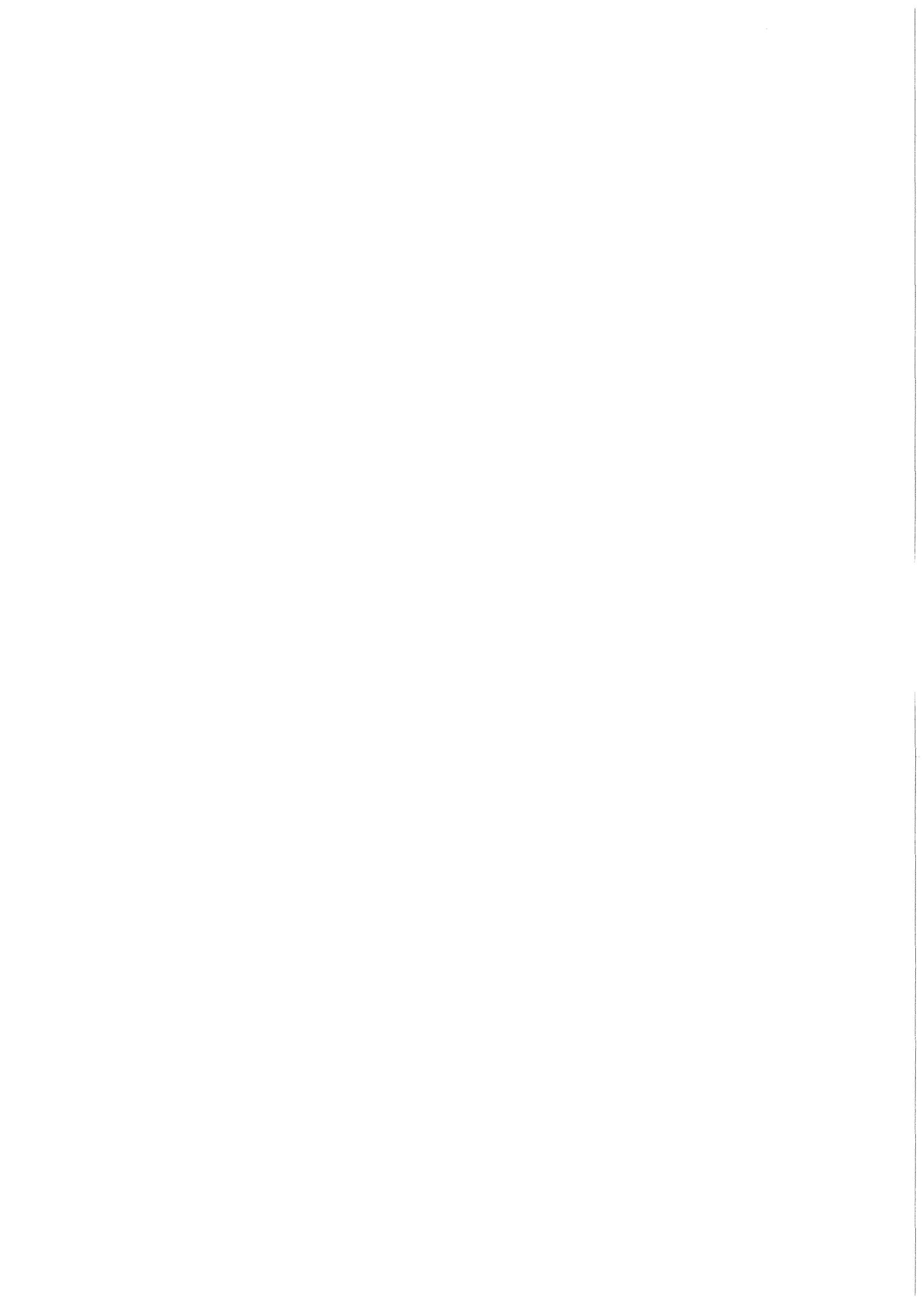


KfK 3793
September 1984

Berechnung der Wert- und Entropieerzeugung in der Trenndüse auf der Basis von Molekularsondenmessungen

W. Ehrfeld, W. Schelb
Institut für Kernverfahrenstechnik

Kernforschungszentrum Karlsruhe



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Institut für Kernverfahrenstechnik

KfK 3793

**BERECHNUNG DER WERT- UND ENTROPIEERZEUGUNG
IN DER TRENNDÜSE AUF DER BASIS VON
MOLEKULARSONDENMESSUNGEN**

von

W. Ehrfeld, W. Schelb^{*)}

***) von der Fakultät für Maschinenbau der Universität
Karlsruhe genehmigte Dissertation**

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
ISSN 0303-4003

Berechnung der Wert- und Entropieerzeugung in der Trenndüse auf der Basis von Molekularsondenmessungen

Zusammenfassung

Anhand der lokalen Wert- und Entropieerzeugung werden die Auswirkungen der Gemischtrennung, starker azimuthaler Zustandsänderungen und starker Abweichungen vom lokalen Gleichgewicht auf die Isotopentrennung und die Verlustprozesse in der Trenndüse untersucht. Als Grundlage hierfür dienen mit Molekularsonden an Modellgasgemischen gemessene Strömungsfelder, die als Eingangsdaten für eine numerische Simulation der Isotopentrennung benutzt werden. Die Simulationsrechnungen zur Isotopentrennung zeigen zum einen, daß die Abtrennung der schweren Komponente vom Zusatzgas bei für die Isotopentrennung optimalen Verhältnissen zu einer starken Dämpfung der Isotopentrennung nahe der Umlenk wand führt, wobei in diesen Zonen der binäre Gleichgewichtswert des Isotopentrenneffektes nicht erreicht wird. Zum anderen führen starke azimuthale Zustandsänderungen im für den Trenndüsenbetrieb typischen Knudsenzahlbereich auf den inneren Stromflächen zu einem starken Geschwindigkeitsschlupf zwischen den Komponenten, der mit einer ausgeprägten Verkleinerung der Diffusionsgeschwindigkeiten gegenüber den aus der klassischen Diffusionstheorie erwarteten Werten einhergeht. Die Voraussetzungen der klassischen Diffusionstheorie reichen demnach in diesen Gebieten zur theoretischen Beschreibung nicht aus; hierzu müssen zumindest die unterschiedlichen Schwerpunktsgeschwindigkeiten der Gemischkomponenten mitberücksichtigt werden. Die Untersuchung der Entropieerzeugung zeigt vor allem, daß durch die Relativbewegung der Gemischkomponenten beim Zusatzgas He bis zu etwa einem Drittel der Gesamtverluste verursacht werden. Die durch Diffusion in Strömungsrichtung und durch radiale Diffusion bedingten Verluste sind hierbei von gleicher Größenordnung.

**Production of Value and Entropy in Separation Nozzles.
Numerical Calculations based on Molecular Probe Measurements**

Abstract

The effects exerted by separation of the heavy component and the light auxiliary gas, strong variations in the state of the gas in the direction of flow, and strong deviations from local equilibrium upon both isotope separation and pressure losses in separation nozzles are studied in terms of the local production of value and entropy within the nozzle. By molecular probe measurements the flow field and the separation of the heavy and light components are investigated, whereas the separation of the isotopes is subsequently simulated numerically. This simulation shows that the separation of the heavy component and the auxiliary gas results in a damping of isotope separation near the curved wall of the nozzle. Thus, the binary equilibrium value of the isotope separation factor is not attained in these regions. Furthermore, the strong variations in the state of the gas in the direction of flow result in a large velocity slip between the components in the inner regions of flow. This velocity slip is accompanied by a distinct reduction of the radial velocities of diffusion compared to those obtained by means of classical continuum mechanical calculations. Thus, contrary to the classical Chapman-Enskog approach, a correct theoretical description must take account of the different average velocities of the individual components in these regions of flow. The examination of the local production of entropy shows that the diffusion of the heavy component through the light auxiliary gas may cause up to 30% of the total pressure losses. Pressure losses due to diffusion processes in the direction of flow and pressure losses due to radial diffusion processes are of the same order of magnitude.

Inhaltsverzeichnis:	Seite
1. Einleitung	1
2. Ermittlung der Isotopenentmischung bei realen Strömungsfeldern	6
2.1 Experimentelle Erfassung des Strömungsfeldes und der Entmischung von schwerer Komponente und Zusatzgas	6
2.1.1 Prinzip des Molekularsondenmeßverfahrens und Auswertung bei lokalem Gleichgewicht	6
2.1.2 Auswertung in Gebieten mit starken Abweichungen vom lokalen Gleichgewicht	9
2.2 Theoretische Ermittlung der ternären Isotopenentmischung	11
2.2.1 Beschreibung des Diffusionsvorganges	11
2.2.2 Bestimmung der räumlichen Verteilung des leichten Isotops	13
2.2.3 Numerische Behandlung des Diffusionsproblems	18
2.2.3.1 Randbedingungen für die Diffusion	18
2.2.3.2 Berücksichtigung der Geometrie und Integrationsverfahren	19
3. Lokale Entropieerzeugung	22
4. Experimentelle Ergebnisse	28
4.1 Betriebsbedingungen und Darstellung der Ergebnisse	28
4.2 Räumlicher Verlauf der Strömung und der binären Gemischzusammensetzung in der ersten Düse des Doppelumlenksystems	33
4.3 Einfluß der Betriebsbedingungen	44
4.4 Räumlicher Verlauf der Strömung und der binären Gemischzusammensetzung in der zweiten Düse des Doppelumlenksystems	47
5. Ergebnisse der Simulationsrechnungen zur Isotopenentmischung	51
5.1 Ablauf der Isotopen- und der Gemischtrennung in der ersten Düse des Doppelumlenksystems	51
5.1.1 Isotopentrenneffekt und Gemischtrennfaktor	51
5.1.2 Werterzeugung	56

5.2 Einfluß der Betriebsbedingungen	59
5.2.1 Isotopentrenneffekt und Gemischtrennfaktor	59
5.2.2 Werterzeugung	62
5.3 Ablauf der Isotopen- und der Gemischtrennung in der zweiten Düse des Doppelumlenksystems	66
5.3.1 Isotopentrenneffekt und Gemischtrennfaktor	66
5.3.2 Werterzeugung	69
5.4 Einfluß höherer gaskinetischer Effekte auf den Ablauf der Trennung	71
6. Räumlicher Verlauf der lokalen Entropieerzeugung in der Trenndüse	75
6.1 Entropieerzeugung in der ersten Düse des Doppelumlenksystems	76
6.1.1 Reibungsbedingte Entropieerzeugung	76
6.1.2 Diffusionsbedingte Entropieerzeugung	78
6.2 Einfluß der Betriebsbedingungen	82
6.2.1 Reibungsbedingte Entropieerzeugung	82
6.2.2 Diffusionsbedingte Entropieerzeugung	85
6.3 Entropieerzeugung in der zweiten Düse des Doppelumlenksystems	87
6.3.1 Reibungsbedingte Entropieerzeugung	87
6.3.2 Diffusionsbedingte Entropieerzeugung	89
7. Diskussion	91
Literatur	101
Verzeichnis der durchgängig benutzten Symbole und Indizes	106
Anhang 1: Zusammenhang zwischen lokaler Werterzeugung im Trennelement und dem durch N-fractionäre Aufteilung erzeugten Wert	108
Anhang 2: Transformation der die Isotopenzusammensetzung beschreibenden DGl. in Zylinderkoordinaten und ins $\xi - \eta$-System	120
Anhang 3: Transformation des reibungsbedingten Anteils der Entropieerzeugung in ebene Zylinderkoordinaten	125

1. Einleitung

Für die großtechnische Anreicherung des leichten Uranisotops ^{235}U wurde am Kernforschungszentrum Karlsruhe das Trenndüsenverfahren entwickelt /1/. Die Entmischung der Uranisotope beruht bei diesem Verfahren im wesentlichen auf der Druckdiffusion in einer gekrümmten Gasströmung aus UF_6 und einem in hohem molaren Überschuß beigeetzten leichten Zusatzgas /2/, /3/⁺). Die Druckdiffusionskräfte werden üblicherweise durch eine schnelle Expansion des Verfahrensgases in einer gekrümmten Düse erzeugt. Eine typische Anordnung ist das in Abb.1 skizzierte sogenannte Doppelumlenksystem /4/, bei dem das in der Nähe der Umlenk wand der ersten Düse strömende Gas in einer zweiten Düse nachgetrennt wird.

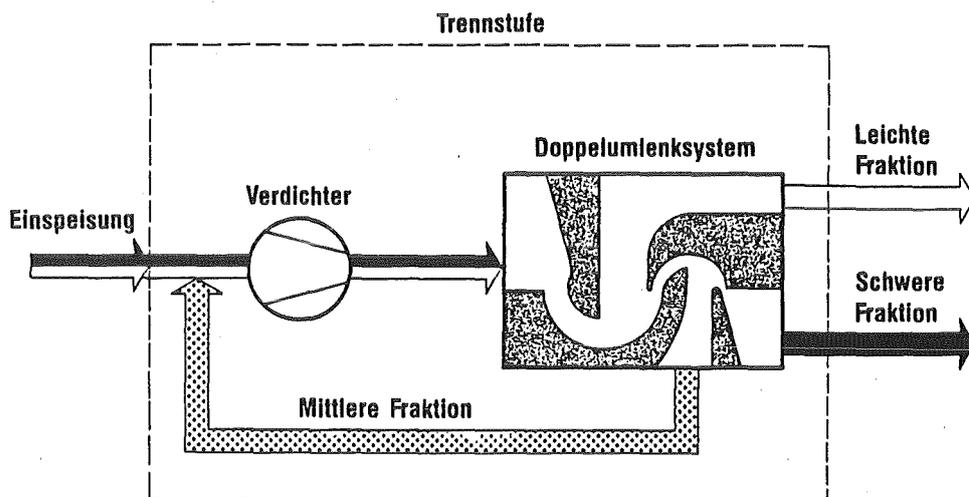


Abb.1 : Prinzipanordnung des Doppelumlenksystems und Verschaltung dieses Systems innerhalb einer Stufe einer Trenndüsenkaskade.

⁺) Typisch sind die Zusatzgase He bzw. H_2 mit einem molaren Anteil zwischen 95 % und 98 %.

Der spezifische Energieverbrauch des Trenndüsenverfahrens, der für einen Großteil der Trennarbeitskosten maßgebend ist, ist durch das Verhältnis der zur Wiederverdichtung des expandierten Gases notwendigen Kompressionsarbeit und dem im Trennelement erzeugten Wert festgelegt.

Der im Trennelement insgesamt erzeugte Wert läßt sich als Integral der lokalen Wertzeugung, also des lokal pro Zeit- und Volumeneinheit erzeugten Wertes, darstellen. Die notwendige Kompressionsarbeit andererseits ist durch die Ruhedruckverluste des Gases festgelegt, die ihrerseits durch die lokale Entropieerzeugung der Strömung gegeben sind. Bei vorgegebenem Expansionsverhältnis wirken sich die Ruhedruckverluste außerdem zusätzlich auf die Wertzeugung aus, da sie die Mach-Zahl der Strömung und damit den möglichen radialen Druckgradienten verkleinern.

Die Wertzeugungs- und die Verlustprozesse in der Trenndüse wurden schon früher in mehreren experimentellen und theoretischen Arbeiten untersucht. Die experimentellen Arbeiten umfaßten dabei im wesentlichen die Untersuchung der Strömung und der Gemischtrennung in der Trenndüse mit Hilfe von Molekularsondenmessungen an Modellgasgemischen /5/. In einer Arbeit wurde dieses Meßverfahren auch zur Bestimmung der Trennung der Schwefelisotope $^{32}\text{S}/^{34}\text{S}$ im Modellgas-Gemisch SF_6/He benutzt /6/. Diese Untersuchungen blieben aber im wesentlichen auf eine empirische Erfassung der Felder beschränkt, zudem scheitert eine Ausdehnung dieser Methode auf realistischere Modellgasgemische an experimentellen Schwierigkeiten.

Bei den theoretischen Arbeiten handelte es sich um strukturelle Analysen des ternären Diffusionsvorganges in der Trenndüse auf der Basis der Chapman-Enskog-Näherung der Boltzmann-Gleichung /2,7/. Hierbei wurden stark vereinfachte Modell-Strömungsfelder zugrunde gelegt. Diese Arbeiten zeigten u.a., daß die unterschiedlichen Druckdiffusionsgeschwindigkeiten der beiden Uranisotope im ternären Gemisch zu einer transienten Erhöhung der Isotopenentmischung verglichen mit dem binären Fall führen. Bei diesen Untersuchungen traten im wesentlichen zwei grundsätzliche Schwierigkeiten auf: So konnten einerseits keine azimutalen Druckgradienten berücksichtigt werden. Diese sind in Teilbereichen der Düse aber vergleichbar mit den radialen Druckgradienten und können den Ablauf der Isotopenentmischung somit

u.U. wesentlich beeinflussen. Andererseits setzt die Chapman-Enskog-Näherung kleine Abweichungen von einer lokalen Maxwell-Verteilung voraus. Aus Molekularsondenmessungen ist jedoch bekannt, daß bei den für das Trenndüsenverfahren typischen Knudsen-Zahlen im Bereich von 0,01 bis 0,1 teilweise starke Abweichungen von einer lokalen Maxwell-Verteilung auftreten.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, durch eine Betrachtung der lokalen Wert- und der lokalen Entropiequellen im Trennelement zu einem physikalischen Verständnis für die Auswirkungen solcher, in typischen Trenndüsen vorhandener Effekte, auf den spezifischen Energieverbrauch zu gelangen. Hierbei sollen insbesondere die Auswirkungen der Gemischtrennung, die Auswirkungen starker azimuthaler Zustandsänderungen und die Auswirkungen starker Abweichungen vom lokalen Gleichgewicht betrachtet werden.

Eine prinzipielle Möglichkeit, die Strömungsfelder einschließlich der starken Abweichungen vom lokalen Gleichgewicht ⁺⁾ zu behandeln, bieten Monte-Carlo-Rechnungen /9,40/. Diese Methode scheitert jedoch bei Vorgabe von realistischen Randbedingungen wegen des damit verbundenen Rechenaufwandes /8/.

Es bietet sich deshalb an, zunächst das Strömungsfeld und die binäre Gemischtrennung an realistischen Modellgasgemischen mit Molekularsonden auszumessen und nachfolgend die Entmischung der Isotope mit Hilfe der klassischen ternären Diffusionstheorie numerisch zu simulieren. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß höhere gaskinetische Effekte bei der Ermittlung des Strömungsfeldes voll berücksichtigt sind. Darüber-

⁺⁾ Im Rahmen dieser Arbeit wird der Begriff "höhere gaskinetische Effekte" anstelle des ansonsten in der Literatur üblichen Begriffes "Nichtgleichgewichtseffekte" durchgängig benutzt, um diese deutlich gegenüber den aus der Chapman-Enskog-Theorie resultierenden Effekten abzugrenzen, die in Strenge ja auch Nichtgleichgewichtseffekte darstellen.

hinaus werden solche Effekte auch bei der Isotopentrennung in erster Näherung mitberücksichtigt, wenn man für die Simulation der Isotopentrennung die gemessene Gemischtrennung zugrunde legt.

Zur Analyse des räumlichen Ablaufs der Isotopentrennung wird in der vorliegenden Arbeit nicht nur der Elementareffekt der Isotopentrennung, sondern auch die räumliche Verteilung der Wertzeugung betrachtet. Im Gegensatz zum Trenneffekt zeigt diese zum einen die räumliche Verteilung der Wertquellen im Trennelement auf. Zum andern vermittelt sie ein qualitatives Maß für die Fähigkeit des Zentrifugalfeldes, den Diffusionstransport lokal aufrecht zu erhalten. Die für den Fall bifraktionärer Aufteilung definierten Trenneffekte und die lokale Wertzeugung sind eng miteinander gekoppelt (siehe Anhang 1).

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Methode wird auf eine Trenndüse bei unterschiedlichen Betriebsbedingungen angewandt. Darüberhinaus wird der Ablauf der Isotopentrennung in der ersten und zweiten Düse eines Doppelumlenksystems untersucht.

Als wesentliche Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind festzuhalten:

Bei für den Betrieb einer Isotopentrennanlage infrage kommenden Betriebsbedingungen liegen im Trennelement keine ausgeprägten Gebiete negativer Wertzeugung vor, vielmehr werden in Umlenk wandnähe ausgedehnte Gebiete mit verhältnismäßig kleiner Wertzeugung beobachtet. Der am Abschäler erreichbare Trenneffekt wird deshalb nicht durch Rückmischungseffekte innerhalb des Trennraumes begrenzt. Hierfür ist zum einen maßgebend, daß die Isotopenentmischung im Umlenk wandbereich mit zunehmender Umlenkung zunehmend langsamer abläuft, da der wachsende Molenbruch an schwerer Komponente in diesen Gebieten die entmischende Kraft und den Isotopendiffusionskoeffizienten verkleinert. Zum andern wird bei abnehmender Reynolds-Zahl der Aufbau hoher Konzentrationsgradienten durch den wachsenden Einfluß der Verlustprozesse verhindert.

In Teilbereichen der Trenndüse machen sich höhere gaskinetische Effekte dadurch bemerkbar, daß die entmischenden Druckdiffusionskräfte kleiner werden als diejenigen, die sich formal aus der klassischen Kontinuumstheorie ergeben. Der Einfluß solcher Effekte ist in Gebieten

mit starken Zustandsänderungen pro mittlerer freier Weglänge groß und wächst mit zunehmender Knudsen-Zahl. Die Wirkung dieser Effekte kann in einer einfachen anschaulichen Modellvorstellung als Verkleinerung der auf die Isotope wirkenden Zentrifugalkräfte aufgefaßt werden, die durch das Zurückbleiben der schweren Komponente hinter dem Zusatzgas in Gebieten starker Beschleunigung zustande kommt.

Azimutale Beschleunigungen führen zu azimutalen Diffusionsströmen und verändern damit aus Kontinuitätsgründen die Teilchendichten. Diese Veränderung ist bei den Isotopen unterschiedlich stark, so daß sich bei radial variierender Azimutalbeschleunigung die radialen Konzentrationsgradienten der Isotope verändern. Im Abschälerbereich führt dieser Effekt zu einer Verkleinerung der rückmischenden radialen Konzentrationsdiffusion.

Die Analyse der Verlustprozesse zeigt, daß in der verwendeten Trenndüse bei für das Trenndüsenverfahren typischen Betriebsbedingungen die Entropieerzeugung, die durch die Relativbewegung von schwerer Komponente und Zusatzgas zustande kommt, etwa $1/3$ der insgesamt erzeugten Entropie ausmachen kann. Hiervon ist etwa die Hälfte durch den Azimutalanteil der Relativbewegung bedingt, der mit abnehmender Reynolds-Zahl schnell anwächst.

Allgemein läßt sich festhalten, daß in der untersuchten Trenndüse neben den radialen Gradienten auch starke azimutale Zustandsänderungen einen erheblichen Einfluß sowohl auf den Ablauf der Trennung als auch auf die Größe der Strömungsverluste ausüben können.

2. Ermittlung der Isotopenentmischung bei realen Strömungsfeldern

In diesem Kapitel wird zunächst das Prinzip des Molekularsondenmeßverfahrens geschildert, und es werden die damit bei Vorliegen von lokalem Gleichgewicht erfaßbaren physikalischen Zustandsgrößen in knapper Form zusammengestellt. Anschließend wird auf die Auswertung der Sondenmessungen bei starker Störung des lokalen Gleichgewichtes eingegangen. In den weiteren Teilen wird gezeigt, wie aus diesen Meßdaten zusammen mit den aus der Chapman-Enskog-Näherung folgenden Diffusionsgleichungen der Ablauf der Isotopenentmischung und damit der räumliche Verlauf der Werterzeugung in einem vorgegebenen Strömungsfeld ermittelt werden kann.

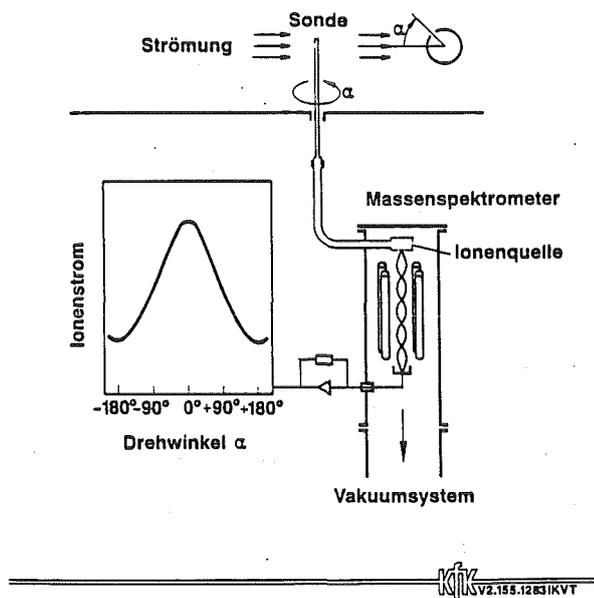
2.1 Experimentelle Erfassung des Strömungsfeldes und der Entmischung von schwerer Komponente und Zusatzgas

2.1.1 Prinzip des Molekularsondenmessverfahrens und Auswertung bei lokalem Gleichgewicht

Zur experimentellen Erfassung der Strömungsfelder wurden Molekularsondenmessungen an einem vergrößerten Trennelementmodell durchgeführt, wobei das Verfahrensgas UF_6/He durch Modellgasgemische aus C_7F_{14} und He ersetzt wurde. Die Trennelementvergrößerung gewährleistete hierbei bei vorgegebener Knudsenzahl der Strömung die molekulare Anströmung der Sonde. Das anstelle des wahren Verfahrensgases benutzte Modellgas $\text{C}_7\text{F}_{14}/\text{He}$ stimmt mit ersterem in der mittleren Masse und damit der Gemischschallgeschwindigkeit nahezu überein, so daß die Strömungsfelder sowie der Ablauf der Gemischtrennung und der zu simulierenden Isotopen-trennung gut übertragbar sind⁺⁾ .

⁺⁾ Der etwas höhere gaskinetische Wirkungsquerschnitt des C_7F_{14} im Vergleich zu UF_6 hat wegen dem Einfluß auf die gaskinetischen Transportgrößen eine leichte Erniedrigung des für die Entmischung optimalen Einlaßdruckes zur Folge.

Das benutzte Meßverfahren selbst stellt im wesentlichen eine Weiterentwicklung der Patterson-Drucksonde /10/ für die Untersuchung strömender Gasgemische dar und wurde schon von anderen Autoren ausführlich beschrieben /5/. Das Prinzip dieses Meßverfahrens ist aus Abb.2 ersichtlich. Die Sonde besteht aus einem senkrecht zur Strömung orientierten Röhrchen, dessen Durchmesser klein gegen die mittlere freie Weglänge des Gemisches ist. Der durch eine seitliche Öffnung des Röhrchens tretende Teilchenstrom jeder Gemischkomponente wird mit einem nachgeschalteten Massenspektrometer analysiert. Durch Drehen der Rohrachse kann die seitliche Öffnung unter beliebigem Winkel relativ zur Strömungsrichtung orientiert werden. Ist die Öffnung entgegen der Strömungsrichtung orientiert ($\alpha = 0^\circ$), so ist der Einstrom durch die gerichtete und die thermische Bewegung der Teilchen gegeben. Ist die Normale der Öffnung senkrecht zur Strömung orientiert ($\alpha = 90^\circ$), so wird der Teilcheneinstrom allein durch die thermische Bewegung der Teilchen verursacht.



Prinzip des Meßverfahrens mit molekular angeströmter Sonde und Massenspektrometer

Abb.2 : Skizze der Meßanordnung für die molekular angeströmte Sonde mit nachgeschaltetem Massenspektrometer

Aus dem Verhältnis der Teilcheneinströme bei 0° und bei 90° kann man das Verhältnis von gerichteter Geschwindigkeit und wahrscheinlichster thermischer Geschwindigkeit der Strömung bestimmen, das in der Dynamik verdünnter Gase üblicherweise als Geschwindigkeitsverhältnis bezeichnet wird. Bei den Messungen wird grundsätzlich die gesamte Winkelabhängigkeit des Einstromes erfaßt, um den Einfluß der Öffnungsform /11/ auf den Verlauf des Meßsignals zu berücksichtigen. Neben den partiellen Geschwindigkeitsverhältnissen S_j können aus der Winkelabhängigkeit der Ionenströme die Teilchenstromdichten j_j und die lokalen Strömungsrichtungen bestimmt werden.

Aus den primären Meßgrößen S_j und j_j läßt sich eine Reihe weiterer physikalischer Größen ableiten, wenn man über die mit dem Molekularsondenverfahren prinzipiell nicht meßbare Temperatur plausible Annahmen macht, so z.B. eine isotherme oder eine isoenergetische Expansion voraussetzt. Diese Größen sind im wesentlichen die Gemischzusammensetzung, die Teilchendichte, die Geschwindigkeit und der statische Druck jeder Komponente, so daß mit der Annahme über die Temperatur das Strömungsfeld einschließlich der Entmischung von schwerer Komponente und Zusatzgas vollständig bekannt ist.

In der vorliegenden Arbeit wird die Expansion als isotherm angenommen. Diese Voraussetzung wird zum einen durch frühere Untersuchungen des Temperaturverlaufs in der Trenndüse nahegelegt /12,13/, die zeigen, daß die Temperatur in der Trenndüse vor allem im Bereich hoher Stromdichte an schwerer Komponente nur verhältnismäßig wenig vom Ruhewert abweicht. Zum andern kann die Temperatur in Umlenkwandnähe auch nicht wesentlich über den Ausgangswert ansteigen. Die thermische Energie, die bei der Thermalisierung der schweren Komponente in der Nähe der Umlenkwand entsteht, wird zum größten Teil durch die große Anzahl innerer Freiheitsgrade der schweren Komponente aufgefangen.

2.1.2 Auswertung in Gebieten mit starken Abweichungen vom lokalen Gleichgewicht

Bedingt durch die relativ hohe Knudsenzahl der Strömung in der Trenndüse im Bereich von 0,01 bis 0,1 treten in Teilbereichen der Düse ausgeprägte gaskinetische Effekte höherer Ordnung auf /5,14,15,16/. Während innerhalb der Kernströmung zur Auswertung der gemessenen Winkelabhängigkeiten des Ionenstroms i.a. die Annahme genügt, daß die Verteilungsfunktionen der beiden Gemischkomponenten Maxwell-Verteilungen mit gleicher Temperatur aber verschiedener Schwerpunkts-geschwindigkeit sind, ist diese Voraussetzung in der Nähe fester Wände oder anderer Grenzflächen^{+) i.a. nicht ausreichend. In diesen Gebieten sind die Abhängigkeiten des Ionenstroms vom Drehwinkel der Sonde oft stark asymmetrisch, deshalb wird hier zur Auswertung der Sondenmessungen zusätzlich für jede Komponente eine bimodale Verteilungsfunktion zugrunde gelegt, ähnlich wie sie z.B. aus dem Mott-Smith-Ansatz für den Verdichtungsstoß bekannt ist /17/.}

Hierbei stützt man sich auf die Vorstellung, daß die von der Wand diffus reflektierten Teilchen einer Halbraumverteilung mit verschwindendem Geschwindigkeitsverhältnis genügen, die sich einer Halbraumverteilung mit endlichem Geschwindigkeitsverhältnis der aus der schnellen Kernströmung in diese Bereiche gelangenden Teilchen überlagert⁺⁺⁾. Der Einfluß der von der Wand reflektierten Teilchen

^{+) Als innere Grenzflächen kommen hier der Rand einer Ablösung am Düsenblech (s.u.) oder die Grenze zwischen zwei aufeinander geschossenen Gasstrahlen /15/ in Betracht.}

^{++) Jüngere Monte-Carlo-Rechnungen /8/ bestätigen im wesentlichen diese Vorstellungen.}

nimmt hierbei mit wachsendem Wandabstand ab. Eine Auswertung wandnaher Punkte erlaubt es daher, durch Extrapolation die Geschwindigkeitsverhältnisse und Stromdichten unmittelbar an der Wand abzuschätzen.

Ordnet man nun trotz der starken Störung der Verteilungsfunktionen den einzelnen Gemischkomponenten durch arithmetische Mittelung effektive Geschwindigkeitsverhältnisse zu, so erhält man auf diese Weise den Schlupf des Geschwindigkeitsverhältnisses der einzelnen Komponenten an der Wand und somit auch den Geschwindigkeitsschlupf zwischen den Komponenten.

2.2 Theoretische Ermittlung der ternären Isotopenentmischung

2.2.1 Beschreibung des Diffusionsvorganges

Eine korrekte theoretische Behandlung der Diffusion in der Trenndüse müßte sich auf eine Näherung der Boltzmann-Gleichung stützen, die im Hinblick auf die Wandzone beliebige Abweichungen vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht der Komponenten zuläßt und gleichzeitig das extreme Massenverhältnis von schwerer Komponente und Zusatzgas sowie die teilweise um Größenordnungen verschiedenen Molenbrüche der Gemischpartner berücksichtigt.

Ansätze, die diese Forderungen annähernd erfüllen, existieren jedoch nur in Form von unhandlichen Momenten-Näherungen /18,19/, deren Zuverlässigkeit mangels eines ausreichenden Erfahrungsschatzes im Vergleich zum Experiment zudem ungesichert ist. Das gleiche gilt für die hydrodynamischen Näherungen solcher Theorien /18-21/, deren Gültigkeitsbereich sich zudem wiederum auf kleine Abweichungen vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht beschränkt.

Aus diesen Gründen wird die Diffusion in der Trenndüse mit den aus der Chapman-Enskog-Näherung der Boltzmann-Gleichung folgenden Diffusionsgleichungen beschrieben; deren Richtigkeit ist für Gemische annähernd gleicher Molekülmassen für den kontinuumsmechanischen Grenzfall und den kontinuumsnahen Fall durch zahllose Experimente bestätigt. Für extreme Massenverhältnisse der Gemischpartner ist diese Beschreibung zumindest für den Fall richtig, daß die Relaxationszeit der Differenz der kinetischen Temperaturen der Gemischpartner klein ist verglichen mit typischen Zeiten des Gesamtsystems /18/. Einflüsse höherer gaskinetischer Effekte auf die Isotopentrennung können im Rahmen dieser Beschreibung in grober Näherung dadurch berücksichtigt werden, daß man annimmt, daß solche Effekte sich auf die Isotopen- und auf die Gemischtrennung gleichartig auswirken⁺⁾ und die Bestimmung der

⁺⁾ Eine solche Annahme läßt sich z.B. durch eine Betrachtung der Relaxationszeiten im ternären Gemisch rechtfertigen. Siehe hierzu z.B. /22/.

entmischenden Kräfte anhand der gemessenen Gemischtrennung vornimmt (s.u.). Durch Vergleich mit den direkt aus den statischen Drucken bestimmten entmischenden Kräften kann man somit die quantitativen Auswirkungen solcher höherer gaskinetischer Effekte in Abhängigkeit des Ortes und der Betriebsparameter bestimmen. Die Ergebnisse einer früheren Arbeit deuten zudem darauf hin /2/, daß mit dieser Näherung die wesentlichen Charakteristika der Entmischung in der Trenndüse erfaßt werden.

Die klassische Chapman-Enskog'sche Theorie beinhaltet die Mechanismen der Konzentrations-, Druck- und Thermodiffusion und führt im polynären Fall bei Abwesenheit äußerer Kräfte zu den Diffusionsgleichungen /23/:

$$\vec{w}_i = - \sum_k D_{ik} n_k \left(\vec{\nabla} \ln n_k - \frac{m_k}{\bar{m}} \vec{\nabla} \ln p \right) - D_{Ti} \vec{\nabla} \ln T \quad (1)$$

Während die Druckdiffusion die Entmischung in der Trenndüse bewirkt, führt die Konzentrationsdiffusion meist zu einem der Druckdiffusion entgegengerichteten Diffusionsstrom. Dieser kann u.U. vor allem gegen Ende der Umlenkung die gesamte Entmischung stark dämpfen oder den Druckdiffusionsstrom sogar überwiegen, d.h. zu einer lokalen Rückmischung führen /7/. Der Einfluß der in Gl.(1) auftretenden Thermodiffusion auf die Isotopentrennung ist in Gebieten mit hohem Molenbruch an schwerer Komponente klein, da die Thermodiffusionskoeffizienten für Isotope allgemein /24/ und speziell für das UF_6 /25/ sehr klein sind. Auch in Gebieten mit niedrigem Molenbruch an schwerer Komponente, wo der Einfluß des Zusatzgases auf die Thermodiffusion wesentlich ist /39/, führt eine pessimistische Abschätzung zu dem Ergebnis, daß der Beitrag der Thermodiffusion vernachlässigbar ist. Die Thermodiffusion wird deshalb im folgenden weggelassen.

Da die Entmischung in der Trenndüse bei räumlich stark variierendem Molenbruch geschieht, können neben den UF_6 -Zusatzgasstößen die UF_6 - UF_6 -Stöße nicht vernachlässigt werden; es muß deshalb der volle ternäre Vorgang, der durch Gl.(1) beschrieben wird, berücksichtigt werden.

