

KfK 3271
April 1982

Numerische Simulationen zum laminar-turbulenten Umschlagsprozeß der ebenen Poiseuille-Strömung

L. Kleiser
Institut für Reaktorentwicklung

Kernforschungszentrum Karlsruhe

Kernforschungszentrum Karlsruhe
Institut für Reaktorentwicklung

KfK 3271

Numerische Simulationen zum laminar-turbulenten
Umschlagsprozeß der ebenen Poiseuille-Strömung

L. Kleiser

Als Dissertation genehmigt von der Fakultät für
Maschinenbau der Universität Karlsruhe (T.H.)

Kernforschungszentrum Karlsruhe G.m.b.H., Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

ZUSAMMENFASSUNG

Der laminar-turbulente Umschlagsprozeß in der ebenen Poiseuille-Strömung (Plattenkanalströmung) wird durch numerische Integration der instationären, dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressibles Fluid simuliert. Die Rechnungen orientieren sich an Experimenten von Nishioka et al. mit kontrollierten Wellenstörungen. Mathematisches Modell ist eine in den wandparallelen Richtungen periodische, sich zeitlich entwickelnde Strömung, die in dem mit der Wellengeschwindigkeit mitbewegten Bezugssystem verfolgt wird.

Die räumliche Diskretisierung erfolgt durch ein Spektralverfahren mit Fourier- und Chebyshev-Reihenentwicklungen, die zeitliche Diskretisierung durch Differenzenverfahren zweiter Ordnung. Zur Druckberechnung wird ein neues Verfahren verwendet, das es ermöglicht, die Gleichungen für Druck und Geschwindigkeit weitgehend entkoppelt zu lösen und gleichzeitig die Kontinuitätsgleichung exakt zu erfüllen.

Die numerischen Ergebnisse für zweidimensionale Störungen endlicher Amplitude sind konsistent mit der nichtlinearen Stabilitätstheorie. Die stationäre periodische Sekundärströmung zeigt ebenso wie ihre quasistationäre Vorstufe keinerlei Anzeichen einer zweidimensionalen Instabilität, ist aber heftig instabil gegenüber dreidimensionalen Störungen. Diese sekundäre dreidimensionale Instabilität ist verantwortlich für den Umschlag.

In dieser Arbeit wird insbesondere nachgewiesen, daß die durchgeführten dreidimensionalen Simulationen den im Experiment beobachteten Umschlagsprozeß bis hin zum "spike"-Stadium erfassen. Dies wird durch einen eingehenden Vergleich der numerischen Ergebnisse mit Messungen gezeigt, die eine sehr zufriedenstellende Übereinstimmung ergeben. Die dreidimensionale Struktur des Geschwindigkeitsfeldes vor dem Zusammenbruch wird aufgezeigt. Sie ist geprägt durch ein System von "Hufeisenwirbeln", in deren stromabwärts gelegenen Schleifen durch lokale Anhäufungen langsamen Fluids die "spike"-Signale entstehen.

Numerical simulations of the laminar-turbulent transition process
in plane Poiseuille flow

SUMMARY

Laminar-turbulent transition in plane Poiseuille flow is simulated by numerical integration of the time-dependent three-dimensional Navier-Stokes equations for incompressible flow. The mathematical model of a spatially periodic, timewise developing flow in a moving frame of reference is used to match vibrating-ribbon experiments of Nishioka et al.

The numerical discretisation is based on a spectral method with Fourier and Chebyshev polynomial expansions in space and second order finite differences in time. The pressure is calculated using a new method which enforces incompressibility and boundary conditions exactly. This is achieved by deriving the correct boundary conditions for the pressure Poisson equation.

The numerical results obtained for two-dimensional finite amplitude disturbances are consistent with nonlinear stability theory. The time-periodic secondary flow is attained by the time-dependent calculation with reasonable accuracy after a long quasi-steady state. No sign of two-dimensional instability, but strong three-dimensional instability as well of the periodic secondary flow as of the quasi-steady state is found. This secondary three-dimensional instability is shown to be responsible for transition.

In particular it is shown that the three-dimensional simulations presented here reproduce the experimentally observed transition process up to the spike stage. Detailed comparisons with measurements of mean velocity, rms-values of fluctuation and instantaneous velocity distribution reveal very satisfactory agreement. Among other things, the formation of peak-valley structure, longitudinal vortices, local high-shear layers and distinct spike-type signals is shown. In addition, the three-dimensional flow field structure before breakdown is investigated. An array of horseshoe vortices similar to those inferred from boundary layer flow visualization experiments is found. Spike signals are produced by local accumulations of low-speed fluid in the downstream loops of these vortices.

<u>INHALT</u>	Seite
Zusammenfassung	I
Summary	II
Bezeichnungen	V
1. <u>Einleitung</u>	1
1.1 Stabilität, Verzweigung und Turbulenz	2
1.2 Laminar-turbulenter Umschlag bei der ebenen Poiseuille-Strömung	4
1.2.1 Problemstellung	4
1.2.2 Experimentelle Ergebnisse	5
1.2.3 Theoretische Ansätze	9
1.2.4 Zusammenfassung und offene Fragen	12
1.3 Numerische Simulation	12
1.4 Zielsetzung	14
2. <u>Mathematisches Modell</u>	17
2.1 Integrationsbereich und Randbedingungen	17
2.2 Grundgleichungen	19
3. <u>Berechnung inkompressibler Strömungen</u>	21
3.1 Navier-Stokes-Gleichungen	21
3.2 Das äquivalente \underline{v} - p -System	23
3.3 Ein Lösungsverfahren für das zeitdiskretisierte Stokes-Problem	25
4. <u>Numerisches Verfahren</u>	30
4.1 Spektralmethoden	31
4.2 Räumliche Diskretisierung	33
4.2.1 Fourierentwicklung	33
4.2.2 Entwicklung nach Chebyshev-Polynomen	34
4.2.3 Berechnung der konvektiven Terme	37
4.3 Zeitliche Diskretisierung	37
4.3.1 Differenzenformeln für die Zeitintegration	37
4.3.2 Stabilität	39
4.4 Das Rechenprogramm CHANSON	41

5.	<u>Numerische Ergebnisse</u>	42
5.1	Experiment und Simulation	42
5.1.1	Die Experimente	42
5.1.2	Modellierung und Bezeichnungen	45
5.2	Zweidimensionale Störungen endlicher Amplitude	48
5.2.1	Nachrechnung der periodischen Sekundärströmung	52
5.2.2	Instationäre Entwicklung	56
5.2.3	Der quasistationäre Zustand	58
5.2.4	Zusammenfassung und Diskussion	66
5.3	Eine dreidimensionale Simulation und Vergleich mit Experimenten	71
5.3.1	Physikalische und numerische Parameter	71
5.3.2	Übersicht über die zeitliche Entwicklung	75
5.3.3	Räumliche Verteilung der Längsschwankungen	81
5.3.4	Mittlere Strömung	85
5.3.5	Momentane Strömung in der peak-Ebene	89
5.3.6	Dreidimensionale Struktur der momentanen Strömung	96
5.3.7	Zusammenfassung	104
5.4	Weitere dreidimensionale Simulationen	106
5.4.1	Unterkritisches Schwellenwertverhalten	106
5.4.2	Einfluß der Wellenzahl α_1 und der Reynoldszahl	107
5.5	Ergänzungen und Diskussion	112
5.5.1	x_3 -Verteilung der Fourieramplituden	112
5.5.2	Entwicklung der kurzwelligen Anteile	114
5.5.3	Die sekundäre Instabilität	117
6.	<u>Schlußfolgerungen</u>	118
6.1	Zum Verfahren	118
6.2	Zum Umschlagproblem	118
6.3	Bewertung des Standes und Ausblick	121
<u>Anhang</u>		
A1.	Zum numerischen Verfahren	123
A1.1	Berechnung der konvektiven Terme	123
A1.2	Differenzenverfahren zur Zeitintegration	124
A2.	Zur Verifizierung	128
<u>Literatur</u>		130

BEZEICHNUNGEN

Mit \sim gekennzeichnete Größen sind dimensionsbehaftet.

Bezugslänge und -geschwindigkeit für dimensionslose physikalische Größen sind \tilde{h} und \tilde{U}_{\max} .

Lateinische Symbole

A	Amplitude
A_s	Schwellenwert der Amplitude
B	räumlicher Integrationsbereich
C	Transformationsgeschwindigkeit des Koordinatensystems in x_1 -Richtung, Gl. (2.9)
D'	Dissipation von Fluktuationsenergie, Gl. (5.8)
E'	Energie der Fluktuation, Gl. (5.3)
\bar{E}	Energie der mittleren Strömung, Gl. (5.10)
$K_j = N_j/2, j=1,2$	Anzahl der aufgelösten Wellenlängen in $0 \leq x_j \leq L_j$
$L_j, j=1,2$	Periodenlänge in x_j -Richtung
$N_j, j=1,2,3$	räumliche Diskretisierung in x_j
$\underline{P}(\underline{u})$	s. Gl. (2.8)
P'	Produktion von Fluktuationsenergie, Gl. (5.7)
dP/dx_1	treibender Druckgradient der Grundströmung
$Re = \tilde{U}_{\max} \tilde{h}/\tilde{\nu}$	Reynoldszahl
$Re_{cr} = 5772$	kritische Reynoldszahl der linearen Stabilitätstheorie
$Re_{\min} \approx 1000$	untere Grenze der Reynoldszahl für Turbulenz
T	Schwingungsperiode
T_k	k-tes Chebyshev-Polynom, Gl. (4.5)
$\underline{U}=(U,0,0)=(1-x_3^2,0,0)$	Grundströmung (ebene Poiseuille-Strömung)
$\tilde{U}_{\max} [m/s]$	Maximalgeschwindigkeit der Grundströmung

$c_r = \omega_r / \alpha_r$	Phasengeschwindigkeit der Welle
\underline{e}_j	Einheitsvektor in x_j -Richtung
\tilde{f} [Hz]	Frequenz des schwingenden Bandes
\tilde{h} [m]	halbe Kanaltiefe
\underline{n}	Normalenvektor
p	Druck
$q = p + \underline{u}^2/2$	Staudruck
t	Zeit
Δt	Zeitschrittweite
$\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$	Störungsgeschwindigkeit
$\underline{u}^0(\underline{x})$	Anfangsstörung
$\bar{u}_j = \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} u_j dx_1$	Mittelwert von u_j
\bar{u}_1^∞	s. Gl. (5.15)
$u_j'' = u_j - \bar{u}_j$	Fluktuation
$u_j' = \overline{(u_j'')^2}^{1/2}$	quadratisch gemittelte Fluktuation
$u_j'_{\max} = \max_{x_3} u_j'$	Maximum von u_j'
$\hat{u}_j(k_1, k_2, x_3)$	Fourierkoeffizient der Entwicklung (4.1)
$\hat{u}_{j\max}(k_1, k_2)$	maximale Fourieramplitude, Gl. (5.0)
$\hat{\hat{u}}_j(k_1, k_2, k_3)$	Koeffizient der Fourier-Chebyshev-Entwicklung (4.1), (4.10)
$\underline{v} = \underline{U} + \underline{u}$	resultierende Geschwindigkeit
$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$	Ortskoordinaten
$x_1^c := x_1 - Ct$	Stromabwärts-Koordinate im mitbewegten Bezugssystem (2.9)
$x_{1,j}, x_{2,j}, x_{3,j}$	diskretes Punktgitter, Gl. (4.4), (4.9)
(x, y, z)	Koordinatensystem des Experiments, s. Tab. 5.1

Griechische Symbole

$\alpha = \alpha_r + i \alpha_i$	s. Gl. (1.3)
$\alpha_r = 2\pi/\lambda$	Wellenzahl
$-\alpha_i$	räumliche Anfachungs- bzw. Dämpfungsrate
$\alpha_j = 2\pi/L_j, j=1,2$	Wellenzahl in x_j -Richtung
$\underline{\xi} = (\omega_1, \Omega + \omega_2, \omega_3)$	Wirbelvektor der resultierenden Strömung
λ	Wellenlänge
$\tilde{\nu} \text{ [m}^2\text{/s]}$	kinematische Viskosität
$\nu = 1/Re$	inverse Reynoldszahl
$\tilde{\rho} \text{ [kg/m}^3\text{]}$	Dichte
$\tau_N = \partial_3(U + u_1)/Re$	Newtonsche Reibungsspannung, Gl. (5.12)
$\tau_R = -\overline{u_1'' u_3''}$	Reynoldsspannung, Gl. (5.1)
$\overline{\psi}$	Stromfunktion der mittleren Sekundärströmung ($\overline{u_2}, \overline{u_3}$)
$\omega = \omega_r + i \omega_i$	Eigenwert des linearen Stabilitätsproblems
$\omega_r = 2\pi/T$	(Kreis-) Frequenz
ω_i	zeitliche Anfachungs- bzw. Dämpfungsrate
$\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \text{rot } \underline{u}$	Wirbelvektor (Rotation von \underline{u})
$\Omega = \partial_3 U$	Rotation der Grundströmung

Abkürzungen

TS	Tollmien-Schlichting
PS	periodische Sekundärströmung
2D	zweidimensional
3D	dreidimensional
HF	hochfrequent
rms	root mean square

Mathematische Zeichen

$:=$	definierende Gleichheit
\equiv	identische Gleichheit
\approx	ungefähr gleich
\sim	verhält sich wie
\propto	proportional
$i = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit
z^*	die zu z konjugiert-komplexe Zahl
$\{z\}_r$	Realteil von z
$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$	partielle Ableitung nach x_j
∂_t	partielle Ableitung nach t
$\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$	Nabla-Operator
$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$	Laplace-Operator
$\partial_n = \frac{\partial}{\partial n}$	Normalenableitung
∂B	Rand von B
O	von der Ordnung (Landau-Symbol)
$\{a_1, \dots, a_n\}$	Menge mit den Elementen a_1, \dots, a_n
$a \in A$	a ist Element der Menge A

1. EINLEITUNG

Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen werden in zwei grundlegend verschiedenen Erscheinungsformen beobachtet: als laminare Strömungen, bei denen die Fluidteilchen regelmäßig auf glatten Bahnen aneinander vorbeigleiten, und als turbulente Strömungen mit scheinbar regellosen, stets dreidimensionalen, instationären und wirbelbehafteten Schwankungsbewegungen. Die meisten in Natur und Technik auftretenden Strömungen sind turbulent. Viele wichtige Eigenschaften, wie z.B. Strömungswiderstand oder Wärme- und Stofftransport, ändern sich drastisch beim Übergang von der laminaren in die turbulente Strömungsform [1]. Es besteht daher ein großes praktisches Interesse, die Bedingungen zu kennen, unter denen dieser Übergang stattfindet. Darüber hinaus erhofft man sich aus der Kenntnis der Entstehung von Turbulenz ein besseres Verständnis ihrer Gesetzmäßigkeiten. Die beim Übergang entstehenden Strömungsstrukturen bleiben häufig bis weit in den turbulenten Bereich hinein erhalten. Der Übergang laminar-turbulent wird aus diesen Gründen seit über hundert Jahren experimentell und theoretisch untersucht. Es wurden gerade in den letzten zwei Jahrzehnten bedeutende Fortschritte erzielt. Einige dieser Ergebnisse haben zu neuen Vorstellungen über die Natur der Turbulenz geführt [2, 3]. Der kürzlich erschienene Sammelband [4] gibt einen Einblick in die Entwicklung auf verschiedenen Teilgebieten.

Bei den in der Praxis interessierenden Strömungen wird der laminar-turbulente Übergang von vielen Faktoren gleichzeitig beeinflusst, wie Art und Größe von Untergrundstörungen, Geometrie und Oberflächenbeschaffenheit von begrenzenden Wänden und vieles mehr. Es wurde eine große Vielfalt von möglichen Abläufen gefunden. Der Übergang erfolgt in der Regel über eine Folge von zunehmend komplizierten, aber noch laminaren Zwischenzuständen. Um die grundlegenden Einzelvorgänge zu klären, beschränkt man sich zunächst auf möglichst einfache, modellhafte Strömungen. Ein solcher Prototyp für eine Klasse von wandbegrenzten Scherströmungen ist die Plattenkanalströmung oder ebene Poiseuille-Strömung [1].

1.1 Stabilität, Verzweigung und Turbulenz

"It is impossible to understand the hydrodynamics of flows which arise as the Reynolds number is increased without understanding instability and bifurcation of flows" D.D. Joseph

Theoretische Untersuchungen des laminar-turbulenten Übergangs gehen von den Navier-Stokes-Gleichungen [1] aus. Turbulenz wird aufgefaßt als eine Folge von Instabilitäten ihrer Lösungen für große Reynoldszahlen $Re = \tilde{U}\tilde{L}/\tilde{\nu}$ (\tilde{L} , \tilde{U} sind charakteristische Längen- bzw. Geschwindigkeitsmaße). Diese Instabilitäten werden von der Stabilitäts- und Verzweigungstheorie [5, 6] mit mathematischen Methoden untersucht. Für kleine Reynoldszahlen ist die laminare Grundströmung die einzige stabile Lösung. Die Stabilität gegenüber kleinen Störungen wird von der linearen Stabilitätstheorie erfaßt. Die Stabilitätsgrenze der Grundströmung für infinitesimale Störungen bezeichnen wir als kritische Reynoldszahl Re_{cr} .

Für die bei Re_{cr} entstehende neue Strömungsform (Verzweigungslösung) sind nach der Verzweigungstheorie zwei Fälle zu unterscheiden [5]: Im ersten Fall der überkritischen (normalen) Verzweigung wächst die Amplitude $A(Re)$ der Störung (Abweichung von der Grundströmung) mit $Re > Re_{cr}$ an (Abb. 1.1 a). Überkritisch verzweigende Lösungen sind

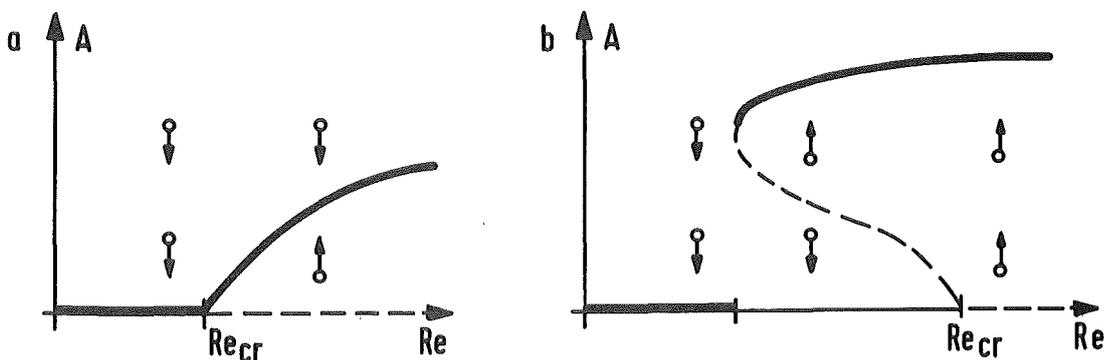


Abb. 1.1: Instabilität der Grundströmung bei Re_{cr} :
 a) überkritische, b) unterkritische Verzweigung
 ————— stabile Lösung
 - - - - - instabile Lösung (physikalisch nicht realisierbar)
 ○ → Zeitverhalten einer Störung mit Anfangsamplitude A

stabil [5]. Bei Erhöhung von Re über Re_{cr} hinaus findet ein stetiger Übergang in die neue Lösung statt, die einem experimentell beobachteten Zwischenzustand entspricht. Diese kann nun als neue Grundströmung aufgefaßt werden, die bei einer höheren Reynoldszahl wieder instabil und von einer neuen Strömungsform abgelöst wird. Am Ende einer solchen Serie von überkritischen Verzweigungen ist der turbulente Zustand erreicht (nach neueren Vorstellungen ist dies stets schon nach wenigen Verzweigungen der Fall [2, 5]). Klassische Beispiele überkritischer Verzweigung sind die Couette-Strömung im Ringspalt zwischen zwei konzentrischen Zylindern, von denen der innere rotiert, und die Bénard-Konvektion in einer von unten beheizten Fluidschicht (s. Übersichtsartikel in [4]); zwischen beiden Strömungen besteht eine Analogie [7].

Im zweiten Fall der unterkritischen (inversen) Verzweigung (Abb. 1.1 b) ist die bei Re_{cr} abzweigende Lösung instabil [5] und daher physikalisch nicht realisiert. Dieser Fall liegt bei der ebenen Poiseuille-Strömung vor. Für einen gewissen unterkritischen Bereich $Re < Re_{cr}$ ist die Grundströmung bedingt stabil: Störungen mit einer Anfangsamplitude A unterhalb eines Schwellenwertes $A_s(Re)$ klingen ab, Störungen mit $A > A_s$ wachsen an. Das Verhalten für $A > A_s$ ist theoretisch noch nicht ausreichend geklärt. Im Experiment erfolgt über einen heftigen instationären Umschlagsprozeß der Übergang in die Turbulenz, ohne daß stabile Zwischenzustände beobachtet werden. Turbulenz tritt bei ausreichend großen Störungen bis herunter zu einer unteren Grenze Re_{min} auf, die weit unterhalb von Re_{cr} liegen kann: Für die ebene Poiseuille-Strömung ist $Re_{cr} \approx 6000$ und $Re_{min} \approx 1000$. Für $Re < Re_{min}$ bleibt die Grundströmung auch bei beliebig großen Anfangsstörungen laminar.

Die spezifischen Schwierigkeiten einer Klärung des laminar-turbulenten Übergangs im Fall der unterkritischen Verzweigung werden erkennbar. Experimente werden durch eine große Empfindlichkeit gegenüber Störungen erschwert. Für die ebene Poiseuilleströmung gelang es erstmals im Jahre 1975 Nishioka et al. [8], die laminare Strömung bis Re_{cr} aufrechtzuerhalten und detaillierte Messungen zum Umschlagsprozeß zu machen. Theoretische Untersuchungen der unterkritischen Instabilität, insbesondere im Bereich von Re_{min} , führen auf nichtlineare Gleichungen für Störungen großer

Amplituden, die praktisch nur noch mit numerischen Methoden behandelt werden können. Auch hier wurden in den vergangenen Jahren wichtige Fortschritte erzielt.

1.2 Laminar-turbulenter Umschlag bei der ebenen Poiseuille-Strömung

1.2.1 Problemstellung

Zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten bildet sich unter einem konstanten Druckgradienten $d\tilde{P}/d\tilde{x}_1$ die ebene Poiseuille-Strömung mit einem parabelförmigen Geschwindigkeitsprofil aus [17]. Wir wählen ein Koordinatensystem gemäß Abb. 1.2 und beschreiben das Problem in dimensionslosen Größen mit dem halben Plattenabstand \tilde{h} und der Geschwindigkeit \tilde{U}_{\max} in Kanalmitte als Bezugsgrößen. Die stationäre Grundströmung ist dann durch

$$\underline{U}(\underline{x}) = (U(x_3), 0, 0), \quad U(x_3) = 1 - x_3^2 \quad (1.1)$$

und die Reynoldszahl durch

$$Re = \frac{\tilde{U}_{\max} \tilde{h}}{\tilde{\nu}}, \quad \tilde{U}_{\max} = - \frac{d\tilde{P}}{d\tilde{x}_1} \frac{\tilde{h}^2}{2\tilde{\nu}\rho} \quad (1.2)$$

gegeben. Wir bezeichnen x_1 als Strömungsrichtung, x_2 als Spannweitenrichtung und x_3 als Normalenrichtung. Wir untersuchen den laminar-turbulenten

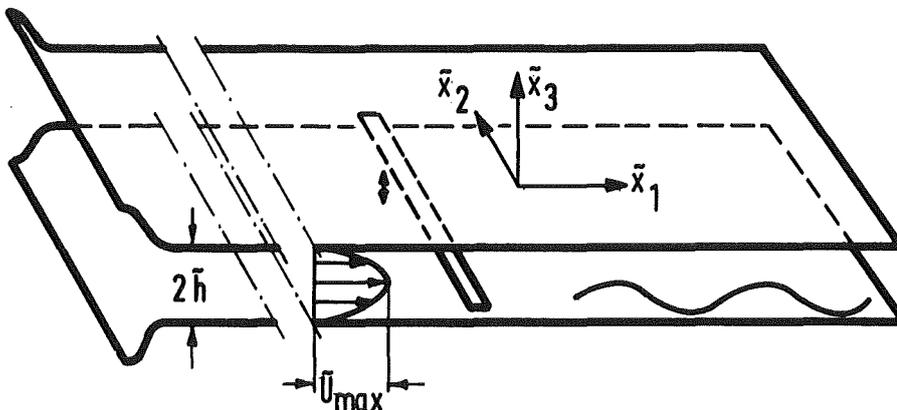


Abb. 1.2: Experimentelle Anordnung (schematisch) zur Untersuchung des laminar-turbulenten Umschlages. Ein schwingendes Band erzeugt Wellenstörungen mit kontrollierter Frequenz und Amplitude.

Umschlagsprozeß in dieser Strömung, indem wir die räumliche und zeitliche Entwicklung von Störungen $u(x,t)$, $p(x,t)$ der Grundströmung (1.1) bei konstant gehaltenem mittleren Druckgradienten $dP/dx_1 = -2/Re$ verfolgen.

1.2.2 Experimentelle Ergebnisse

Experimente zum Umschlag bei der ebenen Poiseuilleströmung werden überwiegend in Rechteckkanälen mit großem Seitenverhältnis durchgeführt [8 - 18] (einige Messungen in Ringspaltkanälen sind in [5] S. 120 referiert).

Die Grundströmung stimmt hier mit Ausnahme einer Umgebung der Seitenwände der Größenordnung \tilde{h} mit (1.1) überein und hat eine nur minimal höhere kritische Reynoldszahl [19]; die voll turbulente mittlere Strömung ist ebenfalls bis auf einen Randbereich zweidimensional [20]. Auch die Einlaufströmung, die bis zu einer Entfernung von etwa $0.11 Re \cdot \tilde{h}$ vom Eintrittsquerschnitt vorherrscht [1], ist stabiler als die ausgebildete Grundströmung (1.1) [18, 21].

Die Angaben verschiedener Experimentatoren [11 - 14] über die untere Grenze Re_{min} für das Auftreten von Turbulenz schwanken. Als Ursachen dafür kommen neben möglichen Einlauf- und Seitenwandeinflüssen vor allem unterschiedliche Störungsgrade (Untergrundturbulenz) am Einlauf in Betracht. Zum anderen führen verschiedene Kriterien zur Beurteilung von Laminarität oder Turbulenz zu unterschiedlichen Werten [13]. Die Abweichung des Widerstandskoeffizienten $c_f(Re)$ vom laminaren Gesetz $c_f = 4/Re$ beginnt, etwa gleichzeitig mit dem ersten Auftreten von einzelnen Turbulenzflecken, bei $Re \approx 1000$ [13], bei sehr starken Störungen am Einlauf schon etwa bei $Re = 800$ [11, 14]. Es folgt ein Bereich intermittierender Turbulenz bis $Re \approx 1350$ [13]. Ab $Re \approx 2100$ folgt $c_f(Re)$ dem turbulenten Gesetz, und die mittlere Geschwindigkeit erfüllt das logarithmische Wandgesetz mit universellen Konstanten [13]. Der gleiche Wert wurde in [12] durch Extrapolation auf verschwindende räumliche Abklingraten von Turbulenzgrößen (reverse transition) gefunden.

Bei stufenweiser Reduzierung des Turbulenzgrades Tu ¹⁾ am Einlauf wächst die Laminaritätsgrenze monoton an. Bei $Tu = 0.3\%$ konnten Karnitz et al. [16] die laminare Strömung bis $Re = 5000$ aufrechterhalten. Später erreichten Feliss et al. [17] im gleichen Kanal bei $Tu = 0.08\%$ Laminarität bis $Re = 5600$ und damit fast den theoretischen Wert $Re_{cr} = 5772$.

1) $Tu = u_1' (x_3 = 0)$

In derselben Arbeit wurden Einlaufängen sowie Einflüsse von Seitenwandgrenzschichten und Meßsonden untersucht.

Der Durchbruch im experimentellen Bereich gelang Nishioka et al. [8], die bei $Tu \leq 0.05$ % die laminare Strömung bis $Re = 8000$ aufrechterhalten und erstmals die Ergebnisse der linearen Stabilitätstheorie für die Poiseuilleströmung bestätigen konnten. Darüber hinaus konnten sie das theoretisch vorausgesagte unterkritische Schwellenwertverhalten (Abb. 1.1 b) beobachten und eingehende Messungen zum Umschlagsprozeß machen. In neuen Experimenten wurde zusätzlich der Einfluß von dreidimensionalen [9] und von hochfrequenten Störungen [10] untersucht. Bei den Experimenten wurden mittels eines kontinuierlich schwingenden Bandes in der ausgebildeten Grundströmung Wellenstörungen vorgegebener Frequenz und Amplitude angeregt (Abb. 1.2). Experimente mit "natürlichen" Störungen führen zu weniger regelmäßigen, aber qualitativ vergleichbaren Abläufen.

Bei hinreichend kleinen Amplituden (etwa $u_1' < 1$ %) haben die Störungen in Übereinstimmung mit der linearen Stabilitätstheorie [22, 23] die Form von Tollmien-Schlichting-Wellen

$$\underline{u}^{TS}(\underline{x}, t) = \{(\hat{u}_1^{TS}(x_3), 0, \hat{u}_3^{TS}(x_3)) \exp[-i\alpha x_1 - i\omega t]\}_r \quad (1.3)$$

$$\alpha = \alpha(Re, \omega) = \alpha_r + i\alpha_i.$$

(1.3) stellt eine ebene Welle dar, die sich stromabwärts mit der Geschwindigkeit $c_r^{TS} = \omega/\alpha_r$ ausbreitet und mit $\exp(-\alpha_i x_1)$ anwächst oder abklingt. Überschreitet die Amplitude einen von Re und ω abhängigen Schwellenwert, so setzt der Umschlagsprozeß ein, der stets eine sich rasch entwickelnde Folge von regelmäßigen instationären Zwischenzuständen durchläuft. Er verläuft weitgehend analog zur Plattengrenzschicht, wo seit längerem ein wesentlich umfangreicheres Beobachtungsmaterial vorliegt [24 - 28]. Wir beziehen diese Ergebnisse deshalb in die folgende Darstellung mit ein.

Zur Erläuterung der wesentlichen Stadien des Umschlagsprozesses orientieren wir uns an einem typischen Verlauf der Geschwindigkeitsfluktuation über x_1 , Abb. 1.3. Nach Überschreiten des Schwellenwertes setzt eine nicht-lineare, dreidimensionale Entwicklung ein. In der ersten Phase

($x_1 \leq 5 \lambda^{TS}$) entsteht ein System von schwachen, gegensinnig rotierenden Längswirbeln (Achse in x_1 -Richtung) in Wandnähe. In der anfangs zweidimensionalen Welle bildet sich eine immer ausgeprägtere periodische Variation in x_2 heraus (peak-valley-Struktur, Abb. 1.4). Die Wellenstörung wächst an peak-Positionen ständig stärker an, während sie an valley-Positionen zunächst etwas abnimmt. Auch die zeitlich gemittelte Strömung wird dreidimensional. Harmonische $\sim \exp[-ik(\alpha_r x_1 - \omega t)]$, $k > 1$ erscheinen. Sie sind zunächst klein, wachsen aber später mit einer Anfachungsrate proportional k an. In der anschließenden Phase ($x_1 \leq 6 \lambda^{TS}$) steigt die Wachstumsrate von $u_1'_{max}$ bei peak und valley rapide an. Das momentane Geschwindigkeitsprofil $(U + u_1)(x_3)$ beim peak weist während eines Teils jeder Schwingungsperiode Bereiche mit ausgesprochenem Geschwindigkeitsdefizit ($u_1 < 0$) auf, verbunden mit einer starken Scherschicht bei $x_3 \approx \pm 0.6$ und Wendepunkten (Abb. 1.5). Das anfangs sinusförmige Geschwindigkeitssignal $u_1(t)$ (x fest) ist stark nichtlinear verzerrt. Dieser Strömungszustand

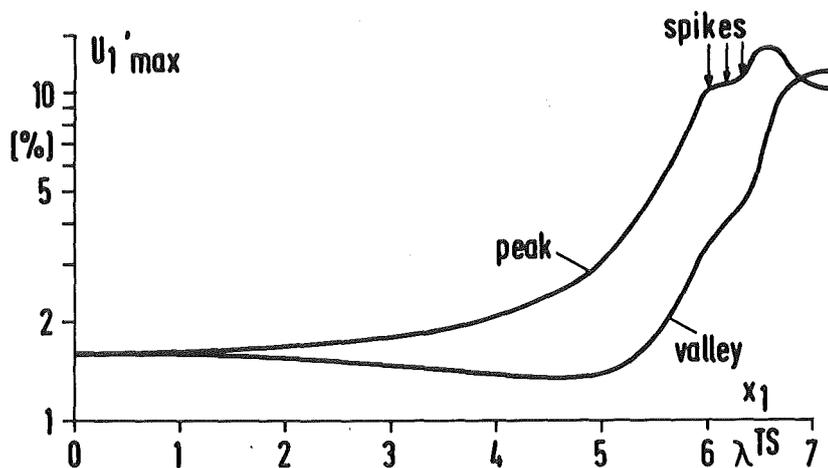


Abb. 1.3: Umschlagsprozeß: Entwicklung der maximalen Geschwindigkeitsfluktuationen $u_1'_{max} = \max(x_3) u_1'$ an verschiedenen x_2 -Positionen (peak, valley). (Schematisiert, Zahlenwerte für $Re \approx 5000$, $\alpha \approx 1$. Ursprung von x_1 willkürlich.)

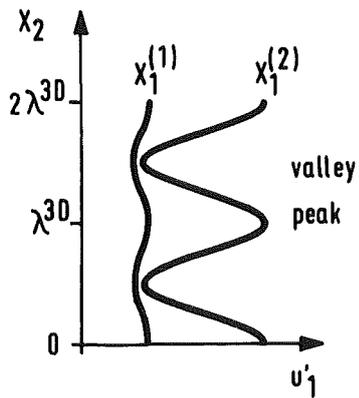


Abb. 1.4: Entwicklung der in x_2 periodischen peak-valley-Struktur: Schematischer Verlauf von $u_1'(x_2)$ in einer Ebene $x_3 = \text{const}$ bei $x_1^{(1)} \approx 2 \lambda^{TS}$, $x_1^{(2)} \approx 5,5 \lambda^{TS}$.

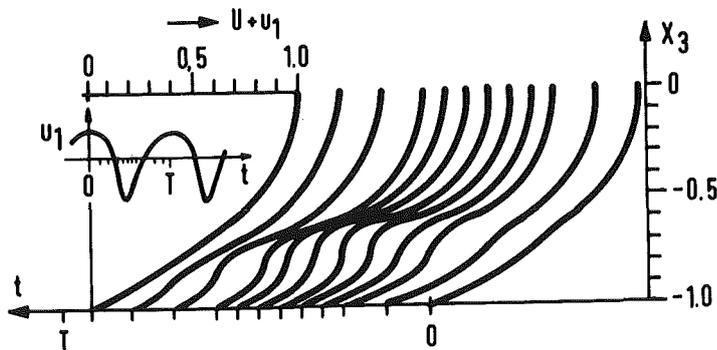


Abb. 1.5: Momentane Geschwindigkeitsprofile $(U + u_1)(x_3)$ beim peak zu verschiedenen Zeiten einer Schwingungsperiode, kurz vor dem Zusammenbruch der Welle ($x_1 \approx 6 \lambda^{TS}$) [10].

ist heftig instabil gegen hochfrequente Störungen (Frequenz $\approx 10 \omega$, Anfachungsrate bis $100 \cdot \alpha_i \approx 1$). In der nächsten Phase ($x_1 \approx 6 \lambda^{TS}$) entstehen so im Bereich der Scherschichten neue, kurzweilige Wirbelstörungen (hairpin eddies), die selbst instabil sind und rasch in noch kleinere

Wirbel zerfallen. Im Meßsignal $u_1(t)$ erscheinen in jeder Periode zunächst ein, später mehrere intensive Pulse niedriger Geschwindigkeit (spikes). Die Wellenamplitude erreicht ihr Maximum und die Welle, die das Geschehen bisher dominiert hat, bricht zusammen (breakdown). Der lokal entstandene Turbulenzfleck wandert stromabwärts, breitet sich aktiv nach allen Seiten aus und verschmilzt schließlich mit an anderen Orten entstandenen turbulenten Bereichen zu einer vollturbulenten Strömung.

1.2.3 Theoretische Ansätze

Die Experimente mit kontrollierten Störungen haben die regelmäßige Struktur des Umschlagsprozesses aufgezeigt und eine Fülle von detaillierten Informationen zu einzelnen Strömungsphänomenen geliefert. Die Interpretation und das theoretische Verständnis dieser Vorgänge ist dagegen noch unvollkommen und teilweise kontrovers. Zusammenfassende Darstellungen von experimentellen Sachverhalten und theoretischen Vorstellungen wurden von Tani [29 - 31], Morkovin [32], Herbert und Morkovin [33] und Craik [34] gegeben, weitere Information findet sich in den Tagungsberichten [35, 36].¹⁾

Das Verhalten rein zweidimensionaler Störungen konnte inzwischen weitgehend geklärt werden. Nach der linearen Theorie [22, 23] für infinitesimale Störungen existiert für $Re > Re_{cr} = 5772$ [37] ein schmaler Bereich von instabilen Wellenzahlen α_r ($0.8 \lesssim \alpha_r \lesssim 1.1$ für $Re \lesssim 10^4$). Er wird in der (Re, α_r) -Ebene von der neutralen Kurve ($\alpha_i = 0$) umschlossen. Zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenlösungen (1.3) des linearen Problems (Orr-Sommerfeld-Gleichung) stehen zahlreiche numerische Verfahren zur Verfügung, z.B. [37 - 39]. Zweidimensionale Störungen endlicher Amplitude A^{2D} werden von der nichtlinearen Stabilitätstheorie [40 - 42] und der Verzweigungstheorie [5] untersucht. Die Fortsetzung der neutralen Kurve in den (Re, α, A^{2D}) -Raum ergibt eine geschlossene neutrale Fläche, die von Zahn et al. [43] und Herbert [44, 45] numerisch berechnet wurde. Der Bereich der Instabilität der Grundströmung ist gegenüber der linearen Theorie auf größere Wellenzahlen und auf Reynoldszahlen bis herunter zu $Re = 2935$ [44] erweitert. Die zu einem Punkt (Re, α, A^{2D}) dieser Fläche gehörige Sekundärströmung besteht, wie (1.3), aus stromabwärts wandernden Rollen mit Achse in x_2 -Richtung und ist strikt periodisch und stationär

¹⁾ Nachtrag: Zum neuesten Stand s. den Übersichtsbeitrag [112]

in einem mitbewegten Bezugssystem. Die Projektion der neutralen Fläche auf die $Re-A^{2D}$ -Ebene liefert das Verzweigungsdiagramm für zweidimensionale Störungen, Abb. 1.1 b, wo auch das Verhalten instationärer Störungen angedeutet ist. Zeitabhängige numerische Berechnungen [46, 47] haben das theoretisch vorausgesagte unterkritische Schwellenwertverhalten bestätigt.

In allen bisherigen Experimenten führte eine nicht abklingende zweidimensionale Wellenstörung jedoch nicht zur vorausgesagten periodischen Sekundärströmung, sondern sie bildete stets rasch eine ausgeprägte periodische Variation in x_2 aus und leitete so den oben geschilderten Umschlagsprozeß ein. Die Vorgänge vom Einsetzen der Dreidimensionalität bis zum Puls-Stadium stehen derzeit im Mittelpunkt theoretischer Untersuchungen. Blackwelder [48] und Herbert und Morkovin [33] haben die Hypothese ausgesprochen, daß für den Umschlagsprozeß zwei höhere Instabilitäten eine entscheidende Rolle spielen: eine sekundäre Instabilität der instationären zweidimensionalen Strömung $\underline{u} + A^{2D} \underline{u}^{2D}$ mit ausreichend großer Amplitude A^{2D} gegenüber kleinen dreidimensionalen Störungen \underline{u}^{3D} und eine weitere tertiäre Instabilität der daraus entstandenen lokalen Scherschichten gegenüber hochfrequenten Störungen. Erste Ergebnisse einer linearen Stabilitätsanalyse zur sekundären Instabilität wurden kürzlich von Orszag und Patera [49] mitgeteilt. Zu einzelnen Phänomenen der dreidimensionalen Entwicklung wurden verschiedene vereinfachte Modelle entwickelt. Zumeist wurde dabei mittels Störungsmethoden die schwach nichtlineare Wechselwirkung von ebener Wellenstörung \underline{u}^{2D} mit dreidimensionalen Störungen untersucht. Wir nennen einige dieser Modelle und verweisen für eine eingehendere Diskussion auf die Originalarbeiten und die genannten Übersichtsartikel [29 - 34, 112].

In dem Modell von Benney und Lin [50, 51] werden einer zweidimensionalen Welle (1.3) zwei schräglauende dreidimensionale Wellen

$$\underline{u}_+^{3D}(\underline{x}, t) = \{ \hat{u}^{3D}(x_3) \exp[-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \omega^{3D} t)] \}_r \quad (1.4)$$

überlagert. Die nichtlineare Wechselwirkung erzeugt ein System von stationären Längswirbeln. Einige Mängel des ursprünglichen Modells konnten später durch numerische Rechnungen behoben werden [52, 53]. Itoh [54] hat erweiterte nichtlineare Wechselwirkungen dieser Wellenstörungen

untersucht. Er fand unter anderem, daß der unterkritische Schwellenwert der Amplitude A^{2D} für das Einsetzen der sekundären, dreidimensionalen Instabilität deutlich unterhalb des Schwellenwertes der zweidimensionalen Theorie liegt. Herbert und Morkovin [33] haben die Anfachung von Längswirbelstörungen in der zweidimensionalen Strömung $\underline{u} + A^{2D} \underline{u}^{2D}$ betrachtet. Erste Rechnungen ergaben ebenfalls recht niedrige Schwellenwerte für A^{2D} . Craik [34] hat darauf hingewiesen, daß sich manche der beobachteten Phänomene bereits durch eine Überlagerung linearer Eigenlösungen (1.3), (1.4) mit geeigneten Amplituden angenähert beschreiben lassen; die dynamische Entwicklung wird so allerdings nicht erklärt. Die Wirkung eines stationären Längswirbelsystems auf eine Grenzschichtströmung hat Stuart [55] an einem linearisierten reibungsfreien mathematischen Modell untersucht. Er konnte die Entstehung von Wendepunkt- und Scherschichtprofilen an peak-Positionen (wo die Normalgeschwindigkeit maximal positiv ist) zeigen. Wesentlicher physikalischer Mechanismus ist dabei die dreidimensionale Verformung von Wirbellinien durch Konvektion und Streckung. Hinsichtlich der tertiären Instabilität wurde von Nishioka et al. [10] eine zweidimensionale lineare, reibungsfreie Stabilitätsanalyse eines gemessenen lokalen, momentanen Scherschichtprofils vorgenommen. Die berechneten Wachstumsraten und räumlichen Verteilungen stehen in zufriedenstellender Übereinstimmung mit ihren Messungen von künstlich angeregten hochfrequenten Störungen. Eine ähnliche Stabilitätsuntersuchung machten Greenspan und Benney [56] für die Plattengrenzschicht. Die Scherschicht-Instabilität liefert eine plausible Erklärung für das explosive Anwachsen vor dem Zusammenbruch der Welle und das Auftreten kurzweiliger wirbelartiger Störungen.

Die genannten Modelle tragen wesentlich zu einem qualitativen Verständnis einzelner Erscheinungen des Umschlagsprozesses bei. Insbesondere in den späteren Phasen stellen sie jedoch eine zu starke Vereinfachung der tatsächlichen Vorgänge dar. Die zur Untersuchung von sekundären Instabilitäten entwickelten schwach nichtlinearen Theorien beruhen auf Reihenentwicklungen nach Potenzen der Störungsamplituden und sind verschiedenen Einschränkungen unterworfen. Der Konvergenzbereich bleibt häufig auf relativ kleine Amplituden beschränkt, und die meist verwendeten Approximationen niedriger Ordnung sind recht ungenau [57]. Ein Teil dieser methodischen Einschränkungen konnte neuerdings überwunden werden [57].

1.2.4 Zusammenfassung und offene Fragen

Wir fassen den gegenwärtigen Kenntnisstand zum laminar-turbulenten Umschlag in der ebenen Poiseuille-Strömung zusammen. Turbulenz tritt in Experimenten ab $Re \approx 1000$ intermittierend, ab $Re \approx 2100$ kontinuierlich auf. Infinitesimale Störungen werden für $Re < Re_{cr} = 5772$ stets gedämpft. Nichtlineare Stabilitätstheorie und Verzweigungstheorie haben die unterkritische Verzweigung nachgewiesen. Damit konnte das Auftreten anwachsender zweidimensionaler Störungen ausreichend großer Amplitude für $Re \geq 2900$ erklärt werden. Statt zur vorausgesagten periodischen Sekundärströmung führen diese Störungen im Experiment jedoch stets zum Umschlag. Neuere Experimente mit kontrollierten Wellenstörungen haben einige Einsicht in die regelmäßige Struktur des Umschlagsprozesses gebracht. Der genaue Ablauf und die Ursachen sind bisher theoretisch weitgehend ungeklärt. Wesentliche offene Fragen für den Bereich bis zum Zusammenbruch der Wellenstörungen, der in dieser Arbeit betrachtet wird, betreffen: das Einsetzen der ausgeprägten Dreidimensionalität (sekundäre Instabilität), die Größe des Schwellenwertes der Wellenamplitude und seine Abhängigkeit von Reynoldszahl und Frequenz, die bevorzugte Wellenlänge in Spannweitenrichtung, die nichtlineare Wechselwirkung der dreidimensionalen Störungen mit der ebenen Welle, deren plötzliches Anwachsen, die Ausbildung von Scherschichten, das Auftreten hochfrequenter Störungen (tertiäre Instabilität?). Die vorliegende Arbeit möchte mittels numerischer Simulation zu einer Klärung der Phänomene und der wesentlichen Mechanismen in diesem Bereich beitragen.

1.3 Numerische Simulation

Die direkte numerische Simulation, d.h. die numerische Integration der dreidimensionalen instationären Navier-Stokes-Gleichungen, wird schon seit einiger Zeit erfolgreich zur Berechnung turbulenter Strömungen eingesetzt [58]. In jüngster Zeit findet sie auch zunehmend bei der Untersuchung des laminar-turbulenten Umschlags bei Plattengrenzschicht [59 - 62] und ebener Poiseuilleströmung [49, 63 - 66] Verwendung. Sie bietet im Prinzip die Möglichkeit, im Rahmen des mathematischen und numerischen Modells den Umschlagsprozeß für jede gewünschte Parameterkombination und unter genau kontrollierten Bedingungen im Detail zu

erfassen. Da die vollständige räumliche Information über das Strömungsfeld verfügbar ist, können auch nicht oder nur schwer meßbare Größen untersucht werden. Andererseits besteht wie beim physikalischen Experiment die Schwierigkeit, die erhaltenen Daten richtig zu interpretieren und die wesentlichen physikalischen Mechanismen zu erkennen. Wegen des großen Aufwands können nur wenige Parameterkombinationen untersucht werden.

Mit den Rechnungen von Wray und Hussaini [61] ist es erstmals gelungen, den Umschlagsprozeß in der Plattengrenzschicht bis zum Zusammenbruch (2-Puls-Stadium) in ausgezeichneter Übereinstimmung mit Messungen [25] zu simulieren. Für die ebene Poiseuille-Strömung haben Orszag und Mitarbeiter [49, 63 - 66] umfangreiche Simulationen durchgeführt. Ihre Ergebnisse zeigen die zentrale Bedeutung der sekundären Instabilität der quasistationären ebenen Wellenbewegung gegenüber dreidimensionalen Störungen. Diese Instabilität wurde bis herunter zu $Re \approx 1000$ gefunden. Bei den meisten Rechnungen lagen die Reynoldszahlen unterhalb derer der Experimente [8 - 10], und ein detaillierter Vergleich mit Meßergebnissen wurde nicht vorgenommen.

Für eine erfolgreiche numerische Simulation sind eine Reihe von Voraussetzungen erforderlich. Dies sind insbesondere eine ausreichende räumliche und zeitliche Auflösung zur Erfassung der relevanten Längen- und Zeitskalen sowie eine hohe Genauigkeit und gute Stabilitätseigenschaften des numerischen Verfahrens. Die Erfahrung [64] hat gezeigt, daß mangelnde räumliche Auflösung eine numerisch bedingte, unphysikalische Instabilität zur Folge haben kann, die zu falschen Schlußfolgerungen [67, 68] verleitet. Das numerische Verfahren sollte weiterhin möglichst effektiv sein, da man bei dreidimensionalen zeitabhängigen Problemen rasch an die Grenze der verfügbaren Rechenkapazität stößt (eine Verdoppelung der räumlichen Auflösung in jeder Koordinaten bedeutet typischerweise einen 8-fachen Speicherplatz und 16-fachen Rechenzeitbedarf). Der Wahl eines geeigneten numerischen Verfahrens fällt demnach eine Schlüsselrolle zu.

In dieser Arbeit wird ein Spektralverfahren [69] verwendet, das den genannten Anforderungen in hohem Maße gerecht wird. Das Verfahren, das auf Fourier-Reihenentwicklungen in x_1 , x_2 und Entwicklung nach Chebyshev-Polynomen in x_3 beruht, wird in Kap. 4 dargestellt.

Ein spezifisches Problem bei der Erstellung eines effektiven numerischen Verfahrens zur Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen ist die Berechnung des Druckfeldes und damit zusammenhängend die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung $\text{div } \underline{v} = 0$. Es wurde eine große Zahl von Methoden und Techniken entwickelt, um dieses Problem in den Griff zu bekommen. Das bekannteste Beispiel ist der bei ebenen Strömungen übliche Übergang von den ursprünglichen Variablen \underline{v}, p (Geschwindigkeit und Druck) zu Stromfunktion ψ und Rotation ω . Bei dreidimensionalen Strömungen werden überwiegend die ursprünglichen Variablen verwendet. Meist wird die Kontinuitätsgleichung durch die Poissongleichung für p ersetzt, die sich unmittelbar aus der Impulsgleichung ableiten läßt. Die Schwierigkeit besteht nun im Auffinden der richtigen Druckrandbedingungen. Physikalische Randbedingungen liegen in der Regel nicht vor (insbesondere nicht an festen Wänden), vielmehr sind die Randwerte für p bereits implizit durch die eindeutig bestimmte Lösung \underline{v}, p determiniert.

Diese Problematik wird in Kap. 3 analysiert. Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung unter Verwendung der Poissongleichung für p abgeleitet (äquivalentes \underline{v} - p -System). Weiter wird ein Algorithmus zur Lösung dieses äquivalenten Systems vorgeschlagen, dessen Anwendbarkeit nicht auf ein spezielles numerisches Diskretisierungsverfahren beschränkt ist. Wir erhalten so ein effektives numerisches Verfahren, das eine exakte Erfüllung von Kontinuitätsgleichung und Randbedingungen zu allen Zeiten garantiert [70]. Ein solches Verfahren ohne eine explizite (und dadurch weniger effektive) Verwendung der diskreten Kontinuitätsgleichung war im Bereich der Spektralmethoden bisher nicht bekannt.

1.4 Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist erstens die Erstellung eines auf der Spektralmethode basierenden numerischen Verfahrens und Rechenprogramms zur Integration der dreidimensionalen, instationären Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen in Plattenkanalgeometrie

und zweitens

die Untersuchung des laminar-turbulenten Umschlags mit Hilfe dieses Rechenprogramms.

