

**KfK 3724**  
**April 1984**

# **Einfluß der Bénard-Konvektion auf Gefrierflächen**

**Ch. Dietsche**  
**Institut für Reaktorbauelemente**

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE  
Institut für Reaktorbauelemente

KfK 3724

EINFLUSS DER BÉNARD-KONVEKTION AUF GEFRIERFLÄCHEN

Christoph Dietsche

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität  
Karlsruhe (T.H.) genehmigte Dissertation.

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
ISSN 0303-4003

A b s t r a c t

DIETSCHE, CHRISTOPH:

EINFLUSS DER BÉNARD-KONVEKTION AUF GEFRIERFLÄCHEN

Eine horizontale Schicht einer einkomponentigen Boussinesq-Flüssigkeit, die unten geheizt und oben unter ihren Schmelzpunkt abgekühlt wird, wird bei stationären Randbedingungen untersucht.

Mit einer linearen Theorie werden kritische Rayleigh- und Wellenzahlen für das Einsetzen der Konvektion berechnet.

In einem ersten Experiment wird eine Schicht großer horizontaler Erstreckung untersucht, wobei als Testsubstanz Cyclohexan mit der Prandtl-Zahl 18 verwendet wird. Wenn sich an der oberen Schichtberandung ein dünner Film fester Phase befindet, ergibt sich in der Phasentrennfläche eine Linienstruktur als Abbild der Strömung in der flüssigen Phase. Bei zunehmender Dicke der festen Phase werden dagegen ausschließlich Hexagonalmuster in der Phasentrennfläche beobachtet. Diese Ergebnisse werden mit der nicht-Boussinesq'schen Eigenschaft einer deformierbaren Phasentrennfläche interpretiert.

In einem zweiten Experiment werden mit einem Mikroskop Flüssigkeitshöhen in einem endlichen Behälter gemessen. Beim Einsetzen und Verschwinden der Konvektion wird, bei dicker fester Phase, eine beträchtliche Hysterese der Flüssigkeitshöhen festgestellt. Auch dieser Effekt wird mit der nicht-Boussinesq'schen Eigenschaft einer deformierbaren Phasentrennfläche interpretiert und mit einem halbempirischen Modell quantitativ berechnet. Bei größeren Flüssigkeitshöhen, die zu Höhen- zu Seitenverhältnissen von größer als 1:4 führen, wird eine Umbildung von Polygon- in Walzenstrukturen beobachtet. Dieser Effekt ist auf den wachsenden Einfluß der vertikalen Berandungen zurückzuführen. Bei höheren Rayleigh-Zahlen treten in der Phasentrennfläche bimodale Strukturen mit zwei unterschiedlichen Wellenlängen auf. Mit einem Differentialinterferometer wurde gezeigt, daß dieser Effekt auf eine Instabilität der Temperaturgrenzschicht an der unteren Flüssigkeitsberandung zurückzuführen ist.

A b s t r a c t

DIETSCHÉ, CHRISTOPH:

INFLUENCE OF BÉNARD-CONVECTION ON SOLID-LIQUID-INTERFACES

A horizontal layer of a single-component Boussinesq-liquid, which is heated from below and cooled from above below its freezing point, is investigated at stationary boundary conditions.

By means of linear theory, critical Rayleigh- and wave numbers for the onset of convection are derived.

In a first experiment a layer of quasi-infinite horizontal extent is investigated using cyclohexane with Prandtl number 18 as a test-substance. If there is only a thin film of solid at the upper boundary of the layer, a line pattern appears in the interface reflecting the convective motion in the liquid. However with increasing thickness of the solid layer, solely hexagonal patterns are observed in the interface. This phenomenon is shown to be caused by the non-Boussinesq-property of a deformable interface.

In a second experiment in a layer of finite horizontal extent, heights of the liquid layer are measured by means of a microscope. In the case, where the solid is thick compared with the liquid, a strong hysteresis of the liquid heights is found at the onset of convection. This effect is also explained by the non-Boussinesq-property of a deformable interface and is evaluated quantitatively by a semi-empirical model. At higher liquid heights leading to height to width ratios greater than 1:4, a transformation from polygonal structures to rather twodimensional "roll"-structures of the interface is observed. This effect is due to the influence of the lateral walls. At higher Rayleigh numbers bimodal structures with two different wave lengths appear in the interface. It has been found by differential interferometry, that they originate from an instability of the thermal boundary layer at the lower bound of the liquid.

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	7
1.1 Problemstellung	7
1.2 Literaturübersicht	9
2. Lineare Theorie	14
2.1 Voraussetzungen, Bilanzgleichungen und Randbedingungen	14
2.2 Statische Lösung und Normierung	17
2.3 Linearisierung und Lösung	20
2.4 Ergebnisse	24
3. Grenzflächenstrukturen in einer Schicht großer horizontaler Erstreckung	26
3.1 Versuchsaufbau	26
3.2 Ergebnisse	28
3.3 Interpretation	33
4. Experiment im endlichen Behälter	36
4.1 Versuchsaufbau und Meßtechnik	37
4.2 Ergebnisse	41
4.2.1 Hysterese der Flüssigkeitshöhen beim Einsetzen und Verschwinden der Konvektion	41
4.2.1.1 Stationäre Zustände	41
4.2.1.2 Instationäre Übergänge	45
4.2.1.3 Interpretation	49
4.2.2 Phänomene bei voll ausgebildeter Konvektion	54
4.2.2.1 Ausbildung von Walzenstrukturen der Phasen- trennfläche unter Einfluß der vertikalen Berandungen	54
4.2.2.2 Bimodale Strukturen der Phasentrennfläche	56
4.2.2.2.1 Beschreibung	56
4.2.2.2.2 Interpretation	56
4.2.2.3 Instationäre Vorgänge bei hohen Rayleigh- Zahlen	64
4.2.3 Stabilität verschiedener Zustände	67
5. Zusammenfassung	72

6. Literaturverzeichnis	74
7. Anhang	80
7.1 Flüssigkeitshöhen für das gesamte Experiment im endlichen Behälter	80
7.2 Modell zur Abschätzung mittlerer Flüssigkeitshöhen für allgemeine Rayleigh- und Biot-Zahlen	83
7.3 Einfluß der Meßkammerkonstruktion auf die Kontur der Phasentrennfläche im Wärmeleitungszustand	85
7.4 Stoffdaten	90

## Bezeichnungen

B	-	Biot-Zahl
b	-	Tiefe der Meßkammer
e	-	Strahlentrennung des Differentialinterferometers
g	-	Erdbeschleunigung
h	-	Gesamtschichthöhe
$h_{wl}$	-	Höhe der ruhenden Flüssigkeit
$h_o$	-	obere konvektive Flüssigkeitshöhe (lokales Maximum)
$h_u$	-	untere konvektive Flüssigkeitshöhe (lokales Minimum)
$\bar{h}_l$	-	mittlere Flüssigkeitshöhe
k	-	Wellen-Zahl
l	-	Wellenlänge
$\underline{n}$	-	Normalenvektor auf der Phasentrennfläche
Nu	-	Nusselt-Zahl
p	-	Druck
Pr	-	Prandtl-Zahl
$\dot{q}$	-	Wärmestromdichte
$Ra_{wl}$	-	Rayleigh-Zahl, mit $h_{wl}$ gebildet
Ste	-	Stephan-Zahl
t	-	Zeit
$\underline{t}$	-	Tangentenvektor an der Phasentrennfläche
T	-	Temperatur
$\underline{v}$	-	Geschwindigkeitsvektor mit Komponenten u, w
W	-	Amplitude der Vertikalkomponente der Geschwindigkeit
x, y, z	-	Ortskoordinaten
$\beta$	-	thermischer Ausdehnungskoeffizient
$\delta$	-	Dicke der Temperaturgrenzschicht
$\Delta T$	-	Temperaturdifferenz
$\nabla$	-	Nabla-Operator
$\epsilon$	-	Amplitude der Konvektion in der Störungsentwicklung
$\eta$	-	Höhe der Phasentrennfläche
$\theta$	-	Störtemperatur
$\Theta$	-	Amplitude der Störtemperatur
$\kappa$	-	Temperaturleitfähigkeit
$\lambda$	-	Wärmeleitfähigkeit

$\Lambda$	-	Schmelzenthalpie
$\mu$	-	dynamische Zähigkeit
$\nu$	-	kinematische Zähigkeit
$\rho$	-	Dichte
$\tau_D$	-	Zeitkonstante der Temperaturdiffusion

Indices:

1	-	untere Schichtberandung
2	-	obere Schichtberandung
m	-	Phasentrennfläche
l	-	flüssig
s	-	fest
o	-	Bezugszustand für Stoffparameter
p	-	Periodenlänge einer Struktur
c	-	kritisch

## 1. Einleitung

### 1.1 Problemstellung

Naturkonvektion ist ein in Natur und Technik häufig beobachteter Vorgang. Er tritt in gasförmigen und flüssigen Medien auf und wird durch Dichteunterschiede erzeugt, die u.a. durch Temperatur- oder Konzentrationsunterschiede verursacht werden. Als Folge von Dichteunterschieden entstehen Auf- bzw. Abtriebskräfte, die die Naturkonvektion in Gang setzen.

Eine Vielzahl von physikalischen Phänomenen sind auf Naturkonvektion zurückzuführen. Sie tritt beispielsweise im Zusammenhang mit Auf- und Abwinden über erwärmten Landflächen und Seen auf. Bei der Heizungs- und Klimatechnik in Gebäuden und bei Wärmetransportvorgängen in Solarenergiesystemen spielt die Naturkonvektion ebenfalls eine wesentliche Rolle.

Bei einer Reihe von Problemen tritt Konvektion auch im Zusammenhang mit Schmelz- und Gefrierprozessen auf. Dies ist z.B. beim Aufschmelzen und Gefrieren von Gewässern der Fall. Technisch werden Kenntnisse über Schmelz- und Gefrierprozesse mit Konvektion z.B. bei der Anwendung von Latentwärmespeichern in der Solarenergie nutzbar gemacht. In jüngster Zeit richtet sich ein verstärktes Interesse auf den Einfluß von Konvektionsvorgängen beim Züchten von Ein- und Halbleiterkristallen aus der Schmelze. Ein wichtiges Anliegen sind hier die Forderungen der Elektronik-Industrie an Preis und Qualität der verwendeten Materialien bei der Entwicklung leistungsfähiger "Chips".

Der Wunsch, grundlegende Gesetzmäßigkeiten zu den oben genannten komplexen Strömungen zu erforschen, hat während der letzten Jahre das Interesse auf ein besonders einfaches Modellsystem, das sogenannte Rayleigh-Bénard-Problem, gelenkt. Hierbei handelt es sich um eine horizontale Schicht einer einkomponentigen fluiden Substanz, die von unten erwärmt und von oben gekühlt wird (vergl. dazu auch die Literatur in Kapitel 1.2).

Diese Arbeit befaßt sich mit einem Problem, in dem eine Rayleigh-Bénard-Konstellation vorgegeben ist. Speziell wird eine Anordnung, wie sie in Abb. 1 dargestellt ist, untersucht.

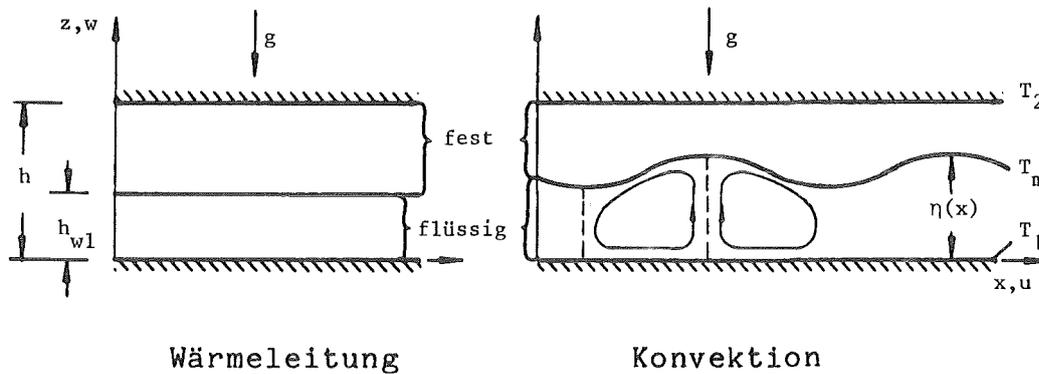


Abb. 1 Prinzipskizze

In einer horizontalen Schicht befindet sich eine einkomponentige Substanz mit der Schmelztemperatur  $T_m$ . Die Temperatur  $T_1$  der unteren Berandung sei größer als  $T_m$ , die Temperatur  $T_2$  der oberen Berandung sei kleiner als  $T_m$ . Dadurch entsteht oben eine Schicht fester Phase, die einer warmen Flüssigkeit überlagert ist. Durch die Temperaturverteilung in der flüssigen Phase (unten warm, oben kalt) wird bei den meisten Medien eine instabile Dichteschichtung verursacht, wobei sich das schwerere Medium über dem leichteren befindet. Dies gilt für alle weiteren Betrachtungen und auch für die später beschriebenen Experimente. Die Dichte-Anomalie von Wasser bei  $4^\circ\text{C}$  wird hier nicht behandelt. Ferner werden hauptsächlich Effekte bei stationären Randtemperaturen untersucht.

Der Grundzustand des betrachteten Systems ist das statische Gleichgewicht, bei dem der Energietransport von unten nach oben durch reine Wärmeleitung erfolgt (Abb. 1, linke Seite). In bestimmten Parameterbereichen der Randtemperaturen tritt dagegen Konvektion in der flüssigen Phase auf (Abb. 1, rechte Seite). Die Konvektion wird durch die Rayleigh- und die Prandtl-Zahl beschrieben (Chandrasekhar (1961), vergl. dazu auch die lineare Theorie in Kapitel 2).

Für das betrachtete System sind folgende Fragestellungen von Interesse:

- In welchen Parameterbereichen der Randtemperaturen setzt Konvektion ein?
- Wie verhalten sich die Flüssigkeitshöhen beim Einsetzen und Verschwinden der Konvektion?
- Welchen Einfluß hat die Konvektion auf die Struktur der Phasentrennfläche?

Bevor diese Fragen im einzelnen aufgegriffen werden, wird im folgenden Kapitel zunächst eine Sichtung der hier interessierenden Literatur vorgenommen.

## 1.2 Literaturübersicht

Die Grundlagen zum klassischen Rayleigh-Bénard-Problem sind in den Büchern von Chandrasekhar (1961), Gershuni & Zhukhovitskii (1976) und Joseph (1976) dargestellt. Der Artikel von Hopfinger et al. (1979) eignet sich als Einführung in das Umfeld des hier interessierenden Problems.

In einer systematischen Analyse für das Bénard-Problem untersuchte Busse (1967a) mit einer Störungstheorie die Frage der Stabilität von Strömungsmustern beim Einsetzen der Konvektion (vergl. auch Zierep (1958), Palm (1960), Segel & Stuart (1962)). Hierbei spielt die sogenannte Boussinesq-Eigenschaft der Flüssigkeit eine Rolle. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer Boussinesqschen Flüssigkeit, wenn alle Stoffdaten des Fluids als konstant zu betrachten sind und nur die Dichte im Auftriebsterm als linear abhängig von der Temperatur zu berücksichtigen ist. Es wurde festgestellt, daß beim Einsetzen von Konvektion in Boussinesq-Fluiden Strömungswalzen zu erwarten sind. Nicht-Boussinesqsche Eigenschaften, wie beispielsweise eine deutlich temperaturabhängige Zähigkeit, bewirken dagegen beim Einsetzen der Konvektion die Ausbildung von hexagonalen Zellstrukturen. Das Auf- und Abklingen der Konvektion unter solchen Bedingungen zeigt ein Hystereseverhalten. Bei schwach überkritischen Rayleigh-Zahlen tritt eine zweite Hysterese im Zusammenhang mit einem Übergang

von hexagonaler Zellstruktur in Walzenstruktur auf. Walden & Ahlers (1981) haben diesen Effekt in Experimenten bestätigt. Davis & Segel (1968) zeigten in einer theoretischen Untersuchung, daß deformierbare Oberflächen der Flüssigkeitsschicht hinsichtlich der Vorgänge in der Umgebung der kritischen Rayleigh-Zahl die gleiche Wirkung wie Nicht-Boussinesqsche Eigenschaften des Fluids aufweisen.

Busse (1967b) hat durch eine Stabilitätsanalyse gezeigt, daß im Bereich deutlich überkritischer Rayleigh-Zahlen zwischen 1800 und 20000 und Prandtl-Zahlen deutlich größer 1 im Benard-Problem zwischen zwei festen Berandungen Strömungswalzen zu erwarten sind. Der Bereich der tatsächlich möglichen Wellenlängen ist hierbei kleiner als das Gesamtspektrum an Wellenlängen, das mit der linearen Theorie berechnet wird.

Bei Rayleigh-Zahlen  $Ra \geq 20000$  und  $Pr \gg 1$  werden sogenannte bimodale Konvektionsstrukturen beobachtet (Busse (1979)). Dabei treten zwei Wellenlängen ("Moden") auf, die zum einen mit der Schichthöhe, zum anderen mit der Dicke der Temperaturgrenzschichten an den Berandungen skalieren. Howard (1964) interpretierte das Stabilitätsverhalten solcher Temperaturgrenzschichten anhand einfacher Modelle.

Im Bereich von Prandtl-Zahlen  $Pr \gg 1$  und hohen Rayleigh-Zahlen  $Ra \sim 10^5$  treten Übergänge zu zeitabhängigen Strömungsformen auf (Krishnamurti (1973), Busse (1978)).

Neben der Rayleigh- und der Prandtl-Zahl spielen auch die Randbedingungen für die Fixierung des Zellmusters bei Konvektionsströmungen eine wichtige Rolle. Vertikale Behälterwände üben einen hemmenden Einfluß auf die Konvektion aus (Zierep (1963), Davis (1967), Stork & Müller (1972), Catton (1978), Frick & Clever (1980)). Bei größer werdendem Höhen- zu Seitenverhältnis der Schicht wird einerseits eine Zunahme der kritischen Rayleigh-Zahl beobachtet, zum anderen orientieren sich die Achsen der Konvektionswalzen entlang der kürzeren Seite eines Rechteckbehälters. Die thermischen Eigenschaften horizontaler und vertikaler Behäl-

terwände üben einen Einfluß auf die kritischen Rayleigh-Zahlen aus. Bei horizontalen Berandungen nehmen die kritischen Rayleigh-Zahlen mit der Wärmeleitfähigkeit des Randes ab (Sparrow et al. (1964), Hurle et al. (1967), Nield (1968), Gershuni & Zhukhovitskii (1976)). Frick & Clever (1980) stellten bei adiabaten vertikalen Berandungen kleinere kritische Rayleigh-Zahlen als bei perfekt wärmeleitenden vertikalen Berandungen fest.

Die bisher diskutierten Arbeiten befassen sich mit dem Rayleigh-Benard-Problem ohne Phasenübergang fest-flüssig. Die bei diesen Fragestellungen gewonnenen Erkenntnisse sind für die Einordnung und Interpretation der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit wichtig. Eine Reihe von Untersuchungen beziehen sich auf Konvektionsvorgänge im Zusammenhang mit Phasenübergängen fest-flüssig.

Hame & Müller (1980) fanden mit einer theoretischen Untersuchung (lineare Theorie), daß die kritischen Rayleigh-Zahlen bei Schmelzen mit inneren Wärmequellen und verfestigten Rändern umso mehr abnehmen, je dicker die feste Phase im Verhältnis zur Gesamtschichthöhe wird. Einen vergleichbaren Fall stellt eine horizontale Schicht dar, in der sich unten reine Flüssigkeit ohne feste Phase und oben eine Isolationsschicht befindet. Auch hier nehmen die kritischen Rayleigh-Zahlen ab, wenn die Dicke der Isolationsschicht zunimmt (Nield (1968), vergl. Kap. 2).

Die Mehrzahl der Arbeiten zum Schmelzen und Gefrieren sind experimenteller Natur. In Wasser-Eis-Systemen wurden Zellmuster sowohl beim Schmelzen von oben als auch beim Schmelzen von unten beobachtet. Dies wird durch die Dichte-Anomalie bei 4 °C möglich. Neumann (1958) berichtete von Zellmustern mit 50 cm bis 2 m Durchmesser in der Schneedecke eines Teiches. Er führte diese Muster auf Naturkonvektion in der darunterliegenden Wasserschicht zurück. Sugawara et al. (1975) beobachteten Zellstrukturen in einer Wasser-Eis-Schmelzfront, wobei das Wasser oberhalb des Eises lag und durch Infrarotstrahler von oben geheizt wurde. Yen (1980) untersuchte beide Konstellationen, das Aufschmelzen eines Eisblockes von oben und von unten. Im ersten Fall beobachtete er ringförmige Strukturen, im zweiten halbkugelartige Zellen im Eis.

Pantaloni et al. (1977) fanden Hexagonalstrukturen in der Schmelzfront einer eutektischen Salzschnmelze und interpretierten dies mit den Nicht-Boussinesqschen Eigenschaften der Schmelze. Eine systematische Untersuchung der Zellstrukturen und ihrer Ursachen ist jedoch nicht bekannt.

Bei schnellem Fortschreiten einer Schmelz- bzw. Gefrierfront hat die Naturkonvektion einen erheblichen Einfluß auf den Wärmeübergang und die Fortschrittsgeschwindigkeit der Phasentrennfläche. Dies wurde sowohl bei Konstellationen mit vertikalen Temperaturgradienten festgestellt, bei denen eine kritische Rayleigh-Zahl auftritt, (Thomas & Westwater (1963), Boger & Westwater (1967), Heitz & Westwater (1971), Chiesa & Guthrie (1974), Gau et al. (1983)), als auch bei Konstellationen mit horizontalen Temperaturgradienten, bei denen Konvektion immer eine dominierende Rolle spielt (Heertjes et al. (1970), Hale & Viskanta (1978), Ho & Viskanta (1982), Sparrow & Mendes (1982)). Die Kenntnisse über Wärmeübergänge bei Schmelz- und Gefriervorgängen wurden bei Energiespeichern in der Solarenergie ausgenutzt (Marshall (1981), Page & Swayne (1981)). Dabei standen anwendungsbezogene Aspekte zur konvektiven Ein- und Auskopplung der Latentwärme bei bestimmten Salz- und Waxarten im Vordergrund. Marshall & Dietsche (1982) simulierten numerisch das dynamische Übertragungsverhalten eines Latentwärmespeichers und gelangten damit zu Aussagen über den transienten Betrieb eines gesamten Solarenergie-Heizsystems.

Neben den bisher behandelten Untersuchungen zum Phasenwechsel fest-flüssig in einkomponentigen Substanzen finden sich in der Literatur Untersuchungen über Gefrier- und Schmelzvorgänge in Salzwasser (Foster (1969), Farhadieh & Tankin (1975), Hayashi & Komori (1979) und Carey & Gebhart (1982)). In diesen Untersuchungen werden Temperatur- und Konzentrationsgradienten sowie deren Wechselwirkung untereinander und mit der freien Grenzfläche betrachtet. Die Dichte-Anomalie bei 4 °C kompliziert die Vorgänge zusätzlich.

Anwendungsnahe Schmelz- und Gefriervorgänge in mehrkomponentigen Substanzen werden in der Literatur mehrfach im Zusammenhang mit

der Kristallzucht diskutiert (Hurle & Jakeman (1981), Langlois (1981)). Jakeman & Hurle (1972), Rosenberger (1979) und Fisher (1981) stellen ursächliche Zusammenhänge zwischen oszillatorischer Naturkonvektion und Unreinheiten ("Striations") im Kristall fest. Laudise (1970) diskutiert die Materialanlagerung an Kristalle bei der Hydrothermalsynthese (Bridgman Technik).

Beim Erstarren von flüssigen Metallegierungen und Halbleiterschmelzen mit Unreinheiten von weniger als einem Gewichtsprozent treten sogenannte morphologische Instabilitäten im Zusammenhang mit konvektiven Instabilitäten an der Gefrierfront auf (Mullins & Sekerka (1964), Coriell et al. (1980)). Hierbei entstehen Zellstrukturen in der Gefrierfront mit Wellenlängen von typisch 0,01 mm bis 0,1 mm (Rutter & Chalmers (1953), Walton et al. (1955), Chalmers (1977), Sriranganathan et al. (1983)). Die charakteristische Länge bei diesen Prozessen ist das Verhältnis von Diffusionskoeffizient  $D$  für den Massentransport (typisch  $10^{-3}$  mm<sup>2</sup>/sec für Halbleiter- und Metallschmelzen) und vorgegebener Fortschrittsgeschwindigkeit der Phasengrenzfläche  $V$  (typisch 1 bis 10 mm/min). Dieses Verhältnis  $D/V$  ergibt typische Werte um 0,01 bis 0,1 mm und führt zu den o.g. Wellenlängen von der gleichen Größenordnung.

Als nächstes werden für das hier interessierende Problem alle eingehenden Kenn-Zahlen systematisch abgeleitet und die kritischen Rayleigh- und Wellen-Zahlen für das Einsetzen der Konvektion bei den hier vorliegenden speziellen Randbedingungen berechnet. Die kritischen Kenn-Zahlen dienen als Anhaltspunkt und Interpretationshilfe für die später betrachteten Experimente.

## 2. Lineare Theorie

### 2.1 Voraussetzungen, Bilanzgleichungen und Randbedingungen

Für die Rechnung werden folgende Voraussetzungen getroffen:

1. Die flüssige Phase sei ein homogenes, Newton'sches Medium.
2. Die kinematische Zähigkeit  $\nu$ , die Wärmeleitfähigkeiten der flüssigen und festen Phase  $\lambda_l$  und  $\lambda_s$ , der thermische Ausdehnungskoeffizient  $\beta$  und die Temperaturleitfähigkeiten  $\kappa_l$  und  $\kappa_s$  sowie die Dichte der festen Phase,  $\rho_s$ , seien konstant.
3. Die Dichte der flüssigen Phase  $\rho_{l,o}$  sei konstant. Nur im Auftriebsterm sei sie linear abhängig von der Temperatur. Dort gelte:

$$\rho_l = \rho_{l,o} (1 - \beta(T_l - T_{l,o})). \quad (2.1)$$

4. Die Dissipation in der flüssigen Phase wird vernachlässigt.

Wie in den später beschriebenen Experimenten werden alle Stoffdaten auf die zugehörigen mittleren Temperaturen

$$T_{l,o} = \frac{1}{2}(T_1 + T_m) \quad (2.2)$$

bzw.

$$T_{s,o} = \frac{1}{2}(T_2 + T_m) \quad (2.3)$$

bezogen.

Die obigen Voraussetzungen werden, soweit sie sich auf die flüssige Phase beziehen, auch als Boussinesq-Approximation bezeichnet und üblicherweise zur Berechnung von Naturkonvektionsströmungen herangezogen (Joseph (1976)). Eine Abschätzung über den Gültigkeitsbereich der Approximation findet sich in Mihaljan (1962) und Gray & Giorgini (1976).

Unter Zuhilfenahme der obigen Voraussetzungen ergibt sich folgende Form der Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie für die flüssige Phase. Diese Gleichungen sind unter dem Namen Boussinesq-Gleichungen bekannt (Chandrasekhar (1961)). Sie lauten:

$$\nabla \underline{y} = 0, \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial \underline{y}}{\partial t} + (\underline{y} \cdot \nabla) \underline{y} = - \frac{1}{\rho_{1,0}} \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{y} - g\beta (T_1 - T_{1,0}), \quad (2.4b)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + (\underline{y} \cdot \nabla) T_1 = \kappa_1 \nabla^2 T_1. \quad (2.4c)$$

Hierin ist  $\underline{y}$  der Geschwindigkeitsvektor,  $p$  der dynamische Druck und  $T_1$  die Temperatur der flüssigen Phase.

Eine Wärmebilanz an der Phasengrenzfläche ergibt die sogenannte Stephangleichung:

$$\rho_s \Lambda \frac{d\eta}{dt} = \left| \lambda_s \nabla T_s - \lambda_1 \nabla T_1 \right|_{z=\eta} \cdot \underline{n}. \quad (2.4d)$$

Hierin ist  $\rho_s$  die Dichte der festen Phase,  $\Lambda$  die Schmelzenthalpie,  $\eta$  die orts- und zeitabhängige Höhe der Phasentrennfläche und  $d\eta/dt$  die Geschwindigkeit der Phasentrennfläche senkrecht zu derselben.  $\underline{n}$  ist der Normalenvektor auf die Phasentrennfläche. Der Skalar auf der rechten Seite von Gleichung (2.4d) bezeichnet die Differenz der Wärmestromdichten an der Phasentrennfläche.

Für die feste Phase ist ebenfalls eine Energiebilanz zu formulieren. Sie lautet

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \kappa_s \nabla^2 T_s. \quad (2.4e)$$

Hierin ist  $T_s$  die Temperatur der festen Phase und  $\kappa_s$  die zugehörige Temperaturleitfähigkeit.

Damit sind fünf Gleichungen ((2.4a) bis (2.4e)) für die fünf Unbekannten  $y$ ,  $p$ ,  $T_1$ ,  $\eta$  und  $T_s$  aufgestellt. Alle Unbekannten können ort- und zeitabhängig sein.

