KfK 3573
August 1983

Experimentelle Untersuchung der turbulenten Strömung im Einlauf eines exzentrischen Ringspaltes

U. Hartz
Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

KfK 3573

Experimentelle Untersuchung der turbulenten Strömung im Einlauf eines exzentrischen Ringspaltes

Ulf-Holger Hartz

Dissertation genehmigt von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Zusammenfassung

Experimentelle Untersuchung der turbulenten Strömung im Einlauf eines exzentrischen Ringspaltes

In einem voll exzentrischen Ringspalt mit dem Radienverhältnis von $R_i/R_a = 0.86$ wurden die mittleren Geschwindigkeitskomponenten U, V, W und die 6 Komponenten des Reynoldschen Spannungstensors gemessen. Diese Messungen wurden mit Hitzdrahtsonden durchgeführt. Außerdem wurden der statische Druck und der Gesamtdruck mittels statischen Drucksonden und Pitotrohren bestimmt. Ab $X/D_H = 14$ ($D_H = 14$ mm) wurden auch Wandschubspannungsmessungen durchgeführt, wozu ein Pitotrohr nach der Methode von Preston verwendet wurde. Auch wurden Rechnungen mit den Programmen VELASCO und BODYFIT durchgeführt.

Die 11 axialen Meßebenen reichten von $X/D_H = 0.05$ nach dem Eintritt bis $X/D_H = 357$ in logarithmischer Teilung. Die Versuche ergaben folgende Fakten:

1) Direkt hinter dem Eintritt entsteht ein Rückströmgebiet von etwa 4 D_H Länge. Es erstreckt sich über den gesamten vermessenen Umfangsbereich. In radialer Richtung reicht es bis zur Hälfte des Querschnittes. Es bewirkt eine erhebliche Erhöhung der Geschwindigkeit in der Außenzone.
2) Es ist eine Sekundärströmung vorhanden, die sich qualitativ über der Einlauflänge deutlich ändert.
3) Die Einlauflänge ist größer als allgemein angenommen. Im Bereich zwischen 140 und 357 hydraulischen Durchmessern Abstand vom Eintritt sind noch Geschwindigkeitsänderungen zu erkennen.
4) Die theoretischen Berechnungen ergaben eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse des Programmes VELASCO mit den Meßwerten im eingelaufenen Zustand.

   Aufgrund schlechter Modellierung der Geometrie konnte keine Übereinstimmung der Ergebnisse von BODYFIT mit den experimentellen Werten erzielt werden. Dies könnte aber durch bessere Modellierung der Randbedingungen korrigiert werden.

Abstract

Experimental investigation of turbulent flow in the inlet region of an eccentric annulus

In a fully eccentric annulus with a radius-ratio of $R_i/R_a = 0.86$ the mean flow components $\bar{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ and the 6 components of the Reynolds stress tensor have been measured. These measurements have been made with hot-wire-probes. Besides this the static pressure and the total pressure have been determined by means of static pressure probes and Pitot-tubes. Beginning with $X/D_H = 14$ (D_H = 14 mm) wallshearstress-measurements have been conducted also using a Pitot-tube with Preston's method.

Additionally computations have been made with the codes VELASCO and BODYFIT. The 11 axial plains reached from $X/D_H = 0.05$ from the entrance to $X/D_H = 357$ with logarithmic scale.

The experiments proved the following facts:

1) There is a flow reversal directly behind the entrance with a length of 4 D_H. It covers the total range in azimuthal direction. In radial direction it covers half the area. It induces an enlargement of the velocity in the outer region.

2) There is a secondary flow, which changes over the entrance length substantially.

3) The entrance length is larger than generally thought. There are still changes of the velocity distribution between 140 D_H and 357 D_H.

4) The computations showed good agreement of the VELASCO-results with the experiments in the fully developed state. Bad modeling of the geometry caused disagreement of the experiments with BODYFIT's results. This could be improved by better modeling of the boundary conditions.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In Brennelementbündeln vieler Kernreaktoren werden die Brennstäbe von Gitterabstandshaltern auseinandergehalten. Dadurch soll der Kontakt zweier Brennstäbe untereinander vermieden werden.

Hinter jedem dieser Abstandshalter entsteht im Betrieb eine Einlaufströmung. Zur Bündelauslegung wäre es wichtig, diese Strömung berechnen zu können. Die für das Problem geeigneten Gleichungen sind die Navier-Stokes-Gleichungen. Diese lassen sich aber nur in Spezialfällen analytisch lösen. Für den Fall der turbulenten Strömungen wird allgemein die Reynoldssche Prozedur verwendet. Dazu macht man einen statistischen Ansatz, der eine Aufteilung der Momentangeschwindigkeit in einen zeitlichen Mittelwert und die Schwankung um den Mittelwert bringt. Durch Einführen dieses Ansatzes in die Gleichungen für die 3 Raumkoordinaten und zeitliche Mittelung der Gleichungen erhält man ein System mit 9 Unbekannten: 3 mittlere Geschwindigkeitskomponenten und 6 Korrelationen der Schwankungsgeschwindigkeiten. Daher ist das Gleichungssystem nicht geschlossen. Die 6 Korrelationen der Schwankungsgrößen bilden den Reynoldsschen Spannungstensor. Ermittelt man die Unbekannten aus Experimenten, so können die Ergebnisse zur Bildung von Modellen für die Berechnung mit Computerprogrammen herangezogen werden. Für die komplizierte dreidimensionale Strömung, wie sie im Reaktor vorkommt, liegen noch keine Daten vor. Es sollen zunächst Untersuchungen an einem relativ einfachen Kanal durchgeführt werden. Dazu eignet sich der Querschnitt des exzentrischen Ringspaltes. Für diese Geometrie liegen bisher experimentelle Ergebnisse von Jonsson/Sparrow /25/, Tebo/Clump /26/, Kacker /27/, Ricker/Wade/ Wilson /23/ und Usui/Tsuruta /24/ vor. Diese Resultate sind aber nur für den eingelaufenen Zustand ermittelt worden. Ergebnisse im Einlauf im Rohr haben Laws/Lin/Livesey /17/ erhalten. Für den Einlauf des exzentrischen Ringspaltes dagegen liegen noch keine Daten vor. Um diese Lücke zu schließen, wurden die im folgenden beschriebenen Untersuchungen durchgeführt. Dabei wurde Luft als Strömungsmedium gewählt.

Es müssen die charakterisierenden Größen der Strömung bestimmt werden, wie mittlere Geschwindigkeit, Reynoldsspannungen und Wandschubspannung.

Anschließend an die Messungen sind Vergleiche mit vorhandenen Rechenprogrammen durchzuführen.

2. Hitzdrahtmeßverfahren

2.1 Grundlagen der Hitzdrahtanemometrie

Das Prinzip der Geschwindigkeitsmessung mittels Hitzdrähten beruht auf der Wärmeabfuhr durch erzwungene Konvektion vom beheizten Draht.

Für diesen Fall hat King /1/ folgende Beziehung zwischen angezeigter Spannung E und Strömungsgeschwindigkeit U gefunden:

(2.1-1)

Dabei sind A und B empirische Konstanten, die von der Temperatur abhängig sind. Zur Messung der Spannung E bestehen zwei Möglichkeiten:

1) Konstanthalten des Stromes
   Dann kann der Widerstand (und damit die Spannung) gemessen werden.

2) Konstanthalten der Drahttemperatur
   Hierbei muß der Strom durch einen möglichst schnellen Regelkreis verändert werden. Die Spannungsdifferenz zum Ausgangszustand ist der Meßwert.

Heute werden Hitzdrahtmessungen fast ausschließlich nach dem Konstanttemperaturverfahren durchgeführt. Deshalb wird nur dieses in den folgenden Kapiteln behandelt.

Auf die Abhängigkeit der Parameter A und B von der Temperaturdifferenz zwischen Draht und Fluid wird in Kapitel 2.3 eingegangen. Sie werden zunächst als konstant angenommen.

Der Exponent n in Gl. (2.1-1) ist von der Geschwindigkeit U abhängig. Nach Bruun /2/ ist im interessierenden Bereich $10\ m/s < U < 30\ m/s$ die Schwankung um einen Mittelwert von n = 0.465 aber kleiner als 5 %. So kann der Wert als konstant angenommen und damit eine elektronische Linearisierung der Gl. (2.1-1) vorgenommen werden.

Erzeugt man im Linearisator eine Kompensationsspannung $E_{in} = A$ und linearisiert Gl. (2.1-1), so kann man schreiben

$$\frac{E}{S} = U \tag{2.1-2}$$

wobei S der Übertragungsfaktor ist.

2.2 Richtungsempfindlichkeit

Der Wert U_c aus Gl. (2.1-2) wird als Kühlgeschwindigkeit so definiert:

$$U_c^{\,2} = \frac{E^2}{S^2} = U_{N1}^{\,2} + k^2 \cdot U_T^{\,2} + h^2 \cdot U_{N2}^{\,2} \tag{2.2-1}$$

Die Orientierung des drahtfesten N_1,T,N_2-Koordinatensystems geht aus Bild (2-1) hervor. Der Faktor k gibt die Empfindlichkeit der Hitzdrahtabkühlung gegenüber tangentialen Richtungsänderungen an, während h den Schwankungen um die Drahtachse Rechnung trägt. k wird deshalb Tangentialempfindlichkeit genannt, h dagegen Radialempfindlichkeit. Beide sind empirische Größen und müssen für jeden Hitzdraht aus einem Eichversuch bestimmt werden. Das Verfahren wird auch bei Müller /3/ und Hejna /4/ beschrieben, auf deren Arbeiten große Teile des hier verwendeten Verfahrens zurückgehen.

Es sei U_a eine Anströmgeschwindigkeit, deren Vektor mit der N_1,T-Ebene den Winkel σ bildet und mit der N_1,N_2-Ebene den Winkel α. Dann gilt:

$$\begin{aligned} U_{N1} &= -U_a \cdot \cos\alpha \cdot \cos\sigma \\ U_T &= -U_a \cdot \sin\alpha \cdot \cos\sigma \\ U_{N2} &= U_a \cdot \sin\sigma \end{aligned} \qquad (2.2\text{-}2)$$

So erhält man für die Kühlgeschwindigkeit:

$$U_c^{\,2} = \frac{E^2}{S^2} = U_a^{\,2}\{\cos^2\sigma \cdot (\cos^2\alpha + k^2 \cdot \sin^2\alpha) + h^2 \cdot \sin^2\sigma\} \qquad (2.2\text{-}3)$$

Mit dieser Gleichung lassen sich die Eichkurven für k und h bestimmen. Alle Winkelbezeichnungen sind im Bild (2-1) dargestellt.

a) Bestimmung von k

Die Sonde wird so gestellt, daß die Anströmung U_R in der N_1,T-Ebene liegt. Dann gilt $\sigma = 0$

$$\frac{E^2(\alpha)}{S^2} = U_R^{\,2} \cdot (\cos^2\alpha + k^2 \cdot \sin^2\alpha) \qquad (2.2\text{-}4)$$

Für $\alpha = 0$ gilt:

$$\frac{E^2(0)}{S^2} = U_R^{\,2} \qquad (2.2\text{-}5)$$

(2.2-4) dividiert durch (2.2-5) ergibt:

$$\frac{E^2(\alpha)}{E^2(0)} = \cos^2\alpha + k^2 \cdot \sin^2\alpha$$

Daraus erhält man:

$$k = \frac{\frac{E^2(\alpha)}{E^2(0)} - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \qquad (2.2\text{-}6)$$

b) Bestimmung von h

Wird die Sonde so ausgerichtet, daß die Halterachse mit der Anströmrichtung zusammenfällt, so gilt

$$\alpha = 90^{\circ} - \gamma$$

Dann gilt nach (2.2-3)

$$\frac{E^2(\gamma,\sigma)}{S^2} = U_a^2 \cdot \{\cos^2\sigma \cdot (\sin^2\gamma + k^2 \cdot \cos^2\gamma) + h^2 \cdot \sin^2\sigma\} \qquad (2.2\text{-}7)$$

und weiter

$$\frac{E^2(\gamma,\sigma)}{E^2(\gamma,0)} = \frac{\cos^2\sigma \cdot (\sin^2\gamma + k^2 \cdot \cos^2\gamma) + h^2 \cdot \sin^2\sigma}{\sin^2\gamma + k^2 \cdot \cos^2\gamma} \qquad (2.2\text{-}8)$$

Löst man diese Gleichung nach h auf, erhält man

$$h = \left\{ \left[\frac{E^2(\gamma,\sigma)}{E^2(\gamma,0)} - \cos^2\sigma \right] \cdot \frac{\sin^2\gamma + k^2 \cdot \cos^2\gamma}{\sin^2\sigma} \right\}^{0.5} \qquad (2.2\text{-}9)$$

2.3 Korrekturgleichungen für Massenstrom- und Temperaturschwankungen

Den Einfluß von Temperatur- und Druckschwankungen auf die Stoffwerte und den Massenstrom berücksichtigt folgende Gleichung:

$$E_C = \frac{P_1 \cdot A_1}{\alpha \cdot P_O \cdot A_O} \cdot \frac{T_1 + 110{,}4}{T_N + 110{,}4} \cdot \frac{T_N^{\,5} \cdot T_O}{T_1^{\,7}} \cdot \frac{P_O}{2 \cdot \Delta P \cdot R} \cdot \bar{U}_N \cdot E_M \qquad (2.3\text{-}1)$$

Dabei bedeuten:
- C korrigiert
- M Messung
- N Norm
- O Blendenebene
- 1 Austrittsebene

Zur Erläuterung dient Bild (2-2).

Die Beeinflußung der Hitzdrahtabkühlung wird so korrigiert:

$$E_{LC} = K \cdot \left\{ \frac{t_W - t_E}{t_W - t} \cdot \left[\frac{E_{LM}(t)}{K} \right]^{1/n} - \frac{t_E - t_M}{t_W - t_M} \cdot E^2(t_E, U{=}O) \right\}^n \qquad (2.3\text{-}2)$$

Es bedeuten:
- K Konstante
- L linearisiert
- C korrigiert
- E Eichung
- W Draht

Für die Schwankungsgrößen konnte diese Gleichung ermittelt werden:

$$\frac{e_C}{e_M} = \frac{t_W - t_M}{t_W - t_E} \cdot \left[\frac{E_{LC}}{E_{LM}} \right]^{\frac{n-1}{n}} \qquad (2.3\text{-}3)$$

Schließlich ergibt sich für die Gesamtdruckkorrektur:

$$U_k = U_N \cdot \frac{A_1}{\alpha A_o} \cdot \frac{T_1+110,4}{T_N+110,4} \cdot \left[\frac{T_N{}^5 \cdot T_o}{T_1{}^6} \cdot \frac{P_1}{P_o} \cdot \frac{P_{ges}-P_{stat}}{\Delta P_o} \right]^{0,5} \qquad (2.3\text{-}4)$$

mit ΔP_o Druckdifferenz an der Blende.

Die Herleitungen der Gleichungen können aus dem Anhang ersehen werden. Diese sind zwar für den vorliegenden Fall speziell hergeleitet worden, jedoch sind sie auch auf andere Fälle übertragbar.

2.4 Experiment zur Temperaturkorrektur

Von entscheidender Bedeutung für die Richtigkeit der Temperaturkorrektur ist, daß nach (A1-19) und (A1-23) gilt:

$$\frac{E(t,0)}{E(t_o,0)} = \left[\frac{t_W - t}{t_W - t_o} \right]^{0,5} \qquad (2.4\text{-}1)$$

Daher wurde diese Gleichung mit einem Experiment überprüft, dessen Aufbau in Bild (2-3) zu sehen ist. Im rechten Teil sind die beiden Wheatstone-Brücken (X-Drahtsonde) sowie 3 Digitalvoltmeter für die Messung der beiden Ausgangsspannungen und der Temperatur zu sehen. Diese wird mit einem Thermoelement gemessen, dessen Vergleichsstelle in dem Nullpunktgeber links vorne auf 0 °C liegt.

In der Bildmitte sieht man den Glasbehälter mit der Sonde, die sich darin bei konstanter Temperatur befindet. Die Temperaturkonstanz wird durch den thermostatisierten Behälter links hinten gewährleistet.

Das Ergebnis des Experimentes ist in Diagramm (2-4) aufgetragen. Die Meßwerte zeigen gute Übereinstimmung untereinander und mit der theoretischen Kurve. Die maximale Abweichung ist kleiner als 1/1000. Damit ist die Richtigkeit der Gleichung im untersuchten Beeich von 16,8 °C bis 35 °C nachgewiesen. Auch Bearman /5/ macht eine Temperaturkorrektur, die jedoch mit dieser nicht direkt vergleichbar ist.

