

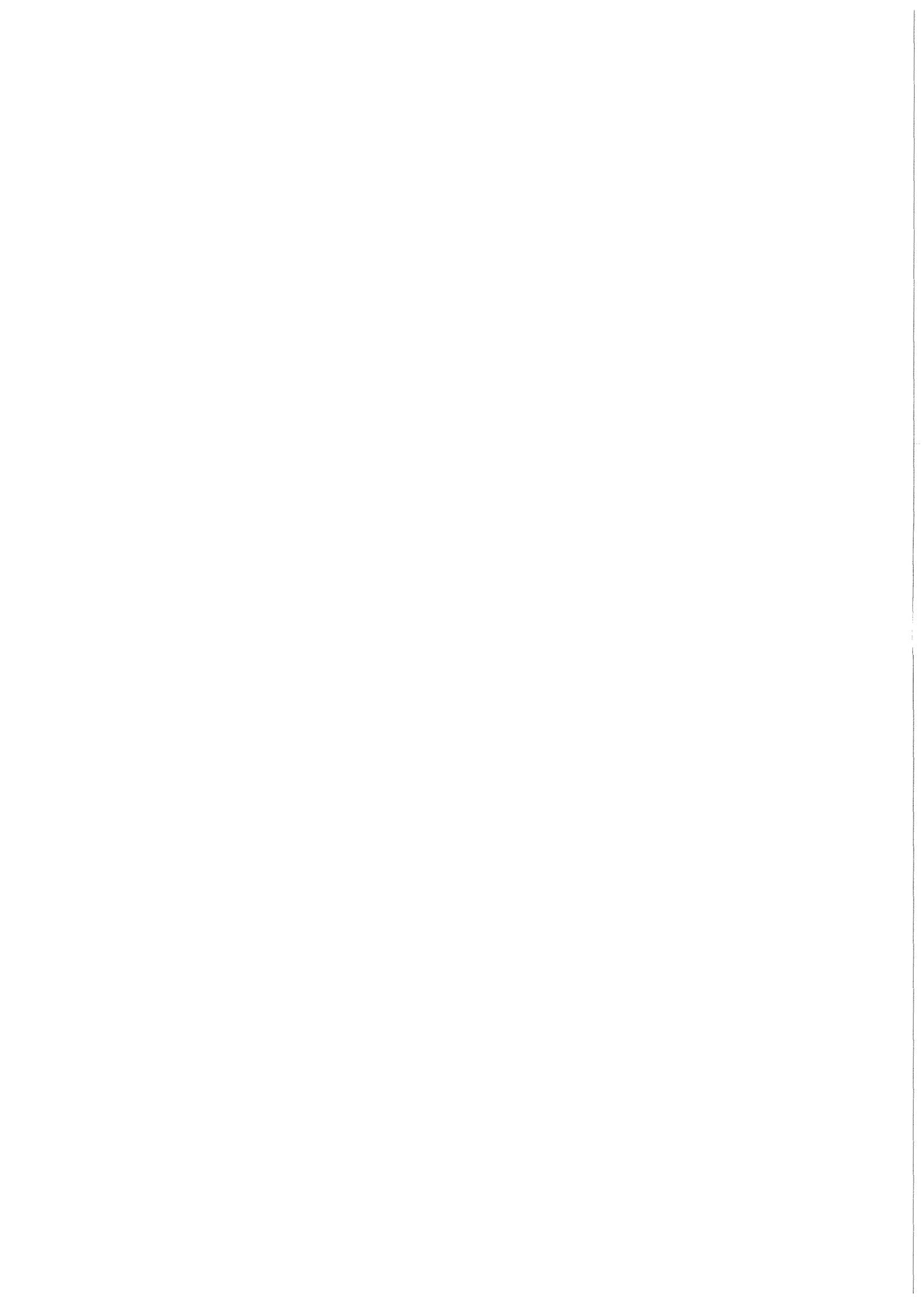


KfK 3322  
April 1982

# **Modellierung und Analyse von seriellen Produktionssystemen**

**W. Haußmann**  
Institut für Datenverarbeitung in der Technik

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE  
Institut für Datenverarbeitung in der Technik

KfK 3322

Modellierung und Analyse von seriellen Produktionssystemen

Walter Haußmann

Von der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften  
der Universität Karlsruhe (T.H.)  
genehmigte Dissertation

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
ISSN 0303-4003

### Zusammenfassung

Bei der Planung von technischen Produktionsprozessen spielt die Verfügbarkeit eine zentrale Rolle. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit das System zu einem beliebigen Zeitpunkt intakt ist. Daraus können dann weitere Kenngrößen, wie z.B. mittlerer Durchsatz des Systems, abgeleitet werden.

In der vorliegenden Arbeit wird das dynamische Verhalten von seriellen Produktionsprozessen mit unzuverlässigen Maschinen und endlichen Zwischenlagern mit Hilfe von Markov'schen Ketten modelliert. Die Systemzustände umfassen die Angabe der Funktionsfähigkeit der Maschinen und die Angabe der Materialhöhe in den Zwischenlagern. Die Abhängigkeiten unter diesen Zuständen werden durch ein Gleichungssystem beschrieben, dessen Lösung zur Berechnung der Systemverfügbarkeit herangezogen wird.

Ein- und Zweilagermodelle werden ausführlich behandelt. Für eine bestimmte Klasse von Einlagermodellen werden die ergodischen Zustandswahrscheinlichkeiten mit Hilfe zweier neuer Ansätze bestimmt und in algebraischer Form angegeben. Beide Ansätze bewirken eine starke Reduktion des ursprünglichen Gleichungssystems.

Numerische Methoden, die die Struktur und die schwache Besetzung der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten ausnutzen, liefern die ergodischen Zustandswahrscheinlichkeiten für ein Zweilagermodell. Zwischen diesen erkennt man Symmetrien, die es ermöglichen, für einen Spezialfall die ergodischen Zustandswahrscheinlichkeiten auch algebraisch zu bestimmen.

Parameterstudien zeigen dann die Abhängigkeiten der Systemparameter untereinander auf und geben wichtige Hinweise für die effektive Dimensionierung der Zwischenlagerkapazitäten und der Maschinen.

Modelling and Analysis of Serial Production Systems

Abstract

In planning technical production processes the availability plays a central part. It indicates the operational probability of the system at any given moment. Further variables can be derived from this probability such as the average throughput of the system.

In this paper the dynamic behavior is modeled of serial production processes involving unreliable machines and finite intermediate buffers, using Markov chains. A system state is defined as a set of numbers that indicate the operational status of the machines and the number of pieces in each storage. Under these conditions the dependencies are described by a system of equations the solution of which is used to calculate the system availability.

Two- and three-stage lines are treated extensively. For a given category of two-stage lines the ergodic state probabilities are determined with the help of two new setups. Both setups cause reduction of the original system of equations.

Numerical methods utilizing structure and sparsity of the matrix of the transition probabilities furnish the ergodic state probabilities for a three-stage line. Symmetries are recognized between the state probabilities which allow also the algebraic determination of the state probabilities for a special case.

Parametric studies then establish the relationships between the system parameters and provide significant indications regarding the effective sizing of the capacities of the intermediate storage facilities and the machines.

Inhaltsverzeichnis

|   | <u>Seite</u> |
|---|--------------|
| 1. Einleitung   | 1            |
| 2. Übersicht über Produktionssysteme  | 8            |
| 2.1 Produktionssysteme ohne Zwischenlager   | 8            |
| 2.2 Produktionssysteme mit unendlichen Zwischenlagerkapazitäten   | 18           |
| 2.3 Produktionssysteme mit endlichen Zwischenlagerkapazitäten   | 20           |
| 2.3.1 Klassifizierung von Einlagermodellen  | 23           |
| 2.3.2 Das Modell von Gershwin und Schick  | 28           |
| 2.3.3 Das Modell von Zimmern, Levin und Pasko und Wijngaard   | 33           |
| 2.3.4 Abschließende Beurteilung   | 37           |
| 3. Ein Einlagermodell mit identischen Maschinen   | 39           |
| 3.1 Beschreibung des Zustandsraumes   | 39           |
| 3.2 Modellannahmen und dynamisches Verhalten des Systems  | 40           |
| 3.3 Übergangsgleichungen des Einlagermodells  | 42           |
| 3.4 Lösung der Übergangsgleichungen durch sukzessives Einsetzen   | 46           |
| 3.5 Ein Faktorisierungsansatz für die internen Zustände   | 50           |
| 3.6 Ein Gleichverteilungsansatz   | 56           |
| 3.7 Berechnung der Systemverfügbarkeit  | 58           |
| 3.8 Einfluß des Zyklusablaufes auf die Systemverfügbarkeit  | 60           |
| 4. Einlagermodelle mit unterschiedlichen Maschinen und modifizier-<br>tem Ausfallverhalten  | 65           |
| 4.1 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten und der Verfüg-<br>barkeit bei vom Lagerzustand unabhängigem Ausfall- und Repa-<br>raturverhalten                                   | 67           |
| 4.2 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten und der Verfüg-<br>barkeit bei identischen Maschinen, die im blockierten Zustand<br>mit der Wahrscheinlichkeit $c$ ausfallen können | 74           |

|  | <u>Seite</u> |
|--|--------------|
| 4.3 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten und der Verfügbarkeit für den allgemeinen Fall   | 76           |
| 5. Prozeßsysteme mit zwei Zwischenlagern und drei unzuverlässigen Maschinen  | 80           |
| 5.1 Übersicht über bestehende Modelle  | 80           |
| 5.2 Modellannahmen und Herleitung der Zustandsgleichungen und Systemverfügbarkeiten  | 84           |
| 5.3 Symmetrien zwischen Zustandswahrscheinlichkeiten und die analytische Lösung eines Spezialfalles  | 95           |
| 5.4 Diskussion und Verifikation der numerischen Ergebnisse   | 100          |
| Literaturverzeichnis   | 110          |
| Anhang 1, 2 und 3  |              |
| A1. Markov'sche Ketten   | 114          |
| A2. Zustandswahrscheinlichkeiten eines Seriensystems ohne Zwischenlagen bestehend aus drei Maschinen, die im blockierten Zustand eine Ausfallwahrscheinlichkeit besitzen | 120          |
| A3. Numerische Lösung der Zustandsgleichungen mit beliebigen Systemparametern  | 123          |
| A3.1 Abspeicherungstechniken für Sparse-Matrizen   | 124          |
| A3.2 Verfahren zur Lösung der linearen Gleichungssysteme   | 125          |
| A3.3 Programmbeschreibung  | 128          |

Bezeichnungen

|                   |  |
|-------------------|--|
| $V_{SYS}(t)$      | Verfügbarkeit zu einem beliebigen Zeitpunkt $t$ .  |
| $V_{SYS}$         | Grenzverfügbarkeit oder kurz Verfügbarkeit.  |
| $V_{SYS,k}^{0,1}$ | Verfügbarkeit eines Seriensystems ohne Zwischenlager mit $k$ abhängigen Komponenten.   |
| $V_{SYS,k}^{0,2}$ | Verfügbarkeit eines Seriensystems ohne Zwischenlager mit $k$ unabhängigen Komponenten.   |
| $V_{SYS,2}^{0,3}$ | Verfügbarkeit eines Seriensystems ohne Zwischenlager mit zwei Maschinen. Der Zyklusablauf ist Laden, Produzieren, Entladen.  |
| $V_{SYS,2}^{0,4}$ | Verfügbarkeit eines Seriensystems ohne Zwischenlager mit zwei Komponenten, die im blockierten Zustand die Ausfallwahrscheinlichkeiten $c_i$ ( $i=1,2$ ) besitzen.                          |
| $V_{SYS}^{u,1}$   | Verfügbarkeit eines Produktionssystems mit $k$ Maschinen- und $k-1$ Zwischenlager mit unendlicher Kapazität. Bei Ausfall einer Maschine wird das gerade bearbeitete Werkstück weggeworfen. |
| $V_{SYS}^{u,2}$   | Verfügbarkeit eines Produktionssystems mit $k$ Maschinen und $k-1$ unendlichen Zwischenlagerkapazitäten. Es wird kein Ausschuß produziert.   |
| $V_{SYS-E}^N$     | Eingabeorientierte Verfügbarkeit eines Produktionssystems mit $k$ Maschinen und $k-1$ endlichen Zwischenlagern.  |
| $V_{SYS-A}^N$     | Ausgabeorientierte Verfügbarkeit eines Produktionssystems mit $k$ Maschinen und $k-1$ endlichen Zwischenlagern.  |
| A                 | Auslastung eines Produktionssystems.   |

- $N, 1$   
 $V_{\text{SYS1-A}}$  Ausgabeorientierte Systemverfügbarkeit eines Einlagermodells mit endlichem Zwischenlager. Blockierte Maschinen haben die Ausfallwahrscheinlichkeit  $a$ .
- $i$   
 $V_{\text{ein}}$  Einzelverfügbarkeit der Maschine  $i$ , die gegeben ist durch  $\text{MTBF}/(\text{MTBF}+\text{MTTR})$  oder  $b/(a+b)$ , mit  $b=1/\text{MTTR}$  und  $a=1/\text{MTBF}$ .
- $N, 2$   
 $V_{\text{SYS1-A}}$  Ausgabeorientierte Systemverfügbarkeit eines Einlagersystems mit endlichem Zwischenlager. Der Zyklusablauf ist Laden, Produzieren, Entladen. Blockierte Maschinen können ausfallen.
- $N, 3$   
 $V_{\text{SYS1-A}}$  Ausgabeorientierte Systemverfügbarkeit eines Einlagermodells mit endlichem Zwischenlager. Die Systemparameter sind unterschiedlich. Blockierte Maschinen haben die Ausfallwahrscheinlichkeit  $a_i$ .
- $N, 3$   
 $V_{\text{SYS1-E}}$  Eingabeorientierte Systemverfügbarkeit; ansonsten wie  $N, 3$   
 $V_{\text{SYS1-A}}$ .
- $N, 4$   
 $V_{\text{SYS1-A}}$  Ausgabeorientierte Systemverfügbarkeit eines Einlagermodells mit endlichem Zwischenlager. Die identischen Maschinen haben im blockierten Zustand die Ausfallwahrscheinlichkeit  $c$ .
- $N_1, N_2$   
 $V_{\text{SYSA}}$  Ausgabeorientierte Systemverfügbarkeit eines Zweilagermodells mit den Zwischenlagerkapazitäten  $N_1$  und  $N_2$ .
- $N_1, N_2$   
 $V_{\text{SYSE}}$  Eingabeorientierte Systemverfügbarkeit eines Zweilagermodells mit den Zwischenlagerkapazitäten  $N_1$  und  $N_2$ .

Bilder

- Bild 1.1: Linienproduktionsprozeß mit k-Komponenten ohne Zwischenlager.
- Bild 1.2: Linienproduktionsprozeß mit k-Prozessen und k-1 Zwischenlagern mit elastischer Verkettung. Die Werkstücke müssen das Lager passieren.
- Bild 1.3: Linienproduktionsprozeß mit k-Prozessen und k-1 Zwischenlagern mit starrer Verkettung. Die Werkstücke müssen das Lager nicht passieren.
- Bild 1.4: Produktionssysteme mit Zwischenlagern aus dem Bereich der Wiederaufarbeitung.
- Bild 1.5: Produktionssysteme mit Zwischenlagern aus dem Bereich der Kraftfahrzeugindustrie.
- Bild 2.1: Seriensystem mit drei Komponenten.
- Bild 2.2: Übergangsgraphen eines Produktionssystems mit zwei Maschinen ohne Zwischenlager  
a) nach Okamura und Yamashina,  
b) nach Barlow und Proschan.
- Bild 2.3: Übergangsmatrix  $\underline{\underline{P}}$  eines Produktionssystems bestehend aus zwei Maschinen.
- Bild 2.4: Übergangsmatrix  $\underline{\underline{P}}$  eines Produktionssystems bestehend aus drei Maschinen.
- Bild 2.5: Übergangsgraph des Einlagermodells von Gershwin und Schick für  $N=4$ .
- Bild 3.1: Übergangsgraph des Einlagermodells.

- Bild 3.2: Übergangsmatrix des Einlagermodells.
- Bild 3.3: Übergangsmatrix bei geändertem Zyklusablauf.
- Bild 5.1: Aufzustellende allgemeine Gleichungen bei einem Zweilagermodell (pro Ecke, Rand und interne Zustände, je 8 Gleichungen).
- Bild 5.2: Übergangsmatrix des Zweilagermodells für einen Spezialfall unter Ausnutzung der Symmetrien.
- Bild 5.3: Obere Dreiecksmatrix beim Spezialfall.
- Bild 5.4: Dimensionsrelationen zwischen den Systemparametern eines Zweilagermodells sind entscheidend für den Effekt der Zwischenlager ( $N_1=N_2=N$ ).
- Bild 5.5: Abhängigkeit der Systemverfügbarkeit eines Zweilagermodells von den unterschiedlichen Einzelverfügbarkeiten (Ausgeglichene Systeme erzielen höhere Systemverfügbarkeiten).
- Bild A3.1: Strukturdiagramm des Programms zur Analyse eines Zweilagermodells.

## Tabellen

- Tabelle 2.1: Übersichtstabelle über Einlagermodelle.
- Tabelle 3.1: Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Maschinenzuständen.
- Tabelle 3.2: Auswirkungen der Annahmen über den Zyklusablauf auf die Systemverfügbarkeit.
- Tabelle 4.1: Übergangswahrscheinlichkeiten der Maschinenzustände im allgemeinsten Fall.
- Tabelle 4.2: Einfluß der Ausfallwahrscheinlichkeit blockierter Maschinen eines Einlagermodells mit der Zwischenlagerkapazität von 5 Werkstücken.
- Tabelle 5.1: Übergangswahrscheinlichkeiten der Maschinenzustände  $\alpha_i(t)$  mit  $n_i(t)=\infty$  für  $i < l$  und  $i \geq k$  und  $\alpha_i(t)=0$  für  $i < l$  und  $i \geq k+1$ .
- Tabelle 5.2: Übergangsverhalten der Lagerbestände mit  $n_i(t)=\infty$  für  $i < l$  und  $i \geq k$  und  $\alpha_i(t)=0$  für  $i < l$  und  $i \geq k+1$ .
- Tabelle 5.3: Daten zu Bild 5.4.
- Tabelle 5.4: Daten zu Bild 5.5.
- Tabelle 5.5: Einfluß der Ausfallwahrscheinlichkeit blockierter Maschinen auf die Systemverfügbarkeit.
- Tabelle A3.1: Anzahl der möglichen Systemzustände eines Zweilagermodells.

## 1. Einleitung

Anlagenteile in technischen Produktionsprozessen sind so zu konfigurieren, daß sie vorgeschriebenen Sicherheitsanforderungen genügen und das geplante Produktionsziel bei vorgegebenen zeitlichen und finanziellen Ressourcen erreichen.

Bei jeder linienartigen Anordnung von Produktionssystemen ohne Zwischenlager (siehe Bild 1.1) führt der Ausfall oder die unterschiedliche Dauer eines Prozeßschrittes zum Stillstand der vor- und nachgeschalteten Prozeßeinheiten. Im Gegensatz zu geplanten Stillstandszeiten wie Inspektion und Wartung, handelt es sich bei den Stillständen durch Ausfälle um zufällige Ereignisse. Derartige Systeme sind demnach nicht mit deterministischen, sondern mit stochastischen Modellen zu analysieren. Das Verhalten des Systems wird zu vorgegebenen Beobachtungszeitpunkten beschrieben durch Zustände, durch ihre zeitliche Abfolge und durch ihre Abhängigkeit untereinander.

Für die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den einzelnen Zuständen existieren im allgemeinen komplexe Beziehungen. Hängt ein Übergang nur von der Gegenwart und nicht von der Vergangenheit ab, so besitzen die stochastischen Modelle die Markoveigenschaft und man nennt sie aus diesem Grunde Markov'sche Ketten. Ihre Bedeutung besteht darin, daß sie einerseits analytisch recht gut zu handhaben sind und andererseits viele reale Systeme genügend genau abbilden können. Die in dieser Arbeit beschriebenen Systeme werden ebenfalls mit Hilfe der Theorie der Markov'schen Ketten behandelt.

Neben technischen Verbesserungen und redundanter Auslegung der Prozeßeinheiten (im folgenden Maschinen genannt) können in einem Linien-Prozeßsystem zwischen die Maschinen geschaltete Lager (siehe Bilder 1.2 und 1.3) die Folgestillstände von Prozeßeinheiten, die einem ausgefallenen Prozeßteil vorangehen oder folgen, teilweise auffangen.

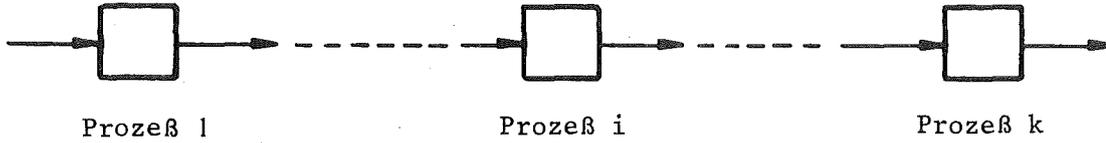


Bild 1.1: Linienproduktionsprozeß mit k Komponenten ohne Zwischenlager

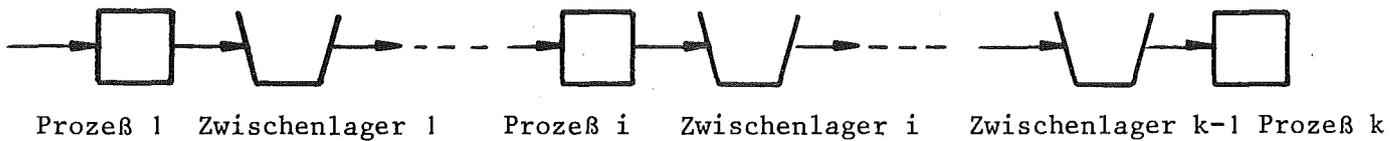


Bild 1.2: Linienproduktionsprozeß mit k Prozessen und k-1 Zwischenlagern mit elastischer Verkettung. Die Werkstücke müssen das Lager passieren.

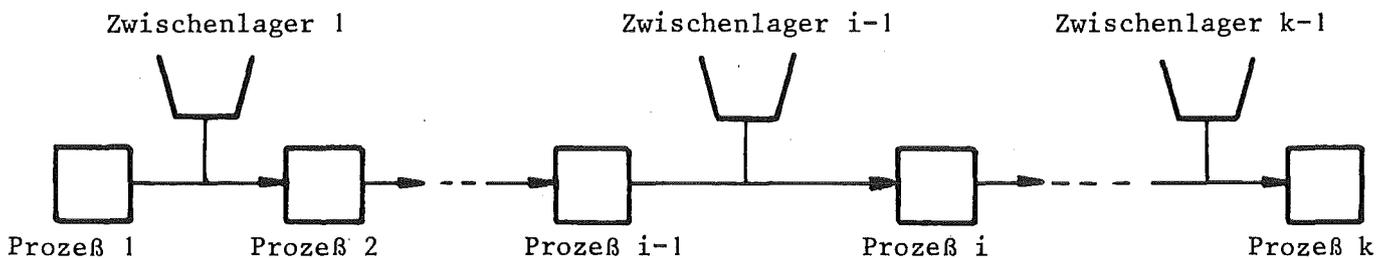


Bild 1.3: Linienproduktionsprozeß mit k Prozessen und k-1 Zwischenlagern mit starrer Verkettung. Die Werkstücke müssen das Lager nicht passieren.

Konkrete Beispiele sind:

- aus dem Bereich der Kerntechnik der Prozeß der Wiederaufarbeitung bestrahlter Kernbrennstoffe (siehe Bild 1.4)
- aus dem Bereich der Kraftfahrzeugindustrie (siehe Bild 1.5)

Fällt eine Maschine aus, so kann die vorangehende (nachfolgende) Maschine weiterarbeiten, wenn das ihr nachfolgende (vorangehende) Zwischenlager nicht voll (nicht leer) ist. Eine Verbesserung der "Effektivität" des Produktionssystems ist die Folge. Als Maß für die Effektivität des Produktionssystems wird hier die Verfügbarkeit gewählt, die im einfachsten Fall definiert wird durch den Quotienten aus mittlerer produktiver Zeit und insgesamt zur Verfügung stehender Zeit. Verbesserung der Effektivität wird hier also im Sinne einer Erhöhung der Systemverfügbarkeit verstanden.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, aus Annahmen über das Systemverhalten, den Zustandsraum, die Systemparameter (Reparatur- und Betriebsdauern von Maschinen und Lagerkapazitäten) die Systemverfügbarkeit für Ein- und Zweilager-Liniensysteme zu bestimmen, d.h. die Wahrscheinlichkeit der Produktionsbereitschaft des jeweiligen Liniensystems zu formulieren. Die Frage der kostenoptimalen Auslegung der Zwischenlagerkapazitäten bietet sich an, (siehe die Simulationsuntersuchungen von Janisch [1979] und von Stetten [1977] ) wird aber im Rahmen dieser Erörterung nicht behandelt.

Die Problemstellung der Verfügbarkeitsplanung mit Zwischenlagern wurde in der Literatur zum ersten Mal von Vladziyevskii [1953] aufgegriffen. Er behandelte ein Modell mit zwei Maschinen und einem Zwischenlager, im folgenden Einlagermodell genannt. Für Einlagermodelle wurden seitdem eine Vielzahl von Analysen durchgeführt, auf die im Hauptteil dieser Arbeit eingegangen werden soll. In der Literatur über Einlagermodelle wird im wesentlichen das Annahmesystem beschrieben, und es werden die Zustandswahrscheinlichkeiten angegeben. Dadurch ist es nicht möglich, Strukturkenntnisse, die von den Autoren zur Analyse der Systeme

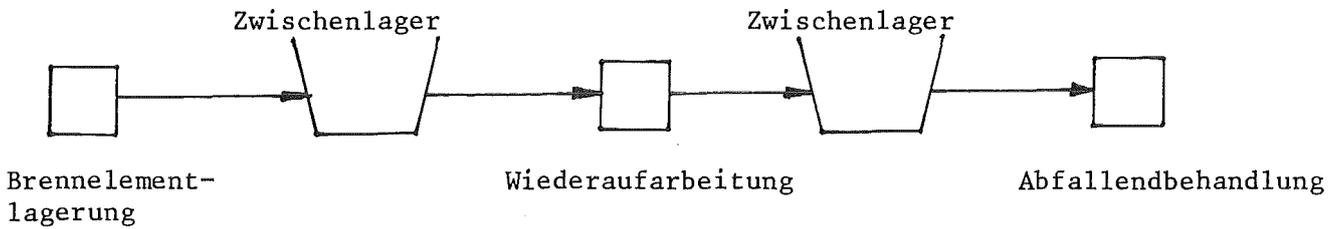
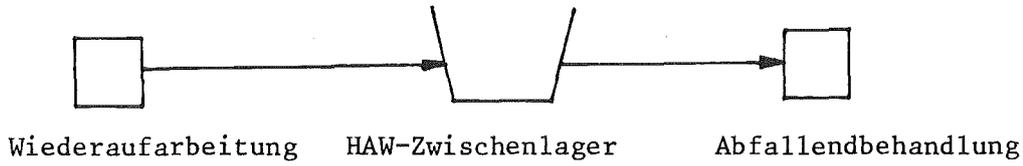


Bild 1.4: Produktionssysteme aus dem Bereich der Wiederaufarbeitung.

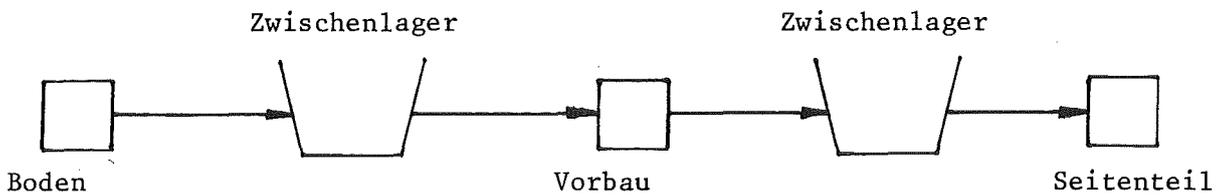


Bild 1.5: Produktionssystem aus dem Bereich der Kraftfahrzeugindustrie (Ausschnitt aus dem schematischen Fertigungsfluß des Karosserie-zusammenbaus).

herangezogen werden, nachzuvollziehen. Aus diesem Grunde und mit dem speziellen Ziel vor Augen, Hinweise für die Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten eines Zweilagermodells zu erhalten, wurde in dieser Arbeit der Analyse eines Einlagermodells ein breiter Raum gewidmet.

In Kapitel zwei geben wir einen Überblick über die in der Literatur bekannten Einlagermodelle. Da bei vielen Modellen die Voraussetzungen nicht klar formuliert wurden, sind die einzelnen Modelle untereinander nicht vergleichbar. Diesen Mangel beheben wir durch die Einführung einheitlicher Symbole und durch konsistente Formulierung der Voraussetzungen. Dadurch werden wesentliche Unterschiede und die Grenzen der Modelle sichtbar. Der Grad der Übereinstimmung mit der Realität wird offenbar und wir erleichtern uns die richtige Wahl des Modells bei konkreten Anwendungen.

Im dritten Kapitel formulieren wir für ein Einlagersystem ein Annahmesystem und leiten die Gleichungen für die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten her. Wir erkennen dabei Symmetrien und eine Gleichverteilung der Wahrscheinlichkeiten der internen Zustände (d.h. der Zustände, bei denen das Lager nicht leer oder nicht voll ist) und finden zwei neue Ansätze, einen Faktorisierungsansatz und einen Gleichverteilungsansatz, zur Lösung der Zustandsgleichungen. Beide Ansätze bewirken eine starke Reduktion der ursprünglichen Zahl der Gleichungen. Die Lösung des Einlagerproblems wird somit relativ einfach.

Die o.a. Lösungswege führen nur zu Resultaten, wenn die Maschinen gleiches Betriebs- und Ausfallverhalten besitzen. Ein derartiges Verhalten ist nur bei gleichen Maschinentypen wahrscheinlich. Da die Maschinen aufeinanderfolgende Arbeiten durchführen, handelt es sich in der Regel um unterschiedliche Maschinen mit unterschiedlichen Ausfall- und Betriebsverhalten.

In Kapitel vier leiten wir die Ergebnisse für diesen Fall gesondert her. Dies geschieht durch sukzessives Einsetzen. Außerdem erweitern

wir die Voraussetzungen für Einlagermodelle. Dabei nutzen wir die Erkenntnis aus dem zweiten Kapitel, daß sich die einzelnen Modelle im wesentlichen in der Behandlung blockierter Maschinen unterscheiden (Eine blockierte Maschine ist eine intakte Maschine, die infolge Werkstückmangel bzw. Stau im vorangehenden bzw. nachfolgenden Lager nicht arbeiten kann). Wir lassen zu, daß eine blockierte Maschine eine Ausfallwahrscheinlichkeit besitzt, die unabhängig von der einer produzierenden Maschine ist. In den bekannten Modellen kann eine blockierte Maschine nicht ausfallen oder sie hat die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit wie eine produzierende Maschine. Bei identischen Maschinen wenden wir den in Kapitel drei gefundenen Faktorisierungsansatz zur Lösung der Zustandsgleichungen an. Es zeigt sich, daß die Höhe der Ausfallwahrscheinlichkeiten blockierter Maschinen einen entscheidenden Einfluß auf die Verfügbarkeit hat, obwohl die Anzahl der Zustände mit blockierten Maschinen relativ gering ist.

Im fünften Kapitel werden größere Liniensysteme untersucht. Bei Zweilagermodellen sind wesentlich mehr Zustände als bei Einlagermodellen zu berücksichtigen. Insbesondere sind sehr viel mehr Randzustände zu behandeln, die das Übergangsverhalten komplizieren. Die Eigenschaft der Gleichverteilung der internen Zustände des Einlagersystems liegt beim Zweilagermodell nicht mehr vor. Folglich sind die für das Einlagermodell gefundenen Ansätze nicht mehr anwendbar. Wir lösen aus diesem Grunde das lineare Gleichungssystem numerisch.

Da schon geringe Zwischenlagerkapazitäten von z.B. 10 Mengeneinheiten ein Gleichungssystem mit ca. 1000 Unbekannten hervorrufen, bekommen wir bei voller Abspeicherung der Übergangsmatrix Speicherplatzprobleme. Unter Ausnutzung der Tatsache, daß die Übergangsmatrix schwach besetzt ist, speichern wir nur die Nichtnullelemente ab und können so das Problem beheben. Zur Lösung des Gleichungssystems verwenden wir dann Algorithmen, die diese Abspeicherungstechnik berücksichtigen. Wir bestimmen die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten mit einem direkten und einem iterativen Verfahren. Bei dem direkten

Verfahren greifen wir auf die Programmbibliothek HARWELL zurück. Das iterative Verfahren (successive overrelaxation) implementieren wir. Es benötigt zwar weniger Speicherplatz, liefert aber ungenauere Ergebnisse.

Die numerischen Lösungen lassen Symmetrien erkennen, die eine Reduktion des ursprünglichen Gleichungssystems ermöglichen. Auf diese Weise können wir für einen Sonderfall die Zustandswahrscheinlichkeiten in algebraischer Form angeben. Bildungsgesetze wie beim Einlagermodell sind jedoch nicht ersichtlich. Neben der Überprüfung der numerischen Ergebnisse mit analytischen Formeln überprüfen wir die Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse mit dem Spezialfall, für den die Zustandswahrscheinlichkeiten in analytischer Form vorliegen. Außerdem enthält Kapitel fünf Parameterstudien, die den Einfluß unterschiedlicher Eingangsdaten und die Abhängigkeiten untereinander aufzeigen.

Bei der Analyse der Modelle werden Resultate der Theorie der Markov'schen Ketten benutzt. Daher werden im Anhang die wichtigsten Definitionen und Sätze dieser Theorie kurz aufgeführt.

Eine Bemerkung zum Stil: In der vorliegenden Arbeit werden Modelle von realen technischen Systemen aufgestellt und analysiert. Da dies des öfteren zu umfangreichen Listen von Voraussetzungen führt, da überdies längere analytische Rechnungen zur Bestimmung der Systemkenngrößen durchgeführt werden, und da schließlich Ergebnisse von numerischen Rechnungen ausführlich diskutiert werden, wurde dieser Arbeit keine streng mathematische Form mit Definitionen und Sätzen gegeben, sondern eine dem Gang der Überlegungen folgende beschreibende Darstellung gewählt. Zur Erleichterung des Verständnisses wurden neu eingeführte Begriffe *kursiv* geschrieben.

## 2. Übersicht über Produktionssysteme

In der Literatur gibt es eine reichhaltige Anzahl von Artikeln, die sich mit seriellen Produktionssystemen auseinandersetzen. Sie lassen sich grob einteilen in:

- (i) Produktionssysteme mit zuverlässigen Maschinen, die stochastische Bearbeitungszeiten pro Werkstück haben,
- (ii) Produktionssysteme mit unzuverlässigen Maschinen, die deterministische Bearbeitungszeiten und stochastische Betriebs- und Reparaturzeiten haben,
- (iii) Produktionssysteme mit unzuverlässigen Maschinen, die stochastische Bearbeitungs-, Betriebs- und Reparaturzeiten haben.

Diese lassen sich weiter untergliedern in Produktionssysteme:

- (iv) ohne Zwischenlager,
- (v) mit endlichen Zwischenlagerkapazitäten vor jeder Maschine, mit der Ausnahme, daß vor der ersten Maschine und nach der letzten Maschine ein Lager mit unendlicher Kapazität zugelassen wird,
- (vi) mit unendlichen Zwischenlagerkapazitäten vor jeder Maschine.

Zur Analyse derartiger Systeme werden in der Literatur Simulationsmodelle, analytische- und heuristische Modelle eingesetzt. Ohne näher auf die Vor- und Nachteile der einzelnen Methoden einzugehen, beschränken wir uns im folgenden auf die Darstellung der exakten analytischen Modelle. Außerdem betrachten wir nur Produktionssysteme mit in Serie geschalteten unzuverlässigen Verarbeitungseinheiten mit deterministischen Bearbeitungszeiten, die keine, endliche und unendliche Zwischenlagerkapazitäten haben können.

### 2.1 Produktionssysteme ohne Zwischenlager

Produktionssysteme ohne Zwischenlager analysierten Zimmern [1956], Buzacott [1967], [1968], Okamura, Yamashina [1977] und Soyster, Toof [1976]. Barlow und Proschan [1975] beschreiben die Berechnung der

Kenngrößen von Seriensystemen, ohne auf die Details der Produktionssysteme einzugehen. Sie unterscheiden im wesentlichen zwei Verhaltensweisen von Seriensystemen:

- (i) fällt eine Systemkomponente aus, so werden die restlichen Komponenten blockiert und es können keine weiteren Komponenten ausfallen, d.h. immer nur eine Komponente kann ausgefallen sein,
- (ii) fällt eine Komponente des Systems aus, so werden zwar die restlichen Komponenten blockiert, aber sie können weiter ausfallen, d.h. mehr als eine Komponente kann ausgefallen sein.

Sie definieren die *Verfügbarkeit*  $V_{\text{sys}}(t)$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  durch

$$V_{\text{sys}}(t) = p\{\text{System intakt zum Zeitpunkt } t\} \quad (2-1)$$

Falls der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$  existiert, nennen sie

$$V_{\text{sys}} = \lim_{t \rightarrow \infty} V_{\text{sys}}(t) \quad (2-2)$$

die *Grenzverfügbarkeit* oder auch kurz nur mit *Verfügbarkeit*  $V_{\text{sys}}$  bezeichnet. Mit Hilfe der Erneuerungstheorie zeigen sie, daß für Systeme mit  $k$  Komponenten und mit der Eigenschaft (i) die Verfügbarkeit gegeben ist durch

$$V_{\text{sys}}^{0,1} = \left( 1 + \sum_{i=1}^k \frac{\text{MTTR}_i}{\text{MTBF}_i} \right)^{-1} \quad (2-3)$$

und für Systeme mit der Eigenschaft (ii) durch

$$V_{\text{sys}}^{0,2} = \prod_{i=1}^k \frac{\text{MTBF}_i}{\text{MTBF}_i + \text{MTTR}_i}, \quad (2-4)$$

wobei  $MTTR_i$  die mittlere Reparaturzeit und  $MTBF_i$  die mittlere Betriebszeit darstellen. (Formel (2-4) ist in der Zuverlässigkeitstheorie sehr bekannt.) Buzacott [1968] gab für Formel (2-3) eine heuristische Argumentation. Zu bemerken ist, daß Barlow und Proschan bei ihren Modellen nur voraussetzen, daß die Varianzen und Erwartungswerte der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Betriebs- und Reparaturzeiten endlich sind. Ein Seriensystem definieren sie als intakt, falls alle Systemkomponenten intakt sind. Dabei betrachten sie nur "statische" Systeme die kein "dynamisches" Verhalten besitzen. Der Unterschied sei an folgendem Beispiel erklärt.

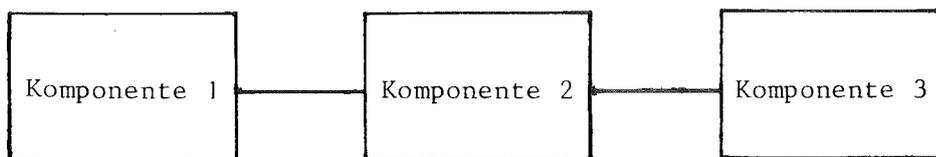


Bild 2.1: Seriensystem mit drei Komponenten

Wir nehmen an, daß in einem Fall die Komponenten 1-3 in Bild 2.1 das Anlassersystem eines Kraftfahrzeuges (bestehend aus Anlasser, Batterie und Zündschloß) darstellen und in einem anderen Fall drei Maschinen, die ein Werkstück nacheinander bearbeiten. Im ersten Fall wird eine defekte Komponente einfach durch eine neue ersetzt, und unser System ist wieder intakt und voll funktionsfähig. Wird dagegen beim zweiten Fall eine defekte Maschine repariert, so geht sie zwar in den Zustand intakt über, aber es muß durch zusätzliche Annahmen sichergestellt werden, daß sofort jede Maschine wieder ein Werkstück bearbeiten kann. Eine derartige Annahme ist z.B., daß das

Entladen einer Maschine mit dem Laden der nachfolgenden Maschine zusammenfallen muß. Falls dies nicht der Fall ist, kann es vorkommen, daß eine Maschine zwar intakt ist, aber noch kein Werkstück zur Bearbeitung bekommen hat. Formeln (2-3) und (2-4) können deshalb nur auf Produktionssysteme mit diskreter Fertigung angewandt werden, die folgende Anforderungen erfüllen:

- (i) Fällt eine Maschine aus, so stellen alle anderen ihre Arbeit ein. Beispiel: Falls in Bild 2.1 die erste Maschine ausfällt, könnte die dritte Maschine, das von der zweiten Maschine bearbeitete Werkstück noch fertigstellen. Die Linie wäre dadurch "leergefahren" und müßte wieder "angefahren" werden.
- (ii) Sind alle Maschinen intakt, so muß sichergestellt sein, daß alle Maschinen ein Werkstück bearbeiten; dies ist gleichzeitig die Definition der Systemintaktheit.
- (iii) Das Entladen einer Maschine muß mit dem Laden der nachfolgenden Maschine zusammenfallen.
- (iv) Der Ausfall einer Maschine erfolgt entweder am Anfang oder am Ende eines Bearbeitungsschrittes, da ansonsten Werkstücke entstehen, die nur teilweise einen Bearbeitungsschritt durchlaufen haben.
- (v) Gleichzeitiger Ausfall mehrerer Maschinen ist nicht möglich (dies ist auf jeden Fall erfüllt, falls alle Ausfallverteilungen kontinuierlich sind).

Weniger Probleme gibt es hingegen bei kontinuierlichen Fertigungssystemen, da hier keine Annahmen über den Produktionsablauf getroffen werden müssen.

Die oben aufgeführten Annahmen über das dynamische Verhalten sind sicherlich nicht für alle diskreten Fertigungslinien gültig.

Okamura und Yamshina [1977] beschreiben ein diskretes Produktionssystem ohne Zwischenlager mit Hilfe einer Markovkette, die dem dynamischen Verhalten einer diskreten Fertigungslinie Rechnung tragen soll. Da die folgenden Systeme ausschließlich mit Markovprozessen modelliert werden, stellen wir zunächst ihre Gemeinsamkeiten dar:

- (i) Die Betriebs- und Reparaturdauern sind bei einem diskreten Parameterraum geometrisch verteilt mit Parameter  $a_i$  und  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , bzw. bei einem kontinuierlichen Parameterraum exponentiell verteilt mit den Parametern  $\lambda_i$  und  $\mu_i$ . Die Ausfallwahrscheinlichkeit einer blockierten Maschine ist geometrisch verteilt mit Parameter  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .
  - (ii) Die aufeinanderfolgenden Betriebszeiten sind unabhängig.
  - (iii) Die aufeinanderfolgenden Reparaturzeiten sind unabhängig.
- Im folgenden nennen wir den Zeitabschnitt, den eine Maschine zur Bearbeitung eines Werkstückes benötigt, einen *Zyklus*. Okamura und Yamashina nehmen dann für ihr System noch an:
- (iv) Die Fertigungslinie ist intakt, falls die letzte Maschine intakt ist und ein Werkstück bearbeitet.
  - (v) Innerhalb eines Zyklus wird eine Maschine beladen und nach der Bearbeitungszeit entladen.
  - (vi) Falls eine Maschine ausfällt, wird das von ihr gerade bearbeitete Werkstück weggeworfen.
  - (vii) Mehr als ein Ereignis innerhalb eines Zyklus ist möglich.