Die zugehörigen Randbedingungen lauten:

$$\text{bei } z = 0: \quad y = 0, \quad (2.5a)$$

$$T_1 = T_1, \quad (2.5b)$$

$$\text{bei } z = \eta: \quad y \cdot \underline{t} = 0, \quad (2.5c)$$

$$y \cdot \underline{n} = - \frac{dn}{dt} \left( \frac{\rho_s}{\rho_{1,0}} - 1 \right), \quad (2.5d)$$

$$T_1 = T_m, \quad (2.5e)$$

$$T_s = T_m, \quad (2.5f)$$

$$\text{und bei } z = h: \quad T_s = T_2. \quad (2.5g)$$

Hierin sind

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}} \left( - \frac{\partial \eta}{\partial x}, 1 \right) \quad (2.6)$$

$$\text{und} \quad \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}} \left( 1, \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (2.7)$$

der Normalen- und Tangentenvektor an die Phasentrennfläche in der  $x$ - $z$ -Ebene.

Die Bedingung (2.5d) kommt aus einer Massenbilanz an der Phasentrennfläche, wobei das Schmelzen oder Gefrieren mit einem Dichtesprung einhergeht. Der Dichtesprung beim instationären Phasenübergang bewirkt bei konstanter Gesamtschichthöhe ein geringfügiges Ausdehnen oder Zusammenziehen der flüssigen Phase in horizontaler Richtung. Im Experiment (Kap. 4) wurde diesem Effekt mit Ausgleichsleitungen Rechnung getragen. Ferner werden mit den Bedingungen (2.5e) und (2.5f) Nichtgleichgewichtsvorgänge nach Art der Unterkühlungserscheinungen vernachlässigt. Beim Experimentie-

ren mit Cyclohexan (Kap. 4) trat nur vor dem erstmaligen instationären Bilden der festen Phase, solange wie noch kein Kristallkeim vorhanden war, vorübergehend ein Unterkühlungseffekt von etwa  $2/10$  °C auf.

## 2.2 Statische Lösung und Normierung

Das Gleichungssystem (2.4a) bis (2.4e) mit den Randbedingungen (2.5a) bis (2.5g) hat eine statische, stationäre Grundlösung mit  $\gamma = p = d\eta/dt = 0$  und den linearen Temperaturverteilungen

$$0 \leq z \leq h_{w1}: \frac{T_1 - T_{1,o}}{T_1 - T_m} = \frac{1}{2} - \frac{z}{h_{w1}}, \quad (2.8)$$

$$h_{w1} \leq z \leq h: \frac{T_s - T_{s,o}}{T_m - T_2} = \frac{1}{2} + \frac{\lambda_1 (T_1 - T_m)}{\lambda_s (T_m - T_2)} \cdot \left| 1 - \frac{z}{h_{w1}} \right|, \quad (2.9)$$

wobei die stationäre Lösung für  $\eta$  mit

$$h_{w1} = \frac{h}{1 + \frac{\lambda_s (T_m - T_2)}{\lambda_1 (T_1 - T_m)}} \quad (2.10)$$

gegeben ist.

Im Hinblick auf das Ziel, die kritischen Rayleigh-Zahlen für das Einsetzen der Konvektion in der flüssigen Phase zu berechnen, wird an dieser Stelle die statische Höhe der Flüssigkeitsschicht  $h_{w1}$  als Bezugslänge eingeführt. Im einzelnen werden die folgenden Normierungsansätze gewählt (Striche dienen zur Kennzeichnung dimensionsloser Größen.):

$$\left. \begin{aligned} T_1 - T_{1,o} &= (T_1 - T_m) \cdot T'_1, \\ T_s - T_{s,o} &= (T_1 - T_m) \cdot T'_s, \\ (x, z, \eta) &= h_{w1} \cdot (x', z', \eta'), \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

$$t = \frac{h_{w1}^2}{\kappa_1} \cdot t',$$

$$y = \frac{\kappa_1}{h_{w1}} \cdot y',$$

$$p = \frac{\rho_{1,0} \nu \kappa_1}{h_{w1}^2} \cdot p'.$$

Damit ergibt sich der folgende Satz von Gleichungen, wobei die Striche zur Vereinfachung der Schreibweise wieder weggelassen werden:

$$\nabla \cdot \underline{y} = 0, \quad (2.12a)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \underline{y}}{\partial t} + (\underline{y} \cdot \nabla) \underline{y} \right) = - \nabla p + \nabla^2 \underline{y} + Ra_{w1} \cdot T_1 \cdot \underline{e}_z, \quad (2.12b)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + (\underline{y} \cdot \nabla) T_1 = \nabla^2 T_1, \quad (2.12c)$$

$$\rho \cdot Ste \cdot \frac{dn}{dt} = \left| \lambda \nabla T_s - \nabla T_1 \right|_{z=\eta} \cdot \underline{n}, \quad (2.12d)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T_s. \quad (2.12e)$$

Die zugehörigen Randbedingungen lauten:

$$\text{bei } z = 0: \quad \underline{y} = 0, \quad (2.13a)$$

$$T_1 = 1/2, \quad (2.13b)$$

$$\text{bei } z = \eta: \quad \underline{y} \cdot \underline{t} = 0, \quad (2.13c)$$

$$\underline{y} \cdot \underline{n} = - \frac{dn}{dt} (\rho-1), \quad (2.13d)$$

$$T_1 = -1/2, \quad (2.13e)$$

$$T_s = \frac{B}{2\lambda}, \quad (2.13f)$$

und bei  $z = \frac{h}{h_{wl}} = 1+B$ :  $T_s = -\frac{B}{2\lambda}$ . (2.13g)

Hierbei gehen die folgenden sieben Kennzahlen ein:

$$Ra_{wl} = \frac{g \beta (T_1 - T_m) h_{wl}^3}{\kappa_1 \cdot \nu} \quad (\text{Rayleigh-Zahl}), \quad (2.14a)$$

$$B = \frac{\lambda_s (T_m - T_2)}{\lambda_1 (T_1 - T_m)} \quad (\text{Biot-Zahl}), \quad (2.14b)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa_1} \quad (\text{Prandtl-Zahl}), \quad (2.14c)$$

$$Ste = \frac{\Lambda}{c_{pl} (T_1 - T_m)} \quad (\text{Stephan-Zahl}), \quad (2.14d)$$

$$\rho = \frac{\rho_s}{\rho_{1,0}} \quad (\text{normierte Dichte}), \quad (2.14e)$$

$$\lambda = \frac{\lambda_s}{\lambda_1} \quad (\text{normierte Wärmeleitfähigkeit}), \quad (2.14f)$$

$$\kappa = \frac{\kappa_s}{\kappa_1} \quad (\text{normierte Temperaturleitfähigkeit}). \quad (2.14g)$$

Geometrieinflüsse und die damit verbundenen Kennzahlen bleiben für die Rechnung unberücksichtigt. Die Rayleigh-Zahl beschreibt das Stabilitätsverhalten der Flüssigkeit. Die Biot-Zahl macht eine Aussage über den Einfluß der Dicke der festen Phase. Die Prandtl-Zahl beschreibt den relativen Einfluß der nichtlinearen und instationären Terme in der Impuls- und Energiegleichung. Die Stephan-Zahl kontrolliert den instationären Phasenwechsel. Die normierten Stoffgrößen  $\rho$ ,  $\lambda$  und  $\kappa$  sind stets von der Größenordnung 1 und daher von untergeordneter Bedeutung.

Bei der betrachteten Fragestellung wird das klassische Rayleigh-Bénard-Problem, das in der unendlich ausgedehnten Schicht nur die Rayleigh- und Prandtl-Zahl als unabhängige Kenn-Zahlen enthält, um zwei wichtige unabhängige Größen erweitert: um die Temperaturdifferenz über die feste Phase,  $\Delta T_s = T_m - T_2$ , die bei stationären und instationären Vorgängen eine Rolle spielt und in die Biot-Zahl  $B$  eingeht und um die Schmelzwärme  $\Lambda$ , die nur bei transienten Schmelz- und Gefriervorgängen eine Rolle spielt und über die Stephan-Zahl  $Ste$  eingeht. Im allgemeinen Fall bei Konvektion in der flüssigen Phase liegt der entscheidende Unterschied zum Rayleigh-Bénard-Problem in der zeitlich und örtlich veränderlichen Höhe der flüssigen Phase. Auch in diesem Fall bleibt jedoch die unabhängig vorgebbare Wärmeleithöhe  $h_{w1}$  die Bezugslänge für die Rayleigh-Zahl.

### 2.3 Linearisierung und Lösung

Ziel der Untersuchung ist es, kritische Rayleigh- und Wellenzahlen zu berechnen. Dafür wird der Grundzustand der reinen Wärmeleitung mit einer Störungsentwicklung auf Stabilität untersucht. Hierzu wird ein indifferenter Zustand gesucht, bei dem infinitesimal kleine Störungen zeitlich weder auf- noch abklingen können. Deshalb bleiben die Zeitableitungen in den Gleichungen (2.12) und (2.13) unberücksichtigt. Für die Störungsentwicklung wird von folgenden Ansätzen ausgegangen:

$$T_1(x, z) = T_{1,stat}(z) + \epsilon \theta_1(x, z) + O(\epsilon^2), \quad (2.15a)$$

$$y(x, z) = \epsilon y^{(1)}(x, z) + O(\epsilon^2), \quad (2.15b)$$

$$p(x, z) = \epsilon p^{(1)}(x, z) + O(\epsilon^2), \quad (2.15c)$$

$$T_s(x, z) = T_{s,stat} + \epsilon \theta_s(x, z) + O(\epsilon^2), \quad (2.15d)$$

$$\eta(x, z) = \eta_{stat} + \epsilon \eta^{(1)}(x) + O(\epsilon^2). \quad (2.15e)$$

Hierbei gilt für die stationären Lösungen

$$T_{1,stat} = \frac{1}{2} - z, \quad (2.16a)$$

$$T_{s,stat} = \lambda^{-1} \cdot \left( \frac{B}{2} + 1 - z \right), \quad (2.16b)$$

$$\eta_{stat} = 1. \quad (2.16c)$$

Einsetzen der Störansätze, Ordnen nach Gliedern von  $\varepsilon$  und Druckelimination ergibt für die flüssige Phase

$$0 = \nabla^4 w + Ra_{w1} \cdot \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2}, \quad (2.17a)$$

$$0 = w + \nabla^2 \theta_1, \quad (2.17b)$$

die feste Phase

$$0 = \nabla^2 \theta_s, \quad (2.17c)$$

und die Stephangleichung

$$0 = \lambda \frac{\partial \theta_s}{\partial z} \bigg|_{z=1} - \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \bigg|_{z=1}. \quad (2.17d)$$

Die Randbedingungen ergeben

$$\text{bei } z = 0: \quad w = \frac{\partial w}{\partial z} = \theta_1 = 0, \quad (2.18a)$$

$$\text{bei } z = 1: \quad w = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.18b)$$

$$\theta_1 = \eta^{(1)}, \quad (2.18c)$$

$$\theta_s = \frac{1}{\lambda} \cdot \eta^{(1)}, \quad (2.18d)$$

$$\text{und bei } z = 1 + B: \quad \theta_s = 0. \quad (2.18e)$$

Die Deformierbarkeit der Grenzfläche geht nur noch in den Randbedingungen (2.18c) und (2.18d) bei  $z=1$  ein.

Die Lösung der Gleichungen (2.17) und (2.18) erfolgte mit Separationsansätzen der Form

$$w(x, z) = W(z) \cdot e^{ikx}, \quad (2.19a)$$

$$\theta_1(x, z) = \theta_1(z) \cdot e^{ikx}, \quad (2.19b)$$

$$\theta_s(x, z) = \theta_s(z) \cdot e^{ikx}. \quad (2.19c)$$

Hierin ist  $k$  die Wellen-Zahl

$$k = \frac{2\pi}{l} \quad (2.20)$$

und  $l$  die Wellenlänge einer als periodisch angenommenen Störung in Einheiten der Flüssigkeitshöhe  $h_{w1}$ . Mit der Bezeichnung  $D = d/dz$  ergibt sich damit für die Temperaturgleichung in der festen Phase die Form

$$(D^2 - k^2)\theta_s = 0. \quad (2.21)$$

Die Lösung dieser Gleichung unter Beachtung der Temperatur-Randbedingung am oberen Schichtrand (2.18e) ergibt

$$\theta_s = \text{const. sh} \left[ k(1 + B - z) \right]. \quad (2.22)$$

Hieraus errechnet sich unter Berücksichtigung der Temperatur-Randbedingungen (2.18c) und (2.18d) zusammen mit der linearisierten Stephangleichung (2.17d) eine Randbedingung für die Amplitude der Störtemperatur  $\theta$  am oberen Rand der flüssigen Phase. Sie lautet:

$$\theta_1 \Big|_{z=1} + \frac{1}{k} \cdot \text{tgh}(kB) \cdot D\theta_1 \Big|_{z=1} = 0. \quad (2.23)$$

Die Phasengrenzfläche verhält sich wie ein nicht perfekt wärmeleitender fester Rand. Nur für  $B=0$  (Bénard-Fall) beschreibt Gleichung (2.23) einen isothermen Rand. Für große  $B$  und konstantes  $k$

ergibt sich keine Änderung der Temperaturrandbedingung durch B mehr, da der hyperbolische Tangens für Argumente größer als 1 etwa 1 ist.

Zusammen mit den Separationsansätzen(2.19) ergibt sich damit aus den linearisierten Gleichungen (2.17) und (2.18) der folgende Satz von homogenen Gleichungen und Randbedingungen für die flüssige Phase:

$$(D^2 - k^2)^2 W - Ra_{w1} \cdot k^2 \cdot \theta_1 = 0 , \quad (2.24a)$$

$$(D^2 - k^2)\theta_1 + W = 0 , \quad (2.24b)$$

$$\text{bei } z = 0: \quad W = DW = \theta_1 = 0 , \quad (2.25a)$$

$$\text{bei } z = 1: \quad W = DW = \theta_1 + \frac{1}{k} \operatorname{tgh}(kB)D\theta_1 = 0 . \quad (2.25b)$$

Diese Gleichungen beschreiben den neutralstabilen Zustand, bei dem Störungen zeitlich weder angefacht werden noch abklingen. Von den sieben Kennzahlen (2.14), die das nichtlineare Problem beschreiben, gehen an dieser Stelle nur zwei,  $Ra_{w1}$  und  $B$ , ein. Hinzu kommt die Wellenzahl  $k$  aus den Störungsansätzen. Lösungen sind nur für bestimmte Kombinationen der Parameter  $Ra_{w1}$ ,  $k$  und  $B$  möglich. Daher stellt das obige Problem ein Eigenwertproblem dar. Die kleinsten Eigenwerte  $Ra_{w1}$  bei gegebenem  $B$  werden als kritische Rayleigh-Zahlen  $Ra_c$ , die zugehörigen Werte von  $k$  als kritische Wellen-Zahlen  $k_c$  bezeichnet. Ferner gibt es im Rahmen der Linearisierung der Differentialgleichungen für die Störgrößen keine Bevorzugung eines bestimmten Strömungsmusters (Chandrasekhar (1961)). Die berechneten  $Ra_c$ - und  $k_c$ -Werte sind auch auf 4-Eck- und 6-Eck-Zellen sowie auf Torus-Walzen anzuwenden. Bei Sechs-Eck-Zellen gilt für die mit dem Abstand zwischen zwei parallelen Seiten gebildete Wellen-Zahl  $k_{Hex,c}$ :

$$k_{Hex,c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot k_c . \quad (2.26)$$

Die Lösung des Gleichungssystems (2.24) und (2.25) erfolgte numerisch mit einer Subroutine aus der Harwell-Bibliothek des Kernforschungszentrums Karlsruhe. Die hierbei verwendete Rechenmethode war ein "multiple shooting"-Verfahren zusammen mit einem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung.

#### 2.4 Ergebnisse

Abb. 2 stellt die Abhängigkeit der kritischen Rayleigh-Zahl  $Ra_c$  von dem Parameter  $B$  dar. Für den Wert  $B=0$  ergibt sich die kritische Rayleigh-Zahl des Bénard-Problems für zwei feste, isotherme Berandungen, 1707,8. Im Bereich  $0 \leq B \leq 1$  fällt die kritische Rayleigh-Zahl um 12,6 % ab. Im Fall  $B=1$  sind flüssige und feste Phase gleich dick. Für Werte  $B \geq 1$  ist die kritische Rayleigh-Zahl praktisch konstant und strebt asymptotisch gegen  $Ra_c = 1492,7$ .

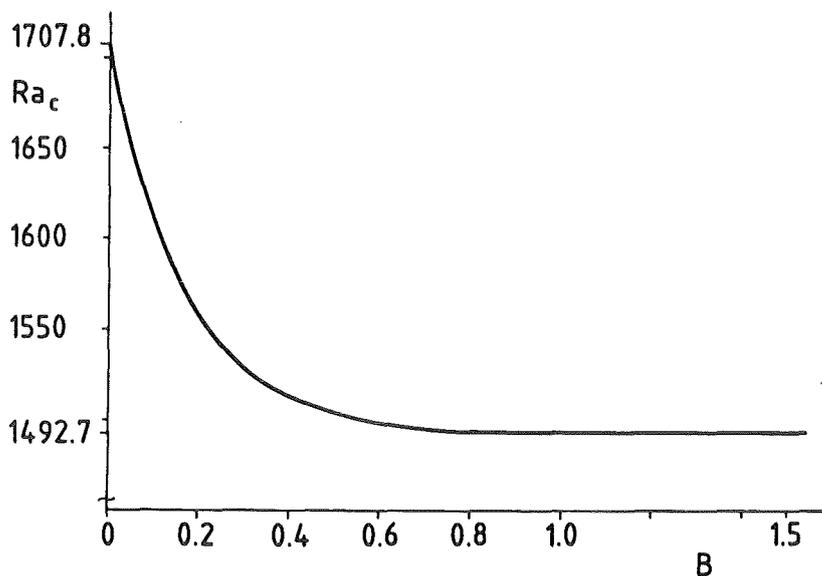


Abb. 2 Kritische Rayleigh-Zahlen der linearen Theorie

Der physikalische Mechanismus, der durch den Abfall der kritischen Rayleigh-Zahl mit  $B$  beschrieben wird, ist dadurch begründet, daß thermische Störungen durch einen Rand endlicher Wärmeleitfähigkeit nicht so gut absorbiert werden wie durch einen Rand mit unendlich guter Wärmeleitfähigkeit.

Die kritischen Wellen-Zahlen weisen einen Abfall von 9,7 % im Bereich  $B \leq 1$  auf (Abb. 3). Dies bedeutet physikalisch, daß die kritischen Wellenlängen im Verhältnis zur Flüssigkeitshöhe mit zunehmender Dicke der festen Phase größer werden.

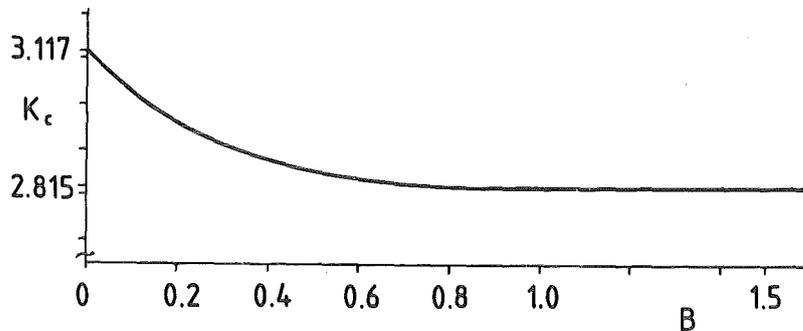


Abb. 3 Kritische Wellen-Zahlen der linearen Theorie

Einen vergleichbaren Fall zu dem in diesem Kapitel betrachteten Problem stellt eine horizontale Schicht dar, in der sich unten Flüssigkeit und oben eine feste horizontale Isolierschicht endlicher Wärmeleitfähigkeit befindet (Nield (1968)). Die zum vorliegenden Problem durchgeführten Rechnungen bestätigen die Ergebnisse von Nield. In Ergänzung dazu wurde die neutralstabile Kurve für die Biot-Zahl-Werte des Experimentes aus Kapitel 4. ermittelt sowie aus Integralen über die Eigenfunktionen  $W$  und  $\theta_1$  zwei Korrekturterme berechnet, die für die Störungstheorie nach Davis, Müller & Dietsche (1983) benötigt werden.

### 3. Grenzflächenstrukturen in einer Schicht großer horizontaler Erstreckung

In diesem Kapitel wird ein Experiment vorgestellt, bei dem die vertikalen Berandungen keinen Einfluß auf die Vorgänge in der Schicht haben. Bei überkritischen Rayleigh-Zahlen bis  $Ra_{wl} \approx 10000$  hängt die Struktur der Phasengrenzfläche bei stationären Verhältnissen von der Dicke der festen Phase bzw. der Größe des Parameters  $B$  ab.

#### 3.1 Versuchsaufbau

Die Meßkammer ist in Abb. 4 dargestellt. Zwischen zwei horizontalen Kupferplatten befindet sich die eigentliche Meßzelle mit einer quadratischen Grundfläche von  $287 \times 287$  mm. 5 mm dicke Glasscheiben schließen die Meßzelle an den Seiten ab. Die Höhe der Meßzelle ist variabel und wird durch Abstandshalter aus Keramik an den vier Ecken festgelegt. Es werden zwei unterschiedliche Gesamtschichthöhen von 4,18 mm und 5,04 mm untersucht. Die Toleranzen der Schichthöhen wurden mit Endmaßen zu  $\pm 0.02$  mm be-

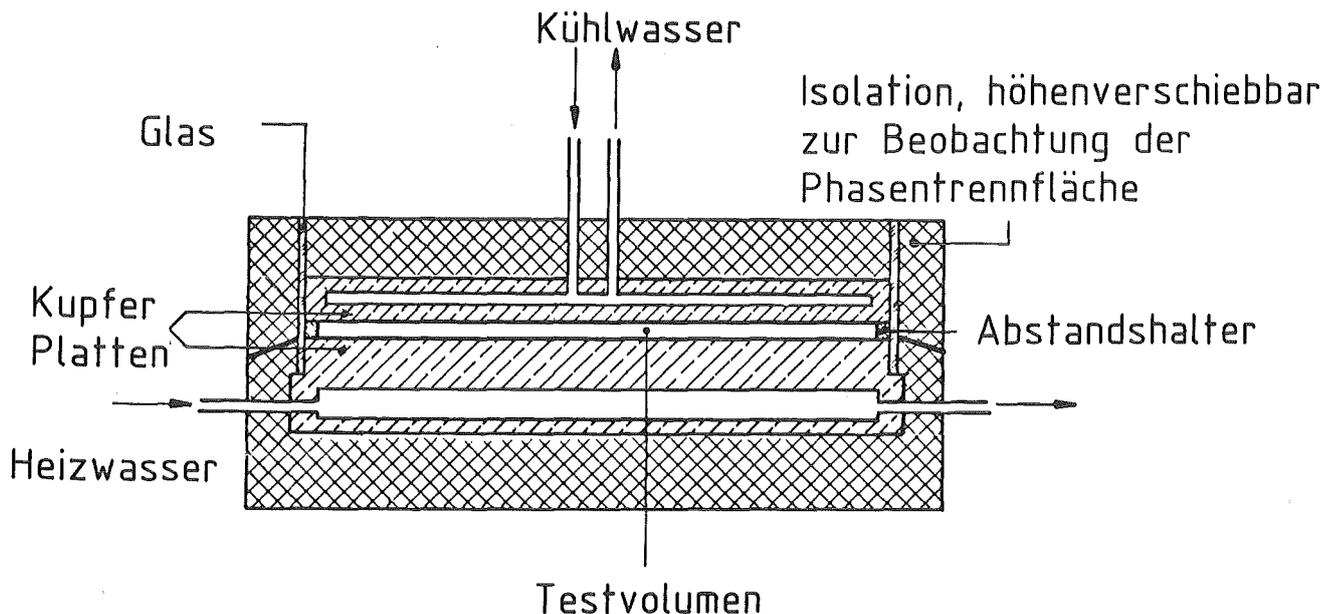


Abb. 4 Meßkammer

stimmt. Sie sind durch die Toleranzen der Abstandshalter und durch die Ebenheit der Kupferplatten bedingt. Zur Temperaturregung sind die Kupferplatten an ihrer Unter- bzw. Oberseite in direktem Kontakt mit meanderförmigen Kühlkanälen. Präzisionsthermostate mit Temperaturtoleranzen von  $\pm 0,01$  °C liefern das Kühl- bzw. Heizwasser. Die Meßkammer und die angeschlossenen Schläuche sind mit Styrodurplatten bzw. Schaumstoff gegen Temperaturstörungen aus der Umgebung isoliert.

Zur Messung der Randtemperaturen sind in der oberen Kupferplatte zwei-, in der unteren Kupferplatte ein Ni-Cr-Ni Thermoelement angebracht. Die Thermoelemente sind in Bohrungen in der Plattenmitte eingelegt, die bis auf 0,2 mm an die Kupferoberflächen heranzuführen. Als Vergleichsstelle dient für alle Thermoelemente derselbe Nullthermostat, dessen Temperaturschwankungen  $\pm 0,01$  °C betragen. Die Thermospannungen werden mit Differenzverstärkern um den Faktor 1000 verstärkt und mit einem Digitalvoltmeter angezeigt. Zusätzlich werden die Thermoelementesignale auf einen Analogschreiber gegeben.

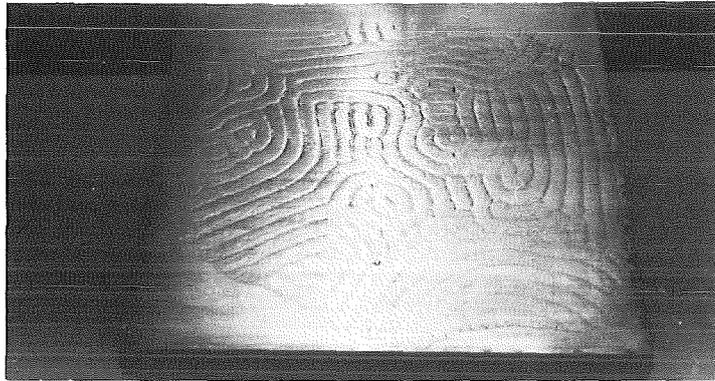
Vor dem Beginn der Versuche werden die Thermoelemente über die Schmelztemperatur der Testsubstanz Cyclohexan geeicht. Zur Eichung der beiden oberen Thermoelemente wird an der oberen Platte ein dünner Film fester Phase gebildet und dann die Temperatur  $T_2$  solange erhöht, bis sich in der Mitte der ebenen Platte im Bereich der Thermoelemente nur noch ein kleiner Fleck fester Phase hält. Die Temperatur  $T_1$  der unteren Platte wird während dieses Vorganges konstant auf 6,9 °C gehalten. Auf analoge Weise wird das untere Thermoelement geeicht. Hierdurch können später bei den Messungen die Temperaturdifferenzen der unteren und oberen Temperaturen zum Schmelzpunkt genau ermittelt werden.

Als Testflüssigkeit wird Cyclohexan verwendet, dessen Stoffeigenschaften keine Anomalien im Bereich zwischen 3 °C und 20 °C aufweisen. Cyclohexan ist ferner durchsichtig in beiden Phasen und besitzt einen genauen Schmelzpunkt bei 6,38 °C (Eichung). Die Prandtl-Zahl in der Umgebung des Schmelzpunktes ist 18.

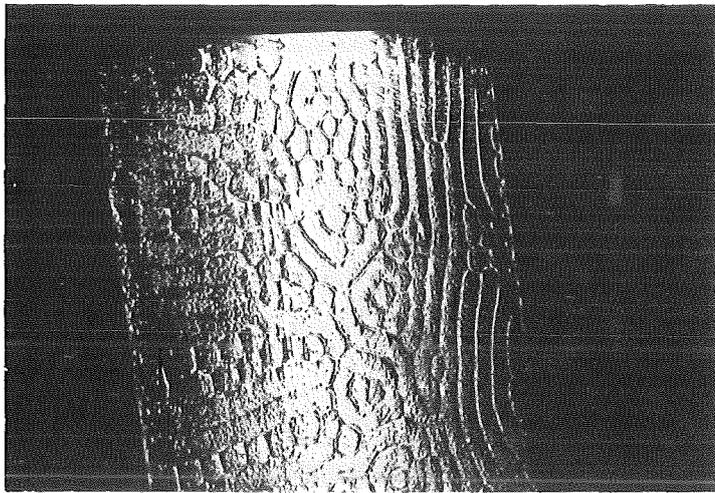
Über die Sichtschlitze zu allen vier Seiten der Meßzelle, die durch ein Anheben der seitlichen Isolation sichtbar werden, ist es möglich, durch direkte Beobachtung ein umfassendes Bild der gesamten Phasentrennfläche zu gewinnen. Eine zusätzliche Hilfe hierbei ist die auf Spiegelqualität polierte untere Kupferplatte. Zur Dokumentation der Versuchsbeobachtungen wird die obere Kupferplatte der Meßkammer bei bestimmten Meßpunkten innerhalb weniger Minuten ausgebaut und die Phasentrennfläche bei günstigen Lichtbedingungen photographiert. Dabei wird die Temperatur der Platte etwa 10K unter die Schmelztemperatur des Cyclohexans abgesenkt, um ein Abschmelzen der festen Phase zu verzögern. Das Photographieren muß sehr schnell vonstatten gehen, da sich entweder das Kondensat der Luftfeuchtigkeit an der Phasengrenzfläche niederschlägt oder die teilweise sehr dünnen Schichten fester Phase innerhalb weniger Minuten sublimieren.