Im mathematisch-numerischen und im physikalischen Bereich sollen im einzelnen folgende Fragenkreise behandelt werden:

- Druckberechnung und Kontinuitätsgleichung:

Wie läßt sich ein effektives Verfahren zur Druckberechnung finden, das die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung garantiert? Welches sind die korrekten Randbedingungen zur Berechnung des Drucks aus der Poissongleichung?

- Instationäres Verhalten zweidimensionaler Störungen:

Wie gut reproduziert das instationäre Rechenprogramm die periodische Sekundärströmung? Wird das erwartete unterkritische Schwellenverhalten wiedergegeben? Läßt sich der stabile Zweig der periodischen Sekundärströmung durch die instationäre Rechnung erreichen? Gibt es eine rein zweidimensionale hochfrequente Instabilität?

- Dreidimensionale Simulation zum Umschlagsprozeß und Vergleich mit Experimenten:

Kann das Modell einer sich zeitlich entwickelnden, räumlich periodischen Strömung den im Experiment beobachteten Umschlagsprozeß erfassen, und wenn ja, bis zu welchem Stadium? Wie gut ist die quantitative Übereinstimmung? Kann insbesondere das Auftreten von "spikes" reproduziert werden? Welche räumliche Auflösung ist zur Erfassung der einzelnen Stadien erforderlich?

- Dokumentation der dreidimensionalen Strömung:

Wie entwickelt sich die anfangs zweidimensionale Wellenstörung? Wie sieht das dreidimensionale Geschwindigkeitsfeld aus? Welche Struktur hat das Wirbelfeld? Sind diskrete Wirbel erkennbar?

- Mechanismen des Umschlagsprozesses:

Von welcher Art ist die sekundäre Instabilität, die die Dreidimensionalität verursacht? Wie groß sind die Wachstumsraten der

dreidimensionalen Anteile? Wie hängen sie von Parametern (Reynoldszahl, Wellenlängen, Amplituden) und von der Art der aufgeprägten Anfangsstörungen ab? Tritt eine tertiäre Instabilität auf?

Es ist klar, daß die zuletzt genannten Fragen nicht unmittelbar durch numerische Simulation, sondern erst durch eine sachgerechte Interpretation von möglichst zuverlässigen numerischen Ergebnissen beantwortet werden können. Diese zur Verfügung zu stellen ist ein Hauptziel dieser Arbeit.

2. MATHEMATISCHES MODELL

2.1 Integrationsbereich und Randbedingungen

Wir erläutern das mathematische Modell, das wir zur numerischen Simulation des im Abschnitt 1.2 skizzierten Umschlagsvorgangs bei der ebenen Poiseuille-Strömung verwenden. Für die numerische Integration der Navier-Stokes-Gleichungen müssen zunächst ein endlicher Integrationsbereich und Randbedingungen festgelegt werden. Wir wählen einen Quader (Abb. 2.1) mit periodischen Randbedingungen in den horizontalen Richtungen x_1, x_2 :

$$\underline{u}(x_1 + mL_1, x_2 + nL_2, x_3, t) = \underline{u}(x, t) \quad (2.1)$$

(m, n beliebig, ganzzahlig). An den Kanalwänden in $x_3 = \pm 1$ gelten die Haftbedingungen $\underline{u} = 0$. Als Periodenlänge L_1 wird die Wellenlänge $\lambda^{TS} = 2\pi/\alpha_r^{TS}$ der Tollmien-Schlichting-Welle genommen, die im Experiment durch die Frequenz des schwingenden Bandes vorgegeben wird. Die Periodenlänge L_2 wird als Wellenlänge der Längswirbelstruktur in x_2 -Richtung ebenfalls aus dem Experiment übernommen. In manchen Experimenten wird diese Wellenlänge ebenfalls von außen aufgeprägt [24, 27]. Die Gründe für die Wahl periodischer Randbedingungen und ihre Auswirkungen werden im folgenden diskutiert.

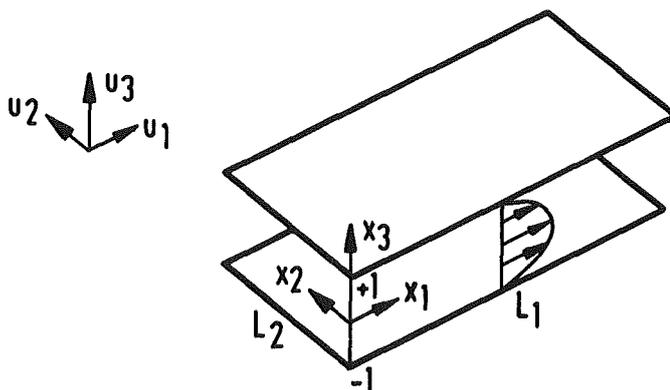


Abb. 2.1: Integrationsbereich und Koordinatensystem

Die Annahme räumlicher Periodizität hat zwei entscheidende praktische Vorteile. Erstens können für die räumliche Diskretisierung Fourierentwicklungen eingesetzt werden, die zu einem sehr genauen und effektiven numerischen Verfahren führen. Zweitens kann der Integrationsbereich in x_1 und x_2 jeweils auf eine einzige Wellenlänge L_1 und L_2 beschränkt werden. Würden andere Randbedingungen verwendet, so müßte er sich über viele Wellenlängen erstrecken, allein schon um störende Einflüsse dieser Randbedingungen zu verringern. Die Vorgabe von Ein- und Ausströmbedingungen ist nicht unproblematisch [71]. Durch die Beschränkung auf eine Grundwelle in x_1 und x_2 wird die verfügbare horizontale Auflösung auf die Erfassung der höheren Harmonischen konzentriert, die durch Nichtlinearität angeregt werden und im Verlauf des Umschlagsprozesses stark anwachsen.

Die Periodizität in der Spannweitenrichtung x_2 steht außerdem mit den experimentellen Beobachtungen im Einklang. Dagegen erfordert die Annahme von Periodizität in x_1 einige Erläuterungen. Die Orr-Sommerfeld-Gleichung läßt grundsätzlich Eigenlösungen mit einer (x_1, t) -Abhängigkeit der Form

$$\sim \exp [i\alpha x_1 - i\omega t] = \exp [-\alpha_i x_1 + \omega_i t] \cdot \exp [i(\alpha_r x_1 - \omega_r t)] \quad (2.2)$$

mit komplexem $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ und $\omega = \omega_r + i\omega_i$ zu. Welche Eigenlösung physikalisch realisiert wird, hängt von der Art der Anregung ab (vgl. hierzu [33] p. 57). Im Experiment wird durch das schwingende Band eine x_1 -Position ausgezeichnet. Es wird eine in x_1 räumlich anwachsende Welle ($\omega_i = 0$) angeregt, Gl. (1.3), mit anschließender in x_1 erfolgreicher nichtlinearer Entwicklung. In unserem Modell betrachten wir dagegen die durch eine räumlich periodische Anfangsstörung $u^0(x)$ ausgelöste zeitliche Entwicklung, deren lineare Anfangsphase durch eine zeitlich angefachte Welle ($\alpha_i = 0$) beschrieben wird. Diese Fragestellung ist bereits für sich von Interesse und von der Vorstellung eines horizontal ausgedehnten Strömungsfeldes ohne räumlich konzentrierte Störungsquellen her naheliegend.¹⁾

¹⁾ Zeitlich angefachte, räumlich periodische Wellen in Scherströmungen werden z.B. in geneigten Behältern mit Dichteschichtung beobachtet [72].

Darüber hinaus kann aber auch erwartet werden - und das werden wir an den Ergebnissen nachträglich prüfen -, daß die im räumlich periodischen Modell in t erfolgende Entwicklung der im Experiment beobachteten Entwicklung in x_1 weitgehend entspricht. Dies wird noch deutlicher, wenn wir die räumliche Entwicklung der Welle in einem mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit ω_r/α_r mitbewegten Bezugssystem beobachten, in dem sie auch zeitlich angefacht erscheint. Die Ergebnisse von Wray und Hussaini [61] für die Plattengrenzschicht, die ebenfalls mit einem räumlich periodischen Modell gewonnen wurden, haben diese Erwartung bestätigt.

2.2 Grundgleichungen

Wir stellen die Gleichungen des Anfangs-Randwertproblems für Störungen $\underline{u}(\underline{x}, t)$, $p(\underline{x}, t)$ der stationären Grundströmung (1.1) bei konstant gehaltenem treibenden Druckgradienten zusammen. Zeit- und Raumbereich für die Integration sind durch

$$0 \leq t \leq t_{\max}, \quad (2.3)$$

$$B: 0 \leq x_1 \leq L_1, 0 \leq x_2 \leq L_2, -1 \leq x_3 \leq 1$$

definiert. Navier-Stokes-Gleichungen, Rand- und Anfangsbedingungen für \underline{u}, p lauten

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0 \quad (2.4)$$

$$\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \underline{P}(\underline{u}) = -\nabla p + \nu \Delta \underline{u} \quad (2.5)$$

$$\underline{u}(x_1 + mL_1, x_2 + nL_2, x_3, t) = \underline{u}(\underline{x}, t) \quad (2.6)$$

$$\underline{u}(x_1, x_2, \pm 1, t) = 0$$

$$\underline{u}(\underline{x}, 0) = \underline{u}^0(\underline{x}). \quad (2.7)$$

Dabei ist $\nu := 1/\operatorname{Re}$ (Re ist in (1.2) definiert), und

$$\underline{P}(\underline{u}) = (\underline{U} \nabla) \underline{u} + (\underline{u} \nabla) \underline{U} = U \partial_1 \underline{u} + \begin{pmatrix} u_3 \partial_3 U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

enthält die konvektiven Terme, die von der Wechselwirkung der Grundströmung mit der Störung herrühren. Vorzugeben sind t_{\max} , die Periodenlängen L_1 und L_2 , die Reynoldszahl Re und die Anfangsverteilung $\underline{u}^0(\underline{x})$. Für das numerische Verfahren ist es von Vorteil ([69] S. 153), die nichtlinearen Terme nach der Identität

$$(\underline{u}\nabla) \underline{u} = \nabla(\underline{u}\cdot\underline{u})/2 - \underline{u}\text{rot}\underline{u}$$

umzuformen und die Impulsgleichung (2.5) in der sogenannten "Rotationsform"

$$\partial_t \underline{u} = \underline{u}\text{rot}\underline{u} - \underline{P}(\underline{u}) - \nabla q + \nu \Delta \underline{u} \quad (2.5')$$

zu schreiben. Dabei wurde der "Staudruck"

$$q := p + \underline{u}\cdot\underline{u}/2$$

eingeführt.

Wie bereits erwähnt, ist es für die Untersuchung des Umschlags mit unserem räumlich periodischen Modell zweckmäßig, durch eine Galilei-Transformation in ein in x_1 -Richtung mitbewegtes Bezugssystem überzugehen. Wählt man als Transformationsgeschwindigkeit C die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Tollmien-Schlichting-Welle, so ist der zeitperiodische Anteil der Welle verschwunden. Es bleibt nur noch das für eine lange Zeit quasi-stationäre Amplitudenverhalten zu berechnen, was numerisch mit größerer Genauigkeit möglich ist und zudem Stabilitätsvorteile bringt (s. 4.3). Wir bezeichnen die Größen im bewegten System durch einen hochgestellten Index c . Es gilt dann für beliebiges konstantes C

$$\left. \begin{aligned} x_1^c &= x_1 - Ct, \quad x_2^c = x_2, \quad x_3^c = x_3 \\ \underline{u}^c(\underline{x}^c, t) &= \underline{u}(\underline{x}, t) \\ U^c &= U - C. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Die Gleichungen für die Störungen \underline{u}^c im mitbewegten System sind formal identisch zu (2.3) - (2.8), wenn man nur U durch U^c ersetzt. Wir lassen deshalb im folgenden den Index c meist weg. Als Integrationsbereich in x_1 -Richtung wird wegen der Periodizität weiterhin $0 \leq x_1^c \leq L_1$ genommen.

3. BERECHNUNG INKOMPRESSIBLER STRÖMUNGEN

Bei der numerischen Integration der zeitabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen bereiten insbesondere die Behandlung der Nichtlinearität und die Druckberechnung und Erfüllung der Kontinuitätsgleichung Schwierigkeiten. Durch die Verwendung expliziter Zeitintegrationsverfahren für die nichtlinearen Terme läßt sich eine Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme umgehen. Der Preis dafür ist eine Stabilitätsrestriktion für den Zeitschritt (vgl. 4.3). Mit dem zweiten, für inkompressible Strömungen spezifischen Problem wollen wir uns hier befassen. Wegen der grundsätzlichen Bedeutung dieses Problems und der Allgemeingültigkeit der folgenden Überlegungen legen wir hier keine spezielle Geometrie und kein spezielles Diskretisierungsverfahren zugrunde. Es werden nur die wesentlichen Gedankengänge dargestellt.

Zunächst werden die Schwierigkeiten bei der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen sowie einige alternative Formulierungen diskutiert. Anschließend wird das äquivalente \underline{v} - p -System hergeleitet, auf dessen Basis ein allgemeines Verfahren zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen vorgeschlagen wird. Dieses Verfahren wird zur numerischen Lösung des in dieser Arbeit betrachteten Kanalströmungsproblems verwendet.

3.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Das Anfangs-Randwert-Problem für Geschwindigkeitsfeld \underline{v} und Druckfeld p ¹⁾ einer inkompressiblen Strömung in einem Bereich B lautet

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad (3.1)$$

$$\partial_t \underline{v} + (\underline{v} \nabla) \underline{v} = - \nabla p + \nu \Delta \underline{v} \quad (3.2)$$

$$\underline{v} |_{\partial B} = 0 \quad (3.3)$$

$$\underline{v} (t = 0) = \underline{v}^0. \quad (3.4)$$

Die Anfangsverteilung \underline{v}^0 erfülle (3.1) und (3.3). Wir nehmen an, daß (3.1) - (3.4) im betrachteten Raum-Zeit-Bereich eine (bis auf eine

¹⁾ wir verwenden das Symbol p in verschiedenen Bedeutungen, die jeweils aus dem Zusammenhang hervorgehen

additive Konstante in p) eindeutige Lösung besitzt. Der Einfachheit halber behandeln wir den Fall homogener Randbedingungen (3.3) (Haftbedingungen an festen Wänden); die folgenden Überlegungen lassen sich jedoch auch für inhomogene Randbedingungen durchführen. Von dem (ein-, zwei- oder dreidimensionalen) Bereich B setzen wir insbesondere voraus, daß die Helmholtzgleichung mit Dirichlet-Randbedingungen eindeutig lösbar ist.

Die Schwierigkeiten bei der Konstruktion eines effektiven Lösungsverfahrens für (3.1) - (3.4) liegen in der indirekten Kopplung zwischen \underline{v} und p durch (3.1). Der Druck spielt in (3.2) die Rolle eines Lagrangeschen Multiplikators, der zu jedem Zeitpunkt die Erfüllung der Zwangsbedingung (3.1) ermöglicht [73]. Vom mathematischen Standpunkt aus stellt der Druckterm den Gradientenanteil in der orthogonalen Zerlegung

$$-(\underline{v}\nabla)\underline{v} + \underline{v}\Delta\underline{v} = \partial_t \underline{v} + \nabla p \quad (3.2')$$

von Konvektions- plus Reibungsterm in einen divergenzfreien Anteil $\partial_t \underline{v}$ mit verschwindender Normalkomponente auf ∂B und den Gradienten ∇p eines Skalars dar (eine solche Zerlegung von Vektorfeldern ist stets möglich) [74].

Wegen der Schwierigkeiten einer numerischen Lösung von (3.1) - (3.4) wurden verschiedene Umformulierungen entwickelt, in denen der Druck und die Kontinuitätsgleichung eliminiert sind (dies entspricht einer Verwendung der Projektion auf den divergenzfreien Anteil in (3.2')). Statt (3.2) wird dann die Wirbeltransportgleichung (aus rot (3.1) zu erhalten) oder die Gleichung 4. Ordnung für \underline{v} (aus rot rot (3.1)) verwendet. Beispiele solcher Umformulierungen sind das $\underline{\omega}$ - \underline{u} -System (bzw. $\underline{\zeta}$ - \underline{v} -System) [71], die Verwendung der Gleichung 4. Ordnung [66], sowie die Formulierungen mit skalarem und Vektorpotential $\underline{v} = \nabla\phi + \text{rot } \underline{\psi}$ [75] oder mit poloidalem und toroidalem Potential [76]. Für dreidimensionale Strömungen weisen diese alternativen Formulierungen zu (3.1) - (3.4) häufig Nachteile auf und werden nur selten verwendet. Ein Vergleich der genannten Formulierungen für den in dieser Arbeit vorliegenden Fall der Kanalströmung ergab, daß keines dieser Systeme dem hier verwendeten Verfahren vorzuziehen ist. Dabei wurden die Kriterien: Anzahl der

unbekannten Felder, Anzahl und Ordnung der zu lösenden Gleichungen, Anzahl von a priori unbekanntem Randwerten (Ausmaß der Kopplung über Randbedingungen) und erforderliche numerische Differentiationen zugrunde gelegt. Ferner wurde von einer direkten (d.h. nichtiterativen) Lösung aller Gleichungen ausgegangen.

Für die Berechnung dreidimensionaler Strömungen wird meist eine Formulierung mit den ursprünglichen Variablen \underline{v} , p benutzt. Eine numerische Lösung durch eine unmittelbare Diskretisierung von (3.1) - (3.4) ist zwar möglich (z.B. [77_7]), führt aber auf ein simultan zu lösendes gekoppeltes Gleichungssystem für die vier unbekanntem skalaren Felder v_j , p . Wir suchen eine äquivalente Umformulierung von (3.1) - (3.4), die eine effektivere, möglichst weitgehend entkoppelte Berechnung gestattet und insbesondere die Kontinuitätsgleichung nicht mehr enthält. Hierzu verwenden wir die Poisson-Gleichung

$$\Delta p = - \operatorname{div} ((\underline{v}\nabla) \underline{v}) , \quad (3.5)$$

die sich mit (3.1) durch Divergenzbildung aus (3.2) ableiten läßt. Es stellt sich die Frage, wie die Randbedingungen für (3.5) lauten, die die Erfüllung von (3.1) gewährleisten. Diese Randbedingungen sind implizit durch die Lösung von (3.1) - (3.4) bestimmt und von vornherein nicht bekannt (nur der Druck in einem einzigen Punkt darf willkürlich vorgegeben werden, entsprechend einer Festlegung der additiven Konstanten).

3.2 Das äquivalente \underline{v} - p -System

Wir suchen eine Bedingung, mit der zusammen (3.2) - (3.5) ein zu (3.1) - (3.4) äquivalentes System darstellt. Eine solche hinreichende Bedingung zur Erfüllung von (3.1) ergibt sich nun einfach aus folgender Überlegung. Wenn \underline{v} , p die Gleichungen (3.2) - (3.5) erfüllt, so genügt $d := \operatorname{div} \underline{v}$ der Gleichung

$$\partial_t d = - \Delta p - \operatorname{div} ((\underline{v}\nabla) \underline{v}) + \underline{v}\Delta d = \underline{v}\Delta d$$

mit dem Anfangswert $d(t=0) = 0$. Die Lösung dieser Differentialgleichung von der Art der Wärmeleitungsgleichung verschwindet genau dann, wenn

die Randbedingung $d|_{\partial B} = 0$ erfüllt ist. Die gesuchte notwendige und hinreichende Bedingung lautet also

$$(\operatorname{div} \underline{v})|_{\partial B} = 0, \quad (3.6)$$

d.h. das zu (3.1) - (3.4) äquivalente v-p-System besteht aus den Gleichungen (3.2) - (3.6).

Eine ähnliche Überlegung lässt sich auf die zeitlich diskretisierten Gleichungen anwenden. Die Reibungsterme $v\Delta y$ müssen bei der Zeitdiskretisierung implizit behandelt werden, da sonst die notwendige Verträglichkeitsbedingung zwischen Druck und Geschwindigkeit nicht erfüllt werden kann [77]. Damit erhalten wir nach 4.3.1 ein Gleichungssystem von der Form

$$\Delta \underline{v} - \lambda \underline{v} - \nabla p = -\underline{r} \quad (3.7)$$

$$\underline{v}|_{\partial B} = 0 \quad (3.8)$$

mit $\lambda = \text{const} > 0$ (die einzelnen Größen sind in 4.3.1 definiert). Hinzu kommt die Kontinuitätsgleichung. Die Gleichungen (3.1), (3.7), (3.8) werden als (verallgemeinertes) Stokes-Problem bezeichnet. Aus (3.1), (3.7) lässt sich die Poisson-Gleichung

$$\Delta p = \operatorname{div} \underline{r} \quad (3.9)$$

ableiten. Das zu (3.1), (3.7), (3.8) äquivalente System ist (3.6) - (3.9). Denn genügt \underline{v} , p den Gleichungen (3.7) - (3.9), so gilt für $d := \operatorname{div} \underline{v}$ die Helmholtz-Gleichung $\Delta d - \lambda d = 0$, die mit der homogenen Randbedingung (3.6) wegen $\lambda > 0$ nur die triviale Lösung zulässt.

Die hinreichende Bedingung (3.6) der Divergenzfreiheit auf dem Rand zur Elimination der Kontinuitätsgleichung mit Hilfe der Poissongleichung wurde schon früher angegeben (z.B. [71, 78]) und ist auch verschiedentlich bei Differenzenapproximationen benutzt worden (z.B. [79]). Ihre Bedeutung scheint aber noch nicht allgemein bekannt zu sein. Häufig wird als Druckrandbedingung die Normalkomponente der Impulsgleichung

(3.2)| $_{\partial B}$ verwendet (Neumann-Randbedingung). Diese bestimmt aber in (3.8) - (3.10) den Druck nicht eindeutig und ist nicht hinreichend zur Erfüllung der Kontinuitätsgleichung. Denn jede Lösung von (3.9) mit beliebig vorgegebenen Randwerten $\underline{n} \cdot \nabla p|_{\partial B}$ (oder auch Dirichlet-Randbedingung $p|_{\partial B}$) führt zu einer Lösung p, \underline{v} von (3.7) - (3.9), die i.a. (3.1) nicht erfüllt. Anders ist die Situation bei der Berechnung des Drucks aus einer gegebenen, als divergenzfrei bekannten Geschwindigkeitsverteilung, oder bei der Diskretisierung von (3.2) mit einem expliziten Differenzenverfahren [79, 58]. Hier ist die Verwendung von der Normalkomponente von (3.2)| $_{\partial B}$ als Randbedingung angebracht.

In dem System (3.6) - (3.9) ist die Kopplung zwischen \underline{v} und p durch die Elimination der Kontinuitätsgleichung im Innern von B bereits reduziert. Wenn es nun weiter gelingen würde, auch (3.6) zu eliminieren und in Randbedingungen für p zu übersetzen, die schon vor der Berechnung von \underline{v} bekannt sind, so könnten nacheinander p aus (3.9) und die Komponenten v_j aus (3.7), (3.8) berechnet werden. Damit wäre insgesamt die Lösung des Stokes-Problems (3.1), (3.7), (3.8) auf eine sukzessive Lösung von vier Poisson- bzw. Helmholtz-Gleichungen zurückgeführt. Dies ist eine Standardaufgabe, zu deren Lösung sehr effektive direkte numerische Verfahren zur Verfügung stehen [80].

3.3 Ein Lösungsverfahren für das zeitdiskretisierte Stokes-Problem

Ziel ist es also, aus der Bedingung (3.6) unmittelbare Randbedingungen

$$p|_{\partial B} = g \tag{3.10}$$

für p zu gewinnen. (Es werden Dirichlet-Randbedingungen angesetzt, um keine Verträglichkeitsbedingungen zwischen dem Quellterm $\text{div } \underline{r}$ in (3.9) und den Randbedingungen berücksichtigen zu müssen.) Die Idee des Verfahrens besteht nun darin, die Linearität des Problems (3.6) - (3.9) auszunutzen und explizit den Zusammenhang zwischen $p|_{\partial B}$ und $\text{div } \underline{v}|_{\partial B}$ in den diskretisierten Gleichungen zu konstruieren.

Zunächst ist es zweckmäßig, den inhomogenen Lösungsanteil abzuspalten. Dazu sei eine beliebige Druckverteilung \tilde{g} auf ∂B fest vorgegeben und $\tilde{p}, \tilde{\underline{v}}$

die Lösung von (3.7) - (3.9) mit der Randbedingung $\tilde{p}|_{\partial B} = \tilde{g}$. Im allgemeinen ist dann $\operatorname{div} \tilde{\underline{v}}|_{\partial B} \neq 0$. Die Differenz dieser Lösung zur gesuchten Lösung p, \underline{v} von (3.6) - (3.9) genügt dann - wie man durch Einsetzen sofort sieht - einem Gleichungssystem der Gestalt

$$\Delta p_h = 0 \quad (3.11)$$

$$p_h|_{\partial B} = h \quad (3.12)$$

$$\Delta \underline{v}_h - \lambda \underline{v}_h - \nabla p_h = 0 \quad (3.13)$$

$$\underline{v}_h|_{\partial B} = 0 \quad (3.14)$$

Das Gleichungssystem (3.11) - (3.14) wird im folgenden für beliebiges h betrachtet. Es ist bis auf die Randbedingung (3.12) homogen (im Fall inhomogener Randbedingungen in (3.3) erhält man ebenfalls diese Gleichungen). Seine Lösung p_h, \underline{v}_h ist durch die Vorgabe von h eindeutig bestimmt. Speziell für die Differenz der beiden inhomogenen Lösungen p, \underline{v} und $\tilde{p}, \tilde{\underline{v}}$ schreiben wir

$$\tilde{h} := g - \tilde{g}, \quad p_{\tilde{h}} := p - \tilde{p}, \quad \underline{v}_{\tilde{h}} := \underline{v} - \tilde{\underline{v}} \quad (3.15)$$

Die gestellte Aufgabe besteht darin, \tilde{h} so zu bestimmen, daß die Lösung $p_{\tilde{h}}, \underline{v}_{\tilde{h}}$ von (3.11) - (3.14) mit $h = \tilde{h}$ die Gleichung

$$(\operatorname{div} \underline{v}_{\tilde{h}})|_{\partial B} = - (\operatorname{div} \tilde{\underline{v}})|_{\partial B} \quad (3.16)$$

erfüllt und damit $v = \tilde{v} + \underline{v}_{\tilde{h}}$ Gl. (3.6) genügt. Dazu betrachten wir zunächst allgemein für das System (3.11) - (3.14) den Zusammenhang zwischen $p_h|_{\partial B}$ und $(\operatorname{div} \underline{v}_h)|_{\partial B}$. Durch (3.11) - (3.14) wird jeder auf ∂B definierten Funktion h eine andere Funktion $(\operatorname{div} \underline{v}_h)|_{\partial B}$ auf ∂B zugeordnet. Hierfür schreiben wir

$$A h := (\operatorname{div} \underline{v}_h)|_{\partial B} \quad (3.17)$$

Die Zuordnung A ist linear, und für $h = \text{const}$ ist $A h = 0$. Umgekehrt folgt aus $A h = 0$ wegen der vorausgesetzten eindeutigen Lösbarkeit des Ausgangsproblems $\underline{v}_h = 0$ und $p_h = \text{const}$, so daß auch die inverse Zuordnung $A^{-1}: (\operatorname{div} \underline{v}_h)|_{\partial B} \rightarrow h$ bis auf eine additive Konstante für h eindeutig definiert ist. Das gesuchte \tilde{h} ist nach (3.16) durch

$$A \tilde{h} = - (\operatorname{div} \tilde{v})|_{\partial B} \quad (3.18)$$

oder $\tilde{h} = - A^{-1} (\operatorname{div} \tilde{v})|_{\partial B}$ charakterisiert. Mit \tilde{h} ist auch die gesuchte Druckverteilung $g = \tilde{g} + \tilde{h}$ auf ∂B bekannt, und die gesuchte Lösung p, \underline{v} ergibt sich durch sukzessives Lösen der Gleichungen (3.9), (3.10) und (3.7), (3.8).

Die Frage ist nun, wie die Zuordnung A bzw. deren Inverse in der praktischen Anwendung für die diskretisierten Gleichungen realisiert werden kann. Wir verwenden im folgenden für die diskreten Variablen und Gleichungen die gleichen Bezeichnungen wie bisher. Die Diskretisierung wird hier nicht näher spezifiziert. Wir nehmen an, daß die diskreten Randwerte durch einen Vektor von N Werten, etwa der Werte in N diskreten Punkten auf ∂B , gegeben sind. Weiter setzen wir voraus, daß auch die diskreten Gleichungen eindeutig (bis auf die additive Konstante in p) lösbar sind.

In der diskreten Form ist (3.17) ein lineares Gleichungssystem mit einer Matrix A , die sich z.B. folgendermaßen konstruieren läßt. Es seien $\{h_1, \dots, h_N\}$ die N orthonormalen Einheitsvektoren der Länge N , d.h. das i -te Element von h_j sei gleich δ_{ij} . Diese Vektoren dienen als Basis der diskreten Randwerte auf ∂B . Für jedes h_j berechnet man die diskrete Lösung p_j, \underline{v}_j zu (3.11) - (3.14) und definiert als j -te Spalte von A den Vektor der diskreten Werte von $\operatorname{div} \underline{v}_j$ auf ∂B . Wegen der vorausgesetzten eindeutigen Lösbarkeit bis auf eine additive Konstante in p ist $\operatorname{Rang} A = N - 1$. Durch Einsetzen sieht man, daß der aus der diskreten Gleichung (3.18) berechnete Vektor \tilde{h} die geforderte Eigenschaft besitzt. Damit stellen die Komponenten des Vektors $g = \tilde{g} + \tilde{h}$ die gesuchten diskreten Druckrandwerte dar, die die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung bei der Berechnung der Lösung p, \underline{v} aus den diskretisierten Gleichungen (3.7) - (3.10) sicherstellen. Die Matrix A läßt sich auch als "Einflußmatrix" auffassen, die bei einer Lösung der diskretisierten Gleichungen (3.6) - (3.9) mit Hilfe der Einflußmatrixtechnik (oder "capacitance matrix technique") [81] benötigt wird. Sie kann schon vor Beginn der Zeitintegration berechnet werden.

Bei der konkreten Anwendung hat man darauf zu achten, daß bei der Formulierung der diskreten Gleichungen die diskreten Analoga zu den kontinuierlichen Operationen wie "div", "grad" usw., die in der obigen Herleitung für die kontinuierlichen Gleichungen auftreten, in konsistenter Weise verwendet werden. Es ist zweckmäßig, von den diskretisierten Gleichungen (3.6) - (3.9) auszugehen und die oben zur Herleitung der kontinuierlichen Gleichungen vorgenommenen Schritte im diskreten nachzuvollziehen.

Auf diese Weise wurden in [70] die diskreten Gleichungen für das hier vorliegende Problem der Kanalströmung mit Diskretisierung durch Fourier- und Chebyshev-Entwicklungen hergeleitet. Durch die Fourier-Entwicklung zerfällt das Gesamtproblem in einen Satz von getrennt zu lösenden eindimensionalen Problemen in x_3 . Für jedes Teilproblem ist $N = 2$ und damit die Durchführung des Lösungsverfahrens sehr einfach. Die mit diesem Verfahren berechnete numerische Lösung erfüllt die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen exakt, unabhängig von der Feinheit der Diskretisierung. Inzwischen wurde eine gegenüber [70] vereinfachte Formulierung der diskreten Gleichungen entwickelt, bei der der Rechenaufwand zur Lösung der gekoppelten Gleichungen durch eine Berücksichtigung spezieller Eigenschaften der Chebyshev-Polynome etwa auf die Hälfte reduziert wird.

Wir fassen die einzelnen Schritte des hier vorgestellten allgemeinen Verfahrens zur numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen - bzw. genauer des Stokes-Problems (3.1), (3.7), (3.8) - zusammen.

I. Vorbereitungsphase

In einer Vorbereitungsphase vor Start der Zeitintegration wird die $N \times N$ -Einflußmatrix A in der beschriebenen Art berechnet und ihre L-U-Zerlegung abgespeichert. Dies erfordert ein N -maliges Lösen der Gleichungen (3.11) - (3.14) (N ist die Anzahl der diskreten Randdaten auf dem Rand ∂B des Bereichs B).

II. Lösungsphase

In jedem Zeitschritt sind zur Lösung des Stokes-Problems folgende drei Schritte durchzuführen:

1. Berechnung der inhomogenen Lösung \tilde{q} , \tilde{v} der Gleichungen (3.7) - (3.9) mit willkürlich vorgegebenen Druckrandwerten $\tilde{p}|_{\partial B} = \tilde{g}$.
2. Berechnung der Korrektur \tilde{h} aus dem linearen Gleichungssystem (diskretisierte) Gl. (3.18). Dies liefert die korrekten Druckrandwerte $g := \tilde{g} + \tilde{h}$.
3. Berechnung der inhomogenen Lösung p , \underline{v} von (3.7) - (3.9) mit den Randbedingungen $p|_{\partial B} = g$. Diese Lösung p , \underline{v} ist zugleich die gesuchte Lösung des Stokes-Problems.

Damit ist es gelungen, die Lösung des Ausgangsproblems auf die Lösung einer Serie von Poisson- bzw. Helmholtz-Gleichungen mit Dirichlet-Randbedingungen zurückzuführen. In der Lösungsphase sind 2mal 4 Dirichlet-Probleme für die skalaren Felder \tilde{p} , \tilde{v}_j und p , v_j sowie ein lineares Gleichungssystem mit N Gleichungen zu lösen. Ein ähnliches Verfahren wurde in [82] im Zusammenhang mit einer Finite-Elemente-Diskretisierung vorgeschlagen. Die hier vorgenommene Behandlung der Druckrandbedingungen hat ferner Ähnlichkeit mit dem in [83] angegebenen Verfahren zur Behandlung der Randbedingungen für die Wirbeltransportgleichung. Ansonsten scheint ein vergleichbares Verfahren bisher nicht bekannt zu sein. Wir schließen mit der Bemerkung, daß sich das hier verwendete Verfahren bei den durchgeführten Simulationen ausgezeichnet bewährt hat.

4. NUMERISCHES VERFAHREN

In diesem Kapitel werden die Grundzüge des verwendeten numerischen Verfahrens dargestellt. Für Einzelheiten mehr technischer Natur wird jeweils auf den Anhang oder die entsprechende Literatur verwiesen. Zunächst werden in Abschnitt 4.1 die grundlegenden Eigenschaften von Spektralverfahren erläutert. Es folgt in 4.2 die Darstellung der verwendeten Reihenentwicklungen: Fourierreihen in den horizontalen Koordinaten x_1, x_2 und Entwicklung nach Chebyshev-Polynomen in der Normalenrichtung x_3 . Die zeitliche Diskretisierung durch Differenzenverfahren wird in 4.3 dargestellt. Wir behandeln nichtlineare Terme explizit und die Reibungsterme implizit. Die in jedem Zeitschritt zu lösenden vollständig diskretisierten Gleichungen stellen deshalb ein lineares Gleichungssystem dar, die entsprechend dem in Kap. 3 beschriebenen Verfahren gelöst werden. Es folgen in 4.4 einige Angaben zum Rechenprogramm.

Durch das Lösungsverfahren wird das diskrete Gleichungssystem für das dreidimensionale, gekoppelte Problem auf eine Reihe von sukzessiv zu lösenden eindimensionalen Systemen zurückgeführt. Jedes dieser Systeme ist im wesentlichen ein tridiagonales lineares Gleichungssystem, das leicht durch Elimination gelöst werden kann. Wir erhalten so ein effektives Verfahren zur Lösung der gekoppelten Gleichungen für Druck und Geschwindigkeit. Die berechnete Lösung erfüllt die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen exakt. Ein derartiges Verfahren war bisher im Rahmen der Spektralmethoden nicht bekannt. Moin und Kim [77] kommen zu der Schlußfolgerung, daß anstelle der Poissongleichung die diskretisierte Kontinuitätsgleichung zu verwenden sei, und lösen das volle gekoppelte Gleichungssystem durch direkte Elimination. Orszag und Kells [64] verwenden ein Zwischenschrittverfahren, bei dem konvektive Terme, Druck und Reibungsterme jeweils in drei getrennten Teilschritten eines vollen Zeitschritts behandelt werden. Dieses Verfahren ist formal nur von erster Ordnung in Δt und erfüllt die Kontinuitätsgleichung zum vollen Zeitschritt nicht exakt. Inzwischen wurden auch Zwischenschrittverfahren höherer Ordnung entwickelt [84]. Ein dem hier verwendeten ähnliches, aber auf der Gleichung 4. Ordnung für die Geschwindigkeit beruhendes Verfahren wurde von Orszag und Patera [66] benutzt.

4.1 Spektralmethoden

Charakteristisch für Spektralmethoden ist die Verwendung von Reihenentwicklungen nach vorgegebenen Ansatzfunktionen, die auf dem gesamten betrachteten Bereich definierte, glatte Funktionen sind wie z.B. Polynome oder trigonometrische Funktionen. Die unbekanntes Entwicklungskoeffizienten werden so bestimmt, daß der Ansatz die vorliegenden Gleichungen nach einem vorzugebenden Kriterium möglichst gut erfüllt. Ein bekanntes Beispiel ist das Galerkin-Verfahren. Beim Kollokationsverfahren wird verlangt, daß der Ansatz die Gleichungen in vorgegebenen diskreten Punkten erfüllt. In der vorliegenden Arbeit wird eine Kombination von Kollokationsverfahren und Tau-Methode [69] benutzt.

Spektralmethoden bieten gegenüber Differenzenverfahren eine Reihe von Vorteilen. Der wesentlichste ist die erreichbare hohe Genauigkeit. Unter geeigneten Voraussetzungen an die gesuchte Lösung (beliebig hohe Differenzierbarkeit, Periodizität im Fall von Fourierentwicklungen) gilt eine "unendliche" Konvergenzordnung, d.h. der Fehler in der nach N Gliedern abgebrochenen Reihe fällt für $N \rightarrow \infty$ stärker ab als jede Potenz von $1/N$ [69]. Bei einem Differenzenverfahren p -ter Ordnung (in der Praxis meist $p = 2$) nimmt der Approximationsfehler bei N Stützstellen nur wie $1/N^p$ ab (algebraische statt exponentielle Konvergenz). Ein weiterer, für die numerische Lösung von Differentialgleichungen wesentlicher Vorteil der Spektralmethoden ist, daß Ableitungen durch Differenzieren der Ansatzfunktionen exakt dargestellt werden. Dadurch wird insbesondere die bei Differenzenverfahren häufig auftretende, von Fehlern bei der Approximation räumlicher Ableitungen herrührende numerische Dämpfung [85] vermieden. Dies ist gerade bei fluiddynamischen Problemen mit geringer physikalischer Dämpfung ($Re \gg 1$) wichtig. Die analytische Darstellung der Näherungslösung gestattet es, auch Randbedingungen (insbesondere solche mit Ableitungen) exakt zu formulieren, sowie Interpolationen, Integrationen usw. ohne weitere Approximationsfehler vorzunehmen. Die Näherung besteht bei den Spektralmethoden "nur" darin, daß die Reihe nach endlich vielen Gliedern abgebrochen wird und damit kurzweilige Lösungsanteile nicht erfaßt werden. Beim Kollokationsverfahren treten außerdem sogenannte "aliasing"-Fehler auf (s. unten, 4.3.2).

Ein weiterer, für das physikalische Verständnis der berechneten Lösung wichtiger Gesichtspunkt ist die duale Darstellung der Lösung: einmal im "realen Raum" - etwa als Verlauf der Geschwindigkeit $u(x)$ über dem Ort x , zum anderen im "spektralen Raum" oder "Wellenzahlenraum" - etwa als Verlauf der Fourierkoeffizienten $\hat{u}(k)$ über der Wellenzahl k , in dem der Beitrag der einzelnen Ansatzfunktionen zur Lösung abgelesen werden kann. Der Verlauf des "Spektrums" $\hat{u}(k)$ hat physikalische Aussagekraft und läßt Rückschlüsse auf die Güte der berechneten Lösung zu. Bekannte Eigenschaften der Lösung (z.B. Symmetrien oder analytische Form) lassen sich häufig schon in die Ansatzfunktionen aufnehmen. So wird in unserem Rechenmodell der harmonische Anteil $\exp[-i \alpha_r x_1 - i \omega_r t]$ der Tollmien-Schlichting-Welle in dem mit $C = \omega_r / \alpha_r$ mitbewegten Bezugssystem (2.9) schon durch einen einzigen Fouriermode exakt erfaßt. Die Erzeugung von Harmonischen, die Entwicklung von Dreidimensionalität usw. können unmittelbar an den entsprechenden Fouriermodes abgelesen werden. Dieser (bezüglich der räumlichen Approximation) halbanalytische Charakter der Spektralmethode macht deutlich, daß hier nicht von einem "rein numerischen", mit "roher Gewalt" (brute force) arbeitenden Verfahren gesprochen werden kann.

Spektralmethoden werden seit langem verwendet. Ihre Anwendung auf nichtlineare Probleme und Probleme mit nichtkonstanten Koeffizienten war jedoch lange Zeit sehr ineffektiv. Erst seit der Einführung schneller Transformationsverfahren [86] können auch mehrdimensionale nichtlineare Probleme mit erträglichem Rechenaufwand behandelt werden. Als weiterer Nachteil von Spektralmethoden galt lange die Beschränkung auf einfache Geometrien und glatte Lösungsverläufe. Diese Einschränkungen konnten neuerdings zum Teil überwunden werden [87, 88]. Außerdem erfordert die Erstellung und Programmierung eines Spektralverfahrens in der Regel einen höheren Aufwand als bei einem Differenzenverfahren. Bei der Entwicklung von Spektralmethoden und ihrer Anwendung auf mehrdimensionale Probleme haben Orszag und Mitarbeiter im vergangenen Jahrzehnt Pionierarbeit geleistet. Die Grundlagen der Spektralmethode sind in dem Buch von Gottlieb und Orszag [69] dargestellt, wo auch ausführliche Literaturhinweise zu finden sind. Eine kurze Darstellung der Grundprinzipien und einiger Anwendungen wurde in [58] gegeben. Über neuere Entwicklungen wird in [87] berichtet.

4.2 Räumliche Diskretisierung

Die räumliche Diskretisierung durch Fourier- und Chebyshev-Entwicklungen ist in der Literatur mehrfach beschrieben worden [63,69,77,89], so daß wir uns hier auf die Einführung der später benötigten Bezeichnungen und einige ergänzende Bemerkungen beschränken können.

4.2.1 Fourierentwicklung

Über die Bedeutung der Fourierentwicklung für die Simulation des Umschlags wurde bereits gesprochen (s. Kap. 2 und 4.1). Für die Geschwindigkeit $\underline{u}(\underline{x}, t)$ (und entsprechend für die übrigen abhängigen Variablen) wird der Ansatz

$$\underline{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{|k_1| < K_1} \sum_{|k_2| < K_2} \hat{\underline{u}}(k_1, k_2; x_3, t) e^{ik_1 \alpha_1 x_1 + ik_2 \alpha_2 x_2} \quad (4.1)$$

eingeführt, wobei

$$\alpha_1 := 2\pi/L_1, \quad \alpha_2 := 2\pi/L_2 \quad (4.2)$$

die Wellenzahlen zu den vorgegebenen Periodenlängen L_1, L_2 sind. Für die Entwicklungskoeffizienten ("Fourier-Modes") benutzen wir auch die Kurzbezeichnung

$$\hat{\underline{u}}_{k_1, k_2} = \hat{\underline{u}}(k_1, k_2; x_3, t)$$

Da \underline{u} reellwertig ist, gilt

$$\hat{\underline{u}}_{-k_1, -k_2} = \hat{\underline{u}}_{k_1, k_2}^* \quad (4.3)$$

(* bezeichnet die konjugiert-komplexe Zahl). Speziell ist der Mittelwert $\hat{\underline{u}}_{0,0}$ reell. Wegen (4.3) genügt es, nur die Modes $\hat{\underline{u}}_{k_1, k_2}$ mit $k_1 \geq 0$ zu berechnen und zu speichern. Eine p-fache Ableitung nach x_j ($j = 1, 2$) von \underline{u} bedeutet im spektralen Raum eine Multiplikation von $\hat{\underline{u}}_{k_1, k_2}$ mit $(ik_j \alpha_j)^p$: die Ableitung ist im (k_1, k_2) -Raum eine lokale Operation. Die Werte von \underline{u} auf dem diskreten Gitter

$$x_{1,j} = j \cdot L_1 / N_1, \quad j = 0 \dots N_1 - 1, \quad N_1 = 2K_1 \quad (4.4)$$

$$x_{2,j} = j \cdot L_2 / N_2, \quad j = 0 \dots N_2 - 1, \quad N_2 = 2K_2$$

bilden (bei festem x_3, t) mit den Zahlen \hat{u}_{k_1, k_2} ein diskretes finites Transformationspaar [90]. Sie bestimmen sich gegenseitig (um auf die gleiche, gerade Anzahl $N_1 \cdot N_2$ wie in (4.4) zu kommen, werden die Zahlen \hat{u}_{k_1, k_2} formal durch $\hat{u}_{-K_1, k_2} = 0, \hat{u}_{k_1, -K_2} = 0$ ergänzt). Bei Verwendung der schnellen Fourier-Transformation [90] erfordert diese Transformation nur $\propto N_1 N_2 \cdot \log_2(N_1 N_2)$ Operationen, wenn N_1 und N_2 Zweierpotenzen sind.

4.2.2 Entwicklung nach Chebyshev-Polynomen

Die Chebyshev¹⁾-Polynome sind für $|x| \leq 1$ definiert durch

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Die ersten vier Polynome sind

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 & T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 & T_3(x) &= 4x^3 - 3x \end{aligned} \quad (4.6)$$

Chebyshev-Polynome sind als Ansatzfunktionen in der Normalkoordinaten für unser Kanalströmungsproblem aus mehreren Gründen besonders geeignet. Erstens ist die Approximationsgenauigkeit einer endlichen Chebyshev-Reihe, gemessen durch den maximalen Fehler im Intervall $|x| \leq 1$, praktisch ebenso hoch wie bei der besten überhaupt möglichen Polynomapproximation gleichen Grades (weniger als 1 Dezimale schlechter, [69] S. 37). Zweitens bereiten nichtperiodische Randbedingungen keine Schwierigkeiten. Fourierreihenentwicklungen würden hier zum "Gibbs-Phänomen" in einer der höheren Ableitungen mit entsprechender langsamer Konvergenz der Reihenentwicklung führen [69]. Drittens erhält man eine besonders gute Auflösung an den Intervallenden $x \approx \pm 1$ (Wandnähe). Die Abstände der Maxima von $T_N(x)$, die

1) wir verwenden die verbreitete englische Schreibweise anstelle der deutschen "Tschebyscheff"

als ein Maß für das Auflösungsvermögen einer nach T_N abgebrochenen Reihe angesehen werden können, haben die Größe $\approx \pi^2/(2N^2)$ am Rand und $\approx \pi/N$ in der Mitte des Intervalls $[-1, 1]$, vgl. Abb. 4.1. Viertens lassen sich zur Transformation zwischen realem Raum (Funktionswerten) und spektralem Raum (Entwicklungskoeffizienten) die für die Kosinus-Transformation bekannten Verfahren einsetzen. Dies ist wesentlich für die effektive Behandlung der nichtlinearen Terme. Chebyshev-Polynome wurden auch mit großem Erfolg bei der numerischen Lösung der Orr-Sommerfeld-Gleichung [37] und von nichtlinearen Stabilitätsproblemen [45] eingesetzt.

Wegen der großen Bedeutung der Chebyshev-Polynome für das numerische Rechnen existiert eine umfangreiche Literatur, aus der wir nur die Bücher von Fox und Parker [91] und Rivlin [92] nennen. Die Handhabung von Chebyshev-Reihen

$$a(x_3) = \sum_{k=0}^{N_3} a_k T_k(x_3) \quad (4.7)$$

ist technisch etwas komplizierter als der Umgang mit Fourierreihen. Die benötigten Formeln sind z.B. im Anhang von [69] sowie in [58], Kap. 3, zusammengestellt. Operationen wie Differentiation und Integration führen im k -Raum nicht mehr auf diagonale, sondern typischerweise auf tridiagonale Gleichungssysteme bzw. Rekursionsformeln. Dies trifft auch auf die Lösung der eindimensionalen Helmholtzgleichung

$$a'' - A^2 a = r, \quad A^2 = \text{const} \quad (4.8)$$

zu. Wir werden sehen, daß nach zeitlicher Diskretisierung das dreidimensionale Problem in eine Serie von Gleichungen der Form (4.8) mit Randbedingungen $a(\pm 1) = a_{\pm}$ für die Fouriermodes $\hat{u}_{k_1, k_2}(x_3)$ zerfällt. Die Lösung dieses Randwertproblems durch Reihenansätze (4.7) wurde in [58] eingehend untersucht und mit anderen numerischen Verfahren verglichen. Es wurde gezeigt, daß beim dort behandelten Testproblem ($r = \text{const}$, $a_{\pm} = 0$) der Fehler in der berechneten Lösung (4.7) exponentiell mit $10^{-N^2/A}$ abnimmt.

Für die Transformation real-spektral verwenden wir die Werte von $a(x_3)$ in den Extremalstellen von $T_{N_3}(x_3)$,

$$x_{3,j} := \cos(j\pi/N_3), \quad j=0\dots N_3 \quad (4.9)$$

(Abb. 4.1). Bei dieser Wahl der Stützstellen sind die Werte $a(x_{3,j})$ mit den Koeffizienten a_k wegen (4.5) durch die übliche Kosinus-Transformation

$$a(x_{3,j}) = \sum_{k=0}^{N_3} a_k \cos(kj\pi/N_3), \quad j=0\dots N_3$$

verknüpft. Für diese Transformation wird die "Runge-Faltung" benutzt, die bei den hier verwendeten Werten von N_3 fast ebenso effektiv ist wie die Schnelle Fouriertransformation, aber beliebige gerade Zahlen N_3 zulässt (L⁹³_7 s. 68).

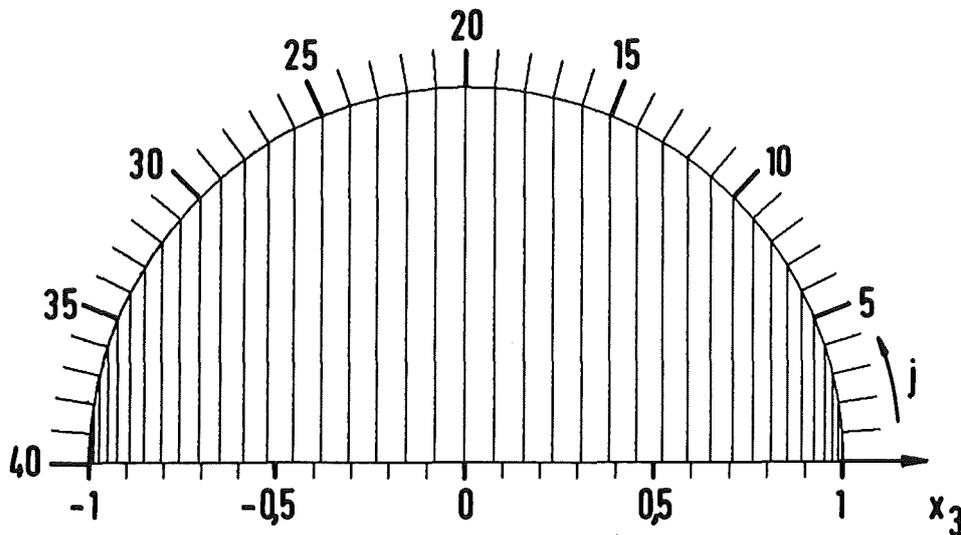


Abb. 4.1: Stützstellen nach Gl. (4.9) für $N_3 = 40$

Den vollen dreidimensionalen Reihenansatz erhalten wir durch Entwicklung der Fourierkoeffizienten \hat{u}_{k_1, k_2} in (4.1) gemäß (4.7):

$$\hat{u}_{k_1, k_2} = \hat{u}(k_1, k_2; x_3, t) = \sum_{k_3=0}^{N_3} \hat{u}(k_1, k_2, k_3; t) T_{k_3}(x_3) \quad (4.10)$$

Für die Chebyshev-Koeffizienten schreiben wir auch kürzer

$$\hat{u}_{\underline{k}} \equiv \hat{u}(k_1, k_2, k_3; t) .$$

Einsetzen dieser Reihenansätze in (2.4) - (2.8) führt auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Koeffizienten $\hat{u}_{\underline{k}}(t)$, das mittels Differenzenverfahren in der Zeit integriert wird (s. Abschnitt 4.3).