2.5 Eichversuch

Der Eichversuch hat für die Hitzdrähte folgende Ziele:

1) Abgleich und Einstellung der verwendeten Wheatstone-Brücken und der Linearisatoren.

2) Bestimmung der Übertragungsfaktoren S

3) Bestimmung der für die Temperaturkorrektur wichtigen Größen

4) Bestimmung der Tangentialempfindlichkeit $k(\alpha)$ und der Radialempfindlichkeit $h(\sigma)$

5) Mathematische Berechnung des scheinbaren Sondenwinkels

Bild (2-5) zeigt ein Schema der Eichvorrichtung. Sie besteht aus einem Kanal mit Düse, die eine über dem Querschnitt konstante Strömungsgeschwindigkeit liefert. Die Einstellung und Messung der Geschwindigkeit erfolgt über den Druckminderer und den Druckwandler, an den ein Digitalvoltmeter angeschlossen ist. Auch wird die Temperatur des Mediums im Kanal gemessen. Bild (2-6) zeigt ein

Foto der Vorrichtung. Darauf erkennt man die Winkelverstellvorrichtung, die mit Mikrometerschrauben zur genauen Einstellung versehen ist. Die Ausrichtung der Sondenspitze in die Drehachse hinein erfolgt mit Hilfe des Mikroskopes, dessen Achse mit der Drehachse der Verstellvorrichtung zusammenfällt. Der scheinbare Schnittpunkt der beiden Sondendrähte braucht daher nur in den Schnittpunkt des Fadenkreuzes des Mikroskopes gelegt zu werden. Dann bewegt jener sich bei Drehungen um die Achse nicht. In Bild (2-7) sind im unteren Teil der Druckminderer und darauf der Druckwandler zu sehen. Darüber befinden sich die beiden Wheatstone-Brücken für die X-Drahtmessung und über diesen zwei Linearisatoren.

Im Eichversuch werden an diese vier Geräte Digitalvoltmeter angeschlossen.

zu 1) Der Abgleich der Geräte erfolgt nach Angaben des Herstellers (DISA).

zu 2) Die Übertragungsfaktoren werden nach

$$S = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{E_i}{U_i} \qquad (2.5\text{-}1)$$

bestimmt. Es werden m Messungen bei verschiedenen Geschwindigkeiten durchgeführt und der Mittelwert für S angenommen. Der Verlauf der berechneten und der gemessenen Kurve ist im Bild (2-8) zu sehen (1 - gemessen, 2 - berechnet).

zu 3) Der aus der Eichung zu entnehmende für die Temperaturkorrektur wichtige Wert ist der Faktor K. Für ihn gilt nach (A1-32)

$$K = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{E_L(U_i)}{(E_E^{\,2}(U_i) - E_O^{\,2})^n}$$

Dies bedeutet, es müssen außer der Spannung bei Geschwindigkeit 0 E_0 auch bei jeder anderen Geschwindigkeit die linearisierten (E_{LE}) und unlinearisierten Spannungen (E_E) gemessen werden. Dann erfolgt wieder eine Mittelung über alle Messungen.

zu 4) War bisher die Sondenachse in Richtung der Anströmung ausgerichtet, so ändert sich dies bei der Bestimmung der Empfindlichkeiten. Für die Bestimmung der Funktion $k(\alpha)$ wird α von $-45\ ^{o}C$ bis $+45\ ^{o}C$ in 5^{o}-Schritten verändert. Der Verlauf der Kurven ist in den Bildern (2-9) und (2-10) dargestellt. Dabei zeigt "1" den gemessenen und "2" den berechneten Verlauf. Die Berechnung geschieht durch Anpassung eines Polynoms dritten Grades.

Die Funktion $h(\alpha)$ wird im Bereich von $+90^{o}$ bis -90^{o} in 10^{o}-Schritten bestimmt. Sie ist in den Bildern (2-11) und (2-12) dargestellt.

Man erkennt eine Polstelle bei $\sigma = 0^{o}$. Wie aus (2.2-9) ersichtlich, findet dort eine Division durch 0 statt. Abgesehen davon weisen die Werte aber nur geringe Änderungen auf. Daher ist die Verwendung eines funktionalen Zusammenhangs zwischen h und σ nicht sinnvoll. Es wird nur der Mittelwert aus den 19 Messungen für h verwendet. Punkte mit zu großen Abweichungen aufgrund der Polstelle werden nicht berücksichtigt.

zu 5) Sieht man sich verschiedene Hitzdrahtsonden an, so erkennt man, daß die Drähte meist nicht gerade, sondern gebogen sind. Daher ist es schwierig, einen bestimmten Winkel zu messen. So ist es vorzuziehen, den charakterisierenden Winkel zu berechnen.

Dies geschieht durch Anpassung an das Cosinusgesetz:

$$\frac{E^2}{S^2} = U^2 \cdot \cos^2\alpha \qquad (2.5\text{-}2)$$

Das hier verwendete Gesetz lautet aber:

$$\frac{E^2}{S^2} = U^2 \cdot (\cos^2\alpha + k^2 \cdot \sin^2\alpha) \qquad \text{für} \quad \sigma = 0$$

Geht α gegen 0, so sind die Gleichungen identisch. Durch ungenaue Sondenherstellung kann es aber sein daß dies nicht der Fall ist. Da gilt $\alpha = 90^\circ - \gamma$, kann nun der Winkel γ so lange verändert werden, bis die Bedingung erfüllt ist. Der so bestimmte Winkel ist der scheinbare Sondenwinkel. Aus den Bildern (2-13) und (2-14) ist somit die Abweichung der geeichten Sonde vom Cosinusgesetz zu sehen und damit auch der Einfluß des Faktors k ("1" = gemessener Wert, "2" = Cosinusgesetz).

Für die Rechnung ist außerdem das Verhältnis E_2/E_1 wichtig. In Bild (2-15) ist es als Funktion des Winkels ψ aufgetragen. Der Winkel ψ bezeichnet die Drehung um die Sondenachse (siehe Bild (2-1)). Hiermit sind die für die späteren Messungen wichtigen Größen bestimmt.

2.6 Koordinatentransformation der Hitzdrahtergebnisse

Die Grundgleichung (2.2-1) ist in hitzdrahtfesten Koordinaten gegeben. Auch die Meßwerte beziehen sich auf das N_1,T,N_2-System. Der Geschwindigkeitsvektor $W = (U,V,W)^T$ ist aber im laborfesten Koordinatensystem X,Y,Z gegeben. Daher muß eine Transformation von N_1,T,N_2 nach X,Y,Z vorgenommen werden. Die dazu benötigten Größen sind aus Bild (2-1) ersichtlich.

Folgende Schritte sind nötig:

1) Drehung um die Sondenachse um den Rollwinkel ψ

2) Drehung um die N_1-Achse um den Anströmwinkel α

Damit erhält man die Transformationsgleichung in Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ T \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha\cdot\cos\psi & \sin\alpha\cdot\sin\psi \\ \sin\alpha & \cos\alpha\cdot\cos\psi & \cos\alpha\cdot\sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{2.6-2}$$

Durch Einsetzen in die Grundgleichung (2.2-1) erhält man unter Verwendung von

$$\alpha = 90^{\circ} - \gamma \tag{2.6-2}$$

und von Additionstheoremen:

$$\begin{aligned} \frac{E^2}{S^2} = {} & (-U\cdot\sin\gamma+V\cdot\cos\psi\cdot\cos\gamma+W\cdot\cos\gamma\cdot\sin\psi)^2 \\ & +k^2\cdot(U\cdot\cos\gamma+V\cdot\sin\gamma\cdot\cos\psi+W\cdot\sin\gamma\cdot\sin\psi)^2 \\ & +h^2(\qquad -V\cdot\sin\psi+W\cdot\cos\psi)^2 \end{aligned} \tag{2.6-3}$$

Daraus ergibt sich nach Auflösung und Ordnen:

$$\begin{aligned} \frac{E^2}{S^2} = {} & U^2\cdot(\sin^2\gamma+k^2\cdot\cos^2\gamma) \\ & +V^2\cdot[(\cos^2\gamma+k^2\cdot\sin^2\gamma)\cdot\cos^2\psi+h^2\cdot\sin^2\psi] \\ & +W^2\cdot[(\cos^2\gamma+k^2\cdot\sin^2\gamma)\cdot\sin^2\psi+h^2\cdot\cos^2\psi] \\ & -2UV\cdot\sin\gamma\cdot\cos\gamma\cdot\cos\psi\cdot(1-k^2) \\ & -2UW\cdot\sin\gamma\cdot\cos\gamma\cdot\sin\psi\cdot(1-k^2) \\ & +2VW\cdot\sin\psi\cdot\cos\psi\cdot(\cos^2\gamma+k^2\sin^2\gamma-h^2) \end{aligned}$$

Führt man nun die Abkürzungen

$$m = \sin^2\gamma + k^2 \cdot \cos^2\gamma$$

$$\bar{m} = \sin\gamma \cdot \cos\gamma \cdot (1-k^2) \qquad (2.6\text{-}5)$$

$$p = \cos^2\gamma + k^2 \cdot \sin^2\gamma$$

ein, erhält man aus (2.6-4)

$$\frac{E^2}{S^2} = U^2 \cdot m + V^2 \cdot (\bar{m} \cdot \sin^2\psi + h^2 \cdot \cos^2\psi) + W^2 \cdot (\bar{m} \cdot \cos^2\psi + h^2 \sin^2\psi) \qquad (2.6\text{-}6)$$

$$-2U \cdot V \cdot p \cdot \sin\psi - 2 \cdot U \cdot W \cdot p \cdot \cos\psi + 2 \cdot V \cdot W \cdot \sin\psi \cdot \cos\psi \cdot (\bar{m} - h^2)$$

Mit dieser Gleichung kann die Auswertung im problemorientierten X,Y,Z-Koordinatensystem vorgenommen werden.

2.7 Vektor der mittleren Geschwindigkeit

Nach dem Anhang erhält man für die axiale Geschwindigkeitskomponente :

$$\bar{U}^2_{1/2} = \frac{E^2_{1/2}/S^2}{m_{1/2} \pm 2 \cdot P_{1/2} \cdot \tan\phi + \bar{m}_{1/2} \cdot \tan^2\phi} \qquad (2.7\text{-}1)$$

mit m, p, $\bar{m}$ nach (2.6-5)

Für den Winkel ϕ zwischen Axial- und Sekundärgeschwindigkeit gilt

$$\tan\phi = \frac{\left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \cdot P_2 + P_1}{\left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right] \cdot \bar{m}_2 - \bar{m}_1} \pm$$

$$\left\{ \frac{\left(\left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \cdot P_2 + P_1\right)^2 \cdot \left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \cdot m_2 - m_1}{\left(\left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \cdot \bar{m}_2 - \bar{m}_1\right)^2 \cdot \left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \cdot \bar{m}_2 - \bar{m}_1} \right\}^{0,5} \qquad (2.7\text{-}2)$$

Für die Sekundärgeschwindigkeitskomponenten erhält man

$$\bar{V} = \bar{U} \cdot \tan\phi \cdot \sin\psi \qquad (2.7\text{-}3)$$

und

$$\bar{W} = \bar{U} \cdot \tan\phi \cdot \cos\psi \qquad (2.7\text{-}4)$$

Dabei ist ψ der Rollwinkel, um den die Sonde verdreht wird. Den Meßwert erhält man als Mittelwert der 8 Messungen für einen Punkt. Auch Hejna /4/ arbeitet mit diesen Gleichungen, gibt aber keine Herleitung an.

2.8 Berechnung des Reynoldsschen Spannungstensors

Die Auswertung der Gl. (2.6-6) erfolgt mit einem statistischen Hilfsmittel, nämlich der Zerlegung von Momentanwerten in Mittelwerte und Schwankungen um die Mittelwerte gemäß

$$U = \bar{U} + u'$$
$$V = \bar{V} + v'$$
$$W = \bar{W} + w' \qquad (2.8\text{-}1)$$
$$E = \bar{E} + e$$

Damit liefert (2.6-9)

$$\frac{E^2}{S^2} = (\bar{U}^2+2\bar{U}u'+u'^2)\cdot m+(\bar{V}^2+2\cdot\bar{V}v'+v'^2)(\bar{m}\sin^2\psi+h^2\cdot\cos^2\psi)+$$
$$(\bar{W}^2+2\bar{W}w'+w'^2)(\bar{m}\cdot\cos^2\psi+h^2\cdot\sin^2\psi)-2\cdot(\bar{U}\cdot\bar{V}+\bar{U}v'+u'\bar{V}+u'v')\cdot$$
$$p\cdot\sin\psi-2(\bar{U}\cdot\bar{W}+\bar{U}w'+u'\bar{W}+u'w')\cdot p\cdot\cos\psi+$$
$$2\cdot(\bar{V}\bar{W}+\bar{V}w'+v'\bar{W})\cdot\sin\psi\cdot\cos\psi\cdot(\bar{m}+h^2) \qquad (2.8\text{-}2)$$

Führt man jetzt mit den Konstanten C, D, E die Abkürzungen

$$\bar{F}^2 = \sum_i \bar{U}_i^2 \cdot C_i$$
$$f = \sum_i \sum_j \bar{U}_i\ u'\cdot D_i \qquad (2.8\text{-}3)$$
$$g = \sum_i u_i'^2\cdot E_i$$

ein, erhält man aus (2.8-2):

$$\frac{E^2}{S^2} = \bar{F}^2 + f + g \qquad (2.8\text{-}4)$$

oder

$$\frac{E}{S} = \left[\bar{F}^2 + f + g\right]^{0,5} \qquad (2.8\text{-}5)$$

Diese Wurzel wird durch Reihenentwicklung angenähert:

$$\frac{E}{S} = \bar{F} + \frac{f+g}{2\bar{F}} - \frac{f^2}{8\bar{F}^3} + O(u_i^3) \qquad (2.8\text{-}6)$$

Unter Vernachlässigung der Terme $\frac{g}{2\bar{F}}, \frac{h^2}{8\bar{F}^3}, O(u_i^{\,3})$
erhält man durch Mittelung

$$\frac{\bar{E}}{S} = \bar{F} \tag{2.8-7}$$

Eine Fehlerabschätzung erfolgt später.

Für die Schwankungen gilt:

$$\frac{e}{S} = \frac{E - \bar{E}}{S} = \frac{f + g}{2\bar{F}} - \frac{f^2}{8\bar{F}^3} \tag{2.8-8}$$

bzw. unter Vernachlässigung von $\frac{g}{2\bar{F}} - \frac{f^2}{8\bar{F}^3}$

$$\frac{e}{S} = \frac{f}{2\bar{F}} \tag{2.8-9}$$

Einsetzen der Terme gemäß (2.8-3) ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{e}{S} = \{&u'\cdot[m\bar{U}+\bar{V}p\sin\psi-\bar{W}p\cos\psi] \\ &+ v'\cdot[-\bar{U}p\sin\psi+\bar{V}(\bar{m}\sin^2\psi+h^2\cos^2\psi)+\bar{W}\sin\psi\cos\psi(\bar{m}+h^2)] \\ &+w'\cdot[-\bar{U}p\cos\psi+\bar{V}\sin\psi\cos\psi\cdot(\bar{m}+h^2)+ \\ &+\bar{W}(\bar{m}\cos^2\psi+h^2\psi\sin^2\psi)]\}\ /2\bar{F}\end{aligned} \tag{2.8-10}$$

Zur Erleichterung der Auswertung werden folgende vereinfachende Annahmen eingeführt:

$$\begin{aligned}\gamma &= 45^\circ \\ k &= 0 \\ h &= 1\end{aligned} \tag{2.8-11}$$

Die Vereinfachungen (2.6-5) werden nur an dieser Stelle, also für die Schwankungsgrößen verwendet. Versuche, mit den vollständigen Gleichungen (2.8-10) zu rechnen, schlugen fehl, da die Meßfehler, die in den Termen e_i stecken, keine exakte Lösung des Gleichungssystems zulassen. Ein Vergleich der beiden Lösungswege wird in Kapitel (3.4) für die Messungen am Kreisrohr angegeben.