### 3.2 Ergebnisse

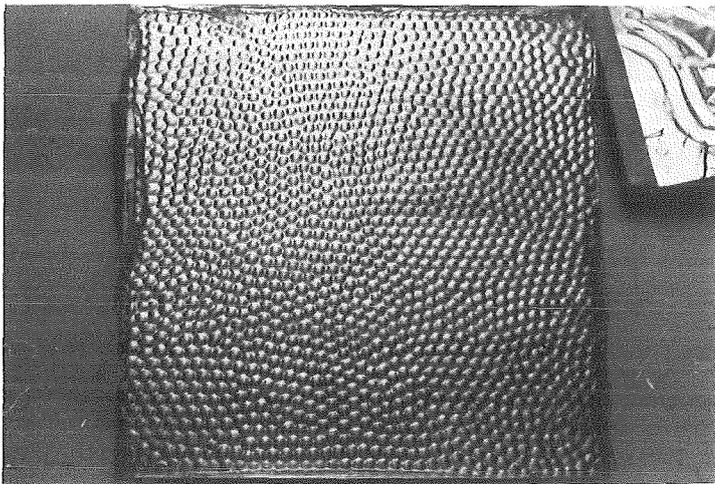
Abb. 5 zeigt drei Photographien von Grenzflächenmustern bei stationären Verhältnissen. Im obersten Bild ist ein meanderförmiges Linienmuster zu erkennen. Die Linien stellen lokale Verdickungen der festen Phase dar. Das Muster kommt dadurch zustande, daß die Konvektion in der flüssigen Phase in Form einer Walzenkonfiguration vorgelegen hat. Oberhalb warmer Aufströme wurde die feste Phase etwas dünner, oberhalb der kalten Abströme etwas dicker. Im Hinblick auf ihre Entstehung werden die Grenzflächenmuster in Abb. 5a) als Walzenmuster bezeichnet. Sie treten bei ganz dünner fester Phase auf. Der Parameter  $B$  hat für die Situation in Abb. 5a) den Wert  $B=0,03$ , die Rayleigh-Zahl ist  $Ra_{wl}=7500$ , die Wellenzahl  $k$  (vergl. Gleichung (2.20)) ist  $2,5 \pm 0,1$ . Zum Vergleich ergibt die lineare Theorie bei dem obigen  $B=0,03$  eine kritische Wellenzahl  $k_c=3,1$  bei einer kritischen Rayleigh-Zahl  $Ra_c=1670$ . Dies ist qualitativ konsistent mit Ergebnissen aus dem Bénard-Problem, wo mehrfach beobachtet wurde, daß die Wellenlängen mit der Rayleigh-Zahl zu- bzw. die Wellenzahlen mit der Rayleigh-Zahl abnehmen (Koschmieder (1974)).



a) Walzenmuster



b) Zwischenbereich



c) Hexagonalmuster

Abb. 5 Grenzflächenstrukturen bei stationären Verhältnissen ohne Einfluß vertikaler Berandungen.

a)  $B = 0.03$ ,  $Ra_{wl} = 7500$ ,  $k = 2.5 \pm 0.1$

b)  $B = 0.13$ ,  $Ra_{wl} = 8600$

c)  $B = 0.36$ ,  $Ra_{wl} = 3300$ ,  $k = 3.0 \pm 0.2$

In Abb. 5b) ist die feste Phase dicker als in Abb. 5a). Die Werte der unabhängigen Kennzahlen sind  $B=0,13$  und  $Ra_{W1}=8600$ . Neben Walzenstrukturen im rechten und teilweise im linken Bereich der Platte treten in der Mitte auch Muster auf, die nicht durch parallele Linien, sondern geschlossene Polygone und zum Teil ringförmige Gebilde (Mitte unten) gekennzeichnet sind. Es handelt sich hier um einen Übergangszustand.

Abb. 5c) ist durch den Wert  $B=0,36$  charakterisiert ( $Ra_{W1}=3300$ ). Die feste Phase ist hierbei deutlich dicker als in den beiden Photographien obendran. Es treten Hexagonalmuster sehr großer Regelmäßigkeit auf, die auf eine hexagonale Strömungskonfiguration in der flüssigen Phase rückschließen lassen. Die Wellenzahl, gebildet mit dem Abstand zwischen zwei parallelen Seiten der Sechsecke als Wellenlänge, ist  $2,6 \pm 0,2$ . Durch Multiplikation mit dem Faktor  $2/\sqrt{3}$  (vergl. Gleichung (2.26)), ergibt sich die durch die Theorie definierte Wellenzahl zu  $k = 3,0 \pm 0,2$ .

Bei dem obigen Wert  $B=0,36$  ergibt die Theorie den Wert  $k_c=2,9$  bei  $Ra_c=1520$  und damit gute Übereinstimmung mit dem Experiment im Hinblick auf die Wellenzahl.

Die oben diskutierten Phänomene werden im Diagramm Abb. 6 quantitativ eingeordnet. Es handelt sich hierbei um ein Stabilitätsdiagramm für stationäre Grenzflächenstrukturen. Vertikal aufgetragen ist die Rayleigh-Zahl  $Ra_{W1}$ , horizontal der Parameter  $B$ . Die mit römischen Ziffern bezeichneten Kurven im linken unteren Bereich werden zur Interpretation im nächsten Kapitel benötigt. Es sind zum weiteren zwei Kurven zu erkennen, auf denen Meßpunkte eingetragen sind. Die spezielle Form und Lage der beiden Kurven ist durch die Versuchsführung bedingt. Die untere Berandungstemperatur war stets konstant, die obere wurde variiert. Bei einer Erniedrigung der oberen Randtemperatur bildete sich feste Phase, die Rayleigh-Zahl wurde dabei durch Erniedrigen der Flüssigkeitshöhe verkleinert und der Parameter  $B$ , der die Dicke der festen Phase beschreibt, vergrößert. Die Versuche hätten durchaus auch so geführt werden können, daß bei konstanter Rayleigh-Zahl nur  $B$  variiert worden wäre. Dabei hätten dann beide Randtemperaturen

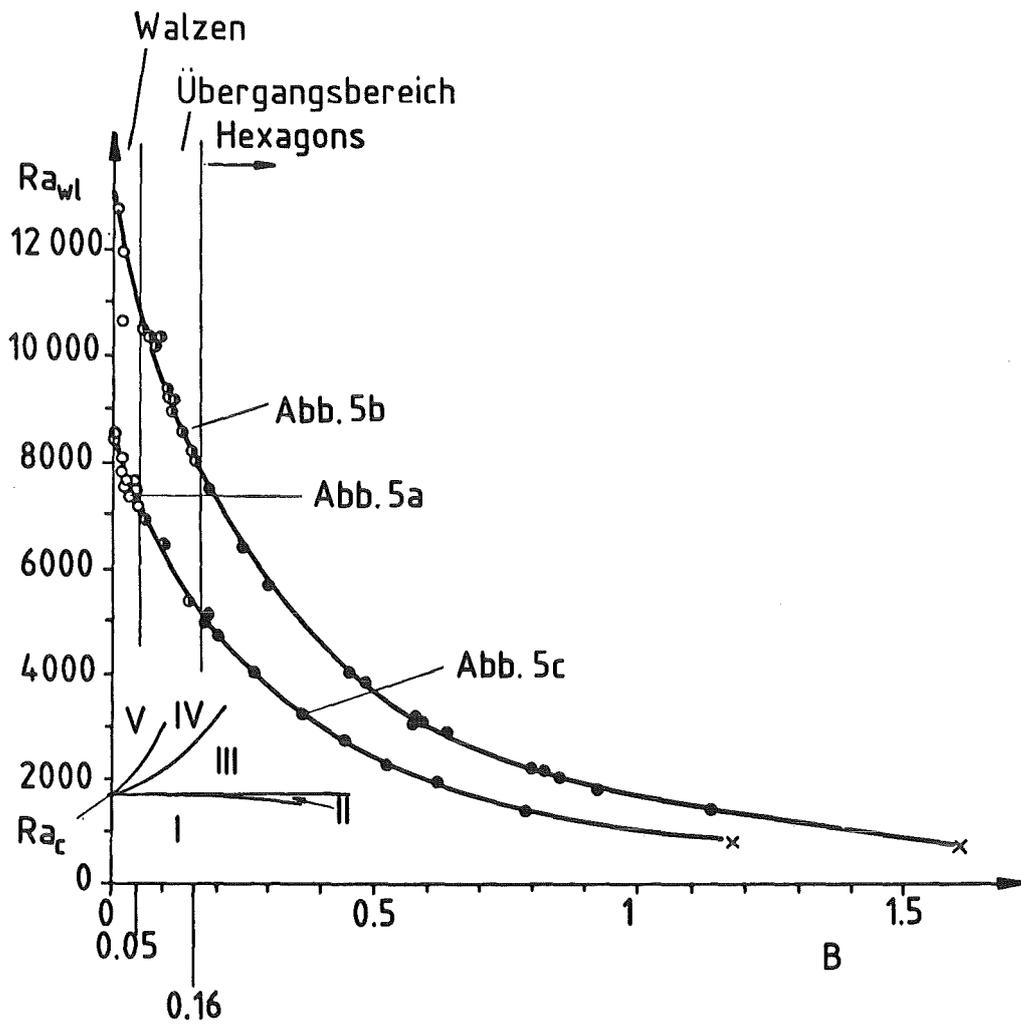


Abb. 6 Stabilitätsdiagramm für stationäre Grenzflächenstrukturen. o Walzenmuster, • Zwischenbereich, ● Hexagonalmuster, x Wärmeleitung

oben und unten variiert werden müssen. Im Hinblick auf die Interpretation sollten jedoch die Stoffdaten bei der mittleren Temperatur in der flüssigen Phase konstant bleiben.

Die obere Kurve gibt ein Experiment wieder, bei dem die Temperaturdifferenz über die flüssige Phase konstant  $\Delta T_1 = 1,1 \text{ }^\circ\text{C}$  war und die Gesamtschichthöhe den Wert  $h = 5,04 \text{ mm}$  hatte. Beim unteren Kurvenast war die Temperaturdifferenz über die flüssige Phase konstant bei  $1,4 \text{ }^\circ\text{C}$  und die Gesamtschichthöhe betrug  $h = 4,18 \text{ mm}$ .

Die Beobachtungen hinsichtlich der Grenzflächenstruktur, die auf den Meßkurven eingetragen sind, wurden bei stationären Verhält-

nissen durchgeführt. Die Änderungen in der Struktur der Phasengrenzflächen nach Einstellen eines neuen Meßpunktes waren jeweils nach ca. 20 Minuten abgeschlossen. Die Randtemperaturen waren jeweils wenigstens zwei Stunden stationär, bevor die Strukturen der Grenzfläche untersucht und dokumentiert wurden. Die Temperaturdiffusionszeit  $h^2/\kappa_1$  beträgt für  $h=5,04$  mm 5 min., für  $h=4,18$  mm 4 min.

Die Ergebnisse sind bei beiden Experimenten gleich. Im Bereich  $B \leq 0,05$  werden nur Walzenmuster, im Bereich  $B \geq 0,16$  nur Hexagonalmuster gefunden. In einem Zwischenbereich  $0,05 \leq B \leq 0,16$  treten neben Walzenmustern auch 4-, 5- und 6-Eckstrukturen auf (vergl. Abb. 5b)). Die Temperatur der oberen Berandung ist zunächst, ausgehend vom Bénard-Fall, erniedrigt worden. Nach dem erstmaligen Bilden fester Phase wurden jedoch mehrfach B-Werte sowohl im Übergangsbereich, als auch abwechselnd links und rechts davon eingestellt, um so die Reproduzierbarkeit der Beobachtungen und Bereichsgrenzen zu gewährleisten. Die Ergebnisse deuten darauf hin, daß stationäre Grenzflächenstrukturen entscheidend von der Größe des Parameters B bzw. von der Dicke der festen Phase abhängen. Die Vorgänge bei der kritischen Rayleigh-Zahl wurden an dieser Stelle nicht weiter untersucht. Eine Analyse der experimentellen Fehler hat gezeigt, daß der Wert von B für die Bereichstrennlinien folgende Maximaltoleranzen aufweist:

$0.02 \leq B \leq 0.08$  für die Trennlinie Walzenstrukturen  
- Übergangsbereich

$0.13 \leq B \leq 0.19$  für die Trennlinie Übergangsbereich  
- Hexagonalstruktur

Die Rayleigh-Zahl weist eine maximal mögliche Unsicherheit im Absolutwert von  $\pm 15$  % auf.

### 3.3 Interpretation

In einer theoretischen Untersuchung unter Einbeziehung einer schwach nichtlinearen Wechselwirkung der Amplituden der Zustandsvariablen kommen Davis, Müller & Dietsche (1983) zu dem Ergebnis, daß deformierbare Phasentrennflächen die gleiche Wirkung auf die Flüssigkeit ausüben wie nicht-Boussinesq'sche Eigenschaften der Flüssigkeit. Die Ergebnisse dieser Störungstheorie sind in Abb. 6 unten links für unendlich große Prandtl-Zahlen eingezeichnet. Im Bereich I tritt nur Wärmeleitung auf. Im Bereich II kann Wärmeleitung und hexagonale Konvektion vorliegen, im Bereich III existiert nur hexagonale Konvektion. Im Bereich IV sind sowohl hexagonale- als auch Walzen-Konvektion möglich. Im Bereich V sind nur Rollen stabil. Der Deutlichkeit halber sind die Trennkurven bis  $B \approx 0,5$  gezeichnet. Sie gelten im Rahmen der Störungstheorie jedoch nur für  $B \lesssim 0,1$ .

Der steile Verlauf der Trennkurve der Bereiche IV und V steht in Einklang mit dem experimentellen Befund, daß nämlich die Stabilität der Walzenstrukturen für überkritische Rayleigh-Zahlen nur von der Größe des Parameters  $B$  abhängt. Unterhalb der Trennlinie der Bereiche III und IV werden nach der Theorie nur Hexagonalstrukturen erwartet, wenn Konvektion auftritt. Dies ist in qualitativer Übereinstimmung mit dem Experiment. Im Übergangsbereich des Experiments waren immer gleichzeitig Polygon- und Walzenstrukturen stabil. Die Theorie läßt zu, daß in diesem Zwischenbereich jeweils eines der beiden möglichen Lösungsmuster angenommen wird, entweder die hexagonale- oder die Walzen-Struktur. Zur näheren Erklärung der Vorgänge bei Einsetzen der Konvektion und der dabei implizierten Hysteresevorgänge wird das nächste Diagramm Abb. 7 (Davis, Müller & Dietsche (1983)) betrachtet.

Darin ist die Strömungsamplitude  $\varepsilon$  in Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl  $Ra_{w1}$  nach der schwach nichtlinearen Störungstheorie dargestellt. Der Parameter  $B$  ist hierbei fest und  $B \lesssim 0,1$  (vergl. Abb. 6). Im Bereich  $Ra_{w1} < R_A$  (in Abb. 6, Bereich I) ist die Wärmeleitung der einzig stabile Zustand. Im Bereich zwischen  $R_A$  und  $R_C$  tritt eine Hysterese a-b-c-d auf, deren Verlauf anhand der

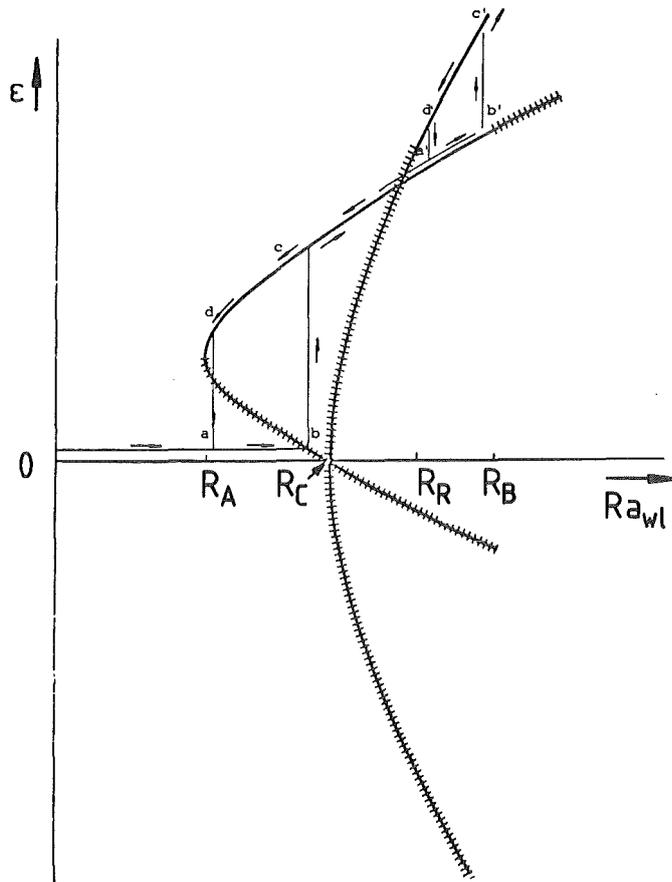


Abb. 7 Abhängigkeit der Strömungsamplitude  $\varepsilon$  von der Rayleigh-Zahl  $Ra_{wl}$  nach Davis, Müller & Dietsche (1983). Schraffierte Linien markieren instabile Lösungen

eingezeichneten Pfeile zu verfolgen ist. Sie kennzeichnet Einsetzen und Verschwinden der Konvektion mit hexagonaler Strömungskonfiguration, was jeweils mit einem Sprung in der Strömungsamplitude einhergeht. Das Experiment zu dieser Hysterese wurde im endlichen Behälter durchgeführt und ist in Kapitel 4 beschrieben.

Im Rayleigh-Zahl Bereich zwischen  $R_R$  und  $R_B$  ist eine zweite Hysterese  $a'-b'-c'-d'$  zu erkennen. Sie hängt mit der Umorientierung von Hexagons in Walzen zusammen und beschreibt mögliche Sprünge in der Strömungsamplitude  $\varepsilon$  beim Übergang von einer Struktur in die andere. Der Effekt der Umorientierung der Strömungsmuster entspricht qualitativ dem experimentellen Befund in diesem Kapi-

tel, wenngleich im Experiment eine Abhängigkeit der Umstrukturierung von der Rayleigh-Zahl nicht aufgetreten ist. Dieser scheinbare Defekt ist darauf zurückzuführen, daß die Störungstheorie nur in der Umgebung der kritischen Rayleigh-Zahl gilt, während die Experimente hauptsächlich bei deutlich überkritischen Rayleigh-Zahlen durchgeführt wurden. Es ist bemerkenswert, daß die schwach nichtlineare Theorie dennoch die beobachteten Phänomene erfaßt.

Es ist abschließend anzumerken, daß das Auftreten von Hexagonalmustern bei dem besprochenen Experiment nicht auf temperaturabhängige Stoffeigenschaften zurückzuführen ist (vergl. Palm (1960), Segel & Stuart (1962)). Denn wäre dies der Fall, hätten bei konstanter Temperaturdifferenz in der flüssigen Phase Hexagons unabhängig von  $B$  auftreten müssen.

Im bislang betrachteten Experiment war das quantitative Vermessen der Flüssigkeitshöhen wegen der großen horizontalen Erstreckung des Meßvolumens nicht möglich. Im folgenden Kapitel wird ein Experiment vorgestellt, bei dem die endliche horizontale Ausdehnung des Behälters die gute Beobachtbarkeit der Flüssigkeitshöhen gewährleistet.

#### 4. Experiment im endlichen Behälter

Im endlichen Behälter wurden mehrere physikalische Effekte festgestellt. Die Testsubstanz war bei diesem Versuch ebenfalls Cyclohexan mit der Prandtl-Zahl 18. Zunächst wurde in 80 % des Testvolumens der feste Aggregatzustand hergestellt und die Vorgänge bei der kritischen Rayleigh-Zahl untersucht (Kap. 4.2.1). Hierbei waren die Höhen- zu Seitenverhältnisse der Flüssigkeitsschicht relativ klein (1:10) und daher der Fall einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeitsschicht in guter Näherung approximiert. Die Temperaturdifferenz über die feste Phase wurde dabei im Bereich von  $14 \pm 3$  °C variiert und die Temperaturdifferenz über die flüssige Phase im gesamten Experiment bei 3.0 °C konstant gehalten.

In einem nächsten Teil des Experimentes wurde bei der Erhöhung der oberen Randtemperatur ein Einfluß der vertikalen Berandungen des Testvolumens auf die Struktur der Phasentrennfläche festgestellt (Kap. 4.2.2.1). Dieser Einfluß kam dadurch zustande, daß das Verhältnis von Flüssigkeitshöhen zu Behälterbreite bei Erhöhung der oberen Randtemperatur ständig zunahm.

Durch weitere Vergrößerung der Flüssigkeitshöhen durch Erhöhung der oberen Randtemperatur wurde die Konvektion in der Flüssigkeitsschicht so intensiv, daß sich an den unteren und oberen Rändern der Flüssigkeit Temperaturgrenzschichten ausbildeten, die zur Entstehung von Wirbeln mit Abmessungen der Dicke der Temperaturgrenzschichten führten. Die dabei beobachteten Strukturen der Phasentrennfläche werden in Anlehnung an einen verwandten Effekt im Bénard-Problem als bimodal bezeichnet (Kap. 4.2.2.2).

Bei weiterer Vergrößerung der Flüssigkeitshöhen traten in den Temperaturgrenzschichten instationäre Vorgänge zunächst an der unteren Kupferberandung, dann aber auch an der Phasengrenzfläche in Erscheinung (Kap. 4.2.2.3).

Nach Erreichen des Bénard-Falles, der durch quasistationäres Erhöhen der oberen Temperatur ("Schmelzpfad") bis zum Wert  $T_2 = T_m$

realisiert wurde, wurde die obere Temperatur wieder quasistationär erniedrigt ("Gefrierpfad"). Die Unterschiede in Schmelz- und Gefrierpfad bei den einzelnen physikalischen Effekten werden dargestellt. In einem Stabilitätsdiagramm wird der gesamte Versuch abschließend zusammengefaßt. Dabei werden die Wellenlängen aller aufgetretenen Strukturen der Phasentrennfläche in Abhängigkeit der vorgegebenen Rayleigh- und Biot-Zahlen diskutiert.

Zunächst wird jetzt die verwendete Versuchsanordnung vorgestellt.

#### 4.1 Versuchsaufbau und Meßtechnik

In Abb. 8 ist ein maßstabsgetreuer Querschnitt der Meßkammer dargestellt.

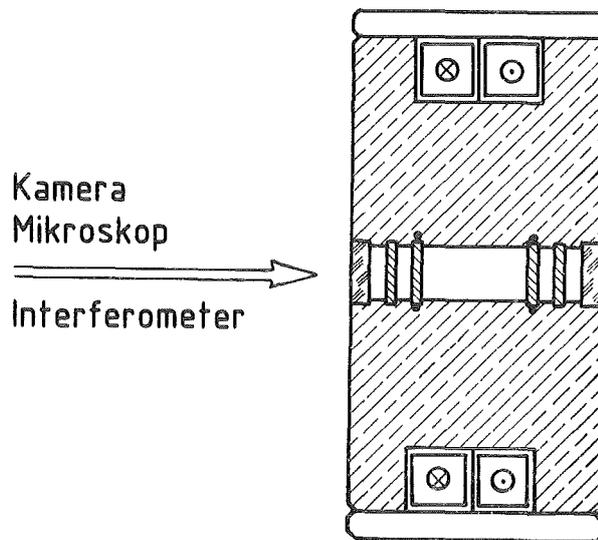


Abb. 8 Meßkammer

Die Kammer ist symmetrisch. Das Meßvolumen befindet sich im Zentrum der Kammer. Es ist 10 mm hoch, 20 mm breit und, senkrecht zur Zeichenebene, 200 mm lang. Es wird durch zwei Kupferblöcke oben und unten gebildet und ist seitlich durch zwei Plexiglasabdeckungen der Dicke 2 mm abgeschlossen. Die Dichtung erfolgt mit O-Ringen (Viton 70 FKM 598), an den Stirnflächen mit Spezialklebstoff (730 RTV-Dow Corning). Nach außen hin sind zwei Luftspalte

der Dicke 3 mm sowie ein weiteres Plexiglas der Dicke 2 mm und ein Glas der Dicke 4 mm zu erkennen. Die Luftspalte sind so ausgelegt, daß selbst bei den maximal möglichen Temperaturdifferenzen von 20 °C wegen der endlichen Breite der Spalte keine Konvektion in der Luft auftritt (vergl. Frick & Clever (1980)). Durch die gestaffelte Bauweise ergibt sich eine gute Isolation gegen thermische Störungen aus der Umgebung. Zur Temperaturkontrolle sind in die Kupferblöcke Wasserkanäle eingelassen, die gegenseitig durchströmt werden. Die Wassertemperatur wird von Präzisions-thermostaten mit einer Temperaturkonstanz von  $\pm 0.01$  °C vorgegeben. In Abb. 8 nicht eingezeichnet ist eine 3 cm dicke Styrodurisolierung, mit der das Kupfer gegen die Umgebung abgeschirmt ist. Die zu- und abführenden Schläuche sind mit Moosgummi ebenfalls dick isoliert. Die gesamte Meßkammer ist ferner in eine ebenfalls nicht eingezeichnete Klimakammer eingebaut. Die Klimakammer besteht aus einem isolierten Aluminiumkasten mit fensterbewehrten Sichtschlitzen zur Beobachtung des Testvolumens. Auf das Aluminium sind Wasserkanäle aufgelegt, deren Temperatur über einen separaten Thermostatenkreislauf eingestellt wird. Mit der Klimakammer kann die Umgebungsluft der Meßkammer stets auf das arithmetische Mittel der Temperaturen der oberen und unteren Meßzellenberandung eingestellt werden und so der thermische Austausch zwischen Meßvorgang und Umgebung minimiert werden. Der erhebliche Aufwand zur thermischen Abschirmung des Meßvolumens wird aus folgendem Grund betrieben: Bei dem später beschriebenen Experiment ist die Flüssigkeitshöhe zu Beginn der Konvektion nur knapp 2 mm. Kleinste thermische Störungen aus der Umgebung würden erhebliche relative Änderungen in der Flüssigkeitshöhe bringen und die Bestimmung der Rayleigh-Zahl sehr erschweren. Zum weiteren hat die Wärmeleitfähigkeit der vertikalen Meßzellenberandungen einen maßgeblichen Einfluß auf die Kontur der Phasengrenzfläche zu Beginn der Konvektion. Diese Zusammenhänge sind in einem Vorversuch geklärt worden (s. Anhang 7.3). Die dort gewonnenen Erfahrungen haben zum Bau der obigen Meßkammer geführt.

Zur Temperaturmessung sind direkt unter- bzw. oberhalb der Berandungen zum Meßvolumen jeweils zwei Präzisionsplatinwiderstände

in das Kupfer eingelegt. Sie haben oben und unten jeweils einen horizontalen Abstand von 4 cm voneinander und sind im mittleren Bereich der Meßkammer angebracht. Die temperaturabhängigen Widerstände werden durch ein Spezialgerät in Vierleitermeßtechnik gemessen und direkt in °C angegeben. Die Abweichung der Angaben der beiden Widerstände oben bzw. unten voneinander war stets weniger als 0.01 °C bei einer Auflösung von  $\pm 0.001$  °C. Die Messung der Differenzen der Randtemperaturen zum Schmelzpunkt ist auf  $\pm 0.02$  °C genau. Die hohe Genauigkeit bei der Temperaturmessung ist wichtig, um die Rayleigh-Zahl, insbesondere die kritische Rayleigh-Zahl, genau ermitteln zu können. Denn dort geht neben den Stoffdaten vor allem die Wärmeleithöhe, die aus zwei gemessenen Temperaturdifferenzen berechnet wird, zur dritten Potenz ein.

Als Testsubstanz wird wie beim Versuch in Kap. 3 die organische Flüssigkeit Cyclohexan verwandt. Bei quasi-stationärem Ausfrieren ist ihre feste Phase genauso transparent wie die flüssige Phase, wobei der Dichte- bzw. Brechungsindex-Sprung an der Phasengrenzfläche die Beobachtung derselben ermöglicht.