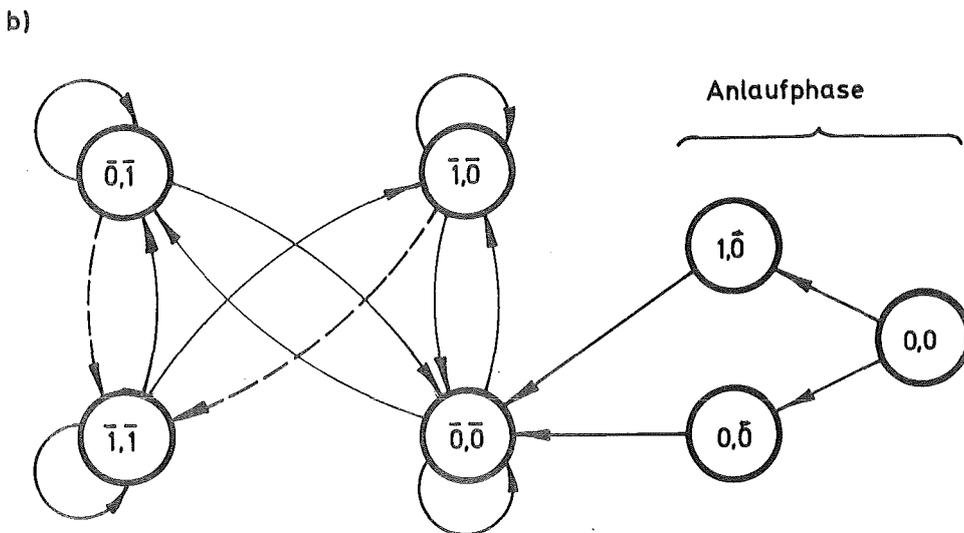
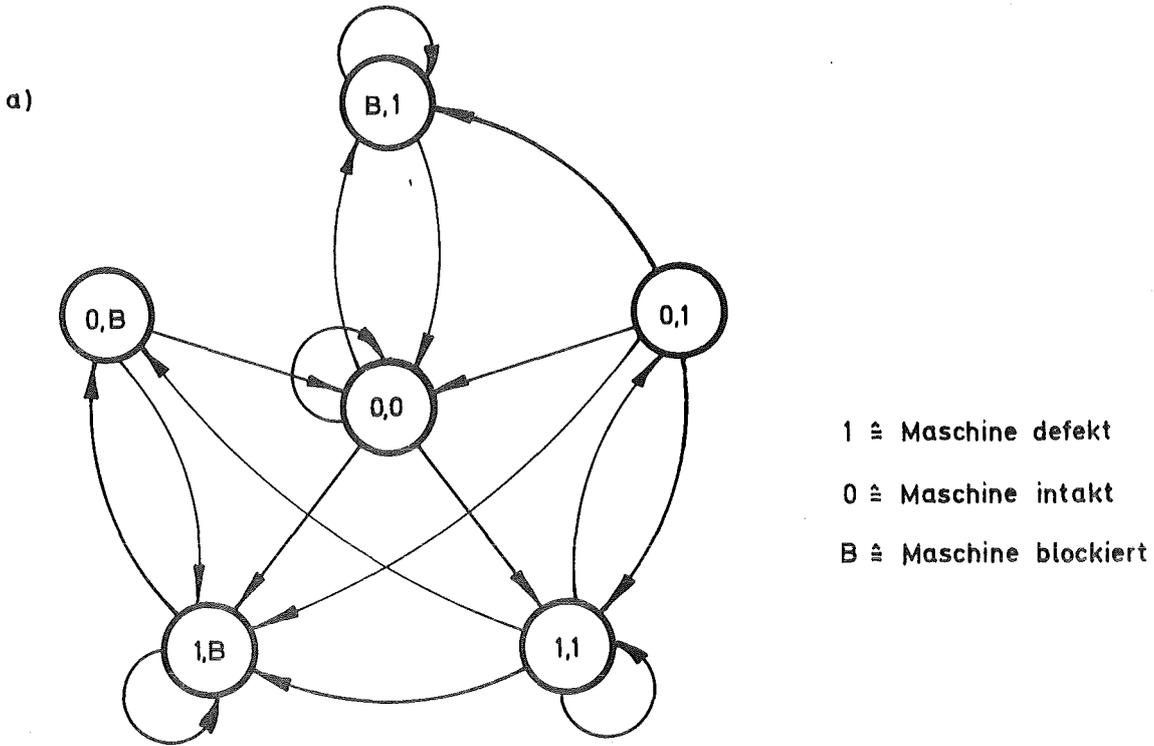


Bild 2.2: Übergangsgraph eines Produktionssystems bestehend aus zwei Maschinen

- a) nach Okamura und Yamashina
- b) nach Barlow und Proschan

- (viii) Eine blockierte Maschine kann nicht ausfallen. Eine Maschine heißt blockiert, falls sie intakt ist, aber nicht be- und entladen werden kann.

Bild 2.2a zeigt den Übergangsgraphen eines Produktionssystems bestehend aus zwei Maschinen. Nur im Zustand (0,0) kann die Fertigungslinie ein komplettes Werkstück produzieren. Mit dem Übergangsgraphen ist es möglich, die Übergangsmatrix aufzustellen. Da die Markov'sche Kette irreduzibel, endlich und aperiodisch ist, existieren die ergodischen Zustandswahrscheinlichkeiten (siehe Anhang 1). Für die Systemverfügbarkeit erhalten Okamura und Yamashina den folgenden Ausdruck

$$v_{\text{sys}}^{0,3} = \frac{(1-a_1)(1-a_2)(\gamma-\rho_1\delta^2)}{(1+\rho_1)(a_2-\rho_1\delta^2)+(1-a_1)^2\rho_2\gamma}, \quad (2-5)$$

wobei

$$\rho_i = a_i/b_i, \quad \gamma = 1-(1-b_1)(1-b_2), \quad \delta = b_1(1-b_2).$$

Der Unterschied zu (2-3) ist offensichtlich. Numerische Beispiele zeigen, daß die Systemverfügbarkeit nach (2-5) immer kleiner ist als die nach (2-3) berechnete. Dies ist nur durch die bei der Herleitung von (2-5) getroffene Annahme (vi) zu erklären.

Die von Barlow und Proschan über die Erneuerungstheorie hergeleiteten Formeln (2-3) und (2-4), kann man auch mit Hilfe einer Markovkette ableiten.

Allerdings nicht mit demselben Gültigkeitsbereich. Der entsprechende Übergangsgraph wurde zum Vergleich in Bild 2.2b dargestellt. Der Modellierung mit einer Markovkette liegt ein Zyklusablauf "Entladen, Laden, Produzieren" zugrunde. Außerdem wurde unterstellt, daß der Ausfall einer Maschine am Ende eines Bearbeitungsschrittes erfolgt. Während der Reparatur stellt die andere Maschine ihren Betrieb sofort ein, kann aber mit der Wahrscheinlichkeit  $c_i$  weiterhin ausfallen. Dadurch wird z. B. die mögliche Folge  $(0,0) \rightarrow (1,B) \rightarrow (0,B) \rightarrow (0,0)$  verkürzt auf  $(\bar{0},\bar{0}) \rightarrow (\bar{1},\bar{0}) \rightarrow (\bar{0},\bar{0})$ . Auch wurde angenommen, daß sich nach der Anlaufphase das System im Zustand  $(\bar{0},\bar{0})$  befindet, in dem beide Maschinen ein Werkstück bearbeiten.

Man kann nun mit dem Übergangsgraphen von Bild 2.2b die entsprechende Übergangsmatrix  $\underline{P}$ , Bild 2.3, und die ergodischen Zustandswahrscheinlichkeiten

$$p' = (p(00), p(01), p(10), p(11))$$

für beliebiges  $c_i$  durch Lösung des Systems der Zustandsgleichungen

$$\underline{P} \cdot p = p$$

(vgl. Anhang 1) bestimmen. Nach (2-1) ist dann die Systemverfügbarkeit  $V_{\text{sys},2}^{0,4}$  gegeben durch

$$V_{\text{sys},2}^{0,4} = p(00) \quad ;$$

dies führt zu dem Ausdruck

$$V_{\text{sys},2}^{0,4} = (b_1 b_2 (c_1 + c_2 + b_1 + b_2)) / (a_2 c_1 b_2 + a_2 c_2 b_1 + a_1 c_1 c_2 + a_1 c_1 b_2 + a_1 c_2 b_1 + a_1 c_2 b_2 + a_1 b_1 b_2 + a_1 b_2^2 + a_2 c_1 c_2 + a_2 c_1 b_1 + a_2 b_1^2 + a_2 b_1 b_2 + c_1 b_1 b_2 + c_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2 + b_1 b_2^2) \quad (2-6)$$

Dieser Ausdruck stimmt für  $k = 2$  und  $c_i = 0$  bzw.  $c_i = a_i$  ( $i = 1, 2$ ) mit (2-3) bzw. (2-4) überein.

| $t+1 \backslash t$ | (00)        | (01)        | (10)        | (11)        |
|--------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| (00)               | $1-a_2-a_2$ | $b_2$       | $b_1$       |             |
| (01)               | $a_2$       | $1-c_1-b_2$ |             | $b_1$       |
| (10)               | $a_1$       |             | $1-b_1-c_2$ | $b_2$       |
| (11)               |             | $c_1$       | $c_2$       | $1-b_1-b_2$ |

Bild 2.3: Übergangsmatrix  $\underline{P}$  eines Produktionssystems bestehend aus zwei Maschinen ( $0 \hat{=}$  intakt,  $1 \hat{=}$  defekt)

Im Gegensatz zur üblichen Schreibweise stellen wir hier die Übergangsmatrix  $\underline{P}$  so auf, daß die Spaltensumme 1 beträgt. Dadurch kann man die Zustandsgleichungen sofort aus den Zeilen ablesen.

In Kapitel fünf analysieren wir ein Produktionssystem bestehend aus drei Maschinen und zwei endlichen Zwischenlagern. Die Modellierung baut auf den Annahmen auf, die wir für das Modell von Barlow und Proschan gefunden haben. Da wir dort wiederum beliebige Parameter  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) zulassen, bestimmen wir zunächst die Systemverfügbarkeit ohne Zwischenlager. Die entsprechende Übergangsmatrix ist in Bild 2.4 dargestellt.

| $t+1 \backslash t$ | (000)           | (001)           | (010)           | (011)           | (100)           | (101)           | (110)           | (111)           |
|--------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| (000)              | $1-a_1-a_2-a_3$ | $b_3$           | $b_2$           |                 | $b_1$           |                 |                 |                 |
| (001)              | $a_3$           | $1-c_1-c_2-b_3$ |                 | $b_2$           |                 | $b_1$           |                 |                 |
| (010)              | $a_2$           |                 | $1-c_1-b_2-c_3$ | $b_3$           |                 |                 | $b_1$           |                 |
| (011)              |                 | $c_2$           | $c_3$           | $1-c_1-b_2-b_3$ |                 |                 |                 | $b_1$           |
| (100)              | $a_1$           |                 |                 |                 | $1-b_1-c_2-c_3$ | $b_3$           | $b_2$           |                 |
| (101)              |                 | $c_1$           |                 |                 | $c_3$           | $1-b_1-c_2-b_3$ |                 | $b_2$           |
| (110)              |                 |                 | $c_1$           |                 | $c_2$           |                 | $1-b_1-b_2-c_3$ | $b_3$           |
| (111)              |                 |                 |                 | $c_1$           |                 | $c_2$           | $c_3$           | $1-b_1-b_2-b_3$ |

Bild 2.4: Übergangsmatrix  $\underline{P}$  eines Produktionssystems mit drei Maschinen ( $0 \hat{=}$  intakt,  $1 \hat{=}$  defekt)

Das dazugehörige lineare Gleichungssystem  $\underline{P} \cdot \underline{p} = \underline{p}$  lösen wir numerisch und mit der analytischen Programmiersprache REDUCE. Da die einzelnen Zustandswahrscheinlichkeiten sehr lange Ausdrücke sind, führen wir diese im Anhang 2 auf.

Die meisten Autoren von Lagermodellen können die Systemverfügbarkeit nicht in geschlossener Form angeben. Überdies ist es nicht möglich, die Systemverfügbarkeit des Produktionssystems ohne Zwischenlager als Grenzfall aus den Gleichungen der Lagermodelle abzuleiten. Meistens wird deshalb auf die Formeln von Barlow/Proschan zurückgegriffen. Wie oben aufgezeigt, liegt diesen Formeln ein bestimmtes Annahmesystem zugrunde. Dieses muß konsistent auf die Lagermodelle übertragbar sein. Erst dann sind die Formeln anwendbar. Ansonsten muß gesondert ein Modell für das System ohne Zwischenlager entwickelt werden.

## 2.2 Produktionssysteme mit unendlichen Zwischenlagerkapazitäten

Buzacott [1967] nimmt für den Fall unendlicher Zwischenlager an, daß die Maschinen vollständig entkoppelt sind, d.h. unabhängig voneinander arbeiten können. Er begründet dies wie folgt: Falls die Fertigungslinie eine entsprechend lange Zeit in Betrieb war, hat sich in den unendlichen Zwischenlagern ein Lagerbestand angesammelt, der durch den Ausfall einer Maschine nicht aufgebraucht werden kann. Aus diesem Grunde kann keine Maschine durch den Ausfall einer anderen blockiert werden, und die Systemverfügbarkeit wird dann durch das Minimum der Einzelverfügbarkeiten bestimmt. Okamura/Yamashina [1977] und Gershwin/Schick [1978] haben aber nun zeigen können, daß in bestimmten Fällen der mittlere Lagerbestand sich einem Grenzwert (der unter Umständen sehr klein sein kann) nähert und nicht ins Unendliche wächst. Dann kann es aber auch vorkommen, daß der Lagerbestand durch den Ausfall der vorangehenden Maschine abgearbeitet wird. Es ist folglich nicht korrekt anzunehmen, daß bei unendlichen Zwischenlagerkapazitäten die Maschinen vollständig entkoppelt sind.

Wie Shanthikumar [1980] und Gershwin / Schick [1978] allerdings beweisen konnten, ist die Berechnung der Systemverfügbarkeit mit unendlichen Zwischenlagerkapazitäten nach Buzacott korrekt. Allerdings trifft dies nur für Linien zu, bei denen kein Ausschuß vorkommen kann (wie z.B. bei dem Modell von Okamura / Yamashina). Diesen Fall bezieht jedoch Shanthikumar [1980] bei seiner Herleitung mit ein. Die Vorgehensweise bei beiden Beweisen ist beinahe identisch: Zunächst wird die erste Maschine betrachtet. Da vor der ersten Maschine ein unendliches Eingangslager angenommen wird, kann die erste Maschine nie blockiert werden.

Nun sei  $V_i$  die Verfügbarkeit der Maschine  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) in der Linie. Dann erhält das Lager zwischen den Maschinen  $i - 1$  und  $i$  Werkstücke mit der Verfügbarkeit  $V_i$ . Maschine  $i$  kann nicht mehr Werkstücke verarbeiten, als sie von Maschine  $i - 1$  bekommt. Sei  $V_{\text{ein}}^i$  die Verfügbarkeit der Maschine  $i$  im isolierten Zustand. Falls  $V_{\text{ein}}^i$  größer  $V_{\text{ein}}^{i-1}$  ist, so wissen wir von der Warteschlangentheorie, daß sich innerhalb eines langen Betrachtungszeitraumes ein endlicher Lagerbestand einstellt. Falls jedoch  $V_{\text{ein}}^i$  kleiner oder gleich  $V_{\text{ein}}^{i-1}$  ist, so wissen wir ebenfalls, daß der Lagerbestand ins Unendliche wächst. Deshalb ist die tatsächliche Verfügbarkeit von Maschine  $i$  durch  $\min(V_{\text{ein}}^i, V_{\text{ein}}^{i-1})$  gegeben. Hierauf aufbauend zeigte Shanthikumar durch Induktion, daß die Verfügbarkeit eines Systems mit  $k$ -Komponenten und unendlichen Zwischenlagerkapazitäten gegeben ist durch

$$V_{\text{sys}}^{u,1} = \min_{1 \leq j \leq k} \prod_{i=j}^k (1 - r_i a_i) V_{\text{ein}}^j, \quad (2-7)$$

wobei  $r_i$  die Wahrscheinlichkeit ist, daß bei Ausfall einer Maschine das bearbeitete Werkstück weggeworfen wird. Setzen wir  $r_i = 0$ , so bedeutet dies, daß kein Ausschuß entsteht, und von (2-7) erhalten wir das bekannte Ergebnis

$$V_{\text{sys}}^{u,2} = \min_{1 \leq j \leq k} V_{\text{ein}}^j. \quad (2-8)$$

Wir kennen nun die obere und untere Schranke der Systemverfügbarkeit von Fertigungslinien mit  $k$  Maschinen ohne, bzw. mit unendlichen Zwischenlagern. Wie sich die Verfügbarkeit mit endlichen Zwischenlagern berechnen läßt, stellen wir in einer Übersicht über Einlagermodelle im nächsten Abschnitt dar.

### 2.3 Produktionssysteme mit endlichen Zwischenlagerkapazitäten

Im folgenden geben wir einen Überblick über die in der Literatur bekannten Produktionssysteme, die aus zwei unzuverlässigen Maschinen und einem endlichen Zwischenlager bestehen. Derartige Systeme nennen wir kurz *Einlagermodelle*. In Abschnitt 5.1 beschreiben wir den Stand der Literatur von Systemen mit drei Maschinen und zwei endlichen Zwischenlagern, kurz *Zweilagermodelle*. Größere Produktionssysteme könnten zwar ebenfalls mit den Methoden, die man für Ein- und Zweilagermodelle heranzog, numerisch behandelt werden, aber der Rechen- und Speicherplatzaufwand wird zu groß. Einige Autoren formulieren deshalb Approximationsverfahren, die wir aber nicht in die Übersicht mit einbeziehen.

In einer Fertigungslinie ohne Zwischenlager sind die Bearbeitungsstationen voneinander abhängig (vgl. Abschnitt 2.1). Fällt eine Maschine aus, so werden alle anderen Maschinen beeinflusst. Sie müssen die Produktion aus einem der folgenden Gründe einstellen. Entweder kann die Maschine keine neuen Werkstücke bearbeiten, weil kein neues nachfolgt, oder sie kann ihr fertig bearbeitetes Werkstück nicht abgeben. In beiden Fällen sagt man, die Maschine ist "blockiert". Diese "Blockadezeit" kann man durch Installierung von Puffern reduzieren und man erreicht eine Steigerung der Produktivität. Betrachten wir einmal ein Einlagermodell. Fällt eine der beiden Maschinen aus, so wird die andere Maschine nicht sofort beeinflusst. Falls z. B. die erste Maschine ausfällt, kann die zweite Maschine solange weiterarbeiten, bis die im Puffer angesammelten Werkstücke aufgebraucht sind. Ähnlich ist es, falls die zweite Maschine ausfällt. Dann kann die erste Maschine so lange weiterarbeiten, bis das Lager voll ist. Diese Effekte des Zwischenlagers

treten natürlich auch bei größeren Produktionssystemen auf.

Die Extremfälle für Zwischenlagergrößen behandelten wir in den zwei vorausgehenden Abschnitten. Es ist nun leicht einzusehen, daß die Systemverfügbarkeit mit endlichen Zwischenlagern  $V_{\text{sys}}^N$  zwischen der Systemverfügbarkeit ohne und der mit unendlichen Lagerkapazitäten liegen muß, d.h. es gilt

$$V_{\text{sys}}^0 < V_{\text{sys}}^N < V_{\text{sys}}^\infty \quad . \quad (2-9)$$

Bevor wir näher auf die Methoden und Modelle zur Analyse von Einlagermodellen eingehen, definieren wir einige Kenngrößen derartiger Systeme.

Wir beschreiben im folgenden den *Zustand des Systems* durch das Tripel  $(\alpha_1, \alpha_2, n)$ , wobei die  $\alpha_i \in \{0, 1\}$ , ( $i=1, 2$ ) mit 0 = intakt und 1 = defekt den Zustand der Maschinen angeben. Die Variable  $n$  zeigt den Lagerbestand an. Sie liegt zwischen 0 und dem maximalen Lagerbestand  $N$ . Zur Definition der Verfügbarkeit eines Systems wird in (2-1) der Begriff der Intaktheit verwendet. Wir müssen nun klären, welche Zustände des Systems als intakte Zustände bezeichnet werden können. Dies ist nicht eindeutig. Zum einen kann man das System als intakt bezeichnen, solange die erste Maschine ein neues Werkstück vom Eingangslager abnimmt. Zum anderen kann das System intakt sein, solange die letzte Maschine ein fertiggestelltes Werkstück an das Ausgangslager abgibt. Die erste Begriffsdefinition der Intaktheit ist eingabeorientiert, die zweite ausgabeorientiert. Intuitiv ist klar, daß sie im stationären Zustand übereinstimmen müssen, da die Linie alle Werkstücke, die sie aufnimmt nach einer Zeitverzögerung wieder abgibt. Muth [1979] gab einen allgemeinen Beweis für die Umkehrbarkeit von Produktionssystemen mit zuverlässigen Maschinen und stochastischen Bearbeitungszeiten. Natürlich muß er dazu das dynamische Verhalten einer Linie definieren. Die wesentliche Annahme, die die Umkehrbarkeit überhaupt erst ermöglicht, ist dabei, daß keine bearbeiteten Werkstücke zu Ausschuß werden können. Dadurch ist die Gleichung - Summe der Eingänge = Summe der Ausgänge - erfüllt. Diese Gleichgewichtigkeit ist z.B. bei Okamura und Yamashina [1977].

nicht erfüllt. Dort bewirkt der Ausfall einer Maschine den Verlust des gerade bearbeiteten Werkstücks.

In der Literatur wird im allgemeinen auf die zweite Begriffsdefinition der Intaktheit zurückgegriffen. Da derartige Fragestellungen oft bei Fließbandfertigung aufkommen, spielt das Ausstoßverhalten einer Linie eine größere Rolle. Wir definieren die Systemverfügbarkeit eines Produktionssystems mit einem endlichen Zwischenlager wie folgt *eingabeorientiert*:

Die Systemverfügbarkeit  $V_{\text{sys-E}}^N$  ist die Summe aller Zustandswahrscheinlichkeiten, für die gilt: Erste Maschine nimmt ein neues Werkstück vom Eingangslager ab. (2-10)

und *ausgabeorientiert*:

Die Systemverfügbarkeit  $V_{\text{sys-A}}^N$  ist die Summe aller Zustandswahrscheinlichkeiten, für die gilt: Letzte Maschine gibt ein fertiggestelltes Produkt an das Ausgangslager ab. (2-11)

Zu beachten ist, daß (2-10) bzw. (2-11) nicht einfach die Summe aller Zustandswahrscheinlichkeiten ist, bei denen die erste bzw. zweite Maschine intakt ist. Es gibt Zustände, bei denen die erste Maschine zwar intakt ist, aber durch ein nachfolgendes volles Lager blockiert wird. In diesem Fall kann die erste Maschine kein neues Werkstück vom Eingangslager abnehmen. Entsprechendes gilt für die zweite Maschine mit einem vorausgehenden leeren Lager.

Eine weitere Kenngröße ist die *Auslastung*  $A$  einer Fertigungslinie, die definiert ist durch

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{q(t)}{Q(t)} \quad , \quad (2-12)$$

wobei  $q(t)$  der *tatsächliche* Durchsatz bis zur Zeit  $t$  und  $Q(t)$  der *erzielbare* Durchsatz ohne Ausfälle bis zur Zeit  $t$  ist. Falls jede Maschine die gleiche Anzahl an Werkstücken pro Zeiteinheit bearbeiten kann, sind die Größen  $A$ ,  $V_{\text{sys-E}}^N$  und  $V_{\text{sys-A}}^N$  identisch.

Neben Verfügbarkeit und Auslastung können noch weitere Kenngrößen wie - mittlerer Lagerinhalt, mittlere Blockadezeiten der Maschinen, mittlere Zeit zwischen Lagerleer - bzw. Lagerüberläufen, mittlere Betriebs- und Reparaturzeiten etc. - berechnet werden.

2.3.1 Klassifizierung von Einlagermodellen

Nachdem wir bisher festgelegt haben, welche Kenngrößen zur Beurteilung eines Systems herangezogen werden können, klassifizieren wir jetzt die in der Literatur bekannten Modelle wie folgt:

- a) Die Art des *Parameter- und Zustandsraumes* liefert uns ein erstes Merkmal. Dadurch wird auch automatisch der stochastische Prozeß des Modells bestimmt:

| Parameter- und Zustandsraum<br>Parameter- / Zustandsraum | diskret   | kontinuierlich                             |
|--|---|--|
| diskret  | diskrete Markovkette  | homogener Markovprozeß                     |
| kontinuierlich   | kein Lagermodell in der Literatur bekannt, aber vorstellbar.<br>Beispiel: kontinuierlicher Lagerbestand wird in diskreten Zeitabschnitten gemessen. | Diffusionsprozeß, eingebettete Markovkette |

Im allgemeinen werden durch die Art des Parameter- und Zustandsraumes die Verteilungsfunktionen der Reparatur- und Betriebsdauern festgelegt. Da sie die Markoveigenschaft besitzen müssen, sind die Modelle auf die Exponentialverteilung beim kontinuierlichen und auf die geometrische Verteilung beim diskreten Parameterraum angewiesen.

b) Neben dem Parameter- und Zustandsraum ist das *dynamische Verhalten* des Systems ein weiteres wichtiges Unterscheidungsmerkmal. Nur in diesem unterscheiden sich die Modelle wesentlich, wenn Zustands- und Parameterraum definiert wurden. Wir können die Charakterisierung des dynamischen Verhaltens untergliedern in:

ba) Die Behandlung blockierter Maschinen.

Es werden Annahmen bezüglich des Ausfallverhaltens blockierter Maschinen getroffen. Man kann annehmen, daß sie nicht / mit der gleichen Wahrscheinlichkeit wie eine arbeitende Maschine / mit einer unabhängigen Wahrscheinlichkeit ausfallen können. In der englischsprachigen Literatur werden die ersten zwei Möglichkeiten als *operation-* und *time-dependent failures* bezeichnet.

bb) Die Reihenfolge des Zyklusablaufes (nur für Modelle mit diskretem Zustands- und Parameterraum).

Bei diskreter Fertigung muß eine Maschine beladen und entladen werden, und sie muß ein Werkstück bearbeiten. In welcher Reihenfolge diese drei Tätigkeiten innerhalb eines Zyklus ablaufen, ist entscheidend für das Übergangsverhalten des Systems. Es gibt folgende Zyklusabläufe: Laden, Produzieren, Entladen - Entladen, Laden, Produzieren, - Produzieren, Entladen, Laden. Die Zeiten für das Beladen und Entladen der Maschinen werden in allen Modellen vernachlässigt. Liegt der Zyklusablauf fest, so muß der Zeitpunkt, zu dem die Ereignisse wie Ausfall und Reparatur stattfinden, definiert werden. Legt man diesen Zeitpunkt an den Anfang oder an das Ende einer Produktionsphase, so erreicht man, daß keine halb-bearbeiteten Werkstücke in der Linie existieren. Fällt eine Maschine während der Produktionsphase aus, so entsteht Ausschuß und die Flußgleichung - Summe der Eingangsströme = Summe der Ausgangsströme - wird verletzt.

bc) Die Art der Verkettung:

Wir unterscheiden elastische und starre Verkettung.

Bei der elastischen Verkettung werden die bearbeiteten Werkstücke prinzipiell einen Takt lang zwischengelagert. Hingegen bei der starren Verkettung wird nur bei Ausfall der Maschinen zwischengelagert. Entscheidend ist diese Einteilung für das Verhalten des Systems an den Rändern.

bd) Den Informationsaustausch zwischen den Systemkomponenten.

Es besteht die Möglichkeit, daß eine Systemkomponente nur mit ihren direkten Nachbarn kommuniziert. Dadurch ist es nicht wie beim vollständigen Informationsaustausch möglich, daß eine blockierte Maschine beladen werden kann. Beispiel: Beide Maschinen eines Einlagermodells sind intakt und das Lager voll. Bei vollständiger Information kann die erste Maschine beladen werden, weil durch die intakte zweite Maschine sichergestellt ist, daß das Lager sich um eine Einheit verringert hat.

Bemerkung:

In dem Modell von Sheskin [1975] werden die letzten zwei Punkte nicht konsequent berücksichtigt.

c) Ein weiteres Klassifikationsmerkmal ist die *Anzahl der Reparatur-einheiten*. Falls mehrere Maschinen gleichzeitig ausgefallen sind, steht in den meisten Modellen pro ausgefallene Maschine ein Reparaturmann zur Verfügung.

d) Die *Anzahl der möglichen Ereignisse* während eines Beobachtungszeitraumes.

Bei kontinuierlichem Parameterraum ist dieser so klein, daß Übergangswahrscheinlichkeiten größer als Ordnung 2 weggelassen werden. Bei diskretem Parameterraum existieren jedoch Modelle, die auch mehrere Ereignisse zulassen.

e) Die *Durchsätze der einzelnen Maschinen*.

Nur bei kontinuierlichem Zustandsraum ist es möglich, unterschiedliche, variable Durchsätze zu berücksichtigen.

Ein weitere Untergliederung der Klassifikationsmerkmale der Lagermodelle ist nicht mehr sinnvoll. Zwar weisen die Modelle noch einige

Eigenarten auf, diese führen wir jedoch in der nachfolgenden Übersichtstabelle 2.1 auf.

Die Tabelle 2.1 enthält die uns von der Literatur bekannten exakten Einlagermodelle. Wesentliches Unterscheidungsmerkmal ist die Form des Zustands- und Parameterraumes. Wie man der Tabelle entnehmen kann, existieren in der Literatur nur Modelle, die einheitliche Zustands- und Parameterräume besitzen. Entweder sind Zustands- und Parameterraum diskret oder sie sind kontinuierlich. Die Mischformen erweisen sich für die Modellierung von Lagermodellen mit unzuverlässigen Maschinen als nicht praktikabel. Ist der Zustandsraum diskret und der Parameterraum kontinuierlich, so ist ein Lagermodell aus dem folgenden Grunde nicht möglich. Innerhalb  $dt$  muß sich der Lagerbestand um 1 verringern oder erhöhen oder er bleibt konstant. Sei  $d$  der Durchsatz einer Maschine, dann muß möglich sein, daß  $dt \cdot d = 1$ . Beim Grenzübergang  $dt \rightarrow 0$  ergibt sich aber:  $d \rightarrow \infty$ , d.h. die Maschine müßte unendlich viele Werkstücke bearbeiten können, und dies ist nicht möglich. Ist der Zustandsraum kontinuierlich und der Parameterraum diskret, so ist zwar ein Lagermodell vorstellbar, aber der Lagerbestand kann nicht exakt verfolgt werden, da z.B. ein innerhalb  $[t_i, t_{i+1}]$  aufgetretener Lagerüberlauf schon wieder abgebaut sein kann.

In der Tabelle werden heuristische und approximative Modelle nicht berücksichtigt, ebenso Modelle mit zuverlässigen Verarbeitungseinheiten und stochastischen Bearbeitungsdauern.

Exemplarisch greifen wir nun je ein Modell aus den beiden Gruppen heraus, erklären dieses Modell genauer und zeigen die Unterschiede zu den anderen Modellen auf. Anschließend wägen wir Vor- und Nachteile zwischen den beiden Modellgruppen ab.

| Parameter-<br>raum<br>Zustands-<br>raum | diskret   | kontinuierlich   |
|---|---|--|
| diskret                                 | <p>Methode: Markovkette<br/>                     Verteilungen: Geometrische Verteilung<br/>                     Durchsätze: Alle identisch 1; das Intervall <math>[t_i, t_{i+1}]</math> der Markovkette wird so festgelegt, daß gerade ein Werkstück bearbeitet werden kann</p> <p>1. Buzacott [1967]<br/>                     ( ①+②, ③+④, ⑤, ⑦, ⑨, ⑫ ;<br/>                     Besonderheiten: gibt Zustandswahrscheinlichkeiten und Verfügbarkeit explizit an; konstante Verteilung)</p> <p>2. Gershwin, Schick [1978]<br/>                     ( ①, ④, ⑥, ⑧, ⑩, ⑪ ; Besonderheit: Systematisieren Herleitung der Übergangsgln., finden Lösungsansatz für Gln., geben nur Zustandswahrscheinlichkeiten explizit an)</p> <p>3. Artamonov [1976]<br/>                     ( ②, ④, ⑤, ⑦, ⑨ ; Besonderheit: führt Blockadezustände ein; gibt Zustandswahrscheinlichkeiten und Verfügbarkeiten explizit an)</p> <p>4. Okamura Yamashina [1977]<br/>                     ( ②, ④, ⑥, ⑧, ⑪ ; Besonderheit: Bei Ausfall einer Maschine wird das gerade bearbeitete Werkstück wegwerfen, numerische Lösung)</p> <p>5. Sheskin [1976]; Soyster, Toof [1976]<br/>                     ( ②, ④, ⑥, ⑧, ⑨, ⑪ ; Besonderheit: Summe von Ausfall- und Reparaturwahrscheinlichkeit ist 1, dadurch Bernoulli-Prozeß)</p> <p>6. Elsayed, Turley [1979]<br/>                     ( ②, ⑤, ⑦, ⑨, ⑫ , Besonderheit: Es existieren zwei Zustände für den Ausfall einer Maschine. Diese werden mit drei verschiedenen Reparaturstrategien intakt gesetzt.</p> | <p>nur Modelle mit zuverlässigen Maschinen und stochastischen Bearbeitungszeiten bekannt</p> <p>Verteilung: Exponentialverteilung</p> <p>1. Levin, Pasko [1969]<br/>                     ( ①, ③, ⑤, ⑦ )<br/>                     Methode: Diffusionsprozeß; unterschiedliche Durchsätze geben Verfügbarkeit explizit an)</p> <p>2. Zimmern [1956]<br/>                     (wie 1. jedoch nur für identische Verarbeitungseinheiten)</p> <p>3. Wijngaard [1979]<br/>                     ( ②, ③, ⑤, ⑦ ; Methode: Diffusionsprozeß, unterschiedliche Durchsätze, gibt Verfügbarkeit explizit an)</p> <p>4. Vladziewskii [1953], Sevastyanov [1962]<br/>                     ( ②, ③, ⑤, ⑦ ; Methode: eingebettete Markoffkette; nur eine Maschine kann ausgefallen sein; keine unterschiedliche Durchsätze)</p> <p>5. Koenigsberg [1959]<br/>                     Modell ist von Finch<br/>                     ( ②, ③, ⑤, ⑦ ; Methode: Eingebettete Markoffkette; keine unterschiedlichen Durchsätze)</p> |
| kontinuierlich                          | Kein Modell bekannt, aber vorstellbar: In diskreten Zeitabständen wird kontinuierlicher Lagerbestand gemessen.  |  |

- |   |  |
|---|--|
| ① operation dependent failures                  | ⑦ vollständiger Informationsaustausch        |
| ② time dependent failures                       | ⑧ unvollständiger Informationsaustausch      |
| ③ nur einfache Übergänge innerhalb eines Taktes | ⑨ Ausfall am Ende einer Betriebsphase        |
| ④ mehrere Übergänge innerhalb eines Taktes      | ⑩ Ausfall am Anfang einer Betriebsphase      |
| ⑤ starre Verkettung                             | ⑪ Zyklusablauf: Laden, produzieren, entladen |
| ⑥ elastische Verkettung                         | ⑫ Zyklusablauf: Entladen, produzieren, laden |

Tabelle 2.1: Übersichtstabelle über Einlagermodelle

### 2.3.2 Das Modell von Gershwin und Schick

Zur Erklärung der Modelle mit diskretem Zustands- und Parameterraum ziehen wir das Modell von Gershwin und Schick [1978] heran. Die Zustände des Systems beschreiben sie durch das Tripel  $(\alpha_1, \alpha_2, n)$  mit

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{Maschine } i \text{ intakt} \\ 1 & \text{Maschine } i \text{ defekt} \end{cases} \quad i = 1, 2$$

Die Variable  $n$  gibt den Lagerzustand ( $0 \leq n \leq N$ ) an. Sie treffen folgende Annahmen:

- (i) Es existiert ein Eingangs- und Ausgangslager mit unendlicher Lagerkapazität.
- (ii) Beide Maschinen arbeiten mit dem gleichen deterministischen Durchsatz
- (iii) Blockierte Maschinen können nicht ausfallen.
- (iv) Mehrere Ereignisse innerhalb eines Taktes sind möglich
- (v) Die Maschinen sind elastisch verkettet
- (vi) Die Information wird nur unvollständig ausgetauscht.
- (vii) Die Ausfall- und Reparaturdauern sind geometrisch verteilt mit Parameter  $a_i$  und  $b_i$  ( $i = 1, 2$ ).
- (viii) Der Ausfall einer Maschine erfolgt am Anfang eines Zyklus
- (ix) Der Zyklusablauf ist - Laden, Produzieren, Entladen.

Mit diesen Annahmen kann man die Übergangsgleichungen einer Markov'schen Kette formulieren. Für die internen Zustände  $(01, n)$  mit  $2 \leq n \leq N - 2$  leiten wir einmal die Übergangsgleichungen ab. Es ist klar, daß sich innerhalb eines Taktes der Lagerbestand nur um eine Einheit ändern kann. Die Zustände  $(01, n)$  können aus diesem Grunde nur von Zuständen mit einem Lagerinhalt  $n - 1$ ,  $n$ , und  $n + 1$  erreicht werden. Zwischen den Maschinen gibt es folgende Übergänge:

$$(00)_t \rightarrow (01)_{t+1} \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad (1-a_1) \cdot a_2$$

$$(01)_t \rightarrow (01)_{t+1} \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad (1-a_1)(1-b_2)$$

$$(10)_t \rightarrow (01)_{t+1} \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad a_1 b_2$$

$$(11)_t \rightarrow (01)_{t+1} \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad a_1(1-b_2) .$$

Wir müssen nun klären, wie sich ein Lagerbestand von  $n$  Mengeneinheiten einstellen kann. Da Gershwin und Schick die Annahme treffen, daß der Ausfall und die Reparatur am Anfang eines Zyklus erfolgen, sind die Maschinenzustände zum Zeitpunkt  $t+1$  maßgebend. Beim Übergang in den Zustand  $(01)_{t+1}$  erhöht sich das Lager um 1, also muß zum Zeitpunkt  $t$  das Lager  $n-1$  Einheiten enthalten. Wir haben somit die Übergänge

$$(00, n-1)_t \rightarrow (01, n)_{t+1} \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad (1-a_1) \cdot a_2$$

$$(01, n-1)_t \rightarrow (01, n)_{t+1} \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad (1-a_1)(1-b_2)$$

$$(10, n-1)_t \rightarrow (01, n)_{t+1} \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad a_1 \cdot b_2$$

$$(11, n-1)_t \rightarrow (01, n)_{t+1} \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad a_1 \cdot (1-b_2)$$

und erhalten dann die Übergangsgleichung

$$p(01, n)_{t+1} = (1-a_1)a_2 p(00, n-1)_t + (1-a_1)(1-b_2) p(01, n-1)_t \\ + a_1 \cdot b_2 p(10, n-1)_t + a_1(1-b_2) p(11, n-1)_t .$$

Entsprechend muß bei den restlichen Zuständen vorgegangen werden; man erhält dann ein lineares Gleichungssystem, durch das die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten eindeutig bestimmbar sind. Für  $N = 4$  sind die möglichen Übergänge in dem Übergangsgraphen in Bild 2.5 dargestellt.

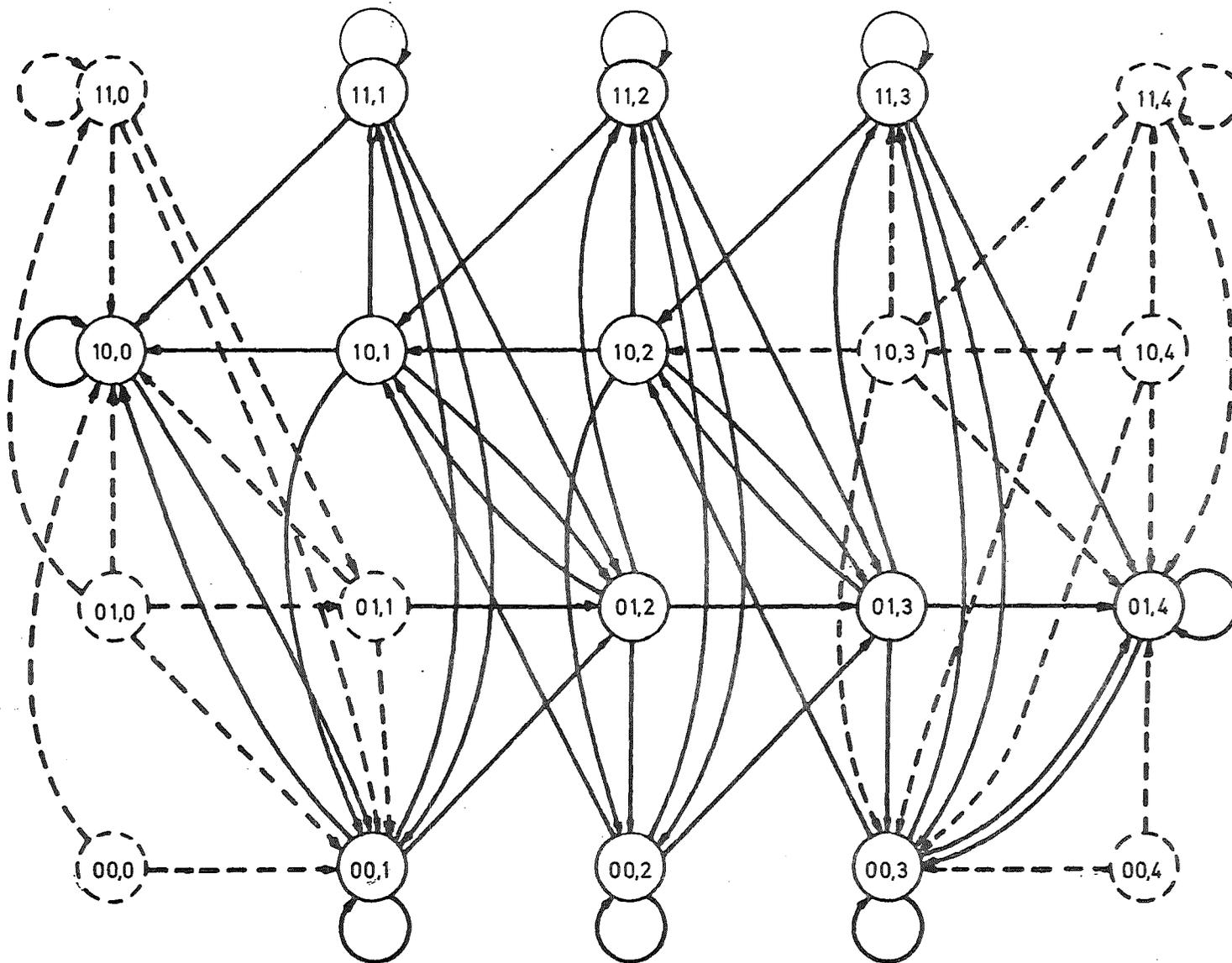


Bild 2.5: Übergangsgraph des Einlagermodells von Gershwin und Schick für  $N=4$ .