Damit folgt für die Abkürzungen (2.6-5)

$$m = \bar{m} = p = 0.5 \qquad (2.8\text{-}12)$$

Nun erhält man aus (2.8-10) mit der Identiät

$$\bar{V}\cos\psi = \bar{W}\sin\psi \qquad (2.8\text{-}13)$$

$$\frac{e}{s} = (u'-v'\sin\psi-w'\cos\psi)\,(\bar{U}-\bar{V}\sin\psi-\bar{W}\cos)$$

$$/[2\cdot\ \bar{U}-\bar{V}\sin\psi-\bar{W}\cos\psi]$$

oder

$$\frac{e}{s} = \frac{1}{2}\cdot[u'-v'\sin\psi-w'\cos\psi] \qquad (2.8\text{-}14)$$

$$\frac{\overline{e}^2}{s^2} = \frac{1}{2}\,[\overline{u'^2}+\overline{v'^2}\sin^2\psi+\overline{w'^2}+\cos^2\psi-2\overline{u'v'}\sin\psi-2\overline{u'w'}\cos\psi$$
$$+2\overline{v'w'}\sin\psi\cdot\cos\psi] \qquad (2.8\text{-}15)$$

Bei der X-Drahtmessung sind 2 Signale aus den beiden Drähten vorhanden. Durch Drehung der Sonde in 45^o-Schritten von 0^o bis 315^o erhält man somit 16 Werte. Aufgrund der linearen Abhängigkeit der der Gleichungen läßt sich das System von 6 Gleichungen für den Reynoldsschen Tensor aber damit allein nicht lösen. Daher werden auch die Effektivwerte der Summe und der Differenz der beiden Signale e_1 und e_2 benötigt. Dabei ist

$$\psi_2 = \psi_1 + 180^o \qquad (2.8\text{-}16)$$

$$\frac{\overline{(e_i \pm e_{i+\psi})^2}}{S^2} = \frac{1}{2}\Big[\overline{u'^2} \pm \overline{u'^2} + \overline{v'^2}(\sin^2\psi_i \pm \sin^2\psi_{i+\psi}) + \overline{w'^2}(\cos^2\psi_i \pm \cos^2\psi_{i+\psi})$$

$$-2\overline{u'v'}(\sin\psi_i \pm \sin\psi_{i+\psi}) - 2\overline{u'w'}\cdot(\cos\psi_i \pm \cos\psi_{i+\psi})$$

$$+2\overline{v'w'}(\sin\psi_i \cdot \cos\psi_i \pm \sin\psi_i \pm \sin_{1+\psi} \cdot \cos\psi_{1+\psi})\Big]$$

Die Richtigkeit der 4 Meßwerte $\overline{e_1^2}$, $\overline{e_2^2}$, $\overline{(e_1+e_2)^2}$, $\overline{(e_1-e_2)^2}$ kann folgendermaßen nachgeprüft werden:

$$\left.\begin{aligned} \overline{(e_1+e_2)^2} &= \overline{e_1^2} + 2\overline{e_1 e_2} + \overline{e_2^2} \\ \overline{(e_1-e_2)^2} &= \overline{e_1^2} - 2\overline{e_1 e_2} + \overline{e_2^2} \end{aligned}\right\} +$$

$$\overline{(e_1+e_2)^2} + \overline{(e_1-e_2)^2} = 2\overline{e_1^2} + 2\overline{e_2^2} \tag{2.8-17}$$

Das heißt, es muß gelten:

$$\overline{(e_1+e_2)^2} + \overline{(e_1-e_2)^2} - 2\overline{e_1^2} - 2\overline{e_2^2} = 0 \tag{2.8-18}$$

Dies geschieht schon während der Messungen mit einem analogen Addierer.

Drei Gleichungssysteme zur Lösung des Problems sind in der Tabelle 1 wiedergegeben (nach Müller /3/).

3. Experimente

3.1 Beschreibung der Versuchsanlage

Bild (3-1) zeigt ein Schema der Anlage, die auch Rehme /6/ verwandte. Das Versuchsmedium Luft wird aus einem großen Raum von einem Verdichter 1 angesaugt. Sie gelangt über einen Luftkühler 2 und einen Wasserabscheider 3 zu einer Normblende 4. Hier wird der Massendurchsatz gemessen. Dazu werden benötigt: Druck vor der Blende, Druckabfall und Temperatur der Luft. Danach werden ein Filter 6, ein Schalldämpfer 7 und ein Strömungsgleichrichter 8 durchströmt. Dann befindet sich die Luft im Meßkanal. Er besteht aus einem 7,5 m langen Außenrohr von 100 mm Innendurchmesser. In dieses Außenrohr werden unterschiedlich lange Innenrohre mit Außendurchmesser 86 mm eingesetzt, so daß die Geometrie des exzentrischen Ringspaltes gemäß Bild (3-2) entsteht. Um Störungen abzubauen, ist vor das innere Rohr (Platte) ein Wabengleichrichter gesetzt, wie es aus Bild (3-3) hervorgeht.

Durch die verschiedenen Rohre werden Meßebenen entlang des Einlaufes im Ringspalt simuliert. In Tabelle 2 sind die Ebenen aufgelistet.

Wegen der Enge des Spaltes (maximale Spaltweite 14 mm) ist es wichtig, die Position des Meßfühlers genau zu kennen. Dazu werden die Abstände entsprechend Bild (3-2) mit einem Taster gemessen, der eine Genauigkeit von 0,01 mm garantiert. Die Einstellung der Sonde erfolgt mit einem Mikroskop von 0,005 mm Schärfentiefe, so daß hohe Genauigkeit gewährleistet ist. Die Position der Drähte ist durch die Mikroskopachse bestimmt. Zudem werden etwaige Bewegungen des Rohres durch Temperaturausdehnung während einer Messung registriert und korrigiert.

Da die Kanalgeometrie symmetrisch ist, braucht nur eine Hälfte ausgemessen zu werden. Wegen der Enge des Spaltes kann nur von 0^{o} bis 90^{o} gemessen werden. Die Schrittweite beträgt 10^{o}.

In 10 Traversen werden im radialen Abstand von 1 mm, ausgehend von 2 mm Wandabstand, insgesamt 79 Punkte gemessen. Die Bilder (3-4) und (3-5) zeigen Ansichten des gesamten Versuchstandes und des Meßplatzes.

3.2 Meßtechnik

3.2.1 Durchsatzmessung

Der Massendurchsatz wird mit einer Normblende nach DIN 1952 gemessen. Die Massenstromkorrektur für Schwankungen desselben ist in Kapitel 2 beschrieben.

3.2.2 Messung der Wandschubspannung

Die Wandschubspannung wird nach der Methode von Preston /7/ bestimmt. Es gilt folgende Beziehung:

$$\frac{\tau_o \, d^2}{4\rho \, \nu^2} = F\left[\frac{\Delta p \, d^2}{4\rho \, \nu^2}\right] \qquad (3.2.2\text{-}1)$$

Dabei sind ρ Dichte, ν kinematische Viskosität, τ_w Wandschubspannung, Δp dynamischer Druck (Pitotrohr an der Wand anliegend) und d Außendurchmesser des Pitotrohres. F ist eine Funktion, die aus Eichversuchen zu bestimmen ist, wie es z. B. Patel /8/ getan hat.

Setzt man

$$X = \lg \left[\frac{\Delta p d^2}{4\rho\nu^2}\right]$$

$$y = \lg \left[\frac{\tau_o d^2}{4\rho\nu^2}\right] \qquad (3.2.2\text{-}2)$$

und ist, wie im vorliegenden Fall,

$$2{,}9 < X < 5{,}6$$

so gilt nach Patel /8/:

$$y = 0{,}8287 - 0{,}1381 \cdot X + 0{,}1437 \cdot X^2 - 0{,}006 \cdot X^3 \qquad (3.2.2\text{-}3)$$

Damit ist die Wandschubspannung zu bestimmen, wenn der dynamische Druck bekannt ist. Dazu werden von 0° bis 90° alle 10° Pitotrohrmessungen direkt an der Wand gemacht.

Der statische Druck wird aus am Rohrumfang verteilten Druckanbohrungen gewonnen. Der dynamische Druck ergibt sich nach Bernoulli als Differenz von Pitotdruck und statischem Druck.

3.2.3 Messung des statischen Druckes

Auch an jedem der 79 Punkte in der Strömung ist es nötig, den statischen Druck zu kennen. Diese Messungen werden mit der statischen Drucksonde ausgeführt, die an eine Druckdose angeschlossen ist, analog zum Gesamtdruck.

3.2.4 Messung des Gesamtdruckes und der mittleren Geschwindigkeit

Der Gesamtdruck wird mit einem Pitotrohr gemessen. Zusammen mit dem statischen Druck erhält man die mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{U}_p = \left[\frac{2(P_{Pitot} - P_{stat})}{\rho} \right]^{0,5} \qquad (3.2.4\text{-}1)$$

Bei allen Druckmessungen werden gleichzeitig die Temperaturen an der Blende und am Austritt mit Hilfe von Thermoelementen sowie die Blendendrücke erfaßt.

3.2.5 Hitzdrahtmessungen

Für die Hitzdrahtmessungen werden Sonden mit 2 unter 45° gegen die Sondenachse geneigten Drähten verwendet. Gegeneinander bilden sie einen rechten Winkel. Der Abstand der Drähte voneinander beträgt 1 mm, die Haltestifte sind 1,4 mm voneinander entfernt. Die Drahtlänge ist 2 mm und der Sondendurchmesser ist ebenfalls 2 mm. Der Wolframdraht hat eine Stärke von 5 µm.

An jedem der 79 Meßpunkte einer Ebene wird die Sonde um ihre eigene Achse gedreht, und zwar in 8 Schritten zu 45° von 0° bis 315°. Eigentlich sind nur 3 Messungen nötig, doch wird durch 8 Datenpakete eine größere Meßgenauigkeit gewährleistet. Wie in Kapitel 3.3 dargelegt werden wird, sind die Auswertefehler nämlich von dem Rollwinkel ψ abhängig. Auch der Einfluß der räumlichen Auflösung der Sonde ist abhängig von deren Position zum Geschwindigkeitsgradienten. Daher ist eine Mittelung über einen Winkelbereich von 360° sinnvoll.

Die Schaltung der Meßgeräte ist aus Bild (3-6) zu ersehen. Der Einfachheit halber sind auf diesem Bild für die beiden Drähte zwei Sonden gezeichnet. In Wirklichkeit ist natürlich nur eine Sonde mit zwei X-förmig angeordneten Drähten vorhanden. Für jeden Draht sind eine Wheatstone-Brücke und ein Linearisator nötig. Die Ausgangssignale des Linearisators werden mit einem Oszillographen überprüft. Damit lassen sich Fehler wie Erdschleifen oder falsche Einstellung des Linearisators feststellen. Er erhöht daher die Sicherheit bei den Messungen beträchtlich.

Der Linearisatorausgang liegt weiter an einem Integrator an, der für die Bestimmung des mittleren Geschwindigkeitsvektors den Gleichspannungsanteil des Momentansignals bestimmt. Außerdem geht die Momentanspannung auf ein Effektivwertvoltmeter, das den Schwankungsanteil bestimmt ($\overline{e^2}$). In dem parallelgeschalteten Turbulenzprozessor werden Summe und Differenz der Schwankungsgrößen gebildet:

$$\overline{(e_1 + e_2)^2}, \quad \overline{(e_1 - e_2)^2}$$

Zur Kontrolle der Messungen dient ein analoger Addierer, der schon in Kapitel 2 erwähnt wurde. Da er ein Nullinstrument darstellt, läßt sich der Meßfehler leicht ablesen.

Die Meßwerte werden mit Hilfe einer elektronischen Datenerfassungsanlage auf Lochstreifen gespeichert und anschließend auf einer Großrechenanlage bearbeitet.

Tabelle 3 zeigt, welche Werte über welche Meßgeräte an welchen Kanal der Datenerfassungsanlage übergeben werden.

Bei den Druckmessungen sind die Kanäle 1 - 5 eingeschaltet, bei den Hitzdrahtmessungen die Kanäle 2 - 13. Die Bereiche der DISA-Effektivwertvoltmeter müssen von Hand markiert werden, da diese Geräte keine elektronische Bereichskennung haben wie die in der Elektronikwerkstatt des INR gebauten Geräte.

Die Orientierung des Koordinatensystems ist aus Bild (3-7) ersichtlich: $\overline{U}$ stellt die axiale Komponente dar, $\overline{V}$ die radiale und $\overline{W}$ die in Umfangsrichtung.

3.2.6 Acrivlellis-Verfahren

Im Rahmen der Verbesserung des Meßverfahrens wurden auch versuchsweise Wege beschritten, die nicht zum Erfolg führten.

So wurden von Acrivlellis /9/ - /12/ verschiedene neue Meßverfahren vorgeschlagen. Er benutzt Sonden mit 3 Hitzdrähten und benötigt dann nur eine Messung. Dieses Verfahren scheidet schon wegen der Größe der Sonde für die gegebene Apparatur aus.

Weiter vermeidet er die Reihenentwicklung der Wurzel aus Gl. (2.8.5) und verwendet stattdessen die quadrierte Gleichung für die weitere Auswertung. Hier gehen jedoch die Fehler, die durch die schlechte räumliche Auflösung der Sonde entstehen (1 mm Abstand der Drähte) sehr viel stärker ein als beim üblichen Verfahren. Für die hohen Geschwindigkeitsgradienten im Ringspalt ist das Verfahren daher ungeeignet. Eine ausführliche Diskussion dieser Verfahren findet sich in den DISA-Informationen /9/ - /13/.

3.2.7 Dreifachkorrelationen

Ein Versuch, die Messung an den Orten hoher Turbulenzintensität zu verbessern, wurde mit einem Dreifachkorrelator gemacht, wie er von Müller /3/ vorgeschlagen wurde. Jedoch waren die Ergebnisse um mehr als 2 Zehnerpotenzen kleiner als die zu verbessernden Werte. Daher wurde auf die Benutzung des Tripelkorrelators verzichtet.

3.3 Fehlerbetrachtungen

Die Fehler können in 2 Kategorien eingeteilt werden:
a) Fehler bei den Messungen
b) Auswertefehler.

ad a)
Hierzu gehören Veränderungen durch Umgebungsbedingungen wie Druck-, Temperatur- und Feuchteschwankungen. Der Einfluß der letzteren auf Hitzdrahtabkühlung ist nach Larsen/Busch /14/ gering (< 2 %). Auch auf den Massendurchsatz haben die geringen Feuchteschwankungen (< 10 % pro Tag) praktisch keinen Einfluß.

Dagegen müssen Druck und Temperatur ständig gemessen werden und sowohl ihr Einfluß auf die Stoffwerte (Dichte, Zähigkeit) als auch auf die Hitzdrahtabkühlung korrigiert werden. Der Temperatureinfluß auf die elektronischen Geräte wird intern kompensiert.

Wenn auch die Schwankungen des Massendurchsatzes gering sind, werden sie dennoch gemessen und mathematisch korrigiert.

Durch Meßverfahren und Geräte können weitere Fehler auftreten: So ist die durch den Linearisator erzeugte Kurve U = F(E) nicht ganz linear, stimmt aber im meistens verwendeten Bereich 15 m/s < U < 25 m/s bis auf wenige Prozent (< 2 %), siehe Bild (2-8). Es ließ sich eine gewisse Drift des bei der Eichung eingestellten Verstärkungsfaktors der Wheatstone-Brücken und der Linearisatoren nicht vermeiden. Da es sich aber nur um einen konstanten Faktor handelte, konnte dieser Fehler mit Hilfe einer Massenbilanz korrigiert werden. Dazu wurden die Pitotrohrmessungen verwendet.

Große Schwierigkeiten bereitete die genaue Positionierung der Sonden in axialer Richtung für kleine X/D_H (X/D_H = 0,05, 0,5). Hier spielte die Temperaturausdehnung des Kanals, der Schrauben und Einsätze ein Rolle. Auch die Erstreckung des X-Drahtes

(1 mm in axialer Richtung) ist von Bedeutung. So zeigte es sich, daß die Messung der ersten Ebene anscheinend nicht, wie beabsichtigt, 0,7 mm nach dem Eintritt, sondern etwas davor gemacht wurde.