Mit der Kamera wird die Struktur der Phasengrenzfläche bei günstigen Lichtverhältnissen photographiert und dokumentiert. Die Flüssigkeitshöhen und Wellenlängen werden mit einem Zeiss-Stereo-Mikroskop vermessen, das auf einem 3-achsigen Verschiebetisch montiert ist. Der Arbeitsabstand des Mikroskops von der Meßebe-  
ne im Meßvolumen ist 225 mm. Das Ausmessen von Flüssigkeitshöhen erfolgt dadurch, daß im Fadenkreuz des Okulars nacheinander die untere Kupferberandung und dann die Phasengrenzfläche angepeilt werden und die dabei vorgenommene Vertikalverschiebung des gesamten Mikroskops mit einer Meßuhr vermessen wird. Die Vergrößerung des Mikroskops ist in 6 Stufen von 3,6 x bis 22 x zu variieren. Bei der Messung wird die Meßkammer mit kaltem Licht von einer Mattscheibe von hinten beleuchtet. Die absolute reproduzierbare Meßgenauigkeit der Höhenmessung beträgt  $\pm 0.02$  mm.

Die Messung von Wellenlängen erfolgt durch die Horizontalverschiebung des Mikroskops und das Ablesen der Verschiebung an der

Mikrometerspindel der Verschiebevorrichtung. Die Meßgenauigkeit der Wellenlängenmessung ist  $\pm 0.05$  mm.

An dem Stereo-Mikroskop ist ferner bei Bedarf eine Kamera anzubringen, in die einer der beiden Strahlengänge eingespiegelt werden kann. Dadurch ist es möglich, eine vermessene Welle der Phasengrenzfläche auch direkt zu photographieren.

Zur Visualisierung von Temperatur- bzw. Dichtedifferenzen in der flüssigen und festen Phase wird ein Differentialinterferometer angewendet, das u.a. in der Arbeit von Kichartz (1980) ausführlich beschrieben ist (vergl. Abb. 9).

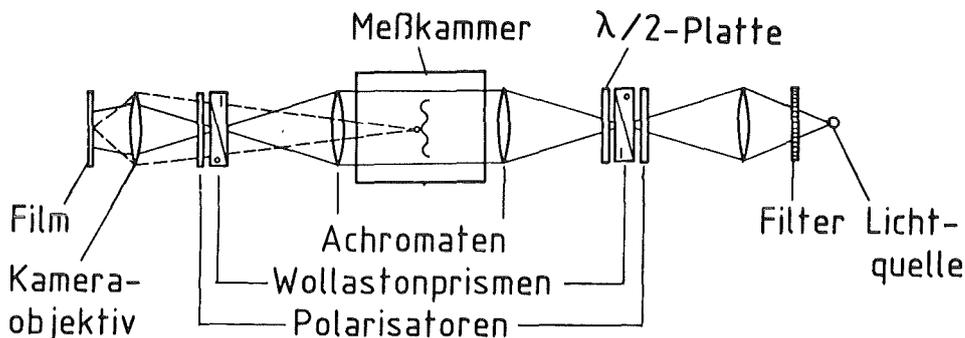


Abb. 9 Differentialinterferometer

Eine Lichtquelle liefert das Licht, das nach Durchgang durch Filter und Polarisator monochromatisch und unter  $45^\circ$  polarisiert in ein Wollastonprisma trifft. Hier wird jeder einzelne Lichtstrahl in zwei senkrecht zueinander polarisierte Anteile aufgespalten, die im Abstand  $e$  die Meßkammer durchqueren. Dort durchlaufen sie unterschiedliche optische Wege. Die Strahlentrennung  $e$  bestimmt die Empfindlichkeit des Interferometers und kann durch die Wahl unterschiedlicher Wollaston-Prismen variiert werden. Im zweiten Wollaston-Prisma werden einander zugehörige

Strahlen wieder überlagert und ihre  $45^\circ$  Komponenten in der Ebene des zweiten Polarisators zur Interferenz gebracht. Das Kameraobjektiv bildet die Meßkammer in die Filmebene ab. Die Interferenzstreifen stellen Linien konstanter Dichtedifferenzen bezogen auf die Richtung der Strahltrennung dar. Mit drei Paaren von Wollastonprismen wurden Strahltrennungen von 0.3 mm, 2 mm und 4 mm realisiert.

Die Differentialinterferometrie dient in dieser Arbeit nurmehr der qualitativen Interpretation der beobachteten Strömungsvorgänge. Eine quantitative Auswertung der Interferogramme hat sich nicht realisieren lassen, weil die Phasengrenzfläche im allgemeinen Fall stark dreidimensional ausgeformt war und dadurch im parallelen Licht des Interferometers die interessierenden Bereiche in der Umgebung der Phasengrenzfläche ausgeblendet wurden.

## 4.2 Ergebnisse

### 4.2.1 Hysterese der Flüssigkeitshöhen beim Einsetzen und Verschwinden der Konvektion

#### 4.2.1.1 Stationäre Zustände

In Abb. 10 sind zwei Photographien des Testvolumens abgebildet. Die schwarzen horizontalen Ränder in beiden Photographien sind die horizontalen Kupferberandungen des 10 mm hohen Testvolumens. Im unteren Teil des unteren Bildes ist eine horizontale Linie zu erkennen. Dies ist die Phasengrenzfläche, die die etwa 8 mm dicke, transparente feste Phase im oberen Teil von der etwa 2 mm dicken transparenten flüssigen Phase im unteren Teil trennt. Beide Phasen befinden sich im Zustand der stationären Wärmeleitung. Dies war der Ausgangspunkt der Betrachtungen.

Bei konstanter unterer Randtemperatur wurde die obere Temperatur in Schritten von  $1/10^\circ\text{C}$  quasistationär erhöht. Die Rayleigh-Zahl vergrößerte sich dabei durch Vergrößern der Flüssigkeitshöhe. Bei Erreichen der kritischen Rayleigh-Zahl  $Ra_{wl} = Ra_c = 1450$  setzte Konvektion in der flüssigen Phase ein. Durch die damit verbundene Erhöhung des Wärmeübergangs in der Flüssigkeit schmolz ein Teil fester Phase ab. Nach dem transienten Aufschmelzvorgang stellte

sich die in Abb. 10 b) erkennbare stationäre Phasengrenzfläche ein. Die lokalen Maxima der Flüssigkeitshöhen ("obere Höhen") waren etwas mehr

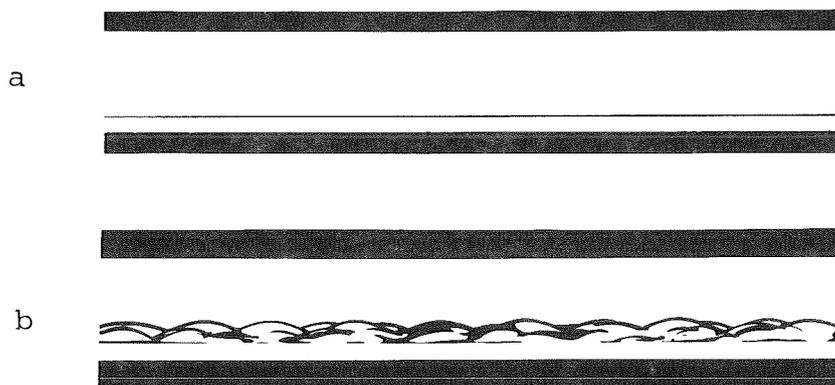


Abb. 10 Stationäre Grenzflächenstrukturen bei der kritischen Rayleigh-Zahl

a)  $Ra_{wl} = 1430$ ,  $B = 4.61$ ; b)  $Ra_{wl} = 1450$ ,  $B = 4.58$

als doppelt so groß wie die Wärmeleithöhe. Bei solch dicker fester Phase wie in Abb. 10 b) ( $B=4.58$ ) würde nach den Ergebnissen aus Kapitel 3 eine regelmäßigere Struktur mit deutlich hexagonalem Charakter erwartet. Hier macht sich jedoch bereits der Einfluß der vertikalen Berandungen auf die Grenzflächenstruktur bemerkbar, so daß zwar eine dreidimensionale Struktur der Grenzfläche deutlich erkennbar ist, jedoch der zu erwartende hexagonale Charakter nicht klar ersichtlich wird.

Bei einer Erhöhung der Rayleigh-Zahl über den kritischen Wert von 1450 hinaus wurde eine Erhöhung der Flüssigkeitshöhen bei qualitativ gleicher Struktur der Grenzfläche beobachtet. Eine Erniedrigung der Rayleigh-Zahl unter den kritischen Wert brachte jedoch zunächst nicht den Übergang zur Wärmeleitung. Vielmehr blieb die Struktur der Phasengrenzfläche qualitativ unverändert, nur die Flüssigkeitshöhen wurden etwas kleiner. Erst bei einer Rayleigh-Zahl von 1080 fand dann der Übergang zur Wärmeleitung statt.

Die dadurch beschriebene Hysterese der Flüssigkeitshöhen wird in Abb. 11 quantitativ beschrieben. Auf der Abszisse ist die Rayleigh-Zahl, auf der Ordinate das Verhältnis der

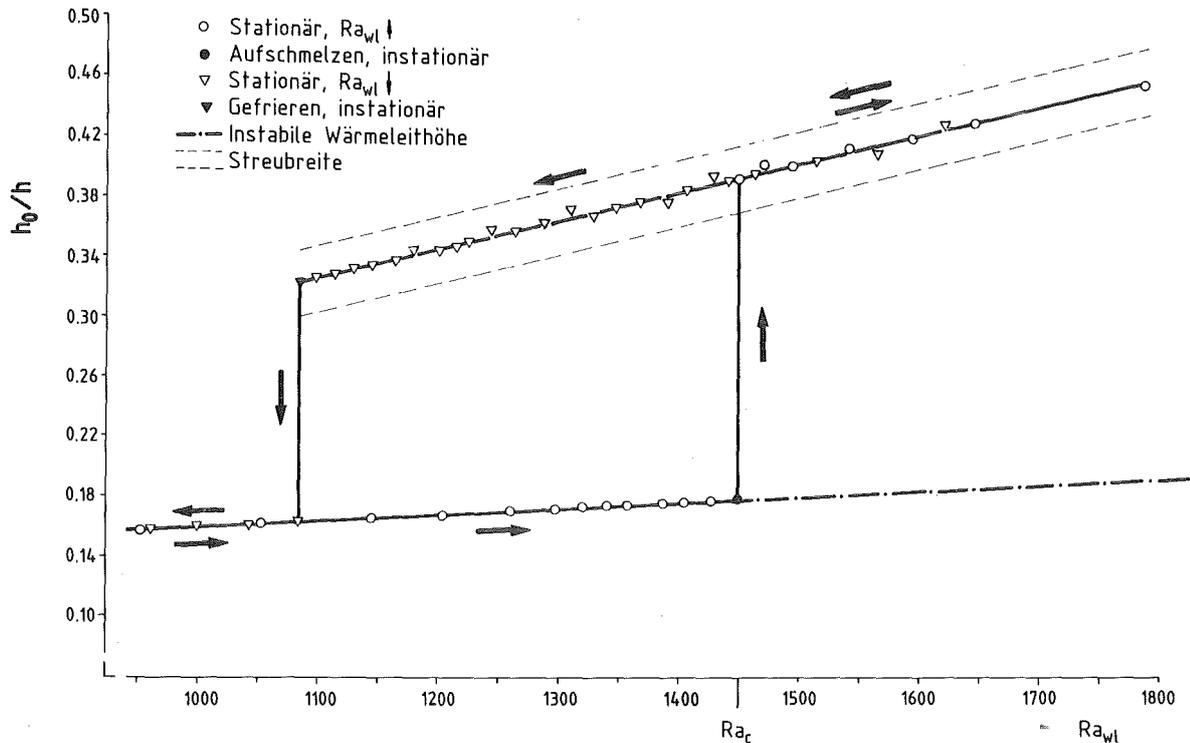


Abb. 11 Hysterese der Flüssigkeitshöhen beim Einsetzen und Verschwinden der Konvektion

oberen Höhen  $h_0$  (lokale Maxima) zur Gesamtschichthöhe  $h$  aufgetragen. Runde Symbole kennzeichnen den Schmelzpfad (quasistationäre Erhöhung der Rayleigh-Zahl), Dreiecke den Gefrierpfad (quasistationäre Erniedrigung der Rayleigh-Zahl). Die obere Meßkurve stellt die oberen konvektiven Flüssigkeitshöhen dar. Die Streubreite der Höhen, gekennzeichnet durch gestrichelte Linien, kommt dadurch zustande, daß pro Meßpunkt etwa 20 Höhen ausgemessen wurden. Die Symbole kennzeichnen jeweils das arithmetische Mittel einer Messung. Die Fehlertoleranz einer Einzelmessung wäre im Diagramm kleiner als der Durchmesser eines Meßsymbols.

Ausgangspunkt der Messungen war der Wärmeleitzustand bei einer Rayleigh-Zahl von 950. Die Rayleigh-Zahl wurde dann vergrößert, indem die obere Randtemperatur erhöht und dadurch die Wärmeleithöhe vergrößert wurde. Bei Erreichen der kritischen Rayleigh-Zahl

setzte Konvektion ein. Der gemessene Wert  $Ra_c = 1450$  stimmt sehr gut mit dem Wert der linearen Theorie (1493) überein (-3%). Bei der kritischen Rayleigh-Zahl wurde ein Aufschmelzen der oberen Flüssigkeitshöhen von 0.18 auf 0.39 (+117%) beobachtet. Die Wärmeleithöhe ist für Rayleigh-Zahlen  $Ra_{w1}$  größer  $Ra_c$  instabil (strichpunktiert).

Beim Einsetzen der Konvektion war das Höhen zu Seiten-Verhältnis der flüssigen Phase 1:10. Bei diesem Ansichtsverhältnis wird kein Einfluß der seitlichen Berandungen auf die kritische Rayleigh-Zahl erwartet (Frick & Clever (1980)).

Bei einer Erhöhung der Rayleigh-Zahl auf 1800 und darauffolgender Reduzierung auf  $Ra_c$  variierten die Höhen in gleicher Weise. Es ergab sich kein Unterschied zwischen Schmelz- und Gefrierpfad. Bei einer Erniedrigung der Rayleigh-Zahl von 1450 auf 1100 (-24%) blieb die Flüssigkeit im konvektiven Zustand und die Struktur der Phasengrenzfläche qualitativ unverändert. Erst bei einer Rayleigh-Zahl von 1080 fand der Übergang zur Wärmeleitung statt, verbunden mit einem Sprung in der Flüssigkeitshöhe von 0.32 auf 0.16 (-100%, bezogen auf die Wärmeleithöhe). Die Differenz in der oberen Temperatur zwischen  $Ra_c$  und  $Ra_{w1} = 1080$  war 2,0 °C.

Die Werte des Parameters B sind in der eingezeichneten dimensionslosen Wärmeleithöhe enthalten. Es gilt nämlich  $h_{w1}/h = (1+B)^{-1}$ . B variiert beim obigen Experiment zwischen 4.2 und 5.4. Die im Diagramm zu erkennende Hysterese der Flüssigkeitshöhen macht deutlich, daß beim Einsetzen und Verschwinden der Konvektion bei Werten von B um 5 ausgeprägte, nichtlineare Vorgänge den Ausschlag geben.

Die Meßtoleranz für B ist  $\pm 1$  %. Eine Fehlerabschätzung ergibt für die Rayleigh-Zahl eine relative Genauigkeit von  $\pm 3$  % durch die Temperaturmessung und, durch zusätzliche Fehler in den Stoffdaten, eine absolute Genauigkeit von  $\pm 7$  %. Die Änderung in der oberen Temperatur von Meßpunkt zu Meßpunkt betrug jeweils etwa 0.1 °C und wurde in einigen Minuten aufgebracht. Nach etwa 20 min war jeweils die Höhenänderung abgeschlossen (Exponential-Verhal-

ten). Der Zeitabstand zwischen zwei Meßpunkten betrug normalerweise zwischen acht und zwölf Stunden, jedoch immer mindestens drei Stunden. Daher kann angenommen werden, daß stationäre Zustände vermessen wurden.

#### 4.2.1.2 Instationäre Übergänge

Nach der Behandlung der stationären Flüssigkeitshöhen werden die instationären Übergänge bei den Rayleigh-Zahlen  $Ra_{w1} = 1450$  und  $Ra_{w1} = 1080$  betrachtet. Die Zeiten werden hierbei mit der Diffusionszeit der gesamten Schicht,  $h^2/\kappa_1 = 19$  min skaliert.

Betrachten wir zunächst Abb. 12. Hier ist der Aufschmelzvorgang bei der kritischen Rayleigh-Zahl  $Ra_c = 1450$  dargestellt. Etwa eine Diffusionszeit nach dem Einstellen einer stationären oberen Randtemperatur bzw. dem Einstellen der kritischen Rayleigh-Zahl ist die Phasengrenzfläche noch eben (Bild 1), 23 min.). Die Flüssigkeitshöhe war zu diesem Zeitpunkt etwa auf die Größe der Wärmeleithöhe aufgeschmolzen. Nach 48 Minuten, d.h. nach etwa 2,5 Diffusionszeiten, ist das Einsetzen der Konvektion deutlich zu erkennen (Bild 2)). Die kritische Wellenzahl, gebildet mit der Wellenlänge zwischen den zwei Höhenminima und der Wärmeleithöhe, ist 2,4. Dies ergibt nach Umrechnung entsprechend Gleichung (2.26),  $k_c = 2.8$ , und stimmt gut mit dem Wert der linearen Theorie für  $B = 4.6$ ,  $k_c = 2.815$  überein. In Bild 3) (53 min) ist zu erkennen, daß der hintere Wellenzug gegenüber dem vorderen um  $180^\circ$  phasenversetzt ist, was auf die Entstehung einer Hexagonalstruktur hindeutet. Ferner sind die hinteren Höhenmaxima zunächst kleiner als die vorderen. Dies weist auf ein anfänglich verzögertes Einsetzen der Konvektion im hinteren Bereich des Meßvolumens hin. Nach 62 min (Bild 4)) sind die vorderen und hinteren Höhenmaxima gleich hoch. Im Bild 5) (65 min) ist die hohe Regelmäßigkeit der Struktur über einen größeren Ausschnitt zu erkennen. Bild 6) (93 min) weist demgegenüber eine größere Unregelmäßigkeit auf. Das Zusammenbrechen der regelmäßigen Struktur aus Bild 5) wird auf zwei Mechanismen zurückgeführt. Zum einen tendiert die Flüssigkeit dazu, mit der Flüssigkeitshöhe auch die Wellenlänge zu vergrößern. Zum andern geht von den vertikalen Berandungen ein

störender Einfluß auf die Struktur der Konvektion und der Phasengrenzfläche aus. Beim Zusammenbrechen der Struktur aus Bild 5) war das Verhältnis von

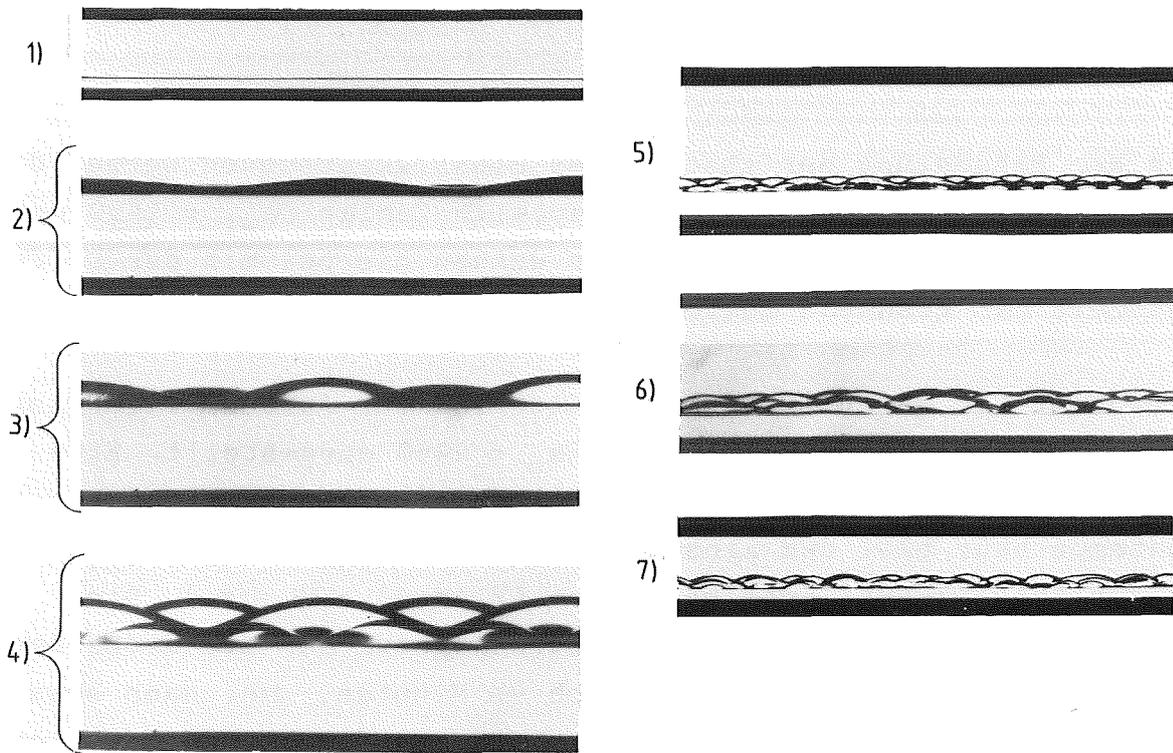


Abb. 12 Instationäre Strukturen der Phasengrenzfläche beim Aufschmelzen bei der kritischen Rayleigh-Zahl. Bei den Bildern 2), 3) und 4) fehlt die obere Kupferberandung. Dauer seit dem Zeitpunkt, zu dem die Randtemperaturänderung abgeschlossen war:

1) 23 min, 2) 48 min, 3) 53 min, 4) 62 min, 5) 65 min, 6) 93 min, 7) 12 Stunden.

mittlerer Flüssigkeitshöhe (2,5 mm) zu Behältertiefe (20 mm) 0,13, d.h. die Behältertiefe war rund achtmal größer als die mittlere Flüssigkeitshöhe. In Bild 7) ist die stationäre Phasengrenzfläche nach zwölf Stunden dargestellt. Diese Struktur hat sich im gesamten Bereich der Hysterese qualitativ nicht mehr verändert.

In Abb. 13 sind die obigen Phänomene quantifiziert. Dargestellt ist der zeitliche Verlauf der auf die Gesamtschichthöhe  $h$  nor-

mierten oberen Höhe  $h_0$  sowie die zeitliche Veränderung der Rayleigh-Zahl durch Änderung der oberen Randtemperatur um  $0.1\text{ }^\circ\text{C}$ . Als Zeitskala wurde die Diffusionszeit  $h^2/\kappa_1 = 19\text{ min}$  verwendet. Die Zahlen 1) - 7) beziehen sich auf die Bildbezeichnungen in Abb. 12.

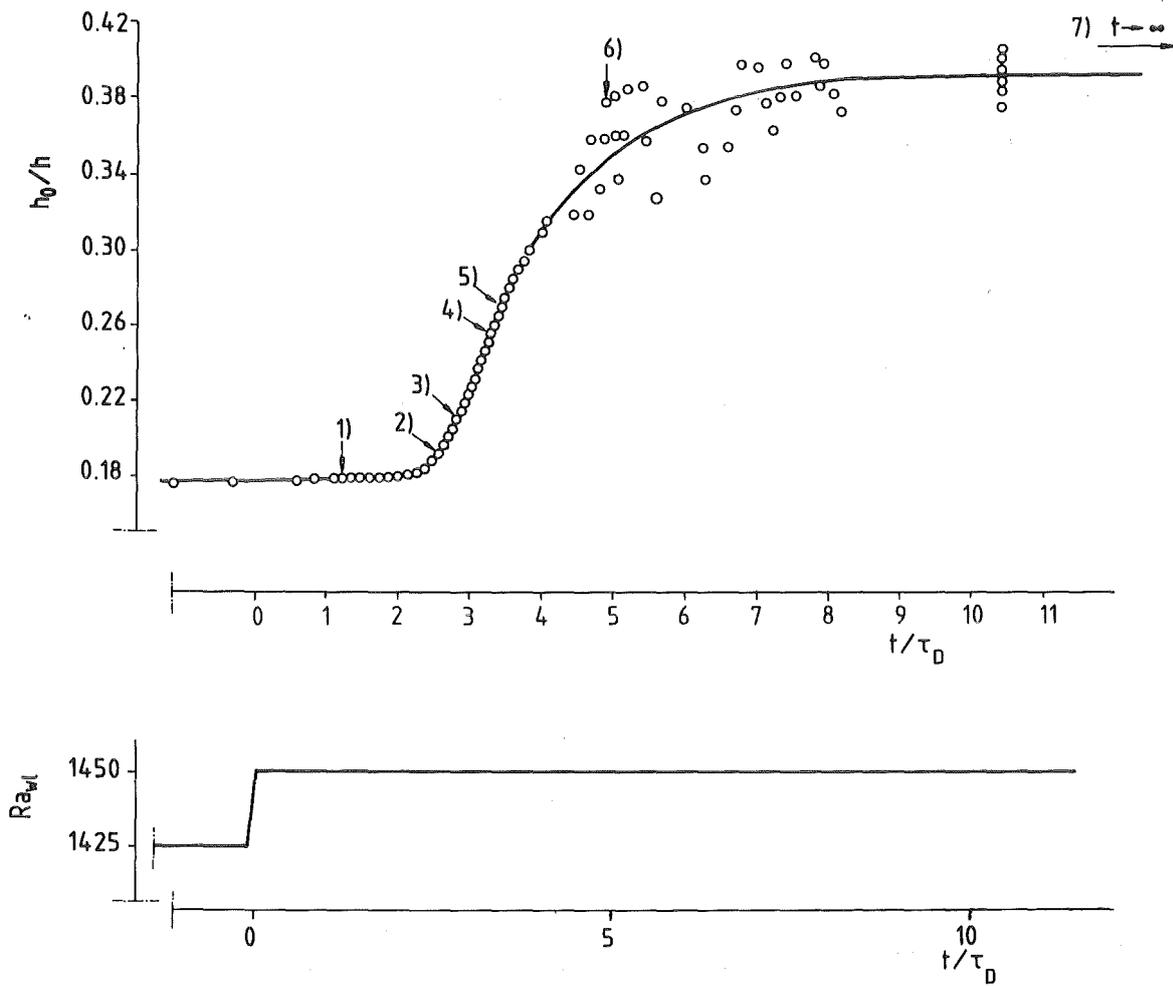


Abb. 13 Zeitverlauf der oberen Flüssigkeitshöhen beim Aufschmelzen bei der kritischen Rayleigh-Zahl. Diffusionszeitkonstante  $\tau_D = h^2/\kappa_1 = 19\text{ min}$ . Die Zahlen 1) - 7) beziehen sich auf Abbildung 12.

Nach einer Diffusionszeit herrschte noch Wärmeleitung in der flüssigen Phase vor (Bild 1)). Zu diesem Zeitpunkt erst entsprach die tatsächliche Flüssigkeitshöhe bzw. Rayleigh-Zahl etwa der Wärmeleithöhe bzw. Rayleigh-Zahl  $Rawl$ . Nach zwei Diffusionszeiten

setzte Konvektion ein, wobei die vorderen Höhenmaxima vermessen wurden (vergl. Bild 2) und 3) Abb. 12). Nach etwa vier Diffusionszeiten (80 Minuten) trat die Veränderung in der Struktur auf. Das Resultat war eine deutliche Streuung der oberen Flüssigkeitshöhen (Bild 6), die auch im stationären Fall (Bild 7) erhalten blieb.

Der Gefriervorgang bei  $Ra_{wl} = 1080$  ist in Abb. 14 schematisch dargestellt. Im Gegensatz zum Schmelzvorgang bei  $Ra_c$ , der zeitparallel in der gesamten Kammer ablief, wurde hier die Ausbildung von zwei "Konvektionsinseln" beobachtet, die in vertikaler und

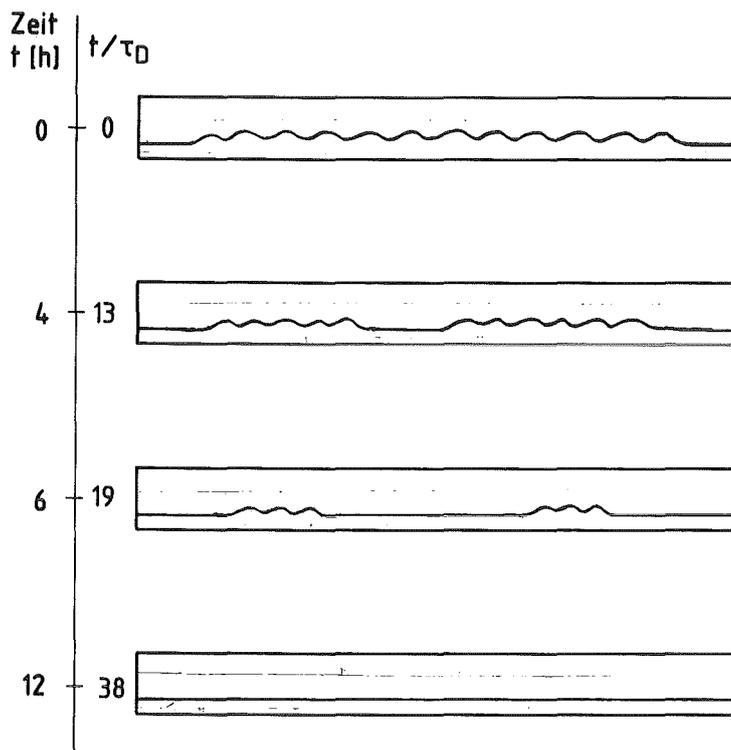


Abb. 14 Abklingen der Konvektion, schematisch; Diffusionszeit  $\tau_D = h^2/\kappa_1 = 19$  min

horizontaler Richtung schrumpften. Ferner wurde ein Unterschied in den Zeiten beobachtet. Der Schmelzvorgang war nach ca. zehn Diffusionszeiten (ca. drei Stunden) beendet. Der gesamte Gefriervorgang benötigte etwa viermal so viel Zeit. Dies wird darauf

zurückgeführt, daß beim Gefrieren die Latentwärme durch die ca. 6-8 mm dicke feste Phase abtransportiert werden mußte. Beim Schmelzen dagegen mußte die Latentwärme nur durch die ca. 2-4 mm dicke flüssige Phase antransportiert werden. Das Verhältnis der Diffusionszeiten einer 6 mm dicken festen Schicht zu einer 3 mm dicken flüssigen Schicht ist gerade etwa 4.