Aus Bild 2.5 ist ersichtlich, daß sich die Zustände in Klassen einteilen lassen. Die Zustände (00,0), (01,0), (00,4), (10,4) bilden eine Menge ephemerer Zustände, da sie von keinem anderen Zustand aus erreichbar sind. Der Zustand (11,0) kann von dem ephemeren Zustand (01,0) und nur noch von sich selber aus erreicht werden. Es existiert aber ein Übergang nach (01,1) und folglich ist die Wahrscheinlichkeit einer Rückkehr in diesen Zustand kleiner als 1. Derartige Zustände nennt man transiente Zustände. Untersucht man jeden Zustand, so findet man die weiteren transienten Zustände (01,1), (10,3) (11,4). Für die transienten und ephemeren Zustände sind die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten gleich 0. Bei diesem Modell sind die transienten und ephemeren Zustände noch relativ leicht erkennbar. Bei größeren Systemen (vgl. Kapitel 5) ist dies nur noch mit einem Algorithmus möglich.

Bemerkenswert ist nun, daß Gershwin und Schick im Gegensatz zu allen anderen Autoren die internen Zustandswahrscheinlichkeiten mit einem Produktansatz bestimmen (viele Warteschlangenprobleme haben 'product form solutions', siehe z.B. Jackson [1963], Baskett, Chandy, Muntz und Palacois [1975]):

$$p(\alpha_1, \alpha_2, n) = c_1 x_1^n y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2}$$

wobei  $c_1$ ,  $x_1$ ,  $y_1$  und  $y_2$  noch festzulegen sind. Für die Randzustände wird eine 'sum - of - terms' Form angenommen. Mit diesen Ansätzen können die Zustandswahrscheinlichkeiten und damit auch die Verfügbarkeit berechnet werden.

Nur Gershwin und Schick nehmen an, daß die Ereignisse am Anfang eines Zyklus auftreten. In den anderen Modellen fällt dieser Zeitpunkt mit dem Ende des Zyklus zusammen. Es wäre denkbar, daß dies keine große Auswirkungen hat. Dies trifft auch auf die absoluten Werte der Verfügbarkeiten zu, aber es tritt der Effekt auf, daß keine transienten Zustände mehr entstehen, und somit jeder Zustand eine positive stationäre Zustandswahrscheinlichkeit besitzt (vgl. Bild 3.1).

Buzacott [1967], [1971], [1978] gibt explizit die Verfügbarkeit an, für die Fälle:

- blockierte Maschine kann nicht ausfallen, nur ein Ereignis pro Zyklus,
- blockierte Maschine kann nicht ausfallen, mehr als ein Ereignis pro Zyklus möglich,
- blockierte Maschine kann ausfallen, mehr als ein Ereignis pro Zyklus möglich.

Die wesentlichen Voraussetzungen sind Tabelle 2.1 zu entnehmen.

Buzacott [1967] erzielte auch Ergebnisse für Modelle mit geometrisch verteilten Betriebszeiten und konstanten Reparaturzeiten und ebenso für konstante Betriebszeiten und geometrisch verteilten Reparaturzeiten.

Artamanov [1976] führt neben den Zuständen 0 und 1 für blockierte Zustände die Ziffern 2 und 3 ein. Dabei bedeutet 2, daß die Maschine intakt aber blockiert ist und 3, daß die Maschine defekt und blockiert ist. Da er sehr ähnliche Voraussetzungen wie Buzacott hat, unterscheiden sich nur die Randgleichungen. Während bei Buzacott direkt ein Übergang von  $(10,0)$  nach  $(00,0)$  möglich ist, ergibt sich bei Artamanov die Folge  $(10,0) \rightarrow (02,0) \rightarrow (00,0)$ , d.h. der Übergang benötigt einen Takt mehr. Ähnlich ist es bei anderen Randgleichungen.

Die Besonderheit des Modells von Okamura und Yamashina [1977] liegt in der Annahme, daß bei Ausfall einer Maschine das gerade bearbeitete Werkstück weggeworfen wird. Für den Fall  $N = 0$  müssen sie aus diesen Grunde die Verfügbarkeit neu bestimmen. Shanthikumar [1980] berechnete sie für den Fall  $N \rightarrow \infty$ . Es ist klar, daß bei dieser Annahme die Bilanzierung - Summe der eingegangenen Werkstücke = Summe der fertiggestellten Werkstücke - nicht mehr zutrifft.

Eine vereinfachende, aber nicht realitätsnahe Annahme treffen Sheskin [1976] und Soyster und Toof [1976]. Sie nehmen an, daß die Summe von

Ausfall- und Reparaturwahrscheinlichkeit 1 beträgt. Dadurch erhalten sie einen Bernoulli-Prozeß, der ihnen gestattet, die Zustandswahrscheinlichkeiten zu faktorisieren, d.h. es gilt.

$$p(\alpha_1, \alpha_2, n) = p(\alpha_1) \cdot p(\alpha_2) \cdot p(n).$$

Elsayed und Turley [1979] modellieren ein Einlagersystem mit einem ähnlichen Annahmesystem wie Buzacott (siehe Tabelle 2.1). Maschinen können bei ihnen jedoch unterschiedliche Defekte haben und sich somit in unterschiedlichen Reparaturzuständen befinden. Sie formulieren dann drei Reparaturstrategien wie das System wieder intakt gesetzt werden kann und zeigen anhand numerischer Ergebnisse optimale Reparaturstrategien auf.

### 2.3.3 Das Modell von Zimmern, Levin und Pasko und Wijngaard

Wir beschreiben nun die Modelle mit kontinuierlichem Zustands- und Parameterraum.

Die Modellannahmen von Zimmern [1956], Levin, Pasko [1969] und Wijngaard [1979] unterscheiden sich nur bezüglich der Behandlung blockierter Maschinen. Dabei scheint es, daß alle Autoren ihre Modelle unabhängig voneinander entwickelt haben, da keine Verweise existieren. Im Gegensatz zu den anderen Autoren gibt Zimmern nur die Lösung für ein System mit identischen Verarbeitungseinheiten an.

Die Zustände des Systems werden mit den Funktionen  $f(\alpha_1, \alpha_2, x)$  beschrieben, wobei  $x$  den Lagerbestand angibt und die Variablen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die bekannte Bedeutung haben. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich die Maschine in den Zuständen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  befinden, und daß ein innerer Lagerzustand vorliegt, ist gegeben durch:

$$\int_0^N f(\alpha_1, \alpha_2, x) dx,$$

und es gilt

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2} \int_0^N f(\alpha_1, \alpha_2, x) dx + p(0, 1, N) + p(10, 0) + p(00, N) + p(00, 0) = 1.$$

Um die Funktionen  $f(\cdot)$  bestimmen zu können, ist es notwendig die Kolmogorov'schen Differentialgleichungen herzuleiten. Wir zeigen dies nun für die Systemzustände  $f(01, x, t)$  auf, wobei  $t$  der Zeitparameter ist. Der Durchsatz der ersten Maschine sei  $d_1$  Mengeneinheiten pro Zeiteinheit, der der zweiten Maschine  $d_2$ . Ein Lagerbestand von  $x + d_1 \cdot dt$  zum Zeitpunkt  $t + dt$  kann wie folgt entstanden sein:

1. Zum Zeitpunkt  $t$  ist der Lagerbestand gleich  $x$ , Maschine 1 ist in Betrieb und Maschine 2 ist defekt und zwischen  $t$  und  $t + dt$  erfolgte keinerlei Änderung an den Maschinen.

Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist

$$f(01, x, t)(1 - \lambda_1 dt)(1 - \mu_2 dt).$$

Da wir Terme der Ordnung  $dt^2$  und größer weglassen, ist sie gleich  $f(01, x, t)(1 - \lambda_1 dt - \mu_2 dt)$ . Die Variablen  $\lambda_i$  und  $\mu_i$  ( $i=1,2$ ) sind hier keine Wahrscheinlichkeiten, sondern die Ausfallraten der negativ-exponentiellverteilten Betriebs- und Reparaturdauern. Für kleine  $dt$  sind die Produkte  $\lambda_i dt$  bzw.  $\mu_i dt$  die Ausfall- bzw. Reparaturwahrscheinlichkeiten der Maschine  $i$ . (siehe Gaede [1977]).

2. Zum Zeitpunkt  $t$  sind beide Maschinen ausgefallen. Innerhalb  $t$  und  $t + dt$  wird Maschine 1 repariert und Maschine 2 bleibt defekt. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist gleich  $f(11, x, t) \cdot \mu_1 \cdot dt$ .
3. Zum Zeitpunkt  $t$  arbeiten beide Maschinen. Maschine 2 fällt zwischen  $t$  und  $t + dt$  aus. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist gleich  $f(00, x, t) \cdot \lambda_1 dt$ .

Da sich diese drei Ereignisse gegenseitig ausschließen, gilt:

$$f(01, x + d_1 \cdot dt, t + dt) = f(01, x, t)(1 - \lambda_1 dt - \mu_2 dt) + f(11, x, t) \cdot \mu_1 \cdot dt \\ + f(00, x, t) \cdot \lambda_1 \cdot dt$$

oder mit  $d_1 dt = dx$  für  $dt \rightarrow 0$

$$\frac{df(01,x,t)}{dt} + d_1 \frac{df(01,x)}{dx} = -(\lambda_1 + \mu_2)f(01,x) + \mu_1 f(11,x) + f(00,x) \cdot x_1$$

Außerdem kann man, da man das System im stationären Zustand betrachtet, annehmen daß  $\frac{d}{dt}(\cdot) = 0$  ist und man erhält

$$d_1 \frac{df(01,x)}{dx} = -(\lambda_1 + \mu_2)f(01,x) + \mu_1 f(11,x) + \lambda_1 f(00,x)$$

Entsprechend muß für die restlichen Systemzustände vorgegangen werden und man erhält ein System von 8 Differentialgleichungen. Der Übergangsgraph ist in Bild 2.6 dargestellt. Levin und Pasko geben die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichungen an und bestimmen die Verfügbarkeit für unterschiedliche Maschinen mit

$$d_1 - d_2 > 0, d_1 - d_2 < 0; d_1 \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \rightarrow d_2 \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}, d_1 - d_2 > 0; d_1 \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \neq d_2 \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}, d_1 \rightarrow d_2;$$

und für identische Maschinen mit gleichem Durchsatz  $(\frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} = \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}, d_1 = d_2)$ .

Wijngaard [1979], bei dem blockierte Maschinen weiterhin ausfallen können, gibt Ergebnisse für unterschiedliche und identische Maschinen mit  $d_1 \neq d_2$  an. Da er die gleichen Voraussetzungen wie Koenigsberg [1959] formuliert, müßten die Ergebnisse eigentlich übereinstimmen. Dies ist jedoch nur für den Fall identischer Maschinen zutreffend. Zwar haben die Formeln der Verfügbarkeiten bei unterschiedlichen Maschinen dieselbe Form, sie unterscheiden sich jedoch in einem Teilausdruck des Exponenten der Exponentialfunktion. Die Ergebnisse von Koenigsberg sind nicht nachvollziehbar, da er sich auf eine unveröffentlichte Arbeit von Finch bezieht. Buzacott [1978] leitete zwar die Formeln neu her, aber dies führte er nur für identische Maschinen durch. Eine endgültige Feststellung, welches der Ergebnisse mit unterschiedlichen Maschinen richtig ist, ist nur durch Neuberechnung möglich.

Die erste Arbeit, die über Produktionssysteme mit unzuverlässigen Maschinen erschien, ist die von Vladziewskii [1953]. Er ermittelte Ergebnisse für identische Maschinen. Sevastynaov [1962] griff das Modell und

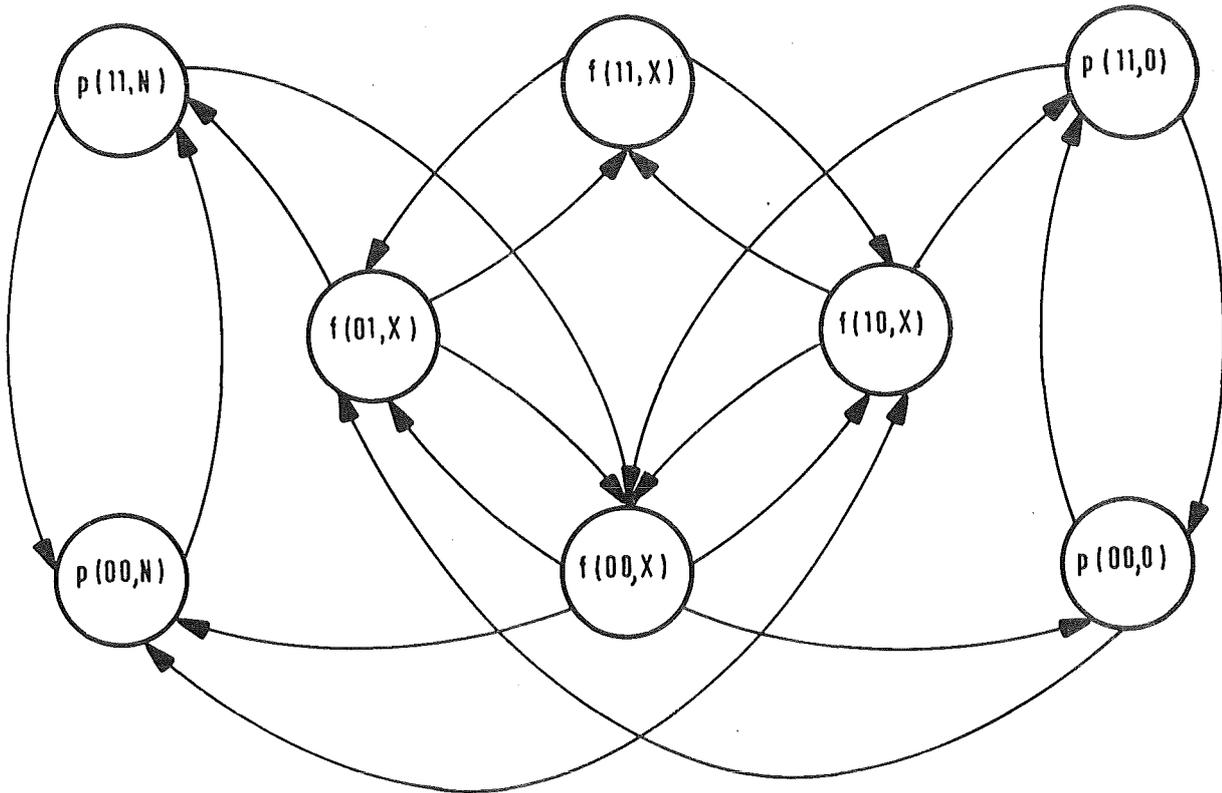


Bild 2.6: Übergangsgraph des kontinuierlichen Einlagermodells von Levin und Pasko.

das Annahmesystem von Vladziewskii auf und erweiterte es auf unterschiedliche Maschinen. Allerdings enthält das Modell die einschneidende Annahme, daß zu einem Zeitpunkt immer nur eine Maschine ausgefallen sein kann. Falls eine Maschine defekt ist, kann die andere Maschine nicht ausfallen, obwohl das Zwischenlager evt. eine Weiterarbeit ermöglicht. Ihr Verdienst liegt in der Problemformulierung und in der Bestimmung der Lösungsmethode. Auch entwickelten sie ein Approximationsverfahren für ein k-Lagersystem, das zur Grundlage für viele nachfolgende Verfahren wurde.

#### 2.3.4 Abschließende Beurteilung

Wir haben nun einen Überblick über bestehende Einlagermodelle bekommen. Welches der Modelle zur Anwendung kommt, hängt von der Art der Produktionsverfahren ab. In der Automobilindustrie werden diskrete Güter gefertigt und man wendet dort Modelle mit diskretem Zustandsraum an. In der chemischen Industrie hingegen sind die Modelle mit kontinuierlichem Parameterraum angebracht.

Bei den Anwendungen im Kernforschungszentrum Karlsruhe liegen sowohl Produktionslinien mit diskreter und kontinuierlicher Fertigung vor. Es handelt sich hier jedoch ausschließlich um größere Systeme und es ist deshalb erforderlich, eine geeignete Methode zur Analyse von Mehrlagermodellen herauszufinden. Wir zeigen nun die Vor- und Nachteile der einzelnen Modelle auf.

Die Vorteile der kontinuierlichen Modelle sind:

- unterschiedliche Durchsätze können berücksichtigt werden
- die Dimensionen der Differentialgleichungssysteme sind unabhängig von der maximalen Lagerkapazität

und ihr Nachteil

- bei mehr als einem Lager entstehen differentielle Änderungen bei jeder Lagervariablen  $x_i$  und man erhält partielle Differentialgleichungssysteme.

Der Vorteil der diskreten Modelle ist

- bei größeren Lagermodellen hat man weiterhin nur lineare Gleichungssysteme zu lösen

und ihre Nachteile

- die Anzahl der Gleichungen hängt von den maximalen Lagerbeständen ab
- es ist nicht möglich unterschiedliche Durchsätze zu berücksichtigen.

Die Lösung größerer partieller Differentialgleichungssysteme bereitet erhebliche Schwierigkeiten. Wir entscheiden uns aus diesem Grunde für die diskrete Modellierung eines Zweilagersystems und nehmen die Nachteile in Kauf.

Die Motivation für das nachfolgende Kapitel ist: Strukturkenntnisse über das Einlagermodell zu bekommen, den Einfluß von Annahmenänderungen kennenzulernen und Lösungsansätze zur schnelleren Lösung der linearen Gleichungssysteme zu finden. Diese Untersuchungen kommen bei der bisher bekannten Literatur eindeutig zu kurz, sie sind jedoch wichtig und hilfreich bei der Analyse größerer Lagermodelle.

### 3. Ein Einlagermodell mit identischen Maschinen

In diesem Kapitel betrachten wir ein Einlagermodell, bei dem beide Maschinen das gleiche Ausfall- und Reparaturverhalten besitzen. Die Zwischenlagerkapazität ist endlich. Einer blockierten Maschine unterstellen wir, daß sich ihre Ausfallwahrscheinlichkeit nicht ändert.

In den folgenden Abschnitten beschreiben wir Zustandsraum, Modellannahmen und stellen vereinfachende Lösungsansätze für die Berechnung der stationären Zustandswahrscheinlichkeiten vor. Die Zielsetzung bei der Formulierung der Modellannahmen ist, besonders einfache Übergangsgleichungen zu erhalten, wobei allerdings das System realitätsnah beschrieben werden soll.

Die zur Lösung des Problems notwendigen Definitionen und Sätze aus der Theorie der Markov'schen Ketten sind im Anhang enthalten.

#### 3.1 Beschreibung des Zustandsraumes

Um ein Lagermodell mit einem Markovansatz behandeln zu können, definieren wir zunächst den Zustandsraum  $E$ . Dieser Zustandsraum enthält alle Zustände, die das System zu einem beliebigen Zeitpunkt annehmen kann. Ein Zustand des Systems wird beschrieben durch die Zustände der Maschinen und durch den Lagerzustand, d.h. seinen Inhalt.

Für jede Maschine des Einlagermodells definieren wir die Variable  $\alpha_i$  wie folgt:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{falls Maschine } i \text{ intakt} \\ 1 & \text{falls Maschine } i \text{ defekt} \end{cases} \quad i=1,2 \quad (3-1)$$

Hierbei bedeutet "Maschine intakt", daß die Maschine produziert oder bereit zur Produktion ist. Eine Maschine kann intakt sein und trotzdem nichts produzieren, wenn sie durch ein nachfolgendes volles Lager oder durch ein vorangehendes leeres Lager blockiert wird. Besondere Beachtung dieser Situation bedarf es bei der Analyse des Übergangsverhaltens des Sy-

stems; ebenso bei der Berechnung der Verfügbarkeit, da eine blockierte Maschine in diesem Fall mit einer defekten gleichzusetzen ist.

Die Variable  $n$  definieren wir als den Lagerbestand. Sie gibt an, wieviele Mengeneinheiten gerade im Lager sind. Das Lager hat eine maximale Aufnahmekapazität von  $N$  Mengeneinheiten. Somit ist der Zustand des Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  darstellbar durch

$$X(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), n(t)) . \quad (3-2)$$

Aus Gleichung (3-2) folgt, daß die Anzahl der möglichen Zustände  $4 \cdot (N+1)$  beträgt.

Wir nennen Zustände für die  $0 < n < N$  gilt *interne Zustände* und Zustände mit  $n \in \{0, N\}$  *Randzustände*.

Die Abhängigkeiten zwischen den Zuständen und die Modellvoraussetzungen werden im nachfolgenden Abschnitt beschrieben.

### 3.2 Modellannahmen und dynamisches Verhalten des Systems

Wir treffen nun in Anlehnung an Buzacott [1967] einige Modellannahmen, die es uns erleichtern, ein reales System von Maschinen und Zwischenlagern mathematisch zu beschreiben. Wie bei den meisten mathematischen Modellen müssen Vereinfachungen des Systemverhaltens und der Verteilung der Systemparameter vorgenommen werden, die bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden müssen.

Wir treffen nun die folgenden Annahmen:

- (i) Das System befindet sich in einem eingeschwungenen (stationären) Zustand. Es kann somit durch eine stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung charakterisiert werden.
- (ii) Die Versorgung der ersten Maschine mit Material ist zuverlässig, ebenso kann die zweite Maschine ihre Produkte immer abgeben. Somit ist die erste Maschine nie durch ein vorangehendes leeres und die zweite Maschine nie durch ein nachfolgendes volles Lager blockiert.

- (iii) Der Transport der Werkstoffe nimmt keine Zeit in Anspruch.
- (iv) Beide Maschinen sind synchronisiert, direkt miteinander gekoppelt, und haben den gleichen deterministischen Durchsatz, wenn sie intakt und nicht blockiert sind.
- (v) Auf der Zeitachse wird die Zykluszeit  $[t_i, t_{i+1}]$  so festgelegt, daß die Maschinen innerhalb eines Intervalls genau eine Mengeneinheit verarbeiten.
- (vi) Ein Zyklus beginnt mit dem Entladen der Maschineneinheiten. Anschließend werden die Maschinen beladen (für den Fall, daß die Maschinen intakt und nicht blockiert sind). Der Zyklus endet mit dem Abschluß der von den Maschinen durchzuführenden Bearbeitungen. Der Übergang der Maschinenzustände findet ebenfalls am Ende des Zyklus statt. Das bedeutet:

Fällt eine Maschine innerhalb eines Zyklus aus, so produziert sie in diesem Zyklus noch. Wird eine defekte Maschine innerhalb eines Intervalls repariert, so produziert sie innerhalb dieses Zyklus noch nicht.

- (vii) Nur einfache Übergänge zwischen den Zuständen werden berücksichtigt; die Wahrscheinlichkeit, daß mehrere Ereignisse innerhalb eines Intervalls eintreten wird vernachlässigt.
- (viii) Ausfall- und Reparaturdauern der Maschinen sind geometrisch verteilt mit den Parametern  $a$  und  $b$ , d.h. die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Maschinenzustände haben die in Tabelle 3.1 angegebenen Formen.

| $\alpha_i(t)$ | $\alpha_i(t+1)$ | $p\{\alpha_i(t+1)   \alpha_i(t)\}$ |
|---------------|-----------------|------------------------------------|
| 0             | 0               | $1-a$                              |
| 0             | 1               | $a$                                |
| 1             | 0               | $b$                                |
| 1             | 1               | $1-b$                              |

Tabelle 3.1: Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Maschinenzuständen.

- (ix) Ausfall und Reparatur erfolgen unabhängig vom Lagerbestand. Dies bedeutet, daß die Ausfallwahrscheinlichkeit einer blockierten Maschine  $a$  beträgt. In manchen Modellen wird diese gleich Null gesetzt (vgl. Kapitel 2).

Diese letzte Annahme ist in Buzacott [1967] nicht enthalten. Dort wird die Ausfallwahrscheinlichkeit einer blockierten Maschine mit 0 gleichgesetzt. Beide Annahmen (0 oder  $a$ ) sind sicher nicht realistisch; für die Ausfallwahrscheinlichkeit einer blockierten Maschine müßte man eigentlich eine andere, unabhängig von  $a$  bestimmte Wahrscheinlichkeit ansetzen. Im Hinblick auf das Zwei-Lagermodell treffen wir jedoch Annahme (ix), da es dadurch zu einer größeren Symmetrie zwischen den Zustandsgleichungen kommt.

Im nächsten Abschnitt leiten wir die Zustandsgleichungen für ein Einlagermodell unter den gerade getroffenen Annahmen her und bestimmen in den darauffolgenden Abschnitten die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels bestimmen wir die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten für ein Einlagermodell mit einer geänderten Zyklusdefinition.

### 3.3 Übergangsgleichungen des Einlagermodells

Exemplarisch für die Herleitung der Übergangsgleichungen greifen wir den Zustand  $x(t) = (0(t), 1(t), 2(t))$  oder kurz  $(0,1,2)_t$  heraus. Von diesem Zustand gibt es Übergänge nach:

|   |           |           |
|---|-----------|-----------|
| $(0,1,3)_{t+1}$ mit Wahrscheinlichkeit $(1-a)(1-b)$ | mit (vii) | = $1-a-b$ |
| $(0,0,3)_{t+1}$ mit Wahrscheinlichkeit $(1-a)b$     | mit (vii) | = $b$     |
| $(1,1,3)_{t+1}$ mit Wahrscheinlichkeit $a(1-b)$     | mit (vii) | = $a$     |
| $(1,0,3)_{t+1}$ mit Wahrscheinlichkeit $b \cdot a$  | mit (vii) | = $0$ .   |

Er kann erreicht werden von den Zuständen:

|             |                        |         |
|-------------|------------------------|---------|
| $(0,1,1)_t$ | mit Wahrscheinlichkeit | $1-a-b$ |
|-------------|------------------------|---------|

$(00,2)_t$  mit Wahrscheinlichkeit a

$(11,2)_t$  mit Wahrscheinlichkeit b.

Addiert man die Wahrscheinlichkeiten für die Übergänge von einem bestimmten Zustand in alle anderen möglichen, so beträgt die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten 1. Dieser Zustand wird mit Wahrscheinlichkeit 1 erreicht bzw. wieder verlassen.

Man kann sich auf diese Weise einen *Markovgraphen* der Übergänge (Bild 3.1) konstruieren und aus diesem Graphen die Übergangsmatrix ableiten (Bild 3.2).

Im Gegensatz zu Bild 2.5 enthält Bild 3.1 keine transienten und ephemeren Zustände. Für jeden Zustand ist die Wahrscheinlichkeit einer Rückkehr gleich 1, so daß alle Zustände eine einzige Menge rekurrenter Zustände bilden. Diese Tatsache ist auf die Wahl der Annahme zurückzuführen, zu welchem Zeitpunkt die Systemänderungen stattfinden.

Für  $a, b \ll 1$  sind in der Übergangsmatrix alle Elemente positiv und die Spaltensumme der Matrix beträgt 1. Es handelt sich also um eine stochastische Matrix. Die Forderung  $a, b \ll 1$  ist bei den meisten, besonders aber bei allen kerntechnischen Anwendungen erfüllt. Hier müssen die Ausfallwahrscheinlichkeiten sehr klein sein, um den Sicherheitsanforderungen zu genügen.

Dem Anhang 1 ist zu entnehmen, daß eine Markov'sche Kette eine ergodische Verteilung besitzt, falls sie irreduzibel, endlich und aperiodisch ist.

Diese Voraussetzungen sind für unser Modell erfüllt, da

- jeder Zustand direkt oder indirekt von jedem anderen zu erreichen ist (siehe Bild 3.1),
- es Elemente in der Übergangsmatrix mit  $p_{ii}^{(n)} > 0$  gibt, z.B. die Übergänge in sich selbst. (Das ist hinreichend für Aperiodizität (siehe Bild 3.2)), und
- ein endlicher Zustandsraum vorliegt.

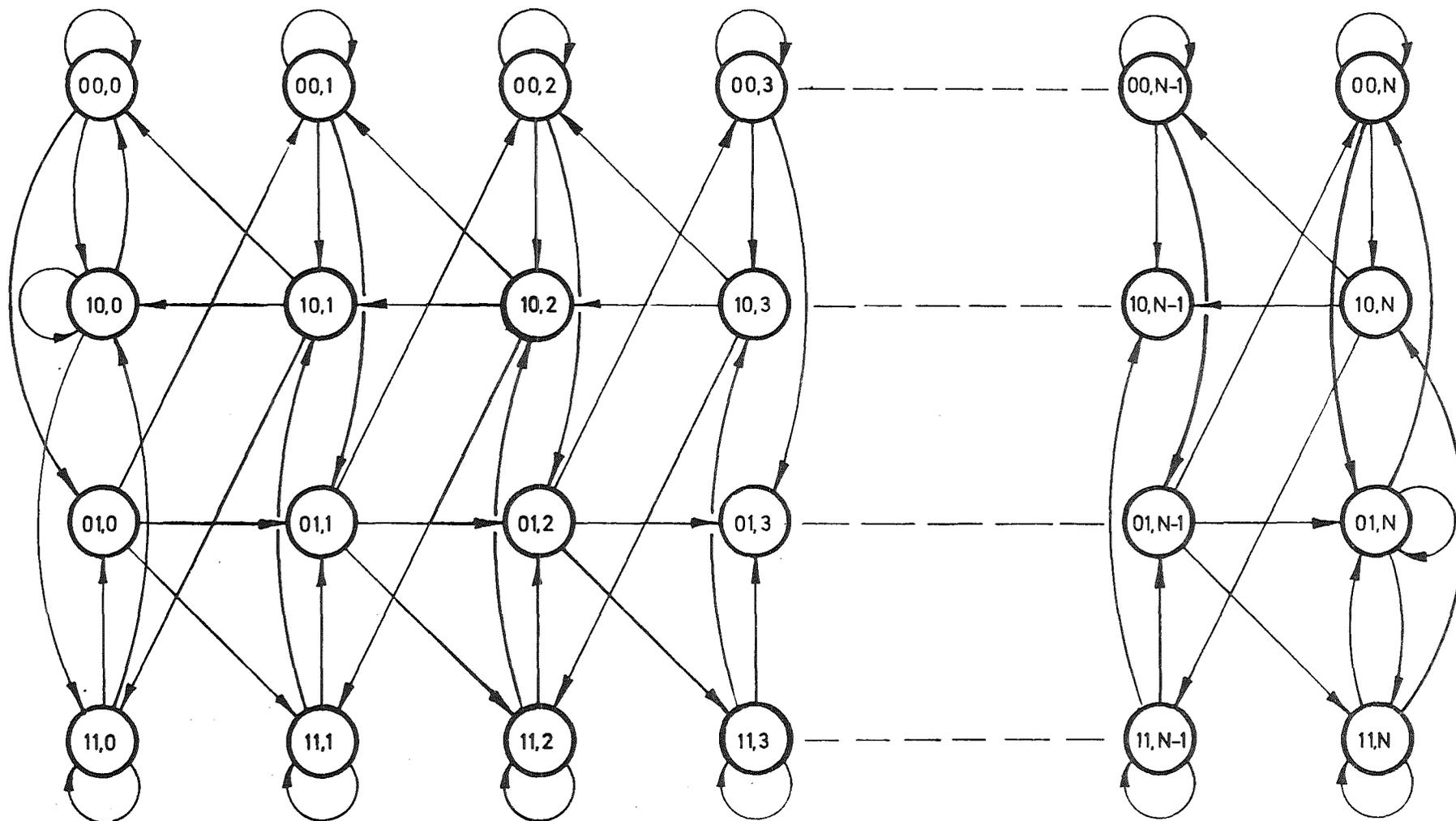


Bild 3.1: Übergangsgraph des Einlagermodells.

|                  | $00,0_t$ | $01,0_t$ | $10,0_t$ | $11,0_t$ | $00,1_t$ | $01,1_t$ | $10,1_t$ | $11,1_t$ | $00,2_t$ | $01,2_t$ | $10,2_t$ | $11,2_t$ | ... | $00,N-1_t$ | $01,N-1_t$ | $10,N-1_t$ | $11,N-1_t$ | $00,N_t$ | $01,N_t$ | $10,N_t$ | $11,N_t$ |  |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----|------------|------------|------------|------------|----------|----------|----------|----------|--|
| $(00,0)_{t+1}$   | $1-2a$   |          | $b$      |          |          |          | $b$      |          |          |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(01,0)_{t+1}$   | $a$      |          |          | $b$      |          |          |          |          |          |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(10,0)_{t+1}$   | $a$      |          | $1-a-b$  | $b$      |          |          | $1-a-b$  |          |          |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(11,0)_{t+1}$   |          |          | $a$      | $1-2b$   |          |          | $a$      |          |          |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(00,1)_{t+1}$   |          | $b$      |          |          | $1-2a$   |          |          |          |          |          | $b$      |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(01,1)_{t+1}$   |          | $1-a-b$  |          |          | $a$      |          |          | $b$      |          |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(10,1)_{t+1}$   |          |          |          |          | $a$      |          |          | $b$      |          |          | $1-a-b$  |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(11,1)_{t+1}$   |          | $a$      |          |          |          |          |          | $1-2b$   |          |          | $a$      |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(00,2)_{t+1}$   |          |          |          |          |          | $b$      |          |          | $1-2a$   |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(01,2)_{t+1}$   |          |          |          |          |          | $1-a-b$  |          |          | $a$      |          |          | $b$      |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(10,2)_{t+1}$   |          |          |          |          |          |          |          |          | $a$      |          |          | $b$      |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(11,2)_{t+1}$   |          |          |          |          |          |          | $a$      |          |          |          |          | $1-2b$   |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $\vdots$         |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(00,N-1)_{t+1}$ |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     | $1-2a$     |            |            |            |          |          |          | $b$      |  |
| $(01,N-1)_{t+1}$ |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     | $a$        |            |            | $b$        |          |          |          |          |  |
| $(10,N-1)_{t+1}$ |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     | $a$        |            |            | $b$        |          |          |          | $1-a-b$  |  |
| $(11,N-1)_{t+1}$ |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     |            |            |            | $1-2b$     |          |          |          | $a$      |  |
| $(00,N)_{t+1}$   |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     |            | $b$        |            |            | $1-2a$   | $b$      |          |          |  |
| $(01,N)_{t+1}$   |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     |            | $1-a-b$    |            |            | $a$      | $1-a-b$  |          | $b$      |  |
| $(10,N)_{t+1}$   |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     |            |            |            |            | $a$      |          |          | $b$      |  |
| $(11,N)_{t+1}$   |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     |            | $a$        |            |            |          | $a$      |          | $1-2b$   |  |

Bild 3.2: Übergangsmatrix des Einlagermodells.

Die ergodische Verteilung ist eindeutig bestimmt durch das Gleichungssystem (A-18). Dieses lautet in unserem Falle explizit wie folgt:

Die Randgleichungen für  $n=0$  sind

$$0 = -2a \cdot p(00,0) + b \cdot p(10,0) + b \cdot p(10,1) \quad (3-3)$$

$$0 = a \cdot p(00,0) - (a+b) \cdot p(10,0) + (1-b-a) \cdot p(10,1) + b \cdot p(11,0) \quad (3-4)$$

$$p(01,0) = a \cdot p(00,0) + b \cdot p(11,0) \quad (3-5)$$

$$0 = a \cdot p(10,0) + a \cdot p(10,1) - 2b \cdot p(11,0) \quad (3-6)$$

Die Randgleichungen für  $n=N$  sind

$$0 = -2a \cdot p(00,N) + b \cdot p(01,N) + b \cdot p(01,N-1) \quad (3-7)$$

$$p(10,N) = a \cdot p(00,N) + b \cdot p(11,N) \quad (3-8)$$

$$0 = a \cdot p(00,N) - (a+b) \cdot p(01,N) + (1-a-b) \cdot p(01,N-1) + b \cdot p(11,N) \quad (3-9)$$

$$0 = a \cdot p(01,N) + a \cdot p(01,N-1) - 2b \cdot p(11,N) \quad (3-10)$$

Die internen Gleichungen für  $n=1, \dots, N-1$

$$0 = -2a \cdot p(00,n) + b \cdot p(10,n+1) + b \cdot p(01,n-1) \quad (3-11)$$

$$p(10,n) = a \cdot p(00,n) + (1-a-b) \cdot p(10,n+1) + b \cdot p(11,n) \quad (3-12)$$

$$p(01,n) = a \cdot p(00,n) + (1-a-b) \cdot p(01,n-1) + b \cdot p(11,n) \quad (3-13)$$

$$0 = a \cdot p(10,n+1) + a \cdot p(01,n-1) - 2b \cdot p(11,n) \quad (3-14)$$

Schließlich gilt

$$\sum_{\alpha_1 \alpha_2, n} p(\alpha_1 \alpha_2, n) = 1 \quad .$$

Für ein Einlagermodell mit einer Zwischenlagerkapazität von  $N$  Mengeneinheiten haben wir  $4(N+1)+1$  Gleichungen für die  $4(N+1)$  unbekanntes Zustandswahrscheinlichkeiten. Wir stellen nun verschiedene Verfahren vor, mit deren Hilfe diese Zustandswahrscheinlichkeiten bestimmt werden können.

### 3.4 Lösung der Übergangsgleichungen durch sukzessives Einsetzen

Bei diesem Verfahren halten wir eine beliebige Variable fest und berechnen die restlichen Variablen durch sukzessives Einsetzen. Man bekommt dann Verhältnisse in Abhängigkeit von der festgehaltenen Variablen, die

durch die Normierungsbedingung aufgelöst werden.

Dieses Verfahren ist im Prinzip auf jedes lineare Gleichungssystem anwendbar. Sind die Abhängigkeiten unter den Variablen sehr komplex, so wird auch der Aufwand zur analytischen Lösung sehr umfangreich. Bei dem vorliegenden Gleichungssystem sind jedoch nur Abhängigkeiten zwischen der "Nachbarschaft" der Variablen vorhanden (Übergangsmatrix des Markov-Graphen hat blocktri-diagonale Form). Diese Eigenschaft erleichtert uns die Berechnung.

Wir betrachten nun Gleichungen (3-3) bis (3-6), die 5 Unbekannte beinhalten. Halten wir  $p(00,0)$  fest, so ergibt nach Umstellung von (3-3):

$$p(10,0) = \frac{2a}{b} \cdot p(00,0) - p(10,1) \quad (3-3)'$$

(3-3)' in (3-4) eingesetzt ergibt

$$p(10,1) = \frac{a(2a+b)}{b} \cdot p(00,0) - b \cdot p(11,0) \quad (3-4)'$$

$$p(11,0) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot p(00,0) \quad (3-6)'$$

$$p(01,0) = \frac{a(a+b)}{b} \cdot p(00,0) \quad (3-5)'$$

$$p(10,1) = \frac{a(a+b)}{b} \cdot p(00,0) \quad (3-4)''$$

$$p(10,0) = \frac{a(2-a-b)}{b} \cdot p(00,0) \quad (3-3)''$$

Wir können also alle 5 Unbekannten durch  $p(00,0)$  ausdrücken; speziell auch den internen Zustand  $p(10,1)$  der uns den Übergang zu den internen Zustandsgleichungen ermöglicht.

Für  $n=1$  lauten die internen Gleichungen:

$$0 = -2a \cdot p(00,1) + b \cdot p(10,2) + b \cdot p(01,0) \quad (3-11)'$$

$$p(10,1) = a \cdot p(00,1) + (1-a-b) \cdot p(10,2) + b \cdot p(11,1) \quad (3-12)'$$

$$p(01,1) = a \cdot p(00,1) + (1-a-b) \cdot p(01,0) + b \cdot p(11,1) \quad (3-13)'$$

$$0 = a \cdot p(10,2) + a \cdot p(01,0) - 2b \cdot p(11,1). \quad (3-14)'$$

Wie man sieht, kommen 4 Unbekannte dazu. Für diese erhält man nach mehrfachen Einsetzen:

$$p(00,1) = (a+b) \cdot p(00,0) \quad (3-11)''$$

$$p(10,2) = \frac{a(a+b)}{b} \cdot p(00,0) \quad (3-12)''$$

$$p(01,1) = \frac{a(a+b)}{b} \cdot p(00,0) \quad (3-13)''$$

$$p(11,1) = \frac{a^2(a+b)}{b^2} \cdot p(00,0) \quad (3-14)''$$

Stellt man die internen Gleichungen für  $n=2$  auf und setzt man  $p(01,1)$  und  $p(10,2)$  in diese Gleichungen ein, dann hat man das gleiche lineare Gleichungssystem zu lösen, wie für  $n=1$ . Wir erhalten somit:

$$p(10,n+1) = p(10,n) = \frac{a(a+b)}{b} \cdot p(00,0)$$

$$p(11,n) = \frac{a^2(a+b)}{b^2} \cdot p(00,0) \quad n=1, \dots, N-1 \quad (3-15)$$

$$p(00,n) = (a+b) \cdot p(00,0).$$

Nun können wir die Randgleichungen (3-7) bis (3-10) für  $n=N$  gesondert betrachten. Dies ist durch den Zustand  $p(01,N-1)$  möglich, der uns den Übergang zu den oberen Randgleichungen ermöglicht. Entsprechendes Vorgehen wie oben ergibt:

$$p(00,N) = p(00,0) \quad (3-7)'$$

$$p(10,N) = \frac{a(a+b)}{b} \cdot p(00,0) \quad (3-8)'$$

$$p(01,N) = \frac{a(2-a-b)}{b} \cdot p(00,0) \quad (3-9)'$$

$$p(11,N) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot p(00,0) \quad (3-10)'$$

Zur expliziten Angabe der Zustandswahrscheinlichkeiten fehlt uns noch die

Normierung  $\sum_{\alpha_1 \alpha_2, n} p(\alpha_1 \alpha_2, n) = 1 \dots$

Für diese erhalten wir:

$$\sum_{n=0}^N (p(00,n) + p(10,n) + p(01,n) + p(11,n)) = 1$$

$$p(00,0) \cdot \left( 1 + (N-1) \cdot (a+b) + 1 + \frac{a(a+b)}{b} + (N-1) \cdot \frac{a(a+b)}{b} + \frac{a(2-a-b)}{b} + \frac{a(2-a-b)}{b} + N \cdot \frac{a(a+b)}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + (N-1) \cdot \frac{a^2(a+b)}{b^2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right) = 1$$

$$p(00,0) = \frac{b^2}{(a+b)^2 \cdot ((N-1) \cdot (a+b) + 2)}$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten für das hier betrachtete Einlagermodell lauten dann:

$$p(00,0) = p(00,N) = \frac{b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{1}{(N-1)(a+b)+2}$$

$$p(10,0) = p(01,N) = \frac{a b}{(a+b)^2} \cdot \frac{2-a-b}{(N-1)(a+b)+2}$$

$$p(11,0) = p(11,N) = \frac{a^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{1}{(N-1)(a+b)+2}$$

(3-16)

$$p(00,n) = \frac{b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{(N-1)(a+b)+2}$$

$$p(11,n) = \frac{a^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{(N-1)(a+b)+2}$$

n=1, ..., N-1

$$p(10,N) = p(10,n) = p(01,n) = \frac{a b}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{(N-1)(a+b)+2}$$

Wie wir sehen, sind die internen Lagerzustände  $p(\alpha_1, \alpha_2, n)$  für vorgegebene Maschinenzustände  $(\alpha_1, \alpha_2)$  gleichwahrscheinlich. Die Randzustände haben meist eine andere Wahrscheinlichkeit als die internen Zustände, jedoch gilt:

$$\begin{aligned} p(01,0) &= p(01,n) \\ p(10,N) &= p(10,n) \end{aligned} \quad n=1, \dots, N-1 \quad (3-17)$$

Aus den Symmetrien und Gleichverteilungen der Zustände leiten wir im nächsten Abschnitt einen neuen Ansatz zur schnelleren Lösung der Gleichungen des Einlagermodells her.

