^2 R^2 N^2}$$

LITERATURHINWEISE

- /1/ Brechna H.:
Superconducting magnet systems,
Technische Physik in Einzeldarstellungen, Bd.18, 1973, Springer Verlag
- /2/ Behrens, C.P.:
Zum Spannungs-Dehnungsverhalten großer supraleitender Magnete,
Diss. Univ.Karlsruhe und Bericht KfK 3006, 1980
- /3/ Powell J.:
Aspects of safety and reliability for fusion magnet systems,
BNL-50542-Report, January 1976
- /4/ Torben, Hansen C.:
Influence of aggregate and voids on modulus of elasticity
of concrete, cement mortar, and cement paste,
Journal of the American Concrete Institute, Feb.1965, p.193
- /5/ Jaensson B., Sundström B.:
Determination of Young's modulus and Poisson ratio for WC-Co
alloys by the FEM,
Materials Science and Engineering, Vol.9, 1972, p.217
- /6/ Porushothaman P., Rao J.:
Studies on two-phase composite materials through computer
simulation,
Theory and practice in Finite-Elem. Struct. Analysis,
Proc. on FE-Analysis, Univ. of Tokyo Press, 1973, p.233
- /7/ Mazumdar D.P., Murthy P.:
Determination of material properties through computer simulation,
3. Int. conf. on struct. mech. in reactor technol.,
London, UK., 1 Sept. 1975, p.1

- /8/ Miyamoto H., Ishijama Y.:
Interpretation of mechanical behaviour of grinding wheels in terms of microstructure,
Proc. of the Int. Conf. on Mechanical Behaviour of Mat.,
Kyoto, Japan, Vol.4, Aug.1971, p.484
- /9/ Westman R., Lee K.J.:
Elastic properties of hollow-sphere-reinforced composites,
J.of Composite Materials, Vol.4, April 1970, p.242
- /10/ Whitney J.M., Riley M.B.:
Elastic properties of fiber reinforced composite materials,
AIAA-Journal, Vol.4, 1966, No.9, p.1537
- /11/ Hill R.:
Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles,
J.Mech.Phys.Solids, Vol.11, 1963, p.357
- /12/ Hashin Z., Rosen W.:
The elastic moduli of fiber-reinforced composite materials,
Journal of Appl. Mechanics, Trans. on ASME, June 1964, p.223
- /13/ Pagano N.J., Rybicki E.:
On the significance of effective modulus solutions for fibrous composites,
J. of Composite Materials, Vol.8, July 1974, p.214
- /14/ Korringa, J.:
Theory of elastic constants of heterogeneous media,
J. of Math.Phys., Vol. 14, 1973, No.4, p.509
- /15/ Lekhnitskij, S.G.:
Theory of elasticity of an anisotropic elastic body,
Holden-Day, San Francisco, 1963
- /16/ Christensen, R.M.:
Mechanics of composite materials,
John Wiley-Interscience-Publication Inc., New York 1979

/17/ Reuss A.:

Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle,

Z. für angewandte Math. Mech. 9, 1929, p.49

/18/ Voigt, W.:

Lehrbuch der Kristallphysik,

Teubner-Verlag, Berlin 1910

/19/ Hill, R.:

The elastic behaviour of an crystalline aggregate,

Proc.Phys.Soc. A65, 1952, p.349

/20/ Jones, M.R.:

Mechanics of composite materials,

McGraw-Hill, Scripta Book Company, Washington D.C.1975

/21/ Dustman, C.H.:

Tespe, a small superconducting compact torus,

Proc. of the 7th Symp. on Eng., Knoxville, USA, 1977

/22/ Krauth, H.:

The large coil task- an international contribution for the development of supercond. magnets for nuclear fusion,

Kerntechnik 20, 1978, p.274

/23/ Pister, K.S., Dong, S.B.:

Elastic bending of layered plates,

J.Eng.Mech.Div., ASCE, Okt. 1959

/24/ Whitney, J.M., Platt, M.:

Mechanics of elastic performance of textile materials,

Textile Res. Journal, Vol.20, 1950, No.1

/25/ Argyris J.H.:

ASKA-Part 1, User's reference manual,

ISD-Report No.73, Stuttgart 1971

/26/ Argyris J.H.:

Energy theorems and structural analysis,
Butterworth Publishers, London 1960

/27/ Hahn G.:

Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre,
Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1975

/28/ Dankert J.:

Numerische Methoden der Mechanik
Springer Verlag, Wien, New York, 1977

/29/ Preis H.:

Berechnung des magnetischen Feldes, der magnetischen Kräfte
und des Betriebsverhaltens großer Spulensysteme für Fusionsexp.,
Report IPP, III/24, Garching, April 1976

/30/ Gray W.H., Ballou J.K:

Electromechanical stress analysis of transversely
isotropic solenoids,
J. of Appl. Phys., Vol.48, 1977, No.7, p. 3100

/31/ Achenbach J.D.:

A theory of elasticity with microstructure for
directionally reinforced composites,
Springer Verlag, Wien, New York, 1975

/32/ Pagano N.J.:

The role of effective moduli in the elastic analysis
of composite materials,
Mech. of Composite Materials, edited by Sendekyj G.P.,
Academic Press, New York, Vol.2, 1974

/33/ Nyilas A. et al.:

Tests on the conductor for the European LCT-coil
IEEE Transactions on Magnetics, MAG-17, 1981, p.2222

/34/ Buckel W.:

Supraleitung,
Physik-Verlag, Weinheim/Bergstraße, 1972

/35/ Mises von R.:

Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen,
Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Band 8,
Juni 1928, Heft 3, S.161

/36/ Giesen B., Argyris J., Schwarz U.:

Dreidimensionale Beanspruchungsanalyse des Toroidal-feldmagneten
im Tokamak-Exp. TEXTOR,
Jahrestagung Kerntechnik (Reaktortagung 1980), Deutsches Atomforum,
Berlin 25.3-27.3. 1980, p.930

/37/ Schnack E.:

Effektivitätsuntersuchung für numerische Verfahren bei
Festigkeitsberechnungen,
VDI-Zeitschrift 119, 1977, Nr.1/2, S.43

/38/ Schnack E.:

Zur Berechnung rotationssymmetrischer Kerbprobleme mit der
Methode der finiten Elemente,
Forsch. Ing.-Wes. Bd.42, 1976, S.73

/39/ Schnack E., Wolf M.:

Application of displacement and hybrid-stress methods to plane
notch and crack problems,
Int.J.Num.Math.Engng., Vol. 12, 1978, No.6, p.963

/40/ Schnack E., Wolf M.:

Erfassung von Spannungskonzentrationen mit der Hybridspannungs-FEM,
International FEM-Congress Baden-Baden, 17./18. Nov. 1980,
edited by IKOSS GmbH., p.103

/41/ Schnack E., Drumm R.:

Zur exakten Erfassung des Randspannungsvektors bei
der Hybridspannungsmethode,
Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik,
Bd. 62, 1982, T 167-T 170