Zur besseren Deutung und Einordnung der experimentellen Befunde wird im nächsten Abschnitt eine Interpretation vorgenommen.

#### 4.2.1.3 Interpretation

Die Hysterese der stationären Flüssigkeitshöhen beim Einsetzen und Verschwinden der Konvektion, die für Werte von  $B$  um 5 experimentell nachgewiesen wurde, wird auch von der schwach nichtlinearen Störungstheorie nach Davis, Müller & Dietsche (1983) für Werte von  $B$  kleiner als 0,1 vorhergesagt (Abb. 7, Kap. 3.3). Dabei entspricht ein Sprung in der Strömungsamplitude einem Sprung in der Flüssigkeitshöhe. Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment besteht auch darin, daß die Konvektion im Bereich der o.g. Hysterese eine Hexagonalstruktur aufweist. Im Zusammenhang mit dem Umstrukturierungseffekt bei höheren Rayleigh-Zahlen in Kapitel 3 wird es daher als erwiesen betrachtet, daß eine deformierbare Phasengrenzfläche auf die Konvektion in der flüssigen Phase die gleiche Wirkung ausübt wie nicht-Boussinesq'sche Eigenschaften der Stoffparameter.

Mit der Störungstheorie ist eine quantitative Vorhersage über die Sprunggröße der Flüssigkeitshöhen bei der kritischen Rayleigh-Zahl bei Werten von  $B$  um 5 nicht möglich. Nachfolgend wird deshalb eine Überlegung vorgestellt, mit der eine quantitative Abschätzung der Flüssigkeitshöhen in Abhängigkeit von den äußeren Parametern möglich ist.

Das betrachtete Problem wird zu diesem Zweck in zwei horizontale Schichten zerlegt (Abb. 15). Die variable Flüssigkeitshöhe  $\eta(x)$  wird hierbei durch eine integrale mittlere Flüssigkeitshöhe  $\bar{h}_1$

ersetzt. Alsdann werden für beide Schichten Wärmeübergangsbeziehungen angesetzt und die Überlegung angestellt, daß stationäre Flüssigkeitshöhen nur dann zu erwarten sind, wenn die Wärmestromdichten durch beide Phasen gleich groß sind.

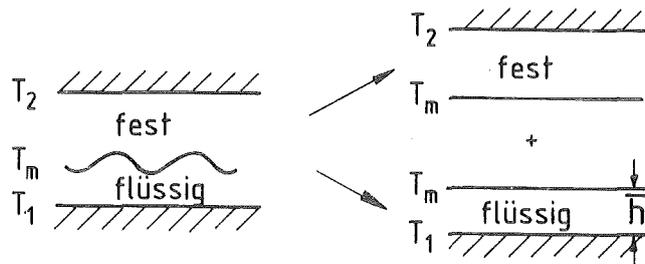


Abb. 15 Zerlegung des betrachteten Problems in zwei Schichten

Für die feste Phase wird die Wärmeübergangsbeziehung

$$\dot{q}_s = \lambda_s \frac{\Delta T_s}{h - \bar{h}_l} \quad (4.1)$$

angesetzt. Für die flüssige Phase wird die Wärmeübergangsbeziehung von O`Toole & Silveston (1961)

$$Nu = a_i \cdot Ra^{b_i} \cdot Pr^{c_i} \quad (4.2)$$

mit den Konstanten aus Tabelle 1 genommen.

Diese Beziehung wurde aus Meßergebnissen an einer horizontalen Schicht mit zwei festen isothermen Berandungen gewonnen. Die Messungen wurden so durchgeführt, daß in einer Schicht konstanter Höhe die Temperaturdifferenz variiert und der Wärmestrom durch die Schicht gemessen wurde.

Die Fragestellung wird für das vorliegende Problem umgekehrt. Es wird untersucht, wie der Wärmestrom bzw. die Wärmestromdichte mit der Flüssigkeitshöhe variiert, wenn die Temperaturdifferenz konstant bleibt. Diese Fragestellung zielt auf die Erklärung des Vorganges ab, daß im vorliegenden Problem bei der kritischen

Rayleigh-Zahl die Flüssigkeitshöhe deutlich zunimmt, während die Temperaturdifferenz über die Flüssigkeit konstant bleibt.

i	$a_i$	$b_i$	$c_i$	Bereich ( $Pr > 1$ )
0	1	0	0	$Ra < 1641$
1	0.00238	0.816	0	$1641 \lesssim Ra \lesssim 3300$
2	0.229	0.252	0	$3300 \lesssim Ra \lesssim 10^5$
3	0.104	0.305	0.084	$10^5 \lesssim Ra \lesssim 10^8$

Tabelle 1: Konstanten für die Wärmeübergangsbeziehung (4.2) nach O'Toole und Silveston (1961)

In Abb. 16 ist für die Stoffwerte von Cyclohexan eine Gesamtschichthöhe von 10 mm und eine Temperaturdifferenz über die flüssige Phase von  $\Delta T_1 = 3 \text{ }^\circ\text{C}$  (Situation wie im Versuch) die Wärmestromdichte durch die flüssige Phase in Abhängigkeit von der Flüssigkeitshöhe  $\bar{h}_1$  angegeben (durchgezogene Linie). Hierbei wurde die Wärmeübergangsbeziehung (4.2) zugrunde gelegt. Desweiteren ist gemäß Gleichung (4.1) die Variation der Wärmestromdichte durch die feste Phase mit der Flüssigkeitshöhe für zwei Temperaturdifferenzen  $\Delta T_s$  eingezeichnet.

Betrachten wir den Verlauf der erstgenannten Kurve für die flüssige Phase. Für Flüssigkeitshöhen kleiner als 1,9 mm nimmt die Wärmestromdichte mit der Flüssigkeitshöhe ab. Dies ist der Bereich reiner Wärmeleitung in der flüssigen Phase. Mit Punkt b ist eine Flüssigkeitshöhe erreicht, bei der die Rayleigh-Zahl gerade den kritischen Wert annimmt. Für größere Flüssigkeitshöhen bewirkt der konvektive Wärmetransport den steilen Anstieg der Kurve b-d.

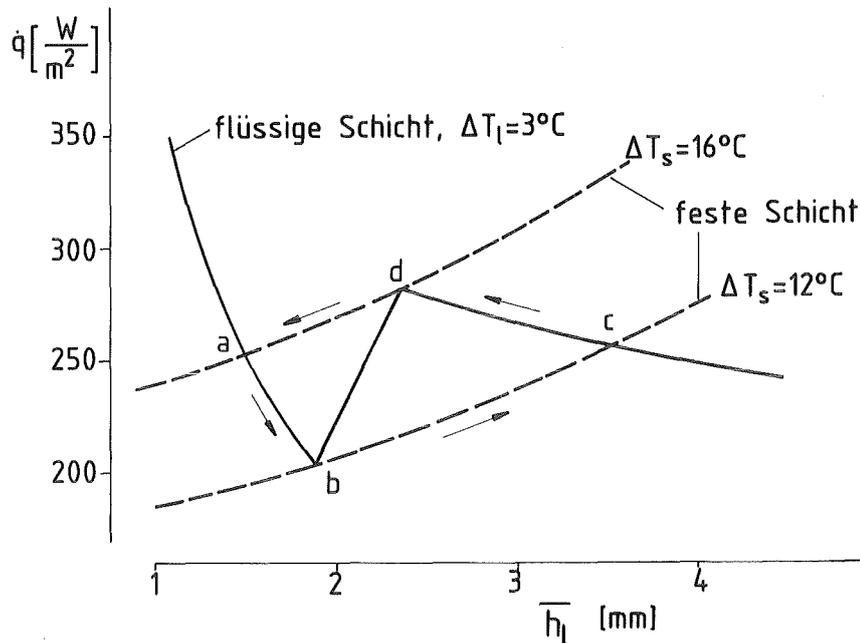


Abb. 16 Wärmestromdichte durch die flüssige und die feste Schicht in Abhängigkeit von der Flüssigkeitshöhe  $\bar{h}_l$  bei konstanter Temperaturdifferenz über die Flüssigkeit.

Auf der Kurve d-c nimmt der Wärmeübergang wieder leicht ab. Dies ist der Bereich  $i=2$  in Gleichung (4.2) bzw. Tabelle 1 für Rayleigh-Zahlen zwischen 3300 und etwa  $10^5$ . Für turbulente Rayleigh-Zahlen (größer als  $10^5$ ) ist der Rayleigh-Zahl-Exponent in der Wärmeübergangsbeziehung (4.2) etwa  $1/3$  (vergl. Tabelle 1,  $i=3$ ). Dieser Bereich ist in Abb. 16 nicht eingezeichnet. In diesem Bereich wäre die Wärmestromdichte durch die flüssige Phase unabhängig von der Flüssigkeitshöhe.

Die beiden Kurven für die feste Phase (gestrichelt) geben die Leitungsbeziehung (4.1) wieder. Bei einer Vergrößerung der Flüssigkeitshöhe nimmt der Wärmewiderstand der festen Phase ab bzw. die Wärmestromdichte durch die feste Phase zu.

Eine stationäre mittlere Flüssigkeitshöhe  $\bar{h}_l$  ist nur dann möglich, wenn die Wärmestromdichten durch beide Phasen gleich groß sind. In Abb. 16 bei  $\Delta T_s = 12^\circ C$ ,  $\Delta T_l = 3^\circ C$  sind also zwei stationäre Flüssigkeitshöhen, 1,9 mm (Punkt b) und 3,6 mm (Punkt

c) möglich. Die untere entspricht der Wärmeleithöhe, die obere der konvektiven Flüssigkeitshöhe. Sie unterscheiden sich etwa um den Faktor 2 (vergl. Experiment). Ebenfalls sind für  $\Delta T_s = 16 \text{ }^\circ\text{C}$  und  $\Delta T_1 = 3 \text{ }^\circ\text{C}$  zwei Höhen (Punkte a und d) möglich.

Geht man nun, wie im Experiment, vom Wärmeleitungszustand in Punkt a aus und vermindert die Temperaturdifferenz über die feste Phase,  $\Delta T_s$ , so wird Punkt b erreicht (vergl. die eingezeichneten Pfeile). Wenn an diesem Punkt durch irgendeine Störung, beispielsweise an den Randtemperaturen, die Flüssigkeitshöhe geringfügig vergrößert wird, so nimmt die Wärmestromdichte durch die flüssige Phase (durchgezogene Linie) mehr zu als die Wärmestromdichte durch die feste Phase (gestrichelte Linie). Daraus resultiert ein Aufschmelzen. Erst bei Punkt c ist wieder eine stationäre Höhe möglich. Wenn nun die Temperaturdifferenz  $\Delta T_s$  wieder vergrößert wird (vergl. Experiment), wird Punkt d erreicht. Wenn an diesem Punkt durch eine Störung die Flüssigkeitshöhe geringfügig erniedrigt wird, so nimmt die Wärmestromdichte durch die flüssige Phase (durchgezogene Linie) stärker ab als die Wärmestromdichte durch die feste Phase (gestrichelte Linie). Daraus resultiert der Übergang zur Wärmeleitung (Punkt a), verbunden mit einem Sprung in der Flüssigkeitshöhe.

Die vorgestellte Wärmeübergangsbetrachtung ermöglicht eine quantitative Abschätzung der Hysterese der Flüssigkeitshöhen beim Einsetzen und Verschwinden der Konvektion. Ferner ist die Berechnung von konvektiven Flüssigkeitshöhen für allgemeine Temperaturdifferenzen  $\Delta T_1$  und  $\Delta T_s$  möglich. Dies war bei der Auslegung des Experimentes, vor allem im Hinblick auf den Hystereseeffekt in physikalischen Größen, von entscheidendem Vorteil. Im Anhang 7.2 werden ferner die mittleren Flüssigkeitshöhen nach der vorgestellten Wärmeübergangsbetrachtung für allgemeine Rayleigh- und Biot-Zahlen berechnet. Im Vergleich zu den im folgenden Kapitel dargestellten Experimenten ergibt sich dabei eine sehr gute Übereinstimmung.

Nachdem nun die Vorgänge beim Einsetzen und Verschwinden der Konvektion abschließend diskutiert sind, werden im folgenden die Phänomene bei voll ausgebildeter Konvektion betrachtet.

#### 4.2.2 Phänomene bei voll ausgebildeter Konvektion

##### 4.2.2.1 Ausbildung von Walzenstrukturen der Phasentrennfläche unter Einfluß der vertikalen Berandungen

In Fortführung des im vorangegangenen Kapitel diskutierten Experimentes wurden die oberen Berandungstemperaturen erhöht (weiterhin  $\Delta T_1 = 3^\circ\text{C}$ ) und damit die Flüssigkeitshöhen vergrößert. Dadurch wuchs der Einfluß der vertikalen Berandungen. Die beobachteten Phänomene sind in Abb. 17 dargestellt. Der zugehörige Wert der Biot-Zahl ist etwa 4. Bild a) zeigt die Polygonstruktur, die im Bereich der kritischen Rayleigh-Zahl vorherrschend war. Bild b) zeigt eine Mischform, Bild c) schließlich eine Struktur, die dominant Walzencharakter aufweist. Das Verhältnis der mittleren Flüssigkeitshöhen zur Behältertiefe war im Bereich der Umorientierung etwa 1:4. Der Effekt der Umorientierung trat in Schmelz-

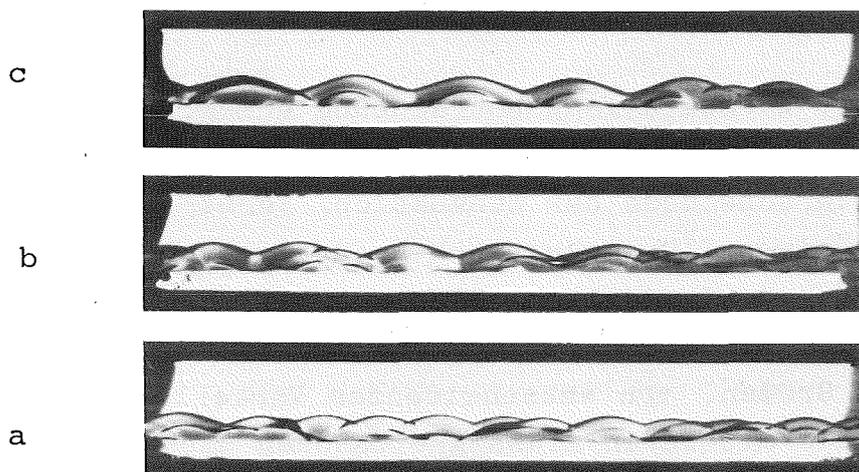


Abb. 17 Umorientierung der Grenzflächenstruktur im Gefrierpfad unter Einfluß der vertikalen Berandungen:  
a)  $Ra_{w1} = 1800$ ,  $B = 4.23$ ; b)  $Ra_{w1} = 1900$ ,  $B = 4.08$ , c)  $Ra_{w1} = 2100$ ,  $B = 3.94$

und Gefrierpfad in Zusammenhang mit einer Hysterese auf. Die quantitative Beschreibung hierzu erfolgt in Kapitel 4.2.3. Die Bilder in Abb. 17 wurden im Gefrierpfad aufgenommen.

Nach den Ergebnissen in Kapitel 3 wird bei Werten von  $B$  um vier keine Walzenstruktur erwartet. Die beobachtete Ausbildung von Walzen parallel zur kürzeren Seite des Behälters wird hier auf den wachsenden Einfluß der vertikalen Berandungen bei größer werdenden Flüssigkeitshöhen zurückgeführt. Auch beim Benard-Problem beginnt bei Werten des Höhen- zu Breitenverhältnisses des Behälters um 1:4 (s.o.) der Einfluß der vertikalen Berandungen auf die Strömungsverhältnisse, was sich in einer Änderung der Nusselt-Zahl und der kritischen Rayleigh-Zahl ausdrückt (Catton (1978)).

In Abb. 18 ist zweimal das gesamte Meßvolumen bei einer Rayleigh-Zahl von 5100 dargestellt. Bild a) zeigt die Verhältnisse im Schmelzpfad. Hier ist die Anzahl der Wellen 15. In Bild b) (Gefrierpfad) wurden nur 12 Wellen beobachtet. Entsprechend sind im Gefrierpfad die Wellenlängen und ferner auch die oberen Flüssigkeitshöhen größer als im Schmelzpfad. Dieser Effekt rührt daher, daß die abgebildeten Systemzustände einmal von Verhältnissen mit kleineren, das andere Mal von Verhältnissen mit größeren Wellenlängen und Höhen her erreicht und eingestellt worden waren. Die

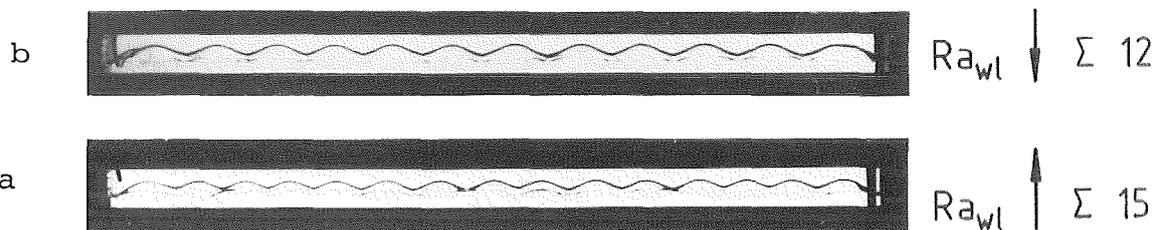


Abb. 18 Walzenstrukturen bei gleicher Rayleigh- und Biot-Zahl in Schmelzpfad (a) und Gefrierpfad (b);  $Ra_{wl} = 5100$ ,  $B = 2.67$

quantitative Beschreibung dieses Phänomens erfolgt in Kapitel 4.2.3 im Zusammenhang mit der Stabilitätsbetrachtung verschiedener Zustände.

Im folgenden Kapitel werden Effekte behandelt, die im weiteren Verlauf des Experimentes bei der Vergrößerung der Flüssigkeitshöhen bzw. der Erhöhung der oberen Randtemperaturen aufgetreten sind.

#### 4.2.2.2 Bimodale Strukturen der Phasentrennfläche

##### 4.2.2.2.1 Beschreibung

Abb. 19a) zeigt die instabile Struktur einer Phasentrennfläche, die der Ausgangspunkt für die Umbildung in eine neue Struktur war ( $Ra_{w1} = 8000$ ,  $B = 2.17$ ). Bei dieser Struktur konnte erstmals das

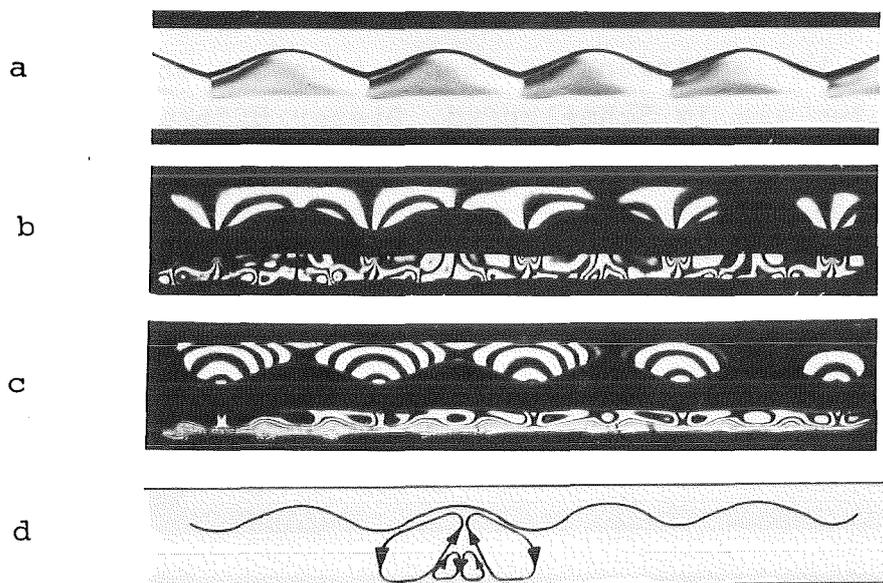


Abb. 19 Instabile Walzenstrukturen der Phasentrennfläche; die kleinen Ablösewirbel an der unteren Flüssigkeitsberandung im Aufstromgebiet zweier Rollen veranlassen die Umbildung der Phasentrennfläche;  $Ra_{w1} = 8000$ ,  $B = 2.17$ ; a Photographie; b Differentialinterferogramm horizontaler Strahlentrennung  $e = 0,3$  mm; c Differentialinterferogramm vertikaler Strahlentrennung  $e = 0,3$  mm; d Stromlinien

Differentialinterferometer gewinnbringend angewendet werden. Bei den Walzenstrukturen im letzten Kapitel war dies deshalb nicht möglich, weil dort stets ein Rest unregelmäßiger, polygonaler Struktur als Randeffect an den Scheiben aufgetreten ist.

Abb. 19b) zeigt ein Differentialinterferogramm horizontaler Strahlentrennung ( $e = 0,3$  mm). Es gibt Linien konstanter horizontaler Dichtedifferenzen wieder, ist jedoch nicht quantitativ auswertbar, weil der gesamte Bereich der dreidimensional gewölbten Phasengrenzfläche als schwarzer Schatten erscheint und damit jeweils fast die Hälfte der Bereiche der flüssigen bzw. festen Phase im parallelen Interferometerlicht ausgeblendet werden. Aus dem Differentialinterferogramm vertikaler Strahlentrennung (Abb. 19c,  $e = 0,3$  mm, Linien konstanter vertikaler Dichtedifferenzen) ist jedoch ein wesentlicher physikalischer Mechanismus ablesbar. Die hohe Liniendichte an der unteren Flüssigkeitsberandung bedeutet wie beim Mach-Zehnder- und holographischen Interferometer, daß dort Temperaturgrenzschichten vorliegen (Kirchartz (1980), Koster (1980)). Dabei werden die kleinen "Beulen" in der Grenzschicht unten durch lokale Auftriebsströmungen verursacht. Da pro Wellenlänge nur ein Höhenmaximum in der Phasentrennfläche auftritt, ist die Schlußfolgerung zu ziehen, daß zum Aufnahmezeitpunkt des Interferogrammes die in Abb. 19d) eingezeichnete Strömungskonfiguration vorlag. Es handelt sich in jeder Periode um zwei kleine Ablösewirbel im Aufstromgebiet zweier Rollen. Diese Wirbel verursachen die Umbildung der Phasentrennfläche und führen zu einer neuen Art von stationären Grenzflächenstrukturen, die bimodal genannt und im folgenden diskutiert wird. Es ist dabei festzuhalten, daß die bimodalen Strukturen durch Instabilitäten verursacht werden, die ausschließlich an der unteren Flüssigkeitsberandung einsetzen.

In Abb. 20a ist die zeitliche Entwicklung der bimodalen Strukturen dargestellt. Jede der Photographien zeigt das gesamte Meßvolumen. Zum Zeitpunkt 0 war die Rayleigh-Zahl 8000 erreicht. An den Rändern rechts und links außen liegen bereits größere Wellenlängen vor. Nach und nach stellen sich im gesamten Behälter bimodale Strukturen ein, die durch zwei Höhenmaxima pro Periodenlänge

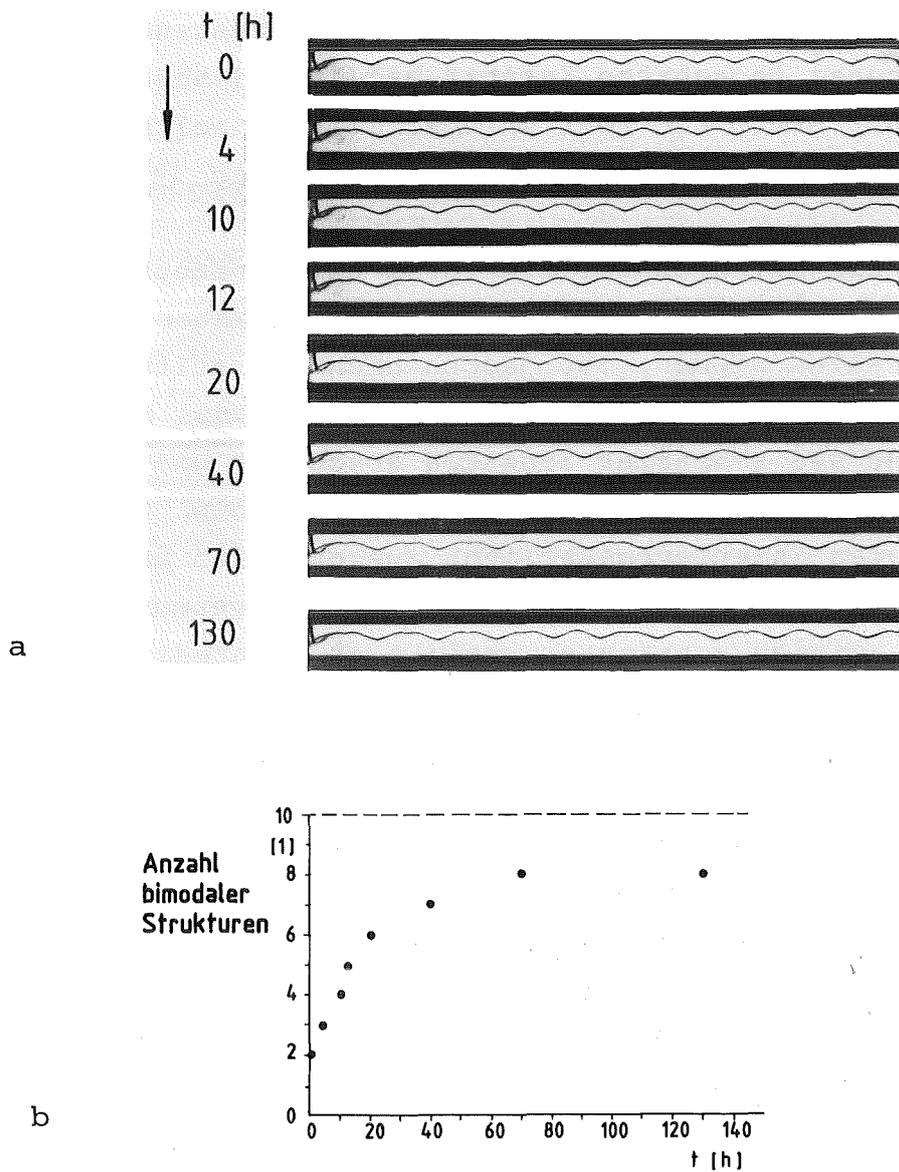


Abb. 20 Instationäre Umbildung von Walzenstrukturen in bimodale Strukturen der Phasentrennfläche bei den Kennwerten  $Ra_{w1}=8000$ ,  $B=2,17$ ; a Photographien, b Auswertung

ausgezeichnet sind. Die Anzahl dieser Strukturen im Behälter ist in Abb. 20b über der Zeit aufgetragen. Es ergibt sich näherungsweise ein exponentielles Verhalten, wobei jedoch die asymptotisch maximal mögliche Anzahl von 10 Perioden nach 130 Stunden (5 Tagen) noch nicht erreicht ist. Hier liegt ein Einfluß der endlichen Kammerlänge (20 cm) vor. Für den Zeitablauf der Umbildung spielt die Differenz der aktuellen Rayleigh-Zahl zur kleinstmöglichen "kritischen" Rayleigh-Zahl eine Rolle, bei der die Struk-

tur erstmals auftreten kann. In einem Nachexperiment war bei einer sprungartigen Vergrößerung der Rayleigh-Zahl von 7000 auf 13000 die Umbildung bereits nach zwölf Stunden abgeschlossen. Dieses Verhalten ist demjenigen beim Einsetzen der Konvektion im Bénard-System analog.