### 3.5 Ein Faktorisierungsansatz für die internen Zustände

Das Ziel des Faktorisierungsansatzes besteht darin, die internen Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(\alpha_1 \alpha_2, n)$ ,  $n=1, \dots, N-1$  auf einem einfacheren Weg herzuleiten. Die Berechnung der Randgleichungen erfolgt aber wiederum durch sukzessives Einsetzen.

Wir formulieren für die internen Zustände den Ansatz

$$p(\alpha_1 \alpha_2, n) = p(\alpha_1 \alpha_2 | n) \cdot p(n) = p(\alpha_1 \alpha_2) \cdot p(n) \quad (3-18)$$

mit folgender Plausibilitätsüberlegung (die für das Zweilagermodell nicht mehr gilt): Durch ein endliches Zwischenlager wird der Zustand der Maschinen unabhängig vom Lagerzustand für  $0 < n < N$ , d.h. die funktionsmäßige Entkopplung wirkt sich auf die Zustandswahrscheinlichkeiten aus.

Dieser Ansatz versetzt uns in die Lage, die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(\alpha_1 \alpha_2)$  mit einer gesonderten Markov'schen Kette zu berechnen. Die entsprechende Übergangsmatrix lautet:

| nach \ von   | $(00)_t$ | $(01)_t$ | $(10)_t$ | $(11)_t$ |
|--------------|----------|----------|----------|----------|
| $(00)_{t+1}$ | $1-2a$   | $b$      | $b$      | $0$      |
| $(01)_{t+1}$ | $a$      | $1-a-b$  | $0$      | $b$      |
| $(10)_{t+1}$ | $a$      | $0$      | $1-a-b$  | $b$      |
| $(11)_{t+1}$ | $0$      | $a$      | $a$      | $1-2b$   |

(3-19)

Mit (A-18) finden wir dann:

$$\begin{aligned}
 p(00) &= \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \\
 p(10) = p(01) &= \frac{a \cdot b}{(a+b)^2} \\
 p(11) &= \left(\frac{a}{a+b}\right)^2
 \end{aligned} \tag{3-20}$$

und somit für  $n=1, \dots, N-1$

$$\begin{aligned}
 p(00, n) &= \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \cdot p(n) \\
 p(10, n) = p(01, n) &= \left(\frac{a \cdot b}{a+b}\right)^2 \cdot p(n) \\
 p(11, n) &= \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \cdot p(n)
 \end{aligned} \tag{3-21}$$

In (3-11) bis (3-12) eingesetzt ergibt sich:

$$0 = -2b \cdot p(n) + b \cdot p(n+1) + b \cdot p(n-1) \quad n=2, \dots, N-2 \tag{3-22}$$

$$0 = (a+b-1) \cdot p(n) + (1-a-b) \cdot p(n+1) \quad n=1, \dots, N-2 \tag{3-23}$$

$$0 = (a+b-1) \cdot p(n) + (1-a-b) \cdot p(n-1) \quad n=2, \dots, N-1 \tag{3-24}$$

$$0 = -2a \cdot p(n) + a \cdot p(n+1) + a \cdot p(n-1) \quad n=2, \dots, N-2 \tag{3-25}$$

für  $(a+b-1) \neq 0$  folgt aus (3-23) bzw. (3-24)

$$\begin{aligned}
 p(n) &= p(n+1) & n=1, \dots, N-2 \\
 p(n) &= p(n-1) & n=2, \dots, N-1
 \end{aligned} \tag{3-26}$$

und es gilt unter der Annahme (3-18):

$$p(n) = \text{const} \quad \text{für} \quad n=1, \dots, N-1 \tag{3-27}$$

Die interne Zustandswahrscheinlichkeit  $p(10,1)$  berechneten wir bei den unteren Randgleichungen durch sukzessives Einsetzen. Nach (3-18) muß gelten:

$$p(10,1) = p(10) \cdot p(1) \quad (3-28)$$

Wir können nun die internen Lagerzustandswahrscheinlichkeiten für  $n=1, \dots, N-1$  bestimmen durch

$$\begin{aligned} p(n) \equiv p(1) &= \frac{p(10,1)}{p(10)} = \frac{a(a+b)}{b} \cdot \frac{(a+b)^2}{a \cdot b} \cdot p(00,0) \\ &= \frac{(a+b)^3}{b^2} \cdot p(00,0) \end{aligned} \quad (3-29)$$

und erhalten mit (3-20) die internen Zustandswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p(00,n) &= \left( \frac{b}{a+b} \right)^2 \cdot \frac{a+b}{(N-1)(a+b)+2} \\ p(10,n) = p(01,n) &= \frac{a \cdot b}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{(N-1)(a+b)+2} \quad n=1, \dots, N-1 \quad (3-30) \\ p(11,n) &= \left( \frac{a}{a+b} \right)^2 \cdot \frac{a+b}{(N-1)(a+b)+2} \quad , \end{aligned}$$

die mit den durch sukzessives Einsetzen erhaltenen Ergebnisse identisch sind.

Die oberen Randzustände berechnen wir wie in Abschnitt 3.4.

Wir überprüfen nun den Faktorisierungsansatz (3-18) und seine mögliche Ausdehnung auf weitere Zustände. Dazu berechnen wir die marginalen Zustandswahrscheinlichkeiten mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.4. Es muß gelten:

$$\sum_{n=0}^N p(00,n) = p(00) = \frac{b^2}{(a+b)^2} \quad (3-31)$$

$$\sum_{n=0}^N p(01, n) = p(01) = \frac{a \cdot b}{(a+b)^2} \quad (3-32)$$

$$\sum_{n=0}^N p(10, n) = p(10) = \frac{a \cdot b}{(a+b)^2} \quad (3-33)$$

$$\sum_{n=0}^N p(11, n) = p(11) = \frac{a^2}{(a+b)^2} \quad (3-34)$$

Einfaches Einsetzen bestätigt uns die Gültigkeit der Relationen (3-31) bis (3-34).

Für  $p(0)$ ,  $p(n)$ ,  $p(N)$  erhält man

$$p(0) = \sum_{\alpha_1 \alpha_2} p(\alpha_1 \alpha_2, 0) = \frac{1}{(N-1)(a+b)+2} \quad (3-35)$$

$$p(n) = \sum_{\alpha_1 \alpha_2, n} p(\alpha_1 \alpha_2, n) = \frac{a+b}{(N-1)(a+b)+2} \quad (3-36)$$

$$p(N) = \sum_{\alpha_1 \alpha_2} p(\alpha_1 \alpha_2, N) = \frac{1}{(N-1)(a+b)+2} \quad (3-37)$$

Mit (3-31) bis (3-37) ist leicht zu sehen, welche Zustandswahrscheinlichkeiten faktorisiert sind

$$p(00, 0) = \frac{b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{1}{(N-1)(a+b)+2} = p(00) \cdot p(0) \quad (3-38)$$

$$p(00, N) = \frac{b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{1}{(N-1)(a+b)+2} = p(00) \cdot p(N) \quad (3-39)$$

$$p(00, n) = \frac{b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{(N-1)(a+b)+2} = p(00) \cdot p(n) \quad (3-40)$$

$$p(01, 0) = \frac{a \cdot b}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{(N-1)(a+b)+2} \neq p(01) \cdot p(0) \quad (3-41)$$

$$p(01,N) = \frac{a \cdot b}{(a+b)^2} \cdot \frac{2-a-b}{(N-1)(a+b)+2} \neq p(01) \cdot p(0) \quad (3-42)$$

$$p(01,n) = \frac{a \cdot b}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{(N-1)(a+b)+2} = p(01) \cdot p(n) \quad (3-43)$$

$$p(10,0) = \frac{a \cdot b}{(a+b)^2} \cdot \frac{2-a-b}{(N-1)(a+b)+2} \neq p(10) \cdot p(0) \quad (3-44)$$

$$p(10,N) = \frac{a \cdot b}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{(N-1)(a+b)+2} \neq p(10) \cdot p(N) \quad (3-45)$$

$$p(10,n) = \frac{a \cdot b}{(a+b)^2} \cdot \frac{1}{(N-1)(a+b)+2} = p(10) \cdot p(n) \quad (3-46)$$

$$p(11,0) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \cdot \frac{1}{(N-1)(a+b)+2} = p(11) \cdot p(0) \quad (3-47)$$

$$p(11,N) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \cdot \frac{1}{(N-1)(a+b)+2} = p(11) \cdot p(N) \quad (3-48)$$

$$p(11,n) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \cdot \frac{a+b}{(N-1)(a+b)+2} = p(11) \cdot p(n) \quad (3-49)$$

Wie man sieht, sind alle internen Zustände und diejenigen Zustände faktorisiert, bei denen beide Maschinen entweder intakt oder defekt sind.

Die Tatsache, daß nicht alle Zustandswahrscheinlichkeiten faktorisiert erklärt auch, warum sich die Lagerzustände nicht mit Hilfe eines einfachen Irrfahrt-Modelles mit reflektierenden Schranken bestimmen lassen.

Sei

$$p((\alpha_1 \alpha_2, n)_{t+1} \cap (\alpha_1' \alpha_2', n')_t)$$

die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System zum Zeitpunkt  $t$  im Zustand  $(\alpha_1' \alpha_2', n')$  und zum Zeitpunkt  $t+1$  im Zustand  $(\alpha_1 \alpha_2, n)$  befindet. Dann gilt nach den Voraussetzungen für  $1 \leq n \leq N-1$

$$\begin{aligned}
 p((00,n)_{t+1} \cap (00,n)_t) &= 1-2a \\
 p((01,n)_{t+1} \cap (00,n)_t) &= a \\
 p((11,n)_{t+1} \cap (00,n)_t) &= a \\
 p((00,n+1)_{t+1} \cap (01,n)_t) &= b \\
 p((01,n+1)_{t+1} \cap (01,n)_t) &= 1-a-b \\
 p((11,n+1)_{t+1} \cap (01,n)_t) &= a \\
 p((00,n-1)_{t+1} \cap (10,n)_t) &= b \\
 p((10,n-1)_{t+1} \cap (10,n)_t) &= 1-a-b \\
 p((11,n-1)_{t+1} \cap (10,n)_t) &= a \\
 p((01,n)_{t+1} \cap (11,n)_t) &= b \\
 p((10,n)_{t+1} \cap (11,n)_t) &= b \\
 p((11,n)_{t+1} \cap (11,n)_t) &= 1-2b \quad .
 \end{aligned}$$

Sei weiter  $p_n^t$  die Wahrscheinlichkeit, daß sich das Lager zum Zeitpunkt  $t$  im Zustand  $n$  befindet. Dann gilt, wie man sofort einsieht, für  $1 < n < N-1$

$$p_n^t = p(01,n-1)_{t-1} + p(00,n)_{t-1} + p(11,n)_{t-1} + p(10,n+1)_{t-1}.$$

Für  $n=0$  bzw.  $n=N$  gelten entsprechende Relationen. Für die inneren Lagerzustände gilt nun aber im Gleichgewichtszustand, d.h. für  $t \rightarrow \infty$ ,

$$p(\alpha_1 \alpha_2, n) = p(\alpha_1 \alpha_2) \cdot p_n$$

und wir erhalten

$$p_n = p(01) \cdot p_{n-1} + (p(00) + p(11)) \cdot p_n + p(10) \cdot p_{n+1},$$

dies ist aber die bekannte Rückwärtsgleichung für einfache Irrfahrten (Cox, Miller [1965]). Für die Zustände  $(01,y)$  und  $(10,y)$ ,  $y=0,N$ , gilt nach (3-41), (3-42), (3-44), (3-45) die Faktorisierung jedoch nicht, weswegen auch für den Fall, daß nur die Lagerzustände interessieren, die allgemeineren Zustandswahrscheinlichkeiten bestimmt werden müssen.

Wir können unsere Problemstellung aufgrund dieser Betrachtung auch als ein dreidimensionales Irrfahrtproblem mit allseits reflektierenden Schranken betrachten.

In dem Spezialfall  $a+b=1$  sind *alle* Zustände faktorisiert. Wir haben es dann mit einem Bernoulli Prozeß zu tun (vgl. Feller [1968]), der von Sheskin [1977] zur Konstruktion eines Markovansatzes für Lagermodelle verwendet wird. Die Annahme  $a+b=1$  ist jedoch für praktische Anwendungen nicht brauchbar, da sie sicherlich nur in den seltensten Fällen erfüllt sein wird.

Der Faktorisierungsansatz hat uns zwar einige Rechenarbeit bei den internen Zuständen abgenommen, die Randzustände berechneten wir jedoch weiterhin durch sukzessives Einsetzen. Der Ansatz im nächsten Abschnitt berücksichtigt auch die Randzustände.

### 3.6 Ein Gleichverteilungsansatz

Die Ergebnisse der beiden vorangehenden Abschnitte zeigen, daß alle  $4(N+1)$  Unbekannten des Einlagermodells durch sechs verschiedene Zustandswahrscheinlichkeiten gegeben sind. Es muß also eine Möglichkeit geben, das ursprüngliche lineare Gleichungssystem von  $4(N+1)$  Unbekannten durch Ausnutzung von Symmetrien auf ein lineares Gleichungssystem mit sechs Unbekannten zu reduzieren.

Wir formulieren nun den Gleichverteilungsansatz

$$p(\alpha_1 \alpha_2 n) = p(\alpha_1 \alpha_2 1) \quad \text{für } n=1, \dots, N-1 \quad (3-50)$$

für die internen Zustände und erhalten dadurch neue obere Randgleichungen:

$$0 = -2a \cdot p(00, N) + b \cdot p(01, N) + b \cdot p(01, 1) \quad (3-51)$$

$$p(10, N) = a \cdot p(00, N) + b \cdot p(11, N) \quad (3-52)$$

$$0 = a \cdot p(00, N) - (a+b) \cdot p(01, N) + (1-a-b) \cdot p(01, 1) + b \cdot p(11, N) \quad (3-53)$$

$$0 = a \cdot p(01, N) + a \cdot p(01, 1) - 2b \cdot p(11, N), \quad (3-54)$$

sowie die folgenden internen Gleichungen:

$$0 = -2a \cdot p(00, 1) + b \cdot p(10, 1) + b \cdot p(01, 1) \quad n=2, \dots, N-2 \quad (3-55)$$

$$0 = -2a \cdot p(00, 1) + b \cdot p(10, 1) + b \cdot p(01, 0) \quad n=1 \quad (3-55a)$$

$$0 = -2a \cdot p(00,1) + b \cdot p(10,N) + b \cdot p(01,1) \quad n=N-1 \quad (3-55b)$$

$$p(10,1) = a \cdot p(00,1) + (1-a-b) \cdot p(10,1) + b \cdot p(11,1) \quad n=1, \dots, N-2 \quad (3-56)$$

$$p(10,1) = a \cdot p(00,1) + (1-a-b) \cdot p(10,N) + b \cdot p(11,1) \quad n=N-1 \quad (3-56a)$$

$$p(01,1) = a \cdot p(00,1) + (1-a-b) \cdot p(01,1) + b \cdot p(11,1) \quad n=2, \dots, N-1 \quad (3-57)$$

$$p(01,1) = a \cdot p(00,1) + (1-a-b) \cdot p(01,0) + b \cdot p(11,1) \quad n=1 \quad (3-57a)$$

$$0 = a \cdot p(10,1) + a \cdot p(01,1) - 2b \cdot p(11,1) \quad n=2, \dots, N-2 \quad (3-58)$$

$$0 = a \cdot p(10,1) + a \cdot p(01,0) - 2b \cdot p(11,1) \quad n=1 \quad (3-58a)$$

$$0 = a \cdot p(10,N) + a \cdot p(01,1) - 2b \cdot p(11,1) \quad n=N-1 \quad (3-58b)$$

Wir haben jetzt 18 Gleichungen und die Normierungsgleichung für 12 Unbekannte, die sich durch den Ansatz

$$\begin{aligned} p(10,N) &:= p(10,1) \\ p(01,0) &:= p(01,1) \end{aligned} \quad (3-59)$$

reduzieren lassen auf die Gleichungen (3-3) bis (3-6), (3-51) bis (3-54) und (3-55), (3-56), (3-57), (3-58). Sie müssen sich aber noch weiter reduzieren lassen, da wir im Endeffekt nur 6 Unbekannte haben. Durch den Ansatz

$$\begin{aligned} p(00,N) &:= p(00,0) \\ p(01,N) &:= p(10,0) \\ p(01,1) &:= p(10,1) \end{aligned} \quad (3-60)$$

fallen die Bezeichnungen (3-3) bis (3-6) zusammen mit (3-51) bis (3-54) und es verbleiben die folgenden Gleichungen:

$$0 = -2a \cdot p(00,0) + b \cdot p(10,0) + b \cdot p(10,1) \quad (3-61)$$

$$0 = a \cdot p(00,0) - (a+b) \cdot p(10,0) + (1-a-b) \cdot p(10,1) + b \cdot p(11,0) \quad (3-62)$$

$$0 = a \cdot p(00,0) - p(10,1) + b \cdot p(11,0) \quad (3-63)$$

$$0 = a \cdot p(10,0) + a \cdot p(10,1) - 2b \cdot p(11,0) \quad (3-64)$$

$$0 = -2a \cdot p(00,1) + 2b \cdot p(10,1) \quad (3-65)$$

$$0 = a \cdot p(00,1) - (a+b) \cdot p(10,1) + b \cdot p(11,1) \quad (3-66)$$

$$0 = a \cdot p(00,1) - (a+b) \cdot p(10,1) + b \cdot p(11,1) \quad (3-67)$$

$$0 = 2a \cdot p(10,1) - 2b \cdot p(11,1) \quad (3-68)$$

Innerhalb dieser Gleichungen müssen noch lineare Abhängigkeiten vorhanden sein. Man findet:

- (3-64) ist abhängig von (3-61) bis (3-63):  $(3-61) + (3-62) + (3-63) = - (3-64)$
- (3-66) identisch (3-67)
- (3-65) ist abhängig von (3-66) und (3-68):  $2(3-66) + (3-68) = - (3-65)$ .

Die Lösung des ursprünglichen linearen Gleichungssystems erhält man nun durch das folgende reduzierte lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -2a & 0 & b & b & 0 & 0 \\ a & 0 & -(a+b) & 1-a-b & b & 0 \\ a & 0 & 0 & -1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & -(a+b) & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2a & 0 & -2b \\ 2 & N-1 & 2 & 2-N & 2 & N-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(00,0) \\ p(00,1) \\ p(10,0) \\ p(10,1) \\ p(11,0) \\ p(11,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3-69)$$

das auf die bekannten Lösungen (3-16) führt.

Vergleicht man die verschiedenen Lösungsansätze miteinander, so ist der Gleichverteilungsansatz eindeutig der schnellste Weg zur Lösung. Aber er ist auch der Ansatz, der die besten Strukturkenntnisse des Einlagermodells erfordert. Die Frage ist nun, ob sich derartige Strukturkenntnisse auf ein Zweilagermodell übertragen lassen. Dies wird in Kapitel fünf untersucht.

### 3.7 Berechnung der Systemverfügbarkeit

Mit Hilfe der stationären Zustandswahrscheinlichkeiten können wir nun die stationäre Verfügbarkeit des Einlagersystems bestimmen. Nach (2-11) ist die ausgabeorientierte Systemverfügbarkeit gegeben durch:

$$\begin{aligned} V_{\text{SYS1-A}}^{N,1} &= \sum_{n=1}^N (p(00,n) + p(10,n)) + p(00,0) \\ &= p(00) + p(10) - p(10,0) \end{aligned} \quad ,$$

und man erhält dann

$$V_{\text{SYS1-A}}^{N,1} = \frac{N \cdot b \cdot (a+b)^2 + 2b^2 - (a+b)b^2}{(a+b)^2((N-1)(a+b) + 2)} \quad (3-70)$$

Dieses Ergebnis ist identisch mit dem vom Buzacott [1978] erzielten Resultat, obwohl Buzacott die Voraussetzung traf, daß mehrere Ereignisse innerhalb eines Zyklus eintreten können.

Verwendet man die Einzelverfügbarkeit der Maschinen

$$V_{\text{ein}} = \frac{b}{a+b} \quad ,$$

so läßt sich (3-70) auch darstellen durch

$$V_{\text{SYS1-A}}^{N,1} = \frac{N \cdot V_{\text{ein}} + (V_{\text{ein}})^2 \left( \frac{2}{a+b} - 1 \right)}{N + \frac{2}{a+b} - 1} \quad (3-71)$$

Nun kann man sich überlegen, daß die Systemverfügbarkeit für  $N \rightarrow \infty$  und  $N=0$  bestimmte plausible Werte annehmen muß.

Für  $N \rightarrow \infty$  müssen die beiden Maschinen entkoppelt sein, d.h. die Systemverfügbarkeit wird bestimmt durch die Einzelverfügbarkeit der Maschinen.

Dies ist der Fall:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V_{\text{SYS}} = \frac{V_{\text{ein}} + \frac{(V_{\text{ein}})^2 \left( \frac{2}{a+b} - 1 \right)}{N}}{1 + \left( \frac{\frac{2}{a+b} - 1}{N} \right)} = V_{\text{ein}} \quad (3-72)$$

Setzt man  $n=0$  in die Formeln (3-70) und (3-71) ein, so erhält man die Verfügbarkeit  $V_{\text{SYS},2}^{0,2}$  eines Seriensystems ohne Zwischenlager mit unabhängigen Komponenten:

$$\lim_{N \rightarrow 0} V_{\text{SYS1-A}}^{N,1} = (V_{\text{ein}})^2 \quad .$$

Diese zwei Ergebnisse sind in der Tat plausibel. Man kann jedoch nicht daraus folgern, daß bei jedem Modell die Systemverfügbarkeit für  $N \rightarrow 0$  gegeben ist durch die Serienformel und für  $N \rightarrow \infty$  gegeben ist durch die Einzelverfügbarkeit  $V_{\text{ein}}$  der Maschinen. Dies wird im nächsten Abschnitt aufgezeigt (vgl. auch Kapitel 2).

### 3.8 Einfluß des Zyklusablaufes auf die Systemverfügbarkeit

In Abschnitt 3.2 nehmen wir für den Zyklusablauf die etwas ungewöhnliche Arbeitsfolge - Entladen, Laden, Produzieren - an. Dadurch erreichen wir, daß im selben Takt die von der ersten Maschine abgegebenen Werkstücke von der zweiten Maschine geladen und bearbeitet werden. Bei diesem Zyklusablauf verweilt im Zustand  $(00,0)$  das Produkt nicht im Zwischenlager, sondern wird einfach durchgereicht. Somit ist ein Übergang von  $(00,0)$  nach  $(00,0)$  mit Wahrscheinlichkeit  $1-2a$  möglich.

Verändern wir den Zyklusablauf in die "normale" Arbeitsfolge - Laden, Produzieren, Entladen -, so werden im Zustand  $(00,0)$  die von der ersten Maschine bearbeiteten Produkte einen Takt lang zwischengelagert und erst im nächsten Takt von der zweiten Maschine weiterverarbeitet. Der Lagerbestand erhöht sich auf 1 und ein Übergang von  $(00,0)$  nach  $(00,0)$  ist nicht mehr möglich, sondern vom Zustand  $(00,0)$  kommen wir jetzt nach  $(00,1)$  mit der Wahrscheinlichkeit  $1-2a$ . Bei dieser Annahme über den Zyklusablauf arbeitet unser System im Zustand  $(00,0)$  durch die Zwischenlagerung des Produktes nicht wie ein Seriensystem ohne Zwischenlager.

Entsprechende Überlegungen müssen noch für den Zustand  $(00,N)$  und für die internen Zustände  $(\alpha_1\alpha_2,n)$  durchgeführt werden und man erhält dann die Übergangsmatrix in Bild 3.3.

Das zugehörige Gleichungssystem lösen wir mit dem Faktorisierungsansatz und wir erhalten:

|                  | $00,0_t$ | $01,0_t$ | $10,0_t$ | $11,0_t$ | $00,1_t$ | $01,1_t$ | $10,1_t$ | $11,1_t$ | $00,2_t$ | $01,2_t$ | $10,2_t$ | $11,2_t$ | ... | $00,N-1_t$ | $01,N-1_t$ | $10,N-1_t$ | $11,N-1_t$ | $00,N_t$ | $01,N_t$ | $10,N_t$ | $11,N_t$ |  |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----|------------|------------|------------|------------|----------|----------|----------|----------|--|
| $(00,0)_{t+1}$   |          |          | b        |          |          |          | b        |          |          |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(01,0)_{t+1}$   |          |          |          | b        |          |          |          |          |          |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(10,0)_{t+1}$   |          |          | 1-a-b    | b        |          |          | 1-a-b    |          |          |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(11,0)_{t+1}$   |          |          | a        | 1-2b     |          |          | a        |          |          |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(00,1)_{t+1}$   | 1-2a     | b        |          |          | 1-2a     |          |          |          |          |          | b        |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(01,1)_{t+1}$   | a        | 1-a-b    |          |          | a        |          |          | b        |          |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(10,1)_{t+1}$   | a        |          |          |          | a        |          |          | b        |          |          | 1-a-b    |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(11,1)_{t+1}$   |          | a        |          |          |          |          |          | 1-2b     |          |          | a        |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(00,2)_{t+1}$   |          |          |          |          |          | b        |          |          | 1-2a     |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(01,2)_{t+1}$   |          |          |          |          |          | 1-a-b    |          |          | a        |          |          | b        |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(10,2)_{t+1}$   |          |          |          |          |          |          |          |          | a        |          |          | b        |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(11,2)_{t+1}$   |          |          |          |          |          | a        |          |          |          |          |          | 1-2b     |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| ⋮                |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          |          |  |
| $(00,N-1)_{t+1}$ |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     | 1-2a       |            |            |            | 1-2a     |          | b        |          |  |
| $(01,N-1)_{t+1}$ |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     | a          |            |            | b          | a        |          |          |          |  |
| $(10,N-1)_{t+1}$ |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     | a          |            |            | b          | a        |          | 1-a-b    |          |  |
| $(11,N-1)_{t+1}$ |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     |            |            |            | 1-2b       |          |          |          | a        |  |
| $(00,N)_{t+1}$   |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     |            | b          |            |            |          | b        |          |          |  |
| $(01,N)_{t+1}$   |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     |            | 1-a-b      |            |            |          | 1-a-b    |          | b        |  |
| $(10,N)_{t+1}$   |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     |            |            |            |            |          |          |          | b        |  |
| $(11,N)_{t+1}$   |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     |            | a          |            |            |          | a        |          | 1-2b     |  |

Bild 3.3: Übergangsmatrix bei geändertem Zyklusablauf.

$$\begin{aligned}
 p(00,0) &= p(00,N) \\
 p(01,0) &= p(10,N) = \frac{a}{2b} \cdot p(00,0) \\
 p(10,0) &= p(01,N) = \frac{2-a-2b}{2b} \cdot p(00,0) \\
 p(11,0) &= p(11,N) = \frac{a}{2b^2} \cdot p(00,0) \\
 p(10,1) &= p(01,N-1) = \frac{a+2b}{2b} \cdot p(00,0) \\
 p(00,1) &= p(00,N-1) = \frac{2-a(3-a-b)}{2a(2-a-b)} \cdot p(00,0) \\
 p(11,1) &= p(11,N-1) = \frac{a^2(2-a)+ab(1-a)}{2b^2(2-a-b)} \cdot p(00,0) \\
 \\
 p(00,n) &= \frac{(a+b)(2-a)}{2a(2-a-b)} \cdot p(00,0) \\
 p(11,n) &= \frac{a(a+b)(2-a)}{2b^2(2-a-b)} \cdot p(00,0) \\
 p(01,n) &= p(10,n) = \frac{(a+b)(2-a)}{2b(2-a-b)} \cdot p(00,0)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} p(00,n) \\ p(11,n) \\ p(01,n) \end{aligned}} \right\} n=2, \dots, N-2$$

mit 
$$p(00,0) = \frac{2ab^2(2-a-b)}{N(a+b)^3(2-a)+4(a+b)^2+a^2(a^2+3ab-4a-14b)+b^2(3a^2-16a+ab-6b)}.$$

Im Gegensatz zu dem Einlagermodell aus Abschnitt 3.4 sind hier nur die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(\alpha_1\alpha_2, n)$ ,  $n=2, \dots, N-2$  faktorisiert. Zu den Randgleichungen muß man bei diesem Beispiel auch die Zustände  $(\alpha_1\alpha_2, 1)$  und  $(\alpha_1\alpha_2, N-1)$  rechnen, da nur für  $n=2, \dots, N-2$  die Zustandsgleichungen eine regelmäßige Form haben. Dieser Tatsache ist bei der Formulierung des Annahmesystems eines Mehrlagermodells Rechnung zu tragen. Wir wissen nun, mit welchem Zyklusablauf einfachere Gleichungssysteme konstruierbar sind.

Bei der Berechnung der Systemverfügbarkeit muß die Zustandswahrscheinlichkeit  $p(00,0)$  weggelassen werden, da die zweite Maschine nicht geladen werden kann und somit nichts produziert:

$$V_{\text{SYS1-A}}^{N,2} = \sum_{n=1}^N \cdot p(00,n) + p(10,n) \quad (3-73)$$

Die Rechnung ergibt:

$$V_{\text{SYS1-A}}^{N,2} = \frac{b(4b-8ab+a^2b+ab^2-6b^2+(a+b)^2(2-a) \cdot N)}{4(a+b)^2+a^2(a^2+3ab-4a-14b)+b^2(3a^2-16a+ab-6b)+(a+b)^3(2-a) \cdot N} \quad (3-74)$$

Den Vergleich mit Formel (3-70) zeigt die nachfolgende Tabelle 3.2.

| $V_{\text{ein}}$ | a    | b    | N  | $V_{\text{SYS1-A}}^{N,1}$<br>(3-70) | $V_{\text{SYS1-A}}^{N,2}$<br>(3-74) |
|------------------|------|------|----|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 75 %             | 0,1  | 0,3  | 0  | 56,25 %                             | 44,02 %                             |
| 75 %             | 0,1  | 0,3  | 1  | 60 %                                | 53,1 %                              |
| 75 %             | 0,1  | 0,3  | 2  | 62,5 %                              | 58,0 %                              |
| 75 %             | 0,1  | 0,3  | 5  | 66,6 %                              | 64,9 %                              |
| 75 %             | 0,1  | 0,3  | 10 | 69,6 %                              | 68,96 %                             |
| 80 %             | 0,02 | 0,08 | 0  | 64 %                                | 62,5 %                              |
| 80 %             | 0,02 | 0,08 | 1  | 64,8 %                              | 63,4 %                              |
| 80 %             | 0,02 | 0,08 | 2  | 65,5 %                              | 64,3 %                              |
| 80 %             | 0,02 | 0,08 | 5  | 67,3 %                              | 66,42 %                             |
| 80 %             | 0,02 | 0,08 | 10 | 69,5 %                              | 68,9 %                              |

Tabelle 3.2: Auswirkungen der Annahmen über den Zyklusablauf auf die Systemverfügbarkeit.

Die Systemverfügbarkeit (3-74) für kleine Lagerbestände liegt deutlich unter der von (3-70). Erhöht man die Zwischenlagerkapazität, so werden die Unterschiede geringer, und für  $N \rightarrow \infty$  gehen beide Formeln gegen die Einzelverfügbarkeit der Maschinen. Für  $N \rightarrow 0$  ergibt sich aus (3-74):

$$V_{\text{SYS}}^{0,4} = \frac{b^2(4-8a+a^2+ab-6b)}{4(a+b)^2+a^2(a^2+3ab-4a-14b)+b^2(3a^2-16a+ab-6b)} \quad (3-75)$$

und es gilt für beliebige  $a, b > 0$ :

$$v_{\text{SYS}}^{0,4} < \left( \frac{b}{a+b} \right)^2 \quad (3-76)$$

Bei diesem Modell ist die Systemverfügbarkeit für  $N \rightarrow 0$  also nicht gegeben durch die bekannte Serienformel, sondern durch eine Verfügbarkeit, die deutlich unter der der Serienformel (vgl. Tabelle 3.2) liegt. Der Grund dafür ist das "unökonomische" Arbeiten des Systems im Zustand (00,0), bei dem die von der ersten Maschine bearbeiteten Werkstücke einen Takt lang zwischengelagert werden. Diese Ergebnisse zeigen, daß bei der Anwendung dieser und aus der Literatur bekannter Formeln für die Systemverfügbarkeit das Annahmesystem besonders kritisch zu analysieren ist.

4. Einlagermodelle mit unterschiedlichen Maschinen und modifiziertem Ausfallverhalten

In Kapitel 3 trafen wir die vereinfachende Annahme, daß die Systemparameter der Maschinen identisch sind. Nun lassen wir unterschiedliche Parameter des Ausfall- und Reparaturverhaltens ( $a_i$  und  $b_i$ ,  $i=1,2$ ) zu. Ebenso behandeln wir hier ein Einlagermodell, bei dem eine blockierte Maschine eine andere Ausfallwahrscheinlichkeit besitzt als eine produzierende Maschine. Eine Maschine ist blockiert, falls die Maschine intakt, aber das nachfolgende (vorangehende) Lager voll (leer) ist. In der Literatur gibt es (z.B. Buzacott [1978], Artamanov [1976]) zwei Betrachtungsweisen:

- eine blockierte Maschine besitzt die Ausfallwahrscheinlichkeit 0,
- eine blockierte Maschine hat die Ausfallwahrscheinlichkeit einer produzierenden Maschine.

Bei vielen praktischen Anwendungen treffen jedoch beide Annahmen nicht zu. Speziell in der Kerntechnik haben blockierte Maschinen höhere Ausfallwahrscheinlichkeiten. Wir nehmen aus diesem Grunde an: Eine blockierte Maschine  $i$  besitzt eine beliebige Ausfallwahrscheinlichkeit  $c_i$ , die unabhängig von der Ausfallwahrscheinlichkeit im produzierenden Zustand ist.

Für die Maschinen legen wir dann die in Tabelle 4.1 angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten zugrunde:

| $\alpha_i(t+1)$ | $\alpha_i(t)$ | $n(t)$            | $p(\alpha_1(t+1)   n(t), \alpha_1(t))$ | $p(\alpha_2(t+1)   n(t), \alpha_2(t))$ |
|-----------------|---------------|-------------------|--|--|
| 1               | 0             | 0                 | $a_1$                                  | $c_2$                                  |
| 0               | 0             | 0                 | $1-a_1$                                | $1-c_2$                                |
| 1               | 0             | $N$               | $c_1$                                  | $a_2$                                  |
| 0               | 0             | $N$               | $1-c_1$                                | $1-a_2$                                |
| 1               | 0             | $0 < n < N$       | $a_1$                                  | $a_2$                                  |
| 0               | 0             | $0 < n < N$       | $1-a_1$                                | $1-a_2$                                |
| 1               | 1             | $0 \leq n \leq N$ | $1-b_1$                                | $1-b_2$                                |
| 0               | 1             | $0 \leq n \leq N$ | $b_1$                                  | $b_2$                                  |

Tabelle 4.1: Übergangswahrscheinlichkeiten der Maschinenzustände im allgemeinsten Fall.

Im übrigen gelten die gleichen Modellannahmen wie in Kapitel 3.

Wir erhalten dann das folgende allgemeine Gleichungssystem für die unteren Randzustände:

$$0 = - (a_1+a_2) \cdot p(00,0) + b_1 \cdot p(10,0) + b_1 \cdot p(10,1) \quad (4-1)$$

$$0 = a_1 \cdot p(00,0) - (b_1+c_2) \cdot p(10,0) + (1-b_1-a_2) \cdot p(10,1) + b_2 \cdot p(11,0) \quad (4-2)$$

$$p(01,0) = a_2 \cdot p(00,0) \quad b_1 \cdot p(11,0) \quad (4-3)$$

$$0 = c_2 \cdot p(10,0) + a_2 \cdot p(10,1) - (b_1+b_2) \cdot p(11,0) \quad (4-4)$$

für die internen Zustände

$$0 = - (a_1+a_2) \cdot p(00,n) + b_1 \cdot p(10,n+1) + b_2 \cdot p(01,n-1) \quad (4-5)$$

$$p(10,n) = a_1 \cdot p(00,n) + (1-b_1-a_2) \cdot p(10,n+1) + b_2 \cdot p(11,n) \quad (4-6)$$

$$p(01,n) = a_2 \cdot p(00,n) + (1-a_1-b_2) \cdot p(01,n-1) + b_1 \cdot p(11,n) \quad (4-7)$$

$$0 = a_2 \cdot p(10,n+1) + a_1 \cdot p(01,n-1) - (b_1+b_2) \cdot p(11,n) \quad , \quad (4-8)$$

und für die oberen Randzustände

$$0 = - (a_1+a_2) \cdot p(00,N) + b_2 \cdot p(01,N) + b_2 \cdot p(01,N-1) \quad (4-9)$$

$$p(10,N) = a_1 \cdot p(00,N) + b_2 \cdot p(11,N) \quad (4-10)$$

$$0 = a_2 \cdot p(00,N) - (c_1+b_2) \cdot p(01,N) + (1-a_1-b_2) \cdot p(01,N-1) + b_1 \cdot p(11,N) \quad (4-11)$$

$$0 = c_1 \cdot p(01,N) + a_1 \cdot p(01,N-1) - (b_1+b_2) \cdot p(11,N) \quad (4-12)$$

wobei

$$\sum_{\alpha_1 \alpha_2, n} p(\alpha_1 \alpha_2, n) = 1 \quad (4-13)$$

In den nächsten Abschnitten untersuchen wir die im 3. Kapitel vorgestellten Lösungsansätze auf ihre Verwendbarkeit für dieses Gleichungssystem. Bei einer einfachen Irrfahrt mit reflektierenden Schranken und identischen Übergangswahrscheinlichkeiten bekommt man eine Gleichverteilung der Zustandswahrscheinlichkeiten, während man im Falle unterschiedlicher Übergangswahrscheinlichkeiten eine abgeschnittene geometrische Verteilung

(siehe z.B. Cox [1965]) erhält. Es ist deshalb nicht zu erwarten, daß sich der Gleichverteilungsansatz für das erweiterte Modell als erfolgreich erweist.

4.1 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten und der Verfügbarkeit, bei vom Lagerzustand unabhängigem Ausfall- und Reparaturverhalten

Das Einlagermodell hat für diesen Fall die Parameter  $a_i, b_i, i=1,2$ , und da eine blockierte Maschine weiterhin ausfallen kann, gilt:  $c_i=a_i, i=1,2$ .

Der Faktorisierungsansatz ersparte uns eine erhebliche Rechenarbeit für die internen Zustände. Die Randgleichungen mußten wir durch sukzessives Einsetzen lösen. Wir betrachten deshalb die Gleichungen (4-1) bis (4-4) und erhalten nach einigen Umformungen

$$p(01,0) = p(10,1) = \frac{a_2(a_1+a_2+b_1+b_2)}{b_1+b_2} \cdot p(00,0) \quad (4-14)$$

$$p(10,0) = \frac{(a_1+a_2)(b_1+b_2)-a_2b_1(a_1+a_2+b_1+b_2)}{b_1(b_1+b_2)} \cdot p(00,0) \quad (4-15)$$

$$p(11,0) = \frac{a_2(a_1+a_2)}{b_1(b_1b_2)} \cdot p(00,0) \quad (4-16)$$

Mit dem Faktorisierungsansatz  $p(\alpha_1\alpha_2, n) = p(\alpha_1\alpha_2) \cdot p(n)$ ,  $n=1, \dots, N-1$  finden wir dann mit (4-9) bis (4-13) für die internen Gleichungen:

$$0 = -(a_1+a_2) \cdot p(n) + a_1 \cdot p(n+1) + a_2 \cdot p(n-1) \quad n=2, \dots, N-2 \quad (4-17)$$

$$p(n) = b_1 \cdot p(n) + (1-b_1-a_2) \cdot p(n+1) + a_2 \cdot p(n) \quad n=1, \dots, N-2 \quad (4-18)$$

$$p(n) = b_2 \cdot p(n) + a_2 \cdot p(n) + (1-a_1-b_2) \cdot p(n-1) \quad n=2, \dots, N-2 \quad (4-19)$$

$$0 = -(b_1+b_2) \cdot p(n) + b_2 \cdot p(n+1) + b_1 \cdot p(n-1) \quad n=2, \dots, N-2 \quad (4-20)$$

Hieraus folgt

$$p(n) = p(n+1) = p(n-1) = \text{const.} \quad (4-21)$$

und wir erhalten aus  $p(10,1)$

$$p(n) = p(1) = \frac{p(10,1)}{p(10)} = \frac{a_2(a_1+a_2+b_1+b_2)(a_1+b_1)(a_2+b_2)}{a_1b_2(b_1+b_2)} \cdot p(00,0) \quad (4-22)$$

Diese Lösung muß jedoch auch den oberen Randgleichungen genügen. Es ergibt sich ein Widerspruch, d.h. der Faktorisierungsansatz trägt nicht und man muß das lineare Gleichungssystem auf herkömmliche Weise lösen.