4.2.3 Berechnung der konvektiven Terme

Wir gehen kurz auf die Berechnung der konvektiven Terme $\underline{u} \times \text{rot } \underline{u} - \underline{P}(\underline{u})$ der Impulsgleichung (2.5') ein, die im Anhang A 1.1 ausführlicher dargestellt wird. Der dominierende Term $\underline{P}(\underline{u})$, Gl. (2.8), wird direkt im \underline{k} -Raum berechnet. Da die Grundströmung U unabhängig von x_1, x_2 und ein Polynom 2. Grades in x_3 ist, ist dies mit geringem Rechenaufwand möglich. Die Produkte in $\underline{u} \times \text{rot } \underline{u}$ werden mit dem Kollokationsverfahren (auch Pseudospektral-Approximation genannt) berechnet. Die dadurch verursachten "aliasing-Fehler" [86] (Fehlinterpretationen der kurzwelligen Anteile des Produkts auf dem diskreten Gitter (4.4), (4.9)) werden durch Beschränkung der Indizes (k_1, k_2) in (4.1) auf den Bereich $\{|k_1|/N_1 + |k_2|/N_2 < 2/3\}$ reduziert (s. Anhang A 1.1). Die Berechnung von $\underline{P}(\underline{u})$ ist frei von aliasing-Fehlern.

4.3 Zeitliche Diskretisierung

4.3.1 Differenzenformeln für die Zeitintegration

Wir beschreiben die zeitliche Diskretisierung der Impulsgleichung in der für die Integration verwendeten Form (2.5') für das mit C mitbewegte Bezugssystem (2.9):

$$\partial_t \underline{u} = \underline{u} \times \text{rot } \underline{u} - \underline{P}(\underline{u}) - \nabla q + \nu \Delta \underline{u} \quad (4.11)$$

mit

$$\underline{P}(\underline{u}) = (U(x_3) - C) \partial_1 \underline{u} + \partial_3 U \cdot u_3 \underline{e}_1 . \quad (4.12)$$

C liegt im Bereich $0 \leq C < 1$.

Für die Zeitintegration verwenden wir Differenzenverfahren 2. Ordnung. Diese sind bei den aus Stabilitätsgründen erforderlichen kleinen Zeitschritten ausreichend genau, wie durch Testrechnungen gezeigt wurde (s. 5.2 sowie Anhang). Differenzenverfahren höherer Ordnung sind daher nicht erforderlich. Prinzipiell wäre auch für die Zeitkoordinate ein Spektralverfahren (Entwicklung nach Chebyshev-Polynomen) einsetzbar. Ein solches Verfahren wurde von Morchoisne [94] für ein- und zweidimensionale Probleme benutzt. Es führt jedoch auf sehr große nichtlineare Gleichungssysteme, die iterativ gelöst werden müssen.

Wir streben ein nichtiteratives Verfahren an. Deshalb müssen nichtlineare Terme in (4.11) explizit behandelt werden. Der Term $\underline{P}(\underline{u})$ ist zwar linear in \underline{u} , hat aber variable Koeffizienten, so daß bei einer impliziten Diskretisierung die zu lösenden Gleichungen komplizierter werden. Wir verzichten daher auf eine implizite Behandlung von $\underline{P}(\underline{u})$, die an sich aus Stabilitätsgründen wünschenswert wäre (s. unten), und behandeln den gesamten konvektiven Term

$$\underline{M} := \underline{u} \times \text{rot } \underline{u} - \underline{P}(\underline{u}) \quad (4.13)$$

explizit. Es wurden mehrere Verfahren in das Programm aufgenommen, darunter Adams-Bashforth-, Leapfrog- und modifiziertes Euler-Verfahren [69]. Dadurch ist die Möglichkeit gegeben, den Einfluß unterschiedlicher Diskretisierungen von \underline{M} auf die Ergebnisse zu untersuchen. Die verschiedenen Verfahren und Ergebnisse von Testrechnungen sind im Anhang dargestellt. Wir beschreiben im folgenden das Adams-Bashforth-Verfahren, das für die meisten Rechnungen verwendet wurde. Für den Reibungsterm $\nu \Delta \underline{u}$ ist nach Kap. 3 ein implizites Verfahren adäquat und auch notwendig, um eine Zeitschrittrestriktion $\Delta t \lesssim 1/(\nu N_3^4)$ zu vermeiden ([69] p. 115). Wir wählen das Crank-Nicolson-Verfahren, das unbedingt stabil ist [69]. Wir erhalten so die zeitlich diskretisierte Gleichung

$$\frac{1}{\Delta t} (\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n) = \frac{3}{2} \underline{M}^n - \frac{1}{2} \underline{M}^{n-1} - \tilde{\nu} \underline{q} + \frac{\nu}{2} (\Delta \underline{u}^{n+1} + \Delta \underline{u}^n) \quad (4.14)$$

Die formale Zeitdiskretisierung des Druckterms ist (zumindest für die räumlich kontinuierlichen und zeitlich durch ein lineares Verfahren diskretisierten Gleichungen) belanglos. Denn die Summe $\tilde{\nu} \underline{q}$ aller in einer

solchen Diskretisierung von (4.11) vorkommenden Gradiententerme ist durch die übrigen Terme zusammen mit Randbedingungen und Kontinuitätsgleichung bereits eindeutig bestimmt. Dieser Sachverhalt scheint bisher nicht allgemein bekannt zu sein. Nach Division durch $v/2$ erhalten wir aus (4.14) für die unbekanntenen Größen

$$\underline{u}: = \underline{u}^{n+1}, \quad q: = 2 \tilde{q}/v$$

die Gleichung

$$\Delta \underline{u} - \lambda \underline{u} - \nabla q = - \underline{r}, \quad (4.15)$$

wobei

$$\underline{r}: = \frac{2}{v} \left[-\frac{1}{\Delta t} \underline{u}^n + \frac{3}{2} \underline{M}^n - \frac{1}{2} \underline{M}^{n-1} \right] + \Delta \underline{u}^n$$

$$\lambda: = 2/(v \Delta t) = 2 Re/\Delta t > 0 .$$

Hinzu kommen die Randbedingungen

$$\underline{u}(x_3 = +1) = 0 \quad (4.16)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \underline{u} = 0 . \quad (4.17)$$

4.3.2 Stabilität

Das Zeitintegrationsschema (4.14) ist von 2. Ordnung in Δt . Da der Reibungsterm unbedingt stabil diskretisiert wurde, sind für die Beurteilung der Stabilität nur noch die konvektiven Terme zu untersuchen. Der dominierende Term für $|\underline{u}| \ll U$ ist dabei $U \partial_1 \underline{u}$, der die Konvektion der Störungen \underline{u} durch die Grundströmung U beschreibt. Man erhält in der Praxis ein stabiles Verfahren für

$$\Delta t \lesssim \frac{1}{(K_1 - 1) \alpha_1 V}, \quad (4.18)$$

$$V: = \max_{x_3} |U(x_3) - C| = \max \{C, 1-C\}$$

Dieses empirische Ergebnis steht im Einklang mit der in [69, S. 106] gegebenen linearen Stabilitätsanalyse für eine skalare Gleichung

$$\partial_t u + V \partial_x u = 0$$

mit periodischen Randbedingungen. Berücksichtigt man auch endliche Werte von u_1, u_2 , so erhält man für den Term $\{(U + u_1) \partial_1 + u_2 \partial_2\} \underline{u}$ ganz entsprechend das Stabilitätskriterium

$$\Delta t \lesssim \frac{1}{(K_1 - 1)\alpha_1(V + v_1) + (K_2 - 1)\alpha_2 v_2}, \quad (4.19)$$

wobei

$$|u_1| \leq v_1, \quad |u_2| \leq v_2.$$

Für den Anteil $u_3 \cdot \partial_3 \underline{u}$ betrachten wir die Modellgleichung für eine Größe $a(x_3, t)$

$$\partial_t a + v \cdot (1 - x_3^2) \partial_3 a = 0, \quad v = \text{const}$$

mit Chebyshev-Entwicklung (4.7). Hierfür gilt bei expliziter Zeitintegration ein Stabilitätskriterium der Form $\Delta t \lesssim 1/(N_3 v)$ ([69] p. 113). Wir können also für den Term $u_3 \cdot \partial_3 \underline{u}$ Stabilität erwarten, wenn

$$\Delta t \lesssim \frac{1}{N_3 \cdot \max |u_3|} \quad (4.20)$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist in unseren Anwendungsfällen weniger restriktiv als (4.19), so daß die letztere den zulässigen Zeitschritt bestimmt. Im üblicherweise vorliegenden Fall $\alpha_1 \approx \alpha_2, K_1 \approx K_2$ und $|\underline{u}| \ll V$ geht (4.19) in (4.18) über. Aus (4.18) erkennt man, daß bei Wahl von $C = 1/2$ gegenüber einer Rechnung im ruhenden Bezugssystem ($C = 0$) ein doppelt so großer Zeitschritt zulässig wird.

Für (4.14) werden Werte aus zwei vorangegangenen Zeitschritten benötigt. Man braucht deshalb für den Start der Rechnung ein anderes Verfahren. Wir verwenden meist das Euler-Verfahren 1. Ordnung mit einem reduzierten Zeitschritt (z.B. $\Delta t/10$). Es steht aber auch das modifizierte Euler-Verfahren 2. Ordnung (s. Anhang A 1.2) als Startprozedur zur Verfügung.

4.4 Das Rechenprogramm CHANSON

Das dargestellte numerische Verfahren wurde in dem Rechenprogramm CHANSON ("Channel flow spectral solution") realisiert. Das Programm ist in PL/1 geschrieben und läuft auf einer Rechenanlage IBM 3033. Alle Rechnungen wurden mit doppelter Genauigkeit (16 Dezimalstellen) durchgeführt. Der Programmtext umfaßt ca. 6000 Karten. Der Platzbedarf des Programms im Hauptspeicher (Lademodul) beträgt etwa 450 K Bytes (1 K = 1024, 1 Byte = 8 Bit). Der Speicherplatzbedarf für die Datenfelder und die CPU-Zeit¹⁾ wachsen praktisch linear mit $N = N_1 N_2 N_3$. In der gegenwärtig laufenden Version werden alle in einem Zeitschritt benötigten Felder (je nach Zeitintegrationsschema 13-17 dreidimensionale Felder) gleichzeitig im Hauptspeicher gehalten. Bei dem derzeit verfügbaren (virtuellen) Speicher von 8000 K ergibt sich eine obere Grenze von $N \lesssim 32 \cdot 32 \cdot 50$. Die pro Zeitschritt verbrauchte CPU-Zeit beträgt (Angaben für das Adams-Verfahren) 1.7 sec für $N = 8 \cdot 8 \cdot 40$ und 28.5 sec für $N = 32 \cdot 32 \cdot 40$ (im Mittel 0.7 msec pro Ortspunkt). Sie könnte voraussichtlich durch einige Änderungen des Verfahrens und Programmoptimierung spürbar verringert werden. Das dreidimensionale Programm kann auch für zweidimensionale Rechnungen ($N_2 = 1$) eingesetzt werden; einige der dann überflüssigen Rechnungen werden übersprungen.

Die während der Rechnung erzeugten Daten werden auf eine sequentielle Datei geschrieben und anschließend von einem getrennten Auswerte- und Plot-Programmpaket [95] weiter verarbeitet. Dazu wird das integrierte Programmsystem REGENT [96] mit dem graphischen Subsystem GIPSY [97] benutzt. Für die Steuerung steht eine problemorientierte Sprache zur Verfügung. Der Aufwand für die Erstellung der Auswerte- und Plotprogramme ist von der gleichen Größenordnung wie für die Erstellung des Rechenprogramms.

1) pro Integrationsschritt

5. NUMERISCHE ERGEBNISSE

5.1 Experiment und Simulation

5.1.1 Die Experimente

Bevor wir mit der Darstellung von numerischen Ergebnissen beginnen, wollen wir uns die Situation in den Experimenten von Nishioka et al. [8-10], die wir in 1.2.2 angesprochen haben, näher ansehen und auf einige Unterschiede innerhalb der Experimente sowie zwischen Experiment und Simulation eingehen. Die Versuchsanordnung ist in Abb. 1.2 skizziert. Der verwendete Windkanal hat die horizontalen Abmessungen 600 cm x 40 cm und einen Wandabstand $2\tilde{h} = 1.46$ cm (Aspektverhältnis 27.4). Etwa 400 cm stromabwärts vom Einlauf ist dicht über der unteren Wand, bei $x_3 \approx -0.9$, ein dünnes Metallband gespannt, das in einem stationären Magnetfeld durch einen Wechselstrom vorgegebener Frequenz \tilde{f} zum Schwingen angeregt werden kann. Stromabwärts vom Band wird mit einem Hitzdrahtinstrument die x_1 -Komponente der Geschwindigkeit gemessen. Beim Vergleich mit Rechenergebnissen konzentrieren wir uns auf Messungen bei $Re = 5000$ ($\tilde{U}_{\max} \approx 10$ m/sec) und der Frequenz $\tilde{f} = 72$ Hz (dimensionslose Kreisfrequenz $\omega_r = 2\pi\tilde{f}\tilde{h}/\tilde{U}_{\max} \approx 0.32$).

In dem Experiment von 1975 [8] und den späteren Experimenten [9, 10] lagen unterschiedliche Bedingungen vor. Im ersten Experiment [8] - im folgenden als "2D-Experiment" bezeichnet - war die Grundströmung (d.h. die bei ruhendem Band vorliegende Strömung) nominal zweidimensional. Gemessen wurde an einer festen x_2 -Position. Die Meßposition wurde in x_3 und x_1 variiert, beginnend bei der Referenzposition ($x_1 = 0$) 32 cm unterhalb des Bandes. Die Entwicklung der maximalen Wellenamplitude $u_1'_{\max}$ (Maximum über x_3 der quadratisch gemittelten u_1 -Fluktuation) über x_1 bei verschieden starker Anregung ist in Abb. 5.1 gezeigt. Zwischen den Meßstationen A und B wächst die Amplitude in allen sechs Fällen an. Unterhalb von B liegt ein Schwellenwertverhalten vor. Kurve 3 bleibt über mehrere Wellenlängen nahezu konstant bei $u_1'_{\max} = 1.5$ %. Die Störungen mit kleineren Amplituden klingen ab, diejenigen mit höheren Amplituden führen zum Umschlag wie in 1.2.2 ausgeführt. Das spike-Stadium tritt im Fall 1 etwa bei der Station E auf.

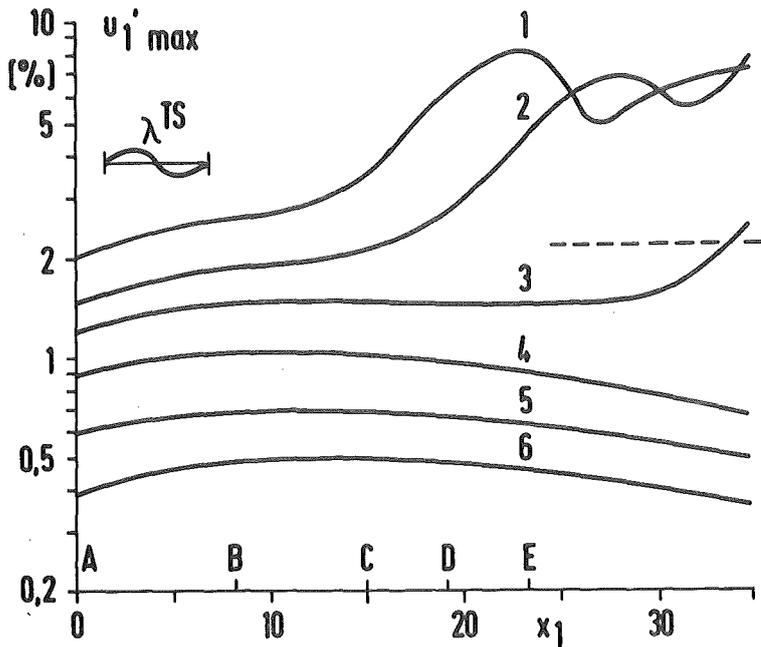


Abb. 5.1 Gemessene Stromabwärts-Entwicklung der maximalen Wellenamplitude $u_1'_{max}$ im "2D-Experiment" von Nishioka et al. [8] bei unterschiedlicher Anregung. λ^{TS} = Tollmien-Schlichting-Wellenlänge, A - E = Meßstationen, - - - Schwellenwert nach der zweidimensionalen Theorie [45] ($Re = 5000$, $\tilde{f} = 72$ Hz)

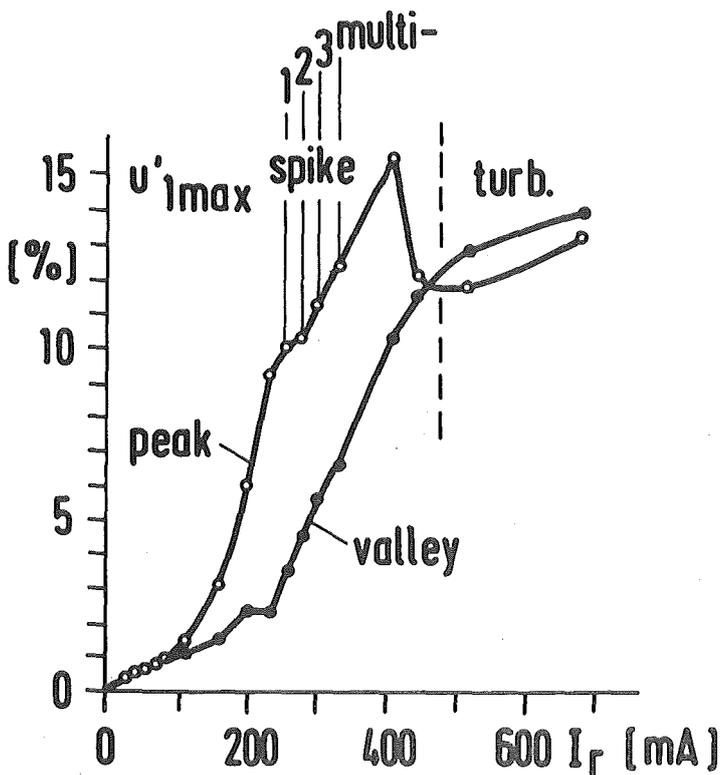


Abb. 5.2

Entwicklung von $u_1'_{max}$ mit wachsender Anregung (I_r = Strom durch das schwingende Band) bei fester x_1 -Position an den x_2 -Positionen "peak" und "valley" im "3D-Experiment" von Nishioka et al. [9] ($Re = 5000$, $\tilde{f} = 72$ Hz)

Im "3D-Experiment" [9, 10] wurde absichtlich eine "dreidimensionale Grundströmung" herbeigeführt. Die Geschwindigkeit \tilde{U}_{\max} in Kanalmitte variierte hier näherungsweise periodisch in x_2 um etwa 5 %, "caused by slight non-uniformity in the mesh of the most downstream damping screen in the settling chamber" [10]. Die Grundströmung blieb jedoch parabolisch in x_3 und änderte sich stromabwärts nicht. Die Dreidimensionalität der Grundströmung ist nicht näher dokumentiert. In diesem Experiment wurde die Messung an einer festen x_1 -Position 35 cm stromabwärts vom Band vorgenommen, dagegen die x_2 - und x_3 -Position variiert. Um an der Meßposition die aufeinanderfolgenden Entwicklungsstufen des Umschlagsprozesses beobachten zu können, wurde der Strom I_r durch das Band¹⁾ stufenweise erhöht. Wegen der Dreidimensionalität der Grundströmung hatte die vom Band angeregte Welle nicht mehr die Form der exakt zweidimensionalen Welle (1.3), sondern sie zeigte auch schon bei Amplituden $u_1'_{\max} < 1$ % eine Abhängigkeit von x_2 . Für $Re = 5000$, $\tilde{f} = 72$ Hz bildete sich an der Position $\tilde{x}_2 = 7.5$ cm ein Maximum (peak) und bei $\tilde{x}_2 = 6.4$ cm ein Minimum (valley) aus.

Die Werte von $u_1'_{\max}$ an diesen beiden Meßpositionen bei unterschiedlicher Anregung zeigt Abb. 5.2. Bei sehr kleinen Amplituden liegt ein lineares Verhalten vor, doch setzt schon bei $u_1'_{\max} < 1$ % die Aufspaltung in peak und valley ein. Mit wachsender Anregung nimmt die Amplitude am peak sehr viel schneller zu als am valley. Das spike-Stadium wird bei $u_1'_{\max}$ (peak) = 10-11 % erreicht. Es folgt ein Anstieg bis auf $u_1'_{\max} = 15$ % mit anschließendem Zusammenbruch der Welle, und bei noch höherer Anregung ist die Strömung an der Meßposition bereits turbulent. Insgesamt verläuft die Entwicklung bei festem x_1 und wachsender Anregung ähnlich wie bei konstanter Anregung und stromabwärts wandernder Meßposition (Abb. 5.2 hat große Ähnlichkeit mit Abb. 4 von Klebanoff et al. [24] für den Umschlag in der Plattengrenzschicht). Es ist jedoch anzunehmen, daß bei höheren Anregungsamplituden Unterschiede bestehen. In Abb. 5.2 werden doppelt so große Amplituden erreicht wie in Abb. 5.1, was auf die unterschiedlich starke Anregung und die Dreidimensionalität der Grundströmung im 3D-Experiment zurückzuführen sein dürfte.

¹⁾ Die Amplitude der Anregung wächst etwa linear mit I_r an

5.1.2 Modellierung und Bezeichnungen

Das der numerischen Simulation zugrunde liegende mathematische Modell wurde bereits in Kap. 2 erläutert. Die sich im Experiment in x_1 entwickelnde, zeitlich periodische Strömung wird durch eine sich zeitlich entwickelnde, in x_1 periodische Strömung modelliert. An die Stelle der kontinuierlichen Anregung durch das schwingende Band an fester x_1 -Position tritt in der Simulation eine aus der Orr-Sommerfeld-Gleichung mit zeitlicher Anfachung ($\alpha_1 = 0$ in (2.2)) berechnete Anfangsstörung. In der Regel wird in dem mit $C = c^{TS} = \omega_r^{TS}/\alpha_1$ mitbewegten Bezugssystem gerechnet. Formal sind für die Zuordnung Experiment - Simulation die Zeit t und die Längskoordinate x_1^C zu vertauschen. Der Periodizitätsbereich ist $0 \leq t \leq T^{TS}$ im Experiment und $0 \leq x_1^C \leq L_1 = 2\pi/\alpha_1$ in der Simulation. Die Mittelwertbildung erfolgt jeweils über diesen Bereich. Mit

$$u_j'' = u_j - \bar{u}_j$$

bezeichnen wir den fluktuierenden Anteil, dessen Größe wir durch den rms¹⁾-Wert

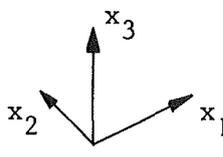
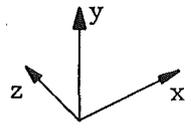
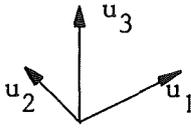
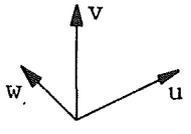
$$u_j' = ((u_j'')^2)^{1/2}$$

messen. Das Maximum von u_j' über die Kanaltiefe,

$$u_1' \max = \max_{x_3} u_1',$$

ist ein Maß für die Wellenaktivität an einer bestimmten Spannweitenposition x_2 . Die einander in Experiment und Simulation entsprechenden Größen sind in Tab. 5.1 zusammengestellt (um den Vergleich mit den Arbeiten [8 - 10] zu erleichtern, sind die dort benutzten Bezeichnungen mit aufgeführt).

1) rms = root mean square

Größe	Simulation	Experiment
Koordinaten		
Geschwindigkeit		
Periodizitätsbereich	$0 \leq x_1^c \equiv x_1 - Ct \leq L_1$	$0 \leq t \leq T^{TS}$
Entwicklung	in t	in x
mittlere Stromabwärtsgeschwindigkeit	$U + \bar{u}_1 = U + \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} u_1 dx_1^c$	$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt$
rms-Wert der u_1 -Fluktuation	$u_1'(x_2, x_3, t) = \overline{(u_1 - \bar{u}_1)^2}^{1/2}$	$u'(z, y, x) = \overline{(u - \bar{u})^2}^{1/2}$
max. rms-Wert	$u_1'_{\max}(x_2, t) = \max_{x_3} u_1'$	$u_m'(z, x) = \max_y u'$

Tab. 5.1 Korrespondierende Größen und Bezeichnungen in Simulation und Experiment [8 - 10]

Als Maß für die Größe der Fourier-Koeffizienten $\hat{u}_j(k_1, k_2, x_3)$ in der Fourier-Zerlegung (4.1) führen wir für $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$ die Größe

$$\hat{u}_{j\max}(k_1, k_2) = f(k_1, k_2) \cdot \max_{x_3} |\hat{u}_j(k_1, k_2, x_3)|^{1)} \quad (5.0)$$

ein, wobei der Faktor

$$f(k_1, k_2) = \begin{cases} 1, & k_1 = k_2 = 0 \\ 2, & \text{sonst} \\ 4, & k_1 \neq 0 \text{ und } k_2 \neq 0 \end{cases}$$

dafür sorgt, daß die Beiträge aller Modes (l_1, l_2) mit $|l_1| = k_1, |l_2| = k_2$ mitberücksichtigt werden. $\hat{u}_{j\max}(k_1, k_2)$ gibt also den betragsmäßig maximal möglichen Wert desjenigen Anteils von u_j an, der in x_1 -Richtung die Wellenlänge L_1/k_1 und in x_2 -Richtung die Wellenlänge L_2/k_2 hat. Bei zweidimensionalen (x_2 -unabhängigen) Größen schreiben wir auch kürzer

$$\hat{u}_{j\max}(k_1) = \hat{u}_{j\max}(k_1, 0) .$$

Die für die Simulation des Umschlags verwendete Anfangsverteilung hat die Form

$$\underline{u}^0(\underline{x}) = A^{TS} \cdot \underline{u}^{TS}(x_1^c, x_3) + A^{3D} \underline{u}^{3D}(\underline{x}) .$$

Für \underline{u}^{TS} wählen wir die Orr-Sommerfeld-Eigenlösung mit maximaler Anfangung, bei der die x_3 -Verteilung von u_1 antisymmetrisch ist. Die Amplitude von \underline{u}^{TS} ist auf $\max(x_1^c, x_3) |u_1^{TS}| = 1$ normiert. Die Phase ist so gewählt, daß das Maximum von u_1^{TS} bei $t = 0$ in $x_1 = 0$ auftritt. Der dreidimensionale Anteil in \underline{u}^0 , dessen Form später erläutert wird, hat stets eine Amplitude $A^{3D} \ll A^{TS}$. Eine mittlere Störung wird nicht vorgegeben, $\underline{u}^0 = 0$.

Neben diesen systematischen, durch das mathematische Modell und die gewählten Anfangsbedingungen gegebenen Unterschieden zwischen Simulation

1) In den numerischen Ergebnissen wird hier wie in allen anderen Fällen das Maximum über die $N_3 + 1$ diskreten Punkte $x_{3,j}$ nach Gl. (4.9) genommen

und Experiment gibt es eine Reihe von Abweichungen, die eher zufällig sind und auf mehr oder weniger unvermeidbare Unvollkommenheiten im Experiment zurückzuführen sind. So ist auch im 2D-Experiment die Grundströmung leicht von x_2 abhängig (Variation um 2 % bei $Re = 5000$) und weist eine antisymmetrische Abweichung von der Parabelform auf [8]. Die Abhängigkeit der gemessenen Strömungsgrößen von x_2 ist nicht strikt periodisch. Da die dreidimensionale Struktur nicht wie in den Experimenten von Klebanoff et al. [24] in der Teststrecke aufgeprägt wird, kann ihre x_2 -Position möglicherweise schwanken und damit die Messung von Mittelwerten verfälschen.

Beim Vergleich von Simulationsergebnissen mit den Messungen sind die genannten Abweichungen in Betracht zu ziehen. Insgesamt entspricht die Simulation mehr der Situation im 2D-Experiment. Da dort jedoch keine Messungen der x_2 -Abhängigkeit gemacht wurden, werden wir die numerischen Ergebnisse überwiegend mit dem 3D-Experiment vergleichen. Zur Zuordnung werden wir hauptsächlich den Wert von $u_1'_{\max}$ an der peak-Position benutzen.

5.2 Zweidimensionale Störungen endlicher Amplitude

Die in den Experimenten zum Umschlag angeregte Wellenstörung bleibt zunächst angenähert zweidimensional. Es ist daher für das Verständnis des Gesamtvorgangs wichtig, die Entwicklung einer rein ebenen (zweidimensionalen) Störung ($u_2 = 0$, keine Abhängigkeit von x_2) zu kennen. Die lineare Stabilitätstheorie kann sich sogar auf ebene Störungen beschränken, da jede dreidimensionale Störung (1.4) mittels der Squire-Transformation auf eine ebene Störung (1.3) mit einer kleineren Reynoldszahl zurückgeführt werden kann [22]. Auch die meisten nichtlinearen Untersuchungen [40 - 47, 98] beschränken sich auf zweidimensionale Störungen. Wir wollen die für das folgende wichtigen Ergebnisse kurz referieren.

Die wesentlichen, durch die Nichtlinearität bewirkten Effekte bei Störungen endlicher Amplituden sind die Erzeugung von höheren Harmonischen und von nicht mehr vernachlässigbaren Reynoldsspannungen

$$\tau_R = \overline{-u_1'' u_3''} \quad (5.1)$$

(die Mittelung erstreckt sich über eine Wellenlänge L_1 in x_1 -Richtung). Die Reynoldsspannungen führen zu einer Verformung der mittleren Geschwindigkeit $U + \bar{u}_1$ gemäß

$$\partial_t(U + \bar{u}_1) = \frac{2}{Re} + \frac{1}{Re} \partial_3^2(U + \bar{u}_1) + \partial_3 \tau_R \quad (5.2)$$

(der Term $2/Re$ ist der vorgegebene mittlere Druckgradient). Diese Verformung bewirkt eine Modifikation des Energiestroms von der mittleren Strömung in die Fluktuation und damit eine Veränderung in der Entwicklung der Störungen. Wir bezeichnen wie in [45] mit E' die gesamte Energie der Fluktuation \underline{u}'' im betrachteten Integrationsbereich $\{0 \leq x_1^c \leq L_1, |x_3| \leq 1\}$, bezogen auf die Energie

$$E^U = \int_0^{L_1} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} U^2(x_3) dx_1^c dx_3 = \frac{8}{15} L_1$$

der ungestörten Grundströmung:

$$E' = \frac{15}{8L_1} \int_0^{L_1} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (u_1''^2 + u_3''^2) dx_1^c dx_3 \quad (5.3)$$

Setzen wir den Fourier-Ansatz (4.1) ein, erhalten wir die Beiträge der einzelnen Harmonischen:

$$E' = \sum_{k_1=1}^{k_{1\max}} E(k_1) \quad (5.4)$$

mit

$$E(k_1) = \frac{15}{8} \int_{-1}^1 (|\hat{u}_1(k_1, x_3)|^2 + |\hat{u}_3(k_1, x_3)|^2) dx_3 \quad (5.5)$$

Die zeitliche Änderung von E' ist gegeben durch

$$\partial_t E' = P' - D' \quad (5.6)$$

wobei

$$P' = \frac{15}{8} \int_{-1}^1 \tau_R \cdot \partial_3 (U + \bar{u}_1) dx_3 \quad (5.7)$$

$$D' = \frac{15}{8} \frac{1}{Re} \int_{-1}^1 \overline{\omega_2''^2} dx_3 \quad (5.8)$$

mit

$$\omega_2'' = \partial_3 u_1'' - \partial_1 u_3''$$

die Produktion von fluktuierender Energie bzw. deren Dissipation durch Reibung darstellen. Bleibt $P' < D'$, so klingt die Störung ab, für $P' > D' > 0$ nimmt sie ständig zu. Im letzten Fall kann ein Gleichgewichtszustand mit $P' = D'$ erreicht werden.

Dieser Fall tritt für einen gewissen Bereich von Reynoldszahlen Re und Wellenzahlen α_1 tatsächlich ein, und zwar hat der Gleichgewichtszustand die Form der (bereits in 1.2.3 genannten) periodischen Sekundärströmung

$$\underline{u}^{PS}(x_1, x_3, t) = \sum_{k_1} \hat{\underline{u}}(k_1, x_3) \exp[-ik_1 \alpha_1 (x_1 - c^{PS} t)] \quad (5.9)$$

Dabei ist c^{PS} reell und $\hat{\underline{u}}$ zeitunabhängig, also \underline{u}^{PS} stationär im Bezugssystem (2.9) mit $C = c^{PS}$. Der Ort der periodischen Sekundärströmung im Parameterraum (Re, α_1, E') bildet die ebenfalls bereits erwähnte neutrale Fläche, die in Abb. 5.3 gezeigt ist (nach Herbert [45], berechnet mit $k_1 \leq k_{1max} = 2$ Fouriermodes in (5.9)). Der "Nasenpunkt" liegt bei $Re = 2935$, $\alpha_1 = 1.32$, $E' = 0.00826$ ([44], $k_{1max} = 4$). Die Schnittkurve der neutralen Fläche mit der Ebene $E' = 0$ ist die neutrale Kurve L der linearen Stabilitätstheorie, die den Bereich instabiler Tollmien-Schlichting-Wellen umschließt. Bei zweidimensionalen Störungen endlicher Amplitude, für die (Re, α_1) außerhalb des von der Kurve NL umschlossenen Bereichs liegt, existiert kein Gleichgewichtszustand (5.9)¹⁾; sie klingen schließlich ab. Für (Re, α_1) innerhalb dieser Kurve, aber im linear stabilen Bereich (also zwischen L und NL), liegt das bereits genannte Schwellenwertverhalten vor. Dies ist in Abb. 5.4 nochmals erläutert, wo ein Schnitt durch die neutrale Fläche bei $\alpha_1 = 1.3$ gezeigt wird. Der untere Zweig ist instabil, der obere stabil (im Sinne einer

¹⁾Diese Aussage ist bisher nicht streng bewiesen [45]

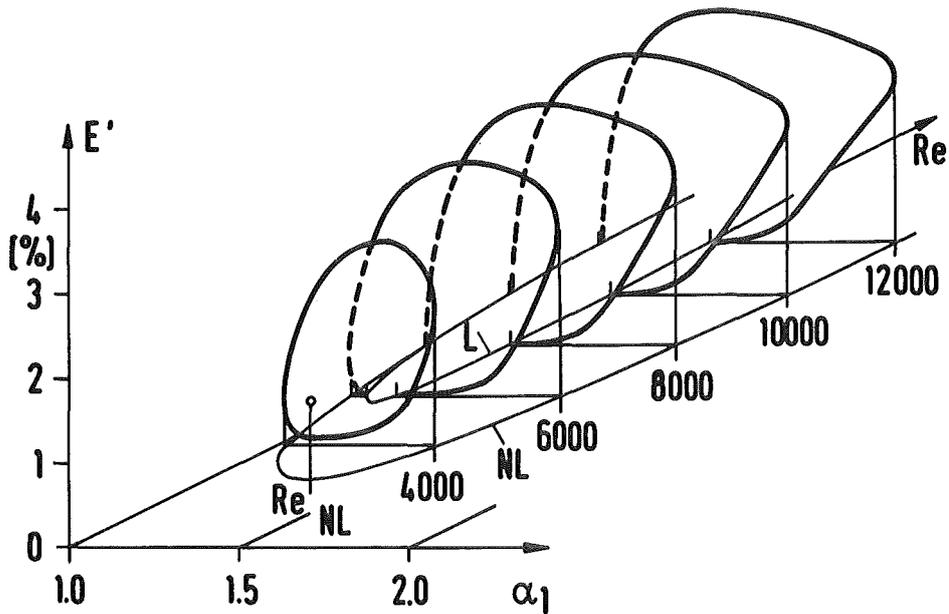


Abb. 5.3 Die neutrale Fläche der ebenen Poiseuille-Strömung für zweidimensionale Störungen, nach Herbert [45] (berechnet mit $k_{1\max} = 2$ Fouriermoden). Sie gibt an, für welche Reynoldszahl Re , Wellenzahl α_1 und Fluktuationsenergie E' eine stationäre periodische Störung (5.9) existiert. L ist die neutrale Kurve der linearen Stabilitätstheorie. Die Projektion der neutralen Fläche auf die Ebene $E' = 0$ ergibt den von der Kurve NL umschlossenen Bereich mit einer minimalen Reynoldszahl $Re_{NL} = 2935$ ([44], $k_{1\max} = 4$)

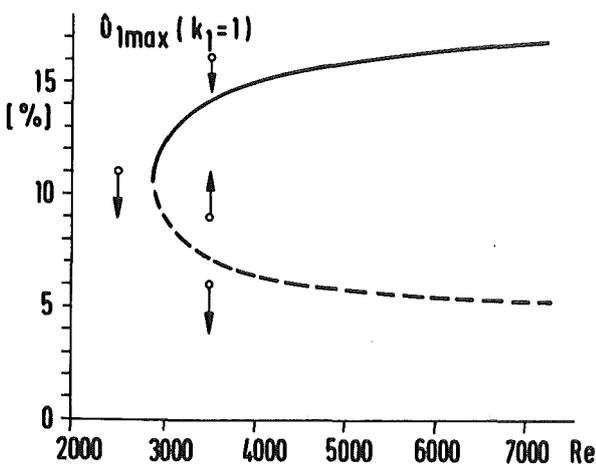


Abb. 5.4

Schnitt durch die neutrale Fläche bei $\alpha_1 = 1.3$, mit $\hat{u}_{1\max}(k_1 = 1)$ statt E' als Maß für die Störungsamplitude (skizziert nach Daten von Herbert [99]). Die Pfeile deuten das asymptotische Verhalten ($t \rightarrow \infty$) zeitabhängiger Störungen an

Stabilität gegen zusätzliche kleine, zweidimensionale Störungen derselben Wellenzahl α_1 [57]). Störungen mit $\alpha_1 = 1.3$ klingen bei $Re \lesssim 3000$ für $t \rightarrow \infty$ stets ab, bei $Re \gtrsim 3000$ klingen sie je nach Anfangsamplitude ab oder gehen in die stabile periodische Sekundärströmung über.

Im folgenden berichten wir über instationäre Rechnungen zu zweidimensionalen Störungen endlicher Amplitude, die exemplarisch bei $Re = 3500$, $\alpha_1 = 1.3$ durchgeführt wurden. Ziel ist es, zum einen nachzuweisen, daß unser Rechenprogramm das theoretisch erwartete Verhalten richtig wiedergibt. Zum anderen soll der bei der zeitabhängigen Entwicklung auftretende quasistationäre Zustand eingehend untersucht werden, der die Basis für den Umschlagsprozeß bildet. Ferner gehen wir auf das Verhalten der periodischen Sekundärströmung bei zusätzlich eingebrachten dreidimensionalen Störungen ein. Zunächst wird aber über Nachrechnungen der periodischen Sekundärströmung berichtet, die zur Verifikation des Rechenprogramms vorgenommen wurden.

5.2.1 Nachrechnung der periodischen Sekundärströmung

Die Referenzlösung [997] für die Nachrechnungen wurde - ebenfalls mit einem Fourier-Chebyshev-Spektralverfahren - aus den stationären Gleichungen berechnet¹⁾. Die Genauigkeit dieser Ergebnisse wurde sorgfältig nachgewiesen [457]. Wir berichten über eine Nachrechnung des oberen und unteren Zweiges bei $Re = 3500$, $\alpha_1 = 1.3$. Der Zeitbereich war $0 \leq t \leq 80$, entsprechend etwa 6 Schwingungsperioden $T^{PS} = 2\pi/(\alpha_1 c^{PS}) \approx 14$.

Zunächst wurde im stationären Bezugssystem ($C = c^{PS}$) gerechnet. Die bei $t = 0$ eingegebene "exakte" Lösung wurde über den gesamten Zeitbereich ausgezeichnet reproduziert. Tab. 5.2a, S. 53, zeigt die in $t = 80$ erhaltenen Werte von \hat{u}_{1max} und E' zusammen mit den Referenzwerten ($t = 0$). Die absolute Abweichung beträgt nicht mehr als 0.02 % in \hat{u}_{1max} und

1) Die Daten zur periodischen Sekundärströmung sowie Programme zur Lösung der Orr-Sommerfeld-Gleichung wurden freundlicherweise von Prof. Th. Herbert, Virginia Polytechnic Institute and State University, zur Verfügung gestellt.

0.002 % in E' . Die räumliche Diskretisierung in dieser Rechnung war gleich wie bei der Berechnung der Referenzlösung, $k_{lmax} = 4$ und $N_3 = 40$. (Um wie dort aliasing-Fehler bezüglich der Fourierentwicklung zu vermeiden, wurden in diesen Rechnungen für die Berechnung der nichtlinearen Terme nicht $N_1 = 2 k_{lmax} = 8$, sondern $N_1 = 16$ Punkte verwendet. Vergleichsrechnungen zeigten jedoch, daß diese Fehler unwesentlich sind.) Zur Zeitintegration wurde das Leapfrog-Verfahren mit $\Delta t = 0.2$ und zum Start das modifizierte Euler-Verfahren benutzt (s. Anhang A1).

Fall	t	$\hat{u}_{lmax} (k_1 = 1) \underline{\underline{\%}}$	$E' \underline{\underline{\%}}$
oberer Zweig	0	<u>14.164</u>	<u>1.6550</u>
	80	<u>14.177</u>	<u>1.6570</u>
unterer Zweig	0	<u>7.053</u>	<u>0.2756</u>
	80	<u>7.037</u>	<u>0.2743</u>

Tab. 5.2a Nachrechnung der periodischen Sekundärströmung (oberer und unterer Zweig) bei $Re = 3500$, $\alpha_1 = 1.3$. Die Übereinstimmung mit den Referenzwerten von Herbert $\underline{\underline{\%}}$ (unterstrichene Zahlen) ist sehr gut

Anfangs- amplitude	t	$\hat{u}_{lmax} (k_1=1) \underline{\underline{\%}}$	$E' \underline{\underline{\%}}$
erhöht	80 \uparrow	7.149	0.2842
	0 \circ	7.100	0.2794
erniedrigt	0 \circ	7.000	0.2716
	80 \downarrow	6.912	0.2634

Tab. 5.2b (Erläuterung auf Seite 56) Instationäre Rechnung beim unteren Zweig mit leicht erhöhter bzw. leicht erniedrigter Anfangsamplitude der Fluktuation

In den später betrachteten instationären Fällen ist der genaue Wert der Wellengeschwindigkeit c im allgemeinen nicht bekannt. Der gleiche Fall wurde daher auch im ruhenden Bezugssystem ($C = 0$) und mit $C = 0.5$ (maximale Stabilität) gerechnet. Die Abweichungen von der Referenzlösung waren nur geringfügig größer. So ergaben sich beim oberen Zweig für $C = 0.5$ in $t = 80$ die Werte $\hat{u}_{1\max}(1) = 14.195\%$ und $E' = 1.6610\%$, also eine absolute Abweichung von nur 0.03% . Abb. 5.5 zeigt die Geschwindigkeit u_3 in der Kanalmitte und bei $x_3 = 0.707$ bei der Rechnung mit $C = 0$. Die Grundschiwingung $\sim \cos \alpha_1(x_1 - c^{PS} t)$ dominiert, es werden nur geringe Beiträge von höheren Harmonischen sichtbar. Die maximalen Fourier-Amplituden $\hat{u}_{1\max}(k_1)$ sind in Abb. 5.6 gezeigt. Die Anfangswerte bleiben praktisch unverändert erhalten. Die Amplituden der höheren Harmonischen liegen eine Größenordnung unter derjenigen der Grundschiwingung.

Anhand dieser Referenzlösung wurde eine Reihe von weiteren numerischen Parametern variiert, wie N_1 und $k_{1\max}$, Zeitschrittweite Δt und Zeitintegrationsverfahren. Eine Rechnung beim oberen Zweig mit $k_{1\max} = 6, N_1 = 16$ ergab bei $t = 80$ eine absolute Abweichung in $\hat{u}_{1\max}$ von 0.06% . Selbst bei einer Verringerung auf $k_{1\max} = 3$ und $N_1 = 8$ betrug diese Abweichung nicht mehr als 0.2% . Dies bestätigt die Erfahrung von Herbert [45], daß bei Reynoldszahlen um 3000 $k_{1\max} = 3$ bis 4 ausreicht in dem Sinne, daß sich bei Hinzunahme weiterer Harmonischen die Ergebnisse relativ um nicht mehr als etwa 1% ändern. Generell nimmt die erforderliche Anzahl $k_{1\max}$ mit steigender Reynoldszahl und wachsender Amplitude zu.

Entsprechende Rechnungen wurden auch bei $Re = 7000$ durchgeführt. Stets ergab sich eine gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung. Über weitere Testrechnungen, u.a. anhand von Orr-Sommerfeld-Eigenlösungen und der exakten Lösung des zweidimensionalen Stokes-Problems, wird im Anhang berichtet. Die Schlußfolgerung aus allen Rechnungen zu diesen nichttrivialen und für die Stabilitätsuntersuchung einschlägigen Testproblemen lautet, daß unser Rechenprogramm derartige laminare Strömungen mit ausgezeichneter Genauigkeit berechnen kann.

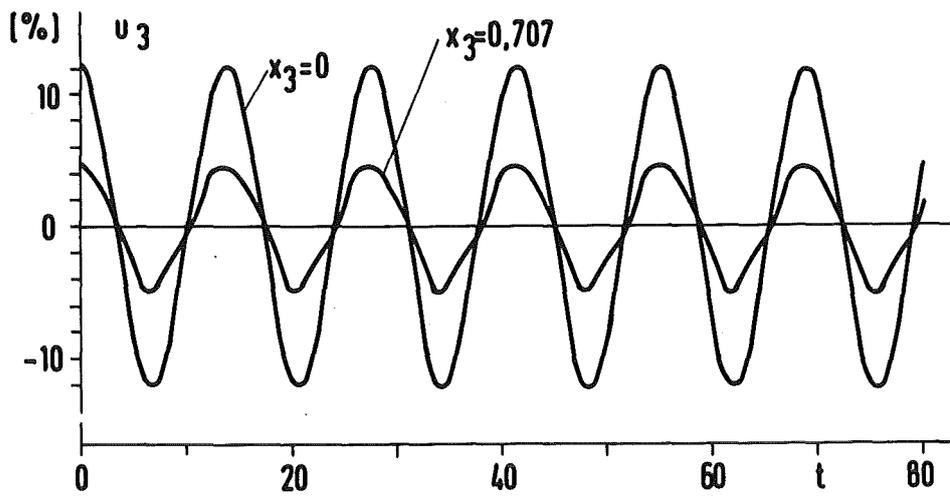


Abb. 5.5 Nachrechnung der periodischen Sekundärströmung $\underline{99}_7$ bei $Re = 3500$, $\alpha_1 = 1.3$. Zeitlicher Verlauf von u_3 im ruhenden Bezugssystem

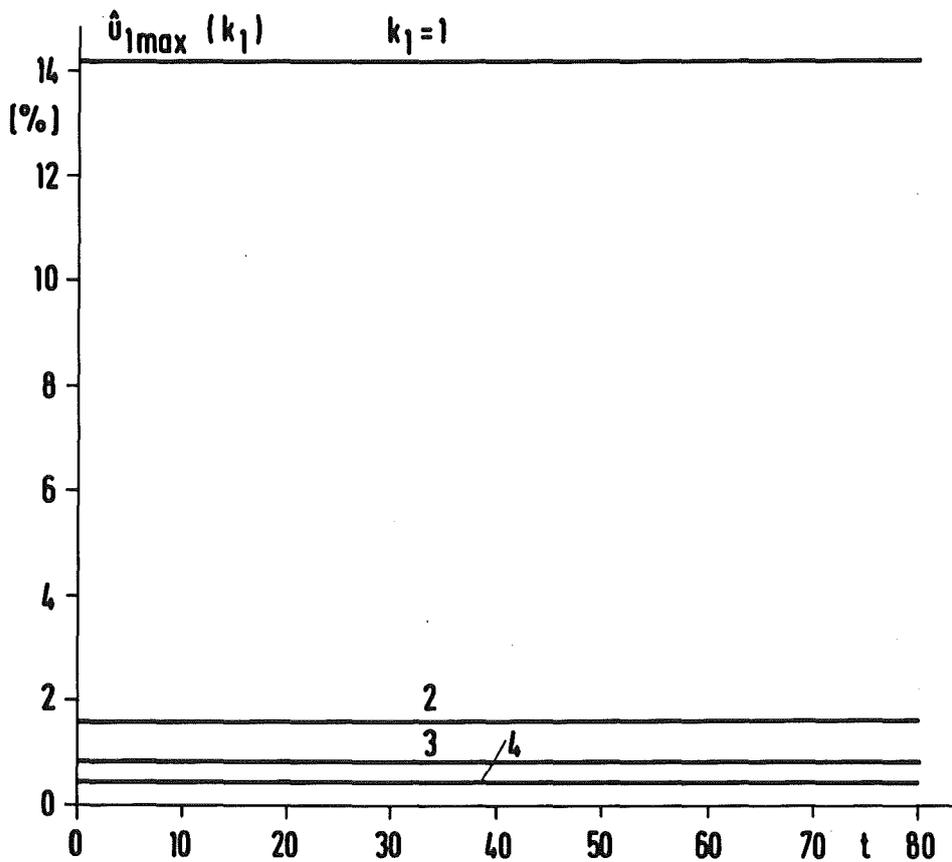


Abb. 5.6 Amplituden der Fourier-Koeffizienten bei der Nachrechnung von Abb. 5.5

5.2.2 Instationäre Entwicklung

Wir wenden uns nun der instationären Entwicklung bei verschiedenen Anfangsstörungen zu, wieder bei $Re = 3500$, $\alpha_1 = 1.3$. Als erstes untersuchen wir die Auswirkungen einer leichten Erhöhung bzw. Erniedrigung der Anfangsamplitude gegenüber dem stationären Zustand. Dazu wurde der fluktuierende Anteil \underline{u}''^{PS} mit einem Faktor > 1 bzw. < 1 multipliziert, aber der stationäre Mittelwert \bar{u}_1^{PS} beibehalten. Die Ergebnisse sind in Tab. 5.2b gezeigt (die numerischen Parameter waren dieselben wie für Tab. 5.2a). Die Störungen entwickeln sich wie nach Abb. 5.4 erwartet: Die auf 7.1 % erhöhte Anfangsamplitude \hat{u}_{1max} wächst leicht an auf 7.15 % bei $t = 80$, die auf 7.0 % erniedrigte Anfangsamplitude geht weiter zurück auf 6.9 %. Der Schwellenwert wird also von der instationären Rechnung scharf erfaßt. Bei dieser minimalen Anfangsauslenkung erfolgt die instationäre Entwicklung sehr langsam. Bei größerer Auslenkung geht sie etwas rascher vor sich: von 8 % auf 9.6 % bzw. von 6 % auf 4.4 % im gleichen Zeitbereich. Bei einer entsprechenden Auslenkung am oberen, stabilen Zweig zeigte sich ein oszillierendes Verhalten für $t \leq 2 T^{PS}$, gefolgt von einer sehr langsamen monotonen Rückbewegung in Richtung zum stationären Zustand.