2.2.2 Bestimmung der räumlichen Verteilung des leichten Isotops

Die räumliche Verteilung des leichten Isotops⁺⁾ wird aus den Meßdaten mit Hilfe der Bilanzgleichung bestimmt, die für die vorliegende stationäre Strömung lautet:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_1 = 0 \quad (2)$$

Die Stromdichte des leichten Isotops beziehen wir nun auf die Feldgrößen der gesamten schweren Komponente, indem wir die Teilchendichte durch diejenige der gesamten schweren Komponente ausdrücken

$$v_1 = n v_u \quad (3)$$

$$\vec{j}_1 = v_1 \vec{v}_1 = (n v_u) \vec{v}_1 \quad (4)$$

und die Stromdichte in einen konvektiven und einen diffusiven Anteil aufspalten:

$$\begin{aligned} \vec{j}_1 &= (n v_u) \vec{v}_1 = (n v_u) [\vec{v}_u + (\vec{v}_1 - \vec{v}_u)] \\ &\approx (n v_u) [\vec{v}_u + (\vec{v}_1 - \vec{v}_s)] \\ &= (n v_u) [\vec{v}_u + (\vec{w}_1 - \vec{w}_s)] \end{aligned} \quad (5)$$

^{+) Es sei daran erinnert, daß wir es nur mit einem hypothetischen "leichten Isotop des C_7F_{14} " zu tun haben.}

Die in Gl.(5) enthaltene noch unbekannte Differenz der Isotopendiffusionsgeschwindigkeiten erhält man nun aus den Diffusionsgleichungen (1) durch entsprechende Differenzbildung des dort für das leichte und das schwere Isotop sich ergebenden Ausdruckes und Umrechnung der ternären Diffusionskoeffizienten auf die binären. Da die Wechselwirkungspotentiale für das leichte und das schwere Isotop in erster Näherung als gleich anzusetzen sind, erhält man hierbei eine sehr einfache Beziehung, die die Diffusion der Isotope als quasi-binären Prozess darstellt:

$$\vec{w}_l - \vec{w}_s = - D_i \left[\frac{1}{(1-n)} \vec{\nabla} \ln n + \frac{m_s - m_l}{\bar{m}} \vec{\nabla} \ln p \right] \quad (6)$$

Der Unterschied zu einer rein binären Diffusion drückt sich zum einen in dem stark konzentrationsabhängigen quasi-binären Isotopendiffusionskoeffizienten aus

$$D_i = \frac{D(z,u) D(l,s)}{(1-N) D(l,s) + N D(z,u)} \quad (7)$$

und zum andern in einer starken Erhöhung des beim Druckgradienten auftauchenden Massenverhältnisses, da dort jetzt die mittlere Masse des Gemisches unter Einschluß des leichten Zusatzgases eingeht.

Der in Gl.(6) verbleibende Druckgradient kann zum einen aus dem gemessenen statischen Druck gebildet werden. Diese Vorgehensweise hat jedoch den Nachteil, daß etwaige Einflüsse höherer gaskinetischer Effekte auf den Ablauf der Isotopentrennung in keiner Weise berücksichtigt werden. Faßt man jedoch den im Ausdruck der Diffusionsgeschwindigkeiten auftretenden Term $(\vec{\nabla} m/\bar{m}) \vec{\nabla} \ln p$ als effektive entmischende Kraft auf und nimmt weiterhin an, daß die Isotopen- und die Gemischtrennung von solchen Effekten gleichermaßen betroffen sind, so

kann diese effektive Kraft aus der gemessenen Diffusion der schweren Komponente im Zusatzgas bestimmt werden. Hierzu bilden wir aus Gl.(1) für den binären Fall die Differenz der Diffusionsgeschwindigkeiten der schweren Komponente und des Zusatzgases und erhalten eine Gl.(6) völlig analoge Beziehung:

$$\vec{w}_U - \vec{w}_Z = -D(z,u) \left[\frac{1}{(1-N)} \vec{\nabla} \ln N + \frac{m_Z - m_U}{\bar{m}} \vec{\nabla} \ln p \right] \quad (8)$$

Im Gegensatz zur Isotopentrennung macht sich bei der Gemischtrennung die Thermodiffusion stärker bemerkbar, da die Thermodiffusionskoeffizienten im Hartkugelmodell mit zunehmendem relativen Massen- und Radienunterschied der Gemischpartner stark ansteigen /24/. Die Auswirkung auf die Isotopentrennung läßt sich dennoch als geringfügig abschätzen, so daß der entsprechende Term in Gl.8 weggelassen wurde⁺⁾ .

Aus Gl.(8) erhält man somit:

$$\frac{1}{\bar{m}} \vec{\nabla} \ln p = \frac{1}{m_U - m_Z} \left[\frac{\vec{w}_U - \vec{w}_Z}{D(z,u)} + \frac{1}{1-N} \vec{\nabla} \ln N \right] \quad (9)$$

Die hier auf der rechten Seite auftretenden Ausdrücke sind nun alle mit dem Molekularsondenverfahren bestimmbar.

⁺⁾ Temperaturen sind mit dem Molekularsondenverfahren nicht meßbar. Aus früheren Arbeiten /12,13/ und der zwischenzeitlichen Weiterentwicklung des Trenndüsenverfahrens läßt sich jedoch abschätzen, daß der Einfluß der Thermodiffusion auf die Gemischtrennung lokal nicht mehr als etwa 5 % betragen kann.

Aus Gl.(6) und (5) ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
 \vec{j}_1 &= (n v_u) \left[v_u - D_i \frac{1}{1-n} \nabla \ln n - D_i \frac{m_s - m_l}{\bar{m}} \nabla \ln p \right] \\
 &\approx n v_u v_u - v_u D_i \nabla \ln n - n v_u D_i \frac{m_s - m_l}{\bar{m}} \nabla \ln p
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Diesen Ausdruck führen wir nun in die Bilanzgleichung des leichten Isotops Gl.(2) ein. Berücksichtigt man bei den auftretenden Differentiationen den Erhaltungssatz für die gesamte schwere Komponente⁺⁾

$$\nabla \cdot \vec{j}_u = 0
 \tag{11}$$

⁺⁾ Bei den auf die Meßdaten aufbauenden Rechnungen ist die Bilanz der gesamten schweren Komponente in Strenge nicht erfüllt. Der Grund hierfür liegt zum einen in Meßfehlern und zum andern in der Tatsache, daß sich im Laufe der Umlenkung von den Deckplatten des Trennelements her Grenzschichten aufbauen. Betrachtet man die Strömung in der Mittelebene des Trennelements als eben, so erhöht sich also der Durchsatz in Strömungsrichtung. Berücksichtigt man diese Quellterme in der gesamten schweren Komponente durch einen der lokalen Isotopenzusammensetzung entsprechenden Quellterm für das leichte Isotop, so daß die lokale Produktion an schwerer Komponente keinen Einfluß auf den Ablauf der Diffusion hat, so erhält man trotzdem als resultierende Gleichung wieder die DGl.(12).

so ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_1 &= \vec{\nabla} \cdot (-v_U D_i \vec{\nabla} n) + \vec{\nabla} n \cdot \left(\vec{j}_U - v_U D_i \frac{m_s - m_l}{\bar{m}} \vec{\nabla} \ln p \right) \\ &+ n \left[\vec{\nabla} \cdot \left(-v_U D_i \frac{m_s - m_l}{\bar{m}} \vec{\nabla} \ln p \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Aus der Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung (12) folgt die räumliche Verteilung der Isotopenzusammensetzung in der Trenndüse. Diese Lösung wird nach den in Abschnitt 2.2.3 geschilderten Verfahren numerisch erhalten.

Nach Lösen der DGL.(12) kann die lokale Wertzeugung im Trennelement bestimmt werden gemäß /26/ (siehe auch Anhang A1):

$$\delta U^*(r) = \frac{1}{[n(1-n)]^2} \vec{j}_{d,1,\perp} \vec{\nabla}_\perp n \quad (13)$$

Der Diffusionsstrom $\vec{j}_{d,1}$ des leichten Isotops folgt hierbei aus den zwei letzten Termen der rechten Seite von (10).

2.2.3 Numerische Behandlung des Diffusionsproblems

2.2.3.1 Randbedingungen für die Diffusion

Zur numerischen Lösung der elliptischen DGl.(12) ist die Vorgabe von Randbedingungen auf einem geschlossenen Gebiet notwendig. Im Anfangsquerschnitt wird hierzu eine Isotopenzusammensetzung fest vorgegeben. Im Endquerschnitt wird demgegenüber die Konzentrationsdiffusion in Strömungsrichtung, deren Vernachlässigung in Gl.(12) zu einem parabolischen Problem führen würde, durch Extrapolation innenliegender Punkte ermittelt⁺⁾ . An festen Wänden erhält man die Randbedingungen aus der Forderung, daß kein Teilchenstrom senkrecht zur Wand fließen darf. Dies führt mit (6) sofort zu einer Bedingung an den senkrecht zur Wand gebildeten Gradienten der Isotopenzusammensetzung:

$$\frac{1}{(1-n)n} \vec{\nabla}_{\perp} n = - \frac{m_s - m_l}{\bar{m}} \vec{\nabla}_{\perp} \ln p \quad (14)$$

Gl.(14) ist zu entnehmen, daß in einer reinen Kontinuumsströmung, die an der Wand keinen Druckgradienten aufrechterhalten kann (Haftbedingung), die zur Wand senkrechte Ableitung der Isotopenzusammensetzung verschwinden muß. Da für die Trenndüse die Haftbedingung jedoch nicht streng erfüllt ist, läßt sich aus der radialen Euler-Gleichung unter Zugrundelegung der nach 2.1.2 gemessenen Wandgeschwindigkeit ein endlicher Druckgradient senkrecht zur Wand ermitteln, der nach (14) einen endlichen senkrechten Gradienten der Isotopenzusammensetzung zur Folge hat.

⁺⁾ Die Konzentrationsdiffusion in Strömungsrichtung kann sich nur mittelbar auf das Ergebnis der Trennung auswirken, indem sie die Isotopenzusammensetzung stromauf und stromab verändert und damit dort die transversale Konzentrationsdiffusion beeinflußt. Diese Auswirkungen sind daher größtenteils vernachlässigbar, was numerisch durch Vergleich mit einer parabolisierten Version der DGl.(12) bestätigt wurde.

Es zeigte sich, daß die Verwendung zweier grundsätzlich unterschiedlicher Segmenttypen, denen ein kartesisches bzw. zylindrisches Koordinatensystem zugrunde lag, genügend Flexibilität gewährleistet, um nahezu jede vorkommende Trennelementgeometrie hinreichend genau zu beschreiben. Kanalverengungen oder -erweiterungen wurden durch einen linearen Ansatz

$$v = a_w + b_w \cdot u \quad (15)$$

für die Beschreibung der Wände im jeweiligen Koordinatensystem ermöglicht⁺⁾ . Der gleiche lineare Ansatz wurde auch für die Stromlinien der beiden Gase gewählt, so daß zusammen mit Gl.(15) zur Beschreibung der Experimente konsistente Randbedingungen vorlagen. Die experimentellen Daten des Strömungsfeldes wurden jeweils am Anfangs- und Endquerschnitt eines Segmentes zur Verfügung gestellt.

Die Trennelementgeometrie wurde nun stückweise auf ein Rechteckgebiet abgebildet gemäß der Transformationsvorschrift (s.Abb.3)

$$\begin{aligned} \xi &= u \\ \eta &= \frac{v - v_i(\xi)}{v_a(\xi) - v_i(\xi)} \end{aligned} \quad (16)$$

mit

$$\begin{aligned} v_a &= a_a + b_a \xi \\ v_i &= a_i + b_i \xi \end{aligned}$$

die unabhängig vom zugrundegelegten Segmenttyp verwendet wurde. Die hieraus sich ergebenden Transformationen der Differentialoperatoren und somit der DGl.(12) finden sich im Anhang A2.

⁺⁾ u = "Azimutal"-koordinate, v = "Radial"-koordinate, a_w, b_w = Konstante.

Die transformierten Segmente wurden jetzt in ein äquidistantes Gitter unterteilt⁺⁾ und die den DGl.n. (A2-12) bzw. (A2-13) entsprechenden Differenzgleichungen auf der Gesamtanordnung der transformierten Segmente numerisch gelöst. Hierbei erwies es sich als zweckmäßig, nicht unmittelbar die stationäre Gl.(12) zu lösen, sondern vielmehr die instationäre Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_1 = 0 \quad (17)$$

mit $\vec{\nabla} \vec{j}_1$ nach (12) bzw. (A2-12, A2-13) mit vorgegebener Anfangsisotopenzusammensetzung auf dem Segmentgitter in Abhängigkeit der Zeit bis zum stationären Zustand zu integrieren. Hierzu wurde ein explizites Runge-Kutta-Verfahren verwendet.

Geeignete Anfangsverteilungen wurden erhalten durch Anwendung eines impliziten Crank-Nickolson-Verfahrens /27,28/ auf eine parabolisierte Form der stationären DGl.(12). Dieses Vorgehen bedeutete eine erhebliche Verkürzung der Rechenzeit, da die Lösung der parabolisierten Gleichung i.a. schon gut mit derjenigen der Gl.(12) übereinstimmte.

^{+) Eine Unterteilung in 49 x 11 bzw. 49 x 21 Punkte pro Segment erwies sich als ausreichend.}

3. Lokale Entropieerzeugung

Im Rahmen der Chapman-Enskog-Näherung wird der entmischende Diffusionsstrom in der Trenndüse vom relativen radialen Druckgradienten bestimmt (siehe Gl.(1)). Bei der Optimierung der Trenndüsengeometrie wird man deshalb anstreben, den mittleren radialen Druckgradienten und folglich den über den Querschnitt vorliegenden Druckunterschied bei vorgegebener Reynoldszahl und vorgegebenem Expansionsverhältnis zu maximieren und damit das Verhältnis von entmischendem Druckdiffusionsstrom zu Durchsatz an schwerer Komponente möglichst groß zu machen. Diese Forderung bedeutet eine Minimierung der Ruhedruckverluste. Dies wird unmittelbar verständlich, wenn man sich die im Strömungsfeld der Trenndüse auftretenden Zustandsänderungen zusammengesetzt denkt aus einer adiabatisch isenthalpen Drosselung um den Ruhedruckverlust und einer nachfolgenden adiabatisch isentropen Expansion. Die isenthalpe Drosselung reduziert hierbei das für die isentrope Expansion nutzbare Druckverhältnis und damit den für die Entmischung maßgebenden relativen radialen Druckgradienten.

Da die Expansion in der Trenndüse in guter Näherung adiabat erfolgt, kommt eine Minimierung der Ruhedruckverluste praktisch einer Minimierung der gesamten Entropieerzeugung der Strömung gleich /29,30/. Es liegt deshalb nahe, eine lokale Analyse der Entropiequellen im Strömungsfeld vorzunehmen, um Gebiete besonders hoher lokaler Entropieerzeugung zu erkennen und somit Aufschlüsse über die verschiedenen Ursachen des Ruhedruckverlusts zu erhalten.

Als entropieerzeugende Mechanismen kommen in der Strömung der Trenndüse die Reibung, die Wärmeleitung und die Diffusion in Betracht⁺⁾ .

⁺⁾ Grundsätzlich beruhen alle hier genannten entropieerzeugenden Prozesse auf einer schwachen Störung der lokalen Verteilungsfunktion des Gases /31/. Weichen hingegen die lokalen Verteilungsfunktionen stark von einer Maxwell-Verteilung ab, so können zusätzliche entropieerzeugende Mechanismen auftreten, wie z.B. die auf der Relaxation unterschiedlicher Temperaturen der Gemischkomponenten beruhende Entropieerzeugung /32/. Einflüsse solcher höherer gaskinetischer Effekte auf die Entropieerzeugung werden hier nicht betrachtet.

Für die reibungs- und die wärmeleitungsbedingte Entropieerzeugung wird der Zusammenhang mit dem Ruhedruckverlust klar, wenn man bedenkt, daß bei der Expansion eines idealen einheitlichen Gases ohne Energiezufuhr die mittlere Ruheenthalpie und die mittlere Ruhetemperatur des Gases konstant bleiben /29/. Bei Strömungen nicht einheitlicher idealer Gase ist zusätzlich die Relativbewegung der Gemischkomponenten zu berücksichtigen. Diese führt aufgrund der Stöße verschiedener Gemischpartner zu einem ständigen Umsatz von kinetischer Energie der Relativbewegung in thermische Energie und somit zu einer Entropieerzeugung. Auch dieser Prozess läuft in der Trenndüse bei konstanter Ruheenthalpie und konstanter Ruhetemperatur ab, so daß die hierbei erzeugte Entropie sich gleichfalls in einem Ruhedruckverlust äußert⁺⁾ .

Bei den vorliegenden Untersuchungen wurden nur die durch Reibung und die durch Diffusionsvorgänge verursachte Entropieerzeugung berücksichtigt, da bei dem verwendeten Meßverfahren keine Temperaturen gemessen werden können. Man kann jedoch davon ausgehen, daß der Beitrag der wärmeleitungsbedingten Entropieerzeugung i.a. klein ist, da aufgrund der relativ schwachen Expansion des Gasgemisches und den auftretenden dissipativen und diffusiven Prozessen die Temperaturunterschiede innerhalb der Trenndüse geringfügig sind /12/. Außerdem wird die durch die Diffusion der Isotope untereinander bedingte Entropieerzeugung vernachlässigt, da dieser Beitrag gegenüber dem durch die Diffusion der schweren Komponente im Gemisch verursachten um einige Größenordnungen kleiner ist.

⁺⁾ Man kann zeigen, daß sich die durch Druckdiffusion und die durch Konzentrationsdiffusion bedingte Entropieerzeugung in ihrer Auswirkung auf den Druckverlust unterscheiden, wenn man die mit den jeweiligen Diffusionsprozessen verbundenen Änderungen des chemischen Potentials betrachtet (siehe z.B./33/). Es zeigt sich, daß die Druckdiffusion zu einem Druckverlust führt, nicht aber die Konzentrationsdiffusion. Diese Tatsache hängt eng damit zusammen, daß die durch Konzentrationsdiffusion erzeugte Entropie eine eindeutige Funktion des Entmischungszustandes ist (Mischungsentropie), nicht aber die durch Druckdiffusion erzeugte Entropie (s.u.).

Für die durch Reibung und durch Diffusion pro Zeit- und Volumeneinheit erzeugte Entropie gilt die Beziehung /31,34,35/:

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{r}) = & \frac{\eta}{T} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ & + k(\nu D_u) \frac{N(1-N)}{D_u^2} (\vec{w}_u - \vec{w}_z)^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Der erste Term der rechten Seite von Gl.(18) beschreibt die reibungsbedingte Entropieerzeugung σ_R , in die die Geschwindigkeitsgradienten des Gemischs quadratisch eingehen. η ist die Gemischzähigkeit und T die absolute Temperatur.

Der zweite Term in Gl.(18) stellt die diffusionsbedingte Entropieerzeugung σ_D dar, die mit dem Quadrat der Differenzen der Diffusionsgeschwindigkeiten \vec{w}_k der einzelnen Gemischkomponenten ansteigt. D_u ist der binäre Diffusionskoeffizient, N der Molenbruch an schwerer Komponente, ν die Gesamteilchendichte und k die Boltzmannkonstante. Dieser Term, der wie oben erwähnt anschaulich als pro Zeiteinheit durch Stöße unterschiedlicher Moleküle in ungerichtete thermische Energie umgesetzte kinetische Energie der Relativbewegung aufgefaßt werden kann, läßt sich auch in die Form

$$\sigma_D = \frac{1}{T} N_{12} E_{kin}(rel) \quad (19)$$

bringen, wobei N_{12} die Stoßfrequenz unterschiedlicher Molekülsorten bezeichnet.

Aus der quadratischen Abhängigkeit der diffusionsbedingten Entropieerzeugung σ_D von den Diffusionsgeschwindigkeiten folgt unmittelbar, daß die integral durch Diffusion erzeugte Entropie von der Art und Weise abhängt, wie ein vorgegebener Entmischungszustand erreicht wird. Da für die integral erzeugte Entropie das quadratische Mittel der Diffusions-

geschwindigkeit entscheidend ist, wird die durch radiale Diffusion insgesamt erzeugte Entropie umso kleiner, je gleichmäßiger die Entmischung über dem Umlenkwinkel abläuft. Ähnliches gilt für die durch Diffusion in Strömungsrichtung insgesamt erzeugte Entropie: Diese wird umso kleiner, je gleichmäßiger der Druckabfall in Strömungsrichtung erfolgt.

Aus Gl.(18) und Gl.(19) lassen sich außerdem einige charakteristische Abhängigkeiten der diffusionsbedingten Entropieerzeugung σ_D von den äußeren Betriebsparametern aufzeigen:

Bei einer Erhöhung des Expansionsverhältnisses wachsen die radialen und die azimutalen Diffusionsgeschwindigkeiten an. Entsprechend erhöht sich hierbei sowohl der radiale als auch der azimutale Beitrag zu σ_D .

Eine Veränderung des Betriebsdruckes hingegen wirkt sich auf die durch radiale und auf die durch azimutale Diffusion bedingte Entropieerzeugung unterschiedlich aus: Während bei abnehmendem Betriebsdruck die radialen Druckgradienten aufgrund des wachsenden Reibungseinflusses kontinuierlich abnehmen, sind die azimutalen Druckgradienten im wesentlichen durch das angelegte Expansionsverhältnis vorgegeben und damit als konstant anzusehen. Der Radialanteil von σ_D geht deshalb mit abnehmendem Betriebsdruck gegen Null. Der Azimutalanteil bleibt bei einer Abnahme des Betriebsdruckes zunächst konstant, solange die aus der Chapman-Enskog-Näherung folgende lineare Abhängigkeit der Diffusionsgeschwindigkeiten von den relativen Druckgradienten gilt. Da die Diffusionsgeschwindigkeiten durch die thermischen Ausströmgeschwindigkeiten begrenzt sind, muß die durch azimutale Diffusion bedingte Entropieerzeugung bei abnehmendem Betriebsdruck jedoch von dem aus der Chapman-Enskog-Näherung zu erwartenden Verhalten abweichen und schließlich gleichfalls verschwinden. Dies ist auch unmittelbar aus Gl.(19) ersichtlich, weil die Stoßfrequenz proportional zum Produkt der Teilchendichten ist, also quadratisch vom Betriebsdruck abhängt, während die kinetische Energie der Relativbewegung bei fallendem Betriebsdruck konstant wird.

Um den Einfluß einer Änderung der Gemischzusammensetzung auf die diffusionsbedingte Entropieerzeugung zu sehen, wird im folgenden alleine der aus der Druckdiffusion folgende Term betrachtet. Im Gültigkeitsbereich der Chapman-Enskog-Näherung erhält man hierfür aus den Gleichungen (8),(18):

$$\sigma_D = \text{konst.} \cdot N(1-N) \left(\frac{\Delta m}{\bar{m}} \nabla \ln(p) \right)^2 \quad (20)$$

Bei vorgegebener Reynoldszahl ist der relative radiale Druckgradient in erster Näherung unabhängig von der Gemischzusammensetzung, so daß σ_D bei vorgegebener Massendifferenz nur durch die Molenbrüche und das Quadrat der mittleren Gemischmasse bestimmt wird. Die Abhängigkeit von σ_D vom Molenbruch ist unter diesen Randbedingungen für ein He/C₇F₁₄-Gemisch in Abb.4 dargestellt. Man erkennt, daß die Entropieerzeugung hiernach bei einem molaren Anteil der schweren Komponente von etwa 1 % maximal wird.

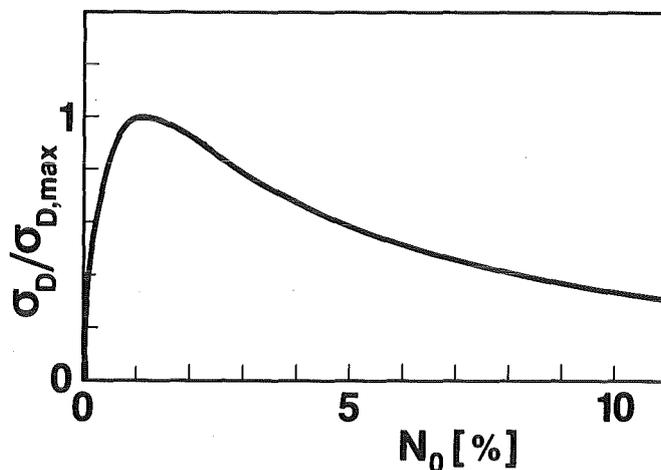


Abb.4 : Einfluß des Molenbruchs an schwerer Komponente auf die durch Diffusion erzeugte Entropie für ein He/UF₆- bzw. ein He/C₇F₁₄-Gemisch. Der relative Druckgradient wurde als konstant vorausgesetzt.

Im Grenzfall hoher Knudsenzahlen, also außerhalb des Gültigkeitsbereiches der Chapman-Enskog-Näherung, werden die Relativgeschwindigkeiten zwischen den Komponenten unabhängig von der Gemischzusammensetzung und hängen nur noch von den Molekülmassen der Gemischpartner ab. Da nach Gl.(19) außer den Relativgeschwindigkeiten nur die Stoßfrequenzen verschiedenartiger Moleküle eingehen, wird jetzt die durch Diffusion bedingte Entropieerzeugung nur noch vom Produkt $N(1-N)$ der Molenbrüche und dem Quadrat der Gesamtteilchendichte bestimmt⁺⁾. Mit zunehmender Knudsenzahl wird also das Maximum der diffusionsbedingten Entropieerzeugung zu größerem Molenbruch an schwerer Komponente verschoben. Legt man die für den Betrieb von Trenndüsen typischen Molenbrüche zwischen 1 % und 20 % zugrunde, so folgt, daß die durch Diffusion bedingte Entropieerzeugung bei hohen Knudsenzahlen monoton mit dem Molenbruch an schwerer Komponente ansteigt.

^{+) Die in die Stoßfrequenzen ebenfalls eingehenden Wirkungsquerschnitte sind in dem infrage kommenden Bereich der Relativgeschwindigkeit der Gemischkomponenten praktisch von dieser unabhängig. Siehe z.B. /36/.}

4. Experimentelle Ergebnisse

4.1 Betriebsbedingungen und Darstellung der Ergebnisse

Die in der vorliegenden Arbeit verwendete Methode zur Analyse der Wert- und der Entropieerzeugung in der Trenndüse setzt die Ausmessung vollständiger Strömungsfelder voraus und ist deshalb von der experimentellen Seite her sehr zeitaufwendig. Die Anwendung wurde daher auf vier Strömungsfelder beschränkt, deren Betriebsbedingungen aus Tabelle 1 ersichtlich sind.

Strömungsfeld-Nr.	N_o [Mol-% C ₇ F ₁₄]	P_o [mbar]	p_o/p_1 ($p_T=p_m=p_s$)	$\beta_{C_7}^I$	$\beta_{C_7}^{II}$	f^I [mm]	f^{II} [mm]	Re
1	2.0	0.11	2.5	0.30	-	30	-	28
2	4.0	0.12	3.0	0.20	-	30	-	45
3	1.0	0.05	3.0	0.41	-	30	-	8
4	2.0	0.11	2.5	0.30	0.53	30	20	23

Tabelle 1: Betriebsbedingungen der vier untersuchten Strömungsfelder.

Die Strömungsfelder 1 bis 3 wurden in der ersten Düse und Feld 4 in der zweiten Düse eines biradialen Doppelumlenksystems gemessen. Die Geometrie des verwendeten Trennelements ist aus Abb.5 ersichtlich. Die Krümmungsradien des Doppelumlenksystems betragen in der ersten Düse 100 mm und 150 mm, in der zweiten Düse 50 mm und 70 mm. In Abb.5 sind außerdem Bezeichnungen für die einzelnen Bereiche der Trenndüse eingeführt, die im folgenden durchgängig benutzt werden.

Bei der Auswahl dieser Betriebsbedingungen wurden folgende Gesichtspunkte zugrunde gelegt:

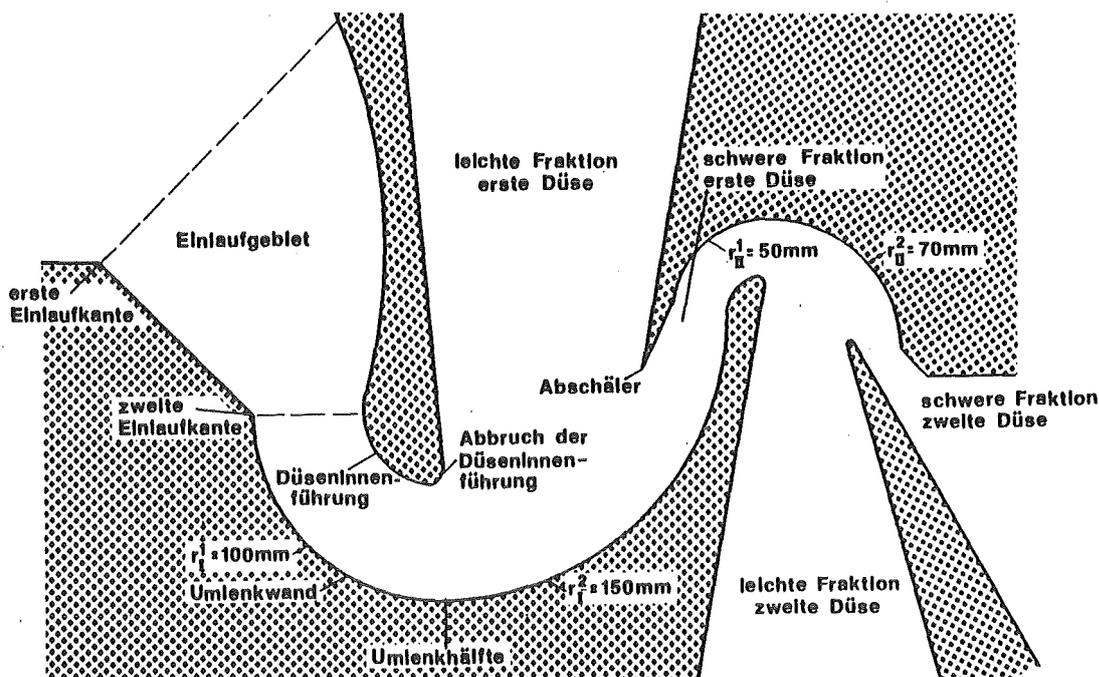


Abb.5: Maßstäbliche Skizze des für die vorliegenden Untersuchungen verwendeten Trennelements. Die in der Abbildung eingeführten Bezeichnungen für die einzelnen Bereiche der Düse werden im folgenden durchgängig benutzt.

Feld 1 wurde bei einem Betriebsdruck aufgenommen, der dem Maximum der Gemischtrennung entspricht. Das Expansionsverhältnis lag dabei etwas höher und der Molenbruch an schwerer Komponente etwas niedriger, als es bei typischen technischen Betriebsbedingungen der Fall wäre. Man kann davon ausgehen, daß unter diesen Bedingungen bei He/UF₆-Gemischen die maximalen Isotopen-Trenneffekte die obere Grenze der Gleichgewichtsentmischung übersteigen⁺). Außerdem wird der Ablauf der Isotopentrennung unter diesen Bedingungen besonders stark durch die Gemischtrennung beeinflusst, da eine starke räumliche Variation des Isotopendiffusionskoeffizienten und der mittleren Gemischmasse vorliegt (vgl. Gl.(6),(7)).

Strömungsfeld 2 wurde bei Betriebsbedingungen gemessen, wie sie bei Verwendung eines He/UF₆-Gemisches für den Betrieb einer Isotopentrennkaskade typisch wären.

Bei Feld 3 lag der Düsen vordruck wesentlich niedriger als der für die Isotopen- und die Gemischtrennung optimale Wert. Außerdem war der mittlere Molenbruch an schwerer Komponente mit 1 % deutlich niedriger, als es technischen Bedingungen entspricht. Hierdurch wird die Reynolds-Zahl extrem niedrig und damit automatisch die Knudsenzahl der Strömung

verhältnismäßig hoch. Dies hat zur Folge, daß die Entmischung sehr schnell über dem Umlenkwinkel abläuft, und man kann damit rechnen, daß lokale Rückmischungen auftreten. Außerdem treten bei den gewählten Bedingungen teilweise bereits starke Störungen der lokalen Verteilungsfunktionen auf /16/, so daß man davon ausgehen kann, daß ein Einfluß höherer gaskinetischer Effekte auf den Ablauf der Isotopentrennung vorliegt.

Mit Strömungsfeld 4 sollten schließlich typische Unterschiede im räumlichen Ablauf der Isotopentrennung und der Entropieerzeugung in der ersten und zweiten Düse eines Doppelumlensystems aufgezeigt werden. Für dieses Strömungsfeld wurden in der ersten Düse dieselben Betriebsbedingungen wie bei Feld 1 gewählt. Wegen der Gemischtrennung in der ersten Düse ergibt sich in der zweiten Düse ein mittlerer Molenbruch der schweren Komponente von 9,5 %.

Die Ergebnisse dieser Strömungsfeldmessungen werden in den nachfolgenden Abschnitten dargestellt.

Abb.6 zeigt typische Meßergebnisse anhand von vier ausgewählten Meßquerschnitten (vgl. Abb.3) des Feldes 1, wie sie in ähnlicher Form bereits in früheren Arbeiten diskutiert wurden. Es wird deutlich, daß die Strömung im Zulauf der Düse stark beschleunigt wird und nach der ersten Hälfte der Umlenkung ein maximales C_7F_{14} - Geschwindigkeitsverhältnis von etwa 3,3 erreicht. Auf der zweiten Umlenkhälfte bildet sich auf der Seite der Düseninnenführung ein festkörperwirbelähnliches

+) Im Gleichgewicht von Druck- und Konzentrationsdiffusion streben die Isotopentrenneffekte mit steigendem Geschwindigkeitsverhältnis der Strömung monoton einem oberen Grenzwert zu, der nur noch vom Abschälverhältnis abhängt. Für kleine relative Massenunterschiede gilt nach /2/: $\varepsilon_{A\infty} = (\Delta m/m) (\ln \theta / (\theta - 1))$. Diese Schranke, die bei binärer Druck- und Konzentrationsdiffusion nicht überschritten werden kann, ist unabhängig von der speziellen Form des Strömungsprofils.

Profil aus, in umlenkwandnahen Zonen wird die Strömung vor dem Abschäler abgebremst. Mit wachsender Umlenkung führt hierbei die Gemischtrennung zu einer immer stärkeren Konzentration des C_7F_{14} im Umlenkwandbereich, wie der Verlauf der C_7F_{14} -Stromdichte zeigt.

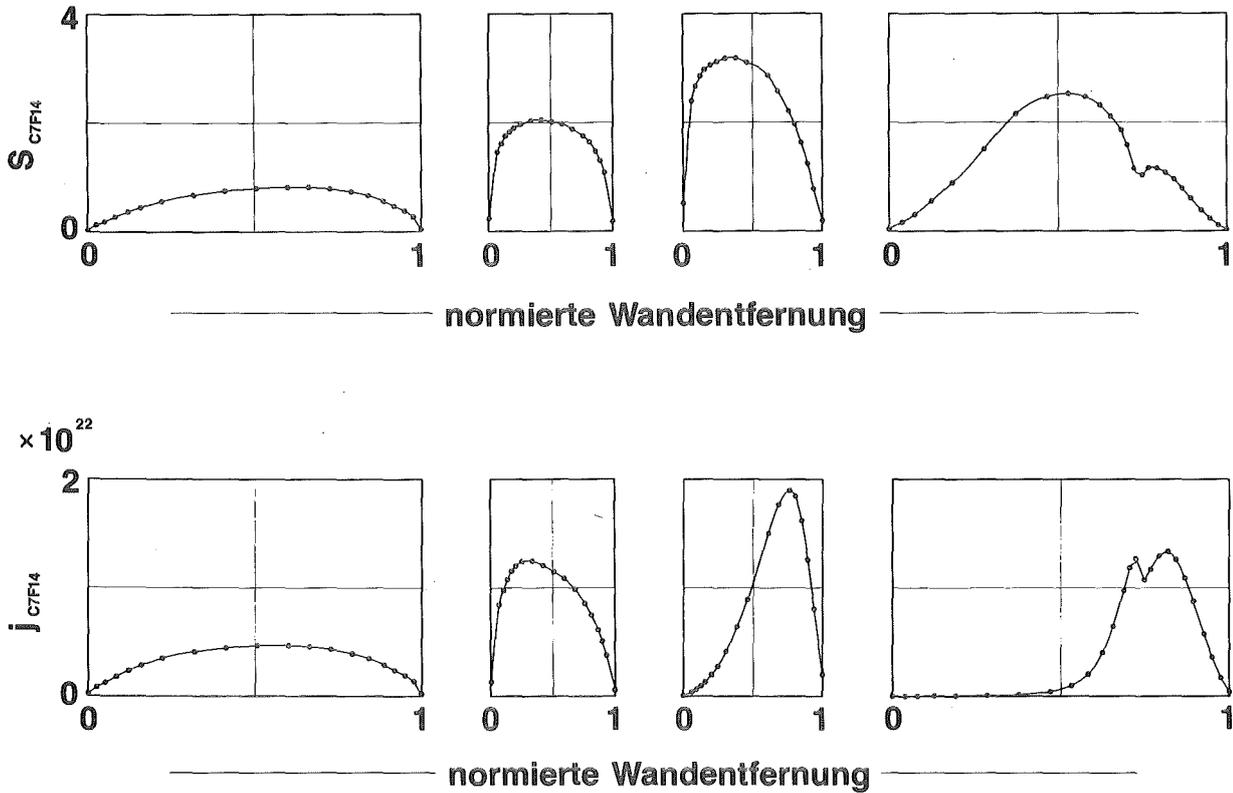


Abb.6 : Typische radiale Profile des C_7F_{14} -Geschwindigkeitsverhältnisses und der C_7F_{14} -Stromdichte. Als Abszisse ist die auf die jeweilige Querschnittslänge bezogene Entfernung vom Schnittpunkt des Querschnittes mit der Düseninnenführung gewählt (siehe auch Abb.3). Zur Verdeutlichung der wahren geometrischen Verhältnisse verhalten sich die Abszissenlängen wie die Längen der Meßquerschnitte. Die Lage der Querschnitte entspricht den in Abb.3 eingezeichneten Querschnitten Q1 bis Q4. Dies gilt für die weiteren Abbildungen in gleicher Weise. Einheit der Teilchenstromdichte: $[1/(m^2 \text{ sec})]$

Um den komplexen Verlauf der Feldgrößen in komprimierter Form und in ihrem räumlichen Zusammenhang wiederzugeben, werden im folgenden zusätzlich perspektivische Darstellungen und Höhenliniendarstellungen verwendet. Abb.7 zeigt die hierbei verwendeten Blickrichtungen und ein willkürliches Beispiel für Höhenlinien.