Wir betrachten nun die internen Gleichungen für  $n=1$  und erhalten:

$$0 = - (a_1+a_2) \cdot p(00,1) + b_1 \cdot p(10,2) + b_2 \cdot p(01,0) \quad (4-23)$$

$$p(10,1) = a_1 \cdot p(00,1) + (1-b_1-a_2) \cdot p(10,2) + b_2 \cdot p(11,1) \quad (4-24)$$

$$p(01,1) = a_2 \cdot p(00,1) + (1-a_1-b_2) \cdot p(01,0) + b_1 \cdot p(11,1) \quad (4-25)$$

$$0 = a_2 \cdot p(10,2) + a_1 \cdot p(01,0) - (b_1+b_2) \cdot p(11,1). \quad (4-26)$$

Addition dieser Gleichungen ergibt die Beziehung:

$$p(10,1) + p(01,1) = p(10,2) + p(01,0) \quad (4-27)$$

und aus  $p(10,1) = p(01,0)$  folgt:

$$p(01,1) = p(10,2).$$

Aus den Gleichungen (4-23), (4-24) bekommen wir zunächst:

$$p(00,1) = \frac{b_1}{a_1+a_2} \cdot p(10,2) + \frac{b_2 a_2 (a_1+a_2+b_1+b_2)}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)} \cdot p(00,0) \quad (4-23)'$$

$$p(11,1) = \frac{a_2(a_1+a_2+b_1+b_2)(a_1+a_2-a_1b_2)}{b_2(b_1+b_2)(a_1+a_2)} \cdot p(00,0) - \frac{a_1b_1+(a_1+a_2)(1-b_1-a_2)}{b_2(a_1+a_2)} \cdot p(10,2) \quad (4-24)'$$

Setzen wir (4-23)' und (4-24)' in (4-26) ein, so ergibt sich:

$$p(10,2) = \frac{a_2(a_1+a_2+b_1+b_2)}{b_1+b_2} \cdot \frac{(b_1+b_2-a_1b_2)(a_1+a_2)-a_1b_2(b_1+b_2)}{(b_1+b_2-a_2b_1)(a_1+a_2)-a_2b_1(b_1+b_2)} \cdot p(00,0) \quad (4-26)'$$

Mit der Definition

$$C := \frac{(b_1+b_2-a_1b_2)(a_1+a_2)-a_1b_2(b_1+b_2)}{(b_1+b_2-a_2b_1)(a_1+a_2)-a_2b_1(b_1+b_2)} \quad (4-28)$$

finden wir dann für  $n=1$  die Zustandswahrscheinlichkeiten:

$$p(11,1) = \frac{a_2(a_1+a_2+b_1+b_2)}{b_2(b_1+b_2)(a_1+a_2)} \cdot (a_1+a_2-a_1b_2-(a_1+a_2-a_1a_2-a_2b_1-a_2^2) \cdot C) \cdot p(00,0)$$

$$p(00,1) = \frac{(a_1+a_2+b_1+b_2)}{(b_1+b_2)(a_1+a_2)} \cdot (a_2b_2+a_2b_1 \cdot C) \cdot p(00,0) \quad (4-29)$$

$$p(01,1) = p(10,2) = \frac{a_2(a_1+a_2+b_1+b_2)}{b_1+b_2} \cdot C \cdot p(00,0)$$

Wir müssen nun die Zustandsgleichungen für  $n=2$  lösen. Sie lauten:

$$0 = -(a_1+a_2) \cdot p(00,2) + b_1 \cdot p(10,3) + b_2 \cdot p(01,1) \quad (4-30)$$

$$p(10,2) = a_1 \cdot p(00,2) + (1-b_1-a_2) \cdot p(10,3) + b_2 \cdot p(11,2) \quad (4-31)$$

$$p(01,2) = a_2 \cdot p(00,2) + (1-a_1-b_2) \cdot p(01,1) + b_1 \cdot p(11,2) \quad (4-32)$$

$$0 = a_2 \cdot p(10,3) + a_1 \cdot p(01,1) - (b_1+b_2) \cdot p(11,2). \quad (4-33)$$

Addition dieser Gleichungen liefert uns die Beziehung  $p(01,2) = p(10,3)$ .

Nach einigen Umformungen erhalten wir:

$$p(10,3) = p(01,2) = \frac{a_2(a_1+a_2+b_1+b_2)}{b_1+b_2} \cdot C^2 \cdot p(00,0)$$

$$p(11,2) = \frac{a_2(a_1+a_2+b_1+b_2)}{b_2(a_1+a_2)(b_1+b_2)} \cdot ((a_1+a_2-a_1b_2)-(a_1+a_2-a_1a_2-a_2b_1-a_2^2) \cdot C) \cdot C \cdot p(00,0) \quad (4-34)$$

$$p(00,2) = \frac{a_2(a_1+a_2+b_1+b_2)}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)} \cdot (b_2+b_1 \cdot C) \cdot C \cdot p(00,0)$$

Vergleicht man (4-29) mit (4-34), so stellt man fest: Die entsprechenden Zustandswahrscheinlichkeiten unterscheiden sich nur in der Potenz von C. Wir vermuten aus diesem Grunde folgende Gestalt für die internen Zustandswahrscheinlichkeiten:

$$p(00, n) = \frac{a_2(a_1+a_2+b_1+b_2)(b_2+C b_1)}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)} \cdot C^{n-1} \cdot p(00, 0)$$

$$p(01, n) = \frac{a_2(a_1+a_2+b_1+b_2)}{b_1+b_2} \cdot C^n \cdot p(00, 0)$$

n=1, ..., N-1 (4-35)

$$p(10, n) = \frac{a_2(a_1+a_2+b_1+b_2)}{b_1+b_2} \cdot C^{n-1} \cdot p(00, 0)$$

$$p(11, n) = \frac{a_2(a_1+a_2+b_1+b_2)}{b_2(a_1+a_2)(b_1+b_2)} \cdot (a_1+a_2-a_1b_2-(a_1+a_2-a_1a_2-a_2b_1-a_2)^2) \cdot C \cdot C^{n-1} \cdot p(00, 0)$$

Setzen wir diese Zustandswahrscheinlichkeiten in die internen Gleichungen ein, so werden sie uns bestätigt. Es müssen jedoch auch noch die oberen Randgleichungen (4-5) bis (4-8) erfüllt sein, bei denen der Zustand p(01, N-1) vorkommt. Addition dieser Gleichungen liefert die Beziehung p(10, N) = p(01, N-1) und nach mehrfachem sukzessiven Einsetzen erhält man:

$$p(01, N) = \frac{a_2(a_1+a_2)(b_1+b_2)-a_1a_2b_2(a_1+a_2+b_1+b_2)}{a_1b_2(b_1+b_2)} \cdot C^{N-1} \cdot p(00, 0)$$

$$p(00, N) = \frac{a_2}{a_1} \cdot C^{N-1} \cdot p(00, 0)$$

(4-36)

$$p(11, N) = \frac{a_2(a_1+a_2)}{b_2(b_1+b_2)} \cdot C^{N-1} \cdot p(00, 0)$$

$$p(10, 0) = \frac{a_2(a_1+a_2+b_1+b_2)}{b_1+b_2} \cdot C^{N-1} \cdot p(00, 0)$$

Die Ergebnisse in (4-36) erfüllen die oberen Randgleichungen, somit sind die Ergebnisse für die internen Zustände auch richtig. Mit (4-14), (4-15), (4-16), (4-35), (4-36) sind die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(\alpha_1 \alpha_2, n)$  bis auf  $p(00,0)$  bestimmt. Diesen Zustand berechnen wir mit Hilfe der Normierungsbedingung

$$\sum_{\alpha_1 \alpha_2, n} p(\alpha_1 \alpha_2, n) = 1 ;$$

wir erhalten  $p(00,0)$ , wobei  $C$  durch (4-28) definiert ist

$$p(00,0) = \left( \frac{(a_2 + b_1 + b_2)(a_1 + a_2) + b_1(b_1 + b_2)}{b_1(b_1 + b_2)} + \frac{C^{N-1} \cdot a_2 \cdot ((a_1 + b_1 + b_2) + b_2(b_1 + b_2))}{a_1 b_2 (b_1 + b_2)} \right. \\ \left. + \frac{(C^{N-1} - 1) \cdot a_2 (a_1 + a_2 + b_1 + b_2)}{(C-1)(b_1 + b_2)} \cdot \left( C + 1 + \frac{b_2 + C \cdot b_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_1 + a_2 - a_1 b_2 - (a_1 + a_2 - a_1 a_2 - a_2 b_1 - a_2^2) \cdot C}{b_2 (b_1 + b_2)} \right)^{-1} \right) \quad (4-37)$$

Nun können wir die Zustandswahrscheinlichkeiten explizit angeben und mit deren Hilfe die Systemverfügbarkeit bestimmen.

Nach (2-11) ist die ausgabeorientierte Systemverfügbarkeit gegeben durch

$$v_{SYS1-A}^{N,3} = \sum_{n=1}^N (p(00,n) + p(10,n)) + p(00,0) .$$

Wir finden dann

$$v_{SYS-A}^n = \frac{\frac{a_2 + b_2}{b_2} - \frac{a_1 + b_1}{b_1} \cdot \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2} \cdot C^N}{\frac{a_1 + b_1}{b_1} \cdot \frac{a_2 + b_2}{b_2} \cdot \left( 1 - \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2} \cdot C^N \right)} \quad (4-38)$$

Buzacott [1978] betrachtet ein Einlagermodell, bei dem mehr als ein Ereignis innerhalb eines Zyklus zugelassen ist, im übrigen geht er von den gleichen Modellannahmen aus. Er gibt eine Formel für die Systemverfügbarkeit an, die sich von (4-38) nur im Ausdruck für  $C$  unterscheidet.

Für  $a_1=0,1$ ;  $a_2=0,25$ ;  $b_1=0,35$ ;  $b_2=0,48$ ;  $N=6$  findet man

|                     | Buzacott  | Formel (4-38) |
|---------------------|-----------|---------------|
| C                   | 1,248918  | 1,246506      |
| Systemverfügbarkeit | 63,7215 % | 63,6937 %     |

Weitere numerische Ergebnisse ergeben ebenfalls nur sehr geringe Abweichungen zwischen den beiden Formeln. Die Annahme nur "ein Ergebnis innerhalb eines Zyklus" ist also nicht restriktiv.

Mit (2-10) definierten wir die Systemverfügbarkeit auch eingabeorientiert

$$v_{\text{SYS1-E}}^{N,3} = \sum_{n=0}^N \cdot p(00,n) + \sum_{n=0}^{N-1} \cdot p(01,n)$$

Wie man sofort sieht, erhält man wiederum (4-38), was nach Muth [1979] auch erforderlich ist.

Für  $N \rightarrow 0$  ist

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow 0} v_{\text{SYS1-A}}^{N,3} &= \frac{\frac{a_2+b_2}{b_2} - \frac{a_1+b_1}{b_1} \cdot \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2}}{\left(\frac{a_1+b_1}{b_1}\right) \cdot \left(\frac{a_2+b_2}{b_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2}\right)} = \frac{\left(1 - \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2}\right)}{\frac{(a_1+b_1)}{b_1} \cdot \left(\frac{a_2+b_2}{b_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2}\right)} \\ &= \frac{b_1 \cdot b_2}{(a_1+b_1) \cdot (a_2+b_2)} \end{aligned}$$

Für  $N \rightarrow \infty$  haben wir zwei Fälle zu untersuchen:

1. Fall:  $v_{\text{ein}}^1 > v_{\text{ein}}^2$

$$v_{\text{ein}}^1 = \frac{b_1}{a_1+b_1} = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{b_1}} = \left(1 + \frac{a_1}{b_1}\right)^{-1}$$

$$v_{\text{ein}}^2 = \left(1 + \frac{a_2}{b_2}\right)^{-1}$$

Falls  $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$ , ist  $V_{\text{ein}}^1 > V_{\text{ein}}^2$  und  $C < 1$ , somit gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V_{\text{SYS1-A}}^{N,3} = \frac{\frac{a_2+b_2}{b_2} - \overbrace{\left(\frac{a_1+b_1}{b_1}\right) \cdot \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2} \cdot C^N}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{\left(\frac{a_1+b_1}{b_1}\right) \cdot \left(\frac{a_2+b_2}{b_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2} \cdot C^N\right)}_{\rightarrow 0}} = \frac{b_1}{b_1+a_1} = V_{\text{ein}}^1$$

2. Fall:  $V_{\text{ein}}^2 > V_{\text{ein}}^1$

Falls  $\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2}$ , ist  $V_{\text{ein}}^1 < V_{\text{ein}}^2$  und  $C > 1$ , und wir erhalten mit l'Hospital nach N-maligem Ableiten:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V_{\text{SYS1-A}}^{N,3} = \frac{-N(N-1) \left( \dots, \dots, \frac{(a_1+b_1) \cdot a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot a_1 \cdot b_2} \cdot C \right)}{-N(N-1) \left( \dots, \dots, \left(\frac{a_1+b_1}{b_1}\right) \cdot \left(\frac{a_2+b_2}{b_2}\right) \cdot \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2} \cdot C \right)} = \frac{b_2}{b_2+a_2} = V_{\text{ein}}^2$$

Damit wurde gezeigt, daß die plausiblen aber nicht notwendigen Bedingungen an die Formel für die Systemverfügbarkeit erfüllt sind.

4.2 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten und der Verfügbarkeit bei identischen Maschinen, die im blockierten Zustand mit der Wahrscheinlichkeit c ausfallen können

Wir erweitern die Voraussetzung (ix) aus Abschnitt 3.3 wie folgt:

- eine blockierte Maschine besitzt die Ausfallwahrscheinlichkeit c.

Das Ausfallverhalten der Maschinen ist dann abhängig vom Lagerbestand. Im übrigen gelten die bekannten Voraussetzungen. Für ein Einlagermodell mit identischen Maschinen erhalten wir die Übergangsgleichungen, wenn wir in den Gleichungen (4-1) bis (4-12)  $a_i=a$ ,  $b_i=b$  und  $c_i=c$  für  $i=1,2$  setzen. Diese Übergangsgleichungen lösen wir mit dem im 3. Kapitel vorgestellten Faktorisierungsansatz.

Aus den unteren Randgleichungen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 p(10,1) &= \frac{2a(b+c)}{b(2-a+c)} \cdot p(00,0) \\
 p(10,0) &= \frac{2a(2-a-b)}{b(2-a+c)} \cdot p(00,0) \\
 p(01,0) &= \frac{2a(b+c)}{b(2-a+c)} \cdot p(00,0) \\
 p(11,0) &= \frac{a \cdot c(2-b) + a^2b}{b^2(2-a+c)} \cdot p(00,0)
 \end{aligned}
 \tag{4-39}$$

Mit dem Faktorisierungsansatz

$$p(\alpha_1 \alpha_2, n) = p(\alpha_1 \alpha_2) \cdot p(n)$$

für  $n=1, \dots, N-1$  ergibt sich aus  $p(10,1)$ :

$$p(n) = p(1) = \frac{p(10,1)}{p(10)} = \frac{2(b+c)(a+b)^2}{b^2(2-a+c)} \cdot p(00,0) \tag{4-40}$$

Wir können nun die internen Zustandswahrscheinlichkeiten bestimmen und bekommen für  $n=1, \dots, N-1$

$$\begin{aligned}
 p(00,n) &= \frac{2(b+c)}{2-a+c} \cdot p(00,0) \\
 p(10,n) = p(01,n) &= \frac{2a(b+c)}{b(2-a+c)} \cdot p(00,0) \\
 p(11,n) &= \frac{2a^2(b+c)}{b^2(2-a+c)} \cdot p(00,0)
 \end{aligned} \tag{4-41}$$

Mit dem Zustand  $p(01, N-1)$  haben wir den Übergang zu den oberen Randgleichungen. Daher ist es möglich, die oberen Randzustände zu berechnen und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 p(01,N) &= \frac{2a(2-a-b)}{b(2-a+c)} \cdot p(00,0) \\
 p(10,N) &= \frac{2a(b+c)}{b(2-a+c)} \cdot p(00,0) \\
 p(11,N) &= \frac{c \cdot a(2-b) + a^2b}{b^2(2-a+c)} \cdot p(00,0) \\
 p(00,N) &= p(00,0)
 \end{aligned} \tag{4-42}$$

Wie man sieht, sind folgende Identifikationen möglich:

$$\begin{aligned}
 p(01,n) = p(10,n) = p(10,N) = p(01,0) & \quad n=1, \dots, N-1 \\
 p(00,0) = p(00,N) & \\
 p(01,N) = p(10,0) & \\
 p(11,0) = p(11,N) &
 \end{aligned} \tag{4-43}$$

Wir erhalten also im Endeffekt nur 6 unterschiedliche Zustandswahrscheinlichkeiten, die wir auch durch einen Gleichverteilungsansatz hätten herleiten können.

Setzt man in (4-39), (4-41), (4-42)  $c=0$ , so erhält man die Ergebnisse von Buzacott [1968]. Für  $c=a$  erhält man die im 3. Kapitel hergeleiteten Zustandswahrscheinlichkeiten.

Zur Bestimmung von  $p(00,0)$  nehmen wir die Normierungsgleichung (4-13).  
Aus ihr ergibt sich:

$$p(00,0) = \frac{b^2(2-a+c)}{2(N(a+b)^2(c+b)+(ac+2ab+b^2)(2-a-b))} \quad (4-44)$$

Für  $c=0$  bzw.  $c=a$  stimmt (4-44) wieder mit den bekannten Ergebnissen überein. Mit der Definition (2-11) und den Zustandswahrscheinlichkeiten (4-39), (4-41), (4-42), (4-44) läßt sich dann auch die Verfügbarkeit eindeutig bestimmen:

$$v_{SYS1-A}^{N,4} = \frac{b^2(2-a-b) + N \cdot b(a+b)(c+b)}{N(a+b)^2(c+b) + (ac+2ab+b^2)(2-a-b)}$$

Für  $N \rightarrow 0$  erhalten wir die Systemverfügbarkeit ohne Zwischenlager, die im 2. Kapitel abgeleitet wurde:

$$\lim_{N \rightarrow 0} v_{SYS1-A}^{N,4} = \frac{b^2}{ac+2ab+b^2}$$

Für  $N \rightarrow \infty$  ist sie gegeben durch die Einzelverfügbarkeiten der Maschinen:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} v_{SYS1-A}^{N,4} = \frac{b}{a+b} = v_{ein}$$

Auch für dieses Modell leiten wir im nächsten Abschnitt die ergodischen Zustandswahrscheinlichkeiten für den Fall unterschiedlicher Systemparameter der Verarbeitungseinheiten ab. Dieser Fall ist in der Praxis am häufigsten anzutreffen.

#### 4.3 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten und der Verfügbarkeit für den allgemeinen Fall

Bei diesem Modell besitzen die Maschinen die Ausfall- und Reparaturwahrscheinlichkeiten  $a_i$  und  $b_i$ ,  $i=1,2$ . Blockierte Maschinen fallen mit der Wahrscheinlichkeit  $c_i$ ,  $i=1,2$  aus. Die diesem Modell entsprechenden Übergangsgleichungen (4-1) bis (4-12) lösen wir durch sukzessives Einsetzen. Da kein neuer Ansatz verwendet wird, geben wir hier sofort die Zustands-

wahrscheinlichkeiten an:

$$p(01,0) = \frac{a_2(b_1+b_2)+c_2(a_1+a_2)}{b_1+b_2-b_1(a_2-c_2)} \cdot p(00,0)$$

$$p(10,0) = \frac{(b_1+b_2)(a_1+a_2-a_2b_1)-(a_1+a_2)(b_1(a_2-c_2)+c_2b_1)}{b_1(b_1+b_2-b_1(a_2-c_2))} \cdot p(00,0)$$

$$p(11,0) = \frac{c_2(a_1+a_2-a_2b_1)+b_1a_2^2}{b_1(b_1+b_2-b_1(a_2-c_2))} \cdot p(00,0)$$

$$p(00,n) = C^{n-1} \cdot p(10,1) \cdot \frac{b_1 \cdot C + b_2}{a_1 + a_2}$$

$$p(01,n) = C^n \cdot p(10,1)$$

$$p(10,n) = C^{n-1} \cdot p(10,1)$$

(4-45)

$$p(11,n) = C^{n-1} \cdot p(10,1) \cdot \frac{a_1+a_2-a_1b_2((a_1+a_2)(1-b_1-a_2)+a_1b_1) \cdot C}{b_2(a_1+a_2)}$$

$$p(01,N) = \frac{c_2(a_1+a_2)+a_2(b_1+b_2)}{c_1(a_1+a_2)+a_1(b_1+b_2)} \cdot \frac{(a_1+b_2)(b_1+b_2)-a_1b_2(a_1+a_2+b_1+b_2)}{b_2(b_1+b_2-b_1(a_2-c_2))} \cdot C^{N-1} \cdot p(00,0)$$

$$p(10,N) = \frac{a_2(b_1+b_2)+c_2(a_1+a_2)}{b_1+b_2-b_1(a_2-c_2)} \cdot C^{N-1} \cdot p(00,0)$$

$$p(11,N) = \frac{c_1(a_1+a_2-a_1b_2)+a_1^2b_2}{b_2(b_1+b_2-b_1(a_2-c_2))} \cdot \frac{a_2(b_1+b_2)+c_2(a_1+a_2)}{a_1(b_1+b_2)+c_1(a_1+b_2)} \cdot C^{N-1} \cdot p(00,0)$$

$$p(00,N) = \frac{a_1(b_1+b_2)(a_2(b_1+b_2)+c_2(b_1+b_2)-a_2b_2(a_1-c_1)-(a_1-c_1)(a_1+a_2)a_1b_2c_2}{a_1(b_1+b_2-b_1(a_2-c_2))(c_1(a_1+a_2)+a_1(b_1+b_2))}$$

$$\cdot c^{N-1} \cdot p(00,0)$$

wobei

$$c = \frac{(b_1+b_2-a_1b_2)(a_1+a_2)-a_1b_2(b_1+b_2)}{(b_1+b_2-a_2b_1)(a_1+a_2)-a_2b_1(b_1+b_2)}$$

und

$$p(10,1) = \frac{a_2(b_1+b_2)+c_2(a_1+a_2)}{b_1+b_2-b_1(a_2-c_2)} \cdot p(00,0)$$

Für  $c_i=0$  bzw.  $c_i=a_i$ ,  $i=1,2$  stimmen diese Lösungen mit den in Kapitel 3 erzielten Ergebnissen überein. Da diese Lösungen (4-45) schon recht kompliziert sind, wurde die Normierung und die Berechnung der Verfügbarkeit numerisch durchgeführt. Die nachfolgende Tabelle 4.2 enthält einige Zahlenbeispiele, die den Einfluß der Ausfallwahrscheinlichkeiten  $c_i$  deutlich machen.

| $a_1$ | $a_2$ | $b_1$ | $b_2$ | $V_1$ | $V_2$ | $V_{SYS1-A}^{N,3}$<br>$c_i=a_i$ | $V_{SYS}$<br>$c_i=0$ | $c_1$  | $c_2$  | $V_{SYS}$<br>$c_1,c_2$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------------------------|----------------------|--------|--------|------------------------|
| 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 75    | 66,6  | 62,048                          | 62,80                | 0,05   | 0,1    | 62,38                  |
|       |       |       |       |       |       |                                 |                      | 0,3    | 0,6    | 61,19                  |
| 0,015 | 0,023 | 0,1   | 0,2   | 66,9  | 89,68 | 81,02                           | 81,55                | 0,0075 | 0,0115 | 81,28                  |
|       |       |       |       |       |       |                                 |                      | 0,15   | 0,23   | 77,69                  |
| 0,048 | 0,027 | 0,09  | 0,07  | 65,2  | 72,16 | 51,92                           | 55,07                | 0,024  | 0,013  | 53,41                  |
|       |       |       |       |       |       |                                 |                      | 0,48   | 0,27   | 41,45                  |
|       |       |       |       |       |       |                                 |                      | 0,24   | 0,13   | 45,25                  |
| 0,08  | 0,09  | 0,18  | 0,12  | 69,2  | 57,1  | 48,4                            | 50,73                | 0,04   | 0,045  | 49,42                  |
|       |       |       |       |       |       |                                 |                      | 0,8    | 0,9    | 42,91                  |
|       |       |       |       |       |       |                                 |                      | 0,4    | 0,45   | 44,53                  |
| 0,08  | 0,09  | 0,09  | 0,06  | 52,9  | 40    | 28,38                           | 32,38                | 0,04   | 0,45   | 30,11                  |
|       |       |       |       |       |       |                                 |                      | 0,8    | 0,9    | 22,25                  |
|       |       |       |       |       |       |                                 |                      | 0,4    | 0,45   | 23,66                  |

**Tabelle 4.2:** Einfluß der Ausfallwahrscheinlichkeit blockierter Maschinen eines Einlagermodells mit der Zwischenlagerkapazität von 5 Werkstücken.

Für  $0 < c_i < a_i$  liegt die Systemverfügbarkeit erwartungsgemäß zwischen der Systemverfügbarkeit mit  $c_i = a_i$  und  $c_i = 0$ . Falls  $c_i > a_i$  so zeigt sich, daß die Verfügbarkeit  $V_{\text{SYS1-A}}^{N,3}$  sinkt. Die Ergebnisse in Tabelle 4.1 lassen erkennen, daß die Ausfallwahrscheinlichkeiten blockierter Maschinen einen erheblichen Einfluß auf die Systemverfügbarkeit haben können.

## 5. Prozeßsysteme mit zwei Zwischenlagern und drei unzuverlässigen Maschinen

In diesem Kapitel analysieren wir ein Produktionssystem, das aus zwei endlichen Zwischenlagern und drei unzuverlässigen Maschinen besteht. Zunächst stellen wir die in der Literatur bekannten Modelle vor. Anschließend formulieren wir die Modellannahmen für ein Zweilagermodell und leiten die Zustandsgleichungen her, die wir dann numerisch lösen. Wir zeigen die Symmetrien zwischen Zustandswahrscheinlichkeiten auf und geben eine geschlossene analytische Lösung für einen Spezialfall an.

### 5.1 Übersicht über bestehende Modelle

Im Gegensatz zum Einlagermodell werden in der Literatur Mehrlagermodelle nur von wenigen Autoren analytisch behandelt, da sie wesentlich komplexer sind als Einlagermodelle, insbesondere was die Randzustände anbelangt.

Entsprechend Kapitel 2 kann man Produktionssysteme unterteilen in Produktionssysteme ohne, mit endlichen oder mit unendlichen Zwischenlagern, und in Systeme, bei denen die Maschinen zuverlässig oder unzuverlässig sein können. Sind die Maschinen zuverlässig, so besitzen sie eine stochastische Bearbeitungszeit pro Werkstück, sind sie unzuverlässig, so haben sie stochastische Betriebs- und Reparaturzeiten.

Produktionssysteme ohne und mit unendlichen Zwischenlagern behandeln analytisch Barlow, Proschan [1975], Buzacott [1967a], [1968], Hunt [1956] und Hillier und Boling [1966].

Einige Autoren analysieren zuverlässige Produktionssysteme, bei denen endliche Lager die Prozeßschwankungen der stochastischen Bearbeitungszeiten auffangen sollen (Muth [1973], Hunt [1956], Hillier und Boling [1966], Hatcher [1969]). Für ein Zweilagermodell, bei dem die Maschinen exponentiellverteilte Bearbeitungszeiten besitzen, geben Hillier und Boling [1966] numerische Ergebnisse an. Zwar stellt Hatcher [1969] für diesen Fall eine analytische Lösung vor, diese wird aber von Knott [1970] durch ein Beispiel widerlegt. Auch Muth [1973] gelingt es nicht, eine geschlossene analytische Lösung zu finden.

Unzuverlässige Produktionssysteme sind noch komplizierter, daher bietet sich ihre Simulation an (Domke [1966], Gross-Hardt [1966], Rudolph [1966], Anderson and Moodie [1969], Hanifin, Liberty und Taramon [1975], Kay [1972], Stetten [1977], De la Wyche, Wild [1977], Ho, Eyler und Chien [1979], Janisch [1979]).

Heuristische und approximative Methoden verwenden Buzacott [1967a] und [1967b], Sevastyanov [1962], Masso und Smith [1974], Zimmern [1956], Murphey [1978] und [1979], Luithle, Pentz und Schene [1978], Vladziesvskii [1967], Knott [1970].

Analytische Methoden werden bei unzuverlässigen Produktionssystemen nur von Sheskin [1976] und von einer Forschungsgruppe am Massachusetts Institute of Technology (MIT) von Gershwin und Schick [1978], [1979], [1980] und von Gershwin und Ammar [1979] eingesetzt. Auf diese Methoden werden wir im folgenden näher eingehen.

Sheskin [1976] gibt eine Formel für die Systemverfügbarkeit seines Einlagermodells an und präsentiert numerische Ergebnisse von Produktionssystemen mit bis zu vier unzuverlässigen Maschinen und drei Lagern. Er verwendet folgendes Annahmesystem:

- (i) Ausfall- und Reparaturdauern sind geometrisch verteilt mit der Bedingung:  $a_i + b_i = 1$ .
- (ii) Auch blockierte Maschinen haben die Ausfallwahrscheinlichkeit  $a_i$ , d.h. Maschinen ändern ihre Zustände unabhängig vom Lagerbestand.
- (iii) Der Produktionsablauf ist: Laden (auch blockierter Maschinen), Produzieren, Entladen.
- (iv) Ausfall und Reparatur erfolgen am Ende eines Zyklus.
- (v) Innerhalb eines Zyklus ist mehr als ein Ereignis zugelassen.

Sheskin konstruiert durch die Annahme  $a_i + b_i = 1$  einen Bernoulli-Prozeß (siehe z.B. Feller [1968]), bei dem in jedem Zyklus der Übergang einer Maschine in den Zustand intakt oder defekt unabhängig vom Zustand der Maschine im vorherigen Zyklus ist:

$$\begin{aligned} p(\alpha_i(t+1)=1 \mid \alpha_i(t)=0) &= p(\alpha_i(t+1)=1 \mid \alpha_i(t)=1) \\ p(\alpha_i(t+1)=0 \mid \alpha_i(t)=0) &= p(\alpha_i(t+1)=0 \mid \alpha_i(t)=1) . \end{aligned}$$

Dadurch und wegen Annahme (ii) wird erreicht, daß jeder Zustand des Systems sich darstellen läßt in der Form:

$$p(\alpha_1, \dots, \alpha_k, n_1, \dots, n_{k-1}) = p(\alpha_1) \cdot p(\alpha_2), \dots, p(\alpha_k) \cdot p(n_1), \dots, p(n_{k-1}) .$$

Das Systemverhalten läßt sich dann aufgliedern in die Analyse der Maschinenzustände und in die Analyse der Lagerzustände. Die ursprüngliche Übergangsmatrix wird reduziert und es sind kleinere Gleichungssysteme zu lösen. Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf werden bei numerischen Rechnungen verringert, dies erkaufte man sich jedoch durch die unrealistische Annahme (i), die bei Anwendungen in den seltensten Fällen erfüllt sein wird. Auch ist es Sheskin dadurch nicht gelungen, analytische Ergebnisse für Mehrlagermodelle abzuleiten.

Gershwin und Schick [1978] beschrieben formal das Systemverhalten eines k-Lagermodells. Sie treffen ähnliche Annahmen wie Sheskin, u.a.:

- (i) Ausfall- und Reparaturdauern sind geometrisch verteilt mit den Parametern  $a_i$  und  $b_i$ .
- (ii) Blockierte Maschinen können nicht ausfallen.
- (iii) Ausfall und Reparatur einer Maschine erfolgen am Anfang eines Zyklus.
- (iv) Der Produktionsablauf ist: Laden (nur intakter und nicht blockierter Maschinen), Produzieren, Entladen.

Mit den ersten beiden Abwandlungen gestalten sie ihr Modell realistischer. Für (i) trifft dies ohne Vorbehalte zu; für (ii) wurde ein anderes Extrem gewählt. Realistischer wäre in diesem Fall, die Ausfallwahrscheinlichkeit einer blockierten Maschine unabhängig von  $a_i$  zu wählen. Annahmen (iii) und (iv) sind Definitionssache, die allerdings einen entscheidenden Einfluß auf die Struktur der Übergangsmatrix und Gleichungen haben. Die internen Gleichungen werden formal für k-Lagermodelle angegeben. Für  $k > 2$  werden die Randgleichungen nicht allgemein, sondern durch ein Rechenpro-

gramm aufgestellt. Nun ist bekannt, daß sich für Warteschlangenprobleme sogenannte "product-form solutions" finden lassen. Baskett, Chandy, Muntz und Palacios [1975] formulieren ein Theorem für eine bestimmte Klasse von Warteschlangenproblemen, mit dessen Hilfe zeigen sie: Die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten sind gegeben durch ein Produkt einer Menge von Termen, die jeweils nur von einer Zustandsvariablen abhängen (product-form solution). Gershwin und Schick übernehmen für die internen Zustände die "product-form solution", d.h. sie treffen den Ansatz:

$$p(\alpha_1, \dots, \alpha_k, n_1, \dots, n_{k-1}) = \sum_{j=1}^{\ell} C_j X_{1j}^{n_1} \dots X_{k-1,j}^{n_{k-1}} Y_{1,j}^{\alpha_1} \dots Y_{k,j}^{\alpha_k}$$

wobei  $C_j$ ,  $X_{1j}$ ,  $Y_{1j}$  so zu bestimmen sind, daß sie die internen Gleichungen erfüllen. Für die Randzustände soll gelten:

$$p(\alpha_1, \dots, \alpha_k, n_1, \dots, n_{k-1}) = \sum_{j=1}^{\ell} C_j \cdot \xi[\alpha_1, \dots, \alpha_k, n_1, \dots, n_{k-1}, X_{1j}, \dots, X_{k-1,j}, Y_{1j}, \dots, Y_{kj}] \cdot$$

Durch diese Ansätze wird eine Reduktion der Zahl der ursprünglichen Gleichungen erreicht. Beim Einlagermodell reduziert sich z.B. die Anzahl der Gleichungen von  $4(N+1)$  auf zwei Gleichungen und beim Zweilagermodell von  $8(N_1+1)(N_2+1)$  auf  $4(N_1+N_2)-10$  Gleichungen. Jedoch können nur beim Einlagermodell die Parameter  $C_j$ ,  $X_{1j}$ ,  $Y_{1j}$  bestimmt werden, so daß alle Gleichungen erfüllt sind. Beim Zweilagermodell können diese Parameter nur so bestimmt werden, daß alle internen Zustandsgleichungen und einige Randgleichungen erfüllt sind. Dies gelingt nicht für alle Randgleichungen; die Validität der Ansätze bleibt offen (vgl. Hatcher[1969]).

Darüber hinaus behandeln Gershwin und Schick das Problem numerisch. Sie haben dabei erhebliche Schwierigkeiten, Zweilagermodelle mit großen Zwischenlagerkapazitäten zu berechnen, denn der Speicherplatzbedarf nimmt sehr stark zu. Unter Ausnutzung der Struktur und der Tatsache, daß die Übergangsmatrix schwach besetzt ist, werden numerische Ergebnisse bis

$N_1=N_2=10$  angegeben. Aufgrund der geänderten Voraussetzungen sind die Ergebnisse nicht mit denen von Sheskin zu vergleichen.

Im nächsten Abschnitt formulieren wir Modellannahmen, die auf den in Kapitel 3 genannten Voraussetzungen aufbauen und leiten daraus die Zustandsgleichungen für ein Zweilagermodell ab.

## 5.2 Modellannahmen und Herleitung der Zustandsgleichungen und Systemverfügbarkeiten

Wir erweitern zunächst den Zustandsraum aus Abschnitt 3.1. Für jede Maschine eines Zweilagermodells definieren wir die Variable  $\alpha_i$  wie folgt:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{falls Maschine } i \text{ intakt} \\ 1 & \text{falls Maschine } i \text{ defekt} \end{cases} \quad i=1,2,3 \quad (5-1)$$

Die Variablen  $n_1, n_2$  definieren wie als die Lagerbestände der beiden Zwischenlager, die eine maximale Kapazität von  $N_1$  bzw.  $N_2$  Mengeneinheiten haben. Der Zustand des Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  ist dann darstellbar durch den Vektor

$$X(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), n_1(t), n_2(t)) ; \quad (5-2a)$$

der stationäre Zustand wird entsprechend mit

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1 n_2) \quad (5-2b)$$

bezeichnet. Aus (5-1) und (5-2a) folgt, daß die Anzahl der möglichen Systemzustände  $8(N_1+1)(N_2+1)$  beträgt.

Wir nennen Zustände mit  $0 < n_i < N_i$   $i=1,2$  *interne Zustände* und Zustände mit  $n_i \in \{0, N_i\}$  *Randzustände*.

Für das Systemverhalten eines Zweilagermodells übernehmen wir die Annahmen aus Abschnitt 3.2 mit den Erweiterungen:

- (X) Eine blockierte Maschine besitzt die Ausfallwahrscheinlichkeit  $c_i$ ,  $i=1,2,3$ .
- (XI) Die Ausfall- und Reparaturdauern sind geometrisch verteilt mit Parametern  $a_i$  und  $b_i$ ;  $i=1,2,3$ .

Wir stellen nun die allgemeinen Zustandsgleichungen auf. Die Anzahl der Gleichungen bei einem Zweilagermodell beträgt 72, wenn wir entsprechend Bild 5.1 für jeden inneren Zustand und für jeden inneren Randzustand eine allgemeine Gleichung angeben.

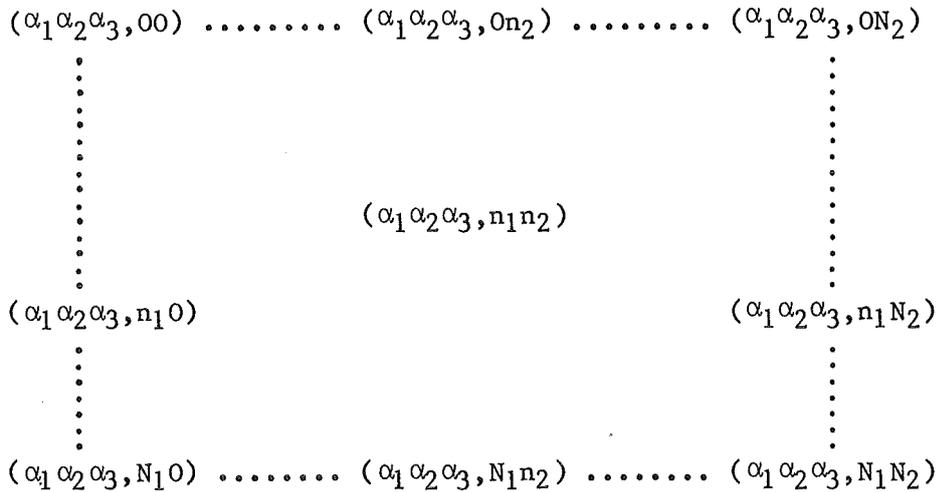


Bild 5.1: Allgemeine Gleichungen für ein Zweilagermodell  
(pro Ecke, Rand und interne Zustände je 8 Gleichungen).

Zu diesem Zweck müssen wir das Übergangsverhalten der Maschinen und der Lagerzustände festlegen. Mit unserem Annahmesystem erhalten wir die in Tabelle 5.1 enthaltenen Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(\alpha_i(t+1) \mid n_{i-1}(t), n_i(t), \alpha_{i-1}(t), \alpha_i(t), \alpha_{i+1}(t)).$$

Wie man sieht, existiert ein Informationskanal zwischen benachbarten Maschinen. Dadurch erreicht man, daß z.B. im Zustand  $(000, N_1 N_2)$  die Maschinen 1 und 2 trotz Blockade entladen und geladen werden können und ein Übergang in den Zustand  $(000, N_1 N_2)$  mit Wahrscheinlichkeit  $1-a_1-a_2-a_3$  existiert.

Das Übergangsverhalten der Lagerzustände beschreiben wir mit den Zufallsvariablen  $\alpha_i(t)$  und  $n_i(t)$  wie in Tabelle 5.2 angegeben.

Mit dem Übergangsverhalten der Maschinen und der Lagerzustände können wir die allgemeinen Zustandsgleichungen eines k-Lagermodells aufstellen. Dies ist jedoch mit einem sehr großen Aufwand verbunden, und wir leiten nur die Zustandsgleichungen eines Zweilagermodells her.

| $n_{i-1}(t)$            | $n_i(t)$              | $\alpha_{i-1}(t)$ | $\alpha_i(t)$ | $\alpha_{i+1}(t)$ | $\alpha_i(t+1)$ | Wahrscheinlichkeit |
|-------------------------|-----------------------|-------------------|---------------|-------------------|-----------------|--------------------|
| -                       | -                     | -                 | 1             | -                 | 0               | $b_i$              |
| -                       | -                     | -                 | 1             | -                 | 1               | $1-b_i$            |
| $0 < n_{i-1} < N_{i-1}$ | $0 \leq n_i < N_i$    | -                 | 0             | -                 | 0               | $1-a_i$            |
|                         |                       |                   | 0             |                   | 1               | $a_i$              |
| $0 < n_{i-1} < N_{i-1}$ | $N_i$                 | -                 | 0             | 1                 | 0               | $1-c_i$            |
|                         |                       |                   | 0             |                   | 1               | $c_i$              |
| $0 < n_{i-1} < N_{i-1}$ | $N_i$                 | -                 | 0             | 0                 | 0               | $1-a_i$            |
|                         |                       |                   | 0             |                   | 1               | $c_i$              |
| 0                       | $0 \leq n_i < N_i$    | 0                 | 0             | -                 | 0               | $1-a_i$            |
|                         |                       |                   | 0             |                   | 1               | $a_i$              |
| 0                       | $N_i$                 | 0                 | 0             | 0                 | 0               | $1-a_i$            |
|                         |                       |                   | 0             |                   | 1               | $a_i$              |
| 0                       | $N_i$                 | 0                 | 0             | 1                 | 0               | $1-c_i$            |
|                         |                       |                   | 0             |                   | 1               | $c_i$              |
| 0                       | $0 \leq n_i \leq N_i$ | 1                 | 0             | -                 | 0               | $1-c_i$            |
|                         |                       |                   | 0             |                   | 1               | $c_i$              |
| $N_{i-1}$               | $0 \leq n_i < N_i$    | -                 | 0             | -                 | 0               | $1-a_i$            |
|                         |                       |                   | 0             |                   | 1               | $a_i$              |
| $N_{i-1}$               | $N_i$                 | -                 | 0             | 0                 | 0               | $1-a_i$            |
|                         |                       |                   | 0             |                   | 1               | $a_i$              |
| $N_{i-1}$               | $N_i$                 | -                 | 0             | 1                 | 0               | $1-c_i$            |
|                         |                       |                   | 0             |                   | 1               | $c_i$              |

Tabelle 5.1: Übergangswahrscheinlichkeiten der Maschinenzustände  $\alpha_i(t)$  mit  $n_i(t)=\infty$  für  $i < 1$  und  $i \geq k$  und  $\alpha_i(t)=0$  für  $i < 1$  und  $i \geq k+1$ .

| $n_{\ell-1}(t)$ | $n_{\ell}(t), \dots, n_{i-2}(t)$ | $n_{i-1}(t)$ | $n_i(t)$   | $n_{i+1}(t)$ | $n_{i+2}(t), \dots, n_j(t)$ | $n_{j+1}(t)$ | $n_i(t+1)$   |
|-----------------|----------------------------------|--------------|------------|--------------|-----------------------------|--------------|--|
| $>0$            | $0$                              | $0$          | $>0, <N_i$ | $N_{i+1}$    | $N_{i+2}, \dots, N_j$       | $<N_{j+1}$   | $n_i(t)$<br>$+(1-\max_{\ell \leq s \leq t} \alpha_s(t)) \cdot \max_{i+1 \leq s \leq j+1} \alpha_s(t)$<br>$-(1-\max_{i+1 \leq s \leq j+1} \alpha_s(t)) \cdot \max_{\ell \leq s \leq t} \alpha_s(t)$ |
| $>0$            | $0$                              | $0$          | $0$        | $N_{i+1}$    | $N_{i+2}, \dots, N_j$       | $<N_{j+1}$   | $n_i(t)$<br>$+(1-\max_{\ell \leq s \leq i} \alpha_s(t)) \cdot \max_{i+1 \leq s \leq j+1} \alpha_s(t)$  |
| $>0$            | $0$                              | $0$          | $N_i$      | $N_{i+1}$    | $N_{i+2}, \dots, N_j$       | $<N_{j+1}$   | $n_i(t)$<br>$-(1-\max_{i+1 \leq s \leq j+1} \alpha_s(t)) \cdot \max_{\ell \leq s \leq i} \alpha_s(t)$  |

Tabelle 5.2: Übergangsverhalten der Lagerbestände mit  $n_i(t)=\infty$  für  $i < l$  und  $i \geq k$  und  $\alpha_i(t)=0$  für  $i < l$  und  $i \geq k+1$ .