Ebenfalls für $Re = 3500$, $\alpha_1 = 1.3$ wurde die instationäre Entwicklung bei Vorgabe einer Tollmien-Schlichting-Welle $\underline{u}^o(\underline{x}) = A^{TS} \cdot \underline{u}^{TS}(\underline{x})$ als Anfangsstörung untersucht. Die Daten der Tollmien-Schlichting-Welle sind $\omega_r = 0.4119$, $\omega_i = 0.0154$, $T^{TS} = 2\pi/\omega_r = 15.26$. Hier wurde der Mittelwert $\bar{u}^o(\underline{x}) = 0$ gesetzt. Die Anfangsamplitude $A^{TS} = \hat{u}_{1max}$ ($k_1 = 1$, $t = 0$) wurde von 2 % bis 30 % variiert. Die räumliche Diskretisierung war $N_1 = 16$, $k_{1max} = 5$ (Fourier-aliasing-frei), $N_3 = 40$. Die zeitliche Entwicklung von \hat{u}_{1max} ($k_1 = 1$) ist in Abb. 5.7 für verschiedene Amplituden A^{TS} gezeigt. Bei kleinen Amplituden fällt \hat{u}_{1max} monoton ab. Bei größeren Amplituden wird erst eine Einschwingphase von $2-3 T^{TS}$ durchlaufen, bevor ein quasistationärer Zustand mit monotonem Abfallen oder Anwachsen erreicht ist. Die Einschwingphase ist um so ausgeprägter, je größer A^{TS} ist. Dies ist verständlich, da die Anfangsverteilung eine Lösung der linearisierten Gleichungen und hinsichtlich Amplitude und räumlicher Verteilung weit vom stationären Zustand entfernt ist. Die

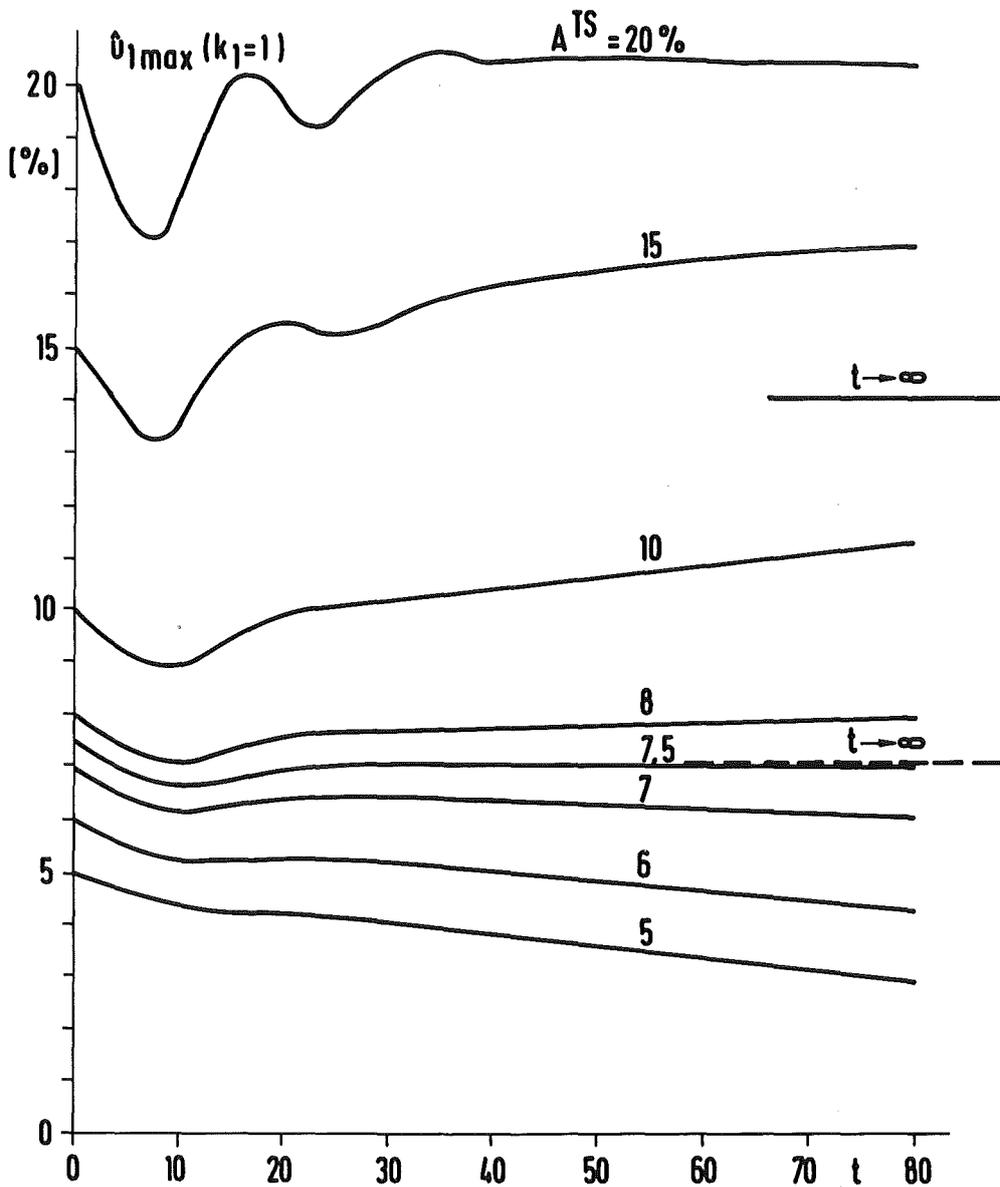


Abb. 5.7 Nichtlineare Entwicklung von $\hat{u}_{1\max}$ bei einer Tollmien-Schlichting-Anfangsstörung mit verschiedenen Anfangsamplituden $A^{TS} = \hat{u}_{1\max}(k_1=1, t=0)$ bei $Re = 3500$, $\alpha_1 = 1.3$. Die asymptotischen Werte des unteren und oberen Zweiges gemäß Abb. 5.4 nach [99] sind ebenfalls eingezeichnet

Werte von $\hat{u}_{1\max}(k_1 = 1)$ für die beiden Zweige der periodischen Sekundärströmung sind in Abb. 5.7 ebenfalls eingezeichnet. Es wird deutlich, daß der asymptotische Wert für den oberen Zweig bei $t = 80$ noch nicht annähernd erreicht ist. Jedoch ist das Schwellenwertverhalten beim unteren Zweig gut erkennbar: die Störungen mit $A^{TS} < 7.5\%$ klingen ab, diejenigen mit $A^{TS} > 7.5\%$ wachsen an. Die Störung mit $A^{TS} = 7.5\%$ bleibt für $t \geq 30$ nahezu konstant, und $\hat{u}_{1\max}$ fällt fast mit dem stationären Schwellenwert $\hat{u}_{1\max} = 7.05\%$ zusammen. Die Störungen mit großen Anfangsamplituden wachsen deutlich an, und zwar über den asymptotischen Wert von 14% hinaus. Erst bei sehr großen Anfangsamplituden ($A^{TS} \approx 30\%$) ist schon nach der Einschwingphase ein Rückgang der Amplitude zu beobachten.

5.2.3 Der quasistationäre Zustand

Den quasistationären Zustand wollen wir uns am Beispiel mit Anfangsamplitude $A^{TS} = 10\%$ näher ansehen. Abb. 5.8 zeigt die Entwicklung von $\hat{u}_{1\max}(k_1)$, $k_1 \leq 3$, für $t \leq 150$. In $t \leq 10$ werden durch die Nichtlinearität die Harmonischen $k_1 > 1$ angeregt. Die quasistationäre Phase beginnt bei $t \approx 3 T^{TS} \approx 45$. Grundschwingung und Harmonische wachsen monoton an. Eine Weiterintegration bis $t = 300$ zeigte, daß die stationären Werte weit überschritten werden. In $t = 300$ war $\hat{u}_{1\max}(1) = 18.3\%$. Allerdings ist das Wachstum dann nicht mehr so stark; $\partial_t \hat{u}_{1\max}$ nimmt für $t \geq 200$ leicht ab. Zahlenwerte für $\hat{u}_{1\max}(k_1 = 1)$ und die Energie E' der Fluktuation sind in Tab. 5.3a zusammengestellt. Die Energie der Anfangsstörung beträgt das 0.23-fache des stationären Wertes, der bei $t \approx 200$ überschritten wird, und in $t = 300$ das 1.6-fache. Die Energie E' steckt übrigens (Angaben für den stationären Zustand) zu 99.7% in der Grundschwingung $E(k_1 = 1)$, Gl. (5.4), davon 60% in der u_1 -Komponente. Ebenfalls angegeben sind die Werte von Produktion P' und Dissipation D' . Der Verlauf von P' und D' sowie deren Differenz, die nach (5.6) die zeitliche Änderung von E' bestimmt, ist in Abb. 5.9 für $t \leq 150$ gezeigt. In $t = 0$, d.h. für die lineare Eigenlösung, ist $P' = -1 \cdot 10^{-5}$, so daß E' zunächst abnimmt (vgl. Abb. 5.8). P' nimmt jedoch rasch zu, wechselt bei $t = 4$ das Vorzeichen und überschreitet bei $t = 7$ den Wert der

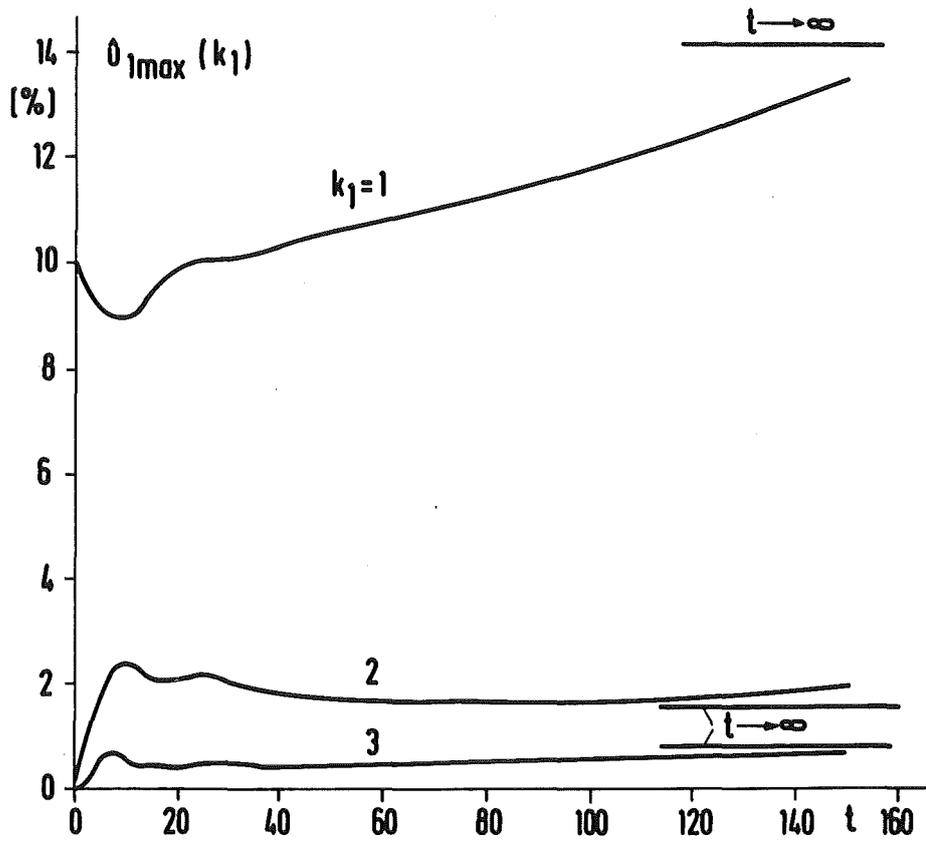


Abb. 5.8 Einschwingphase und quasistationäre Entwicklung der Fourieramplituden $\hat{u}_{1\max}$ bei $A^{TS} = 10\%$ ($Re = 3500$, $\alpha_1 = 1.3$)

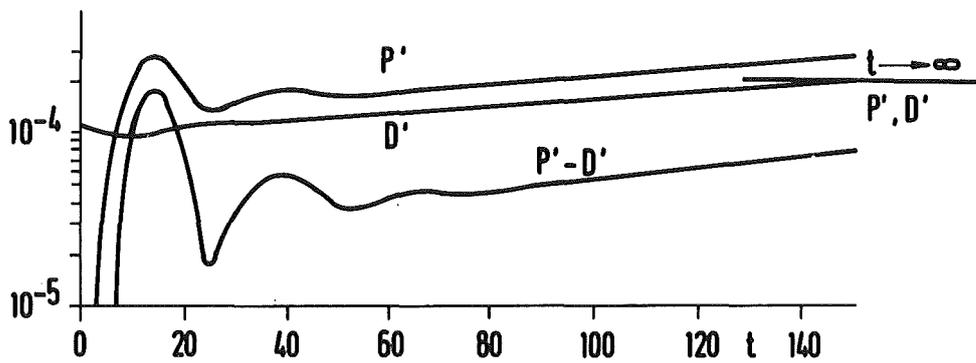


Abb. 5.9 Produktion P' und Dissipation D' von Fluktuationsenergie E' . Für $t < 4$ ist $P' < 0$

Dissipation D' , die sich in der Einschwingphase nur wenig ändert. Für $t > 7$ bleibt $P' > D'$. In der quasistationären Phase wachsen P' und D' monoton an - etwa gemäß $\exp(0.007 t)$ -, wobei das Verhältnis $P'/D' \approx 1.3$ etwa konstant bleibt. Bei $t = 150$ haben P' und D' den stationären Wert überschritten.

Fall	t	$\hat{u}_{1\max}(k_1=1)$ \overline{L}_{99}	E' \overline{L}_{99}	P' $\cdot 10^4$	D' $\cdot 10^4$	$(U+\bar{u}_1)(0)$	\bar{E}
a	0	10.00	0.387	-0.105	1.091	1.0000	1.0000
	30	10.68	0.522	1.496	1.136	0.9990	0.9955
	150	13.53	1.185	2.762	1.978	0.9938	0.9712
	300	18.28	2.588	4.393	3.540	0.9757	0.9167
\overline{L}_{99}	∞	14.16	1.655	1.999	1.999	0.8316	0.6581
b	150	12.23	1.025	1.896	1.534	0.8946	0.7784
	300	13.84	1.498	2.171	1.888	0.8309	0.6614
	450	13.78	1.528	1.914	1.890	0.8329	0.6627

Tab. 5.3 Entwicklung zum stationären Zustand \overline{L}_{99} bei Start mit Orr-Sommerfeld-Eigenlösung ($Re = 3500$, $\alpha_1 = 1.3$, $A^{TS} = 10\%$). a) ohne, b) mit wiederholter Verwendung der stationären Gleichung für die mittlere Strömung.

Wir halten fest, daß die Fluktuation u'' nach einer Einschwingphase $t \lesssim 3 T^{TS}$ eine quasistationäre Wachstumsphase durchläuft, die über den stationären Zustand hinausführt und auch bei $t \approx 20 T^{TS}$ noch fast unvermindert andauert. Wir wollen im folgenden zeigen, daß der quasistationäre Zustand für Zeiten von der Größenordnung der Reynoldszahl anhält und der asymptotische, stationäre Zustand erst nach dieser extrem langen Zeit erreicht wird. Die Ursache ist darin zu suchen, daß sich die mittlere Strömung \bar{u}_1 nur auf dieser langsamen, "diffusiven" Zeitskala ändert.

Betrachten wir dazu den Wert der mittleren Geschwindigkeit in Kanalmitte $(U + \bar{u}_1)(x_3 = 0)$, Tab. 5.3a. In $t = 300$ ist er erst um 2.4 % zurückgegangen, während der stationäre Wert 17 % unter dem Anfangswert liegt. Auch die Energie der mittleren Strömung, definiert durch

$$\bar{E} = \frac{15}{8} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (U + \bar{u}_1)^2 dx_3, \quad (5.10)$$

nimmt nur sehr langsam ab: Sie beträgt bei $t = 300$ immer noch 92 % des Anfangswertes, während der stationäre Wert bei 66 % liegt. Um diese langsame Entwicklung zu verstehen, sehen wir uns Gl. (5.2) an. Eine Integration über x_3 ergibt für den stationären Fall

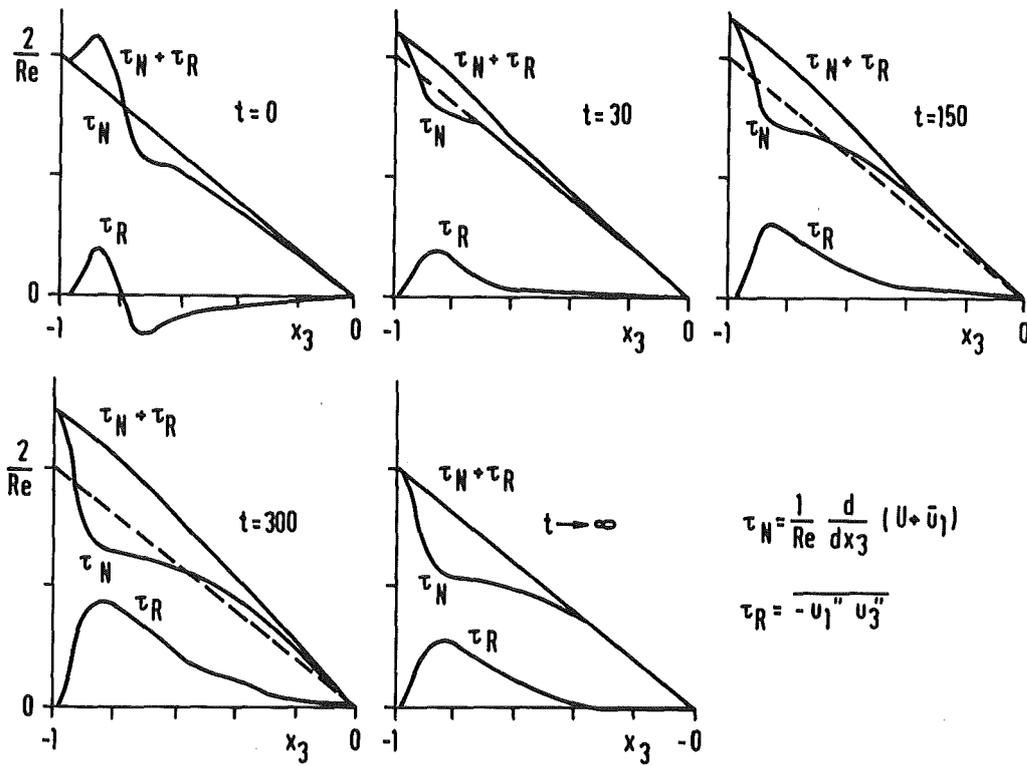
$$\tau_N + \tau_R = -\frac{2}{Re} x_3 \quad (\text{stationär}), \quad (5.11)$$

wobei wir

$$\tau_N = \frac{1}{Re} \partial_3 (U + \bar{u}_1) = -\frac{2}{Re} x_3 + \frac{1}{Re} \partial_3 \bar{u}_1 \quad (5.12)$$

für die Newtonsche Reibungsschubspannung gesetzt haben. Die Entwicklung von τ_N und τ_R sowie $\tau_N + \tau_R$ sind in Abb. 5.10 gezeigt. Bei der Anfangsstörung hat die Reynoldsspannung τ_R oszillierenden Charakter und ist überwiegend negativ, was $P' < 0$ zur Folge hat. In der Einschwingphase bildet sich τ_R rasch um und nimmt die Gestalt der stationären Verteilung an. Die Größe von τ_R nimmt entsprechend dem Anwachsen der Fluktuation kontinuierlich zu. Bei $t = 150$ kommt τ_R dem stationären Zustand recht nahe. Der von \bar{u}_1 stammende Anteil von τ_N - nach (5.12) an der Abweichung von der Geraden $-2 x_3/Re$ abzulesen - wächst ebenfalls langsam an. Die Wandschubspannung $\tau_N(+1)$ übersteigt den stationären Wert bei $t = 300$ um 25 %. Die Summe $\tau_N + \tau_R$ wie auch deren Gradient weichen während der gesamten quasistationären Phase nicht stark vom stationären Verlauf $\tau_N + \tau_R = -2 x_3/Re$ ab und sind von der Größenordnung $1/Re$. Deshalb ist nach (5.2)

$$|\partial_t (U + \bar{u}_1)| = |\partial_3 (\tau_N + \tau_R + 2 x_3/Re)| \lesssim 1/Re, \quad (5.13)$$



$$\tau_N = \frac{1}{Re} \frac{d}{dx_3} (U + \bar{u}_1)$$

$$\tau_R = -\overline{u_1'' u_3''}$$

Abb. 5.10 Reibungsspannung τ_N und Reynoldsspannung τ_R für die Orr-Sommerfeld-Anfangsstörung ($t=0$), die quasistationäre Phase ($t \geq 30$) sowie für den stationären Zustand ($t \rightarrow \infty$) (wegen der Antisymmetrie in x_3 nur für $x_3 \leq 0$ gezeigt)

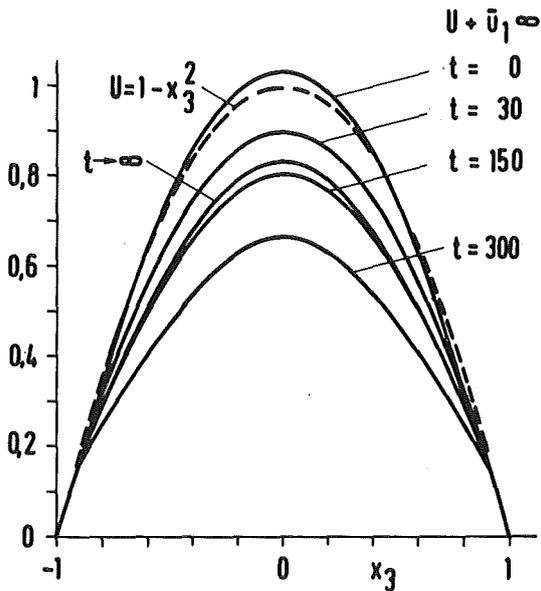


Abb. 5.11

Aus der momentanen Reynoldsspannung τ_R und der stationären Gleichung nach (5.15) berechnete mittlere Geschwindigkeit $U + \bar{u}_1^\infty$

so daß die mittlere Geschwindigkeit erst nach $t \geq 0(\text{Re})$ den stationären Zustand erreichen kann.

Eine etwas formale Betrachtung soll dies noch deutlicher machen. \bar{u}_1 ist die Lösung des Anfangs-Randwert-Problems

$$\partial_t \bar{u}_1 = \frac{1}{\text{Re}} \partial_3^2 \bar{u}_1 + f(x_3, t) \quad (5.14a)$$

$$\bar{u}_1(x_3 = \pm 1) = 0 \quad (5.14b)$$

$$\bar{u}_1(t = 0) = 0 \quad (5.14c)$$

mit $f(x_3, t) = \partial_3 \tau_R$ als gegebenem Quellterm. Für den Fall eines zeitunabhängigen Quellterms f hat der dominierende transiente Term der Lösung von (5.14) eine Zeitabhängigkeit $\sim \exp(-2.5 t/\text{Re})$ [100]. Selbst wenn also der stationäre Wert von $\partial_3 \tau_R$ bekannt wäre und in (5.14a) bzw. (5.2) eingesetzt würde, könnte sich die mittlere Strömung erst in einer Zeit $t \geq 0(\text{Re})$ zum stationären Zustand hin entwickeln.

Eine Berechnung der stationären Lösung durch Integration der instationären Gleichungen ist deshalb wegen der langen Integrationszeit mit einem expliziten Zeitintegrationsverfahren und damit einer Zeitschrittrestriktion der Form (4.18) nicht praktikabel (anders bei einem vollimpliziten Verfahren, z.B. [43]). Die Beobachtung, daß sich die Fluktuation relativ rasch in $t = 0(3 T^{\text{TS}})$ und nur \bar{u}_1 sehr langsam in $t = 0(\text{Re})$ entwickelt, legt folgendes modifizierte Vorgehen nahe. Wir integrieren, beginnend mit dem (willkürlichen!) Anfangswert $\bar{u}_1 = 0$ in $t = 0$, bis zu einem Zeitpunkt t_1 zu Beginn der quasistationären Phase. In $t = t_1$ berechnen wir nach der stationären Gleichung (5.11) mit (5.12) die Größe

$$\bar{u}_1^\infty(x_3, t) = - \int_{-1}^{x_3} \tau_R(x_3', t) dx_3', \quad (5.15)$$

und integrieren weiter mit $\bar{u}_1(t_1) = \bar{u}_1^\infty$ als neuem Anfangswert. Dieses Ersetzen von \bar{u}_1 kann von Zeit zu Zeit wiederholt werden. Dadurch kann zwar nicht die "Diffusionsgeschwindigkeit" in (5.14) erhöht werden, wohl aber durch Aufspaltung der Gesamtintegration in Einzelintegrationen mit iterativ verbesserten Anfangswerten für \bar{u}_1 die Integrationszeit

zur Erreichung einer bestimmten Fehlertoleranz wesentlich verkürzt werden - falls das Verfahren konvergiert. Der Verlauf von $U + \bar{u}_1^\infty$ bei der obigen Rechnung ohne Ersetzen von \bar{u}_1 ist in Abb. 5.11 gezeigt. Schon bei $t = 30$ ist eine wesentliche Verbesserung gegenüber $U + \bar{u}_1$ festzustellen: $(U + \bar{u}_1^\infty)(0) = 0.90$ statt $(U + \bar{u}_1)(0) = 0.999$.

Ergebnisse einer Rechnung bei $A^{TS} = 10\%$ mit Ersetzen von \bar{u}_1 durch \bar{u}_1^∞ in $t = 45, 90, 180, 225$ und 270 sind in Tab. 5.3b gezeigt. In $t = 150$ sind die Mittelwerte gegenüber Tab. 5.3a schon entscheidend verbessert, und in $t = 300$ sind die Abweichungen vom stationären Zustand nur noch minimal. Die Fluktuationsgrößen $\hat{u}_{1\max}$ und E' wachsen jetzt nicht mehr über die asymptotischen Werte hinaus und kommen diesen bei $t = 300$ schon recht nahe. Der in $t = 300$ erreichte Zustand ist, schon wegen des kurz zuvor bei $t = 270$ erfolgten Ersetzens von \bar{u}_1 , noch nicht stationär, wie die Differenz zwischen P' und D' zeigt. Bei einer Weiterintegration bis $t = 450$ ohne weiteres Ersetzen von \bar{u}_1 blieb D' praktisch konstant, während P' für $t \leq 400$ um D' oszillierte und sich dann auf $P' \approx 1.01 D'$ einstellte. Dementsprechend langsam nimmt die Fluktuation für $t \geq 400$ zu. Ein Vergleich der Werte bei $t = 450$ mit den asymptotischen Daten ergibt nach Tab. 5.3 relative Abweichungen von 0.2% in $(U + \bar{u}_1)(0)$, 0.7% in \bar{E} und 2.7% in $\hat{u}_{1\max}$ (die relative Abweichung in der quadratischen Größe E' beträgt 7.7%). Abb. 5.12 zeigt τ_R und τ_N , Abb. 5.13 $U + \bar{u}_1$ für diese Rechnung. Die Kurven sind für $t \geq 300$ nicht mehr vom stationären Verlauf zu unterscheiden. Zusammenfassend stellen wir fest, daß der mit dem modifizierten Verfahren nach $t \geq Re/10$ erreichte Zustand um weniger als 1% in der mittleren Strömung und um rund 3% in der Fluktuation abweicht.

Es muß hinzugefügt werden, daß das vorgeschlagene einfache Verfahren zur Berechnung der stationären Lösung empfindlich ist und nicht konvergiert, wenn das Ersetzen zu häufig erfolgt. Natürlich könnte das Verfahren weiter verfeinert werden, doch ist eine extensive Berechnung von stationären Zuständen nicht unser Ziel; man wird dazu zweckmäßigerweise wie in [43, 45, 66] die stationären Gleichungen zugrunde legen.

Entsprechende Rechnungen wurden bei anderen Parametern (Re, α_1) durchgeführt. Die Ergebnisse waren konsistent mit der Stabilitätstheorie.

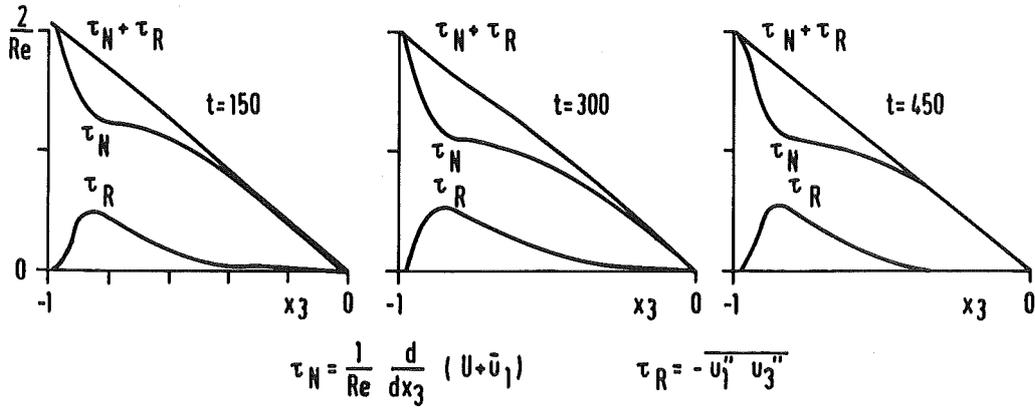


Abb. 5.12 Reibungsspannung τ_N und Reynoldsspannung τ_R bei Integration mit dem modifizierten Verfahren zur Erreichung des stationären Zustandes

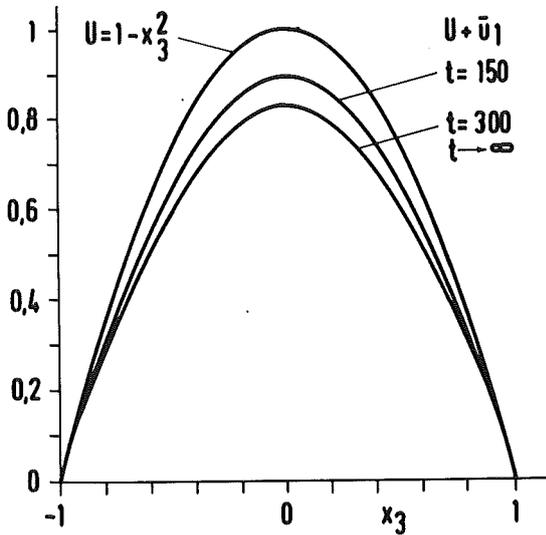


Abb. 5.13
Mittlere Geschwindigkeit $U + \bar{u}_1$ beim modifizierten Verfahren

Beispielsweise ergab sich bei $Re = 2500$, $\alpha_1 = 1.3$, wo nach Abb. 5.4 keine nichttriviale stationäre Lösung existiert, bei der Anfangsamplitude $A^{TS} = 15\%$ nach dem Einschwingen eine kontinuierliche Dämpfung auf $\hat{u}_{1\max} = 12\%$ bei $t = 100$. Rechnungen im linear instabilen Bereich, wo kein Schwellenwertverhalten vorliegt, ergaben ein monotonen quasi-stationäres Anwachsen.

5.2.4 Zusammenfassung und Diskussion

Wir fassen die Ergebnisse unserer Rechnungen mit zweidimensionalen Störungen endlicher Amplitude zusammen.

1. Eine Nachrechnung der periodischen Sekundärströmung hat die hohe Genauigkeit unseres Rechenprogramms zur Integration der zeitabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen erwiesen.
2. Die Ergebnisse der instationären Rechnungen mit verschiedenen Anfangsstörungen sind konsistent mit den theoretischen Erwartungen nach Abb. 5.3, 5.4. Wo Vergleiche mit zuverlässigen Referenzdaten vorgenommen wurden, ergab sich eine gute quantitative Übereinstimmung. Insbesondere wurde gezeigt, daß bei Start mit der Orr-Sommerfeld-Eigenlösung sowohl der Schwellenwert (unterer, instabiler Zweig der periodischen Sekundärströmung) identifiziert als auch der stabile stationäre Zustand in guter Näherung erreicht werden kann. Die Rechnungen wurden mit bis zu $k_{1\max} = 6$ Fouriermoden durchgeführt. In Übereinstimmung mit [45] wurde gefunden, daß z.B. $k_{1\max} = 3$ Moden ausreichen, um bei $Re \approx 3000$ eine Genauigkeit von etwa 1 % zu erreichen.
3. Bei anwachsenden Störungen stellt sich nach einer Einschwingphase $t \leq 3 T^{TS}$ ein quasistationärer Zustand ein, der erst nach einer Zeit $t \geq O(Re)$ in die stationäre periodische Sekundärströmung übergeht. Grund für diese lange Zeitdauer ist die langsame Entwicklung der mittleren Strömung mit einer "diffusiven" Zeitskala $t \geq O(Re)$. Der fluktuierende Anteil nähert sich dem stationären Zustand wesentlich rascher. Er wächst bei großen Anfangsamplituden deutlich über den stationären Wert hinaus an. Er trägt schon zu Beginn der quasistationären Phase die wesentlichen Züge des stationären Zustandes, insbesondere bezüglich der Größe und räumlichen Verteilung der Harmonischen.

4. Störungen mit (Re, α_1) innerhalb der Kurve NL nach Abb. 5.3 und Amplituden unterhalb des Schwellenwertes sowie Störungen außerhalb dieses Bereichs mit beliebiger Amplitude klingen erwartungsgemäß ab. Das Abklingen erfolgt bei großen Amplituden relativ langsam. Die Abklingrate nimmt zu mit fallender Amplitude und mit der Entfernung von der neutralen Fläche. Bei hinreichend kleinen Amplituden werden die Abklingraten der linearen Theorie erreicht, für $3000 \lesssim Re \lesssim 5000$ und $\alpha_1 \approx 1$ z.B. bei Amplituden $\hat{u}_{1\max} \lesssim 1\%$.
5. Es wurde ein modifiziertes Verfahren zur Berechnung der stabilen stationären Lösung mit dem zeitabhängigen Rechenprogramm vorgeschlagen und erprobt. Es besteht einfach aus einer wiederholten Ersetzung der momentanen mittleren Geschwindigkeit durch die - aus den momentanen Reynoldsspannungen nach der stationären Gleichung berechnete - Verteilung (5.15). Bei sachgemäßer Handhabung läßt sich so die Integrationszeit zur Erreichung des - innerhalb eines relativen Fehlers von wenigen Prozent - stationären Zustandes mindestens um eine Größenordnung verringern.

Wir gehen kurz auf einige in der Literatur bekanntgewordene zeitabhängige Rechnungen mit zweidimensionalen Störungen endlicher Amplitude ein. George et al. [46] haben für einige Parameter (Re, α_1) den unterkritischen Schwellenwert berechnet. Für Störungen mit darüberliegenden Amplituden fanden sie ebenfalls eine anhaltende Wachstumsphase. Zahn et al. [43] untersuchten bei ihren umfangreichen Berechnungen des stationären Zustands auch die Stabilität der beiden Lösungszweige gegen zweidimensionale Störungen derselben Wellenzahl und fanden das bei Abb. 5.4 erläuterte Verhalten, nämlich Instabilität beim unteren und Stabilität beim oberen Zweig. Eine kritische Diskussion der genannten sowie früherer Arbeiten ist in [45] zu finden. Rechnungen zum Schwellenwertverhalten bei räumlich angefachten Störungen wurden von Fasel et al. [47] durchgeführt. Die zweidimensionalen Rechnungen von Orszag und Kells [64] sowie Orszag und Patera [49, 65, 66] entsprechen unseren in 5.2.2-3 berichteten Rechnungen. Wir haben einige Fälle aus [64] nachgerechnet und fanden gute Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse (ein Beispiel wurde bereits in [70] berichtet). Ihre Schlußfolgerungen bezüglich

instationärer Entwicklung und quasistationärem Zustand stimmen mit dem unter 3. und 4. Gesagten überein (unsere zweidimensionalen Rechnungen waren vor Bekanntwerden der Arbeiten [49, 65, 66] abgeschlossen).

Mit dem nun erreichten Kenntnisstand der instationären Entwicklung und des stationären Zustandes ist das Verhalten von zweidimensionalen x_1 -periodischen Störungen der ebenen Poiseuille-Strömung weitgehend geklärt. Die neutrale Fläche (Abb. 5.3) sagt uns, ob eine Störung mit den Parametern (Re , α_1 , E') schließlich abklingt oder in die periodische Sekundärströmung (5.9) übergeht. Die Sekundärströmung besteht aus stromabwärts wandernden Rollen parallel zur x_2 -Achse und stellt das Analogon zu den Konvektionsrollen beim Bénard-Problem oder den Taylor-Görtler-Wirbeln beim Taylor-Couette-Problem [4] dar. Im Unterschied zu diesen Strömungen konnte jedoch die stationäre Sekundärströmung bei der ebenen Poiseuille-Strömung im Experiment nicht beobachtet werden, so daß man annimmt, daß sie instabil ist. Die Natur dieser Instabilität war bisher unklar. Es werden zwei Möglichkeiten diskutiert [33]: Instabilität gegen zweidimensionale kurzweilige Störungen oder Instabilität gegen dreidimensionale Störungen. Die erste Möglichkeit halten wir für unwahrscheinlich. In keiner unserer oder in der Literatur berichteten glaubhaften Simulationen wurde eine derartige zweidimensionale Instabilität gefunden¹⁾. Selbst wenn eine Instabilität gegen eine Klasse von zweidimensionalen Störungen existieren sollte, dürfte sie nur eine untergeordnete Rolle spielen, da wir zeigen werden, daß eine heftige Instabilität gegen dreidimensionale Störungen besteht.

Diese Instabilität wollen wir an dem in 5.2.1 betrachteten Beispiel (oberer Zweig) demonstrieren, wobei es uns nur auf das prinzipielle Verhalten ankommt. Dazu wurden der periodischen Sekundärströmung

1) Die in den Arbeiten [67, 68] berichteten Instabilitäten halten wir für rein numerisch verursacht. Hier wurde leider mit großen Amplituden und zu geringer Auflösung ($k_{1max} = 2$, z.T. $N_3 = 11$ (!)) gerechnet, was teilweise zu katastrophalen Instabilitäten führte. Auch einige der sonstigen Ergebnisse stehen in krassm Widerspruch zu gesicherten Erkenntnissen [43-45]. Die Autoren bezeichnen ihre Ergebnisse selbst als "preliminary, and very incomplete" und räumen ein "it might be... that the catastrophic growth of the kinetic energy is a 'numerical artefact'" [68].

"zufällige" dreidimensionale Störungen mit $\alpha_2 = 1$ und einer Amplitude $\hat{u}_{1\max}(k_1) \approx 0.1\%$ überlagert (die genaue Form der Störungen ist von untergeordneter Bedeutung). Die Rechnung wurde mit $N_1 = N_2 = 8$, $N_3 = 40$ in dem mit $C = 0.5$ mitbewegten System durchgeführt (die Schwingungsperiode beträgt hier $T = 2\pi/(\alpha_1(0.5 - c^{PS})) = 32.18$). Das Verhalten von u_3 in den gleichen Punkten wie in Abb. 5.6 ist in Abb. 5.14 dargestellt. Bei $t \approx 50$ beobachten wir einen Zusammenbruch der periodischen Bewegung in unregelmäßige Fluktuationen. Ursache ist eine dreidimensionale Instabilität, wie wir aus Abb. 5.15 erkennen: Die zweidimensionalen Modes $(k_1, 0)$ behalten die stationären Werte nach Abb. 5.6 nahezu unverändert bei, solange die dreidimensionalen Störungen noch klein sind. Diese wachsen rasch an gemäß $\sim \exp(0.1 t)$. Wenn bei $t \approx 40$ die Größe der zweidimensionalen Modes $(2, 0)$ und $(3, 0)$ erreicht ist, wachsen diese ebenfalls rasch an. Bei $t \approx 50$ ist die Größe des bisher dominierenden Grundschwingungsmodes $(1, 0)$ erreicht. Die Strömung verliert jetzt den geordneten periodischen Charakter und wird von dreidimensionalen und kurzwelligen bzw. hochfrequenten Fluktuationen geprägt. (Bei der verwendeten Auflösung ist die Rechnung für $t > 50$ im Detail sicher nicht mehr genau, doch ist das prinzipielle Verhalten dadurch nicht beeinflusst.)

Wir stellen also fest, daß die periodische Sekundärströmung aufgrund einer linearen dreidimensionalen Instabilität bei Anfangsstörungen von 0.1% schon nach wenigen Schwingungsperioden zusammenbricht. Sie kann deshalb im Experiment, wo sich kleine dreidimensionale Störungen nie vermeiden lassen, nicht beobachtet werden, läßt sich also überhaupt nur auf numerischem Weg realisieren. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, haben Orszag und Patera [49, 66] diese sekundäre Instabilität direkt durch eine dreidimensionale lineare Stabilitätsanalyse der periodischen Sekundärströmung nachgewiesen. Für $Re = 4000$, $\alpha_1 = 1.25$, $\alpha_2 \geq 0.6$ finden sie die sekundäre Instabilität mit Wachstumsraten der Größenordnung 0.1 wie in unserem Beispiel. Durch zeitabhängige Simulationen fanden sie diese dreidimensionale Instabilität auch bei der quasistationären Vorstufe der periodischen Sekundärströmung. In unseren nachfolgend beschriebenen dreidimensionalen Rechnungen werden wir diesen Sachverhalt bestätigen und durch Vergleich mit Experimenten die Rolle dieser sekundären Instabilität beim Umschlagsprozeß eingehend untersuchen.

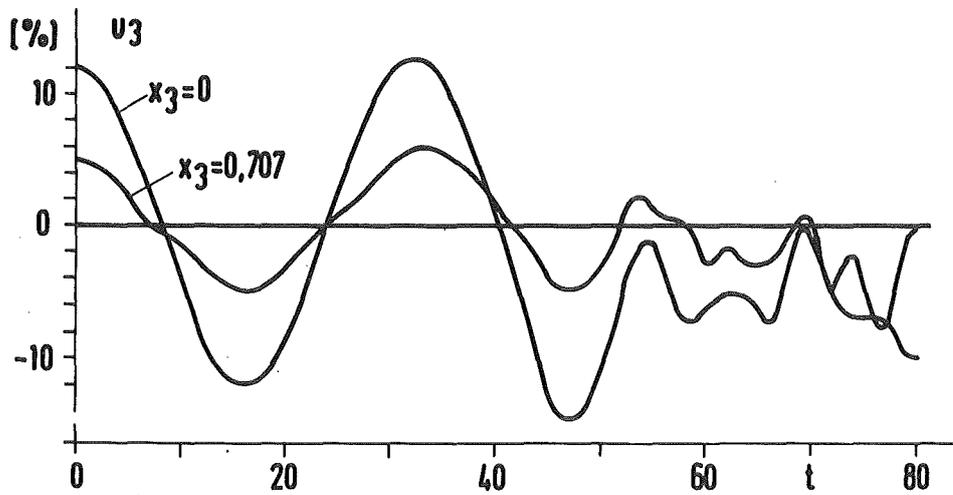


Abb. 5.14 Zusammenbruch der periodischen Sekundärstörung durch Instabilität gegenüber dreidimensionalen Störungen: zeitliche Entwicklung von u_3

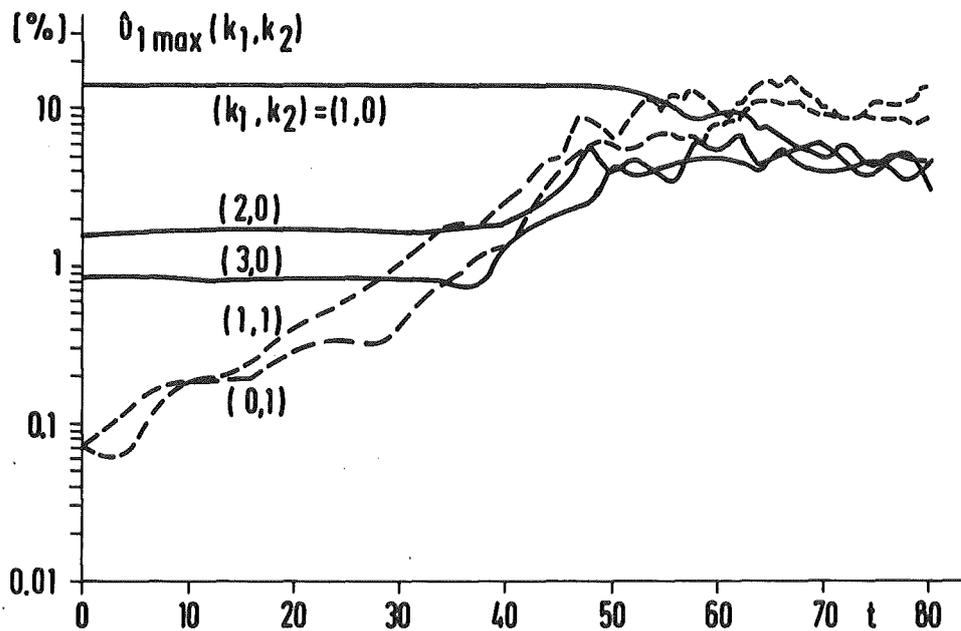


Abb. 5.15 Zusammenbruch der periodischen Sekundärströmung: zeitliche Entwicklung der Fourieramplituden $\hat{u}_{1\max}(k_1, k_2)$ für die zweidimensionalen Modes $(k_1, 0)$ und die dreidimensionalen Modes $(1, 1)$ und $(0, 1)$. Das exponentielle Anwachsen der dreidimensionalen Modes führt zum Zusammenbruch

5.3 Eine dreidimensionale Simulation und Vergleich mit Experimenten

Es wird berichtet über Ergebnisse einer dreidimensionalen Simulation, bei der die physikalischen Parameter Re , α_1 , α_2 dem in 5.1 besprochenen Experiment von Nishioka et al. [9, 10] bei $Re = 5000$, $\tilde{f} = 72$ Hz angepaßt wurden. Die Anfangsverteilung, die dem Benney-Lin-Modell entspricht, wird in 5.3.1 erläutert. Zweck dieser Simulation ist es, zunächst festzustellen, inwieweit unser Simulationsmodell den im Experiment beobachteten Umschlagsprozeß reproduzieren kann. Insbesondere interessiert die Frage, wieweit dieser Prozeß mit der verwendeten räumlichen Auflösung von maximal $N_1 N_2 (N_3 + 1) = 32 \cdot 32 \cdot 41$ Punkten mit akzeptabler Genauigkeit verfolgt werden kann.

Durch eingehende Vergleiche mit Messungen werden wir zeigen, daß sich bis zum spike-Stadium eine - in Anbetracht der in 5.1 diskutierten grundsätzlichen Unterschiede bemerkenswert gute - Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment ergibt. Wir sind damit in der Lage, die in diesem Bereich wirksamen Mechanismen zu erschließen und bisher quantitativ kaum bekannte Strömungsstrukturen zu dokumentieren.

Die Darstellung des dreidimensionalen Strömungsfeldes und seiner zeitlichen Entwicklung ist wegen der großen Datenmengen (sieben physikalisch interessierende skalare Größen u_i , ω_i und p , die je von 3 Koordinaten x_i und von t abhängen) und wegen fehlender synoptischer Darstellungsmöglichkeiten nur unvollkommen möglich. Wir behelfen uns mit Darstellungen von Verläufen über ausgewählten Schnittebenen (Höhenlinien- und Reliefdarstellungen skalarer Größen und Vektordarstellungen von zweidimensionalen Projektionen).

5.3.1 Physikalische und numerische Parameter

Für die Wellenzahl α_1 wählen wir wie in [45] den Wert $\alpha_1 = 1.12$, der bei $Re = 5000$ etwa die Tollmien-Schlichting-Frequenz $\omega_r^{TS} \approx 0.32$ des Experiments ergibt. Die Wellenlänge λ_2 in Spannweitenrichtung (doppelter Abstand zwischen peak und valley) beträgt im Experiment $2.2 \text{ cm} \approx 3 \tilde{h}$ [10]. Wir setzen daher $\alpha_2 = 2\pi/L_2 = 2.1$. Die Eigenwerte ω bei zeitlicher Anfachung für die Tollmien-Schlichting-Welle

$$\underline{u}^{\text{TS}}(\underline{x}, t) = \{ \hat{u}_j^{\text{TS}}(x_3) \exp [-i(\alpha_1 x_1 - \omega^{\text{TS}} t)] \}_r \quad (5.16)$$

und für die dreidimensionale Welle (1.4) sind in Tab. 5.4 angegeben (jeweils Eigenlösung mit maximaler Anfachung und antisymmetrischer x_3 -Verteilung der u_1 -Komponente). Die Amplitudenfunktionen $|\hat{u}_j^{\text{TS}}(x_3)|$ und $|\hat{u}_{j+}^{\text{3D}}(x_3)|$ sind in Abb. 5.16 gezeigt.

Welle	ω_r	ω_i	c_r	T
TS	0.3156	-0.00278	0.2815	19.91
3D	0.3637	-0.07855	0.3248	17.28

Tab. 5.4 Eigenwert ω , Phasengeschwindigkeit $c_r = \omega_r/\alpha_1$ in x_1 -Richtung und Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega_r$ für die zweidimensionale Tollmien-Schlichting-Welle (TS) und die dreidimensionale Welle (1.4) (3D) bei $Re = 5000$, $\alpha_1 = 1.12$, $\alpha_2 = 2.1$ (Periodenlängen $L_1 \approx 5.61$, $L_2 \approx 2.99$).

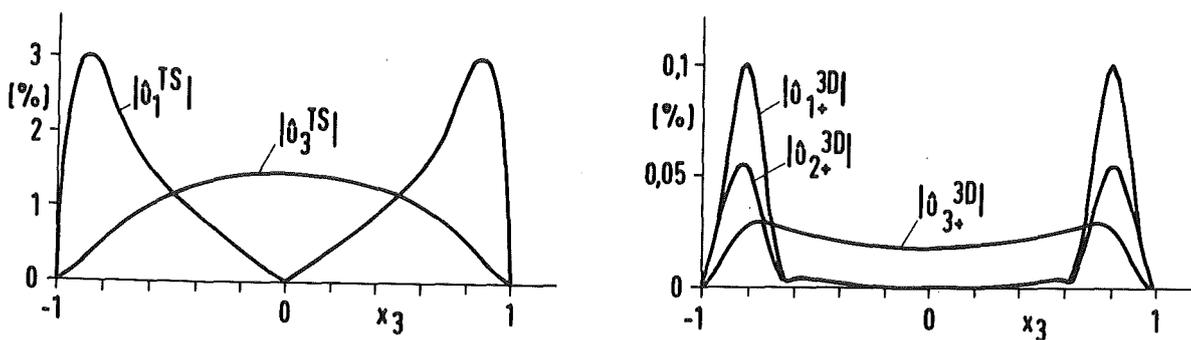


Abb. 5.16 Amplitudenfunktionen $|\hat{u}_j^{\text{TS}}(x_3)|$ und $|\hat{u}_{j+}^{\text{3D}}(x_3)|$ der Anfangsverteilung bei $Re = 5000$, $\alpha_1 = 1.12$, $\alpha_2 = 2.1$

Für den dreidimensionalen Anteil der Anfangsstörung wählen wir in dieser Simulation, entsprechend dem Modell von Benney und Lin [51], die Überlagerung der beiden sich in Richtung $(\alpha_1, +\alpha_2)$ und $(\alpha_1, -\alpha_2)$ ausbreitenden Wellen (1.4):

$$\begin{aligned} \underline{u}^{3D}(\underline{x}, t) &= \frac{1}{2} (\underline{u}_+^{3D}(\underline{x}, t) + \underline{u}_-^{3D}(\underline{x}, t)) \\ &= \begin{pmatrix} \{ \hat{u}_{1+}^{3D}(x_3) \exp[-i(\alpha_1 x_1 - \omega^{3D} t)] \}_r \cdot \cos \alpha_2 x_2 \\ \{ i \hat{u}_{2+}^{3D}(x_3) \exp[-i(\alpha_1 x_1 - \omega^{3D} t)] \}_r \cdot \sin \alpha_2 x_2 \\ \{ \hat{u}_{3+}^{3D}(x_3) \exp[-i(\alpha_1 x_1 - \omega^{3D} t)] \}_r \cdot \cos \alpha_2 x_2 \end{pmatrix} \quad (5.17) \end{aligned}$$

(5.17) stellt eine in x_2 -Richtung stehende, in x_1 -Richtung mit der Geschwindigkeit c_r^{3D} fortlaufende Welle dar. Die Komponenten (u_2^{3D}, u_3^{3D}) bilden ein System von gegenseitig rotierenden, in Wandnähe gelegenen Längswirbeln, die in $(x_1 - c_r^{3D} t)$ sinusförmig variieren. Über Rechnungen mit anderen dreidimensionalen Anfangsstörungen wird in 5.4 berichtet. Die Normierung ist für (5.16) und (5.17) gleich:

$$\max |u_1^{TS}| = 1, \quad \max |u_1^{3D}| = 1.$$

Die Phase wird so gewählt, daß dieses Maximum bei $t = 0$ in $x_1 = 0$ auftritt, so daß die u_1 -Fluktuationen der beiden Anteile anfangs in Phase sind.