Die stationäre Form der bimodalen Strukturen ist in Abb. 21a zusammen mit einem verwandten Strukturtyp (Abb. 21e) für eine Rayleigh-Zahl  $Ra_{wl} = 10700$  und eine Biot-Zahl  $B = 1.86$  dargestellt. Die Bilder a und e zeigen Photographien, die Bilder b und f Differentialinterferogramme horizontaler Strahlentrennung ( $e = 0,3 \text{ mm}$ ), die Bilder c und g Differentialinterferogramme vertikaler Strahlentrennung ( $e = 0,3 \text{ mm}$ ) und die Bilder d und h jeweils die Interpretation der Interferogramme in Form von Stromlinien in der flüssigen Phase. Die in Bild a gezeigte Struktur kam im Schmelzpfad und, bei anderen Rayleigh-Zahlen, auch im Gefrierpfad vor, die in Bild e gezeigte Struktur trat nur im Gefrierpfad auf.

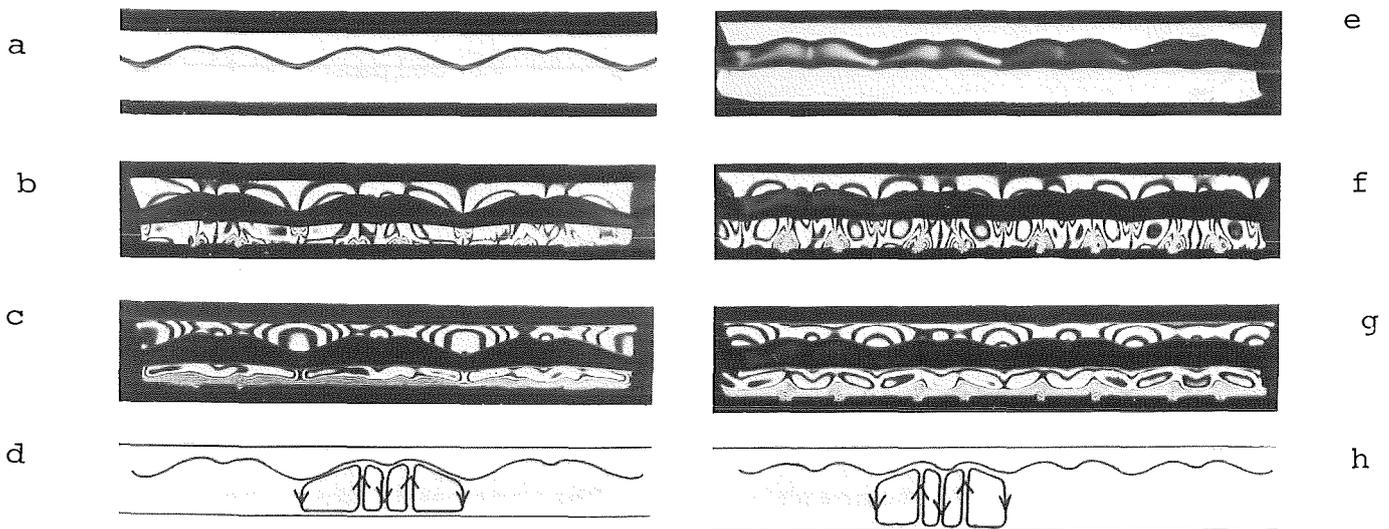


Abb. 21 Bimodale Strukturen der Phasentrennfläche bei den Kennwerten  $Ra_{wl} = 10700$ ,  $B = 1.86$ ; Bilder a,e: Photographien; Bilder b,f: Interferogramme horizontaler Strahlentrennung ( $e = 0,3 \text{ mm}$ ); Bilder c,g: Interferogramme vertikaler Strahlentrennung ( $e = 0,3 \text{ mm}$ ); Bilder d,h: Stromlinien;

Zum besseren Verständnis für die Strömungsvorgänge betrachten wir zunächst das Interferogramm f. Dort sind unten pro Periodenlänge an der unteren Flüssigkeitsberandung jeweils zwei Paare aus kleinen konzentrischen Linienmustern zu erkennen. In jedem dieser Muster liegt ein Abströmen senkrecht zur Wand vor (vergl. Kirch-artz (1980)). Aus dem Schatten der Phasentrennfläche ragen ebenfalls jeweils unterhalb der lokalen Höhenminima Teile solcher konzentrischer Linienmusterpaare heraus. Daher befinden sich dort jeweils lokale Abströme. Im Zusammenhang damit ist das Interferogramm vertikaler Strahlentrennung g zu interpretieren. Die hohe Liniendichte an der unteren Flüssigkeitsberandung weist wie beim Mach-Zehnder- und holographischen Interferometer auf die Ausbildung von Temperaturgrenzschichten hin. Die Ausbeulungen in den parallelen Linienmustern unten zeigen lokale Aufströme aus Temperaturgrenzschichten an. Unterhalb des Grenzflächenschattens ist eine Linie zu erkennen, die in den Zonen der lokalen Höhenminima Ausbeulungen nach unten aufweist. Dort sind jeweils Abtriebszonen. Die Interferogramme b und c auf der linken Seite lassen qualitativ die gleiche Interpretation zu. Damit ergeben sich die Strömungskonfigurationen in d und h. In beiden Fällen sind pro Periodenlänge zwei unterschiedlich große Wirbelpaare enthalten, wobei jeweils zwei unterschiedlich große Wellenlängen auftreten. Die Wirbel erstrecken sich über die gesamte Flüssigkeitshöhe (vergl. dagegen Abb. 19). Zur besseren Unterscheidung werden die Formen der Phasentrennfläche aus Bild e "kurze bimodale Strukturen", die Formen der Phasentrennfläche aus Bild a "mittlere bimodale Strukturen" genannt. Im folgenden werden "lange bimodale Strukturen" betrachtet (Abb. 22).

Bild a zeigt die Photographie einer Phasentrennfläche bei den Kennwerten  $Ra_{wl} = 16000$  und  $B = 1.51$ . Aus den Differentialinterferogrammen horizontaler Strahlentrennung (b) und vertikaler Strahlentrennung (c) läßt sich analog zu oben auf das Stromlinienbild (d) schließen. Die Struktur trat im Schmelz- und Gefrierpfad auf. Das Charakteristikum der Struktur in Abb. 22 ist wieder wie in Abb. 21 das gleichzeitige Auftreten von zwei diskreten, unterschiedlich großen Wellenlängen, wobei allerdings diesmal zwischen zwei großen vier kleine Wirbel liegen.

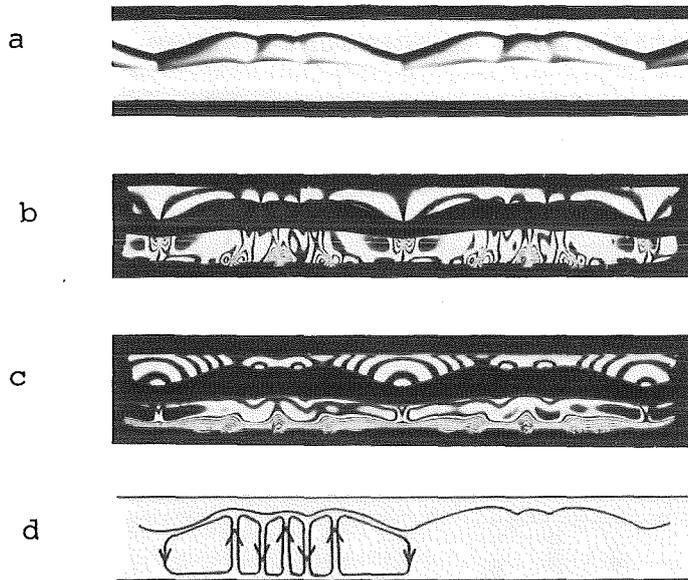


Abb. 22 Bimodale Grenzflächenstrukturen bei den Kennwerten  $Ra_{wl} = 16000$ ,  $B = 1.51$ ; a Photographie, b Interferogramm horizontaler Strahlentrennung ( $e = 0,3$  mm); c Interferogramm vertikaler Strahlentrennung ( $e = 0,3$  mm); d Stromlinien

Die kleinsten Wellenlängen sind bei allen drei bimodalen Strukturen gleich groß ( $2,5 \pm 0,5$  mm) und unabhängig von der Rayleigh-Zahl. In den langen und mittleren bimodalen Strukturen ist ferner eine zweite Wellenlänge enthalten, die von der Grundinstabilität bei der kritischen Rayleigh-Zahl herrührt. Eine dritte Länge ist in den kurzen bimodalen Strukturen enthalten. Sie ist etwa so groß wie die Differenz zwischen den beiden Erstgenannten und wird als Ergebnis der nichtlinearen Wechselwirkung zwischen diesen interpretiert. Diese dritte Wellenlänge tritt jedoch auch separat in Form einer reinen Walzenstruktur auf (Abb. 23). Diese Walzenstruktur unterscheidet sich im Hinblick auf ihre Wellen-Zahlen deutlich von allen anderen Strukturen (vergl. Kap. 4.2.3). Die Strömung in der flüssigen Phase hat Grenzschichtcharakter (vergl. Bild c) und die Rayleigh-Zahl (31000) ist größer als bei allen bimodalen Strukturen, die beobachtet wurden. Dennoch traten an keiner Stelle die kleinen Wirbel auf, die für die bimodalen

Strukturen charakteristisch sind. Ferner war die Strömung in der flüssigen Phase überall stationär, es konnten interferometrisch keinerlei Zeitabhängigkeiten ausgemacht werden.

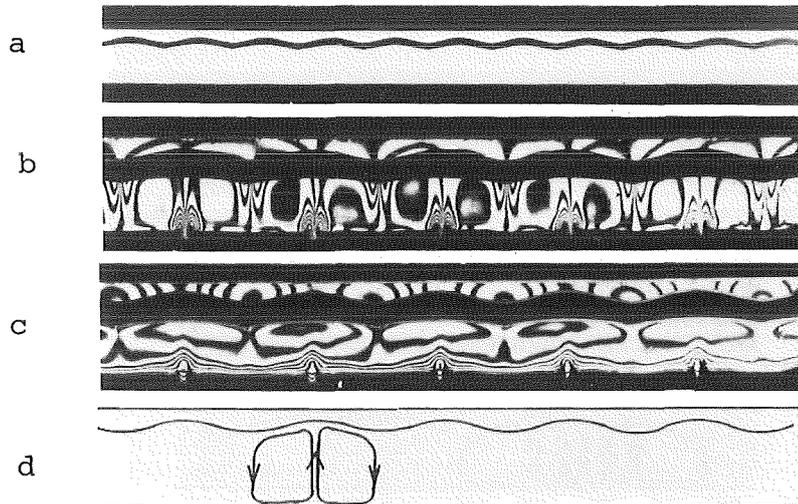


Abb. 23 Walzenstrukturen mit Wellen-Zahlen um 4,5;  $Ra_{w1} = 31000$ ,  $B = 1.0$ . a Photographie, b Interferogramm horizontaler Strahlentrennung ( $e=0,3$  mm), c Interferogramm vertikaler Strahltrennung ( $e=0,3$  mm), d Stromlinien

Um den Effekt der bimodalen Strukturen besser einordnen zu können, wird im folgenden Kapitel das Auftreten der kleinen Wellenlängen der Größe  $2,5 \pm 0,5$  mm mit einer einfachen Modellvorstellung erklärt.

#### 4.2.2.2 Interpretation

Wie wir eingangs des letzten Kapitels gesehen hatten (Abb. 19), wurde die Entstehung bimodaler Strukturen durch kleine Wirbel in der Temperaturgrenzschicht an der unteren Flüssigkeitsberandung initiiert. Dies gibt Anlaß zu einer Stabilitätsbetrachtung der Grenzschichten. In Abb. 24 ist ein Modell nach Howard (1964) dargestellt. Dort wird angenommen, daß der Temperaturabfall über die Schicht im wesentlichen in den beiden Grenzschichten stattfindet. Es wird nun diejenige Grenzschichtdicke  $\delta$  gesucht, die gerade zur Instabilität führt. Hierzu wird mit der Dicke  $\delta$  und der halben Temperaturdifferenz über die flüssige Schicht  $\Delta T_1/2$  eine kritische Rayleigh-Zahl  $Ra_{c,\delta}$  gebildet. Aus der Kenntnis des

Bénard-Problems liegt ihr Wert zwischen dem Wert für den Grenzfall mit beidseitig festen Berandungen (1708) und dem Wert für den Grenzfall mit einseitig freier und einseitig fester Berandung (1101) (Chandrasekhar (1961)). Damit läßt sich nach dem Zusammenhang

$$\delta_c = (Ra_{c,\delta} \frac{\nu \kappa_1}{g\beta(\Delta T_1/2)})^{1/3} \quad (4.3)$$

die kritische Grenzschichtdicke  $\delta_c$  mit den Stoffdaten und der Temperaturdifferenz  $\Delta T_1$  aus dem Experiment eingrenzen zu:  
 $2,1 \text{ mm} \leq \delta_c \leq 2,4 \text{ mm}$ .

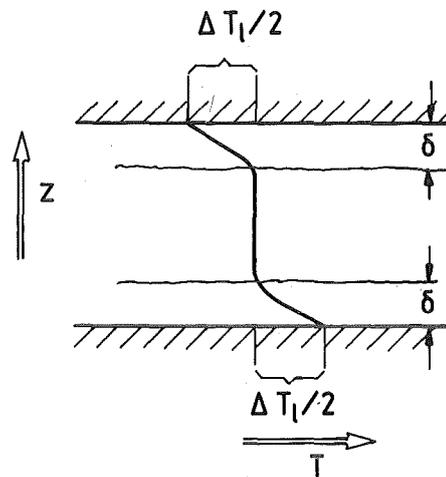


Abb. 24 Temperaturverlauf nach einem Grenzschichtmodell von Howard (1964)

Es wird nun weiter aus der Kenntnis solcher Vorgänge beim Bénard-Problem argumentiert, daß die Wellenlänge der Grenzschichtinstabilität etwa so groß wie die Dicke  $\delta_c$  der Grenzschicht selbst, also etwa 2 mm groß ist. Daraus wird für das hier betrachtete System die Schlußfolgerung gezogen, daß die kleinen Wellenlängen der Größe  $2,5 \pm 0,5 \text{ mm}$  bei den bimodalen Strukturen als Grenzschichtinstabilitäten zu deuten sind. Ferner wird die Konstanz dieser kleinen Wellenlängen der Tatsache zugeschrieben, daß für das betrachtete Experiment alle Größen in (4.3), insbesondere die Temperaturdifferenz  $\Delta T_1$ , konstant waren. In der weiteren Beschreibung werden die betrachteten, kleinen Längen als "Grenzschichtwellenlängen" bezeichnet und von den "Grundwellenlängen" unterschieden, die mit der Flüssigkeitshöhe skalieren und bei der kritischen Rayleigh-Zahl erstmals auftreten.

Die Interpretation bimodaler Strukturen als Synthese von Grund- und Grenzschichtwellenlängen ist in ähnlicher Form aus dem Bénard-Problem bekannt. Dort findet man in Schichten großer horizontaler Erstreckung bei Rayleigh-Zahlen oberhalb 20000 Strukturen, die sich als Überlagerung von Walzen mit der Grundwellenlänge und senkrecht dazu liegenden Walzen in den Grenzschichten mit Abmessungen der Grenzschichtdicke auffassen lassen (Busse & Whitehead (1971), Busse (1979)). Im Unterschied dazu treten im betrachteten System die kleinen Wellenlängen als separate Größen neben den Grundwellenlängen auf. Ferner liegen die kleinen und großen Wirbel parallel nebeneinander und erstrecken sich beide über die gesamte Höhe der flüssigen Phase. Doch im Hinblick auf den physikalischen Mechanismus sind die Interpretationen im Bénard- und im betrachteten System gleich. Ferner sind die Strömungen mit bimodaler Struktur in beiden Fällen zunächst stationär. Erst bei höheren Rayleigh-Zahlen treten im Bénard-Problem und auch beim hier betrachteten System zeitabhängige Strömungen auf. Diese werden als nächstes betrachtet.

#### 4.2.2.3 Instationäre Vorgänge bei hohen Rayleigh-Zahlen

Die im folgenden beschriebenen Zustände wurden dadurch erreicht, daß die oberen Randtemperaturen, bei denen sich bimodale Trennflächenstrukturen eingestellt hatten, weiter erhöht und dadurch die Flüssigkeitshöhen weiter vergrößert wurden. In Abb. 25 wird ein erstes Phänomen deutlich, das dabei auftrat. Gut erkennbar ist der Wellencharakter der Phasentrennfläche (Bild a). Die bimodalen Strukturen sind wieder verschwunden. Die Ursachen hierfür werden den Interferogrammen entnommen. Im Interferogramm vertikaler Strahlentrennung b ( $e = 0,3 \text{ mm}$ ) ist erkennbar, daß an beiden Flüssigkeitsberandungen unten und oben thermische Grenzschichten aufgetreten sind. Im Differentialinterferogramm horizontaler Strahlentrennung c ( $e = 0,3 \text{ mm}$ ) ist jedoch deutlich eine Unsymmetrie zu erkennen. An der unteren Berandung sind eine Reihe von kreisförmigen Linienstrukturen sichtbar. Diese waren deutlich zeitabhängig. Sie pulsierten mit Periodendauern von typisch 20 sec und sind als Instabilitäten der unteren Temperaturgrenzschicht zu deuten. (Die Temperaturdiffusionszeit, die sich mit

der oben abgeleiteten kritischen Grenzschichtdicke  $\delta_c$  ( $Ra_{c,\delta} = 1101$ ) bilden läßt, beträgt 48 sec). Demgegenüber war kaum Bewegung unterhalb der Phasengrenzfläche zu erkennen. Die Temperaturgrenzschicht dort war zeitlich stabil. Ferner waren die Abtriebszonen ortsfest, die Strömung dort war stationär. In Abb. 25d sind Stromlinien ohne die instationären Vorgänge in der unteren Temperaturgrenzschicht dargestellt.

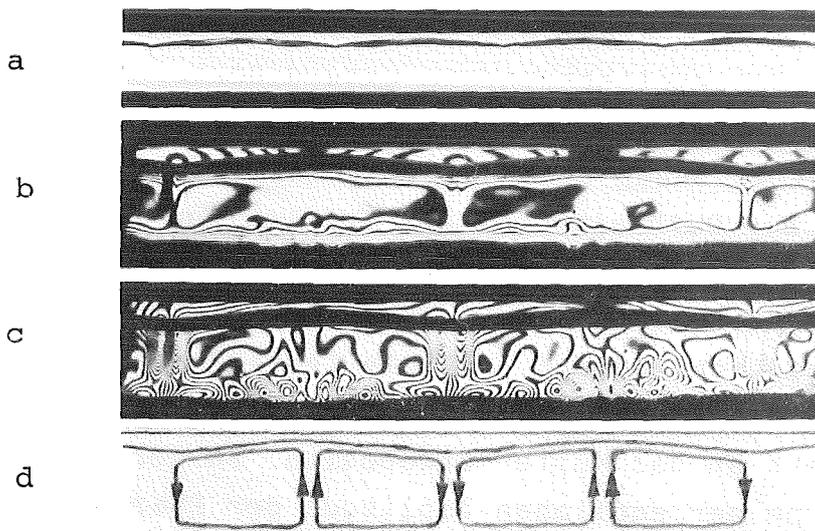


Abb. 25 Instationäre Strömungen in der thermischen Grenzschicht an der unteren Flüssigkeitsberandung;  $Ra_{w1} = 41000$ ,  $B = 0.83$ ; a Photographie, b Differentialinterferogramm vertikaler Strahlentrennung ( $e=0,3$  mm), c Differentialinterferogramm horizontaler Strahlentrennung ( $e=0,3$  mm), d Stromlinien

Aus diesen Vorgängen werden folgende Schlußfolgerungen gezogen. Die Latentwärme, die bei jedem transienten Vorgang an der Phasentrennfläche umgesetzt werden muß, wirkt dämpfend auf die darunter befindliche Temperaturgrenzschicht und verhindert in dieser das Entstehen von Instabilitäten. Dagegen ist an der unteren Flüssigkeitsberandung der Aufbau einer transienten Temperaturgrenzschicht ohne Rückwirkung auf das Kupfer möglich. Dies bedingt das Pulsieren der dortigen Grenzschicht. Ferner wird durch das transiente Verhalten der Strömung das Entstehen der kleinen Wellenlängen der bimodalen Strukturen in den Auftriebszonen verhindert.

Im Bénard-Problem wurde ein solch diskreter Übergang wie im betrachteten System, von der Grundinstabilität bei der kritischen Rayleigh-Zahl über die oben beschriebene Art der stationären bimodalen Konvektion zur instationären Bewegung der Temperaturgrenzschichten, an keiner Stelle beobachtet (Busse (1978)). Diese Vorgänge werden hier der Wirkung der gewellten Phasengrenzfläche zugeschrieben, die über einen Filtereffekt bei mittleren Rayleigh-Zahlen zwei ganz diskrete Wellenlängen selektiert und über einen weiten Bereich von Rayleigh-Zahlen instationäre Bewegungen an der oberen Flüssigkeitsberandung unterdrückt.

Bei der weiteren Erhöhung der Rayleigh-Zahl fand beim Meßpunkt  $Ra_{W1} = 170000$ ,  $B = 0,14$  eine weitere Entwicklung statt (Abb. 26). Die Strömung in der gesamten Flüssigkeit wurde transient. Die auftretende zusätzliche Instabilität an der oberen Flüssigkeitsberandung war dadurch bedingt, daß die feste Phase nur noch einige Zehntel Millimeter dick war und die Flüssigkeit dadurch thermisch fast direkt an das Kupfer ankoppelte. Ferner entfiel die stützende Wirkung der endlichen Amplitude der Phasengrenzfläche auf die Struktur der Konvektion.



Abb. 26 Instationäre Vorgänge in der gesamten Flüssigkeit;  $Ra_{W1} = 170000$ ;  $B = 0.14$ : Interferogramm horizontaler Strahlentrennung ( $e = 0,3$  mm)

Bei der Rayleigh-Zahl 250000,  $B = 0$  wurde der Bénard-Fall erreicht (Abb. 27). Die gesamte feste Phase ist geschmolzen, die Randbedingungen für die Flüssigkeit sind hier jetzt im Gegensatz zu den früher betrachteten Situationen oben und unten symmetrisch. Die Flüssigkeit hat hinsichtlich der Auf- und Abströme wieder eine räumlich periodische Struktur, weist aber deutlich zeitabhängige Vorgänge vor allem in den Grenzschichten unten und oben auf (typische Bildungszeiten: 10-20 sec).

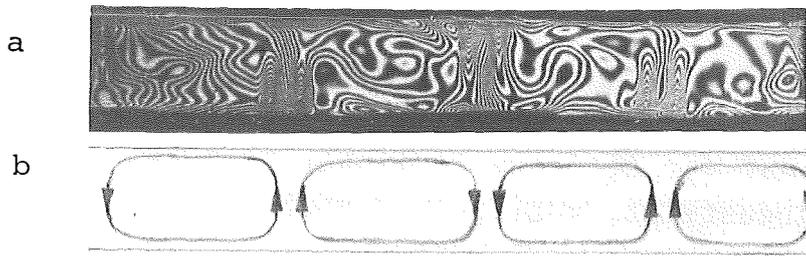


Abb. 27 Bénard-Fall;  $Ra_{wl} = 250000$ ;  $B = 0$ ; a Interferogramm horizontaler Strahlentrennung ( $e = 0,3 \text{ mm}$ ); b Stromlinien

Um die bislang qualitativ behandelten Wellenlängen quantitativ darzustellen, wird ein Ordnungsprinzip angewandt, bei dem Flüssigkeitshöhen und Wellenlängen zu einer Wellen-Zahl kombiniert werden. Nach diesem Ordnungsprinzip werden die Ergebnisse zusammengefaßt und Stabilitätsbetrachtungen zu den einzelnen Strukturen vorgenommen.

#### 4.2.3 Stabilität verschiedener Zustände

Mittlere Werte der Wellen-Zahl werden definiert als:

$$\bar{k}_p = \frac{2\pi \bar{h}_1}{\bar{l}_p} \quad (4.4)$$

Hierin ist  $\bar{h}_1 = (\bar{h}_o + \bar{h}_u)/2$  das arithmetische Mittel der mittleren oberen und mittleren unteren Flüssigkeitshöhen. Diese sind für jeden untersuchten Meßpunkt dem Anhang 7.1 zu entnehmen. Die Größe  $\bar{l}_p$  bezeichnet das arithmetische Mittel der Periodenlängen einer Struktur. Für die Berechnung der Streubreiten der Wellen-Zahlen werden lokale Werte der Höhen und Wellenlängen zugrunde gelegt. Die Vorgehensweise, die Wellen-Zahl mit den tatsächlichen Flüssigkeitshöhen und nicht wie die Rayleigh-Zahl mit der Wärmeleithöhe zu bilden, geht auf den Mechanismus zurück, der der Entstehung der Polygonal- und Walzenstrukturen zugrunde liegt. Es handelt sich dabei um ein Gleichgewicht zwischen der Leistung der Reibungskräfte an den festen Berandungen und dem Wärmefluß zwischen Auf- und Abtriebszone (Joseph (1976)). Für dieses Gleichge-

wicht sind nicht die Wärmeleithöhen, sondern die tatsächlichen mittleren Flüssigkeitshöhen relevant, die daher auch zur Definition der Wellen-Zahlen herangezogen werden.

In Abb. 28 sind auf der Abszisse im linken Teil des Diagramms Wellen-Zahlen dargestellt, wobei die Symbole die in Gleichung (4.4) definierten Mittelwerte  $\bar{k}_p$  angeben und die dünn gestrichelten Linien die zugehörigen Streubreiten. Auf der Abszisse im rechten Teil des Diagramms ist der Parameter B, auf beiden Ordinaten die Rayleigh-Zahl  $Ra_{wl}$  aufgetragen. Die Kurve im rechten Teil des Diagramms stellt dar, wie die beiden unabhängigen Kennzahlen  $Ra_{wl}$  und B während des gesamten Experimentes variiert wurden. Zu den angegebenen Werten von B ist im linken Teil des Diagramms die Kurve der neutralstabilen Lösungen (Kap. 2) aufgetragen (strich-punktiert).

Betrachten wir zunächst die Umgebung der kritischen Rayleigh-Zahl mit dem deutlich erkennbaren Effekt der unterkritischen Konvektion. Für die dort vorherrschende polygonale Grenzflächenstruktur wird als Periodenlänge jeweils der Abstand zwischen zwei Höhenmaxima gewertet. Die mittleren Wellen-Zahlen (Symbole) liegen bei Werten von 2,8 bis 3 und stimmen mit den kritischen Wellen-Zahlen der linearen Theorie für die betrachteten B-Werte überein ( $B \approx 4,5$ ,  $k_c \approx 2,82$ ). Nach Gleichung (2.26) würde man erwarten, daß die Mittelwerte der Wellen-Zahlen im Bereich der Polygonstruktur eher kleiner sein würden als die Wellen-Zahlen der linearen Theorie. Dieser Effekt sowie die beachtlichen Streubreiten der Wellen-Zahlen (-25 % und +45 % bis +60 %) werden dem Einfluß der Berandungen zugeschrieben. Diese stören die Struktur und verschieben das Spektrum der Wellenlängen zu kleineren Werten bzw. größeren Wellen-Zahlen (vergl. Abb. 12, 7).