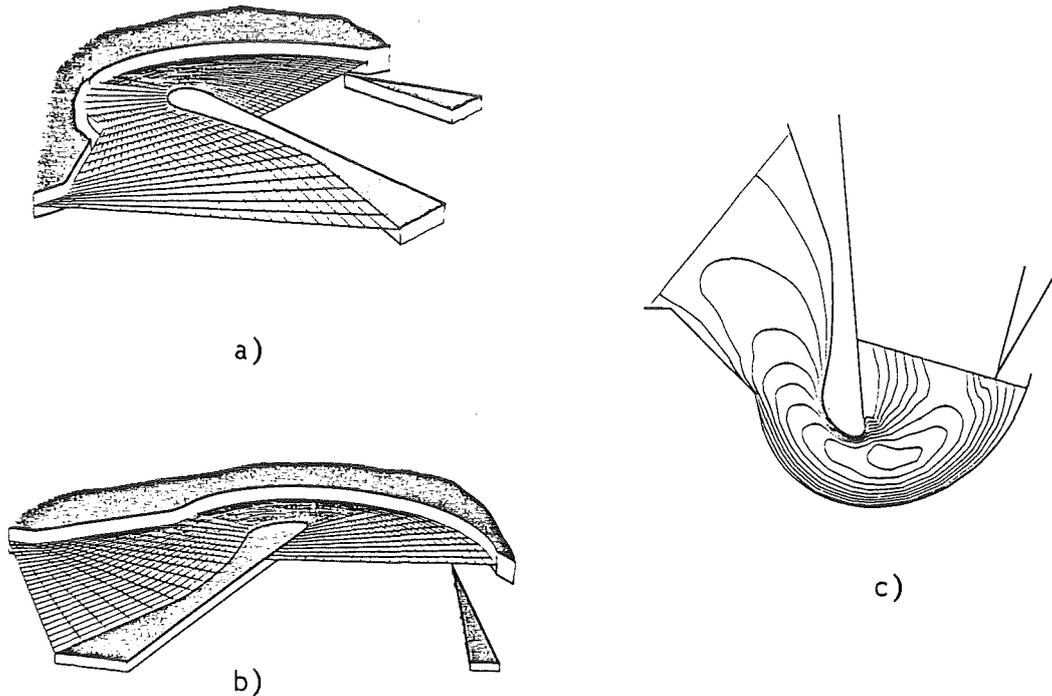


Abb. 7: Hauptsächlich verwendete Blickrichtungen für die dreidimensionalen Abbildungen, hier demonstriert an der Nullebene: Vom Einlauf her (Abb.7a, oben links) und vom Absaugkanal der leichten Fraktion her (Abb.7b, unten links). Rechts (Abb.7c) als willkürliches Beispiel für Höhenlinien das $C_7F_{14}^-$ Geschwindigkeitsverhältnis von Strömungsfeld 1.

4.2 Räumlicher Verlauf der Strömung und der binären Gemischzusammensetzung in der ersten Düse des Doppelumlenksystems

In den nachfolgenden Abbildungen wird am Beispiel des Strömungsfeldes 1 die Entwicklung der Strömung und der binären Gemischzusammensetzung im Trennelement vom Einlauf bis zur Abschälung dargestellt.

Abb.8 zeigt die Entwicklung des Helium-Geschwindigkeitsverhältnisses. Man erkennt, daß das im breiten Zulaufquerschnitt relativ langsam strömende Gas im Einlaufgebiet eine der geometrischen Verengung entsprechende Beschleunigung erfährt, die sich auf den inneren Stromflächen bis etwa zur Hälfte der Umlenkung kontinuierlich fortsetzt. Bei der Beschleunigung im Einlauf wird aus dem zunächst asymmetrischen parabelförmigen Strömungsprofil ein asymmetrisch trapezförmiges. Auf der ersten Hälfte der Umlenkung wandelt sich dieses dann wieder in ein asymmetrisch parabelförmiges um, wobei sich mit zunehmender Umlenkung das radiale Maximum zur Düseninnenführung hin verschiebt. Während das Gas auf den inneren Stromflächen also beschleunigt wird, wird es in Umlenkwandnähe nach Ende des Einlaufes zunächst abgebremst und strömt dann im wesentlichen mit konstanter Geschwindigkeit.

Die zweite Hälfte der Umlenkung ist gekennzeichnet durch eine extreme Abbremsung nahe der Düseninnenführung, wobei sich auf den inneren Stromflächen mit zunehmender Umlenkung ein festkörperwirbel-ähnliches Strömungsprofil ausbildet. Auf den äußeren Stromflächen hingegen fällt das Geschwindigkeitsverhältnis nur geringfügig. In diesem Umlenkungsbereich verlagert sich das radiale Maximum des Geschwindigkeitsverhältnisses in Richtung Umlenkwand.

Kurz vor der Abschälung wird das Gas in den umlenkwandnahen Zonen stark abgebremst, wohingegen das in die leichte Fraktion strömende Gas am Abschäler deutlich beschleunigt wird. Hier liegt also eine Nachexpansion vor.

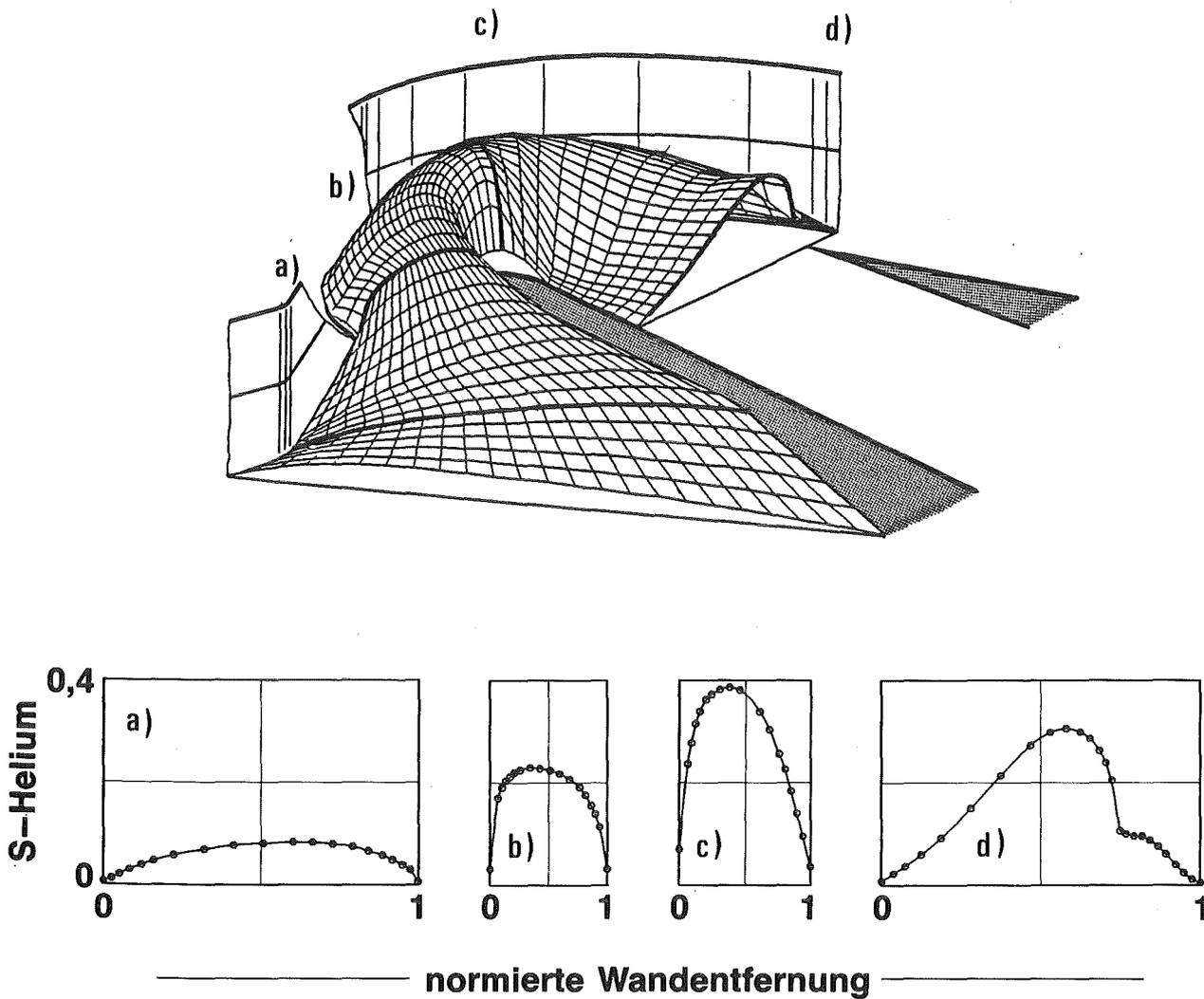


Abb 8: Räumlicher Verlauf des Helium-Geschwindigkeitsverhältnisses für Strömungsfeld-1.

Die höchsten Geschwindigkeitsgradienten werden nach Abb.8 an der umlenkwandseitigen Einlaufkante und an der Düseninnenführung aufgebaut. Das Helium-Geschwindigkeitsverhältnis ist kurz nach Abbruch der Düseninnenführung maximal und weist dort einen Wert von 0,39 auf. Bei etwa 140° Umlenkung durchläuft es mit 0,25 ein flaches relatives Minimum und steigt im Bereich der Nachexpansion wieder geringfügig an.

Aus der Extrapolation der Meßdaten zur Wand geht hervor, daß die Geschwindigkeitsverhältnisse an den Strahlrändern nicht auf Null

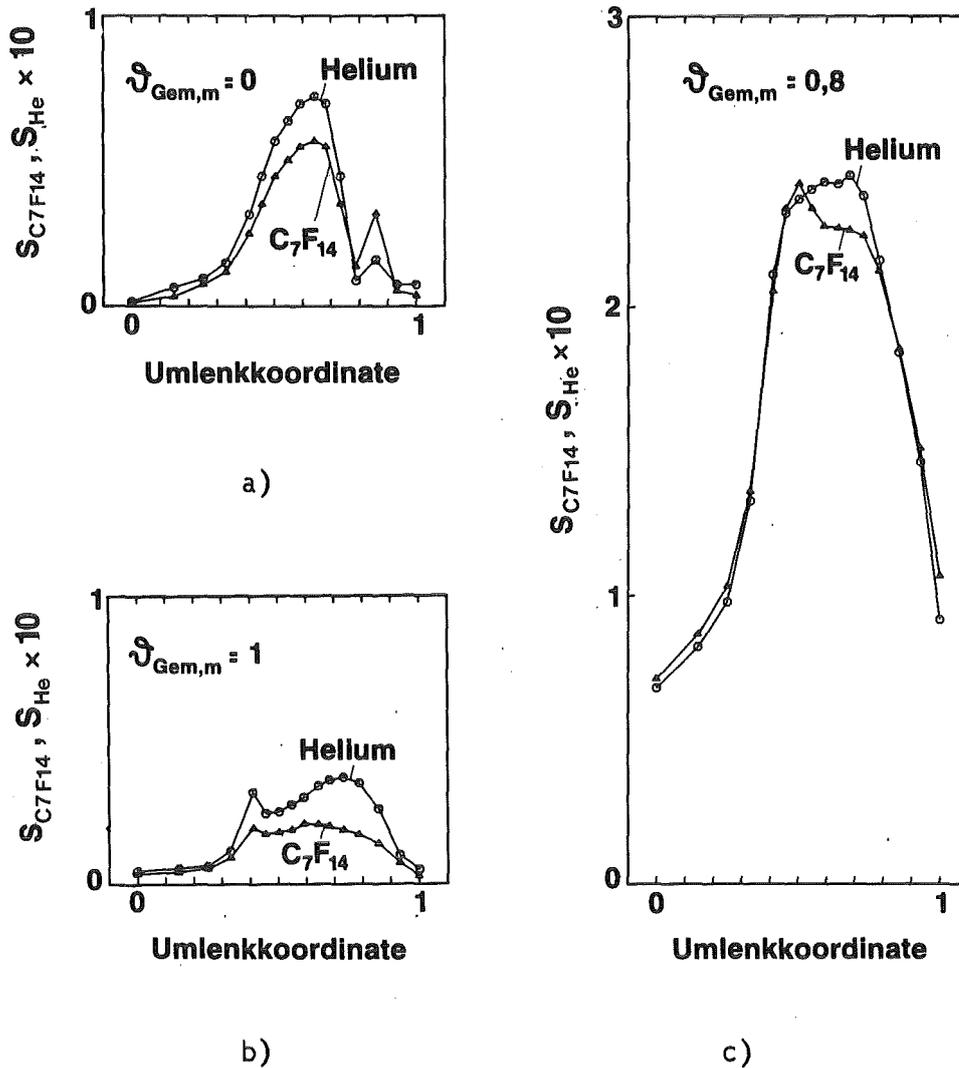


Abb.9 : Verlauf der Geschwindigkeitsverhältnisse von He und C_7F_{14} entlang verschiedener Massenstromflächen mit dem Massenstromaufteilungsverhältnis 0 (Abb.9a, oben links), 1 (Abb.9b, unten links) und 0,8 (Abb.9c, rechts). Man beachte die für beide Gase unterschiedliche Skalierung der Ordinaten.

abfallen, sondern endlich bleiben. Die azimuthale Entwicklung dieses Wandschlupfes ist in Abb.9 dargestellt. Hieraus folgt zunächst, daß für jede Gassorte ein Anstieg der radialen Gradienten des Geschwindigkeitsverhältnisses (siehe Abb.8) mit einem entsprechenden Anstieg des Wandschlupfes verbunden ist. Setzt man die lokalen Temperaturen der Gemischpartner als gleich voraus, so stellt man ferner fest, daß die

schwere Komponente an den begrenzenden Wänden fast durchweg erheblich langsamer strömt als das leichte Zusatzgas. In der Kernströmung ist im Gegensatz hierzu der relative Geschwindigkeitsunterschied zwischen den Komponenten wesentlich geringer und wechselt je nach Beschleunigung sein Vorzeichen, ist also in Verzögerungsgebieten negativ (Abb.9c).

Abb.10 zeigt, daß solche Verzögerungsgebiete allerdings nur an verhältnismäßig wenigen Stellen im Strömungsfeld vorliegen. Diese befinden sich i.a. unmittelbar vor dem Einlauf in die schwere Fraktion des Trennelements, im Absaugkanal der leichten Fraktion sowie räumlich lokalisiert direkt nach der zweiten Einlaufkante. Im überwiegenden Teil des eigentlichen Trennraumes hingegen strömt die leichte Komponente deutlich schneller als die schwere. Bei der Interpretation von Abb.10 im Hinblick auf die Auswirkungen dieses Schlupfes auf die Isotopentrennung (s.u.) ist zu beachten, daß die C_7F_{14} -Stromdichte vor allem gegen Ende der Umlenkung zur Umlenkwand hin stark ansteigt (vgl.Abb.6), so daß im Endquerschnitt die Auswirkungen des Schlupfes auf weit innen liegenden Stromflächen vernachlässigbar sind.

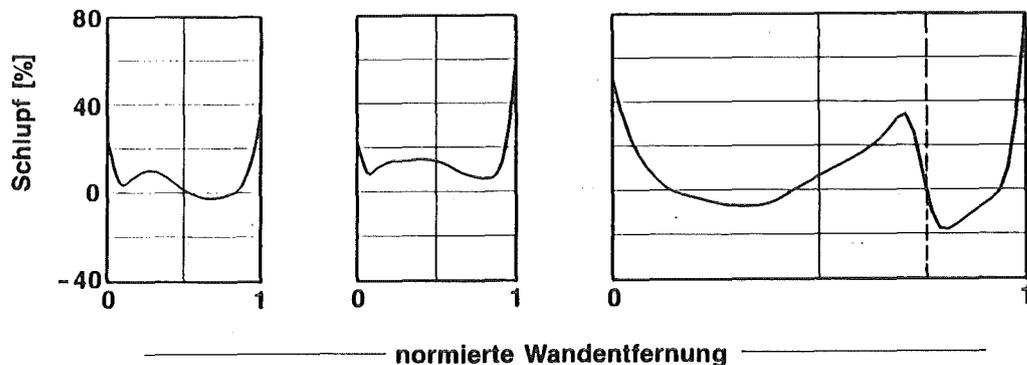


Abb.10 : Prozentualer Geschwindigkeitsunterschied zwischen Helium und C_7F_{14} in drei Querschnitten des Strömungsfeldes 1. Die Querschnitte befinden sich bei etwa 15° (links), 75° (Mitte) und 165° (rechts). Die Position des Abschälers ist gestrichelt eingezeichnet.

Das Gemischgeschwindigkeitsverhältnis, das in Abb.11 gezeigt ist, weist etwa bis zur ersten Umlenkhälfte das gleiche Verhalten auf wie die partiellen Geschwindigkeitsverhältnisse der Komponenten (vgl. Abb.8,9). In der zweiten Umlenkhälfte macht sich die Abtrennung der schweren

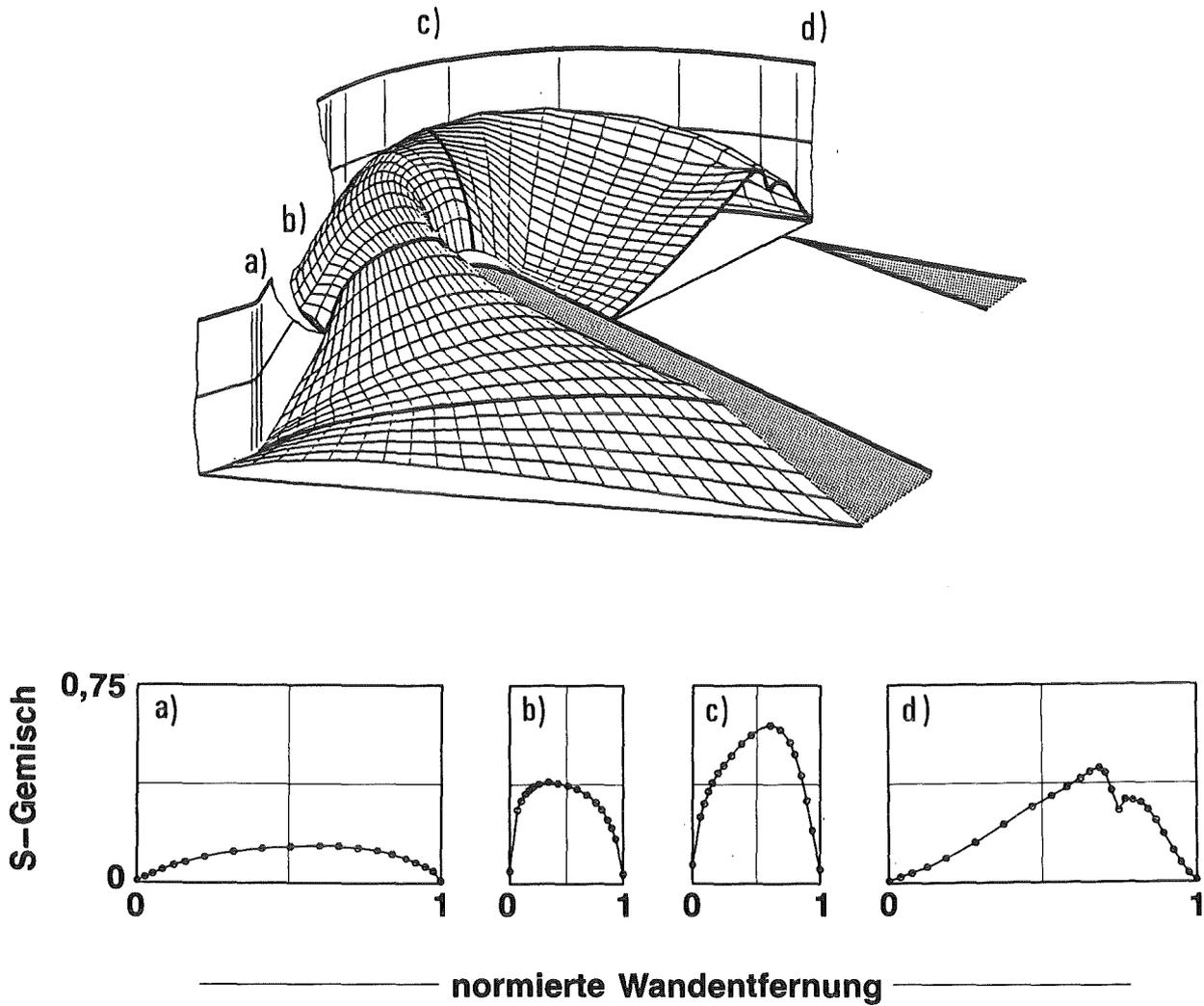


Abb.11 : Räumlicher Verlauf des Gemisch-Geschwindigkeitsverhältnisses für Strömungsfeld 1.

Komponente vom Zusatzgas immer stärker bemerkbar. Das radiale Maximum wird hierdurch gegenüber dem radialen Maximum der partiellen Geschwindigkeitsverhältnisse näher zur Umlenk wand und zu höheren Umlenkwinkeln verlagert. Auf der zweiten Umlenkhälfte fällt das Gemischgeschwindigkeitsverhältnis von dem Maximalwert 0,62 ($Ma=0,69$) bis auf 0,43 ($Ma=0,48$) im Endquerschnitt. Die Strömung ist somit eine reine Unterschallströmung.

Abb.12 zeigt den räumlichen Verlauf der Helium-Stromdichte. Im Gegensatz zum Geschwindigkeitsverhältnis, das entsprechend der Dichteabnahme auf der ersten Umlenkhälfte ansteigt, bleibt die Stromdichte in diesem Bereich wegen der im wesentlichen konstanten Kanalbreite nahezu konstant. Sie wächst lediglich bedingt durch die Umbildung von einem trapezförmigen in ein parabelförmiges Strömungsprofil in der Kanalmitte leicht an. Auch bei der Stromdichte zeigt sich der Festkörperwirbel auf der Seite der leichten Fraktion, der nach Abbruch der Düseninnenführung aufgebaut wird. Aus dem Stromdichteverlauf geht weiter hervor, daß sich unmittelbar nach Abbruch der Düseninnenführung nahe der inneren Wand ein kleines Totwassergebiet ausbildet, in dem die Geschwindigkeitsverhältnisse und Stromdichten allerdings vernachlässigbar sind. Im Gebiet des Aufstaus vor dem Abschäler wird das Helium stark von der Umlenk wand weg verdrängt.

In Abb.13 ist der Verlauf des C_7F_{14} -Molenbruchs dargestellt. Da im Einlaufgebiet die Stromflächen im Mittel entgegengesetzt zur Krümmung im Umlenkbereich der Düse gekrümmt sind, wird in diesem Bereich ein bezüglich der eigentlichen Umlenkung negatives Molenbruchgefälle aufgebaut, das vor allem im Bereich der beiden Einlaufkanten ausgeprägt ist. Nach Ende des Einlaufes beginnt sich das radiale Molenbruchgefälle umzukehren, wobei hiervon zunächst vorwiegend die in der Nähe der Düseninnenführung liegenden Zonen betroffen sind, nicht aber die umlenkwandnahen Bereiche. Dieser räumliche Ablauf der Gemischtrennung hat zu Beginn der Umlenkung eine intermediäre Überhöhung des Molenbruches in der Kanalmitte zur Folge.

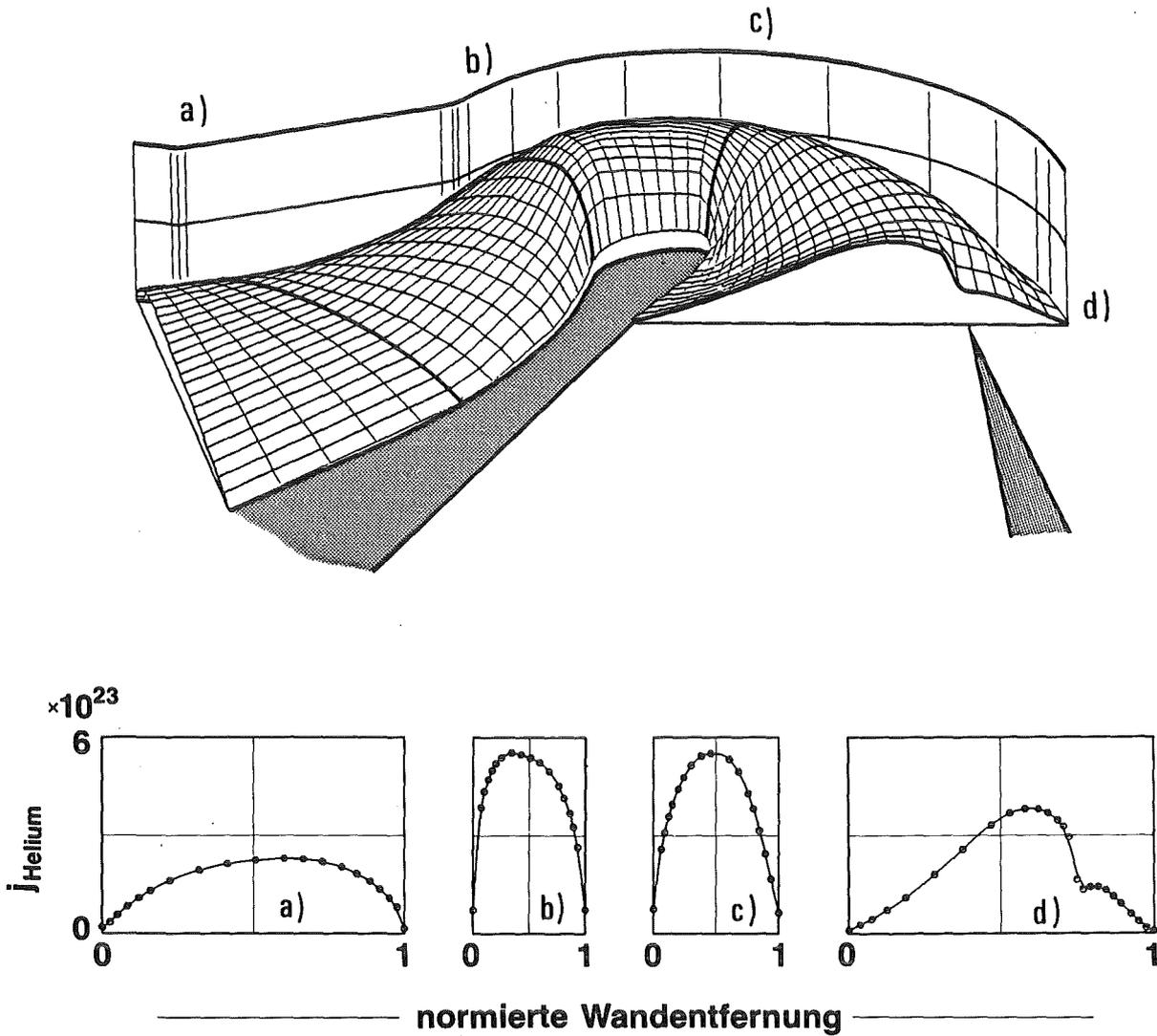


Abb.12 : Räumlicher Verlauf der Helium-Stromdichte für Strömungsfeld 1. Einheiten: [1/(m² sec)]

Erst ab etwa 60° Umlenkung hat sich über den gesamten Querschnitt ein positives Molenbruchgefälle ausgebildet. Im weiteren Verlauf der Umlenkung fällt der Molenbruch auf den inneren Stromflächen um etwa zwei Größenordnungen, während er entlang der Umlenkwand auf etwa den 5-fachen Ausgangswert ansteigt (vgl. Tabelle 2).

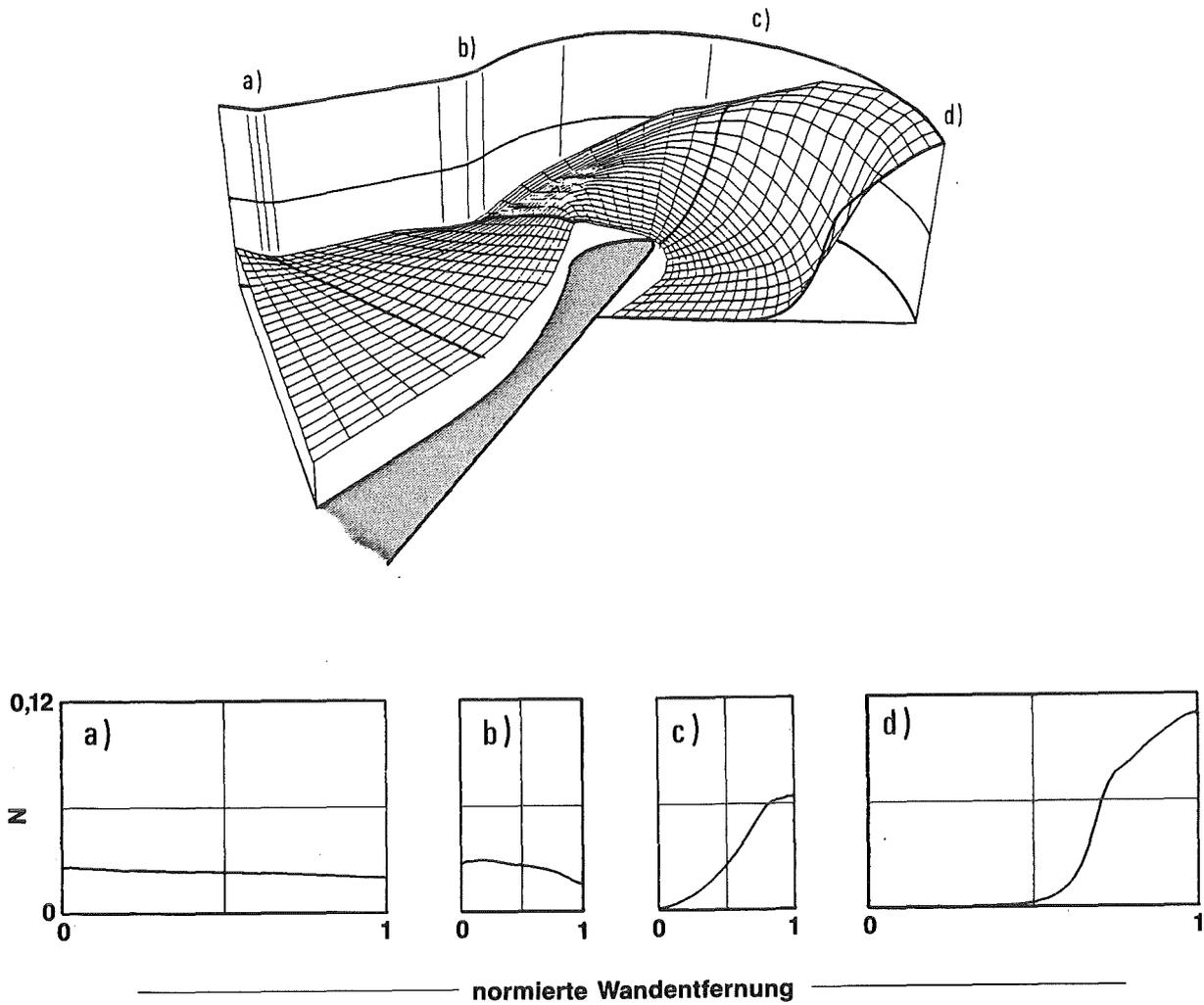


Abb.13 : Räumlicher Verlauf des C_7F_{14} -Molenbruchs für Strömungsfeld 1.

Ort	$N_{C_7F_{14}}$ [%]
Ende Einlauf, Düseninnenführung	2,3
Ende Einlauf, Umlenk wand	1,26
90° Umlenkung, Düseninnenführung	0,079
90° Umlenkung, Umlenk wand	5,3
Ende Umlenkung, leichte Fraktion	0,023
Ende Umlenkung, Umlenk wand	9,1

Tabelle 2: Werte des C_7F_{14} -Molenbruchs an ausgewählten Stellen der verwendeten Trenndüse beim Strömungsfeld 1.

Der statische Druck des Gemisches, dessen Gradient die Entmischung bewirkt (vgl. Gl.(1)), ist in Abb.14 gezeigt.

Man erkennt, daß im größten Teil des Einlaufgebietes der statische Druck nahezu konstant ist. Entsprechend den niedrigen Strahlgeschwindigkeiten und der in diesem Bereich im Mittel negativen Stromflächenkrümmung ist der Druckgradient lediglich leicht negativ. Kurz vor dem Eintritt in den Trennraum setzt die Expansion an beiden Strahlrändern verstärkt ein. Der statische Druck nimmt entlang der Düseninnenführung fast linear ab und unterschreitet nach Abbruch der Düseninnenführung den angelegten Absaugdruck geringfügig. Entlang der Umlenkwand bleibt er zunächst nahezu konstant und fällt ab etwa 30° Umlenkung kontinuierlich. Bei etwa 140° Umlenkung wird im Umlenkwandbereich ein flaches relatives Minimum durchlaufen. Im weiteren Verlauf wird die Strömung vor dem Einlauf in die zweite Düse aufgestaut, was zu einem leichten Anstieg des statischen Druckes führt. Dieser Aufstau hat zusammen mit der auf der Seite der leichten Fraktion vorliegenden Nachexpansion der Strömung einen sehr ausgeprägten radialen Druckgradienten im Bereich vor der Abschälerspitze zur Folge.

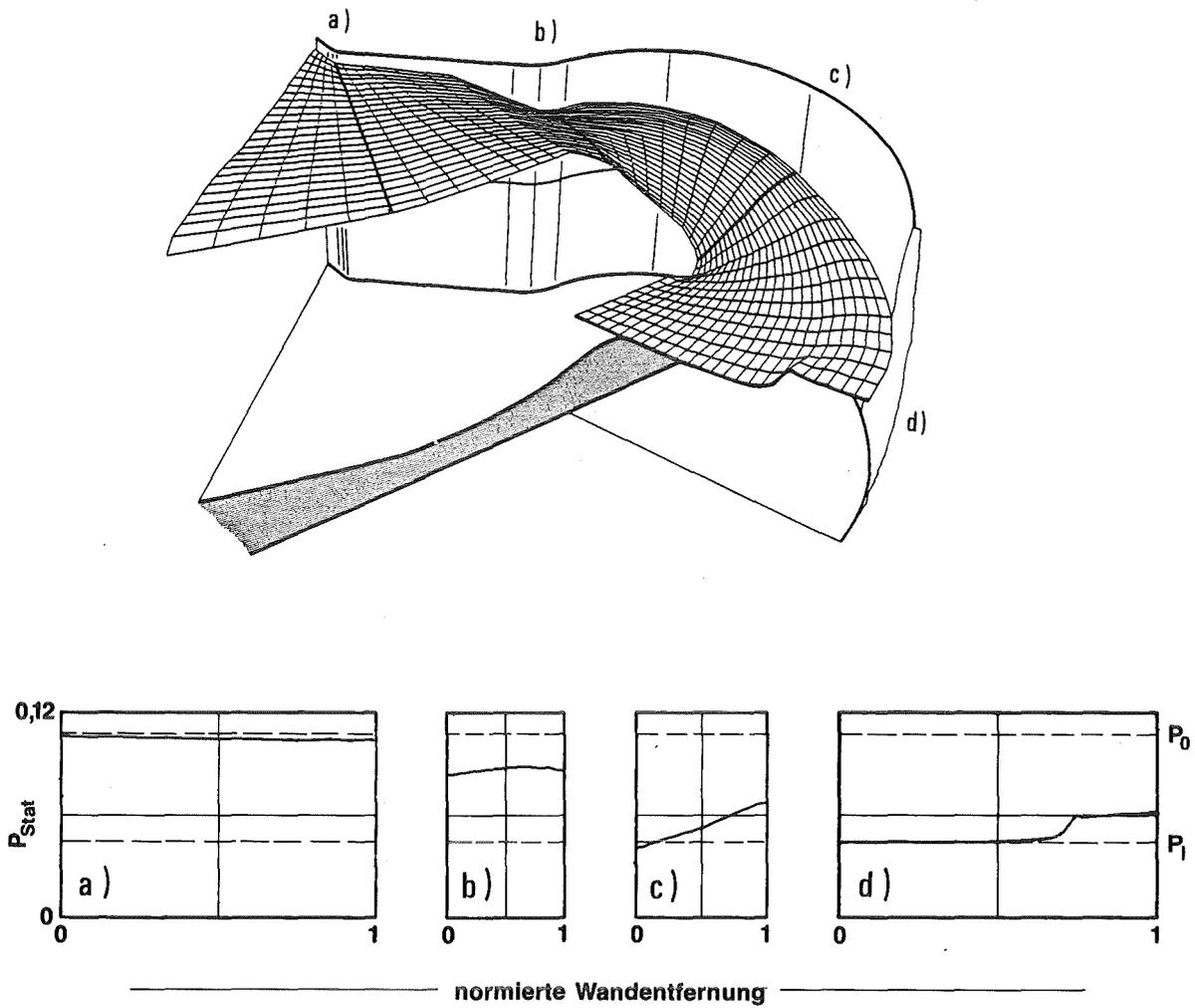


Abb.14 : Räumlicher Verlauf des statischen Druckes des Gemischs für Strömungsfeld 1. P_0 bzw. P_1 bezeichnen den angelegten Düsenvor- bzw. -absaugdruck. Einheiten: [mbar]

Abb.15 zeigt schließlich den Strömungsgesamtdruck. Dieser nimmt zu Beginn des Trennraumes an beiden Strahlrändern stark ab, während er in der Kanalmitte zunächst nahezu konstant bleibt. Im Laufe der Umlenkung fällt dann der radiale Maximalwert des Strömungsgesamtdruckes kontinu-

ierlich. Wie man aus einem Vergleich mit Abb.6 und Abb.8 erkennt, liegt das radiale Maximum des Strömungsgesamtdruckes im Endquerschnitt geringfügig näher an der Umlenkwand als das des Gemischgeschwindigkeitsverhältnisses und deutlich näher als die der partiellen Geschwindigkeitsverhältnisse. Der Strömungsgesamtdruck übersteigt den statischen Druck an dieser Stelle nur noch geringfügig.