Aus (5.16), (5.17) bilden wir die Anfangsstörung

$$\underline{u}^0(\underline{x}) = A^{TS} \underline{u}^{TS}(\underline{x}, 0) + A^{3D} \underline{u}^{3D}(\underline{x}, 0) \quad (5.18)$$

mit $A^{TS} = 3\%$ und $A^{3D} = 0.1\%$, so daß $u_{1 \max}' \approx A^{TS} \sqrt{2}/2 \approx 2\%$ über dem experimentell gefundenen Schwellenwert nach Abb. 5.1 liegt. Bei $t = 0$ sind also in der Darstellung (4.1) die Fouriermodes $(k_1, k_2) = (\pm 1, 0)$ und $(\pm 1, 1), (\pm 1, -1)$ angeregt, und es ist

$$\hat{u}_{1 \max}(1, 0) = A^{TS}, \quad \hat{u}_{1 \max}(1, 1) = A^{3D} \quad (t = 0).$$

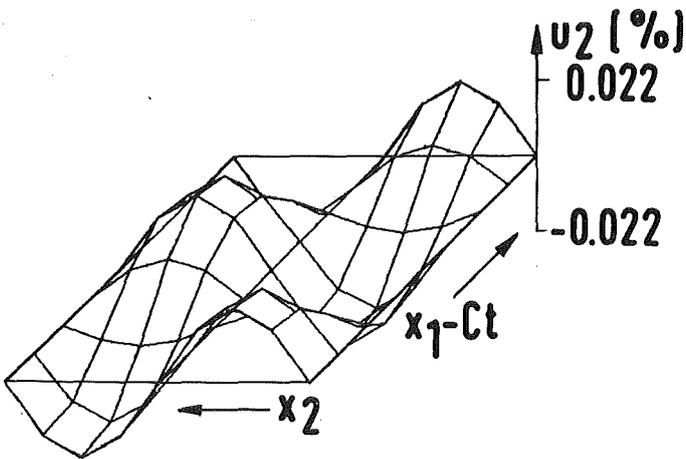
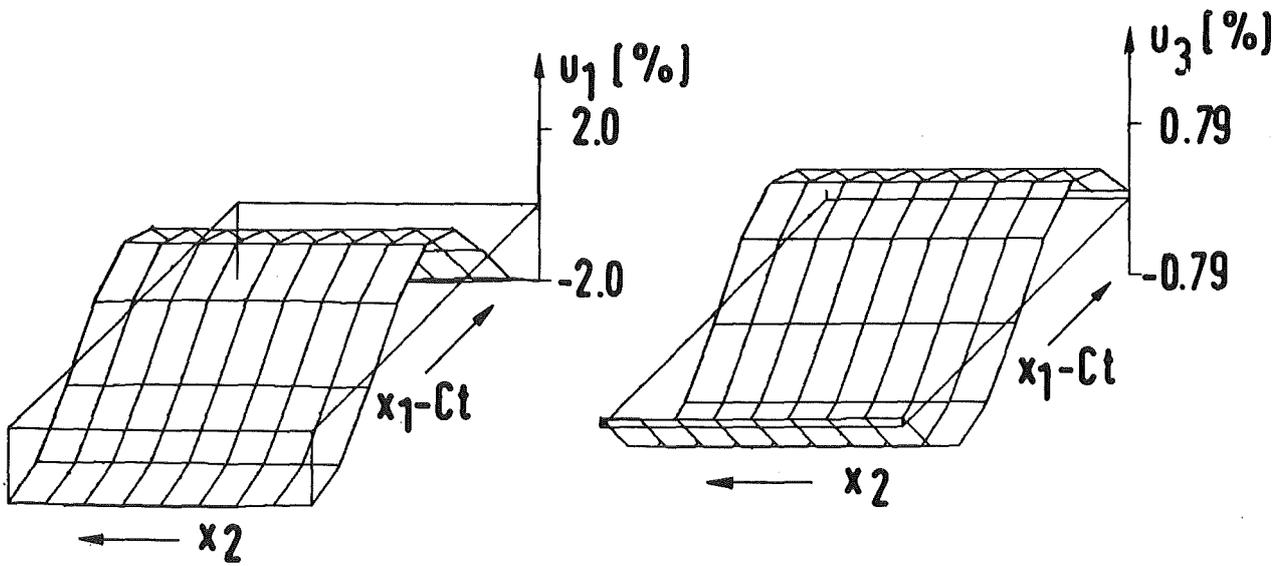


Abb. 5.17a

Anfangsverteilung $u_j^0(x_1^c, x_2)$
über der Schnittebene $x_3 = -0.71$

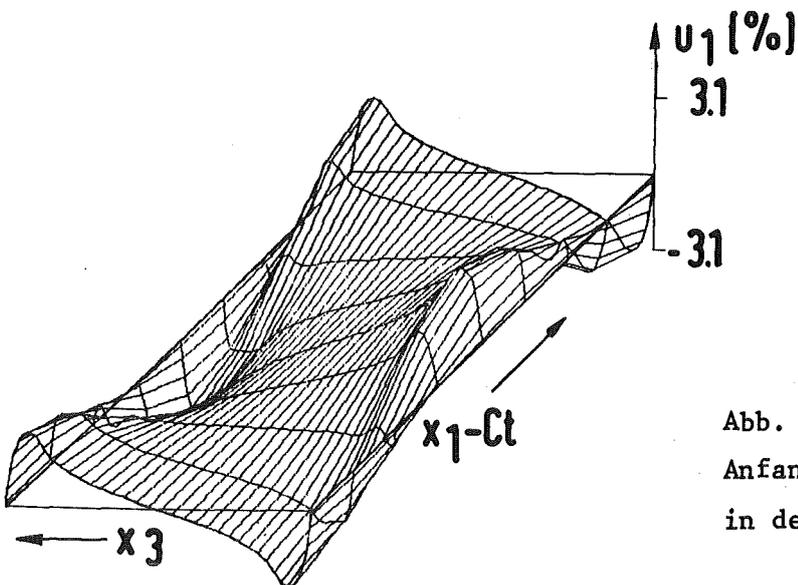


Abb. 5.17b

Anfangsverteilung $u_1^0(x_1^c, x_3)$
in der Ebene $x_2 = 0$

Die peak-Position (lokales Maximum in $u_1'_{\max}(x_2)$) liegt bei $x_2 = 0$ und $x_2 = L_2$, die valley-Position bei $x_2 = L_2/2$. Die Anfangsverteilung besitzt eine Reihe von Symmetrien, die auch für $t > 0$ erhalten bleiben. Abb. 5.17 zeigt den Verlauf von $u_1^0(\underline{x})$ über der Ebene $x_2 = 0$ und von $u_j^0(\underline{x})$ über der Ebene $x_3 \approx -0.71$ ¹⁾. Der dreidimensionale Anteil in u_1 und u_3 ist wegen seiner geringen Amplitude kaum zu erkennen.

Zur Zeitintegration wurde das modifizierte Adams-Verfahren (s. Anhang A 1.2) verwendet. Es wurde in dem mit $C = c_r^{TS} = 0.2815$ mitbewegten Bezugssystem (2.9) bis $t = 134$ integriert. Die Auflösung in Normalenrichtung war $N_3 = 40$. Die horizontale Auflösung betrug anfangs $N_1 = N_2 = 8$, was bei den vorliegenden kleinen Anfangsamplituden völlig ausreichend ist. Zu späteren Zeiten wurde diese Auflösung entsprechend dem Anwachsen der Amplituden und damit der höheren Harmonischen sukzessiv gesteigert auf $N_1 = N_2 = 16$ für $80 \leq t \leq 116$ und auf $N_1 = N_2 = 32$ für $t > 116$. (Eine Vergleichsrechnung mit $N_1 = N_2 = 16$ für $0 \leq t \leq 116$ ergab nahezu identische Resultate. So betrug die relative Abweichung in $\hat{u}_{1\max}(1,0)$ bei $t = 80$ 0.07 % und bei $t = 116$ 0.3 %. Die bei der Startrechnung mit $N_1 = N_2 = 8$ nicht vorhandenen Fouriermodes erreichten für $t > 80$ nach einer kurzen Einschwingzeit von weniger als $1 T^{TS}$ dieselbe Größe wie in der Vergleichsrechnung.) Der Zeitschritt für die 3 Teilintegrationen betrug $\Delta t = 0.2, 0.0625$ und 0.03 . Wie wir sehen werden, wird die Simulation für $t \geq 125$ ungenau (aber nicht numerisch instabil), weshalb wir im wesentlichen nur über Ergebnisse für $t \leq 125$ berichten. In diesem Bereich reduziert sich der Rechenaufwand gegenüber einer Rechnung mit durchweg maximaler Auflösung bei dem gewählten Vorgehen nahezu um eine Größenordnung, ohne daß dies mit einer wesentlichen Einbuße an Genauigkeit verbunden wäre.

5.3.2 Übersicht über die zeitliche Entwicklung

Um einen ersten Überblick über die Entwicklung der Störungen zu erhalten, betrachten wir in Abb. 5.18 den zeitlichen Verlauf der maximalen Wellenamplitude $u_1'_{\max}$ an verschiedenen x_2 -Positionen. Nach der ersten

¹⁾Normalerweise werden Werte in den Gitterpunkten $x_{3,j}$ nach (4.9) angegeben, hier z.B. für $j = 3 N_3/4$ ($x_{3,j} = -\sqrt{2}/2$), beim Vergleich mit Experimenten jedoch auch an dazwischenliegenden Stellen.

Schwingungsperiode fächert sich die Entwicklung an verschiedenen x_2 -Positionen auf. Der Verlauf an peak- und valley-Position entspricht dem in Abb. 1.3 skizzierten Verhalten. Der Wert am peak wächst zunächst leicht, für $t \geq 60$ dann zunehmend stärker an und erreicht 7 % bei $t = 120$. An der valley-Position geht der Wert bis $t = 90$ auf 1.5 % zurück und steigt dann rasch an. Der Wert in $x_2 = L_2/4$ liegt zwischen diesen beiden Kurven. In $x_2 = L_2/8$ verläuft $u_1'_{\max}$ bis $t = 110$ leicht unterhalb des Wertes am peak, überschreitet diesen aber danach beträchtlich und erreicht 12 % bei $t \approx 128$; wir kommen hierauf in 5.3.3 zurück. (Bei der Weiterintegration steigt auch der Wert am peak für $t \geq 130$ rasch auf über 12 % an.)

Für die Zuordnung zu den experimentellen Ergebnissen orientieren wir uns am Verlauf von $u_1'_{\max}$ am peak. Beim 2D-Experiment können wir Kurve 1 in Abb. 5.1 mit der Kurve für $x_2 = 0$ in Abb. 5.18 vergleichen. Der Meßbereich von Station A bis E umfaßt etwa 4 Wellenlängen L_1 . Da die Referenzpositionen $x_1 = 0$ im Experiment und $t = 0$ in der Simulation willkürlich gewählt sind, vergleichen wir einen Bereich von $4 L_1$ bzw. $4 T^{TS}$, rückwärts von der jeweiligen Position des Maximums (Station E bzw. $t = 120$) an gerechnet. Die Werte von $u_1'_{\max}$ in Abständen von L_1 bzw. T^{TS} an den so zugeordneten Vergleichspositionen sind in Tab. 5.5 zusammengestellt. Sie stimmen an den ersten drei Positionen gut überein, erst bei den Positionen 3 und 4 treten Abweichungen auf. Diese sind jedoch nicht als gravierend zu bewerten angesichts der Tatsache, daß $u_1'_{\max}$ stark mit x_2 variiert und die relative Lage der peak-valley-Struktur zur x_2 -Meßposition

Position	n =	0	1	2	3	4
Experiment, $u_1'_{\max}(x_1^0 + nL_1)$	$\underline{\%}$	2.1	2.5	2.9	5.2	8.2
Simulation, $u_1'_{\max}(t^0 + nT^{TS})$	$\underline{\%}$	2.2	2.5	3.1	4.7	7.0

Tab. 5.5 Werte von $u_1'_{\max}$ im 2D-Experiment $\underline{\%}$ (Abb. 5.1, Kurve 1) und Simulation (Abb. 5.18, $x_2 = 0$) an Vergleichspositionen im Abstand von L_1 bzw. T^{TS} , beginnend bei $x_1^0 \approx 1$ bzw. $t^0 = 40$.

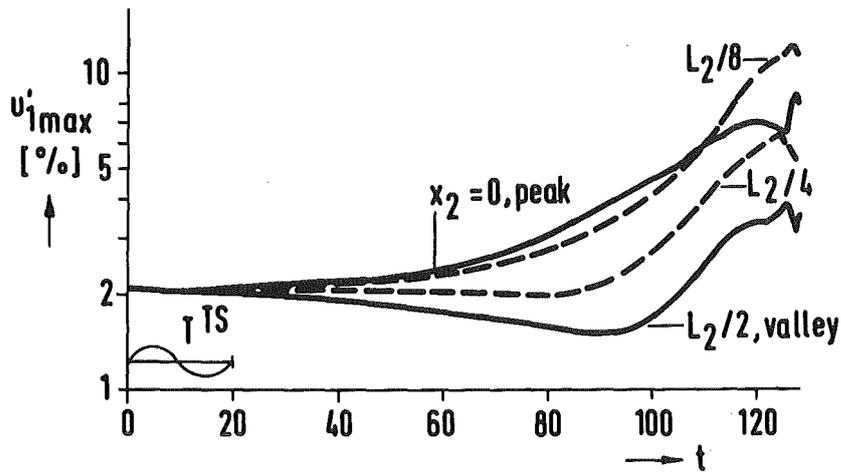


Abb. 5.18 Zeitliche Entwicklung von \hat{u}'_{1max} an verschiedenen Spannweitenpositionen x_2 , numerische Simulation bei $Re = 5000$, $\alpha_1 = 1.12$, $\alpha_2 = 2.1$. Die dimensionslose Zeit $t = 20$ entspricht einer Tollmien-Schlichting-Schwingungsperiode T^{TS}

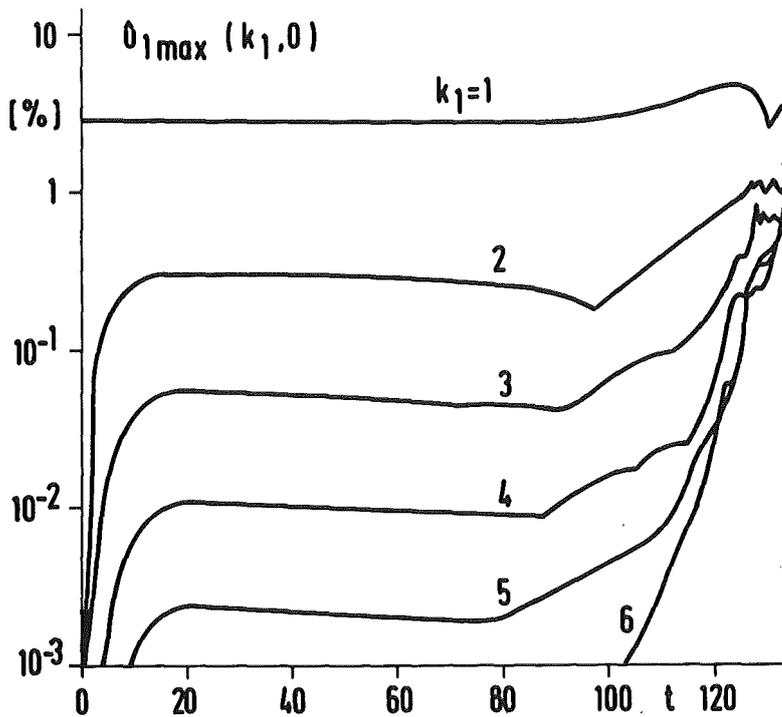


Abb. 5.19a Zeitliche Entwicklung der zweidimensionalen Fourieramplituden $\hat{u}'_{1max}(k_1, 0)$ (Tollmien-Schlichting-Welle und deren Harmonische)

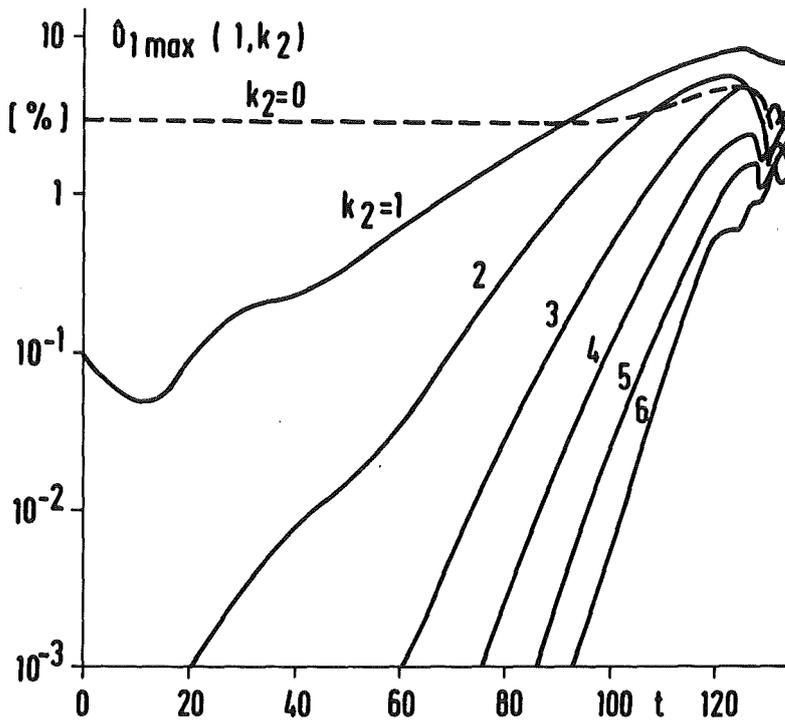


Abb. 5.19b Dreidimensionale Fouriermodes $(1, k_2)$

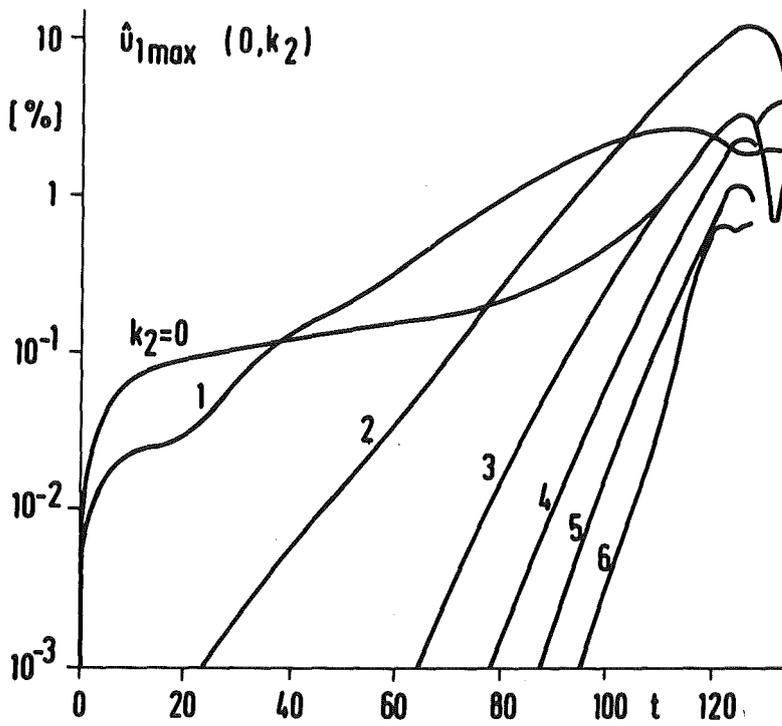


Abb. 5.19c Dreidimensionale Fouriermodes $(0, k_2)$ (mittlere Strömung \bar{u}_1)

im 2D-Experiment nicht bekannt ist. Bei Kurve 2 in Abb. 5.1 liegt das erste Maximum von $u_1'_{\max}$ wie in der Simulation bei 7 %. Für die Zuordnung zum 3D-Experiment verwenden wir ebenfalls die Werte von $u_1'_{\max}$ am peak, Abb. 5.2.

Als nächstes betrachten wir die zeitliche Entwicklung der Fourieramplituden $\hat{u}_{1\max}(k_1, k_2)$. Diese lassen uns unmittelbar die Größe der einzelnen Anteile $\sim \exp(i k_1 \alpha_1 x_1^c + i k_2 \alpha_2 x_2)$ an der Strömung ablesen und ermöglichen so einen Zugang zum Verständnis der beim Umschlagsprozeß entstehenden Strömungsstrukturen. (Wir weisen darauf hin, daß es sich um die zweidimensionale Fourierzerlegung (4.1) handelt. Der beim Experiment vorgenommenen Fourieranalyse der zeitlich periodischen Meßsignale entspricht in der Simulation eine eindimensionale Fourierzerlegung in x_1^c bei festem x_2 ; vgl. Abschnitt 5.5.2.)

Abb. 5.19a zeigt die Entwicklung der zweidimensionalen Modes $(k_1, 0)$. Die in $t = 0$ mit 3 % angeregte Grundschiwingung $k_1 = 1$ wird für $t \leq 90$ gering gedämpft (schwächer als $\sim \exp(\omega_1^{TS} t)$), wächst dann auf 5 % bei $t = 125$ an und fällt anschließend wieder ab. Die durch Nichtlinearität erzeugten Harmonischen $k_1 > 1$ wachsen in einer Einschwingphase $t \leq T^{TS}$ auf einen Wert an, der mit wachsendem k_1 jeweils etwa um einen Faktor 5 abnimmt (hier wie in den folgenden Abbildungen sind für die im Rechenlauf mit $N_1 = N_2 = 8$ nicht vorhandenen Modes (k_1, k_2) die Werte aus dem Vergleichslauf mit $N_1 = N_2 = 16$ angegeben). Die Harmonischen werden für $t \leq 80$ ebenfalls leicht gedämpft, wachsen aber später mit zunehmender Wachstumsrate an bis auf Werte der Größenordnung 1 %. Die "Knicks" in diesen Kurven, z.B. für $k_1 = 2$, kommen dann zustande, wenn sich lokale Maxima in $|\hat{u}_1(k_1, k_2, x_3)|$ unterschiedlich rasch entwickeln und dadurch die x_3 -Position des absoluten Maximums wechselt. Sie zeigen also an, daß sich die x_3 -Verteilung des Fourierkoeffizienten umbildet.

Die Entwicklung der dreidimensionalen Modes $(1, k_2)$ ist in Abb. 5.19b gezeigt. Der in $t = 0$ angeregte Mode $(1, 1)$ wird für $t < 10$ gemäß $\exp(\omega_1^{3D} t)$ gedämpft. Nach der Einschwingphase wachsen alle gezeigten Modes $(1, k_2)$ exponentiell an, und zwar mit nahezu konstanter Wachstumsrate gemäß $\exp(k_2 a t)$, $a \approx 0.05$. Für $t \geq 90$ übertrifft der Mode $(1, 1)$ den bisher dominierenden zweidimensionalen Mode $(1, 0)$ und wächst bis auf

8 % bei $t = 125$ an. Die höheren Modes erreichen Werte um 1 bis 5 % und gehen dann wieder leicht zurück.

Neben den fluktuierenden (mit x_1^c veränderlichen) Anteilen ist die über x_1^c gemittelte Strömung von besonderem Interesse. Sie wird von den Fouriermodes $(0, k_2)$ gebildet, deren Entwicklung in Abb. 5.19c gezeigt ist. Der Mode $(0,0)$, der die über Ebenen $x_3 = \text{const}$ gemittelte Strömung beschreibt, steigt rasch auf einen Wert um 0.1 % an und wächst dann langsam weiter. Die übrigen Modes $k_2 > 0$ sind in Größe und Wachstumsverhalten nahezu identisch mit den Modes $(1, k_2)$, bis auf den Mode $(0,1)$, der etwa den doppelten Wert hat. Der letztere erreicht ein Maximum von 3 % bei $t \approx 115$ und geht dann leicht zurück. Der Mode $(0,2)$, der den \bar{u}_1 -Anteil mit der Wellenlänge $L_2/2$ darstellt, übertrifft den $(0,1)$ -Mode für $t \geq 105$ und wächst auf über 10 % bei $t = 128$ an.

Die übrigen, hier nicht gezeigten Modes $\hat{u}_1(k_1, k_2)$ mit $k_j \leq 7$ verhalten sich im wesentlichen gleich wie die Modes $(1, k_2)$. Auf das Verhalten der kurzwelligen Modes mit $k_j > 7$, die in der Simulation nur für $t \geq 116$ angeregt sind, kommen wir in 5.5.2 zurück. Die Fouriermodes der Geschwindigkeitskomponenten u_2 und u_3 verhalten sich entsprechend wie diejenigen von u_1 .

Das Verhalten der Fouriermodes interpretieren wir folgendermaßen. Nach einer kurzen Einschwingzeit $t \lesssim T^{\text{TS}}$ stellt sich der quasistationäre Zustand der dominierenden zweidimensionalen Welle ein. Diese wird nur minimal gedämpft, da ihre Größe nur knapp unter dem zweidimensionalen Schwellenwert $u_1'_{\text{max}}(2D) = 2.16 \% \sqrt{45}$ (also $\hat{u}_{1\text{max}}(1,0) \approx \sqrt{2} u_1'_{\text{max}}(2D) \approx 3 \%$) liegt. Es besteht eine lineare sekundäre Instabilität dieser zweidimensionalen Strömung gegen dreidimensionale Störungen. Dabei wachsen die mittleren und fluktuierenden dreidimensionalen Anteile gleichermaßen exponentiell an. Bei $t \approx 80$ erreichen diese Anteile die Größe der zweidimensionalen Störungen. Nun wachsen alle Anteile, insbesondere die kurzwelligen, stark an und erreichen Werte von der Größenordnung 1 %. Der Zusammenbruch der Welle setzt ein.

Im folgenden wollen wir die räumliche Struktur der Strömung bei drei Entwicklungsphasen darstellen: $t \approx 80$, $t \approx 110$ und $t \geq 120$. Nach Abb. 5.18, 5.19 können diese Phasen folgendermaßen charakterisiert werden.

Bei $t \approx 80$ ist die peak-valley-Struktur schon ausgeprägt, aber die Strömung noch von der zweidimensionalen Welle dominiert. Bei $t \approx 110$ ist die Strömung stark dreidimensional, die dominierenden Fouriermodes sind $(k_1, k_2) = (1, 0)$, sowie $(0, k_2)$ und $(1, k_2)$, $k_2 = 1, 2$, mit Amplituden $\hat{u}_{1\max} \approx 2$ bis 6 %. Die kurzwelligen Anteile treten noch nicht hervor. Bei $t \geq 120$ erreichen alle Anteile ihr Maximum, auch die kurzwelligen treten in Erscheinung, und die Welle bricht zusammen.

5.3.3 Räumliche Verteilung der Längsschwankungen

Zur Fluktuation u_1' tragen die Fouriermodes $\hat{u}_1(k_1, k_2)$ mit $k_1 > 0$ bei. Für ihre Amplitude $u_1'(x_2, x_3)$ erwarten wir nach Abb. 5.19a,b anfangs keine, später aber eine ausgeprägte Variation in x_2 . Wir finden dies in Abb. 5.20 bestätigt. In $t = 0$ liegt für alle x_2 die x_3 -Verteilung der Tollmien-Schlichting-Welle (Abb. 5.16) vor. Bei $t = 80$ besteht im wandnahen Bereich $|x_3| \geq 0.6$ bereits eine x_2 -Abhängigkeit mit einem Maximum bei den Positionen $x_2 = 0$ und $x_2 = L_2$ (peak) und einem Minimum bei der Position $x_2 = L_2/2$ (valley). Bei $t = 110$ ist die peak-valley-Struktur stark ausgeprägt. In der x_3 -Verteilung am peak ist das Maximum von der Wand weggerückt und ein steiler Abfall in Richtung Kanalmitte bei $|x_3| \approx 0.6$ bis 0.7 entstanden. In diesem x_3 -Bereich hat die Verteilung an der valley-Position ein lokales Minimum von nur 0.6 %, das Maximum ist zur Wand hin nach $x_3 \approx 0.9$ verschoben. Die Tendenz hierzu ist schon bei $t = 80$ zu erkennen. Bei $t = 122$ ist das Maximum von u_1' auf 10.7 % angewachsen. Es wird nicht mehr am peak angenommen, sondern seitlich davon um etwa $L_2/8$ versetzt, vgl. Abb. 5.18 (wir benutzen die Bezeichnung "peak" weiterhin nur für die Positionen $x_2 = 0, L_2$). Der Wert am peak hat sich nur noch geringfügig erhöht. Die x_3 -Position des Maximums ist noch weiter von der Wand weggerückt und liegt nun bei $|x_3| \approx 0.7$, der Bereich mit starken Gradienten bei $|x_3| \approx 0.5$ bis 0.65.

Für das Maximum von u_1' über x_3 im 3D-Experiment liegen Messungen bei drei Entwicklungsstufen vor, die zusammen mit den numerischen Ergebnissen in Abb. 5.21 gezeigt sind (der x_2 -Bereich wurde periodisch fortgesetzt). Die Zeitpunkte $t = 78$ und $t = 110$ wurden so ausgewählt, daß an der peak-Position $x_2 = 0$ bzw. $z = 7.5$ cm die gleichen Werte von $u_1'_{\max}$ vorliegen. Bei $t = 78$ erhalten wir eine ausgezeichnete Übereinstimmung

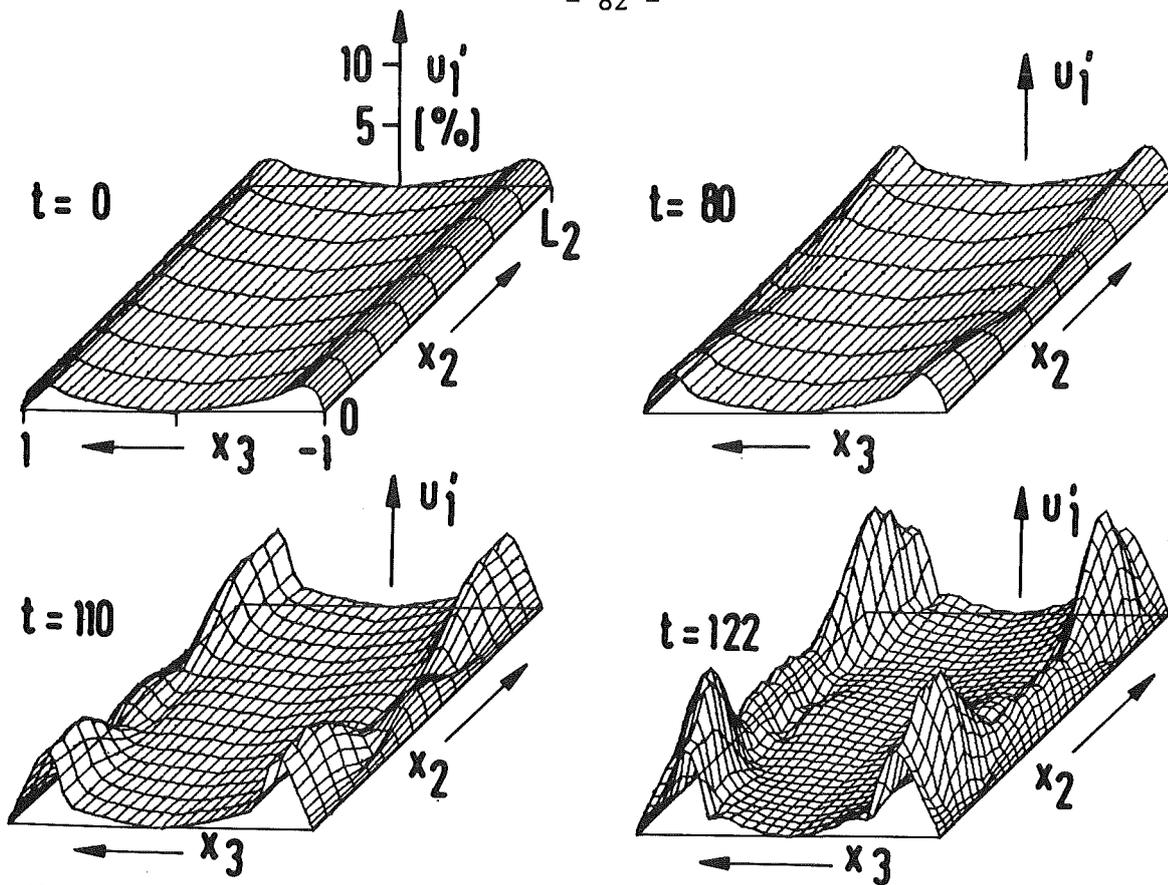


Abb. 5.20 Entwicklung der Amplitude der Längsschwankungen $u_1'(x_2, x_3)$

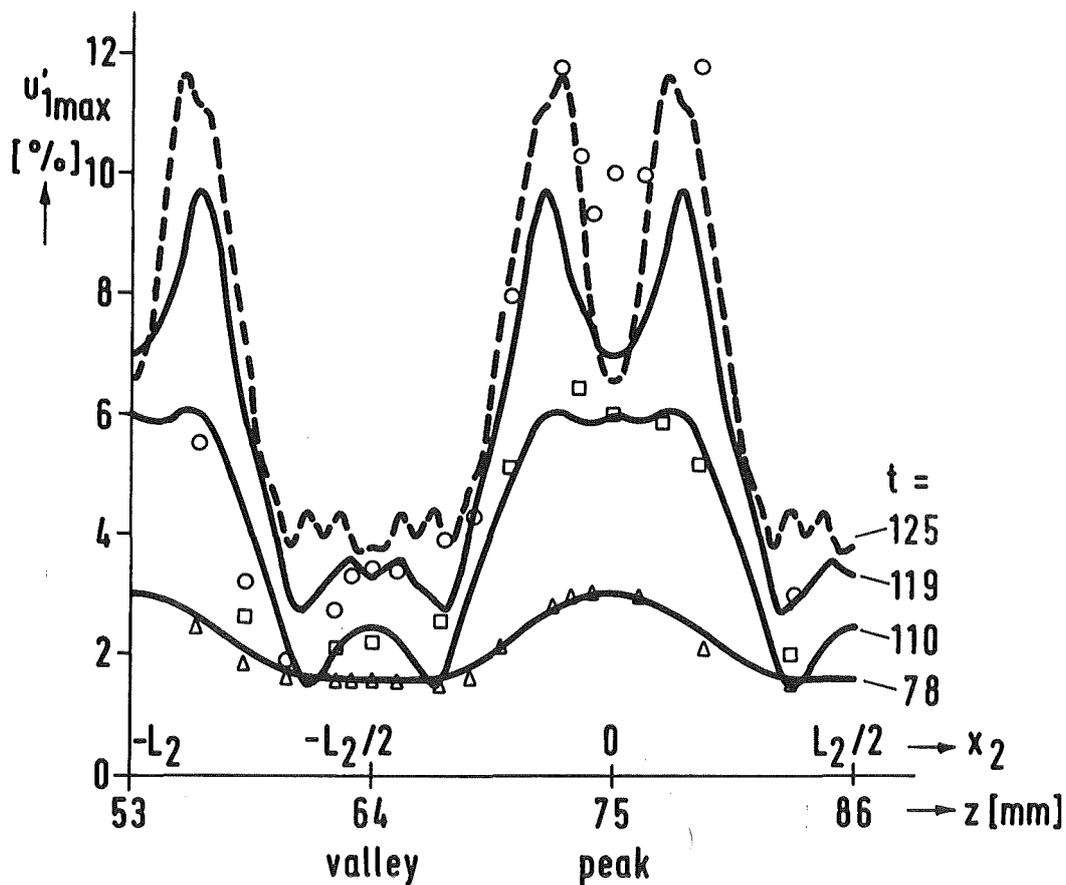


Abb. 5.21 Maximale Amplitude $u_1'_{max}(x_2)$ der Längsschwankungen
 Δ \square \circ 3D-Experiment Nishioka et al. [10], Entwicklungsstufen $u_1'_{max}(\text{peak}) = 3\%$, 6% , 10% .
 — — — Simulation

fast über den ganzen Meßbereich. Bei $t = 110$ treten kleinere Abweichungen auf, aber der Gesamtverlauf stimmt im wesentlichen überein. Die Messung bei der Entwicklungsstufe $u_1'_{\max}$ (peak) = 10 % kurz vor dem spike-Stadium vergleichen wir mit dem berechneten Verlauf für $t = 125$, bei dem etwa die gleichen Maximalwerte in $x_2 = \pm L_2/8$ erreicht werden. Auch hier ist der Gesamtverlauf gut vergleichbar. Insbesondere zeigt auch das Experiment an der peak-Position ein lokales Minimum. Daß dieses nicht so stark ausgeprägt ist wie in der Rechnung, könnte z.B. darauf zurückzuführen sein, daß die z-Position der dreidimensionalen Struktur relativ zur Meßsonde zeitlich schwankt und so bei der Zeitmittelung für u_1' ein Verschmieren eintritt (der Abstand $L_2/8$ beträgt weniger als 3 mm). In der Rechnung sind an der valley-Position kleine Oszillationen mit einer Wellenlänge $L_2/16$ erkennbar, der kleinsten mit $N_2 = 32$ auflösbaren Wellenlänge. Dies deutet daraufhin, daß zu diesem Zeitpunkt bereits mit gewissen numerisch bedingten Ungenauigkeiten wegen zu geringer räumlicher Auflösung zu rechnen ist.

Die x_3 -Verteilung von u_1' an peak- und valley-Position vergleichen wir in Abb. 5.22 mit dem Experiment. Bei $t = 110$ erhalten wir am peak eine gute Übereinstimmung mit der gemessenen Verteilung für $u_1'_{\max}$ (peak) = 6 %. An der valley-Position stimmt der Verlauf qualitativ überein, nur die Werte der lokalen Maxima weichen etwas ab. Bei der späteren Entwicklungsstufe mit dem Meßwert $u_1'_{\max}$ (peak) = 9.2 % können wir den Verlauf am peak nicht mehr quantitativ vergleichen, da nach Abb. 5.18 in der Simulation im betrachteten Zeitbereich niedrigere Werte vorliegen. Die Form der x_3 -Verteilung stimmt jedoch noch relativ gut mit dem berechneten Verlauf bei $t = 119$ überein. Beim valley ist das zweite lokale Maximum im Experiment deutlich größer. Im wandnächsten Bereich und um die Kanalmitte besteht jedoch in allen Fällen eine gute Übereinstimmung.

Zusammenfassend stellen wir eine gute Übereinstimmung der gemessenen und berechneten Schwankungsamplituden u_1' fest, insbesondere für den Bereich $t \leq 110$. Merkliche Abweichungen treten erst in den späteren Stadien auf. Mögliche Ursachen dafür sind Unregelmäßigkeiten in den Meßergebnissen sowie die in 5.1 diskutierte unterschiedliche Ausgangssituation in Simulation und 3D-Experiment. Ferner könnten in der im Experiment

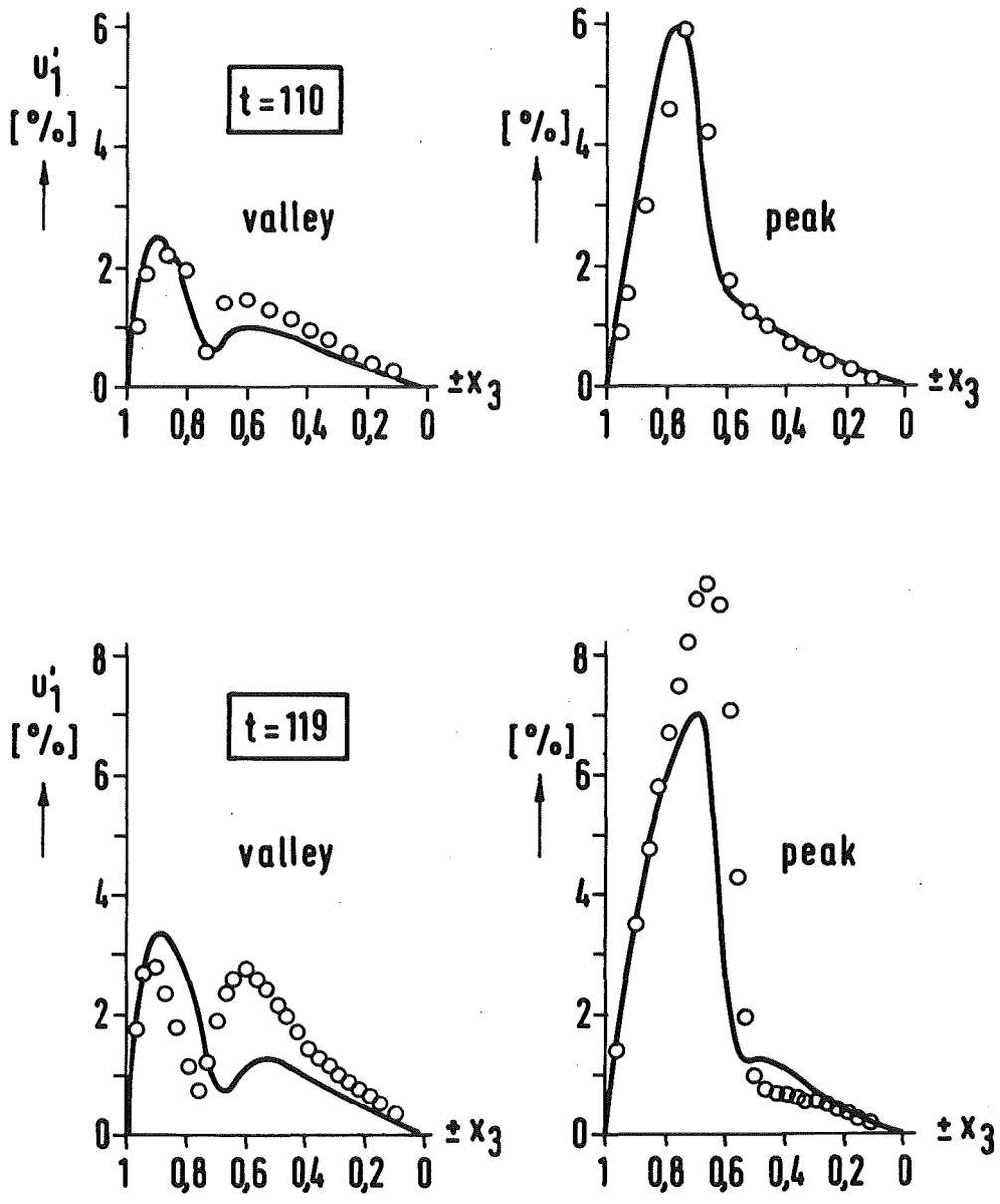


Abb. 5.22 x_3 -Verteilung von u_1' an peak und valley.
 o 3D-Experiment Nishioka et al. [10], Entwicklungsstufen $u_1'_{\max}(\text{peak}) = 6\%$ und 9.2% .
 — Simulation, $t = 110$ und $t = 119$

beobachteten Strömung Anteile enthalten sein, die wegen der speziellen Symmetrieeigenschaften der Anfangsbedingungen in der Simulation nicht angeregt sind (die Meßergebnisse von Abb. 5.21 z.B. scheinen einen in x_2 antisymmetrischen Anteil zu enthalten).

5.3.4 Mittlere Strömung

Die zeitliche Entwicklung der über x_1^c gemittelten Strömung haben wir bereits anhand von Abb. 5.19c kurz diskutiert. Da die mittlere Strömung nur von zwei Ortskoordinaten abhängt, können wir uns einen vollständigen Überblick über den räumlichen Verlauf verschaffen. Die Komponenten (\bar{u}_2, \bar{u}_3) bilden eine ebene Sekundärströmung, deren Stromfunktion wir mit $\bar{\psi}$ bezeichnen:

$$\bar{u}_2 = \partial_3 \bar{\psi}, \quad \bar{u}_3 = -\partial_2 \bar{\psi} .$$

Die Stromlinien $\bar{\psi} = \text{const}$ sind in Abb. 5.23 zusammen mit einer Vektordarstellung von (\bar{u}_2, \bar{u}_3) für verschiedene Zeitpunkte gezeigt. Bereits bei $t = 40$ ist nahe der unteren Wand ein gegensinnig rotierendes Längswirbelpaar zu erkennen. Die Strömung ist an peak-Positionen von der Wand weg, an valley-Positionen zur Wand hin gerichtet. Sie ist noch sehr schwach, das Maximum beträgt nur 0.025 % (Tab. 5.6). Zu den späteren Zeiten wächst die Sekundärströmung stark an und erreicht um zwei Größenordnungen höhere Werte. Gleichzeitig bildet sich über dem wandnahen ein weiteres, wandfernes Wirbelpaar, das sich gegensinnig dreht und sich gleichfalls immer stärker ausprägt. Es wandert allmählich in Richtung valley-Position und weitet sich auf den wandnahen Bereich aus. Das ursprüngliche Wirbelpaar wird zum peak hin abgedrängt und dehnt sich zur Kanalmitte aus, wobei es eine charakteristische Unsymmetrie ausbildet. Am Ende der Simulation hat die anfangs vorliegende Wirbelstruktur ihre Wellenlänge halbiert, wobei aber eine Unsymmetrie bestehen bleibt.

Experimentelle oder quantitative theoretische Untersuchungen zur mittleren Sekundärströmung bei der Poiseuille-Strömung sind nicht bekannt, doch liegen eine Reihe von Ergebnissen für die Plattengrenzschicht vor. Die von Klebanoff et al. [24, Fig. 19] aufgrund von Messungen

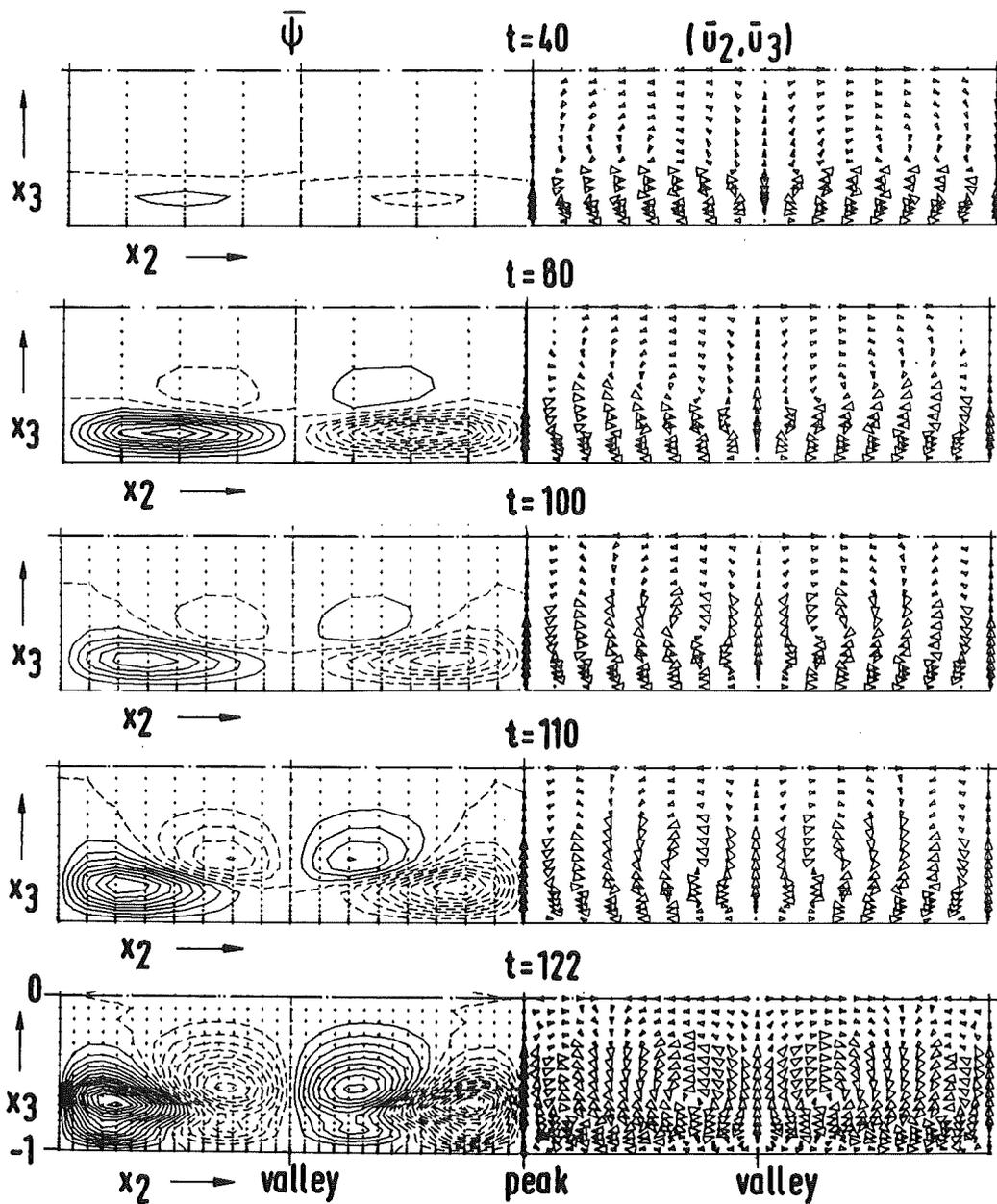


Abb. 5.23 Mittlere Längswirbelströmung (\bar{u}_2, \bar{u}_3) in der unteren Kanalhälfte (die Strömung ist symmetrisch zur Kanalmitte).

Links: Stromlinien $\bar{\psi} = \text{const}$, Höhenlinienabstand $5 \cdot 10^{-4}$ für $t \leq 80$ und $2 \cdot 10^{-3}$ für $t > 80$. Durchgezogene Höhenlinien zeigen stets Werte > 0 , gestrichelte Werte ≤ 0 an.