Der Einfluß der schlechten räumlichen Auflösung der X-Drahtsonde kann mit guter Näherung vernachlässigt werden. Er mittelt sich offenbar durch die Drehung um 360° heraus. In dahingehenden Versuchen konnte jedenfalls kein Einfluß, etwa auf die Ermittlung der Sekundärgeschwindigkeit, festgestellt werden.

ad b) Auswertefehler

Die Gleichung für die Kühlgeschwindigkeit lautet

$$\frac{E^2}{S^2} = U_c^2 = (\bar{U}_{N_1} + u'_{N_1})^2 + k^2 (\bar{U}_T + u'_T)^2 + h^2 (\bar{U}_{N_2} + u'_{N_2})^2$$

oder

$$\begin{aligned}
\frac{E^2}{S^2} = {} & \bar{U}_{N_1}^2 + k^2 \bar{U}_T^2 + h^2 \bar{U}_{N_2}^2 && \bar{F}^2 \\
& + 2 \cdot \bar{U}_{N_1} u'_{N_1} + k^2 \bar{U}_T u'_T + h^2 \bar{U}_{N_2} u'_{N_2} && f \qquad (3.3\text{-}1) \\
& + u'^2_{N_1} + k^2 u'^2_T + h^2 u'^2_{N_2} && g
\end{aligned}$$

das heißt in der Form

$$\frac{E}{S} = [\bar{F}^2 + f + g]^{0,5}$$

Durch Reihenentwicklung erhält man

$$\frac{\bar{E}}{S} = \bar{F}$$

Dies bedeutet eine Vernachlässigung der Terme f und g gegenüber $\bar{F}^2$. Der hierbei gemachte Fehler soll abgeschätzt werden.

Dazu werden folgende Definitionen und Annahmen gemacht:

Es werden eine mittlere Strömung von 0° bzgl. der axialen Richtung und ein idealer Hitzdraht mit Sondenwinkel $\gamma = 45°$, angenommen. Dann gilt:

$$\bar{U}_{N_1} = \bar{U}_T = \frac{1}{2}\,\bar{U}$$
$$\bar{U}_{N_2} = 0 \qquad (3.3\text{-}2)$$

Weiter seien die turbulenten Schwankungen in allen Richtungen gleich:

$$u'_{N_1} = u'_T = u'_{N_2} = u' \qquad (3.3\text{-}3)$$

Mit dem Gesamtturbulenzgrad

$$Tu_G = \frac{\left[u'^2_{N_1} + u'^2_T + u'^2_{N_2}\right]^{0,5}}{\bar{U}} = \frac{u' \cdot \sqrt{3}}{\bar{U}} \qquad (3.3\text{-}4)$$

erhält man

$$\frac{u'}{\bar{U}} = \frac{Tu_G}{\sqrt{3}} \qquad (3.3\text{-}5)$$

Das Verhältnis der exakten zur vereinfachten Gleichung ist dann:

$$\frac{E^2}{E^{*2}} = 1 + 2\,\frac{\bar{U}_{N_1}\,u'_{N_1} + k^2\,\bar{u}'_T + h^2\,\bar{U}_{N_2}\,u'_{N_2}}{\bar{U}^2_{N_1} + k^2\,\bar{U}_T + h^2\,\bar{U}^2_{N_2}} + \frac{u'^2_{N_1} + k^2\,u'^2_T + h^2\,u'^2_{N_2}}{\bar{U}^2_{N_1} + k^2\,\bar{U}^2_T + h^2\,\bar{U}^2_{N_2}} \qquad (3.3\text{-}7)$$

Mit den Annahmen erhält man

$$\frac{E^2}{E^{\;2}} = 1 + 4\,\frac{u'}{\bar{U}} + \frac{u'^2\,(1+k^2+h^2)}{\frac{1}{4}\,\bar{U}^2\,(1+k^2)} \qquad (3.3\text{-}8)$$

Um eine Abschätzung nach oben zu erhalten, kann man nun setzen:

$$1 + k^2 + h^2 = 3 \qquad (3.3\text{-}9)$$

und $\quad 1 + k^2 = 1$

Dann erhält man

$$\frac{E^2}{E^{*2}} = 1 + 4\,\frac{u'}{\bar{U}} + 12\,\frac{u'^2}{\bar{U}^2} \qquad (3.3\text{-}10)$$

oder

$$\frac{E-E^*}{E^*} = \left[1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot Tu_G + 4\,Tu_G^2\right]^{0,5} - 1 \qquad (3.3\text{-}11)$$

Bei einem Turbulenzgrad von 10 % erhält man

$$\frac{E-E^*}{E^*} = [1 + 0{,}231 + 0{,}04]^{0,5} - 1 = 0{,}127 = 12{,}7\ \%$$

bei $T_u = 5$ % dagegen

$$\frac{E-E^*}{E^*} = [1 + 0{,}115 + 0{,}01]^{0,5} - 1 = 0{,}061 = 6{,}1\ \%$$

Bei den vorliegenden Messungen sind die Turbulenzgrade mit Ausnahme des Rückströmgebietes kleiner als 10 %, in der Regel sogar kleiner als 5 %. Im Rückströmgebiet versagen aber sowohl Hitzdrahtanemometer als auch Pitotrohr. Daher sind hier Fehlerbetrachtungen sinnlos.

Nach (2.8-8) gilt für die Spannungsschwankungen

$$\frac{e}{S} = \frac{E-\bar{E}}{S} = \frac{f+g}{2\bar{F}} - \frac{f^2}{8\bar{F}^3}$$

woraus sich durch Vernachlässigung von 2 Termen ergibt:

$$\frac{e}{S} = \frac{f}{2\bar{F}} \qquad (2.8\text{-}10)$$

Die Zulässigkeit dieser Vernachlässigung soll hier überprüft werden. Dazu sollen wieder die Annahmen (3.3-2) und (3.3-3) gelten. Es ist zu untersuchen, ob gilt:

$$\frac{f}{2\bar{F}} \gg \frac{g}{2\bar{F}} - \frac{f^2}{8\bar{F}^3} \qquad (3.3\text{-}12)$$

bzw.

$$\frac{g}{f} - \frac{f}{4\bar{F}^2} \ll 1 \qquad (3.3\text{-}13)$$

Setzt man die entsprechenden Terme ein, erhält man

$$\frac{u_{N_1}'^2+k^2u_T'^2+h^2u_{N_2}'^2}{2\cdot \bar{U}_{N_1}u'_{N_1}+k^2\bar{U}_Tu'_T+h^2\bar{U}_{N_2}u'_{N_2}} - \frac{\bar{U}_{N_1}u'_{N_1}+k^2\bar{U}_Tu'_T+h^2\bar{U}_{N_2}u'_{N_2}}{2(\bar{U}_{N_2}^2+k^2\bar{U}_T^2+h^2\bar{U}_{N_2}^2)} \ll 1$$

Jetzt werden die Annahmen (3.3-2) und (3.3-3) berücksichtigt. Darus folgt:

$$\frac{u'(1+k^2+h^2)}{\bar{U}(1+k^2)} - \frac{u'(1+k^2)}{\bar{U}(1+k^2)} \ll 1$$

oder

$$\frac{u'\cdot h^2}{\bar{U}(1+k^2)} = \frac{u'}{\bar{U}}\,\frac{h^2}{1+k^2} \ll 1$$

Für ein realistisches Beispiel mit

$\bar{U} = 25$ m/s, $u' = 1$ m/s, $h = 1,1$, $k = 0,2$

erhält man

$$\frac{u'}{\bar{U}} \cdot \frac{h^2}{1+k^2} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1,2^2}{1,04} = 0,046 = 4,6\,\% \ll 1$$

Es bedeutet in diesem Fall, daß die vernächlässigten Terme 4,6 % des nichtvernachlässigten Termes ausmachen.

Zur Abschätzung der Fehler, die durch die Annahmen

$k = 0, \quad h = 1, \quad \gamma = 45^{o}$

bei der Berechnung der Schwankungsgeschwindigkeiten entstehen, soll wieder ein realistisches Beispiel durchgerechnet werden. Es gelte Gl. (2.8-10)

$$\frac{e}{s} = \frac{f}{2\bar{F}}$$

Dies bedeutet in kanalfesten Koordinaten

$$\begin{aligned}
\frac{e}{s} = \{ & 2u'[m\bar{U} - \bar{V}p\sin\psi - \bar{W}p\cos\psi] \\
& +2v'[-\bar{U}p\sin\psi + \bar{V}(\bar{m}\sin^2\psi + h^2\cos^2\psi) + \\
& \qquad \bar{W}\sin\psi\cos\psi(\bar{m}-h^2)] \\
& +2w'[-\bar{U}p\cos\psi + \bar{V}\sin\psi\cos\psi(\bar{m}-h^2) + \\
& \qquad \bar{W}(\bar{m}\cos^2\psi + h^2\sin^2\psi)] \ \} \\
& /[\bar{U}^2 \cdot m + \bar{V}^2(\bar{m}\sin^2\psi + h^2\cos^2\psi) + \\
& \quad \bar{W}^2(\bar{m}\cos^2\psi + h^2\sin^2\psi) - 2\bar{U}\bar{V}p\sin\psi \\
& -2\bar{U}\bar{W}p\cos\psi + 2\bar{V}\bar{W}\sin\psi\cos\psi(\bar{m}-h^2)]
\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$m = \sin^2\gamma + k^2 \cos^2\gamma$$

$$\bar{m} = \cos^2\gamma + k^2 \sin^2\gamma$$

$$p = \sin\gamma \cos\gamma \ (1 - k^2)$$

Durch Einführung der o. a. Vereinfachungen erhält man

$$\frac{e^*}{S} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (u' - v'\sin\psi - w'\cos\psi)$$

Der Fehler bei dieser Vereinfachung wird so definiert:

$$F = \frac{e - e^*}{e}$$

Ein Beispiel soll mit folgenden Werten durchgerechnet werden:

$\bar{U} = 25$ m/s	$\bar{V} = 1$ m/s	$\bar{W} = 2$ m/s
$u' = 2$ m/s	$v' = 0,5$ m/s	$w' = 1$ m/s
$k = 0,2$	$h = 1,1$	

Der Fehler F ist vom Rollwinkel ψ abhängig. Der endgültige Fehler ergibt sich daher aus einer Mittelung über die 8 Meßpositionen.

Winkel	Fehler %	Winkel	Fehler %
0°	23,0	225	1,7
45°	23,2	270	8,9
90°	19,6	315	18,3
135°	10,6		
180°	2,5		

Der mittlere Fehler beträgt daher 13,5 %

3.4 Testmessungen

Um die Genauigkeit des in Kapitel 2 beschriebenen Meßverfahrens beurteilen zu können, wurden Messungen im Kreisrohr durchgeführt. Dazu wurde der auch für die übrigen Messungen verwendete Kanal benutzt, jetzt aber ohne inneres Rohr. Es wurde eine Traverse mit 10 Punkten gemessen, ausgehend von 5 mm Wandabstand in 5-mm-Schritten bis zum Mittelpunkt. Auch bei diesen Testmessungen wurden die Ergebnisse für die mittlere Geschwindigkeit U wegen der Gerätedrift (Linearisator) mit Hilfe der Pitotrohrwerte korrigiert (Bild 3-8).

Der statische Druck ist praktisch konstant über der Traverse (Bild 3-9). Bild (3-10) zeigt den Verlauf der Turbulenzgrößen. Die Bedeutungen der einzelnen Symbole sind

□ Auswertung mit Vereinfachungen
$\gamma = 45^o$, $k = 0$, $h = 1$

○ Auswertung ohne Vereinfachungen

△ Messungen von Hooper /15/

+ Messungen von Laufer /16/

In diesem speziellen Fall der Rohrströmung liefern die nicht vereinfachten Auswertegleichungen vernünftige Ergebnisse, allerdings nur für die Turbulenzintensitäten und nicht für die Schubspannungen. In den drei ersten Fällen eignen sie sich daher für eine Überprüfung der Auswertefehler.

Im Diagramm für die axiale Turbulenzintensität liegen die Messungen mit vereinfachter Auswertung am höchsten, die von Laufer am niedrigsten. Die Punkte ohne Vereinfachung fallen zum Teil mit Hoopers /15/ Werten zusammen.

Für die radialen und tangentialen Turbulenzintensitäten gilt aber, daß die Punkte mit Vereinfachungen am niedrigsten sind, während die übrigen Ergebnisse nahe beisammenliegen.

Offensichtlich wird durch die Vernachlässigung $\gamma = 45^{o}$, $k = 0$, $h = 1$ die axiale Turbulenzintensität auf Kosten der radialen und tangentialen überschätzt.

Im Fall der Schubspannungen $\overline{u'v'}$ stimmen 3 Meßreihen gut überein. Nur die nichtvereinfachten Auswertegleichungen liefern schlechte Ergebnisse. Der gleiche Effekt zeigt sich bei den schwierigeren Messungen im Ringspalt auch für die Turbulenzintensitäten. Da keine guten Ergebnisse erzielt wurden, mußte trotz der hier aufgezeigten Fehler auf die vereinfachten Auswertegleichungen zurückgegriffen werden. Dies tun auch Hejna /4/ und Müller /3/, ohne allerdings eine Fehlerabschätzung anzugeben.

Die vereinfachten Gleichungen zeigen für die Schubspannung $\overline{u'v'}$ und $\overline{v'w'}$ recht gute Werte. Für $\overline{u'w'}$ zeigen auch Hoopers Messungen Abweichungen von Null mit ähnlicher Tendenz. Da im symmetrischen Fall des Kreisrohres $\overline{u'w'}$ gleich null sein muß, also kein physikalischer Effekt vorliegt, liegt die Vermutung nahe, daß dies durch die Auswertung verursacht wird.

4. Ergebnisse

Die Ergebnisse sind hier aufgrund ihrer Fülle nur auszugsweise wiedergegeben. Sie liegen aber vollständig in tabellierter Form vor.

Die Komponenten des Reynoldsschen Spannungstensors sind auf die Wandschubspannungsgeschwindigkeit bezogen, soweit diese gemessen wurden (ab 14 D_H = Ebene 7). In den vorhergehenden Ebenen wurde mit Hilfe einer Näherungsformel U = 1 m/s erhalten und darauf normiert.

4.1 Verlauf der Größen in einer Ebene

4.1.1 Mittlere Geschwindigkeit

In den entsprechenden Diagrammen der Bilder (4-1) bis (4-20) sind jeweils zwei Kurven aufgetragen. $\boxdot$ bezeichnet die Hitzdrahtergebnisse und $\odot$ die Pitotrohrwerte. Es sind pro Ebene drei Traversen dargestellt, jeweils bei 0°, 30°, 60° und 90°.

Wegen des enger werdenden Spaltes wird die Anzahl der Punkte mit steigendem Winkel geringer. Es wurden 5 Ebenen von 11 gemessenen ausgewählt, nämlich bei 1, 3, 5, 71 und 357 hydraulischen Durchmessern Abstand vom Eintritt. In den ersten Ebenen sind zwei Zonen zu unterscheiden: eine innere, die durch die Störung durch den inneren Zylinder geprägt ist, und eine äußere, wo der Betrag der Geschwindigkeit gegenüber der flächenmäßig gemittelten Geschwindigkeit von 20 m/s stark überhöht ist. Stellt man eine Kontinuitätsbetrachtung an, so deutet dies auf eine Versperrung des Querschnittes hin.

In den folgenden Ebenen entwickelt sich mehr und mehr ein ausgebildetes Profil, das endlich bei 357 D_H dem der parallelen Platten ähnelt.

4.1.2 Druckverläufe

a) Gesamtdruck

Der Verlauf der Gesamtdruckverteilung wird nicht durch den statischen Anteil geprägt, sondern durch den an den meisten Meßpunkten erheblich größeren dynamischen Druck. Die Kurven sind daher qualitativ mit denen für die mittlere Geschwindigkeit U fast identisch.

b) statischer Druck

In den ersten Ebenen (0.05, 0.5, 1 D_H vom Eintritt) liegen sehr starke radiale Variationen des statischen Druckes vor. Bei 2 D_H ist er in radialer Richtung konstant, aber der Differenzdruck zum Umgebungsdruck ist noch deutlich kleiner als null, bei 3 D_H dagegen ist er praktisch gleich null.

Bei 0.5 D_H können negative Differenzdrücke auftreten, insbesondere am inneren Zylinder, im Bereich des Rückströmgebietes. In der Außenzone werden jedoch wieder positive Werte erreicht. Bei 1 D_H sind sie über die gesamte Ebene negativ. In den folgenden Ebenen werden positive Werte angenommen, die aber in radialer Richtung konstant sind.

Laws, Lin und Livesey /17/ machen ähnliche Beobachtungen im Kreisrohr. Für 2 Fälle des gestörten Eintritts erhalten sie eine starke betragsmäßige Überhöhung des statischen Druckes, die je nach Fall 10 - 15 Durchmesser weit reicht. Auch eine deutliche Variation in radialer Richtung ist zu erkennen, ähnlich wie bei den vorliegenden Messungen.

4.1.3 Turbulenzintensitäten

Die Verläufe der Turbulenzintensitäten sind untereinander sehr ähnlich, wobei aber die axialen Werte die größten sind. In den ersten Ebenen sind im Bereich des Rückströmgebietes sehr große Beträge vorhanden. Wegen der Einschränkungen des Meßverfahrens ist dieses Phänomen aber kritisch zu betrachten. Später entwickelt sich ein parabelförmiger Verlauf.