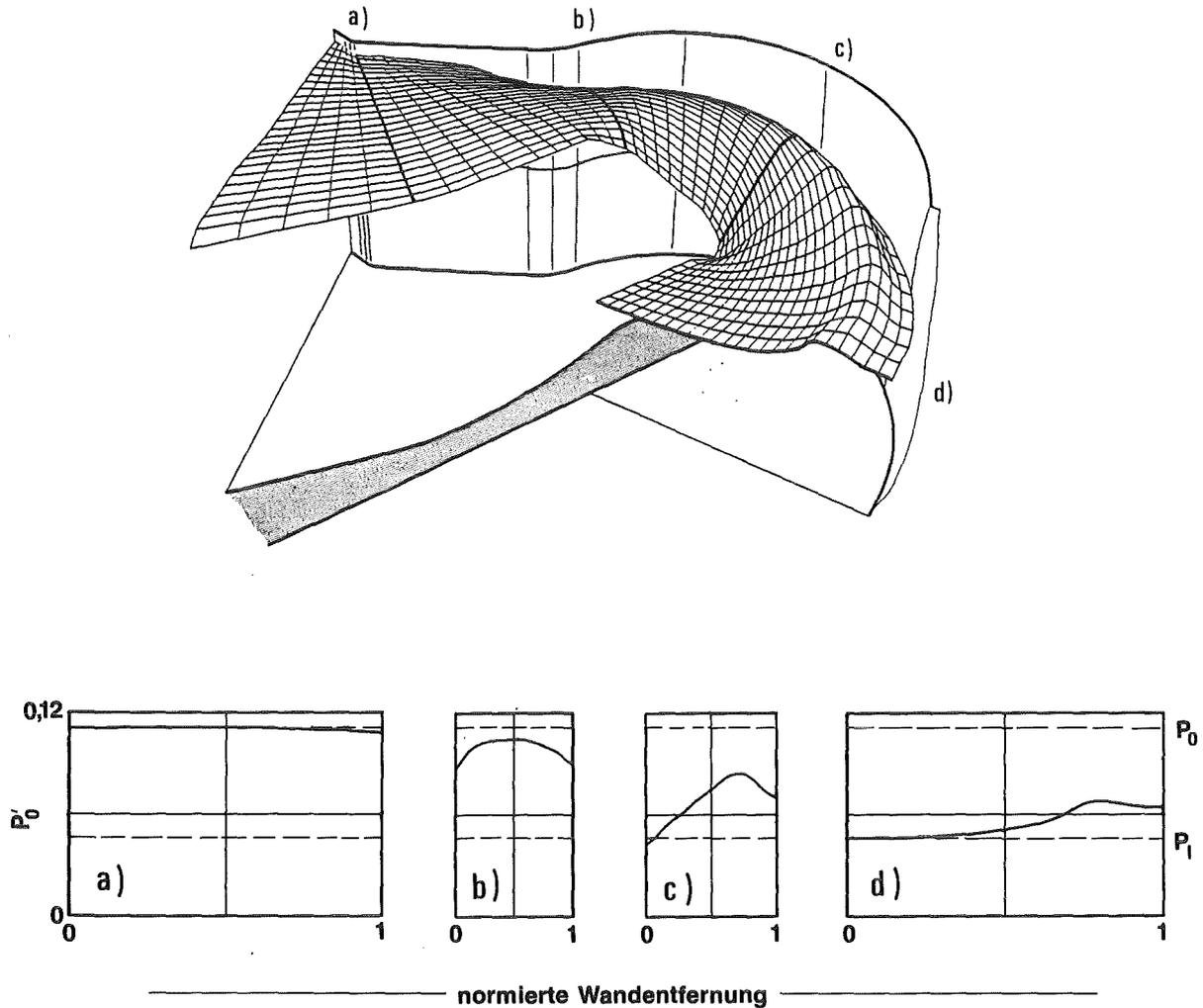


Abb.15 : Räumlicher Verlauf des Strömungsgesamtdruckes für Strömungsfeld 1. P_0 bzw. P_1 kennzeichnen den angelegten Düsen- bzw. -absaugdruck. Einheiten: [mbar]

4.3 Einfluss der Betriebsbedingungen

Der Einfluß der Betriebsbedingungen auf den Strömungsverlauf in der ersten Düse des Doppelumlenksystems wird im folgenden anhand des Gemisch- und des C_7F_{14} -Geschwindigkeitsverhältnisses aufgezeigt.

Abb.16 zeigt die radialen Profile des Gemischgeschwindigkeitsverhältnisses für die Strömungsfelder 1, 2 und 3. Der höchste Wert des Gemischgeschwindigkeitsverhältnisses wird bei Feld 2 erreicht, wo nach 90° Umlenkung das Geschwindigkeitsverhältnis um 15 % höher ist als bei Feld 1. Bei Feld 3 hingegen liegt es an dieser Stelle trotz des höheren Expansionsverhältnisses (3,0 im Vergleich zu 2,5) um 37 % unterhalb des Wertes von Feld 1. Dieses Ergebnis spiegelt den bereits aus früheren Untersuchungen bekannten Sachverhalt wider, daß in dem vorliegenden Reynolds-Zahl-Bereich das erreichbare Geschwindigkeitsverhältnis mit abnehmender Reynolds-Zahl stark sinkt.

Am Ende der Umlenkung liegt das Maximum des Gemischgeschwindigkeitsverhältnisses bei Feld 2 am nächsten und bei Feld 3 am weitesten von der Umlenkwand entfernt. Dieser radiale Verlauf kommt zum einen durch den Einfluß der Reynolds-Zahl zustande. Zum andern ist zu berücksichtigen,

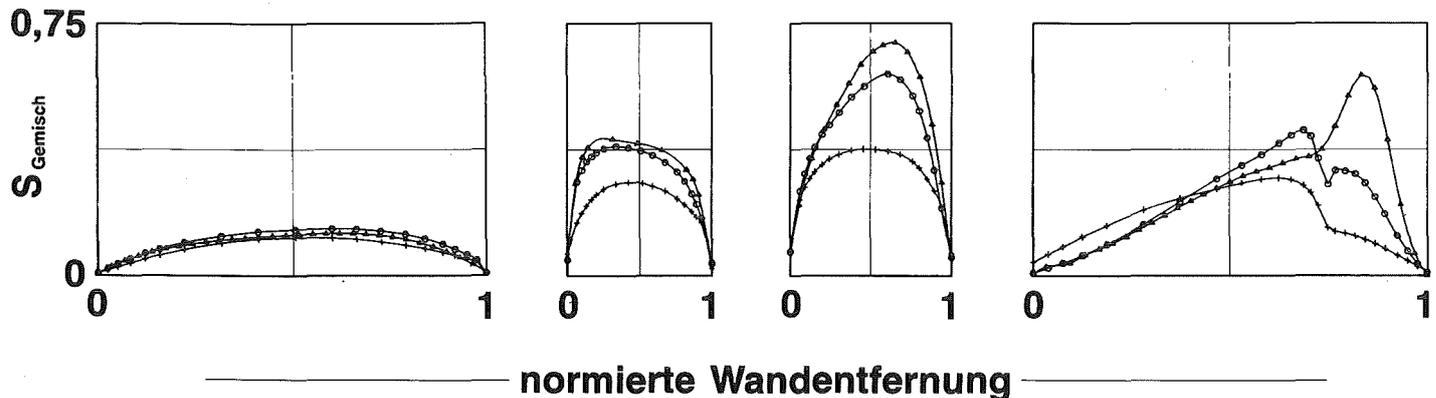


Abb.16 : Vergleich der radialen Profile des Gemischgeschwindigkeitsverhältnisses für die Strömungsfelder 1, 2 und 3 in den Querschnitten Q1 bis Q4. Es bedeuten:
Kreise : Feld 1, Dreiecke : Feld 2, Kreuze : Feld 3

daß der Anteil an schwerer Komponente bei den drei Feldern stark variiert und sich infolge der Abtrennung der schweren Komponente vom Zusatzgas besonders im Endquerschnitt stark auf das Gemischgeschwindigkeitsverhältnis auswirkt.

In Abb.17 sind die radialen Profile des C_7F_{14} -Geschwindigkeitsverhältnisses für die Strömungsfelder 1, 2 und 3 gezeigt. Im Vergleich zum Gemischgeschwindigkeitsverhältnis geht in diese Größe zusätzlich die mittlere Masse des Gemischs ein.

Da das Gemischgeschwindigkeitsverhältnis im Einlaufgebiet bei den drei Feldern im wesentlichen gleich ist, spiegeln die Unterschiede im radialen Verlauf des Geschwindigkeitsverhältnisses der verschiedenen Strömungsfelder im wesentlichen den Einfluß der mittleren Gemischmasse wider. Im Laufe der Umlenkung hingegen weist die schwere Komponente bei Feld 1 das höchste Geschwindigkeitsverhältnis auf. Die Werte für Feld 2 und Feld 3 liegen verglichen damit wesentlich niedriger und sind etwa gleich groß, so daß sich bei diesen zwei Feldern die Einflüsse der Reynoldszahl und der Gemischmasse auf das erzielte C_7F_{14} -Geschwindigkeitsverhältnis gerade etwa kompensieren. Diese Verhältnisse bestehen praktisch im gesamten Umlenkbereich. Im Endquerschnitt führt der Einfluß der Reynoldszahl dazu, daß die radialen Geschwindigkeitsgradienten in Umlenkwandnähe mit abnehmender mittlerer Gemischmasse monoton kleiner werden.

Die unterschiedlichen Betriebsbedingungen der Strömungsfelder 1, 2 und 3 sind mit einer Änderung der Knudsenzahl der Strömung verbunden. Dies hat zur Folge, daß eine Verkleinerung der mittleren Gemischmasse im vorliegenden Fall den azimuthalen Schlupf zwischen den Komponenten vergrößert. Da dieser Schlupf in der Strömung der Trenndüse ein Zurückbleiben der schweren Komponente hinter dem leichten Zusatzgas bedeutet, verkleinert sich hierdurch mit abnehmender Gemischmasse das C_7F_{14} -Geschwindigkeitsverhältnis. Typische Werte des relativen Schlupfes zwischen den Komponenten sind im Düsenkanal bei Feld 2 12 % und bei Feld 3 18 %.

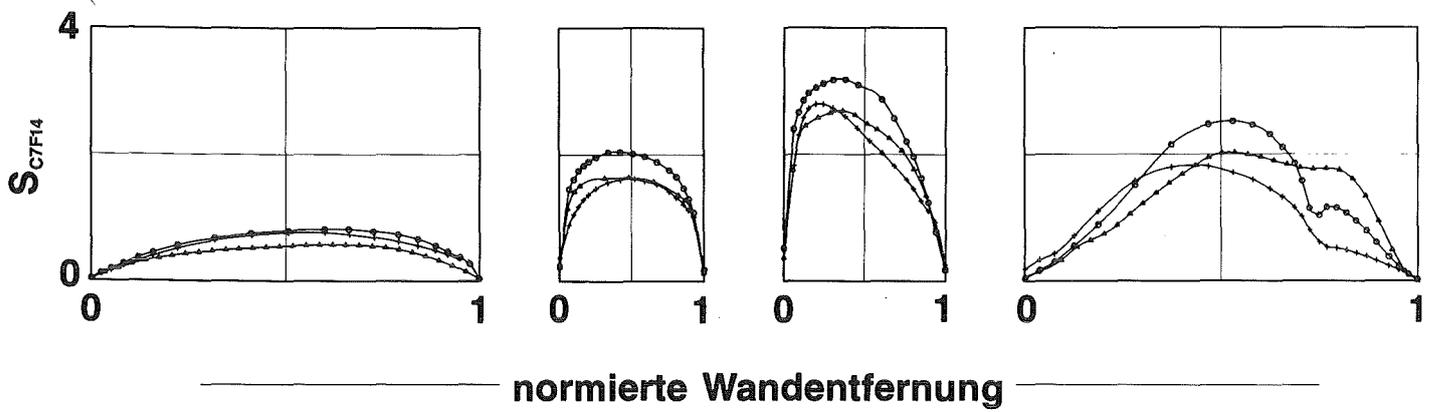


Abb.17 : Vergleich der räumlichen Entwicklung des $C_7F_{14}^-$ Geschwindigkeitsverhältnisses für die Strömungsfelder 1, 2 und 3. Es bedeuten:
Kreise : Feld 1, Dreiecke : Feld 2, Kreuze : Feld 3

4.4 Räumlicher Verlauf der Strömung und der binären Gemischzusammensetzung in der zweiten Düse des Doppelumlenksystems

Abb.18 zeigt die radialen Profile des Gemischgeschwindigkeitsverhältnisses für das in der zweiten Düse des Doppelumlenksystems gemessene Strömungsfeld (Feld 4) im Vergleich zu den Profilen des Feldes 1 in drei sich entsprechenden Querschnitten, u.zw. am Ende des Einlaufes, nach etwa 90° Umlenkung sowie direkt vor der Abschälung. Es zeigt sich, daß bei den vorliegenden Bedingungen das Gemischgeschwindigkeitsverhältnis in der zweiten Düse des Doppelumlenksystems deutlich niedriger ist als in der ersten Düse. Die radialen Maximalwerte unterscheiden sich bereits am Einlaufende um 20 %, und dieser Unterschied vergrößert sich im Laufe der Umlenkung kontinuierlich bis auf 64 % im Endquerschnitt. Der azimutale Verlauf des Gemischgeschwindigkeitsverhältnisses ist in der zweiten Düse dem der ersten Düse ähnlich und weist eine Beschleunigung auf der ersten Umlenkhälfte sowie eine Abbremsung auf der zweiten Umlenkhälfte auf.

Unterschiede im radialen Verlauf des Gemischgeschwindigkeitsverhältnisses von erster und zweiter Düse sind praktisch nur im Einlaufquerschnitt ausgeprägt. Während das Gas in der ersten Düse bevorzugt nahe der Düseninnenführung beschleunigt wird (vgl.Abb.8), ist dies im Einlauf der zweiten Düse vorwiegend im Umlenkwandbereich der Fall. Dies ist eine Folge der Anströmung des Abschälers der ersten Düse, die wegen der Gesamtdruckverteilung im Endquerschnitt der ersten Düse (vgl.Abb.15) ein radial ansteigendes effektiv nutzbares Druckverhältnis in der zweiten Düse bedingt.

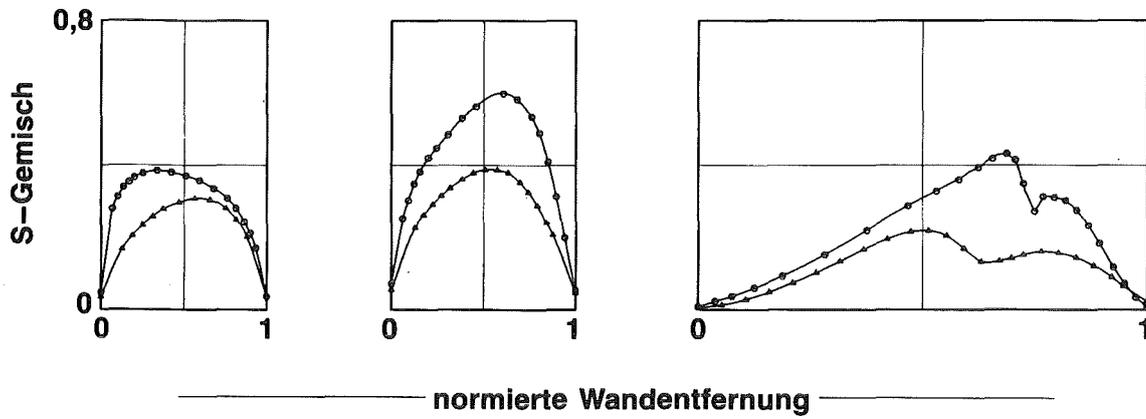


Abb.18 :Vergleich der räumlichen Entwicklung des Gemischgeschwindigkeitsverhältnisses der Strömungsfelder 1 und 4 anhand des radialen Verlaufes in den Querschnitten Q2 bis Q4 bzw. Q5 bis Q7 (vgl. Abb.3). Die unteren Kurven gehören zum in der zweiten Düse, die oberen zum in der ersten Düse gemessenen Feld.

Abb.19 zeigt die radialen Profile des C_7F_{14} -Geschwindigkeitsverhältnisses für die Strömungsfelder 1 und 4. Man erkennt, daß das C_7F_{14} -Geschwindigkeitsverhältnis in der zweiten Düse erheblich niedriger ist als in der ersten Düse, wo das maximale Geschwindigkeitsverhältnis der schweren Komponente mit 3,7 etwa dreimal so hoch ist wie der Maximalwert der zweiten Düse. Hierzu trägt zum einen der große Unterschied der mittleren Gemischmasse in den beiden Strömungsfeldern bei ($\bar{m} = 36,9$ bei Strömungsfeld 4 gegenüber $\bar{m} = 10,9$ bei Strömungsfeld 1), zum andern das kleinere Gemischgeschwindigkeitsverhältnis in der zweiten Düse, was bereits im Zusammenhang mit Abb.18 besprochen wurde.

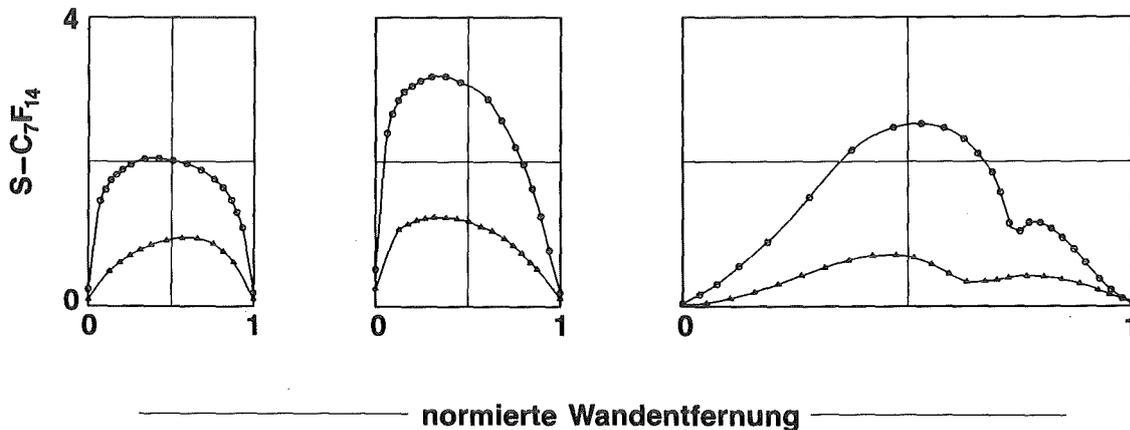


Abb.19 :Vergleich der räumlichen Entwicklung des C_7F_{14} -Geschwindigkeitsverhältnisses der Strömungsfelder 1 und 4 anhand des radialen Verlaufes in den Querschnitten Q2 bis Q4 bzw. Q5 bis Q7. Die unteren Kurven gehören zum in der zweiten Düse, die oberen zum in der ersten Düse gemessenen Feld.

Abb.20 zeigt den radialen Verlauf des C_7F_{14} -Molenbruches, der hier auf den mittleren C_7F_{14} -Molenbruch normiert wurde. Man erkennt, daß in der zweiten Düse das im Laufe der Umlenkung aufgebaute Molenbruchgefälle wesentlich geringer ist als in der ersten Düse. Im Einlaufquerschnitt liegt in der zweiten Düse ein im wesentlichen radial konstanter Molenbruchverlauf vor. An dieser Stelle ist also bereits die aus der Trennung in der ersten Düse resultierende im Sinne der Umlenkung in der zweiten Düse negative Gemischtrennung vollständig aufgehoben, und der Trennprozess ist verglichen mit der ersten Düse bereits weiter fortgeschritten. Auf der zweiten Umlenkhälfte nimmt der radiale Molenbruchunterschied zwischen Düseninnenführung und Umlenkwand in der zweiten Düse wieder deutlich ab, es kommt also zu einer ausgeprägten Rückmischung. Ein solcher Effekt liegt in der ersten Düse nicht vor.

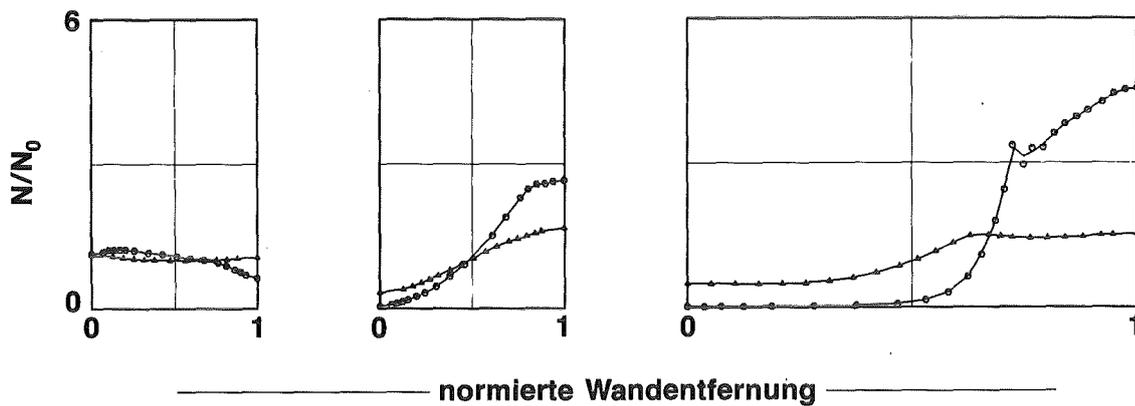


Abb.20 :Vergleich der räumlichen Entwicklung des C_7F_{14} -Molenbruchs der Strömungsfelder 1 und 4 anhand des radialen Verlaufes in den Querschnitten Q2 bis Q4 bzw. Q5 bis Q7 (vgl. Abb.3). Die Werte wurden auf den jeweiligen Mittelwert des Strömungsfeldes normiert. Die Kreise kennzeichnen die Daten der ersten Düse, die Dreiecke diejenigen der zweiten Düse. Der mittlere C_7F_{14} -Molenbruch betrug bei Feld 1 2 %, bei Feld 4 9,5 %.

5. Ergebnisse der Simulationsrechnungen zur Isotopenentmischung

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Simulationsrechnungen zur Isotopenentmischung gezeigt und dabei die Strömungsfelder in der Reihenfolge des Kapitels 4 behandelt. Hierbei wird ein Vergleich von Gemisch- und Isotopentrennung eingeschlossen. Anschließend werden die Auswirkungen höherer gaskinetischer Effekte auf den Ablauf der Trennung behandelt, sofern diese bei der verwendeten Vorgehensweise erfaßbar sind.

5.1 Ablauf der Isotopen- und der Gemischtrennung in der ersten Düse des Doppelumlenksystems

5.1.1. Isotopentrenneffekt und Gemischtrennfaktor

Abb.21 zeigt die azimutale Entwicklung der Abhängigkeit des Isotopentrenneffekts und des logarithmischen Gemischtrennfaktors vom Abschälverhältnis der schweren Komponente für Feld 1.

Der Trenneffekt weist im Einlaufgebiet entsprechend der gegensinnigen Stromflächenkrümmung leicht negative Werte auf. Diese negative Entmischung wird wegen der zunehmenden Strömungsgeschwindigkeiten und der verstärkten Stromflächenkrümmung gegen Ende des Einlaufgebietes ausgeprägter und erreicht im Bereich der zweiten Einlaufkante einen Extremwert von $\varepsilon_A = -0,39 \%$. Auf den inneren Stromflächen nehmen die Trenneffekte gleichzeitig schon positive Werte an, und die Entmischung breitet sich im weiteren Verlauf der Umlenkung über den gesamten Kanal aus. Der Zustand, in dem positive Isotopentrenneffekte über den ganzen Strahl vorliegen, ist nach etwa 60° Umlenkung erreicht. Bei fortschreitender Umlenkung steigt der Trenneffekt im Umlenkwandbereich wesentlich schwächer an als auf den inneren Stromflächen und weist auf der zweiten Umlenkhälfte ein ausgeprägtes Sättigungsverhalten auf.

Vergleicht man am Ende der Umlenkung die aus den Simulationsrechnungen folgende Abhängigkeit des Trenneffekts vom Abschälverhältnis der schweren Komponente mit dem für den Fall der Gleichgewichtsentmischung

bei unendlichem Geschwindigkeitsverhältnis gültigen Zusammenhang (vgl. Fußnote auf Seite 30), so zeigt sich, daß diese Grenze bei kleinen Abschälverhältnissen deutlich überschritten wird. Bei hohen Abschälverhältnissen hingegen liegen die aus den Modellrechnungen folgenden Werte unter dieser Grenze. So liegt z.B. der Trenneffekt beim Abschälverhältnis $\theta_{C7F14} = 0,25$ mit $\varepsilon_A = 1,81\%$ um 18 %-Punkte oberhalb der für die Gleichgewichtsentmischung gültigen Schranke, während er bei $\theta_{C7F14} = 1$ mit $\varepsilon_A = 0,82\%$ um 4 %-Punkte unterhalb dieser Schranke bleibt. Der Verlauf des Trenneffekts über dem Abschälverhältnis ist somit deutlich steiler als im Fall der Gleichgewichtsentmischung bei unendlichem Geschwindigkeitsverhältnis.

Der logarithmische Gemischtrennfaktor zeigt im gesamten Einlaufgebiet ein dem Trenneffekt analoges Verhalten. Die durch die gegensinnige Stromflächenkrümmung im Einlaufbereich bedingte negative Gemischtrennung ist nach etwa dem gleichen Umlenkwinkelbereich aufgehoben wie die negative Isotopentrennung. Mit Beginn der positiven Entmischung steigt jedoch der Gemischtrennfaktor $5 \ln A$ im Vergleich zum Isotopentrenneffekt ε_A im Bereich mittlerer bis hoher Abschälverhältnisse wesentlich steiler über der Umlenkkoordinate an und verläuft hier praktisch ungedämpft. Die Abhängigkeit des Gemischtrennfaktors vom Abschälverhältnis ist entsprechend schwächer als die des Trenneffekts. Am Ende der Umlenkung beobachtet man einen schwachen Abbau des Gemischtrennfaktors im unmittelbaren Umlenkwandbereich.

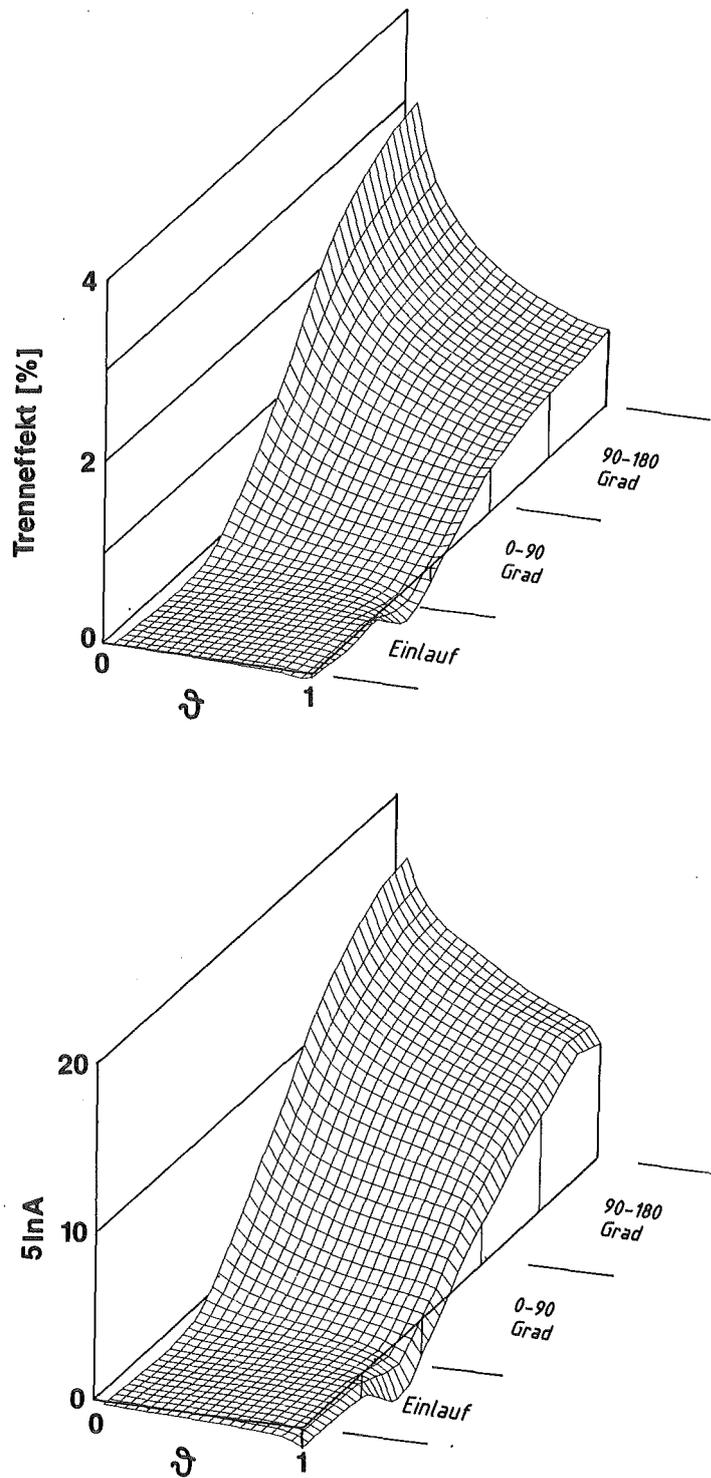


Abb.21 : Abhängigkeit des Isotopentrenneffektes ϵ_A (oben) und des logarithmischen Gemischtrennfaktors $5 \ln A$ (unten) vom Abschälverhältnis der schweren Komponente und der Umlenkkordinate für Feld 1. Die Auftragung beginnt beim Abschälverhältnis 0,05. Die Umlenkwandseite befindet sich rechts.

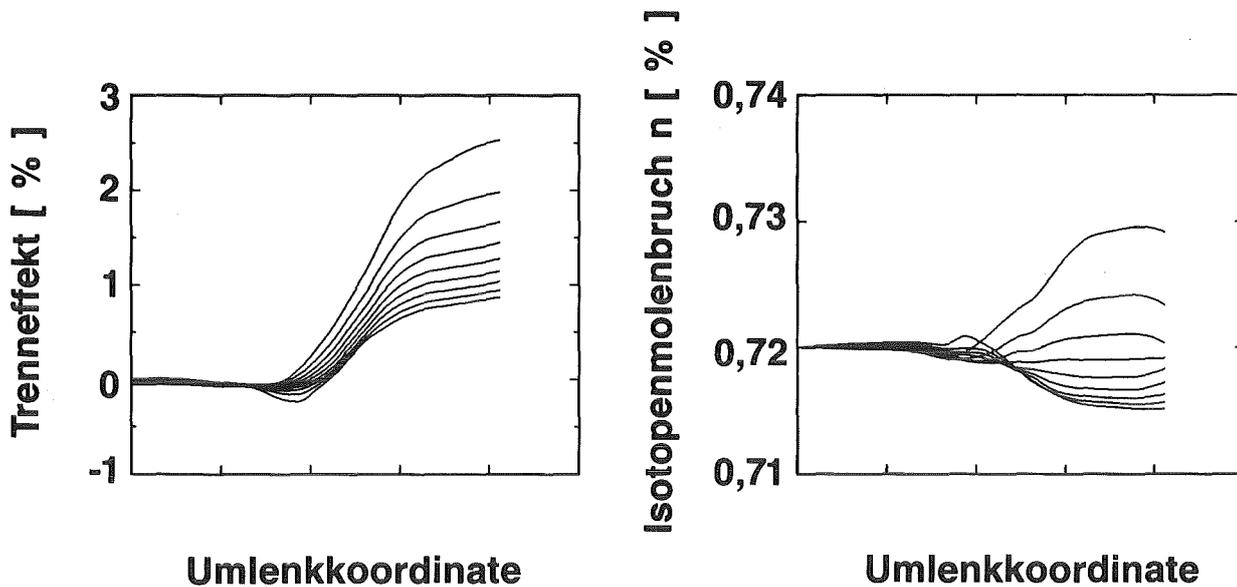


Abb.22 : Abhängigkeit des Isotopentrenneffekts (links) und des Molenbruchs des leichten Isotops im Isotopengemisch (rechts) für unterschiedliche C_7F_{14} -Abschälverhältnisse von der Umlenkkoordinate. Man beachte, daß am Ende der Umlenkung der Isotopentrenneffekt für alle Abschälverhältnisse monoton steigt, während die Differenz des zu unterschiedlichen Abschälverhältnissen gehörenden Isotopenmolenbruches bei mittleren Abschälverhältnissen teilweise stark abnimmt. Die jeweils oberste Kurve gehört zum Abschälverhältnis 0,1 , die jeweils unterste zum Abschälverhältnis 0,9.

Abb.22 zeigt die azimutale Entwicklung des Isotopentrenneffekts bei diskreten Werten des Abschälverhältnisses der schweren Komponente im Vergleich zum zugehörigen Molenbruch des leichten Isotops im Isotopengemisch. Diese Auftragung zeigt sehr deutlich den Einflußbereich der negativen Entmischung am Einlaufende und die Dämpfung der Entmischung beim Übergang zur zweiten Umlenkhälfte.

Bemerkenswert ist, daß im Bereich vor dem Abschäler die Trenneffekte azimutal ansteigen, obwohl sich der Molenbruch entlang der Stromflächen wieder dem Ausgangsmolenbruch von 0,72 % nähert. Diesen Sachverhalt kann man sich im Zusammenhang mit Abb.10 verständlich machen. Die Nachexpansion in der leichten Fraktion im Abschälerbereich führt zu

einer bevorzugten Beschleunigung des leichten Isotops, während der Aufstau vor der schweren Fraktion das leichte Isotop bevorzugt abbremst. Aus Erhaltungsgründen nimmt deshalb im beschleunigten Strahlbereich die Dichte des leichten Isotops stärker ab als die des schweren, und im verzögerten Strahlbereich verhält es sich umgekehrt. Dieser Vorgang erniedrigt also im unmittelbaren Abschälerbereich die radialen Konzentrationsgradienten. Würde man bei der Bilanzierung die azimutalen Geschwindigkeitsunterschiede zwischen den Isotopen nicht berücksichtigen, so ergäben sich im vorliegenden Fall um etwa 10 %-Punkte kleinere Trenneffekte.

5.1.2 Werterzeugung

Abb.23a zeigt den räumlichen Verlauf der Isotopenwerterzeugung. Man erkennt, daß diese im gesamten Einlaufgebiet praktisch vernachlässigbar ist, da die verhältnismäßig kleinen Druckgradienten in diesem Gebiet (vgl. Abb. 14) zu keinen nennenswerten Diffusionsströmen führen und damit die Konzentrationsgradienten klein bleiben. Die Werterzeugung nimmt unmittelbar am Einlaufende im Bereich der Düseninnenführung positive Werte an und wächst azimuthal steil an, um im Bereich des Abbruchs der Düseninnenführung ein ausgeprägtes Maximum zu durchlaufen. Im weiteren Verlauf der Umlenkung fällt sie dann kontinuierlich, durchläuft im Umlenkwinkelbereich 140° ein relatives Minimum und wächst im Bereich des Abschälers, wo nach Abb.14 sehr hohe radiale Druckgradienten aufgebaut werden, nochmals stark an.

Die Gebiete hoher positiver Werterzeugung sind in der ersten Umlenkhälfte im wesentlichen in der Nähe der Düseninnenführung lokalisiert und verschieben sich in der zweiten Umlenkhälfte entsprechend dem Verlauf der C_7F_{14} -Stromdichte (vgl. Abb.6) mehr zur Umlenkwand. In ausgedehnten Bereichen entlang der Umlenkwand bleibt die Werterzeugung jedoch klein. In diesen Zonen wird nach den Rechnungen der Isotopendiffusionskoeffizient klein und die Entmischung der Isotope verläuft stark gedämpft.

Es zeigt sich, daß Gebiete negativer Werterzeugung nur an zwei Stellen im Strömungsfeld auftreten, u.zw. zum einen in der ersten Umlenkhälfte nahe der Umlenkwand, wo die im Einlaufgebiet aufgebaute gegensinnige Entmischung abgebaut wird. Der Diffusionsstrom des schweren Isotops ist in diesem Bereich zwar zur Umlenkwand gerichtet. Formal ergeben sich aber trotzdem negative Werte für die Werterzeugung, da der radiale Druckgradient in Umlenkwandnähe zu klein ist, um den in den inneren Bereichen vorhandenen Diffusionsstrom auch in den äußeren Bereichen aufrecht zu erhalten, so daß sich bei mittleren Radien negative Konzentrationsgradienten aufbauen. Dieses Gebiet wird im Laufe der Umlenkung vollständig zur Umlenkwand verdrängt. Zum andern liegt am

Ende der Umlenkung im Bereich der schweren Fraktion der ersten Düse ein kleines Gebiet negativer Wertzeugung vor, in dem die Diffusionsströme ihr Vorzeichen gewechselt haben. Die Absolutwerte der Wertzeugung sind in diesen Gebieten jedoch so klein, daß der Einfluß einer Rückmischung auf den integral erzeugten Wert praktisch vernachlässigt werden kann.