Rechts: Vektordarstellung (\blacktriangleright : 10-100 %, \blacktriangledown : 1-10 % der maximalen Geschwindigkeit im jeweiligen Teilbild)

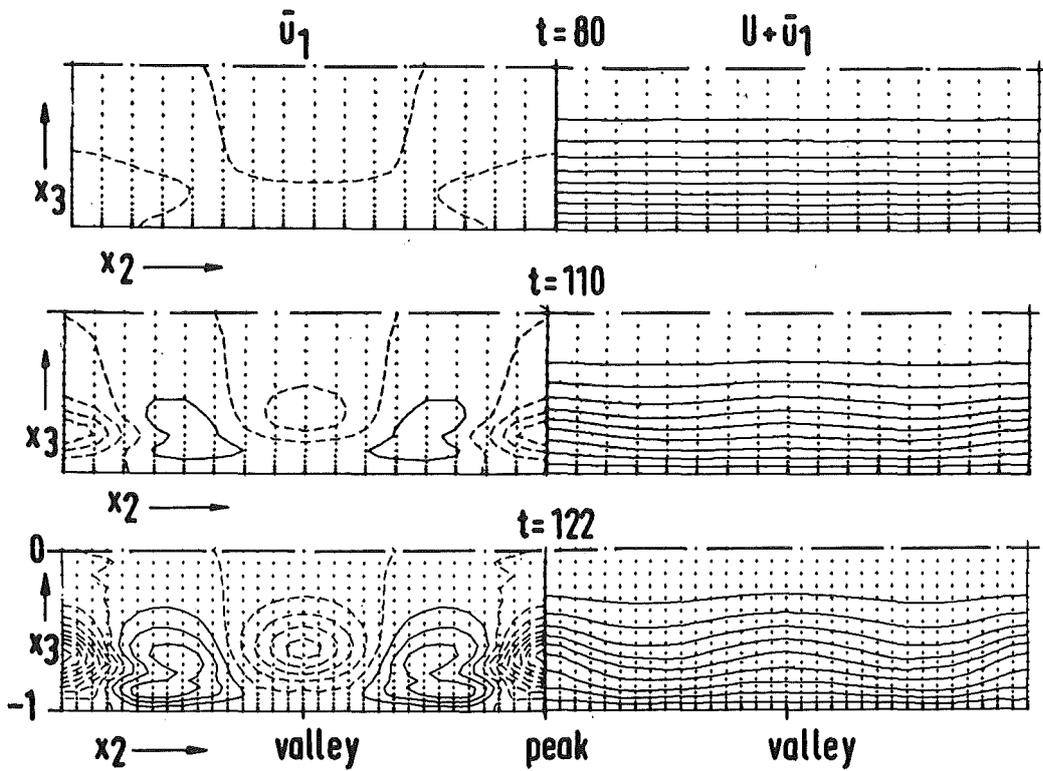


Abb. 5.24 Mittlere Geschwindigkeit \bar{u}_1 und $U + \bar{u}_1$
 (Höhenlinienabstand 2 % für \bar{u}_1 und 10 % für $U + \bar{u}_1$)

t	Min \bar{u}_1 , Max \bar{u}_1 [%]	\bar{u}_2 [%]	\bar{u}_3 [%]
40	- 0.26 0.13	+ 0.025	+ 0.005
80	- 1.3 0.66	+ 0.16	+ 0.05
100	- 4.2 1.5	+ 0.51	+ 0.22
110	- 8.0 3.1	+ 1.0	+ 0.49
122	-17.4 7.6	+ 2.1	+ 1.3
125	-19.2 9.5	+ 2.8	+ 2.1

Tab. 5.6 Minimal- und Maximalwerte der Komponenten \bar{u}_i der
 mittleren Geschwindigkeit

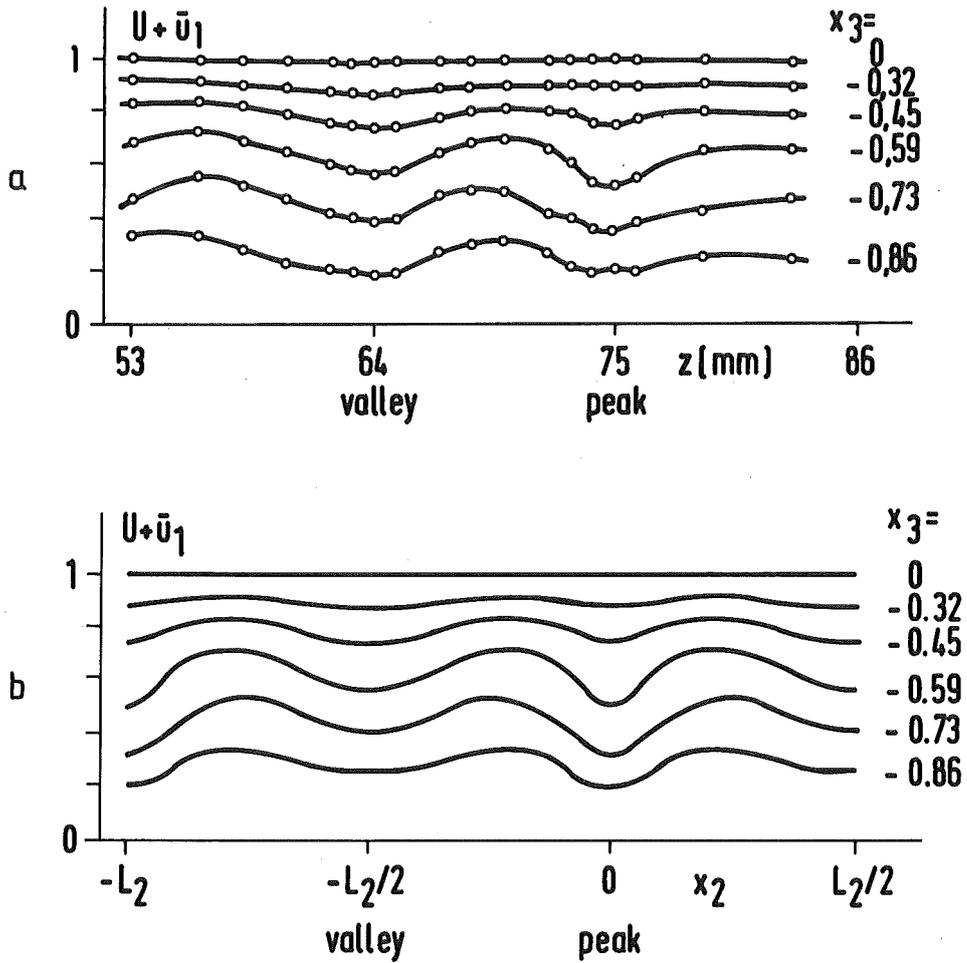


Abb. 5.25 Verlauf der mittleren Geschwindigkeit $U + \bar{u}_1$ über x_2 bei verschiedenen Wandabständen
a Experiment Nishioka et al. [9], 1-spike-Stadium
b Simulation, $t = 122$

skizzierten Stromlinien an drei Meßpositionen haben große Ähnlichkeit mit dem in Abb. 5.23 für $t \geq 100$ gezeigten Verlauf. Dies betrifft sowohl die asymmetrische Form der Stromlinien wie auch die Halbierung der Wellenlänge. Numerische Rechnungen von Antar und Collins [53] nach dem Benney-Lin-Modell haben die Abhängigkeit des Wirbelsystems von der Wellenzahl α_2 aufgezeigt. Für $\alpha_2 \approx 2 \alpha_1$, wie in unserer Simulation, dominiert das wandnahe Wirbelpaar. Mit abnehmendem α_2 wird dieses schwächer und für $\alpha_2 \ll \alpha_1$ liegt nur ein Wirbelpaar mit Zentren außerhalb der Grenzschicht vor.

Mit dem Auftreten von mittleren Längswirbeln ist eine Änderung der mittleren Geschwindigkeitsprofile verbunden. An den x_2 -Positionen mit $\bar{u}_3 > 0$ wird langsames Fluid aus der Wandnähe ins Kanalinnere transportiert und es entsteht ein Geschwindigkeitsdefizit ($\bar{u}_1 < 0$). Entsprechend bildet sich in Bereichen mit $\bar{u}_3 < 0$ durch schnelles Fluid aus dem Innern ein Geschwindigkeitsüberschuß. Dies führt für $t \geq 100$ zu mittleren Profilen mit Wendepunkten und lokalen Scherschichten. Nach Tab. 5.6 beträgt der Überschuß bei $t \approx 125$ bis zu 10 % und das Defizit bis zu 20 %. Das Maximum von $|\bar{u}_1|$ liegt durchweg eine Größenordnung über dem Maximum der Sekundärströmung. Abb. 5.24 zeigt Höhenlinien von \bar{u}_1 und $U + \bar{u}_1$ bei $t = 80, 110$ und 122 . An der Variation der Höhenlinien von $U + \bar{u}_1$ können wir die Verformung der mittleren Geschwindigkeitsprofile ablesen. Für die Abhängigkeit von $U + \bar{u}_1$ von x_2 liegen Messungen bei verschiedenen Wandabständen vor, die in Abb. 5.25 zusammen mit den entsprechenden Ergebnissen der Simulation gezeigt sind. Die Übereinstimmung ist gut, besonders im Bereich $60 \lesssim z \lesssim 75$ mm. Die maximale Abweichung an der peak-Position tritt bei $x_3 = -0.73$ auf und beträgt weniger als 5 %.

5.3.5 Momentane Strömung in der peak-Ebene

Da in den Experimenten der Zusammenbruch der Welle zuerst an peak-Positionen einsetzt, ist die Strömung hier besonders eingehend untersucht worden. Wir stellen im folgenden numerische Ergebnisse für die momentane Störung $u_1(x_1^c, x_3)$ und für $U + u_1$ in der peak-Ebene $x_2 = 0$ dar und vergleichen sie mit Messungen beim 3D-Experiment bei $z = 7.5$ cm.

Dabei geht es vor allem um einen Vergleich der Strömungsstrukturen; aus dem Vergleich von u_1' und \bar{u}_1 in Abb. 5.21 und 5.25 wissen wir bereits, daß zu den späteren Zeiten gewisse quantitative Abweichungen auftreten.

Die Entwicklung der Störung $u_1(x_1^c, x_3)$ ist in Abb. 5.26 gezeigt. Zunächst bleibt die Tollmien-Schlichting-Anfangsverteilung nach Abb. 5.17b fast unverändert erhalten. Für $t \geq 80$ bildet sich die Verteilung völlig um. Sie ist geprägt von dem in x_3 symmetrischen Mittelwert \bar{u}_1 , der schließlich durchgehend negativ wird und stark ausgeprägte Minima bei $|x_3| \approx 0.7$ aufweist (vgl. Abb. 5.24). Die Fluktuation $u_1'' = u_1 - \bar{u}_1$ ist von vergleichbarer Größe, so daß u_1 nur kleine positive, aber große negative Werte bis zu -30 % annimmt. In der Kanalmitte $x_3 = 0$ verschwindet u_1 nahezu und bleibt auch im ganzen zentralen Bereich $|x_3| \leq 0.3$ sehr klein. Die x_1^c -Position des Minimums wandert für $t \geq 80$ von der Ausgangslage $x_1^c = 0$ bei $t = 0$ zu größeren Werten, d.h. die Wellengeschwindigkeit c ist jetzt größer als die Referenzgeschwindigkeit $C = c^{TS} = 0.2815$ des Bezugssystems. Der Wert von c hängt von x_3 ab und nimmt mit t zu. Für $x_3 \approx 0.6$ und $t \approx 120$ beträgt $c \approx 0.47$, was gut mit dem entsprechenden Wert des Experiments [10, Fig. 6_7] übereinstimmt.

Der Verlauf von $u_1(x_1^c)$ für $x_3 = \text{const}$ entspricht den im Experiment aufgenommenen Oszillogrammen von $u(t)$ (eines davon ist in Abb. 1.5 eingezeichnet). Er ist in Abb. 5.27 für 4 verschiedene x_3 -Positionen getrennt gezeigt. Für $t = 80$ sind die Signale immer noch fast sinusförmig, später jedoch durch höhere Harmonische stark verzerrt. Sie nähern sich der spike-Form, bei der sich das Signal über den größten Teil der Periode wenig ändert und dann ein scharfer negativer Puls auftritt. Unter den gezeigten x_3 -Positionen ist die spike-Form am ausgeprägtesten bei $x_3 = -0.59$. Der Verlauf bei $t = 122$ und $t = 125$ ist den im Experiment ([8_7, Fig. 12; [10_7, Fig. 7) beobachteten Signalen beim 1-spike und 2-spike-Stadium ähnlich, wenn auch die berechneten Verläufe weniger scharf ausgeprägte Spitzen aufweisen.

Die für einen Teil der Schwingungsperiode stark negativen u_1 -Werte führen zu charakteristischen Verformungen der momentanen Geschwindigkeitsprofile $(U + u_1)(x_3)$. Abb. 5.28 zeigt die Serie der Profile über eine Periode $0 \leq x_1^c \leq L_1$ zu verschiedenen Zeiten. Bei $t = 80$ sind bereits Abweichungen von der Parabelform zu erkennen. Später bilden sich ausgeprägte

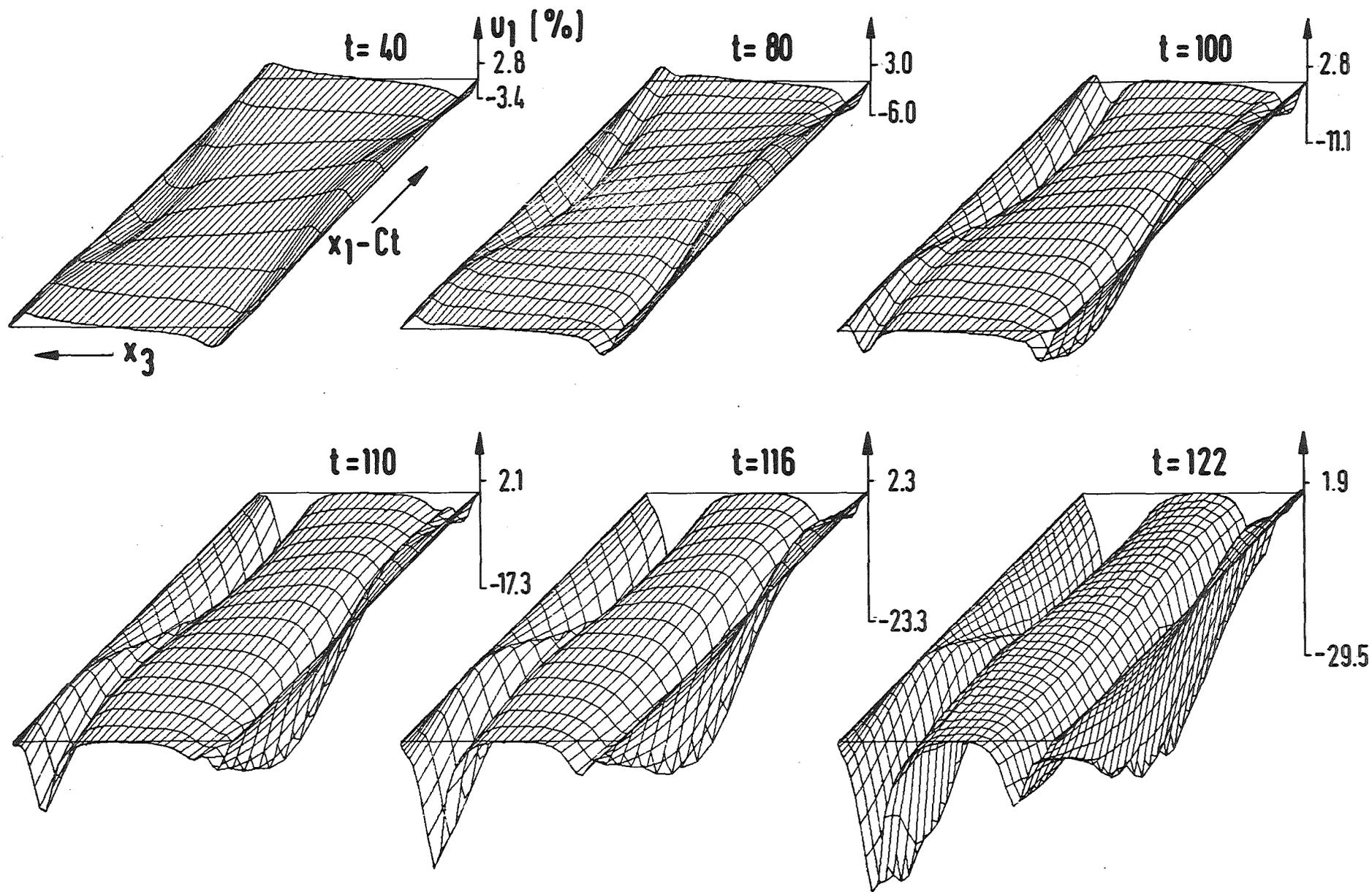


Abb. 5.26 Entwicklung von u_1 in der peak-Ebene $x_2 = 0$

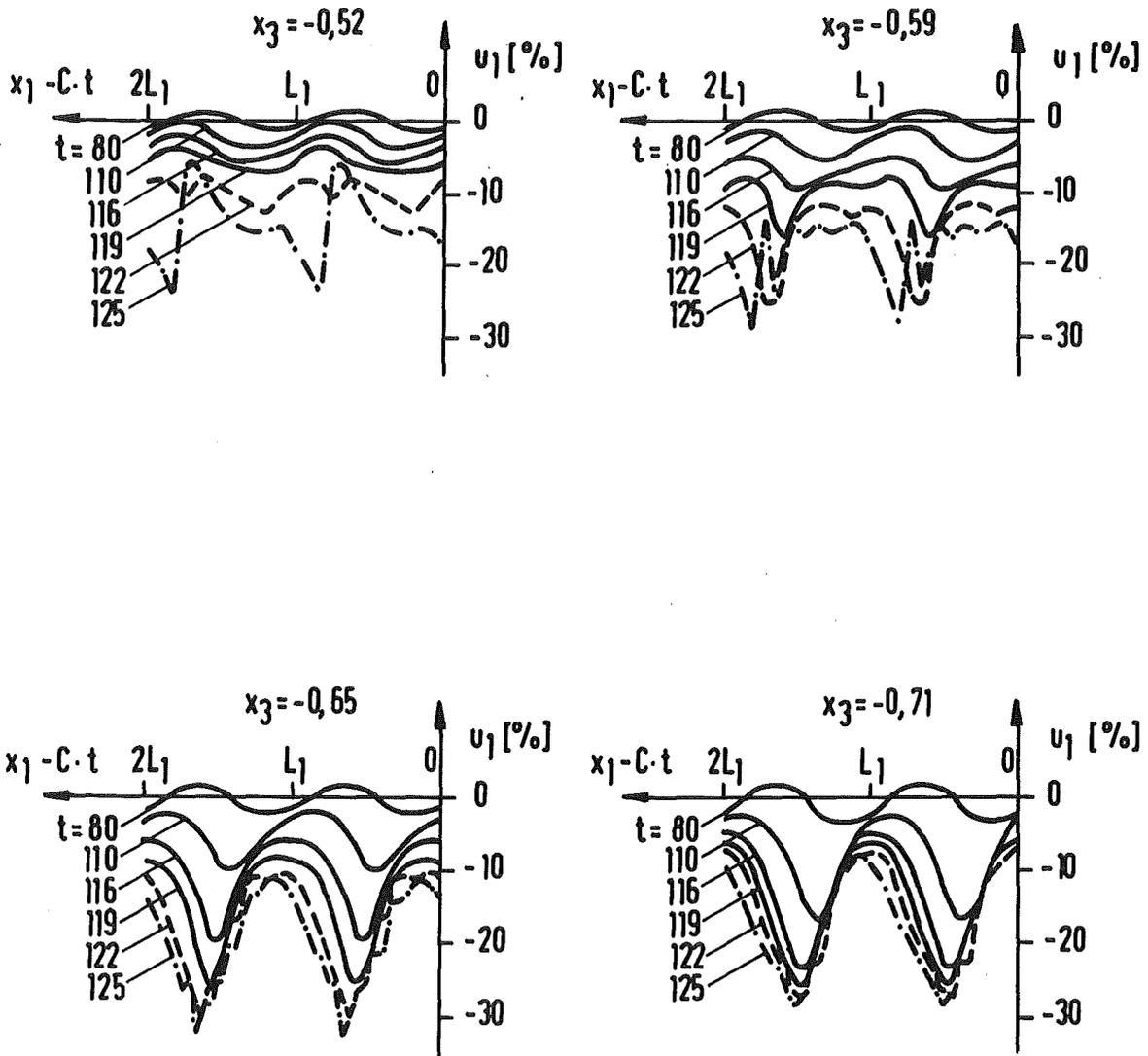


Abb. 5.27 Momentangeschwindigkeit $u_1(x_1^c)$ am peak, aufgetragen über 2 Perioden. Die x_1^c -Achse zeigt nach links, um den Oszillogrammen der Geschwindigkeitssignale $u(t)$ des Experiments zu entsprechen

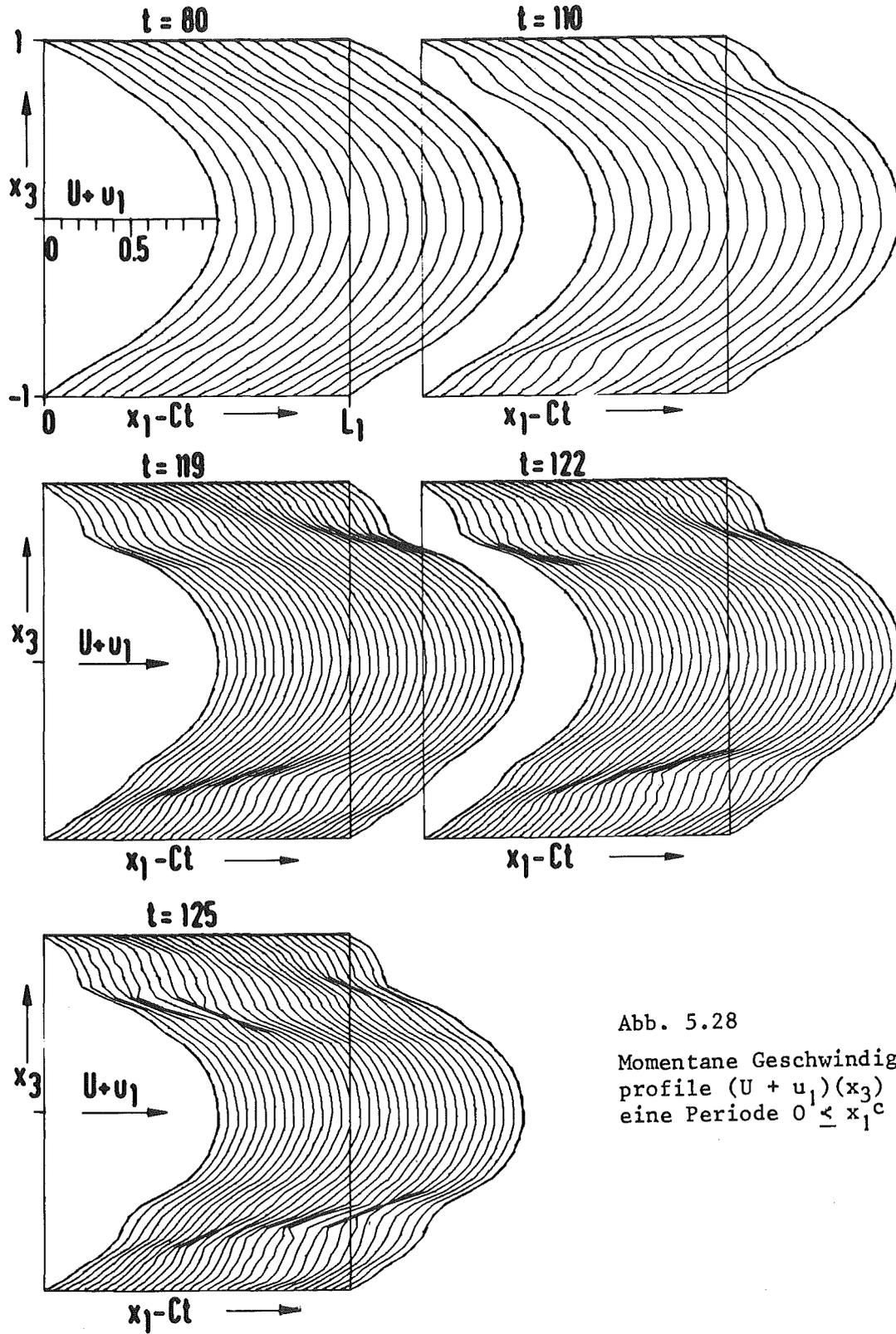


Abb. 5.28

Momentane Geschwindigkeitsprofile $(U + u_1)(x_3)$ über eine Periode $0 \leq x_1^c \leq L_1$

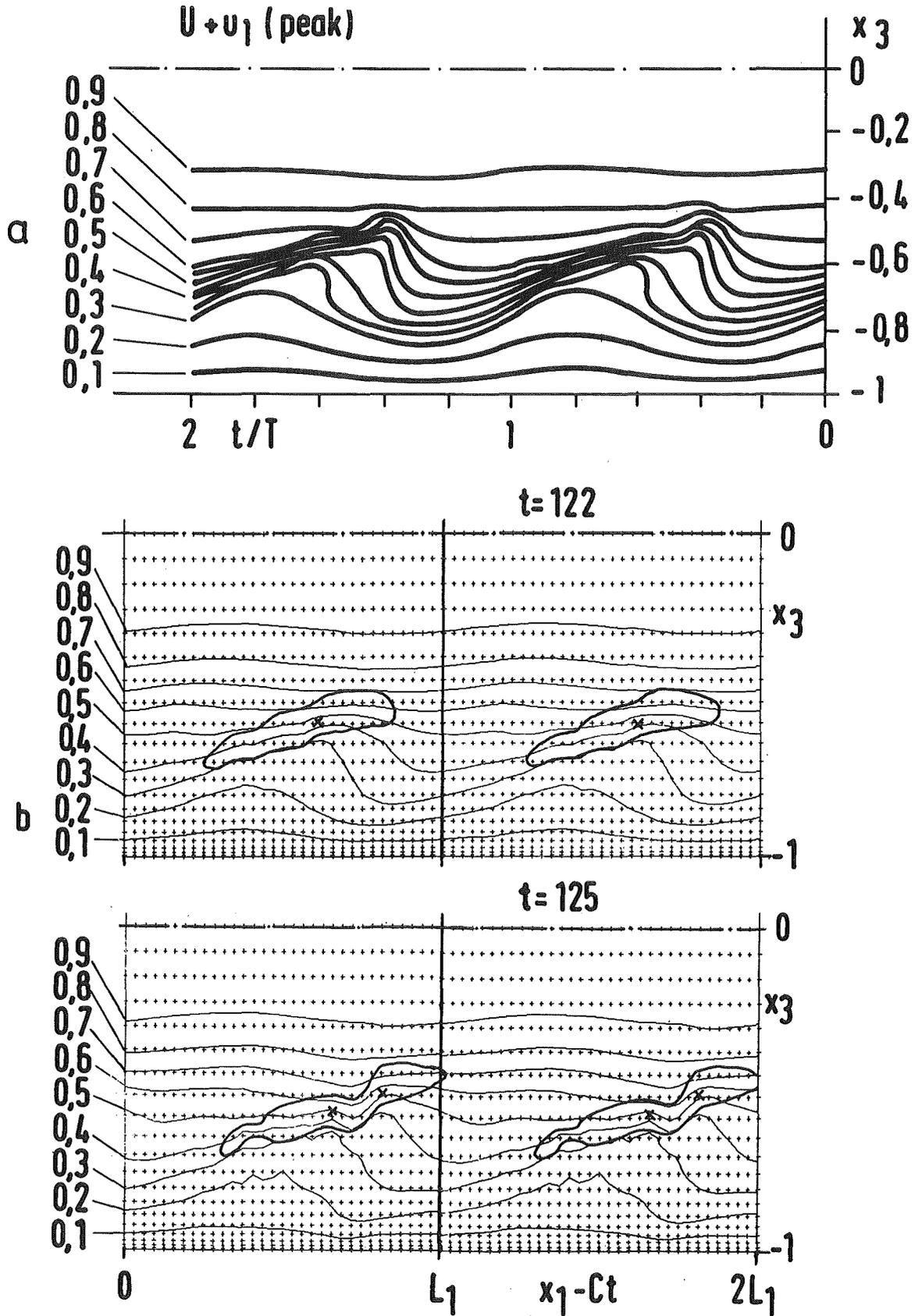


Abb. 5.29 Höhenliniendarstellung der Momentangeschwindigkeit $U + u_1$ am peak.
 a Experiment Nishioka et al. [97], 1-spike-Stadium,
 b Simulation, Scherschicht-Bereich $\partial_3(U + u_1) > 2$ zusätzlich eingezeichnet, x Maxima von $\partial_3(U + u_1)$

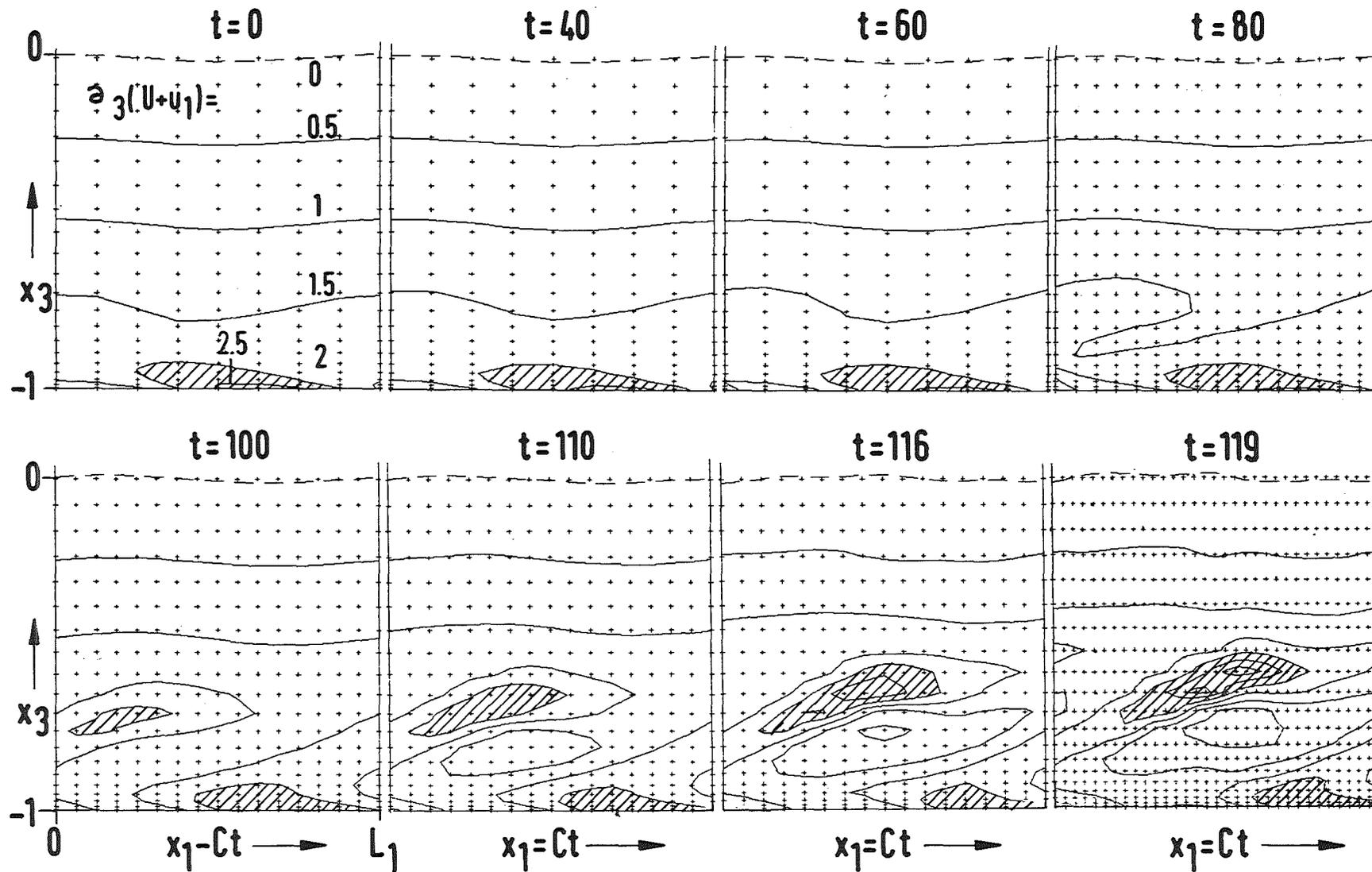


Abb. 5.30 Entwicklung der Scherschicht am peak, dargestellt anhand der Höhenlinien von $\partial_3(U + u_1)$. Bereiche mit $\partial_3(U + u_1) > 2$ sind schraffiert

Wendepunktprofile mit starken "freien Scherschichten" im Bereich $0.5 \leq |x_3| \leq 0.65$ aus. Die Profile bei $t = 122$ sind gut mit dem gemessenen Verlauf nach Abb. 1.5 vergleichbar ($\overline{10}$, Entwicklungsstufe $u_1'_{\max}(\text{peak}) = 9.4\%$). Auch im Experiment $\overline{10}$ zeigen die Momentanprofile schon für $u_1'_{\max}(\text{peak}) \geq 4\%$ (entsprechend $t \geq 90$ in der Simulation) Wendepunkte.

Eine andere, häufig benutzte Darstellung der Momentangeschwindigkeit $U + u_1$ am peak zeigt Abb. 5.29. Hier läßt sich gut erkennen, wie lokal ein Bereich mit langsamem Fluid in das Kanalinnere hineinragt, der das spike-Signal erzeugt, wenn er die an fester x -Position befindliche Meßsonde passiert. Wir bezeichnen diesen (x_1^c, x_3) -Bereich deshalb als "spike-Bereich". Insbesondere erkennt man am berechneten Verlauf für $t = 125$, daß entsprechend der hier eingetretenen Welligkeit der Höhenlinien um $x_3 = -0.6$ das 2-spike-Signal von Abb. 5.27 entsteht. Der Vergleich von Experiment und Rechnung zeigt qualitative Übereinstimmung. Quantitativ liegen im Experiment, wie bereits bemerkt, stärkere Gradienten vor, und der Bereich mit langsamem Fluid ragt etwas weiter ins Kanalinnere hinein. Ebenfalls eingezeichnet ist der Scherschicht-Bereich, den wir durch $\partial_3(U + u_1) > \max \partial_3 U = 2$ definieren. Er besitzt eine typische, auch in Experimenten $\overline{25}$ und Rechnungen $\overline{60}$ zum Grenzschichtumschlag dokumentierte Gestalt. Das Maximum der Scherung liegt jeweils am äußeren Rand des spike-Bereichs. Dementsprechend bilden sich bei $t = 125$ zwei ausgeprägte lokale Maxima mit Werten bis $\partial_3(U + u_1) = 4.4$. Die Bildung dieser Scherschicht-Bereiche (bzw. der Bereiche maximaler Rotation $\Omega + \omega_2$) ist von Interesse im Hinblick auf eine wirbeldynamische Erklärung des Umschlags $\overline{101,102}$. Abb. 5.30 zeigt die zeitliche Entwicklung der Scherschicht. Für $t \geq 100$ bildet sich zusätzlich zu dem lokalen Maximum an der Wand der Scherschicht-Bereich im Innern, der auf einen ausgeprägten Querwirbel schließen läßt (wir kommen darauf zurück).

5.3.6 Dreidimensionale Struktur der momentanen Strömung

In diesem Abschnitt wollen wir versuchen, die dreidimensionale Struktur des Strömungsfeldes zu veranschaulichen. Mit "dreidimensional" ist insbesondere die Abhängigkeit von x_2 gemeint. Wir beginnen daher mit der Darstellung von Verläufen über Schnittebenen $x_3 = \text{const.}$

Abb. 5.31 zeigt $u_1(x_1^c, x_2)$ bei $x_3 = -0.71$ zu verschiedenen Zeiten. Die Anfangsverteilung wurde in Abb. 5.17a dargestellt. Wir erhalten eine gute Veranschaulichung der Verformung der anfangs zweidimensionalen Welle. Man erkennt, daß die Fluktuation (definiert als Abweichung vom lokalen Mittelwert $\bar{u}_1(x_2)$) im peak-Bereich weitaus stärker ausgeprägt ist als im valley-Bereich, was die Struktur von Abb. 5.20, 5.21 zur Folge hat. Für Zeiten $t \geq 110$ ist die Verteilung durch den \bar{u}_1 -Anteil mit Wellenlänge $L_2/2$ geprägt (vgl. Abb. 5.19c und 5.24), der zu ausgeprägten Maxima im Abstand von etwa $L_2/4$ beiderseits des peak führt. Die beiden "Höhenrücken" dieser Maxima liegen schräg zur x_1^c -Richtung. Dies geht auch aus Abb. 5.32 hervor, wo $U + u_1$ in der Schnittebene $x_3 = -0.73$ aufgetragen ist, für die Messungen vorliegen. Der Vergleich von Messung und Rechnung zeigt, daß auch die (x_1^c, x_2) -Struktur der momentanen Geschwindigkeit in den wesentlichen Zügen übereinstimmt.

Eine recht aussagekräftige Darstellung der dreidimensionalen Strömungsverhältnisse gibt Abb. 5.33. Hier ist über der (x_1^c, x_2) -Ebene die x_3 -Position gleicher Geschwindigkeit $U + u_1 = \text{const}$ (willkürlich = c^{TS} gewählt) aufgetragen. Unterhalb dieser Iso-Fläche strömt das Fluid langsamer, darüber schneller. Die dreidimensionale Struktur des Bereichs mit langsamem Fluid wird durch die Fortsetzung auf zwei Periodenlängen noch deutlicher sichtbar. Er ragt - wie bereits in Abb. 5.29 gesehen - am peak beim spike-Bereich weit ins Kanalinnere hinein, wobei seitlich und nach vorn ein steiler Abfall auftritt. Für die Entstehung dieser Struktur gibt es eine naheliegende Erklärung. Danach liegt, wie in Abb. 5.34 qualitativ skizziert, ein kräftiger diskreter, dreidimensionaler Wirbel vor, der sich im peak-Bereich hufeisenförmig um den Bergrücken herumlegt ("top vortex loop") und im valley-Bereich um etwa eine Wellenlänge L_1 zurückbleibt ("tail vortex loop"). Er transportiert am peak im Innern der Schleife langsames Fluid von der Wand weg und außerhalb schnelles Fluid in Richtung Wand, was zu dem steilen Abfall in Abb. 5.33 führt. Ein zweiter, schwächerer Wirbel mit entgegengesetztem Drehsinn tritt im valley-Bereich auf und ist gegenüber dem ersten um etwa $L_1/2$ versetzt. Er bewirkt die weniger stark ausgeprägte Anhäufung von langsamem Fluid im valley-Bereich. Wegen $L_1 \approx 2 L_2$ besitzen beide Wirbel eine ausgeprägte x_1 -Komponente, die bei Mittelung über x_1^c das Längswirbelsystem von Abb. 5.23 ergibt.

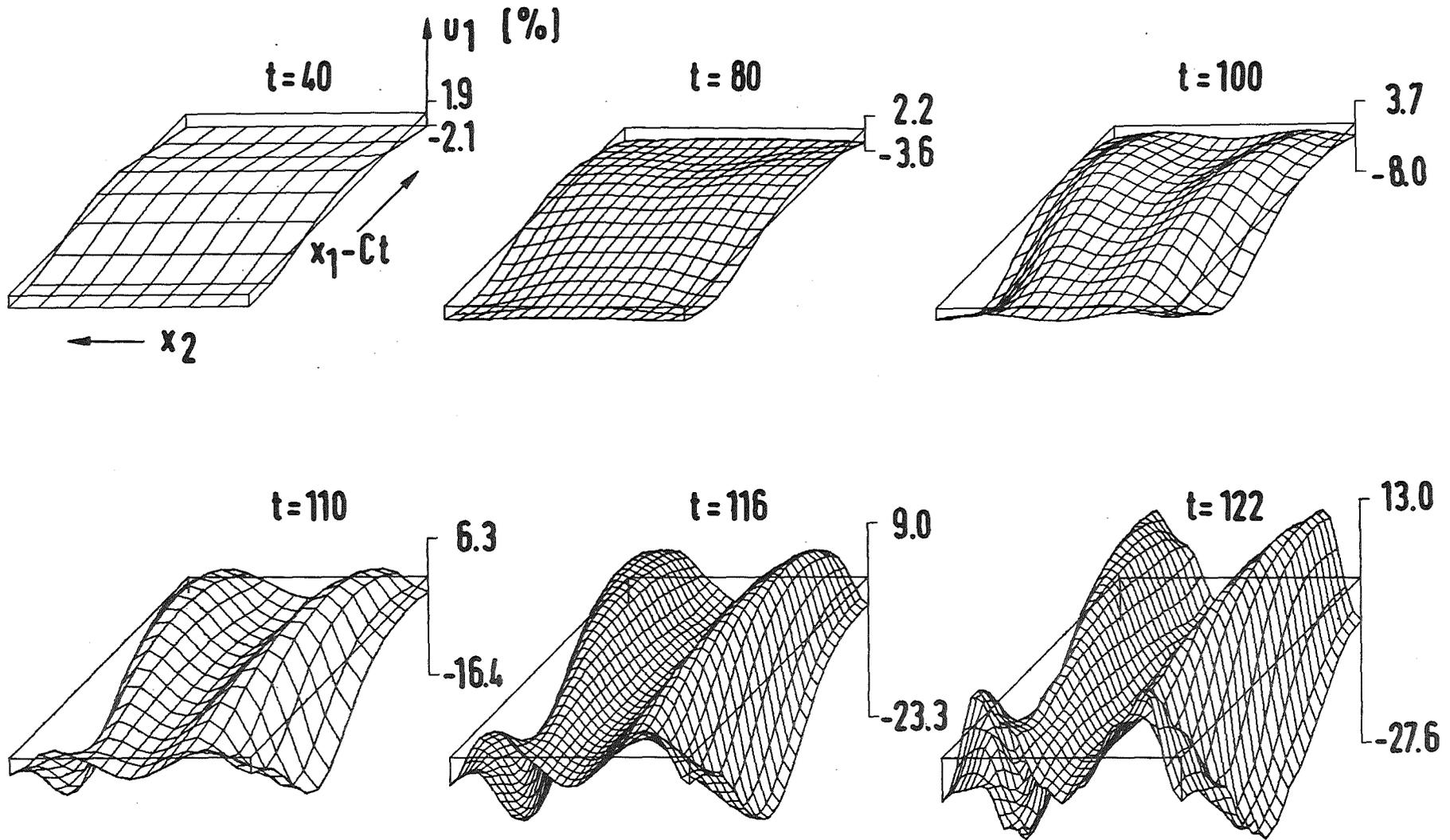


Abb. 5.31 Dreidimensionale Entwicklung der Welle $u_1(x_1^c, x_2)$ bei $x_3 = -0.71$

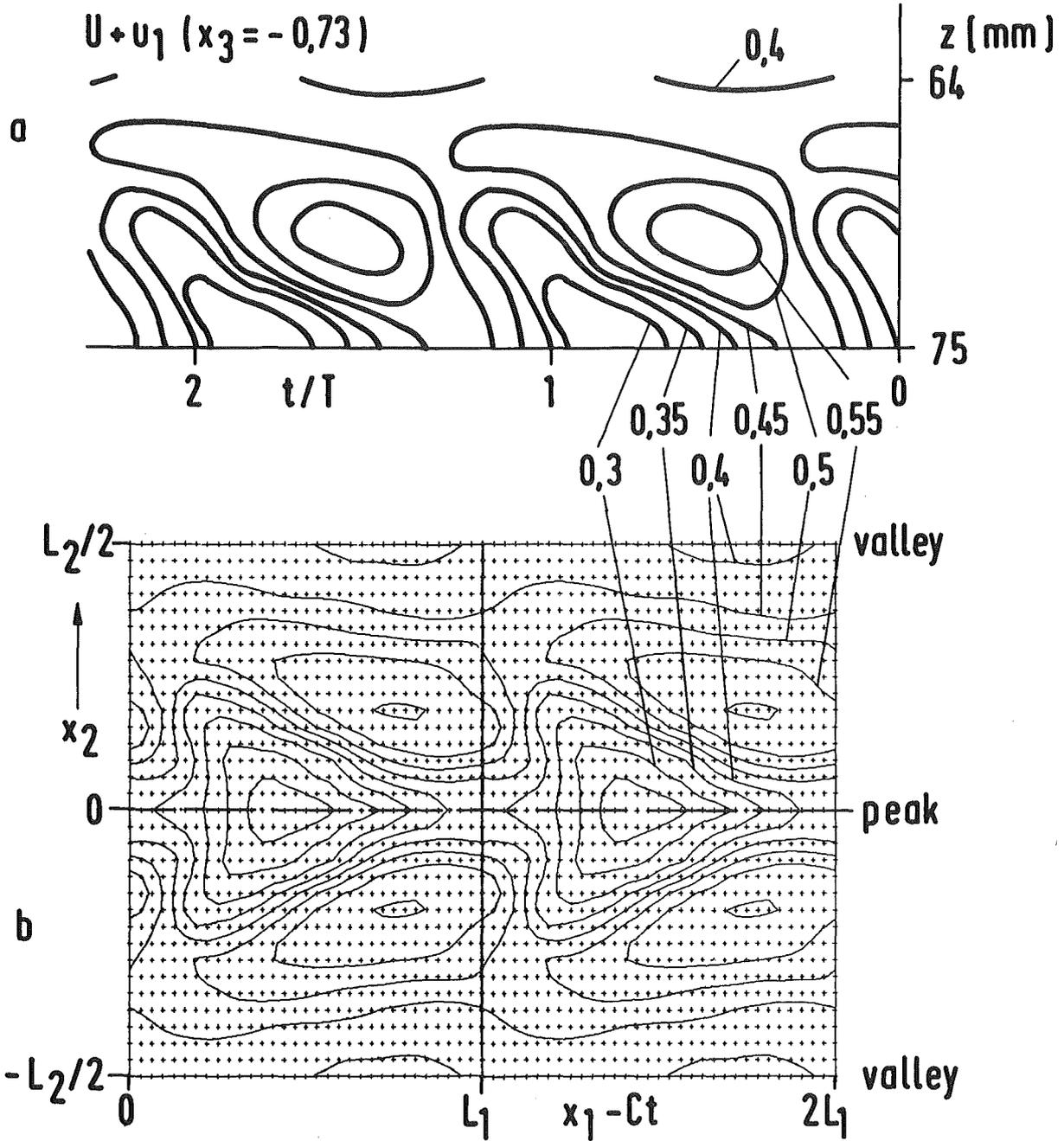


Abb. 5.32 Momentangeschwindigkeit $U + u_1$ in der Schnittebene $x_3 = -0.73$
 a Experiment Nishioka et al. [9], 1-spike-Stadium
 b Simulation, $t = 122$

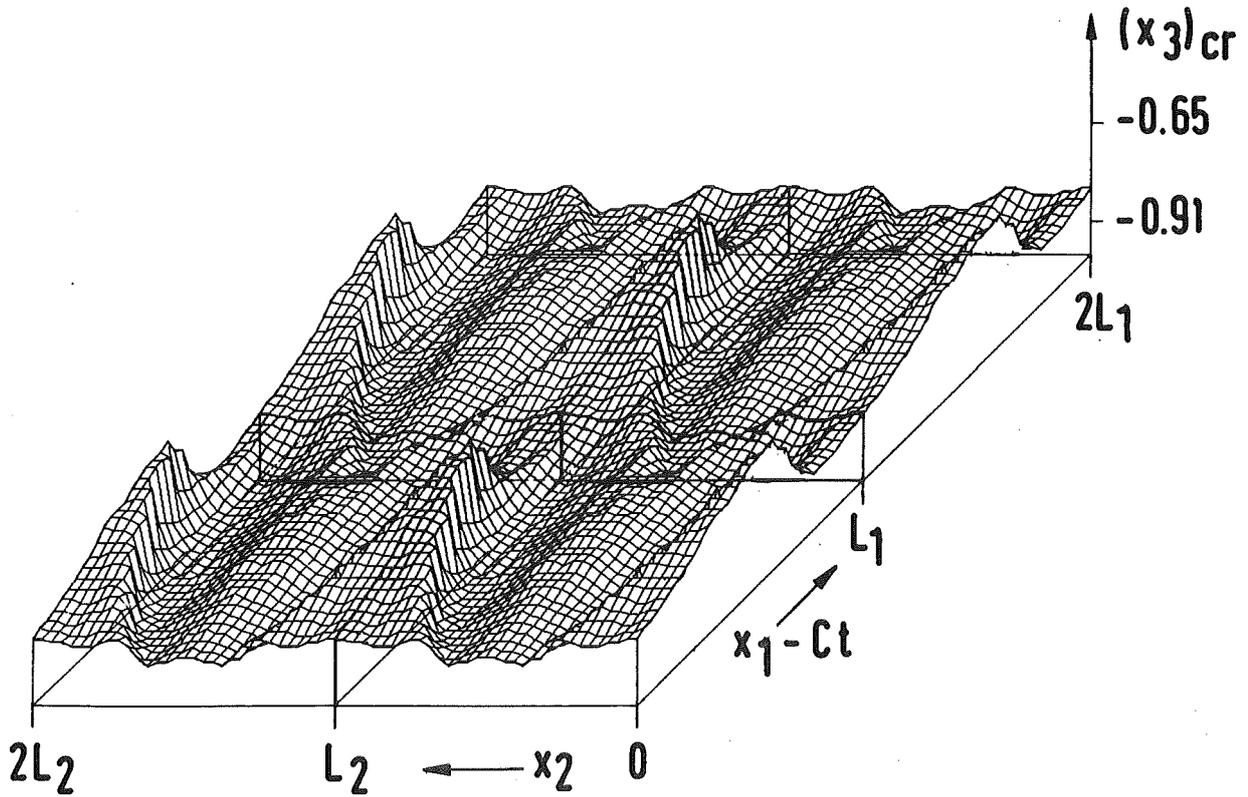


Abb. 5.33 Iso-Fläche der momentanen Geschwindigkeit $U + u_1$, definiert durch $(U + u_1)(x_1^c, x_2, (x_3)_{cr}) = c^{TS} = 0.2815$, $t = 122$

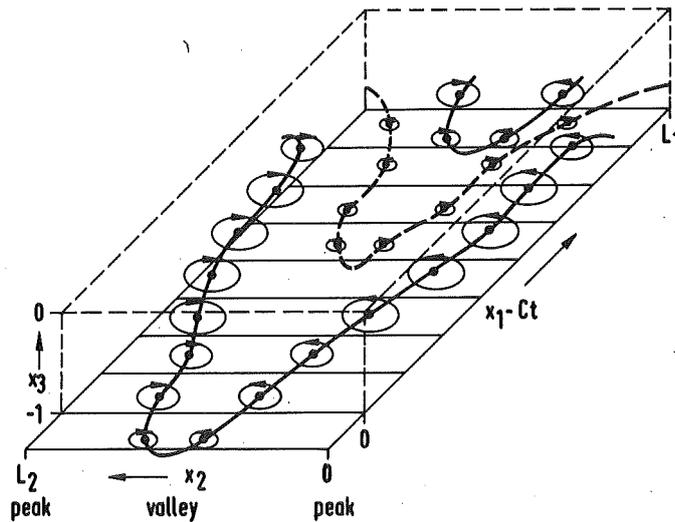


Abb. 5.34 Skizze der dreidimensionalen Wirbelstruktur, $t = 122$

Abb. 5.34 wurde abgeleitet aus Vektordarstellungen der Geschwindigkeit und der Rotation in achsenparallelen Schnittebenen. Abb. 5.35 zeigt Projektion (u_2, u_3) von \underline{u} auf einige Schnittebenen $x_1 = \text{const}$ sowie daneben Höhenlinien von $U + u_1$. In Abb. 5.36 ist die Projektion (u_1, u_2) der Störungsgeschwindigkeit und die Projektion $(\omega_1, \Omega + \omega_2)$ des gesamten Wirbelvektors über Ebenen $x_3 = \text{const}$ dargestellt. Die Darstellungen verdeutlichen in erster Linie das Richtungsfeld, weniger die Beträge der Vektoren.