Die Ergebnisse im eingelaufenen Zustand sollen mit denen von anderen Kanälen verglichen werden, wie Kreisrohr, konzentrischer Ringspalt und parallele Platten. Dazu werden die Ergebnisse von Laufer /16/, Rehme /18/ und Comte-Bellot /19/ herangezogen. Bild (4-21) zeigt, daß in allen drei Fällen Rehmes Ergebnisse vom konzentrischen Ringspalt am besten mit dem exzentrischen Ringspalt übereinstimmen. Die Reynoldszahl war Re = 32490, und das Radienverhältnis betrug 0,1. Am schlechtesten passen Comte-Bellots Daten der parallelen Platte. Laufers Werte liegen zwischen den beiden anderen. Die Tatsache, daß die Ergebnisse des exzentrischen Ringspaltes die niedrigsten sind, liegt an der erheblich höheren Wandschubspannung, die ja in die Bezugsgröße $U_\tau = (\tau_w/\rho)^{0,5}$ eingeht (siehe Kapitel 4.2).

4.1.4 Schubspannungen

Auch die Schubspannungen fallen im Bereich des Rückströmgebietes aus dem Rahmen. Da diese Ergebnisse aber zweifelhaft sind, braucht darüber nicht diskutiert zu werden. Auch außerhalb dieses Gebietes treten über der Einlauflänge deutliche Änderungen auf. Während $\overline{u'v'}$ einem Zustand zustrebt, in dem es in Geradenform mit wachsendem Wandabstand fällt, steigt $\overline{u'w'}$ monoton an. $\overline{v'w'}$ dagegen strebt nach einigen Zwischenstationen gegen null. Im Vergleich der mit dieser Arbeit erzielten Ergebnisse für $\overline{u'v'}$ mit den Werten von Rehme /18/, Laufer /16/ und Comte-Bellot /19/ zeigt sich eine geringere Steigung gegenüber den Werten aus der Literatur (Bild (4-21)). Auch dies läßt sich wieder auf die erheblich größere Schubspannung zurückführen.

Für $\overline{u'w'}$ und $\overline{v'w'}$ sind keine Vergleichspunkte angegeben, da diese in den oben angeführten Vergleichsfällen gleich null sind.

4.2 Wandschubspannung

Die Wandschubspannung wurde in den Ebenen beginnend mit 200 mm Abstand vom Eintritt (X/D_H = 14) bis 5000 mm (X/D_H = 357) gemessen. Die Kurvenverläufe sind in Bild (4-22) dargestellt. Man erkennt, daß nur in den beiden letzten Ebenen ein stetiger Anstieg von 90° bis 0° vorliegt. Die drei anderen Kurven fallen dazwischen wieder etwas ab. Dies deutet darauf hin, daß die Strömung noch nicht eingelaufen ist.

4.3 Logarithmisches Wandgesetz

Es war die Gültigkeit des logarithmischen Wandgesetzes in der Form

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + A$$

zu untersuchen. Wobei

$$U^+ = \frac{U}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}, \quad y^+ = \frac{y \cdot \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}{\nu}$$

sind. Es werden die Konstanten nach Nikuradse verwendet:

$$\kappa = 0.4 \quad \text{und} \quad A = 5.5$$

Die Messungen der Wandschubspannungen wurden von einem Abstand vom Eintritt von 14 D_H an durchgeführt. Es zeigt sich aber, daß bis einschließlich 71 D_H Abstand keine gute Übereinstimmung des Gesetzes mit den Meßwerten vorhanden ist. Dies ändert sich erst bei 143 D_H und 357 D_H Abstand (Bild (4-23)). Hier ist qualitativ eine gute Übereinstimmung erkennbar, jedoch sind die Meßwerte etwas kleiner als die durch das logarithmische Wandgesetz gegebenen Daten.

Auch andere Autoren stellten Abweichungen fest (siehe Wolf /20/ und Weinberg /21/). Dabei stimmen die Steigungen in etwa überein, jedoch fehlt ein additiver Betrag in der Größenordnung von 1.

Bei kleinen Reynoldszahlen (hier 18 000) haben mehrere Autoren (siehe Andreopoulos /22/) eine Abhängigkeit der additiven Konstanten A des logarithmischen Wandgesetzes von der Reynoldszahl festgestellt. So wird etwa A = 4,5 angegeben. Zieht man diesen Effekt in Betracht, so stimmen die experimentellen Werte und die Daten aus der Literatur wieder überein.

4.4 Höhenlinien der mittleren Geschwindigkeit
(Bilder (4-24) - (4-29)

Die Tatsache, daß in der ersten Ebene nur Höhenlinien für die geringste dargestellte Geschwindigkeit $U = 14$ m/s ($U/U_m = 0{,}7$) und $U = 16$ m/s ($U/U_m = 0{,}8$) vorhanden sind, zeigt durch die Nichterfüllung der Kontinuitätsbedingung im Spalt, daß die Messung nicht, wie beabsichtigt, 0,05 D_H nach dem Eintritt, sondern davor stattfand. In der zweiten Meßebene ist deutlich die Tendenz der Verlagerung nach außen sichtbar. Am Innenrand ist das Gradientenfeld auseinandergezogen gegenüber dem Außenrand. Dies setzt sich in den weiteren Ebenen (bis 2 D_H = 28 mm) fort. Deutlich ist auch am Innenrand eine Zone zu erkennen, wo die mittlere Geschwindigkeit noch geringer als 14 m/s ist. Dies ist das Rückströmgebiet.

Beginnend mit 3 D_H legen sich die Höhenlinien wieder näher an den Innenrand an. Das Rückströmgebiet ist passiert. Auch sinken damit wieder die Geschwindigkeiten in der Außenzone. Dies ist zur Erfüllung der Kontinuitätsbedingung erforderlich. Ab 200 mm setzt sich eine zunehmend gleichmäßige Verteilung der Strömung durch.

Das Bild des eingelaufenen Zustandes entspricht qualitativ sowohl den theoretischen Berechnungen von Rogers /23/ und Usui/Tsuruta /24/ als auch den Experimenten von Jonsson/Sparrow /25/, von Tebo/Clump /26/, von Kacker /27/ und von Ricker /28/.

4.5 Sekundärgeschwindigkeit

Das Auftreten von Sekundärgeschwindigkeiten in nichtkreisförmigen Kanälen hat Nikuradse schon 1930 nachgewiesen /29/. Dennoch war es für den Spezialfall des exzentrischen Ringspaltes bisher in der Literatur nicht unumstritten, ob hier Sekundärgeschwindigkeiten auftreten. Mit dieser Untersuchung ist es nun gelungen, diese eindeutig nachzuweisen. Die Ergebnisse sind als Vektorplots der radialen und tangentialen Geschwindigkeitskomponenten in den Bildern (4-30) bis (4-37) dargestellt.

Die Ergebnisse der ersten Ebene (0.05 D_H vom Eintritt weg) fallen mit denen von Hejna /4/ zusammen. Hier überwiegt der radiale Anteil V eindeutig.

Die Strömung muß dem plötzlich auftretenden Hindernis in radialer Richtung ausweichen. Schon in der zweiten Ebene (0.5 D_H) zeigt sich eine Einteilung in zwei Zonen: Während am Innenrand ein Strom in die Ecken geht, fließt außen Masse zur Mitte.

Die Ebenen 3 (1 D_H) und 4 (2 D_H) bringen die Ausbildung von Wirbeln mit sich, während zwischen 5 (3 D_H) und 6 (5 D_H) eine Umkehr der Strömungsrichtung erfolgt.

Von 14 D_H bis 71 D_H ist wieder eine Trennung in zwei Zonen erkennbar, wobei hier aber am Innenrand Masse zur Mitte fließt und außen in die Ecke. Die scharfe Trennung beider Zonen nivelliert sich bei 143 D_H.

Bei 357 D_H scheint die äußere Zelle über die angenommene Symmetrielinie bei 0^o hinaus zu bestehen. Die innere Zelle ist erheblich kleiner geworden und reicht nicht bis zur 0^o-Linie.

Das mehrmalige Wechseln der Richtung der Sekundärgeschwindigkeiten könnte als Bestehen von axialen Zellen gedeutet werden. Eine andere Erklärungsmöglichkeit wäre das Auftreten von Instabilitäten, wie sie etwa bei Badewannenwirbeln entstehen können. Die Richtung dieses Wirbels wird bekanntlich von kleinen Störungen bestimmt. Ähnliche Beobachtungen hat auch Levi /30/ in seinen Experimenten gemacht (Lugt /31/). Dies würde bedeuten, daß sich bei mehreren Versuchen mit derselben Ebene die Richtung der Sekundärgeschwindigkeiten umkehren würde. Eine dahingehende Überprüfung mit einer zweiten Messung der Ebenen 4, 5 und 11 ergab in der Tat eine Umkehrung der Strömungsrichtung. Dies erhärtet den Verdacht, daß sich die Richtung der Sekundärgeschwindigkeit durch kleine Störungen, etwa die Toleranzen der Einbauten, bestimmen läßt. Da die Messung jeder einzelnen Ebene einen Versuch für sich darstellt und somit unbestimmt ist, zu welcher Kategorie sie gehört, läßt sich kein einheitliches Bild der Sekundärströmung über die gesamte Kanallänge angeben.

Während die zweite Meßreihe der Ebene 5 eine Umkehr der Strömungsrichtung ergab, liefert die Ebene 11 nun ein plausibel erscheinendes Bild: Es ist eine Zelle vorhanden, die allerdings über die Symmetrieebene hinausgeht. Auch dies kann mit den Instabilitäten zusammenhängen.

4.6 Höhenlinien der axialen Turbulenzintensität (Bilder (4-38) bis (4-43))

Die Festlegung erfolgte so, daß bedeuten:

$\sqrt{\overline{u'^2}}$	axiale Turbulenzintensität
$\sqrt{\overline{v'^2}}$	radiale Turbulenzintensität
$\sqrt{\overline{w'^2}}$	tangentiale Turbulenzintensität

In den Diagrammen werden die Terme so abgekürzt

$\sqrt{\overline{u'^2}}$	US
$\sqrt{\overline{v'^2}}$	VS
$\sqrt{\overline{w'^2}}$	WS

Für die axiale Turbulenzintensität sind Höhenliniendarstellungen sinnvoll ((4-55) - (4-60)). Man erkennt, daß in der ersten Ebene, direkt am Eintritt nur sehr geringe Turbulenz vorliegt. In den Ebenen 2 - 4 (0.5 - 2 D_H) sind deutlich zwei Zonen zu erkennen: eine innere mit sehr starker Turbulenz und eine äußere, beruhigte Zone. Dieser äußere Teil nimmt jedoch mit enger werdendem Spalt ab. Bei 3 und 5 D_H Abstand hat eine Verteilung über die ganze Ebene stattgefunden. Bei 5 D_H nimmt die Turbulenz schon wieder ab.

Die Gebiete der sehr hohen Turbulenz am inneren Rand in den Ebenen 2 - 5 sind offenbar identisch mit dem Rückströmgebiet. Nimmt man diese Plots als Kriterium, so könnte bei 5 D_H sogar noch ein kleines Rückströmgebiet vorhanden sein.

Von 14 D_H an sind nur noch sehr geringe Gradienten erkennbar. Die Turbulenz hat stark abgenommen. Es ist aber auch nach 357 D_H nicht auszuschließen, daß sich noch gewisse Änderungen im weiteren Verlauf ergeben könnten, d. h. daß die Strömung noch nicht vollständig eingelaufen ist.

4.7 Rückströmgebiet

Wie aufgrund der vorliegenden Geometrie zu erwarten war, bildet sich direkt hinter dem Eintritt in den Ringspalt ein Rückströmgebiet aus. Die ungestört aus dem Gleichrichter austretende Strömung wird durch die plötzlich auftretende Versperrung gezwungen, nach außen auszuweichen. Wegen der scharfen Eintrittskante ist es ihr nicht möglich, sich an die Kontur anzupassen. Sie löst sich daher ab. Diese Zone ist daran zu erkennen, daß die Meßwerte für die mittlere Geschwindigkeit erheblich geringer sind als die der umgebenden Strömung. Auch weichen Hitzdraht- und Pitotrohrmessung erheblich voneinander ab. Keines von beiden Anemometern mißt bei falscher Anströmung vernünftig. Da der Querschnitt durch dieses Gebiet teilweise versperrt wird, muß zur Erfüllung der Kontinuität die Geschwindigkeit der Außenströmung erheblich erhöht werden.

Die Tatsache, daß in der ersten Ebene noch kein Rückströmgebiet erkennbar ist, ist darauf zurückzuführen, daß nicht, wie beabsichtigt, 0,7 mm nach dem Eintritt gemessen wurde, sondern offenbar davor.

Die radiale Ausdehnung des Gebietes ändert sich mit der Spaltweite. Die maximale Ausdehnung liegt bei 28 mm Abstand vom Eintritt. Bei 70 mm Abstand liegt mit ziemlicher Sicherheit keine Rückströmzone mehr vor, aber schon bei 42 mm ist es nicht mehr eindeutig zu identifizieren. Der vermutete Verlauf ist aus Bild (4-44) für $\alpha = 0^{o}$ zu ersehen. Die turbulenten Meßsignale sind im Rückströmgebiet erheblich größer als in der Außenzone.

4.8 Axiale Entwicklung

Es sind für die Winkelstellungen $\alpha = 0^{o}$ (weitester Spalt) und $\alpha = 90^{o}$ (engster Spalt) jeweils zwei Punkte der Traverse ausgewählt. Von diesen liegt je einer in der Innenzone und einer in der Außenzone. Die Auftragung erfolgt über der dimensionslosen Lauflänge X/D_H.

4.8.1 Mittlere Geschwindigkeitskomponenten

Die Darstellung erfolgt mit den Bildern (4-45) bis (4-48).

Die Axialkomponente $\overline{U}$ steigt, gezwungen durch den inneren Zylinder und das Rückströmgebiet zunächst stark an. Nach dem Verlassen dieser Zone fällt sie wieder ab, um gegen Ende nochmals etwas anzusteigen. Diese Änderung nach großer Lauflänge deutet darauf hin, daß die Entwicklung der Sekundärgeschwindigkeiten $\overline{V}$, $\overline{W}$ noch nicht abgeschlossen ist.

Betrachtet man die Diagramme für die Radialkomponente $\overline{V}$, sieht man, daß diese nach großen Werten am Eintritt schnell gegen null geht. Der Massentransport nach außen findet hauptsächlich in Eintrittsnähe statt.

Die Tangentialkomponente $\overline{W}$ aber zeigt beachtliche Veränderungen über der Lauflänge. Auch nach 357 hydraulischen Durchmessern ist ihr Wert deutlich größer als null.

Die großen Werte für $\overline{V}$ und $\overline{W}$ im Bereich des Rückströmgebietes sind aufgrund der dort geltenden besonderen Einschränkungen des Meßverfahrens mit Vorsicht zu betrachten.

4.8.2 Turbulenzintensitäten
(Bilder (4-49) bis (4-52))

Der axiale Verlauf der Turbulenzintensitäten zeigt wieder die hohen Werte in den Ebenen des Rückströmgebietes. Diese sind hier in quadrierter Form dargestellt. In der ruhigen Außenzone sind sie jedoch nicht so stark erhöht wie im Rückströmgebiet selbst. Außerhalb dieses Bereiches gehen die Punkte gegen einen Betrag, der größer als null ist.

In der Untersuchung von Laws, Lin und Livesey /17/ sind ähnliche Beobachtungen gemacht worden. Für den Fall eines gestörten Geschwindigkeitsprofiles am Eintritt registrierten sie eine Überhöhung der axialen Turbulenzintensität nach 3 - 10 hydraulischen Durchmessern Einlauf. Auch hier werden nach 10 - 20 hydraulischen Durchmessern konstante Werte erreicht.

4.8.3 Schubspannungen

Der Verlauf der Schubspannungen für die ausgewählten Fälle ist aus den Bildern (4-53) bis (4-56) zu ersehen.

Das Verhalten im Bereich des Rückströmgebietes ist analog zu den übrigen Größen.