Die internen Gleichungen lauten für  $0 < n_i < N_i$ ,  $i=1,2$ :

$$p(111, n_1 n_2) = (1-b_1-b_2-b_3) \cdot p(111, n_1 n_2) + a_3 \cdot p(110, n_1 n_2 + 1) \\ + a_2 \cdot p(101, n_1 + 1 n_2 - 1) + a_1 \cdot p(011, n_1 - 1 n_2)$$

$$p(110, n_1 n_2) = b_3 \cdot p(111, n_1 n_2) + (1-b_1-b_2-a_3) \cdot p(110, n_1 n_2 + 1) \\ + a_2 \cdot p(100, n_1 + 1 n_2) + a_1 \cdot p(010, n_1 - 1 n_2 + 1)$$

$$p(101, n_1 n_2) = b_2 \cdot p(111, n_1 n_2) + (1-b_1-b_3-a_2) \cdot p(101, n_1 + 1 n_2 - 1) \\ + a_3 \cdot p(100, n_1 + 1 n_2) + a_1 \cdot p(001, n_1 n_2 - 1)$$

$$p(100, n_1 n_2) = a_1 \cdot p(000, n_1 n_2) + (1-b_1-a_2-a_3) \cdot p(100, n_1 + 1 n_2) \\ + b_3 \cdot p(101, n_1 + 1 n_2 - 1) + b_2 \cdot p(110, n_1 n_2 + 1)$$

$$p(011, n_1 n_2) = a_2 \cdot p(001, n_1 n_2 - 1) + a_3 \cdot p(010, n_1 - 1 n_2 + 1) \\ + (1-a_1-b_2-b_3) \cdot p(011, n_1 - 1 n_2) + b_1 \cdot p(111, n_1 n_2)$$

$$p(010, n_1 n_2) = a_2 \cdot p(000, n_1 n_2) + (1-a_1-b_2-a_3) \cdot p(010, n_1 - 1 n_2 + 1) \\ + b_3 \cdot p(011, n_1 - 1 n_2) + b_1 \cdot p(110, n_1 n_2 + 1)$$

$$p(001, n_1 n_2) = a_3 \cdot p(000, n_1 n_2) + (1-a_1-a_2-b_3) \cdot p(001, n_1 n_2 - 1) \\ + b_2 \cdot p(011, n_1 - 1 n_2) + b_1 \cdot p(101, n_1 + 1 n_2 - 1)$$

$$p(000, n_1 n_2) = (1-a_1-a_2-a_3) \cdot p(000, n_1 n_2) + b_3 \cdot p(001, n_1 n_2 - 1) \\ + b_2 \cdot p(010, n_1 - 1 n_2 + 1) + b_1 \cdot p(100, n_1 + 1 n_2)$$

Die Zustandsgleichungen für die Ecke  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, 00)$  lauten:

$$p(111, 00) = (1-b_1-b_2-b_3) \cdot p(111, 00) + a_3 \cdot p(110, 01) + c_3 \cdot p(110, 00) + c_2 \cdot p(101, 00)$$

$$p(110, 00) = b_3 \cdot p(111, 00) + (1-b_1-b_2-a_3) \cdot p(110, 01) + (1-b_1-b_2-c_3) \cdot p(110, 00) \\ + c_2 \cdot p(100, 01) + c_2 \cdot p(100, 10) + c_2 \cdot p(100, 00)$$

$$p(101, 00) = b_2 \cdot p(111, 00) + (1-b_1-c_2-b_3) \cdot p(101, 00) + a_3 \cdot p(100, 01) + a_3 \cdot p(100, 10) \\ + c_3 \cdot p(100, 00)$$

$$p(100, 00) = a_1 \cdot p(000, 00) + b_2 \cdot p(110, 01) + b_2 \cdot p(110, 00) + b_3 \cdot p(101, 00) \\ + (1-b_1-c_2-a_3) \cdot p(100, 01) + (1-b_1-c_2-c_3) \cdot p(100, 00) \\ + (1-b_1-a_2-a_3) \cdot p(100, 10)$$

$$p(011, 00) = b_1 \cdot p(111, 00)$$

$$p(010, 00) = a_2 \cdot p(000, 00) + b_1 \cdot p(110, 01) + b_1 \cdot p(110, 00)$$

$$p(001, 00) = a_3 \cdot p(000, 00) + b_1 \cdot p(101, 00)$$

$$p(000, 00) = (1-a_1-a_2-a_3) \cdot p(000, 00) + b_1 \cdot p(100, 01) + b_1 \cdot p(100, 10) + b_1 \cdot p(100, 00)$$

Die Zustandsgleichungen für den Rand  $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3, ON_2)$  mit  $0 < n_2 < N_2$  lauten:

$$\begin{aligned}
 p(111, ON_2) &= (1-b_1-b_2-b_3) \cdot p(111, ON_2) + a_3 \cdot p(110, ON_2+1) + a_2 \cdot p(101, 1n_2-1) \\
 &\quad + c_2 \cdot p(101, ON_2) \\
 p(110, ON_2) &= b_3 \cdot p(111, ON_2) + (1-b_1-b_2-a_3) \cdot p(110, ON_2+1) + a_2 \cdot p(100, 1n_2) \\
 &\quad + c_2 \cdot p(100, ON_2+1) \\
 p(101, ON_2) &= b_2 \cdot p(111, ON_2) + (1-b_1-a_2-b_3) \cdot p(101, 1N_2-1) + a_3 \cdot p(100, 1n_2) \\
 &\quad + (1-b_1-c_2-b_3) \cdot p(101, ON_2) + a_3 \cdot p(100, ON_2+1) + a_1 \cdot p(001, ON_2-1) \\
 p(100, ON_2) &= a_1 \cdot p(000, ON_2) + b_2 \cdot p(110, ON_2+1) + b_3 \cdot p(101, 1n_2-1) + b_3 \cdot p(101, ON_2) \\
 &\quad + (1-b_1-a_2-a_3) \cdot p(100, 1n_2) + (1-b_1-c_2-a_3) \cdot p(100, ON_2+1) \\
 p(011, ON_2) &= b_1 \cdot p(111, ON_2) + a_2 \cdot p(001, ON_2-1) \\
 p(010, ON_2) &= a_2 \cdot p(000, ON_2) + b_1 \cdot p(110, ON_2+1) \\
 p(001, ON_2) &= a_3 \cdot p(000, ON_2) + b_1 \cdot p(101, 1n_2-1) + b_1 \cdot p(101, ON_2) \\
 &\quad + (1-a_1-a_2-b_3) \cdot p(001, ON_2-1) \\
 p(000, ON_2) &= (1-a_1-a_2-a_3) \cdot p(000, ON_2) + b_1 \cdot p(100, 1n_2) + b_1 \cdot p(100, ON_2+1) \\
 &\quad + b_3 \cdot p(001, ON_2-1)
 \end{aligned}$$

Die Zustandsgleichungen für die Ecke  $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3, ON_2)$  lauten:

$$\begin{aligned}
 p(111, ON_2) &= (1-b_1-b_2-b_3) \cdot p(111, ON_2) + a_2 \cdot p(101, 1N_2-1) + c_2 \cdot p(101, ON_2) \\
 p(110, ON_2) &= b_3 \cdot p(111, ON_2) + a_2 \cdot p(100, 1N_2) \\
 p(101, ON_2) &= b_2 \cdot p(111, ON_2) + (1-b_1-a_2-b_3) \cdot p(101, 1N_2-1) + a_3 \cdot p(100, 1N_2) \\
 &\quad + a_1 \cdot p(001, ON_2-1) + (1-b_1-c_2-b_3) \cdot p(101, ON_2) \\
 p(100, ON_2) &= a_1 \cdot p(000, ON_2) + b_3 \cdot p(101, 1N_2-1) + (1-b_1-a_2-a_3) \cdot p(100, 1N_2) \\
 &\quad + b_3 \cdot p(101, ON_2) \\
 p(011, ON_2) &= b_1 \cdot p(111, ON_2) + a_2 \cdot p(001, ON_2-1) \\
 p(010, ON_2) &= a_2 \cdot p(000, ON_2) \\
 p(001, ON_2) &= a_3 \cdot p(000, ON_2) + b_1 \cdot p(101, 1N_2-1) + (1-a_1-a_2-b_3) \cdot p(001, ON_2-1) \\
 &\quad + b_1 \cdot p(101, ON_2) \\
 p(000, ON_2) &= (1-a_1-a_2-a_3) \cdot p(000, ON_2) + b_1 \cdot p(100, 1N_2) + b_3 \cdot p(001, ON_2-1).
 \end{aligned}$$

Die Zustandsgleichungen für den Rand  $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3, n_1N_2)$  mit  $0 < n_1 < N_1$  lauten:

$$p(111, n_1N_2) = (1-b_1-b_2-b_3) \cdot p(111, n_1N_2) + a_2 \cdot p(101, n_1+1N_2-1) \\ + a_1 \cdot p(011, n_1-1N_2) + c_2 \cdot p(101, n_1N_2)$$

$$p(110, n_1N_2) = b_3 \cdot p(111, n_1N_2) + a_2 \cdot p(100, n_1+1N_2)$$

$$p(101, n_1N_2) = b_2 \cdot p(111, n_1N_2) + (1-b_1-a_2-b_3) \cdot p(101, n_1+1N_2-1) \\ + a_3 \cdot p(100, n_1+1N_2) + (1-b_1-c_2-b_3) \cdot p(101, n_1N_2) \\ + a_1 \cdot p(001, n_1N_2-1) + a_1 \cdot p(001, n_1-1N_2)$$

$$p(100, n_1N_2) = a_1 \cdot p(000, n_1N_2) + b_3 \cdot p(101, n_1+1N_2-1) \\ + (1-b_1-a_2-a_3) \cdot p(100, n_1+1N_2)$$

$$p(011, n_1N_2) = b_1 \cdot p(111, n_1N_2) + (1-a_1-b_2-b_3) \cdot p(011, n_1-1N_2) \\ + a_2 \cdot p(001, n_1N_2-1) + c_2 \cdot p(001, n_1-1N_2)$$

$$p(010, n_1N_2) = a_2 \cdot p(000, n_1N_2) + b_3 \cdot p(011, n_1-1N_2)$$

$$p(001, n_1N_2) = a_3 \cdot p(000, n_1N_2) + b_1 \cdot p(101, n_1+1N_2-1) + b_2 \cdot p(011, n_1-1N_2) \\ + (1-a_1-a_2-b_3) \cdot p(001, n_1N_2-1) + (1-a_1-c_2-b_3) \cdot p(001, n_1-1N_2) \\ + b_1 \cdot p(101, n_1N_2)$$

$$p(000, n_1N_2) = (1-a_1-a_2-a_3) \cdot p(000, n_1N_2) + b_1 \cdot p(100, n_1+1N_2) \\ + b_3 \cdot p(001, n_1N_2-1) + b_3 \cdot p(001, n_1-1N_2)$$

Die Zustandsgleichungen für die Ecke  $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3, N_1N_2)$  lauten:

$$p(111, N_1N_2) = (1-b_1-b_2-b_3) \cdot p(111, N_1N_2) + a_1 \cdot p(011, N_1-1N_2) \\ + c_2 \cdot p(101, N_1N_2) + c_1 \cdot p(011, N_1N_2)$$

$$p(110, N_1N_2) = b_3 \cdot p(111, N_1N_2)$$

$$p(101, N_1N_2) = b_2 \cdot p(111, N_1N_2) + a_1 \cdot p(001, N_1N_2-1) + (1-b_1-c_2-b_3) \cdot p(101, N_1N_2) \\ + c_1 \cdot p(001, N_1N_2) + a_1 \cdot p(001, N_1-1N_2)$$

$$p(100, N_1N_2) = a_1 \cdot p(000, N_1N_2) + b_3 \cdot p(101, N_1N_2)$$

$$p(011, N_1N_2) = b_1 \cdot p(111, N_1N_2) + (1-a_1-b_2-b_3) \cdot p(011, N_1-1N_2) \\ + (1-c_1-b_2-b_3) \cdot p(011, N_1N_2) + a_2 \cdot p(001, N_1N_2-1) \\ + c_2 \cdot p(001, N_1N_2) + c_2 \cdot p(001, N_1-1N_2)$$

$$p(010, N_1N_2) = a_2 \cdot p(000, N_1N_2) + b_3 \cdot p(011, N_1-1N_2) + b_3 \cdot p(011, N_1N_2)$$

$$p(001, N_1 N_2) = a_3 \cdot p(000, N_1 N_2) + b_2 \cdot p(011, N_1 - 1 N_2) + b_2 \cdot p(011, N_1 - 1 N_2) \\ + (1 - a_1 - a_2 - b_3) \cdot p(001, N_1 N_2 - 1) + b_1 \cdot p(101, N_1 N_2) \\ + (1 - c_1 - c_2 - b_3) \cdot p(001, N_1 N_2) + (1 - a_1 - c_2 - b_3) \cdot p(001, N_1 - 1 N_2)$$

$$p(000, N_1 N_2) = (1 - a_1 - a_2 - a_3) \cdot p(000, N_1 N_2) + b_3 \cdot p(001, N_1 N_2 - 1) \\ + b_3 \cdot p(001, N_1 N_2) + b_3 \cdot p(001, N_1 - 1 N_2)$$

Die Zustandsgleichungen für den Rand  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, N_1 n_2)$  mit  $0 < n_2 < N_2$  lauten:

$$p(111, N_1 n_2) = (1 - b_1 - b_2 - b_3) \cdot p(111, N_1 n_2) + a_3 \cdot p(110, N_1 n_2 + 1) + a_1 \cdot p(011, N_1 - 1 n_2) \\ + c_1 \cdot p(011, N_1 n_2)$$

$$p(110, N_1 n_2) = b_3 \cdot p(111, N_1 n_2) + (1 - b_1 - b_2 - a_3) \cdot p(110, N_1 n_2 + 1) \\ + a_1 \cdot p(010, N_1 - 1 n_2 + 1) + c_1 \cdot p(010, N_1 n_2 + 1)$$

$$p(101, N_1 n_2) = b_2 \cdot p(111, N_1 n_2) + a_1 \cdot p(001, N_1 n_2 - 1)$$

$$p(100, N_1 n_2) = a_1 \cdot p(000, N_1 n_2) + b_2 \cdot p(110, N_1 n_2 + 1)$$

$$p(011, N_1 n_2) = b_1 \cdot p(111, N_1 n_2) + (1 - a_1 - b_2 - b_3) \cdot p(011, N_1 - 1 n_2) \\ + a_3 \cdot p(010, N_1 - 1 n_2 + 1) + a_2 \cdot p(001, N_1 n_2 - 1) \\ + (1 - c_1 - b_2 - b_3) \cdot p(011, N_1 n_2) + a_3 \cdot p(010, N_1 n_2 + 1)$$

$$p(010, N_1 n_2) = a_2 \cdot p(000, N_1 n_2) + b_1 \cdot p(110, N_1 n_2 + 1) + b_3 \cdot p(011, N_1 - 1 n_2) \\ + b_3 \cdot p(011, N_1 n_2) + (1 - a_1 - b_2 - a_3) \cdot p(010, N_1 - 1 n_2 + 1) \\ + (1 - c_1 - b_2 - a_3) \cdot p(010, N_1 n_2 + 1)$$

$$p(001, N_1 n_2) = a_3 \cdot p(000, N_1 n_2) + b_2 \cdot p(011, N_1 - 1 n_2) + (1 - a_1 - a_2 - b_3) \cdot p(001, N_1 n_2 - 1) \\ + b_2 \cdot p(011, N_1 n_2)$$

$$p(000, N_1 n_2) = (1 - a_1 - a_2 - a_3) \cdot p(000, N_1 n_2) + b_2 \cdot p(010, N_1 - 1 n_2 + 1) \\ + b_3 \cdot p(001, N_1 n_2 - 1) + b_2 \cdot p(010, N_1 n_2 + 1)$$

Die Zustandsgleichungen für die Ecke  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, N_1 0)$  lauten:

$$p(111, N_1 0) = (1 - b_1 - b_2 - b_3) \cdot p(111, N_1 0) + a_3 \cdot p(110, N_1 1) + a_1 \cdot p(011, N_1 - 1 0) \\ + c_3 \cdot p(110, N_1 0) + c_1 \cdot p(011, N_1 0)$$

$$p(110, N_1 0) = b_3 \cdot p(111, N_1 0) + (1 - b_1 - b_2 - a_3) \cdot p(110, N_1 1) + a_1 \cdot p(010, N_1 - 1 1) \\ + (1 - b_1 - b_2 - c_3) \cdot p(110, N_1 0) + a_1 \cdot p(010, N_1 - 1 0) + c_1 \cdot p(010, N_1 1) \\ + c_1 \cdot p(010, N_1 0)$$

$$p(101, N_1 0) = b_2 \cdot p(111, N_1 0)$$

$$p(100, N_1 0) = a_1 \cdot p(000, N_1 0) + b_2 \cdot p(110, N_1 1) + b_2 \cdot p(110, N_1 0)$$

$$p(011, N_1 0) = b_1 \cdot p(111, N_1 0) + (1 - a_1 - b_2 - b_3) \cdot p(011, N_1 - 1 0) + a_3 \cdot p(010, N_1 - 1 1) \\ + (1 - c_1 - b_2 - b_3) \cdot p(011, N_1 0) + c_3 \cdot p(010, N_1 - 1 0) \\ + a_3 \cdot p(010, N_1 1) + c_3 \cdot p(010, N_1 0)$$

$$p(010, N_1 0) = a_2 \cdot p(000, N_1 0) + b_1 \cdot p(110, N_1 1) + b_1 \cdot p(110, N_1 0) + b_3 \cdot p(011, N_1 - 1 0) \\ + b_3 \cdot p(011, N_1 0) + (1 - a_1 - b_2 - a_3) \cdot p(010, N_1 - 1 1) \\ + (1 - a_1 - b_2 - c_3) \cdot p(010, N_1 - 1 0) + (1 - c_1 - b_2 - a_3) \cdot p(010, N_1 1) \\ + (1 - c_1 - b_2 - c_3) \cdot p(010, N_1 0)$$

$$p(001, N_1 0) = a_3 \cdot p(000, N_1 0) + b_2 \cdot p(011, N_1 - 1 0) + b_2 \cdot p(011, N_1 0)$$

$$p(000, N_1 0) = (1 - a_1 - a_2 - a_3) \cdot p(000, N_1 0) + b_2 \cdot p(010, N_1 - 1 1) \\ + b_2 \cdot p(010, N_1 - 1 0) + b_2 \cdot p(010, N_1 0) + b_2 \cdot p(010, N_1 1)$$

Die Zustandsgleichungen für den Rand  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1 0)$  mit  $0 < n_1 < N_1$  lauten:

$$p(111, n_1 0) = (1 - b_1 - b_2 - b_3) \cdot p(111, n_1 0) + a_3 \cdot p(110, n_1 1) + a_1 \cdot p(011, n_1 - 1 0) \\ + c_3 \cdot p(110, n_1 0)$$

$$p(110, n_1 0) = b_3 \cdot p(111, n_1 0) + (1 - b_1 - b_2 - a_3) \cdot p(110, n_1 1) + a_2 \cdot p(100, n_1 + 1 0) \\ + a_1 \cdot p(010, n_1 - 1 0) + (1 - b_1 - b_2 - c_3) \cdot p(110, n_1 0) + a_1 \cdot p(010, n_1 - 1 1)$$

$$p(101, n_1 0) = b_2 \cdot p(111, n_1 0) + a_3 \cdot p(100, n_1 + 1 0)$$

$$p(100, n_1 0) = a_1 \cdot p(000, n_1 0) + b_2 \cdot p(110, n_1 1) + (1 - b_1 - a_2 - a_3) \cdot p(100, n_1 + 1 0) \\ + b_2 \cdot p(110, n_1 0)$$

$$p(011, n_1 0) = b_1 \cdot p(111, n_1 0) + (1 - a_1 - b_2 - b_3) \cdot p(011, n_1 - 1 0) \\ + c_3 \cdot p(010, N_1 - 1 0) + a_3 \cdot p(010, n_1 - 1 1)$$

$$p(010, n_1 0) = a_2 \cdot p(000, n_1 0) + b_1 \cdot p(110, n_1 1) + b_3 \cdot p(011, n_1 - 1 0) \\ + (1 - a_1 - b_2 - c_3) \cdot p(010, n_1 - 1 0) + (1 - a_1 - b_2 - a_3) \cdot p(010, n_1 - 1 1) \\ + b_1 \cdot p(110, n_1 0)$$

$$p(001, n_1 0) = a_3 \cdot p(000, n_1 0) + b_2 \cdot p(011, n_1 - 1 0)$$

$$p(000, n_1 0) = (1 - a_1 - a_2 - a_3) \cdot p(000, n_1 0) + b_1 \cdot p(100, n_1 + 1 0) \\ + b_2 \cdot p(010, n_1 - 1 0) + b_2 \cdot p(010, n_1 - 1 1)$$

und es gilt: 
$$\sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1 n_2} p(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1 n_2) = 1$$

Dieses Gleichungssystem versuchten wir mit dem Faktorisierungsansatz zu lösen. Zwar konnten wir das Gleichungssystem erheblich reduzieren, jedoch ergaben sich Widersprüche, d.h. beim Zweilagermodell existiert keine der dem Einlagermodell entsprechenden Faktorisierung der internen Zustände. Dies zeigte dann auch die numerische Lösung des Gleichungssystems, die wir im Anhang 3 vorstellen. Da schon geringe Zwischenlagerkapazitäten von z.B. 10 Mengeneinheiten ein Gleichungssystem mit ca. 1000 Unbekannten hervorrufen, bekommen wir bei voller Abspeicherung der Übergangsmatrix Speicherplatzprobleme. Unter Ausnutzung der Tatsache, daß die Übergangsmatrix schwach besetzt ist, speichern wir nur die Nichtnullelemente ab und können so Speicherplatz einsparen. Mit Hilfe spezieller Algorithmen gelingt es uns, die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten mit sehr guter Genauigkeit (siehe auch Abschnitt 5.4) zu bestimmen, die wir für die Berechnung der Kenngrößen des Zweilagermodells benötigen.

Zentrale Kenngröße eines Produktionssystems ist die Verfügbarkeit. Diese können wir eingabe- und ausgabeorientiert berechnen (siehe Kapitel 2).

Die eingabeorientierte Systemverfügbarkeit  $V_{SYSE}^{N_1, N_2}$  eines Zweilagermodells ist definiert durch:

$$V_{SYSE}^{N_1, N_2} = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} p(000, n_1 n_2) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2} p(011, n_1 n_2) + p(001) - p(001, N_1 N_2) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2} p(010, n_1 n_2) ,$$

und die ausgabeorientierte Systemverfügbarkeit  $V_{SYSA}^{N_1, N_2}$  durch:

$$V_{SYSA}^{N_1, N_2} = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} p(000, n_1 n_2) + \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} p(110, n_1 n_2) + p(100) - p(100, 00) + \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} p(010, n_1 n_2) .$$

Beide Systemverfügbarkeiten müssen bei den Voraussetzungen unseres Modells die gleichen Werte annehmen. Da in ihre Berechnung unterschiedliche Zustandswahrscheinlichkeiten eingehen, ist die Übereinstimmung der Systemverfügbarkeiten gleichzeitig ein Maß für die Genauigkeit der numerischen Ergebnisse.

Für ein Einlagermodell fanden wir in Abschnitt 3.5 den Faktorisierungsansatz

$$p(\alpha_1 \alpha_2, n) = p(\alpha_1 \alpha_2) \cdot p(n).$$

Die folgenden marginalen Wahrscheinlichkeiten

$$p(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} p(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1 n_2)$$

$$p(n_1 n_2) = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} p(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1 n_2)$$

$$p(n_1) = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_2} p(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1 n_2)$$

$$p(n_2) = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1} p(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1 n_2)$$

geben uns Aufschluß, ob auch für ein Zweilagermodell die möglichen Faktorisierungen

$$p(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1 n_2) = p(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \cdot p(n_1 n_2)$$

oder

$$p(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1 n_2) = p(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \cdot p(n_1) \cdot p(n_2)$$

für  $n_i = 1, \dots, N_i - 1$ ; ( $i=1, 2$ ) und  $\alpha_i \in \{0, 1\}$ ; ( $i=1, 2, 3$ ) zutreffen. Dies war in keinem der durchgerechneten Beispiele der Fall und folglich ist keiner der Ansätze des Einlagermodells anwendbar. Dies ist nur darauf zurückzuführen, daß bei Zweilagermodellen gänzlich andere Strukturen und Symmetrien vorliegen, als die bei den entsprechenden Einlagermodellen. Welche

Symmetrien zwischen Zustandswahrscheinlichkeiten eines Zweilagermodells existieren, zeigen wir im folgenden Abschnitt auf. Dieser enthält außerdem die mit Hilfe der Symmetrien abgeleitete analytische Lösung eines Spezialfalles des Zweilagermodells.

### 5.3 Symmetrien zwischen Zustandswahrscheinlichkeiten und die analytische Lösung eines Spezialfalles

Die numerischen Verfahren liefern uns sehr genaue Ergebnisse für die Zustandswahrscheinlichkeiten. Untersucht man diese, so findet man, falls die erste und dritte Maschine identisch sind und die blockierten Maschinen die gleichen Ausfallwahrscheinlichkeiten wie eine produzierende Maschine haben, d.h. falls

$$a_1 = a_3 = c_1 = c_3 \quad \text{und} \quad b_1 = b_3 ,$$

und falls die beiden Lager gleiche Kapazitäten besitzen, d.h. falls

$$N_1 = N_2 = N$$

sehr eigenartige Symmetrien. Bemerkenswert ist, daß die zweite Maschine beliebige Ausfall- und Reparaturwahrscheinlichkeiten besitzen darf. Die Symmetrien zwischen den Zuständen lauten für  $n_1 = n_2 = 0, 1, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} p(000, n_1 n_2) &= p(000, N_1 - n_2, N_2 - n_1) && \text{für alle } n_1, n_2 \text{ mit } n_2 \neq N_2 - n_1 \\ p(001, n_1 n_2) &= p(100, N_1 - n_2, N_2 - n_1) && \text{für alle } n_1, n_2 \text{ und } p(100, n_1 n_2) \\ p(010, n_1 n_2) &= p(010, N_1 - n_2, N_2 - n_1) && \text{für alle } n_1, n_2 \text{ mit } n_2 \neq N_2 - n_1 \\ p(011, n_1 n_2) &= p(110, N_1 - n_2, N_2 - n_1) && \text{für alle } n_1, n_2 \text{ und } p(110, n_1 n_2) \\ p(101, n_1 n_2) &= p(101, N_1 - n_2, N_2 - n_1) && \text{für alle } n_1, n_2 \text{ mit } n_2 \neq N_2 - n_1 \\ p(111, n_1 n_2) &= p(111, N_1 - n_2, N_2 - n_1) && \text{für alle } n_1, n_2 \text{ mit } n_2 \neq N_2 - n_1 . \end{aligned}$$

Wie man sieht, existiert keine Gleichverteilung der internen Zustände wie beim Einlagermodell. Die Anzahl der identischen Zustandswahrscheinlichkeiten beträgt  $(N+1) \cdot (4N+2)$ . Die ursprüngliche Zahl der Zustände kann somit auf  $8(N+1)^2 - (N+1)(4N+2) = (N+1)(4N+6)$  reduziert werden, und es ist dadurch möglich wesentlich größere Gleichungssysteme zu behandeln.

Es ist nicht gelungen, einen mathematischen Beweis für die allgemeine Gül-

tigkeit für diese Symmetrien unter den genannten Voraussetzungen zu liefern. Jedoch lassen die umfangreichen numerischen Rechnungen keinen Zweifel an den angegebenen Relationen.

Geschlossene analytische Lösungen für ein allgemeines Zweilagermodell existieren zur Zeit noch nicht. Zwar geben Gershwin und Schick [1980] für einige Gleichungen des Systems analytische Ergebnisse an, jedoch können sie noch nicht zeigen, daß mit dem Ansatz alle Gleichungen lösbar sind.

Um eine Vorstellung von der Gestalt der stationären Zustandswahrscheinlichkeiten zu bekommen, betrachten wir zu deren Bestimmung im folgenden einen Spezialfall, der den kleinstmöglichen Zustandsraum eines Zweilagermodells besitzt. Für  $N_1=N_2=1$  beträgt die Anzahl der möglichen Zustände 32. Auch reduzieren wir die Anzahl der Systemparameter durch die Annahme  $a_i=c_i=a$ ,  $b_i=b$  auf Zwei.

Ein System von Gleichungen mit 32 Unbekannten von Hand durch sukzessives Einsetzen oder Elimination zu lösen, ist mit erheblichem Aufwand verbunden. Mit keinem der Ansätze des Einlagermodells besteht die Möglichkeit, die Zahl der Gleichungen um einen größeren Faktor zu reduzieren, da keine Gleichverteilung der internen Zustände existiert. Allerdings sagen uns die oben angegebenen Symmetrien, daß einige Paare von Zuständen die gleichen Wahrscheinlichkeiten annehmen. Dies ermöglicht uns, die ursprünglich 32 Unbekannten auf 20 zu verringern. Wir haben dann ein System von 32 Gleichungen (plus Normierung) mit 20 Unbekannten zu lösen. Die Übergangsmatrix  $\underline{P}$  ist in der nachfolgenden Bild 5.2 dargestellt. Bei dieser Form der Übergangsmatrix wurde die rechte Seite von  $\underline{P} \cdot \underline{p} = \underline{p}$  in die Übergangsmatrix eingebracht, um ein homogenes lineares Gleichungssystem zu erhalten. Da unser System überbestimmt ist, müssen genau 13 Gleichungen linear abhängig sein. Ansonsten erhalten wir keine eindeutige Lösung. Durch mühsames Anwenden des Gauß'schen Eliminationsverfahrens finden wir diese linear abhängigen Gleichungen und bringen dabei die Übergangsmatrix auf obere Dreiecksform (Bild 5.3). Wie dem Bild 5.3 zu entnehmen ist, sind einige Matrixelemente schon recht komplizierte Ausdrücke. Um die Zustandswahrscheinlichkeiten explizit zu bestimmen, müssen wir zunächst die Verhältnisse der Zustandswahrscheinlichkeiten untereinander be-

| t \ t+1  | (000,11)<br>(000,00) | (000,01) | (000,10) | (100,11)<br>(001,00) | (100,01)<br>(001,01) | (100,10)<br>(001,10) | (100,00)<br>(001,11) | (010,11)<br>(010,00) | (010,01) | (010,10) | (110,11)<br>(011,00) | (110,01)<br>(011,01) | (110,10)<br>(011,10) | (110,00)<br>(011,11) | (101,11)<br>(101,00) | (101,01) | (101,10) | (111,11)<br>(111,00) | (111,01) | (111,10) |
|----------|----------------------|----------|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------|----------|----------------------|----------|----------|
| (000,00) | -3a                  |          |          | b                    | b                    | b                    |                      |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |          |          |
| (000,01) |                      | -3a      |          | 2b                   |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |          |          |
| (000,10) |                      |          | -3a      |                      |                      |                      |                      | 2b                   | b        | b        |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |          |          |
| (000,11) | -3a                  |          |          | b                    | b                    | b                    |                      |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |          |          |
| (001,00) | a                    |          |          | -1                   |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                      |                      |                      | b                    |          |          |                      |          |          |
| (001,01) |                      | a        |          | 1-2a-b               | -1                   |                      |                      |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      | b        | b        |                      |          |          |
| (001,10) |                      |          | a        |                      |                      | -1                   |                      |                      |          |          | b                    |                      | b                    |                      |                      |          |          |                      |          |          |
| (001,11) | a                    |          |          | 1-2a-b               | 1-2a-b               | -2a-b                |                      |                      |          |          | b                    |                      | b                    | b                    |                      |          |          |                      |          |          |
| (010,00) | a                    |          |          |                      |                      |                      |                      | -1                   |          |          |                      | b                    |                      | b                    |                      |          |          |                      |          |          |
| (010,01) |                      | a        |          |                      |                      |                      |                      |                      | -1       |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |          |          |
| (010,10) |                      |          | a        |                      |                      |                      |                      | 2(1-2a-b)            | 1-2a-b   | -2a-b    | 2b                   |                      | 2b                   |                      |                      |          |          |                      |          |          |
| (010,11) | a                    |          |          |                      |                      |                      |                      | -1                   |          |          |                      | b                    |                      | b                    |                      |          |          |                      |          |          |
| (011,00) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          | -1                   |                      |                      |                      |                      |          |          | b                    |          |          |
| (011,01) |                      |          |          | a                    |                      |                      |                      |                      |          |          |                      | -1                   |                      |                      |                      |          |          |                      | b        |          |
| (011,10) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      | 2a                   | a        | a        | 1-a-2b               |                      | -a-2b                |                      |                      |          |          |                      | b        |          |
| (011,11) |                      |          |          | a                    | a                    | a                    |                      |                      |          |          |                      | 1-a-2b               |                      | -2b-a                |                      |          |          | b                    |          |          |
| (100,00) | a                    |          |          | 1-b-2a               | 1-b-2a               | -b-2a                |                      |                      |          |          |                      | b                    |                      | b                    | b                    |          |          |                      |          |          |
| (100,01) |                      | a        |          | 1-b-2a               | -1                   |                      |                      |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      | b        | b        |                      |          |          |
| (100,10) |                      |          | a        |                      |                      | -1                   |                      |                      |          |          | b                    |                      | b                    |                      |                      |          |          |                      |          |          |
| (100,11) | a                    |          |          | -1                   |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                      |                      |                      | b                    |          |          |                      |          |          |
| (101,00) |                      |          |          | a                    | a                    | a                    |                      |                      |          |          |                      |                      |                      |                      | -2b-a                |          |          | b                    |          |          |
| (101,01) |                      |          |          | 2a                   |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      | -2b-a    | 1-2b-a   |                      | b        |          |
| (101,10) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          | -1       |                      |          | b        |
| (101,11) |                      |          |          |                      | a                    | a                    | a                    |                      |          |          |                      |                      |                      |                      | -a-2b                |          |          | b                    |          |          |
| (110,00) |                      |          |          |                      | a                    | a                    | a                    |                      |          |          |                      | 1-2b-a               |                      | -2b-a                |                      |          |          | b                    |          |          |
| (110,01) |                      |          |          | a                    |                      |                      |                      |                      |          |          |                      | -1                   |                      |                      |                      |          |          |                      | b        |          |
| (110,10) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      | 2a                   | a        | a        | 1-a-2b               |                      | -a-2b                |                      |                      |          |          |                      |          | b        |
| (110,11) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          | -1                   |                      |                      |                      |                      |          |          | b                    |          |          |
| (111,00) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      | a                    |                      | a                    | a                    |          |          | -3b                  |          |          |
| (111,01) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      | a        | a        |                      | -3b      |          |
| (111,10) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          | 2a                   |                      | 2a                   |                      |                      |          |          |                      |          | -3b      |
| (111,11) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      | a                    |                      | a                    | a                    |          |          | -3b                  |          |          |

Bild 5.2: Übergangsmatrix des Zweilagermodells für einen Spezialfall unter Ausnutzung der Symmetrien.

|          | (000,11)<br>(000,00) | (000,01) | (000,10) | (100,11)<br>(001,00) | (100,01)<br>(001,01) | (100,10)<br>(001,10) | (100,00)<br>(001,11) | (010,11)<br>(010,00) | (010,01) | (010,10) | (110,11)<br>(011,00) | (110,01)<br>(011,01)      | (110,10)<br>(011,10) | (110,00)<br>(011,11) | (101,11)<br>(101,00) | (101,01)                          | (101,10)                            | (111,11)<br>(111,00) | (111,01)          | (111,10)                           |             |
|----------|----------------------|----------|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------|----------|----------------------|---------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|----------------------|-------------------|------------------------------------|-------------|
| (000,00) | a                    |          |          | -1                   |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                           |                      |                      | b                    |                                   |                                     |                      |                   |                                    |             |
| (000,01) |                      | a        |          | 1-2a-b               | -1                   |                      |                      |                      |          |          |                      |                           |                      |                      |                      | b                                 | b                                   |                      |                   |                                    |             |
| (000,10) |                      |          | a        |                      |                      | -1                   |                      |                      |          |          |                      |                           | b                    |                      |                      |                                   |                                     |                      |                   |                                    |             |
| (001,00) |                      |          |          | a                    |                      |                      |                      |                      |          |          |                      | -1                        |                      |                      |                      | a/3                               | a/3                                 |                      |                   |                                    |             |
| (001,01) |                      |          |          |                      | 1                    |                      |                      |                      |          | -1       |                      | $2 \frac{b-1}{a}$         |                      |                      |                      | $\frac{1-2a-4b}{3}$               | $\frac{1-2a-4b}{3}$                 |                      |                   |                                    |             |
| (001,10) |                      |          |          |                      |                      | 1                    |                      | -1                   | -1/2     |          | a-1                  |                           | a                    |                      |                      |                                   |                                     | -1                   |                   |                                    |             |
| (001,11) |                      |          |          |                      |                      |                      | 1                    | 1                    | 3/2      |          | 1-a                  | $\frac{-3+2ab-b^2+b}{ab}$ | -a                   |                      | 3                    | $\frac{1}{b} - \frac{1-2a-4b}{3}$ | $\frac{b+1}{b} - \frac{1-2a-4b}{3}$ |                      |                   |                                    |             |
| (010,00) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      | 1                    |          |          |                      | -b-1/a                    |                      | -b                   | b                    | 1/3                               | 1/3                                 |                      |                   |                                    |             |
| (010,01) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      | a        |          |                      | -2b/3                     |                      |                      |                      | 2ab/9                             | 2ab/9                               |                      |                   |                                    |             |
| (010,10) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          | a        | 1-a-2b               | $2ab+2+2b/3$              | -a-2b                | 2ab                  | -2ab                 | $-\frac{2a}{b}(1+\frac{b}{3})$    | $-\frac{2a}{3}(1+\frac{b}{3})+1$    |                      |                   |                                    |             |
| (011,00) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          | 1                    |                           |                      |                      |                      |                                   |                                     |                      | -b                |                                    |             |
| (011,01) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      | a                         |                      | a                    | a                    |                                   |                                     |                      | -3b               |                                    |             |
| (011,10) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                           | 1                    |                      |                      |                                   |                                     | -3/2ab               | b                 |                                    |             |
| (011,11) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                           |                      | 1                    | 1                    | b+a/3                             | b+a/3-1/2                           | -3b/a                | b                 |                                    |             |
| (101,00) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                           |                      |                      | 1                    | $-\frac{3+b}{6a}$                 | $P_{15,17}$                         | $-\frac{3a+10b}{6a}$ | $-\frac{3+b}{6a}$ |                                    |             |
| (101,01) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                           |                      |                      |                      | a                                 | a                                   |                      | -3b               |                                    |             |
| (101,10) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                           |                      |                      |                      |                                   |                                     | 1                    |                   | -b                                 |             |
| (111,00) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                           |                      |                      |                      |                                   |                                     |                      | 1                 | $\frac{-3a-9b-ab}{3a^2+6b^2+11ab}$ | $P_{18,20}$ |
| (111,01) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                           |                      |                      |                      |                                   |                                     |                      |                   | $P_{19,19}$                        | $P_{19,20}$ |
| (111,10) |                      |          |          |                      |                      |                      |                      |                      |          |          |                      |                           |                      |                      |                      |                                   |                                     |                      |                   |                                    | 0           |

mit

$$P_{15,17} := \frac{3(a+1)+5b-2b^2}{12ab} + b/2a^2$$

$$P_{18,20} := \frac{3a-3a^2-6b^2-10ab}{2(3a^2+6b^2+11ab)}$$

$$P_{19,19} := -3a^4-4a^4b-21a^3b-21a^3b^2-51a^2b^2-36a^2b^3-51ab^3-25ab^4-18b^4-6b^5$$

$$P_{19,20} := (3a^4+7a^4b+12a^3b+38a^3b^2+15a^2b^2+67a^2b^3+6ab^3+48ab^4+12b^5)/2$$

Bild 5.3: Obere Dreiecksmatrix beim Spezialfall.

rechnen. Dazu halten wir zweckmäßigerweise den Zustand  $p(111,10)$  aus Gleichung (19) des Bildes 5.3 fest und bestimmen die Verhältnisse der restlichen Zustände zu  $p(111,10)$  durch rückwärtiges Einsetzen in die Gleichungen (18) bis (1). Explizit bestimmbar sind dann die Zustandswahrscheinlichkeiten durch die Normierungsbedingung. Diese Vorgehensweise ist jedoch von Hand mit vertretbarem Aufwand nicht mehr durchführbar, und wir behelfen uns deshalb mit der analytischen Programmiersprache REDUCE. Von REDUCE erhalten wir dann aufwendige Ausdrücke für die o.a. Verhältnisse und erst recht für die expliziten Zustandswahrscheinlichkeiten, daß es angebracht erscheint, nicht alle an dieser Stelle anzugeben. Von den 20 unterschiedlichen Zustandswahrscheinlichkeiten greifen wir  $p(101,01)$ ,  $p(111,00)$  und  $p(011,01)$  heraus. Sie lauten:

$$p(101,01) := (b \cdot p(111,10) (-8 \cdot a^5 \cdot b - 6 \cdot a^5 - 42 \cdot a^4 \cdot b^2 - 21 \cdot a^4 \cdot b + 9 \cdot a^4 - 72 \cdot a^3 \cdot b^3 + 12 \cdot a^3 \cdot b^2 + 36 \cdot a^3 \cdot b - 50 \cdot a^2 \cdot b^4 + 99 \cdot a^2 \cdot b^3 + 45 \cdot a^2 \cdot b^2 - 12 \cdot a \cdot b^5 + 108 \cdot a \cdot b^4 + 18 \cdot a \cdot b^3 + 36 \cdot b^5)) / (2 \cdot a \cdot (4 \cdot a^4 \cdot b + 3 \cdot a^4 + 21 \cdot a^3 \cdot b^2 + 21 \cdot a^3 \cdot b + 36 \cdot a^2 \cdot b^3 + 51 \cdot a^2 \cdot b^2 + 25 \cdot a \cdot b^4 + 51 \cdot a \cdot b^3 + 6 \cdot b^5 + 18 \cdot b^4))$$

$$p(111,00) := p(111,10) \cdot (12 \cdot a^6 \cdot b + 9 \cdot a^6 + 110 \cdot a^5 \cdot b^2 + 105 \cdot a^5 \cdot b + 380 \cdot a^4 \cdot b^3 + 507 \cdot a^4 \cdot b^2 + 628 \cdot a^3 \cdot b^4 + 1239 \cdot a^3 \cdot b^3 + 532 \cdot a^2 \cdot b^5 + 1548 \cdot a^2 \cdot b^4 + 222 \cdot a \cdot b^6 + 936 \cdot a \cdot b^5 + 36 \cdot b^7 + 216 \cdot b^6)) / (2 \cdot (12 \cdot a^6 \cdot b + 9 \cdot a^6 + 107 \cdot a^5 \cdot b^2 + 96 \cdot a^5 \cdot b + 363 \cdot a^4 \cdot b^3 + 402 \cdot a^4 \cdot b^2 + 597 \cdot a^3 \cdot b^4 + 840 \cdot a^3 \cdot b^3 + 509 \cdot a^2 \cdot b^5 + 921 \cdot a^2 \cdot b^4 + 216 \cdot a \cdot b^6 + 504 \cdot a \cdot b^5 + 36 \cdot b^7 + 108 \cdot b^6))$$

$$p(011,01) := (b \cdot p(111,10) \cdot (120 \cdot a^{11} \cdot b^2 + 126 \cdot a^{11} \cdot b + 27 \cdot a^{11} + 1982 \cdot a^{10} \cdot b^3 + 2109 \cdot a^{10} \cdot b^2 + 396 \cdot a^{10} \cdot b + 14306 \cdot a^9 \cdot b^4 + 15777 \cdot a^9 \cdot b^3 + 2493 \cdot a^9 \cdot b^2 + 59506 \cdot a^8 \cdot b^5 + 69576 \cdot a^8 \cdot b^4 + 8838 \cdot a^8 \cdot b^3 + 158466 \cdot a^7 \cdot b^6 + 200622 \cdot a^7 \cdot b^5 + 19449 \cdot a^7 \cdot b^4 + 283910 \cdot a^6 \cdot b^7 + 396225 \cdot a^6 \cdot b^6 + 27576 \cdot a^6 \cdot b^5 + 349726 \cdot a^5 \cdot b^8 + 545613 \cdot a^5 \cdot b^7 + 25227 \cdot a^5 \cdot b^6 + 296758 \cdot a^4 \cdot b^9 + 522846 \cdot a^4 \cdot b^8 + 14382 \cdot a^4 \cdot b^7 + 170334 \cdot a^3 \cdot b^{10} + 341262 \cdot a^3 \cdot b^9 + 4644 \cdot a^3 \cdot b^8 + 63108 \cdot a^2 \cdot b^{11} + 144396 \cdot a^2 \cdot b^{10} + 648 \cdot a^2 \cdot b^9 + 13608 \cdot a \cdot b^{12} + 35640 \cdot a \cdot b^{11} + 1296 \cdot b^{13} + 3888 \cdot b^{12})) / (2 \cdot a \cdot (48 \cdot a^{10} \cdot b^2 + 72 \cdot a^{10} \cdot b + 27 \cdot a^{10} + 680 \cdot a^9 \cdot b^3 + 1146 \cdot a^9 \cdot b^2 + 477 \cdot a^9 \cdot b + 4131 \cdot a^8 \cdot b^4 + 7896 \cdot a^8 \cdot b^3 + 3681 \cdot a^8 \cdot b^2 + 14163 \cdot a^7 \cdot b^5 + 30966 \cdot a^7 \cdot b^4 + 16317 \cdot a^7 \cdot b^3 + 30388 \cdot a^6 \cdot b^6 + 76500 \cdot a^6 \cdot b^5 + 45963 \cdot a^6 \cdot b^4$$

$$\begin{aligned} &+ 42762 \cdot a^5 \cdot b^7 + 124446 \cdot a^5 \cdot b^6 + 85923 \cdot a^5 \cdot b^5 + 40107 \cdot a^4 \cdot b^8 \\ &+ 135168 \cdot a^4 \cdot b^7 + 107955 \cdot a^4 \cdot b^6 + 24839 \cdot a^3 \cdot b^9 + 96954 \cdot a^3 \cdot b^8 \\ &+ 90063 \cdot a^3 \cdot b^7 + 9750 \cdot a^2 \cdot b^{10} + 44028 \cdot a^2 \cdot b^9 + 47790 \cdot a^2 \cdot b^8 \\ &+ 2196 \cdot a \cdot b^{11} + 11448 \cdot a \cdot b^{10} + 14580 \cdot a \cdot b^9 + 216 \cdot b^{12} \\ &+ 1296 \cdot b^{11} + 1944 \cdot b^{10})) \end{aligned}$$

Mit REDUCE führen wir dann die Normierung durch, so daß die Zustandswahrscheinlichkeiten explizit angegeben werden können.