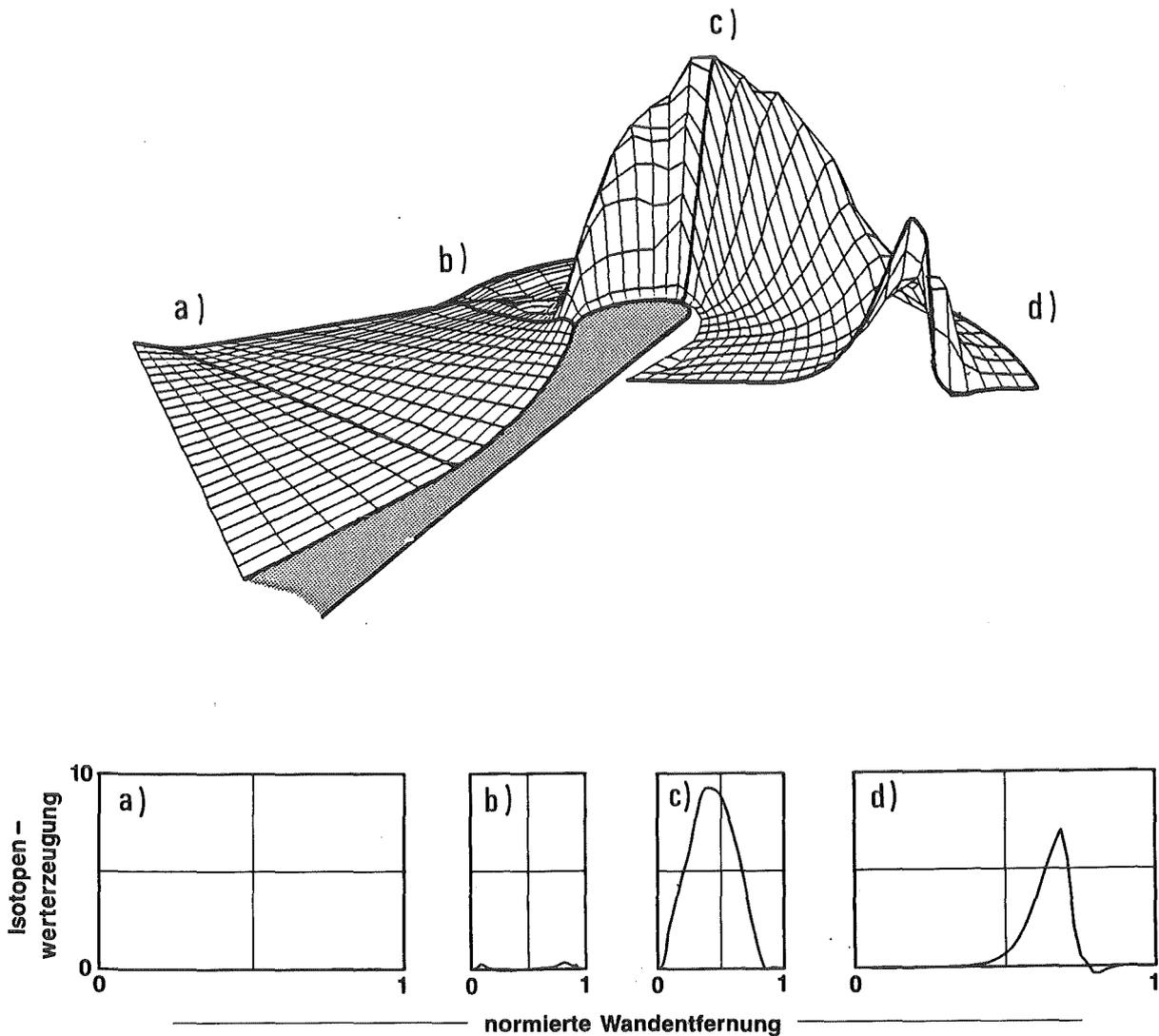


Abb.23a : Räumlicher Verlauf der Isotopenwertzeugung für Strömungsfeld 1. (Willkürliche Einheiten)

Die Gemischwertzeugung ist in Abb.23b dargestellt. Diese weist in ihrem räumlichen Verlauf qualitativ die gleichen Merkmale auf wie die Isotopenwertzeugung in Abb.23a. Quantitativ zeigen sich jedoch wesentliche Unterschiede:

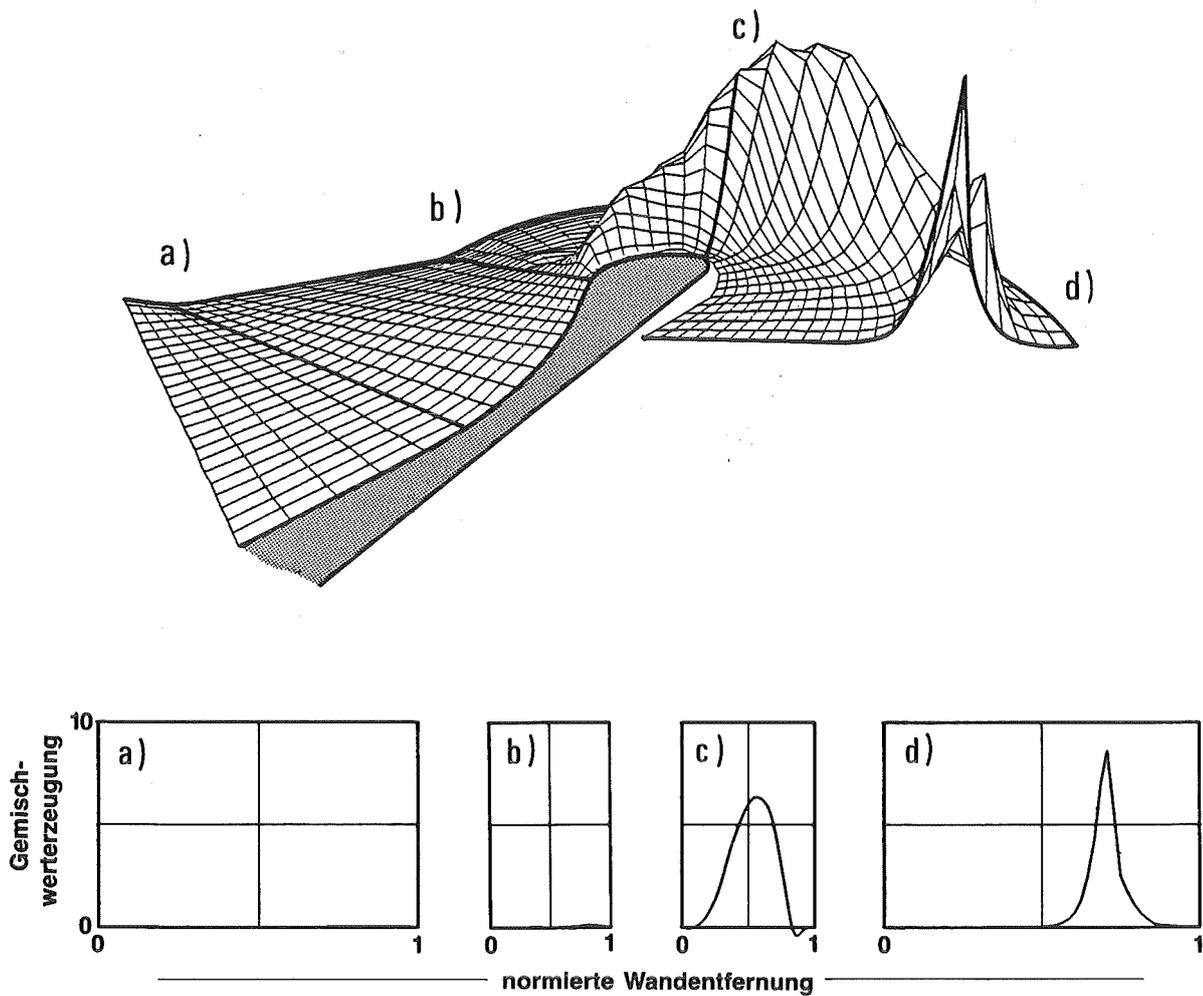


Abb.23b : Räumlicher Verlauf der Gemischwerterzeugung für Strömungsfeld 1. (Willkürliche Einheiten)

So werden z.B. bei der Gemischwerterzeugung nach 60° Umlenkung erst ca. 35 % der maximalen Werterzeugung erreicht, während der entsprechende Wert bei der Isotopenwerterzeugung bereits 75 % beträgt. Das azimuthale Maximum wird bei der Gemischwerterzeugung wesentlich später durchlaufen als das der Isotopenwerterzeugung und der auf das absolute Maximum bezogene Anstieg vor dem Abschäler ist erheblich größer. Die Gebiete positiver Werterzeugung sind bei der Gemischtrennung radial weniger ausgedehnt und mehr zur Umlenkwand verlagert als bei der Isotopen-trennung. Am Ende der Umlenkung bleibt die Gemischwerterzeugung überall positiv.

5.2 Einfluss der Betriebsbedingungen

5.2.1 Isotopentrenneffekt und Gemischtrennfaktor

In Abb.24 sind die Isotopentrenneffekte ε_A und die Gemischtrennfaktoren $5 \ln A$ für die verschiedenen Betriebsbedingungen (vgl. Tabelle 1) anhand des azimuthalen Ablaufs entlang der Molstromflächen $\theta_{C_7F_{14}} = 0,25$ und $\theta_{C_7F_{14}} = 0,75$ miteinander verglichen.

Man erkennt, daß die Isotopenentmischung mit fallendem Molenbruch an schwerer Komponente (Feld 2 \rightarrow Feld 1 \rightarrow Feld 3) azimuthal schneller abläuft. Der Trenneffekt steigt bei 4 Mol-% C_7F_{14} im Umlenkbereich praktisch ungedämpft an, während sich bei abnehmendem C_7F_{14} -Molenbruch zunächst eine schwache Dämpfung auf der zweiten Umlenkhälfte (Feld 1) ausbildet, aus der bei weiterer Senkung des C_7F_{14} -Molenbruchs (Feld 3) ein ausgeprägtes intermediäres azimuthales Maximum wird.

Der im azimuthalen Maximum gemessene Trenneffekt ist trotz dem niedrigen C_7F_{14} -Molenbruch bei Feld 3 nur geringfügig höher als bei Feld 1, wie aus Tabelle 3 hervorgeht. Am Ende der Umlenkung weist Feld 2 mit einem mittleren C_7F_{14} -Molenbruch von 2 % die deutlich höchsten Werte des Trenneffekts auf (vgl. Tabelle 3)

Die Unterschiede im azimuthalen Anstieg der Trenneffekte sind bei den untersuchten Strömungsfeldern bei hohem Abschälverhältnis stärker ausgeprägt als bei niedrigem. Mit kleinerem Anteil an schwerer Komponente läuft die Trennung also bevorzugt auf den äußeren Stromflächen schneller ab.

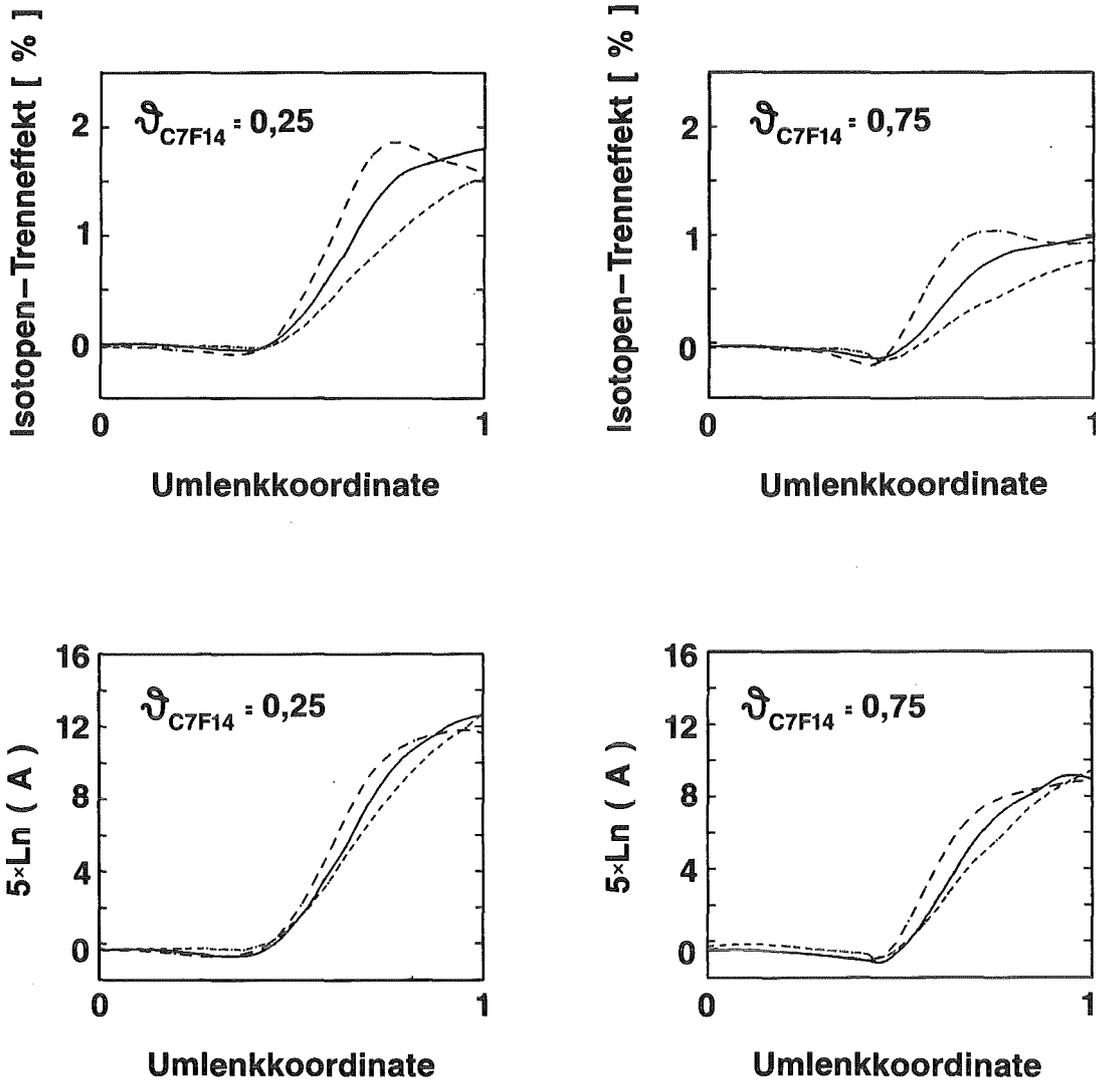


Abb.24 : Einfluß der Betriebsbedingungen auf den Isotopentrenneffekt ϵ_A (oben) und den logarithmischen Gemischtrennfaktor $5 \ln A$ (unten) bei zwei Werten des Abschälverhältnisses der schweren Komponente. Die Abszisse stellt die Umlenkkoordinate dar. Es bedeuten:

- : Feld 1
- - - : Feld 2
- · - : Feld 3

Feld-Nr.	$\varepsilon_{\max}^{(0,25)}$ [%]	$\varepsilon_{\text{Abs}}^{(0,25)}$ [%]	$\varepsilon_{\max}^{(0,75)}$ [%]	$\varepsilon_{\text{Abs}}^{(0,75)}$ [%]
1	1,81	1,81	0,985	0,985
2	1,54	1,54	0,769	0,769
3	1,86	1,57	1,04	0,933
4	0,583	0,583	0,357	0,357

Tabelle 3: Isotopentrenneffekte der vier untersuchten Strömungsfelder für die C_7F_{14} -Abschälverhältnisse $\theta_{C_7F_{14}} = 0,25$ und $\theta_{C_7F_{14}} = 0,75$ jeweils im Maximum (ε_{\max}) und im Endquerschnitt (ε_{Abs})

Bei den in Abb.24b dargestellten logarithmischen Gemischtrennfaktoren zeigt sich ein ähnlicher Einfluß der Betriebsbedingungen wie bei den Isotopentrenneffekten. Die Unterschiede im azimuthalen Verlauf der Gemischtrennfaktoren sind quantitativ jedoch erheblich kleiner, und am Ende der Umlenkung werden bei allen drei Feldern nahezu die gleichen Werte erreicht. Im Gegensatz zum Isotopentrenneffekt weist der Gemischtrennfaktor bei keinem der Felder ein ausgeprägtes Maximum stromaufwärts vom Abschäler auf. Bei fallendem Molenbruch an schwerer Komponente wird lediglich eine wachsende Dämpfung der Entmischung auf der zweiten Umlenkhälfte beobachtet.

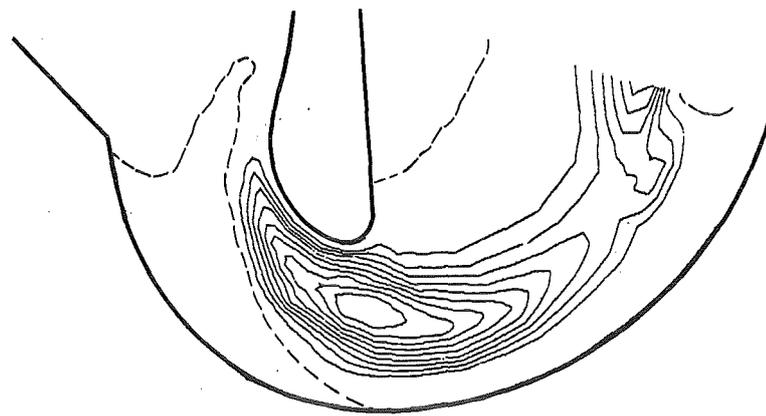
5.2.2 Werterzeugung

Abb.25a zeigt die Isotopenwerterzeugung der Felder 2 und 3 im Vergleich zu Feld 1.

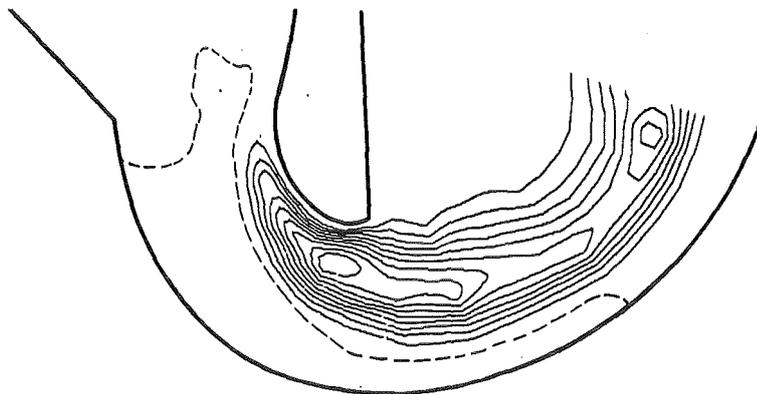
Man erkennt, daß bei allen drei Feldern eine merklich positive Wert-erzeugung zu Beginn der Düseninnenführung bei etwa 0° Umlenkung einsetzt und danach azimuthal steil ansteigt. Der weitere azimuthale Verlauf der Werterzeugung unterscheidet sich bei den verschiedenen Feldern jedoch deutlich:

Auf der zweiten Umlenkhälfte bleibt die Werterzeugung beim Feld mit dem höchsten Anteil an schwerer Komponente bis zum Abschäler azimuthal nahezu konstant. Beim Feld mit dem niedrigsten C_7F_{14} -Molenbruch verschwindet dagegen die positive Werterzeugung bereits weit stromauf vom Abschäler. Hier breitet sich auf der zweiten Hälfte der Umlenkung von der Umlenkwand her ein ausgedehntes Gebiet negativer Werterzeugung aus, das sich mit zunehmender Umlenkung bis in die leichte Fraktion hinein erstreckt. Während bei $N_o = 4\%$ und $N_o = 2\%$ C_7F_{14} im Abschälerbereich die Werterzeugung wieder deutlich ansteigt, ist ein derartiger Effekt bei $N_o = 1\%$ C_7F_{14} nur ganz schwach ausgeprägt.

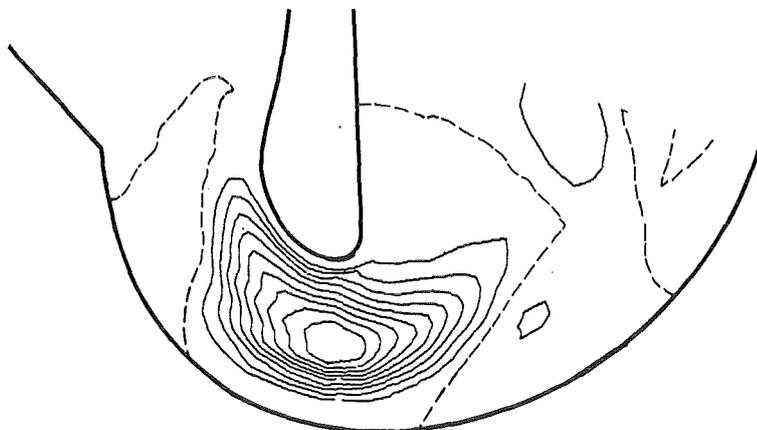
Auch die radialen Profile der Werterzeugung unterscheiden sich bei den drei Strömungsfeldern deutlich: Bei hohem C_7F_{14} -Molenbruch (Feld 2) baut sich im Bereich der Düseninnenführung ein zunächst schmales Band positiver Werterzeugung auf, das sich im Lauf der Umlenkung radial langsam verbreitert und entsprechend der C_7F_{14} -Stromdichte langsam zur



Feld 1



Feld 2



Feld 3

Abb.25a : Räumlicher Verlauf der Isotopenwerterzeugung für die Strömungsfelder 1, 2 und 3. Die Grenzlinie zwischen positiver und negativer Werterzeugung ist jeweils gestrichelt eingezeichnet. Der Höhenlinienabstand ist so gewählt, daß der positive Wertebereich der Werterzeugung in zehn gleichgroße Intervalle geteilt wird.

Umlenk wand verschiebt. Bei niedrigem C_7F_{14} -Molenbruch dagegen breitet sich dieses Gebiet radial sehr schnell aus und nimmt im Umlenk-winkelbereich von 40° bis 100° praktisch den gesamten Kanalquerschnitt ein. Entsprechend wird der Umlenk-winkelbereich, der für einen vollständigen Abbau der durch die Einlaufvorgänge bedingten negativen Konzentrationsgradienten benötigt wird, mit zunehmendem C_7F_{14} -Molenbruch immer größer und beträgt bei $N_o = 4\%$ C_7F_{14} etwa 130° . Der Elementareffekt der Isotopentrennung hingegen ist in diesem Bereich bereits überall positiv.

Die radiale Lage des absoluten Wert erzeugungsmaximums verschiebt sich mit abnehmendem mittleren Molenbruch an schwerer Komponente von einer Position nahe der Düseninnenführung monoton in Richtung Umlenk wand. Die azimutale Position dieses Maximums ist dagegen bei allen drei Feldern gleich und befindet sich etwa bei einem Umlenk-winkel von 90° .

Die in Abb.25b dargestellten Felder der Gemischwert erzeugung zeigen untereinander qualitativ etwa die gleichen Unterschiede wie die der Isotopenwert erzeugung. Die Gebiete positiver Gemischwert erzeugung sind im Vergleich zur Isotopenwert erzeugung jedoch generell zu größeren Umlenk-winkeln und zu größeren Umlenk-radien hin verschoben, und sie sind i.a. auf einen wesentlich schmäleren radialen Bereich begrenzt. Im Unterschied zur Isotopenwert erzeugung steigt die Gemischwert erzeugung bei hohem Molenbruch an schwerer Komponente azimutal praktisch monoton an. In keinem Fall wird auf der zweiten Umlenk-hälfte im Umlenk wandbereich ein ausgedehntes Gebiet negativer Wert erzeugung beobachtet.

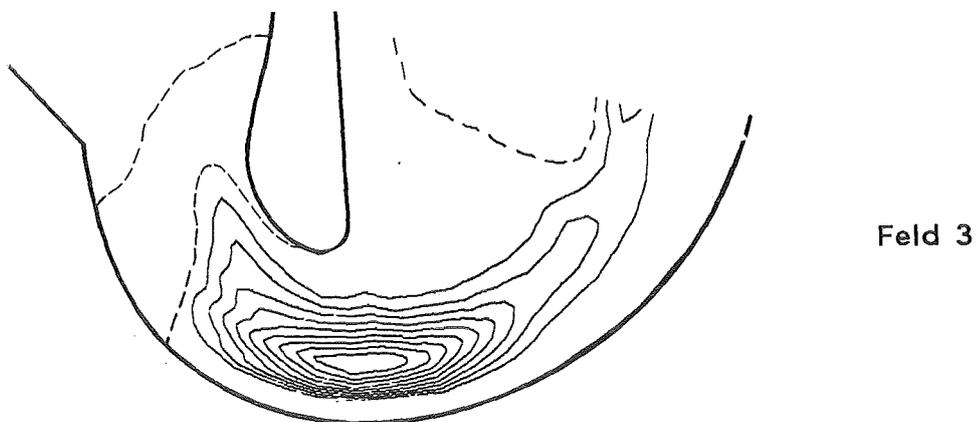
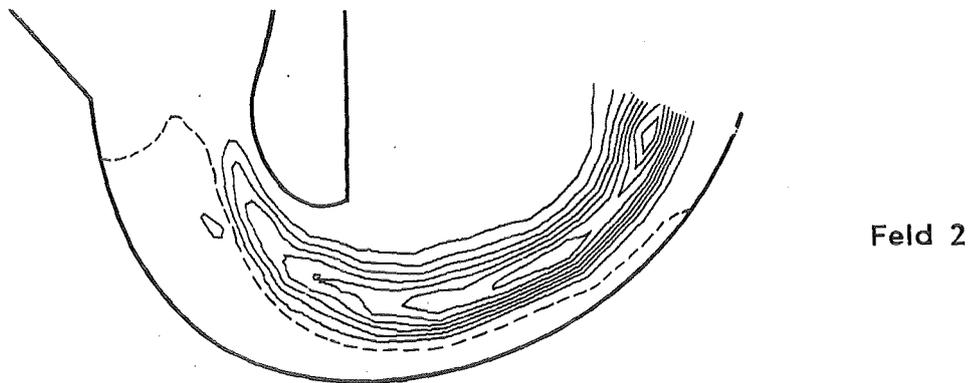
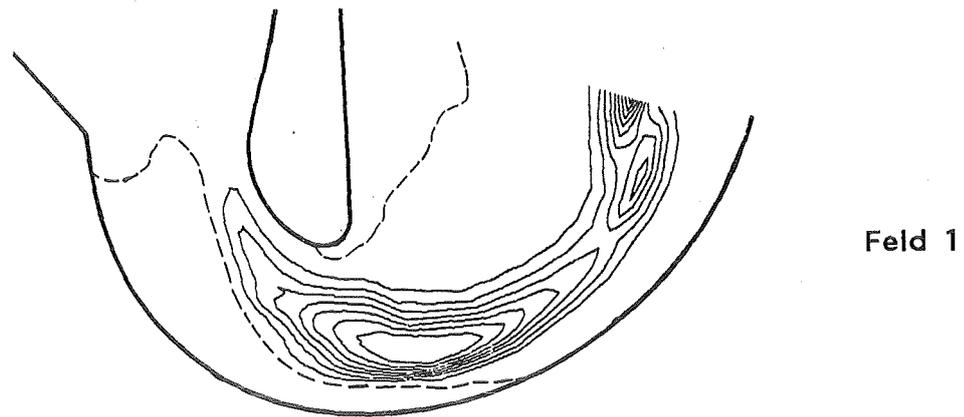


Abb.25b : Räumlicher Verlauf der Gemischwerterzeugung für die Strömungsfelder 1, 2 und 3. Die Grenzlinie zwischen positiver und negativer Wertzeugung ist jeweils gestrichelt eingezeichnet. Der Höhenlinienabstand ist so gewählt, daß der positive Wertebereich der Wertzeugung in zehn gleichgroße Intervalle geteilt wird.

5.3 Ablauf der Isotopen- und der Gemischtrennung in der zweiten Düse des Doppelumlenksystems

5.3.1 Isotopentrenneffekt und Gemischtrennfaktor

Abb.26 zeigt in den oberen Teilbildern die azimutale Entwicklung des Isotopentrenneffektes in der ersten und in der zweiten Düse bei jeweils gleichen Betriebsbedingungen des Doppelumlenksystems entlang der Molstromflächen $\theta_{C_7F_{14}} = 0,25$ und $\theta_{C_7F_{14}} = 0,75$.

Man erkennt, daß der Trenneffekt in der zweiten Düse nur etwa 30 % des Trenneffekts der ersten Düse erreicht. Der azimutale Ablauf der Isotopentrennung ist für beide Felder jedoch qualitativ ähnlich. Zu Beginn der Umlenkung ist der durch die Vorumlenkung in der ersten Düse bedingte negative Trenneffekt der zweiten Düse praktisch unabhängig vom Abschälverhältnis und beträgt etwa -0,09%.

Betrachtet man wie bei der ersten Düse die Abhängigkeit des Trenneffekts vom Abschälverhältnis am Ende der Umlenkung, so zeigt sich, daß diese erheblich schwächer ist als bei den Strömungsfeldern der ersten Düse. Ein ähnliches Verhalten kann man auch in der ersten Düse bei Trennexperimenten mit dem Verfahrensgas UF_6/He beobachten, wenn man sie mit Gasgemischen betreibt, die einen verhältnismäßig hohen Anteil an schwerer Komponente aufweisen.

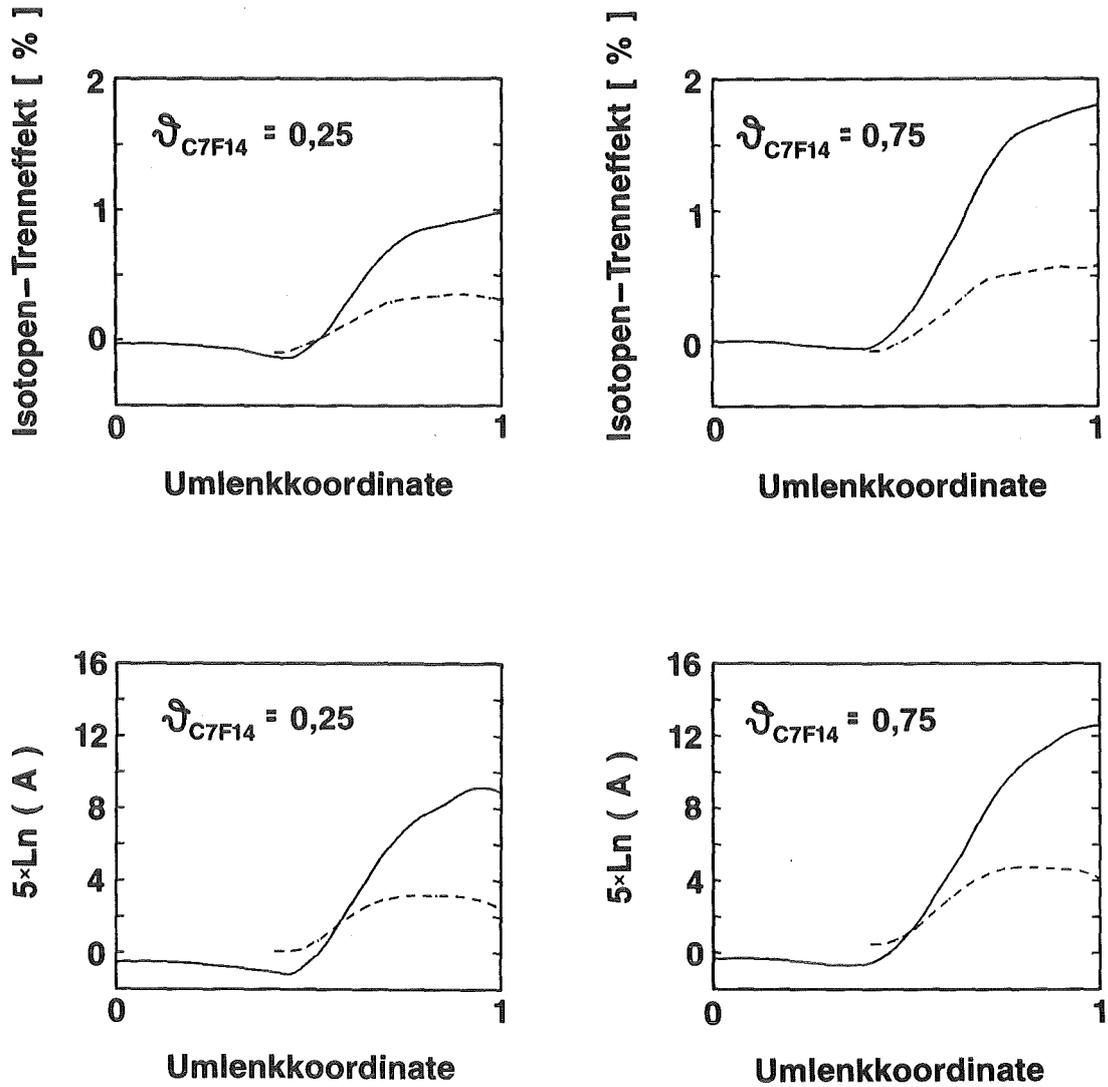


Abb. 26: Vergleich des Isotopentrenneffekts ε_A (oben) und des logarithmischen Gemischtrennfaktors $5 \ln A$ (unten) von Feld 1 und Feld 4 in Abhängigkeit von der Umlenkkoordinate. In der Abbildung sind die Kurven für zwei verschiedene Abschälverhältnisse gezeigt. Die Auftragung für Feld 4 beginnt erst ab Ende des Einlaufes der zweiten Düse.

Der azimutale Verlauf des logarithmischen Gemischtrennfaktors $5 \ln A$ ist in den unteren Teilbildern der Abb.26 dargestellt. Hieraus ist ersichtlich, daß die quantitativen Unterschiede zwischen den Gemischtrennfaktoren in der ersten und der zweiten Düse etwa gleich groß sind wie die der Isotopentrenneffekte.

Im Gegensatz zu den Isotopentrenneffekten durchlaufen die logarithmischen Gemischtrennfaktoren in der zweiten Düse jedoch kurz nach Abbruch der Düseninnenführung ein azimuthales Maximum und fallen danach monoton. Dieser Abfall beträgt abhängig vom Abschälverhältnis etwa 15 bis 25 Prozentpunkte. Anders als bei niedrigem Molenbruch an schwerer Komponente, wo u.U. der Isotopentrenneffekt ein intermediäres Maximum durchläuft, tritt ein Maximum weit stromauf vom Abschäler bei hohem Anteil an schwerer Komponente also bevorzugt beim Gemischtrennfaktor auf.

Bemerkenswert ist weiterhin, daß die Gemischtrennfaktoren im Gegensatz zum Trenneffekt zu Beginn der Umlenkung schon positiv sind, wie Abb.26 zeigt. Um die quantitativen Auswirkungen dieser Verzögerung der Isotopentrennung gegenüber der Gemischtrennung zu erfassen, wurde eine Rechnung durchgeführt, bei der die Isotopenzusammensetzung zu Beginn der Umlenkung in der zweiten Düse willkürlich so gewählt wurde, daß die entsprechenden Trenneffekte den hier vorliegenden logarithmischen Gemischtrennfaktoren entsprachen. Der im Endquerschnitt beim Abschälverhältnis $\theta_{C_7F_{14}} = 0,5$ errechnete Isotopentrenneffekt erhöhte sich hierdurch um etwa 7 Prozentpunkte.

5.3.2 Werterzeugung

Abb.27a und 27b zeigen den räumlichen Verlauf der Werterzeugung für die Isotopen- und die Gemischtrennung bei Strömungsfeld 4.

Die Isotopenwerterzeugung ist vom Ende des Einlaufes bis etwa 30° Umlenkung vorwiegend negativ: Hier wird die aus der Trennung in der ersten Düse resultierende gegensinnige Isotopenentmischung abgebaut. Im weiteren Verlauf der Umlenkung ist die Werterzeugung über den ganzen Querschnitt positiv und wächst bevorzugt in der Nähe der Düseninnenführung in azimuthaler Richtung schnell an. Am Ende der Düseninnenführung befindet sich ein ausgeprägtes Maximum. Danach fällt die Werterzeugung azimuthal stark ab, bleibt aber im weiteren Verlauf der Umlenkung in mittleren Strahlbereichen noch schwach positiv. Am Strahlinnen- und am Strahlaußenrand breiten sich gleichzeitig ausgedehnte flache Gebiete negativer Werterzeugung aus.

Abb.27b zeigt, daß positive Werte der Gemischwerterzeugung in der zweiten Düse praktisch nur im Umlenkwinkelbereich von 40° bis 110° vorliegen. Die Gemischwerterzeugung ist damit auf einen erheblich kleineren räumlichen Bereich begrenzt als die Werterzeugung der Isotope. Sie wird bereits bei etwa 120° Umlenkwinkel praktisch über den gesamten Strahl negativ. Dieses negative Gebiet vertieft sich im weiteren Verlauf der Umlenkung kontinuierlich.