5. Vergleich der experimentellen Daten mit theoretisch berechneten Werten

5.1 Rechnungen mit BODYFIT-1FE

5.1.1 Allgemeine Beschreibung

BODYFIT-1FE (Boundary-Fitted Coordinate, one Phase, Fully Elliptic) ist ein Thermohydraulik-Rechenprogramm für 3-dimensionale einphasige Strömung im stationären wie im transienten Fall /32/. Es löst die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie als Anfangs-Randwertproblem. Durch die Verwendung elliptischer Gleichungen erhöht sich der Rechenaufwand gegenüber Programmen, die etwa die Gleichungen mit "vorwärts schreitender Integration" lösen, durch iterative Lösungsverfahren erheblich. Dadurch ist es aber möglich, Rückströmgebiete zu berechnen.

An Turbulenzmodellen stehen wahlweise der Prandtl'sche Mischungswegansatz und ein K-ε-Modell zur Verfügung. Letzteres ist noch einmal unterteilt in Ein- und Mehrgleichungsmodelle. Dazu werden die aus der Literatur bekannten empirischen Konstanten verwendet.

Die Anpassung der Kanalquerschnittsgeometrie erfolgt durch ein spezielles Transformationsverfahren, das die Ränder exakt auf ein konstantes Koordinatengitter überträgt. Im Bildraum werden die Gleichungen mit einem impliziten finiten Differenzenverfahren gelöst.

5.1.2 Eingaben

Folgende geometrische Eingaben werden gemacht: Die Größe des Meßkanals mit R_i = 43 mm und R_a = 50 mm wird unverändert übernommen. Allerdings kann die volle Exzentrizität E = 1 aus folgendem Grund nicht erreicht werden: Es ist aus Stabilitätsgründen nicht möglich, die axialen Schritte größer als 100 minimale Teilungsgrößen in der Ebene zu wählen. Bei voller Exzentrizität ist die Teilung jedoch gleich null. Um ausreichende axiale Schrittlänge zu erreichen, wird daher eine Exzentrizität von E = 0.9 gewählt. Damit kann die Strecke von 70 mm Einlauf in 11 Schritten bewältigt werden. In Umfangsrichtung werden 36 Stützpunkte gewählt, damit erhält man 10°-Schritte wie bei den Messungen. In radialer Richtung werden einschließlich der Wände 9 Koordinatenlinien berechnet. Damit ergibt sich eine Gesamtzahl der Stützpunkte von 324.

An physikalischen Eingaben werden die Stoffwerte von Luft vorgegeben, die Turbulenz wird mit einem Prandtl'schen Mischungswegansatz modelliert. Als Randbedingung am Eintritt hat man eine konstante mittlere Geschwindigkeit von U = 20 m/s. Mit den Werten für Temperatur T = 25°, Druck P = 1.07 bar und hydraulischem Durchmesser D_H = 14 mm ergibt sich über die Stoffwerte eine Reynoldszahl von Re = 19000.

5.1.3 Durchführung der Rechnungen

Die Rechnungen wurden am Verbundsystem des KfK, bestehend aus IBM 3033/IBM 168 durchgeführt. Dazu wurden 5600 Iterationen mit einer Rechenzeit von ca. 6 Stunden benötigt. Die Fehler betrugen dann in dimensionsloser Darstellung

U	$4{,}5 \cdot 10^{-6}$
V	$2{,}3 \cdot 10^{-6}$
W	$4{,}9 \cdot 10^{-6}$
Druck P	$1{,}3 \cdot 10^{-6}$
Massenstrom	$2{,}2 \cdot 10^{-2}$

Dabei werden die räumlich gemittelten Bezugsgrößen (Geschwindigkeit, Druck und Massenstrom) vorgegeben. Der Fehler für den Massenstrom ist zwar noch recht groß, jedoch konnten bei den letzten Iterationen keine wesentlichen Verbesserungen mehr festgestellt werden. Die Konvergenz wird offensichtlich mit der Anzahl der Iterationen schlechter.

5.1.4 Ergebnisse

Ein sinnvoller Vergleich der Ergebnisse von BODYFIT mit den Meßergebnissen ist erst von der zweiten Ebene an möglich (7 mm). Daher sind die Komponenten des mittleren Geschwindigkeitsvektors U, V, W für 0, 1, 2, 3 und 5 D_h jeweils für $\alpha = 0^\circ$ in den Bildern (5.1) bis (5.5) dargestellt. Die Rechenergebnisse sind durch Quadrate markiert, die Meßergebnisse durch Achtecke. Man erkennt deutlich, daß die wesentlichen Effekte, die die Strömung in diesem frühen Stadium des Einlaufes charakterisieren, von BODYFIT nicht erfaßt werden. Es sind

1. Rückströmgebiet
Die Messungen liefern am inneren Rand eine Versperrung des Querschnittes durch das Rückströmgebiet. Dadurch wird die Geschwindigkeit U in der Außenzone überhöht. Dieser starken Profilierung steht bei den Rechnungen ein fast konstanter Wert entgegen. Erst bei 5 D_h, wo das Rückströmgebiet schon beendet ist, nähern sich die Werte an.

Diese Unzulänglichkeit der Rechenergebnisse entsteht durch die vorgegebene Randbedingung der konstanten Strömung am Eintritt des Ringspaltes. Dies entspricht in keiner Weise den experimentellen Bedingungen. Zu beheben wäre dieser Mangel, indem die Rechnungen bereits vor dem inneren Zylinder in der ungestörten Rohrströmung begonnen würden. Dabei müßte dieser, wie im Experiment, als plötzliche Querschnittsverengung auftreten. Diese Maßnahme würde aber erheblichen zusätzlichen Rechenaufwand bedeuten.

2. Sekundärströmung
Auch die Sekundärströmung zeigt gerade in Eintrittsnähe eine besondere Profilierung. Hier ist auch der Vorzeichenwechsel, sowohl in radialer wie in axialer Richtung, von Bedeutung. Die berechneten Größen kommen aber über sehr kleine, im Vergleich zu den gemessenen Werten vernachlässigbare Beträge nicht hinaus. Hier nähern sich die Werte bei 3 und 5 D_h nicht an, da die Meßwerte nicht gegen 0 gehen.

5.2 Rechnungen mit VELASCO

5.2.1 Allgemeine Beschreibung

Das Programm VELASCO (Velocity Field in Asymmetric Rod Configurations) /33/ - /35/ berechnet isotherme, voll entwickelte Strömungsfelder und Reibungszahlen. Es ist für Rohrbündel und Ringspaltgeometrie gleichermaßen geeignet. Im letzteren Fall kann aber aufgrund einer Polstelle bei der Koordinatentransformation der vollexzentrische Fall nur angenähert werden. Im vorliegenden Beispiel wurde die Exzentrizität mit E = 0.99 angegeben.

VELASCO geht davon aus, daß die Strömung in impulsausgeglichene Zonen eingeteilt werden kann, die durch Nullschubspannungslinien begrenzt werden. D. h. es findet kein Impulsaustausch zwischen diesen Zonen statt. Im achsensymmetrischen Fall des exzentrischen Ringspaltes wird nur eine Hälfte des Querschnittes zur Rechnung herangezogen. Der Kanal kann wahlweise rauh oder glatt angenommen werden. Stoffwerte werden in diesem Rechenprogramm nicht spezifiert, es wird lediglich die Reynoldszahl angegeben.

Berechnet wird das axiale Geschwindigkeitsfeld. Dabei werden Sekundärströmungen mit einem einfachen Modell berücksichtigt. Außerdem werden als Endergebnis im wesentlichen noch Wandschubspannung und Reynoldszahl angegeben.

5.2.2 Durchführung der Rechnungen und Ergebnisse

Die wichtigsten Eingaben sind hier die geometrischen Daten wie innerer und äußerer Radius und Exzentrizität. Die Rohre werden als hydraulisch glatt angenommen, daher ist die Rauhigkeitshöhe gleich null. In Umfangsrichtung werden 19 Punkte gewählt, entsprechend 10°-Schritten von 0° bis 180°. In radialer Richtung variiert die Anzahl der Punkte entsprechend der Spaltweite. Maximal sind es 40 Punkte, verteilt auf 2 Zonen. Die Reynoldszahl wird, analog zu den Experimenten mit Re = 18000 angenommen. Für 45 Durchläufe werden nur 30 Sekunden Rechenzeit auf der Großrechenanlage des KfK benötigt.

Die Ergebnisse für die axiale Geschwindigkeitskomponente U sind in den Diagrammen (5-6) - (5-9) als Vergleich mit den experimentellen Daten aufgetragen. Dabei bezeichnen die Quadrate berechnete Werte, die Achtecke Meßwerte.

Auf der Abszisse ist der radiale Abstand Y bezogen auf die maximale Spaltweite Y_{max} dargestellt. Aufgrund der verwendeten Koordinatensysteme, die nur in der Innenzone für Experiment und Rechnung übereinstimmen, ist nur die Hälfte gezeichnet. Der linke Rand symbolisiert die Wand, der rechte die Mittellinie.

Auf der Ordinate ist die axiale Geschwindigkeit, bezogen auf die flächenmäßig gemittelte Geschwindigkeit (U_m = 20 m/s), zu sehen.

Aus den Kurven erkennt man, daß die VELASCO-Werte bei 0° und 90° etwas zu groß sind, sonst aber recht gut übereinstimmen.

6. Schlußbetrachtung

Zum erstenmal liegen hiermit Daten aus dem Einlaufbereich des exzentrischen Ringspaltes vor. Im Rahmen aller Einschränkungen und Fehler der Meßverfahren erscheinen die Ergebnisse vertrauenswürdig, nicht zuletzt aufgrund der nachgewiesenen, physikalisch plausiblen Phänomene. So ist das Rückströmgebiet im Bereich von 0 bis ca. 50 mm Abstand vom Eintritt durch die geometrische Anordnung erklärbar. Es prägt die Einlaufzone entscheidend. Der Nachweis dieses Gebietes ist sowohl durch eine Massenbilanz als auch durch das Versagen der Meßverfahren mit Pitotrohr und Hitzdrahtanemometer leicht zu führen.

Von dem in der Literatur nicht unumstrittenen Vorhandensein von Sekundärströmungen kann nach dieser Arbeit wohl endgültig ausgegangen werden. Sie lassen sich auch durch pessimistische Fehlerbetrachtungen nicht wegleugnen. Nicht ganz so sicher nachzuweisen ist der Einfluß von Instabilitäten auf die Richtung der Wirbel. Jedoch spricht der Wechsel des Vorzeichens bei verschiedenen Messungen derselben Ebene eine deutliche Sprache. Auch ein Übergreifen von Zellen über die Symmetrielinie läßt sich so erklären. Um aber eine eindeutige Aussage machen zu können, wären weitere Untersuchungen erforderlich.

Während der Verlauf des statischen Druckes schon nach wenigen hydraulischen Durchmessern (= maximale Spaltweite) über den Radius konstant ist, ändert er sich sowohl in tangentialer als auch in axialer Richtung. Er geht von Ebene 1 bis 11 von negativen Werten zu positiven über. Der Nulldurchgang ist bei 3 D_H (Ebene 5). Bei der mittleren Geschwindigkeit ist auch beim Schritt von 140 auf 357 D_h noch eine Änderung festzustellen. Die Einlauflänge ist damit erheblich größer als in der Literatur meistens angenommen, wo in der Regel von weniger als 100 D_h gesprochen wird.

Die Übereinstimmung der Meßwerte für die mittlere Geschwindigkeit U im eingelaufenen Zustand (357 D_h = 5000 mm Abstand vom Eintritt) mit den Ergebnissen des Rechenprogrammes "VELASCO" ist gut. Dagegen weichen die Rechenwerte des Programmes "BODYFIT" im Einlauf stark von der Realität ab. Dies liegt daran, daß durch die vorhandene Modellierung das den Einlauf prägende Rückströmgebiet nicht erfaßt wird. Dies ist ein Punkt, wo Verbesserungen ansetzen könnten. Jedoch hätten solche Rechnungen sicher einen noch größeren Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf als das hier schon der Fall war.

Literatur

/1/ L. V. King
On the convection of heat from small cylinders in a stream of fluid
Phil. Trans. Roy. Soc. A214, 1914, S. 373

/2/ H. H. Bruun
Interpretation of a hot wire signal using an universal calibration law
J. Sc. Instrum., No. 4, 1971, S. 225

/3/ U. Müller
Messung von Reynoldsschen Spannungen und zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten in einer dreidimensionalen Grenzschicht mit nichtverschwindenden Druckgradienten
Dissertation RWTH Aachen, 1979

/4/ J. Hejna
Measurements of Velocity and Reynolds Stresses in the Inlet Region of an Eccentric Annullus Using a Dual Hot-Wire Probe,
KfK-Bericht 3083, 1980

/5/ P. W. Bearman
Corrections for the effect of ambient temperature drift on hot-wire measurements in imcompressible flow
DISA Information Nr. 11, 1971, S. 25

/6/ K. Rehme
Untersuchungen der Turbulenz- und Schubspannngsverteilung an einem Kreisrohr mit einem Hitzdrahtanemometer
KfK-Bericht 1642, 1972

/7/ M. A. Preston
The Determination of Turbulent Skin Friction by Means of Pitot Tubes
Journ. Roy. Aer. Soc. Vol, 1954, S. 109 - 121

/8/ V. C. Patel
Calibration of the Preston Tube and Limitation on its Use in Pressure Gradients
J. Fluid Mech. 1965, Vol. 23, Part 1, S. 185 - 208

/9/ M. Acrivlellis
Hot-Wire Measurements in Flows of Low and High Turbulence Intensity
DISA-Information Nr. 22, 1977, S. 15 - 20

/10/ M. Acrivlellis
Finding the Spatial Flow Field by Means of Hot-Wire Anemometry
DISA-Information Nr. 22, 1977, S. 21 - 28

/11/ M. Acrivlellis
An Improved Method for Determining the Flow Field of Multi-Dimensional Flows of Any Turbulence Intensity
DISA-Information Nr. 23, 1978, S. 11 - 16

/12/ M. Acrivlellis
Flow Field Dependence on Hot-Wire Probe Cooling Law and Probe Adjustment
DISA-Information Nr. 23, 1978, S. 17 - 23

/13/ M. Bartenwerfer
Remarks on Hot-Wire Anemometry Using Squared Signals
DISA-Information Nr. 24, 1979, S. 4

/14/ S. E. Larsen, N. E. Busch
On the Humidity Sensitivity of Hot Wire Measurements
DISA Information No. 25, 1980, S. 4 - 5

/15/ J. Hooper
Fully Developed Turbulent Flow Through a Rod Cluster
Doktorarbeit, Universität New South Wales, 1980

/16/ J. Laufer
The structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow
NACA Report 1174, 1954, National Bureau of Standards

/17/ E. M. Laws, E.-H. Lim, J. L. Livesey
Turbulent Pipe Flows in Development and Decay
2nd Symposium on Turbulent Shear Flows, London 1979, S. 4.6 - 4.11

/18/ K. Rehme
Turbulente Strömung in konzentrischen Ringspalten
Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK 2099, 1975

/19/ G. Comte-Bellot Ecoulement turbulent entre deux parois paralleles
Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air No. 419, 1965

/20/ L. Wolf
Vergleichende Zusammenstellung von Ergebnissen und Lösungen thermo- und fluiddynamischer Probleme in exzentrischen Ringräumen
Stand August 1972
TUBIK-26, 1973, TU Berlin, Institut für Kerntechnik

/21/ D. Weinberg
private Mitteilung

/22/ J. Andreopoulos
Veröffentlichung in Vorbereitung

/23/ A. E. Rogers
Turbulent Flow in Eccentric Annuli
APED-5295, Class 1, 1966

/24/ H. Usui, K. Tsuruta
Analysis of Fully Developed Turbulent Flow in an Eccentric Annulus
J. Chem. Eng. Japan, Vol. 13, Nr. 6, 1980, S. 445 - 450

/25/ V. K. Jonsson, E. M. Sparrow
Experiments on Turbulent Flow Phenomena in Eccentric Annular Ducts
J. Fluid Mech., Vol. 25, part 1, 1966, S. 65 - 68

/26/ P. V. Tebo, C. W. Clump
An Experimental Investigation of Primary and Secondary Velocity for Turbulent Flow in Eccentric Annuli
The Can. J. Chem. Eng., Vol. 49, 1971, S. 175 - 181

/27/ S. C. Kacker
Some Aspects of Fully Developed Turbulent Flow in Non-Circular Ducts
C.E.G.B. Report RD/B/N 2117, 1971

/28/ T. W. Ricker, J. H. T. Wade, N. W. Wilson
On the Velocity Fields in Eccentric Annuli
ASME Publication Paper 68-WA/FE-35, S. 2 - 7

/29/ J. Nikuradse
Untersuchungen über turbulente Strömungen in nicht kreisförmigen Rohren
Ingenieur-Archiv, 1. Band, 1930, S. 306 - 332

/30/ E. Levi
Experiments on Unstable Vortices
J. Hydr. Div. ASCE, 1972

/31/ D. Lugt
Mündliche Mitteilung

/32/ B. C. J. Chen, W. T. Sha, M. L. Doria, R. C. Schmitt, J. F. Thompson
Bodyfit-1FE: A Computer Code for Three-Dimensional Steady-State/Transient Single-Phase Rod-Bundle Thermal-Hydraulic Analysis
NUREG/CR-1874, ANL-80-127, Argonne National Laboratory

/33/ W. Eifler, R. Nijsing
VELASCO - Velocity Field in Asymmetric Rod Configurations
Joint Research Centre - Ispra, EUR 4950e, 1973

/34/ W. Eifler, R. Nijsing
Berechnung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung und Wandreibung in exzentrischen Ringspalten
Atomkernenergie, Bd. 18, 1971, Lfg. 2, S. 133 - 142

/35/ W. Eifler
Über die turbulente Geschwindigkeitsverteilung und Wandreibung in Strömungskanälen verschiedener Querschnitte
Dissertation, TH Darmstadt, 1968

Anhang A1

A1 Herleitung von Korrekturgleichungen für Massenstrom-, Dichte- und Temperaturschwankungen während einer Meßreihe

Hitzdrahtmessungen

Die Normtemperatur t_N soll 25 °C betragen, während am Austritt eine mittlere Geschwindigkeit von C_{1N} = 20 m/s erreicht werden soll. Der Druck wird mit 1 bar als konstant angenommen. Dies ergibt einen Massenstrom von

$$\dot{m} = \rho\ (25^{\circ}\mathrm{C},\ 1\ \mathrm{bar}) \cdot U \cdot A_1 \qquad \text{(A1-1)}$$

Mit den geometrischen Größen von D_a = 100 mm, Di = 86 mm folgt zahlenmäßig

$$\dot{m} = 1{,}17 \cdot 20 \cdot 2{,}05 \cdot 10^{-3} \quad \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}} \quad = 0{,}048\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

Die Durchflußmessung erfolgt an der Stelle "O" mit Hilfe einer Normblende mit dem Öffnungsverhältnis $m_a = A_{Blende}/A_{Rohr}$ = 0,3. Es gilt:

$$\Delta P_{Blende} = \frac{\rho_o}{2} \cdot \left[\frac{U_o}{\alpha}\right]^2 \qquad \text{(A1-2)}$$

wobei $\alpha = f\ (Re_{Rohr}, m_a)$ ist.