Außer den hier gezeigten wurde eine Reihe weiterer Größen dargestellt, auf die wir hier nicht näher eingehen, wie z.B. Werte und x_3 -Position der maximalen Scherung sowie von Komponenten und Betrag des Wirbelvektors. Diese Darstellungen sind konsistent mit dem hier skizzierten Bild der dreidimensionalen Strömung.

Die Existenz des diskreten Wirbelsystems von Abb. 5.34 wird seit langem diskutiert. Experimente zum Grenzschicht-Umschlag, bei denen die Strömung durch Wasserstoffbläschen sichtbar gemacht wurde, haben solche Wirbelstrukturen gezeigt [26, 28]. Es bestand jedoch eine gewisse Kontroverse um die Interpretation dieser Beobachtungen (vgl. die Diskussion bei Tani [29]). Theoretische Überlegungen [55, 102] waren vorwiegend qualitativer Natur, da das dreidimensionale Problem bisher rechnerisch nicht behandelt werden konnte. Zweidimensionale Darstellungen [103] können zwar die momentane Strömung in den frühen Phasen des Umschlags parametrisch beschreiben, aber weder - da die Wirbeldynamik sich erst im Dreidimensionalen voll entfalten kann - die dynamische Entwicklung wiedergeben noch die späteren Phasen erfassen. Mit der hier vorgelegten Simulation konnte die diskrete Wirbelstruktur nach Kenntnis des Autors erstmals auch außerhalb des Experiments nachgewiesen werden. Die hier gefundene Struktur ist konsistent zu dem von Wortmann [28] aufgrund seiner Strömungsaufnahmen entworfenen Modell: "There exist besides the basic ω_z -field two downstream inclined sheets of counterrotating longitudinal vorticity which follow each other with a distance of half a wave length. This holds with opposite signs of rotation for both sides of the x-y-plane of symmetry¹⁾. (...) These vorticity sheets overlap each other like roof shingles."

¹⁾ d.h. peak-Ebene

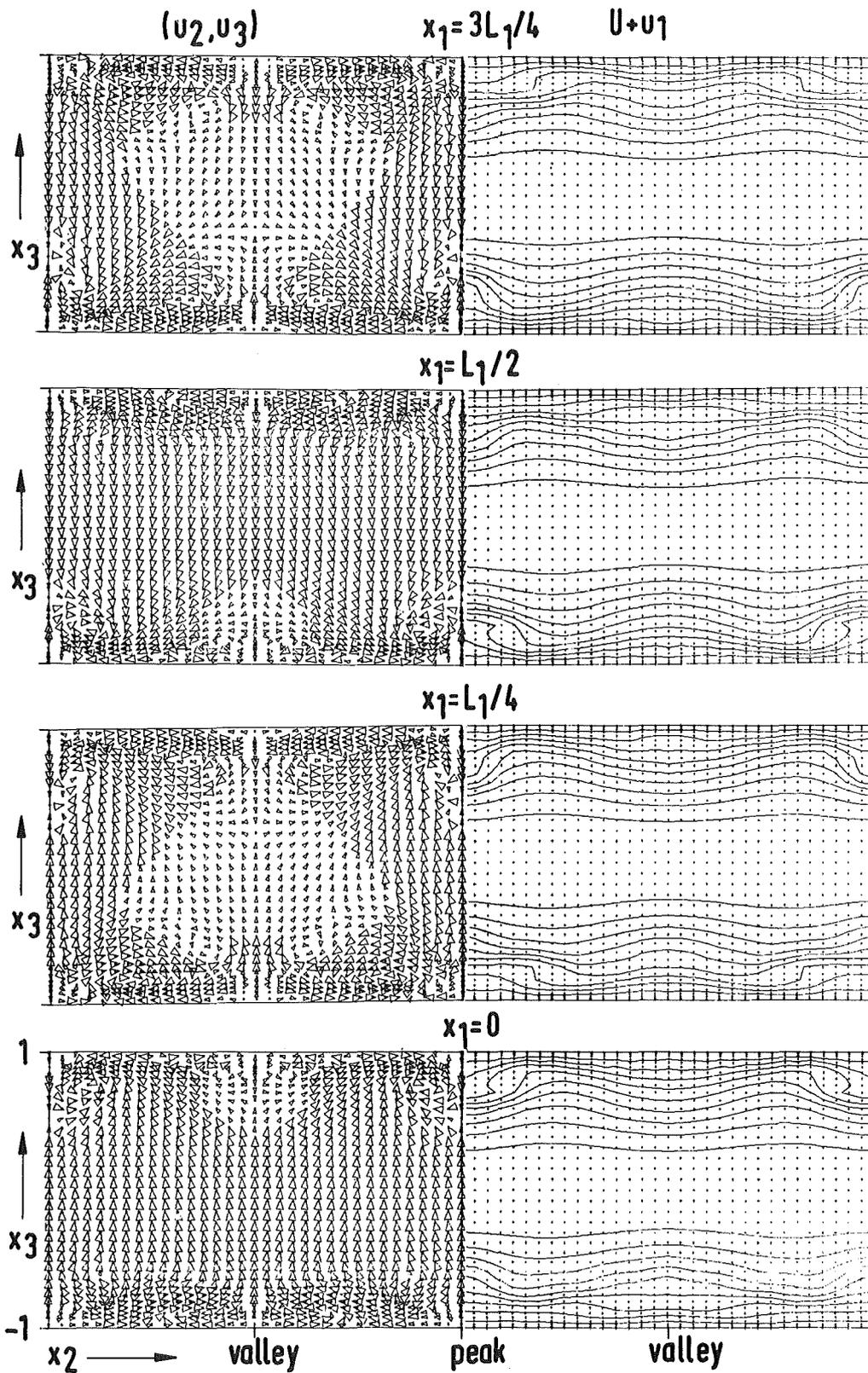


Abb. 5.35 Momentangeschwindigkeit (u_2, u_3) und $U + u_1$ (Höhenlinienabstand 10 %) in Schnittebenen $x_1 = \text{const}$ bei $t = 122$

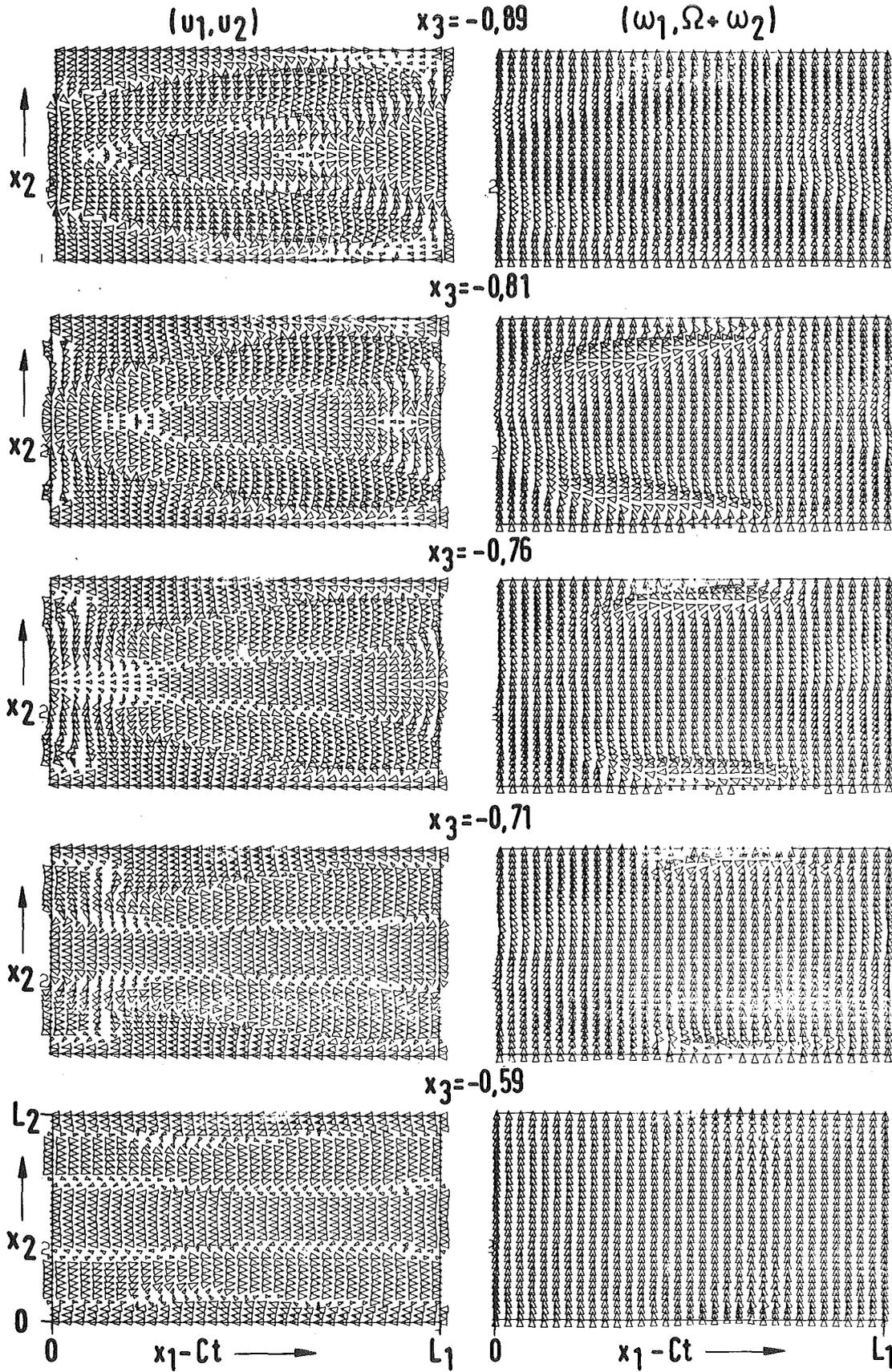


Abb. 5.36 Momentangeschwindigkeit (u_1, u_2) und Projektion $(\omega_1, \Omega + \omega_2)$ des Wirbelvektors in Schnittebenen $x_3 = \text{const}$ bei $t = 122$

Kürzlich veröffentlichte experimentelle Beobachtungen in Grenzschichten haben erwiesen, daß die beim Umschlagsprozeß entstehenden klar unterscheidbaren diskreten "Hufeisenwirbel" oder "Haarnadelwirbel" weit über den Umschlag hinaus erhalten bleiben. Mehr noch, sowohl der durch den Zusammenbruch der Welle entstandene Turbulenzfleck [104] als auch die vollturbulente Wandgrenzschicht [105] scheinen überwiegend aus einer Anordnung solcher diskreter Wirbel zu bestehen, die für große Reynoldszahlen extrem langgestreckt sind [105]. Die in [104] gemachten Aufnahmen von Rauch-Mustern zeigen eine bemerkenswerte Ähnlichkeit zu dem hier durch numerische Simulation gefundenen Wirbelmuster.

5.3.7 Zusammenfassung

Wir wollen die Ergebnisse der dreidimensionalen Simulation und des Vergleichs mit Experimenten zusammenfassen. Weitere Aspekte werden in 5.5 diskutiert, nachdem wir über die Ergebnisse zusätzlicher Simulationen berichtet haben.

1. Es wurde eine numerische Simulation zum laminar-turbulenten Umschlag in Anlehnung an Experimente mit kontrollierten Störungen von Nishioka et al. [8-10] durchgeführt. Die Parameter waren $Re = 5000$, $\alpha_1 = 1.12$, $\alpha_2 = 2.1$. Die Anfangsstörung $u^0(x)$ wurde entsprechend dem Benney-Lin-Modell gewählt, Gl. (5.16) - (5.18).
2. Es wurde eine detaillierte Auswertung und ein Vergleich mit Messungen von mittlerer Geschwindigkeit, Amplituden der Fluktuation und momentaner Strömung bei verschiedenen Entwicklungsstufen des Umschlagsprozesses vorgenommen. Der Vergleich ergab eine durchgehend sehr zufriedenstellende qualitative und weitgehend auch quantitative Übereinstimmung bis hin zum spike-Stadium. Damit ist nachgewiesen, daß das Modell der sich zeitlich entwickelnden, x_1 -periodischen Strömung mit der hier verwendeten numerischen Diskretisierung den experimentell beobachteten Umschlagsprozeß reproduziert.
3. Der Vergleich mit Messungen ergab wesentliche Übereinstimmungen insbesondere in folgenden Punkten:
 - Zeitskala (entsprechend x_1 -Skala im Experiment) bis zum Zusammenbruch (ca. $6 T^{TS}$)

- Entwicklung der maximalen Fluktuation $u_1'_{\max}$ an verschiedenen Spannweitenpositionen x_2 , Ausbildung der peak-valley-Struktur
- Verteilung von $u_1'_{\max}(x_2)$ und $u_1'(x_3)$ zu verschiedenen Entwicklungsstufen
- Abhängigkeit der mittleren Geschwindigkeit $U + \bar{u}_1$ von x_2 und x_3
- starke negative lokale Geschwindigkeitspulse bis -30 % (spikeartige Signale) in der Momentangeschwindigkeit u_1 am peak, verbunden mit ausgeprägten Scherschicht- und Wendepunktprofilen $(U + u_1)(x_3)$ und hervorgerufen durch eine lokale Anhäufung langsamen Fluids im Bereich $0.5 < |x_3| < 0.8$
- Erzeugung eines 2-spike-Signals durch eine "Auffaltung" des äußeren Randes des Bereichs mit langsamem Fluid.

4. Es konnte eine Reihe von bisher (zumindest für die Poiseuille-Strömung) nicht dokumentierten dreidimensionalen Strömungsstrukturen aufgezeigt werden, so

- die vollständige räumliche Struktur der Längsschwankungen $u_1'(x_2, x_3)$
- die Ausbildung einer mittleren Sekundärströmung in Form eines Längswirbelsystems, das seine x_2 -Wellenlänge beim Umschlagsprozeß halbiert
- die Ausbildung einer "freien Scherschicht" im spike-Bereich mit scharf lokalisierten Maxima der Scherung $\partial_3(U + u_1)$
- das dreidimensionale momentane Geschwindigkeitsfeld sowie das Wirbelfeld zu Beginn des spike-Stadiums, dargestellt durch Projektionen auf Schnittebenen, und schließlich daraus abgeleitet
- ein diskretes Wirbelsystem in Form von "Hufeisen"- oder "Haarnadel"-Wirbeln (horseshoe/hairpin vortex).

5. Aus dem Zeitverhalten der Fourieramplituden $\hat{u}_{1\max}$ wurde geschlossen, daß der Umschlag auf eine sekundäre, dreidimensionale Instabilität der zweidimensionalen Wellenstörung zurückzuführen ist.

6. Die dominierenden Fouriermodes $(k_1, k_2) = (1, 0)$, $(1, k_2)$ und $(0, k_2)$ mit $k_2 = 1, 2$ (zweidimensionale Welle, dreidimensionale schräglau- fende Welle und mittlere Längswirbelströmung) ergeben ein verein- fachttes Modell zur Beschreibung der Strömung.

5.4 Weitere dreidimensionale Simulationen

Es wurden einige weitere dreidimensionale Simulationen durchgeführt, um den Einfluß der Parameter Re , α_1 , α_2 und A^{TS} sowie der Art der dreidi- mensionalen Anfangsverteilung zu untersuchen. Da die dominierende zwei- dimensionale Wellenstörung sich zunächst unabhängig von den dreidimen- sionalen Störungen entwickelt, sind für die Anfangsentwicklung die Para- meter (Re, α_1, A^{TS}) bestimmend.

5.4.1 Unterkritisches Schwellenwertverhalten

Durch Variation der Anfangsamplitude A^{TS} wurde das unterkritische Schwel- lenwertverhalten bei sonst gleichen Parametern und gleicher Anfangsver- teilung wie in 5.3 untersucht. Die Diskretisierung war $N_1 = N_2 = 8$, $N_3 = 40$, $\Delta t = 0.2$. Die zeitliche Entwicklung von $u_1'_{max}$ an der peak- Position $x_2 = 0$ zeigt Abb. 5.37. Wir stellen das gleiche Schwellenwert- verhalten wie beim 2D-Experiment nach Abb. 5.1 fest. Für $A^{TS} = 2\%$ bleibt $u_1'_{max}$ anfangs nahezu konstant auf dem Anfangswert 1.5% und wächst für $t \geq 100$ leicht an. Die entsprechende, über einen weiten Bereich neutrale Amplitude im Experiment (Abb. 5.1, Kurve 3) beträgt ebenfalls $u_1'_{max} = 1.5\%$. Auch hier erfolgt schließlich ein Anwachsen. In den Rech- nungen mit $A^{TS} \leq 1.4\%$ klingt die Störung ab, und die Rechnung mit $A^{TS} = 2.5\%$ führt ebenfalls zum Umschlag.

Die zeitliche Entwicklung der Fourieramplituden \hat{u}_{1max} ist in Abb. 5.38 gezeigt. Während der zweidimensionale Tollmien-Schlichting-Mode $(k_1, k_2) = (1, 0)$ außer bei Einsetzen des Umschlags annähernd mit $\exp(\omega_i^{TS} t)$ gedämpft wird, hängt das Wachstumsverhalten der dreidimensionalen Modes $(1, 1)$ und $(0, 1)$ stark von A^{TS} ab. Ganz zu Anfang ($t \lesssim 0.5$ bis $1 T^{TS}$) wird der $(1, 1)$ -Mode gemäß $\exp(\omega_i^{3D} t)$ gedämpft. Gleichzeitig wird, wie vom Benney-Lin-Modell [51] beschrieben, durch nichtlineare Wechselwirkung

eine x_2 -abhängige mittlere Störung \bar{u}_1 von der Größenordnung $10 \cdot A^{TS} \cdot A^{3D} \approx 0.01\%$ erzeugt (Abb. 5.38b), und damit zusammenhängend die mittlere Sekundärströmung (\bar{u}_2, \bar{u}_3) in Form von Längswirbeln. Nach der Einschwingphase erfolgt das Wachstum der Modes (k_1, k_2) gemäß $\exp(\omega_i(k_1, k_2)t)$ mit einer zunächst zeitlich nur wenig veränderlichen Wachstumsrate $\omega_i(k_1, k_2)$, deren Größe und Vorzeichen stark von A^{TS} abhängt. Nach Abb. 5.38a ist $\omega_i(1, 1) > 0$ für die Rechnungen mit $A^{TS} \geq 2\%$ und ≤ 0 für $A^{TS} \leq 1.4\%$. Die Wachstumsraten $\omega_i(0, 1)$ der "Längswirbelmodes" $(0, 1)$ sind $\approx \omega_i(1, 1)$. Einen charakteristischen Unterschied stellen wir jedoch in den gedämpften Fällen $A^{TS} \leq 1.4\%$ für Zeiten $t \geq 100$ fest: hier wächst der Längswirbelmode sogar wieder leicht an. Dieses Verhalten ist durchaus typisch für Fälle mit gedämpften Störungen: Zwei- und dreidimensionale fluktuierende Anteile ($k_1 > 0$) werden mit nahezu konstanter Wachstumsrate gedämpft, während die mittlere Störung (Längswirbelmodes) ihre in der Anfangsphase erreichte Größenordnung auch noch dann beibehält, wenn die fluktuierenden Anteile schon weit unter diese Größenordnung abgefallen sind. Ein Beispiel werden wir gleich zeigen. Für die Wachstumsraten der höheren, durch Nichtlinearität erzeugten Modes (k_1, k_2) gilt, solange die zweidimensionale Welle dominiert, näherungsweise die entsprechend der Produktbildung zu erwartende Regel

$$\omega_i(k_1, k_2) = k_1 \cdot \omega_i(1, 0) + k_2 \cdot \omega_i(0, 1) . \quad (5.19)$$

Diese finden wir auch in Abb. 5.19 bestätigt, wo $|\omega_i(1, 0)| \ll \omega_i(0, 1)$, also $\omega_i(1, 1) \approx \omega_i(0, 1)$ und allgemein $\omega_i(k_1, k_2) \approx k_2 \cdot \omega_i(1, 1)$ mit $\omega_i(1, 1) \approx 0.05$.

5.4.2 Einfluß der Wellenzahl α_1 und der Reynoldszahl

Ebenfalls bei $Re = 5000$ wurde der Einfluß der Wellenzahl α_1 (entsprechend der Frequenz ω_r im Experiment) untersucht. Die Ergebnisse waren konsistent mit der im 2D-Experiment [8, Fig. 16] festgestellten Abhängigkeit des Schwellenwertes von α_1 . Eine systematische Berechnung des Schwellenwertes wurde jedoch nicht vorgenommen. Eine weitere Rechnung wurde bei $Re = 5000$ mit $A^{TS} = 3\%$ durchgeführt, bei der in der Anfangsverteilung

anstelle von (5.17) "zufällige" Störungen mit einer Amplitude $\leq 0.02\%$ vorgegeben wurden. Diese Rechnung führte in gleicher Weise wie die Rechnung in 5.3 zum Umschlag bei $t \approx 150$.

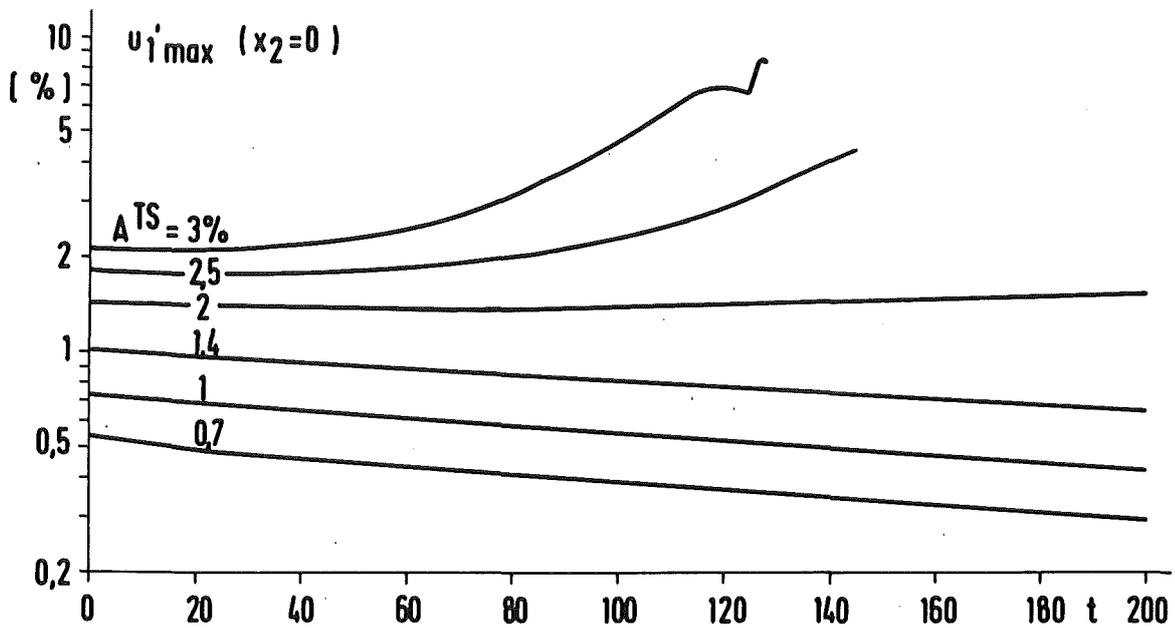


Abb. 5.37 Entwicklung von $u_1'_{\max}$ bei verschiedenen Anfangsamplituden A^{TS} . Simulation bei $Re = 5000$,
 $\alpha_1 = 1.12$, $\alpha_2 = 2.1$

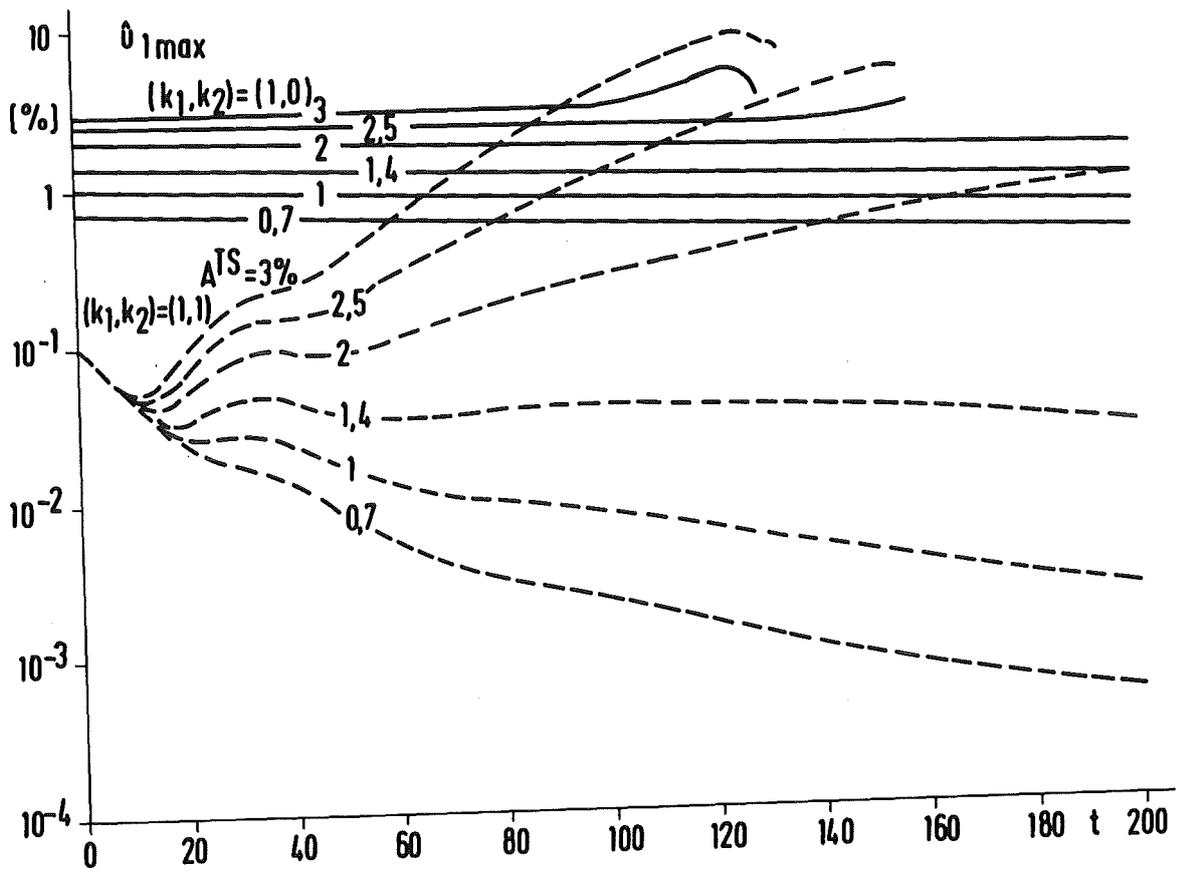


Abb. 5.38a Entwicklung der zweidimensionalen Fourieramplituden $\hat{u}_{1\max}(1,0)$ und der dreidimensionalen Fourieramplituden $\hat{u}_{1\max}(1,1)$

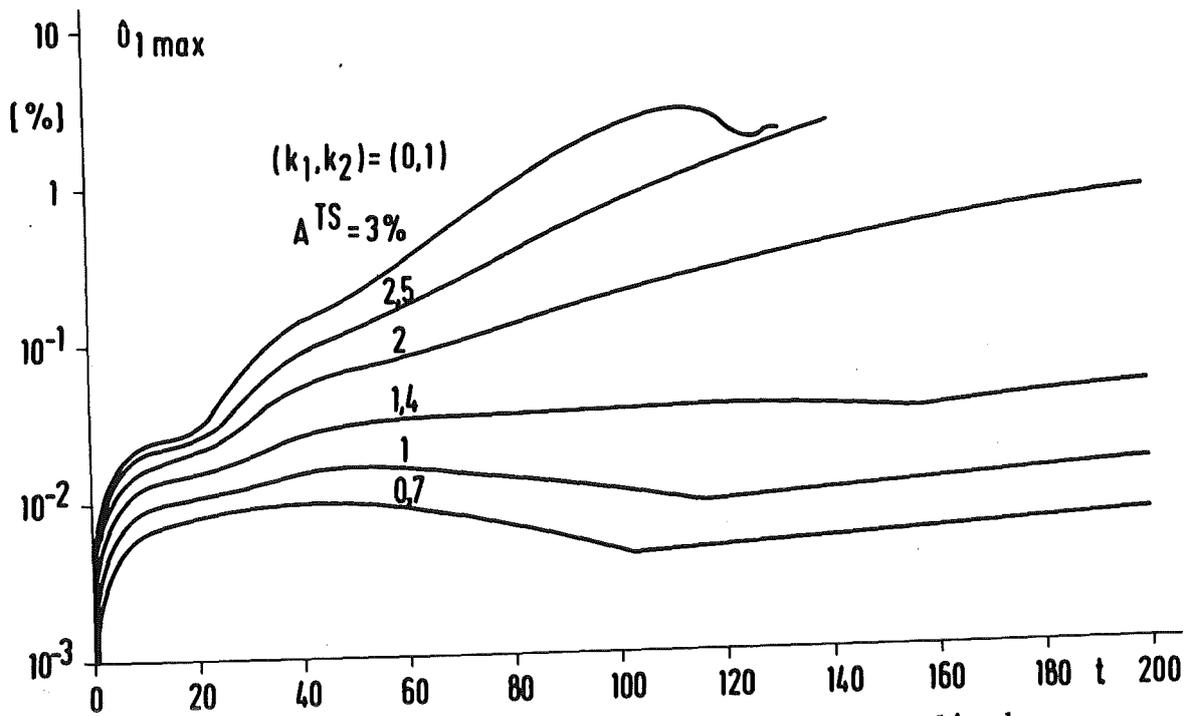


Abb. 5.38b Entwicklung der dreidimensionalen Fourieramplituden $\hat{u}_{1\max}(0,1)$ der mittleren Strömung \bar{u}_1

In weiteren Rechnungen wurde die Reynoldszahl variiert. Ergebnisse einer Rechnung bei der weit unterkritischen Reynoldszahl $Re = 1250$ mit $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ und der Anfangsverteilung (5.18) mit $A^{TS} = 3\%$, $A^{3D} = 1\%$ zeigt Abb. 5.39. Wegen der großen Entfernung von der neutralen Fläche ist die zweidimensionale Welle stark gedämpft, ebenso die dreidimensionale Störung. Dagegen behalten die nichtlinear erzeugten "Längswirbelmodes" $(0, k_2)$, wie oben schon bemerkt, ihre einmal erreichte Größenordnung von 0.1% , wobei der Mode $(0,2)$ dominiert. Eine lineare Stabilitätsanalyse für den Mode $(0,1)$ mit symmetrischem $u_1(x_3)$ ergibt bei $\alpha_1 = 1$ die Dämpfungsrate $\omega_1(0,1) \approx -20/Re$, was das lange Anhalten auch nach dem Abklingen aller übrigen Störungen erklärt.

Aus Experimenten ist bekannt, daß bei diesen Reynoldszahlen im Bereich von Re_{min} erst Störungen mit Amplituden von der Größenordnung 10% den Umschlag auslösen [17]. Orszag und Kells [64] fanden für $Re = 1250$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ und Anfangsverteilung (5.18) Dämpfung für $A^{TS} = 11\%$ und $A^{3D} \leq 2.5\%$. Wir haben ihre Rechnung mit $A^{TS} = 11\%$ und $A^{3D} = 5\%$ wiederholt und fanden im wesentlichen Übereinstimmung mit den in [64] gezeigten Kurven für \hat{u}_{1max} .¹⁾ Ob bei diesen Rechnungen der Umschlag erfolgt, oder alle Störungen gedämpft werden, hängt in sehr viel stärkerem Maße von A^{TS} und insbesondere von A^{3D} ab als bei den Rechnungen bei $Re = 5000$. Es findet ein "Wettlauf" zwischen der Dämpfung der zweidimensionalen Welle und dem Anwachsen der dreidimensionalen Anteile statt: Die dreidimensionalen Anteile wachsen nur solange an, wie die zweidimensionale Welle einen Schwellenwert - den Schwellenwert für die sekundäre Instabilität - nicht unterschritten hat. Haben sie bei Unterschreitung dieser Amplitude noch nicht die Größenordnung der Welle erreicht, kommt es nicht zum Umschlag.

Schließlich soll noch über Simulationen im linear instabilen Bereich bei $Re = 10^4$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ berichtet werden. Hier wurde als dreidimensionaler Anteil \underline{u}^{3D} von \underline{u}^0 statt (5.17) eine mittlere Längswirbelstörung mit $A^{3D} = 0.1\%$ vorgegeben. A^{TS} wurde von 0.5% bis 5% variiert. Bei $A^{TS} = 0.5\%$ verhielten sich im Integrationsbereich $t \leq 250$ beide Anteile \underline{u}^{TS} und \underline{u}^{3D} linear, d.h. Anwachsen von \underline{u}^{TS} mit $\exp(0.00374 t)$ und Dämpfung von \underline{u}^{3D} mit $\exp(-9.31 t/Re)$. Der Mode $(1,1)$ wuchs entsprechend (5.19) ebenfalls nur schwach an. Die Ergebnisse für $A^{TS} = 2\%$

¹⁾ s. [112], Fig. 9

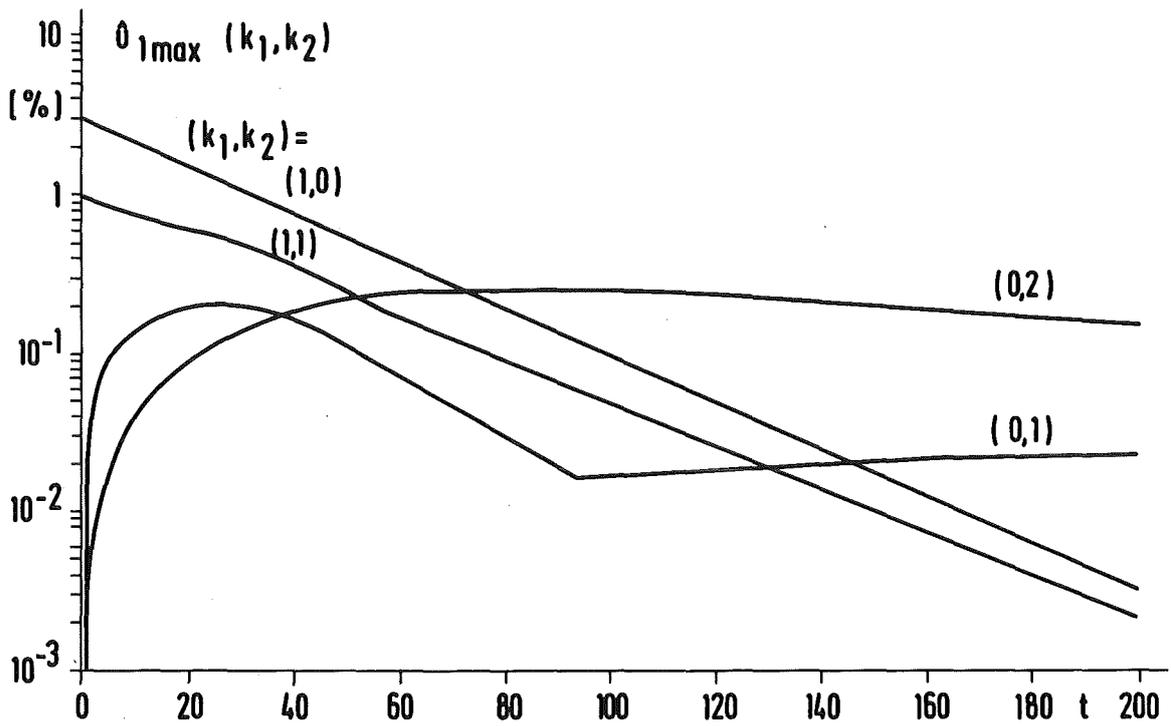


Abb. 5.39 Entwicklung der Fourieramplituden $\hat{u}_{1\max}$, Simulation bei $Re = 1250, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$

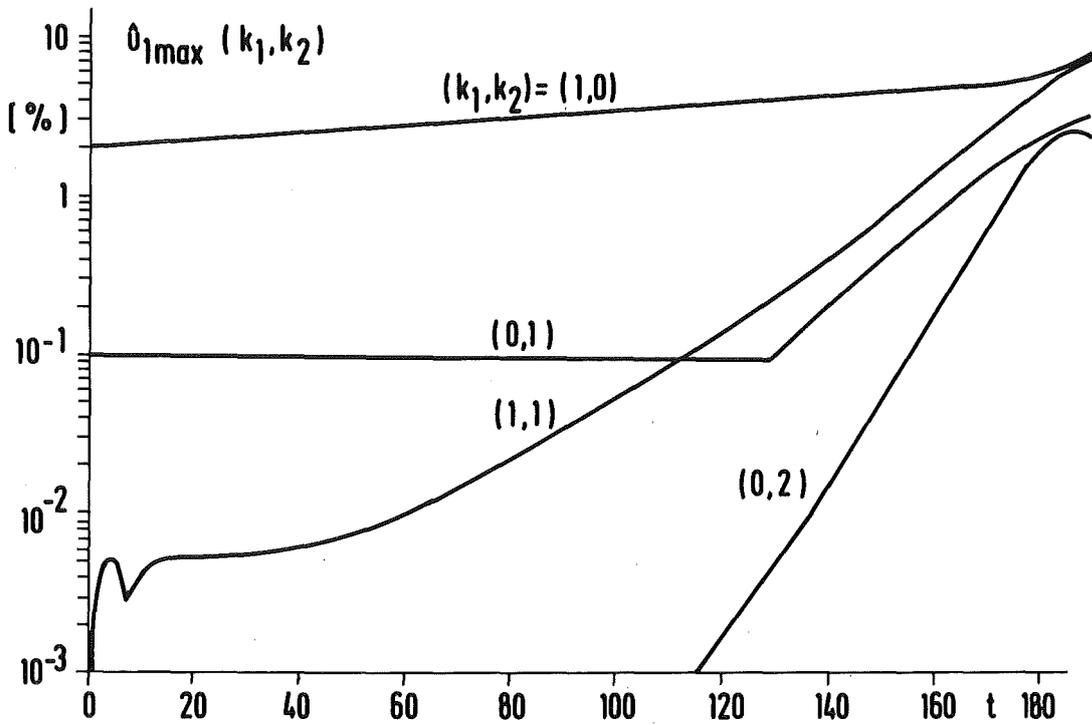


Abb. 5.40 Entwicklung der Fourieramplituden $\hat{u}_{1\max}$, Simulation bei $Re = 10\ 000, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$

sind in Abb. 5.40 gezeigt. Der zweidimensionale Mode (1,0) wächst bis $t = 180$ mit konstanter Wachstumsrate an. Der Wirbelmode (0,1) wird gedämpft, bis der aufgrund der sekundären Instabilität rasch anwachsende dreidimensionale Mode (1,1) dessen Größe erreicht. Von da an wachsen alle dreidimensionalen Anteile stark an und lösen den Umschlag bei $t \approx 200$ aus.

Wir beobachten also auch im überkritischen Bereich und auch bei Vorgabe einer mittleren Längswirbelströmung als dreidimensionale Anfangsstörung das gleiche Verhalten der dominierenden Fouriermodes, nämlich eine dreidimensionale Instabilität der zweidimensionalen Welle bei Überschreiten einer Schwellenamplitude und den Zusammenbruch der Welle, kurz nachdem die dreidimensionalen Anteile deren Größe erreicht haben.

5.5 Ergänzungen und Diskussion

Die spektrale Zerlegung des Geschwindigkeitsfeldes in Fouriermodes $\hat{u}(k_1, k_2, x_3)$ ergibt zugleich die Bausteine, aus denen sich die momentane Strömung zusammensetzt. Die zeitliche Entwicklung der Fourieramplituden $\hat{u}_{j,\max}(k_1, k_2)$ zeigt die Rolle der einzelnen Bausteine beim Umschlagsprozeß. Um das Bild zu vervollständigen, gehen wir zunächst auf die Entwicklung der x_3 -Verteilung und dann auf das Verhalten der kurzwelligen Anteile ein. Dabei legen wir wieder die Simulation von 5.3 zugrunde.

5.5.1 x_3 -Verteilung der Fourieramplituden

Die Entwicklung der x_3 -Verteilung der Fourieramplituden ist insbesondere im Hinblick auf die Konstruktion vereinfachter Modelle zur Beschreibung der Strömung beim Umschlag von Interesse. Abb. 5.41 zeigt den Verlauf von $|\hat{u}_1(k_1, k_2, x_3)|$ für die wichtigsten Fouriermodes zu den Zeiten $t = 80$ und $t = 122$ (die Skalierung der Ordinaten ist willkürlich, Absolutwerte sind Abb. 5.19 zu entnehmen). Die in $t = 0$ angeregten Modes (1,0) und (1,1) zeigen bei $t = 80$ nahezu unverändert die Anfangsverteilung nach der linearen Theorie (\hat{u}_1^{TS} und \hat{u}_{1+}^{3D} in Abb. 5.16). In der

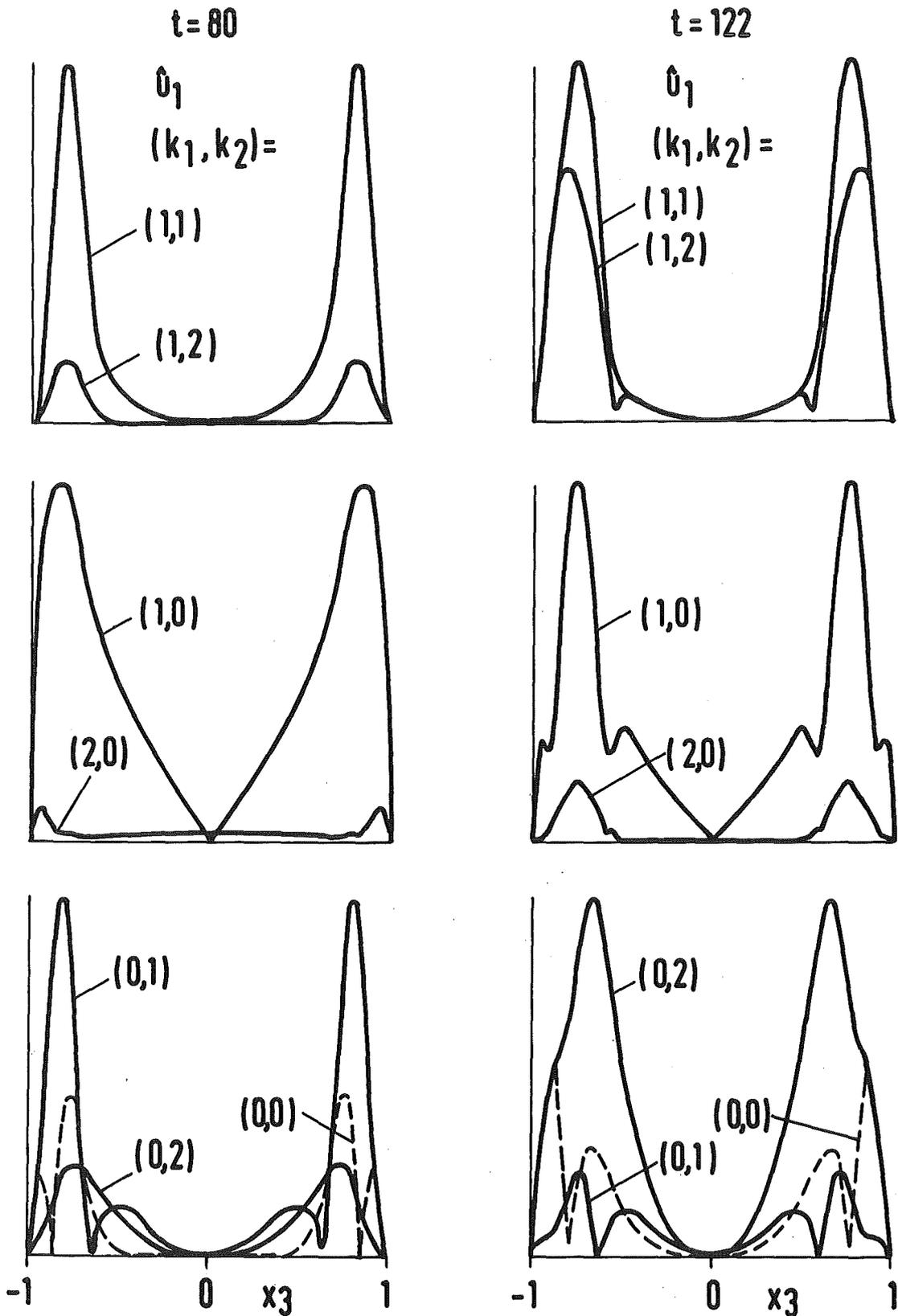


Abb. 5.41 Amplitudenverteilung $|\hat{u}_1(k_1, k_2; x_3)|$ für $t = 80$ und $t = 122$ bei der Simulation von 5.3 (Ordinaten in willkürlichen Einheiten)

anschließenden Phase findet im Mode (1,0) eine allmähliche Umbildung in die für $t = 122$ gezeigte Gestalt statt: Das absolute Maximum wandert weiter von der Wand weg und beiderseits davon bilden sich lokale Minima und Maxima. In der Verteilung des Modes (1,1) treten auch für $t > 80$ keine großen Änderungen ein, so daß die Amplitudenverteilung der linearen Eigenlösung bis zum spike-Stadium näherungsweise erhalten bleibt. Von den Fouriermodes $(0, k_2)$ wissen wir bereits aus Abb. 5.19c, daß für $t \geq 105$ der Mode $(0,2)$ dominiert, dessen x_3 -Verteilung sich stark von der des Modes $(0,1)$ unterscheidet. Das von Craik [34] für den Grenzschicht-Umschlag vorgeschlagene Modell (Darstellung des fluktuierenden Anteils durch die linearen Eigenlösungen (5.16), (5.17) mit geeigneten Amplituden) stellt somit für die Anfangsphase eine brauchbare Näherung dar. Ab $t \geq 100$ müssen für eine realistische Beschreibung jedoch auch Harmonische $(1, k_2)$ für die Fluktuation und insbesondere $(0, k_2)$ für die mittlere Strömung mit einbezogen werden.

5.5.2 Entwicklung der kurzwelligen Anteile

Im Hinblick auf die Frage nach einer tertiären Instabilität ist es von Interesse, die zeitliche Entwicklung von kurzwelligen Anteilen zu betrachten, die bereits in 5.3.2 kurz angesprochen wurde. Die Modes (k_1, k_2) mit $k_j > 7$ (genauer: mit (k_1, k_2) außerhalb des Bereichs \mathcal{K}' ($N_1 = N_2 = 16$) nach Abb. A1) sind in der Simulation erst ab $t = 116$ angeregt, wachsen aber extrem stark an und erreichen zwischen $t = 125$ und $t = 130$ die Größenordnung 1 % wie die in Abb. 5.19 gezeigten Modes. Wegen anfangs vorhandener Einschwingeffekte und der kurzen Integrationszeit sind Aussagen über die Wachstumsraten dieser Modes nur bedingt möglich. Hinzu kommt, daß die verwendete Auflöung $N_3 = 40$ für eine genaue Erfassung der x_3 -Verteilung dieser Modes zu gering ist, was sich durch Oszillationen mit der Wellenlänge der höchsten mitgeführten Chebyshev-Polynome bemerkbar macht.

Trotz dieser Einschränkungen ist es aufschlußreich, die vorliegenden Simulationsergebnisse mit Messungen zur Entwicklung kurzwelliger bzw. hochfrequenter Anteile zu vergleichen. Dazu nehmen wir eine eindimensionale Fourierzerlegung der Störung $u_1(x_1^c)$ an der peak-Position

$x_2 = 0$ vor, die gemäß unserem Modell der Fourieranalyse der zeitlich periodischen Meßsignale im Experiment entspricht. Die Koeffizienten dieser Fourierzerlegung bezeichnen wir mit $\hat{u}_1^{HF}(k_1, x_3)$ und führen analog zu (5.0) die Bezeichnung

$$\hat{u}_{1\max}^{HF}(k_1) := f(k_1) \cdot \max(x_3) |\hat{u}_1^{HF}(k_1, x_3)| \quad (5.20)$$

mit $f(0) := 1$, $f(k_1) := 2$ für $k_1 > 0$ ein. Nach (4.1) ist

$$\hat{u}_1^{HF}(k_1, x_3) = \sum_{|k_2| < K_2} \hat{u}_1(k_1, k_2, x_3) \cdot \quad (5.21)$$

Abb. 5.42 zeigt die zeitliche Entwicklung von $\hat{u}_{1\max}^{HF}$ für $k_1 \leq 7$. Das Verhalten des Mittelwertes $k_1 = 0$ ergibt sich nach (5.21) aus Abb. 5.19c, während die Modes $k_1 = 1, 2, 3$ für $t \lesssim 80$ durch die entsprechenden zweidimensionalen Modes nach Abb. 5.19a bestimmt sind. Deren qualitativer Verlauf wie auch die Größenordnung sind gut vergleichbar mit den entsprechenden Messungen im 2D-Experiment von Nishioka et al. [8, Fig. 17_7].

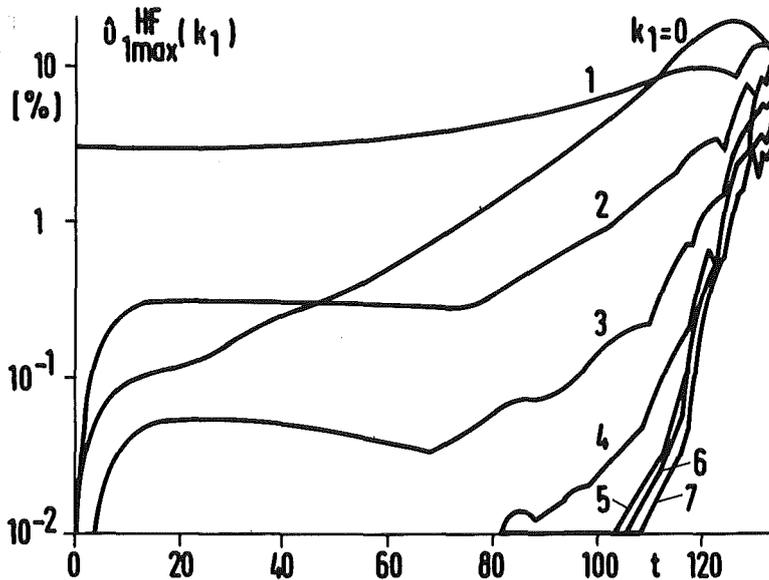


Abb. 5.42 Zeitliche Entwicklung der Fourieramplituden $\hat{u}_{1\max}^{HF}$ von $u_1(x_1^c)$ am peak bei der Simulation von 5:3

Die kurzwelligen Modes $k_1 \geq 4$ erreichen erst für $t \geq 100$ Werte $> 0.02 \%$. In dieser Phase wachsen alle Modes mit zunehmender Wachstumsrate an. Auch ein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen in [10] zu hochfrequenten Störungen zeigt - ungeachtet der oben genannten Einschränkungen - ungefähre Übereinstimmung. Die Wachstumsraten steigen linear mit k_1 an bis auf Werte der Größenordnung 1 bei $k_1 \approx 7$ (entsprechend der Frequenz $7 \tilde{f}$ im Experiment) und nehmen für größere k_1 wieder ab.