Aufgrund ihrer Länge und ihrer Kompliziertheit ist keine allgemeine Gestalt der Zustandswahrscheinlichkeiten erkennbar und wir können deshalb auch keinen Ansatz zur Lösung der Gleichungen ableiten. Es ist offensichtlich, daß es sich bei den Zustandswahrscheinlichkeiten um sehr aufwendige Ausdrücke handelt, d.h. jedes andere Verfahren zur Analyse des Zweilagermodells muß auf die angegebenen Lösungen führen; ob dies auf einfacherem Wege möglich ist, sei dahingestellt.

Die Überprüfung der analytischen Ergebnisse durch Einsetzen in die Gleichungen war wiederum nur mit REDUCE möglich. Zusätzlich dienen die analytischen Zustandswahrscheinlichkeiten von REDUCE als Eingabe in ein FORTRAN-Programm. Daraus erhalten wir dann für spezielle Systemparameter  $a$ ,  $b$  die Werte der Zustandswahrscheinlichkeiten. Diese vergleichen wir mit den numerisch ermittelten Zustandswahrscheinlichkeiten aus Anhang A3. Hier zeigt sich sehr gute Übereinstimmung. Bei allen durchgeführten Vergleichen ergaben sich mindestens 12 signifikante Stellen, womit erneut die Richtigkeit, sowohl der numerischen als auch der analytischen Ergebnisse gezeigt werden konnte.

#### 5.4 Diskussion und Verifikation der numerischen Ergebnisse

Neben Fragestellungen aus dem gesamten Bereich der Technik, der Betriebswirtschaft und der Arbeits- und Sozialwissenschaften ist der Planer von Produktionssystemen mit folgenden wichtigen Fragen konfrontiert:

- Ist die Effektivität des Produktionssystems hinreichend um einen bestimmten Durchsatz zu erzielen? Als Maß für die Effektivität kann man die Verfügbarkeit des Systems wählen.

- Falls die geforderte Verfügbarkeit nicht erreicht wird, wie groß müssen dann die Pufferkapazitäten sein oder welche Einzelverfügbarkeiten müssen die Maschinen haben, um sie zu erreichen?
- Welchen Einfluß hat die Reihenfolge der Maschinen.
- Sind bestimmte Parameter der Maschinen besonders wichtig?
- Welchen Einfluß haben Parameteränderungen?

Wir gehen hier nicht auf Problemstellungen ein, die nach optimalen Zwischenlagerkapazitäten, optimalen Reihenfolgen oder optimalen Systemparametern fragen. Zur Formulierung von Optimierungsaufgaben muß immer geklärt sein, wie die zu optimierende Zielfunktion lautet. Derartige Untersuchungen können jedoch erst dann durchgeführt werden, wenn Analysen und Struktur- und Verhaltenskenntnisse von Produktionssystemen vorliegen.

Wie beim Einlagermodell, so hat auch beim Zweilagermodell die Systemverfügbarkeit ihre Schranken. Die untere Schranke ist die Systemverfügbarkeit des Produktionssystems ohne Zwischenlager, die obere Schranke ist die Systemverfügbarkeit des Produktionssystems mit unendlichen Zwischenlagerkapazitäten. Eine allgemeingültige Formel von der Form (2-3) kann nicht abgeleitet werden, obwohl dies in der Literatur immer wieder versucht wird (siehe z.B. Gershwin und Schick [1978]), da die Systemverfügbarkeit ganz vom dynamischen Verhalten des Systems beeinflußt wird. In Kapitel drei wurde dies für ein Einlagermodell aufgezeigt. Shantikumar [1980] zeigte für die Systemverfügbarkeit mit unendlichen Zwischenlagerkapazitäten, daß diese nicht gleich dem Minimum der Einzelverfügbarkeiten ist, falls teilweise fertiggestellte Werkstücke bei Ausfall der bearbeitenden Maschinen zu Ausschuß werden.

Bei der Angabe der unteren und oberen Schranke ist deshalb das Annahmesystem genauestens zu überprüfen. Für unser System gilt:

$$V_{\text{SYS},3}^{0,2} = \prod_{i=1}^3 V_{\text{ein}}^i \quad \text{falls } a_i=c_i, i=1,2,3$$

$$V_{\text{SYS},3}^{0,1} = \left( \sum_{i=1}^3 1/V_{\text{ein}}^i - 2 \right)^{-1} \quad \text{falls } c_i=0, i=1,2,3 \quad .$$

Falls  $c_i$ ;  $i=1,2,3$  beliebig ist, gilt die umfangreichere Formel im Anhang 2. Die Systemverfügbarkeit mit unendlichen Zwischenlagerkapazitäten ist für beliebige Systemparameter gleich dem Minimum der Einzelverfügbarkeiten. Mit diesen Kenngrößen sind schon einige grundlegende Aussagen möglich:

- Die Systemverfügbarkeit mit endlichen Zwischenlagerkapazitäten muß zwischen denen ohne und mit unendlichen Zwischenlagerkapazitäten liegen.
- Die Differenz der Systemverfügbarkeiten für die beiden Extremfälle gibt den maximal möglichen Zugewinn an Systemverfügbarkeit an.
- Im Falle hoher (niedriger) Einzelverfügbarkeiten ist diese Differenz gering (groß) und deshalb auch der Spielraum für den möglichen Zugewinn an Systemverfügbarkeit gering (groß).

Die getroffenen Aussagen werden in Bild 5.4 für ein Zweilagernmodell durch die Kurven 1 und 2 verdeutlicht. Bei Kurve 1 haben alle Maschinen eine Einzelverfügbarkeit von 95%. Die Systemverfügbarkeit ohne Zwischenlager beträgt 85,7%, die mit unendlichen Zwischenlagerkapazitäten 95%. Der maximal mögliche Zugewinn an Systemverfügbarkeit beträgt ca. 10%. Mit einer Zwischenlagerkapazität von je 4 Mengeneinheiten (ME) beträgt die Systemverfügbarkeit 89,8%, mit 8 ME 91,4%, mit 12 ME 92,3% und mit 16 ME 92,8%. Bei Kurve 2 haben alle Maschinen eine Einzelverfügbarkeit von 80%. Hier beträgt der maximale Zugewinn ca. 30% und ist damit wesentlich höher als bei Kurve 1. Mit den gleichen Zwischenlagerkapazitäten erzielt man deshalb mit denen der Kurve 2 zugrundeliegenden Parametern höhere Zugewinne an Systemverfügbarkeit. Allgemein läßt sich feststellen: Bei sehr hohen Einzelverfügbarkeiten ist der Effekt der Zwischenlager gering; endliche Zwischenlager haben bei niedrigen Einzelverfügbarkeiten eine hohe Effektivität.

Nun ist es allerdings möglich, die gleiche Einzelverfügbarkeit mit unterschiedlichen Ausfall- und Reparaturwahrscheinlichkeiten zu erhalten. Für  $a_1=0.0625$ ,  $b_1=0.25$  und  $a_1=0.0125$ ,  $b_1=0.05$  beträgt z.B. die Einzelverfügbarkeit 80% (siehe auch Tabelle 5.3). Diesen Einfluß zeigen die Kurven 2 bis 4.

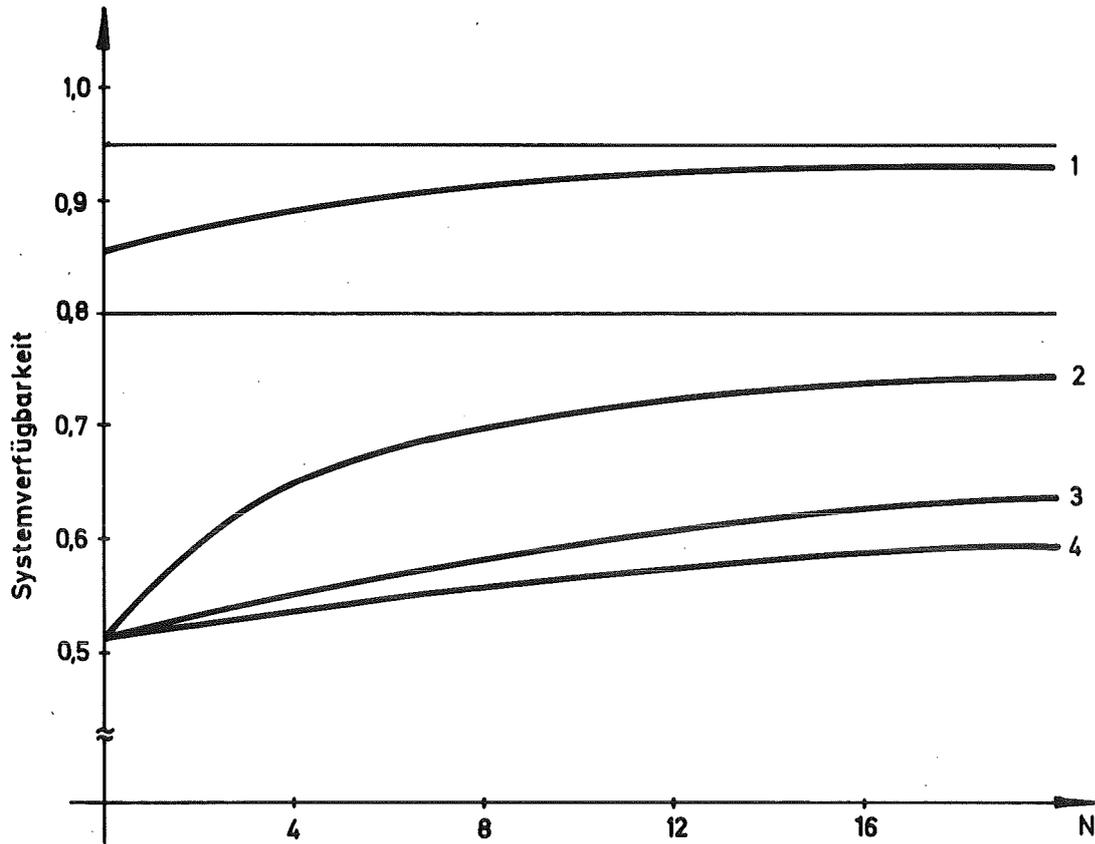


Bild 5.4: Dimensionsrelationen zwischen den Systemparametern eines Zweilagernmodells sind entscheidend für den Effekt der Zwischenlager ( $N_1=N_2=N$ ).

|        | $a_i$<br>$i=1,2,3$ | $c_i$<br>$i=1,2,3$ | $b_i$<br>$i=1,2,3$ | $v_{SYS}^0$ | $N=4$<br>$v_{SYS}$ | $N=8$<br>$v_{SYS}$ | $N=12$<br>$v_{SYS}$ | $N=14$<br>$v_{SYS}$ | $v_{SYS}^\infty = v_{ein}$ |
|--------|--------------------|--------------------|--------------------|-------------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|----------------------------|
| Fall ① | 0.013157           | 0.013157           | 0.25               | 0.85737     | 0.8988             | 0.914742           | 0.9231              | 0.9283              | 0.95                       |
| Fall ② | 0.0625             | 0.0625             | 0.25               | 0.512       | 0.652347           | 0.700246           | 0.7247              | 0.7395              | 0.80                       |
| Fall ③ | 0.0125             | 0.0125             | 0.05               | 0.512       | 0.553506           | 0.584122           | 0.607814            | 0.62675             | 0.80                       |
| Fall ④ | 0.00625            | 0.00625            | 0.025              | 0.512       | 0.53413            | 0.552909           | 0.569098            | 0.58323             | 0.80                       |

Tabelle 5.3: Daten zu Bild 5.2.

Für  $N=8$  ist die Systemverfügbarkeit bei Kurve 2 ca. 70%, bei Kurve 3 ca. 55% und bei Kurve 4 ca. 53%, d.h. mit gleichen Einzelverfügbarkeiten und Zwischenlagerkapazitäten kann man unterschiedliche Systemverfügbarkeiten erzielen. Die Ursache sind die unterschiedlichen Längen der mittleren Reparatur- und Betriebszeiten. Sind diese Zeiten klein (Kurve 2), so bewirken relativ kleine Zwischenlagerkapazitäten eine Entkopplung, da während der kurzen Reparaturzeit die Lager weniger häufig leer oder voll laufen. Diese Entkopplung wird geringer, wenn wir lange Betriebs- und Reparaturzeiten (Kurve 4) haben, da bei langen Reparaturzeiten die nachfolgenden Lager sofort leer laufen und somit kein Entkopplungseffekt mehr auftritt. Dieses Verhalten des Systems läßt darauf schließen, daß ein Zusammenhang zwischen der Größe der Übergangswahrscheinlichkeiten und den Lagerkapazitäten besteht. Im Falle identischer Maschinen ist das Verhältnis der Lagerkapazität zur mittleren Reparaturzeit eine Orientierung. Für die Kurven 2 bis 4 ist mit  $N=8$  dieses Verhältnis 2, 0.4 bzw. 0.2; die Systemverfügbarkeit 70%, 58% bzw. 55%. Wächst dieses Verhältnis, so nähert sich die Systemverfügbarkeit ihrer oberen Schranke. Die Höhe des Verhältnisses gibt dabei an, wie schnell sie sich ihr nähert. Man sieht, daß Zwischenlager erst dann einen entscheidenden Einfluß auf die Systemverfügbarkeit haben, wenn sie sich an dem oben genannten Verhältnis orientieren.

Bild 5.5 gibt uns Aufschluß, wie die drei Maschinen aufeinander abgestimmt und wie die Zwischenlager dimensioniert werden sollten. Mit der Forderung, daß die Summe der Einzelverfügbarkeiten konstant sein soll,

$$V_{\text{ein}}^1 + V_{\text{ein}}^2 + V_{\text{ein}}^3 = \text{const.}$$

und mit der Forderung

$$N_1 + N_2 = \text{const.},$$

wird für die Eingangsdaten ein beschränktes "Reservoir" an Verfügbarkeit und Zwischenlagerkapazität angenommen. Nun erhebt sich die Frage, wie man dieses "Reservoir" aufteilt. Bei den zu Bild 5.5 zugrundeliegenden Rechnungen wurde angenommen, daß die Einzelverfügbarkeit der zweiten Maschine immer 70% beträgt, diese wurde mit unterschiedlichen Einzelverfügbarkeiten der ersten und dritten Maschine kombiniert. Die Zwischenlagerkapazi-

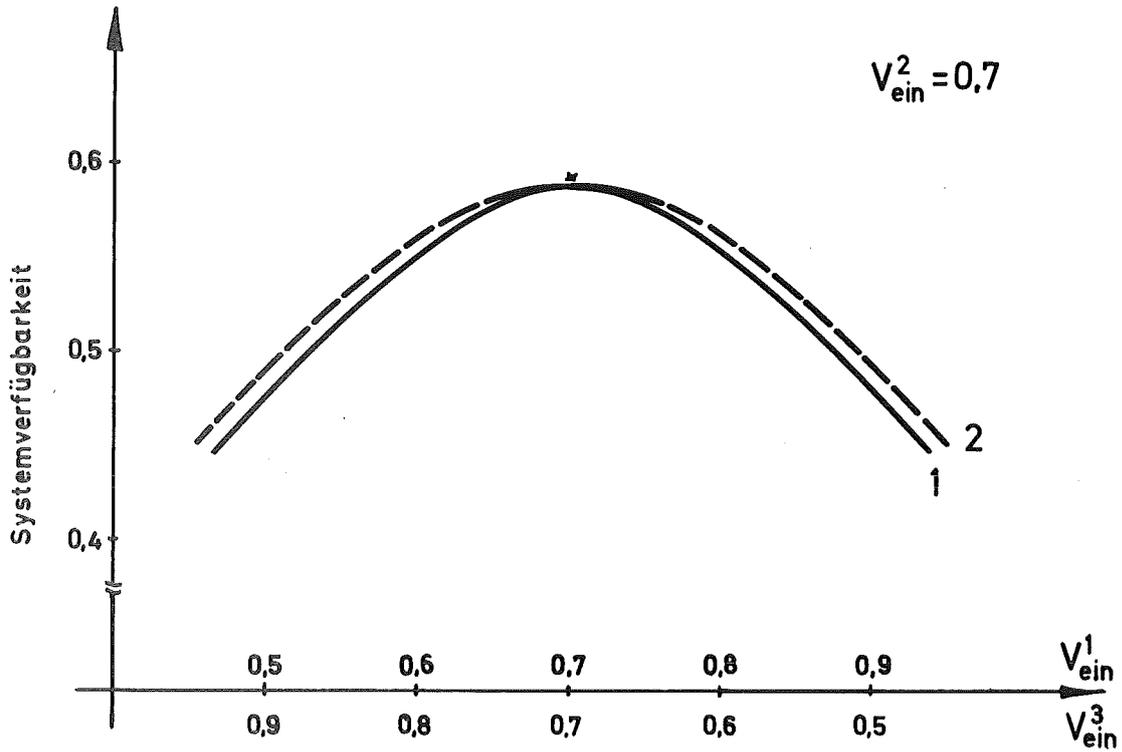


Bild 5.5: Abhängigkeit der Systemverfügbarkeit eines Zweilagermodells von den unterschiedlichen Einzelverfügbarkeiten (Ausgeglichene Systeme erzielen höhere Systemverfügbarkeiten).

| $a_1=c_1$ | $a_2=c_2$ | $a_3=c_3$ | $b_1$  | $b_2$ | $b_3$   | $v_{ein}^1$ | $v_{ein}^2$ | $v_{ein}^3$ | $N_1$ | $N_2$ | $V_{SYS}$ |         |
|-----------|-----------|-----------|--------|-------|---------|-------------|-------------|-------------|-------|-------|-----------|---------|
| 0.1666    | 0.1071    | 0.0555    | 0.1666 | 0.25  | 0.5     | 50%         | 70%         | 90%         | 8     | 8     | 47.65%    | Kurve ① |
| 0.1333    | 0.1071    | 0.0833    | 0.2    | 0.25  | 0.333   | 60%         | 70%         | 80%         | 8     | 8     | 55.15%    |         |
| 0.1071    | 0.1071    | 0.1071    | 0.25   | 0.25  | 0.25    | 70%         | 70%         | 70%         | 8     | 8     | 58.566%   |         |
| 0.08333   | 0.1071    | 0.1333    | 0.3333 | 0.25  | 0.2     | 80%         | 70%         | 60%         | 8     | 8     | 55.15%    |         |
| 0.0555    | 0.1071    | 0.1666    | 0.5    | 0.25  | 0.1666  | 90%         | 70%         | 50%         | 8     | 8     | 47.65%    |         |
| 0.1666    | 0.1071    | 0.0555    | 0.1666 | 0.25  | 0.5     | 50%         | 70%         | 90%         | 12    | 4     | 48.85%    | Kurve ② |
| 0.1333    | 0.1071    | 0.0833    | 0.2    | 0.25  | 0.3333  | 60%         | 70%         | 80%         | 10    | 6     | 55.82%    |         |
| 0.1071    | 0.1071    | 0.1071    | 0.25   | 0.25  | 0.25    | 70%         | 70%         | 70%         | 8     | 8     | 58.56%    |         |
| 0.08333   | 0.1071    | 0.1333    | 0.3333 | 0.25  | 0.2     | 80%         | 70%         | 60%         | 6     | 10    | 55.82%    |         |
| 0.0555    | 0.1071    | 0.1666    | 0.5    | 0.25  | 0.16666 | 90%         | 70%         | 50%         | 4     | 12    | 48.85%    |         |
| 0.11231   | 0.097222  | 0.11231   | 0.25   | 0.25  | 0.25    | 69%         | 72%         | 69%         | 8     | 8     | 58.666%   | ⊗       |

Tabelle 5.4: Daten zu Bild 5.3.

tät orientiert sich bei Kurve 1 nur an der 2. Maschine, so daß für die Verhältnisse von Zwischenlagerkapazität und mittlerer Reparaturzeit gilt:

$$N_1/MTTR_2 = N_2/MTTR_2 = 2.$$

Wie man sofort erkennt, hat das System für diese Beispiele die größte Systemverfügbarkeit, falls alle Einzelverfügbarkeiten gleich sind. Nun ist es sicherlich nicht sinnvoll, z.B. für den Fall  $V_{ein}^1=50\%$ ,  $V_{ein}^2=70\%$ ,  $V_{ein}^3=90\%$  die Gesamtlagerkapazität gleichmäßig auf die beiden Lager zu verteilen, da hier die dritte Maschine mit hoher Wahrscheinlichkeit die von der zweiten Maschine bearbeitenden Werkstücke weiterverarbeiten kann und folglich das zweite Lager öfters leer ist. Aus diesem Grunde ist es zweckmäßig, die Gesamtlagerkapazität mehr auf das erste Lager zu konzentrieren. Kurve 2 macht dies deutlich. Hier orientierte man die erste Zwischenlagerkapazität an der ersten Maschine ( $N_1/MTTR_1=2$ ) und die zweite Zwischenlagerkapazität an der dritten Maschine ( $N_2/MTTR_3=2$ ) und man erreichte für nicht ausbalancierte Systeme höhere Verfügbarkeitswerte als bei Kurve 1. Allerdings bleibt offen, ob dies eine optimale Aufteilung der Gesamtlagerkapazität auf die Zwischenlager darstellt.

Hillier und Boling [1966] betrachten ein Produktionssystem, bei dem die Maschinen stochastische Bearbeitungszeiten haben, aber nicht ausfallen und repariert werden können. Sie entdecken dabei das von ihnen so benannte "bowl phenomenon", das aussagt, daß ein Produktionssystem mit drei Maschinen und zwei Lagern seine höchste Produktivität besitzt, falls die mittlere Maschine eine geringfügig kleinere mittlere Bearbeitungszeit hat als die beiden anderen Maschinen. Das Maximum der Produktivität finden sie, falls die zweite Maschine ungefähr 0.82 Zeiteinheiten und die beiden anderen Maschinen ca. 1.09 Zeiteinheiten für die mittlere Bearbeitungsdauer benötigen. Auf unser System übertragen heißt dies, daß für die maximale Systemverfügbarkeit die mittlere Maschine eine geringfügig höhere Einzelverfügbarkeit als die beiden anderen haben sollte. Wir wissen, daß sich die Verfügbarkeit einer Maschine zum einen durch Verlängerung der Betriebsphase, zum anderen durch Verkürzen der Reparaturzeiten erhöhen kann. Bei dem Beispiel  $V_{ein}^1=69\%$ ,  $V_{ein}^2=72\%$ ,  $V_{ein}^3=69\%$  in Bild 5.5 verändern wir die Ausgangsverfügbarkeit von 70% durch Variation der Betriebszeiten, um das Verhältnis  $N_1/MTTR_1$  konstant zu lassen und berechneten

eine Systemverfügbarkeit von 58.6666%, die damit um 0.1% höher liegt als beim ausbalancierten System (siehe Bild 5.5 den mit  $\otimes$  markierten Punkt). Intuitiv kann man sich dies so erklären: Bei der ersten Maschine bzw. dritten Maschine wird nie der Eingangs- bzw. Ausgangsstrom unterbrochen. Eine Seite ihrer "Umgebung" ist immer intakt, ihre Verfügbarkeit wird dadurch nur von einer Seite vermindert und kann deswegen niedriger sein.

Eine allgemein gültige Aussage über die optimale Auslegung eines Produktionssystems ist jedoch nur mit einem noch aufzustellenden Optimierungsmodell möglich, bei dem zu klären ist, wie die Restriktionen für die Veränderungen der Systemparameter sind. Wie wir bei der Betrachtung der Symmetrien in Abschnitt 5.3 gesehen haben, hat ein System, bei dem die mittlere Verfügbarkeit nicht identisch ist mit den beiden anderen gleichen Maschinenverfügbarkeiten, eine Sonderstellung.

Eine weitere Eigenschaft, die uns Bild 5.5 verdeutlicht, ist die Symmetrie des Systems. Es ist gleichgültig, ob wir ein System mit  $V_{ein}^1=50\%$ ,  $V_{ein}^2=70\%$ ,  $V_{ein}^3=90\%$   $N_1=12, N_2=4$  oder das symmetrische System  $V_{ein}^1=90\%$ ,  $V_{ein}^2=70\%$ ,  $V_{ein}^3=50\%$ ,  $N_1=4, N_2=12$  betrachten.

Wie sich die Ausfallwahrscheinlichkeit blockierter Maschinen auf die Systemverfügbarkeit auswirkt, ist aus der nachfolgenden Tabelle 5.5 ersichtlich. Erwartungsgemäß liegt die Systemverfügbarkeit für  $0 < c_i < a_i$  zwischen der Systemverfügbarkeit mit  $c_i=0$  und der mit  $c_i=a_i$ . Für  $c_i > a_i$  vermindert sich die Systemverfügbarkeit unter Umständen beträchtlich.

| $a_1 = a_2 = a_3$ | $c_1$  | $c_2$  | $c_3$  | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $N_1$ | $N_2$ | $V_{SYS}$ |
|-------------------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| 0.0625            | 0      | 0      | 0      | 0.25  | 0.25  | 0.25  | 4     | 4     | 0.6702    |
| .                 | 0.02   | 0.02   | 0.02   | .     | .     | .     | .     | .     | 0.6640    |
| .                 | 0.04   | 0.04   | 0.04   | .     | .     | .     | .     | .     | 0.6583    |
| .                 | 0.0625 | 0.0625 | 0.0625 | .     | .     | .     | .     | .     | 0.6523    |
| .                 | 0.1    | 0.1    | 0.1    | .     | .     | .     | .     | .     | 0.6433    |
| 0.0625            | 0.3    | 0.3    | 0.3    | 0.25  | 0.25  | 0.25  | 4     | 4     | 0.6091    |

Tabelle 5.5: Einfluß der Ausfallwahrscheinlichkeit blockierter Maschinen auf die Systemverfügbarkeit.

Wir fassen zusammen:

- Bei geringfügig nichtausbalancierten Produktionssystemen mit drei Maschinen und zwei Zwischenlagern erzielt man die höchste Systemverfügbarkeit. Diese liegt allerdings nicht wesentlich höher als die bei ausbalancierten Systemen. Deshalb ist es weiterhin sinnvoll, ausbalancierte Systeme anzustreben.
- Bei nicht ausbalancierten Systemen ist es vorteilhaft, die Gesamtlagerkapazität unterschiedlich auf die Lager aufzuteilen.
- Produktionssysteme sind symmetrisch bezüglich der Anordnung der Maschinen und Lager.

Beim Lösen derart großer linearer Gleichungssysteme, wie sie bei unserem Modell vorkommen, drängt sich die Frage nach der Genauigkeit der numerischen Ergebnisse auf. Alle Programme wurden mit doppelter Genauigkeit implementiert. Bei einer IBM-Rechenanlage des Systems/370 hat man dann 18 Stellen für die Mantisse und 2 Stellen für den Exponenten zur Darstellung einer Gleitkommazahl zur Verfügung. Es gibt nun verschiedene Definitionen der Genauigkeit einer Zahl. Bei Programmiersprachen versteht man unter Genauigkeit die Anzahl der Dezimalstellen, mit der man eine Zahl darstellen kann. Unter Genauigkeit im mathematischen Sinne versteht man dagegen die Anzahl der Stellen, welche die Zahl richtig wiedergeben. Zur Bestimmung der Anzahl der signifikanten Stellen haben wir folgende Möglichkeiten:

- (i) Prüfung, wie gut die einzelnen Gleichungen erfüllt sind, besonders die der freien Gleichung. Dazu werden in die Bestimmungsgleichung eines Zustandes die numerischen Ergebnisse eingesetzt und mit dem berechneten Wert der Zustandswahrscheinlichkeit verglichen.
- (ii) Die Systemverfügbarkeit definierten wir eingabe- und ausgabeorientiert. Wir können deshalb den Wert der Systemverfügbarkeit auf zwei verschiedenen Wegen berechnen. Dabei addieren wir unterschiedliche Zustandswahrscheinlichkeiten. Wie gut die "beiden" Systemverfügbarkeiten übereinstimmen, ist ein Maß für die Genauigkeit der numerischen Ergebnisse.
- (iii) Nehmen wir für die Systemparameter  $a_i=c_i$ ,  $i=1,2,3$  an, so erhalten

wir bei dieser Bedingung ein Verhalten der Maschinen, das unabhängig vom Lagerbestand ist. Wenn dies der Fall ist, so müssen wir die Maschinenzustandswahrscheinlichkeiten  $p(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ ,  $\alpha_i \in \{0,1\}$  mit einem gesonderten Modell ohne Berücksichtigung von Lagerzuständen berechnen können. Dieses Modell entspricht dem Seriensystem ohne Zwischenlager, bei dem eine blockierte Maschine weiterhin mit der Wahrscheinlichkeit  $a_i$  ausfallen kann, und wir können die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$  in einer geschlossenen analytischen Form angeben. Sie lautet:

$$p(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = \left( \alpha_1 \cdot \frac{a_1}{a_1+b_1} + (1-\alpha_1) \frac{b_1}{a_1+b_1} \right) \left( \alpha_2 \cdot \frac{a_2}{a_2+b_2} + (1-\alpha_2) \frac{b_2}{a_2+b_2} \right) \left( \alpha_3 \cdot \frac{a_3}{a_3+b_3} + (1-\alpha_3) \frac{b_3}{a_3+b_3} \right)$$

Zusätzlich können wir mit den numerischen Ergebnissen die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$  berechnen durch:

$$p(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} p(\alpha_1\alpha_2\alpha_3, n_1 n_2)$$

Diese auf unterschiedliche Art berechneten Werte für  $p(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$  müssen übereinstimmen.

Bei allen durchgeführten Berechnungen wurden die oben aufgeführten Möglichkeiten (i) bis (iii) zur Verifikation der Ergebnisse herangezogen. Es zeigte sich immer eine sehr hohe Übereinstimmung mit mindestens 12 signifikanten Stellen. Besondere Beachtung wurde dabei auf die Möglichkeit (iii) gelegt, da hier anhand geschlossener analytischer Lösungen die numerischen Ergebnisse verifiziert werden können.

Literaturverzeichnis

- Anderson, D.R. and Moodie, C.L. [1969 ], "Optimal Buffer Storage Capacity in Production Line Systems", Int. J. Prod. Res., 7, 3, 233-240.
- Artamonov, G.T. [1976 ], "Productivity of a Two-Instrument Discrete Processing Line in the Presence of Failures", Kibernetika, 3, 126-130, Englische Übersetzung in Cybernetics, 12, 3, 464-468 (1977).
- Barlow, R.E. and Proschan, F. [1975 ], "Statistical Theory of Reliability and Life Testing", Holt, Rinehart and Winston, INC.
- Baskett, F., Chandy, K.M., Muntz, R.R. and Palacios, F.G. [1975], "Open, Closed and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers", J. ACM, 22, 2, 248-260.
- Buzacott, J.A. [1967a], "Reliability of Systems with In Service Repair", Ph.D. Thesis, University of Birmingham.
- Buzacott, J.A. [1967b], "Automatic Transfer Lines with Buffer Stocks", Int. J. Prod. Res., 5, 3, 183-200.
- Buzacott, J.A. [1968], "Prediction of the Efficiency of Production Systems without Internal Storage", Int. J. Prod. Res., 6, 3, 173-188.
- Buzacott, J.A. and Hanifin, L.E. [1978], "Models of Automatic Transfer Lines with Inventory Banks. A Review and Comparison", AIIE Transactions, 6, 197-207.
- Cox, D.R. and Miller, H.D. [1965 ], "The Theory of Stochastic Processes", Chapman and Hall Ltd.
- Curtis, A.R. and Reid, J.K. [1971 ], "Fortran subroutines for the solution of sparse sets of linear equations", HMSO, London, England, AERE Rep. R. 6844.
- De la Wyche, Wild, P.R. [1977 ], "The Design of Imbalanced Series of Queue Flow Lines", Operational Research Quarterly, 28, 695-702.
- Domke, E. [1966 ], "Betriebswirtschaftliche Probleme bei der Integration automatischer Aggregate zu Fertigungsketten", Dissertation Hamburg.
- Duff, Iain S. [1977 ], "A Survey of Sparse Matrix Research", Proceedings of the IEEE, Vol. 65, No. 4, 500-535.
- Elsayed, E.A. and Turley, R.E. [1979 ], "Reliability Analysis of Production Systems with Buffer Storage", 5. Int. Conf. Production Research, Amsterdam.
- Feller, W. [1950 ], "An Introduction to Probability Theory and Its Applications", 3. Ausgabe, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Ferschl, F. [1970 ], "Markovketten", Springer Verlag.

- Fox, B.L. and Landi, D.M. [1968], "An Algorithm for Identifying the Ergodic Subchains and Transient States of a Stochastic Matrix", Communications of the ACM, Vol. 11, No. 9, 619-621.
- Gaede, K.-W. [1977], "Zuverlässigkeit - Mathematische Modelle", Carl Hanser Verlag München Wien.
- Gershwin, S.B. and Schick, I.C. [1978], "Modelling and Analysis of Unreliable Transfer Lines with Finite Interstage Buffers", Report ESL-FR-834-6, Massachusetts Institute of Technology.
- Gershwin, S.B. and Schick, I.C. [1979], "Analytic Methods for Calculating Performance Measures of Production Lines with Buffer Storage", Proceedings of the 1978 IEEE Conference on Decision and Control, 10.-12. Jan. 1979, 618-624, New York.
- Gershwin, S.B. and Schick, I.C. [1980], "Modelling and Analysis of Two- and Three-Stage Transfer Lines with Unreliable Machines and Finite Buffers", Report LIDS-R-979, Laboratory for Information and Decision Systems, Massachusetts Institute of Technology.
- Gershwin, S.B. and Ammar, M. [1979], "Reliability in Flexible Manufacturing Systems", Presented at the 18th Conference on Decision and Control, August 1979, 1-6, Albuquerque.
- Gross-Hardt, E. [1966], "Über den Einfluß von Werkstückpuffern auf die Kapazitätsausnutzung von Maschinenfließreihen", Dissertation Aachen.
- Hanifin, L.E., Liberty, S.G., and Taraman, K. [1975], "Improved Transfer Line Efficiency Utilizing Systems Simulation", Technical Paper MR75-169, Society of Manufacturing Engineers.
- Hatcher, J.M. [1969], "The Effect of Internal Storage on the Production Rate of a Series of Stages Having Exponential Service Times", AIIE Trans., 1, 2, 150-156.
- Heller, W.-D., Lindenberg, H., Nuske, M., und Schriever, K.-H. [1978], "Stochastische Systeme", Walter de Gruyter, Berlin-New York.
- Hillier, F.S. and Boling, R.W. [1966], "The Effect of Some Design Factors on the Efficiency of Production Lines with Variable Operation Times", J. Ind. Eng., 17, 12, 651-658.
- Hillier, F.S. and Boling, R.W. [1967], "Finite Queues in Series with Exponential or Erlang Service Times - a Numerical Approach", Op. Res., 15, 2, 286-303.
- Ho, Y.C., Eyler, M.A., and Chien, T.T. [1979], "A Gradient Technique for General Buffer Storage Design in a Production Line", Proceedings of the 1978 IEEE Conference on Decision and Control, 10.-12. Jan. 1979, San Diego, 625-632.
- Hunt, G.C. [1956], "Sequential Arrays of Waiting Lines", Operations Research, 4, 674-683.

- Jackson, J.R. [1963], "Job-Shop-Like Queueing Systems",  
Management Science 10, 1, 131-142.
- Janisch, H.-W. [1979], "Optimierung der Puffer bei elastisch verketteten  
Fertigungssystemen", Dissertation Hannover.
- Kay, E. [1972], "Buffer Stocks in Automatic Transfer Lines",  
Int. J. Prod. Res., 10, 2, 155-165.
- Koenigsberg, E. [1959], "Production lines and internal storage - a  
review", Management Science, 5, 410-433.
- Knott, A.D. [1970], "The inefficiency of a series of work stations - a  
simple formula", Int. J. Production Research, 8, 109-119.
- Knott, A.D. [1970a], Letter to "The Effect of Internal Storage on the Pro-  
duction Rate of a Series of Stages Having Exponential Service  
Times", AIIE Transactions, 2, 273.
- Levin, A.A., and Pasko, I.I. [1969], "Calculating the Output of Transfer  
Lines", Machines and Tooling, 40, 12-16.
- Luithle, J., Pentz, N. and Schene, H. [1978], "Dimensionierung von Werk-  
stückpuffern", WT-Zeitschrift für industrielle Fertigung, 68, 19-21.
- Masso, J., and Smith, M.L. [1974], "Interstage storages for three stage  
lines subject to stochastic failures", AIEE Transactions, 6,  
354-358.
- Murphey, R.A. [1978], "Estimating the Output of a Series Production  
System", AIIE Transactions, 10, 139-148.
- Murphey, R.A. [1979], "Examining the Distribution of Buffer Protection",  
AIIE Transactions, 11, 113-120.
- Muth, E.J. [1973], "The Production Rate of a Series of Work Stations with  
Variable Service Times", Int. J. Prod. Res., 11, 155-169.
- Muth, E.J. [1979], "The Reversibility Property of Production Lines",  
Management Science, 25, 152-158.
- Okamura, K. and Yamashina, H. [1977], "Analysis of the Effect of Buffer  
Storage Capacity in Transfer Line Systems", AIIE Transactions, 9,  
127-135.
- Rudolph, H.-J. [1966], "Anwendung der Monte-Carlo-Methode zur Berechnung  
von automatischen Maschinenfließreihen", Fertigungstechnik und Be-  
trieb, 16, 471-475.
- Schendel, U. [1977], "Sparse Matrizen", R. Oldenburg Verlag München-Wien.
- Sevastyanov, B.A. [1962], "Influence of Storage Bin Capacity on the Avera-  
ge Standstill Time of a Production Line", Theory Prob. Appl., 7,  
429-438.