Im Rayleigh-Zahl Bereich oberhalb  $2 \cdot 10^3$  verjüngen sich die Streubreiten. Dies liegt an der veränderten Struktur, die jetzt Walzencharakter aufweist (Abb. 17). Der Übergang von Polygon- in Walzenstrukturen ist mit einer kleinen Hystereseerscheinung zwischen Schmelz- und Gefrierpfad verbunden. Die mittleren Wellen-Zahlen im Bereich der Walzenstrukturen sind etwa so groß wie die

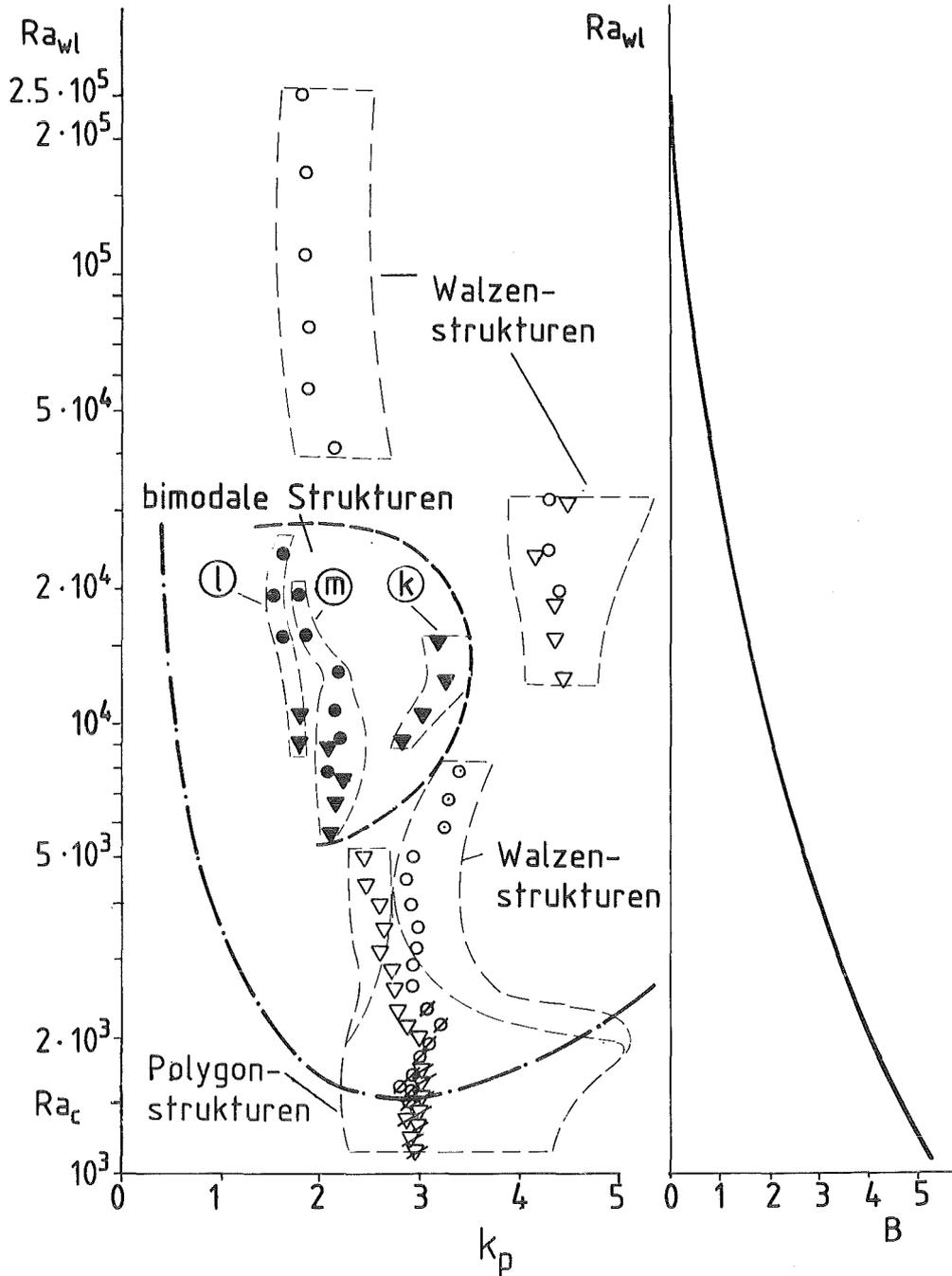


Abb. 28 Stabilitätsdiagramm für Strukturen der Phasentrennfläche im endlichen Behälter:  $k_p$  bezeichnet die Wellen-Zahl, die aus den mittleren Flüssigkeitshöhen und den Periodizitätslängen der einzelnen Strukturen gebildet ist;  $\diamond, \nabla$  Polygonstrukturen;  $\circ, \nabla$  Walzenstrukturen;  $\bullet, \blacktriangledown$  bimodale Strukturen, jeweils stationär für Schmelzpfad ( $\bullet$ ) und Gefrierpfad ( $\blacktriangledown$ ); — — — Markierungslinie der Streubreite der Meßpunkte;  $\odot$  instabile Walzenstrukturen; — · — Stabilitätsgrenze der linearen Theorie; - - - Stabilitätsgrenze bimodaler Strukturen; (l), (m) und (k) bezeichnen lange, mittlere und kurze bimodale Strukturen.

kritische Wellen-Zahl der linearen Theorie (um 2.8), wobei im Gefrierpfad hauptsächlich infolge der größeren Wellenlängen kleinere Wellen-Zahlen um bis zu 2.5 auftreten (Abb. 18). Die Streubreiten sind im Bereich der Walzenstrukturen deutlich kleiner (+17 %, -12 %) als im Bereich der Polygonstrukturen (+60 %, -25%). Infolge der hyperbolischen Beziehung zwischen Wellenlänge und Wellen-Zahl (4.4) fallen kurze Wellenlängen relativ mehr ins Gewicht als lange.

Im Rayleigh-Zahl Bereich des Schmelzpfades zwischen  $6 \cdot 10^3$  und  $8 \cdot 10^3$  ist eine Vergrößerung der Wellen-Zahlen festzustellen. Dies kommt dadurch zustande, daß die Wellenlängen konstant bleiben, während sich die Flüssigkeitshöhen weiter vergrößern. Hier befinden sich bereits kleine Ablösewirbel an der unteren Flüssigkeitsberandung. Alle drei Meßpunkte sind daher im Diagramm als instabil markiert, obwohl die Umbildung erst bei der Rayleigh-Zahl  $Ra_{W1} = 8 \cdot 10^3$  stattfindet. Hier liegt vermutlich eine Analogie zum Einsetzen der Konvektion im Bénard-Problem vor. Dort sind zwar die Zustände außerhalb der neutralstabilen Kurve stationär möglich, aber bei überkritischen Rayleigh-Zahlen nicht stabil, weil aus dem experimentell immer vorhandenen Rauschspektrum von Störungen stets diejenigen angefacht werden, deren Wellen-Zahlen innerhalb der Stabilitätsgrenze liegen.

Betrachten wir den Stabilitätsbereich der bimodalen Wellen innerhalb der dick gestrichelten Kurve. Die längsten Wellen weisen die kleinsten Wellen-Zahlen auf und umgekehrt. Die Streubreiten überlappen an keiner Stelle. Es ist anzumerken, daß es sich bei den Meßpunkten nicht um eine spektrale Betrachtungsweise von Teilwellenlängen, sondern um eine Gesamtbewertung der Periodenlänge der einzelnen Strukturen handelt. Der Stabilitätsbereich der bimodalen Strukturen ist nach drei Seiten durch Walzenstrukturen eingegrenzt. Diese unterscheiden sich im Hinblick auf ihre Wellen-Zahlen. Die stationären Wellen-Zahlen der Grundinstabilität bei der kritischen Rayleigh-Zahl liegen bei 2,5 bis 3, die Wellen-Zahlen, die sich im wesentlichen aus der Differenz der Grund- und Grenzschichtwellenlängen ergeben, liegen bei 4,5. Die beiden dadurch beschriebenen Arten von Walzenstrukturen weisen stationäre

Strömungen auf. Erst die Walzenstrukturen mit Wellen-Zahlen um 2 bei Rayleigh-Zahlen  $Ra_{wl} \geq 41000$  weisen instationäre Strömungen auf. Ihre Wellenlängen stellen die Summe aus Grund- und Grenzschichtwellenlängen dar, wobei letztere infolge der instationären Temperaturgrenzschichten räumlich nicht mehr stabil sind. Damit ist die Diskussion der Ergebnisse aus den Experimenten im endlichen Behälter abgeschlossen.

Im nächsten Kapitel wird eine Zusammenfassung aller Ergebnisse dieser Arbeit vorgenommen.

## 5. Zusammenfassung

Mit der linearen Theorie wurden kritische Rayleigh- und Wellenzahlen für das betrachtete Problem berechnet. Die kritischen Rayleigh-Zahlen nehmen um 12,6 %, die kritischen Wellenzahlen um 9,7 % ab, wenn der Parameter B von 0 auf Werte größer 1 ansteigt. Das liegt daran, daß eine dicker werdende feste Phase die Absorptionsfähigkeit der oberen Flüssigkeitsberandung für thermische Störungen vermindert.

Für eine Schicht großer horizontaler Erstreckung wurde gezeigt, daß die stationäre Struktur der Phasengrenzfläche maßgeblich von der Größe des Parameters B abhängt. Für Werte von B kleiner als 5 % werden Walzenstrukturen in der Phasengrenzfläche beobachtet, für Werte von B größer als 16 % durchweg Hexagonalstrukturen. Dieses Verhalten wird mit einer schwach nichtlinearen Störungstheorie von Davis, Müller & Dietsche (1983) interpretiert, derzufolge eine deformierbare Phasengrenzfläche auf die Vorgänge in der flüssigen Phase die gleiche Wirkung ausübt wie Nicht-Boussinesq'sche Eigenschaften der Stoffparameter.

Um Flüssigkeitshöhen quantitativ zu vermessen, wurde ein Experiment in einem endlichen Behälter durchgeführt. Beim Einsetzen und Verschwinden der Konvektion bei dicker fester Phase (Werte von B um 5) wurde ein ausgeprägtes Hystereseverhalten der Flüssigkeitshöhen festgestellt. Dabei traten Sprünge in den Höhen der stationären Zustände um 100 % auf, und die Rayleigh-Zahl wurde bei stationärer Konvektion um 25 % unter ihren kritischen Wert abgesenkt.

Die o.g. Störungstheorie kann eine solche Hysterese erklären, allerdings nur für Werte von B kleiner als 0.1. Dennoch wird im Rahmen einer qualitativen Übereinstimmung die Vorstellung als bestätigt betrachtet, daß von der deformierbaren Phasengrenzfläche die gleiche Wirkung auf die Flüssigkeit ausgeht wie von Nicht-Boussinesq'schen Eigenschaften der Stoffparameter. Ferner wurde eine quantitative Abschätzung der Flüssigkeitshöhen mit Hilfe einer Wärmeübergangsbetrachtung vorgestellt.

Bei einer Erhöhung der Rayleighzahlen tritt unter dem Einfluß vertikaler Berandungen eine Umbildung von Polygon- in Walzenstrukturen auf. Diese Walzenstrukturen werden bei weiterer Erhöhung der Rayleigh-Zahlen instabil. Neben dem Maß der Grundwellenlänge der Walzen tritt ein weiteres, kleineres Längenmaß in Erscheinung, das auf eine Instabilität der thermischen Grenzschichten an den Flüssigkeitsberandungen zurückzuführen ist. Dadurch entstehen sogenannte bimodale Strukturen in der Phasengrenzfläche. Diese bimodalen Strukturen sind daran zu erkennen, daß stets gleichzeitig zwei stationäre Konvektionswirbel mit zwei diskreten, aber sehr unterschiedlich großen Wellenlängen parallel und gegensinnig drehend nebeneinander liegen. Für die bimodalen Strukturen wurde ein Stabilitätsdiagramm erstellt. Bei sehr hohen Rayleigh-Zahlen treten instationäre Vorgänge in den Temperaturgrenzschichten auf. Bei der Erniedrigung der Rayleigh-Zahlen wurden im wesentlichen die gleichen Effekte gefunden wie bei der Versuchsführung mit wachsenden Rayleigh-Zahlen.

## 6. Literaturverzeichnis

- Bathelt, A.G.; Viskanta, R.; Leidenfrost, W.; 1979.  
"An experimental investigation of natural convection in the melted region around a heated horizontal cylinder". J. Fluid Mech., 90: 227-239
- Boger, D.V.; Westwater, J.W.; 1967  
"Effect of buoyancy on the melting and freezing process." J. Heat Transfer, 89: 81-89
- Busse, F.H.; 1967 a  
"The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle." J. Fluid Mech., 30: 625-649
- Busse, F.H.; 1967 b  
"On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below." J. Math. and Phys., 46: 140-149
- Busse, F.H.; Whitehead, J.A.; 1971  
"Instabilities of convection rolls in a high Prandtl number fluid." J. Fluid Mech., 47: 305-320.
- Busse, F.H.; 1978  
"Non-linear properties of thermal convection." Rep. Prog. Phys., 74: 1929-1967
- Busse, F.H.; 1979  
"High Prandtl number convection." Phys. Earth Planetary Interiors, 19: 149-157
- Carey, V.P.; Gebhart, B.; 1982  
"Transport near a vertical ice surface melting in saline water: experiments at low salinities." J. Fluid Mech., 117: 403-423
- Catton, J.; 1978  
"Natural convection in enclosures." Proc. 6th Int. Heat Transfer Conf., Toronto, 6: 13-30 (August 7-11)
- Chalmers, B.; 1977  
"Principles of Solidification." R.E. Krieger, Publishing Co. Huntington, New York
- Chandrasekhar, S.; 1961  
"Hydrodynamic and hydromagnetic stability." Clarendon Press, Oxford.
- Chiesa, F.M.; Guthrie, R.I.L.; 1974  
"Natural convective heat transfer rates during the solidification and melting of metals and alloy systems." J. Heat Transfer, 8: 377-384
- Coriell, S.R.; Cordes, M.R.; Boettinger, W.J.; Sekerka, R.F.; 1980  
"Convective and interfacial instabilities during unidirectional solidification of a binary alloy." J. Crystal Growth, 49: 13-28
- Damm, P.; 1982  
Unveröffentlichte Ergebnisse

- Davis, S.H.; 1967  
"Convection in a box: linear theory." J. Fluid Mech., 30: 465-478
- Davis, S.H.; Segel, L.A.; 1968  
"Effects of surface curvature and property variation on cellular convection." Phys. Fluids, 11: 470-476
- Davis, S.H.; Müller, U.; Dietsche, C.; 1983  
"Pattern selection in single-component systems coupling Benard-convection and solidification." Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK-Bericht 3641
- Dietsche, C.; Müller, U.; 1982  
Unveröffentlichter Bericht
- Farhadieh, R.; Tankin, R.S.; 1975  
"A study of the freezing of sea water." J. Fluid Mech., 71: 293-304
- Fisher, K.M.; 1981  
"The effects of fluid flow on the solidification of industrial castings and ingots." Physico Chemical Hydrodynamics, 2: 311-326
- Foster, T.D.; 1969  
"Experiments on haline convection induced by the freezing of sea water." J. Geophys. Res., 74, 6967-6974
- Frick, H.; Clever, R.M.; 1980  
"Einfluß der Seitenwände auf das Einsetzen der Konvektion in einer horizontalen Flüssigkeitsschicht." ZAMP, 31: 502-513
- Gau, C.; Viskanta, R.; Ho, C.J.; 1983  
"Flow visualization during solid-liquid phase change heat transfer II. Melting in a rectangular cavity." Int. Comm. Heat Mass Transfer, 10: 183-190
- Gershuni, G.Z.; Zhukhovitskii, E.M.; 1976  
"Convective instability of incompressible fluids." Keter Publishing House Jerusalem Ltd.
- Gray, D.D.; Giorgini, A.; 1976  
"The validity of the Boussinesq approximation." Int. J. Heat Mass Transfer, 19: 545-551
- Günther, C.; 1981  
"Numerische Untersuchung der Naturkonvektion in einer von unten beheizten, schmalen Hele-Shaw-Zelle." Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK-Bericht 3142
- Hale, N.W.; Viskanta, R.; 1978  
"Photographic observation of the solid-liquid interface motion during melting of a solid heated from an isothermal vertical wall." Letters Heat Mass Transfer, 5: 329-337
- Hame, W.; Müller, U.; 1980  
"Freie Konvektion in Schmelzen mit inneren Wärmequellen und verfestigten Rändern." Acta Mechanica, 35: 83-107

- Hayashi, Y.; Komori, T.; 1979  
"Investigation of freezing of salt solutions in cells." J. Heat Transfer, 101: 459-464
- Heertjes, P.M.; Jongenelen, F.C.H.; Leeuw, J.A.; 1970  
"The effect of a moving boundary on heat transfer by free convection." Chem. Eng. Science, 25: 1881-1890
- Heitz, W.L.; Westwater, J.W.; 1971  
"Critical Rayleigh numbers for natural convection of water confined in square cells with L/D from 0.5 to 8." J. Heat Transfer, 93: 188-196
- Ho, C.J.; Viskanta, R.; 1982  
"Experimental study of melting in a rectangular cavity." Proc. 7th Int. Heat Transfer Conf. München, 2: 369-374 (September 6-10)
- Hopfinger, E.J.; Atten, P.; Busse, F.H.; 1979  
"Instability and convection in fluid layers: a report on Euromech 106." J. Fluid Mech., 92: 217-240
- Howard, L.N.; 1964  
"Convection at high Rayleigh number." In: H. Görtler (Herausgeber), Proc. 11th Int. Congr. of Applied Mechanics, München. Springer, Berlin: 1109-1115
- Hurle, D.T.J.; Jakeman, E.; Pike, E.R.; 1967  
"On the solution of the Benard problem with boundaries of finite conductivity." Proc. Roy. Soc. London, 269: 469-475
- Hurle, D.T.J.; Jakeman, E.; 1981  
"Introduction to the techniques of crystal growth." Physico-Chemical Hydrodynamics, 2: 237-244
- Jakeman, E.; Hurle, D.T.J.; 1972  
"Thermal oscillations and their effect on solidification processes." Rev. Phys. Technology, 3: 3-30
- Joseph, D.D.; 1976  
"Stability of fluid motion I+II." Springer-Verlag, Berlin
- Kirchartz, K.-R.; 1980  
"Zeitabhängige Zellularkonvektion in horizontalen und geneigten Behältern." Dissertation Universität Karlsruhe
- Koschmieder, E.L.; 1974  
"Benard convection." Adv. Chem. Phys., ed. Prigogine & Rice, 26: 177-212
- Koster, J.N.; 1980  
"Freie Konvektion in vertikalen Spalten." Dissertation Universität Karlsruhe
- Krishnamurti, R.; 1973  
"Some further studies on the transition to turbulent convection." J. Fluid Mech., 60: 285-303

- Langlois, W.E.; 1981  
"Convection in Czochralski growth melts." *Physico-Chemical Hydrodynamics*, 2: 245-261
- Laudise, R.A.; 1970  
"The growth of single crystals." Prentice-Hall, Inc., New Jersey
- Marshall, R.; 1981  
"Experimental experience with the ASHRAE/NBS procedures for testing a phase change thermal storage device." in: *International Conference on Energy Storage, Brighton, U.K.*, 1: 129-143 (April 29 - May 1)
- Marshall, R.; Dietsche, C.; 1982  
"Comparisons of paraffin wax storage subsystem models using liquid heat transfer media." *Solar Energy*, 29: 503-511
- Mihaljan, J.M.; 1962  
"A rigorous exposition of the Boussinesq-approximation applicable to a thin layer of fluid." *Astrophysical J.*, 136: 1126-1133
- Moor, D.R.; Weiss, N.O.; 1973  
"Nonlinear penetrative convection." *J. Fluid Mech.*, 61: 553-581
- Münch, E.; 1980  
Unveröffentlichte Ergebnisse
- Mullins, W.W.; Sekerka, R.F.; 1964  
"Stability of a planar interface during solidification of a dilute binary alloy." *J. Appl. Phys.*, 35: 444-451
- Neumann, H.-G.; 1958  
"Zellmuster auf der Oberfläche eines Teiches." *Beitr. Phys. Atmos.*, 30: 246-253
- Nield, D.A.; 1968  
"The Rayleigh-Jeffreys problem with boundary slab of finite conductivity." *J. Fluid Mech.*, 32: 393-398
- O'Toole, J.L.; Silveston, P.L.; 1961  
"Correlations of convective heat transfer in confined horizontal layers." *Chem. Eng. Progr. Symp. Ser.*, 57: 81-86
- Page, J.K.R.; Swayne, R.E.H.; 1981  
"Phase change thermal storage for solar applications." *Int. Conf. Energy Storage, Brighton, U.K.*, 1: 165-170 (April 29 - May 1)
- Palm, E.; 1960  
"On the tendency towards hexagonal cells in steady convection." *J. Fluid Mech.*, 8: 183-192
- Pantaloni, J.; Velarde, M.G.; Bailleux, R.; Guyon, E.; 1977  
"Sur la convection cellulaire dans les sels fondus pres de leur point de solidification." *Comptes Rendus Academie des Sciences* 285 B: 275-278
- Rosenberger, F.; 1979  
"Fundamentals of Crystal Growth I." Springer Berlin

Rutter, J.W.; Chalmers, B.; 1953

"A prismatic substructure formed during solidification of metals." *Can. J. Phys.*, 31: 15-39

Schies, B.; 1981

Unveröffentlichte Ergebnisse

Segel, L.A.; Stuart, J.T.; 1962

"On the question of the preferred mode in cellular thermal convection." *J. Fluid Mech.*, 13: 289-306

Sparrow, E.M.; Goldstein, R.J.; Jonsson, V.K. 1964

"Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and non-linear temperature profile." *J. Fluid Mech.*, 18: 513-528

Sparrow, E.M.; Schmidt, R.R.; Ramsey, J.W.; 1978

"Experiments on the role of natural convection in the melting of solids." *J. Heat Transfer*, 100: 11-16

Sparrow, E.M.; Mendes, P.S.; 1982

"Natural convection heat transfer coefficients measured in experiments on freezing." *Int. J. Heat Mass Transfer*, 25: 293-297

Sriranganathan, R.; Wollkind, D.J.; Oulton, D.B.; 1983

"A theoretical investigation of the development of interfacial cells during the solidification of a dilute binary alloy: comparison with the experiments of Morris and Winegard." *J. Crystal Growth*, 62: 265-283

Stork, K.; Müller, U.; 1972

"Convection in boxes: experiments." *J. Fluid Mech.*, 54: 599-611

Sugawara, M.; Fukusako, S.; Seki, N.; 1975

"Experimental studies on the melting of a horizontal ice layer." *Bulletin of the JSME*, 18: 714-721

Thomas, L.J.; Westwater, J.W.; 1963

"Microscopic study of solid-liquid interfaces during melting and freezing." *Chem. Eng. Prog. Symp. Ser.*, 59: 155-164

Turner, W.D.; Siman-Tov, J.J.; 1971

"HEATING 3 - an JBM 360 heat conduction program." Union Corporation, Nuclear Division, Oak Ridge, Tennessee (ORNL-TM-3208).

Walden, R.W.; Ahlers, G.; 1981

"Non-Boussinesq and penetrative convection in a cylindrical cell." *J. Fluid Mech.*, 109: 89-114

Walton, D.; Tiller, W.A.; Rutter, J.W.; Winegard, W.C.; 1955

"Instability of a smooth solid-liquid interface during solidification." *J. Metals*, 9: 1023-1026

Yen, Y.C.; 1980

"Free Convection heat transfer characteristics in a melt water layer." *J. Heat Transfer*, 102: 550-556

Zierep, J.: 1958

"Über die Bevorzugung der Sechseckzellen bei Konvektionsströmungen über einer gleichmäßig erwärmten Grundfläche." Beitr. Phys. Atmos., 31: 31-39

Zierep, J.; 1963

"Zellularkonvektionsströmungen in Gefäßen endlicher horizontaler Ausdehnung." Beitr. Phys. Atmos., 36: 70-76

7. Anhang

7.1 Flüssigkeitshöhen für das gesamte Experiment im endlichen Behälter

Die oberen Flüssigkeitshöhen und die Amplituden der Phasengrenzflächen sind wie die Wellenlängen der Grenzflächen frei veränderliche, innere Längen des untersuchten Systems. In Abb. 29 werden in Abhängigkeit der Rayleigh-Zahl mehrere ausgezeichnete Flüssigkeitshöhen diskutiert: Die normierten oberen Flüssigkeitshöhen  $h_0/h$  (volle Symbole), die unteren Flüssigkeitshöhen  $h_u/h$  (durchstrichene Symbole), die über die Randtemperaturen eingestellte

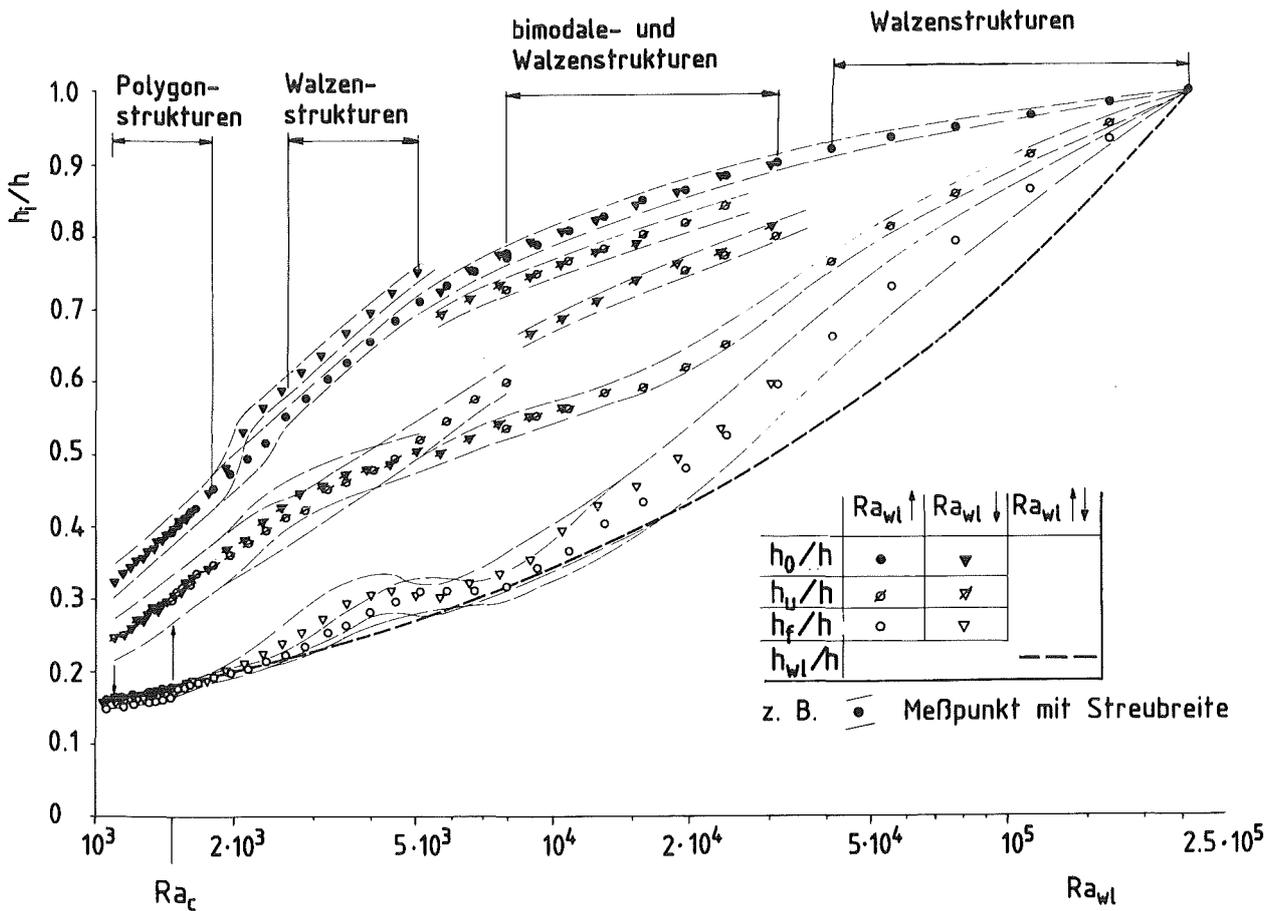


Abb. 29 Normierte obere Flüssigkeitshöhen  $h_0/h$ , untere Flüssigkeitshöhen  $h_u/h$ , Flüssigkeitshöhen an den vertikalen Fenstern  $h_f/h$  und Wärmeleithöhen  $h_{wl}/h$  in Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl im endlichen Behälter.

Wärmeleithöhe  $h_{w1}/h$  (dick gestrichelt) sowie die Fensterhöhe  $h_f/h$  (leere Symbole). Letzteres sind die Höhen der flüssigen Phase an den vertikalen Plexiglasberandungen vorne und hinten. Runde Symbole bezeichnen Meßpunkte im Schmelzpfad, Dreiecke bezeichnen Meßpunkte im Gefrierpfad, wobei die Symbole jeweils das arithmetische Mittel aller Messungen im Behälter bei vorgegebenen Randtemperaturen angeben. Zu allen Meßpunkten sind die Streubreiten (dünn gestrichelt) mit eingezeichnet. Die Fehlertoleranzen der Höhenmessungen sind so klein, daß sie im Diagramm nur als Punkte erscheinen würden.

Zur Hysterese im Bereich der kritischen Rayleigh-Zahl sind neben den oberen Höhen, die bereits in Kapitel 4.2.1 betrachtet wurden, auch die unteren Höhen und die Fensterhöhen zu diskutieren. Die unteren Flüssigkeitshöhen weisen eine größere Streubreite als die oberen Flüssigkeitshöhen auf. Dies ist charakteristisch für die beobachtete Polygonstruktur. Der Ausdruck  $(\bar{h}_o - \bar{h}_u) / ((\bar{h}_o + \bar{h}_u) / 2)$ , d.h. die Welligkeit der Grenzfläche bezogen auf die mittlere Flüssigkeitshöhe, beträgt für Rayleigh-Zahlen zwischen 1080 und 1800 konstant etwa 27 %.

Im Schmelzpfad bei unterkritischen Rayleigh-Zahlen wurde an den vertikalen Plexiglasberandungen ein leichtes Verbiegen der Phasengrenzfläche nach unten festgestellt, so daß die Fensterhöhe um einige Prozent kleiner war als die Flüssigkeitshöhe im Rest des Behälters. Dieser Nebeneffekt wird den thermischen Eigenschaften der Ränder zugeschrieben und in Kapitel 7.3 im Zusammenhang mit einem Vorexperiment erläutert. Bei Konvektion in der flüssigen Phase wurden die Fensterhöhen weiterhin im wesentlichen durch die Wärmeleithöhe bzw. die Wärmeleitung in den Plexiglasberandungen und der randnahen Grenzschicht (Haftbedingung) fixiert.