Die Reynoldszahl im Rohr ist unter Annahme von t_o = 20 °C gleich

$$Re_{Rohr} = \frac{U_{Rohr} \cdot D_a \cdot \rho_o}{\eta_o} = \frac{A_{1_{Rohr}} \cdot U_1 \cdot D_a \cdot \rho_o}{A_{Rohr} \cdot \eta_o}$$

$$= \frac{(r_a^2 - r_1^2) \cdot U \cdot 2 \cdot r_a \cdot \rho_o}{r_a^2 \cdot \eta_o}$$

$$= \frac{(2500 - 1849) \cdot 20 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}189}{2500 \cdot 1{,}813 \cdot 10^{-5}}$$

$$Re_{Rohr} = 34155 \approx 3{,}4 \cdot 10^4$$

Somit erhält man aus DIN 1952

$$\alpha = 0{,}641$$

Gleichung (A1-2) liefert dann mit D_{Blende} = 46.844 mm

$$\Delta P_{Blende} = \Delta P_o = \frac{\rho_o}{2} \cdot \left[\frac{\rho_1 A_1 U_1}{\rho_o A_o}\right]^2 =$$

$$\frac{1{,}189}{2} \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{1{,}17 \cdot \bar{U} \cdot 641 \cdot 20}{1{,}189 \cdot \bar{U} \cdot 548{,}6 \cdot 0{,}641} \tag{A1-3}$$

$$= 765 \frac{kg \cdot m}{m^2 s^2} = 7{,}65 \text{ mbar}$$

Der Einfluß von Temperatur und Umgebungsdruck auf Massenstrom und Reynoldszahl muß bei der Auswertung berücksichtigt werden. Nach Gl. (A1-3) ergibt sich für die zeitlich und räumlich gemittelte Geschwindigkeit am Austritt:

$$\bar{U}_{M_1} = \alpha \cdot \frac{\rho_o \cdot A_o}{\rho_1 \cdot A_1} \cdot \left[\frac{2\Delta P_o}{\rho_o}\right]^{0,5} \qquad \text{(A1-4)}$$

Betrachtet man das Strömungsmedium, Luft, als ideales Gas, kann man diese Gleichung verwenden:

$$P = \rho R T \quad \Rightarrow \rho = \frac{P}{RT} \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_o}{\rho_1} = \frac{P_o T_1}{P_1 T_o} \qquad \text{(A1-5)}$$

Eingesetzt in (A1-4)

$$\bar{U}_{M_1} = \alpha \cdot \frac{P_o T_1 A_o}{P_1 T_o A_1} \cdot \left[\frac{2\ \Delta P \cdot R \cdot T_o}{P_o}\right]^{0,5} \qquad \text{(A1-6)}$$

Die räumlich nicht gemittelten Meßwerte U_M können so auf konstanten Massenstrom korrigiert werden (U_{KM}):

$$U_{KM} = \frac{\bar{U}_{Norm}}{\bar{U}_{M1}} \cdot U_M \qquad \text{(A1-7)}$$

$$U_{KM} = \bar{U}_{Norm} \cdot \frac{P_1 T_o A_1}{\alpha P_o T_1 A_o} \left[\frac{P_o}{2\Delta P R T_o}\right]^{0,5} \cdot U_M \qquad \text{(A1-8)}$$

Um die Meßwerte vergleichen zu können, werden sie auf konstante Reynoldszahl korrigiert:

$$Re = \frac{Ud}{\nu} = \frac{U \cdot d \cdot \rho}{\eta}$$

$$Re_M = Re_K$$

daraus folgt

$$\frac{U_K}{U_M} = \frac{\eta_K \cdot \rho_M}{\eta_M \cdot \rho_K} \qquad \text{(A1-9)}$$

Die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität η wird durch die Sutherlandgleichung beschrieben, wobei die Druckabhängigkeit von η im Bereich von 1 bar vernachlässigt werden kann. Danach gilt für Luft bei 1 bar Druck:

$$\eta(T) = \frac{1,458 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{T}}{1 + \frac{110,4}{T}} \quad [kg/(ms)] \qquad \text{(A1-10)}$$

Zusammen mit (A1-5) und (A1-8) erhält man mit $P_M = P_K$

$$\frac{U_K}{U_M} \triangleq \frac{T_K \cdot (T_M + 110,4) \cdot T_K^{3/2}}{T_M \cdot (T_K + 110,4)\ T_M^{3/2}}$$

oder

$$\frac{U_K}{U_M} = \frac{T_M + 110,4}{T_K + 110,4} \left[\frac{T_K}{T_M}\right]^{5/2} \qquad \text{(A1-11)}$$

(A1-8) in (A1-11) ergibt mit $T_M = T_1$, $T_K = T_{Norm}$, $\bar{U}_{Norm} = \bar{U}_N$

$$U_K = \frac{T_1 + 110,4}{T_N + 110,4} \cdot \frac{P_1 \; A_1}{\alpha P_o \; A_o} \cdot \frac{T_N^5 \; P_o \; T_o}{2\Delta PRT_1^7} \; \bar{U}_N \cdot U_M \qquad \text{(A1-12)}$$

Nun läßt sich der Zusammenhang zwischen Strömungsgeschwindigkeit U und angezeigter Spannung am Anemometer E angeben:

$$\frac{E^2}{S^2} = U^2$$

Dabei ist S der Übertragungsfaktor.

$$E_K = \frac{P_1 \; A_1}{\alpha P_o \; A_o} \cdot \frac{T_1 + 110,4}{T_N + 110,4} \cdot \frac{T_N^5 \cdot T_o}{T_1^7} \cdot \frac{P_o}{2\Delta PR} \; \bar{U}_N \cdot E_M \qquad \text{(A1-13)}$$

Temperaturkorrektur bezogen auf die Eichtemperatur

a) Gleichspannungsanteil

Die Grundgleichung der Hitzdrahtabkühlung, das King'sche Gesetz, lautet für ein unlinearisiertes Anemometer

$$E^2 = A + B \; U^{1/n} \qquad \text{(A1-14)}$$

und für den linearisierten Fall

$$E_L = K \cdot (A + B \cdot U^{1/n} - E_{in}^2)^n \qquad \text{(A1-15)}$$

Dabei wird E_{in}, eine interne Kompensationsspannung so eingestellt, daß

$$E_{in}^2 = A \qquad (A1-16)$$

ist. Somit wird E_L bei Eichtemperatur t_E zu:

$$E_L \ (t_E) = K \cdot B^n \cdot U \qquad (A1-17)$$

Verändert sich aber die Temperatur des umgebenden Mediums, so folgt:

$$E_L(t_M) = K(A_1 + B_1 \ U^{1/n} - A)^n \qquad (A1-18)$$

oder

$$\left[\frac{E_L \ (t_M)}{K} \right]^{1/n} = A_1 + B_1 \ U^{1/n} - A$$

Um A_1 und B_1 zu bestimmen, bietet sich eine Wärmebilanz am Hitzdraht an. Allgemein gilt für einen Wärmestrom

$$\dot{q} = \alpha \cdot \Delta T$$

Nach dem Prinzip der Hitzdrahtanemometrie ist die angezeigte Spannung proportional der übertragenen Wärme. Also gilt

$$A \sim \dot{q}$$

und

$$B \cdot U^{1/n} \sim \dot{q}$$

Ist U konstant, kann man schreiben

$$\frac{B_1 \cdot U^{1/n}}{B \cdot U^{1/n}} = \frac{\dot{q}_1}{\dot{q}} = \frac{\alpha \Delta T_1}{\alpha \Delta T} = \frac{\Delta T_1}{\Delta T}$$

und $$\frac{A_1}{A} = \frac{\dot{q}_1}{\dot{q}} = \frac{\Delta T_1}{\Delta T}$$

Für die Temperaturdifferenzen gilt hier:

$$\Delta T_1 = t_W - t_M$$

$$\Delta T = t_W - t_E$$

Somit erhält man

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{t_W - t_M}{t_W - t_E} \tag{A1-19}$$

und damit aus (A1-18)

$$E(t) = K \cdot \left\{ \frac{t_W - t_M}{t_W - t_E} \cdot A - A + \frac{t_W - t_M}{t_W - t_E} \cdot B \cdot U^{1/n} \right\}^n$$

$$E(t) = K \cdot \left\{ \frac{t_E - t_M}{t_W - t_E} \cdot A + \frac{t_W - t_M}{t_W - t_E} \cdot B \cdot U^{1/n} \right\}^n \tag{A1-20}$$

Nach der Temperaturkorrektur muß bei $t = t_E$ gelten:

$$E_{LC}(t_E) = K \cdot B^n \cdot U \tag{A1-21}$$

und damit

$$B \cdot U^{1/n} = \left[\frac{E_{LC}(t_E)}{K} \right]^{1/n} \tag{A1-22}$$

Weiter folgt aus Gl. (A1-14) für U = 0 und $t = t_F$

$$A = E^2 \; (t_E, \; U = 0) \qquad \text{(A1-23)}$$

Wenn $E_L(t) = E_{LM}(t)$ der Meßwert ist, erhält man mit Gl. (A1-22) und Gl. (A1-23) aus Gl. (A1-20)

$$\left[\frac{E_{LM}(t)}{K}\right]^{1/n} = \frac{t_w - t_M}{t_w - t_E} \cdot E^2 (t_E, U=0) + \frac{t_w - t_M}{t_w - t_E} \cdot \left[\frac{E_{LC}(t_E)}{K}\right]^{1/n} \qquad \text{(A1-24)}$$

Nach Umstellung sieht man:

$$E_{LC}(t_E) = K \left\{ \frac{t_w - t_E}{t_w - t} \cdot \left[\frac{E_{LM}(t)}{K}\right]^{1/n} - \frac{t_E - t_M}{t_w - t_M} \cdot E^2 (t_E, U=0) \right\}^n \qquad \text{(A1-25)}$$

Aus den Gl. (A1-16) und (A1-19) erkennt man, daß für 2 Temperaturen t_1 und t_2 gilt:

$$\frac{E \; (t_1, \; U=0)}{E \; (T_2, \; U=0)} = \left[\frac{t_w - t_1}{t_w - t_2}\right]^{0,5} \qquad \text{(A1-26)}$$

Liegt bei der Messung von E eine beliebige Temperatur t_a vor, erhält man

$$E \; (t_E, \; U=0) = E(t_a, \; U = 0) \cdot \left[\frac{t_w - t_E}{t_w - t_a}\right]^{0,5} \qquad \text{(A1-27)}$$

und damit aus (A1-25)

$$E_{LC}(t) = K \cdot \left\{ \frac{t_w - t_E}{t_w - t_M} \cdot \left[\frac{E_{LM}(t_M)}{K} \right]^{1/n} - \frac{(t_E - t_M) \cdot (t_w - t_E)}{(t_w - t_M) \cdot (t_w - t_a)} \cdot E^2(t_a, U = 0) \right\}^n \tag{A1-28}$$

Aus der Gl. (A1-17) folgt für U,T = konst.:

$$E_{LE} = K \cdot B^n U_E \tag{A1-29}$$

und

$$E_E^2 = E_o^2 + B\, U_E^{1/n} \tag{A1-30}$$

Damit läßt sich K angeben

$$K = \frac{E_{LE}}{(E_E^2 - E_o^2)^n} \tag{A1-31}$$

oder durch Mittelung über alle Eichgeschwindigkeiten U_{Ei}

$$K = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{E_{LE_i}(U_i)}{[E_{Ei}(U_i) - E_{oi}^2(U_i)]^n} \tag{A1-32}$$

Nach dem DISA-Sondenhandbuch wird die Arbeitstemperatur des Hitzdrahtes t_w wie folgt berechnet:

$$t_w = t_U + \frac{R_w + R_L - (R_{20} + R_L)}{\alpha_{20} \cdot R_{20}} \tag{A1-33}$$

Führt man das Überhitzungsverhältnis a ein:

$$a = \frac{R_W - R_{20}}{R_{20}} \tag{A1-34}$$

so zeigt sich, daß

$$R_W = R_{20} \cdot (1 + a) \tag{A1-35}$$

und

$$t_W = t_U + \frac{a}{\alpha_{20}} \tag{A1-36}$$

b) Wechselspannungsanteile

Aus Gl. (A1-28) erhält man durch Differenzieren

$$\frac{1}{n} \cdot E_{LC}^{1/n} \cdot \frac{dE_{LC}}{E_{LC}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{t_W - t_M}{t_W - t_E} \cdot E_{LM}^{1/n} \cdot \frac{dE_{LM}}{E_{LM}}$$

beziehungsweise

$$\frac{dE_{LC}(t)}{dE_{LM}(t)} = \frac{t_W - t_M}{t_W - t_E} \cdot \left[\frac{E_{LC}}{E_{LM}}\right]^{\frac{n-1}{n}} \tag{A1-37}$$

Für kleine Schwankungen kann man annehmen, daß

$$dE_{LC} \approx e_{eff\ C} \tag{A1-38}$$

$$dE_{LM} \approx e_{eff\ M}$$

und endlich folgt

$$\frac{e_{\mathrm{eff}_C}}{e_{\mathrm{eff}_M}} = \frac{t_W - t_M}{t_W - t_E} \cdot \left[\frac{E_{LC}}{E_{LM}}\right]^{\frac{n-1}{n}} \tag{A1-39}$$

<u>Temperaturkorrektur auf eine beliebige Normtemperatur t_N</u>

a) Mittelwerte

Aus Gl. (A1-18) ergibt sich analog für $t_N \neq t_E$:

$$E_{LN}(t_N, U) = K \cdot (A_N + B_N \cdot U^{1/n} - A)^n \tag{A1-40}$$

woraus mit (A1-19) folgt

$$E_{LN}(t_N, U) = K \cdot \left\{ \frac{t_W - t_N}{t_W - t_E} \cdot A - A + \frac{t_W - t_N}{t_W - t_E} \cdot B \cdot U^{1/n} \right\}^n$$

$$E_{LN}(t_N, U) = K \cdot \left\{ \frac{t_E - t_N}{t_W - t_E} \cdot A + \frac{t_W - t_N}{t_W - t_E} \cdot B \cdot U^{1/n} \right\}^n \tag{A1-41}$$