- Shantikumar, J.G. [1980], "On the Production Capacity of Automatic Transfer Lines with Unlimited Buffer Space", *AIIE Transactions*, Vol. 12, 273-274.
- Sheskin, T.E. [1976], "Allocation of Interstage Storage Along an Automatic Production Line", *AIIE Transactions*, 8, 146-152.
- Soyster, A.L. and Toof, D.I. [1976], "Some Comparative and Design Aspects of Fixed Cycle Production Systems", *Naval Research Logistics Quarterly*, 23, 437-454.
- Stetten, v.R. [1977], "Auslegung von Störungspuffern in Kapitalintensiven Fertigungslinien", *Otto Krausskopf-Verlag, Mainz*.
- Vladzievskii, A.P. [1953], "Losses of Working Time and Division of Automatic Lines into Sections", *Stankii Instrument*, 24, 10, 9-15.
- Wijngaard, J. [1979], "The Effect of Interstage Buffer Storage of the Output of Two Unreliable Production Units in Series, with Different Production Rates", *AIIE Transactions* 11, 42-47.
- Zimmern, B. [1956], "Etudes de la propagation des arrêts aléatoires dans les chaînes de production", *Revue de statistique appliquée*, Paris, 4, 85-104.

Anhang 1

Al. Markov'sche Ketten

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, A, P)$  mit dem Stichprobenraum  $\Omega = \{\omega\}$ , der Menge der Ereignisse  $A$  und dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$ , sowie eine unendlich geordnete Indexmenge  $T = \{t\}$ . Ein *stochastischer Prozeß* ist eine Abbildung  $X(\omega, t)$  aus  $\Omega \times T$  auf den Zustandsraum  $E$ , die für jeden Parameterwert  $t \in T$  eine Zufallsgröße  $X(t)$  darstellt. Die Menge  $T$  heißt *Parameterterraum* und  $X(t)$  der zum Parameterwert  $t$  gehörende *Zustand* des Systems.

Wir betrachten nun einen stochastischen Prozeß mit diskretem Zustands- und Parameterterraum; stochastische Prozesse dieser Art nennen wir *stochastische Ketten*. Ist der Zustandsraum endlich, so nennen wir die stochastische Kette *endlich*.

Ereignisse der Form

$$\{X(t)=i_t, X(t-1)=i_{t-1}, \dots, X(0)=i_0\} \quad (A-1)$$

bezeichnen wir als *Basisereignisse*, auf die wir die Kettenformel anwenden können:

$$p\{X(t)=i_t, X(t-1)=i_{t-1}, X(0)=i_0\} = \quad (A-2)$$

$$p\{X(t)=i_t \mid X(t-1)=i_{t-1}, \dots, X(0)=i_0\} \cdot \dots \cdot p\{X(1)=i_1 \mid X(0)=i_0\} \cdot p\{X(0)=i_0\}.$$

Wir nennen

$$p\{X(t)=i\} =: p_i(t), \quad t \in T \quad (A-3)$$

die *Zustandswahrscheinlichkeiten* einer stochastischen Kette.

Der Vektor der Zustandswahrscheinlichkeiten

$$p'(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots) \quad (A-4)$$

$$\text{mit } \sum_i p_i(t) = 1$$

gibt somit die Verteilung von  $X(t)$  für vorgegebenes  $t \in T$  an.

Die Verteilung von  $X(t)$  für  $t=0$ ,

$$p\{X(0)=i\} =: p_i(0) \quad (\text{A-5})$$

nennen wir die *Anfangsverteilung* der Kette.

Eine stochastische Kette  $\{X(t), t \in T\}$  heißt *Markov'sche Kette*, wenn für alle  $i_0, i_1, \dots, i_t$  und alle  $t \geq 2$  gilt:

$$p\{X(t)=i_t | X(t-1)=i_{t-1}, \dots, X(0)=i_0\} = p\{X(t)=i_t | X(t-1)=i_{t-1}\} \quad (\text{A-6})$$

Anschaulich bedeutet dies: Befindet sich ein Prozeß in einem bestimmten Zustand, so ist der weitere Verlauf des Prozesses nur abhängig von dem derzeitigen Zustand. Die Vorgeschichte, d.h. der Weg, auf dem dieser Zustand erreicht wurde, spielt keine Rolle mehr. Diese Unabhängigkeit bezeichnet man als *Markov-Eigenschaft*. Die Wahrscheinlichkeit eines Basisereignisses lautet für Markov'sche Ketten unter Verwendung der Kettenformel und der Markov-Eigenschaft:

$$p\{X(t)=i_t, X(t-1)=i_{t-1}, \dots, X(0)=i_0\} = \\ p\{X(0)=i_0\} \cdot p\{X(1)=i_1 | X(0)=i_0\} \cdot p\{X(2)=i_2 | X(1)=i_1\} \cdot \dots \cdot p\{X(t)=i_t | X(t-1)=i_{t-1}\} \quad .$$

Diese Formel zeigt, daß sich die Wahrscheinlichkeiten aller Basisereignisse und damit alle Wahrscheinlichkeitsaussagen über Markov'sche Ketten bestimmen lassen, wenn

- a) die Anfangsverteilung der Zufallsgröße  $X(0)$
- b) alle bedingten Wahrscheinlichkeiten der Form  $p\{X(t)=j | X(t-1)=i\}$  gegeben sind.

Falls  $0 < s \leq t$  und  $t-s=n \geq 0$  nennen wir die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$p\{X(t)=j | X(s)=i\} =: p_{ij}(s, t) \quad (\text{A-8})$$

*Übergangswahrscheinlichkeiten n-ter Ordnung.*

Diese Übergangswahrscheinlichkeiten können zu einer *Übergangsmatrix n-ter Ordnung* zusammengefaßt werden:

$$\underline{\underline{P}}(s,t) = (p_{ij}(s,t))_{i,j \in E} = \begin{pmatrix} p_{11}(s,t) & p_{12}(s,t) & \dots \\ p_{21}(s,t) & p_{22}(s,t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{A-9})$$

Die Übergangsmatrix n-ter Ordnung kann in eine spezielle Klasse von Matrizen, und zwar in die der *stochastischen Matrizen* eingeordnet werden. Für diese Matrizen gilt:

- a) Ihre Elemente sind nicht negative Zahlen.
- b) Ihre Zeilensummen betragen 1.

Speziell sind die Übergangswahrscheinlichkeiten 0-ter Ordnung definiert durch

$$p\{X(t)=j|X(t)=i\} = p_{ij}(t,t) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{A-10})$$

In (A-8) sind die Übergangswahrscheinlichkeiten 1. Ordnung  $p_{ij}(s,s+1)$  eine Funktion des Zeitparameters und zweier Elemente des Zustandsraumes. Hängen diese Übergangswahrscheinlichkeiten 1. Ordnung nicht vom Zeitparameter  $s$  ab, so sprechen wir von einer *homogenen Markov'schen Kette*. Die zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten 1. Ordnung schreiben wir kurz in der Form

$$p_{ij} := p\{X(t+1)=j | X(t)=i\} \quad (\text{A-11})$$

Die Matrix

$$\underline{\underline{P}} = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{A-12})$$

heißt dann *Übergangsmatrix* der homogenen Markov'schen Kette.

Bei der Beschreibung konkreter Systeme mit Hilfe von Markov'schen Modellen interessiert man sich für das zeitabhängige und das asymptotische Ver-

halten der Zustandswahrscheinlichkeiten.

Von einem Zustand  $i$  geht das System während  $(t, t+1)$  in einen Zustand  $j$  über; es gilt also nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$p\{X(t+1)=j\} = \sum_i p\{X(t)=i\} \cdot p\{X(t+1)=j|X(t)=i\} \quad (\text{A-13})$$

oder kurz, in Matrixschreibweise

$$\underline{p}(t+1) = \underline{P} \cdot \underline{p}(t) \quad (\text{A-14})$$

Rekursive Anwendung dieser letzten Beziehung liefert:

$$\underline{p}(t) = \underline{P}^t \cdot \underline{p}(0) \quad (\text{A-15})$$

Die Verteilung  $\underline{p}$  heißt *stationäre Verteilung* wenn gilt:

Aus  $\underline{p}(0) = \underline{p}$  folgt  $\underline{p}(n) = \underline{p}$  für alle  $n$ .

Insbesondere gilt wegen (A-15) für  $t=1$ :

$$\underline{p} = \underline{P} \cdot \underline{p} \quad (\text{A-16})$$

Existiert bei einer Markov'schen Kette der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{p}(t) =: p(\infty), \quad (\text{A-17})$$

so nennen wir  $p(\infty)$  die *Grenzverteilung* der Markov'schen Kette.

Besitzt eine Markov'sche Kette eine Grenzverteilung unabhängig von der Anfangsverteilung, so besitzt sie eine stationäre Verteilung. Dieser Satz kann nicht ohne weiteres umgekehrt werden: Wir betrachten die Übergangsmatrix

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

die die stationäre Verteilung  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  hat. Sie hat jedoch i.a. keine Grenzverteilung: Sei  $\underline{p}_0 = (p, 1-p)$ . Dann gilt  $\underline{p}_1 = (1-p, p)$ ,  $\underline{p}_2 = (p, 1-p)$ ,

$\underline{p}_3 = (1-p, p)$  etc., d.h. für  $p \neq \frac{1}{2}$  pendelt der Zustandsvektor in der angegebenen Weise.

Ist die asymptotische Verteilung  $p^{(\infty)}$  einer Markov'schen Kette unabhängig von der Anfangsverteilung  $p(0)$ , so nennen wir sie eine *ergodische Verteilung*.

Eine Markov'sche Kette ist *irreduzibel*, falls jeder Zustand von jedem anderen Zustand aus erreicht werden kann und sie heißt *periodisch*, falls ein Zustand in sich selbst nach  $d, 2d, 3d, \dots, nd$  Schritten übergeht. Ist  $d=1$ , so nennen wir die Kette *aperiodisch*.

Die ergodische Verteilung ist die eindeutige Lösung der Gleichungen

$$\begin{aligned} \underline{p} &= \underline{P} \cdot \underline{p} \\ \sum_i p_i &= 1 \end{aligned} \quad , \quad (A-18)$$

falls die Markov'sche Kette irreduzibel, endlich und aperiodisch ist.

Die Zustände einer Markov'schen Kette fallen entsprechend ihrem Grenzverhalten in verschiedene Kategorien, die wir jetzt angeben.

Ein Zustand  $k$  ist von einem Zustand  $j$  aus *erreichbar*, wenn es möglich ist,  $k$  von  $j$  aus mit einer endlichen Anzahl von Übergängen zu erreichen. Wenn  $k$  von  $j$  aus und  $j$  von  $k$  aus erreichbar ist, dann heißen  $j$  und  $k$  *verbundene Zustände*.

Wir nennen einen Zustand *ephemer*, falls dieser Zustand von keinem anderen Zustand der Kette erreicht werden kann.

Wir nennen einen Zustand *absorbierend*, falls von diesem Zustand aus kein anderer Zustand erreicht werden kann.

Wir nennen einen Zustand *transient*, falls die Wahrscheinlichkeit einer Rückkehr zu diesem Zustand kleiner als 1 ist.

Wir nennen einen Zustand *rekurrent*, falls die Wahrscheinlichkeit einer Rückkehr zu diesem Zustand gleich 1 ist.

Eine Menge  $M$  von Zuständen heißt *ephemer*, *absorbierend*, *transient*, *rekurrent*, falls alle Zustände aus  $M$  die entsprechende Eigenschaft besitzen.

Wichtig sind nun die folgenden Aussagen:

Sind  $j$  und  $k$  verbundene Zustände, so müssen sie vom gleichen Typ sein, beide transient oder rekurrent. Dazu müssen beide die gleiche Periode haben.

Ist  $j$  ein rekurrenter Zustand und  $k$  ein anderer Zustand, der von  $j$  aus erreichbar ist, so sind  $j$  und  $k$  miteinander verbunden.

Eine endliche, irreduzible Markov'sche Kette ist

- a) rekurrent
- b) ergodisch, falls sie aperiodisch ist.

Eine endliche Markov'sche Kette kann nicht nur aus transienten Zuständen bestehen.

Anhang 2

A2. Zustandswahrscheinlichkeiten eines Seriensystems ohne Zwischenlager bestehend aus drei Maschinen, die im blockierten Zustand eine Ausfallwahrscheinlichkeit besitzen.

Wir führen die Zustandswahrscheinlichkeiten für den Fall identischer Maschinen auf ( $a_i = a$ ,  $b_i = b$ ,  $c_i = c$ ,  $i = 1,2,3$ ). Sie lauten:

$$p(000) := \frac{(B^3 * (B^4 + 4*B^3 * C + 6*B^2 * C^2 + 4*B * C^3 + C^4)) / (3*A * B^6 + 15*A^2 * B^5 * C + 31*A^3 * B^4 * C^2 + 34*A^4 * B^3 * C^3 + 21*A^5 * B^2 * C^4 + 7*A^6 * B * C^5 + A^7 * C^6 + B^6 + 4*B^5 * C + 6*B^4 * C^2 + 4*B^3 * C^3 + B^2 * C^4)}{(3*A * B^6 + 15*A^2 * B^5 * C + 31*A^3 * B^4 * C^2 + 34*A^4 * B^3 * C^3 + 21*A^5 * B^2 * C^4 + 7*A^6 * B * C^5 + A^7 * C^6 + B^6 + 4*B^5 * C + 6*B^4 * C^2 + 4*B^3 * C^3 + B^2 * C^4)}$$

$$p(001) := \frac{(A * B^2 * (B^4 + 4*B^3 * C + 6*B^2 * C^2 + 4*B * C^3 + C^4)) / (3*A * B^6 + 15*A^2 * B^5 * C + 31*A^3 * B^4 * C^2 + 34*A^4 * B^3 * C^3 + 21*A^5 * B^2 * C^4 + 7*A^6 * B * C^5 + A^7 * C^6 + B^6 + 4*B^5 * C + 6*B^4 * C^2 + 4*B^3 * C^3 + B^2 * C^4)}{(3*A * B^6 + 15*A^2 * B^5 * C + 31*A^3 * B^4 * C^2 + 34*A^4 * B^3 * C^3 + 21*A^5 * B^2 * C^4 + 7*A^6 * B * C^5 + A^7 * C^6 + B^6 + 4*B^5 * C + 6*B^4 * C^2 + 4*B^3 * C^3 + B^2 * C^4)}$$

$$p(010) := \frac{(A * B^2 * (B^4 + 4*B^3 * C + 6*B^2 * C^2 + 4*B * C^3 + C^4)) / (3*A * B^6 + 15*A^2 * B^5 * C + 31*A^3 * B^4 * C^2 + 34*A^4 * B^3 * C^3 + 21*A^5 * B^2 * C^4 + 7*A^6 * B * C^5 + A^7 * C^6 + B^6 + 4*B^5 * C + 6*B^4 * C^2 + 4*B^3 * C^3 + B^2 * C^4)}{(3*A * B^6 + 15*A^2 * B^5 * C + 31*A^3 * B^4 * C^2 + 34*A^4 * B^3 * C^3 + 21*A^5 * B^2 * C^4 + 7*A^6 * B * C^5 + A^7 * C^6 + B^6 + 4*B^5 * C + 6*B^4 * C^2 + 4*B^3 * C^3 + B^2 * C^4)}$$

$$\begin{aligned}
 p(011) & := (A^4 B^3 C^2 + 4 A^2 B^2 C^2 + 4 A^3 B C^4 + C^4) / (3 A^6 B^5 C^4 + 15 A^4 B^2 C^2 + 31 A^3 B^3 C^3 + 21 A^2 B^4 C^5 + 7 A^5 B^6 C^7 + A^6 B^6 C^5 + 6 A^7 B^6 C^5 \\
 & \quad + 4 A^6 B^5 C^6 + 6 A^5 B^5 C^6 + 21 A^4 B^4 C^5 + 31 A^3 B^3 C^4 + 15 A^2 B^2 C^3 + 4 A B C^2 + C)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p(100) & := (A^2 B^4 C^3 + 4 A^2 B^3 C^2 + 6 A^2 B^2 C^2 + 4 A^3 B C^4 + C^4) / (3 A^6 B^5 C^4 + 15 A^4 B^2 C^2 + 31 A^3 B^3 C^3 + 21 A^2 B^4 C^5 + 7 A^5 B^6 C^7 + A^6 B^6 C^5 + 6 A^7 B^6 C^5 \\
 & \quad + 4 A^6 B^5 C^6 + 6 A^5 B^5 C^6 + 21 A^4 B^4 C^5 + 31 A^3 B^3 C^4 + 15 A^2 B^2 C^3 + 4 A B C^2 + C)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p(101) & := (A^4 B^3 C^2 + 4 A^2 B^2 C^2 + 4 A^3 B C^4 + C^4) / (3 A^6 B^5 C^4 + 15 A^4 B^2 C^2 + 31 A^3 B^3 C^3 + 21 A^2 B^4 C^5 + 7 A^5 B^6 C^7 + A^6 B^6 C^5 + 6 A^7 B^6 C^5 \\
 & \quad + 4 A^6 B^5 C^6 + 6 A^5 B^5 C^6 + 21 A^4 B^4 C^5 + 31 A^3 B^3 C^4 + 15 A^2 B^2 C^3 + 4 A B C^2 + C)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p(110) & := (A^4 B^3 C^2 + 4 A^2 B^2 C^2 + 4 A^3 B C^4 + C^4) / (3 A^6 B^5 C^4 + 15 A^4 B^2 C^2 + 31 A^3 B^3 C^3 + 21 A^2 B^4 C^5 + 7 A^5 B^6 C^7 + A^6 B^6 C^5 + 6 A^7 B^6 C^5 \\
 & \quad + 4 A^6 B^5 C^6 + 6 A^5 B^5 C^6 + 21 A^4 B^4 C^5 + 31 A^3 B^3 C^4 + 15 A^2 B^2 C^3 + 4 A B C^2 + C)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p(111) := & (A^2 C^4 (B^3 + 4^3 B^2 C + 6^2 B C^2 + 4^3 B^3 C + C^4)) / (3^6 A^6 B^5 + 15^5 A^4 B^2 C^3 + 31^4 A^2 B^3 C^2 + 34^3 A^3 B^3 C^3 + 21^3 A^2 B^4 C^4 + 7^5 A^5 B^6 C^7 + A^6 C^6 + B^6 + 4^6 B^6 C^5 + 6^5 B^5 C^4 + 4^4 B^4 C^3 + B^3 C^4)
 \end{aligned}$$

Haben die Maschinen unterschiedliche Systemparameter ( $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, 3$ ), so erhalten wir sehr umfangreiche Ausdrücke für die Zustandswahrscheinlichkeiten. Wir geben aus diesem Grunde diese Zustandswahrscheinlichkeiten hier nicht an. Auch sind keine Bildungsgesetze erkennbar, so daß der Informationsgehalt relativ gering ist.

Anhang 3

A3. Numerische Lösung der Zustandsgleichungen mit beliebigen Systemparametern

Analytische Lösungen haben oft den Vorteil, daß sie relativ einfach und kompakt zu implementieren sind. Aber sie sind schwierig oder gar nicht herzuleiten. Da sie außerdem sehr stark von den Voraussetzungen abhängen, können Änderungen im Annahmesystem nur durch eine komplette Nachbehandlung berücksichtigt werden. Aus diesem Grunde benutzt man numerische Verfahren, die zwar weniger kompakt, aber flexibler bezüglich des Annahmesystems sind.

Welche Schwierigkeiten numerische Lösungen mit sich bringen, läßt sich mit der Anzahl der möglichen Systemzustände veranschaulichen (vgl. Tabelle A3.1).

| Anzahl der Systemzustände | $N_1$ | $N_2$ | Anzahl der Nichtnullelemente in der Übergangsmatrix |
|---------------------------|-------|-------|---|
| 32                        | 1     | 1     | 170   |
| 128                       | 3     | 3     | 714   |
| 288                       | 5     | 5     | 1626  |
| 648                       | 8     | 8     | 3684  |
| 968                       | 10    | 10    | 5516  |
| 2048                      | 15    | 15    | 11706   |
| 3528                      | 20    | 20    | 20196   |
| 7688                      | 30    | 30    | 44076   |

Tabelle A3.1: Anzahl der möglichen Systemzustände eines Zweilagermodells.

Schon relativ kleine Lagerkapazitäten ( $N_1=N_2=10$ ) verlangen die Handhabung von Matrizen mit  $10^6$  Elementen. Rechnet man mit doppelter Genauigkeit, so benötigt man für die Abspeicherung solcher Matrizen ca. 8M byte. Diese Speicherplatzanforderungen können zwar moderne Großrechner (z.B. IMB 3033

des Kernforschungszentrums Karlsruhe) bewältigen, jedoch können derartige Programme im "Normalbetrieb" der Rechenanlage nicht abgearbeitet werden. Um das Systemverhalten und die Abhängigkeiten der Parameter untereinander kennenzulernen, muß man die Programme mit unterschiedlichen Eingangsdaten öfters ausführen. Dies ist nur sinnvoll, wenn die Programme nicht über "normale" Anforderungen an Speicherplatzbedarf und Rechenzeit hinausgehen. Bei unserem Problem steht der Speicherplatzbedarf im Vordergrund und wir müssen ihn daher reduzieren.

### A3.1 Abspeicherungstechniken für Sparse Matrizen

Betrachten wir unsere Übergangsmatrizen, so stellen wir fest, daß viele Übergangswahrscheinlichkeiten null sind, d.h. die Matrizen sind schwach besetzt. Solche Matrizen nennt man *Sparse-Matrizen*.

Effektives Arbeiten mit diesen Matrizen erfordert (Schendel [1975], Duff [1977]):

- (i) Spezielle numerische Algorithmen, die die Sparseness der Matrizen berücksichtigen.
- (ii) Spezielle Speichertechniken.
- (iii) Spezielle Programmierstechniken.

Die Existenz einer Lösung tritt in unserem Fall in den Hintergrund, wenn wir nachweisen, daß wir eine irreduzible, endliche und aperiodische Markov'sche Kette konstruiert haben, da dann die Existenz einer Lösung gesichert ist. Dieser Nachweis wird später erbracht.

Hier sei noch näher auf die Abspeicherung und der numerischen Behandlung der schwach besetzten Matrix eingegangen.

Haben beide Zwischenlager eine Kapazität von 10 ME, so sind z.B. nur ca. 0,56% der Matrix mit Nichtnullelementen besetzt. Es ist sinnvoll, nur die Nichtnullelemente abzuspeichern. In welcher Form diese Elemente im Speicher abgelegt werden, hängt noch wesentlich von dem Algorithmus ab, der diese Elemente benötigt. Duff [1977] unterscheidet zwei Speichertechni-

ken:

- Statische Abspeicherung: die Matrixelemente können lediglich abgerufen werden.
- Dynamische Abspeicherung: durch den Algorithmus neu entstehende Nicht-nullelemente können eingegliedert werden.

Statische Abspeicherungstechniken sind nur verwendbar, wenn sich die Struktur der Matrix nicht ändert, wie bei Matrix-Vektormultiplikation und bei einigen iterativen Algorithmen.

Weitaus wichtiger sind aus diesem Grunde dynamische Abspeicherungstechniken, bei denen sich die Struktur verändern kann. Jedes Nichtnullelement kann ungeordnet abgespeichert werden und erhält aus parallelen Feldern einige der folgenden Attribute:

Reihenindex

Zeilenindex

Zeiger auf das nächste Element der Reihe

Zeiger auf das nächste Element der Spalte

Zeiger auf das vorhergehende Element der Reihe

Zeiger auf der vorhergehende Element der Spalte.

Natürlich benötigt man nicht alle der aufgezählten Attribute, da dann wesentliche Informationen doppelt vorhanden sind.

### A3.2 Verfahren zur Lösung der linearen Gleichungssysteme

Die numerische Lösung der linearen Gleichungssysteme kann mit direkten und mit iterativen Verfahren durchgeführt werden. Weit verbreitet sind die iterativen Verfahren, da sie nur die statische Abspeicherung der Matrixelemente erfordern. Diese Verfahren verwenden nur die Nichtnullelemente und verändern die Matrix nicht. Der Speicheraufwand ist somit minimal. Ihre Nachteile sind jedoch in den Konvergenzgeschwindigkeiten und in den Genauigkeiten der Ergebnisse zu finden. Im Gegensatz dazu, liefern die direkten Verfahren sehr hohe Genauigkeiten, erzeugen aber neue Nichtnullelemente. Dies nennt man "fill in". Neben der Komplikation der Abspeiche-

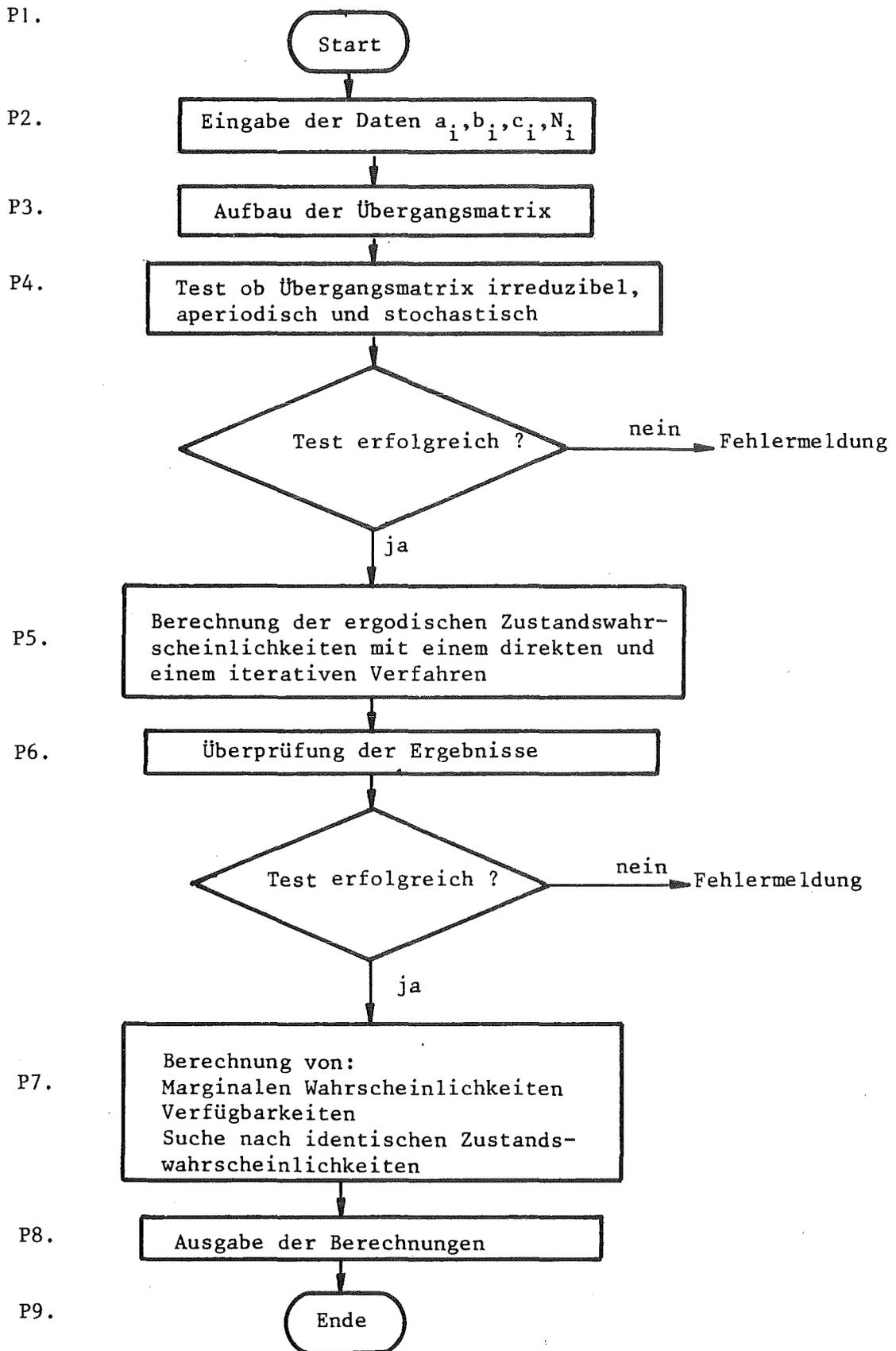


Bild A3.1: Strukturdiagramm des Programms zur Analyse eines Zweilagermodells.

rungstechnik kann dieses "fill in" derart umfangreich werden, daß der zur Verfügung stehende Speicherplatz erschöpft wird. Wir lösen unsere Zustandsgleichungen mit einem direkten und einem iterativen Verfahren, um die Ergebnisse miteinander zu vergleichen und um die Vorteile der Verfahren ausnutzen zu können.

Bei dem direkten Verfahren greifen wir auf die Programmbibliothek HARWELL (Curtis und Reid [1971]) zurück. Wir verwenden daraus das Unterprogramm MA18A. Der Algorithmus dieses Unterprogramms ist eine Variante des Gauß'schen Eliminationsverfahrens. Bei diesem Verfahren werden die Unbekannten  $x_i$  des linearen Gleichungssystems  $A \cdot x = b$  (mit  $x, b \in \mathbb{R}^n$  und  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix) sukzessive eliminiert, bis das System Dreiecksgestalt besitzt:

$$U \cdot x = c \quad ,$$

wobei  $c \in \mathbb{R}^n$  und  $U$  eine obere  $n \times n$ -Dreiecksmatrix ist. Dieses System besitzt dieselbe Lösung wie  $A \cdot x = b$ , die im Falle  $u_{ij} \neq 0$  leicht bestimmt werden kann:

$$x_i = (c_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} \cdot x_k) / u_{ii} \quad \text{für } i=n, n-1, \dots, 1$$

Man kann nun zeigen (Schendel [1977]), daß das ursprüngliche System  $A \cdot x = b$  äquivalent dem System  $L \cdot U \cdot x = b$  ist, das in zwei gestaffelte Systeme zerfällt,

$$A \cdot x = b \iff \begin{cases} L \cdot y = b \\ U \cdot x = y \end{cases} \quad ,$$

wobei  $L$  eine untere und  $U$  eine obere Dreiecksmatrix ist. Besitzen wir eine derartige Dreieckszerlegung von  $A$ , so können wir bei neuer rechten Seite  $b'$  und gleichen Matrix  $A$  den alten Eliminationsprozeß benutzen. Neben dieser Möglichkeit kann das Unterprogramm MA18A die Struktur der Matrix  $A$  nutzen: muß ein neues Gleichungssystem  $A' \cdot x = b'$  gelöst werden, wobei  $A'$  dieselbe Struktur hat wie  $A$ , so verwendet MA18A die Pivotisierungssequenz der früheren Berechnung. Mit diesen beiden Möglichkeiten kann man erhebliche Rechenzeit einsparen.

Bei dem iterativen Verfahren implementieren wir ein sukzessives Überrelaxationsverfahren (successive overrelaxation methods). Der SOR-Algorithmus (vgl. Schendel [1977]) zur Lösung von  $A \cdot x = b$  ist definiert durch:

$$x_i^{(r+1)} := \omega \left[ \sum_{k=1}^{i-1} \cdot b_{ik} x_k^{(r+1)} + \sum_{k=i+1}^n \cdot b_{ik} x_k^{(r)} + c_i \right] + (1-\omega) \cdot x_i^{(r)}$$

mit  $i=1,2,\dots,n$  und  $r=0,1,\dots$

Der Parameter  $\omega$  ist bekannt als Relaxationsfaktor und soll so gewählt werden, daß die Konvergenz möglichst schnell ist. Die optimale Bestimmung von  $\omega$  erwies sich als äußerst schwierig. Um an die Genauigkeit des direkten Verfahrens heranzukommen, mußten häufig bis zu 1000 Iterationen durchgeführt werden, was sich natürlich auf die Rechenzeit niederschlug.

Bemerkung:

Abschließend ist festzustellen: Ein Zweilagermodell läßt sich mit den hier verwendeten Verfahren adäquat behandeln. Größere Lagermodelle erfordern verbesserte Methoden, da zum einen bei der direkten Methode das "fill in" zu umfangreich wird zum anderen bei dem iterativen Verfahren die Genauigkeit nicht ausreichend sein wird.

### A3.3 Programmbeschreibung

Im folgenden beschreiben wir das Programm zur Analyse eines Zweilagermodells anhand von Bild A3.1:

P1. Start des Programms

P2. Einlesen der Variablen  $a_i, b_i, c_i, i=1,2,3$  und  $N_i, i=1,2$

P3. Aufbau der Übergangsmatrix  $\underline{P}$ .

Dazu ist es notwendig, die Zustandsvektoren  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1 n_2)$  eineindeutig auf ein eindimensionales Feld der Länge  $8 \cdot (N_1+1)(N_2+1)$  abzubilden. Jedem Zustand  $p(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1 n_2)$  wird eine ganze Zahl  $\lambda(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1 n_2)$  eindeutig zugeordnet mit

$$\lambda(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, n_1 n_2) = (4 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + \alpha_3)(N_1+1)(N_2+1) + n_1(N_2+1) + n_2 + 1 \quad .$$

Der ursprüngliche Vektor kann aus dieser Abbildung mit folgendem Algorithmus wieder gewonnen werden:

1. Schritt: IF  $\lambda(\alpha_1\alpha_2\alpha_3, n_1n_2)/(N_1+1)(N_2+1)=d$  ganzzahlig THEN  
 $n_1=N_1; n_2=N_2; \alpha_1\alpha_2\alpha_3=(d-1)_2$ ; (mit  $(d-1)_2$ =dreistellige Dualzahl);  
 GOTO Ende;
  
2. Schritt:  $d = [\lambda(\alpha_1\alpha_2\alpha_3, n_1n_2)/(N_1+1)(N_2+1)]+1$ ;  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=(d-1)_2$ ;  
 mit  $[\alpha]$  größte ganze Zahl  $\leq \alpha$ ;  
 $r = \lambda(\alpha_1\alpha_2\alpha_3, n_1n_2)-(d-1)(N_1+1)(N_2+1)$ ;  
 IF  $r/(N_2+1)$  ganzzahlig THEN  
 $n_1=r(N_2+1)-1, n_2=N_2$   
 ELSE  
 $n_1 = [r/(N_2+1)], n_2=r-n_1(N_2+1)-1$  ;

Ende

Zur Abspeicherung der Übergangsmatrix P verwenden wir eine nichtverkettete Speicherungstechnik, die drei parallele Felder benötigt: das Realfeld A enthält die Nichtnullelemente, die Integerfelder ICN, IRN enthalten die Spalten- bzw. Zeilenindizes. Diese Felder belegen wir über die Gleichungen des Zweilagermodells, wobei wir eine Gleichung weglassen können, da sie linear abhängig ist und ersetzen sie durch die Normierungsbedingung.

#### P4. Überprüfung der Übergangsmatrix

Zunächst wird überprüft, ob die Übergangsmatrix P stochastisch ist, d.h. es müssen alle Elemente  $\geq 0$  und die Zeilensumme muß eins betragen.

Wie wir aus A.1 wissen, besitzt eine Markov-Kette eine ergodische Verteilung, falls sie irreduzibel, endlich und aperiodisch ist. Diesen Nachweis konnten wir für die Einlagermodelle anhand ihrer Übergangsgraphen relativ einfach führen. Beim Zweilagermodell ist dies nicht mehr möglich, da der Übergangsgraph zu unübersichtlich und umfang-

reich wird.

Für den Nachweis der Aperiodizität ist es hinreichend, ein Element  $i$  mit  $p_{ii}^{(n)} > 0$  in der Übergangsmatrix zu finden, dazu wird die Hauptdiagonale auf Elemente  $> 0$  durchsucht. Für den Nachweis der Irreduzibilität bieten sich zwei Methoden an:

a) Eigenwertbestimmung

Es ist aus der Theorie der stochastischen Matrizen bekannt (Heller, Schriever [1978]), daß eine Markov-Kette genau dann irreduzibel ist, wenn der Eigenwert 1 ihrer Übergangsmatrix  $\underline{P}$  eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von  $\underline{P}$  ist und wenn zum Eigenwert 1 von  $\underline{P}^T$  ein positiver Eigenvektor existiert. Der zweitgrößte Eigenwert der Übergangsmatrix, der kleiner 1 sein muß, gibt uns an, wie schnell der Prozeß sich dem stationären Zustand annähert. Zur Bestimmung der Eigenwerte und der Eigenvektoren einer stochastischen Matrix existieren eine Vielzahl numerischer Algorithmen, die bei großen nichtsymmetrischen Matrizen problematisch sind (Schendel [1977]).

Ist unsere Kette irreduzibel, so ist die Existenz einer ergodischen Verteilung gesichert. Falls aber die Markovkette nicht irreduzibel ist, so wissen wir bei dieser Methode nicht, welche Klasseneinteilungen für die Zustände vorgenommen werden können. Läßt sich z.B. der Zustandsraum als disjunkte Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Mengen darstellen, so können wir jede dieser Mengen als Markovkette getrennt behandeln. Diese Information erhalten wir mit der nachfolgenden Methode.

b) Klasseneinteilung des Zustandsraumes

Die zugrundeliegende Vorgehensweise der Zerlegung des Zustandsraumes  $E$  in Äquivalenzklassen ist wie folgt (Gaede [1977]): Man greift irgend einen Zustand  $i_1 \in E$  heraus und faßt alle mit ihm verbundenen Zustände zu einer Äquivalenzklasse  $k_1$  zusammen. Ist  $k_1 = E$ , so gibt es nur eine einzige Äquivalenzklasse. In diesem Fall sind alle Zustände von  $E$  verbunden und der Markov-Prozeß ist irreduzibel. Andernfalls greift man einen Zustand  $i_2 \in E \setminus k_1$  heraus und faßt alle mit  $i_2$  verbun-

denen Zustände zu einer Klasse zusammen. So fährt man fort, bis jeder Zustand in einer Klasse liegt, die man in wesentliche und nichtwesentliche Klassen einteilen kann. (Bem.: Die Begriffe wesentlich und nichtwesentlich stimmen bei Markov-Prozessen mit endlichem Zustandsraum mit den Begriffen rekurrent und transient überein. Auch müssen wir nicht zwischen positiv-rekurrent und null-rekurrent unterscheiden, da bei endlichem Zustandsraum keine null-rekurrenten Zustände existieren.) Der Algorithmus zur Klasseneinteilung wird am Ende dieses Abschnittes genau beschrieben.

P5. Berechnung der stationären Zustandswahrscheinlichkeiten

Die Berechnung der stationären Zustandswahrscheinlichkeiten erfolgt mit einem direkten (HARWELL-Unterprogramm MA18A) und iterativen Verfahren (successive overrelaxation).

P6. Prüfung der Ergebnisse mit freier Gleichung

Das System (3-19) ist überbestimmt. Wir haben  $k$  Unbekannte und durch die Normierungsbedingung  $\sum_{i=1}^{k+1} p_i = 1$   $k+1$  Gleichungen. Wie man zeigen kann, ist jede Zeile der Matrix  $\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{E}}_p$  als Linearkombination der restlichen  $k-1$  Zeilen darstellbar. Aus diesem Grunde ersetzen wir eine beliebige Zeile des homogenen Gleichungssystems  $(\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{E}}_p) \cdot \underline{p} = 0$  durch die Normierungsbedingung und erhalten ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit  $k$  Gleichungen und  $k$  Unbekannten. Die gestrichene Gleichung muß jedoch weiterhin erfüllt bleiben. Die numerisch ermittelten Zustandswahrscheinlichkeiten setzt man in diese Gleichung ein und man erhält den Wert einer bestimmten Zustandswahrscheinlichkeit. Dieser muß mit dem entsprechenden numerisch ermittelten Wert übereinstimmen. Die Güte der Übereinstimmung ist dann ein Maß für die Genauigkeit der numerischen Werte.

P7. Berechnung von Kenngrößen und Suche nach identischen Zustandswahrscheinlichkeiten.

P8. Ausgabe der Berechnungen.

Wir beschreiben nun den in Punkt P4. angesprochenen Algorithmus zur Klasseneinteilung. Zum Aufbau des Algorithmus definieren wir (Fox, Landi [1968]):

- (i) Ein Zustand  $i$  ist absorbierend dann und nur dann, wenn  $p_{ii} > 0$  und  $p_{ij} = 0$  für alle  $j \neq i$ .
- (ii) Ist Zustand  $j$  absorbierend und  $p_{ij} > 0$ , dann ist der Zustand  $i$  transient.
- (iii) Ist Zustand  $j$  transient und  $p_{kj} > 0$ , dann ist der Zustand  $k$  auch transient.
- (iv) Ist Zustand  $i$  von Zustand  $j$  und  $j$  von Zustand  $i$  erreichbar, so ist  $i$  mit  $j$  verbunden (i.Z.  $i \rightleftharpoons j$ ). Es gilt:
  - $i \rightleftharpoons i$  (Reflexivität)
  - aus  $i \rightleftharpoons j$  folgt  $j \rightleftharpoons i$  (Symmetrie)
  - aus  $i \rightleftharpoons k$  und  $k \rightleftharpoons j$  folgt  $i \rightleftharpoons j$  (Transitivität).

Der Algorithmus hat dann folgenden Aufbau:

Schritt 1: Definiere für jeden Zustand  $i$  eine Menge  $S_i = \{i\}$ , die die mit  $i$  verbundenen Zustände aufnehmen kann. Durchsuche die Hauptdiagonale und markiere mit Regel (i) die absorbierenden Zustände. Ist Zustand  $j$  absorbierend, durchsuche Spalte  $j$  und markiere jeden Zustand  $i$  mit  $p_{ij} > 0$  transient (Regel ii). Setze  $r=0$ .

Schritt 2: Falls alle Zustände markiert sind, ist die Klasseneinteilung beendet, andernfalls fahre fort.

Schritt 3: Falls  $r=0$ , beginne mit der Suche nach verbundenen Zuständen derart: Bilde eine Folge von Zuständen, so daß jeder Zustand von seinem Vorgänger mit einem Übergang erreicht werden kann. Falls die Folge einen schon als transient markierten Zustand aufnimmt, so sind nach Regel (ii) alle Zustände der Folge transient. Setze  $r=0$  und gehe zu Schritt 2.

Falls die Folge einen ihr enthaltenen Zustand erneut aufnimmt, so haben wir eine Menge verbundener Zustände gefunden (Regel

(iv)) und gehen zu Schritt 4. Sind beide Bedingungen nicht erfüllt, so erweitern wir die Folge der Zustände. Setze  $r=r+1$ .

Schritt 4: Wir fassen die gefundene Menge verbundener Zustände im folgenden als einen Zustand  $i_k$  auf und ersetzen die Matrixreihe bzw. -spalte des erneut aufgenommenen Zustandes  $i_k$  durch die Vereinigung der Matrixreihen bzw. -spalten, der ihm nachfolgenden Zustände. Dann löschen wir diese Matrixreihen bzw. -Spalten. Falls nun dieser erneut aufgenommene Zustand  $i_k$  absorbierend ist, sind alle Zustände  $i \in S_{i_k}$  rekurrent. Mit der 2. Regel können wir dann alle Zustände  $\ell$  mit  $p_{\ell, i_k} > 0$  als transient markieren. Wir setzen  $r=0$  und gehen zu Schritt 2. Falls der Zustand  $i_k$  nicht absorbierend ist setzen wir  $r=k$  und gehen zu Schritt 3.

Nach dem Abarbeiten des Algorithmus ist eine eindeutige Identifikation der Zustände möglich.