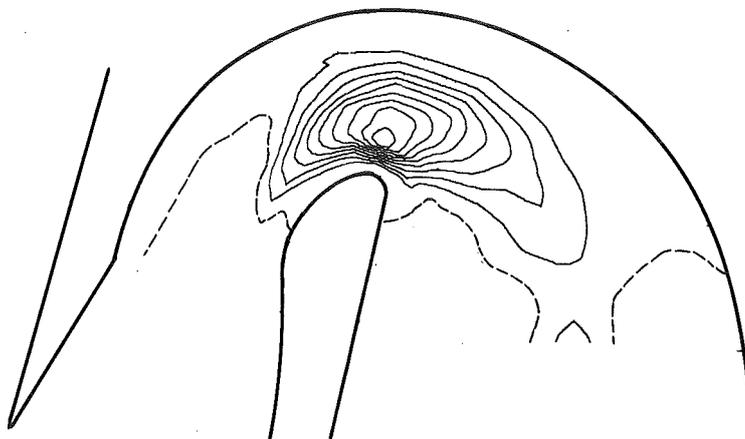


Abb.27a

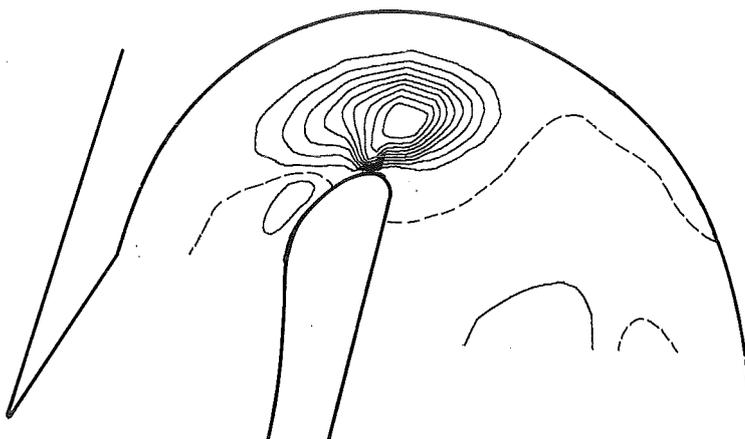


Abb.27b

Abb.27 : Räumlicher Verlauf der Isotopenwerterzeugung (a) und der Gemischwerterzeugung (b) für Strömungsfeld 4. Die Grenzlinie zwischen positiver und negativer Werteverzeugung ist jeweils gestrichelt eingezeichnet. Der Höhenlinienabstand ist so gewählt, daß der positive Wertebereich der Werteverzeugung in zehn gleichgroße Intervalle geteilt wird.

5.4 Einfluss höherer gaskinetischer Effekte auf den Ablauf der Trennung

Wie in Kapitel 2 schon diskutiert wurde, kann durch verschiedenartige Auswertung der Sondenmessungen festgestellt werden, ob höhere gaskinetische Effekte den Ablauf der Trennung merklich beeinflussen. Im folgenden werden typische Ergebnisse für die entmischenden Kräfte der Druckdiffusion gezeigt, die man erhält, wenn man zur Bestimmung entweder die gemessenen statischen Drucke oder die gemessene Entmischung von schwerer Komponente und Zusatzgas benutzt.

Feld-Nr.	$g_{\perp}(\vec{V}_p)/g_{\perp}(\text{Gemisch})$
4	1,01
2	1,09
1	1,13
3	1,23

Tabelle 4 : Verhältnis der aus den statischen Drucken und aus der Gemischtrennung bestimmten mittleren entmischenden Druckdiffusionskräfte für alle in der vorliegenden Arbeit untersuchten Strömungsfelder. Die Reihenfolge der Felder entspricht anwachsenden Zustandsänderungen pro mittlerer freier Weglänge.

Tabelle 4 gibt für alle gemessenen Strömungsfelder einen Überblick über das Verhältnis von aus den statischen Drucken und aus der Gemischtrennung bestimmten mittleren entmischenden Druckdiffusionskräften. Man erkennt, daß dieses Verhältnis bei kleinen Zustandsänderungen pro freier Weglänge und verhältnismäßig niedrigen Diffusionsgeschwindigkeiten (Feld 4, Feld 2) nahe beim Wert 1 liegt. Bei stärker werdenden Zustandsänderungen pro freier Weglänge und damit auch anwachsenden Diffusionsgeschwindigkeiten (Feld 1, Feld 3) werden die über die statischen Drucke bestimmten entmischenden Druckdiffusionskräfte jedoch zunehmend größer als die aus der Gemischtrennung bestimmten und übersteigen diese bei Feld 3 schließlich im Mittel um 23 %.

Eine nähere Untersuchung zeigt, daß die lokalen Abweichungen zwischen den auf unterschiedliche Weise bestimmten entmischenden Druckdiffusionskräften meist in den Gebieten groß sind, in denen die Diffusionsgeschwindigkeiten am höchsten sind. Diese Gebiete sind damit in systematischer Weise im Trennelement lokalisiert und befinden sich vorwiegend in der Nähe der Düseninnenführung innerhalb der ersten Umlenkhalfte.

Abb.28 verdeutlicht dies anhand des radialen Verlaufes der entmischenden Druckdiffusionskräfte bei etwa 75° Umlenkung für die Strömungsfelder 3 und 2. Man erkennt, daß die aus den statischen Drucken bestimmten entmischenden Druckdiffusionskräfte im Falle des Feldes 3 bei kleinen Umlenkradien die aus der Gemischtrennung bestimmten teilweise um das zweifache übersteigen. Bei großen Umlenkradien hingegen, wo die Zustandsänderungen pro freier Weglänge wesentlich kleiner sind und die Diffusionsgeschwindigkeiten niedrig werden, stimmen beide Werte gut überein. Bei Feld 2 sind die auf die freie Weglänge bezogenen Zustandsänderungen als auch die Diffusionsgeschwindigkeiten wesentlich kleiner als bei Feld 3. In Abb.28 ergeben sich deshalb hier geringere Unterschiede zwischen den auf verschiedene

Weise bestimmten entmischenden Druckdiffusionskräften als bei Feld 3. Dennoch übersteigen auch hier die über die statischen Drucke bestimmten Maximalwerte die aus der Gemischtrennung bestimmten um 80 %.

Auf der zweiten Umlenkhälfte sind die Unterschiede zwischen den auf verschiedene Art bestimmten entmischenden Kräften i.a. kleiner.

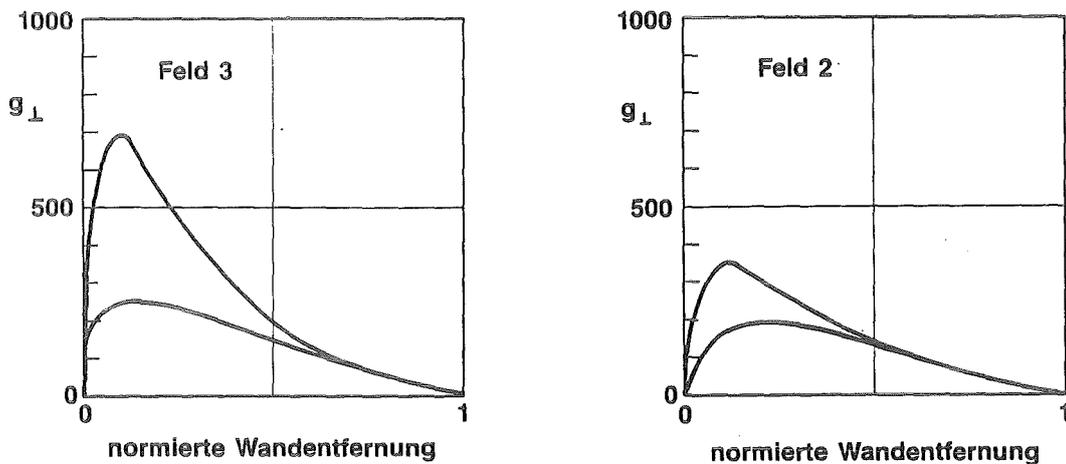


Abb.28 : Vergleich des radialen Verlaufes der über die statischen Drucke (jeweils obere Kurve) und der aus der Gemischtrennung (jeweils untere Kurve) bestimmten entmischenden Druckdiffusionskräfte für einen Strömungsquerschnitt bei etwa 75° Umlenkung für die Strömungsfelder 3 (links) und 2 (rechts). Einheiten: [1/m]

Abb.29 zeigt die aus den statischen Drucken bestimmten azimuthalen Druckdiffusionskräfte für Feld 3 in dem für Abb.28 gewählten Querschnitt im Vergleich zu den aus der Gemischdiffusion ermittelten. Ein Vergleich von Abb.29 mit Abb.28 zeigt, daß die Unterschiede in den auf unterschiedliche Art bestimmten azimuthalen Größen diejenigen der radialen Größen noch weit übersteigen, da die azimuthalen Zustandsänderungen besonders in der Nähe der Düseninnenführung erheblich größer sind als die radialen. Die aus den statischen Drucken ermittelten azimuthalen Druckdiffusionskräfte übersteigen die aus der Gemischdiffusion bestimmten am Strahlinnenrand um beinahe $1\frac{1}{2}$ Größenordnungen und sind selbst in Umlenkwandnähe noch um etwa 50 %

größer. Direkt an der Düseninnenführung ergibt sich aus den statischen Drucken für die azimuthale Diffusionsgeschwindigkeit formal ein Wert von 2500 m/sec, während der entsprechende aus der Gemischdiffusion bestimmte Wert 65 m/sec beträgt.

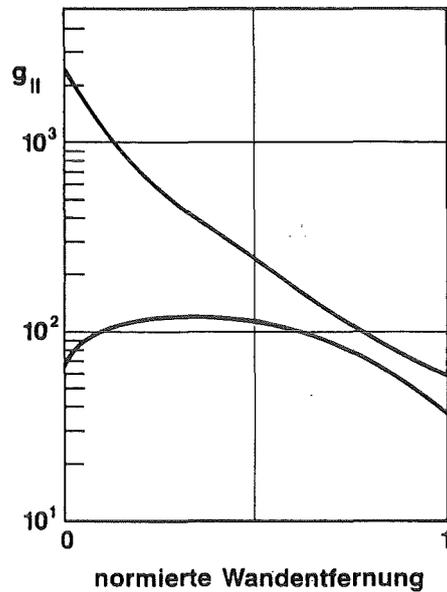


Abb.29 : Vergleich des radialen Verlaufes der über die statischen Drucke (obere Kurve) und der aus der Gemischdiffusion (untere Kurve) bestimmten azimuthalen Druckdiffusionskräfte für einen Strömungsquerschnitt bei etwa 75° Umlenkung für Strömungsfeld 3.

Bei kleineren azimuthalen Zustandsänderungen pro freier Weglänge (Feld 1 - Feld 2 - Feld 4) gleichen sich die auf unterschiedliche Weise bestimmten azimuthalen Druckdiffusionskräfte wieder mehr an. Bei Feld 2 und Feld 4 sind allerdings wegen der kleinen azimuthalen Diffusionsgeschwindigkeiten die experimentellen Fehler zu groß, als daß hier verlässliche Aussagen gemacht werden könnten.

6. Räumlicher Verlauf der lokalen Entropieerzeugung in der Trenndüse

In diesem Kapitel werden die räumlichen Felder der einzelnen Entropieerzeugungsbeiträge, die in Gl.(18) eingehen, dargestellt. Wie im Falle der Werterzeugung wird dies zunächst am Beispiel des Strömungsfeldes 1 durchgeführt. Die Einflüsse der Betriebsbedingungen und die Entropieerzeugung in der zweiten Düse werden in den nachfolgenden Abschnitten behandelt.

Die in den Kapiteln 6.1, 6.2, 6.3 gezeigten Ergebnisse bezüglich der durch Diffusion in Strömungsrichtung erzeugten Entropie sollten hierbei nur als tendenziell angesehen werden, da diese i.a. aus der Messung einer verhältnismäßig kleinen Differenz zweier großer Größen hervorgingen⁺⁾ und deshalb etwaige systematische Fehler des Meßverfahrens hier stark durchgreifen. Die Bestimmung dieses Entropiebeitrages aus den gemessenen Geschwindigkeitsverhältnissen wurde dennoch einer alternativ möglichen Bestimmung der Diffusionsgeschwindigkeiten aus dem gemessenen Verlauf des statischen Druckes vorgezogen, da bei einer solchen Auswertung die bereits in Kapitel 3 diskutierten höheren gaskinetischen Effekte nicht berücksichtigt werden.

⁺⁾ Aus der Differenz der aus den Geschwindigkeitsverhältnissen des Heliums und des C_7F_{14} ermittelten Geschwindigkeiten dieser beiden Gase.

6.1 Entropieerzeugung in der ersten Düse des Doppelumlenksystems

6.1.1 Reibungsbedingte Entropieerzeugung

Die Darstellung der durch Reibung bedingten Entropieerzeugung σ_R für Strömungsfeld 1 findet sich in Abb.30.

Man erkennt, daß nur in räumlich eng begrenzten Bereichen wesentliche Beiträge zur reibungsbedingten Entropieerzeugung existieren. So wird die Entropieerzeugung erst gegen Ende des Einlaufgebietes spürbar und erreicht im Bereich der zweiten Einlaufkante auf kurzem Weg hohe Werte. Während sich dieses Gebiet hoher Entropieerzeugung nach dem Einlauf schnell wieder abbaut, wächst gleichzeitig die Entropieerzeugung entlang der Düseninnenführung azimuthal stark an und durchläuft an deren Ende ein scharf ausgeprägtes Maximum. Danach fällt σ_R im Bereich des sich ausbildenden Festkörperwirbels sehr schnell auf vernachlässigbare Werte ab.

Im radialen Verlauf sind diese beiden Gebiete auf eine sehr schmale wandnahe Schicht begrenzt; die reibungsbedingte Entropieerzeugung ist mit Ausnahme von Gebieten starker azimuthaler Geschwindigkeitsänderungen über einen sehr weiten radialen Bereich praktisch vernachlässigbar.

Im Vergleich zu den hohen Werten an der Einlaufkante und am Düsenblech ist die Entropieerzeugung in Umlenkwandnähe wesentlich kleiner, dafür aber insgesamt über einen größeren räumlichen Bereich ausgedehnt. In diesen Zonen wird ein azimuthales Maximum in der Nähe des Überganges zur zweiten Umlenkhälfte durchlaufen. Am Ende der Umlenkung wird lediglich im unmittelbaren Bereich des Abschälers noch eine lokal begrenzte Entropieerzeugung mit nennenswerten Beiträgen beobachtet. Trotz der großen Unterschiede in den Absolutwerten von σ_R ist die integral erzeugte Entropie an der Düseninnenführung nur geringfügig höher als an der Umlenkwand.

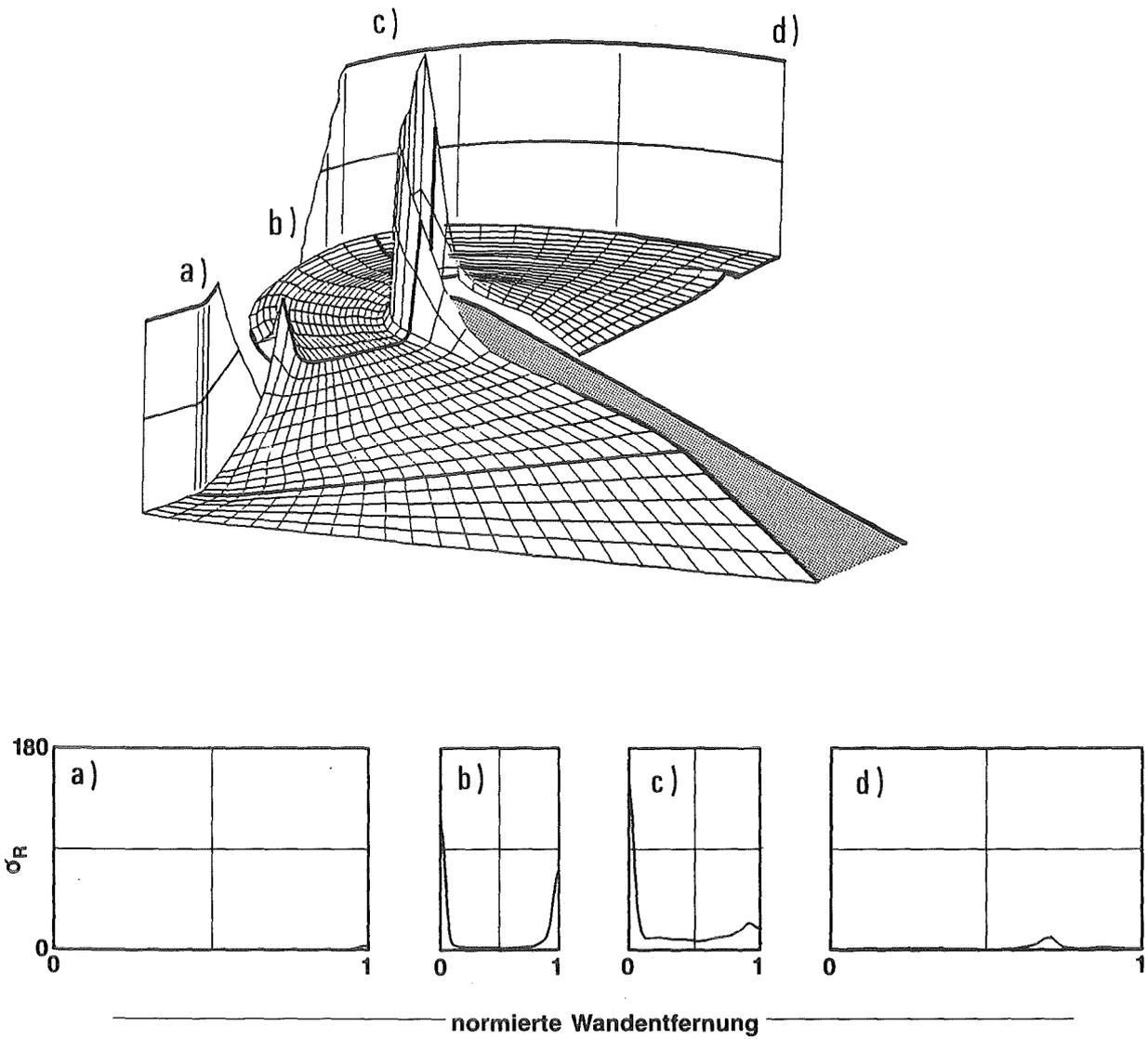


Abb.30 : Räumlicher Verlauf der reibungsbedingten Entropieerzeugung σ_R für Strömungsfeld 1. Einheiten: $[(Nm/K) / (m^2 sec)]$.

6.1.2 Diffusionsbedingte Entropieerzeugung

Abb.31 zeigt die räumliche Verteilung der gesamten durch Diffusion bedingten Entropieerzeugung σ_D .

Es zeigt sich, daß diese im Gegensatz zur reibungsbedingten Entropieerzeugung im wesentlichen in der Kanalmitte konzentriert ist. Da für die diffusionsbedingte Entropieerzeugung ähnlich wie für die Gemischwerterzeugung die Diffusionsstromdichten der schweren Komponente im C_7F_{14}/He -Gemisch maßgebend sind, weisen diese beiden Größen einen in gewissen Grenzen ähnlichen räumlichen Verlauf auf: Im gesamten Einlaufgebiet ist die Entropieerzeugung vernachlässigbar; σ_D wird erst mit Einsetzen der Diffusionsströme am Anfang der Umlenkung nennenswert und steigt in der Nähe der Düseninnenführung bis zu deren Ende monoton an. Danach fällt σ_D wieder stark ab, wobei sich die Gebiete hoher Beiträge gleichzeitig in Richtung Umlenkwand verschieben.

In Umlenkwandnähe sind die Beiträge auf der ersten Hälfte der Umlenkung vernachlässigbar, erreichen aber auf der zweiten Umlenkhälfte größere Werte. Ein weiteres Gebiet, in dem die diffusionsbedingte Entropieerzeugung besonders hohe Werte aufweist, ist die Zone unmittelbar vor dem Abschäler.

Abb.32 zeigt denjenigen Teil der diffusionsbedingten Entropieerzeugung $\sigma_{D\parallel}$, der durch Diffusionsströme entlang der Gemischmolstromflächen verursacht wird. Durch diese Diffusionsströme wird definitionsgemäß kein direkter Beitrag zur radialen Trennung geleistet.

Aus einem Vergleich von Abb.31 und Abb.32 geht hervor, daß die diffusionsbedingte Entropieerzeugung an der Umlenkwand und im Abschälerbereich fast ausschließlich auf die Diffusion entlang der Molstromflächen zurückzuführen ist. An der Umlenkwand sind hierfür die relativ hohen Diffusionsgeschwindigkeiten direkt an der Wand (vgl. Abb.9) verbunden mit dem verhältnismäßig hohen Molenbruch an schwerer Komponente (vgl. Abb.13 und Gl.(18)) verantwortlich. Am Abschäler ist

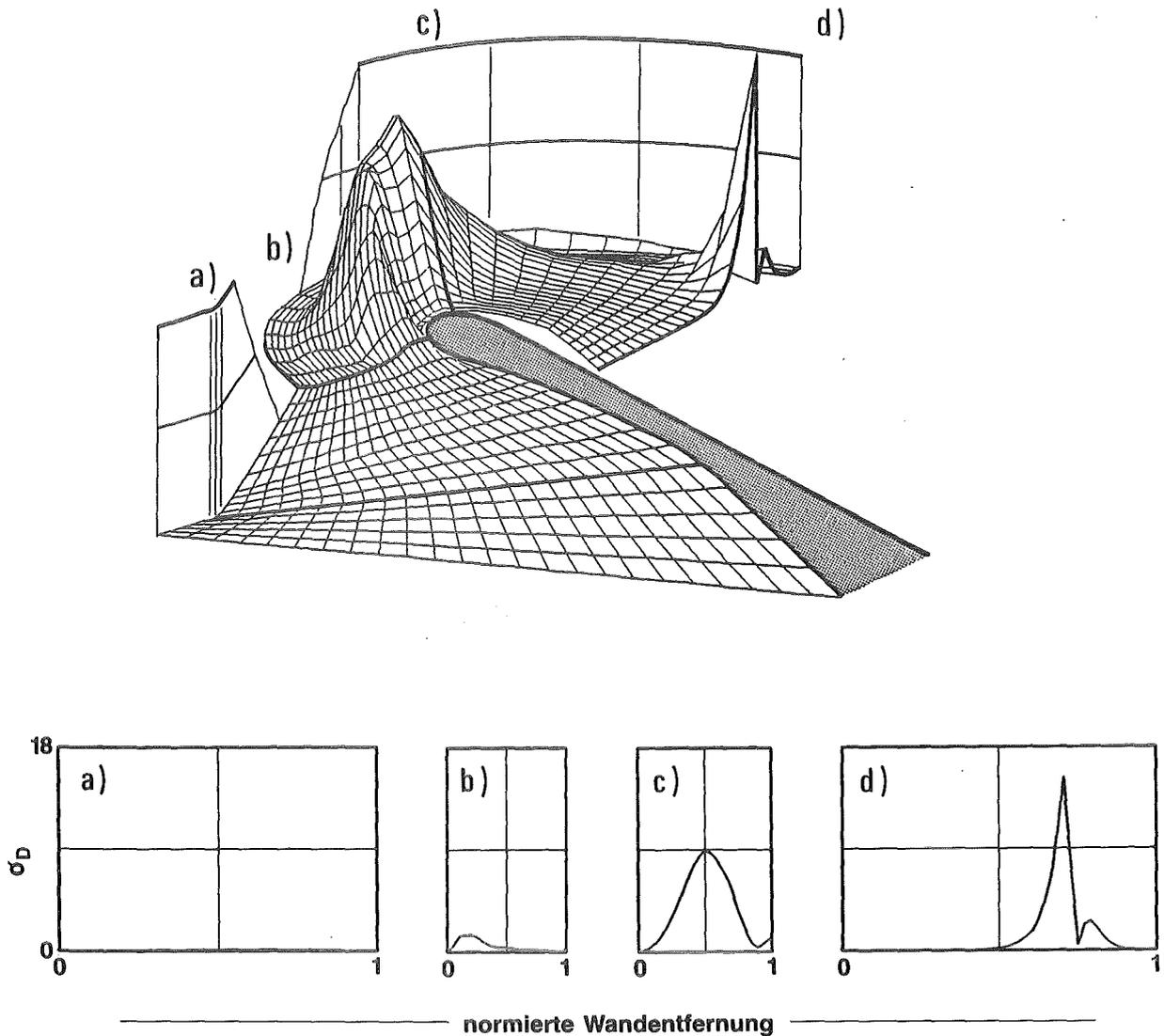


Abb.31 : Räumlicher Verlauf der gesamten diffusionsbedingten Entropieerzeugung σ_D für Strömungsfeld 1.
Einheiten: $[(Nm/K) / (m^2 \text{ sec})]$.

die Ursache vor allem in den hohen lokalen Diffusionsgeschwindigkeiten zu sehen, die durch die Nachexpansion in der leichten Fraktion zustande kommen, während die Abbremsung in der schweren Fraktion deutlich weniger zur Entropieerzeugung beiträgt.

Abb.32 zeigt außerdem, daß die Entropieerzeugung durch azimutale Diffusion auch in den Beschleunigungszonen am Ende des Einlaufes und beim Abbruch der Düseninnenführung groß wird.

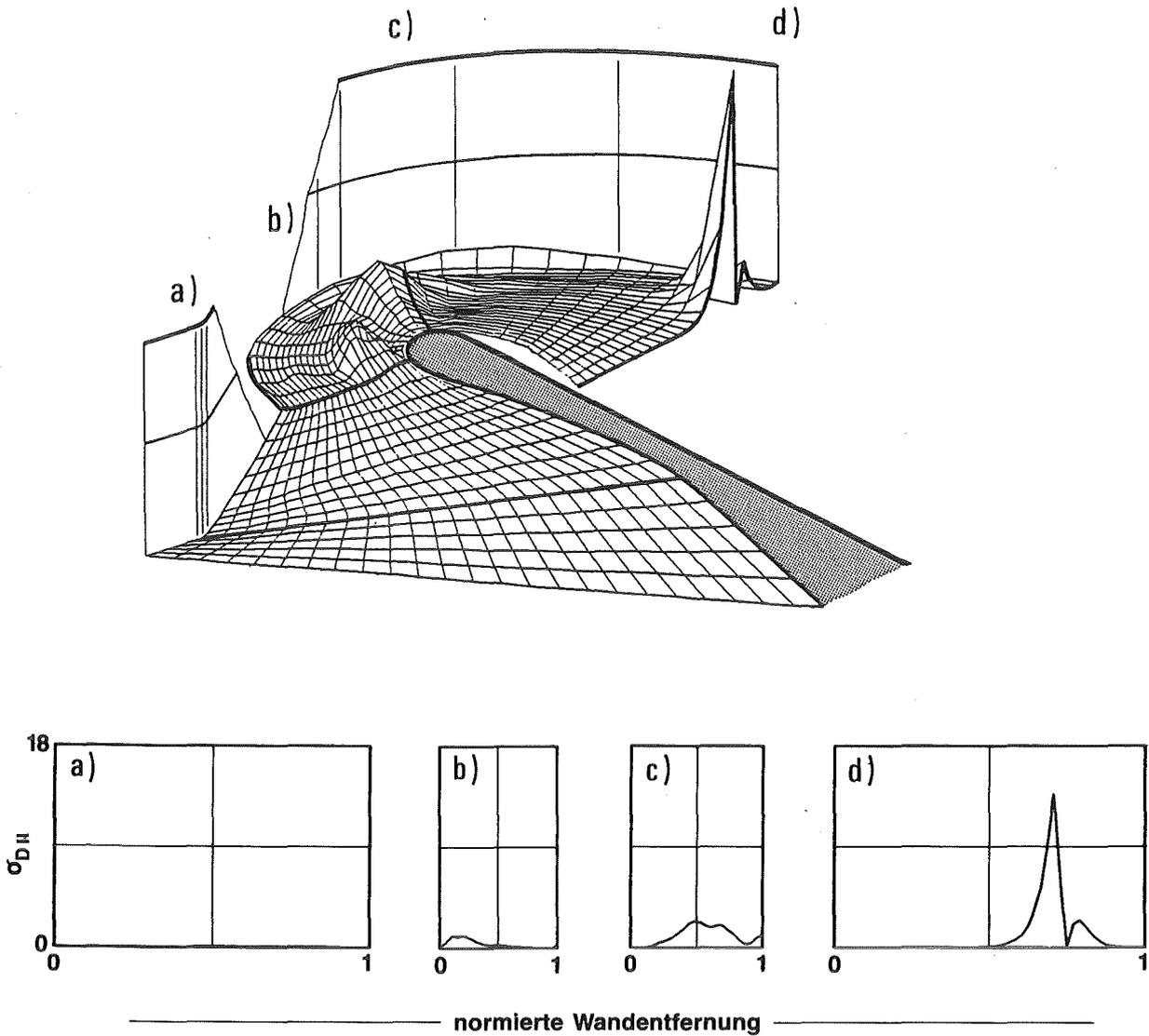


Abb.32 : Räumlicher Verlauf der durch Diffusion in Strömungsrichtung des Gemischs bedingten Entropieerzeugung $\sigma_{D||}$ für Strömungsfeld 1. Einheiten: $[(Nm/K) / (m^2 sec)]$.

Im Vergleich zur reibungsbedingten Entropieerzeugung σ_R sind die maximalen Werte der durch Diffusion bedingten Entropieerzeugung σ_D klein; da sich letztere jedoch über einen räumlich sehr viel größeren Bereich erstreckt, wird integral dennoch ein merklicher Beitrag zur insgesamt erzeugten Entropie geleistet. Dieser Sachverhalt ist in

Abb.33 aufgezeigt, in welcher die über den Kanalquerschnitt integrierte Entropieerzeugung σ^* in Abhängigkeit von der Umlenkkoordinate dargestellt ist. Man erkennt hier, daß sowohl die diffusionsbedingte als auch die reibungsbedingte Entropieerzeugung etwa beim Umlenkwinkel 90° maximal werden und daß der durch Diffusion bedingte Anteil etwa 15 % der insgesamt erzeugten Entropie ausmacht.

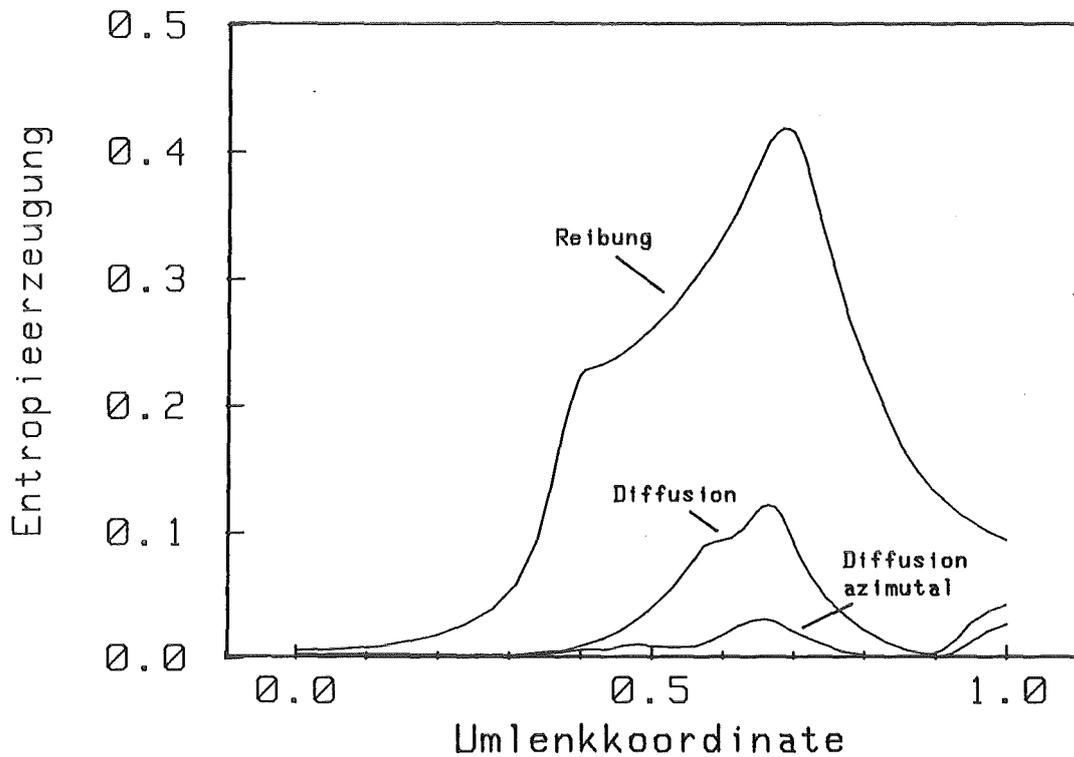


Abb.33 : Vergleich der durch Reibung und durch Diffusion bedingten Entropieerzeugung für Strömungsfeld 1. Aufgetragen sind die über den Kanal integrierten Werte σ^* der lokalen Entropieerzeugung in Abhängigkeit von der Umlenkkoordinate. Einheit der Entropieerzeugung: $[(Nm/K) / (m \text{ sec})]$.

6.2 Einfluss der Betriebsbedingungen

6.2.1 Reibungsbedingte Entropieerzeugung

In Abb.34 sind die azimuthalen Profile der reibungsbedingten Entropieerzeugung für die Strömungsfelder 1, 2 und 3 dargestellt. Aufgetragen ist jeweils die Abhängigkeit der über den Querschnitt integrierten Entropieerzeugung $\sigma_{R,n}^*$ von der Umlenkkordinate. Die Werte sind auf den jeweiligen Teilchendurchsatz normiert.

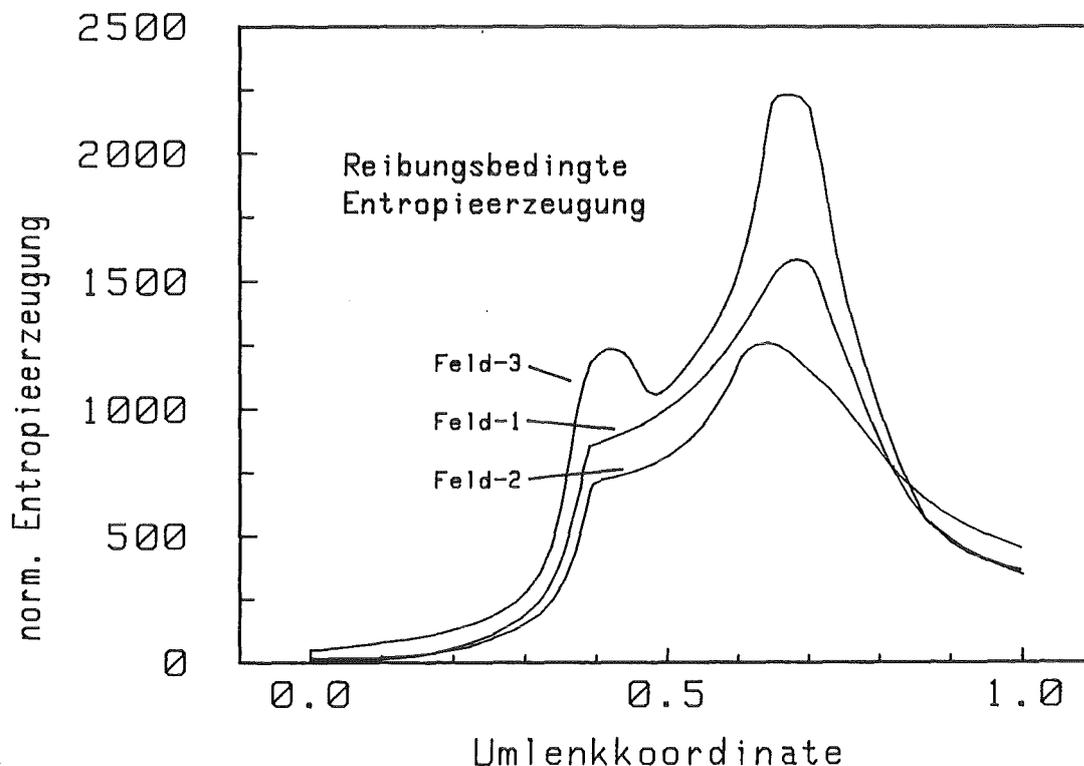


Abb.34 : Vergleich der azimuthalen Entwicklung der in den Strömungsfeldern 1, 2 und 3 durch Reibung pro Zeiteinheit erzeugten Entropie. Im Gegensatz zu Abb.33 wurden die Werte auf den Teilchendurchsatz normiert. Einheiten: $[(Nm/K) / (m \text{ sec}^2)]$.

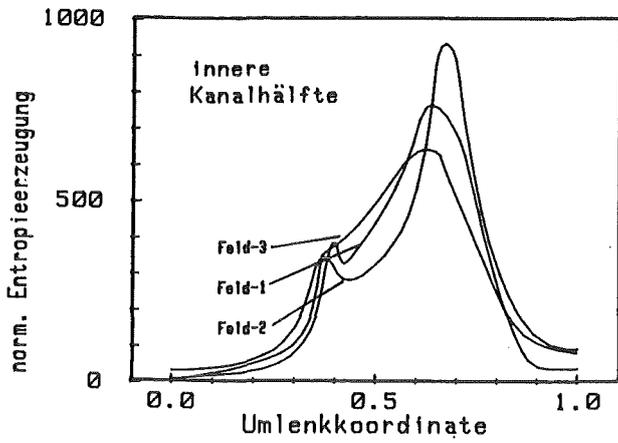
Man erkennt, daß die azimuthalen Profile der über den Kanalquerschnitt integrierten normierten Entropieerzeugung für alle Strömungsfelder qualitativ ähnlich sind. Die Entropieerzeugung bleibt bis zum Einlaufende klein und steigt dann schnell an. Im Bereich des Düsenkanals steigt $\sigma_{R,n}^*$ dann im Mittel mit etwas schwächerem azimuthalen Gradienten an und durchläuft beim Übergang zur zweiten Umlenkhälfte ein

ausgeprägtes Maximum. Von hier fällt sie im weiteren Verlauf der Umlenkung bis auf verhältnismäßig geringfügige Werte im Endquerschnitt ab.