In dem mit "Walzenstrukturen" markierten Teilbereich waren die oberen Höhen (volle Symbole) im Gefrierpfad (Dreiecke) größer als im Schmelzpfad (Kreise), wie entsprechend auch die Wellenlängen im Gefrierpfad größer waren als im Schmelzpfad (Abb. 18). Im Zwischenbereich zwischen Polygon- und Walzenstrukturen ist die Hysterese der oberen Flüssigkeitshöhen zu erkennen. Die unteren

Flüssigkeitshöhen (durchstrichene Symbole) weisen im Bereich der Walzenstrukturen eine größere Streubreite als die oberen Flüssigkeitshöhen und geringfügige Unterschiede in Schmelz- und Gefrierpfad auf. Der Ausdruck  $(\bar{h}_o - \bar{h}_u) / ((\bar{h}_o + \bar{h}_u) / 2)$ , d.h. die Welligkeit der Phasentrennfläche bezogen auf die mittlere Flüssigkeitshöhe, variierte im Bereich der Walzenstrukturen zwischen 30 % und 40 %.

In dem mit "bimodalen-und Walzen- Strukturen" markierten Bereich fallen alle oberen Flüssigkeitshöhen (volle Symbole) in das gleiche Band, unabhängig davon, ob die Messungen im Schmelz- oder im Gefrierpfad gemacht wurden und unabhängig auch davon, welcher Strukturtyp vermessen wurde. Im gleichen Bereich gibt es drei Bänder mit unteren Flüssigkeitshöhen (durchstrichene Symbole). Sie entsprechen den drei Klassen von unterschiedlich großen Wellenlängen, die im Zusammenhang mit den bimodalen Strukturen in Kapitel 4.2.3 diskutiert wurden und in Abb. 21 zu erkennen sind. Das oberste und unterste der drei Bänder mit durchstrichenen Symbolen beschreiben die langen und mittleren bimodalen Strukturen. Das Band dazwischen beschreibt die unteren Flüssigkeitshöhen der Walzenstrukturen mit Wellen-Zahlen um 4,5 sowie die kleineren unteren Flüssigkeitshöhen der kurzen bimodalen Strukturen.

Die Fensterhöhen sind auch im hier betrachteten Bereich im wesentlichen durch die Wärmeleithöhe fixiert. Erst am oberen Bereichsende tritt eine stärkere Abweichung auf (20 %).

Im Rayleigh-Zahl-Bereich zwischen 41000 und 250000 treten zeitabhängige Instabilitäten der Temperaturgrenzschichten auf (Abb. 25, 26 und 27).

Die Flüssigkeitshöhen sind bei allen betrachteten Effekten im endlichen Behälter eine wichtige Größe: bei der Hystereseerscheinung bei der kritischen Rayleigh-Zahl, bei der Umbildung von Polygon- in Walzenstrukturen und bei der Ausbildung von Temperaturgrenzschichten. Im folgenden Kapitel werden die Ergebnisse eines Modells zur quantitativen Abschätzung der Flüssigkeitshöhen dargestellt.

7.2 Modell zur Abschätzung mittlerer Flüssigkeitshöhen für allgemeine Rayleigh- und Biot-Zahlen

Es handelt sich hierbei um die dimensionslose Darstellung der Wärmeübergangsbetrachtung, die bei der Interpretation der Hystereseerscheinung in der Umgebung der kritischen Rayleigh-Zahl (Kap. 4.2.1.3) für drei spezielle Temperaturdifferenzen ausgeführt worden ist. In Abb. 30 sind die Ergebnisse dargestellt. Eingezeichnet sind Linien konstanter B-Werte mit Schrittweiten in B von 0,1 sowie fünf Linien konstanter Rayleigh-Zahl. Ferner sind die Traversen der beiden Experimente in Kapitel 3 sowie des Experimentes in Kapitel 4 eingezeichnet.

Für konstantes B ist die Wärmeleithöhe  $h_{w1}/h = (1+B)^{-1}$  konstant. Die tatsächliche Flüssigkeitshöhe  $\bar{h}_l/h$  weicht für überkritische

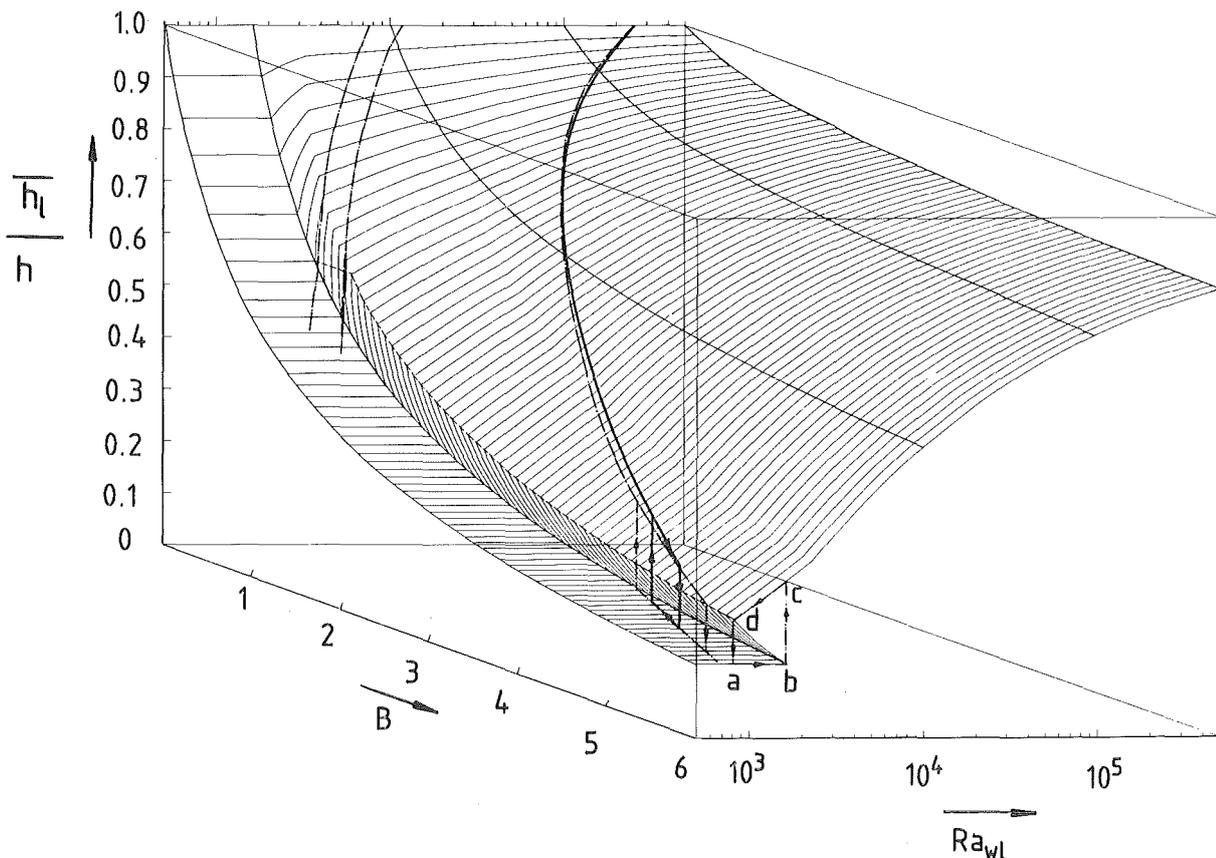


Abb. 30 Abhängigkeit mittlerer Flüssigkeitshöhen von Rayleigh- und Biot-Zahlen: — gemessene Höhen (Kap. 4); -.- modellierte Höhen bei den Rayleigh- und Biot-Zahlen aus drei Experimenten; ... Hysterese bei  $B = 6$ .

Rayleigh-Zahlen davon ab. Dieser Effekt ist klein im Bereich kleiner  $B$ , ist jedoch erheblich größer im Bereich großer  $B$ . Zum weiteren ergibt sich im Bereich großer  $B$  eine Verwerfung bei der kritischen Rayleigh-Zahl. Dies charakterisiert die Hystereseerscheinung (vergl. die Kurve a-b-c-d). Für Werte von  $B$  kleiner 0,7 tritt im Rahmen der Modellabschätzung keine Verwerfung der Kurven mit  $B = \text{const.}$  bzw. keine Hysterese mehr auf. Dies entspricht der Aussage der Störungstheorie, daß die Hysterese der Flüssigkeitshöhen bei der kritischen Rayleigh-Zahl und Werten von  $B$  um 0,1 mit gängigen Methoden nicht meßbar ist (vergl. Davis, Müller & Dietsche (1983)).

Betrachten wir die Experiment-Traversen in Abb. 30. Eingezeichnet sind strichpunktiert diejenigen Höhen, die die Modellabschätzung bei den in den Experimenten eingestellten Werten von  $Ra_{wl}$  und  $B$  liefert. Dick durchgezogen sind ferner die Messungen aus dem Experiment in Kapitel 4. Es handelt sich um das arithmetische Mittel sämtlicher in Schmelz- und Gefrierpfad gemessenen Flüssigkeitshöhen. Die Übereinstimmung zwischen Modell und Messung ist gut. Nur die Breite der Hysterese wird vom Modell als zu groß berechnet. Hierzu gibt es in der Literatur einen vergleichbaren Fall. Walden & Ahlers (1981) untersuchten flüssiges Helium um  $2 \text{ }^\circ\text{K}$  bei einer Genauigkeit der Temperaturmessung von  $10^{-5} \text{ }^\circ\text{K}$ . Sie zielten auf den von Busse (1967) berechneten Hystereseeffekt bei der kritischen Rayleigh-Zahl im Benard-Problem mit Nicht-Boussinesq-Eigenschaften ab. Der experimentell gemessene Hystereseeffekt war 40 % kleiner als der theoretisch berechnete.

Die beiden Traversen bei kleinen Rayleigh- und Biot-Zahlen bezeichnen die beiden Experimente in Kapitel 3. Die rechte der beiden Kurven weist eine kaum merkliche Hysterese bei der kritischen Rayleigh-Zahl auf. Tatsächlich konnte bei anfänglichen Versuchen in der quasi-unendlich-ausgedehnten Kammer bei der kritischen Rayleigh-Zahl im Rahmen der Meßgenauigkeit keine Hysterese festgestellt werden. Daher wurde dieser Effekt dort nicht weiter untersucht.

Im nächsten Kapitel werden die Flüssigkeitshöhen untersucht, die sich im Zustand der reinen Wärmeleitung im endlichen Behälter einstellen.

### 7.3 Einfluß der Meßkammerkonstruktion auf die Kontur der Phasentrennfläche im Wärmeleitungszustand

Im Rahmen eines Vorversuches war ein Meßvolumen wie das in Kapitel 4, jedoch in einer anderen Kammer, untersucht worden. Bei Werten von  $B$  um 4 war eine Hysterese der Flüssigkeitshöhen beim Einsetzen und Verschwinden der Konvektion zwischen den Rayleigh-Zahlen  $Ra_{w1} = 1000$  und  $Ra_{w1} = 900$  gemessen worden (Dietsche & Müller (1982)). Es war beobachtet worden, daß die Konvektion bei  $Ra_{w1} = 1000$  zunächst nur in unmittelbarer Scheibennähe eingesetzt hatte. Dies war darauf zurückzuführen, daß die lokale Flüssigkeitshöhe in Scheibennähe um 12 % größer als die Wärmeleithöhe gewesen war. Daher war auch die entsprechende mit der lokalen Flüssigkeitshöhe gebildete Rayleigh-Zahl um den Faktor  $(1,2)^3$  größer als die Wärmeleit-Rayleigh-Zahl und erreichte lokal den Wert 1400. Um die Ursachen dieser durch die Ränder verursachten Effekte zu klären, war der Wärmeleitungszustand der Experimente kurz vor dem Einsetzen der Konvektion mit dem Wärmeleitungs-Rechenprogramm "Heating 4" nachgerechnet worden. (Das Programm ist eine leicht geänderte Version von Heating 3 nach Turner & Siman-Tov (1971)). Die Ergebnisse der Rechnungen werden im folgenden kurz dargestellt. Die Schlußfolgerungen aus den Rechnungen hatten zum Bau der Meßkammer aus Kapitel 4 geführt.

Abb. 31 zeigt die Hälfte der symmetrischen Meßkammer aus dem Vorexperiment. Eine 1,5 cm dicke und 5 cm hohe Glasscheibe war auf einen 8 mm breiten Absatz der unteren Kupferberandung aufgesetzt. Zwischen der oberen Kupferberandung, die höhenverschiebbar war, und der Glasscheibe war ein etwa 1 mm großer Spalt, der größtenteils mit der auch hier verwendeten Testsubstanz Cyclohexan gefüllt war. Für die Rechnung wurde entsprechend der experimentellen Situation beim Einsetzen der Konvektion die Temperatur der unteren Kupferberandung mit  $8\text{ }^{\circ}\text{C}$ , die der oberen mit  $0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$  vorgegeben. Das Glas außen wurde als adiabat angenommen. In Meß-

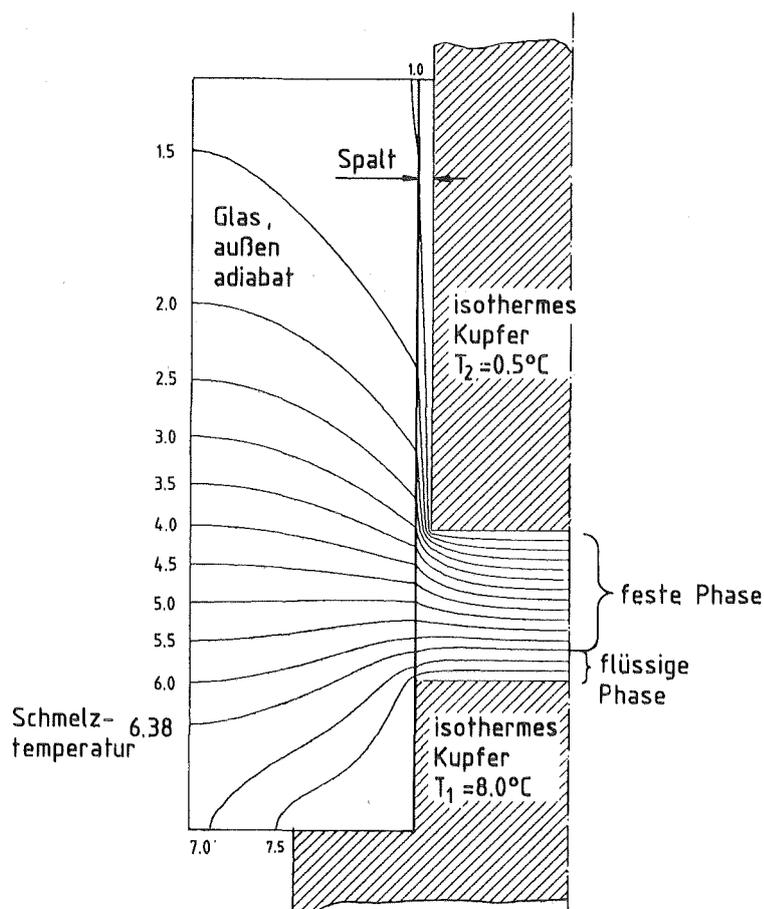


Abb. 31 Meßkammerhälfte bei einem Vorversuch mit Isothermen-Feld in Meßvolumen und Glasberandung: Rechnung mit dem Wärmeleitungsrechenprogramm Heating 4.

volumen und Glas ist das Isothermenfeld eingezeichnet. Bei der Rechnung mit "Heating 4" wurde die stationäre zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung mit einem Differenzenverfahren gelöst, wobei für die einzelnen Gebiete (flüssige Phase, feste Phase, Glas) die entsprechenden Wärmeleitfähigkeiten eingesetzt wurden (vergl. Kap. 7.4).

In der Mitte des Meßvolumens sind die Isothermen äquidistant, d.h. die Temperaturverteilungen sind dort linear in beiden Phasen. Näher zum Rand ergibt sich eine erhebliche Verzerrung der Isothermen, die sich dann im Glas weit aufspreizen. Dies ist dadurch bedingt, daß auch die vertikalen Ränder der Kupferblöcke Isothermen sind. Der Abstand der Schmelztemperaturisotherme vom

unteren Kupferrand des Meßvolumens ergibt die lokale Flüssigkeitshöhe. Diese wird als nächstes näher betrachtet.

In Abb. 32 ist für verschiedene Fälle auf der Ordinate die Flüssigkeitshöhe  $\eta$  bezogen auf die Wärmeleithöhe  $h_{wl}$  aufgetragen, auf der Abzisse die Tiefendimension des Meßvolumens  $y$  bezogen auf die Gesamttiefe  $b$ . Mithin stellen die abgebildeten Kurven Profile der Phasengrenzfläche im Leitungszustand dar.  $y/b = 0$  bezeichnet den Rand des Meßvolumens an den Scheiben,  $y/b = 0.5$  die Mitte des Meßvolumens ( $b = 20$  mm). Aus Abb. 32 ist für verschiedene Fälle

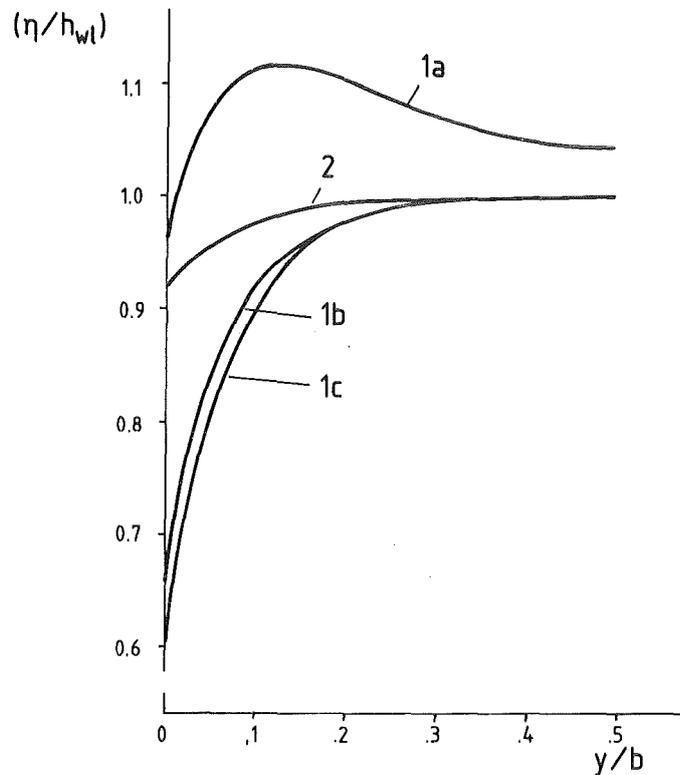


Abb. 32 Profil der Phasengrenzfläche im Leitungszustand nach Rechnungen mit Heating 4.

- 1a - Kammerkonstruktion aus Abb. 31,
- 1b - wie 1a, jedoch ohne Spalt zwischen Glas und Kupfer oben,
- 1c - wie 1a, jedoch ohne Spalt; außerdem ist die Wärmeleitfähigkeit der vertikalen Berandungen zu Testzwecken so groß wie die Wärmeleitfähigkeit von Kupfer angenommen.
- 2 - Kammerkonstruktion aus Abb. 33 bzw. Kapitel 4.

zu ersehen, inwieweit die lokale Flüssigkeitshöhe  $\eta$  von der eindimensionalen Wärmeleithöhe abweicht. Die mit 1a indizierte Parameterkurve gibt die im obigen Experiment (Abb. 31) realisierten Verhältnisse wider. Die größte Überhöhung über die Wärmeleithöhe beträgt 1.12. Dieser Effekt war auch im Experiment gefunden worden. Er ist auf den Spalt zwischen Glasscheibe und oberer Flüssigkeitsberandung zurückzuführen. Wenn der Spalt, der mit der festen Phase von Cyclohexan gefüllt ist, bei sonst unveränderten Randbedingungen durch Kupfer ersetzt wird, ergibt sich die Kurve 1b. Dabei zieht sich an der Scheibe bei  $y/b = 0$  die Flüssigkeitshöhe bis auf den Wert  $\eta/h_{w1} = 0.65$  herunter. Mithin ergibt sich auch hier keine ebene Phasengrenzfläche. Als bei dieser Konstellation zusätzlich die Wärmeleitfähigkeit der Glasscheiben zu Testzwecken auf den Wert von Kupfer hochgesetzt wurde (Fall 1c), ergab sich ein noch stärkeres Herunterziehen der Flüssigkeitshöhe an der Scheibe auf den Wert  $\eta/h_{w1} = 0.6$ . Die Vorstellung, eine möglichst hohe Wärmeleitfähigkeit in den seitlichen Berandungen präge dem Meßvorgang ein lineares Temperaturprofil auf, ist daher für den vorliegenden Fall völlig abwegig.

Aus den Rechnungen wurden folgende Schlußfolgerungen gezogen. Eine Meßkammerkonstruktion mit an der oberen und unteren Kupferberandung anliegenden Seitenscheiben hat zwar den Vorteil, daß die Gesamtschichthöhe problemlos zu variieren ist. Sie hat jedoch den Nachteil, daß die Isothermen im Meßvolumen erheblich deformiert werden. Da die obere Flüssigkeitsberandung im vorliegenden Fall durch eine Isotherme gebildet wird, findet durch die Glasscheiben eine deutliche Beeinflussung der lokalen Flüssigkeitshöhen und damit der lokalen Rayleigh-Zahlen statt. Um diese und andere Schwierigkeiten u.a. im Zusammenhang mit Dichtproblemen aus dem Weg zu räumen, war die Kammer gebaut worden, die in Kapitel 4 beschrieben ist. Die Kurve 2 in Abb. 32 zeigt das zugehörige Profil der Phasengrenzfläche. Die gerechnete Flüssigkeitshöhe stimmt am Rand und in der Mitte mit dem Experiment überein (vergl. Kap. 4.2.1.2). Die zugehörige Kammerkonstruktion und das Isothermenfeld für den experimentell realisierten Fall vor dem Einsetzen der Konvektion sind in Abb. 33 dargestellt.

Eine zwei mm dicke Plexiglasscheibe war im Kupfer oben und unten in Nuten eingelassen. Sie lag mit den zum Meßvolumen gerichteten Ecken vertikal jeweils 0,3 mm und horizontal jeweils 0,4 mm am Kupfer an. Außerhalb der Plexiglasscheibe war die lichte Weite zwischen den Kupferberandungen um  $2 \times 0.1$  mm größer als im Meßvolumen selbst. Damit wurde die Beobachtbarkeit des gesamten Meßvolumens sicher gewährleistet. Die Plexiglasscheibe war unten und oben durch O-Ringe gedichtet. Für die Rechnung war die gesamte Nut als mit Plexiglas gefüllt betrachtet worden. Die eingezeichneten Isothermen waren im größten Teil des Meßvolumens parallel. Auch im Plexiglas war der Aufspreizeffekt der Isothermen deutlich geringer als bei der oben betrachteten Meßkammer (Abb. 31). Ohne

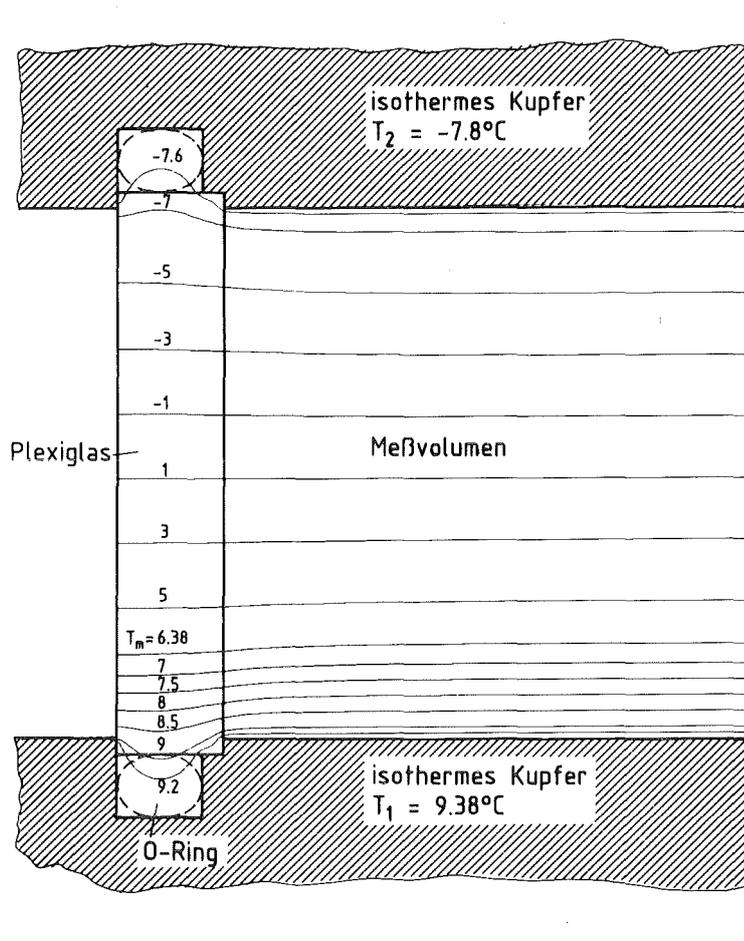


Abb. 33 Isothermenfeld in Meßvolumen und Plexiglasberandung bei der Kammerkonstruktion aus Kapitel 4; Rechnung mit Heating 4.

die O-Ringe wäre eine fast vollständige Homogenisierung des Isothermenfeldes gelungen.

Es war mehrfach im Verlauf der Ausführungen zu Kapitel 4 darauf hingewiesen worden, daß die Fensterhöhe an den Scheiben auch bei Konvektion im wesentlichen durch die Wärmeleithöhe fixiert worden war und damit die Phasengrenzfläche fast immer deutlich dreidimensional gewölbt war. Dies hatte u.a. zu den Schwierigkeiten bei der Anwendung des Differentialinterferometers geführt. Nachdem im Vorexperiment der gleiche Effekt aufgetreten und der hohen Wärmeleitfähigkeit der 15 mm dicken Glasscheiben zugeschrieben worden war (die Wärmeleitfähigkeit der Gläser war etwa 10 Mal größer als die von Cyclohexan), war im Hauptversuch (Kapitel 4) dünnes Plexiglas (2 mm) verwendet worden, um möglichst den Grenzfall der adiabaten Randbedingung anzunähern. Dennoch konnte auch hier nicht die im Hinblick auf die Anwendung des Differentialinterferometers erwünschte Zweidimensionalität der Phasengrenzfläche wenigstens bei den Walzenstrukturen erzielt werden. Die Ursache hierfür ist, daß in der wandnahen Grenzschicht und in den Berandungen selbst der Wärmetransport immer durch Wärmeleitung bestimmt wird, während im Inneren des Flüssigkeitsvolumens bei überkritischen Rayleigh-Zahlen der konvektive Wärmetransport überwiegt.

#### 7.4 Stoffdaten

Im Rahmen einer Voruntersuchung (Schies (1981)) wurden die Stoffdaten für Cyclohexan durch eine intensive Literaturrecherche und durch einzelne eigene Kontrollmessungen (Zähigkeit, Dichte) zusammengestellt. Das Verhältnis  $\lambda_s/\lambda_l$ , das in der Wärmeleithöhe eingeht, wurde mit der vorhandenen Versuchsanlage ebenfalls gemessen. Hierzu wurde eine stabile Schichtung (oben warm, unten kalt) hergestellt. Dabei wurden die Temperaturdifferenzen  $\Delta T_l$  und  $\Delta T_s$  und die Flüssigkeitshöhe gemessen. Die Flüssigkeitshöhe wurden sodann als Wärmeleithöhe definiert und daraus nach Gleichung (2.10) das Verhältnis  $\lambda_s/\lambda_l$  berechnet. Wie im Experiment in Kapitel 4 wurde auch hier die Temperaturdifferenz  $\Delta T_l$  konstant auf 3 °C gehalten. Die Stoffdaten von Cyclohexan nebst

den in den "Heating"-Rechnungen verwendeten Wärmeleitfähigkeiten für Glas und Plexiglas sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Die Stoffdaten von Cyclohexan wurden überprüft, indem in der Meßkammer aus dem Vorversuch eine Gesamtschichthöhe von  $h = 2$  mm eingestellt worden war. Dann wurde mit dem Differentialinterferometer die kritische Rayleigh-Zahl für das Benard-Problem ohne feste Phase zu  $1708 \pm 2$  % richtig bestimmt.

$\rho$  kg/m <sup>3</sup>	797,1 - 0,93	$T_{1,o}$  °C
$\beta$  K <sup>-1</sup>	1,17	
$c_p$  J/kg K	1764,4 + 4,2	$T_{1,o}$  °C
$\mu$  N s/m <sup>2</sup>	1,43 $\cdot 10^{-3}$ - 2,4	$10^{-5}$ $T_{1,o}$  °C
$\lambda_1$  W/m K	0,128 - 2	$10^{-4}$ $T_{1,o}$  °C
$\lambda_s/\lambda_1$	1,025 + 7,05	$10^{-3}$ $T_2$  °C
$\Delta T_1 = 3^\circ\text{C}$		
$\Lambda$  kJ/kg	31,3	
$\lambda_{\text{Glas}}$  W/m K	1,1 (optisches Glas B 270)	
$\lambda_{\text{Plexiglas}}$  W/m K	0,19	

Tabelle 2 Stoffdaten von Cyclohexan mit den Wärmeleitfähigkeiten von Glas und Plexiglas