Mit (A1-22) und (A1-23) erhält man hieraus:

$$E_{LN}(t_N, U) = K \cdot \left\{ \frac{t_E - t_N}{t_W - t_E} \cdot E^2(t_E, U=0) + \frac{t_W - t_N}{t_W - t_E} \cdot \left[\frac{E_L(t_E, U)}{K}\right]^{1/n} \right\}^n \tag{A1-42}$$

Mit dieser Gleichung können die bei der Eichung erhaltenen Werte auf die Normtemperatur korrigiert werden. Für eine beliebige Temperatur während der Messung erhält man wieder mit (A1-18)

$$E_{LM}(t_M,U) = K \cdot (A_M + B_M \cdot U^{1/n} - A)^n$$

Nach bereits vorgeführter Umformung ergibt sich

$$E_{LM}(t_M,U) = K \cdot \left\{ \frac{t_E - t_M}{t_W - t_E} \cdot E^2(t_E,U=0) + \frac{t_W - t_M}{t_W - t_E} \cdot \left[\frac{E_L(t_E,U)}{K}\right]^{1/n} \right\}^n \qquad (A1-43)$$

Löst man (A1-42) nach $E_L(t_E,U)$ auf, erhält man:

$$\left[\frac{E_L(t_E,U)}{K}\right]^{1/n} = \frac{t_W - t_E}{t_W - t_N} \cdot \left[\frac{E_{LN}(t_N,U)}{K}\right]^{1/n} - \frac{t_E - t_N}{t_W - t_N} \cdot E^2(t_E,U=0) \qquad (A1-44)$$

Eingesetzt in (A1-43) ergibt sich:

$$\left[\frac{E_{LM}(t_M,U)}{K}\right]^{1/n} = \frac{t_W - t_M}{t_W - t_N} \cdot \left[\frac{E_{LN}(t_N,U)}{K}\right]^{1/n} - \frac{t_W - t_M}{t_W - t_E} \cdot \frac{t_E - t_N}{t_W - t_N}$$

$$\cdot E^2(t_E,U=0) + \frac{t_E - t_M}{t_W - t_E} \cdot E^2(t_E,U=0)$$

Daraus folgt für den gesuchten, auf Normtemperatur korrigierten Wert $E_{LN}(t_N,U)$:

$$\left[\frac{E_{LN}(t_N,U)}{K}\right]^{1/n} = \frac{t_W - t_N}{t_W - t_M} \cdot \left[\frac{E_{LM}(t_M,U)}{K}\right]^{1/n} + \left[\frac{t_E - t_N}{t_W - t_E} + \frac{t_M - t_E}{t_W - t_E}\right]$$

$$\cdot E^2(t_E,U=0) \qquad (A1-45)$$

oder auch:

$$E_{LN}(t_N,U) = K \cdot \left\{ \frac{t_W - t_N}{t_W - t_M} \left[\frac{E_{LM}(t_M,U)}{K} \right]^{1/n} + \frac{t_M - t_N}{t_W - t_E} \cdot E^2(t_E,U=0) \right\}^n \tag{A1-46}$$

b) Schwankungen der Spannung

Aus (A1-45) erhält man durch Differenzieren:

$$\frac{1}{n \cdot K^{1/n}} \cdot E_{LN}^{1/n}(t_N,U) \cdot \frac{dE_{LN}(t_N,U)}{E_{LN}(t_N,U)} =$$

$$\frac{1}{n \cdot K^{1/n}} \cdot \frac{t_W - t_N}{t_W - t_M} \cdot E_{LM}^{1/n}(t_M,U) \cdot \frac{dE_{LM}(t_M,U)}{E_{LM}(t_M,U)}$$

beziehungsweise:

$$\frac{dE_{LN}(t_N,U)}{dE_{LM}(t_M,U)} = \frac{t_W - t_N}{t_W - t_M} \cdot \frac{E_{LM}(t_M,U)^{\frac{1-n}{n}}}{E_{LN}(t_M,U)^{\frac{1-n}{n}}}$$

oder

$$\frac{dE_{LN}(t_N,U)}{dE_{LM}(t_M,U)} = \frac{t_W - t_N}{t_W - t_M} \cdot \left[\frac{E_{LN}(t_N,U)}{E_{LM}(t_M,U)} \right]^{\frac{n-1}{n}} \tag{A1-47}$$

Nimmt man nun wieder für kleine Spannungsschwankungen an, daß

$$dE_{LN} \approx e_{eff_N}$$
$$dE_{LM} \approx e_{eff_M} \qquad (A1-48)$$

so gilt:

$$\frac{e_{eff_N}(t_N,U)}{e_{eff_M}(t_M,U)} = \frac{t_W - t_N}{t_W - t_M} \cdot \left[\frac{E_{LN}(t_N,U)}{E_{LM}(t_M,U)}\right]^{\frac{n-1}{n}} \qquad (A1-49)$$

Pitotrohrmessungen (Gesamtdruck)

Für die Pitotrohrmessungen gilt:

$$P_{ges} = P_{stat} + P_{stau} = P_{stat} + \frac{\rho}{2} U^2 \qquad (A1-50)$$

Will man die Geschwindigkeit U mit einem Pitotrohr bestimmen, so muß man bilden (mit $P_{Pitot} = P_{ges.}$):

$$U = \left[\frac{2}{\rho} (P_{ges} - P_{stat})\right]^{0,5} \qquad (A1-51)$$

Dieser Wert kann nun mit Hilfe von Gl. (A1-13) korrigiert werden:

$$U_K = \frac{P_1 A_1}{\alpha P_o A_o} \cdot \left[\left(\frac{T_1 + 110,4}{T_N + 110,4}\right)^2 \cdot \frac{T_N^5 \, T_o}{T_1^7} \cdot \frac{P_o}{2\Delta PR} \cdot \frac{2R_L \, T_1}{P_1} (P_{ges} - P_{stat})\right]^{0,5}$$

$$\cdot \, U_{Norm}$$

Dann kann man vereinfachen:

$$U_K = U_{Norm} \cdot \frac{A_1}{\alpha A_o} \cdot \frac{T_1 + 110{,}4}{T_N + 110{,}4} \cdot \left[\frac{T_N^5 \, T_o}{T_1^6} \cdot \frac{P_1}{P_o} \cdot \frac{P_{ges} - P_{stat}}{\Delta P_O} \right]^{0{,}5}$$

(A1-52)

Anhang 2

A2 Bestimmung des Vektors der mittleren Geschwindigkeit

Ausgangspunkt ist wieder die Grundgleichung der Hitzdrahtabkühlung

$$\frac{E^2}{S^2} = U_{N1}^2 + k^2 U_T^2 + h^2 U_{N2}^2 \qquad \text{(A2-1)}$$

in hitzdrahtfesten Koordinaten.

Zur Bestimmung der mittleren Geschwindigkeiten $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ im laborfesten Koordinatensystem wird zunächst Gl. (2.2-1) zeitlich gemittelt:

$$\frac{\bar{E}^2}{S^2} = \bar{U}_{N1}^2 + k^2 \bar{U}_T^2 + h^2 \bar{U}_{N2}^2 \qquad \text{(A2-2)}$$

Im Versuch wird die Sonde um den Rollwinkel ψ so lange gedreht, bis das Maximum des Ausschlags erreicht ist. In diesem Fall ist der Geschwindigkeitsvektor komplanar mit der Ebene des Hitzdrahtes. Es gilt:

$$\bar{U}_{N2} = 0 \qquad \text{(A2-3)}$$

Für X-Draht-Sonden kann auch das Maximum oder Minimum des Verhältnisses der beiden Werte herangezogen werden. Die Vorgehensweise zur Bestimmung von $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ sieht dann so aus:

ψ bestimmen, so daß

$\bar{U}_{N2} = 0$ nach (A2-3) und

$$\frac{\bar{E}^2}{S^2} = \bar{U}_{N1}^2 + k^2\ \bar{U}_T^2 \qquad \text{(A2-4)}$$

hierbei sind

$$U_{N1}^2 = U_R^2 \cdot \cos^2\alpha$$

$$U_T^2 = U_R^2 \cdot \sin^2\alpha \qquad \text{(A2-5)}$$

dann folgt

$$\frac{\bar{E}^2}{S} = \bar{U}_R^2\ (\cos^2\alpha + k^2\ \sin^2\alpha) \qquad \text{(A2-6)}$$

Im laborfesten X,Y,Z-Koordinatensystem ergibt sich

$$\bar{U}_R^2 = (\bar{U}^2 + \bar{V}^2 + \bar{W}^2) \qquad \text{(A2-7)}$$

Mit dem Winkel ϕ zwischen Geschwindigkeitsvektor und Sondenachse gilt für die X-Drahtsonde (bzw. 2 Messungen mit Einzeldraht für Minimum und Maximum)

$$\alpha_1 = 90^\circ - \gamma + \phi$$

$$\alpha_2 = 90^\circ - \gamma - \phi \qquad \text{(A2-8)}$$

Die Winkel γ werden analog Bild (2-1) gezählt. Somit folgt aus (A2-6) mit (A2-8)

$$\frac{\bar{E}_{1/2}^2}{S^2} = \bar{U}_R^2 \left\{ \cos^2\ (90 - \gamma \pm \phi) + k^2\ \sin^2\ (90 - \gamma \pm \phi) \right\}$$

$$\frac{\bar{E}_{1/2}^2}{S^2} = \bar{U}_R^2 \left\{ \left[\cos(90 - \gamma)\ \cos\phi \pm \sin(90 - \gamma)\ \sin\phi\right]^2 + \right.$$

$$\left. k^2 \left[\sin(90 - \gamma)\ \cos\phi \pm \cos(90 - \gamma)\ \sin\phi\right]^2 \right\}$$

$$= \bar{U}_R^2 \left[(\sin\gamma \cos\phi \mp \cos\gamma \sin\phi)^2 + k^2 (\cos\gamma \cos\phi \mp \sin\gamma \sin\phi)^2 \right]$$

$$= \bar{U}_R^2 \left[\sin^2\gamma \cos^2\phi \pm 2 \sin\gamma \cos\gamma \sin\phi \cos\phi + \cos^2\gamma \sin^2\phi \right.$$
$$\left. + k^2 (\cos^2\gamma \cos^2\phi \mp 2 \sin\gamma \cos\gamma \sin\phi \cos\phi + \sin^2\gamma \sin^2\phi \right]$$

$$\frac{\bar{E}_{1/2}^2}{S^2} = \bar{U}_R^2 \left[\cos^2\phi (\sin^2\gamma + k^2 \cos^2\gamma) \right.$$
$$\pm 2 \cdot \sin\gamma \cos\gamma \sin\phi \cos\phi (1 - k^2) \qquad \text{(A2-9)}$$
$$\left. + \sin^2\phi (\cos^2\gamma + k^2 \sin^2\gamma) \right]$$

Jetzt werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$m_{1/2} = \sin^2\gamma_{1/2} + k^2 \cos^2\gamma_{1/2}$$

$$\bar{m}_{1/2} = \cos^2\gamma_{1/2} + k^2 \sin^2\gamma_{1/2} \qquad \text{(A2-10)}$$

$$P_{1/2} = \sin\gamma_{1/2} \cos\gamma_{1/2} (1 - k^2)$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\bar{E}^2_{1/2}}{S^2} = \bar{U}_R^2 \; (m_{1/2} \cos^2\phi \mp 2P_{1/2} \sin\phi \cos\phi + \bar{m}_{1/2} \sin^2\phi) \tag{A2-11}$$

Um eine Bestimmungsgleichung für ϕ zu erhalten, wird in Gl. "1" und "2" $\cos^2\phi$ ausgeklammert und "1" durch "2" dividiert:

$$\left[\frac{\bar{E}_1}{\bar{E}_2}\right]^2 = \frac{m_1 - 2p_1 \sin\phi/\cos\phi + \bar{m}_1 \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}}{m_2 + 2p_2 \frac{\sin\phi}{\cos\phi} + \bar{m}_2 \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}} \tag{A2-12}$$

Mit der Abkürzung $\frac{E_1}{E_2} = E^*$ folgt weiter:

$$E^{*2} \; (\bar{m}_2 \tan^2\phi + 2p_2 \tan\phi + m_2) = m_1 \tan^2\phi - 2p_1 \tan\phi + m_1$$

$$\tan^2\phi \; (E^{*2} \bar{m}_2 - \bar{m}_1) + 2\tan\phi \; (p_2 \cdot E^{*2} + p_1) + E^{*2} m_2 - m_1 = 0$$

$$\tan^2\phi + 2\tan\phi \; \frac{E^{*2} \cdot p_2 + p_1}{E^{*2} \cdot \bar{m}_2 - \bar{m}_1} + \frac{E^{*2} \cdot m_2 - m_1}{E^{*2} \cdot \bar{m}_2 - \bar{m}_1} = 0 \tag{A2-13}$$

Für ungleiche Übertragungsfaktoren $S_1 \neq S_2$ gilt:

$$\tan^2\phi + 2\tan\phi \; \frac{\left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \cdot p_2 + p_1}{\left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \cdot \bar{m}_2 - \bar{m}_1} + \frac{\left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \cdot m_2 - m_1}{\left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \cdot \bar{m}_2 - \bar{m}_1} = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für ϕ , die folgendermaßen aufgelöst wird:

$$\tan = - \frac{\left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \cdot p_2 + p_1}{\left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \cdot \bar{m}_2 - \bar{m}_1} \pm \left\{ \frac{\left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \cdot p_2 + p_1}{\left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \cdot \bar{m}_2 - \bar{m}_1}^{2} - \frac{\left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \cdot m_2 - m_1}{\left[\frac{S_2 \cdot \bar{E}_1}{S_1 \cdot \bar{E}_2}\right]^2 \bar{m}_2 - \bar{m}_1} \right\}^{0,5}$$

(A2-14)

Wegen der linearen Abhängigkeit der Gl. (A2-9)/1 und (A2-9)/2 können U und $v^2 + w^2$ nicht direkt aus diesen Gleichungen bestimmt werden (Komplararität). Daher wird zuerst ϕ mit Gl. (A2-14) berechnet und dann $U_{1/2}$ aus Gl. (A2-9) und (A2-10). Aus beiden U wird der Mittelwert gebildet:

$$\frac{\bar{E}^2_{1/2}}{S^2_{1/2}} = (\bar{U} + \bar{V}^2 + \bar{W}^2)\,(m_{1/2} \cos^2\phi \pm 2p_{1/2} \sin\phi \cos\phi + \bar{m}_{1/2} \sin^2\phi)$$

Es gilt aber auch

$$\tan^2\phi = \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = \frac{v^2 + \bar{w}^2}{\bar{U}^2} \qquad \text{(A2-15)}$$

daraus folgt

$$\bar{U}^2 \sin^2\phi = (\bar{v}^2 + \bar{w}^2) \cos^2\phi \qquad \text{(A2-16)}$$

Mit (A2-13) ergibt (A2-10)

$$\frac{\bar{E}^2_{1/2}}{S^2_{1/2}} = \bar{U}^2 \;(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\,(m_{1/2} \pm 2p_{1/2} \tan\phi + \bar{m}_{1/s} \tan^2\phi)$$

Daraus folgt:

$$\bar{U}^2_{1/s} = \frac{\bar{E}^2_{1/2}/S^2_{1/2}}{m_{1/2} \pm 2p_{1/2} \tan\phi + \bar{m}_{1/2} \tan^2\phi} \qquad \text{(A2-17)}$$

$$\bar{U} = \frac{\bar{U}_1 + \bar{U}_2}{2}$$

für v + w ergibt sich analog aus (A2-15)

$$\bar{V}^2 + \bar{W}^2 = \bar{U} \tan^2\phi \qquad \text{(A2-18)}$$

Mit dem anfangs abgelesenen (oder berechneten) Rollwinkel ψ können nun V und W berechnet werden.

$$\bar{V}^2 = (\bar{V}^2 + \bar{W}^2) \sin^2\psi$$

$$\bar{W}^2 = (\bar{V}^2 + \bar{W}^2) \cos^2\psi \qquad \text{(A2-19)}$$

bzw.

$$\bar{V} = \bar{U} \tan\phi \cdot \sin\psi$$

$$\bar{W} = \bar{U} \tan\phi \cdot \cos\psi \qquad \text{(A2-20)}$$

Damit ist der vollständige Vektor der mittleren Geschwindigkeit im problemorientierten X,Y,Z-Koordinatensystem bekannt.

Diese Gleichungen verwendet auch Hejna /3/, jedoch gibt er die meisten nicht explizit an und führt auch keine Herleitungen vor.