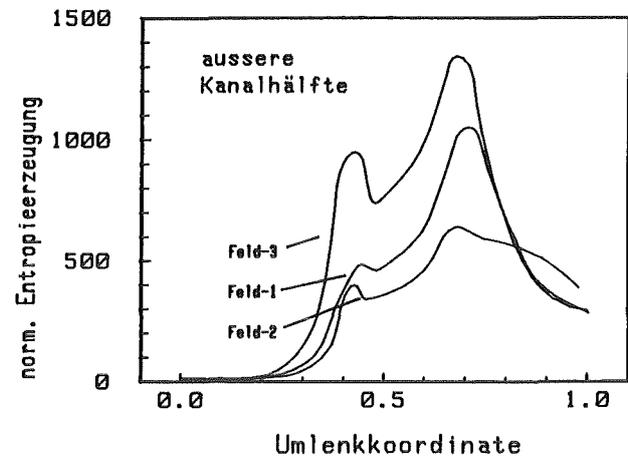
Die auf den Teilchendurchsatz bezogene Entropieerzeugung ist im Bereich der eigentlichen Trennstruktur beim Feld mit der niedrigsten Reynolds-Zahl (Feld 3) am höchsten und beim Feld mit der höchsten Reynolds-Zahl (Feld 2) am niedrigsten.

Da nach Abb.30 die reibungsbedingte Entropieerzeugung in der Kanalmitte i.a. vernachlässigbar ist, kann man die entlang der Umlenkwand und die entlang der Düseninnenführung erzeugte Entropie getrennt untersuchen. In Abb.35a,b sind die normierten Entropieerzeugungsbeiträge der inneren Kanalhälfte $\sigma_{R,n,i}^*$ (Abb.35a) und der äußeren Kanalhälfte $\sigma_{R,n,a}^*$ (Abb.35b) über der Umlenkkoordinate dargestellt.

Man erkennt, daß die Entropieerzeugungsbeiträge in der inneren und der äußeren Kanalhälfte von der Reynolds-Zahl unterschiedlich abhängen. Entlang der Düseninnenführung ändert sich die normierte Entropieerzeugung $\sigma_{R,n,i}^*$ nur verhältnismäßig schwach mit der Reynolds-Zahl. Im Umlenkwandbereich hingegen nimmt $\sigma_{R,n,a}^*$ auf den ersten zwei Dritteln der Umlenkung mit abnehmender Reynolds-Zahl stark zu, und gleichzeitig wird der Anteil der in der Umgebung der zweiten Einlaufkante erzeugten Entropie größer. Im Mittel wächst also mit wachsender Reynolds-Zahl der Anteil der im Bereich der Düseninnenführung erzeugten Entropie.



a)



b)

Abb.35 : Die in der inneren und in der äußeren Kanalhälfte pro Zeiteinheit und Teilchenstrom erzeugte reibungsbedingte Entropie.

Einheiten: $[(\text{Nm/K}) / (\text{m sec}^2)]$.

6.2.2 Diffusionsbedingte Entropieerzeugung

Abb.36 zeigt die gesamte diffusionsbedingte Entropieerzeugung $\sigma_{D,n}^*$ für die Felder 1, 2 und 3 in Abhängigkeit von der Umlenkkoordinate. Die Werte wurden wiederum über den Kanalquerschnitt integriert und auf den Teilchendurchsatz normiert. Man erkennt, daß dieser Entropiebeitrag im Gegensatz zur reibungsbedingten Entropieerzeugung $\sigma_{R,n}^*$ mit zunehmender Reynolds-Zahl monoton wächst. Der azimuthale Verlauf ist jedoch für alle drei Strömungsfelder ähnlich: Die Werte der diffusionsbedingten Entropieerzeugung sind im Einlaufgebiet vollständig vernachlässigbar und durchlaufen im Bereich des Abbruchs der Düseninnenführung ein ausgeprägtes Maximum. In allen Fällen wächst $\sigma_{D,n}^*$ vor dem Abschäler nochmals an. Die Gebiete, in denen der wesentliche Teil der diffusionsbedingten Entropieerzeugung vorliegt, verschieben sich mit abnehmender Reynolds-Zahl geringfügig zu kleineren Werten der Umlenkkoordinate.

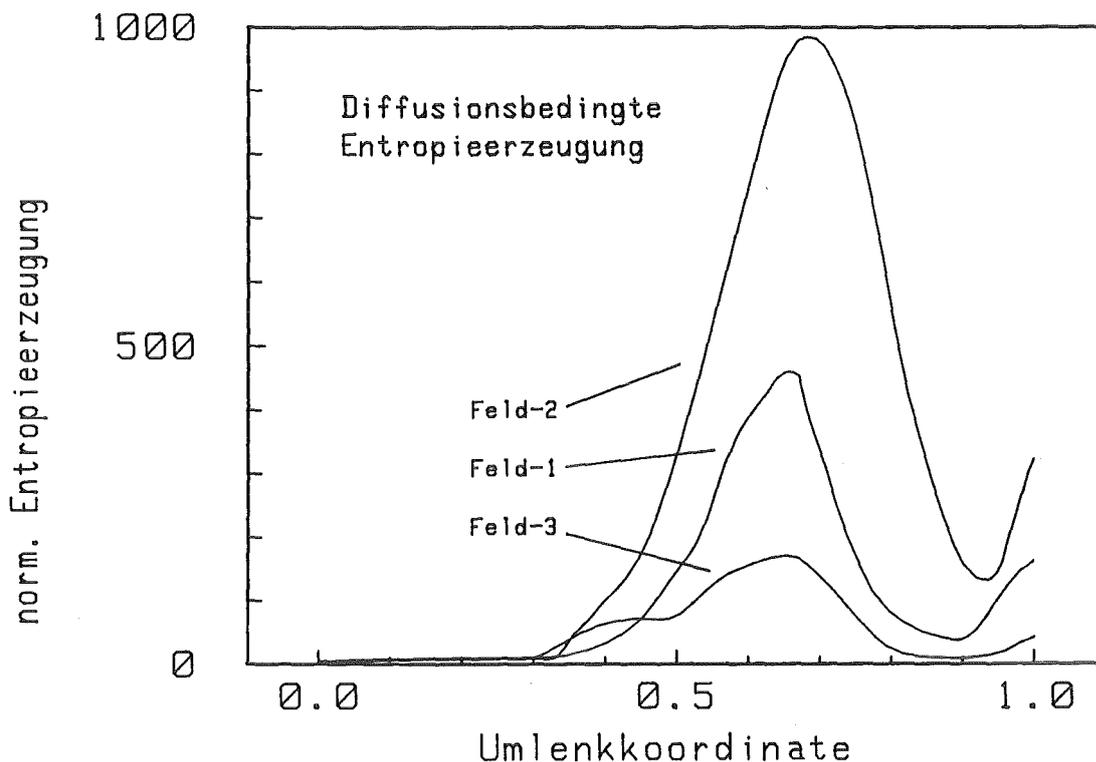


Abb.36 : Vergleich der in den Strömungsfeldern 1, 2 und 3 durch Diffusion erzeugten Entropie. Die Werte wurden auf den Teilchenstrom normiert und über den Kanalquerschnitt integriert. Einheiten: $[(Nm/K) / (m \text{ sec}^2)]$.

Der Anteil der durch Diffusion erzeugten Entropie an der insgesamt erzeugten Entropie ist beim Strömungsfeld mit dem höchsten C_7F_{14} -Molenbruch (Feld 2) am größten und beträgt hier etwa ein Drittel. Hiervon wird wiederum etwa die Hälfte durch Diffusion in azimuthaler Richtung verursacht. Der Anteil der durch Diffusion erzeugten Entropie an der insgesamt erzeugten Entropie fällt mit abnehmender Reynolds-Zahl rasch, wobei gleichzeitig die durch azimuthale Diffusion erzeugte Entropie gegenüber der durch radiale Diffusion erzeugten größer wird.

6.3 Entropieerzeugung in der zweiten Düse des Doppelumlenksystems

6.3.1 Reibungsbedingte Entropieerzeugung

Abb.37 zeigt den azimuthalen Verlauf der reibungsbedingten Entropieerzeugung $\sigma_{R,n}^*$ für Strömungsfeld 4 im Vergleich zu dem des Strömungsfeldes 1. Die Werte wurden wiederum über den Kanalquerschnitt integriert und auf den jeweiligen Teilchendurchsatz normiert.

Man erkennt zunächst, daß diese Größe bedingt durch die schwächere Expansion des Gases bei Feld 4 im Mittel nur etwa 40 % derjenigen des Feldes 1 beträgt. Der azimuthale Verlauf dieses Entropiebeitrages hingegen weist im wesentlichen die gleiche Struktur auf wie bei Feld 1 und unterscheidet sich lediglich im ersten Viertel der Umlenkung geringfügig. In diesem Bereich fällt $\sigma_{R,n}^*$ bei Feld 4 zunächst leicht ab und durchläuft deshalb im weiteren azimuthalen Verlauf ein etwas schwächer ausgeprägtes azimuthales Maximum als dies bei Feld 1 der Fall ist.

Abb.38a,b zeigen wiederum diejenigen Anteile der reibungsbedingten Entropieerzeugung, die auf die innere und auf die äußere Kanalhälfte entfallen. Man erkennt, daß in der zweiten Düse beinahe die gesamte durch Reibung erzeugte Entropie auf die äußere Kanalhälfte entfällt. Der Anteil der innerhalb der inneren Kanalhälfte durch Reibung erzeugten Entropie ist in der zweiten Düse im Gegensatz zur ersten Düse fast vernachlässigbar.

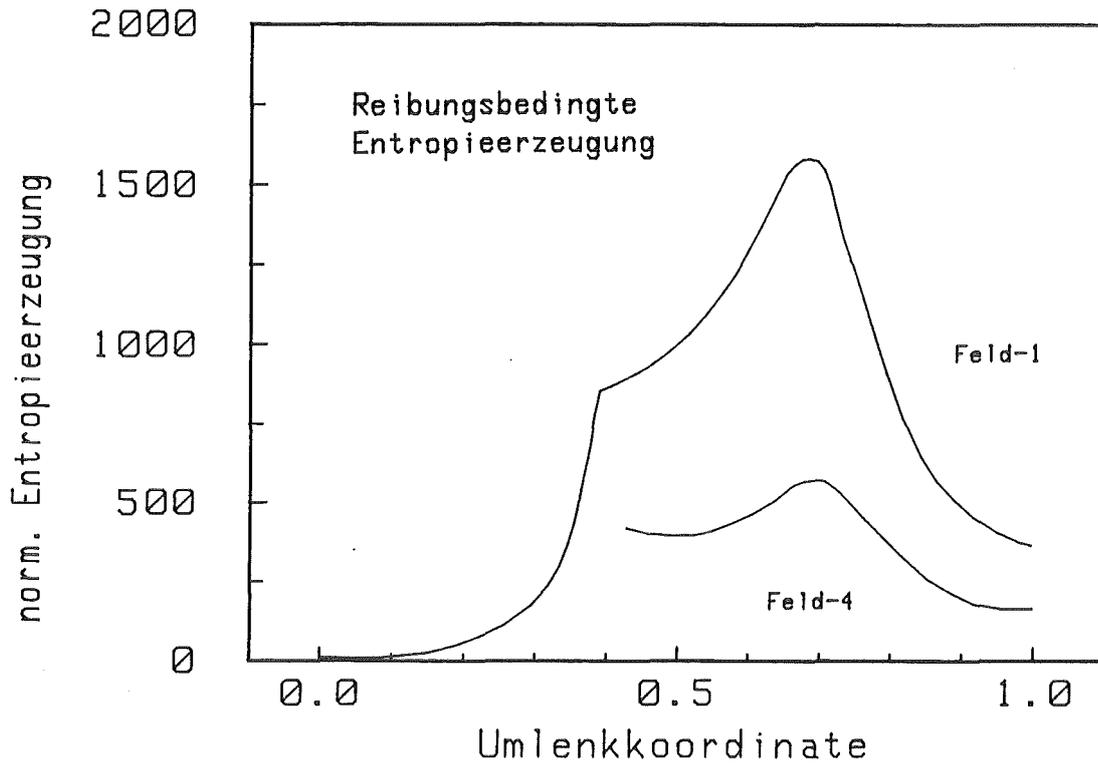


Abb.37 : Azimutaler Verlauf der reibungsbedingten Entropieerzeugung für Strömungsfeld 4 im Vergleich zu dem des Strömungsfeldes 1. Die dargestellten Werte sind über den Kanalquerschnitt integriert und auf den jeweiligen Teilchendurchsatz normiert.
Einheiten: $[(Nm/K) / (m \text{ sec}^2)]$.

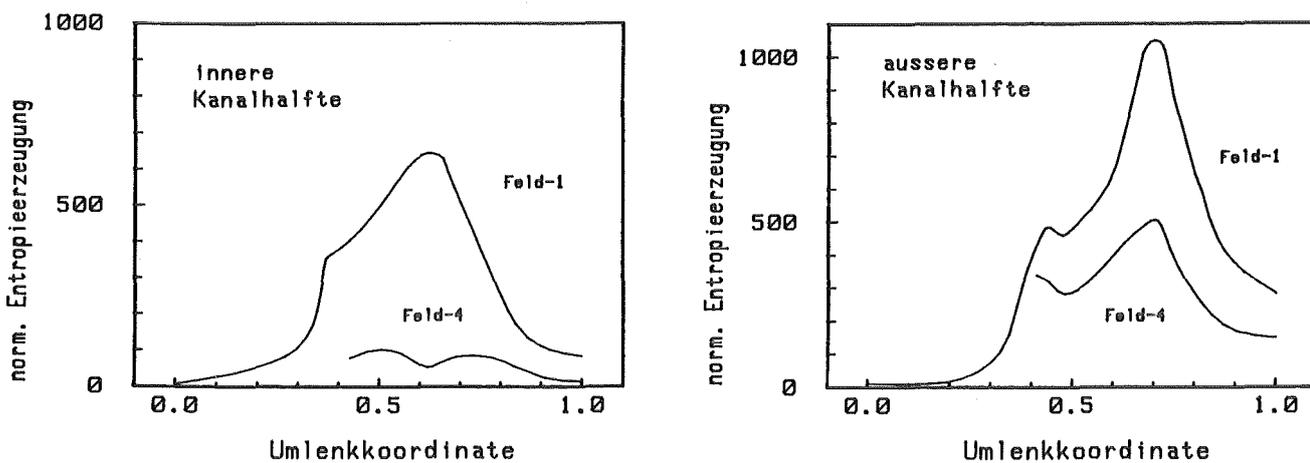


Abb.38 : Aufteilung der in Abb.37 dargestellten Größe auf die innere (links) und äußere (rechts) Kanalhälfte.

6.3.2 Diffusionsbedingte Entropieerzeugung

Abb.39 zeigt die gesamte durch Diffusion bedingte Entropieerzeugung $\sigma_{D,n}^*$ von Strömungsfeld 4 im Vergleich zu derjenigen des Strömungsfeldes 1. Die Werte sind über den Kanalquerschnitt integriert und auf den Teilchendurchsatz normiert.

Die Abbildung verdeutlicht, daß die Maximalwerte von $\sigma_{D,n}^*$ in der zweiten Düse fast um eine Größenordnung kleiner sind als bei Strömungsfeld 1. Auch der azimutale Verlauf unterscheidet sich: Im Gegensatz zu Feld 1, bei dem die diffusionsbedingte Entropieerzeugung auf der zweiten Hälfte der Umlenkung azimutal stark abfällt, bleibt diese bei Feld 4 in diesem Bereich nahezu konstant. Außerdem wird bei Feld 4 das azimutale Maximum merklich früher durchlaufen als bei Feld 1.

Die insgesamt durch Diffusion erzeugte Entropie ist in der zweiten Düse um etwa eine Größenordnung kleiner als die durch Reibung erzeugte Entropie.

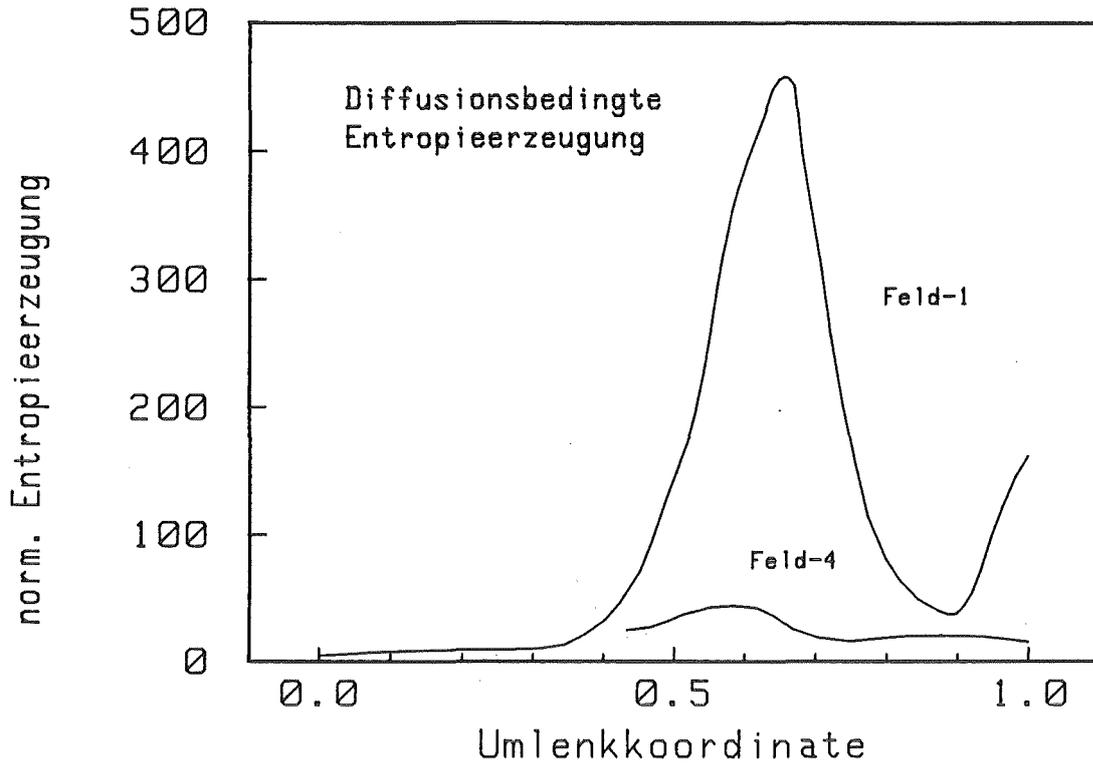


Abb.39 : Azimutaler Verlauf der diffusionsbedingten Entropieerzeugung für Strömungsfeld 4 im Vergleich zu dem des Strömungsfeldes 1. Die dargestellten Werte sind über den Kanalquerschnitt integriert und auf den jeweiligen Teilchendurchsatz normiert.
Einheiten: $[(Nm/K) / (m \text{ sec}^2)]$.

7.) Diskussion

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Verfahren zur Analyse der Werterzeugung und der Verlustprozesse in der Trenndüse entwickelt. Es ermöglicht erstmals, die für das Trenndüsenverfahren typische enge Kopplung von Strömungs- und Entmischungsvorgängen zu berücksichtigen.

Als Eingangsdaten dienen die durch Molekularsondenmessungen ermittelten Strömungsfelder binärer Modellgasgemische aus Helium und C_7F_{14} , die aufgrund des gleichen Massenverhältnisses der Gemischkomponenten bezüglich der Strömung und der Gemischtrennung dem Verfahrensgasgemisch aus Helium und UF_6 entsprechen.

Die Werterzeugung dieser Strömungsfelder wird auf der Basis der Chapman-Enskog-Näherung der Boltzmann-Gleichung berechnet, wobei die Trennung der Isotope in dem aus der Gemischtrennung ermittelten Zentrifugalfeld numerisch simuliert wird.

Die Bestimmung der Verlustprozesse erfolgt durch die Berechnung der Entropieerzeugung, die sich direkt aus den aus dem Experiment folgenden Geschwindigkeitsgradienten des Gemischs und den Geschwindigkeitsunterschieden der Gemischkomponenten ergibt.

Da die Geschwindigkeitsverhältnisse und Stromdichten der beiden Gemischkomponenten experimentell ermittelt werden, sind Auswirkungen höherer gaskinetischer Effekte auf diese Größen voll berücksichtigt. Da die Isotopenentmischung aus diesen Daten bestimmt wird, werden also auch bei der Isotopenentmischung höhere gaskinetische Effekte in erster Näherung mitberücksichtigt.

Räumlicher Ablauf der Entmischung im Bild der klassischen Diffusionstheorie.

Die dargestellten räumlichen Felder der Werterzeugung zeigen, daß selbst bei Reynoldszahlen, die etwa dem Maximum der Gemischtrennung entsprechen und somit kleiner als die für die Isotopentrennung

optimale Reynoldszahl sind⁺⁾ , nirgends innerhalb der Düse in größerem Umfang Wert vernichtet wird.

Dieser Sachverhalt läßt sich zum einen so interpretieren, daß in diesem Betriebsbereich der Einfluß der mit abnehmender Reynoldszahl zunehmenden Verlustprozesse auf das Gemischgeschwindigkeitsverhältnis so groß ist, daß trotz zunehmendem Diffusionskoeffizienten der Ablauf der Isotopentmischung verlangsamt wird; deshalb können in Gebieten weit stromauf vom Abschäler die Konzentrationsgradienten nicht so groß werden, daß sie eine nennenswerte Rückmischung bewirken könnten.

Zum andern wird in Umlenkwandnähe die Entmischung zusätzlich dadurch gedämpft, daß im Laufe der Umlenkung der Anteil an schwerer Gemischkomponente hier stark anwächst, und somit der die Isotopentmischung bestimmende Diffusionskoeffizient als auch das für die treibende Kraft der Druckdiffusion maßgebende Massenverhältnis erheblich kleiner werden. Dieser Zustand wird bei einem Betriebspunkt, der für eine Isotopentrennanlage infrage kommt, immer vorliegen, da die Betriebsbedingungen in diesem Fall u.a. dadurch festgelegt sind, daß gleichzeitig ein hoher Trenneffekt angestrebt wird und aus wirtschaftlichen Gesichtspunkten jedoch genügend UF_6 durchgesetzt werden muß.

Deutliche Rückmischungsgebiete treten erst dann auf, wenn sowohl die Reynoldszahl als auch der Anteil an schwerer Komponente im Gemisch erheblich kleiner gewählt werden, als es dem optimalen Betrieb des Trennelements entspricht, d.h. wenn der Isotopendiffusionskoeffizient

⁺⁾ Aus einem Vergleich mit Trennexperimenten an He/ UF_6 -Gemischen ist bekannt, daß der am Abschäler vorliegende Isotopentrenneffekt sein absolutes Maximum bei höherem Einlaßdruck erreicht, als er bei den Feldern 1 und 2 vorgegeben wurde.

sehr hoch ist und gleichzeitig keine große radiale Variation aufweist. Diese Bedingungen liegen in der Praxis allenfalls bei der Trennung von UF_6 und Zusatzgas an den Abstufungsstellen einer Isotopentrennkaskade vor, nicht jedoch in der Isotopentrennanlage selbst.

Bei der Analyse der Isotopentmischung werden erstmals in vollem Umfang Diffusionsbeiträge berücksichtigt, die durch azimutale Druck- und Konzentrationsgradienten bedingt sind. Die Bedeutung dieser Effekte liegt in der Möglichkeit, entmischende radiale Konzentrationsgradienten aufzubauen, die durch eine Veränderung der lokalen Teilchendichten in Gebieten stark unterschiedlicher azimutaler Beschleunigung zustande kommen. Auswirkungen solcher Beiträge werden jedoch nur in Gebieten sehr starker azimutaler Druckänderungen spürbar. Speziell im Abschälerbereich macht sich dies in einer Abnahme der radialen Konzentrationsgradienten bemerkbar, während der Trenneffekt in azimutaler Richtung weiterhin ansteigt.

Diese Effekte können also vor allem bei Betriebspunkten, bei denen am Ende der Umlenkung annähernd lokales Gleichgewicht erreicht wird, zu einem bleibenden Gewinn im Trenneffekt führen, der durch eine Erhöhung des entmischenden Nettodiffusionsstromes zustande kommt. An anderen Orten innerhalb der Düse führen sie im gleichen Maße zu einer Vergrößerung der entmischenden Diffusionsströme, die einen schnelleren Ablauf der Entmischung und damit eine Erhöhung des optimalen Einlaßdruckes zur Folge haben.

Die Analyse der Entmischung in der zweiten Düse des Doppelumlenk-systems zeigt, daß diese in mehrfacher Hinsicht ganz wesentlich von der Trennung in der ersten Düse bestimmt wird: So führt der unterschiedliche Ablauf der Gemisch- und Isotopentrennung in der ersten Düse zunächst zu einem verzögerten Abbau der für die zweite Düse negativen Isotopentmischung im Vergleich zur Entmischung des Gemischs. Im Bereich der eigentlichen Umlenkung sind wegen des hohen Molenbruchs an schwerer Komponente einerseits die erreichbaren Strahlgeschwindigkeiten und damit die entmischenden Kräfte klein. Andererseits wird der die Isotopentmischung bestimmende Diffusions-

koeffizient im Vergleich zu demjenigen des Gemischs ungünstig klein, so daß die Isotopenentmischung langsamer abläuft als die Gemischtrennung. Im untersuchten Fall hatte deshalb der Isotopentrenneffekt sein azimutales Maximum noch nicht erreicht, während der Gemischtrennfaktor schon deutlich abnahm.

Im Gegensatz zur ersten Düse wird in der zweiten Düse kein wesentlicher Einfluß von azimutalen Diffusionsströmen auf den Ablauf der Isotopentrennung festgestellt. Die Ursachen hierfür sind einerseits die Vorbeschleunigung des Gases in der ersten Düse, die die azimutalen Druckgradienten im Vergleich zu den radialen in der zweiten Düse verkleinern, andererseits der verhältnismäßig niedrige dynamische Druck am Ende der Umlenkung, der im Abschälerbereich der zweiten Düse lediglich zu verhältnismäßig geringfügigen azimutalen Druckgradienten führt.

Einfluß höherer gaskinetischer Effekte auf den Ablauf der Trennung

Die Bestimmung der entmischenden Kräfte aus den experimentellen Daten kann zum einen aus der räumlichen Entwicklung der binären Gemischtrennung und zum andern durch Bildung der lokalen Gradienten des statischen Druckes erfolgen. Diese beiden Methoden müssen im Gültigkeitsbereich der Chapman-Enskog-Näherung zu gleichen Ergebnissen führen. Wird der Ablauf der Entmischung jedoch durch höhere gaskinetische Effekte merklich beeinflußt, so führen beide Methoden zu unterschiedlichen Werten für die entmischenden Kräfte, da die erstere sich an dem experimentell gemessenen Zustand der Entmischung orientiert und damit die Auswirkungen solcher Effekte auf die Gemischtrennung mitberücksichtigt, während letztere solche Auswirkungen nicht erfassen kann.

Eine entsprechende Auswertung der im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten Felder zeigt, daß die aus den beiden Methoden folgenden entmischenden Kräfte bei hoher Reynoldszahl und moderaten Diffusionsgeschwindigkeiten innerhalb der durch die Genauigkeit der Sondenmessungen vorgegebenen Grenzen übereinstimmen. Bei kleinen Reynoldszahlen und starken Zustandsänderungen innerhalb weniger freier Weglängen weichen jedoch die Ergebnisse beider Auswerte-

methoden stark voneinander ab; die formal aus den Druckgradienten ermittelten entmischenden Kräfte sind meist wesentlich größer als die aus der Gemischtrennung folgenden Werte. Man stellt insbesondere fest, daß vor allem die nach den beiden Methoden ermittelten Azimutalkomponenten der Diffusionsgeschwindigkeiten im Bereich hoher azimuthaler Druckgradienten, also z.B. in der Nähe der Düseninnenführung, stark voneinander abweichen. In diesem Strömungsbereich sind bereits bei dem Strömungsfeld mit der höchsten Reynoldszahl die formal aus den azimuthalen Druckgradienten gefolgerten Diffusionsgeschwindigkeiten um etwa 50% größer als die aus der gemessenen Entmischung ermittelten Werte. Bei dem Feld mit der niedrigsten Reynoldszahl betragen die Abweichungen mehr als eine Größenordnung. Ein ähnlicher Sachverhalt wird auch bei den radialen Komponenten der Diffusionsgeschwindigkeit beobachtet; die Unterschiede sind jedoch geringer als bei den azimuthalen Diffusionsgeschwindigkeiten.

Die starken Abweichungen zwischen den nach beiden Methoden ermittelten azimuthalen Diffusionsgeschwindigkeiten sind zunächst damit zu begründen, daß die Geschwindigkeitsunterschiede zwischen C_7F_{14} und Zusatzgas auch bei beliebig hohen lokalen Druckgradienten nicht beliebig anwachsen können, wie dies formal für die Druckdiffusionsgeschwindigkeit nach der klassischen Diffusionstheorie möglich wäre. Der Geschwindigkeitsunterschied zwischen den beiden Gemischkomponenten kann zumindest nicht größer werden als die absolute Geschwindigkeitsänderung, die sich bei einer ausschließlichen Beschleunigung der leichten Komponente ergeben würde, wenn man die im jeweiligen Strömungsgebiet vorliegenden Druckänderungen zugrunde legt.

Die Unterschiede zwischen den nach beiden Methoden ermittelten radialen Diffusionsgeschwindigkeiten kann man sich plausibel machen, wenn man berücksichtigt, daß die schwere Gemischkomponente (C_7F_{14}) im überwiegenden Teil des Strömungsfeldes eine niedrigere Azimutalgeschwindigkeit aufweist als das leichte Zusatzgas (vgl. Abb.10)⁺). Entsprechend ist die auf die schwere Komponente wirkende Zentrifugalbeschleunigung geringer, was sich in einem kleineren radialen Transport dieser Komponente auswirkt. Im Gegensatz zur Chapman-Enskog-Näherung, bei der die Druckdiffusionsgeschwindigkeit

nur vom Gesamtdruckgradienten und damit nur von der mittleren Massengeschwindigkeit abhängt, gehen bei der vorliegenden Betrachtungsweise die individuellen Azimutalgeschwindigkeiten in den radialen Transport der schweren Gemischkomponente ein. Der Einfluß höherer gaskinetischer Effekte auf den Ablauf der Entmischung kann nach dieser Modellvorstellung auf die Wirkung eines Geschwindigkeitsschlupfes zurückgeführt werden, dessen Größe in komplizierter Weise von den Zustandsänderungen im Strömungsfeld, der Wechselwirkung der Strömung mit der Wand und den Relaxationszeiten für die Einstellung einer lokalen Maxwellverteilung abhängt.

Aus früheren Molekularsondenmessungen ist bekannt, daß diese Geschwindigkeitsunterschiede zwischen schwerer Komponente und Zusatzgas mit zunehmendem Expansionsverhältnis ansteigen. Man muß daher erwarten, daß die negative Wirkung dieser Effekte mit steigendem Expansionsverhältnis zunimmt. Da die Geschwindigkeitsunterschiede zwischen den Komponenten andererseits aber durch eine Erhöhung der Reynoldszahl wieder verkleinert werden können, ist es somit unmittelbar einsichtig, daß der für die Entmischung optimale Einlaßdruck mit zunehmendem Expansionsverhältnis ansteigt. Bei Verwendung des Zusatzgases Wasserstoff sind im Vergleich zu Helium die azimutalen Geschwindigkeitsunterschiede aufgrund des größeren Massenverhältnisses der Komponenten stärker ausgeprägt /38/, so daß

⁺) Dieser Geschwindigkeitsschlupf beruht zum einen darauf, daß die schwere Komponente bei der Expansion des Gemisches in der Trenndüse langsamer beschleunigt wird als das leichte Zusatzgas (vgl. hierzu auch /37/). Zum andern wird ein Geschwindigkeitsschlupf auch durch die Wechselwirkung des strömenden Gasgemisches mit der Wand induziert; die diffus an der Wand reflektierten Moleküle der schweren Gemischkomponente werden langsamer von der Strömung mitgenommen als die des leichten Zusatzgases.

in diesem Fall grundsätzlich ein größerer Einfluß der hier diskutierten Effekte auf den gesamten Ablauf der Trennung angenommen werden muß. Dies sollte also insbesondere einen stärkeren Anstieg des optimalen Einlaßdruckes der Isotopenentmischung mit zunehmendem Expansionsverhältnis als beim Zusatzgas Helium zur Folge haben, wie durch Trennexperimente immer wieder bestätigt wird. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß neben den hier diskutierten Vorgängen die Abhängigkeit des optimalen Einlaßdruckes vom Expansionsverhältnis in gewissen Betriebsbereichen auch maßgeblich von anderen Faktoren beeinflusst werden kann; als Beispiel ist hier der schon früher mehrfach diskutierte, auf der unterschiedlichen Einstellzeit der Gleichgewichtsverteilung der beiden Isotope beruhende Effekt zu nennen /2,7/.

Räumlicher Verlauf der Entropieerzeugung

Die vorliegenden Untersuchungen zeigen eine sehr starke räumliche Konzentration der reibungsbedingten Entropieerzeugung. Vor allem entlang der Düseninnenführung, wo die größten radialen Geschwindigkeitsgradienten vorliegen, werden hierbei außerordentlich hohe Werte gemessen. Weitere starke Entropiequellen liegen i.a. in der Nähe erheblicher geometrischer Veränderungen, wie z.B. der zweiten Einlaufkante und dem Übergang zur zweiten Umlenkhalfte; als Ursache hierfür sind neben den radialen auch die in diesen Bereichen vorliegenden starken azimutalen Zustandsänderungen in Betracht zu ziehen. Im Kanallinneren ist die Entropieerzeugung demgegenüber mit wenigen Ausnahmen über einen weiten radialen Bereich praktisch vernachlässigbar. Dies gestattet es, zwischen zwei unterschiedlichen Bereichen der Entropieerzeugung zu unterscheiden und die Aufteilung der integral erzeugten reibungsbedingten Entropie auf die der Düseninnenführung näher liegende und auf die der Umlenk wand näher liegende Kanalhälfte zu untersuchen. Es zeigt sich hierbei, daß auf der ersten Umlenkhalfte die integrale reibungsbedingte Entropieerzeugung bei niedriger Reynoldszahl mehr in Umlenk wandnähe, bei höherer Reynoldszahl mehr an der Düseninnenführung konzentriert ist. Dies läßt sich unschwer damit erklären, daß die Geschwindigkeitsgradienten in der Nähe der Düseninnenführung bei Erhöhen der Reynoldszahl durch die Annäherung an eine Potential-

strömung schnell anwachsen. Hieraus folgt, daß bei kleinen Reynoldszahlen dem Einfluß geometrischer Details entlang der Umlenk wand und umgekehrt bei hohen Reynoldszahlen dem Einfluß geometrischer Details entlang der Düseninnenführung auf die reibungsbedingten Verlustprozesse erhöhte Bedeutung beizumessen ist.

Die Analyse der reibungsbedingten Entropieerzeugung in der zweiten Düse des Doppelumlenksystems zeigt zunächst, daß die räumliche Struktur der Entropieerzeugung qualitativ den in der ersten Düse gemessenen Feldern entspricht. Quantitativ jedoch zeigt sich, daß der Anteil der in der äußeren Kanalhälfte erzeugten Entropie weitaus größer als bei allen in der ersten Düse gemessenen Feldern ist. Dies kann man damit erklären, daß das Gas vorbeschleunigt in die zweite Düse eintritt und auf den inneren Stromflächen nur noch vergleichsweise schwach expandiert. Im Gegensatz zur ersten Düse sind deshalb die Bereiche hoher Geschwindigkeit mehr zur Umlenk wand verlagert. Da das Gas beim Eintritt in den Zulauf der zweiten Düse schon beschleunigt ist, haben azimutale Zustandsänderungen auf die Größe der Entropieerzeugung weniger Einfluß als in der ersten Düse.

Die Analyse der auf den Teilchendurchsatz normierten durch Diffusion bedingten Entropieerzeugung zeigt, daß diese im Gegensatz zur reibungsbedingten Entropieerzeugung i.a. über einen weiteren räumlichen Bereich ausgedehnt ist und mehr in der Kanalmitte lokalisiert ist. Eine Vergrößerung der Knudsenzahl der Strömung bringt eine kontinuierliche Abnahme sowohl der durch radiale als auch der durch azimutale Diffusion bedingten Entropieerzeugung mit sich. Bei fest gehaltenem Expansionsverhältnis erhöht sich hierbei der Anteil der durch Diffusion in Strömungsrichtung erzeugten Entropie deutlich, während er bei Verkleinerung des Expansionsverhältnisses sinkt. Im Betriebspunkt mit der höchsten diffusionsbedingten Entropieerzeugung (Feld 2) beträgt deren Anteil an der insgesamt erzeugten Entropie etwa ein Drittel, wovon wiederum die azimutalen Diffusionsströme etwa die Hälfte ausmachen. Stellen großer azimutaler Zustandsänderungen sind i.a. mit einem starken Anwachsen der lokalen durch Diffusion in Strömungsrichtung bedingten Entropieerzeugung verbunden.

Diese Ergebnisse sind mit Ausnahme der Abhängigkeit der durch azimuthale Diffusionsströme bedingten Entropieerzeugung von der Knudsenzahl mit den bereits in Kapitel 3 angestellten Überlegungen voll vereinbar. Sie zeigen, daß die Bedeutung der durch Diffusion bedingten Verluste für die Strömung i.a. nicht vernachlässigbar ist. Insbesondere die durch azimuthale Diffusion bedingten Verluste sind hier zu nennen, da diese Prozesse i.a. direkt zu keinem Entmischungseffekt führen und bei niedrigeren Reynoldszahlen überwiegen. Bei höheren Reynoldszahlen werden diese Beiträge teilweise lokal relativ groß, da hier der abnehmende Einfluß der Verlustprozesse auf die Strömung insgesamt zu teilweise großen lokalen Zustandsänderungen führen kann.

Die Bedeutung der insgesamt durch Diffusion bedingten Verlustprozesse sollte mit zunehmenden Diffusionsgeschwindigkeiten zunehmen, insbesondere also mit steigendem Massenverhältnis der Gemischpartner. Es ist deshalb zu erwarten, daß ihr Einfluß bei Verwendung von Wasserstoff als Zusatzgas noch größer ist als bei Helium.