Nishioka et al. [10] haben das Verhalten der hochfrequenten Störungen als eine Scherschicht-Instabilität (dort als sekundäre Instabilität bezeichnet) des momentanen Geschwindigkeitsprofils am peak interpretiert. Dies erscheint plausibel und wird durch eine zweidimensionale, lineare Stabilitätsanalyse eines gemessenen Geschwindigkeitsprofils unterstützt [10]. Aufgrund der Simulationsergebnisse kommen wir jedoch zu dem Schluß, daß es sich hier nicht um eine separate, (in unserer Bezeichnungsweise) tertiäre Instabilität handelt.¹⁾ Vielmehr sind wir der Auffassung, daß die kurzwelligen Anteile durch nichtlineare Wechselwirkungen von langwelligen zweidimensionalen und aufgrund der sekundären Instabilität anwachsenden dreidimensionalen Modes erzeugt werden. Wir folgern dies aus dem Zeitverhalten der Fouriermodes $\hat{u}_1(k_1, k_2)$. Auch die kurzwelligen, in Abb. 5.19 nicht gezeigten Modes wachsen schon ab dem Einsetzen der sekundären Instabilität kontinuierlich mit nahezu konstanter (eher abnehmender) Wachstumsrate an. In dieser frühen Phase ist das Geschwindigkeitsprofil noch nahezu parabelförmig. Dieser Auffassung widerspricht es keineswegs, die lokale Entwicklung der Störungen am peak im Sinne der Scherschicht-Instabilität zu approximieren. Für die tatsächlich ablaufende, stark dreidimensionale Entwicklung stellt jedoch die lokale, zweidimensionale Betrachtungsweise eine zu grobe Näherung dar; hierin stimmen wir Orszag und Patera [66] zu. Übereinstimmend mit dem aus den Experimenten [10] gewonnenen Bild bleibt aber festzustellen, daß die Entwicklung zum spike-Stadium über einen allmählichen, kontinuierlichen Prozeß erfolgt, der nicht an eine kritische Bedingung geknüpft ist.

¹⁾Die Terminologie ist nicht einheitlich

5.5.3 Die sekundäre Instabilität

Die dreidimensionalen Simulationen haben gezeigt, daß der Umschlag durch die sekundäre Instabilität der zweidimensionalen Welle gegenüber dreidimensionalen Störungen ausgelöst wird. Das starke Anwachsen der dreidimensionalen Störungen und die Anregung höherer Harmonischer führt zu den für den Umschlagsprozeß charakteristischen Strömungsstrukturen. Schließlich dominieren die dreidimensionalen Anteile völlig, und es erfolgt der Zusammenbruch. Für eine physikalische Erklärung der sekundären Instabilität spielt ohne Zweifel die Wirbeldynamik eine entscheidende Rolle [26, 66, 102]. Dieser Aspekt wurde hier jedoch nicht näher untersucht.

Die dreidimensionale Entwicklung findet auf der Basis der zweidimensionalen Welle statt, deren Verhalten wir in 5.2 diskutiert haben. Die sekundäre Instabilität läßt sich besonders gut für Parameter (Re , α_1 , A^{TS}) in der Nähe der neutralen Fläche nach Abb. 5.3 untersuchen, wo sich die zweidimensionale Welle quasistationär verhält. In einiger Entfernung von der neutralen Fläche, etwa bei $Re \approx 1000$ oder für $\alpha_1 \gg 1$ oder $\alpha_1 \ll 1$, ist die Situation komplizierter. Hier erreicht die Dämpfungsrate der zweidimensionalen Welle etwa dieselbe Größenordnung wie die Wachstumsrate der dreidimensionalen Störungen. Während auf der neutralen Fläche bereits infinitesimale dreidimensionale Störungen den Umschlag auslösen, sind hier relativ große Anfangsamplituden von zwei- und dreidimensionalen Störungen erforderlich (vgl. 5.4.2). Ob es zum Umschlag kommt oder nicht, hängt hier also sehr stark von den vorgegebenen Anfangsstörungen ab, und die Entwicklung ist von Anfang an stark nichtlinear. In dieser Arbeit wurde deshalb bevorzugt der Umschlagsprozeß im Bereich der neutralen Fläche bei $Re = 5000$ untersucht, wo auch detaillierte experimentelle Ergebnisse vorliegen. Für die numerische Simulation ist außerdem von Vorteil, daß in diesem Bereich wesentlich kleinere Störungsamplituden vorliegen und damit eine geringere Auflösung erforderlich ist.

6. SCHLUSSFOLGERUNGEN

6.1 Zum Verfahren

Es wurde ein Rechenprogramm CHANSON zur numerischen Integration der dreidimensionalen, instationären Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen in Plattenkanalgeometrie erstellt. In den wandparallelen Richtungen x_1 und x_2 werden periodische Randbedingungen angenommen. Die für inkompressible Strömungen spezifische Problematik der Druckberechnung und Erfüllung der Kontinuitätsgleichung wurde analysiert. Es wurde ein allgemeines Verfahren vorgeschlagen und eingesetzt, das eine exakte Erfüllung der Kontinuitätsgleichung bei Verwendung der ursprünglichen Variablen Geschwindigkeit und Druck garantiert. Das Verfahren beruht darauf, aus der Forderung nach Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes auf dem Rand des Integrationsbereichs die korrekten Randwerte für den Druck zu gewinnen, der dann über eine Poisson-Gleichung berechnet wird. Dies geschieht in den diskretisierten Gleichungen mit Hilfe der Einflußmatrixtechnik [81].

Die numerische Diskretisierung erfolgt durch ein Spektralverfahren [69] mit Fourierentwicklungen in x_1 und x_2 und Entwicklung nach Chebyshev-Polynomen in der Normalenrichtung x_3 . Zur Zeitintegration stehen verschiedene Differenzenverfahren 2. Ordnung zur Verfügung. Nichtlineare Terme werden mit der Pseudospektralapproximation [69] berechnet, wobei der dominierende Term $\underline{P}(\underline{u})$, Gl. (2.8), ohne aliasing-Fehler [86] berechnet wird. Das Rechenprogramm wurde an verschiedenen Testproblemen mit bekannter Lösung überprüft und erwies sich als sehr genau (Anhang A2). Die Verwendung der Spektralmethode führt nicht nur zu einer hohen Genauigkeit, sondern erleichtert auch die Interpretation der Ergebnisse.

6.2 Zum Umschlagproblem

Das Rechenprogramm wurde zur Untersuchung des laminar-turbulenten Umschlags in der ebenen Poiseuille-Strömung eingesetzt. Die Rechnungen orientieren sich an Experimenten von Nishioka et al. [8-10] mit kontrollierten, durch ein schwingendes Band eingebrachten Wellenstörungen. Mathematisches Modell ist eine in x_1 und x_2 periodische Strömung, die

sich zeitlich entwickelt und in einem mit der Wellengeschwindigkeit mitbewegten Bezugssystem verfolgt wird. Entsprechend diesem Modell sind für einen Vergleich mit Experimenten die Zeitkoordinate und die Stromabwärts-Koordinate zu vertauschen. Es zeigte sich, daß die im Modell erhaltene Entwicklung der Strömung die experimentell beobachteten Vorgänge sehr gut wiedergibt. Dies deckt sich auch mit entsprechenden Erfahrungen für den Umschlag in der Plattengrenzschicht [61].

Es wurde eine dreidimensionale Simulation mit einer räumlichen Auflösung bis zu $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = 32 \cdot 32 \cdot 40$ durchgeführt, deren Parameter soweit wie möglich Experimenten bei $Re = 5000$ und der Schwingungsfrequenz $\tilde{f} = 72$ Hz angepaßt wurden. Die numerischen Ergebnisse wurden intensiv ausgewertet und mit Messungen von mittlerer Geschwindigkeit $U + \bar{u}_1$, Amplituden der Fluktuation u_1' und momentaner Geschwindigkeitsverteilung $U + u_1$ verglichen. Es ergab sich eine Übereinstimmung bis hin zum beginnenden spike-Stadium des Umschlagsprozesses, die angesichts der in 5.1 diskutierten grundsätzlichen Unterschiede zwischen Experiment und Simulation als sehr zufriedenstellend zu bezeichnen ist.

Die Ergebnisse dieser Simulation sind in 5.3.7 im einzelnen zusammengefaßt. Unter anderem konnten nachvollzogen werden

- die Ausbildung der peak-valley-Struktur in der Amplitude der Längsschwankungen u_1'
- die Abhängigkeit der mittleren Geschwindigkeit $U + \bar{u}_1$ von x_2 und x_3
- momentane Geschwindigkeitsprofile $(U + u_1)(x_3)$ mit Wendepunkten und starken lokalen Scherschichten und
- spike-artige Geschwindigkeitssignale $u_1(x_1^c)$.

Darüber hinaus wurde die dreidimensionale Struktur der Strömung aufgezeigt. Die Darstellung des momentanen Geschwindigkeitsfeldes \underline{u} und des Wirbelfeldes $\underline{\zeta}$ zu Beginn des spike-Stadiums zeigt eine Anordnung von diskreten Hufeisen-(oder Haarnadel-) Wirbeln (Abb. 5.34). Dieses Wirbelsystem ist konsistent zu dem Modell von Wortmann [28] zum Umschlag in der Plattengrenzschicht. Es hat außerdem Ähnlichkeit mit den Strukturen, die in Strömungsaufnahmen der Grenzschicht nach dem Zusammenbruch gefunden wurden [104,105]. In den stromabwärts gelegenen

Schleifen des dominierenden Wirbels (top vortex loop) an den peak-Positionen kommt es zu lokalen Anhäufungen langsamen Fluids und damit zu spike-Signalen. Die stark ausgeprägte x_1 -Komponente dieser Wirbel führt zu einer mittleren Sekundärströmung (\bar{u}_2, \bar{u}_3) in Form eines Längswirbel-systems, dessen Wellenlänge in Spannweitenrichtung sich beim Umschlagsprozeß halbiert.

Aus dem Zeitverhalten der Fouriermodes wurde geschlossen, daß der Umschlag durch eine sekundäre Instabilität der primären (im Experiment durch das schwingende Band angeregten) zweidimensionalen Wellenstörung gegenüber kleinen dreidimensionalen Störungen ausgelöst wird. Die Wachstumsraten der dreidimensionalen Störungen liegen weit über den Wachstumsraten der primären Instabilität nach der linearen Stabilitätstheorie. Dieser Umschlagsmechanismus wurde in Rechnungen mit unterschiedlichen Reynoldszahlen, Wellenlängen und Anfangsstörungen bestätigt und steht in Übereinstimmung mit Ergebnissen von Orszag und Patera [49, 66]. Die sekundäre Instabilität tritt nur auf, wenn die Amplitude der zweidimensionalen Welle einen von der Reynoldszahl Re und den Wellenzahlen α_1 und α_2 abhängigen Schwellenwert überschreitet. Der durch numerische Simulation gefundene Schwellenwert stimmt mit dem experimentell gemessenen Wert [8] überein. Die Wachstumsraten der dreidimensionalen Störungen sind umso größer, je mehr die Wellenamplitude den Schwellenwert übersteigt. Eine separate tertiäre Instabilität der dreidimensional gewordenen Strömung gegenüber kurzwelligen Störungen ist nicht erkennbar, vielmehr werden diese durch die nichtlineare Entwicklung nach Einsetzen der sekundären Instabilität erzeugt.

Die sekundäre Instabilität gegen dreidimensionale Störungen erklärt auch, warum die von der nichtlinearen Stabilitätstheorie vorausgesagte zweidimensionale periodische Sekundärströmung im Experiment nicht beobachtet wird. Das Verhalten rein zweidimensionaler Störungen, auf deren Grundlage sich der Umschlagsprozeß entwickelt, wurde in dieser Arbeit ebenfalls untersucht. Die Ergebnisse sind in 5.2.4 zusammengefaßt. Eine Nachrechnung der von Herbert [99] aus den stationären Gleichungen berechneten periodischen Sekundärströmung ergab eine ausgezeichnete Übereinstimmung. Die Ergebnisse für zeitabhängige Störungen sind konsistent mit den Voraussagen der nichtlinearen Stabilitätstheorie.

Die Schwellenwerte für die unterkritische Instabilität stimmen gut mit den Werten der stationären Rechnung [99] überein. Bei Überschreitung des Schwellenwertes stellt sich eine quasistationäre Strömung ein, die erst nach einer Zeit $t = O(Re)$ in die periodische Sekundärströmung übergeht. Durch eine modifizierte Zeitintegration mit wiederholter Verbesserung der Anfangswerte wurde es möglich, die periodische Sekundärströmung mit guter Näherung in einer wesentlich kürzeren Zeit zu erreichen. Die periodische Sekundärströmung und die quasistationäre Vorstufe zeigen keine Anzeichen einer zweidimensionalen Instabilität.

Hinsichtlich der erforderlichen räumlichen Auflösung zur Simulation des Umschlagsprozesses wurde gezeigt, daß bei den hier vorliegenden kleinen Störungsamplituden für die Anfangsphase eine horizontale Auflösung von zunächst $N_1 = N_2 = 8$, später $N_1 = N_2 = 16$ ausreicht. Für eine genaue Erfassung des spike-Stadiums bis zum Zusammenbruch der Welle ist die hier verwendete maximale Auflösung $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = 32 \cdot 32 \cdot 40$ nicht mehr ausreichend. Vor allem muß die Auflösung N_3 in Normalenrichtung deutlich erhöht werden, um auch die im Kanalinnern gelegenen starken Scherschichten auflösen zu können (die Scherschichten in unmittelbarer Wandnähe werden wegen der hohen Auflösung der Chebyshev-Polynome in diesem Bereich bereits mit $N_3 = 40$ gut erfaßt).

6.3 Bewertung des Standes und Ausblick

In dieser Arbeit wurde erstmals eine numerische Simulation vorgelegt, von der nachgewiesen wurde, daß sie den experimentell beobachteten Umschlagsprozeß in der ebenen Poiseuille-Strömung bis zum spike-Stadium erfaßt. Damit konnten auch erste Ergebnisse zur dreidimensionalen Struktur der Strömung vor dem Zusammenbruch berichtet werden. Die Möglichkeit, die nichtlineare dreidimensionale Entwicklung von Störungen mit relativ großen Amplituden durch numerische Simulation zuverlässig quantitativ zu erfassen, stellt einen bedeutenden Fortschritt bei der theoretischen Erforschung des laminar-turbulenten Umschlags dar.

Mit den Simulationsprogrammen und -ergebnissen von Wray und Hussaini [61] für die Plattengrenzschicht und von Orszag und Patera [49, 66] für die

und dieser Arbeit für die ebene Poiseuille-Strömung steht nun ein Werkzeug wie auch bereits eine Datenbasis zur Verfügung, die bald weitere Fortschritte bei der Klärung noch offener Fragen ermöglichen sollte. Hierzu gehört unter anderem die Abhängigkeit des Schwellenwertes für die sekundäre Instabilität von den Parametern Re , α_1 (bzw. der Schwingungsfrequenz \tilde{f} im Experiment) und α_2 (bzw. der Wellenlänge in Spannweitenrichtung). Für die explizite Konstruktion der zugehörigen neutralen Fläche im Parameterraum (Re , α_1 , α_2 , A^{TS}) sind im Bereich ausreichend kleiner Amplituden Störungsmethoden [33] vorzuziehen, die immer bereits einen ganzen Parameterbereich (statt eines einzelnen Punktes) abdecken. Hier kann die numerische Simulation eine Abgrenzung des Gültigkeitsbereichs liefern und benötigte Ausgangsinformationen bereitstellen. In diesen Zusammenhang gehört auch die Frage nach einer theoretischen Erklärung für die in Experimenten immer wieder festgestellte Bevorzugung einer bestimmten Wellenlänge in Spannweitenrichtung [24,106]. Auch eine Überprüfung phänomenologischer Modellvorstellungen zu den physikalischen Mechanismen beim Umschlag wäre sinnvoll. Für die Veranschaulichung der Strömung sind erweiterte und verbesserte, vor allem dreidimensionale Darstellungen anzustreben (z.B. Wirbellinien, Teilchenbahnen, Isoflächen, räumliche Darstellungen dreidimensionaler Vektorfelder). Die zeitliche Entwicklung wird zweckmäßigerweise durch einen Film wiedergegeben.

Mit den heute in Vektorrechnern bereits verfügbaren (und erst recht mit künftig zu erwartenden [107]) Rechnerleistungen erscheint ein weiteres Vordringen im Umschlagsprozeß bis zum Stadium lokaler Turbulenzflecke möglich. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse können zu verbesserten Modellen der Wandturbulenz mit Berücksichtigung kohärenter Strukturen führen [108].

Zur erfolgreichen Bearbeitung der bevorstehenden Aufgaben wäre eine verstärkte Kommunikation und Zusammenarbeit verschiedener Arbeitsrichtungen wie Stabilitäts- und Verzweigungstheorie, analytische Näherungsverfahren, numerische Simulation und physikalisches Experiment von großem Nutzen [33]. In der vorliegenden Arbeit wurde versucht, diesem Aspekt durch einen eingehenden Vergleich der numerischen Ergebnisse mit Experimenten und bereits bekannten theoretischen Ergebnissen sowie durch eine entsprechende Darstellung der Ergebnisse Rechnung zu tragen.

ANHANG

A1. Zum numerischen Verfahren

A1.1 Berechnung der konvektiven Terme

Wir erläutern die Berechnung der Koeffizienten $\hat{\underline{M}}(\underline{k})$ der konvektiven Terme (4.13)

$$\underline{M} := \underline{u} \times \underline{\omega} - \underline{P}(\underline{u}) \quad (\text{A1.1})$$

mit $\underline{\omega} := \text{rot } \underline{u}$ und

$$\underline{P}(\underline{u}) := (U - C) \cdot \partial_1 \underline{u} + U' \cdot u_3 \underline{e}_1 \quad (\text{A1.2})$$

bei gegebenem $\hat{\underline{u}}(\underline{k})$. Der dominierende Term $\underline{P}(\underline{u})$ wird im \underline{k} -Raum direkt aus $\hat{\underline{u}}(\underline{k})$ berechnet. Die Faktoren $U - C$ und U' in (A1.2) lassen sich darstellen als

$$\begin{aligned} U - C &= 1 - x_3^2 - C = (0,5 - C) T_0 - 0,5 T_2(x_3) \\ U' &= -2 x_3 = -2 T_1(x_3) . \end{aligned} \quad (\text{A1.3})$$

Wegen der einfachen Multiplikationsformel der Chebyshev-Polynome

$$2 T_n T_m = T_{n+m} + T_{|n-m|} , \quad n, m \geq 0$$

[92] erfordert jede Multiplikation mit $U - C$ bzw. U' im \underline{k} -Raum nur $O(N)$ Additionen, $N := N_1 N_2 (N_3 + 1)$. Wir erhalten damit die Koeffizienten von $\underline{P}(\underline{u})$ exakt (ohne aliasing-Fehler [86]).

Die Koeffizienten $\hat{\underline{s}}(\underline{k})$ von Produkten der Form $s := \underline{u} \cdot \underline{\omega}$ in $\underline{u} \times \underline{\omega}$ werden in der Pseudospektralapproximation [86] mit $\propto N \log N$ arithmetischen Operationen berechnet. Dazu werden zunächst die Koeffizienten $\hat{\underline{u}}(\underline{k})$, $\hat{\underline{\omega}}(\underline{k})$ in den realen Raum transformiert, dort die lokalen Produkte $s(\underline{j}) = \underline{u}(\underline{x}_{\underline{j}}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}_{\underline{j}})$ in den N Gitterpunkten $\underline{x}_{\underline{j}}$ nach (4.4), (4.9) gebildet und schließlich das Produkt $s(\underline{j})$ nach $\hat{\underline{s}}(\underline{k})$ transformiert. Dieses Verfahren ist bei großem N um Größenordnungen schneller als eine direkte

Berechnung der $\hat{s}(\underline{k})$ im \underline{k} -Raum als Faltungssummen, die $O(N^2)$ Operationen erfordern würde. Die so berechneten Koeffizienten des Produkts enthalten gegenüber den aus Faltungssummen berechneten allerdings zusätzliche "aliasing"-Anteile, die auf die Fehlinterpretation der kurzwelligen, außerhalb des Bereichs

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(N_1, N_2, N_3) := \{(k_1, k_2, k_3) \mid |k_j| < N_j/2 (j=1,2), 0 \leq k_3 \leq N_3\} \quad (A1.4)$$

liegenden Anteile des Produkts auf dem diskreten Gitter mit N Punkten zurückzuführen sind [86_7]. Eine Elimination wäre durch zusätzlichen Rechenaufwand möglich [86_7]. Da die am stärksten vom aliasing betroffenen Modes in den "Ecken" ($|k_j| \rightarrow K_j, k_3 \rightarrow N_3$) von \mathcal{K} liegen, kann man den aliasing-Einfluß durch Abschneiden der Ecken von \mathcal{K} (d.h. Nullsetzen der entsprechenden Modes) reduzieren. Für die k_3 -Entwicklung erscheint diese Maßnahme nicht notwendig, da wir N_3 stets groß wählen ($N_3 = 40$) und eine rasche Konvergenz (und damit geringen aliasing-Einfluß) erwarten können. In dem (k_1, k_2) -Rechteck $|k_i| < K_i$ dagegen schneiden wir die Ecken ab: statt \mathcal{K} verwenden wir den Bereich

$$\mathcal{K}' = \mathcal{K}'(N_1, N_2, N_3) = \{(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{K} \mid (|k_1|/N_1 + |k_2|/N_2) < 2/3\}. \quad (A1.5)$$

Wegen $|k_j| < N_j/2$ ($j=1,2$) sind übrigens die Fouriermodes mit $|k_j| \leq 1$ stets frei von aliasing-Beiträgen aus der Wechselwirkung anderer Modes. Der Bereich \mathcal{K}' ist in Abb. A1 dargestellt. Dieser Bereich wurde auch in [64_7] verwendet.

A1.2 Differenzenverfahren zur Zeitintegration

Zur Erläuterung der Differenzenformeln für die Zeitintegration schreiben wir für Gl. (4.11) vereinfachend

$$\partial_t u = M + L,$$

wobei M für die konvektiven Terme (4.13) und L für die Druck- und Reibungsterme $-\nabla \tilde{q} + \nu \Delta u$ steht. Der Term L wird stets mit dem Crank-Nicolson-Verfahren behandelt. Für den Term M wurden verschiedene

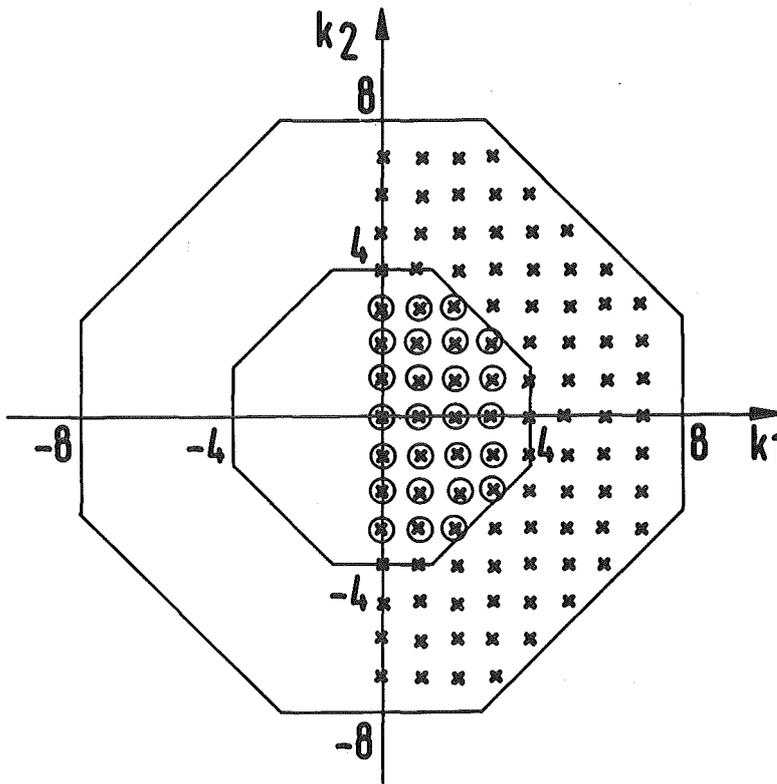


Abb. A1: Der mitgeführte Bereich \mathcal{K}' von Fourier-Modes (k_1, k_2) nach (A1.5) für $N_1 = N_2 = 8$ (o) und $N_1 = N_2 = 16$ (x). Die Fourier-Modes mit $k_1 < 0$ sind nach (4.3) redundant

explizite Verfahren in das Programm aufgenommen, die außer dem einfachen Euler-Verfahren alle von 2. Ordnung sind.

Die Differenzenformeln für die einzelnen Verfahren sind in Tab. A1 zusammengestellt. Dabei bezeichnet M^n den aus u^n , \tilde{M}^n den aus dem Zwischenwert \tilde{u}^n berechneten konvektiven Term usw. Es handelt sich der Reihe nach um das Euler-Verfahren 1. Ordnung EU, das Adams-Bashforth-Verfahren AD, das Leapfrog-Verfahren (oder die Mittelpunktsregel) LE, das modifizierte Euler-Verfahren (oder Runge Kutta-Verfahren) EM und schließlich das modifizierte Adams-Bashforth-Verfahren AC mit Korrektorschritt nach Gazdag [109_7].

$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = M^n + \frac{1}{2} (L^{n+1} + L^n)$	EU
$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} M^n - \frac{1}{2} M^{n-1} + \frac{1}{2} (L^{n+1} + L^n)$	AD
$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2 \Delta t} = M^n + \frac{1}{2} (L^{n+1} + L^{n-1})$	LE
$\frac{\tilde{u}^{n+1} - u^n}{\Delta t} = M^n + \frac{1}{2} (\tilde{L}^{n+1} + L^n)$ $\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (\tilde{M}^{n+1} + M^n) + \frac{1}{2} (L^{n+1} + L^n)$	EM
$\frac{\tilde{u}^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} \tilde{M}^n - \frac{1}{2} \tilde{M}^{n-1} + \frac{1}{2} (\tilde{L}^{n+1} + L^n)$ $\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (\tilde{M}^{n+1} + \tilde{M}^n) + \frac{1}{2} (L^{n+1} + L^n)$	AC

Tab. A1 Differenzenformeln zur Zeitintegration

Bei den Verfahren EU, AD und LE ist in jedem Zeitschritt eine Auswertung des konvektiven Terms M und anschließend die Lösung eines Stokes-Problems (s. 3.2) erforderlich. Das gleiche gilt für die beiden Teilschritte bei EM. Dabei entfallen etwa 60 % der Rechenzeit auf die Berechnung von M. Bei AC wird M pro Zeitschritt nur einmal ausgewertet

(Berechnung von \tilde{M}^{n+1} nach dem Prädiktorschritt). Dieses modifizierte Adams-Verfahren ist wegen seiner gegenüber AD kleineren Diskretisierungsfehler und günstigeren Stabilitätseigenschaften [109] attraktiv. Es braucht allerdings mehr Speicherplatz, da die Größen \tilde{M}^n und \tilde{M}^{n-1} aus den vorangegangenen Schritten benötigt werden. Die Verfahren EU und EM benötigen nur die Geschwindigkeit u^n und können daher zum Start der Zeitintegration verwendet werden.

Eine allgemeine Diskussion von Genauigkeit und Stabilität der einzelnen Verfahren ist in [69,109,110] zu finden. Über die Stabilitätsrestriktion für den Zeitschritt Δt wurde in 4.3.2 gesprochen. Hierin bestehen nur geringe Unterschiede zwischen den einzelnen Verfahren. Um die Genauigkeit der Verfahren zu vergleichen, wurde eine Tollmien-Schlichting-Welle (Eigenlösung der Orr-Sommerfeld-Gleichung) nachgerechnet. Dies ist ein für die Simulation der Anfangsphase des Umschlags einschlägiges Testproblem. Die Parameter waren $Re = 1250$, $\alpha_1 = 1$, $N_3 = 32$, $C = 0$. Die Vergleichslösung u^{ex} wurde mit einem Programm von Herbert [99] mit hoher Genauigkeit [45] berechnet. Es wurde mit den vollen nichtlinearen Gleichungen gerechnet. Die Anfangsverteilung war $A^{TS} \cdot u^{TS}(x)$, Gl. (5.16), mit $A^{TS} = 10^{-5}$. Damit ist der in den Störungen u nichtlineare Anteil des konvektiven Terms M , Gl. (4.13), gegenüber dem in u linearen Anteil P , Gl. (4.12), vernachlässigbar klein. Der relative Fehler ϵ_{rel} der berechneten Lösung u^{num} wird definiert durch

$$\epsilon_{rel} := (\epsilon_1^2 + \epsilon_3^2)^{1/2}, \quad \epsilon_j := \max_{t < 5} \max_x |u_j^{num} - u_j^{ex}| / A^{TS}.$$

Abb. A2 zeigt ϵ_{rel} in Abhängigkeit von Δt . Bei dem für die Anwendungen typischen Wert $\Delta t = 0.1$ ist $\epsilon_{rel} \approx 2\%$ für EU und $\approx 0.02\%$ für die Verfahren 2. Ordnung. (Bei der Simulation der Anfangsphase des Umschlags sind die Fehler noch wesentlich geringer, da dort in dem nahezu stationären Bezugssystem mit $C = c_r^{TS}$ gerechnet wird, so daß nur sehr kleine zeitliche Gradienten auftreten.) AC weist die höchste Genauigkeit auf, doch ist der Fehler bei AD nicht sehr viel größer. Da AC etwa 40 % mehr Rechenzeit und auch mehr Speicherplatz benötigt, wurde

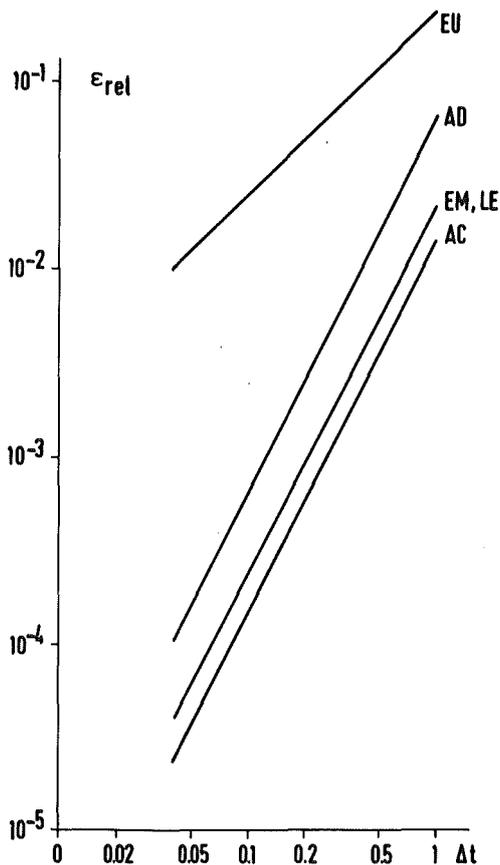


Abb. A2

Relativer Fehler ϵ_{rel} für die Zeitintegrationsverfahren von Tab. A1 bei der Nachrechnung einer Orr-Sommerfeld-Eigenlösung. In den Anwendungen werden wegen der Stabilitätsrestriktion (4.18) Zeitschritte $\Delta t \leq 0.2$ verwendet

in den Anwendungen auch AD verwendet. EM benötigt die doppelte Rechenzeit von AD und wurde daher nur zum Start benutzt. LE zeigte in einigen Testrechnungen die bekannten 2 Δt -Oszillationen, die zwar nicht zu Instabilitäten führen, aber dennoch nicht akzeptiert werden können. Bei den Rechnungen zum Umschlagproblem wurden diese Oszillationen jedoch nicht beobachtet.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß bei Berücksichtigung der Faktoren Genauigkeit, Rechenzeit, Speicherbedarf und Zuverlässigkeit (keine Oszillationen) keines der Verfahren allen übrigen eindeutig überlegen ist. Wird eine hohe Genauigkeit gewünscht, so ist AC zu empfehlen.

A2. Zur Verifizierung

Außer einer Nachrechnung von Orr-Sommerfeld-Eigenlösungen und der periodischen Sekundärströmung (s. 5.2.1) wurden zur Verifikation des Rechenprogramms weitere Testprobleme gerechnet, bei denen eine analytische Lösung zur Verfügung steht. Eines davon ist die Anlaufströmung in einem

Kanal [100] (Beschleunigung aus der Ruhe durch einen konstanten Druckgradienten), ein weiteres das zweidimensionale Stokes-Problem [111]. Außerdem wurden Vergleichsrechnungen zu dem in [77] angegebenen dreidimensionalen Problem mit dem Differenzencode EDDY [58] durchgeführt. Ferner wurden - wie bereits auf S. 67 und S. 110 erwähnt - einige Fälle von Orszag und Kells [64] nachgerechnet. Alle diese Testrechnungen führten zu der Schlußfolgerung, daß das Rechenprogramm keine schwerwiegenden Fehler enthält und laminare Strömungen mit hoher Genauigkeit berechnen kann.

LITERATUR

- [1] Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie. Braun-Verlag, Karlsruhe 1965
- [2] Ruelle, D., Takens, F.: On the nature of turbulence. Commun. Math. Phys. 20 (1971) S. 167-192
- [3] Monin, A.S.: On the nature of turbulence. Sov. Phys. Usp. 21 (1978) S. 429-442
- [4] Swinney, H.L., Gollub, J.P. (ed.): Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence. Springer-Verlag, Berlin 1981
- [5] Joseph, D.D.: Stability of fluid motions I. Springer-Verlag, Berlin 1976
- [6] Joseph, D.D.: Direct and repeated bifurcation into turbulence. Springer Lect. Notes Mathematics 771 (1980) S. 249-264
- [7] Zierep, J.: Instabilitäten in Strömungen zäher, wärmeleitender Medien. Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 2 (1978) S. 143-150
- [8] Nishioka, M., Iida, S., Ichikawa, Y.: An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech. 72 (1975) S. 731-751
- [9] Nishioka, M., Iida, S., Kanbayashi, S.: An experimental investigation of the subcritical instability in plane Poiseuille flow (in Japanese). Proc. 10th Turbulence Symposium, Inst. Space Aeron. Sci., Tokyo Univ., 1978 S. 55-62
- [10] Nishioka, M., Asai, M., Iida, S.: An experimental investigation of the secondary instability. Proc. IUTAM Symposium Stuttgart 1979, S. 37-46. S. Ref. [36]

- [11] Narayanan, M.A. Badri, Narayana , Th.: Some studies on transition from laminar to turbulent flow in a two-dimensional channel. ZAMP 18 (1967) S. 642-650
- [12] Narayanan, M.A. Badri: An experimental study of reverse transition in two-dimensional channel flow. J. Fluid Mech. 31 (1968) S. 609-623
- [13] Patel, V.C., Head, M.R.: Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows. J. Fluid Mech. 38 (1969) S. 181-201
- [14] Beavers, G.S., Sparrow, E.M., Magnuson, R.A.: Experiments on the breakdown of laminar flow in a parallel-plate channel. Int. J. Heat Mass Transfer 13 (1970) S. 809-815
- [15] Kao, T.W., Park, C.: Experimental investigations of the stability of channel flows. Part 1. Flow of a single liquid in a rectangular channel. J. Fluid Mech. 43 (1970) S. 145-164
- [16] Karnitz, M.A., Potter, M.C., Smith, M.C.: An experimental investigation of transition of a plane Poiseuille flow. J. Fluids Eng. 96 (1974) S. 384-388
- [17] Feliss, N.A., Potter, M.C., Smith, M.C.: An experimental investigation of incompressible channel flow near transition. J. Fluids Eng. 99 (1977) S. 693-698
- [18] Rajagopalan, S., Antonia, R.A.: Investigation of natural transition in the inlet region of a two-dimensional duct flow. Phys. Fluids 23 (1980) S. 1938-1948
- [19] Hocking, L.M.: Nonlinear instability of flow in a rectangular pipe with large aspect ratio. J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 29 (1978) S. 100-111

- [20_] Hussain, A.K.M.F., Reynolds, W.C.: Measurements in fully developed turbulent channel flow. J. Fluids Eng. 97 (1975) S. 568-580
- [21_] Chen, T.S., Sparrow, E.M.: Stability of the developing laminar flow in a parallel-plate channel. J. Fluid Mech. 30 (1967) S. 209-224
- [22_] Lin, C.C.: The theory of hydrodynamic stability. Cambridge University Press 1955
- [23_] Betchov, R., Criminale jr., W.O.: Stability of parallel flows. Academic Press, New York 1967
- [24_] Klebanoff, P.S., Tidstrom, K.D., Sargent, L.M.: The three-dimensional nature of boundary-layer instability. J. Fluid Mech. 12 (1962) S. 1-34
- [25_] Kovasznay, L.S.G., Komoda, H., Vasudeva, B.R.: Detailed flow field in transition. Proc. 1962 Heat Transfer and Fluid Mech. Institute (1962) S. 1-26
- [26_] Hama, F.R., Nutant, J.: Detailed flow-field observations in the transition process in a thick boundary layer. Proc. 1963 Heat Transfer and Fluid Mech. Institute (1963) S. 77-93
- [27_] Komoda, H.: Nonlinear development of disturbance in a laminar boundary layer. Phys. Fluids 10, Suppl. (1967) S. S87-S94
- [28_] Wortmann, F.X.: The incompressible fluid motion downstream of twodimensional Tollmien-Schlichting waves. AGARD-CP-224 (1977) S. 12-1 - 12-8
- [29_] Tani, I.: Boundary-layer transition. Ann. Rev. Fluid Mech. 1 (1969) S. 169-196

- [⁻30₋][]] Tani, I.: Einige Bemerkungen über den laminar-turbulenten Umschlag in Grenzschichtströmungen. ZAMM 53 (1973)
S. T 25-T 32
- [⁻31₋][]] Tani, I.: Some thoughts on boundary layer transition. Proc. IUTAM Symposium Stuttgart 1979, S. 263-276. S. Ref. [⁻36₋][]]
- [⁻32₋][]] Morkovin, M.V.: Instability, transition to turbulence and predictability. AGARD-AG-236 (1978)
- [⁻33₋][]] Herbert, Th., Morkovin, M.V.: Dialogue on bridging some gaps in stability and transition research. Proc. IUTAM Symposium Stuttgart 1979, S. 47-72. S. Ref. [⁻36₋][]]
- [⁻34₋][]] Craik, A.D.D.: Nonlinear evolution and breakdown in unstable boundary layers. J. Fluid Mech. 99 (1980)
S. 247-265
- [⁻35₋][]] Proc. of the AGARD Symposium on Laminar-Turbulent Transition, Lyngby, 1977. AGARD-CP-224
- [⁻36₋][]] Eppler, R., Fasel, H. (ed.): Laminar-turbulent transition (Proc. IUTAM Symposium, Stuttgart, 1979). Springer-Verlag, Berlin 1980
- [⁻37₋][]] Orszag, S.A.: Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. J. Fluid Mech. 50 (1971), S. 689-703
- [⁻38₋][]] Itoh, N.: A power series method for the numerical treatment of the Orr-Sommerfeld equation. Trans. Jap. Soc. Aero. Space Sci. 17 (1974) S. 65-75
- [⁻39₋][]] Kleiser, L.: Solution of Orr-Sommerfeld problems using the factorisation (Riccati) method, in: Recent developments in theoretical and experimental fluid mechanics (ed. U. Müller et al.) Springer-Verlag, Berlin 1979, S. 407-415

- [40_] Monin, A.S., Yaglom, A.M.: Statistical fluid mechanics
Vol. 1. MIT-Press, Cambridge 1971, S. 147-203
- [41_] Stuart, J.T.: Nonlinear stability theory. Ann. Rev.
Fluid Mech. 3 (1971) S. 347-370
- [42_] Stewartson, K.: Some aspects of nonlinear stability
theory. Fluid Dynamics Transactions 7 (1975) S. 101-128
- [43_] Zahn, J.P., Toomre, J., Spiegel, E.A., Gough, D.O.:
Nonlinear cellular motions in Poiseuille channel flow.
J. Fluid Mech. 64 (1974) S. 319-345
- [44_] Herbert, Th.: Finite amplitude stability of plane
parallel flows. AGARD-CP-224 (1977) S. 3-1 - 3-10
- [45_] Herbert, Th.: Die neutrale Fläche der ebenen Poiseuille-
Strömung. Habilitationsschrift, Universität Stuttgart, 1978
- [46_] George, W.D., Hellums, J.D., Martin, B.: Finite-
amplitude neutral disturbances in plane Poiseuille
flow. J. Fluid Mech. 63 (1974) S. 765-771
- [47_] Fasel, H., Bestek, H., Schefenacker, R.: Numerical
simulation studies of transition phenomena in incom-
pressible, two-dimensional flows. AGARD-CP-224 (1977)
S. 14-1 - 14-8
- [48_] Blackwelder, R.F.: Boundary layer transition. Phys.
Fluids 22 (1979) S. 583-584
- [49_] Orszag, S.A., Patera, A.T.: Subcritical transition
to turbulence in plane channel flows. Phys. Rev. Lett. 45
(1980) S. 989-993
- [50_] Benney, D.J., Lin, C.C.: On the secondary motion induced
by oscillations in a shear flow. Phys. Fluids 3 (1960)
S. 656-657

- [51] Benney, D.J.: Finite amplitude effects in an unstable laminar boundary layer. *Phys. Fluids* 7 (1964) S. 319-326
- [52] Menzel, K.: Über eine nichtlineare dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichtströmungen. Deutsche Luft- und Raumfahrt FB-69-48, 1969
- [53] Antar, B.N., Collins, F.G.: Numerical calculation of finite amplitude effects in unstable laminar boundary layers. *Phys. Fluids* 18 (1975) S. 289-297
- [54] Itoh, N.: Three-dimensional growth of finite wave disturbances in plane Poiseuille flow. *Trans. Jap. Soc. Aero. Space Sci.* 23 (1980) S. 91-103
- [55] Stuart, J.T.: The production of intense shear layers by vortex stretching and convection. AGARD Report 514, 1965
- [56] Greenspan, H.P., Benney, D.J.: On shear-layer instability, breakdown and transition. *J. Fluid Mech.* 15 (1963) S. 133-153
- [57] Herbert, Th.: Non-linear stability of parallel flows by high-order amplitude expansions. *AIAA J.* 18 (1980) S. 243-248
- [58] Schumann, U., Grötzbach, G., Kleiser, L.: Direct numerical simulation of turbulence, in: Prediction methods for turbulent flows (ed. W. Kollmann), Hemisphere, Washington 1980, S. 123-258
- [59] Orszag, S.A.: Turbulence and transition: a progress report. *Springer Lect. Notes Physics* 59 (1976) S. 32-51
- [60] Wray, A.A., Hussaini, M.Y., Degani, D.: Numerical simulation of transition to turbulence. *Proc. 2nd GAMM-Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics* (ed. E.H. Hirschel, W. Geller), Köln 1977, S. 247-254

- [61_] Wray, A., Hussaini, M.Y.: Numerical experiments in boundary-layer stability. AIAA 18th Aerosp. Sci. Meeting, Jan. 14-16, 1980, Pasadena (AIAA Paper 80-0275)
- [62_] Leonard, A.: Turbulent structures in wall-bounded shear flows observed via three-dimensional numerical simulations. Springer Lect. Notes Physics 136 (1981) S. 119-145
- [63_] Kells, L.C.: Numerical calculations of turbulent and transition flows. Ph. D. thesis, MIT, 1978
- [64_] Orszag, S.A., Kells, L.C.: Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow. J. Fluid Mech. 96 (1980) S. 159-205
- [65_] Patera, A.T., Orszag, S.A.: Transition and turbulence in planar channel flows. Springer Lect. Notes Physics 141 (1981) S. 329-335
- [66_] Orszag, S.A., Patera, A.T.: Subcritical transition to turbulence in planar shear flows. Proc. Symposium on Transition and Turbulence, Madison, 1980. (ed. R.E. Meyer) Academic Press, 1981, S. 127-146.
- [67_] Flandroy, P., Platten, J.K.: Instabilités sous-critiques dans l'écoulement de Poiseuille plan. Journal de Mécanique 19 (1980) S. 639-662
- [68_] Platten, J.K., Luijkx, J.M., Flandroy, P.: On the transition to turbulence, in: Numerical methods in laminar and turbulent flow (ed. C. Taylor, B.A. Schrefler) Pineridge Press, Swansea 1981, S. 351-361
- [69_] Gottlieb, D., Orszag, S.A.: Numerical analysis of spectral methods: theory and applications. NSF-CBMS Monograph No. 26, SIAM, Philadelphia 1977

- [70_] Kleiser, L., Schumann, U.: Treatment of incompressibility and boundary conditions in 3-D numerical spectral simulations of plane channel flows. Proc. 3rd GAMM-Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics (ed. E.H. Hirschel), Vieweg, Braunschweig 1980, S. 165-173
- [71_] Fasel, H.F.: Numerical solution of the complete Navier-Stokes equations for the simulation of unsteady flows. Springer Lect. Notes Mathematics 771 (1980) S. 177-195
- [72_] Thorpe, S.A.: Experiments on the instability of stratified shear flows: miscible fluids. J. Fluid Mech. 46 (1971) S. 299-319
- [73_] Sommerfeld, A.: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. II. Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1947, S. 86
- [74_] Chorin, A.J., Marsden, J.E.: A mathematical introduction to fluid mechanics. Springer, New York 1979
- [75_] Richardson, S.M., Cornish, A.R.H.: Solution of three-dimensional incompressible flow problems. J. Fluid Mech. 82 (1977) S. 309-319
- [76_] Clever, R.M., Busse, F.H.: Transition to time-dependent convection. J. Fluid Mech. 65 (1974) S. 625-645
- [77_] Moin, P., Kim, J.: On the numerical solution of time-dependent viscous incompressible fluid flows involving solid boundaries. J. Comp. Phys. 35 (1980) S. 381-392
- [78_] Zijl, W.: Application of numerical approximation methods to the hydrodynamics of vapor and gas bubbles, Appendix 2, in: Boiling phenomena, Vol. 2 (S.v.Stralen, R.Cole), Hemisphere, Washington 1979, S. 605-606

- [79] Moin, P., Reynolds, W.C., Ferziger, J.H.: Large eddy simulation of incompressible turbulent channel flow. Report TF-12, Mech. Eng. Dept., Stanford University, 1978
- [80] Schumann, U. (ed.): Computers, fast elliptic solvers, and applications. Advance Publications, London 1978
- [81] Buzbee, B.L., Dorr, F.W., George, J.A., Golub, G.H.: The direct solution of the discrete Poisson equation on irregular regions. SIAM J. Numer. Anal. 8 (1971) S. 722-736
- [82] Bristeau, M.O. et al.: A finite element approximation of Navier-Stokes equations for incompressible viscous fluids. Iterative methods of solution. Springer Lect. Notes Mathematics 771 (1980) S. 78-128
- [83] Quartapelle, L.: Vorticity conditioning in the computation of two-dimensional viscous flows. J. Comp. Phys. 40 (1981) S. 453-477
- [84] Deville, M.: Persönliche Mitteilung (1980)
- [85] Orszag, S.A.: Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: accuracy. J. Fluid Mech. 49 (1971) S. 75-112
- [86] Orszag, S.A.: Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries. I. Galerkin (spectral) representations. Studies Appl. Math. L (1971) S. 293-327
- [87] Orszag, S.A.: Spectral methods for problems in complex geometries. J. Comp. Phys. 37 (1980) S. 70-92
- [88] Orszag, S.A., Gottlieb, D.: High resolution spectral calculations of inviscid compressible flows. Springer Lect. Notes Mathematics 771 (1980) S. 381-398

- [89_] Orszag, S.A., Israeli, M.: Numerical simulation of viscous incompressible flows. Ann. Rev. Fluid Mech. 6 (1974) S. 281-318
- [90_] Cooley, J.W., Lewis, P.A.W., Welch, P.D.: The Fast Fourier Transform algorithm: programming considerations in the calculation of sine, cosine and Laplace transforms. J. Sound Vib. 12 (1970) S. 315-337
- [91_] Fox, L., Parker, I.B.: Chebyshev polynomials in numerical analysis. Oxford Univ. Press, London 1968
- [92_] Rivlin, Th.J.: The Chebyshev polynomials. Wiley, New York 1974
- [93_] Schumann, U.: Effektive Berechnung dreidimensionaler Fluid-Struktur-Wechselwirkung beim Kühlmittelverluststörfall eines Druckwasserreaktors -FLUX-. KfK 2645 (1979)
- [94_] Morchoisne, Y.: Résolution des équations de Navier-Stokes par une méthode pseudo-spectrale en espace-temps. La Recherche Aérospatiale 5 (1979) S. 293-306
- [95_] Bechler, K.H., Kleiser, L.: CHANSONEVALUATION und CHANSONPLOT. Unveröffentlichter Bericht, 1979
- [96_] Schlechtendahl, E.G.: Das integrierte CAD-System REGENT. KfK-CAD 2 (1975)
- [97_] Enderle, G. et al.: GIPSY-Handbuch. KfK 2878 (1980)
- [98_] Stuart, J.T.: On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability. J. Fluid Mech. 4 (1958) S. 1-21
- [99_] Herbert, Th.: Persönliche Mitteilung (1979)
- [100_] Enderle, G., Schumann, U.: Fortran Programme zur analytischen Beschreibung der Anlaufströmung in eindimensionalen Geometrien. KfK-Ext. 8/71-6 (1971)

- [101_] Hama, F.R.: Progressive deformation of a perturbed line vortex filament. Phys. Fluids 6 (1963) S. 526-534
- [102_] Wortmann, F.X.: Boundary-layer waves and transition. Springer Lect. Notes Physics 148 (1981) S. 268-279
- [103_] Hama, F.R., Williams, D.R., Fasel, H.: Flow field and energy balance according to the spatial linear stability theory of the Blasius boundary layer. Proc. IUTAM Symposium Stuttgart 1979, S. 73-85, S. Ref. [36_]
- [104_] Perry, A.E., Lim, T.T., Teh, E.W.: A visual study of turbulent spots. J. Fluid Mech. 104 (1981) S. 387-405
- [105_] Head, M.R., Bandyopadhyay, P.: New aspects of turbulent boundary-layer structure. J. Fluid Mech. 107 (1981) S. 297-338
- [106_] Anders, J.B., Blackwelder, R.F.: Longitudinal vortices in a transitioning boundary layer. Proc. IUTAM Symposium Stuttgart 1979, S. 110-119. S. Ref. [36_]
- [107_] Chapman, D.R.: Computational aerodynamics development and outlook. AIAA J. 17 (1979) S. 1293-1313
- [108_] Beljaars, A.C.M., Prasad, K.K.: A model for periodic structures in turbulent boundary layers. Springer Lect. Notes Physics 136 (1981) S. 93-118
- [109_] Gazdag, J.: Time-differencing schemes and transform methods. J. Comp. Phys. 20 (1976) S. 196-207
- [110_] Lilly, D.K.: On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems. Mon. Weather Rev. 93 (1965) S. 11-26
- [111_] Kleiser, L.: Unveröffentlichter Bericht, 1980
- [112_] Herbert, Th.: Stability of plane Poiseuille flow - theory and experiment. Erscheint in Fluid Dynamics Transactions, vol. 11 (1982).

Diese Arbeit entstand am Institut für Reaktorentwicklung des Kernforschungszentrums Karlsruhe. Seinem Leiter, Herrn Prof.Dr. D. Smidt, und meinem Abteilungsleiter Herrn Dr. E.G. Schlechtendahl, danke ich für die Möglichkeit, die vorliegende Themenstellung über einen längeren Zeitraum bearbeiten zu können.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Priv.-Doz. Dr. U. Schumann für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine Betreuung während ihrer Entstehung. Herr Dr. Schumann hat mir insbesondere bei der Entwicklung des numerischen Verfahrens wesentliche Hilfestellung geleistet.

Herrn Prof.Dr. J. Zierp danke ich für sein Interesse und für die Übernahme des Korreferats.

Herrn Prof.Dr. Th. Herbert verdanke ich entscheidende Anregungen zur Simulation des Umschlagproblems.

Weiter danke ich den Mitarbeitern des Instituts, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben. Herr K.H. Bechler hat das Programmsystem zur Auswertung und graphischen Darstellung der Ergebnisse erstellt, Frau H. Jansky hat das Manuskript angefertigt, und Frau B. Oberacker und Frau T. Kuhn haben die Abbildungen gezeichnet.