Wie in Kapitel 3 gezeigt wurde, steigt im Gültigkeitsbereich der Chapman-Enskog-Näherung die durch azimuthale Druckdiffusion bedingte normierte Entropieerzeugung mit zunehmender Knudsenzahl monoton an. In diesem Bereich fällt sie außerdem schwach mit dem Molenbruch der schweren Komponente, wenn dieser zwischen 1 % und 4 % variiert. Im Experiment beobachtet man hingegen eine monotone Abnahme dieser Größe, wenn die Knudsenzahl erhöht und gleichzeitig der Anteil an schwerer Komponente von 4 % auf 1 % herabgesetzt wird. Dieser Sachverhalt kann zum einen damit erklärt werden, daß bei den vorliegenden Knudsenzahlen wie in Kapitel 3 erläutert die azimuthalen Diffusionsgeschwindigkeiten sich den für den Fall molekularer Strömung gültigen Werten nähern und somit unabhängig von der Gemischzusammensetzung werden. Eine Änderung des Anteils an schwerer Komponente macht sich deshalb nur durch den Term $N(1-N)$ bemerkbar, der zu einer linearen Abnahme der Entropieerzeugung bei abnehmendem Molenbruch an schwerer Komponente führt. Zum andern kommen bei zunehmender Knudsenzahl die Reibungseinflüsse stärker zur Geltung und führen zu einem gleichmäßigeren Druckabfall über dem Umlenkwinkel. Schließlich muß noch beachtet werden, daß die Zonen großen azimuthalen

Schlupfes i.a. in Gebieten vorliegen, wo schon verhältnismäßig stark entmischt wurde.

Das Verhältnis von diffusionsbedingter und reibungsbedingter Entropieerzeugung ist bei der zweiten Düse des Doppelumlenksystems wesentlich geringer als in der ersten Düse, wenn man von vergleichbarer Reynoldszahl ausgeht. Die Ursache hierfür liegt in der hohen mittleren Gemischmasse, die zu vergleichsweise kleinen Diffusionsgeschwindigkeiten führt. Die Vorbeschleunigung des in die zweite Düse eintretenden Gases hat außerdem eine verminderte Expansion auf der ersten Umlenkhälfte zur Folge, sodaß in diesem Bereich die relativen azimuthalen Zustandsänderungen im Vergleich zur ersten Düse geringer sind. Hierdurch wird der Azimutalanteil an der insgesamt durch Diffusion erzeugten Entropie verhältnismäßig gering und nimmt erst auf der zweiten Umlenkhälfte größere Werte an, wo das in die leichte Fraktion strömende Gas abgebremst wird.

Literatur

- /1/ E.W.Becker
Separation Nozzle
Top.Appl.Phys. **35** 235-268 (1979).
- /2/ E.W.Becker, W.Bier, W.Ehrfeld, G.Eisenbeiß
Die physikalischen Grundlagen der Uran-235-Anreicherung nach dem
Trenndüsenverfahren. - Die Wirkung des leichten Zusatzgases .
Z. Naturforschung **26a** 1377-1384 (1971).
- /3/ E.W.Becker, K.Bier, W.Bier, R.Schütte, D.Seidel:
Separation of the Isotopes of Uranium by the Separation Nozzle Process.
Angew. Chem. Internat. Edit. **6** 507-518 (1967).
- /4/ E.W.Becker, W.Bier, P.Bley, U.Ehrfeld, W.Ehrfeld, G.Eisenbeiß,
F.-J.Rosenbaum, E.Schmid:
Die physikalischen Grundlagen der Uran-235-Anreicherung nach dem
Trenndüsenverfahren. IV. Trenndüsenystem mit zweifacher Strahlum-
lenkung und trifraktionärer Gasabsaugung.
Z.Naturforsch. **32a** 401-410 (1977).
- /5/ K.Bier, H.Brandstädter, U.Ehrfeld, W.Ehrfeld:
Untersuchung des Strömungsverlaufs von He/Ar- und He/SF₆-Gemischen
in der Trenndüse mit molekular angeströmten Drucksonden.
KfK-Bericht **1440** Karlsruhe (1971).
- /6/ U.Ehrfeld, W.Ehrfeld, E.Schmid:
Untersuchungen mit molekular angeströmten Sonden zum räumlichen
Verlauf der Isotopenentmischung in der Trenndüse bei Rückstau der
schweren Fraktion.
KfK-Bericht **2724** Karlsruhe (1978).
- /7/ W.Berkhahn, W.Ehrfeld, G.Krieg:
Influence of Flowfield Structure on Uranium Isotope Separation in the
Separation Nozzle.
Nuclear Technology **40** 329-340 (1978).
- /8/ W.Schwan:
Untersuchung der Isotopenentmischung in Trenndüsen mit Berück-
sichtigung von Nichtgleichgewichtseffekten.
Dissertation Ruhr-Universität Bochum (1983).

- /9/ G.A.Bird:
Monte-Carlo Simulation in an Engineering Context.
Proc. 12th Int. Symp. Rarefied Gas Dynamics, S.S.Fisher ed.,
American Institute of Aeronautics and Astronautics, New York (1981).
- /10/ G.N.Patterson:
Theory of Free-Molecule, Orifice Type Pressure Probes in Isentropic
and Nonisentropic Flows.
UTIA-Report 41 Toronto (1959).
- /11/ P.C.Hughes:
Theory for the Free-Molecule Impact Probe at an Arbitrary Angle of
Attack.
UTIAS-Report 103 Toronto (1965).
- /12/ U.Ehrfeld, W.Ehrfeld:
Untersuchungen zum Einfluß von Wärmetransportvorgängen auf den Strö-
mungsverlauf und die Entmischung in der Trenndüse mit molekular ange-
strömten Druck- und Temperatursonden.
KfK-Bericht 1634 Karlsruhe (1972).
- /13/ S.Dürr:
Theoretische Untersuchung einer viskosen, kompressiblen Strömung in
einer gekrümmten Düse.
KfK-Bericht 1630 Karlsruhe (1972).
- /14/ E.W.Becker, P.Bley, U.Ehrfeld, W.Ehrfeld:
Rarefied Gas Dynamics of the Separation Nozzle -
An Aerodynamic Device for Large-Scale Enrichment of Uranium.
Proc.10th Int. Symp. Rarefied Gas Dynamics, J.L.Potter ed.,
Vol 1, 3-16, American Institute of Aeronautics and Astronautics,
New York (1977).
- /15/ P.Bley, W.Ehrfeld:
Molecular Dynamics of Disparate Mass Mixtures in Opposed Jets.
Proc. 12th Int. Symp. Rarefied Gas Dynamics, S.S. Fisher ed.,
American Institute of Aeronautics and Astronautics, New York (1981).
- /16/ W.Ehrfeld:
Die physikalischen Grundlagen des Trenndüsenverfahrens zur
Anreicherung von Uran-235.
Habilitationsschrift Karlsruhe 1982.

- /17/ H.M.Mott-Smith:
The Solution of the Boltzmann Equation for a Shock Wave.
Phys.Rev. **82** 885-892 (1951).
- /18/ C.J.Goebel, S.M.Harris, E.A.Johnson:
Two-temperature disparate mass gas mixtures: A thirteen moment
description.
Phys. Fluids **19** 627-635 (1976).
- /19/ E.Goldman, L.Sirovich:
Equations for Gas Mixtures.
Phys.Fluids **10** 1928-1940 (1967).
- /20/ E.A.Johnson:
Energy and momentum equations for disparate-mass binary gases.
Phys.Fluids **16** 45-49 (1973).
- /21/ B.B.Hamel:
Two-Fluid Hydrodynamic Equations for a Neutral, Disparate-Mass,
Binary Mixture.
Phys.Fluids **9** 12-22 (1966).
- /22/ A.U.Chatwani, M.Fiebig, N.K.Mitra, W.Ehrfeld:
Nonequilibrium Effects and Their Modelling in Separation Nozzles.
Proc. 12th Int. Symp. Rarefied Gas Dynamics, S.S.Fisher ed.,
American Institute of Aeronautics and Astronautics, New York (1981).
- /23/ L.Waldmann:
Transporterscheinungen in Gasen von mittlerem Druck.
Handbuch der Physik, **Band 12**, S.Flügge ed.
Springer-Verlag Berlin (1958).
- /24/ K.E.Grew, T.L.Ibbs:
Thermodiffusion of Gases.
Cambridge Univ.Pr. (1952).
- /25/ P.Kirch, R.Schütte:
Messungen des Thermodiffusionsfaktors und Bestimmung des mole-
kularen Wechselwirkungspotentials von gasförmigem Uranhexafluorid.
Z.Naturforsch. **22a** 1532-1537 (1967).

- /26/ K.Cohen:
The Theory of Isotope Separation as Applied to the Large-Scale
Production of U-235.
Mc. Graw-Hill, New-York (1951).
- /27/ G.D.Smith:
Numerical Solution of Partial Differential Equations
Oxford University Press
London (1965).
- /28/ E.Isaacson, H.B.Keller:
Analysis of Numerical Methods
J.Wiley, New York und London (1966)
- /29/ K.Oswatitsch:
Gasdynamik
Springer-Verlag, Wien (1952).
- /30/ H.B.Callen:
Thermodynamics
J.Wiley, New York und London (1960).
- /31/ S.R.de Groot, P.Mazur:
Grundlagen der Thermodynamik irreversibler Prozesse
BI-Hochschultaschenbuch, Mannheim (1969).
- /32/ F.R.Block:
Die Multifluidtheorie in der Thermodynamik irreversibler Prozesse.
Dissertation, TH Aachen (1970).
- /33/ L.D.Landau, E.M.Lifschitz:
Statistical Physics
Pergamon Press, London-Paris (1958).
- /34/ J.O.Hirschfelder, C.F.Curtiss, R.B.Bird:
Molecular Theory of Gases and Liquids
J.Wiley, New York (1954).
- /35/ H.Schlichting:
Grenzschicht-Theorie
G.Braun, Karlsruhe (1951).

- /36/ W.L.Taylor, R.W.York, P.T.Pickett:
Velocity Dependence of Low-Energy Neon-Argon Total Cross Sections
Proc. 12th Int. Symp. Rarefied Gas Dynamics, S.S.Fisher ed.,
American Institute of Aeronautics and Astronautics, New York (1981).
- /37/ P.Bley,U.Ehrfeld,W.Ehrfeld
Enhancement of Nozzle Discharge Coefficients in Rarefied Flows of
Disparate Mass Mixtures
11th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics,
Charlottesville,Virginia (1980).
- /38/ S.Chapman,T.G.Cowling:
The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, pp. 87-96
Cambridge, Univ.Press (1970).
- /39/ F.Van der Valk:
Thermal Diffusion in Ternary Mixtures
Physica 29 417-436 (1963).
- /40/ G.A.Bird:
Molecular Gas Dynamics
Oxford University Press, London (1976).

Verzeichnis der durchgängig benutzten Symbole und Indizes

Symbole:

D_i	:	Isotopendiffusionskoeffizient im ternären Gemisch
D_{ik}	:	ternärer Diffusionskoeffizient
$D(i,k)$:	binärer Diffusionskoeffizient der Komponenten (i,k)
D_u	:	binärer Diffusionskoeffizient zwischen schwerer Komponente und Zusatzgas
f	:	Abschälerweite
I	:	Teilchenstrom
\vec{j}_d	:	Diffusionsstromdichte
\vec{j}_k	:	Teilchenstromdichte der Komponente k
m_k	:	Molekulargewicht der Komponente k
m_l	:	Molekulargewicht des leichten Isotops
m_s	:	Molekulargewicht des schweren Isotops
m_u	:	Molekulargewicht der schweren Komponente
\bar{m}	:	mittleres Molekulargewicht des Gemischs
Ma	:	Machzahl
n	:	Konzentration des leichten Isotops im Isotopengemisch
n_k	:	Konzentration der Komponente k im Gemisch
N	:	Konzentration der schweren Komponente im Gemisch
N_o	:	mittlere Ausgangskonzentration der schweren Komponente vor der Düse
N_{12}	:	Stoßfrequenz aller Teilchen der Sorte 1 mit Teilchen der Sorte 2
p	:	statischer Druck des Gemischs
p_o	:	Düsenvordruck
p_l	:	Absaugdruck der leichten Fraktion
Re	:	Reynoldszahl
S	:	Geschwindigkeitsverhältnis
t	:	Zeit
T	:	absolute Translationstemperatur
\vec{v}_k	:	Strömungsgeschwindigkeit der Komponente k
\vec{w}_k	:	Diffusionsgeschwindigkeit der Komponente k im Teilchenbild

δU	:	Werterzeugung der Isotopentrennung bei bifraktionärer Aufteilung
δU^*	:	lokale Werterzeugung der Isotopentrennung
ε_A	:	elementarer Trenneffekt der Isotopentrennung
η	:	dynamische Zähigkeit des Gemischs auch: verallgemeinerte Radialkoordinate
ϑ	:	Abschälverhältnis
v	:	Gesamtteilchendichte
v_k	:	Teilchendichte der Komponente k
σ	:	lokale Entropieerzeugung
σ_D	:	diffusionsbedingte lokale Entropieerzeugung
$\sigma_{D,n}^*$:	mittlere diffusionsbedingte Entropieerzeugung pro Umlenkwegelement, normiert auf den Gesamtteilchendurchsatz
$\sigma_{D,\parallel}$:	durch azimutale Diffusion bedingte Entropieerzeugung
σ_R	:	reibungsbedingte Entropieerzeugung
$\sigma_{R,n}^*$:	mittlere reibungsbedingte Entropieerzeugung pro Umlenkwegelement, normiert auf den Gesamtteilchendurchsatz
$\sigma_{R,n,a}^*$:	mittlere reibungsbedingte Entropieerzeugung in der äußeren Kanalhälfte pro Umlenkweg, normiert auf den Gesamtteilchendurchsatz
$\sigma_{R,n,i}^*$:	mittlere reibungsbedingte Entropieerzeugung in der inneren Kanalhälfte pro Umlenkweg, normiert auf den Gesamtteilchendurchsatz
ξ	:	verallgemeinerte Umlenkkoordinate

Indizes:

l	:	leichtes Isotop
s	:	schweres Isotop
u	:	schwere Gemischkomponente
z	:	Zusatzgas
x	:	x-Komponente eines kartesischen Koordinatensystems
y	:	y-Komponente eines kartesischen Koordinatensystems
He	:	Helium
C7	:	C_7F_{14}
gem	:	Gemisch

Anhang 1: Zusammenhang zwischen lokaler Wertzerzeugung im Trennelement und dem durch N-fractionäre Aufteilung erzeugten Wert

Im folgenden wird gezeigt, daß das räumliche Integral über die in Kapitel 2 eingeführte lokale Wertzerzeugung den pro Zeiteinheit im Trennelement erzeugten Wert darstellt, der bei N-facher Aufteilung des UF_6 -Stromes ($N \rightarrow \infty$) maximal ausgenutzt werden kann. Hierzu wird zunächst für den Fall der bifractionären Aufteilung der Wertzuwachs bestimmt, der sich entlang eines Wegelementes dx der Strömung ergibt. Es wird gezeigt, daß sich aus einer Betrachtung der Wertstrombilanz und aus einer Betrachtung der Trenneffekte jeweils die gleichen Werte für den Wertzuwachs ergeben, und es wird auf die bereits für den bifractionären Fall vorhandene formale Ähnlichkeit des resultierenden Ausdruckes mit demjenigen der lokalen Wertzerzeugung hingewiesen. Anschließend wird der trifractionäre Fall behandelt und das Ergebnis auf den N-fractionären Fall verallgemeinert.

A1.1: Wertzerzeugung bei bifractionärer Aufteilung

Bei bifractionärer Aufteilung liegt die in Abbildung A1.1 skizzierte Situation vor.

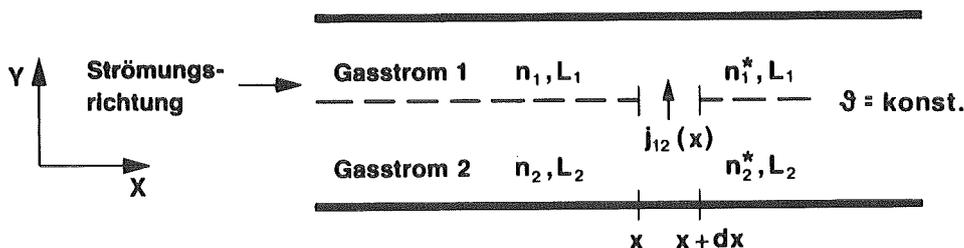


Abb. A1.1: Schematische Skizze der bifractionären Aufteilung im Kanal

An der Stelle x der Strömung sind die mittleren Molbruchanteile an leichtem Isotop in den beiden Fraktionen, die durch eine UF_6 -Molstromfläche getrennt sind, n_1 und n_2 . Lokale Zustände an der Molstromfläche werden im folgenden durch den Index 12 gekennzeichnet. Zwischen x und $x+dx$ werde pro Zeiteinheit die Menge $j_{12} dx$ an leichtem Isotop über die Molstromfläche vom Gasstrom 1 in den Gasstrom 2

transportiert; entsprechend der Definition einer Molstromfläche wird gleichzeitig eine gleich große Menge an schwerem Isotop in umgekehrter Richtung verschoben. Der hierbei erzeugte Wert wird im folgenden ermittelt.

A1.1.1 Wertzuwachs, berechnet aus den Wertströmen

Zur Berechnung des Wertzuwachses aus den Wertströmen wird von der Definition des Wertstromes ausgegangen:

$$U = L_1 V(n_1) + L_2 V(n_2) \quad (\text{A1-1})$$

wobei U den gesamten Wertstrom, L_1 bzw. L_2 den Urandurchsatz im oberen bzw. unteren Gasstrom und V die Wertfunktion darstellen. An der Stelle $x+dx$ ergeben sich die Molenbrüche n_1^* , n_2^* in den beiden Gasströmen, sodaß für den **Wertzuwachs** $d(\delta U)$ zwischen x und $x+dx$ folgt:

$$d(\delta U) = L_1 [V(n_1^*) - V(n_1)] + L_2 [V(n_2^*) - V(n_2)] \quad (\text{A1-2})$$

Durch die Diffusion an leichtem Isotop über die Strecke dx der Molstromfläche ändert sich der jeweilige Durchsatz an leichtem Isotop in den beiden Teilströmen, und es gilt z.B. im Teilstrom 1:

$$L_{1,1}(x+dx) = L_{1,1}(x) + j_{12} dx \quad (\text{A1-3})$$

Wegen $n_1 = L_{1,1}/L_1$ (A1-4)

und $L_1 = \text{konst.}$ (Molstromfläche)

gilt also:

$$\begin{aligned} n_1^* &= L_{1,1}(x+dx) / L_1 \\ &= L_{1,1}(x) / L_1 + j_{12} dx / L_1 \\ &= n_1 + j_{12} dx / L_1 \end{aligned} \quad (\text{A1-5})$$

Entsprechend folgt für Teilstrom 2:

$$n_2^* = n_2 - j_{12} dx / L_2$$

Mit
$$V(n_1^*) = V(n_1) + \left. \frac{dV}{dn} \right|_{n_1} (n_1^* - n_1)$$

erhält man deshalb für die Wertfunktion:

$$\begin{aligned} V(n_1^*) &= V(n_1) + V'(n_1) (j_{12} / L_1) dx \\ V(n_2^*) &= V(n_2) - V'(n_2) (j_{12} / L_2) dx \end{aligned} \tag{A1-6}$$

Somit folgt für den **Wertzuwachs** nach (A1-2):

$$\begin{aligned} d(\delta U) &= L_1 [V(n_1) - V(n_1) + V'(n_1) (j_{12} / L_1) dx] \\ &\quad + L_2 [V(n_2) - V(n_2) - V'(n_2) (j_{12} / L_2) dx] \\ &= [V'(n_1) - V'(n_2)] j_{12} dx \end{aligned} \tag{A1-7}$$

Da n_1 und n_2 nur wenig voneinander abweichen, wird $V'(n)$ entwickelt um den an der Molstromfläche vorliegenden Molenbruch der Isotope n_{12} :

$$\begin{aligned} d(\delta U) &= j_{12} dx [V'(n_{12}) + V''(n_{12}) (n_1 - n_{12}) \\ &\quad - V'(n_{12}) - V''(n_{12}) (n_2 - n_{12})] \\ &= j_{12} dx V''(n_{12}) (n_1 - n_2) \end{aligned} \tag{A1-8}$$

Auf das Wegelement dx bezogen wird hieraus:

$$d(\delta U)/dx = j_{12} V''(n_{12}) (n_1 - n_2) \quad (A1-9)$$

In Worten besagt (A1-9), daß die Zunahme des Wertstromes pro Wegelement gleich ist dem Produkt aus der lokal senkrecht zur Molstromfläche vorliegenden Diffusionsstromdichte j_{12} des leichten Isotops mit der Differenz des mittleren Molenbruchs des leichten Isotops in den beiden Teilströmen sowie der zweiten Ableitung der Wertfunktion an der Stelle n_{12} .

Betrachtet man stark vereinfachend eine Strömung, bei der über die gesamte Breite $2h$ des Strömungsquerschnittes konstante Diffusionsstromdichten vorliegen und bei der die Isotopenzusammensetzung linear über den Querschnitt variiert, so wird aus (A1-9):

$$\begin{aligned} d(\delta U)/dx &= j_{12} [(n_1 - n_2) / h] V''(n_{12}) h \\ &= j_{12\perp} \nabla_{\perp} n V''(n_{12}) h \\ &= \frac{1}{2} \int_{-h}^{+h} j_{12\perp} \nabla_{\perp} n V''(n_{12}) dy \end{aligned} \quad (A1-10)$$

In diesem stark vereinfachten Fall läßt sich also die Zunahme des Wertstromes pro Wegelement gerade als die Hälfte des Integrales über die in Kapitel 2 eingeführte lokale Wertzeugung, gebildet über den Querschnitt, auffassen.

A1.1.2 Wertzuwachs, berechnet aus dem Zusammenhang von Wertstrom und Trenneffekt bei bifraktionärer Aufteilung

Bei bifraktionärer Aufteilung läßt sich für die Trennleistung im Trennelement bis zum Ort x schreiben:

$$\delta U = \frac{1}{2} (L_1 + L_2) \theta (1 - \theta) \varepsilon_A^2 \quad (\text{A1-11})$$

, wobei δU die Trennleistung bis zur Stelle x , θ das UF_6 -Abschälverhältnis und ε_A den Elementareffekt der Isotopentrennung bedeuten.

Entsprechend der Vorgehensweise von A1.1.1 betrachtet man nun die Wertänderung, die sich entlang des infinitesimalen Wegelementes dx ergibt:

$$\begin{aligned} d(\delta U) &= \frac{dU}{dx} dx \\ &= \frac{1}{2} (L_1 + L_2) \theta (1 - \theta) 2\varepsilon_A \frac{d\varepsilon_A}{dx} dx \end{aligned} \quad (\text{A1-12})$$

Für den Trenneffekt gilt die Definition (n ist der mittlere Molenbruch)

$$\varepsilon_A = (n_1 - n_2) / (n(1 - n)) \quad (\text{A1-13})$$

Die Änderung des Trenneffektes erhält man aus (A1-13) zu

$$\begin{aligned}d\varepsilon_A &= [1 / (n(1 - n))] d(n_1 - n_2) \\&= [1 / (n(1 - n))] (j_{12}dx/L_1 + j_{12}dx/L_2) \quad (A1-14) \\&= [1 / (n(1 - n))] [1 / (\theta(1-\theta))] [1 / (L_1 + L_2)] j_{12}dx\end{aligned}$$

hierbei wurde (A1-5) benutzt.

Setzt man (A1-13) und (A1-14) in (A1-12) ein, so folgt:

$$\begin{aligned}d(\delta U)/dx &= j_{12} (n_1 - n_2) [1 / (n(1 - n))^2] \\&= j_{12} (n_1 - n_2) V''(n)\end{aligned} \quad (A1-15)$$

Dieses Ergebnis zeigt, daß die Betrachtung über die Trenneffekte **zum gleichen Resultat führt** wie die Ableitung anhand der individuellen Wertströme nach A1.1.1, wenn man berücksichtigt, daß die jeweiligen zweiten Ableitungen der Wertfunktionen in (A1-15) bzw. (A1-9) im Rahmen der in (A1-8) benutzten linearen Entwicklung der ersten Ableitung der Wertfunktion miteinander übereinstimmen.

Gemäß (A1-5) gilt diesmal

$$\begin{aligned}n_1^* &= n_1 + (j_{12}/L_1) dx \\n_2^* &= n_2 + [(j_{23} - j_{12})/L_2] dx \\n_3^* &= n_3 - (j_{23}/L_3) dx\end{aligned}\tag{A1-18}$$

Aus (A1-17) folgt deshalb:

$$\begin{aligned}d(\delta U) &= [V'(n_1) - V'(n_2)] j_{12} dx \\&+ [V'(n_2) - V'(n_3)] j_{23} dx\end{aligned}\tag{A1-19}$$

Die ersten Ableitungen der Wertfunktion werden diesmal im ersten Ausdruck von (A1-19) um n_{12} und im zweiten Ausdruck um n_{23} entwickelt, was ergibt:

$$\begin{aligned}d(\delta U) &= [j_{12} V''(n_{12}) (n_1 - n_2) \\&+ j_{23} V''(n_{23}) (n_2 - n_3)] dx\end{aligned}\tag{A1-20}$$

Für die Zunahme des Wertstromes pro Wegelement gilt also:

$$\begin{aligned}d(\delta U)/dx &= j_{12} V''(n_{12}) (n_1 - n_2) \\&+ j_{23} V''(n_{23}) (n_2 - n_3)\end{aligned}\tag{A1-21}$$

Dieses Ergebnis hat die gleiche Struktur wie (A1-9) für den Fall der bifraktionären Aufteilung. Der wesentliche Unterschied zu (A1-9) besteht darin, daß es sich in (A1-21) um eine Summe aus zwei Termen handelt, wobei jeder für sich die **lokalen Vorgänge an je einer Molstromfläche** beschreibt. Entsprechend der feineren Unterteilung des Querschnittes erhalten somit die auftretenden Differenzen der mittleren Molenbrüche an leichtem Isotop verglichen mit dem bifraktionären Fall schon mehr den Charakter von **lokalen Gradienten**.

Das Ergebnis (A1-21) läßt sich natürlich auch durch eine Betrachtung der Trenneffekte für den Fall der trifraktionären Aufteilung analog der Vorgehensweise in A1.1.2 ableiten. Hierauf wird jedoch verzichtet.

A1.3 N-fache Aufteilung

Bei Aufteilung in N Fraktionen läßt sich aus (A1-9) und (A1-21) direkt verallgemeinern:

$$d(\delta U)/dx = \sum_{i=1}^{N-1} j_{i,i+1} (n_i - n_{i+1}) V''(n_{i,i+1}) \quad (A1-22)$$

Führt man die lokalen Gradienten des Molenbruchs an leichtem Isotop ein und vollzieht den Grenzübergang für $N \rightarrow \infty$, so folgt:

$$\begin{aligned} d(\delta U)/dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} j_{i,i+1} [(n_i - n_{i+1}) / \Delta y] V''(n_{i,i+1}) \Delta y \\ &= \int_{-h}^{+h} j_{d,\perp} \nabla_{\perp} n V''(n) dy \quad (A1-23) \\ &= \int_{-h}^{+h} \delta U^*(r) dy \end{aligned}$$

Hierdurch wird die lokale Werteverzeugung $\delta U^*(r)$ im Volumenelement $dx dy$ definiert, die in Kapitel 2 eingeführt wurde.

Zum Ergebnis (A1-23) gelangt man auch durch die Betrachtung der Trenneffekte analog A1.1.2. Hierzu geht man diesmal von folgender für den N-fraktionären Fall gültigen Beziehung aus

$$\delta U = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} L_i \varepsilon_i^2 \right) \quad (\text{A1-24})$$

wobei ε_i diesmal den Anreicherungseffekt der Fraktion i bezogen auf den Gesamtstrom darstellt:

$$\varepsilon_i = (n_i - n) / [n(1 - n_i)] \quad (\text{A1-25})$$

Mit (A1-24) und (A1-25) führt eine A1.1.2 entsprechende Rechnung zu

$$d(\delta U)/dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} j_{i,i+1} [(n_i - n_{i+1}) / \Delta y] V''(n) \Delta y \quad (\text{A1-26})$$

Dieses Ergebnis stimmt mit (A1-23) nahezu überein. Es unterscheidet sich gegenüber (A1-23) lediglich darin, daß als Argument der zweiten Ableitung der Wertfunktion diesmal (wie schon in A1.1.2) der mittlere Molenbruch n anstelle des lokalen Molenbruchs $n_{i,i+1}$ auftritt. Dieser Sachverhalt erklärt sich daraus, daß (A1-24) lediglich als Näherung für den Fall zu betrachten ist, daß die relative Änderung des Molenbruchs über den gesamten zu betrachtenden Gasstrom klein ist /26/. Für diesen Fall, der in der Trenndüse i. a. in guter Näherung gilt, stimmen (A1-23) und (A1-26) überein. Gilt dieser Fall nicht, so ist (A1-23) zu benutzen.

Der Unterschied zwischen dem räumlichen Integral über die nach (A1-23) definierte lokale Wertzeugung $\delta U^*(\vec{r})$ und dem bei bifraktionärer Aufteilung erzeugten Wert hängt im Einzelfall von vielen Parametern ab, so z.B. von dem räumlichen Verlauf der Stromdichte der schweren Komponente oder von demjenigen des Molenbruchs an leichtem Isotop. Aus der Betrachtung einfacher Modellfälle läßt sich jedoch erkennen, daß die Wertzeugung bei vollständiger Ausnutzung des im Trennelement erzeugten Wertes im **günstigsten** Fall etwa das

anderthalbfache von derjenigen beträgt, die man bei bifraktionärer Aufteilung im Trennelement erhält. Dieser verhältnismäßig geringe Unterschied zeigt deutlich, daß auch bei bifraktionärer Aufteilung nicht nur die Vorgänge innerhalb einer schmalen Schicht um die betrachtete Molstromfläche alleine maßgebend sind, sondern daß vielmehr der Beitrag der räumlich entfernt liegenden Bereiche von gleichgewichtiger Bedeutung ist. Diese Bedeutung der räumlich entfernt liegenden Bereiche für die Trennung entlang einer Molstromfläche liegt in der lokalen Fähigkeit des Feldes, eine über die betrachtete Molstromfläche transportierte Menge an Isotop weiter zu transportieren, um den Aufbau hoher lokaler Konzentrationsgradienten und damit hoher rückmischer Diffusionsströme zu vermeiden. Diese räumlich verteilte lokale Trennfähigkeit des Feldes wird durch die lokale Weiterzeugung nach (A1-23), nicht aber durch die auf bifraktionäre Aufteilung bezogenen Trenneffekte, beschrieben.

Anhang 2: Transformation der die Isotopenzusammensetzung beschreibenden DGL. in Zylinderkoordinaten und ins ξ - η -System

A2.1 DGL. in kartesischen Koordinaten:

Die zu lösende DGL. (10) lautet in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{\nabla}(A_1 \vec{\nabla} n) + (\vec{K}_1 + \vec{K}_2) \cdot \vec{\nabla} n + A_2 \cdot n = 0$$

mit

$$A_1 = - \nu_u D_i$$

$$\vec{K}_1 = \vec{j}_u$$

$$\vec{K}_2 = - \nu_u D_i \frac{m_s - m_l}{\bar{m}} \vec{\nabla} l_{np}$$

$$A_2 = \vec{\nabla} \vec{K}_2$$

} (A2.1)

Differenziert man den ersten Term der rechten Seite aus, so folgt:

$$[A_1] \cdot \Delta n + [\vec{K}_3] \cdot \vec{\nabla} n + [A_2] \cdot n = 0$$

mit $\vec{K}_3 = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{\nabla} A_1$

} (A2.2)

A2.2 Transformation in ebene Zylinderkoordinaten

Mit den üblichen Transformationsvorschriften

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

} (A2.3)

ergibt sich für die Differentialoperatoren

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \\ \vec{\nabla} \vec{\nabla} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{\nabla} \\ \vec{\nabla} \vec{\nabla} \end{aligned}} \right\} \text{(A2.4)}$$

und also für die einzelnen Terme der DGl. (A2.2):

$$\begin{aligned} [A_1] \Delta n &= [A_1] \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] n \\ [\vec{K}_3] \cdot \vec{\nabla} n &= \left[K_{3r} \frac{\partial}{\partial r} + K_{3\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] n \\ [A_2] \cdot n &= [A_2] \cdot n \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} [A_1] \Delta n \\ [\vec{K}_3] \cdot \vec{\nabla} n \\ [A_2] \cdot n \end{aligned}} \right\} \text{(A2.5)}$$

Somit gilt in ebenen Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} [A_1] \left\{ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + \left[K_{3r} \frac{\partial}{\partial r} + K_{3\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \right. \\ \left. + [A_2] \right\} n = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} [A_1] \left\{ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + \left[K_{3r} \frac{\partial}{\partial r} + K_{3\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \right. \\ \left. + [A_2] \right\} n = 0 \end{aligned}} \right\} \text{(A2.6)}$$

wobei diesmal A_2 aus

$$A_2 = \vec{\nabla} \vec{K}_2 = \frac{1}{r} K_{2r} + \frac{\partial K_{2r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial K_{2\phi}}{\partial \phi} \quad \left. \vphantom{A_2 = \vec{\nabla} \vec{K}_2} \right\} \text{(A2.7)}$$

zu ermitteln ist.

A2.3 Transformation ins ξ - η -System

Nachfolgend wird die in kartesischen und in Zylinderkoordinaten gegebene DGl. (Gl.(A2.2) bzw. (A2.6) auf ein Rechteckgebiet abgebildet. Die Koordinaten des transformierten Systems heißen ξ und η und durchlaufen jeweils den Wertebereich $[0,1]$.

Es gilt: $\eta = 0$: Innenwand

$\eta = 1$: Außenwand

$\xi = 0$: Eingangsquerschnitt des Segments

$\xi = 1$: Endquerschnitt des Segments

Da die zu wählende Transformation unabhängig vom zugrundegelegten Koordinatentyp sein wird (kartesisch oder zylindrisch), wird im folgenden für die azimutale Koordinate des nicht transformierten Systems u (bisher x oder ϕ), für die Radialkoordinate v (bisher y oder r) gesetzt.

Als Abbildungsvorschrift wird gewählt:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{u}{u_0} \\ \eta &= \frac{v - v_i}{v_a - v_i} \end{aligned} \right\} \quad (A2.8)$$

Die Kanalwände werden beschrieben durch:

$$\left. \begin{aligned} v_a &= a_a + b_a \cdot u \\ v_i &= a_i + b_i \cdot u \\ a_i, a_a, b_i, b_a &= \text{konst.} \end{aligned} \right\} \quad (A2.9)$$

Es folgt für die Differentialoperatoren:

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{u_0} \frac{\partial}{\partial \xi} + g(\xi)f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = g(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} &= \frac{1}{u_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2(b_i - b_a)g(\xi)^2 f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &+ \frac{2g(\xi)f(\eta)}{u_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + g(\xi)^2 f(\eta)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} = g(\xi)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

(A2.10)

wobei

$$g(\xi) = \frac{1}{v_a(\xi) - v_i(\xi)}$$

$$f(\eta) = [\eta \cdot (b_i - b_a) - b_i]$$

(A2.11)

Hiermit erhält man für die

- transformierte DGL. in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 & A_1 \cdot \left[\frac{1}{u_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2g(\xi)f(\eta)}{u_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + 2g(\xi)^2 f(\eta) (b_i - b_a) \frac{\partial}{\partial \eta} \right. \\
 & \left. + g(\xi)^2 (1 + f(\eta)^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] n \\
 & + K_{3x} \cdot \left[\frac{1}{u_0} \frac{\partial}{\partial \xi} + g(\xi)f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] n \\
 & + K_{3y} \cdot \left[g(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] n + A_2 \cdot n = 0
 \end{aligned} \tag{A2.12}$$

- und für die transformierte DGL. in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 & A_1 \cdot \left\{ \left[\frac{1}{r} g(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta} + g(\xi)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] n + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{u_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2g(\xi)f(\eta)}{u_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + 2g(\xi)^2 f(\eta) \cdot (b_i - b_a) \frac{\partial}{\partial \eta} \right. \right. \\
 & \left. \left. + g(\xi)^2 f(\eta)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] n \right\} \\
 & + K_{3\phi} \cdot \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{u_0} \frac{\partial}{\partial \xi} + g(\xi)f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] n \right\} \\
 & + K_{3r} \cdot \left\{ g(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta} n \right\} + A_2 \cdot n = 0
 \end{aligned} \tag{A2.13}$$

Hierbei ist r identisch mit der Radiuskoordinate des Zylinder-
systems und ergibt sich zu:

$$r = \left[\eta \cdot ((a_a - a_i) + (b_a - b_i) \cdot u_0 \cdot \xi + a_i + b_i \cdot u_0 \cdot \xi) \right] \tag{A2.14}$$

Anhang 3: Transformation des reibungsbedingten Anteils der Entropieerzeugung in ebene Zylinderkoordination

Die Abbildungsvorschrift für ebene Zylinderkoordinaten lautet:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.1})$$

Hieraus folgt für die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -v_\phi \sin \phi + v_r \cos \phi \\ v_y &= v_\phi \cos \phi + v_r \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.2})$$

und die Differentialoperatoren:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= -\frac{1}{r} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{r} \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.3})$$

Wendet man die Differentialoperatoren (A3.3) auf die Geschwindigkeitskomponenten (A3.2) an und setzt in die in der Entropieerzeugung auftretenden Ausdrücke ein, so ergibt sich nach umfangreicher Zwischenrechnung:

$$\left. \begin{aligned} \phi_\eta &= \frac{\eta}{T} \cdot \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{v_r}{r} \right]^2 \right] \right. \\ &\quad + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right]^2 \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{v_r}{r} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.4})$$